O liczbach pitagorejskich w wykładzie szkolnym.

§ 1. Algiebra elementarna w pierwszych latach nauczania zazwyczaj wydaje się uczniom nauką nawskroś formalną i mało użyteczną. Działania na wyrażeniach wymiernych sprowadzają się w umyśle zdolniejszych nawet uczniów do mechanicznego stosowania pewnej ilości wyuczonych reguł; uczniowie nie mają zwykle pojęcia, do czego to wszystko przydać się może. Większość wprawdzie wcale sobie tego pytania nie zadaje, bo przyzwyczajona w klasach niższych do uczenia się dla otrzymania dobrego stopnia, sądzi zapewne, że taki jest cel wszelkiego nauczania i uczy się nieźle, podczas gdy uczniowie zdolniejsi, o więcej twórczym usposobieniu umysłu uważają początki algiebry za jedną z plag trapiących młodzież szkolną. Dopiero w ustawianiu równań, a zwłaszcza w dyskusji równań mogą się uwydatnić i rozwinąć wrodzone, a niewydobyte dotąd na jaw zdolności analityczne umysłów; niestety, słabe opanowanie praktyczne działań algiebraicznych nieraz jest zbyt wielką przeszkodą w późniejszej pracy osobistej ucznia; rzadko który ma dość wytrwałości, aby powrócić do znienawidzonych początków. Jakiż jest sposób naprawienia tych tak nienormalnych, a bardzo niestety powszechnych objawów, w jaki sposób obudzić zainteresowanie uczniów nauką algiebry od samych niemal jej początków?

Dwojaką na to pytanie otrzymujemy zwykle odpowiedź. Jedni zalecają wielką ścisłość w podawaniu dowodów i formułowaniu określeń, drudzy ułatwić i ożywić chcą naukę przez gieometryczne analogje. Obydwa te środki należy jednak stosować z wielką ostrożnością. Ścisłość powinna wynikać z potrzeby, nigdy zaś nie powinna być kunsztem nieużytecznym; ścisłość jest potrzebna przedewszystkim tam, gdzie umysł nie ma jasnego przeświadczenia o prawdzie i zapomocą logiki musi ją udowodnić, gdzie może być dyskusja, t. j. gdzie można od zdrowego rozsądku ucznia oczekiwać zaprzeczeń albo przynajmniej wątpliwości. W miarę postępów nauczania potrzeba ścisłości wzrastać powinna, bo umysł ucznia przejmować się będzie stopniowo duchem analizy. Ale tej potrzeby ścisłości nauczyciel w uczniu nie zastaje, — jego głównym zadaniem jest właśnie tę potrzebę rozbudzić. Jedyną drogą do tego celu jest nakłanianie ucznia do badania coraz to więcej oderwanych zagadnień matematycznych. Co do analogji gieometrycznych, to myślę, że w początkach nauczania algiebry niewielki mogą one dać pożytek, bo punktem wyjścia analizy musi być pojęcie liczby całkowitej, podczas gdy pojęcie to obcym jest najzupełniej określeniu i naturze utworów gieometrycznych, tak że dopiero przez wprowadzenie liczb niewymiernych może być stworzona doskonała odpowiedniość analizy i gieometrji.

Dochodzę zatym do wniosku, że niezmiernie pożądanym jest wprowadzić do nauczania algiebry osobiste poszukiwania matematyczne uczniów. Wydaje mi się, że najlepszym ożywieniem oschłych nieco początków algiebry jest zastosowanie potężnych jej metod rachunku do zagadnień teorji liczb, której wogóle zbyt mało poświęca się miejsca w programach szkolnych. Uważam zresztą za rzecz użyteczną i naturalną, aby algiebra z początku wydawała się uczniowi kontynuacją arytmetyki.

Na tak postawione żądanie możnaby usłyszeć zarzut, że nie jest rzeczą możliwą, albo przynajmniej łatwą, znaleźć taki temat, któryby, traktowany środkami elementarnemi, mógł doprowadzić ucznia do ciekawych wyników, nawet przy pomocy nauczyciela. Nie sądzę, aby tak było. Na dowód tego pragnę naszkicować monograficzne rozwinięcie jednego z takich tematów, mianowicie zagadnienia t. zw. *liczb pitagorejskich.* Chociaż punktem wyjścia jest postęp arytmetyczny (ciąg liczb nieparzystych), ale sądzę mimo to, że większość poniższych rozważań jest zupełnie dostępna dla początkujących, a nawet przekonany jestem, że przy umiejętnym kierownictwie nauczyciela, znaczna część wyników może być znaleziona własną pracą uczniów.

