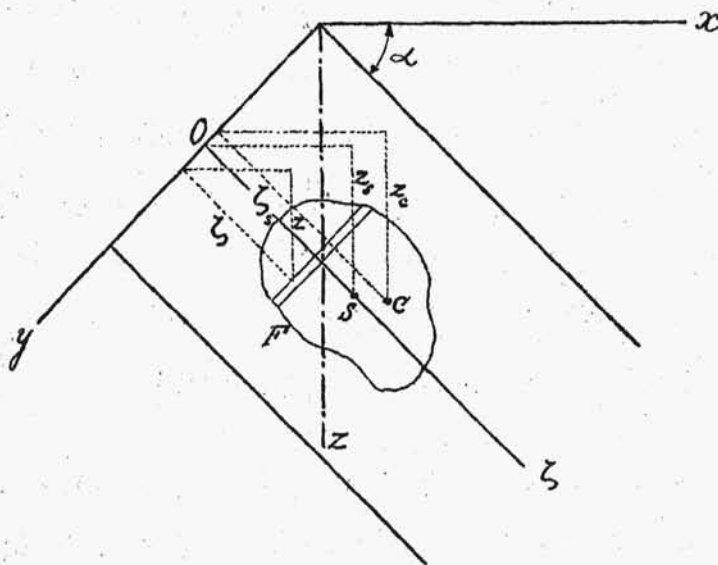


ponieważ zaś tworząca tych słupów - wałców jest pionowa, zatem kierunek siły P przebiega podstawę - ciśnione pole płaskie - w jego środku ciężkości. Przez ten punkt przechodzi linja działania parcia P i dlatego nazywa się on środkiem ciśnienia.

41. PARCIE CIECZY NA PŁASKIE POLE POCHYLE.

Niech będzie naczynie ze ścianą płaską pochyloną do poziomu pod kątem α . Na ścianie tej niech będzie dane pewne pole F' . Mamy znaleźć parcie wody na to pole. Obierzmy osi współrzędnych x, y, z , tak samo, jak poprzednie.

Podzielmy pole F' na nieskończenie wąskie podłużne paski prostymi równoległymi do osi y . Ciśnienie we wszystkich punktach każdego z elementarnych pasków, wobec jego wąkości, będzie jednakowe; niech dla pewnego paska o polu dF' ciśnienie będzie p ; wówczas parcie elementarne na ten pasek = $p \cdot dF'$. Znajdźmy w ten sam sposób elementarne parcie dla wszystkich poszczególnych pasków, tworzących razem pole F' . Wszystkie parcia są prostopadłe do płaszczyzny pola, a więc są do siebie równoległe; możemy zatem mówić o sumie parć elementarnych, jako o parciu wypadkowem na zadane pole. Powiemy zatem, że cał-



rys. 11.

kowe parcie

$$P = \int p \cdot dF$$

gdzie całka w
na objąć wszy
kie elementar
paski.

Parcie P
będzie prosto
padłe do F .

Jeśli na
swobodnej po-
wierzchni cie-

czy mamy ciśnienie zewnętrzne p_a , wówczas w bada-
nym pasku, zanurzonym na głębokości z pod swobodną
powierzchnią, otrzymamy ciśnienie $p = p_a + \gamma z$, parcie
zaś

$$P = \int (p_a + \gamma z) \cdot dF$$

Po otworzeniu nawiasu mamy:

$$P = \int p_a dF + \int \gamma z dF = p_a \int dF + \gamma \int z dF$$

Wiemy, że

$$\int dF = F$$

Pozatem zauważmy, że $\int z \cdot dF$ jest to suma momentów
elementarnych pasków względem płaszczyzny xoy . Po-
nieważ ta suma obejmuje wszystkie paski całego pola

F' , przeto suma momentów elementarnych pasków jest równa momentowi całego pola F' , t.j. $= F' \cdot z_s$, gdzie z_s jest odległość środka ciężkości S' pola F' od płaszczyzny xoy .

