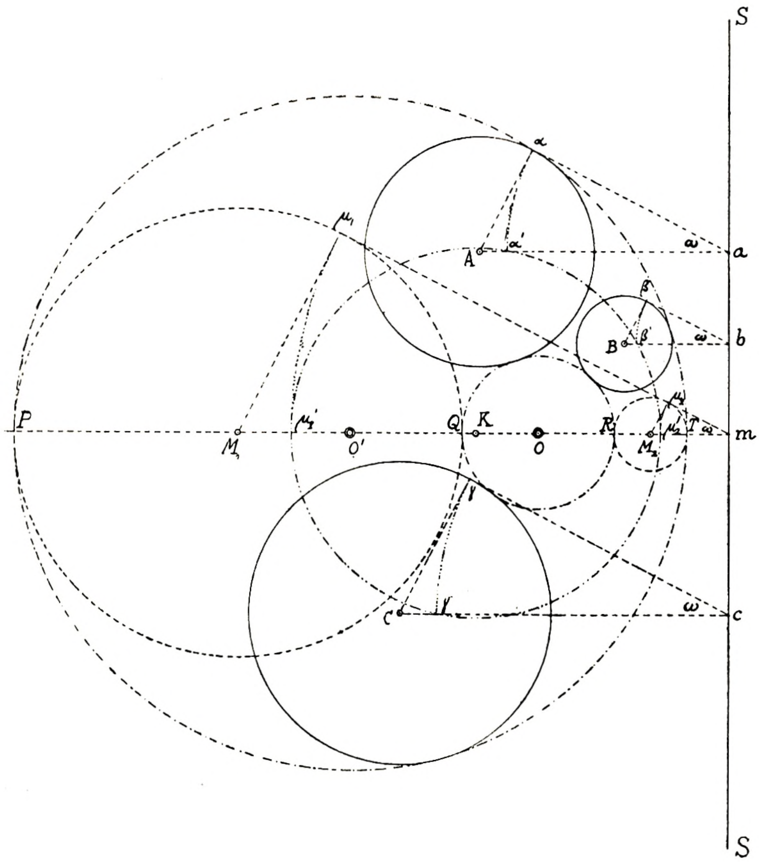
Kilka przykładów zastosowania metod gieometrji przestrzeni i pojęć mechaniki do zagadnień gieometrji płaskiej.

W № 3 „Wektora“ (z r. z.), w artykule „Kilka twierdzeń o przekrojach płaskich powierzchni 2-go stopnia i niektóre ich zastosowania“ podałem rozwiązanie zagadnienia Apolonjusza: „Do trzech kół poprowadzić koło styczne“ zapomocą sformułowania odpowiedniego zagadnienia gieometrji na kuli i rozwiązania go przez zastosowanie rzutu stereograficznego przy użyciu metod gieometrji wykreślnej (rzut prostokątny i kłady). Takie przesuwanie zagadnień gieometrji płaskiej do odpowiednich zagadnień gieometrji przestrzeni jest, zdaniem moim, nietylko bardzo potężną metodą poszukiwań, ale przedewszystkim zaleca się ze względów dydaktycznych, dzięki możności posługiwania się wyobraźnią plastyczną tam, gdzie inaczej zmuszeni bylibyśmy posiłkować się raczej tylko logiką. Zapewne wychodząc z tych założeń, Fiedler w swojej Cyklografji wyłożył ogólną metodę rozwiązywania wszelkich zagadnień o kołach na płaszczyźnie zapomocą odpowiednich zagadnień o punktach w przestrzeni. Wszakże metoda Fiedlera jest tylko jedną z wielu możliwych podobnych metod; w wyżej wspomnianym artykule okazałem, że do tego samego celu służyć może np. rzut stereograficzny. Może nie będzie zbytecznym okazać, że zagadnienie Apolonjusza, które przecież należy do najtrudniejszych zagadnień gieometrji płaskiej, może być jeszcze na innej drodze rozwiązane zapomocą gieometrji przestrzeni. Sposób, który zamierzam opisać, jest, jak sądzę, jeżeli nie najprostszy pod względem wykreślenia, to może najłatwiejszy pod względem interpretacji.

