

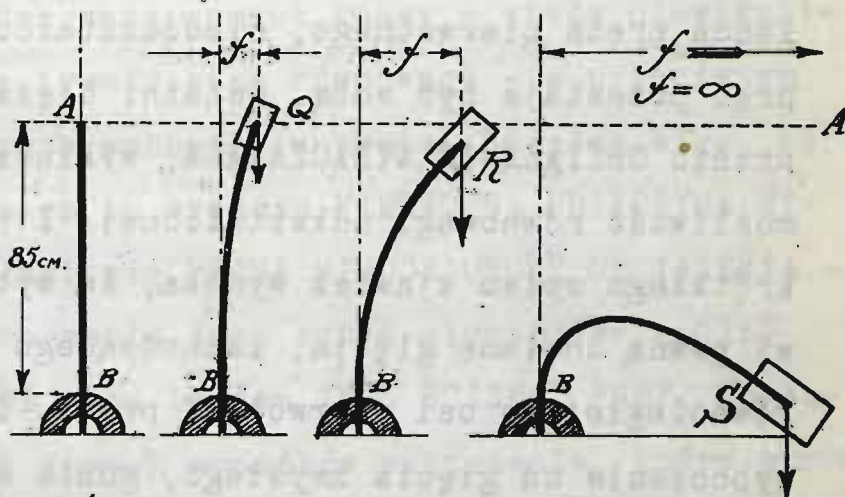
ROZDZIAŁ SZÓSTY. TEORJA WYBACZANIA.

§ 1. ISTOTA ZJAWISK WYBOCZENIA PRĘTA.

Proste doświadczenie C.v.BACHA najlepiej podkreśla istotę zjawisk wyboczenia pręta prostego. Możliwie najdokładniej wyprostowany drut o średnicy $0,35\text{ cm}$ osadzamy

RYS. 266.

pionowo w imadle. Swobodna długość drutu wynosi 85 cm . Na jego koniec nasadzamy



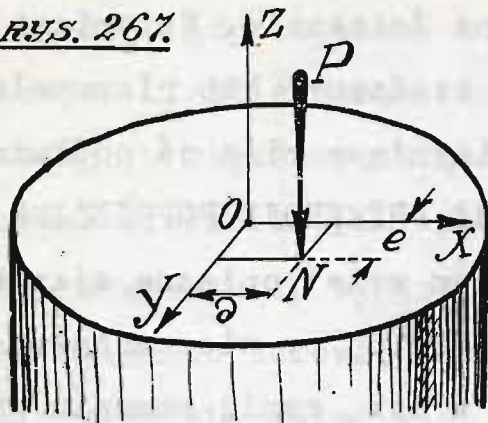
ciężarek $Q = 0,4\text{ kg}$; pozostawiony samemu sobie drut odchyła się od pionu, wygina się na bok, jak łodyga pod ciężarem kwiatu i trwa w równowadze odkształconej. Skrajna strzałka wygięcia wynosi $f = 2,5\text{ cm}$:

W ten sposób ustalona równowaga drutu jest stała - z łatwością możemy to sprawdzić, potrącając zlekka ciężarek - po pewnej liczbie wahań, stan poprzedni trwałej równowagi powraca, przyczem ponownie strzał-

ka wygięcia wynosi $f = 2,5 \text{ cm}$. Te same zjawiska powtórza się, gdy założymy nieco większy ciężarek R . Po pewnej liczbie wahań, zapana je znów, trwały stan równowagi o większej strzałce wygięcia, gdy jednak założymy ciężarek $S = 1,1 \text{ kg}$, wtedy drut pozostawiony samemu sobie wygina się w pałak (RYS. 266), ciężarek zwisa ku dołowi, póki się nie oprze o jakikolwiek przedmiot. Tutaj więc stan równowagi trwałej nie istnieje - pręt ulega WYBOCZENIU, to jest zupełnemu wygięciu o strzałce oddalającej się w nieskończoność po linii AA , prostopadłej do swobodnego końca pręta pierwotnego, nieodkształconego, słowem pręt przestaje być sobą. Ostatni ciężarek stanowi przeto OBCIĄŻENIE WYBACZAJĄCE, wykluczające wszelką możliwość równowagi odkształconej. Z przytoczonego krótkiego opisu zjawisk wynika, że wyboczenie stanowi pewną odmianę gięcia, zachodzącego na tle siły równoległej do osi pierwotnej pręta. Tem różni się wyboczenie od gięcia zwykłego, gdzie siły gnące są prostopadłe do osi, ponadto, jak to zresztą widać z rysunku, moment gnący jakiegokolwiek przekroju poprzecznego pręta ROŚNIE WRAZ Z ODKSZTAŁCENIEM czego nie spotykamy zupełnie przy gięciu zwykłym. Samo zjawisko tu opisane z łatwością możemy wyjaśnić, zważywszy, że ciężarek zamocowany na końcu pręta sterującego, CIŚNIE NA PRĘT siłą pionową. Gdy pręt jest doskonale prosty i ściśle pionowy - wtedy ta siła

UKŁADA SIĘ WZDŁUŻ OSI PRĘTA PODŁUŻNEJ, STAJE SIĘ OSIOWĄ, a pręt pracuje na ściskanie. Natomiast, gdy pręt jest nieco ukośnie osadzony, lub niezupełnie prosty, wtedy, siła obciążająca mija oś podłużną pręta, OBCIĄŻAJĄC ODNOŚNE PRZEKROJE POPRZECZNE MI-MOŚRODOWO - powoduje zatem wyżej opisane zjawiska. Skoro już pręt uległ wygięciu, by nieznacznemu nawet, ciężar wychyla się w bok, ramię momentu gnącego wzrasta, powodując dalsze wyginanie pręta, rosnące aż do pewnej granicy. To wygięcie wywołuje rosnące naprężenia przekrojów poprzecznych. Skoro te naprężenia zrównoważą moment gnący - wtedy niewątpliwie zapanuje trwały stan równowagi - w przeciwnym razie następuje wyboczenie pręta. Widzimy więc, że w rozpatrywanym tu wypadku PIERWOTNĄ PRZYCZYNĄ WYBOCZENIA - jawi się PEWNA MIMOOSIOWOŚĆ OBCIĄŻENIA - bez niej wyboczenie jest zgoła niemożliwe - SIŁY ŚCISŁE OSIOWE mogą bowiem JENO ŚCISKAĆ PRĘT. To samo dotyczy i innych wypadków wyboczenia, które wkrótce rozpatrzymy. Należy zatem POZNAĆ PRZYCZYNY MIMOŚRODOWOŚCI PRAKTYCZNYCH OBCIĄŻEŃ oraz prawa rządzące temi zjawiskami. Nastręcza to dosyć znaczne trudności, wkraczamy bowiem W ŚWIAT SŁABO DOSTĘPNY NASZYM ZMYŚŁOM JEDYNIĘ PRZYPADEK, GDZIE ŻADNYCH PRAW USTANOWIĆ NIE UMIEMY, ANI ZAPROWADZIĆ ŁADU. Przedewszystkiem SAMO OBCIĄŻENIE PRĘTA NIE JEST ŚCISŁE OSIOWE. Wyobraźmy sobie skrajne dno pręta /RYS.267/

RYS. 267



Siła P równoległa do OZ , podłużnej osi pręta chyba jakimś szczególnym zbiegiem okoliczności mogłaby leżeć na tej osi - zazwyczaj - mimo wszel-

kich wysiłków po temu, TRAFIA NIECO MIMOŚRODOWO W PUNKT N dna, o współrzędnych ϑ, e w układzie osi głównych OX, OY dna. Współrzędne ϑ, e są nader nieznaczne, zazwyczaj bowiem obciążamy pręt nader starannie; mogą tu jednak zajść pewne usterki na tle niedoskonałości naszych środków technicznych.

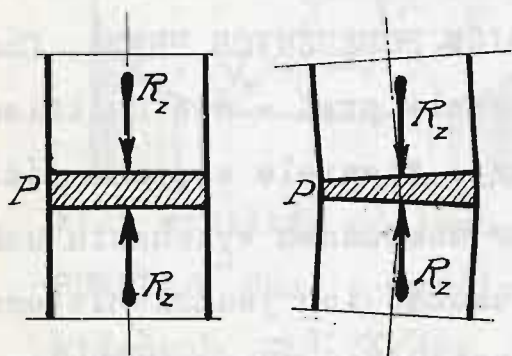
Z kolei SAM PRĘT NIE JEST DOSKONAŁE PROSTY, jego oś podłużna nie jest linią prostą - a krzywą przestrzenną niewiele różniącą się jednak od prostej. W teorii wyboczenia rozpatrujemy wyłącznie pręty o przekrojach poprzecznych JEDNOSTAJNIE USTAWIONYCH. Tego rodzaju pręty znamy już z teorii gięcia - jednoimienne osie ich przekrojów poprzecznych leżą w tych samych płaszczyznach, a przekroje sąsiednie nieznacznie się różnią między sobą. Ponadto będziemy brali pod uwagę jedynie pręty O STAŁYM PRZEKROJU poprzecznym i NAZYWALI JEDNORODNIE ZBUDOWANYMI PRĘTY PROSTE, czyniące zadość obu warunkom powyższym: Podłużna oś tego rodzaju pręta winna być DOSKONAŁE PROSTA. Wzdłuż tej osi

przecinają się oba podłużne przekroje główne pręta, przechodzące przez jednocimienne osie główne jego przekrojów poprzecznych. W istocie jednak PODŁUŻNA OŚ JEST KRZYWĄ PRZESTRZENNĄ, NADER ZBLIŻONĄ DO PROSTEJ - DAJE ONA DWIE KRZYWE PŁASKIE W RZUCIE NA PŁASZCZYZNY GŁÓWNYCH PRZEKROJÓW PODŁUŻNYCH PRĘTA. Choćbyśmy najsumienniej prostowali pręt - nie unikniemy krzywizny jego osi istotnej. Niewiele się ona różni od osi teoretycznej - przy dokładnem wykonaniu uskokki są nader nieznaczne - usunąć ich jednak niepodobna, wobec niedokładności naszych środków technicznych. Krzywizna osi istotnej POSIADA CHARAKTER CZYSTO WYPADKOWY - ZALEŻNY OD WIELU PRZYCZYN DROBNYCH, NIE DA SIĘ PRZETO UJĄĆ W ŻADNE PRAWO, ANI UZALEŻNIĆ OD JAKIEGOKOLWIEK WYMIARU PRĘTA - JEST WIĘC WIELKOŚCIĄ WARIACYJNĄ O ZMIANACH CZYSTO WYPADKOWYCH.

Odległość środka masy jakiegokolwiek przekroju poprzecznego pręta od jego średniej osi daje STRZAŁKĘ PIERWOTNĄ PRĘTA, O SKŁADOWYCH g, h WZGLĘD GŁÓWNYCH OSI OX, OY PRZEKROJU. Strzałki pierwotne pręta mogą ulegać pewnym zmianom na tle działania CZYNNIKÓW ZEWNĘTRZNYCH. Ciężar oparty o pręt, nacisk na boczną powierzchnię pręta, jednostronny prąd powietrza cieplejszego lub zimniejszego - powodują ciągłe wahania wewnętrzne pręta, jego częściowe odkształcenia - SKRZYWIENIA, słowem w sposób niesłychanie złożony zmieniają układ jego strzałek pierwotnych. Po-
WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XXIX.

nadto pręt nawet dokładnie ściśle osiowo obciążony ULEGA SKRZYWIENIU, gdy jakikolwiek przekrój pręta poprzeczny jest niejednorodny. W samej rzeczy, wyobraźmy

RYS. 268.



sobie płytkę poprzeczną pręta, obciążoną wypadkowymi osiowymi R_z ściskającymi wzdłuż osi podłużnej pręta. Jeżeli płytka jest niejednorodna, o różnej wartości E_n , to pod działaniem

naprężeń cisnących ujawni RÓŻNE skrócenia włókienek, stanie się niewątpliwie ukośną, a oś pręta pierwotnie prosta ulegnie skrzywieniu. Wyczuć nieznaczną niejednorodność tworzywa, wyznaczyć drobne wahania wartości E_n - nie leży w naszej mocy, jak również niepodobienstwem jest otrzymać praktycznie tworzywo ściśle jednolite. Stąd wniosek, obejmujący ogół wyłożonego dotychczas:

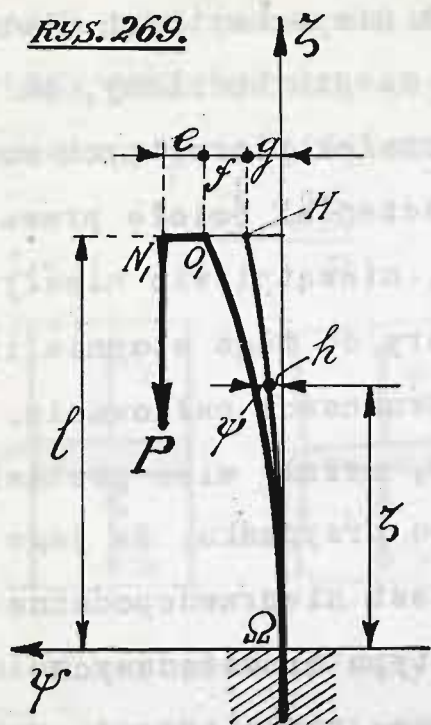
OBCIĄŻENIE OSIOWE PRĘTA PROSTEGO UJAWNIA ZAWSZE PEWNE NIMOŚRODOWOŚCI CZYSTO PRZYPADKOWE, NIE ULEGĄCE ŻADNYM PRAWOM ŚCISŁYM. Dla prętów starannie wyprostowanych wartości tych nimośrodekowości są znikome, mogą jednak wzrosnąć niepomieranie dla prętów zgruba wykonanych. Są one wogóle różne dla poszczególnych przekrojów poprzecznych pręta, nie są atoli zależne ani od wymiarów odnośnych przekrojów, ani od położenia na pręcie. Są to wartości warjacyjne, czysto przypad-

kowe, niezależne od wielorakich niepochwytłych drobnych przyczyn. O tem pamiętać zawsze będziemy, bo tylko dzięki przypadkowości strzałek pierwotnych możemy rozwiązać zagadnienie wyboczenia. Ścisłe prawa rządzące zmianą mimośrodowości, niewątpliwie niesłychanie złożone, powikłałyby wzory do tego stopnia, iż utknęlibyśmy w pół drogi wobec trudności całkowania. Na szczęście nie znamy tych praw, możemy więc postawić na ich miejsce ogólniejsze prawo przypadku. Na jego mocy obciążenie ŚCISŁE OSIOWE jest nieprawdopodobne — a obciążenia istotne należą do typu mimośrodowych osiowych, a zatem siły zewnętrzne, równoległe do osi pręta powodują WYGIĘCIE MIMOŚRODOWE. W ten sposób możemy teorię wyboczenia oprzeć na podstawach teorii gięcia. Wyboczenie jest więc pewnym rodzajem gięcia mimośrodowego; to też szkoła francuska nazywa je GIĘCIEM POPRZECZNYM. Stosownie do rodzaju zamocowania pręta rozpatrujemy cztery zasadnicze wypadki wyboczenia.

§ 2. PRĘT OSADZONY U PODSTAWY, ZRESZTĄ SWOBODNY.

Przez środek masy Ω przekroju dolnego, czyli skrajnego przekroju osadzenia prowadzimy stałą oś $\Omega\zeta$ kierując ją prostopadle do tego przekroju. Będzie to ŚREDNIA oś pręta, zakładamy bowiem, iż mamy tu do czynienia z prętem sumiennie w granicach możliwości wyprostowanym. Z tego samego środka Ω wyprowadzamy osie $\Omega\zeta$ i $\Omega\eta$ wzdłuż głównych osi osadowego przekroju — przyczem oś $\Omega\eta$ układamy w płaszczyźnie rysunku (RYS.

RYS. 269.



269/. a oś ΩZ - kierujemy ku patrzącemu. Wyżej zaznaczyliśmy, że rozpatrywać będziemy wyłącznie pręty jednorodnie zbudowane, zatem odnośne osie główne wszystkich przekrojów poprzecznych będą równoległe do $\Omega \psi$ i ΩZ . Wszystko to, cośmy dotąd powiedzieli dotyczy również i następnych wypadków wyboczenia; zaznaczamy to wyraźnie, aby uniknąć zbytnich powtarzań.

Istotna oś podłużna pręta, wogóle krzywa przestrzenna, w rzucie na przekrój główny $Z\Omega\psi$ da pewną KRZYWĄ PŁASKĄ OH , znikomo różną od prostej ΩZ . Weźmy pod uwagę jakikolwiek przekrój poprzeczny pręta, odległy o Z od dolnego przekroju. Odległość środka masy tego przekroju od osi ΩZ stanowi strzałkę pierwotną pręta. Ta strzałka w rzucie na płaszczyznę $\psi\Omega Z$ daje składową h równoległą do osi $\Omega \psi$. Odcinek h stanowi zarazem współrzędną odnośnego punktu krzywej płaskiej OH . Swobodnie sterczący koniec pręta obciążamy siłą ściąkającą P , równoległą do osi ΩZ , którą to oś możemy niewątpliwie rozpatrywać jako teoretyczną oś podłużną pręta i zakładamy, iż, pomimo wszelkich możliwych starań nie zdołaliśmy uniknąć pewnej mimośrodowości w przyłożeniu siły P . Jako niezupełnie prosty, pręt wygnie się, jego oś pierwotna stanie się

odkształconą, poczem nastąpi trwały stan równowagi odkształconej. W rzucie na płaszczyznę $\xi\Omega\psi$ odkształcona pręta da krzywą płaską ΩO_1 , a mimośrodowość obciążenia - da odcinek $O_1N_1 = e$. Strzałki ugięcia pręta, znacznie większe od pierwotnych dadzą składowe $\psi + k$. Słowo w słowo należy powtórzyć, biorąc pod uwagę drugą płaszczyznę rzutu przechodzącą przez osie $\Omega\xi$ i $\Omega\zeta$. W ten sposób zagadnienie przestrzenne sprowadzamy do rozpatrywania dwóch płaskich rzutów. Zbadamy je kolejno. W rzucie na płaszczyznę $\xi\Omega\psi$ wyżej opisanym, współrzędne środka masy rozpatrywanego przekroju poprzecznego wynoszą $\psi + k$ oraz ζ , a współrzędne punktu przyłożenia siły zewnętrznej - $e + f + g$ oraz ℓ , gdzie przez ℓ oznaczyliśmy długość pierwotną swobodnej części pręta.

Sprowadźmy siłę P do środka masy rozpatrywanego przekroju, a otrzymamy, oprócz siły ściskającej P , przyłożonej do tego środka, jeszcze i pewien moment gnący M_p . Składowa tego momentu, prostopadła do rozpatrywanej płaszczyzny rzutu $\psi\Omega\zeta$ będzie niewątpliwie $M_\xi = P[e + f + g - k - \psi]$, jak to zresztą najlepiej z RYS. 269 postrzec się daje. Oznaczmy przez J_x moment bezwładności rozpatrywanego przekroju względem osi głównej OX równoległej do $\Omega\xi$; w danym wypadku zasadniczy wzór gięcia mimośrodowego, wzór § 41 działu poprzedzającego, otrzyma postać

$$\frac{1}{S_m} = \frac{\alpha_g M_\xi}{1 + \alpha_g \frac{P}{S}} \cdot \frac{1}{J_x}, \text{ tutaj bowiem kąt } \alpha = 0, \text{ jako,}$$

że moment M_{ξ} leży na osi OX . W tym wzorze wyraz $\alpha \frac{P}{S}$ może być zupełnie pominięty wobec jedności, ponieważ wartość α_g jest nader nieznacząca, ponadto niewątpliwie

$\frac{1}{S_m} = \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} [h + \psi] : \left\{ 1 + \left[\frac{d}{d\xi} (h + \psi) \right]^2 \right\}^{\frac{3}{2}}$. Wyrażenie wyżej zaznaczyliśmy, że strzałka pierwotna pręta ma charakter czysto przypadkowy I NIE ZALEŻY OD POŁOŻENIA PRZE-

KROJU NA PRĘCIE, musi być zatem $\frac{dh}{d\xi} = \frac{d^2 h}{d\xi^2} = 0$ co daje:

$\frac{1}{S_m} = \psi'' : [1 + \psi'^2]^{\frac{3}{2}} \equiv \psi''$ i ostatecznie $E_g \int_x \psi'' = = P[e + g - h + f - \psi]$. Oznaczmy przez $n^2 = P : E_g \int_x$, oraz przez $m = e + g - h$. W ten sposób wyodrębniamy część

warjacyjną wyrazu, zawartego w nawiasach, który z kolei oznaczamy przez $\omega = e + g - h + f - \psi = m + f - \psi$. Po-

nieważ e, g i f są stałe, a $\frac{dh}{d\xi} = 0$ zatem $\omega' = -\psi'$ oraz $\omega'' = -\psi''$ i ostatecznie będziemy mieli $\omega'' = -n^2 \omega$.

Całka tego równania różniczkowego $\omega = A \sin n\xi + B \cos n\xi$ zawiera dwie stałe całkowania A i B , które należy określić z warunków zamocowania pręta. Aby te stałe

wyznaczyć, zauważamy, iż dla dolnego przekroju, gdzie

$\xi = 0$ będzie $\psi_0 = 0$ oraz $h_0 = 0$ - prowadziliśmy bowiem oś $\Omega \xi$ przez środek dolnego przekroju prostopadle do

jego powierzchni. A zatem jeszcze $\psi'_0 = 0$, bo odkształcona wybiega z punktu Ω stycznie do osi $\Omega \xi$.

Stąd mamy: $m_0 + f = \omega_0 = B$ oraz $0 = \psi'_0 = \omega'_0 = An$, bo

$\omega' = An \cos n\xi - Bn \sin n\xi$. Stąd mamy $A = 0$ oraz $B = m_0 + f$

gdzie $m_0 = e + g$, a zatem $\omega = (m_0 + f) \cos n\xi$. Dla

skrajnego przekroju pręta, gdzie $\xi = l$ mamy, jak to

zresztą najlepiej widać z rysunku $h_l = g, \psi_l = f$ skąd:

$$\begin{aligned} \omega_e &= e + g - h + f - \varphi = e = m_e, \text{ a zatem: } \omega_e = e = m_e = \\ &= (m_0 + f) \cos n\ell. \text{ Stąd mamy } f = [m_e - m_0 \cos n\ell] : \cos n\ell, \\ \text{oraz } m_0 + f &= m_e : \cos n\ell \text{ i ostatecznie } \omega = m + f - \varphi = \\ &= m_e \cos n\ell : \cos n\ell \text{ skąd: } \varphi = m + f - \frac{m_e \cos n\ell}{\cos n\ell} = m + \frac{m_e - m_0 \cos n\ell}{\cos n\ell} \\ &- m_e \frac{\cos n\ell}{\cos n\ell} = e + g - h + \frac{e - (e + g) \cos n\ell}{\cos n\ell} - e \frac{\cos n\ell}{\cos n\ell} = \\ &= \frac{e}{\cos n\ell} - e \frac{\cos n\ell}{\cos n\ell} - h. \end{aligned}$$

Wzory tu otrzymane pozwalają wypowiedzieć następujące wnioski. Przedewszystkiem, gdy $e = h = 0$ wtedy i $\varphi = 0$ oraz $f = 0$. To znaczy, że PRĘT DOSKONAŁE PROSTY, ŚCISŁE OSIOWO OBCIĄŻONY W SPOSÓB WYŻEJ OMÓWIONY, ŻADNEJ STRZAŁKI UGIĘCIA NIE UJAWNIA. Jest to oczywiście wypadek dawniej już rozpatrywany PRĘTA, ŚCISKANEGO SIŁAMI OSIOWEMI. Wyboczenie tu jest niemożliwe. Wyżej zaznaczyliśmy jednak, że ten wypadek jest mało prawdopodobny, zwykle $e \neq 0$ oraz $h \neq 0$, a przeto strzałka wygięcia φ istnieje MNIEJ LUB WIĘCEJ WYRAŻNA. W pewnych warunkach skrajna wartość φ może wzrosnąć niepomiaralnie - wtedy NASTĄPI WYBOCZENIE PRĘTA, gdy φ lub f stanie się nieskończenie wielkie, to jest, gdy będziemy mieli $\varphi = \infty$ lub $f = \infty$. Jak widać ze wzoru, może to jedynie nastąpić wtedy, gdy $\cos n\ell = 0$, to jest gdy $n\ell = \frac{\pi}{2}$ lub $n\ell = 3\frac{\pi}{2}, 5\frac{\pi}{2}$ i t.d. Najmniejszy pierwiastek $\frac{\pi}{2}$ równania warunkowego $\cos n\ell = 0$ wyznacza SKRAJNĄ WARTOŚĆ SIŁY WYBACZAJĄCEJ PRĘT P_R , mamy bowiem $n^2 \ell^2 = \frac{\pi^2}{4}$ skąd $P_R = \pi^2 E J : 4 \ell^2$. Jest to tak zwany PIERWSZY WZÓR EULERA; wyprowadziliśmy go dla RZUTU

$\varphi \Omega \xi$; w podobny zupełnie sposób będziemy mieli $P'_K = \pi^2 E J_y : 4 \ell^2$ dla RZUTU $\xi \Omega \xi$. Ponieważ główne osie OX, OY dowolnego poprzecznego przekroju pręta jednorodnie zbudowanego są równoległe do jednoimiennych głównych osi $\Omega \xi, \Omega \psi$ jego dolnego przekroju, przeto momenty J_x, J_y jako główne, stanowią skrajne wartości momentów bezwładności odnośnego poprzecznego przekroju. Niech zatem J_x oznacza NAJMNIEJSZY, a J_y - NAJWIĘKSZY moment stałego przekroju pręta. Przy tem założeniu $P_K < P'_K$ zatem WZÓR EULERA NALEŻY WYPISYWAĆ DLA PŁASZCZYZNY GIĘCIA ODPOWIEDZAJĄCEJ NAJMNIEJSZEJ WARTOŚCI MOMENTU BEZWŁADNOŚCI STAŁEGO PRZEKROJU PRĘTA WTEDY BOWIEM OTRZYMUJEMY NAJNIŻSZĄ WARTOŚĆ SIŁY, WYBACZAJĄCEJ PRĘT. Tę właśnie wartość oznaczamy przez $P_K = \frac{\pi^2 E J}{4 \ell^2}$. Chcąc z kolei zbadać drugi wypadek wyboczenia, bierzemy pod uwagę:

§ 3. PRĘT OBU KOŃCAMI PROWADZONY PO PROSTYCH.

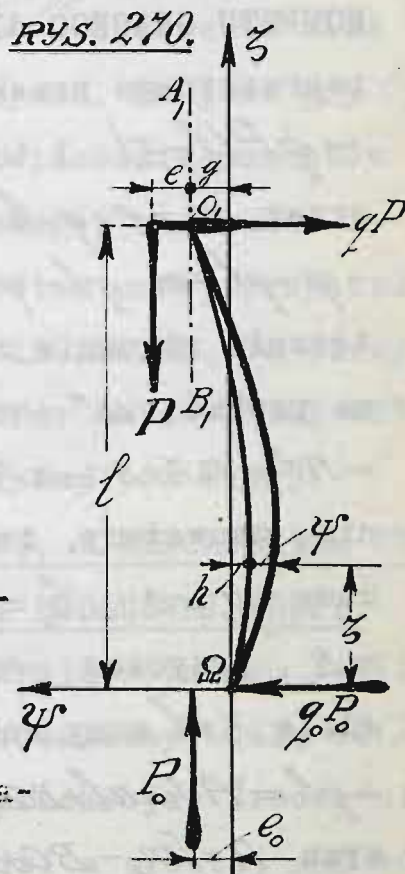
Rozpatrujemy pręt o skrajnych przekrojach, prowadzonych po prostej - ŚREDNIEJ OSI pręta. To znaczy, że środki masy obu końców pręta leżą na prostej. Zresztą ze względu na możliwość pewnej pomyłki, zakładamy, że środek ciężkości O górnego dna leży na prostej AB sąsiedniej i równoległej do osi $\Omega \xi$, z której nie schodzi środek masy dolnego dna. Wyznamy główne osie $\Omega \psi, \Omega \xi$ dolnego dna pręta. Prosta AB w rzucie na płaszczyznę $\varphi \Omega \xi$ da prostą $A'B'$ w odległości g od $\Omega \xi$ położoną. Odległość g stanowi zatem SKŁADOWĄ

pierwotnej strzałki górnego dna pręta, a. krzywa $Q\Omega$ - RZUT ISTOTNEJ OSI PODŁUŻNEJ PRĘTA niezupełnie ściśle prostego. Pod działaniem sił osiowych nieco, dajmy na to, mimośrodowo do obu den pręta

przyłożonych, pręt wygina się w bok - pierwotne strzałki pręta ulegają zmianie na całej pierwotnej długości pręta l . Jakikolwiek

(RYS. 270) przekrój poprzeczny, dowolnie na pręcie w odległości z od dolnego dna obrany, wykaże w rzucie na płaszczyznę $\varphi\Omega z$ SKŁADOWĄ h - PIERWOTNEJ STRZAŁKI UGIĘCIA, ORAZ DODATKOWĄ SKŁADOWĄ ψ strzałki, powstałej pod działaniem sił osiowych. Oznaczmy przez e składową mimośrodu siły P , GÓRNEJ,

przez e_0 - DOLNEJ P_0 . Pod działaniem mimośrodowym sił P i P_0 w obu dnach pręta powstają SIŁY ODPOROWE, prostopadłe do Ωz , o SKŁADOWYCH qP i q_0P_0 , w płaszczyźnie $\varphi\Omega z$ leżących, inaczej bowiem punkty Ω i O_1 porzuciłyby swe drogi - stan równowagi odkształconej nie mógł by istnieć zupełnie. Z równań statyki mamy dla punktu Ω , jako środka sprowadzenia $P + P_0 = 0$, $qP + q_0P_0 = 0$ oraz $P(e+g) + qPl + P_0e_0 = 0$, co daje: $P_0 = -P$, $q_0 = q$ oraz $q = -(e+g-e_0):l$. Ponieważ mimośrodekowości e i e_0 stanowią warjacyjne ma-



że tego samego porządku, zatem $e+g-e_0 > 0$. Stąd wnioskujemy, że składowa qP posiada KIERUNEK UJEMNY dla wypadku rozpatrywanego na RYS.270, a zatem wartość MOMENTU GNĄCEGO dla środka masy wyżej rozpatrywanego poprzecznego przekroju pręta będzie $M = P(e+g-h-\psi) - qP(l-z)$. I tu znów oznaczamy przez $n^2 = \frac{P}{EI}$, oraz przez $m = e+g-h$. Ponadto niech będzie $\omega = e+g-h-\psi-ql = m-ql-\psi$, co daje $\omega' = -\psi'$, $\omega'' = -\psi''$ i ostatecznie równanie zasadnicze gięcia $EI \omega'' = M$ otrzyma postać $\omega'' = -n^2 \omega - n^2 qz$. Całkując go, mamy: $\omega = A \sin n\bar{z} + B \cos n\bar{z} - q\bar{z}$. Aby wyznaczyć stałe całkowania, zauważamy, że dla dolnego przekroju, gdzie $\bar{z} = 0$, mamy $\psi_0 = 0$, $h_0 = 0$, co daje $\omega_0 = m_0 - ql = e+g-ql = B$, przyczem $m_0 = e+g$. Dla górnego przekroju, gdzie $\bar{z} = l$ mamy znów $\psi_l = 0$, $h_l = g$, stąd $\omega_l = m_l - ql = e - ql = A \sin nl + B \cos nl - ql$. Ostatecznie więc $B = m_0 - ql$, oraz $A = [m_l - B \cos nl] : \sin nl = [m_l - (m_0 - ql) \cos nl] : \sin nl$, a zatem $\omega = m - ql - \psi = [m_l - (m_0 - ql) \cos nl] \frac{\sin n\bar{z}}{\sin nl} + (m_0 - ql) \cos n\bar{z} - q\bar{z}$. Stąd otrzymujemy $\psi = m - q(l-\bar{z}) - \frac{m_l - (m_0 - ql) \cos nl}{\sin nl} \sin n\bar{z} - (m_0 - ql) \cos n\bar{z}$. I tu znów w wypadku pręta doskonale prostego, a ściskanego siłami osiowymi wzdłuż osi podłużnej, warjacyjne wartości e, e_0, g, h będą zerami, co pociągnie za sobą $q = 0$, $m_0 = 0$, $m_l = 0$ a zatem i $\psi = 0$. Wyboczenie jest tu więc niemożliwe, natomiast, gdy e, e_0, g, h są różne od zera, strzałka ψ jest WYRAŻNA, a nawet może wzrosnąć nieograniczenie. Wyboczenie nastąpi wtedy, gdy $\sin nl = 0$,

to jest gdy $n\ell = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ i t.d. Najmniejszy pierwiastek warunkowego równania $\sin n\ell = 0$ daje $n^2 = P : E_g J_x = \pi^2 : \ell^2$, stąd otrzymujemy wartość siły P_K , WYBACZAJĄCEJ PRĘT w postaci $P_K = \pi^2 E_g J_x : \ell^2$. Będzie to SIŁA NAJMNIEJSZA, gdy J_x będzie najmniejsze, to jest gdy J_x , jako moment główny, będzie najmniejszością momentów rozpatrywanego przekroju poprzecznego, a zarazem i przekrojów pozostałych, według bowiem umowy rozpatrujemy pręty wyłącznie JEDNORODNIE ZBUDOWANE. Tu otrzymany wzór stanowi DRUGI WZÓR EULERA, dający SIŁĘ WYBACZAJĄCĄ $P_K = \frac{\pi^2 E J}{\ell^2}$. Z kolei bierzemy pod uwagę:

§ 4. PRĘT OSADZONY U PODSTAWY, WIERZCHOŁKIEM PROWADZONY PO PROSTEJ PIERWOTNEJ OSI PODŁUŻNEJ PRĘTA.

Przez środek masy Ω przekroju dolnego, czyli skrajnego przekroju osadzenia, prowadzimy stałą oś ΩZ kierując ją prostopadle do tego przekroju. Środek ciężkości górnego dna pręta nie schodzi z prostej AB równoległej i znikomo odległej od osi ΩZ . Wyznaczymy główne osie przekroju dolnego: $\Omega \xi, \Omega \psi$. Prosta AB w rzucie na płaszczyznę $\psi \Omega Z$ da prostą $A_1 B_1$ w odległości g od ΩZ położoną. Odległość g stanowi zatem SKŁADOWĄ pierwotnej strzałki górnego dna pręta, a krzywa q, Ω - rzut istotnej osi podłużnej pręta niezupełnie ściśle prostego. I tu, jak w wypadku tylko co wyżej rozpatrywanym obciążamy górne dno pręta siłą osiową P , nieco mimośrodowo przyłożoną; pod jej działaniem pręt wygina się w bok - pierwotne strzałki

$E_g J_y = M$ otrzyma postać $\omega'' = -n^2 \omega - n^2 q z$. Całkując mamy:
 $\omega = A \sin n z + B \cos n z - q z$. Dla dolnego przekroju, gdzie $z=0$ mamy $\varphi_0=0, h_0=0$ co daje $\omega_0 = e + q - q l = m_0 - q l = B$. Ponieważ poprowadziliśmy oś OX prostopadle do tego przekroju, przeto $-\psi' = \omega' = A n \cos n z - B n \sin n z - q$ winno być równe zeru przy $z=0$. Stąd mamy $A n - q = 0$, co daje: $A = q : n$, ponadto $B = m_0 - q l$. Dla górnego dna, gdzie $z=l$ mamy $\varphi_l=0, h_l=q$, a więc $\omega_l = e - q l = m_l - q l = A \sin n l + B \cos n l - q l$, co daje $e = m_l = A \sin n l + B \cos n l = \frac{q}{n} \sin n l + (m_0 - q l) \cos n l$. Stąd mamy: $q = n \frac{m_l - m_0 \cos n l}{\sin n l - n l \cos n l}$ co daje:

$$A = \frac{m_l - m_0 \cos n l}{\sin n l - n l \cos n l}; \quad B = m_0 - \frac{m_l - m_0 \cos n l}{\sin n l - n l \cos n l} n l.$$

Oznaczmy przez $\Delta = \sin n l - n l \cos n l$ a wtedy $\omega = m - q l - \psi = A \sin n z - B \cos n z - q z$, stąd $\psi = m - q(l-z) - A \sin n z - B \cos n z$ i ostatecznie: $\psi = m - n \frac{m_l - m_0 \cos n l}{\Delta} (l-z) - \frac{m_l - m_0 \cos n l}{\Delta} (\sin n z - n l \cos n z) - m_0 \cos n z$.

