



**WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW.**  
**L. KARASIŃSKI.**

**POLITECHNIKA WARSZAWSKA.**  
**1917/18 R.**



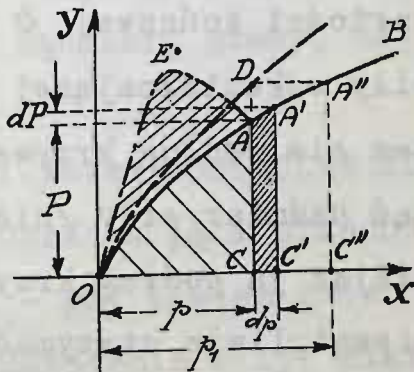
# CZĘŚĆ DRUGA.

## ROZDZIAŁ ÓSMY.

### PRACA ODKSZTAŁCEN.

§ 1. PRACA SIŁY ZEWNĘTRZNEJ. Przyłożmy w punkcie  $M$  ciała sprężystego siłę  $P$ . Ciało odkształci się; punkt  $M$  przejdzie w  $M'$  - nastąpi stan równowagi odkształconej. Rzut odkształcenia  $MM'$  na kierunek siły  $P$  oznaczamy przez  $p$  i nazywamy krótko - PRZESUNIĘCIEM SIŁY  $P$ . Jest ono zależne od siły odkształcającej. Wobec ustalenia się równowagi odkształconej możemy skorzystać ze wzorów wytrzymałościowych, wyznaczyć naprężenia ciała odkształconego powstałe na tle siły  $P$ , oraz odnośne odkształcenia, wśród których znajdziemy również i przesunięcie  $p$ . Czyniąc to dla różnych wartości  $P$  możemy wyznaczyć krzywą  $OB$  określającą zależność  $p$  od  $P$ . Każdej wartości  $P$  rzędnej tej krzywej odpowiada szczególna wartość odciętej  $p$ , cechująca odnośny stan równowagi odkształconej w sposób jednoznaczny. W szczególnym wypadku gdy krzywa  $OB$  jest prosta, ciało ulega prąwu HOOKE' A - jest WZOROWO

RYS. 306.





SPRĘŻYSTE. Gdy  $P$  wzrośnie o  $dP$  - przesunięcie otrzyma przyrost  $dp$ , przyczem siła odkształcająca wykona elementarną pracę  $d\Pi_p = Pd p = POW[AA'C'C']$ . Skoro więc siła rosnąć będzie zwolna od zera do najwyższego natężenia  $P$  - to oczywiście wykona pracę  $\Pi_p = POW[OAC]$ . Będzie to praca siły odkształcającej, odpowiadająca stopniowemu obciążaniu ciała sprężystego. Przy obciążaniu stopniowem wraz z siłą rosną przesunięcia od zera do  $p$  również stopniowo a wolno i zawsze po każdej nowej dawce  $dP$  ustala się nowy stan równowagi odkształconej na tle odpowiedniego przyrostu  $dp$ . Obciążając ciało w ten sposób nie schodzimy z  $OB$ , KRZYWEJ RÓWNOWAGI ODKSZTAŁCONEJ. Jest to zarazem KRZYWA NAJMNIEJSZYCH WARTOŚCI SIŁY ODKSZTAŁCAJĄCEJ PRZYNALEŻNYCH DO PRZESUNIĘĆ ODNOŚNYCH, jest to więc również KRZYWA NAJMNIEJSZEJ PRACY SIŁY ODKSZTAŁCAJĄCEJ  $P$ , WYWOŁUJĄCEJ OSTATECZNIE DANE PRZESUNIĘCIE  $p$ .

W samej rzeczy - przesunięcie z samej natury rzeczy musi wzrastać w sposób ciągły od  $0$  do swej wartości końcowej  $p$ , natomiast rodzaj zmienności siły odkształcającej może być dokonany dowolnie, zatem nie według krzywej  $OAB$ , możemy bowiem rozwinąć nadmiar siły (niedomiar nie da odkształceń) zmieniając ją podług krzywej  $OD$ . W ten sposób możemy niewątpliwie otrzymać przesunięcie  $p$  przy pewnej wartości siły  $P = CD$ , nie będzie ono jednak trwa-



le, bo siła  $CD$  prowadzić będzie dalej dzieło odkształcenia PÓKI NIE ZAPANUJE STAN RÓWNOWAGI ODKSZTAŁCONEJ, tej bowiem siłę odpowiada przesunięcie  $p_1 = OC''$  a nie  $p = OC$ . Aby zatem otrzymać przesunięcie  $p$  należy siłę zmieniać jakkolwiek od  $O$  do skrajnej wartości  $P = AC$  odpowiadającej owemu przesunięciu według krzywej  $OB$ . Siła może zatem zmieniać się wzdłuż krzywej  $OEA$  z nadmiarem dla pośrednich odkształceń. Przez cały czas przebiegu równowaga wewnętrzna będzie stale zakłócona - NADMIAR PRACY PRZEMIENI SIĘ W ENERGJĘ RUCHU CZĄSTEK - NASTĄPIĄ DRGANIA CZĄSTECZKOWE, które trwać będą dopóty, póki wreszcie na tle tarcia wewnętrznego międzycząsteczkowego nie ścichną, dając wzamian straconej energii ciepło, które wypromieniuje ciało w następstwie.

W ciepło przetworzy się cały nadmiar pracy siły zewnętrznej wyobrażonej powierzchnią  $[OEA O]$  na naszym wykresie. W tym wypadku krańcowy stan równowagi jest zatem możliwy - możemy go jednak osiągnąć MNIEJSZYM WYDATKIEM PRACY ZWIĘKSZAJĄC SIŁĘ STOPNIOWO wzdłuż  $OAB$ , a więc unikając nadmiaru pracy, dającego ciepło.

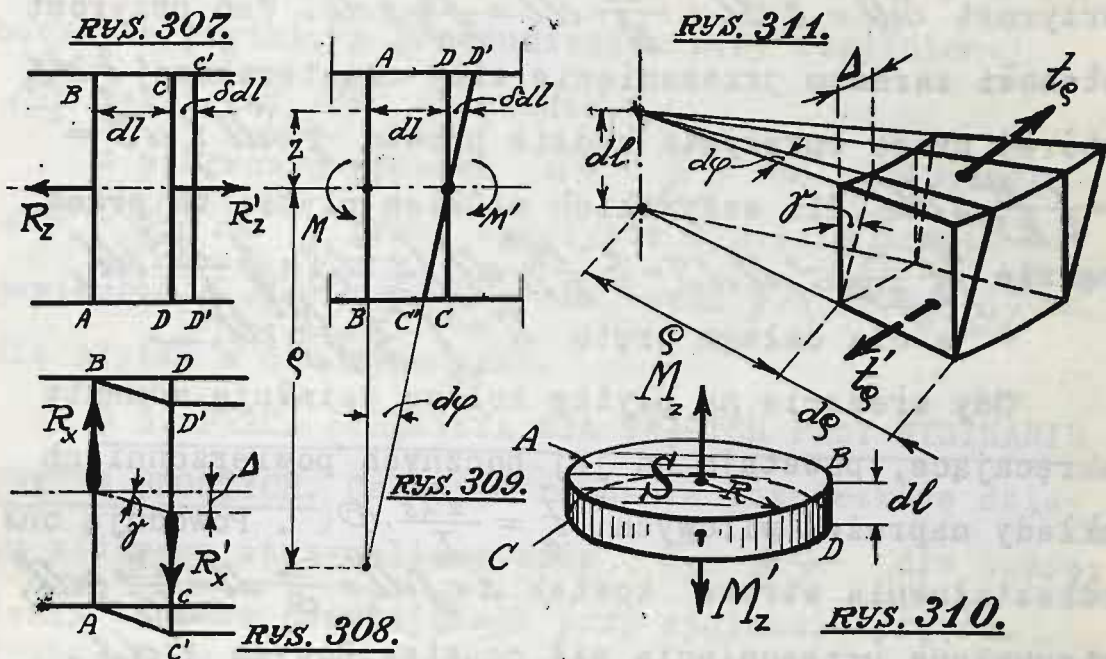
Powierzchnia  $OAC$  stanowi zatem KONIECZNE MINIMUM PRACY. Ciało sprężyste pochłania ją i przechowuje w postaci ENERGJI UTAJONEJ - gdy bowiem znów stopniowo poczniemy zmniejszać natężenie siły, ciało zwolna zacznie powracać do stanu pierwotnego nieod-

kształconego, przesunięcia wystąpią w kierunku odwrotnym zwracając całą pracę sprężystą odwracalną. Praca sprężysta  $[OAC]$  będzie zarazem JEDYNĄ ODWRACALNĄ CZĄSTKĄ PRACY SIŁY ODKSZTAŁCAJĄCEJ ZMIENIANEJ WEDŁUG KRZYWEJ  $OED$ , resztę bowiem pracy wydatkowanej przejdzie w ciepło na tle drgań wewnętrznych międzycząsteczkowych. Dla ciał wzorowo sprężystych PRACA SPRĘŻYSTA jako pole trójkąta będzie  $\Pi_p = \frac{1}{2} pP$ . ~  
Poprzyjmy to przykładami.

§ 2. PRACA SPRĘŻYSTA PRZY ROZCIĄGANIU LUB ŚCISKANIU, PRZY ŚCINANIU, GIĘCIU i SKRĘCANIU PRĘTÓW PROSTYCH. Wyodrębnijmy myślowo płytkę elementarną prowadząc dwa sąsiednie przekroje poprzeczne pręta prostego znikomo odległe o  $dl$ . Możemy ją obustronnie obciążyć siłami podłużnymi  $R_z$  i  $R'_z = R_z + dR_z$ , lub poprzecznymi  $R_x$  i  $R'_x = R_x + dR_x$ , momentami gnącymi  $M$  i  $M' = M + dM$  lub skręcającymi  $M_z$  i  $M'_z = M_z + dM_z$ . W pierwszym wypadku na bocznych ściankach płytki panują naprężenia jednostajne  $\tau_z = \frac{R_z}{S}$ , a pod ich działaniem każde włókno płytki wydłuża się lub skraca o  $\delta dl = \epsilon dl = \frac{\tau_z}{E} dl = \frac{R_z}{ES} dl$ . Wydłużenia  $\delta dl$  możemy oczywiście rozpatrywać, jako przesunięcia sił cząsteczkowych  $\tau_z dS$  przekroju; zatem praca sprężysta każdej takiej siły będzie:  $\frac{1}{2} \tau_z dS \delta dl = \frac{1}{2} \frac{R_z^2}{ES^2} dS dl$ . Dla wszystkich włókien płytki praca ta wyniesie:  $\frac{1}{2} \frac{R_z^2}{ES} dl$ . Dla całego pręta  $L$  długiego będziemy mieli przeto  $\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{R_z^2}{ES} dl$ , a dla pręta o sta.



łym przekroju obciążonego dwiema siłami  $P$  podłużnymi będziemy mieli  $\Pi = \frac{P^2 L}{2ES}$ .



W wypadku obciążenia płytki siłami poprzecznymi na jej ściankach bocznych panują naprężenia  $t_x = \frac{R_x}{S}$  powodujące jednakowe dla wszystkich włókien odkształcenia tnące  $\Delta = \gamma dl = \frac{t_x}{G} dl = \frac{R_x}{GS} dl$ . I tu znów  $\Delta$  stanowi przesunięcie siły cząsteczkowej  $t_x ds$ , której praca sprężysta będzie  $\frac{1}{2} \Delta t_x ds = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_x^2}{GS^2} ds dl$ . Dla wszystkich włókien płytki ta praca będzie  $\frac{1}{2} \frac{R_x^2}{GS} dl$ , a dla całego pręta  $\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{R_x^2}{GS} dl$ .

Gdy z kolei na płytkę działają momenty gnące - możemy je rozłożyć na momenty składowe leżące na osiach głównych przekroju. Na tle ich działania powstaną na ściankach bocznych płytki naprężenia gnące, powodujące odkształcenia gnące włókienek. Włókienko w odległości  $Z$  od środka przekroju obrane, podlegać



będzie działaniu naprężeń  $t_g = \frac{M}{J} Z$ , powodujących przyrost  $Sdl = \epsilon dl = \frac{t_g}{E} dl = \frac{M}{EJ} Z dl$ . Ten przyrost stanowi zarazem przesunięcie siły cząsteczkowej  $t_g dS$ , której praca sprężysta będzie przeto  $\frac{1}{2} Sdl t_g dS = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ^2} Z^2 dl dS$ . Dla wszystkich włókien płytki ta praca będzie  $\int \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ^2} Z^2 dl dS = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ^2} dl \int Z^2 dS = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dl$ , a dla całego pręta  $\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dl$ .

Gdy wreszcie na płytkę kołową działają momenty skręcające, powstają na jej bocznych powierzchniach układy naprężeń wirowych  $t_g = \frac{M_s}{J_0} \rho$ . Powodują one odkształcenia wirowe kostek  $\Delta = \gamma dl = \frac{t_g}{G} dl = \frac{M_s}{GJ_0} \rho dl$ , stanowiące przesunięcia sił cząsteczkowych  $t_g dS$ . Praca siły cząsteczkowej  $t_g dS$  będzie przeto:  $\frac{1}{2} \Delta t_g dS = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_0^2} \rho^2 dS dl$ . Dla wszystkich kostek płytki ta praca będzie  $\int \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_0^2} dl \rho^2 dS = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_0^2} dl \int \rho^2 dS = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_0} dl$ , a dla całego pręta o przekroju kołowym będziemy mieli  $\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_0} dl$ .

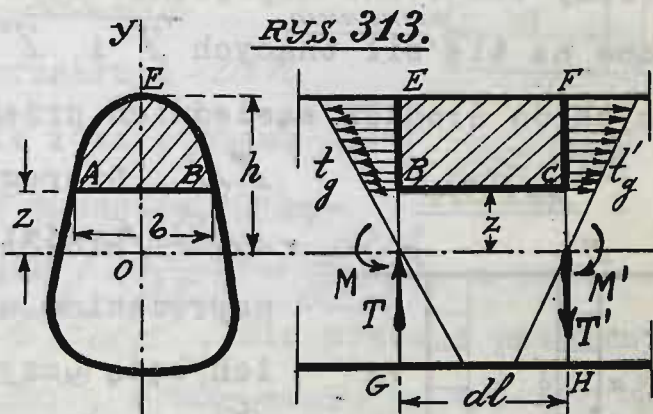
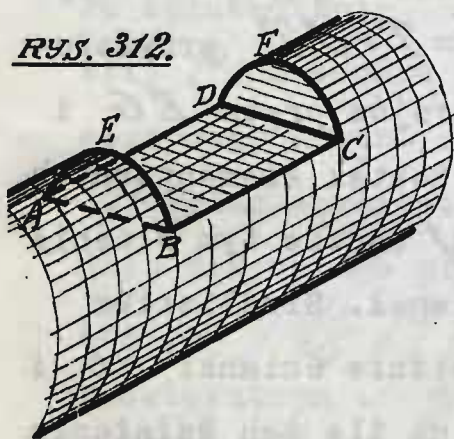
Te same wyniki otrzymamy dla płytki rozpatrując przesunięcia sił  $R_z'$  i  $R_x'$  w dwu pierwszych wypadkach. Przesunięcie siły  $R_z'$  będzie niewątpliwie  $Sdl = \frac{R_z}{ES} dl$ , a przesunięcie siły  $R_x'$  będzie  $\Delta = \frac{R_x}{GS} dl$ . Praca sprężysta wyniesie przeto  $\frac{1}{2} R_z' Sdl = \frac{1}{2} \frac{R_z^2}{ES} dl$ , oraz  $\frac{1}{2} R_x' \Delta = \frac{1}{2} \frac{R_x^2}{GS} dl$  — w tych dwu wypadkach dla płytki.

Podobnie rozpatrując miasto sił MOMENTY PŁYTKI, czyli SIŁY UOGÓLNIONE, możemy otrzymać pracę sprężystą dla płytki rozpatrując kąt obrotu pary sił momen-

tu jako przesunięcie tej siły uogólnionej. Zatem przesunięciem siły  $M''$  będzie kąt  $d\varphi$  obrotu ścianek bocznych płytki, a przesunięciem siły uogólnionej  $M'_s$  także kąt  $d\varphi$  skręcenia.

W pierwszym wypadku  $d\varphi = \frac{M}{EJ} dl$ , w drugim -  $d\varphi = \frac{M_s}{GJ_0} dl$ , praca sprężysta wyniesie przeto odpowiednio  $\frac{1}{2} M' d\varphi = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EJ} dl$ , oraz  $\frac{1}{2} M_s d\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{GJ_0} dl$ , dla płytki w obu wypadkach.

§ 3. PRACA SPRĘŻYSTA SIŁ TNĄCYCH PRZY WYGINANIU PRĘTÓW PROSTYCH. Całkując równania różniczkowe działu siódmego otrzymaliśmy wzór  $\tau = \frac{TF}{2J}$  dla naprężenia tnącego powstającego przy wyginaniu prętów. Można go również otrzymać wprost, rozpatrując warunki równowagi cząstki pręta  $ABCD$  myślowo wyodrębnionej. Pozostaje ona w stanie trwałej równowagi pod



jarzmem naprężeń gnących, panujących na obu jej bocznych przekrojach, oraz naprężeń  $\tau$  tnących, rozłożonych jednostajnie po całym dolnym przekroju  $ABCD = bdl$ . Wypadkowa naprężeń tnących  $\tau bdl$  równoważyć



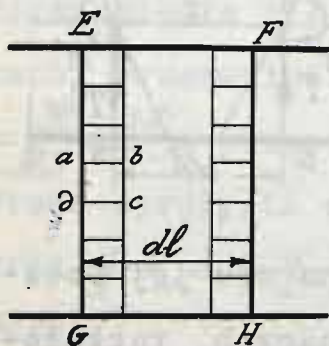
powinna wypadkową naprężeń gnących, inaczej bowiem wyodrębniona płytką nie będzie w równowadze. Wzdłuż ścianki  $BE$  panują siły cząsteczkowe  $t_g ds$ , na ściance  $CF$  - siły  $t'_g ds$ , musi być zatem:

$\Sigma(t'_g - t_g) ds = \tau b dl$ . Weźmy pod uwagę jakiekolwiek włókienko  $dl$  długie w odległości  $y$  od osi pręta.

Pozostaje ono pod jarzmem sił gnących  $t_g ds = \frac{M}{J} y ds$  oraz  $t'_g ds = \frac{M'}{J} y ds = \frac{M + dM}{J} y ds$ . Zatem  $\Sigma(t'_g - t_g) ds = \int \frac{dM}{J} y ds$ . W ustępie rozdziału piątego udowodni-  
liśmy, że  $dM = \tau dl$  zatem  $\tau b dl = \int \frac{T dl}{J} y ds =$   
 $= \frac{T}{J} dl \int y ds = \frac{T F}{J} dl$ , gdzie  $F$  oznacza oczywiście moment statyczny powierzchni przekroju  $ABE$  lub  $DFC$  prawie tożsamościowego z  $ABE$ , bo sąsied-  
niego.

Ostatecznie  $\tau = \frac{TF}{2J}$ . W ten sposób wyznaczy-  
liśmy tak zwane naprężenie rozwarstwiające. Powstaje  
ono na tle <sup>DZIAŁANIA</sup> (sił tnących  $T$  i  $T' = T + dT$  przyłożo-  
nych do środków sąsiednich przekrojów pręta  $EG$  i

RYS. 314.



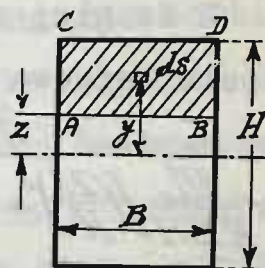
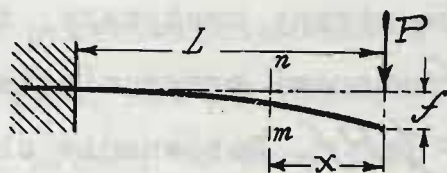
$FH$ . Szereg kostek elementarnych  $abcd$  (RYS. 314) będzie tym właśnie naprężeniom ulegał. Siedliskiem ich będą oczywiście ścianki  $ab$  i  $cd$  kostek, a na tle ich działania powstaną dodatkowe naprężenia tnące na ściankach pionowych  $ad, bc$

równe rozwarstwiającym, a stanowiące łącznie z nie-  
mi naprężenie tnące kostki. Pod jego wpływem kostki



kostki staną się ukośne, a płytka odkształci się podobnie jak na RYS. 308. I tu również przesunięciem siły cząsteczkowej  $\tau ds$  będzie  $\Delta = \gamma dl = \frac{\tau}{G} dl$ , a pracą jej sprężystą  $\frac{1}{2} \Delta \tau ds = \frac{1}{2} \frac{\tau^2}{G} ds dl$ . Dla całej płytki będziemy mieli  $\frac{1}{2G} dl \int \tau^2 ds$ , a dla całego pręta  $\Pi = \int_0^L \frac{1}{2G} dl \int \tau^2 ds = \int_0^L \frac{dl}{2G} \int \left[ \frac{TF}{6J} \right]^2 ds$ , gdzie całkować należy wzdłuż przekroju.

Działanie naprężeń tnących  $\tau$  UZEWNETRZNIĄ SIĘ przesunięciem siły  $T'$ , SKRZYWIENIEM PŁYTKI z pręta wyodrębnionej. W ten sposób SIŁY TNĄCE WSPÓLDZIAŁAJĄ GNĄCYM: Aby zdać sobie sprawę z doniosłości tego współdziałania rozpatrzmy pręt (RYS. 315) zamocowany jednostronnie a obciążony u końca siłą  $P$ .



Po sprowadzeniu

RYS. 315.

siły  $P$  do środka przekroju  $mn$ , otrzymamy moment  $Px$  i siłę tnącą

RYS. 316.

$P$ . Praca sprężysta momentów  $Px$  będzie dla całego pręta  $\int_0^L \frac{Px^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2 L^3}{6EJ}$ , a praca sił tnących  $\int_0^L \frac{dx}{2G} \int \left[ \frac{PF}{6J} \right]^2 ds$ . Dla pręta o przekroju prostokątnym  $J = \frac{1}{12} BH^3$ ,  $b = B$  oraz  $F_{ABCD} = \int y ds = \int_z^H y B dy = B \left[ \frac{H^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right]$ , zatem:  $\int_0^L \frac{dx}{2G} \int \frac{P^2 F^2}{6^2 J^2} ds =$

$$= \int_0^L \frac{dx}{2G} \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \frac{P^2}{B^2 \left[ \frac{BH^3}{12} \right]^2} \cdot \frac{B^2}{4} \left[ \frac{H^2}{4} - z^2 \right]^2 B dz =$$

$$= \int_0^L \frac{dx}{2G} \frac{36 P^2}{BH} \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} \left[ \frac{H^4}{16} - \frac{H^2 z^2}{2} + z^4 \right] \frac{dz}{H^5} = 1,2 \int_0^L \frac{P^2}{2GBH} dx \dots$$

Porównyując otrzymany wynik ze wzorem dla pracy otrzymanym w ustępie poprzedzającym dochodzimy do przekonania, że oba te wzory są jednakowe różnią się jeno o stały współczynnik 1,2. Nadal więc zawsze pracę sił tnących przy gięciu wyznaczać będziemy według wzoru  $\mu \int_0^L \frac{R_x^2 dl}{2GS}$ , gdzie  $\mu = 1,2$  dla przekroju prostokątnego. Dla dwuteownika  $\mu$  waha się w granicach od  $\mu = 2,4$  dla  $N^{\circ} 8$  aż do  $\mu = 2,0$  dla  $N^{\circ} 50$ . Ostatecznie więc mamy:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{P^2 L^3}{6E \frac{BH^3}{12}} + 1,2 \int_0^L \frac{P^2 dx}{2GBH} = 2 \frac{P^2 L^3}{EBH^3} + \\ &+ \frac{1,2 P^2 L}{2GBH} = \frac{P^2 L}{2EBH} \left[ \left( \frac{2L}{H} \right)^2 + 1,2 \frac{E}{G} \right]. \sim \end{aligned}$$

Z drugiej znów strony zważywszy, że strzałka ugięcia końcowa  $f$  stanowi przesunięcie siły  $P$ , możemy napisać  $\Pi = \frac{1}{2} P f$ . Porównanie obu wzorów da  $f = \frac{PL}{EBH} \left[ \left( \frac{2L}{H} \right)^2 + 1,2 \frac{E}{G} \right]$ . Wobec tego, że  $G \cong 0,4E$  będziemy mieli ostatecznie  $f = \frac{PL}{EBH} \left[ \left( \frac{2L}{H} \right)^2 + 3 \right]$ .

Gdybyśmy pominęli pracę sił tnących, to wtedy należałoby odrzucić drugi wyraz nawiasu. Ten zatem wyraz wyznacza wpływ siły tnącej na strzałkę ugięcia pręta. Przy  $L = 5H$  a więc dla bardzo krótkiego pręta pierwszy wyraz nawiasu równa się 100 - w tym zatem wypadku SIŁY TNĄCE POWIĘKSZAJĄ ZALEDWIE O 3% STRZAŁKĘ UGIĘCIA POWSTAŁĄ NA TLE DZIAŁANIA SIŁ GNĄCYCH. Stąd wniosek, że DZIAŁANIA SIŁ TNĄCYCH MOŻNA NIE BRAĆ POD UWAGĘ PRZY ROZPATRYWANIU WYGINANIA PRĘTÓW DŁUGICH, jest ono bowiem wyraźne li tylko dla prętów



krótkich.

§ 4. PRACA SPRĘŻYSTA UKŁADU SIŁ. Ciało sprężyste nieodkształcone obciążamy układem sił odkształcających. Po odkształceniu zapanuje trwały stan równowagi odkształconej na tle przesunięć  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sił odkształcających  $P_1, P_2, \dots, P_n$  układu. W szczególnym wypadku przesunięcia  $p_1, p_2, \dots, p_n$  zależą wyłącznie i li tylko od siły pojedynczej - w ogólnym zależą od wszystkich sił układu. W pierwszym wypadku którekolwiek przesunięcie dajmy na to  $p_k$  jest funkcją siły odkształcającej  $P_k$ , w ogólnym wypadku:  $p_k = f_k(P_1, P_2, \dots, P_n)$ .

Gdy zatem przesunięcia zależą wyłącznie od siły pojedynczej układu, możemy niewątpliwie uogólnić dla wszystkich sił układu to wszystko, cośmy w ustępie pierwszym dla jednej siły ustalili. PRACA ELEMENTARNA UKŁADU BĘDZIE WIĘC  $d\Pi = \sum_{i=1}^n P_i dp_i$ , A PRACA SPRĘŻYSTA  $\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i p_i$  DLA CIAŁA WZOROWO SPRĘŻYSTEGO W STOSUNKU DO WSZYSTKICH SIŁ UKŁADU.

W ogólnym wypadku  $p_k = f_k(P_1, P_2, \dots, P_n)$ . Gdy wszystkim siłom układu nadamy przyrosty  $dP_1, dP_2, \dots, dP_n$  RÓWNOWAGA ZOSTANIE ZAKŁÓCONA, ciało odkształcać się będzie dopóty, PÓKI NA TLE PRZYROSTÓW  $dp_1, dp_2, \dots, dp_n$  NIE USTALI SIĘ PONOWNY STAN TRWAŁEJ RÓWNOWAGI ODKSZTAŁCONEJ. Przez ten czas KAŻDA SIŁA UKŁADU WYKONA PRACĘ  $P_i dp_i$ : ELEMENTARNA PRACA CAŁEGO UKŁADU BĘDZIE PRZETO RÓWNA  $d\Pi = \sum_{i=1}^n P_i dp_i$  NIEZALEŻNIE OD KSZTAŁTU



FUNKCJI  $f_k$ . Ten wzór dla pracy elementarnej sił odkształcających, ogólny dla wszelkich obciążeń ciała sprężystego w istocie rzeczy stanowi tak zwane:

### § 5. PIERWSZE TWIERDZENIE CASTIGLIANO.

Tylko co otrzymany wzór ogólny  $d\Pi = \sum_{i=1}^n P_i dp_i$  WYZNACZA PRACĘ ELEMENTARNĄ UKŁADU SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH, JAKO SUMMĘ ILOCZYNÓW SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH PRZEZ PRZYROSTY ODNOŚNYCH PRZESUNIĘĆ. Dzieląc obustronnie przez którykolwiek przyrost  $dp_k$  otrzymamy  $\frac{\partial \Pi}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^n P_i \frac{\partial p_i}{\partial p_k}$ ; Tym wzorem wyraża się również PIERWSZE PRAWO CASTIGLIANO: CZĄSTKOWA POCHODNA PRACY SPRĘŻYSTEJ PO JEDNEM Z PRZESUNIĘĆ RÓWNA SIĘ SUMMIE ILOCZYNÓW SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH PRZEZ CZĄSTKOWE POCHODNE PRZESUNIĘĆ TYCH SIŁ POWOM PRZESUNIĘCIU. Gdy przesunięcia są niezależne od siebie otrzymujemy wprost  $\frac{\partial \Pi}{\partial p_k} = P_k$  ~; wtedy bowiem  $\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = 0$  przy:  $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$  a  $\frac{\partial p_k}{\partial p_k} = 1$  ~

CZĄSTKOWA POCHODNA PRACY SPRĘŻYSTEJ PO JEDNEM Z PRZESUNIĘĆ DAJE ODNOŚNĄ SIŁĘ W WYPADKU PRZESUNIĘĆ NIEZALEŻNYCH OD SIEBIE. Te trzy odmiany pierwszego twierdzenia CASTIGLIANO stosują się do wszelkich ciał sprężystych. Pierwsze twierdzenie CASTIGLIANO jest przeto zupełnie ogólne.

§ 6. CIAŁO WZOROWO SPRĘŻYSTE. Gdy przesunięcia  $p_k$  wyrażają się funkcjami linjowemi sił odkształcających  $P_1, P_2, \dots, P_n$  ciało nazywamy WZOROWO SPRĘŻYSTEM. W tym wypadku  $p_k = a_{k1} P_1 + a_{k2} P_2 + \dots + a_{kn} P_n$ . Jest to tak zwane UOGÓNIONE PRAWO HOOKE'A, które głosi, że ODKSZTAŁCENIA

CIAŁA WZOROWO SPRĘŻYSTEGO STANOWIĄ FUNKCJE LINJOWE SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH. Ciało ulegające temu prawu musi niewątpliwie ulegać PIERWSZEMU PRAWU HOOKE`A w stosunku do każdej z osobna siły odkształcającej, oraz DRUGIEMU PRAWU HOOKE`A o niezależnem działaniu sił. Dla ciał wzorowo sprężystych siły odkształcające mogą być również wyrażone JAKO FUNKCJE LINJOWE PRZESUNIĘĆ. Aby to udowodnić wypisujemy szereg równości:

$$p_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \dots + a_{1n}P_n$$

$$p_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + \dots + a_{2n}P_n$$

.....

$$p_n = a_{n1}P_1 + a_{n2}P_2 + \dots + a_{nn}P_n$$

Rozwiązując te równania względem sił  $P_2$  otrzyma-

my:

$$P_1 = c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \dots + c_{1n}p_n$$

$$P_2 = c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \dots + c_{2n}p_n$$

.....

$$P_n = c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + \dots + c_{nn}p_n$$

Pierwszy szereg tylko co wypisanych równań wskazuje, że przesunięcia  $p_i$  dla ciał wzorowo sprężystych są zależne od sił odkształcających, a więc niezależą od siebie. Stosując przeto w drugim wypadku pierwsze prawo CASTIGLIANO w postaci  $\frac{\partial \Pi}{\partial p_k} = P_k$  możemy, korzystając z drugiego szeregu równań tylko co wypisanych, wyznaczyć pracę sprężystą  $\Pi$  układu. W tym celu wypisujemy:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} = P_1 = c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \dots + c_{1n}p_n$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = P_2 = c_{21}/p_1 + c_{22}/p_2 + \dots + c_{2n}/p_n$$

.....