§ 2. *Liczbą parzystą* nazywa się liczba podzielna przez 2, lub inaczej mówiąc, liczba, składająca się z dwuch równych liczb: $n+n=2n$. *Liczbą nieparzystą* nazywa się każda inna liczba całkowita. Liczba nieparzysta nie dzieli się zatym przez 2, t. j. przy dzieleniu przez 2 daje resztę 1. Możemy więc powiedzieć, że liczba nieparzysta = parzystej + 1 = $2n+1 = (n+1)+n$, albo słowami: l i c z b a n i e p a r z y s t a j e s t s u m ą d w u c h l i c z b k o l e j n y c h.

Ponieważ liczba nie zmienia się, gdy ją pomnożyć przez 1, więc liczba nieparzysta, czyli suma dwuch liczb kolejnych nie zmieni się, gdy ją pomnożymy przez różnicę tych samych dwuch liczb kolejnych, równą jedności. Ale iloczyn sumy dwuch liczb przez różnicę tych samych liczb równa się różnicy ich kwadratów, mamy więc

Twierdzenie I. *Każda liczba nieparzysta jest różnicą kwadratów dwuch liczb kolejnych.*

Twierdzenie to sprawdza się zresztą za pomocą tożsamości:

$$(n+1)^2-n^2=2n+1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zastosujmy to twierdzenie do p pierwszych liczb nieparzystych, t. j. połóżmy w równości (1) zamiast n kolejno liczby 0, 1, 2,...$p-1$.

$$\begin{aligned} 1^2-0^2 &= 1 \\ 2^2-1^2 &= 3 \\ 3^2-2^2 &= 5 \\ &\ldots\ldots \\ p^2-(p-1)^2 &= 2p-1 \end{aligned}$$

Łatwo spostrzec, że jeżeli dodamy wszystkie te równości, otrzymamy:

$$p^2=1+3+5+\ldots+(2p-1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Twierdzenie II. *Kwadrat każdej liczby całkowitej p jest sumą p pierwszych liczb nieparzystych.*

§ 3. *Liczbami pitagorejskiemi* nazywają się układy 3 liczb całkowitych, których kwadraty mają tę własność, że suma dwuch mniejszych równa się trzeciemu największemu. Zagadnienie pitagorejskie polega na znalezieniu sposobu ogólnego dla tworzenia tych liczb. W języku gieometrycznym zagadnienie pitagorejskie brzmi: Znaleźć 3 liczby całkowite, które mogłyby być miarami boków trójkąta prostokątnego. Z twierdzenia II wynika łatwy sposób rozwiązania zagadnienia pitagorejskiego.

W samej rzeczy, napiszmy ciąg liczb nieparzystych

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37 \ldots\ldots\ldots (3)$$

Na mocy twierdzenia II suma ilukolwiek pierwszych kolejnych liczb tego ciągu jest kwadratem. Jeżeli więc między liczbami ciągu spostrzeżemy jaki kwadrat (a będą tam kwadraty wszystkich liczb nieparzystych) np. 9, to suma wszystkich liczb nieparzystych mniejszych od 9 jest kwadratem i suma tych liczb więcej 9 jest też kwadratem:

$$\underline{\overline{1,\ 3,\ 5,\ 7,}\ 9}$$

Mamy zatym tożsamość:

$$(1+3+5+7)+9=(1+3+5+7+9) \quad \text{czyli}$$
$$4^2 \quad +3^2= \quad 5^2$$

Drugi przykład:

$$(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23)+25=$$
$$12^2 \qquad\qquad +5^2=$$
$$=(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25)$$
$$=13^2$$

Tym sposobem znajdziemy wszystkie liczby pitagorejskie, z których dwie największe różnią się o jedność. Oto następujące układy tego typu (typ I):

$$(1+3+\ldots+\ 47)+\ 49=1+3+\ldots+\ 49; \quad 24^2+\ 7^2=25^2$$
$$(1+3+\ldots+\ 79)+\ 81=1+3+\ldots+\ 81; \quad 40^2+\ 9^2=41^2$$
$$(1+3+\ldots+119)+121=1+3+\ldots+121; \quad 60^2+11^2+61^2$$
$$(1+3+\ldots+167)+169=1+3+\ldots+169; \quad 84^2+13^2=85^2 \text{ i t. d.}$$

