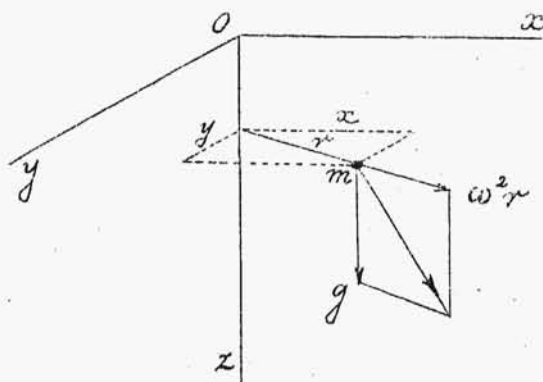


§3. PRZYKŁAD 19. Naczynie, napełnione ciężką, jednorodną cieczą, obraca się około osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω . Znaleźć kształt powierzchni jednakowego ciśnienia, oraz wyznaczyć linie sił.

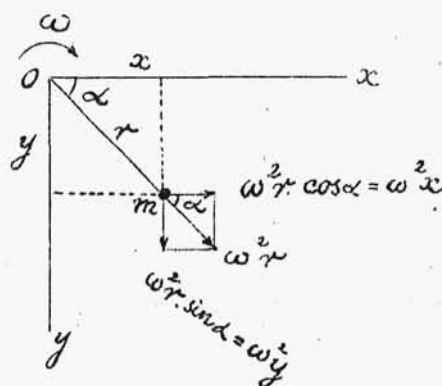
W danym razie będziemy rozpatrywali cząstkę cieczy względem osi, z których oś x i y znajdują się w płaszczyźnie poziomej, oś z jest skierowana pionowo w dół i jest osią obrotu naczynia. Osi ox i oy biorą razem z naczyniem udział w obrocie. - Cząstka m znajduje się w stanie spoczynku względnego w stosunku do obranych osi x, y, z ; na podstawie teorii ruchu względnego możemy taką cząstkę uważać w spoczynku bezwzględnym, jeśli prócz siły rzeczywistej - siły ciężkości, przyjmiemy, że na cząstkę działa jeszcze siła uzupełniająca, która jest równa i przeciwna sile unoszenia. Siłą unoszenia będzie w naszym przypadku siła dośrodkowa. Zatem powinniśmy przyjąć, że na badaną cząstkę cieczy działa siła ciężkości i siła odwrotna do siły dośrodkowej, czyli t.zw. siła odśrodkowa, nadająca przyspieszenie $= \omega^2 r$, skierowane od osi obrotu.

W równaniu powierzchni jednakowego ciśnienia

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$



rys. 52.



rys. 53.

należy zamiast X, Y, Z wstawić sumy rzutów przyspieszeń g i $\omega^2 r$ na osi x, y, z .

Przyspieszenie	ma rzuty na oś		
	x	y	z
g	0	0	g
$\omega^2 r$	$\omega^2 x$	$\omega^2 y$	0

Zatem

$$X = \omega^2 x$$

$$Y = \omega^2 y$$

$$Z = g.$$

Wobec tego

rownanie po-

wierzchni jednakowego ciśnienia otrzyma postać:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy + g dz = 0$$

a po scałkowaniu:

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} + g z = \text{Const.},$$

albo inaczej:

$$x^2 + y^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C'$$

Jest to równanie powierzchni krzywej drugiego stopnia. Zbadajmy bliżej rodzaj tej powierzchni.

W tym celu przetnijmy znalezioną powierzchnię ja-

kąkolwiek płaszczyznę poziomą, t.j. płaszczyznę prostopadłą do Z .

Równanie takiej płaszczyzny będzie $z = C''$ /dowolna stała/. Przecięcie się płaszczyzny tej z powierzchnią, znaną, znajdzie podług linii krzywej, której równanie otrzymamy, rozwiązując razem równanie:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{2gz}{\omega^2} &= C' \\ z &= C'' \end{aligned}$$

otrzymamy: $x^2 + y^2 = C' - \frac{2gC''}{\omega^2}$ albo prościej napiszemy

$$x^2 + y^2 = \text{Const.}$$

Jest to równanie okręgu koła, którego środek znajduje się na osi Z .

Zatem powiemy, że znaleziona powierzchnia jest powierzchnią obrotową, otrzymaną przez obrót pewnej krzywej około osi Z .