I tutaj w wypadku pręta doskonale prostego, ściśle osiowo obciążonego kiedy $h=e=q=0$, mamy $\psi=0$ - wyboczenie jest niemożliwe. W istocie jednak h, e, q nie mają wartości zerowych, to też strzałka ψ posiada mniej lub więcej wyraźną wartość, która może nawet wzrosnąć nieograniczenie przy $\Delta=0$, wtedy pręt ulega wyboczeniu. Najmniejszy pierwiastek równania warunkowego $\Delta = \sin n l - n l \cos n l = 0$ daje $n l = 1,4303 \pi$ stąd mamy: $n^2 = P : E_g J_y = (1,4303)^2 \pi^2 : l^2 = 2,046 \pi^2 : l^2 \cong$

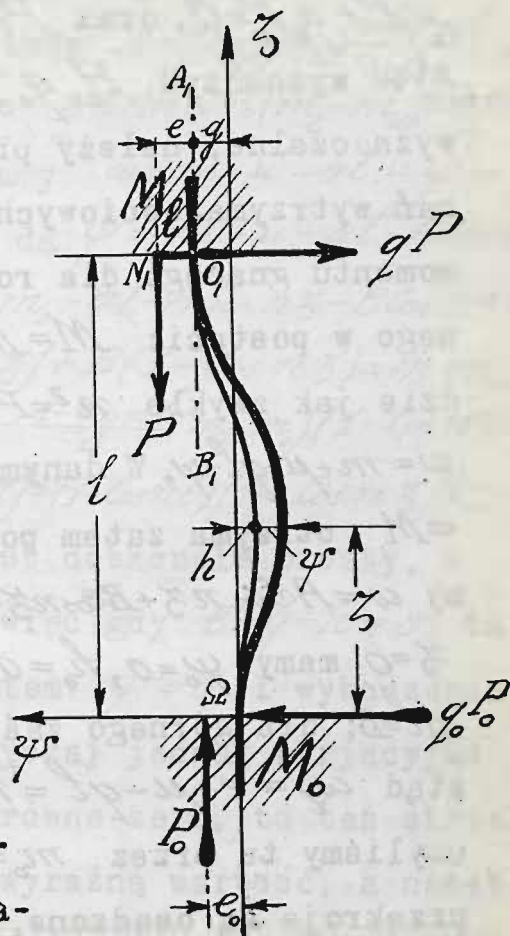
$\cong 2\pi^2 : \ell^2$. Stąd otrzymujemy wartość siły P_K , WYBACZAJĄCEJ PRĘT w postaci $P_K = 2\pi^2 E_y J_x : \ell^2$. Będzie to siła najmniejsza, gdy J_x jest najmniejszością momentów rozpatrywanego przekroju, a więc zarazem i reszty przekrojów pręta, z założenia bowiem rozpatrujemy li tylko pręty jednorodnie zbudowane. W ten sposób otrzymujemy TRZECI WZÓR EULERA wyznaczający siłę wybaczającą pręt w postaci $P_K = 2\pi^2 E J : \ell^2$. Z kolei bierzemy pod uwagę ostatni wypadek, a mianowicie:

§ 5. PRĘT OSADZONY U OBU KOŃCÓW, PROWADZONYCH PO PROSTEJ - PIERWOTNEJ OSI PRĘTA.

Rozpatrujemy pręt pierwotnie prosty o końcach osadzonych i prowadzonych po prostej - średniej osi pręta. Przez środek masy Ω przekroju dolnego czyli skrajnego przekroju osadzenia prowadzimy stałą oś ΩZ , kierując ją prostopadle do tego przekroju. Będzie to oczywiście ŚREDNIA OŚ pręta, zakładamy bowiem, iż mamy tu do czynienia z prętem, sumiennie w granicach możliwości wyprostowanym. Środek masy Q górnego przekroju osadczego powinien by leżeć na osi ΩZ , ze względu jednak na możliwość pewnej pomyłki zakładamy, że środek Q leży na prostej AB sąsiedniej i równoległej do osi ΩZ . Wyznamy główne osie $\Omega \xi$ i $\Omega \psi$ dolnego przekroju pręta. Prosta AB w rzucie na płaszczyznę $\psi \Omega \xi$ da prostą $A_1 B_1$ w odległości g od $\Omega \xi$ położoną. Odległość g stanowi zatem składową pierwotnej strzałki górnego przekroju skrajnego osadzenia, a krzywa Q, Ω - rzut

istotnej osi podłużnej pręta niezupełnie ściśle prostego. I tu jak w wypadku tylko co wyżej rozpatrywanym, obciążamy koniec górny pręta siłą osiową P , nieco zresztą mimośrodową - pod jej działaniem pręt wygina się w bok - pierwotne strzałki pręta rosną na całej jego pierwotnej długości ℓ . Jakikolwiek (RYS. 272) przekrój poprzeczny, dowolnie na pręcie w odległości z od dna dolnego obrany, wykaże w rzucie na płaszczyznę $\varphi\Omega z$ składową h - pierwotnej strzałki wygięcia oraz składową ψ strzałki, powstałej na tle działania siły P . Oznaczmy przez e składową mimośrodu siły P ; pod działaniem mimośrodowym tej siły w górnym przekroju osadzenia powstaje siła oporowa, prostopadła do osi Ωz i moment osadczy; ponadto również i w przekroju dolnym - moment osadczy i dwie odpory - równoległa i prostopadła do osi Ωz . Oznaczmy składowe tylko co wymienionych sił, leżące w płaszczyźnie $\varphi\Omega z$ przez qP, P_o i q_oP_o , a składowe odnośnych momentów przez M_ℓ i M_o . Z równań statyki mamy w stosunku

RYS. 272.



do punktu Ω , jako osrodka sprowadzenia: $P+P_0=0$; $qP+q_0P_0=0$, oraz $P(a+b)+qPl+M_\ell+P_0+M_0=0$; możemy stąd wyznaczyć P_0, q_0, M_0 a q i M_ℓ są statycznie niewyznaczalne, należy przeto ich wartości określić z równań wytrzymałościowych. W tym celu wypisujemy wartość momentu gnącego dla rozpatrywanego przekroju poprzecznego w postaci: $M=M_\ell+P(e+g-h-\varphi)-qP(l-z)$. Niech będzie jak zwykle $n^2=P:E_yJ_x$; $\mu=M_\ell:P$; $m=e+g-h$ oraz $\omega=m+\mu-ql-\varphi$. W danym wypadku równanie gięcia $E_yJ_x\varphi''=M$ otrzyma zatem postać $\omega''=-n^2\omega-n^2qz$. Całkując mamy $\omega=A\sin nz+B\cos nz-qz$. Dla dolnego przekroju, gdzie $z=0$ mamy $\varphi_0=0, h_0=0$ co daje $\omega_0=e+g+\mu-ql=m_0+\mu-ql=B$; dla górnego zaś, gdzie $z=l$, mamy $\varphi_l=0, h_l=g$ stąd $\omega_l=e+\mu-ql=m_\ell+\mu-ql=A\sin nl+B\cos nl-ql$. Oznaczyliśmy tu przez $m_0=e+g$ oraz $m_\ell=e$. Ponieważ oba przekroje są osadzone, zatem $-\varphi'=\omega'=An\cos nl-Bn\sin nl-q$ winno być RÓWNE ZERU dla $z=0$ i $z=l$. Stąd mamy $An-q=0$ oraz $An\cos nl-Bn\sin nl-q=0$, $m_0+\mu-ql=B$, oraz $m_\ell+\mu=A\sin nl+B\cos nl$, z których możemy wyznaczyć A, B, q, M_ℓ w następujący sposób. Odejmując trzecie od czwartego mamy $m_\ell-m_0+ql=A\sin nl-B(1-\cos nl)$, gdzie na mocy pierwszego $ql=Anl$, a zatem $A(\sin nl-nl)-B(1-\cos nl)=m_\ell-m_0$. Ponadto, odejmując drugie równanie od pierwszego i skracając przez n mamy: $A(1-\cos nl)+B\sin nl=0$. Otrzymane równania określają stałe A i B całkowania. Oznaczmy przez $\Delta=(1-\cos nl)^2+(\sin nl-nl)\sin nl=1-2\cos nl+\cos^2 nl+\sin^2 nl-nl\sin nl=$

$$\begin{aligned}
 &= 2 - 2 \cos n\ell - n\ell \sin n\ell = 4 \sin^2 \frac{n\ell}{2} - n\ell \sin n\ell = \\
 &= 4 \sin \frac{n\ell}{2} \left[\sin \frac{n\ell}{2} - \frac{n\ell \cos \frac{n\ell}{2}}{2} \right] \text{ a wtedy } A = (m_\ell - m_0) \frac{\sin n\ell}{\Delta}, \\
 &B = -(m_\ell - m_0) \frac{1 - \cos n\ell}{\Delta}, \text{ a przeto } q = An = n(m_\ell - m_0) \frac{\sin n\ell}{\Delta}, \\
 &\text{ oraz } \mu = B + q\ell - m_0. \text{ Stąd mamy } \omega = m + \mu - q\ell - \psi = \\
 &= A \sin n\zeta + B \cos n\zeta - q\zeta, \text{ co da } \psi = m + \mu - q\ell - A \sin n\zeta - \\
 &- B \cos n\zeta + q\zeta = m + B + q\ell - m_0 - q\ell - A \sin n\zeta - B \cos n\zeta + \\
 &+ q\zeta = m - m_0 - A [\sin n\zeta - n\zeta] + B(1 - \cos n\zeta) = m - m_0 - \\
 &- (m_\ell - m_0) \frac{\sin n\ell}{\Delta} [\sin n\zeta - n\zeta] - \frac{1 - \cos n\ell}{\Delta} (m_\ell - m_0) (1 - \cos n\zeta) = \\
 &= m - m_0 - \frac{m_\ell - m_0}{\Delta} \{ \sin n\ell [\sin n\zeta - n\zeta] + (1 - \cos n\ell) [1 - \cos n\zeta] \}.
 \end{aligned}$$

I tu znów, gdy pręt jest doskonale prosty, a ściśle osiowo obciążony, a więc gdy $e = g = h = 0$, to wtedy $m = m_0 = m_\ell = 0$, a zatem $\psi = 0$ i wyboczenie jest zgoła niemożliwe. Zazwyczaj jednak warjacyjne wielkości e, g, h nie są równe zeru, to też strzałka ψ ma mieć lub więcej wyraźną wartość, a nawet może wzrosnąć niepomniernie, gdy $\Delta = 0$. W tym wypadku pręt ulegnie wyboczeniu. Równanie warunkowe

$\Delta = 0$ daje dwa szeregi pierwiastków; dwa najmniejsze z nich są: $\sin \frac{n\ell}{2} = 0$ stąd $n\ell = 2\pi$ oraz $\sin \frac{n\ell}{2} = \frac{n\ell \cos \frac{n\ell}{2}}{2}$, skąd $n\ell = 2,8606\pi$. Biorąc wyłącznie pod uwagę mniejszy z nich mamy $\sin n\ell = 0, \cos n\ell = 1$. Ponieważ A i B przy tych wartościach równają się $\frac{0}{0}$ przeto aby wyznaczyć ich wartość istotną piszemy:

$$\begin{aligned}
 A &= (m_\ell - m_0) 2 \sin \frac{n\ell}{2} \cos \frac{n\ell}{2} : \Delta = (m_\ell - m_0) \cos \frac{n\ell}{2} : \left[2 \sin \frac{n\ell}{2} - \right. \\
 &- \left. n\ell \cos \frac{n\ell}{2} \right] \text{ oraz } B = -(m_\ell - m_0) 2 \sin^2 \frac{n\ell}{2} : \Delta = -(m_\ell - m_0) \sin \frac{n\ell}{2} : \\
 &: \left[2 \sin \frac{n\ell}{2} - n\ell \cos \frac{n\ell}{2} \right]. \text{ Stąd przy } n\ell = 2\pi \text{ mamy } A = -(m_\ell - m_0) : \\
 &: n\ell \text{ oraz } B = 0. \text{ Pozornie zatem wartość } n\ell = 2\pi
 \end{aligned}$$

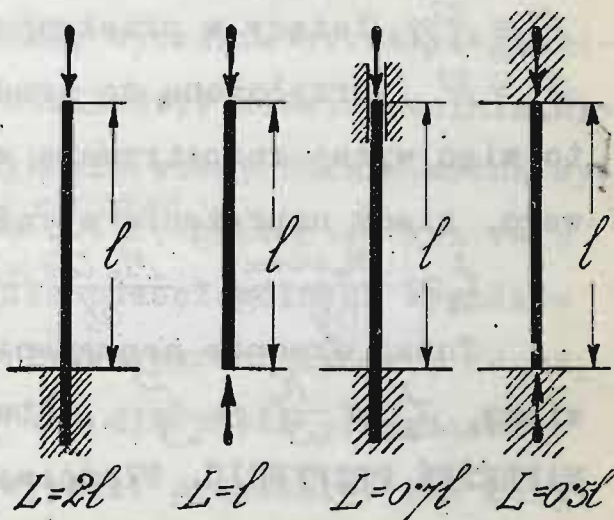
równania warunkowego nie daje wartości $\varphi = \infty$, wobec skończonych wartości A i B ; w istocie jednak tylko co wyznaczone wartości A i B są błędne, nie stosują się bowiem do rozpatrywanego wypadku.

W samej rzeczy przy $\sin n\ell = 0$ i $\cos n\ell = 1$ cztery wyżej otrzymane równania sprowadzają się do trzech: $An - q = 0$, $\mu + m_2 = B$ oraz $\mu + m_2 - q\ell = B$, bo drugie jest tożsamościowe z pierwszym. Stąd $q = An = -(m_2 - m_0) : \ell$, $\mu + m_2 = B = 0$, $\mu + m_2 - q\ell = B = 0$, co daje $q = An = (m_0 - m_2) : \ell = (e + q - e) : \ell = q : \ell$ oraz $\mu = -m_2 = -e$. Stąd wniosek, że $P(e + q) - Pq\ell + \mu P = P(e + q) - Pq - Pe = 0$, siły P, qP RÓWNOWAŻĄ MOMENT M_2 - PRĘT U DOLNEGO PRZEKROJU MOŻE NIE BYĆ ZAMOCOWANYM - jest to więc wypadek pręta poprzednio rozpatrywanego, jeno obróconego dołem ku górze. Założenie $A = -(m_2 - m_0) : \ell$ i $B = 0$ jest więc niewspółmierne z istotnymi warunkami. Rzeczywista wartość musi być przeto $B = \mu = \infty$, wtedy bowiem również wypełniają się równania $\mu + m_2 = B$ oraz $\mu + m_2 - q\ell = B$. Zatem i $\varphi = \infty$. Jest to więc wypadek wyboczenia, kiedy siła wybaczająca $P_K = 4\pi^2 E_g J_x : \ell^2$. Będzie to siła najmniejsza, gdy J_x będzie najmniejszością momentów rozpatrywanego przekroju, a więc zarazem i reszty przekrojów poprzecznych pręta, z założenia bowiem rozpatrujemy li tylko pręty jednorodnie zbudowane. W ten sposób otrzymujemy OSTATNI WZÓR EULERA, wyznaczający siłę wybaczającą w postaci $P_K = 4\pi^2 E_g J_x : \ell^2$.

Wszystkie te cztery wzory możemy połączyć w jeden pisząc $P_w = \pi^2 EJ : L^2$ gdzie $L = \lambda \ell$ jest DŁUGOŚCIĄ SPROWADZONĄ PRĘTA. W wypadku OBCIĄŻENIA SIŁAMI OSIOWEMI ŚCISKAJĄCEMI $L = 2\ell$ DLA PRĘTA JEDNYM KOŃCEM OSADZONEGO, ZRESZTĄ SWOBODNEGO; $L = \ell$ DLA PRĘTA OBU KOŃCAMI PROWADZONEGO PO PROSTEJ - PIERWOTNEJ OSI PRĘTA, $L = 0,7\ell$ DLA PRĘTA JEDNYM KOŃCEM OSADZONEGO, DRUGIM PROWADZONEGO PO PROSTEJ - PIERWOTNEJ OSI PRĘTA, wreszcie $L = 0,5\ell$ DLA PRĘTA OSADZONEGO U OBU KOŃCÓW

RYS. 273.

PROWADZONYCH PO PROSTEJ - PIERWOTNEJ OSI PRĘTA. Wzór daje P_k - SKRAJNĄ NAJNIŻSZĄ SIŁĘ WYBACZAJĄCĄ, wykluczającą wszelką możliwość trwałej równowagi



wygięcie pręta wzra- $L = 2\ell$ $L = \ell$ $L = 0,7\ell$ $L = 0,5\ell$
sta niepomniernie, niwecząc kształt pierwotny pręta. Tutaj naturalną drogą następuje się pytanie, czy wzory EULERA, czysto teoretycznie wyprowadzone, posiadają wartość praktyczną. O tem wyrokować jedynie może doświadczenie. Musimy przeto zbadać:

§ 6. ZAKRES STOSOWALNOŚCI PRAKTYCZNEJ WZORÓW EULERA.

Praktyczna wartość wzorów EULERA podawana była w wątpliwość przez czas długi, niektóre bowiem

doświadczenia badaczy zdały się przeczyć prawdziwości tych wzorów. Dopiero v. TETMAJER wskazał właściwy zakres ich stosowalności, jaskrawo uwypukliwszy warunki prawdziwości tych wzorów. Przedewszystkiem należy tu baczną zwrócić uwagę, że wyboczenie stanowi rodzaj GIĘCIA MIMOŚRODOWEGO. W samej rzeczy -pręt zlekka zgięty pod działaniem siły osiowej P ujawnia pewną mimośrodowość η tej siły względem jakiegokolwiek poprzecznego przekroju pręta. Gdy sprowadzimy siłę P do środka O jego masy, to otrzymamy moment $M_p = P\eta$ leżący w przekroju, oraz (RYS. 274) siłę $R_z = P$, przyłożoną do środka O przekroju. Jest to więc wyżej rozpatrywany wypadek gięcia mimośrodowego, kiedy naprężenia wyrażają się wzorem:

$$t_z = -\frac{M_p \sin \alpha}{J_y} x + \frac{M_p \cos \alpha}{J_x} y + \frac{R_z}{S}.$$

Tutaj średnie naprężenie przekroju, wynosi, jak wiemy $t_{zs} = \frac{R_z}{S} = \frac{P}{S}$. Stanowi ono poniekąd MIARĘ NAPRĘŻEŃ PRZEKROJU. Właściwiej byłoby tutaj wyznaczyć skrajne naprężenia przekroju, dawałyby one dokładniejszy obraz obciążenia nie mamy jednak mimośrodu η , lepiej więc, jako miarę naprężeń brać pewną wartość średniego naprężenia t_{zs} . Ponieważ wzory Eulera wyprowadzone zostały ze wzorów zwykłego gięcia, a wzory gięcia mają wartość wyłącznie poniżej GRANICY PROPORCJONALNOŚCI K_H , przeto SKRAJNE NAPRĘŻENIE PRZEKROJU $t_{z \max}$ NIE POWINNO PRZEKRACZAĆ K_H . Z drugiej strony pręty wybaczane, używane w

praktyce ujawniają jeno znikome wartości η , a zatem skrajna wartość $\ell_{Z_{MAX}}$ nie wiele się dla tych prętów różni od ℓ_{ZS} . RYS. 274.

WARUNEK STOSOWALNOŚCI WZORÓW EULERA WYMAGA

PRZETO, ABY ℓ_{ZS} BYŁO MNIEJSZE OD

K_H . Ten czysto teoretyczny wniosek,

zresztą zupełnie oczywisty, przez dłu-

gie lata leżał odłogiem. Z tego powo-

du prawa Eulera nieraz były stosowane

nieodpowiednio, dając tem samem wyniki z gruntu fał-

szywe, dopiero v. TETMAJER, wyraźnie określił grani-

ce ich stosowalności i stwierdził doświadczalnie. Wy-

żej widzieliśmy, że wszystkie wzory Eulera można wy-

pisać w postaci $P_w = \pi^2 EJ : \lambda^2 \ell^2$, gdzie λ gra rolę

współczynnika, różnego dla poszczególnych wypadków

wyboczenia, możemy więc łatwo ograniczyć się do naj-

prostszej wartości $\lambda = 1$ dla pręta prowadzonego

obustronnie, pomijając wypadki pozostałe. Tak uczyni-

ł TETMAJER; ponieważ ponadto ramię bezwładności

$\phi = \sqrt{J : S}$, przeto możemy wypisać WZÓR EULERA W

POSTACI $P_w = \pi^2 E \phi^2 S : \ell^2$. Nazwijmy, jak to czyni

TETMAJER - WYTRZYMAŁOŚCIĄ NA WYBOCZENIE ILORAZ $K_w =$

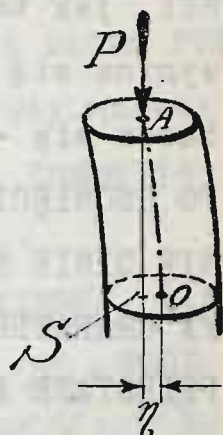
$= P_w : S$ — będzie to oczywiście skrajna wartość

ℓ_{ZS} czyli ŚREDNIE NAPRĘŻENIE WYBACZAJĄCE. Stąd mamy

$K_w = \pi^2 E / [\phi : \ell]^2$ NOWĄ POSTAĆ WZORU EULERA, jaką mu na-

dał TETMAJER. Według tego badacze wzór tylko co wy-

pisany winniśmy stosować dopóty, póki K_w nie prze-



kroczy granicy proporcjonalności danego tworzywa. Gdy $K_w < K_H$ WYBOCZENIE ZACHODZI W SPOSÓB SPRĘŻYSTY, jak to stwierdza doświadczalnie TETMAJER, pręt wygina się gwałtownie, dając nadmierną strzałkę - wybacza się - odkształcenie to jednak jest SPRĘŻYSTE, PO USUNIĘCIU BOWIEM SIŁY ODKSZTAŁCAJĄCEJ - WYBOCZENIE GINIE BEZ ŚLADU. Gdy zaś $K_w > K_H$ WYBOCZENIE MA CHARAKTER TRWAŁY - PRĘT WYBOCZONY ŁAMIE SIĘ LUB PRZESTAJE BYĆ PROSTYM PO ODCIĄŻENIU. Tutaj więc wzór Eulera zastosowany być nie może - daje bowiem wyniki fałszywe. Skrajna wartość $K_w = K_H = \pi^2 E / [l : \ell]^2$ stanowi przeto GRANICĘ STOSOWALNOŚCI WZORÓW EULERA. Stąd mamy $l : \ell = \pi \sqrt{E : K_H}$. Z tego wzoru możnaby wyliczyć skrajną wartość $N = l : \ell$ dla pręta zachowującego się według wzorów EULERA przy wyboczeniu, lepiej jednak wprost doświadczalnie ustalić MINIMUM $l : \ell = N$. Stosunek ten daje GRANICĘ DŁUGOŚCI PRĘTA O STAŁYM PRZEKROJU - powyżej tej granicy dla $l : \ell \geq N$ należy stosować WZÓR EULERA - poniżej zaś:

§ 7. WZORY TETMAJERA, wysnute czysto doświadczalnie z olbrzymiej liczby spostrzeżeń tego badacza. Mrówcza jego praca ustaliła wzory, wypełniające lukę pomiędzy wzorami dla wyboczenia a wzorami dla ściskania zwykłego, które dotyczą pręta o teoretycznej długości $l = 0$. Wyżej już mówiliśmy, że wzory Eulera stosują się do prętów, dla których $l : \ell \geq N$,

a więc dla prętów o stosunkowo znacznych wymiarach podłużnych w stosunku do wymiarów poprzecznych, których wskaźnikiem jawi się niewątpliwie $\frac{l}{b}$ ich stałego przekroju. Pozostają zatem PRĘTY KRÓTKIE, dla których $\frac{l}{b} < N$ te pręty należy liczyć, biorąc pod uwagę WZORY TETMAJERA. Znamy je dla tworzyw następujących:

A. DRZEWO IGLASTE /SOSNA, JODŁA - ŚWIERK/. Dla tego tworzywa mamy średnio $E = 100\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, WZÓR EULERA wypiszemy przeto $K_w = 9,869604 \times 10^5 \left[\frac{l}{b} \right]^2 \cong \cong 987000 \left[\frac{l}{b} \right]^2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. W danym wypadku $N = 100$, należy zatem stosować wzór tylko co wypisany li tylko wtedy, gdy $\frac{l}{b} \geq 100$. ~ Natomiast gdy $100 > \frac{l}{b} \geq 1,8$ należy, WEDŁUG TETMAJERA STOSOWAĆ WZÓR $K_T = 293 - -1,94 \left[\frac{l}{b} \right] \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, gdzie K_T oznacza naprężenie powodujące NIESPREŻYSTE WYBOCZENIE PRĘTA. Gra ono zatem rolę skrajnego NAPRĘŻENIA WYBACZAJĄCEGO. Dolna granica jest tu dość wątpliwa, to też zazwyczaj już dla $\frac{l}{b} \leq 5$ stosujemy wprost zwykły WZÓR NA ŚCISKANIE $K_n = P_n : S \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, gdzie przez $S \text{ cm}^2$ oznaczyliśmy STAŁY PRZEKRÓJ PRĘTA, a przez P_n - SKRAJNĄ SIŁĘ ŚCISKAJĄCĄ. Wzór TETMAJERA należy więc stosować w granicach $100 > \frac{l}{b} > 5$. ~

B. ŻELIWO. Dla słupów LANYCH PIONOWO mamy średnio $E = 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ to też WZÓR EULERA brzmi tutaj: $K_w = 9870\,000 \left[\frac{l}{b} \right]^2 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. W danym wypadku $N = 80$, to też możemy go stosować li tylko wtedy, gdy

$l:b \geq 80$, gdy zaś $80 > l:b > 5$ należy korzystać ze WZORU TETMAJERA $K_T = 7760 - 120[l:b] + 0,53[l:b]^2 \text{ kg/cm}^2$. I tu również dolna granica jest wątpliwa, to też zazwyczaj, gdy $l:b \leq 8$ - stosujemy poprostu zwykły wzór dla ściskania. Wzór TETMAJERA należy więc stosować w granicach $80 > l:b > 8$.~

C. ŻELAZO ZGRZEWNE. Dla tego tworzywa mamy średnio $E = 2\,000\,000 \text{ kg/cm}^2$, to też wzór EULERA będzie $K_W = 19\,740\,000/[b:l]^2 \text{ kg/cm}^2$. Tutaj $N = 112$, to też należy go stosować li tylko wtedy, gdy $l:b \geq 112$, gdy zaś $112 > l:b \geq 10$ - korzystać ze WZORU TETMAJERA $K_T = 3030 - 12,9[l:b] \text{ kg/cm}^2$; wreszcie, gdy $l:b < 10$ stosować zwykły wzór dla ściskania.~

D. ŻELAZO ZLEWNE. Tutaj znów średnio $E = 2\,150\,000 \text{ kg/cm}^2$, a zatem wzór EULERA $K_W = 21\,220\,000/[b:l]^2 \text{ kg/cm}^2$. W danym wypadku $N = 105$, a więc wzór powyższy należy stosować, gdy $l:b \geq 105$, gdy zaś $105 > l:b \geq 10$ - korzystać ze WZORU TETMAJERA $K_T = 3100 - 11,4[l:b] \text{ kg/cm}^2$. I tu znów, gdy $l:b < 10$ wystarczy wzór zwykły na ściskanie.~

E. STAL ZLEWNA. Dla tego tworzywa wzory nie zostały tak ściśle ustalone. TETMAJER bierze $E = 2\,250\,000 \text{ kg/cm}^2$ stąd wzór EULERA $K_W = 22\,210\,000/[b:l]^2 \text{ kg/cm}^2$. Stosować go należy, gdy $l:b \geq 90$, tutaj bowiem $N = 90$. Gdy znów $90 > l:b \geq 10$ należy korzystać ze WZORU TETMAJERA $K_T = 3350 - 6,4[l:b] \text{ kg/cm}^2$, wreszcie gdy $l:b < 10$ stosować zwykły wzór na ściskanie.~

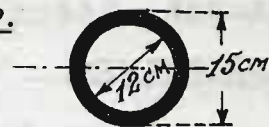
F. TWORZYWA KAMIENNE. Piaskowce, według badań TETMAJERA należy liczyć na zwykłe ściskanie, gdy stosunek $l:b \leq 52$ przy PROSTOKĄTNYM PRZĘKROJU POPRZECZNYM.~

Chcąc lepiej uwypuklić wzajemny stosunek wzorów EULERA, TETMAJERA oraz zwykłego wzoru na ściskanie drugostronnie podaliśmy na TABLICY TRZYNASTEJ wartości naprężeń K_n , K_T i K_w dla różnych wartości $l:b$ prętów, wykonanych z różnorodnych tworzyw, przy czem zachowano dla każdego tworzywa najodpowiedniejszy mu kształt przekroju. Ponieważ nigdy nie jesteśmy w stanie określić w jakim kierunku pręt ujawnia swe strzałki pierwotnego wygięcia przeto przekrój poprzeczny pręta ściskanego winien być wytrzymałościowo symetryczny na wybaczanie, a więc elipsa bezwładności przekroju winna być kołem, wtedy bowiem wszystkie momenty bezwładności przekroju będą jednakowe. Z tego powodu pręty wybaczane zazwyczaj mają przekroje poprzeczne symetryczne względem osi, a zatem i wytrzymałościowo symetryczne. Częstość również stosowane są przekroje złożone dobrane w taki sposób aby ich elipsa bezwładności stanowiła koło. Tego rodzaju przekrój podaliśmy pod cyfrą V w ARKUSZU MOMENTÓW. Na TABLICY XIII widzimy jeno przekroje proste, symetryczne względem osi prócz dwuteowego, to też dla tego przekroju należy brać we wzorze EULERA najmniejszą wartość J_m momentu bezwładności. Żeliwo

KG:CM² $K_n = K_T = 6834$

TABLICA TRZYNASTA.

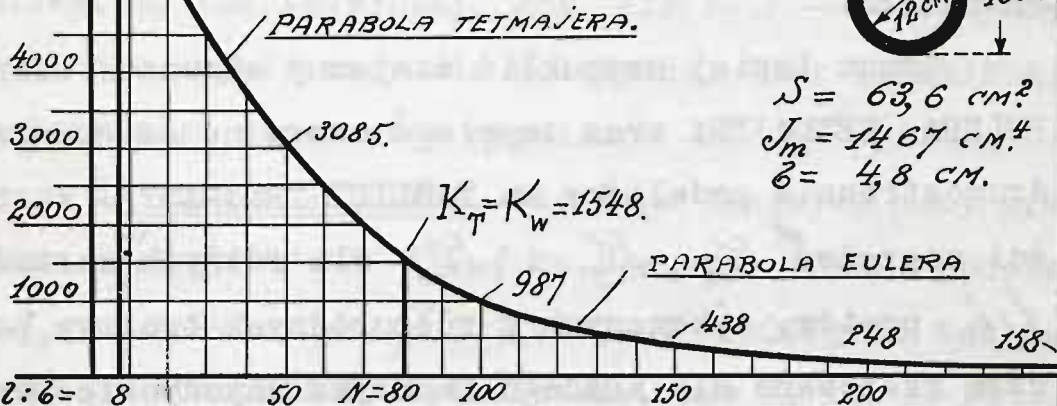
ŻELIWO.



$$S = 63,6 \text{ cm}^2$$

$$J_m = 1467 \text{ cm}^4$$

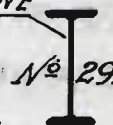
$$\bar{e} = 4,8 \text{ cm.}$$



KG:CM² $K_n = K_T = 2986$

ŻELAZO ZLEWNE

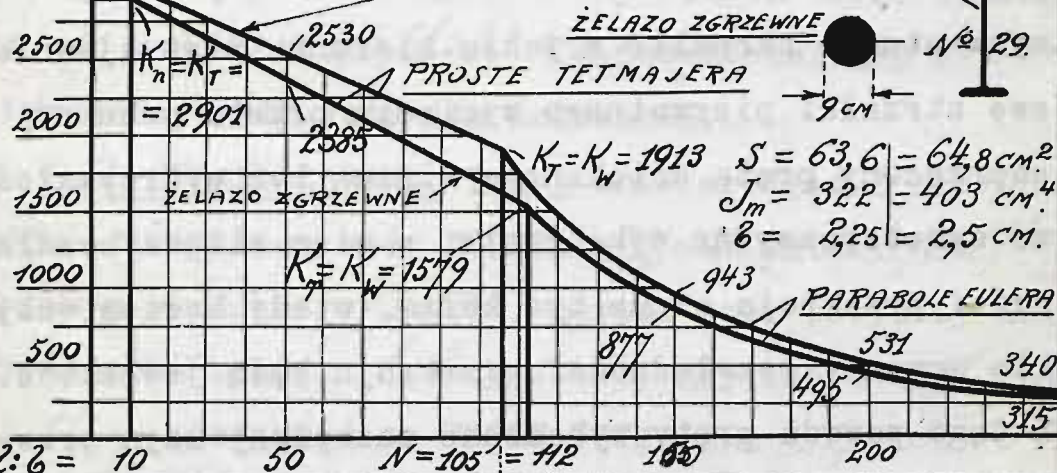
ŻELAZO ZGRZEWNE



$$S = 63,6 = 64,8 \text{ cm}^2$$

$$J_m = 322 = 403 \text{ cm}^4$$

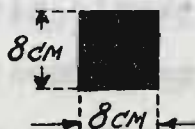
$$\bar{e} = 2,25 = 2,5 \text{ cm.}$$



KG:CM² $K_n = K_T = 283$

DRZEWO IGLASTE

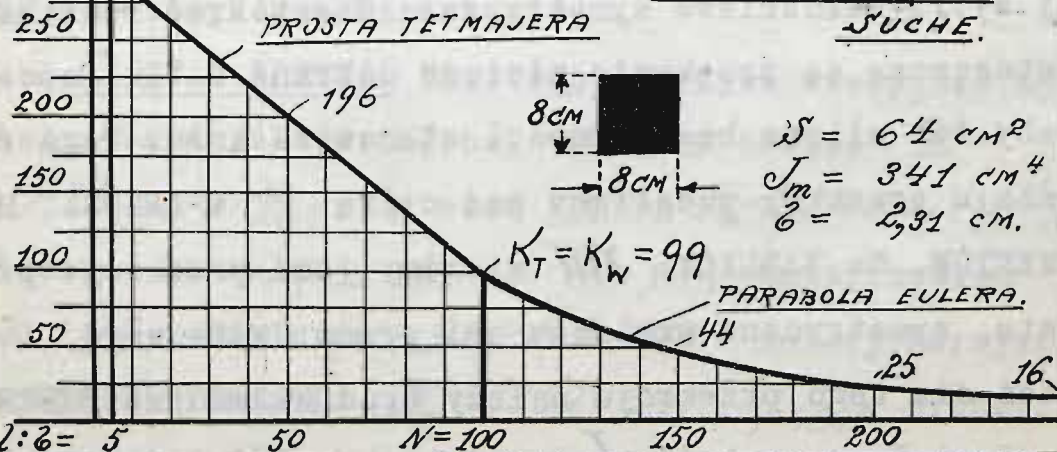
SUCHE.



$$S = 64 \text{ cm}^2$$

$$J_m = 341 \text{ cm}^4$$

$$\bar{e} = 2,31 \text{ cm.}$$



jako tworzywo nader niejednolite zazwyczaj stosuje się jako odlew cienkościenny - to też słupy żeliwne przeważnie mają przekrój poprzeczny pierścieniowy o stosunkowo dosyć cienkiej ścianie. Żelazo zgrzewne lub zlewne oraz stal zlewną spotykamy zazwyczaj w postaci prętów okrągłych lub kształtowników walcowanych, najodpowiedniejsze zatem przekroje poprzeczne na słupy żelazne kute stanowią przekrój poprzeczny kołowy symetryczny względem osi oraz dwuteowy - najsymetryczniejszy z przekrojów kształtownikowych. Słupy drewniane najczęściej są kwadratowe.

