

$N$  w czasie  $dt$ . Ilość ruchu końcowa  $= 0$ , ilość ruchu początkowa  $= \frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \beta$ .

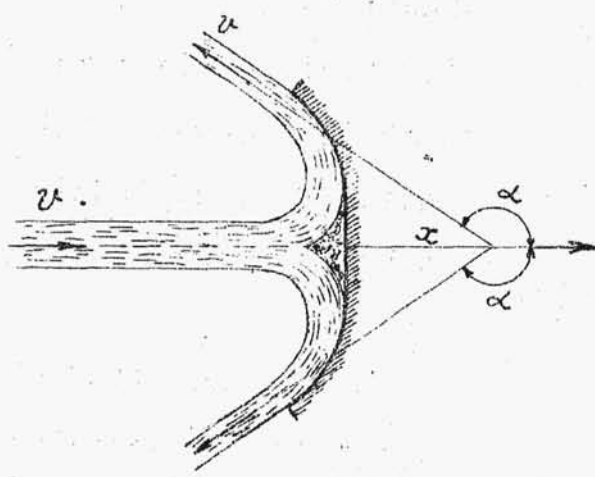
Zmiana ilości ruchu  $= -\frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \beta$ . Jeśli parcie strumienia na płaszczyznę w kierunku  $N$  oznaczmy przez  $P_n$ , wówczas siła, działająca od płaszczyzny na strumień  $= -P_n$ . Popęd tej siły  $= -P_n \cdot dt$ , wówczas:

$$-\frac{Q \cdot dt \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \beta = -P_n \cdot dt, \text{ a stąd parcie}$$

strumienia

$P_n = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot v \cdot \cos \beta = \frac{Q \cdot r}{g} \cdot v \cdot \sin \alpha$ . Parcie to, jak widzimy, nie zależy od tego, w jaki sposób strumień został rozczepiony przez płaszczyznę  $AB$ .

295. Do poprzedniego zagadnienia mamy podobne



rys. 190

należ:

Należy znaleźć parcie strumienia na powierzchni obrotowej, wzdłuż której osi wpada na nią strumień o wydatku  $Q$  i prędkości  $v$ . Niech oś powierzchni będzie pozioma.

Ostatnie części strumienia spływają z powierzchni obrotowej z prędkością  $v$ , tworzącą kąt  $\alpha$  z dodatnią osią  $X$ , skierowaną wzdłuż osi powierzchni. Strumień rozdziela się symetrycznie o klin utworzony z wirów. Zamiast klina, utworzonego z cząstek cieczy, można sobie wyobrazić wykonaną powierzchnię z wystającą częścią w taki sposób, aby ciecz od razu się o nią rozdzielała.

Znajdźmy parcie  $P_x$  strumienia na powierzchnię. Ilość ruchu końcowa:  $\frac{Q}{g} \frac{dt}{dt} r \cdot v \cdot \cos \alpha$ ; ilość ruchu początkowa:  $\frac{Q}{g} \frac{dt}{dt} r \cdot v$ .

Zmiana ilości ruchu =  $\frac{Q}{g} \frac{dt}{dt} r \cdot (v \cos \alpha - v)$ .

Popęd siły  $(-P_x)$ , działającej na strumień ze strony powierzchni na ciecz =  $-P_x \cdot dt$ . Otrzymujemy zatem równanie:

$$\frac{Q}{g} \frac{dt}{dt} r \cdot v (\cos \alpha - 1) = -P_x \cdot dt \quad ; \text{ stąd}$$

$$P_x = \frac{Q}{g} r v (1 - \cos \alpha).$$

Parcie w kierunku osi prostopadłej do  $X$  jest = 0.

