

W KURSIE ĆWICZEŃ podajemy krótką teorię żelbetu i liczbowy przykład obciążonego słupa. Na tym kończymy teorię obciążeń osiowych.

## R O Z D Z I A Ł   T R Z E C I.

### T E O R J A   Z C I N A N I A.

#### § 1. WYZNACZENIE SKŁADOWYCH NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH.

Rozpatrujemy wyżej zaznaczony w ustępie szóstym zagajenia kursu wypadek „B”, kiedy zewnętrzny układ sił odkształcających  $E'$  sprowadza się do siły pojedynczej  $R_p$  leżącej w przekroju płaskim ciała jednolitego odkształconego, a przyłożonej do środka masy tego przekroju. Wobec zupełnej dowolności wyznaczenia osi  $OX, OY$ , leżących w przekroju, możemy oś  $OX$  SKIEROWAĆ PO  $R_p$ , wtedy będziemy mieli  $R_x = R_p \neq 0$ ,  $R_y = R_z = 0$  oraz  $M_x = M_y = M_z = 0$ , a wzory (B) tylko co wspomnianego ustępu otrzymają postać  $t_x = Ax + \frac{R_x}{S}$ ;  $t_y = Ay$ ;  $t_z = 0$ , gdzie  $U_x = Ax$  oraz  $U_y = Ay$ , ponieważ, jak to już wiemy  $U_x = \frac{v}{\rho} x$ ,  $U_y = \frac{v}{\rho} y$  a zaś  $A = \frac{v}{\rho}$ . Tutaj więc naprężenie jednostkowe może być rozpatrywane, jako summa składowych:

1-o.  $W$ , LEŻĄCEJ W PRZEKROJU I RÓWNOLEGŁEJ DO OSI  $OX$ , RÓWNEJ  $W = R_x : S$ . Ta wartość składowej  $W$ , STAŁA DLA WSZYSTKICH PUNKTÓW PRZEKROJU, jest proporcjonalna do siły odkształcającej i odwrotnie proporcjonalna do

pola przekroju.

2-o.  $\mathcal{U}$ , LEŻĄCEJ W PRZEKROJU NA PRZEDŁUŻENIU PROMIENIA WODZĄCEGO JAKIEGOKOLWIEK PUNKTU TEGO PRZEKROJU. Naprężenia  $\mathcal{U}$ , jako skierowane dośrodkowo lub odśrodkowo w przekroju mogą świadczyć o skróceniach lub o wydłużeniach promieni wodzących przekroju, co niewątpliwie powodować może wyłącznie odpowiednie zważania lub rozszerzania przekroju symetryczne względem osi  $OZ$ . Wiemy ponadto, że współczynnik  $A$  nie daje się wyznaczyć z równań statyki; jedynie doświadczenie może podać wartość tej składowej naprężenia.

Aczkolwiek wypadek tu rozpatrywany nader trudno zbadać doświadczalnie bezpośrednio, to jednak z całą pewnością można stwierdzić ZUPEŁNY BRAK jakiegokolwiek zważania się lub rozszerzania przekroju, co świadczy o wartości  $A=0$  w powyżej otrzymanych wzorach. Mamy więc ostatecznie dla danego wypadku  $\epsilon_x = R_x/S$ ;  $\epsilon_y = \epsilon_z = 0$ .

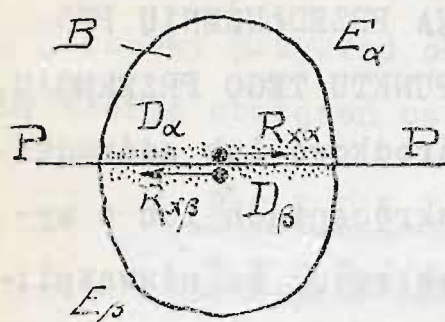
Pozostaje nam jeszcze określić, jaki układ sił zewnętrznych warunkuje obciążenie przekroju siłą  $R_x$ ; w tym celu rozpatrujemy:

## § 2. ROZKŁAD NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH W PRZEKROJU PŁASKIM CIAŁA OBCIĄŻONEGO.

Weźmy pod uwagę jakąkolwiek bryłę odkształconą  $B$ , a więc pozostającą pod jarzmem sił zewnętrznych. /rys. 103/. Dowolny przekrój płaski  $PP$ , przez bryłę przeprowadzony, dzieli obciążenie zewnętrzne na dwa układy sił odkształcających  $E_\alpha$  i  $E_\beta$ , które w danym



RYS. 103.



wypadku sprowadzają się do sił  $R_x$ , leżących w przekroju. To znaczy, że układ  $E_\alpha$  sprowadzić się daje do siły pojedynczej

$R_{x\alpha}$ , a układ  $E_\beta$  do siły  $R_{x\beta}$ . Ponieważ  $\bar{E}_\alpha + \bar{E}_\beta = 0$ , zatem i

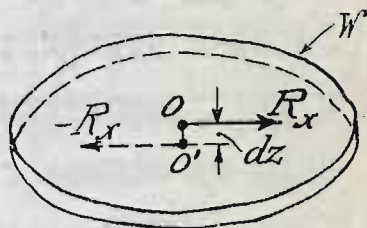
$$R_{x\alpha} + R_{x\beta} = 0 \quad , \text{ CZYLI, ŻE SIŁY}$$

TE SĄ RÓWNE, LECZ SKIEROWANE PRZECIWNIE, PRZYZCZEM SIŁA  $R_{x\alpha}$  RÓWNOWAŻY UKŁAD NAPRĘŻEŃ  $D_\beta$  DOLNEJ WARSTWY CZĄSTECZEK PRZEKROJU, A WIĘC SIEDLISKUJE W GÓRNEJ WARSTWIE CZĄSTEK, PODCZAS, GDY SIŁA  $R_{x\beta}$ , JAKO RÓWNOWAŻĄCA UKŁAD NAPRĘŻEŃ  $D_\alpha$  GÓRNEJ WARSTWY CZĄSTECZEK PRZEKROJU, SIEDLISKUJE W DOLNEJ WARSTWIE CZĄSTEK PRZEKROJU  $PP$ . Wyżej mówiliśmy, że siły  $R_x$  leżą w przekroju - należy więc wyrażać się nieco ściślej, a mianowicie mówić, że siła  $R_{x\alpha}$ , JAKO WYPADKOWA GÓRNEGO UKŁADU SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH, LEŻY NA GÓRNEJ POWŁOCE, A SIŁA  $R_{x\beta}$  - WYPADKOWA UKŁADU DOLNEGO SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH - NA DOLNEJ POWŁOCE PRZEKROJU.

Przypisujemy więc przekrojom ciała PEWNĄ GRUBOŚĆ, co zresztą zupełnie odpowiada istotnym warunkom, bo PRZEKRÓJ MATERJALNY jako wyobrażalna płaszczyzna, przechodząca przez ciało, istnieje tylko o tyle, o ile wyobraża granicę DWÓCH POWŁÓK CZĄSTECZKOWYCH, DOTYKAJĄCYCH SIĘ WZDŁUŻ POWIERZCHNI DOTYKU. Odległość obu powłók, chociaż nader znikoma, to przecież istotna - PORZĄDKU odległości międzycząsteczkowych.

Właściwie mówiąc, miasto przekroju płaskiego rozpatrujemy myślowo wyodrębnioną w bryle PŁYTKĘ  $W$  PŁASKĄ, o znikomej grubości  $dx$ , OBCIĄŻONĄ NA POWŁOCE GÓRNEJ siłą  $R_x$ , leżącą w powłoce, oraz siłą  $-R_x$ , leżącą w DOLNEJ POWŁOCE. Obie te siły są równe i równoległe, choć skierowane przeciwnie; siła  $R_x$  przyłożona jest do środka masy  $O$  - górnej powłoki, a siła  $-R_x$  do środka masy  $O'$  dolnej. Wobec znikomej wartości  $dx$ , obie powłoki stanowią właściwie jeden i ten sam przekrój materialny przeto środki  $OO'$  muszą leżeć na wspólnej prostopadłej do obu przekrojów.

Rys. 104.



Układ sił  $R_x$  i  $-R_x$  nazywamy zazwyczaj OBCIĄŻENIEM TNĄCEM, a naprężenia na tle tych sił powstające - NAPRĘŻENIAMI TNĄCEMI przekroju płaskiego odkształconego. Znaczenie tej nazwy zrozumiemy łatwo rozpatrując:

### § 3. ODKSZTAŁCENIA KOSTKI ELEMENTARNEJ, OBCIĄŻONEJ NAPRĘŻENIAMI JEDNOSTKOWEMI TNĄCEMI.

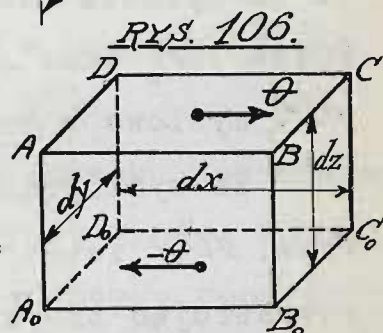
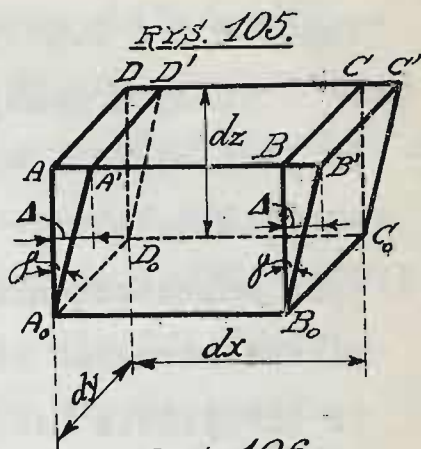
Gdziekolwiek w tylko co rozpatrywanym przekroju wyodrębniamy myślowo KOSTKĘ ELEMENTARNĄ -  $dx$  DŁUGĄ,  $dy$  SZEROKĄ i  $dz$  - WYSOKĄ. Górna ścianka  $ABCD$  tej kostki stanowi POLETKO  $dx dy$  GÓRNEJ POWŁOKI przekroju, dolna jej ścianka  $A_0B_0C_0D_0$  także POLETKO  $dx dy$  - DOLNEJ POWŁOKI. Ponieważ płytkę  $W$  możemy myślowo wyodrębnić w ciele odkształconem zarówno jak i w ciele nieodkształconem, przeto i kostka tylko co rozpatrywana może sta-



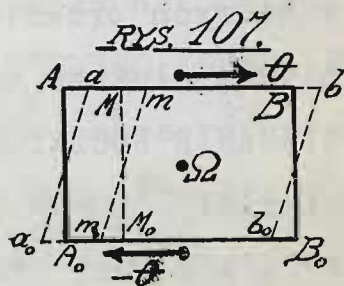
nowić cząstkę ciała odkształconego, jakoteż i nieodkształconego. Zakładamy początkowo, że kostka  $ABCD$   $DA_0B_0C_0D_0$  /rys. 105/ STANOWI CZĄSTKĘ PRZEKROJU MATERIALNEGO NIEODKSZTAŁCONEGO, i że ją OBCIĄŻAMY NAPRĘŻENIAMI JEDNOSTKOWYMI  $\frac{t_x}{x}$ , ORAZ  $-\frac{t_x}{x}$  PANUJĄCYMI ODPOWIEDNIO NA GÓRNEJ I DOLNEJ ŚCIANKACH KOSTKI. Na górne poletko  $ABCD$  kostki działa więc siła elementarna  $\theta = \frac{t_x}{x} dx dy$ , RÓWNOLEGLA DO BOKU  $dx$  KOSTKI, podczas gdy poletko dolne  $A_0B_0C_0D_0$  kostki równocześnie znajduje się pod jarzmem siły elementarnej  $-\theta = -\frac{t_x}{x} dx dy$ , równej, choć skierowanej przeciwnie /rys. 106/. Jasne jest, że WYPADKOWA OBU TYCH SIŁ RÓWNA SIĘ ZERU, stąd wniosek bezpośredni, że PODCZAS OBCIĄŻANIA PRZEKROJU NAPRĘŻENIAMI TNĄCYMI  $\frac{t_x}{x}$  i  $-\frac{t_x}{x}$  ROZPATRYWANA KOSTKA POZOSTANIE NIERUCHOMĄ - NIE ZMIENI SWEGO POŁOŻENIA W PRZEKROJU W STOSUNKU DO INNYCH CZĄSTEK - SZEŚCIANÓW PRZEKROJU. To znaczy innymi słowy, że ŚRODEK MASY  $\Omega$  KOSTKI JEST NIERUCHOMY W PRZEKROJU PODCZAS OBCIĄŻANIA - MOŻLIWE SA WIĘC JEDYNNIE I WYŁĄCZNIE RUCHY ŚCIANEK KOSTKI WZGLĘDEM TEGO ŚRODKA  $\Omega$ , ORAZ - RUCHY MIĘDZYCZĄSTECZKOWE, CZYLI ODKSZTAŁCENIA KOSTKI.

Biorąc pod uwagę rodzaj obciążenia kostki, możemy wywnioskować bezpośrednio, że ŚCIANKI JEJ GÓRNE I DOLNE NIE MOGĄ ULEDEZ ODKSZTAŁCENIOM, BO NA KAŻDĄ Z TYCH ŚCIAN DZIAŁA LI TYLKO POJEDYŃCZA SIŁA, A NIE ZRÓWNOWAŻONY UKŁAD SIŁ, który jedynie i wyłącznie może wywołać odkształcenie, jakieśmy to ustalili w roz-

działe pierwszym niniejszego kursu. POLA TE MOGĄ więc JENO PRZESUNĄĆ SIĘ WZGLĘDEM ŚRODKA MASY  $\Omega$  KOSTKI W KIERUNKU DZIAŁANIA SIŁ  $\theta$  i  $-\theta$ , przyczem poletko górne przesunie się z  $AB$  do  $a'b'$ , a dolne z  $A_0B_0$  do  $a_0b_0$  (rys. 107). Inaczej mówiąc, poletko górne przesunie się w kierunku działania siły  $\theta$  WZGLĘDEM DOLNEGO poletka o odcinek  $\Delta = Aa + A_0a_0 = Bb + B_0b_0 = AA' = BB' = CC' = DD'$  podany perspektywicznie na rys. 105.



ODCINEK  $\Delta$  NAZYWAMY PRZESUNIĘCIEM GÓRNEGO POLETKA KOSTKI WZGLĘDEM DOLNEGO. To przesunięcie wyznacza KĄT PRZESUNIĘCIA  $\gamma =$



$= \angle AA_0A' = \angle BB_0B'$ , przyczem  $\tan \gamma = \Delta : dz$ , a zatem WARTOŚĆ  $\tan \gamma$  JEST MIARĄ PRZESUNIĘCIA, czyli MIARĄ ODKSZTAŁCENIA KOSTKI.-

Wobec nader nieznaczących wartości odkształceń tworzyw stosowanych w technice możemy bez znacniejszego błędu napisać wprost  $\gamma = \Delta : dz$ , gdzie KĄT  $\gamma$  WYZNACZAMY W NATURALNEJ MIERZE KĄTÓW, to jest w radjanach I NAZYWAMY PRZESUNIĘCIEM JEDNOSTKOWYM GÓRNEGO POLETKA KOSTKI WZGLĘDEM DOLNEGO lub wprost przesunięciem jednostkowym. Kąt  $\gamma$  stanowi więc MIARĘ ODKSZTAŁCENIA SIŁ



TNĄCYCH  $\theta$  I ROŚNIE WRAZ Z NIEMI.

Tutaj z samej natury rzeczy powstaje pytanie, jaka jest granica wzrostu  $\gamma$ , inaczej mówiąc, w jaki sposób powstają siły naprężeń międzycząsteczkowych, hamujące odkształcenia sił tnących, które mogłyby niewątpliwie wzrastać nieograniczenie bez tej przeszkody.

TE NAPRĘŻENIA HAMUJĄCE POWSTAJĄ NA TLE WYDŁUŻANIA SIĘ ŚCIAN  $AA_0$  oraz  $BB_0$ , lub jakiejkolwiek im równoległej  $MM_0$  myślowo w kostce przeprowadzonej /rys. 104/.

Że wydłużenia bocznych ścian  $ADDA_0$  oraz  $BCC_0B_0$  /rys. 105/ istotnie mają miejsce, przekonywamy się, rozpatrując trójkąty prostokątne  $AA_0A'$  oraz  $BB_0B'$  w których przeciwprostokątne  $A_0A'$  oraz  $B_0B'$  są niewątpliwie dłuższe od przyprostokątnych  $AA_0$  i  $BB_0$ . NA ROZCIĄGANIE BOCZNYCH ŚCIAN, ORAZ ŚCIAN  $MM_0$  KOSTKI ZUŻYWAMY SIŁY  $\theta$  i  $-\theta$ ; ROZCIĄGANIE TO TRWA DOPÓTY, PÓKI POWSTAJĄCE PRZY TEM NAPRĘŻENIA NIE ZRÓWNOWAŻĄ DZIAŁANIA SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH  $\theta$  i  $-\theta$ . O ILE WOGÓLE TAKI STAN RÓWNOWAGI JEST MOŻLIWY, W PRZECIWNYM BOWIEM RAZIE PRZESUNIĘCIA  $\Delta$ , ROSNĄC NIEOGRANICZENIE, DADZĄ NADMIERNE WARTOŚCI WYDŁUŻEŃ ŚCIAN  $AA_0$ ,  $BB_0$  ORAZ  $MM_0$ , które będziemy krótko nazywać ŚCIANAMI ZMIENNEMI. PRZY DOSTATECZNIE WIELKIEJ WARTOŚCI  $\theta$  ŚCIANY TE ULEGNĄ ROZERWANIU - A KOSTKA - ZNISZCZENIU NA TLE DZIAŁANIA SIŁ TNĄCYCH. Tylko co tutaj opisane wydłużenia zachodzą w całej masie kostki równoległe do jej bocznych ścian zmiennych, każda bowiem myślowo we wnętrzu kostki prze-

prowadzona ścianka  $MM_0$  równoległa do  $AA_0$  i do  $BB_0$  - przy odkształceniu POCHYŁA SIĘ I WYDŁUŻA, PRZECHODZĄC w  $mm_0$ /rys. 1071, Na tle przesunięcia  $\Delta = Mm + M_0m_0$ .

Biorąc pod uwagę wszystko to, cośmy dotychczas powiedzieli, dochodzimy do wniosku, że KOSTKA PROSTA ODKSZTAŁCA SIĘ W UKOŚNĄ POD DZIAŁANIEM SIŁ TNĄCYCH. W rozpatrywanym wypadku pierwotnie prosta kostka  $ABCD A_0 B_0 C_0 D_0$  odkształciła się w ukośną  $A'B'C'D'$   $DA_0 B_0 C_0 D_0$ , jak to wskazano na rys. 105.

Rozumując w zupełnie ten sam sposób, dochodzimy również do przekonania, że PIERWOTNIE UKOŚNĄ KOSTKĄ  $A'B'C'D A_0 B_0 C_0 D_0$  ODKSZTAŁCA SIĘ W KOSTKĘ PROSTĄ  $ABCD A_0 B_0 C_0 D_0$ , O ILE ZMIENIMY KIERUNEK DZIAŁANIA SIŁ TNĄCYCH, TO JEST O ILE DO DNA GÓRNEGO KOSTKI PRZYŁOŻYMY SIŁĘ  $-\theta$ , A DO DNA DOLNEGO  $\theta$ , obie równoległe do boku  $dx$  kostki. W danym wypadku jednak zamiast rozciągania ścian  $ADDA_0$  oraz  $BC'CB_0$  ZMIENNYCH - zachodzi tu ściskanie, wywołujące naprężenia hamujące. W ten sposób możemy ponownie otrzymać pierwotny kształt kostki, zmieniając w kostce odkształconej kierunek działania sił. Stąd wniosek bezpośredni: MOŻEMY Z GÓRY ZAWSZE WYZNACZYĆ KOSTKĘ UKOŚNĄ NIEODKSZTAŁCONĄ KTÓRA PO ODKSZTAŁCENIU STAJE SIĘ KOSTKĄ PROSTĄ, będzie to kostka  $A'B'C'D A_0 B_0 C_0 D_0$ , jakieśmy to widzieli wyżej. Możemy więc dowolnie rozpatrywać kostki nieodkształcone pierwotnie ukośne lub proste; kąt  $\gamma$  należy dobierać zawsze w taki sposób, aby po odkształceniu



ukośna kostka stała się prostą; nie trzeba chyba nadmieniać, że kostka pierwotnie prosta po odkształceniu stanie się ukośną i wyznaczy szukaną wartość kąta  $\gamma$  dla pierwszej kostki. Rozpatrujemy z kolei

#### § 4. ODKSZTAŁCENIA SZEREGU KOSTEK ELEMENTARNYCH NA TLE OBCIĄŻENIA TNĄCEGO.

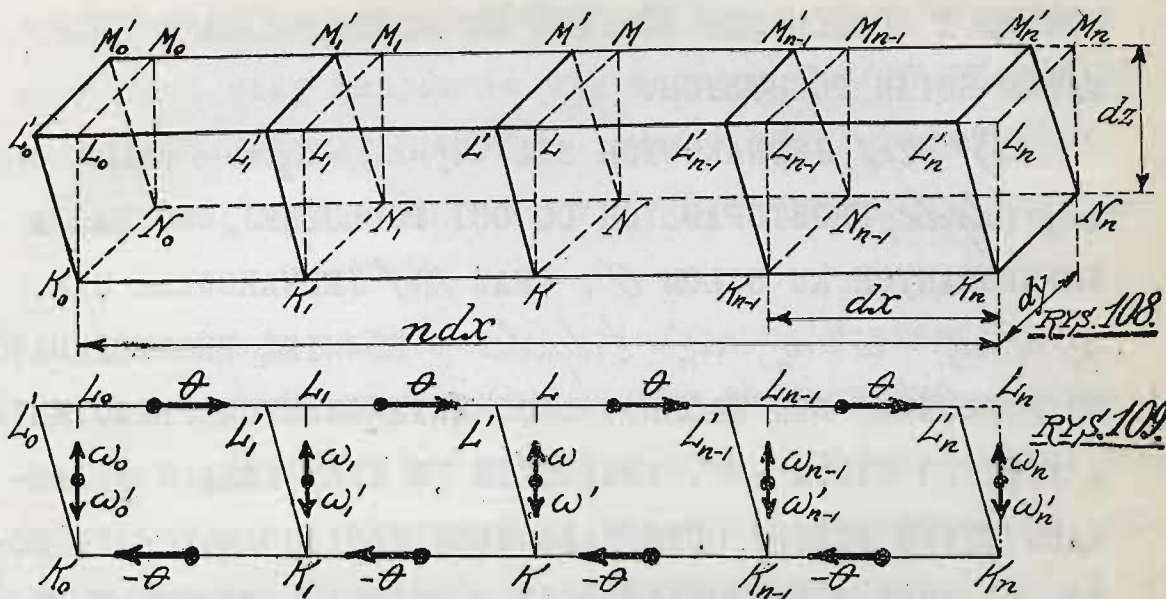
Weźmy pod uwagę  $\bar{n}$  jednakowych KOSTEK PIERWOTNIE UKOŚNYCH w stanie nieodkształconym, ustawionych w szereg prosty tak, aby ich boczne ściany pochyłe zlewały się ze sobą, tworząc w ten sposób WŁÓKNO PODŁUŻNE - *nd* DŁUGIE O POPRZECZNYM PRZEKROJU - *dy* SZEROKIM A *dz* WYSOKIM /rys. 108/.

Przyłożmy do górnych pooletek kostek SIŁY  $\sigma$ , a do dolnych SIŁY  $-\sigma$ , równoległe do osi podłużnej włókna, a OBRÓCONE KU WIERZCHOŁKOM OSTRYCH KĄTÓW ŚCIAN POCHYŁYCH, jak to wskazuje widok boczny włókna /rys. 109/. WSPÓLNE DZIAŁANIE TYCH SIŁ SPOWODUJE PRZESUNIĘCIA

$$\Delta = L L' = L_1 L'_1 = L_2 L'_2 = \dots = L_{n-1} L'_{n-1} = L_n L'_n = M M' = M_1 M'_1 = \\ = M_2 M'_2 = \dots = M_{n-1} M'_{n-1} = M_n M'_n \quad \text{GÓRNYCH POLETEK}$$

WZGLĘDEM DOLNYCH, ORAZ TOWARZYSZĄCE IM SKRÓCENIA ŚCIAN BOCZNYCH POCHYŁYCH  $L'_1 M'_1 N'_1, K'_1 L'_1 M'_1 N'_1, K'_2 L'_2 M'_2 N'_2, \dots, K'_{n-1} L'_{n-1} M'_{n-1} N'_{n-1}, K'_n L'_n M'_n N'_n$ , przyczem DOBIERAMY KOSTKI PIERWOTNIE UKOŚNE W TAKI SPOSÓB, ABY PO ODKSZTAŁCENIU PRZESZŁY W PROSTE.

Wobec ustalenia RÓWNOWAGI ODKSZTAŁCONEJ, naprężenia powstałe w ścianach bocznych odkształconych MUSZĄ RÓWNOWAŻYĆ działanie sił odkształcających. Oznacz-



my NAPRĘŻENIE JEDNOSTKOWE ŚCIAN POCHYLECH PIERWOTNIE przez  $\epsilon$ . Po odkształceniu ściany pochyłe wyprostowały się i przeszły w ściany  $K_0 L_0 M_0 N_0, K_1 L_1 M_1 N_1, K L M N, \dots K_n L_n M_n N_n$ , SIŁY NAPRĘŻEN BĘDĄ WIĘC RÓWNE  $\omega = \epsilon dz dy$ . A KAŻDA ŚCIA- NA TYLKO CO WYMIENIONA BĘDZIE SIEDLISKIEM DWÓCH TAKICH SIŁ RÓWNYCH I SKIEROWANYCH NA ZEWNĄTRZ KOSTKI, A WIĘC DZIAŁAJĄCYCH W KIERUNKACH PRZECIWNÝCH. W danym wypad- ku rzeczono ściany prostując się uległy skróceniu: to odkształcenie musiało więc wywołać naprężenia przeciw- działające, a więc skierowane na zewnątrz kostki.