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_n} = P_n = c_{n1}/p_1 + c_{n2}/p_2 + \dots + c_{nn}/p_n$$

Stąd mamy całkując kolejno bezpośrednio:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} p_1^2 + c_{12} p_2/p_1 + \dots + c_{1n} p_n/p_1 + \psi_1(p_2, p_3, \dots, p_n).$$

$$\Pi = c_{21} p_1/p_2 + \frac{1}{2} c_{22} p_2^2 + \dots + c_{2n} p_n/p_2 + \psi_2(p_1, p_3, \dots, p_n).$$

.....

$$\Pi = c_{n1} p_1/p_n + c_{n2} p_2/p_n + \dots + \frac{1}{2} c_{nn} p_n^2 + \psi_n(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n-1}).$$

Ponieważ jak to z samego całkowania wynika  $\psi_1$  nie może zawierać wyrazów z  $p_1$  a  $\psi_2$  - wyrazów z  $p_2$  przeto na mocy koniecznej tożsamości wyników wszystkich całkowań kolejnych musi być  $c_{12} = c_{21}$  i wogóle  $c_{km} = c_{mk}$  przy jakichkolwiek  $k, m$  z szeregu  $1, 2, \dots, n$ .  
Zatem  $\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} c_{ii} p_i^2 + \sum c_{km} p_k/p_m$  gdzie przy sumowaniu w drugim wyrazie należy brać jakiejkolwiek dwie cyfry szeregu  $1, 2, \dots, n$  dla  $k$  i  $m$  równocześnie. WYRAZU STAŁEGO  $\Pi$  ZAWIERAĆ NIE MOŻE PONIEWAŻ PRACA SPRĘŻYSTA CIAŁA NIEODKSZTAŁCONEGO Z NATURY RZECZY WINNA SIĘ RÓWNAĆ ZERU, to jest inaczej mówiąc przy  $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_n = 0$  musi być  $\Pi = 0$ .

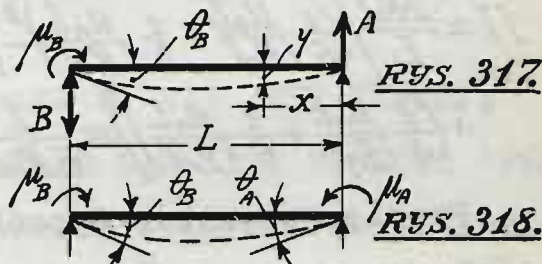
Wyrażmy we wzorze dla  $\Pi$  przesunięcia  $p_i$  przez  $P_i$  a otrzymamy znów FUNKCJĘ JEDNORODNĄ  $P_i$  DRUGIEGO STOPNIA. Stąd wniosek: PRACA SPRĘŻYSTA CIAŁA WZOROWO SPRĘŻYSTEGO JEST JEDNORODNĄ FUNKCJĄ DRUGIEGO STOPNIA SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH LUB ICH PRZESUNIĘĆ. Odwrotne twierdzenia niewątpliwie również są słuszne. A więc:



GDY PRACA SPRĘŻYSTA WYRAŻA SIĘ FUNKCJĄ JEDNORODNĄ DRUGIEGO STOPNIA SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH LUB ICH PRZESUNIĘC - CIAŁO JEST WZOROWO SPRĘŻYSTE. Przekonywamy się o tem z łatwością drogą różniczkowania bezpośredniego.

Jako przykład zastosowanie pierwszego prawa CASTIGLIANO rozpatrujemy obciążenie gnące belki momentem działającym tuż nad pod-

porą (RYS. 317) Tem moment  $\mu_B$  chce wygiąć belkę ku dołowi. Wywołuje on odpory  $A=B=\mu_B:L$ , tworzące równoważącą pa-



re. Ponieważ w odległości  $x$  od końca  $A$  belki wartość momentu będzie oczywiście  $M = -Ax = -\frac{\mu_B}{L}x$ , przeto dla rzędnej odkształconej  $y$  będziemy mieli  $EJy'' = -\frac{\mu_B}{L}x$ , co da kolejno:  $EJy' = -\frac{1}{2}\frac{\mu_B}{L}x^2 + C$ ;  $EJy = -\frac{1}{6}\frac{\mu_B}{L}x^3 + Cx + D$ . Przy  $x=0$   $y=0$  stąd  $D=0$ , nadto dla  $x=L$   $y=0$  zatem  $C = \frac{1}{6}\mu_B L$ . Oznaczmy przez  $\theta_A$  kąt pomiędzy pierwotną osią pręta a styczną odkształconej w punkcie  $A$ , przez  $\theta_B$  takież kąt u drugiego końca pręta. Wobec nieznaczonej wartości obu tych kątów, możemy oczywiście napisać że  $\theta_A = y'_{x=0} = \frac{1}{6}\frac{\mu_B L}{EJ}$ , oraz  $\theta_B = y'_{x=L} = -\frac{1}{3}\frac{\mu_B L}{EJ}$ . Gdy obciążymy nadto belkę tuż nad podporą  $A$  momentem  $\mu_A$  kierunkowo przeciwnym  $\mu_B$ , wtedy będziemy mieli  $\theta_A = \frac{1}{6}\frac{\mu_B L}{EJ} + \frac{1}{3}\frac{\mu_A L}{EJ}$ , oraz  $\theta_B = -\frac{1}{3}\frac{\mu_B L}{EJ} - \frac{1}{6}\frac{\mu_A L}{EJ}$ . Zważywszy, że przesunięcia  $\theta_A$  i  $\theta_B$  zachodzą w kierunku uogólnionych sił odkształcających  $\mu_A$  i  $\mu_B$  mo-

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XXXVII.

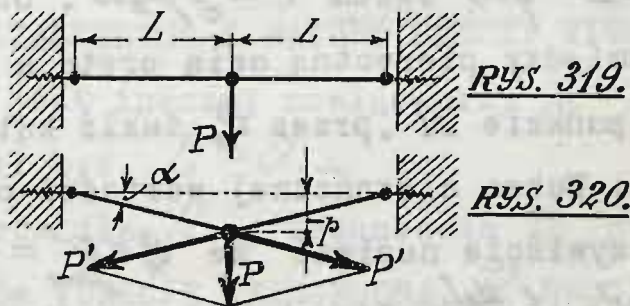
żemy oczywiście pominąć znak minus. Mnożąc przez  $\frac{6EJ}{L}$  mamy:  $\frac{6EJ\theta_A}{L} = \mu_B + 2\mu_A$ ,  $\frac{6EJ\theta_B}{L} = 2\mu_B + \mu_A$ , stąd:  
 $\mu_A = \frac{2EJ}{L} [2\theta_A - \theta_B]$ ,  $\mu_B = \frac{2EJ}{L} [2\theta_B - \theta_A]$ . —

Ponieważ w danym wypadku pierwsze prawo CASTIGLIA-NO daje  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_A} = \mu_A$  i  $\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_B} = \mu_B$  przeto całkując otrzymujemy:  $\Pi = \frac{2EJ}{L} [\theta_A^2 - \theta_A \theta_B + \theta_B^2]$  — albo też podstawiając wartości  $\theta_A$  i  $\theta_B$ :

$$\Pi = \frac{2EJ}{L} \left[ \left( \frac{1}{6} \frac{\mu_B L}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{\mu_A L}{EJ} \right)^2 - \left( \frac{1}{6} \frac{\mu_B L}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{\mu_A L}{EJ} \right) \left( \frac{1}{3} \frac{\mu_B L}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{\mu_A L}{EJ} \right) + \left( \frac{1}{3} \frac{\mu_B L}{EJ} + \frac{1}{6} \frac{\mu_A L}{EJ} \right)^2 \right] = \frac{L}{6EJ} (\mu_A^2 + \mu_A \mu_B + \mu_B^2). —$$

Prawie wszystkie wypadki odkształceń sprężystych należą do tego typu. Są jednak wyjątki, gdzie PRACA SPRĘŻYSTA PRZESTAJE BYĆ JEDNORODNĄ FUNKCJĄ DRUGIEGO STOPNIA SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH LUB ICH PRZESUNIĘĆ. Następujący przykład wyjaśni to w dostatecznej mierze. Haki zakończone przegubami wbito w ściany przeciwległe i połączono prętami  $L$  — zczepionymi przegubowo pośrodku. Środkowy przegub

dźwiga ciężar  $P$ . Wobec zupełnej nieruchomości ścian odkształcenie może nastąpić wyłącznie i



li tylko na tle wydłużenia się obu prętów  $L$ . Długość prętów wzrośnie więc do  $L'$ , punkt przyłożenia siły obniży się dając przesunięcie  $p$ . Równowaga odkształcona możliwa jest niewątpliwie li tylko wtedy gdy składowe



$P'$  siły  $P$  ułożą się na osiach prętów pochyłonych o kąt  $\alpha$ , jak to zresztą najlepiej uwypukla FYS.320. Mamy więc  $L' = L \cos \alpha$ ,  $p = L' \sin \alpha = L \tan \alpha$ ,  $\frac{P}{2} = P' \sin \alpha$ . Nadto:  $L' = L(1 + \epsilon) = L(1 + \frac{P'}{SE}) = L[1 + \frac{P}{2SE \sin \alpha}]$ ; Stąd:  $\frac{1}{\cos \alpha} = 1 + \frac{P}{2SE \sin \alpha}$  co da:  $P = 2SE \sin \alpha [\frac{1}{\cos \alpha} - 1] = 2SE [\tan \alpha - \sin \alpha] = 2SE \{ \tan \alpha - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}}} \} = 2SE \tan \alpha \{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \} = 2SE \frac{p}{L} \cdot \{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{L^2}}} \} = 2 \frac{SE}{L} p \{ 1 - (1 + \frac{p^2}{L^2})^{-\frac{1}{2}} \} \approx \frac{2SE}{L} p \{ 1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{L^2} \} = SE p^3 : L^3.$

W danym wypadku zatem siła  $P$  NIE JEST FUNKCJĄ LINJOWĄ PRZESUNIĘCIA  $p$  - UKŁAD NIE JEST WZOROWO SPRĘŻYSTY. Wobec zupełnej ogólności pierwszego twierdzenia CASTIGLIANO mamy tu  $\frac{\partial \Pi}{\partial p} = P \approx \frac{SE}{L^3} p^3$ , skąd  $\Pi \approx \frac{SE}{4L^3} p^4$ . Ten sam wynik otrzymać można również bezpośrednio, zważywszy, że oba pręty wzorowo są sprężyste. Będziemy mieli przeto dla obu prętów:  $\Pi = 2 \frac{1}{2} P' [L' - L] = \frac{P'^2}{SE} L = \frac{P^2 L}{4 SE \sin^2 \alpha} = \frac{4 S^2 E^2 \sin^2 \alpha L}{4 SE \sin^2 \alpha} [\frac{1}{\cos \alpha} - 1]^2 = SEL [\frac{1}{\cos \alpha} - 1]^2 = SEL \{ \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} - 1 \}^2 = SEL \{ (1 + \frac{p^2}{L^2})^{\frac{1}{2}} - 1 \}^2 \approx SEL \{ 1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{L^2} - 1 \}^2 = \frac{SE}{4L^3} p^4.$

Zatem UKŁAD ZŁOŻONY Z OGNIW WZOROWO SPRĘŻYSTYCH MOŻE NIE BYĆ WZOROWO SPRĘŻYSTYM JAKO CAŁOŚĆ. DLA CIAŁ WZOROWO NIESPRĘŻYSTYCH PRACA SPRĘŻYSTA NIE JEST JEDNORODNĄ FUNKCJĄ DRUGIEGO STOPNIA SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH LUB ICH PRZESUNIĘĆ. Jako wynik bezpośredni pierwszego twierdzenia CASTIGLIANO otrzymujemy:

§ 7. TWIERDZENIE CLAPEYRON`A. Weźmy pod uwagę ciało wzorowo sprężyste odkształcone układem sił  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Praca sprężysta w danym wypadku będzie, jak wiemy, rów-



$$\text{na: } \Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} a_{ii} p_i^2 + \sum a_{km} p_k p_m. \sim$$

Korzystając ze wzorów ustępu poprzedniego wyznaczających siły układu jako linjowe funkcje przesunięć  $p_1 p_2 \dots p_n$  tworzymy summe:  $\sum_{i=1}^n P_i p_i = c_{11} p_1^2 + c_{12} p_1 p_2 + \dots + c_{m1} p_1 p_m + c_{21} p_2 p_1 + c_{22} p_2^2 + \dots + c_{2n} p_2 p_n + \dots + c_{n1} p_1 p_n + c_{n2} p_2 p_n + \dots + c_{nn} p_n^2. \sim$

Wobec tego, że  $c_{mk} = c_{km}$  możemy napisać, że:  
 $\sum_{i=1}^n P_i p_i = \sum_{i=1}^n c_{ii} p_i^2 + \sum 2 c_{km} p_k p_m = 2 \Pi. \sim$

Stąd mamy więc  $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i p_i$ . Ten wzór wyraża istotę twierdzenia CLAPEYRON'A. PRACA SPRĘŻYSTA CIAŁA WZOROWO SPRĘŻYSTEGO RÓWNA JEST POŁOWIE SUMMY ILOCZYNÓW SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH PRZEZ ODNOŚNE PRZESUNIĘCIA. Ten sam wynik otrzymaliśmy już pierwiej bezpośrednio dla pojedynczej siły odkształcającej oraz w wypadku przesunięć zależnych od jednej tylko siły. Zastosowanie tego twierdzenia widzieliśmy już w ustępie trzecim, przy wyznaczaniu strzałki ugięcia; obecnie opierając się na twierdzeniu CLAPEYRON'A udowodnimy:

§ 8. DRUGIE TWIERDZENIE CASTIGLIANO. Weźmy pod uwagę ciało wzorowo sprężyste odkształcone układem sił  $P_1 P_2 \dots P_n$ . Praca sprężysta układu będzie na mocy twierdzenia CLAPEYRON'A  $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i p_i$ . Różniczkując bezpośrednio otrzymujemy:  $d\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i dP_i + \sum_{i=1}^n P_i dp_i$ . Pierwsze twierdzenie CASTIGLIANO dla wypadku tu rozpatrywanego da  $d\Pi = \sum_{i=1}^n P_i dp_i$  czyli  $\frac{1}{2} d\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i dp_i$  zatem  $d\Pi = \sum_{i=1}^n p_i dP_i$ . Otrzymany wzór stanowi istotę drugiego twierdzenia CASTIGLIANO.

Podobnie jak pierwsze, WYZNACZA ONO PRACĘ ELEMENTARNĄ UKŁADU SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH CIAŁO WZOROWO SPRĘŻYSTE, JAKO POŁOWĘ SUMMY ILOCZYNÓW PRZESUNIĘĆ PRZEZ PRZYROSTY ODNOŚNYCH SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH.

Dzieląc obustronnie przez którykolwiek przyrost  $dP_K$  otrzymamy  $\frac{\partial \Pi}{\partial P_K} = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial P_i}{\partial P_K}$ . Tym wzorem wyraża się również drugie prawo CASTIGLIANO.

CZĄSTKOWA POCHODNA PRACY SPRĘŻYSTEJ PO JEDNEJ Z SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH RÓWNA SIĘ SUMMIE ILOCZYNÓW PRZESUNIĘĆ PRZEZ CZĄSTKOWE POCHODNE ODNOŚNYCH SIŁ PO OWEJ OBRANEJ SILE ODKSZTAŁCAJĄCEJ.

Gdy wszystkie siły są od siebie niezależne otrzymujemy wprost  $\frac{\partial \Pi}{\partial P_K} = \beta_K$ , wtedy bowiem  $\frac{\partial P_i}{\partial P_K} = 0$  przy  $i=1, 2, \dots, K-1, K+1, \dots, n$  a  $\frac{\partial P_K}{\partial P_K} = 1$ . Częstkowa pochodna pracy sprężystej po jednej z sił odkształcających daje odnośne przesunięcie w wypadku sił od siebie niezależnych. Te trzy odmiany drugiego twierdzenia CASTIGLIANO stosują się wyłącznie do ciał WZOROWO SPRĘŻYSTYCH. O ile zatem pierwsze twierdzenie CASTIGLIANO jest zupełnie ogólne - o tyle drugie DOTYCZY TYLKO PEWNEJ GROMADY CIAŁ, opiera się bowiem na twierdzeniu CLAPEYRON'A. O doniosłości tego twierdzenia najlepiej przekonamy się rozpatrując odnośne przykłady:

Pręt jednostronnie zamocowany w ścianie, drugostronnie obciążony siłą  $P$ . W danym wypadku strzałka końcowa ugięcia  $f$  będzie przesunięciem siły  $P$ . Ponieważ jak to już wiemy  $M = Px$  zatem  $\Pi = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ} = \frac{P^2 L^3}{6EJ}$ ;

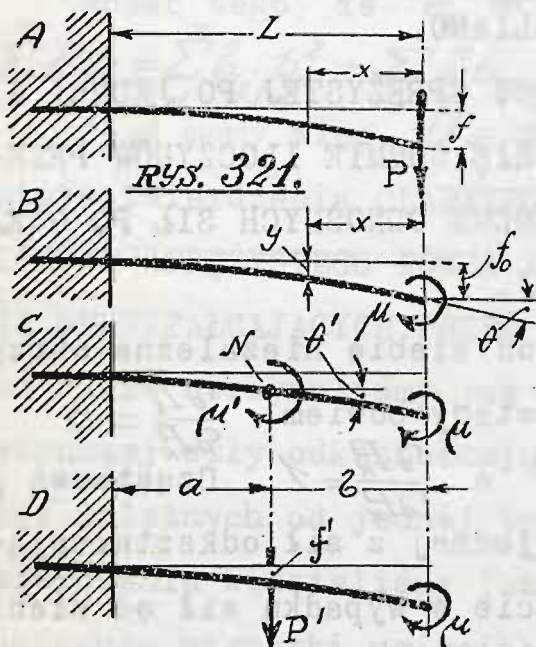


i na mocy drugiego twierdzenia CASTIGLIANO:

$$f = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{PL^3}{3EJ}.$$

Ten sam pręt obciążony u końca swobodnego momentem  $\mu$  prawoskrętnym odchyli się ku dołowi podobnie jak w wypadku działania siły  $P$ . Wzorując się na sta-

tyce możemy moment rozpa-  
trywać jako uogólnioną si-  
łę. Przesunięciem tej uo-  
gólnionej siły będzie  
oczywiście kąt obrotu pa-  
ry momentu odkształcają-  
cego, a więc w danym wy-  
padku kąt  $\theta$  pomiędzy  
styczną końca pręta od-  
kształconego a pierwotnym  
kierunkiem osi pręta nie-  
odkształconego. Kąt  $\theta$  wy-



znaczymy z łatwością pisząc  $\Pi = \int_0^L \frac{\mu^2 dx}{2EJ} = \frac{\mu^2 L}{2EJ}$ ,  
 stąd  $\theta = \frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = \frac{\mu L}{EJ}$ . Możemy łatwo sprawdzić, że tak  
 jest w istocie. Stosując zwykły wzór dla odkształconej  
 będziemy mieli  $EJy'' = -\mu$  stąd  $EJy' = -\mu x + A$   
 oraz  $EJy = -\frac{\mu}{2}x^2 + Ax + B$ . Wobec osadzenia pręta będzie-  
 my mieli  $y = y' = 0$  przy  $x = L$ , stąd  $-\mu L + A = 0$  oraz  
 $-\frac{\mu}{2}L^2 + AL + B = 0$ , czyli  $A = \mu L$   $B = -\frac{1}{2}\mu L^2$ . Stąd osta-  
 tecznie  $y' = \frac{\mu}{EJ}(L-x)$  oraz  $y = -\frac{\mu}{2EJ}(L-x)^2$ . Ponieważ  
 oczywiście  $\theta \cong y'_{x=0}$  zatem  $\theta = \frac{\mu L}{EJ}$ , co otrzymali-  
 śmy uprzednio. Gdybyśmy dla danego wypadku chcieli zna-

leżć skrajną strzałkę ugięcia pręta  $f$ , to należałoby wprowadzić dodatkową siłę  $P$  działającą w końcu belki niezależnie od  $\mu$ . Wtedy przy wspólnem działaniu sił  $\mu$  i  $P$  mielibyśmy dla jakiegokolwiek przekroju roz-

patrywanego w odległości  $x$  od swobodnego końca pręta  $M = \mu + Px$  a zatem  $\Pi = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^L \frac{[\mu + Px]^2 dx}{2EJ}$ . Koniec pręta pod działaniem tych sił przesunąłby się ku dołowi na  $f = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \int_0^L \frac{\mu + Px}{EJ} x dx = \frac{\mu L^2}{2EJ} + \frac{PL^3}{3EJ}$ .

Ponieważ jednak siła  $P$  nie działa należy zatem założyć w wyniku otrzymanym  $P = 0$  co da szukaną strzałkę  $f = \frac{\mu L^2}{2EJ}$  jaką ujawni pręt pod działaniem siły uogólnionej  $\mu$ .

Gdybyśmy dajmy na to chcieli wyznaczyć kąt  $\theta'$  jaki tworzy w jakimkolwiek środkowym punkcie pręta -stycz na jego odkształconej z kierunkiem pierwotnej osi pręta, to należałoby wprowadzić siłę uogólnioną odpowiadającą temu przesunięciu  $\theta'$  - inaczej mówiąc trzebaby wprowadzić moment  $\mu'$  odkształcający pręt w owym punkcie. Oznaczając przez  $a$  i  $b$  odległości rozpatrywanego punktu od obu końców pręta z łatwością zauważymy, iż dla  $b \geq x \geq 0$  wartość momentu jest stała i równa  $\mu$ , podczas gdy w odcinku  $L \geq x \geq b$  panuje moment  $\mu + \mu'$ .

A przeto:

$$\Pi = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^b \frac{\mu^2 dx}{2EJ} + \int_b^L \frac{(\mu + \mu')^2 dx}{2EJ} = -\frac{\mu^2 b}{2EJ} + \frac{(\mu + \mu')^2 [L - b]}{2EJ} = \frac{\mu^2 b}{2EJ} + \frac{(\mu + \mu')^2}{2EJ} a.$$

Korzystając z drugiego twierdzenia Castigliano z



łatwością wyznaczmy przesunięcie przynależne do  $\mu'$  w postaci  $\frac{\partial \Pi}{\partial \mu'} = \frac{\mu + \mu'}{EJ} a$ . Ponieważ w istocie rzeczy  $\mu' = 0$  zatem  $\theta' = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial \mu'} \right]_{\mu'=0} = \frac{\mu a}{EJ}$ ; Ten sam wynik otrzymamy zważywszy, że  $\theta' = \gamma' = \frac{\mu}{EJ} (L - b) = \frac{\mu a}{EJ}$ . Gdybyśmy wreszcie chcieli znaleźć strzałkę  $f'$  ugięcia pręta w odległości  $x = G$ , to należałoby wprowadzić odpowiednią siłę  $P'$  dla której owa strzałka grałaby rolę przesunięcia. W odcinku  $b \geq x \geq 0$  panować będzie zatem po dawnemu moment  $\mu$ , natomiast dla  $L \geq x \geq b$  wartość momentu będzie  $\mu + P'(x - b)$ . Stąd:

$$\Pi = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^b \frac{\mu^2 dx}{2EJ} + \int_b^L \frac{[\mu + P'(x - b)]^2}{2EJ} dx.$$

I tu znów dla przesunięcia przynależnego do siły  $P'$  otrzymamy:  $\frac{\partial \Pi}{\partial P'} = \int_b^L \frac{\mu + P'(x - b)}{EJ} (x - b) dx$ . Wobec nieistnienia fikcyjnej siły  $P'$  otrzymamy przy  $P' = 0$  szukaną strzałkę:

$$f' = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial P'} \right]_{P'=0} = \int_b^L \frac{\mu}{EJ} (x - b) dx = \frac{\mu (L - b)^2}{2EJ} = \frac{\mu a^2}{2EJ}.$$

Ten sam wynik otrzymamy czyniąc  $x = b$  we wzorze dla  $\gamma$  co da  $f' = -\frac{\mu'}{2EJ} (L - b)^2 = -\frac{\mu a^2}{2EJ}$ .

Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład zastosowania tego samego twierdzenia. Uchwyty przegubowe  $A, B$  wbito w ścianę pionową nieruchomą i połączono prętami  $AC$  i  $BC$  (RYS. 322). Na przegub środkowy działa siła  $P$  pionowa. Wyznaczmy jej przesunięcie  $\delta$  czyli obniżenie się przegubu  $C$  w kierunku pionowym. W tym celu znajdziemy składowe siły  $P$  dla obu prętów  $AC$  i  $BC$ . Z łatwością nadważyć da się, że górny pręt będzie rozciągany a dolny - ściskany siłą  $\frac{P}{2 \cos \alpha}$ , przyczem zakładamy oba

pręty jednakowej długości  $L=AC=BC$  i nazywamy przez  $\alpha = \angle BAC = \angle ABC$ . Ponieważ ściana jest doskonale sztywna, przeto jedynie oba pręty mogą ulegć odkształceniu, a praca sprężysta będzie:

$$\Pi = 2 \frac{1}{2} \left( \frac{P}{2 \cos \alpha} \right)^2 \frac{L}{ES} = \frac{P^2 L}{4 \cos^2 \alpha ES}. \text{ Stąd } \beta = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \frac{PL}{2 \cos^2 \alpha ES}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy składową pionową przesunięcia przegubu  $C$ ;

aby otrzymać poziomą wprowadzimy siłę fikcyjną  $Q$  prostopadłą do  $P$  i skierowaną, dajmy na to, ku ścianie.

Ta siła da składowe  $\frac{Q}{2 \sin \alpha}$  ściskające oba pręty.

Przy łącznym działaniu sił  $P$  i  $Q$  w górnym pręcie

będzie działała siła rozciągająca  $\frac{P}{2 \cos \alpha} - \frac{Q}{2 \sin \alpha}$  a w dolnym siła ściskająca  $\frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{Q}{2 \sin \alpha}$  zatem:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left[ -\frac{P}{2 \cos \alpha} - \frac{Q}{2 \sin \alpha} \right]^2 \frac{L}{ES} + \frac{1}{2} \left[ \frac{P}{2 \cos \alpha} - \frac{Q}{2 \sin \alpha} \right]^2 \frac{L}{ES},$$

a przesunięcie poziome przegubu środkowego:

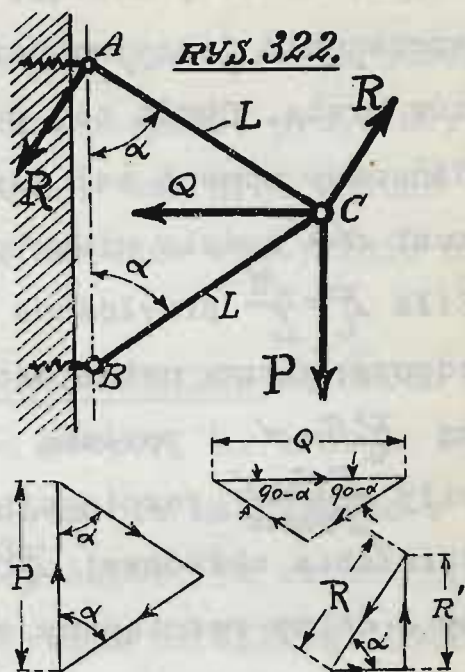
$$\epsilon_0: \frac{\partial \Pi}{\partial Q} = - \left[ -\frac{P}{2 \cos \alpha} - \frac{Q}{2 \sin \alpha} \right] \frac{L}{2 ES \sin \alpha} - \left[ \frac{P}{2 \cos \alpha} - \frac{Q}{2 \sin \alpha} \right] \frac{L}{2 ES \sin \alpha} = \frac{QL}{2 ES \sin^2 \alpha}.$$

W istocie siła  $Q$  nie istnieje, zatem poziomą składową prze-

sunienia przegubu  $C$  otrzymamy czyniąc  $Q=0$  co da

$\beta = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial Q} \right]_{Q=0} = 0$ . Przegub środkowy obniża się jeno nie schodząc z linii działania siły  $P$ .

Chcąc, dajmy na to, znaleźć kąt obrotu pręta  $AC$ ,





czyli, inaczej mówiąc, przyrost  $d\alpha$  kąta  $BAC$  należy wprowadzić fikcyjną parę sił  $R$  przyłożoną do obu końców pręta. Obrót tej pary da szukany przyrost  $d\alpha$ .

Oznaczmy moment tej pary przez  $M = RL$ , szukany przyrost  $d\alpha$  będzie niewątpliwie przesunięciem pary  $M$ . Siła  $R = \frac{M}{L}$  przyłożona do przegubu  $A$  wywołuje w nim odpór; druga natomiast siła pary daje składową pionową  $R \sin \alpha$  i poziomą  $R \cos \alpha$ . Składowa  $R \cos \alpha$  da siły  $\frac{R \cos \alpha}{2 \sin \alpha}$  rozciągające oba pręty podczas gdy na tle działania składowej  $R \sin \alpha$  górny pręt będzie ściskany a dolny rozciągany siłą  $\frac{R \sin \alpha}{2 \cos \alpha}$ . Ostatecznie przy łącznem działaniu siły  $P$  i pary sił  $R = \frac{M}{L}$  górny pręt będzie rozciągany siłą:

$$\frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{R \cos \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{R \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{M \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{L 2 \cos \alpha \sin \alpha}$$

a dolny ściskany siłą:

$$-\frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{R \cos \alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{R \sin \alpha}{2 \cos \alpha} = -\frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{M}{L 2 \cos \alpha \sin \alpha}$$

; zatem praca sprężysta:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{M \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{L 2 \cos \alpha \sin \alpha} \right\}^2 \frac{L}{E S} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{M}{L 2 \cos \alpha \sin \alpha} \right\}^2 \frac{L}{E S}$$

a przesunięcie uogólnionej siły  $M$  będzie:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M} = \left\{ \frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{M \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{L 2 \cos \alpha \sin \alpha} \right\} \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 E S \cos \alpha \sin \alpha} + \left\{ -\frac{P}{2 \cos \alpha} + \frac{M}{L 2 \cos \alpha \sin \alpha} \right\} \frac{1}{2 E S \sin \alpha \cos \alpha}$$

W istocie jednak para  $M$  nie istnieje, zatem czyniąc  $M=0$  otrzymamy szukany przyrost  $d\alpha = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial M} \right]_{M=0} =$

$$= \frac{P}{2 E S \cos \alpha} \cdot \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 1}{2 \cos \alpha \sin \alpha} = -\frac{P \sin \alpha}{2 E S \cos^2 \alpha}$$

Znak ujemny wskazuje, że obrót pary zachodzi w kierunku odwrotnym do kierunku działania sił, co zresztą widocznem jest samo przez się, bo przegub  $C$  opuszcza

się w dół.

Drugie twierdzenie CASTIGLIANO jest przeto nader SPRAWNEM NARZĘDZIEM RACHUNKU. Oba powyższe przykłady wystarczająco to uwypuklają. Oddaje ono NIEOCENIONE WPROST USŁUGI w zastosowaniu do układów statycznie niewyznaczalnych. Tego rodzaju

§ 9. UKŁADY STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE są dwóch rodzajów. Przedewszystkiem liczba podpór, na których spoczywa układ, może być zbyt wielka, nie można więc z równań statyki wyznaczyć wszystkich odpór. Tu zatem UKŁAD JEST STATYCZNIE NIEWYZNACZALNY PRZEZ NADMIERNĄ ILOŚĆ WIĘZÓW. W ogólnym wypadku układu przestrzennego mamy sześć równań statyki, możemy przeto wyznaczyć sześć odpór układu, pozostałe  $n$  odpór będą więc statycznie niewyznaczalne - UKŁAD BĘDZIE  $n$ -KROTNIE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYM PRZEZ WIĘZY. Nadto UKŁAD MOŻE BYĆ STATYCZNIE NIEWYZNACZALNY PRZEZ NADMIERNĄ ILOŚĆ OGNIW LUB ZBYTECZNĄ SZTYWNOŚĆ POŁĄCZEŃ. Tego rodzaju UKŁADY ZOWIEMY STATYCZNIE NIEWYZNACZALNEMI WEWNĘTRZNIE. W obu wypadkach mamy przeto pewną ilość czynników równowagi statycznie niewyznaczalnych, które z łatwością wyznaczyć możemy stosując drugie twierdzenie CASTIGLIANO a raczej tak zwaną ZASADĘ NAJMNIEJSZEJ PRACY SPRĘŻYSTEJ, czyli TWIERDZENIE MÉNABRÉA, stanowiące prosty wynik drugiego twierdzenia CASTIGLIANO i z tego powodu mylnie czasami trzeciem twierdzeniem CASTIGLIANO zwane.

§ 10. ZASADA NAJMNIEJSZEJ PRACY MÉNABRÉA. Weźmy



pod uwagę układ statycznie niewyznaczalny, pozostający w równowadze pod jarzmem sił zewnętrznych odkształcających. Wobec statycznej niewyznaczalności układu pewna ilość czynników równowagi pozostanie niewyznaczona statycznie. Mogą to być odpory zbyteczne lub więzy wewnętrzne, o czym tylko co była mowa. W pierwszym wypadku, gdy ilość odpór jest nadmierna, nie zdolamy wyznaczyć  $N$  czynników równowagi tego rodzaju.

Oznaczmy te statycznie wyznaczalne odpory przez  $X_1$ ,

$X_2, \dots, X_n$ . Gdybyśmy usunęli podpory układu wywołujące siły  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) równowaga odkształcona została by zachwiana - i aby ją nadal utrzymać bez zmiany należałoby wzamian odrzuconych podpór przyłożyć dodatkowy układ sił zewnętrznych  $X_i$ , zastępujących działanie odnośnych podpór, a więc tak samo działających jak one.