Mamy zatem ostatecznie:

$$P = p_a \cdot F' + \gamma \cdot F' \cdot z_s \quad \dots \dots \dots /14/$$

Jeśli na nasze pole F' od zewnątrz naczynia będzie zewnętrzne ciśnienie wszędzie jednakowe i równe p_b , wówczas otrzymamy:

$$P = (p_a - p_b) \cdot F' + \gamma \cdot F' \cdot z_s \quad \dots \dots \dots /15/$$

Kiedy, wreszcie, na swobodną powierzchnię i na ciankę boczną od zewnątrz, działa jednakowe ciśnienie, wtedy zatem $p_a = p_b$, wówczas otrzymamy:

$$P = \gamma \cdot F' \cdot z_s \quad \dots \dots \dots /16/.$$

Równanie /14/ względnie /15/ pozwoli na wypowiedzenie twierdzenia:

parcie cieczy ciężkiej na płaskie pole pochyłe jest równe ciśnieniu zewnętrznemu - wzgl. różnicy ciśnień zewnętrznych - na ciśnione pole,

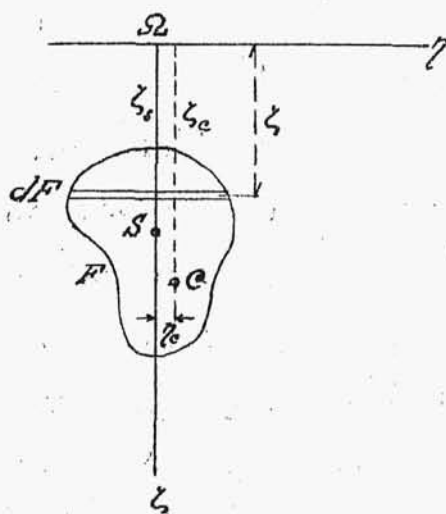
zwiększonego ciężaru słupa cieczy, którego podstawą jest pole ciśnienne, a wysokość jest równa odległości środka ciężkości tego pola od swobodnej powierzchni cieczy.

Równanie /16/ zawiera twierdzenie:

Parcie cieczy na płaskie pole pochyłe jest równe ciężarowi słupa cieczy, którego podstawą jest ciśnienie, zaś wysokością jest odległość środka ciężkości tego pola od swobodnej powierzchni. Z poprzedniego wynika, że wartość parcia nie zmieni się, jeśli zmieni pochylenie pola, pozostawiając środek ciężkości w tem samym miejscu.

42. Znajdźmy teraz ŚRODEK CIŚNIENIA na płaskie po pochyłe; będzie to punkt, przez który przejdzie wypadkowe parcie cieczy. Znajdźmy środek ciśnienia w przypadku, kiedy działa na swobodną powierzchnię ciśnienie

Przyjmijmy płaszczyznę pola F na płaszczyźnie ry sunku i odnieśmy pole F do osi z , tak, aby oś z przechodziła przez S , zaś oś y była zgodna z osią y . Niech współrzędne środka ciśnienia (C) będą ζ_c i η_c . Znajdźmy ζ_c .



rys.12.

Na pasek o polu dF którego spółrzędna jest z działa elementarne parcie $dP = p \cdot dF$. Moment elementarnego parcia dP względem osi η jest $p \cdot dF \cdot z$. Suma momentów elementarnych parć względem osi η jest:

$$\int p \cdot dF \cdot z$$

Ta suma równa się momentowi całkowitego parcia P względem osi η , zatem równa się $P \cdot z_c$, a więc

$$P \cdot z_c = \int p \cdot dF \cdot z$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całe pole ciśnione.

