

Kilka twierdzeń o przekrojach płaskich powierzchni drugiego stopnia i niektóre ich zastosowania.

Twierdzenie I. Przez każde dwa przekroje płaskie powierzchni drugiego stopnia można poprowadzić dwa stożki drugiego stopnia. Wierzchołki tych stożków oraz bieguny przekrojów płaskich leżą na jednej prostej.

Niech będzie dana powierzchnia drugiego stopnia wraz z dwoma przekrojami płaskimi i niech punkty A i B będą biegunami tych dwóch przekrojów płaskich. Przez te dwa punkty poprowadźmy płaszczyznę sieczną jakąkolwiek i niech C (fig. 1) będzie stożkowa przecięcia tej płaszczyzny z powierzchnią daną. Cięciwy pq i rs są to przecięcia danych płaszczyzn przez płaszczyznę sieczną; styczne Ap , Aq , Br i Bs są to tworzące dwóch stożków, opisanych na powierzchni z punktów A i B . Połączmy pr , qs , ps i qr ; otrzymamy dwa punkty S i S' . Powiadamy, że A , B , S i S' leżą na jednej prostej; w samej rzeczy, biegunowe tych czterech punktów, mianowicie: pq , rs , OS' i OS przechodzą przez jeden punkt O . Ponieważ A i B nie zależą od położenia płaszczyzny siecznej, więc prosta, przechodząca przez te cztery punkty, jest stała; łatwo okazać, że punkty S i S' nie zależą również od położenia płaszczyzny siecznej. W samej rzeczy, przypomnijmy znane twierdzenie o czworoboku, wpisanym w stożkową: sieczna jakąkolwiek przecina dwie pary boków przeciwległych, dwie przekątne i stożkową w czterech parach punktów, znajdujących się w inwolucji. Zastosujmy to twierdzenie do czworoboku wpisanego $pqrs$ i siecznej AB : punkty S i S' są to punkty podwójne inwolucji, pozostałe zaś cztery L , M , K , N są stałe, to jest niezależne od położenia płaszczyzny siecznej, a ponieważ dwie pary punktów odpowiednich wyznaczają inwolucję, więc i punkty podwójne S i S' są stałe.

W ten sposób na każdej płaszczyźnie siecznej, przechodzącej przez AB , otrzymujemy dwie pary prostych, poprowadzonych z punktów stałych S i S' do otrzymanych w przecięciu punktów dwóch przekrojów płaskich. Pęk płaszczyzn, przechodzących przez AB wyznacza zatem dwa pęki prostych, czyli dwa stożki, przechodzące przez dwa przekroje płaskie, *c. b. d. o.*

Uwaga. Z dwóch wierzchołków stożków jeden musi być wewnątrz powierzchni (S), drugi nazewnątrz; dla krótkości nazwiemy pierwszy wierzchołek wewnętrznym, drugi zewnętrznym.

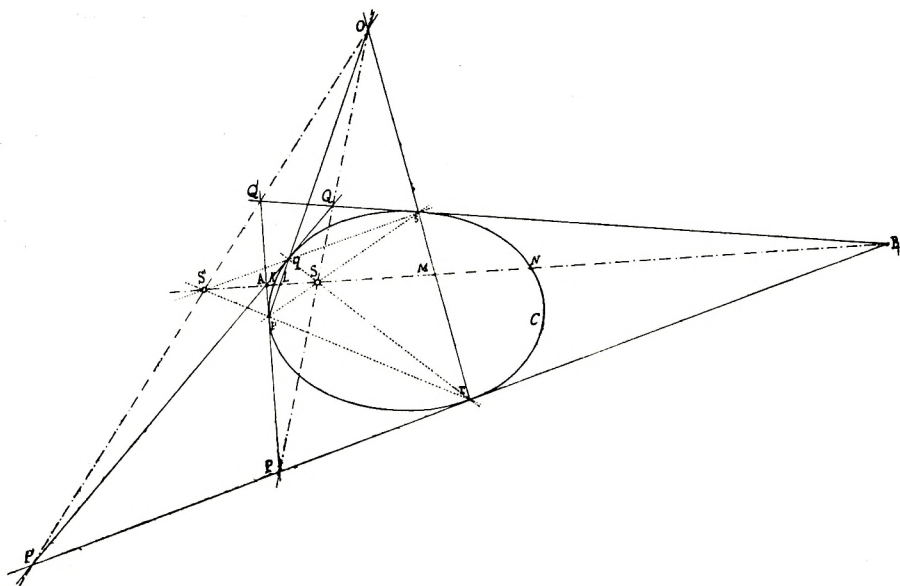


Fig. 1.