E ten sposób siły odkształcające pomnożą się o  $N$  sił  $X_i$ , a cały układ rozpatrywany, pozbawiony podpór zbytecznych stanie się statycznie wyznaczalnym, będziemy mogli przeto wyznaczyć siły działające w jego ogniwach, oraz wszystkie konieczne odpory, na mocy równań statyki. Nadto będziemy mogli wyznaczyć pracę sprężystą  $\Pi$  układu, jako sumę prac wszystkich jego składowych ogniów w postaci funkcji od sił zewnętrznych układu oraz dodatkowych sił  $X_i$ . Weźmy pod uwagę jedną z tych ostatnich, dajmy na to  $X_K$ . Przynależy ona do odrzuconej podpory  $K$  zastępując jej działanie na układ. Zatem gdy owa podpora  $K$  przy odkształceniu pozostaje

nieruchoma lub porusza się prostopadłe do działania  
 swej odpory, punkt przyłożenia zastępczej siły  $X_K$  wi-  
 nien pozostać również nieruchomy lub przesunąć się  
 prostopadłe do  $X_K$ . W obu wypadkach przesunięcie siły  
 zastępczej  $X_K$  jest zerem, a zatem na mocy drugiego  
 prawa CASTIGLIANO będziemy mieli  $\frac{\partial \Pi}{\partial X_K} = 0$ . W ten  
 sposób otrzymujemy dodatkowe równanie, umożliwiające  
 wyznaczenie brakującego czynnika równowagi - odpory  
 $X_K$ . W szczególnym wypadku podpory ruchomej, ujawnia-  
 jącej podczas odkształcenia przesunięcie  $x_K$  w kierun-  
 ku odpory, punkt przyłożenia zastępczej siły  $X_K$  winien  
 dać również przesunięcie  $x_K$ , należy zatem na mocy  
 drugiego twierdzenia CASTIGLIANO napisać  $\frac{\partial \Pi}{\partial X_K} = x_K$ . Jest  
 to równanie dodatkowe umożliwiające wyznaczenie braku-  
 jącego czynnika równowagi odpory  $X_K$  przesunięcie bo-  
 wiem  $x_K$  winno być zgóry znane z warunków zadania. W  
 ten sposób otrzymamy  $N$  równań  $\frac{\partial \Pi}{\partial X_i} = x_i$ , gdzie pew-  
 na część, lub wszystkie przesunięcia  $x_i$  będą równe ze-  
 ru. Te równania łącznie z równaniami statyki pozwolą  
 wyznaczyć wszystkie odpory układu. Aby uniknąć dłuż-  
 szych omówień będziemy nadal zwali odpórę „NIERUCHO-  
 MA” siły  $X_K$  dla której odpowiednie przesunięcie  $x_K$   
 jest zerem.

Z kolei układ może być statycznie niewyznaczalny  
 wewnętrznie przez nadmierną ilość ogniw lub zbyt dużą  
 sztywność ich połączeń. Ze statyki wiemy na przykład,  
 że ustrój prętowy trójkątny o przegubowym łączeniu



prętów jest statycznie wyznaczalny. Podwojona liczba węzłów takiego ustroju mniej trzy winna dać liczbę jego prętów. Dodajmy jeden pręt, a układ stanie się niewyznaczalnym - równania statyki wtedy nie wystarczą przy wyznaczaniu sił prętów. To samo okaże się wtedy gdy połączymy jakiegokolwiek dwa pręty układu, nie przegubowo a trwale. W złączeniu powstanie moment statycznie niewyznaczalny. W obu wypadkach będziemy przeto nieli czynniki równowagi statycznie niewyznaczalne. Zważmy, że w obu wypadkach możemy odrzucić ogniwo zbyteczne, lub usztywnione połączenia, czyniące ustrój statycznie niewyznaczalnym i zastąpić ich działanie przez odpowiednie siły uogólnione. W tym celu należy wykonać odpowiednią ilość przekrojów; ogniwo zbyteczne przeciąć u obu końców w przykładzie wyżej przytoczonym, a przegub usztywniony - odsztywnić rozcinając jeden z prętów łącznych tuż u łączenia. Działanie wyciętego ogniwa zbytecznego należy zastąpić układem sił, a zbytecznego usztywnienia rozciętego - parą i siłą. W ten sposób zewnętrzny układ sił pomnoży się o owe siły zastępcze przyłożone do przecięć dokonanych, a cały ustrój stanie się statycznie wyznaczalnym. Zważmy, że każde przecięcie obnaży dwie powłoki przekroju; uprzednio były one w ścisłym dotyku - dotyk tu niewątpliwie należy utrzymać i nadal inaczej bowiem ustrój przestanie być sobą - należy zatem do jednej powłoki przyłożyć zastępcze czynniki równowagi  $X, Y$ ..... do drugiej

zaś  $-X, -Y, \dots$ . Siły te równoważące się wzajemnie pomnożą układ sił zewnętrznych odkształcających, czyniąc zarazem ustrój statycznie wyznaczalnym. Będziemy przeto mogli wyznaczyć obciążenia poszczególnych ogniw ustroju i pracę ich sprężystą. Praca sprężysta całości będzie niewątpliwie sumą prac poszczególnych ogniw ustroju. Oznaczmy ją przez  $\Pi$ . Będzie to funkcja sił zewnętrznych  $P, Q, \dots$  odkształcających oraz sił dodatkowych  $X, -X, Y, -Y, \dots$  przynależnych do przecięć wykonanych. Zważmy, że punkty przyłożenia sił  $X$  i  $-X$ ,  $Y$  i  $-Y$  i t.d. są zawsze tożsamościowe, zadaniem bowiem owych sił dodatkowych - utrzymać powłoki przekroju w ścisłym dotyku, aby w ten sposób zachować istotę ustroju pierwotnego, w którym owe przecięcia nie istniały zupełnie. Zatem przesunięcie  $X$  siły  $X$  i  $X'$  siły  $-X$  są tożsamościowe, w istocie bowiem mamy tu do czynienia z jednym i tem samem przesunięciem wspólnem dla obu sił  $X$  i  $-X$ . Na mocy drugiego twierdzenia CASTIGLIANO możemy oczywiście napisać  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = X \frac{\partial X}{\partial X} + X' \frac{\partial (-X)}{\partial X} = X - X'$  albo też  $\frac{\partial \Pi}{\partial (-X)} = X' \frac{\partial (-X)}{\partial (-X)} + X \frac{\partial X}{\partial (-X)} = X' - X$ , - ponieważ tylko te dwie siły zewnętrzne odkształcające się są zależne od siebie. Stąd, wobec tożsamości przesunięć  $X'$  i  $X$  będziemy mieli  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \frac{\partial \Pi}{\partial (-X)} = 0$ . Pisząc równania  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0, \dots$  i t.d. dla wszystkich sił dodatkowych  $X, Y, \dots$  otrzymamy w ten sposób odpowiednią ilość równań, z których wyznaczymy wszystkie czynniki równowagi odkształconej statycznie niewyzna-



czalne. —

Wszystko to cośmy wyżej powiedzieli dotyczy jedynie i wyłącznie ustrojów wzorowo sprężystych zachowujących się podług uogólnionego prawa HOOKE'A, wtedy tylko bowiem drugie twierdzenie Castigliano może być stosowane bez błędu. Z rozważań tych wynika tak zwane twierdzenie MÈNABRÉA, które głosi, że:

ISTOTNE WARTOŚCI STATYCZNIE NIWYZNACZALNYCH ODPÓR NIERUCHOMYCH LUB WIĘZÓW WEWNĘTRZNYCH USTROJU WZOROWO SPRĘŻYSTEGO ODPOWIADAJĄ NAJMNIEJSZOŚCI PRACY SPRĘŻYSTEJ CAŁEGO USTROJU.

To twierdzenie, zwane inaczej jeszcze ZASADĄ NAJMNIEJSZEJ PRACY SPRĘŻYSTEJ jest wprost oczywiste, wobec istnienia równości typu  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0$  dla odpór nieruchomych i sił dodatkowych przecięć wyżej rozpatrywanych. Praca sprężysta sił zewnętrznych odkształcających jako rdzennie dodatnia może mieć jeno minimum, zatem ta jej najmniejszość odpowiada istotnym wartościom statycznie niewyznaczalnych czynników równowagi odkształconej.

Przykłady najlepiej uwypuklą istotę nowego twierdzenia. Weźmy pod uwagę belkę zamocowaną jednostronnie, a drugostronnie opartą na podporze ruchomej, umożliwiającej li tylko posuw podłużny w kierunku osi pręta nieodkształconej. Jest to tak zwana PODPORA NA ROLKACH, daje ona odpór pionową  $X$  na tle jednostajnego obciążenia w stosunku  $q$  kilogramów na jednostkę długości pręta.

Osada pręta da nadto odpórę pionową  $A$ , poziomą  $B$  i moment zamocowania  $\mu$  (RYS. 323).

Na mocy statyki będziemy mieli przeto dla sił pionowych:

$A + X + qL = 0$ , dla sił poziomych  $B = 0$  i dla momentów

względem przekroju osadczego:

$\mu + q \frac{L^2}{2} + XL = 0$ . Z tych równań możemy jeno określić  $A, B$  i  $\mu$  w funkcji  $X$ , który

to czynnik pozostanie statycznie niewyznaczalnym.

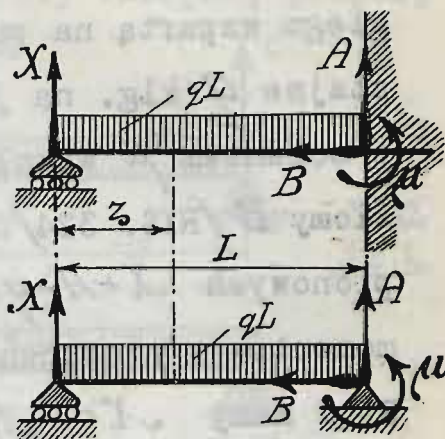
Chcąc go wyznaczyć odrzucamy podpórę i wprowadzamy siłę  $-X$  niewiadomą, zastępującą jej działanie. Aby wyznaczyć wartość tej siły rozpatrujemy w odległości  $z$  od podpory - przekrój poprzeczny pręta. Dla tego przekroju będziemy mieli moment gnący  $M = +Xz + q \frac{z^2}{2}$ . Zatem

praca sprężysta pręta  $\Pi = \int_0^L \frac{M^2 dz}{2EJ} = \int_0^L \frac{[Xz + \frac{1}{2}qz^2]^2}{2EJ} dz$ .

Na mocy zasady o najmniejszej pracy mamy w założeniu odpory  $X$  nieruchomej:  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \int_0^L \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial X} dz = + \int_0^L \frac{[Xz + \frac{1}{2}qz^2]}{EJ} z dz = \frac{XL^3}{3EJ} + \frac{qL^4}{8EJ} = 0$ .

Stąd bezpośrednio  $X = -\frac{3}{8}qL$ . Możemy również moment osadzenia  $\mu$  uważać jako odpórę statycznie niewyznaczalną, wtedy otrzymamy z równań statyki  $A$  i  $X$  w funkcji tego czynnika  $\mu$ . Chcąc go wyznaczyć odrzucamy zamocowanie i wprowadzamy nową siłę uogólnioną - moment  $\mu$  zastępczy - będziemy zatem mieli belkę

RYS. 323.



RYS. 324.



unieruchomioną przegubowo u jednego końca, a u drugiego wspartą na podporę rolkową. Obciążenie jednostajne  $q$  klg. na jednostkę długości belki łącznie z momentem  $\mu$  wywoła odpory pionowe  $X$  i  $A$  oraz poziomy  $B$  (RYS. 324). Równania statyki dadzą dla sił pionowych  $X + A + qL = 0$ , poziomych  $B = 0$ , oraz dla momentów w stosunku do prawej podpory  $q\frac{L^2}{2} + XL + \mu = 0$ . Stąd mamy  $X = -\frac{\mu}{L} - \frac{qL}{2}$ , oraz  $A = \frac{\mu}{L} - \frac{qL}{2}$ , zatem w odległości  $z$  od podpory rolkowej będziemy mieli wartość momentu  $M = q\frac{z^2}{2} - \frac{\mu z}{L} - \frac{qLz}{2}$ , zatem:  $\Pi = \int_0^L \frac{M^2 dz}{2EJ}$ ; Na mocy zasady najmniejszej pracy wobec unieruchomienia osadczego przekroju możemy napisać:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = \int_0^L \frac{M dz}{EJ} \frac{\partial M}{\partial \mu} = - \int_0^L \frac{q\frac{z^2}{2} - \frac{\mu z}{L} - \frac{qLz}{2}}{EJ} \cdot \frac{z}{L} dz =$$

$$= -\frac{qL^3}{8EJ} + \frac{\mu L}{3EJ} + \frac{qL^3}{6EJ} = 0.$$

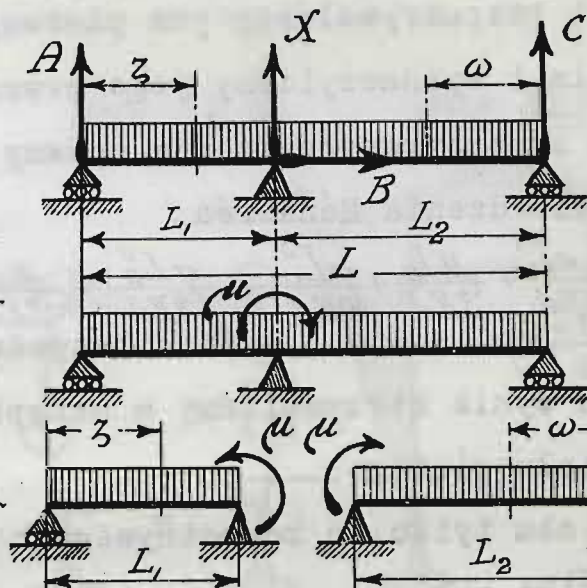
Stąd bezpośrednio mamy  $\mu = q\frac{L^2}{8}$ . Oba te wyniki otrzymaliśmy już pierwszej w ustępie dwudziestym drugim działu piątego.

Z kolei rozpatrzmy belkę dwuprzęsłową o bocznych podporach rolkowych i środkowej - przegubowej (RYS. 325). Jednostajne obciążenie w stosunku  $q$  klg. na jednostkę długości belki wywoła pionowe odpory boczne  $A$  i  $C$  oraz dwie odpory - pionową  $X$  i pionową  $B$  środkowe. Równania statyki dadzą dla sił pionowych  $A + X + C + qL = 0$ , poziomych  $B = 0$  oraz momentów względem dajmy na to skrajnej podpory prawej:  $AL + XL + q\frac{L^2}{2} = 0$ . Stąd mamy:  $A = -\frac{qL}{2} - X\frac{L}{L}$  oraz:  $C = -\frac{qL}{2} -$

$-\frac{XL_1}{L}$ , zatem w odległości  $z$  od lewej skrajnej podpory panować będzie moment  $M_1 = \frac{qL}{2}z - X\frac{L_1}{L}z + q\frac{z^2}{2}$ , a w odległości  $\omega$  od prawej skrajnej podpory moment  $M_2 = -\frac{qL}{2}\omega - X\frac{L_2}{L}\omega + q\frac{\omega^2}{2}$ . Stąd:

$$\Pi = \int_0^{L_1} \frac{M_1 dz}{2EJ} + \int_0^{L_2} \frac{M_2 d\omega}{2EJ}$$

Na mocy zasady



RYS.  
325.

RYS.  
326.

pracy najmniejszej

możemy napisać:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \int_0^{L_1} \frac{M_1 dz}{EJ} \frac{\partial M_1}{\partial X} + \int_0^{L_2} \frac{M_2 d\omega}{EJ} \frac{\partial M_2}{\partial X} =$$

$$= -\frac{L_2}{L} \int_0^{L_1} \frac{-\frac{qL}{2}z - X\frac{L_1}{L}z + q\frac{z^2}{2}}{EJ} z dz - \frac{L_1}{L} \int_0^{L_2} \frac{-\frac{qL}{2}\omega - X\frac{L_2}{L}\omega + q\frac{\omega^2}{2}}{EJ} \omega d\omega =$$

$$= \frac{qL_2}{6EJ} L_1^3 + \frac{XL_2^2 L_1^3}{3EJL^2} - \frac{qL_2 L_1^4}{8EJL} + \frac{qL_1 L_2^3}{6EJ} + \frac{XL_1^2 L_2^3}{3EJL^2} - \frac{qL_1 L_2^4}{8EJL} = 0.$$

Stąd bezpośrednio  $X = -\frac{qL}{8} \cdot \frac{L_1^2 + 3L_1 L_2 + L_2^2}{L_1 L_2}$ . Ten sam wynik otrzymaliśmy w ustępie trzydziestym siódmym działu piątego.

Zamiast odpory  $X$  możemy wprowadzić inny czynnik statycznie niewyznaczalny, dajmy na to, moment odporowy  $\mu$  panujący ponad podporą środkową (RYS. 325). Chcąc zastosować w danym wypadku zasadę najmniejszej pracy, rozcinamy pręt ponad podporą środkową i obciążamy dodatkowo znoszącymi się wzajemnie momentami  $\mu$  różno-  
skretnymi. Zatem miasto jednego statycznie niewyznacza-  
lnego pręta, otrzymamy dwa statycznie wyznaczalne,



a obciążone w sposób wskazany na RYS. 326. Tak obciążony pręt rozpatrywaliśmy już pierwszej w przykładzie poprzednim i wyznaczyliśmy jego pracę sprężystą. Korzystając z otrzymanych wzorów możemy przeto napisać na mocy twierdzenia Ménabréa:

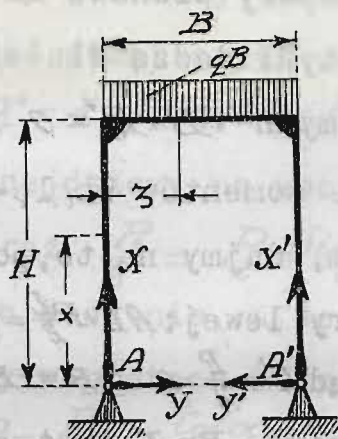
$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mu} = -\frac{qL_1^3}{8EJ} + \frac{\mu L_1}{3EJ} + \frac{qL_1^3}{6EJ} - \frac{qL_2^3}{8EJ} + \frac{\mu L_2}{3EJ} + \frac{qL_2^3}{6EJ} = \frac{\mu L}{3EJ} + \frac{q(L_1^3 + L_2^3)}{24EJ} = 0. \quad \text{Stąd bezpośrednio } \mu = -\frac{q}{8L}(L_1^3 + L_2^3).$$

Ten sam wynik otrzymaliśmy w ustępie trzydziestym piątym działu piątego. —

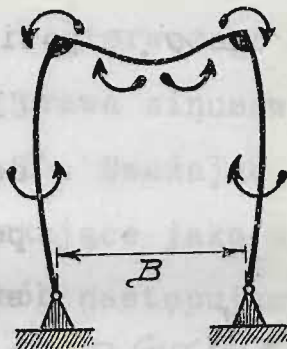
W obu tylko co rozpatrywanych przykładach przekrój belki był z założenia stały. Jako TRZECI PRZYKŁAD weźmiemy pod uwagę BRAMĘ DŹWIGOWĄ obciążoną jednostajnie w stosunku  $q$  klg. na jednostkę długości połaci poziomej górnej, sztywno na węglach połączonej ze stojakami pionowymi (RYS. 327). Wysokość stojaków niech będzie  $H$ , szerokość bramy  $B$ . Stojaki przegubowo u dołu unieruchomione spoczywają na podporach  $A$  i  $A'$ . Obciążenie górnej połaci wywołuje pionowe odpory  $X$  i  $X'$  wzdłuż osi stojaków, oraz odpory poziome  $Y$  i  $Y'$ . O istnieniu tych ostatnich przekonamy się z łatwością, zważywszy w jaki sposób brama ulega odkształceniu (RYS. 328). Wobec usztywnienia węglów górna połać zachowa się jak belka obustronnie zamocowana, a stojaki - jak pręty zamocowane jednostronnie. Odnośny wykres momentów podaje RYS. 329. W danym wypadku równania statyki dadzą dla sił pionowych  $X + X' + qB = 0$ , poziomych  $Y + Y' = 0$ , oraz momentów względem podpory dajmy na to lewej:

$q\frac{B^2}{2} + X'B = 0$ . Stąd  $X' = -\frac{qB}{2} = X$  oraz  $Y' = -Y$ . Odpór  $Y$  jest zatem statycznie niewyznaczalną. Aby ją zna-

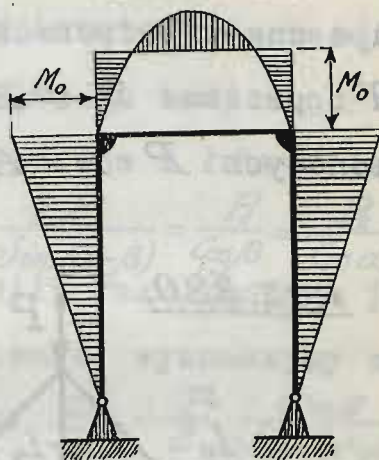
RYS. 327.



RYS. 328.



RYS. 329.



leżę rozpatrujemy przekrój poprzeczny stojaka w odległości  $X$  od podpory. Dla tego przekroju moment gnący będzie  $M_x = Y_x$ . Nadto na górnej połaci bierzemy pod uwagę przekrój poprzeczny odległy o  $z$  od węzła.

Dla tego przekroju  $M_z = YH + Xz + q\frac{z^2}{2} = q\frac{z^2}{2} - q\frac{B}{2}z + YH$ .

Wobec tego praca sprężysta bramy będzie  $\Pi = 2 \int_0^H \frac{M_x^2 dx}{2E_o J_o} + \int_0^B \frac{M_z^2 dz}{2EJ}$ , gdzie  $E_o J_o$  dotyczy obu stojaków a  $EJ$  połaci górnej. Stosując zasadę najmniejszej pracy

otrzymamy dla odpory nieruchomej  $Y$ :  $\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 2 \int_0^H \frac{M_x dx}{E_o J_o} \frac{\partial M_x}{\partial Y} + \int_0^B \frac{M_z dz}{EJ} \frac{\partial M_z}{\partial Y} = 2 \int_0^H \frac{Yx^2 dx}{E_o J_o} + \int_0^B \frac{q\frac{z^2}{2} - q\frac{B}{2}z + YH}{EJ} H dz =$

$$= \frac{2YH^3}{3E_o J_o} + \frac{H}{EJ} \left\{ \frac{qB^3}{6} - \frac{qB^3}{4} + YHB \right\} = 0.$$

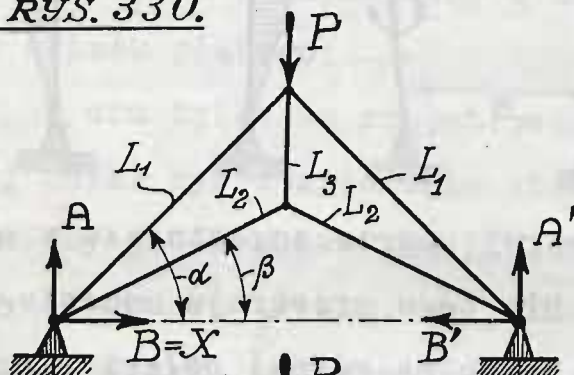
Stąd bezpośrednio:  $Y = \frac{qB^2}{12 \left[ 1 + \frac{2}{3} \frac{HEJ}{BE_o J_o} \right]}$ .

Jako OSTATNI TYPOWY PRZYKŁAD rozpatrzmy wiązar możliwie najprostszego kształtu, wsparty na podpory przegubowe a więc nieruchome. Obciążenia obu węzłów bocznych przenoszą się bezpośrednio (RYS.330) na pod-

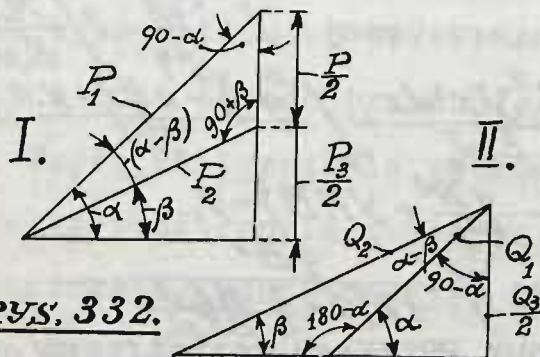
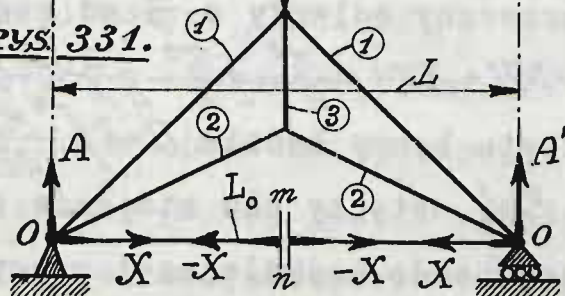


pory nie mogą więc odkształcić wiązaru; pozostaje tylko siła  $P$  górnego węzła dajmy na to pionowa, stanowiąca całkowite obciążenie wiązaru odkształcające. Wywołuje ona w podporach przegubowych odpory pionowe  $A$  i  $A'$  i poziome  $B$  i  $B'$ . Równania statyki dadzą dla sił pionowych  $P + A + A' = 0$ , poziomych  $B + B' = 0$  i

RYS. 330.



RYS. 331.



RYS. 332.

$X=1$

RYS. 333.

dla momentów względem, dajmy na to, podpory lewej:  $AL + \frac{PL}{2} = 0$ , stąd  $A' = -\frac{P}{2} = A$   $B = -B'$ . Odpora  $B = X$  jest zatem statycznie niewyznaczalna. Aby ją znaleźć odrzucamy obie podpory i mimo to nich wprowadzamy odpory  $A, A', B$  i  $B'$  jako dodatkowe siły zewnętrzne. W ten sposób uczyniliśmy ustrój statycznie wyznaczalnym, możemy przeto zbudować dwa wykresy CREMONA; *I* dla sił zewnętrznych  $P, A$  i  $A'$  i *II* dla dodatkowych sił  $B$  i  $B'$ .

Pierwszy wykres (RYS. 332) jest zupełnie określony ponieważ siły  $P$ ,  $A$  i  $A'$  mają ściśle określoną wartość, natomiast drugi może być zbudowany jeno w skali, nie mamy bowiem dotąd jeszcze istotnej wartości sił dodatkowych  $B$  i  $B'$ . Zbudujmy go tedy dla

$X=1$  (RYS. 333). Z pierwszego wykresu z łatwością znajdziemy na mocy prawa sinusów  $\frac{\frac{1}{2}P}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{P_1}{\cos\beta} = \frac{P_2}{\cos\alpha}$ , oraz  $\frac{P_3}{2} = P_2 \sin\beta$ . Uważając siły rozciągające jako dodatnie, a ściskające jako ujemne, wyznaczymy siły w prętach w sposób następujący:  $P_1 = -\frac{P}{2} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ ;

$P_2 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ ;  $P_3 = P \frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ ; Oznaczmy  $-\frac{1}{2} \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = a_1$ ,  $\frac{1}{2} \frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = a_2$ ,  $\frac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = a_3$ , a będziemy mieli:  $P_1 = -a_1 P$ ,  $P_2 = a_2 P$ ,  $P_3 = a_3 P$ . Podobnie zupełnie z drugiego wykresu mamy  $\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{Q_1}{\sin\beta} = \frac{Q_2}{\sin\alpha}$  oraz

$\frac{1}{2} Q_3 = Q_1 \sin\alpha$ , a zatem uwzględniając znaki  $Q_1 = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$   $= b_1$ ,  $Q_2 = -\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)} = b_2$ ,  $Q_3 = -2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = b_3$ . Stąd

bezpośrednio przechodząc od skali do istotnej wartości odpowiadającej sile odkształcającej  $X$  mamy  $Q_1 = b_1 X$ ,  $Q_2 = b_2 X$ ,  $Q_3 = b_3 X$ . Oznaczmy przez  $R_i$  siłę jakiegokolwiek pręta  $i$  przez  $S_i$  jego przekrój poprzeczny, przez  $L_i$  jego długość, wreszcie przez  $E_i$  współczynnik sprężystości odnośnego tworzywa. Wtedy:  $R_i = a_i P + b_i X$  a praca sprężysta tego pręta  $\Pi_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_i^2 L_i}{E_i S_i}$ .

Praca sprężysta wiązaru będzie więc  $\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{R_i^2 L_i}{E_i S_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{[a_i P + b_i X]^2 L_i}{E_i S_i}$ , gdzie należy sumować na wszystkie pręty wiązaru. Na mocy zasady najmniejszej pracy mamy dla odpory  $X$  nieruchomej  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \sum_{i=1}^n \frac{[a_i P + b_i X]}{E_i S_i} b_i L_i = 0$ .



Stąd bezpośrednio:

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i L_i}{E_i S_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{b_i^2 L_i}{E_i S_i}} P.$$

Gdybyśmy jedną z podpor dajmy na to prawą zmieni-  
 nili na rolkową, ustrój stałby się statycznie wyzna-  
 czalnym o wartości odpory  $B=0$ . Natomiast gdybyśmy  
 dodali pręt zbyteczny  $00$  (RYS.331) ponownie mieli-  
 byśmy do czynienia z ustrojem statycznie niewyzna-  
 czalnym, bo siły  $X$  tego pręta, nie można wyznaczyć  
 z równań statyki. Chcąc otrzymać wartość istotną te-  
 go czynnika przecinamy pręt zbyteczny  $L_0$  gdziekol-  
 wiek, dajmy na to pośrodku w  $mn$ . Obie powłoki prze-  
 kroju  $mn$  utrzymujemy w dotyku za pomocą sił dodat-  
 kowych równych  $X$ . Z łatwością postrzec się daje,  
 że i w tym wypadku dla wszelkich prętów prócz roz-  
 ciętego  $R_i = a_i P + b_i X$ , a zatem również  $\Pi_i =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{R_i^2 L_i}{E_i S_i}$ . Dla pręta  $L_0$  natomiast  $R_0 = X$  a zaś  
 $\Pi_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{X^2 L_0}{E_0 S_0}$ . Stąd dla całego wiązaru  $\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot \frac{R_i^2 L_i}{E_i S_i} +$   
 $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{X^2 L_0}{E_0 S_0}$  i na mocy zasady najmniejszej pracy:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \sum_{i=1}^n \frac{[a_i P + b_i X]}{E_i S_i} b_i L_i + \frac{X L_0}{E_0 S_0} = 0. \quad \text{Stąd}$$

bezpośrednio:

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i L_i}{E_i S_i}}{\frac{L_0}{E_0 S_0} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2 L_i}{E_i S_i}} P.$$

Zasada najmniejszej pracy stanowi nader sprawne na-  
 rzędzie rachunku. Widać to z przykładów powyżej przy-  
 toczonych. W pewnych jednak wypadkach lepsze wyniki  
 daje tak zwane

§ 11. TWIERDZENIE BETTI czyli tak zwana ZASADA  
 WZAJEMNOŚCI. Istotę tego twierdzenia poznamy najłat-

wiej biorąc pod uwagę, że dla ustrojów wzorowo sprężystych praca sprężysta stanowi jednorodną funkcję drugiego stopnia<sup>sił</sup> lub przesunięć odnośnych. Zatem możemy napisać dla ustrojów wzorowo sprężystych  $\Pi = aP^2 + bQ^2 + cR^2 + \dots + mPQ + nPR + \dots + wQR + \dots$

Na zasadzie drugiego twierdzenia CASTIGLIANO, które niewątpliwie możemy zastosować w tym wypadku, będziemy mieli:

$$p = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = 2aP + \dots + mQ + nR + \dots$$

$$q = \frac{\partial \Pi}{\partial Q} = 2bQ + \dots + mP + \dots + wR + \dots$$

$$r = \frac{\partial \Pi}{\partial R} = 2cR + \dots + nP + \dots + wQ + \dots$$

.....

Bierzemy pod uwagę dwa stany równowagi odkształconej ustroju rozpatrywanego.

Stan  $I$ , kiedy ustrój pod jarzmem zrównoważonego układu sił odkształcających  $P_1, Q_1, R_1 \dots$  ujawnił odnośne przesunięcia  $p_1, q_1, r_1 \dots$  oraz:

Stan  $II$  nacechowany wartościami przesunięć  $p_2, q_2, r_2 \dots$  przynależnymi do sił  $P_2, Q_2, R_2 \dots$  układu odkształcającego.

