O zastosowaniu rzutu stereograficznego do gieometrji koła.

§ 1. Badanie figur płaskich zapomocą figur przestrzeni, od których tamte pochodzą, jest jedną z najpotężniejszych metod gieometrji płaskiej. Niebywały rozwój gieometrji w czasach nowszych zawdzięczamy w znacznej części powstaniu w zaraniu XIX wieku gieometrji wykreślnej. Według słów Chasles'a, każdy rysunek z gieometrji wykreślnej jest twierdzeniem gieometrji płaskiej. Dość wspomnieć, naprzykład, twierdzenie o trójkątach perspektywicznych, którego dowód otrzymujemy niejako bez rozumowania, przez sam tylko prosty rysunek w rzucie środkowym lub równoległym piramidy trójkątnej, przeciętej płaszczyzną. Zważmy, iż twierdzenie to, jako prowadzące do własności harmonicznych czworoboku zupełnego, jest zasadniczym dla całej gieometrji rzutowej. Możnaby powiedzieć, że źródło gieometrji rzutowej płaskiej nietylko historycznie (Desargues), ale i logicznie (Staudt) znajduje się w gieometrji przestrzeni.

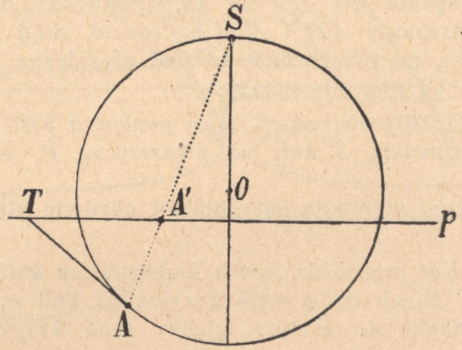
Gieometrja wykreślna przekształca zasadnicze utwory gieometrji przestrzeni, to jest punkt i płaszczyznę, na zasadnicze utwory gieometrji płaskiej, t. j. na punkt i prostą. Nadaje się ona zatym do studjowania rzutowych własności figur płaskich prostokreślnych, natomiast dla gieometrji koła na płaszczyźnie niema tu dogodnych obrazów w przestrzeni. W celu zaradzenia tej potrzebie obmyślił W. Fiedler*) metodę wykreślną, którą nazwał *cyklografją,* a polegającą na tym, że każdemu punktowi przestrzeni odpowiada na płaszczyźnie rysunku koło (a raczej cykl), które jest śladem stożka obrotowego o osi prostopadłej do płaszczyzny, z odchyleniem tworzącej od osi $=45^0$. Metoda ta daje bardzo dogodne wykreślenia (np. wykreślenie osi pierwiastnej dwuch kół) i nadaje się do łatwego rozwiązania wielu zagadnień o kołach, ale nie jest dość elementarna dla szkoły średniej, wymaga bowiem teorji przenikania się dwuch stożków jednokładnych.

---

*) *W. Fiedler.* Die darstellende Geometrie in org. Verbindung mit der Geometrie der Lage, Lipsk 1904, tom I, oraz tegoż autora: Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln und elementare Geometrie der Kreis und Kugelsysteme, Lipsk 1882.

Natomiast, zdaniem moim, nie zwrócono należytej uwagi na nadzwyczaj elementarny charakter rzutu stereograficznego na kuli. Celem niniejszej rozprawki jest naszkicowanie na podstawie tego rzutu twierdzeń zasadniczych gieometrji koła, teorji inwersji i teorji biegunowych w tym zakresie, w jakim te teorje pożądane są w programie szkoły średniej.

