

a dla DRUTU PROSTOKĄTNEGO, gdy h OZNACZA WYSOKOŚĆ,
a b - SZEROKOŚĆ PROSTOKĄTNEGO PRZEKROJU DRUTU możemy
napisać według BACHA: $A = b^2 h : \left[3 + \frac{2 \cdot 6}{0.45 + m} \right]$, oraz $B =$
 $= [4.175 - 0.15m] (h^2 + b^2) : h^3 b^3$, gdzie $m = h \cdot b$. Wzory te
były wyprowadzone czysto doświadczalnie.

Na tym kończymy teorię skręcania. Odnośne przykła-
dy podajemy w KURSIE ĆWICZEŃ, tutaj zaś rozpoczynamy
ogólną teorię zginania.

R O Z D Z I A Ł P I Ą T Y.

O G Ó L N A T E O R J A Z G I N A N I A.

§ 1. WYZNACZANIE SKŁADOWYCH NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKO- WYCH.

Rozpatrujemy zaznaczone w końcowym ustępie zaga-
jenia kursu ostatnie dwa wypadki, a mianowicie:

1-o. WYPADEK „D”, kiedy zewnętrzny układ E_α sił
odkształcających sprowadza się do pojedynczego momen-
tu $M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, leżącego w przekroju, oraz:

2-o WYPADEK „E”, kiedy zewnętrzny układ E_α sił
odkształcających sprowadza się do pojedynczego momen-
tu $M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ —, leżącego w przekroju płaskim i
do pojedynczej siły R_z , prostopadłej do tego przekro-
ju, a przyłożonej do środka jego masy.

Oba wypadki są tożsamościowe dla szczególnej war-
tości $R_z = 0$; ponadto, gdy $M_p = 0$ - wypadek „D” traci
swą rację bytu, zaś wypadek „E” przechodzi w wypadek

„A”, stanowiący podwalinę teorii rozciągania i ściskania. W ten sposób WYPADEK „E” ŁĄCZY W SOBIE NIEJAKO OBA poszczególne WYPADKI „A” i „D”. —

DLA WYPADKU „D” MAMY $R_x = R_y = R_z = 0$, $M_z = 0$, przeto wzory zagajenia (B) możemy napisać w następującej prostej postaci:

$$t_x = Ax, t_y = Ay, t_z = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{I_{xy}^2 - I_x I_y} x - \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_{xy}^2 - I_x I_y} y; \sim$$

W WYPADKU „E” gdzie $R_x = R_y = 0$, $M_z = 0$ mamy:

$$t_x = Ax, t_y = Ay, t_z = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{I_{xy}^2 - I_x I_y} x - \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_{xy}^2 - I_x I_y} y + \frac{R_z}{S}; \sim$$

W obu tych wypadkach NAPRĘŻENIE JEDNOSTKOWE może być więc rozpatrywane, jako suma składowych:

1-o t_z — PROSTOPADŁEJ DO PRZEKROJU, a złożonej ze składników:

$$t = R_z : S \text{ ORAZ: } t_g = \frac{M_x I_{xy} + M_y I_x}{I_{xy}^2 - I_x I_y} x - \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_{xy}^2 - I_x I_y} y; \sim$$

stad $t_z = t_g + t$ /rys. 180/.

2-o v — LEŻĄCEJ W PRZEKROJU, na osi promienia wodzącego punktu M . SKŁADOWE $v_x = Ax = t_x$, $v_y = Ay = t_y$ — wyznaczają wartość $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A \sqrt{x^2 + y^2} = A \rho$. Stad więc $A = v : \rho$. Mimo to, wartości v nie znamy, ponieważ nie umiemy wyznaczyć STAŁEJ A z równań (B).

W danym wypadku, jak wiemy, statyka jest bezsilna; jedynie doświadczenie może podać wartość tej składowej naprężenia. Natomiast wartość składowej t_z z łatwością daje się wyznaczyć, jako suma $t_z = t_g + t$ w za-

leżności od M_p i R_z . Ponieważ naprężenia $\bar{t} = \frac{R_z}{S}$ znamy już z teorii rozciągania i ściskania, należy zatem poznać \bar{t}_g . W tym celu musimy przedewszystkiem możliwie uprościć wzór, wyznaczający te naprężenia jednostkowe.

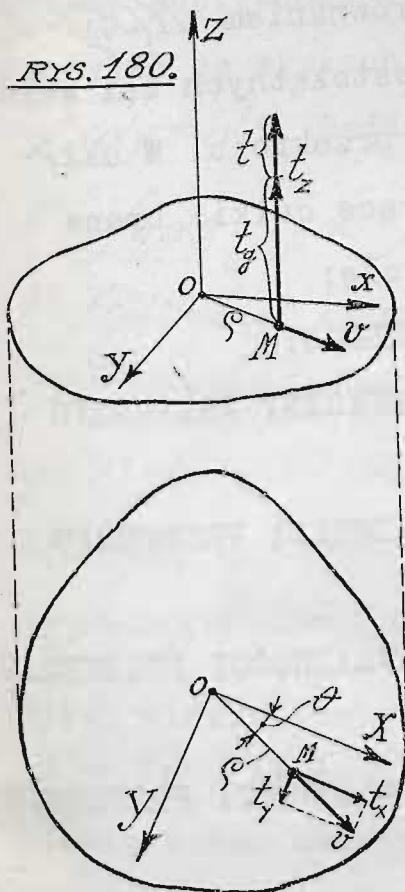
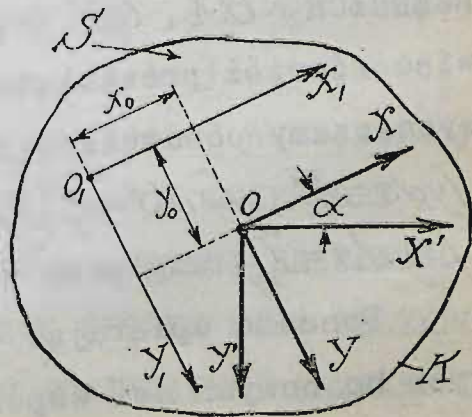
Dotychczas nie robiliśmy żadnych ograniczeń co do wyboru osi OX, OY , leżących w przekroju, a przechodzących przez środek jego masy; obecnie należy obrać NAJWYGODNIEJSZY układ tych osi, aby możliwie najbardziej uprościć współczynniki wzoru dla

\bar{t}_g , niewątpliwie zależne od wyboru osi OX, OY . Okazuje się, że taki układ istnieje, należy zatem rozpatrzyć:

§ 2. WYZNACZENIE NAJWYGODNIEJSZEGO UKŁADU OSI WSPÓŁRZĘDNYCH LEŻĄCYCH W PRZEKROJU.

Weźmy pod uwagę jakikolwiek PRZEKRÓJ PŁASKI, JE-DNOLITY /Rys.181/ czyli POLE S ograniczone pewną ściśle określoną KRZYWĄ K , którą OBWODEM POLA zwać będziemy.

RYS. 181.



Krzywą K wyznaczamy zazwyczaj równaniem $K(x,y)=0$, w układzie zupełnie dowolnych prostokątnych osi współrzędnych O_1X_1, O_1Y_1 , leżących w przekroju. W układzie tych osi wyznaczamy następujące całki, brane wzdłuż całego pola S , a mianowicie:

$$\int ds = S \text{ — czyli POLE PRZEKROJU;}$$

$$\int y_1 ds = F_{x_1}^1 \text{ — czyli MOMENT STATYCZNY PRZEKROJU WZGLĘDEM OSI } O_1X_1;$$

$$\int x_1 ds = F_{y_1}^1 \text{ — czyli MOMENT STATYCZNY PRZEKROJU WZGLĘDEM OSI } O_1Y_1;$$

$$\int y_1^2 ds = I_{x_1} \text{ — czyli MOMENT BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU WZGLĘDEM OSI } O_1X_1;$$

$$\int x_1^2 ds = I_{y_1} \text{ — czyli MOMENT BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU WZGLĘDEM OSI } O_1Y_1; \text{ wreszcie}$$

$$\int x_1 y_1 ds = I_{x_1 y_1} \text{ — czyli MOMENT ODSRODKOWY PRZEKROJU WZGLĘDEM UKŁADU OSI PROSTOKĄTNYCH } O_1X_1, O_1Y_1. \text{ —}$$

Ze wzorów podanych w ustępie szóstym zagajenia wyznaczamy współrzędne x_0, y_0 - ŚRODKA MASY rozpatrywanego przekroju, pisząc $x_0 = F_{y_1}^1 : S$ — oraz $y_0 = F_{x_1}^1 : S$ i UMIESZCZAMY W TYM PUNKCIE POCZĄTEK NOWYCH OSI WSPÓLRZĘDNYCH OX, OY , RÓWNOLEGLYCH DO STARYCH, a więc również prostokątnych. W układzie tych nowych osi wyznaczamy ponownie całki wyżej wyszczególnione: $\int ds = S$, $\int y ds = F_x^1$, $\int x ds = F_y^1$, $\int y^2 ds = I_x$, $\int x^2 ds = I_y$, wreszcie $\int xy ds = I_{xy}$ względem osi OX, OY . —

Ponadto opierając się na wzorach przejścia od starych do nowych osi współrzędnych $x_1 = x_0 + x$, $y_1 = y_0 + y$ —

możemy poprzednio rozpatrywane całki wyrazić za pomocą tylko co wypisanych, zważywszy, że $ds = dx, dy = dx dy = ds$. Będziemy zatem mieli:

$$\begin{aligned} F'_x &= \int y ds = \int y_0 ds + \int y_1 ds = y_0 S + F'_x; \\ F'_y &= \int x ds = \int x_0 ds + \int x_1 ds = x_0 S + F'_y; \quad J_{x_1} = \int y_1^2 ds = \int (y_0 + y_1)^2 ds = \int y_0^2 ds + \\ &+ \int 2y_0 y_1 ds + \int y_1^2 ds = y_0^2 S + 2y_0 F'_x + J_{x_1}; \quad J_{y_1} = \\ &= \int x_1^2 ds = \int [x_0 + x_1]^2 ds = \int x_0^2 ds + \int 2x_0 x_1 ds + \int x_1^2 ds = x_0^2 S + 2x_0 \int x_1 ds + \int x_1^2 ds \\ &= x_0^2 S + 2x_0 F'_{y_1} + J_{y_1}; \quad \text{WRESZCIE: } J_{x_1 y_1} = \int x_1 y_1 ds = \int [x_0 + x_1][y_0 + y_1] ds = x_0 y_0 S + x_0 \int y_1 ds + \\ &+ y_0 \int x_1 ds + \int x_1 y_1 ds = x_0 y_0 S + x_0 F'_{y_1} + y_0 F'_{x_1} + I_{x_1 y_1}. \end{aligned}$$

Wyżej widzieliśmy, że $x_0 = F'_{y_1} : S$ - oraz $y_0 = F'_{x_1} : S$ - przeto $F'_{x_1} = S y_0$ - oraz $F'_{y_1} = S x_0$ - a zatem $F'_{x_1} = F'_{y_1} = 0$. Ponieważ wobec dowolności osi Ox_1 i Oy_1 , kierunek osi Ox, Oy jest również najzupełniej dowolny, przeto na mocy tylko co otrzymanych wzorów możemy wypowiedzieć następujący:

WNIOSEK PIERWSZY. MOMENT STATYCZNY PRZĘKROJU, BRANY WZGLĘDEM OSI PRZĘCHODZĄCEJ PRZĘZ ŚRODEK MASY PRZĘKROJU, RÓWNA SIĘ ZERU.

Ponadto wobec $F'_x = F'_y = 0$ mamy $J_{x_1} = J_x + S y_0^2$ oraz $J_{y_1} = J_y + S x_0^2$. I tu również wobec zupełnej dowolności kierunku osi Ox, Oy możemy wypowiedzieć następujący:

WNIOSEK DRUGI. MOMENT BEZWŁADNOŚCI PRZĘKROJU WZGLĘDEM DOWOLNEJ OSI RÓWNY JEST MOMENTOWI BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI RÓWNOLEGŁE PRZĘZ ŚRODEK MASY PRZĘKROJU PRZEPROWADZONEJ, DODANEMU DO POWIERZCHNI PRZĘKROJU

POMNOŻONEJ PRZEZ KWADRAT ODLEGŁOŚCI TEJ DOWOLNEJ OSI OD ŚRODKA MASY PRZEKROJU.

Wreszcie wobec $\bar{F}_x' = \bar{F}_y' = 0$ mamy $J_{xy'} = J_{xy} + Sx_0y_0$; stąd bezpośredni znowu:

WNIOSEK TRZECI. MOMENT ODŚRODKOWY PRZEKROJU WZGLĘDEM DOWOLNYCH PROSTOKĄTNYCH OSI WSPÓŁRZĘDNYCH RÓWNY JEST MOMENTOWI ODŚRODKOWEMU WZGLĘDEM NOWYCH OSI RÓWNOLEGLE PRZEZ ŚRODEK MASY PRZEKROJU PRZEPROWADZONYCH, DODANEMU DO POWIERZCHNI PRZEKROJU, POMNOŻONEJ PRZEZ ILOCZYN ODLEGŁOŚCI TYCH DOWOLNYCH OSI OD ŚRODKA MASY PRZEKROJU.

Idąc w dalszym ciągu po drodze tu wyznaczonej, bierzemy pod uwagę NOWY UKŁAD OSI OX', OY' PRZECHODZĄCYCH PRZEZ ŚRODEK MASY PRZEKROJU i oznaczamy przez α KĄT, JAKI TWORZY ta nowa oś OX' ze starą wyżej rozpatrywaną osią OX . —

W układzie tych nowych osi znów wyznaczamy całki: $\int y' ds' = \bar{F}_x'$, $\int x' ds' = \bar{F}_y'$, $\int y'^2 ds' = I_{x'}$, $\int x'^2 ds' = I_{y'}$, $\int x'y' ds' = I_{x'y'}$; względem osi OX', OY' . —

Dla tych nowych osi, jako przechodzących przez środek masy przekroju $\bar{F}_x' = \bar{F}_y' = 0$, ponadto, ponieważ współrzędne osi OX', OY' , wyrażają się przez współrzędne osi OX, OY -w postaci $x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ oraz $y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ — Ponadto $ds' = dx' dy' = dx dy = ds$. Stąd:

$$I_{x'} = \int y'^2 ds' = \int [-x \sin \alpha + y \cos \alpha]^2 ds = \int x^2 \sin^2 \alpha ds - \int 2x \sin \alpha \cos \alpha xy ds + \int y^2 \cos^2 \alpha ds = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha; \quad - \quad I_{y'} = \int x'^2 ds' =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int [x \cos \alpha + y \sin \alpha]^2 dS = \int x^2 \cos^2 \alpha dS + \int 2 \sin \alpha \cos \alpha x y dS + \\
 &+ \int y^2 \sin^2 \alpha dS = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \quad I_{x'y'} = \\
 &= \int x'y' dS' = \int [x \cos \alpha + y \sin \alpha] [-x \sin \alpha + y \cos \alpha] dS = -\int \sin \alpha \cos \alpha x^2 dS - \\
 &- \int \sin^2 \alpha x y dS + \int \cos^2 \alpha x y dS + \int \cos \alpha \sin \alpha y^2 dS = \\
 &= -I_x \sin \alpha \cos \alpha + I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + I_y \sin \alpha \cos \alpha = \\
 &= \frac{1}{2} [I_x - I_y] \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \sim
 \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymujemy $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{x'y'}$ w zależności od I_x , I_y , I_{xy} — poprzednio rozpatrywanych, oraz KĄTA α ZMIENNEGO W DOWOLNYCH GRANICACH. Pierwsze dwie całki, jako sumy składników RDZENNIE DODATNICH $x^2 dS$, $y^2 dS$ — NIE MOGĄ BYĆ NIGDY RÓWNE ZERU, natomiast całka I_{xy} może mieć wartość zerową przy pewnej wartości kąta $\alpha = \alpha_0$. UKŁAD OSI OX', OY' DO TEJ WARTOŚCI KĄTA PRZYNALEŻNY ZOWIEMY UKŁADEM OSI GŁÓWNYCH PRZEKROJU; DLA OSI GŁÓWNYCH MOMENT ODŚRODKOWY PRZEKROJU RÓWNA SIĘ ZERU. Ta własność stanowi cechę wyróżniającą osi głównych. Dla tego układu osi:

$$\begin{aligned}
 I_{x'y'} &= \frac{1}{2} [I_x - I_y] \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0 \text{ — co daje:} \\
 \tan 2\alpha_0 &= \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \sim
 \end{aligned}$$

Wyznaczmy kąt α_0 czyniący zadość temu równaniu; prócz α_0 czynić mu będzie zadość jeszcze i $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, wtedy bowiem $\tan 2\alpha_0 = \tan(2\alpha_0 + \pi)$. Możemy zatem zawsze znaleźć dwie wartości kąta α , różniące się o $\frac{\pi}{2}$, wyznaczające prostokątny układ OSI GŁÓWNYCH przekroju. Dla tych wartości kąta α całka $I_{x'y'} = 0$. Ta wartość całki wyróżnia układ osi głównych z pośród wszystkich innych, przynależnych do różnorodnych wartości kąta α .

Istnieje ponadto druga również nader ważna własność osi głównych przekroju. Wyznamy pochodne funkcji I_x', I_y' po α . Będziemy mieli kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{dI_x'}{d\alpha} &= -2 \cos \alpha \sin \alpha I_x + 2 \sin \alpha \cos \alpha I_y - 2 \cos 2\alpha I_{xy} = [I_y - I_x] \cos 2\alpha \left\{ 4\alpha - \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} \right\} \sim \frac{dI_y'}{d\alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha I_x - 2 \cos \alpha \sin \alpha I_y + \\ &+ 2 \cos 2\alpha I_{xy} = -[I_y - I_x] \cos 2\alpha \left\{ 4\alpha - \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x} \right\}; \quad \frac{d^2 I_x'}{d\alpha^2} = \\ &2 \cos 2\alpha [I_y - I_x] + 4 \sin 2\alpha I_{xy} = 4 I_{xy} \cos \alpha \left\{ \frac{I_y - I_x}{2 I_{xy}} + 4\alpha \right\}; \quad \frac{d^2 I_y'}{d\alpha^2} = \\ &= -2 \cos 2\alpha [I_y - I_x] - 4 \sin 2\alpha I_{xy} = -4 I_{xy} \cos \alpha \left\{ \frac{I_y - I_x}{2 I_{xy}} + 4\alpha \right\}. \end{aligned}$$

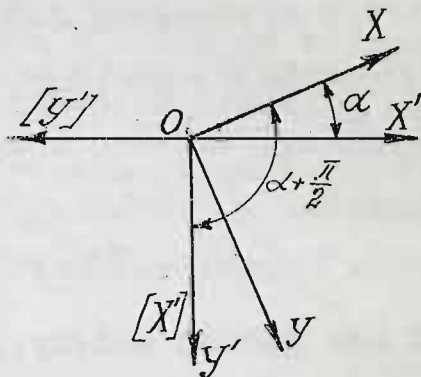
Widzimy stąd, że drugie pochodne I_x', I_y' po α są zawsze RÓŻNYCH znaków, a pierwsze STAJĄ SIĘ ZERAMI dla szczególnej wartości kąta α , czyniącej zadość równaniu:

$4\alpha = 2 I_{xy} : \{ I_y - I_x \}$. Ta wartość wyznacza układ osi głównych przekroju. Odwrotność znaków drugich pochodnych I_x', I_y' , łącznie z wartościami zerowymi pierwszych pochodnych dla kątów α_0 i $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ wyraźnie wskazują, że mamy tu do czynienia z NAJWIĘKSZOŚCIĄ i NAJMNIEJSZOŚCIĄ tych całek. Stąd wniosek:

WNIOSEK CZWARTY. MOŻEMY ZAWSZE ZNALEZĆ DWIE WARTOŚCI KĄTA α , RÓŻNIĄCE SIĘ O $\frac{\pi}{2}$, WYZNACZAJĄCE DWA KIERUNKI NAJWIĘKSZOŚCI I NAJMNIEJSZOŚCI MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU.

Obie wartości kąta α wyznaczają jeden i ten sam układ osi głównych przekroju, z tą jeno różnicą, że wartość kąta $\alpha = \alpha_0$ wyznacza DODATNIE OSIE Ox', Oy' /rys.182/ TAM, gdzie wartość kąta $\alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ odpowiednio wyznacza UJEMNĄ OŚ $O[y']$ i DODATNIĄ $O[x']$.

jak to zresztą najlepiej uwydatnia rysunek. Ponieważ jednak przemianowanie osi powoduje przemianowanie całek $I_{x'}$, $I_{y'}$ na $I_{[y']}$, $I_{[x']}$ — przeto kąt α_0 wyznaczy kierunek największości i najmniejszości tych całek w sposób odwrotny, niż kąt $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$. Widać



to również bezpośrednio z powyżej wyprowadzonych wzorów, mamy bowiem $\cos 2\alpha_0 = -\cos(2\alpha_0 + \pi)$, co powoduje zmianę znaku obu drugich pochodnych przy przejściu od wartości α_0 do $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$. Stąd mamy bezpośredni

WNIOSEK PIĄTY. NAJWIĘKSZOŚCI I NAJMNIEJSZOŚCI CAŁEK $I_{x'}$, $I_{y'}$ — WYZNACZAJĄ KIERUNKI OSI GŁÓWNYCH PRZEKROJU, TWORZĄCYCH PROSTOKĄTNY UKŁAD OSI GŁÓWNYCH PRZEKROJU, DLA KTÓRYCH $I_{x'y'} = 0$.

Widzimy więc, że te osie stanowią najwygodniejszy układ osi przekroju, bo dla nich znika $I_{x'y'}$. Dalsze badanie znacznie ułatwia tak zwana

§ 3. ŚRODKOWA ELIPSA BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU.

Przy-
puśćmy, żeśmy już wyznaczyli kierunki OSI GŁÓWNYCH OX' , OY' dla danego przekroju płaskiego. Pomijając dla prostoty znaczki mamy w ten sposób układ prostokątny osi głównych OX , OY przekroju. Dla tego układu $\bar{I}_x = \bar{I}_y = I_{xy} = 0$. Oznaczmy przez I_x , I_y wartości całek momentów bezwładności, będą to główne momenty bezwładności układu.

Dla jakiegokolwiek nowego układu osi prostokątnych Ov, Ou , przechodzących przez środek masy przekroju wyznaczamy kąt φ pomiędzy Ov o OX , a zatem $v = x \cos \varphi + y \sin \varphi$; $u = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$. Dla tych nowych osi wartość momentu bezwładności względem osi Ov będzie:
$$I_v = \int u^2 ds = \int [-x \sin \varphi + y \cos \varphi]^2 ds = -\sin^2 \varphi \int x^2 ds + \cos^2 \varphi \int y^2 ds - 2 \sin \varphi \cos \varphi \int xy ds = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi.$$
 W ten sposób możemy, znając wartość I_x, I_y momentów bezwładności dla osi głównych, wyznaczyć moment bezwładności przekroju względem dowolnej osi Ov , przeprowadzonej przez środek masy przekroju pod kątem φ do osi OX . Stąd wniosek:

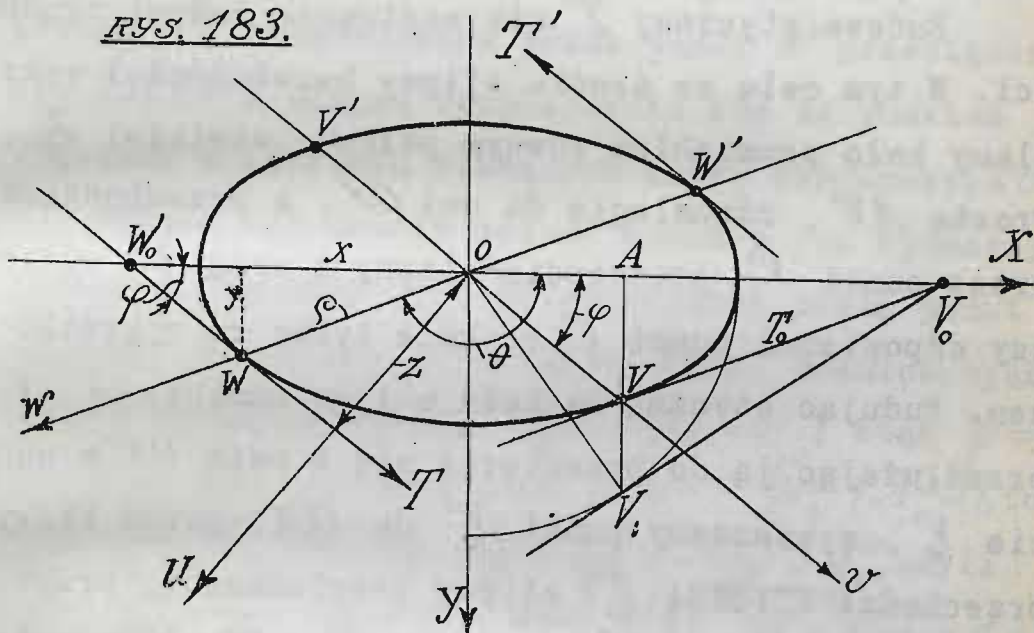
SKRAJNE WARTOŚCI MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI, PRZYNALEŻNE DO GŁÓWNYCH OSI PRZEKROJU CAŁKOWICIE OKREŚLAJĄ RODZAJ ZMIENNOŚCI MOMENTU BEZWŁADNOŚCI BRANEGO WZGLĘDEM DOWOLNEJ OSI, PRZECHODZĄCEJ PRZEZ ŚRODEK MASY PRZEKROJU.

Wyliczanie momentów podług tego wzoru jest jednak dosyć kłopotliwe, prościej daje się to skutecznie wykreślić za pomocą tak zwanej ELIPSY BEZWŁADNOŚCI ŚRODKOWEJ danego przekroju. W tym celu tworzymy pojęcie RAMIENIA BEZWŁADNOŚCI \mathcal{Z} CZYNIĄCEGO ZADOŚĆ RÓWNANIU $\mathcal{Z}^2 = I$. Stąd wzór $\mathcal{Z} = \sqrt{I/S}$, OKREŚLAJĄCY RAMIĘ BEZWŁADNOŚCI, PRZYNALEŻNE DO DANEGO MOMENTU BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU, JAKO ODCINEK RÓWNY PIERWIASTKOWI KWADRATOWEMU Z ILORAZU MOMENTU DZIELONEGO PRZEZ POŁE PRZEKROJU.

Oznaczmy przez $\ell_y = \sqrt{J_y/S}$, $\ell_x = \sqrt{J_x/S}$, oraz $\ell_y = \sqrt{J_y/S}$, a wtedy wyżej wyprowadzony wzór przyjmie nową postać $\ell_y^2 = \ell_x^2 \cos^2 \varphi + \ell_y^2 \sin^2 \varphi$. Aby go wykreślić, zbudujmy w układzie osi głównych środkową elipsę bezwładności przekroju, określoną równaniem:

$$\frac{x^2}{\ell_x^2} + \frac{y^2}{\ell_y^2} = 1.$$

RYS. 183.



Elipsę tego rodzaju wykreślamy z łatwością zważywszy, że jej PÓŁOŚ WIELKA jest ℓ_y , a MAŁA - ℓ_x . Aby za pomocą tej krzywej wyznaczyć ℓ_y dla dowolnej osi Ov przechylonej względem osi OX pod kątem φ /rys.183/ należy zbudować styczną T elipsy bezwładności, tworzącą z osią OX ten sam kąt φ co i oś Ov . Ta styczna T wyznacza punkt dotyku W elipsy o współrzędnych prostokątnych x, y lub biegunowych ρ i θ . Przedłużając promień wodzący ρ punktu WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XVII.

- 200 -

W w obie strony nieograniczenie, otrzymujemy nową oś OW , pochyloną ku osi OX pod kątem ϑ . Oś Or przecina elipsę bezwładności w punktach V i V' , oś Ou w punktach W i W' . ŚREDNICE VV' i WW' TWORZĄ, jak wiadomo PARĘ ŚREDNIC SPRZĘŻONYCH ELIPSY, będziemy więc nadal nazywali osie Or, Ow OSIAMI SPRZĘŻONYMI ELIPSY BEZWŁADNOŚCI.

Budowa stycznej I nie następuje żadnej trudności. W tym celu ze środka elipsy bezwładności wykreślamy koło promieniem równym półosi wielkiej $\frac{b}{2}$. Prosta AV , równoległa do osi OX , a przechodząca przez punkt V przecięcia elipsy z osią Or wyznaczy odpowiedni punkt V' na kole tylko co wykreślonym. Budując styczną do koła w jego punkcie V' i przedłużając ją do przecięcia się z osią OX w punkcie V_o , wyznaczamy punkt V_o na OX , przez który przechodzi STYCZNA I_o elipsy bezwładności, przynależna do punktu V . Łączymy więc V z V_o prostą I_o , prowadzimy przez środek elipsy prostą Ow równoległą do stycznej I_o i wyznaczamy punkty W i W' przecięcia się tej prostej z elipsą bezwładności przekroju. Wreszcie przez punkty W i W' prowadzimy proste równoległe do danej osi Or - obie te proste będą niewątpliwie stycznymi elipsy bezwładności, a jedna z nich będzie tworzyła kąt α z osią OX , druga kąt $180 - \alpha$. Ponieważ jednak zazwyczaj dla wszelkiej krzywej zamkniętej przyrost ku-

ków przynależnych do współrzędnych y dodatnich ustalamy w kierunku rosnących współrzędnych x , a dla łuków przynależnych do współrzędnych y - ujemnych - w kierunku malejących współrzędnych x , przeto w danym wypadku kierunek stycznych, owijających elipsę bezwładności zachodzi przeciw strzałce zegara - szukaną zatem styczną elipsy będzie prosta T , przechodząca przez punkt W przecięcia się osi OW z elipsą bezpośrednio tuż za punktem V leżący w kierunku rosnących kątów biegunowych θ .

Dzięki tej uwadze możemy obecnie już wyznaczyć równanie stycznej T , przechodzącej przez punkt $W(x, y)$ w postaci $Y - y = \operatorname{tg} \varphi (X - x)$. Różniczkując mamy z równania elipsy: $\frac{x}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 0$; stąd $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y} = \operatorname{tg} \varphi$, i ostatecznie: $Y - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y} (X - x)$, to jest inaczej jeszcze $\frac{y}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -\frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}$, czyli: $\frac{y}{a^2} + \frac{x}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Mamy więc $\frac{y}{a^2} + \frac{x}{b^2} = 1$ - równanie stycznej T . Wyznamy odległość Z tylko co wyznaczonej stycznej od środka współrzędnych.

W tym celu oznaczamy punkt przecięcia się stycznej T z osią Ox przez W_0 . Współrzędne tego punktu niech będą X_0 i $Y_0 = 0$. Ponieważ czynią one zadość równaniu stycznej, zatem $X_0 x = b^2$ skąd: $X_0 = \frac{b^2}{x}$, i przeto $Z = X_0 \sin \varphi = \frac{b^2}{x} \sin \varphi$. Stąd mamy: $Z^2 = \frac{b^4}{x^2} \sin^2 \varphi$. Ponadto wyżej mieliśmy $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, stąd $y = -\frac{b^2 x}{a^2 \operatorname{tg} \varphi}$; co podstawivszy w równanie elipsy mamy: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^2} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{x^2} = 1$, skąd otrzymujemy ostatecz-

nie: $\frac{x^2}{c_y^2} \left[c_y^2 + \frac{c_x^2}{\tan^2 \varphi} \right] = 1$. Stąd mamy $\frac{c_y^4}{x^2} = c_y^2 + \frac{c_x^2}{\tan^2 \varphi}$, a zatem: $Z^2 = \sin^2 \varphi \left[c_y^2 + \frac{c_x^2}{\tan^2 \varphi} \right] = c_x^2 \cos^2 \varphi + c_y^2 \sin^2 \varphi$. Z tylko co otrzymanego równania na mocy $c_v^2 = c_x^2 \cos^2 \varphi + c_y^2 \sin^2 \varphi$, wnioskujemy, że $Z = c_v$. Mamy więc:

RAMIĘ MOMENTU BEZWŁADNOŚCI, PRZYNALEŻNEGO DO DANEJ OSI, PRZECHODZĄCEJ PRZEZ ŚRODEK MASY PRZEKROJU, WYZNACZA SIĘ ODLEGŁOŚCIĄ TEGO ŚRODKA OD STYCZNEJ ELIPSY BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU, RÓWNOLEŻĄCEJ DO DANEJ OSI.

Jest to tak zwana PIERWSZA WŁASNOŚĆ ELIPSY BEZWŁADNOŚCI, aby otrzymać jej drugą własność, wyznaczamy współrzędne biegunowe wyżej rozpatrywanego punktu W , a mianowicie jego PROMIEŃ WODZĄCY $\rho = OW$ i KĄT BIEGUNOWY θ . Wtedy niewątpliwie $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, skąd $\tan \varphi = -\frac{c_x^2}{c_y^2} \cdot \frac{\rho \cos \theta}{\rho \sin \theta}$, co daje znów: $c_x^2 + c_y^2 \tan \varphi \tan \theta = 0$.

Mnożąc wzór tylko co otrzymany przez S mamy: $S c_x^2 + S c_y^2 \tan \varphi \tan \theta = 0$, skąd $J_x + J_y \tan \varphi \tan \theta = 0$. — Wyżej mówiliśmy, że średnice VV' i WW' wyznaczają kierunki osi sprzężonych elipsy Ov i OW , możemy więc wypowiedzieć następującą DRUGĄ jej WŁASNOŚĆ w postaci:

ZALEŻNOŚĆ $J_x + J_y \tan \varphi \tan \theta = 0$ — WYZNACZA KIERUNKI OSI SPRZĘŻONYCH ELIPSY BEZWŁADNOŚCI DANEGO PRZEKROJU. W szczególnym wypadku, gdy oba główne momenty przekroju są równe $J_x = J_y = J$ — elipsa bezwładności staje się kołem bezwładności o średnicy $2a$, gdzie $a = \sqrt{J/S}$ /rys. 184/. Tę wartość a będzie miał niewątpliwie promień wodzący ρ punktu W przez który

prorowadzić należy styczną T ,
równoległą do danej osi Ov
pochylonej ku osi Ox pod ką-
tem φ . Zarazem tutaj $Z =$
 $= \varphi = \alpha$, stąd $J_v = S \alpha^2 = J$.

Ten sam wynik można otrzy-
mać czysto analitycznie z

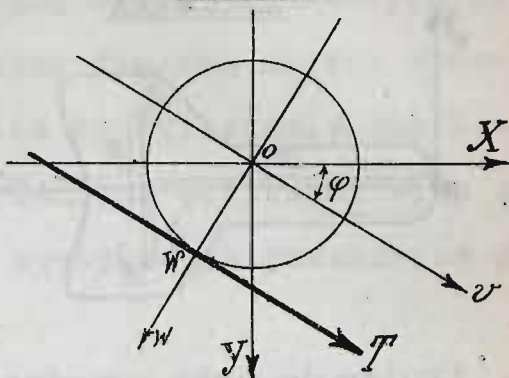
równania: $J_v = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi = J [\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi] = J$.

Stąd wniosek:

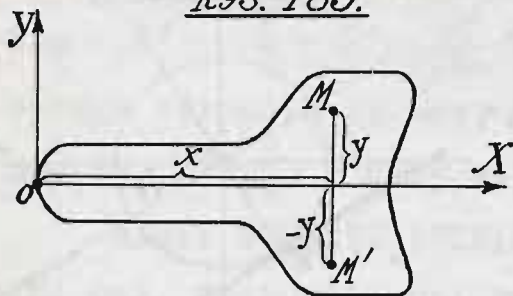
DLA PRZEKROJU, UJAWNIAJĄCEGO JEDNAKOWĄ WARTOŚĆ
OBU GŁÓWNYCH MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI, WSZYSTKIE MOMEN-
TY BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU POSIADAJĄ WARTOŚĆ STAŁĄ,
NIEZALEŻNĄ OD KIERUNKU ICH OSI, PRZECHODZĄCYCH PRZEZ
ŚRODEK MASY PRZEKROJU.

Może to mieć miejsce niewątpliwie li tylko i wy-
łącznie dla PRZEKROJÓW GEOMETRYCZNIE SYMETRYCZNYCH
WZGLĘDEM ŚRODKA, a więc dla KÓŁ, PIERSCIENI KOŁOWYCH
i WSZELKICH WIELOKĄTÓW PRAWIDŁOWYCH. W tych wypadkach
kierunek osi głównych jest niewątpliwie obojętny i
każda para osi prostokątnych może być rozpatrywana,
jako osie główne, dla każdej bowiem $J_{xy} = 0$, o czym
przekonać możemy się z łatwością, zważywszy, że każda
oś jest osią symetrii tego rodzaju przekrojów A OŚ
SYMETRII JEST ZARAZEM JEDNĄ Z OSI GŁÓWNYCH PRZEKROJU.
Aby to udowodnić rozpatrujemy /rys.185/ jakikolwiek
przekrój, posiadający oś symetrii. Tę oś nazwijmy
osią Ox , a oś Oy prowadzimy do niej prostopadle

rys. 184.



RYS. 185.



przez jakikolwiek punkt przekroju leżący na OX , a nawet i przez punkt osi OX , leżący poza przekrojem. Biorąc pod uwagę całkę $\int xy ds = \int_{xy}$ dla tych osi, i rozpa-

trując ją jako granicę sumy składników $xy ds$, zauważymy natychmiast, że $\int_{xy} = 0$. Wynika to bezpośrednio z geometrycznego określenia osi OX , jako osi symetrii, należy bowiem symetrię przekroju rozumieć jako symetrię wszystkich poszczególnych punktów przekroju względem tej osi. Możemy więc zawsze wyznaczyć dla punktu $M(x, y)$ przekroju - punkt symetryczny względem osi OX również należący do przekroju $-M(x, -y)$; każdej zatem różniczce $xy ds$ odpowiadać będzie różniczka $-xy ds$ pod znakiem całki. W ten sposób całka musi mieć wartość równą zeru.

To rozumowanie dotyczy wszelkiej całki typu :

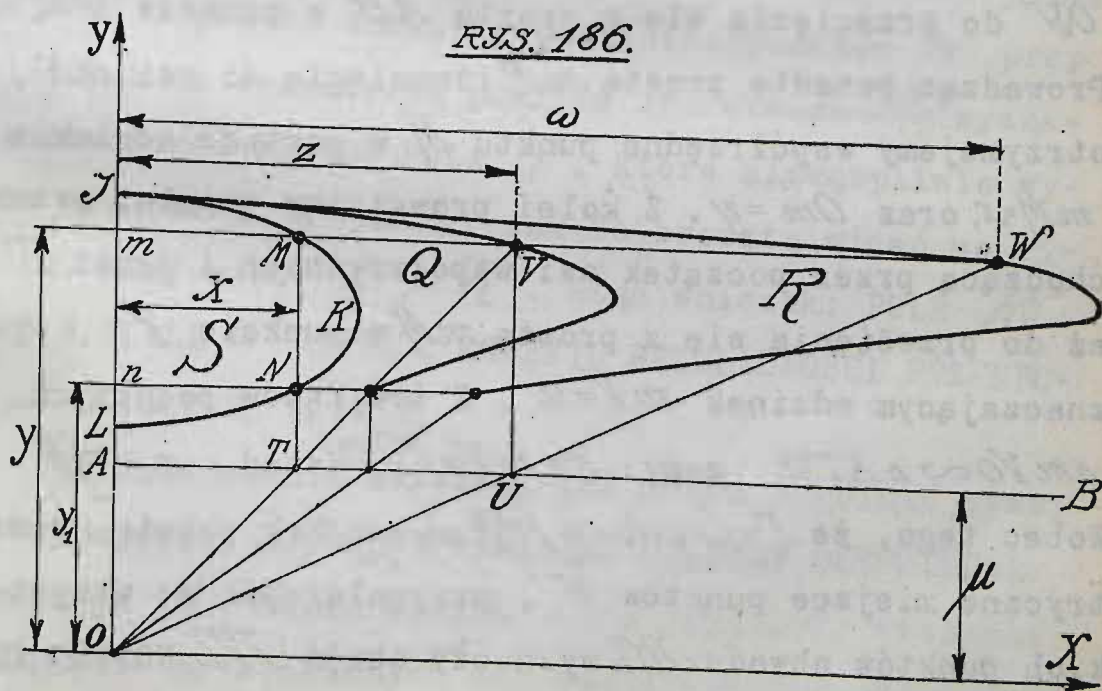
$\int x^m y^n ds$ przy n nieparzystym, różniczki bowiem $x^m y^n ds$ wyznaczone dla punktów $M(x, y)$ i $M'(x, -y)$ symetrycznych, będą różnego znaku i przy całkowaniu zginą wszystkie co do jednej na tle symetrii przekroju względem osi OX . Mamy więc $\int x^m y^n ds = 0$, co świadczy, że ŚRODEK MASY PRZEKROJU JEDNOLITEGO LEŻY NA OSI SYMETRII PRZEKROJU.

Natomiast przy n parzystym różniczki $x^m y^n ds$ wyznaczone dla punktów $M(x, y)$ i $M'(x, -y)$, będą jedna

kowego znaku i całka $\int x^m y^n dS$ brana wzdłuż całego pola będzie niewątpliwie sumą dwóch jednakowych całek tego samego typu, branych dla obu części symetrycznych przekroju. Ułatwia to wyliczanie całek przekrojów symetrycznych. Odnośne przykłady wraz z tablicą momentów częściej spotykanych przekrojów podajemy w KURSIE ĆWICZEŃ. —

Mimo to wszystko w przeważającej większości wypadków wyliczanie całek e_x, e_y, e_{xy} , nastrocza dosyć poważne trudności, a dla przekrojów bardziej złożonych jest nieraz wprost niewykonalne, gdy krzywa obwodu nie może być wyrażona równaniem analitycznym. W tym wypadku jedynie możliwem jest:

§ 4. WYLICZANIE MOMENTÓW PRZEKROJU WYKREŚLNE,
za pomocą różnorodnych metod, stanowiących przedmiot grafostatyki, dokąd odsyłamy czytelników, tutaj zaś



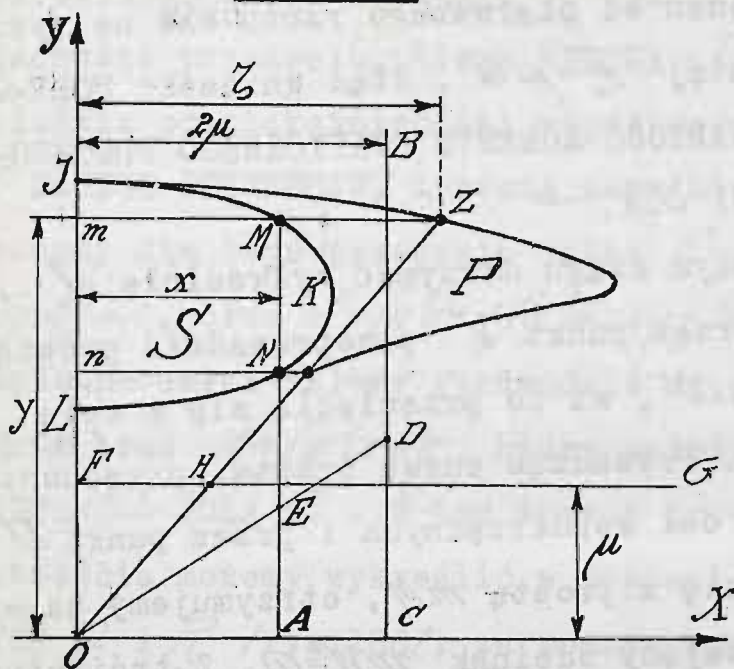
204
 podajemy nader prosty sposób NEHLS'A mnożenia
 wykreślnego w zastosowaniu do wyznaczania momentów bez
 władności przekroju. Niech KRZYWA JKL wyznacza w
 układzie prostokątnych osi współrzędnych Ox, Oy - POLE
 S DANEGO PRZEKROJU, zresztą zupełnie dowolnego. Wy-
 znaczymy dla tego przekroju całki: $F_x = \int y ds = \int y dx dy =$
 $= \int y dy \int dx$, oraz $J_x = \int y^2 ds = \int y^2 dx dy = \int y^2 dy \int dx$. Tylko co
 napisane całki należy sprowadzić do pojedynczych: $F_x =$
 $= \int y x dy$, oraz $J_x = \int y^2 x dy$, które należy brać WZDŁUŻ OB-
 WODU JKL POLA S . W ten sposób przeinaczone całki z
 łatwością możemy wykreślić w postaci NOWYCH PÓŁ WTÓR-
 NYCH Q i R /rys. 186/, za pomocą sposobu wykreślnego
 NEHLS'A. W tym celu równoległe do osi Ox budujemy pro-
 stą AB w ODLEGŁOŚCI $OA = \mu$ od początku osi współrzęd-
 nych i prowadzimy przez zupełnie dowolny punkt $M(x, y)$
 leżący na obwodzie pola S prostą równoległą do osi
 Oy do przecięcia się z prostą AB w punkcie T .
 Prowadząc ponadto prostą mM równoległą do osi Ox ,
 otrzymujemy współrzędne punktu M w postaci odcinków
 $mM = x$, oraz $Om = y$. Z kolei prowadzimy prostą, prze-
 chodzącą przez początek osi współrzędnych i przez T
 aż do przecięcia się z prostą mM w punkcie V , wy-
 znaczącym odcinek $mV = z$. Z trójkątów podobnych
 $\Delta mVO \sim \Delta ATO$, mamy: $z = mV = \frac{AT \times mO}{AO}$, stąd: $z = \frac{xy}{\mu}$.
 Wobec tego, że $F_x = \int xy dy = \mu \int \frac{xy}{\mu} dy = \mu \int z dy$, przeto geome-
 tryczne miejsce punktów V , przynależnych do wszyst-
 kich punktów obwodu JKL wyznaczy obwód JVL NOWEGO PO-

LA Q , które niewątpliwie wyraża się całką $Q = \int z dy$, jak to zresztą widać od pierwszego rzutu oka na rysunek. MAMY WIĘC tutaj $I_x = \mu Q$. Stąd wniosek: POLE Q DAJE W SKALI μ WARTOŚĆ MOMENTU STATYCZNEGO PRZĘKROJU S WZGLĘDEM OSI OX .~

Chcąc w dalszym ciągu otrzymać wykreślnie J_x , należy ponownie przez punkt V przeprowadzić prostą równoległą do osi OY , aż do przecięcia się z osią AB w punkcie U . Prowadząc znowu prostą, przechodzącą przez początek osi współrzędnych i przez punkt U aż do przecięcia się z prostą mM , otrzymujemy na mM punkt W , wyznaczający odcinek $mW = \omega$. Z trójkątów podobnych $\triangle mWO \sim \triangle AUO$, mamy: $\omega = mW = AU \times Om : OA = AU \times y : \mu = Zy : \mu$, ponieważ niewątpliwie $AU = mV = Z$. Wobec tego, że $Z = xy : \mu$, mamy ostatecznie: $\omega = y^2 x : \mu^2$. Wyżej widzieliśmy, że $J_x = \int y^2 x dy$, a zatem: $J_x = \mu^2 \int \frac{y^2 x}{\mu^2} dy = \mu^2 \int \omega dy$, i przeto znowu geometryczne ^{MIEJSCE} punktów W przynależnych do wszystkich punktów M obwodu AKL wyznaczy obwód JWL NOWEGO POLA R , które niewątpliwie wyraża się całką $R = \int \omega dy$, jak to zresztą widać na rysunku. Mamy więc $J_x = \mu^2 R$. Stąd wniosek: POLE R DAJE W SKALI μ^2 WARTOŚĆ MOMENTU BEZWŁADNOŚCI PRZĘKROJU S WZGLĘDEM OSI OX .

Na zakończenie wskaźmy, jak można uogólnić wyżej podany sposób, aby móc wyliczać MOMENTY ODSRODKOWE przekroju S . Niech krzywa LKL / rys. 187 / wyznacza w układzie prostokątnych osi współrzędnych OX, OY pole

RYŚ. 187.



danego przekroju, zresztą zupełnie dowolnego. Wyznamy dla tego przekroju całkę $J_{xy} = \int xy \, ds = \int xy \, dx \, dy = \int y \, dy \int x \, dx$.

Ta całka daje się z łatwością sprowadzić do pojedynczej całki $J_{xy} = \int \frac{y^2 x^2}{2} \, dy$, którą,

należy brać wzdłuż obwodu pola S . W ten sposób przeznaczoną całkę z łatwością można wykreślić w postaci nowego POLA P , za pomocą sposobu, przypominającego nieco sposób poprzednio przytoczony. W tym celu przez punkt M , leżący na obwodzie pola S , prowadzimy prostą MA , równoległą do osi OY i budujemy prostą BC równoległą do tejże osi OY w odległości $OC = 2\mu$ od początku osi współrzędnych. Prowadząc ponadto prostą mM równoległą do osi OX , otrzymujemy współrzędne punktu M w postaci odcinków $mM = x$, oraz $Om = y$. Z kolei na prostej BC , począwszy od punktu C odkładamy $CD = x = mM$. Łącząc D z O prostą, otrzymujemy punkt przecięcia E na prostej MA . W dalszym ciągu budujemy prostą FG równoległą do osi OX w odległości $OF = \mu$ od początku współrzędnych i na-

niej począwszy od punktu F odkładamy $FH = AE$. Pro-
wadząc prostą przechodzącą przez początek osi współ-
rzędnych i przez punkt H , aż do przecięcia się z
prostą mM , otrzymujemy na mM punkt Z , wyznacza-
jący odcinek $mZ = \zeta$. Z trójkątów podobnych:

$\triangle DCO \sim \triangle EAO$, mamy $EA = DC \times OA : OC = \frac{x^2}{2\mu}$,
ponadto, również z trójkątów podobnych $\triangle mZO \sim \triangle FHO$,
będziemy mieli $\zeta = mZ = FH \times Om : OF = AE \cdot y : \mu = \frac{x^2 y}{2\mu^2}$.

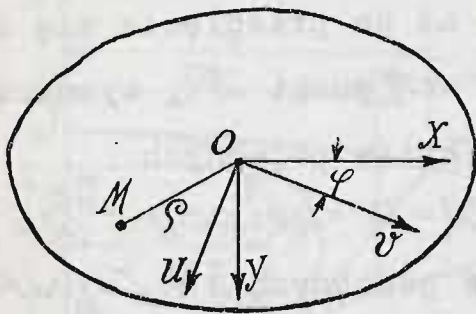
Wyżej widzieliśmy, że $J_{xy} = \int \frac{x^2 y}{2} dy = \mu^2 \int \frac{x^2 y}{2\mu^2} dy = \mu^2 \int \zeta dy$.

A zatem geometryczne miejsce punktów Z , przynależ-
nych do wszystkich punktów M obwodu JKL wyznaczy
obwód JZL NOWEGO POLA P , które niewątpliwie wyra-
zi się całką $P = \int \zeta dy$, jak to widać od pierwszego
rzutu oka na rys. 187. Mamy więc $J_{xy} = \mu^2 P$, stąd
wniosek: POLE P DAJE W SKALI μ^2 WARTOŚĆ MOMENTU OD-
ŚRODKOWEGO PRZEKROJU S WZGLĘDEM PROSTOKĄTNYCH OSI
 Ox, Oy .

W ten sposób dają się wyliczać
wykreślnie wszystkie momenty dowolnego przekroju,
ponadto możemy również wykreślnie wyznaczać kierun-
ki osi głównych, oraz wartości momentów do tych osi
przynależnych, stosując WYKREŚLNY SPOSÓB MOHR'A, bio-
rący za punkt wyjścia:

§ 5. KOŁO BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU. Przypuśćmy,
żeśmy wyznaczyli kierunki głównych osi Ox, Oy dla
danego przekroju /rys. 188/ oraz wartości głównych
momentów bezwładności J_x, J_y przekroju. Jeżeli po-
nadto wyprowadzimy ze środka masy O przekroju nową

RYS. 188.



parę osi prostokątnych ou ,
 ov i oznaczmy przez φ
 kąt pomiędzy osiami ox i
 ov , to na mocy wzorów
 przejścia dla tych no-
 wych osi będziemy mieli:

$$v = x \cos \varphi + y \sin \varphi,$$

$$u = -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \text{ skąd } J_v = \int u^2 dS = \int [x \sin \varphi + y \cos \varphi]^2 dS =$$

$$= J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi - 2J_{xy} \sin \varphi \cos \varphi = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi; \text{ ORAZ:}$$

$$J_{uv} = \int uv dS = \int [-x \sin \varphi + y \cos \varphi][x \cos \varphi + y \sin \varphi] dS =$$

$$= [J_x - J_y] \sin \varphi \cos \varphi + J_{xy} [\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi] = [J_x - J_y] \sin \varphi \cos \varphi,$$

ponieważ $J_{xy} = 0$, jako że dla osi głównych. Wzór dla
 J_u pomijamy, możemy go bowiem każdorazowo wypisać
 wprost, zmieniając we wzorze dla J_v kąt φ na $\varphi + 90^\circ$,
 co się tłumaczy samo przez się. Na mocy wzorów:

$$2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi, \text{ i } 2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi, \text{ mamy: } J_v = \frac{1}{2} [J_x + J_y] +$$

$$+ \frac{1}{2} [J_x - J_y] \cos 2\varphi, \text{ oraz } J_{vu} = \frac{1}{2} [J_x - J_y] \sin 2\varphi. \text{ Te}$$

wzory wyrażają myśl przewodnią sposobu wykreślnego
 MOHR'A, który tu podajemy:

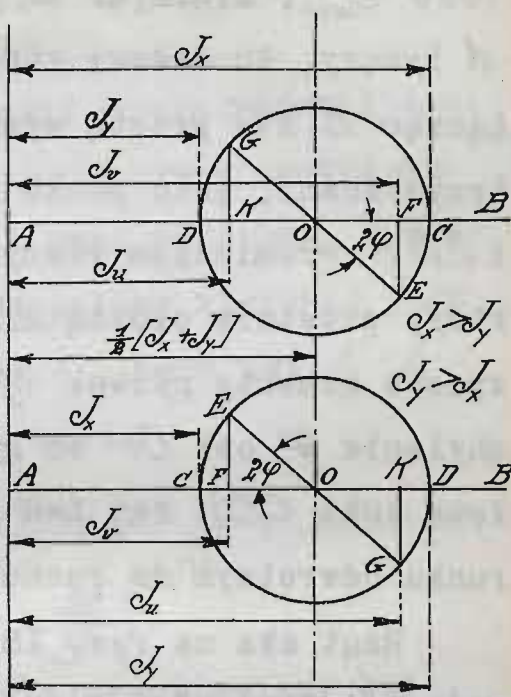
Odkładamy na prostej AB odcinki $AC = J_x$ i $AD = J_y$.
 Na różnicy tych odcinków CD , jako na średnicy bu-
 dujemy koło, przyczem niewątpliwie $AO = \frac{1}{2} [J_x + J_y]$,
 gdzie przez O oznaczyliśmy środek koła. Ponieważ
 promień koła równy jest $\frac{1}{2} CD$ zatem $R = \frac{1}{2} CD = \pm \frac{1}{2} [J_x - J_y]$,
 przyczem znak górny bierzemy wtedy, gdy $J_x > J_y$,
 a dolny gdy $J_y > J_x$. —

W obu wypadkach odkładając od punktu C' kąt $\angle COE = 2\varphi$, prowadzimy $EF \perp AB$, wyznaczając w ten sposób odcinek $AF = AO \pm OF$, gdzie $OF = R \cos 2\varphi$. Mamy zatem $AF = \frac{1}{2} [J_x + J_y] + \frac{1}{2} [J_x - J_y] \cos 2\varphi = J_u$.

Aby otrzymać wykreslnie wartość J_u , należy miasto φ brać kąt $\varphi + 90^\circ$, czyli miasto 2φ - kąt $2\varphi + 180^\circ$, inaczej mówiąc należy przeprowadzić średnicę koła EG oraz $GK \perp AB$. W ten sposób wyznaczamy odcinek $AK = J_u$. Ponadto, ponieważ $GK = FE = R \sin 2\varphi$, zatem $GK = FE = J_{uv}$.

Widzimy więc, że za pomocą tylko co zbudowanego koła bezwładności możemy otrzymać wykreslnie momenty J_v, J_u, J_{uv} , mając dane momenty główne: J_x, J_y . ODWROTNE ZAGADNIENIE również nie następuje trudności - możemy bowiem zawsze znaleźć WARTOŚCI momentów głównych J_x, J_y , oraz kierunki osi głównych, mając dane J_u, J_v, J_{uv} , dla jakiegokolwiek pary osi prostokątnych, przechodzących przez środek masy przekroju. W tym celu odkładamy na prostej AB , poczynając od punktu A odcinki $AF = J_v$, i $AK = J_u$; budujemy w punktach F i K prostopadłe do

RYS. 189.



AB i na tych prostopadłych odkładamy odcinki $EF =$
 $= HG = J_{uv}$, kierując ku górze odcinek bliżej punktu
 A leżący, ku dołowi zaś odcinek, leżący dalej od A .
 Łącząc E z G prostą wyznaczamy środek O koła wy-
 trzymałości, jako punkt przecięcia się prostych EG
 i AB . Promieniem równym $\frac{1}{2}EG$ zataczamy więc krąg,
 który przetnie prostą AB w C i D , wyznaczając w ten
 sposób momenty główne $J_x = AC$, $J_y = AD$, oraz kąt od-
 chYLENIA φ osi Ov od głównej osi Ox , mierzony po-
 łową łuku CE . Kąt ten należy odliczać od Ov w kie-
 runku odwrotnym do ruchu strzałki zegara.

Rzut oka na rys. 189 pozwoli nam wyprowadzić
 nader ciekawą własność momentów bezwładności danego
 przekroju. Ponieważ $OA = \frac{1}{2}[AC + AD] = \frac{1}{2}[AF + AG]$,
 zatem $J_x + J_y = J_v + J_u$. Ten sam wynik możemy również
 otrzymać rozpatrując jakikolwiek punkt M przekroju
 /rys. 188/. Oznaczmy promień wodzący punktu M przez
 $\rho = OM$. W układzie osi Ox, Oy będziemy mieli: $\rho^2 =$
 $= x^2 + y^2$, a w układzie jakichkolwiek innych osi $Ov,$
 Ou — $\rho^2 = v^2 + u^2$. Stąd wynika, że $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$,
 a zatem $\int x^2 ds + \int y^2 ds = \int v^2 ds + \int u^2 ds$, i ostatecznie:
 $J_x + J_y = J_v + J_u$. SUMA MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI PRZEKRO-
 JU, PRZYNALEŻNYCH DO DWUCH PROSTOPADŁYCH DO SIEBIE
 OSI WSPÓŁRZĘDNYCH, PRZECHODZĄCYCH PRZES ŚRODEK PRZE-
 KROJU, JEST WIELKOŚCIĄ STAŁĄ, NIEZALEŻNĄ OD KIERUN-
 KU TYCH OSI W PRZEKROJU.

Na tem kończymy badanie momentów, które nam da-

to najwygodniejszy układ osi, możemy więc obecnie już rozpatrzyć:

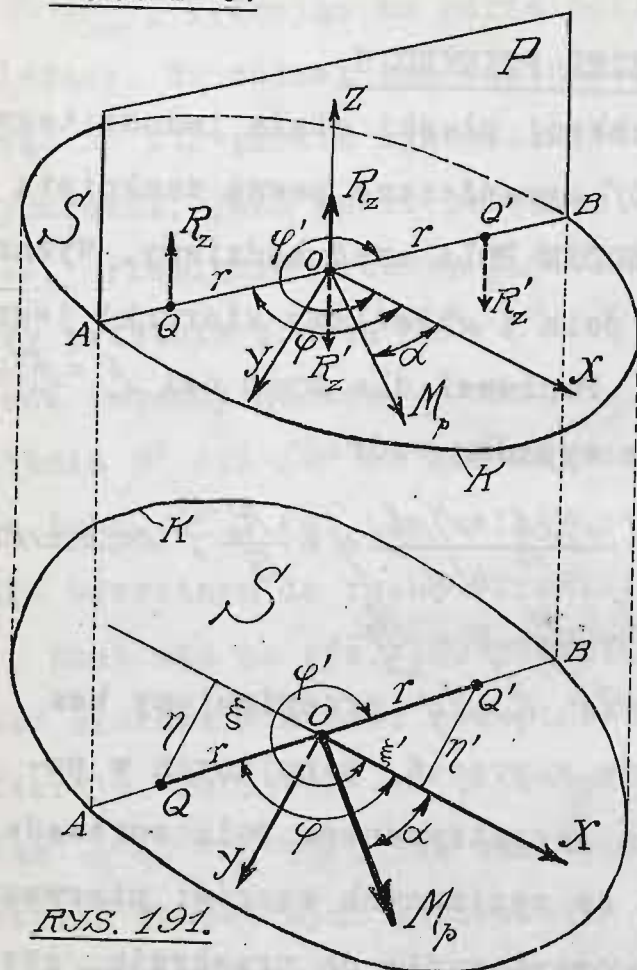
§ 6. UKŁAD NAPRĘŻEŃ PRZEKROJU.

Rozpatrujemy przekrój płaski ciała jednolitego, czyli POLE S /rys.190/ ograniczone pewną zamkniętą krzywą K , którą OBWODEM POLA zwać będziemy. Wyznaczamy środek ^(MASY) O tego pola i określamy kierunki jego osi głównych Ox, Oy . Ponieważ dla tych osi $F_x = F_y = F_{xy} = 0$, zatem w danym wypadku wzór:

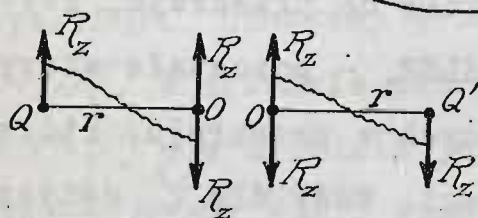
$$\begin{aligned} t_z &= \frac{M_x J_{xy} + M_y J_x}{J_{xy}^2 - J_x J_y} x - \frac{M_x J_y + M_y J_{xy}}{J_{xy}^2 - J_x J_y} y + \frac{R_z}{S}, \text{ BĘDZIE:} \\ t_z &= -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{R_z}{S}, \end{aligned}$$

a pozostałe wzory $t_x = Ax$, $t_y = Ay$ przepisujemy bez zmiany. Badanie układu naprężeń, panujących w poszczególnych punktach rozpatrywanego pola sprowadza się do badania tylko co wypisanych wzorów; pierwszy wyznacza naprężenia, prostopadłe do przekroju, czyli tak zwane NAPRĘŻENIA NORMALNE, - pozostałe wzory wyrokuja o naprężeniach leżących w przekroju, które na razie pozostawiamy bez uwagi. Wzór dla t_z dotyczy, jakśmy to wyżej zaznaczyli, wypadku E , KIEDY NA PRZEKRÓJ DZIAŁA MOMENT M_p , LEŻĄCY W PRZEKROJU I SIŁA R_z , PRZYŁOŻONA DO ŚRODKA MASY PRZEKROJU, A PROSTOPADŁA DO PRZEKROJU. Dla szczególnej wartości $R_z = 0$ a więc dla WYPADKU D , kiedy na przekrój działa li tylko moment M_p LEŻĄCY W PRZEKROJU będziemy mieli wzór $t_z = -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y = t_y$, odpowia-

RYS. 190.