Ponieważ mamy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} P_1 p_1 + Q_1 q_1 + R_1 r_1 + \dots = & 2aP_1P_1 + \dots + mQ_1P_1 + \dots + wR_1P_1 + \dots \\ & + 2bQ_1Q_1 + \dots + mP_1Q_1 + \dots + wR_1Q_1 + \dots \\ & + 2cR_1R_1 + \dots + nP_1R_1 + \dots + wQ_1R_1 + \dots \end{aligned}$$

oraz podobnież:

$$\begin{aligned} P_2 p_2 + Q_2 q_2 + R_2 r_2 + \dots = & 2aP_2P_2 + \dots + mQ_2P_2 + \dots + wR_2P_2 + \dots \\ & + 2bQ_2Q_2 + \dots + mP_2Q_2 + \dots + wR_2Q_2 + \dots \\ & + 2cR_2R_2 + \dots + nP_2R_2 + \dots + wQ_2R_2 + \dots \end{aligned}$$



przeto możemy napisać na zasadzie tożsamości prawych części wzorów tylko co wypisanych, równanie:  $P_1 p_2 + Q_1 q_2 + R_1 r_2 + \dots = P_2 p_1 + Q_2 q_1 + R_2 r_1 + \dots$  stanowiące istotę twierdzenia BETTI czyli ZASADY WZAJEMNOŚCI.

SUMMA SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH PRZYNALEŻNYCH DO PIERWSZEGO STANU RÓWNOWAGI USTROJU WZOROWO SPRĘŻYSTEGO MNOŻONYCH PRZEZ ODNOŚNE PRZESUNIĘCIA DRUGIEGO STANU RÓWNA JEST SUMMIE ILOCZYNÓW SIŁ DRUGIEGO STANU PRZEZ ODNOŚNE PRZESUNIĘCIA PIERWSZEGO. ~

W wypadku działania tylko dwu sił rozpatrujemy zazwyczaj układ  $P_1 i Q_1 = 0$  stanu pierwszego wraz z odnośnemi przesunięciami  $p_1$  i  $q_1$ , oraz układ  $P_2 = 0 i Q_2$  stanu drugiego z przesunięciami  $p_2$  i  $q_2$ . Na mocy zasady wzajemności  $P_1 p_2 = Q_2 q_1$ . Gdy nadto  $P_1 = Q_2$  wtedy  $i p_2 = q_1$ . Poprzyjmy to przykładami.

Belka jednostronnie zamocowana, a drugostronnie obciążona zrazu siłą  $P_1 = P$  a potem momentem  $Q_2 = M$ . ~

Obie te siły wywołują podobne ugięcia pręta, w obu wypadkach otrzymamy końcowe strzałki ugięcia  $f_1$  i  $f_2$  oraz skrajne kąty  $\theta_1$  i  $\theta_2$  nachylenia końcowych stycznych odkształconej ku pierwotnej osi pręta (RYS. 334 i 335). Na mocy zasady wzajemności będzie  $P_1 p_2 = Q_2 q_1$  to jest  $P f_2 = M \theta_1$ , gdy nadto liczbowo siła  $P$  będzie równa uogólnionej sile  $M$ , to wtedy również liczbowe wartości odnośnych przesunięć będą równe - będziemy więc mieli  $f_2 = \theta_1$ . Łatwo się o tem przekonać bezpośrednio na mocy wyprowadzonego wzoru dla  $f_2 = \frac{M L^2}{2 E J}$ . Czy-

niąc w nim  $M=P$  odnajdziemy znany z teorii gięcia wzór dla  $\theta_1$ .

RYS. 334.

Weźmy nadto pod uwagę dowolny zresztą przekrój poprzeczny w odległości  $L_0$  od osady pręta i oznaczmy przez  $y_0$  strzałkę jego ugięcia w wypadku działania siły  $P$ , oraz przez  $\theta_0$  pochylenie odnośnej stycznej odkształconej ku pierwotnej osi pręta w wypadku działania



RYS. 337.

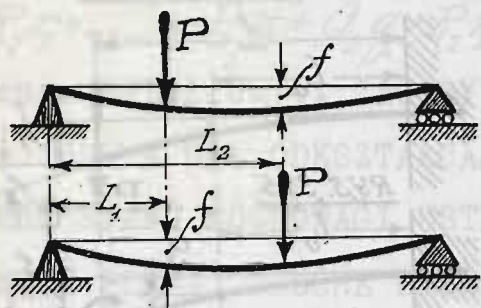
momentu  $M$  u skraju pręta, jak zresztą najlepiej wskazują RYS. 334 i 335. Przenieśmy siły  $P$  (RYS. 336) ponad ów przekrój obrany - pod jej działaniem pręt ujawni końcową strzałkę  $y_0$ : Przesuńmy (RYS. 337) moment  $M$  w płaszczyznę przekroju obranego, a styczna końcowa odkształconej utworzy kąt  $\theta_0$  z pierwotną osią pręta. Zasada wzajemności wymaga tego, zresztą można to udowodnić i wprost, wychodząc z równania odkształconej.

Jako drugi przykład bierzemy pod uwagę pręt oparty na dwóch podporach i obciążony siłą pionową  $P$  przyłożoną w odległości  $L_1$  od lewej podpory pręta. Oznaczmy przez  $f$  strzałkę ugięcia tego pręta w odległości  $L_2$  od tejże podpory. Na mocy zasady wzajemności



ści możemy natychmiast udowodnić, że ten sam pręt ob-

RYS. 338.



ciążony tą samą siłą  $P$  przyłożoną w odległości  $L_2$  ujawni po odkształceniu tę samą strzałkę  $f$  w odległości  $L_1$  od lewej podpory (RYS. 338/).

Zasada wzajemności oddaje nader cenne usługi w zastosowaniu do BELEK WIELOPRZĘSŁOWYCH. Weźmy pod uwagę belkę dwuprzęsłową wspartą na trzy podpory, lewą - przegubową, dwie pozostałe rolkowe (RYS.339). Obciążenie belki stanowi siła  $P$  pionowa działająca dajmy na to w odległości  $L_0$  od prawej podpory. Wywoła ona odpory pionowe  $A, X, C$  i poziomy  $B$ . Równania statyki dadzą dla sił pionowych  $A+X+C+P=0$ , poziomych  $B=0$  i momentów względem dajmy na to podpory prawej  $A(L_1+L_2)+XL_2+PL_0=0$ . Z tych równań z łatwością wyznaczymy  $A$  i  $C$  w zależności od czynnika  $X$  statycznie niewyznaczalnego. Aby go wyznaczyć odrzucamy środkową podporę i na tem miejscu dajemy siłę pionową równą jedności. Pod jej działaniem pręt odkształci się. Ponieważ po odrzuceniu środkowej podpory stał się on statycznie wyznaczalnym, przeto z łatwością wyznaczymy odnośną odkształconą, a co za tem idzie i strzałki ugięcia  $f$  w odległości  $L_0$  od prawej podpory i  $g$  w miejscu przyłożenia siły odkształcającej, a więc tam, gdzie pierwszej była podpora środkowa. Zatem możemy założyć  $P_1=P, Q_1=X$  jako

jedyne dwie siły zewnętrzne pierwszego stanu równowagi pręta, oraz  $P_2=0$  i  $Q_2=1$  dla stanu drugiego, gdzie nadto mamy przesunięcia  $p_2=f$  i  $q_2=g$ , podczas gdy niewątpli-

wie w założeniu nie-  
ruchomej podpory  
środkowej  $q_1=0$ . Na  
mocy zasady wzajem-  
ności możemy tedy

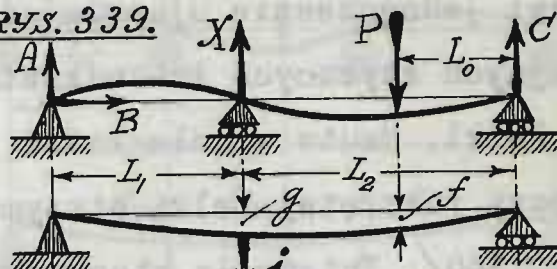
napisać  $Pf + Xg = 1.0 = 0$ ,  
skąd bezpośrednio

$X = -\frac{f}{g}P$ . Ponieważ  
 $\frac{P}{g}$  jest stałe prze-  
to tylko co wyzna-

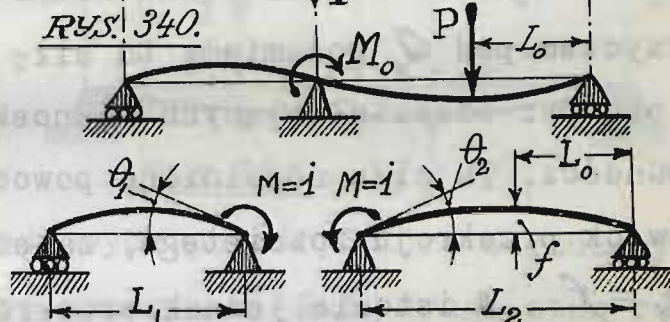
czona odkształcona daje w skali  $\frac{P}{g}$  wszystkie wartości  
odpory  $X$  dla jakiegokolwiek położenia obciążenia  $P$   
na belce. ODKSZTAŁCONA STANOWI zatem tak zwaną LINJĘ  
WPŁYWU SIŁY  $P$  NA ODPORĘ  $X$ . Ta krzywa oddaje cenne  
usługi w wypadku działania OBCIĄŻENIA RUCHOMEGO. Gdy  
działa  $n$  sił odkształcających pionowych  $P_i$   $i=1, 2, \dots, n$   
będziemy mieli oczywiście  $X = -\frac{1}{g} \sum_{i=1}^n P_i f_i$ , gdzie przez  $f_i$   
oznaczyliśmy — strzałki odkształconej przynależne  
do sił odkształcających, to jest leżące pod nimi.

Gdybyśmy miasto czynnika  $X$  chcieli wprowadzić  
jako statycznie niewyznaczalną - moment  $M_o$ , panujący  
ponad podporą środkową, to w tym wypadku mielibyśmy  
 $P_2=P$  oraz  $Q_2=M_o$ . Aby otrzymać stan drugi równowagi od-  
kształconej ustroju, rozcinamy belkę tuż nad podporą

RYS. 339.



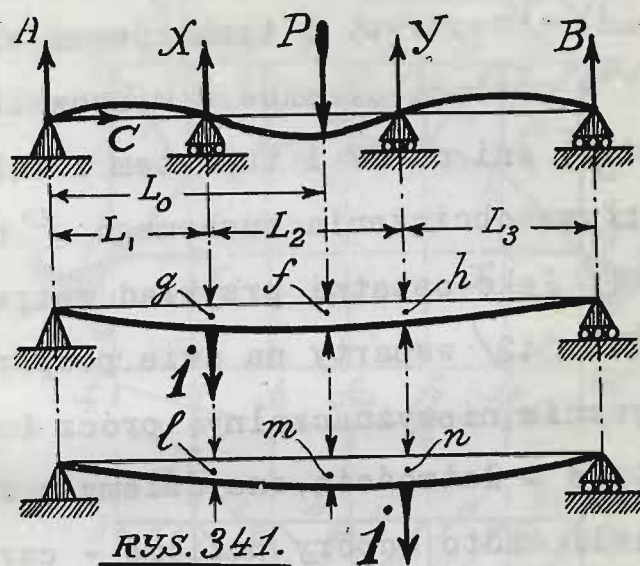
RYS. 340.





środkową i obciążamy obie jej rozcięte połowy różno-  
skretnymi momentami równymi jedności. Pod ich jarzmem  
rozcięte połowy belki wygną się obie ku górze lub ku  
dołowi jednocześnie ujawniając kąty  $\theta_1$  i  $\theta_2$  nachylenia  
skrajnych stycznych ich odkształconych ku pierwotnej  
osi belki. Nadto w odległości  $L_0$  od skrajnej prawej  
podpory rozciętej belki otrzymamy strzałkę ugięcia  $f$   
(RYS. 340). Zatem dla stanu drugiego  $P_2 = 0$  a  $Q_2 = 1$ ,  
przyczem pod  $Q_2$  rozumiemy tu siłę uogólnioną złożoną  
z obu par odkształcających różnoskrotnych a równych  
jedności. Ta siła uogólniona powoduje pochylenie się  
powłok przekroju rozciętego, zatem  $q_2 = \theta_1 + \theta_2$ , nadto  
 $p_2 = f$ . W istocie jednak przekrój ponad podporą środ-  
kową nie istnieje zatem odnośne przesunięcie  $q_1 = 0$ , bo  
niewątpliwie w nierozciętej belce obie powłoki przekro-  
ju pozostaną w dotyku. Zatem na mocy zasady wzajemno-  
ści, możemy napisać  $M_0[\theta_1 + \theta_2] + Pf = 1 \cdot 0 = 0$  stąd bezpo-  
średnio  $M_0 = -\frac{fP}{\theta_1 + \theta_2}$ . I tu znów mianownik nie zależy od  
umiejscowienia siły  $P$  na belce, możemy przeto łatwo  
wyznaczyć linję wpływu siły  $P$  na moment  $M_0$ . W razie  
działania  $n$  sił pionowych  $P_i$   $i=1, 2, \dots, n$  będziemy mieli  
oczywiście  $M_0 = -\frac{1}{\theta_1 + \theta_2} \sum_{i=1}^n P_i f_i$ . W podobny sposób możemy  
wyznaczyć odpory  $X, Y$  belki trójprzęsłowej (RYS. 341/  
obciążonej siłą  $P$  w odległości  $L_0$  od skrajnej podpory  
lewej. W założeniu lewej podpory przegubowej a pozosta-  
łych rolowych będziemy mieli równania statyki dla sił  
pionowych  $A + X + Y + B + P = 0$ , poziomych  $C = 0$  i momentów

względem dajmy na to podpory lewej:  $XL_1 + PL_0 + Y[L_1 + L_2] + BL = 0$ . Z tych równań wyznaczmy  $A$  i  $B$  w zależności od  $X, Y$ -czynników statycznie niewyznaczalnych w danym wypadku. Chcąc je określić bierzemy pod uwagę trzy stany równowagi tej belki-pierwszy istotny z tą jeno



RYS. 341.

różnicą, że miasto środkowych podpór, które odrzucamy, rozpatrujemy zastępcze odpory  $X$  i  $Y$ , drugi stan równowagi odkształconej tejże belki, lecz bez podpór środkowych, obciążonej siłą  $X=1$ , oraz podobny ostatniemu stan trzeci gdy działa siła  $Y=1$ .

Dla obu tych stanów równowagi z łatwością wyznaczmy odkształcone, jako że belka po odrzuceniu podpór środkowych staje się statycznie wyznaczalną; będziemy zatem mogli wyznaczyć strzałki ugięcia belki w miejscach podpór odrzuconych oraz strzałki w przekroju siły  $P$ . Odnośne oznaczenia najlepiej postrzec z RYS. 341. Zatem w danym wypadku będziemy mieli dla stanu pierwszego  $P_1=P, Q_1=X, R_1=Y$ ; dla stanu drugiego  $P_2=0, Q_2=1, R_2=0$ ; wreszcie dla stanu trzeciego  $P_3=0, Q_3=0, R_3=1$ . Odnośne przesunięcia będą oczywiście wobec nieruchomości podpór  $X, Y$  dla stanu pierwszego  $q_1=0, r_1=0$ , drugiego  $p_2=f, q_2=g, r_2=h$  i trzeciego  $p_3=m, q_3=l, r_3=n$ . W zastosowaniu do

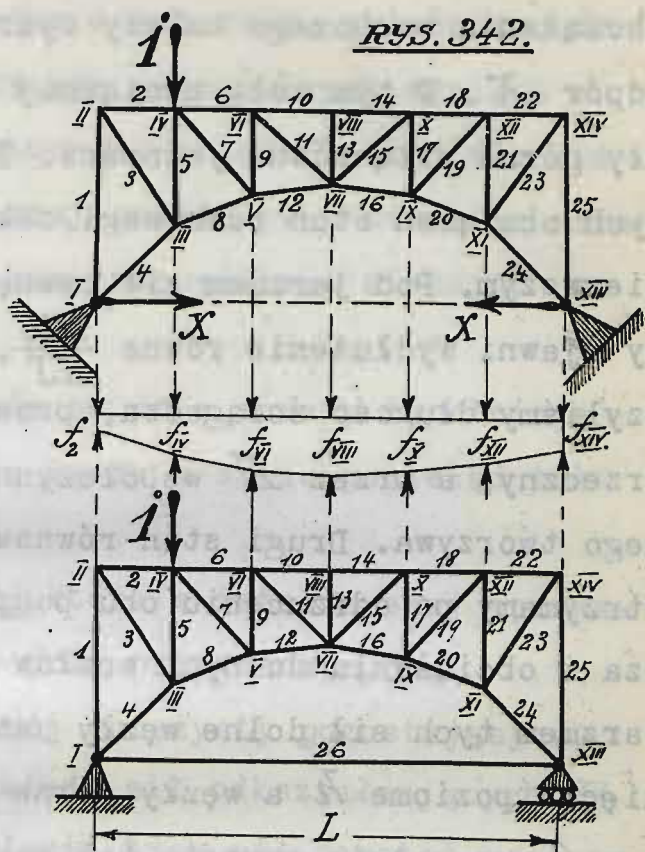


stanów pierwszego i drugiego zasada wzajemności da:

$Pf + Xg + Yh = 1 \times 0 = 0$  a do pierwszego i trzeciego:  $Pm + Xl + Yn = 1 \times 0 = 0$ . Z tych równań wyznaczmy czynniki  $X$  i  $Y$  w postaci ułamków o mianownikach niezależnych ani od  $f$  ani od  $m$  i tu zatem z łatwością znajdziemy linje wpływu obciążenia ruchomego  $P$  na wartość odpór  $X$  i  $Y$ .

Jako ostatni przykład rozpatrzmy ustrój mostowy (RYS. 342) wsparty na dwie podpory przegubowe a więc statycznie niewyznaczalny, prócz bowiem odpór pionowych, które z łatwością znajdziemy z równań statyki, będziemy mieli nadto odpory poziome - czynniki  $X$  statycznie niewyznaczalne. Zakładamy, że obciążenie pionowe działa na górne węzły. Obciążenie to może być stałe lub ruchome. To ostatnie wymaga wyznaczenia linji wpływu na wartość czynnika  $X$ . Chcąc ją wykreślić obciążamy kolejno górne węzły siłą równą jedności i wyznaczamy odnośne wartości  $X$  znacząc je wykresowo pod odpowiedniami węzłami. Wyznaczony w ten sposób wykres służyć może dla wszelkiego  $P$ , da bowiem wartości  $X$  w skali  $1:P$ . Zatem obciążamy dajmy na to węzeł  $IV$  siłą równą jedności, rozpatrując ją jako stan pierwszy równowagi ustroju. Jako stan drugi rozpatrujemy wypadek działania dwóch sił  $X=1$  na węzły  $I$  i  $XIII$ , przyczem obie podpory odrzucamy zupełnie czyniąc w ten sposób ustrój statycznie wyznaczalnym. Pod jarzmem tych dwóch sił węzły  $I$  i  $XIII$  zbliżą się ku sobie. Oznaczmy to przesunięcie przez  $Z$ . Korzystając z wykresu VILLIOT'A (patrz CZASOPISMO KOŁA MECHANIKÓW

z roku 1917/ z łatwością możemy nadto znaleźć dla tego obciążenia siłami  $X=1$ , przesunięcia pionowe  $f_z$  górnych węzłów ustroju. Na mocy zasady wzajemności będziemy mieli  $Xh + 1 \cdot f_{II} = 0$ , stąd bezpośrednio  $X = -\frac{1}{h} f_{II}$ . Ponieważ czynnik  $\frac{1}{h}$  jest stały dla wszystkich węzłów, przeto wykres przesunięć  $f_z$  wyznacza w



RYS. 343.

skali  $\frac{P}{h}$  wartości odpory  $X$  dla siły ruchomej  $P$  kolejno obciążającej wszystkie górne węzły ustroju. Linja wykresu przesunięć  $f_z$  stanowi zatem szukaną linję wpływu.

Gdybyśmy ten sam ustrój mostowy oparli na podporę przegubową i rolową (RYS. 343), stał by się statycznie wyznaczalnym, natomiast łącząc dolne jego węzły ścią-gaczem poziomym otrzymujemy ustrój o jednym pręcie zbyt-ecznym, obciążenie bowiem  $X$  tego pręta nie da się wyznaczyć z równań statyki.

I tu również rozpatrujemy obciążenie odkształca-jące, w postaci układu sił pionowych, działających na WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XXXIX.



górne węzły. Może ono być stałe lub ruchome. W wypadku obciążenia ruchomego należy wykreślić LINJĘ WPŁYWU dla odpór  $X$ . W tym celu obciążamy kolejno wszystkie węzły górne siłą równą jedności. Towarzyszący każdemu z tych obciążeń stan równowagi odkształconej mianujemy pierwszym. Pod jarzmem sił zewnętrznych pręt zbyteczny ujawni wydłużenie równe  $\frac{XL}{ES}$ , gdzie przez  $L$  oznaczyliśmy długość ściągacza, przez  $S$  jego przekrój poprzeczny, a przez  $E$  współczynnik sprężystości odnośnego tworzywa. Drugi stan równowagi odkształconej otrzymamy po odrzuceniu obu podpór, wycięciu ściągacza i obciążeniu dolnych węzłów siłami  $X=1$ . Pod jarzmem tych sił dolne węzły ustroju ujawnią przesunięcia poziome  $h$  a węzły górne - przesunięcia pionowe  $f_i$ , zupełnie zresztą tak samo jak w wypadku uprzędnio rozpatrywanym. Tutaj więc  $P_1=1$   $Q_1=X$  oraz niewątpliwie  $q_1 = \frac{XL}{ES}$  nadto  $P_2=0$   $Q_2=1$  oraz  $\beta_2 = f_{ii}$   $q_2=h$  zatem na mocy zasady wzajemności możemy napisać  $Xh + 1.f_{ii} = 1. \frac{XL}{ES}$ . Stąd bezpośrednio:  $X = -\frac{f_{ii}}{h + \frac{L}{ES}}$ ; Ponieważ mianownik prawej części wzoru jest stały dla wszystkich węzłów przeto wykres przesunięć  $f_i$  (RYS. 343) wyznacza w skali  $P: [h + \frac{L}{ES}]$  wartości odpory  $X$  dla siły  $P$  ruchomej, kolejno obciążającej wszystkie górne węzły ustroju. I tu więc linja wykresu przesunięć  $f_i$  stanowi szukaną linję wpływu dla czynnika  $X$ .

Wszystkie te przykłady jaskrawo uwypuklają sprawność zasady wzajemności w wypadku obciążeń ruchomych,

spotykanych na każdym kroku w teorii mostów. Tam też twierdzenie BETTI gra nader ważną rolę, zwłaszcza, że zasada najmniejszej pracy nie daje dobrych wyników w wypadkach obciążenia ruchomego, trzeba bowiem dla każdego położenia siły ruchomej rozwiązywać coraz to nowe układy równań, czego unikamy szczęśliwie stosując twierdzenie BETTI.

W większości wypadków te dwie zasady dopełniają się wzajemnie. Zalety obu łączy w sobie poniekąd tak zwana:

§ 13. ZASADA MOHR'A, która w istocie swej sprowadza się do znanej zasady prac przygotowanych.

Weźmy pod uwagę ustrój sprężysty pozostający w równowadze pod jarzmem układu sił odkształcających  $P_i$   $i=1, 2, 3, \dots, n$ . Na tle działania tych sił powstał wewnątrz ciała odkształconego układ naprężeń  $t_j$   $j=1, 2, 3, \dots, \infty$ . Odnośne przesunięcia sił odkształcających  $P_i$  oznaczamy przez  $p_i$ , a odkształcenia wewnętrzne czyli właściwiej mówiąc przesunięcia naprężeń  $t_j$  przez  $\theta_j$ . Wobec istnienia trwałej równowagi ustroju odkształconego, musi wypełniać się na mocy zasady prac przygotowanych równanie  $P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \dots + t_1 \delta \theta_1 + t_2 \delta \theta_2 + \dots = \sum_{i=1}^n P_i \delta p_i + \sum_{j=1}^{\infty} t_j \delta \theta_j = 0$ , w którym przyrosty warjacyjne przesunięć mają oznaczać przesunięcia przygotowane, czyli możliwe dla danych warunków obciążenia. Istota tylko co wypisanego równania nie ulega wątpliwości bo siły odkształcające  $P_i$  równoważą układ sił wewnętrznych  $t_j$ .



a wielomian skończony  $P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \dots$  wyraża pracę sił zewnętrznych czyli pracę czynną, podczas gdy wielomian o nieskończonej liczbie składników  $\pm \delta q + \pm \delta q + \dots$  - pracę sił wewnętrznych - pracę bierną, a więc różną co do znaku od poprzedzającej. NA MOCY PRAWA ZACHOWANIA ENERGJI SUMMA TYCH PRAC MUSI BYĆ RÓWNA ZERU, W WYPADKU GDY CAŁKOWITA PRACA SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH PRZECHODZI W PRACĘ SPRĘŻYSTĄ A WIĘC DLA CIAŁ SPRĘŻYSTYCH. Równanie tu otrzymane, aczkolwiek ściśle, zupełnie się nie daje zastosować praktycznie wobec trudności summowania nieskończonej liczby składników, natomiast może oddać cenne usługi tam gdzie to summowanie wypełnić się uda, a więc przede wszystkim w wypadku ustroju złożonego z prętów połączonych przegubowo. Gdy siły zewnętrzne działają li tylko na węzły - wtedy pręty ustroju pracują wyłącznie na ściskanie lub rozciąganie pod jarzmem sił wewnętrznych ustroju, czyli sił w prętach  $R_i$ . Te siły zastępują układy naprężeń panujące w prętach, a zatem powodują wydłużenia prętów  $\delta l_i = \delta L_i$ , gdzie przez  $L_i$  oznaczyliśmy długość odpowiedniego pręta. W wypadku rozciągania  $R_i > 0$  oraz  $\delta l_i > 0$ , w wypadku ściskania  $R_i < 0$  i  $\delta l_i < 0$ . Zatem dla  $m$  prętów ustroju będziemy mieli równanie:  $\sum_{i=1}^n P_i \delta p_i + \sum_{i=1}^m R_i \delta l_i = 0$ , stanowiące istotę zasady MOHR'A w zastosowaniu do ustrojów. Ma ono zastosowania rozliczne.

W wypadku ustroju prętowego statycznie wyznaczalnego może służyć do wyliczania sił prętów  $R_i$ . Łatwo

to udowodnić zważywszy, że w ustroju prętowym statycznie wyznaczalnym wydłużenia prętów są zupełnie dowolne. Istotnie skoro odrzucimy jeden pręt wtedy dwa sąsiednie trójkąty ustroju utworzą czworobok o NIEMATERIALNEJ PRZEKĄTNI w miejscu owego odrzuconego pręta. Możemy więc nie zmieniając reszty ustroju skrzywić czworobok w sposób zupełnie dowolny i wstawić nowy pręt - krótszą lub dłuższą przekątnię. ZATEM PRZYROSTY  $\delta \mathcal{L}_i$  USTROJÓW PRĘTOWYCH STATYCZNIE WYZNACZALNYCH SĄ NIEZALEŻNE OD SIEBIE, A NADTO ZUPEŁNIE W PEWNYCH GRANICACH DOWOLNE. Uczynimy je przeto wszystkie równe zeru prócz jednego zresztą zupełnie dowolnego, któremu damy wartość zgóry określoną  $\delta \mathcal{L}_K = h$ . Na tle tego przyrostu węzły ustroju prętowego przesuną się nieco, ujawniając przesunięcia  $\delta p_{iK}$  odpowiadające  $\delta \mathcal{L}_K$ , będziemy mieli zatem  $\sum_{i=1}^n F_i \delta p_{iK} + R_K \delta \mathcal{L}_K = 0$ . Stąd bezpośrednio:  $R_K = -\frac{1}{h} \sum_{i=1}^n F_i \delta p_{iK}$ .

Gdy natomiast ustrój ma pręty lub więzy zbyteczne, dowolność wszystkich przyrostów  $\delta \mathcal{L}_i$  jest oczywiście niemożliwa, bo pręt zbyteczny wymaga ściśle określonej długości między odnośniami węzłami, które łączy. Podobny warunek narzuca również wszelki więz zbyteczny. Inaczej mówiąc istnieje zawsze pewna ilość przyrostów  $\delta \mathcal{L}_i$  zależnych od pozostałych, uwarunkowana obecnością prętów lub więzów zbytecznych.