Kiedy  $\alpha = 90^\circ$ , wówczas  $P_{x(\alpha=90^\circ)} = \frac{Q}{g} r v$

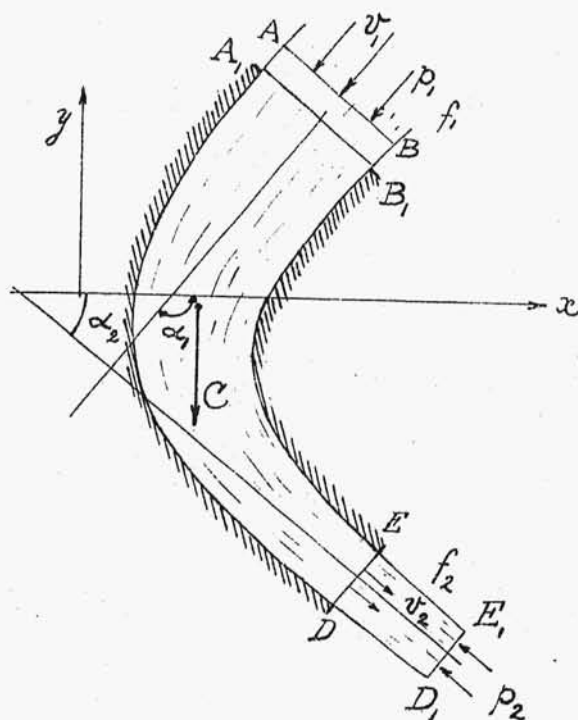
"  $\alpha = 180^\circ$ , wówczas  $P_{x(\alpha=180^\circ)} = 2 \frac{Q}{g} r v$

296. Powierzchnie, poprzednio rozpatrywane, mogą być rozważane jako będące w ruchu, zupełnie tak samo, jak to widzieliśmy w § 287.

Na miejscu też będzie znajdowanie mocy, wykonywanej przez strumień, oraz określanie warunków maximum mocy.

297. Po zaznajomieniu się ze sposobem postępowania przy obliczeniu parcia strumienia na powierzchnie krzywe i płaskie, łatwo sobie poradzimy z zagadnieniem, które polegać będzie na znalezieniu parcia wody na rurę wygiętą o zmiennym przekroju, przez którą płynie strumień z prędkością wlotową  $U_1$ .

Niech to będzie rura, jak na rysunku Nr. 191. Na wlocie niech będzie prędkość  $U_1$ , ciśnienie  $p_1$ , przekrój  $f_1$ , kąt, który tworzy prędkość  $U_1$  z dodatnią osią  $x$ , niech będzie  $\alpha_1$ . Odpowiednie wielkości przy wylocie niech będą:  $U_2$ ,  $f_2$ ,  $p_2$ ,  $\alpha_2$ . Wreszcie, niech ciężar wody, zawartej w rurze, będzie  $C$ . Obieramy osi  $x$  i  $y$  i ich dodatnie kierunki; znajdziemy parcie  $P$  strumienia na rurę  $ABDE$ , znalazłszy składowe  $P_x$  i  $P_y$ . Rozpatrzmy ruch wody w rurze, stosując twierdzenie



rys. 191

o zmianie ilości ruchu w ciągu czasu  $dt$ , kiedy ciecz  $ABDE$  przesunie się do

$A_1B_1D_1E_1$ .

Rozumując, jak w poprzednich przykładach, otrzymamy że zmiana ilości ruchu w kierunku osi  $x$  będzie się równać:

Ilości ruchu cieczy  $DEDE_1$ , mniej ilość ruchu cieczy  $ABAB_1$ , Masa cieczy  $DEDE_1 =$  masa cieczy  $ABAB_1 = f_1 \cdot v_1 \cdot dt \cdot \frac{x}{g} = Q \cdot dt \cdot \frac{x}{g}$ ,

jeśli przez  $Q$  oznaczymy wydatek strumienia.

