

Podstawiając wszystkie te wartości w powyżej otrzymane równania otrzymamy po odpowiednim skróceniu:

$$M_A + \frac{2}{3}LA - \frac{2}{3}fH = \frac{1}{4}qL^2$$

$$M_A + \frac{1}{2}LA - \left[\frac{4}{5}f + \frac{3}{2} \cdot \frac{J}{sf}\right]H = \frac{1}{2}qL$$

$$M_A + \frac{1}{2}LA - \frac{2}{3}fH = \frac{1}{6}qL^2$$

Odejmując drugie równanie od trzeciego otrzymamy:

$$H = 5qsf \frac{L^2 - 3}{4sf^2 + 45J}$$

A odejmując trzecie od pierwszego wyznaczmy $A = \frac{qL}{2}$ a nadto: $M_A = \frac{2}{3}fH - \frac{qL^2}{12} = q \frac{4sf^2[L^2 - 6] - 45JL^2}{12[45J + 4sf^2]}$

Na tem kończymy dział prętów krzywych a rozpoczynamy:

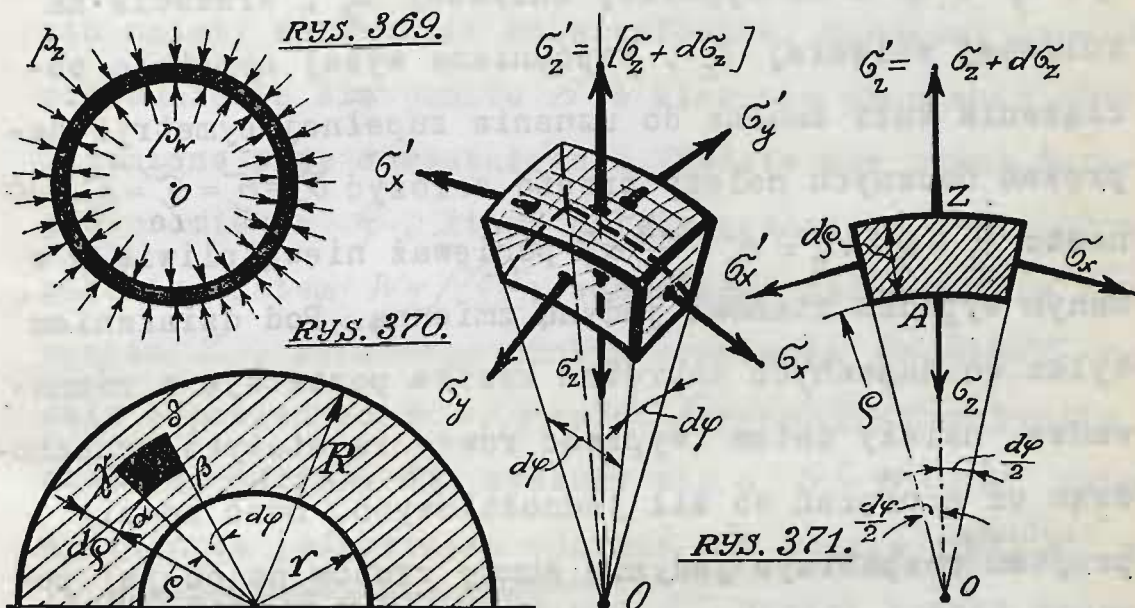
ROZDZIAŁ DZIESIĄTY.

NACZYNIA KULISTE I CYLINDRYCZNE.

§ 1. USTALENIE POJĘĆ ZASADNICZYCH. Rozpatrywać będziemy wyłącznie NACZYNIA KULISTE oraz CYLINDRYCZNE jako jedynie spotykane w praktyce. Ulegać mogą one nadciśnieniu wewnętrznemu p_w oraz nadciśnieniu zewnętrznemu p_z lub też jednemu z nich jeno; zwykle stan pierwotny odpowiada obustronnemu ciśnieniu atmosferycznemu. ODKSZTAŁCENIA NASTĄPIĄ DOPIERO WTEDY GDY CIŚNIENIE ZEWNĘTRZNE LUB WEWNĘTRZNE WZROŚNIE STAJĄC SIĘ WYŻSZYM OD ATMOSFERYCZNEGO, CZYLI NADCIŚNIE-

NIEM.

§ 2. NACZYNNIA KULISTE. /RYS. 369/. Zewnętrzny promień naczynia oznaczany przez R , wewnętrzny przez r ; z wnętrza ścianki wykrawamy myślowo kost-



kę elementarną /RYS. 370/ prowadząc cztery płaszczyzny środkowe tworzące ostrosłup prawidłowy i przecinając go dwiema powierzchniami kulistymi o promieniach φ i $\varphi + d\varphi$.

Ogólny widok kostki podaje RYS. 371, obok widnieje jej przekrój środkowy przez oś OZ . Krawędzie boczne kostki tworzą kąty wierzchołkowe $d\varphi$, ścianki boczne przeciwległe pochylone są ku sobie pod tym samym kątem, cała kostka zatem jest symetryczna względem osi OZ przechodzącej przez środki obu ścianek kulistych kostki. Wobec zupełnej symetryczności obciążenia kuli nie mogą w jej ściankach powstawać skrzywienia, świadczące o działaniu naprężeń tnących,

należy przeto ściankom naszej kostki przypisywać wyłącznie naprężenia normalne, będziemy mieli zatem na czterech bocznych ściankach płaskich naprężenia σ_x i σ'_x , σ_y i σ'_y a na wypukłej kulistej σ'_z , wreszcie na kulistej wklęsłej σ_z . Wspomniana wyżej symetria obciążenia kuli zmusza do uznania zupełnej symetrii naprężeń bocznych należy przeto założyć $\sigma'_x = \sigma_x = \sigma'_y = \sigma_y = \sigma$ nadto $\sigma'_z = \sigma_z + d\sigma_z = \sigma_z + \frac{d\sigma_z}{d\varphi} d\varphi$ ponieważ niewątpliwie φ w danym wypadku stanowi jedyną zmienną. Pod działaniem tylko co nazwanych naprężeń kostka pozostaje w równowadze należy zatem wypisać równania statyki przechodząc od naprężeń do sił jednostkowych. Dość będzie przytem rozpatrzyć jedynie sumę rzutów na oś jej przedłużoną OZ w innych bowiem kierunkach zgóry możemy się upewnić o istnieniu równowagi rzutów wobec symetrii obciążenia kostki. Zatem na boczne cztery ścianki działają jednakowe siły jednostkowe $\sigma \varphi d\varphi d\varphi$ powierzchnia bowiem bocznej ścianki jest oczywiście równa $\varphi d\varphi d\varphi$. W rzucie na oś środkową każda z tych sił da składową $\sigma \varphi d\varphi d\varphi \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sigma \varphi d\varphi d\varphi^2$ skierowaną ku środkowi kuli. Składowa wszystkich czterech sił bocznych będzie przeto $2\sigma \varphi d\varphi d\varphi^2$. Te siły równoważyć musi różnica sił jednostkowych obu pozostałych ścianek kostki - na dolną wklęsłą działa oczywiście siła $\sigma_z \varphi d\varphi \varphi d\varphi = \sigma_z \varphi^2 d\varphi^2$ na górną $\sigma'_z \varphi^2 d\varphi^2 + d[\sigma_z \varphi^2 d\varphi^2]$. W ten sposób ujęliśmy już siły wszystkie. Warunkiem ich równowagi będzie: $\sigma_z \varphi^2 d\varphi^2 + d[\sigma_z \varphi^2 d\varphi^2] -$

$-6_Z \varrho^2 d\varphi^2 = 26 \varrho d\varrho d\varphi^2$. Stąd bezpośrednio: $d[6_Z \varrho^2 d\varphi^2] =$
 $= d\varphi^2 d[6_Z \varrho^2] = 26 \varrho d\varrho d\varphi^2$ a po skróceniu przez $d\varphi^2$ i
 podzieleniu przez $d\varrho$ — będziemy mieli $2\varrho 6 = \frac{d}{d\varrho}[6_Z \varrho^2]$.

Tyle daje statyka. Chcąc skorzystać z tego równa-
 nia, należy wprowadzić odkształcenia. Oznaczmy przez W
 przesunięcie się punktu A w kierunku promienia $AO = \varrho$
 ujawnione przy odkształceniu. Będzie ono pewną funk-
 cją promienia ϱ , którą należy wyznaczyć z warunków
 zadania. Zatem $W = f(\varrho)$; wobec tego przesunięcie się
 punktu Z , końcowego punktu promienia $\varrho + d\varrho = OZ$ bę-
 dzie odpowiednio $W' = f(\varrho + d\varrho) = f(\varrho) + df(\varrho) = u + du$. Wynika
 stąd, że odcinek $d\varrho$ wydłuży się o $W' - W = du$, zatem
 wydłużenie jednostkowe odcinka $d\varrho$ będzie $\frac{du}{d\varrho} = \varepsilon_z$ za-
 chodzi bowiem w kierunku osi OZ naszej kostki rozpa-
 trywanej. Aby wyznaczyć pozostałe wydłużenia zważmy,
 że wszystkie punkty, które pierwotnie przed odkształ-
 ceniem leżały na kole promienia ϱ , po odkształceniu
 znajdą się na kole promienia $\varrho + u$ inaczej bowiem kula
 musiałaby się skrzywić lub sfałdować co jest nie do po-
 myślenia wobec symetryczności obciążenia. Obwody tych
 kół obu mają się jak promienie zatem obwód odkształco-
 ny będzie miał się do obwodu pierwotnego jak $\frac{\varrho + u}{\varrho}$.
 Zatem obwód pierwotny ujawni wydłużenie jednostkowe
 równe różnicy obu obwodów dzielonej przez obwód pier-
 wotny nieodkształcony. To wydłużenie poprzeczne nie za-
 leży oczywiście od kierunku, możemy go przeto oznaczyć
 przez ε_x lub ε_y dowolnie. Stąd $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{\varrho + u - \varrho}{\varrho} = \frac{u}{\varrho}$.

A zatem $\varepsilon_z = \frac{du}{d\rho} = \alpha \left(\bar{\sigma}_z - \frac{\bar{\sigma}_x}{m} - \frac{\bar{\sigma}_y}{m} \right) = \alpha \left(\bar{\sigma}_z - 2 \frac{\bar{\sigma}}{m} \right)$; $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{u}{\rho} = \alpha \left(\bar{\sigma}_x - \frac{\bar{\sigma}_y}{m} - \frac{\bar{\sigma}_z}{m} \right) = \frac{\alpha}{m} [(m-1)\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_z]$. Z tych dwóch równań z łatwością wyznaczyć możemy $\bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma} = \frac{mE}{m^2-m-2} [\varepsilon_z + m\varepsilon_x]$; $\bar{\sigma}_z = \frac{mE}{m^2-m-2} [(m-1)\varepsilon_z + 2\varepsilon_x]$. —

Po podstawieniu w wyżej otrzymane równanie otrzymamy: $2\rho \frac{mE}{m^2-m-2} [\varepsilon_z + m\varepsilon_x] = \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho^2 \frac{mE}{m^2-m-2} [(m-1)\varepsilon_z + 2\varepsilon_x] \right\}$

czyli po skróceniu stałej i podstawieniu wartości

dla ε_z i ε_x $2\rho \frac{du}{d\rho} + 2\rho m \frac{u}{\rho} = \frac{d}{d\rho} \left[(m-1)\rho^2 \frac{du}{d\rho} + 2\rho^2 \frac{u}{\rho} \right]$ stąd różniczkując $2\rho \frac{du}{d\rho} + 2mn = 2(m-1)\rho \frac{du}{d\rho} + (m-1)\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + 2u + 2\rho \frac{du}{d\rho}$, ostatecznie po skróceniu przez $(m-1)$

$$\rho^2 \frac{d^2u}{d\rho^2} + 2\rho \frac{du}{d\rho} - 2u = 0. \quad \sim$$

Całka tego równania jest $u = A\rho + \frac{B}{\rho^2}$. —

Stąd kolejno $\varepsilon_x = \varepsilon_y = A + \frac{B}{\rho^3}$; $\varepsilon_z = \frac{du}{d\rho} = A - \frac{2B}{\rho^3}$ oraz

$$\bar{\sigma}_z = \frac{mE}{m^2-m-2} \left\{ (m-1)A - (m-1)\frac{2B}{\rho^3} + 2A + \frac{2B}{\rho^3} \right\} =$$

$$= \frac{mE}{m^2-m-2} \left\{ (m+1)A - (m-2)\frac{2B}{\rho^3} \right\}. \quad \sim$$

Na obu powierzchniach naczynia naprężenie $\bar{\sigma}_z$ musi równoważyć odnośne ciśnienia zewnętrzne musimy mieć zatem następujące dwa równania warunkowe dla wyznaczenia A i B :

$$p_z + [\bar{\sigma}_z]_{\rho=R} = p_z + \frac{mE}{m^2-m-2} \left\{ (m+1)A - (m-2)\frac{2B}{R^3} \right\} = 0. \quad \sim$$

$$p_w + [\bar{\sigma}_z]_{\rho=r} = p_w + \frac{mE}{m^2-m-2} \left\{ (m+1)A - (m-2)\frac{2B}{r^3} \right\} = 0. \quad \sim$$

Stąd otrzymamy $A = -\frac{m-2}{Em} \cdot \frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3}$; $B =$

$$= -\frac{m+1}{2Em} \frac{p_z - p_w}{R^3 r^3} R^3 r^3 \text{ i ostatecznie: } \bar{\sigma}_z = -\frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} +$$

$$+ \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot \frac{R^3 r^3}{\rho^3}; \quad \bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = -\frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} - \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot \frac{R^3 r^3}{2\rho^3}.$$

Stąd otrzymamy wydłużenia:

$$E\varepsilon_z = \bar{\sigma}_z - \frac{2}{m}\bar{\sigma} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \cdot \frac{R^3 r^3}{\rho^3}. \quad \sim$$

$$E\varepsilon_x = E\varepsilon_y = \frac{m-1}{m} \sigma_x - \frac{\sigma_z}{m} = -\frac{m-2}{m} \frac{R^3 p_z - r^3 p_w}{R^3 - r^3} - \frac{m+1}{2m} \frac{p_z - p_w}{R^3 - r^3} \frac{R^3 r^3}{\rho^3}.$$

Otrzymane tu wzory rozwiązują zagadnienie w całej rozciągłości. W wypadku CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO należy w nich założyć $p_z = 0$ stąd: $E\varepsilon_x = E\varepsilon_y = \frac{m-2}{m} \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{2m} \frac{p_w R^3 r^3}{(R^3 - r^3) \rho^3}$; $E\varepsilon_z = -\frac{m-2}{m} \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} - \frac{m+1}{m} \frac{p_w R^3 r^3}{(R^3 - r^3) \rho^3}$.

U wewnętrznego skraju ścianki przy $\rho = r$ wydłużenia zachodzą największe możemy zatem upodobnić tym skrajnym wydłużeniom naprężenia zastępcze $t_w = E\varepsilon_{\text{MAXIMUM}}$. Te naprężenia zastępcze nie mogą jak wiemy przekraczać skrajnych dopuszczalnych współczynników dla danego tworzywa. W danym wypadku będziemy mieli przeto:

$$E\varepsilon_{x_{\text{MAX}}} = \frac{m-2}{m} \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{2m} \frac{R^3 p_w}{R^3 - r^3} = k_r$$

$$-E\varepsilon_{z_{\text{MAX}}} = -\frac{m-2}{m} \frac{r^3 p_w}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{m} \frac{p_w R^3}{R^3 - r^3} = k_n.$$

ponieważ pierwsze naprężenie zastępcze jest niewątpliwie dodatnie a więc rozciągające, a drugie oczywiście ujemne a więc ściskające. Stąd mamy warunki konieczne:

$$R = r \sqrt[3]{\frac{k_r + \frac{m-2}{m} p_w}{k_r - \frac{m+1}{m} p_w}} \quad \text{oraz:} \quad R = r \sqrt[3]{\frac{k_n - \frac{m-2}{m} p_w}{k_n - \frac{m+1}{m} p_w}}.$$

Oba te warunki należy wypełnić. Ponieważ dla tworzyw, z których zwykle robią naczynia kuliste $k_n > k_r$ przeto miarodajnym jest pierwszy warunek, jako dający większy wymiar średnicy zewnętrznej w stosunku do wewnętrznej. Możemy przeto drugi warunek

pominąć. Nadto być musi $\kappa_r > \frac{m+1}{m} p_w$ inaczej bowiem R nie da się wyznaczyć ze wzoru. Stąd wnioskujemy, że WYTRZYMAŁOŚĆ NACZYŃ KULISTYCH NA CIŚNIENIE WEWNĘTRZNE MA SWE GRANICE musi być bowiem $p_w < \frac{m\kappa_r}{m+1}$.

W wypadku natomiast CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO kiedy $p_w = 0$ będziemy mieli podobnie zupełnie:

$$-E\varepsilon_{s_{MAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{2m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} = \kappa_n.$$

$$E\varepsilon_{z_{MAX}} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^3 p_z}{R^3 - r^3} = \kappa_r.$$

ponieważ pierwsze naprężenie zastępcze jest oczywiście ujemne a drugie dodatnie. Stąd znów:

$$R = \frac{r}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{p_z}{\kappa_n}}} \text{ oraz: } R = \frac{r}{\sqrt[3]{1 - \frac{3}{m} \cdot \frac{p_z}{\kappa_r}}}.$$

I tu również oba warunki muszą być wypełnione.

Ponieważ dla tworzyw, z których zwykle robią naczynia kuliste $\kappa_n \geq \kappa_r$ przeto miarodajnym jest pierwszy warunek jako dający większą wartość stosunku $\frac{R}{r}$. Możemy przeto i w danym wypadku pominąć drugi warunek. Nadto być musi $1 > \frac{3}{2} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{p_z}{\kappa_n}$ i tu zatem widzimy, iż wytrzymałość naczyń kulistych na ciśnienie wewnętrzne jest ograniczona, musi być bowiem $p_z < \frac{2m\kappa_n}{3(m-1)}$.

Wszystko to cośmy wyżej powiedzieli dotyczy NACZYŃ KULISTYCH GRUBOŚCIENNYCH, dla CIENKOŚCIENNYCH wzory te można znacznie uprościć. Zważywszy że przy $R \cong r$ różnica zachodząca pomiędzy wartościami skrajnymi naprężeń zacierą się, jak to bezpośrednio widać ze wzorów. Rozkład naprężeń kuli cienkościennej

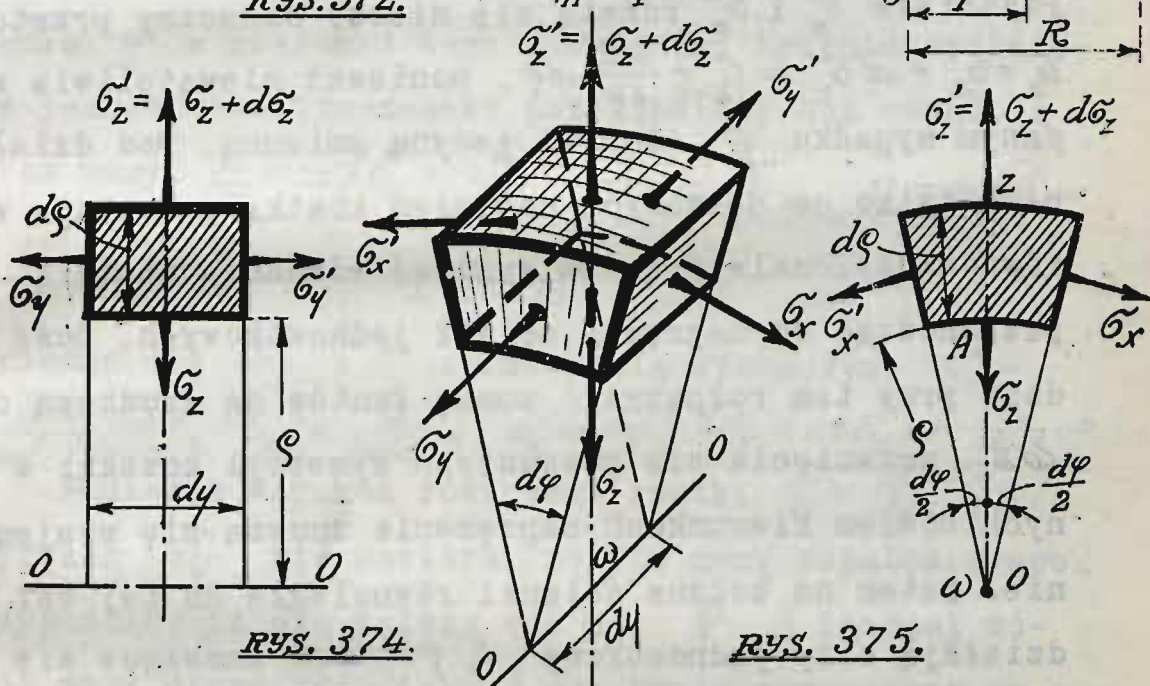
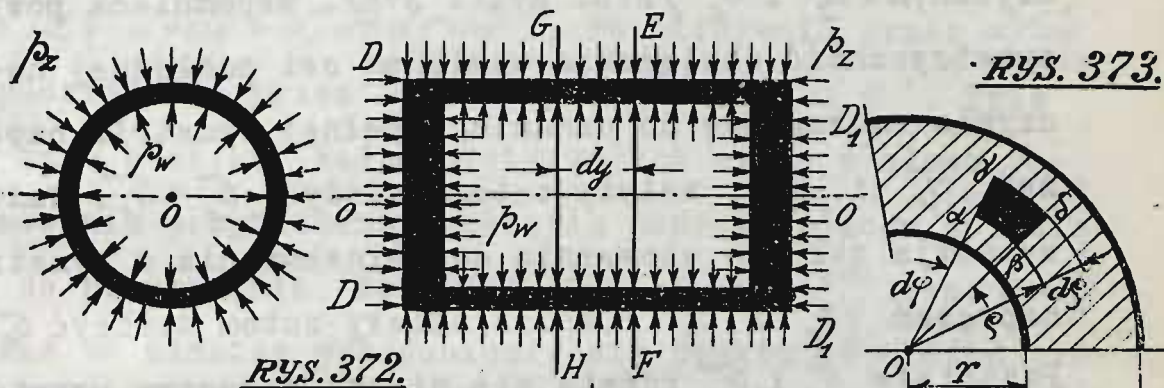
zbliża się do typu jednostajnego. Weźmy więc pod uwagę naczynie kuliste pozostające pod ciśnieniem p_w , cienkościennie o grubości ścianki S znikomej w stosunku do promienia wewnętrznego r . To naczynie rozcinamy płaszczyzną środkową na dwa naczynia półkolisty i aby je utrzymać w równowadze przykładamy do powierzchni przekroju $\pi(r+S)^2 - \pi r^2 \cong 2\pi r S$ jednostajny układ naprężeń σ . Ich wypadkowa $2\pi r S \sigma$ zrównoważy wypadkową P prężności p_w całego naczynia półkolistego. Gdybyśmy je przykryli płaską pokrywą i rozwinieli wewnątrz prężność p_w to równowaga byłaby zachowana, zatem wypadkowa ciśnień p_w na powierzchnię πr^2 pokrywy płaskiej musi być równa P , stąd mamy $P = \pi r^2 p_w$. Ostatecznie więc mamy $2\pi r S \sigma = \pi r^2 p_w$, stąd $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{r p_w}{\sigma}$. Ponieważ oczywiście σ jest naprężeniem rozciągającym przeto czyniąc w tym $\sigma = \kappa_r$ otrzymamy wzór $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{r p_w}{\kappa_r}$, wyznaczający bezpieczną grubość ścianki. Nadto ze względu na możliwość osłabienia wytrzymałości ścianki przez nity wprowadzamy zazwyczaj współczynnik poprawczy pisząc: $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{r p_w}{\varphi \kappa_r}$; gdzie φ jest mniejsze od jedności.

Rozumowanie powyższe nie traci oczywiście swej mocy, gdy na kulę działa prężność zewnętrzna p_z . Zupełnie w ten sam sposób otrzymamy wzór $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{R p_z}{\kappa_n}$, tutaj bowiem ciśnienie działa na zewnętrzną powierzchnię kulistą naczynia o promieniu R , powodując naprężenie ściskające σ w przekroju płaskim środkowym. I tu

również wprowadzić należy współczynnik φ uwzględniający osłabienie blachy przez nity. Mimo to wzór tylko co otrzymany nie jest pewny, nigdy bowiem NIE MOŻEMY ZGÓRY PRZEWIDZIEĆ, CZY KSZTAŁT KULISTY NACZYNIA JEST DOSKONAŁY. Każde choćby najdrobniejsze zakłębienie, pochodzące z niestarannego wyrobu zwiększa się pod ciśnieniem zewnętrznym i powoduje spłaszczenie się kuli, a w tym wypadku wzór powyższy przestaje oczywiście być prawdziwym. Zupełnie inaczej zachowuje się naczynie kuliste pod ciśnieniem wewnętrznym, sprzyjającym samemu swemu działaniu zachowaniu kształtu ściśle kulistego, to też wzór poprzedni jest pewny zupełnie. Z tego względu w wypadku prężności zewnętrznej lepiej nadawać niskie wartości współczynnikowi ϵ_n w tylko co otrzymanym wzorze. —

§ 3. NACZYNIA CYLINDRYCZNE. /RYS. 372/ Zewnętrzny promień naczynia oznaczamy przez R , wewnętrzny przez r . Obustronnie zamykamy je dnami D i D_1 dość daleko od siebie, aby środkową część rury uniezależnić od zjawisk wtórnych, ponieważ najwidoczniej w pobliżu dna ścianki rury rozszerzać się swobodnie nie mogą. Dno stanowi przeto usztywnienie naczynia cylindrycznego. Jak i poprzednio wykrawamy myślowo z wnętrza ścianki naczynia kostkę elementarną /RYS. 373/ prowadząc dwie płaszczyzny poprzeczne prostopadłe do osi naczynia OO podłużnej znikomo odległe o dy , dwie płaszczyzny osiowo nachylone pod kątem $d\varphi$, oraz dwie powierzch-

nie cylindryczne o promieniach ρ i $\rho + d\rho$. W ten sposób otrzymana kostka $\alpha\beta\delta\gamma$ posiada cztery boczne ściany płaskie oraz dwie cylindryczne - wklęsłą i wy-



pukłą. Dwie ściany boczne są równoległe, dwie tworzą kąt $d\varphi$ zawarty między swymi płaszczyznami. Wobec zupełnej symetryczności obciążenia względem osi podłużnej naczynia 00 nie mogą w jej ściankach oddalonych od obu denek powstawać skrzywienia, świadczące o istnieniu naprężeń tnących, należy przeto ściankom naszej kostki przypisywać wyłącznie naprężenia norma-

ne, a mianowicie równoległym ściankom bocznym σ_y i σ_y' , pochylonym ściankom bocznym σ_x i σ_x' a cylindrycznym σ_z i σ_z' (RYS. 374 i 375). Wspomniana powyżej symetryczność obciążenia względem osi podłużnej naczynia zmusza nas do uznania zupełnej symetrii naprężeń σ_x i σ_x' , należy zatem założyć $\sigma_x = \sigma_x'$. Nadto symetria obu den upoważnia do wnioskowania o symetrii naprężeń σ_y i σ_y' również należy zatem założyć $\sigma_y = \sigma_y'$. Pozostałe σ_z i σ_z' różnią się nieco, oznaczmy przeto $\sigma_z' = \sigma_z + d\sigma_z = \sigma_z + \frac{d\sigma_z}{d\varphi} d\varphi$, ponieważ niewątpliwie w danym wypadku φ stanowi jedyną zmienną. Pod działaniem tylko co nazwanych naprężeń kostka pozostaje w równowadze, należy zatem wypisać równania statyki przechodząc od naprężeń do sił jednostkowych. Dość będzie przy tem rozpatrzyć sumnę rzutów na środkową oś ωZ przecięcia się płaszczyzn symetrii kostki, w innych bowiem kierunkach naprężenia znoszą się wzajemnie. Zatem na boczne ścianki równoległe do tej osi działają siły jednostkowe $\sigma_y d\varphi dy dz$ znoszące się wzajemnie a prostopadłe do ωZ , możemy je przeto chwilowo pominąć. Na boczne ścianki pochylone ku sobie pod kątem $d\varphi$ działają siły jednostkowe $\sigma_x d\varphi dy dz$ dające w rzucie na oś ωZ składowe $\sigma_x d\varphi dy dz \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sigma_x d\varphi dy dz$, wypadkowa tych składowych będzie więc $\sigma_x d\varphi dy dz$, skierowana ku osi oo naczynia. Te siły równoważyć musi różnica sił jednostkowych obu pozostałych ścianek kostki - na wklęsłą działa siła

$\tilde{\sigma}_z \varrho d\varphi dy$ — na wypukłą $\tilde{\sigma}_z \varrho d\varphi dy + d[\tilde{\sigma}_z \varrho d\varphi dy]$.