Z poprzedniego wiemy, że $p = p_a + \gamma z$, następnie widzimy, że $z = \zeta \cdot \sin \alpha$, więc

$$p \cdot dF \cdot z = [p_a + \gamma z] \cdot dF \cdot z = p_a \cdot dF \cdot z + \gamma dF \cdot z^2 \cdot \sin \alpha.$$

Zatem

$$\int p \cdot dF \cdot z = p_a \int dF \cdot z + \gamma \cdot \sin \alpha \int \zeta^2 dF.$$

Ponieważ $\int dF \cdot z = F \cdot z_c$, następnie $\int \zeta^2 dF = J_\eta$

t.j. = momentowi bezwładności pola F względem osi η ,

możemy przepisać:

$$P \cdot \zeta_c = p_a \cdot F \cdot \zeta_s + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_\eta$$

Stąd spólrzędna:

$$\zeta_c = \frac{p_a \cdot F \cdot \zeta_s + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_\eta}{P}$$

a że

$$P = p_a \cdot F + \gamma \cdot F \cdot \zeta_s \cdot \sin \alpha,$$

zatem

$$\zeta_c = \frac{p_a \cdot F \cdot \zeta_s + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_\eta}{p_a \cdot F + \gamma \cdot F \cdot \zeta_s \cdot \sin \alpha}$$

Wprowadźmy jeszcze taką zamianę. Niech J_{η_0} oznacza moment bezwładności pola F względem osi przechodzącej przez środek ciężkości S równoległe do osi η , wtedy, jak to wiemy z mechaniki:

$$J_\eta = J_{\eta_0} + F \cdot \zeta_s^2$$

wówczas

$$\zeta_c = \frac{p_a \cdot F \cdot \zeta_s + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\eta_0} + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot F \cdot \zeta_s^2}{p_a \cdot F + \gamma \cdot F \cdot \zeta_s \cdot \sin \alpha} \dots \dots \dots /17/$$

W przypadku, kiedy na zewnętrzną stronę pola F działa ciśnienie p_0 , wtedy

$$\zeta_c = \frac{(p_a - p_0) \cdot F \cdot \zeta_s + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\eta_0} + \gamma \cdot \sin \alpha \cdot F \cdot \zeta_s^2}{(p_a - p_0) \cdot F + \gamma \cdot F \cdot \zeta_s \cdot \sin \alpha} \dots \dots \dots /18/$$

Wreszcie, kiedy $p_a = p_0$, znajdziemy:

$$\zeta_c = \zeta_s + \frac{J_{p_0}}{F \cdot \zeta_s} \dots \dots \dots /19/$$

Stąd dostrzegamy, że środek ciśnienia znajduje się poniżej środka ciężkości pola ciśnionego.

43. Znajdźmy teraz drugą współrzędną środka ciśnienia η_c .

Obecnie dogodniej będzie pole F podzielić na elementarne pólka o wymiarach $d\zeta \cdot d\eta$. Współrzędne tego pólka są ζ i η . Obliczmy sumę momentów par elementarnych względem osi ζ . Parcie elementarne =

$$= p \cdot d\zeta \cdot d\eta = [p_a + \gamma \cdot \zeta \cdot \sin \alpha] \cdot d\zeta \cdot d\eta.$$

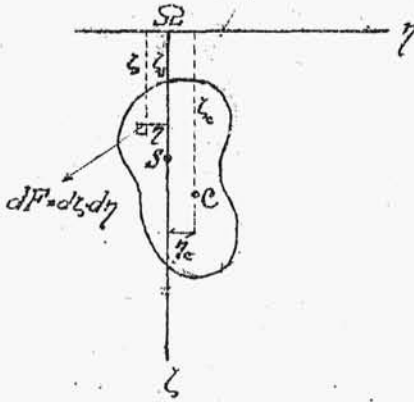
Suma momentów tych par względem osi ζ jest równa:

$$\begin{aligned} & \iint p_a \cdot \eta \cdot d\zeta d\eta + \iint \gamma \cdot \zeta \cdot \eta \cdot \sin \alpha \cdot d\zeta d\eta = \\ & = p_a \iint \eta \cdot d\zeta d\eta + \gamma \sin \alpha \iint \zeta \eta \cdot d\zeta d\eta. \end{aligned}$$