W ten sposób na  $N$  KOSTEK WŁÓKNA PODŁUŻNEGO ODKSZ- TALCONEGO DZIAŁA:

1<sup>o</sup>  $N$  JEDNAKOWYCH SIŁ  $\theta = \epsilon dx dy$  RÓWNOLEGŁYCH DO PO- DŁUŻNEJ OSI WŁÓKNA, PRZYŁOŻONYCH DO GÓRNYCH ŚCIANEK KO- STEK I OBRÓCONYCH KU WIERZCHOŁKOM OSTRYCH KĄTÓW ŚCIAN POCHYLECH.

2<sup>o</sup>  $N$  JEDNAKOWYCH SIŁ  $-\theta = -\epsilon dx dy$ , RÓWNOLEGŁYCH DO PODŁUŻNEJ OSI WŁÓKNA, A PRZYŁOŻONYCH DO DOLNYCH ŚCIANEK



KOSTEK I OBRÓCONYCH RÓWNIEŻ KU WIERZCHOŁKOM OSTRYCH  
KĄTÓW ŚCIAN POCHYŁYCH.

3<sup>o</sup>  $n+1$  JEDNAKOWYCH SIŁ  $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega = \dots = \omega_{n-1} = \omega_n = t dy dz$ , PROSTOPADŁYCH DO OSI PODŁUŻNEJ WŁÓKNA, A SKIEROWANYCH KU SIŁOM  $\theta$ , ORAZ  $n+1$  JEDNAKOWYCH SIŁ  $\omega'_0 = \omega'_1 = \omega'_2 = \dots = \omega' = \omega'_{n-1} = \omega'_n = t dy dz$  - RÓWNIEŻ PROSTOPADŁYCH DO PODŁUŻNEJ OSI WŁÓKNA, LECZ SKIEROWANYCH PRZECIWNIE, A WIĘC KU SIŁOM  $-\theta$ . WSZYSTKIE TE SIŁY LEŻĄ W ŚCIANKACH STYKU KOSTEK ODKSZTAŁCONYCH SĄSIADUJĄCYCH ZE SOBĄ, TO JEST W ŚCIANKACH  $K_0 L_0 M_0 N_0, K_1 L_1 M_1 N_1, \dots, K L M N, \dots, K_n L_n M_n N_n$ .

4<sup>o</sup> PONADTO SIŁY  $\theta$  I  $-\theta$  DAJĄ  $n$  MOMENTÓW JEDNAKOWYCH I JEDNOKIERUNKOWYCH  $\theta dx = t_x dx dy dz$  A Z POŚRÓD  $2n+2$  SIŁ POZOSTAŁYCH  $-n$  PAR SIŁ  $\omega_0 i \omega_1, \omega_1 i \omega_2, \dots, \omega_{n-1} i \omega_n$  DAJE RÓWNIEŻ  $n$  JEDNAKOWYCH MOMENTÓW  $\omega dx = t dy dz dx$ , LECZ DZIAŁAJĄCYCH KIERUNKOWO ODWROTNIE, wreszcie

5<sup>o</sup>. SIŁY  $\omega_0 i \omega_n$  TWORZĄ Z KOLEI PARĘ O MOMENCIE  $\omega n dx = n t dx dy dz$  DZIAŁAJĄCYM W TYM SAMYM KIERUNKU, CO I MOMENTY  $\theta dx$ . WOBEC ISTNIENIA RÓWNOWAGI ODKSZTAŁCONEJ WSZYSTKIE SIŁY TYLKO CO WYMIIENIONE WINNY SIĘ ZNOŚĆ WZAJEMNIE. Dla sił warunek ten wypełnia się sam przez się, ponieważ siły  $\omega_0 i \omega'_0, \omega_1 i \omega'_1, \dots, \omega i \omega' \dots \omega_{n-1} i \omega'_{n-1}, \omega_n i \omega'_n$  wzajemnie się znoszą, a siłom górnym  $\theta$  odpowiadają dolne  $-\theta$ . Ponadto dla każdej kostki możemy napisać warunek równowagi momentów w postaci  $\theta dx = \omega dx$ , ZWAŻYWSZY, ŻE MOMENTY SIŁ  $\theta$  I  $\omega$  SĄ RÓŻNOSKRĘTNE. Wobec  $t_x dx dy dz = t dx dy dz$  mamy  $t = t_x$  JAKO WARUNEK RÓWNOWAGI





kien otrzymujemy PŁYTKĘ PŁASKĄ PROSTOKĄTNĄ, złożoną z  $mn$  kostek pierwotnie ukośnych. Długość podstawy tej płytki będzie  $ndx$ , a szerokość  $-mdy$ . Wysokość płytki w kierunku prostopadłym do podstawy będzie  $dx$ . Oznaczmy przez  $S$  powierzchnię GÓRNĄ  $A'B'C'D'$ , zaś DOLNĄ  $A_0B_0C_0D_0$  płytki ukośnej nieodkształconej. Stąd mamy  $S = ndx \cdot mdy = nmdxdy$  i przyłożmy do górnych poletek, stanowiących wspólnie pole  $S$   $mn$  sił elementarnych  $\theta = t_x dx dy$ , leżących w polu  $S$ . Ponadto do dolnych poletek przyłożmy również  $mn$  sił elementarnych  $-\theta = -t_x dx dy$ , leżących w polu  $A_0B_0C_0D_0$  /rys. 110 i 111/. Wszystkie te siły niech będą równe i równoległe do  $dx$ . Pod ich działaniem PŁYTA WYPROSTUJE SIĘ przyjmując kształt  $ABCD A_0B_0C_0D_0$ , bo pierwotne kostki ukośne dobraliśmy tak, aby po odkształceniu przeszły w proste.

Odkształcenie płyty polega więc na przesunięciu pola górnego płyty względem pola dolnego o  $\Delta = AA' = BB' = CC' = DD' = OO'$ . -

Płyta odkształcona zachowywać będzie nadal równowagę odkształconą pod jarzmem układu złożonego.

1-o Z ROJU SIŁ GÓRNYCH  $\theta$ , DAJĄCYCH SKŁADOWĄ

$$R_x = \sum \theta = mnt_x dx dy = t_x mndxdy = t_x S.$$

2-o Z TAKIEGOŻ ROJU SIŁ DOLNYCH  $-\theta$  O SKŁADOWEJ

$$-R_x = -t_x S \text{ SKIEROWANEJ PRZECIWNIE oraz}$$

3-o Z MOMENTU  $mnw dx = mnt_x dx dy dz = R_x dz$ ,

co wypływa bezpośrednio z rozpatrywań ustępu poprzedniego. SIŁY  $R_x$  i  $-R_x$ , jako przyłożone do środków masy

pól  $A'B'C'D'$  oraz  $A_0B_0C_0D_0$  PO ODKSZTAŁCENIU BĘDĄ PRZYŁOŻONE DO PUNKTÓW  $O$  i  $O_0$ , ŚRODKÓW MASY PÓŁ  $ABCD$  i  $A_0B_0C_0D_0$ ; punkty  $O$  i  $O_0$  leżą na wspólnej prostopadłej do obu tych pól, które nazwiemy PODSTAWAMI PŁYTKI.

Przed odkształceniem środek masy górnej podstawy leżał pierwotnie w punkcie  $O'$ , przesunął się więc również o  $\Delta = OO'$  w kierunku działania siły  $R_x$ . Na zasadzie dotychczas otrzymanych wyników możemy wypowiedzieć wniosek następujący:

PŁYTKA ZNIKOMEJ GRUBOŚCI, PROSTOKĄTNA O RÓWNOLEGŁYCH I RÓWNYCH PODSTAWACH GÓRNEJ I DOLNEJ, OBCIĄŻONA JEDNOSTAJNIE WZDŁUŻ PODSTAW DWOMA RÓŻNOKIERUNKOWYMI SIŁAMI SIŁ JEDNOSTKOWYCH, SPROWADZAJĄCYMI SIĘ DO DWÓCH SIŁ JEDNAKOWYCH, PRZYŁOŻONYCH DO ŚRODKÓW MASY PODSTAW I LEŻĄCYCH W PODSTAWACH, A SKIEROWANYCH PRZECIWNIE, ORAZ MOMENTEM RÓWNOWAŻĄCYM PARĘ TYCH SIŁ - ULEGA DZIAŁANIU ZRÓWNOWAŻONEGO UKŁADU SIŁ TNĄCYCH I ODKSZTAŁCA SIĘ POD JARZMEM TYCH SIŁ.

TO ODKSZTAŁCENIE UJAWNIA PRZESUNIĘCIA JEDNAKOWE DLA WSZYSTKICH PUNKTÓW PODSTAWY GÓRNEJ, A ZACHODZĄCE W KIERUNKU DZIAŁANIA SIŁ TNĄCYCH I RÓWNE PRZESUNIĘCIU ŚRODKA MASY TEJ PODSTAWY.

Przechodząc z kolei do ogólnego wypadku obciążenia tego samego rodzaju, bierzemy pod uwagę:

§ 6. ODKSZTAŁCENIA PRZEKROJU PŁASKIEGO BRYŁY DOWOLNEGO KSZTAŁTU NA TLE OBCIĄŻENIA TNĄCEGO.

Weźmy pod uwagę bryłę *B*/rys. 112/ dowolnego kształ-



tu, pozostająca pod jarzmem sił zewnętrznych, i zakładamy, że w tej bryle po odkształceniu można wyznaczyć dwa przekroje płaskie a równoległe, znikomo odległe o  $dz$ aby:

1-o. ŚRODKI MAS OBU TYCH PRZEKROJÓW LEŻAŁY NA WSPÓLNEJ PROSTOPADŁEJ DO OBU PRZEKROJÓW, aby

2-o. UKŁADY SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH ZEWNĘTRZNYCH SPROWADZAŁY SIĘ DO WYPADKOWYCH  $R_x$  oraz  $R'_x = R_x + dR_x$ , RÓWNOLEGŁYCH I PROSTOPADŁYCH DO TEJ WSPÓLNEJ PROSTOPADŁEJ, A PRZYŁOŻONYCH DO ŚRODKÓW MASY OBU PRZEKROJÓW LECZ SKIEROWANYCH PRZECIWNIE: wreszcie aby:

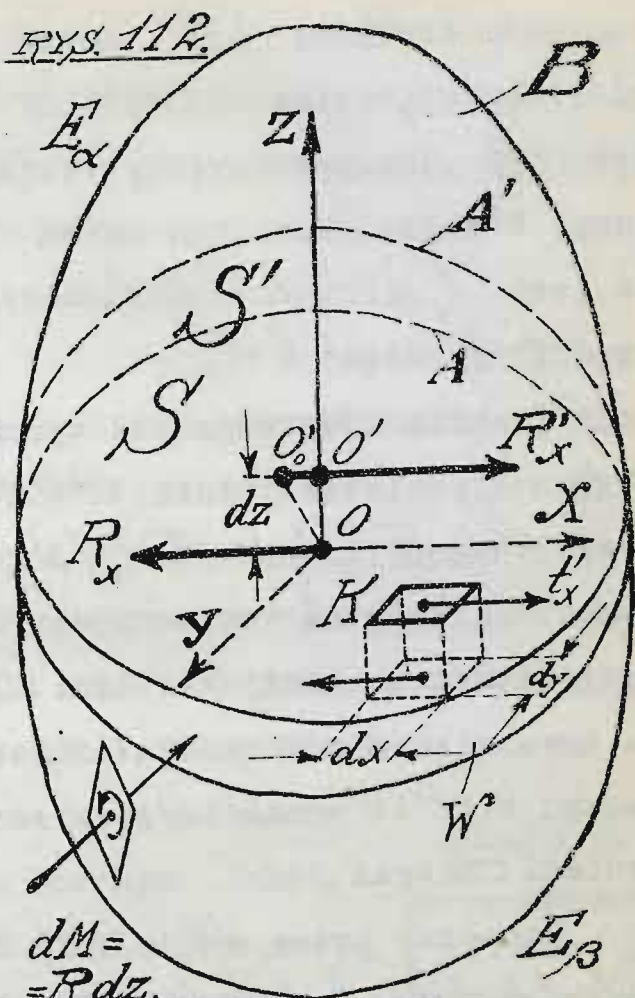
3-o. KONTURY OBU PRZEKROJÓW NIEZNACZNIE TYLKO RÓŻNIŁY SIĘ MIĘDZY SOBĄ, INACZEJ MÓWIĄC, ABY OBWÓD GÓRNEGO POLA  $S'$  PRAWIE POKRYWAŁ W RZUCIE OBWÓD POLA DOLNEGO  $S$  A RÓŻNICA POL  $S'-S$  BYŁA PORZĄDKU  $dS$ .

W tych warunkach jakiejkolwiek POŁETKO  $dS = dx dy$  w polu  $S$  leżące, będzie RZUTEM górnego poletka  $dS'$  pola  $S'$ . Ma to miejsce dla wszystkich poletek obu przekrojów, prócz skrajnych poletek, dotykających konturów, gdzie  $dS'$  mogą się różnić od  $dS$  o małe wyższych rzędów na tle nieznacznej różnicy kształtu obu konturów. Widzimy więc, że ilości poletek obu pól są jednakowe, możemy zatem PŁYTKĘ  $W$ , wyodrębnioną z bryły, rozpatrywać myślowo, jako złożoną z kostek  $K$ , podległych działaniu NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH TNĄCYCH  $t'_x$  i  $t_x$ , przyłożonych do górnej i dolnej ścian kostki.

Naprężenia te nader nieznacznie się różnią pomiędzy sobą, ponieważ  $t_x = R_x : S$  i  $t'_x = R'_x : S'$  a  $R'_x \cong R_x$ ,

oraz  $S' = S$ ; możemy  
zatem napisać  $t'_x = t_x + dt_x$   
i rozpatrywać KOSTKĘ  
KPROSTĄ, podległą  
działaniu sił tnących  
 $\theta = t_x dx dy$  i  $\theta' = t'_x dx dy$ ,  
a pozostającą w równo-  
wadze odkształconej  
trwałej.

Pisząc warunki  
równowagi kostki od-  
kształconej należy  
uwzględnić naprężenia  
 $t$  oraz  $t'$  ścian bocz-  
nych nateżonych, rów-  
noważące momenty sił



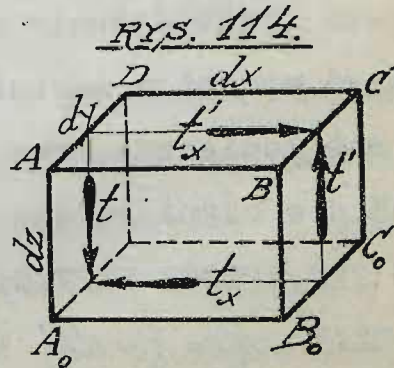
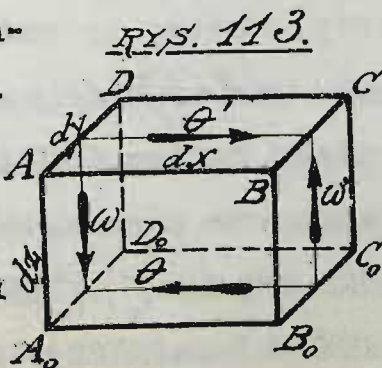
$\theta$  i  $\theta'$ . Naprężenia jednostkowe  $t$  i  $t'$  dają SIŁY  $\omega = t dy dx$   
i  $\omega' = t' dy dx$ , stanowiące łącznie z siłami  $\theta = t_x dx dy$   
i  $\theta' = t'_x dx dy$  OBCIĄŻENIE ZEWNĘTRZNE KOSTKI odkształco-  
nej. Siły te winny, jako znoszące się wzajemnie czy-  
nić zadość warunkom równowagi. Przedewszystkiem momen-  
ty sił  $\theta$  i  $\omega$ , bra-

ne względem KRA-  
WĘDZI KOSTKI  $BC, A$

/rys. 113/

oraz momenty sił

$\theta'$  i  $\omega'$ , brane





względem krawędzi  $A_0D_0$ , muszą się równoważyć wzajemnie, inaczej bowiem NASTĄPIŁBY OBRÓT KOSTKI około  $BC$  lub  $A_0D_0$ , co przeczyłoby istnieniu równowagi odkształconej trwałej. Musi być zatem  $\theta' dx = \omega' dx$  oraz  $\theta dx = \omega dx$ , to jest  $t'_x dx dy dz = t dy dz dx$  oraz  $t'_x dx dy dz = t dy dz dx$  skąd  $t' = t_x$  oraz  $t = t_x$ .

Ponadto równowaga sił wymaga, aby  $\theta' + \theta = 0$  oraz  $\omega' + \omega = 0$ , ponieważ jednak  $\theta' + \theta = [t'_x - t_x] dx dy = dx dy dt'_x \cong 0$  oraz  $\omega' + \omega = [t' - t] dy dz = [t'_x - t_x] dy dz = dy dz dt'_x \cong 0$ , przeto uważać należy, że ten warunek równowagi jest zachowany, wobec znikomej wartości  $dt'_x$ . Rozpatrywana kostka trwa więc w równowadze odkształconej, ulegając jarzmu sił  $\theta$  i  $\theta'$  oraz  $\omega$  i  $\omega'$ , działających łącznie z momentami  $\theta dx$  oraz  $\omega dx$ .

Oznaczmy przez  $dM$  - SUMĘ WSZYSTKICH MOMENTÓW  $\omega dx = t dy dz dx = t_x dy dz dx$  PRZYNALEŻNYCH DO WSZYSTKICH KOSTEK PŁYTKI  $W$ , wtedy  $dM = \sum t_x dx dy dz = t_x dx \sum dy dz = t_x dx S = R_x dx$ , co daje elementarny MOMENT DODATKOWY, bez którego równowaga płytki rozpatrywanej nie może być zachowana. Przy sprowadzaniu układów sił zewnętrznych  $E_\alpha, E_\beta$  do wypadkowych  $R'_x, R_x$ , moment  $dM$  ginie, jako nieskończenie mały, możemy go natomiast wyznaczyć wprost w wartości  $dM = R_x dx$ , a wyznaczenie to jest konieczne, bez niego bowiem OBCIĄŻENIE ZEWNĘTRZNE nie czyni zadość warunkom równowagi odkształconej. W TEN SPOSÓB DOPEŁNIONY UKŁAD  $R'_x, R_x$  ORAZ  $dM = R_x dx$ , GDZIE  $R'_x = R_x + dR_x$  NAZYWANY ZAZWYCZAJ OBCIĄŻENIEM TNĄ

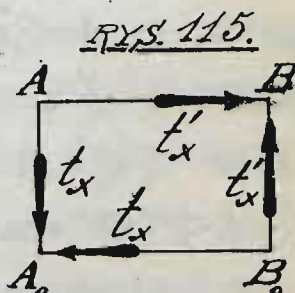
# CEM PŁYTKI ODKSZTAŁCONEJ.

PRZYNALEŻNE DO TEGO OBCIĄŻENIA NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE TNĄCE KOSTKI ELEMENTARNEJ PRZEKROJU, STANOWIĄ ZRÓWNOWAŻONY UKŁAD CZTERECH SIŁ, DZIAŁAJĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYZNIE WZDŁUŻ ŚCIAN KOSTKI.

W GÓRNEJ ŚCIANIE SIEDLISKUJE NAPRĘŻENIE JEDNOSTKOWE  $\tau'_x$ , W DOLNEJ - NAPRĘŻENIE JEDNOSTKOWE  $\tau_x$ , RÓWNOLEGŁE DO  $\tau'_x$ , LECZ SKIEROWANE PRZECIWNIE; TE SAME NAPRĘŻENIA SIEDLISKUJĄ I W BOCZNYCH ŚCIANKACH KOSTKI PROSTOPADŁYCH DO  $\tau'_x$  I  $\tau_x$ , PRZYCZEM NAPRĘŻENIA  $\tau'_x$  ZBIEGAJĄ SIĘ RAZEM W JEDNYM KANCIE KOSTKI, A NAPRĘŻENIA  $\tau_x$  ZBIEGAJĄ SIĘ NA KRAWĘDZI PRZECIWLEGŁEJ, jak to wskazuje rys. 115, gdzie kostka podana jest jedynie w rzucie bocznym.

Mamy tu więc układ czterech naprężeń jednostkowych, stanowiących wspólnie NAPRĘŻENIE TNĄCE kostki elementarnej. Widzimy zatem, że i dany ogólny wypadek obciążenia tnącego zasadniczo nie różni się od poprzednio rozpatrywanych, wszędzie bowiem spotykamy ten sam poczwórny układ naprężeń, warunkujący odkształcenie kostki.

Ponieważ kostka  $W$  jest prosta z założenia, zatem przed odkształceniem musiała być ukośną i wyprostowała się na tle działania sił odkształcających; to znaczy, że górna jej ścianka przesunęła się względem dolnej zupełnie w taki sam sposób, jak to miało miej-





sce w wypadkach poprzednio rozpatrywanych. Oznaczmy to przesunięcie przez  $\Delta$ . Wobec zupełnej jednostajności warunków obciążenia wszystkich kostek płytki, dochodzimy do wniosku, że wszystkie kostki płytki ULEGŁY JEDNAKOWYM ODKSZTAŁCENIOM, a mianowicie górne ścianki wszystkich kostek płytki WYKONAŁY JEDNAKOWE PRZESUNIĘCIA  $\Delta$  WZGLĘDEM DOLNYCH ŚCIANEK. To znaczy, że GÓRNY PRZEKRÓJ  $A'$  PŁYTKI  $W$  PRZESUNĄŁ SIĘ RÓWNIEŻ O  $\Delta$  WZGLĘDEM DOLNEGO PRZEKROJU  $A$ . MOŻEMY Z ŁATWOŚCIĄ WYZNACZYĆ TO PRZESUNIĘCIE, zważywszy, że przed odkształceniem środek masy górnego przekroju  $A'$  LEŻAŁ PIERWOTNIE W PUNKCIE  $O'_0$ , A PO ODKSZTAŁCENIU PRZESUNĄŁ SIĘ O  $\Delta = O'_0 O'$  WZGLĘDEM ŚRODKA MASY  $O$  DOLNEGO PRZEKROJU  $A$  W KIERUNKU DZIAŁANIA SIŁY  $R'_0$ . PRZESUNIĘCIE  $O'_0 O' = \Delta$  WYZNACZA ZARAZEM KĄT PRZESUNIĘCIA  $\gamma = \angle O'_0 O' O$  oraz PRZESUNIĘCIE JEDNOSTKOWE  $\gamma = \Delta : da$  dla rozpatrywanego wypadku.

Na zasadzie dotychczas otrzymanych wyników możemy wyprowadzić wniosek następujący: PŁYTKA  $W$  ROZPATRYWANEJ BRYŁY, ODKSZTAŁCONA POD JARZMEM ZRÓWNOWAŻONEGO UKŁADU SIŁ TNĄCYCH, UJAWNIA PRZESUNIĘCIE GÓRNEJ SWEJ POWIERZCHNI PŁASKIEJ WZGLĘDEM DOLNEJ, ZACHODZĄCE W KIERUNKU DZIAŁANIA SIŁY TNĄCEJ I RÓWNE PRZESUNIĘCIU ŚRODKA MASY TEJ POWIERZCHNI.

We wszystkich wyżej rozpatrywanych wypadkach wyznaczyliśmy przesunięcia zachodzące na tle działania sił odkształcających; należy przeto wyznaczyć związek

jaki zachodzi pomiędzy tego rodzaju odkształceniem a naprężeniem tnącym, jednym słowem należy poznać:

§ 7. PIERWSZE PRAWO HOOKE'A, WYZNACZAJĄCE ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY PRZESUNIĘCIEM JEDNOSTKOWEM, A NAPRĘŻENIEM TNĄCEM.

We wszystkich rozpatrywanych wyżej wypadkach działania obciążeń tnących MIARĄ ODKSZTAŁCENIA JAWI SIĘ PRZESUNIĘCIE JEDNOSTKOWE, A MIARĄ SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH - NAPRĘŻENIE TNĄCE, możemy więc napisać prawo HOOKE'A w postaci  $t_x = G\gamma$ , gdzie WSPÓŁCZYNNIK PROPORCJONALNOŚCI  $G$  NOSI MIANO WSPÓŁCZYNNIKA SPRĘŻYSTOŚCI POPRZECZNEJ.

Oznaczając z kolei przez  $\beta = 1/G$ , możemy prawo powyższe napisać w innej nieco postaci  $\gamma = \beta t_x$ , gdzie współczynnik  $\beta$  nazywamy WSPÓŁCZYNNIKIEM PRZESUWALNOŚCI. Ponieważ  $\gamma$  jest liczbą oderwaną, zatem wymiar  $G$  jest tożsamościowy z wymiarem  $t_x$ , piszemy więc  $G$   $\text{kg/cm}^2$ ; liczba  $G$  jest zatem LICZBĄ MIANOWANĄ, aczkolwiek gra jeno rolę zwykłego współczynnika proporcjonalności.