Znajdźmy tę krzywą. W tym celu przetnijmy znaną powierzchnię płaszczyznę pionową, przechodzącą przez oś Z , na przykład płaszczyznę xOz . Równanie tej płaszczyzny jest $y=0$. Rozwiązując jednocześnie równanie powierzchni krzywej:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + \frac{2gz}{\omega^2} &= C' \\ \text{oraz} \quad y &= 0 \end{aligned}$$

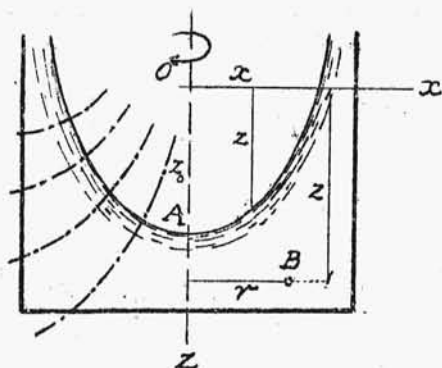
otrzymamy: $x^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C'$. Jest to równanie paraboli, której osią jest oś Z .

Powiemy zatem, że powierzchnie jednakowego ciśnienia w cieczy, znajdującej się w naczyniu, które się obraca jednostajnie około osi pionowej, są paraboloidami obrotowymi.

Powierzchnia swobodna takiej cieczy również jest paraboloidem obrotowym.

Powierzchnię swobodną w danym przypadku dogodnie będzie przedstawiać w przekroju płaszczyzną xOZ . - Wtedy otrzymamy równanie paraboli:

$$x^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = C'$$



rys. 54.

do wyrugowania C' skorzy-
stamy z tego warunku, że
najniższy punkt zwierciadła
cieczy znajduje się
w odległości z_0 i jedno-
cześnie na osi obrotu,
zatem przy $x=0$; mamy
więc dla tego punktu:

$0 + \frac{2gz_0}{\omega^2} = C'$; znaleźliśmy C' , które wstawimy w równanie poprzednie:

$$x^2 + \frac{2gz}{\omega^2} = \frac{2gz_0}{\omega^2},$$

albo

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} (Z_0 - Z) \quad \dots \dots \dots /40/$$

Jest to równanie przekroju swobodnej powierzchni cieczy, obracającej się około osi pionowej.

94. Jeśliby zachodziła potrzeba znalezienia ciśnienia hydrostatycznego, należałoby skorzystać z równania:

$$dp = \frac{\gamma}{g} (Xdx + Ydy + Zdz),$$

po scałkowaniu otrzymamy:

$$p = \frac{\gamma}{g} \int (Xdx + Ydy + Zdz) + \text{Const.}$$

Niech w punkcie A będzie ciśnienie p_a , wtedy

$$p = p_a + \frac{\gamma}{g} \int_a^{(xyz)} (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Jeśli podstawimy na X, Y, Z wartości poprzednio otrzymane, znajdziemy:

$$p = p_a + \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\omega^2 x^2 + \omega^2 y^2}{2} + gz \right)_a^b = p_a + \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\omega^2}{2} r^2 + gz \right)$$

Jeżeli za punkt A przyjmimy wierzchołek para-

beli /najniższy punkt swobodnego zwierciadła/,
dowolny zaś punkt, np. B obierzemy w odległości r
od osi obrotu i na głębokości z od płaszczyzny
 xoy , wtedy:

$$p = p_a + \frac{r}{g} \left[\frac{\omega^2}{2} r^2 + g(z - z_a) \right] \dots \dots \dots /41/$$

95. Znajdźmy równanie linii sił
dla danego przypadku. Ogólne równanie różniczkowe
linii sił jest:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

Spółrzędne ξ i η wobec symetrii powierzchni
jednakowego ciśnienia wobec osi Z są jednakowego
charakteru, zatem wystarczy rozpatrzyć równanie:

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{dz}{Z}$$

Ponieważ $X = \omega^2 x$, $Z = g$, więc

$$\frac{d\xi}{\omega^2 x} = \frac{dz}{g}$$

Tu właściwie x jest jednoznaczne ze współrzędną ξ badanej linii sił.

Mamy zatem:

$$\frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{d\xi}{\xi} = \frac{dz}{g};$$

po scałkowaniu otrzymamy:

$$\frac{1}{\omega^2} \log \xi = \frac{1}{g} \zeta + \text{Const.}, \quad \text{albo} \quad \log \xi = \frac{\omega^2}{g} \zeta + \text{Const.}$$