RYS. 191.



RYS. 192.

dający wartości

$$\bar{\epsilon} = R_z : S = 0$$

we wzorze poprzedzającym.

Rozpoczynając badanie naprężeń $\bar{\epsilon}$, podkreślamy jeszcze raz wyrażenie, że x, y we wzorach powyższych oznaczają WSPÓŁRZĘDNE punktu M , dowolnie na danym polu obranego; M_x, M_y są to składowe momentu M_p . MO-

MENT M_p wyobrażać będziemy przez odpowiedniej długości ODCINEK OM_p , nadając mu stale taki kierunek, aby UMIEŚCIWSZY OKO W POCZĄTKU WSPÓŁRZĘDNYCH I SPOGLĄDAJĄC W KIERUNKU ODCINKA, WYOBRAŻAJĄCEGO MOMENT, WIDAĆ BYŁO OBRÓT, JAKI SIĘ STARA WYWOŁAĆ PARA MOMENTU DANEGO ZAWSZE W KIERUNKU ODWROTNYM DO RUCHU STRZAŁKI ZEGARA. W ten sposób określamy KIERUNEK ODCINKA OM_p tworzącego z dodatnim kierunkiem osi Or kąt

Stosowanie się do powyższego prawa pozwala ściśle każdorazowo wyznaczyć kąt α , oraz zasadniczo uniknąć gmatwaniny, wynikającej z rozpatrywania momentów dodatnich i ujemnych, wszystkie bowiem, podług powyższego pravidła wyznaczone momenty mogą być uważane za dodatnie, JAKO JEDNOKIERUNKOWE, to jest należące do tego samego TYPU OBROTOWEGO. ZAWSZE PRZETO NADAL PISAĆ BĘDZIEMY $M_p > 0$. ~

Pozostaje nam jeszcze tylko określić położenie osi OZ względem osi głównych OX, OY , kierunek bowiem tej osi nader ważną odgrywa rolę w danym wypadku. Mamy tu prawo: WSKAZÓWKA ZEGARA, LEŻĄCEGO POŚRODKU POŁA TARCZĄ ZWRÓCONĄ W KIERUNKU DODATNIEJ OSI OZ , SPOTYKA W SWYM RUCHU NAPRZÓD DODATNIĄ OŚ OX , A POTEM DOPIERO DODATNIĄ OŚ OY . ~

Ustaliwszy w ten sposób pojęcia zasadnicze, bierzemy pod uwagę OBCIĄŻENIE TYPU E złożone z M_p i R_z siły dodatniej lub ujemnej. Działanie momentu M_p możemy niewątpliwie zastąpić działaniem PARY SIŁ RÓWNYCH R_z . A RAMIĘ r tej pary, możemy wyznaczyć z równania $M_p = \pm r R_z$, skąd: $r = \pm M_p : R_z$. PODWÓJNY ZNAK JEST TU KONIECZNY, BO RAMIĘ MOMENTU, JAKO RDZENIE DODATNIA WIELKOŚĆ, MUSI BYĆ RÓWNE $r = \frac{M_p}{R_z}$ DLA $R_z > 0$, oraz $r = -\frac{M_p}{R_z}$ DLA $R_z < 0$, ABY ZAWSZE M_p MOGŁO BYĆ DODATNIE w myśl tego cośmy wyżej mówili.

Gdy WYPADKOWA R_z OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO JEST DODATNIA, a więc gdy działa w kierunku dodatniej osi WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XVIII.

OZ, wtedy para $M_p = R_z r$, łącznie z tą siłą daje WYPADKOWĄ R_z RÓWNIEŻ DODATNIĄ, A PRZYŁOŻONĄ DO PUNKTU Q o współrzędnych biegunowych PROMIENIU WODZĄCYM $r = M_p / R_z$ i KĄCIE BIEGUNOWYM $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$, jak to zresztą widać na rys. 191. Natomiast, gdy WYPADKOWA R_z jest UJEMNA, wtedy para $M_p = -r R_z$, łącznie z tą siłą daje wypadkową R_z również ujemną, a przyłożoną do punktu Q' o współrzędnych biegunowych - PROMIENIU WODZĄCYM $r = -M_p / R_z$ i KĄCIE BIEGUNOWYM $\varphi' = \alpha + \frac{3\pi}{2}$, jak to również widać na rys. 192. Wynika to bezpośrednio z omówień wyżej poczynionych. Niechaj płaszczyzna P ZAWIERA W SOBIE PARĘ MOMENTU M_p . W przecięciu z polem przekroju płaszczyzna P WYZNACZY ŚLAD w postaci prostej AB , przechodzącej przez środek masy przekroju, a prostopadłej do odcinka OM_p wyobrażającego dany moment. Ponieważ zawsze $OM_p > 0$, zatem patrząc na płaszczyznę P od strony odcinka momentu WIDZIMY JEJEGO PARĘ JAKO PRAWOSKRĘTNĄ.

Jedną z sił pary możemy niewątpliwie przyłożyć do punktu O , ABY PRZECIWDZIAŁAŁA WYPADKOWEJ R_z OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO. Druga siła pary, jako skierowana przeciwnie, otrzyma wobec tego KIERUNEK WYPADKOWEJ R_z , będzie więc jednego z nią znaku, a ramię pary $r = \pm \frac{M_p}{R_z}$, UŁOŻY SIĘ NA PROSTEJ AB W POSTACI ODCINKA $OQ = r$, tworzącego z ODCINKIEM OM_p KĄT $\frac{\pi}{2}$, GDY $R_z > 0$, lub też odcinka $OQ' = r$, tworzącego z OM_p KĄT $\frac{3}{2}\pi$, GDY $R_z < 0$, jak to zresztą wyraźnie widać na rysunku. W obu wypadkach OBCIĄŻENIE PRZEKROJU STANOWIĆ BĘDZIE POJEDYN -

CZA SIŁA R_z DODATNIA, LUB UJEMNA, MIMOŚRODOWO PRZYŁOŻONA DO PUNKTU Q , LUB Q' o współrzędnych biegunowych r, φ lub φ' . Wyznaczymy współrzędne prostokątne tych punktów $\xi = r \cos \varphi$ i $\eta = r \sin \varphi$. GDY $R_z > 0$, wtedy $r = M_p : R_z$, oraz $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$, a zatem $\xi = \frac{M_p}{R_z} \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{M_p}{R_z} \sin \alpha$, oraz: $\eta = \frac{M_p}{R_z} \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{M_p}{R_z} \cos \alpha$. Kiedy zaś $R_z < 0$, wtedy $r = -\frac{M_p}{R_z}$, oraz $\varphi' = \alpha + \frac{3}{2}\pi$, a zatem $\xi^2 = -\frac{M_p}{R_z} \cos(\alpha + \frac{3}{2}\pi) = -\frac{M_p}{R_z} \sin \alpha$, oraz $\eta = -\frac{M_p}{R_z} \sin(\alpha + \frac{3}{2}\pi) = \frac{M_p}{R_z} \cos \alpha$. Ponieważ ponadto niewątpliwie: $M_p \cos \alpha = M_x$, oraz $M_p \sin \alpha = M_y$, zatem W OBU WYPADKACH mamy $\xi = -M_y : R_z$, $\eta = M_x : R_z$, stąd $M_x = \eta R_z$, $M_y = -\xi R_z$. W ten sposób otrzymujemy bezpośredni wniosek: OBCIĄŻENIE PRZEKROJU SIŁĄ DOŃ PROSTOPADŁĄ, A PRZYŁOŻONĄ DO JEGO ŚRODKA, ORAZ MOMENTEM W PŁASZCZYŹNIE PRZEKROJU LEŻĄCYM, MOŻNA ZASTĄPIĆ ODPOWIEDNIM OBCIĄŻENIEM SIŁĄ POJEDYŃCZĄ, RÓWNOLEGLĄ I RÓWNĄ POPRZEDZAJĄCĄ, A PRZYŁOŻONĄ MIMOŚRODOWO DO PEWNEGO PUNKTU, LEŻĄCEGO W PŁASZCZYŹNIE PRZEKROJU. Tego rodzaju obciążenie zawsze nadal zwać będziemy OBCIĄŻENIEM MIMOŚRODOWEM SIŁĄ $R_z \leq 0$, a punkt Q przyłożenia tej siły - ŚRODKIEM NAPRĘŻEN PRZEKROJU, PRZYSZYM Q , JAKO OŚRODEK SPROWADZENIA SIŁ MOŻE NIE LEŻEĆ W PRZEKROJU. W szczególnym wypadku, gdy $R_z = 0$ mamy $\xi = \eta = \infty$ - ŚRODEK NAPRĘŻEN LEŻY W PUNKCIE NIESKOŃCZENIE DALEKIM, a więc poza przekrojem. Nie należy się temu dziwić - bowiem w danym wypadku obciążenie stanowi moment M_p jedynie, czyli para sił, którą możemy rozpatrywać jako siłę równą zero działającą na ramię

nieskończenie wielkie.

Ostatecznie zatem rozpatrywać będziemy dwa wypadki obciążenia: OBCIĄŻENIE D oraz E - które możemy zastąpić OBCIĄŻENIEM MIMOŚRODOWEM. Rozpatrujemy przede wszystkim wypadek D , jako prostszy:

§ 7. BADANIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W PRZĘKROJU PŁASKIM, OBCIĄŻONYM MOMENTEM, LEŻĄCYM W PRZĘKROJU,
sprowadza się do badania wyżej ustalonego wzoru dla $t_g = -\frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y = -\frac{M_p \sin \alpha}{J_y}x + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x}y$, NAPRĘŻENIA NORMALNEGO, występującego w punkcie $M(x, y)$ danego pola S odkształconego pod jarzmem momentu M_p , leżącego w przekroju. ~

Przedewszystkiem zauważamy, że dla POCZĄTKU WSPÓŁRZĘDNYCH, to jest dla punktu $M(0, 0)$ będzie $t_{g0} = 0$.
Stąd bezpośredni:

WNIOSEK PIERWSZY. NAPRĘŻENIE t_g MA WARTOŚĆ ZEROWĄ DLA ŚRODKA MASY DANEGO POLA.

Wyznaczając z kolei średnią wartość naprężenia t_g , mamy $t_{gs} = \frac{1}{S} \int t_g dS = -\frac{M_y}{J_y} \frac{1}{S} \int x dS + \frac{M_x}{J_x} \frac{1}{S} \int y dS$, skąd $t_{gs} = 0$, ponieważ $\int x dS = \int y dS = 0$ dla naszych osi głównych.
Stąd oczywisty:

WNIOSEK DRUGI. ŚREDNIA WARTOŚĆ NAPRĘŻEŃ t_g DANEGO POLA ZAWSZE JEST RÓWNA ZERU.

Dając naprężeniu t_g OKREŚLONĄ WARTOŚĆ t_{gi} , to jest inaczej mówiąc, uważając t_g w równaniu za wielkość stałą, mamy: $-\frac{M_p \sin \alpha}{J_y}x + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x}y = t_{gi}$. Jest to, jak widzimy, równanie prostej, którą zwać bę-

dziemy LINJĄ RÓWNEGO NAPRĘŻENIA t_g , inaczej mówiąc, otrzymujemy równanie MIEJSCA GEOMETRYCZNEGO tych wszystkich punktów $M(X, Y)$ danego pola S , w których naprężenia $t_g = t_{gi}$ są jednakowe. Stąd mamy:

WNIOSEK TRZECI. PUNKTY, W KTÓRYCH PANUJE NAPRĘŻENIE t_{gi} STAŁE, LEŻĄ WSZYSTKIE NA PROSTEJ, ZWANEJ „LINJĄ RÓWNEGO NAPRĘŻENIA t_g ”.

Ponieważ zmiennej t_g możemy nadawać coraz to inne wartości, a każdej z tych wartości odpowiadać będzie linja równego naprężenia, nachylona ku osi OX pod kątem $\beta = \arctg \left\{ \frac{M_p \sin \alpha}{J_y} : \frac{M_p \cos \alpha}{J_x} \right\}$, przeto mamy:

WNIOSEK CZWARTY. LINJE RÓWNYCH NAPRĘŻEŃ t_g PRZEKROJU, TWORZĄ RÓJ PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH, NACHYLONYCH KU GŁÓWNEJ OSI BEZWŁADNOŚCI OX PRZEKROJU POD KĄTEM $\beta = \arctg \left[\frac{J_x}{J_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha \right]$.

Rozpatrując wyrażenie dla β , widzimy, że $\operatorname{tg} \beta$ w pierwszej mierze zależy od $\operatorname{tg} \alpha$, zatem dla skrajnych wartości $\operatorname{tg} \alpha = 0$ i $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ mamy odpowiednio $\operatorname{tg} \beta = 0$ i $\operatorname{tg} \beta = \infty$ stąd:

WNIOSEK PIĄTY. NACHYLENIE LINJI RÓWNYCH NAPRĘŻEŃ KU GŁÓWNEJ OSI BEZWŁADNOŚCI OX DANEGO POLA ZALEŻY OD NACHYLENIA MOMENTU KU TEJ OSI. RÓJ JEST RÓWNOLEGŁY DO GŁÓWNEJ OSI POLA, GDY NA TEJ OSI LEŻY MOMENT DANY.

Przypuśćmy, że proste, przynależne do roju, przecinają oś OX /rys.193/ w punktach $F(X_p, 0)$.

Każdą z prostych roju $L_1, L_2, \dots, L, \dots, L_N$ możemy wobec tego wyznaczać odcietą X_F , gdyż niewątpliwie wartość naprężenia t_g dla punktu F wyliczona, panować będzie WZDŁUŻ całej linii równego naprężenia. Ta wartość będzie $t_{gi} = -\frac{M_p \sin \alpha}{\mathcal{A}} X_F$. W danym np. wypadku, gdzie najwidoczniej $\sin \alpha > 0$ największą dodatnią wartość X_{FN} otrzymamy dla skrajnej linii równego naprężenia L_N stycznej do przekroju, a najmniejszą wartość ujemną X_{F1} dla skrajnej linii równego naprężenia L_1 również stycznej do przekroju. Wartości te wyznaczają odpowiednio UJEMNĄ NAJMNIEJSZOSĆ naprężenia t_{gN} panującą wzdłuż linii skrajnej L_N i DODATNĄ NAJWIĘKSZOSĆ t_{g1} , panującą wzdłuż linii skrajnej L_1 przekroju. Pomiędzy temi skrajnymi wartościami naprężeń, t_g zmienia się w sposób linjowy jak o tem świadczy wzór dla t_{gi} . Stąd mamy niewątpliwie:

WNIOSEK SZÓSTY. WARTOŚCI NAPRĘŻENIA t_g ZMIENIAJĄ SIĘ CIĄGLE I OCZYWIŚCIE LINIJNIE W GRANICACH ŚCIŚLE OKREŚLONYCH DLA DANEGO POLA, PRZYTEM SKRAJNE WARTOŚCI DAJĄ DODATNĄ NAJWIĘKSZOSĆ I UJEMNĄ NAJMNIEJSZOSĆ NAPRĘŻEŃ POLA. —

Wyznaczanie tych skrajnych wartości w każdym poszczególnym wypadku nie nastrecza żadnych trudności. Geometrycznie naprężenia t_g przedstawić można jako odcinki AB , które otrzymamy, wykresliwszy prostą $t_{gi} = -\frac{M_p \sin \alpha}{\mathcal{A}} X_F$; skrajne odcinki tej pro-

my więc:

WNIOSEK SIÓDMY. OŚ OBOJĘTNA ZAWSZE PRZECHODZI PRZEZ ŚRODEK MASY POLA.

Ponieważ oś obojętna należy do wyżej rozpatrywanego roju prostych, przeto pochyla się ku osi OX pod kątem $\beta = \arctg \left[\frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha \right]$. Stąd $\operatorname{tg} \beta = \frac{J_x}{J_y} \operatorname{tg} \alpha$, co dowodzi, że OBA WSPÓŁCZYNNIKI KĄTOWE MAJĄ ZAWSZE TE SAME ZNAKI, stąd:

WNIOSEK ÓSMY. OŚ OBOJĘTNA I ODCINEK MOMENTU LEŻĄ ZAWSZE W TYM SAMYM KĄCIE OSI WSPÓŁRZĘDNYCH.

Tylko co wypowiedziany wniosek, traci całkowicie swą wartość wtedy, gdy moment leży na jednej z głównych osi bezwładności, a więc gdy $\operatorname{tg} \alpha = 0$, lub $\operatorname{tg} \alpha = \infty$. W tym wypadku otrzymujemy odpowiednio $\operatorname{tg} \beta = 0$ lub $\operatorname{tg} \beta = \infty$, ponieważ zaś równanie linii obojętnej, jako prostej, przechodzącej przez początek osi współrzędnych możemy napisać w postaci $Y = X \operatorname{tg} \beta$, zatem w pierwszym wypadku otrzymamy $Y = 0$, w drugim $X = 0$, stąd:

WNIOSEK DZIEWIĄTY. GŁÓWNA OŚ POLA STAJE SIĘ LINIĄ OBOJĘTNĄ, GDY NA NIEJ LEŻY MOMENT.

Wyobraźmy sobie płaszczyznę, przechodzącą przez środek masy danego pola, a prostopadłą do odcinka, wyobrażającego dany moment. Będzie to niewątpliwie płaszczyzna pary sił momentu. W przecięciu z płaszczyzną przekroju płaszczyzna pary momentu wyznaczy ŚLAD, w postaci PROSTEJ $O\Sigma$, którą OSIĄ SIŁ MOMEN-

TU lub wprost OSIĄ SIŁ zwać będziemy. Ponieważ oś sił jest prostopadła do odcinka momentu, a zatem KĄT γ , jaki OŚ SIŁ TWORZY Z OSIĄ OX JEST $\gamma = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Stąd:

$\sin \gamma = \cos \alpha$, $\cos \gamma = -\sin \alpha$. Równanie osi obojętnej po wprowadzeniu doń kąta γ otrzyma postać $\frac{\cos \gamma}{c_y} x + \frac{\sin \gamma}{c_x} y = 0$.

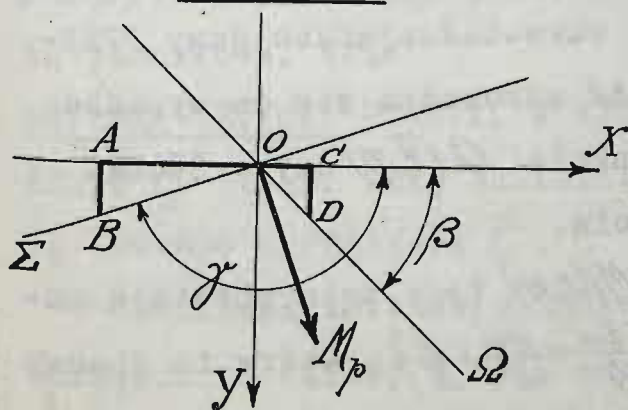
Stąd, zważywszy, że $Y = X \tan \beta$, mamy równanie:

$J_x + J_y \tan \beta \tan \gamma = 0$, uzależniające współczynnik kierunkowy osi sił od współczynnika kierunkowego osi obojętnej. Dowodzi ono, że oś obojętna i oś sił to dwie sprzężone średnice środkowej elipsy bezwładności przekroju. Stąd:

WNIOSEK DZIESIĄTY. OŚ OBOJĘTNA I OŚ SIŁ DANEGO POLA ODKSZTAŁCONEGO POD JARZMEM MOMENTU, LEŻĄCEGO W POLU, STANOWIĄ PARĘ OSI SPRZĘŻONYCH ŚRODKOWEJ ELIPSY BEZWŁADNOŚCI TEGO POLA.

Stąd łatwy sposób budowania osi obojętnej. W samej rzeczy, niech prosta $O\Sigma$ będzie daną osią sił, prostopadłą do odcinka OM_p momentu i pochyloną ku osi głównej OX pod kątem γ . Odlóżmy na części dodatniej

RYS. 194.



lub ujemnej osi OX BEZPOŚREDNIO ZA $O\Sigma$ LEŻĄCEJ odcinek $OA = J_y$. Budując w punkcie A prostopadłą $AB \perp O\Sigma$ aż do przecięcia się z osią sił $O\Sigma$ w punkcie B otrzymujemy $\tan \gamma = \frac{AB}{AO} = \frac{AB}{J_y}$;

Z kolei na osi OX odkładamy odcinek $OC=AB$, TEGO SAMEGO ZNAKU CO I AB , a wtedy budując z punktu C równoległe do osi OY odcinek $CD=J_x$ SKIEROWANY W STRONĘ ODCINKA OM_p , prowadzimy prostą OD , przechodzącą przez D . Prosta ta będzie szukaną osią obojętną przekroju. Łatwo to udowodnić. Kąt pochylenia zbudowanej tylko co osi OD czyni zadość równaniu $\tan \beta = \frac{CD}{OC} = \frac{J_x}{AB} = \frac{e_x}{AB}$; stąd, zważywszy, że kąty β i γ leżą zawsze w innych ćwiartkach mamy $\tan \beta \tan \gamma = -[AB:e_y]/[e_x:AB]$, skąd ostatecznie: $J_x + J_y \tan \beta \tan \gamma = 0$, co należało udowodnić. Z kolei rozpatrujemy WYPADEK „E” obciążenia przekroju; obciążenie to zawsze daje się sprowadzić do OBCIĄŻENIA NIEMOŚRODOWEGO. W tym celu wyznaczamy WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA na preżen $Q(\xi, \eta)$ w postaci $\xi = -M_y/R_z$ i $\eta = M_x/R_z$, określamy stąd $-M_y = R_z \xi$ i $M_x = R_z \eta$, i podstawiamy we wzór dla t_z naprężenia normalnego, wyżej wyprowadzony. Otrzymujemy w ten sposób WZÓR ZASADNICZY DLA $t_z = -\frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y + \frac{R_z}{S} = R_z \left[\frac{\xi x}{J_y} + \frac{\eta y}{J_x} + \frac{1}{S} \right]$ NAPRĘŻENIA NORMALNEGO.

§ 7. BADANIE ROZKŁADU NAPRĘŻEŃ W PRZĘKROJU PŁASKIM, OBCIĄŻONYM NIEMOŚRODOWO.

Niech więc układ sił odkształcających dany PRZĘKROJ czyli POLE S /rys.195/ sprowadza się do wypadkowej R_z , działającej w punkcie $Q(\xi, \eta)$ czyli ŚRODKU NAPRĘŻEŃ, prostopadle do pola.

W dowolnym punkcie $M(x, y)$ tego pola powstają naprężenia normalne $t_z = R_z \left\{ \frac{\xi x}{J_y} + \frac{\eta y}{J_x} + \frac{1}{S} \right\}$, które tu zbadać należy. Przedewszystkiem zauważamy, że dla początku

współrzędnych, to jest dla punktu $O(0,0)$ mamy $t_{z0} = \frac{R_z}{S}$;

Stąd bezpośredni:

WNIOSEK PIERWSZY. NAPRĘŻENIE t_z , PANUJĄCE W ŚRODKU MASY POŁA, JEST NIEZALEŻNE OD POŁOŻENIA ŚRODKA NAPRĘŻEN I RÓWNA SIĘ SILE, PRZYŁOŻONEJ DO ŚRODKA NAPRĘŻEN, DZIELONEJ PRZEZ POŁE PRZĘKROJU.

Wyznaczając z kolei średnią wartość naprężenia t_z w postaci $t_{zs} = \frac{1}{S} \int t_z dS = \frac{R_z}{S} \left\{ \frac{\xi}{c_y} \int x dS + \frac{\eta}{c_x} \int y dS + \frac{1}{S} \int dS \right\}$, otrzymujemy $t_{zs} = R_z : S$, ponieważ dla naszych osi głównych całki $\int y dS = \int x dS = 0$. Stąd:

WNIOSEK DRUGI. ŚREDNIA WARTOŚĆ NAPRĘŻEN t_z DANEGO POŁA JEST NIEZALEŻNA OD POŁOŻENIA ŚRODKA NAPRĘŻEN I RÓWNA SIĘ NAPRĘŻENIU PANUJĄCEMU W ŚRODKU MASY POŁA.

Dając naprężeniu t_z pewną określoną STAŁĄ wartość t_{zi} , to jest inaczej mówiąc, uważając t_z w równaniu za wielkość stałą, mamy: $t_{zi} = R_z \left[\frac{\xi X}{J_y} + \frac{\eta Y}{J_x} + \frac{1}{S} \right]$. Jest to, jak widzimy, RÓWNANIE PROSTEJ, którą zwać będziemy LINJĄ RÓWNEGO NAPRĘŻENIA, inaczej mówiąc otrzymujemy równanie MIEJSCA GEOMETRYCZNEGO tych wszystkich punktów $M(X,Y)$ rozpatrywanego pola, w których naprężenia $t_z = t_{zi}$ są jednakowe. Stąd:

WNIOSEK TRZECI. PUNKTY, W KTÓRYCH PANUJE PEWNE NAPRĘŻENIE t_z STAŁE, LEŻĄ WSZYSTKIE NA PROSTEJ, ZWANEJ LINJĄ RÓWNEGO NAPRĘŻENIA t_z .

Ponieważ zmiennej t_z możemy nadawać coraz to inne wartości, a każdej z tych wartości odpowiadać będzie linia równego naprężenia, nachylona ku osi OX pod ką-

tem $\beta = \arctg \left[-\frac{\xi}{J} \cdot \frac{\eta}{X} \right]$, przeto otrzymujemy:

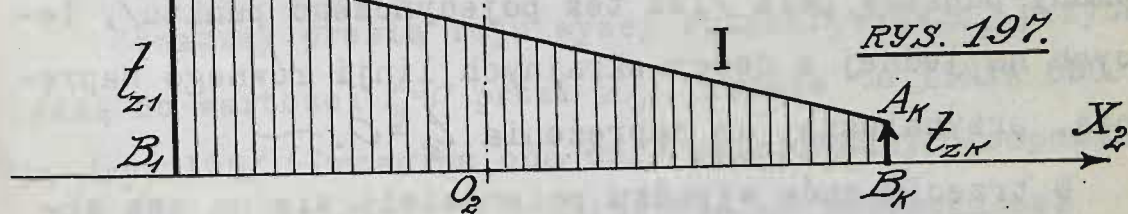
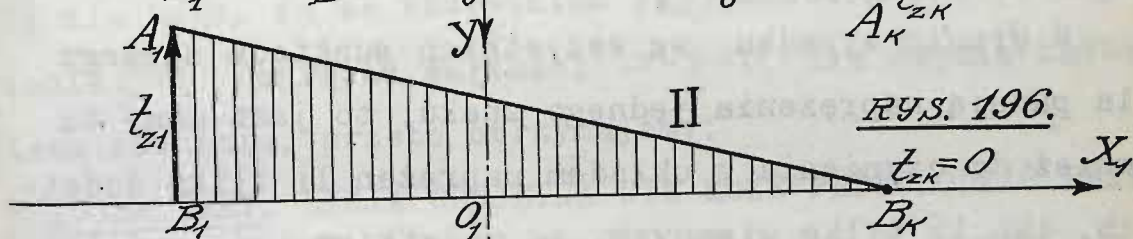
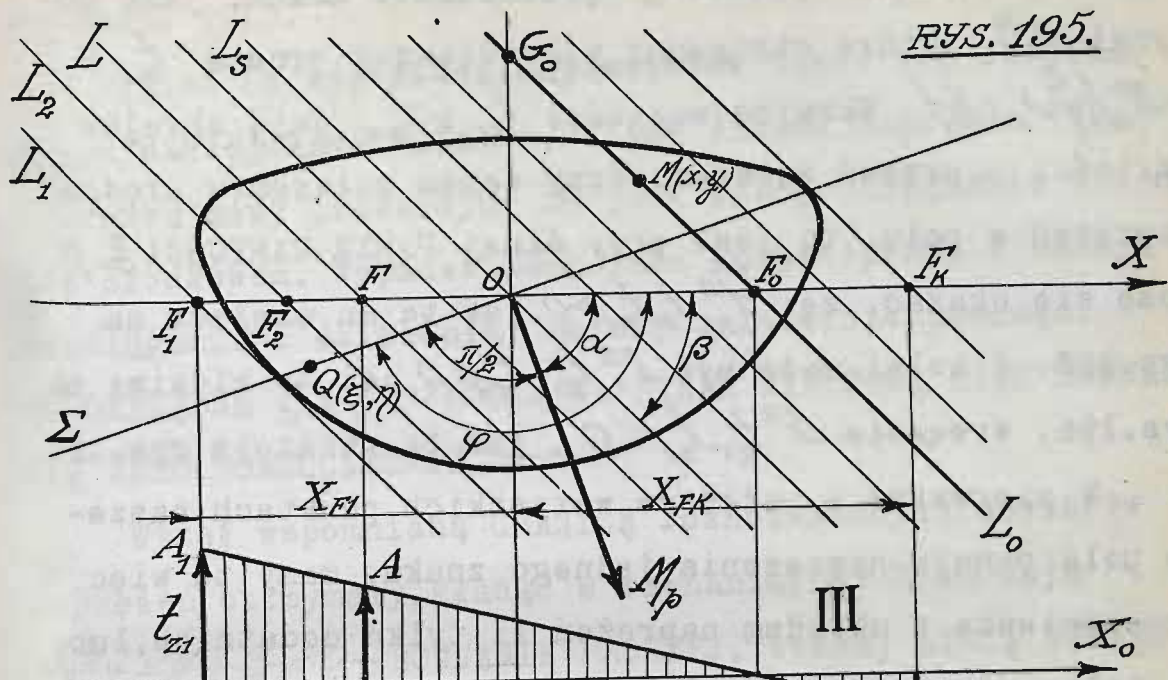
WNIOSEK CZWARTY. LINIE RÓWNYCH NAPRĘŻEŃ DANEGO POLA TWO-
RZĄ RÓJ PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH, NACHYLONYCH KU GŁÓWNEJ
OSI BEZWŁADNOŚCI OX PRZEKROJU POD KĄTEM $\beta = \arctg \left[-\frac{J_X}{J} \frac{\xi}{\eta} \right]$;

Rozpatrując wyrażenie dla β widzimy, że $\tg \beta$ w
pierwszej mierze zależy od stosunku współrzędnych $\xi : \eta$
środka naprężeń. Gdy $\xi = 0$, $\tg \beta = 0$, oraz gdy $\eta = 0$, $\tg \beta = \infty$.
Stąd mamy:

WNIOSEK PIĄTY. NACHYLENIE LINII RÓWNYCH NAPRĘŻEŃ KU
GŁÓWNEJ OSI BEZWŁADNOŚCI OX DANEGO POLA ZALEŻY OD PO-
ŁOŻENIA ŚRODKA NAPRĘŻEŃ NA TEM POLU. RÓJ JEST PROSTOPA-
DŁY DO GŁÓWNEJ OSI BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU, GDY ŚRODEK
NAPRĘŻEŃ LEŻY NA TEJ OSI.

Przypuśćmy, że proste, przynależne do roju przeci-
niają oś OX w punktach $F(X_F, 0)$. Każdą z prostych L_1 ,
 $L_2, \dots, L_i, \dots, L_N$ roju możemy wobec tego wyznaczać od-
ciętą X_F punktu F , gdyż oczywiście wartość naprężenia
 t_z dla tego punktu wyliczona, panować będzie wzdłuż
całej linii równego naprężenia.

Ta wartość będzie $t_{zi} = R_z \left[\frac{\xi}{J} X_F + \frac{1}{S} \right]$, widzimy więc,
że zmienia się ona linjowo wraz z X_F . W danym np. wypad-
ku, zakładając $R_z > 0$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$ największością będzie war-
tość naprężenia t_{z1} WYKAZANA DLA LINII L_1 , stycznej do
pola, a najdalej posuniętej w stronę ujemnych X , to
jest mającej najmniejsze X_F ujemne. Największością za-
tem będzie $t_{z1} = R_z \left[\frac{\xi}{J} X_{F1} + \frac{1}{S} \right]$, a zaś wartość $t_{zN} =$
 $= R_z \left[\frac{\xi}{J} X_{FN} + \frac{1}{S} \right]$, wyliczona dla linii stycznej do pola,



a posiadającej największą wartość X_F dodatnią - będzie najmniejszością. Stąd mamy niewątpliwie:

WNIOSEK SZÓSTY. WARTOŚCI NAPRĘŻENIA t_z ZMIENIAJĄ SIĘ CIĄGŁE I OCZYWIŚCIE LINIJNIE W GRANICACH ŚCIŚLE OKREŚLONYCH DLA DANEGO POLA.

Wyznaczenie tych skrajnych wartości w każdym poszczególnym wypadku nie następuje żadnych trudności.

Geometrycznie naprężenie t_z przedstawić można, jako odcinki AB , które otrzymamy wykreśliwszy prostą $t_{z0} = = R_z \left[\frac{\xi}{\rho_j} x_r + \frac{1}{3} \right]$. Skrajne wartości t_{z1} i t_{zN} dają skrajne wartości naprężeń zarazem. Przy danem położeniu środka naprężeń w polu, to jest przy danej PARZE WARTOŚCI ξ, η może się okazać, że: $1^o t_{z1} \cdot t_{zN} > 0$, jak to ma miejsce na rys.195. Z kolei może być $2^o t_{z1} \cdot t_{zN} = 0$, jak to widzimy na rys.196, wreszcie $3^o t_{z1} \cdot t_{zN} < 0$, jak to wskazuje rys.197.

W pierwszym wypadku we wszystkich punktach naszego pola panują naprężenia jednego znaku, mamy tu więc do czynienia z układem naprężeń li tylko dodatnich, lub li tylko ujemnych. —

W drugim wypadku we wszystkich punktach naszego pola panują naprężenia jednego znaku, to jest mamy tu również do czynienia z układem naprężeń li tylko dodatnich, lub li tylko ujemnych, za wyjątkiem jednej tylko gromady punktów pola /lub też pojedynczego punktu/, leżących na jednej z dwóch skrajnych linii równego naprężenia, przynależnej do naprężenia $t_z = 0$. —

W trzecim znów wypadku pole dzieli się na dwa obszary takie, że we wszystkich punktach pierwszego obszaru panują naprężenia jednego znaku, w drugim obszarze - naprężenia znaku przeciwnego, na granicy zaś tych dwóch obszarów panują naprężenia równe zeru. Stąd mamy:

WNIOSEK SIÓDMY. NAJWIĘKSZOŚĆ I NAJMNIEJSZOŚĆ NAPRĘŻEŃ t_z DANEGO POLA CAŁKOWICIE OKREŚLAJĄ ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ

PO CAŁEM POLU.

Tylko co wypowiedziany wniosek traci swą wartość w tym szczególnym wypadku, kiedy środek naprężeń leży w środku masy przekroju, to jest kiedy obciążenie staje się środkowem. Wypadek ten, jako rozpatrywany w teorii rozciągania i ściskania, możemy całkowicie pominąć. WSPÓŁRZĘDNE ξ i η ŚRODKA NAPRĘŻEŃ NIE MOGĄ WIĘC RÓWNAĆ SIĘ ZERU RÓWNOCZEŚNIE. —

Wyżej wspomnianą GRANICĘ różnoimiennych obszarów naprężeń otrzymamy, kładąc w równaniu $t_z = 0$, co daje :

$\frac{x\xi}{J_y} + \frac{y\eta}{J_x} + \frac{1}{S} = 0$ — RÓWNANIE PROSTEJ, zwanej LINJĄ OBOJĘTNĄ dla tego, że we wszystkich jej punktach panuje naprężenie $t_z = 0$. Ponieważ wartości $x = y = 0$ nie czynią zadość temu równaniu, przeto otrzymujemy:

WNIOSEK ÓSMY. LINJA OBOJĘTNA NIE MOŻE PRZECHODZIĆ PRZECZ ŚRODEK POLA.

Oznaczmy prostą roju wyżej rozpatrywanego, przynależną do wartości $t_z = 0$ przez L_o . Będzie to LINJA OBOJĘTNA /rys.195/. Przecina ona osie współrzędnych odpowiednio w punktach G_o i F_o odległych od początku osi współrzędnych o Y_o i X_o . Odcinki X_o i Y_o otrzymujemy czyniąc $Y = 0$ i $X = 0$ w równaniu linii obojętnej. Stąd $X_o = -\frac{J_y}{S\xi}$ i $Y_o = -\frac{J_x}{S\eta}$. Współrzędne $\xi\eta$ i X_oY_o są zawsze RÓWNYCH ZNAKÓW, stąd mamy:

WNIOSEK DZIEWIĄTY. LINJA OBOJĘTNA PRZECINA BOKI KĄTA OSI WSPÓŁRZĘDNYCH WIERZCHOŁKOWO PRZECIWLEGŁEGO KĄTOWI TYCHŻE OSI, W KTÓRYM LEŻY ŚRODEK NAPRĘŻEŃ.

Tylko co otrzymane wzory dają $\xi = -\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}_0}$ i $\eta = -\frac{\mathcal{I}_x}{\mathcal{I}_y}$.
Stąd łatwy sposób wykreślania współrzędnych ξ, η , ma-
ło zresztą używany w praktyce.

Ten wniosek traci zupełnie swą wartość, gdy śro-
dek naprężeń leży na jednej z głównych osi bezwładno-
ści. Wtedy bowiem $\xi = 0$, albo $\eta = 0$. W pierwszym wypad-
ku równanie linii obojętnej, będzie: $\frac{\mathcal{I}_y \eta}{\mathcal{I}_x} + \frac{1}{S} = 0$, a w
drugim: $\frac{\mathcal{I}_x \xi}{\mathcal{I}_y} + \frac{1}{S} = 0$. Z samego kształtu tych równań wy-
nika następujący:

WNIOSEK DZIESIĄTY. LINIA OBOJĘTNA JEST PROSTOPAD-
ŁA DO GŁÓWNEJ OSI BEZWŁADNOŚCI, GDY NA TEJ OSI LEŻY
ŚRODEK NAPRĘŻEŃ.

Aby udowodnić jeszcze jedną nader ważną własność
linii obojętnej, prowadzimy prostą $O\Sigma$, /rys.195/
przechodzącą przez środek naprężeń Q i początek współ-
rzędnych O . Tę prostą OSIĄ SIŁY R_z , lub wprost "OSIĄ
SIŁ" zwać będziemy.

Rozpatrujemy ponadto linię równego naprężenia L_s ,
przechodzącą przez środek masy przekroju, oraz linię
obojętną L_0 , którą przypuszczamy leżącą w przekroju
lub styczną doń. Obie te proste, jako należące do te-
go samego roju, są niewątpliwie równoległe, obie po-
chylają się ku osi Ox pod kątem $\beta = \arctg \left[-\frac{\mathcal{I}_x}{\mathcal{I}_y} \frac{\xi}{\eta} \right]$,
jak to zresztą widzieliśmy już wyżej. Niech będzie
jak dawniej kąt biegunowy φ środka naprężeń $Q(\xi, \eta)$.
Ponieważ niewątpliwie $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\eta}{\xi}$ zatem, wobec $\operatorname{tg} \beta = -\frac{\mathcal{I}_x}{\mathcal{I}_y} \frac{\xi}{\eta}$,
mamy $\mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \varphi = 0$, co dowodzi, że proste $O\Sigma$ i OL_s

to dwie sprzężone osie elipsy bezwładności przekroju, którą myślowo budujemy ze środka O jako środka współrzędnych. Stąd:

WNIOSEK JEDENASTY. OŚ DANEJ NORMALNEJ SIŁY, ODKSZTAŁCAJĄCEJ POLE MIMOŚRODOWO, I OŚ RÓWNOLEGLA DO LINII OBOJETNEJ — STANOWIĄ PARĘ OSI SPRZĘŻONYCH ELIPSY BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU.

Możemy więc budować linię obojętną według danej osi sił, w sposób wskazany w ustępie poprzedzającym. Nieco trudniej wyznacza się środek naprężeń, przynależny do danej linii obojętnej. Najprędzej daje się to uskutecznić rachunkowo w sposób następujący. Weźmy na danej linii obojętnej L_0 /rys.195/ dowolny punkt $M(x,y)$. Równanie linii obojętnej, przez ten punkt przechodzącej będzie $Y-y=m(X-x)$, czyli: $mX-Y+(y-mx)=0$, gdzie $m=\tan \beta$. Tylko co wypisane równanie różni się postacią jedynie od równania zwykłego $\frac{\xi}{J}X+\frac{\eta}{J}Y+\frac{1}{S}=0$ linii obojętnej, a więc współczynniki obu tych równań tożsame ściowych winny być proporcjonalne, to jest czynić winny zadość równaniom $m:\left[\frac{\xi}{J}\right]=-1:\left[\frac{\eta}{J}\right]=(y-mx):\left[\frac{1}{S}\right]$, z których otrzymujemy bezpośrednio wzory $\xi=c_J m:S(y-mx)$, $\eta=-J:S(y-mx)$, wyznaczające współrzędne środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej.

Ponieważ między współrzędnymi obranego punktu M i współrzędnymi jakiegokolwiek innego punktu $M_1(x_1,y_1)$, leżącego również na linii obojętnej, zachodzi związek $y-mx=y_1-mx_1$, przeto możemy wypowiedzieć nastę-

pujający:

WNIOSEK DWUNASTY. WSPÓŁRZĘDNE ŚRODKA NAPRĘŻEŃ, PRZYNALEŻNEGO DO DANEJ LINJI OBOJĘTNEJ, MOGĄ BYĆ WYRAŻONE W FUNKCJI WSPÓŁRZĘDNYCH JAKIEGOKOLWIEK PUNKTU, LEŻĄCEGO NA LINJI OBOJĘTNEJ ORAZ JEJ WSPÓŁCZYNNIKA KĄTOWEGO.

Rozumowanie powyższe stosuje się do wszelkiego m skończonego, gdy jednak linja obojętna jest równoległa do osi OY , wtedy $m = \infty$, a równanie tej linji obojętnej, przez punkt $M(x, y)$ przechodzącej będzie $X - x = 0$; warunki proporcjonalności współczynników będą tu $1 : [\frac{\xi}{J_y}] = 0 : [\frac{\eta}{J_x}] = -x : [\frac{1}{S}]$, skąd otrzymujemy bezpośrednio wzory $\xi = -J_y : Sx$, $\eta = 0$, określające położenie środka naprężeń dla danego poszczególnego wypadku, kiedy $m = \infty$. Wyniki powyższe można również otrzymać bezpośrednio, kładąc $m = \infty$ we wzorach ogólnych:

$$\xi = \left[\frac{J_y m}{S(y - mx)} \right]_{m=\infty} = \left[\frac{J_y}{S(\frac{y}{m} - x)} \right]_{m=\infty} = -\frac{J_y}{Sx}; \quad \eta = \left[\frac{J_x}{S(y - mx)} \right]_{m=\infty} = 0;$$

Stąd: WNIOSEK TRZYNASTY. WZORY DLA WSPÓŁRZĘDNYCH ŚRODKA NAPRĘŻEŃ NIE TRACĄ SWEJ WARTOŚCI NAWET I DLA $m = \infty$.

Teraz, kiedyśmy już udowodnili zupełną ogólność wzorów wyżej wyprowadzonych, przypuśćmy, że nieskończona ilość linji obojętnych przechodzi przez dany punkt $M(x, y)$ przekroju. Każdej z tych linji obojętnych, a raczej każdej poszczególniej wartości współczynnika m we wzorach odpowiada pewien określony środek naprężeń; ze spół tych wszystkich punktów tworzy miejsce geometryczne środków naprężeń, odpowiadających różnym wartościom

jest STYCZNĄ T obwodu w pewnym jego punkcie $M(x, y)$.
W danym wypadku współrzędne środka naprężeń $Q(\xi, \eta)$, przynależnego do linii obojętnej T będą odpowiednio:

$$\xi = \frac{Jy'}{S(y - xy')}, \quad \eta = \frac{-Jx}{S(y - xy')};$$

bowiem tutaj współczynnik kątowy danej linii obojętnej $T \sim m = \lg \beta$ wyznaczy się z równania obwodu pola, jako pochodna $\frac{dy}{dx} = y' = \lg \beta = m$ w postaci: $y' = - \frac{\frac{\partial K(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial K(x, y)}{\partial y}}$.

Rozpatrzmy cały układ linii obojętnych T , tworzących rój stycznych obwodu danego pola. Każdą z prostych tego roju w zupełności określają współrzędne x, y punktu styczności M , oraz współczynnik kątowy, to jest wartość pochodnej y' dla punktu $M(x, y)$. Do każdej linii obojętnej - stycznej obwodu, przynależy pewien określony środek naprężeń, bo krzywa obwodu, jak to wynika z samego założenia - punktów osobliwych nie posiada, każdej więc parze wartości x, y czyniącej zadość równaniu $K(x, y) = 0$ odpowiada pewna wartość pochodnej y' , a co za tem idzie i ściśle określona para wartości ξ, η współrzędnych odpowiedniego środka naprężeń. Geometrycznym miejscem wszystkich tych środków naprężeń będzie krzywa RDZENIEM PRZEKROJU danego zwana.

Równanie rdzenia otrzymamy, wyznaczając z równań określających ξ i η - ZMIENNE x, y w funkcji ξ, η , to jest wyznaczając z równań $\xi = Jy' : S(y - xy')$, $\eta = -Jx : S(y - xy')$, współrzędne $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$ podstawiając je w równanie obwodu. Tą drogą otrzymamy równanie $K(\varphi, \psi) = R(\xi, \eta) = 0$ rdzenia naszego pola.

Istnieć ono będzie zawsze, o ile tylko krzywa obwodu będzie ciągła, bez punktów osobliwych. Stąd:

WNIOSEK PIERWSZY. UKŁADOWI LINJI OBOJETNYCH, TWORZĄCYCH RÓŻ STYCZNYCH OBWODU DANEGO POLA, ZAWSZE ODPOWIADA PEWNA ŚCIŚLE OKREŚLONA KRZYWA - TAK ZWANY RDZEŃ PRZEKROJU, CZYLI GEOMETRYCZNE MIEJSCE ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, PRZYNALEŻNYCH DO POSZCZEGÓLNYCH LINJI OBOJETNYCH STYCZNYCH DO OBWODU POLA.

Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt $Q(\xi, \eta)$ rdzenia danego pola /rys.198/, przynależny do linji obojetnej

T , stycznej do obwodu danego pola w pewnym określonym punkcie $M(x, y)$. PUNKTY Q i M w ten sposób wyznaczone zowiemy ODPOWIEDNIMI.

Oznaczmy przez ω - KĄT, JAKI TWORZY z osią OX STYCZNA RDZENIA, PRZECHODZĄCA PRZEZ PUNKT Q . Różniczkując, znajdziemy ze wzorów dla ξ i η :

$$d\xi = \frac{J_y}{J} \cdot \frac{y''(y - xy') - y'(y' - y''xy)}{(y - xy')^2} dx = \frac{J_y}{J} \cdot \frac{yy'' dx}{(y - xy')^2};$$

$$d\eta = \frac{J_x}{J} \cdot \frac{y' - y'' - xy''}{(y - xy')^2} dx = - \frac{J_x}{J} \cdot \frac{xy'' dx}{(y - xy')^2}.$$

$$\text{Stąd mamy bezpośrednio: } \eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \omega = - \frac{J_x}{J_y} \frac{x}{y};$$

i możemy wypowiedzieć:

WNIOSEK DRUGI. WSPÓŁCZYNNIK KĄTOWY STYCZNEJ RDZENIA DANEGO POLA, PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DANY ŚRODEK NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCY NA RDZENIU, JEST FUNKCJĄ WSPÓŁRZĘDNYCH ODPOWIEDNIEGO PUNKTU NA OBWODZIE.

Z kolei oznaczmy przez θ KĄT, JAKI PROMIEN WODZĄCY OM /rys.198/ TWORZY z osią OX . Ponieważ

$$y:x = \operatorname{tg} \theta, \text{ zatem wobec } \eta' = \operatorname{tg} \omega = - \frac{J_x x}{J_y y}, \text{ mamy: } J_x + J_y \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \omega = 0,$$

co dowodzi, że promień wodzący $OM = \rho$ leży na średnicy elipsy bezwładności naszego pola, sprzężonej kierunkowo ze średnicą, równoległą do stycznej rdzenia pola. Stąd:

WNIOSEK TRZECI. STYCZNA RDZENIA, PRZECHODZĄCA PRZEZ DANY ŚRODEK NAPRĘŻEŃ, JEST RÓWNOLEGŁA DO ŚREDNICY CENTRALNEJ ELIPSY BEZWŁADNOŚCI DANEGO POLA, SPRZĘŻONEJ ZE ŚREDNICĄ, PRZECINAJĄCĄ OBWÓD POLA W PUNKCIE ODPOWIEDNIM.

Dzieląc wzory dla ξ i η , otrzymujemy $\psi' = \frac{\xi}{\eta} \beta = -\frac{\mathcal{J}_x \xi}{\mathcal{J}_y \eta}$. Ponieważ kąt biegunowy środka naprężeń czyni zadość równaniu $\frac{\eta}{\xi} \tan \varphi = \frac{\eta}{\xi}$ zatem mamy bezpośrednio: $\mathcal{J}_x + \mathcal{J}_y \tan \beta \tan \varphi = 0$, stąd otrzymujemy zupełnie w podobny sposób:

WNIOSEK CZWARTY. STYCZNA OBWODU JEST RÓWNOLEGŁA DO ŚREDNICY ELIPSY BEZWŁADNOŚCI POLA, SPRZĘŻONEJ ZE ŚREDNICĄ, PRZECHODZĄCĄ PRZEZ PRZYNALEŻNY DO DANEJ STYCZNEJ ŚRODEK NAPRĘŻEŃ.

Widzimy tu uderzające podobieństwo ostatnich dwóch wniosków - nie jest ono przypadkowe. Aby to udowodnić określamy z równania dla η - dwumian $\psi - x\psi' = -\mathcal{J}_x : S\eta$. Stąd $\psi - x\psi' = \psi(1 - \frac{x}{\psi}\psi') = -\mathcal{J}_x : S\eta$. Wyżej widzieliśmy, że $\eta' = -\frac{\mathcal{J}_x}{\mathcal{J}_y} \frac{x}{\psi}$, oraz $\psi' = -\frac{\mathcal{J}_x}{\mathcal{J}_y} \frac{\xi}{\eta}$; zatem: $-\mathcal{J}_x : S\eta = \psi(1 - \frac{x}{\psi}\psi') = \psi[1 - \frac{\mathcal{J}_x}{\mathcal{J}_y} \eta' \frac{\mathcal{J}_x}{\mathcal{J}_y} \frac{\xi}{\eta}]$ i ostatecznie mamy stąd $\psi = -\mathcal{J}_x : S(\eta - \xi\eta')$.

Ponieważ dalej $x = -\frac{\mathcal{J}_y}{\mathcal{J}_x} \psi\eta'$ zatem $x = \mathcal{J}_y \eta' : S(\eta - \xi\eta')$. Tylko co otrzymane wzory pozwalają ustalić:

WNIOSEK PIĄTY. POMIĘDZY ŚRODKIEM NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYM NA RDZENIU POLA, A PUNKTEM ODPOWIEDNIM OBWODU ZACHODZI WZAJEMNOŚĆ, POLEGAJĄCA NA TEM, IŻ WSPÓŁRZĘDNE PIERWSZEGO WYRAŻAJĄ SIĘ W FUNKCJI WSPÓŁRZĘDNYCH DRUGIEGO TAK, JAK WSPÓŁRZĘDNE DRUGIEGO WYRAŻAJĄ SIĘ PRZEZ WSPÓŁRZĘDNE PIERWSZEGO.

Tem się objaśnia podobieństwo dwóch wniosków poprzedzających. Sięga ono znacznie dalej nawet. Równanie stycznej w punkcie $Q(\xi, \eta)$ rdzenia danego pola jest niewątpliwie $H - \eta = \eta'(\Xi - \xi)$, gdzie Ξ, H , oznaczają bieżące współrzędne stycznej. Wobec tego, że $\eta' = -\frac{\partial x}{\partial y} \frac{x}{y}$; mamy $H - \eta = -\frac{\partial x}{\partial y} \frac{x}{y} (\Xi - \xi)$. Ponadto niewątpliwie:

$$H + \frac{\frac{\partial x}{\partial y} \frac{x}{y}}{S(y - xy')} + \frac{\frac{\partial x}{\partial y} \frac{x}{y} \Xi}{S} - \frac{\frac{\partial x}{\partial y} \frac{x}{y} \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{y}{y'}}{S(y - xy')} = 0$$

Skąd: $\frac{\Xi x}{\partial y} + \frac{H y}{\partial x} + \frac{1}{S} = 0.$

Otrzymane równanie stycznej rdzenia niczem się nie różni od równania linii obojętnej PRZYNALEŻNEJ DO ŚRODKA NAPRĘŻEŃ $M(x, y)$, leżącego na obwodzie pola. Stąd:

WNIOSEK SZÓSTY. LINJA OBOJĘTNA, PRZYNALEŻNA DO DANEGO ŚRODKA NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCEGO NA OBWODZIE POLA, STANOWI STYCZNĄ RDZENIA TEGO POLA W PUNKCIE ODPOWIEDNIM.

I w tym wniosku widzimy wzajemność zachodzącą pomiędzy rdzeniem a obwodem danego pola. Wyżej otrzymane wzory dla x, y pozwalają łatwo wyznaczyć równanie rdzenia. Niechaj jak dawniej równanie $K(x, y) = 0$ wyznacza obwód danego pola. Podstawiając w nie wartości

$$x = \frac{\partial y'}{\partial x} \cdot S(\eta - \xi \eta') = v, \quad y = -\frac{\partial x}{\partial y} \cdot S(\eta - \xi \eta') = w,$$

otrzymujemy równanie różniczkowe $K(v, w) = 0$, zawiera-

jące ξ, η, η' , któremu, oczywiście, winno CZYNIĆ ZADOSĆ RÓWNANIE RDZENIA, jako jedna z całek. Aby ją otrzymać użyjemy SPOSOBU CAŁKOWANIA PRZEZ RÓŻNICZKOWANIE. W tym celu wyznaczamy pochodne $\frac{dK(v,w)}{d\xi}$ oraz $\frac{dK(v,w)}{d\eta'}$;

$$\begin{aligned}\frac{dK(v,w)}{d\xi} &= \frac{\partial K}{\partial v} \frac{dv}{d\xi} + \frac{\partial K}{\partial w} \frac{dw}{d\xi} = \frac{\partial K}{\partial v} \frac{J}{S} \frac{\eta''(\eta - \xi\eta') - \eta'(\eta' - \eta - \xi\eta'')}{(\eta - \xi\eta')^2} + \frac{\partial K}{\partial w} \frac{J_x}{S} \\ \frac{\eta' - \eta - \xi\eta''}{(\eta - \xi\eta')^2} &= \frac{\partial K}{\partial v} \frac{J}{S} \frac{\eta\eta''}{(\eta - \xi\eta')^2} - \frac{\partial K}{\partial w} \frac{J_x}{S} \frac{\xi\eta''}{(\eta - \xi\eta')^2} = \left[\frac{\partial K}{\partial v} \frac{J}{S} \frac{\eta}{(\eta - \xi\eta')^2} - \frac{\partial K}{\partial w} \frac{J_x}{S} \frac{\xi}{(\eta - \xi\eta')^2} \right] \eta'' \\ \frac{\partial K(v,w)}{\partial \eta'} &= \frac{\partial K}{\partial v} \frac{dv}{d\eta'} + \frac{\partial K}{\partial w} \frac{dw}{d\eta'} = \frac{\partial K}{\partial v} \frac{J}{S} \frac{\eta - \xi\eta' + \xi\eta''}{(\eta - \xi\eta')^2} - \frac{\partial K}{\partial w} \frac{J_x}{S} \frac{\xi}{(\eta - \xi\eta')^2} = \frac{dK(v,w)}{d\xi} \cdot \eta''\end{aligned}$$

Stąd ostatecznie: $\frac{dK(v,w)}{d\xi} = \frac{\partial K(v,w)}{\partial \eta'} \eta'' = 0$, a zatem $\eta'' = 0$, co daje $\eta' = \alpha$.

Całka ogólna równania różniczkowego $K(v,w)=0$ posiada zatem postać $K\left(\frac{J\alpha}{S(\eta-\xi\alpha)}, \frac{J_x}{S(\eta-\xi\alpha)}\right)=0$, skąd ostatecznie, rozwiązując względem $(\eta-\xi\alpha)$ mamy $\eta-\xi\alpha=\beta$, bo właściwie mówiąc tylko co otrzymane równanie ma w rzeczywistości tylko jedną niewiadomą $\eta-\xi\alpha$. W ten sposób znaleziona całka ogólna $\eta-\xi\alpha=\beta$ wyraża oczywiście RÓJ PROSTYCH, w którym stałe całkowania α i β odgrywają rolę parametrów.

Z łatwością możemy zdać sobie sprawę, że rój ten stanowi UKŁAD STYCZNYCH RDZENIA. W samej rzeczy funkcja $K(x,y)$ staje się zerem tylko i wyłącznie dla współrzędnych x, y punktów, leżących na obwodzie pola ponieważ zaś mamy $K(v,w)=0$, przeto koniecznie musi zachodzić równości $x=v=J\alpha:S(\eta-\xi\alpha)$, oraz $y=w=-J_x:S(\eta-\xi\alpha)$, skąd mamy bezpośrednio $\eta-\xi\alpha=-\frac{J_x}{S_y}=\beta$, oraz dzieląc $-\frac{J_x}{J_y} \frac{x}{y}=\alpha$, i ostatecznie:

$$\eta-\xi\alpha-\beta=\eta+\frac{J_x}{J_y} \frac{x\xi}{y}+\frac{J_x}{S_y}=0, \text{ a zatem } \frac{\eta y}{J_x}+\frac{\xi x}{J_y}+$$

$+\frac{1}{S}=0$. Ogólną całką rozpatrywanego równania różniczkowego jest więc równanie: $\frac{\xi x}{J_y} + \frac{\eta y}{J_x} + \frac{1}{S}=0$, wyrażające RÓJ STYCZNYCH RDZENIA; w równaniu tym ξ i η są współrzędnymi bieżącymi, a zmienna x odgrywa rolę parametru, zmieniającego się nagle w pewnych, ściśle określonych granicach wraz z y , zależnym od x na zasadzie równania $K(x,y)=0$. W ten sposób otrzymane równanie jest tożsamościowe z wyprowadzonym wyżej RÓWNANIEM STYCZNEJ RDZENIA. Ponieważ więc równanie samego rdzenia nie daje się otrzymać z całki ogólnej równania $K(v,w)=0$ DROGĄ ZMIANY STAŁEJ CAŁKOWANIA, a mimo to jednak czynić musi mu zadość, przeto RÓWNANIE RDZENIA OTRZYMAMY JAKO CAŁKĘ OSOBLIWĄ, RUGUJĄC η' z RÓWNAŃ $K(v,w)=0$, oraz $\frac{\partial K(v,w)}{\partial \eta'}=0$, co da szukane RÓWNANIE $R(\xi,\eta)=0$ RDZENIA DANEGO POLA.

Tą samą drogą również otrzymujemy RÓWNANIE OWIJAJĄCEJ ROJU PROSTYCH $\eta-\xi\alpha=\beta$, które to proste na zasadzie wniosku szóstego, możemy uważać za LINJE OBOJETNE, PRZYNALEŻNE DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA OBWODZIE POLA. Stąd mamy:

WNIOSEK SIÓDMY. RDZEŃ DANEGO POLA STANOWI OWIJAJĄCĄ ROJU LINJI OBOJETNYCH, PRZYNALEŻNYCH DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA OBWODZIE POLA.

Podany tylko co sposób wyznaczania rdzenia szybko prowadzi zazwyczaj do celu. W samej rzeczy szukamy na przykład równania rdzenia danego pola, którego obwód wyraża się równaniem drugiego stopnia

$K(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0$. Kładąc w tem równaniu $x=v, y=w$ i mnożąc je przez $S^2(\eta - \xi\eta')^2$, otrzymujemy $K(v, w) = N\eta'^2 - 2M\eta' + R = 0$, gdzie $N = aJ_x^2 - 2dS_xJ_x\xi + gS^2\xi^2$; $M = bJ_xJ_y - dS_xJ_y\eta + fS_xJ_x\xi + gS^2\xi\eta$; $R = cJ_y^2 - 2fS_xJ_y\eta + gS^2\eta^2$. — . Poza tem różniczkując bezpośrednio mamy: $\frac{\partial K(v, w)}{\partial \eta'} = 2N\eta' - 2M = 0$, Skąd:

$$\eta' = M : N. \sim$$

Zatem równanie rdzenia będzie: $R(\xi, \eta) = NM^2 : N^3 - 2M^2 : N + R = R - M^2 : N = 0$, i ostatecznie :

$$M^2 - RN = S_x^2 J_y^2 (f^2 - cg)\xi^2 + 2S_x^2 J_x J_y (bg - df)\xi\eta + S_x^2 J_y^2 (d^2 - ga)\eta^2 + 2S_x J_x^2 J_y (cd - bf)\xi + 2S_x J_x J_y^2 (af - bd)\eta + J_x^2 J_y^2 (b^2 - ac) = 0.$$

Otrzymany tutaj wzór pozwala wypowiedzieć:

WNIOSEK ÓSMY. RDZEŃ POLA, OGRANICZONEGO KRZYWĄ DRUGIEGO STOPNIA JEST TEŻ KRZYWĄ DRUGIEGO STOPNIA.

Z kolei niech teraz znowu będzie dane równanie $R(\xi, \eta) = 0$ RDZENIA POLA, ograniczonego KRZYWĄ $K(x, y) = 0$. Kładąc w równaniu $R(\xi, \eta) = 0$, wartości $\xi = m = J_y y' : S(y - xy')$, oraz $\eta = n = -J_x : S(y - xy')$, otrzymujemy równanie różniczkowe $R(m, n) = 0$, któremu niewątpliwie winno czynić zadość równanie obwodu pola, jako jedna z całek. Równanie $R(m, n) = 0$ rozwiązane zupełnie tak, jak to wyżej robiliśmy, daje jako ogólną całkę równanie $R\left\{\frac{J_y a}{S(y - xa)}, \frac{J_x}{S(y - xa)}\right\} = 0$, któremu odpowiada RÓJ STYCZNYCH OBWODU POLA.

Ponieważ najoczywściej równanie obwodu, nie da się otrzymać z całki ogólnej przez nadanie stałej

całkowania wartości szczególnej, a mimo to jednak czynić musi mu zadość, przeto równanie obwodu danego pola otrzymujemy, jako całkę osobliwą równania $R(m,n)=0$, RUGUJĄC y' Z RÓWNAŃ $R(m,n)=0$ oraz $\frac{\partial R(m,n)}{\partial y'}=0$. Tą samą zupełnie drogą otrzymujemy RÓWNIANIE OWIJAJĄCEJ ROJU PROSTYCH, STANOWIĄCYCH UKŁAD STYCZNYCH OBWODU DANEGO POLA, które to styczne przynależą, jako linje obejmne do środków naprężeń, leżących na rdzeniu pola. Stąd:

WNIOSEK DZIEWIĄTY. OBWÓD DANEGO POLA STANOWI OWIJAJĄCĄ ROJU LINJI OBOJĘTNYCH, PRZYNALEŻNYCH DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA RDZENIU POLA.