Twierdzenie II. Dwa stożki, opisane na powierzchni drugiego stopnia, przecinają się według dwóch stożkowych.

Niech będą dwa stożki A i B , opisane na powierzchni drugiego stopnia (fig. 1). Płaszczyzny biegunowe punktów A i B przecinają się według stałej prostej (punkt O jest śladem tej prostej na płaszczyźnie siecznej); ta prosta oraz punkt stały S (wzgl. S') wyznaczają płaszczyznę stałą, której śladem jest OS (wzgl. OS'). Otóż punkty P i Q (wzgl. P' i Q'), wspólne obu stożkom, leżą na prostej OS (wzgl. OS'), gdyż biegunowe czterech punktów O, S, P, Q (wzgl. O, S', P', Q') czyli proste AB, OS', pr, qs (wzgl. AB, OS, qr, ps) przechodzą przez jeden punkt S'

(wzgl. S). Tak więc, wszystkie punkty, wspólne obu stożkom opisanym, leżą na dwóch płaszczyznach, zatym krzywa przecięcia dwóch stożków, która jest czwartego stopnia, przywodzi się do dwóch krzywych płaskich. Ponieważ żadna z nich nie może być prostą, więc muszą to być dwie stożkowe, położone na dwóch płaszczyznach, przechodzących przez biegunową wzajemną prostej AB . Te dwie płaszczyzny są to biegunowe punktów S i S' .

Uwaga. Z dwóch płaszczyzn, wyznaczonych przez przecięcie dwóch stożków opisanych, jedna przecina daną powierzchnię, druga nie; nazwiemy dla krótkości pierwszą płaszczyznę wewnętrzną, drugą—zewnętrzną. Płaszczyzna wewnętrzna jest biegunową wierzchołka zewnętrznego (S'), płaszczyzna zewnętrzna jest biegunową wierzchołka wewnętrznego (S).

Twierdzenie III. Jeżeli dane są trzy przekroje płaskie powierzchni drugiego stopnia, to wierzchołki sześciu stożków, z których każdy przechodzi przez dwa przekroje płaskie, leżą na jednej płaszczyźnie, tworząc na niej czworobok zupełny tak, że każde dwa wierzchołki wewnętrzne i jeden zewnętrzny, oraz trzy zewnętrzne leżą na jednej prostej.

Pierwsza część tego twierdzenia jest oczywista, wszystkie bowiem sześć wierzchołków leżą na płaszczyźnie trzech biegunów danych przekrojów płaskich. Niech K będzie przecięciem powierzchni przez płaszczyznę ABC (fig. 2); pq , rs , tu —śladami przekrojów płaskich. Aby okazać drugą część twierdzenia wystarczy zastosować twierdzenie Pascala o sześcioboku, wpisanym do czterech następujących sześcioboków:

$$\begin{aligned} p s t q r u p, \\ p s u q r t p, \\ p r t q s u p, \\ p r u q s t p, \end{aligned}$$

Z sześcioboku $p s t q r u p$ widzimy, że punkty S' , S'_1 , S'_2 , jako punkty przecięcia trzech par boków przeciwległych, leżą na jednej prostej; podobnie z pozostałych trzech wnioskujemy, że punkty S' , S'_2 , S'_1 ; S'_2 , S , S_1 i S'_1 , S , S_2 leżą na trzech prostych. Te cztery proste są zatym bokami czworoboku zupełnego, którego wierzchołkami są punkty S' , S'_1 , S'_2 , S_1 , S_2 , S_3 .