§ 4. Drugi typ układów pitagorejskich otrzymamy, poszukując wszystkich kwadratów, które byłyby sumą dwuch liczb nieparzystych kolejnych. Ponieważ suma dwuch liczb nieparzystych jest parzystą, więc będą to oczywiście kwadraty liczb parzystych. Łatwo okazać, że *wszystkie kwadraty liczb parzystych dadzą się przedstawić jako suma dwuch liczb nieparzystych kolejnych.* W samej rzeczy, kwadrat liczby parzystej jest podzielny przez 4, można go zatym przedstawić jako sumę dwuch liczb parzystych równych. Odejmując od jednej jedność i dodając do drugiej jedność, otrzymamy dwie liczby nieparzyste sąsiednie. I tak

$$2^2 = 4 = 2+2 = 1+3$$
$$4^2 = 16 = 8+8 = 7+9$$
$$6^2 = 36 = 18+18 = 17+19$$
$$8^2 = 64 = 32+32 = 31+33 \text{ i t. d.}$$

Jeżeli teraz z pośród liczb ciągu (3) weźmiemy pod uwagę dwie liczby sąsiednie, których suma jest kwadratem, np. 7 i 9, to suma wszystkich liczb nieparzystych mniejszych od 7 jest kwadratem, i suma tych liczb zwiększona o 7+9 jest też kwadratem

$$\overline{\underline{1,\ 3,\ 5,}\ 7,\ 9}$$

Mamy zatym tożsamość:

$$(1+3+5)+(7+9) = 1+3+5+7+9$$
$$3^2 \quad + \quad 4^2 \quad = \quad 5^2$$

W ten sposób znajdziemy wszystkio liczby pitagorejskie takie, że największa różni się od jednej z mniejszych o 2. Następne układy tego typu będą

$$(1+3+\ldots+15)+(17+19) = 1+3+\ldots+19; \quad 8^2+6^2 = 10^2$$
$$(1+3+\ldots+29)+(31+33) = 1+3+\ldots+33; \quad 15^2+8^2 = 17^2$$
$$(1+3+\ldots+47)+(49+51) = 1+3+\ldots+51; \quad 24^2+10^2 = 26^2$$
$$(1+3+\ldots+69)+(71+73) = 1+3+\ldots+73; \quad 35^2+12^2 = 37^2$$

Łatwo zauważyć, że niektóre układy tego typu pochodzą od podwojenia liczb układu pierwszego typu. I tak (8, 6, 10) pochodzi od (4, 3, 5), liczby (24, 10, 26) pochodzą od liczb (12, 5, 13) i t. d. Tych układów pochodnych można nie uważać za nowe rozwiązania, gdyż jeżeli liczby a, b i c sprawdzają równość $a^2+b^2=c^2$, to oczywiście ma, mb, i mc sprawdzać będą równośc $(ma)^2+(mb)^2=(mc)^2$.

Już z tego, co wyżej powiedziano wynika: 1) *układów pitagorejskich jest nieskończenie wiele* i 2) *każda liczba całkowita może być przyprostokątną trójkąta pitagorejskiego.*

§ 5. Do trzeciego typu układów pitagorejskich zaliczamy te układy, w których różnica największej liczby i jednej z mniejszych równa się 3. Wszystkie układy tego typu znajdziemy, poszukując wszystkich kwadratów, które dałyby się przedstawić jako suma trzech liczb nieparzystych. Będą to oczywiście kwadraty liczb nieparzystych, bo suma trzech liczb nieparzystych jest zawsze nieparzystą. Powtóre, będą to kwadraty liczb podzielnych przez 3, bo suma trzech liczb nieparzystych sąsiednich daje się przedstawić w postaci sumy trzech liczb równych przez odjęcie 2 od największej i dodanie 2 do najmniejszej. I nawzajem, kwadrat każdej liczby nieparzystej, podzielnej przez 3, jest sumą trzech liczb nieparzystych sąsiednich. I tak

$$3^2 = 9 = 3.\ 3 = 3+3+3 = 1+3+5$$
$$9^2 = 81 = 3.\ 27 = 27+27+27 = 25+27+29$$
$$15^2 = 225 = 3.\ 75 = 75+75+75 = 73+75+77$$
$$21^2 = 441 = 3.147 = 147+147+147 = 145+147+149 \text{ i t. d.}$$

Każdemu kwadratowi tego typu (oprócz 3^2) odpowiada układ pitagorejski. Tak np. z tożsamości

$$(1+3+\dots+23)+(25+27+29)=1+3+\dots+29$$

wynika układ: $12^2+9^2=15^2$. Następne układy typu III będą

$$(1+3+\dots+71)+(73+75+77)=1+3+\dots+77; \quad 36^2+15^2=39^2,$$
$$(1+3+\dots+143)+(145+147+149)=1+3+\dots+149; \quad 72^2+21^2=75^2,$$
$$(1+3+\dots+239)+(241+243+245)=1+3+\dots+245; \quad 120^2+27^2=123^2 \text{ i t. d.}$$

Widzimy że układy te pochodzą od układów typu I, przez pomnożenie ich przez 3. Można łatwo okazać, że *wszystkie* układy typu III pochodzą od układów typu I i należałoby uczniów do podania dowodu zachęcić.