Równowaga zatem wymaga aby $\tilde{\sigma}_z \varrho d\varphi dy + d[\tilde{\sigma}_z \varrho d\varphi dy] - \tilde{\sigma}_z \varrho d\varphi dy =$

$$= \tilde{\sigma}_x d\varrho dy d\varphi. \text{ Stąd bezpośrednio } d[\tilde{\sigma}_z \varrho d\varphi dy] =$$

$$= d[\tilde{\sigma}_z \varrho] d\varphi dy = \tilde{\sigma}_x d\varrho dy d\varphi. \text{ Po skróceniu przez } d\varphi dy$$

$$\text{ i podzieleniu przez } d\varrho \text{ mamy } \tilde{\sigma}_x = \frac{d}{d\varrho} [\tilde{\sigma}_z \varrho]. \text{ Tyle}$$

tu daje statyka. Nadto powtarzające słowo w słowo ro-

zumowania przytoczone w ustępie poprzedzającym dojdzie-

my do przekonania, że tutaj również $\varepsilon_z = \frac{du}{d\varrho}$ oraz $\varepsilon_x = \frac{u}{\varrho}$

gdzie u oznacza przesunięcie się punktu A — końca pro-

mienia ϱ w kierunku tego promienia; trzecie wydłuże-

nie jednostkowe tymczasowo pozostawiamy bez uwagi. A

$$\text{zatem mamy: } \varepsilon_x = \alpha \left[\tilde{\sigma}_x - \frac{\tilde{\sigma}_y}{m} - \frac{\tilde{\sigma}_z}{m} \right] = \frac{u}{\varrho}; \quad \varepsilon_y = \alpha \left[\tilde{\sigma}_y - \right.$$

$$\left. - \frac{\tilde{\sigma}_z}{m} - \frac{\tilde{\sigma}_x}{m} \right]; \quad \varepsilon_z = \alpha \left[\tilde{\sigma}_z - \frac{\tilde{\sigma}_x}{m} - \frac{\tilde{\sigma}_y}{m} \right] = \frac{du}{d\varrho}. \rightarrow$$

Z równań dla ε_x i ε_z z łatwością wyznaczymy $\tilde{\sigma}_x =$

$$= \frac{Em}{m^2-1} (m\varepsilon_x + \varepsilon_z) + \frac{\tilde{\sigma}_y}{m-1}; \quad \tilde{\sigma}_z = \frac{Em}{m^2-1} (\varepsilon_x + m\varepsilon_z) + \frac{\tilde{\sigma}_y}{m-1}. \rightarrow$$

Ponieważ warunek równowagi kostki $\tilde{\sigma}_x = \frac{d}{d\varrho} [\tilde{\sigma}_z \varrho]$

naprężeń $\tilde{\sigma}_y$ nie zawiera, przeto mamy zupełne prawo

przypuścić, iż nie zależy ono od ϱ — inaczej mó-

wiąc mamy prawo rozpatrywać przekroje poprzeczne na-

czynnia, jako jednostajnie naprężone. W samej rzeczy

weźmy pod uwagę jakikolwiek przekrój poprzeczny EF

wskazany na RYS. 372. Panują w nim naprężenia $\tilde{\sigma}_y$ nie-

zależne od ϱ a zatem jednostajnie rozłożone po całym

przekroju $\pi R^2 - \pi r^2$. Wypadkowa tych naprężeń

$\tilde{\sigma}_y (\pi R^2 - \pi r^2)$ musi oczywiście równoważyć wypadkową

prężności działających na lewe dno, a ta jest równa

$$\pi R^2 p_z - \pi r^2 p_w \text{ stąd mamy } -\tilde{\sigma}_y [\pi R^2 - \pi r^2] = \pi R^2 p_z - \pi r^2 p_w$$

daje $\sigma_y = -[R^2 p_z - r^2 p_w] : [R^2 - r^2]$. Znak minus jest tu konieczny, bo gdy wypadkowa prężności zewnętrznych $\pi R^2 p_z$ jest większa od wypadkowej prężności wewnętrznych $\pi r^2 p_w$ - rura jest oczywiście ściskana wzdłuż swej osi OO zatem musi być $\sigma_y < 0$ mimo to, że $\pi R^2 p_z - \pi r^2 p_w > 0$, oraz $\pi R^2 - \pi r^2 > 0$. Ostatecznie więc:

$$\sigma_x = \frac{Em}{m^2-1} \left[m \frac{u}{\varrho} + \frac{du}{d\varrho} \right] - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)};$$

$$\sigma_z = \frac{Em}{m^2-1} \left[\frac{u}{\varrho} + m \frac{du}{d\varrho} \right] - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)}.$$

i po podstawieniu w równanie wyżej otrzymane:

$$\begin{aligned} & \frac{Em}{m^2-1} \left[m \frac{u}{\varrho} + \frac{du}{d\varrho} \right] - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)} = \\ & = \frac{d}{d\varrho} \left[\frac{Em}{m^2-1} \left(u + m\varrho \frac{du}{d\varrho} \right) - \frac{\varrho}{m-1} \cdot \frac{(R^2 p_z - r^2 p_w)}{R^2 - r^2} \right] = \\ & = \frac{Em}{m^2-1} \frac{du}{d\varrho} + \frac{Em^2}{m^2-1} \frac{du}{d\varrho} + \frac{Em^2}{m^2-1} \varrho \frac{d^2 u}{d\varrho^2} - \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{(m-1)(R^2 - r^2)}; \end{aligned}$$

skąd po skróceniu przez $\frac{Em^2}{m^2-1}$ otrzymamy $\varrho \frac{d^2 u}{d\varrho^2} + \frac{du}{d\varrho} - \frac{u}{\varrho} = 0$. Całka tego równania jest $u = A\varrho + \frac{B}{\varrho}$ stąd $\epsilon_x = \frac{u}{\varrho} = A + \frac{B}{\varrho^2}$, $\epsilon_z = \frac{du}{d\varrho} = A - \frac{B}{\varrho^2}$ a zatem: $\sigma_z = \frac{Em}{m^2-1} \left(A + \frac{B}{\varrho^2} + mA - \frac{mB}{\varrho^2} \right) + \frac{\sigma_y}{m-1} = \frac{Em}{m^2-1} \left[(m+1)A + (1-m)\frac{B}{\varrho^2} \right] + \frac{\sigma_y}{m-1} = \frac{Em}{m-1} A - \frac{Em}{m+1} \cdot \frac{B}{\varrho^2} + \frac{\sigma_y}{m-1}$. Na obu powierzchniach ścianki naczyń naprężenie σ_z winno równoważyć odnośne ciśnienie. Muszą zatem zachodzić następujące warunki

$$\text{równowagi: } p_z + [\sigma_z]_{\varrho=R} = p_z + \frac{EmA}{m-1} - \frac{Em}{m+1} \frac{B}{R^2} + \frac{\sigma_y}{m-1} = 0$$

$$p_w + [\sigma_z]_{\varrho=r} = p_w + \frac{EmA}{m-1} - \frac{Em}{m+1} \frac{B}{r^2} + \frac{\sigma_y}{m-1} = 0$$

Stąd mamy: $A = -\frac{m-2}{Em} \cdot \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{E(R^2 - r^2)}$; $B = -\frac{m+1}{Em} \cdot \frac{p_z - p_w}{R^2 - r^2} R^2 r^2$

i ostatecznie: $\sigma_x = -\frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2} - \frac{p_z - p_w}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{\varrho^2}$

$$\sigma_y' = -\frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2}; \quad \sigma_z' = -\frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2} + \frac{p_z - p_w}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{s^2}.$$

Zatem wzory dla wydłużeń jednostkowych otrzymają następującą postać ostateczną:

$$\epsilon_x = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p_z - p_w}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{s^2};$$

$$\epsilon_y = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2};$$

$$\epsilon_z = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z - r^2 p_w}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{p_z - p_w}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{s^2}.$$

I tu znów w wypadku CIŚNIENIA WEWNĘTRZNEGO należy uczynić $p_z = 0$ a otrzymamy: $\epsilon_{x_{MAX}} = +\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 p_w}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_w}{R^2 - r^2}$; $\epsilon_{y_{MAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 p_w}{R^2 - r^2}$; $\epsilon_{z_{MAX}} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 p_w}{R^2 - r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_w}{R^2 - r^2}$.

Ponieważ oczywiście w danym wypadku $\epsilon_{x_{MAX}} > \epsilon_{y_{MAX}} > 0$ zatem wystarczy założyć $\epsilon_{x_{MAX}} = \kappa_r$, nadto również $\epsilon_{z_{MAX}} < 0$, a przeto skrajne naprężenia zastępcze będą tu:

$$\epsilon_{x_{MAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 p_w}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_w}{R^2 - r^2} = \kappa_r.$$

$$-\epsilon_{z_{MAX}} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{r^2 p_w}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_w}{R^2 - r^2} = \kappa_n.$$

Stąd mamy warunki konieczne:

$$R = r \sqrt{\frac{\kappa_r + \frac{m-2}{m} p_w}{\kappa_r - \frac{m+1}{m} p_w}} \quad \text{oraz} \quad R = r \sqrt{\frac{\kappa_n - \frac{m-2}{m} p_w}{\kappa_n - \frac{m+1}{m} p_w}}.$$

Pierwszy warunek daje większą wartość stosunku $\frac{R}{r}$ zatem możemy drugi pominąć zupełnie. Nadto być musi

$\kappa_r - \frac{m+1}{m} p_w > 0$, skąd otrzymujemy warunek $p_w < \frac{m \kappa_r}{m+1}$ wskazujący, że wytrzymałość naczyń cylindrycznych ma

swoje granice.

W wypadku CIŚNIENIA ZEWNĘTRZNEGO, kiedy $p_w = 0$ będziemy mieli znów:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{x_{MAX}} &= -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} - \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} \sim \\ E\varepsilon_{y_{MAX}} &= -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} \sim \\ E\varepsilon_{z_{MAX}} &= -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} \sim \end{aligned}$$

Ponieważ oczywiście: $-E\varepsilon_{x_{MAX}} > -E\varepsilon_{y_{MAX}} > 0$, oraz $E\varepsilon_{z_{MAX}} > 0$ zatem w danym wypadku należy założyć:

$$-E\varepsilon_{x_{MAX}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} = k_n \sim$$

$$E\varepsilon_{z_{MAX}} = -\frac{m-2}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} + \frac{m+1}{m} \cdot \frac{R^2 p_z}{R^2 - r^2} = k_r \sim$$

Skąd mamy znowu nowe dwa warunki konieczne:

$$R = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2m-1}{m} \cdot \frac{p_z}{k_n}}} \quad \text{oraz:} \quad R = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{3}{m} \cdot \frac{p_z}{k_r}}} \sim$$

Ponieważ dla tworzyw, z których budujemy rury

$k_n \geq k_r$ przeto miarodajny jest pierwszy warunek jako dający większy stosunek $\frac{R}{r}$. Możemy przeto i w danym

wypadku pominąć zgoła warunek drugi. Nadto być musi

$1 - \frac{2m-1}{m} \cdot \frac{p_z}{k_n} > 0$, co daje nowy warunek $p_z < \frac{m k_n}{2m-1}$ wska-

zujący, że wytrzymałość naczyń cylindrycznych na ciśnienie zewnętrzne również ma swoje granice. Podobne

warunku mieliśmy również i dla naczyń kulistych. Pora wyjaśnić ich rolę. W tym celu bierzemy przykład typowy

rury o średnicy wewnętrznej 8 cm. i zewnętrznej 24

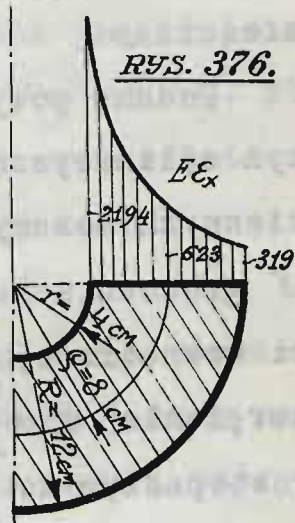
cm. Prężność wewnętrzna wynosi 1500 kg./cm.² Po podsta-

wieniu wartości $r = 4$ cm., $R = 12$ cm. oraz $p_w = 1500$ kg./cm.²

w odnośne wzory otrzymamy $[E\varepsilon_x]_{p=4\text{ cm}} = 2194$ kg./cm.², $[E\varepsilon_x]_{p=8}$

$= 623 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ wreszcie $\left[E \varepsilon_x \right]_{R=12 \text{ cm}} = 319 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Odnosny wykres wartości podaje RYS. 376. —

Wnioskujemy że o nader nierównomiernym rozkładzie naprężeń zastępczych. Zewnętrzne cząsteczki materiału są nader słabo naprężone, podczas gdy wewnętrzne wytrzymują naprężenia prawie sześćkroć razy większe. Tworzywo jest źle wykorzystane, pracuje nieodpowiednio. Stąd jasnym się staje dlaczego dalsze zgrubianie ścianki nie prowadzi do celu: im ścianka grubsza tem różnica pomiędzy naprężeniami zastępczymi wewnętrznymi i zewnętrznymi staje się wybitniejsza tem tworzywo gorzej pracuje. To też zazwyczaj rury armatnie, narażone na wysokie ciśnienia wewnętrzne budują z kilku tulei nasadzonych jedna na drugą pod ciśnieniem dość znacznym. Promień wewnętrzny tulei zewnętrznej, robią przytem nieco mniejszym od promienia zewnętrznego tulei następnej wewnętrznej - przy nasadzaniu zewnętrzna wywiera, znaczny nacisk na wewnętrzną tworząc w ten sposób przeciwcisnienie w kierunku dośrodkowym. Istnienie tych ciśnień pierwotnych umożliwi lepszy rozkład naprężeń w chwili strzału. Powstająca nagle prężność wzbuchu udziela się przedewszystkiem tulei wewnętrznej, uciskanej przez zewnętrzne dalsze tuleje. Ten jej nacisk zewnętrzny przeciwstawia się wewnętrznej prężności wzbuchu obniżając naprężenia ścian-



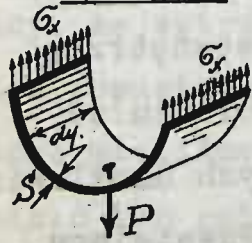
ki wewnętrznej. Korzystając ze wzorów wyżej podanych łatwo można wyliczyć różnicę średnic jaką otrzymać należy przy toczeniu tulei w celu prawidłowego działania całości. ~

Podane powyżej wzory nadają się do obliczania naczyń cylindrycznych grubościennych. Dla naczyń cienkościennych możemy je znacznie uprościć. Oznaczmy przez

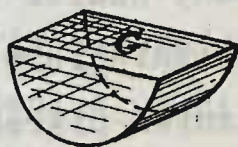
S grubość ścianki, wtedy $R = r + S$. W wypadku prężności wewnętrznej p_w działającej na dna będziemy mieli naprężenie $\sigma_y = \frac{\pi r^2 p_w}{\pi (r+S)^2 - \pi r^2} \cong \frac{r p_w}{2S}$. Nadto w kierunku prostym do promienia będziemy mieli naprężenie

σ_x , prężność bowiem wewnętrzna stara się rozzerwać naczynie wzdłuż płaszczyzny przechodzącej przez oś podłużną naczynia. Wyobraźmy sobie pierścień dy długi wykrajany z naczynia (RYS. 372) dwoma poprzecznymi przekrojami EF i GH . Rozkrajmy go myślowo na dwie części, Płaszczyzną przechodzącą przez oś (RYS. 377). Z łatwością można się przekonać, że wypadkowa wszystkich ciśnień P równa się $P =$

RYS. 377.



RYS. 378.



$= 2r dy p_w$. W istocie rozkrajane naczynie możemy przykryć z boków dwoma płaskimi ściankami bocz-

nymi (RYS. 378) oraz górną G również płaską pokrywą. Całe to naczynie zamknięte pozostaje w równowadze pod ciśnieniem wewnętrznym p_w , ponieważ nacisk wywierany na boczne ścianki płaskie jest jednakowy i znosi się

wzajemnie, przeto ciśnienie na pokrywę górną musi równoważyć wypadkową ciśnień na powierzchnię półcylindryczną, co da $P = 2r dy p_w$. Stąd bezpośrednio otrzymamy $P = 2r dy p_w = 2 dy S \sigma_x$, zważywszy, że oba przekroje wynoszą razem $2 dy S \text{ cm}^2$. Stąd $\sigma_x = \frac{r p_w}{S} = 2 \sigma_y$. Stąd bezpośrednio czyniąc $\sigma_x = k_r$ otrzymamy wzór ostateczny $S = \frac{r p_w}{k_r}$ wyznaczający grubość ścianki według większego naprężenia jakim jest oczywiście σ_x .

Ten sam wzór najwidoczniej stosuje się również i w wypadku prężności zewnętrznej. Wtedy jednak mamy do czynienia z naprężeniem σ_x ściskającym i wzór wypisany być winien w postaci $S = \frac{R p_z}{k_n}$. Wszelakoż w tym wypadku BACH radzi w obawie spłaszczenia rury pod jarzmem prężności zewnętrznej - stosować wzór czy-
sto doświadczalny:

$$S = \frac{R p_z}{2 k_n} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{A}{p_z} \frac{L}{L + 2R}} \right].$$

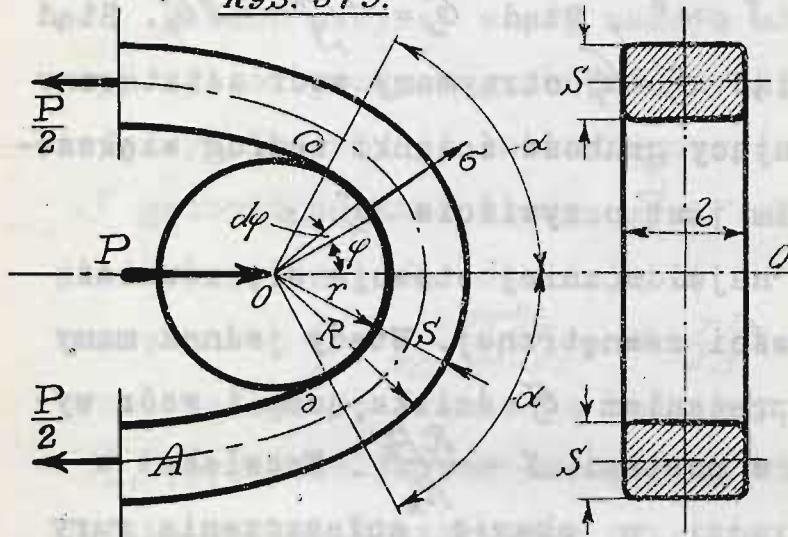
gdzie L oznacza długość swobodną naczynia pomiędzy dnami, lub pomiędzy wzmocnieniami poprzecznymi, a współczynnik A wyznacza się doświadczalnie.

Prócz rur i naczyń cylindrycznych możemy również według powyżej podanych wzorów obliczać:

§ 4. OGNIWA. Trzpień O ochwytuje wzdłuż łuku dotyku 2α ogniwo A . Połowę ogniwa z przekrojem trzpienia widzimy na RYS. 379. Nacisk wywierany na ogniwo niech będzie P . Na tle działania tej siły w powierzchni dotyku $\partial\partial$ rozwija się ciśnienie σ odśro-

kowe i jak się okazuje z prób - jednostajnie rozłożone wzdłuż całej powierzchni dotyku. Chcąc wyznaczyć wartość σ rozpatrujemy siłę jednostkową $\sigma r b d\varphi$ przynależną do elementarnej powierzchni dotyku $b r d\varphi$ ogniwa.

RYS. 379.



Rzut jej na oś działania siły P będzie $\sigma r b \cos \varphi$ a wypadkowa wszystkich tych sił równa oczywiście siłę P będzie:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma r b \cos \varphi d\varphi = r b \sigma \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 r b \sigma \sin \alpha = P.$$

Stąd: $\sigma = \frac{P}{2 r b \sin \alpha}$. W ten sposób wzdłuż powierzchni dotyku $\partial \partial$ ogniwo można upodobnić do naczynia cylindrycznego grubościennego, dla którego $p_w = \sigma = \frac{P}{2 r b \sin \alpha}$ oraz $p_z = 0$. Ponieważ na boczne ścianki ogniwa nie

działa żadne obciążenie, przeto: $\sigma_y = 0$, $\sigma_z = -\sigma$ wreszcie

$$\sigma_x = \frac{r^2 p_w}{R^2 - r^2} + \frac{p_w}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^2 r^2}{\varphi^2} \text{ stąd: } \sigma_{x \max} = [\sigma_x]_{\varphi=r} = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} p_w = \frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \frac{P}{2 r b \sin \alpha} = \sigma_r.$$

Według tego wzoru należy obliczać ogniwa. Jest on ściśły jedynie dla ogniw o przekroju prostokątnym. Dla ogniw łańcuchowych spawanych z drutu okrągłego możemy również korzystać z tego wzoru rozpatrując fikcyjny przekrój kwadratowy ogniwa. Wysokość tego przekroju bierzemy równą średnicy przekroju ogniwa, a szerokość b

dobieramy tak, aby pola obu przekrojów były jednakowe. Musi być zatem $\frac{\pi d^2}{4} = b d$ stąd: $b = \frac{\pi d}{4}$. Podstawiając we wzór wyżej wyprowadzony, zważywszy, że dla łańcucha $r = \frac{d}{2}$; $R = \frac{d}{2} + d = 1,5d$ otrzymamy:

$$G = P_w = \frac{P}{2r b \sin \alpha} = \frac{P}{2 \frac{d}{2} \frac{\pi d}{4} \sin \alpha} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin \alpha} \quad \text{Stąd:}$$

$$\frac{R^2 + r^2}{R^2 - r^2} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin \alpha} = \frac{1,5^2 + 0,5^2}{1,5^2 - 0,5^2} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin \alpha} = \frac{5}{4} \cdot \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} \sin \alpha} = K_r$$

Wyniki otrzymane z tego wzoru są zgodne z doświadczeniem.

ROZDZIAŁ JEDENASTY.

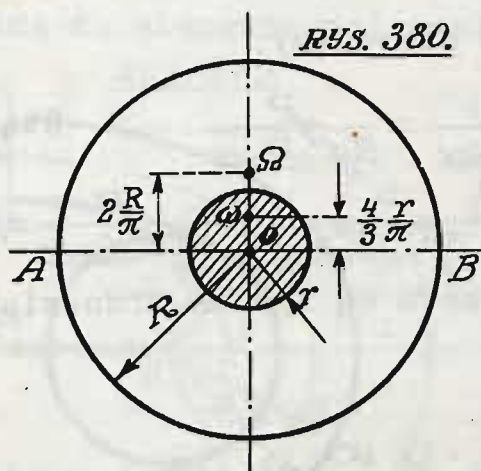
PŁYTY I POWŁOKI.

§ 1. USTALENIE POJĘĆ ZASADNICZYCH.

Dział płyt najmniej wyczerpująco został opracowany w wytrzymałości tworzyw ze względu na olbrzymie trudności całkowania, a wzory po dziś dzień znane niezbyt ściśle odpowiadają danym doświadczalnym. Podajemy wobec tego teorię przybliżoną płyt C. v. BACHA, jako stosunkowo najprostszą, a bodaj czy nie najlepiej odpowiadającą wynikom doświadczalnym.