Zważywszy, że płaszczyzny wewnętrzne są to biegunowe wzajemne wierzchołków zewnętrznych, płaszczyzny zaś zewnętrzne są to biegunowe wierzchołków wewnętrznych, otrzymujemy metodą biegunowych wzajemnych twierdzenia następujące:

Twierdzenie IV. Trzy stożki, opisane na powierzchni drugiego stopnia, wyznaczają sześć płaszczyzn przecięcia, z których trzy są zewnętrzne, trzy zaś wewnętrzne. Każde dwie zewnętrzne i jedna wewnętrzna, oraz trzy wewnętrzne przechodzą przez jedną prostą. Te cztery proste przechodzą przez jeden punkt, który jest zatem wspólny wszystkim sześciu płaszczyznom.

Twierdzenie V. Jeżeli dane są cztery przekroje płaskie powierzchni drugiego stopnia, to wierzchołki sześciu stożków zewnętrznych, z których każdy przechodzi

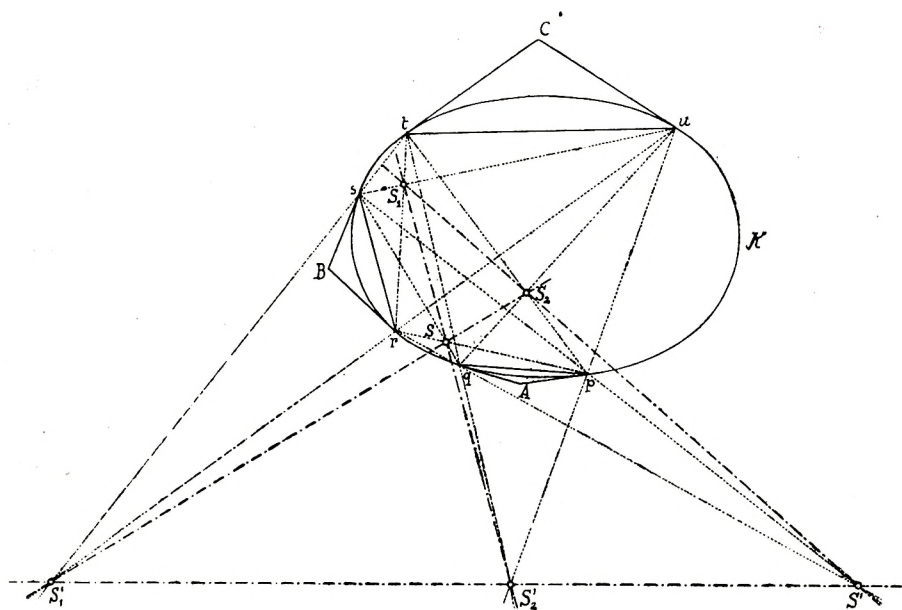


Fig. 2.

dzi przez dwa przekroje płaskie, leżą na jednej płaszczyźnie, tworząc na niej czworobok zupełny.

Oznaczmy cztery dane przekroje płaskie przez a, b, c, d . Uważając tylko trzy przekroje płaskie, np. a, b, c , widzimy, że trzy odpowiednie wierzchołki zewnętrzne (tw. III) leżą na prostej. Oznaczmy je przez $(bc), (ca), (ab)$. Jeżeli zamiast przekroju a weźmiemy d , to trzy odpowiednie wierzchołki zewnętrzne $(bc), (cd), (db)$ leżą znowu na prostej. Te dwie proste przecinają się zatem w punkcie (bc) . Podobnie będzie, gdy zamiast przekroju a zastąpimy przekrój b lub c przekrojem

d, tak że te cztery proste przecinają się po dwie w sześciu wierzchołkach zewnętrznych, tworząc czworobok zupełny.

Przekształcając to twierdzenie metodą biegunowych wzajemnych otrzymamy twierdzenie następujące:

Twierdzenie VI. Cztery stożki, opisane na powierzchni drugiego stopnia, wyznaczają sześć wewnętrznych płaszczyzn przecięcia. Każde trzy stożki wyznaczają trzy płaszczyzny, przechodzące przez jedną prostą; te cztery proste przecinają się w jednym punkcie, który jest z tym wspólny wszystkim sześciu płaszczyznom.

