

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\zeta}{Z} \quad \text{i} \quad \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}$$

stad

$$d\xi = 0 ; \quad d\eta = 0$$

a po scałkowaniu:

$$\xi = \text{Const.}_1 ; \quad \eta = \text{Const.}_2$$

Każde z tych równań wyznacza płaszczyznę; pierwsze-układ płaszczyzn prostopadły do osi X , drugie-prostopadły do osi Y ; oba zaś równania razem - proste przecięcia się tych płaszczyzn; będą to proste równoległe do osi Z , czyli proste pionowe.

89. PRZYKŁAD 17. Niech będzie woda zawarta w zbiorniku o znacznych wymiarach /wielkie jezioro, morze, ocean/. Siły objętościowe są zwrócone do jednego punktu - do środka O - i są zależne od odległości r cząstki od tego środka. Niech przyspieszenie siły objętościowej będzie $R = f(r)$.

Jaki będzie kształt powierzchni jednakowego ciśnienia ?

Obierzmy osi jak na rysunku.

W równanie powierzchni jednakowego ciśnienia /8/

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

należy podstawić

$$X = -R \cos \alpha$$

$$Y = -R \cos \beta$$

$$Z = -R \cos \gamma$$

ponieważ $x = r \cos \alpha$, więc $\cos \alpha = \frac{x}{r}$

Tak samo

$$y = r \cos \beta, \text{ więc } \cos \beta = \frac{y}{r}$$

wreszcie

$$z = r \cos \gamma, \text{ więc } \cos \gamma = \frac{z}{r},$$

a wtedy

$$X = -R \cdot \frac{x}{r}; Y = -R \cdot \frac{y}{r}; Z = -R \cdot \frac{z}{r};$$

założyliśmy, że $R = f(r)$, więc

$$-\frac{x}{r} f(r) dx - \frac{y}{r} f(r) dy - \frac{z}{r} f(r) dz = 0;$$

po skróceniu

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

a po scałkowaniu:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{Const.}$$

Jest to równa-

nie powierzchni

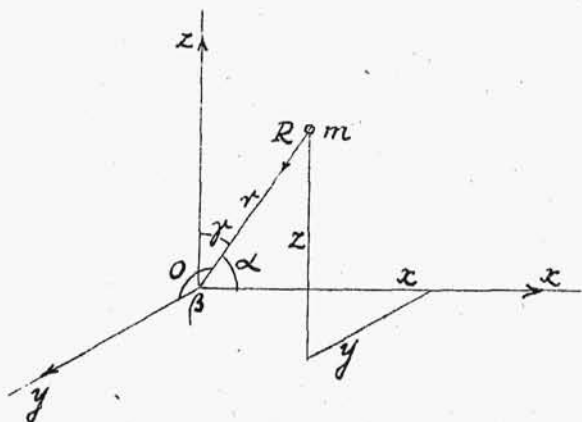
kulistej, której

środek znajduje

się w O. Kształt

powierzchni jedna-

kowego ciśnienia



rys.48.

w danym przypadku nie zależy od kształtu funkcji f .

Przy sposobności znajdziemy w danym przypadku ciśnienie cieczy w którymkolwiek punkcie, jeśli wiemy, że w punkcie A jest ciśnienie p_a .

Z ogólnego równania /3/

$$dp = \frac{\rho}{g}(Xdx + Ydy + Zdz)$$

po scałkowaniu otrzymamy

$$p = p_a + \frac{\rho}{g} \int_a^{(x,y,z)} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Poprzednio otrzymaliśmy, że

$$X = -\frac{R_x}{r} = -\frac{f(r)}{r} \cdot x$$

$$Y = -\frac{R_y}{r} = -\frac{f(r)}{r} \cdot y$$

$$Z = -\frac{R_z}{r} = -\frac{f(r)}{r} \cdot z.$$

wtedy:

$$p = p_a - \frac{\rho}{g} \int_a^{(x,y,z)} \frac{f(r)}{r} (x dx + y dy + z dz)$$

ponieważ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, więc

$$x dx + y dy + z dz = r dr$$

zatem:

$$p = p_a - \frac{\rho}{g} \int_a^{(x,y,z)} f(r) dr \dots \dots \dots /37/$$

Jeśli byśmy mieli zadany kształt funkcji $f(r)$ wtedy moglibyśmy przystąpić do całkowania.