Rzut prędkości  $v_2$  na oś  $x = v_2 \cdot \cos \alpha_2$

" "  $v_1$  na oś  $x = v_1 \cdot \cos \alpha_1$ ,

Wówczas zmiana ilości ruchu w kierunku osi  $x =$

$$= Q \cdot dt \cdot \frac{x}{g} (v_2 \cdot \cos \alpha_2 - v_1 \cdot \cos \alpha_1).$$

Siły działające na ciecz są: ciężar cieczy, mieszczącej

się w rurze =  $C$  ;

ciśnienie na wlocie =  $p_1 f_1$  ; ciśnienie na wylocie  
 =  $p_2 f_2$  , wreszcie działanie rury na strumień - rów-  
 ne i odwrotne do siły  $P$  , zatem równe  $(-P)$  .

Rzuty tych sił na oś  $x$  są:  $0$  ;  $p_1 f_1 \cdot \cos \alpha_1$  ;  
 $-p_2 f_2 \cos \alpha_2$  wreszcie  $-P_x$  . Popędy tych sił są:

$0$  ;  $p_1 f_1 \cdot \cos \alpha_1 dt$  ;  $-p_2 f_2 \cdot \cos \alpha_2 dt$  ;  $-P_x \cdot dt$  .

Wtedy twierdzenie o zmianie ilości ruchu dostarczy  
 nam równania:

$$Q dt \frac{d}{dt} (v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1) = (p_1 f_1 \cos \alpha_1 - p_2 f_2 \cos \alpha_2 - P_x) dt$$

Stąd otrzymujemy:

$$P_x = p_1 f_1 \cos \alpha_1 - p_2 f_2 \cos \alpha_2 - Q \cdot \frac{d}{dt} (v_2 \cos \alpha_2 - v_1 \cos \alpha_1) \dots (a)$$

W taki sam sposób znajdziemy  $P_y$  :

Zmiana ilości ruchu w kierunku osi  $y$  jest:

$$Q dt \frac{d}{dt} (-v_2 \sin \alpha_2 + v_1 \sin \alpha_1)$$

Rzuty sił, działających na naszą ciecz w kierunku  
 osi  $y$  są:  $-C$  ;  $-p_1 f_1 \sin \alpha_1$  ;  $+p_2 f_2 \sin \alpha_2$  ;  $-P_y$  .

Zatem równanie, wynikające z twierdzenia o zmianie ilo-  
 ści ruchu będzie:

$$\begin{aligned} Q \cdot dt \frac{d}{dt} (-v_2 \sin \alpha_2 + v_1 \sin \alpha_1) &= \\ &= (-C - p_1 f_1 \sin \alpha_1 + p_2 f_2 \sin \alpha_2 - P_y) dt, \end{aligned}$$

stąd otrzymujemy:

$$P_y = p_2 f_2 \sin \alpha_2 - p_1 f_1 \sin \alpha_1 - C + Q \frac{v}{g} (v_2 \sin \alpha_2 - v_1 \sin \alpha_1) \dots (b)$$

W równaniach /a/ i /b/ istnieje związek między  $v_1$  i  $v_2$  :  $v_1 f_1 = v_2 f_2$  , który pozwala na wyrugowanie jednej z prędkości  $v_1$  lub  $v_2$  .

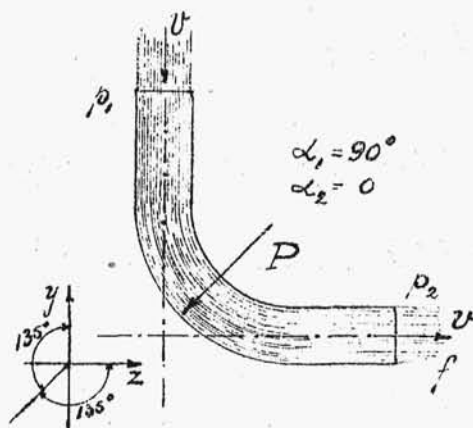
Jeśli mamy obliczone  $P_x$  i  $P_y$  , znajdziemy całkowite działanie  $P$  strumienia na rurę:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \quad \text{oraz kąty pochylenia}$$