Wobec wzajemnej zależności przyrostów  $\delta \mathcal{L}_i$  tylko co wyżej wskazany sposób rachunkowy zupełnie zawodzi,



trzeba więc nieco inaczej stosować zasadę MOHR'A aby wyznaczyć siły w prętach ustroju. ~

Weźmy przedewszystkiem pod uwagę ustrój o jednym pręcie zbytecznym. Na tle działania sił zewnętrznych odkształcających panuje w nim siła  $X$ . Odrzućmy go i na to miejsce dajmy dwie siły zastępcze  $X$  i  $-X$  zwiększając w ten sposób układ sił zewnętrznych  $P_2$ . Tak powiększony układ sił odkształcających mianujemy pierwszym. Wywła on siły  $R_2$  w prętach, zależne od  $P_2$  i od  $X$ . Aby te siły określić budujemy dwa wykresy CREMONY. Jeden dla sił  $P_2$ , z którego wyznaczymy siły w prętach  $R_2^0$  zależne wyłącznie od  $P_2$ , drugi zaś dla sił  $X=1$ , da on dodatkowe siły w prętach  $R_2'$  zależne od sił  $X=1$ . Budowa obu tych wykresów nie nastreczy żadnych trudności, ponieważ PO ODRZUCENIU PRĘTA ZBYTECZNEGO USTRÓJ STAŁ SIĘ STATYCZNIE WYZNACZALNYM. Zatem będziemy mieli  $R_2 = R_2^0 + X R_2'$ . Pod działaniem tych sił pręty ujawnią wydłużenia  $\delta R_2 = [R_2^0 + X R_2'] / L_2 \cdot E_2 S_2$ , a wydłużenie odrzuconego pręta zbytecznego będzie  $\delta r = X L \cdot E S$ . Aby otrzymać drugi układ sił odkształcających zakładamy wszystkie siły  $P_2$  równe zeru, odrzucamy pręt zbyteczny i na jego miejsce dajemy dwie siły  $X=1$ . Będą to jedyne siły zewnętrzne układu drugiego. Dadzą one siły  $R_2'$  w prętach wyznaczone z pomocą drugiego wykresu CREMONY. W stosunku do sił układu drugiego zewnętrznych  $X=1$  i wewnętrznych  $R_2'$  przyrosty  $\delta r$  i  $\delta R_2$  grają niewątpliwie rolę przesunięć przygotowanych bo

przecież istotnie możliwych, zatem na mocy zasady MOHR'A będziemy mogli napisać  $\delta r + \sum_{i=1}^m R_i' \delta r_i = 0$ , to jest  $\frac{XL}{ES} + \sum_{i=1}^m R_i' \frac{R_i^0 + X R_i' L_i}{E_i S_i} = 0$  stąd:  $X = - \frac{\sum_{i=1}^m \frac{R_i^0 R_i' L_i}{E_i S_i}}{\frac{L}{ES} + \sum_{i=1}^m \frac{R_i'^2 L_i}{E_i S_i}}$ ; Gdy miasto pręta zbytecznego mamy zbyteczną podporę nieruchomą to dla niej a raczej dla jej odpory  $X$  będziemy mieli  $\delta r = 0$  i wtedy odpór nieruchoma:

$$X = - \frac{\sum_{i=1}^m \frac{R_i^0 R_i' L_i}{E_i S_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{R_i'^2 L_i}{E_i S_i}}$$

Wreszcie, gdy mamy kilka czynni-

ków statycznie niewyznaczalnych  $X, Y, Z, \dots$  budujemy kolejno wykresy CREMONY jeden dla sił zewnętrznych  $P_i$  drugi dla  $X=1$ , trzeci dla  $Y=1$ , czwarty dla  $Z=1$  i t.d. Te wykresy dadzą odpowiednio  $R_i^0, R_i', R_i'', R_i'''$  i t.d., zatem dla sił w prętach będziemy mieli  $R_i = R_i^0 + X R_i' + Y R_i'' + Z R_i''' + \dots$

Siły  $R_i$  przynależą do obciążenia zewnętrznego złożonego z sił  $P_i$  zewnętrznych oraz zastępczych sił  $X, Y, Z, \dots$ . Ten układ sił mianujemy pierwszym. Budowa wykresów CREMONY nie nastęczy żadnych trudności ponieważ ODRZUCAMY ZBYTECZNE PRĘTY i PODPORY, zastępując ich działanie dodatkowymi siłami odkształcającymi  $X, Y, Z, \dots$ . CZYNIMY PRZETO SZTUCZNIE USTRÓJ STATYCZNIE WYZNACZALNY. ~

Aby otrzymać drugi układ sił odkształcających czynimy wszystkie siły  $P_i$  równe zeru, odrzucamy wszystkie podpory i pręty zbyteczne i obciążamy ustrój siłami  $X=1$ . Podobnie dla sił  $Y=1$  otrzymamy trzeci, dla sił  $Z=1$  czwarty układ odkształcający i t.d. W stosunku do tych układów przyrosty  $\delta r_i$  przynależne



do układu pierwszego będą oczywiście grały rolę przesunięć przygotowanych, bo istotnie możliwych. Zatem będziemy mogli wypisać na mocy zasady MOHR`A szereg równań:

$$1. \frac{XL_x}{E_x S_x} + \sum_{i=1}^m R_i' [R_i^0 + XR_i' + YR_i'' + ZR_i''' + \dots] \frac{L_i}{E_i S_i} = 0$$

$$1. \frac{YL_y}{E_y S_y} + \sum_{i=1}^m R_i'' [R_i^0 + XR_i' + YR_i'' + ZR_i''' + \dots] \frac{L_i}{E_i S_i} = 0$$

$$1. \frac{ZL_z}{E_z S_z} + \sum_{i=1}^m R_i''' [R_i^0 + XR_i' + YR_i'' + ZR_i''' + \dots] \frac{L_i}{E_i S_i} = 0$$

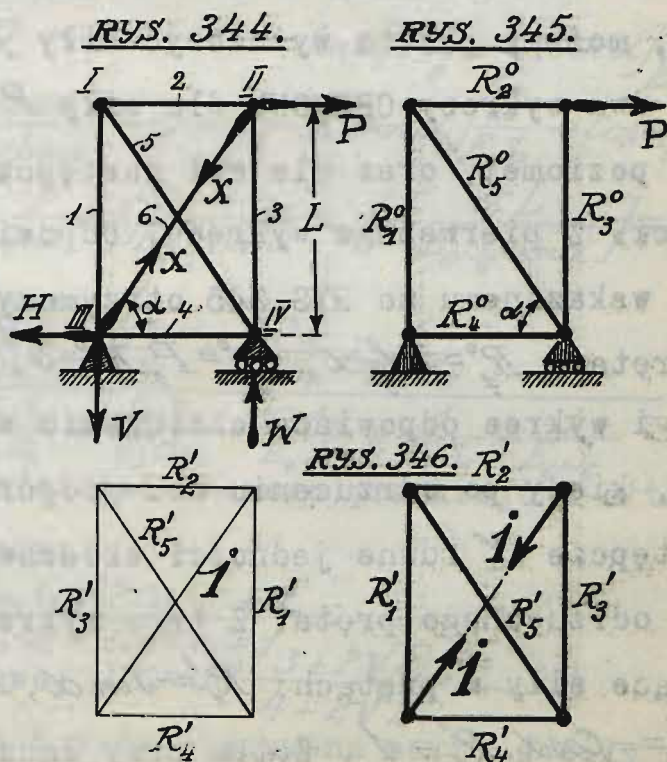
linjowych względem  $X, Y, Z$ , z których z łatwością wyznaczmy te brakujące czynniki. ~

Po określeniu wszystkich czynników możemy wyznaczyć wydłużenia prętów pod jarzmem sił  $R_i$  oraz długości prętów odkształconych. Według tych danych możemy znów określić przesunięcia <sup>PI WĘZŁÓW USTROJU W KIERUNKU ODNOŚNYCH</sup> sił  $P_i$  obciążenia zewnętrznego, stanowiącego łącznie z siłami zastępczymi  $X, Y, Z$ , tak zwany układ pierwszy sił odkształcających. Chcąc daćmy na to wyznaczyć przynależne do tego układu przesunięcie  $\beta_K$  możemy zastosować zasadę MOHR`A rozpatrując odkształcający układ sił zewnętrznych, który tu drugim zwać będziemy, obejmujący jedyną uogólnioną siłę  $P_K$  równą jedności. Pod jej jarzmem powstaną siły w prętach  $R_i''$ , które z łatwością wyznaczmy w wypadku ustroju statycznie wyznaczalnego. W razie przeciwnym odrzuciwszy pręty i podpory zbyteczne zastąpimy ich działanie odnośnemi siłami  $X, Y, Z$ ,... a układ stanie się statycznie wyznaczalnym i znów z łatwością wyznaczmy

siły  $R_i^{\kappa}$  powstałe w prętach na tle działania jedynej siły odkształcającej  $P_{\kappa}=1$  układu drugiego. Oznaczmy przez  $\delta R_i^{\kappa}$  wydłużenia prętów pod jarzmem sił  $R_i^{\kappa}$  działających w prętach ustroju w wypadku obciążenia układem pierwszym. Te wydłużenia w stosunku do sił  $R_i^{\kappa}$  układu drugiego będą oczywiście grały rolę przesunięć przystosowanych bo przecież istotnie możliwych, a przesunięcie węzła  $\beta_{\kappa}$  przynależne do siły  $P_{\kappa}$  pierwszego układu będzie niewątpliwie przesunięciem przygotowanym dla siły  $P_{\kappa}=1$  układu drugiego. Stąd na mocy zasady MOHR'A:  $1 \cdot \beta_{\kappa} + \sum_{i=1}^m R_i^{\kappa} \delta R_i^{\kappa} = 0$ , co da  $\beta_{\kappa} = - \sum_{i=1}^m R_i^{\kappa} \delta R_i^{\kappa}$ .

Rozważania powyższe jaskrawo podkreślają różnorodność zastosowań zasady MOHR'A. Aby ją jeszcze mocniej uwypuklić rozpatrujemy typowy PRZYKŁAD RAMY ZŁOŻONEJ Z SZĘŚCIU PRĘ-

TÓW POŁĄCZONYCH PRZEGUBOWO. Dolne węzły spoczywają na podporach lewej przegubowej i prawej rolkowej (RYS. 344). Na prawy węzeł górny działa pozioma siła  $P$ . Wywołuje ona odpory pionowy  $V$  i poziomy  $H$  w podporze przegubowej oraz pionowy





$W$  w podporze rolkowej. Równania statyki dają dla sił pionowych  $V+W=0$ , poziomych  $H+P=0$  i momentów względem podpory prawej  $PL+VL\text{tg}\alpha=0$ , gdzie  $L$  oznacza wysokość bramy, a  $\alpha$  kąt nachylenia przekątnej ku połączni dolnej. Stąd mamy:  $H=-P$ ,  $V=-P\text{tg}\alpha$ ,  $W=-V=P\text{tg}\alpha$ . Ten ustrój posiada pręt zbyteczny, dajmy na to No.6. Oznaczamy siłę tego pręta przez  $X$ . Stanowi ona czynnik statycznie niewyznaczalny. Zgodnie z tem cośmy wyżej nadmienili ten pręt zbyteczny należy odrzucić i zastąpić jego działanie przez siły zastępcze  $X$  działające po osi odrzuconego pręta w przegubach górnym prawym i dolnym lewym. Wobec braku jakichkolwiek danych co do tych sił kierujemy je dajmy na to do siebie. W ten sposób ustrój stał się statycznie wyznaczalnym, możemy przeto wyznaczyć siły  $R_i$  jego prętów, budując dwa wykresy CREMONY dla siły  $P$  istotnie działającej poziomej, oraz dla sił zastępczych  $X$  równych jedności. Z pierwszego wykresu, odpowiadającego obciążeniu wskazanemu na RYS.345 otrzymamy następujące siły w prętach  $R_1^0=P\text{tg}\alpha$ ,  $R_2^0=P$ ,  $R_3^0=0$ ,  $R_4^0=P$  i  $R_5^0=-\frac{P}{\cos\alpha}$ ; Drugi wykres odpowiada obciążeniu wskazanemu na RYS. 346, kiedy po odrzuceniu obu podpór przyłożono siły zastępcze  $X$  równe jedności skierowane ku sobie po osi odrzuconego pręta. Z tego wykresu otrzymamy następujące siły w prętach:  $R_1'=-\sin\alpha$ ,  $R_2'=-\cos\alpha$ ,  $R_3'=-\sin\alpha$ ,  $R_4'=-\cos\alpha$ ,  $R_5'=1$ . Zatem przy łącznem działaniu siły zewnętrznej  $P$  i sił zastępczych  $X$  otrzymamy następu-

jące siły w prętach:  $R_1 = P \lg \alpha - X \sin \alpha$ ,  $R_2 = R_4 = P - X \cos \alpha$ ,  $R_3 = -X \sin \alpha$ ,  $R_5 = -\frac{P}{\cos \alpha} + X$ , a nadto jeszcze pręt wycięty będzie pozostawał pod jarzmem sił  $X$ . ~

Zważywszy, iż długości odnośne prętów wynoszą  $L_1 = L_3 = L$ ,  $L_2 = L_4 = L \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  oraz  $L_5 = L_6 = \frac{L}{\sin \alpha}$  będziemy mieli odpowiednio wydłużenia:  $\delta L_1 = [P \lg \alpha - X \sin \alpha] \frac{L}{E_1 S_1}$ ,  $\delta L_2 = [P - X \cos \alpha] \frac{L}{E_2 S_2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,  $\delta L_3 = -X \sin \alpha \frac{L}{E_3 S_3}$ ,  $\delta L_4 = [P - X \cos \alpha] \frac{L}{E_4 S_4} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,  $\delta L_5 = [-\frac{P}{\cos \alpha} + X] \frac{L}{E_5 S_5 \sin \alpha}$ , podczas gdy pręt wycięty ujawni wydłużenie  $\delta L_6 = \frac{XL}{E_6 S_6 \sin \alpha}$ , stanowiące zarazem miarę rozsunęcia się węzłów II i III. Zatem  $\delta L_6$  wzięte ze znakiem odwrotnym będzie

grało rolę przesunięcia siły  $X$  zastępującej działanie pręta. Stąd na mocy zasady MOHR'A będziemy mieli:  $\sum_{i=1}^6 R_i' \delta L_i + X \delta L_6 = 0$  ~ to jest:  $-\sin \alpha [P \lg \alpha - X \sin \alpha] \frac{L}{E_1 S_1} - \cos \alpha [P - X \cos \alpha] \frac{L \cos \alpha}{E_2 S_2 \sin \alpha} - \sin \alpha [-X \sin \alpha] \frac{L}{E_3 S_3} - \cos \alpha [P - X \cos \alpha] \frac{L \cos \alpha}{E_4 S_4 \sin \alpha} + 1 [-\frac{P}{\cos \alpha} + X] \frac{L}{E_5 S_5 \sin \alpha} - 1 [-\frac{XL}{E_6 S_6 \sin \alpha}] = 0$ . ~

Stąd bezpośrednio:

$$X = \frac{P}{\cos \alpha} \frac{\frac{\sin^3 \alpha}{E_1 S_1} + \frac{\cos^3 \alpha}{E_2 S_2} + \frac{\cos^3 \alpha}{E_4 S_4} + \frac{1}{E_5 S_5}}{\frac{\sin^3 \alpha}{E_1 S_1} + \frac{\cos^3 \alpha}{E_2 S_2} + \frac{\sin^3 \alpha}{E_3 S_3} + \frac{\cos^3 \alpha}{E_4 S_4} + \frac{1}{E_5 S_5} + \frac{1}{E_6 S_6}} \sim$$

Gdy wszystkie pręty są jednakowego przekroju i z tego samego tworzywa wtedy:

$$X = \frac{P}{2 \cos \alpha} \frac{\sin^3 \alpha + 2 \cos^3 \alpha + 1}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha + 1} \sim$$

$$\text{a dla ramy kwadratowej } X = \frac{P}{4 + 2\sqrt{2}} \frac{3 + 2\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}} \sim$$

Ponieważ w ten sposób otrzymana wartość siły zastępczej jest oczywiście dodatnia, przeto obrany kie-



runek tych sił był właściwy a sam pręt zbyteczny jako ulegający działaniu sił odwrotnego znaku pracuje na rozciąganie, co zresztą można było zgóry przewidzieć.

Jako drugi przykład rozpatrujemy KRATOWY DŹWIGAR MOSTOWY wsparty na dwie podpory - lewą przegubową i prawą rolkową (RYS. 347). Ten ustrój przy dziesięciu węzłach przegubowych posiada siedemnaście prętów, jest więc statycznie wyznaczalny. Niech obciążenie jego składa się dajmy na to z sił  $P_1 P_2 P_3$  pionowych obciążających dolne węzły dźwigara. To obciążenie nazwiemy pierwszym i wyznaczmy dla niego siły w prętach  $R_i$  a następnie i wydłużenia prętów  $\delta R_i = \frac{R_i L_i}{E_i S_i}$ . Chcąc dalej jeszcze określić pionowe przesunięcie któregośkolwiek węzła, dajmy na to  $\bar{u}$ , w którym działa siła  $P_1$ , a więc przesunięcie  $\bar{p}_1$ , rozpatrujemy obciążenie drugie, kiedy wszystkie siły zewnętrzne są równe zeru prócz jednej tylko  $P_1$ , którą czynimy równą jedności i wyznaczamy dla tego układu odnośne siły w prętach

$R_i'$ . Na mocy zasady MOHR'A będziemy mieli dla tego wypadku:  $1 \cdot \bar{p}_1 + \sum_{i=1}^{17} R_i' \delta R_i = 0$  skąd  $\bar{p}_1 = - \sum_{i=1}^{17} R_i' \delta R_i$ .

Gdybyśmy dajmy na to chcieli wyznaczyć pochylenie się czyli kąt obrotu  $\theta$  przekątni  $L$  pod jarzmem obciążenia pierwszego, to należałoby wprowadzić odpowiednią siłę uogólnioną dla której owo pochylenie czyli elementarny obrót przekątni grałby rolę przesunięcia. Ta siła uogólniona to moment  $M$  o parze sił  $R$  przyłożonych do skrajnych przegubów przekątni. Zatem





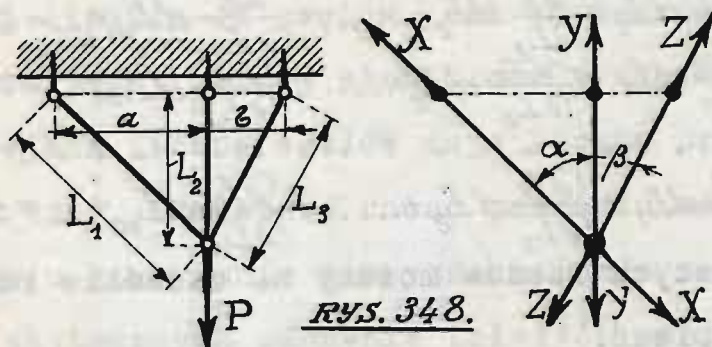
jąc jakikolwiek ustrój prętowy statycznie niewyznac-  
 zalny, złożony z  $m$  prętów połączonych przegubowo.  
 W tej liczbie  $k$  prętów jest zbytecznych. Odrzuciwszy  
 je otrzymamy ustrój statycznie wyznaczalny, w którym  
 podwojona liczba węzłów daje liczbę prętów zwiększo-  
 ną o trzy. Odwrotnie chcąc powrócić do pierwotnego  
 ustroju statycznie niewyznaczalnego należy te  $k$  prę-  
 tów zbytecznych ponownie założyć; ponieważ jednak przy  
 tem liczba węzłów nie może ulec zmianie inaczej bo-  
 wiem otrzymalibyśmy nowy ustrój o mniejszej liczbie  
 prętów zbytecznych, przeto należy łączyć węzły ist-  
 niejące dodatkowo owemi  $k$  prętami. Stąd wniosek oczy-  
 wisty, że długość każdego pręta zbytecznego zależy od  
 prętów koniecznych. Istnieje przeto  $k$  równań  $f_1(L_1, L_2, \dots$   
 $\dots L_m) = 0$   $f_2(L_1, L_2, \dots L_m) = 0, \dots \dots f_k(L_1, L_2, \dots L_m) = 0$   
 węzłów czysto geometrycznych uzależniających pierwot-  
 ne nieodkształcone długości prętów zbytecznych od pier-  
 wotnych nieodkształconych długości prętów pozostałych  
 ustroju. Po obciążeniu przegubów ustroju siłami od-  
 kształcającymi pojawią się siły  $R_i$  w prętach ustroju  
 i spowodują wydłużenia prętów  $dL_i = \frac{R_i L_i}{E_i S_i}$ . Wobec zni-  
 komej wartości tych przyrostów długości prętów od-  
 kształcone  $L_i + dL_i$  również w przybliżeniu czynić bę-  
 dą zadość wyżej wypisanym równaniom, będziemy mieli  
 przeto nowy układ równań:  $f_1(L_1 + dL_1, L_2 + dL_2, \dots L_m + dL_m)$   
 $= 0$   $f_2(L_1 + dL_1, L_2 + dL_2, \dots L_m + dL_m) = 0 \dots \dots \dots$   
 $\dots f_k(L_1 + dL_1, L_2 + dL_2, \dots L_m + dL_m) = 0,$





się ku niemu odpowiednio pod kątami  $\alpha$  i  $\beta$  (RYS.348/).

U dolnego przegubu wisi ciężar  $P$ . Wyznaczyć siły w



RYS. 348.

prętach. Oznaczmy siłę działającą wzdłuż osi pręta środkowego przez  $Y$  — a przez  $X$  i  $Z$  si-

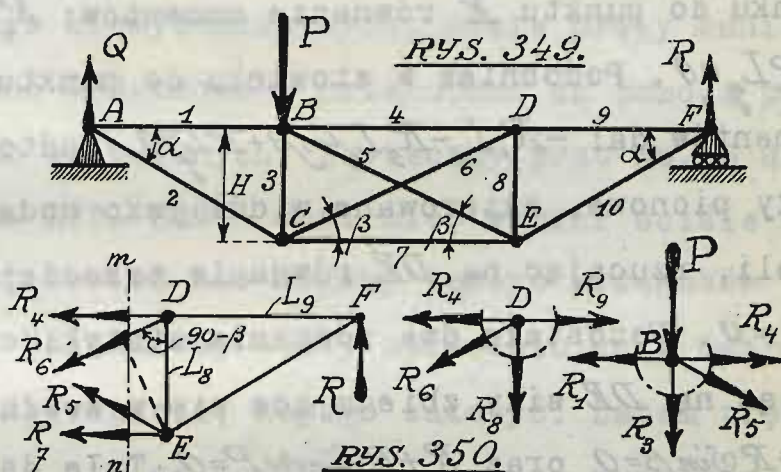
ły w prętach bocznych. Będą to zarazem odpory górnych przegubów ustroju. Ponieważ w danym wypadku wszystkie siły schodzą się w jednym punkcie, przeto statyka daje jedno dwa równania równowagi: sił pionowych  $X \cos \alpha + Y + Z \cos \beta + P = 0$ , i poziomych  $X \sin \alpha = Z \sin \beta$ , z których nie zdołamy wyznaczyć wszystkich odpór. Zasada LÉVY daje owo brakujące równanie. Oznaczmy odległości przegubów górnych przez  $a$  i  $b$  a pręty odpowiednio przez  $L_1$ ,  $L_2$  i  $L_3$ , wtedy  $L_1^2 + L_3^2 = 2L_2^2 + a^2 + b^2$ . Stąd różniczkując otrzymamy  $L_1 dL_1 + L_3 dL_3 = 2L_2 dL_2$  należy bowiem rozpatrywać  $a$  i  $b$  jako stałe wobec sztywności bezwzględnej połączi górnej. Ponieważ oczywiście  $dL_1 = \frac{XL_1}{E_1 S_1}$ ,  $dL_2 = \frac{YL_2}{E_2 S_2}$ ,  $dL_3 = \frac{ZL_3}{E_3 S_3}$  przeto ostatecznie  $X \frac{L_1^2}{E_1 S_1} + Z \frac{L_3^2}{E_3 S_3} = 2Y \frac{L_2^2}{E_2 S_2}$ . Z tych trzech równań możemy wyznaczyć wszystkie odpory. W szczególnym wypadku ustroju symetrycznego mamy  $L_1 = L_3 = L$ ,  $a = b$ ,  $E_1 = E_3 = E$ ,  $S_1 = S_3 = S$  nadto oznaczmy  $L_2 = L_0$ ,  $S_2 = S_0$ ,  $E_2 = E_0$ , a wtedy wobec  $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{L_0}{L}$ ,  $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{a}{L}$  będziemy mieli układ równań  $\frac{L_0}{L}(X+Z) + Y + P = 0$ ,  $X = Z$ ,  $(X+Z) \frac{L^2}{E S} = 2Y \frac{L_0^2}{E_0 S_0}$ ,

Skąd otrzymany natychmiast:

$$X = -\frac{P}{2\frac{L_0}{L} + \frac{E_0 S_0 L^2}{E S L_0^2}}, Y = -\frac{P}{1 + 2\frac{E S L_0^3}{E_0 S_0 L^3}}, Z = X.$$

Jako drugi przykład rozpatrzmy belkę wzmocnio-  
ną (RYS. 349) wspartą na dwie podpory lewą przegubową  
i prawą rolkową. Obciążenie belki stanowi pionowa si-  
ła  $P$  działą-

jąca na węzeł  
 $B$ . Równania  
statyki pozwo-  
lą wyznaczyć  
obie odpory  $Q$   
i  $R$  pionowe  
oraz poziomą



odporę lewą, która najwidoczniej równa jest zeru. Mi-  
mo to belka jest statycznie niewyznaczalna wewnętrz-  
nie zawiera bowiem jeden środkowy pręt zbyteczny. Łat-  
wo się o tem przekonać zważywszy, że podwojona liczba  
węzłów daje liczbę prętów zwiększoną o dwa, a nie o  
trzy jak należałoby oczekiwać. Ponieważ obie odpory  
 $R$  i  $Q$  są wyznaczalne statycznie, przeto i siły w  
prętach No. 1, 2, 9, 10 mogą być określone z łatwo-  
ścią z trójkątów CREMONY, natomiast siły pozostałych  
prętów są w liczbie nadmiernej: nie starczy dla nich  
równań statyki. W istocie w węzłach  $BCDE$  zbiega  
się sześć prętów, a równań statyki będziemy mieli je-  
no pięć (podwojona liczba węzłów mniej trzy) jedna za-



tem z sił jest statycznie niewyznaczalna. Wypiszmy w postaci ogólnej wszystkie te równania. Przedewszystkiem (RYS.350) prowadząc przekrój  $mn$  pionowy odcinamy lewą część belki a działanie jej zastępujemy układem sił  $R_4 R_5 R_6 R_7$  odnośnych prętów rozciętych. Rozpatrując momenty lewoskrętne jako dodatnie będziemy mieli w stosunku do punktu  $E$  równanie momentów:  $R_4 L_4 + R_6 L_6 \cos \beta + R L_9 = 0$ . Podobnież w stosunku do punktu  $D$  równanie momentów da:  $-R_7 L_8 - R_5 L_8 \cos \beta + R L_9 = 0$ . Nadto, rozpatrując siły pionowe, skierowane w dół jako dodatnie, będziemy mieli, rzucając na  $DE$ , równanie trzecie:  $-R_3 \sin \beta + R_6 \sin \beta - R = 0$ . Pozostałe dwa równania statyki otrzymamy rzucając na  $DE$  siły zbiegające się w węzłach  $D$  i  $B$  co da  $R_8 + R_6 \sin \beta = 0$  oraz  $R_3 + R_5 \sin \beta + P = 0$ . Tyle da nam statyka; brakujące równanie szóste możemy otrzymać na mocy zasady LÉVY, zważywszy, że dla środkowego kwadratu  $L_3^2 + L_4^2 + L_7^2 + L_8^2 = L_5^2 + L_6^2$ . Różniczkując stąd otrzymamy:  $L_3 dL_3 + L_4 dL_4 + L_7 dL_7 + L_8 dL_8 = L_5 dL_5 + L_6 dL_6$ . Ponieważ oczywiście:  $L_3 = L_8 = H$ ,  $L_4 = L_7 = L_s$  oraz  $L_5 = L_6 = L_p$  będziemy mieli:  $H(dL_3 + dL_8) + L_s(dL_4 + dL_7) = L_p(dL_5 + dL_6)$ . Inaczej jeszcze wobec  $dL_i = \frac{R_i L_i}{E_i S_i}$  gdzie  $i = 3, 4, 5, 6, 7$  będziemy mieli szóste równanie brakujące:

$$H^2 \left[ \frac{R_3}{E_3 S_3} + \frac{R_8}{E_8 S_8} \right] + L_s^2 \left[ \frac{R_4}{E_4 S_4} + \frac{R_7}{E_7 S_7} \right] = L_p^2 \left[ \frac{R_5}{E_5 S_5} + \frac{R_6}{E_6 S_6} \right].$$

Z tych równań wyznaczymy wszystkie sześć sił  $R_i$ .

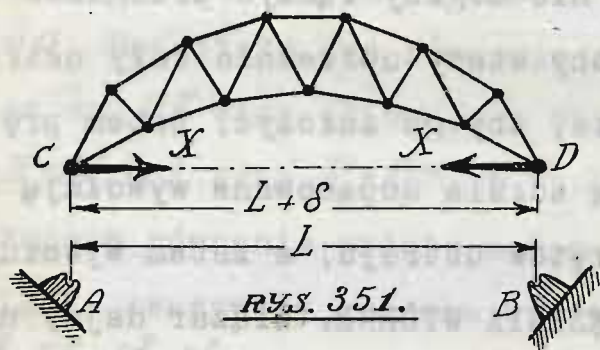
Na zakończenie pozostaje nam jeszcze tylko rozpatrzyć tak zwane:

§ 14. NAPRĘŻENIA WTÓRNE USTROJÓW STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH. Wyżej udowodniliśmy, iż w ustrojach statycznie wyznaczalnych, długość jakiegokolwiek pręta nie zależy od wymiarów prętów pozostałych, zatem zmiana długości jednego pręta nie wywołuje żadnych naprężeń w pozostałych. Inaczej rzecz się ma w ustrojach statycznie niewyznaczalnych, gdzie pręty konieczne są powiązane dodatkowo w przegubach za pomocą prętów lub podpór zbytecznych. Zbyteczny pręt No. 6 ustroju podanego na RYS. 349 - musi mieć wymiar ściśle określony, inaczej bowiem nie mógłby łączyć przegubów  $C$  i  $D$  dodatkowo. Należałoby wtedy uprzednio cały ustrój odkształcić odpowiednio, aby go założyć. Zatem pręty zbyteczne o ile nie są ściśle dopasowane wywołują odkształcenia pewnych prętów ustroju, a zatem wywołują w nich tak zwane NAPRĘŻENIA WTÓRNE. Wiązar dajmy na to wsparty na dwie podpory przegubowe winien ściśle trzymać miarę w rozstawieniu dolnych węzłów oporowych, w przeciwnym bowiem razie już przy ustawianiu ulegnie odkształceniu zanim poczną nań działać siły obciążenia właściwego.

Weźmy jako przykład SIERPOWNICĘ (RYS. 351) o rozpiętości  $L + \delta$  nieco większej od rozstawienia  $L$  odnośnych podpór przegubowych a więc nieruchomych. Nie daje się przeto ustawić bez uprzedniego ściśnięcia siłami poziomymi  $X$ , które muszą być tak dobrane, aby straciły rozpiętość wiązaru o  $\delta$ . Oznaczmy przez  $R_2'$  siły



w prętach sierpownicy obciążonej li tylko siłami  $X$  równymi jedności. Możemy je łatwo wyznaczyć budując wykresy CREMONY. Zatem przy  $X$  różnem od jedności odnośne siły w prętach będą  $R_i = X R_i'$ ; a praca sprężysta wia-  
 zaru:  $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m X^2 R_i'^2 \frac{L_i}{E_i S_i}$ . Stąd na mocy drugiego twierdze-  
 nia CASTIGLIANO będziemy mieli  $\delta = \frac{\partial \Pi}{\partial X} = \sum_{i=1}^m X R_i'^2 \frac{L_i}{E_i S_i}$   
 ponieważ  $\delta$  gra tutaj oczywiście rolę przesunięcia siły  
 $X$ . Stąd łatwo obliczymy  $X$  a zatem i NAPRĘŻENIA WTÓR-  
 NE prętów powstałe na tle działania sił  $R_i$  w wiąża-  
 rze nieobciążonym.



Ta sama sierpowni-  
 ca ze ściągiaczem  $CD$   
 stanowi ustrój sta-  
 tycznie niewyznaczal-  
 ny wewnętrznie. Dłu-  
 gość jej pręta zby-

tecznego  $CD$  musi być ściśle dopasowana do rozpiętości  
 wiaźaru. Gdy pręt jest dajmy na to o  $\delta$  zbyt krótki na-  
 leży uprzednio cały wiążar ścisnąć siłami  $X$ , działa-  
 jącemi wzdłuż osi ściągiacza, które muszą być oczywi-  
 ście tak dobrane, aby skróciły rozpiętość  $CD = L + \delta$   
 wiaźaru o  $\delta$ . Wtedy dopiero będziemy mogli założyć  
 ściągiacz na węzły  $C$  i  $D$ , poczem siły ścisakające jako  
 już zgola niepotrzebne mogą być usunięte. W ten sposób  
 odkształcony wiążar nie pozostanie jednak w równowadze,  
 a będzie odkształcał ściągiacz dopóty póki nie ustali  
 się trwały stan równowagi, na tle pewnego wydłużenia

$\mathcal{S}$  ściągacza. To wydłużenie  $\mathcal{S}$  odpowiada sile  $X_s$  równoważącej siłę odkształcającą wiązaru. W ten sposób wiązaru nie powróci do pierwotnego stanu, a pozostanie częściowo naprężony siłami  $X_s$ . Odkształcenie  $\mathcal{S}$  nie zniknie więc całkowicie, część jego  $\mathcal{S}_w$  trwać będzie nadal pod jarzmem siły  $X_s$ . Inaczej mówiąc pierwotne przymusowe ściśnięcie wiązaru częściowo pokryje się wydłużeniem ściągacza, częściowo zaś nadal pozostanie, będziemy mieli zatem  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_s + \mathcal{S}_w$ . Praca sprężysta wiązaru jest oczywiście  $\Pi_w = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m X_s^2 R_i'^2 \frac{L_i}{E_i S_i}$ , a praca ściągacza  $\Pi_s = \frac{X_s^2 L}{2ES}$ . Zatem na mocy drugiego prawa CASTIGLIANO będziemy mieli  $\mathcal{S}_s = \frac{\partial \Pi_s}{\partial X_s} = \frac{X_s L}{ES}$  oraz  $\mathcal{S}_w = \frac{\partial \Pi_w}{\partial X_s} = \sum_{i=1}^m X_s \frac{R_i'^2 L_i}{E_i S_i}$  co da:  $\mathcal{S} = \frac{X_s L}{ES} + \sum_{i=1}^m X_s \frac{R_i'^2 L_i}{E_i S_i}$ .

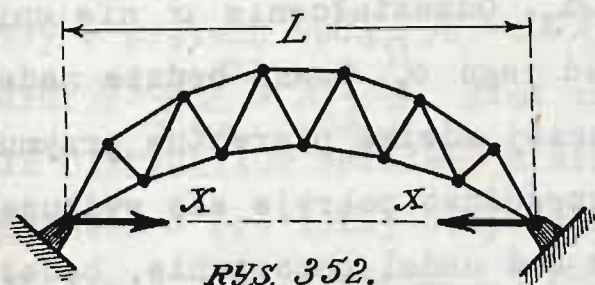
Stąd łatwo obliczymy  $X_s$ , a zatem i naprężenia wtórne prętów powstałe na tle działania sił  $R_i = X_s R_i'$  w wiązarze nieobciążonym jeszcze. Te naprężenia wtórne oczywiście nie mogą powstawać w ustrojach statycznie wyznaczalnych. To też ustroje statycznie niewyznaczalne należy wykonywać znacznie staranniej, a zwłaszcza nader dokładnie pasować pręty zbyteczne przy zbiórce. Każdy błąd, najskłabsza niedokładność, wywołują nieraz dość znaczne naprężenia wtórne nie brane oczywiście w rachubę przy obliczaniu ustrojów; to też zazwyczaj

USTROJE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE, RZADZIEJ SĄ STOSOWANE-JAKO DAJĄCE MNIEJSZĄ REKOJMIĘ PEWNOŚCI.