We wszystkich trzech wykresach TABLICY XIII podziałka pozioma oznacza wartość stosunku $l:b$, a więc tym samym określa długość pręta o stałym przekroju, tuż obok mamy bowiem podaną wartość ramienia bezwładności b pręta. Podziałka pionowa daje wartości K_n , K_T oraz K_w , przy czym krzywe wykresów wyraźnie zaznaczają TRZY DZIEDZINY STOSOWALNOŚCI - ZWYKŁEGO WZORU NA ŚCISKANIE, WZORU TETMAJERA, oraz WZORU EULERA. We wszystkich trzech wykresach widzimy spadek gwałtowny skrajnego wybaczającego naprężenia wraz ze wzrostem długości pręta. Stąd wniosek ogólny, zresztą oczywisty: IM WIĘKSZA DŁUGOŚĆ PRĘTA, TYM MNIEJSZA JEGO WYTRZYMAŁOŚĆ NA WYBOCZENIE. Najgwałtowniejszy spadek ujawnia w tym kierunku żeliwo. Aby wzory wyżej przytoczone stosować praktycznie należy wprowadzić pewien współczynnik bezpieczeństwa, skrajne bo-

wiem naprężenia wybaczające K_{π} lub K_w są praktycznie nie dopuszczalne. Poznajmy przeto:

§ 8. SKRAJNE DOPUSZCZALNE NAPRĘŻENIA WYBACZAJĄCE

Oznaczmy przez K_w SKRAJNE DOPUSZCZALNE NAPRĘŻENIE WYBACZAJĄCE, a wtedy $K_w = K_w \cdot j_w$ lub $K_w = K_{\pi} \cdot j_w$, gdzie j_w nazywamy STOPNIEM BEZPIECZEŃSTWA NA WYBOCZENIE dla danego tworzywa. Dla żelaza zgrzewnego lub zlewego oraz dla stali zlewnej, czynimy zazwyczaj $j_w = 4$ w budowlach pośredniej doniosłości, a więc DLA WIĄZARÓW, BELKOWAŃ ŻELAZNYCH I SŁUPÓW oraz $j_w = 5$ w budowlach większej wagi. Dla słupów żeliwnych, pionowo odlewanych $j_w = 8$, dla słupów drewnianych $j_w = 10$. Pręty wybaczane RUCHOME, przynależne do silników i maszyn liczą się z $j_w = 8 \div 11$ dla obciążenia wybaczającego POWTARZANEGO, gdy więc siły ściskające należą do typu II, natomiast gdy mamy do czynienia z obciążeniem ściskającym typu III należy brać $j_w = 16 \div 25$. Mimo to wszystko liczenie pręta nie należy do rzeczy łatwych. Wskażemy jak uskutecznić:

§ 9. OBLICZANIE PRĘTÓW NA WYBOCZENIE.

Przedewszystkiem należy USTALIĆ TYP OBCIĄŻENIA, A WIĘC WYZNACZYĆ, POD JAKI Z CZTERECH WYPADKÓW WYBOCZENIA ROZPATRYWANY WYPADEK PODCIĄGNAĆ NALEŻY. W ten sposób określimy wartość współczynnika λ . Należy tu być nader ostrożnym - nie przeceniać warunków obciążenia - zazwyczaj też bierzemy jeno pod uwagę wypadek pręta obustronnie prowadzonego lub jednostron-

nie osadzonego - pozostałe są nader trudne do urze-
czywistnienia a więc niepewne.

NASTĘPNIE OBIERAMY ODPOWIEDNIĄ WARTOŚĆ f_w ORAZ
LICZYMY PRĘT WEDŁUG WZORU EULERA, GDZIE MIASTO l NA-
LEŻY WSTAWIĆ SPROWADZONĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA λl , A ZA-
MIAST DANEJ SIŁY WYBACZAJĄCEJ P_w - BRAĆ SIŁĘ DOMNIE-
MANĄ f_w RAZY WIĘKSZĄ, - WTEDY BOWIEM PRZY DANEJ SI-
LE WYBACZAJĄCEJ P_w OTRZYMAMY NAPRĘŻENIE WYBACZAJĄ-
CE $K_w = K_n : f_w$. ZE WZORU EULERA WYZNACZONY W TEN
SPOSÓB MOMENT BEZWŁADNOŚCI POZWOLI USTALIĆ WYMAGANY
PRZEKRÓJ PRĘTA. GDY USTALIMY PRZEKRÓJ PRĘTA - WYLI-
CZYMY Z ŁATWOŚCIĄ JEGO NAJMNIEJSZE RAMIĘ BEZWŁADNO-
ŚCI b_0 , KTÓRE POZWOLI Z KOŁEI WYZNACZYĆ STOSUNEK
 $\lambda l : b_0 \sim$ JEŻELI PRZYTEM OKAŻE SIĘ, ŻE $\lambda l : b_0 \geq N$,
TO PRĘT JEST DOBRZE POLICZONY - GDY JEDNAK OKAŻE SIĘ
 $\lambda l : b_0 < N$, TO ZNACZY, ŻE WZÓR EULERA NIEWŁA-
ŚCIWIE BYŁ ZASTOSOWANY, NALEŻAŁO BOWIEM LICZYĆ WED-
ŁUG WZORU TETMAJERA, LUB WPROST NA ŚCISKANIE. Wyżej
widzieliśmy, że wzór TETMAJERA można stosować li tyl-
ko wtedy, gdy $N > \lambda l : b_0 \geq M \sim$ Aby skrócić rachu-
nek bierzemy odrazu pod uwagę dolną granicę $\lambda l : b_0 = M$;
dla tej wartości, jak wiemy $K_n = K_m$, przyczem K_n
możemy wprost wyznaczyć ze wzoru TETMAJERA, czyniąc
w nim $l : b_0 = M$. Z tak otrzymaną wartością K_n WY-
LICZAMY POLE S_1 PRZEKROJU PRĘTA ZE WZORU NA ZWYK-
ŁE ŚCISKANIE, PISZĄC $S_1 = f_w P_w : K_n$. WYZNACZONA W
TEN SPOSÓB WARTOŚĆ S_1 POZWOLI USTALIĆ WYMAGANY PRZE-

KRÓJ PRĘTA. I ZNÓW, PO USTALENIU PRZEKROJU, WYLICZYMY JEGO RAMIĘ BEZWŁADNOŚCI ℓ_1 NAJMNIEJSZE, KTÓRE Z KOLEI WYZNACZY NOWĄ WARTOŚĆ $\lambda \ell : \ell_1$. JEŻELI PRZYTEM OKAŻE SIĘ, IŻ $\lambda \ell : \ell_1 \leq M$ TO PRĘT JEST NIEWĄTPLIWIE DOBRZE POLICZONY. GDY JEDNAK BĘDZIE $\lambda \ell : \ell_1 > M$ TO ZNACZY, ŻE PRĘT NALEŻY LICZYĆ PODŁUG WZORU EULERA... ABY TO USKUTECZNIĆ OBIERAMY NA CHYBI-TRAFI JAKĄKOLWIEK WARTOŚĆ $\lambda \ell : \ell = Q$ I Z TĄ WARTOŚCIĄ WYZNACZAMY K_T ZE WZORU TETMAJERA. STĄD-PRZEKRÓJ WYMAGALNY PRĘTA $S_2 = j_w P_w : K_T$, KTÓRY POZWALA PONOWNIE USTALIĆ POPRZECZNE WYMIARY PRĘTA. I ZNÓW PO USTALENIU PRZEKROJU WYLICZAMY JEGO NAJMNIEJSZE RAMIĘ BEZWŁADNOŚCI ℓ_2 , KTÓRE Z KOLEI DA NAM WARTOŚĆ $\lambda \ell : \ell_2$. GDY SIĘ OKAŻE, ŻE $\lambda \ell : \ell_2 = Q$, TO ZNACZY, ŻEŚMY WŁAŚCIWIE OBRALI WARTOŚĆ Q , W PRZECIWNYM RAZIE NALEŻY PONOWNIE RACHUNEK WYKONAĆ Z INNĄ JUŻ NIECO WARTOŚCIĄ STOSUNKU $\lambda \ell : \ell$ ZGÓRY ZAŁOŻONĄ. Najłatwiej można zrozumieć kolejność zaznaczonych tu obliczeń, rozpatrując przykład liczbowy.

Wyznamy STAŁY PRZEKRÓJ PRĘTA ŻELAZNEGO ZLEWNEGO OBUSTRONNIE PROWADZONEGO, A PODLEGŁEGO DZIAŁANIU SIŁ OSIOWYCH ŚCISKAJĄCYCH $P = 10\,000\text{ kg}$. Pręt ma stanowić ogniwo wiązaru, długość pręta brana pod uwagę przy obliczeniu wynosić ma kolejno $\ell_1 = 250\text{ cm.}$, $\ell_2 = 100\text{ cm.}$ oraz $\ell_3 = 10\text{ cm.}$ Przedewszystkiem dla pręta obustronnie prowadzonego $\lambda = 1$, ponadto dla wiązarów - $j_w = 4$, a zatem $P_w = 4 \times 10\,000 = 40\,000\text{ kg.}$

W danym wypadku ze wzoru EULERA $P_w = \pi^2 EJ : l^2$ mamy $J = l^2 P_w : \pi^2 E$. Dla żelaza zlewnego $E = 2150\,000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, a zatem $J = 40000 l^2 : 2150\,000 \pi^2 = l^2 : 530,5 \text{ cm}^4$. Stąd dla $l_1 = 250 \text{ cm}$, $l_2 = 100 \text{ cm}$, $l_3 = 10 \text{ cm}$ otrzymujemy odpowiednio $J_1 = 62500 : 530,5 = 117,8 \text{ cm}^4$, $J_2 = 18,9 \text{ cm}^4$ oraz $J_3 = 0,189 \text{ cm}^4$. Zakładając KOŁOWY PRZEKRÓJ PRĘTA mamy z tablic (stronice 8 i 9 "WSPÓŁCZYNNIKÓW I WZORÓW") $d_1 = 7 \text{ cm}$, $d_2 = 4,4 \text{ cm}$, oraz $d_3 = 1,4 \text{ cm}$. Dla ustalonych w ten sposób prętów wyznaczamy $\phi = \sqrt{\frac{\pi d^4}{64} : \frac{\pi d^2}{4}} = d : 4$, skąd odpowiednio $\phi_1 = 1,75 \text{ cm}$, $\phi_2 = 1,1 \text{ cm}$ oraz $\phi_3 = 0,35 \text{ cm}$, a dalej $l_1 : \phi_1 = 250 : 1,75 = 143$, $l_2 : \phi_2 = 100 : 1,1 = 91$ oraz $l_3 : \phi_3 = 10 : 0,35 = 28$. W danym wypadku dla żelaza zlewnego $N = 112$, przeto jedynie pręt 250 cm . długi może być liczony według wzoru EULERA, dwa drugie - należy liczyć inaczej. W tym celu w odnośnym wzorze TETMAJERA, czynimy $l : \phi = M = 10$ co da $K_T = K_n = 3100 - 11,4 \times 10 = 2986 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Stąd przekrój poprzeczny, liczony na zwykłe ściskanie wynosi $S_o = 40000 : 2986 = 13,4 \text{ cm}^2$. Dla kołowego pręta mamy stąd $S = \frac{\pi d_o^2}{4}$, $d_o = 4,13 \cong 4,2 \text{ cm}$ oraz $\phi_o = d_o : 4 = 1,05 \text{ cm}$. W danym wypadku $l_o : \phi_o = M = 10$ stąd skrajna długość pręta liczonego na ściskanie wynosi $l_o = 10 \phi_o = 10,5 \text{ cm}$. Pręt 10 cm . długi należy zatem liczyć na ściskanie - wzór EULERA daje zbyt szczupłe wymiary. Pozostaje więc tylko obliczyć pręt 100 cm . długi. Wiemy już, że nie należy go liczyć ani na ściskanie, bo jest zbyt długi, ani za pomocą wzoru EULERA, bo jest zbyt krótki. Jedynie właściwym jest

więc w danym wypadku WZÓR TETMAJERA. Założmy jakąkolwiek wartość dla $\ell:b$ w tym wzorze. Zazwyczaj rozpoczynamy od $\frac{1}{2}(N+M) = \frac{1}{2}[112+10] \cong 60$. Dla tej wartości mamy $K_T = 3100 - 11,4 \times 60 = 2416 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Szukany zatem przekrój pręta wyniesie $S_1 = 40000 : 2416 = 16,56 \text{ cm}^2$ stąd otrzymujemy $d_2' = 4,59 \sim 4,6 \text{ cm}$, oraz $b_1' = d_1' : 4 = 1,15 \text{ cm}$. A zatem $\ell_2 : b_2' = 100 : 1,15 = 87$ a więc nie 60 jakśmy założyli. Po kilku próbach znajdujemy właściwy stosunek $\ell:b = 83$, który daje $K_T = 3100 - 11,4 \times 83 = 2153,8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Stąd znowu $S_2 = 40000 : 2153,8 = 18,57 \text{ cm}^2$ co daje $d_2'' = 4,85 \text{ cm}$ oraz $b_2'' = 1,21 \text{ cm}$. A zatem $\ell_2 : b_2'' = 100 : 1,21 = 82,6 \cong 83$. W ten sposób otrzymujemy WŁAŚCIWE WYMIARY PRĘTÓW $\phi 7 \times 250 \text{ cm}$, $\phi 4,85 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$ ORAZ $\phi 4,2 \times 10 \text{ cm}$. ~ Gdybyśmy liczyli pręty korzystając wyłącznie ze wzoru EULERA - otrzymalibyśmy dla obu krótszych prętów zbyt skąpe wymiary. Gdy pręt ma mieć przekrój dwuteowy - należy określić jego numer z TABLIC PODRĘCZNYCH (Wydanie Koła Elektrotechników). Tam dla $IN^{\circ} 20$ mamy $J_y = J_{\min} = 117 \text{ cm}^4$, co odpowiada dość ściśle wymaganej wartości $J_1 = 117,8 \text{ cm}^4$ oraz $S = 33,4 \text{ cm}^2$. Stąd $b_1 = \sqrt{117 : 33,4} = 1,88 \text{ cm}$, a zatem $\ell_1 : b_1 = 250 : 1,88 = 133$, widzimy przeto, że pręt ten jest dobrze policzony. Gdybyśmy jednak chcieli również za pomocą wzoru EULERA obliczyć następny pręt, to popełnilibyśmy błąd, albowiem wymaganemu $J_2 = 18,9 \text{ cm}^4$ odpowiada $IN^{\circ} 12$ o najbliższem $J_{\min} = J_y = 21,4 \text{ cm}^4$ i przekroju $S = 14,2 \text{ cm}^2$.

Stąd $\ell_2 = \sqrt{21,4 : 14,2} = 1,23 \text{ cm}$. Widzimy więc, że $\ell : \ell_2 = 100 : 1,23 = 81 < 112$, ten pręt nie może być przeto liczony według wzoru EULERA. Korzystając z wyników poprzednio otrzymanych dobieramy według $S_0 = 13,4 \text{ cm}^2$ odpowiedni $IN^{\circ} 12$ o najbliższym przekroju $14,2 \text{ cm}^2$. Tylko co widzieliśmy, iż dla tego pręta $\ell = 1,23 \text{ cm}$, ponieważ zatem w danym wypadku $M = 10$, przeto skrajna długość pręta liczonego na ściskanie wynosić winna $\ell_0 = 10 \times 1,23 = 12,3 \text{ cm}$. Pręt 10 cm długi należy zatem liczyć na ściskanie. Będzie to $IN^{\circ} 12$. Aby z kolei obliczyć pręt 100 cm długi, zakładamy we wzorze TETMAJERA $\ell : \ell = 83$ jak wyżej, co daje $K_r = 2153,8 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ oraz $S = 18,57 \text{ cm}^2$ - wymagany przekrój. Najbliższy $IN^{\circ} 14$ o przekroju $18,2 \text{ cm}^2$ posiada $J_{\min} = 35,2 \text{ cm}^4$ zatem dla tego pręta $\ell = \sqrt{35,2 : 18,2} = 1,39 \text{ cm}$. A zatem $\ell = 83 \times 1,39 = 115 \text{ cm}$. Pręt $IN^{\circ} 14$ jest przeto nieco zbyt OBFITY. Mniejszy z kolei $IN^{\circ} 13$ daje $J_{\min} = 27,4 \text{ cm}^4$ oraz $S = 16,1 \text{ cm}^2$. Stąd $\ell = 1,305 \text{ cm}$. Ponieważ dla tego pręta $K_r = 40000 : S = 40000 : 16,1 = 2484 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$, przeto $2484 = 3100 - 11,4 \ell : \ell$ skąd $\ell : \ell = 54$ a zatem $\ell = 54 \ell = 54 \times 1,305 = 70 \text{ cm}$. Ten pręt znów jest zbyt słaby, należy pozostać przeto przy $N^{\circ} 14$.

Widzimy z tego wszystkiego, że wzory EULERA dają wymiary zbyt szczupłe poniżej swej granicy stosowności - to było powodem braku zaufania do tych wzorów aż do chwili ogłoszenia drukiem prac TETMAJERA. Łukę w ten sposób powstałą starano się wypełnić,

budując wzory kompromisowe, jednoczące wzory na wyboczenie i na ściskanie zwykłe. Najudatniejszą próbę w tym kierunku stanowi:

§ 10. WZÓR NAVIER - SCHWARZ - RANKINE'A.

Zwykły wzór na ściskanie $R_x = S R_n$ można niewątpliwie rozszerzyć i na wyboczenie, dając odpowiednio małą wartość dla R_n , otrzymamy wtedy wzór na wyboczenie $R_x = S R_w$, gdzie według NAVIER-SCHWARZ-RANKINE'A należy uczynić $R_w = R_n : \{1 + \eta / [l : b]^2\}$. Tutaj l_{cm} oznacza długość pręta wybaczanego, b_{cm} - najmniejsze ramię bezwładności jego przekroju poprzecznego, a η - współczynnik stały nader DROBNEJ WARTOŚCI.

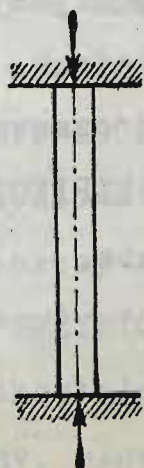
Uzasadnienie tego wzoru jest nader proste, a zwłaszcza bardzo naturalne, im bowiem l jest mniejsze, im bardziej się zbliżamy do idealnego wypadku ściskania, tem chyżej maleje wobec jedności wyraz $\eta / [l : b]^2$ - i tem prędzej R_w zbliża się do R_n w granicy nawet gdy $l = 0$ mamy $R_w = R_n$. Natomiast im l jest większe, im więc głębiej wkraczamy w dziedzinę wyboczenia, tem większą wartość wobec jedności ujawnia wyraz $\eta / [l : b]^2$ i przy l dostatecznie wielkiem, możemy wobec wartości tego wyrazu zupełnie pominąć jędynkę, pisząc wprost $R_w = R_n : \eta / [l : b]^2$ skąd $R_x \cong R_n S b^2 : \eta l^2$. Otrzymany w ten sposób wzór stanowi w zasadzie wzór EULERA, skąd wniosek, że wzór NAVIER istotnie stanowi wzór kompromisowy stając się

w granicach wzorem dla zwykłego ściskania oraz wzorem EULERA w przybliżeniu. Jego podłoże teoretyczne jest jednak nieco chwiejne, jakeśmy to chyba mogli zauważyć, jest to więc raczej wzór empiryczny, to też wartość η może być w nim ustalona jedynie w sposób doświadczalny. Różnorodne wartości η podaje:

TABLICA CZTERNASTA.

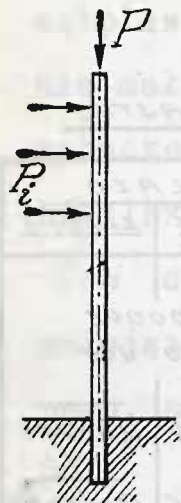
<u>NAZWISKA BADACZÓW.</u>	<u>DRZEWO SUCHE.</u>	<u>ODLEW ŻELIŃNY</u>		<u>ŻELAZO</u>	
		<u>POZIOMY</u>	<u>PIONOWY</u>	<u>ZGRZEWNE</u>	<u>ZLEWNE</u>
LAISSE & SCHUEBLER	0,0002	0,00025		0,00008	
SCHAROWSKY	—	0,0002		0,00001	
WINKLER	0,0003	—	—	—	—
KROHN	—	—	—	0,00004	0,00008
BAUSCHINGER	—	0,0006	0,00022	—	—
V. TETMAJER	0,00023	0,0007	—	0,000016	0,000014
[DLA $l:b =$ 20÷200]	20÷200	20÷150	—	20÷250]	
ZAZWYCZAJ:	0,00015	0,00015		0,00008.	

Obecnie wzór powyższy utracił już swą wartość, zwłaszcza, że ścisłe badania BACHA, BAUSCHINGERA i TETMAJERA, wykazały, że WARTOŚĆ η WAHA SIĘ W DOSYĆ SZEROKICH GRANICACH, utrzymał się on jedy- RYS. 275.
nie szczerunkowo w niektórych fabrykach, dzięki zadawnionym nawyknieniom. Bach zaleca wrzszcie stosowanie WZORU NAVIER w szczególnym wypadku, kiedy płasko ucięte końce pręta dotykają powierzchni, wywierających na nie nacisk, jak to zresztą najlepiej uwypukla RYS. 275. Pozostaje nam jeszcze tylko wziąć pod uwagę:



§ 11. WYBOCZENIE PRĘTA WYGINANEGO, kiedy niezależnie od siły osiowej, stwarzającej /RYS.276/ jeden z wyżej rozpatrywanych wypadków wyboczenia, na pręt działa pewien układ sił P gnących, prostopadłych do

RYS. 276. pierwotnej osi podłużnej pręta. Bliższe rozważanie warunków obciążenia tylko co opisanego - odrazu wskazuje niezbicie, iż i w tym wypadku wzory EULERA zachowują swą wartość jednak li tylko wtedy, gdy STRZAŁKI UGIĘCIA, SPOWODOWANE DZIAŁANIEM OWYCH SIŁ GNĄCYCH, NIE PRZEKRACZAJĄ PORZĄDKU WARJACYJNYCH PIERWOTNYCH STRZAŁEK PRĘTA, o jakich wyżej była mowa, w tym jedynie bowiem razie możemy je wprost zaliczyć do gromady strzałek warjacyjnych, branych pod uwagę przy wyprowadzaniu wzorów EULERA. Jest to raczej stwierdzenie istoty rzeczy nieco ryczałtowe, tem niemniej jednak nie zawiera ono błędu - można bowiem ustalić również i dowodzenie zupełnie ścisłe, które tu dla braku miejsca pomijamy. I tu przeto należy stosować wzory EULERA, jednak, kwoli bezpieczeństwa, stosować przy tem dwu, a czasem nawet i kilkakrotnie większy WSPÓŁCZYNNIK BEZPIECZENSTWA f_w . Na tym kończymy teorię wyboczenia.



ROZDZIAŁ SIÓDMY.

PODSTAWY TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI.

§ 1. WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW, A TEORJA SPRĘŻYSTOŚCI

W dotychczasowych badaniach posługiwaliśmy się przeważnie zasadniczymi pojęciami, osnutymi na podstawie metody PRZEKROJÓW PŁASKICH, podanej w zagajeniu niniejszego kursu. Ta metoda, stanowiąca podwalinę WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW wystarczyła nam w zupełności przy rozpatrywaniu ROZCIĄGANIA, ŚCISKANIA, GIĘCIA I WYBOCZENIA, natomiast okazała się bezsilną przy badaniu ŚCINANIA i SKRĘCANIA, gdzie niezależnie od przekrojów płaskich zmuszeni byliśmy dodatkowo wziąć pod uwagę układy elementarnych kostek, myślowo wyodrębnionych we wnętrzu ciała odkształconego. Posługiwaliśmy się zatem milcząco nową zupełnie metodą WYKROJÓW Z CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO, stanowiącą podstawę TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI, nauki ścisłej, o charakterze czysto matematycznym, osnutej na prawie HOOKE'A. Ta nowa wiedza korzysta z danych WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW, podkreśla lub uzupełnia jej wnioski, choć niekiedy w niwecz je obraca, rozporządza bowiem metodami badania znacznie subtelniejszymi. W samej rzeczy - WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW bada odrazu cały przekrój płaski, myślowo w ciele odkształconem przeprowadzony, nie troszczy się więc o jego cząsteczki składowe - TEORJA SPRĘŻYSTOŚCI rozpatruje poszczególne cząsteczki ciała odkształconego, bierze pod uwagę ich stosunek wzajemny, słowem

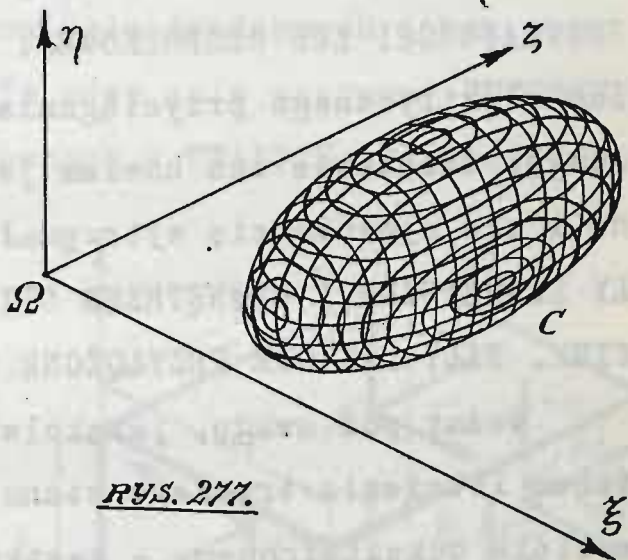
głębiej sięga w istotę rzeczy. Posiada jednak pewną wadę - prowadzi bowiem naogół do nader złożonych wzorów, wymagających zawiłego a często wprost niewyko-nalnego całkowania - nie posiada więc owej przejrzy-stej prostoty, jaką odznacza się WYTRZYMAŁOŚĆ TWO-RZYW. To też, gdzie tylko można, posługujemy się wy-łącznie WYTRZYMAŁOŚCIĄ TWORZYW, stosując TEORIĘ SPRĘ-ŻYSTOŚCI jedynie wtedy, gdy WYTRZYMAŁOŚĆ zawodzi. Po-znajmy więc:

§ 2. METODY BADANIA STOSOWANE W TEORJI SPRĘŻY-
STOŚCI. TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI bada zachowanie się od-dzielnych cząsteczek ciała odkształconego w stosun-ku do cząsteczek sąsiednich, a więc bierze pod uwagę SIŁY MIĘDZYCZĄSTECZKOWE, powodujące równowagę wewnę-tryzną, wyznacza je dla poszczególnych cząsteczek, bu-dując niejako w ten sposób STATYCZNY SZKIELET ciała odkształconego. Rozpatruje przytem cząsteczki nie w zwykłym znaczeniu tego wyrazu, a DROBNY ELEMENTARNY WYKROJ z ciała odkształconego, tej lub innej postaci, choć zawsze znikomo mały. TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI JEST WIĘC NAUKĄ O RÓWNOWADZE WEWNĘTRZNYCH WYKROJÓW CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO, trwały bowiem stan równowagi wewnątrz nej warunkuje równowagę drobin w ten lub inny sposób we wnętrzu ciała odkształconego myślowo wyodrębnio-nych, to też drobiny sprężyste mają zazwyczaj kształt ściśle wyznaczony - są to więc KULE, ELIPSOIDY, PRO-STE lub KRZYWOŚCIENNE KOSTKI, na jakie dzielimy myś-

lowo ciało odkształcone. Najczęściej jednak rozpatrujemy:

§ 3. UKŁAD KOSTEK PROSTYCH, znikomo małych, stanowiący budowę wewnętrzną ciała odkształconego. Wy-
prowadźmy z dowolnego punktu Ω trzy wzajemnie do
siebie prostopadłe osie współrzędnych $\Omega\xi, \Omega\eta, \Omega\zeta$ -

które nazwiemy STAŁE-
MI. Przez dane CIAŁO
ODKSZTAŁCONE C prze-
prowadźmy myślowo po-
trójny szereg prze-
krojów płaskich, ko-
lejno równoległych
do PŁASZCZYZN $\xi\Omega\eta$,



RYS. 277.

$\xi\Omega\zeta, \eta\Omega\zeta$, a zni-

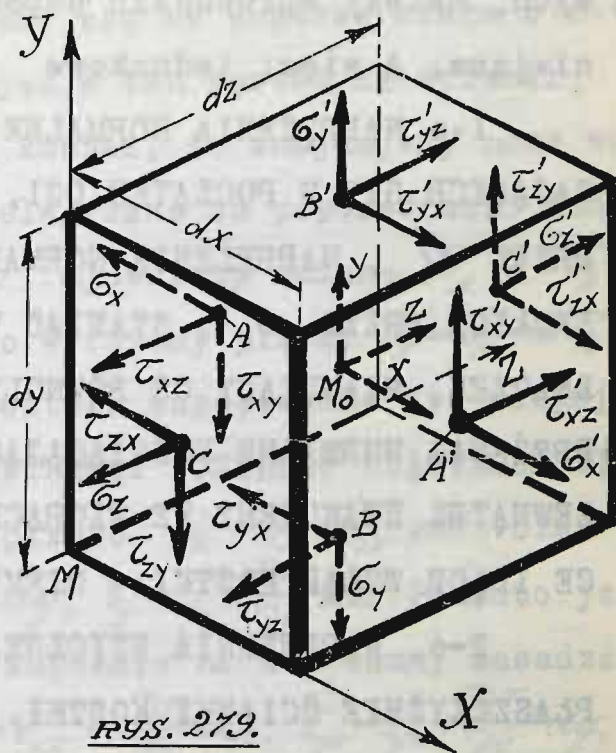
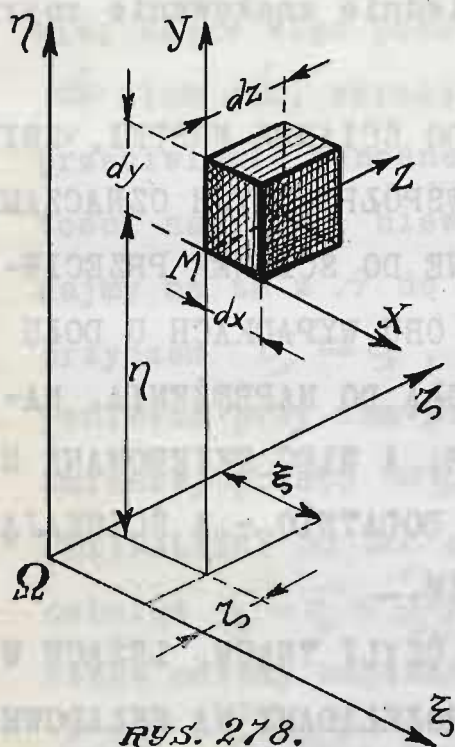
komo od siebie odległych. W ten sposób rozcinamy cia-
ło odkształcone na GROMADĘ KOSTEK PROSTYCH WĘWNETRZ-
NYCH; na powierzchni miejscami również otrzymamy kost-
ki tego typu - wogóle zaś ZEWNĘTRZNE KOSTKI, STANOWIĄ
CE POWŁOKĘ CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO BĘDĄ PROSTE SZEŚCIEN-
NE, UKOŚNO ŚCIĘTE RÓWNOLEGLE DO JEDNEJ Z KRAWĘDZI A
WIĘC SZEŚCIOŚCIENNE UKOŚNE, WRESZCIE UKOŚNO ŚCIĘTE
POD KĄTEM - CZWOROŚCIENNE, zawsze bowiem możemy uwa-
żać zewnętrzne wycinki powierzchni ciała odkształconego
go, jako płaskie, pomijając nieznaczną krzywiznę -wo-
bec znikomej odległości płaszczyzn tnących. Zewnętrzne
kostki tylko co wymienione, ulegają obciążeniu ze-

wnętrznemu, działającemu na powłokę ciała odkształconego - wewnętrzne natomiast działają wzajem na siebie siłami wewnętrznymi, chyba że leżą tuż pod powłoką, bo wtedy działają również i na zewnętrzne kostki. Wszystkie - w ogólnym wypadku ulegają ponadto działaniu sił massowych, jako to: SIŁE CIĄŻENIA, BEZWŁADNOŚCI LUB ODŚRODKOWEJ. Zjawisk magnetycznego lub elektrycznego przyciągania nie bierzemy tu pod uwagę, działanie ich bowiem jest stosunkowo nieznaczne i nie ujawnia się wytrzymałościowo. Wspomniane SIŁY ZEWNĘTRZNE I WEWNĘTRZNE DZIAŁAJĄ NA ŚCIANKI KOSTEK, SIŁY MASSOWE PRZYŁOŻONE SĄ DO ŚRODKA ICH MASY.