Stąd bezpośrednio WYMIAR  $\beta$  będzie  $[\text{cm}^2/\text{kg}]$ . -

Doświadczalne wyznaczenie wartości współczynników  $\beta$  lub  $G$  wyczerpałoby nasze badania, WZORY bowiem  $t_x = R_p : S$  oraz  $\gamma = \beta t_x$ , ROZWIĄZUJĄ W DANYM WYPADKU WSZELKIE ZAGADNIENIA, niestety jednak niepokonane trudności techniczne stają nam na zawadzie, gmatwając wyniki prób, dlatego też zazwyczaj WSPÓŁCZYNNIKI  $\beta$

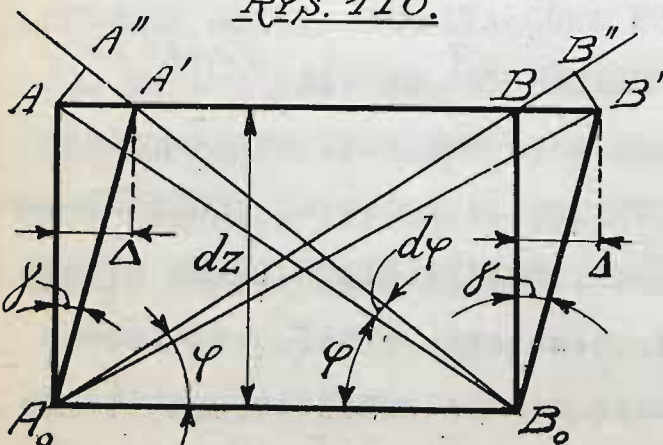


LUB  $G$  WYLICZANE SĄ TEORETYCZNIE, LUB WYZNACZANE DOŚWIADCZALNIE w inny zupełnie sposób, który wkrótce poznamy, tymczasem zaś rozpatrzmy:

§ 8. TEORETYCZNE WYZNACZENIE ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY WSPÓŁCZYNNIKAMI  $\alpha$  I  $\beta$  ORAZ  $E$  I  $G$ .

Wyżej ustaliliśmy przebieg zjawisk odkształcania kostki elementarnej na tle obciążenia tnącego. Okazało się przy tem rozpatrywaniu, że przesuwaniu STALE TOWARZYSZY rozciąganie lub ściskanie pewnych przekrojów kostki, warunkujące osiągnięcie trwałego stanu równowagi odkształconej. Stąd wnioskujemy o pokrewieństwie wewnętrznym tych dwóch rodzajów odkształceń, należących pozornie do zupełnie różnorodnych dziedzin. Niewątpliwie przeto istnieć musi zależność pomiędzy zcinaniem a rozciąganiem lub ściskaniem, które mu towarzyszą. Aby tę zależność wyznaczyć, rozpatrujemy w rzucie bocznym /rys. 116/ KOSTKĘ  $ABBA_0$  PIERWOTNIE PROSTĄ, która po odkształceniu staje się kostką UKOŚ-

RYS. 116.



NA  $A'B'B'A_0$  na tle PRZESUNIĘCIA

$$\Delta = AA' = BB' -$$

Po odkształceniu

PRZEKĄTNIA  $A_0B_0 = P$   
SKRÓCI SIĘ DO  $A'B_0 < P$ ,  
A PRZEKĄTNIA  $A_0B' = P''$  WY-  
DŁUŻY SIĘ DO  $A_0B' > P$

Obie te zmiany długo-

ści możemy z łatwością wyznaczyć, zakreślając łuki  $AA''$  i  $BB''$  odpowiednio promieniami  $AB_0$  i  $A_0B'$  do przecięcia się z prostymi  $A'B_0$  i  $A_0B$ . ODCINEK  $AA''$  BĘDZIE SKRÓCENIEM PRZEKĄTNI  $AB_0$ , a ODCINEK  $BB''$  - WYDŁUŻENIEM PRZEKĄTNI  $A_0B$ , ujawnionem po odkształceniu.

Oznaczmy przez  $\varphi$  kąt, jaki tworzą przekątne z podstawą w kostce nie odkształconej, wtedy  $\angle BBB' = \varphi$  oraz  $\angle A''AA' = \varphi + d\varphi$ . Ponieważ trójkąciki  $AA''A'$  i  $BB''B'$  są prawie prostokątne u wierzchołków  $A''$  i  $B''$ , przeto  $AA'' = AA' \cos(\varphi + d\varphi) \cong \Delta \cos \varphi$ , oraz  $BB'' = BB' \cos \varphi = \Delta \cos \varphi \cong AA''$ . Odcinki te  $AA'' \cong BB'' = \Delta \cos \varphi$  możemy rozpatrywać jako WYDŁUŻENIA OBU PRZEKĄTNI ODKSZTAŁCONYCH. Stąd WYDŁUŻENIE JEDNOSTKOWE PRZEKĄTNI  $A_0B$  mamy, pisząc  $\varepsilon = BB'' : P = \Delta \cos \varphi : P$ , a zaś SKRÓCENIE, czyli WYDŁUŻENIE JEDNOSTKOWE UJEMNE PRZEKĄTNI  $AB_0$ , pisząc  $\varepsilon = -AA'' : P = -\Delta \cos \varphi : P$ . Ponieważ, jak to widać z rysunku  $dz = P \sin \varphi$ , a ponadto  $\gamma = \Delta : dz$ , przeto łącząc oba wyrażenia mamy ostatecznie już

$$\varepsilon = \pm \Delta \cos \varphi \sin \varphi : dz = \pm \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \varphi \sin \varphi \Delta : dz = \pm \frac{1}{2} \gamma \sin 2\varphi.$$

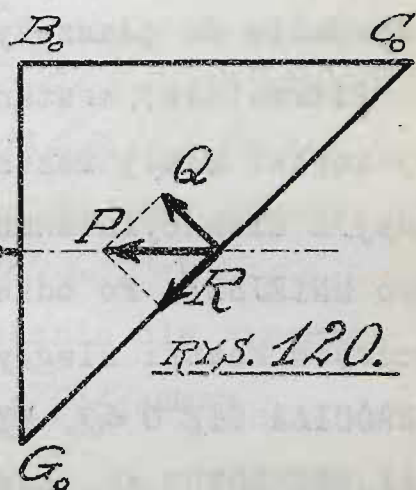
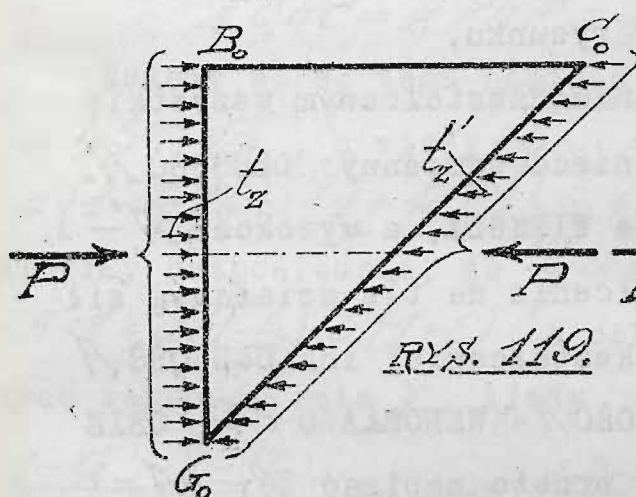
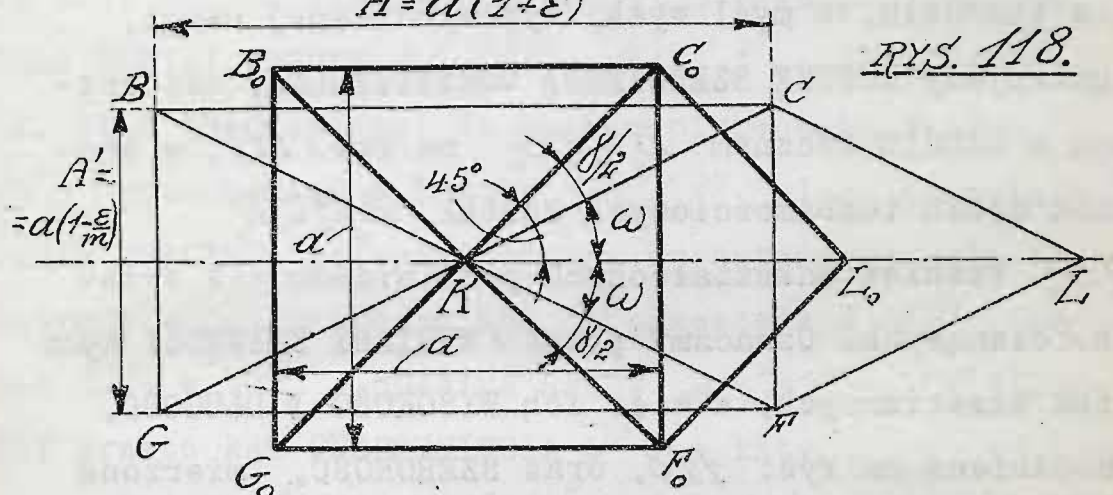
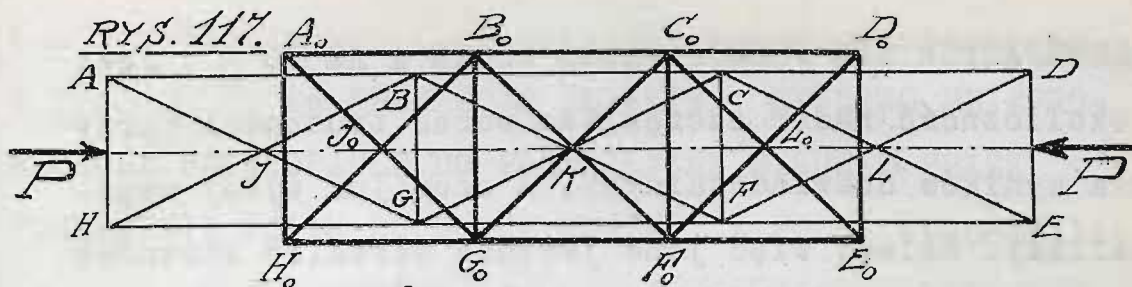
Prosty rzut oka na rys. 116 wystarczy, aby zauważyć, iż przekątne  $P$  - UJAWNIAJĄ NAJWYŻSZE WYDŁUŻENIA przy odkształcaniu kostki; WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE  $\varepsilon = \pm \frac{1}{2} \gamma \sin 2\varphi$  STANOWIĄ zatem SKRAJNE WARTOŚCI WYDŁUŻEŃ TOWARZYSZĄCYCH PRZESUNIĘCIU JEDNOSTKOWEMU  $\gamma$  KOSTKI ODKSZTAŁCONEJ. GDY PONADTO  $\varphi = 45^\circ$  OTRZYMAMY NAJWYŻSZĄ WARTOŚĆ TYCH SKRAJNYCH WYDŁUŻEŃ DLA KOSTKI



SZEŚCIENNEJ W POSTACI  $\varepsilon = \pm \frac{1}{2} \gamma$ . Należy więc zawsze rozpatrywać POSTĘP SZEŚCIENNĄ, ilekroć chcemy przejść od zjawisk odkształceń tnących do zjawisk im pokrewnych rozciągania lub ściskania, bo SZEŚCIAN UJAWNIA NAJWIĘKSZE WARTOŚCI WYDŁUŻEŃ JEDNOSTKOWYCH, TOWARZYSZĄCYCH ODKSZTAŁCENIOM TNĄCYM. Dla sześcianu PRZEKĄTNIE  $P$  TWORZĄ KĄT PROSTY przed odkształceniem, możemy więc wypowiedzieć następujący wniosek, zupełnie zresztą ogólny, bo przecież KAŻDE CIAŁO ODKSZTAŁCONE POD JARZMEM OBCIĄŻENIA TNĄCEGO DAJE SIĘ ROZPATRYWAĆ, JAKO ZESPÓŁ PIERWOTNY NIEODKSZTAŁCONY SZEŚCIANÓW ELEMENTARNYCH. Wniosek ten brzmi: PRZESUNIĘCIU JEDNOSTKOWEMU TOWARZYSZĄ DWA SKRAJNE WYDŁUŻENIA JEDNOSTKOWE RÓŻNYCH ZNAKÓW O WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ DWUKROTNIE MNIEJSZEJ OD WARTOŚCI PRZESUNIĘCIA ROZPATRYWANEGO. KIERUNKI OBU SKRAJNYCH WYDŁUŻEŃ SĄ DO SIEBIE PROSTOPADŁE, PONADTO WYDŁUŻENIE DODATNIE ZACHODZI POD KĄTEM  $45^\circ$  WZGLĘDEM PRZESUNIĘCIA ROZPATRYWANEGO. To nam pozwoli ustalić GRANICE SKRAJNYCH NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH.

Wiemy już, że PEKNIĘCIE TWORZYWA ZACHODZI WYŁĄCZNIE NA TLE DZIAŁANIA SIŁ ROZCIĄCAJĄCYCH, w danym wypadku zatem SKRAJNE WYDŁUŻENIE DODATNIE  $\varepsilon = \frac{1}{2} \gamma$  WYROKUJE O BEZPIECZEŃSTWIE DANEGO TWORZYWA, ulegającego działaniu obciążenia tnącego. Stąd  $\gamma = 2\varepsilon$ , a ponieważ  $\varepsilon = \alpha t_x$ , a zaś  $\gamma = \beta t_x$ , zatem  $\beta t_x = 2\alpha t_x$  skąd ostatecznie  $t_x = 2 \frac{\alpha}{\beta} t_x$ .

WYŻEJ USTALILIŚMY POJĘCIE SKRAJNEGO DOPUSZCZAL-



NEGO NAPRĘŻENIA ROZRYWAJĄCEGO  $k_r$ . Wobec tego, że wszelkie  $t_x \leq k_r$ , przeto  $t_x \leq L^{\frac{\alpha}{\beta}} k_r$ ; Na mocy tego wzoru możemy WYZNACZYĆ SKRAJNĄ WARTOŚĆ  $k_t$  DOPUSZCZALNEGO NAPRĘŻENIA TNĄCEGO, przyczem niewątpliwie wszelkie  $t_x \leq k_t$ . Stąd wnioskujemy, że  $k_t = L^{\frac{\alpha}{\beta}} k_r$ .

Otrzymane tutaj wzory CZYNIA ZBĘDNEM DOŚWIADCZALNE WYZNACZENIE WARTOŚCI  $k_t$  DLA TWORZYW JEDNOLITYCH,



ZACHOWUJĄCYCH SIĘ PODŁUG PRAWA HOOKE'A AZ PO  $R_g$ . Jest to okoliczność nader szczęśliwa wobec trudności otrzymania wyników doświadczalnych, o czym już wyżej wspominaliśmy. Należy więc jeno jeszcze określić stosunek  $\frac{\alpha}{\beta}$ ; w tym celu, w myśl wyżej wypowiedzianej uwagi, rozpatrujemy KOSTKĘ SZĘŚCIENNĄ ODKSZTAŁCONĄ, uwidocznioną w RZUCIE bocznym  $B_0C_0F_0G_0$  na rys. 117, w otoczeniu dwóch tożsamościowych kostek  $A_0B_0C_0H_0$  i  $C_0D_0E_0F_0$  również odkształconych pod jarzmem sił osiowych  $P$  cisnących. Oznaczmy przez  $\alpha$  WYMIARY KRAWĘDZI tych kostek sześciennych, a więc ich WYSOKOŚĆ I DŁUGOŚĆ, uwidocznione na rys. 118, oraz SZEROKOŚĆ, mierzona prostopadłe do płaszczyzny rysunku.

Pierwotnie, w stanie nieodkształconym wszystkie trzy kostki miały kształt nieco odmienny: DŁUGOŚĆ  $A$  każdej z nich była znacznie WIĘKSZA, a wysokość  $A'$  nieco MNIEJSZA. Po odkształceniu na tle działania sił cisnących kostki uległy odkształceniu; ich DŁUGOŚĆ  $A$

SKRÓCIŁA SIĘ O  $\varepsilon A$ , WYSOKOŚĆ  $A'$  WZROSŁA O  $\delta A'$ , OBIE STAŁY SIĘ RÓWNE  $\alpha$ , możemy przeto napisać  $A - \varepsilon A = \alpha$  oraz  $A' + \delta A' = \alpha$ . Stąd

$$A = \alpha : (1 - \varepsilon) = \alpha + \alpha \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 + \alpha \varepsilon^3 = \alpha (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots)$$

$$\text{oraz } A' = \alpha : (1 + \delta) = \alpha : (1 + \frac{\varepsilon}{m}) = \alpha - \alpha \frac{\varepsilon}{m} + \alpha \frac{\varepsilon^2}{m^2} - \dots = \alpha (1 - \frac{\varepsilon}{m} + \frac{\varepsilon^2}{m^2} - \dots)$$

i ostatecznie, pomijając w rozkładzie wyższe potęgi

$\varepsilon$  i  $\frac{\varepsilon}{m}$  wobec nader nieznaczących wartości samego  $\varepsilon$ ,

mamy  $A = \alpha (1 + \varepsilon)$  oraz  $A' = \alpha (1 - \frac{\varepsilon}{m})$ . ~

Z kolei prowadząc przekątnie bocznych ścian kos-

tek odkształconych i nieodkształconych, postrzegamy z rys. 117, że PRZEKROJE PŁASKIE, MYŚLOWO PRZEPROWADZONE PROSTOPADLE DO PŁASZCZYZNY RYSUNKU PRZEZ PRZEKĄTNIE ŚCIAN BOCZNYCH KOSTEK, Z KOLEI WYODRĘBNIĄ NOWE KOSTKI UKOŚNE  $JBKG, KCLE$  NIEODKSZTAŁCONE, ORAZ KOSTKI PROSTE  $JBKG, KCLE$  ODKSZTAŁCONE. Stąd wnioskujemy, że kostka pierwotnie ukośna  $KCLE$  przechodząc w kostkę  $KCLE$  ulega odkształceniu TNACEMU, polegającemu na sprostowaniu kąta ostrego  $CKE$ , przyczem bok  $KE$  przeszedł w  $KE$ , a bok  $KC$  - w  $KC$ . RÓŻNICA KĄTÓW  $\angle C'KE - \angle CKE$  WYZNACZY przeto kąt PRZESUNIĘCIA  $\gamma$ , a kąty

$$\angle C'KC = \angle EKE = \frac{1}{2} \gamma.$$

Możemy wobec tego napisać  $\angle CKL = \angle LKE = \omega = 45^\circ - \frac{\gamma}{2}$ , a wtedy  $\lg \omega = \{\lg 45^\circ - \lg \frac{\gamma}{2}\} : \{1 + \lg 45^\circ - \lg \frac{\gamma}{2}\} = \{1 - \lg \frac{\gamma}{2}\} : \{1 + \lg \frac{\gamma}{2}\}$ ; z drugiej znów strony, widzimy bezpośrednio, że  $\lg \omega = \frac{1}{2} CK : \frac{1}{2} KL = CK : KL = A' : A = a(1 - \frac{\epsilon}{m}) : a(1 + \epsilon)$  i ostatecznie dla nieznacznych wartości kąta  $\gamma$ , kiedy  $\lg \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$  mamy:

$$\frac{1 - \frac{\gamma}{2}}{1 + \frac{\gamma}{2}} = \frac{1 - \frac{\epsilon}{m}}{1 + \epsilon} \quad \text{to jest} \quad \frac{2 - \gamma}{2 + \gamma} = \frac{m - \epsilon}{m + \epsilon m} \quad \text{stad} \quad \gamma = \frac{1 + m}{m} \epsilon.$$

Tylko co otrzymany wzór wyznacza zależność pomiędzy  $\gamma$  i  $\epsilon$ , dla danego wypadku, kiedy odkształcenie kostki sprawiają siły cisnące, nie należy go zatem utożsamiać ze wzorem podobnym, wyprowadzonym poprzednio dla kostki odkształconej pod jarzmem sił tnących, a więc dla zupełnie innych warunków obciążenia. W danym wypadku mamy aż do granicy proporcjonal-



ności tworzywa  $\varepsilon = \alpha t_z$  oraz  $\gamma = \beta t_x$ , gdzie  $t_z$  jest naprężeniem cisałym, a  $t_x$  - tnącym. Aby wyznaczyć ich wartości, bierzemy pod uwagę PRĘT  $A_0 D_0 E_0 H_0$ , złożony z trzech kostek odkształconych pod obciążeniem sił cisałych  $P$  na ścianki zewnętrzne  $A_0 H_0$  i  $D_0 E_0$  pręta. Z tego pręta myślowo wyodrębniamy kostkę ukośnie ściętą  $B_0 C_0 G_0$  i odrzucamy resztę tworzywa /rys.

119/. Ponieważ siły  $P$  wywołują jednolity układ naprężeń w dowolnym poprzecznym przekroju pręta, zatem po odrzuceniu części  $A_0 B_0 C_0 H_0$  pręta przekrój  $B_0 G_0$  NALEŻY OBCIĄŻYĆ jednolitym układem naprężeń CISNĄCYCH  $t_z$ , zastępujących działanie cząsteczek odrzuconych. Wobec jednolitości układu naprężeń wzdłuż całego przekroju  $B_0 G_0$ , możemy niewątpliwie napisać:  $P = \alpha^2 t_z$ .

Ponadto podobnym układem naprężeń  $t_z$  należy obciążyć pole przeciwnego przekroju  $C_0 G_0$ , aby zastąpić działanie cząsteczek odrzuconej prawej części pręta  $C_0 D_0 E_0 G_0$ . Ten nowy układ UKOŚNIE działających naprężeń  $t_z$  winien równoważyć układ poprzednio rozpatrywany, inaczej mówiąc, powinien dawać WYPADKOWĄ  $P$ , lecz skierowaną przeciwnie. Ta wypadkowa musi leżeć na osi podłużnej pręta; możemy ją rozłożyć na dwie składowe siły:  $R$ -LEŻĄCĄ W PRZEKROJU UKOŚNYM  $C_0 G_0$  i  $Q$ -PROSTOPADŁĄ DO TEGO PRZEKROJU. Jak to wiadać z rys. 120 -  $Q = R = P : \sqrt{2}$ .

Rozłożmy ukośnie działające naprężenia  $t_z$  na składowe NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE -  $t_x$  leżące w ukoś-

nym przekroju  $C_0G_0$  i  $Q$  prostopadłe do niego. Ponieważ niewątpliwie SIŁĘ TNĄCĄ  $R$  należy rozpatrywać jako WYPADKOWĄ NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH  $t_x$ , WYWOŁANYCH ODKSZTAŁCENIEM TNĄCYM PRZEKĄTNI  $C_0G_0$ , a zaś SIŁĘ  $Q$  - jako wypadkową naprężeń  $q$ , przeto możemy napisać  $P = t_x a \sqrt{2}$ , zważywszy, że pole ukośnego przekroju  $C_0G_0$ , jednostajnie obciążonego naprężeniami  $t_x$  jest równe  $a^2 \sqrt{2}$ . Stąd mamy  $t_x a \sqrt{2} = R = P : \sqrt{2} = a t_x : \sqrt{2}$  i ostatecznie

$$t_x = \frac{1}{2} t_z.$$

Dla rozpatrywanego wypadku znaleźliśmy  $\gamma = \frac{1+m}{m} \epsilon$ , ponadto  $\epsilon = \alpha t_z$  oraz  $\gamma = \beta t_x$ , czyli  $\beta t_x = \frac{1+m}{m} \alpha t_z$ , co daje na miejscu  $t_x = \frac{1}{2} t_z$  WZÓR:  $\beta = \frac{2(1+m)}{m} \alpha$ , skąd  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{2(1+m)}$ , albo inaczej jeszcze  $G = \frac{m}{2(1+m)} E$ .

Wyżej widzieliśmy, że DLA WYPADKU OBCIĄŻENIA TNĄCEGO  $R_t = \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\beta} R_r$ , obecnie wiemy już, iż  $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{2(1+m)}$  skąd  $R_t = \frac{m}{1+m} R_r$ .

Wzory tu wyprowadzone dotyczą wyłącznie TWORZYW JEDNOLITYCH i stosowane być mogą wyłącznie W GRANICACH ODKSZTAŁCEN SPRĘŻYSTYCH, nie mogą przeto się sprawdzać dla żeliwa, lecz dają nader dobre wyniki dla żelaza kutego i stali. Dla tych tworzyw  $m = 3 \div 4$  a średnia wartość  $m = \frac{10}{3}$ . Stąd mamy następujące dane, zawarte w następującej tablicy:

*P. 2* TABLICA DZIESIĄTA.

| $m$  | $\alpha : \beta$ | $G : E$ | $R_t : R_r$ |
|------|------------------|---------|-------------|
| 3    | 2.67             | 0.375   | 0.75        |
| 10/3 | 2.60             | 0.384   | 0.77        |
| 4    | 2.50             | 0.400   | 0.80        |



Zamiast więc wyznaczyć doświadczalnie wartości współczynników  $\beta, G$  i  $R_z$ , możemy je WYLICZAĆ na zasadzie wartości  $\alpha, E$  i  $R_z$ . W ten sposób uzupełnimy wszystkie braki, jakie wskazuje teoria zcinania.

Z chwilą ostatecznego ustalenia wzorów  $R_x = S \epsilon_x$  oraz  $\gamma = \beta \epsilon_x$  możemy TEORIĘ ZCINANIA uważać, jako ukończoną, te bowiem wzory rozwiązują wszelkie zagadnienia; niestety jednak, przykłady obciążeń tnących nader się rzadko spotykają w technice, a te nieliczne spotykane sprowadzić się dają do zwykłego PRZEGUBU. Ponieważ przegub służy jako przyrząd do wykonywania prób na zcinanie, należy przeto poznać jego działanie.

### § 9. TEORIA PRZEGUBU STAŁEGO.

Przegub stały stanowi przykład łączenia prętów rozciąganych, lub ściskanych. Jak to widzimy z rys. 121 widełkowate zakończenie jednego z prętów płaskimi szczękami  $W_1$  i  $W_2$  ujmuje jak w kleszcze obustronnie spłaszczony koniec  $S$  drugiego pręta; okrągły bolec  $T$  przedzierzga je na wylot, uniemożliwiając wysunięcie się pręta  $P_1$ , z pomiędzy szczęk pręta  $P_2$ , ku czemu niewątpliwie zmierza działanie sił  $Q$  rozciągających pręty.