§ 6. W podobny sposób można iść dalej, t. j. szukać kwadratów, które są sumą czterech parzystych składników, pięciu nieparzystych, sześciu parzystych i t. d. To nas prowadzi do następującego zagadnienia:

Ilu sposobami dana liczba może być przyprostokątną trójkąta pitagorejskiego?

Na to odpowiedź będzie bardzo prosta. Dana liczba może być miarą przyprostokątnej w tylu trójkątach pitagorejskich, ilu sposobami może jej kwadrat być sumą parzystej liczby parzystych, lub nieparzystej liczby nieparzystych równych składników, nie licząc sumy n składników, z których każdy $=n$. Innemi słowy: w tylu trójkątach, ilu sposobami kwadrat liczby może być iloczynem dwuch nierównych parzystych lub dwuch nierównych nieparzystych czynników. Stąd wynika zaraz wniosek:

Liczba pierwsza może być miarą przyprostokątnej tylko w jednym trójkącie pitagorejskim.

Co do innych liczb, to znajdźmy np., w ilu trójkątach pitagorejskich wchodzi liczba 12.

$$12^2=72\cdot2=36\cdot4=24\cdot6=18\cdot8$$

Zatym w 4 trójkątach. Znajdujemy je w sposób następujący:

$$\begin{aligned}12^2&=72+72=71+73\\&=36+36+36+36=33+35+37+39\\&=24+24+24+24+24+24=19+21+23+25+27+29\\&=18+18+18+18+18+18+18+18=11+13+15+17+19+21+23+25\end{aligned}$$

$$(1+\dots+69)+(71+73)=1+\dots+73; \quad 35^2+12^2=37^2$$
$$(1+\dots+31)+(33+\dots+39)=1+\dots+39; \quad 16^2+12^2=20^2$$
$$(1+\dots+17)+(19+\dots+29)=1+\dots+19; \quad 9^2+12^2=15^2$$
$$(1+\dots+9)+(11+\dots+25)=1+\dots+25; \quad 5^2+12^2=13^2$$

Podobnież znajdziemy, że liczba 15 może być przyprostokątną w 4 trójkątach na zasadzie rozkładu:

$$15^2=225\cdot1=75\cdot3=45\cdot5=25\cdot9$$

Oto one: $112^2+15^2=113^2$; $36^2+15^2=39$; $20^2+15^2=25^2$; $8^2+15^2=17^2$.

Aby podać wzór na ilość odnośnych trójkątów pitagorejskich, przypuśćmy, że dana liczba n ma m czynników pierwszych: $a_1, a_2, \dots a_m$, z których pierwszy powtarza się α_1 razy, drugi α_2 razy, ... m-ty α_m razy i przypuśćmy najpierw, że n jest nieparzystą liczbą. Niech zatym

$$n^2 = a_1^{2\alpha_1} \cdot a_2^{2\alpha_2} \dots a_m^{2\alpha_m}.$$

Łatwo spostrzec, że ilość sposobów rozłożenia liczby n^2 na dwa czynniki (włączając rozkład $1 \cdot n^2$) będzie połowę ilości wyrazów rozwinięcia iloczynu

$$P = (1 + a_1)^{2\alpha_1} \cdot (1 + a_2)^{2\alpha_2} \dots (1 + a_m)^{2\alpha_m}$$

Ponieważ odrzucamy rozkład na czynniki równe, więc szukana ilość sposobów będzie połową o jedność zmniejszonej ilości wyrazów rozwinięcia iloczynu P, czyli

$$2N = (1 + 2\alpha_1)(1 + 2\alpha_2) \dots (1 + 2\alpha_m) - 1$$

$$= 2\sum_i \alpha_i + 4\sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j + 8\sum_{i,j,k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k + \dots + 2^m\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m, \quad \text{skąd}$$

$$N = \Sigma\alpha_i + 2\Sigma\alpha_i\alpha_j + 4\Sigma\alpha_i\alpha_j\alpha_k + \dots + 2^{m-1}\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Tak np. znajdźmy, w ilu trójkątach liczba 4725 jest przyprostokątną

$$4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \alpha_1 = 3, \ \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = 1.$$

$$N = (3 + 2 + 1) + 2(2.1 + 1.3 + 3.2) + 4(3.2.1) = 52$$

Jeżeli teraz liczba n jest parzystą, to n^2 można przedstawić w formie

$$n^2 = 2^{2\beta} \cdot a_1^{2\alpha_1} \cdot a_2^{2\alpha_2} \dots a_m^{2\alpha_m} = 2^{2\beta} \cdot n_1^2,$$

gdzie n_1^2 jest kwadratem liczby nieparzystej.