§ 2. PŁYTA OKRĄGŁA /RYS. 380/. Rozpatrujemy płytę okrągłą o promieniu R , podpartą na całym obwodzie, a obciążoną jednostajnie w stosunku q kg. na centymetr kwadratowy pola koła współśrodkowo zatoczonego ze środka płyty promieniem $r \leq R$. Przetnijmy płytę średnico-

wo wzdłuż AB na dwie półkolistłe części. Obciążenie jednej z nich stanowić będzie siła $\frac{1}{2}q\pi r^2$ zogniskowana w środku ciężkości ω połowy kręgu o promieniu r ,



a więc w punkcie leżącym na średnicy prostopadłej do AB w odległości $O\omega = \frac{4r}{3\pi}$; Nadto płyta podparta na całym obwodzie ulega działaniu sił odporowych, jednostajnie po całym obwodzie rozsianych. Że tak jest

istotnie, nie wiemy - tylko przypuszczamy w braku innych danych dokładniejszych. Zatem na półkole AB przypada połowa wszystkich sił odporowych o wypadkowej $\frac{1}{2}q\pi r^2$ zogniskowanej w środku ciężkości półkole, a więc w punkcie Ω leżącym na średnicy prostopadłej do AB w odległości $O\Omega = \frac{2R}{\pi}$. Te dwie wypadkowe dają zatem w stosunku do AB momenty różnoskrętne: odporowy $\frac{1}{2}q\pi r^2 \frac{2R}{\pi}$ i odkształcający $\frac{1}{2}q\pi r^2 \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$. Ich wypadkowy moment $M = q\pi r^2 \frac{R}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{r}{R} \right]$ stanowi niewątpliwie obciążenie gnące płyty w stosunku do przekroju AB . Ten przekrój stanowi oczywiście prostokąt o powierzchni $2R \times h$, gdzie przez h oznaczyliśmy grubość płyty. Moment wytrzymałościowy tego przekroju będzie: $\frac{1}{6} 2R h^2 = \frac{1}{3} R h^2$, możemy przeto napisać: $\frac{1}{3} R h^2 \kappa_y = \mu q \pi r^2 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{r}{R} \right] \frac{R}{\pi}$ przyczem wobec zbytnej dorywczości całej tej teorii wprowadziliśmy

we wzór tylko co wypisany współczynnik μ , czysto doświadczalny, aby w ten sposób ściślej dostosować się do warunków istotnie zachodzących, niewątpliwie bowiem siły odporowe nie są rozłożone jednostajnie po obwodzie płyty, jakieśmy to zakładali.

$$\text{Zatem: } \kappa_g = \mu \frac{3}{\pi} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{r}{R} \right] \frac{q \pi r^2}{r^2}.$$

przyczem jak z doświadczeń BACHA wynika $\mu = 1,5$.

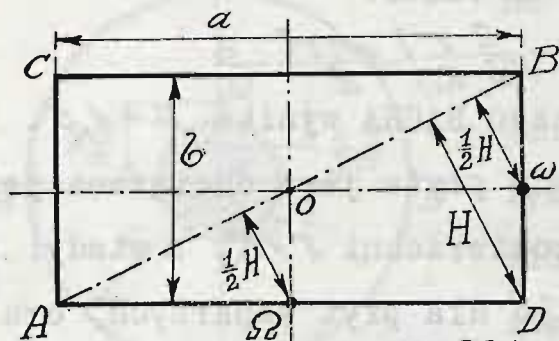
W szczególnym wypadku gdy płyta jest obciążona jednostajnie na całej swej powierzchni $r=R$ a wtedy: $\kappa_g = \mu \frac{R^2}{h^3} q$, gdzie $\mu = 0,8$ dla płyt wspartych, oraz $\mu = 1,2$, dla płyt zamocowanych na obwodzie.

W obu wypadkach strzałka ugięcia płyty pośrodku, jak to BACH ustalił za pomocą doświadczeń, może być wyznaczona ze wzoru $f = \psi \frac{R^2}{E h^3} q \pi r^2$, przyczem gdy $r < R$ wtedy $\psi = 0,4 \div 0,5$. Gdy zaś $r=R$ wtedy $f = \psi \pi \frac{R^4}{E h^3} q = \theta \frac{R^4}{E h^3} q$, gdzie $\theta = 0,167$ dla płyt wspartych, oraz $\theta = 0,6$ dla płyt zamocowanych na obwodzie.

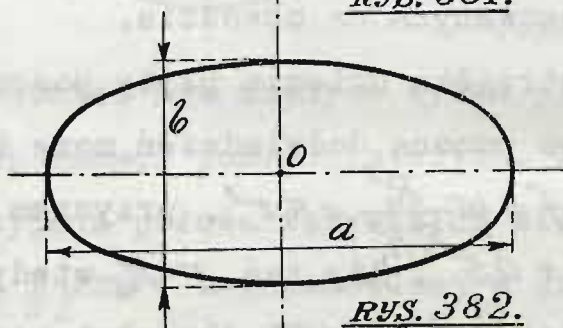
§ 3. PŁYTA PROSTOKĄTNA. Doświadczenie uczy, iż

płyta prostokątna obciążona jednostajnie lub siłą skupioną po środku - łamie się mniej więcej wzdłuż przekątnej. Zatem należy wyznaczyć obciążenie płyty w stosunku do jej przekątnej AB , przy obciążeniu jednostajnem q kg. na jednostkę pola płyty. Całkowite obciążenie płyty a długiej i b szerokiej będzie tedy qab , a przeto obciążenie trójkąta ABD wyniesie $\frac{1}{2} qab$. Siła ta będzie oczywiście skupiona w środku ciężkości trójkąta, a więc w odległości $\frac{1}{3} H$ od

przekątnei AB . Da ona przeto moment odkształcający $\frac{1}{2} q a b \frac{1}{3} H$. Aby otrzymać moment odporowy zakładamy, iż płyta podparta jest na całym swym obwodzie, a siły odporowe jednostajnie wzdłuż obwodu rozsiane.



RYS. 381.



RYS. 382.

W ten sposób wypadkowa odpór skupionych wzdłuż boku AD działać będzie pośrodku w punkcie Ω , a wypadkowa odpór działających na bok DB w punkcie ω środkowym tego boku. Odległości obu tych punktów od AB są równe: $\frac{1}{2} H$ zatem odpory dadzą moment

$\frac{1}{2} q a b \frac{1}{2} H = \frac{1}{4} q a b H$. Wypadkowy moment będzie więc $M = \frac{1}{4} q a b H - \frac{1}{6} q a b H = \frac{1}{12} q a b H$. Ponieważ pole płyty jest równe $a b$ oraz $H \times AB$ czyli $H \sqrt{a^2 + b^2}$ zatem $H = \frac{a b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ i ostatecznie $M = \frac{q}{12} \cdot \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Ten moment wypadkowy stara się złamać płytę w przekroju AB po przekątnei. Oznaczmy przez h - grubość płyty, a wtedy moment wytrzymałości przekroju AB wyrazi się w postaci: $\frac{1}{6} \times AB \times h^2 = \frac{1}{6} h^2 \sqrt{a^2 + b^2}$. Możemy przeto napisać $\frac{1}{6} h^2 \sqrt{a^2 + b^2} = \mu \frac{q}{12} \cdot \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, gdzie również wprowadziliśmy współczynnik poprawczy μ ze względu na pewną dowolność naszych założeń dotyczących rozkładu sił odporowych na obwodzie płyty, które oczywiście

nie są rozsiiane jednostajnie wzdłuż boków. ~

Stąd mamy:

$$\kappa_g = \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{b^2}{h^2} q. \sim$$

gdzie dla płyt opartych $\mu = 0,75$, oraz $\mu = 1,12$ dla płyt zamocowanych na obwodzie. ~

Gdy obciążenie płyty stanowi siła skupiona P działająca po środku płyty w punkcie O będziemy mieli, zachowując te same założenia co do sił odporowych: $M = \frac{1}{2} P \cdot \frac{1}{2} H$, a zatem jak poprzednio: $\frac{1}{6} h^2 \sqrt{a^2 + b^2} = \mu \frac{P}{4} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; Stąd mamy: $\kappa_g = \frac{3}{2} \mu \frac{P}{[\frac{a}{3} + \frac{b}{3}] h^2}$, przyczem $\mu = 1,75$ dla płyt opartych i $\mu = 2,00$ dla płyt zamocowanych na obwodzie. W szczególnym wypadku gdy $a = b$ otrzymujemy: $\kappa_g = \frac{1}{4} \mu \frac{a^2}{h^2} q$ dla płyty kwadratowej podpartej, oraz $\kappa_g = \frac{3}{4} \mu \frac{P}{h^2}$ dla płyty kwadratowej zamocowanej na obwodzie. ~

§ 4. PŁYTA OWALNA. W wypadku jednostajnego obciążenia w stosunku q κ/g . na jednostkę pola płyta owalna (RYS. 382) zachowuje się jak prostokątna o tych samych wymiarach zasadniczych - długości a i szerokości b , możemy zatem napisać: $\kappa_g = \frac{1}{2} \mu \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2}} \cdot \frac{b^2}{h^2} q$, przyczem $\mu = 0,67$ dla płyty owalnej opartej, a $\mu = 1,12$ dla płyty owalnej zamocowanej na obwodzie. Gdy jednak płyta jest obciążona siłą skupioną P działającą po środku w punkcie O , wtedy jak głoszą doświadczenia BACHA:

$$\kappa_g = \frac{8}{5\pi} \mu \cdot \frac{8 + 4 \frac{b^2}{a^2} + 3 \frac{b^4}{a^4}}{3 + 2 \frac{b^2}{a^2} + 3 \frac{b^4}{a^4}} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{P}{h^2}. \sim$$

gdzie $\mu = 1,5$ dla płyty owalnej podpartej, $\mu = 1,67$

dla płyty zamocowanej na całym obwodzie. Na tem kończymy teorię płyt. ~

ROZDZIAŁ DWUNASTY.

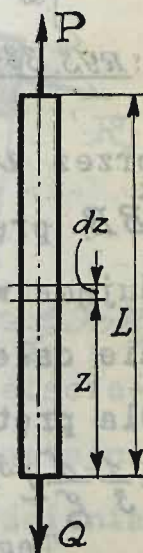
NAPRĘŻENIA RUCHU.

§ I. USTALENIE POJEĆ ZASADNICZYCH. Dotychczas rozpatrywane wypadki obciążeń wyłącznie DOTYCZYŁY CIAŁ POZOSTAJĄCYCH W SPOCZYNKU, a więc pozbawionych całkowicie przyspieszeń. Obecnie należy zbadać wytrzymałościowo ciała obdarzone ruchem, a więc podległe działaniu sił powstających na tle przyspieszeń. Te siły powodują odrębny rodzaj naprężeń, które nazwiemy krótko NAPRĘŻENIAMI RUCHU. NAPRĘŻENIA RUCHU POWSTAJĄ POD DZIAŁANIEM SIŁ BEZWŁADNOŚCI, ORAZ PRZY UDERZENIACH i DRGANIACH. Teoria ich wobec niesłychanych trudności doświadczalnych nie jest jeszcze opracowana wyczerpująco i jak dotąd opiera się na założeniach dosyć wątpliwych. Podamy jej główne podstawy, rozpoczynając od naprężeń powstających na tle sił bezwładności ciał ruchomych.

§ 2. NAPRĘŻENIA RUCHU POCHODZĄCE OD SIŁ BEZWŁADNOŚCI. Zjawiają się one w ustrojach ruchomych jako obciążenia ruchu ogólnego ustroju. Łatwo je rachunkowo ująć wyznaczwszy wartości sił bezwładności. Niestety jednak tego mechanika nie umie, BADA ONA BOWIEM WY

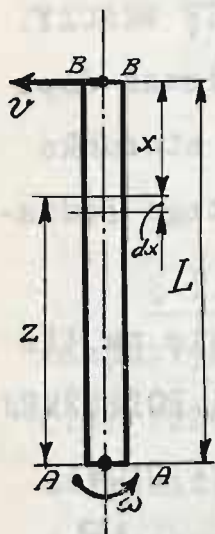
ŁĄCZNIE CIAŁA SZTYWNE, NIEISTNIEJĄCE. Z konieczności więc zmuszeni jesteśmy przy wyznaczaniu przyspieszeń pomijać odkształcenia ogniów, rozpatrując je jako ciała zupełnie sztywne. To założenie KAZI ISTOTĘ RZECZY, a jednak nie daje wyników sprzecznych - ponieważ dopuszczalne odkształcenia ogniów są jak wiadomo stosunkowo nader nieznaczne. Przy badaniu naprężeń tego rodzaju kolejno rozróżniamy:

§ 3. NAPRĘŻENIA PODŁUŻNE, pojawiające się na tle sił bezwładności działających W KIERUNKU OSI PODŁUŻNEJ PRĘTA PROSTEGO. Weźmy pod uwagę (RYS. 383) pręt prosty pionowy poruszający się pionowo pod działaniem siły P uciepionej pośrodku przekroju górnego pręta. Oznaczmy przez γ ciężar właściwy tworzywa pręta, przez S jego przekrój poprzeczny, przez L jego długość. Wobec położenia pionowego pręta w górnym jego przekroju działa siła rozrywająca γSL ciężaru pręta, niezależna od P . Oznaczmy przez W przyspieszenie pręta; każdy element długości pręta o masie $\frac{\gamma}{g} S dz$ sprzeciwiać się będzie ruchowi z siłą bezwładności $W \frac{\gamma}{g} S dz$, zatem w górnym przekroju pręta będziemy mieli siłę rozciągającą $R_z = \gamma SL + \int_0^L \frac{W \gamma}{g} S dz$. Jeżeli nadto u dolnego przekroju zawiesimy ciężar Q w postaci masy $\frac{Q}{g}$ skupionej, to niewątpliwie obciążenie górnego przekroju wzrośnie do $R_z = [\gamma SL + Q] / [1 + \frac{W}{g}]$, dając naprężenie ruchu $\epsilon_z = R_z / S$.



RYS. 383.

W podobny zupełnie sposób działa siła masowa. Pręt (RYS. 384) obracający się z szybkością kątową stałą ω wokół środka przekroju AA , ulega działaniu siły od-



RYS. 384.

środkowej; każdy element długości pręta o masie $\frac{\gamma}{g} S dx$ rozpatrywany w odległości x od swobodnego skrajnego przekroju pręta BB rozwija siłę odśrodkową $\frac{\gamma}{g} S dx \cdot \omega^2 (L-x)$,

zatem w przekroju górnym tego elementu panować będzie składowa $R_z = \int_0^x \frac{\gamma}{g} S dx \omega^2 (L-x)$.

Dla pręta o stałym przekroju $R_z = \frac{\gamma}{g} S \omega^2 [Lx - \frac{x^2}{2}]$.

Ta siła osiowa rozciągająca osiąga swą wartość najwyższą w przekroju AA - podstawowym pręta, gdzie $R_z = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} S \omega^2 L^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} S v^2$ gdzie

przez $v = \omega L$ oznaczyliśmy szybkość linjową przekroju BB pręta. Składowa R_z daje naprężenia $t_z = R_z : S$ powo-

dujące wydłużenie płytki $\delta dx = \epsilon dx = \frac{t_z}{E} dx$. Wydłuże-

nie całego pręta będzie więc $\Delta L = \int_0^L \frac{dx}{3E} \int_0^x \frac{\gamma}{g} S \omega^2 (L-x) dx$.

Dla pręta o stałym przekroju: $\Delta L = \int_0^L \frac{\gamma^2 \omega^2}{gE} x(L-x) dx =$

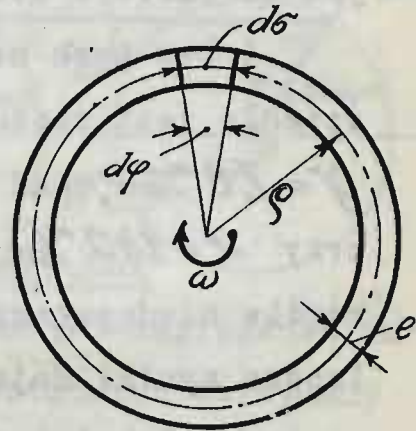
$= \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \frac{L^3 \omega^2}{E} = \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} \frac{v^2 L}{E}$.

Tego samego typu naprężenia podłużne występują W PRZEKROJACH POPRZECZNYCH WĄSKICH PIERŚCIENI WIRUJĄCYCH ZE STAŁĄ SZYBKościĄ KĄTOWĄ ω . Wązkim nazywamy pierścień o grubości nieznacznej w stosunku do średniego promienia pierścienia (RYS. 385). Oznaczmy przez

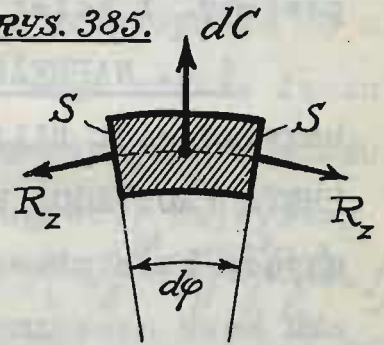
ρ średni promień pierścienia, przez S jego stały przekrój poprzeczny, oraz przez γ ciężar właściwy tworzywa. Masa znikomego wycinka o kącie środkowym $d\varphi$

będzie $\frac{r}{g} S d\varphi$ a siła odśrodkowa tego wycinka $dc =$

$= \frac{r}{g} S \varphi^2 d\varphi \omega^2 = \frac{r}{g} S v^2 d\varphi$ gdzie przez v oznaczyliśmy szybkość liniową pierścienia na osi przekroju. Układ sił dc zupełnie zresztą symetryczny względem środka, stara się zwiększyć promień φ o $d\varphi$ a zarazem wydłużyć obwód pierścienia w tym samym stosunku. Inaczej mówiąc w przekrojach poprzecznych pierścienia muszą powstawać siły R_z podłużne osiowe równoważące działanie sił dc . Rzut siły



Rys. 385.



R_z na kierunek dc będzie
 $R_z \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{2} R_z d\varphi$ zatem wobec

istnienia trwałej równowagi musi być $\frac{1}{2} R_z d\varphi = dc = \frac{r}{g} S v^2 d\varphi$ i $R_z = \frac{r}{g} S v^2$ W założeniu nieznaczej grubości e pierścienia możemy oczywiście założyć, iż siła R_z jednostajnie się rozłoży wzdłuż przekroju poprzecznego pierścienia

dając naprężenie rozciągające $t_z = \frac{R_z}{S} = \frac{r}{g} v^2$. Naprężenia te rosną jak widzimy nader szybko; powodują one wydłużenie jednostkowe pierścienia $\epsilon = \frac{t_z}{E} = \frac{r}{g} v^2 \frac{1}{E}$ zwiększające jego średnią długość $L = 2\pi \varphi$ o przyrost $\Delta L = \frac{r}{g} v^2 \frac{2\pi \varphi}{E}$ oraz wydłużające jego średni promień o $\Delta \varphi = \frac{r}{g} v^2 \frac{\varphi}{E}$. Gdy więc zaopatrzymy pierścień szybko wirujący w ramiona to wydłużenia tych ramion będą trzykrotnie mniejsze, zgodnie z tem cośmy wyżej otrzymali. Ra-

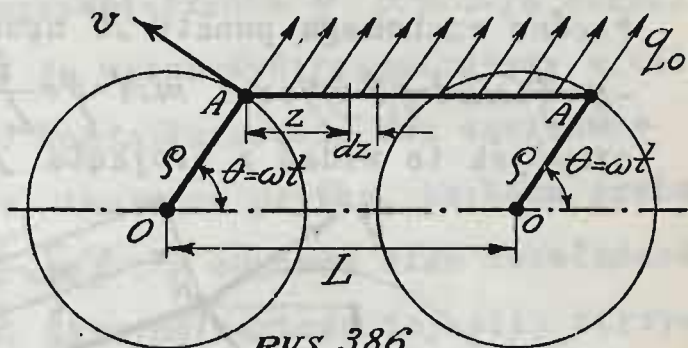
miona hamują swobodne rozszerzanie się pierścienia, dając dodatkowe naprężenia gnące - nader szybko rosnące, jak to wkrótce zobaczymy.

I bez tych naprężeń dodatkowych wytrzymałość pierścienia jest stosunkowo dość słaba. Dla stali zlewnej

$\gamma = 7,8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^3}$, skąd $t_z = \frac{7,8}{1000} \cdot \frac{v^2}{981} 100^2 = 9000$. Zatem już przy $v = 140 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ otrzymamy $t_z = 1570 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ - naprężenie wogóle niedopuszczalne w ustrojach. W tych wypadkach lepsze wyniki dają tarcze wirujące, o których wkrótce powiemy. Z kolei rozpatrzmy:

§ 4. NAPRĘŻENIA GNĄCE pojawiające się na tle sił bezwładności DZIAŁAJĄCYCH PROSTOPADLE DO OSI PODŁUŻNEJ PRĘTA PROSTEGO. Weźmy pod uwagę ŁĄCZNIK KORBOWY sprzęgający koła prowadzone parowozu (RYS. 386). Promienie obu korb oznaczmy przez ρ , długość łącznika przez L . Wobec ruchu postępowego ustroju KAŻDY PUNKT ŁĄCZNIKA PORUSZA SIĘ TOŻSAMOŚCIOWO Z SZYBKOŚCIĄ $v = \omega \rho$ i przyspieszeniem dośrodkowym $W = \omega^2 \rho$, przyczem ω oznacza szybkość kątową obu korb. W założeniu stałej wartości ω kąt θ odchylenia obu korb będzie równy ωt . Wyznamy w odległości Z od lewego łba łącznika znikomą płytkę dz o masie $\frac{\gamma}{g} S dz$ gdzie przez S oznaczyliśmy poprzeczny przekrój łącznika, a przez γ - jak zwykle ciężar właściwy tworzywa. Ta masa da siłę bezwładności $\frac{\gamma}{g} S dz \omega^2 \rho$ pochyloną pod kątem θ ku osi podłużnej łącznika. Słowem łącznik możemy rozpatrywać jako pręt obustronnie podparty, a obciążony jednostaj-

nie na całej długości w stosunku $q_0 = \frac{\gamma}{g} S \omega^2 \rho$ na jednostkę długości. To obciążenie działa pochyło, składowe jego podłużne $q_0 \cos \theta$ dadzą naprężenia podłużne pórzed-

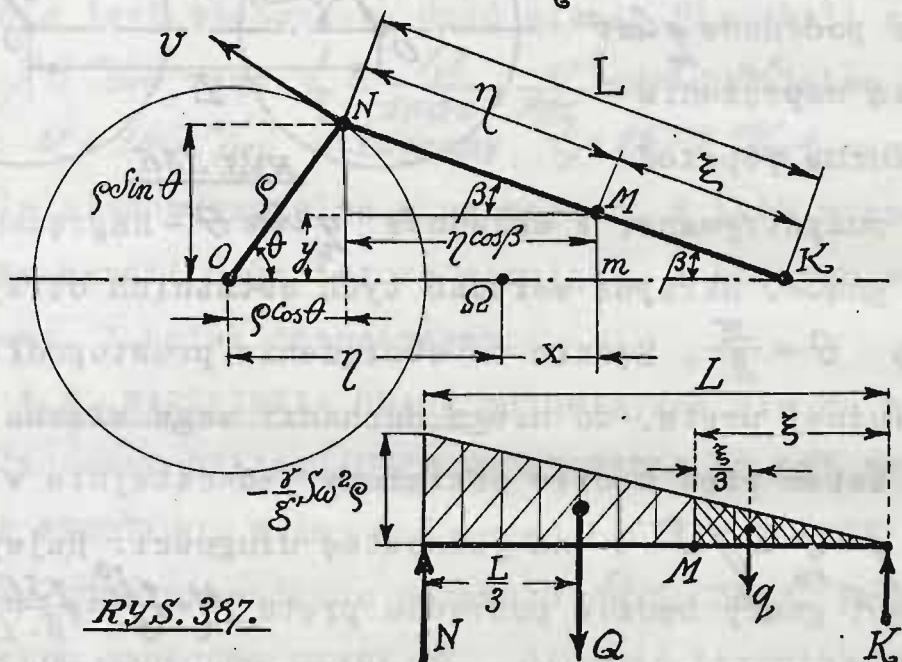


RYS. 386.

nio rozpatrywane, a składowe $q_0 \sin \theta$ — naprężenia ruchu gnące. Skrajną wartość tych ostatnich otrzymany przy $\theta = \frac{\pi}{2}$. Będzie to obciążenie prostopadłe do osi podłużnej pręta, do niego dochodzi waga własna łącznika, zatem pręt będzie obciążony jednostajnie w stosunku $q = q_0 \pm \gamma S$ — na jednostkę długości. Najwyższy moment gnący będzie pośrodku pręta $M = \frac{qL^2}{8} = \frac{\gamma SL^2}{8} \left[\frac{\omega^2 \rho}{g} + 1 \right]$, jak to już wiemy z ustępu dwudziestego działu piątego. Wzór ten dotyczy łączników o stałym poprzecznym przekroju.

Nieco zawilej się rzecz ma w wypadku ZWYKŁEGO KORBOWODU (RYS. 387). tutaj bowiem PRZYŚPIESZENIA POSZCZEGÓLNYCH PUNKTÓW M KORBOWODU NIE SĄ JEDNAKOWE. Oznaczmy odpowiednio przez η i ξ odległości jakiegokolwiek przekroju poprzecznego M korbowodu od osi czopa korbowego N i krzyżulcowego K . Cała długość korbowodu niech więc będzie $\xi + \eta = L$. W założeniu stałej szybkości kątowej ω kąt odchylenia korby ON od linii martwych punktów OK będzie $\theta = \omega t$. Odkłóźmy $OSB = \eta$ i poprowadźmy mM — prostopadłe do OK .

W stosunku do otrzymanego w ten sposób punktu Ω współrzędne ruchomego punktu M będą: $\Omega m = x = \rho \cos \theta + \eta \cos \beta - \eta = \rho \cos \omega t - \eta(1 - \cos \beta)$ oraz $mM = y = \frac{\xi}{L} \rho \sin \theta = \frac{\xi}{L} \rho \sin \omega t$, przy czem jak to widać z trójkąta KNO będziemy mieli



RYS. 387.