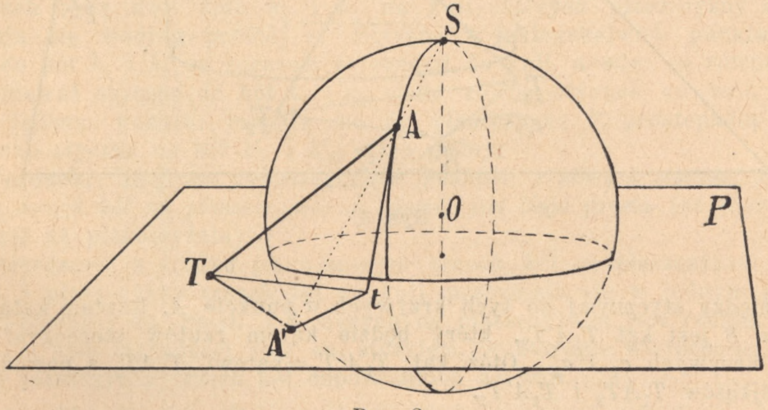
§ 2. **Twierdzenie 1.** *Rzut $A'T$ stycznej do koła O z dowolnego punktu S tego koła na prostą p, prostopadłą do średnicy OS jest równy stycznej AT* (rys. 1).



Rys. 1.

(Styczną nazywam tutaj odcinek linji stycznej od punktu styczności do punktu przecięcia z osią rzutów).

W samej rzeczy, trójkąt $A'AT$ jest równoramienny, bo $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$. Łatwo się przekonać, że twierdzenie jest niezależne od tego, z której strony pro-



Rys. 2.

stej p znajduje się punkt A, oraz od tego, czy prosta p przecina koło, lub nie.

Twierdzenie 2. *Rzut $A'T$ stycznej do kuli O z dowolnego punktu S tej kuli na płaszczyznę P, prostopadłą do średnicy OS, jest równy stycznej AT* (rys. 2).

(Styczną nazywam odcinek linji stycznej, od punktu styczności do punktu przebicia z płaszczyzną rzutów).

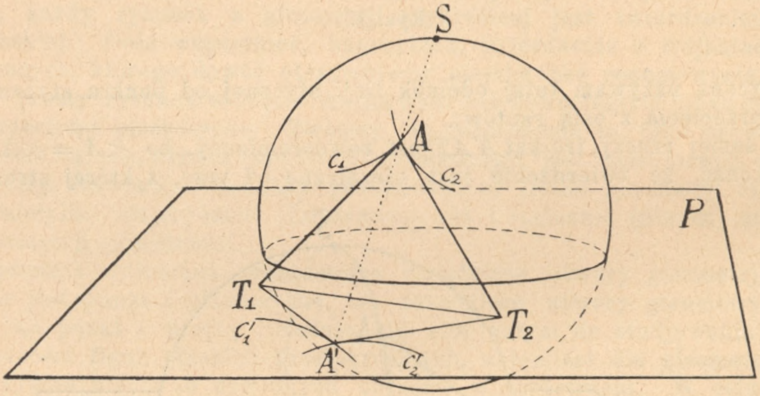
Niech będzie punkt A na kuli, A' jego rzut z punktu S na płaszczyznę P prostopadłą do OS, AT jakakolwiek styczna do kuli w punkcie A. Poprowadźmy wielkie koło przez S i A oraz styczną At do tego koła. Płaszczyzna TAt jest styczną do kuli, a więc prostopadłą do płaszczyzny SAO, stąd wynika, że linja Tt jest prostopadła do płaszczyzny SAO, gdyż jest to linja przecięcia dwuch płaszczyzn (P i TAt), prostopadłych do płaszczyzny SAO; zatym Tt jest prostopadła do At i do $A't$. Ponieważ, na mocy twierdzenia 1-go $A't = At$, więc trójkąty ATt i $A'Tt$ są równe, skąd $AT = A'T$.

Jest oczywistym, że twierdzenie to jest niezależne od konfiguracji, skoro twierdzenie 1-sze od niej nie zależy.

Określenie. *Rzutem stereograficznym punktu A kuli nazywa się rzut środkowy A' z dowolnego punktu S kuli na płaszczyznę P, prostopadłą do średnicy OS.*

Z twierdzenia 2-go wynikają natychmiast obydwie własności rzutu stereograficznego.