Widzieliśmy (tw. I), że przez każde dwa przekroje płaskie powierzchni drugiego stopnia można poprowadzić dwa stożki. Jak wiadomo, płaszczyzny równoległe do każdego z tych przekrojów przecinają stożki według stożkowych, podobnych do danych przekrojów. Właśność ta zachowuje się nawet wtedy, gdy jeden z tych przekrojów jest punktem lub dwiema prostymi. W tym przypadku oczywiście, przez pozostały przekrój płaski i punkt na powierzchni (wzgl. dwie proste) można poprowadzić tylko jeden stożek, którego wierzchołek będzie w danym punkcie (wzgl. którego dwie tworzące będą prostymi danymi). Każda płaszczyzna sieczna, równoległa do płaszczyzny stycznej w punkcie obranym na powierzchni, przecina stożek według krzywej, podobnej do nieskończonej małej elipsy (wzgl. dwóch prostych), utworzonej przez płaszczyznę styczną na powierzchni; ta zaś nieskończona mała elipsa (wzgl. dwie proste) jest podobna do przekroju powierzchni płaszczyzną sieczną. Stąd mamy ważne twierdzenie:

Twierdzenie VII. Rzut jakiegokolwiek przekroju płaskiego powierzchni drugiego stopnia z punktu tej powierzchni na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej w tym punkcie (lub co to samo: na płaszczyznę sprzężoną ze średnicą, przechodzącą przez ten punkt) jest figurą jednokładną ze stożkową, wyznaczoną przez powierzchnię na płaszczyźnie rzutów.

Wniosek I. Rzuty przekrojów płaskich powierzchni drugiego stopnia z punktu kołowego powierzchni na płaszczyznę odpowiedniego przekroju kołowego są kołami.

Wniosek II. Rzuty przekrojów płaskich kuli z punktu tej kuli na płaszczyznę prostopadłą do średnicy, przechodzącej przez środek rzutów, są kołami.

Te ostatnie rzuty noszą nazwę stereograficznych. Mają one doniosłe znaczenie w kartografji i znane już były w starożytności. Rzut

stereograficzny kuli jest szczególnym przypadkiem przekształcenia przez promienie odwrotne i dzięki temu posiada jeszcze własność zachowania kątów, której wogóle nie posiada rzut stereograficzny powierzchni drugiego stopnia.

Twierdzenie VIII. Środek koła, które jest rzutem przekroju płaskiego powierzchni drugiego stopnia z punktu kołowego tej powierzchni na płaszczyznę, równoległą do przekroju kołowego, jest rzutem wierzchołka stożka, opisanego na powierzchni według danego przekroju płaskiego.

(To twierdzenie w zastosowaniu do kuli podał Chasles).

W samej rzeczy, weźmy na powierzchni drugiego stopnia dwa przekroje płaskie, z których jeden niech będzie przecięciem kołowym; według tych przekrojów opiszmy na powierzchni dwa stożki P i Q (fig. 3) i poprowadźmy stożek S przez oba przekroje. Punkty Q , P i S leżą na prostej (Tw. I). Jeżeli przekrój kołowy zbliżać się będzie do płaszczyzny stycznej, to punkty P i S zbliżać się będą do środka przekroju kołowego, który będzie zresztą mała nieograniczenie. Gdy punkt P zejdzie się z punktem S i środkiem przekroju kołowego, płaszczyzna przekroju kołowego będzie płaszczyzną styczną; każda płaszczyzna π , równoległa do płaszczyzny stycznej przetnie stożek według figury jednokładnej z nieskończeniem małym przekrojem kołowym, t. j. według koła K , którego środek będzie na przedłużeniu nieskończeniem małego odcinka SP , czyli na prostej PQ c. b. d. o.

Zagadnienie Apolonjusa.

Rzut stereograficzny może mieć rozliczne zastosowania w geometrii kół i stożkowych jednokładnych, oraz może służyć do wyrowadzenia wzorów trygonometrii kulistej ze wzorów trygonometrii płaskiej. Zastosujmy np. powyższą teorię rzutu stereograficznego do zagadnienia Apolonjusa:

Poprowadzić koło, styczne do trzech kół danych.