Weźmy pod uwagę, jakkolwiek KOSTKĘ WEWNĘTRZNĄ. Wobec istnienia trwałego stanu RÓWNOWAGI WEWNĘTRZNEJ w ciele odkształconem, - kostka ta również pozostaje w równowadze, a więc JEJ SIŁY MASOWE ORAZ SIŁY ZOBOPÓLNEGO ODDZIAŁYWANIA NA KOSTKI SĄSIEDNIE WZAJEMNIE SIĘ ZNOSZĄ, DAJĄC DLA ŚRODKA MASY KOSTKI WYPADKOWE SIŁ I MOMENTÓW - RÓWNE ZERU. Odrzućmy sąsiednie kostki, a równowaga zostanie zakłócona - siły wewnętrzne bowiem przestaną się znosić wzajemnie i aby ją utrzymać, NALEŻY ZASTĄPIĆ DZIAŁANIE KOSTEK ODRZUCONYCH SIŁAMI, PRZYŁOŻONEMI DO ŚCIANEK KOSTKI ROZPATRYWANEJ. Będą to niejako SIŁY ZEWNĘTRZNE KOSTKI - odkształcające, PRZYŁOŻONE DO ŚRODKÓW CIĘŻKOŚCI ŚCIANEK KOSTKI przyczem w ogólnym wypadku NA KAŻDĄ ŚCIANKĘ DZIAŁAĆ. BĘDZIE SKŁADOWA NORMALNA I STYCZNA, leżąca w jej płas-

szczyźnie. Dzieląc siły składowe przez powierzchnię ścianki, otrzymujemy:

§ 4. NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE ŚCIAN KOSTKI WE-
WNĘTRZNEJ. Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt $M[\xi, \eta, \zeta]$
we wnętrzu ciała odkształconego i z tego punktu, jako
początku poprowadźmy nowe OSIE WSPÓŁRZĘDNYCH $MX, MY,$
 MZ odpowiednio równoległe do dawnych i tak samo
skierowane jak one. Te nowe osie nazywamy RUCHOMEMI
dla odróżnienia od dawnych - STAŁYCH. Płaszczyzny osi



ruchomych należą niewątpliwie do omawianego wyżej szeregu przekrojów płaskich ciała odkształconego, tworzą one łącznie z płaszczyznami sąsiednimi odległymi odpowiednio o dx, dy, dz - znikomą KOSTKĘ, PRZYNALEŻ-

NĄ DO ROZPATRYWANEGO PUNKTU. Ta kostka może być uważana jako drobina ciała odkształconego. W jej ŚRODKU MASY M_0 PANUJE ODNOŚNA SIŁA MASOWA, NA ŚCIANKACH - NAPRĘŻENIA NORMALNE I STYCZNE. Zazwyczaj siłę masową wyznaczamy W JEDNOSTKACH SIŁY NA JEDNOSTKĘ OBJĘTOŚCI, a więc w postaci SIŁY MASOWEJ JEDNOSTKOWEJ O SKŁADOWYCH X, Y, Z - RÓWNIEŻ SIŁACH MASOWYCH JEDNOSTKOWYCH.

Wobec stosunkowo dużej liczby naprężeń kostkowych, należy wprowadzić odpowiednie znakowanie rozróżniające. A więc: jednakowe

1-o NAPRĘŻENIA NORMALNE DO ŚCIANEK KOSTKI, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W POCZĄTKU OSI, WSPÓŁRZĘDNYCH OZNACZAMY PRZEZ σ , NAPRĘŻENIA NORMALNE DO ŚCIANEK PRZECIWLEGŁYCH PRZEZ σ' , STAWIĄC W OBU WYPADKACH U DOŁU ZNACZEK, MIANUJĄCY OS RÓWNOLEGŁĄ DO NAPRĘŻENIA. NAPRĘŻENIA NORMALNE ROZCIĄGAJĄCE, A WIĘC SKIEROWANE NAZEWNĄTRZ ZNAKUJEMY WE WZORACH DODATNIO - A ŚCISKAJĄCE IDĄCE WGLĄB KOSTKI - UJEMNIE.~

2-o. NAPRĘŻENIA STYCZNE, CZYLI TNĄCE, LEŻĄCE W PŁASZCZYŹNIE ŚCIANKI KOSTKI, ROZKŁADAMY NA SKŁADOWE RÓWNOLEGŁE DO RUCHOMYCH OSI; GDY NAPRĘŻENIE NORMALNE SKIEROWANE JEST PODŁUG OSI RÓWNOLEGŁEJ, TO I LEŻĄCE W TEJ SAMEJ ŚCIANCIE NAPRĘŻENIA TNĄCE MAJĄ KIERUNKI ODNOŚNYCH OSI I NAODWRÓT.~

3-o. NAPRĘŻENIA TNĄCE, LEŻĄCE W ŚCIANKACH KOSTKI, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W POCZĄTKU OSI WSPÓŁRZĘDNYCH

OZNACZAMY PRZEZ τ . NAPRĘŻENIA TNĄCE, PRZYNALEŻNE DO ŚCIANEK PRZECIWLĘGLYCH - PRZEZ τ' , STAWIĄC W OBU WYPADKACH U DOŁU DWA ZNACZKI; PIERWSZY Z NICH MIANUJE OŚ, PROSTOPADŁĄ DO ŚCIANKI, W KTÓREJ LEŻY ROZPATRYWANE NAPRĘŻENIE TNĄCE, - DRUGI WYZNACZA OŚ RÓWNOLEGLĄ DO TEGO NAPRĘŻENIA.

W ciele JEDNOLITEM o jednostajnej budowie cząsteczkowej wewnętrznej - naprężenia, panujące w punktach sąsiednich, nieznacznie tylko się różnią od siebie; skoro więc posuwamy się we wnętrze ciała o dx , dy lub dz , wkraczając w ten sposób na ścianki przeciwległe odnośnej kostki, to znajdujemy nowe wartości naprężeń, niewiele różne od poprzednich. Idąc dajmy na to z A do A' ujawniamy zmianę σ_x w σ'_x , przyczem $\sigma'_x \cong \sigma_x$, co wyrażamy pisząc $\sigma'_x = \sigma_x + d\sigma_x$. Ponieważ przy tem pozostałe współrzędne nie ulegają zmianie, przeto $d\sigma_x$ stanowi PRZYROST CZĄSTECZKOWY, PRZYNALEŻNY DO dx a przeto $\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ oraz podobnie $\sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$, $\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz$. Ponadto jeszcze możemy napisać zupełnie na tej samej zasadzie:

$$\begin{aligned} \tau'_{xy} &= \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx, & \tau'_{xx} &= \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx, & \tau'_{yz} &= \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy, \\ \tau'_{yx} &= \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy, & \tau'_{zx} &= \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz, & \tau'_{zy} &= \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez A, B, C ŚRODKI CIĘŻKOŚCI ścianek kostki, zbiegających się w punkcie M , a przez A', B', C' - ścianek przeciwległych. Te same znaki przypisywać będziemy odnośnym ściankom kostki, przechodząc od naprężeń do sił wewnętrznych cząstecz-

kowych znajdziemy następujący układ 18 sił zestawio-

TABLICA PIĘTNASTA.

<u>PUNKT</u> <u>WZEPĘCZENIA</u>	<u>SIŁY RÓWNOLEGŁE DO OŚI:</u>		
	<u>M_X</u>	<u>M_Y</u>	<u>M_Z</u>
M_0	$X dx dy dz$	$Y dx dy dz$	$Z dx dy dz$
A	$\sigma_x dy dz$	$\tau_{xy} dy dz$	$\tau_{xz} dy dz$
B	$\tau_{yx} dz dx$	$\sigma_y dz dx$	$\tau_{yz} dz dx$
C	$\tau_{zx} dx dy$	$\tau_{zy} dx dy$	$\sigma_z dx dy$
A'	$[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx] dy dz$	$[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx] dy dz$	$[\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx] dy dz$
B'	$[\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy] dz dx$	$[\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy] dz dx$	$[\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy] dz dx$
C'	$[\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz] dx dy$	$[\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz] dx dy$	$[\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz] dx dy$

ny w sposób następujący na tablicy XV , gdzie wypisaliśmy wartości poszczególnych sił cząsteczkowych w założeniu naprężeń rozciągających kostkę, jak wskazuje RYS. 279.

To zestawienie sił pozwoli nam ustalić:

§ 5. WARUNKI RÓWNOWAGI PROSTEJ KOSTKI WEWNĘTRZ-

NEJ. Przedewszystkiem przy dodawaniu składowych podanych w TABLICY XV , należy uwzględnić kierunki działania tych sił. Biorąc zatem sumę składowych równoległych do osi MX będziemy mieli kolejno: $[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx] dy dz - \sigma_x dy dz + [\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy] dz dx - \tau_{yx} dz dx + [\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz] dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = [\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X] dx dy dz = 0$. I ostatecznie mamy dla trzech osi $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$,

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0.$$

Z kolei wypisujemy równania momentów branych względem osi AA' , BB' i CC' przechodzących przez środek masy M_0 kostki a równoległych do odnośnych ruchomych osi współrzędnych, przyczem pomijamy składowe przecinające oś rozpatrywaną lub do niej równoległe, jako nie dające momentów. W ten sposób dla osi AA' dajmy na to, mamy, rozróżniając znakiem różnoskrętność odnośnych momentów: $\tau'_{yz} dx dz \frac{1}{2} dy + \tau_{yx} dx dz \frac{1}{2} dy - \tau'_{zy} dx dy \frac{1}{2} dz - \tau_{xy} dx dy \frac{1}{2} dz =$
 $= \frac{1}{2} [\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy + \tau_{yz} - \tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz - \tau_{xy}] dx dy dz =$
 $= [\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz] dx dy dz = 0.$

Pomijając nieskończenie małe otrzymujemy ostatecznie $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ oraz zupełnie tak samo $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ i $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Te równania stanowią tak zwane TWIERDZENIE CAUCHY. Brzmi ono tak:

NAPRĘŻENIA TNĄCE, PROSTOPADŁE SKIEROWANE KU TEJ SAMEJ OSI KRAWĘDZI KOSTKI, SĄ RÓWNE. Czasami dla uproszczenia pisania pomijamy podwójne znaczki, oznaczając wprost $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_x$, $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_y$, $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_z$ — w danym wypadku DOLNY ZNACZEK MIANUJE OŚ PROSTOPADŁĄ DO DANEGO NAPRĘŻENIA TNĄCEGO.

Widzimy więc, iż ilość naprężeń jednostkowych kostki sprowadza się do sześciu $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$, dla określenia tych naprężeń mamy wszystkiego trzy równania statyki, które tu wypiszemy w postaci: $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} + X = 0$, $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + Y = 0$, $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + Z = 0$

i oznaczmy pokrótce znakiem (R) . Tych równań jest najwidoczniej zbyt mało, sama więc statyka nie wystarczy, aby wyznaczyć naprężenia kostki w rozpatrywanym wyżej wypadku ogólnym RÓWNOWAGI PRZESTRZENNEJ, KIEDY MAMY DO CZYNIEŃ Z NAPRĘŻENIAMI, RÓWNOLEGŁEMI DO WSZYSTKICH TRZECH OSI WSPÓŁRZĘDNYCH. To samo niewątpliwie będzie również i w wypadku prostszym, KIEDY NA KOSTCE BRAK NAPRĘŻEŃ, RÓWNOLEGŁYCH DO JEDNEJ Z OSI WSPÓŁRZĘDNYCH, to jest, KIEDY ZACHODZI RÓWNOWAGA PŁASKA. Jeżeli to ma miejsce dajmy na to dla osi MZ , to wtedy $\bar{Q}_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0$, albo jeszcze inaczej $\bar{Q}_z = \tau_y = \tau_x = 0$, a zatem równania (R) należy wypisać w prostszej postaci: $\frac{\partial \bar{G}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + X = 0$, $\frac{\partial \bar{G}_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial x} + Y = 0$, $Z = 0$. Ostatnie równanie głosi, że SKŁADOWA SIŁY MASOWEJ JEDNOSTKOWEJ RÓWNOLEGŁA DO OWEJ OSI MZ TEŻ BYŁA RÓWNA ZERU. W danym wypadku wystarczająco jasny obraz obciążenia kostki daje środkowy jej przekrój, równoległy do płaszczyzny XY zawiera bowiem w swej płaszczyźnie WSZYSTKIE naprężenia. Stąd nazwa równowagi PŁASKIEJ.

Gdy z kolei w kostce BRAK NAPRĘŻEŃ, RÓWNOLEGŁYCH ODPOWIEDNIO DO DWÓCH OSI WSPÓŁRZĘDNYCH, wtedy możliwa jest RÓWNOWAGA LINJOWA. Niech to będą, dajmy na to, osie MY i MZ a zatem $\bar{Q}_y = \bar{Q}_z = \tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$.

W danym wypadku równania (R) są nader proste:

$\frac{\partial \bar{G}_x}{\partial x} + X = 0$, $Y = Z = 0$. Tutaj więc siła masowa jednostkowa WINNA BYĆ RÓWNOLEGŁA DO OSI MX . Jest to zatem

OGÓLNY WYPADEK

ROZCIĄGANIA,

gdy $\sigma_x > 0$ lub

ŚCISKANIA

KOSTKI, gdy

$\sigma_x < 0$. Oba te wypadki rozpa-

trywaliliśmy w

ustępach pią-

tym i dziesią-

tego, możemy

zatem skorzy-

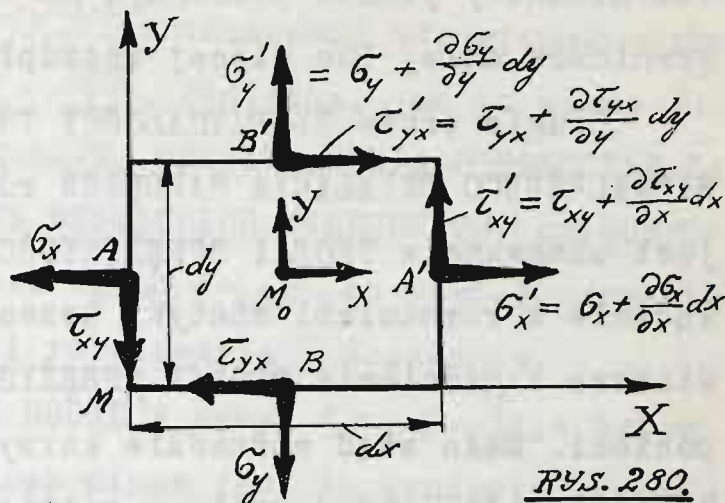
stać z wyników

poprzednio

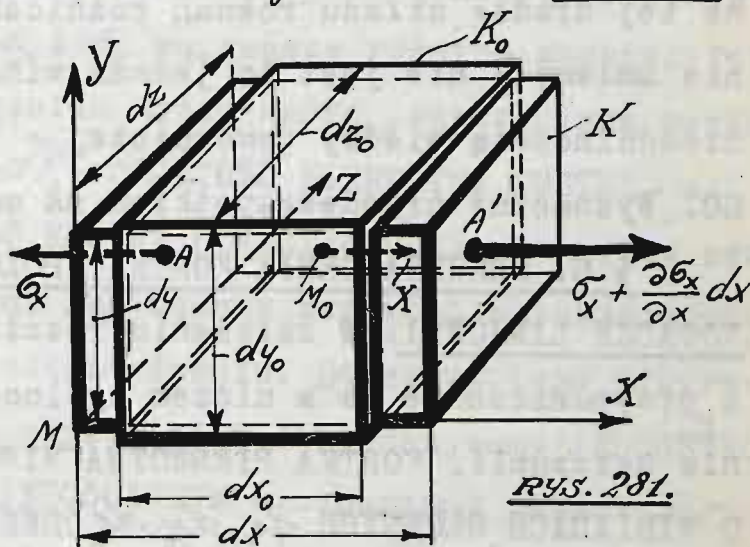
otrzymanych,

opierając w

ten sposób TE-
ORJĘ SPRĘŻYSTOŚCI na podstawie doświadczalnej. W tym celu uzależniamy naprężenia kostki od odkształceń, wiążąc je PRAWEM HOOKE'A, zapożyczonym z WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW, gdzie to prawo ma wyraźnie doświadczalny charakter. Tutaj natomiast w TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI NABIERA ONO DONIOSŁOŚCI ZASADY BEZWZGLĘDNEJ, stanowiąc podstawę tej nauki. Stoi to niewątpliwie w sprzeczności z doświadczeniem, wiemy bowiem, że dla wielu ciał zakres stosowalności PRAWA HOOKE'A jest nader skromny.



RYŚ. 280.



RYŚ. 281.

Tem niemniej jednak podlegają mu wszystkie ciała w granicach mniej lub więcej szczupłych.

Drugie prawo WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW - ZASADA NIEZALEŻNEGO DZIAŁANIA NAPRĘŻEŃ również bezwzględnie jest uznawane w TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI. Oba te prawa łącznie z równaniami statyki pozwalają rozwiązać podstawowe zagadnienia TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI w ogólnej postaci. Mała stąd wprowadzić korzyść, bo otrzymanego na tej drodze układu równań różniczkowych całkować nie umiemy - nie jest to jednak winą naszej nauki a nieudolnością wiedzy pomocniczej - RACHUNKU CAŁKOWEGO. Wyznamy przedewszystkiem na mocy tych praw:

§ 6. ODKSZTAŁCENIA KOSTKI, POZOSTAJĄCEJ W RÓWNOWADZE LINJOWEJ. W założeniu rozciągania kostki, a przypuszczenie to w niczem ogólności wywodzenia nie uszczupli, KOSTKA PIERWOTNA NIEODKSZTAŁCONA K_0 O WYMIARACH GŁÓWNYCH dx_0, dy_0, dz_0 ODKSZTAŁCA SIĘ (RYS. 281/ W KOSTKĘ K RÓWNIEŻ PROSTĄ O WYMIARACH ODKSZTAŁCONYCH dx, dy, dz , przyczem następuje WYDŁUŻENIE KOSTKI W KIERUNKU DZIAŁANIA NAPRĘŻEŃ σ_x i $\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, oraz SKURCZ POPRZECZNY. W wypadku ściskania zjawiska te zmieniają znak wraz z naprężeniami.

Oznaczmy przez $Sdx = dx - dx_0, Sdy = dy - dy_0, Sdz = dz - dz_0$. Będą to dodatnie lub ujemne przyrosty głównych wymiarów kostki, ujawniające się przy odkształceniu. Stosunki tych ^{PRZYROSTÓW} do odnośnych wymiarów pierwotnych kostki nazywamy JEDNOSTKOWEMI WYDŁUŻE-

NIAMI lub SKRÓCENIAMI, czyli WYDŁUŻENIAMI UJEMNEMI WZGLĘDEM OSI MX, MY, MZ i oznaczamy odpowiednio przez $\epsilon_x = \frac{\delta dx}{dx_0}$, $\epsilon_y = \frac{\delta dy}{dy_0}$, $\epsilon_z = \frac{\delta dz}{dz_0}$. Ponieważ, jak to wiemy już z WYTRZYMAŁOŚCI TWORZYW, ODKSZTAŁCENIA POPRZECZNE ZACHODZĄ JEDNAKOWO WE WSZYSTKICH KIERUNKACH, przeto $\epsilon_y = \epsilon_z$, ponadto niewątpliwie $\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\epsilon_x}{m}$, co zostało zresztą wyjaśnione w teorii rozciągania i ściskania.

Na mocy PRAWA HOOKE'A mamy $\epsilon_x = \alpha \bar{\sigma}_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{E}$ a zatem $\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\alpha \bar{\sigma}_x}{m} = -\frac{\bar{\sigma}_x}{mE}$. Znak minus jest tu konieczny, ponieważ ϵ_x i ϵ_y oraz ϵ_x i ϵ_z są zawsze różnych znaków. Tylko co wypisanym wzorom można nadać jeszcze inną postać nazywając przez dV_0 OBJĘTOŚĆ PIERWOTNĄ KOSTKI, a przez dV OBJĘTOŚĆ KOSTKI ODKSZTAŁCONEJ. Oznaczmy przez $\delta dV = dV - dV_0$ dodatni lub ujemny przyrost objętości kostki, ujawniony po odkształceniu. Stosunek tego przyrostu do pierwotnej objętości kostki nazywamy JEDNOSTKOWYM PRZYROSTEM OBJĘTOŚCIOWYM i oznaczamy przez $e = \frac{\delta dV}{dV_0}$. Ponieważ niewątpliwie $dV_0 = dx_0 dy_0 dz_0$ oraz $dV = dx dy dz$, a ponadto $dx = dx_0 + \delta dx = dx_0 + \epsilon_x dx_0 = [1 + \epsilon_x] dx_0$, i zupełnie tak samo $dy = (1 + \epsilon_y) dy_0$, $dz = (1 + \epsilon_z) dz_0$, przeto $dV = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) dx_0 dy_0 dz_0 = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) dV_0$. Wobec nader drobnych wartości wydłużeń jednostkowych możemy śmiało pomijając małe wyższych rzędów, napisać $(1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) \cong 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$, a zatem $dV = dV_0(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$, stąd $dV - dV_0 = \delta dV = [\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z] dV_0$ i ostatecznie, dzieląc przez dV_0 mamy $e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$.

JEDNOSTKOWY PRZYRÓST OBJĘTOŚCI KOSTKI STANOWI

SUMMĘ WYDŁUŻEŃ JEDNOSTKOWYCH W KIERUNKU OSI WSPÓŁRZĘDNYCH.

A zatem $\epsilon = \epsilon_x - \frac{\epsilon_x}{m} - \frac{\epsilon_x}{m} = \frac{m-2}{m} \epsilon_x$. Stąd wniosek oczywisty, że TOWRZYWA, DLA KTÓRYCH $m=2$, NIE UJAWNIAJĄ ŻADNYCH ZMIAN OBJĘTOŚCIOWYCH PRZY ROZCIĄGANIU LUB ŚCISKANIU, wtedy bowiem $\epsilon=0$. Tą cechą wyróżnia się pewna odmiana kauczuku. Prawie dla wszystkich ciał $m>2$, stąd również prosty wniosek, że prawie wszystkie CIAŁA POWIĘKSZAJĄ SWĄ OBJĘTOŚĆ PRZY ROZCIĄGANIU - FURCZĄ SIĘ PRZY ŚCISKANIU, tutaj bowiem $\frac{m-2}{m} > 0$, a zatem znak ϵ zależy od znaku ϵ_x . Stąd również $\epsilon_x = \frac{m}{m-2} \epsilon = \alpha \epsilon = \frac{\epsilon_x}{L}$, oraz $\epsilon_y = \epsilon_z = -\frac{\epsilon_x}{m} = -\frac{\epsilon}{m-2}$.

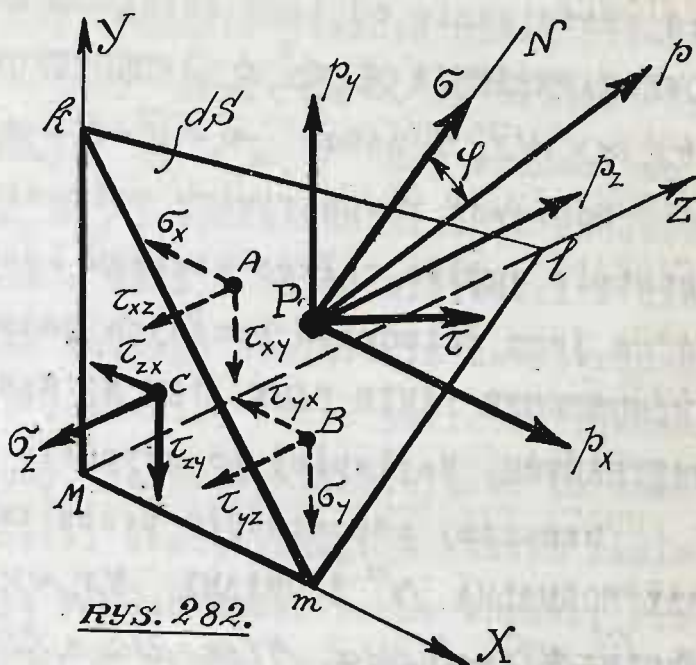
Na tym kończymy badanie kostek wewnętrznych i bierzemy pod uwagę:

§ 7. WARUNKI RÓWNOWAGI KOSTKI ZEWNĘTRZNEJ. Przy-
puśćmy, żeśmy wyznaczyli naprężenia dla danej kostki
wewnętrznej, potem dla sąsiedniej, przylegającej do
poprzedniej wzdłuż jednej ze ścianek, następnie znów
dla sąsiedniej, idąc w tym samym kierunku - słowem
posuwając się w ten sposób coraz dalej, wyjdziemy
wreszcie na powierzchnię ciała. Ostatnią kostkę sze-
regu nazywamy ZEWNĘTRZNĄ - stanowi ona cząstkę powło-
ki ciała odkształconego. Wyżej już zaznaczyliśmy, że
kostki zewnętrzne mogą być trzech rodzajów: są to zwy-
kłe KOSTKI PROSTE, KLINY lub OSTROSŁUPY TRÓJKĄTNE.
Zewnętrzne proste kostki nie różnią się oczywiście
od wewnętrznych, należy zatem jeno rozpatrzyć

warunki równowagi klinów zewnętrznych lub ostrosłupów trójkątnych.

Od tych ostatnich, zaczniemy, ponieważ warunki równowagi klinów można otrzymać jako szczególny wypadek równowagi ostrosłupa trójkątnego

Rozpatrujemy
przeto OSTROSŁUP
TRÓJKĄTNY $M\ell m$



RYS. 282.

o trzech wzajemnie prostopadłych płaskich ściankach zbiegających się w początku ruchomych współrzędnych i czwartej wogóle krzywej ściance ℓm , stanowiącej część powierzchni ciała odkształconego. Wobec znikomych wymiarów ostrosłupa możemy rozpatrywać ściankę ℓm klina, jako PŁASKIE POLETKO dS o geometrycznym środku P , gdzie działa JEDNOSTKOWE NAPRĘŻENIE p , STANOWIĄCE CZĄSTKĘ ZEWNĘTRZNEGO OBCIĄŻENIA. W szczególnym wypadku rozpatrywane poletko może być odciążone, a wtedy $p=0$, bo siły zewnętrzne niezawsze pokrywają całą powłokę ciała.

Budując w środku P normalną N poletka dS możemy p rozłożyć na JEDNOSTKOWE NAPRĘŻENIE σ NORMALNE, a więc prostopadłe do dS , oraz na JEDNOSTKOWE

NAPRĘŻENIE τ TNĄCE, leżące w poletku. Ponadto, zupełnie niezależnie od tego rozkładu możemy wyznaczyć SKŁADOWE NAPRĘŻENIA p_x, p_y, p_z JEDNOSTKOWE PÓWNOLEGŁE DO OSI MX, MY, MZ . A zatem: $\bar{p} = \bar{\sigma} + \bar{\tau} = \bar{p}_x + \bar{p}_y + \bar{p}_z$.

Ponieważ rozpatrywany ostrosłup trójkątny stanowi ostatnie ogniwo całego szeregu kostek wewnętrznych, przeto na jego ściankach bocznych panować będą NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE TAKIE SAME, JAK NA SĄSIEDNICH KOSTKACH WEWNĘTRZNYCH. Najlepiej to uwypukla RYS. 282.

Oznaczmy odpowiednio przez α, β, γ KĄTY JAKIE TWORZY NORMALNA N Z OSIAMI MX, MY, MZ a zatem powierzchnie $Mkl = ds \cos \alpha$, $Mlm = ds \cos \beta$, $Mkm = ds \cos \gamma$. Ponadto niech będą odpowiednio λ, μ, ν KĄTY NACHYLENIA p KU OSIOM MX, MY, MZ a wtedy $p_x = p \cos \lambda$, $p_y = p \cos \mu$, $p_z = p \cos \nu$. Wreszcie oznaczmy przez X, Y, Z składowe JEDNOSTKOWEJ SIŁY MASOWEJ, przyłożonej do środka masy rozpatrywanego ostrosłupa. Wobec istnienia TRWAŁEGO STANU RÓWNOWAGI ODKSZTAŁCONEJ wszystkie siły ostrosłupa wzajemnie się znoszą, a ich składowe w summie dają zero. Wyznamy siły RÓWNOLEGŁE DO OSI MX - te siły są: $-G_x ds \cos \alpha$, $-\tau_{yx} ds \cos \beta$, $-\tau_{zx} ds \cos \gamma$, $p \cos \lambda ds$ oraz $X dV$, gdzie dV oznacza objętość ostrosłupa. Siłę $X dV$ jako małą wyższego rzędu, można wobec sił pozostałych pominąć, pisząc pierwszy warunek równowagi ostrosłupa trójkątnego w postaci -
 $-G_x ds \cos \alpha - \tau_{yx} ds \cos \beta - \tau_{zx} ds \cos \gamma + p \cos \lambda ds = 0$. Po skróceniu mamy $p \cos \lambda = G_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$, oraz zupełnie podobnie: $p \cos \mu = \tau_{xy} \cos \alpha + G_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma$,

$p \cos \nu = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \frac{Q}{2} \cos \gamma$. Oznaczmy te równania pokrótce przez (S). Ponadto jeszcze niewątpliwie będzie $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ oraz $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$. Równania (S) wyznaczają p, λ, μ, ν gdy wiadome są naprężenia i kąty α, β, γ ; tymczasem właśnie naodwrot naprężenia są szukane a dane p co do wielkości i kierunku, jako cząstka znanego obciążenia zewnętrznego. Zatem wyżej wypisane równania, które pokrótce równaniami (S) zwać będziemy, są niewystarczające. To samo miało miejsce dla kostki wewnętrznej. W każdym razie równania (S) pozwalają wysnuć nader cenne wnioski. Przede wszystkim, GDY JEDEN Z KĄTÓW α, β LUB γ JEST PROSTY - WTEDY OSTROŚŁUP STAJE SIĘ KLINEM, ponieważ wtedy normalna N jest prostopadła do odnośnej osi, a samo poletko dS przechodzi w prostokąt. Zatem oddzielne rozpatrywanie równowagi klina staje się zbędnem, ponieważ odnośne warunki równowagi można wprost otrzymać z równań (S). Wyżej widzieliśmy, iż równowagę zwykłej kostki prostej ZEWNĘTRZNEJ warunkują wzory (R) - obecnie poznaliśmy równania (S) dające warunki równowagi klina i ostrosłupa trójkątnego; we wszystkie wzory obciążenie zewnętrzne wchodzi w postaci naprężeń jednostkowych tego samego porządku i typu, co naprężenia kostki. Stąd prosty wniosek, że SIŁY OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO WINNY DZIAŁAĆ NA POWŁOKĘ CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO W POSTACI NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH. Przeto SIŁ SKUPIONYCH TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI NIE ROZPATRUJE ZUPEŁNIE, jeno wyłącz-

nie SIŁY ROZŁOŻONE NA PEWNĄ BY NAJMNIEJSZĄ POWIERZ-
CHNIĘ. Wreszcie ze wzorów tych wynika bezpośrednio, że
 $\neq 0$ nie może być równe zeru, gdy naprężenia kostki ze-
wnętrznej są różne od zera, inaczej mówiąc OBCIĄŻENIE
ZEWNĘTRZNE WINNO RÓWNOWAŻYĆ WYPADKOWĄ NAPRĘŻEN, PANU-
JĄCYCH W POWŁOCE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO - jest to ko-
nieczne wobec istnienia trwałej równowagi odkształco-
nej. Stąd prosty wniosek, że NAPRĘŻENIA NIE MOGĄ WY-
CHODZIĆ POZA POWŁOKĘ CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO, GDY NA NIEJ
NIEMA RÓWNOWAŻĄCEGO OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZNEGO.

Mamy więc pełny obraz rozkładu naprężeń kostko-
wych ciała odkształconego. Jedyny punkt wątpliwy tej
zwartej całości leży w dowolności zupełnej wyboru OSI
STAŁYCH. Jest to istotnie punkt wymagający wyjaśnienia
ponieważ układ kostek wewnątrz ciała budowany, zależy
od kierunku stałych osi - zatem poszczególnym układom
kostek odpowiadać muszą różne układy naprężeń, dające
coraz to inne wyniki dla poszczególnych punktów ciała
odkształconego. Pomiędzy temi wynikami musi być pe-
wien związek, bo przecież równowaga wewnętrzna ciała
odkształconego nie może być zależna od wyboru kierun-
ku i położenia w przestrzeni układu osi stałych.

Należy więc obrać we wnętrzu ciała odkształconego
dowolny PUNKT M i zbadać jak się zmieniają naprężenia
jadnostkowe na ściankach KOSTKI, PRZYNALEŻNEJ do tego
punktu w zależności od kierunku stałych osi ξ, η, ζ
(RYS.278/. Jest to zadanie dosyć uciążliwe, możemy

jednak znacznie je uprościć, rozpatrując POCHYLE PRZEKROJE jakiejkolwiek kostki, przynależnej do danego punktu, skoro dla tej kostki uprzednio już wyznaczyliśmy wszystkie naprężenia. Wszelki tego rodzaju przekrój kostki pochyły może być niewątpliwie rozpatrywany, JAKO ŚCIANKA NOWEJ KOSTKI, POCHYLONEJ W STOSUNKU DO ROZPATRYWANEJ, A PRZYNALEŻNEJ DO SĄSIEDNIEGO PUNKTU, GDZIE NAPRĘŻENIA JENO ZNIKOME RÓŻNICE DAĆ MOGĄ W PORÓWNANIU DO ROZPATRYWANYCH. Słowem, chcąc poznać jednostkowe naprężenia RÓŻNOKIERUNKOWYCH PRZEKROJÓW, PRZECHODZĄCYCH PRZEZ PUNKT DANY, należy zbadać:

§ 8. NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE UKOŚNYCH PRZEKROJÓW KOSTKI WEWNĘTRZNEJ. W dowolnym punkcie M ciała odkształconego budujemy (RYS.279) prostą kostkę i zakładamy, że jej wszystkie naprężenia wyznaczyliśmy w jakimkolwiek sposób. Prowadzimy przez nią dowolny PRZEKRÓJ PŁASKI, tworzący kąty α, β, γ z osiami MX, MY, MZ kostki i bierzemy pod uwagę wyłącznie część kostki odciętą przynależną do punktu M - pozostałą zaś odrzucamy. Wobec istnienia trwałej równowagi całej kostki i ten nowy wykrój z ciała odkształconego - ostrosłup trójkątny (RYS.282) zachować winien równowagę o ile zastąpimy działanie odrzuconej części kostki, odpowiednio obciążając powierzchnię świeżego przekroju naprężeniem jednostkowym p ukośnie na przekrój działającym po środku P . Wobec znikomo drobnych wymiarów dx, dy, dz kostki - w punkcie P jako sąsiednim z M panować będą prawie

te same naprężenia co i w M . Skoro więc wyznaczymy naprężenia panujące w P tym samym znajdziemy odnośne naprężenia punktu M , różniczkowo od tamtych odrębne. Należy więc wyznaczyć ρ , lub jego składowe ρ_x, ρ_y, ρ_z . To właśnie wykonaliśmy nieco wyżej, wyznaczając wzory (S); obecnie przeto należy jeszcze znaleźć PRAWO ZMIENNOŚCI ρ DLA RÓŻNOKIERUNKOWYCH PRZEKROJÓW dS KOSTKI rozpatrywanej, to jest dla RÓŻNYCH WARTOŚCI KĄTÓW α, β, γ , przyczem zgodnie z założeniami naprężenia bocznych ścianek kostki należy uważać, jako STAŁE NIEZMIENNE, bo przecież tak lub owak myślowo prowadzony przekrój nie może zmienić tych naprężeń kostki. W tym celu oznaczamy przez $x = \rho_x, y = \rho_y, z = \rho_z$ a zatem $x = \rho_x = \rho \cos \alpha = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$ — oraz podobnie $y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma, z = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$. Czyniąc tak rozpatrujemy NAPRĘŻENIE ρ PRZYNALĘŻNE DO DANEGO PRZEKROJU dS , JAKO PROMIEN WODZĄCY PEWNEJ POWIERZCHNI STANOWIĄCEJ GEOMETRYCZNE MIEJSCE KOŃCÓW ODCINKÓW ρ WEKTOROWO PRZENIESIONYCH DO POCZĄTKU WSPÓŁRZĘDNYCH. Ponieważ naprężenia punktu M różniczkowo się tylko różnią od naprężeń punktu P , przeto będzie tu również i GEOMETRYCZNE MIEJSCE KOŃCÓW JEDNOSTKOWYCH NAPRĘŻEŃ, ROZPATRYWANYCH DLA RÓŻNOKIERUNKOWYCH PRZEKROJÓW W PUNKCIE M — KRÓCEJ: — POWIERZCHNIA NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH PUNKTU M . Ponieważ tylko co wypisane równania są linjowe względem $x, y, z, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — przeto możemy z nich wyznaczyć $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ w postaci linjo-

wych funkcji współrzędnych x, y, z ; podstawiając te wartości w równanie $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ otrzymujemy zależność $\phi(x, y, z) = 1$, gdzie niewątpliwie znak ϕ oznacza CAŁKOWITĄ FUNKCJĘ ALGEBRAICZNĄ DRUGIEGO STOPNIA WSPÓŁRZĘDNYCH x, y, z . - MOŻE TO BYĆ JENO ELIPSOID, bo naprężenia ciała odkształconego nie mogą wzrastać nieograniczenie, skoro siły zewnętrzne odkształcające mają wartości skończone, a naprężenia, jakieśmy to widzieli wyżej, są tego samego porządku. Stąd wniosek: DO KAŻDEGO PUNKTU CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO PRZYNALEŻY ELIPSOID NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH; PROMIENIE WODZĄCE TEJ POWIERZCHNI OKREŚLAJĄ WIELKOŚCIOWO I KIERUNKOWO NAPRĘŻENIA PRZYNALEŻNE DO RÓŻNOKIERUNKOWYCH PRZEKROJÓW W TYM PUNKCIE. Z pośród całego roju tych naprężeń możemy przeto wyznaczyć zawsze TRZY NAPRĘŻENIA GŁÓWNE, LEŻĄCE NA GŁÓWNYCH OSIACH ELIPSOIDY NAPRĘŻEŃ; JEDNO Z NICH DA NAJWIĘKSZOŚĆ - DRUGIE NAJMNIEJSZOŚĆ NAPRĘŻEŃ PUNKTU M . Naprężenia główne są do siebie wzajem prostopadłe.