Ilość sposobów, któremi można rozłożyć liczbę nieparzystą n_1^2 na 2 nierówne czynniki jest

$$N_1 = \Sigma\alpha_i + 2\Sigma\alpha_i\alpha_j + \dots + 2^{m-1}\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m$$

Z każdego rozkładu liczby n_1^2 otrzymamy $2\beta - 1$ rozkładów liczby n^2 na 2 czynniki parzyste, mnożąc pierwszy z dwuch nierównych nieparzystych czynników przez $2, 2^2, \dots 2^{2\beta-1}$, a drugi odpowiednio przez $2^{2\beta-1}, 2^{2\beta-2}, \dots 2^2, 2$. Oprócz tego z 2 czynników nieparzystych równych powstanie $\beta - 1$ rozkładów na dwa czynniki parzyste nierówne, tak że ostatecznie

$$N = (2\beta - 1)(\Sigma\alpha_i + 2\Sigma\alpha_i\alpha_j + \dots + 2^{m-1}\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m) + \beta - 1 \quad \dots \quad (5)$$

Tak np. liczba $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot . \, 5$; $\beta = 3$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$.

$$N = (2.3 - 1)[(2 + 1) + 2(2.1)] + (3 - 1) = 37.$$

Zatym liczba 360 jest przyprostokątną w 37 trójkątach pitagorejskich.

§ 7. Zanim zwrócimy się do zagadnienia, jaka liczba może być miarą przeciwprostokątnej i ilu może się to stać sposobami, trzeba niektórym wynikom naszym nadać formę ściślejszą.

Każdy kwadrat, jak to widzieliśmy na licznych przykładach, można przedstawić, jako sumę liczb nieparzystych kolejnych. W samej rzeczy niech $n^2 = ab$, gdzie $a > b$; wtedy, jeżeli n jest liczbą nieparzystą, mamy

$$n^2 = ab = (a - b + 1) + (a - b + 3) + \dots + (a - 2) + a + (a + 2) + \dots + (a + b - 3) +$$
$$+ (a + b - 1)$$

Jeżeli zaś n jest liczbą parzystą

$$n^2 = ab = (a-b+1)+(a-b+3)+\ldots+(a-1)+(a+1)+\ldots+(a+b-3)+(a+b-1)$$

Aby utworzyć odpowiedni trójkąt pitagorejski, piszemy sumę ciągu liczb nieparzystych aż do liczby $a+b-1$ włącznie i dzielimy tę sumę na dwie sumy cząstkowe, z których jedna obejmuje wszystkie liczby nieparzyste mniejsze od $a-b+1$, druga zaś liczby ciągu począwszy od $a-b+1$.

Mamy wtedy tożsamość

$$[1+3+\ldots+(a-b-1)]+[(a-b+1)+\ldots+(a+b-1)]=[1+3+\ldots+(a+b-1)]$$

Wszystkie trzy sumy są kwadratami. Sumując je według twierdzenia II, mamy

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Z tego wzoru wyprowadzamy odrazu znany nam wniosek, że dana liczba może być tylu sposobami przyprostokątną, ilu sposobami można jej kwadrat n^2 przedstawić, jako iloczyn dwuch czynników ab obu nieparzystych lub obu parzystych i przytym sobie nierównych. Lecz dyskusja wzoru (6) daje nam jeszcze inne wnioski.

Jeżeli a i b mają (oprócz liczby 2) wspólny dzielnik, to odpowiedni trójkąt pitagorejski będzie pochodnym, bo $a-b$ oraz $a+b$ będą miały ten sam dzielnik. Jeżeli pochodnych trójkątów nie uważamy za odrębne rozwiązania zagadnienia pitagorejskiego, to trzeba zażądać, aby we wzorze (6) a i b albo były pierwsze ze sobą, albo miały jedyny spólny dzielnik 2. Ale jeżeli a i b są pierwsze ze sobą, to muszą być kwadratami, bo ich iloczyn jest kwadratem, — jeżeli zaś mają jedyny spólny dzielnik 2, to muszą być podwojonemi kwadratami. Możemy więc położyć

$$a=m^2, \; b=n^2 \quad \text{albo} \quad a=2m^2, \; b=2n^2.$$

Wtedy wzór (6) bierze postać

$$\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right)^2+m^2n^2=\left(\frac{m^2+n^2}{2}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6a)$$

albo

$$(m^2-n^2)^2+4m^2n^2=(m^2+n^2)^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6b)$$

gdzie m i n są to liczby nieparzyste.