Niech $f(r) = \frac{c}{r^2}$; wtedy

$$\int_a^{(xyz)} f(r) dr = c \int_a^{(xyz)} \frac{dr}{r^2} = \left[-\frac{c}{r} \right]_a^{(x,y,z)}$$

równanie poprzednie zamieni się w następujące:

$$p = p_a + \frac{r}{g} \left(\frac{c}{r} \right)_a^{(xyz)} = p_a + \frac{rc}{g} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} \right) /38/$$

Jeśli to była mowa o kuli ziemskiej /będącej w stanie spoczynku/, zaś punkt α byłby obrany na powierzchni ziemi w odległości r_a od środka ziemi, punkt zaś badany gdziekolwiek wewnątrz ziemi, naprz. w odległości od środka $r = \frac{1}{2} r_a$, otrzymalibyśmy

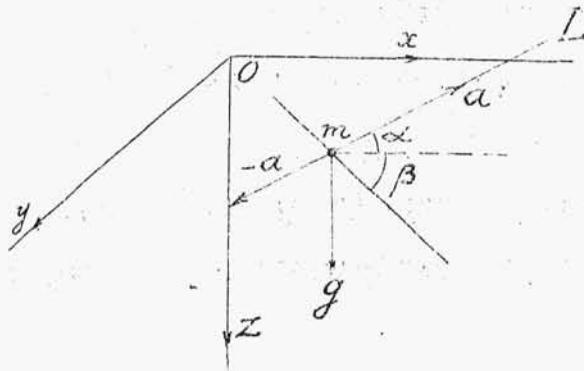
$$p = p_a + \frac{rc}{g r_a}$$

Gdyby punkt ten był obrany tuż przy środku ziemi, czyli kiedy $r = 0$, wówczas ciśnienie tuż przy środku ziemi

$$p_0 = p_a + \frac{rc}{g} \left(\frac{1}{0} + \frac{1}{r_a} \right) = \infty$$

90. PRZYKŁAD 18.

Naczynie, napełnione cieczą ciężką, porusza się wzdłuż linii prostej z zadaniem przyspieszeniem α . Obieramy osi współrzędnych, połączonych z naczyniem, w ten sposób, że oś x i y leżą w płaszczyźnie po-



rys.49.

zionej, oś zaś z jest skierowana pionowo w dół.

Dalej, niech zadane przyspieszenie a znajduje się w płaszczyźnie xOz , tworząc z osią x kąt α .

Według teorii ruchu, lub w szczególnym przypadku spoczynku względnego, należy do poruszającego się punktu przyłożyć prócz sił istotnie działających jeszcze siłę uzupełniającą, t.j. siłę równą, lecz odwrotnie skierowaną do siły unoszenia. Siłą, istotnie działającą na dowolną cząstkę cieczy w naczyniu będzie siła ciężkości nadająca przyspieszenie g i skierowana pionowo w dół. Siła unoszenia cząstki jest siłą, która nadaje przyspieszenie a wzdłuż prostej L . Siła uzupełniająca, wobec tego, powinna być uważana jako taka, która jest w stanie nadać cząstce przyspieszenie $= -a$ t.j. odwrotnie skierowane w porównaniu z a i wzdłuż tej samej prostej L .

Rozpatrujemy więc cząstkę cieczy, jakgdyby pozostającą w stanie spoczynku bezwzględnego pod działaniem

niem sił, mogących nadać przyspieszenie g i $-a$.
Po tem wyjaśnieniu przystępujemy do równania /8/:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Rzuty wypadkowego przyspieszenia na osi x, y, z otrzymują się z sumy rzutów przyspieszeń składowych na te trzy osi.

Rzuty przyspieszenia g : na oś x jest 0

oś y " 0

oś z " g

Rzuty przyspieszenia $-a$: na oś x " $-a \cdot \cos \alpha$

oś y " 0

oś z " $+a \cdot \sin \alpha$

a zatem $X = 0 - a \cdot \cos \alpha$

$$Y = 0$$

$$Z = g + a \cdot \sin \alpha$$

Wobec tego równanie powierzchni jednakowego ciśnienia otrzyma postać:

$$-a \cdot \cos \alpha \cdot dx + (g + a \sin \alpha) dz = 0$$

a po scałkowaniu

$$-a \cdot \cos \alpha \cdot x + (g + a \sin \alpha) z = C$$

Jest to równanie, które w osiach x, y, z oznacza płaszczyznę równoległą do osi y .

Nadając różne wartości na C otrzymamy szereg płaszczyzn równoległych do osi y i do siebie.