§ 9. NAPRĘŻENIA GŁÓWNE. Wyniki tylko co otrzymane, doskonałe jakościowo, nie dają jednak prostego poglądu, bo naprężenia p są wogóle POCHYLE WZGLĘDEM SWYCH PRZEKROJÓW, każdorazowo zatem należałoby wyliczać $\cos\lambda = p_x : p$, $\cos\mu = p_y : p$, $\cos\nu = p_z : p$. - To psuje przejrzystość obrazu. Rozłożmy przeto p na naprężenie NORMALNE σ I STYCZNE τ , leżące w odnośnym przekroju. Niech φ oznacza KĄT NACHYLENIA p KU NORMALNEJ N

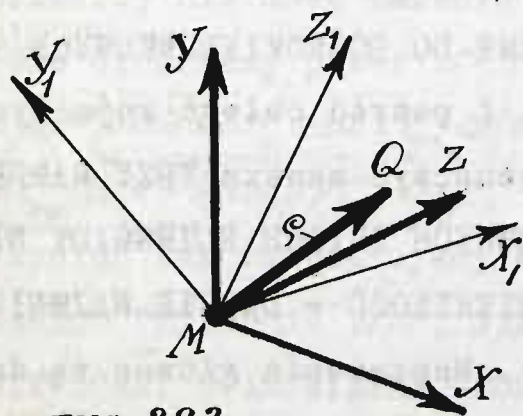
PRZEKROJU (RYS.282) zatem $\sigma = p \cos \varphi = p \cos \alpha \cos \lambda + p \cos \beta \cos \mu + p \cos \gamma \cos \nu = p_x \cos \alpha + p_y \cos \beta + p_z \cos \gamma = \tilde{\sigma}_x \cos^2 \alpha + \tilde{\tau}_{yx} \cos \alpha \cos \beta + \tilde{\tau}_{zx} \cos \gamma \cos \alpha + \tilde{\tau}_{xy} \cos \alpha \cos \beta + \tilde{\sigma}_y \cos^2 \beta + \tilde{\tau}_{zy} \cos \gamma \cos \beta + \tilde{\tau}_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + \tilde{\tau}_{yz} \cos \beta \cos \gamma + \tilde{\sigma}_z \cos^2 \gamma = \tilde{\sigma}_x \cos^2 \alpha + \tilde{\sigma}_y \cos^2 \beta + \tilde{\sigma}_z \cos^2 \gamma + 2\tilde{\tau}_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2\tilde{\tau}_{yz} \cos \beta \cos \gamma + 2\tilde{\tau}_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$

Chcąc poznać PRAWA RZĄDZĄCE WARTOŚCIĄ σ DLA POSZCZEGÓLNYCH PRZEKROJÓW prowadzimy przez punkt M PROSTĄ RÓWNOLEGLĄ (RYS.283) DO NORMALI PN DANEGO PRZEKROJU i na tej prostej odkładamy ODCINEK $\varrho = 1:\sqrt{\pm\sigma}$. Podwójny znak jest tu konieczny, wogóle bowiem σ mo-

że być dodatnie, gdy wychodzi nazewnątrz oraz ujemne, gdy skierowane jest wgląb kostki. Współrzędne KOŃCA Q odcinka ϱ oznaczamy przez x, y, z przy czem niewątpliwie:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\varrho} = x\sqrt{\pm\sigma}, \cos \beta = \frac{y}{\varrho} = y\sqrt{\pm\sigma}, \cos \gamma = \frac{z}{\varrho} = z\sqrt{\pm\sigma}.$$

Podstawiając te wartości w równanie wyżej wypisane mamy po skróceniu przez σ obu części: $\pm 1 = \tilde{\sigma}_x x^2 + \tilde{\sigma}_y y^2 + \tilde{\sigma}_z z^2 + 2\tilde{\tau}_{xy} xy + 2\tilde{\tau}_{yz} yz + 2\tilde{\tau}_{zx} xz$. JEST TO RÓWNAJENIE POWIERZCHNI DRUGIEGO STOPNIA - WYZNACZAJĄCE GEOMETRYCZNE MIEJSCE KOŃCÓW ODCINKÓW ϱ . RÓWNAJENIE TEGO TYPU DAJE POWIERZCHNIĘ O TRZECH WZAJEMNIE PROSTOPADŁYCH OSIACH GŁÓWNYCH MX, MY, MZ . Przechodząc od osi do-



RYS. 283.

tychczasowych MX, MY, MZ do owych osi GŁÓWNYCH, otrzymamy równanie tej powierzchni w postaci: $\pm 1 = \tilde{\sigma}_x x^2 + \tilde{\sigma}_y y^2 + \tilde{\sigma}_z z^2$, nie zawierające wyrazów z iloczynami współrzędnych. To znaczy, że DLA KOSTKI ELEMENTARNEJ dx, dy, dz , ZBUDOWANEJ NA OSIACH MX, MY, MZ , NAPRĘŻENIA TNĄCE ŚCIANEK, ZBIEGAJĄCYCH SIĘ W POCZĄTKU WSPÓŁRZĘDNYCH SĄ RÓWNE ZERU; POZOSTANĄ WIĘC JENO NAPRĘŻENIA NORMALNE TYCH ŚCIAN $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3 \dots$ A zatem W KAŻDYM PUNKCIE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO ISTNIEJĄ TRZY PROSTOPADŁE DO SIEBIE PRZEKROJE PŁASKIE NIE UJAWNIAJĄCE NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH. ~ SĄ TO NIEWĄTPLIWIE PRZEKROJE GŁÓWNE TYLKO CO WYZNACZONEJ POWIERZCHNI - PRZETO TYM PRZEKROJOM ODPOWIADAJĄ SKRAJNE WARTOŚCI σ . Stąd prosty wniosek, że PRZYNALĘŻNE DO TYCH PRZEKROJÓW NAPRĘŻENIA σ ZAWIERAJĄ SKRAJNE WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH PUNKTU M , a zatem dla owych GŁÓWNYCH PRZEKROJÓW $d\sigma = 0$ ORAZ $\tau = 0$. ~ Wyżej widzieliśmy, że $p^2 = \sigma^2 + \tau^2$. Różniczkując mamy $p dp = \sigma d\sigma + \tau d\tau$. Zatem dla owych głównych przekrojów $dp = 0$. Stąd prosty wniosek, że PRZYNALĘŻNE DO GŁÓWNYCH PRZEKROJÓW NAPRĘŻENIA STANOWIĄ SKRAJNE WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ PUNKTU. Są to więc owe skrajne naprężenia, przynależne do osi głównych elipsoidy naprężeń, są to NAPRĘŻENIA GŁÓWNE. Stąd wniosek ostateczny, iż W KAŻDYM PUNKCIE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO ISTNIEJĄ TRZY PROSTOPADŁE DO SIEBIE PRZEKROJE PŁASKIE O NAPRĘŻENIACH GŁÓWNYCH PROSTOPADŁYCH DO TYCH PRZEKROJÓW. Wśród nich należy szukać skrajnych naprężeń danego punktu. Aby

wyznaczyć naprężenia główne należy przeto dla odnośnego przekroju uczynić $p=\sigma$, $\lambda=\alpha$, $\mu=\beta$, $\nu=\gamma$ we wzorach (S). Stąd bezpośrednio $\sigma \cos \alpha = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma$; $\sigma \cos \beta = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \cos \beta + \tau_{zy} \cos \gamma$; $\sigma \cos \gamma = \tau_{xz} \cos \alpha + \tau_{yz} \cos \beta + \sigma_z \cos \gamma$, oraz jeszcze inaczej: $(\sigma - \sigma_x) \cos \alpha - \tau_x \cos \beta - \tau_y \cos \gamma = 0$; $-\tau_z \cos \alpha + (\sigma - \sigma_y) \cos \beta - \tau_x \cos \gamma = 0$; $-\tau_y \cos \alpha - \tau_x \cos \beta + (\sigma - \sigma_z) \cos \gamma = 0$, — gdzie oznaczyliśmy przez $\tau_x = \tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_y = \tau_{zx} = \tau_{xz}$, $\tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Aby tylko co wypisane równania były współmierne, powinien ich wyznacznik Δ być równy zeru.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma - \sigma_x & -\tau_z & -\tau_y \\ -\tau_z & \sigma - \sigma_y & -\tau_x \\ -\tau_y & -\tau_x & \sigma - \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x \tau_x + \sigma_y \tau_y + \sigma_z \tau_z - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2) + \sigma_x \tau_x^2 + \sigma_y \tau_y^2 + \sigma_z \tau_z^2 - \sigma_x \sigma_y \sigma_z - 2\tau_x \tau_y \tau_z = 0.$$

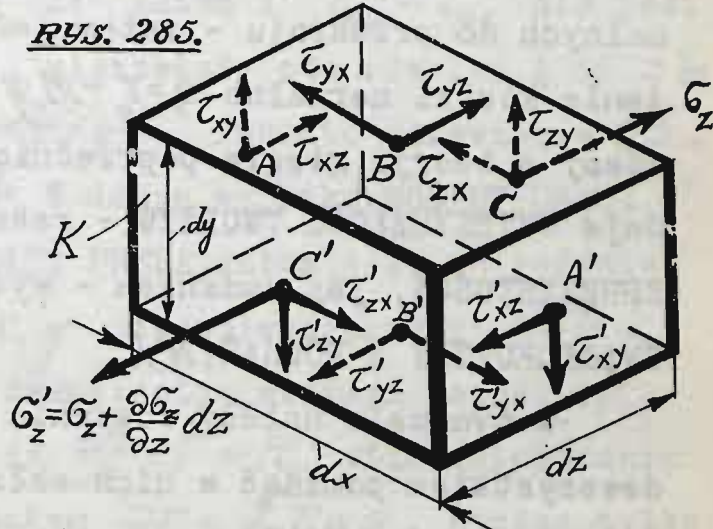
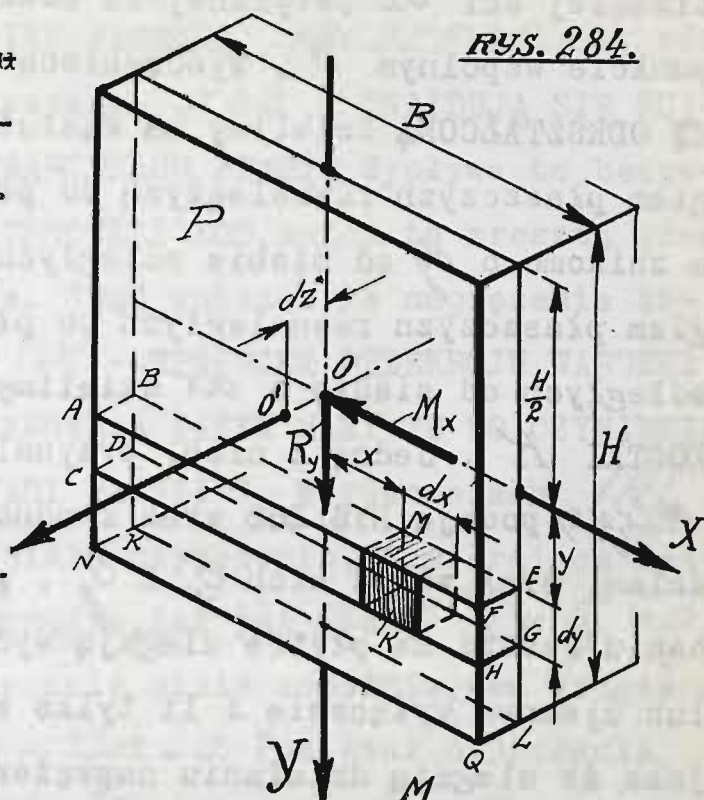
W rozwinięciu daje on RÓWNANIE TRZECIEGO STOPNIA, WYZNACZAJĄCE SZUKANE TRZY NAPRĘŻENIA GŁÓWNE σ_1 , σ_2 , σ_3 . Ponieważ współczynnik wszelkiego równania trzeciego stopnia, u zmiennej w drugiej potęgce równy jest summie pierwiastków z odwrotnym znakiem wziętej, przeto $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. SUMMA NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH DO TRZECH JAKICHKOLWIEK WZAJEMNIE PROSTOPADŁYCH PRZEKROJÓW JEST WIELKOŚCIĄ STAŁĄ. Jako wybitny przykład tu wyłożonej teorii rozpatrujemy:

§ 10. NAPRĘŻENIA TNĄCE PRĘTÓW PROSTYCH PŁASKO ZGINANYCH. W ogólnym wypadku działania sił gnących na pręt prosty otrzymujemy po sprowadzeniu prócz momentów gnących leżących w przekroju również i siły tnące, które pozostawialiśmy dotychczas bez uwagi.

Obecnie zbadamy ich działanie, chcąc uzupełnić teorię zginania prętów prostych. Wystarcza przytem rozważyć wypadek gięcia płaskiego — ukośne bowiem można zawsze sprowadzić do dwóch wygięć płaskich, korzystając z drugiego PRAWA

HOOKE`A. Na począt-
ku bierzemy pod uwa-
gę preť pierwotnie
prosty o STAŁYM

GŁÓWNEJ PRZEKROJU, ORAZ SIŁĄ TNĄCĄ $R_y = T$ PROSTOPAD-
ŁĄ OCZYWIŚCIE DO M_x , A WIĘC LEŻĄCĄ NA DRUGIEJ OSI
 OY GŁÓWNEJ. W przecie odkształconym w odległości $d/2$
od tego poprzecznego przekroju prowadzimy drugi prze-
krój, równoległy do poprzedniego, a więc prostopadły do



trzeciej osi OZ , stycznej do odkształconej pręta w punkcie wspólnym O . Wyodrębnioną w ten sposób PŁYTKĘ ODKSZTAŁCONĄ dzielimy na wąziutkie PASEMKA szeregiem płaszczyzn równoległych do płaszczyzny ZOX , a znikomo o dy od siebie odległych. Wreszcie szeregiem płaszczyzn równoległych do płaszczyzny YOZ , a odległych od siebie o dx dzielimy całą płytkę na KOSTKI K . Jedną z nich, przynależną do punktu $M(x,y,z)$ podaje RYS.285 wraz z odnośnemi naprężeniami ścian. Brak wśród nich σ_x i σ_y , ponieważ przy wyginaniu kostki na płycie ulegają wydłużeniom dodatnim lub ujemnym wyłącznie i li tylko w kierunku osi OZ jako że ulegają działaniu naprężeń gnących t_g normalnych do przekroju - zatem jedyne istniejące naprężenie kostki normalne $\sigma_z = t_g = M_x y : J$, jak to zresztą wiemy z teorii gięcia poprzednio wyłożonej. Tyle nam daje WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW - resztę winna dać TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI, jej zadaniem - wyznaczyć NAPRĘŻENIA TNĄCE KOSTKI Z RÓWNAŃ (R) .

W tym celu należy równania (R) uprościć, a przede wszystkim pominąć w nich składowe jednostkowych sił massowych X, Y, Z , pręt jest bowiem w spoczynku zupełnym, a działanie siły ciężkości z góry możemy WLICZYĆ w R_y . Czyniąc tak popełniamy małą niedokładność, zupełnie zresztą dopuszczalną, ponieważ składowa siły ciężkości jest nader nieznaczna wobec OBCIĄŻEŃ GNĄCYCH praktycznie zazwyczaj stosowanych.

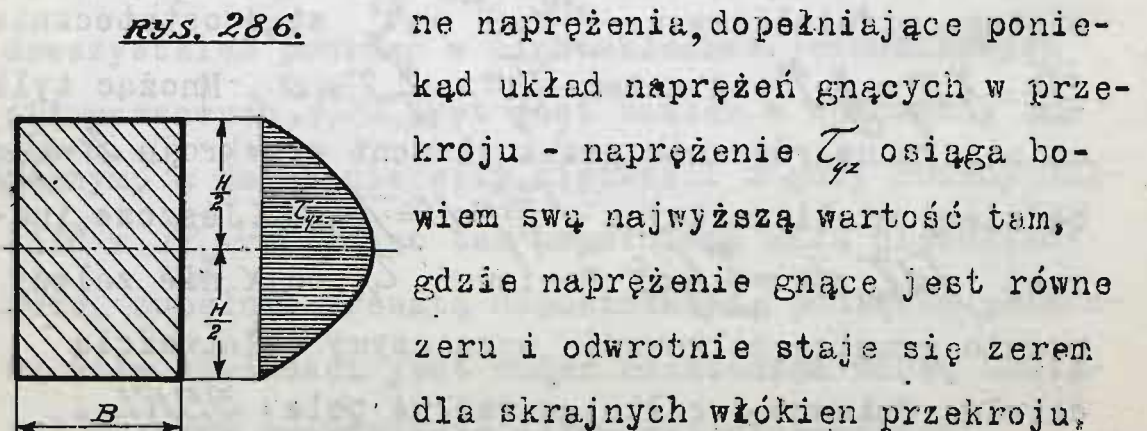
Ponadto odrazu spostrzec się daje, że WSZYSTKIE KOSTKI JAKIEGOKOLWIEK PASEMKA $ABCDEFGH$, równoległego do płaszczyzny XOZ , ZNAJDUJĄ SIĘ ŚCIŚLE W TYCH SAMYCH WARUNKACH PRACY. Wpływa to bezpośrednio z ZASADY BERNOULLI'EGO, można to zresztą udowodnić doświadczalnie. Stąd wniosek, że naprężenia kostek NIE ZALEŻĄ od X - WPOPZEK PRZEKROJU WARUNKI OBCIĄŻENIA SĄ JEDNAKOWE, A ZATEM MAMY TU DO CZYNNIENIA Z WYPADKIEM RÓWNOWAGI PŁASKIEJ. W równaniach (R) należy pomijać wszelkie naprężenia, zawierające znaczek X u dołu. Ponadto, jak już wiemy $\sigma_x = \sigma_y = 0$, przeto pierwsze równanie ginie zupełnie, dwa drugie dają: $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$. Ponieważ naprężenia kostki nie zależą od X zatem i $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ nie jest funkcją tej zmiennej, nie zależy ono również i od z bo $\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$; zatem $\tau_{zy} = f(y)$. Ponadto oczywiście $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{M_x}{J} y \right] = \frac{y}{J} \frac{\partial M_x}{\partial z}$. W danym wypadku MOMENT GNĄCY M_x ZMIENIA SIĘ WZDŁUŻ PRĘTA, zatem jest on jedynie funkcją z , a od X, y nie zależy, przeto $\frac{\partial M_x}{\partial z} = \frac{dM_x}{dz}$. W ustępie dwudziestym siódmym rozdziału piątego widzieliśmy że $\frac{dM_x}{dz} = T = R_y$ stąd ostatecznie $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{y}{J} R_y = \frac{y}{J} T$. A zatem $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{y}{J} T = 0$. Mnożąc tylko co otrzymane równanie przez element przekroju $ds = dx dy$, będziemy mieli całkując $\int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} ds = \int \frac{y}{J} T ds$. Jeszcze inaczej $\int s d\tau_{yz} dx = \frac{T}{J} \int y ds$. Ponieważ τ_{yz} od X nie zależy przeto granice całkowania wyznaczymy z łatwością dzieląc zmienne i całkując wzdłuż pola $BEKL$.

Zatem:
$$\int_{\tau_{yz_0}}^{\tau_{yz}} d\tau_{yz} \int_{-\frac{B}{2}}^{+\frac{B}{2}} dx + \frac{T}{J} \int_{BEKL} y dS = B[\tau_{yz} - \tau_{yz_0}] +$$

$$+ \frac{T}{J} \int_{y_0}^y y dy \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dx = B[\tau_{yz} - \tau_{yz_0}] + \frac{T}{J} B[\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}] = 0.$$

Na dolnym lub górnym skrajach płytki albo zgoła sił niema a wtedy $\tau_{yz_0} = 0$ gdy $y_0 = \pm \frac{H}{2}$, albo też panuje obciążenie jednostajne p' KILOGRAMÓW NA JEDNOSTKĘ DŁUGOŚCI PRĘTA, dające się z łatwością wyliczyć lub wprost znane jako jedna z danych zadania, zatem i w tym wypadku również możemy wyznaczyć τ_{yz_0} , zazwyczaj jednak boczne powierzchnie pręta są nieobciążone zatem $\tau_{yz} = \frac{T}{BJ} \int_{y_0}^y y dy \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dx = \frac{T}{BJ} F_{BEKL}$, gdzie przez F_{BEKL} oznaczyliśmy MOMENT STATYCZNY POŁA $BEKL$. Stąd bezpośrednio również $\tau_{yz} = \frac{T}{BJ} B[\frac{H^2}{8} - \frac{y^2}{2}] = \frac{T}{2J} [\frac{H^2}{4} - y^2]$. Skrajną wartość τ_{yz} otrzymany dla $y=0$ w postaci $\tau_{yz_{max}} = TH^2 : 8J =$

$= TH^2 : \frac{8}{12} BH^3 = \frac{3}{2} \frac{T}{BH} = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$, gdzie przez S oznaczyliśmy całkowity PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA. Na skraju przekroju $\tau_{yz_0} = 0$ tam bowiem $y = \pm \frac{H}{2}$. Pomiędzy temi dwiema skrajnemi wartościami NAPRĘŻENIE τ_{yz} ZMIENIA SIĘ W STOSUNKU DO y PARABOLICZNIE, jak to najlepiej zresztą uwypukla



gdzie siedliskują najwyższe i najniższe wartości naprężeń gnących.

Ponadto po raz pierwszy spotykamy tu naprężenia zależne od drugich potęg współrzędnych przekroju - dotychczas bowiem wyłącznie mieliśmy do czynienia z naprężeniami linjowo uzależnionymi od tych współrzędnych; wkraczamy tu zatem na nową drogę, w dziedzinę TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI - WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW bowiem tego typu naprężeń nie rozpatruje zupełnie. Godzi się omówić wynik tu otrzymany, uzasadniając założenia $\mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}_y = \mathcal{T}_{yx} = \mathcal{T}_{yz} = \mathcal{T}_{xz} = 0$, sprowadzające przestrzenną równowagę kostek do płaskiej.

Że $\mathcal{Q}_x = \mathcal{Q}_y = 0$, to zdaje się nie ulegać żadnej wątpliwości, w granicach bowiem stosowalności wzoru dla \mathcal{Q}_z żadnych poprzecznych wydłużeń lub skróceń pręta doświadczalnie dostrzec nie można, dopiero znacznie występują zjawiska o których mówi ustęp czterdziesty trzeci rozdziału piątego. Ponadto na bocznych ściankach pręta niema wcale obciążenia rozciągającego ani ściskającego - nie może ono zatem wywołać naprężeń \mathcal{Q}_x lub \mathcal{Q}_y - wszystko to wystarczająco uzasadnia powyższe założenie.

Z kolei czyniąc $\mathcal{T}_{yx} = \mathcal{T}_{xy} = 0$ zgóry wyłączamy możliwość jakiegokolwiek poprzecznego krzywienia się pręta w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, działanie bowiem tych naprężeń zmienia proste kostki w ukośne, powodując podobne również odkształcenia pręta, polegają

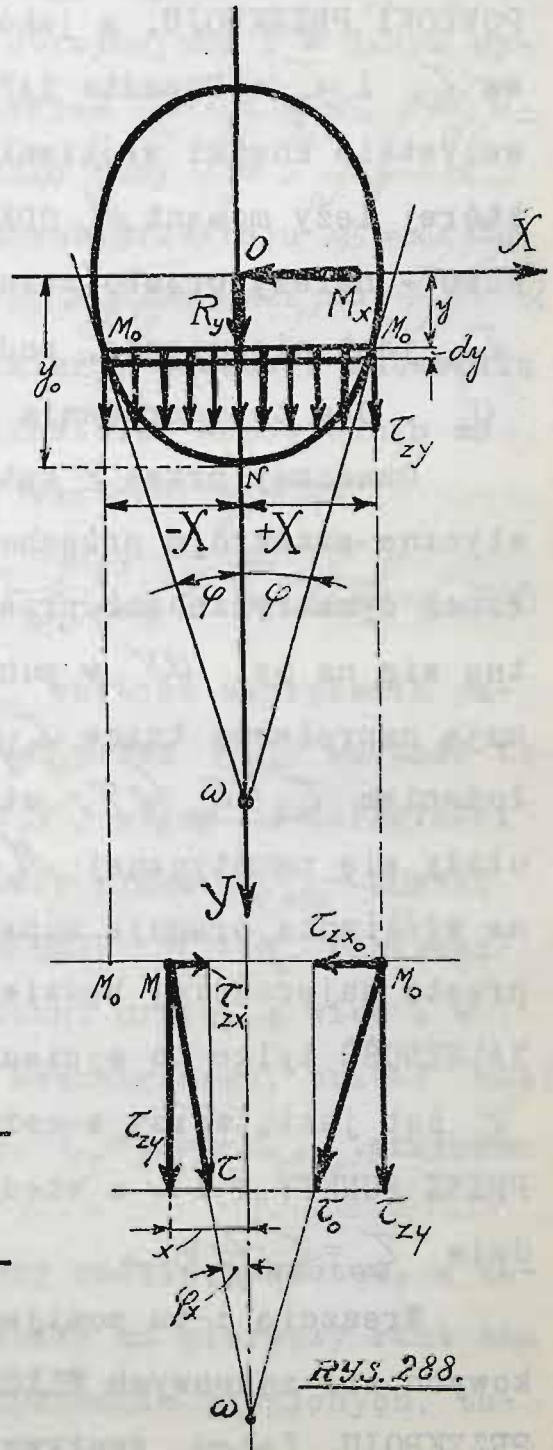
ce na wicherzeniu się poprzecznem jego przekroju. Liczne doświadczenia BACH'A wykazały, że tego rodzaju odkształcenia zachodzą wyłącznie i li tylko przy gięciu prętów o poprzecznym przekroju niesymetrycznym względem płaszczyzny gięcia, jak to zresztą widać na RYS.287, wyobrażającym w przesadny sposób zwichrzenie się poprzecznego przekroju CEOWNIKA zginanego.

Wreszcie zakładając $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$ zgóry wyłączamy możliwość krzywienia się kostek w przekroju pręta podłużnym, równoległym do płaszczyzny XOZ czyli podłużnego wicherzenia się pręta. I to zjawisko dla prętów o przekroju symetrycznym względem płaszczyzny gięcia doświadczalnie spostrzec się nie daje, a więc nie może towarzyszyć i wygięciu pręta wyżej rozpatrywanego. W ten sposób uzasadniliśmy poczynione założenia, czy wystarczająco, to inna sprawa - przyszłe badania ustalą może inne wzory dla τ_{zy} - tymczasowe, jako stosunkowo najprostsze przyjąć możemy dopóki doświadczenie nie zada im kłamu, burząc dzisiejsze poglądy.

A jednak panuje tu pewna chwiejność, najlepszym tego dowodem, że dla prętów o przekroju symetrycznym względem płaszczyzny gięcia, lecz KRZYWOLINJOWYM, nie czynimy już $\tau_{zx} = \tau_{xz} = 0$. Omówimy to pokrótce rozpatrując w wypadku płaskiego zginania prętów prostych:

§ 11. NAPRĘŻENIA TNĄCE PRZEKROJU SYMETRYCZNEGO WZGLĘDEM PŁASZCZYZNY GIĘCIA. Weźmy pod uwagę przekrój

symetryczny względem płaszczyzny gięcia ZOY , przynależny do pręta pierwotnie prostego, płasko wygiętego. Jak pierwiej wycinamy z pręta płytkę dz grubą prowadząc przekrój sąsiedni, a płytkę rozcinamy na kostki maleńkie. Jedną z nich przynależną do szeregu $M_0 M_0$ równoległego do osi OX wydzielamy myślowo. Wzdłuż całego szeregu $M_0 M_0$ panuje wszędzie naprężenie gnące $\tau_g = \frac{M_x}{J} y$ stanowiące zarazem naprężenie normalne σ_z rozpatrywanej kostki. I tu również dla niej należy uczynić $\sigma_x = \sigma_y = 0$ oraz $\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$, ponieważ pręt, jako symetryczny przekrojowo względem płaszczyzny gięcia, żadnych zwichrzeń przekroju nie powinien ujawniać. Wszelakoż, gdybyśmy tu założyli $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$ to wtedy w punktach M_0 obu końców włókienka, naprężenia τ_{zy} wyszłyby POZA POWŁOKĘ PRZEKROJU, to jest poza boczną ściankę pręta, gdzie niema



RYS. 288.

żadnego naprężenia zewnętrznego, to jest niedopuszczalne, musi być tu zatem $\tau_{xz} = \tau_{zx} \neq 0$.

Aby tę sprzeczność usunąć musimy przeto przypuścić, że naprężenia tnące w punktach M_0 SĄ STYCZNE DO POWŁOKI PRZEKROJU, a jako takie mogą posiadać składowe τ_{zx} i τ_{zy} . Ponadto ZASADA BERNOULLI'EGO głosi, że wszystkie kostki włókienka równoległego do osi OX , na której leży moment M_x ODKSZTAŁCAJĄ SIĘ ZUPEŁNIE JEDNAKOWO - należy przeto założyć, że wzdłuż tego włókienka τ_{zy} jest niezmiennie, podobnie jak to ma miejsce dla σ_z . Oba te naprężenia zatem od x nie zależą.

Oznaczmy przez φ kąty, jakie tworzą z osią OY styczne przekroju przechodzące przez oba punkty M_0 . Wobec symetryczności przekroju - obie te styczne przetną się na osi OY w punkcie ω . W obu punktach M_0 panują naprężenia tnące τ_{zy} i τ_{zx_0} a zatem zgodnie z założeniem $\tau_{zx_0} = \tau_{zy} \operatorname{tg} \varphi$, wtedy bowiem ich wypadkowa τ_0 ułoży się na stycznej $M_0\omega$. Ponieważ punkty wewnętrzne włókienka pracują zupełnie w tych samych warunkach, przeto najprościej będzie i dla tych punktów UTRZYMAĆ ZALEŻNOŚĆ tylko co wypisaną. Oznaczmy w tym celu przez φ_x kąt jaki tworzy z osią OY PROSTA, PRZECHODZĄCA PRZEZ PUNKTY M i ω a wtedy naprężenie tnące w M będzie $\tau_{zx} = \tau_{zy} \operatorname{tg} \varphi_x$.

Wreszcie i tu pomijamy również działanie jednostkowych sił massowych WLICZAJĄC JE W $R_y = I$ -SIŁĘ TNĄCĄ PRZEKROJU. Zatem, zważywszy, że $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$,

będziemy mieli z równań (R) odpowiednio: $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0$,
 oraz $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$. Wyżej założyliśmy, że $\tau_{yx} = \tau_{xy}$
 jest NIEZMIENNE WZDŁUŻ JAKIEGOKOLWIEK WŁÓKIENKA, RÓW-
 NOLEGŁEGO DO OSI OX , a więc nie zależy od x - stąd
 $\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = 0$, ponadto wobec $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} \tan \varphi$, mamy $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \tan \varphi$,
 $\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} = 0$, ponownie przeto otrzymujemy i w danym wy-
 padku $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$. I tu również $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{y}{J} \frac{\partial M_x}{\partial z} = \frac{y}{J} \frac{dM_x}{dz} =$
 $= \frac{y}{J} R_y = \frac{y}{J} T$, a stąd bezpośrednio mamy $\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{T}{J} y = 0$.
 Mnożąc to równanie przez element przekroju $dS = dx \cdot dy$
 będziemy mieli całkując $\int \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dS + \frac{T}{J} \int y dS = \int d\tau_{yz} dx + \frac{T}{J} \int y dS = 0$.
 Ponieważ i tu τ_{yz} od x nie zależy, przeto z łatwością
 możemy wyznaczyć granice całkowania, odpowiednio do
 rozpatrywanego y i skrajnej wartości $y_0 = ON$.

$$\int_{\tau_{yzN}}^{\tau_{yz}} \int_{-X}^{+X} d\tau_{yz} dx - \frac{T}{J} \int_{M_0NM_0} y dS = [\tau_{yz} - \tau_{yzN}] 2X - \frac{T}{J} F'_{M_0NM_0} = 0, \tau_{yz} = \frac{T}{2XJ} F'_{M_0NM_0} + \tau_{yzN},$$

gdzie oznaczyliśmy przez τ_{yz} wartość naprężenia pa-
 nującego wzdłuż włókienka M_0M_0 , przez τ_{yzN} wartość te-
 goż naprężenia w WIERZCHOŁKU N , przez $\pm X$ odległości
 punktów M_0 od osi OY , wreszcie przez $F'_{M_0NM_0}$ - MOMENT
 STATYCZNY DOLNEJ CZĘŚCI PRZĘKROJU M_0NM_0 . Ponieważ
 zazwyczaj na bocznej powierzchni pręta, a więc i w
 punkcie N nie ma obciążenia zewnętrznego, przeto musi
 być $\tau_{yzN} = 0$, i ostatecznie: $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{T}{2XJ} F'_{M_0NM_0}$, przyczem
 $\tau = \tau_{yz} : \cos \varphi$.

Otrzymany tu wynik należy omówić pokrótce, a za-
 razem uzasadnić założenia, które na pierwszy rzut oka
 wydają się nieco różne od poprzednio czynionych, tu-

taj bowiem $\tau_{zx} = \tau_{zy} \cos \varphi$, podczas gdy pierwszej mieliśmy $\tau_{zx} = 0$. Tę pozorną sprzeczność z łatwością możemy wyjaśnić, zważywszy, że dla prostokątnego przekroju PUNKT ω LEŻY W NIESKOŃCZONOŚCI, przeto wszelkie $\varphi = \varphi = 0$, co daje $\tau_{zx} = 0$. Wewnętrzny związek jest przeto ściśle zachowany.