W podobny sposób powstają w ustrojach statycznie niewyznaczalnych naprężenia wtórne na tle zmian tempe-



ratury poszczególnych prętów ustroju. Aby to udowodnić powróćmy do naszej sierpownicy wspartej na podpory przegubowe (RYS. 352) i założmy, że temperatura wszy



stkich prętów ustroju wzrosła o  $t^\circ$ , każdy zatem pręt winien otrzymać <sup>PRZYROST</sup> długości  $\alpha_e L_i t$  a cała rozpiętość wiązaru winnaby wzrosnąć o

$\alpha_e L t$ . Podpory nieruchome stoją temu na przeszkodzie zmuszając wiązaru do zachowania rozpiętości pierwotnej. Na tle tego przymusu rozwijają się siły  $X$  poziome, a z nimi siły  $R_i = X R'_i$  w prętach wiązaru. Z łatwością to można udowodnić. Rozgrzany wiązaru rozszerza się i ciśnie na podpory, wywołując w nich sprzeciw w postaci odpory  $X$  li tylko poziomej, wszelka bowiem pionowa jako niezrównoważona nie może oczywiście istnieć. Praca sprężysta ustroju będzie więc równa:  $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m X R'_i \frac{L_i}{E_i S_i}$ ; Gdyby rozgrzany wiązaru wyskoczył nagle z podpór, to ję go rozpiętość wzrosłaby o  $\alpha_e L t$  i należałoby go

uprzednio ścisnąć o ten przyrost aby móc ponownie ustawić na podpory. Zatem przyrost  $\alpha_e L t$  gra tu rolę przesunięcia siły  $X$  i na mocy drugiego twierdzenia CASTIGLIANO możemy napisać  $\alpha_e L t = \frac{\partial \Pi}{\partial X} = X \sum_{i=1}^m R'_i \frac{L_i}{E_i S_i}$ ; skąd z łatwością wyznaczymy  $X$  a zatem i naprężenie wtórne prętów, powstałe na tle działania sił  $R_i = X R'_i$  w wiązarze ogrzanym do  $t^\circ$ . Należy tu jednak zazna-

czyć, iż tego rodzaju jednostajne rozgrzanie wiązaru rzadko kiedy zachodzi istotnie. Zazwyczaj rozgrzewa się jeno pewna grupa prętów, a czasem nawet jeden tylko pręt. W wypadku rozgrzania się tylko jednego pręta zbytecznego w pozostałych powstają naprężenia wtórne zupełnie tak samo jak przy zakładaniu źle dopasowanego pręta zbytecznego. Ogrzany pręt jest zbyt długi, należy przeto odnośne przeguby rozszerzyć o przyrost  $\delta = \alpha_c L t$  działając siłami  $X$  w kierunku osi owego pręta. Wtedy dopiero możemy założyć ów pręt ogrzany, a siły  $X$  usunąć jako zbyteczne. W ten sposób odkształcony ustrój nie pozostanie jednak w równowadze, a będzie odkształcał pręt założony siłami ciskącymi dopóty póki się nie ustali trwały stan równowagi na tle odpowiedniego skrócenia  $\delta_s$  owego pręta nagrzanego. To wydłużenie ujemne  $\delta_s$  przynależy do siły  $X_s$  równoważącej siłę ciskącą ustroju, który w ten sposób do stanu pierwotnego nie powróci a pozostanie częściowo naprężony siłami  $X_s$ . Zatem odkształcenie  $\delta = \alpha_c L t$  nie zniknie całkowicie, część jego  $\delta_w$  trwać będzie nadal pod jarzmem siły  $X_s$ , przyczem jak dawniej  $\delta_w + \delta_s = \delta = \alpha_c L t$ . Ponieważ i tu praca sprężysta ustroju jest:

$$\Pi_w = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} X_s^2 R_i'^2 \frac{L_i}{E_i S_i}$$

a praca sprężysta pręta nagrzanego  $\Pi_s = \frac{X_s^2 L}{2 E S}$  przeto na mocy drugiego twierdzenia CASTIGLIANO  $\delta_w = \frac{\partial \Pi_w}{\partial X_s} = \sum_{i=1}^m X_s R_i'^2 \frac{L_i}{E_i S_i}$  oraz  $\delta_s = \frac{X_s L}{E S}$  zatem ostatecznie  $\alpha_c L t = \frac{X_s L}{E S} + X_s \sum_{i=1}^m R_i'^2 \frac{L_i}{E_i S_i}$  skąd łatwo obliczymy  $X_s$  a zatem i naprężenia wtórne prętów ustroju,



które powstają na tle działania sił  $R_i = X_i R_i'$  wywołanych nagrzananiem jednego pręta zbytecznego.

Pozostaje nam jeszcze zbadać wypadek wzrostu temperatury całej gromady prętów ustroju statycznie niewyznaczalnego. W tym celu bierzemy pod uwagę ustrój statycznie niewyznaczalny pozostający pod jarzmem układu sił odkształcających  $R_i$ . W zamian odpór i prętów zbytecznych wprowadzamy siły zastępcze  $X, Y, Z, \dots$  czyniąc w ten sposób ustrój statycznie wyznaczalnym. Siły w prętach takiego ustroju wyznaczymy z łatwością budując odpowiednią liczbę wykresów CREMONY. Będą to, jak to już zresztą wiemy  $R_i = R_i^0 + X R_i' + Y R_i'' + Z R_i''' + \dots$  a wydłużenia prętów przy łącznem działaniu sił odkształcających zastępczych i nadwyżki temperatury  $t_i$  będą odpowiednio:  $\delta R_i = R_i \frac{L_i}{E_i S_i} + \alpha_c t_i L_i$ . To obciążenie zowiemy pierwszym. Aby otrzymać obciążenie drugie odrzucamy siły zewnętrzne oraz siły zastępcze i miasto jednej z nich dajmy na to  $X$  wprowadzamy siłę równą jedności. To obciążenie drugie da siły  $R_i'$  w prętach ustroju, będziemy przeto mogli napisać na mocy zasady MOHR'A:  $1 \cdot \left[ \frac{X L_x}{E_x S_x} + \alpha_c t_x L_x \right] + \sum_{i=1}^m R_i' \delta R_i = 0$  gdzie  $\frac{X L_x}{E_x S_x} + \alpha_c t_x L_x$  oznacza wydłużenie odrzuconego pręta zbytecznego pod działaniem siły  $X$  i przyrostu temperatury  $t_x$ . Czyniąc kolejno  $Y=1, Z=1$  i t.d. wypiszemy cały szereg równań tego typu i wyznaczymy z nich  $X, Y, Z, \dots$  a wtedy wyliczymy siły  $R_i$  znajdziemy wartości naprężeń wtórnych dla prętów ustroju.

Praktycznie naprężenia wtórne ustrojów statycznie

niewyznaczalnych zazwyczaj są pomijane w rachunku, aczkolwiek ich wartość bywa niekiedy poważna.

Na tem kończymy dział pracy odkształceń. Korzystać zeń będziemy wielokrotnie w następstwie.

## *ROZDZIAŁ DZIEWIĄTY.*

### *WYTRZYMAŁOŚĆ PRĘTÓW KRZYWYCH PŁASKICH.*

§ 1. USTALENIE POJĘĆ ZASADNICZYCH. Rozpatrywać będziemy wyłącznie tylko pręty krzywe płaskie, czyniące zadość następującym wymaganiom: OŚ PIERWOTNA NIEODKSZTAŁCONA PRĘTA KRZYWEGO PŁASKIEGO STANOWI KRZYWĄ PŁASKĄ; W JEJ PŁASZCZYŹNIE LEŻĄ JEDNOIMIENNE OSIE GŁÓWNE WSZYSTKICH PRZEKROJÓW POPRZECZNYCH PRĘTA A ŚRODKI KRZYWIZNY JEJ OSI PIERWOTNEJ LEŻĄ POZA PRĘTEM. To ostatnie omówienie jest konieczne inaczej bowiem sąsiednie przekroje poprzeczne pręta krzywego płaskiego miałyby punkty wspólne, a naprężenia tych punktów nie mogłyby mieć wartości ściśle określonej, należąc do dwóch przekrojów jednocześnie.

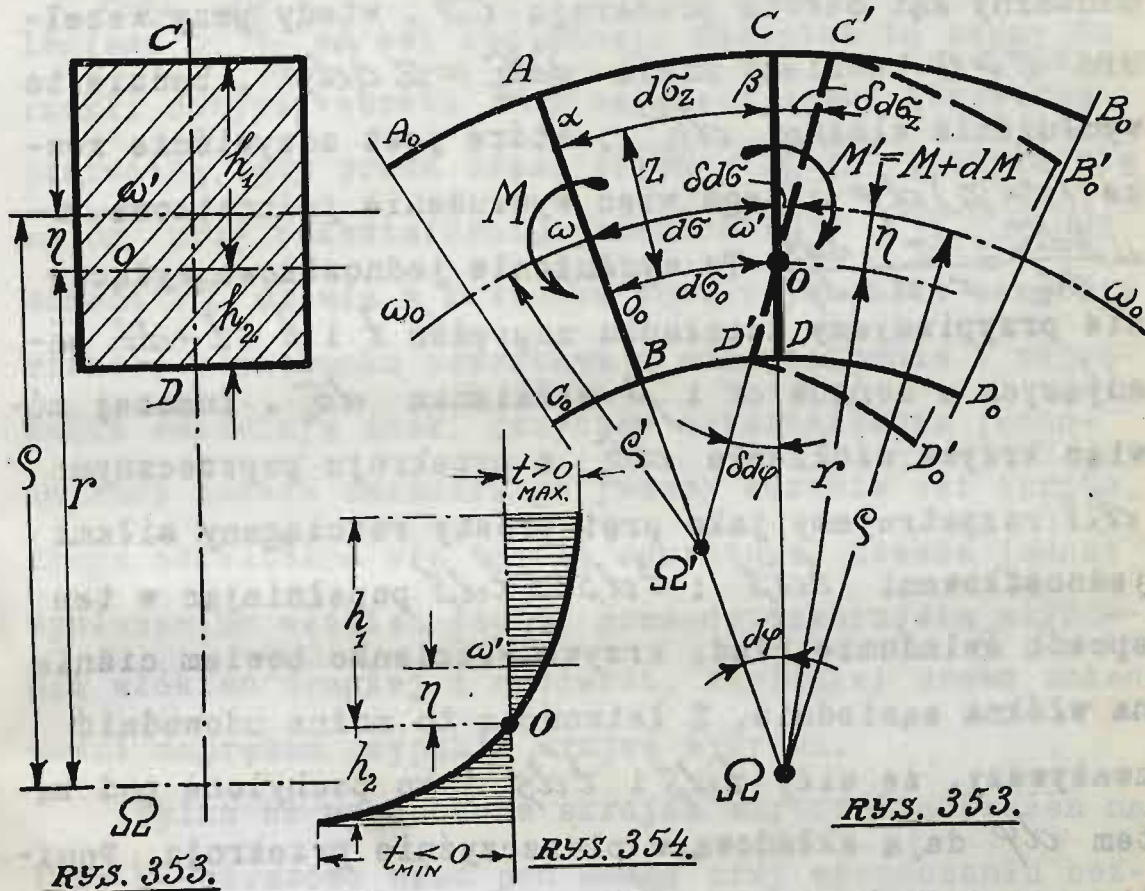
Ponieważ praktyka innych prętów nie używa, zatem teoria niżej podana wystarczyć winna w zupełności. Jako następstwo powyżej poczynionych założeń należy rozpatrywać jeno układy sił odkształcających leżące w płaszczyźnie pierwotnej osi pręta krzywego, inaczej bowiem po odkształceniu pręt uległ by zwichrzeniu. Zatem ob-



ciężenia prętów krzywych płaskich winny być również płaskie. Należy przeto rozpatrzeć zginanie, rozciąganie lub ściskanie oraz ścinanie prętów płaskich z pominięciem zupełnem skręcania. Wyboczenie jest tu oczywiście zgoła niemożliwe, jako takie, wobec krzywizny pręta. W tym celu weźmy pod uwagę pręt krzywy płaski (RYS. 353) a w nim dwa sąsiednie przekroje poprzeczne  $AB$  i  $CD$ . Ich płaszczyzny przetną się wzdłuż prostej znaczącej ślad na płaszczyźnie osi pręta w punkcie  $\Omega$  środka krzywizny tej osi. Kąt pomiędzy płaszczyznami przekrojów sąsiednich oznaczamy przez  $d\varphi$  a odległość między temi płaszczyznami mierzoną po łuku  $\omega\omega'$  osi pręta przez  $d\sigma$ , wtedy promień krzywizny osi  $\rho = \Omega\omega = \Omega\omega' = \frac{d\sigma}{d\varphi}$ . Po ustaleniu tych pojęć zasadniczych zbadamy:

§ 2. ZGINANIE PRĘTÓW KRZYWYCH PŁASKICH. Rozpatrujemy wypadek szczególny, kiedy układ sił zewnętrznych odkształcających lewej części pręta po sprowadzeniu do środka  $\omega$  przekroju poprzecznego płaskiego  $AB$  da moment  $M$  leżący w płaszczyźnie tego przekroju na jego osi głównej, a więc prostopadłej do płaszczyzny krzywizny pręta. Nadto układ sił zewnętrznych odkształcających prawej części pręta po sprowadzeniu do środka  $\omega'$  przekroju  $CD$  da moment  $M'$  znikomo oczywiście różny od  $M$  leżący w przekroju  $CD$  na osi głównej tego przekroju prostopadłej do płaszczyzny krzywizny pręta. Wychodząc z założenia BERNOULLI'EGO zakładamy, iż prze-

Kroje poprzeczne płytki pozostają płaskie i po odkształceniu - płytką zatem  $ABCD$  odkształci się w  $ABC'D'$  przyczem jej ściana  $CD$  obróci się w sto-



sunku do ścianki sąsiedniej  $AB$  o kąt  $\delta d\varphi$  wokół pewnej osi tymczasem bliżej nieokreślonej. Ta oś da ślad na płaszczyźnie krzywizny pręta w punkcie  $O$  odległym od środka krzywizny o  $\Omega O = r$ ; nadto niech będzie  $O\omega' = \eta$  a zatem  $S = r + \eta$ . Zatoczmy ze środka krzywizny łuk  $OO_0 = d\sigma_0$ . Ponieważ obrót przekroju  $CD$  zachodzi około punktu  $O$ , przeto łuk  $d\sigma_0$  nie odkształca się wcale w czasie obrotu, podczas gdy jakkolwiek łuk pierwotnie  $d\sigma_2$  długi dowolnie zresztą w odległości  $Z$  ponad łukiem  $d\sigma_0$  obrany po odkształce-



niu wydłuży się o  $Sd\epsilon_z$ . Łuki niżej od  $d\epsilon_z$  leżące ulegną natomiast skróceniu - łuk  $BD$  stanie się równy  $BD'$  po odkształceniu. Nazwijmy przez  $Sd\varphi$  elementarny kąt obrotu przekroju  $CD$ , wtedy przy wszelkim  $Z \geq 0$  będziemy mieli  $Sd\epsilon_z = Z Sd\varphi$ , będzie to wydłużenie włókna  $d\epsilon_z$ , które jest oczywiście równe  $(r+Z)d\varphi$ ; jego więc wydłużenie jednostkowe  $\epsilon = \frac{Sd\epsilon_z}{d\epsilon_z} = \frac{Z}{r+Z} \cdot \frac{Sd\varphi}{d\varphi}$ . To wydłużenie jednostkowe wyłącznie przypisujemy działaniu naprężeń  $\tau$  i  $\tau' = \tau + d\tau$  panujących u końców  $\alpha$  i  $\beta$  włókienka  $d\epsilon_z$ . Inaczej mówiąc krzywe włókienko  $d\epsilon_z$  o przekroju poprzecznym  $dS$  rozpatrujemy jako pręt prosty rozciągany siłami jednostkowymi  $\tau dS$  i  $\tau' dS \cong \tau dS$  popełniając w ten sposób świadomie błąd, krzywe włókienko bowiem ciśnie na włókna sąsiednie. Z łatwością to można udowodnić zważywszy, że siły  $\tau dS$  i  $\tau' dS$  jako pochylone pod kątem  $d\varphi$  dają składową w płaszczyźnie przekroju. Pomijamy ją jednak, jako znikomą w stosunku do owych sił. Zatem na mocy prawa HOOKE'A mamy w wypadku ściskania lub rozciągania  $\epsilon = \alpha \tau = \frac{\tau}{E}$  stąd  $\tau = E \frac{Z}{r+Z} \cdot \frac{Sd\varphi}{d\varphi}$ ; Ten wzór pozwala zbudować wykres naprężeń przekroju (RYS. 354). Dla  $Z > 0$ , a więc dla włókien ponad osią obrotu  $O$  naprężenia są dodatnie i rosną stale od zera aż do najwyższej wartości  $\tau_{MAX} = E \frac{h_1}{r+h_1} \cdot \frac{Sd\varphi}{d\varphi} > 0$  przynależnej do skrajnego włókna przekroju odległego od osi obrotu czyli tak zwanej osi obojętnej o  $h_1$ . Dla osi obojętnej gdzie  $Z=0$  mamy  $\tau=0$ . Dla  $Z < 0$  to jest dla

włókien pod osią obrotu naprężenia stają się ujemne, stale malejąc od zera<sup>ŁŻ</sup> do najniższej wartości  $t_{min} = -E \frac{h_2}{r-h_2} \frac{Sd\varphi}{d\varphi} > 0$  dla skrajnego włókienka przekroju odległego o  $h_2$  od osi obojętnej. Wszystko to cośmy tu rzekli dotyczy obrotu  $Sd\varphi$  zwiększającego krzywiznę pierwotną, gdy prawa część pręta  $C B_0 D_0 D$  pochyla się ku  $\Omega$  przy odkształceniu przechodząc w  $C' B_0' D_0' D'$ . Gdy moment  $M'$  działa w kierunku odwrotnym obrót zachodzi również w kierunku odwrotnym a odkształcenia i naprężenia zmieniają znak, przyczem odkształcenia jednoczesne zawsze zachodzą po jednej stronie osi obrotu, druga odkształca się wprost odwrotnie. Zawsze jednak wydłużeniom włókien jednej gromady towarzyszą skrócenia włókien drugiej i naodwrot. Najlepiej prawo zmienności naprężeń uwypukla krzywa wykresu.

Tylko co wyznaczone skrajne wartości naprężeń należy każdorazowo brać pod uwagę przy wyznaczaniu bezpiecznych wymiarów pręta krzywego płaskiego. Czyniąc  $k_g \geq t_{max}$  lub  $k_g \geq -t_{min}$  zgóry się zabezpieczamy przeciwko wszelkim nadmiernym naprężeniom tworzywa. Zatem należy jeszcze wyznaczyć  $r$  oraz  $E \frac{Sd\varphi}{d\varphi}$  aby móc korzystać z tych wzorów. W tym celu sumujemy wszystkie siły jednostkowe  $t dS$ . Suma ich musi być równa zeru bo w przekroju panuje tylko moment z założenia, to znaczy że  $\int t dS = \int E \frac{z}{r+z} \frac{Sd\varphi}{d\varphi} dS = 0$ . Nadto summa momentów tych sił jednostkowych względem osi obojętnej winna równoważyć moment  $M' \cong M$  inaczej bowiem odkształcenie trwa-



aby dalej, a kąt obrotu  $d\varphi$  wzrastałby nadal bez przerwy. Wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej możemy przeto napisać:  $\int z t dS = \int E \frac{z^2}{r+z} \frac{d\varphi}{d\varphi} dS =$   
 $= M' = M + dM \cong M$ . Stąd bezpośrednio:

$E \frac{d\varphi}{d\varphi} \int \frac{z}{r+z} dS = 0$ , oraz  $E \frac{d\varphi}{d\varphi} \int \frac{z^2 dS}{r+z} = M$  ponieważ niewątpliwie dla wszystkich włókien przekroju  $E \frac{d\varphi}{d\varphi}$  posiada wartość stałą. Zatem  $\int \frac{z dS}{r+z} = 0$  nadto mamy:  
 $\int \frac{z^2 dS}{r+z} = \int \left[ z - \frac{r z}{r+z} \right] dS = \int z dS - r \int \frac{z dS}{r+z} =$   
 $= \int z dS = F'_0$  gdzie przez  $F'_0$  oznaczyliśmy moment statyczny przekroju względem osi obojętnej.

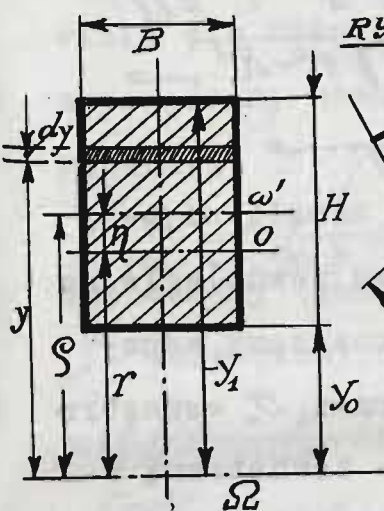
Zważywszy, że  $F'_0 = S \eta$  gdzie przez  $S$  oznaczyliśmy pole przekroju, będziemy mieli  $E \frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{F'_0} = \frac{M}{S \eta}$ . Stąd bezpośrednio  $t = \frac{M}{S \eta} \cdot \frac{z}{r+z}$  oraz  $t_{\max} = \frac{F'_0 M}{S \eta} \frac{h_2}{r+h_2}$  i  
 $t_{\min} = - \frac{M}{S \eta} \frac{h_1}{r-h_1}$ .

Te wzory rozwiązują zagadnienie, ponieważ całka  $\int \frac{z dS}{r+z} = 0$  każdorazowo pozwala wyznaczyć położenie osi obojętnej w przekroju. Zobaczmy jak to się uskutecznia praktycznie.

§ 3. WYZNACZANIE OSI OBOJĘTNEJ dla przekrojów prostszych, częściej używanych. Na pierwszym miejscu rozpatrujemy:

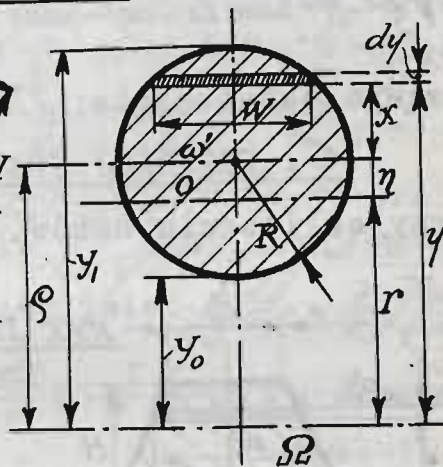
A. PRZEKRÓJ PROSTOKĄTNY jako najprostszy (RYS. 355). Oznaczmy jego wysokość przez  $H$  podstawę przez  $B$ . W odległości  $y$  od osi  $\Omega$  obieramy podłużny paseczek  $B dy = dS$ , przyczem zgóry zakładamy, iż płaszczyzna gięcia jest równoległa do wysokości przekroju pręta. Ponieważ niewątpliwie  $Z = y - r$  dla dane-

go wypadku przeto  $\int \frac{z dS}{r+z} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{y-r}{y} B dy = B(y_1 - y_0) - rB(\lg y_1 - \lg y_0) = BH - rB \lg \frac{y_1}{y_0} = 0$ , gdzie przez  $y_0$  oznaczyliśmy od-



RYS. 355.

RYS. 356.



ległość podstawy przekroju od osi  $\Omega$  a zaś  $y_1 = y_0 + H$ , jak to zresztą najlepiej wskazuje (RYS. 355). Stąd:

$$r = \frac{H}{\lg \frac{y_1}{y_0}} \sim$$

**B. PRZEKROJ KOŁOWY** (RYS. 356) o promieniu  $R = \frac{1}{2}H$ .

I tu znów odległości skrajnych włókien przekroju od osi  $\Omega$  oznaczmy odpowiednio przez  $y_0$  i  $y_1 = y_0 + 2R = y_0 + H$ , a w odległości  $y$  od tej osi poprowadzimy cięciwę  $w$  równoległą do  $\Omega$ . Jako różniczkę pola obieramy wążki pasek  $w dy = dS$ . Zatem i tutaj będzie  $z = y - r$  skąd  $\int \frac{z dS}{r+z} = \int_{y_0}^{y_1} \frac{y-r}{y} w dy = \int_{y_0}^{y_1} w dy - r \int_{y_0}^{y_1} \frac{w dy}{y} = 0$ . Ponieważ oczywiście  $\int_{y_0}^{y_1} w dy = \int dS = S = \pi R^2$ , przeto  $r = \frac{\pi R^2}{\int_{y_0}^{y_1} \frac{w dy}{y}} \sim$

Wprowadźmy nową zmienną  $x = y - r$ , dla niej  $dx = dy$  oraz  $x_1 = y_1 - r = R$ ,  $x_0 = y_0 - r = -R$  nadto  $w = 2\sqrt{R^2 - x^2}$  a prze-

$$\text{to } r = \frac{\pi R^2}{2 \int_{-R}^R \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x+r} dx} \sim$$

$$\text{Wobec tego, iż: } \int \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x+r} dx = \sqrt{R^2 - x^2} + r \arcsin \frac{x}{R} + \sqrt{r^2 - R^2} \arcsin \left[ -\frac{R^2 + r x}{\sqrt{r^2 - R^2} \sqrt{R^2 - x^2}} \right] \sim$$



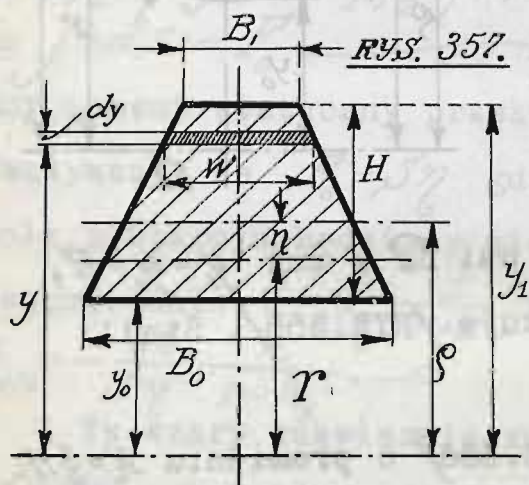
$$\int_{-R}^{+R} \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x + \varrho} dx = \varrho [\arcsin 1 - \arcsin(-1)] + \sqrt{\varrho^2 - R^2} \cdot$$

$$\cdot \left[ \arctg\left(-\frac{R(R+\varrho)}{\varrho}\right) - \arctg\left(\frac{R(\varrho-R)}{\varrho}\right) \right] = \varrho \left[ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] +$$

$$+ \sqrt{\varrho^2 - R^2} [\arctg(-\infty) - \arctg(+\infty)] = \pi \varrho - \pi \sqrt{\varrho^2 - R^2}.$$

przeto ostatecznie:  $r = \frac{R^2}{2[\varrho - \sqrt{\varrho^2 - R^2}]}$ .

**C. PRZEKRÓJ TRAPEZU** (RYS. 357) często używany przy obliczaniu haków. Podstawy trapezu równoległe do



osi  $\Omega$  oznaczamy odpowiednio przez  $B_0$  wewnętrzną i  $B_1$  - zewnętrzną w stosunku do tej osi. Odnośne odległości tych podstaw od osi  $\Omega$  niech będą  $y_0$  i  $y_1 = y_0 + H$  gdzie  $H$  oznacza wysokość trapezu.

I tu również w odległości  $y$  od osi  $\Omega$  obieramy wąziutki pasek  $dS = w dy$  równoległy do tej osi, a wtedy jak dawniej  $\int \frac{z dS}{r+z} = \int \frac{y-r}{y} w dy = \int w dy - r \int \frac{w dy}{y} = \int dS - r \int \frac{w dy}{y} = 0$ . Ponieważ  $\int dS = S = \frac{H}{2} (B_0 + B_1)$  przeto  $r = \frac{S}{\int \frac{w dy}{y}} = \frac{1}{2} \frac{H(B_0 + B_1)}{\int \frac{w dy}{y}}$ . W danym wypadku od razu daje się zauważyć, iż  $w = B_1 + \left[ \frac{B_0 - B_1}{H} \right] \frac{y_1 - y}{H}$  zatem:

$$r = \frac{1}{2} \frac{H(B_0 + B_1)}{\int_{y_0}^{y_1} \left\{ \left[ B_1 + \frac{B_0 - B_1}{H} \frac{y_1 - y}{H} \right] \frac{1}{y} - \frac{B_0 - B_1}{H} \right\} dy} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{H(B_0 + B_1)}{\left[ B_1 + \frac{B_0 - B_1}{H} \frac{y_1}{H} \right] \lg \frac{y_1}{y_0} - \frac{B_0 - B_1}{H} (y_1 - y_0)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{H(B_0 + B_1)}{\left[ B_1 + \frac{B_0 - B_1}{H} \frac{y_1}{H} \right] \lg \frac{y_1}{y_0} - B_0 + B_1}.$$

Już z tych przykładów łatwo zauważyć można, iż otrzymane wzory dają wątpliwe wyniki przy dużych sto-

sunkowo wartościach  $\varrho$  w stosunku do  $H$ .

Ta okoliczność stanowi dość poważny szkopuł praktyczny. Zazwyczaj przeto, gdy odległości  $\varrho$  i  $r$  niewiele się różnią od siebie, a więc przy znacznych  $\varrho$  wprowadzamy nową zmienną  $y = Z - \eta$  przyczem  $\eta = \varrho - r$ . Ponieważ  $Z = y + \eta$  oraz  $r + Z = r + y + \eta = \varrho + y$  przeto:

$$\int \frac{Z dS}{r+Z} = \int \frac{y+\eta}{y+\varrho} dS = \int \frac{y dS}{y+\varrho} + \eta \int \frac{dS}{y+\varrho} = 0.$$

Wprowadźmy tymczasowo oznaczenie  $\int \frac{y dS}{y+\varrho} = -\varphi S$  gdzie  $S$  - pole przekroju; nadto niewątpliwie:  $\int \frac{dS}{y+\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int \frac{\varrho dS}{y+\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int [1 - \frac{y}{y+\varrho}] dS = \frac{S}{\varrho} - \frac{1}{\varrho} \int \frac{y dS}{y+\varrho} = \frac{S}{\varrho} (1 + \varphi)$ , a przeto:  $\int \frac{Z dS}{r+Z} = -\varphi S + \eta \frac{S}{\varrho} (1 + \varphi) = 0$ , skąd:  $\eta = \frac{\varphi \varrho}{1 + \varphi}$ .

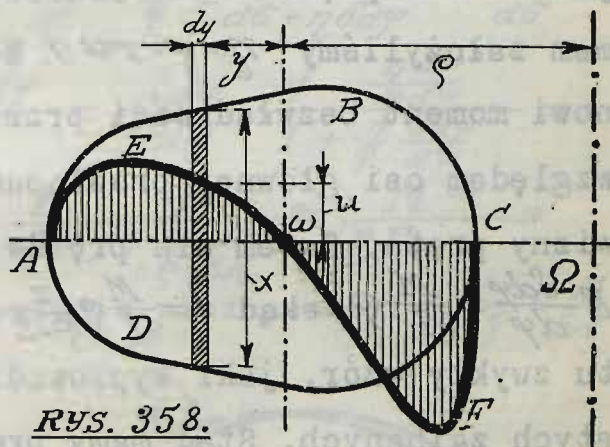
Cała rzecz sprowadza się do wyznaczenia całki

$\int \frac{y dS}{y+\varrho}$ . Można to uskutecznić rachunkowo ze wzoru:

$$\int \frac{y dS}{y+\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int \frac{y dS}{1 + \frac{y}{\varrho}} = \frac{1}{\varrho} \int y \cdot [1 - \frac{y}{\varrho} + \frac{y^2}{\varrho^2} - \frac{y^3}{\varrho^3} + \dots] dS.$$

Szereg całkowy jest dość szybko zbieżny, to też zazwyczaj można poprzestać na pierwszych kilku wyrazach szeregu.