Łatwo się przekonać, że wzór (6a) sprowadza się do wzoru (6b). Wystarcza w tym celu parzystą liczbę $m+n$ oznaczyć przep $2p$ i parzystą liczbę $m-n$ przez $2q$, t. j. położyć we wzorze (6a)

$$m=p+q, \quad n=p-q.$$

Otrzymamy wtedy po dokonaniu uproszczeń:

$$(p^2-q^2)^2+4p^2q^2=(p^2+q^2)^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

wzór, który nie różni się od wzoru (6b). Możemy teraz ściśle sformułować rozwiązanie zagadnienia pitagorejskiego:

Aby trzy liczby a, b i c czyniły zadość równaniu

$$a^2+b^2=c^2,$$

potrzeba i wystarcza, aby liczby te miały kształt

$$a=m(p^2-q^2),\quad b=2mpq,\quad c=m(p^2+q^2)\quad . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

§ 8. Jeżeli trójkątów pochodnych nie uważać za odrębne rozwiązania zagadnienia pitagorejskiego, to z trzeciego ze wzorów (8) wynika, że aby liczba dana mogła być przeciwprostokątną w trójkącie pitagorejskim, musi ona być sumą dwuch pierwszych ze sobą kwadratów, z których jeden jest liczbą parzystą. Nasuwa się pytanie, czy istnieją liczby, które są przeciwprostokątnemi w kilku trójkątach, t. j. czy są kwadraty, które kilku sposobami mogą być sumą dwuch kwadratów? Na to pytanie odpowiemy twierdząco. W samej rzeczy, aby to było możliwe, potrzeba i wystarcza, aby istniała taka liczba c, która byłaby kilku sposobami sumą dwuch kwadratów, t. j. aby była możliwą równość

$$p^2+q^2=p_1^2+q_1^2 \text{ lub, co to samo}$$

$$p^2-q_1^2=p_1^2-q^2=d.$$

Otóż ta ostatnia równość jest możliwa. Jeżeli bowiem za d obierzemy iloczyn kilku czynników pierwszych, między któremi albo niema dwójki, albo wchodzi ona kilkakrotnie, to, jak widzieliśmy, można liczbę d przedstawić kilku sposobami jako sumę liczb nieparzystych sąsiednich; tyluż sposobami d będzie różnicą dwuch kwadratów. Weźmy np. $d=3.5$. Liczba ta może dwoma sposobami być różnicą dwuch kwadratów

$$15=8^2-7^2 \text{ i } 15=4^2-1^2, \text{ skąd}$$

$$8^2-7^2=4^2-1^2$$

$$8^2+1^2=7^2+4^2=65.$$

Zatym liczba 65 może być przeciwprostokątną w dwuch trójkątach pitagorejskich

$$65^2=63^2+16^2=33^2+56^2.$$

§ 9. Skoro już wiemy, że istnieją liczby, które mogą być w dwuch trójkątach przeciwprostokątnemi, to wypada zbadać z kolei, jakie to są liczby. Powiadam, że są to liczby, których czynniki pierwsze są sumami nierównych kwadratów, Tak np. liczba 65 dlatego jest w dwuch trótkątach przeciwprostokątną, że jest iloczynem 5 przez 13, a obie te liczby są sumami dwuch kwadratów. Dowodem tego są następujące równości, znane powszechnie pod nazwą **tożsamości Lagrange'a**

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)=(aa_1+bb_1)^2+(ab_1-a_1b)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

$$(a^2+b^2)(a_1^2+b_1^2)=(aa_1-bb_1)^2+(ab_1+a_1b)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Kładąc np. w tych równościach $a=2$, $b=1$, $a_1=3$, $b_1=2$, otrzymamy: $65=8^2+1^2$ i $65=4^2+7^2$.

Wszakże, jeżeli $a=a_1$ i $b=b_1$, t. j. jeżeli dana liczba jest kwadratem sumy dwuch kwadratów, to tylko druga tożsamość daje rozkład na sumę dwuch kwadratów, co już zresztą wiemy z tożsamości (7). Nic nie stoi na przeszkodzie, aby $a=b$ lub też $a_1=b_1$ (byleby nie jednocześnie), wtedy jednak z obu tożsamości otrzymujemy ten sam rozkład. W szczególności, jeżeli $a=b=1$, mamy wniosek:

Podwojona suma dwuch pierwszych ze sobą kwadratów, z których jeden jest liczbą parzystą, jest też sumą dwuch pierwszych ze sobą kwadratów.