Ponadto, wobec symetryczności przekroju rozkład naprężeń τ_{xz} jest tu niewątpliwie zupełnie symetryczny względem osi OY , zatem $\sum \tau_{zx} = 0$ — działania tych naprężeń wzajemnie się znoszą, wykluczając w ten sposób możliwość wszelkiego podłużnego wicherzenia się pręta. Należy tu jednak zaznaczyć, że poszczególne miejscowe odkształcenia tego typu nie są wyłączone, jeno zachodzą zupełnie symetrycznie, pokrywając się wzajemnie, nie dają przeto owych zwichrzeń pręta podłużnych, o których wyżej mówiliśmy.

Aby poznać zastosowania wzoru tylko co wyprowadzonego, rozpatrujemy PRZEKRÓJ KOŁOWY PEŁNY (RYS. 289).

Dla tego przekroju: $\int_{M_0 N M_0} y dy ds = \int_{-R}^R y dy \int_{-x}^x dx = \int_{-R}^R x y dy =$
 $= \int_{-R}^R y \sqrt{R^2 - y^2} dy = -\frac{2}{3} \left[\sqrt{(R^2 - y^2)^3} \right]_{-R}^R = \frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - y^2)^3}$. Stąd:

$$\tau_{yz} = \frac{T}{2Ix} \frac{2}{3} \sqrt{(R^2 - y^2)^3} = \frac{T}{2J} \frac{\sqrt{(R^2 - y^2)^3}}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{T}{3J} (R^2 - y^2) = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^4} (R^2 - y^2).$$

Ponadto, jak to wprost z rysunku postrzec się daje:

$$\cos \varphi = \frac{x}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R} \quad \text{a zatem} \quad \tau = \frac{\tau_{yz}}{\cos \varphi} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^3} \frac{R^2 - y^2}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^3} \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Dla skrajnych punktów, gdzie $y = \pm R$ mamy $\tau = 0$, pośrodku, gdzie $y = 0$ będzie $\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$, przyczem przez S oznaczyliśmy całkowite pole przekroju. Pomiedzy temi

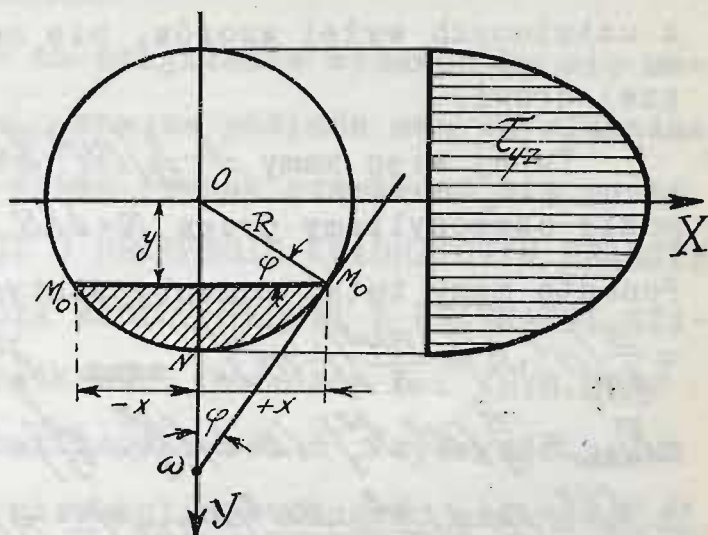
dwiema skrajnymi
wartościami τ ist-
nieje następująca
zależność między τ
i y : piszemy $\frac{\tau}{\frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^3}} =$
 $= \sqrt{R^2 - y^2}$ stąd bez-
pośrednio $\tau^2 \left[\frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^3} \right]^2 =$
 $= R^2 - y^2$. Dzielic
przez R i grupu-
jąc odpowiednio wy-
razy mamy:

$\tau^2 \left[\frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^3} \right]^2 + y^2 : R^2 = 1$. ~ Jest to równanie ELIPSY. A prze-
to NAPRĘŻENIE τ ZMIENIA SIĘ W STOSUNKU DO y W SPOSÓB
ELIPTYCZNY, jak to zresztą najlepiej uwypukla wykres
naprężeń τ podany na RYS.290.

Jako drugi przykład rozpatrzmy PRZĘKRÓJ DWUTEOWY
(RYS.291/),

choć w danym
wypadku w
przekroju
CD mamy na-
gły uskok
przekroju -
wobec tej .
ZMIANY CIĄ-
GŁOŚCI wzo-
ry nasze tra-

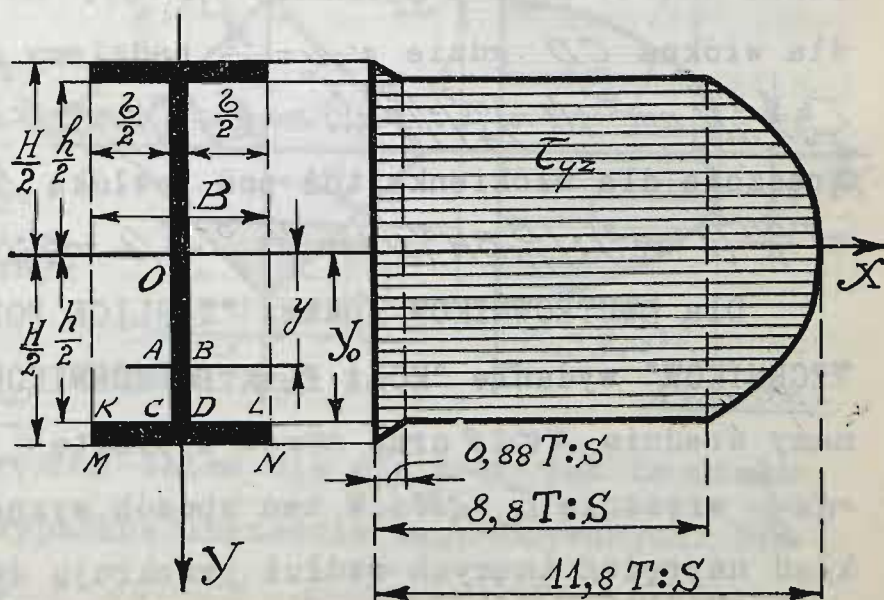
RYS. 289.



RYS. 290.

RYS. 291.

RYS. 292.



cą swą wartość - w zastosowaniu dadzą przeto wyniki jeno przybliżone. Zazwyczaj jednak korzystamy mimo to z ustalonych wyżej wzorów, nie mamy bowiem innej lepszej drogi.

Tutaj więc mamy $J = \frac{1}{12} [BH^3 - b h^3] = \frac{BH^3}{12} [1 - n m^3]$, gdzie oznaczyliśmy przez $n = b:B$ oraz przez $m = h:H$.

Ponadto mamy tutaj momenty statyczne $F'_{KLN M} =$
 $= \frac{B}{8} [H^2 - h^2] = \frac{BH^2}{8} [1 - m^2]$, oraz $F'_y = F'_{ABDLNMKCA} = F'_{KLN M} +$
 $+ F'_{ABDC} = \frac{B}{8} [H^2 - h^2] + (B-b) [\frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2}] = \frac{BH^2}{8} - \frac{B h^2}{8} + \frac{B h^2}{8} -$
 $- \frac{b h^2}{8} - (B-b) \frac{y^2}{2} = \frac{BH^2}{8} [1 - n m^2] - B(1-n) \frac{y^2}{2} \sim$

Zatem dla przekroju AB mamy: $\tau_{zy} = \frac{T}{2Jx} F' =$
 $= \frac{T}{B-b} \frac{12}{BH^3(1-nm^3)} \left\{ \frac{BH^2}{8} (1-nm^2) - B(1-n) \frac{y^2}{2} \right\} =$
 $= \frac{T}{B(1-n)} \frac{12}{BH^3(1-nm^3)} \left[\frac{BH^2}{8} (1-nm^2) - \frac{B}{8} (1-n) 4y^2 \right] =$
 $= \frac{3}{2} \frac{T}{BH} \frac{1-nm^2 - 4(1-n) \frac{y^2}{H^2}}{(1-n)(1-nm^3)} \sim$

W środku przekroju, gdzie $y=0$ panować będzie naprężenie tnące $\tau_{yz \max} = \frac{3}{2} \frac{T}{S} [1 - nm^2] : [(1-n)(1-nm^3)]$. Natomiast

dla włókna CD gdzie $y = y_0 = \frac{h}{2}$, będziemy mieli znów:
 $\tau_{yz_0} = \frac{3}{2} \frac{T}{S} [1 - nm^2 - 4(1-n) \frac{m^2}{4}] : [(1-n)(1-nm^3)] = \frac{3}{2} \frac{T}{S} [1 - m^2] : [(1-n)(1-nm^3)] \sim$

Wreszcie dla włókienka tuż pod powłoką KL mamy $\tau_{yz_1} =$
 $= T \frac{BH^2}{8} (1 - m^2) : [\frac{B}{12} BH^3 (1 - nm^3)] = \frac{3}{2} \frac{T}{S} (1 - m^2) : (1 - nm^3) \sim$

Dla DWUTEOWNIKÓW (patrz "TABLICE PODRĘCZNE DLA TECHNIKÓW" wydanie "KOŁA ELEKTROTECHNIKÓW" - 1916) mamy średnio $n \approx 0,9$ oraz $m \approx 0,88$ a przeto $\tau_{yz \max} = 11,8 \frac{T}{S}$, $\tau_{yz_0} = 8,8 \frac{T}{S}$ wreszcie $\tau_{yz_1} = 0,88 \frac{T}{S}$. W ten sposób wyznaczony rozkład naprężeń tnących wzdłuż przekroju dwuteowego naj-

lepiej uwypukla RYS. 292. W powyższych wzorach oznaczyliśmy przez $S = BH$.

Z przytoczonych tu przykładów wydawać by się mogło, iż naprężenie τ_{yz} zawsze posiada swą największość w środku przekroju; łatwo jednak przekonać się można, iż tak nie jest. PRĘT O PRZĘKROJU KWADRATOWYM PRZECIĘTYM PŁASZCZYZNĄ GIĘCIA WZDŁUŻ JEDNEJ Z PRZĘKĄTNI STANOWI TEGO PRZYKŁAD JASKRAWY. Oznaczmy bok (RYS.293) tego przekroju kwadratowego przez C , wysokość przez $2h = 2C \cdot \sqrt{2}$, ponadto niewątpliwie długość włókna M_0M_0 , równoległego do osi OX wyniesie $2x = 2(h-y)$, a zatem:

$$I_{M_0M_0} = \int y dS = \int y dy \int_x^h dx = 2 \int y xy dy = 2 \int y(h-y) dy = h^3 - hy^2 - \frac{2}{3}h^3 + \frac{2}{3}y^3 = \frac{h^3}{3} - hy^2 + \frac{2}{3}y^3. \text{ Stąd } \tau_{yz} = T \frac{\frac{1}{3}[h^3 - 3hy^2 + 2y^3]}{2(h-y)[C^4:12]}$$

bezwładności rozpatrywanego przekroju, jako złożonego z dwóch trójkątów, wynosi $J = \frac{2}{12}(2h)h^3 = h^4:3 = C^4:12$.

Ostatecznie więc mamy $\tau_{yz} = 2 \frac{T}{C^4} \frac{h^3 - 3hy^2 + 2y^3}{h-y} = 2 \frac{T}{C^4} [h^2 + hy - 2y^2]$.

Widzimy stąd,

że zależność

τ_{yz} od y jest

PARABOLICZNA.

Najwyższą war-

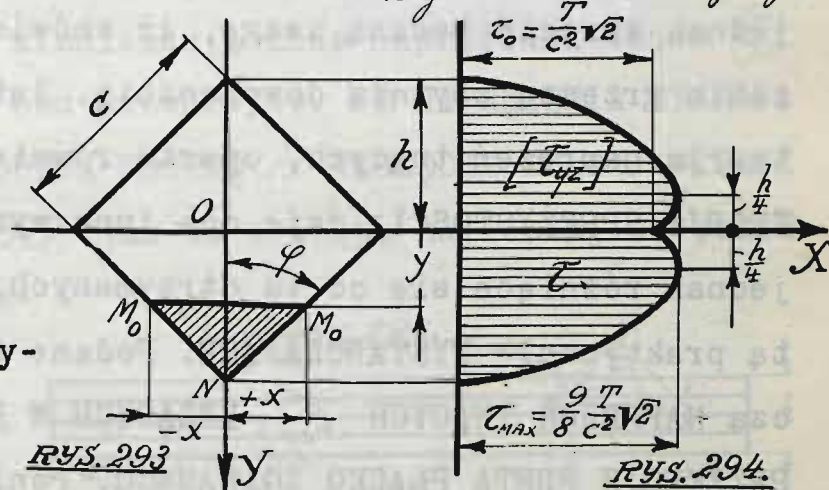
tość $\tau_{yz \max}$ otrzy-

mamy czyniąc

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = \frac{2T}{C^4} (h - 4y) = 0,$$

a więc dla $y = h:4$ - zatem nie dla $y = 0$! jak to miało miejsce dla wypadków uprzednio rozpatrywanych. Dla

$y = h:4$ mamy $\tau_{yzM} = \frac{9}{16} \frac{T}{C^4} h^2 = \frac{9}{8} \frac{T}{C^2} = 1,125 T : C^2$; natomiast



dla $y=0$ załedwie $\tau_{yz} = \frac{2T}{C^4} h^2 = \frac{2T}{C^4} \frac{C^2}{2} = T:C^2$ Zależność τ_{yz} od y najlepiej zresztą uwypukla RYS.294, gdzie dla obu trójkątów górnego i dolnego, z jakich złożony jest przekrój, mamy dwie parabole zupełnie symetryczne wobec symetryczności samego przekroju. Parabole te przecinają się na osi OX .

Na skraju przekroju, jak to już wiemy $\tau = \tau_{yz} : \cos \varphi$. Tutaj $\varphi = \frac{\pi}{4}$ zatem $\tau = \tau_{yz} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \frac{T}{C^4} [h^2 + hy - 2y^2] = 2\sqrt{2} \frac{T}{C^4} h^2 [1 + \frac{y}{h} - 2(\frac{y}{h})^2] = 2\sqrt{2} \frac{T}{C^4} \frac{C^2}{2} [1 + \frac{y}{C} \sqrt{2} - 4\frac{y^2}{C^2}] = \frac{T}{C^2} \sqrt{2} [1 + \frac{y}{C} \sqrt{2} - 4\frac{y^2}{C^2}] \sim$

Dla $y=0$ mamy tu $\tau_0 = \frac{T}{C^2} \sqrt{2} = 1,4122 T:C^2$; dla: $y=h:4=C:4\sqrt{2}$ otrzymujemy skrajną wartość $\tau_{MAX} = \frac{9}{8} \frac{T}{C^2} \sqrt{2} = 1,5910 T:C^2$

Prawo zmienności τ jest przeto zupełnie takie samo jak i τ_{yz} to też wyznacza je ten sam wykres (RYS.294/).

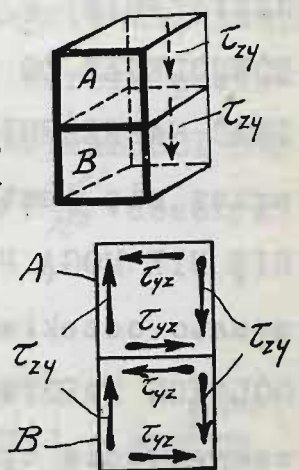
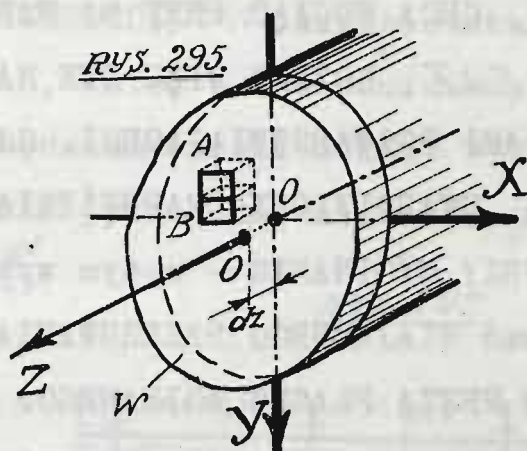
Tą samą drogą idąc możemy wyznaczyć naprężenia tnące dla każdego innego przekroju. Należy przytem jednak zwrócić baczną uwagę, iż omówione wyżej założenia grzeszą zbytnią dowolnością. Istnieje ścisła teoria naprężeń tnących, oparta również na podstawach TEORJI SPRĘŻYSTOSCI; daje ona inne wyniki, niewiele jednak różniące się od tu otrzymanych, które są zresztą praktycznie WYSTARCZAJĄCE. Podane tu badania dotyczą NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH τ_{zy} , LEŻĄCYCH W POPRZECZNYM PRZEKROJU PRĘTA PŁASKO ZGINANEGO. Ponieważ jednak na zasadzie PRAWA CAUCHY: $\tau_{zy} = \tau_{yz}$, przeto, wyznaczając τ_{zy} — NAPRĘŻENIA TNĄCE ŚCIANEK PRZYNALEŻNYCH DO POPRZECZNEGO PRZEKROJU, tym samym wyznaczamy tożsamo-

ściowe NAPRĘŻENIA TNĄCE τ_{yz} TYCH SAMYCH KOSTEK, PROSTOPADŁE DO PRZĘKROJU. Są to tak zwane:

§ 12. NAPRĘŻENIA ROZWARSTWIAJĄCE PRĘT PŁASKO WYGINANY. Wyodrębnijmy w pręcie płasko wygiętym płytkę

W , prowadząc dwa sąsiednie przekroje odległe o dZ a w niej - dwie kostki tuż obok siebie na włókienku równoległym do osi ON obrane. Przednie i tylne ścianki obu kostek

przynależą do owych przekrojów poprzecznych pręta; wiemy już, że na tych ścian-



kach panują NAPRĘŻENIA TNĄCE τ_{zy} , na górnych i dolnych ściankach siedliskują znów naprężenia tnące τ_{yz} prostopadłe do obu przekrojów. TE NAPRĘŻENIA STARAJĄ SIĘ PRZESUNĄĆ GÓRNA KOSTKĘ A WZGLĘDEM DOLNEJ WZDŁUŻ ŚCIANKI STYKU AB , jak to zresztą najlepiej uwypukla RYS.295. Rozumu-

jąc w ten sam sposób, z łatwością możemy przekonać się, że cały szereg kostek, równole-

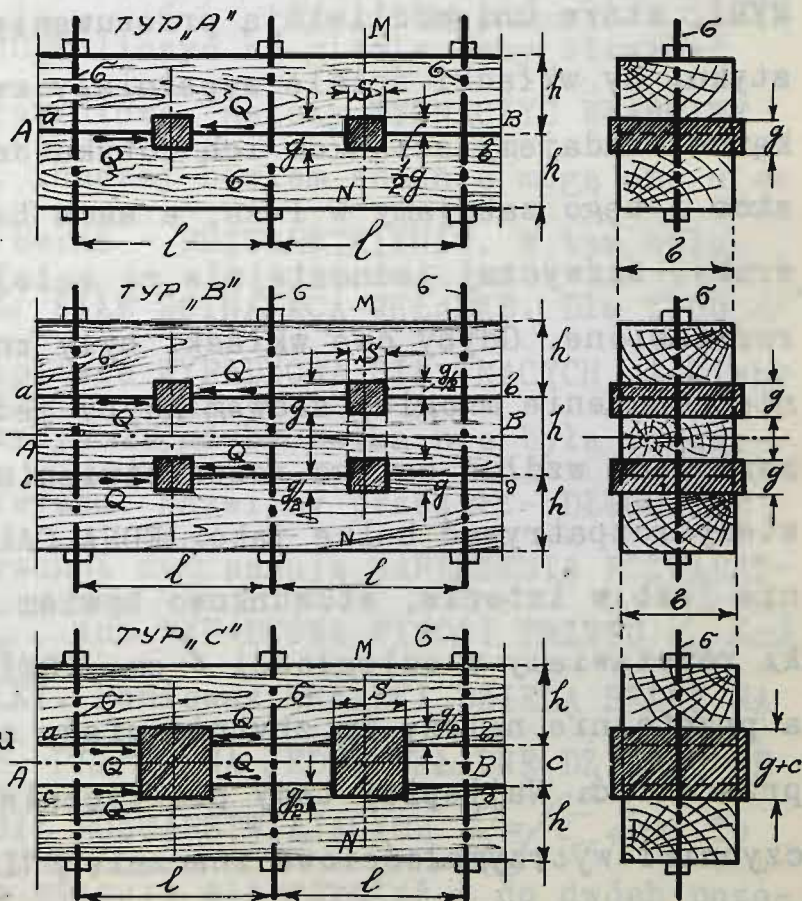


gły do osi OX , a przechodzący przez kostkę górną - chce przesunąć się w stosunku do dolnego, przechodzącego przez kostkę dolną, bowiem we WSZYSTKICH KOSTKACH OBU SZEREGÓW PANOWAĆ MUSZĄ NAPRĘŻENIA TNĄCE τ_{zy} ORAZ RÓWNE IM NAPRĘŻENIA τ_{yz} , mogące spowodować owo przesunięcie włókien. Powtarzając to samo rozumowanie dla płytek sąsiednich, dojdziemy do przekonania, że naprężenia τ_{yz} CHCĄ POCIĄC PRĘT NA WARSTWY PŁASKIE RÓWNOLEGŁE DO ZOX , MOŻEMY WIĘC OWE NAPRĘŻENIA NAZWAĆ NAPRĘŻENIAMI ROZWARSTWIAJĄCEMI. Gdy pręt sam przez się jest UWARSTWIONY - NAPRĘŻENIA τ_{yz} ROZWINĄĆ SIĘ NIE MOGĄ PRZY WYGINANIU - w tym wypadku należy przeto oczekiwać WZAJEMNEGO PRZESUWANIA SIĘ POSZCZEGÓLNYCH WARSTW PRĘTA PŁASKO ZGINANEGO. Pręt spoisty wewnętrznie tych przesunięć nie ujawnia. Prosty przykład może wyjaśnić najlepiej. Kilka jednakowych desek (RYS.296) ułożonych w stos stanowi BELKĘ ZŁOŻONĄ. Oparta na podporach A, B i obciążona pośrodku siłą pionową - odkształca się, poszczególne jej deski uginają się, przyczem BELKA ZAZĘBIA SIĘ U OBU KOŃCÓW, bo dolne włókna każdej deski wydłużają się przy gięciu - górne - skracają - POWIERZCHNIE DOTYKU PRZESUWAJĄ SIĘ NIECO WZGLĘDEM SIEBIE. Dla belki całkowitej, nie- uwarstwionej jest to zgoła niemożliwe, bo spoistość cząstek wyklucza możliwość przesuwania się warstw wewnętrznych, RODZĄ SIĘ PRZYTEM JEDNAK NAPRĘŻENIA ROZWARSTWIAJĄCE. O ile te przekroczą granicę spoistości

częstek - ROZWARSTWIENIE BELKI NASTĘPIUJE NATYCHMIAST. Stąd wniosek, że SPOISTOŚĆ WEWNĘTRZNA BELKI WZMAGA JEJ WYTRZYMAŁOŚĆ NA GIĘCIE. Można to uwypuklić czysto teoretycznie, pisząc MOMENT WYTRZYMAŁOŚCI BELKI CAŁKOWITEJ $W = \frac{1}{6} b h^3$ gdzie b oznacza SZEROKOŚĆ, a h jej WYSOKOŚĆ. Po rozwarstwieniu na \bar{n} WARSTW O SZEROKOŚCI b , lecz tylko o WYSOKOŚCI $h:\bar{n}$, każda deska gnie się niezależnie od innych, zatem o ile pominiemy tarcie powierzchni styku, będziemy mieli MOMENT WYTRZYMAŁOŚCI BELKI ROZWARSTWIONEJ jako sumnę momentów $\frac{1}{6} b \frac{h^3}{\bar{n}^2}$ desek, w postaci $W' = \frac{n}{6} b \frac{h^3}{\bar{n}^2} = \frac{1}{6} b h^3$, a więc \bar{n}

RYS. 297.

razy mniejszy!
O ile przeto
zmuszeni je-
steśmy stosować
BELKI ROZWARST-
WIONE - WINNI-
ŚMY JE SPAJAĆ
WEWNĘTRZNIE, aby
rozwarstwienie
sztucznie usu-
nać. Jako przy-
kład tego rodzaju
belek rozpatrzy-
my przedewszyst-
kiem:



§ 13. BELKI DREWNIANE ZŁOŻONE. Gdy zwykłe wymiary dyli drewnianych są niewystarczające, tworzymy DYL ZŁOŻONY z dwóch lub trzech belek w sposób wskazany na RYS.297. Dwie belki dają *TYP „A”* lub *TYP „C”* BELKI PODWÓJNEJ O POJEDYŃCZYM ROZWARSTWIENIU POŚRODKU, natomiast trzy belki dają *TYP „B”*, ROZWARSTWIONY PODWÓJNIE WZDŁUŻ POWIERZCHNI $\alpha\beta$ i $\gamma\delta$ DOTYKU BELEK. Te rozwarstwienia należy oczywiście usunąć, aby zwiększyć wytrzymałość belki złożonej na gięcie. W tym celu należałoby wytworzyć SZTUCZNĄ SPOISTOŚĆ poszczególnych belek składowych - cieniotkie deseczki SKLEJAMY powierzchniami styku, większe łączymy WKŁADKAMI POPRZECZNYMI, które uniemożliwiają przesuwanie się powierzchni styku. By wkładki ściśle wypełniały swe leża prostokątne, nadajemy ściankom ich dotyku do belek lekki skos i tego zabijamy w leża, a same belki łączymy na śruby, zazwyczaj jednostajnie na całej długości belki rozstawione. Gdyby owe wkładki były znikomo małe i nieskończenie mnogie, słowem gdyby jednostajnie były rozłożone wzdłuż całego rozwarstwienia, to możnaby wtedy rozpatrywać belkę jako JEDNĄ CAŁOŚĆ. Tak jednak nie jest w istocie, stosunkowo bowiem nieliczne wkładki rozstawiamy w odległości ℓ cm. POMIĘDZY SRUBAMI, a przeto nie należy im zbyt ufać, a działanie ich przeceniać. Najlepiej tedy praktycznie obierać współczynniki wytrzymałościowe znacznie MNIEJSZE: DLA BELEK PODWOJNYCH o $20 \div 30 \%$ A POTRÓJNYCH o $30 \div 40 \%$. MO-

MENTY BELEK SKŁADANYCH należy przytem wyznaczać dla NAJSŁABSZYCH PRZEKROJÓW MN , prowadzonych przez nacięcia na wkładki. Dla belki TYPU „A” mamy tedy $J_A = \frac{b}{12} [8h^3 - g^3] = \frac{2}{3} bh^3 [1 - \frac{g^3}{8h^3}]$, przyczem wobec stosunkowo drobnych wymiarów g możemy napisać $J_A \cong \frac{2}{3} bh^3$. A zatem $W_A = \frac{2}{3} bh^2 [1 - \frac{g^3}{8h^3}] \cong \frac{2}{3} bh^2$. Dla belki TYPU „B” mamy: $J_B = \frac{b}{12} \{ 27h^3 - (h+g)^3 + (h-g)^3 \} = \frac{b}{12} \{ 27h^3 - h^3 - 3hg^2 - 3hg^2 - g^3 + h^3 - 3hg^2 + 3hg^2 - g^3 \} = \frac{9}{4} bh^3 \{ 1 - \frac{2g}{27h^3} [3h^2 + g^2] \} \cong \frac{9}{4} bh^3$. Ponadto: $W_B = \frac{9}{4} bh^3 \{ 1 - \frac{2g}{27h^3} [3h^2 + g^2] \} : \frac{3}{2} h = \frac{2}{3} bh^2 \{ 1 - \frac{2g}{27h^3} [3h^2 + g^2] \} \cong \frac{2}{3} bh^2$.

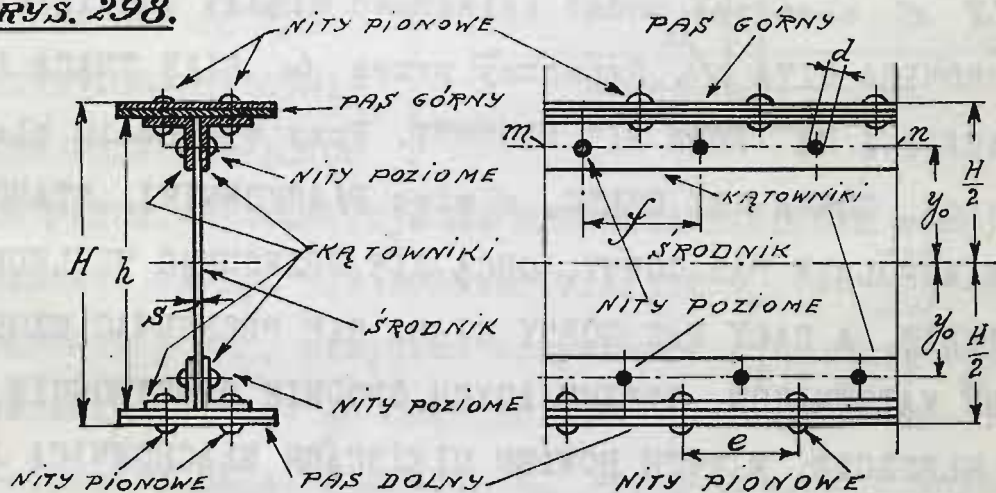
Wreszcie dla TYPU „C” bedziemy mieli $J_C = \frac{b}{12} [(2h+c)^3 - (c+g)^3]$, oraz $W_C = \frac{b}{12} \{ (2h+c)^3 - (c+g)^3 \} : (\frac{h+c}{2})$. Za pomocą tych wzorów można BELKI ZŁOŻONE liczyć na gięcie; aby otrzymać jednak wyniki prawidłowe, należy WYZNACZYĆ WŁAŚCIWE WYMIARY WKŁADEK, inaczej bowiem snadnie mogą one ulec ścięciu, a cała belka - ROZWARSTWIENIU. W tym celu oznaczmy przez Q SIŁĘ ŚCINAJĄCĄ WKŁADKĘ. Dla TYPU „A” będzie to niewątpliwie WYPADKOWA SIŁA TNĄCYCH, jakieby panowały w przekroju ab , gdyby belka nie była rozwarstwiona w tem miejscu. Nazwijmy przez dz - DŁUGOSTKĘ BELKI. Na powierzchni bdz panują NAPRĘŻENIA ROZWARSTWIAJĄCE $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, ich WYPADKOWA WYNOŚI PRZETO $\tau_{yz} b dz$ NA DŁUGOSTKĘ BELKI. Ponieważ WKŁADKI DZIELĄ BELKĘ NA ODCINKI ℓ DŁUGIE, PRZETO NA JEDNĄ WKŁADKĘ DZIAŁAĆ BĘDZIE WYPADKOWA SIŁA ROZWARSTWIAJĄCYCH $Q = \int_0^\ell \tau_{yz} b dz$. To samo rozumowanie stosuje się również i do dwóch pozostałych typów belek, z tą jeno różnicą, że tam rozwar-

stwienie leży poza osią podłużną belki. Ponieważ $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{TF}{6J}$, przeto $Q = \int \frac{TF}{J} dz = \frac{F}{J} \int T dz$. Oznaczmy przez T_0 ŚREDNIĄ WARTOŚĆ SIŁ TNĄCYCH, ODKSZTAŁCAJĄCYCH BELKĘ ZŁOŻONĄ W ODCINKU ℓ - wtedy $\int T dz = T_0 \ell$ i ostatecznie: $Q = \frac{F T_0}{J} \ell$. Siłę T_0 najlepiej wyznaczyć wykreślnie według danego obciążenia belki. Ponadto, w zależności od typu belki we wzorze tylko co otrzymanym należy uczynić $J = J_A$, $J = J_B$ lub $J = J_C$, które wyznaczyliśmy wyżej. Pozostaje więc tylko określić F . Dla TYPU „A” rozwarstwienie leży po środku belki, zatem $F_A = \int y dS = 6 \int y dy = \frac{1}{2} 6 h^2$. Dla TYPU „B”, gdzie rozwarstwienie leży na wysokości $\frac{h}{2}$ ponad osią obojętną przekroju poprzecznego belki, mamy: $F_B = 6 \int_{\frac{h}{2}}^h y dy = 6 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{h}{2}}^h = 6 \left[\frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right] = \frac{3}{2} 6 h^2$. Wreszcie w podobny sposób dla TYPU „C” będziemy mieli znowu: $F_C = \int y dS = 6 \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h+c}{2}} y dy = 6 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{h}{2}}^{\frac{h+c}{2}} = 6 \left[\frac{(\frac{h+c}{2})^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right] = 6 \left[\frac{h^2}{8} + \frac{hc}{4} + \frac{c^2}{8} \right] = \frac{3}{2} 6 h^2 + 6 hc + \frac{3}{2} 6 c^2$. W ten sposób określamy Q we wszystkich trzech wypadkach. Siła ta chce ściąć wkładkę wzdłuż powierzchni rozwarstwienia ab lub cd , możemy więc napisać dla wszystkich trzech typów belek, że $Q = 6 S k_z$, gdzie przez S oznaczyliśmy SZEROKOŚĆ WKŁADKI w cm , mierzoną w kierunku rozwarstwienia. Ponadto, belka cisnąc z boku na wkładkę ściankami leża, stara się ZMIAŻDZYĆ POWIERZCHNIĘ DOTYKU, które należy przeto liczyć na docisk, pisząc $Q = \frac{1}{2} g 6 k_n$. Zazwyczaj u nas używane belki ciosane są z SOŚNINY LUB JEDLINY, wkładki z GRABINY LUB DĘBINY. W tych warunkach $k_z = 7 \div 9 \text{ kg/cm}^2$, $k_n = 50 \div 60$. Zatem $Q = 6 S k_z = \frac{1}{2} S k_n$ skąd $S = \frac{1}{2} \frac{k_n}{k_z} g \cong 3 \div 4 g$, choć spotykamy również i inne wymiary

Jako drugi przykład rozpatrujemy BELKI ŻELAZNE ZŁOŻONE, czyli tak zwane:

§ 14. BLACHOWNICE. Tego rodzaju belki składają się z wąskiego a wysokiego ŚRODNIKA wyciętego z blachy, lub utworzonego z płaskownika odpowiednich wymiarów, oraz dwóch PASÓW - GÓRNEGO I DOLNEGO zazwyczaj wytworzonych z płaskowników, ułożonych prostopadle po obu

RYS. 298.