Oznaczmy przez  $d$  - ŚREDNICĘ CYLINDRYCZNEGO BOLCA  $T$ , przez  $L$  - GRUBOŚĆ SPŁASZCZONEGO OKA  $S$  PRĘTA  $P_1$ , wreszcie przez  $\ell$  - GRUBOŚĆ OBU SZCZĘK  $W_1$  i  $W_2$ . Pod działaniem sił  $Q$  rozciągających lub ściskających, bolec  $T$  odkształca się, część jego środkowa stara się WYSU-

NĄC WRAZ Z OKIEM

$S$  z widełek pręta

$P_2$ , słowem, siły

$Q$  starają się

ZCIĄĆ bolec prze-

bu wzdłuż powierz-

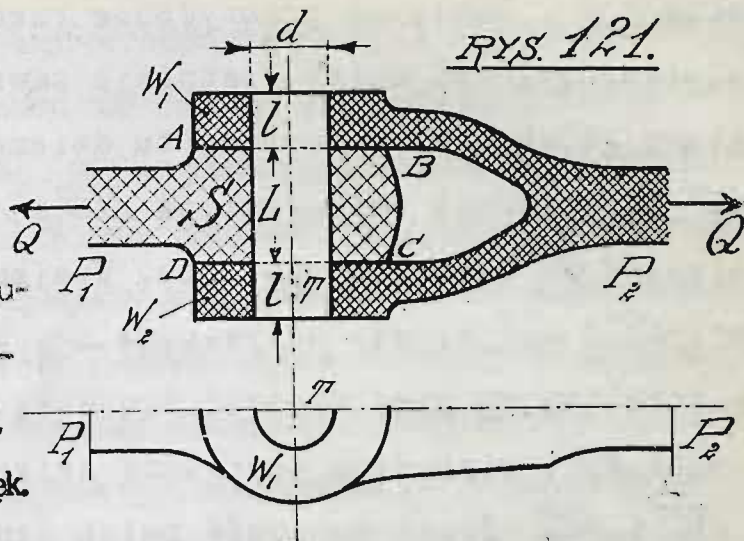
chni płaskich  $AB$ ,

$CD$  dotyku szczęk.

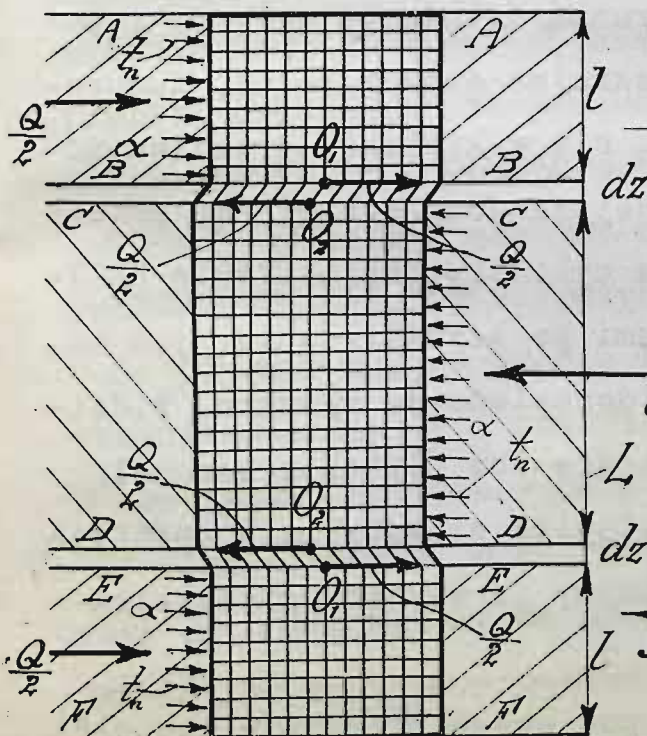
Aby przekonać

się niezbicie, iż tu istotnie ma miejsce odkształce-  
nie tnące, rozpatrujemy bolec w większej skali [rys.

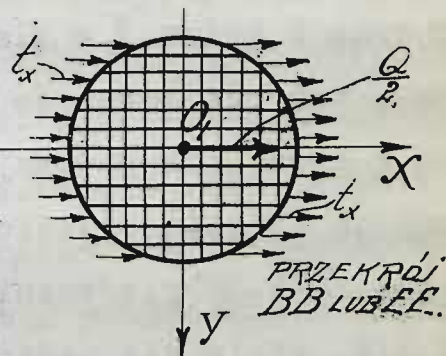
122] w przekroju. Szczęki  $W_1$  i  $W_2$  zaznaczone są tu-  
taj linjami  $AA$  i  $BB$ , oraz  $EE$  i  $FF$ , odległymi od



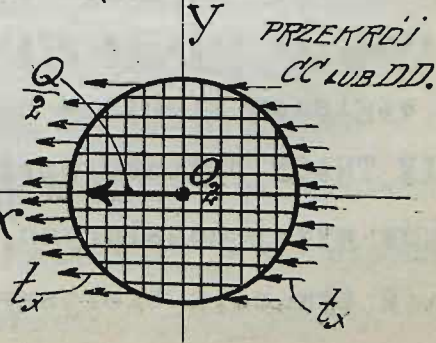
RYS. 122.



RYS. 123.



RYS. 124.





siebie o  $L$ . Ponieważ praktycznie rzecz biorąc pomiędzy płaszczyznami dotyku istnieje zawsze pewien luz, dlatego główkę  $S$  zaznaczono tu dwiema linjami  $CC'$  i  $DD'$  odpowiednio odległymi od  $BB'$  i  $EE'$  o znikomą szerokość  $\delta x$  domniemanego luzu. Wzajemna odległość linii  $CC'$  i  $DD'$  wynosi oczywiście  $L$ . W ten sposób bollec dzielimy na pięć części: środkową  $CD$ , dwie skrajne  $AB$  i  $EF$ , oraz dwie pośrednie znikomo krótkie płytki  $BC$  i  $DE$ . Środkowa część bolca szczelnie tkwi w oku  $S$ , jak w tulei; skrajne części bolca zamocowane są w szczękach - te części bolca uzupełniają poniekąd uchwyto- we zakończenia obu prętów i pracują wraz z nimi, oddając siły odkształcające pośrednim częściąom  $BC$  i  $DE$  bolca. Z łatwością postrzec się daje, że pod działaniem siły  $Q$  środkowa część bolca PRZESUWA SIĘ wraz z okiem  $S$  w kierunku działania siły  $Q$ , ponieważ zaś równocześnie skrajne części bolca, zamocowane w szczękach posuwają się w kierunku przeciwnym, ulegając sile  $Q$  przyłożonej do drugiego pręta, przeto płytki  $BC$  i  $DE$  pierwotnie cylindryczne i proste-KRZYWIĄ SIĘ, stają się ukośnemi po odkształceniu, jak to w dostatecznej mierze uwidoczniono na rysunku. Widzimy stąd, że skrajne przekroje obu płytek przesunęły się względem siebie - nastąpiło niewątpliwie ODKSZTAŁCENIE TNĄCE płytek. Spróbujmy je wyznaczyć językiem wzorów wyżej ustalonych.

W tym celu bierzemy pod uwagę przekroje obu pły-

tek i określamy ich środki masy  $Q_1$  i  $Q_2$  ; przed odkształceniem środki te leżały na jednej prostej - podłużnej osi pręta. Aby wyznaczyć obciążenie SKRAJNYCH PRZEKROJÓW  $BB$  i  $EE$  obu płytek, przyłożmy do środków  $Q_1$ , po dwie wzajemnie się znoszące, bo skierowane przeciwnie siły  $\frac{Q}{2}$ , równoległe do siły  $Q$  pręta  $P_2$ . W ten sposób otrzymany układ sił obejmuje po pierwsze - siłę  $Q$  działającą po osi pręta  $P_2$ ; po drugie - dwie siły  $\frac{Q}{2}$ , przyłożone do środków  $Q_1$ , a skierowane tak, jak  $Q$ ; po trzecie - również dwie siły  $\frac{Q}{2}$ , przyłożone do środków  $Q_2$ , lecz skierowane przeciwnie. Te dwie ostatnie siły łącznie z siłą  $Q$ , dają dwa momenty wzajemnie się znoszące, tworzą więc układ sił zrównoważony, ODKSZTAŁCAJĄCY WIDELKOWATE ZAKOŃCZENIE PRĘTA  $P_2$  - pozostają więc tylko siły, zaznaczone w punkcie drugim. Siły te leżą w skrajnych przekrojach płytki; działanie ich zachodzi w kierunku działania siły  $Q$  pręta  $P_2$  - punkty przyłożenia ich - środki  $Q_1$ .

Aby wyznaczyć z kolei obciążenie WEWNĘTRZNYCH PRZEKROJÓW  $CC$  i  $DD$  obu płytek, przyłożmy do środków  $Q_2$  po dwie wzajemnie się znoszące, bo skierowane przeciwnie siły  $\frac{Q}{2}$ , równoległe do siły  $Q$  pręta  $P_2$ . W ten sposób otrzymany układ sił obejmuje prócz siły  $Q$ , działającej po osi pręta  $P_2$  po pierwsze - dwie siły  $\frac{Q}{2}$ , przyłożone do środków  $Q_2$ , a skierowane tak jak  $Q$ , po drugie - również dwie siły  $\frac{Q}{2}$ , przyłożone do środków  $Q_1$ , lecz skierowane przeciwnie. Na

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW - ARKUSZ XII.



dwie ostatnie siły, łącznie z siłą  $Q$  znów dają dwa momenty wzajemnie się znoszące - tworzą więc układ sił zrównoważony, ODKSZTAŁCAJĄCY GŁÓWKĘ  $S$  PRĘTA  $P_2$ , - znów zatem pozostają li tylko siły zaznaczone w punkcie pierwszym. Siły te leżą w wewnętrznych przekrojach płytek, działanie ich zachodzi w kierunku działania siły  $Q$  pręta  $P_2$  - przyłożone zaś do środków  $Q_2$  wewnętrznych przekrojów płytek.

Obciążenie obu płytek posiada wszystkie cechy OB-  
CIAŻENIA TNĄCEGO, stąd wnioskujemy o jednolitości roz-  
kładu NAPRĘŻEŃ TNĄCYCH w przekrojach  $BB$ ,  $CC$ ,  $DD$  i  
 $EE$ , przyczem te wartości naprężeń  $t_x$  możemy wyzna-  
czyć z łatwością, pisząc  $St_x = R_x$ . W danym wypadku  
 $R_x = \frac{Q}{2}$  oraz  $S = \frac{\pi}{4}d^2$  stąd  $t_x = \frac{Q}{2} : \frac{\pi}{4}d^2$ . Czyniąc  
 $t_x = k_t$  WYZNACZAMY ŚREDNICĘ BOLCA ze wzoru  $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{Q}{2k_t}$ .  
Moglibyśmy również OKREŚLIĆ SKRZYWIENIE PŁYTEK  $BC$  i  
 $DE$ , obliczając kąt  $\gamma$  ze wzoru:  $\gamma = \beta t_x$ , a przesu-  
nienie środków  $Q_1 Q_2$  ze wzoru  $\Delta = \gamma dx$ ; otrzymalibyśmy  
jednak w ten sposób nader znikome wyniki na tle nie-  
znacznej wartości wymiaru  $dx$  oraz dopuszczalnego skraj-  
nego naprężenia  $t_x = k_t$ ; praktycznie więc można ten ra-  
chunek pominąć zupełnie.

Jednostajny rozkład naprężeń  $t_x$  po całym prze-  
kroju płytki sprawia, że naprężenia tnące wykraczają  
poza obwód przekroju w kierunku działania siły  $Q/2$ ,  
jak to zresztą wyraźnie widać na rysunku 123 i rysun-  
ku 124. Naprężenia tnące wchodzą niejako w przekrój

bolca z jednej strony, przechodzą przezeń równolegle do siły  $R_x = \frac{Q}{2}$  i wychodzą po stronie przeciwległej. Ten pogląd, zapożyczony z hydrauliki, grzeszy zbytnią powierzchownością ujęcia przedmiotu; daleko ściślej można przedstawić istotę zachodzących zjawisk, rozpatrując bolec jako układ kostek PIERWOTNIE PROSTYCH w stanie nieodkształconym:

Wobec znikomości wymiaru  $dz$  rozpatrujemy PŁYTKI  $BC$  lub  $DE$  JAKO POJEDYŃCZĄ JENĄ WARSTWĘ KOSTEK  $dx$ -DŁUGICH,  $dy$  SZEROKICH I  $dz$  WYSOKICH. Boki  $dx$  WYZNACZAMY RÓWNOLEGLE, a boki  $dy$  kostek - PROSTOPADLE DO SIŁ  $Q$ . W ten sposób sprowadzamy rozpatrywany tutaj wypadek do ogólnego, podanego w ustępie szóstym działu niniejszego, wypadku OBCIĄŻENIA TNĄCEGO. Po odkształceniu wszystkie PROSTE KOSTKI obu płytek przechodzą w KOSTKI UKOŚNE, o ściankach  $dz$  pochyłych pod kątem  $\gamma$  względem pierwotnego nieodkształconego położenia tych ścianek.

Dzieląc całkowitą długość bolca na cząstki  $dx$ , prowadzimy przez punkty podziału przekroje poprzeczne, ROZCINAJĄCE BOLEC NA CAŁY SZEREG ZNIKOMO GRUBYCH PŁYTEK, które z kolei dzielimy na kostki zupełnie w taki sam sposób, jak to miało miejsce dla płytek  $BC$  i  $DE$  nieodkształconych.

Układ sił tnących, rozsianych po skrajnych przekrojach płytek  $BC$  i  $DE$ , stanowi zarazem OBCIĄŻENIE PRZEKROJÓW PŁYTEK SĄSIEDNICH, przynależnych do części



$AB$ ,  $CD$  lub  $EF$  bolca. Te części więc POWODUJĄ OB-  
CIĄŻENIA TNĄCE PŁYTEK  $BC$  i  $DE$ . W samej rzeczy, jaka-  
kolwiek kostka płytki  $BC$  lub  $DE$  ulega działaniu sił  
tnących odkształcających, SIEDLISKUJĄCYCH W KOSTKACH,  
PRZYLEGAJĄCYCH U GÓRY I U DOŁU, a przynależnych do  
płytek sąsiednich. Nazwijmy je PŁYTKAMI - GÓRNĄ I DOŁ-  
NĄ W STOSUNKU DO ŚRODKOWEJ PŁYTKI  $BC$  lub  $DE$ . Przy  
odkształcaniu się bolca GÓRNA PŁYTKA PRZESUWA SIĘ  
WZGLĘDEM DOLNEJ O  $\Delta = \gamma dz$ , co powoduje niewątpli-  
wie skrzywienie PŁYTKI ŚRODKOWEJ, bo wszelka kostka  
górnej płytki, CZĄSTECZKOWO WZDŁUŻ SWEJ DOLNEJ ŚCIAN-  
KI POWIĄZANA Z ODNOŚNĄ KOSTKĄ PŁYTKI ŚRODKOWEJ, stara  
się górną ściankę  $dx_{xely}$  kostki środkowej pociągnąć  
za sobą z siłą  $t_x dx_{xely}$ . Tak samo, jeno w kierunku  
przeciwnym, a więc z siłą  $-t_x dx_{xely}$  działa na kostkę  
środkową - kostka płytki dolnej. Stąd powstają naprę-  
żenia tnące  $t_x$  kostek obu płytek środkowych  $BC$  i  $DE$ .

TE SAME NAPRĘŻENIA PANUJĄ w odnośnych przekro-  
jach płytek górnych i dolnych, I JAWIĄ SIĘ NA TLE NA-  
CISKU CYLINDRYCZNYCH POWIERZCHNI UCHWYTÓW NA ODNOŚNE  
CZĘŚCI BOLCA; CZĘŚCI  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  BOLCA PRACUJĄ WIĘC  
NA DOCISK POWIERZCHNIOWY - NA ZGNIECENIE. Naprężenie  
docisku  $t_n$  WYZNACZA, jak to wiemy z ustępu dwudzieste-  
go pierwszego działu poprzedniego, DLA POWIERZCHNI DO  
TYKU CYLINDRYCZNEJ SZCZĘKI  $W_1$ , lub  $W_2$ , WZÓR:

$$dlt_n = \frac{Q}{2}, \text{ A DLA CZĘŚCI ŚRODKOWEJ } S - \text{WZÓR: } dLt_n = Q \sim$$

To naprężenie  $t_n$  przenosi się wewnątrz bolca,

poprzez układy cząstek i sprawa opisany wyżej rozkład naprężeń  $t_x$  w przekrojach płytek  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{E}$ . CHCĄC OTRZYMAĆ BOLEC JEDNOSTAJNIE WEWNĘTRZNIE OBCIĄŻONY, NALEŻY NIEWĄTPLIWIE UCZYNIĆ  $t_n = t_x$ , tylko bowiem w tym wypadku unikniemy skoku z  $t_n$  na  $t_x$  w punktach, gdzie układy  $\alpha$  naprężeń  $t_n$  na rys. 122 zaznaczonych, SPOTYKAJĄ SIĘ z układami naprężeń  $t_x$ . Warunek  $t_n = t_x$  daje:

$$\frac{Q}{2} = l d t_n = \frac{\pi d^2}{4} t_x, \text{ skąd wartość } l = \frac{\pi}{4} d = 0.785 d;$$

ponadto mamy  $Q = L d t_n = 2 l d t_n$ ; skąd znowu

$$L = 2 l = \frac{\pi}{2} d = 1.57 d.$$

Mamy zatem oczywisty wniosek, że W PRAWIDŁOWO ZBUDOWANYM PRZEGUBIE STAŁYM ŚRODKOWA CZĘŚĆ BOLCA, ZAMOCOWANA W UCHWYCIE ŚRODKOWYM, WINNA BYĆ DWA RAZY DŁUŻSZA OD KTÓREJKOLWIEK Z DWUCH SKRAJNYCH CZĘŚCI BOLCA, ZAMOCOWANYCH W SZCZĘKACH; PONADTO WSPOMNIANA CZĘŚĆ BOLCA ŚRODKOWA WINNA STANOWIĆ  $\frac{\pi}{2}$  ŚREDNICY JEGO.

Tylko co otrzymany wniosek z góry przypuszcza, że NAPRĘŻENIE  $t_n$  NIE PRZEKRACZA DOPUSZCZALNEGO SKRAJNEGO NAPRĘŻENIA  $R_n$  dla danego tworzywa. Ponieważ  $R_n = R_r$  DLA ŻELAZA KUTEGO LUB STALI, TWORZYW zazwyczaj używanych przy budowie przegubów, przeto warunek  $t_x = t_n = R_t$ , z GÓRY WYZNACZA WARTOŚĆ  $t_n$  NIŻSZĄ OD  $R_n$ , ponieważ, jak to już wiemy  $R_t = 0.75 \div 0.8 R_r$ , a więc ostatecznie  $t_x = t_n = 0.75 \div 0.8 R_n$ .

Inaczej natomiast rzecz się ma, gdy PRZEGUB WYKONAMY Z DWUCH RÓŻNYCH TWORZYW, zakładając, dajmy na to, bolec stalowy w uchwytach bronzowych. Wtedy waru-



nek  $t_x = t_n$  zazwyczaj nie daje się zachować, a przegub należy obliczać ze wzorów  $\frac{\pi d^3}{4} R_{tB} = \frac{Q}{2}$ ;  $ld R_{nW} = \frac{Q}{2}$  oraz  $ld R_{ns} = Q$ , w których  $R_{tB}$  oznacza SKRAJNE dopuszczalne naprężenie TNĄCE dla tworzywa, użytego na bolec, a  $R_{nW}$  i  $R_{ns}$  SKRAJNE dopuszczalne naprężenia CISNĄCE dla materiału szczęk i uchwytu środkowego.

#### § 10. PRÓBY WYTRZYMAŁOŚCIOWE NA ZCINANIE.

Za pomocą tylko co opisanego przegubu moglibyśmy niewątpliwie otrzymać materiał doświadczalny, dotyczący ZCINANIA PRÓBKII CYLINDRYCZNEJ, zamocowanej jako bolec w przegubie; niestety jednak, odkształcenia samych szczęk oraz trudność wyznaczenia wymiaru  $d/z$  - czynią tego rodzaju próby wytrzymałościowe TRUDNO WYKONALNYMI, uniemożliwiając otrzymanie pewnych wyników.

Jedyny wynik praktyczny, jaki daje się tą drogą osiągnąć, polega na określeniu OBCIĄŻENIA ZCINAJĄCEGO próbkę wzdłuż powierzchni dotyku uchwytów. Tutaj niewątpliwie wyszczególnione wyżej trudności przestają istnieć - otrzymujemy wyraźnie zaznaczony moment pęknięcia próbki pod jarzmem SKRAJNEJ WARTOŚCI  $Q_t$  OBCIĄŻENIA, które wyznacza ze wzoru  $t_x s = R_x$  - NAPRĘŻENIE ZCINAJĄCE  $K_t = \frac{1}{2} Q_t : \frac{\pi d^2}{4}$ . ZAZWYCZAJ NAZYWAMY  $K_t$  WYTRZYMAŁOŚCIĄ NA ZCINANIE danego tworzywa.

Według prób C.v.BACHA STOSUNEK  $\mu = K_t : K_r$  - wytrzymałości na zcinanie i na rozrywanie, WYNOŚI ŚREDNIO DLA ŻELAZA KUTEGO I STALI CIĄGLIWEJ  $\mu = 0.75 \div 0.80$ , A DLA ŻELIWA  $\mu = 1 \div 1.17$ .

Te wartości zdają się potwierdzać poprzednio teoretycznie otrzymane wyniki, gdzie DLA TWORZYW JEDNOLITYCH W DZIEDZINIE ODKSZTAŁCEŃ PROPORCJONALNYCH mieliśmy  $K_t:K_r = 0.75 \div 0.80$ , bo chociaż naprężenia

$K_t$  i  $K_r$  należą do zupełnie innej dziedziny odkształceń nieproporcjonalnych, to tem niemniej jednak zasługuje NA SZCZEGÓLNIJSZĄ UWAGĘ TOŻSAMOŚĆ WARTOŚCI

$K_t:K_r$ , wyznaczonej czysto doświadczalnie, oraz wartości  $K_t:K_r$  - otrzymanej teoretycznie dla żelaza zlewnego i stali, a więc dla tworzyw, CZYNIĄCYCH ZADOSĆ tylko co wymienionym WARUNKOM, zwłaszcza, że dla żeliwa, które jak wiemy, prawie, że wcale nie daje odkształceń proporcjonalnych - wartość  $K_t:K_r$  znacznie odbiega od wartości teoretycznej.  $K_t:K_r$ .

Tę samą wartość NAPRĘŻENIA ZCINAJĄCEGO  $K_t$  możemy również wyznaczyć i w inny sposób, tnąc płaskie próbki wytrzymałościowe za

RYS. 125.

RYS. 126.

pomocą NOŻYC,

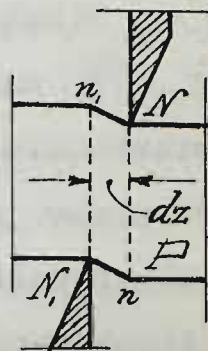
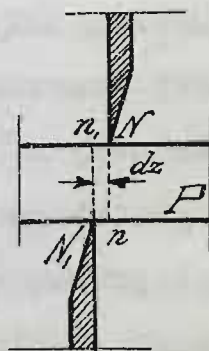
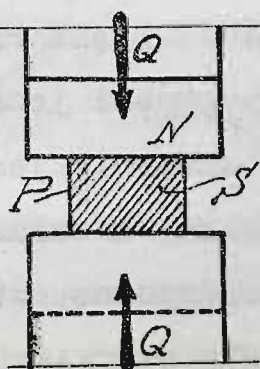
złożonych

/rys. 125/ z

DWUCH PŁAS-

KICH NOŻÓW

$N$ ,  $N'$ , pio-



nowych, znikomo odległych o  $dz$ . Pomiedzy te noże kładziemy PRÓBKĘ  $P$  i wywieramy na nią nacisk, zbliżając do siebie oba noże.

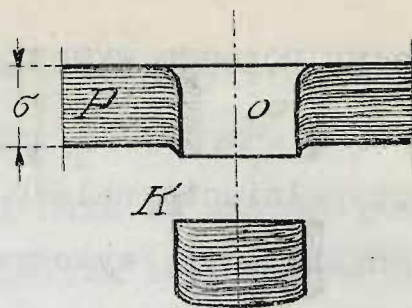
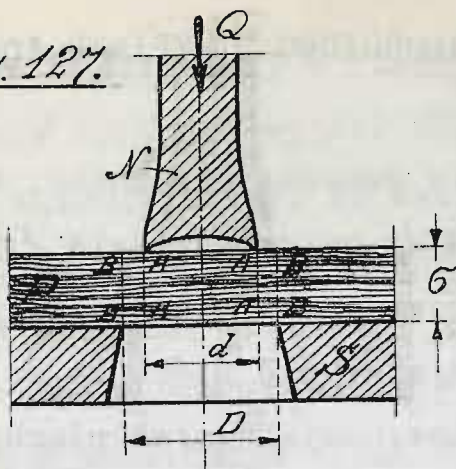


Oznaczmy przez  $Q$  siłę nacisku noża  $N$  lub  $N'$ , na próbkę; kierunek posuwu noża niech będzie ponadto  $Nn$  dla noża  $N$ , oraz  $N'n'$  dla noża  $N'$ . Na tle działania sił  $Q$  - znikomo gruba PŁYTKA, myślowo z próbki wyodrębniona, A OGRANICZONA RÓWNOLEGŁYMI PŁASKIMI PRZEKROJAMI POPRZECZNYMI  $Nn, N'n'$  PRÓBKĄ - ulegnie skrzywieniu /rys. 126/, podobnie jak to miało miejsce z płytkami  $BC$  i  $DE$  przegubu.

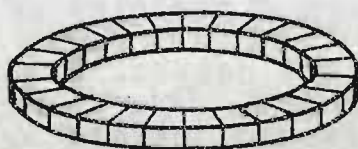
Przy dostatecznie wielkiej wartości  $Q_z$  obu sił, próbka zostanie nawet rozcięta na tle nadmiernie rosnących odkształceń płytki.