Niech A, B i C (rys. 1) będą trzy dane koła. Będziemy te trzy koła uważali za przecięcia trzech kul A, B i C płaszczyzną, poprowadzoną przez ich środki, a parę kół do nich stycznych uważać będziemy za przecięcie cyklidy Dupina, w którą te kule są wpisane. Wiadomo, że cyklida Dupina może być uważaną albo za obwiednię rodziny kul, mających wspólną oś podobieństwa i prostokątnie przecinających pewną kulę, albo za obwiednię rodziny kul stycznych do trzech kul danych. Te kule styczne mają też wspólną oś podobieństwa, tak że cyklida ma dwie osie podobieństwa do siebie prostopadłe. Jedna z nich jest do płaszczyzny rysunku prostopadła, druga leży na tej płaszczyźnie i jest poprostu osią podobieństwa kół A, B i C. Wiadomo również, że każda płaszczyzna, przez oś podobieństwa poprowadzona, przecina cyklidę według dwuch kół; w szczególności płaszczyzna styczna do jednej z kul tworzących, przez oś podobieństwa poprowadzona, jest styczna do wszystkich kul tworzących tej rodziny, przytym znowu linją styczności tej płaszczyzny z cyklidą jest koło. Zadaniem naszym będzie przedewszystkim

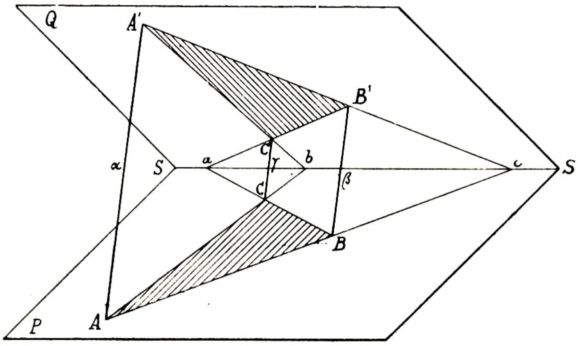


Rys. 1.

wykreślenie z pośród rodziny, do której należą A, B i C, tych dwuch kul, których środki leżą na osi symetrji cyklidy. Dokończenie zadania nie sprawi potym żadnych trudności.

Wykreślmy zatym najpierw oś podobieństwa SS trzech danych kół. Ze środków A, B i C spuśćmy prostopadłe na SS i ze spodków a, b i c tych prostopadłych wyprowadźmy styczne $a\alpha$, $b\beta$ i $c\gamma$ do kół A, B i C. Jeżeli teraz długości tych stycznych odmierzymy na prostopadłych Aa, Bb i Cc, to otrzymamy trzy punkty α', β' i γ', przez które prowadzimy koło K. Koło to jest kładem koła styczności cyklidy z płaszczyzną przez SS przechodzącą, na płaszczyznę rysunku naokoło SS. Prostopadła z K na SS jest osią symetrji cyklidy, na niej więc leżą szukane środki; odcinki $\mu'_1 m$ i $\mu'_2 m$ są to długości stycznych do tych kul z punktu m wyprowadzonych. Ponieważ styczna do szukanych kul jest pod tym samym kątem ω nachylona do linji mK, co styczne $a\alpha$, $b\beta$ i $c\gamma$ do linji Aa, Bb i Cc (ω jest kątem dwuściennym płaszczyzny stycznej do cyklidy z płaszczyzną rysunku), więc na równoległej $a\alpha$ odmierzamy $m\mu_1 = m\mu'_1$ i $m\mu_2 = m\mu'_2$, z otrzymanych zaś punktów μ_1 i μ_2 prowadzimy prostopadłe do $m\mu_1$ aż do przecięcia z prostą Km w punktach M_1 i M_2, które są środkami kul szukanych. Promieniami $M_1\mu_1$ i $M_2\mu_2$ zakreślamy koła, które przecinają oś symetrji Km w punktach P i Q, wzgl. R i T. Dzieląc na połowy QR i PT otrzymujemy środki O i O' kół stycznych do A, B i C, wreszcie promieniami OQ i $O'P$ zakreślamy owe koła.

Jako godną uwagi osobliwość tego sposobu podnieść należy pominięcie wykreślenia środka pierwiastkowego trzech kół danych. W razie, jeżeli użycie ekierki jest dozwolone, sposób ten jest, zdaje się, najprostszy pod względem gieometrograficznym ze wszystkich znanych mi sposobów rozwiązania zagadnienia Apolonjusza.



Rys. 2.

Na przykładzie tw. Menelaosa chciałbym pokazać, jak naturalną interpretację wielu twierdzeń gieometrji płaskiej może dać rozważanie figur gieometrji przestrzeni. Twierdzenie to jest prostym wnioskiem z tych dwuch pewników gieometrji przestrzeni: 1) trzy punkty nie leżące na jednej prostej wyznaczają płaszczyznę i 2) dwie płaszczyzny przecinają się według linji prostej. W samej rzeczy niech będzie trójkąt ABC (rys. 2) na płaszczyźnie P i sieczna SS, która przecina jego boki w punktach a, b i c. Przez prostą SS poprowadźmy płaszczyznę jakąkolwiek Q i z wierzchołków A, B i C wyprowadźmy trzy równoległe α, β, γ w dowolnym kierunku do przecięcia z płaszczyzną Q w punktach A', B' i C'.