Wniosek 1. *Kąt przecięcia dwuch krzywych na kuli zachowuje się w rzucie stereograficznym.* Niech będą dwie krzywe na kuli c_1 i c_2 (rys. 3), przecinające się w punkcie A. Kątem między temi krzywemi nazywamy kąt



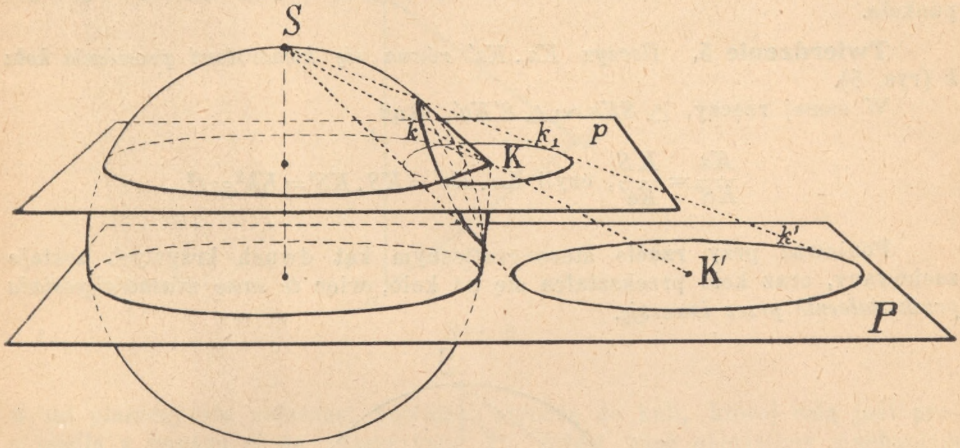
Rys. 3.

T_1AT_2 między stycznymi do tych krzywych w punkcie A. Rzutem kąta T_1AT_2 z punktu S jest kąt $T_1A'T_2$, który będzie kątem rzutów stereograficznych c'_1 i c'_2 krzywych c_1 i c_2. Otóż kąt $T_1A'T_2$ = kątowi T_1AT_2 z powodu równości trójkątów T_1AT_2 i $T_1A'T_2$.

Wniosek 2. *Rzut stereograficzny koła k na kuli jest kołem k'. Środek K' koła k' jest rzutem wierzchołka K stożka opisanego na kuli według koła k.*

Przez wierzchołek K (rys. 4) poprowadźmy płaszczyznę p, równoległą do P. Ponieważ wszystkie tworzące stożka K są to styczne do kuli, przebijające płaszczyznę p w punkcie K, więc ich rzuty z punktu S na płaszczyznę p będą im równe, a ponieważ wszystkie styczne do kuli z punktu

K są sobie równe, więc rzutem stereograficznym koła k na płaszczyznę p będzie równe mu koło k_1; rzut koła k na płaszczyznę P, równoległą do p, musi być figurą podobną do k_1, to jest kołem.



Rys. 4.

Z powyższego wynika odrazu, że koła styczne muszą się rzucać jako koła styczne, koła ortogonalne jako koła ortogonalne i t. d.

Twierdzenie 3. *Linja przecięcia płaszczyzn dwuch kół na kuli jest miejscem gieometrycznym punktów, z których styczne do dwuch kół są równe* (oś pierwiastna dwuch kół na kuli).

Niech będą dwa koła k_1 i k_2 na kuli, których płaszczyzny Q_1 i Q_2 przecinają się według prostej r. Styczne z jakiegokolwiek punktu M tej prostej do kół k_1 i k_2 są zarazem stycznemi do kuli, a więc są równe.

Ponieważ styczne do kół k_1 i k_2, jako równe styczne do kuli, wychodzące z jednego punktu, rzucają się na płaszczyznę P, prostopadłą do OS, jako równe styczne do kół k'_1 i k'_2, więc mamy:

Wniosek. *Miejscem gieometrycznym punktów, z których styczne, wyprowadzone do dwuch kół na płaszczyźnie, są równe, jest linja prosta* (oś pierwiastna dwuch kół na płaszczyźnie).