Niech A , B i C (fig. 4) będą trzy koła dane. Znajdźmy środek pierwiastny tych trzech kół R , poprowadźmy z tego punktu, jako ze środka, kulę o promieniu, równym stycznej z punktu R do jednego z trzech kół danych. Niech koło K będzie śladem tej kuli na płaszczyźnie rysunku. Z jednego z punktów kuli P lub P_1 , których rzutem prostokątnym na płaszczyznę rysunku jest R , rzućmy na kulę trzy dane koła. Ponieważ kąty przecięcia dwóch kół przy tym rzucie zo-

staną zachowane i ponieważ koło K przecina prostokątnie koła dane, więc trzy koła otrzymane na kuli będą przecinały prostokątnie koło K , t. j. ich płaszczyzny będą prostopadłe do płaszczyzny rysunku. Niech ab , cd , ef będą rzutami prostokątnymi tych kół. Wyobraźmy sobie na

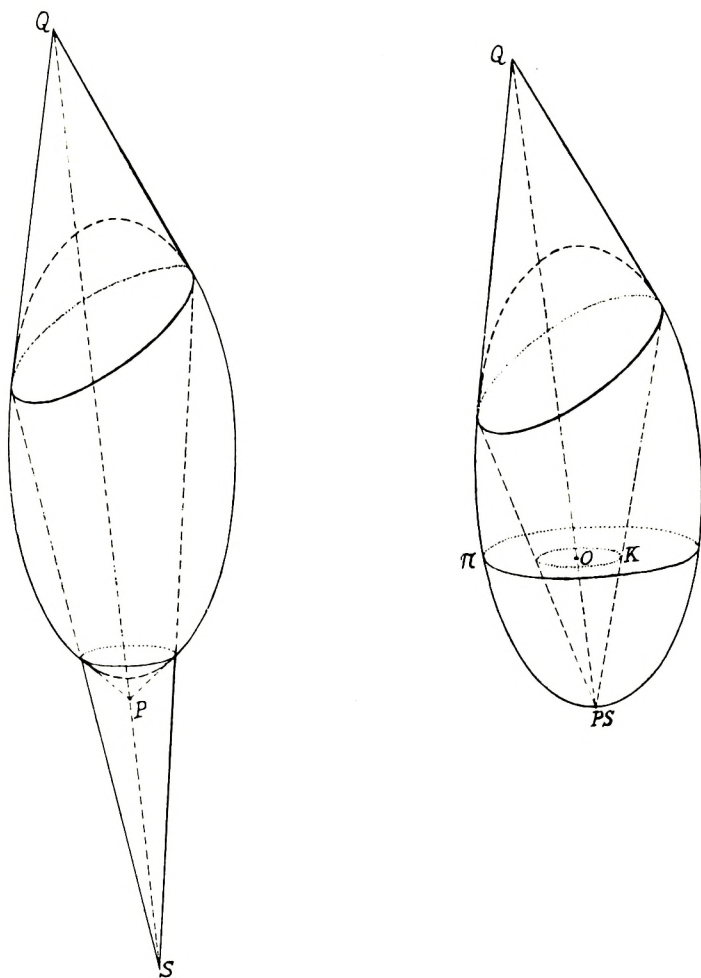


Fig. 3.

kuli koło, styczne w jednakowy sposób do trzech tych kół, na przykład zewnętrznie. Ponieważ koła styczne pozostają stycznymi przy rzucie stereograficznym, nasze zagadnienie sprowadza się do rzutu stereograficznego na płaszczyznę rysunku tego koła z punktu P lub P_1 . To koło na kuli musi nam dać przez rzut stereograficzny z punktu P lub P_1

dwa koła styczne do trzech kół A, B, C , jedno zewnątrz, drugie wewnątrz. Aby te rzuty znaleźć, można zastosować twierdzenie III lub IV. Stosując nap. twierdzenie IV, zauważmy, że punkty A, B i C są wierzchołkami stożków, opisanych na kuli, dla których koła ab, cd, ef są kołami styczności. Na mocy twierdzenia VIII środki kół stycznych do kół A, B i C na płaszczyźnie są rzutami wierzchołka S stożka opisanego na kuli według koła stycznego na kuli do trzech kół ab, cd, ef . Ale ten wierzchołek S jest to zarazem punkt wspólny trzem stoż-