Wniosek ten można również wyprowadzić wprost na zasadzie wzajemności pomiędzy obwodem, a rdzeniem, biorąc za punkt wyjścia wniosek poprzedzający.

Dotychczas rozpatrywaliśmy jedynie krzywe obwodów pozbawione punktów osobliwych; obecnie należy rozszerzyć nieco obszar badań biorąc pod uwagę część obwodu danego pola ZŁOŻONĄ Z DWUCH ŁUKÓW AM i MB krzywych nie posiadających punktów osobliwych, a zbiegających się pod kątem w punkcie $M(x,y)$, który PUNKTEM ZESPOLENIA zwać będziemy.

Styczne obu gałęzi AM, MB tworzą w punkcie zespolenia kąt α różny od zera. Rozpatrując rój stycznych tej części obwodu, z łatwością dojdziemy do wniosku na zasadzie już znanych własności, że (Rys. 199/

1-o. KAŻDEMU ŁUKOWI KRZYWEJ OBWODU, A WIĘC ŁUKOM

AM i MB ODPOWIADAJĄ RÓWNIEŻ ŚCIŚLE OKREŚLONE ŁUKI $A'M_A$ i $M_B B'$ (rys. 200) RDZENIA.

2-o. NIESKOŃCZONEJ LICZBIE RZEKOMYCH STYCZNYCH, TO JEST PROSTYCH ZAWARTYCH WEWNĄTRZ KĄTA α , A PRZECHODZĄCYCH PRZEZ PUNKT ZESPOLENIA ODPOWIADA PROSTA T , STANOWIĄCA ODPOWIEDNIĄ CZĘŚĆ RDZENIA I ZWANA PROSTĄ ZESPOLENIA. TA PROSTA STANOWI WSPÓLNĄ STYCZNĄ WYŻEJ WSPOMNIANYCH DWUCH ŁUKÓW RDZENIA, RÓWNANIE BOWIEM

RYŚ. 199.

RYŚ. 200.

$$\frac{Ex}{J} + \frac{Hy}{J} + \frac{1}{S} = 0$$

WYZNACZA ZARÓWNO

PROSTĄ ZESPOLE-

NIA T , JAKO TEŻ

I STYCZNE ŁUKÓW

$A'M_A$ i $M_B B'$ W PUNK-

TACH M_A i M_B ,

DLA KTÓRYCH PUNKT M JEST ODPOWIEDNIM PUNKTEM OBWODU.

Stąd mamy:

WNIOSEK DZIESIĄTY. GDY JAKAKOLWIEK CZĘŚĆ OBWODU

POLA SKŁADA SIĘ Z DWUCH GAŁĘZI ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W

PUNKCIE ZESPOLENIA, TO ODPOWIEDNIA CZĘŚĆ RDZENIA BĘ-

DZIE ZŁOŻONA Z DWUCH ŁUKÓW PRZYNALEŻNYCH DO OWYCH

KRZYWYCH GAŁĘZI OBWODU, POŁĄCZONYCH ZE SOBĄ PROSTĄ

ZESPOLENIA STYCZNĄ OBU ŁUKÓW. PROSTA ZESPOLENIA STA-

NOWI ODPOWIEDNIK PUNKTU ZESPOLENIA.

Zupełnie w podobny sposób możemy udowodnić na-
stępujący odwrotny:

WNIOSEK JEDENASTY. GDY JAKAKOLWIEK CZĘŚĆ RDZE-

NIA POLA SKŁADA SIĘ Z DWUCH KRZYWYCH ŁUKÓW, POŁĄCZONYCH ZE SOBĄ PROSTĄ ZESPOLENIA, ICH WSPÓLNĄ STYCZNĄ TO ODPOWIEDNIA CZĘŚĆ OBWODU POLA BĘDZIE ZŁOŻONA Z DWUCH KRZYWYCH ŁUKÓW, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W PUNKCIE ZESPOLENIA.

Na mocy prawa wzajemności obwodu i rdzenia mamy ponadto:

WNIOSEK DWUNASTY. GDY JAKAKOLWIEK CZĘŚĆ RDZENIA SKŁADA SIĘ Z DWUCH KRZYWYCH GAŁĘZI, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W PUNKCIE ZESPOLENIA, TO ODPOWIEDNIA CZĘŚĆ OBWODU BĘDZIE ZŁOŻONA Z DWUCH ŁUKÓW PRZYNALEŻNYCH DO OWYCH KRZYWYCH GAŁĘZI RDZENIA, POŁĄCZONYCH ZE SOBĄ PROSTĄ ZESPOLENIA STYCZNĄ OBU ŁUKÓW. PROSTA ZESPOLENIA STANOWI ODPOWIEDNIK PUNKTU ZESPOLENIA.

Wniosek odwrotny również jest słuszny:

WNIOSEK TRZYNASTY. GDY JAKAKOLWIEK CZĘŚĆ OBWODU POLA SKŁADA SIĘ Z DWUCH KRZYWYCH ŁUKÓW, POŁĄCZONYCH ZE SOBĄ PROSTĄ ZESPOLENIA STYCZNĄ DO TYCH ŁUKÓW, TO ODPOWIEDNIA CZĘŚĆ RDZENIA TEGO POLA BĘDZIE ZŁOŻONA Z DWUCH KRZYWYCH ŁUKÓW, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W PUNKCIE ZESPOLENIA.

Tylko co wypowiedziany wniosek pozwala zbudować rdzeń dla dowolnego przekroju, WSZELKI BOWIEM OBWÓD POLA SKŁADA SIĘ Z POSZCZEGÓLNYCH KRZYWYCH ŁUKÓW, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W PUNKTACH ZESPOLENIA, LUB POŁĄCZONYCH PROSTEMI ZESPOLENIA. Weźmy więc pod uwagę jakikolwiek przekrój, ograniczony krzywą K stanowiącą OBWÓD jego

poła i wyznaczmy elipsę bezwładności E i rdzeń R przekroju. Współrzędne jakiegokolwiek punktu na obwodzie czynić więc będą zadość równaniu $K(x,y)=0$ OBWODU, współrzędne punktów rdzenia - równaniu $R(x,y)=0$ RDZENIA, a współrzędne jakiegokolwiek punktu na elipsie bezwładności - jej równaniu: $\frac{x^2}{\bar{J}_y} + \frac{y^2}{\bar{J}_x} = 1$, które, dzieląc przez pole S przekroju przepisujemy w postaci $\frac{x^2}{\bar{J}_y} + \frac{y^2}{\bar{J}_x} - \frac{1}{S} = 0$, wiemy bowiem, że $\bar{J}_x = \bar{J}_y = S$, oraz $\bar{J}_y = \bar{J}_x = S$.

Wyznaczmy ponadto jakąkolwiek OŚ SIŁ $O\Sigma$, a na niej dowolny ŚRODEK NAPRĘŻEŃ Q o współrzędnych prostokątnych ξ, η i biegunowych - promieniu wodzącym $OQ = r$, i kącie biegunowym φ . Linja obojętna przynależna do tego środka naprężeń wyznaczy się równaniem: $\frac{\xi X}{\bar{J}_y} + \frac{\eta Y}{\bar{J}_x} + \frac{1}{S} = 0$. Oznaczmy przez M z odpowiednim znaczkim - punkt przecięcia się linii obojętnej z osią sił $O\Sigma$. Współrzędne tego punktu będą niewątpliwie czyniły zadość równaniu linii obojętnej oraz równaniu osi sił, które wypiszemy w postaci $Y = mX$, gdzie $m = \tan \varphi$.

Niech więc X, Y z odpowiednim znaczkim oznaczają współrzędne prostokątne punktu M , pozatem θ niech oznacza jego kąt biegunowy, a $\rho = OM$ - promień wodzący.

Mamy więc niewątpliwie $\eta = m\xi$, gdzie $m = \tan \varphi$, a zatem $Y\eta = m^2 X\xi$ i ostatecznie na mocy równania linii obojętnej:

$$\frac{X\xi}{\bar{J}_y} + \frac{X\xi m^2}{\bar{J}_x} + \frac{1}{S} = X\xi \left[\frac{1}{\bar{J}_y} + \frac{m^2}{\bar{J}_x} \right] + \frac{1}{S} = 0,$$

co daje nam bezpośrednio:

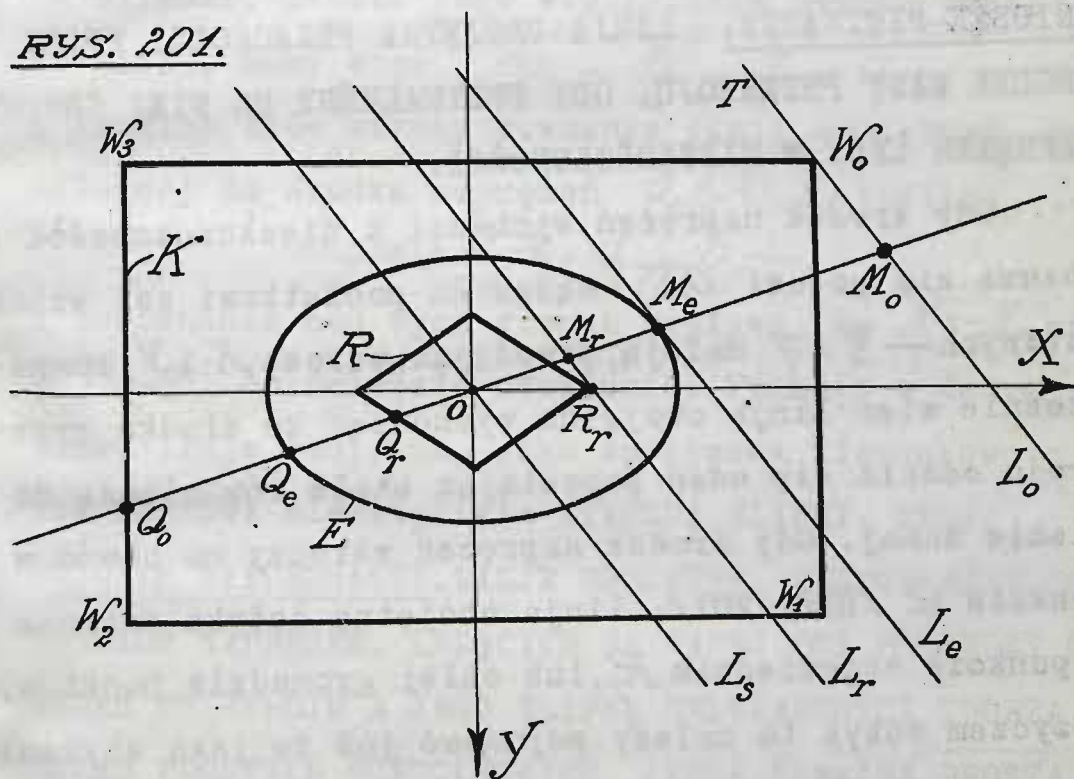
$$X\xi = -\frac{1}{S[\frac{1}{J_x} + \frac{m^2}{J_y}]} = -\frac{J_x J_y}{S[J_x + m^2 J_y]} = \alpha = \text{STAŁEJ};$$

$$Y\eta = m^2 X\xi = -\frac{m^2 J_x J_y}{S[J_x + m^2 J_y]} = \beta = \text{STAŁEJ};$$

W dalszym ciągu mamy $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{\xi^2 + \xi^2 m^2} = \xi \sqrt{1+m^2}$,
oraz $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{X^2 + m^2 X^2} = X \sqrt{1+m^2}$, stąd:

$$r\rho = X\xi(1+m^2) = -\frac{J_x J_y (1+m^2)}{S[J_x + m^2 J_y]} = C = \text{STAŁEJ}.$$

RYS. 201.



Z równań tylko co otrzymanych możemy wyprowadzić daleko sięgające wnioski o wzajemnem położeniu środków naprężeń i linii obojętnych przekroju. Przede wszystkim zważmy, że gdy środek naprężeń Q posuwa się po osi $O\Sigma$ — przynależna doń linja obojętna również zmienia położenie, pozostając równoległą do osi elipsy bezwładności przekroju kierunkowo

sprężonej, z daną osią sił. Stąd:

WNIOSEK CZTERNASTY. LINJE OBOJETNE, PRZYNALEŻNE DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA DANEJ OSI PRZEKROJU, TWORZĄ RÓJ PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH DO OSI ELIPSY BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU, SPRĘŻONEJ Z DANĄ OSIĄ.

Ponieważ $X = a : \xi$, $Y = b : \eta$, zatem w wypadku OBCIĄŻENIA „D”, GDY ŚRODEK NAPRĘŻEŃ leży nieskończenie daleko, to jest gdy $\xi = \eta = \infty$, mamy $X = Y = 0$. Stąd:

WNIOSEK PIĘTNASTY. LINJA OBOJETNA PRZECHODZI PRZEZ ŚRODEK MASY PRZEKROJU, GDY PRZYNALEŻNY DO NIEJ ŚRODEK NAPRĘŻEŃ LEŻY W NIESKOŃCZONOŚCI.

Gdy środek naprężeń wychodzi z nieskończoności i posuwa się po osi $O\Sigma$, dążąc ku początkowi osi współrzędnych — ξ i η maleją, powodując wzrost X i Y równocześnie więc linja obojętna wychodząc ze środka przekroju oddala się odeń pozostając stale równoległą do siebie samej. Gdy środek naprężeń wkroczy na obwód w punkcie Q /RYS. 201/, linja obojętna dotyka rdzenia w punkcie odpowiednim R_r , lub całej gromadzie punktów, przyczem dotyk tu należy pojmować już to jako stykanie się, już to jako wspólność punktu bez wyraźnej styczności w zwykłym tego słowa znaczeniu, jak to właśnie ma miejsce na RYS. 201. Stąd:

WNIOSEK SZESNASTY. LINJE OBOJETNE, PRZYNALEŻNE DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA DANEJ OSI POZA PRZEKROJEM, TWORZĄ UKŁAD PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH; JEDNA SKRAJNA PROSTA TEGO UKŁADU PRZECHODZI PRZEZ POCZĄTEK OSI WSPÓŁ-

RZĘDNYCH, DRUGA DOTYKA RDZENIA PRZEKROJU.

Gdy z kolei środek naprężeń porzuca obwód i dąży ku elipsie bezwładności przekroju, przynależna doń linja obojętna oddala się jeszcze bardziej; gdy środek naprężeń wkroczy na elipsę bezwładności w punkcie $Q_e(X_e, Y_e)$ - linja obojętna staje się styczną do tej elipsy w punkcie $M_e(-X_e, -Y_e)$ ŚREDNICOWO PRZECIWLĘGŁYM. Łatwo można to udowodnić. Ponieważ punkt Q_e leży na elipsie, przeto jego współrzędne czynią zadość jej równaniu, mamy więc

$$\frac{X_e^2}{J_y} + \frac{Y_e^2}{J_x} - \frac{1}{S} = 0. \sim$$

Z drugiej znów strony równanie linji obojętnej, przynależnej do środka naprężeń $Q_e(X_e, Y_e)$ będzie:

$$\frac{X X_e}{J_y} + \frac{Y Y_e}{J_x} + \frac{1}{S} = 0. \sim$$

Z porównania obu tych równań wypływa, że $X = -X_e$ oraz $Y = -Y_e$, co należało udowodnić. Ponadto w danym wypadku linja obojętna, jako sprzężona kierunkowo z osią sił STANOWI niewątpliwie STYCNĄ ELIPSY. Stąd:

WNIOSEK SIEDEMNASTY. LINJE OBOJĘTNE, PRZYNALEŻNE DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA DANEJ OSI POMIĘDZY OBWODEM PRZEKROJU A JEGO ELIPSĄ BEZWŁADNOŚCI, TWORZĄ UKŁAD PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH. JEDNA SKRAJNA PROSTA TEGO UKŁADU DOTYKA DO RDZENIA PRZEKROJU - DRUGA JEST STYCNĄ ELIPSY BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU W PUNKCIE PRZECIĘCIA SIĘ ELIPSY Z OSIĄ.

Widzimy stąd, że rdzeń przekroju zawarty jest całkowicie wewnątrz elipsy bezwładności przekroju, ta zaś w całości leży wewnątrz obwodu pola przekroju.

Gdy więc z kolei środek naprężeń porzuca elipsę bezwładności i dąży ku krzywej rdzenia, przynależna doń linja obojętna jeszcze się bardziej oddala; gdy środek naprężeń wkroczy na rdzeń w punkcie Q , linja obojętna dotknie obwodu, t.j. stanie się styczną obwodu, lub przejdzie przez jego punkt bez wyraźnej styczności, jak to ma miejsce w rozpatrywanym wypadku. W każdym razie linja obojętna będzie miała li tylko JEDEN PUNKT WSPÓLNY Z OBWODEM, co wyrażamy pojęciem "dotyka do obwodu" w odpowiednim punkcie W_0 . Stąd:

WNIOSEK OSIEMNASTY. LINJE OBOJĘTNE, PRZYNALEŻNE DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA DANEJ OSI POMIĘDZY ELIPSA BEZWŁADNOŚCI PRZEKROJU A JEGO RDZENIEM, TWORZĄ UKŁAD PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH. JEDNA SKRAJNA PROSTA TEGO UKŁADU JEST STYCZNA DO ELIPSY BEZWŁADNOŚCI W PUNKCIE PRZECIĘCIA SIĘ TEJ KRZYWEJ Z OSIĄ, DRUGA - DOTYKA OBWODU.

Wreszcie, gdy środek naprężeń porzuca rdzeń i zbliża się do środka masy przekroju, przynależna doń linja obojętna porzuca obwód i oddala się w nieskończoność, mamy bowiem dla $\xi = \eta = 0$ odpowiednio:

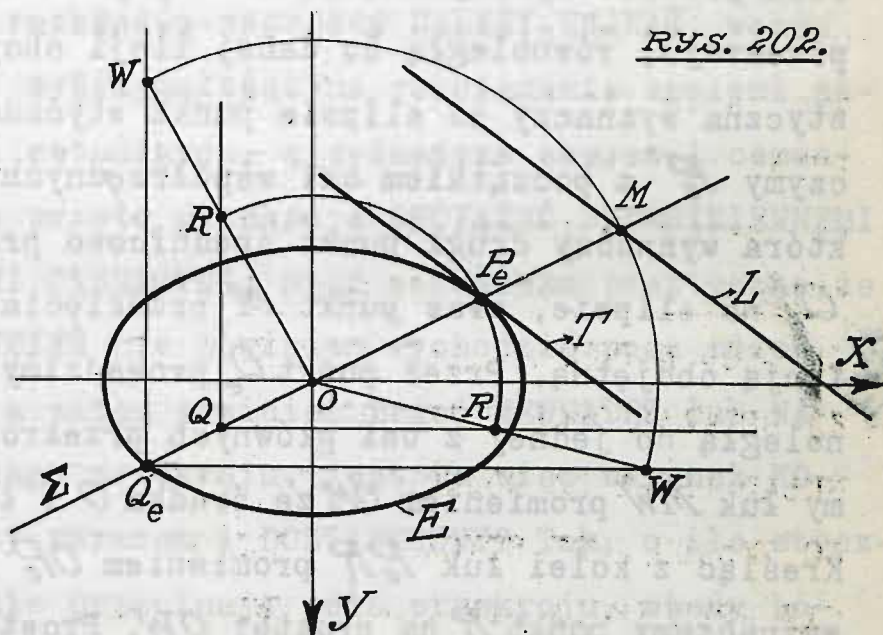
$$X = \frac{a}{0} = \infty, \quad Y = \frac{b}{0} = \infty \quad \text{Stąd:}$$

WNIOSEK DZIEWIĘTNASTY. LINJE OBOJĘTNE, PRZYNALEŻNE DO ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, LEŻĄCYCH NA DANEJ OSI POMIĘDZY RDZENIEM PRZEKROJU A ŚRODKIEM MASY, TWORZĄ UKŁAD PROSTYCH RÓWNOLEGŁYCH. JEDNA SKRAJNA PROSTA TEGO UKŁADU DOTYKA OBWODU POLA - DRUGA LEŻY W NIESKOŃCZO-

NOŚCI.

Na zasadzie wyżej wypowiedzianych wniosków z łatwością możemy ustalić sposób wykreślnego budowania linii obojętnej przynależnej do danego środka naprężeń Q (RYS. 202). W tym celu przez dany środek Q prowadzimy oś

$O\Sigma$, która przetnie elipsę bezwładności przekroju E w punktach Q_e i P_e . Przez punkty Q i Q_e prowadzimy



proste równoległe do jednej z głównych osi przekroju. Kreśląc łuk P_eR promieniem OP_e , wyznaczamy na prostej tylko co przez punkt Q przeprowadzonej, punkt R który z kolei łączymy prostą z początkiem osi współrzędnych. Przedłużenie prostej OR przetnie w punkcie W prostą uprzednio przez punkt Q_e przeprowadzoną, zatoczmy więc łuk WM promieniem OW , a otrzymamy na osi OQ szukany punkt M , przez który przejdzie linia obojętna, przynależna do danego środka naprężeń Q . Aby ją ostatecznie wykreślić, należy zbudować styczną T elipsy bezwładności, przechodzącą przez punkt P_e

i przeprowadzić prostą L równoległą do T przez punkt M . W ten sposób otrzymujemy szukaną linię obojętną, przynależną do danego środka naprężeń Q .

Zupełnie tak samo można wyznaczyć środek naprężeń, przynależny do danej linii obojętnej L . W tym celu prowadzimy styczną T do elipsy bezwładności E przekroju, równoległą do danej linii obojętnej. Ta styczna wyznaczy na elipsie punkt styczności P_e . Łączymy P_e z początkiem osi współrzędnych prostą OP_e , która wyznaczy drugi punkt średnicowo przeciwny Q_e na elipsie, oraz punkt M przecięcia się z daną linią obojętną. Przez punkt Q_e prowadzimy prostą równoległą do jednej z osi głównych przekroju. Zataczamy łuk MW promieniem OM ze środka O i łączymy W z O . Kreśląc z kolei łuk P_eR promieniem OP_e ze środka O , wyznaczamy punkt R na prostej OW . Prosta RQ równoległa do prostej Q_eW przetnie nam oś OS w punkcie Q , który będzie szukanym środkiem naprężeń, przynależnym do danej linii obojętnej.

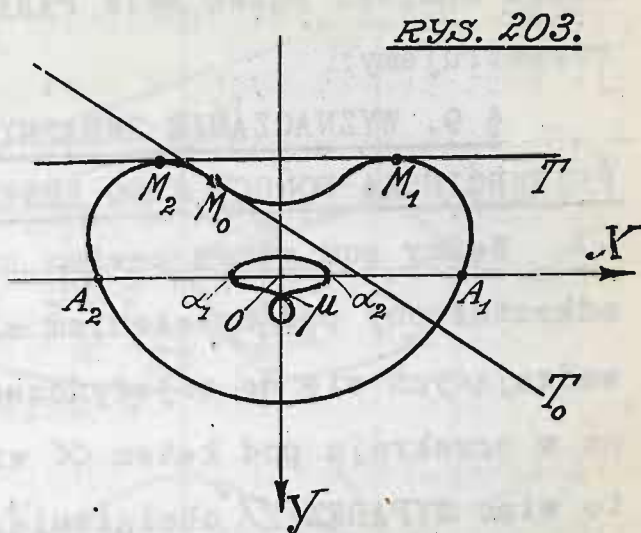
Aby dowieść słuszności obu tych sposobów wykreślnych, oznaczamy promienie wodzące $OQ_e = r_e$, $OQ = r$, $OP_e = \rho_e$ oraz $OM = \rho$. Wyżej widzieliśmy, że styczna T elipsy bezwładności stanowi linię obojętną, przynależną do środka naprężeń Q_e , mamy więc $r\rho = r_e\rho_e = C$. To samo wynika z podobnych trójkątów $\triangle Q_eWO \sim \triangle QRO$, gdzie $OQ_e : OQ = OW : OR = OM : OP_e$, to jest $r_e : r = \rho : \rho_e$, i ostatecznie $r\rho_e = r\rho$, co należało udowodnić.

Na zasadzie powyżej wyłuszczonych wniosków z łatwością daje się zauważyć, że skoro środek naprężeń leży POZA RDZENIEM - przynależna doń linja obojętna PRZECINA PRZEKRÓJ, a obciążenie przekroju składa się z naprężeń RÓŻNYCH ZNAKÓW. W BUDOWNICTWIE tego rodzaju rozkładów naprężeń NALEŻY UNIKAĆ, wobec nader małej wytrzymałości na rozciąganie kamieni naturalnych i sztucznych, a zwłaszcza zapraw i cementów. Należy przeto przekroje OBCIĄŻAĆ JEDNOIMIENNEMI NAPRĘŻENIAMI CISNĄCYMI. Stąd wskazówka praktyczna, że ŚRODEK NAPRĘŻEŃ nie powinien wychodzić poza rdzeń przekroju, a zatem powinien leżeć WEWNĄTRZ lub NA RDZENIU danego przekroju. Jest to więc warunek KONIECZNY. Czy zarazem i DOSTATECZNY? Tak, o ile styczne obwodu nie przecinają pola przekroju, wtedy bowiem każda ze stycznych przynależy, jako linja obojętna do odpowiedniego środka naprężeń, leżącego na rdzeniu. Na stycznych obwodu panują wtedy naprężenia normalne równe zeru - przekrój jest zatem obciążony naprężeniami jednego i tego samego znaku. Inaczej jednak rzecz się ma, gdy styczna obwodu przecina pole przekroju. Jako linja obojętna, należy ona do środka naprężeń, leżącego w odpowiednim punkcie rdzenia - na niej panują naprężenia równe zeru; skoro więc przecina pole przekroju, przeto dzieli go na dwa obszary o naprężeniach różnych co do znaku.

Ma to miejsce w tym wypadku, gdy na obwodzie

przekroju zaznacza się zakłęśnięcie, słowem, kiedy obwód nie jest krzywą wypukłą względem środka swych osi głównych. Jest to samo przez się zrozumiałe: STYCZNA T_o /RYS.203/ danego pola, przechodząca przez jakikolwiek punkt M_o zakłęśnięcia obwodu MUSI PRZECIĄĆ POLE przekroju. Z tego powodu przy budowie rdzenia należy wyłączyć z pod rozpatrywania WSZYSTKIE STYCZNE ZAKŁĘŚNIĘCIA i ograniczyć się do wyznaczenia środka naprężeń, przynależnego do stycznej obwodu w punktach M_1 i M_2 , to jest do PROSTEJ ZESPOLENIA obu bocznych łuków obwodu. Ponieważ prostej zespolenia T i obu jej punktom styczności odpowiada jeden tylko punkt rdzenia, zatem pominięcie stycznych zakłęśnięcia nie przerwie ciągłości rdzenia. Stąd правило praktyczne: CHCĄC WYZNACZYĆ MIEJSCE GEOMETRYCZNE SKRAJNYCH ŚRODKÓW NAPRĘŻEŃ, PRZYNALEŻNYCH DO LINII OBOJĘTNYCH STYCZNYCH PRZEKROJU, NIE PRZECINAJĄCYCH JEGO POLA, NALEŻY POMINĄĆ WSZYSTKIE STYCZNE ZAKŁĘŚNIĘĆ OBWODU I OGRANICZYĆ SIĘ DO ROZPATRYWANIA PROSTYCH ZESPOLENIA, PRZERZUCONYCH PONAD ZAKŁĘŚNIĘCIAMI. Czyniąc tak wyłączamy z pod rozpatrywania część rdzenia, odpowiadającą zakłęśnieniu $M_1 M_o M_2$, KTÓRA STANOWI PĘTLĘ ZEWNĘTRZNĄ, UCZEPIONĄ DO PUNKTU ZESPOLENIA μ DWÓCH ŁUKÓW $\alpha_1 \mu$ i $\alpha_2 \mu$ RDZENIA, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W PUNKCIE ZESPOLENIA μ , PRZYNALEŻNYM DO PROSTEJ ZESPOLENIA T OBWODU. Łuki rdzenia $\alpha_1 \mu$ i $\alpha_2 \mu$ przynależą oczywiście do łuków $A_1 M_1$ i $A_2 M_2$ obwodu. Pętlica rdzenia, przynależna do za-

klęśnięcia jest zaw-
sze zewnętrzna
względem rdzenia, bo
zakłęśnięcie $M_1 M_0 M_2$,
jako bliżej począt-
ku współrzędnych le-
żące, niż prosta T ,
przynależy do środ-
ków naprężeń DALEJ.



OD POCZĄTKU WSPÓŁRZĘDNYCH POŁOŻONYCH NIŻ PUNKT μ
PRZYNALEŻNY DO PROSTEJ T . Stąd mamy:

WNIOSEK DWUDZIESTY. JEŻELI OBWÓD DANEGO POLA POSIADA
ZAKŁĘŚNIĘCIE, TO ODPOWIEDNIA CZĘŚĆ RDZENIA SKŁADA SIĘ
Z PĘTLICY, LEŻĄCEJ NA ZEWNĄTRZ PUNKTU ZESPOLENIA,
PRZYNALEŻNEGO DO PROSTEJ ZESPOLENIA, PRZERZUCONEJ PO-
PRZEC WKŁĘŚŁOŚĆ OBWODU.

Praktycznie zadanie dotyczące znajdowania rdze-
nia danego pola możemy już obecnie uważać za rozwią-
zane w całej rozciągłości. Kolejność postępowania
winna być następująca: należy przedewszystkiem wyzna-
czyć dla głównych osi wartości $\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y, \mathcal{S}$, następnie prze-
rzucić ponad wszystkiemi zakłęśnięciami obwodu dane-
go pola proste zespolenia i wyznaczyć rdzeń dla uwy-
puklonego sztucznie w ten sposób obwodu.

W KURSIE ĆWICZEŃ podajemy proste przykłady wyli-
czania rdzenia, ponadto odsyłamy czytelnika do PRZE-
GLĄDU TECHNICZNEGO z roku 1909, gdzie na stronnicy 286

można znaleźć rdzeń pola PARABOLICZNEGO, tutaj zaś rozpatrujemy:

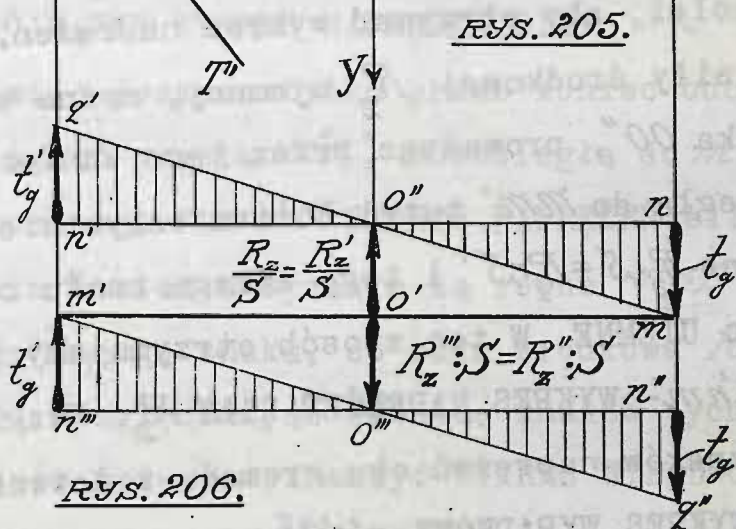
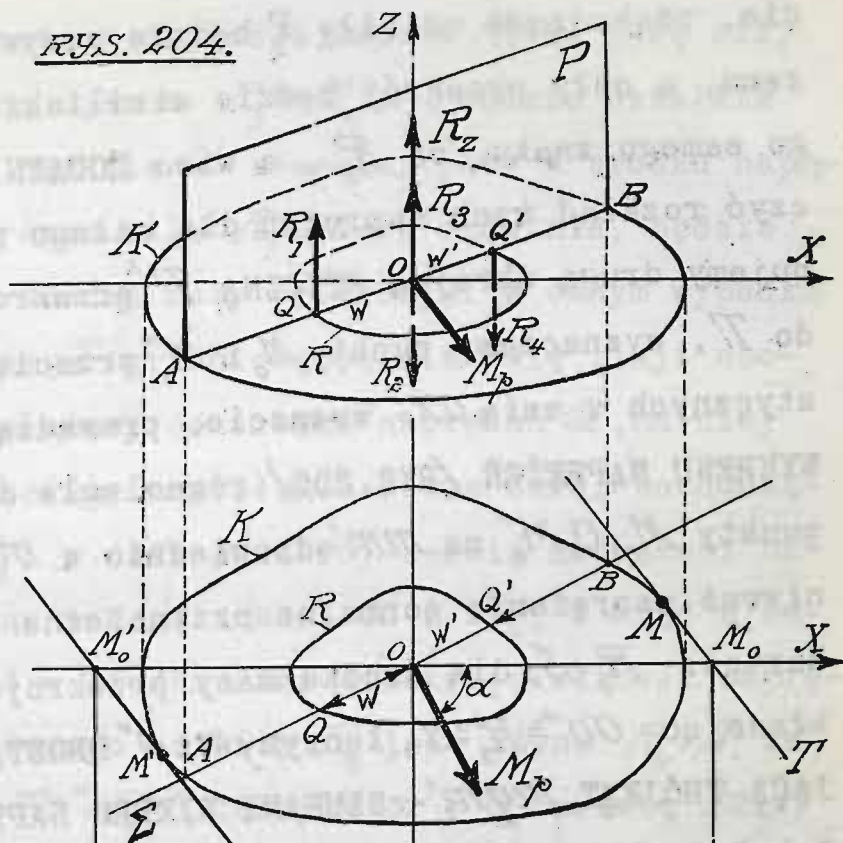
§ 9. WYZNACZANIE SKRAJNYCH NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH PRZEKROJU ZA POMOCĄ JEGO RDZENIA.

Weźmy pod uwagę pewien przekrój płaski RYŚ.204/ odkształcony pod działaniem sił zewnętrznych, sprowadzających się do pojedynczego momentu M_p , leżące go w przekroju pod kątem α względem osi OX . Będzie to więc WYPADEK „D” obciążenia. Wyznamy oś sił momentu, jako ślad $O\Sigma$ przecięcia się z polem przekroju płaszczyzny P , zawierającej parę sił danego momentu, i zbudujemy rdzeń R przekroju. Ślad $O\Sigma$ przetnie rdzeń w punktach Q i Q' , wyznaczając PROMIENIE RDZENIA $OQ=w$ i $OQ'=w'$, które zawsze nadal tak zwać będziemy.

Rozłożmy dany moment M_p na parę sił, leżących w płaszczyźnie P . Jedną z sił pary niechaj działa w środku masy przekroju - druga - na rdzeniu w Q lub Q' tylko co wyznaczonych. W pierwszym wypadku otrzymujemy parę sił R_1 i $R_2=R_1=M_p/w'$, zaś w drugim parę sił R_3 i $R_4=R_3=M_p/w'$, przyczem siły R_1 i R_2 będą niewątpliwie dodatnie, a siły R_3 i R_4 - ujemne - wszystkie zaś będą prostopadłe do pola przekroju.

Rozpatrzmy początkowo pierwszy wypadek, kiedy siła, przyłożona do Q jest $R_1' > 0$, jak to widać na naszym rysunku. TEN WYPADEK ODPOWIADA ZAWSZE WARTOŚCI KĄTA $\angle QOX = \frac{\pi}{2} + \alpha$, co bezpośrednio wpływa ze sposo-

bu wyzna-
czania kie-
runku mo-
mentów w
przekroju.
Tutaj więc
zastąpili-
śmy dzia-
łanie mo-
mentu dzie-
łaniem pa-
ry sił. Jed-
na z tych
sił DODAT-
NIA $R_z = M_p : w$
działa mi-
mośrodkowo
w punkcie Q
rdzenia, ja-
ko środka
naprężeń -



RYS. 206.

druga równa
sile R_z lecz UJEMNA, przyłożona jest do środka masy
przekroju. Linja obojętna, przynależna do środka na-
prężeń Q , stanowi niewątpliwie STYCZNĄ T obwodu, kie-
runkowo sprzężoną z osią sił, a przechodzącą przez
odpowiedni punkt M obwodu. Na tej prostej napręże-

nie, pochodzące od siły R_2 będzie oczywiście równe zeru, a cały przekrój będzie siedliskiem naprężeń tego samego znaku, co R_2 , a więc DODATNICH. Aby wyznaczyć rozkład tych naprężeń dla całego przekroju, budujemy drugą skrajną STYCZNĄ T' przekroju, równoległą do T , wyznaczamy punkty M_0 i M'_0 przecięcia się tych stycznych z osią OX - wreszcie, prowadząc PODSTAWĘ mm' WYKRESU NAPRĘŻEŃ (RYS.205) równoległą do OX , notujemy punkty M_0, O, M'_0 na mm' odpowiednio w m, O' i m' . Ponieważ naprężenie normalne przynależne do siły R_2 ma wartość $R_2:S$, dla środka masy przekroju, przeto, odkładając $OO'' = R_2:S$, łączymy m z O'' PROSTĄ mq' , WYZNACZAJĄCĄ TRÓJKĄT $mq'm'$ - SZUKANY WYKRES NAPRĘŻEŃ SIŁY R_2 . Z kolei, aby otrzymać wykres naprężeń, pochodzących od siły środkowej R_2 ujemnej, można skorzystać z odcinka OO'' , prowadząc przez jego koniec prostą nn' równoległą do mm' , tutaj bowiem wszystkie naprężenia są równe $R_2:S = R_1:S$ i tego samego znaku co i siła R_2 , a więc UJEMNE. W ten sposób otrzymujemy PROSTOKĄTNY $m'n'n'm$ - WYKRES NAPRĘŻEŃ SIŁY R_2 . Uwzględniając różnicę znaków naprężeń obu gromad, z łatwością wyodrębniemy WYKRES WYPADKOWY $nq'O''nm$, wyznaczający rozkład naprężeń przekroju, przyczem dla SKRAJNEJ LINII OBOJETNEJ T , a więc dla punktu M styczności z obwodem, wyznaczona z wykresu wypadkowego wartość naprężenia będzie niewątpliwie $t_g = mn = OO'' = R_2:S = M_p:S_w$, jak to zresztą widać z RYS.205. Będzie to wartość ujemna.

Z kolei możemy rozłożyć moment M_p na parę sił, z których jedna ujemna $R_3 = M_p : W'$, będzie działała mimosirowo w punkcie Q' rdzenia, jako w środku naprężeń, a druga równa sile R_3 , lecz dodatnia, będzie przyłożona do środka masy przekroju. W danym wypadku skrajna styczna T' gra niewątpliwie rolę linii obojętnej, przynależnej do środka naprężeń Q' , na niej więc panować będzie naprężenie równe zeru, pochodzące od siły R_4 , a cały przekrój będzie naprężony naprężeniami tego samego znaku, co i R_4 , a więc ujemnymi. Ponieważ w środku masy przekroju wartość naprężenia, pochodzącego od siły R_4 jest równa $R_4 : S$, zatem, budując $OO''' = R_4 : S$, łączymy m' z O''' prostą $m'q''$, wyznaczającą TRÓJKĄTNY WYKRES NAPRĘŻEŃ SIŁY.

Pozostaje więc jeszcze tylko przez koniec odcinka OO''' przeciągnąć prostą $n''n'''$, równoległą do mm' , aby otrzymać prostokąt $m'mn''n'''$ — WYKRES NAPRĘŻEŃ siły R_3 , te naprężenia bowiem wszystkie są równe $R_3 : S = R_4 : S = OO'''$ i tego samego znaku, co siła środkowa R_3 , a więc dodatnie. Uwzględniając różnicę znaków tych naprężeń i tu znów możemy wyznaczyć WYKRES WYPADKOWY — $n''m'O''n''q''$, dający znowu ten sam rozkład naprężeń przekroju, przyczem dla skrajnej linii obojętnej T' , a więc dla punktu M' styczności z obwodem otrzymamy tu $t_g' = R_3 : S = M_p : S W'$, jak to zresztą widać na rys. 206. Będzie to wartość dodatnia. Wartości naprężeń t_g i t_g' stanowią SKRAJNE NAPRĘŻENIA przekroju i wyznaczane

być mogą w zależności od promieni rdzenia. Stąd:

WNIOSEK PIERWSZY. SKRAJNE WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ, UJAW-
NIONE W PRZĘKROJU NA TLE MOMENTU W NIM LEŻĄCEGO, MOŻE-
MY WYZNACZYĆ, DZIELĄC MOMENT ODKSZTAŁCAJĄCY PRZĘZ ILO-
CZYN POŁA PRZĘKROJU, MNOŻONEGO PRZĘZ ODNOŚNE PROMIENIE
RDZENIA, LEŻĄCE NA OSI SIŁ MOMENTU.

Należy zwrócić uwagę, że promień rdzenia W , PRZY-
NALEŻNY DO KĄTA BIEGUNOWEGO: $\alpha + \frac{\pi}{2}$ daje skrajną war-
tość naprężeń t_g - UJEMNĄ, ponieważ zaś zgodziliśmy
się rozpatrywać momenty li tylko dodatnie, przeto na-
leży pisać $t_g = -M_p : S_W$. ~ Natomiast drugi promień
rdzenia W' , PRZYNALEŻNY DO KĄTA BIEGUNOWEGO: $\alpha + 3\frac{\pi}{2}$,
daje skrajną wartość naprężeń normalnych DODATNIĄ:
 $t'_g = M_p : S_{W'}$. Łącząc oba wzory w jeden, możemy
wprost napisać wartość skrajnego naprężenia normalne-
go w postaci $t_g = \pm M_p : S_W$, gdzie przez W ozna-
czyliśmy KTÓRYKOLWIEK z promieni rdzenia, leżących na
osi sił momentu M_p . Znak PLUS dotyczy promienia po-
chylonego pod kątem biegunowym $\alpha + 3\frac{\pi}{2}$, a znak MI-
NUS - promienia pochylonego pod kątem $\alpha + \frac{\pi}{2}$ wzgle-
dem osi OX .

Jeżeli teraz przejdziemy od wypadku „D” obciąż-
zenia przekroju do wypadku „E”, dodając siłę środ-
kową $R_z \geq 0$, to naprężenie normalne t_z stanowić
będzie sumę naprężeń t_g - tylko co wyznaczonego, ja-
wiającego się na tle działania momentu M_p oraz naprę-
żenia $t = R_z : S$, POCHODZĄCEGO OD SIŁY ŚRODKOWEJ

R_z . Będziemy mieli zatem $t_z = t_g + t$, skąd otrzymujemy ostatecznie $t_z = \frac{R_z}{S} \pm \frac{M_p}{S_W}$ UOGÓLNIAMY WZÓR BARRE' DE SAINT VENANTA, w którym W oznacza promień rdzenia, leżący na osi sił momentu odkształcającego M_p , znak PLUS należy brać, gdy kąt biegunowy promienia W wynosi $\alpha + 3\frac{\pi}{2}$, - a MINUS, gdy ten kąt jest $\alpha + \frac{\pi}{2}$. W obu wypadkach α oznacza kąt nachylenia momentu M_p ku osi OX . — Stąd:

WNIOSEK DRUGI. SKRAJNE WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ, UJAWNIONE W PRZEKROJU, OBCIĄŻONYM WYPADKOWĄ DOŃ PROSTOPADŁĄ, A PRZYŁOŻONĄ DO ŚRODKA JEGO MASY, ORAZ MOMENTEM, LEŻĄCYM W PRZEKROJU, MOŻEMY WYZNACZYĆ, DZIELĄC PRZEZ POLE PRZEKROJU SUMĘ I RÓŻNICĘ WYPADKOWEJ I MOMENTU, DZIELONEGO PRZEZ ODNOŚNE PROMIENIE RDZENIA PRZEKROJU, LEŻĄCE NA OSI SIŁ MOMENTU.

Tylko co wypowiedziany wniosek jeszcze raz potwierdza to, cośmy na początku działu niniejszego zaznaczyli, że wypadek „ E ” nie ma cech odrębności swoistej, stanowi bowiem połączenie wypadków A i D , a zarazem uogólnienie ich obu. Jest to pierwszy przykład OBCIĄŻENIA ZŁOŻONEGO, ujawniającego naprężenie $t = R_z : S$ na tle działania siły środkowej R_z , normalnej do przekroju, oraz t_g na tle momentu, leżącego w przekroju. Naprężenia te dodane algebraicznie tworzą NAPRĘŻENIE ZŁOŻONE $t_z = t + t_g$, cechujące wypadek E . OBCIĄŻENIE DOŃ PRZYNALEŻNE ZAWSZE PRZETO ROZŁOŻYĆ SIĘ DAJE NA DWA WSPÓŁISTNIEJĄCE OBCIĄŻENIA PROSTSZYCH TYPÓW. Z tych jeden

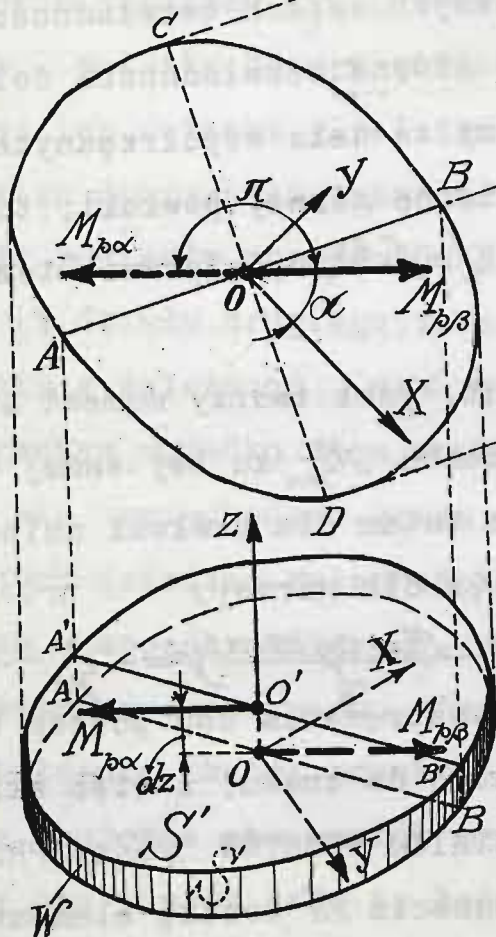
zbadaliśmy już dawniej, drugi znamy z naprężeń, jakie wywołuje w przekroju. Z kolei należy więc przejść do odkształceń, aby doświadczalnie sprawdzić i ugruntować jego podstawy.

§ 10. ODKSZTAŁCENIA GNĄCE.

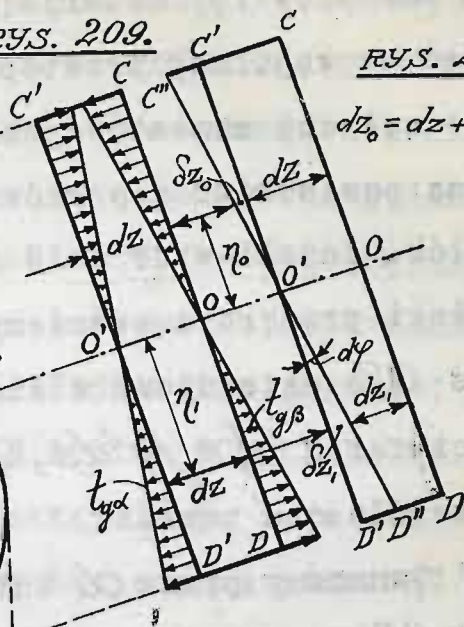
Weźmy pod uwagę jakąkolwiek bryłę, odkształconą pod jarzmem sił zewnętrznych. Dowolny przekrój płaski PP (RYS.207) dzieli jej obciążenie zewnętrzne na dwa układy E_α i E_β sił odkształcających, które w rozpatrywanym wypadku D sprowadzają się do momentów, leżących w przekroju. To znaczy, że układ E_α sprowadzić się daje do pojedynczego momentu $M_{p\alpha}$, a układ E_β do momentu $M_{p\beta}$ - obu leżących w przekroju. Ponieważ $\bar{E}_\alpha + \bar{E}_\beta = 0$ zatem i $M_{p\alpha} + M_{p\beta} = 0$, czyli że momenty te są równe, lecz różnoskretne, a więc skierowane przeciwnie, przyczem moment $M_{p\alpha}$ równoważy układ naprężeń D_β , dolnej warstwy cząsteczek przekroju, a więc siedliskuje w górnej warstwie cząsteczek, podczas gdy moment $M_{p\beta}$, równoważący układ naprężeń D_α górnej warstwy cząsteczek przekroju - siedliskuje w jego dolnej warstwie cząsteczek. Momenty $M_{p\alpha}$ i $M_{p\beta}$ mówiąc nieco ściślej, nie leżą w przekroju, ponieważ moment $M_{p\alpha}$, jako wypadkowa górnego układu sił, leży na górnej powłoce, a moment $M_{p\beta}$ - wypadkowy dolnego układu sił - w dolnej powłoce przekroju.

W ten sposób właściwie mówiąc, miasto przekroju

RYS. 208.



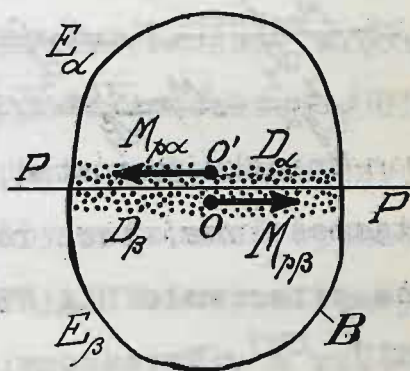
RYS. 209.



RYS. 210.

$$dz_0 = dz + dz_0.$$

RYS. 207.



plaskiego, rozpatrujemy myślowo wyodrębnioną w bryle płytkę W' (RYS.208), płaską o znikomej grubości dz , obciążoną na powłoce górnej momentem $M_{p\alpha}$, na dolnej momentem $M_{p\beta}$ - obu leżącymi w odnośnych powłokach. Oba te momenty są równe i równoległe, lecz różnoskretne, a więc skierowane przeciwnie; oś sił momentu $M_{p\alpha}$ przechodzi przez środek masy górnej powłoki, oś sił momentu $M_{p\beta}$ - przez środek masy-dolnej. Wobec znikomej wartości dz obie powłoki stanowią właściwie jeden i

ten sam przekrój materialny, przeto środki OO' muszą leżeć na wspólnej prostopadłej do obu przekrojów, a osie sił obu momentów pokrywają się w rzucie. To samo można powiedzieć i o głównych osiach bezwładności obu powłók. Jeżeli więc osie główne bezwładności dolnej powłoki przekroju weźmiemy za osie współrzędnych OX, OY , a oś OZ skierujemy w stronę górnej powłoki, to wartości całek $J_x = \int y^2 ds$, $J_y = \int x^2 ds$, będą prawie tożsamościowe dla obu powłók.

Oznaczmy przez α kąt, jaki tworzy moment $M_{p\beta}$ z osią OX - nachylenie momentu $M_{p\alpha}$ ku tej samej osi będzie wobec tego $\alpha + \pi$, a zatem dla powłoki dolnej $t_{g\beta} = -\frac{M_{p\beta} \sin \alpha}{J_y} x + \frac{M_{p\beta} \cos \alpha}{J_x} y$; a dla górnej:

$$t_{g\alpha} = -\frac{M_{p\alpha} \sin(\pi + \alpha)}{J_y} x + \frac{M_{p\alpha} \cos(\pi + \alpha)}{J_x} y = -t_{g\beta}$$

Wnioskujemy stąd, że naprężenia obu powłók będą tożsamościowe, lecz różne co do znaku, a więc skierowane przeciwnie DLA WSZYSTKICH PUNKTÓW $M(x, y)$ PRZEKROJU PP . Wyznamy w punkcie M kostkę elementarną $dx \times dy \times dz$. NAPRĘŻENIA $t_{g\alpha}$ i $t_{g\beta} = -t_{g\alpha}$, STANOWIĄ OBCIĄŻENIA TEJ KOSTKI ROZCIĄGAJĄCE LUB ŚCISKAJĄCE. Pod ich jarzmem kostka wydłużyla się lub skróciła z pierwotnej swej długości dz_0 do dz - odkształconej. Podobnym odkształceniom ulegają również i pozostałe kostki przekroju, za wyjątkiem prostolinjowego szeregu kostek, przynależnego do pokrywających się w rzucie osi obojętnych obu powłók przekroju, gdzie, jak wiadomo, $t_{g\alpha} = t_{g\beta} = 0$, a zatem kostki żadnym odkształce-

niom uległy nie mogły. Pozostałe kostki przekroju ujawniają w stanie odkształconym WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE

$\varepsilon_g = [dz - dz_0] : dz_0$, zależne od natężenia i znaku odnośnych naprężeń t_{gx} , obciążających górne ścianki kostek - poletka górnej powłoki i $t_{g\beta}$ - obciążających dolne ich ścianki - poletka powłoki dolnej. ZACHODZĄ tu więc dobrze nam znane ZJAWISKA ROZCIĄGANIA I ŚCISKANIA podległe prawom HOOKE'A, lub SCHÜLE-BACHA.

W § 19 działu drugiego zaznaczyliśmy, że w obu razach istnieje zależność $\varepsilon = \alpha t$, z tą jedynie różnicą, że w pierwszym wypadku α ma wartość stałą, a w drugim zmienia się, przechodząc przez cały szereg wartości dla różnych dziedzin zmienności naprężeń, możemy więc napisać w sposób ogólny $\varepsilon_g = \alpha_g t_g$, ze znaczkiem g dla rozpatrywanego wypadku. Ten wzór pozwala wyznaczyć odkształcenia kostek przekroju. Aby go zbadać wyznaczmy osie obojętne obu powłók przekroju. Wobec znikomej różnicy obu powłók osie te będą się pokrywały w rzucie płaskim AB .

Krając płytkę W płaszczyzną środkową, prostopadłą DO OBU osi obojętnych - PRZECINAMY PROSTOPADLE CAŁY RÓJ PROSTYCH STAŁEGO NAPRĘŻENIA, równoległych do osi obojętnych obu powłók. Wzdłuż każdej prostej roju panować będzie naprężenie normalne pewnej, ściśle określonej wartości; wiemy już, jak budować wykres linjowy tych naprężeń t_g (RYS.209); należy przez środki O i O' przeprowadzić proste jednakowo pochylone ku krawędziom WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XXI.

CD i $C'D'$ przekroju płytki, prostopadłego do linii obojętnych AB i $A'B'$ obu powłók. Z wykresu wynika, że część płytki jest ściskana - druga rozciągana, ponadto widać zeń wyraźnie, że wzdłuż linii równych naprężeń PANUJĄ NAPRĘŻENIA STAŁE, WPROST PROPORCJONALNE DO ODLEGŁOŚCI TYCH LINII OD OSI OBOJĘTNEJ. Stąd wniosek bezpośredni, że KONCE ODCINKÓW, WYOBRAŻAJĄCYCH POSZCZEGÓLNE NAPRĘŻENIA OBU POWŁÓK, LEŻĄ NA PŁASZCZYŹNIE, PRZECHODZĄCEJ PRZEZ OŚ OBOJĘTNĄ DANEJ POWŁOKI, A POCHYLONEJ KU POWŁOCE POD PEWNYM KĄTEM, JEDNAKOWYM DLA OBU POWŁÓK, jak to zresztą od razu spostrzec się daje z rysunku. Oznaczmy przez η odległość danej linii stałego naprężenia t_g od osi obojętnej. Na mocy tylko co wypowiedzianego wniosku naprężenie t_g jest wprost proporcjonalne do η , co oznaczamy, pisząc $t_g = \lambda \eta$, gdzie λ jest pewien stały współczynnik jednakowy dla wszystkich wartości naprężeń przekroju. Stąd $\epsilon_g = \alpha_g \lambda \eta$. Ponadto wyżej widzieliśmy, że $\epsilon_g = [dz - dz_0] : dz_0$, stąd: $dz_0 = dz : (1 + \epsilon_g) = dz [1 - \epsilon_g + \epsilon_g^2 - \dots]$. Oznaczmy przez $\delta z_0 = dz - dz_0$, zatem $\delta z_0 = \epsilon_g dz_0 = dz [\epsilon_g - \epsilon_g^2 + \epsilon_g^3 - \dots]$.

Wobec nader znikomych wartości ϵ_g możemy napisać wprost $\delta z_0 = \epsilon_g dz$, co daje wzór ostateczny: $\delta z_0 = \epsilon_g dz = \alpha_g t_g dz = \alpha_g \lambda \eta dz$, świadczący o tem, że ODKSZTAŁCENIA KOSTEK PRZEKROJU SĄ WPROST PROPORCJONALNE DO ODLEGŁOŚCI KOSTEK OD OSI OBOJĘTNYCH OBU POWŁÓK, O ILE α_g MA WARTOŚĆ STAŁĄ DLA CAŁEGO OBSZARU NAPRĘŻEN, PANUJĄCYCH W PRZEKROJU. TO OZNACZA WPROST BEZPOŚREDNIO,

ŻE I PRZED ODKSZTAŁCENIEM OBIE POWŁOKI PŁYTKI BYŁY PŁASKIE, PŁASZCZYZNY ICH PRZECHODZIŁY PRZEZ ODNOŚNE OSI OBOJĘTNE, TWORZĄC PRWIEN KĄT MIĘDZY SOBĄ.

To wynika wprost z następującego rozumowania. Niech linja CD wyznacza, jak dawniej ślad dolnej płaskiej powłoki płytki, tym razem jeszcze NIE ODKSZTAŁCONEJ, a $C''D''$ - ślad płaskiej powłoki górnej tej płytki. Załóżmy, że odkształcenie kostek płytki zaszło w taki sposób, że obie powłoki stały się równoległe, to znaczy, że powłoka $C''D''$ WYKONAŁA WOKÓŁ OSI OBOJĘTNEJ OBRÓT WZGLĘDEM POWŁOKI CD , stając się prostopadłą do linji środków OO' . Tego rodzaju odkształcenie jest tylko wtedy możliwe, gdy wydłużenia poszczególnych kostek płytki pierwotnej ukośnej, są wprost proporcjonalne do odległości kostek od osi obrotu powłoki $D''C''$, co wprost wynika z rysunku, mamy bowiem z podobnych trójkątów $\delta Z_o : \eta_o = \delta Z_i : \eta_i$, co należało udowodnić. Słowem, stwierdzamy niezbicie, że w rozpatrywanym przez nas wypadku OBIE PŁASKIE POWŁOKI PŁYTKI, PIERWOTNIE POCHYLONE KU SOBIE POD KĄTEM $\varphi = D'O'D''$, STAŁY SIĘ RÓWNOLEGŁE. PŁYTKA PIERWOTNIE UKOŚNA PRZESZŁA W PŁYTKĘ PROSTĄ. Stąd również wniosek bezpośredni, że PŁYTKA PIERWOTNIE PROSTA $DD'C'C$ ODKSZTAŁCI SIĘ W UKOŚNĄ $DD''C''C$, o ile zmienimy kierunek działania momentów na odwrotny, to jest o ile przestawimy momenty odkształcające.

Spróbujmy uogólnić tylko co otrzymane wyniki,

rozpatrując:

§ 11. ODKSZTAŁCENIA PRZEKROJU PŁASKIEGO BRYŁY DOWOLNEGO KSZTAŁTU NA TLE OBCIĄŻENIA GNĄCEGO.

Weźmy pod uwagę bryłę dowolnego kształtu, pozostającą pod jarzmem sił zewnętrznych i założmy, że w bryle tej po odkształceniu można wyznaczyć DWA PRZEKROJE PŁASKIE A RÓWNOLEGŁE, ZNIKOMO ODLEGŁE O dZ , aby
/RYS.208/:

1-o. ŚRODKI MAS OBU TYCH PRZEKROJÓW LEŻAŁY NA WSPÓLNEJ PROSTOPADŁEJ DO OBU PRZEKROJÓW, aby:

2-o. UKŁADY SIŁ ZEWNĘTRZNYCH ODKSZTAŁCAJĄCYCH SPROWADZAŁY SIĘ DO MOMENTÓW $M_{p\beta} = M_p$, ORAZ $M_{p\alpha} = M_p + dM_p$, RÓWNOLEGŁYCH, LECZ RÓŻNOSKRĘTNYCH, A PRZYŁOŻONYCH DO ŚRODKÓW MASY OBU PRZEKROJÓW, wreszcie, aby:

3-o. KONTURY OBU PRZEKROJÓW NIEZNACZNIE TYLKO RÓŻNIŁY SIĘ MIĘDZY SOBĄ, INACZEJ MÓWIĄC, ABY OBWÓD GÓRNEGO POLA S' PRAWIE POKRYWAŁ W RZUCIE OBWÓD POLA DOLNEGO S , A RÓŻNICA PÓŁ $S'-S$ BYŁA PORZĄDKU dS .—

Wyznamy główne osie bezwładności OX, OY dolnego pola S . Te osie będą zarazem rzutami głównych osi bezwładności górnego pola S' , różnica bowiem pól S i S' jest nader znikoma, a zatem kierunki osi głównych obu pól znikomo się tylko mogą różnić między sobą. Oś OZ kierujemy ku środkowi masy O' pola S' .—

W tych warunkach jakiegokolwiek poletko $dS = dx dy$ w dolnym polu leżące, będzie rzutem górnego poletka $dS' = dx dy$ pola S' . Ma to miejsce dla wszystkich po-

letek obu przekrojów, prócz skrajnych poletek, dotykających konturów, gdzie ds' mogą się różnić od ds o małe wyższych rzędów na tle nieznacznej różnicy kształtu obu pól i konturów. Widzimy więc, że ilości poletek obu pól są jednakowe, możemy zatem płytkę W , wyodrębnioną z bryły, rozpatrywać myślowo, jako złożoną z kostek $dx \times dy \times dz$, podległych działaniu naprężeń $t_{g\alpha}$ - przyłożonych do górnych ścian, i $t_{g\beta}$ - do dolnych ścian kostki. Naprężenia te nader nieznacznie różnią się między sobą. Aby to udowodnić, oznaczmy przez α kąt, jaki tworzy moment $M_{p\beta}$ z osią Ox , wtedy moment $M_{p\alpha}$ będzie niewątpliwie pochylony ku tejże osi pod kątem $\alpha + \pi$. Stąd:

$$t_{g\beta} = M_p \left[\frac{-x \sin \alpha}{J_y} + \frac{y \cos \alpha}{J_x} \right] = t_g; \quad \text{ORAZ:}$$

$$t_{g\alpha} = (M_p + dM_p) \left[\frac{-x \sin(\alpha + \pi)}{J'_y} + \frac{y \cos(\alpha + \pi)}{J'_x} \right];$$

gdzie przez J_x, J_y oznaczyliśmy główne momenty bezwładności pola S , a przez J'_x, J'_y - momenty pola S' . Wobec znikomej różnicy obu tych pól $J'_x = J_x$, oraz $J'_y = J_y$, możemy zatem napisać ostatecznie:

$$\begin{aligned} t_{g\alpha} &\cong (M_p + dM_p) \left[\frac{x \sin \alpha}{J_y} - \frac{y \cos \alpha}{J_x} \right] = \\ &= -M_p \left[\frac{x \sin \alpha}{J_y} + \frac{y \cos \alpha}{J_x} \right] - dM_p \left[\frac{x \sin \alpha}{J_y} + \frac{y \cos \alpha}{J_x} \right] = -t_g - dt_g. \end{aligned}$$

Tylko co wyznaczone naprężenia stanowią obciążenie kostki $dx \times dy \times dz$; w dolnej jej ścianie $dx \times dy$ siedliskuje naprężenie $t_{g\beta}$ - w górnej $t_{g\alpha}$; oba te naprężenia są znikomo różne od siebie, a skierowane

przeciwnie. I tu więc zachodzą zjawiska rozciągania i ściskania elementarnych kostek przekroju.