Twierdzenie o środku pierwiastnym trzech kół na płaszczyźnie wynika stąd, że 3 płaszczyzny trzech kół na kuli przecinają się w jednym punkcie. Koło ortogonalne do trzech kół danych na płaszczyźnie, jest rzutem stereograficznym koła styczności kuli ze stożkiem, w którego wierzchołku przecinają się płaszczyzny trzech kół odpowiednich na kuli.

§ 3. **Określenie.** *Dwa punkty a i a' na płaszczyźnie P są w inwersji względem koła k, jeżeli są to rzuty stereograficzne punktu A na kuli, przechodzącej przez k, z dwuch końców S i S' średnicy prostopadłej do P* (rys. 5).

Twierdzenie 4. *Związek punktów a i a' jest inwolucyjny*, to jest, jeżeli punktowi a odpowiada punkt a', to i nawzajem, punktowi a' odpowiada punkt a.

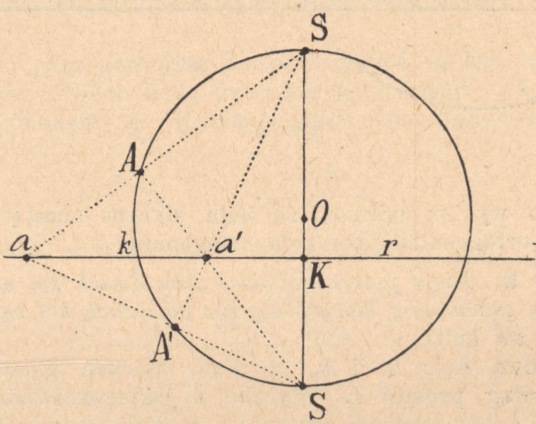
Niech rys. 5 przedstawia przekrój kuli płaszczyzną, przechodzącą przez oś OS i punkt A. Jeżeli połączymy punkt a z punktem S' i punkt przecięcia A' prostej aS' z kulą połączymy z punktem S, to prosta $A'S$ przejdzie przez punkt a', gdyż trzy wysokości trójkąta $SS'a$ spotykają się w jednym punkcie.

Twierdzenie 5. *Iloczyn* $Ka \, . \, Ka'$ *równa się kwadratowi promienia koła* k (rys. 5).

W samej rzeczy, $\triangle \, SKa \sim \triangle \, S'Ka'$, skąd

$$\frac{Ka}{KS'} = \frac{KS}{Ka'}, \text{ czyli } Ka \, . \, Ka' = KS \, . \, KS' = Kk^2 = r^2 \, .$$

Ponieważ przy rzucie stereograficznym kąt dwuch krzywych zostaje zachowany, oraz koło przekształca się na koło, więc *te same własności posiada przekształcenie przez inwersję.*



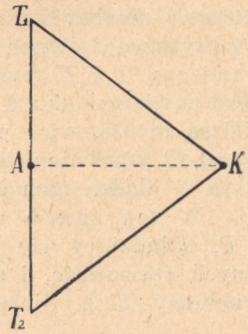
Rys. 5.

Że linja prosta przekształca się na koło, przechodzące przez środek inwersji, i nawzajem, jest, przy powyższym określeniu inwersji, oczywistym.

Szczególnie dogodną będzie ta teorja dla krzywych *analagmatycznych*, to jest nie zmieniających się przez inwersję. Można z łatwością okazać na mocy powyższego, że wszelka krzywa analagmatyczna jest rzutem stereograficznym przecięcia kuli z dowolnym stożkiem, którego wierzchołek znajduje się w biegunie płaszczyzny P.