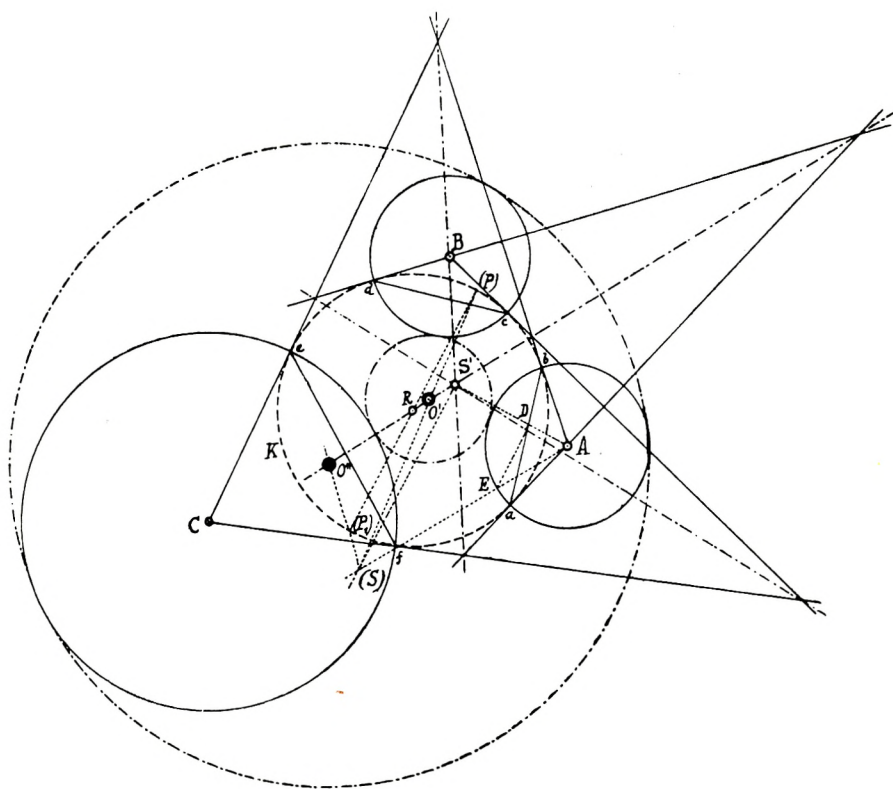


Fig. 4.

kom A, B i C , na mocy zaś twierdzenia IV, prosta, według której spotykają się płaszczyzny przecięć trzech stożków A, B i C , przechodzi przez S . Ponieważ płaszczyzna rysunku jest płaszczyzną symetrii, więc prosta owa jest do niej prostopadła. Nader łatwo znaleźć ślad tej prostej na rysunku, kreśląc ślady wewnętrznych płaszczyzn przecięcia stożków A, B i C . Wspólny punkt przecięcia tych śladów S' będzie śladem szu-

kanęj prostej. Ponieważ według twierdzenia IV trzy stożki opisane wyznaczają cztery takie proste, każda zaś z nich prowadzi do dwóch rozwiązań, należy więc oczekiwać 8 rozwiązań w przypadku ogólnym. Możemy teraz z łatwością znaleźć odległość wierzchołka S od jego rzutu S' . Poprowadźmy przez prostą SS' (której ślad jest punktem S') i przez jeden z trzech punktów A, B, C , np. przez A , płaszczyznę i wykonajmy kład tej płaszczyzny na płaszczyznę rysunku naokoło prostej AS' . Aby wykreślić położenie linii AS , t. j. wspólnej tworzącej stożka A i stożka S , w punkcie D wystawmy prostopadłą do AS' ; punkt E przecięcia tej prostej z kołem łączymy z punktem A i przedłużamy do przecięcia z prostopadłą $S'(S)$ do AS' w punkcie S'' . Punkt (S) jest kładem punktu S . Należy teraz znaleźć tylko rzut punktu S z punktu P lub P' . W tym celu zauważmy, że prosta, rzucająca punkt S ze środka rzutów, dzieli odcinek RS'' wewnątrz (jeżeli środek rzutów jest pod rysunkiem w punkcie P) lub zewnątrz (jeżeli środek rzutów jest nad rysunkiem w punkcie P') w stosunku $S'(S)$ do promienia kuli. Stąd wynika łatwe wykreślenie obu punktów O' i O'' . Z R prowadzę $(P)(P')$ równoległe do $S'(S)$ i łączę punkt (S) z P i z P' , w ten sposób otrzymuję na przecięciu z $S'R$ dwa środki kół szukanych O' i O'' . Znalezienie trzech innych par rozwiązań nie sprawia już żadnych trudności.