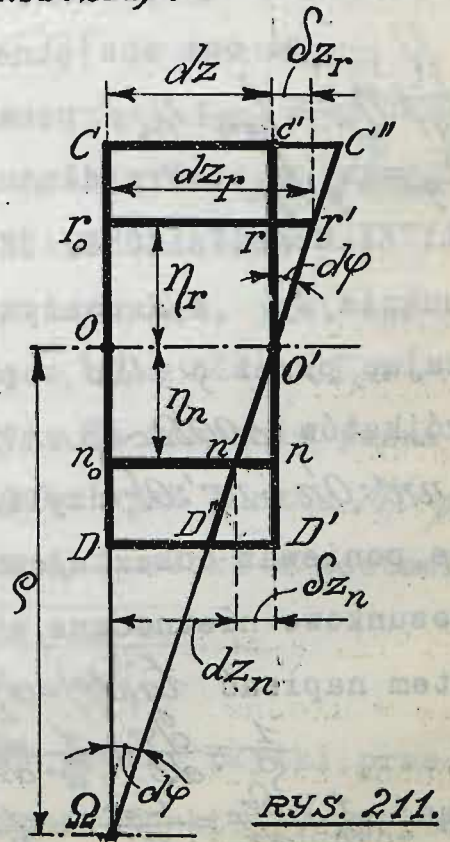
Wyznamy osie obojętne AB i $A'B'$ przynależne do momentów odkształcających M_p i $M_p + dM_p$. Wobec znikomej różnicy obu pól S i S' osie te będą się pokrywały wzajemnie w rzucie. Rozdziela one płytkę W na dwie dziedziny - panowania naprężeń ciskających i rozciągających - rozgraniczone prostoliniowym układem kostek, przynależnych do obu osi obojętnych. Ten szereg kostek nie uległ żadnym odkształceniom, bo naprężenia wzdłuż obu linii obojętnych są równe zeru. Pozostałe kostki - uległy wydłużeniu w dziedzinie naprężeń jednego znaku, - skróceniu - w dziedzinie naprężeń drugiego znaku. Rozumując zatem zupełnie w taki sam sposób, jak wyżej, dochodzimy i tu do przekonania, że rozpatrywana płytka W przed odkształceniem musiała być ukośna, to znaczy, że PRZED ODKSZTAŁCENIEM OBIE JEJ POWŁOKI BYŁY RÓWNIEŻ PŁASKIE, CHOĆ POCHYLONE KU SOBIE POD PEWNYM KĄTEM, A PŁASZCZYZNY ICH PRZECHODZIŁY PRZEZ ODNOŚNE OSIE OBOJĘTNE. I tu więc odkształcenie sprowadza się do obrotu jednej powłoki płytki względem drugiej o kąt $d\varphi$ /RYS. 210/; PŁYTKA PIERWOTNIE UKOŚNA - PRZECHODZI W PROSTĄ, a zatem płytka pierwotnie prosta odkształca się w ukośną, o ile zmienimy kierunek obrotowy momentów na odwrotny, to jest o ile przestawimy momenty odkształcające. WSZYSTKIE TYLKO CO WYPOWIEDZIANE

WNIOSKI DOTYCZĄ TWORZYW O STAŁEJ WARTOŚCI α_g WE WZORZE $\epsilon_g = \alpha_g t_g$, DLA CAŁEGO OBSZARU NAPRĘŻEŃ t_g , PANUJĄCYCH W PRZEKROJU.

W obu tylko co opisanych wypadkach dochodzimy zatem do jednakowych wniosków, że płyta prosta musiała być ukośną przed zgięciem, i że płyta prosta staje się ukośną po zgięciu. To ostatnie prawo pozwala ustalić:

§ 12. ZASADNICZE WZORY ZGINANIA. Weźmy pod uwagę płytkę $CDD'C'$ pierwotnie prostą, która po zgięciu przeszła w płytkę ukośną $CC''D''D'$. Aby ułatwić zrozumienie zjawisk zachodzących w danym wypadku, rysujemy ją w przekroju środkowym płaskim, prostym do osi obojętnej obu powłók płytki /RYS.211/.

Wiemy już, że włókienka pomiędzy osiami obojętnymi zawarte nie ulegają odkształceniom, zatem długość dZ włókienka OO' jest niezmienna przed i po odkształceniu, natomiast długości włókien pozostałych ulegają zmianom na tle obrotu powłoki $C'D'$ względem powłoki CD o kąt $d\varphi$ podczas odkształcania się płytki w ukośną. Wszystkie górne włókienka $r'r'$ odległe



RYS. 211.

od $OO' \circ \eta_r$ WYDŁUŻĄ SIĘ przytem o rr' , a wszystkie dolne, odległe od $OO' \circ \eta_n$ SKRÓCĄ SIĘ o nn' , jak to zresztą zupełnie wyraźnie postrzec się daje z rysunku. Oznaczmy odkształconą długość tych włókienek przez $dZ_r = r_r' r$, oraz $dZ_n = n_n' n$, a wydłużenia ich przez $\delta Z_r = rr'$ i $\delta Z_n = nn'$. Pierwotna, nieodkształcona długość tych wszystkich włókien była $r_r n = n_n n = OO' = dZ$, jeżeli oznaczmy więc WYDŁUŻENIE JEDNOSTKOWE włókienek przez ϵ_g , to dla włókienek, które uległy wydłużeniu będziemy mieli $dZ_r = dZ(1 + \epsilon_{gr})$, a dla włókienek, które uległy skróceniu $dZ_n = dZ(1 - \epsilon_{gn})$. Stąd $\delta Z_r = dZ_r - dZ = \epsilon_{gr} dZ$, oraz $\delta Z_n = dZ - dZ_n = \epsilon_{gn} dZ$. Oznaczmy odpowiednio przez t_{gr} i t_{gn} NAPRĘŻENIA, KTÓRE TE ODKSZTAŁCENIA SPOWODOWAŁY; wiemy już, że tego rodzaju naprężenia są wprost proporcjonalne do odległości

η od osi obojętnej. W danym wypadku więc mamy $t_{gr} : \eta_r = t_{gn} : \eta_n$, ponadto jeszcze $\epsilon_{gr} = \alpha_{gr} t_{gr}$, oraz $\epsilon_{gn} = \alpha_{gn} t_{gn}$. Przedłużmy ślady CD i $C'D'$ obu powłók PŁYTKI ODKSZTAŁCONEJ UKOŚNEJ aż do przecięcia się w punkcie Ω , a zauważymy odrazu, że kąt $OO'\Omega = d\varphi$. Oznaczając przez $\varphi = O\Omega$, będziemy mieli z podobieństwa trójkątów $\triangle OO'\Omega \sim \triangle nn'O' \sim \triangle rr'O'$ z początku: $OO' : O\Omega = nn' : O'n = rr' : O'r$, czyli: $dZ : \varphi = \delta Z_n : \eta_n = \delta Z_r : \eta_r = t_g(d\varphi)$ i ostatecznie, ponieważ odkształcenia spotykane w praktyce są stosunkowo nieznaczne, a kąt $d\varphi$ znikomo mały, możemy zatem napisać $t_g(d\varphi) = d\varphi$, co da nam wreszcie:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{d\varphi}{dZ} = \frac{1}{\eta_r} \cdot \frac{\delta Z_r}{dZ} = \frac{1}{\eta_n} \cdot \frac{\delta Z_n}{dZ} \sim$$

$$\text{Stąd: } \frac{1}{\eta_r} \cdot \frac{\delta Z_r}{dZ} = \frac{\epsilon_{gr}}{\eta_r} = \frac{1}{\eta_n} \cdot \frac{\delta Z_n}{dZ} = \frac{\epsilon_{gn}}{\eta_n},$$

czyli $\frac{\epsilon_{gr}}{\eta_r} = \alpha_{gr} \frac{t_{gr}}{\eta_r} = \frac{\epsilon_{gn}}{\eta_n} = \alpha_{gn} \frac{t_{gn}}{\eta_n}$,

i ostatecznie, wobec tego że, jakśmy to wyżej mieli

$t_{gr} : \eta_r = t_{gn} : \eta_n$ — będziemy mieli $\alpha_{gr} = \alpha_{gn}$. Wobec

zupełnej dowolności wyboru tylko co rozpatrywanych

włókienek, będziemy mieli wogóle, dla jakichkolwiek r

i n — $\alpha_{gr} = \alpha_{gn} = \alpha$. Stąd oczywisty wniosek: PŁYTKA O

PŁASKICH RÓWNOLEGLYCH POWŁOKACH PRZECHODZI PO ZGIĘ-

CIU W PŁYTKĘ UKOŚNĄ O PŁASKICH POWŁOKACH, POCHYLONYCH

KU SOBIE POD KĄTEM $d\varphi$, LECZ JEDNAK TYLKO WTEDY, GDY

WSPÓŁCZYNNIK α_g MA WARTOŚĆ STAŁĄ DLA CAŁEGO OBSZARU

NAPRĘŻEŃ, PANUJĄCYCH W POWŁOKACH PŁYTKI ODKSZTAŁCO-

NEJ.

Gdy ten wypadek zachodzi istotnie, wtedy możemy dalej rozwinąć wyżej wypisane wzory. W tym celu określamy oś obojętną powłoki $C''D''$ przechodzącą przez środek O' masy tej powłoki równaniem — $\frac{x \sin \alpha}{J_y} + \frac{y \cos \alpha}{J_x} = 0$, w którym x, y oznaczają wartości głównych momentów bezwładności powłoki w układzie jej głównych osi OX, OY , znak α oznacza kąt, jaki tworzy moment M_p , leżący w powłoce z osią OX , a x, y — współrzędne bieżące osi obojętnej. To równanie pozwala wyznaczyć odległość η jakiegokolwiek punktu $M(x, y)$, leżącego w powłoce, od osi obojętnej powłoki w postaci:

$$\eta = \left[-\frac{x \sin \alpha}{J_y} + \frac{y \cos \alpha}{J_x} \right] \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2}}.$$

Jeżeli teraz rozpatrywać będziemy włókno płytki, przechodzące przez tylko co rozpatrywany punkt $M(x, y)$, to

dla tego włókienka będziemy mieli wzór: $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\alpha_g t_g}{\eta}$,
w którym η posiadać będzie wartość tylko co wypisa-
ną, a t_g wyrazi się w postaci:

$$t_g = M_p \left[\frac{-\sin \alpha}{J_y} x + \frac{\cos \alpha}{J_x} y \right],$$

jak to zresztą wiemy z teorii naprężeń gnących. Stąd
ostatecznie otrzymujemy WZÓR ZASADNICZY:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \alpha_g M_p \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2}},$$

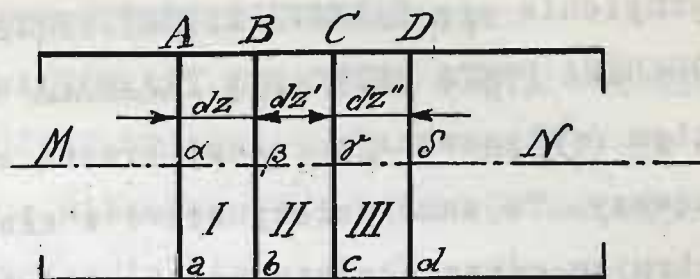
który, łącznie z tylko co wypisanym wzorem dla naprę-
żenia gnącego t_g , rozwiązuje w całej rozciągłości
wszelkie zagadnienia z tej dziedziny. —

Wszystko to, cośmy dotychczas powiedzieli, daje
nader cenne wyniki praktyczne w zastosowaniu do prę-
tów pierwotnie prostych przed odkształceniem. Stano-
wią one tak zwane:

§ 13. ZAŁOŻENIE BERNOULLI'EGO.

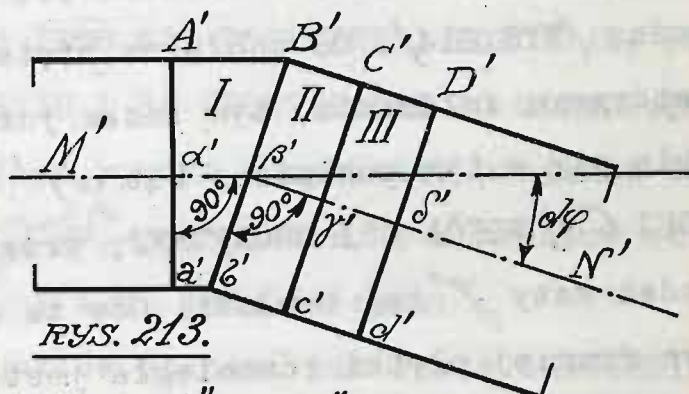
Weźmy pod uwagę pręt prosty (RYS. 212) dowolnego
zresztą przekroju poprzecznego, stałego lub zmiennego,
i wyznaczmy na tym pręcie szereg przekrojów poprzecz-
nych Aa, Bb, Cc, Dd, \dots i t.d. znikomo oddalonych od
siebie. Środki masy tych przekrojów $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ i t.d. le-
żeć będą niewątpliwie na osi podłużnej pręta. Nazwij-
my wzajemne odległości przekrojów mierzone na osi po-
dłużnej pręta nieodkształconego przez $\alpha\beta = dz$,
 $\beta\gamma = dz'$, $\gamma\delta = dz''$, i t.d. W ten sposób wyznaczylśmy
myślowo na pręcie szereg płytek I, II, III i t.d. PIER-
WOTNIE PŁASKICH przed odkształceniem. Po odkształce-
niu gnącem płytki te przejdą w ukośne; aby zdać sobie

sprawę ze zjawisk tutaj zachodzących, rozpatrujemy zrazu płytkę



RYS. 212.

i zakładamy, że tylko TA JEDYNA płytka rozciągana pręta uległa odkształceniu, a pozostałe zachowały swój kształt pierwotny (RYS.213).

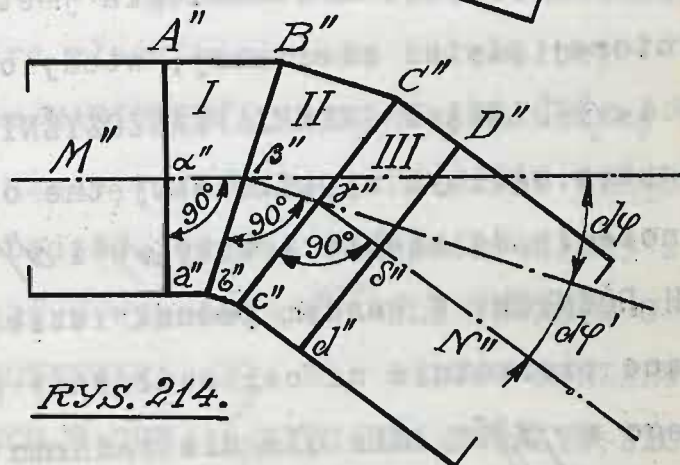


RYS. 213.

Po zgięciu powłoka Bb płytki

I obróciła się względem powłoki Aa o pewien kąt

- nachyliła się ku niej NA TLE



RYS. 214.

OBROTU OKOŁO OSI OBOJETNEJ, przechodzącej przez środek masy β' powłoki Bb' , pozatem pozostała płaska, słowem stała się płytką ukośną $A'B'b'a'$, przyczem niewątpliwie włókienko α'/β' łącznie z innymi, leżącemi między osiami obojętnymi obu powłók, zachowało swe pierwotne wymiary, czyli, że $\alpha'/\beta' = \alpha/\beta = dz$. Tylko co omówiony obrót powłoki Bb spowodował niewątpliwie

pochylenie się DALSZEJ CZĘŚCI PRĘTA N , przyczem OŚ PODŁUŻNA PRĘTA OSTRO SIĘ ZAŁAMAŁA W PUNKCIE β' pod kątem $d\varphi$, pozostając nadal prostą od tego punktu począwszy. To samo należy słowo w słowo powtórzyć, rozpatrując odkształcenie następnej płytki II , która zupełnie w taki sam sposób stała się płytką $B''C''c''\delta''$ ukośną (RYS.214). Oś podłużna pręta ulega przytem powtórnemu załamaniu, tym razem już w punkcie γ'' : pochyła się w tym punkcie o kąt $d\varphi'$ na tle OBROTU POWŁOKI $C'C'$ WOKÓŁ OSI OBOJĘTNEJ, przechodzącej przez środek masy γ'' tej powłoki. Gdy ta obojętna oś obrotowa drugiej płytki równoległa jest do obojętnej osi obrotowej płytki pierwszej, wtedy oczywiście OBA KĄTY $d\varphi$ i $d\varphi'$ LEŻĄ W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE; niewątpliwie jednak w ogólnym wypadku obojętne osie obrotu nie są równoległe do siebie i kąty $d\varphi$ i $d\varphi'$ LEŻĄ W PŁASZCZYŻNACH RÓŻNYCH. W każdym jednak razie włókienko $\beta''\gamma''$, leżące pierwotnie na osi podłużnej pręta nieodkształconego w $\beta\gamma$, nie ulegnie żadnemu odkształceniu i pozostanie równe dZ' . Powtarzając to samo rozumowanie w stosunku do dalszych płytek, dochodzimy do wniosku, że PRĘT PIERWOTNIE PROSTY UJAWNIA PO ZGIĘCIU NASTĘPUJĄCE ODKSZTAŁCENIA:

1-o. OŚ PODŁUŻNA PRĘTA STAJE SIĘ W OGÓLNYM WYPADKU KRZYWĄ PRZESTRZENNĄ - W SZCZEGÓLNYM KRZYWĄ PŁASKĄ. KIEDY OBOJĘTNE OSIE OBROTOWE SĄ DLA WSZYSTKICH PŁYTEK RÓWNOLEGŁE DO SIEBIE; W TEN SPOSÓB ODKSZTAŁCONĄ OŚ PO-

DŁUŻNĄ PRĘTA ZOWIEMY WPROST ODKSZTAŁCONĄ.

2-o. DŁUGOŚĆ ŁUKÓW OSI PODŁUŻNEJ PRĘTA NIE ULEGA ZMIANIE PRZY PRZEJŚCIU TEJ OSI W ODKSZTAŁCONĄ, co bezpośrednio wpływa z niezmienności odcinków dz, dz', dz'' i t.d. przy odkształcaniu się pręta, wreszcie:

3-o. WSZYSTKIE POPRZECZNE PRZEKROJE PŁASKIE PRĘTA, PROSTOPADŁE DO JEGO OSI PODŁUŻNEJ, POZOSTANĄ PŁASKIMI PO ODKSZTAŁCENIU I SĄ PROSTOPADŁE DO ODKSZTAŁCONEJ. To ostatnie jest wprost oczywiste, ponieważ kąty $\alpha''\beta''$, $\beta''\gamma''$, $\gamma''\delta''$ — są proste, a w granicy odległości dz, dz', dz'' i t.d. dążą do zera.

Ten szereg punktów stanowi tak zwane ZAŁOŻENIE BERNOULLI'EGO, które właściwiej może należałoby ochrzcić nazwiskiem MARIOTTE'A, ten bowiem uczony podał je w 1680 r., nieco wcześniej, niż JAKÓB BERNOULLI. Nie od rzeczy będzie jeszcze raz podkreślić, że prawo to stosuje się w wypadku „D” DLA TWORZYW O STAŁEJ WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA α_g DLA CAŁEGO OBSZARU NAPRĘŻEŃ WCHODZĄCYCH W GRĘ, A WIĘC DLA TWORZYW, ZACHOWUJĄCYCH SIĘ PODŁUG PRAWA HOOKE'A, JEDNAKOWEGO DLA OBU DZIEDZIN ROZCIĄGANIA I ŚCISKANIA.

Żelazo i stal czynią temu zadość poniżej granicy proporcjonalności, to też dla tych tworzyw prawo powyższe stosuje się bez zastrzeżeń, jednak tylko poniżej owej granicy, jak o tem świadczą wszystkie doświadczenia. Dla innych tworzyw prawo to można również stosować w pewnych, nieraz dość szczupłych gra-

nicach, jako przybliżony obraz rzeczywistości, zupełnie jednak wystarczający dla celów praktycznych, jak to zresztą stwierdziły liczne a wyczerpujące doświadczenia BAUSCHINGER'A, BACHA, FÖPPLA i TETMAJERA.

W ten sposób cała wyżej wyłuszczona teoria gięcia zostaje poparta doświadczeniem, należy uznać ją zatem, jako wystarczającą i podać zastosowania praktyczne. W tym celu należy rozpatrzyć zasadnicze rodzaje gięcia, a przede wszystkim poznać najprostszy, czyli tak zwane:

§ 14. GIĘCIE PŁASKIE.

WYGIĘCIE PRĘTA PIERWOTNIE PROSTEGO NAZYWAMY PŁASKIEM, GDY OŚ PODŁUŻNA PRĘTA STAJE SIĘ ODKSZTAŁCONĄ PŁASKĄ. Płaszczyznę, w której leży odkształcona, zowiemy PŁASZCZYZNĄ GIĘCIA. Wiemy już z poprzedzającego ustępu, że tego rodzaju gięcie jest możliwe wówczas jedynie, gdy obojętne osie obrotowe wszystkich poprzecznych przekrojów pręta są równoległe, a zatem prostopadłe do płaszczyzny gięcia, w której leży odkształcona. Stąd wniosek bezpośredni, że ODCINKI MOMENTÓW GNĄCYCH WINNY LEŻEĆ NA OBOJĘTNYCH OSIACH OBROTOWYCH POPRZECZNYCH PRZEKROJÓW PRĘTA. Jest to oczywiste: wiemy, że oś sił momentu jest kierunkowo sprzężona z osią obojętną, a odcinek momentu i oś obojętna leżą w tej samej ćwiartce osi głównych bezwładności przekroju poprzecznego. Ponieważ przekroje poprzeczne pręta odkształconego pochylają się ku sobie pod

pewnemi kątami, zatem odcinki momentów, leżących w poszczególnych przekrojach poprzecznych pręta odkształconego nie mogą być do siebie równoległe. Wymagałoby to nader skomplikowanego obciążenia pręta - przystosowanego do odkształcenia. W ogólnym wypadku tego rodzaju obciążenie pomyśleć się nie daje, a stąd prosty wniosek, że momenty muszą leżeć na obojętnych osiach obrotowych przekrojów, w tym bowiem wypadku NIE ZALEŻĄ OD POCHYLENIA PRZEKROJU, KTÓRE WYWOŁUJĄ.

Z ogólnej teorii gięcia wiemy, że gdy moment leży na osi obojętnej, wtedy ta oś jest jedną z głównych osi bezwładności przekroju. Stąd wniosek bezpośredni: OBOJĘTNA OŚ OBROTOWA JAKIEGOKOLWIEK PRZEKROJU POPRZECZNEGO JEST JEGO OSIĄ GŁÓWNĄ.

Oznaczmy ją przez OX ; druga oś główna OY leży niewątpliwie zatem w płaszczyźnie gięcia. Ponieważ moment leży na OX , przeto $\alpha = 0$, albo $\alpha = \pi$, a zasadnicze wzory będą miały postać: $t_y = \pm \frac{M_p}{J_x} y$ oraz $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \pm \frac{\alpha_y M_p}{J_x}$ dla GIĘCIA PŁASKIEGO. Taki sam układ osi głównych będą miały również i przekroje poprzeczne pręta nieodkształconego. Przekroje te bowiem odkształcają się na tle drobnych obrotów wokół osi prostopadłych do płaszczyzny gięcia. Jeżeli zatem oś główna OY przekroju poprzecznego pręta nieodkształconego leżała pierwotnie w płaszczyźnie gięcia, to i po odkształceniu w niej leżeć będzie. Słowem PRĘT PROSTY ULEGA GIĘCIU PŁASKIEMU, GDY JEDNOIMIENNE OSIE GŁÓWNE

WSZYSTKICH JEGO PRZEKROJÓW POPRZECZNYCH LEŻĄ W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE, A SIŁY ZEWNĘTRZNE ODKSZTAŁCAJĄCE, SPROWADZONE OBUSTRONNIE DO ŚRODKA MASY JAKIEGOKOLWIEK PRZEKROJU POPRZECZNEGO PRĘTA ODKSZTAŁCONEGO, DAJĄ DWA NIWECZĄCE SIĘ WZAJEMNIE MOMENTY PROSTOPADŁE DO TEJ PŁASZCZYŻNY. W tych jedynie warunkach zachodzi gięcie płaskie. Stanowią one zarazem i o rodzaju sił zewnętrznych odkształcających. Najprostszym, a zarazem ponieważ i jedynym ścisłym przykładem urzeczywistnienia powyżej wyłuszczonych założeń jawi się:

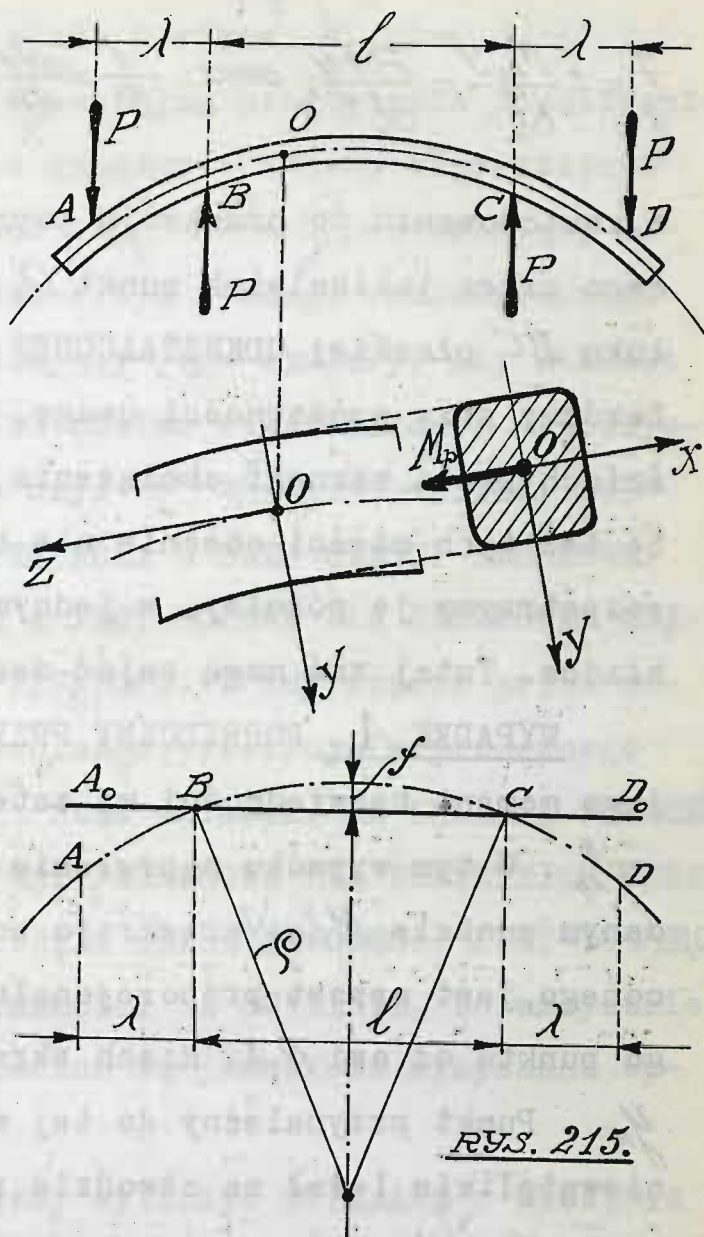
§ 15. WYGIĘCIE LAMARLE'A. Weźmy pod uwagę pręt odkształcony pod jarzmem czterech sił, leżących w jednej płaszczyźnie. Dwie z nich jednokierunkowe wewnętrzne działają w odległości ℓ w punktach B i C ; pozostałe skierowane są odwrotnie i przyłożone w punktach pręta A i D , odległych od B i C o $AB=CD=\lambda$. Wszystkie cztery siły są równoległe, równe P i prostopadłe do osi podłużnej pręta przed odkształceniem A_0D_0 . ~
(RYS. 215). Stanowią one dwie pary sił RÓŻNOSKREŚNIE, o momentach prostopadłych do płaszczyzny sił P . I jedna i druga dają w jakimkolwiek punkcie płaszczyzny sił P pojedynczy wypadkowy moment $M_p = P\lambda$, o wartości stałej i niezależnej od położenia punktu sprowadzenia.

Aby rozpatrywany tu pręt pierwotnie prosty uległ gięciu płaskiemu pod jarzmem sił tylko co opisanych, musimy go tak zbudować, aby główne osie OY jego po-

przeczynnych
przekrojów le-
żały w płaszczy-
źnie sił P . Wte-
dy momenty M_p ,
jako prostopa-
dłe do tej płas-
zczyzny będą
leżały na osiach
 OX przekrojów
- ich obroto-
wych osiach

obojętnych. Pod
działaniem tych
momentów prze-
kroje będą po-
chylały się ku
sobie, a środki
ich mas O nie
zejdą z płasz-

czyzny sił P , która w danym wypadku gra tu rolę
płaszczyzny gięcia. W ten sposób wszystkie warunki
gięcia płaskiego są spełnione, każdy z poprzecznych
przekrojów pręta odkształconego ulega działaniu mo-
mentu $M_p = P\lambda$, leżącego w przekroju na jego głównej
osi OX . Możemy tu zatem wypisać zasadnicze wzory
gięcia w postaci:



RYS. 215.

$$t_y = \pm \frac{M_p y}{J_x} = \frac{P \lambda y}{J_x}; \text{ ORAZ: } \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\alpha_g M_p}{J_x} = \frac{\alpha_g P \lambda}{J_x}.$$

w zastosowaniu do przekroju poprzecznego, przechodzącego przez jakikolwiek punkt O , leżący na środkowym łuku BC płaskiej ODKSZTAŁCONEJ wygiętego pręta.

Zwróćmy przy sposobności uwagę, iż w pozostałych częściach pręta warunki obciążenia będą zupełnie inne, to też tych części obecnie nie bierzemy pod uwagę, a rozpatrzmy je później, w jednym z następnych przykładów. Tutaj zaś mogą zajść dwa wypadki:

WYPADEK A. POPRZECZNY PRZEKRÓJ PRĘTA JEST STAŁY, jego moment bezwładności ma zatem wartość stałą $J_x = J_{x_0}$. W tym wypadku naprężenie gnące t_y , panujące w danym punkcie $M(x,y)$ przekroju poprzecznego odkształconego, jest wprost proporcjonalne do odległości y tego punktu od osi OX . Niech skrajna wartość y będzie y_m . Punkt przynależny do tej wartości y_m będzie niewątpliwie leżał na obwodzie rozpatrywanego przekroju W NAJWIĘKSZYM ODDALENIU OD OSI OX ; panować w nim będzie skrajne naprężenie $t_{ym} = P \lambda y_m : J_{x_0}$. Zazwyczaj dla danego przekroju oznaczamy iloraz $J_x : y_m = W_x$ i nazywamy MOMENTEM WYTRZYMAŁOŚCI przekroju. W arkuszu dodatkowym "WSPÓŁCZYNNIKÓW I WZORÓW WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH" podajemy tablice wartości W_x dla przekrojów najczęściej spotykanych w praktyce, wziętą z "Technika". W danym wypadku dla pręta o stałym przekroju

poprzecznym W_x jest stałe i równe W_{x_0} . —

Oznaczmy przez k_g skrajną praktycznie dopuszczalną wartość naprężenia gnącego - możemy więc uczynić $t_{gm} = k_g$, co da wzór $W_{x_0} = Pl : k_g$, określający moment wytrzymałości przekroju stałego rozpatrywanego pręta, a zatem określający jego wymiary. Aby z kolei dla tego pręta ustalić postać odkształconej wypisujemy $\frac{1}{\rho} = \alpha_g Pl : J_{x_0}$, co daje $\rho = J_{x_0} : \alpha_g Pl = \text{STAŁEJ}$. ODKSZTAŁCONA JEST ŁUKIEM KOŁA W SWEJ CZĘŚCI ŚRODKOWEJ BC . GIĘCIE LAMARLE'A JEST KOŁOWE DLA ŚRODKOWEJ CZĘŚCI PRĘTA O STAŁYM PRZEKROJU. W tej części pręta odkształconego, dla dowolnego przekroju poprzecznego mieliśmy $k_g = Pl : W_{x_0}$. Stąd wniosek, że SKRAJNA WARTOŚĆ NAPRĘŻENIA GNĄCEGO JEST JEDNAKOWA DLA WSZYSTKICH PRZEKROJÓW POPRZECZNYCH PRĘTA ODKSZTAŁCONEGO. JEST TOWIĘC PRĘT O STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI NA ZGINANIE, bo wszystkie jego przekroje poprzeczne są jednakowo wyzyskane wytrzymałościowo.

Z łatwością możemy wyliczyć STRZAŁKĘ f WYGIĘCIA pręta dla danego wypadku, czyli najwyższą odległość pomiędzy pierwotną osią podłużną pręta - prostą BC , łukiem $\cup BC$ odkształconej. Rzut oka na RYS.215, pozwala wypisać zależność $f = \rho - \sqrt{\rho^2 - (\frac{l}{2})^2}$, która daje $(\rho - f)^2 = \rho^2 - (\frac{l}{2})^2$ i ostatecznie:

$$f = \rho [1 - \sqrt{1 - (\frac{l}{2\rho})^2}] = \\ = \frac{J_{x_0}}{\alpha_g Pl} [1 - \sqrt{1 - (\frac{l J_{x_0}}{2 \alpha_g Pl})^2}]. \sim$$

W ten sposób otrzymujemy wszystkie zasadnicze wartości tego wygięcia, które zazwyczaj służy za punkt wyjścia do prób wytrzymałościowych. Z kolei, gdy:

WYPADEK B. PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA JEST ZMIENNY, jego momenty I_x i W_x nie są wielkościami stałymi, wtedy $t_{gm} = P l : W_x$ oraz $\frac{1}{\rho} = \alpha_y P l : I_x$. PROMIEN KRZYWIZNY JEST ZMIENNY - WYGIĘCIE LAMARLE'A PRZESTAJE BYĆ KOŁOWEM. Ten wypadek jako nie spotykany w technice, pomijamy, przechodząc z kolei do innych rodzajów obciążeń. —

§ 16. OBCIĄŻENIE GNACE.

Należy tutaj zaznaczyć, że tylko co rozpatrywany układ sił LAMARLE'A jest jedynym rodzajem obciążenia dającego po sprowadzeniu pojedynczy moment, leżący w poprzecznym przekroju pręta odkształconego w myśl naszych założeń. Inne obciążenia gnące tej własności nie posiadają, dają bowiem w przekrojach prócz momentów gnących jeszcze i siły tnące. Jest to zupełnie zrozumiałe. Chcemy otrzymać obciążenie gnące bez domieszek rozciągania, ściskania lub skręcania, gmatwających pierwotną częstość zjawisk gięcia, dlatego też z góry WYŁĄCZAMY przedewszystkiem wszelkie SIŁY, TWORZĄCE Z PODŁUŻNĄ OSIĄ PRĘTA NIEODKSZTAŁCONEGO KĄT RÓŻNY OD PROSTEGO, ponieważ tego rodzaju siły muszą dać składową prostopadłą do przekroju poprzecznego pręta — a zatem spowodować jego rozciąganie lub ściskanie.

Ponadto z sił pozostałych, a więc prostopadłych do osi

podłużnej pręta nieodkształconego ODRZUCAMY wszelkie SIŁY, LEŻĄCE POZA OBRAMĄ PŁASZCZYZNĄ GIĘCIA, jako dające momenty skręcające, których pragniemy uniknąć. BĘDZIEMY ZATEM ROZPATRYWALI OBCIĄŻENIA GNĄCE, ZŁOŻONE WYŁĄCZNIE Z SIŁ PROSTOPADŁYCH DO PODŁUŻNEJ OSI PRĘTA NIEODKSZTAŁCONEGO. Każda z sił tego rodzaju, sprowadzona do środka masy danego przekroju, daje moment gnący, równy SIŁE MNOŻONEJ PRZEZ JEJ ODLEGŁOŚĆ OD PUNKTU SPROWADZENIA - oraz SIŁĘ TNĄCĄ, przyłożoną do tego środka, RÓWNĄ DANEJ SIŁE, RÓWNOLEGLĄ I KIERUNKOWO DZIAŁAJĄCĄ JAK ONA. Jeżeli sprowadzamy kilka takich sił, to otrzymujemy moment wypadkowy, równy summie poszczególnych momentów i siłę tnącą, wypadkową, równą summie wszystkich sił tnących. W tym szczególnym wypadku, kiedy ta wypadkowa siła tnąca równa jest zeru - otrzymujemy obciążenie gnące o pojedynczym wypadkowym momencie, leżącym w przekroju. Ma to miejsce jedynie w wypadku LAMARLE'A, który w ten sposób stanowi jedyne obciążenie, czyniące zadość teoretycznym wymogom.

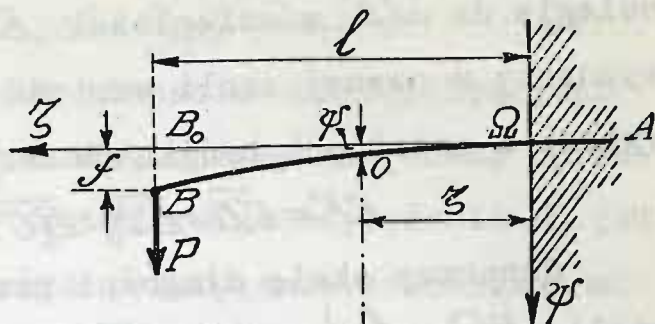
Mimo to wzory gięcia stosujemy i do innych obciążeń gnących, POMIJAJĄC DZIAŁANIE SIŁ TNĄCYCH. Czyniąc tak, popełniamy błąd, który jednak na ostateczny wynik obliczeń w zwykłych warunkach ma wpływ niewielki. Inaczej mówiąc, w zjawisku wytrzymałościowo złożonym pomijamy część podrzędną - CIĘCIE, oddając pierwszeństwo głównej - GIĘCIU. W jednym z następnych działów

kursu rozpatrujemy ową część pominiętą - poznamy WYTRZYMAŁOŚĆ PRĘTÓW NA GIĘCIE POŁĄCZONE Z CIĘCIEM i ustalimy wzajemny stosunek odnośnych odkształceń. Przekonamy się wtedy, że w większości wypadków cięcie może być pominięte zupełnie. Co też i tu czynimy, rozpatrując kolejno następujące przykłady obciążeń:

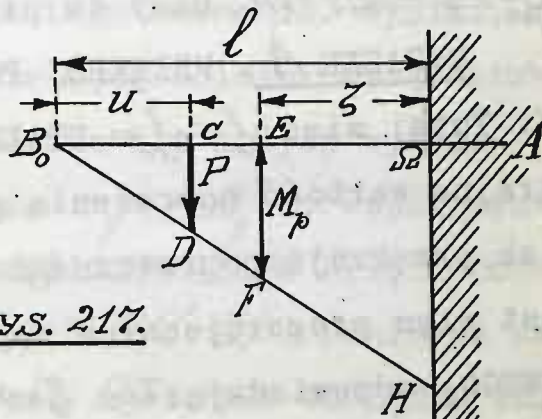
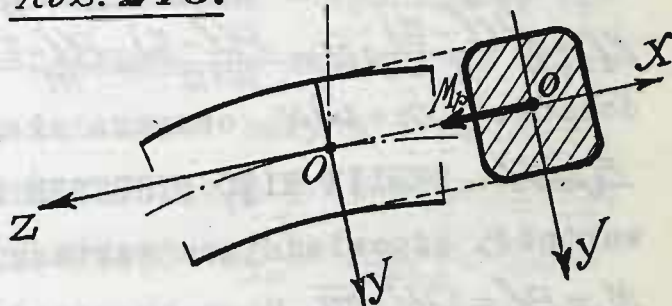
§ 17. PRĘT OSADZONY JEDNYM KOŃCEM U DRUGIEGO OBCIĄŻONY SIŁĄ GNĄCĄ.

Pierwotnie prosty pręt, jednym końcem osadzony nieruchomo, obciążamy siłą P w drugim, prostopadłą do osi podłużnej AB_0 pręta nieodkształconego. Pod jarzmem tej siły pręt ugnie się wdół - jego oś podłużna, pierwotnie prosta - wykrzywi się, stanie się krzywą AB - PŁASKĄ. Część osadzoną pręta oznaczmy przez $A\Omega$. Od punktu Ω począwszy pręt ulega gięciu, jest to więc skrajny punkt nieruchomy pręta. Poprowadźmy zeń stałą oś $\Omega\xi$ WZDŁUŻ osi podłużnej pręta nieodkształconego, oś $\Omega\varphi$ ułożmy w płaszczyźnie siły P - trzecią oś $\Omega\xi$ kierujemy prostopadle do płaszczyzny gięcia ku patrzącemu na RYS.316. W odległości ξ od początku współrzędnych na odkształconej obieramy dowolny zresztą punkt O - środek masy odnośnego poprzecznego przekroju pręta odkształconego. Współrzędne punktu O będą odpowiednio ξ i φ . Niech OY oznacza główną oś leżącą w płaszczyźnie siły P , tylko co wyznaczonego przekroju

OX -oś główną, prostopadłą do OY . Trzecią oś OZ kierujemy w lewo po stycznej, przeprowadzonej w punkcie O do odkształconej. Tylko co opisaną budowę będziemy stosować we wszystkich następnych wypadkach gięcia - opisu więcej powtarzać nie będziemy.



RYS. 216.



RYS. 217.

Po sprowadzeniu, siła P da w środku O MOMENT $M_p = P(l-z)$, leżący w poprzecznym przekroju, oraz siłę tnącą, którą wyłączamy z pod rozpatrywania. Moment M_p możemy również wyznaczyć wykreślnie, sposobem już raz wspomnianego PROFESORA HOLZERA.

W tym celu na prostej $B_0\Omega$ (RYS. 217) odkładamy dowolny odcinek $B_0C = u$: w C budujemy prostopadłe do $B_0\Omega$ odcinek $CD = P/p$, WYZNACZAJĄCY W SKALI p siłę P . Łączymy B_0 z D prostą i przedłużamy ją do przecięcia się z osią $\Omega\psi$ w punkcie H . Odcinek EF rów-

nolegle do ΩE w odległości $E\Omega = \zeta$ przeprowadzony, wyznaczy w pewnej skali wartość momentu M_p . W samej rzeczy z podobnych trójkątów $\Delta B_0CD \sim \Delta B_0EF$ mamy:

$$EF = \overline{CD} \times \overline{EB_0} : \overline{BC} \sim$$

Oznaczmy skalę długości przez λ , będziemy zatem mieli $B_0\Omega = \ell : \lambda$ oraz $E\Omega = \zeta : \lambda$. Stąd ostatecznie:

$$EF = \frac{P(\ell - \zeta)}{p} \cdot \frac{1}{\lambda} : u = \frac{P(\ell - \zeta)}{p\lambda u} = \frac{P(\ell - \zeta)}{m} = M_p : m, \text{ gdzie najwi-}$$

doczniej $m = p\lambda u$ oznacza skalę momentów. TRÓJKĄT $B_0\Omega H$ BĘDZIE WIĘC WYKRESEM MOMENTÓW M_p , skrajna wartość, odpowiadająca wartości $\zeta = 0$ będzie więc

$$M_{pM} = P\ell = \overline{\Omega H} \times \overline{m}. \text{ Mamy tu przedewszystkiem:}$$

WYPADEK A. PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA JEST STAŁY. Tutaj więc $J_x = J_{x_0} = \text{STAŁEJ}$, oraz $W_x = W_{x_0} = \text{STAŁEJ}$. Skrajna wartość naprężenia gnącego dla jakiegokolwiek przekroju poprzecznego pręta $t_{gm} = M_p : W_{x_0} = P(\ell - \zeta) : W_{x_0}$ jest więc proporcjonalna do M_p . DLA PRZEKROJU OSADOWEGO, odpowiadającego $\zeta = 0$ otrzymujemy zatem MAXIMUM MAXIMORUM naprężeń $t_{gmm} = P\ell : W_{x_0}$. Czyniąc $t_{gmm} = k_g$, otrzymujemy $W_{x_0} = P\ell : k_g$, wartość momentu, WYZNACZAJĄCĄ STAŁY PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA. DLA PRZEKROJU PROSTOKĄTNEGO O WYSOKOŚCI H I SZEROKOŚCI B MAMY $W_{x_0} = \frac{1}{6}BH^2 = P\ell : k_g$, skąd wyznaczamy H , lub B , założwszy ich stosunek $m = H : B$.

Wyznaczywszy w ten sposób przekrój poprzeczny pręta, możemy ze wzoru $\frac{1}{\vartheta} = P(\ell - \zeta) : EJ_{x_0}$, otrzymać równanie $\varphi = f(\zeta)$ ODKSZTAŁCONEJ, pisząc:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{\pm \varphi''}{(1 + \varphi')^{3/2}} = \alpha_g \frac{P(\ell - \zeta)}{J_{x_0}},$$

gdzie $\psi' = \frac{d\psi}{dz}$ oraz $\psi'' = \frac{d^2\psi}{dz^2}$;

Wyznaczone tylko co równanie różniczkowe jest nader trudne do zcałkowania, możemy go jednak uprościć. Ponieważ skrajne dopuszczalne naprężenie R_g jest stosunkowo niskie, przeto praktycznie dopuszczalne wygięcia prętów są nader NIEZNACZNE - ODCHYLENIA ODKSZTAŁCONEJ OD OSI ΩZ ZNIKOME. To znaczy, że styczne odkształconej tworzą kąt nader mały z osią ΩZ , MOŻEMY ZATEM WOBEC JEDNOŚCI POMINAĆ ψ' W MIANOWNIKU, pisząc wprost DLA MAŁYCH WYGIĘĆ $\pm J_{x_0} \psi'' = \alpha_g P(\ell - z)$, co znacznie ułatwia całkowanie tego równania. Wyniki, jakie tą drogą otrzymamy nie będą ściśle, będą natomiast wystarczająco przybliżone dla małych wygięć pręta. Wprowadźmy oznaczenie $\alpha_g = 1 : E_g$; współczynnik E_g będziemy nazywali WSPÓŁCZYNNIKIEM SPRĘŻYSTOŚCI NA ZGINANIE. Stąd $\pm E_g J_{x_0} \psi'' = P(\ell - z)$. Ponieważ cała odkształcona leży pod osią ΩZ i JEST WZGLĘDEM TEJ OSI WYPUKŁA, siła P bowiem stara się wygiąć pręt ku dołowi, zatem możemy napisać OZNAKĘ WYPUKŁOŚCI w postaci $\psi \psi'' > 0$. W danym wypadku współrzędne ψ wszystkich punktów odkształconej są dodatnie, musi być zatem również i $\psi'' > 0$, stąd: $E_g J_{x_0} \psi'' = P(\ell - z)$.

Całkując dwukrotnie mamy: $E_g J_{x_0} \psi' = C - \frac{P}{2}(\ell - z)^2$, oraz: $E_g J_{x_0} \psi = D + Cz + \frac{P}{6}(\ell - z)^3$. Stałe C i D całkowania określiśmy z łatwością, zważywszy, że w punkcie Ω ODKSZTAŁCONA MUSI BYĆ STYCZNĄ DO OSI ΩZ , co niewątpliwie wpływa bezpośrednio ze sposobu zamocowania

pręta, którego koniec ΩA tkwi w ścianie i nie ulega żadnym odkształceniom, jako osadzony trwale. W punkcie Ω , dla $\zeta=0$ mamy więc $\varphi=0$ oraz $\varphi'=0$, co daje $C-\frac{P}{2}\ell^2=0$, oraz $D+\frac{P}{6}\ell^3=0$. Stąd $C=\frac{P\ell^2}{2}$ oraz $D=-\frac{P\ell^3}{6}$ i ostatecznie:

$$\begin{aligned} E_g J_{x_0} \varphi &= \frac{P\ell^2 \zeta}{2} - \frac{P\ell^3}{6} + \frac{P}{6}(\ell - \zeta)^3 = \\ &= \frac{P}{2} \left[\ell - \frac{\zeta}{3} \right] \zeta^2 = \frac{P\zeta^2}{2} \left[\ell - \frac{\zeta}{3} \right]. \end{aligned}$$

Widzimy stąd bezpośrednio, że najwyższej wartości $\zeta=\ell$ odpowiada najwyższa wartość $\varphi=f$, czyli tak zwana STRZAŁKA WYGIĘCIA PRĘTA, przyczem $f=\frac{P\ell^3}{3E_g J_{x_0}}$; Dla wyżej rozpatrywanego PRĘTA PROSTOKĄTNEGO $J_{x_0}=\frac{1}{12}BH^3$, zatem tutaj będziemy mieli $f=\frac{4P\ell^3}{E_g BH^3}$. Z kolei rozpatrujemy:

WYPADEK B. PRĘT O STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI.

Tylko co widzieliśmy, że w danym wypadku pręt o stałym przekroju poprzecznym posiada jedyny przekrój wytrzymałościowo wyzyskany - PRZĘKRÓJ OSADOWY - pozostałe zaś są zbyt sowite. Pręt jest przeładowany tworzywem. Aby tę wadę usunąć, należy wykonać pręt stałej wytrzymałości o przekroju poprzecznym ZMIENNYM, w taki sposób, aby panujące w nim skrajne naprężenia gnące t_{gm} miały wartość stałą dla wszystkich przekrojów i równą skrajnemu dopuszczalnemu naprężeniu k_g . Mamy więc $t_{gm}=k_g=\frac{M_p}{W_x}=\frac{M_p}{J_x}y_m$. Stąd mamy WZÓR $W_x=M_p:k_g$, wyznaczający wartość momentu wytrzymałościowego dowolnego poprzecznego przekroju,

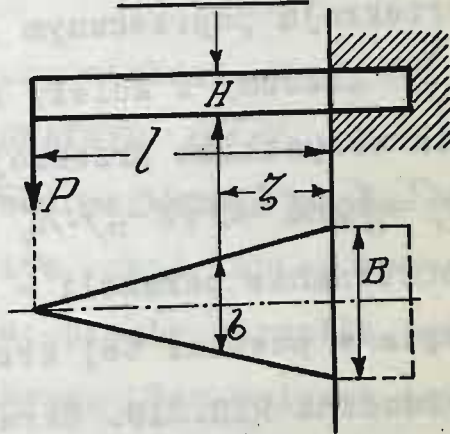
a więc określający i wymiary przekroju w zależności od momentu w nim leżącego. Ponadto $\frac{1}{S} = \alpha_g \frac{M_p}{I_x} = \frac{\alpha_g k_g}{y_m}$; Te dwa wzory rozwiązują zagadnienie.

Dla pręta o przekrojach poprzecznych PROSTOKĄT-
NYCH δ SZEROKICH I h WYSOKICH, $W_x = \frac{1}{6} \delta h^2 = M_p : k_g =$
 $= P(l-z) : k_g$. Załóżmy, że wysokość h jest STAŁA dla
wszystkich przekrojów i równa H . W tym wypadku naj-
oczywiściej $y_m = \frac{1}{2} H$ jest również stałe dla wszyst-
kich przekrojów, stąd wynika, że $S = H : 2 \alpha_g k_g = \text{CON-}$
 STANS . I tu więc wygięcie jest KOŁOWE, jak w wypadku
LAMARLE'A. Ten wynik nie jest jednak ścisły - pomi-
nęliśmy tu bowiem siły tnące, które uwzględnić należy
przy wyznaczaniu odkształconej.

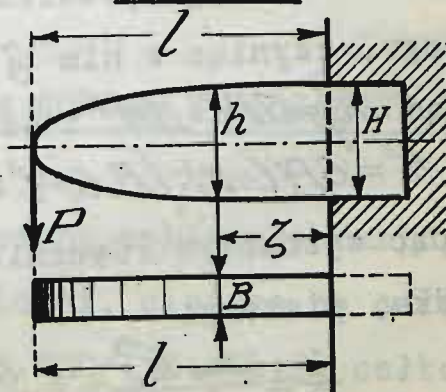
Rzeczywiste wygięcie nie bę-
dzie więc ściśle kołowe. Za-
zwyczaj jednak wpływ sił tną-
cych jest nader nieznaczny,
to też wynik powyższy należy
uważać za dostatecznie ścisły.

Aby wyznaczyć zmienną
szerokość δ poszczególnych
przekrojów, piszemy $\delta =$
 $= 6P(l-z) : k_g H^2$. Ten wzór
wyraźnie wskazuje, że δ za-
leżne jest linjowo od z - bo-
czny profil pręta będzie więc
PROSTOLINIJNY, jak to zresztą

RYS. 218.



RYS. 219.



w dostatecznej mierze wskazuje RYS.218. Skrajną wartość $\delta=B$, przynależną do osadowego przekroju otrzymujemy ze wzoru powyższego, czyniąc w nim $\zeta=0$ — co daje $B=\frac{6Pl}{E_g H^2}$. Chcąc wreszcie otrzymać strzałkę ugięcia f dla danego wypadku, piszemy $f=\rho-\sqrt{\rho^2-l^2}$, podobnie, jak to miało miejsce w wypadku LAMARLE'A. Stąd $(\rho-f)^2=\rho^2-l^2$ i ostatecznie:

$$f=\frac{l^2}{2\rho}=\frac{2l^2\alpha_g K_g}{2H^3}=\frac{l^2 K_g}{E_g H^3}.$$

Wyznamy z poprzedniego wzoru $K_g=6Pl:BH^2$ a będziemy mieli $f=\frac{6Pl^3}{E_g BH^3}$. Otrzymana tu strzałka jest zatem 1,5 razy większa od strzałki pręta o stałym przekroju poprzecznym $B \times H$.

Założmy z kolei, że szerokość δ jest STAŁA dla wszystkich przekrojów i równa B . Tutaj więc $W_x=\frac{1}{6}Bh^2=P(l-\zeta):K_g$ skąd $h^2=6P(l-\zeta):K_g B$. Jest to równanie paraboli — wyznaczające boczny profil pręta w postaci tej krzywej, jak to zresztą najlepiej uwidoczni RYS.219. Skrajną wartość $h=H$ przynależną do osadowego przekroju wyznaczamy ze wzoru powyższego, czyniąc w nim $\zeta=0$, co daje $H^2=6Pl:K_g B$, skąd $K_g=6Pl:BH^2$ i ostatecznie:

$$h^2=6P(l-\zeta):[B \cdot 6Pl:BH^2]=H^2(l-\zeta):l.$$

Chcąc wyznaczyć równanie odkształconej dla danego wypadku, piszemy:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\alpha_g K_g}{y_m}=\frac{1}{E_g} \frac{6Pl}{BH^2} \frac{2}{h}=\frac{12Pl}{E_g BH^2} \left[\frac{l}{H^2(l-\zeta)} \right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$= -\frac{12Pl^{3/2}}{E_g BH^3} (\ell - \zeta)^{-1/2} \cong \psi'' \sim$$

Stąd ostatecznie $\psi' = C - \frac{24Pl^{3/2}}{E_g BH^3} (\ell - \zeta)$ oraz :

$\psi = D + C\zeta + \frac{16Pl^{3/2}}{E_g BH^3} (\ell - \zeta)^{3/2}$ Ponieważ i tutaj przy $\zeta = 0$ będzie $\psi' = 0$ zatem możemy wyznaczyć stąd stałe całkowania pisząc: $C - \frac{24Pl^2}{E_g BH^3} = 0$, oraz: $D + \frac{16Pl^3}{E_g BH^3} = 0$, co daje:

$$\psi = -\frac{16Pl^3}{E_g BH^3} + \frac{24Pl^2}{E_g BH^3} \zeta + \frac{16Pl^{3/2}}{E_g BH^3} (\ell - \zeta)^{3/2} \sim$$

Z tego wzoru otrzymujemy strzałkę ugięcia f , czyniąc $\zeta = \ell$, mamy tutaj więc:

$$f = -\frac{16Pl^3}{E_g BH^3} + \frac{24Pl^3}{E_g BH^3} = \frac{8Pl^3}{E_g BH^3} \sim$$

Tutaj więc strzałka jest dwa razy większa od strzałki pręta o stałym przekroju PROSTOKĄTNYM $B \times H$. Ten wynik dziwić nie powinien, ponieważ przekroje pręta stałej wytrzymałości są mniej sówite, choć lepiej wykorzystane, a więc uboższe w tworzywo; przeto strzałka ugięcia takiego pręta musi być większa. Ten wniosek posiada znaczenie ogólne dla wszystkich wypadków. Z kolei rozpatrujemy:

§ 18. PRĘT OSADZONY JEDNYM KOŃCEM I OBCIĄŻONY JEDNOSTAJNIE NA CAŁEJ DŁUGOŚCI.

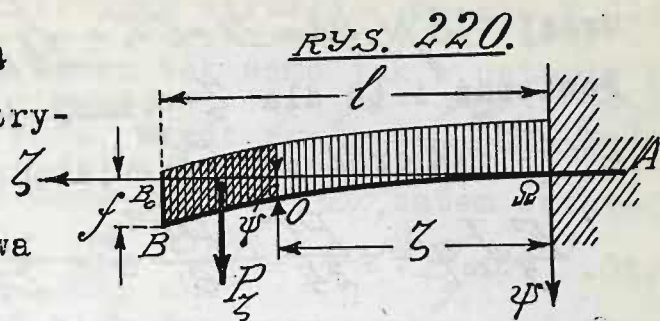
Tego rodzaju obciążenie możemy sobie wyobrazić, jako warstwę piasku stałej grubości, cisnącą na całą długość pręta równomiernie (RYS.220). Oznaczmy całko-

wity ciężar tej warstwy przez P kg.; na jednostkę długości pręta wypadnie zatem $p = P : \ell$. Będzie to więc ciężar jednostkowy, który zazwyczaj wyznaczamy w KILOGRAMACH NA JEDNOSTKĘ DŁUGOŚCI PRĘTA, a więc na METR BIEŻĄCY lub CENTYMETR. Pod jarzmem tego obciążenia pręt ugnie się wdół, jego oś podłużna - pierwotnie prosta, wykrzywi się, stanie się krzywą AB - płaską. I tu również część osadzoną pręta oznaczamy przez $A\Omega$. Od punktu Ω pręt ulega wygięciu. Przez ten punkt prowadzimy oś ΩZ po osi podłużnej pręta nieodkształconego, oś $\Omega \psi$ układamy w płaszczyźnie obciążenia, a trzecią oś $\Omega \xi$ kierujemy prostopadle do tej płaszczyzny ku patrzącemu na RYS.220. W odległości z od początku współrzędnych na odkształconej wyznaczamy punkt O - środek masy poprzecznego przekroju pręta odkształconego o głównej osi OY leżącej w przekroju. Obciążenie tylko co wyznaczonego przekroju stanowią siły ciskące na część OB pręta odkształconego. Wypadkowa ich $P_z = p \times \overline{OB}$. Przy nieznacznym wygięciu możemy napisać, że $OB \cong \ell - z$, skąd $P_z = p(\ell - z) = \frac{P}{\ell}(\ell - z)$. Ponieważ mamy tu do czynienia z obciążeniem jednostajnie ciskącym na całą długość pręta, zatem punkt przyłożenia siły P_z musi leżeć pośrodku odcinka $\ell - z$; po sprowadzeniu siły P_z do punktu O otrzymamy więc moment:

$$M_p = \frac{P}{\ell}(\ell - z) \frac{\ell - z}{2} = \frac{P}{2\ell}(\ell - z)^2,$$

oraz SIŁĘ TNĄCĄ, którą wyłączamy z pod rozpatrywania.

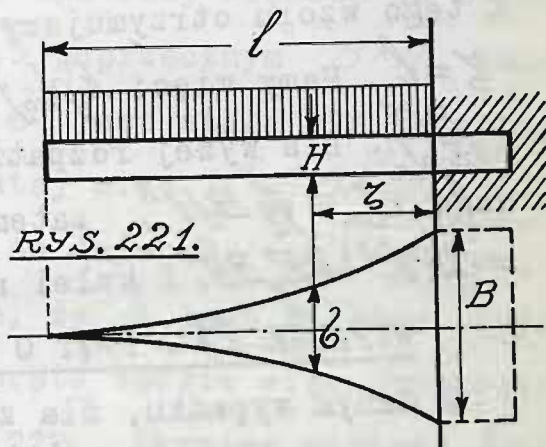
I tu mogą zachodzić dwa wypadki:



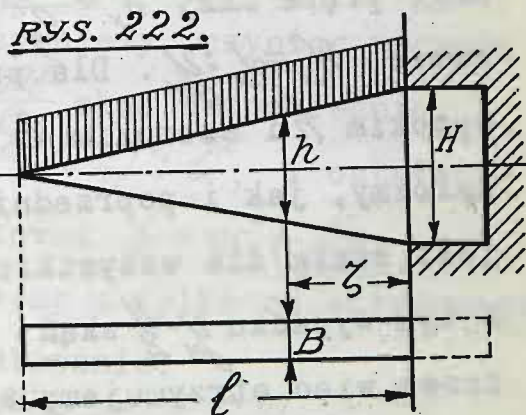
WYPADEK A. PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA

JEST STAŁY. Tutaj więc

$J_x = J_{x_0} = \text{STAŁY}$, oraz
 $W_x = W_{x_0} = \text{STAŁY}$. Ponieważ skrajna wartość momentu $M_{pm} = \frac{Pl}{2}$ przynależy



do osadowego przekroju, gdzie $z=0$, zatem w tym przekroju panować będzie skrajne naprężenie gnące, które czynimy równem R_g pisząc $R_g = \frac{Pl}{2} : W_{x_0}$. Stąd otrzymujemy $W_{x_0} = \frac{Pl}{2R_g}$,



wartość momentu, wyznaczającą stały przekrój pręta.

Dla przekroju prostokątnego o wysokości H i szerokości B mamy $W_{x_0} = \frac{1}{6}BH^2 = Pl : 2R_g$.