Jeżeli dana liczba jest iloczynem trzech nierównych pierwszych liczb $c=\alpha\beta\gamma$, z których każda jest sumą dwuch kwadratów, to można ją czterema sposobami przedstawić jako sumę dwuch pierwszych ze sobą kwadratów. W samej rzeczy liczba $c'=\alpha\beta$ może być dwoma sposobami sumą dwuch kwadratów, a każda z tych sum pomnożona przez γ daje dwa rozkłady liczby c. Np.

$$1105=5.13.17=33^2+4^2=31^2+12^2=32^2+9^2=24^2+23^2.$$

Zatym liczba 1105 może być miarą przeciwprostokątnej w czterech trójkątach pitagorejskich, nie licząc pochodnych.

Wogóle jeżeli liczba jest iloczynem m nierównych pierwszych liczb, z których każda jest sumą dwuch kwadratów, to może ona być miarą przeciwprostokątnej w 2^{m-1} trójkątach pitagorejskich, nie licząc pochodnych.

Ponieważ kwadrat i wogóle wszelka potęga sumy dwuch nierównych kwadratów tylko na jeden sposób (jak się o tem przekonać łatwo) może być sumą dwuch pierwszych ze sobą kwadratów, więc ilość trójkątów pitagorejskich (nie pochodnych) w których dana liczba jest przeciwprostokątną, jest niezależna od wysokości potęg jej czynników pierwszych. Mamy więc następującą zasadę. Jeżeli dana liczba ma m odrębnych czynników pierwszych w jakichkolwiek zresztą potęgach, a każdy z tych czynników jest sumą dwuch kwadratów, to ilość trójkątów pitagorejskich, w których jest ona przeciwprostokątną, jest 2^{m-1}.

Ilość trójkątów pochodnych daje się z łatwością obliczyć, podobnie jak w § 5; jest ona równa ilości iloczynów, które można utworzyć z α_1 czynników równych a_1, α_2 czynników równych $a_2 \dots \alpha_m$ czynników równych a_m po 1, 2,... ...$p-1$, jeżeli $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m=p$. Wyprowadzenie odpowiedniego wzoru nie sprawia żadnych trudności.

Jeżeli niektóre czynniki pierwsze danej liczby nie są sumami dwuch kwadratów, lub jeżeli liczba zawiera jako czynnik liczbę 2, to dana liczba może być przeciwprostokątną tylko w trójkątach pochodnych.

§ 10. Z tożsamości Lagrange'a (której zresztą szczególnym przypadkiem jest wzór (7)) wynika, jak widzieliśmy, pewien charakter zachowawczy liczb, które są sumą dwuch pierwszych ze sobą kwadratów. Widzieliśmy, że przy mnożeniu tych liczb przez siebie, przy ich potęgowaniu, mnożeniu przez 2, oraz, naturalnie, przy działaniach odwrotnych do powyższych, gdy są one możliwe, otrzymujemy ciągle liczby tej samej natury. Ta bezwładność formy owych liczb powinna w wysokim stopniu zainteresować zdolniejszych uczniów.

Na zakończenie chcę zastosować wzory (7) do nieco trudniejszego zadania. Dowiodę mianowicie, że suma dwuch czwartych potęg nie może być czwartą potęgą t. j., że liczby pitagorejskie nie mogą być wszystkie jednocześnie kwadratami. Przypuśćmy zatym, że możliwym jest taki trójkąt pitagorejski (P, Q, R), w którym wszystkie trzy boki są kwadratami $P=p^2$, $Q=q^2$, $R=r^2$. Nie zmniejszając ogólności dowodu, możemy założyć, że każde dwie z trzech liczb p^2, q^2, r^2 są pierwsze ze sobą. Wtedy jedna z przyprostokątnych np. q^2 musi być liczbą parzystą, dwa inne boki p^2 i r^2 są liczbami nieparzystemi i mają kształt

$$r^2 = m^2 + n^2 \qquad (11)$$

$$p^2 = m^2 - n^2 \qquad (12)$$

Powiadam, że m i n są też pierwsze ze sobą, bo gdyby miały spólny dzielnik α, to p i r miałyby też ten dzielnik, a więc nie byłyby pierwsze ze sobą wbrew założeniu. W trójkącie (11) albo m albo n musi być liczbą parzystą, ale m nie może być liczbą parzystą, bo jest przeciwprostokątną w trójkącie (12), więc z pośród czterech liczb r, p, m i n tylko n jest parzystą.