Wzory trygonometrii kulistej, otrzymane ze wzorów trygonometrii płaskiej przez rzut stereograficzny trójkąta sferycznego na płaszczyznę.

W Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique za rok 1905 (tłum. polskie w „Wiadomościach Mat. fiz. rok 1907 str. 61). Cesàro wyprowadził wzory trygonometrii kulistej bezpośrednio ze wzorów trygonometrii płaskiej. Ciekawą rzeczą jest okazać, iż trójkąt, którym posługiwał się Cesàro, jest w sposób nader prosty związany z rzutem stereograficznym trójkąta sferycznego.

Niech będzie na kuli O trójkąt sferyczny jakikolwiek ABC . Z punktu P , średnicowo przeciwnego jednemu z wierzchołków, np. A (fig. 5), rzućmy ten trójkąt na płaszczyznę Q , styczną do kuli w punkcie A . Ponieważ boki b i c przechodzą przez środek rzutów P , więc rzuty ich będą prostoliniowe, trzeci zaś bok a rzuci się jako łuk koła, na zasadzie własności rzutu stereograficznego. Ponieważ kąty zachowują się przy rzucie stereograficznym, więc kąt A' pozostanie równym kątowi A , podobnież kąty między łukiem $C'B'$ i prostymi c' wzgl. b' bę-

dą równe kątom B wzgl. C . Połączmy punkty C' i B' (fig. 6). Odcinek $C'B'$ będzie rzutem odcinka CB . W punktach B' i C' prowadzimy styczne do łuku $B'C'$, tak że $\hat{B}' = \hat{B}$ i $\hat{C}' = \hat{C}$ (fig. 6).

Jeżeli od sumy trzech kątów trójkąta sferycznego odjąć 180° , to różnica daje tak zwane spełnienie sferyczne. Jeśli więc od sumy kątów A' , $A'C'D'$ i $A'B'D'$ odjąć sumę kątów trójkąta $A'C'B'$, to różnica $= S$, a że trójkąt $B'D'C'$ jest równoramienny, więc $C'B'D' = B'C'D' = \frac{1}{2}S$; tak więc w trójkącie $A'B'C'$ kąt $A' = A$, $B' = B - \frac{S}{2}$, $C' = C - \frac{S}{2}$.

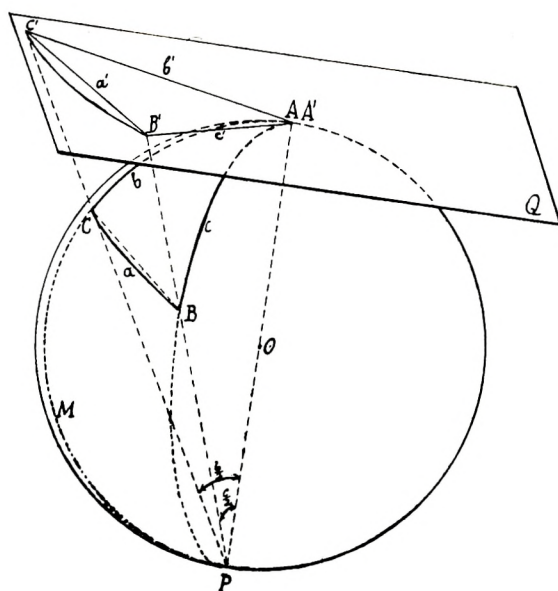


Fig. 5.