Aby z kolei wyznaczyć równanie odkształconej, piszemy $\frac{1}{\rho} = \frac{P(l-z)^2}{2lE_gJ_{x_0}} \approx \psi''$, gdzie kładziemy znak plus, ponieważ i tu niewątpliwie $\psi\psi'' > 0$, a cała odkształcona leży ponad osią ΩZ . Stąd mamy:

$$E_g J_{x_0} \psi'' = \frac{P}{2l} (l-z)^2 \text{ co daje: } E_g J_{x_0} \psi' = C - \frac{P}{6l} (l-z)^3.$$

oraz: $E_g J_{x_0} \psi = D + C\zeta + \frac{P}{24\ell} (\ell - \zeta)^4 \sim$

Ponieważ i tu dla $\zeta=0$, mamy $\psi=0$, oraz $\psi'=0$, zatem $C - \frac{P\ell^2}{6} = 0$, oraz $D + \frac{P\ell^3}{24} = 0$, skąd:

$$E_g J_{x_0} \psi = -\frac{P\ell^3}{24} + \frac{P\ell^2}{6} \zeta + \frac{P}{24\ell} (\ell - \zeta)^4 \sim$$

Z tego wzoru otrzymujemy strzałkę ugięcia f , czyniąc

$\zeta = \ell$. Mamy więc: $E_g J_{x_0} f = -\frac{P\ell^3}{24} + \frac{P\ell^3}{6}$, stąd $f = \frac{P\ell^3}{8E_g J_{x_0}}$. Dla wyżej rozpatrywanego przekroju prostokątnego $J_{x_0} = \frac{1}{12} BH^3$, zatem dla tego pręta: $f = \frac{3P\ell^3}{2E_g BH^3}$. Z kolei rozpatrujemy:

WYPADEK B. PRĘT O STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI.

W danym wypadku, dla zmiennego przekroju poprzecznego pręta mamy $W_x = \frac{M_x}{R_g} = \frac{P(\ell - \zeta)^2}{2R_g \ell}$, ponadto: $\frac{1}{S} = \frac{M_x}{E_g J_x} = \frac{R_g}{E_g y_m}$,

gdzie $W_x = J_x : y_m$. Dla pręta o przekroju prostokątnym, wysokim h i szerokim b mamy: $W_x = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{P(\ell - \zeta)^2}{2\ell R_g}$;

Założmy, jak i poprzednio początkowo, że wysokość h jest stała dla wszystkich przekrojów i równa H .

W tym wypadku $y_m = \frac{H}{2}$ skąd $S = HE_g : 2R_g = \text{STAŁEJ}$.

znowu więc otrzymujemy wygięcie kołowe, o ile pominie my działanie sił tnących, zazwyczaj nader nieznaczne.

Aby wyznaczyć szerokość b poszczególnych przekrojów poprzecznych, piszemy: $b = 3P(\ell - \zeta)^2 : \ell H^2 R_g$. Jest to równanie paraboli wyznaczające boczny profil pręta w postaci tej krzywej, jak to zresztą najlepiej spostrzec się daje z RYS.221. Skrajną wartość $b=B$, przynależną do osadowego przekroju, otrzymujemy ze wzoru tylko co wypisanego, czyniąc $\zeta=0$, co daje $B = 3P\ell : H^2 R_g$.

Chcąc wreszcie otrzymać strzałkę ugięcia f dla danego wypadku piszemy znowu tak samo jak w ustępie poprzedzającym $f = s - \sqrt{s^2 - l^2}$ skąd: $f = \frac{l^2}{2s} = \frac{l^2 k_g}{2E_g J_m} = \frac{l^2 k_g}{E_g H^3}$; Z poprzedniego wzoru mamy $k_g = 3Pl : BH^3$, zatem ostatecznie możemy napisać $f = \frac{l^2}{HE_g} \frac{3Pl}{BH^3} = 3Pl : E_g BH^3$. Otrzymana tu strzałka jest więc dwa razy większa od strzałki pręta o stałym przekroju poprzecznym $B \times H$. Założmy z kolei, że szerokość b jest stała dla wszystkich przekrojów i równa B . Tutaj więc $W_x = \frac{1}{6} B h^2 = \frac{P}{2E_g k_g} (l-z)^2$, skąd $k = 3P(l-z)^2 : B l k_g$, co daje $k = (l-z) \sqrt{\frac{3P}{l B k_g}}$; Ten wzór wyraźnie wskazuje, że k jest zależne linijowo od z , boczny profil pręta będzie więc prostoliniowy, jak to widzimy na RYS. 222. Skrajną wartość $k = H$ dla osadowego przekroju otrzymujemy, czyniąc we wzorze $z = 0$, mamy więc $H^2 = \frac{3Pl}{B k_g}$ skąd bezpośrednio: $3P : B k_g = H^2 : l$, a zatem $k^2 = H^2 (l-z)^2 : l^2$, i ostatecznie mamy: $k = H(l-z) : l$. Ponieważ $\frac{1}{s} = \psi'' = \frac{k_g}{E_g J_m} = 2k_g : E_g h$, zatem, wyznaczwszy z tylko co otrzymanych wzorów $k_g = \frac{3Pl}{BH^3}$ mamy ostatecznie:

$$\psi'' = 2k_g : E_g h = 6Pl^2 : [E_g BH^3 (l-z)]. \sim$$

Stąd bezpośrednio całkując mamy $\psi' = C - \frac{6Pl^2}{E_g BH^3} \lg(l-z)$, oraz: $\psi = D + C'z + \frac{6Pl^2}{E_g BH^3} \{ (l-z) \lg(l-z) - (l-z) \}$;

I znów przy $z = 0$ mamy $\psi = 0$, oraz $\psi' = 0$, a zatem:

$$C - \frac{6Pl^2}{E_g BH^3} \lg l = 0, \quad \text{oraz} \quad D + \frac{6Pl^2}{E_g BH^3} \{ l \lg l - l \} = 0,$$

co daje równanie odkształconej w następującej ostatecznej postaci, wobec $C = \frac{6Pl^2}{E_g BH^3} \lg l$, oraz $D = -\frac{6Pl^3}{E_g BH^3} (\lg l - 1)$,

$$\varphi = -\frac{6Pl^3}{E_y BH^3}(\eta\zeta - 1) + \frac{6Pl^2}{E_y BH^3}\zeta\eta + \frac{6Pl^2}{E_y BH^3}(\zeta - \eta)[\eta(\zeta - 1) - 1]. \sim$$

Z tego wzoru otrzymujemy strzałkę ugięcia, czyniąc

$$\zeta = \ell \text{ co daje: } f = -\frac{6Pl^3}{E_y BH^3}(\eta\ell - 1) + \frac{6Pl^3}{E_y BH^3}\eta,$$

i ostatecznie $f = 6Pl^3 : E_y BH^3$. W danym wypadku strzałka jest aż cztery razy większa od strzałki pręta o stałym przekroju prostokątnym $B \times H$. Z kolei rozpatrujemy:

§ 19. PRĘT OBU KOŃCAMI SWOBODNIE SPOCZYWAJĄCY NA PODPORACH I OBCIĄŻONY SKUPIONĄ SIŁĄ GNĄCĄ.

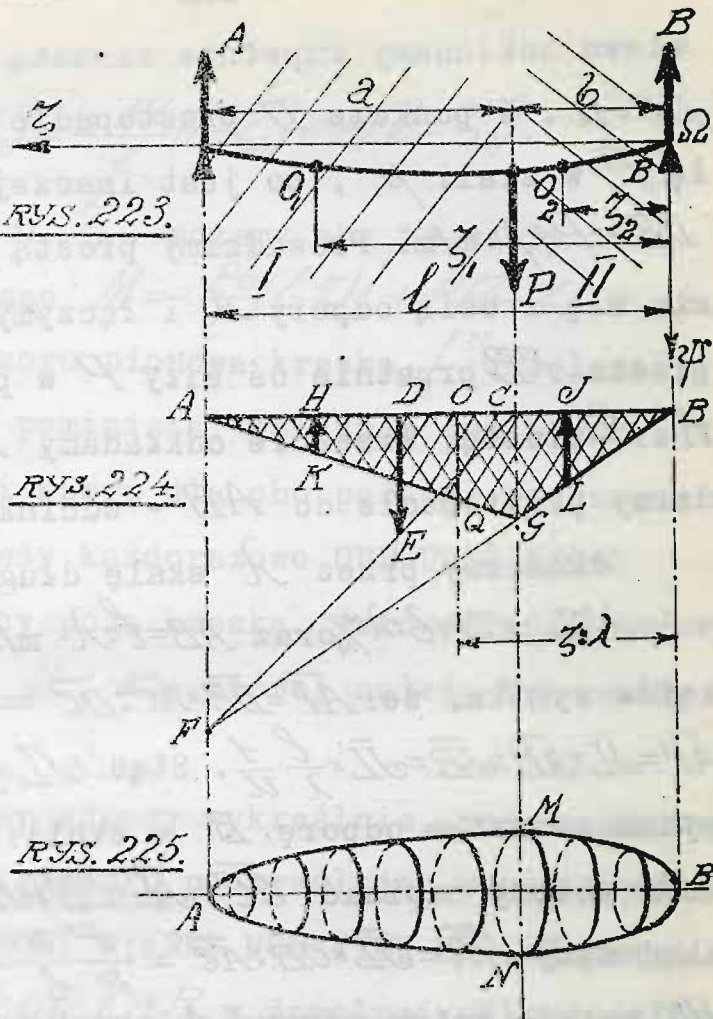
Pierwotnie prosty pręt podpieramy u obu końców podporami w kształcie ostrzy w skrajnych punktach A i B pręta tak, aby oś podłużna pręta była pozioma, i obciążamy pionową siłą P , gdziekolwiek do pręta przyłożoną. Pod jarzmem tej siły pręt ugnie się w dół, jego oś podłużna stanie się krzywą płaską, odkształconą, przechodzącą przez punkty A i B niezmiennie w swem położeniu, jako leżące na podporach. Jeden z tych punktów, dajmy na to prawy B - niech będzie początkiem O stałych osi współrzędnych; wyprowadźmy zeń poziomą oś $O\zeta$ wzdłuż pierwotnej osi podłużnej pręta nieodkształconego; oś $O\eta$ układamy w płaszczyźnie rysunku - trzecią oś $O\xi$ kierujemy prostopadle do tej płaszczyzny ku patrzącemu. Odległość siły gnącej P od nieruchomego punktu A oznaczamy przez a - od B przez b , przyczem zakładamy, że $a > b$, a ca-

łą długość pręta oznaczamy przez ℓ . Oś siły gnącej P dzieli płaszczyznę gięcia na dwa obszary-LEWY oznaczony przez I , obejmujący podporę A i PRAWY, oznaczony przez II z podporą B . Siła P wywołuje ODPORY A i B STATYCZNIE WYZNACZALNE. Dla określenia tych odpór, piszemy summe rzutów

RYS. 223.

RYS. 224.

RYS. 225.



sił na oś $\Omega\psi$ w postaci $A+B+P=0$, oraz summe momentów sił względem stałego punktu Ω : $A\ell+Pb=0$, co daje $A=-P\frac{b}{\ell}$ oraz $B=-P\frac{a}{\ell}$. Odpory A i B , jako różniące się znakiem od siły P , winny mieć zatem kierunek przeciwny, w danym wypadku skierowane są więc ku górze, ponieważ siłę P jako dodatnią kierujemy w dół jak i dodatnią oś $\Omega\psi$. (RYS. 223/).

Odpory A i B mogą być również wyznaczone za pomocą metody PROFESORA HOLZER'A opisanej w ustępie jedenastym działu czwartego niniejszego kursu.

Na linji AB (RYS. 224) od punktu C , dajmy na to

wlewo odkładamy zupełnie zresztą dowolny odcinek $DC=u$. W punkcie D prostopadle do AB budujemy siłę P w skali p , to jest inaczej mówiąc odkładamy $DE=P:p$ m/m. Prowadzimy prostą CEF aż do przecięcia się z osią odpory A i łączymy F z B prostą. Ta prosta FB przetnie oś siły P w punkcie S . Łączymy A z S prostą. Wreszcie odkładamy $AH=JB=u$ i prowadzimy prostopadle do AB - odcinki HK i JL .

Oznaczmy przez λ skalę długości, wtedy $AC=a:\lambda$ m/m, $CB=b:\lambda$ m/m oraz $AB=\ell:\lambda$ m/m. Z podobnych trójkątów wynika, że: $\overline{AF}=\overline{DE} \times \overline{AC} : \overline{DC} = \frac{P a}{p \lambda} \frac{1}{u}$ oraz $\overline{AF}=\overline{JL} \times \overline{AB} : \overline{JB} = \overline{JL} \times \frac{\ell}{\lambda} \frac{1}{u}$. Stąd $\overline{JL}=\frac{P a}{p \ell}$. Odcinek \overline{JL} wyznacza zatem odpórę B w skali sił P . Podobnie znów możemy napisać $\overline{JC}=\overline{JL} \times \overline{CB} : \overline{JB} = \overline{HK} \times \overline{AC} : \overline{AH}$, skąd mamy $\overline{HK}=\overline{JL} \times \overline{CB} : \overline{AC} = \frac{P a}{p \ell} \frac{b}{\lambda} \frac{\lambda}{a} = \frac{P b}{p \ell}$ - odcinek \overline{HK} wyraża zatem odpórę A znowu w tej samej skali sił.

W ten lub w inny sposób wyznaczywszy odpory, możemy znaleźć wartość momentu gnącego dla dowolnego przekroju poprzecznego, przechodzącego przez jakikolwiek punkt obrany na odkształconej pręcie w odległości ζ od początku stałych współrzędnych. Dla współrzędnych ζ_1 , zawartych w granicach $\ell \geq \zeta_1 \geq b$, a więc dla punktów O_1 , leżących w połaci I, wartość momentu będzie niewątpliwie $M=A(\ell-\zeta_1)=-P\frac{a}{\ell}(\ell-\zeta_1)$, podczas gdy dla współrzędnych ζ_2 , zawartych w granicach $b \geq \zeta_2 \geq 0$, a więc dla punktów O_2 połaci II będziemy

mieli:

$$M = A(\ell - \zeta_2) + P(\zeta - \zeta_2) = -\frac{P\zeta}{\ell}(\ell - \zeta_2) + P(\zeta - \zeta_2).$$

Pomijając znaczki u ζ , możemy oba te wzory połączyć w jeden, pisząc $M = -\frac{P\zeta}{\ell}(\ell - \zeta) + P(\zeta - \zeta)$. W prawej części tego wzoru pionowa kreska „/” dzieląca wyrazy nie może być pominięta, wskazuje ona bowiem granicę stosowalności wzoru dla obu połaci, przyczem dla połaci I należy każdorazowo ODRZUCAĆ WYRAZ $+P(\zeta - \zeta)$, stojący poza kreską, jako przynależny wyłącznie do połaci II, dla której należy brać wzór całkowity.

Gdy wyznaczamy odpory wykreślnie, możemy skorzystać z wykonanego rysunku podkreślając w nim trójkąt ABG - KTÓRY STANOWI WYKRES MOMENTÓW M . W samej rzeczy, prowadząc $OQ \perp AB$ w dowolnej odległości od punktu B , możemy napisać z podobnych trójkątów:

$$\overline{OQ} = \overline{HK} \times \overline{AO} : \overline{AH} = \overline{HK} \times [\overline{AB} - \overline{OB}] : \overline{AH} =$$

$$= \frac{P\zeta}{p} \left[\frac{\ell}{\lambda} - \frac{\zeta}{\lambda} \right] \frac{1}{u} = \frac{P\zeta}{\ell} (\ell - \zeta) \frac{1}{p\lambda u} = -\frac{M}{p\lambda u}.$$

Oznaczmy przez $\mu = p\lambda u$, wtedy $\overline{OQ} = -M : \mu$, co oznacza, że odcinek OQ , odległy o ζ/λ od punktu B , wyznacza w skali μ wartość momentu M dla dowolnego przekroju poprzecznego, rozpatrywanego na przecie odkształconym w odległości ζ od początku stałych współrzędnych. Powtarzając to samo dowodzenie dla drugiej połowy trójkąta, przekonamy się, iż odcinki prostopadłe do podstawy AB , ograniczone łamaną

ASB , wyznaczają odpowiednie wartości, momentów gnących, panujące wzdłuż rozpatrywanego pręta. Z wykresu widzimy, że skrajna wartość momentu leży na osi siły gnącej i odpowiada wartości $\zeta = \ell$. Ta wartość jest przeto $M_M = -P \frac{\ell^2}{2} (\ell - \ell)$. Tutaj mogą zachodzić dwa wypadki:

WYPADEK A. PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA JEST STAŁY.

Zatem $J_x = J_{x_0} = \text{CONSTANS}$, oraz $W_x = W_{x_0} = \text{CONSTANS}$. Skrajna wartość naprężenia gnącego dla jakiegokolwiek przekroju poprzecznego pręta $t_{gm} = M : W_{x_0}$, jest więc proporcjonalna do M . Maximum maximorum naprężeń t_{gm} otrzymamy więc pisząc $t_{gmm} = M_M : W_{x_0} = -P \frac{\ell^2}{2} (\ell - \ell) : W_{x_0}$; Czyniąc $t_{gmm} = R_g$, otrzymujemy $W_{x_0} = M_M : R_g$ wartość momentu bezwładności, wyznaczającą stały przekrój poprzeczny pręta. Dla walca prostego kołowego o stałej średnicy D mamy $W_{x_0} = \frac{\pi D^3}{32} = -\frac{P \ell^2}{2} (\ell - \ell)$, skąd wyznaczmy D z łatwością. Wyznaczwszy w ten sposób przekrój poprzeczny pręta, możemy otrzymać równanie odkształconej, pisząc: $\frac{1}{\rho} \cong \pm \psi'' = \alpha_g M : J_{x_0}$. Stąd mamy:

$$\pm E_g J_{x_0} \psi'' = -\frac{P \ell^2}{2} (\ell - \zeta)' + P(\ell - \zeta),$$

gdzie jednak należy określić znak. W danym wypadku od razu zauważyć się daje, że cała odkształcona leży POD OSIĄ $OS\ \zeta$ i jest wklęsła względem tej osi; musi być zatem $\psi \psi'' < 0$, oraz $\psi > 0$, co daje $\psi'' < 0$. Ponieważ dla pierwszej połaci $M = -\frac{P \ell^2}{2} (\ell - \zeta) < 0$, jakoteż i dla drugiej $M = -P\ell + \frac{P \ell^2}{2} + P\ell - P\zeta = -P\zeta(\ell - \ell) : \ell < 0$, zatem we wzorze należy zachować znak plus, pisząc

wprost: $E_g J_{x_0} \psi'' = -\frac{P\ell}{\ell}(\ell-\zeta) \frac{1}{\ell} + P(\ell-\zeta)$. I nadal zawsze dla uniknięcia tego rodzaju znużających rozpatrywań - pisać będziemy we wzorze znak PLUS, zachowując odnośne znaki się w ogólnym wyrażeniu dla momentu gnącego, a więc UWAŻAJĄC ZA DODATNIE SIŁY KIERUNKOWO ZGODNE Z OŚIĄ $O\psi$, A ZA UJEMNE - SIŁY SKIEROWANE PRZECIWNIE.

Całkując dwukrotnie wzór otrzymany mamy:

$$E_g J_{x_0} \psi' = C + \frac{P\ell}{2\ell}(\ell-\zeta)^2 \frac{1}{\ell} - \frac{P}{2}(\ell-\zeta)^2,$$

oraz: $E_g J_{x_0} \psi = D + C\zeta - \frac{P\ell}{6\ell}(\ell-\zeta)^3 \frac{1}{\ell} + \frac{P}{6}(\ell-\zeta)^3 \sim$

Stałe całkowania z łatwością określimy, zważywszy, że dla obu punktów NIEZMIENNYCH A i B ODKSZTAŁCONA MUSI PRZECINAĆ PIERWOTNĄ OŚ PODŁUŻNĄ PRĘTA NIEODKSZTAŁCONEGO. Mamy więc dla punktu A w połaci I $\psi_A = 0$, $\zeta_A = \ell$, co daje $0 = D + C\ell$, a dla punktu B w połaci II $\psi_B = 0$, $\zeta_B = 0$, skąd: $0 = D - \frac{P\ell\ell^2}{6} + \frac{P\ell^3}{6}$. Zatem $D = \frac{P\ell\ell^2}{6} - \frac{P\ell^3}{6}$, oraz: $C = -\frac{1}{6}P\ell + \frac{1}{6}P\ell^3:\ell$, i ostateczne równanie odkształconej:

$$E_g J_{x_0} \psi = \frac{P\ell\ell^2}{6} - \frac{P\ell^3}{6} - \frac{P\ell\ell}{6}\zeta + \frac{P\ell^3}{6\ell}\zeta - \frac{P\ell}{6\ell}(\ell-\zeta)^3 \frac{1}{\ell} + \frac{P}{6}(\ell-\zeta)^3 \sim$$

Z tego równania możemy wyznaczyć UGIĘCIE PRĘTA W OSI SIŁY P , czyli tak zwane OBNIŻENIE PUNKTU PRZYŁOŻENIA SIŁY P , jeszcze inaczej STRZAŁKĘ SIŁY $P \sim f_P$. W tym celu czynimy $\zeta = \ell$ we wzorze, co daje:

$$E_g J_{x_0} f_P = \frac{P\ell\ell^2}{6} - \frac{P\ell^3}{6} - \frac{P\ell^2\ell}{6} + \frac{P\ell^4}{6\ell} - \frac{P\ell}{6\ell}(\ell-\ell)^3 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{Pb}{6l} [l^3 - 6l^2 - 6l^2 + 6^3 - l^3 + 3l^2b - 3l^2b + 6^3] = \\
 &= \frac{Pb^2}{6l} [-6l - l^2 + 6^2 + 3l^2 - 3lb + 6^2] = \\
 &= \frac{Pb^2}{3l} (l - b)^2 = \frac{Pa^2b^2}{3l} \sim
 \end{aligned}$$

Stąd mamy ostatecznie $f_P = Pa^2b^2 : 3lE_y J_{x_0} \sim$
 Gdy $a = b = \frac{l}{2}$, to wtedy $f_P = Pl^3 : 48E_y J_{x_0} \sim$

W ogólnym wypadku tylko co znaleziona strzałka siły P NIE DAJE najwyższej wartości współrzędnej ψ - nie jest więc STRZAŁKĄ UGIĘCIA PRĘTA. Aby tę otrzymać, należy uczynić $\psi' = 0$, co daje: $-\frac{1}{6}Pb^2l + Pb^3:6l + Pb(l-\zeta_0)^2:2l + \frac{P}{2}(b-\zeta_0)^2 = 0$. Stąd mnożąc przez $6l:P$, mamy dla II połaci:

$$\begin{aligned}
 &-b^2l + b^3 + 3b(l-\zeta_0)^2 - 3l(b-\zeta_0)^2 = 0, \\
 &\text{co daje: } -b^2l + b^3 + 3b^2l - 6b^2\zeta_0 + 3b\zeta_0^2 - 3lb^2 + 6b\zeta_0 - 3l\zeta_0^2 = 0, \\
 &\text{stąd } \zeta_0^2 = bl - \frac{b}{3}(l+b) \text{ i ostatecznie } \zeta_0 = \sqrt{\frac{b}{3}(2l-b)} \sim
 \end{aligned}$$

Dla rozpatrywanej połaci II musi być $b \geq \zeta_0$, mamy więc zatem warunek konieczny $b > \sqrt{\frac{b}{3}(2l-b)}$, stąd: $3b^2 > 2lb - b^2$, to jest $4b^2 > 2lb$, co daje ostatecznie $2b > l$ - WNIOSEK NIEZGODNY Z RZECZYWISTOŚCIĄ.

W tej połaci II nie możemy zatem oczekiwać najwyższej wartości ψ - strzałki ugięcia pręta, piszemy wobec tego dla połaci I tę samą zależność:

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{6}Pb^2l + Pb^3:6l + Pb(l-\zeta_0)^2:2l = 0, \\
 &\text{to jest: } -l^2 + b^2 + 3(l-\zeta_0)^2 = 0, \text{ stąd: } l - \zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} \text{ i} \\
 &\text{ostatecznie: } \zeta_0 = l - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}.
 \end{aligned}$$

W danym wypadku musi być $l \geq \zeta_0 \geq b$. Pierwsza

nierówność jest zgoła oczywista należy więc tylko udowodnić, że $l - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \geq b$. Pisząc tę nierówność w postaci $l - b \geq \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)}$ mamy $3(l - b)^2 \geq l^2 - b^2$. Po skróceniu przez $l - b$ mamy tu $3(l - b) \geq l + b$, skąd $2l \geq 4b$ i ostatecznie $l \geq 2b$. Warunek ten nie przeczy założeniu, wnioskujemy więc, że tylko co otrzymana wartość

ζ_0 daje istotnie szukaną STRZAŁKĘ UGIĘCIA f , którą niewątpliwie otrzymamy z ogólnego wzoru, czyniąc w nim $\zeta = \zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)}$. Stąd więc otrzymujemy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} E_g J_{x_0} f &= \frac{Pb l^2}{6} - \frac{Pb^3}{6} - \frac{Pb l}{6} \left[l - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right] + \\ &+ \frac{Pb^3}{6l} \left[l - \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right] - \frac{Pb}{6l} \left[\sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \right]^3 = \frac{Pb}{6l} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \left\{ l^2 - b^2 - \frac{l^2}{3} + \frac{b^2}{3} \right\} = \\ &= \frac{Pb}{6l} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}} \left[\frac{2}{3} l^2 - \frac{2}{3} b^2 \right] = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{9l} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}. \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie mamy:

$$f = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{9l E_g J_{x_0}} \sqrt{\frac{l^2 - b^2}{3}}.$$

W szczególnym wypadku, gdy $a = b = l : 2$, to jest gdy siła działa pośrodku $\zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3} \left[l^2 - \frac{l^2}{4} \right]} = \frac{l}{2}$, zatem strzałki ugięcia należy również szukać pośrodku pręta. Wartość jej podaliśmy wyżej. Dla walca prostego o stałej średnicy D mamy $J_{x_0} = \frac{\pi D^4}{64}$, co daje:

$$f = 64 Pb(l^2 - b^2) \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} : 9\pi E_g l D^4.$$

Z kolei rozpatrujemy:

WYPADEK B. PRĘT O STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI.

Wyżej widzieliśmy, że w danym wypadku pręt o stałym przekroju poprzecznym posiada jedyny przekrój poprzeczny wytrzymałościowo wyzyskany - przekrój, gdzie jest przyłożona siła P . Pozostałe są zbyt sztywne - pręt jest przekładowany tworzywem. Aby tę jego wadę usunąć, należy wykonać pręt stałej wytrzymałości o przekroju poprzecznym zmiennym w taki sposób, aby panujące w nim skrajne naprężenia gnące t_{gm} miały wartość stałą dla wszystkich przekrojów i równą R_g . Mamy więc $t_{gm} = M : W_x = M_{Y_M} : J_x$. Stąd mamy wzór: $W_x = M : R_g$, wyznaczający wartość momentu wytrzymałościowego dowolnego poprzecznego przekroju, a więc określający zarazem i same wymiary przekroju. Ponadto $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_g J_x} = R_g : \frac{E_g}{J_x} Y_M$. Te dwa wzory rozwiązują zagadnienie.

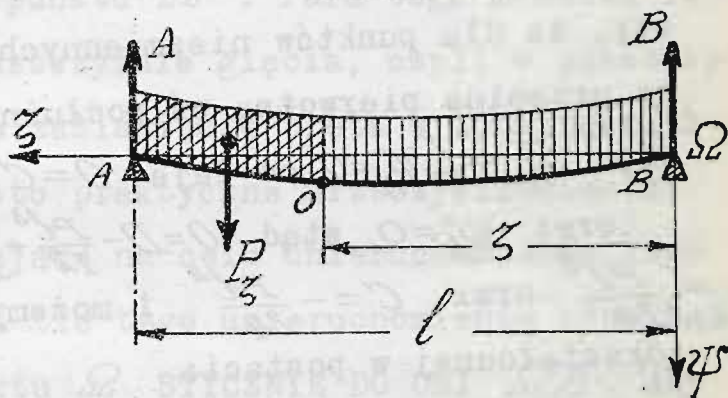
Dla pręta o przekroju poprzecznym kołowym, średnicy d zmiennej, mamy $W_x = \frac{\pi d^3}{32} = -\frac{P \zeta (l - \zeta)}{2} ; + P (l - \zeta)$. Stąd wyznaczymy d w zależności od ζ . Jest to równanie paraboli sześcienniej, wyznaczające profil pręta w postaci DWUCH KRZYWYCH tego typu, przecinających się na osi siły tnącej jak to zresztą najlepiej uwypukla RYS. 225. Z kolei bierzemy pod uwagę:

§ 20. PRĘT OBU KOŃCAMI SWOBODNIE PODPARTY I OBCIĄŻONY JEDNOSTAJNIE NA CAŁEJ DŁUGOŚCI.

Niech jednostajne obciążenie pręta wynosi p KILOGRAMÓW NA JEDNOSTKĘ DŁUGOŚCI. Całkowite obciążenie pręta będzie więc $P = p l$ KG. Pod jego jarzmem pręt ugnie się ku dołowi; oś podłużna pręta stanie

się krzywą płaską-odkształconą, przechodzącą przez punkty A i B NIEZMIENNE w swem położeniu, jako leżące na podporach (RYS. 226). Przez te punkty prowadzimy stałą oś $\Omega\zeta$, a przez B oś $\Omega\psi$ i $\Omega\xi$, tak, jak to czyniliśmy w ustępie poprzedzającym. Obciążenie zewnętrzne wywołuje

RYS. 226.



ODPORY A, B niewątpliwie jednakowe, o czem z łatwością przekonywamy się, zważywszy na zupeł-

ną symetrię obciążenia. Mamy więc $A=B=-P:2$, ponieważ wiemy, że statyki, że $A+B+P=0$. Wyznaczywszy w ten sposób odpory, piszemy wartość momentu gnącego dla dowolnego przekroju poprzecznego, przechodzącego przez jakikolwiek punkt obrany na odkształconej pręta w odległości ζ od początku stałych współrzędnych: $M=A(\ell-\zeta)+p(\ell-\zeta)\frac{\ell-\zeta}{2}=$
 $= -\frac{P}{2}(\ell-\zeta)+\frac{P}{2\ell}(\ell-\zeta)^2$. Dla pręta o stałym przekroju poprzecznym, gdzie $J_x=J_{x_0}$ = stałej oraz $W_x=W_{x_0}$ = stałej, moment bezwładności przekroju jest proporcjonalny do M , należy więc znaleźć najwyższą wartość

M_M . W tym celu wyznaczamy $\frac{dM}{d\zeta}=\frac{P}{2}-\frac{P}{\ell}(\ell-\zeta_0)=0$, co daje $\zeta_0=\ell:2$. Skrajna wartość momentu $M_M=-\frac{P}{2}\frac{\ell}{2}+\frac{P}{2\ell}\frac{\ell^2}{4}=-\frac{P\ell}{8}$, zachodzi pośrodku. Pisząc $W_{x_0}=-P\ell:8R_g$, wy-

znaczamy stały przekrój poprzeczny. W dalszym ciągu możemy zatem wypisać:

$$E_g J_{x_0} \psi'' = -\frac{1}{2} P(l-\zeta) + \frac{1}{2l} P(l-\zeta)^2 \sim$$

Po dwukrotnem całkowaniu da to nam:

$$E_g J_{x_0} \psi' = C + \frac{P}{4} (l-\zeta)^2 - \frac{P}{6l} (l-\zeta)^3,$$

$$\text{oraz: } E_g J_{x_0} \psi = D + C\zeta - \frac{P}{12} (l-\zeta)^3 + \frac{P}{24l} (l-\zeta)^4 \sim$$

Stałe całkowania z łatwością określimy, zważywszy, że dla punktów niezmiennych A i B odkształcona przecina pierwotną oś podłużną pręta. Dla A będzie więc $\zeta_A = l, \psi_A = 0$, co daje $0 = C + Dl$, a dla $B \sim \zeta_B = 0$, oraz $\psi_B = 0$, stąd $0 = D - \frac{Pl^3}{12} + \frac{Pl^3}{24}$. Mamy więc $D = \frac{Pl^3}{24}$ oraz $C = -\frac{Pl^2}{24}$ i możemy wypisać równanie odkształconej w postaci:

$$E_g J_{x_0} \psi = \frac{Pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{24} \zeta - \frac{P}{12} (l-\zeta)^3 + \frac{P}{24l} (l-\zeta)^4 \sim$$

Wobec zupełnej symetryczności obciążenia - strzałki ugięcia f oczekiwać należy pośrodku pręta, dla $\zeta = \frac{l}{2}$ co daje:

$$E_g J_{x_0} f = \frac{Pl^3}{24} - \frac{Pl^3}{48} - \frac{Pl^3}{12 \cdot 8} + \frac{Pl^4}{24 \cdot 16 \cdot l} = \frac{5}{384} Pl^3 \sim$$

$$\text{Stąd ostatecznie: } f = \frac{5Pl^3}{384 E_g J_{x_0}} \sim$$

Z kolei rozpatrujemy:

§ 21. PRĘT JEDNYM KONCEM OSADZONY, W DRUGIM SWOBODNIE PODPARTY, A OBCIĄŻONY SKUPIONĄ SIŁĄ GNĄCĄ.

Niech oś $\Omega \zeta$ stanowi kierunek pierwotnej osi podłużnej pręta, zamocowanego w BC . Odległość siły gnącej P od podpory A oznaczamy przez a , od Ω

przez ℓ . Całą długość pręta oznaczamy przez L . Oś siły gnącej dzieli płaszczyznę gięcia na dwie połacie lewą „I”, obejmującą podporę A , i prawą „II”. Siła P wywołuje odpory A i B , ponadto zamocowana część pręta CB ulega działaniu MOMENTU OSADOWEGO M_B , SPRZECIWIAJĄCEGO SIĘ wszelkim ruchom obrotowym osadowej części pręta wokół punktu B . Para tego momentu leży oczywiście w płaszczyźnie gięcia, czyli w płaszczyźnie siły P . Silne zaciśnięcie pręta w uchwytach, zamurowanie belki - oto praktyczne urzeczywistnienia osadzenia pręta, mające na celu unieruchomienie jego części końcowej. Na tle tego unieruchomienia odkształcona wybiega z punktu B STYCZNIE DO OSI BA . Aby wyznaczyć A, B, M_B mamy równania statyki obierając B jako ośrodek momentów: $A + B + P = 0$, oraz $AL + PB + M_B = 0$. Skąd $B = -A - P$, oraz $M_B = -AL - PB$. Pozostaje zatem odpora A , jako statycznie niewyznaczalna, którą należy wyznaczyć ze wzorów wytrzymałościowych. Aby to uskutecznić wyznaczamy moment gnący M dla przekrojów przechodzących przez dowolny punkt O , leżący na odkształconej w odległości z od początku współrzędnych. Dla $L \geq z \geq \ell$ mamy $M = A(L - z)$, a dla $\ell \geq z \geq 0$, w taki sam sposób $M = A(L - z) + P(\ell - z)$. Oba te wzory łączymy w jeden: $M = A(L - z) + P(\ell - z)$. Dla połaci I wyraz $P(\ell - z)$ jako stojący poza kreską należy odrzucić; natomiast dla połaci II - brać cały wzór.

Dla pręta o STAŁYM PRZEKROJU $J_x = J_{x_0} = \text{stałej}$, za-

tem $E_g J_{x_0} \psi'' = A(l-z) + P(b-z)$, co daje:

$$E_g J_{x_0} \psi' = C - \frac{A}{2}(l-z)^2 - \frac{P}{2}(b-z)^2,$$

oraz: $E_g J_{x_0} \psi = D + C'z + \frac{A}{6}(l-z)^3 + \frac{P}{6}(b-z)^3.$

Stałe całkowania określimy tu z łatwością, zważywszy, że odkształcona jest styczną do osi ΩZ w Ω i przechodzi przez A ; zatem dla $z=0$ $\psi=0$ oraz $\psi'=0$, a dla $z=l$ $\psi=0$. Stąd mamy:

$$0 = D + \frac{Al^3}{6} + \frac{Pb^3}{6}; \quad 0 = C - \frac{Al^2}{2} - \frac{Pb^2}{2},$$

oraz $0 = D + Cl$. Mnożąc drugie równanie przez l dodajemy do pierwszego — a od tej sumy odejmujemy równanie trzecie:

$$Al^3 + Pb^3 - 3Al^3 - 3Pb^2l = 0.$$

co daje $A = -\frac{Pb^2}{2l^3}(3l-b)$. Podstawiając tę wartość w pierwsze równanie mamy $D = \frac{Pb^2}{12}(3l-b) + \frac{Pb^3}{6} = \frac{Pb^2}{4}(l-b)$, z trzeciego zaś równania $C = -\frac{D}{l} = -\frac{Pb^2}{4l}(l-b)$. Możemy zatem wypisać równanie odkształco-

nej:

$$E_g J_{x_0} \psi = \frac{Pb^2}{4}(l-b) - \frac{Pb^2}{4l}(l-b)z - \frac{Pb^2}{12l^3}(3l-b)(l-z)^3 + \frac{P}{6}(b-z)^3,$$

które daje STRZAŁKĘ SIŁY f_p , czyli ugięcie pręta w punkcie przyłożenia D siły P , przy $z=b$; to jest:

$$\begin{aligned} E_g J_{x_0} f_p &= \frac{Pb^2}{4}(l-b) - \frac{Pb^3}{4l}(l-b) - \frac{Pb^2}{12l^3}(3l-b)(l-b)^3 = \\ &= \frac{Pb^2(l-b)}{12l^3} \{3l^3 - 3l^2b - 3l^3 + 6l^2b - 3lb^2 + 6l^2b - 3b^3 + 6b^3\} = \\ &= (l-b) \frac{Pb^3}{12l^3} [(2l-b)^2 - 6l]. \end{aligned}$$

Stąd:

$$f_p = \frac{Pb^3(l-b)}{12l^3 E_g J_{x_0}} [(2l-b)^2 - 6l].$$

W szczególnym wypadku, gdy $a=b=l/2$, mamy $f_P = \frac{7}{168} \frac{Pl^3}{E_y J_{x_0}}$. Aby z kolei wyznaczyć f STRZAŁKĘ UGIĘCIA PRĘTA, czynimy $\varphi' = 0$, co daje

dla obu połaci: $C - \frac{A}{2}(l-\zeta_0)^2 - \frac{P}{2}(b-\zeta_0)^2 = 0$. Dla I połaci: $C - \frac{A}{2}(l-\zeta_0)^2 = 0$ to jest:

$$(l-\zeta_0)^2 = \frac{2C}{A} = \left[-\frac{Pb^2}{2l}(l-b) \right] : \left[-\frac{Pl^2}{2l^3}(3l-b) \right] = l^2(l-b) : (3l-b),$$

stad $\zeta_0 = l \pm l\sqrt{\frac{l-b}{3l-b}}$ i oczywiście $\zeta_0 = l - l\sqrt{\frac{l-b}{3l-b}}$. Ponieważ dla połaci I ζ musi być większe od b t.j.

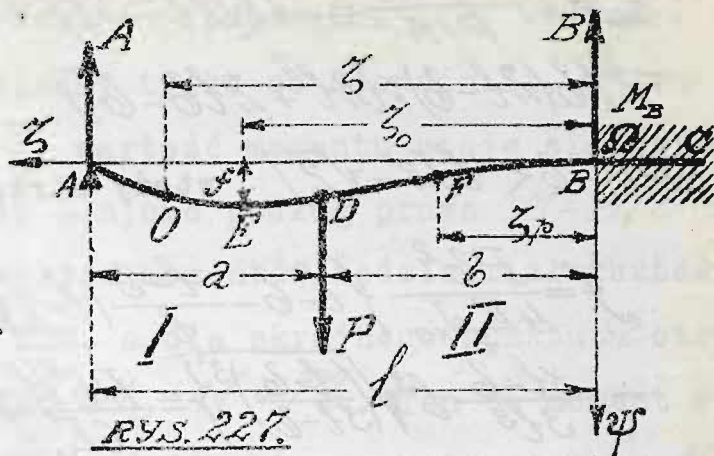
$\zeta_0 \geq b$. W wypadku skrajnym $\zeta_0 = b = l - l\sqrt{\frac{l-b}{3l-b}}$ co daje $b-l = l\sqrt{\frac{l-b}{3l-b}}$. Stad $(b-l)^2 = l^2(l-b) : (3l-b)$ to jest $(l-b) : (3l-b) = l^2$, co daje $2l^2 - 4lb + b^2 = 0$, skąd $b = l[2 \pm \sqrt{2}]$. Ponieważ najoczywściej $b = l[2 - \sqrt{2}]$, zatem dla wszelkich

$b < l[2 - \sqrt{2}]$ szukany punkt będzie leżał w połaci I. Natomiast, gdy $b > l[2 - \sqrt{2}]$ należy go szukać w połaci II.

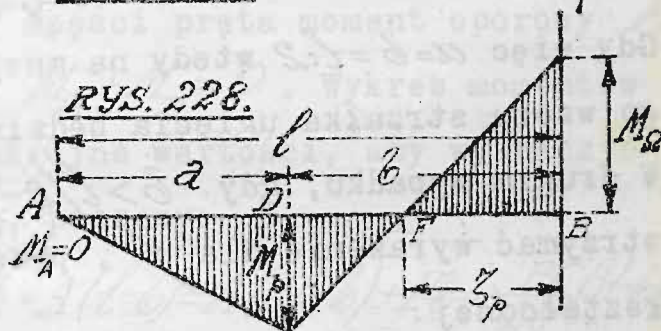
Wtedy:

$$C - \frac{A}{2}(l-\zeta_0)^2 - \frac{P}{2}(b-\zeta_0)^2 = -\frac{1}{2}(P+A)\zeta_0^2 + (Pb+Al)\zeta_0 + C - \frac{A}{2}l^2 - \frac{P}{2}b^2 = 0.$$

Stąd mamy wobec $C - \frac{A}{2}l^2 - \frac{P}{2}b^2 = 0$ wprost:



RYS. 228.



$$\zeta_0 = 2 \frac{Pb + Al}{P + A} = 2lb[2l^2 - 3lb + b^2] : [2l^3 - 3l^2b + b^3] = \\ = 2lb(2l - b) : [2l^2 + 2lb - b^2]. \sim$$

Gdy: $b < l[2 - \sqrt{2}]$ wtedy strzałka ugięcia:

$$f = \frac{Pb^2}{4E_g J_{x_0}} \left\{ l - b - \frac{l - b}{l} \left(l - l \sqrt{\frac{l - b}{3l - b}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{3l - b}{3l^3} l^3 \sqrt{\left(\frac{l - b}{3l - b} \right)^3} \right\} = \frac{Pb^2(l - b)}{6E_g J_{x_0}} \sqrt{\frac{l - b}{3l - b}}. \sim$$

Gdy więc $\alpha = b = l:2$ wtedy na mocy tylko co otrzymanego wzoru strzałka ugięcia będzie $f = Pl^3 : [48\sqrt{5}E_g J_{x_0}]$. W drugim wypadku, gdy $b > l[2 - \sqrt{2}]$, można również otrzymać wyrażenie dla f , podstawiając we wzór odkształconej:

$$\zeta = \zeta_0 = 2lb(2l - b) : [2l^2 + 2lb - b^2]. \sim$$

Wreszcie gdy $b = l[2 - \sqrt{2}] = 0,5858l$ wtedy $f = f_p$, tutaj bowiem $\zeta_0 = b$. Strzałka ugięcia jest więc strzałką siły P . Z kolei chcąc wyznaczyć punkty przegięcia odkształconej czynimy $\psi'' = 0$, co daje $A(l - \zeta_1) + P(b - \zeta_1) = 0$. Ponieważ to równanie daje dla połączeń I pierwiastek $\zeta_1 = l$, gdzie oczywiście oczekiwać punktu przegięcia nie należy, przeto dla połączeń II mamy $Al - A\zeta_p + Pb - P\zeta_p = 0$, skąd:

$$\zeta_p = \frac{Al + Pb}{A + P} = \frac{1}{2} \zeta_0 = lb(2l - b) : [2l^2 + 2lb - b^2]. \sim$$

Tylko co otrzymana współrzędna wyznacza zarazem punkt o zerowej wartości momentu gnącego. W pierwszej połączeni moment jest ujemny ponieważ mamy $M = A(l - \zeta) = -\frac{Pb^2(3l - b)(l - \zeta)}{2l^3}$. Jego wartość maleje linjowo aż do

wartości $M_p = -\frac{P\ell^2}{2\ell^3}(3\ell-6)(\ell-6)$, odpowiadającej wartości $\zeta = \ell$. Ponieważ jakieśmy tylko co udowodnili, w drugiej połaci dla $\zeta = \zeta_p$ wartość momentu staje się zerem, a moment zmienia się linjowo podług prawa $M = A(\ell - \zeta) + P(\ell - \zeta)$, przeto wykres momentów będzie miał kształt zaznaczony na RYS. 228, a dla skrajnego punktu Ω otrzymamy dodatnią wartość $M_\Omega = A\ell + P\ell$. Ten to moment wywołuje w zamocowanej części pręta moment oporowy M_B , przyczem oczywiście $M_\Omega + M_B = 0$. Wykres momentów ujawnia zatem dwie skrajne wartości, aby wyznaczyć różnicę ich bezwzględną, piszemy:

$$\Delta = M_\Omega + M_p = A\ell + P\ell + A(\ell - 6) = A(2\ell - 6) + P\ell = -\frac{P\ell^2}{2\ell^3}(3\ell - 6)(\ell - 6) + P\ell = \frac{P\ell}{2\ell^3}[2\ell^3 - 6\ell^2 + 5\ell^2 - 6] = \frac{P\ell(\ell - 6)}{2\ell^3}[2\ell^2 - 4\ell + 6].$$

Różnica ta jest zerem, gdy $2\ell^2 - 4\ell + 6 = 0$, co daje $\ell = \ell[2 - \sqrt{2}] = 0,5858\ell$. Skoro więc $\ell < \ell[2 - \sqrt{2}]$ wtedy $\Delta > 0$ i najwyższą wartość bezwzględną M_M ujawnia moment M_Ω ; gdy zaś $\ell > \ell[2 - \sqrt{2}]$ wtedy znów $M_M = M_p$; w skrajnym wypadku, gdy $\ell = 0,5858\ell$ wtedy $M_M = -M_p = M_\Omega$. Czyniąc $M_M = N_{xo} K_g$, wyznaczamy przekrój bezpieczny pręta w danym wypadku. Z kolei bierzemy pod uwagę:

§ 22. PRĘT JEDNYM KOŃCEM OSADZONY, W DRUGIM SWOBODNIE PODPARTY A OBCIĄŻONY JEDNOSTAJNIE NA CAŁEJ DŁUGOŚCI.

Zachowując znakowanie omówione w ustępie poprzedzającym i oznaczając przez $p = P:\ell$ część całkowitego obciążenia, przypadającą na jednostkę długości

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XXIV.

pręta piszemy równania statyki: $A+B+P=0$ oraz $Al + \frac{1}{2}Pl + M_B = 0$, stąd $B = -A - P$ oraz $M_B = -Al - \frac{1}{2}Pl$.
W danym wypadku dla całego pręta: $M = A(l-z) + p(l-z)\frac{l-z}{2} = A(l-z) + \frac{P}{2l}(l-z)^2$.

Zakładając stały przekrój poprzeczny pręta mamy:

$$E_y J_{x_0} \psi'' = A(l-z) + \frac{P}{2l}(l-z)^2,$$

skąd po dwukrotnem całkowaniu:

$$E_y J_{x_0} \psi' = C - \frac{A}{2}(l-z)^2 - \frac{P}{6l}(l-z)^3 \quad \text{oraz:}$$

$$E_y J_{x_0} \psi = D + Cz + \frac{A}{6}(l-z)^3 + \frac{P}{24l}(l-z)^4.$$

I znów $\psi = \psi' = 0$ dla $z=0$ oraz $\psi = 0$ dla $z=l$ co daje $0 = D + \frac{A}{6}l^3 + \frac{P}{24}l^3$; $0 = C - \frac{A}{2}l^2 - \frac{P}{6}l^2$, oraz $0 = D + Cl$. Mnożąc drugie równanie przez l , dodajemy do pierwszego, a od tej sumy odejmujemy trzecie: $\frac{A}{6}l^3 - \frac{A}{2}l^3 + \frac{Pl^3}{24} - \frac{Pl^3}{6} = 0$, co daje $A = -\frac{3}{8}P$, a zatem $B = -\frac{5}{8}P$.
Podstawiając tę wartość w pierwsze równanie mamy $D = -\frac{3Pl^3}{48} - \frac{Pl^3}{24} = -\frac{Pl^3}{48}$, z trzeciego zaś równania $C = -\frac{D}{l} = \frac{Pl^2}{48}$ możemy więc napisać równanie odkształconej:

$$E_y J_{x_0} \psi = \frac{Pl^3}{48} - \frac{Pl^2}{48}z - \frac{3P}{48}(l-z)^3 + \frac{P}{24l}(l-z)^4 = \frac{Pl^3}{48} \left[\frac{l-z}{l} - 3\frac{(l-z)^3}{l^3} + 2\frac{(l-z)^4}{l^4} \right].$$

Chcąc znaleźć strzałkę ugięcia czynimy $\psi' = 0$

$$\text{co daje nam: } 0 = C - \frac{A}{2}(l-z_0)^2 - \frac{P}{6l}(l-z_0)^3 = -\frac{Pl^2}{48} + \frac{3P}{16}(l-z_0)^2 - \frac{P}{6l}(l-z_0)^3.$$

Stąd mnożąc przez $48l:P$ mamy:

$$-l^3 + 9l(l-z_0)^2 - 8(l-z_0)^3 = -l^3 + 9l^3 - 18l^2z_0 + 9lz_0^2 - 8l^3 + 24l^2z_0 - 24lz_0^2 + 8z_0^3 = 8z_0[z_0^2 - \frac{15}{8}lz_0 + \frac{3}{4}l^2] = 0,$$

co daje:

$$z_0 = \frac{15}{16}l \pm \sqrt{\frac{225}{256}l^2 - \frac{3}{4}l^2} = \frac{15l \pm \sqrt{33}l}{16}.$$

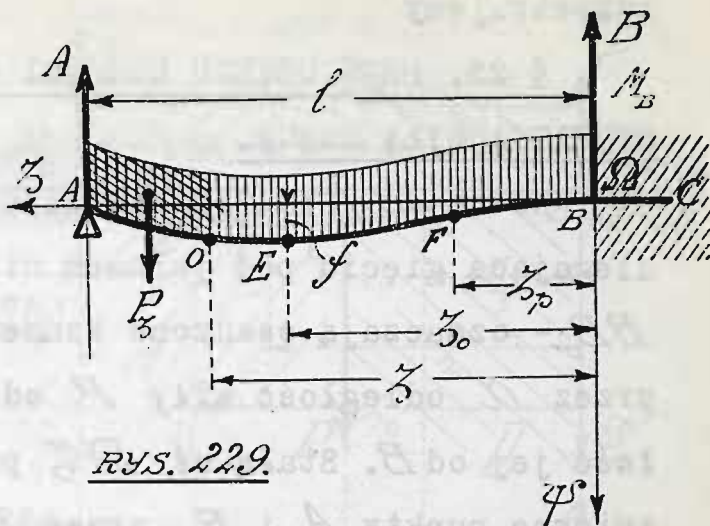
Tutaj najwidoczniej mamy:

$$\zeta_0 = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} \ell,$$

$$\text{skąd } \ell - \zeta_0 = \frac{16 - 15 + \sqrt{33}}{16} \ell =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{33}}{16} \ell.$$

Podstawiając tę wartość w równanie odkształconej mamy STRZAŁKĘ



RYS. 229.

UGIĘCIA :
$$f = \frac{P\ell^3}{48E_g J_{x_0}} \left[\frac{1 + \sqrt{33}}{16} - 3 \frac{(1 + \sqrt{33})^3}{16^3} + 2 \frac{(1 + \sqrt{33})^4}{16^4} \right] =$$

$$= \frac{P\ell^3}{E_g J_{x_0}} \frac{1 + \sqrt{33}}{48 \times 16^4} \left[16^3 - 3 \times 16(1 + \sqrt{33})^2 + 2(1 + \sqrt{33})^3 \right] =$$

$$= \frac{P\ell^3}{E_g J_{x_0}} \frac{1 + \sqrt{33}}{16^4} \frac{111 - \sqrt{33}}{2} = \frac{P\ell^3}{E_g J_{x_0}} \frac{78 + 110\sqrt{33}}{2 \times 16^4}.$$

W przybliżeniu:
$$f \approx \frac{P\ell^3}{184,6 E_g J_{x_0}}.$$

Chcąc z kolei znaleźć punkt przegięcia odkształconej czynimy $\psi'' = 0$ co daje $A(\ell - \zeta_p) + \frac{P}{2\ell}(\ell - \zeta_p)^2 = 0$, to jest $\ell - \zeta_p = -2\ell A : P$, skąd $\zeta_p = \ell + 2\ell A : P = \ell - \frac{3}{4}\ell = \frac{1}{4}\ell$. W tym punkcie ponadto panuje moment równy zeru. Chcąc wreszcie wyznaczyć skrajne wartości momentu bierzemy $\frac{dM}{d\zeta} = -A - \frac{P}{\ell}(\ell - \zeta) = \frac{3}{8}P - \frac{P}{\ell}(\ell - \zeta) = 0$, co daje $\zeta = \frac{5}{8}\ell$. Dla tej wartości otrzymujemy minimum $M_u = -\frac{9}{64}P\ell + \frac{P}{2\ell} \frac{9}{64}\ell^2 = -\frac{9P\ell}{128}$. Skrajną wartość dodatnią M_g otrzymamy czyniąc $\zeta = 0$ w ogólnym wzorze dla momentów: $M_g = -\frac{3}{8}P\ell + \frac{P}{2}\ell = \frac{P\ell}{8}$ co zarazem stanowi bezwzględne maximum wartości momentów. Czyniąc zatem $M_M = M_g = \frac{P\ell}{8} = N_{x_0} R_g$, możemy wyznaczyć dostateczne wymiary pręta. Z kolei

rozpatrujemy

§ 23. PRĘT OBYDWU KOŃCAMI OSADZONY A OBCIĄŻONY
SKUPIONĄ SIŁĄ GNĄCĄ.

Niech AB (RYS. 230) oznacza swobodną część pręta ulegającą gięciu pod jarzmem siły P , niech A_0A i BB_0 - oznaczają osadzone końce tego pręta. Nazwijmy przez α odległość siły P od A , przez β - odległość jej od B . Stałą oś $\Omega\zeta$ prowadzimy przez niezmiennie punkty A i B , przez B prowadzimy ponadto oś $\Omega\psi$ leżącą w płaszczyźnie gięcia i $\Omega\zeta$ do tej płaszczyzny prostopadłą, a skierowaną ku patrzącemu. Wobec niezmienności punktów A i B siła P wywołuje w nich odpory A i B , ponadto osadzone końce pręta ulegają działaniu momentów odporowych M_A i M_B . Odkształcona pręta wybiega zatem z A i B STYCZNIE do pierwotnej osi podłużnej pręta - zawdzięczamy to osadzeniu obu końców pręta. Pisząc w danym wypadku równania statyki mamy $A+B+P=0$, a obierając ośrodek sprowadzenia momentów w Ω mamy: $M_A + A\alpha + P\beta + M_B = 0$. Stąd $B = -A - P$ oraz $M_B = -M_A - A\alpha - P\beta$. W danym wypadku mamy więc aż dwie wielkości statycznie niewyznaczalne A i M_A , które należy określić wytrzymałościowo. W tym celu dzielimy oś siły P płaszczyznę gięcia na dwie połacie. Dla połaci lewej I mamy moment gnący $M = M_A + A(\ell - \zeta)$, a dla połaci II , prawej: $M = M_A + A(\ell - \zeta) + P(\beta - \zeta)$. Łącząc oba wzory, $M = M_A + A(\ell - \zeta) + P(\beta - \zeta)$, gdzie wyraz $P(\beta - \zeta)$ należy pomijać

dla połaci I ,
a cały wzór
brać dla po-
łaci II . Dla
pręta o prze-
kroju stałym:

$$E_y J_{x_0} \psi'' =$$

$$= M_A + A(\ell - \zeta) +$$

$$+ P(\ell - \zeta),$$

co daje $E_y J_{x_0} \psi' =$

$$= C + M_A \zeta -$$

$$- \frac{A}{2}(\ell - \zeta)^2 -$$

$$- \frac{P}{2}(\ell - \zeta)^2,$$

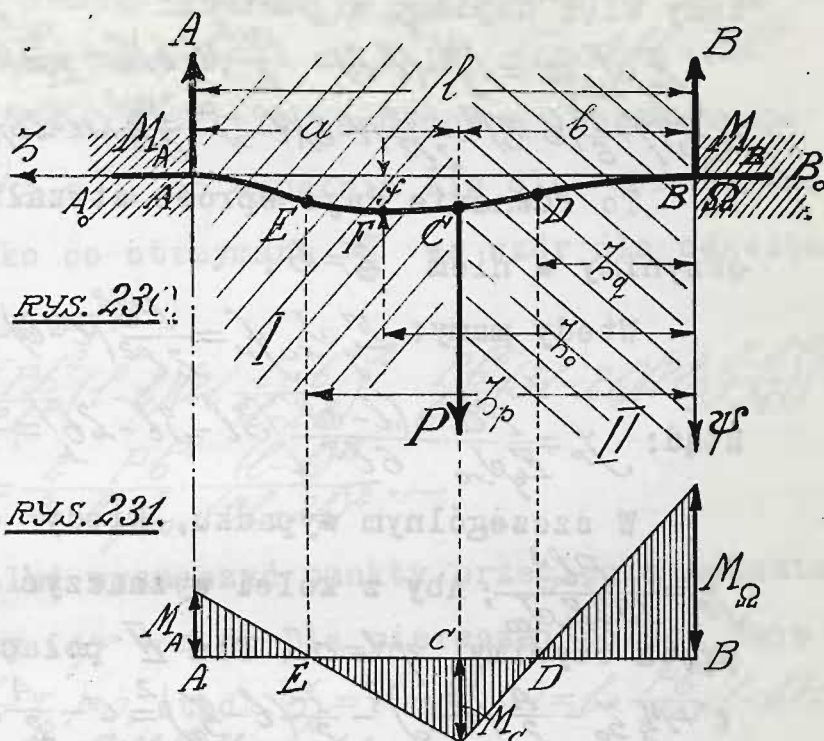
oraz: $E_y J_{x_0} \psi = D + C\zeta + \frac{M_A}{2}\zeta^2 + \frac{A}{6}(\ell - \zeta)^3 + \frac{P}{6}(\ell - \zeta)^3.$

W danym wypadku odkształcona wybiega z punktów A i B stycznie do pierwotnej osi podłużnej $\Omega\zeta$ pręta, mamy więc $\psi' = \psi = 0$ po pierwsze dla $\zeta = 0$ oraz dla $\zeta = \ell$.