Oznaczmy przez  $S$  - poprzeczny PRZEKRÓJ PRÓBKĄ, wtedy wartość SIŁY ROZCINAJĄCEJ  $Q_z$  wyznaczymy, pisząc  $Q_z = S K_z$ . Na mocy tego wzoru możemy również wyznaczyć  $K_z$  dla danego tworzywa, MIERZĄC PRZEKRÓJ PIERWOTNY PRÓBKĄ- $S$  I NATEŻENIE ZCINAJĄCE SIŁY  $Q_z$ . Ten sposób wyznaczania  $K_z$  daje dobre wyniki w zastosowaniu do PRÓBEK PŁASKICH, wtedy bowiem PROSTE OSTRZA NOŻÓW  $N, N'$  WIERNIE ODDAJĄ OBCIĄŻENIE TNĄCE PRZEKROJOM  $Nn, N'n'$ , na całej szerokości próbki jednostajnie. Natomiast działanie noży  $N, N'$  znacznie jest gorsze, gdy próbka nie jest płaska po bokach, a zwłaszcza, gdy mamy do czynienia z próbką cylindryczną, wtedy bowiem detyk noży nie jest ściśły, ponieważ zachodzi li tylko w pewnym punkcie próbki, to też w tym wypadku chętniej jest używany wyżej opisany przegub.

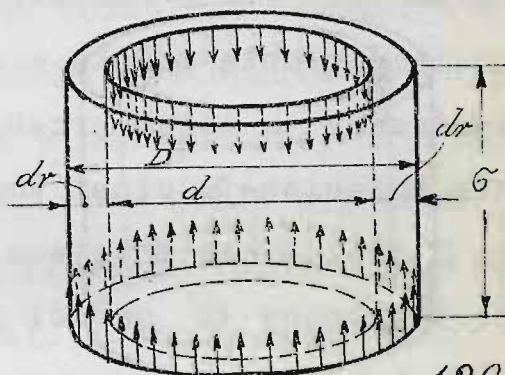
RYS. 127.



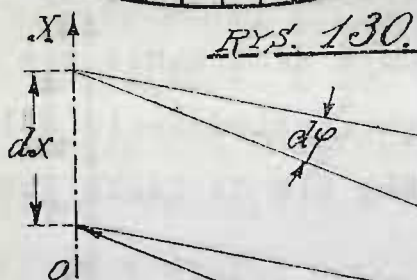
RYS. 128.



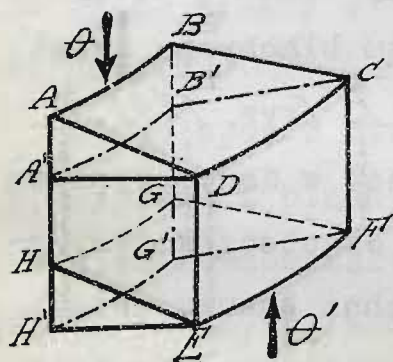
RYS. 130.



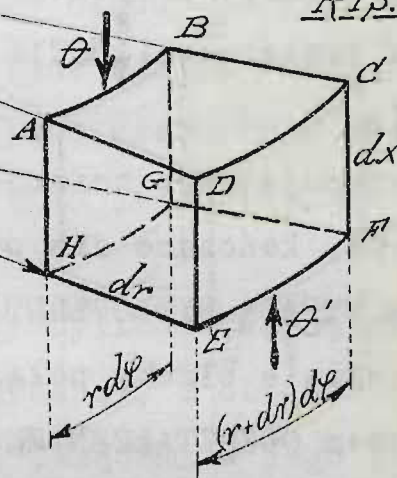
RYS. 129.



RYS. 131.



RYS. 132.



W obu wypadkach z całą pewnością możemy powiedzieć na zasadzie istniejącego materiału doświadczalnego, że próbki o przekrojach poprzecznych geometrycznie podobnych, ujawniają te same wartości  $K_t$ . Stąd wniosek, że PRÓBKİ O PRZEKROJACH POPRZECZNYCH GEOMETRYCZNIE PODOBNYCH, ZACHOWUJĄ SIĘ PODOBNIĘ PRZY ZCINA-



NIU SĄ WIĘC PODOBNE WYTRZYMAŁOŚCIOWO W WYPADKU ZCINANIA.

W uzupełnieniu należy tu jeszcze wspomnieć, o PRÓBIE PRZEBIJANIA, wykonywanej na przebijanie [rys. 127]. Na płaskim stole  $S$  przebijarki ponad okrągłym otworem średnicy  $D$  rozszerzającej się nieco ku dołowi kładziemy płaską próbkę - zazwyczaj kawałek blachy i przyciskamy ją nożem przebijającym  $N$ , średnicy  $d$  o lekko wgłębionej dolnej powierzchni dotyku. Średnica noża  $d$  jest nieco mniejsza od średnicy otworu  $D$ . Nacisk pionowy  $Q$  na nóż powoduje zanurzanie się noża wgłąb blachy, przyczem, dzięki zakłębieniu dolnej jego powierzchni DOTYK USTALA SIĘ NA CAŁYM OBWO- DZIE NOŻA.

Następuje więc zcinanie blachy WZDŁUŻ POSUWU NOŻA  $AA-AA$ , kończące się przebicciem blachy na wylot, przyczem WYPADA WYTŁOCZONY KRĄŻEK  $K$  [rys. 128].

Przebiccie blachy połączone jest w danym wypadku ze znacznem ODKSZTAŁCENIEM TNĄCEM cząsteczek przylegających do cylindrycznej powierzchni posuwu noża

$AAAA$ , jak to zresztą wyraźnie postrzec się daje na rys. 128, gdzie widzimy OSTRE WYWINIĘCIE BRZEGÓW OTWORU NA ZEWNĄTRZ I SKRZYWIENIE PODŁUŻNYCH WŁÓKIEN BLACHY. Oznaczmy różnicę średnic  $D-d=2dr$ , a przez

$\sigma$  - GRUBOŚĆ BLACHY przebijanej, i wyobraźmy sobie dwa współśrodkowe przekroje cylindryczne blachy  $\pi d\sigma$  i  $\pi D\sigma$  WYZNACZAJĄCE WSPÓLNIE CYLINDER PUSTY WEWNĄTRZ,

myślowo wyodrebniony z blachy [rys. 129]. Grubość ścianek tego cylindra wynosi niewątpliwie  $dr = \frac{1}{2}[D-d]$ . Wyżej zaznaczyliśmy, że dotyk noża do górnej powierzchni blachy zachodzi wzdłuż obwodu koła o średnicy  $d$ , możemy więc bez znacznego błędu założyć, że parcie noża na blachę równomiernie jest rozłożone wzdłuż tego obwodu i skierowane wгłęb blachy prostopadle do jej górnej powierzchni dotyku, co w dostatecznej mierze uwidocznione jest na rys. 129. Ten układ sił równoważą odpory stołu statycznie niewyznaczalne o niewiadomym rozkładzie. I tu, w braku dokładniejszych danych możemy bez znaczniejszego błędu założyć, że te odpory są równomiernie rozłożone wzdłuż obwodu otworu, to jest wzdłuż obwodu koła o średnicy  $D$  i skierowane wгłęb blachy prostopadle do jej dolnej powierzchni dotyku.

W ten sposób otrzymujemy cylinder wewnątrz pusty, myślowo z blachy wyodrebniony, a obciążony siłami wzajem równoważącymi się, leżącymi w jego powierzchniach bocznych, a równomiernie rozłożonymi na obwodach poprzecznych przekrojów tych powierzchni.

Dzieląc ciekawitą długość cylindra  $6$  na części  $dx$ , prowadzimy przez punkty podziałowe przekroje poprzeczne, rozcinające cylinder na SZEREG PIERŚCIEŃ, znikomo wysokich, które z kolei możemy rozpatrywać, jako UKŁADY KOSTEK, prowadząc myślowo PĘCZEK PRZEKROJÓW płaskich, średnicowych, jak to zresztą wy-



rażnie widzieć się daje na rys 130. W ten sposób dzielimy cały cylinder na elementarne kostki współśrodkowe *dr*-SZEROKIE, *dx* - WYSOKIE, a *rdφ*-DŁUGIE OD STRONY WEWNĘTRZNEJ, przyczem przez *dφ* oznaczyliśmy kąt pomiędzy dwoma sąsiednimi średnicowymi przekrojami (rys. 131) OBCIĄŻENIE KOSTEK stanowią:

1-o NAPRĘŻENIE  $t'_x$  ścianki wewnętrznej kostki, równoległe do podłużnej osi cylindra-*OX*, wzdłuż której działa siła *Q*.

2-o NAPRĘŻENIE  $t_x$  ścianki zewnętrznej kostki, równoległe również do osi *OX*.

Te naprężenia dają siły  $\theta$  i  $\theta'$  przyłożone do tylko co wymienionych ścianek kostki, przyczem niewątpliwie  $\theta = t_x r d\varphi dx$ , oraz  $\theta' = t'_x (r+dr) d\varphi dx$ . Siły te stanowią wspólnie CAŁKOWITE OBCIĄŻENIE CYLINDRA wyżej już wyznaczone, stąd więc  $Q = \sum \theta = \int t_x r d\varphi dx$ , oraz

$$Q = \sum \theta' = \int t'_x (r+dr) d\varphi dx. -$$

WOBEC ZUPEŁNEJ SYMETRII WARUNKÓW OBCIĄŻENIA KOSTEK MOŻEMY ZAŁOŻYĆ, ŻE  $t_x$  i  $t'_x$  POSIADAJĄ WARTOŚCI STAŁE, ponad to oczywiście  $r = \frac{1}{2}d$  oraz  $r+dr = \frac{1}{2}D$  zatem ostatecznie

$$Q = \frac{1}{2} dt_x \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dx = \pi d l t_x, \text{ oraz } Q = \frac{1}{2} D t'_x \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dx = \pi D l t'_x \text{ stąd } t_x = \frac{Q}{\pi d l} \text{ i } t'_x = \frac{Q}{\pi D l}.$$

Są to niewątpliwie NAPRĘŻENIA TNĄCE, pod ich jarzmem kostki ulegają skrzywieniu, jak to widać na rys. 132, a przy wartości dostatecznie wielkiej  $t_x = K_t$  - ZCIĘCIU. Możemy więc wyznaczyć wartości SIŁY PRZEBIJAJĄCEJ BLACHĘ  $Q_t = K_t \pi d l.$

Wszystko to, cośmy tu powiedzieli stanowi jeno obraz przybliżony zjawisk istotnie zachodzących; jest on jednak najzupełniej wystarczający w zastosowaniach praktycznych. Główny błąd naszego rozumowania polega na dowolnem przypuszczeniu, że obciążenie zewnętrzne blachy przenika w jej głąb wzdłuż powierzchni cylindrycznych. W rzeczywistości zjawiska zachodzą tu zupełnie inaczej, na co zresztą wskazuje ustalony doświadczalnie KSZTAŁT PRZEBITEGO OTWORU. Na zasadzie naszych założeń należałoby oczekiwać OTWORU CYLINDRYCZNEGO, tymczasem w rzeczywistości OTWÓR ROZSZERZA SIĘ NIECO KU DOŁOWI. FRÉMONT opracował teorię przebijania na innych zasadach, ponieważ jednak podana przez nas praktycznie WYSTARCZA, zatem ograniczamy się do wyżej powiedzianego jedynie. W KURSIE ĆWICZEŃ podajemy zadania odnoszące się do działu niniejszego, a tu z kolei rozpatrujemy następny dział kursu.

## R O Z D Z I A Ł   C Z W A R T Y.

### T E O R J A   S K R Ę C A N I A.

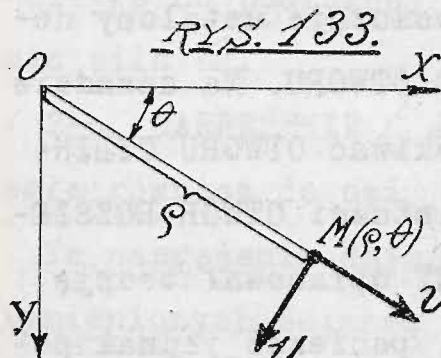
#### § 1. WYZNACZENIE SKŁADOWYCH NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH.

Bierzemy pod uwagę zaznaczony w ustępie końcowym rozdziału pierwszego wypadek, kiedy układ  $\mathbb{L}_2$  sił odkształcających sprowadza się do POJEDYŃCZEGO MOMENTU  $M_x$  o parze sił, leżącej w przekroju płaskim. W danym wypadku  $R_x = R_y = R_z = 0$  oraz  $M_x = M_y = 0$ , natomiast



możemy napisać WZORY (B) tylko co wspomnianego ustępu, w postaci nader prostej:  $t_x = Ax - \frac{M_z}{I_o} y$ ,  $t_y = \frac{M_z}{I_o} x + Ay$ ,  $t_z = 0$ , gdzie przez  $I_o = \int \rho^2 ds$  oznaczyliśmy MOMENT BEZWŁADNOŚCI POLARNY PRZEKROJU. Tutaj więc naprężenie jednostkowe  $t$  może być rozpatrywane jako suma składowych: [rys. 133].

1-o  $u$  - PROSTOPADŁY DO PROMIENIA WODZĄCEGO  $\rho$



jakiegokolwiek punktu  $M$  przekroju płaskiego, a OBRÓCONEJ W KIERUNKU ROSNĄCYCH KĄTÓW  $\theta$ .

Składowe  $u_x = -\frac{M_z}{I_o} y$ ,  $u_y = \frac{M_z}{I_o} x$  wyznaczają wartość tej składowej w następującej postaci:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \frac{M_z}{I_o} \sqrt{y^2 + x^2} = \frac{M_z}{I_o} \rho.$$

Jest ona więc PROPORCJONALNA do promienia  $\rho$ .

2-o  $v$  - LEŻĄCEJ W PRZEKROJU na osi promienia wodzącego punktu  $M$ . Składowe  $v_x = Ax$ ,  $v_y = Ay$  wyznaczają wartość tej składowej w postaci :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = A \sqrt{x^2 + y^2} = A \rho, \text{ stąd } A = v/\rho.$$

Naprężenia jednostkowe  $v$ , jako skierowane dośrodkowo lub odśrodkowo w przekroju, świadczyć mogą li tylko o skróceniach lub wydłużeniach promieni wodzących przekroju, co niewątpliwie powoduje odpowiednie zwichnięcia lub rozszerzenia przekroju, symetryczne względem osi  $OZ$ . Wiemy ponadto, że współczynnik  $A$  nie daje się wyznaczyć z równań statyki, jedynie do-

świadczenie może podać wartość tej składowej naprężenia. W danym wypadku z całą pewnością można stwierdzić doświadczalnie zupełny brak jakiegokolwiek wyrażnego zważania się lub rozszerzania przekroju, co świadczy o wartości  $A=0$ , należy więc napisać w postaci ostatecznej  $t_x = -\frac{M_z}{I_o} y = u_x$ ;  $t_y = \frac{M_z}{I_o} x = u_y$ ,  $t_z = 0$ , co daje  $t_k = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = \frac{M_z}{I_o} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{M_z}{I_o} \rho$ .

Tylko co otrzymany wzór pozwala nam ustalić wnioski następujące:

NAPRĘŻENIA JEDNOSTKOWE PRZEKROJU PŁASKIEGO, ODKSZTAŁCONEGO POD JARZMEM MOMENTU PARY SIŁ, LEŻĄCEJ W PŁASZCZYŹNIE PRZEKROJU SĄ WPROST PROPORCJONALNE DO MOMENTU PARY SIŁ, ORAZ ODWROTNIE PROPORCJONALNE DO BIEGUNOWEGO MOMENTU PRZEKROJU. SĄ ONE PONADTO PROSTOPADŁE DO PROMIENI WODZĄCYCH ODNOŚNYCH PUNKTÓW PRZEKROJU I WPROST PROPORCJONALNE DO TYCH PROMIENI. Wi-  
dzimy stąd, że W ŚRODKU MASY PRZEKROJU PANUJE NAPRĘŻENIE  $t_o = 0$ , tutaj bowiem  $\rho = 0$ , a w odległości  $\rho = \rho_m$  od środka masy NAPRĘŻENIE MA STAŁĄ WARTOŚĆ  $t_k = t_{km} = \frac{M_z}{I_o} \rho_m$ . WZDŁUŻ KRĘGU PROMIENIA  $\rho_m$  PANUJĄCĄ; IM ZATEM WIĘKSZE  $\rho_m$ , TYM WYŻSZĄ WARTOŚĆ UJAWNIA NAPRĘŻENIE JEDNOSTKOWE.

W ten sposób otrzymany RÓJ NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH  $t_k$ , stanowi UKŁAD WIROWY NAPRĘŻEŃ SYMETRYCZNIE ROZŁOŻONYCH WOKÓŁ ŚRODKA MASY PRZEKROJU podobnie jak to ma miejsce dla cieczy wirującej, gdzie zamiast naprężeń mamy szybkości cząstek cieczy. Będziemy więc



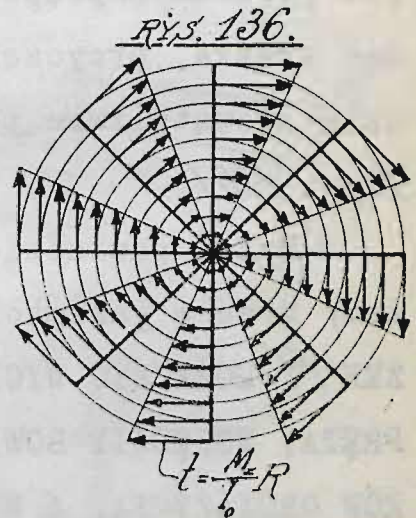
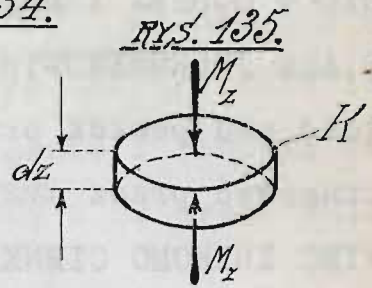
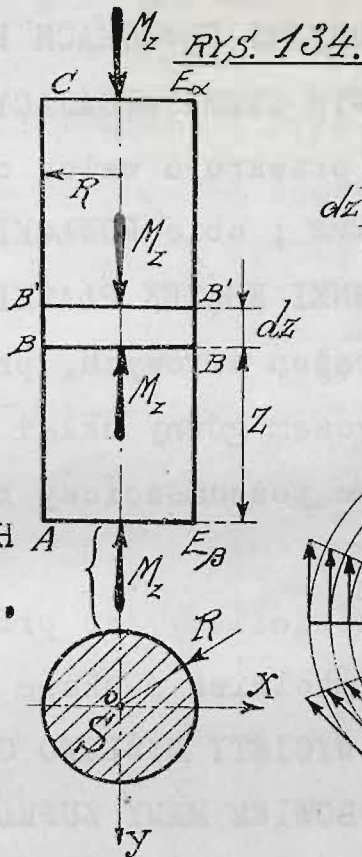
nadal nazywali WIROWYM - UKŁAD NAPRĘŻEŃ PRZEKROJU PŁASKIEGO, ODKSZTAŁCONEGO POD JARZMEM MOMENTU  $M_z$  PROSTOPADŁEGO DO PŁASZCZYZNY PRZEKROJU.

Tutaj nasuwa się pytanie, jaki układ sił warunkuje tego rodzaju obciążenie przekroju momentem  $M_z$ ? Przedewszystkiem układ sił zewnętrznych odkształcających winien być zupełnie SYMETRYCZNY WZGLĘDEM OSI  $Ox$ , inaczej bowiem nie dawał by momentu  $M_z$ , leżącego na tej osi, ponadto, w myśl zasadniczego prawa wytrzymałości materiałów ogłoszonego w zagajeniu, WINIEN BYĆ ZRÓWNOWAŻONY POWSTAJĄCEMI NAPRĘŻENIAMI W POWŁOCE CIAŁA ODKSZTAŁCONEGO.

Sam układ wirowy naprężeń, tylko co wyznaczony, z góry poniekąd ustala odnośną postać przekroju, bo niewątpliwie nie każdy przekrój jednakowo zda się odpowiadać warunkom rozkładu naprężeń. Jak ciecz wirować może li tylko w naczyniu okrągłym, nie obijając się o ściany, i nie tworząc wirów wtórnych na tle uderzeń, tak również i w danym wypadku cząsteczki ciała odkształconego, zda się WIRUJĄ NAJSPRAWNIEJ W PŁASKIM PRZEKROJU KOŁOWYM. Ten więc najodpowiedniejszy przekrój bierzemy odrazu pod uwagę i rozpatrujemy z samego początku.

§ 3. ODKSZTAŁCENIA WIROWE WALCÓW PROSTYCH, jako przykład najprostszy ciała o przekroju poprzecznym kołowym. Wyobraźmy sobie WALEC PROSTY / rys. 144 / odkształcony pod jarzmem dwóch wzajemnie równoważących

się UKŁADÓW SIŁ  
WIROWYCH; siły te  
w myśl warunków  
dla obciążenia ze-  
wnętrznego muszą  
być prostopadłe  
do podłużnej osi  
walca  $OZ$  i spro-  
wadzać się do DWUCH  
PAR RÓŻNOSKRĘTNYCH,  
leżących odpowied-  
nie w płaszczyz-  
nach obu den walca  
GÓRNEGO I DOLNEGO.



Będą to dwa układy  $E_\alpha$  i  $E_\beta$  sił zewnętrznych, wywo-  
lających NAPRĘŻENIA WIROWE [rys. 136] w dnach cylin-  
dra. Układy sił  $E_\alpha$  i  $E_\beta$  są więc rojami SIŁ JEDNOST-  
KOWYCH ODPOWIEDNIO RÓWNYCH NAPRĘŻENIOM WIROWYM OBU  
DEN I W TAKI SAM SPOSÓB ROZŁOŻONYCH WIROWO W PŁASZCZY-  
ZNACH OBU DEN WALCA; słowem, będą to siły jednostko-  
we zewnętrzne  $\frac{M_z}{I} \circ$ , stanowiące wirowy układ sił  
odkształcających o wypadkowym momencie  $M_z$ , leżącym  
na podłużnej osi cylindra. Obraz działania obciąże-  
nia wirowego zewnętrznego wypuklają strzałki na rys.  
136.

Gdziekolwiek wzięty PRZEKRÓJ POPRZECZNY walca  
ujawni dwa znoszące się wzajemnie UKŁADY WIROWE NA-

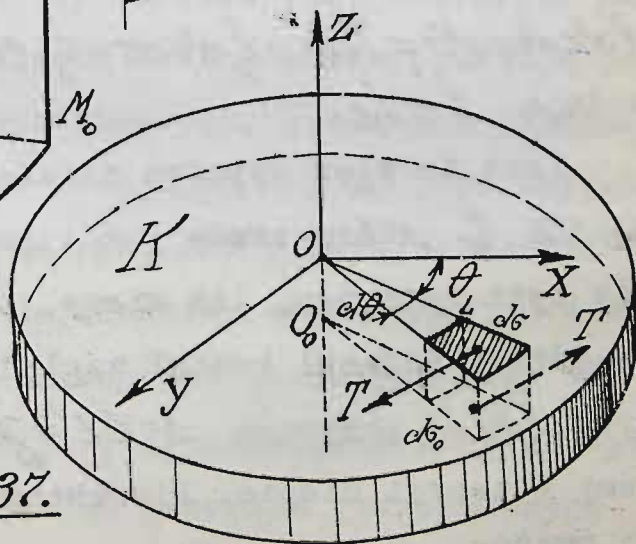
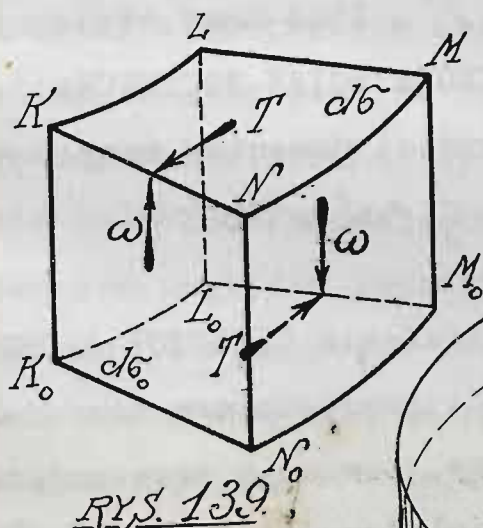
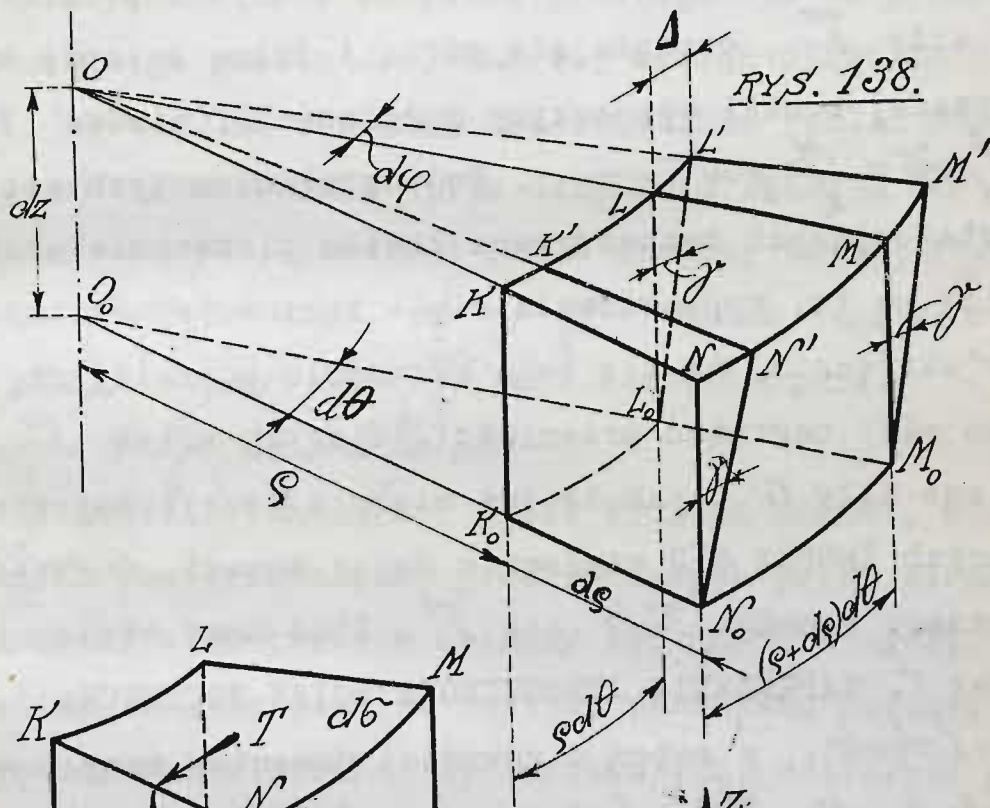


PRĘŻEŃ JEDNOSTKOWYCH  $\tau_K = \frac{M_z}{I} \rho$ , SIEDLISKUJĄCE ODPOWIEDNIO W GÓRNEJ I DOLNEJ POWŁOKACH PRZEKROJU, A RÓWNYCH SIŁOM JEDNOSTKOWYM ODKSZTAŁCAJĄCYM. Wzajemną odległość obu powłók przekroju walca odkształconego możemy oznaczyć przez  $\alpha z$ ; obie POWŁOKI CZĄSTECZEK TWORZĄ WIĘC ZNIKOMO CIENKI KRAŻEK PŁASKI  $K$ , pozostający pod jarzmem naprężeń wirowych, przyłożonych do obu den krążka, przyczem górny układ wirowy naprężeń będzie niewątpliwie tożsamościowy z  $E_\alpha$ , a dolny z  $E_\beta$ . [rys. 135].