Zwróćmy się do boków. Z trójkąta $AC'P$ (fig. 5): $A'C' = AP \tan \angle APC'$; t. j. jeśli średnica kuli $= 1$,

$$A'C' = \tan \frac{b}{2},$$

podobnie z trójkąta $AB'P$:

$$A'B' = \tan \frac{c}{2}.$$

Bok $B'C'$ znajdziemy z trójkątów podobnych PBC i $PC'B'$

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{B'P}{CP}, \quad \dots \dots \dots (1)$$

ale BC jest to cięciwa łuku a w kole, którego promień $= \frac{1}{2}$

$$BC = \sin \frac{a}{2};$$

$B'P$ określa się z trójkąta APB'

$$B'P = \frac{1}{\cos \frac{c}{2}};$$

CP jako cięciwa łuku $CMP = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\widehat{CMP}}{2}$

$$CP = \sin \frac{180^\circ - b}{2} = \cos \frac{b}{2}.$$

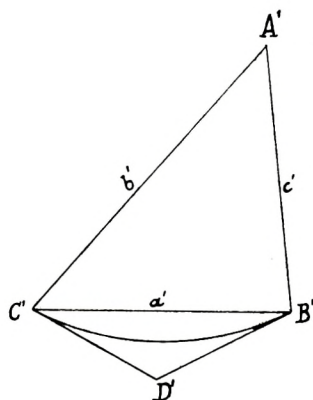


Fig. 6.

Podstawiając te wartości w (1) mamy:

$$\frac{B'C'}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{c}{2} \cos \frac{b}{2}}, \text{ skąd}$$

$$B'C' = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}},$$

Tak więc w trójkącie $A'B'C'$ mamy:

$$A' = A, \quad B' = B - \frac{S}{2}, \quad C' = C - \frac{S}{2}$$

Te trzy boki możemy pomnożyć przez stałą dowolną, co sprowadza się do zmiany promienia kuli, która jest dowolną. Mnożymy zatem trzy boki przez $\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$ i otrzymamy ostatecznie trójkąt $A''B''C''$, którego kąty i boki są (fig. 7):

$$A'' = A, \quad B'' = B - \frac{S}{2}, \quad C'' = C - \frac{S}{2}$$

$$a'' = \sin \frac{a}{2}, \quad b'' = \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}, \quad c'' = \sin \frac{c}{2} \cos \frac{b}{2}.$$

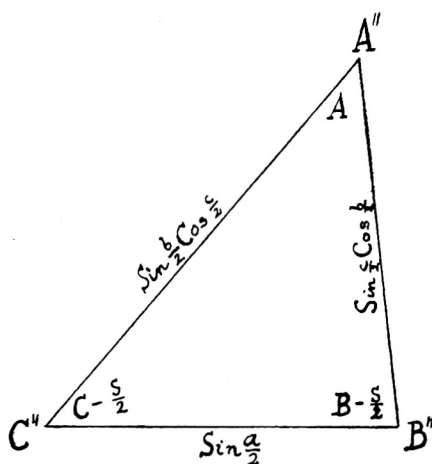


Fig. 7.

Stosując do tego trójkąta wzory trygonometrii płaskiej otrzymamy wszystkie wzory trygonometrii kulistej dla trójkąta ABC na kuli. Tak np. stosując znany wzór trygonometrii płaskiej:

$$a' = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}, \quad b' = \tan \frac{b}{2}, \quad c' = \tan \frac{c}{2}.$$

$$\frac{b'' + c''}{b'' - c''} = \frac{\cot \frac{A''}{2}}{\tan \frac{B'' - C''}{2}}$$

otrzymamy przez podstawienie natychmiast analogje Napiera:

$$\frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{b-c}{2}} = \frac{\cot \frac{A}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}.$$

Stosując wzory Mollweide'go

$$\frac{b'' + c''}{a''} = \frac{\cos \frac{B'' - C''}{2}}{\sin \frac{A''}{2}}, \quad \frac{b'' - c''}{a''} = \frac{\sin \frac{B'' - C''}{2}}{\cos \frac{A''}{2}}$$

otrzymamy wzory Delambre'a:

$$\frac{\sin \frac{b+c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\cos \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad \frac{\sin \frac{b-c}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Stosując twierdzenie o kwadracie boku w trójkącie:

$$a''^2 = b''^2 + c''^2 - 2b''c''\cos A''$$

znajdziemy po łatwych przeróbkach t. zw. zasadniczy wzór trygonometrii kulistej:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad \text{i t. d.}$$

Łódź, w sierpniu 1911 r.

Stanisław Garlicki.