siły  $P$  do osi  $x$  i  $y$  :

$$\cos(P, x) = \frac{P_x}{P} ; \cos(P, y) = \frac{P_y}{P} .$$

298. W szczególnym przypadku niech będzie rura



rys. 192

o jednakowym przekroju i zgięta pod kątem prostym. Niech ta rura znajduje się w płaszczyźnie pionowej ; wówczas rzuty parcia strumienia wody, płynącego z prędkością  $v$  , a więc o wydatku  $Q = f \cdot v$  , znajdziemy:  $P_x = p_1 f_1 - p_2 f_2 -$

$$\frac{Qv}{g} (v_1 - v_2) , \text{zatem}$$

$$P_x = -p_2 f - \frac{Qx}{g} \cdot v = -(p_2 f + \frac{Qx}{g} \cdot v)$$

następnie

$$P_y = p_2 f \cdot 0 - p_1 f \cdot 1 - C + \frac{Qx}{g} (v \cdot 0 - v \cdot 1), \quad \text{zatem}$$

$$P_y = -p_1 f - C - \frac{Qx}{g} v.$$

Gdyby rura była w płaszczyźnie poziomej, wówczas rzuty siły  $C$  znikają i

$$P_x = -(p_2 f + \frac{Qx}{g} v); \quad P_y = -p_1 f - \frac{Qx}{g} v = -(p_1 f + \frac{Qx}{g} v).$$

Niech nasza rura znajduje się w atmosferze i niech dopływ i odpływ będą przy tem samem ciśnieniu; w takim razie możemy napisać:

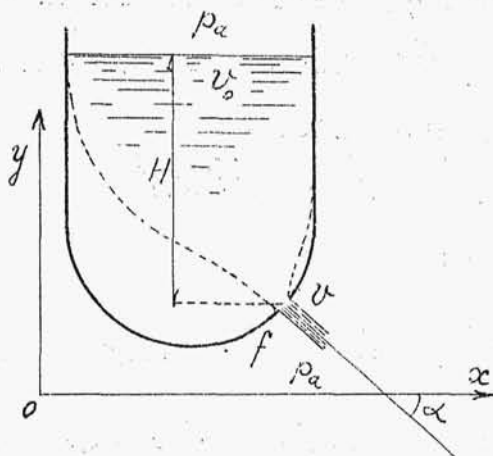
$$P_x = -\frac{Qx}{g} \cdot v; \quad P_y = -\frac{Qx}{g} \cdot v.$$

$$P = \frac{Qx}{g} v \cdot \sqrt{2}$$

Następnie  $\cos(P, x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \cos(P, y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos(45^\circ)$

zatem  $(P, x) = 180 - 45 = 135^\circ; (P, y) = 135^\circ.$

299. Te same zasady, które pozwoliły nam znaleźć parcie strumienia na tę czy inną powierzchnię, pozwolą znaleźć t.zw. reakcję strumienia, wypływającego z naczynia. Niech będzie naczynie napełnione cieczą, z którego wypływa strumień cieczy przez otwór



rys. 193

w ścianie / w dnie / z prędkością  $v$ , tworzącą kąt  $\alpha$  z poziomą osią  $x$ .

Oś  $y$  niech będzie pionowa.

Prędkość  $v$  znajdziemy w/g znanych wzorów. Jeżeli przekrój zwierciadła wody jest bardzo duży w

porównaniu z polem otworu  $f$ , jeśli dalej ciśnienie zewnętrzne jest na swobodnej powierzchni i przy wylocie jednakowe, wówczas

$$v = \sqrt{2gH}, \text{ albo } H = \frac{v^2}{2g}$$

W celu znalezienia reakcji strumienia, zastosujemy twierdzenie o zmianie ilości ruchu części cieczy od zwierciadła do wylotu, w elemencie czasu  $dt$  w kierunku osi  $x$  i  $y$ .