Dla wyznaczenia stałych otrzymujemy zatem równania

$$0 = C - \frac{A}{2}\ell^2 - \frac{P}{2}\ell^2; 0 = D + \frac{A}{6}\ell^3 + \frac{P}{6}\ell^3, \text{ oraz } 0 = C + M_A \ell;$$

$0 = D + C\ell + \frac{M_A}{2}\ell^2$. Pomnożmy pierwsze z tych równań przez $\frac{\ell}{3}$ i dodajmy do drugiego: $D + C\frac{\ell}{3} + \frac{P\ell^3}{6} - \frac{P\ell^2\ell}{6} = 0$, ponadto pomnożmy trzecie przez $-\frac{\ell}{2}$ i dodajmy do czwartego: $D + C\frac{\ell}{2} = 0$. Różnica tylko co otrzymanych równań: $C\frac{\ell}{3} - C\frac{\ell}{2} + \frac{P\ell^3}{6} - \frac{P\ell^2\ell}{6} = 0$ da nam: $C = -\frac{P\ell^2}{\ell}(\ell - \ell)$. Stąd bezpośrednio $D = -C\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^2}{\ell}(\ell - \ell)$. Dalej mamy z drugiego równania $M_A = -\frac{C}{\ell} = \frac{P\ell^2}{\ell^2}(\ell - \ell)$, a pierwsze daje nam $A = \frac{2}{\ell^2}(C - \frac{P}{2}\ell^2) = -\frac{P\ell^2}{\ell^2}[\frac{2}{3}\ell - 2\ell]$. Równanie odkształconej mo-



żemy więc napisać w postaci:

$$E_y J_{x_0} \psi = \frac{Pb^2}{2}(\ell-b) - \frac{Pb^2}{\ell^2}(\ell-b)z + \frac{Pb^2}{2\ell^2}(\ell-b)z^2 - \frac{Pb^2}{6\ell^3}[3\ell-2b](\ell-z)^3 + \frac{P}{6}(b-z)^3 = \frac{Pb^2}{2\ell^2}(\ell-b)(\ell-z)^2 - \frac{Pb^2}{6\ell^3}[3\ell-2b](\ell-z)^3 + \frac{P}{6}(b-z)^3.$$

To równanie daje wprost strzałkę siły f_P , gdy uczynimy w niem $z=b$.

$$\text{Wtedy mamy: } E_y J_{x_0} f_P = \frac{Pb^2}{2\ell^2}(\ell-b)^3 - \frac{Pb^2}{6\ell^3}(3\ell-2b)(\ell-b)^3,$$

$$\text{Stąd: } f_P = \frac{Pb^2}{E_y J_{x_0}} \frac{(\ell-b)^3}{6\ell^3} [3\ell-3\ell+2b] = -\frac{Pb^2(\ell-b)^3}{3E_y J_{x_0} \ell^3}.$$

W szczególnym wypadku, kiedy $a=b=\ell/2$ mamy

$$f_P = -\frac{P\ell^3}{192E_y J_{x_0}}; \text{ Aby z kolei wyznaczyć strzałkę ugięcia}$$

pręta czynimy $\psi'=0$. Dla II połaci da to nam:

$$\begin{aligned} C + M_A z_0 - \frac{A}{2}(\ell-z_0)^2 - \frac{P}{2}(\ell-z_0)^2 &= C - \frac{A}{2}\ell^2 - \frac{P}{2}b^2 + \frac{M_A + A\ell + Pb}{2}z_0 \\ - \frac{1}{2}[A+P]z_0^2 &= \frac{M_A + A\ell + Pb}{2}z_0 - \frac{1}{2}[A+P]z_0^2 = 0. \text{ Stąd: } z_0 = \\ &= 2 \frac{M_A + A\ell + Pb}{A+P} = 2 \left[\frac{Pb^2}{\ell^2}(\ell-b) - \frac{Pb^2}{\ell^2}(3\ell-2b) + Pb \right] : \left[P - \frac{Pb^2}{\ell^3}(3\ell-2b) \right] \\ &= 2 \left[\frac{2P^2}{\ell^2} - \frac{b^3}{\ell^3} - 3\frac{b^2}{\ell^2} + 2\frac{b^3}{\ell^3} + \ell \right] : \left[-3\frac{b^2}{\ell^2} + 2\frac{b^3}{\ell^3} + \ell \right] = 2b\ell : (\ell+2b). \end{aligned}$$

To z_0 leży w II połaci musi być więc $z_0 \leq b$, co daje $b \geq 2b\ell : (\ell+2b)$ stąd $\ell+2b \geq 2\ell$ i ostatecznie $2b \geq \ell$. Wobec zupełnej dowolności oznaczenia odległości a i b , zakładamy, że $a \geq b$, w takim razie zawsze $\ell \geq 2b$, inaczej mówiąc w połaci II strzałki ugięcia spodziewać się nie należy. Zatem dla

$$\begin{aligned} \text{połaci I mamy: } C + M_A z_0 - \frac{A}{2}(\ell-z_0)^2 - \frac{Pb^2}{\ell}(\ell-b) + \frac{Pb^2}{\ell^2}(\ell-b) \\ + \frac{Pb^2}{2\ell^3}(3\ell-2b)(\ell-z_0)^2 - \frac{Pb^2}{\ell^2}(\ell-b)(\ell-z_0) + \frac{Pb^2}{2\ell^3}(3\ell-2b)(\ell-z_0)^2 \\ = \frac{Pb^2}{2\ell^3}(\ell-z_0) \left[-2\ell(\ell-b) + (3\ell-2b)(\ell-z_0) \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Stąd } \ell-z_0 = 2\ell \frac{\ell-b}{3\ell-2b} \text{ i ostatecznie } z_0 = \ell - 2\ell \frac{\ell-b}{3\ell-2b}$$

$= [3l^2 - 2bl - 2l^2 + 2bl] : (3l - 2b) = \frac{l^2}{3l - 2b}$; Ponieważ to z_0 leży w połaci I zatem $b \leq z_0$ co daje $l^2 \geq 3lb - 2b^2$ to jest $l^2 - 3lb + 2b^2 \geq 0$. To samo można jeszcze napisać $(l-b)(l-2b) \geq 0$, co wypełnia się dla $a > b$. Podstawiając tylko co otrzymane z_0 we wzór dla odkształconej, otrzymujemy:

$$f = \frac{1}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{Pb^2}{2l^2} (l-b) \left(2l \frac{l-b}{3l-2b} \right)^2 - \frac{Pb^2}{6l^3} (3l-2b) \left(2l \frac{l-b}{3l-2b} \right)^3 \right] =$$

$$= \frac{2}{3} \frac{Pb^2}{E_g J_{x_0}} \frac{(l-b)^3}{(3l-2b)^2}.$$

Aby z kolei wyznaczyć punkty przegięcia odkształconej, czynimy $\varphi = 0$. Dla pierwszej połaci daje to $M_A + A(l - z_p) = 0$, stąd $z_p = l + M_A : A = l + \frac{Pb^2}{l^2} (l-b) : [- \frac{Pb^2}{l^3} (3l-2b)] = \frac{3l^2 - 2bl - l^2 + lb}{3l-2b} = \frac{l(2l-b)}{3l-2b}$. Tutaj znowu musi być $z_p \geq b$ co daje $2l^2 - lb \geq 3lb - 2b^2$ stąd $2l^2 - 4lb + 2b^2 \geq 0$ to jest $2(l-b)^2 \geq 0$. W połaci I istnieje więc punkt E przegięcia odkształconej. W połaci drugiej $M_A + A(l - z_q) + P(b - z_q) = 0$, co daje $z_q = \frac{M_A + Al + Pb}{A + P} = \frac{z_0}{2} = \frac{bl}{l+2b}$. Tutaj znów musi być $b \geq z_q$ co daje $bl + 2b^2 \geq bl$. Ponieważ ta nierówność zawsze się wypełnia, przeto i w połaci II istnieje punkt D przegięcia odkształconej. W wypadku szczególnym, kiedy $a = b = l : 2$ mamy $z_p = l \frac{4l-l}{6l-2l} = \frac{3}{4} l$ oraz $z_q = \frac{l^2}{2l+2l} = \frac{1}{4} l$ - oba punkty przegięcia są zatem symetryczne względem środka, czego zresztą należało oczekiwać zgóry. - W punktach przegięcia panuje wartość $M = 0$, na mocy tego możemy już obecnie wyznaczyć wykres momentów (RYS. 231). W punkcie A mamy $M_A = \frac{Pb^2}{l^2} (l-b) > 0$;

w połaci I moment maleje według prawa $M=M_A+A(l-z)$ a więc linjowo, aż do wartości $M_c=M_A+A(l-b)=\frac{Pb^2}{l^2}(l-b)-\frac{Pb^2}{l^3}[3l-2b](l-b)=-\frac{Pb^2}{l^3}(l-b)(3l-2b-l)=-2\frac{Pb^2}{l^3}(l-b)^2<0$,

panującej w punkcie przyłożenia siły gnącej. W punkcie E prosta wykresu przecina podstawę - jest to zarazem punkt przegięcia odkształconej. Z kolei w połaci

II moment rośnie według prawa $M=M_A+A(l-z)+P(b-z)$ a więc znów linjowo aż do swej skrajnej wartości

$M_{\Omega}=M_A+Al+Pb$, przechodząc ponownie przez zero w punkcie D o współrzędnej z_D , którą wyżej wyznaczaliśmy dla drugiego punktu przegięcia odkształconej. Mo-

ment $M_{\Omega}>0$ równoważy moment oporowy M_B , o czym możemy się przekonać biorąc pod uwagę wzór dla M_B . Mo-

menty M_A i M_B są zatem różnoskrętne. Krzywa wykresu momentów jest więc łamaną, wyznaczającą trzy skrajne

wartości momentów. Aby określić, która z nich największa, porównujemy przedewszystkiem dwie skrajne dodat-

nie $M_{\Omega}-M_A=Al+Pb=Pb-\frac{Pb^2}{l^2}(3l-2b)=\frac{Pb}{l^2}[l^2-3lb+2b^2]=\frac{Pb^2}{l^2}(l-b)(l-2b)>0$. Stąd wnioskujemy, że w

ogólności $M_{\Omega}>M_A$, chyba że $l=2a=2b$, bo wtedy $M_{\Omega}=M_A$. Pozostaje więc tylko różnica bezwzględnych

wartości momentów:

$$\Delta=M_{\Omega}+M_c=2M_A+Al+Pb+A(l-b)=2\frac{Pb^2}{l^2}(l-b)+\frac{Pb}{l^2}(l-b)(l-2b)-\frac{Pb^2}{l^3}(3l-2b)(l-b)=P(l-b)\left[2\frac{b^2}{l^2}+\frac{b}{l}-2\frac{b^2}{l^2}-3\frac{b^2}{l^2}+2\frac{b^3}{l^3}\right]=P(l-b)\frac{b}{l^3}(l^2-3bl+2b^2)=Pb(l-b)^2(l-2b):l^3\geq 0.$$

Stąd wniosek, że M_D jest wogóle największą wartością momentu gnącego, chyba że $l = 2a = 2b$, bo wtedy $M_M = M_D = M_A = -M_C = \frac{Pl}{8}$; Czyniąc $M_M = M_D = W_{x0} \kappa_g$, możemy wyznaczyć dostateczne poprzeczne wymiary pręta. Z kolei bierzemy pod uwagę:

§ 24. PRĘT OBYDWU KOŃCAMI OSADZONY, A OBCIĄŻONY JEDNOSTAJNIE NA CAŁEJ DŁUGOŚCI.

Zachowując znakowania omówione w ustępie poprzedzającym i oznaczając przez $p = P:l$ cząstkę całkowitego obciążenia, przypadającą na jednostkę długości pręta, piszemy równania statyki $A + B + P = 0$ oraz $M_A + A l + P \frac{l}{2} + M_B = 0$ stąd $B = -A - P$ oraz $M_B = -M_A - l[A + \frac{P}{2}]$.

W danym wypadku dla całego pręta $M = M_A + A(l-z) + p(l-z)\frac{l-z}{2} = M_A + A(l-z) + \frac{P}{2l}(l-z)^2$. Zakładając stały przekrój poprzeczny pręta mamy:

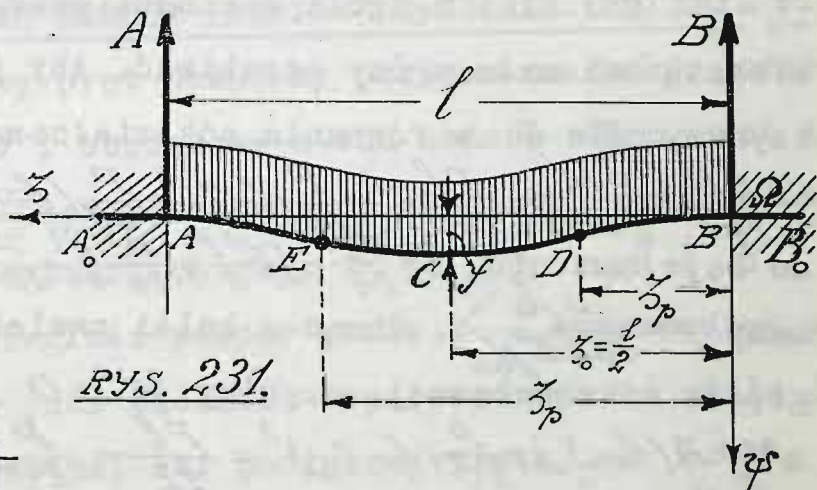
$$E J_{x0} \psi'' = M_A + A(l-z) + \frac{P}{2l}(l-z)^2$$

co daje:

$$E J_{x0} \psi' = C + M_A z - \frac{A}{2}(l-z)^2 - \frac{P}{6l}(l-z)^3;$$

$$E J_{x0} \psi = D + C z + \frac{M_A}{2} z^2 + \frac{A}{6}(l-z)^3 + \frac{P}{24l}(l-z)^4$$

I znów $\psi' = \psi = 0$ dla $z = 0$ oraz dla $z = l$, co daje równania: $0 = C - \frac{A}{2}l^2 - \frac{P}{6}l^3$; $0 = D + \frac{A}{6}l^3 + \frac{P}{24}l^4$, oraz $0 = C + M_A l$; $0 = D + Cl + \frac{M_A}{2}l^2$. Mnożymy pierwsze



z równań przez $\frac{l}{3}$ i dodajemy do drugiego: $0 = C\frac{l}{3} + D - \frac{Pl^3}{18} + \frac{Pl^3}{24} = D + \frac{Cl}{3} - \frac{Pl^3}{72}$. Ponadto mnożymy trzecie przez $-\frac{l}{2}$ i dodajemy do czwartego: $0 = D + \frac{Cl}{2} - \frac{Pl^3}{12}$. Różnica tylko co otrzymanych równań $0 = C\frac{l}{3} - C\frac{l}{2} - \frac{Pl^3}{72}$ daje nam $C = -\frac{Pl^2}{12}$ oraz $D = -C\frac{l}{2} = \frac{Pl^3}{24}$. Ponadto z trzeciego równania mamy $M_A = -\frac{C}{l} = \frac{Pl^2}{12}$, a z pierwszego: $A = -\frac{6D}{l^3} - \frac{P}{4} = -\frac{6Pl^3}{24l^3} - \frac{P}{4} = -\frac{P}{4} - \frac{P}{4} = -\frac{P}{2}$. Ponadto oczywiście $B = -A - P = -\frac{P}{2} - P = -\frac{3P}{2}$. Aby wyznaczyć strzałkę ugięcia pręta f , czynimy $\varphi' = 0$, co daje: $C + M_A \xi_0 - \frac{A}{2}(\ell - \xi_0)^2 - \frac{P}{6\ell}(\ell - \xi_0)^3 = -\frac{Pl^2}{12} + \frac{Pl}{12}\xi_0 + \frac{P}{4}(\ell - \xi_0)^2 - \frac{P}{6\ell}(\ell - \xi_0)^3 = -\frac{P(\ell - \xi_0)^2}{12\ell}[\ell^2 - 3(\ell - \xi_0) + 2(\ell - \xi_0)^2] = 0$.

Stąd: $(\ell - \xi_0)^2 - \frac{3}{2}\ell(\ell - \xi_0) + \frac{\ell^2}{2} = 0$ co daje:

$$\ell - \xi_0 = \frac{3}{4}\ell \pm \sqrt{\frac{9}{16}\ell^2 - \frac{\ell^2}{2}} \sim$$

Ostatecznie więc $\ell - \xi_0 = \ell \frac{3 \pm 1}{4}$. Ponieważ oczywiście należy tu brać znak minus, przeto $\ell - \xi_0 = \frac{\ell}{2}$ skąd $\xi_0 = \frac{\ell}{2}$. Strzałka ugięcia zachodzi pośrodku, czego zresztą należało zgóry oczekiwać. Aby ją wyznaczyć

czynimy $\xi_0 = \frac{\ell}{2}$ w równaniu odkształconej: $E_y J_{x_0} \varphi'' = \frac{Pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{12}\xi_0 + \frac{Pl}{24}\xi_0^2 - \frac{P}{12}(\ell - \xi_0)^3 + \frac{P}{24\ell}(\ell - \xi_0)^4$, co daje nam $E_y J_{x_0} f = \frac{Pl^3}{24} - \frac{Pl^2}{12} \frac{\ell}{2} + \frac{Pl}{24} \frac{\ell^2}{4} - \frac{P}{12} \frac{\ell^3}{8} + \frac{P}{24\ell} \frac{\ell^4}{16}$. Stąd mamy $f = \frac{Pl^3}{384 E_y J_{x_0}}$. Chcąc z kolei znaleźć punkty przegięcia odkształconej, czynimy $\varphi'' = 0$, co daje:

$$M_A + A(\ell - \xi_p) + \frac{P}{2\ell}(\ell - \xi_p)^2 = \frac{Pl}{12} - \frac{P}{2}(\ell - \xi_p) + \frac{P}{2\ell}(\ell - \xi_p)^2 = 0. \text{ Stąd mamy } (\ell - \xi_p)^2 - \ell(\ell - \xi_p) + \frac{\ell^2}{6} = 0, \text{ a zatem } \ell - \xi_p = \frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{6}} = \frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{\ell^2}{12}} = \frac{\ell}{2} \left[1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right].$$

Punkty te zatem są symetryczne względem środkowego punktu pręta. Panują w nich zerowe wartości momentu.

Chcąc wreszcie wyznaczyć skrajne wartości momentów, czynimy $\frac{dM}{dz} = -A - \frac{P}{\ell}(\ell - z) = 0$, co daje $\ell - z_c = -\frac{A\ell}{P} = \frac{\ell}{2}$ i ostatecznie $z_c = \frac{\ell}{2}$. Pośrodku mamy zatem skrajną wartość momentu $M_c = M_A + A\frac{\ell}{2} + \frac{P\ell^2}{8\ell} = \frac{P\ell}{12} - \frac{P\ell}{4} + \frac{P\ell}{8} = -\frac{P\ell}{24} < 0$.

Jest to więc minimum. W danym wypadku moment zmienia się parabolicznie, wykazując maximum w skrajnym punkcie pręta dla $z=0$ - to jest $M_\Omega = M_A + A\ell + \frac{P\ell}{2} = \frac{P\ell}{12} - \frac{P\ell}{2} + \frac{P\ell}{2} = \frac{P\ell}{12} > 0$. Tutaj zatem $M_\Omega = M_A = M_M$. Moment M_Ω równoważy niewątpliwie moment oporowy M_B , co wypływa wprost ze wzoru dla M_B . Momenty oporowe M_A i M_B są zatem różnoskretne i największe, a więc równe M_M . Czyniąc $M_M = \frac{P\ell}{12} = W_{x0} R_g$ wyznaczamy dostateczne wymiary pręta. Z kolei rozpatrujemy:

§ 25. PRĘT WYSTAJĄCY POZA OBIE PODPORY, A OBCIĄŻONY U OBYDWU KOŃCÓW SKUPIONEMI SIŁAMI GNACEMI. Pierwotnie prosty pręt układamy poziomo na dwóch podporach A i B i obciążamy u obu końców skupionymi siłami P_A i P_B , przyłożonemi do skrajnych przekrojów pręta w odległościach a i b od podpór A i B . Oznaczymy odległość podpór przez ℓ i wyprowadźmy z punktu B , jako początku współrzędnych oś stałą Ωz wzdłuż pierwotnej osi podłużnej pręta, oś Ωy w dół w płaszczyźnie gięcia i oś $\Omega \xi$ prostopadle do tej płaszczyzny ku patrzącemu (RYS. 232). Pod działaniem sił gnących powstaną odpory A i B - pręt ugnie się, jego pierwotnie prosta podłużna oś stanie się od-

kształconą o niezmiennych punktach A i B , jako podpory, a więc nieruchomych. I tu płaszczyznę gięcia dzielimy osiami sił skupionych - odpór A i B na trzy połączenia - PIERWSZĄ, zawierającą lewy zwieszający się poza podporę A koniec pręta, - DRUGĄ środkową i TRZECIĄ, obejmującą prawy koniec pręta wystający poza podporę B . Aby wypisać wzory momentów dla tych trzech połączeń należy wyznaczyć ODPORY A i B . Z równań statyki mamy: $A + B + P_A + P_B = 0$, a obierając punkt Ω jako ośrodek sprowadzania momentów $P_A(a+l) + Al - P_B b = 0$, co daje $A = [P_B b - P_A(a+l)] : l$. A zatem z pierwszego równania mamy $B = -A - P_A - P_B = [P_A a + P_A l - P_B b - P_A l - P_B l] : l = [P_A a - P_B(b+l)] : l$. Możemy również wyznaczyć odpory za pomocą wyżej podanego sposobu PROF. HOLZER'A. W tym celu odkładamy $A_0 E = B_0 C = u$ na osi $A_0 B_0$ pręta nieodkształconego i w końcach tych odcinków prostopadle do $A_0 B_0$ budujemy odcinki $EF = P_A : p$ oraz $CD = P_B : p$, gdzie przez p oznaczamy skalę sił. Łącząc A_0 z F oraz B_0 z D prostymi, otrzymujemy w przecięciu z osiami podpór punkty przecięcia A_1 i B_1 , które łączymy z podporami, prowadząc proste $A_1 B_1$ i $A B_1$. Chcąc określić odpory, prowadzimy $\overline{AH} = \overline{BM} = u$ i budujemy proste HG i MR , prostopadłe do $A_0 B_0$. Proste te wyznaczają odcinki HJ oraz HG , MN oraz PR , dające w skali p SZKŁADOWE, szukanych odpór. W samej rzeczy, niech siła P_A wywołuje odpory A_A i B_A , a zaś siła P_B niezależne od tamtych odpory A_B i B_B przynależne

odpowiednio

do podpór

A i B . Tyl-

ko co wypisane

odpory

możemy sta-

tycznie wy-

znaczyć, pi-

sząc równa-

nia momentów

względem oś-

rodków A i

B w posta-

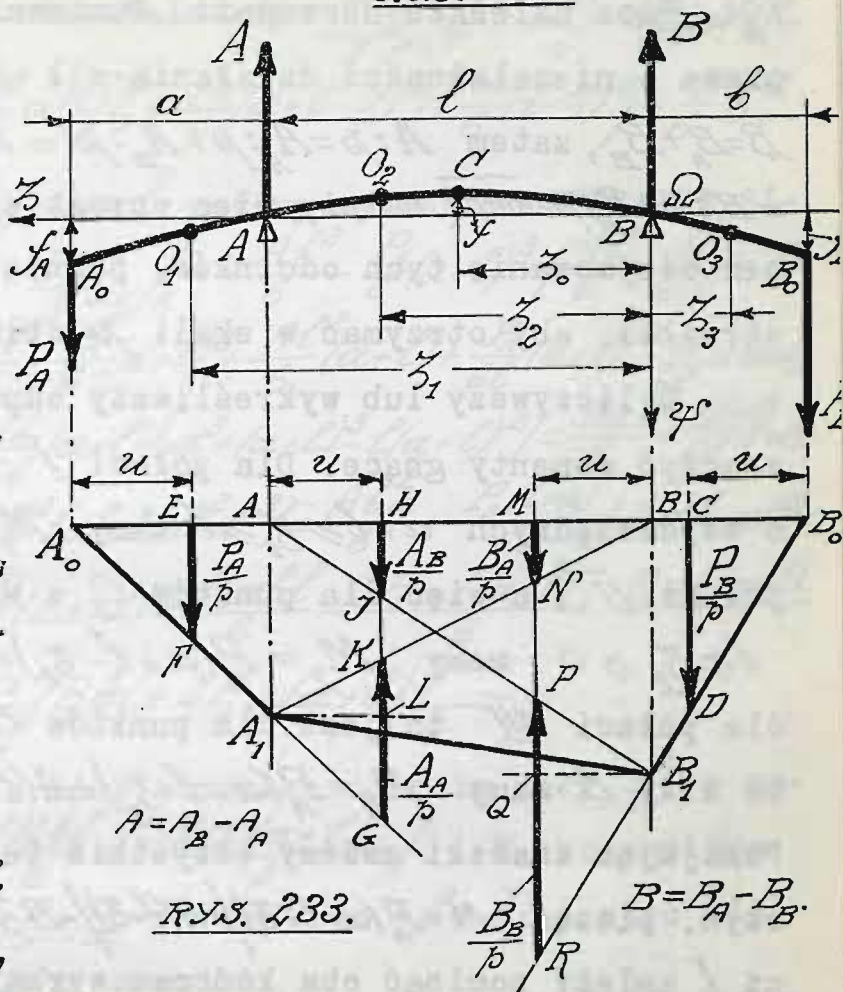
ci $P_A = B_B \ell$,

oraz $P_B = A_A \ell$;

Stąd $B_A = P_A \frac{\alpha}{\ell}$,

oraz $A_B = P_B \frac{\ell}{\ell}$;

RYŚ. 232.



RYŚ. 233.

$$A = A_B - A_A$$

$$B = B_A - B_B$$

Ponadto z równań statyki $A_A + B_A + P_A = 0$, oraz $A_B + B_B + P_B = 0$, co daje $A_A = -[P_A + B_A]$, oraz $B_B = -[P_B + A_B]$. Oznac-

my przez λ skalę długości wykresu, wtedy $A_0 A = \alpha : \lambda$

$AB = \ell : \lambda$, oraz $B B_0 = b : \lambda$. Z trójkątów podob-

nych mamy $\overline{EF} \times \overline{A_0 A} : \overline{A_0 E} = \overline{A A_1} = \overline{MN} \times \overline{AB} : \overline{BM}$, oraz

$\overline{CD} \times \overline{B B_0} : \overline{B_0 C} = \overline{B B_1} = \overline{HJ} \times \overline{AB} : \overline{AH}$. To znaczy, że $(P_A : p) :$

$(\alpha : \lambda) : u = \overline{MN} (\ell : \lambda) : u$, oraz $(P_B : p) (b : \lambda) : u = \overline{HJ} (\ell :$

$: u$, stąd $\overline{MN} = P_A \alpha : \ell p = B_A : p$, oraz $\overline{HJ} = P_B b : \ell p = A_B$

$: p$. Ponadto widzimy wprost, że $\overline{KG} = \overline{GL} + \overline{LH} = \overline{FE} + \overline{MN}$

$= \frac{P_A}{p} + \frac{B_A}{p} = -A_A : p$, oraz $\overline{PR} = \overline{RQ} + \overline{QP} = \overline{CD} + \overline{HJ} = \frac{P_B}{p} +$

$+\frac{A_B}{p} = -\frac{B}{p}$, co należało udowodnić. Ponieważ zaś na mocy prawa o niezależności działania sił $A = A_A + A_B$ oraz $B = B_A + B_B$, zatem $A:p = A_A:p + A_B:p = \overline{HJ} - \overline{HG}$, oraz $B:p = B_A:p + B_B:p = \overline{MN} - \overline{PR}$. Należy więc wprost wykonać wykreślne odejmowanie tych odcinków, pilnie bacząc na ich strzałki, aby otrzymać w skali p obie odpory.

Wyliczywszy lub wykreśliwszy odpory, możemy wyznaczyć momenty gnące. Dla połąci I , dla punktów O_1 , o współrzędnych $a+l \geq z_1 \geq l$ mamy $M_1 = P_A(a+l-z_1)$; dla połąci II , a więc dla punktów O_2 o współrzędnych

$l \geq z_2 \geq 0$ mamy $M_2 = P_A(a+l-z_2) + A(l-z_2)$, wreszcie dla połąci III to jest dla punktów O_3 odległych o $-z_3$ od siły B mamy $M_3 = P_A(a+l-z_3) + A(l-z_3) - Bz_3$.

Pomijając znaczki możemy wszystkie te trzy wzory połączyć, pisząc $M = P_A(a+l-z) + A(l-z) - Bz$, gdzie dla połąci I należy pominąć oba końcowe wyrazy, jako stojące poza pierwszą kreską podziałową, dla połąci II - pominąć wyraz ostatni, stojący za drugą kreską rozdzielową, wreszcie dla połąci III brać cały wzór. W założeniu pręta o stałym przekroju możemy napisać

$$E_y J_{x_0} \varphi'' = P_A(a+l-z) + A(l-z) - Bz, \text{ co daje wprost } E_y J_{x_0} \varphi' = C - \frac{P_A}{2}(a+l-z)^2 - \frac{A}{2}(l-z)^2 - \frac{B}{2}z^2, \text{ oraz } E_y J_{x_0} \varphi = D + Cz + \frac{P_A}{6}(a+l-z)^3 + \frac{A}{6}(l-z)^3 - \frac{B}{6}z^3.$$

Wobec niezmienności punktów A i B mamy $\varphi = 0$ dla $z = 0$ oraz $z = l$ co daje wprost $0 = D + \frac{P_A}{6}(a+l)^3 + \frac{A}{6}l^3$, oraz $0 = D + Cl + \frac{P_A}{6}a^3$. Stąd mamy: $D = -\frac{Al^3}{6} - \frac{P_A}{6}(a+l)^3$, oraz: $C = -\frac{D}{l} - \frac{P_A a^3}{6l} = \frac{Al^2}{6} + \frac{P_A}{6l}(a+l)^3 - \frac{P_A a^3}{6l} = \frac{Al^2}{6} + \frac{P_A}{6l}[(a+l)^3 - a^3]$.

Na mocy tylko co wyznaczonych stałych całkowania otrzy

mujemy równanie odkształconej: $E_g J_{x_0} \psi = -\frac{Al^3}{6} - \frac{P_A}{6}(a+l)^3 + \left[\frac{Al^2}{6} + \frac{P_A}{6l}\{(a+l)^3 - a^3\}\right]z + \frac{P_A}{6}(a+l-z)^3 + \frac{A}{6}(l-z)^3 - \frac{B}{6}z^3$

Czyniąc w nim $z = a+l$ możemy wyznaczyć STRZAŁKĘ SIŁY P_A w postaci: $E_g J_{x_0} f_A = -\frac{Al^3}{6} - \frac{P_A}{6}(a+l)^3 + \left[\frac{Al^2}{6} + \frac{P_A}{6l}\{(a+l)^3 - a^3\}\right](a+l) = -\frac{Al^3}{6} - \frac{P_A}{6}(a+l)^3 + \frac{Al^2}{6}(a+l) + \frac{P_A}{6l}(a+l)^4 - \frac{P_A}{6l}a^3(a+l) = \frac{Al^2}{6}[-l+a+l] + \frac{P_A}{6l}(a+l)[-a^3+(a+l)^3-l(a+l)^2] = \frac{Aal^2}{6} + \frac{P_A}{6l}\{a^3 + a^3 + 3a^2l + 3al^2 + l^3 - la^2 - 2al^2 - l^3\} = \frac{Aal^2}{6} + \frac{P_A(l+a)}{6l}\{2a^2l + al^2\} = \frac{Aal^2}{6} + \frac{P_A a(a+l)}{6}(2a+l) = \frac{P_A al}{6} - \frac{P_A al(a+l)}{6} + \frac{P_A al(a+l)}{6} + \frac{P_A a^2(a+l)}{3} = \frac{a}{6}[P_B l + 2P_A a(a+l)]$

Stąd ostatecznie mamy strzałkę ugięcia siły P_A w postaci $f_A = \frac{a}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{P_B l}{6} + \frac{P_A a(a+l)}{3} \right]$. W szczególnym wypadku, kiedy $P_A = P_B = P$ oraz $a = b = l$, a więc dla wygięcia LAMARLE'A mamy:

$$f_A = \frac{Pl}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{l}{6} + \frac{\lambda(\lambda+l)}{3} \right] = \frac{Pl^2}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{l+2\lambda+2l}{6} \right] = \frac{Pl^2}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{l}{2} + \frac{\lambda}{3} \right]$$

Tak samo zupełnie, czyniąc $z = -b$ w ogólnym wzorze

dla odkształconej, wyznaczamy STRZAŁKĘ SIŁY P_B w postaci: $E_g J_{x_0} f_B = -\frac{Al^3}{6} - \frac{P_A}{6}(a+l)^3 - \left[\frac{Al^2}{6} + \frac{P_A}{6l}\{(a+l)^3 - a^3\}\right]b + \frac{P_A}{6}(a+l+b)^3 + \frac{A}{6}(l+b)^3 + \frac{B}{6}b^3 = \frac{A}{6}[l^3 + 3l^2b + 3lb^2 + b^3 - l^3 - 3l^2l - 3l^2b - 3lb^2 - b^3] + \frac{B}{6}b^3 + \frac{P_A}{6}[(a+l)^3 + 3b(a+l)^2 + 3b^2(a+l) + b^3 - \frac{b(a+l)^3}{l} + \frac{a^3b}{l} - (a+l)^3] = \frac{A}{6}lb(2l+3b) + \frac{b^3}{6}(A+B+P_A) + \frac{P_A b}{6l}[3l(a+l)^2 + 3bl(a+l) - (a+l)^3 + a^3]$

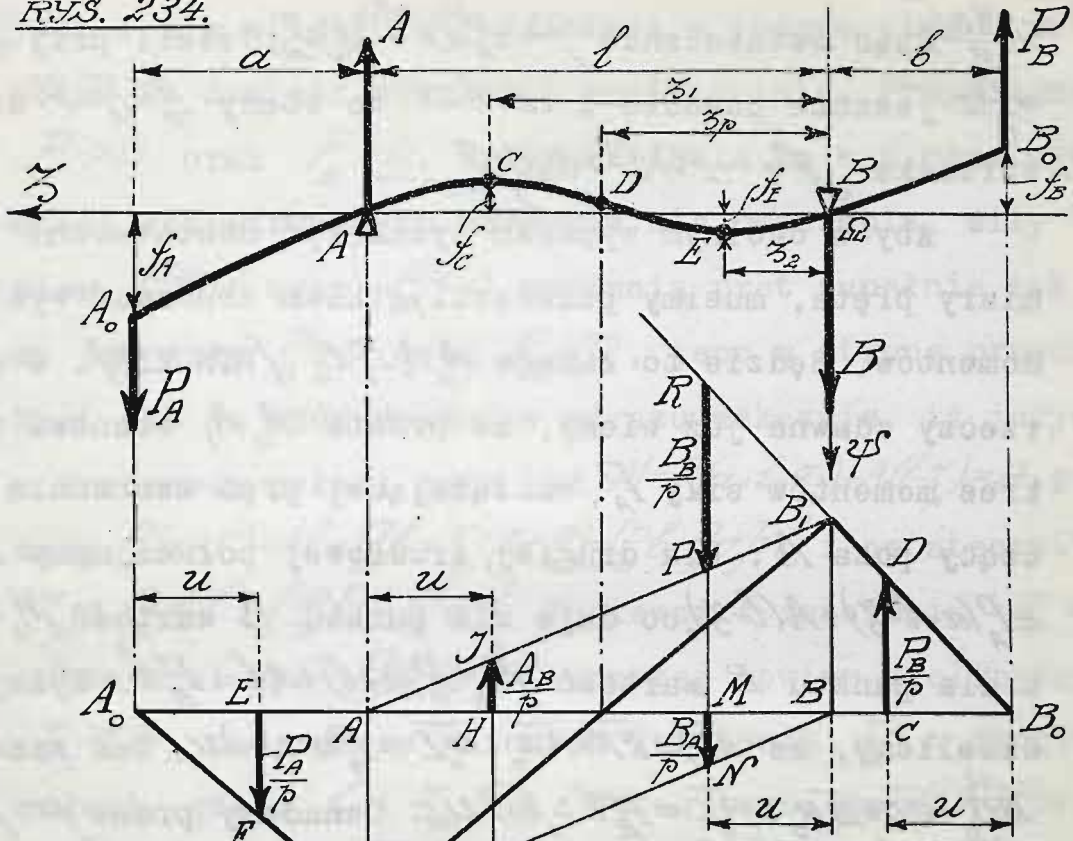
Wobec $A+B+P_A = -P_B$ mamy w dalszym ciągu: $E_g J_{x_0} f_B =$

$$= [P_B b - P_A(a+l)]/b \left[\frac{l}{3} + \frac{b}{2} \right] - P_B \frac{b^3}{6} + \frac{P_B b}{6l} [3la^2 + 6atl^2 + 3l^3] + 3abl + 3bl^2 - a^3 - 3a^2l - 3atl^2 - l^3 + a^3] = \frac{P_B b^2 l}{3} - \frac{P_A a b l}{2} - \frac{P_A b l^2}{3} + \frac{P_B b^3}{2} - \frac{P_A a b^2}{2} - \frac{P_A l b^2}{2} - \frac{P_B b^3}{2} + \frac{P_A a b l}{2} + \frac{P_A b l^2}{3} + \frac{P_A a b^2}{2} + \frac{P_A b l^2}{2} = \frac{P_A a b l}{2} + \frac{P_B b^2 l}{3} (b+l).$$

Stąd ostatecznie: $f_B = \frac{b}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{P_A a l}{6} + \frac{P_B (b+l)b}{3} \right].$

Wzór ten można również otrzymać bezpośrednio ze wzoru dla f_A pisząc zamiast $a-b$, a zamiast $A-B$, tego wymaga symetria. I tu znów w szczególnym wypadku, kiedy $a=b=l:2$ mamy $f_B = f_A = \frac{P \lambda^2}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{l}{2} + \frac{\lambda}{3} \right]$. W ten sposób uzupełniliśmy poprzednio już rozpatrywany wypadek ugięcia LAMARLE'A podając wzory strzałek bocznych. W ogólnym wypadku, pozostaje tylko jeszcze określić STRZAŁKĘ UGIĘCIA PRĘTA w drugiej, środkowej połąci. W tym celu czynimy $\varphi' = 0$, co daje: $C - \frac{P_A}{2}(a+l-z_0)^2 - \frac{A}{2}(l-z_0)^2 = -\frac{1}{2}[A+P_A]z_0^2 + [P_A(a+l)+Al]z_0 + [C - \frac{P_A}{2}(a+l)^2 - \frac{A}{2}l^2] = 0.$ Oznaczmy przez $Q = A+P_A = \frac{1}{l}[P_B b - P_A a]$ przez $R = P_B b = P_A(a+l) + Al$ wreszcie przez $S = C - \frac{P_A}{2}(a+l)^2 - \frac{A}{2}l^2 = \frac{Al^2}{6} + \frac{P_A}{6l}[(a+l)^3 - a^3] - \frac{P_A}{2}(a+l)^2 - \frac{A}{2}l^2 = \frac{l^2}{6}(A+P_A) - \frac{l^2}{2}(A+P_A) - \frac{P_A a l}{2} = -\frac{Q}{3}l^2 - \frac{P_A a l}{2}$. Stąd mamy równanie $z_0^2 - 2\frac{R}{Q}z_0 - 2\frac{S}{Q} = 0$, które dla $Q \neq 0$ daje $z_0 = [R \pm \sqrt{R^2 + 2SQ}]:Q$. Znak w tem równaniu należy obrać w taki sposób, aby wyznaczona wartość z_0 jako przynależna do połąci drugiej, środkowej, czyniła zadość warunkom: $l \geq z_0 \geq 0$. W szczególnym wypadku, gdy $Q=0$ tylko co wypisane równanie nie ma miejsca, wtedy bowiem mamy wprost: $-2Rz_0 - 2S = 0$ co daje bezpośrednio $z_0 = -S:R$. Tutaj wobec

RYS. 234.



RYS. 235.

$$A = \bar{A}_A + \bar{A}_B.$$

$$B = \bar{B}_A + \bar{B}_B.$$

$Q = A + P_A = 0$, mamy $S = -P_A l : 2$, a zatem ostatecznie wobec tego, że $P_A a = P_B b$, mamy $z_0 = P_A l : 2 P_B b = l : 2$. Podstawiając z_0 w równanie odkształconej wypisane dla drugiej polaci otrzymamy dla ogólnego wypadku strzałkę ugięcia f rozpatrywanego pręta. W wypadku szczególnym, kiedy $P_A a = P_B b$, to jest gdy $z_0 = \frac{l}{2}$ będziemy mieli: $E J f = -\frac{A l^3}{6} - \frac{P_A (a+l)^3}{6} + \frac{A l^3}{12} + \frac{P_A}{12} [a^3 + 3a^2 l + 3a l^2 + l^3 - a^3] + \frac{P_A (a + \frac{l}{2})^3}{6} + \frac{A}{6} \frac{l^2}{8} = -\frac{5}{48} A l^3 + \frac{P_A}{48} [-8a^3 - 24a^2 l - 24a l^2 - 8l^3 + 12a^2 l + 12a l^2 + 4l^3 + 8a^3 + 12a^2 l + 6a l^2 + l^3] =$

$= -\frac{P_A \ell^2}{8}$ Stąd ostatecznie $f = -\frac{P_A \ell^2}{8 E_y J_{x0}}$; Jeżeli przy $P_B \ell = P_A \alpha$ jeszcze ponadto i $\alpha = \ell = l$ to wtedy $P_B = P_A = P$ oraz strzałka $f = -\frac{P l \ell^2}{8 E_y J_{x0}}$.

Aby w ogólnym wypadku wyznaczyć dostateczne wy-
miary pręta, musimy przedewszystkiem zbudować wykres
momentów. Będzie to zamiana $A_0 A_1 B_1 B_0$ (RYS.235). W samej
rzeczy zdawna już wiemy, że prosta $A_0 A_1$ stanowi wy-
kres momentów siły P_A , obciążającej pręt swobodnie sta-
jący poza A . Dla drugiej, środkowej połąci mamy $M =$
 $= P_A(\alpha + \ell - \zeta) + A(\ell - \zeta)$, co daje dla punktu A wartość $M_A = P_A \alpha$,
a dla punktu B wartość $M_B = P_A(\alpha + \ell) + A\ell = P_B \ell$. Wyżej wi-
dzieliśmy, że $\overline{AA_1} = \overline{EF} \times \overline{AA_0} : \overline{A_0 E} = P_A \alpha : p \lambda u$. Tak samo
 $\overline{BB_1} = \overline{CD} \times \overline{BB_0} : \overline{B_0 C} = P_B \ell : p \lambda u$. Oznaczmy przez $\mu = p \lambda u$
wtedy $\overline{AA_1} = P_A \alpha : \mu = M_A : \mu$, a zaś $\overline{BB_1} = P_B \ell : \mu = M_B : \mu$. Odcinki te
dają zatem w skali μ wartości szukane momentów dla dru-
giej połąci. Ponieważ nadto moment zmienia się linjowo
wraz z ζ , zatem prosta $A_1 B_1$ będzie linją wykresu mo-
mentów dla drugiej połąci tak, jak prosta $A_0 A_1$ była
nią dla połąci pierwszej. Dla trzeciej połąci $M =$
 $= P(\alpha + \ell - \zeta) + A(\ell - \zeta) - B\zeta = P_A(\alpha + \ell) + A\ell - \zeta(P_A + A + B) = P_B \ell +$
 $+ P_B \zeta = P_B(\ell + \zeta)$. Dla $\zeta = 0$, to jest dla punktu B ten
wzór daje $M_B = P_B \ell = \overline{BB_1} \times \mu$, a dla $\zeta = -\ell$ to jest dla
punktu B_0 otrzymujemy $M_{B_0} = 0$. Ponieważ nadto w połąci
trzeciej momenty zmieniają się linjowo wraz z ζ , pro-
sto prosta $B_0 B_1$ stanowi linję wykresu dla tej połąci.
Widać stąd bezpośrednio, że moment nigdzie nie jest
równy zeru o ile M_A i M_B są jednakowych znaków, to

jest o ile siły P_A i P_B działają w jednym kierunku.

Można to dowieść również i analitycznie. Przypuszcmy, że

$P_A > 0$ oraz $P_B > 0$. Przypuszczenie to w niczem ogólności rozpatrywanych warunków nie uszczupla, siły bowiem $P_A < 0$ oraz $P_B < 0$ wyginają pręt zupełnie tak samo jak siły $P_A > 0$ oraz $P_B > 0$, jeno w stronę przeciwną.

Rzut oka na wzór momentów odrazu wskazuje, iż jedynie w środkowej połaci może być $M = P_A(a + l - \xi_p) + A(l - \xi_p) = 0$. Stąd mamy $P_A(a + l) + Al = P_B b = \xi_p(A + P_A) = \frac{P_B b - P_A a}{\xi_p} \cdot \xi_p$, i ostatecznie:

$\xi_p = \frac{P_B b l}{P_B b - P_A a}$. Ponieważ z założenia $P_B > 0$, zatem musi być $P_B b > P_A a$, inaczej bowiem mielibyśmy

$\xi_p < 0$, co przeczy warunkom istnienia ξ_p w drugiej połaci, gdzie $l \geq \xi_p \geq 0$. Wobec tego, że $P_B b - P_A a > 0$, tylko co omówiony warunek daje $\frac{P_B b l}{P_B b - P_A a} \geq 0$, skąd otrzymujemy $-P_A a l \geq 0$, wniosek oczywiście fałszywy.

Zerowa wartość momentu może więc istnieć jedynie wówczas, gdy siły P_A i P_B są skierowane przeciwnie. Nazwijmy siłę skierowaną w dół przez $P_A > 0$, wtedy $P_B < 0$, a więc $\frac{P_B b - P_A a}{P_B b - P_A a} < 0$, a samo $\xi_p = \frac{P_B b l}{P_B b - P_A a} > 0$. W danym wypadku warunek $l \geq \frac{P_B b l}{P_B b - P_A a} \geq 0$, spełnia się, rzeczywiście mamy bowiem mnożąc przez ujemny mianownik, a więc zmieniając znak równości $l P_B b - l P_A a \leq P_B b l$, co daje $-l P_A a \leq 0$ - wynik, nie zawierający sprzeczności.

W danym wypadku, jak to zresztą najlepiej uwypukla RYS.234, odkształcona posiada punkt przegięcia D , oddległy o ξ_p od Ω ; ponadto równanie $y' = 0$ wyznacza dla połaci środkowej aż dwa pierwiastki dodatnie i

mniejsze od ℓ , a więc w niej leżące: ξ_1 i ξ_2 . Te wartości wyznaczają skrajne strzałki ugięcia f_c i f_d ; w tym celu należy ξ równania odkształconej uczynić równem $\xi_1 = [R + \sqrt{R^2 + 2SQ}] / Q$, oraz $\xi_2 = [R - \sqrt{R^2 + 2SQ}] / Q$.

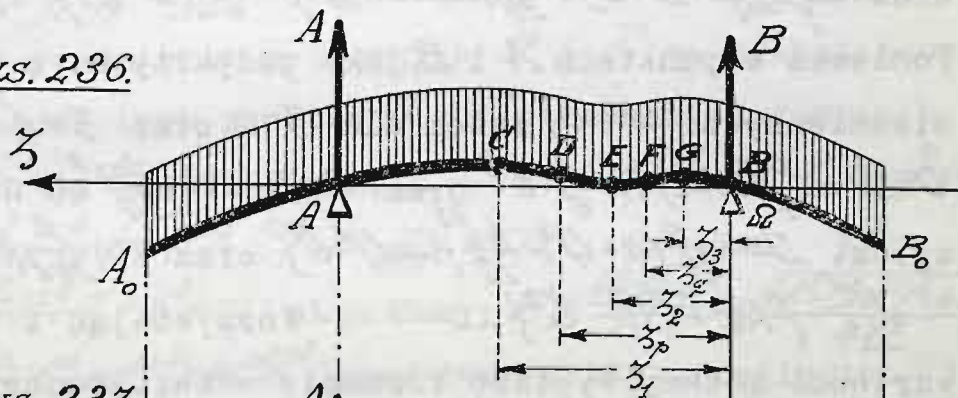
I tutaj również możemy wykreślić wyznaczyć podpory oraz zbudować odnośny wykres momentów, należy tylko zachować odpowiedni kierunek sił gnących, jak to najlepiej uwypukla RYS.235, gdzie postawiono te same litery co i na RYS.233, czyniąc w ten sposób zbytecznem powtarzanie opisu i dowodzenia. Gdy porównamy oba wykresy, to spostrzeżemy z łatwością, że momenty podporowe M_A i M_B stanowią skrajne wartości momentów. Wobec tego, że $M_A = \alpha P_A$ oraz $M_B = \beta P_B$, przeto bezwzględnie większa z tych dwóch wartości daje najwyższy moment M_M , który wyznacza stały przekrój pręta równaniem $M_M = W_{x_0} \kappa_g$. W szczególnym wypadku, gdy $\alpha P_A = \beta P_B$, moment gnący jest stały dla całej połaci środkowej. Jest to tak zwany uogólniony wypadek LAMARLE'A. Wtedy $A = -\frac{1}{\ell} [P_B \beta - P_A \alpha - P_A \ell] = -\frac{P}{A}$ oraz $B = -\frac{P}{B}$, zatem w środkowej połaci, przy sprowadzaniu sił P_A i A nie otrzymamy wcale siły tnącej - wygięcie będzie ściśle KOŁOWE w tej części pręta. Rozpatrzmy jeszcze jeden przykład tego typu.

§ 26. PRĘT WYSTAJĄCY POZA OBIE PODPORY, A OBCIĄŻONY JEDNOSTAJNIE NA CAŁEJ DŁUGOŚCI.

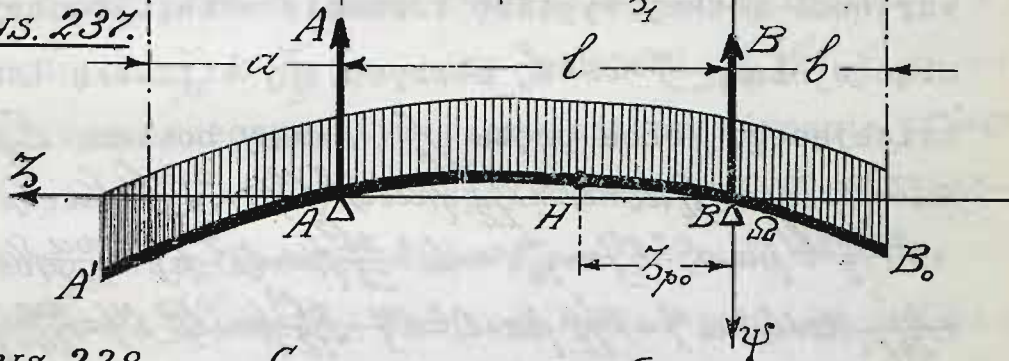
Zachowując znakowania omówione w ustępie poprzedzającym i oznaczając przez $\bar{p} = P \cdot L$ część całkowitą

go obciążenia, przypadającą na jednostkę długości L pręta, piszemy równania statyki $A+B+P=0$ oraz $A\ell + p(a+l)\frac{a+l}{2} - p\frac{b^2}{2} = 0$. Stąd mamy $A = -\frac{p}{2\ell} \{ (a+l)^2 - b^2 \}$, oraz $B = -A - P = \frac{p}{2\ell} \{ (a+l)^2 - b^2 \} - p(a+l+b) =$
 $= \frac{p}{2\ell} (a+l+b)(a+l-b) - p(a+l+b) = p(a+l+b) \frac{a+l-b-\ell}{2\ell} =$
 $= -\frac{p}{2\ell} (a+l+b)(b+l-a) = -\frac{p}{2\ell} \{ (b+l)^2 - a^2 \}.$
 się tylko co wyznaczonych podpór dzieli płaszczyznę

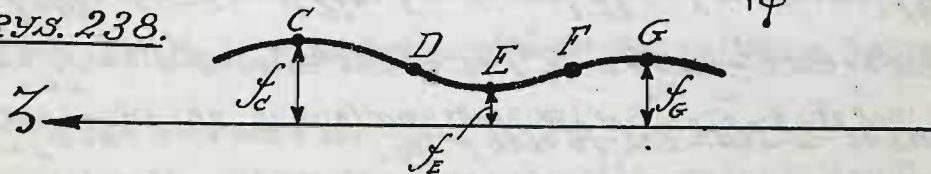
RYS. 236.



RYS. 237.



RYS. 238.



gięcia na trzy połacie. W pierwszej, obejmującej lewą (RYS. 236) zwisającą część pręta, gdzie $\alpha+l \geq z \geq \ell$, mamy: $M = p(\alpha+l-z)\frac{\alpha+l-z}{2} = \frac{p}{2} (\alpha+l-z)^2$. W drugiej, gdzie $\ell \geq z \geq 0$, mamy $M = \frac{p}{2} (\alpha+l-z)^2 + A(\ell-z)$; wreszcie w trzeciej, prawej połaci, dla ośrodków odległych od Ω o $-z$

mamy $M = \frac{p}{2}(a+l-z)^2 + A(l-z) - Bz$. Łącząc te trzy wzory w jeden mamy jak zwykle: $M = \frac{p}{2}(a+l-z)^2 + A(l-z) - Bz$, gdzie dla połaci pierwszej należy pominąć końcowe dwa wyrazy, dla połaci drugiej pominąć wyraz ostatni, a dla połaci trzeciej brać cały wzór. Dla pręta o stałym przekroju poprzecznym mamy: $E_y J_{x_0} \varphi'' = \frac{p}{2}(a+l-z)^2 + A(l-z) - Bz$, co daje: $E_y J_{x_0} \varphi' = C - \frac{p}{6}(a+l-z)^3 - \frac{A}{2}(l-z)^2 - \frac{B}{2}z^2$, oraz: $E_y J_{x_0} \varphi = D + Cz + \frac{p}{24}(a+l-z)^4 + \frac{A}{6}(l-z)^3 - \frac{B}{6}z^3$. Ponieważ w punktach A i B , jako podpartych, a więc niezmiennych $\varphi = 0$, zatem dla $z=0$ oraz $z=l$ mamy $0 = D + \frac{p}{24}(a+l)^4 + \frac{A}{6}l^3$ oraz: $0 = D + Cl + \frac{pa^4}{24}$ co daje wprost $D = -\frac{p}{24}(a+l)^4 + \frac{pl^2}{12}\{(a+l)^2 - b^2\}$ oraz: $C = \frac{p}{24l}\{(a+l)^4 - a^4\} - \frac{pl}{12}\{(a+l)^2 - b^2\}$.~

Korzystając z tych wartości możemy wypisać równanie odkształconej. Czyniąc w niem $z = a+l$, otrzymujemy strzałkę lewego zwisającego końca pręta f_A , mamy bowiem: $E_y J_{x_0} f_A = D + C(a+l) = -\frac{p}{24}(a+l)^4 + \frac{pl^2}{12}\{(a+l)^2 - b^2\} + \frac{p(a+l)}{24l}\{(a+l)^4 - a^4\} - \frac{pl(a+l)}{12}\{(a+l)^2 - b^2\} = -\frac{p}{24}(a+l)^4 + \frac{pl^2}{12}\{(a+l)^2 - b^2\} + \frac{pa}{24l}\{(a+l)^4 - a^4\} + \frac{pl}{24l}\{(a+l)^4 - a^4\} - \frac{pl^2}{12}\{(a+l)^2 - b^2\} - \frac{pl^2}{12}\{(a+l)^2 - b^2\} = -\frac{pa}{24l}\left[\frac{1}{l}(a^4 + 4a^3l + 6a^2l^2 + 4al^3 + l^4) - a^4\right] - a^3 - 2l(a^2 + 2al + l^2 - b^2) = -\frac{pa}{24l}[4a^2 + 6al + 4al^2 + l^3 - a^3 - 2la^2 - 4al^2 - 2l^3 + 2lb^2] = \frac{pa}{24l}[3a^3 + 4a^2l - l^3 + 2lb^2]$.~

Tak samo zupełnie, czyniąc $z = -b$ w ogólnym wzorze dla odkształconej, moglibyśmy wyznaczyć strzałkę f_B prawego zwisającego końca, prościej jednak można wypisać wzor ten bezpośrednio na mocy prawa symetrii, przestawiając litery a i b co daje: $f_B = \frac{pb}{24E_y J_{x_0}}[3b^3 + 4b^2l - l^3 + 2la^2]$.~

W szczególnym wypadku, kiedy $a=b=l$ mamy: $f_A = f_B =$
 $= f_l = \frac{pl}{24 E_y J_{x_0}} (3l^3 - 2ll^2 - l^3) \dots$

Aby z kolei w ogólnym wypadku wyznaczyć strzałkę

dla połąci środkowej, czynimy $\varphi''=0$ co daje:

$C - \frac{p}{6}(a+l-z)^3 - \frac{A}{2}(l-z)^2 = 0$. Równanie to ma wogóle trzy
 pierwiastki z_1, z_2, z_3 wyznaczające odpowiednie strzał-
 ki ugięcia w punktach C, E, S (RYS.238). Będą to
 strzałki f_C, f_E i f_S . Świadczą one o istnieniu DWÓCH
 punktów przegięcia pośrednich D i F na odkształconej.

Współrzędne tych punktów D i F otrzymamy z równania

$$\varphi''=0, \text{ to jest z równania } \frac{p}{2}(a+l-z_p)^2 + A(l-z_p) = \frac{p}{2}(a+l-z_p)^2 - \frac{p}{2l}\{(a+l)^2 - b^2\}(l-z_p) = 0, \text{ to jest } z_p^2 - \frac{b^2+l^2-a^2}{l}z_p + b^2 = 0, \text{ stąd mamy: } z_p = \frac{b^2+l^2-a^2}{2l} \pm \sqrt{\frac{(b^2+l^2-a^2)^2 - 4l^2b^2}{4l^2}};$$

Gdy $(b^2+l^2-a^2)^2 \geq 4l^2b^2$ mamy dwa punkty przegięcia D i F o

współrzędnych z_p i z_q pomiędzy punktami f_C, f_E i f_S , co od-
 powiada trzem rzeczywistym pierwiastkom równania $\varphi''=0$

wyżej wypisanego, to jest współrzędnym z_1, z_2, z_3 , któ-
 re ponadto muszą być dodatnie i mniejsze od l . Gdy

$(b^2+l^2-a^2)^2 < 4l^2b^2$, wtedy środkowa połącz punktów przegię-
 cia nie ujawnia, a równanie $\varphi''=0$ daje tylko jeden pier-
 wiastek czyniący zadość warunkowi $l \geq z_1 \geq 0$, a wyzna-

czający skrajną strzałkę ugięcia dla połąci środkowej;

wreszcie, gdy $(b^2+l^2-a^2)^2 = 4l^2b^2$, wtedy $z_{p_0} = \frac{b^2+l^2-a^2}{2l}$;

Ponieważ i tu musi być dla z_{p_0} jako przynależnego do

środkowej połąci: $l \geq z_{p_0} \geq 0$, zatem musi być $b^2+l^2-a^2 \geq 0$,

skąd $b^2+l^2-a^2 = 2lb$, ostatecznie więc $z_{p_0} = 2lb : 2l = b$.

W tym wypadku zatem $b^2+l^2-a^2 = 2lb$, czyli $(l-b)^2 = a^2$, to

jest $l-b=\pm a$. Biorąc pod uwagę niewyzyskaną dotychczas nierówność $l \geq z_{p0}$, która daje $l \geq b$ widzimy, że $l-b \geq 0$, a zatem ostatecznie $a=l-b$. Otrzymany tylko co punkt jest punktem podwójnego przegięcia - w jego sąsiedztwie odkształcona PROSTUJE SIĘ, nie zmienia jednak krzywizny względem osi ΩZ , jak to najlepiej zresztą na RYS.237 postrzec się daje, gdzie $\overline{AA}=\overline{AB}-\overline{BB}$. I w danym również wypadku równanie $\varphi'=0$, ma jeden tylko pierwiastek czyniący zadość warunkom $l \geq z_i \geq 0$. W szczególnym wypadku, gdy $a=b=\lambda$ mamy dwa punkty przegięcia, gdy $l^4 > 4l^2\lambda^2$, to jest gdy $l > 2\lambda$, a gdy $l=2\lambda$ - wtedy punkty te zlewają się w jeden podwójny punkt przegięcia, leżący pośrodku, wtedy bowiem $z_{p0}=\lambda=l:2$. Wreszcie, gdy $l < 2\lambda$ - środkowa część pręta odkształconego punktów przegięcia odkształconej nie ujawnia.

Aby wyznaczyć dostateczny przekrój pręta, szukamy skrajnych wartości momentów gnących, a przede wszystkim wyznaczamy momenty odporowe, jako niewątpliwie skrajne dla obu połąci bocznych. Mamy zatem $M_A = \frac{p}{2}(a+l-b)^2 = \frac{pa^2}{2}$, oraz $M_B = \frac{p}{2}(a+l)^2 - Al = \frac{p}{2}(a+l)^2 - \frac{p}{2}\{(a+l)^2 - b^2\} = \frac{pb^2}{2}$; Zazwyczaj jeden z tych momentów daje wartość najwyższą M_m , niekiedy jednak należy zbadać czy w połąci środkowej niema skrajnej wartości momentu. W tym celu bierzemy $\frac{dM}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\frac{p}{2}(a+l-z)^2 + A(l-z) \right] = -p(a+l-z) - A$. Stąd mamy $a+l-z_m = -\frac{A}{p}$ oraz $z_m = \frac{l}{2} + \frac{[b^2 - a^2]}{2l}$. Podstawiając tę wartość we wzór dla momentów mamy skrajną

$$\begin{aligned} \text{wartość: } M_m &= \frac{p}{2} \frac{A^2}{b^2} - A \left[\frac{A}{p} + a \right] = -A \left[\frac{A}{2p} + a \right] = \frac{p}{2\ell^2} [(a+\ell)^2 - \\ &- b^2] \ell - \frac{1}{4\ell} [(a+\ell)^2 - b^2] + a \ell = \frac{p}{8\ell^2} [(a+\ell)^2 - b^2] [-a^2 - 2a\ell - \ell^2 + b^2 + 4a\ell] = \\ &= \frac{p}{8\ell^2} [(a+\ell)^2 - b^2] [-(\ell-a)^2 + b^2] = \frac{p}{8\ell^2} (a+\ell+b)(a+\ell-b)(a+b-\ell) \cdot \\ &\cdot (b+\ell-a) = \frac{pL}{8\ell^2} (a+\ell-b)(a+b-\ell)(b+\ell-a). \end{aligned}$$

W pewnych warunkach ta wartość może być bezwzględnie największą. Tak na przykład gdy $\alpha = b = \lambda$ mamy $M_A = M_B = \frac{p\lambda^2}{2}$, oraz $M_m = \frac{pL}{8\ell^2} \ell^2 (2\lambda - \ell) = \frac{pL}{8} (2\lambda - \ell) = -\frac{p}{8} (\ell - 2\lambda)$. I znów gdy $\ell > 2\lambda$, to wtedy $M_m < 0$, gdy $\ell < 2\lambda$ wtedy $M_m > 0$, wreszcie gdy $\ell = 2\lambda$ $M_m = 0$. W tym szczególnym wypadku skrajną najwyższą wartością momentu jest więc $M_m = M_\lambda = M_A = M_B$. Gdy $\ell < 2\lambda$, wtedy dodatnie M_m jest zawsze niższe od M_λ . W samej rzeczy wtedy $M_m = -\frac{p\ell^2}{8} + \frac{p\lambda^2}{2} = -\frac{p\ell^2}{8} + M_A$, skąd $M_m - M_A = -\frac{p\ell^2}{8} < 0$. Największością momentu jest tu znów $M_m = M_\lambda$. Gdy zaś $\ell < 2\lambda$ wtedy bezwzględna wartość momentu $|M_m| = \frac{p\ell^2}{8} - \frac{p\lambda^2}{2}$ będzie większa od M_λ skoro $\frac{p}{8}\ell^2 - \frac{p\lambda^2}{2} > \frac{p\lambda^2}{2}$, to jest gdy $\ell > \lambda\sqrt{8}$. Słowem dla wartości $\ell = \lambda\sqrt{8}$ mamy $M_m = -\frac{p}{8}(8\lambda^2 - 4\lambda^2) = -\frac{p}{8}\lambda^2 = -M_\lambda = M_m$; dla $\ell > \lambda\sqrt{8}$ będzie $M_m = M_m$, a dla $\ell < \lambda\sqrt{8}$ będzie $M_m = M_\lambda$. Czyniąc $M_m = W_{xo} K_y$, wyznaczmy bezpieczny przekrój pręta. Tutaj kończymy szereg przykładów prętów wyginanych. We wszystkich tych przykładach, tam, gdzie rozpatrywaliśmy pręty o stałym przekroju poprzecznym - miarodajnymi dla wyznaczenia bezpiecznych wymiarów były wartości najwyższe momentów gnących. Należy więc umieć je zgóry wyznaczać. W tym celu rozpatrujemy:

§ 27. ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY SIŁĄ TNĄCĄ, A MOMENTEM

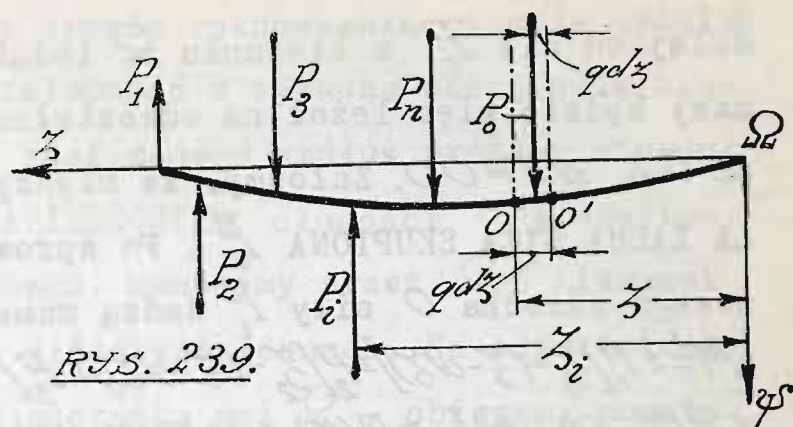
GNĄCYM PRZĘKROJU.

Układ sił gnących, po sprowadzeniu do środka masy danego przekroju poprzecznego pręta odkształconego daje WYPADKOWY MOMENT M I SIŁĘ TNĄCĄ T , równą algebraicznej sumie sił gnących i do nich równoległą.

Dla wyznaczenia M i T należy brać, jak wiadomo, WSZYSTKIE SIŁY, LEŻĄCE PO JEDNEJ STRONIE rozpatrywanego PRZĘKROJU pręta odkształconego. Wiemy, że skrajne naprężenie jakiegokolwiek przekroju $t_{gm} = M:W$, przeto, aby wyznaczyć NAJWYŻSZE NAPRĘŻENIE GNĄCE, panujące w pręcie, NALEŻY WYZNACZYĆ PRZĘKRÓJ, GDZIE ILORAZ $M:W$ STANOWI MAXIMUM. PRZĘKRÓJ ten, PRZYNALEŻNY DO NAJWYŻSZEJ WARTOŚCI $M:W$ ZOWIEMY NIEBEZPIECZNYM, panuje w nim bowiem najwyższe naprężenie pręta $t_{gmm} = [M:W]_m$, gdzie znaczkami M oznaczyliśmy odnośne wartości najwyższe. Dla prętów o stałym przekroju będzie to niewątpliwie PRZĘKRÓJ, PRZYNALEŻNY DO NAJWYŻSZEJ WARTOŚCI MOMENTU GNĄCEGO M_M . Ponieważ w większości wypadków mamy do czynienia z prętami o stałym przekroju poprzecznym, należy więc umieć wyznaczać M_M .