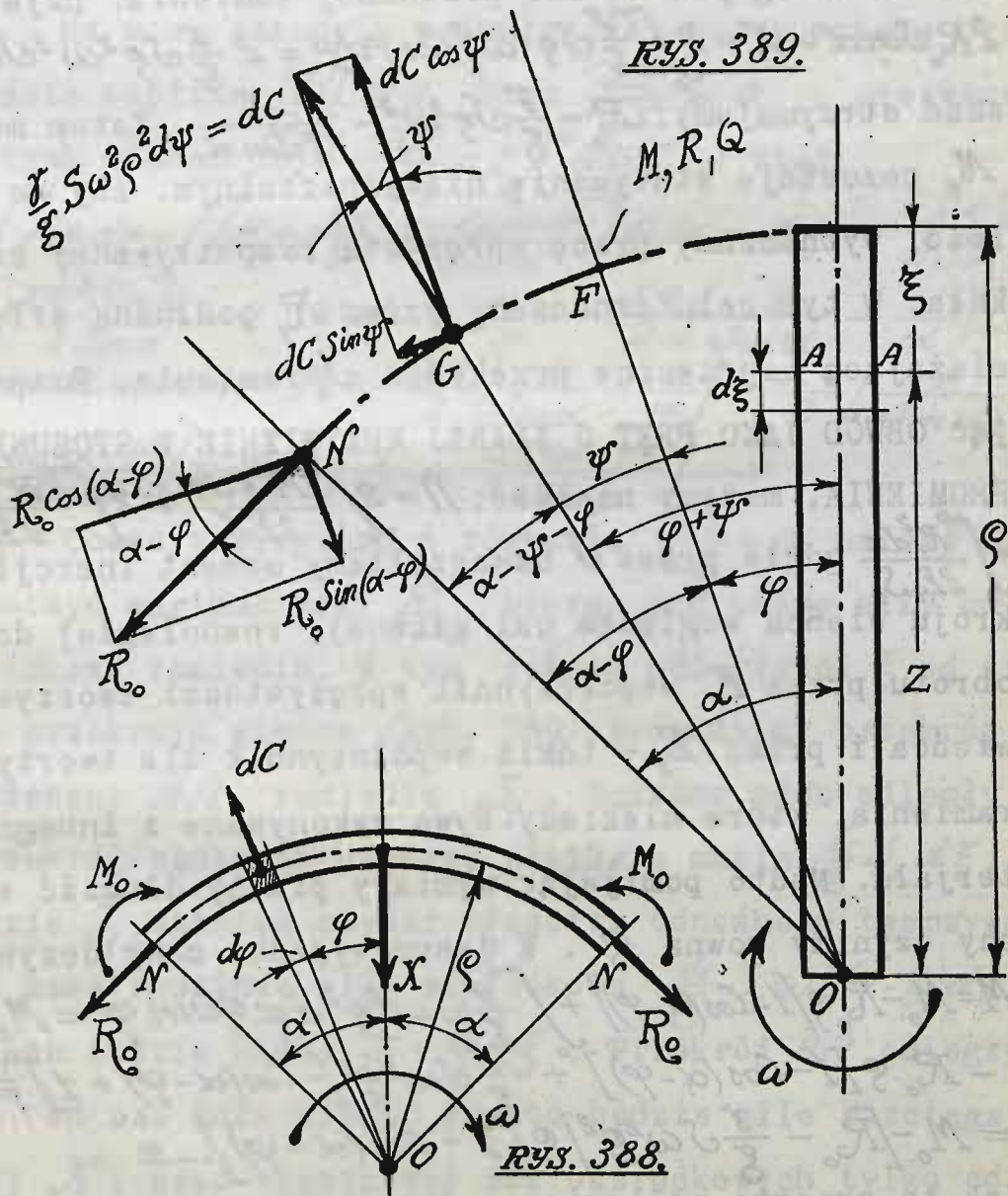
nadto $\sin \beta = \frac{\rho}{L} \sin \omega t$. Zazwyczaj w ustrojach korbowych stosunek $\rho:L = \frac{1}{4} \div \frac{1}{6}$, a najczęściej $L = 5\rho$. Dla tych wartości kąt β jest nader nieznaczny, skrajna jego wartość wynosi bowiem odpowiednio $14^{\circ}30'$, $11^{\circ}30'$ i $9^{\circ}30'$ zatem wartości skrajne najmniejsze $\cos \beta$ będą $0,968$, $0,980$ i $0,986$ a więc prawie równe jedności, możemy przeto napisać wprost $x = \rho \cos \omega t$, $y = \frac{\xi \rho}{L} \sin \omega t$, co odpowiada przybliżeniu $\beta = 0$. A zatem przyspieszenie $\frac{d^2 x}{dt^2} = x'' = -\rho \omega^2 \cos \omega t$ winno być uważane jako równoległe do osi podłużnej korbowodu, a przyspieszenie $y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{\xi \rho}{L} \omega^2 \sin \omega t$, panujące w punkcie M korbowodu, jako doń prostopadłe. Przyspiesze-

nia x'' dają NAPRĘŻENIA RUCHU PODŁUŻNE uprzednie rozpatrywane, natomiast przyspieszenia y'' powodują NAPRĘŻENIA RUCHU GNĄCE. Aby je wyznaczyć rozpatrujemy w odległości ξ od prawego końca korbowodu dwa sąsiednie przekroje poprzeczne, tworzące płytkę, znikomo grubą. Masa jej będzie $\frac{\rho}{g} S d\xi$, a odnośna siła bezwładności $-\frac{\rho}{g} S d\xi \frac{\xi^2}{L} \omega^2 \sin \omega t$. Skrajną wartość tej siły otrzymujemy gdy $\theta = \omega t = \frac{\pi}{2}$, wtedy mamy bowiem $-\frac{\rho}{g} S \omega^2 \frac{\xi^2}{L} d\xi$ dla punktu M . Inaczej mówiąc korbowód możemy rozpatrywać jako belkę opartą obustronnie a obciążoną na jednostkę długości siłą: $-\frac{\rho}{g} S \omega^2 \frac{\xi^2}{L}$ zmieniającą się linjowo według prawa trójkąta od 0 dla skrajnego punktu K do $-\frac{\rho}{g} S \omega^2 \frac{L^2}{3}$ dla drugiego końca korbowodu N . Odnośny wykres obciążenia podaje RYS. 387 w założeniu stałego przekroju poprzecznego S korbowodu. Chcąc wyznaczyć skrajną wartość momentu gnącego określamy odpór K . W tym celu wypisujemy wartość całkowitego obciążenia belki w postaci $Q = \frac{1}{2} L \times \left[-\frac{\rho}{g} S \omega^2 \xi \right] = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \xi L$. Stąd bezpośrednio $K = \frac{1}{3} Q = -\frac{1}{6} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \xi L$ jak to zresztą najlepiej widać z rysunku. W podobny sposób obciążenie prawej części korbowodu MK będzie $q = \frac{1}{2} \xi \times \left[-\frac{\rho}{g} S \omega^2 \frac{\xi}{L} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \frac{\xi^2}{L}$ a zatem obu tych sił K i q względem środka przekroju poprzecznego M będzie: $M = K \xi + q \frac{\xi}{3} = \frac{1}{6} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \xi L \xi - \frac{1}{6} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \frac{\xi^3}{L} = \frac{1}{6} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \xi \left[L \xi - \frac{\xi^2}{L} \right]$. Czyniąc równą zeru pochodną $\frac{dM}{d\xi} = \frac{1}{6} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \left[L - 2 \frac{\xi}{L} \right] = 0$ otrzymujemy dla $\xi = \frac{L}{\sqrt{3}}$ skrajną wartość momentu gnącego $M_{MAX} = \frac{1}{6} \frac{\rho}{g} S \omega^2 \xi \left[\frac{L^2}{\sqrt{3}} - \frac{L^2}{3\sqrt{3}} \right] = \frac{S \omega^2 \rho}{9\sqrt{3}} \frac{L^2}{g}$.

która da najwyższe obciążenie ruchu gnące - przyna-
leżne do danego wypadku. Wobec niezbyt ścisłych zało-
żeń i uproszczeń jakie czyniliśmy, wzór tylko co wy-
prowadzony może być również użyty w wypadku zmienne-
go przekroju - należy jeno miasto S podstawić śred-
nią jego wartość. Z kolei jako typowy przykład wystę-
powania łącznego naprężeń obu rodzajów wyżej wyznaczo-
nych rozpatrzmy:

§ 5. NAPRĘŻENIA KÓŁ ZAMACHOWYCH. Jak to już
uprzednio zaznaczyliśmy RAMIONA HAMUJĄC ROZSZERZANIE
SIĘ PIERŚCIENIA WIRUJĄCEGO POWODUJĄ W NIM DODATKOWE
NAPRĘŻENIA GNĄCE. Pochodzi to stąd, iż pierścień swo-
bodny znacznie się mocniej rozszerza - pociągając za
sobą ramiona z siłą X (RYS. 388). Poprowadźmy ζ prze-
krojów średnicowych płaskich przecinających wieniec
pośrodku pomiędzy ramionami. Wobec zupełnej symetrii
obciążeń koła swobodnie wirującego naprężenia tylko
co otrzymanych przekrojów wienca, dają wypadkową siłę
podłużną R_0 prostopadłą do przekroju a przyłożoną do-
jego środka masy oraz moment M_0 leżący w płaszczyźnie
przekroju a równoległy do osi obrotu koła zamachowego.
Nadto siła tnąca przekroju musi być równa zeru, ina-
czej bowiem musiałaby być skrępowana odśrodkowo dla obu
przekrojów jednej połowy koła i dośrodkowo dla obu
przekrojów drugiej połowy, co psułoby symetrię obciąże-
nia. Ostatecznie więc $Q_0 = 0$. Prócz tylko co wymie-
nionych sił R_0 i M_0 wieniec ulega działaniu ściągające-

mu X ramienia - oraz masowym siłom odśrodkowym. Oznaczmy przez S poprzeczny stały przekrój wienca, przez g promień jego środka ciężkości, przez φ kąt pomiędzy osią rozpatrywanej szprychy, a płaszczyzną tego przekroju przechodzącą przez oś obrotową koła. Prowadząc



przekrój sąsiedni otrzymamy wycinek wienca odpowiadający różniczce kąta środkowego $d\varphi$ - o masie $\frac{\gamma}{g} S g d\varphi$, gdzie przez γ oznaczyliśmy ciężar właściwy tworzywa

wieńca. Ta masa da siłę odśrodkową $dC = \frac{r}{g} \varrho \omega^2 d\varphi$ o której tylko co była mowa. Wobec zupełnej symetrii obciążenia dwa równania statyki wypełniają się same przez się, pozostaje przeto jedyny warunek równowagi sił równoległych do osi podłużnej ramienia. Daje on:

$$2R_0 \sin \alpha + X = 2 \int_0^{\alpha} \frac{r}{g} \varrho \omega^2 \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{r}{g} \varrho \omega^2 \sin \alpha$$

skąd otrzymujemy: $R_0 = \frac{r}{g} \varrho \omega^2 - \frac{X}{2 \sin \alpha}$. Zatem moment M_0 pozostaje statycznie niewyznaczalnym. Aby go znaleźć, wyznaczamy pracę sprężystą rozpatrywanej części koła. W tym celu oznaczamy przez R_1 podłużną siłę obciążającą poprzeczne przekroje S_1 ramienia. Rozpatrując OBWÓD JAKO PRĘT O SŁABEJ KRZYWIZNIE W STOSUNKU DO PROMIENIA, możemy napisać: $\Pi = 2 \int_0^{\alpha} \frac{M^2 \varrho d\varphi}{2EJ} + 2 \int_0^{\alpha} \frac{R^2 \varrho d\varphi}{2ES} + \int_0^{\varrho} \frac{R_1^2 dz}{2E_1 S_1}$ gdzie przez J oznaczyliśmy moment inercji przekroju wienca względem osi głównej, równoległej do osi obrotu przez E współczynnik sprężystości tworzywa wienca i przez E_1 — także współczynnik dla tworzywa ramienia, które niekiedy bywa wykonywane z innego materiału. Nadto pomijając wymiary piasty długość szprychy czynimy równą ϱ . W danym wypadku mamy oczywiście

$$M = M_0 - R_0 \varrho [1 - \cos(\alpha - \varphi)] + \int_0^{\alpha - \varphi} \frac{r}{g} \varrho \omega^2 \varrho^2 d\varphi \cdot \varrho \sin \varphi = M_0 - R_0 \varrho [1 - \cos(\alpha - \varphi)] + \frac{r}{g} \varrho \omega^2 \varrho^2 [-\cos(\alpha - \varphi) + 1] = M_0 - [R_0 - \frac{r}{g} \varrho \omega^2 \varrho^2] \varrho [1 - \cos(\alpha - \varphi)].$$

Jak to zresztą najlepiej z rysunku spostrzec się daje.

Na mocy poprzednio otrzymanego wzoru dla R_0 możemy nadto napisać ostatecznie $M = M_0 + \frac{X \varrho}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$.

Podobnież mamy: $R = R_0 \cos(\alpha - \varphi) + \int_0^{\alpha - \varphi} \frac{r}{g} \varrho \omega^2 \varrho^2 d\varphi \cdot \sin \varphi =$

$$\begin{aligned}
 &= R_0 \cos(\alpha - \varphi) + \frac{\gamma}{g} \omega^2 \varrho^2 [-\cos(\alpha - \varphi) + 1] = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \varrho^2 + \\
 &+ [R_0 - \frac{\gamma}{g} \omega^2 \varrho^2] \cos(\alpha - \varphi) = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \varrho^2 - \frac{X}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \cdot \omega \\
 Q &= R_0 \sin(\alpha - \varphi) - \int_0^{\alpha - \varphi} \frac{\gamma}{g} \omega^2 \varrho^2 d\varphi \cos \varphi = R_0 \sin(\alpha - \varphi) - \frac{\gamma}{g} \omega^2 \varrho^2 \cdot \\
 \cdot \sin(\alpha - \varphi) &= [R_0 - \frac{\gamma}{g} \omega^2 \varrho^2] \sin(\alpha - \varphi) = -\frac{X}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \cdot \omega
 \end{aligned}$$

Na mocy zasady o najmniejszej pracy możemy oczywiście napisać $\frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = 0$ oraz $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0$; pierwsze z tych równań daje $\frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = 2 \int_0^{\alpha} \frac{M_0 d\varphi}{EJ} = 0$ stąd:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\alpha} M_0 d\varphi &= \int_0^{\alpha} [M_0 + \frac{X\varrho}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}] \varrho d\varphi = M_0 \varrho \alpha + \frac{X\varrho^2 \alpha}{2 \sin \alpha} - \\
 - \frac{X\varrho^2 \sin \alpha}{2 \sin \alpha} &= 0 \quad \text{Stąd:} \quad M_0 = -\frac{X\varrho}{2} \left[\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right] \cdot \omega \\
 \text{I ostatecznie: } M &= -\frac{X\varrho}{2} \left[\frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right] + \frac{X\varrho}{2} \left[\frac{1}{\sin \alpha} - \right. \\
 &\left. - \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \right] = -\frac{X\varrho}{2} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \right] \cdot \omega
 \end{aligned}$$

Chcąc skorzystać z równania $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0$, należy wyznaczyć wartość siły R_1 , biorąc pod uwagę siły odśrodkowe ramienia. W tym celu w odległości ξ od środka przekroju wienca /RYS. 389/ prowadzimy przekrój poprzeczny AA ramienia S_1 . Znikomo odien odległy przekrój sąsiedni utworzy płytkę o masie $\frac{\gamma}{g} S_1 d\xi$, gdzie γ_1 oznacza ciężar właściwy odpowiedniego tworzywa. Ta masa rozwinię siłę odśrodkową $\frac{\gamma_1}{g} S_1 \omega^2 (\varrho - \xi) d\xi$. Niech będzie nadto $Z = \varrho - \xi$. Przekrój AA odległy o Z od osi koła ulegać przeto będzie sile rozciągającej X , oraz wypadkowej sił odśrodkowych tylko co wyznaczonych a przynależnych do wszystkich płytek górnej części szprychy. Możemy przeto napisać, że siła podłużna tego przekroju $R_1 = X + \int_0^{\xi} \frac{\gamma_1}{g} S_1 \omega^2 (\varrho - \xi) d\xi =$

$$= X - \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} S_1 \omega^2 [(\varrho - \xi)^2 - \varrho^2] = X + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} S_1 \omega^2 [\varrho^2 - Z^2]. \sim$$

Ostatecznie więc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X} &= 2 \int_0^\alpha \frac{M \sin \varphi}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial X} + 2 \int_0^\alpha \frac{R \sin \varphi}{E_1 S} \cdot \frac{\partial R}{\partial X} + \\ &+ \int_0^\varrho \frac{R_1 \sin \varphi}{E_1 S_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial X} = 0 = \int_0^\alpha \frac{X \varrho^3}{2} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \right] \frac{d\varphi}{EJ} - \int_0^\alpha \left[\frac{\gamma}{g} S \omega^2 \varrho^2 - \right. \\ &- \left. \frac{X \cos(\alpha - \varphi)}{2 \sin \alpha} \right] \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \varrho \frac{d\varphi}{E_1 S} + \int_0^\varrho \left[X + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} S_1 \omega^2 (\varrho^2 - Z^2) \right] \frac{dz}{E_1 S_1} = \\ &= \frac{X \varrho^3}{2 EJ} \int_0^\alpha \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2 \cos(\alpha - \varphi)}{\alpha \sin \alpha} + \frac{\cos^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2 \alpha} \right] d\varphi - \frac{\gamma}{g} \frac{S \omega^2 \varrho^3}{E_1 S \sin \alpha} \int_0^\alpha \cos(\alpha - \varphi) d\varphi + \\ &+ \frac{X \varrho}{2 E_1 S \sin^2 \alpha} \int_0^\alpha \cos^2(\alpha - \varphi) d\varphi + \frac{X \varrho}{E_1 S_1} + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} S_1 \omega^2 \left[\varrho^3 - \frac{\varrho^3}{3} \right] \frac{1}{E_1 S_1} = \\ &= \frac{X \varrho^3}{2 EJ} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2 \sin^2 \alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{4 \sin^2 \alpha} \right) - \frac{\gamma}{g} \frac{S \omega^2 \varrho^3}{E_1 S} + \\ &+ \frac{X \varrho}{2 E_1 S \sin^2 \alpha} \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right] + \frac{X \varrho}{E_1 S_1} + \frac{1}{3} \frac{\gamma}{g} S_1 \omega^2 \frac{\varrho^3}{E_1 S_1} = 0. \sim \end{aligned}$$

Stąd mamy.

$$X = \frac{\omega^2 \varrho^2}{g} \cdot \frac{\gamma - \frac{1}{3} \gamma \frac{E}{E_1}}{\frac{\sin 2\alpha + 2\alpha}{8 \sin^2 \alpha} \left[\frac{1}{S} + \frac{\varrho^2}{J} \right] - \frac{\varrho^2}{2 \alpha J} + \frac{E}{E_1 S_1}}. \sim$$

Dla ułatwienia wyliczeń podajemy tu tablicę wartości

$$f = \frac{\sin 2\theta + 2\alpha}{8 \sin^2 \alpha} \text{ dla różnych ilości ramion } i:$$

TABLICA SIĘDEMNASTA.

$i =$	4	6	8	10	12
$2\alpha =$	1,5707963	1,0471976	0,7853982	0,6283185	0,5235988
$f =$	0,6427004	0,9566222	1,2739308	1,5918995	1,9100612

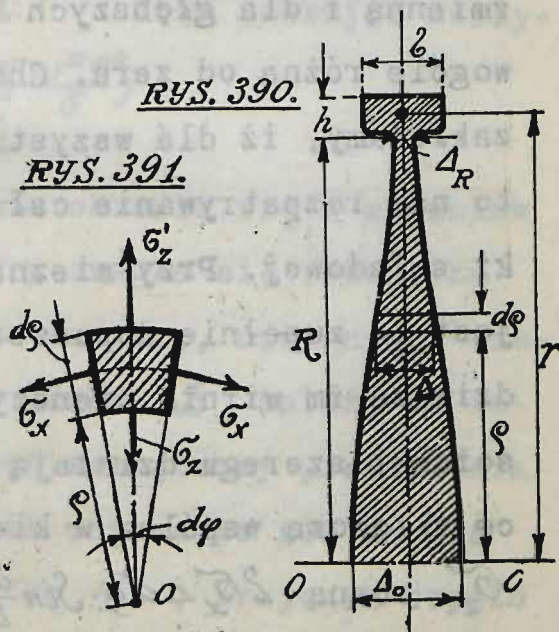
Tylko co otrzymany wzór można, również stosować w wypadku zmiennego przekroju S_1 ramienia, biorąc średnią wartość przekroju.

Cała powyższa teoria wyprowadzona była w założeniu stałej katowej szybkości ω koła zamachowego. Za-

zwyczaj jednak przyspieszenie $\Omega = \frac{d\omega}{dt} \neq 0$. Wywołuje ono dodatkowe naprężenia ruchu, które można wyznaczyć w podobny sposób, nadto uwzględnić należy wszelkie zgrubienia wieńca, w których tkwią śruby i kliny łączące. Wszystko to przekracza ramy naszego kursu, stanowiąc treść CZĘŚCI MASZYN. Pełną teorię podaje TOLLE.

Naprężenia gnące powstające na tle moment. M wzrastają wraz z $\omega^2 \varrho^2$, a więc proporcjonalnie do kwadratu szybkości linjowej środka przekroju wieńca, rosną więc nader chyżo wraz z liczbą obrotów koła zamachowego. Winne temu ramiona - to też koło szybko wirujące należy budować bez ramion w postaci tarcz pełnych. Z kolei przeto poznamy:

§ 6. NAPRĘŻENIA WIRNIKÓW, czyli TARCZ SZYBKOWIRUJĄCYCH. Weźmy pod uwagę wirnik /RYS. 390/ jaki zazwyczaj pracuje w turbinach de LAVAL A. Oś obrotową oznaczmy przez OO , przez ω szybkość kątową wirowania stałą. W odległości ϱ od osi wirowania oznaczamy grubość wirnika przez Δ i wycinamy myślowo kostkę prowadząc dwie powierzchnie cylindryczne o promieniach ϱ



i $\varphi + d\varphi$ oraz dwie środkowe płaszczyzny przekroju pod kątem $d\varphi$ przechodzące przez oś obrotu. Wytworzona w ten sposób kostka będzie miała objętość $d\varphi \cdot \varphi d\varphi \cdot \Delta$ i masę $\frac{\gamma}{g} \Delta \varphi d\varphi$. Rozwinie ona siłę odśrodkową $\frac{\gamma}{g} \Delta \varphi^2 d\varphi \omega^2$, która wywrze nacisk na górne włókna wirnika. Oznaczmy naprężenie panujące na dośrodkowej ścianie wyodrębnionej kostki przez σ_x , na odśrodkowej będzie więc σ_x' . Na bocznych ściankach ze względu na symetrię obciążenia będziemy mieli σ_x , wreszcie na ściankach zewnętrznych kostki $\sigma_y = 0$ tu bowiem nie ma obciążenia zewnętrznego (RYS. 391). Wobec skończonej wartości wymiaru Δ powinniśmy właściwiej wziąć pod uwagę cały szereg kostek przebijający na wylot wirnik w punkcie rozpatrywanym, a wtedy $\sigma_y = 0$ miałyby miejsce jeno dla ścianek zewnętrznych obu skrajnych kostek szeregu, dla pozostałych σ_y miałyby wartość zmienną i dla głębszych kostek szeregu dość znacznie wogóle różną od zera. Chcąc jednak zadanie uprościć zakładamy, iż dla wszystkich kostek $\sigma_y = 0$, umożliwia to nam rozpatrywanie całego szeregu miasto jednej kostki składowej. Przy nieznacznych grubościach wirnika jest to zupełnie dopuszczalne i niewątpliwie tym prawdziwsze im wirnik cieńszy. W tym założeniu na boczne ścianki szeregu działają dwie równe siły $\sigma_x \Delta d\varphi$ dające składową wspólną w kierunku działania naprężeń σ_x i σ_x' równą $2\sigma_x \Delta d\varphi \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} \cong \sigma_x \Delta d\varphi d\varphi$. Na dośrodkową ściankę kostki działa siła $\sigma_z \Delta \varphi d\varphi$, wreszcie

na ściankę odśrodkową siła $\sigma_z \Delta \rho d\varphi + d[\sigma_z \Delta \rho d\varphi]$

Wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej możemy wypisać równania statyki. Dwa z nich wypełniają się same przez się na tle symetrii obciążenia - pozostałe dają warunek równowagi sił rzuconych na kierunek naprężeń

σ_z i σ_z' . To równanie daje:

$$\begin{aligned} & \sigma_z \Delta \rho d\varphi + d[\sigma_z \Delta \rho d\varphi - \sigma_z \Delta \rho d\varphi - \\ & - \sigma_x \Delta d\rho d\varphi + \frac{r}{g} \Delta \rho^2 d\rho d\varphi \omega^2 = 0 \\ & d[\sigma_z \Delta \rho] - \sigma_x \Delta d\rho + \frac{r}{g} \Delta \rho^2 \omega^2 d\rho = 0 \end{aligned}$$

skąd:

Tyle nam daje statyka. Dalsze wyniki zależą od kształtu wirnika. Weźmy pod uwagę przedewszystkiem

A. WIRNIK O STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI. Załóżmy $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, a będziemy mieli wirnik o tworzywie jednakowo nateżonem w kierunku promienia i prostopadłym do niego.

Wtedy równanie da nam:

$$\frac{d}{d\rho} [\Delta \rho] - \Delta + \frac{r}{g} \frac{\Delta \rho^2 \omega^2}{\sigma} = \rho \frac{d\Delta}{d\rho} + \Delta - \Delta + \frac{r}{g} \frac{\Delta \rho^2 \omega^2}{\sigma} = 0$$

Skąd: $\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\rho} = - \frac{r}{g} \frac{\omega^2 \rho}{\sigma}$. Stąd całkując otrzymamy:

$$\Delta = C e^{-\frac{1}{2} \frac{r \omega^2 \rho^2}{g \sigma}}$$

Zazwyczaj stała całkowania określa się z warunków wykonania wirnika, który u góry zagnął się rozszerza

/RYS. 390/ tworząc obwód nieco szerszy, dźwigający wieńiec łopatek. Szerokość tego obwodu B zależy od rodzaju łopatek. Oznaczmy promień wewnętrzny pierścienia obwodu przez R - tutaj wirnik rozszerza się zagnął przechodząc od grubości Δ_R do B , przyczem czysto

praktyczne względy stanowią o właściwej dopuszczalnej wartości stosunku $\delta:\Delta_R$

zatem

$$\Delta_R = C e^{-\frac{r}{s} \frac{\omega^2 R^2}{\delta}}$$

stąd dzieląc otrzymamy:

$$\Delta = \Delta_R e^{\frac{r}{s} \frac{\omega^2}{\delta} [R^2 - \rho^2]}$$

Tego rodzaju wirniki zazwyczaj są pełne, a więc nie posiadają otworu środkowego. Czyniąc przeto $\rho = 0$ otrzymamy

ze wzoru ich grubość środkową:

$$\Delta_0 = \Delta_R e^{\frac{1}{2} \frac{r}{s} \frac{\omega^2 R^2}{\delta}}$$

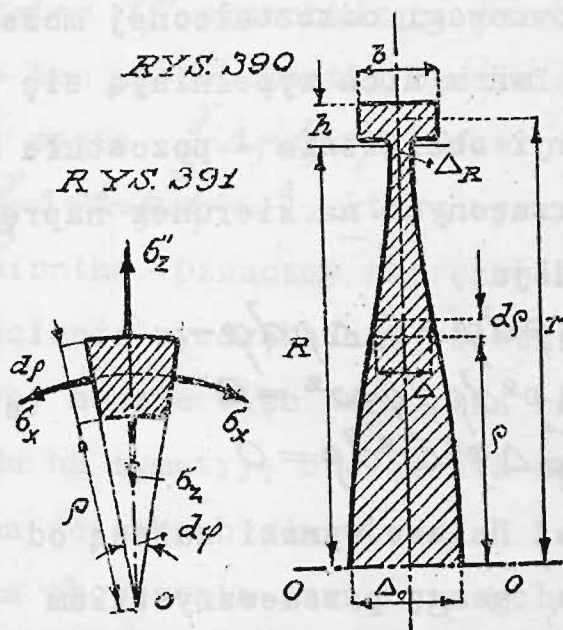
która przy znacznych szybkościach obrotowych $\omega R = v$ wirnika przestaje być "nieznaczną". Dobrze o tem pamiętać należy, w ten sposób bowiem stajemy w sprzeczności jaskrawej z założeniem zasadniczym i wzory tracą swą wartość.