Prościej jednak otrzymać można ten sam wynik za pomocą całko-



RYS. 358.

wania wykreślnego, które z łatwością sprowadzić można do zwykłego wyznaczania pola, zmniejszając rzędne  $x$  przekroju  $ABCD$  danego w stosunku  $\frac{y}{y+\varrho}$  (RYS. 358). W ten sposób otrzymujemy rzędną  $u = \frac{xy}{y+\varrho}$  nowej krzy-



wej  $AE\omega FC$ . Pole zakreskowane  $AE\omega FC\omega A$  da nam szukaną wartość całki  $\int \frac{y dS}{y+\rho}$ . Z łatwością to udowodnimy, zważywszy, że to pole wyraża się  $\int y d\eta = \int \frac{y}{y+\rho} x dy = \int \frac{y dS}{y+\rho}$  ponieważ oczywiście  $dS = x dy$  w danym wypadku. Zatem wyznaczenie promienia  $\rho$  nie nastrocza wybitnych trudności, wzory podane w ustępie poprzednim dotyczą prętów o znacznej krzywiznie, natomiast możemy je znacznie uprościć, gdy bierzemy pod uwagę:

§ 4. PRĘTY O NIEZNACZNEJ KRZYWIZNIE. Dla prętów o nieznacznej krzywiznie, promień  $\rho$  posiada znaczne wartości w stosunku do wymiarów przekroju, zacierą się poniekąd różnica pomiędzy  $\rho$  a  $\rho'$  czyli inaczej mówiąc

$\eta = \rho - \rho' \approx 0$ . Zatem będziemy mieli:

$$\int \frac{Z^2 dS}{\rho + Z} = \frac{1}{\rho} \int \frac{Z^2 dS}{1 + \frac{Z}{\rho}} \approx \frac{1}{\rho} \int \frac{Z^2 dS}{1 + \frac{Z}{\rho}} \approx \frac{1}{\rho} \int Z'^2 dS \approx$$

gdzie oczywiście odległości  $Z'$  należy brać tym razem już od osi pręta  $\omega\omega'$  ponieważ czyniąc  $\rho = \rho'$  tem samem założyliśmy  $\eta = \rho - \rho' \approx 0$ . Wobec tego całka  $\int Z^2 dS$  stanowi moment bezwładności przekroju poprzecznego  $J$

względem osi głównej prostopadłej do płaszczyzny krzywizny pręta. Zatem dla prętów o krzywiznie nieznacznej  $E \frac{S d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{J} \rho$  skąd  $t = \frac{M}{J} \rho \frac{Z}{\rho + Z} = \frac{M}{J} \frac{Z}{1 + \frac{Z}{\rho}} \approx \frac{M}{J} Z$ . Odnajdujemy tu zwykły wzór, jaki wyprowadziliśmy dla prętów prostych zginanych. Stąd mamy prosty wniosek: pręty płaskie o znacznej krzywiznie należy liczyć podług wzorów

$t = \frac{M}{F_0} \cdot \frac{Z}{\rho + Z}$  gdzie  $\rho$  wyznacza się na mocy  $\int \frac{Z dS}{\rho + Z} = 0$ , natomiast pręty płaskie o krzywiznie nieznacznej można liczyć według zwykłych wzorów gięcia  $t = \frac{M}{J} Z$ . W obu wzo-

rach  $Z$  oznacza odległość od osi obojętnej. ~

# § 5. ODKSZTAŁCENIA ZGINANYCH PRĘTÓW KRZYWYCH

PŁASKICH. Ponieważ, jak wiemy,  $d\varphi = \frac{1}{\rho} ds$  zatem  $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$  dla pręta krzywego płaskiego nieodkształconego. Po odkształceniu przekrój  $CD$  pochylił się względem  $AB$  o kąt  $\delta d\varphi$ , sąsiednie zatem przekroje poprzeczne pręta  $AB$  i  $C'D'$  utworzą kąt  $d\varphi + \delta d\varphi$  pomiędzy sobą. ~

Płaszczyzny tych przekrojów przetną się wzdłuż prostej znaczącej ślad na płaszczyźnie krzywizny pręta w punkcie  $\Omega'$ , przyczem  $\omega\Omega' = \rho'$  da nową wartość promienia krzywizny pręta odkształconego. Odległość przekrojów  $AB$  i  $C'D'$  mierzona wzdłuż łuku odkształconej osi pręta wyniesie  $d\varphi + \delta d\varphi$  gdzie, jak to z

RYS.353 łatwo się daje zauważyć  $\delta d\varphi = \eta \frac{d\varphi}{ds} ds$  a przeto  $d\varphi + \delta d\varphi = \rho' \left( \frac{d\varphi}{ds} + \eta \frac{d\varphi}{ds} \right)$ . Stąd bezpośrednio:  $\frac{1}{\rho'} = \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{d\varphi + \eta d\varphi} =$

$$= \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{d\varphi + \eta d\varphi}. \text{ Zatem dalej: } \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi + \delta d\varphi}{d\varphi + \eta d\varphi} - \frac{d\varphi}{d\varphi} =$$

$$= \frac{d\varphi + \delta d\varphi - d\varphi - \eta \frac{d\varphi}{ds} ds}{d\varphi + \eta d\varphi} = \frac{\delta d\varphi}{d\varphi + \eta d\varphi} = \frac{\delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{1}{1 + \eta} =$$

$$= \frac{M}{EI_0 \rho} \cdot \frac{1 - \frac{\eta}{\rho}}{1 + \frac{\eta}{\rho}} = \frac{M}{EI_0 \rho^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\eta}{\rho}} \approx \frac{M}{EI_0 \rho} \dots$$

Stąd dla prętów o krzywiznie nieznacznej:  $\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

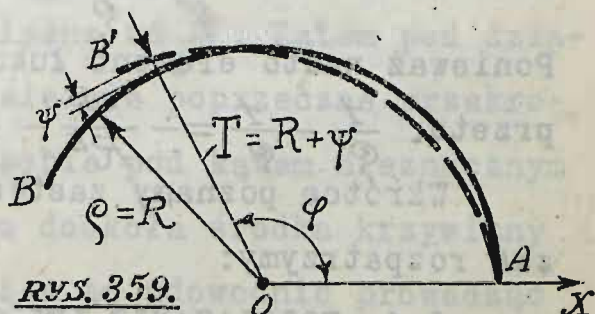
Czyniąc w tym wzorze

$\rho = \infty$  odnajdujemy

znany wzór  $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

gięcia prętów prostych. ~

Oba powyżej wyprowadzone wzory dla prętów krzy-





wych płaskich są nader niewygodne w użyciu to też zazwyczaj nie korzystamy z nich wcale. W szczególnym wypadku, kiedy oś pręta pierwotna jest kołem, możemy lewe części wzorów nieco uprościć. W układzie biegunowych osi współrzędnych (RYS.359) pierwotna kołowa oś pręta wyrazi się równaniem:  $\rho = R$ . Po odkształceniu ta oś pierwotna  $AB$  stanie się odkształconą  $AB'$  o promieniu wodzącym  $T = R + \psi$ . Jej promień krzywizny wyrazi się znanym wzorem:

$$\rho' = \frac{[T^2 + (\frac{dT}{d\varphi})^2]^{\frac{3}{2}}}{T^2 + 2(\frac{dT}{d\varphi})^2 - T \frac{d^2T}{d\varphi^2}} \sim$$

Ponieważ  $\frac{dT}{d\varphi} = \frac{d\psi}{d\varphi}$  oraz  $\frac{d^2T}{d\varphi^2} = \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}$  przeto:

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{[T^2 + (\frac{d\psi}{d\varphi})^2]^{\frac{3}{2}}}{T^2 + 2(\frac{d\psi}{d\varphi})^2 - T \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}} = \\ &= \frac{[R^2 + 2R\psi + \psi^2 + (\frac{d\psi}{d\varphi})^2]^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2R\psi + \psi^2 + 2(\frac{d\psi}{d\varphi})^2 - R \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} - \psi \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}} \sim \end{aligned}$$

Dla odkształceń nieznacznych  $\psi^2 \approx 0$  nadto  $\frac{d\psi}{d\varphi} \approx 0$  a

$$\begin{aligned} \text{zatem: } \rho' &\approx \frac{[R^2 + 2R\psi]^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2R\psi - R \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} - \psi \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}} \approx \\ &\approx \frac{R^3 [1 + 2\frac{\psi}{R}]^{\frac{3}{2}}}{R^2 + 2R\psi - R \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}} \approx \frac{R^2 (1 + 3\frac{\psi}{R} + \dots)}{R + 2\psi - \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}. \text{ Stąd: } \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = \\ &= \frac{R + 2\psi - \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}{R^2 + 3R\psi} - \frac{1}{R} = \frac{R + 2\psi - \frac{d^2\psi}{d\varphi^2} - R - 3\psi}{R^2 + 3R\psi} \sim \\ \text{I ostatecznie: } \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} &\approx - \frac{\psi + \frac{d^2\psi}{d\varphi^2}}{R^2} \sim \end{aligned}$$

Ponieważ nadto element łuku odkształconej  $d\sigma \approx R d\varphi$ , przeto:  $\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} = - \frac{\psi}{R^2} - \frac{d^2\psi}{d\sigma^2} \sim$

Wkrótce poznamy zastosowanie tego wzoru, obecnie zaś rozpatrzmy:

## § 6. ROZCIĄGANIE LUB ŚCISKANIE PRĘTÓW KRZYWYCH

PŁASKICH. Bierzemy pod uwagę wypadek szczególny, kiedy układ sił zewnętrznych, odkształcających lewej części pręta po sprowadzeniu do środka  $\omega$  przekroju poprzecznego płaskiego  $AB$  da siłę  $R$  styczną do osi pręta a prostopadłą do przekroju. Nadto układ sił zewnętrznych odkształcających prawej części pręta, po sprowadzeniu do środka  $\omega'$  przekroju  $CD$  da siłę  $R' = R + dR$  znikomo oczywiście różną od  $R$ , styczną do osi pręta i prostopadłą do przekroju. I tu również zakładamy, że przekroje pozostaną płaskie i po odkształceniu, płytką zatem  $ABCD$  przekształci się w  $A'B'C'D'$ . Aby nadto upodobnić ten wypadek rozciągania lub ściskania do podobnego, rozpatrywanego dla prętów prostych zakładamy, iż oba sąsiednie przekroje są naprężone jednostajnie odpowiednio naprężeniami  $t = \frac{R}{S}$  oraz  $t' = t + dt = \frac{R + dR}{S + dS} \cong t$ . Jakiegokolwiek zatem włókienko o przekroju poprzecznym  $dS$  w odległości  $y$  od osi pręta rozpatrywane, a więc  $d\delta_y = (\rho + y)d\varphi$  długie ulegać będzie jarzmu sił podłużnych  $t dS$ , które spowodują wydłużenie  $\Delta d\delta_y$  tego włókienka. Stąd wydłużenie jednostkowe  $\varepsilon = \frac{\Delta d\delta_y}{d\delta_y} = \frac{(\rho + y)\Delta d\varphi}{(\rho + y)d\varphi} = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$  jest jak widzimy stałe dla całego przekroju, bo niezależne od  $y$ . Zatem pod działaniem sił osiowych dwa sąsiednie poprzeczne przekroje pręta pochylają się ku sobie pod kątem nieznacznym na tle obrotu elementarnego dookoła środka krzywizny pierwotnej. Z łatwością można to udowodnić prowadząc płaszczyzny przekrojów  $AB\Omega$ ,  $CD\Omega$  i  $C'D'\Omega$ , które się



przetną wzdłuż jednej osi  $\mathcal{L}$  znaczącej na płaszczyźnie osi pręta ślad - środek krzywizny  $\mathcal{L}$  osi pręta nieodkształconego.

Na mocy prawa HOOKE'a  $\varepsilon = \frac{\ell}{E} = \frac{\mathcal{R}}{E\mathcal{S}}$  a przeto mamy  $\Delta d\varphi = \frac{\mathcal{R}d\varphi}{E\mathcal{S}}$ , przyczem zupełnie pomijamy we wszystkich dotychczasowych rozważaniach poprzeczną składową siłę  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{R}'$  leżącą w przekroju pręta poprzecznym jako znikomą w stosunku do owych sił podłużnych. Wynika stąd, że siły podłużne nie zmieniają krzywizny pierwotnej pręta krzywego, jeno wydłużają go lub skracają. Miarą tych zmian może służyć wydłużenie osi  $\Delta d\mathcal{L} = \frac{\mathcal{R}}{E\mathcal{S}}d\mathcal{L} = \frac{\mathcal{R}\mathcal{L}}{E\mathcal{S}}d\varphi$ .

Pozostaje nam jeszcze rozpatrzyć:

§ 7 . ŚCINANIE PRĘTÓW KRZYWYCH PŁASKICH, które zachodzi wtedy, gdy siły zewnętrzne lewej części pręta po sprowadzeniu do środka  $\omega$  przekroju  $AB$  dadzą wypadkową  $\mathcal{Q}$  leżącą w płaszczyznach przekroju i gięcia, a siły prawej części pręta dadzą takąż siłę  $\mathcal{Q}' = \mathcal{Q} + d\mathcal{Q}$  znikomo różną od poprzedzającej a skierowaną odwrotnie. Pod działaniem tych sił elementarna płytką  $ABCD$  skrzywi się, przechodząc w płytkę ukośną  $AB'C'D'$ . Wskaźnikiem tego skrzywienia zazwyczaj bywa przesunięcie się poprzeczne środka  $\omega'$  przekroju  $CD$  w stosunku do środka  $\omega$  sąsiedniego przekroju  $AB$ . To przesunięcie  $\omega'\omega'' = \nabla$  możemy wyrazić w zależności od kąta skrzywienia się osi pręta  $\chi$  pisząc  $\nabla = \chi d\mathcal{L} = \chi \mathcal{L} d\varphi$ . Gdyby przekroje  $AB$  i  $C'D'$  były naprężone jednostajnie naprężeniami  $\ell = \frac{\mathcal{Q}}{\mathcal{S}}$  i  $\ell' = \ell + d\ell = \frac{\mathcal{Q}'}{\mathcal{S}'} = \frac{\mathcal{Q} + d\mathcal{Q}}{\mathcal{S} + d\mathcal{S}} \cong \ell$ , to wtedy

mielibyśmy na mocy prawa Hooke'a  $\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{Q}{GJ}$  skąd  $\nabla = \frac{Q d\phi}{GJ} = \frac{Q d\phi}{GJ}$ . Wiadomo jednak z teorii prętów prostych, że naprężenia tnące towarzyszące gnącym obciążają przekrój poprzeczny pręta niejednostajnie, należy przeto wprowadzić poprawkę pisząc  $\nabla = \mu \frac{Q d\phi}{GJ} = \mu \frac{Q d\phi}{GJ}$ .

Określenie właściwej wartości  $\mu$  nastrocza duże trudności, ponieważ teoria sił tnących prętów krzywych jeszcze nie została opracowana zupełnie. W braku więc dokładniejszych danych stosujemy i tu wyniki, jakie otrzymaliśmy dla prętów prostych. Nie popełniamy przy tem znaczniejszego błędu, bo siły tnące, towarzyszące gnącym, nieznacznie tylko wpływają na odkształcenie pręta. Wyniki tu otrzymane pozwalają wyznaczyć pracę sprężystą w wypadkach powyżej rozpatrywanych.

#### § 8. PRACA SPRĘŻYSTA PRĘTÓW KRZYWYCH PŁASKICH.

Wyznamy ją dla trzech powyżej omówionych obciążeń prętów krzywych płaskich, opierając się na pierwszym twierdzeniu CASTIGLIANO. W tym celu bierzemy pod uwagę płytkę  $ABCD$  wyodrębnioną w pręcie krzywym płaskim dwoma sąsiednimi przekrojami poprzecznymi, znikomo odległymi o  $d\phi$ , mierzonym po łuku osi nieodkształconej pręta. Obciążenie odkształcające tej płytki stanowią siły uogólnione: podłużne rozciągające lub ściskające  $R$  i  $R' = R + dR$  poprzeczne tnące  $Q$  i  $Q' = Q + dQ$  i momenty gnące  $M$  i  $M' = M + dM$ . Z tych siły  $R$ ,  $Q$  i  $M$  jako odkształcające przekrój  $AB$  nie ujawniają żadnych przesunięć, rozpatrujemy bowiem odkształcenia płytki w sto-





Pierwsze sprawiają momenty  $M$  i  $M'$  drugie zaś (RYS. 360) siły  $R$  i  $R'$ . Całkowite przeto przesunięcie siły  $M' = M + dM$  będzie:  $m = \left[ \frac{M}{EF_0\varrho} + \frac{R}{ES\varrho} \right] d\sigma.$

Oznaczmy przez  $\Pi_e$  pracę sprężystą dla płytki elementarnej  $ABCD$  pręta krzywego płaskiego, a otrzymamy na mocy drugiego twierdzenia CASTIGLIANO:

$$\begin{aligned} \tau = \frac{\partial \Pi_e}{\partial R'} &= \frac{\partial \Pi_e}{\partial R} = \left[ \frac{M}{ES\varrho} + \frac{R}{ES} \right] d\sigma, & q = \frac{\partial \Pi_e}{\partial Q'} &= \frac{\partial \Pi_e}{\partial Q} = \\ &= \mu \frac{Q}{GS} d\sigma, & m = \frac{\partial \Pi_e}{\partial M'} &= \frac{\partial \Pi_e}{\partial M} = \left[ \frac{M}{EF_0\varrho} + \frac{R}{ES\varrho} \right] d\sigma. \end{aligned}$$

Stąd bezpośrednio całkując mamy:  $\Pi_e = \left[ \frac{R^2}{2ES} + \frac{MR}{ES\varrho} \right] d\sigma + \varphi(M, Q)$ ,  $\Pi_e = \mu \frac{Q^2}{2GS} d\sigma + \psi(R, M)$ ,  $\Pi_e = \left[ \frac{M^2}{2EF_0\varrho} + \frac{RM}{ES\varrho} \right] d\sigma + \omega(Q, R).$  Porównanie tych trzech wyników całkowania daje odrazu dla płytki:

$$\Pi_e = \left[ \frac{R^2}{2ES} + \frac{RM}{ES\varrho} + \frac{M^2}{2EF_0\varrho} + \mu \frac{Q^2}{2GS} \right] d\sigma.$$

zatem dla całego pręta, nazywając przez  $l$  długość jego osi pierwotnej otrzymamy pracę sprężystą:

$$\Pi = \int_0^l \left[ \frac{R^2}{2ES} + \frac{RM}{ES\varrho} + \frac{M^2}{2EF_0\varrho} + \mu \frac{Q^2}{2GS} \right] d\sigma.$$

W tym wzorze zazwyczaj pomijamy pracę sił tnących jako nieznaczną w stosunku do składników pozostałych,

pisząc:  $\Pi = \int_0^l \left[ \frac{R^2}{2ES} + \frac{RM}{ES\varrho} + \frac{M^2}{2EF_0\varrho} \right] d\sigma.$

Środkowy wyraz całki we wzorze tylko co wypisanym możemy zupełnie pominąć dla prętów o nieznaczej krzywiznie, wtedy bowiem  $\varrho$  posiada znaczną wartość. Nadto dla prętów tego rodzaju jak wiemy  $F_0 \cong \frac{J}{\varrho}$  zatem dla prętów o nieznaczej krzywiznie będziemy mieli wprost:

$$\Pi = \int_0^l \left[ \frac{R^2}{2ES} + \frac{M^2}{2EJ} \right] d\sigma.$$



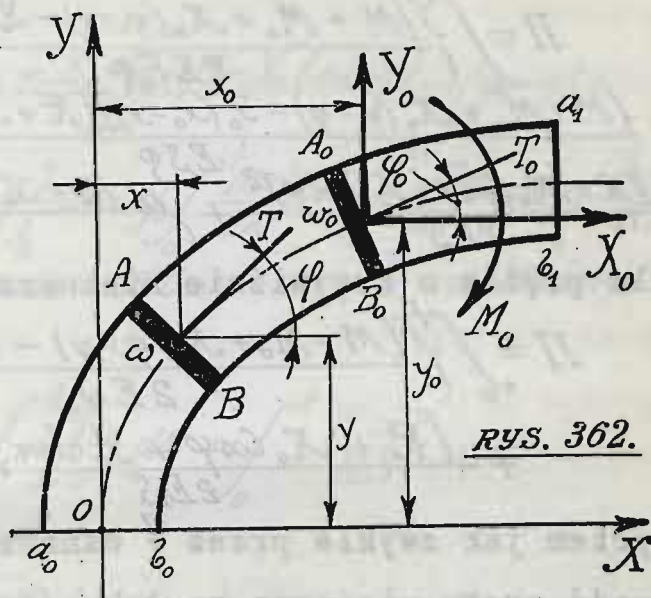
Opierając się na tych wzorach z łatwością możemy wyznaczać:

§ 9. ODKSZTAŁCENIA PRĘTÓW KRZYWYCH PŁASKICH. Weźmy pod uwagę jakikolwiek krzywy pręt płaski  $a_0 b_0$  dajmy na to zamocowany jednostronnie i obciążony pewnym układem sił odkształcających leżących w płaszczyźnie osi pręta (RYS.362). Aby zdać sobie sprawę, jak się pręt odkształci, rozpatrujemy dowolny zresztą przekrój  $A_0 B_0$  pręta o współrzędnych  $x_0, y_0$  środka  $\omega_0$  w stosunku do osi  $OX, OY$  wyprowadzonych ze środka  $O$  przekroju osadzenia pręta  $a_0 b_0$  tak, aby oś  $OX$  leżała w przekroju osadczym a oś  $OY$  była styczna do pierwotnej osi pręta. Nadto obie osie współrzędnych winny leżeć w płaszczyźnie pręta. Ze środka  $\omega_0$  prowadzimy prostopadłą  $\omega_0 T_0$  do płaszczyzny przekroju. Będzie to zarazem styczna osi pierwotnej pręta w punkcie  $\omega_0$ . Oznaczmy przez  $\varphi_0$  kąt nachylenia  $\omega_0 T_0$  ku osi  $OX$ . Te trzy wartości  $x_0, y_0, \varphi_0$  łącznie z wymiarami geometrycznymi przekroju  $A_0 B_0$  w zupełności określają pręt nieodkształcony w punkcie  $\omega_0$  jego osi. Na tle odkształcenia ujawnia się przyrosty  $\delta x_0, \delta y_0, \delta \varphi_0$ , które należy wyznaczyć dla każdego przekroju, aby zdać sobie sprawę o wielkości i typie odkształceń pręta. W tym celu wprowadzimy siłę  $X_0$  fikcyjną przyłożoną do punktu  $\omega_0$ , a równoległą do kierunku osi  $OX$ ; takąż siłę  $Y_0$  równoległą do kierunku osi  $OY$ , wreszcie fikcyjny moment  $M_0$  leżący w przekroju  $A_0 B_0$  a prostopadły do płaszczyzny pręta.

Względem tych sił

uogólnionych przyrosty

$\delta x_0$ ,  $\delta y_0$ ,  $\delta z_0$  grac będą  
rolę przesunąć. Nad-  
to niezależnie od  
przekroju  $A_0 B_0$  rozpa-  
trujemy przekrój bie-  
żący  $AB$  o współrzed-  
nych środka  $x, y$ . Pro-  
wadząc  $\omega^T$  prostopadle



do tego przekroju wyznaczmy kąt  $\varphi$  jaki tworzy w punkcie  $\omega$  z kierunkiem osi  $OX$  styczna  $\omega T$  osi pierwotnej pręta. Po sprowadzeniu do środka  $\omega$  tego przekroju wszystkich sił istotnie odkształcających, a działających na część pręta  $AB \xi_1$  otrzymamy moment  $M$  leżący w przekroju  $AB$  a prostopadły do płaszczyzny pręta, siłę podłużną  $R$  leżącą na  $\omega T$  oraz siłę poprzeczną  $Q$  leżącą w przekroju  $AB$  i w płaszczyźnie pręta. Nadto uprzednio wprowadzone siły fikcyjne dadzą, po sprowadzeniu do środka  $\omega$  - dodatkowo:

siłę podłużną  $X_2 \cos \varphi + Y_2 \sin \varphi$ , leżącą na  $\omega T$ ,

siłę poprzeczną  $Y_0 \cos \varphi - X_0 \sin \varphi$  prostopadłą do poprzedzającej a skierowaną podobnie jak siła  $Y_0$  wreszcie

moment  $M_o + X_o(y_o - y) - Y_o(x_o - x).$

Ostatecznie więc w przekroju  $AB$  działać będzie: siła podłużna  $R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi$ , poprzeczna  $Q + Y_0 \cos \varphi - X_0 \sin \varphi$ , i moment  $M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)$ .



Zatem dla prętów o dużej krzywiznie:

$$\Pi = \int_0^l \left\{ \frac{[M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)]^2}{2EF_0 \varphi} + \frac{[M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)][R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi]}{2ES \varphi} + \frac{[R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi]^2}{2ES} + \mu \frac{[Q + Y_0 \cos \varphi - X_0 \sin \varphi]^2}{2GS} \right\} d\varphi \dots$$

a dla prętów o krzywiznie nieznacznej:

$$\Pi = \int_0^l \left\{ \frac{[M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)]^2}{2EJ} + \frac{[R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi]^2}{2ES} \right\} d\varphi,$$

przyczem jak zwykle przez  $l$  oznaczyliśmy całkowitą długość pręta mierzoną po łuku jego osi pierwotnej.

Stąd na mocy drugiego prawa CASTIGLIANO mamy:  $\delta X_0 = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial X_0} \right]_0$ ,  $\delta Y_0 = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial Y_0} \right]_0$  — oraz  $\delta \varphi = \left[ \frac{\partial \Pi}{\partial M_0} \right]_0$ .

W tych wzorach po wykonaniu różniczkowania należy uczynić każdorazowo  $X_0 = Y_0 = M_0 = 0$  siły bowiem  $M_0, X_0, Y_0$  w rzeczywistości nie istnieją. Tę czynność oznacza właśnie zerowy znaczek u dołu nawiasów. Zatem dla prętów o znacznej krzywiznie:

$$\delta X_0 = \int_0^l \left\{ \frac{M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)}{EF_0 \varphi} (y_0 - y) + \frac{M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)}{ES \varphi} \cos \varphi + \frac{R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi}{ES \varphi} (y_0 - y) + \frac{R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi}{ES} \cos \varphi - \mu \frac{Q + Y_0 \cos \varphi - X_0 \sin \varphi}{GS} \sin \varphi \right\} d\varphi.$$

$$\delta X_0 = \int_0^l \left\{ \frac{M(y_0 - y)}{EF_0 \varphi} + \frac{M \cos \varphi}{ES \varphi} + \frac{R(y_0 - y)}{ES \varphi} + \frac{R \cos \varphi}{ES} - \mu \frac{Q \sin \varphi}{GS} \right\} d\varphi \dots$$

podobnie zupełnie możemy napisać w postaci ostatecznej:

$$\delta Y_0 = \int_0^l \left\{ -\frac{M(x_0 - x)}{EF_0 \varphi} + \frac{M \sin \varphi}{ES \varphi} - \frac{R(x_0 - x)}{ES \varphi} + \frac{R \sin \varphi}{ES} + \mu \frac{Q \cos \varphi}{GS} \right\} d\varphi \dots \quad \delta \varphi = \int_0^l \left\{ \frac{M}{EF_0 \varphi} + \frac{R}{ES \varphi} \right\} d\varphi \dots$$

W wypadku pręta o krzywiźnie nieznacznej będziemy znowu mieli:

$$S_{x_0} = \int_0^t \left\{ \frac{M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)}{EJ} \cdot (y_0 - y) + \frac{R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{ES} \right\} d\varphi = y_0 \int_0^t \frac{M d\varphi}{EJ} - \int_0^t \frac{M_y}{EJ} d\varphi + \int_0^t \frac{R \cos \varphi}{ES} d\varphi,$$

i ostatecznie, ponieważ  $d\varphi \cos \varphi = dx$ , a zaś  $d\varphi \sin \varphi = dy$  możemy napisać:

$$S_{x_0} = y_0 \int_0^t \frac{M d\varphi}{EJ} - \int_0^t \frac{M_y}{EJ} d\varphi + \int_0^t \frac{R dx}{ES}.$$

Podobnie otrzymamy:

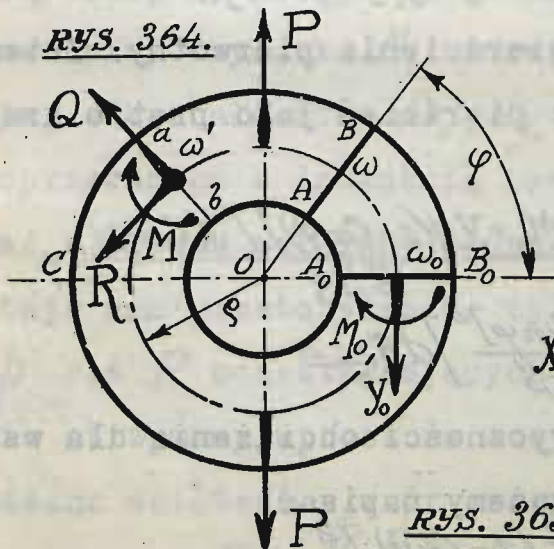
$$S_{y_0} = \int_0^t \left\{ \frac{M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)}{EJ} \cdot (x_0 - x) + \frac{R + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi \cdot \sin \varphi}{ES} \right\} d\varphi = -x_0 \int_0^t \frac{M d\varphi}{EJ} + \int_0^t \frac{M_x}{EJ} d\varphi + \int_0^t \frac{R dy}{ES};$$

$$S_{\varphi} = \int_0^t \left\{ \frac{M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)}{EJ} \right\} d\varphi = \int_0^t \frac{M d\varphi}{EJ}.$$

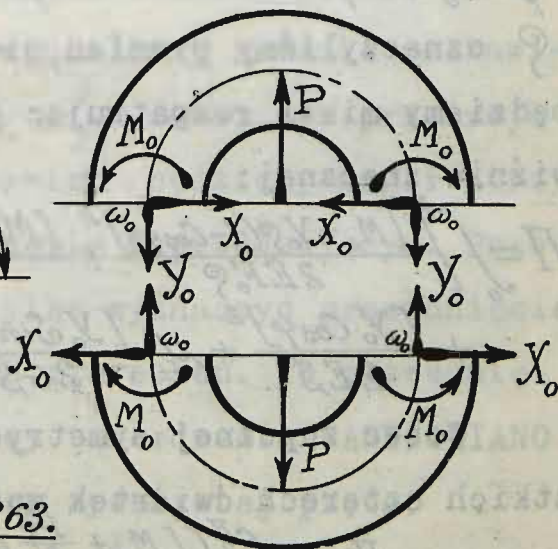
Prosty przykład najlepiej uwypukli doniosłość otrzymanych wyników.

#### § 10. PIERŚCIEN KOŁOWY. Rozpatrujemy pierścień

RYS. 364.