Z trójkątów (11) i (12) wynika zatym, że m i n muszą mieć kształt

$$m = a^2 + b^2 \qquad (13)$$

$$n = 2ab \qquad (14)$$

$$m = c^2 - d^2 \qquad (15)$$

$$n = 2cd \qquad (15)$$

przytym znowu liczby a i b (wzgl. c i d) muszą być pierwsze ze sobą i nie mogą być obie nieparzyste. Inaczej bowiem, gdyby np. a i b miały spólny dzielnik β, to m i n miałyby go także, nie byłyby więc pierwsze ze sobą. Podobnież gdyby a i b obie były nieparzyste, to liczby m i n byłyby obie parzyste, nie byłyby więc pierwsze ze sobą. Nie zmniejszę ogólności dowodu, jeżeli założę, że jedna z dwuch liczb a i c jest parzystą, a druga nieparzystą, bo jakakolwiek jest liczba c, mogę tę z dwuch liczb a i b oznaczyć przez a, która nie jest jednocześnie z c parzystą lub nieparzystą.

Rugując m i n z równań (13), (14), (15) i (16) otrzymamy:

$$a^2 + b^2 = c^2 - d^2 \qquad (17)$$

$$ab = cd \qquad (18)$$

Z tych dwuch równań rugując d, otrzymamy równanie

$$\frac{c^2 + a^2}{c^2 - a^2} = \frac{c^2}{b^2} \qquad (19)$$

Jeden z tych dwuch ułamków albo oba można skrócić, zależnie od tego, czy c ma spólny dzielnik z a lub z b, czy też jeden dzielnik wspólny z a, a drugi z b. Gdyby c było pierwsze z a, to, na zasadzie (18), b musiałoby być podzielne przez c i równość (19) byłaby niemożliwa, gdyż lewa jej strona>1, a prawa<1.

Gdyby c było pierwsze z b, to na zasadzie (18) a byłoby podzielne przez c, a więc $a > c$, lewa strona równania (19) byłaby ujemna, a prawa dodatnia.

Gdyby wreszcie c miało z a spólny dzielnik k, z b zaś spólny dzielnik l, t. j. gdyby

$$c = kc_1, \quad a = ka_1$$

$$c = lc_2, \quad b = lb_1,$$

gdzie c_1 byłoby pierwsze z a_1 i c_2 pierwsze z b_1, to wtedy równość (19) miałaby postać

$$\frac{c_1^2+a_1^2}{c_1^2-a_1^2}=\frac{c_2^2}{b_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Widoczne, że drugi ułamek jest nieskracalny. Co do pierwszego, to zauważmy, że suma dwuch pierwszych ze sobą liczb może z ich różnicą mieć jedyny spólny dzielnik 2 i to tylko wtedy, gdy obie liczby są nieparzyste. Liczby zaś c_1^2 i a_1^2 nie są obie nieparzyste, bo ich wielokrotności c^2 i a^2 z założenia nie były obie nieparzyste.

Z równości dwuch nieskracalnych ułamków (20) wynikają równania

$$c_1^2+a_1^2=c_2^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$c_1^2-a_1^2=b_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Zauważmy, że liczby c_1 i a_1 są odpowiednio mniejsze od liczb m i n, bo na mocy (16), (11) i (15)

$$c_1<c<n<m$$

$$a_1<a<n.$$

Widzimy zatym, że istnienie równości (11) i (12) pociąga za sobą istnienie równości (21) i (22) tej samej co poprzednie formy, ale których wyrazy odpowiednie są mniejsze od wyrazów równości (11) i (12). Istnienie równości (21) i (22) pociągałoby za sobą istnienie innej równości tej samej formy o wyrazach odpowiednio mniejszych od c_1 i a_1 i t. d. aż do nieskończoności. Ale jakkolwiek wielkie byłyby liczby m i n, istnieje zawsze tylko skończona ilość liczb od nich mniejszych, równania (11) i (12) są zatym niemożliwe, a więc niemożliwym jest także, aby trzy liczby pitagorejskie były jednocześnie kwadratami c. b. d. o.

Możnaby jeszcze rozwijać w niejednym kierunku zastosowania wzorów (7), ale sądzę, że tego co powiedziano wystarcza, aby okazać, jak bogaty materjał do ćwiczeń uczniowskich zawiera się w skromnym zagadnieniu pitagorejskim.

Łódź. *S. Garlicki.*