Wobec równości naprężeń $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ otrzymujemy wydłużenia główne $\epsilon_x = \epsilon_y = \alpha(\sigma - \frac{\sigma}{m}) = \frac{\sigma}{E} \frac{m-1}{m} = \epsilon$ jednakowe dla wszystkich kostek wirnika. Należy przeto obliczać wymiary wirnika, biorąc pod uwagę naprężenie zastępcze: $E\epsilon = \sigma \frac{m-1}{m} = K_r$

Wobec stałej wartości wydłużeń jednostkowych ϵ wirnik rozszerza się jednostajnie w kierunku promienia, a ujawniając przyrost $\Delta R = R\epsilon = \frac{m-1}{Em} \sigma R$. To

RYS. 390

RYS. 391



samo wydłużenie musi dać również i pierścień zewnętrzny, aby się wirnik mógł rozszerzać swobodnie. Zazwyczaj grubość h pierścienia jest nader mała w stosunku do jego średniego promienia $r = R + \frac{h}{2}$, możemy więc uważać jako wirujący wazki pierścień uprzednio już przez nas badany. Pierścień tego rodzaju pracuje wyłącznie i li tylko na rozciąganie, każdy bowiem jego przekrój poprzeczny obciąża siła podłużna R_z , jak to już zresztą udowodniliśmy poprzednio. Wyodrębniwszy myślowo dwa jego przekroje sąsiednie, płaskie pochyłone pod kątem $d\varphi$, a tworzące kostkę znikomą o objętości $rd\varphi \times b \times h$. Boczne ścianki tej kostki są pozbawione obciążenia, na środki obu przekrojów działają siły R_z rozciągające; na ściankę wewnętrzną wkleśłą wywiera nacisk wirnik z siłą $6\Delta_R R d\varphi \approx 6\Delta_R (r - \frac{h}{2}) d\varphi \approx 6\Delta_R r d\varphi$; zewnętrzna wypukła ścianka dźwiga na sobie łopatki, podlega więc jarzmu siły:

$6\bar{b}(r + \frac{h}{2}) d\varphi \approx 6\bar{b} r d\varphi$ równomiernie rozłożonej po całym obwodzie w postaci ciśnienia $\bar{\sigma}'$ odśrodkowego, wreszcie masa $\frac{\gamma}{g} b h r d\varphi$ kostki rozwija siłę odśrodkową $\frac{\gamma}{g} \bar{b} h r^2 \omega^2 d\varphi$. Wszystkie te siły

równoważą się wzajemnie dając jedyne równanie statyki

$$-2R_z \sin \frac{d\varphi}{2} - 6\Delta_R r d\varphi + 6\bar{b} r d\varphi + \frac{\gamma}{g} b h r^2 \omega^2 d\varphi = 0$$

w którym siły odśrodkowe znakujemy dodatnio a dośrodkowe ujemnie. Napięcia przekrojów poprzecznych będą

tu $\bar{\tau}_z = R_z$ i $\bar{\sigma} = R_z : b h$ w założeniu jedno-

stajnego rozkładu, odpowiadającego jak wiemy mniej wię-

cej warunkom istotnym dla wąskich pierścieni o nieznacznych wymiarach h , czyli tak zwanych pierścieni wąskich. Stąd

$$-2t_z b h \frac{d\varphi}{2} - 6\Delta_R r d\varphi + 6'b r d\varphi + \frac{\gamma}{5} b h r^2 \omega^2 d\varphi = 0$$

$$\text{co daje } t_z = \frac{\gamma}{5} r^2 \omega^2 + 6' \frac{r}{h} - 6 \frac{\Delta_R}{b} \frac{r}{h}$$

To naprężenie rozciągające da wydłużenie jednostkowe $\varepsilon = \frac{t_z}{E}$ a promień pierścienia średni r ujaw-

ni przyrost $\Delta r = \varepsilon r = \frac{r}{E} \left[\frac{\gamma}{5} r^2 \omega^2 + 6' \frac{r}{h} - 6 \frac{\Delta_R r}{b h} \right]$ musimy zatem mieć zgodnie z tem, cośmy powie-

dzieli wyżej $\Delta r = \Delta R$ to jest $\frac{r}{E} \left[\frac{\gamma}{5} r^2 \omega^2 + 6' \frac{r}{h} - 6 \frac{\Delta_R r}{b h} \right] = \frac{m-1}{m} 6 \frac{R}{b} = K_r \frac{R}{E} = K_r \frac{r - \frac{h}{2}}{E} \approx K_r \frac{r}{E}$

Stąd ostatecznie $\frac{\gamma}{5} r^2 \omega^2 + 6' \frac{r}{h} - 6 \frac{\Delta_R r}{b h} = K_r$ co da równanie

$$h = \frac{\frac{6\Delta_R}{b} - 6'}{\frac{\gamma}{5} r^2 \omega^2 - K_r} r$$

uzależniające h od b . W ten sposób możemy obliczyć wszystkie ważniejsze wymiary wirnika. Tylko co podany wzór oparty jest jednak na założeniu milcząco wykluczającym pojawianie się naprężeń dodatkowych w przekroju tyczącym wirnika z pierścieniem, a niewątpliwie istniejących wobec nagłego uskoku grubości. Należy przeto owo przejście od Δ_R do b złagodzić zaokrągleniami odpowiedniami, inaczej bowiem wzory tu wyprowadzone będą w sprzeczności z warunkami zachodzącymi istotnie.

Z kolei bierzemy pod uwagę

B. WIRNIK O STAŁEJ GRUBOŚCI.

Czyniąc we wzorze zasadniczym $\Delta =$ stałej otrzymamy po podzieleniu przez $\rho \Delta d\rho$: $\frac{d\delta_x}{d\rho} + \frac{1}{\rho} (\delta_x - \delta_x)'$

$+ \frac{\gamma}{g} \omega^2 \rho = 0$. Podobnie jak to czyniliśmy przy rozpatrywaniu naczyń walcowych grubościennych, możemy i tu, wobec $\delta y = 0$ napisać, zachowując odnośne znakowania $\mathcal{E}_x = \alpha \left[\delta_x - \frac{\delta_z}{m} \right] = \frac{u}{\rho}$; $\mathcal{E}_y = \alpha \left[-\frac{\delta_x + \delta_z}{m} \right]$

$\mathcal{E}_z = \alpha \left[\delta_z - \frac{\delta_x}{m} \right] = \frac{du}{d\rho}$. Stąd bezpośrednio możemy otrzymać

$$\delta_x = \frac{Em}{m^2-1} \left[\frac{du}{d\rho} + m \frac{u}{\rho} \right]; \quad \delta_z = \frac{Em}{m^2-1} \left[m \frac{du}{d\rho} + \frac{u}{\rho} \right]$$

i podstawiając w równanie wyżej otrzymane:

$$\frac{Em}{m^2-1} \left[m \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} \right] + \frac{Em}{m^2-1} \left[\frac{m}{\rho} \frac{du}{d\rho} + \frac{u}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{mu}{\rho^2} \right] + \frac{\gamma}{g} \omega^2 \rho = 0$$

Oznaczmy przez $q = \frac{\gamma}{g} \frac{m^2-1}{Em^2} \omega^2$ a otrzymamy równanie $\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \frac{u}{\rho^2} + q\rho = 0$, którego całka

$$u = -\frac{1}{8} q \rho^3 + \frac{A}{2} \rho + \frac{B}{\rho}$$

Stąd mamy: $\delta_x = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{m+3}{8} q \rho^2 + \frac{m+1}{2} A + \frac{m-1}{\rho^2} B \right]$

$$\delta_z = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} q \rho^2 + \frac{m+1}{2} A - \frac{m-1}{\rho^2} B \right]$$

Aby wyznaczyć stałe całkowania rozpatrujemy ogólny wypadek wirnika nasadzonego pod ciśnieniem lub na gorąco na wał, a więc pozostającego pod ciśnieniem równomiernie obciążającym obwód wirnika wewnętrzny.

Nadto wirniki zazwyczaj dźwigają na obwodzie zewnętrznym wieniec łopatek. Siła odśrodkowa łopatek stanowi obciążenie rozciągające wirnika, równomiernie na obwodzie zewnętrznym rozłożone w postaci ciśnienia δ .

Oznaczmy przez r promień wewnętrzny, a przez R promień zewnętrzny wirnika. Warunki równowagi odkształco-nej wymagają aby:

$$[\delta_z]_{\rho=r} = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} q r^2 + \frac{m+1}{2} A - \frac{m-1}{r^2} B \right] = -\delta_0$$

$$[\delta_z]_{\rho=R} = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} q R^2 + \frac{m+1}{2} A - \frac{m-1}{R^2} B \right] = \delta$$

Stąd mamy

$$A = \frac{3m+1}{4(m+1)} q(R^2 + r^2) + \frac{2(m^2-1)}{Em(m+1)} \frac{6R^2 + 6_0 r^2}{R^2 - r^2}$$

$$B = \frac{3m+1}{8m-1} qR^2 r^2 + \frac{m^2-1}{Em(m-1)} \frac{6 + 6_0}{R^2 r^2} R^2 r^2 \quad \text{co daje}$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_x &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left[\frac{R^2 + r^2}{R^2 r^2} + \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] - \left(1 + \frac{3}{m}\right) \rho^2 \right\} + \\ &+ \frac{6R^2 + 6_0 r^2 (6 + 6_0)}{R^2 - r^2} \frac{R^2 r^2}{\rho^2}; \quad \bar{b}_z = \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ R^2 + r^2 - \frac{R^2 r^2}{\rho^2} - \right. \\ &\left. - \rho^2 \right\} \left(3 + \frac{1}{m}\right) + \frac{6R^2 + 6_0 r^2 - (6 + 6_0) \frac{R^2 r^2}{\rho^2}}{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

A zatem wydłużenia:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_x}{L} &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (R^2 + r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \rho^2 \right\} + \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (6R^2 + 6_0 r^2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (6 + 6_0) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] : (R^2 - r^2) \\ \frac{\epsilon_y}{L} &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ -\frac{2}{m} \left(3 + \frac{1}{m}\right) (R^2 + r^2) + \frac{4}{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \rho^2 \right\} - \\ &\quad - 2 \frac{6R^2 + 6_0 r^2}{m(R^2 - r^2)} \\ \frac{\epsilon_z}{L} &= \frac{\delta \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (R^2 + r^2) - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \rho^2 \right\} + \left[\left(1 - \frac{1}{m}\right) (6R^2 + 6_0 r^2) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{1}{m}\right) (6 + 6_0) \frac{R^2 r^2}{\rho^2} \right] : (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Z tych wzorów odrazu spostrzec się daje bezwzględna wartość $\frac{\epsilon_x}{L}$ jest większa od pozostałych. Należy przeto przy obliczaniu wirnika uczynić $\left[\frac{\epsilon_x}{L} \right]_{\max} = \kappa_r$ mamy tu bowiem niewątpliwie do czynienia z NAPRĘŻENIA-MI ZASTĘPCZEMI rozciągającymi. Ponieważ skrajna wartość $\frac{\epsilon_x}{L}$ niewątpliwie zachodzi dla wewnętrznego obwodu, gdzie $\rho = r$ przeto dla wirników wytoczonych po środku mamy:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\epsilon_x}{L} \right]_m &= \left[\frac{\epsilon_x}{L} \right]_{\rho=r} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r^2 \right\} + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (6R^2 + 6_0 r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (6 + 6_0) \cdot R^2}{R^2 - r^2} \end{aligned}$$

podczas gdy na obwodzie zewnętrznym, gdzie $\rho = R$ mamy

jeno:

$$\left[\frac{\mathcal{E}_x}{L} \right]_{\rho=r} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m} \right) r^2 + \left(1 - \frac{1}{m} \right) R^2 \right\} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m} \right) (6R^2 + 6_0 r^2) + \left(1 + \frac{1}{m} \right) (6 + 6_0) r^2}{R^2 - r^2}$$

Gdy otwór środkowy jest nieznaczny $r=0$, zatem dla przedziurawionego środkowo wirnika będziemy mieli dla ścianek owego nieznacznego otworu środkowego:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathcal{E}_x}{L} \right]_{\rho=r=0} &= \frac{\delta \omega^2}{4g} \left(3 + \frac{1}{m} \right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m} \right) 6 + \left(1 + \frac{1}{m} \right) (6 + 6_0) = \\ &= 0,825 \frac{\delta}{g} R^2 \omega^2 + 26 + 1,36. \end{aligned}$$

podczas gdy dla obwodu zewnętrznego:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathcal{E}_x}{L} \right]_{\rho=R} &= \frac{\delta \omega^2}{4g} \left(1 - \frac{1}{m} \right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m} \right) 6 = \\ &= 0,175 \frac{\delta}{g} R^2 \omega^2 + 0,76. \end{aligned}$$

przyczem założyliśmy $m = \frac{10}{3}$

I tu zatem obwód wewnętrzny jest najbardziej naprężony.

Wogóle więc wirniki o stałej grubości środkowo wytłoczone są najbardziej naprężone na obwodzie wewnętrznym. To nam nasuwa myśl o wirniku pełnym bez otworu wewnętrznego. Dla takiego wirnika należy stałe całkowania AB wyznaczyć ponownie. Wykonamy to z łatwością, zważywszy, że w środku tarczy nieprzedziurawionej musi być $\delta_x = \delta_y$ ze względu na zupełną symetrię obciążenia tego punktu. Nadto środek tarczy jako ośrodek ruchu obrotowego nie zmienia swego położenia podczas odkształcania się wirnika, musi być przeto $[u]_{\rho=0} = 0$. Oba te warunki dają jeden i ten sam wynik - wymagają bowiem, aby $B = 0$, jak to z łatwością możemy zauważyć rozpatrując wzory dla δ_x i

σ_y . Nadto na zewnętrznym obwodzie pełnego wirnika panuje obciążenie σ zatem:

$$[\sigma_x]_{\rho=R} = \frac{Em}{m^2-1} \left[-\frac{3m+1}{8} \rho R^2 + \frac{m+1}{2} A \right] = \sigma \text{ czyli:}$$

$$A = \frac{3m+1}{4(m+1)} \rho R^2 + 2 \frac{m^2-1}{Em(m+1)} \sigma \text{ stąd mamy:}$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{8} \frac{\omega^2}{g} \left[\left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 - \left(1 + \frac{3}{m}\right) \rho^2 \right] + \sigma$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma}{8} \frac{\omega^2}{g} \left[\left(3 + \frac{1}{m}\right) (R^2 - \rho^2) \right] + \sigma$$

Tylko co otrzymane wzory wskazują przedewszyst-
kiem, iż obciążenie zewnętrzne σ , równomiernie roz-
łożone po całym obwodzie zewnętrznym wirnika pełnego
przenika wgląd tarczy jako składowa obu naprężeń σ_x
i σ_y , jednakowa dla wszystkich kostek wirnika. Nad-
to wychodząc z tych wzorów możemy napisać:

$$\frac{\epsilon_x}{L} = \frac{\sigma \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 - \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \rho^2 \right\} + \sigma \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$\frac{\epsilon_y}{L} = \frac{\sigma \omega^2}{8g} \left\{ -\frac{2}{m} \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \frac{4}{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \rho^2 \right\} - \frac{2\sigma}{m}$$

$$\frac{\epsilon_z}{L} = \frac{\sigma \omega^2}{8g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 - 3 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \rho^2 \right\} + \sigma \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

I tu znów bezwzględna wartość $\frac{\epsilon_x}{L}$ jest wyższa
od pozostałych, a $\left[\frac{\epsilon_x}{L}\right]_{\max}$ zachodzi dla środka
wirnika, gdzie $\rho = 0$. Stąd

$$\left[\frac{\epsilon_x}{L}\right]_m = \left[\frac{\epsilon_x}{L}\right]_{\rho=0} = \frac{\sigma \omega^2}{8g} \left(3 + \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 +$$

$$+ \sigma \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 0,289 \frac{\sigma}{g} R^2 \omega^2 + 0,75$$

podczas gdy dla obwodu zewnętrznego

$$\left[\frac{\epsilon_x}{L}\right]_{\rho=R} = \frac{\sigma \omega^2}{4g} \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 + \sigma \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 0,175 \frac{\sigma}{g} R^2 \omega^2 + 0,75$$

przyczem i tu założyliśmy $m = \frac{10}{3}$

Porównanie wyżej otrzymanych wyników pozwala wy-
powiedzieć następujące wnioski ogólne.

1° Nacisk wału na wirnik zwiększa naprężenie two-

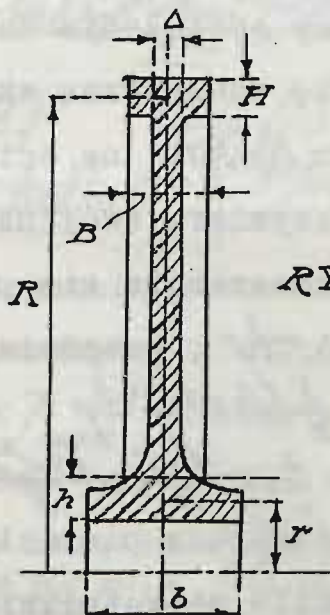
rzywa. Tak samo działa obciążenie pochodzące od łopatek na obwodzie zewnętrznym.

2° . Naprężenia wzrastają ku środkowi.

3° Wirnik przedziurawiony po środku ujawnia wyższe naprężenie na ściankach otworu niż wirnik tożsamościowy pełny.

Wszystko to świadczy o zgubnem oddziaływaniu otworów środkowych wirnika, to też zazwyczaj wirniki szybciej wirujące są pełne. Czyniąc $\delta = \delta_0 = 0$ otrzymamy wirnik wirujący swobodnie, a ujawniający własności zupełnie podobne.

Wywody powyższe posiadają jednak pewną wadę, zazwyczaj bowiem wirniki o stałej grubości Δ posiadają zgrubienia u nasady i wieńce w postaci wąskich pierścieni /RYS. 392/. Oznaczmy średni promień zewnętrznego



RYS. 392

go pierścienia przez R , szerokość przez B i wysokość przez H , podobnie średni promień wewnętrznego niech będzie r , szerokość δ i wysokość h . Prowadząc dwie średnicowe płaszczyzny pod kątem $d\varphi$ wytniemy z obu pierścieni po

kostce. Obciążenie kostki pierścienia zewnętrznego obejmuje naprężenie i siły następujące: na zewnętrzną

wypukłą ściankę kostki działa siła $\sigma_B(R + \frac{H}{2})d\varphi \approx \sigma_B h d\varphi$ jaką łopatki chcą się oderwać od wienca; wewnętrzną wklęsłą ściankę ściąga na szerokości Δ wirnik z siłą:

$\sigma_z \Delta (R - \frac{H}{2})d\varphi \approx \sigma_z \Delta R d\varphi$ nie dając pierścieniowi rozszerzać się swobodnie, wreszcie kostka rozwija siłę odśrodkową $\frac{\gamma}{g} B H R^2 \omega^2 d\varphi$. Wypadkową tych wszystkich sił równoważą składowe naprężeń bocznych ścianek kostki, gdzie panują naprężenia rozciągające τ_z , jako że pierścień jest wąski. Te wypadkowe są $\tau_z B H \sin \frac{d\varphi}{2}$ a zatem równanie równowagi będzie:

$$2\tau_z B H \sin \frac{d\varphi}{2} = \tau_z B H d\varphi = \sigma_B R d\varphi + \frac{\gamma}{g} B H R^2 \omega^2 d\varphi$$

stąd otrzymamy:
$$\tau_z = \frac{\sigma_B R}{H} + \frac{\gamma R^2 \omega^2}{g} - \frac{\sigma_z \Delta R}{B H}$$

To naprężenie da wydłużenie jednostkowe $\epsilon = \mathcal{L} \tau_z$ całego wienca; na jego tle otrzymamy przyrost

$$\Delta R = \epsilon R = \frac{R}{E} \left[\frac{\sigma_B R}{H} + \frac{\gamma \omega^2 R^2}{g} - \frac{\sigma_z \Delta R}{B H} \right]$$

Zupełnie w podobny sposób ustalimy obciążenie kostki wienca wewnętrznego. Na jej ściankę wewnętrzną wklęsłą ciśnię wał z siłą $\sigma_b(r - \frac{h}{2})d\varphi \approx \sigma_b r d\varphi$ na ściankę zewnętrzną wypukłą na szerokości Δ wywiera swój nacisk tarca wirnika, hamując swobodne rozszerzenie się pierścienia z siłą $\sigma_{zo} \Delta (r + \frac{h}{2})d\varphi \approx \sigma_{zo} \Delta r d\varphi$; wreszcie sama kostka rozwija siłę odśrodkową $\frac{\gamma}{g} b h r^2 \omega^2 d\varphi$, możemy przeto wypisać jak pierwszej wzór $\tau_{zo} = \frac{\sigma_b r}{h} + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} - \frac{\sigma_{zo} \Delta r}{b h}$ dający naprężenie rozciągające pierścień. Odnośne wydłużenie jednostkowe będzie niewątpliwie $\epsilon = \mathcal{L} \tau_{zo}$ da ono przyrost:

$$\Delta r = \epsilon r = \frac{r}{E} \left[\frac{\sigma_b r}{h} + \frac{\gamma \omega^2 r^2}{g} - \frac{\sigma_{zo} \Delta r}{b h} \right]$$

Oba te przyrosty ujawniać oczywiście również musi i sama tarcza wirnika, który tu rozpatrujemy jako wirnik stałej grubości Δ o promieniu zewnętrznym R i wewnętrznym r , obciążony dodatkowo od wewnątrz ciśnieniem δ_{zo} , od zewnątrz δ_z . Wyżej już mieliśmy wzory dla $\left[\frac{\epsilon_x}{L}\right]_{\rho=r}$ i $\left[\frac{\epsilon_x}{L}\right]_{\rho=R}$ należy przeto jedynie zmienić w nich δ na δ_z i δ_o na δ_{zo} , aby otrzymać wydłużenia jednostkowe $\left[\epsilon_x\right]_r$ i $\left[\epsilon_x\right]_R$ jednakowe dla wszystkich kostek odnośnych obrotów. Na tle tych wydłużeń zwiększą się odpowiednio obwody, a zarazem i promienie tych obwodów w tym samym stosunku będziemy mieli przeto $\Delta r = \left[\epsilon_x\right]_r r$ oraz $\Delta R = \left[\epsilon_x\right]_R R$ a przeto otrzymamy dwa równania

$$(1) \quad \frac{\delta \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r^2 \right\} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (\delta_z R^2 + \delta_{zo} r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (\delta_z + \delta_{zo}) R^2}{R^2 - r^2} \frac{\delta_z r^2}{h} + \frac{\delta \omega^2 r^2}{g} - \frac{\delta_{zo} \Delta r}{\delta h}$$

$$(2) \quad \frac{\delta \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) r^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) R^2 \right\} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (\delta_z R^2 + \delta_{zo} r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (\delta_z + \delta_{zo}) r^2}{R^2 - r^2} \frac{\delta R}{H} + \frac{\delta \omega^2 R^2}{g} - \frac{\delta_z \Delta R}{BH}$$

Pozostałe równania otrzymamy z warunków wytrzymałości tworzywa, należy bowiem naprężenie zastępcze

$\left[\frac{\epsilon_x}{L}\right]_{\max}$ tarczy uczynić równem skrajnemu dopuszczalnemu naprężeniu rozciągającemu K_r tworzywa. Da to nowy związek: $\frac{\delta \omega^2}{4g} \left\{ \left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r^2 \right\} + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (\delta_z R^2 + \delta_{zo} r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (\delta_z + \delta_{zo}) r^2}{R^2 - r^2} K_r$ (3) a pozostałe dwa

otrzymamy czyniąc podobnie: $\bar{\epsilon}_z = \bar{\epsilon}_{zo} = K_r$
 $\frac{\delta R}{H} + \frac{\delta \omega^2 R^2}{g} - \frac{\delta_z \Delta R}{BH} = K_r$ (4); $\frac{\delta_z r^2}{h} + \frac{\delta \omega^2 r^2}{g} - \frac{\delta_{zo} \Delta r}{\delta h} = K_r$ (5)

Te pięć równań wiąże niewiadome zadania $\delta_z, \delta_{zo}, \Delta, \delta, h, B, H$ promienie bowiem r i R należy uważać jako dane zasadnicze. Widzimy przeto, iż dwie niewiadome są dowolne - okoliczność nader szczęśliwa, możemy bowiem dobrać odpowiednio B podług wymiaru łopatek, oraz δ według przestrzeni rozporządzalnej na wale turbiny. Tylko co wyprowadzone wzory dotyczą wirników o stałych wymiarach h i H - w tym bowiem założeniu rozpatrywaliśmy oba pierścienie licząc je jako "wąskie". Odpowiada to zazwyczaj istocie rzeczy w stosunku do wienca zewnętrznego, - wewnętrzny nieraz wykonywany bywa jako krzepka piasty, czyli pierścień szeroki. Oznaczmy promień otworu piasty przez r_0 , a promień zewnętrznego styku z wirnikiem przez r . Nacisk wału na obwód wewnętrzny piasty niech będzie jak dawniej δ_0 a nacisk tarczy wirnikowej $\delta_{zo} \cdot \frac{\Delta}{\delta}$, zachodzi bowiem nie na całej szerokości δ piasty, a na jej części środkowej równej Δ . W danym wypadku przeto wartość $[\frac{E_x}{L}]$ dla obu obwodów piasty otrzymamy z ogólnych wzorów, pisząc w nich r miasto R , r_0 miasto r oraz $\delta_{zo} \frac{\Delta}{\delta}$ miasto δ . W ten sposób zamiast równania (1) otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta \omega^2}{4g} \left[\left(3 + \frac{1}{m}\right) R^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r^2 \right] + \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) (\delta R^2 + \delta_0 r^2) + \left(1 + \frac{1}{m}\right) (\delta + \delta_0) R^2}{R^2 - r^2} = \frac{\delta \omega^2}{4g} \left[\left(3 + \frac{1}{m}\right) r^2 + \left(1 - \frac{1}{m}\right) r_0^2 \right] + \\ & \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left[\frac{\Delta}{\delta} \delta_{zo} r^2 + \delta_0 r_0^2 \right] + \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left[\frac{\Delta}{\delta} \delta_{zo} + \delta \right] r_0^2}{r^2 - r_0^2} \end{aligned}$$

Równania (2), (3) i (4) pozostaną w swej mocy, na-

to miast zamiast równania (5) będziemy mieli:

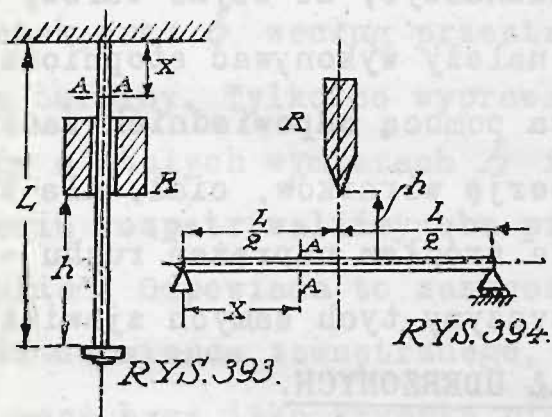
$$+ \frac{\frac{\delta \omega^2}{4g} \left[\left(3 + \frac{1}{m} \right) r^2 + \left(1 - \frac{1}{m} \right) r_0^2 \right] + \left(1 - \frac{1}{m} \right) \left[\frac{\Delta}{8} b_{x0} r^2 + b_0 r_0^2 \right] + \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left[\frac{\Delta}{8} b_{x0} + b_0 \right] r^2}{r^2 - r_0^2} = K_T$$

Znowu więc mamy pięć równań wiążących niewiadome $b_x, b_{x0}, \Delta, r, b, H, B$, dwie z nich możemy obrać dowolnie. Godzi się tu zaznaczyć, że styki tarczy wirnika z piastą i wieńcem należy wykonywać stopniowo łagodząc ostre przejścia za pomocą odpowiednich zaokrągleń. Na tem kończymy teorię wirników, ciał, dla których siła odśrodkowa była źródłem naprężeń ruchu - obecnie poznamy inne przyczyny tych samych zjawisk.