Wiemy, iż $\iint \eta \cdot d\zeta d\eta = F \cdot \eta_s = 0$

ponieważ oś ζ przechodzi przez środek S , zaś

$\iint \zeta \eta d\zeta d\eta$ jest to moment odśrodkowy pola F względem osi ζ i η ,



który oznaczamy przez $J_{\zeta\eta}$.
Zatem suma momentów elementarnych parć =

$$= \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\zeta\eta}$$

Suma ta = momentowi całkowitego parcia względem osi ζ , czyli $P \cdot \eta_c$, zatem

$$P \cdot \eta_c = \gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\zeta\eta}$$

rys.13.

a stąd

$$\eta_c = \frac{\gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\zeta\eta}}{P}$$

albo

$$\eta_c = \frac{\gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\zeta\eta}}{p_a F' + \gamma F' \zeta_s \sin \alpha} \dots \dots \dots /20/$$

Jeżeli na zewnętrzną stronę płaszczyzny pola F działa ciśnienie p_a , wtedy:

$$\eta_c = \frac{\gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\zeta\eta}}{(p_a - p_o) F' + \gamma F' \zeta_s \sin \alpha} \dots \dots \dots /21/$$

Wobec tego, kiedy $p_a = p_o$, wtedy:

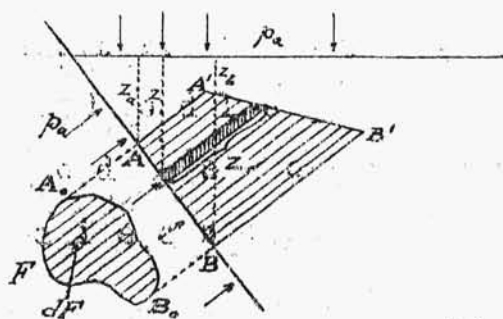
$$\eta_c = \frac{\gamma \cdot \sin \alpha \cdot J_{\zeta\eta}}{\gamma F' \zeta_s \sin \alpha}$$

po skróceniu

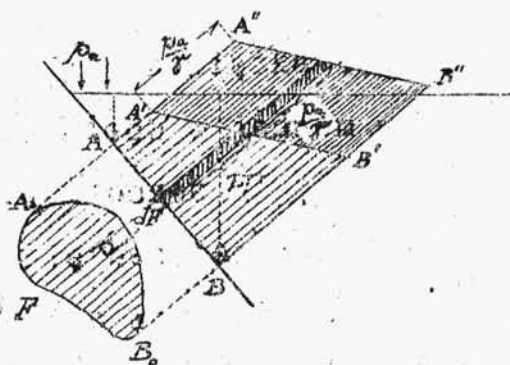
$$\eta_c = \frac{J_{z_2}}{F' z_s} \dots \dots \dots /22/$$

Dla pól symetrycznych względem osi z , $J_{z_2} = 0$, zatem i $\eta_c = 0$, czyli że środek ciśnienia pola symetrycznego znajduje się na osi z , przechodzącej przez środek ciężkości.

44. Wartość parcia cieczy, jak i środek ciśnienia możemy nieraz prędzej i prościej wyznaczyć sposobem wykreślnym. Aby pokazać, jak należy w tym celu postępować, przypuścimy, że mamy dane płaskie pole pochyłe F ,



rys.14.



rys.15.

które w kładzie jest przedstawione z boku, zaś w rzucie na płaszczyznę pionową przedstawia się jako prosta AB . Niech, prócz tego, ciśnienie na swobodną powierzchnię i na ściankę pochyłą od zewnątrz będzie jednako-
we p_a . Wtedy w jakimkolwiek elemencie pola dF mamy ciś.

nienie $p = \gamma z$, a parcie, przypadające na pole elementarne $dP = p.dF = \gamma z.dF$. Parcie to możemy sobie uzmysłowić jako ciężar słupka cieczy, opierającego się na tym elemencie dF i mającego wysokość z , równą głębokości punktu pod swobodną powierzchnią. Wykreślamy ten słupek prostopadłe do AB . Postąpmy w taki sam sposób ze wszystkimi elementarnymi polami, wchodzącymi w skład pola F , poczynawszy od elementu przy A i kończąc na elemencie przy B . Otrzymamy słupek cieczy, opierający się na polu AB i kończący się płaszczyzną $A'B'$. Że $A'B'$ jest płaszczyzną łatwo dostrzeżemy, zwróciwszy uwagę na to, że wysokości z wzrastają linjowo.