Wyżej powiedzieliśmy, że przekrój poprzeczny możemy brać w jakimkolwiek punkcie walca, a zatem KRAŻEK  $K$  MOŻE BYĆ WYCIĘTY MYŚLOWO GDZIEKOLWIEK Z CIAŁA PRĘTA. WSZĘDZIE BOWIEM MAMY ZUPEŁNĄ TOŻSAMOŚĆ WARUNKÓW OBCIĄŻENIA, A WIĘC RÓWNIEŻ I TOŻSAMOŚĆ UKŁADÓW WIROWYCH NAPRĘŻEŃ, OBCIĄŻAJĄCYCH DENKA KRAŻKA, A ZNOŚĄCYCH SIĘ WZAJEMNIE. Te układy są odpowiednio równe układom  $E_\alpha$  i  $E_\beta$ , stanowią zatem ROJE WIROWE naprężeń jednostkowych  $\tau_K = \frac{M_z}{I} \rho$ , sprowadzające się do dwóch momentów  $M_z$  różnoskrętnych, co zresztą dostatecznie wyraźnie zaznacza nasz rysunek.

Weźmy gdziekolwiek na powierzchni KRAŻKA  $K$  PUNKT  $L$  O PROMIENIU WODZĄCYM  $\rho$  I KĄCIE BIEGUNOWYM  $\theta$ . Możemy z łatwością wyznaczyć biegunowy element pola przekroju  $d\sigma$ , przynależny do punktu  $L$ . W tym celu w kierunku promienia wodzącego  $\alpha = \rho$  odkładamy odcinek  $\alpha \rho$  - a w kierunku rosnących kątów bie-

gunowych kąta  $d\theta$ . Kreśląc promieniami  $\varrho$  i  $\varrho + d\varrho$  małe łuki, przecinające boki kąta  $d\theta$  otrzymujemy szukane poletko  $d\sigma = \varrho d\varrho d\theta \text{ cm}^2$  wyznaczające w rzucie na dolne dno krążka  $K$  [rys. 137] takie same poletko  $d\sigma_0$ . Oba te poletka łącznie z linjami rzutów TWORZĄ WSPÓLNIE MAŁENKĄ KOSTKĘ o czterech ścian-



RYS. 137.



kach płaskich i dwóch cylindrycznych. Wobec nieznacznych wymiarów kostki, można pominąć jej krzywiznę i rozpatrywać ją jako ZWYKŁĄ KOSTKĘ PROSTĄ myślowo wyodrębnioną w przekroju.

Ponieważ krążek  $K$  znajduje się pod jarzmem naprężeń wirowych, przyłożonych do obu jego podstaw, przede siły  $T$ , obciążające górną i dolną ściankę rozpatrywanej kostki wyznaczmy z łatwością, pisząc  $T = \int_R t \, d\theta = \frac{M_z}{I} \int_R \rho \, d\theta$  — . Pod działaniem tych sił odkształcających rozpatrywana kostka pierwotnie ukośna, dajmy na to, wyprostowała się - boczne jej ściany uległy skróceniu, na tle tego skrócenia pojawiły się w nich siły naprężeń przeciwdziałających siłom  $T$ . Te boczne siły  $\omega$ , jak to już wiemy z teorii naprężeń tnących ZNOSZĄ SIĘ wzajemnie dając moment  $\omega \rho \, d\theta$  równoważący moment  $T \rho \, dz$  sił  $T$ . Stąd mamy oznaczając przez  $t'$  NAPRĘŻENIE JEDNOSTKOWE ŚCIAN BOCZNYCH:

$$\omega = t' \rho \, dz \, d\theta, \text{ a zatem z równości momentów mamy: } \omega \rho \, d\theta = t' \rho \, dz \, d\theta \, \rho = T \rho \, dz = t \rho \, dz \, d\theta = t' \rho \, dz \, d\theta \, \rho$$

co daje  $t' = t_\theta$ .

Jest to więc wypadek działania CZTERECH NAPRĘŻEŃ TNACYCH  $t_\theta$ , który znamy już z poprzedniego rozdziału. Siły tych naprężeń, jak wiemy, powodują przesunięcie się górnej ścianki kostki względem dolnej o  $\Delta = LL'$  [rys. 138], przy czem  $\Delta = LL' = \gamma \, dz$ , jak to ustaliliśmy w teorii cięcia. Pierwotny zatem kształt kostki był UKOŚNY, mieliśmy pierwotnie KOSTKĘ UKOŚNĄ

$KLMNKL_0M_0N_0$ ; na tle działania sił odkształcających ujawniło się PRZESUNIĘCIE JEDNOSTKOWE  $\gamma = \Delta : dz$  i KOSTKA WYPROSTOWAŁA SIĘ, PRZECHODZĄC W KOSTKĘ PROSTĄ

$KLMNKL_0M_0N_0$ . Górna ścianka kostki nie zmieniła przytem wcale swego kształtu pierwotnego - PRZESUNĘŁA SIĘ jeno o  $\Delta$  w kierunku prostopadłym do promienia wodzącego punktu  $L$ , inaczej mówiąc SKRĘCIŁA SIĘ O KĄT  $d\varphi = \angle L'OL$  WZGLĘDEM OSI PODŁUŻNEJ PRĘTA. Nazwijmy kąt  $d\varphi$  ELEMENTARNYM KĄTEM SKRĘCENIA POLETKA  $d\sigma$ , wtedy  $\Delta = \rho d\varphi$ , ponieważ zaś z drugiej strony  $\Delta = \gamma dz$ , przeto  $\rho d\varphi = \gamma dz$  skąd  $d\varphi = \gamma \frac{dz}{\rho}$ . Wobec tego że:

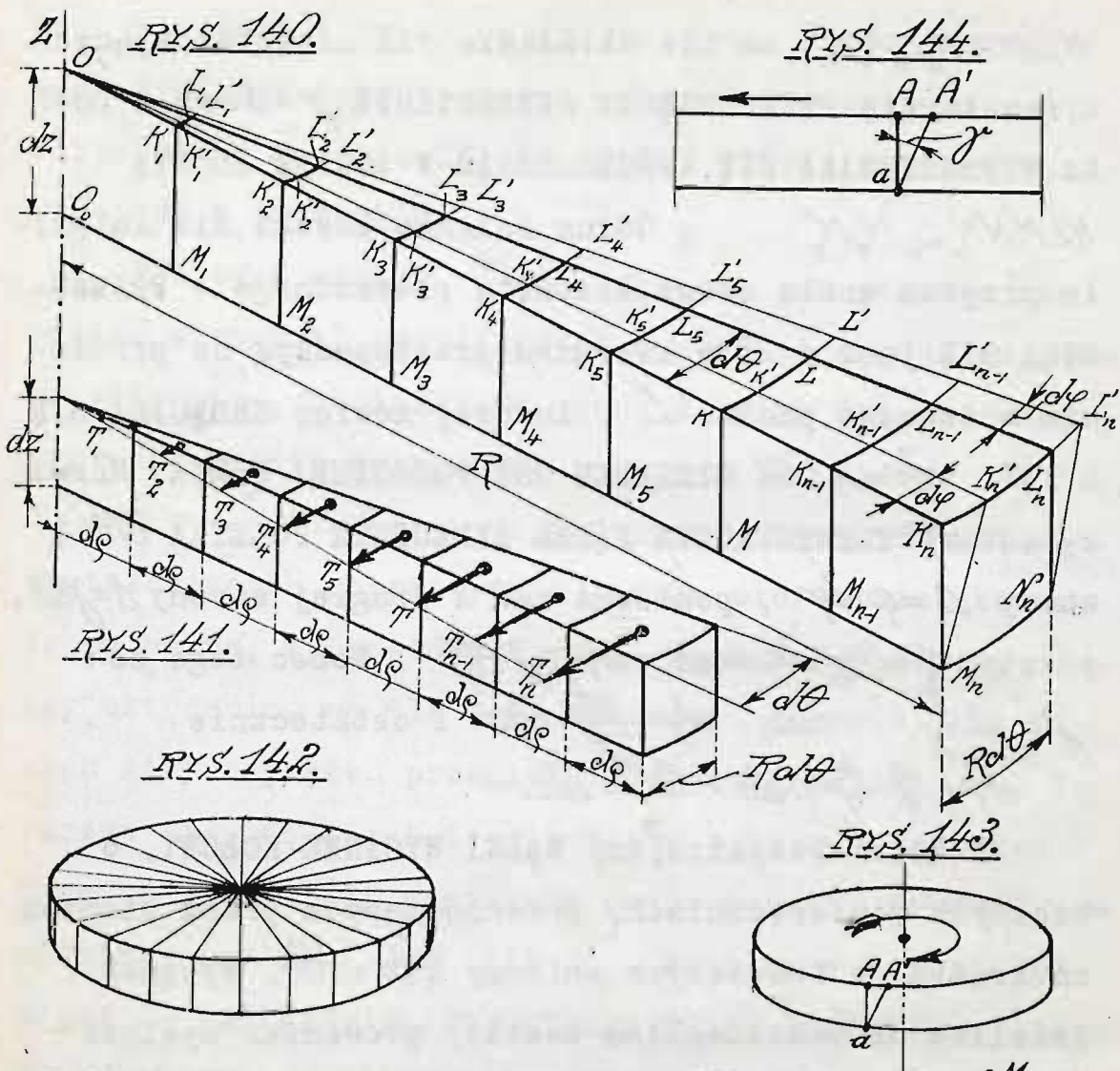
$\gamma = \beta \cdot t_k$  mamy  $d\varphi = \frac{\beta t_k}{\rho} dz$  i ostatecznie:

$$d\varphi = \frac{\beta}{\rho} \cdot \frac{M_z}{I_0} \rho dz = \frac{\beta M_z}{I_0} dz.$$

Z kolei rozpatrujemy WĄZKI WYCINEK KOŁOWY, o bocznych powierzchniach, przechodzących przez pionową oś krążka, a tworzących znikomy kąt  $d\theta$ . Wycinek dzielimy na poszczególne kostki, prowadząc myślowo cały szereg powierzchni cylindrycznych, odległych od siebie o  $d\sigma$ . Górne poletka tych kostek pozostają pod działaniem naprężeń jednostkowych, rosnących proporcjonalnie do odległości kostek od osi  $OZ$ , co uwypukla w dostatecznej mierze rys. 141. Skrajna kostka na obwodzie, będzie więc najbardziej obciążona, bo wartość naprężenia jednostkowego wyniesie dla niej

$t_k = \frac{M_z}{I_0} R$ , gdzie przez  $R$  oznaczyliśmy promień walca kołowego. Pod działaniem naprężeń jednostkowych górne poletka kostek przesuną się względem dolnych,





a więc i względem osi pionowej  $OZ$  o kąt  $d\varphi = \frac{\beta M_z}{I_0} dz$ .  
 JEDNAKOWY DLA WSZYSTKICH KOSTEK, GDY WSPÓŁCZYNNIK  $\beta$   
 POSIADA WARTOŚĆ STAŁĄ DLA WSZYSTKICH NAPRĘŻEŃ JEDNOST-  
 KOWYCH MNIEJSZYCH OD  $t_R$ .

W przeciwnym razie, OZNACZAJĄC PRZEZ  $\beta$  ŚREDNIĄ  
 WARTOŚĆ TEGO WSPÓŁCZYNNIKA DLA NAPRĘŻEŃ  $t_R \leq t_R$  OTRZY-  
 MUJEMY ŚREDNI KĄT SKRĘCANIA  $d\varphi = \frac{\beta M_z}{I_0} dz$  WYCINKA KO-  
 ŁOWEGO. W PIERWSZYM WYPADKU, PRZY STAŁYM  $\beta$ , SKRAJNY  
 PUNKT  $L'_n$  LUB  $K'_n$  KRAWĘDZI WYCINKA PRZESUNIE SIĘ POD-  
 CZAS ODKSZTAŁCENIA O KĄT  $d\varphi = L'_n OL_n = K'_n OK_n$ , PRZY-

CZEM NIEWĄTPLIWIE KRAWĘDZ  $OL'_n$  LUB  $OK'_n$  POZOSTANIE PRO-  
STĄ I NIEZMIENIONĄ, NATOMIAST W DRUGIM WYPADKU TE  
KRAWĘDZIE ZWICHRZĄ SIĘ PO ODKSZTAŁCENIU MNIEJ LUB  
WIĘCEJ WYRAŹNIE, A OBWODOWY ŁUK SKRĘCENIA  $Rd\varphi = L'_n L_n =$   
 $K'_n K_n$  NIE BĘDZIE MIARĄ ŚCISŁĄ KĄTA  $d\varphi$  LECZ TYLKO  
PRZYBLIŻONĄ, MOŻEMY WIĘC I TU WOBEC ZNIKOMOŚCI KĄTA  
 $d\varphi$  NAPISAC  $Rd\varphi \cong L'_n L_n \cong K'_n K_n$  [rys. 144].

Rozpatrując z kolei cały szereg wycinków koło-  
wych o wspólnych bocznych powierzchniach dotyku, mo-  
żemy otrzymane wyniki UOGÓLNIĆ DLA CAŁEGO KRĄŻKA wy-  
żej rozpatrywanego [rys. 142]. W danym wypadku KĄT  $d\varphi$   
BĘDZIE KĄTEM SKRĘCENIA GÓRNEJ POWIERZCHNI KRĄŻKA  
WZGLĘDEM DOLNEJ, UJAWNIAJĄCEM SIĘ NA TLE DZIAŁANIA  
WIROWYCH NAPRĘŻEŃ ODKSZTAŁCAJĄCYCH. I TUTAJ RÓWNIEŻ  
OBWODOWY ŁUK SKRĘCENIA  $AA'$  BĘDZIE MIARĄ KĄTA  $d\varphi$  ŚCI-  
ŚLĄ ZUPEŁNIE, GDY WSPÓŁCZYNNIK  $\beta$  JEST STAŁY DLA NA-  
PRĘŻEŃ  $\frac{\tau}{R} \leq \frac{\tau}{R}$ , A WYSTARCZAJĄCO PRZYBLIŻONĄ, GDY  
 $\beta$  MA WARTOŚĆ ZMIENNĄ W TEJ DZIEDZINIE. [Rys. 143].

W danym wypadku mamy więc do czynienia z OD-  
KSZTAŁCENIEM WIROWYM, czyli ze SKRĘCANIEM. Górne dno  
krążka wykonało obrót w stosunku do dolnego, ponadto  
górne i dolne dna nie uległy ŻADNYM ODKSZTAŁCENIOM,  
co bezpośrednio wypływa z naszych dotychczasowych wy-  
wodów.

To samo również da się powiedzieć i o całym prę-  
cie, możemy go bowiem porozcinać myślowo na krążki  
 $K$ , dotykające do siebie, a obciążone zrównoważony-



mi układami naprężeń wirowych, obustronnie do den  
krążka przyłożonych. Tego rodzaju obciążenie zwiemy  
OBCIĄŻENIEM WIROWEM, LUB SKRĘCAJĄCEM, powoduje ono  
bowiem SKRĘCANIE GÓRNEJ POWIERZCHNI DNA KRAŻKA WZGLĘ-  
DEM DOLNEJ O KĄT SKRĘCENIA  $d\varphi$ , przyczem krążek żad-  
nym innym odkształceniom nie ulega. Stąd mamy bezpo-  
średni

WNIOSEK PIERWSZY: PRZEKROJE POPRZECZNE WALCA  
PROSTEGO SKRĘCANEGO SĄ PŁASKIE, A PROSTOPADŁE DO PO-  
DŁUŻNEJ OSI PRĘTA PRZED I PO ODKSZTAŁCENIU.

Wobec tożsamości warunków obciążenia wszystkich  
krążków, ich kąty skrećenia  $d\varphi$  będą jednakowe; oz-  
naczmy STOSUNEK OBWODOWEGO ŁUKU SKRĘCENIA WYZNACZO-  
NEGO DLA DWÓCH SĄSIEDNICH PRZEKROJÓW DO ODLEGŁOŚCI  
TYCH DWÓCH PRZEKROJÓW PRZECZ  $\xi = \frac{R d\varphi}{dz}$  I NAZWIJMY GO  
SKRĘCENIEM JEDNOSTKOWEM. Ponieważ wiemy, że  $d\varphi =$   
 $\frac{\beta M_z}{I_0} dz$  zatem  $\xi = \frac{R d\varphi}{dz} = \frac{\beta M_z}{I_0} R = \gamma \frac{dz}{dz} = \gamma$  jest liczbą stałą. Stąd mamy wniosek oczywisty:

WNIOSEK DRUGI: KOŁOWY WALEC PROSTY SKRĘCANY  
UJAWNIA JEDNAKOWE SKRĘCENIA JEDNOSTKOWE NA CAŁEJ SWOJ  
DŁUGOŚCI.

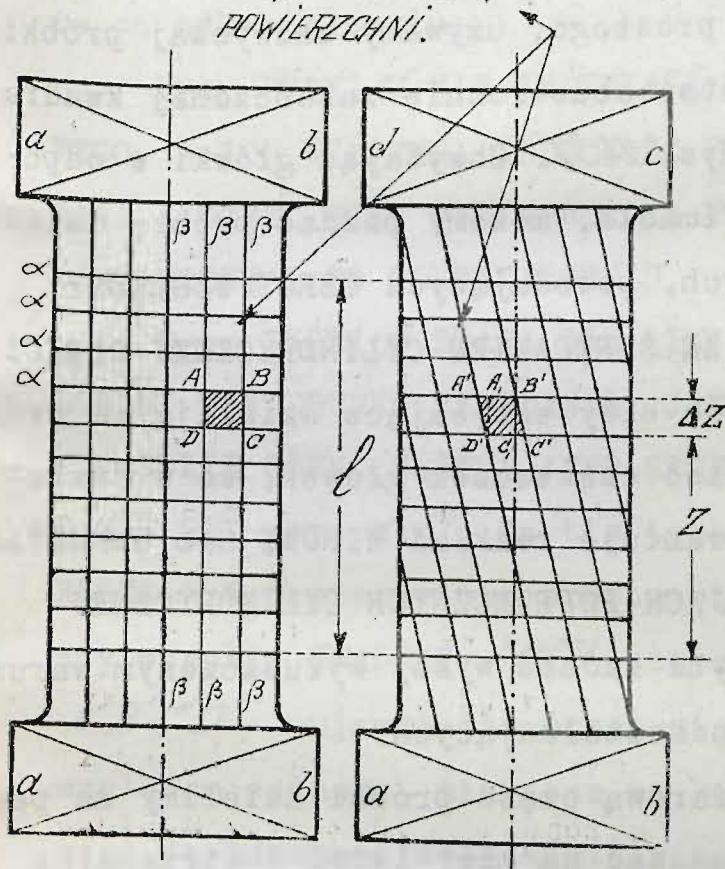
Opierając się na tym wniosku możemy wyznaczyć  
KĄT SKRĘCENIA POMIĘDZY DWOMA PRZEKROJAMI POPRZECZ-  
NYMI, WYZNACZONYMI NA WALCU PROSTYM W ODLEGŁOŚCI  $Z$ .  
pisząc  $\Delta\varphi = \int_0^Z d\varphi = \int_0^Z \frac{\xi}{R} dz = \frac{\xi Z}{R} = \frac{\beta M_z}{I_0} Z$ ; możemy więc  
wyznaczyć wartość  $\Delta\varphi$  dla dowolnej ilości stykają-  
cych się krążków, a tworzących wspólnie część walca

prostego o długości  $Z$ .

Oznaczmy przez  $\ell$  CAŁKOWITĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA OD Kształconego; czyniąc  $Z = \ell$  wyznaczmy CAŁKOWITY KĄT SKRĘCENIA WALCA PROSTEGO W POSTACI  $\varphi = \int d\varphi = \int \frac{\tau}{R} \cdot dZ = \frac{\tau \cdot \ell}{R} = \frac{\beta M_z}{I_0} \cdot \ell$ . Stąd mamy również  $\tau = R \varphi : \ell$ .

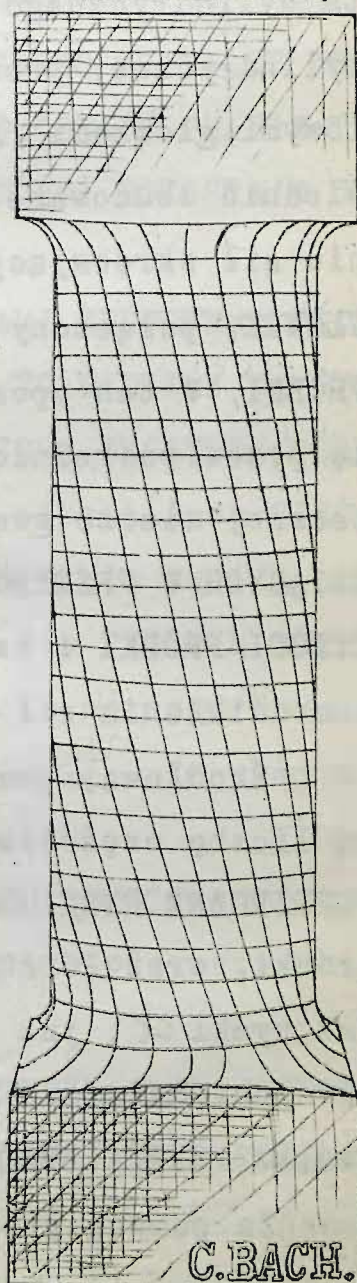
NB: POMINIĘTO KRZYWIZNĘ POWIERZCHNI.

RYS. 147.  
PROBKA SKRĘCONA PRZECZ. C.V. BACH'A.



RYS. 145.

RYS. 146.



C.BACH.



Oba przytoczone wnioski powinny być poparte doświadczeniem, inaczej moglibyśmy zwątpić o prawidłowości wyrażenia  $\epsilon$  w rozpatrywanym wypadku.

W tym celu bierzemy pod uwagę:

§ 3. SKRĘCANIE WALCA PROSTEGO. Aby otrzymać możliwie ściśle wyżej wyznaczony rodzaj obciążenia pręta cylindrycznego prostego, używamy zazwyczaj próbki cylindrycznej prostej obustronnie zakończonej kwadratowymi główkami [Rys. 145]. Chwytając główki w odpowiednio zbudowane imadła, możemy poddać próbkę działaniu sił skręcających, powodujących OBRÓT WZGLĘDNY GŁÓWEK, połączony ZE SKRĘCANIEM CYLINDRYCZNEJ CZĘŚCI PRÓBKI. W ten sposób siły skręcające działają na próbkę przez pośrednictwo cząsteczek główek, co w dostatecznej mierze gwarantuje rozkład WIROWY SIŁ ODKSZTAŁCAJĄCYCH W PRZEKROJACH POPRZECZNYCH CYLINDRYCZNEJ CZĘŚCI PRÓBKI i czyni zadość wyżej wyłuszczonej warunkom działania sił odkształcających.

Środkową, pomiarową część próbki dzielimy na pewną liczbę części, znacząc na niej ledwo dostrzegalne POPRZECZNE RYSKI  $\alpha$ , prostopadłe do podłużnej osi próbki, oraz PODŁUŻNE RYSKI  $\beta$ , równoległe do tej osi. Tak ryski  $\alpha$ , jak również i ryski  $\beta$  są znaczone w równych odstępach tworząc na powierzchni cylindrycznej próbki SIEĆ KWADRACIKÓW  $ABCD$ . —

Za pomocą próbki w ten sposób przygotowanej możemy sprawdzić oba wnioski wyżej wyłuszczone, poddając

główki próbki działaniu sił skręcających. Pod ich jarzmem próbka odkształca się i wchodzi w trwały stan równowagi odkształconej. Za pomocą nader dokładnych przyrządów badamy pomiarową część próbki, biorąc pod uwagę WZAJEMNE POŁOŻENIE RYSEK  $\alpha$  i  $\beta$  po odkształceniu w różnych punktach próbki. Okazuje się że po odkształceniu:

1-o. RYSKI  $\alpha$  NIE ZMIENIAJĄ SWEGO KSZTAŁTU KOŁOWEGO, A ICH WZAJEMNA ODLEGŁOŚĆ POZOSTAJE PRAWIE TA SAMA - CZĘŚĆ WIĘC CYLINDRYCZNA PRÓBKİ POZOSTAJE CYLINDRYCZNĄ I PO ODKSZTAŁCENIU.