§ 7. NAPRĘŻENIE CIAŁ UDERZONYCH.

Obciążenie zewnętrzne, zagną w pełnym natężeniu przyłożone, wywołuje naprężenia ruchu, zupełnie różne od naprężeń zwykłych, kiedy to samo obciążenie wzrasta stopniowo od zera do pełnej swej mocy. Mówimy zwykle krótko, że ciało jest uderzone. Uderzeniu towarzyszą naprężenia ruchu. Możemy je w każdym poszczególnym wypadku wyznaczyć, skoro założymy, że masa ciała uderzonego nie sprzeciwia się uderzeniu, to jest, gdy nie bierzemy zupełnie masy ciała uderzonego pod uwagę. To założenie daje wyniki zgodne z istotą rzeczy li tylko w tym wypadku, gdy masa owa jest niewielka w stosunku do masy ciała uderzającego. Rozróżniamy przytem dwa rodzaje uderzeń: podłużne, w kierunku osi podłużnej pręta uderzanego i poprzeczne zachodzące prostopadle do owej osi.

Zawieśmy pręt o stałym przekroju S pionowo /RYS. 393/. Długość pręta L liczymy od umocowanego górnego przekroju aż do dolnego skrajnego zakończonego płytką kołnierzową, na którą opada ciężar R z wysokości sunąc po pręcie na dół bez tarcia. Gdy dolny skraj ciężaru dotknie płytki nastąpi uderzenie podłużne pręta, bo zachodzące w kierunku jego osi podłużnej. Ten sam pręt ułożony poziomo na podporach /RYS. 394/ może ulec uderzeniu poprzecznemu o ile ciężar za-



wieszony damy na to ponad środkowym przekrojem pręta zagała nań spadnie z wysokości h . Istota zjawiska pozostanie zresztą bez zmiany, gdy ciężar R uderzy w jakikolwiek inny przekrój pręta, wzory jeno tłumaczące zjawisko będą nieco złożęnsze.

W obu wyżej omówionych wypadkach szybkość, jaką ciężar rozwinie w moment dotyku będzie jak wiadomo

$$v = \sqrt{2gh}, \text{ a siła żywa jego będzie } \frac{1}{2} \frac{R}{g} v^2 = R h$$

Ta siła żywa spowoduje przesunięcie x uderzonego miejsca w kierunku spadku ciężaru, przyczem, zgodnie z założeniem, masa pręta nie sprzeciwi się uderzeniu. Inaczej mówiąc pręt uderzony utożsamia się szybkościowo z masą uderzającą, która w ten sposób opadać będzie da-

lej swobodnie, jakby na drodze jej pręta nie było zupełnie i w końcu, przebiegłszy drogę $h+r$ utraci ruch, powstrzymana sprzeciwem sprężystym pręta, któremu odmawiamy wprowadzić masy istotnej, lecz uznajemy jego własności sprężyste. Tutaj więc cała energja spadku $R(h+r)$ przechodzi w siłę żywą $\frac{R}{g}[2g(h+r)]$ masy spadającej, a ta energja ruchu przetwarza się w pracę odkształceń pręta. Zatem $\Pi = R(h+r)$. Aby wypisać wartość pracy sprężystej Π rozpatrujemy siłę urojoną P , która stopniowo rosnąc od zera wywoła owo przesunięcie x . W pewnym wypadku wyznaczymy ją z równania $x = \frac{PL}{ES}$ w postaci $P = x \frac{ES}{L}$, w drugim z $x = \frac{PL^3}{48EJ}$ a więc $P = x \frac{48EJ}{L^3}$ zgodnie z ustępem dziewiętnastym działu piątego. Oznaczmy nadto przez x_0 przesunięcie jakieby miało miejsce w odpowiednim wypadku, gdyby siła R działała na pręt stopniowo rosnąc od zera do swego najwyższego natężenia. Wtedy mielibyśmy $x_0 = \frac{RL}{ES}$ w pierwszym i $x_0 = \frac{RL^3}{48EJ}$ w drugim wypadku. Zatem możemy napisać $P = \frac{Rx}{x_0}$ dla obu wypadków, jakoteż niewątpliwie: $\Pi = \frac{1}{2} xP = \frac{1}{2} \frac{x^2 R}{x_0} = R(h+r)$. Stąd mamy $x^2 - 2x_0 x - 2x_0 h = 0$ co daje niewątpliwie $x = x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0 h} = x_0 \left[1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{x_0}} \right] = x_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g x_0}} \right]$ przy czem $x_0 = \frac{RL}{ES}$ w pierwszym i $x_0 = \frac{RL^3}{48EJ}$ w drugim wypadku. Z tego wzoru otrzymujemy bezpośrednio:

Wniosek pierwszy. Pręt prosty o stałym przekroju poprzecznym uderzony podłużnie lub po-

przecznie ciałem ważkiem, ujawnia odnośne odkształcenie, rosnące wraz z szybkością masy uderzającej.

Nadto gdy $v=0$ to jest gdy pręt obciążymy znagłą siłą R w pełnem napięciu wtedy $\epsilon = \epsilon_0$ stąd

Wniosek drugi. Pręt prosty o stałym przekroju poprzecznym obciążony znagłą siłą podłużną lub poprzeczną o pełnem napięciu, ujawnia odkształcenie dwukrotnie większe od zwykłych, zachodzących w wypadkach obciążenia stopniowo rosnącego od zera do pełnej siły.

Napięcia towarzyszące owym odkształceniom będą w wypadku uderzenia podłużnego równe:

$$\epsilon_{gr} = \frac{P}{S} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{R}{S} = \frac{R}{S} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \epsilon_0}} \right] = \frac{R}{S} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{E S v^2}{R L g}} \right]$$

Stąd bezpośrednio otrzymujemy

Wniosek trzeci. Pręt prosty o stałym przekroju poprzecznym, uderzony podłużnie ciałem ważkiem ujawnia naprężenia tem wyższe, im większa masa i szybkość ciała uderzającego, im wyższy współczynnik sprężystości tworzywa pręta; natomiast im pręt dłuższy, a przekrój jego większy, tym owe naprężenia są mniejsze.

Podobnie dla wypadku uderzenia poprzecznego będziemy mieli: $\epsilon_{gr} = \frac{PL}{4W} = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{RL}{4W} = \frac{RL}{4W} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \epsilon_0}} \right] = \left[1 + \sqrt{1 + \frac{48 E J v^2}{R L^3 g}} \right]$ stąd otrzymamy

Wniosek czwarty. Pręt prosty o stałym przekroju poprzecznym, uderzony poprzecznie ciałem ważkiem, ujawnia naprężenie tem wyższe, im więk-

sza masa i szybkości ciała uderzającego, oraz im większy współczynnik sprężystości tworzywa pręta. Nadto przy dużych szybkościach masy uderzającej owe naprężenia są tem mniejsze im pręt dłuższy, a jego przekrój poprzeczny znaczniejszy.

Oba ostatnie wnioski wyraźnie podkreślają zgubny wpływ wszelkich zwężeń przekroju prętów, narażonych na uderzenia poprzeczne lub podłużne. Podtoczenia, szyjki, zmiany nagłe przekroju skupiają poniekąd całe działanie uderzenia, powodując w tych miejscach nadmierny wzrost naprężeń ruchu.

Pręty uderzane powinny być stałego przekroju, inaczej bowiem wszelkie zwężenie dzieli pręt na części - na pręty krótsze o mniejszej długości i słabszym przekroju, a więc z dwóch względów gorzej wytrzymujące uderzenia.

Wychodziliśmy dotąd z założenia, że masa ciała uderzonego nie sprzeciwia się uderzeniu, a więc, gdy jest nieznaczna w stosunku do masy uderzającej, i jako taka może być pominięta bez znaczniejszego błędu. W razie przeciwnym szybkość $v = \sqrt{2gh}$ ciała uderzającego w moment dotyku gwałtownie zmienia swą wartość - zachodzi strata szybkości. Po uderzeniu ciężar R będzie miał jeno szybkość v Właśnie z tą częścią pręta, która uległa uderzeniu. Ta szybkość v jaką otrzyma owa część pręta udzieli się innym, zgodnie z pewnym prawem, którego jednak nie znamy zupełnie; prawo rozkładu zazwyczaj

więc zakładamy, że "rozkład szybkości nabytych w chwili uderzenia zachodzi wzdłuż pręta zupełnie tak samo, jak rozkład odkształceń, towarzyszących sile zwolna rosnącej od zera aż do pełnego napięcia, równej ciężarowi uderzającemu i przyłożonej do punktu uderzonego."

Zatem w wypadku uderzenia podłużnego przekrój poprzeczny AA , gdziekolwiek w odległości X od górnego przekroju obrany, otrzyma szybkość $w_x = \frac{x}{l} \cdot w$, gdzie przez x oznaczyliśmy wydłużenie górnej części pręta

$x = \frac{R x}{E S}$ zatem $w_x = \frac{x}{l} \cdot w$. Siła żywa całego pręta będzie $\int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot \frac{dx}{l} w_x^2 = \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} w^2 \frac{x^2}{l^3} dx = \frac{G}{3} \frac{w^2}{g}$, gdzie przez G oznaczyliśmy wagę pręta. Stąd wnioskujemy, że w danym wypadku w moment uderzenia pręt zachowuje się tak, jak gdyby trzecia część jego masy skupiona była w jego dolnym przekroju uderzonym, możemy przeto pręt zastąpić skupioną masą $\frac{G}{3g}$, którą tu należy uważać jako zupełnie swobodną, zatem opierając się na zasadzie ilości ruchu możemy napisać $\frac{R}{g} v = \frac{(R + \frac{1}{3} G)}{g} \cdot w$ stąd $w = \frac{R v}{R + \frac{1}{3} G}$.

Tutaj więc ciężar R spadający rozwinię siłę żywą $\frac{R w^2}{2g}$, siła żywa masy zastępczej $\frac{G}{3g}$ wyniesie $\frac{G}{6g}$, nadto ciężar R po uderzeniu da przesunięcie r rozwijając przytem pracę $R r$. Te wszystkie prace przemieniają się w energję sprężystą \mathcal{N} , i tu bowiem pozostaną w pręcie siły sprężyste, które powstrzymają dalszy spadek ciężaru. Ponieważ jak dawniej $\mathcal{N} = \frac{x^2 R}{2 l_0}$ przeto $\left[R + \frac{1}{3} G \right] \frac{w^2}{2g} + R r = \frac{x^2 R}{2 l_0}$. Inaczej jeszcze; $\frac{1}{2g} \left[R + \frac{1}{3} G \right] \frac{R^2 v^2}{[R + \frac{1}{3} G]^2} + R r = \frac{x^2 R}{2 l_0}$; $x^2 - 2 l_0 r =$

$$-\frac{v^2}{g} \frac{I_0}{1 + \frac{1}{3} \frac{g}{R}} = 0 \text{ co daje:}$$

$$I = I_0 + \sqrt{I_0^2 + \frac{v^2}{g} \frac{I_0}{1 + \frac{1}{3} \frac{g}{R}}} = I_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g I_0} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{g}{R}}} \right]$$

Podobnie zupełnie w wypadku uderzenia poprzecznego wyżej rozpatrywanym obieramy w odległości X od lewej dajmy na to podpory, jakikolwiek przekrój poprzeczny AA . Otrzyma on szybkość $w_x = \frac{I_x}{I_0} w$, gdzie przez I_x oznaczyliśmy strzałkę ugięcia owego przekroju, przy czem $I_x = \frac{RL^3}{16EJ} \left[\frac{X}{L} - \frac{4}{3} \frac{X^3}{L^3} \right]$, na mocy wzoru poprzednio przytoczonego ustępu. Zatem:

$$w_x = \frac{RL^3 w}{16EJ} \left[\frac{X}{L} - \frac{4}{3} \frac{X^3}{L^3} \right] \cdot \frac{RL^3}{48EJ} = \left[3 \frac{X}{L} - 4 \frac{X^3}{L^3} \right] w$$

a siła żywa całego pręta będzie, ze względu na zupełną symetrię obciążenia:

$$2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{2} \frac{g}{g} \frac{dx}{L} w_x^2 = 2 \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\frac{1}{2} g}{2g} \frac{w^2}{L^3} \left[9X^2 - \frac{24}{L^2} X^4 + 16 \frac{X^6}{L^4} \right] dx = \frac{17}{35} g \frac{w^2}{2g}$$

Tu znowu pręt zachowuje się tak, jakgdyby $\frac{17}{35}$ jego masy skupione było pośrodku pręta zupełnie swobodnego.

Dla takiego pręta możemy, opierając się na zasadzie ilości ruchu napisać $\frac{R}{g} v = \frac{(R + \frac{17}{35} g)}{g} w$ skąd $w = \frac{Rv}{R + \frac{17}{35} g}$

W danym wypadku zatem ciężar R rozwinie siłę żywą $\frac{Rw^2}{2g}$, zastępcza masa $\frac{17}{35} \frac{g}{g}$ da siłę żywą

$$\frac{17}{35} \frac{g}{2g} w^2 \text{ nadto ciężar } R \text{ po uderzeniu da przesuniecie } I \text{ rozwijając przytem pracę } RI$$

Łączna energia tych trzech prac przetworzy się w pracę sprężystą pręta, a dalszy spadek ciężaru zostanie uniemożliwiony na tle pojawienia się sprzeciwu sprężystego. Będziemy mieli przeto $(R + \frac{17}{35} g) \frac{w^2}{2g} + RI = \frac{1}{2} \frac{I^2 R}{I_0}$ czyli

$$\frac{1}{2g} \left[R + \frac{17}{35} g \right] \frac{R^2 v^2}{\left[R + \frac{17}{35} g \right]^2} + RI = \frac{1}{2} \frac{I^2 R}{I_0} \text{ skąd}$$

$$I^2 - 2 I_0 I - \frac{v^2}{g} \frac{I_0}{1 + \frac{17}{35} \frac{g}{R}} = 0$$

co daje ostatecznie

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{I}_0 + \sqrt{\mathcal{I}_0^2 + \frac{v^2}{g} \frac{\mathcal{I}_0}{1 + \frac{11}{35} \frac{g}{R}}} = \\ &= \mathcal{I}_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \mathcal{I}_0} \frac{1}{1 + \frac{11}{35} \frac{g}{R}}} \right]. \end{aligned}$$

Kształt wzoru jest więc ten sam co i w poprzednim wypadku, możemy więc wypowiedzieć ostatni

WNIOSEK PIĄTY. PRĘT PROSTY O STAŁYM PRZEKROJU POPRZECZNYM, UDERZONY PODŁUŻNIE LUB POPRZECZNIE CIAŁEM WAŻKIEM UJAWNIA TYM NIEZNACZNIEJSZE ODKSZTAŁCENIE, IM WIĘKSZA JEST MASA PRĘTA.

Wzór
$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \mathcal{I}_0} \frac{1}{1 + k \frac{g}{R}}} \right]$$

podobny wyżej wyprowadzonym, lecz różny co do współczynnika, otrzymamy w ogólnym wypadku zawsze ilekroć tylko przesunięcie \mathcal{I} rośnie proporcjonalnie do ciężaru R - uderzającego.

Pozostałe wnioski nie tracą więc mocy obowiązującej i w danym wypadku.

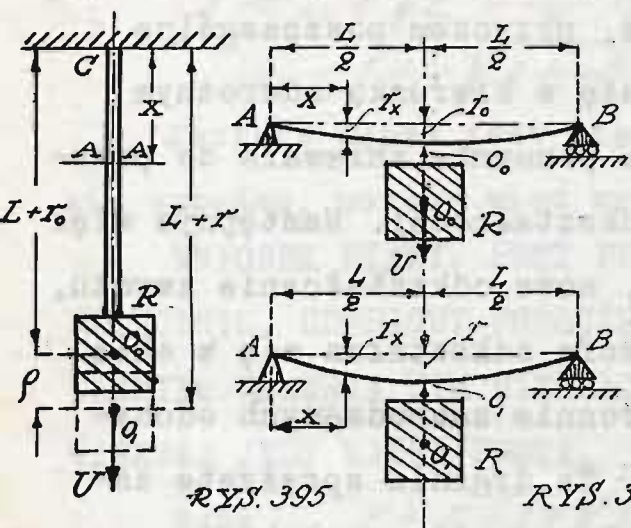
W rozważaniach powyższych badaliśmy sam przebieg uderzenia, nie troszcząc się o następstwa, obecnie poznamy dalszy szereg zjawisk zachodzących w kolejnym następstwie, poznamy tak zwane

§ 8. DRGANIA SPRĘŻYSTE. Naprężenia ruchu ciała uderzonego przechodzą zwykłą miarę naprężeń, jakie wywołuje ciężar uderzający w sposób zwykły działaniem statycznym. Wchodzi tu w grę siła żywa spadku, dająca owe naprężenia nadmierne. Po wygaśnięciu tej siły żywej ciężar pozostaje w dotyku z belką, działa więc już tylko statycznie, nie może przeto zrównoważyć sił sprę-

725
żystych pręta odkształconego. Wobec braku równowagi odkształconej rozpoczyna się odkształcenie zwrotne, odbywa się ono nader gwałtownie, przyczem poszczególne przekroje pręta poruszają się w kierunku odwrotnym rozwijając siłę żywą, która ponownie zniewala do przekroczenia stanu równowagi odkształconej. Następuje więc nowy ruch cząsteczek pręta, nowe odkształcenie zwrotu, pręt poczyną drgać, sprężyste odkształca się w obie strony, dając szereg obustronnie zachodzących odchyśleń od położenia równowagi. Te drgania sprężyste zamierają powoli, pręt odchyła się coraz słabiej, energia drgań wyczerpuje się bowiem, ginąc zwolna na tle wewnętrznego tarcia międzycząsteczkowego. Mogą tu zresztą działać czynniki zewnętrzne jako to ośrodki hamujące, lub siły zewnętrzne w pewien sposób okresowy rosnące. Te czynniki powodują gwałtowne zamieranie drgań, tarcie niweczy drgania powoli, możemy przeto działanie tarcia pominąć, jako nieznaczne przy najmniej w pierwszych chwilach zjawiska i rozpatrywać

§ 9. DRGANIA WŁAŚCIWE czyli SWOBODNE, zachodzące bez udziału ośrodków i sił hamujących. Mogą one zachodzić po uderzeniu, lub też na tle działania z nagłą przyłożonej i odjętej siły U . Weźmy pod uwagę dwa uprzednio już rozpatrywane typowe wypadki pręta L długiego o przekroju stałym A zawieszonego pionowo /RYS.395/i podpartego obustronnie /RYS.396/obciążamy ciężarem R skupionym w dolnym przekroju pręta pionowe-

go i w środkowym przekroju - poziomym. Pod jarzmem tego ciężaru pręt pionowy wydłużył się o $\mathcal{L}_0 = \frac{RL}{ES}$, po



ziomy natomiast ugiął się dając strzałkę środkową

$$\mathcal{L}_0 = \frac{RL^3}{48EJ}, \text{ gdzie } J$$

oznacza odnośny moment bezwładności pręta. Te odkształcenia sprowadzą nowy stan równowagi, który

możemy zakłócić siłą U z nagłą przyłożoną. W wypadku wyżej rozpatrywanym rolę siły U grała siła żywa spadku. Otrzymamy więc nowe odkształcenie \mathcal{L} na tle łącznego działania sił $R+U$, nie odpowiada ono jednak równowadze odkształconej, ponieważ siła U natychmiast przestaje działać, a pręt z nagłą obciążony odkształcać się pocznie w kierunku odwrotnym, przyczem środek masy O przekroju dźwigającego ciężar R podąży znowu w kierunku O_0 pierwszego swego położenia, odpowiadającego równowadze trwałej.

Uchwycimy jakikolwiek moment tego ruchu i oznaczmy chwilową odległość środka przekroju O od położenia równowagi O_0 przez z , przyczem dodatnie z obliczać będziemy na dół, w kierunku działania siły R . Ruch jako przyspieszony zachodzi tu pod wpływem sił sprężystych, skierowanych ku górze oraz siły R skierowanej w dół. Wobec zupełnego braku czynników hamujących, te dwie siły dadzą przyspieszenie $\frac{d^2z}{dt^2}$. Dla pionowe-

go pręta siły sprężyste będą oczywiście równe $(x_0+z)/\frac{ES}{L} = (x_0+z)/\frac{R}{x_0} = R + z\frac{R}{x_0}$, a dla poziomego $(x_0+z)/\frac{48EI}{L^3} = (x_0+z)/\frac{R}{x_0} = R + z\frac{R}{x_0}$.

W obu przeto wypadkach możemy napisać pomijając masę pręta wobec masy ciężaru $\frac{R}{Q}$ równanie ruchu w postaci $\frac{R}{Q} \frac{d^2z}{dt^2} = R - R - z\frac{R}{x_0} = -z\frac{R}{x_0}$. Stąd otrzymamy bezpośrednio $\frac{d^2z}{dt^2} = -n^2z$, gdzie oznaczyliśmy przez $n = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$.

Cała tego równania jest, jak wiadomo $z = A \sin nt + B \cos nt$, przyczem stałe całkowania należy określić z warunków początkowych. Czas poczynamy liczyć od chwili zaniku siły Q , zatem wartości początkowej $t=0$ odpowiadają wartości $z_0 = x - x_0 = \rho$ oraz $v_0 = \left[\frac{dz}{dt}\right]_0 = 0$ jako, że dla punktu zwrotnego ruchu szybkość przechodzi przez zero. Stąd mamy równanie warunkowe $B=0$ oraz $\rho = A$, ostatecznie więc będzie $z = \rho \cos nt$.

W ten sposób otrzymane równanie ruchu wskazuje, że ruch jest okresowy. Skrajne wartości z zawarte są w granicach $\pm \rho = \pm (x - x_0)$, a okres powrotu tożsamościowych wartości z wynosi $T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}}$. Słowem mamy tu do czynienia z ruchem wahadłowym, pręt drga podłużnie lub poprzecznie. Okres drgań podłużnych wynosi $T = 2\pi \sqrt{\frac{RL}{ES}}$, poprzecznych $T = 2\pi \sqrt{\frac{RL^3}{48EJ}}$, w obu wypadkach możemy przeto wypowiedzieć:

WNIOSEK PIERWSZY. OKRES DRGAŃ WŁAŚCIWYCH PODŁUŻNYCH LUB POPRZECZNYCH PRĘTA PROSTEGO O STAŁYM PRZEKROJU, DŹWIGAJĄCEGO ZNACZNY CIĘŻAR JEST TYM WYŻSZY, IM WIĘKSZA DŁUGOŚĆ PRĘTA I MASA CIĘŻARU ORAZ IM MNIEJSZY PRZEKRÓJ PRĘTA.

Zupełnie te same wyniki otrzymamy, wychodząc z

zasady zachowania energii.

Energja potencjalna układu, odpowiadająca odkształceniu $x_0 + z$, składa się z pracy sprężystej, przynależnej do cwego odkształcenia, od której należy odjąć stratę energii położenia ciężaru R , pozostałe na tle obniżania się jego środka ciężkości o z , czyli dodać energję Rz . Praca sprężysta, odpowiadająca odkształceniu $x_0 + z$ równa się $\frac{1}{2} P(x_0 + z)$, gdzie P oznacza odnośną siłę wywołującą przesunięcie $x_0 + z$.

W pierwszym wypadku $P = \frac{ES}{L}(x_0 + z) = \frac{R}{x_0}(x_0 + z)$, w drugim $P = \frac{48EJ}{L^3}(x_0 + z) = \frac{R}{x_0}(x_0 + z)$ w obu więc potencjalna energja będzie równa $\frac{R(x_0 + z)^2}{2x_0} - Rz$. Energja ruchu układu złożona jest z energii: ruchu ciężaru R oraz energii ruchu międzycząsteczkowego pręta. Pierwsza jest $\frac{1}{2} \frac{R}{g} \left[\frac{dz}{dt} \right]^2$, drugą zazwyczaj pomijamy zakładając masę pręta równą zeru, co nie pociąga za sobą błędu wyraźnego li tylko wtedy, gdy masa pręta jest znikoma w stosunku do masy R/g . W tym założeniu będziemy mogli napisać na mocy prawa zachowania energii

$$\frac{R}{2g} \left[\frac{dz}{dt} \right]^2 + \frac{R}{2x_0} (x_0 + z)^2 - Rz = \frac{R}{2g} \left[\frac{dz}{dt} \right]^2 + \frac{Rx_0}{2} + Rz + \frac{Rz^2}{2x_0} - Rz = \frac{R}{2g} \left[\frac{dz}{dt} \right]^2 + \frac{Rz^2}{2x_0} + \frac{Rx_0}{2} = \text{Stałe}$$

Stąd różniczkując mamy: $\frac{R}{g} \left[\frac{dz}{dt} \right] \frac{dz}{dt} + \frac{R}{x_0} z \frac{dz}{dt} = 0$

odnajdujemy przeto wyżej otrzymane równanie różniczkowe: $\frac{d^2 z}{dt^2} = -n^2 z$ gdzie $n = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$.