Mając w sposób powyższy wykreśloną bryłę, znajdziemy łatwo objętość tej bryły i jej ciężar, w założeniu, że bryła jest wypełniona cieczą. Wypadkowe parcie przejdzie, oczywiście, przez środek ciężkości bryły; punkt, gdzie linja działania parcia wypadkowego przebiega pole AB , tam znajdzie się środek parcia. - Gdyby podstawa $A'B'$ była równoległa do AB , wówczas parcie przechodziłoby przez środek ciężkości pola F . W danym, jednak, razie, środek ciężkości bryły wpłynie na obniżenie linji działania parcia.

Jeśli pole F będzie figurą foremną, łatwo się da środek ciężkości znaleźć i dla tego też, drogą

opisaną krocząc, można szybko i prosto otrzymać wyniki. Postępowanie to daje ten sam rezultat, co wzory /16/, /19/, /22/.

45. Weźmy przypadek bardziej złożony, kiedy na swobodnej powierzchni jest ciśnienie np. p_a . Na boczną ścianę od zewnątrz niech nie będzie ciśnienia.

Wówczas, w którymkolwiek elemencie pola F otrzymujemy ciśnienie $p = p_a + \gamma z$, i parcie na obrany element będzie:

$$dP = (p_a + \gamma z) dF$$

Przedstawmy wartość dP inaczej:

$$dP = \gamma \cdot dF \left(z + \frac{p_a}{\gamma} \right).$$

Otrzymane zatem parcie elementarne dP możemy sobie przedstawić jako ciężar słupka cieczy, który ma za podstawę dF i posiada wysokość = wysokości Z zagłębienia tego elementu dF pod swobodną powierzchnią, więcej $\frac{p_a}{\gamma}$; gdzie $\frac{p_a}{\gamma}$ = wysokości ciśnienia zewnętrznego p_a .

Jeżeli wyznaczymy parcia dla innych elementarnych pól, stanowiących pole F , otrzymamy bryłę $ABB'A''$, jak gdyby złożoną z dwóch brył: cylindra ściętego ukośnie $ABA'B'$, takiego samego, jak poprzednio, i cylindra $A'B'B''A''$, ściętego dwiema płaszczyznami równoległymi.

Wartość parcia znajdziemy, jak poprzednio, obliczając ciężar cieczy w objętości bryły $ABB'A'$. W celu znalezienia linii działania parcia należy określić środek ciężkości wspomnianej bryły.

Odnalezienie środka ciężkości bryły $ABB'A'$ może być uproszczone przez znalezienie oddzielnie środka ciężkości bryły $ABB'A'$ i bryły $A'B'B'A'$. Co do drugiej bryły zrozumiałem jest, że prosta równoległa do parcia, przechodząca przez środek ciężkości tej bryły przejdzie przez środek ciężkości pola F' , zatem linia działania parcia wypadkowego przy uwzględnieniu ciśnienia p_a - przesunie się ku górze, przebijając pole F' bliżej jego środka ciężkości. Gdyby wysokość $\frac{p_a}{\gamma}$ była bardzo znaczna w porównaniu z głębokościami A i

B , wówczas środek ciśnienia byłby bardzo bliski do środka ciężkości pola F' .

Jeśli na pole F' było ciśnienie zewnętrzne, z boku, $= p_0$, wówczas nasz wykres tyle tylko zmieniłby się, że część górna słupa cieczy o wysokości $\frac{p_a}{\gamma}$ będzie mieć wysokość $\frac{p_a - p_0}{\gamma}$. Wszystkie uwagi, zrobione dla przypadku poprzedniego, pozostają w mocy - i dlatego tu ich nie powtarzamy.

46. PRZYKŁAD 1. Niech będzie prostokątne pole o wymiarach: $b \times h$ na ścianie pionowej. Znaleźć parcie wod, kiedy ciśnienie zewnętrzne na swobodną powierzchnię i