Stąd

$$mf_x = -\frac{mgx}{l} \qquad f_x = -\left(\frac{g}{l}\right)x = -a^2x \ .$$

To równanie określa ruch drgający prosty o okresie

$$\frac{2\pi}{\sqrt{a}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ .$$

Łatwo wyznaczyć rząd błędu, popełnionego przy powyższym założeniu. Równanie składowej normalnej ruchu po łuku $BB'$, oraz równanie energji brzmią

$$\frac{mx^2}{l} = T - mg\cos\theta \ ,$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(\cos\theta - \cos\alpha) \ .$$

Skąd

$$T = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\alpha) = mg(3\cos\theta - 2\cos\alpha) \ ,$$

$$T - gm = gm\{2(1-\cos\alpha) - 3(1-\cos\theta)\} \ .$$

Jeśli przez $z$ oznaczymy $RC$ czyli wzniesienie się punktu $P$ ponad poziom punktu $C$, a przez $h$ największą wartość tej wielkości, czyli $CD$, to

$$T - mg = \frac{mg}{l}(2h - 3z) \qquad T = mg\left(1 + \frac{2h}{l} - \frac{3z}{l}\right) \ .$$

Nadając $z$ wartości skrajne 0 i $z$, pomiędzy któremi się waha, znajdziemy największe wartości błędu, popełnianego przez założenie, że $T = mg$. Błąd względny będzie

$$-\frac{h}{l} \leqslant \frac{T - mg}{mg} \leqslant 2\frac{h}{l}$$

jest więc tego rzędu, co stosunek $\frac{h}{l}$; poprawka na okres będzie rzędu $\left(\frac{h}{l}\right)^2$.

Wzór $z = \frac{2h}{3}$ pozwala obliczyć pozycję, w której mamy ściśle $T = mg$.

## Prosty sposób rozwiązania równania 3-go stopnia.

W równaniu uwolnionym od drugiego wyrazu

$$x^3 + ax + b = 0$$

wykonajmy podstawienie

$$x = y + \frac{h}{y} \ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gdzie $h$ jest stałą nieoznaczoną *).

---

*) Vieta używał analogicznego podstawienia. Porów. Mathiessen *Grundzüge der antiken u. modernen Algebra*, p. 371.

$$y^3+3hy+\frac{3h^2}{y}+\frac{h^3}{y^3}+ay+\frac{ah}{y}+b=0\ ,$$

$$y^3+(3h+a)y+(3h+a\frac{h}{y}+\frac{h^3}{y^3}+b=0\ ,$$

$$y^3+(3h+a)\left(y+\frac{h}{y}\right)+\frac{h^3}{y^3}+b=0\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wyznaczmy teraz $h$ tak, żeby było

$$3h+a=0\ ,$$

t. j. uczyńmy $h=-\frac{a}{3}$.

Równanie (2) weźmie postać

$$y^3-\frac{a^3}{27y^3}+b=0\ , \quad \text{czyli}$$

$$y^6+by^3-\frac{a^3}{27}=0\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

skąd
$$y^3=-\frac{b}{2}\pm\sqrt[3]{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}$$

$$y=\alpha\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

gdzie $\alpha$ jest jednym z trzech pierwiastków sześciennych z jedności $\varepsilon$, $\varepsilon^2$, 1.

Podstawiając (4) w (1), mamy

$$x=\alpha\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\frac{-\frac{a}{3}}{\alpha\sqrt[3]{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}}\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

gdzie w obu składnikach należy brać pod pierwiastkiem sześciennym jednakowe znaki.

Jakkolwiek równanie daje 6 rozwiązań, wzór (5) daje ich tylko 3, gdyż

$$\alpha\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}+\frac{-\frac{a}{3}}{\alpha\sqrt[3]{-\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}}\equiv\frac{-\frac{a}{3}}{\alpha^2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}}+$$
$$+\alpha^2\sqrt[3]{-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}}\ .$$

Możemy zatym we wzorze (5) pominąć podwójne znaki i wziąć tylko jeden z nich, tak że ostatecznie

$$x = \alpha \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \frac{-\frac{a}{3}}{\alpha \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}}, \quad (\alpha = \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ 1) \quad . \quad . \quad (6)$$

Wzór (6) ma, moim zdaniem, tę wyższość nad wzorem Cardana, że suma $u+v$, której każdy składnik posiada 3 odrębne wartości, posiada tam 9 odrębnych wartości, z których tylko 3 dają rozwiązania równania sześciennego, i dopiero przez rozważanie równości

$$uv = -\frac{a}{3}$$

z pośród tych dziewięciu otrzymuje się 3 przydatne wartości:

Wzór (6) zaś daje te odpowiedzi przez proste podstawienia $\alpha = \varepsilon$, $\varepsilon^2$, 1, pozwala zatym uniknąć stosowania dość zawiłej metody, obmyślonej przez Cayley'a dla ominięcia tej trudności, a podanej w „Algiebrze“ Webera I, 134.

*Stanisław Garlicki.*

## Uwagi praktyczne o wykładzie pewnych pojęć gieometryeznych.

Połączenie ścisłości z przystępnością stanowi w dydaktyce matematycznej zagadnienie pierwszorzędne, a rozstrzygane nader rozmaicie, w zależności od wiedzy, nawyknień i rodzaju umysłowości nauczyciela lub autora podręcznika szkolnego. Zagadnienie to występuje jednak właściwie wtedy tylko, gdy istnieje jakiś istotny lub pozorny konflikt pomiędzy ścisłością wykładu a jego zrozumiałością. Gdy konfliktu takiego niema, t. j. gdy zwiększenie stopnia ścisłości nie pociąga za sobą utrudnień i zawikłań, wtedy nie powinno być nawet sporów o kierunek wyboru. Spotykamy atoli objawy wręcz sprzeczne z tą zasadą—ba, nawet niekiedy „uprzystępnienie“ pozorne jakiegoś tematu bywa jedynie rozwodnieniem treści, i zatarciem zarysów w mgławicy nieśmiałych lub zagadkowo apodyktycznych omówień.

Uwagi tego rodzaju nasuwają mi się oddawna z powodu pewnych szczegółów w wykładzie gieometrji wykreślnej. Ponieważ, o ile mi wiadomo, kiełkuje obecnie zamiar wydania nowego i ulepszonego podręcznika szkolnego, przeto myślę, że nie zawadzi poddać rozbiorowi krytycznemu np. parę stronic jednej z książek, używanych dotychczas*).

Mowa o własnościach ogólnych powierzchni. „Stosownie do tego, czy tworząca jest linją prostą czy krzywą, dzielimy powierzchnie na prostokreślne i krzywokreślne“. Określenie to nie jest ścisłe, gdyż np. powierzchnia wal-

*) *Dr. M. Łazowski.* Zasady gieometrji wykreślnej, str. 100, 101, 102.