2-o. RYSKI  $\beta$  STAJĄ SIĘ LINJAMI ŚRUBOWEMI POCHYLONEMI W KIERUNKU SKRĘCANIA, JAK TO WIDZIMY NA RYSUNKU, GDZIE GÓRNA GŁÓWKA JEST SKRĘCONA WZGLĘDEM DOLNEJ O KĄT  $90^\circ$  [rys. 146]. Na tle tych odkształceń SIĘ RYSEK  $\alpha$  i  $\beta$  pierwotnie prosta staje się ukośną, prosty wypukły KWADRAT  $ABCD$  staje się UKOŚNYM ROMBEM  $A'B'C'D'$  ujawniając przesunięcie górnego boku względem dolnego - mierzone na kole  $\alpha$ . Inaczej mówiąc postrzegamy doświadczalnie, że:

1-o. RYSKI  $\alpha$  SĄ RÓWNOLEGŁE PO ODKSZTAŁCENIU, co doświadczalnie potwierdza wniosek pierwszy ustalony na drodze teoretycznej.

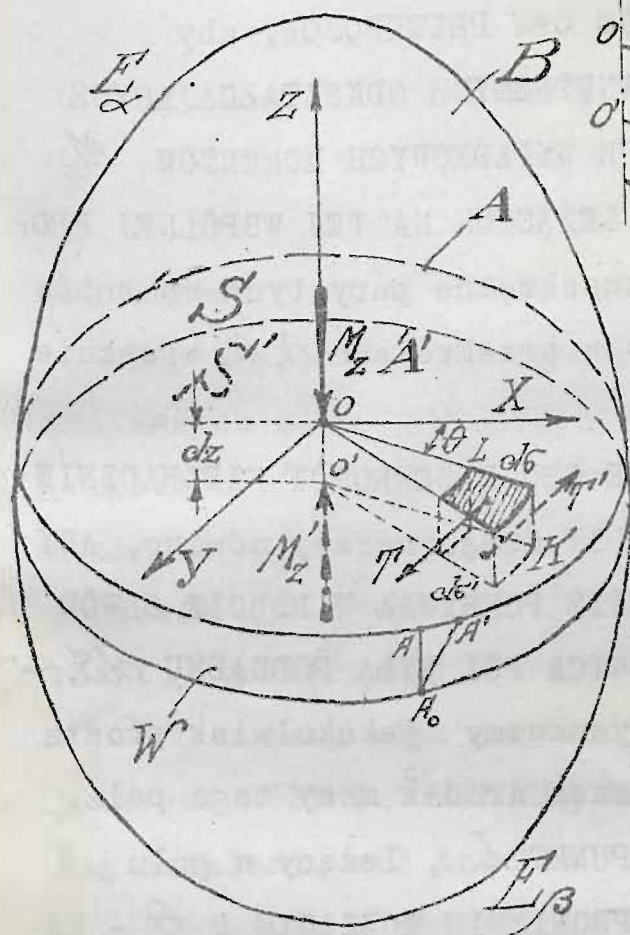
2-o. DWIE JAKIEKOLWIEK SASIEDNIE RYSKI  $\alpha$  WYKAZUJĄ JEDNAKOWE OBWODOWE ŁUKI SKRĘCENIA WZGLĘDNEGO  $CC' = AA'$  - NA CAŁYM OBWODZIE. Niech  $\Delta Z$  oznacza wzajemną odległość tych dwóch rysek  $\alpha$ , mierzoną w



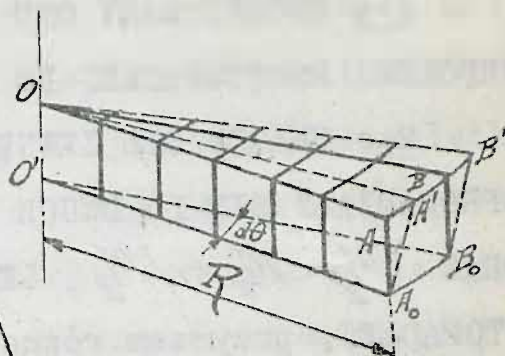
kierunku osi podłużnej pręta, a  $R$  niech oznacza promień części cylindrycznej - pomiarowej. Ponieważ ryski  $\alpha$  dzielą pręt na krążki typu wyżej rozpatrywanego, przeto MIERZĄC ŁUK OBWODOWY SKRĘCENIA  $\varphi' = \varphi, \Delta' = \Delta$ , MOŻEMY CZYSTO DOŚWIADCZALNIE WYZNACZYĆ WARTOŚĆ SKRĘCENIA JEDNOSTKOWEGO  $\xi = \Delta : \Delta Z$ , ORAZ KĄT SKRĘCENIA WZGLĘDNego  $\Delta\varphi = \Delta : R$  - DWUCH SĄSIEDNICH RYSEK  $\alpha$ . W ten sposób wyznaczona WARTOŚĆ  $\xi$  JEST JEDNAKOWA DLA DOWOLNEJ PARY RYSEK  $\alpha$  SĄSIEDNICH, GDZIEKOLWIEK WZDŁUŻ POMIAROWEJ CZĘŚCI PRÓBKII ROZPATRYWANYCH, co stanowi dowód doświadczalny drugiego wniosku, ustalonego teoretycznie.

Weźmy pod uwagę całkowitą DŁUGOŚĆ  $l$  POMIAROWĄ PRÓBKII MIERZONĄ NA PRĘCIE ODKSZTAŁCONYM POMIĘDZY SKRAJNEMI RYSKAMI  $\alpha$ . Wobec stałej wartości SKRĘCENIA JEDNOSTKOWEGO wzdłuż całej długości  $l$  próbki odkształconej, możemy niewątpliwie napisać również  $\xi = -MM' : l = R\varphi : l$ , gdzie przez  $-MM'$  OZNACZYLIŚMY OBWODOWY ŁUK SKRĘCENIA, a przez  $\varphi$  - CAŁKOWITY KĄT SKRĘCENIA WZGLĘDNego SKRAJNYCH RYSEK  $\alpha$ . Mierząc łuk  $MM'$  oraz długość  $l$  i promień  $R$  próbki, z łatwością możemy ustalić wartość  $\xi$  czysto drogą doświadczalną. W ten sposób stwierdzamy w całej rozciągłości wyniki czysto teoretyczne na drodze doświadczalnej, co świadczy o prawidłowym wyborze założeń, na podstawie których zbudowaliśmy teorię skręcania wałków prostych. Spróbujmy uogólnić nieco nasze wyniki

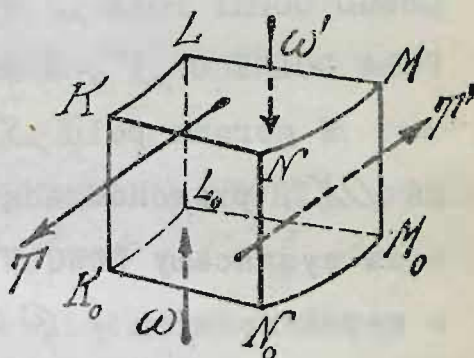
RYŚ. 148.



RYŚ. 149.



RYŚ. 150.



otrzymane wyżej, rozpatrując:

§ 4. SKRĘCANIE PRZĘKROJU KOŁOWEGO JAKIEJKOLWIEK BRYŁY.

Ważmy pod uwagę BRYŁĘ  $B$  [rys. 148] DOWOLNEGO KSZTAŁTU, pozostającą pod jarzmem sił zewnętrznych i zakładamy, że w tej bryle po odkształceniu można WY-



ZNACZYĆ DWA PRZEKROJE PŁASKIE  $A, A'$  KOŁOWE, RÓWNOLEGŁE  
A ZNIKOMO O  $dZ$  OD SIEBIE ODLEGŁE, aby

1-o ŚRODKI MASY OBU TYCH PRZEKROJÓW LEŻAŁY NA  
WSPÓLNEJ PROSTOPADŁEJ DO OBU PRZEKROJÓW, aby

2-o UKŁADY SIŁ ZEWNĘTRZNYCH ODKSZTAŁCAJĄCYCH  
SPROWADZAŁY SIĘ DO DWUCH WYPADKOWYCH MOMENTÓW  $M_Z$   
ORAZ  $M'_Z = M_Z + dM_Z$ , LEŻĄCYCH NA TEJ WSPÓLNEJ PRO-  
STOPADŁEJ, przyczem różnoskrętne pary tych momentów  
winny leżeć odpowiednio w przekrojach  $A, A'$ , wreszcie  
aby

3-o. KONTURY KOŁOWE OBU PRZEKROJÓW NIEZNACZNIE  
TYLKO RÓŻNIŁY SIĘ POMIĘDZY SOBĄ, inaczej mówiąc, ABY  
OBWÓD GÓRNY POLA  $S$  PRAWIE POKRYWAŁ W RZUCIE OBWÓD  
POLA DOLNEGO  $S'$ , A RÓŻNICA PÓŁ BYŁA PORZĄDKU  $dS$ .

W górnem polu  $S$  wyznaczmy, jakąkolwiek prostą  
oś  $OX$ , przechodzącą przez środek masy tego pola,  
oraz wyznaczmy DOWOLNY PUNKT  $L$ , leżący w polu  $S$   
o współrzędnych  $r, \varphi$  - PROMIENIU WODZĄCYM i  $\theta$  - KĄ-  
CIE BIEGUNOWYM pomiędzy  $\varphi$  a osią  $OX$ . Odłóżmy w kie-  
runku  $OL$  promienia wodzącego odcinek  $LM = d\varphi$ , a  
w kierunku rosnących kątów biegunowych - kąt  $d\theta$ .  
Kreśląc promieniami  $\varphi$  i  $\varphi + d\varphi$  małe łuki, przecinają-  
ce boki kąta  $d\theta$ , otrzymamy przynależne do punktu  $L$   
poletko biegunowe  $d\sigma = \varphi d\varphi d\theta$ , wyznaczające w  
rzucie na dolną powierzchnię przekroju  $S'$  takie samo  
poletko  $d\sigma' = \varphi d\varphi d\theta$ . Oba te poletka, łącznie z  
linjami rzutów tworzą kostkę małą, stanowiącą część

kę PŁYTKI  $W$ , myślowo z bryły wyodrębnionej za pomocą przekrojów  $A, A'$ . Na obwodzie płytki, u jej ścian bocznych poletka  $d\delta'$  będą się różnić od  $d\delta$  o małe wyższych rzędów na tle znikomej różnicy pól obu przekrojów, możemy więc uważać, że jakiegokolwiek poletko  $d\delta'$  w polu  $S'$  jest rzutem górnego poletka  $d\delta$  pola  $S$ . W ten sposób ilości poletek obu pól są jednakowe, możemy więc PŁYTKĘ  $W$ , wyodrębnioną w powyżej opisany sposób rozpatrywać jako złożoną z KOSTEK  $K$ , podległych działaniu naprężeń wirowych  $t_R$  i  $t'_R$ , przyłożonych do górnej i dolnej ścian kostki. Naprężenia te nader nieznacznie różnią się między sobą, ponieważ  $t_R = \frac{M_z}{I_o} \rho$  a  $t'_R = \frac{M'_z}{I'_o} \rho$ . Wobec nieznacznej różnicy powierzchni obu przekrojów  $I_o \cong I'_o$  pozatem  $M'_z \cong M_z$  możemy więc napisać  $t'_R = t_R + dt_R$  - i rozpatrywać KOSTKĘ  $K$  WYPUKŁĄ ODKSZTAŁCONĄ PROSTĄ, podległą działaniu sił tnących  $T = t_R d\delta$ ,  $T' = t'_R d\delta'$ , a pozostającą w równowadze odkształconej trwałej [rys.150].

Wobec nieznacznych wymiarów kostki można pominąć jej krzywiznę i rozpatrywać ją, jako zwykłą prostą kostkę, znajdującą się pod jarzmem naprężeń wirowych  $t_R$  i  $t'_R$ , którym, jak to już wiemy z teorii naprężeń tnących, towarzyszą naprężenia ścian bocznych kostki  $t = t_R$  oraz  $t' = t'_R$ , ZBIEGAJĄCE SIĘ Z NAPRĘŻENIAMI  $t_R$  i  $t'_R$  NA PRZECIWLEGŁYCH KRAWĘDZIACH  $KN$  i  $L_o M_o$  [rys.150]. Naprężenia  $t$  i  $t'$  wyznaczają



siły  $\omega$  i  $\omega'$ , panujące w ścianach bocznych kostki i równoważące działanie sił  $T$  i  $T'$ , przyczem niewątpliwie  $\omega = \omega'$  zaś

Mamy tu więc zrównoważony układ czterech sił, stanowiących wspólne OBCIĄŻENIE TNĄCE kostki. Ponieważ z założenia kostka odkształcona jest prosta, zatem przed odkształceniem musiała być UKOŚNĄ KOSTKĄ  $K'L'M'N'K_0L_0M_0N_0$  — i wyprostowała się pod działaniem obciążenia przechodząc w KOSTKĘ PROSTĄ

$KLMN K_0L_0M_0N_0$ ; to znaczy, że górne jej poletko wykonało przesuw  $\Delta = LL' = KK' = \gamma dz$  — [rys. 138] względem dolnego. Górna ścianka kostki nie zmieniła przytem wcale swego kształtu pierwotnego, je-  
no SKRĘCIŁA SIĘ O KĄT  $d\varphi = \angle L'OL = \angle K'OK$  —  
WZGLĘDEM OSI prostopadłej do obu pól przekroju, przechodzącej przez środki ich masy. Ponieważ, jak to wiemy z teorii zcięcia  $\gamma = \beta t_k \approx \beta t_k'$  przeto  $\Delta = \rho d\varphi = \gamma dz$  — a zatem:

$$d\varphi = \gamma dz : \rho = \frac{\beta t_k}{\rho} dz = \beta \frac{M_k}{I} dz \approx \beta \frac{M_k'}{I} dz.$$

Rozpatrując z kolei kostki sąsiednie w kierunku promienia wodzącego  $\rho$  otrzymujemy wycinek kołowy płytki  $W$  [rys. 149]. Dolną jego ściankę stanowi wycinek koła  $A'$  promienia  $R'$ , górną wycinek koła  $A$  promienia  $R$ , przednią — powierzchnia lekko stożkowa, a pozostałe dwie boczne ścianki tworzą przekroje osiowe płytki — płaskie, średnicowo przeprowadzone pod kątem  $d\theta$ .  
Z założenia wiemy, że pola kół  $A$  i  $A'$  prawie że się

pokrywają w rzucie, możemy więc pominąć drobną różnicę promieni tych kół pisząc  $R \cong R$ , inaczej mówiąc - pozostawić bez uwagi skos powierzchni  $ABBA_0$  i rozpatrywać ją, jako zwykłą powierzchnię cylindryczną, a cały wycinek, jako wycinek walca. Na skraju wycinka panować będzie najwyższa wartość naprężenia jednostkowego  $t_R = \frac{M_z}{I_o} R \cong \frac{M'_z}{I'_o} R'$ , na osi  $OO' - t_o = 0$ , pomiędzy temi skrajnemi wartościami, naprężenie będzie wzrastało proporcjonalnie do  $\varrho$  - promienia wodzącego kostek wycinka. Gdy współczynnik  $\beta$  jest jednakowy dla tylko co wymienionych naprężeń mniejszych od  $t_R$ , wtedy wartość kąta  $d\varphi$  jest również jednakowa dla wszystkich kostek wycinka, w przeciwnym razie, oznaczając przez  $\beta$  - ŚREDNIĄ WARTOŚĆ tego współczynnika dla naprężeń mniejszych od  $t_R$  otrzymujemy ŚREDNI KĄT SKRĘCENIA  $d\varphi = \beta \frac{M_z}{I_o} dz \cong \cong \beta \frac{M'_z}{I'_o} dz$ , wycinka kołowego. W pierwszym wypadku, przy stałym  $\beta$  skrajny punkt  $B'$  krawędzi wycinka przesunie się o kąt  $d\varphi$ , przyczem niewątpliwie krawędź  $OB'$  pozostanie prostą i niezmienną; w drugim wypadku ta krawędź zwichrzy się mniej lub więcej wyraźnie a obwodowy łuk  $BB$  nie będzie ścisłą miarą kąta  $d\varphi$ , lecz tylko przybliżoną, możemy jednak i tu, wobec znikomości  $d\varphi$  napisać, że łuk  $BB = R d\varphi$ .

Rozpatrując z kolei cały szereg wycinków kołowych o wspólnych bocznych powierzchniach dotyku, możemy otrzymane wyniki uogólnić dla całej PŁYTKI  $W$ .

WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XIV.



W danym wypadku KĄT  $\alpha$  BĘDZIE KĄTEM SKRĘCENIA GÓRNEJ POWIERZCHNI KRAŻKA WZGLĘDEM DOLNEJ, A OBWODOWY ŁUK SKRĘCENIA  $AA'$  BĘDZIE MIARĄ KĄTA  $\alpha$  ŚCISŁĄ ZUPEŁNIE, GDY  $\beta$  JEST STAŁE DLA NAPRĘŻEŃ MNIEJSZYCH OD  $\frac{E}{R}$ , A WYSTARCZAJĄCO PRZYBLIŻONĄ, GDY  $\beta$  JEST ZMIENNE w tej dziedzinie.

I tu więc mamy do czynienia z odkształceniem WIROWYM, czyli ze SKRĘCENIEM: górne dno płytki wykonało obrót względem dolnego, a nie uległo żadnym zmianom wewnętrznym; i tu możemy oznaczyć przez  $\zeta = \frac{R\alpha}{\Delta Z} = \frac{\beta M}{I_0} R = \frac{\beta M'}{I_0} R'$  i nazwać SKRĘCENIEM JEDNOSTKOWEM rozpatrywanej płytki.

Na zasadzie otrzymanych tu wyników możemy wypowiedzieć wniosek następujący: PŁYTKA  $W$  ROZPATRYWANEJ BRYŁY, ODKSZTAŁCONA\* POD JARZMEM ZRÓWNOWAŻONEGO UKŁADU SIŁ WIROWYCH, UJAWNIA SKRĘCENIE GÓRNEJ SWEJ POWIERZCHNI PŁASKIEJ WZGLĘDEM DOLNEJ, ZACHODZĄCE W KIERUNKU DZIAŁANIA SIŁ WIROWYCH.

We wszystkich rozpatrywanych tu wypadkach spotkaliśmy we wzorze dla  $\zeta$  lub  $\varphi$  WSPÓŁCZYNNIK PRZESUWALNOŚCI  $\beta$ . Ponieważ próby zcinania nie mogą określić jego wartości, nie pozostaje nam więc nic innego, jak tylko wyznaczyć  $\beta$  na zasadzie prób skręcania prętów kołowych. W tym celu rozpatrujemy:

#### § 5. DOŚWIADCZALNE WYZNACZANIE ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY SKRĘCENIEM JEDNOSTKOWEM, A NAPRĘŻENIEM WIROWYM.

Obie główki próbki cylindrycznej prostej mocujemy

w uchwytach i poddajemy jarzmu sił skręcających. Na pomiarowej części płytki ustawiamy przyrząd mierzący skreślenia próbki. Celowo zbudowany ustrój dźwigni wielokrotni ruchy tego przyrządu mierniczego i przenosi je na bębenek z nawiniętym papierem, na którym ołówek samoczynnie znaczy w skali odpowiedniej natężenia momentów skręcających. W ten sposób otrzymujemy WYKRES WYTRZYMAŁOŚCIOWY w układzie osi prostokątnych. Na osi poziomej mamy więc obciążenia cylindrycznej części próbki ujętej w ostrza przyrządu mierniczego; dzieląc to skreślenie przez odległość ostrzy, otrzymujemy w skali SKRĘCENIE JEDNOSTKOWE próbki: tę oś zwiemy przeto OSIĄ SKRĘCEN JEDNOSTKOWYCH WYKRESU WYTRZYMAŁOŚCIOWEGO - OSIĄ  $O\Sigma$ ; druga oś pionowa wykresu wyznacza natężenia MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO  $M_Z$ . Te wartości  $M_Z$ , dzielone przez stałą dla danej próbki  $\frac{I_o}{R} = W_o$ , gdzie  $R$  oznacza promień próbki, dają zarazem wartości najwyższych naprężeń wirowych w odpowiedniej skali; drugą zatem oś, prostopadłą do poprzedzającej, zwiemy OSIĄ MOMENTÓW SKRĘCAJĄCYCH  $M_Z$  lub OSIĄ SKRAJNYCH NAPRĘŻEŃ WIROWYCH - OSIĄ  $O\tau$ . W ten sposób otrzymane wykresy wytrzymałościowe przypominają wykresy próbek rozciąganych, opisane przez nas w dziale drugim niniejszego kursu i dzielą się na typy:

#### § 6. TYPY WYKRESÓW WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH, ZDEJMOWANYCH PRZY SKRĘCANIU PRÓBEK CYLINDRYCZNYCH.

Dla wyżarzonego ŻELAZA ZLEWNEGO, STALI ZLEWNEJ



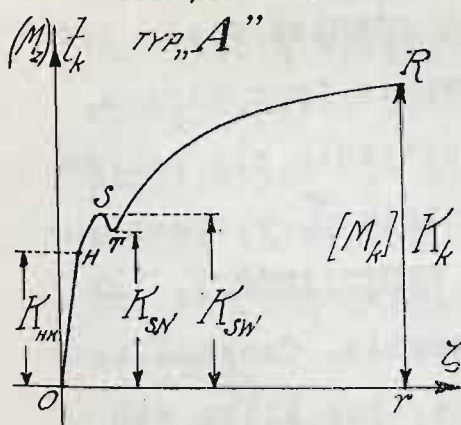
oraz ŻELAZA ZGRZEWNEGO mamy:

A. TYP „A” WYKRESU [rys. 151]. Z początku, dla małych wartości momentów skręcających bieg wykresu wskazuje nieznaczne tylko skrećenie jednostkowe, a linja wykresu bieży prostolinijnie aż do punktu  $H$ . Mamy tu więc ściągłą proporcjonalność pomiędzy  $\zeta$  i  $t_H$  aż do GRANICY PROPORCJONALNOŚCI, to jest do punktu  $H$ , wyznaczającego skrajne naprężenie wirowe tego okresu  $K_{HK}$ . Ta część wykresu stanowi zatem OKRES SKRĘCEŃ PROPORCJONALNYCH, kiedy ciało zachowuje się podług prawa HOOKE'A, wyznaczającego zależność:

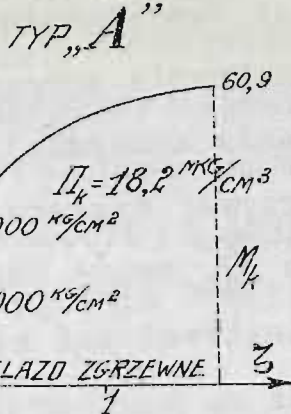
$$\zeta = \beta t_H.$$

Skrećenia jednostkowe  $\zeta$ , przynależne do tego okresu są prawie doskonale sprężyste, po usunięciu bowiem sił obciążających, ołówek wykresu powraca do punktu  $O$  po tej samej prostej  $OH$ ; odkształcenia te należą jednak do typu mieszanych, o czem z łatwością przekonać się można za pomocą czulszych pomiarów optycznych, wtedy bowiem dają się wyznaczyć niewyczuwalne na wykresie skrećenia trwałe, zresztą bardzo nieznaczne, bo lwią część skrećen tego okresu stanowią odkształcenia sprężyste. Począwszy od punktu  $H$  krzywa wykresu stycznie porzuca linję prostą  $OH$  i lekko skłaniając się ku osi  $O\zeta$ , bieży aż do punktu  $S$ . Ten drugi okres SKRĘCEŃ NIEPROPORCJONALNYCH stanowi niejako przejście od okresu proporcjonalności do nowego typowego okresu, poczynającego się w  $S$ .

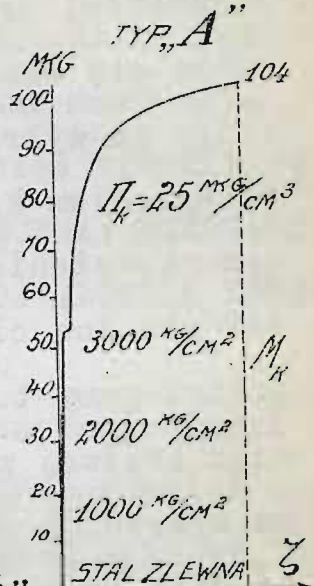
RYS. 151.



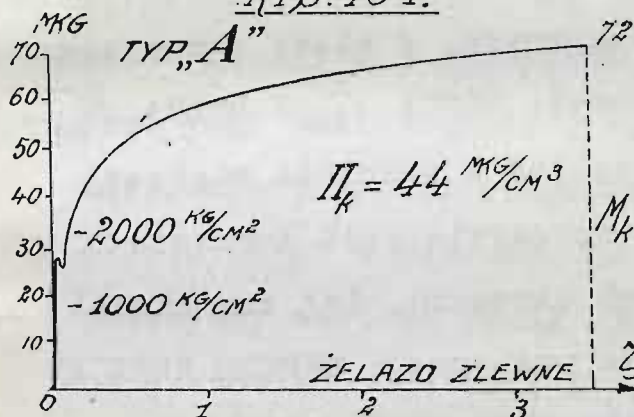
RYS. 153.



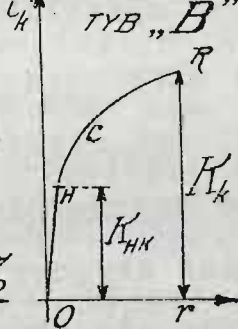
RYS. 152.