Płaszczyzna ta, w przecięciu się z płaszczyzną xOZ daje ślad w postaci prostej, której równanie w osiach xOZ jest to samo, co i powyższe:

$$-a \cdot \cos \alpha \cdot x + (g + a \cdot \sin \alpha) z = C$$

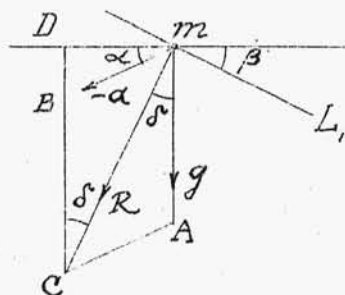
Prosta L , oznaczona tem równaniem, tworzy z osią x kąt β , który znajdziemy, sprowadzając równanie powyższe do innej postaci:

$$z = \frac{C}{g + a \cdot \sin \alpha} + \frac{a \cdot \cos \alpha}{g + a \cdot \sin \alpha} x \dots \dots /39/$$

to jest do postaci: $z = mx + n$. W tem równaniu

$m = \operatorname{tg} \beta$ czyli

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a \cdot \cos \alpha}{g + a \cdot \sin \alpha}$$



rys. 50.

Żeby zauważyć, jaki istnieje stosunek między kierunkiem tej prostej L , a kierunkiem wypadkowego przyspieszenia, zwróćmy się do rysunku obok: $m A = g$; $m B = a$; $m C =$ przyspieszeniu wypadkowemu.

Z rysunku mamy:

$$CB = g ; BD = a \cdot \sin \alpha ,$$

zatem $CD = g + a \cdot \sin \alpha$; następnie $m D = a \cdot \cos \alpha$

Stąd

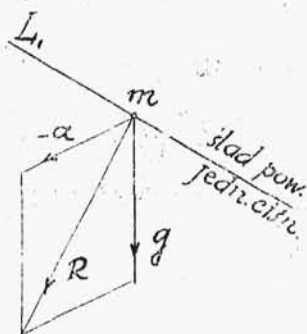
$$\frac{mD}{CD} = \operatorname{tg} \delta = \frac{\alpha \cdot \cos \alpha}{g + \alpha \cdot \sin \alpha}$$

• Z tego widzimy, że

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \beta, \text{ a więc } \beta = \delta$$

Powiemy więc, że prosta L , a zatem płaszczyzna jednakowego ciśnienia jest prostopadła do wypadkowego przyspieszenia. Ten, zresztą, wynik, można było przewidzieć, gdybyśmy wzięli pod uwagę własność powierzchni jednakowego ciśnienia, przytoczoną w art 30 punkt d/. -

91. Zadanie poprzednie można byłoby rozwiązać drogą wykreślną, korzystając z własności powierzchni stałego ciśnienia, o czym była mowa w art 30-d, a o czym przed chwilą przypomnieliśmy.



rys. 51.

przyspieszenie wypadkowe R

Postępujemy tak: na cząstkę m działają: siła rzeczywista, nadająca przyspieszenie g i siła uzupełniająca, zdolna nadać przyspieszenie $-\alpha$. Dodajemy wykreślnie te dwa przyspieszenia. Otrzymu-

Poprowadźmy teraz przez punkt m prostą L , prostopadłą do R , otrzymamy ślad powierzchni jednakowego ciśnienia na płaszczyźnie xOz ; z tego śladu wnioskujemy już łatwo o charakterze samej powierzchni jednakowego ciśnienia.

92. Szczególne przypadki w ostatnim przykładzie mogą być takie:

a/ kiedy $\alpha = 0$, wtedy $tg\beta = \frac{a}{g}$, co łatwo dostrzec z geometrycznej budowy rozwiązania,

b/ kiedy $\alpha = 90^\circ$ /naczynie posuwa się pionowo w górę/, $tg\beta = 0$, czyli że $\beta = 0$; wówczas powierzchnie jednakowego ciśnienia są płaszczyznami poziomymi,

c/ kiedy $\alpha = 180^\circ$ /naczynie posuwa się pionowo w dół/, wtedy $\beta = 0$, czyli wówczas również powierzchnie jednakowego ciśnienia są płaszczyznami poziomymi,

d/ kiedy $\alpha = 180^\circ$, jednocześnie $a = g$, wówczas $tg\beta = \frac{0}{0}$; powierzchnie jednakowego ciśnienia nie istnieją, gdyż poszczególne cząstki cieczy zachowują się jak swobodne cząstki, nie wywierając jedna na drugą żadnego ciśnienia. W każdym miejscu cieczy ciśnienie jest jednakowe i równe zewnętrznemu ciśnieniu.