Inaczej jednak rzecz się ma, gdy masę pręta bierzemy pod uwagę, wtedy bowiem energja pręta kinetyczna pominąć się nie da. Stanowi to poważną trudność

nie mamy rodzaju drgań poszczególnych części pręta. Najczęściej przeto określamy typ drgań istotnie zachodzących doświadczalnie, lub też opieramy się na założeniu, z któregośmy już korzystali uprzednio przy rozważaniu odkształceń prętów uderzanych. To założenie pozwoliło wyznaczyć siłę żywą pręta pionowego, przyczem okazało się, iż można uwzględnić siłę żywą pręta wazkiego o stałym przekroju, skupiając trzecią część jego masy w przekroju uderzonym. Podobny wynik otrzymaliśmy również i dla pręta poziomego, gdzie, jak się okazało należy skupić w środkowym poprzecznym przekroju $\frac{17}{35}$ całkowitej masy pręta, aby uwzględnić jego siłę żywą. W obu wypadkach będziemy mieli przeto siłę żywą układu pisząc $\frac{1}{2g}[R+S^2G][\frac{dz}{dt}]^2$ przyczem dla rozpatrywanego wyżej pręta pionowego o stałym przekroju i wadze G Kl współczynnik $S^2 = \frac{1}{3}$, a dla tegoż pręta obustronnie podpartego poziomo $S^2 = \frac{17}{35}$. Zatem na mocy zasady zachowania energii:

$$\frac{1}{2g}[R+S^2G][\frac{dz}{dt}]^2 + \frac{R}{2L_0}(L_0+z)^2 Rz = \frac{R+S^2G}{2g}[\frac{dz}{dt}]^2 + \frac{Rz^2}{2L_0} + \frac{Rx_0}{2} = \text{stałej}$$

 Stąd różniczkując mamy: $\frac{R+S^2G}{g}[\frac{dz}{dt}]\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{R}{L_0}z[\frac{dz}{dt}] = 0$,
 skąd otrzymamy znowu równanie różniczkowe poprzedniego typu $\frac{d^2z}{dt^2} = -n^2z$ z tą jednak różnicą, że w danym wypadku współczynnik $n = \sqrt{\frac{g}{L_0} \cdot \frac{1}{1+S^2\frac{G}{R}}}$. Wszystkie więc uprzednie nasze rozważania zachowują swą moc obowiązującą. I tu również równanie ruchu będzie $z = \rho \cos nt$, gdzie $\rho = L_0 - z_0$. Są to więc drgania sprężyste, okres ich wyraża się wzorem:

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{L_0}{g} [1 + S^2 \frac{G}{R}]}$$

Zatem w wypadku drgań podłużnych $T = 2\pi \sqrt{\frac{L[R + \frac{1}{2}G]}{ESg}}$
 podczas gdy w wypadku drgań poprzecznych

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^3[R + \frac{1}{2}G]}{48EJg}}$$

Stąd mamy bezpośrednio

WNIOSEK DRUGI. OKRES DRGAŃ WŁAŚCIWYCH PODŁUŻNYCH LUB POPRZECZNYCH WAŻKIEGO PRĘTA O STAŁYM PRZĘKROJU, DŹWIGAJĄCEGO CIĘŻAR JEST TYM WYŻSZY IM WIĘKSZA DŁUGOŚĆ PRĘTA I MASY CIĘŻARU I PRĘTA, ORAZ IM MNIEJSZY PRZĘKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA I NIŻSZY WSPÓŁCZYNNIK SPRĘŻYSTOŚCI TWORZYWA.

Powyższy wzór jest prawie zupełnie ścisły, gdy G jest niezbyt wielkie w stosunku do R , w razie przeciwnym daje wyniki jeno przybliżone. Gdy $R=0$ otrzymamy OKRES DRGAŃ WŁAŚCIWYCH PRĘTA O STAŁYM PRZĘKROJU OBCIĄŻONEGO w postaci $T = 2\pi \sqrt{\frac{LG}{3ESg}}$ oraz $T = 2\pi \sqrt{\frac{17L^3G}{1680EJg}}$. Dotychczas nie uwzględnialiśmy czynników hamujących, należy zatem obecnie rozpatrzyć

§ 10. DRGANIA W OŚRODKU HAMUJACYM.

Drgania prętów, pogrążonych w ośrodki hamujące, zamierają zwolna. Tak samo działa tarcie wewnętrzne międzycząsteczkowe, rozwijając siłę oporową Q . Prawa zmienności sił oporowych ośrodków nie są dostatecznie zbadane, zazwyczaj od biedy zakładamy, że $Q = g \frac{dz}{dt}$ gdzie przez g oznaczyliśmy współczynnik proporcjonalności. Ta siła hamująca daje sprzeciw siłom czynnym możemy przeto wypisać zasadnicze równanie w postaci

$\frac{R+\int G}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{R}{I_0} z - g \frac{dz}{dt}$ czyli inaczej jeszcze
 $\frac{d^2 z}{dt^2} + 2m \frac{dz}{dt} + n^2 z = 0$, gdzie oznaczyliśmy przez
 $n = \sqrt{\frac{g}{I_0} \cdot \frac{1}{1+\int \frac{G}{R}}}$ oraz przez $2m = \frac{2g}{R+\int G}$. Całka tego równania różniczkowego jest:

$$z = A e^{-mt} \sin t \sqrt{n^2 - m^2} + B e^{-mt} \cos t \sqrt{n^2 - m^2}$$

I tu znów przy $t=0$, $z=g$ oraz $\left[\frac{dz}{dt}\right]_0 = 0$ stąd otrzymamy równanie warunkowe dla określenia stałych całkowania. Obecność mnożnika e^{-mt} stale malejącego z biegiem czasu, wyraźnie podkreśla zamieranie drgań. Rozwartość drgań zmniejsza się dążąc do zera wraz z e^{-mt} dla dużych t , czynnik bowiem $A \sin t \sqrt{n^2 - m^2} + B \cos t \sqrt{n^2 - m^2}$ posiada wartości wahające się okresowo w dosyć szczupłych granicach. Są to więc drgania gasnące. Okres ich $T_m = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - m^2}} = \frac{2\pi}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{m^2}{n^2}}}$ zależy od wartości m a więc od oporu ośrodka. Stąd

WNIOSEK TRZECI. OKRES DRGAŃ WŁAŚCIWYCH PODŁUŻNYCH LUB POPRZECZNYCH WAŻKIEGO PRĘTA O STAŁYM PRZEKROJU, DŹWIGAJĄCEGO CIĘŻAR, WZRASTA WRAZ Z OPOREM CZYNNIKA HAMUJĄCEGO, W KTÓRYM TKWI PRĘT.

Opór powietrza jest nader nieznaczny, to też jego zdolność hamowania jest praktycznie biorąc równa zero dla powietrza możemy przeto napisać, że $T_m = \frac{2\pi}{n} = T$. Jest to więc ośrodek prawie obojętny, natomiast dla cieczy lepkich m posiada znaczne wartości, może się przeto zdarzyć, że $1 - \frac{m^2}{n^2}$ będzie równe zero. W tym razie okres drgania wzrasta bez miary w razie zaś, gdy m^2 jest większe od n^2 przestaje istnieć zupełnie -

ruch staje się APERJODYCZNYM. Drgania właściwe są więc wprost niemożliwe. Mogą one zachodzić jednak nawet i w tych ośrodkach jako

§ 11. DRGANIA WYMUSZONE, powstające na tle sił, działających okresowo. Siły tu mogą dajmy na to działać na górny przekrój C pręta pionowego, lub też na podstawę, czyli odrazu i jednakowo na obie podpory AB pręta poziomego, powodując drgania przekrojów oporowych układu według prawa $z_t = a \sin bt$. W danym wypadku uprzednio otrzymane traci swą moc obowiązującą, należy je napisać nieco inaczej. Niech więc jak dawniej R oznacza ciężar obciążający, G wagę samego pręta, którą pragniemy uwzględnić. Pod jarzmem siły R układ odkształcił się. Zaprowadźmy stan równowagi odkształconej, przyczem środek przekroju, obciążonego siłą R ujawnił odkształcenie z_0 . Załóżmy nadto, iż jakakolwiek przyczyna uboczna, dajmy na to siła V zagnęła przyłożona i niezwłocznie odjęta, wywołała drgania sprężyste układu i w moment rozpatrywany ów przekrój obciążony siłą R ujawnia DODATKOWE odkształcenie z , które odmierzamy od położenia równowagi przynależnego do odkształcenia z_0 . Pragnąc uwzględnić masę pręta skupiamy w owym przekroju γG , w ten sposób utworzona masa składowa $(R + \gamma G) : g$ da siłę bezwładności $-\frac{R + \gamma G}{g} \frac{dz^2}{dt^2}$ stawiając opór siłom czynnym. Nadto na środek owego przekroju działa tu siła R ciężaru oraz opór ośrodka $-g \frac{dz}{dt}$, wreszcie wypadkowa sił spręży-

stych pręta. W danym wypadku przesunięciu z rozpatrywanego przekroju towarzyszy niezależnie odeń przesunięcie przekrojów oporowych $z_1 = a \sin bt$. Zatem pręt możemy się jeno odkształcać, wzniecając siły sprężyste

$\frac{R}{I_0} (I_0 + z + z_1)$ możemy przeto napisać $\frac{R + \frac{1}{2} G}{S} \frac{d^2 z}{dt^2} =$
 $= R - \frac{R}{I_0} (I_0 + z + z_1) - \eta \frac{dz}{dt}$ stąd mamy $\frac{d^2 z}{dt^2} + 2m \frac{dz}{dt} +$
 $n^2 z + p \sin bt = 0$ gdzie oznaczyliśmy przez $2m = \frac{\eta S}{R + \frac{1}{2} G}$
 przez $n = \sqrt{\frac{S}{I_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{G}{R}}}$ i $p = \frac{a S}{I_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{G}{R}} = a n^2$. Zatem
 $z = [A \sin t \sqrt{n^2 - m^2} + B \cos t \sqrt{n^2 - m^2}] e^{-mt} - \frac{p(n^2 - m^2)}{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2} \sin bt$
 $+ \frac{2mbp}{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2} \cos bt$ gdzie stałe A i B
 należy wyznaczyć z warunków początkowych dla $t = 0$

Pierwszy wyraz tego wzoru daje nam dobrze znane drgania zamierające, powstałe pod wpływem siły wzbudzającej V i zamierające na tle oporu ośrodka hamującego.

Dwa drugie wyrazy stanowią o drganiach nowego typu, powstających na tle drgań z_1 przekrojów oporowych pręta. Te drgania z_1 udzielają się przeto rozpatrywanemu przekrojowi, dźwigającemu ciężar R na sobie. Są to drgania WYMUSZONE. Łącznie z zamierającymi dadzą one złożone drgania przekroju co wyrażamy pisząc $z = z_1 + z_w$

Oznaczmy $\frac{p(n^2 - b^2)}{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2} = C \cos w$, $\frac{2mbp}{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2} = -C \sin w$ przyczem oczywiście $C = \sqrt{\frac{p^2(n^2 - b^2)^2}{[(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2]^2} + \frac{4m^2 b^2 p^2}{[(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2]^2}} = \frac{p}{\sqrt{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2}} =$
 $= \frac{a n^2}{\sqrt{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2 b^2}} = -\frac{p \sin w}{2mb}$ oraz $\cos w = \frac{2mb}{n^2 - b^2}$. Stąd
 mamy $z_w = C \sin bt \cos w - C \cos bt \sin w = C \sin(bt - w)$. Widzimy stąd bezpośrednio, iż okres drgań wymuszonych $T_w = \frac{2\pi}{b}$
 a zatem mamy:

WNIOSEK CZWARTY. OKRES DRGAŃ WYMUSZONYCH PODŁUŻNYCH

LUB POPRZECZNYCH WĄZKIEGO PRĘTA O STAŁYM PRZEKROJU, DŹWIGAJĄCEGO CIĘŻAR JEST TOŻSAMOŚCIOWY Z OKRESEM DRGAŃ PRZEKROJÓW OPOROWYCH PRĘTA, PODLEGŁYCH BEZPOŚREDNIO DZIAŁANIU SIŁ OKRESOWYCH WYMUSZAJĄCYCH DRGANIA.

Ponieważ okres drgań właściwych $T = \frac{2\pi}{n}$ prze-
to, gdy $n > \delta$, a zatem gdy $T < T_w$ wtedy $w > 0$,
gdy zaś $n < \delta$ wtedy $w < 0$ co zresztą widać bezpo-
średnio ze wzoru dla $\zeta_g w$. Stąd mamy nowy

WNIOSEK PIĄTY. GDY OKRES DRGAŃ WŁAŚCIWYCH PODŁUŻ-
NYCH LUB POPRZECZNYCH WĄZKIEGO PRĘTA O STAŁYM PRZEKRO-
JU DŹWIGAJĄCEGO CIĘŻAR JEST MNIEJSZY OD OKRESU DRGAŃ
WYMUSZONYCH, WTEDY DRGANIA WYMUSZONE SPÓŹNIAJĄ SIĘ W
STOSUNKU DO DRGAŃ PRZEKROJÓW OPOROWYCH PRĘTA, PODLE-
GŁYCH BEZPOŚREDNIEMU DZIAŁANIU SIŁ WYMUSZAJĄCYCH, GDY
ZAŚ OKRES DRGAŃ WŁAŚCIWYCH JEST WIĘKSZY OD OKRESU
DRGAŃ WYMUSZONYCH, WTEDY DRGANIA WYMUSZONE WYPRZEDZA-
JĄ DRGANIA PRZEKROJÓW OPOROWYCH PRĘTA. W WYPADKU RÓW-
NOŚCI OKRESÓW DRGAŃ WŁAŚCIWYCH I WYMUSZONYCH DRGANIA
WYMUSZONE ZACHODZĄ O CWiERĆ OKRESU PÓŹNIEJ LUB WCZEŚ-
NIEJ OD DRGAŃ PRZEKROJÓW OPOROWYCH PRĘTA.

Wynika to bezpośrednio ze wzoru, mamy bowiem $\zeta_g w = \infty$
gdy $n = \delta$, stąd $w = \pm \frac{\pi}{\delta}$. W tym szczególnym wypadku
środek przekroju dźwigającego ciężar przechodzi przez
położenie średnie, przynależne do odkształcenia x ,
gdy przekroje oporowe znajdują się w jednym ze skraj-
nych odchylen. Z kolei biorąc pod uwagę wzór dla C z
łatwością zauważymy, że przy nieznacznem δ rozwarto-
ści drgań C i δ są prawie równe. Stąd

WNIOSEK SZÓSTY. ROZWARTOŚĆ DRGAŃ WYMUSZONYCH PODŁUŻNYCH LUB POPRZECZNYCH WĄZKIEGO PRĘTA O STAŁYM PRZĘKROJU, DŹWIGAJĄCEGO CIĘŻAR, ROŚNIE PROPORCJONALNIE DO ROZWARTOŚCI DRGAŃ PRZĘKROJÓW OPOROWYCH TEGO PRĘTA, PODLEŻYCH BEZPOŚREDNIEMU DZIAŁANIU SIŁ WYMUSZAJĄCYCH I ZBLIŻA SIĘ DO NIEJ WARTOŚCIĄ PRZY DUŻYM OKRESIE DRGAŃ WYMUSZONYCH.

Gdy więc siły wymuszające powodują drgania powolne to wtedy ciężar drga tak samo, jak przekroje oporowe pręta. Natomiast, gdy drgania tych przekrojów są szybkie, a więc przy dużych wartościach δ , rozwartość C zbliża się do zera. Stąd

WNIOSEK SIÓDMY. SIŁY WYMUSZAJĄCE KRÓTKOOKRESOWE DAJĄ NIEZNACZNE ROZWARTOŚCI DRGAŃ WYMUSZONYCH PODŁUŻNYCH LUB POPRZECZNYCH PRĘTA WĄZKIEGO O DANYM PRZĘKROJU, DŹWIGAJĄCEGO CIĘŻAR.

Biorąc pochodną $\frac{\partial C}{\partial \delta} = -2an^2\delta \frac{\delta^2 n^2 + 2m^2}{\sqrt{n^2 \delta^2 + 4m^2}}$ Otrzymujemy szczególną wartość $\delta = \sqrt{n^2 - 2m^2}$ dającą maximum rozwartości drgań wymuszonych. Wobec znikomości m dla zwykłych ośrodków $\delta \simeq n$ skąd otrzymujemy

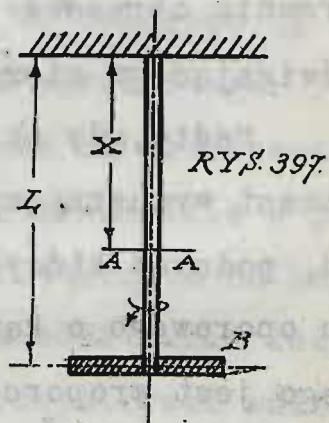
WNIOSEK ÓSMY. ROZWARTOŚCI DRGAŃ WYMUSZONYCH PODŁUŻNYCH LUB POPRZECZNYCH WĄZKIEGO PRĘTA O SŁABYM PRZĘKROJU, DŹWIGAJĄCEGO CIĘŻAR JEST TĘ WIEKSZA IM BARDZIEJ ZBLIŻAJĄ SIĘ DO SIEBIE OKRESY DRGAŃ WŁAŚCIWYCH I WYMUSZONYCH TEGO PRĘTA.

Wzrastanie rozwartości drgań wymuszonych występuje tem silniej im mniejszą wartość m ujawnia dany ośrodek

Gdy $m\omega$ i δn wtedy $\omega = n$ drgania powodują pęknięcie pręta. Na tem polega zjawisko oddźwięku czyli rezonansu sprężystego. Występuje ono bardzo często w zagadnieniach technicznych, zwłaszcza przy ustawianiu silników, powodujących drgania różnych typów. Łatwo to udowodnimy, zważywszy, że cała powyższa teoria pozostaje w swej mocy, gdy unieruchomimy przekroje oporowe pręta, a na przekrój, obciążony ciężarem R będziemy działać siłą okresową $A = a \sin \delta t^2$, a właśnie tego rodzaju siły dają ruch me masy silników zwłaszcza spalinowych. Taki więc silnik, ustawiony na belce poziomej pocznie ją kołysać wzniesając ruchy belki poprzeczne, powtarzające się okresowo za każdym obrotem wału. Tutaj więc $\delta = \omega$ gdzie przez ω oznaczaliśmy stałą szybkość kątową silnika. Gdy nadto okres tych drgań wymuszonych równy jest okresowi drgań właściwych belki obciążonej ciężarem silnika, wtedy rozwartość drgań wzrasta niepomniernie zagrażając całemu ustrojowi. Trzeba więc aby $n \neq \omega$, co można łatwo uczynić zmieniając przekrój belki. Podobne zjawiska oddźwięku sprężystego zachodzą podczas przemarszu wogóle przez most, to też dla uniknięcia nadmiernego rozbijania mostu zazwyczaj wojsko idzie tłumem bezładnym a nie w szyku, obawiać się bowiem należy miarowego tupotu nóg kroczących rytmicznie. To samo nie raz sprawiają przeciwwagi kół parowozu, spłaszczone bandaże kół wygonowych, a zwłaszcza miarowe uderzenia powstające na stykach szyn niedość równo ułożonych.

Podobne zagadnienia spotykamy również przy budowie dłuższych wałów. Rozpatrzmy je pokrótce.

§ 12. DRGANIA PRĘTÓW SKRĘCANYCH. Weźmy pod uwagę nie wałki pręt L długi o stałym przekroju S . Ciężką tarczę kołową B nasadzone na jego koniec dolny /RYS. 397/. u góry pręt zamocowane i wywołano obrót tarczy o kąt φ_0 działaniem pary sił, którą niezwłocznie odjęto. Pozostawiony samemu sobie układ, pocznie odkształcać się w kierunku odwrotnym, przyczem częsteczki tarczy nabiorą rozpędu, tarcza przekroczy położenie równowagi nieodkształconej, pręt pocznie skręcać się ponownie póki jego siły sprężyste nie zrównoważą rozpędu tarczy. To samo zjawisko powtórzy się znowu, lecz już w kierunku odwrotnym nastąpi nowy zwrot, słowem otrzymamy szereg skręceń po sobie następujących, a zachodzących w kierunku przeciwnym, pręt ujawni drgania obrotowe, jak wahadło zegarka kieszonkowego. Uchwycimy jakikolwiek moment tego ruchu, odpowiadający pośredniej wartości kątu φ takiej, że $\varphi_0 \geq \varphi \geq 0$. Siły naprężeń przynależne do tego skręcenia dadzą moment $M = \frac{GJ_0}{L} \varphi$ sprężysty u dolnego końca pręta. Bierzemy go wyłącznie pod uwagę, pomijając rozciąganie pręta, wywołane ciężarem tarczy i wypisujemy równanie ruchu tarczy dla tego wypadku w postaci $R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{GJ_0}{L} \varphi = 0$, gdzie R oznacza moment bezwładności tarczy B względem osi obrotu, a więc względem osi pręta. Oznaczmy



przez $n = \sqrt{\frac{GJ_0}{RL}}$, a wtedy $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -n^2\varphi$. Całka tego równania jest $\varphi = A \sin nt + B \cos nt$ przy czem stałe całkowania należy w niej wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Ponieważ w moment początkowy $t=0$ mieliśmy $\varphi = \varphi_0$ oraz $[\frac{d\varphi}{dt}] = 0$, jako, że dla punktu zwrotnego ruchu, przeto będziemy mieli dwa równania warunkowe $\varphi_0 = B$ oraz $[\frac{d\varphi}{dt}] = An = 0$. Stąd ostatecznie $\varphi = \varphi_0 \cos nt$. Są to więc drgania okresowe sprężyste właściwe prętu skreconego, dźwigającego ciężar. Okres ich $T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{BL}{GJ_0}}$.

Nadto, gdy na górny przekrój oporowy działa okresowy moment wymuszający, powodujący drganie tego samego rodzaju, podczas których następują skrećenia górnego przekroju oporowego o kąt $\varphi_1 = a \sin bt$, a opór ośrodka hamującego jest proporcjonalny do szybkości drgania tarczy według prawa $q \frac{d\varphi}{dt}$, wtedy możemy wypisać równanie ruchu tarczy: $R \frac{d^2\varphi}{dt^2} + q \frac{d\varphi}{dt} + \frac{GJ_0}{L} + a \sin bt = 0$. Chcąc nadto uwzględnić masę pręta skrećanego wyznaczamy jego siłę żywą w założeniu podanym wyżej w ustępie siódmym. W tym założeniu szybkość kątowna poprzecznego przekroju AA odległego o X od przekroju górnego zamocowanego, będzie $\omega_x = \frac{X}{L} \frac{d\varphi}{dt}$. Nadto niech U oznacza moment bezwładności całego pręta względem osi obrotu, a wtedy siła żywa pręta będzie

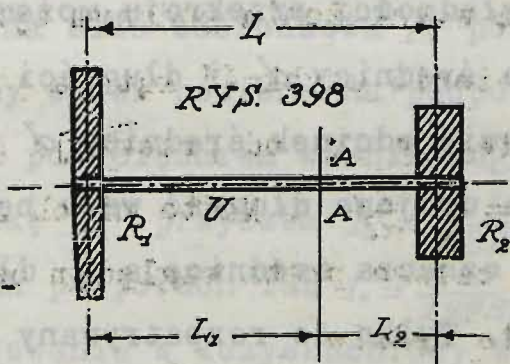
$$\int_0^L \frac{1}{2} \frac{U}{L} dx \frac{X^2}{L^2} \left[\frac{d\varphi}{dt} \right]^2 = \frac{1}{2} \frac{U}{L^3} \left[\frac{d\varphi}{dt} \right]^2 \int_0^L X^2 dx = \frac{1}{3} \frac{U}{L^2} \left[\frac{d\varphi}{dt} \right]^2$$

możemy więc i tu również uwzględnić masę pręta dodając trzecią część jego momentu bezwładności U do momentu bezwładności tarczy względem tej samej osi obrotowej. Ostatecznie więc będziemy mieli równanie ruchu

w postaci $(R + \frac{1}{3}U) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt} + \frac{GJ_0}{L} \varphi + a \sin bt = 0$. Czy-
niąc w niem $2m = \frac{2}{R + \frac{1}{3}U}$ i $n = \sqrt{\frac{GJ_0}{L(R + \frac{1}{3}U)}}$ oraz $p = \frac{a}{R + \frac{1}{3}U}$
otrzymamy $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2m \frac{d\varphi}{dt} + n^2 \varphi + p \sin bt = 0$ równanie zupeł-
nie takie jak poprzednie. Wynikają zeń zupełnie te sa-
me wnioski, które tu pomijamy dla uniknięcia powtarza-
nia się, zaznaczając jedynie, iż w danym wypadku drga-
nia wymuszone wzrastają gwałtownie, gdy okresy drgań
właściwych i wymuszonych zbliżą się wartościowo. I tu-
taj więc zachodzi zjawisko ODDZWIĘKU sprężystego.

Tylko co rozpatrywane zagadnienie ma zastosowanie
praktyczne nieco w innym układzie, a mianowicie w po-
staci wału ważkiego, dźwigającego obustronnie na koń-
cach ciężkie tarcze zamachowe. Odpowiedni układ łożysk
pozwala pominąć obciążenia gnące i rozpatrywać wałek,
jako jedynie skręcany (RYS. 398). Skręćmy obie tarcze
w kierunku przeciwnym i pozostawmy sobie - poczną się
one rozkręcać i wahać w odwrotnych kierunkach, przy-
czem oczywiście musi być

pewien pośredni przekrój
AA stały, nie ulegają-
cy skręcaniu ani w tę ani
w ową stronę. Oznaczmy od-
ległość tego przekroju od
obu tarcz przez L_1 i L_2 całą długość pręta przez L
moment bezwładności jego przekroju przez J_0 , wresz-
cie przez R_1, R_2 i U momenty bezwładności obu tarcz
i wałka względem osi obrotowej.