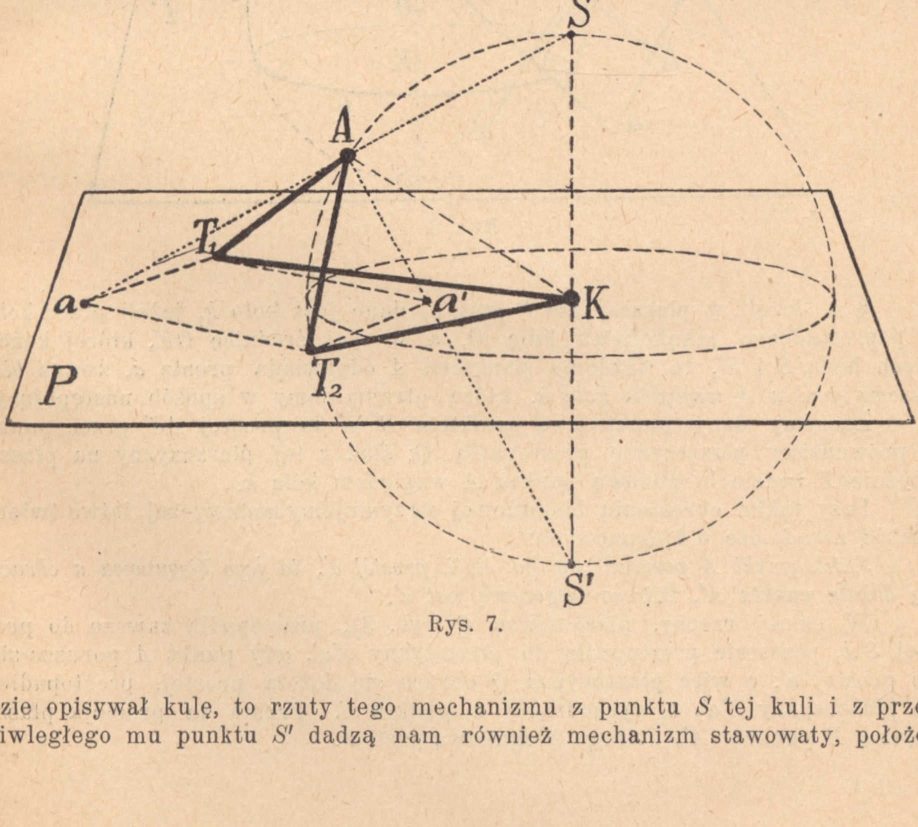
Jeżeli płaszczyzna P nie przecina kuli O, to i wtedy, jak łatwo widzieć, istnieje odpowiedniość inwolucyjna punktów a i a', jakkolwiek koło inwersji jest urojone. Mamy wtedy t. zw. *inwersję lewą*, przy której punkty a i a' są po przeciwległych stronach punktu K; iloczyn $Ka \, . \, Ka'$ równa się wtedy kwadratowi stycznej do kuli, wyprowadzonej z punktu K.

Aby dać przykład wdzięcznego zastosowania powyższych twierdzeń, zwróćmy się do zagadnienia *inwersorów*, to jest narzędzi, składających się z prętów stawowato połączonych, a służących do wykreślania figur znajdujących się w inwersji. Są dwa rodzaje linji, których rzuty na płaszczyznę P z pewnego punktu S nie zmieniają swojej wielkości: po pierwsze, linje



Rys. 6.

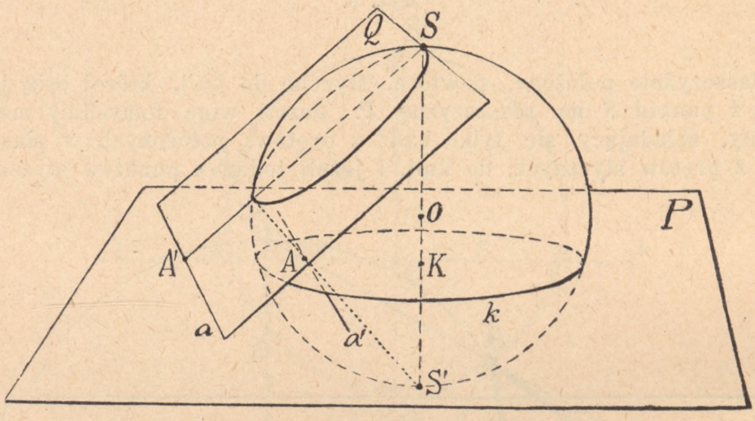
w tej płaszczyźnie położone, powtóre, styczne do kuli, której osią jest prostopadła z punktu S na płaszczyznę P. Jeżeli więc obmyślimy mechanizm stawowaty, składający się tylko bądź z prętów, położonych w płaszczyźnie P, bądź z prętów stycznych do kuli, i jeżeli jeden z punktów styczności bę-