Ilość ruchu końcowa w kierunku osi  $x$

$$= \frac{f \cdot v \cdot dt \cdot \rho}{g} \cdot v \cos \alpha;$$

Ilość ruchu początkowa  $= 0$ , gdyż ciecz w górnym przekroju porusza się pionowo z prędkością  $v$ . Popędy sił w tym samym czasie otrzymamy: Ciężar cieczy

daje popęd w kierunku osi  $x = 0$ .

Jeżeli przez  $P$  oznaczymy reakcję strumienia na naczynie, wówczas siła  $(-P)$  będzie siłą, działającą na strumień ze strony naczynia.

Popęd tej siły w kierunku  $x = -P_x \cdot dt$ .

Wówczas otrzymamy równanie:

$$\frac{f \cdot v \cdot dt \cdot r}{g} v \cdot \cos \alpha = -P_x \cdot dt, \quad \text{stad}$$

$$P_x = -\frac{f \cdot v^2 \cdot r}{g} \cos \alpha, \quad \text{albo, ponieważ } f \cdot v = Q$$

więc

$$P_x = -\frac{Q r}{g} v \cdot \cos \alpha.$$

W podobny sposób znajdziemy  $P_y$ : Końcowa ilość ruchu w kierunku osi  $y$ :  $-\frac{f \cdot v \cdot dt \cdot r}{g} v \cdot \sin \alpha$ ;

początkową ilość ruchu możemy przyjąć przy bardzo małej prędkości  $v_0$  równą 0. Popędy: siły ciężkości  $= -C \cdot dt$ ; reakcji  $= -P_y \cdot dt$ .

Wtedy napiszemy równanie:

$$-\frac{f \cdot v \cdot dt \cdot r}{g} v \cdot \sin \alpha = -C \cdot dt - P_y \cdot dt; \quad \text{stad}$$

$$P_y = -C + \frac{f v^2 r}{g} \sin \alpha, \quad \text{albo}$$

$$P_y = \frac{Q r}{g} v \cdot \sin \alpha - C$$

300. W przypadku szczególnym, kiedy  $\alpha = 0$ , kiedy zatem strumień wypływa poziomo; wówczas

$P_x = -\frac{Qx}{g}v$ , to znaczy, że reakcja strumienia działa na naczynie w kierunku osi  $x$  w stronę przeciwną prędkości. W kierunku osi  $y$

$P_y = -C$ , mamy więc to samo działanie, które wywiera na naczynie ciecz, będąca w stanie spoczynku.

Reakcję w kierunku  $x$ :  $P_x = -\frac{Qx}{g}v$  możemy przedstawić inaczej:

$$P_x = -\frac{fv^2x}{g} = -\frac{2f.v^2x}{2g}, \quad \text{a że} \quad \frac{v^2}{2g} = H, \quad \text{więc}$$

$$P_x = -2f.H.x.$$

Ciecz w stanie spoczynku prze na pole  $f$  obrane na ścianie pionowej naczynia ze środkiem ciężkości na głębokości  $H$  pod zwierciadłem wody z siłą  $= f.H.x$ ; mamy więc, że reakcja strumienia cieczy na naczynie jest dwa razy większa, niż parcie hydrostatyczne na takie samo pole, pomyślane na tej samej głębokości, co otwór.

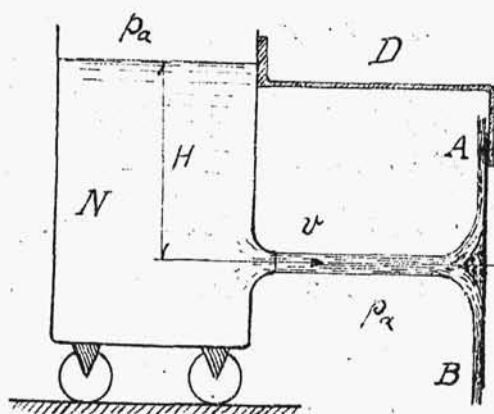
301. Drugi przypadek szczególny będzie ten, kiedy otwór w naczyniu znajduje się w dnie poziomem i prędkość wypływu jest pionowa w dół.