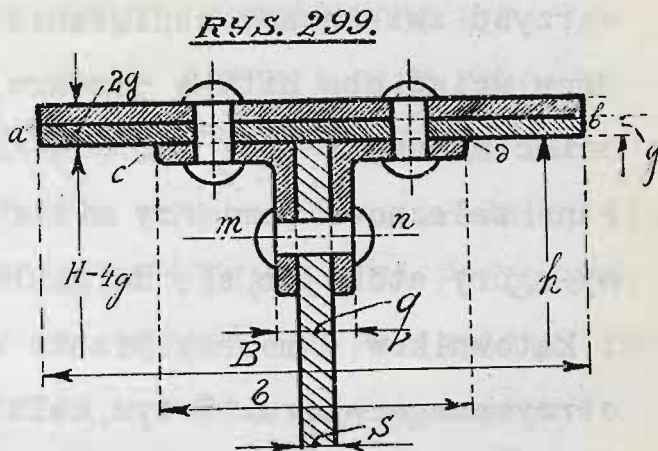


końcach środnika. Pasy przymocowane są do środnika za pomocą kątowników, które nitują się na całej swej długości NITAMI POZIOMEMI - łączącymi ze środnikiem i PIONOWEMI - z pasami, jak to zresztą najlepiej widać na RYS.298. W ten sposób zbudowany pręt złożony, czyli BLACHOWNICA, zwana tak od środnika, który najczęściej wycina się z blachy, - PRACUJE JAKO DWUTROWNIK ZŁOŻONY WIĘKSZYCH WYMIARÓW O NADER ZNACZNYM MOMENCIE WYTRZYMAŁOŚCIOWYM, a więc z dużą wytrzymałością na wyginanie. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI J I WYTRZYMAŁOŚCI W takiej belki z łatwością wyznaczyć możemy, sumując poszczególne mo-
WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XXXIV.

menty obu pasów, kątowników i średnika, brane względem osi głównych przekroju. Otrzymane na tej drodze wartości będą jednak właściwe jeno w tym wypadku, kiedy cały ustrój będzie miał SPOISTOŚĆ WEWNĘTRZNĄ, a więc gdy będzie prawidłowo znitowany. Zazwyczaj OBIERAJA ŚREDNICE NITÓW W ZALEŻNOŚCI OD GRUBOŚCI POSZCZEGÓLNYCH BLACH ŁĄCZONYCH, należy przeto USTALIĆ PODZIAŁKĘ NITÓW e a raczej podać zależność między podziałką a ŚREDNICĄ NITA d . Oznaczmy przez Q SIŁĘ TNĄCĄ PRZYPADAJĄCĄ NA JEDEN NIT PIONOWY. Przy wyginaniu blachownicy, GÓRNA JEJ CZĘŚĆ, a więc PŁASKOWNIKI, STANOWIĄCE WSPÓLNIE PAS GÓRNY, CHCĄ SIĘ PRZESUNĄĆ WZGLĘDEM SIEBIE, A CAŁY PAS GÓRNY STARA SIĘ PRZESUNĄĆ WZGLĘDEM OBU KĄTOWNIKÓW, OBEJMUJACYCH ŚRODNIK OBUSTRONNIE, JAK W KLESZCZE, W TYCH BOWIEM MIEJSCACH BLACHOWNICA JEST ROZWARSTWIONA. Gdyby te rozwarstwienia nie istniały, to na ich miejscu powstawałyby NAPRĘŻENIA ROZWARSTWIAJĄCE; aby więc blachownicę można było rozpatrywać, jako całość jednolitą WEWNĘTRZNIE SPOISTĄ, - NALEŻY ZNISZCZYĆ WSZELKIE ROZWARSTWIENIA, a przedewszystkiem tylko co wspomniane wewnętrzne rozwarstwienia obu pasów ab oraz rozwarstwienia cd między pasami a kątownikami średnika (RYS. 299) za pomocą nitowania pionowego. Właściwie trzeba by tu użyć nieskończenie wielkiej liczby nitów ZNIKOMO MAŁYCH i rozsiać je równomiernie wzdłuż obu pasów. Jest to jednak niewykonalne zazwyczaj przeto dajemy nity skończonych wymiarów w

pewnych od siebie odstępach, zatem każdy nit pracuje niejako za całą gromadę teoretycznych znikomo małych nitów. Oznaczmy

przez dx - DŁUGOSTKĘ BLACHOWNICY, przez B - SZEROKOŚĆ jej PASÓW, wreszcie przez c - LICZNA SZEROKOŚĆ KĄTOWNIKÓW PRZYLEGAJĄCYCH



DO PASÓW. W przekroju ab NIEROZWARSTWIONYM winno więc panować NAPRĘŻENIE ROZWARSTWIAJĄCE $\tau_{yzab} = \frac{T F_{ab}}{B J} dx$ NA DŁUGOSTKĘ dx , przyczem oczywiście $F_{ab} = B g \left[\frac{H}{2} - \frac{g}{2} \right]$, gdy oznaczymy przez g GRUBOŚĆ GÓRNEGO PŁASKOWNIKA rozpatrywanego PASA. A przeto $\tau_{yzab} = \frac{T}{J} \frac{g}{2} (H-g) dx$. Z kolei w przekroju cd również NIEROZWARSTWIONYM panować będzie naprężenie $\tau_{yzcd} = \frac{T F_{cd}}{c J} dx$, tutaj znów $F_{cd} = B \cdot 2g \left[\frac{H}{2} - g \right]$ zatem $\tau_{yzcd} = \frac{T}{J} \frac{B}{c} g \left[\frac{H}{2} - g \right]$. Wobec tego, że $B > c$, mamy

$\tau_{yzcd} > \tau_{yzab}$. Niebezpieczny przekrój nita LEŻY W PRZĘKROJU cd . Ponieważ nity pionowe tkwią w równych odstępach e wzdłuż blachownicy, przeto NA KAŻDĄ ICH PARĘ POPRZECZNĄ DZIAŁA WYPADKOWA $Q = \int_0^e \tau_{yz} b dz = \frac{B}{J} g \left[\frac{H}{2} - g \right] \cdot \int_0^e T dz \approx \frac{B}{J} g \left[\frac{H}{2} - g \right] T_0 e$, gdzie przez T_0 oznaczyliśmy ŚREDNIĄ WARTOŚĆ SIŁ TNĄCYCH ODKSZTAŁCAJĄCYCH BLACHOWNICĘ W ODCINKU e . mamy bowiem $T_0 e = \int_0^e T dz$. Ta siła stanowi obciążenie tnące obu pionowych nitów pasa górnego, leżących w tym samym przekroju poprzecznym blachownicy

Nie uwzględniamy przy tem zupełnie SIŁ TARCIA pasa górnego o kątowniki, słowem przesadnie na własną niekorzyść zwiększamy obciążenie nitów. Ponieważ siła Q chce ściąć oba nity w przekroju cd przeto ze wzoru na ścięcie mamy $2 \frac{\pi d^2}{4} \tau_z = Q = \frac{B}{J} [H - 2g] g T_o e$. Jest to szukana zależność pomiędzy d i e . Zazwyczaj d wyznaczamy z góry stosując się do grubości łączonych blach pasa i kątowników - możemy przeto wyliczyć e z tylko co otrzymanego wzoru. W tym celu zakładamy zrazu przybliżoną wartość T_o i obliczamy e , a następnie sprawdzamy czy owa przybliżona wartość T_o stanowi istotnie średnią wartość sił tnących w odcinku e . W razie niezgodności z założeniem - ponawiamy obliczenie, biorąc inną prawdziwszą wartość T_o . Po kilku próbach z łatwością otrzymać można dokładną wartość dla e - skrajną wartość PODZIAŁKI NITÓW PIONOWYCH.

Czasami znów pionowych nitów nie liczą zupełnie, jeno im dają wprost średnicę i podziałkę - poziomych, łączących średnik z kątownikami. NITY POZIOME /RYS. 299/ tworzą rząd prosty mn , równoległy do podłużnej osi blachownicy. Oznaczmy przez g - ŁĄCZNA GRUBOŚĆ ŚRODNIA I OBU SKRZYDEŁEK KĄTOWNIKÓW /RYS. 299/, mierzoną wzdłuż osi mn nita poziomego. Na powierzchni gdz panują przy wyginaniu blachownicy NAPRĘŻENIA ROZWARSTWIAJĄCE τ_{yz} . Ich wypadkowa wynosi $\tau_{yz} gdz$ NA DŁUGOSTKĘ dz BLACHOWNICY. Oznaczmy przez f - PODZIAŁKĘ NITÓW POZIOMYCH, a więc na każdy nit poziomy działać

będzie siła tnąca $Q = \int_0^f q dz = \int_0^f \frac{T F_{mn}}{S} dz = \frac{F_{mn}}{S} \int_0^f T dz =$
 $= \frac{F_{mn}}{S} T_0 f$, gdzie przez F_{mn} oznaczyliśmy MOMENT STA-
 TYCZNY GÓRNEJ CZĘŚCI PRZĘKROJU, POWYŻEJ OSI NITA LE-
 ŻĄCEJ, a przez T_0 jak wyżej - ŚREDNIĄ SIŁĘ TNĄCĄ W
 ODCINKU f BLACHOWNICY, przyczem $T_0 f = \int_0^f T dz$. I tu
 również pomijamy siły tarcia kątowników o środnik; si-
 ła Q stanowi przeto OBCIĄŻENIE TNĄCE NITA POZIOMEGO.
 Ponieważ chce ona ściąć nit WZDŁUŻ OBU POWIERZCHNI DO-
 TYKU KĄTOWNIKÓW DO ŚRODNIKA, przeto możemy napisać
 $2 \frac{\pi d^2}{4} k_z^2 = Q = \frac{F_{mn}}{S} T_0 f$. Z tego wzoru obliczamy f w spo-
 sób wyżej opisany. Praktycznie zazwyczaj podziałki ni-
 tów są o wiele mniejsze, zatem wyznaczone wartości f
 i e uważać jeno należy, jako skrajne dopuszczalne
 granice PODZIAŁEK ISTOTNYCH.

Pozostaje nam jeszcze tylko wyznaczyć GRUBOŚĆ S
 ŚRODNIKA BLACHOWNICY. Pośrodku przekroju, gdzie, jak
 wiadomo, panują najwyższe NAPRĘŻENIA ROZWARSTWIAJĄCE,
 blachownica snadnie może ulec rozwarstwieniu przy sto-
 sunkowo dość słabych wymiarach środnika. NAPRĘŻENIE
 ROZWARSTWIAJĄCE ŚRODKOWE τ_{yz} nie może przeto przekre-
 czyć dopuszczalnej skrajnej wartości bezpiecznej k_z
 dla danego tworzywa. Ponieważ pośrodku $\tau_{yz} = \frac{T_M F_0'}{S}$, prze-
 to, czyniąc $\tau_{yz} = k_z$ otrzymujemy właściwą GRUBOŚĆ SRO-
 DNICA ze wzoru $S = \frac{T_M F_0'}{k_z}$, gdzie F_0' oznacza MOMENT
 STATYCZNY POŁOWY PRZĘKROJU, PRZYNALEŻNEGO DO SKRAJNEJ
 WARTOŚCI T_M SIŁY TNĄCEJ.

Na tem kończymy SPREŻYSTĄ TEORIĘ NAPRĘŻEŃ. Przed-

miotem naszych dalszych badań będzie:

§ 15. SPRĘŻYSTA TEORIA ODKSZTAŁCEN. We wnętrzu danego ciała nieodkształconego wyodrębniamy myślowo WŁÓKIENKO M_0M_1 drobnych wymiarów, łączące dwie sąsiednie drobiny M_0 i M_1 . Długostkę M_0M_1 w ten sposób otrzymaną oznaczamy przez

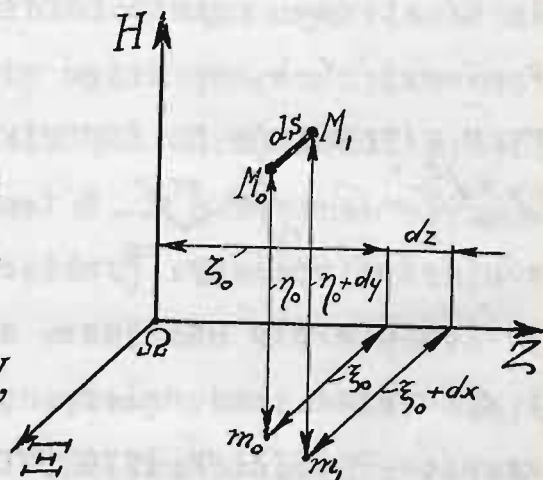
RYS. 300.

dS - będzie to oczywiście PRZEKĄTNIA KOSTKI PROSTEJ, uprzednio rozpatrywanej, o PRZECIWLEGŁYCH WIERZCHOŁKACH

M_0 i M_1 i KRAWĘDZIACH dx , dy , dz odpowiednio RÓWNOLEGLYCH DO STAŁYCH OSI ΩX , ΩY , ΩZ , gdziekolwiek poza ciałem obranych. Współrzędne

punktu M_0 oznaczmy odpowiednio przez ξ_0, η_0, ζ_0 , współrzędne punktu M_1 sąsiedniego przez $\xi_0+dx, \eta_0+dy, \zeta_0+dz$. Po odkształceniu oba rozpatrywane punkty PRZESUNĄ SIĘ nieco względem stałych osi, M_0 przejdzie w M'_0 o współrzędnych $\xi_0+\xi, \eta_0+\eta, \zeta_0+\zeta$, a punkt M_1 w M'_1 ze współrzędnymi: $\xi_0+dx+\xi+d\xi, \eta_0+dy+\eta+d\eta, \zeta_0+dz+\zeta+d\zeta$, przyczem w wypadku najogólniejszym możemy oczywiście napisać, iż: $d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz$, $d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz$, $d\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz$.

Przy odkształceniu długostka dS MOŻE SIĘ JENO WYDŁUŻAĆ LUB SKRÓCAĆ ORAZ POCHYLAĆ W PRAWNYM KIERUNKU.



Łączy bowiem dwie SĄSIEDNIE drobiny, a przeto krzywić się nie może. Oznaczmy przez δdS WYDŁUŻENIE DODATNIE LUB Ujemne DŁUGOSTKI dS ; STOSUNEK $\varepsilon = \delta dS : dS$ BĘDZIE JEJ WYDŁUŻENIEM JEDNOSTKOWEM, a zatem po od-

kształceniu otrzymamy długostkę odkształconą $dS + \delta dS =$

$= [1 + \varepsilon] dS$. Ponieważ najwidoczniej: $[1 + \varepsilon]^2 dS^2 = [(\xi + dx + \xi + d\xi) - (\xi_0 + \xi)]^2 + [(\eta + dy + \eta + d\eta) - (\eta_0 + \eta)]^2 + [(\zeta + dx + \zeta + d\zeta) - (\zeta_0 + \zeta)]^2 = [dx + d\xi]^2 + [dy + d\eta]^2 + [dz + d\zeta]^2$, przeto, pomijając MAŁE RZĘDÓW WYŻSZYCH, możemy napisać $dS^2 + 2\varepsilon dS^2 + \dots = dx^2 + 2d\xi dx + \dots$

$\dots + dy^2 + 2d\eta dy + \dots + dz^2 + 2d\zeta dz + \dots$. Wobec tego, że $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, przeto po skróceniu dwójki będziemy mieli $\varepsilon dS^2 = d\xi dx + d\eta dy + d\zeta dz$, skąd bezpośrednio:

$$\varepsilon = \frac{d\xi}{dS} \frac{dx}{dS} + \frac{d\eta}{dS} \frac{dy}{dS} + \frac{d\zeta}{dS} \frac{dz}{dS} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \left[\frac{dx}{dS} \right]^2 + \frac{\partial \eta}{\partial y} \left[\frac{dy}{dS} \right]^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left[\frac{dz}{dS} \right]^2 + \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \frac{dx}{dS} \frac{dy}{dS} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \frac{dy}{dS} \frac{dz}{dS} + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \frac{dx}{dS} \frac{dz}{dS};$$

Oznaczmy KĄTY KIERUNKOWE długostki dS odpowiednio

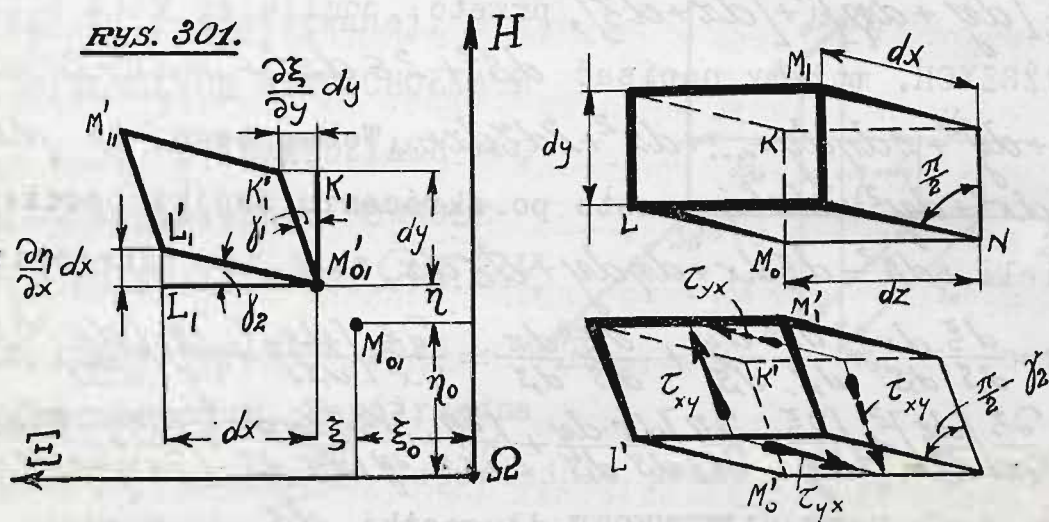
przez α, β, γ wtedy będzie $\frac{dx}{dS} = \cos \alpha, \frac{dy}{dS} = \cos \beta, \frac{dz}{dS} = \cos \gamma$, przeto: $\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos^2 \alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos^2 \beta + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cos^2 \gamma + \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] \cos \alpha \cos \beta + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \cos \beta \cos \gamma + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \cos \alpha \cos \gamma$. W ten sposób otrzymujemy wzór, wyznaczający wydłużenie je-

dnostkowe dowolnej długostki dS , należy w nim jednak określić znaczenie poszczególnych pochodnych. W

tym celu bierzemy przedewszystkiem pod uwagę WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ODPOWIEDNIO RÓWNOLEŻNE DO OSI STAŁYCH $\Omega E, \Omega H$ i ΩZ inaczej mówiąc

rozpatrujemy kolejno WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE DŁUGOSTEK

$ds_x^2 = dx^2$, $ds_y^2 = dy^2$ oraz $ds_z^2 = dz^2$. W pierwszym wypadku $\alpha = 0^\circ$, $\beta = \gamma = 90^\circ$, zatem ze wzoru tylko co otrzymanego wynika, że $\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, w drugim wypadku $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 0^\circ$ zatem podobnie mamy $\varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$, wreszcie w trzecim wypadku $\alpha = \beta = 90^\circ$, $\gamma = 0^\circ$ zatem znów $\varepsilon_z = \frac{\partial \xi}{\partial z}$. Stąd prosty wniosek: POCHODNE CZĄSTKOWE $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, $\frac{\partial \xi}{\partial z}$ DAJĄ WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE PRZYNALEŻNE DO DANEGO PUNKTU, A RÓWNOLEGŁE DO OSI STAŁYCH. Nazwijmy je WYDŁUŻENIAMI POOSIOWYMI.



Wypada nam jeszcze zatem wyjaśnić znaczenie trzech pozostałych współczynników wzoru dla ε . W tym celu bierzemy pod uwagę (RYS. 301) KOSTKĘ PIERWOTNIE PROSTĄ o przeciwległych wierzchołkach M_0 i M_1 myślowo wyodrębnioną z danego ciała. W rzucie na jedną z płaszczyzn osi stałych, dajmy na to na $E\Omega H$ wyznaczmy punkt M_0 kostki o współrzędnych ξ_0, η_0, ξ_0 do ślad $M_{01}(\xi_0, \eta_0)$. Po odkształceniu punkt M_0 przejdzie w M_0' a jego ślad M_{01} w M_{01}' o współrzędnych $\xi_0 + \xi, \eta_0 + \eta$. Przypuśćmy na chwilę, że na ściankach kostki wcale nie ma naprężeń - kostka zmienia jeno położenie we-

wewnątrz ciała odkształcanego, przesuwają się łącznie z kostkami sąsiednimi względem stałych osi zewnętrznych, lecz nie ulega odkształceniu. W tym założeniu dwie prostopadłe do siebie krawędzie kostki M_0K i M_0L przesuną się równolegle do siebie, dając w rzucie na $\Xi\Omega H$ proste M'_0K , M'_0L , również do siebie prostopadłe, przyczem po staremu $M'_0K = dy$ oraz $M'_0L = dx$.~

Przyłożymy do bocznych ścianek kostki NAPRĘŻENIA TNĄCE τ_{xy} oraz τ_{yx} . Pod działaniem tych sił, stanowiących w danym wypadku jedyne obciążenie, kostka stanie się ukośną. Ponieważ przyłożone siły tnące są równoległe do płaszczyzny $\Xi\Omega H$, przeto kostka ODKSZTAŁCI SIĘ PŁASKO, RÓWNOLEGLE DO TEJ PŁASZCZYZNY, bryłowy kąt krawędzi M_0N zaostrzy się lub stępi, punkty K, L przejdą w K', L' a rzuty ich K, L , w K', L' .~ Miarą tego odkształcenia będzie oczywiście PRZYROST KĄTA BRYŁOWEGO jakiejkolwiek krawędzi równoległej do osi ΩZ , dajmy na to krawędzi M_0N . Oznaczmy ten przyrost przez χ_z . Z teorii ścinania wiemy, że $\chi_z = \beta \tau_z$, gdzie $\tau_z = \tau_{xy} = \tau_{yx}$. Ponadto w rzucie widać, że $\chi_z = \chi_1 + \chi_2$, gdzie χ_1 oznacza KĄT K, M'_0, K' a zaś χ_2 - KĄT L, M'_0, L' . Z drugiej znów strony $\tan \chi_1 = KK' : KM'_0$ to jest $\tan \chi_1 = K, K' : dy$, oraz $\tan \chi_2 = L, L' : dx$.~

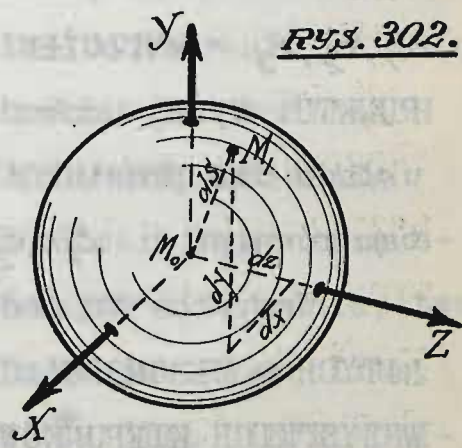
Ponieważ wyznaczamy punkt K , POSUWAJĄC SIĘ z M_0 WYŁĄCZNIE W KIERUNKU OSI ΩH , przeto zmieniamy jedynie y o dy , a x i z pozostają niezmiennie dla danego wypadku; po ODKSZTAŁCENIU TNACEM punkt K przejdzie w K'

UJAWNIAJĄC JEDYNY PRZYRÓST $d\xi = \kappa \kappa'$ WSPÓŁRZĘDNYCH, zatem $d\xi = \kappa \kappa' = \frac{\partial \xi}{\partial y} dy$ bowiem w danym wypadku $dx = dy = 0$. Rozumując zupełnie w ten sam sposób dochodzimy do wniosku, że $L, L' = d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx$. Wobec stosunkowo drobnych wymiarów γ_1 i γ_2 możemy napisać wprost: $\lg \gamma_1 \approx \gamma_1 = \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\eta$: $d\eta = \frac{\partial \xi}{\partial y}$ oraz $\gamma_2 = \frac{\partial \eta}{\partial x}$. Zatem $\gamma_z = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$. Ta suma cząstkowych pochodnych wyznacza przeto dla kostki przynależnej do danego punktu M_0 , PRZESUNIĘCIE JEDNOSTKOWE, RÓWNOLEGŁE DO PŁASZCZYZNY $\Xi \Omega H$, a więc prostopadłe do osi ΩZ . Tak samo zupełnie można dowieść, że SIŁY TNĄCE τ_x względnie τ_y wywołają w rozpatrywanej kostce PRZESUNIĘCIE JEDNOSTKOWE $\gamma_x = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = \beta \tau_x$ względnie $\gamma_y = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = \beta \tau_y$ PROSTOPADŁE do osi $\Omega \Xi$ względnie do osi ΩH . Stąd wniosek bezpośredni: SUMMY $\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$ DAJĄ PRZESUNIĘCIA JEDNOSTKOWE, PRZYNALEŻNE DO DANEGO PUNKTU, A PROSTOPADŁE DO OSI STAŁYCH. Nazwijmy je PRZESUNIĘCIAMI POOSIOWEMI, a ostatecznie otrzymamy WZÓR: $\epsilon = \epsilon_x \cos^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \beta + \epsilon_z \cos^2 \gamma + \gamma_x \cos \beta \cos \gamma + \gamma_y \cos \alpha \cos \gamma + \gamma_z \cos \alpha \cos \beta$, WYZNACZAJĄCY WYDŁUŻENIE JEDNOSTKOWE JAKIEJKOLWIEK DŁUGOSTKI dS DANEGO CIAŁA ODKSZTAŁCANEGO W ZALEŻNOŚCI OD WSPÓŁCZYNNIKÓW KIERUNKOWYCH DŁUGOSTKI, WYDŁUŻEŃ JEDNOSTKOWYCH I PRZESUNIĘĆ POOSIOWYCH.

Przypomina on ukształtowaniem wyrazów poprzednio w ustępie dziewiątym podany wzór dla naprężenia normalnego σ , można też przeto w sposób zupełnie tożsamościowy wyprowadzić podobne wnioski. Tym razem jednak doty-

czące już nie σ a ε . Przedewszystkiem więc drogą zamiany współrzędnych możemy dla każdego punktu danego ciała ODKSZTAŁCONEGO wyznaczyć jeden układ trzech płaszczyzn prostopadłych do siebie, dla których $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0$. Zatem W KAŻDYM PUNKCIE CIAŁA ODKSZTAŁCANEGO ISTNIĘJĄ TRZY WZAJEMNIE PROSTOPADŁE KIERUNKI NIE UJAWNIAJĄCE SKRZYWIEN. Prowadząc w tych kierunkach krawędzie kostki nieodkształconej, otrzymamy po odkształceniu kostkę również prostą, lecz nieco objętościowo różną od pierwotnej. Te trzy kierunki muszą niewątpliwie zgadzać się z kierunkami głównych osi elipsoidy naprężeń, ponieważ kostka na tych trzech kierunkach zbudowana NIE UJAWNIA WCAŁE NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH, jedyna zatem z pośród wszystkich kostek przynależnych do danego punktu SKRZYWIENIA ŚCIANEK UJAWNIC NIE MOŻE, jeno wyłącznie wydłużenia. Te WYDŁUŻENIA GŁÓWNE STANOWIĄ SKRAJNE WARTOŚCI WYDŁUŻEŃ W PUNKCIE ROZPATRYWANYM. Można to

zresztą udowodnić z łatwością, rozpatrując w głębi CIAŁA NIEODKSZTAŁCONEGO - kulę elementarną, PROMIENIEM dS z obranego punktu M_0 OPISANĄ. Współrzędne dx, dy, dz jakiegokolwiek punktu M , na tej kuli



czynią zadość równaniu $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dS^2$, ponieważ odcinek $M_0M = dS$. Oznaczmy odpowiednio przez α, β, γ KĄTY KIERUNKOWE tego odcinka, a wtedy $dx = dS \cos \alpha$, $dy = dS \cos \beta$,

$dz = ds \cos \gamma$ - odcinek $M_0 M_1$ jest zatem owym włókienkiem ds wyżej już rozpatrywanem. Po odkształceniu osie współrzędnych $M_0 X, M_0 Y, M_0 Z$, zresztą zupełnie dowolnie obrane, choć prostopadłe do siebie, pochyliły się nieco ku sobie - ich układ prostokątny skrzywi się, stanie się krzywokątnym, a odcinki dx, dy, dz odkształcą się odpowiednio w $dx' = dx(1 + \varepsilon_x), dy' = dy(1 + \varepsilon_y), dz' = dz(1 + \varepsilon_z)$. Stąd mamy bezpośrednio $ds'^2 = \frac{dx'^2}{(1 + \varepsilon_x)^2} + \frac{dy'^2}{(1 + \varepsilon_y)^2} + \frac{dz'^2}{(1 + \varepsilon_z)^2}$, co daje: $1 = \frac{dx'^2}{ds^2(1 + \varepsilon_x)^2} + \frac{dy'^2}{ds^2(1 + \varepsilon_y)^2} + \frac{dz'^2}{ds^2(1 + \varepsilon_z)^2}$. Ponieważ odcinki dx', dy', dz' stanowią współrzędne punktu M_1 po odkształceniu, a tylko wypisane równanie wyznacza elipsoidę w układzie osi krzywokątnych, przeto po odkształceniu kula elementarna stanie się elipsoidą. Jest to ELIPSOIDA WYDŁUŻEN, analog elipsoidy naprężeń. Wzdłuż jej głównych osi zachodzą WYDŁUŻENIA GŁÓWNE, wśród nich należy szukać skrajnych wartości wydłużeń, przynależnych do danego punktu. Oznaczmy odpowiednio przez $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - WYDŁUŻENIA GŁÓWNE, PRZYNALEŻNE DO DANEGO PUNKTU. Wyżej udowodniliśmy, że dla jakiegokolwiek układu osi prostokątnych $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = e = \text{stałej}$. A zatem również i $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = e$.

Wszystko to jednak dotyczy wyłącznie CIAŁ JEDNOLITYCH O WŁASNOŚCIACH SPRĘŻYSTYCH JEDNAKOWYCH DLA WSZYSTKICH KIERUNKÓW α, β, γ . Tego rodzaju CIAŁA SPRĘŻYSTYCH JEDNOLITE - cechuje JEDNOSTAJNA BUDOWA WEWNĘTRZNA. Tutaj należą przede wszystkim STAL I ŻELAZO ZLEWNE, MIEDŹ i t.p., natomiast inne tworzywa zachod-

wują się niejednakowo we wszystkich kierunkach. WŁÓKNI-
STE ŻELAZO ZGRZEWNE ma dwie osie sprężystości, pręt bo-
wiem zgrzewny składa się jakby z poszczególnych włókien-
nek podłużnie zwartych w jedną całość, zatem jego wy-
trzymałość podłużna jest inna od poprzecznej, to też
pręt zgrzewny inaczej się odkształca w kierunku włókien,
inaczej zaś prostopadle do nich, ponieważ w ostatnim wy-
padku poszczególne włókna łatwo się dają rozłączać. To
samo ma miejsce i przy odkształcaniu drzewa, które, jak
wiadomo, składa się ze współśrodkowych słoików dorocznych
poprzedzielanych słabszym miękiszem, tu więc mamy aż
trzy osie sprężystości czyli trzy kierunki - podłużny
równoległy do osi słoików, doosiowy - gdy kolejno napoty-
kamy warstwy twardsze i miększe, wreszcie - styczny do
słoików. W tych trzech kierunkach drzewo zachowuje się
sprężystość niejednakowo, ujawniając KIERUNKOWO RÓŻNE
WARTOŚCI E , zazwyczaj jednak w tablicach podana jest
jedna tylko wartość E - największa - w kierunku osi sło-
ików lub włókien. Zatem wyłącznie i li tylko w CIAŁACH
JEDNOLITYCH ELIPSOIDY NAPRĘŻEN I WYDŁUŻEN POSIADAJĄ
OSIE WSPÓLNE, w danym bowiem wypadku skrajnym napręże-
niom normalnym MUSZĄ odpowiadać skrajne wydłużenia, two-
rzywo bowiem we wszystkich kierunkach jest jednolite.
Inaczej niewątpliwie rzecz się ma dla CIAŁ NIEJEDNOLI-
TYCH, gdzie wobec zmienności kierunkowej E skrajne
wartości wydłużeń w wypadku ogólnym NIE ODPOWIADAJĄ
skrajnym naprężeniom normalnym. Są to jednak zjawiska

zbyt jeszcze mało znane, zazwyczaj więc wszystkie tworzywa od biedy zaliczamy do gromady jednolitych, a tylko zwiększamy ostrożności - przy liczeniu praktycznem, stosując słabsze wartości współczynników K . Bierzemy zatem wyłącznie pod uwagę:

§ 16. WYDŁUŻENIA I NAPRĘŻENIA GŁÓWNE CIAŁ JEDNOLITYCH. W dowolnym punkcie ciała nieodkształconego budujemy prostą kostkę. Podczas odkształcenia powstają na jej ściankach naprężenia normalne, powodujące odnośne wydłużenia, tudzież naprężenia tnące, które dają PRZESUNIĘCIA $X_x = \beta \tau_x, X_y = \beta \tau_y, X_z = \beta \tau_z$. Gdy poprowadzimy trzy wytyczne krawędzie kostki w kierunkach głównych, to jej naprężenia normalne będą GŁÓWNYMI $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ przynależnymi do punktu obranego naprężeniami, a naprężenia tnące $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$; — odkształcenia tej kostki sprowadzą się więc do trzech WYDŁUŻEŃ GŁÓWNYCH, bo żadnych przesunięć kostka nie ujawni. Wyżej w ustępie szóstym wyznaczaliśmy wydłużenia kostki, pozostającej w równowadze linowej. Na zasadzie prawa o niezależności działania sił możemy otrzymane wyniki dostosować do danego wypadku, zestawiając je dla łatwiejszego zrozumienia w następującą TABLICĘ SZESNASTĄ.

Dodając podane w tej tablicy wartości WYDŁUŻEŃ GŁÓWNYCH, otrzymujemy: $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \alpha [\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3 - \frac{2}{m}(\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3)] = \frac{\alpha}{m}(m-2)[\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3]$. Stąd $\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3 = \frac{e}{\alpha}m$: $:\alpha(m-2)$. Ponieważ zaś $\varepsilon_1 = \alpha[\tilde{\sigma}_1 - \frac{\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3}{m}]$, zatem $\frac{m}{\alpha} \varepsilon_1 = \tilde{\sigma}_1 m - \tilde{\sigma}_2 - \tilde{\sigma}_3$. Dodając otrzymujemy wprost $\tilde{\sigma}_1(1+m) = \frac{m}{\alpha}[\frac{e}{m-2} + \varepsilon_1]$,

TABLICA SZESNASTA.

WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE,				
RÓWNO- LEGŁE	PRZYNALEŻNE			OSTATECZNE
DO OSI	DO NAPRĘŻENIA:			WYDŁUŻENIA GŁÓWNE:
	$\frac{\sigma_1}{\alpha}$	$\frac{\sigma_2}{\alpha}$	$\frac{\sigma_3}{\alpha}$	
X	$\alpha \tilde{\sigma}_1$	$-\frac{\alpha \tilde{\sigma}_1}{m}$	$-\frac{\alpha \tilde{\sigma}_1}{m}$	$\varepsilon_1 = \alpha \left[\tilde{\sigma}_1 - \frac{\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}_3}{m} \right]$
Y	$-\frac{\alpha \tilde{\sigma}_2}{m}$	$\alpha \tilde{\sigma}_2$	$-\frac{\alpha \tilde{\sigma}_2}{m}$	$\varepsilon_2 = \alpha \left[\tilde{\sigma}_2 - \frac{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_3}{m} \right]$
Z	$-\frac{\alpha \tilde{\sigma}_3}{m}$	$-\frac{\alpha \tilde{\sigma}_3}{m}$	$\alpha \tilde{\sigma}_3$	$\varepsilon_3 = \alpha \left[\tilde{\sigma}_3 - \frac{\tilde{\sigma}_1 + \tilde{\sigma}_2}{m} \right]$

co daje $\tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2} \right]$ bowiem, jak to już wiemy z ustępu ósmego rozdziału trzeciego $\beta = \frac{2}{\alpha} \frac{1+m}{m}$. Podobnie również możemy wypisać $\tilde{\sigma}_2 = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \cdot \left[\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2} \right]$ oraz $\tilde{\sigma}_3 = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2} \right]$. Otrzymane tu wzory wyznaczają zależność pomiędzy naprężeniami a wydłużeniami głównymi. Można je uogólnić w następujący sposób: wszelkie naprężenie normalne o współczynnikach kierunkowych α, β, γ można, jak wiemy, wyznaczyć ze wzoru $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_1 \cos^2 \alpha + \tilde{\sigma}_2 \cos^2 \beta + \tilde{\sigma}_3 \cos^2 \gamma$ a zatem:

$$\tilde{\sigma} = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma + \frac{e}{m-2} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \right] =$$

$$= \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon \cos^2 \alpha + \varepsilon \cos^2 \beta + \varepsilon \cos^2 \gamma + \frac{e}{m-2} \right] \sim$$

Z drugiej znów strony wiemy, że $\varepsilon = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cos^2 \beta + \varepsilon_3 \cos^2 \gamma$, zatem ostatecznie: $\tilde{\sigma} = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon + \frac{e}{m-2} \right] = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\varepsilon + \frac{e}{m-2} \right] \sim$ Dla jakichkolwiek zatem osi prostokątnych, przynależnych do danego dowolnego zresztą punktu będziemy mieli $\tilde{\sigma}_x = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \cdot \left[\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right]$, $\tilde{\sigma}_y = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\varepsilon_y + \frac{e}{m-2} \right]$, $\tilde{\sigma}_z = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right]$, albo jeszcze inaczej $\tilde{\sigma}_x = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon_x + \frac{e}{m-2} \right]$, $\tilde{\sigma}_y = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon_y + \frac{e}{m-2} \right]$, $\tilde{\sigma}_z = \frac{2}{\beta} \left[\varepsilon_z + \frac{e}{m-2} \right]$, —

wzory uzależniające WYDŁUŻENIA POOSIOWE OD WŁASCIWYCH

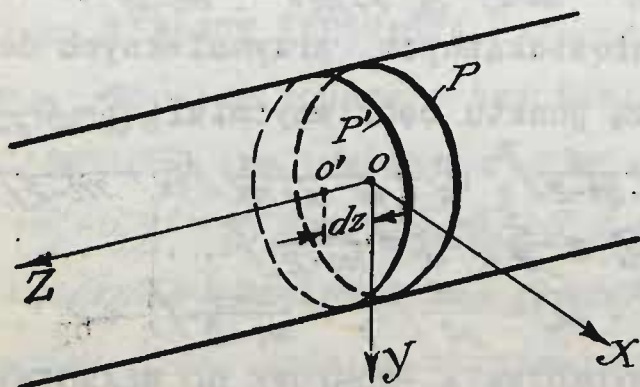
NAPRĘŻEN NORMALNYCH. Mnożąc $\tilde{\sigma}_y$ i $\tilde{\sigma}_z$ przez $-\frac{1}{m}$ i kolejno dodając do $\tilde{\sigma}_x$ mamy:

$$\tilde{\sigma}_x - \frac{\tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_z}{m} = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left\{ \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y}{m} - \frac{\varepsilon_z}{m} + \frac{e}{m-2} \left(1 - \frac{2}{m} \right) \right\} = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left\{ \varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y}{m} - \frac{\varepsilon_z}{m} + \frac{e}{m} \right\} = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\varepsilon_x - \frac{\varepsilon_y}{m} - \frac{\varepsilon_z}{m} + \frac{\varepsilon_x}{m} + \frac{\varepsilon_y}{m} + \frac{\varepsilon_z}{m} \right],$$

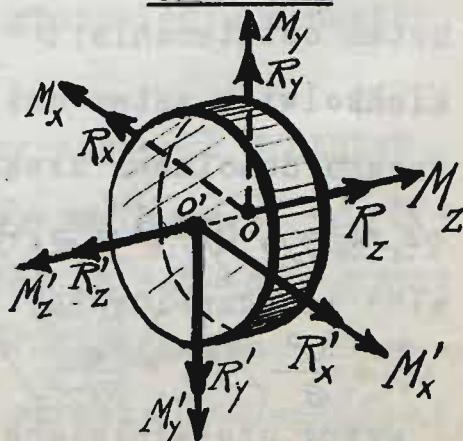
bowiem, jak wiadomo $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = e$. Stąd mamy w dalszym ciągu bezpośrednio $\tilde{\sigma}_x - \frac{\tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_z}{m} = \frac{1}{\alpha} \frac{m}{1+m} \left[\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_x}{m} \right] = \frac{\varepsilon_x}{\alpha}$.
Zatem $\varepsilon_x = \alpha \left[\tilde{\sigma}_x - \frac{\tilde{\sigma}_y + \tilde{\sigma}_z}{m} \right]$ oraz podobnie $\varepsilon_y = \alpha \left[\tilde{\sigma}_y - \frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_z}{m} \right]$,
 $\varepsilon_z = \alpha \left[\tilde{\sigma}_z - \frac{\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y}{m} \right]$. Na tym kończymy TEORIĘ SPRĘŻYSTOŚCI. Jako bezpośrednie jej zastosowanie wyznaczmy:

§ 17. NAPRĘŻENIA I WYDŁUŻENIA GŁÓWNE PRĘTÓW PROSTYCH. Na danym pręcie prostym obieramy dowolny przekrój poprzeczny o środku masy O , leżącym na osi podłużnej pręta. Układ sił odkształcających przynależny do części pręta, przez którą przechodzi ujemna oś OZ , powiedzmy tylnej części pręta, sprowadzamy do punktu O , gdzie otrzymamy układ równoważny, złożony z wypadkowych SIŁ R_x, R_y, R_z i MOMENTÓW M_x, M_y, M_z , jak to zresztą najlepiej uwypukla RYS.303.

RYS. 303.



RYS. 304.



Wypadkowa R_z i moment M_p dają naprężenia normalne $\frac{t}{z} = \frac{R_z}{S} \pm \frac{M_p}{S W}$, jakieśmy to już udowodnili (z ustępu dziewiątego rozdziału piątego). Pod wpływem siły R_p powstają siły tnące leżące w przekroju, wreszcie moment M_z daje układ naprężeń tnących skręcający. Wszystkie te naprężenia kolejno zbadaliśmy w wytrzymałości tworzyw - obecnie chcemy je ująć we wzory teorii sprężystości. W tym celu rozpatrujemy w odległości dz od punktu O nowy przekrój poprzeczny wyodrębniając w ten sposób z pręta CIENIUTKĄ PŁYTKĘ, którą myślowo dzielimy na KOSTKI ELEMENTARNE o krawędziach równoległych do osi OX, OY, OZ . Układ sił odkształcających, przynależny do części pręta prawej w stosunku do płytki sprowadziliśmy już do punktu O ; należy zatem jeno sprowadzić układ sił obciążający lewą część pręta poczynając się w przekroju P' płytki do środka O' tego przekroju, aby móc w ten sposób miasto całego pręta - rozpatrywać jeno myślowo wyodrębnioną zeń płytkę. To sprowadzenie da wypadkowe SIŁY $R'_x = R_x + dR_x, R'_y = R_y + dR_y, R'_z = R_z + dR_z$ i MOMENTY $M'_x = M_x + dM_x, M'_y = M_y + dM_y, M'_z = M_z + dM_z$ znikomo różniące się tylko od poprzednie otrzymanych dla ośrodka sprowadzenia O . Najlepiej to uwypukla RYS. 304. Wobec takiego układu sił obciążających płytkę, jakkolwiek wyodrębniona w niej elementarna kostka NIE MOŻE UJAWNIAĆ NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH τ_{xy} lub τ_{yx} równoległych do obu płaskich ścian płytki, wszystkie bo-

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW - ARKUSZ XXXV.

wiem naprężenia tnące kostki leżą na jej ściankach przedniej i tylnej - boczne czworosiły tnące muszą więc leżeć w płaszczyznach prostopadłych do obu płaskich ścian płytki. Zatem musi być $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z = 0$. Ponadto wypadkowa R_z' i oba momenty M_x' i M_y' leżące w przekroju P' dadzą NAPRĘŻENIE NORMALNE tego przekroju $t_z' = t_z + dt_z$ znikomo tylko różne od t_z - wszelka zatem kostka ulega NAPRĘŻENIOM NORMALNYM w kierunku osi OZ . Tym naprężeniom zazwyczaj przypisujemy ZJAWISKA DOOSIOWE, a raczej uzależniamy wydłużenia poprzeczne od podłużnych rozpatrując ich stosunek m , kładziemy je zatem na karb działania naprężeń normalnych, równoległych do osi podłużnej pręta. Słowem, przypuszczamy zgóry, że $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_y = 0$ dla wszelkiej kostki w płytce. Jesteśmy poniekąd w prawie tak czynić, zazwyczaj bowiem na bocznej powierzchni pręta NIEMA SIŁ ROZCIĄGAJĄCYCH NI ŚCISKAJĄCYCH. Mamy więc dla prętów prostych : założenie SAINT-VENANT'A $\tilde{\sigma}_x = \tilde{\sigma}_y = \tau_z = 0$, co ono oznacza? Ono wskazuje, że włókna podłużne płytki są niezależne od siebie, że nie wywierają na siebie wzajemnie żadnego nacisku. Poniżej granicy proporcjonalności założenie mniej więcej odpowiada istocie rzeczy - tam też stosujemy go bez zastrzeżeń, są natomiast pewne szczególne wypadki kiedy warunki obciążenia zadają mu kłam widoczny. Jako przykład służy TU RURA ROZCIĄGANA LUB ŚCISKANA W KIERUNKU SWEJ OSI PODŁUŻNEJ A WYPEŁNIONA PARA POD CIŚNIENIEM. Skoro w niej myślo-

wo wyodrębnimy płytkę pierścieniową, a w płytce elementarną kostkę, to jak to wkrótce zobaczymy na ściankach kostki naprężenia σ_x i σ_y będą panowały istotnie, nie będą więc równe zeru. Tego rodzaju pręty wydrążone pozostające pod ciśnieniem będziemy zresztą rozpatrywali niżej. Podobnie również przeczy założeniu wał, gdy oddajemy mu moment skręcający przez pośrednictwo piasty zaklinowanej. Klin równoległy do osi wału ciśnię tworzywo przekroju niesymetrycznie w kierunku bocznym - rodzi więc naprężenia τ_{xy} , τ_{yx} różne od zera. Tego rodzaju wypadki zgóry wykluczamy.

Zatem naprężenia główne prętów, prostych otrzymujemy z równania: $\begin{vmatrix} \sigma - \sigma_1 & 0 & -\tau_y \\ 0 & \sigma - \sigma_2 & -\tau_x \\ -\tau_y & -\tau_x & \sigma - \sigma_3 \end{vmatrix} = 0$, które daje: $\sigma_1 = \frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}$, $\sigma_2 = \frac{\sigma_z}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}$, $\sigma_3 = 0$, gdzie oznaczyliśmy przez $\tau^2 = \tau_x^2 + \tau_y^2$. Widzimy stąd iż założenie SAINT VENANT'A daje zerową wartość jednego z głównych naprężeń dowolnego punktu przekroju poprzecznego. Stąd bezpośrednio mamy: $\epsilon_1 = \alpha \left[\sigma_1 - \frac{\sigma_z}{m} \right] = \alpha \left[\frac{\sigma_z}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} - \frac{\sigma_z}{2m} + \frac{1}{2m}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2} \right]$ stąd: $\frac{\epsilon_1}{\alpha} = \frac{m-1}{2m}\sigma_z + \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}$, $\frac{\epsilon_2}{\alpha} = \frac{m-1}{2m} - \frac{m+1}{2m}\sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau^2}$, $\frac{\epsilon_3}{\alpha} = -\frac{\sigma_z}{m}$. Tylko co otrzymane wzory wyznaczają wydłużenia główne prętów prostych. Są to wydłużenia skrajne, - największe z nich stanowi zazwyczaj miarę wyteżenia tworzywa pręta.

§ 18. NATEŻENIE TWORZYWA. Trwałość budowli technicznych zależy w pierwszej mierze od pewnej pracy tworzyw. Należy zatem poznać warunki właściwej ich pracy.

aby ustalić miarę bezpiecznego natężenia tworzywa. Odpowiedź na to może dać wyłącznie doświadczenie, niestety jednak przeważnie jest ono niewykonalne, daje natomiast ściśle dane w wypadku zwykłego rozciągania prętów prostych. Tu miarę bezpiecznego natężenia otrzymujemy z łatwością w postaci skrajnego dopuszczalnego naprężenia. Zatem przy rozciąganiu prętów prostych **NAPRĘŻENIE STANOWI MIARĘ NATĘŻENIA TWORZYWA**. Na tem spostrzeżeniu opiera się pierwsza teoria, która głosi, że **MIARĘ NATĘŻENIA TWORZYWA STANOWI NAJWYŻSZE JEGO NAPRĘŻENIE NORMALNE, A WIĘC NAJWIĘKSZE Z NAPRĘŻEŃ GŁÓWNYCH PUNKTU ROZPATRYWANEGO**. Ta teoria zawodzi jednak w wielu wypadkach, a zwłaszcza przy ściskaniu wszechstronnem przez pośrednictwo cieczy. W tym wypadku jak wykazały próby bezpośrednie, ciśnienie choćby największe nie może wywołać pęknięcia ciała jednorodnego. Ten brak teorii starano się pokryć przy pomocy innej teorii, która orzeka, że **MIARĘ NATĘŻENIA TWORZYWA STANOWI NAJWYŻSZE JEGO NAPRĘŻENIE TNĄCE**. Ta teoria, mająca pewne pokrewieństwo z pierwszą, wyjaśnia pewną gromadę zjawisk, tłumaczy rozpadanie się sześcianu żeliwnego ściskanego na dwa kliny, zawodzi natomiast w wypadku ściskania tworzyw ciągliwych, które jak wiadomo można rozgniatać nieograniczenie nie wywołując pęknięcia. W obu powyższych teoriach miarę natężenia stanowi skrajne naprężenie tworzywa, obie nie są, jak widzimy, bez zarzutu, to też COULOMB starał się ustalić

trzecią teorię, twierdząc, że MIARĄ NATEŻENIA JAWI SIĘ SKRAJNE ODKSZTAŁCENIE TNĄCE TWORZYWA, CZYLI SKRZYWIE-NIE KOSTKI ELEMENTARNEJ.

Jednak i ta teoria nie umie wytłomaczyć możliwo-
ści powstawania pęknięć przy wszechstronnem rozciąga-
niu. Stosunkowo najwięcej zwolenników dotychczas jesz-
cze posiada następna teoria PONCELET'A, głosząca, że
MIARĄ NATEŻENIA JAWI SIĘ SKRAJNE WYDŁUŻENIE TWORZYWA,
a więc największe z wydłużeń głównych w punkcie rozpa-
trywanym. Choć stosowana prawie wyłącznie dotychczas
i ta teoria nie jest bez grzechu; przeczą jej doświad-
czenia FOPPLA, który czterostronnie poddawał ciśnieniu
kostkę i nie otrzymał wcale WYŻSZEJ WYTRZYMAŁOŚCI niż
przy ciśnieniu zwykłym dwustronnem, choć zdawać by się
mogło, że częściowe zahamowanie z dwóch stron przeciw-
ległych boczego rozszerzenia kostki powinno podnieść
jej wytrzymałość.

Mimo ten zarzut, zresztą dość poważny, teoria wyda-
je się oczywistą, bo największemu wydłużeniu miejscowe-
mu odpowiadać chyba powinno największe rozszerzenie
tworzywa, to jest mówiąc nieco ściślej najznaczniejsze
rozsunięcie się jego cząsteczek połączone z koniecznem
osłabieniem sił wiążących międzycząsteczkowych mogącem
wywołać pęknięcie. To też dotychczas w wytrzymałości
tworzyw ta teoria ma prawa obywatelstwa. Odrzuca ją
MOHR, twórca własnej teorii stanowiącej nader udatne
i dowcipne połączenie obu ostatnich tu rozpatrywanych

oraz profesor Lwowskiej Politechniki M. Huber, który rozwijając pomysł BELTRAMI'EGO dochodzi do przekonania, że O NATEŻENIU TWORZYWA STANOWI CAŁOKSZTAŁT MIEJSCOWYCH NAPRĘŻEŃ ^{*}/A MIARĄ NATEŻENIA MOŻE BYĆ JEDYNIĘ PRACA ODKSZTAŁCEN, o której wkrótce posłyszemy.

I te dwie najnowsze teorie mają zresztą swe braki, póki więc bliższe badania nie ustalą ostatecznej - umu-
szeni jesteśmy iść za większością, dotychczas jeszcze uznającą teorię PONCELET'A. Ją też bierzemy pod uwagę.

Zresztą wszystkie podane tu teorie nie uwzględniają wcale ZJAWISK DRGAŃ CZĄSTECZKOWYCH - niewątpliwie grających nader ważną, a może nawet wprost jedyną rolę przy pojawianiu się pęknięć w tworzywie. Ostatecznie więc MIARĄ WYTEŻENIA STANOWI NAJWYŻSZE WYDŁUŻENIE GŁÓWNE MIEJSCOWE TWORZYWA.

§ 19. NAPRĘŻENIA ZASTĘPCZE. W ustępie szesnastym wyznaczaliśmy wydłużenia główne dla prętów prostych wychodząc z założenia $\sigma_x = \sigma_y = \tau_z = 0$. Śród tych wydłużeń szukamy największego wydłużenia, stanowiącego miarę wyteżenia materiału. Tą drogą idziemy wyłącznie jeno w wypadkach obciążenia złożonego, ponieważ w zwykłych wypadkach rozciągania, ściskania, ścinania, skręcania, wyginania i wybaczania przywykliśmy mierzyć nateżenie tworzywa wartością skrajnego dopuszczalnego

^{*}/Patrz: Prof. M.T. HUBER. "Właściwa praca odkształcenia, jako miara wyteżenia materiału" - Lwów 1904.

naprężenia k i według niego wyznaczać wystarczająco mocne wymiary. Z tego jedynie powodu, chcąc ujednolicić rachunek wymiarów w wypadku obciążenia głównego, przypisujemy i tutaj skrajne wydłużenie pewnemu domniemanemu zresztą naprężeniu normalnemu σ_w , które ma jakoby wywołać owo największe wydłużenie główne w myśl prawa HOOKE'A $\sigma_w = E \epsilon_w = \frac{1}{\alpha} \epsilon_w$ gdzie przez ϵ_w oznaczyliśmy bezwzględnie najwyższe naprężenie główne.

W ten sposób określone NAPRĘŻENIE ZASTĘPCZE rozpatrujemy jako miarę właściwą natężenia danego tworzywa. Ten nowowprowadzony sposób, wyznaczania skrajnego dopuszczalnego naprężenia zastępczego σ_w winien być uzgodniony z dawnym. Należy zatem sprawdzić, czy nie zawiera sprzeczności wewnętrznej w zastosowaniu do wyżej wymienionych prostych rodzajów obciążenia. Przy rozciąganiu, ściskaniu, wyginaniu i wybaczaniu prętów prostych powstają naprężenia normalne równoległe do osi pręta, a więc σ_z podczas gdy $\tau = 0$. Wobec tego będziemy mieli $\frac{\epsilon_1}{\alpha} = \sigma_z$, $\frac{\epsilon_2}{\alpha} = -\frac{\sigma_z}{m} = \frac{\epsilon_3}{\alpha}$, zatem $\epsilon_w = \epsilon_1$, a naprężenie zastępcze będzie $\sigma_w = \frac{\epsilon_1}{\alpha} = \sigma_z$. W wypadkach rozciągania, ściskania, gięcia i wybaczania skrajna wartość naprężenia normalnego daje naprężenie zastępcze, należy ją zatem uczynić równą k — dopuszczalnemu naprężeniu danego tworzywa, pisząc $\sigma_w = \sigma_z = k_\sigma$, gdzie k_σ oznacza k_r, k_n, k_g lub k_w . Tutaj więc nowy sposób sprzeczności nie ujawnia.

W pozostałych wypadkach ścinania i skręcania

$\tilde{\sigma}_z = 0$, a naprężenia tnące, według starego sposobu, nie powinno przekraczać k_τ , gdzie przez k_τ oznaczyliśmy k_z lub k_τ . Zatem musi być $\tau = k_\tau$. Ponieważ jednak przy $\tilde{\sigma}_z = 0$, $\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m+1}{m}\tau$, $\frac{\varepsilon_2}{\alpha} = -\frac{m+1}{m}\tau$, $\varepsilon_3 = 0$, przeto $\tilde{\sigma}_w = \frac{m+1}{m}\tau$ czyli $\tilde{\sigma}_w = \frac{m+1}{m}k_\tau$. Jest to pozorna sprzeczność bo przecież we wszystkich bowiem tylko co rozpatrywanych wypadkach miara natężenia tworzywa winna być jednakowa! Że tak jest istotnie możemy się natychmiast przekonać, zważywszy, że $k_\sigma = \frac{m+1}{m}k_\tau$, jakieśmy to w teorii ścinania w ustępie ósmym udowodnili dla ciał jednolitych.

Dla ciał niejednorodnych $k_\sigma \neq \frac{m+1}{m}k_\tau$ możemy przeto napisać $k_\sigma = \frac{m+1}{m}\alpha_0 k_\tau$, gdzie $\alpha_0 = k_\sigma : \left[\frac{m+1}{m}\right]k_\tau$, a przeto we wzorach należy wszędzie pisać $\alpha_0\tau$ miasto τ , co da $\frac{\varepsilon_1}{\alpha} = \frac{m-1}{m}\tilde{\sigma}_z + \frac{m+1}{m}\sqrt{\tilde{\sigma}_z^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}$,
 $\frac{\varepsilon_2}{\alpha} = \frac{m-1}{m}\tilde{\sigma}_z - \frac{m+1}{m}\sqrt{\tilde{\sigma}_z^2 + 4(\alpha_0\tau)^2}$, $\frac{\varepsilon_3}{\alpha} = -\frac{\tilde{\sigma}_z}{m}$.

Ten współczynnik jest zatem we wzorach konieczny, gdy rozpatrujemy tworzywo niejednorodne, nadto jest on konieczny również i wtedy, gdy naprężenia $\tilde{\sigma}_z$ i τ nie są jednakowych rodzajów, gdy dajmy na to $\tilde{\sigma}_z$ pochodzi od sił typu II a τ od obciążenia typu III, jak to najczęściej ma miejsce. Myśl wprowadzenia współczynnika poprawkowego α_0 zawdzięczamy BACHOWI. Dla tworzyw jednolitych i obciążeń jednego typu $\alpha_0 = 1$.

Jako przykład zastosowania tylko co wyprowadzonych

wzorów rozpatrujemy:

§ 20. ŚCINANIE I SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM. W ustępie jedenastym tego rozdziału wyznaczaliśmy skrajną wartość naprężenia tnącego dla przekroju kołowego w postaci $\tau_m = \frac{4}{3} \cdot \frac{R_p}{S}$. Panować ona będzie wzdłuż średnicy prostopadłej do kierunku siły tnącej R_p przekroju. U skrajów tej średnicy mamy nadto skrajną wartość naprężenia wirowego $\tau_w = \frac{M_z R}{J_o}$; Jakę jednokierunkową dają naprężenie wypadkowe. $\tau = \frac{4}{3} \frac{R_p}{S} + \frac{M_z R}{J_o} = \frac{4}{3} \frac{4 R_p}{\pi D^2} + \frac{32 M_z}{\pi D^4} \frac{D}{2} = \frac{16}{\pi D^2} \left[\frac{R_p}{3} + \frac{M_z}{D} \right]$ które

nie powinno przekraczać odpowiedniej wartości dopuszczalnego naprężenia κ_k .

§ 21. SKRĘCANIE I ROZCIĄGANIE LUB SKRĘCANIE I ŚCISKANIE PRĘTÓW O PRZEKROJU KOŁOWYM. Tutaj w obu rodzajach, najwyższa wartość naprężenia wirowego wynosi na obwodzie $\tau = \frac{M_z}{J_o} R$, nadto przy rozciąganiu $\sigma_z = \frac{R_z}{S}$, podczas gdy przy ściskaniu $\sigma_z = -\frac{R_z}{S}$. W pierwszym wypadku będziemy zatem mieli $\sigma_w = \frac{\epsilon_1}{\alpha} = \frac{m-1}{2m} \frac{R_z}{S} + \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{R_z^2}{S^2} + 4 \left(\alpha_o \frac{M_z}{W_o} \right)^2}$, gdzie $\alpha_o = \frac{m \kappa_r}{(1+m) \kappa_k}$, a w drugim $\sigma_w = \frac{\epsilon_2}{\alpha} = -\frac{m-1}{2m} \frac{R_z}{S} - \frac{m+1}{2m} \sqrt{\frac{R_z^2}{S^2} + 4 \left(\alpha_o \frac{M_z}{W_o} \right)^2}$, gdzie: $\alpha_o = \frac{m \kappa_r}{(1+m) \kappa_k}$, — to są bowiem największe bezwzględnie wartości wydłużeń głównych. Dla stali i żelaza zlewnego $m = \frac{10}{3}$, zatem odpowiednio mamy:

$$\sigma_w = 0,35 \frac{R_z}{S} + 0,65 \sqrt{\frac{R_z^2}{S^2} + 4 \left(\alpha_o \frac{M_z}{W_o} \right)^2}, \text{ gdzie } \alpha_o = \frac{\kappa_r}{1,3 \kappa_k} \text{ oraz:}$$

$$\sigma_w = -0,35 \frac{R_z}{S} - 0,65 \sqrt{\frac{R_z^2}{S^2} + 4 \left(\alpha_o \frac{M_z}{W_o} \right)^2}, \text{ gdzie } \alpha_o = \frac{\kappa_r}{1,3 \kappa_k};$$

W obu wypadkach σ_w nie powinno przekraczać skrajnej

depuszczalnej wartości odpowiedniego naprężenia normalnego - przy rozciąganiu i skręcaniu $\sigma_w \leq k_r$, a przy ściskaniu i skręcaniu $\sigma_w \leq k_n$.

§ 22. ZGINANIE I SKRĘCANIE PRĘTÓW O PRZĘKROJU KOŁOWYM.

I tu najwyższa wartość naprężenia wirowego wynosi na obwodzie $\tau_{MAX} = \frac{M_z}{W_o} = \tau$, a skrajna wartość naprężenia gnącego na powierzchni pręta $\sigma_{MAX} = \frac{M_y}{W} = \sigma_z$, zatem dla stali i żelaza zlewne będącymi mieli $\sigma_w = 0,35 \frac{M_y}{W} + 0,65 \sqrt{\frac{M_y^2}{W^2} + 4(\alpha_o \frac{M_z}{W_o})^2}$, gdzie $\alpha_o = \frac{k_g}{1,3 k_n}$. I tu znów należy w skrajnym wypadku uczynić $\sigma_w = k_g$. Ponieważ dla prętów o przekroju kołowym $W = \frac{\pi D^3}{32}$ a $W_o = \frac{\pi D^3}{16}$ zatem $W_o = 2W$, skąd: $W k_g = [0,35 M_y + 0,65 \sqrt{M_y^2 + \alpha_o^2 M_z^2}]$ i ostatecznie otrzymujemy wzór gięcia w zwykłej postaci pisząc $W k_g = M_w$, gdzie przez $M_w = 0,35 M_y + 0,65 \sqrt{M_y^2 + \alpha_o^2 M_z^2}$ oznaczyliśmy tak zwany moment zastępczy. W ten sposób zagadnienie wytrzymałości złożonej dla prętów kołowych w wypadku skręcania połączonego ze zginaniem sprowadzamy sztucznie do wypadku prostego zginania wprowadzając moment zastępczy.

§ 23. SKRĘCANIE ZE ZGINANIEM I ŚCINANIEM PRĘTÓW

O PRZĘKROJU KOŁOWYM. Tutaj skrajne naprężenie tnące będzie na obwodzie $\tau = \frac{16}{\pi D^2} \left[\frac{R_p}{3} + \frac{M_z}{D} \right]$, nadto najwyższe naprężenie gnące na powierzchni pręta $\sigma_z = \frac{M_y}{W} = \frac{32 M_y}{\pi D^3}$. Stąd dla stali i żelaza zlewne $\sigma_w = 0,35 \frac{M_y}{W} + 0,65 \sqrt{\frac{M_y^2}{W^2} + 4 \left(\alpha_o \frac{16}{\pi D^2} \left[\frac{R_p}{3} + \frac{M_z}{D} \right] \right)^2}$, przyczem: $\sigma_w = k_g$ a $\alpha_o = \frac{k_g}{1,3 k_n}$.

§ 24. ZGINANIE PRZY UWZGLĘDNIENIU SIŁ TNĄCYCH.

W ustępie jedenastym niniejszego rozdziału wyznaczaliśmy wartość naprężenia tnącego $\tau = \frac{TF}{2XJ\cos\varphi}$ dla przekroju symetrycznego względem osi Y w wypadku gięcia płaskiego kiedy działa moment M_x i siła tnąca $R_y = T$. Ponieważ przy wyginaniu powstają naprężenia normalne $\sigma_y = \frac{M_x}{J_x} y$, o skrajnej wartości $\sigma_m = \frac{M_x}{W_x}$ zatem największe wydłużenie główne otrzymamy dla prętów żelaznych lub stalowych zlewnych pisząc: $\frac{\epsilon_{max}}{\alpha} = 0,35 \frac{M_x}{W_x} + 0,65 \sqrt{\frac{M_x^2}{W_x^2} + 4\alpha_0^2 \left[\frac{R_y F}{2XJ_x \cos\varphi} \right]^2}$ gdzie $\alpha_0 = \frac{R_y}{1,3 R_k}$. Stąd naprężenie zastępcze $\sigma_w = \frac{\epsilon_{max}}{\alpha}$, należy zatem uczynić $\sigma_w = R_y$ aby pręt czynił zadość wymogom bezpieczeństwa. By uwypuklić wpływ naprężenia tnącego na σ_w BACH wyznaczał wartości σ_y i σ_w dla prętów różnej długości o przekroju prostokątnym i kołowym. Okazało się, że SIŁY TNĄCE WYRAŹNIE ZAZNACZAJĄ SWÓJ WPŁYW LI TYLKO W WYPADKU PRĘTÓW KRÓTKICH - należy je zatem uwzględniać li tylko wtedy.

Na tej zasadzie BACH wypowiada wniosek ogólny, iż krótkie pręty należy liczyć wyłącznie biorąc pod uwagę naprężenia tnące z pominięciem gnących - podczas gdy pręty długie można liczyć tylko na gięcie. Granicę obu wypadków ustala BACH dla prętów o przekroju kołowym stałym zamocowanych jednostronnie a drugostronnie w końcu obciążonych siłą P tnącą, radząc korzystać ze wzoru gięcia płaskiego $PL: \frac{\pi d^3}{32} = R_y$, gdy długość pręta L jest większa od ćwierci jego średnicy d ; oraz

ze wzoru $\frac{4}{3} \cdot \frac{P}{\pi d^2} = k_t$ gdy $L < \frac{d}{4}$. —

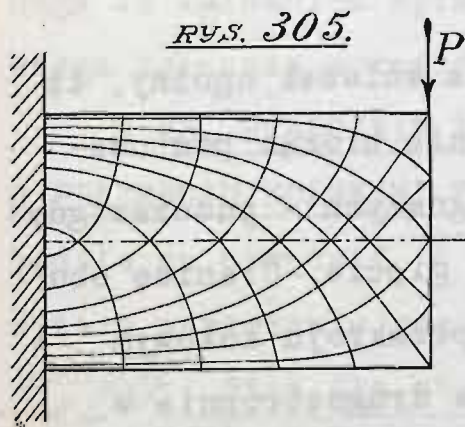
W wypadku pręta o przekroju prostokątnym $b \times h$ tak samo obciążonego należy korzystać ze wzoru na gięcie

$PL : \frac{bh^2}{6} = k_g$ gdy $L > 0,325h$, w razie przeciwnym

- liczyć pręt wyłącznie tylko na ścinanie według wzoru:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh} = k_t. —$$

W obu wypadkach skrajne wartości L leżą nader nisko, tak krótkie pręty są nader rzadko używane możemy zatem śmiało pomijać siły tnące przy rozpatrywaniu zwykłych zagadnień praktycznych. Natomiast w wypadkach szczególnych przy nader nieznacznej długości prętów należy każdorazowo uzewnętrznąć wpływ sił tnących i o ile są znaczne, włączyć do rachunku. Dla krótkiego pręta o przekroju prostokątnym prof. BLUMENTHAL wyznaczył oba główne naprężenia dla całego szeregu punktów i połączył jednoimienne naprężenia jednakowe krzywymi. Wynik tej pracy podaje RYS. 305. Widzimy tu dwa roje krzywych



przecinających się pod kątem prostym, co jest oczywiście konieczne bo naprężenia główne są zawsze prostopadłe do siebie. Ten zatem układ naprężeń zasadniczo odbiega od zwykłego układu naprężeń gnących - tutaj bo-

wiem linie równych naprężeń wyraźnie pochylają się ku środkowi pręta na tle działania sił tnących, podczas gdy w wypadku prostego zginania linie równych naprężeń

biegną równolegle do osi pręta o stałym przekroju. Taki sam zmacony obraz naprężeń gnących ujawniają skrajne końcowe przekroje każdego pręta zginanego w sąsiedztwie podpór, tam bowiem wartość momentu gnącego jest stosunkowo jeszcze niewielka wobec nieznaczących wymiarów ramienia, a siła tnąca działa w całej pełni. Stąd prawo praktyczne, że na końcach prętów zginanych w sąsiedztwie podpór należy brać pod uwagę naprężenia tnące przy wyznaczaniu bezpiecznych wymiarów pręta. Dotyczy to zwłaszcza czopów wałów zginanych.~

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEGA SIĘ!

Druga część tego kursu wyjdzie drukiem na prawach rękopisu.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

Ustalenie pojęć zasadniczych	3
--	---

ROZDZIAŁ II.

Teorja rozciągania	30
Teorja ściskania	85
Prawa BAUSCHINGER`A i WOEHLER`A	113
Zastosowania	123

ROZDZIAŁ III.

Teorja ścinania	146
Zastosowania	174

ROZDZIAŁ IV.

Teorja skręcania prętów kołowych	189
Skręcanie prętów innych przekrojów	226
Zastosowania	228

ROZDZIAŁ V.

Momenty przekrojów płaskich	247
Napężenia gnące	271
Rdzeń przekroju	291
Odkształcenia gnące	318
Gięcie płaskie	334
Zastosowania	342
Twierdzenia o trzech momentach	399
Wzór CLERC`A	404
Belki wieloprzęsłowe	412.

Gięcie ukośne	426
Gięcie mimośrodowe	431

ROZDZIAŁ VI.

Eulerowska teoria wyboczenia	445
Wzory TETMAJERA	470
Obliczanie prętów na wyboczenie	476
Wzór Navier	482

ROZDZIAŁ VII.

Podstawy teorii sprężystości	485
Napężenia główne	505
Napężenia tnące prętów płasko zginanych	508
Belki złożone i blachownice	526
Sprężysta teoria odkształceń	534
Wydłużenia główne	542
Napężenia zastępcze	550
Wytrzymałość złożona	553

*Nakładem
Komisji Wydawniczej
Bratniej Pomocy
Politechniki Warszawskiej.*

*Stronę wydawniczą niniejsze-
go kursu łącznie z rysunkami
prowadził Syxtus Lewicki.*