Rys. 7.

dzie opisywał kulę, to rzuty tego mechanizmu z punktu S tej kuli i z przeciwległego mu punktu S' dadzą nam również mechanizm stawowaty, położony na płaszczyźnie P, a rzuty stereograficzne punktu, opisującego kulę, dadzą nam dwa punkty mechanizmu, opisujące figury, znajdujące się w inwersji.

Otóż jednym z najprostszych mechanizmów, opisujących kulę, a składających się tylko z prętów powyższych dwuch kategorji, jest następujący: Niech będzie trójkąt równoramienny T_1T_2K (rys. 6), którego boki są prętami, połączonemi stawowato tylko w wierzchołku K i w środku A podstawy T_1T_2. Ponieważ kąty T_1AK i T_2AK są proste, więc pręty AT_1 i AT_2 będą stycznemi do kuli, której środkiem jest K, a promieniem KA (rys. 7). Rzuty mechanizmu z punktu S i z punktu S' dadzą nam *romb* (Tw. 2), którego wierzchołki a i a' będą w inwersji. W ten sposób otrzymujemy słynny *inwersor Peaucelier'a* na płaszczyźnie P, składający się z czterech równych prętów aT_1, $a'T_1$, aT_2 i $a'T_2$, połączonych stawowato, i dwuch równych prętów KT_1 i KT_2, łączących punkt nieruchomy K z wierzchołkami przeciwległymi T_1 T_2 rombu.



Rys. 8.

§ 4. Jeżeli w płaszczyźnie P (rys. 8) dane jest koło k, jeżeli przez koło k poprowadzono jakąkolwiek kulę O, a w niej średnicę OK, której końce niech będą S i S', to każdemu punktowi A odpowiada prosta a, zwane *biegunową punktu A względem koła k*, którą otrzymujemy w sposób następujący:

Łączymy dany punkt A z punktem S' i do prostej AS' przez punkt S prowadzimy płaszczyznę prostopadłą Q; ślad a tej płaszczyzny na płaszczyźnie P będzie biegunową punktu A względem koła k.

Przy takim określeniu biegunowej otrzymujemy nadzwyczaj łatwo twierdzenie zasadnicze o biegunowych:

Jeżeli punkt A porusza się po linji prostej a', to jego biegunowa a obraca się dokoła punktu A', którego biegunową jest a'.

W samej rzeczy, płaszczyzna Q (rys. 8), prostopadła zawsze do prostej $S'A$, pozostaje prostopadłą do płaszczyzny $S'a'$, gdy punkt A porusza się po prostej a'; a więc płaszczyzna Q obraca się dokoła prostej, prostopadłej do płaszczyzny $S'a'$, a wychodzącej z punktu S. Prosta ta przebija płaszczyznę P punkcie A', którego biegunową jest a'.

Jedną z zalet takiej definicji biegunowych, jest możliwość elementarnego określenia *pola biegunowego* nawet wtedy, gdy koło k jest urojone. Mianowicie teorja ta (podobnie jak i teorja inwersji) bynajmniej nie zależy od tego, czy płaszczyzna P przecina kulę O, czy nie. Aby określić pole biegunowe na płaszczyźnie P, wystarcza podać dwa punkty S i S' znajdujące się na wspólnej prostopadłej do P.

W końcu zaznaczę, że dowolnie przesuwając punkty S i S' w przestrzeni, a zachowując pole biegunowe P, wykonamy deformację kuli na powierzchnię ogólną 2-go stopnia. Tego rodzaju rozważania wychodzą jednak poza zakres programu szkoły średniej.

S. Garlicki.