Niech szukana linja sił przechodzi przez punkt, którego współrzędne są ξ_1 i ζ_1 :

$$\log \xi - \log \xi_1 = \frac{\omega^2}{g} (\zeta - \zeta_1)$$

$$\log \frac{\xi}{\xi_1} = \frac{\omega^2}{g} (\zeta - \zeta_1)$$

Stąd

$$\frac{\xi}{\xi_1} = e^{\frac{\omega^2}{g} (\zeta - \zeta_1)},$$

albo

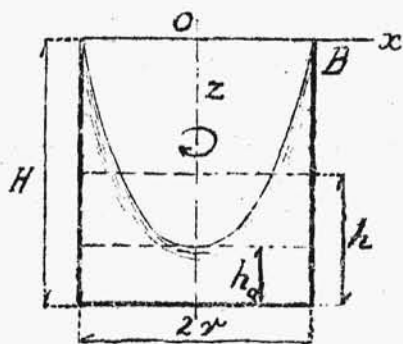
$$\xi = \xi_1 \cdot e^{\frac{\omega^2}{g} (\zeta - \zeta_1)} \quad \dots \dots \dots /42/.$$

Jest to równanie krzywych logarytmicznych.

Łatwo się przekonać, że jest to układ krzywych, które asymptotycznie zbliżają się do osi ζ t.j. do osi obrotu.

96. PRZYKŁAD 20. Mamy naczynie cylindryczne z osią pionową. Średnica naczynia: $= 2r$, wysokość $= H$. Naczynie początkowo jest napełnione cieczą do wysokości h . Znaleźć, z jaką prędkością kątową winno się naczynie obracać, aby ciecz podniosła się do brzegów

naczynia ?



rys. 55.

Niech szukana prędkość
kątowna = ω

Kiedy podczas obrotu
naczynia około osi piono-
wej utworzy się swobodna
powierzchnia paraboloidal-
na, niech wtedy najniższy
punkt A zwierciadła
znajduje się na wysokości

h_0 ponad dnem naczynia. Wówczas objętość cieczy,
zawartej między ściankami naczynia, a swobodną po-
wierzchnią paraboloidalną winna być równą pierwot-
nej objętości cieczy, t.j. $\pi r^2 h$

Objętość cieczy między ściankami naczynia a para-
boloidem znajdziemy w taki sposób:

Objętość całego cylindra = $\pi r^2 H$; objętość pa-
raboloidu obrotowego jest dokładnie równa połowie
objętości cylindra, otaczającego rozpatrywaną część
paraboloidu; ta ostatnia objętość cylindra = $\pi r^2 (H - h_0)$,
zatem objętość paraboloidu: $\frac{1}{2} \pi r^2 (H - h_0)$.

Stąd otrzymujemy, że objętość cieczy po utworze-
niu się powierzchni paraboloidalnej;

$$= \pi r^2 H - \frac{1}{2} \pi r^2 (H - h_0) =$$

$$= \pi r^2 (H - \frac{1}{2} H + \frac{1}{2} h_0) = \frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_0)$$

Ponieważ objętość cieczy w naczyniu przed uruchomieniem jego i podczas obracania naczynia jest jednakowa, zatem:

$$\pi r^2 h = \frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_0),$$

stąd mamy:

$$H + h_0 = 2h$$

h_0 zależy od kształtu paraboli, a więc od prędkości katowej obrotu cylindra. Przyjmijmy osi współrzędnych w taki sposób: oś x poziomo - w płaszczyźnie obrotu cylindra, oś z pionowo w dół. Wtedy, stosując równanie /40/ paraboli, które znaleźliśmy w końcu art. 93:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} (z_0 - z)$$

dla punktu B paraboli, wziętego na krawędzi cylindra, otrzymamy:

dla $x=r, z=0$; prócz tego $z_0 = H - h_0$

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H - h_0)$$

Poprzednio znaleźliśmy, że $h_0 = 2h - H$, więc

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H - 2h + H),$$

zatem

$$\omega^2 = \frac{4g}{r^2} (H - h),$$

stad

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{g(H-h)} \quad \dots \dots \dots /43/$$

97. Z ostatniego równania widzimy, że jeśli naczynie będzie napełnione mniej niż na wysokość h , wówczas, chcąc otrzymać podczas obrotu paraboloid, sięgający górnej krawędzi cylindra, należy zwiększyć prędkość kątową obrotu. Do jakich granic można to zrobić, aby równanie /43/ mogło być stosowane.

Zrozumiałem jest, że im większa będzie prędkość obrotowa, tem mniejsza będzie wysokość h_0 . Najmniejsza wartość h_0 będzie 0; poza tą granicą h_0 stanie się ujemnem, zwierciadło cieczy przestanie być ciągłą powierzchnią paraboloidu.