Wobec unieruchomienia przekroju AA możemy obustronnie zastosować wzory uprzednio wyprowadzone pisząc wartości odnośnych okresów dla obu części układu w postaci $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L_1 [R_1 + \frac{1}{3} U \frac{L_1}{L_1}]}{G J_0}} ; T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi \sqrt{\frac{L_2 [R_2 + \frac{1}{3} U \frac{L_2}{L_2}]}{G J_0}}$

Wobec tożsamości wahnięć obu tarcz $T_1 = T_2$ czyli

$$L_1 \left[R_1 + \frac{1}{3} U \frac{L_1}{L_1} \right] = L_2 \left[R_2 + \frac{1}{3} U \frac{L_2}{L_2} \right] \text{ Wobec } L_2 = L - L_1 \text{ mamy}$$

$$L_1 R_1 + \frac{1}{3} U L_1^2 = L R_2 - L_1 R_2 + \frac{1}{3} U L_2^2 \quad \frac{2}{3} U L_1 + \frac{1}{3} U L_2$$

$$L_1 = \frac{R_2 + \frac{1}{3} U}{R_1 + R_2 + \frac{2}{3} U} L \quad \text{oraz} \quad L_2 = \frac{R_1 + \frac{1}{3} U}{R_1 + R_2 + \frac{2}{3} U} L$$

Podstawiając te wartości otrzymamy ostatecznie

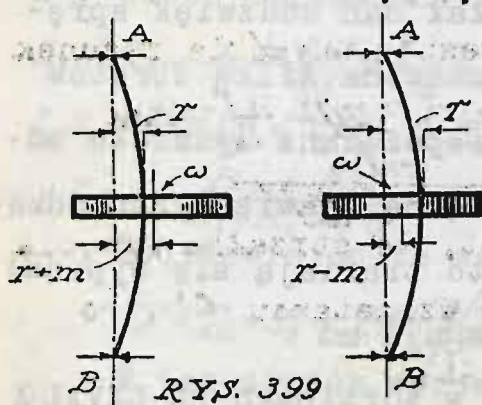
$$T = T_1 = T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L (R_1 + \frac{1}{3} U) (R_2 + \frac{1}{3} U)}{G J_0 [R_1 + R_2 + \frac{2}{3} U]}}$$

W ten sposób wyznaczamy okres drgań właściwych układu. W wypadku pręta różnych średnic należy we wzorze tylko co wypisanym miasto L podstawić długość urojoną wyliczoną podług następującej zasady: Każde zgrubienie wału zwiększa jego oporność na skręcanie, czyli zmniejsza kąt skręcania, który jak wiadomo jest proporcjonalny do długości i odwrotnie proporcjonalny do momentu bezwładności przekroju, możemy więc zgrubiony odcinek wału o średnicy d_i i długości l_i odrzucić i na jego miejsce wstawić odcinek średnicy d i długości $l = l_i \frac{d^4}{d_i^4}$. Całkowita urojona długość wału będzie więc $L = \sum_{i=1}^n l_i \frac{d_i^4}{d^4} + l_0$, gdzie d_0 oznacza średnicę, a l_0 długość którejkolwiek części wału. Tylko co rozpatrywany wypadek ma bezpośrednie zastosowanie do wałów długich, przenoszących ruch silników obrotowych na śrubę. Gdy okres drgań silnika stanie się równym okresowi drgań właściwych T wału, nastąpią gwałtowne drgania o wielkiej rozwartości, mogące wywołać pęk-

nięcie wału. Nastąpi to oczywiście wtedy, gdy silnik pracować będzie przy $n = \frac{60}{T}$ obrotach na minutę. W tym wypadku nie pozostaje nic innego jak tylko zmienić przekrój wału. Można go przytem śmiało zmniejszyć, a będzie mimo to wytrzymałszy, nie będzie bowiem działał nań oddźwięk sprężysty. Różnica stosunkowo dość nieznaczna kilku obrotów na minutę wystarczy, aby stłumić niepożądane zjawisko oddźwięku, jak uczy doświadczenie. Podobne zjawiska zachodzą również w wałach turbin, gdzie nadto trafiają się wypadki wygięcia wirowego. Najczęściej ulegają mu

§ 13. WAŁY GIBKIE, używane są w turbinach DE LAVALA. Weźmy pod uwagę wałek Z , długi o stałym przekroju stosunkowo nieznacznym. Moment bezwładności tego kołowego przekroju niech będzie J . Pośrodku wałek dźwiga ciężki wirnik ważący GK . Ponieważ środek masy ω wirnika nie leży ściśle na osi wałka, a tworzy lekką mimośrodowość m , przeto przy wirowaniu wałka w łożyskach A i B pionowo, rozwija się dość znaczna siła odśrodkowa R powodująca wygięcie wałka. Połóżmy wałek poziomo na podpory umieszczone po obu końcach, a pod ciężarem wirnika ugnie się on, dając środkową strzałkę x_0 przyczem $x_0 = \frac{GL^3}{48EJ}$ gdy wałek jest jeno oparty na podporach lub $x_0 = \frac{GL^3}{192EJ}$ w wypadku obustronnego zamocowania w łożyskach. Gdy wałek ustawimy pionowo jak na /RYS. 399/ i wprowadzimy go w szybki obrót, wtedy siła odśrodkowa R , o której wyżej była mowa da również ugięcie wałka, przyczem strzałka środkowa będzie $x = \frac{R}{G} x_0$ niezależnie od sposobu zamocowa-

nia w łożyskach. Wypływa to bezpośrednio z pierwszego prawa HOOKE'A. Wobec istnienia mimośrodowości m wygięcie to jest konieczne i zająć musi w kierunku działania siły odśrodkowej R , a więc w kierunku m . Inaczej mówiąc odcinki m i r ułożą się na jednej prostej, a środek masy wirnika ω zajmie położenie naze-



wnętrz wypukłej odkształconej osi pręta. Wobec tego $R = \frac{G}{g} \omega^2 (r+m)$ gdzie przez ω oznaczyliśmy kątową szybkość wirowania. Stąd $\frac{G}{g} \omega^2 (r+m) = \frac{G r}{I_0}$ i ostatecznie otrzyma-

my dla strzałki ugięcia wzór $r = \frac{I_0 m \omega^2}{g - I_0 \omega^2}$, z którego z łatwością wywnioskujemy o istnieniu szybkości krytycznej $\omega_k = \sqrt{\frac{g}{I_0}}$, dla której strzałka ugięcia wału staje się nieskończenie wielką. Ta szybkość odpowiada okresowi jednego obrotu $T = \frac{2\pi}{\omega_k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{g}}$ równemu okresowi poprzecznych drgań właściwych układu. Stąd

WNIOSEK PIERWSZY. WAŁEK O STAŁYM PRZĘKROJU NIEWAŻKIM Z OSADZONYM POŚRODKU WIRNIKIEM - ULEGA WYBOCZENIUM WIROWEMU, GDY OKRES JEDNEGO OBROTU STAJE SIĘ RÓWNYM OKRESOWI JEGO DRGAŃ WŁAŚCIWYCH POPRZECZNYCH.

Zatem wałek, by najmocniejszy, ulec musi pęknięciu przy tej szybkości krytycznej, gdy jednak zdołamy za pomocą odnośnych urządzeń powstrzymać poczynające się wyboczenie wirowe i nagłym wstrząsem zakłócić przebieg zjawiska, wtedy możemy otrzymać ponowny stan równowagi odkształconej pręta, lecz już przy wyższych szybkościach kątowych $\omega > \omega_k$. Napozór wydaje się to niemożliwe. Stwier

dała to jednak bezpośrednie doświadczenie. Teoretycznie łatwo wyjaśnić to zjawisko, zważywszy, że wstrząs o którym tylko go była mowa powtarzać się winien dopóty, póki mimośrodowość m nie ułoży się wewnątrz odkształconej, a więc między odkształconą i pierwotną osią pręta na linii strzałki r , jak to najlepiej zresztą uwypukla rysunek.

Wtedy $R = \frac{G}{g} \omega^2 (r-m)$ a zatem $\frac{G}{g} \omega^2 (r-m) = \frac{Gr}{r_0}$ stąd

$$r = \frac{r_0 m \omega^2}{r_0 \omega^2 - g} = \frac{m}{1 - \frac{g}{r_0 \omega^2}} = \frac{m}{1 - \left[\frac{\omega_k}{\omega} \right]^2}$$

Otrzymany wzór wskazuje nawet, że strzałka ugięcia dąży do zera przy nieograniczonym wzrastaniu ω , co zresztą stwierdza doświadczenie. Stąd

WNIOSEK DRUGI. NIEWAŻKI WAŁEK O STAŁYM PRZĘKROJU Z OSADZONYM POŚRODKU WIRNIKIEM MOŻE WIROWAĆ BEZPIECZNIE Z SZYBKościĄ KĄTOWĄ WYŻSZĄ OD KRYTYCZNEJ.

Ponieważ $\omega_k = \sqrt{\frac{48EJg}{GL^3}}$ lub $\omega_k = \sqrt{\frac{192EJg}{GL^3}}$ zatem:

WNIOSEK TRZECI. NIEWAŻKI WAŁEK O STAŁYM PRZĘKROJU Z OSADZONYM POŚRODKU WIRNIKIEM MA SZYBKOSĆ KĄTOWĄ TYM NIŻSZĄ IM MNIEJSZĄ POSIADA WARTOŚĆ MOMENT BEZWŁADNOŚCI PRZĘKROJU WAŁKA.

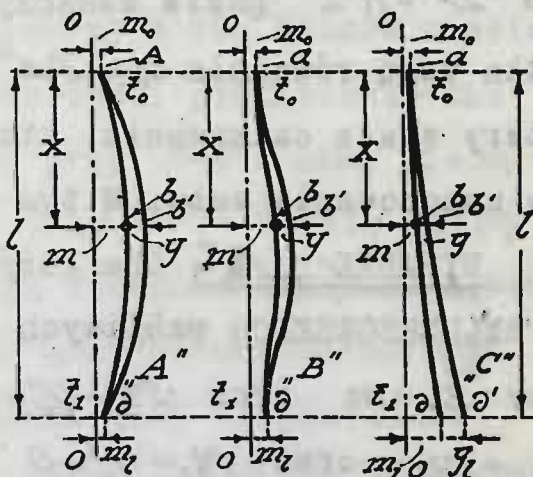
Należy zatem dawać mały przekrój, używać wałków gibkich chcąc korzystać z szybkości kątowych wyższych od krytycznej. W wypadku wielu wirników osadzonych na tym samym wałku dobre wyniki daje wzór doświadczalnie stwierdzony DUNKERLEY'A wyznaczający szybkość kątową krytyczną ω_k wałka w postaci $\frac{1}{\omega_k^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2}$, gdzie ω_i oznacza szybkość kątową krytyczną tego samego wałka, gdy zeń zdjęto

wszystkie $N-1$ wirników prócz i -tego.

§ 14. WYBOCZENIE WIROWE wałków obciążonych wirujących. Weźmy pod uwagę pręt Z długi o stałym kołowym przekroju S , ustawiony pionowo w łożyskach. Pręt ten wiruje z szybkością kątową ω i jak doświadczenie wskazuje przy dostatecznie wielkiej krytycznej wartości ω_k ulega wyboczeniu wirowemu, to jest znagła wygina się i pęka. Poprowadźmy przez oś obrotu pręta jakąkolwiek płaszczyznę, która wirować będzie wraz z wałem. Wobec niemożności otrzymania zupełnej jednorodności tworzywa oraz wobec niezupełnej prostolinjowości wału środka mas poszczególnych jego przekrojów poprzecznych będą leżały na krzywej przestrzennej, wogóle różnej od osi obrotu

OO , czyli od geometrycznej osi panewek. Ta krzywa środków mass- istotna oś podłużna wału w rzucie na tylko co poprowadzoną płaszczyznę da krzywą abd znikomo odchylającą się od osi obrotu, zakładamy bowiem, że wał jest praktycznie doskonały czyli możliwie w granicy naszych środków technicznych prosty i z jednolitego tworzywa odkuty. Jeżeli więc pewne mimośrodowości istnieją przypisać to należy jedynie nieudolności naszych środków technicznych. W odległości X od górnej dajmy na to panewki obieramy dowolny przekrój poprzeczny o środku masy rzutującym się w punkcie Z na owej płaszczyźnie, gdy pręt pozostaje w odpoczynku. Punkt Z jest zarazem rzutem środka masy znikomo wąskiej płytki, jaką otrzymamy, prowadząc sąsiedni przekrój odległy o dx od po-

przedzającego. Gdy pręt pocznie wirować, masa tej płytki $\frac{\rho}{g} S dx$ jako mimośrodowa względem osi obrotu, rozwinię siłę odśrodkową. Łączne działanie wszystkich tych sił elementarnych wygnie pręt a ostateczna linja wygięcia da w rzucie na rozpatrywaną wyżej płaszczyznę nową krzywą $ab'o$. Rzut mimośrodowości będzie więc $z = m + y$



RYS. 400

dla naszej płytki, a składowa siły odśrodkowej panującej w przekroju rozpatrywanym będzie $\omega^2 \frac{\rho}{g} S dx (m + y)^2 = \omega^2 \frac{\rho}{g} S z^2 dx$. Cały pręt możemy tedy rozpatrywać jako obciążony siłami gnącymi, rozłożonemi w stosunku $\frac{\rho}{g} S z^2$ na jednostkę długości pręta. One to powodować będą ugięcie pręta. Oznaczmy siłę tnącą przynależną do rozpatrywanego przekroju przez Q w sąsiednim odległym o dx siła ta będzie $Q + dQ$, przyczem oczywiście przyrost siły tnącej $dQ = \omega^2 \frac{\rho}{g} S z^2 dx$, tylko ta bowiem siła panuje na długości dx . Stąd mamy $\frac{dQ}{dx} = \omega^2 \frac{\rho}{g} S z^2$ ponieważ zaś $Q = \frac{dM}{dx}$ przeto $\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = \omega^2 \frac{\rho}{g} S z^2$ gdzie M oznacza moment panujący w rozpatrywanym przekroju. Nadto jak wiemy $EJy'' = M$ czyli różniczkując dwukrotnie będziemy mieli $EJy'''' = \frac{d^2 M}{dx^2}$ oraz $EJy'''' = \frac{d^2 M}{dx^2} = \omega^2 \frac{\rho}{g} S z^2$. Wobec tego, że $z = m + y$ mamy $z'''' = y''''$ rzut bowiem mimośrodowości m zależy jeno od przypadku, a bynajmniej w zależności od x wyrazić się nie da, musi być przeto rozpatrywany jak

zmienna warjacyjna od X niezależna. Stąd mamy ostatecznie $Z'''' = n^4 Z$ gdzie oznaczyliśmy przez $n = \sqrt{\frac{8S\omega^2}{EJg}}$

Całka tego równania $Z = Ae^{nx} + Be^{-nx} + C \sin nx + D \cos nx$ zawiera cztery stałe całkowania, które należy wyznaczyć z warunków zamocowania wału. W tym celu rozpatrujemy kolejno

WYPADEK „A” Oba łożyska L_1 i L_2 należą do typu SELLERSOWSKICH wahliwych łożysk, tutaj więc przy $X=0$

mamy $Z_0 = m_0$ oraz $M_0 = y_0' = 0$ nadto przy $X=l$ będzie

$Z_l = m_l$ oraz $M_l = y_l' = 0$. Te warunki dadzą równania

$m_0 = A + B + D$; $0 = A + B - D$; $m_l = Ae^{nl} + Be^{-nl} + C \sin nl + D \cos nl$

$0 = Ae^{nl} + Be^{-nl} - C \sin nl - D \cos nl$. Z pierwszych dwóch równań wynika,

że $D = \frac{m_0}{2}$ oraz $A + B = \frac{m_0}{2}$. Dodając dwa ostatnie

równania będziemy mieli $Ae^{-nl} + Be^{-nl} = \frac{m_l}{2}$ stąd ostatecznie

otrzymamy

$$A = \frac{1}{2} \frac{m_l - m_0 e^{-nl}}{e^{nl} - e^{-nl}} = \frac{m_l - m_0 e^{-nl}}{4 \sinh nl}; B = \frac{1}{2} \frac{m_0 e^{nl} - m_l}{e^{nl} - e^{-nl}} = \frac{m_0 e^{nl} - m_l}{4 \sinh nl}$$

Nadto dwa ostatnie równania dają $C \sin nl + D \cos nl = \frac{m_l}{2}$

stąd $C = \frac{1}{2} \frac{m_l - m_0 \cos nl}{\sin nl}$ i ostatecznie otrzymamy

$$y = z - m = [m_l (e^{nx} - e^{-nx}) + m_0 (e^{n(l-x)} - e^{-n(l-x)})] : 4 \sinh nl + \\ + \frac{m_l}{2} \frac{\sin nx}{\sin nl} + \frac{m_0}{2} [\sin nl \cos nx - \cos nl \sin nx] : \sin nl - m = \\ = -m + [\frac{\sinh nx}{\sinh nl} + \frac{\sin nx}{\sin nl}] \frac{m_l}{2} + [\frac{\sinh n(l-x)}{\sinh nl} + \frac{\sin n(l-x)}{\sin nl}] \frac{m_0}{2}$$

Widzimy stąd, że y staje się nieskończenie wielkie gdy $\sin nl = 0$ to jest gdy $nl = \pi$, czyli gdy

$$\pi = \sqrt{\frac{8S\omega^2}{EJg}}$$

Oznaczmy masę wału przez $\int_0^l \rho S dx$ a wtedy będziemy mieli dla szybkości katowej krytycznej wzór $\omega_k = \pi \sqrt{\frac{EJ}{\int_0^l \rho S dx}}$

Z kolei rozpatrujemy

WYPADEK „B” kiedy oba łożyska L_1 i L_2 są nieru-

chome, tutaj więc ponieważ pręt jest zamocowany obustronnie to, znaczy, że krzywa abd tworzy u obu końców z osią obrotu kąty teoretycznie równe zeru, praktycznie zaś bardzo nieznaczne. Tutaj więc przy $x=0$ mamy $z_0=m_0$, oraz $z'_0=\alpha_0$, podczas, gdy przy $x=l$ będzie $z_l=m_l$, oraz $z'_l=\alpha_l$. Te warunki dają równania $A+B=D=m_0$; $A-B=C=\alpha_0$, $Ae^{nl}+Be^{-nl}+C\sin nl+D\cos nl=m_l$; $Ae^{nl}-Be^{-nl}+C\cos nl-D\sin nl=\frac{\alpha_l}{n}$

Z pierwszych dwóch równań mamy bezpośrednio $D=m_0-A-B$; $C=\alpha_0-A+B$ zatem z dwóch ostatnich po podstawieniu otrzymamy:

$$\begin{aligned} [e^{nl}(\sin nl + \cos nl)]/A + [e^{-nl}(\sin nl - \cos nl)]/B &= m_l - \alpha_0 \sin nl - m_0 \cos nl \\ [e^{nl}(\sin nl - \cos nl)]/A + [-e^{-nl}(\sin nl + \cos nl)]/B &= \frac{\alpha_l}{n} - \alpha_0 \cos nl - m_0 \sin nl \end{aligned}$$

Oznaczmy dla skrócenia:

$$\begin{aligned} e^{nl} \sin nl - \cos nl &= M; \quad e^{-nl} + \sin nl - \cos nl = N; \quad e^{nl} \sin nl + \cos nl = P \\ -e^{-nl} + \sin nl + \cos nl &= Q; \quad m_l - \alpha_0 \sin nl - m_0 \cos nl = \frac{\alpha_l}{n} - \alpha_0 \cos nl + m_0 \sin nl = W \end{aligned}$$

a wtedy będziemy mieli $A = \frac{QV - NW}{\Delta}$ oraz $B = \frac{MW - PV}{\Delta}$

gdzie oznaczyliśmy nadto przez

$$\begin{aligned} \Delta &= MQ - PN = [e^{nl} \sin nl - \cos nl][e^{-nl} + \sin nl + \cos nl] - \\ &- [e^{nl} + \sin nl - \cos nl][e^{-nl} + \sin nl - \cos nl] = 4 \left[\frac{e^{nl} + e^{-nl}}{2} \cos nl - 1 \right] = \\ &= 4 [\cosh nl \cos nl - 1] \end{aligned}$$

Z tylko co otrzymanych wzorów wynika, że y a zarazem i z staje się nieskończenie wielkim, gdy $\Delta=0$ to jest gdy $\cosh nl \cos nl = 1$. Ma to miejsce gdy $nl = 1,518\pi \approx \approx \frac{3}{2}\pi$. Stąd mamy $\frac{3}{2}\pi \sqrt{\frac{ES\omega^2}{EI}}$ i ostatecznie dla szybkości katowej krytycznej otrzymamy wzór:

$$\omega_k = \frac{9}{4}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^3}}$$

WYPADEK „C” kiedy wał tkwi w jednym łożysku zamoco-

wany, drugi zaś jego koniec swobodnie wiruje niczem nie podparty. W tym wypadku dla $X=0$ będziemy mieli jak wyżej $z_0=m_0$ oraz $z'_0=\alpha_0$ natomiast dla $X=l$ będzie $M_l=z''_0=0$ oraz $Q_l=z'''_0=0$. Te warunki dają równania $A+B+D=m_0$; $A-B+C=\alpha_0$; $Ae^{nl}+Be^{-nl}-C\sinh nl-D\cosh nl=0$; $Ae^{nl}-Be^{-nl}-C\cosh nl+D\sinh nl$ i tu znów $D=m_0-A-B$ $C=\alpha_0-A+B$ zatem z dwóch ostatnich równań po podstawieniu otrzymamy

$$\begin{aligned} [e^{nl}+\sinh nl+\cosh nl]A + [e^{-nl}-\sinh nl+\cosh nl]B &= \alpha_0 \sinh nl + m_0 \cosh nl \\ [e^{nl}-\sinh nl+\cosh nl]A + [-e^{-nl}-\sinh nl-\cosh nl]B &= \alpha_0 \cosh nl - m_0 \sinh nl \end{aligned}$$

Oznaczmy dla skrócenia przez

$$\begin{aligned} M &= e^{nl}+\sinh nl+\cosh nl; \quad N=e^{-nl}-\sinh nl+\cosh nl; \quad P=e^{nl}- \\ &-\sinh nl+\cosh nl; \quad Q=-e^{-nl}-\sinh nl-\cosh nl; \quad V=\alpha_0 \sinh nl + \\ &+ m_0 \cosh nl; \quad W=\alpha_0 \cosh nl - m_0 \sinh nl \end{aligned}$$

a wtedy będziemy mieli $A = \frac{QV-NW}{\Delta}$ oraz $B = \frac{MW-PW}{\Delta}$

gdzie nadto oznaczyliśmy przez

$$\begin{aligned} \Delta &= MQ-PN = [e^{nl}+\sinh nl+\cosh nl][e^{-nl}-\sinh nl-\cosh nl] - \\ &- [e^{nl}-\sinh nl+\cosh nl][e^{-nl}-\sinh nl+\cosh nl] = -4 \left[\frac{e^{nl}+e^{-nl}}{2} \cosh nl + 1 \right] = \\ &= -4 [\cosh nl \cosh nl + 1]. \end{aligned}$$

I tu więc również y a zarazem i z staje się nieskończenie wielkim, gdy $\Delta=0$, to jest gdy $\cosh nl \cosh nl = -1$

Ma to miejsce gdy $nl=0,594\pi$ a zatem dla szybkości katowej krytycznej otrzymamy wzór

$$\omega_k = 0,353 \pi^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^3}}$$

We wszystkich trzech powyżej rozpatrzonych wypadkach istnieją więc szybkości katowe krytyczne. Są to tak zwane szybkości pierwszego rzędu równania bowiem

$$\sinh nl=0; \quad \cosh nl \cosh nl=1 \quad \text{oraz} \quad \cosh nl \cosh nl=-1$$

mają również inne wyższe pierwiastki, którym odpowiada-
ją szybkości kątowne krytyczne wyższych rzędów. Istnie-
nie tych szybkości można zresztą stwierdzić doświadczal-
nie, należy tylko za pomocą odpowiednich urządzeń po-
wstrzymać wyboczenie wirujące przy szybkości kątownej
pierwszego rzędu. Gdy szybkość kątowna zbliża się do kry-
tycznej pierwszego rzędu, wał poczyna wirować niespokoj-
nie, poczyna bić tem silniej im bardziej zbliżamy się
do szybkości krytycznej, skoro ją jednak raz przekroczy-
my przy zahamowaniu wyboczenia, wał znowu wiruje zupeł-
nie spokojnie. Zazwyczaj jednak wały sztywne pracują po-
niżej szybkości kątownej, krytycznej pierwszego rzędu.

Wreszcie należy tu zaznaczyć, iż we wszystkich
trzech powyżej rozpatrywanych wypadkach wał może dźwi-
gać szereg równomiernie ustawionych wirników. Nie zwięk-
sza to jego momentu bezwładności J , natomiast pomna-
ża masę wału, należy bowiem we wzorze dodać do masy wa-
łu masę wszystkich wirników, aby otrzymać J .

—Köniec—

PRACE NINIEJSZA, AVTOR
POŚWIĘCA
ŚWIĘTEJ PAMIĘCI
STANISŁAWA PATSCHKEGO
REKTORA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.

SPIS RZECZY

CZĘŚCI DRUGIEJ KURSU.

ROZDZIAŁ VIII.

Praca sprężysta	563
Twierdzenie Castigliano i Clapeyrona	574
Zasada najmniejszej pracy Menabrea	587
Twierdzenie Betti	600
Zasada Mohra	611
Zasada Lévy	621
Napężenie wtórne	627

ROZDZIAŁ IX.

Zginanie prętów krzywych płaskich	633
Odształcenie tych prętów i praca sprężysta	643
Pierścień kołowy	653
Łuki	658

ROZDZIAŁ X.

Naczynia kuliste	666
Naczynia cylindryczne	674
Ogniwa	683

ROZDZIAŁ XI.

Płyta okrągła	685
Płyta prostokątna	687
Płyta owalna	689

ROZDZIAŁ XII.

Naprężenia sił bezwładności	690
Naprężenia kół zamachowych	698
Naprężenia wirników	703
Naprężenia ciał uderzonych	717
Drgania sprężyste	724
Wały giętkie	741
Wyboczenie wirowe	744.

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEGA SIĘ.



nr. 2714

Komisji Wydawniczej
BRATNIEJ POMOCY POLITECHNIKI
WARSZAWSKIEJ

ZA STARANNY I WYBITNIE ARTYSTYCZNY
NAKŁAD „WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW” SKEA-
DA PODZIĘKOWANIE

Autor.

WARSZAWA 1918 R