Rozwiązanie tego zadania otrzymamy najłatwiej, opierając się na zależności między T i M . Aby ją poznać bierzemy pod uwagę pręt w jakimkolwiek sposób odkształcony pod jarzmem układu sił gnących P_1, P_2, \dots, P_n , obciążających pręt PO JEDNEJ STRONIE rozpatrywanego przekroju poprzecznego o środku masy O , leżącym na odkształconej. Siły $P_i (i=1, 2, \dots, n)$ leżą więc wszystkie

w płaszczy-
źnie gięcia
prostopadle do
pierwotnej osi
podłużnej ΩZ
pręta nieod-
kształconego.



RYS. 239.

Po sprowadzeniu do środka O , odległego o z od począt-
ku osi ΩZ , siły te dadzą MOMENT WYPADKOWY $M = \pm P_1(z-z) \pm$
 $\pm P_2(z_2-z) \pm P_3(z_3-z) \pm \dots \pm P_n(z_n-z) = \sum_{i=1}^n \pm P_i(z_i-z)$,
gdzie przez z_i oznaczamy odległość siły P_i od począt-
ku osi Ω . Ponieważ siły P_i leżą po jednej stronie
przekroju, zatem $z_i > z$, należy więc uwzględnić kieru-
nek momentów składowych pisząc symbolicznie $\pm P_i(z_i-z)$,
w zależności od kierunku siły. Wyżej wyznaczyliśmy
prawo określania kierunku obrotowego momentów leżą-
cych w przekroju. Tutaj więc momenty się dodadzą,
bo skierowanych ku dołowi będą leżały na ujemnej osi
 OX w przekroju poprzecznym pręta, która to oś jest
prostopadła do płaszczyzny gięcia, natomiast momenty
się ujemnych na dodatniej osi OX skierowanej ku pa-
trzącemu. Te momenty, jako różnokierunkowe dadzą mo-
ment wypadkowy leżący na dodatniej lub ujemnej osi OX .
Ponadto siły P_i , sprowadzone do ośrodka O dadzą wy-
padkową siłę tnącą $T = \pm P_1 \pm P_2 \pm P_3 \pm \dots \pm P_n = \sum_{i=1}^n \pm P_i$.
Kierunek tej siły jest sam przez się oczywisty.

Weźmy z kolei pod uwagę przekrój sąsiedni, nieco

dalej od sił P_i w kierunku O leżący. Środek jego masy będzie więc leżał na odkształconej w O' odległym od O o $d\zeta = OO'$. Załóżmy, że między O i O' NIE DZIAŁA ŻADNA SIŁA SKUPIONA P_o . Po sprowadzeniu do tego nowego ośrodka O' siły P_i dadzą moment wypadkowy

$$M' = \pm P_1[\zeta_1 - (\zeta - d\zeta)] \pm P_2[\zeta_2 - (\zeta - d\zeta)] \pm P_3[\zeta_3 - (\zeta - d\zeta)] \pm \dots \pm P_n[\zeta_n - (\zeta - d\zeta)] = \pm P_1(\zeta_1 - \zeta) \pm P_2(\zeta_2 - \zeta) \pm P_3(\zeta_3 - \zeta) \pm \dots \pm P_n(\zeta_n - \zeta) + d\zeta[\pm P_1 \pm P_2 \pm P_3 \pm \dots \pm P_n] = M + T d\zeta.$$

Stąd mamy $M' - M = T d\zeta$. Oznaczmy $M' - M = dM$, a zatem

$$T = \frac{dM}{d\zeta}; \text{ Zupełnie ten sam wynik możemy otrzymać}$$

rozumując w następujący sposób: Układ sił P_i , po sprowadzeniu do ośrodka O zastąpiony został wypadkowymi

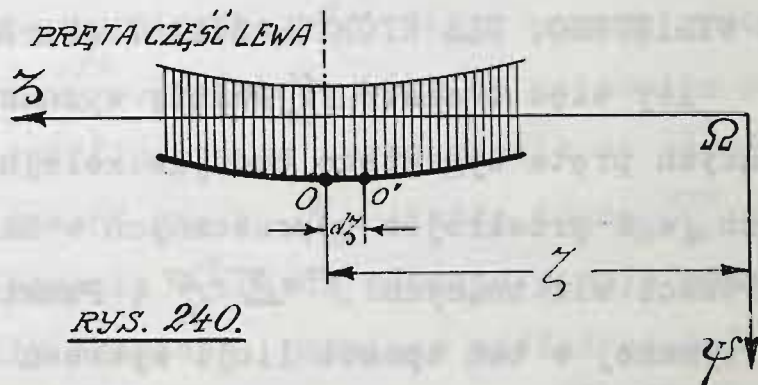
M i T , można więc nadal miasto sił P_i rozpatrywać wyłącznie układ M, T . Jeżeli tedy chcemy sprowadzić siły P_i do środka O' jeszcze bardziej od tych sił odległego, to miasto sił P_i możemy brać jeno moment M i siłę tnącą T przyłożoną do punktu O . Moment jako wektor może być bezpośrednio przeniesiony z O w O' , natomiast siła T , po przeniesieniu do O' da taką samą siłę tnącą T oraz dodatkowy moment $T d\zeta$ - zatem całkowity moment w O' będzie $M' = M + T d\zeta$ zupełnie tak, jak wyżej.

Otrzymany wzór zawodzi, gdy między O i O' działa na pręt skupiona siła P_o w odległości $q d\zeta$ od środka O' , przyczem niewątpliwie $1 \geq q \geq 0$. W tym wypadku $M' = M + T d\zeta + P_o q d\zeta$, a zatem zależność poprzednia nie da się utrzymać, mamy bowiem $(M' - M) : d\zeta = \frac{dM}{d\zeta} = T + q P_o$.

Tylko co przytoczony sposób rozumowania pozwala ustalić zupełnie taką samą zależność w wypadku obciążenia ciągłego, jednostajnie rozłożonego wzdłuż pręta w stosunku p KILOGRAMÓW NA JEDNOSTKĘ długości pierwotnej pręta nieodkształconego. Oznaczmy przez Ω ξ kierunek osi podłużnej pręta nieodkształconego. Na odkształconej w odległości ξ od początku osi Ω , obieramy punkt O - ŚRODEK MASY PRZEKROJU POPRZECZNEGO pręta odkształconego i sprowadzamy do tego środka obciążenie jednostajnie rozłożone wzdłuż jednej części pręta, leżącej poza przekrojem punktu O w kierunku rosnących współrzędnych ξ , a więc lewej części pręta. To sprowadzenie da wypadkowy moment M i siłę tnącą T , przyłożoną do środka O .

Weźmy pod uwagę z przeciwnej, a więc prawej strony leżący sąsiedni punkt O' , odległy od punktu poprzecznie rozpatrywanego o $OO' = d\xi$.

Obciążenie lewej części pręta wzrośnie o siłę



RYS. 240.

$$p d\xi = P_0,$$

działającą pomiędzy O i O' w odległości $q d\xi = \frac{1}{2} d\xi$, będziemy mieli zatem dla punktu O' wartość momentu

$$M' = M + T d\xi + \frac{p}{2} d\xi^2. \text{ Pomijając małe wyższych rzędów i oznaczając znowu przez } dM = M' - M \text{ będziemy mieli } \frac{dM}{d\xi} = T.$$

Stąd otrzymujemy następujące:

TWIERDZENIE PIERWSZE. SIŁA TNĄCA PRZEKROJU PRĘTA PŁASKO WYGIĘTEGO STANOWI POCHODNĄ, MOMENTU GNĄCEGO PRZEKROJU PO dZ , PRZYCZEM Z OZNACZA ODLEGŁOŚĆ ŚRODKA MASY TEGO PRZEKROJU, MIERZONĄ WZDŁUŻ OSI PODŁUŻNEJ PRĘTA NIEODKSZTAŁCONEGO OD PEWNEGO POCZĄTKOWEGO PUNKTU.

Całkując mamy $M = \int T dZ + C$, możemy zatem wyznaczyć wartość momentów gnących, gdy znamy siły tnące przekrojów. Najlepiej to uskutecznić wykreślnie, całkując wykres sił tnących. Z tego wykresu możemy również wyznaczyć przekrój o skrajnej najwyższej wartości momentu gnącego M_M . Ponieważ wtedy niewątpliwie $\frac{dM}{dZ} = 0$, zatem dla tego przekroju $T = 0$, a linja wykresu przecina swą podstawę. Stąd:

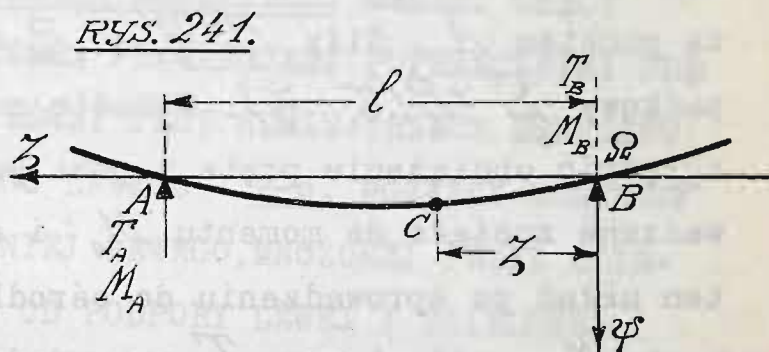
TWIERDZENIE DRUGIE. SKRAJNE WARTOŚCI MOMENTU GNĄCEGO PRZYNALĘŻĄ DO POPRZECZNYCH PRZEKROJÓW PRĘTA PŁASKO WYGIĘTEGO, DLA KTÓRYCH SIŁA TNĄCA RÓWNA JEST ZERU.

Aby więc znaleźć M_M należy wyznaczyć wykres sił tnących pręta wygiętego, budując kolejno dla poszczególnych jego przekrojów poprzecznych w należytej skali wartości sił tnących $T = \sum \pm R_z$. Punkty przecięcia się otrzymanej w ten sposób linji wykresu z jego podstawą wyznaczają przekroje poprzeczne pręta, dla których moment osiąga swe minimum, lub maximum. Dodatkowe badanie wyznaczy z pomiędzy tych skrajnych wartości momentów - wartość najwyższą M_M . Przy wyliczaniu momentów znaczne ułatwienie daje następujące:

§ 28. TWIERDZENIE O TRZECH MOMENTACH.

Rozpatrujemy pewną część pręta wygiętego, spoczywającą na dwóch sąsiednich oporach A, B (RYS. 241/).

Pozostałych części pręta, łącznie z odnośniami podporami nie bierzemy wcale pod uwagę. Obie-



rając punkt B , jako początek współrzędnych, prowadzimy zeń oś Bz w kierunku pierwotnej osi podłużnej pręta, a oś $B\zeta$ w dół i wyznaczamy odkształconą. Na odkształconej obieramy dowolny zresztą punkt C odległy o z od punktu B - będzie to środek masy poprzecznego przekroju pręta odkształconego. —

Niechaj obciążenie całkowite lewej części pręta sprowadza się do ośrodka A , dając moment gnący M_A i siłę tnącą T_A . Podobnie również całkowite obciążenie lewej części pręta po sprowadzeniu do ośrodka B niech daje moment gnący M_B i siłę tnącą T_B w tym punkcie. W punkcie C niech ponadto panuje moment M . Oznaczmy siły skupione, panujące wzdłuż części AC pręta przez P_1, P_2, \dots, P_m oraz przez P_n, P_o, \dots, P_s — siły przyłożone wzdłuż pozostałej części pręta pomiędzy C i B . Wyodrębniona przez nas część pręta pozostaje więc pod jarzmem sił $P_1, P_2, \dots, P_m, P_n, P_o, \dots, P_s$ działających w odległościach $x_1, x_2, \dots, x_m, x_n, x_o, \dots, x_s$.

od B . Siły te zresztą nie są wskazane na rysunku. Wyznamy M_C . Obciążenie lewej części pręta składa się z obciążenia panującego pomiędzy A i C czyli z sił P_1, P_2, \dots, P_m oraz z sił przyłożonych do pręta poza punktem A . Siły P_1, P_2, \dots, P_m dają więc moment wypadkowy $\sum_{i=1}^{i=m} \pm P_i (\xi_i - \xi)$. Ponadto należy jeszcze uwzględnić obciążenie pręta z poza punktu A , które sprowadzone zostało do momentu M_A i siły tnącej T_A , a ten układ po sprowadzeniu do ośrodka C daje znów moment M_A , siłę tnącą T_A oraz dodatkowy moment $T_A(\ell - \xi)$, gdzie ℓ oznacza odległość \overline{AB} . Ostatecznie więc w C panować będzie moment $M = M_A + T_A(\ell - \xi) + \sum_{i=1}^{i=m} \pm P_i (\xi_i - \xi)$. Ponieważ przy $\xi = 0$ najoczywiściej $M = M_B$ zatem $M_B = M_A + T_A \ell + \sum_{i=0}^{i=\xi} \pm P_i \xi_i$. Tu-taj znakiem summy należy objąć tym razem już wszystkie siły P_1, P_2, \dots, P_s . Stąd mamy $T_A = \frac{M_B - M_A}{\ell} - \frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{i=s} \pm P_i \xi_i$ i ostatecznie: $M = M_A + [M_B - M_A] \frac{\ell - \xi}{\ell} + \sum_{i=1}^{i=m} \pm P_i (\xi_i - \xi) - \frac{\ell - \xi}{\ell} \sum_{i=1}^{i=s} \pm P_i \xi_i$. Gdybyśmy rozpatrywali część AB pręta przepiłkowali wzdłuż przekrojów A i B , to otrzymalibyśmy belkę AB opartą swobodnie na dwóch podporach, a obciążoną układem sił P_1, P_2, \dots, P_s . Siły te dałyby odpór $A = -\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{i=s} \pm P_i \xi_i$, która po sprowadzeniu do ośrodka C wyznaczyłaby moment $A(\ell - \xi) = -\frac{\ell - \xi}{\ell} \sum_{i=1}^{i=s} \pm P_i \xi_i$. Ponadto pomiędzy A i C działają, jakśmy to założyli siły P_1, P_2, \dots, P_m ; łączny ich moment po sprowadzeniu do ośrodka C wynosi $\sum_{i=1}^{i=m} \pm P_i (\xi_i - \xi)$. Ostatecznie więc w C panować będzie moment μ .

$\mu = \sum_{i=1}^{i=m} \pm P_i (\xi_i - \xi) - \frac{\ell - \xi}{\ell} \sum_{i=1}^{i=s} \pm P_i \xi_i$ gdy pręt rozetniemy w A i B . Zatem $M = M_A + \frac{\ell - \xi}{\ell} [M_B - M_A] + \mu$, co daje następujące:

TWIERDZENIE O TRZECH MOMENTACH. MOMENT GNĄCY

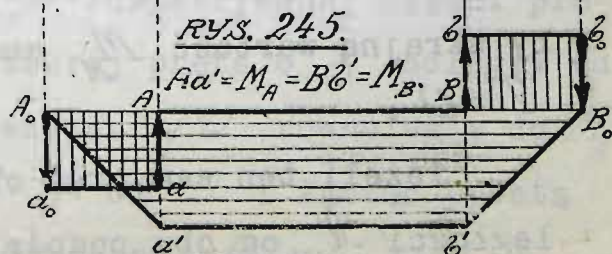
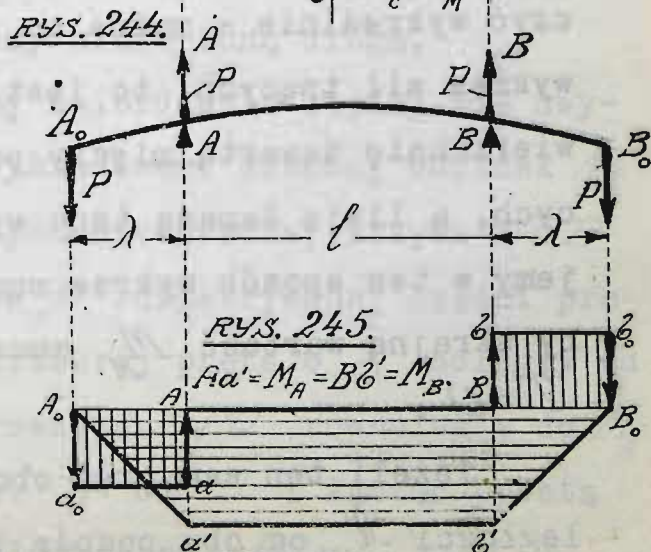
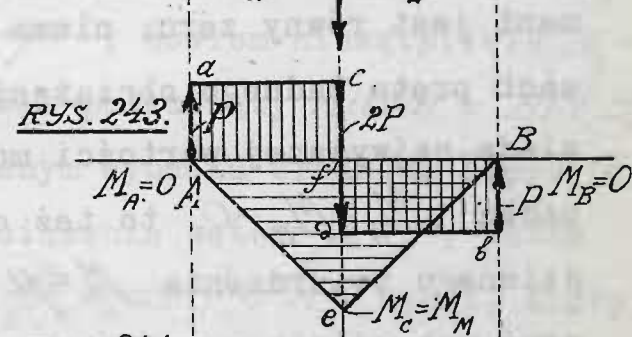
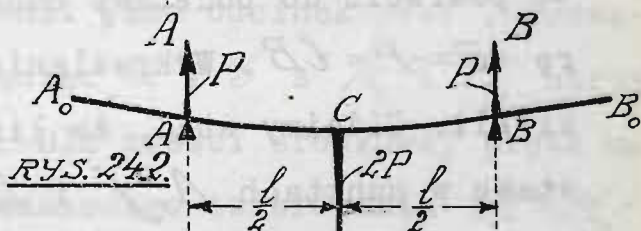
PRZEKROJU POMIĘDZY DWOMA PRZEKROJAMI POPRZECZNYMI PRĘTA PŁASKO WYGIĘTEGO RÓWNY JEST SUMIE TRZECH MOMENTÓW:

1-o. MOMENTU OPOROWEGO LEWEGO - 2-o. RÓŻNICY MOMENTÓW OPOROWYCH, PRAWEGO MNIEJ LEWEGO, MNOŻONEJ PRZEZ ODLEGŁOŚĆ TEGO PRZEKROJU OD PODPORY LEWEJ I DZIELONEJ PRZEZ ODLEGŁOŚĆ POMIĘDZY PODPORAMI - WRESZCIE - 3-o. MOMENTU, JAKIBY PANOWAŁ W DANYM PRZEKROJU, GDYBY PRĘT KOŃCZYŁ SIĘ NAD OWEIMI PODPORAMI I POZOSTAWAŁ POD JARZEM SIŁ DZIAŁAJĄCYCH MIĘDZY NIEMI.

Jako przykład weźmiemy pręt prosty $A_0 B_0$, na dwóch podporach A i B oparty, a jednakowo wystający poza nie. Gdy obciążony go siłą $2P$,

działającą pośrodku

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW - ARKUSZ XXVI.



pręta, ulegnie on wygięciu, jak to wskazuje RYS. 242. W danym wypadku odpory będą $A=B=-P$, aby więc wykreślić linię wykresu sił tnących T (RYS.243) należy pod A zbudować $Aa = -P = A$. Ponieważ ta sama siła tnąca panować będzie we wszystkich przekrojach aż do C zatem należy przeciągnąć prostą $ac \parallel A_0B_0$ aż do tego punktu. W C przyłożona jest siła $2P$ skierowana odwrotnie - należy więc wykreślić $cd = 2P$ i zakończyć wykres prostą $db \parallel A_0B_0$, aby móc w punkcie B powrócić do podstawy budując ostatnią siłę - odpór $B = -P = \ell B$. Wykreślanie znacznie ułatwiają strzałki sił. Widzimy stąd, że linja wykresu przecina podstawę w punktach A, f i B . W punktach A i B moment jest równy zeru, niema bowiem na wystających końcach pręta żadnego obciążenia - przeto punkt f odpowiada najwyższej wartości momentu M_M . W danym wypadku $M_A = M_B = 0$, to też na zasadzie tylko co dowiedzonego twierdzenia $M = \mu$. Moment μ umiemy wyznaczyć wykreślnie - można go również otrzymać całkując wykres sił tnących, to jest wyznaczając wykreślnie powierzchnię zawartą między podstawą wykresu sił tnących, a linią łamaną tego wykresu $Aacc\ell B$. Otrzymujemy w ten sposób wykres momentów AeB wyznaczający skrajną wartość M_M momentu dla punktu f gdzie $T=0$.

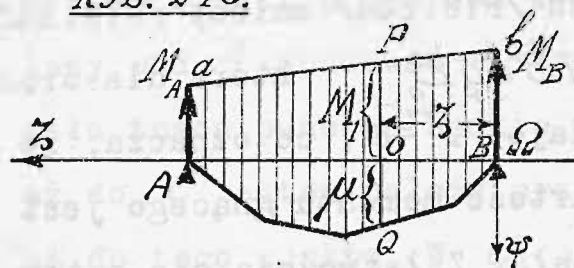
Jeżeli ten sam pręt obciążymy zewnątrz w odległości l od obu podpór jednakowymi siłami P , to

odpory pozostaną te same $A=B=-P$; będzie to znane nam wygięcie LAMARLE'A. Kreśląc dla danego wypadku wykres sił tnących (RYS.244) należy (RYS.245) zbudować linję $A_0\alpha\alpha AB\beta\beta B_0$, która dla środkowej części pręta AB daje $T=0$, co oznacza, że dla tej części pręta wartość momentu gnącego jest najwyższa, a zarazem stała. Z łatwością się o tem przekonać możemy, rysując wykres momentów. W tym celu mierzymy powierzchnię prostokąta $A_0\alpha\alpha A$ i odkładamy ją w należytej skali jako odcinek $A\alpha'$. Prowadząc $\alpha'\beta' // A_0B_0$ i łącząc α' i β' z A_0 i B_0 otrzymujemy szukany wykres. Dla części środkowej pręta mamy na mocy wyżej dowiedzionego twierdzenia $M=M_A + \frac{\ell-\xi}{\ell}[M_B-M_A] + \mu = M_A + \mu$, bowiem niewątpliwie $M_A = A\alpha' = M_B = B\beta'$ ponieważ prostokąty $A_0\alpha\alpha A$ i $B_0\beta\beta B$ są równe. Ponadto w danym wypadku środkowa część pręta jest pozbawiona obciążenia zatem $\mu=0$, zatem $M=M_A = \text{POWIERZCHNIA } [A_0\alpha\alpha A] = P\lambda$, wynik, który już dawniej otrzymaliśmy nieco inną drogą.

Wyprowadzone wyżej twierdzenie lepiej się uwydatnia w oświetleniu wykreślnem. Niechaj odcinek $A\alpha = M_A$, a zaś $B\beta = M_B$; ponadto niechaj krzywa AQB stanowi wykres momentów μ rozpatrywanej części pręta. Obierzmy dowolny przekrój pręta o ξ odległy od prawej podpory B . Prowadząc PQ równoległe do M_A lub do M_B w odległości ξ od B i łącząc prostą punkty α i β mamy najwidoczniej $PC = M_1 = M_A +$

+ $\frac{\ell - z}{\ell} [M_B - M_A]$, oraz $OQ = \mu$. Stąd $PQ = M_z + \mu = M$ - odcinek PQ wyobraża moment obranego przekroju. Momen-

rys. 246.



ty M_A i M_B zazwyczaj nazywamy MOMENTAMI ODPO-
ROWYMI. Są one wygodniej-
sze w rachunku niż odpory,
a zwłaszcza w wypad-

kach bardziej złożonych. Istnieją ponadto zagadnienia dotyczące prętów STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH, które inaczej rozwiązać się nie dają - jeno z pomocą momentów odporowych, łącznie z nader prostym twierdzeniem, które zazwyczaj znane jest jako:

§ 29. WZÓR CLERC'A.

Wyżej otrzymaliśmy wzór $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{E_y J_x}$, w którym dz oznacza różniczkę łuku odkształconej pręta płasko wygiętego, a $d\varphi$ kąt nachylenia dwóch sąsiednich jego odkształconych przekrojów poprzecznych. Niech prosta Ωz oznacza pierwotną oś podłużną danego pręta. Po obciążeniu układem sił gnących pręt wygnie się, jego oś podłużna przejdzie w odkształconą. Weźmy pod uwagę dowolny łuk odkształconej o skrajnych punktach $A(z_A, \varphi_A)$ i $B(z_B, \varphi_B)$ (rys. 247). Wygięcie pręta z założenia nader nieznaczne pozwala utożsamiać element rozpatrywanego łuku odkształconej $CC' = dz$ - z przyrostem $d\varphi$ współrzędnej z punktu C , co daje $dz = d\varphi$. Jest to dopuszczalne, bo przy słabym wygięciu odkształcona niewiele różni się od pierwotnej osi podłużnej pręta. Przez

sąsiedniemi normalnemi odkształconej. Biorąc sumę tych kątów dla całego łuku mamy $\varphi_{AB} = \int_{z_A}^{z_B} \frac{M}{E_y J_x} dz$, wzór, który wyznacza kąt, jaki tworzą skrajne styczne rozpatrywanego łuku. Oznaczmy przez θ_A KĄT POMIĘDZY OSIĄ ΩZ a styczną łuku w skrajnym jego punkcie A ; przez θ_B także kąt pomiędzy osią ΩZ a styczną łuku w B , wtedy $\varphi_{AB} = \theta_B - \theta_A = \int_{z_A}^{z_B} \frac{M}{E_y J_x} dz$, jak to z łatwością postrzec się daje na rysunku. Kąt $d\varphi$ można wyrazić jeszcze w inny sposób. Podzielmy łuk AB na elementy $A1, 12, \dots, 5B$. Gdybyśmy pręt znagła w A rozciągli i po zamocowaniu w B pozbawili obciążenia zewnętrznego, to rozpatrywana część AB pręta odgięta by się i wyprostowała. Z początku rozgiąłby się skrajny element $A1$, przechodząc w prostą 1α styczną do łuku AB w jego punkcie 1 ; z kolei po wyprostowaniu się drugiego elementu 12 - odgięta część boku $A12$ przebiegała by w prostą 2β , styczną do łuku AB w punkcie 2 . To samo zjawisko zachodziłoby przy odginaniu się dalszych elementów łuku, który ostatecznie ułożyłby się cały rozgięty na stycznej skrajnego punktu B w postaci odcinka BA' . Przez ten cały czas skrajny punkt A łuku przechodziłby kolejno z A do α , do β wreszcie zatrzymałby się w A' , zakreśliwszy łuk AA' . Przeprowadźmy proste $BA_0 \parallel \Omega Z$ oraz $AA_0 \parallel \Omega \varphi$ a otrzymamy $BA_0 = z_B - z_A$ oraz $AA_0 = \varphi_A - \varphi_B$. Wobec nader nieznacznego wygięcia pręta możemy niewątpliwie rozpatrywać odcinek A_0AA' , jako łuk koła o promieniu

BA_0 . Stanowi to założenie CLERC'A, zupełnie uzasadnione dla prętów wygiętych nieznacznie. Ponieważ kąt

$A'BA_0 = \theta_B$ zatem, jako łuk koła $A_0AA' = BA_0 \times \theta_B = (\zeta_B - \zeta_A)\theta_B$. Ponadto $A_0AA' = A_0A + AA' = \varphi_A - \varphi_B + AA'$. Aby wyznaczyć niewiadomą AA' rozpatrujemy element CC' łuku AB , przynależny do punktu C odkształconej. Budując w C i C' styczne CY i $C'S$ odkształconej, oraz prowadząc $CC' \parallel \Omega Z$ możemy ponownie rozpatrywać odcinek CAS' , jako łuk koła o promieniu $CC' = \zeta - \zeta_A$.

Jest to oczywiście to samo założenie CLERC'A co i pierwszej - pozwala ono wypisać wartość cząstki γ^S tego łuku, odpowiadającej wartości kąta $d\varphi$, w postaci $\gamma^S = (\zeta - \zeta_A)d\varphi$. Cały łuk AA' , jako złożony z elementów γ^S będzie oczywiście równy: $\int_{\zeta_A}^{\zeta_B} (\zeta - \zeta_A) d\varphi = \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M}{E_g J_x} (\zeta - \zeta_A) d\zeta$. Stąd ostatecznie: $(\zeta_B - \zeta_A)\theta_B = \varphi_A - \varphi_B + \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M}{E_g J_x} (\zeta - \zeta_A) d\zeta$, a więc $\theta_B = -\frac{\varphi_B - \varphi_A}{\zeta_B - \zeta_A} + \frac{1}{\zeta_B - \zeta_A} \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M(\zeta - \zeta_A)}{E_g J_x} d\zeta$.

Ten wzór łącznie z wyżej otrzymanym znany jest jako WZÓR CLERC'A. Wyżej było: $\theta_B - \theta_A = \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M}{E_g J_x} d\zeta$, zatem: $\theta_B = \theta_A + \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M d\zeta}{E_g J_x} = -\frac{\varphi_B - \varphi_A}{\zeta_B - \zeta_A} + \frac{1}{\zeta_B - \zeta_A} \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M(\zeta - \zeta_A)}{E_g J_x} d\zeta$. Skąd: $\varphi_B = \varphi_A - (\zeta_B - \zeta_A)\theta_A + \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M(\zeta - \zeta_A)}{E_g J_x} d\zeta - (\zeta_B - \zeta_A) \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M}{E_g J_x} d\zeta = \varphi_A - (\zeta_B - \zeta_A)\theta_A + \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M}{E_g J_x} [\zeta - \zeta_A - \zeta_B + \zeta_A] d\zeta = \varphi_A - (\zeta_B - \zeta_A)\theta_A - \zeta_B \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M d\zeta}{E_g J_x} + \int_{\zeta_A}^{\zeta_B} \frac{M \zeta d\zeta}{E_g J_x}$.

Wobec tego, że punkt B może być zupełnie dowolnie na odkształconej obrany, oznaczamy jego współrzędne wprost przez ζ, φ , a wtedy mamy WZÓR CLERC'A w

postaci:

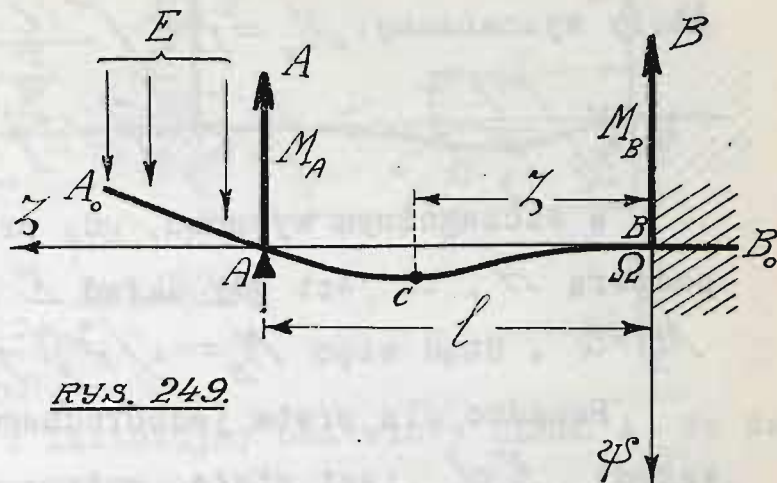
$$\psi = \psi_A - (z - z_A) \theta_A - z \int_{z_A}^z \frac{M d\zeta}{E_g J_x} + \int_{z_A}^z \frac{M \zeta d\zeta}{E_g J_x}.$$

Jest to najoczywistej RÓWNANIE ODKSZTAŁCONEJ PRĘTA PŁASKO WYGIĘTEGO. W wielu wypadkach prowadzi ono szybciej do celu niż zwykły wzór dotychczas przez nas wyłącznie używany. Jako przykład tego rodzaju wypadku bierzemy pod uwagę przypadki statycznie niewyznaczalne, które, jakśmy to wyżej już widzieli rozwiązują się metodą zwykłą z pewnemi trudnościami - tutaj metoda CLERC'A da nam wynik prosty i bezpośredni. Rozpatrujemy więc:

§ 30. PRĘT JEDNYM KOŃCEM OSADZONY, DRUGIM WYSTAJĄCY POZA PODPORĘ, A OBCIĄŻONY DOWOLNYM UKŁADEM SIŁ GNĄCYCH.

Pręt A_0B_0 pierwotnie prosty, osadzono końcem B_0B i podparto w punkcie A . Oznaczmy przez A i B odpory wywołane obciążeniem gnącem odpowiednio w punktach A i B , przez M_A i M_B - odnośne momenty. Pozostałe znakowania znamy już z ustępu dwudziestego pierwszego, gdzie rozpatrywaliśmy podobny wypadek. Niech obciążenie zewnętrzne składa się z sił P_i odległych o z_i od początku stałych współrzędnych Ω . Równania statyki dają $A + B + \sum P_i = 0$, oraz dla ośrodków momentów Ω : $Al + \sum P_i z_i + M_B = 0$, gdzie przez M_B oznaczyliśmy moment osadzenia pręta a sumowania winny ogarnąć wszystkie siły układu. Stąd $B = -\sum P_i - A$ oraz $A = \frac{1}{l} [M_B + \sum P_i z_i]$. Jest to wypa-

dek statycznie
niewyznaczalny
- nie możemy
bowiem otrzymać
 M_B z równań
statyki. Nato-
miast wzór CLER-
C'A daje M_B
wprost.



RYS. 249.

Zastosujmy wzór CLERC'A do części AB pręta;
wobec osadzenia pręta w B mamy niewątpliwie: $z_B = 0$,
 $\varphi_B = 0$, oraz $\theta_B = 0$, odkształcona bowiem jest styczn-
na do osi Ωz w tym punkcie. Ponadto dla punktu A
jako podpartego mamy $z_A = l$ oraz $\varphi_A = 0$, stąd:

$$0 = -\frac{1}{EI} \int_0^l M(z-l) dz = \int_0^l \frac{M(l-z)}{EI} dz = 0,$$

gdzie: $M = M_A + \frac{l-z}{l} (M_B - M_A) + \mu.$

Tutaj przez M oznaczyliśmy moment panujący w
dowolnym punkcie pośrednim C oddalonym o z od począt-
ku współrzędnych Ω , a leżącym w rozpatrywanej czę-
ści AB pręta. Wzór dla M stanowi wyżej dowiedzie-
ne prawo o trzech momentach. Stąd:

$$M_A \int_0^l \frac{l-z}{EI} dz + \frac{M_B}{EI} \int_0^l \frac{(l-z)^2}{2} dz - \frac{M_A}{EI} \int_0^l \frac{(l-z)^2}{2} dz + \int_0^l \frac{\mu(l-z)}{EI} dz = 0.$$

Tutaj należy zauważyć, że moment M_A możemy zaw-
sze wyznaczyć, sprowadzając do punktu A , jako ośrod-
ka, siły przyłożone do wystającego końca $A_o A$ pręta.
Ten układ E stanowi cząstkę całkowitego układu gną-

cego; zatem jedyną niewiadomą równania jest moment M_B , który wyznaczamy: $M_B = \{ M_A \int \frac{(l-z)^2}{E_g J_x} dz - \ell M_A \int \frac{l-z}{E_g J_x} dz - \ell \int \frac{\mu(l-z)}{E_g J_x} dz \} : \int \frac{(l-z)^2}{E_g J_x} dz$.

W szczególnym wypadku, gdy pręt kończy się ponad podporą A , to jest gdy układ E nie istnieje, mamy

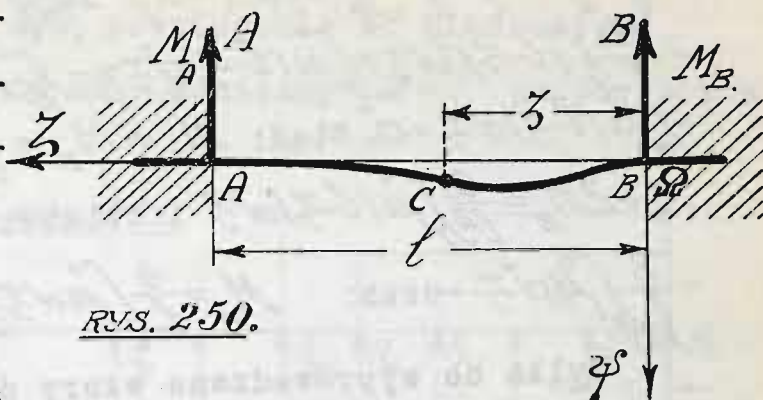
$$M_A = 0. \text{ Stąd więc } M_B = - \ell \int \frac{\mu(l-z)}{E_g J_x} dz : \int \frac{(l-z)^2}{E_g J_x} dz.$$

Ponadto dla pręta jednorodnego o stałym przekroju wszędy $E_g J_x$ jest stałe, możemy więc napisać: $M_B = - \ell \int \mu(l-z) dz : \int (l-z)^2 dz$. Tylko co wyprowadzony wzór dotyczy wypadku rozpatrywanego w § 22. Obetnijmy pręt jednostajnie obciążony p na jednostkę długości w punktach A i B , a otrzymamy odpory $A=B=-\frac{p\ell}{2}$. Stąd: $\mu = \frac{p\ell}{2}(l-z) - p(l-z)\frac{l-z}{2}$ mamy zatem: $-\ell \int \mu(l-z) dz = -\frac{p\ell^2}{2} \int (l-z)^2 dz + \frac{p\ell}{2} \int (l-z)^3 dz = -\frac{p\ell^2}{2} \frac{\ell^3}{3} + \frac{p\ell}{2} \frac{\ell^4}{4} = \frac{p\ell^5}{24}$. Ponadto mamy $\int (l-z)^2 dz = -\frac{\ell^3}{3}$, i ostatecznie mamy $M_B = -\frac{p\ell^2}{8}$ — wynik, który już znamy z § 22. Z kolei bierzemy pod uwagę:

§ 31. PRĘT OBYDWU KOŃCAMI OSADZONY, A OBCIĄŻONY

DOWOLNYM UKŁADEM SIŁ GNĄCYCH. Zachowując znakowania § 23 i oznaczając przez P_i siły układu gnącego, odległe o z_i od początku Ω współrzędnych możemy wypisać równania statyki $A+B+\sum P_i=0$, oraz dla punktu Ω jako ośrodka momentów $M_A+A\ell+\sum P_i z_i+M_B=0$, gdzie przez M_A i M_B oznaczyliśmy momenty odporowe, czyli momenty osadzeń pręta. Stąd $A=[-M_A-M_B-\sum P_i z_i]:\ell$, oraz: $B=\sum P_i-A$.

Jest to zatem wypadek podwójnie niewyznaczalny statycznie, nie możemy bowiem otrzymać z równań statyki



RYS. 250.

ani M_A ani M_B . Zastosujmy oba wzory CLERC'A do danego wypadku - wobec osadzenia pręta w A i B mamy niewątpliwie $z_A = l$, $\varphi_A = 0$, $\theta_A = 0$, oraz $z_B = 0$, $\varphi_B = 0$, $\theta_B = 0$, odkształcona bowiem jest styczna do osi Ωz w punktach A i B jako osadzonych. Pierwszy wzór CLERC'A da nam zatem $0 = \int_0^l \frac{M dz}{E_g J_x}$, drugi:

$0 = -\frac{1}{E_g J_x} \int_0^l M(z-l) dz$ gdzie $M = M_A + \frac{z-l}{l} [M_B - M_A] + \mu$, dla dowolnego punktu C odkształconej, odległego o z od początku współrzędnych. Stąd:

$$M_A \int_0^l \frac{dz}{E_g J_x} + \frac{M_B}{l} \int_0^l \frac{(l-z) dz}{E_g J_x} - \frac{M_A}{l} \int_0^l \frac{(l-z) dz}{E_g J_x} + \int_0^l \frac{\mu dz}{E_g J_x} = 0,$$

$$\text{a ponadto: } \frac{M_A}{l} \int_0^l \frac{(l-z) dz}{E_g J_x} + \frac{M_B}{l} \int_0^l \frac{(l-z)^2 dz}{E_g J_x} - \frac{M_A}{l} \int_0^l \frac{(l-z)^2 dz}{E_g J_x} + \int_0^l \frac{\mu(l-z) dz}{E_g J_x} = C.$$

W ten sposób otrzymujemy dwa równania linjowe względem M_A i M_B , z których wyznaczymy wartości obu momentów odporowych. W szczególnym wypadku, dla pręta jednorodnego o przekroju stałym, $E_g J_x$ jest stałe, a zatem będziemy mieli znowu:

$$M_A \int_0^l dz + \frac{M_B}{l} \int_0^l (l-z) dz - \frac{M_A}{l} \int_0^l (l-z) dz + \int_0^l \mu dz = -\frac{l M_A}{l}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{M_B}{\ell} \frac{\ell^2}{2} + \frac{M_A}{\ell} \frac{\ell^2}{2} + \int_0^\ell \mu dz = 0; \quad M_A \int_0^\ell (\ell-z) dz + \frac{M_B}{\ell} \int_0^\ell (\ell-z)^2 dz \\
& - \frac{M_A}{\ell} \int_0^\ell (\ell-z)^2 dz + \int_0^\ell \mu (\ell-z) dz = -\frac{\ell^2}{2} M_A - \frac{M_B}{\ell} \frac{\ell^3}{3} + \frac{M_B}{\ell} \frac{\ell^3}{3} + \\
& + \int_0^\ell \mu (\ell-z) dz = 0. \text{ Stąd: } M_A + M_B = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mu dz, \text{ oraz:} \\
& M_A + 2M_B = \frac{6}{\ell^2} \int_0^\ell \mu (\ell-z) dz \text{ i ostatecznie: } M_B = \frac{6}{\ell^2} \int_0^\ell \mu (\ell-z) dz \\
& - \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mu dz \text{ oraz: } M_A = \frac{4}{\ell} \int_0^\ell \mu dz - \frac{6}{\ell^2} \int_0^\ell \mu (\ell-z) dz.
\end{aligned}$$

Tylko co wyprowadzone wzory dotyczą również wypadku rozpatrywanego w § 24. Uobetnijmy pręt w A i B , a otrzymamy, przy jednostajnem obciążeniu p kg na jednostkę, moment $\mu = \frac{p\ell}{2}(\ell-z) - \frac{p}{2}(\ell-z)^2$. Ponieważ niewątpliwie:

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{\ell^2} \int_0^\ell \mu (\ell-z) dz = \frac{3p}{\ell} \int_0^\ell (\ell-z)^2 dz - \frac{3p}{\ell^2} \int_0^\ell (\ell-z)^3 dz = -\frac{3p}{\ell} \frac{\ell^3}{3} + \\
& + \frac{3p}{\ell^2} \frac{\ell^4}{4} = 3p\ell^2 \left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] = -\frac{p\ell^2}{4}; \text{ ponadto: } \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \mu dz = \\
& = p \int_0^\ell (\ell-z) dz - \frac{p}{\ell} \int_0^\ell (\ell-z)^2 dz = -\frac{p\ell^2}{2} + \frac{p}{\ell} \frac{\ell^3}{3} = p\ell^2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right] = -\frac{p\ell^2}{6};
\end{aligned}$$

Stąd ostatecznie: $M_A = -2\frac{p\ell^2}{6} + \frac{p\ell^2}{4} = -\frac{p\ell^2}{12}$,
 oraz $M_B = -\frac{p\ell^2}{4} + \frac{p\ell^2}{6} = p\ell^2 \left[-\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right] = -\frac{p\ell^2}{12}$; Te wyniki znamy już z § 23.

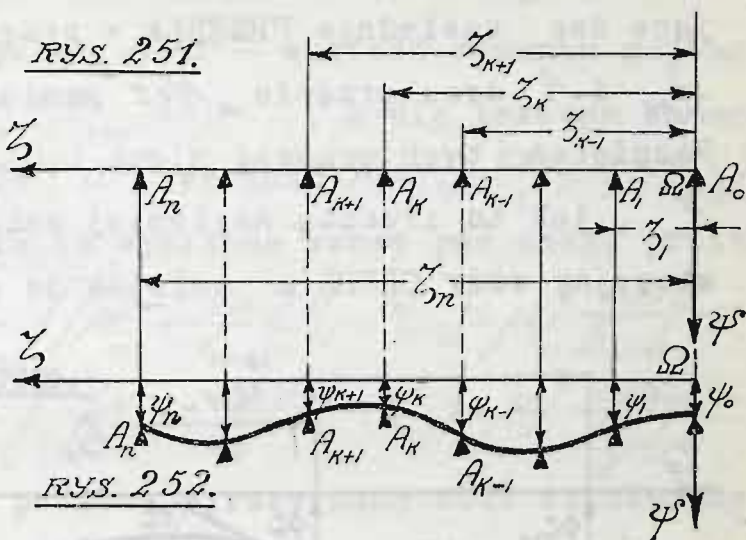
Wzór CLERC'A daje zwłaszcza nader cenne wyniki przy badaniu wypadków wielokrotnie niewyznaczalnych statycznie. Aby to udowodnić rozpatrujemy tak zwane:

§ 32. BELKI WIELOPRZĘSŁOWE.

Pierwotnie prosty pręt, swobodnie oparty na $n+1$ podporach stanowi tak zwaną BELKĘ N -PRZĘSŁOWĄ. Skrajną prawą podporę obieramy za początek stałych współrzędnych. Oś ΩZ prowadzimy wzdłuż pierwotnej osi podłużnej pręta nieodkształconego, oś ΩY kierujemy

pionowo w dół, a ΩZ prostopadłe do płaszczyzny,
 /RYS.251/ ku patrzącemu. Oznaczmy $n+1$ podpór pręta
 nieodkształcone-

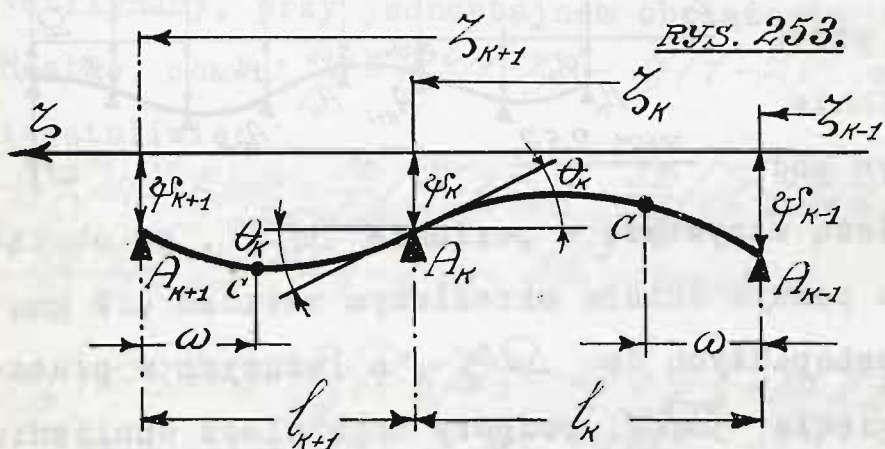
go przez A_i
 $i=0,1,2,\dots,n$,
 a odległość
 tych podpór od
 początku współ-
 rzędnych przez
 Z_i . W stanie
 odciażonym pod-



pory te leżą wszystkie w poziomie ΩZ , po obciąże-
 niu pręta pewnym ściśle określonym układem sił gną-
 cych, prostopadłych do ΩZ , a leżących w płasz-
 czyźnie gięcia $Z\Omega\psi$, podpory mogą ulec obniżeniu
 lub podwyższeniu o ψ_i $i=0,1,\dots,n$, przyczem zakładamy
 zgóry, iż odległości ich od początku współrzędnych
 żadnym zmianom nie uległy /RYS.252/. Oznaczmy przez
 A_i $i=0,1,2,\dots,n$, ODPORY, a przez M_i MOMENTY ODPO-
 ROWE, przynależne do podpór A_i pręta odkształcone-
 go. Równania statyki w zastosowaniu do ośrodka Ω
 dadzą $\sum_{i=0}^{i=n} A_i + \sum F_j = 0$, oraz $\sum_{i=0}^{i=n} A_i Z_i + \sum F_j Z_j = 0$, gdzie
 przez F_j oznaczyliśmy poszczególne siły układu gną-
 cego, a przez Z_j ich odległości od Ω .

Te równania wyznaczają dwie odpory, pozostałe
 $n-1$ nie dadzą się statycznie wyznaczyć - mamy tu
 więc do czynienia z wypadkiem $(n-1)$ -krotnie niewyzna-

czalnym. Weźmy pod uwagę jakiegokolwiek trzy sąsiednie podpory A_{N-1} , A_N , A_{N+1} pręta odkształconego, określające dwa sąsiednie PRZĘSŁA - przęsło „ N ” pomiędzy A_{N-1} i A_N oraz przęsło „ $N+1$ ” pomiędzy A_N i A_{N+1} . Rozpiętości tych przęseł niech będą odpowiednio ℓ_N i ℓ_{N+1} , jak to zresztą najlepiej wskazują RYS. 253. Zastosujmy wzór CLERC'A kolejno do obu tych przęseł.



Aby upro-
ścić wzo-
ry wprowa-
dzamy po-
mocniczą
zmienną
 ω -wyraża-
jącą odle-

głość jakiegokolwiek punktu C odkształconej od osi skrajnych podpór. Będziemy mieli zatem dla PRZĘSŁA „ $N+1$ ” współrzędne $\zeta_A = \omega_{N+1} = 0$; $\varphi_A = \varphi_{N+1}$, oraz $\zeta_B = \omega_N = \ell_{N+1}$; $\varphi_B = \varphi_N$, $\theta_B = \theta_N$, gdzie przez θ_N oznaczyliśmy kąt, jaki tworzy odkształcona w punkcie A_N z osią ω . Przypisujemy mu wartość dodatnią, bok jego bowiem bieży w dół. Mamy więc tutaj wzór CLERC'A:

$$\theta_N = -\frac{\varphi_N - \varphi_{N+1}}{\ell_{N+1}} + \frac{1}{\ell_{N+1}} \int_0^{\ell_{N+1}} \frac{M}{Eg\omega} d\omega.$$
 Tak samo zupełnie mamy dla PRZĘSŁA „ N ” — współrzędne $\zeta_A = \omega_{N-1} = 0$; $\varphi_A = \varphi_{N-1}$ oraz $\zeta_B = \omega_N = \ell_N$, $\varphi_B = \varphi_N$, $\theta_B = -\theta_N$, ponieważ w danym wypadku bok kąta skierowany jest ku górze, aczkolwiek rozwar-
tość kąta jest ta sama. Stąd więc: $-\theta_N = -\frac{\varphi_N - \varphi_{N-1}}{\ell_N} +$

+ $\frac{1}{\ell_K} \int_0^{\ell_{K+1}} \frac{\ell_K M_K}{E_y J_x} \omega d\omega$. Na mocy trójkątności o trzech momentach będziemy ponadto mieli dla dowolnego punktu ℓ leżącego w przęśle „ $K+1$ ” wartość momentu gnącego $M = M_{K+1} + \frac{\omega}{\ell_{K+1}} (M_K - M_{K+1}) + \mu$; a dla takiego samego punktu w przęśle „ K ” wartość $M = M_{K-1} + \frac{\omega}{\ell_K} (M_K - M_{K-1}) + \mu$. Biorąc wszystkie tu wypisane wzory pod uwagę piszemy:

$$-\frac{\varphi_K - \varphi_{K+1}}{\ell_{K+1}} + \frac{1}{\ell_{K+1}} \int_0^{\ell_{K+1}} \left[M_{K+1} + \frac{\omega}{\ell_{K+1}} (M_K - M_{K+1}) + \mu \right] \frac{\omega d\omega}{E_y J_x} =$$

$$= \frac{\varphi_K - \varphi_{K-1}}{\ell_K} - \frac{1}{\ell_K} \int_0^{\ell_K} \left[M_{K-1} + \frac{\omega}{\ell_K} (M_K - M_{K-1}) + \mu \right] \frac{\omega d\omega}{E_y J_x}.$$

Zbierając podobne wyrazy mamy stąd ostateczny

wzór:

$$\frac{\varphi_{K+1} - \varphi_K}{\ell_{K+1}} + \frac{\varphi_{K-1} - \varphi_K}{\ell_K} + M_{K+1} \left[\frac{1}{\ell_{K+1}} \int_0^{\ell_{K+1}} \frac{\omega d\omega}{E_y J_x} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\ell_{K+1}^2} \int_0^{\ell_{K+1}} \frac{\omega^2 d\omega}{E_y J_x} \right] + M_K \left[\frac{1}{\ell_{K+1}^2} \int_0^{\ell_{K+1}} \frac{\omega^2 d\omega}{E_y J_x} + \frac{1}{\ell_K^2} \int_0^{\ell_K} \frac{\omega^2 d\omega}{E_y J_x} \right] +$$

$$+ M_{K-1} \left[\frac{1}{\ell_K} \int_0^{\ell_K} \frac{\omega d\omega}{E_y J_x} - \frac{1}{\ell_K^2} \int_0^{\ell_K} \frac{\omega^2 d\omega}{E_y J_x} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\ell_{K+1}} \int_0^{\ell_{K+1}} \frac{\mu \omega d\omega}{E_y J_x} + \frac{1}{\ell_K} \int_0^{\ell_K} \frac{\mu \omega d\omega}{E_y J_x} = 0. \quad (H)$$

Zawdzięczamy go pracom CLERC'A - ochrzczimy mianem CLERC-BRESSE'A, ponieważ BRESSE zapoczątkował ten dział WYTRZYMAŁOŚCI. Ten wzór wiąże w sposób linjowy trzy sąsiednie momenty odporowe. Ponieważ mamy n przęseł, możemy go zatem wypisać kolejno dla 1 i 2-go przęseł, następnie dla 2 i 3-go, potem dla 3 i 4-go, wreszcie dla $n-1$ i n -go przęsła: słowem otrzymać $n-1$ zależności linjowo wiążących momenty odporowe. Z tych zależności możemy wyznaczyć $n-1$ momentów odporowych daj-

my na to M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , pozostałe dwa momenty M_0 i M_n określimy z warunków końcowego obciążenia belki wieloprzęsłowej. Tutaj mogą zachodzić następujące wypadki:

1-o. BELKA KOŃCZY SIĘ TUŻ NAD PODPORAMI A_0 i A_n . W danym wypadku $M_0 = M_n = 0$.~

2-o. BELKA ZWISA POZA PODPORY SKRAJNE (RYS. 254), a wystające końce ulegają jarzmu układów E_0 i E_n sił gnących. Tutaj momenty M_0 i M_n otrzymujemy bezpośrednio, sprowadzając owe układy E_0 i E_n do ośrodków A_0 i A_n .~

3-o. BELKA JEST ZAMOCOWANA U OBU KOŃCÓW (RYS. 255). W tym wypadku wzór CLERC'A pozwoli wyznaczyć brakujące momenty. Aby uprościć wzory wprowadzamy zmienną ω - wyrażającą odległość jakiegokolwiek punktu C odkształczonej pręta od osi podpór A_0 i A_{n-1} (RYS. 255). Dla przęsła PIERWSZEGO $\zeta_A = \omega_1 = 0$, $\varphi_A = \varphi_1$, oraz $\zeta_B = \omega_0 = l_1$, $\varphi_B = \varphi_0 = 0$, $\theta_B = \theta_0 = 0$, tu bowiem w punkcie A_0 odkształcona jest styczna do osi $\Omega\zeta$. Mamy więc wzór CLERC'A w postaci $0 = \frac{\varphi_1}{l_1} + \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \frac{M \omega d\omega}{E_g J_x}$.~ Tak samo zupełnie dla przęsła OSTATNIEGO $\zeta_n = \omega_{n-1} = 0$, $\varphi_n = \varphi_{n-1}$, oraz ponadto $\zeta_B = \omega_n = l_n$, $\varphi_B = \varphi_n = 0$, $\theta_B = \theta_n = 0$, stąd: $0 = \frac{\varphi_{n-1}}{l_n} + \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{M \omega d\omega}{E_g J_x}$. Ponadto, na mocy prawa o trzech momentach, dla dowolnego punktu C pierwszego przęsła $M = M_1 + \frac{\omega}{l_1} [M_0 - M_1] + \mu$, a dla ostatniego przęsła $M = M_{n-1} + \frac{\omega}{l_n} [M_n - M_{n-1}] + \mu$, co podstawivszy w poprzednio wypisane równania, otrzymamy dwa dodatkowe równania.

otrzymamy dwa
dodatkowe równania, linjowe
względem

$$M_0, M_1, M_{n-1}$$

oraz M_n .

Słowem wzory

CLERC-BRES-

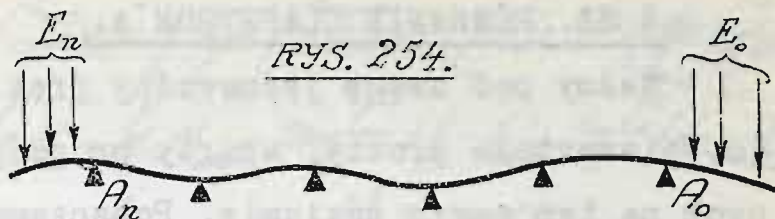
SE'A i CLER-

C'A pozwala-

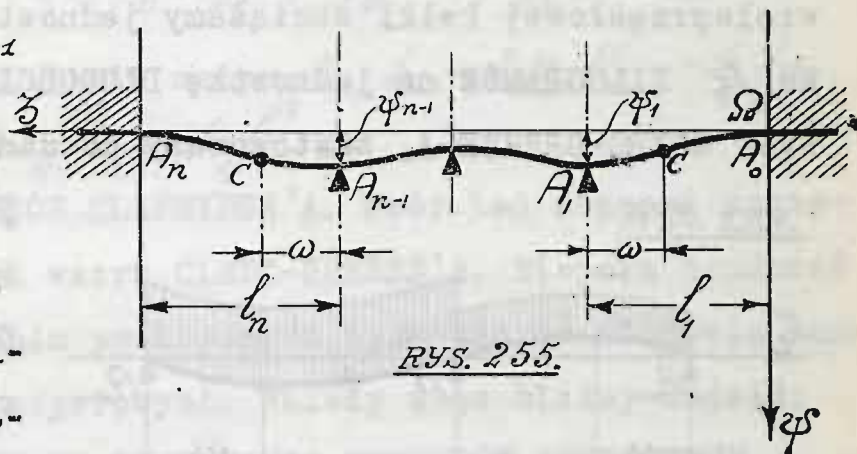
ją we wszyst-

kich wypadkach obciążenia i zamocowania belki wieloprzęsłowej wyznaczyć wszelkie momenty, panujące ponad podporami, czyli momenty odporowe.

Oznaczmy z kolei przez T_i $i=1, 2, \dots, n$ SIŁY TNĄCE ponad podporami. Do podpór A_{k-1}, A_k, A_{k+1} przynależą zatem siły tnące T_{k-1}, T_k, T_{k+1} . Niechaj ponadto P oznacza którąkolwiek z sił gnących przęsła „ K ” odległą o λ od osi podpory A_k . Moment panujący ponad tą podporą będzie więc $M_k = M_{k-1} + T_{k-1} \ell_k + \sum P \lambda$, stąd $T_{k-1} = [M_k - M_{k-1} - \sum P \lambda] : \ell_k$. W ten sposób wyznaczymy wszystkie siły tnące pręta i wyrysujemy ich wykres **USKOKI LINJI TEGO WYKRESU** ponad podporami dadzą nam niewątpliwie wartości odnośnych ODPÓR. Sposób CLERC'A daje zatem odpowiedź na wszelkie zagadnienia, dotyczące wypadków statycznie niewyznaczalnych. Jako zastosowanie tego sposobu podajemy tu: Wytrz. Mater. Arkusz XXVII



RYS. 254.

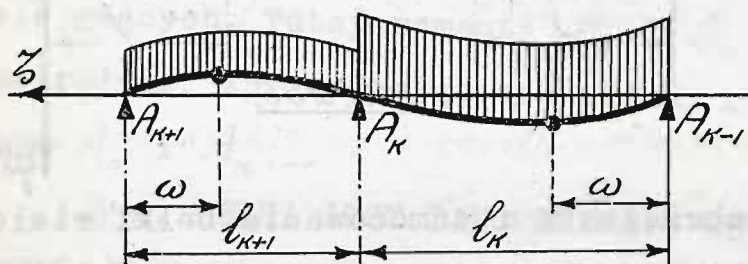


RYS. 255.

§ 33. RÓWNANIE CLAPEYRON'A.

Weźmy pod uwagę jednorodny pręt o stałym przekroju, pierwotnie prosty, oparty na podporach uszeregowanych na tym samym poziomie. Poszczególne przęsła tej wieloprzęsłowej belki obciążamy jednostajnie w stosunku p_K KILOGRAMÓW na jednostkę DŁUGOŚCI PRZĘSŁA „K”. Wzór CLERC-BRESSE'A, zastosowany do danego wypadku da-

RYG. 256.



je zależność
zwaną WZOREM
CLAPEYRON'A. Za-
chowując znako-
wanie ustępu po-
przedniego wy-

znaczamy μ dla któregośkolwiek przęsła dajmy na to dla „K” obciążonego p_K KG. na jednostkę długości.