RYS. 363.





kołowy lub odcinek rury obciążony siłami  $P$  średnicowo przeciwległymi rozciągającymi lub ściskającymi (RYS.363). Krajemy go średnicowo prostopadłe do  $P$  wzdłuż  $CB_0$  i aby utrzymać równowagę obu połówek przykładamy do środków  $\omega_0$  przekrojów siły  $Y_0$  równoległe do  $P$ , prostopadłe do nich  $X_0$  i momenty  $M_0$  (RYS.363). Ze względu na zupełną symetrię obu rozciętych połówek prawe i lewe siły i momenty winny być jednakowe, nadto musi być niewątpliwie  $X_0=0$  inaczej bowiem symetria nie mogła być zupełna dla obu połówek. Równania statyki dadzą w dodatku  $2Y_0=P$ , pozostaje zatem jedynie niewyznaczalny statycznie moment  $M_0$ . Chcąc go wyznaczyć rozpatrujemy jakikolwiek przekrój  $AB$  (RYS. 363) pochylony pod kątem  $\varphi$  względem  $A_0B_0$  i sprowadzamy do jego środka  $\omega$  siły odkształcające górną połówkę pierścienia. W przekroju  $AB$  będziemy mieli po sprowadzeniu siłę podłużną  $R_\varphi = Y_0 \cos \varphi$ , poprzeczną  $Q_\varphi = Y_0 \sin \varphi$  i moment  $M_\varphi = M_0 + Y_0[\rho - \rho \cos \varphi]$ , gdzie przez  $\rho$  oznaczyliśmy promień pierścienia pierwotny. Zatem będziemy mieli rozpatrując pierścień jako pręt o krzywiznie znacznej:

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{[M_0 + Y_0 \rho (1 - \cos \varphi)]^2}{2EF_0 \rho} + \frac{[M_0 + Y_0 \rho (1 - \cos \varphi)] \cdot [Y_0 \cos \varphi]}{ES \rho} + \frac{[Y_0 \cos \varphi]^2}{2ES} + \mu \frac{[Y_0 \sin \varphi]^2}{2GS} \right] d\varphi.$$

Wobec zupełnej symetryczności obciążenia dla wszystkich czterech ćwiartek możemy napisać:

$$\Pi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{[M_0 + \frac{P\rho}{2} (1 - \cos \varphi)]^2}{2EF_0 \rho} + \right.$$

$$+ \frac{[M_0 + \frac{P_0}{2}(1 - \cos \varphi)] \frac{P}{2} \cos \varphi}{E S_0} + \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{8 E S} + \mu \frac{P^2 \sin^2 \varphi}{8 G S} \} \varphi d\varphi \sim$$

ponieważ najwidoczniej  $dG = S d\varphi$ . Stąd na mocy zasady najmniejszej pracy:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{M_0 + \frac{P_0}{2}(1 - \cos \varphi)}{E F_0 S_0} + \frac{P \cos \varphi}{2 E S S_0} \right\} \varphi d\varphi = 0.$$

Wypełniając całkowanie otrzymujemy dla pierścienia o stałym przekroju:

$$\frac{\pi}{2} \frac{M_0}{E F_0} + \frac{\pi}{4} \frac{P_0}{E F_0} - \frac{P_0}{2 E F_0} + \frac{P}{2 E S} = 0 \quad \text{Stąd: } M_0 =$$

$$= -\frac{P_0}{2} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} \frac{F_0}{S_0} \right] \quad \text{i} \quad M = \frac{P_0}{2} \left[ \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S_0} \right) - \cos \varphi \right].$$

Ujemny znak momentu  $M_0$  wskazuje, że kierunek obrotu wskazany na rysunku nie odpowiada warunkom istotnym w wypadku działania sił rozciągających. Łatwo to pojąć zważywszy że siły rozciągające starają się pręt w sąsiedztwie przekroju  $A_0 B_0$  rozplaszczyc działają zatem momenty innego znaku, niż jak to podaje RYS. 363. Wyznaczywszy w ten sposób statycznie niewyznaczalny czynnik  $M_0$  rozwiązaliśmy zadanie całkowicie, odkształcenia  $\delta x_0, \delta y_0, \delta \varphi_0$  dowolnego przekroju poprzecznego z łatwością bowiem będziemy mogli otrzymać w sposób wskazany w ustępie poprzedzającym. Pozostaje nam przeto jeszcze tylko wyznaczyć przesunięcie  $\beta$  sił  $P$  odkształcających pierścieni. To przesunięcie otrzymamy wprost na mocy twierdzenia CASTIGLIANO pisząc ostateczny wzór pracy sprężystej pręta:

$$\Pi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{P^2 S^2}{2 E F_0} \left[ \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S_0} \right) - \cos \varphi \right]^2 +$$



$$+ \frac{P^2}{ES} \left\{ \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S^2} \right) - \cos \varphi \right\} \cos \varphi + \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{2ES} + \mu \frac{P^2 \sin^2 \varphi}{2GS} \} d\varphi. \sim$$

Stąd bezpośrednio mamy:

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial \Pi}{\partial P} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{P^2}{EF_0} \left[ \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S^2} \right) - \cos \varphi \right]^2 + \frac{P^2}{ES} \left[ \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S^2} \right) - \cos \varphi \right] \cos \varphi + \right. \\ &+ \left. \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{ES} + \mu \frac{P^2}{GS} \sin^2 \varphi \right\} d\varphi = \frac{P^2}{EF_0} \left\{ \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S^2} \right)^2 - \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S^2} \right) + \frac{\pi}{2} \right\} + \\ &+ \frac{P^2}{ES} \left\{ \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S^2} \right) - \frac{\pi}{2} \right\} + \frac{P^2}{ES} \frac{\pi}{4} + \mu \frac{P^2}{GS} \frac{\pi}{4} = \frac{P^2}{EF_0} \left[ \frac{\pi}{2} - \right. \\ &- \left. \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0^2}{S^2} \right) \right] + \frac{P^2}{ES} \left[ \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{F_0}{S^2} \right) - \frac{\pi}{4} \right] + \mu \frac{\pi}{4} \frac{P^2}{GS}. \sim \end{aligned}$$

W szczególnym wypadku, kiedy przekrój boczny pręta jest stosunkowo nieznaczny w porównaniu do promienia

$\varnothing$  będziemy mieli pracę:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{[M_0 + \frac{1}{2} P \varnothing (1 - \cos \varphi)]^2}{2EJ} + \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{8ES} \right\} d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{[M_0 + \frac{1}{2} P \varnothing (1 - \cos \varphi)]^2}{2EJ} + \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{8ES} \right\} \varnothing d\varphi. \sim \end{aligned}$$

Stąd podobnie jak pierwszej na mocy zasady najmniejszej pracy:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{M_0 + \frac{1}{2} P \varnothing (1 - \cos \varphi)}{EJ} \right\} \varnothing d\varphi = 0$$

a dla pierścienia o stałym przekroju poprzecznym:

$$\frac{\pi}{2} M_0 + \frac{1}{2} P \varnothing \frac{\pi}{2} - \frac{P \varnothing}{2} = 0, \text{ co daje } M_0 = -\frac{P \varnothing}{2} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \right]. \text{ Zatem } M = \frac{P \varnothing}{2} \left[ \frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right]. \text{ Ostatecznie więc:}$$

$$\Pi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{P^2 \varnothing^2}{8EJ} \left[ \frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right]^2 + \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{8ES} \right\} \varnothing d\varphi. \sim$$

Stąd otrzymamy przesunięcie:

$$\begin{aligned} p = \frac{\partial \Pi}{\partial P} &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{P \varnothing^2}{4EJ} \left[ \frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right]^2 + \frac{P \cos^2 \varphi}{4ES} \right\} \varnothing d\varphi = \frac{P \varnothing^3}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{4}{\pi^2} - \right. \\ &- \frac{4}{\pi} \cos \varphi + \cos^2 \varphi \} d\varphi + \frac{P \varnothing}{ES} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{P \varnothing^3}{EJ} \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{4} \right\} + \\ &+ \frac{P \varnothing}{ES} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{P \varnothing^3}{EJ} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{P \varnothing}{ES} \cdot \frac{\pi}{4}. \sim \end{aligned}$$

Pomijając działanie siły podłużnej będziemy mieli  $\beta \cong \frac{P\varrho^3}{EJ} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$ . Ten sam wynik otrzymamy drogą znacznie dłuższą całkując równanie odkształconej znane nam z ustępu piątego:  $\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} + \frac{\varphi}{\varrho^2} = -\frac{M}{EJ} = -\frac{P\varrho}{EJ} \left[ \frac{1}{\pi} - \frac{\cos\varphi}{2} \right]$ , czyli inaczej wobec tego, że  $db = \varrho d\varphi \sim \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} + \varphi = -\frac{P\varrho^3}{EJ} \left[ \frac{1}{\pi} - \frac{\cos\varphi}{2} \right]$ . Całka tego równania jest następująca  $y = A \cos\varphi + B \sin\varphi + \frac{P\varrho^3}{4EJ} \varphi \sin\varphi - \frac{P\varrho^3}{\pi EJ}$ ; Wobec zupełnej symetrii wszystkich ewiartek pierścienia, przekroje prostopadłe do kierunku działania sił oraz przekroje zawierające te siły w swej płaszczyźnie nie ulegają skrzywieniu przy odkształceniu. Zatem w  $\omega_0$  i punktach na krzyż leżących odkształcona jest styczna do pierwotnej osi pręta, skąd wnioskujemy, że  $\frac{d\varphi}{d\varphi} = 0$  przy  $\varphi = 0$  i  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Wobec  $\frac{dy}{d\varphi} = -A \sin\varphi + B \cos\varphi + \frac{P\varrho^3}{4EJ} \sin\varphi + \frac{P\varrho^3}{4EJ} \varphi \cos\varphi$  otrzymujemy natychmiast  $B = 0$  oraz  $A = \frac{P\varrho^3}{4EJ}$  skąd:  $y = \frac{P\varrho^3}{4EJ} \left( \cos\varphi + \varphi \sin\varphi - \frac{4}{\pi} \right)$ . Z tego równania czyniąc  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  natychmiast otrzymamy odkształcenie pierścienia:  $\beta = 2 \left[ y \right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{P\varrho^3}{EJ} \left[ \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right]$  wzdłuż osi działania sił  $P$ .

Podobnie zupełnie czyniąc w równaniu  $\varphi = 0$  otrzymamy zwężenie się pierścienia w kierunku prostopadłym do sił odkształcających pisząc:  $q = 2 \left[ y \right]_{\varphi=0} = 2 \frac{P\varrho^3}{EJ} \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \right) = -\frac{P\varrho^3}{EJ} \cdot \frac{4-\pi}{2\pi}$ . Wynik o wiele dokładniejszy otrzymaliśmy korzystając z twierdzeń CASTIGLIANO.

W ogólnym wypadku jakiegokolwiek obciążenia niesymetrycznego otrzymamy w przekroju obranym aż trzy

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XLII.



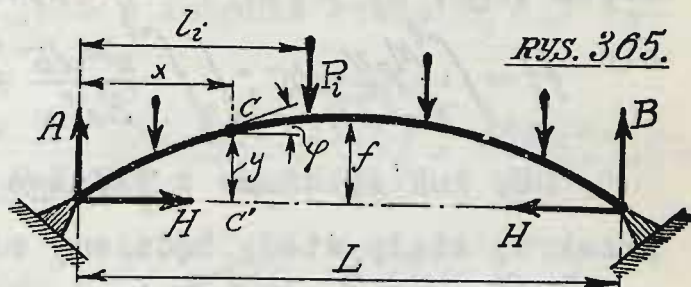
czynniki statycznie niewyznaczalne (RYS. 364) siłę po-  
dłużną  $R$ , poprzeczną  $Q$  i moment  $M$ , które z łatwo-  
ścią wyznaczymy stosując zasadę najmniejszej pracy.  
Istotnie z trzech równań  $\frac{\partial \Pi}{\partial R} = 0$ ,  $\frac{\partial \Pi}{\partial Q} = 0$  i  $\frac{\partial \Pi}{\partial M} = 0$ ,  
będziemy mogli wyznaczyć wszystkie trzy niewiadome  
czynniki.

Wyłożona wyżej teoria prętów krzywych płaskich  
najczęściej stosowana bywa przy obliczaniu łuków bu-  
dowlanych. Jako drugi przykład bierzemy przeto pod  
uwagę:

§ 11. ŁUK WSPARTY na podporach przegubowych a ob-  
ciążony układem sił pionowych  $P_i$   $i=1, 2, \dots$  (RYS. 365).  
Odległości tych sił od lewej podpory niech będą odpo-  
wiednio równe  $\ell_i$ . Rozpiętość czyli odległość poziomą  
podpór oznaczamy przez  $L$ , pionowe odpory nazywamy  
przez  $A$  i  $B$ , poziome  $H_A$  i  $H_B$ . Ponieważ sił od-  
kształcających poziomych nie ma zupełnie zatem równa-  
nie statyki da  $H_A + H_B = 0$ , możemy zatem pominąć  
znaczkę dolną znakując wprost odpór poziomy literą  
 $H$ . Dwa pozostałe warunki równowagi dadzą dla sił  
pionowych  $A + B + \sum P_i = 0$  i momentów w stosunku do  
lewego przegubu  $BL + \sum P_i \ell_i = 0$ . Z tych dwóch rów-  
nań wyznaczymy obie odpory pionowe. Pozostanie więc  
jeden statycznie niewyznaczalny czynnik - odpór po-  
ziomy  $H$ . Aby ją wyznaczyć rozpatrujemy zazwyczaj  
łuk jako pręt o nieznaczonej krzywiźnie, dla którego  
pracę sprężystą otrzymamy w postaci:  $\Pi = \int_0^l \left[ \frac{M^2}{2EJ} + \right.$

$+ \frac{R^2}{2ES} \int d\phi$ . Zatem na mocy zasady najmniejszej pracy możemy napisać:  $\frac{\partial \Pi}{\partial H} = \int \left[ \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H} + \frac{R}{ES} \frac{\partial R}{\partial H} \right] d\phi = 0$ . Gdy jednak podpory nie są zupełnie sztywne i rozsuwają

lub zsuwają się na  $\delta L$  podczas odkształcenia to wtedy należy stosować drugie prawo CAST-GLIANO pisząc:  $\frac{\partial \Pi}{\partial H} = \delta L$ . W danym wypadku wartość



momentu określamy łatwo rozpatrując jakikolwiek poprzeczny przekrój pręta poprowadzony w punkcie C osi pierwotnej pręta odległym od lewej podpory na  $x$ .

Niech nadto  $\gamma$  oznacza strzałkę pręta w tym punkcie, jak to zresztą najlepiej uwypukla RYS. 365. Wtedy

$M = M_p - Hy$  - gdzie przez  $M_p$  oznaczyliśmy moment pochodzący od odpory A i sił  $P_2$  zawartych między lewą podporą a przekrojem rozpatrywanym. Jest to więc moment jaki byśmy otrzymali dla przekroju C' belki prostej ułożonej na tych samych podporach. Do tego momentu dochodzi różnoskrętny moment odpory  $Hy$ . Jako różnoskrętny - wchodzi ze znakiem minus. Nadto  $R = -H \cos \varphi$ . Znak minus jest tu konieczny bo odpory  $H$  najwidoczniej powodują ściskanie łuku. Łatwo to udowodnić zważywszy, że łuk swobodny pod jarzmem sił ciśnących pionowych rozgiął by się i wystąpił obustronnie poza podpory, które go jednak utrzymują przy stałej rozpiętości ściskając z dwóch stron. Zatem:



$$\frac{\partial \Pi}{\partial H} = - \int_0^t \left[ \frac{M}{EJ} y + \frac{R}{ES} \cos \varphi \right] d\phi = - \int_0^t \frac{M_p y}{EJ} d\phi +$$

$$+ H \int_0^t \frac{y^2}{EJ} d\phi + H \int_0^t \frac{\cos^2 \varphi}{ES} d\phi = 0. \sim$$

Wobec tego, że  $d\phi \cos \varphi = dx$  będziemy mieli ostatecz-

$$\text{nie } H = \int_0^t \frac{M_p y}{EJ} d\phi : \left[ \int_0^t \frac{y^2}{EJ} d\phi + \int_0^t \frac{\cos \varphi}{ES} dx \right]. \sim$$

Gdy łuk wykonamy z jednego tworzywa i damy mu przekrój stały wtedy będziemy mieli  $H = \int_0^t M_p y d\phi : \left[ \int_0^t y^2 d\phi + \frac{J}{S} \int_0^t \cos \varphi dx \right]$ . Dla łuków niezbyt ostrych  $\cos \varphi \approx 1$  ostatecznie więc:  $H = \int_0^t M_p y d\phi : \left[ \int_0^t y^2 d\phi + \frac{J}{S} l \right]$  gdzie przez  $l$  oznaczamy długość łuku mierzoną wzdłuż jego osi pierwotnej. Ten wzór w przybliżeniu zupełnie wystarczającym nadaje się do wszelkiego łuku.

Łuk tego typu jest oczywiście nieswobodny i przy ogrzaniu na  $t^\circ$  nie może się rozszerzać w kierunku poziomym (RYS.367). Gdyby jedna z podpór była ruchoma to rozpiętość łuku nagrzanego wzrosłaby o  $\alpha_e t L$ . Aby więc powrócić do warunków istotnych należy zniszczyć ów przyrost działając na końce łuku siłami poziomymi  $H_z$ . W rzeczywistości rzecz się ma nieco inaczej. Łuk nagrany chce wyskoczyć z podpór, ciśnie zatem chcąc je rozeprzeć. Na tle tego parcia powstają w podporach odpory  $H_z$ . Te siły stanowią obciążenie łuku odkształcające, pod ich jarzmem łuk  $ACB$  zwiększy swą krzywiznę (RYS.368) przechodząc w  $AC''B$ , jego skrajne styczne zmienią swe położenie - obróćą się o kąt  $\angle A\hat{t}$  ku górze. Wobec braku właściwych sił zewnętrznych możemy oczywiście napisać dla przekroju poprzecz-

nego w  $C$ -wartości  $M = -H_z y$  oraz  $R = -H_z \cos \varphi$ . Stąd na mocy drugiego prawa CASTIGLIANO, zważywszy, że przesunięcie sił  $H_z$  jest w istocie równe  $\alpha_c t L$  będziemy mieli:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial H_z} = + \int_0^t \left[ \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H_z} + \frac{R}{ES} \frac{\partial R}{\partial H_z} \right] d\tilde{\sigma} = \int_0^t \left[ \frac{H_z y^2}{EJ} + \frac{H_z \cos^2 \varphi}{ES} \right] d\tilde{\sigma} =$$

$$= \alpha_c t L \quad \text{skąd} \quad H_z = \alpha_c t L : \left\{ \int_0^t \frac{y^2 d\tilde{\sigma}}{EJ} + \int_0^t \frac{\cos^2 \varphi}{ES} dx \right\}.$$

Przy łącznem działaniu ogrzania i sił zewnętrznych odkształcających wartość odpory poziomej wyniesie:

$$H + H_z = \left[ \alpha_c t L + \int_0^t \frac{M_p dy}{EJ} \right] : \left[ \int_0^t \frac{y^2 d\tilde{\sigma}}{EJ} + \int_0^t \frac{\cos^2 \varphi}{ES} dx \right].$$

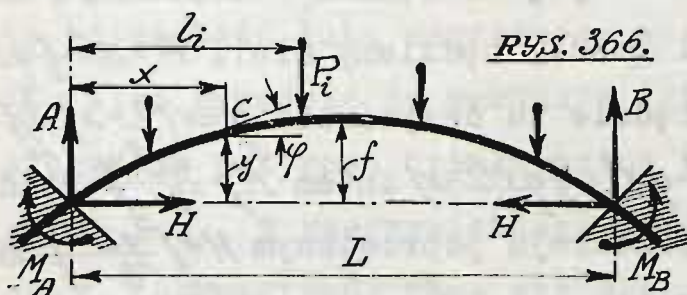
Wszystkie te całki obliczamy zazwyczaj wykreślenie. W szczególnym wypadku łuku parabolicznego o strzałce  $f$  pośrodku, gdy obciążenie jednostajnie się rozkłada wzdłuż rozpiętości łuku w stosunku  $q/L$  na jednostkę jej długości, będziemy mieli  $A = B = \frac{1}{2} qL$ . Równanie osi łuku będzie tu oczywiście  $y = x(L-x) \frac{4f}{L^2}$ , nadto  $M_p = \frac{1}{2} qLx - \frac{1}{2} qx^2 = \frac{1}{2} qx(L-x)$  zatem  $M_p = \frac{qL^2}{8} \frac{y}{f}$ . Stąd dla łuku o stałym przekroju poprzecznym  $H = \int_0^t \frac{qL^2}{8} \frac{y^2 d\tilde{\sigma}}{f} : \left[ \int_0^t y^2 d\tilde{\sigma} + 8t^2 \right]$ , gdzie przez  $8$  oznaczyliśmy promień bezwładności stałego przekroju poprzecznego pręta.

Zazwyczaj w większości wypadków wyraz  $8t^2$  jest stosunkowo nieznaczny w stosunku do  $\int_0^t y^2 d\tilde{\sigma}$  możemy zatem z wystarczającym przybliżeniem napisać  $H \approx \frac{qL^2}{8f}$ , stosując ten wzór do wszystkich łuków jako pierwsze przybliżenie przy ocenianiu doraźnem wartości  $H$ .

Z kolei rozpatrzmy:



§ 12. ŁUK OBUSTRONNIE ZAMOCOWANY (RYS. 366) a obciążony układem sił pionowych. Zachowujemy znakowanie ustępu poprzedniego dodając dwa nowe znaki  $M_A$  i  $M_B$  dla momentów odporowych. I tu znów z równań statyki przekonamy się o tożsamości obu odpór poziomych  $H$ . Równania sił pionowych i momentów pozwolą wyznaczyć odpory prawe w zależności od lewych, pozostaną więc statycznie niewyznaczalnymi odpory lewe  $A, H$  i  $M_A$ . Chcąc je wyznaczyć obieramy jakikolwiek przekrój poprzeczny łuku poprowadzony przez punkt  $C$  na jego osi w odległości  $x$  od podpory lewej. Dla tego przekroju będziemy mieli  $M = M_A + M_p - Hy$  gdzie przez  $M_p$  oznaczamy moment sił odkształcających i odpór pionowych - a więc moment belki prostej zastępczej, jaki już braliśmy zresztą pod uwagę w wypadku wyżej roz-



RYS. 366.

patrywanym. Ponieważ jednak wchodzi weń czynnik  $A$  prze to należy go wypisać w postaci nie-

co innej  $M_p = Ax - M'$  gdzie  $M'$  oznacza moment obciążeń zewnętrznych pionowych bez uwzględnienia odnośnych odpór. Zatem  $M' = \sum P_i \ell_i$  przyczem sumowaniem należy objąć wszystkie siły zewnętrzne działające między lewą podporą a przekrojem  $C$ . Nadto  $R = -A \sin \varphi - H \cos \varphi + R_p'$ . Tutaj znów  $R'$  oznacza siłę podłużną jaką otrzymamy po sprowadzeniu do środka przekroju  $C$  wszystkich

sił odkształcających  $P_2$ . Stąd w założeniu łuku o słabej krzywiznie:  $\Pi = \int_0^L \left\{ \frac{M^2}{2EJ} + \frac{R^2}{2ES} \right\} d\phi$ . Na mocy zasady najmniejszej pracy:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \int_0^L \left[ \frac{M}{EJ} x - \frac{R}{ES} \sin \varphi \right] d\phi = M_A \int_0^L \frac{x d\phi}{EJ} + A \int_0^L \frac{x^2 d\phi}{EJ} - H \int_0^L \frac{xy d\phi}{EJ} - \int_0^L \frac{x M' d\phi}{EJ} + A \int_0^L \frac{\sin^2 \varphi}{ES} d\phi + H \int_0^L \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{ES} d\phi - \int_0^L \frac{R' \sin \varphi}{ES} d\phi = 0.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial H} = - \int_0^L \left[ \frac{M}{EJ} y d\phi + \frac{R}{ES} \cos \varphi d\phi \right] = - M_A \int_0^L \frac{y d\phi}{EJ} - A \int_0^L \frac{xy d\phi}{EJ} + H \int_0^L \frac{y^2 d\phi}{EJ} + \int_0^L \frac{M' y d\phi}{EJ} + A \int_0^L \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{ES} d\phi + H \int_0^L \frac{\cos^2 \varphi}{ES} d\phi - \int_0^L \frac{R' \cos \varphi}{ES} d\phi = 0.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_A} = \int_0^L \frac{M d\phi}{EJ} = M_A \int_0^L \frac{d\phi}{EJ} + A \int_0^L \frac{x d\phi}{EJ} - H \int_0^L \frac{y d\phi}{EJ} - \int_0^L \frac{M' d\phi}{EJ} = 0.$$

Stąd otrzymujemy szereg równań:

$$\begin{aligned} & A \int_0^L \left[ \frac{x^2}{J} + \frac{\sin^2 \varphi}{S} \right] \frac{d\phi}{E} - H \int_0^L \left[ \frac{xy}{J} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{S} \right] \frac{d\phi}{E} + M_A \int_0^L \frac{x d\phi}{EJ} = \\ & = \int_0^L \left[ \frac{M' x}{J} + \frac{R' \sin \varphi}{S} \right] d\phi; \quad A \int_0^L \frac{x d\phi}{EJ} - H \int_0^L \frac{y d\phi}{EJ} + M_A \int_0^L \frac{d\phi}{EJ} = \\ & = \int_0^L \frac{M' d\phi}{EJ}; \quad -A \int_0^L \left[ \frac{xy}{J} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{S} \right] \frac{d\phi}{E} + H \int_0^L \left[ \frac{y^2}{J} + \frac{\cos^2 \varphi}{S} \right] \frac{d\phi}{E} - \\ & - M_A \int_0^L \frac{y d\phi}{EJ} = - \int_0^L \left[ \frac{M' y}{J} - \frac{R' \cos \varphi}{S} \right] d\phi. \end{aligned}$$

dla wyznacze-

nia czynników

$A, H$  i  $M_A$  sta-

tycznie niewy-  
znaczalnych.

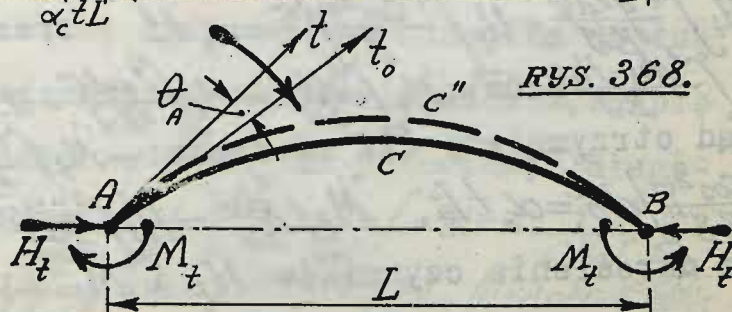
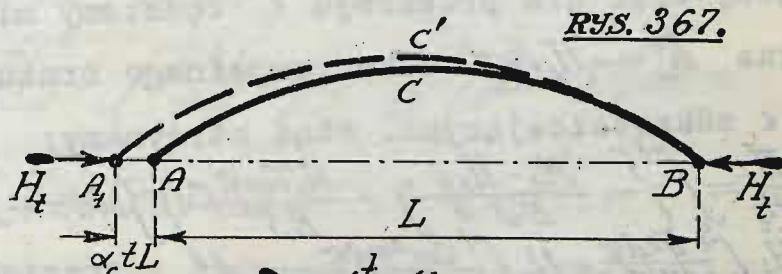
Łuk tego typu

przy ogrzaniu

na  $t^\circ$  stara

się rozsunąć

podpory. Gdyby





jedną z nich dajmy na to prawa była ruchoma, to pod wpływem ogrzania rozpiętość łuku wzrosłaby o przyrost  $\alpha_c t L$  jak to wskazuje RYS. 367. W istocie jednak ten przyrost jest niemożliwy ponieważ podpory nie dają się rozsunąć. Aby zatem powrócić do warunków istotnych należy zastosować siły ciskające poziome  $H_z$ , które przesuną z powrotem końce łuków na miejsce pierwotne. Przesunięciem siły  $H_z$  będzie więc przyrost  $\alpha_c t L$ . Nadto jak to już wiemy z poprzedniego przykładu po doprowadzeniu końców, łuk wygnie się mocniej dając większą strzałkę, przyczem styczne jego skrajne wyprostują się o pewien kąt  $\theta_A$ . W istocie pojawienie się kątów tych jest niemożliwe, zatem aby kąty  $\theta_A$  i  $\theta_B = -\theta_A$  zniszczyć, należy zastosować odpowiednio działające momenty  $M_z$  po obu końcach łuku.

Łączne działania tych oczywiście z konieczności równych momentów pokrywają się wzajemnie:  $\theta_A + \theta_B = \theta_A - \theta_A = 0$  przesunięcie zatem obu tych momentów jest zerem.

Tutaj więc dla przekroju  $C$  będziemy mieli  $M = M_z - H_z y$ , oraz  $R = -H_z \cos \varphi$  wobec zupełnego braku właściwych

sił odkształcających. Stąd otrzymamy:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial H_z} = \int_0^t \left\{ -\frac{M_z - H_z y}{EJ} y + \frac{H_z \cos \varphi}{ES} \cos \varphi \right\} d\sigma = -M_z \int_0^t \frac{y d\sigma}{EJ} + H_z \int_0^t \frac{y^2 d\sigma}{EJ} + H_z \int_0^t \frac{\cos^2 \varphi d\sigma}{ES} = \alpha_c t L \quad \text{oraz:} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial M_z} = \int_0^t \frac{M_z - H_z y}{EJ} d\sigma = M_z \int_0^t \frac{d\sigma}{EJ} - H_z \int_0^t \frac{y d\sigma}{EJ} = 0.$$

Stąd otrzymujemy dwa równania:  $-M_z \int_0^t \frac{y d\sigma}{EJ} + H_z \int_0^t \left[ \frac{y^2}{EJ} + \frac{\cos^2 \varphi}{ES} \right] d\sigma = \alpha_c t L$ ,  $M_z \int_0^t \frac{d\sigma}{EJ} - H_z \int_0^t \frac{y d\sigma}{EJ} = 0$  dla określenia czynników  $H_z$  i  $M_z$ .

W szczególnym wypadku dla rozpatrywanego wyżej łuku parabolicznego o niezbyt znacznej krzywiznie możemy założyć w przybliżeniu zupełnie wystarczającym praktycznie, iż  $ds \cong dx$  czyli, że  $\cos \varphi \cong 1$  stąd  $\sin \varphi = 0$ . Nadto możemy oczywiście wobec tego pominąć zupełnie  $R'$ , a wtedy po staremu  $M = M_A + Ax - Hy - M'$  natomiast  $R = -H$ . Stąd  $\Pi = \int_0^L \left[ \frac{M^2}{2EJ} + \frac{H^2}{2ES} \right] dx$ , ponieważ  $t = L$  w danym wypadku. Stąd:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial A} &= \int_0^L \left[ \frac{M}{EJ} \right] dx = M_A \int_0^L \frac{1}{EJ} dx + A \int_0^L \frac{1}{EJ} dx - H \int_0^L \frac{1}{EJ} dx - \int_0^L \frac{M'}{EJ} dx = 0; \\ \frac{\partial \Pi}{\partial H} &= \int_0^L \left[ -\frac{My}{EJ} + \frac{H}{ES} \right] dx = -M_A \int_0^L \frac{y}{EJ} dx - A \int_0^L \frac{xy}{EJ} dx + H \int_0^L \frac{1}{ES} dx - \int_0^L \frac{My'}{EJ} dx + \\ &+ H \int_0^L \frac{1}{ES} dx = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial M_A} = \int_0^L \frac{M}{EJ} dx = M_A \int_0^L \frac{1}{EJ} dx + A \int_0^L \frac{x}{EJ} dx - H \int_0^L \frac{y}{EJ} dx - \int_0^L \frac{M'}{EJ} dx = 0. \end{aligned}$$

Dla łuku o stałym przekroju, w założeniu jednego tworzywa:

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{1}{EJ} dx &= \frac{L}{EJ}; \quad \int_0^L \frac{1}{ES} dx = \frac{L}{ES}; \quad \int_0^L \frac{x}{EJ} dx = \frac{L^2}{2EJ}; \\ \int_0^L \frac{x^2}{EJ} dx &= \frac{L^3}{3EJ}; \quad \int_0^L \frac{y^2}{EJ} dx = \int_0^L \frac{x(L-x)}{EJ} \cdot \frac{4f}{L^2} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{4f}{L^2} \int_0^L (Lx - x^2) dx = \\ &= \frac{4f}{EJL^2} \left[ \frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right] = \frac{2}{3} \cdot \frac{fL}{EJ}; \quad \int_0^L \frac{xy}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{4f}{L^2} \int_0^L [Lx - x^2] x dx = \\ &= \frac{4f}{EJL^2} \left[ \frac{L^4}{3} - \frac{L^4}{4} \right] = \frac{fL^2}{3EJ}; \quad \int_0^L \frac{y^2}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{16f^2}{L^4} \int_0^L [Lx - x^2]^2 dx = \\ &= \frac{16f^2}{EJL^4} \left[ \frac{L^5}{3} - \frac{L^5}{2} + \frac{L^5}{5} \right] = \frac{8}{15} \cdot \frac{f^3 L}{EJ}. \end{aligned}$$

Nadto, ponieważ tutaj zgodnie z założeniem na łuk działa obciążenie jednostajnie rozłożone wzdłuż rozpiętości łuku w stosunku  $q$  klg. na jednostkę długości przeto  $M' = \frac{q}{2} x^2$  stąd  $\int_0^L \frac{M'}{EJ} dx = \frac{q}{2EJ} \int_0^L x^2 dx = \frac{qL^3}{6EJ}$ ;  $\int_0^L \frac{M'x}{EJ} dx = \frac{q}{2EJ} \int_0^L x^3 dx = \frac{qL^4}{8EJ}$ , oraz  $\int_0^L \frac{My'}{EJ} dx = \frac{4}{2EJL^2} \int_0^L (Lx - x^2) x dx = \frac{1}{3} \frac{qfL}{EJ}$ ;



Podstawiając wszystkie te wartości w powyżej otrzymane równania otrzymamy po odpowiednim skróceniu:

$$M_A + \frac{2}{3}LA - \frac{2}{3}fH = \frac{1}{4}qL^2 \sim$$

$$M_A + \frac{1}{2}LA - \left[ \frac{4}{5}f + \frac{3}{2} \cdot \frac{J}{Sf} \right] H = \frac{1}{2}qL \sim$$

$$M_A + \frac{1}{2}LA - \frac{2}{3}fH = \frac{1}{6}qL^2 \sim$$

Odejmując drugie równanie od trzeciego otrzymamy:

$$H = 5qSf \frac{L^2 - 3}{4Sf^2 + 45J} \cdot \text{A odejmując trzecie od pierwszego wyznaczmy } A = \frac{qL}{2} \text{ a nadto: } M_A = \frac{2}{3}fH - \frac{qL^2}{12} = q \frac{4Sf^2[L^2 - 6] - 45JL^2}{12[45J + 4Sf^2]} \sim$$

Na tem kończymy dział prętów krzywych a rozpoczynamy:

## ROZDZIAŁ DZIESIĄTY.

### NACZYNIA KULISTE I CYLINDRYCZNE.

§ 1. USTALENIE POJĘĆ ZASADNICZYCH. Rozpatrywać będziemy wyłącznie NACZYNIA KULISTE oraz CYLINDRYCZNE jako jedynie spotykane w praktyce. Ulegać mogą one nadciśnieniu wewnętrznemu  $p_w$  oraz nadciśnieniu zewnętrznemu  $p_z$  lub też jednemu z nich jeno; zwykle stan pierwotny odpowiada obustronnemu ciśnieniu atmosferycznemu. ODKSZTAŁCENIA NASTĄPIĄ DOPIERO WTEDY GDY CIŚNIENIE ZEWNĘTRZNE LUB WEWNĘTRZNE WZROŚNIE STAJĄC SIĘ WYŻSZYM OD ATMOSFERYCZNEGO, CZYLI NADCIŚNIE-