Wówczas kąt  $\alpha = 90^\circ$ ; rzuty reakcji strumienia na naczynie będą:

$$P_x = 0 ; \quad P_y = \frac{Q \rho \cdot v}{g} - C .$$

Jeśli nie będziemy zwracali uwagi na ciężar  $C$ , który stale na naczynia działa bez różnicy, czy strumień wypływa, czy też ciecz jest w spoczynku, widzimy, że podczas wypływu cieczy, strumień działa na naczynie w kierunku dodatniej osi  $y$ , czyli w górę. Otrzymuje się zatem skutek, jak gdyby naczynie było lżejsze podczas wypływu cieczy o wartość  $\frac{Q \rho \cdot v}{g}$ .

302. Niech będzie naczynie, posiadające otwór w ścianie pionowej.



rys. 194

w ścianie pionowej. Przez otwór wypływa strumień cieczy z prędkością  $v$ .

Strumień ten uderza o płaszczyznę pionową  $AB$ . Płaszczyzna  $AB$  i naczynie są połączone

ze sobą przy pomocy ramienia  $D$ .

Co się stanie z tym układem?

Strumień, wypływając z naczynia  $N$ , wywiera nań

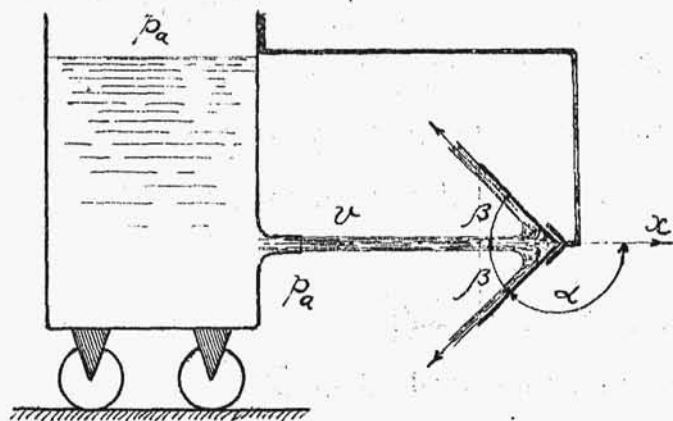
reakcję  $P_x = -\frac{Q}{g} v$ , zwróconą na lewo.

Strumień uderza o płaszczyznę  $AB$ , wywierając na nią parcie  $P'_x = \frac{Q}{g} v$ , zwrócone na prawo.

Zatem widzimy, że układ pozostanie w spoczynku.

Łatwo też będzie odpowiedzieć, jakie siły działać będą na ramię  $D$ .

303. Pożytecznem będzie dać odpowiedź na pytanie, co się stanie z naczyniem, jeśli zamiast płytki, któ-



rys. 195

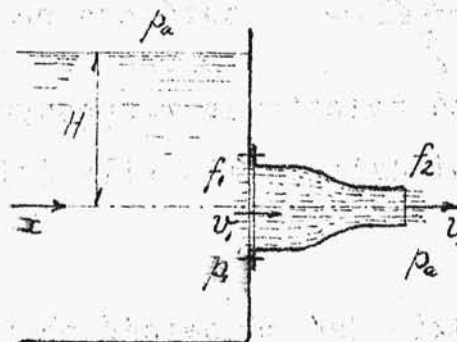
ra była w poprzednim zadaniu, dać powierzchnię stożkową, jak na rysunku; o kącie rozwartości =  $2\beta = 360^\circ - 2\alpha$ .

Następnie dobrze będzie rozpatrzyć co się stanie z

naczyniem, jeśli kąt  $\alpha$  będzie przybierał wartości:

$0, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ .

304. W sposób podobny do poprzedniego możemy



rys. 196

dać odpowiedź na następujące pytanie: Otwór w ścianie naczynia zaopatrzony jest w wylot, którego przekrój się zmienia z  $f_1$  na  $f_2$ , skutkiem tego prędkość

$v_1$  przechodzi w  $v_2$ . Znaleźć, jakie

siły działają na połączenie wylotu z naczyniem?

Rozpatrzmy strumień cieczy między przekrojami  $f_1$  i  $f_2$  i znajdziemy działanie strumienia na wylot w kierunku osi  $x$ .

Niech to działanie będzie  $P_x$

Ilość ruchu końcowa przy wydatku  $Q$  :

$$\frac{Q \cdot dt \cdot v}{g} \cdot v_2 \quad ; \text{ ilość ruchu początkowa: } \frac{Q \cdot dt \cdot v}{g} \cdot v_1$$

Popęd siły  $(-P_x)$  jest  $= -P_x \cdot dt$ . Poza tem w przekroju  $f_1$  jest ciśnienie  $p_1$ , zaś w przekroju  $f_2$  mamy ciśnienie atmosferyczne  $= p_2$  - to samo, co na swobodną powierzchnię cieczy. Popędy tych par są:

$$p_1 f_1 \cdot dt \quad \text{ i } \quad -p_a f_2 \cdot dt.$$

Zatem otrzymamy równanie:

$$\frac{Q \cdot dt \cdot \gamma}{g} v^2 - \frac{Q \cdot dt \cdot \gamma}{g} v_1 = -P_x \cdot dt + p_1 f_1 dt - p_a f_2 dt.$$

stąd

$$P_x = p_1 f_1 - p_a f_2 - \frac{Q \gamma}{g} (v_2 - v_1)$$

Z warunku ciągłości strumienia mamy:  $f_1 v_1 = f_2 v_2$ ,

zatem

$$v_1 = v_2 \frac{f_2}{f_1};$$

następnie z twierdzenia Bernoulli'ego otrzymujemy:

$$H + \frac{p_a}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g},$$

o ile nie uwzględnimy oporów, napotykanym przez strumień płynący w rurce wylotowej.

Z ostatniego równania znajdziemy:

$$\frac{p_1}{\gamma} = H + \frac{p_a}{\gamma} - \frac{v_2^2}{2g}, \text{ albo } p_1 = H\gamma + p_a - \frac{v_2^2 \gamma}{2g}$$

oraz:  $H = \frac{v_2^2}{2g},$

a stąd  $v_2 = \sqrt{2gH}$ , zatem  $v_1 = \frac{f_2}{f_1} \sqrt{2gH}.$

Podstawiając te wartości w równanie na  $P_x$ , znajdziemy:

$$P_x = (H\gamma + p_a - \frac{v_2^2 \gamma}{2g}) f_1 - p_a f_2 + f_1 \frac{v_1^2 \gamma}{g} - f_2 \frac{v_2^2 \gamma}{g};$$

następnie

$$P_x = H\gamma f_1 + p_a f_1 - \frac{f_2^2}{f_1^4} \cdot H \cdot \gamma - p_a f_2 + \frac{H \gamma f_2^2 \cdot 2H}{f_1^2} - f_2 \cdot 2H \cdot \gamma$$

albo:

$$P_x = p_a(f_1 - f_2) + Hx \left[ f_1 + \frac{f_2^2}{f_1} - 2f_2 \right] =$$

$$p_a(f_1 - f_2) + \frac{Hx}{f_1} (f_1^2 + f_2^2 - 2f_1 f_2);$$

następnie

$$P_x = p_a(f_1 - f_2) + \frac{Hx}{f_1} (f_1 - f_2)^2,$$

wreszcie

$$P_x = (f_1 - f_2) \left[ p_a + \frac{Hx}{f_1} (f_1 - f_2) \right] . -$$


---