W punkcie pośrednim C, po rozcięciu pręta ponad pod-
porami A_{K-1} i A_K , panować będzie moment $\mu =$

$= \frac{1}{2} p_K l_K \omega - \frac{1}{2} p_K \omega^2$. Dla przęsła „K+1” odpowiedni mo-

ment będzie $\mu = \frac{1}{2} p_{K+1} l_{K+1} \omega - \frac{1}{2} p_{K+1} \omega^2$. W danym wy-

wypadku zgodnie z założeniem $\varphi_{K-1} = \varphi_K = \varphi_{K+1}$, a za-

tem dwa pierwsze wyrazy wzoru CLERC'A będą równe zeru,

a cały wzór po skróceniu przez $1 : E_g J_x$ otrzyma po-

$$\begin{aligned} & M_{K+1} \left[\frac{1}{l_{K+1}} \int_0^{l_{K+1}} \omega d\omega - \frac{1}{l_{K+1}^2} \int_0^{l_{K+1}} \omega^2 d\omega \right] + M_K \left[\frac{1}{l_{K+1}^2} \int_0^{l_{K+1}} \omega^2 d\omega + \frac{1}{l_{K+1}^2} \int_0^{l_K} \omega d\omega \right] + \\ & + M_{K-1} \left[\frac{1}{l_K^2} \int_0^{l_K} \omega d\omega - \frac{1}{l_K^2} \int_0^{l_K} \omega^2 d\omega \right] + \frac{1}{l_{K+1}} \int_0^{l_{K+1}} \mu \omega d\omega + \frac{1}{l_K} \int_0^{l_K} \mu \omega d\omega = \\ & = M_{K+1} \left[\frac{1}{l_{K+1}} \frac{l_{K+1}^2}{2} - \frac{1}{l_{K+1}^2} \frac{l_{K+1}^3}{3} \right] + M_K \left[\frac{1}{l_{K+1}^2} \frac{l_{K+1}^3}{3} + \frac{1}{l_{K+1}^2} \frac{l_K^2}{2} \right] + M_{K-1} \left[\frac{1}{l_K^2} \frac{l_K^2}{2} - \frac{1}{l_K^2} \frac{l_K^3}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{l_K^3} \frac{l_K^3}{3} + \frac{p_{K+1}}{2} \int_0^{l_{K+1}} \omega^2 d\omega - \frac{1}{2} \frac{p_{K+1}}{l_{K+1}^3} \int_0^{l_{K+1}} \omega^3 d\omega + \frac{p_K}{2} \int_0^{l_K} \omega^2 d\omega - \frac{1}{2} \frac{p_K}{l_K^3} \int_0^{l_K} \omega^3 d\omega = \\
 & = \frac{l_{K+1}}{6} M_{K+1} + \frac{l_{K+1} + l_K}{3} M_K + \frac{l_K}{6} M_{K-1} + \frac{p_{K+1} l_{K+1}^3}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] + \frac{p_K l_K^3}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \\
 & = \frac{l_{K+1}}{6} M_{K+1} + \frac{l_{K+1} + l_K}{3} M_K + \frac{l_K}{6} M_{K-1} + \frac{p_{K+1} l_{K+1}^3}{24} + \frac{p_K l_K^3}{24} = 0. \sim
 \end{aligned}$$

I ostatecznie mamy: $M_{K+1} l_{K+1} + 2M_K [l_{K+1} + l_K] +$
 $+ M_{K-1} l_K + \frac{p_{K+1} l_{K+1}^3}{4} + \frac{p_K l_K^3}{4} = 0. \sim$

co stanowi WZÓR CLAPEYRON'A. Wzór ten stanowi szczególny wypadek wzoru CLERC-BRESSE'A. Niejaką trudność przy stosowaniu praktycznem tych wzorów stanowią znaki momentów odporowych. Należy więc bliżej omówić:

§ 34. PRAWO ZNAKOWANIA MOMENTÓW ODPOROWYCH.

W ogólnej teorii ustanowiliśmy prawo o kierunku momentów, leżących w przekroju. Tutaj mamy wyłącznie do czynienia z momentami prostopadłymi do płaszczyzny gięcia, która, jak wiadomo, jest prostopadła do głównej osi bezwładności OX przekroju. Momenty gnące leżą więc na tej osi - możemy je przeto znakować, rozpatrując jako dodatnie, gdy leżą na dodatniej osi OX , ujemne - na ujemnej. Dodatnią oś OX przekroju poprzecznego pręta płasko wygiętego kierujemy ku patrzącemu - momenty prawokrętne są zatem dodatnie, lewokrętne - ujemne, zazwyczaj bowiem przy wyznaczaniu momentów, bierzemy pod uwagę całkowity układ sił gnących LEWEJ części pręta i sprowadzamy jego siły do środka masy obranego przekroju poprzecznego, jako do ośrodka sprowadzenia. Siły dodatnie, skierowane w dół dadzą zatem

momenty lewoskrętne ujemne - natomiast siły dodatnie skierowane ku górze dadzą momenty prawoskrętne - dodatnie. Stąd prawo pamięciowe znakowania:

PRZY WYZNACZANIU MOMENTU SIŁ GNĄCYCH PRZYNALEŻNYCH DO LEWEJ CZĘŚCI PRĘTA, NALEŻY BRAĆ SIŁY ZE ZNAKIEM ODWROTNYM I MNOŻYĆ PRZEZ ODLEGŁOŚĆ OD ŚRODKA SPROWADZENIA. Tem prawem rządził się przy wyprowadzeniu obu powyższych wzorów - tutaj ponownieśmy go uwypuklili. Jako wniosek bezpośredni mamy również następujące prawo: POD JARZMEM MOMENTU DODATNIEGO PRĘT WYGINA SIĘ WYPUKŁOŚCIĄ KU DOŁOWI, WKŁĘŚŁOŚCIĄ KU GÓRZE. WYGIĘCIE NA TLE MOMENTU UJEMNEGO UJAWNIA WKŁĘŚŁOŚĆ OD DOŁU, WYPUKŁOŚĆ OD GÓRY ODKSZTAŁCONEJ PRĘTA PŁASKO WYGIĘTEGO.

Oba te prawa mogą rządzić również znakiem momentu w uproszczonym równaniu odkształconej, które należy jednak pisać w postaci: $-\varphi'' = \frac{M}{E_g J_x}$. W samej rzeczy założmy, że $M > 0$ wtedy i lewa część równania musi być dodatnia. Moment $M > 0$ nadaje w myśl drugiego prawa kształt odkształconej, uwypuklonej ku dołowi w rozpatrywanym punkcie. Gdy punkt ten leży pod osią ΩZ - pierwotną osią podłużną pręta, wtedy odkształcona w sąsiedztwie punktu rozpatrywanego jest wklęsła względem osi ΩZ - musi być zatem $\varphi\varphi'' < 0$ przy $\varphi > 0$. Gdy znowu punkt leży ponad ΩZ - odkształcona względem osi ΩZ jest wypukła i musi być $\varphi\varphi'' > 0$ przy $\varphi < 0$. W obu wypadkach zatem

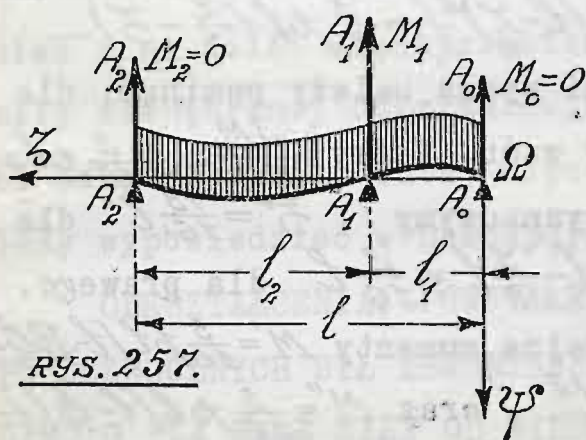
$\varphi'' < 0$; lewą część równania należy przeto zaopatrzyć w znak minus, bo wtedy $-\varphi'' = \frac{M}{E_g J_x} > 0$.

Korzystając z tylko co podanego prawa znakowania momentów odporowych, bierzemy pod uwagę, jako najprostsz przykład zastosowania WZORU CLAPEYRON'A, tak zwany:

§ 35. PRĘT NA TRZECH PODPORACH.

Weźmy pod uwagę jednorodny pręt o stałym przekroju poprzecznym, pierwotnie prosty, oparty na trzech podporach A_0, A_1, A_2 uszeregowanych poziomo. Niech ΩZ będzie osią podłużną pręta nieodkształconego - początek Ω współrzędnych umieszczamy w A_0 .

Mamy tu więc do czynienia z BELKĄ DWUPRZĘSŁOWĄ jednostajnie obciążoną, przyczem $p_2 = p_1 = p$ kilogramów na jednostkę długości tej belki. WZÓR CLAPEYRON'A, zastosowany do danego wypadku da nam:



RYS. 257.

W założeniu, że pręt urywa się ponad podporami A_2 i A_0 mamy $M_2 = M_0 = 0$ skąd:

$M_2 l_2 + 2M_1(l_2 + l_1) + M_0 l_1 + \frac{p}{4}(l_2^3 + l_1^3) = 0$, gdzie przez M_0, M_1, M_2 . oznaczyliśmy momenty odporowe podpór A_0, A_1, A_2 . a przez l_2 i l_1 odległości $\overline{A_2 A_1}$ i $\overline{A_1 A_0}$. Oznaczmy wartości

$M_1 = -\frac{p}{8} [l_2^3 + l_1^3] : [l_2 + l_1] = -\frac{p}{8l} [l_2^3 + l_1^3]$. Oznaczmy

ODPORY pręta przez A_2, A_1, A_0 . wtedy pisząc wartość

$M_1 = -A_2 l_2 - p \frac{l_2^2}{2} = -\frac{p}{8l} [l_2^3 + l_1^3]$. Skąd: $A_2 = -\frac{pl_2}{2} + \frac{p}{8l} [l_2^3 + l_1^3]$. Ponadto pisząc dla ośrodka Ω równania statyki mamy: $A_2 + A_1 + A_0 + p(l_1 + l_2) = 0$; $-A_2(l_1 + l_2) - A_1 l_1 - \frac{p}{2} [l_2^2 + l_1^2] = 0$, z których z łatwością możemy wyznaczyć A_0 i A_2 . W ten sposób obliczywszy wszystkie trzy odpory, wyznaczymy momenty gnące. Skrajna wartość momentu gnącego określi nam, dostatecznie wymiary pręta.

W szczególnym wypadku, gdy $l_1 = l_2 = l:2$ mamy:
 $A_2 = -\frac{pl}{4} + \frac{p}{4l^2} \cdot \frac{l^3}{8} = -\frac{3}{16} pl$. Ponadto $A_2 l + \frac{1}{2} A_1 l + \frac{p}{2} l^2 = 0$, skąd $A_1 = -pl - 2A_2 = -pl + \frac{3}{8} pl = -\frac{5}{8} pl$ i ostatecznie $A_0 = -\frac{3}{16} pl$. Równanie momentów będzie tu: $M = \frac{3}{16} pl(l-z) - \frac{p}{2} (l-z)^2 + \frac{5}{8} pl(\frac{l}{2} - z)$ dla lewego przęsła ostatni wyraz należy pominąć, dla prawego przęsła brać cały wzór. Weźmy $\frac{dM}{dz} = -\frac{3}{16} pl + p(l-z) - \frac{5}{8} pl = 0$, stąd wyznaczymy: $z' = \frac{13}{16} l$ dla lewego przęsła i $z'' = \frac{13}{16} l - \frac{5}{8} l = \frac{3}{16} l$ dla prawego. Obie te wartości dają skrajne momenty $M' = \frac{3}{16} pl[l - \frac{13}{16} l] - \frac{p}{2} [l - \frac{13}{16} l]^2 = \frac{9}{512} pl^2$, oraz $M'' = \frac{3}{16} pl[l - \frac{3}{16} l] - \frac{p}{2} [l - \frac{3}{16} l]^2 + \frac{5}{8} pl[\frac{l}{2} - \frac{3}{16} l] = \frac{9}{512} pl^2 = M_1$.
 Aż do tych skrajnych wartości dodatnich rośnie PARABOLICZNIE moment gnący, następnie znów maleje, staje się zerem w punktach o współrzędnych, czyniących za-
 dość równaniu $M = 0$, które dla lewego przęsła daje pierwiastek $z = \frac{5}{8} l$ a dla prawego $z = \frac{3}{8} l$; wreszcie dla środkowego punktu pręta, gdzie $z = \frac{l}{2}$ mamy ujemną najmniejszość

- 423 -

momentu $M_1 = -\frac{p}{8l} \left[\frac{l^3}{8} + \frac{l^3}{8} \right] = -\frac{pl^2}{32}$, która, jako bezwzględnie najwyższa wyznaczy bezpieczne wymiary pręta.

Zupełnie tak samo moglibyśmy wyznaczyć wartości momentów i odpór dla belki wieloprzęsłowej. W wypadkach prostszych, przy dwóch a najwyżej trzech przęsłach możemy otrzymać te same wyniki inną drogą, którą otwiera:

§ 36. ZASADA NIEZALEŻNOŚCI DZIAŁANIA SIŁ W WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW.

Drugą ZASADĘ NEWTONA, wyrokującą o niezależności działania poszczególnych sił, możemy rozszerzyć również i na świat międzycząsteczkowy, gdzie działanie siły zewnętrznej odkształcającej ujawnia się w postaci odkształcenia. Tutaj więc DRUGĄ ZASADĘ NEWTONA należy wypowiedzieć w następującej postaci:

ODKSZTAŁCENIA, POWSTAŁE W CIELE NA TLE DZIAŁANIA POSZCZEGÓLNYCH SIŁ ZEWNĘTRZNYCH, SĄ NIEZALEŻNE OD SIEBIE, O ILE SAME SIŁY OD SIEBIE NIE ZALEŻĄ.

Na tle odkształceń jawią się naprężenia w ciele odkształconem, jako nowy czynnik działania sił zewnętrznych, możemy więc wypowiedzieć tę samą zasadę jeszcze i w takiej postaci:

NAPRĘŻENIA, POWSTAŁE W CIELE NA TLE DZIAŁANIA POSZCZEGÓLNYCH SIŁ ZEWNĘTRZNYCH, SĄ NIEZALEŻNE OD SIEBIE, O ILE SAME SIŁY OD SIEBIE NIE ZALEŻĄ.

Każda więc siła zewnętrzna odkształcająca, nieza-

leżna od innych sił układu, wywołuje w ciele swoiste odkształcenia i naprężenia niezależnie od pozostałych sił zrównoważonego układu odkształcającego. W ten sposób druga zasada NEWTONA zostaje uogólniona i rozszerzona na obszar wytrzymałościowych zjawisk. Powołuje ona do życia odkształcenia, złożone z poszczególnych odkształceń składowych, powstających na tle działania odnośnych sił układu odkształcającego. Odkształcenia złożone powstają zgodnie z DRUGIM PRAWEM HOOKE'A, które tu podajemy:

§ 37. DRUGIE PRAWO ROBERTA HOOKE'A.

NIEZNACZNE ODKSZTAŁCENIA DODAJĄ SIĘ DO SIEBIE - JEDNOKIERUNKOWE ALGEBRAICZNIE. RÓŻNOKIERUNKOWE - GEOMETRYCZNIE. To prawo łącznie z poprzednimi pozwoli wyznaczyć statycznie niewyznaczalną odpórę pręta rozpatrywanego w § 35. W tym celu odrzucamy środkową podporę pręta A_2 , czyniąc go tym samym statycznie niewyznaczalnym i rozpatrujemy kolejno dwa różnorodne rodzaje obciążenia. PO PIERWSZE zakładamy, że pręt jak dawniej jest jednostajnie obciążony w stosunku p kilogramów na jednostkę długości. To obciążenie w miejscu skąd odrzuciliśmy podporę, da odkształcenie - strzałkę ugięcia f_1 , którą z łatwością wyznaczymy czyniąc $z = l_1$ we wzorze § 20 (str. 364) w postaci $f_1 = \frac{1}{E_g J_{x_0}} \left[\frac{p l^4}{24} - \frac{p l^3 l_1}{12} - \frac{p l}{12} (l - l_1)^3 + \frac{p}{24} (l - l_1)^4 \right]$. Wobec $l = l_1 + l_2$ mamy: $f_1 = \frac{p}{24 E_g J_{x_0}} [l_1^4 + 4 l_1^3 l_2 + 6 l_1^2 l_2^2 + 4 l_1 l_2^3 + l_2^4 - l_1^4 - 3 l_1^3 l_2 - 3 l_1^2 l_2^2 - l_1 l_2^3 - 2 l_1 l_2^3 - 2 l_2^4 + l_2^4] = \frac{p l_1 l_2}{24 E_g J_{x_0}} \{ l_1^2 + 3 l_1 l_2 + l_2^2 \}$.

Z KOLEI przypuszczamy, że pręt nasz obciążony jest skupioną siłą P przyłożoną w odległości $z = \ell_1$, a więc w miejscu, skąd odrzuciliśmy podpórę. Czyniąc $P = A_2$ upodobnimy działanie tej siły do działania podpory, o ile ponadto sile P nadamy kierunek ODPORY A_2 . Określając dla tego wypadku strzałkę siły f_2 , mamy, zgodnie z § 19 (str. 360): $f_2 = A_2 \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{3 \ell E_g J_{x_0}}$. W wypadku, rozpatrywanym w § 35 oba te obciążenia DZIAŁAJĄ RÓWNO-CZESNIE, bowiem w A_1 mamy odpórę $A_1 = P$. Ponieważ wszystkie trzy podpory są z założenia na jednym poziomie i podczas wygięcia obniżeniu nie ulegają, zatem

$$\text{strzałki } f_1 \text{ i } f_2 \text{ wzajemnie się znoszą dając: } 0 = f_1 + f_2 = \frac{p \ell_1 \ell_2}{24 E_g J_{x_0}} \{ \ell_1^2 + 3 \ell_1 \ell_2 + \ell_2^2 \} + A_1 \frac{\ell_1^2 \ell_2^2}{3 \ell E_g J_{x_0}}. \text{ Skąd: } A_1 = - \frac{p \ell}{8 \ell_1 \ell_2} (\ell_1^2 + 3 \ell_1 \ell_2 + \ell_2^2) = - \frac{p \ell}{8 \ell_1 \ell_2} (5 \ell_1 \ell_2 + \ell_2^2 - 2 \ell_1 \ell_2 + \ell_1^2) = - \frac{5}{8} p \ell - \frac{p \ell (\ell_2 - \ell_1)^2}{8 \ell_1 \ell_2}.$$

Jak wyżej z równań statyki mamy:

$$A_2 = - \frac{p \ell}{2} - A_1 \frac{\ell_1}{\ell} = - \frac{p \ell}{2} + \frac{5}{8} p \ell_1 + \frac{p (\ell_2 - \ell_1)^2}{8 \ell_2} = - \frac{p \ell_1}{2} - \frac{p \ell_2}{2} + \frac{4}{8} p \ell_1 + \frac{p}{8} \frac{(\ell_2 - \ell_1)^2 + 4 \ell_1 \ell_2}{\ell} = - \frac{p \ell_2}{2} + \frac{p}{8 \ell_2} \{ \ell_2^2 - 2 \ell_1 \ell_2 + \ell_1^2 + 4 \ell_1 \ell_2 \} = - \frac{p \ell_2}{2} + \frac{p}{8 \ell_2} \{ \ell_2^2 - \ell_1^2 + \ell_1^2 + 4 \ell_1 \ell_2 \} = - \frac{p \ell_2}{2} + \frac{p}{8 \ell_2} [\ell_2^3 + \ell_1^3].$$

Ten wynik otrzymaliśmy w § 35 inną drogą. Tak samo zupełnie możemy opracować na mocy praw tu wyłuszczonych:

§ 38. PRĘT NA CZTERECH PODPORACH.

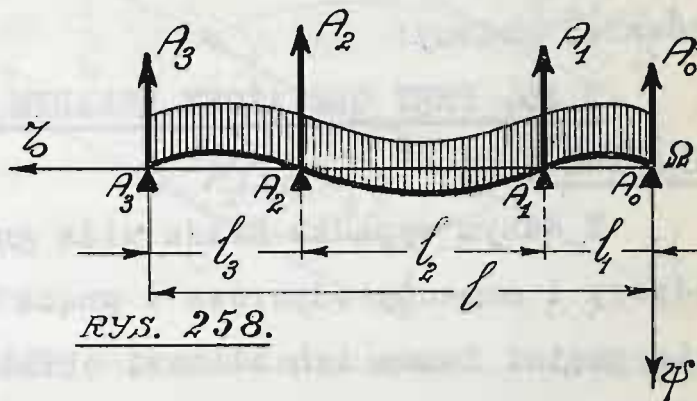
Weźmy pod uwagę jednorodny pręt o stałym przekroju poprzecznym, pierwotnie prosty, oparty na czterech podporach A_0, A_1, A_2, A_3 , uszeregowanych poziomo. Niech ΩZ stanowi oś podłużną pręta nieodkształconego, początek Ω współrzędnych umieszczamy w A_0 . Mamy tu więc do

czynienia z belką o trzech przęsłach, jednostajnie obciążoną w stosunku p kilogramów na jednostkę długości belki. Oznaczmy przez $A_0 A_1 A_2 A_3$ ODPORY BELKI, a przez $l_1 l_2 l_3$ odległości $A_0 A_1, A_1 A_2, A_2 A_3$. W stosunku do ośrodka O wypiszemy równania statyki: $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + pl = 0$, oraz: $-A_3 l - A_2(l_2 + l_1) - A_1 l_1 - \frac{pl^2}{2} = 0$, z których możemy określić dajmy na to odpory A_0 i A_3 , pozostałe zaś A_2 i A_1 są statycznie niewyznaczalne. Aby je wyznaczyć odrzucamy obie środkowe podpory i zakładamy, że pręt, jak dawniej, ulega jednostajnemu obciążeniu p kilogramów na jednostkę długości. To obciążenie w miejscach skąd odrzuciliśmy podpory, da strzałki f_1 i f_2 , które z łatwością wyznaczymy, czyniąc $z = l_1$ oraz $z = l_1 + l_2$ we wzorze § 20 tylko co wyżej używanym. Będziemy mieli: $24EgJ_0 f_1 = p[l^4 - l_1^4 - 2l(l-l_1)^3 + (l-l_1)^4]$, oraz $24EgJ_0 f_2 = p[l^4 - l^3(l_1 + l_2) - 2ll_1^3 + l_1^4]$. Z kolei przypuszczamy, że pręt nasz obciążony jest skupioną siłą A_1 przyłożoną w punkcie A_1 i wyznaczamy strzałkę tej siły $f_1' = A_1 l_1^2 (l-l_1)^2 : 3lEgJ_0$, oraz strzałkę f_2' ugięcia pręta w punkcie A_2 , czyniąc $z = l_1 + l_2$ oraz $b = l_1$ w odnośnym wzorze dla odkształconej § 19 (str. 359) co da: $6lEgJ_0 f_2' = A_1 [l_1^4 l^3 - l_1^4 - l_1^3(l_1 + l_2) + l_1^2(l_1 + l_2) - l_1 l_2^3]$. Z kolei po raz ostatni zakładamy, że pręt obciążony jest skupioną siłą A_2 przyłożoną w A_2 i określamy strzałkę siły w postaci $f_2'' = A_2 (l_1 + l_2)^2 (l-l_1-l_2)^2 : 3lEgJ_0$ oraz strzałkę f_1'' ugięcia pręta w punkcie A_1 czyniąc w tylko co wspomnianem równaniu odkształconej $z = l_1$ oraz $b = l_1 + l_2$ co daje:

$$6lE_gJ_{x_0}f'' = A_2[l^3(l_1+l_2) - l(l_1+l_2)^3 - l^2l_1(l_1+l_2) + (l_1+l_2)^3l_1 - (l_1+l_2)(l-l_1)^3 + l(l_1+l_2-l_1)^3] \sim$$

W wypadku tu rozpatry-

wanym wszystkie te obciążenia działają równocześnie, bowiem w punktach A_1 i A_2 powstają ODPORY A_1 i A_2 .



Ponieważ wszystkie

podpory są na jednym poziomie i podczas wygięcia żadnym obniżeniom nie ulegają, zatem: $f_1 + f_1' + f_1'' = 0$, oraz $f_2 + f_2' + f_2'' = 0$, co daje DWA RÓWNANIA linjowe względem A_1 i A_2 , z których te brakujące odpory wyznaczyć możemy. Widzimy, że wypadek tu rozpatrywany jest znacznie trudniejszy od poprzedniego. Trudności te rosną wraz z ilością przęseł. Dlatego też sposób oparty na prawach wyżej wyłuszczonych jest niepraktyczny - równania CLAUPEYRON'A szybciej bowiem prowadzą do celu.

W szczególnym wypadku, gdy $l_1 = l_2 = l_3 = l:3$ mamy $f_1 = f_2 = \frac{11}{372} \frac{pl^4}{E_gJ_{x_0}}$ oraz $f_1' = \frac{4}{243} A_1 l^3: E_gJ_{x_0}$; $f_2' = \frac{7}{486} A_1 l^3: E_gJ_{x_0}$; $f_2'' = \frac{4}{243} A_2 l^3: E_gJ_{x_0}$ i wreszcie $f_1'' = \frac{7}{486} A_2 l^3: E_gJ_{x_0}$. Mamy więc tutaj z równania $f_1 + f_1' + f_1'' = 0$ po skróceniu przez iloraz $l^3: 972 E_gJ_{x_0}$ równanie $16A_1 + 14A_2 + 11pl = 0$. W podobny sposób z $f_2 + f_2' + f_2'' = 0$ otrzymamy $14A_1 + 16A_2 + 11pl = 0$. Rzut oka na te równania wystarczy, aby zauważyć że $A_1 = A_2$ co daje $30A_1 = -11pl$ i ostatecznie $A_1 = A_2 = -\frac{11}{30} pl$. W ten sposób wyznaczmy brakujące podpory, a

następnie i momenty gnące. Największy z nich ustali dostateczne wymiary pręta. Na tem urywamy badanie belek wieloprzęsłowych. W podobny sposób opracować również możemy:

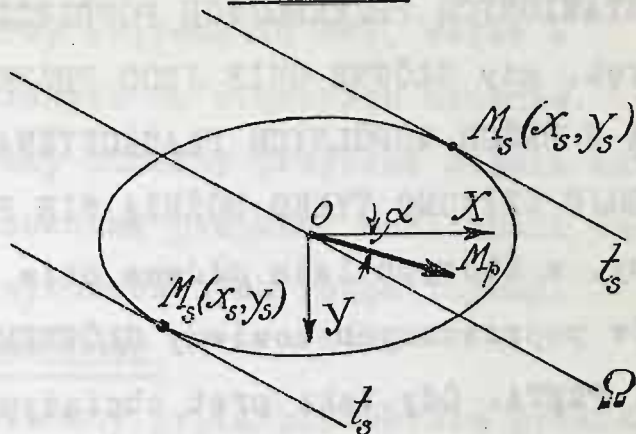
§ 39. PRĘT OBCIĄŻONY UKŁADEM ZŁOŻONYM Z KILKU SIŁ GNĄCYCH.

W danym wypadku każda siła gnąca wywołuje swoiste odpory i momenty odporowe i gnące oraz swoiste wygięcie pręta. Summa ich stanowi obraz łącznego działania wszystkich sił układu. Choć dajmy na to wyznaczyć strzałkę ugięcia w pewnym punkcie pręta - określamy dla tego punktu składowe strzałki ugięcia przynależne do poszczególnych sił układu i dodajemy je algebraicznie. Wynik da szukaną strzałkę ugięcia. Mamy tu przeto nowy przykład zastosowania drugiego prawa HOOKE'A. To samo prawo znacznie ułatwia zadanie, gdy rozpatrujemy:

§ 40. GIĘCIE UKOŚNE.

Gdy moment gnący M_p leżący w jakimkolwiek przekroju poprzecznym pręta tworzy kąt α z główną osią bezwładności przekroju, wtedy zachodzi gięcie ukośne pręta - pręt wygina się wichrowato - jego oś podłużna przechodzi w krzywą przestrzenną - ODKSZTAŁCONĄ. W tym ogólnym wypadku rozkład naprężeń w dowolnym przekroju poprzecznym podaje wzór
$$\tau_g = -\frac{M_p \sin \alpha}{J_y} x + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x} y.$$
 Wiemy już że skrajne naprężenia τ_{gm} panować będą w punktach $M_s(x_s, y_s)$ stycznych t_s przekroju, równoległych do OSI OBOJETNEJ PRZEKROJU ω ; należy je więc wyznaczyć dla

RYS. 259.



wszystkich przekro-
jów - w NIEBEZPIECZ-
NYM panować będzie
ich wartość najwyż-
sza t_{gmm} - MAXIMUM
MAXIMORUM naprężeń.
To skrajne napręże-
nie nie powinno prze-

kraczać dopuszczalnego naprężenia gnącego. W ten spo-
sób możemy SPRAWDZIĆ wytrzymałość pręta. Aby wyznaczyć
jego WYGIĘCIE, korzystamy z ogólnego wzoru: $\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} =$
 $= \frac{M_p}{Eg} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}$, określającego PROMIEN KRZYWIZNY OD-
KSZTAŁCONEJ i kąt $d\varphi$ pomiędzy dwiema jej sąsiednimi
normalnemi. Ponadto równanie $y = \frac{c_x}{J_y} \tan \alpha \cdot x$ wyznaczy li-
nię obojętną, a więc i kierunek pochylecia się względem
siebie przekrojów poprzecznych.

Dużą trudność stanowi tu wyznaczenie momentów gną-
cych M_p , które zgóry muszą być wyznaczone dla pręta
już odkształconego. Dla wygięć nieznacznych, spotyka-
nych jedynie w praktyce, ta trudność da się łatwo omi-
nać, możemy bowiem WYZNACZYĆ MOMENTY GNĄCE DLA PRĘTA
NIEODKSZTAŁCONEGO W FUNKCJI PIERWOTNYCH WYMIARÓW; wo-
bec znikomości odkształcenia wymiary te pozostaną pra-
wie te same a wyznaczone momenty będą MIARODAJNE I DLA
PRĘTA ODKSZTAŁCONEGO. W każdym razie wypadek tu omawia-
ny nie należy do łatwych - na szczęście prawie nie spo-
tykamy go w praktyce. Spotykane jedynie wypadki gięcia

ukośnego dotyczą wyłącznie prętów prostych O JEDNAKOWO USTAWIONYCH PRZEKROJACH POPRZECZNYCH. Tak nazwiemy pręt, gdy GŁÓWNE OSIE JEGO PRZEKROJÓW POPRZECZNYCH LEŻĄ W DWÓCH WSPÓLNYCH PŁASZCZYZNACH, A SĄSIEDNIE PRZEKROJE ZNIKOMO TYLKO RÓŻNIĄ SIĘ POMIĘDZY SOBĄ. Płaszczyzny, w których leżą główne osie bezwładności przekrojów poprzecznych zowiemy GŁÓWNYMI PODŁUŻNYMI PRZEKROJAMI PRĘTA. Gdy taki pręt obciążymy siłami gnącymi prostopadłymi do osi podłużnej nieodkształconej, a leżącymi w różnych przekrojach podłużnych pręta, wtedy pręt ulega wygięciu ukośnemu. Aby wyznaczyć bezpieczne wymiary pręta i ugięcie, ROZKŁADAMY WSZYSTKIE SIŁY GNĄCE NA SKŁADOWE, LEŻĄCE W GŁÓWNYCH PODŁUŻNYCH PRZEKROJACH PRĘTA - otrzymujemy zatem DWIE GROMADY SKŁADOWYCH SIŁ, leżących w dwóch prostopadłych do siebie PŁASZCZYZNACH GIĘCIA. Na mocy prawa o niezależności działania sił obie te gromady będą działały niezależnie od siebie, a każda z nich da momenty gnące, leżące na jednej z głównych osi jakiegokolwiek przekroju poprzecznego pręta. Każda więc z dwu gromad WYGNIE PRĘT PŁASKO - otrzymamy dwie odkształcone pręta, leżące w głównych podłużnych przekrojach pręta - w dwóch prostopadłych płaszczyznach gięcia. Ponieważ obie gromady gnące działają jednocześnie i łącznie, zatem ODKSZTAŁCONĄ RZECZYWISTĄ OTRZYMAMY, SUMUJĄC GEOMETRYCZNIE RZĘDNE OBU ODKSZTAŁCONYCH PŁASKICH, KTÓRE STANOWIĄ JEJ RZUTY NA OBIE PŁASZCZYZNY GIĘCIA. W ten prosty sposób SPROWADZAMY GIĘCIE

UKOŚNE DO DWÓCH GIĘC PŁASKICH jednoczesnych. Szeroko stosujemy ten sposób przy obliczaniu osi, wałów a zwłaszcza PŁATW, ustawionych na wiązarach ukośnie. W KURSIE ĆWICZEŃ podajemy odnośny przykład gięcia ukośnego - tutaj zaś jako ostatni przykład możliwości zastosowania praw wyżej wyłuszczonych rozpatrujemy:

§ 41. GIĘCIE MIMOŚRODOWE.

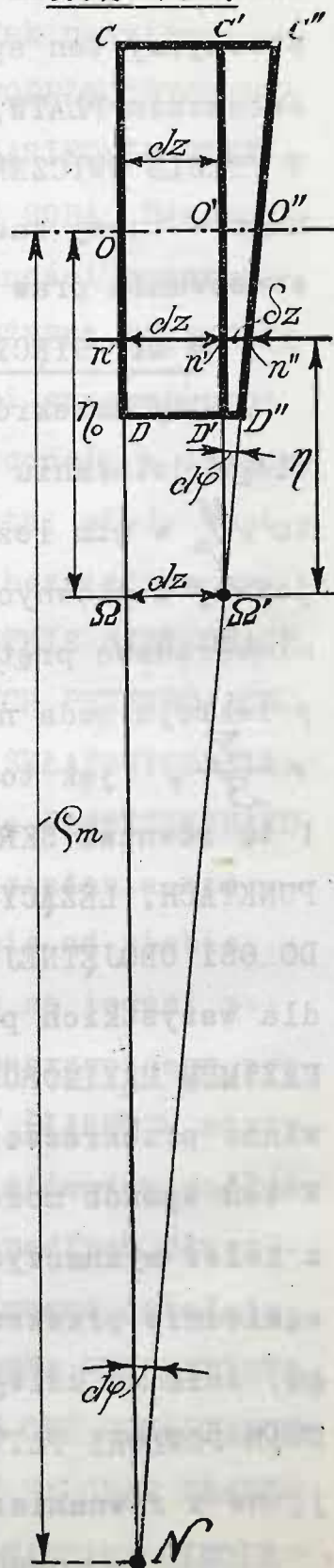
Gdy przekrój poprzeczny pręta pierwotnie prostego ulega działaniu osiowej siły R_z niezależnie od momentu M_p w nim leżącego, nachylonego pod kątem α ku jednej z głównych osi przekroju, wtedy zachodzi gięcie mimośrodowe pręta. W tym wypadku rozkład naprężeń w przekroju poda nam znany wzór
$$\frac{f}{z} = -\frac{M_p \sin \alpha}{J_y} y + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x} x + \frac{R_z}{S},$$
 jak to zresztą wiemy z ogólnej teorii gięcia. I tu również SKRAJNE NAPRĘŻENIA $\frac{f}{z_{MM}}$ PANOWAĆ BĘDĄ W PUNKTACH, LEŻĄCYCH NA STYCZNYCH PRZEKROJU, RÓWNOLEGLYCH DO OSI OBOJETNEJ PRZEKROJU, należy je więc wyznaczyć dla wszystkich przekrojów - w NIEBEZPIECZNYM otrzymamy MAXIMUM MAXIMORUM tych naprężeń $\frac{f}{z_{MM}}$, które nie powinno przekraczać dopuszczalnego naprężenia gnącego R_g . W ten sposób możemy SPRAWDZIĆ wytrzymałość pręta. Aby z kolei wyznaczyć jego odkształcenie rozpatrujemy dwa sąsiednie przekroje poprzeczne pręta pierwotnie prostego, znikomo odległe o dz , a raczej, właściwiej mówiąc, DWIE POWŁOKI PŁYTKI W PRĘTA i wyznaczamy ich linje obojętne z równania:
$$-\frac{M_p \sin \alpha}{J_y} y + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x} x + \frac{R_z}{S} = 0.$$
 Aby wyznaczyć je, płytkę W rysujemy w przekroju pro-

stopadłym do linii obojętnych obu powłók płytki, a przechodzącym przez ich środki O i O' . Powłoki płytki dają na płaszczyźnie przekroju ślady CD i $C'D'$ (RYS. 260), a linie obojętne ślady Ω i Ω' . Na jednej z powłók obieramy dowolny zresztą punkt $M(x, y)$ odległy o η od prostej $\Omega\Omega'$, a więc i od linii obojętnej powłoki. Wiadomo z analitycznej geometrii, że:

$$\eta = \left[-\frac{M_p \sin \alpha}{J_y} x + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x} y + \frac{R_z}{S} \right] : \sqrt{\frac{M_p^2 \sin^2 \alpha}{J_y^2} + \frac{M_p^2 \cos^2 \alpha}{J_x^2}} = \left[-\frac{M_p \sin \alpha}{J_y} x + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x} y + \frac{R_z}{S} \right] : M_p \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2}} = \frac{1}{t_z} : M_p \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}},$$

gdzie t_z oznacza naprężenie panujące w owym punkcie M . Stąd bezpośrednio mamy: $t_z = \eta M_p \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}$ co wskazuje, że NAPRĘŻENIE ROŚNIE PROPORCJONALNIE DO ODLEGŁOŚCI η OD LINII OBOJĘTNEJ, A ZATEM WE WSZYSTKICH PUNKTACH JEDNAKOWO ODLEGŁYCH OD LINII OBOJĘTNYCH BĘDĄ MIAŁY MIEJSCE TE SAME WARUNKI OBCIĄŻENIA, A WIĘC I ODKSZTAŁCENIA. Wobec tego możemy zwęzić zakres rozpatrywanych punktów.

RYS. 260.



biorąc pod uwagę li tylko należące do przekroju-wszystko to, co o nich powiemy dotyczyć będzie całych gromad punktów, uszeregowanych w proste równoległe do linii obojętnej a przechodzące przez odnośne punkty naszego przekroju. Weźmy więc pod uwagę jakiekolwiek włókienko nn' odległe o η od $\Omega\Omega'$, pierwotna nieodkształcona jego długość $nn'=dz$, po odkształceniu stanie się $nn''=dz(1+\epsilon_g)$, gdzie ϵ_g oznacza WYDŁUŻENIE JEDNOSTKOWE, dodatnie lub ujemne powstające na tle napreżeń $\frac{t}{z}$, obustronnie działających na włókienko, bo przynależnych do obu powłók. Niech będzie $\delta z = n'n'' = dz(1+\epsilon_g) - dz = \epsilon_g dz$. Gdy tworzywo preta zachowuje się według PIERWSZEGO PRAWA HOOKE 'A wte-

dy: $\epsilon_g = \alpha_g \frac{t}{z} = \eta \alpha_g M_p \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}$, co daje $\delta z = \eta dz \alpha_g M_p \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}$.

Dla włókna środkowego $00'$, gdzie $x=y=0$ mamy $\frac{t}{z_0} = \frac{R_z}{S}$, a zatem $\delta z_0 = \epsilon_{g_0} dz = \alpha_{g_0} \frac{t}{z_0} dz = \alpha_{g_0} \frac{R_z}{S} dz = \eta dz \alpha_{g_0} M_p \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}}$, gdzie przez η_0 oznaczyliśmy odległość środkowego włókna od $\Omega\Omega'$, a przez α_{g_0} odnośny współczynnik ROZCIĄGLIWOŚCI. Po odkształceniu środkowe włókno przejdzie w $00'' = 00' + 0'0'' = dz + \delta z_0 = dz(1 + \alpha_{g_0} \frac{R_z}{S})$. Bezpośrednio dzieląc mamy $0'0'':n'n'' = \eta_0 \alpha_{g_0} : \eta \alpha_g$. Gdy $\alpha_{g_0} = \alpha_g$ wtedy $0'0'':n'n'' = \eta_0 : \eta$, zatem po odkształceniu końce włókienek ułożą się w płaszczyźnie przechodzącej przez $\Omega\Omega'$ - a pochylonej ku powłokom płytki nieodkształconej pod kątem $d\varphi$. I tu więc ZAŁOŻENIE BERNOULLI'EGO wypełnia się dla tworzyw, zachowujących się według prawa HOOKE 'A, lecz

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XXVIII.

jednak tylko wtedy, gdy współczynnik α_g MA WARTOŚĆ STAŁĄ DLA CAŁEGO OBSZARU NAPRĘŻEN, PANUJĄCYCH W POWŁOKACH PŁYTKI ODKSZTAŁCONEJ. Powłoka $C'D'$ po odkształceniu pozostanie więc płaską, jeno się nieco pochyli względem powłoki CD - WYKONA OBRÓT O KĄT $d\varphi$ WOKOŁO OSI OBOJĘTNEJ Ω' . Ślad jej na płaszczyźnie przekroju będzie $C''D''$. Przedłużamy ślady CD i $C''D''$ do przecięcia się w N i oznaczamy przez $S_m = ON$. Będzie to niewatpliwie promień KRZYWIZNY ODKSZTAŁCONEJ PRĘTA, w N bowiem przecinają się płaszczyzny dwóch sąsiednich przekrojów pręta odkształconego a więc i dwie sąsiednie normalne ON i $O''N$ odkształconej. Z podobnych trójkątów $\triangle N'OO'' \sim \triangle \Omega'O'O'' \sim \triangle \Omega'n'n''$ mamy $OO'':ON = O'O'':O'\Omega' = n'n'':n'\Omega' = \operatorname{tg} d\varphi$.

Wobec tego, że odkształcenia spotykane w praktyce są nader nieznaczne, możemy przeto napisać wprost $d\varphi$ mia-
sto $\operatorname{tg} d\varphi$, co da po podstawieniu odnośnych warto-
ści $dx(1 + \alpha_g \frac{R_z}{S}) : S_m = \eta dx \alpha_g \frac{M_p}{J_p} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}} : \eta = d\varphi$.
Stąd ostatecznie mamy:

$$\frac{1}{S_m} = \frac{d\varphi}{dx(1 + \alpha_g \frac{R_z}{S})} = \frac{\alpha_g \frac{M_p}{J_p}}{1 + \alpha_g \frac{R_z}{S}} \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \alpha}{J_y^2}},$$

WZÓR, określający PROMIEN KRZYWIZNY odkształconej
i kąt $d\varphi$ pomiędzy dwiema jej sąsiednimi normalne-
mi. Ponadto równania LINII OBOJĘTNYCH wyznaczają kie-
runki pochylania się ku sobie sąsiednich przekrojów
- będziemy zatem mogli ściśle określić ODKSZTAŁCONĄ
PRĘTA.

W szczególnym wypadku, gdy $\alpha = 0$, to jest gdy

we wszystkich przekrojach poprzecznych pręta moment gnący leży na jednej z osi głównych, wtedy mamy GIECIE BIMOŚRODOWE PŁASKIE, gdzie $I_z = \frac{M_p}{J_x} y + \frac{R_z}{S}$, a równanie LINII OBOJĘTNEJ $\frac{M_p}{J_x} y + \frac{R_z}{S} = 0$ wyznacza prostą równoległą do osi głównej przekroju. Ponadto wtedy $\frac{1}{S_m} = \frac{dy}{dx(1 + \alpha_g R_z \cdot S)} = \frac{\alpha_g}{1 + \alpha_g R_z \cdot S} \cdot \frac{M_p}{J_x}$. Czyniąc w tym wzorze $\frac{1}{S_m} = \pm \psi''_m$, możemy dwukrotnym całkowaniem wyznaczyć równanie odkształconej płaskiej, podobnie, jak to miało miejsce dla gięcia zwykłego płaskiego. W ogólnym wypadku jednak to uproszczenie jest niedopuszczalne - należy więc stosować wzór wyżej wyprowadzony.

Gdy poprzeczne przekroje pręta są JEDNAKOWO USTAWIONE, wtedy wyznaczamy odkształcone płaskie w obu głównych podłużnych przekrojach pręta, zupełnie tak samo jak przy gięciu ukośnym; rzeczywistą odkształconą otrzymamy, na mocy drugiego prawa HOOKE'A, dodając geometrycznie rzędne tych krzywych - płaskich rzutów odkształconej. ~

Poznaliśmy więc już teraz wszystkie trzy rodzaje gięcia. Widzimy, że cała ich teoria stosuje się wyłącznie do tworzyw zachowujących się według pierwszego prawa HOOKE'A, wymaga bowiem STAŁEJ WARTOŚCI α_g DLA CAŁEGO OBSZARU NAPRĘŻEN, PANUJĄCYCH W PRZEKROJU POPRZECZNYM PRĘTA WYGINANEGO. Należy przeto zbadać, kiedy warunek ten istotnie jest zachowany.

§ 42. WSPÓŁCZYNNIKI ROZCIĄGLIWOŚCI I SCISLIWOŚCI PRZY WYGINANIU PRĘTÓW PROSTYCH.

Ważmy pod uwagę dwa sąsiednie przekroje poprzeczne, a raczej dwie powłoki płytki W pręta wyginanego w jakikolwiek sposób. Płytke W krajemy przez środki obu powłók płaszczyzną prostopadłą do linii obojętnej i wyznaczamy naprężenia włókienek płytki-. Przypuszczamy tu, a założenie to w niczem ogólności naszych wywodzeń nie uszczupli, że linie obojętne przechodzą przez środki O i O' powłók, słowem, że mamy tu do czynienia z OSIAMI OBOJĘTNEMI. Wyznaczymy naprężenia panujące w powłokach, a proporcjonalne, jak wiadomo, do odległości η od osi obojętnej. Otrzymujemy przytem WYKRES PROSTOLINJOWY (RYS. 261), wyznaczający skrajne naprężenia ϵ_R - rozciągające i ϵ_N ściskające.

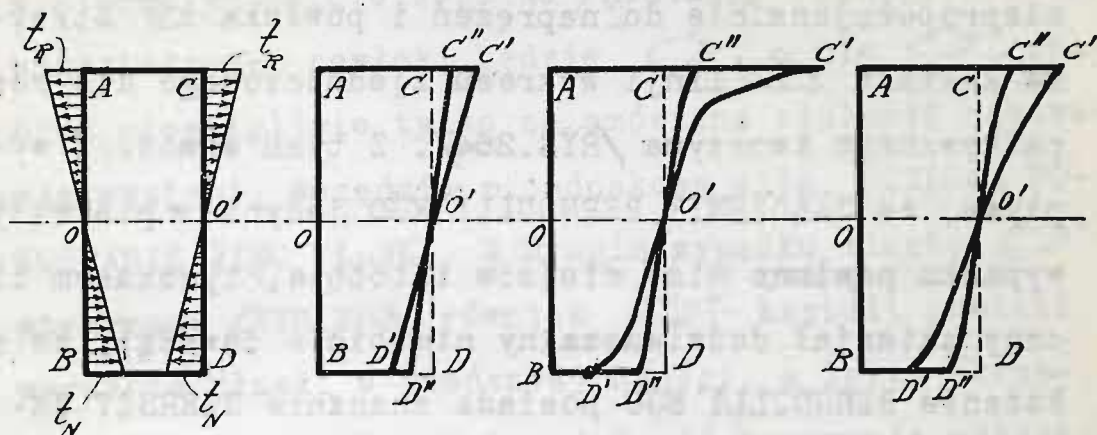
GDYBY POSZCZEGÓLNE WŁÓKIENKA PŁYTKI UŁOŻONE BYŁY LUŻNO OBOK SIEBIE I WZAJEMNIE NA SIEBIE NIE ODDZIAŁYWAŁY, TO ICH WYDŁUŻENIA DODATNIE I UJEMNE ZACHODZIŁYBY WEDŁUG ODNOŚNYCH WYKRESÓW PRÓBEK ROZCIĄGANÝCH I ŚCISKANYCH. W samej rzeczy, jeżeli tworzywo zachowuje się według pierwszego prawa HOOKE'A aż do skrajnego naprężenia K_{HR} - rozciągającego i K_{HN} - ściskającego i, gdy ponadto $\epsilon_R \leq K_{HR}$ oraz $\epsilon_N \leq K_{HN}$ słowem, gdy całkowity obszar naprężeń obu płytek nie wykracza poza granicę proporcjonalności, to wtedy odnośne wydłużenia włókienek płytki, jako proporcjonalne do naprężeń, są proporcjonalne do odległości η od osi obojętnej. Górne włókienka, ponad osią leżące wydłu-

RYS. 261.

RYS. 262.

RYS. 263.

RYS. 264.



żą się dajmy na to - dolne skrócą - powłoka CD wykona obrót około osi O' pochylając się ku powłoce AB , pozostanie jednak przytem niezmiennie płaska - i przejdzie w $C'D'$, jak to wskazuje RYS.262.

Inaczej rzecz się będzie miała, gdy $t_R > K_{Hr}$ oraz $t_N > K_{HN}$, to jest gdy całkowity obszar naprężeń wykroczy za granice proporcjonalności. W tym wypadku środkowe włókna pozostające pod działaniem naprężeń $t \leq K_{Hr}$ rozciągających oraz $t \leq K_{HN}$ - ścisających, wydłużą się lub skrócą proporcjonalnie do odległości od osi obojętnej - skrajne natomiast włókna, leżące poza temi granicami, ulegną wydłużeniom i skróceniom ZNACZNYM, jakie widzimy na wykresach wytrzymałościowych poza granicami proporcjonalności. Tutaj więc powłokę CD otrzyma kształt $C'D'$ linii wykresu zjednoczonego danego tworzywa, jak to zresztą najlepiej uwypukla RYS.263.

Z kolei, gdy tworzywo stoi w sprzeczności z pra-

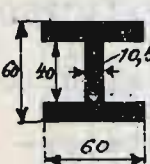
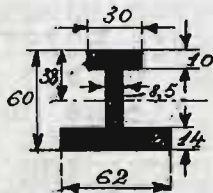



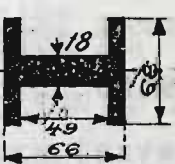

wem HOOKE'A, włókienka wydłużać się będą i skręcać nieproporcjonalnie do naprężeń i powłoka \mathcal{C} otrzyma kształt \mathcal{C}' linii wykresu zjednoczonego dla rozpatrywanego tworzywa /RYS.264/. Z tych wywodzić wypływa, że ZAŁOŻENIE BERNOULLI'EGO jedynie w pierwszym wypadku powinno mieć miejsce istotnie; tymczasem liczny materiał doświadczalny niezbitie dowodzi, że założenie BERNOULLI'EGO posiada znacznie SZERSZY ZAKRES stosowalności, bo przekroje poprzeczne pręta zachowują swój płaski pierwotny kształt nawet, gdy znacznie przekroczymy granice proporcjonalności przy zginaniu tworzyw, zachowujących się podług pierwszego prawa HOOKE'A. Nie dosyć na tem, założenie BERNOULLI'EGO sprawdza się doświadczalnie W DOSYĆ ŚCIŚLE PRZYBLIŻENIU nawet dla tworzyw, nieulegających temu prawu, jak to stwierdziły liczne doświadczenia BAUSCHINGERA, BACHA i innych badaczy tej miary. Przyczyna istotna tej sprzeczności leży w naszym założeniu zgruntu oczywiście fałszywym. Włókienka płytki nie są bowiem luźno ułożone, a POWIĄZANE ZE SOBĄ W SPOSÓB NADER ŚCISŁY, a jako takie WZAJEMNIE DZIAŁAJĄ NA SIEBIE PRZY NIEJEDNAKOWEM ODKSZTAŁCENIU. DWA SĄSIEDNIE WŁÓKNA, NIEJEDNAKOWO ŚCISKANE LUB ROZCIĄGANE HAMUJĄ, WZAJEMNIE SWE ODKSZTAŁCENIA, starają się je wyrównać, zmniejszyć ich różnicę na tle wewnętrznego tarcia o siebie. Należy zatem włókna znacznie wyżej obciążać przy wyginaniu pręta niż przy rozciąganiu

lub ściskaniu, chcąc otrzymać to samo wydłużenie. W pierwszym przeto wypadku (RYS.262) istotny kształt odkształconej powłoki będzie $C''D''$ a nie $C'D'$, przy czym niewątpliwie tylko co omówiona zdolność hamowania wystąpi, wszędzie z jednakową siłą. POWŁOKA POZOSTANIE WIĘC PŁASKĄ. W drugim wypadku miasto $C'D'$ otrzymamy (RYS.263) również $C''D''$ - kształt powłoki wyraźnie płaski w środkowej części, a lekko skrzywiony na skrajach gdzie zdolność hamowania odkształceń występuje z wielką siłą na tle ostrych różnic pomiędzy sąsiednimi naprężeniami. To samo widzimy w wypadku trzecim (RYS.264), gdzie miasto wyraźnie krzywej linii esowej $C'D'$ otrzymujemy znacznie mniej wygiętą linię $C''D''$. Tylko co opisane zjawisko hamowania, PROSTUJĄC LINJE WYKRESÓW WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH NA ŚCISKANIE I ROZCIĄGANIE, OPÓŹNIA POJAWIENIE SIĘ FAZ WYKRESOWYCH, NALEŻY ZATEM OCZEKIWAĆ PRZY WYGINANIU PRĘTA, ZNACZNIE WYŻSZEJ GRANICY PROPORCJONALNOŚCI I CIĄSTOWATOŚCI niż przy ściskaniu lub rozciąganiu oraz ZNACZNIE WYŻSZEGO NAPRĘŻENIA ROZRYWAJĄCEGO. Wszystko to niezbicie stwierdziły liczne doświadczenia wyżej wymienionych badaczy. CONSIDERE stwierdził, że granica proporcjonalności K_{HG} przy zginaniu PŁASKIM jest o $30 \div 40\%$ wyższa od K_{HR} lub K_{HN} DLA OKRĄGLEGO PRĘTA ZLEWNEGO, lecz tylko o 10% wyższa dla DWUTEOWNIKA z tego samego tworzywa. Te wyniki stwierdzają nasze przewidywania, a zara-

zem wykazują pewną ich zależność od kształtu poprzecznego przekroju. Nie może być inaczej: włókienka dalej od osi obojętnej leżące ulegają WIEKSZYM ODKSZTAŁCENIOM - HAMOWANE SĄ ZATEM PRZEZ WŁÓKIENKA BLIŻEJ OSI OBOJĘTNEJ LEŻĄCE. Zjawisko przez nas przewidziane POWINNO ZATEM ZALEŻEĆ I OD KSZTAŁTU POPRZECZNEGO PRZEKROJU i występować tym silniej, im stosunkowo więcej cząsteczek skupia się koło osi obojętnej przekroju. Najsilniej zatem zjawisko to występować winno dla przekroju kwadratowego, gdy oś obojętną stanowi jedna z jego przekątni; słabiej dla przekroju kołowego, tu bowiem ciężki równoległe do osi obojętnej lepiej są w cząsteczki uposażone - i najslabiej dla dwuteownika.

Załączona niżej TABLICA DWUNASTA stwierdza to niezbicie. Podaje ona STOSUNEK NAPRĘŻENIA ŁAMIĄCEGO PRĘT ŻELIWNY ZGINANY K_g DO NAPRĘŻENIA ROZRYWAJĄCEGO K_r . Widzimy, że aczkolwiek wszędzie $K_g > K_r$, to jednak stosunek $K_g : K_r$ zależy wybitnie od kształtu

TABLICA DWUNASTA.

						
$\frac{K_g}{K_r} = 1,45$	1,52	1,73	0,75	2,12	2,14	2,35

tu przekroju. Tablica ta jest wynikiem prób C.v.BACHA, dokonywanych na próbkach ŻELIWNYCH. Stwierdza ona teoretyczne przewidywania w całej rozciągłości.

Te same wyniki dały próby innych tworzyw, ujawniających wyższą wytrzymałość na ściskanie niż na rozciąganie. Dla tych bowiem tworzyw pęknięcie rozpoczyna się od skrajnego włókna rozciąganego przy wyginaniu. Wyjątek stanowi DRZEWO, które jest znacznie wytrzymalsze na rozciąganie - przy wyginaniu zniszczeniu ulega włókno ściskane, to też dla drzewa miarodajnym jest stosunek $K_g : K_n$. Średnią wartość jego podaje TETMAJER $K_g : K_n = 1,5$. I tu więc zjawiska zachodzą zupełnie tak samo.

Biorąc pod uwagę wszystko to, cośmy tu powiedzieli, dochodzimy do przekonania, iż współczynnika

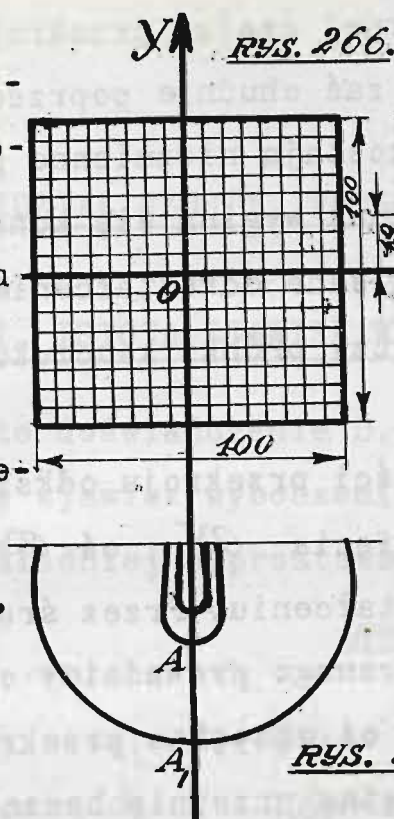
α_g nie należy utożsamiać ze współczynnikami rozciągłości tworzywa - posiada on bowiem ZNACZNIE WIĘKSZĄ WARTOŚĆ. To samo powiedzieć można i o WSPÓŁCZYNNIKU SPRĘŻYSTOŚCI $E_g = 1 : \alpha_g$, którego wartość jest wogóle MNIEJSZA od wartości E_r i E_n . Dla określenia α_g lub E_g poddajemy pręty o stałym przekroju wykonane z danego tworzywa PRĘTÓW NA ZGINANIE, kładąc je na dwóch podporach, i obciążając układem sił, jak w wypadku LAMARLE'A, lub wprost skupioną siłą przyłożoną pośrodku pomiędzy podporami. Obciążenie LAMARLE'A lepiej się do tych prób nadaje - nie daje bowiem wcale sił tnących, które należy wprowadzać do rachunku w wypadku obciążenia siłą skupioną. W obu razach pomiary dotyczą STRZAŁKI UGIĘCIA pręta pośrodku między podporami. Odnosne wzory wyznaczają

E_g lub α_g . W ten sposób wyliczone E_g jest mniejsze od E_r lub E_n , określanych dla tego samego tworzywa przy próbach na rozciąganie lub ściskanie. A zatem to samo naprężenie SILNIEJ ODKSZTAŁCA WŁÓKNO PRZY ROZCIĄGANIU LUB ŚCISKANIU, NIŻ PRZY ŚCIECIU. Stwierdza to wyżej wyłuszczone przewidywania. Zazwyczaj jednak, wobec braku dostatecznego materiału doświadczalnego, używamy jednej i tej samej wartości E we wszystkich rachunkach wtrzymałościowych. Kończąc dział gięcia należy jeszcze uzupełnić dotychczasowe badania i rozpatrywać

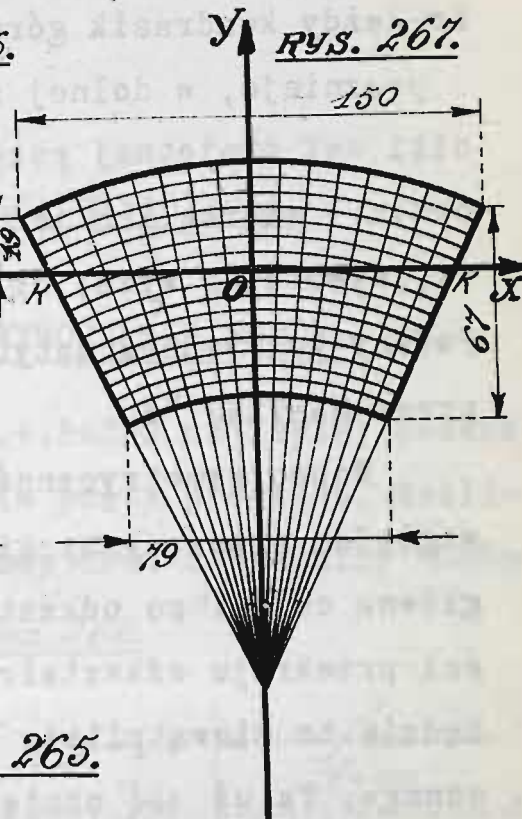
§ 43. NAPRĘŻENIA, LEŻĄCE W PRZĘKROJU POPRZECZNYM PRĘTA ZGINANEGO.

Na samym początku działu niniejszego doszliśmy do przekonania, że prócz naprężeń normalnych gnacych, w przekroju poprzecznym pręta zginanego powstają naprężenia σ leżące na osi promieni wodzących poszczególnych punktów przekroju. Nie umiemy wyznaczyć z równań statyki składowych $\sigma_x = \frac{t_x}{A} = A x$ oraz $\sigma_y = \frac{t_y}{A} = A y$ tych naprężeń, należy je zatem zbadać doświadczalnie. Naprężenia σ jako dośrodkowe mogą wyłącznie świadczyć o skróceniach lub wydłużeniach promieni wodzących przekroju. Tego rodzaju zjawisko spotkaliśmy już w teorii rozciągania i ściskania, wiemy, że pręt rozciągany kurczy się poprzecznie, a ściskany - pęcznieje; spróbujmy tę naszą wiedzę zastosować do danego wypadku, gdzie włókna rozciągane przekroju winny się zwię-

zać, a ści-
skane - roz-
szerzać po-
przecznie.
W tym celu
bierzemy
pod uwagę
pręt o nie-
złożonym
przekroju,
najlepiej
kwadrato-
wym /RYS.



RYS. 265.



266/ i wyginamy go zupełnie, tak aby w miejscu wygię-
cia utworzyła się wypukłość /RYS.265/, a oba końce
pręta zeszyły się z sobą. Przekrój poprzeczny AA_1 przed-
stawiony na RYS 267, wykazuje znaczne rozszerzenie
górnej części, gdzie włókna były ściskane, oraz wyraź-
ne zwężenie dolnej, gdzie włókna były rozciągane. Prze-
krój przestał być kwadratowy, stał się wycinkiem pier-
ścienia kołowego o kołowych prawie zarysach krzywych
boków. Podzielmy pierwotny kwadratowy przekrój pręta
na elementarne kwadraciki. Pierwotnie proste szeregi
tych kwadracików utworzą ŁUKI WSPÓŁŚRODKOWE, jak to
najlepiej uwypukla RYS. 267.

To zjawisko jest zupełnie zrozumiałe, skoro zważymy

że-każdy kwadracik górnej części przekroju - ściskany - pęcznieje, w dolnej zaś chudnie poprzecznie. Kwadraciki osi obojętnej pozostają niezmiennie przy odkształceniu - szereg ich jednak wygina się końcami ku dołowi, wywołując wyżej opisane odkształcenie przekroju. Podany tu rysunek dotyczy próbki kauczukowej, badanej przez MARTENS 'A.

Wobec symetryczności przekroju odkształconego względem płaszczyzny gięcia OY , oś OY pozostanie główną osią i po odkształceniu. Przez środek ciężkości przekroju odkształconego prowadzimy oś $OX \perp OY$ - będzie to niewątpliwie oś obojętna przekroju odkształconego. Ta oś OX obojętna przetnie boczne proste ścianki przekroju w punktach $K-K'$, zbliżonych do górnych krawędzi pręta. Stąd mamy wniosek:

PRZY ODKSZTAŁCENIACH ZNA CZNYCH PRZEKROJ PROSTOKĄTNY PRĘTA WYGIĘTEGO PRZECHODZI W WYCINEK PIERSĆCIE NIA KOŁOWEGO, ZWYPUKLONY PO STRONIE WŁÓKIEN ŚCISKANYCH, A ŚLAD OSI OBOJĘTNEJ NA PŁASKICH BOCZNYCH ŚCIANKACH PRĘTA POSUWA SIĘ KU SKRAJNYM WŁÓKNOM ŚCISKANYM.

Zjawiska tu opisane występują przy wygięciach znacznych - zazwyczaj przeto nie bierzemy ich pod uwagę przy rozpatrywaniu prętów wyginanych - dopuszczalne bowiem wygięcia są nader nieznaczne. Na tem kończymy teorię gięcia i rozpoczynamy badanie GIĘCIA POPRZECZNEGO, czyli WYBOCZENIA PRĘTÓW PROSTYCH.