Kiedy będzie $h_0 = 0$? Otrzymamy to z równania:

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H - h_0)$$

jeżeli ma być $h_0 = 0$, należy mieć $\omega^2 r^2 = 2gH$, a wtedy z równania /43/ otrzymamy wysokość h , którą pierwotnie winna ciecz w naczyniu zajmować:

$$\omega^2 = \frac{4}{r^2} g(H-h),$$

albo

$$\omega^2 r^2 = 4g(H-h);$$

ponieważ jednocześnie $\omega^2 r^2 = 2gH$, więc:

$$2gH = 4g(H-h)$$

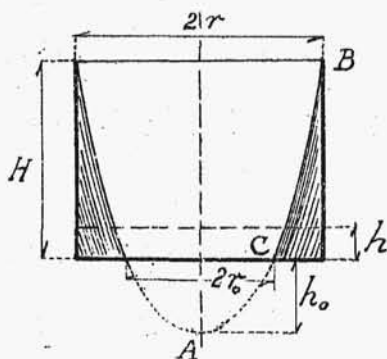
stąd otrzymamy, że

$$h = \frac{1}{2}H$$

Stąd widzimy, że równanie /43/ znajdzie zastosowanie przy głębokościach $h \geq \frac{1}{2}H$.

O ile h będzie $< \frac{1}{2}H$, wówczas otrzymamy inny kształt powierzchni swobodnej w naczyniu. Ciągłość tej powierzchni zginie.

98. Wówczas należy sprawę inaczej rozwiązać.



rys.56.

Objętość cieczy przed uruchomieniem naczynia była $= \pi r^2 h$.

Po uruchomieniu naczynia ciecz zachowa tę samą objętość, lecz pod inną postacią; objętość cieczy w tym wypadku rozpatrywaną znajdziemy,

jak następuje:

Objętość całego cylindra $= \pi r^2 H$; objętość paraboloidu, liczonego od A do górnej krawędzi naczynia $= \frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_0)$; objętość części tego

paraboloidu pod dnem naczynia $= \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0$; stąd objętość cieczy:

$$= \pi r^2 H - \left[\frac{1}{2} \pi r^2 (H + h_0) - \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 \right] = \pi r^2 \left[H - \frac{1}{2} H - \frac{1}{2} h_0 \right] + \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 = \\ = \frac{1}{2} \pi r^2 [H - h_0] + \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 = \frac{1}{2} \pi [(H - h_0) r^2 + h_0 r_0^2]$$

Ta objętość jest równa pierwotnej $\pi r^2 h$, zatem:

$$\frac{1}{2} \pi [(H - h_0) r^2 + h_0 r_0^2] = \pi r^2 h,$$

albo

$$r^2 h = \frac{1}{2} (H - h_0) r^2 + \frac{1}{2} h_0 r_0^2.$$

Z równania /40/:

$$x^2 = \frac{2g}{\omega^2} (z_0 - z),$$

stosując je do punktu A i do punktu B na krawędzi podstawimy: $x = r$, $z_0 = H + h_0$ i $z = 0$, otrzymamy:

$$r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H + h_0).$$

Toż samo równanie zastosujemy do punktu A i do punktu C , w którym parabola przecina dno naczynia, podstawiając:

$$x = r_0; \quad z_0 = H + h_0; \quad z = H$$

otrzymamy:

$$r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H + h_0 - H), \quad \text{albo: } r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} h_0.$$

Mamy zatem trzy równania:

$$\begin{array}{l|l} r^2 h = \frac{1}{2}(H - h_0)r^2 + \frac{1}{2} h_0 r_0^2 \dots (a) & \text{ należy pozbyć} \\ r^2 = \frac{2g}{\omega^2} (H + h_0) \dots (b) & \text{ się } r_0 \text{ i } h_0. \\ r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} h_0 \dots (c) & \end{array}$$

z równania /b/: $h_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} - H$; podstawiamy h_0 w /c/

$$r_0^2 = \frac{2g}{\omega^2} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - H \right) = r^2 - \frac{2gH}{\omega^2}.$$

Następnie wartości h_0 i r_0 podstawiamy w /a/:

$$r^2 h = \frac{1}{2} \left(H - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + H \right) r^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - H \right) \left(r^2 - \frac{2gH}{\omega^2} \right).$$

po wykonaniu wskazanych działań i po redukcji otrzymamy:

$$r^2 h = \frac{gH^2}{\omega^2},$$

a stąd

$$\omega = \frac{H}{r} \sqrt{g/h} \dots \dots \dots /44/$$

Zatem, jeśli $h \geq \frac{1}{2}H$, należy stosować równanie /43/; na przykład, niech $h = \frac{2}{3}H$, wtedy

$$\omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gH}{3}} = \frac{1.156}{r} \sqrt{gH}$$

Jeśli $h < \frac{1}{2}H$, należy stosować równanie /44/; Naprz. niech $h = \frac{1}{3}H$, wtedy