Z trójkątów podobnych mamy trzy następujące proporcje:

$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{Bc}{Ac} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{Ca}{Ba} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

skąd po pomnożeniu otrzymamy

$$\frac{Ab \,.\, Bc \,.\, Ca}{Cb \,.\, Ac \,.\, Ba} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Odwrotnie, jeżeli równość (1) ma miejsce, można zawsze znaleźć takie trzy długości α, β i γ, żeby było:

$$\frac{Ab}{Cb} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \frac{Bc}{Ac} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{Ca}{Ba} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

Prowadząc przez wierzchołki A, B i C trzy równoległe w dowolnym kierunku i odmierzając na nich długości α, β i γ, otrzymujemy trzy punkty A', B' i C', które wyznaczają płaszczyznę Q, przecinającą płaszczyznę trójkąta według linji prostej SS. Ponieważ z proporcji (2) wynika, że punkty A', C' i b; A', B' i c oraz B', C' i a leżą na prostych, więc punkty a, b, c znajdują się na płaszczyźnie Q; muszą one zatym leżeć na linji SS, jako na krawędzi przecięcia płaszczyzn P i Q.

Łatwo spostrzec, że twierdzenie Menelaosa wyraża również następującą zasadę kinematyczną: jeżeli trzem punktom płaszczyzny nadamy trzy dowolne prędkości, prostopadłe do płaszczyzny, to ruch płaszczyzny możemy w pierwszej chwili uważać za obrót jej około osi chwilowej, w tej płaszczyźnie położonej. Wszakże w tym przypadku posiłkowanie się pojęciami zapożyczonemi z mechaniki nie nadaje twierdzeniu większej przejrzystości, ze względów zaś dydaktycznych bynajmniej nie może być zalecone. Inaczej rzecz się ma z twierdzeniem C e v y. Posiłkując się pojęciami mechaniki, a w szczególności stosując teorję środka ciężkości, można dać niezmiernie łatwy i zupełnie elementarny dowód tego twierdzenia. Dość wspomnieć tylko twierdzenie G u l d i n a i spółrzędne barycentryczne M o e b i u s a, aby uznać wielką użyteczność teorji środka ciężkości w gieometrji. W wykładzie szkolnym gieometrji nie tylko nie należy unikać takiego zapożyczania pojęć z mechaniki i fizyki, ale owszem jaknajusilniej o nie się starać, o ile, naturalnie, na tym nie traci ścisłość wykładu. Co do posiłkowania się środkiem ciężkości w gieometrji powinniśmy mieć tym mniej skrupułów, że, zdaniem wielu, jest to pojęcie czysto gieometryczne, gdyż do jego określenia nie jest niezbędnym ani pojęcie siły, ani masy, chociaż i jedno i drugie czyni środek ciężkości pojęciem nadzwyczaj intuicyjnym.

Niech będzie trójkąt ABC. Umieśćmy w wierzchołkach tego trójkąta trzy masy dowolne p, q i r. Ten układ trzech mas posiada środek ciężkości, którego położenie jest oczywiście niezależne od sposobu jego wyznaczenia. Możemy zaś określić położenie środka ciężkości trzech mas trzema sposobami, znajdując najpierw środek ciężkości dwuch mas, a później przyłączając trzecią.

1°. Środek ciężkości mas p i q znajduje się, jak wiadomo, na linji AB w takim punkcie c, że

$$\frac{Ac}{Bc} = \frac{q}{p} \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

Środek ciężkości trzech mas musi się zatym znajdować w pewnym punkcie linji Cc.

2°. Środek ciężkości mas q i r znajduje się na linji BC w takim punkcie a, że

$$\frac{Ba}{Ca} = \frac{r}{q} \quad \text{. . . . .} \quad (4)$$

Środek ciężkości trzech mas musi się zatym znajdować w pewnym punkcie linji Aa.

3^0. Wreszcie środek ciężkości mas r i p znajduje się na linji CA w takim punkcie b, że

$$\frac{Cb}{Ab} = -\frac{p}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Zatym środek ciężkości trzech mas znajdować się musi w pewnym punkcie linji Bb.

Ponieważ środek ciężkości znajduje się na każdej z trzech linji Cc, Aa, Bb, więc te trzy linje muszą spotkać się w jednym punkcie, który jest właśnie środkiem ciężkości układu trzech mas p, q i r.

Mnożąc proporcje (3), (4) i (5), mamy jednak

$$\frac{Ac \,.\, Ba \,.\, Cb}{Bc \,.\, Ca \,.\, Ab} = -\frac{qrp}{pqr} = -1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Warunek (6) jest zatym konieczny i wystarczający, aby trzy proste Aa, Bb i Cc spotkały się w jednym punkcie. Jak widzimy, równość (6) wyraża poprostu tę zasadę, że trzy masy dowolne mają zawsze środek ciężkości, ale tylko jeden.

Łódź, w maju. *Stanisław Garlicki.*