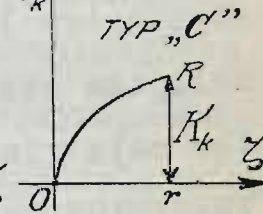
RYS. 154.



RYS. 155.



RYS. 156.



Pomiędzy  $H$  i  $S$  ciało nie ulega prawu HOOKE'A: mieszane odkształcenia tego okresu zawierają już znacznie większą część niesprężystą trwałą; aczkolwiek jeszcze ich lwią część stanowią skreślenia sprężyste. Okres ten nazywamy OKRESEM SKRĘCEŃ NIEPROPORCJONALNYCH.

W punkcie  $S$  rozpoczyna się nowy OKRES SKRĘTLIWOŚCI, kiedy próbka poczyną gwałtownie skręcać się pod jarzmem sił odkształcających. W tym okresie tworzywo przechodzi ostre przesilenie wewnętrzne na tle częściowego zaniku więzów międzycząsteczkowych; i tu również spostrzegamy zjawiska, zupełnie podobne do



tych, jakie zwykle pojawiają się podczas okresu ciastowatości przy rozciąganiu, i tu również ciało przedstawia się wewnętrznio podczas trwania tego okresu, który na wykresie zazwyczaj uzewnętrznia się ostrem przegięciem krzywej wykresu w punkcie  $S$ , wyznaczającym naprężenie  $K_{SN}$  zwane GRANICĄ SKRĘTLIWOŚCI, lub też granicą ciastowatości na skręcanie. Czasami znów postrzegamy tuż za punktem  $S$  jedno, lub kilka wahanie krzywej wykresu, podobnie, jak to widzieliśmy na wykresach próbek rozciąganych, a wtedy wyznaczamy aż dwie granice skrętlowości: GÓRNĄ  $K_{SN}$  i DOLNĄ  $K_{SN}$ . W tym okresie skręcania są już w znacznie większej mierze trwałe: ich część sprężysta jest znacznie mniejsza niż w poprzednich okresach, ten sam charakter mają również skręcenia następnego OKRESU SKRĘCEN ZNACZNYCH, który się kończy ukreśleniem próbki w punkcie  $R$  wykresu, wyznaczającym SKRAJNĄ WARTOŚĆ MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO  $M_Z = M_K$  lub też SKRAJNĄ WARTOŚĆ NAPRĘŻENIA WIROWEGO, tak zwane NAPRĘŻENIE UKRĘCAJĄCE  $K_K = \frac{M_K}{J_0} R$ , w tym momencie bowiem następuje pęknięcie próbki, zachodzące w nader różnorodny sposób - najczęściej wzdłuż jej poprzecznego przekroju.

Ten więc typ „A” wykresu pozwala wyznaczyć następujące dane doświadczalne, stanowiące jego cechy wyróżniające - GRANICĘ PROPORCJONALNOŚCI  $K_{HK}$ , OBIE GRANICE SKRĘTLIWOŚCI  $K_{SN}$ ,  $K_{SN}$ , oraz NAPRĘŻENIE UKRĘCAJĄCE  $K_K$ , odpowiadające CAŁKOWITEMU SKRĘCENIU PRÓBK

$\zeta_c = 0$ . Ponadto niekiedy jeszcze rozróżniamy skrajne naprężenie sprężyste  $K_{SH}$ , aczkolwiek, jak to już wiemy, wykres wytrzymałościowy naprężeń doskonale sprężystych nie ujawnia,  $K_{SH}$  oznacza więc NAPRĘŻENIE WIROWE NAJWYŻSZE, PRZYNALEŻNE DO SKRĘCENIA MIESZANEGO, ZŁOŻONEGO PRAWIE WYŁĄCZNIE Z ODKSZTAŁCENIA SPRĘŻYSTEGO.

Skrajne naprężenie wykresu  $K_K$  nazywamy nieraz WYTRZYMAŁOŚCIĄ PRÓBKI NA SKRĘCANIE. I tu również możemy rozpatrywać dodatkowo jeszcze PRACĘ wykresu, to jest jego powierzchnię  $S$  wyrażoną w  $MKG$ . Jest to nie wątpliwie praca naprężeń, a więc sił cząsteczkowych, działających w kierunku odkształceń. Zazwyczaj rozpatrujemy wartość PRACY JEDNOSTKOWEJ, przynależnej do jednostki objętości próbki nieodkształconej i oznaczamy przez  $\Pi_K = S : \pi R^2 l$ , gdzie  $S$  wyznaczamy w  $MKG$  a  $l$  i  $R$  w  $cm$  pisząc  $\Pi^{MKG/cm^3}$ . ~

Powyżej podaliśmy trzy wykresy tylko co opisanego typu dla ŻELAZA ZLEWNEGO [rys. 154], ZGRZEWNIEGO [rys. 153] i STALI ZLEWNEJ [rys. 152]. Z kolei rozpatrujemy:

B. TYP „B” WYKRESU [rys. 155]. Tego rodzaju wykres otrzymujemy dla MIEDZI, BRONZU ARMATNIEGO I STALI TWARDZONEJ. Widzimy tu wyraźny OKRES PROPORCJONALNOŚCI  $OH$ , OKRES WYDŁUŻEŃ NIEPROPORCJONALNYCH  $HC$  i wreszcie OKRES WYDŁUŻEŃ ZNACZNYCH  $CR$ . Okresu skrętności brak zupełnie.



Wykres tego typu różni się więc od poprzedzającego jedynie brakiem wyraźnie zaznaczonego okresu skrętności, mamy więc jako cechy wyróżniające wykresu -  $K_{HK}$  - GRANICĘ PROPORCJONALNOŚCI,  $K_K$  - NAPRĘŻENIE UKRĘCAJĄCE, przynależne do  $\zeta_c = 0r$ , oraz  $\Pi_3^{mg/cm^3}$  - PRACĘ JEDNOSTKOWĄ WYKRESU. Na zakończenie mamy:

C. TYP. „C” WYKRESU [rys. 156]. Tego rodzaju wykres otrzymujemy dla ŻELIWA, SKÓRY, CIĘGIEN WŁÓKNISTYCH I KAMIENI NATURALNYCH I SZTUCZNYCH. Uderza nas tu przedewszystkiem prawie zupełny brak OKRESU PROPORCJONALNOŚCI, natomiast mamy niejako wyłącznie <sup>(SKRĘCEN</sup> okres nieproporcjonalnych  $OR$ . Ciała przynależne do tej gromady wykresowej nie ulegają skrętności, ich cechą wyróżniającą są nader słabe wartości  $K_K$ ,  $\zeta_c$ , oraz  $\Pi_3$  jedynych cech wyróżniających wykresu.

Wyżej ustalone cechy wyróżniające wykresów określają ZASADNICZE WŁASNOŚCI WYTRZYMAŁOŚCIOWE TWORZYWA dla danego wypadku. NAPRĘŻENIE  $K_K$  daje wartość siły ukręcającej próbkę i zarazem określa WARTOŚĆ SKRAJNĄ OBCIĄŻENIA STATYCZNEGO, KIEDY SIŁY OBCIĄŻAJĄCE PRÓBKĘ ROSNĄ ZWOLNA, LECZ W SPOSÓB CIĄGŁY AŻ DO NAJWYŻSZEJ WARTOŚCI  $K_K$ . Możemy więc nazwać  $K_K$  - WYTRZYMAŁOŚCIĄ STATYCZNĄ TWORZYWA NA SKRĘCANIE. Im wyższa jej wartość, tem wyższa zarazem jest SKRAJNA WARTOŚĆ DOPUSZCZALNEGO NAPRĘŻENIA WIROWEGO  $K_K$ , tem szerszy zakres stosowalności tworzywa. Zazwyczaj dopuszczalne odkształcenia

prętów skręcanych są nader nieznaczne, a zatem naprężenia skrajne, praktycznie dopuszczalne są niezbyt wielkie, a w każdym razie wielokrotnie niższe od skrajnych naprężeń  $K_k$  wykresu. Oznaczając przeto, przez  $R_k$  SKRAJNE DOPUSZCZALNE NAPRĘŻENIE WIROWE, możemy napisać  $R_k = K_k \cdot j_k$ , gdzie stosunek  $j_k = K_k : R_k$  zwiemy STOPIENIEM BEZPIECZEŃSTWA NA SKRĘCANIE dla danego tworzywa. Gdy ono jest wytrzymałe na skręcanie, wyznaczamy stosunkowo niewielkie  $j_k$ , bo wtedy  $R_k$  może mieć wartość znaczną, skoro zaś mamy do czynienia z tworzywem mało wytrzymałym, dajemy znaczniejsze wartości  $j_k$ , zwiększamy STOPIEŃ BEZPIECZEŃSTWA  $j_k$ . Ponadto wartość  $j_k$  zależy jeszcze od TYPU OBCIĄŻENIA, chwilowo mówimy tylko o statycznym obciążeniu.

Ciała, przynależne do gromady wykresowej „C” ujawniają słabe wartości  $K_k$ , ciała te nie powinny zatem pracować, JAKO SKRĘCANE OGNIWA TWORÓW TECHNICZNYCH. Stosuje się to zwłaszcza do ŻELIWA i wszelkiego rodzaju KAMIENI NATURALNYCH I SZTUCZNYCH. Stąd mamy bezpośredni:

WNIOSEK PIERWSZY. W WYPADKU OBCIĄŻENIA STATYCZNEGO SKRĘCAJĄCEGO, ZAKRES STOSOWALNOŚCI TWORZYWA JEST TYM SZERSZY, IM WYŻSZĄ WARTOŚĆ  $K_k$  UJAWNIA WYKRES WYTRZYMAŁOŚCIOWY TEGO TWORZYWA.

Z kolei zwróćmy uwagę, że wartość  $\zeta_c$  STANOWI MIARĘ SKRĘTLIWOŚCI TWORZYWA; duże wartości  $\zeta_c$  WYZNACZAJĄ TWORZYWA SKRĘTLIWE, małe - trudnoskrętnie.



Wreszcie  $\Pi_k$  można określić jako WYTRZYMAŁOŚĆ DYNAMICZNĄ TWORZYWA. Gdy obciążenie zewnętrzne działa w sposób nagły, gdy siły wirowe z nagłą przyłożone w nader krótkim przeciągu czasu rozwijają swe natężenia całkowite, wtedy obciążenie nazywamy DYNAMICZNEM, działa ono bowiem jak UDERZENIE - NAGŁYM WYŁADOWANIEM ENERGJI, KTÓREJ PRZECIWSTRAWIA SIĘ ENERGJA OPORU ciała obciążonego. W danym wypadku obciążenia statycznego, spokojnego, wyczerpywanie się energii oporowej próbki następuje na tle zwolna rosnących skręceń, wywołanych działaniem sił odkształcających, które zwolna, choć ciągle rosną aż do najwyższej swej wartości ukrecającej. Inaczej rzecz się ma, gdy siły skręcające działają w sposób dynamiczny. W tym wypadku idzie tu raczej o zasób PRACY NISZCZĄCEJ, NIŻ O NATĘŻENIE SIŁY UKRECAJĄCEJ, przeto wskaźnikiem WYTRZYMAŁOŚCI DYNAMICZNEJ JEST ZASÓB PRACY WYKRESU  $\Pi_k$ . Im większe  $\Pi_k$ , tem większy zapas wytrzymałości dynamicznej ujawnia dany materiał, tem lepiej wytrzymuje on działanie UDERZEŃ, WSTRZĄŚNIEN WIROWYCH, tem łatwiej przeciwdziała obciążeniu dynamicznemu. Ciała przynależne do gromady wykresowej „C” ujawniające nader znikomą wartość  $\Pi_k$  nie powinny być narażane na wstrząśnienia lub uderzenia wirowe. Tem się tłumaczy, dlaczego obecnie już nie BUDUJEMY WAŁÓW I OSI ŻELIWNYCH, A STALOWE KUTE. Stąd znów bezpośredni:

WNIOSEK DRUGI: W WYPADKU OBCIĄŻENIA DYNAMICZNE-

GO SKRĘCAJĄCEGO, ZAKRES STOSOWALNOŚCI TWORZYWA JEST TYM SZERSZY, IM WYŻSZĄ WARTOŚĆ  $\Pi_k$  UJAWNIA WYKRES WYTRZYMAŁOŚCIOWY TEGO TWORZYWA.

Na zasadzie istniejącego materiału doświadczalnego przychodzimy ponadto do wniosku, że próbki geometrycznie podobne ujawniają przy zdejmowaniu wykresów te same wartości  $K_k$ ,  $Z_c$  i  $\Pi_k$ . ZACHOWUJĄ SIĘ WIĘC PODOBNIEM PRZY SKRĘCANIU - stąd mamy:

WNIOSEK TRZECI: PRÓBKIE GEOMETRYCZNIE PODOBNE SĄ WYTRZYMAŁOŚCIOWO PODOBNE W WYPADKU SKRĘCANIA.

Pozostaje nam jeszcze tylko ustalić:

§ 7. NAPRĘŻENIA SKRAJNE DOPUSZCZALNE W RÓŻNORODNYCH WYPADKACH OBCIĄŻENIA WIROWEGO.

I w danym wypadku rozróżniamy trzy zasadnicze typy obciążenia wirowego, a mianowicie:

1-o OBCIĄŻENIE TRWAŁE SIŁAMI WIROWYMI O STAŁYM NATEŻENIU ICH MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO, CZYLI OBCIĄŻENIE „/” WIROWE.

2-o OBCIĄŻENIE POWTARZANE SIŁAMI WIROWYMI ZMIENNYMI W GRANICACH OD ZERA DO NAJWYŻSZEGO NATEŻENIA, CZYLI OBCIĄŻENIE „//” WIROWE.

3-o OBCIĄŻENIE WAHLIWE W GRANICACH SKRAJNYCH RÓWNYCH NATEŻEŃ SIŁ WIROWYCH NAPRZEMIEN SKRĘCAJĄCYCH W DWÓCH PRZECIWNÝCH KIERUNKACH, CZYLI OBCIĄŻENIE „///” WIROWE.

Jeżeli teraz oznaczymy przez  $R_{ki}$  SKRAJNE DOPUSZCZALNE NAPRĘŻENIE TWORZYWA, POZOSTAJĄCEGO POD JARZEM



OBCIĄŻENIA „I” WIROWEGO, to na mocy PRAW WOHLERA W WYPADKU OBCIĄŻENIA WIROWEGO „II” — SKRAJNEM DOPUSZCZALNEM NAPRĘŻENIEM WINNO BYĆ  $R_{kII} = \frac{2}{3} R_{kI}$ , A W WYPADKU OBCIĄŻENIA „III” —  $R_{kIII} = \frac{1}{3} R_{kI}$ .

Dosyć jest więc określić  $R_{kI}$ , aby otrzymać pozostałe wartości. Ponieważ przy próbach wytrzymałościowych mamy zazwyczaj do czynienia z obciążeniem „I”, możemy więc w ten sposób z całą pewnością wyznaczyć wartość  $R_k$  dla danego tworzywa. Ponadto należy jeszcze wyznaczyć doświadczalnie współczynniki  $\beta$  i  $G$ . W tym celu rozpatrujemy:

#### § 8. WYZNACZANIE WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW $\beta$ i $G$ Z WYKRESÓW WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH.

W tym celu bierzemy pod uwagę wykres wytrzymałościowy aż po skrajne dopuszczalne naprężenie  $R_k$  [rys. 157]. Dla tworzyw, zachowujących się podług prawa HOOKE’A krzywa wykresu będzie linią prostą i dla JAKIEGOKOLWIEK  $\zeta$ , przynależnego do  $t_k$ , będziemy mieli  $\zeta = \beta t_k$ , stąd wobec tego, że  $G = \frac{1}{\beta}$  mamy bez-

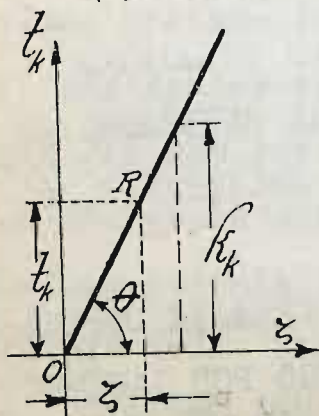
pośrednio:

$$t_k : \zeta = G = \lg \theta$$

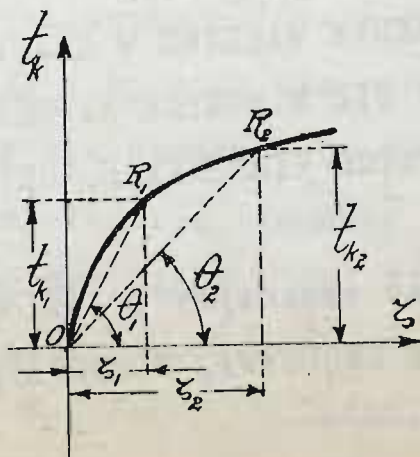
[rys. 157], co umożliwia wyznaczenie  $\beta$  lub  $G$ .

Inaczej rzecz się ma jednak,

RYŚ. 157.



RYŚ. 158.



gdy tworzywo nie ulega prawu HOOKE'A w granicach stosowności praktycznej, wtedy bowiem krzywa wykresu nie jest linią prostą, możemy więc wyznaczyć dla punktów  $R_1, R_2, \dots$  [rys. 158] kąty odpowiednie  $\theta, \theta_2, \dots$  a wtedy wobec  $\zeta_1 = \beta_1 t_{k_1}$ ,  $\zeta_2 = \beta_2 t_{k_2}, \dots$  mamy odpowiednio:  $t_{k_1} : \zeta_1 = 1 : \beta_1 = G_1 = \lg \theta_1$ ,  $t_{k_2} : \zeta_2 = 1 : \beta_2 = G_2 = \lg \theta_2, \dots$  WSPÓŁCZYNNIKI ZATEM  $\beta$  i  $G$  SĄ TU ZMIENNE, jak to ma miejsce dla tworzyw przynależnych do gromady wykresowej typu „C”. W tych wypadkach należy więc WYZNACZAĆ CAŁY SZEREG WARTOŚCI OBU TYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW.

Kończąc teorię skręcania prętów o przekrojach kołowych zestawiamy

§ 9. WZORY WYTRZYMAŁOŚCIOWE DLA SKRĘCANYCH PRĘTÓW O PRZEKROJU POPRZECZNYM KOŁOWYM. Tutaj należy rozpatryć przedewszystkiem:

A. SKRĘCANY PRĘT PROSTY O PEŁNYM PRZEKROJU POPRZECZNYM KOŁOWYM. - Chcąc ustalić ostateczną postać

WZORÓW  $\frac{I}{R} = \frac{M_z}{I} R$ ,  $\zeta = \frac{R d\varphi}{dz}$ ,  $d\varphi = \frac{\beta M_z dz}{I}$  dla danego wypadku, należy wyznaczyć wartość  $I_0$ . W tym celu ozna-

czamy promień tego przekroju przez  $R$ , średnicę przez

$D$ . W zagajeniu widzieliśmy, że  $I_0 = \int \rho^2 d\sigma = \int \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2} R^4 = \frac{\pi}{32} D^4$ .

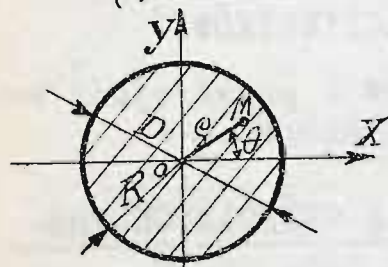
Ostatecznie więc mamy tutaj  $\frac{I}{R} = \frac{M_z}{W_0}$ , gdzie  $W_0 = \frac{I_0}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}$ , - oraz  $d\varphi = \frac{\beta M_z dz}{I}$ , gdzie  $I = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$ . [rys. 159]. Z kolei rozpatrujemy:

B. SKRĘCANY PRĘT PROSTY O PRZEKROJU POPRZECZNYM PIERŚCIENIOWYM. Dla odróżnienia od poprzedzającego wy-

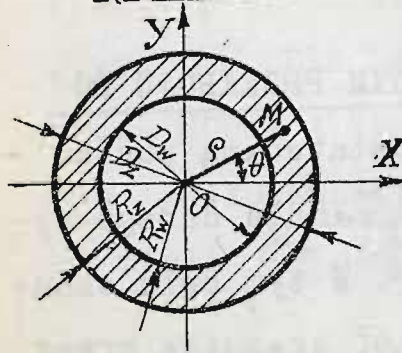


padku, oznaczamy tutaj przez  $D_z$  i  $R_z$  odpowiednio średnicę zewnętrzną i promień zewnętrzny, a przez  $D_w$  i  $R_w$  średnicę i promień wewnętrzny przekroju poprzecznego pręta. Tutaj najwyższa wartość naprężenia wirowego przynależy do  $R_z$ , chcąc więc ustalić ostateczną postać wzorów  $t_r = \frac{M_z}{I_o} R_z$ ,  $\zeta = \frac{R_z d\varphi}{dz}$ ,  $d\varphi = \frac{\beta M_z dz}{I_o}$  dla danego wypadku należy również wyznaczyć wartość  $I_o$ . Oznaczając przez  $m = R_w : R_z = D_w : D_z$ , przy-

RYS. 159.



RYS. 160.



czem niewątpliwie  $m < 1$  mamy:

$$I_o = \int \rho^2 d\sigma = \int \rho^2 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R_z} \rho^3 d\rho = \\ = 2\pi \int_0^{R_z} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi}{4} [R_z^4 - R_w^4] = \\ = \frac{\pi R_z^4}{2} (1 - m^4) = \frac{\pi D_z^4}{32} (1 - m^4),$$

i ostatecznie  $t_r = \frac{M_z}{W_o}$ , gdzie

$$W_o = \frac{I_o}{R_z} = \frac{\pi R_z^3}{2} (1 - m^4) = \frac{\pi D_z^3}{16} (1 - m^4).$$

oraz  $d\varphi = \frac{\beta M_z dz}{I_o}$ , gdzie:

$$I_o = \frac{\pi R_z^4}{2} (1 - m^4) = \frac{\pi D_z^4}{32} (1 - m^4).$$

[rys. 160]. Na zasadzie tylko co otrzymanych wzorów możemy z łatwością zdać sobie sprawę, który z owych prętów będzie WYTRZYMAŁO-

ŚCIEWO DOSKONALSZY przy jednakowej długości i wadze. Jest to zagadnienie nader ważne, praktycznie bowiem zazwyczaj największą rolę gra CENA TWORZYWA, rosnąca proporcjonalnie do jego wagi. Rozpatrujemy więc DWA PRĘTY JEDNAKOWEJ DŁUGOŚCI I WAGI - PRĘT „A” O PRZEKROJU KOŁOWYM PEŁNYM I PRĘT „B” O PRZEKROJU PIERŚCIENIOWYM OBA PRĘTY SĄ WYKONANE Z TEGO SAMEGO TWORZYWA, WOBEC

RÓWNOŚCI ICH WAG - POŁA ICH PRZĘKROJÓW POPRZECZNYCH MUSZĄ BYĆ RÓWNE. To znaczy, że  $\pi R^2 = \pi R_z^2 - \pi R_w^2$ , stąd  $R^2 = R_z^2(1 - m^2)$ . Ponieważ  $R^2 : R_z^2 = 1 - m^2 < 1$ , zatem  $R < R_z$ , co zresztą można było z góry przewidzieć. Mamy tu dla PRĘTA „A”:  $t_{RA} = \frac{M_z}{W_{OA}}$ ,  $d\varphi_A = \beta M_z dz : I_{OA}$ ,  $t_{RA} = \frac{M_z}{\frac{\pi}{2} R^3}$ ;  $d\varphi_A = \frac{\beta M_z dz}{\frac{\pi}{2} R^4}$ , oraz zupełnie w taki sam sposób dla PRĘTA „B”:  $t_{RB} = \frac{M_z}{W_{OB}}$ ,  $d\varphi_B = \beta M_z dz : I_{OB}$ ,  $t_{RB} = \frac{M_z}{\frac{\pi}{2} R_z^3(1 - m^2)}$ ;  $d\varphi_B = \frac{\beta M_z dz}{\frac{\pi}{2} R_z^4(1 - m^2)}$ . STĄD BEZPOŚREDNIO DLA PEWNEJ ŚCIŚLE OKREŚLONEJ WARTOŚCI MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO  $M_z$ , ZWAŻYWSZY, ŻE  $R^2 = R_z^2(1 - m^2)$  MAMY DZIELĄC:  $\frac{t_{RA}}{t_{RB}} = \frac{2 M_z}{\pi R^3} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} R_z^3(1 - m^2)}{M_z} = \frac{R_z^3}{R^3}(1 - m^2) = \frac{R_z}{R} \cdot \frac{R_z^2(1 - m^2)}{R^2} = \frac{R_z}{R}(1 + m^2) > 1$ ;  $\sim \frac{d\varphi_A}{d\varphi_B} = \frac{2 \beta M_z dz}{\pi R^4} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} R_z^4(1 - m^2)}{2 \beta M_z dz} = \frac{R_z^4}{R^4}(1 - m^2) = \frac{R_z^2}{R^2} \cdot \frac{R_z^2(1 - m^2)}{R^2} = \frac{R_z^2}{R^2}(1 + m^2) > 1$ .

Stąd wypływa, że  $t_{RA} > t_{RB}$ , oraz  $d\varphi_A > d\varphi_B$ . Pierwszy wynik świadczy, że w przekroju poprzecznym pełnym pręta „A” panuje skrajne naprężenie znacznie wyższe, niż w przekroju poprzecznym pierścieniowym pręta „B”; stąd wniosek, że pręt „B” jest wytrzymalszy na skręcanie. Drugi wynik potwierdza to, wskazując, że elementarny kąt skręcenia jest większy dla pręta „A”, który przeto łatwiej ulega skręceniu. Jednocząc oba te wnioski, mówimy, że z DWUCH RÓWNEJ WAGI, JEDNAKOWO DŁUGICH PRĘTÓW CYLINDRYCZNYCH, PRĘT O PRZĘKROJU POPRZECZNYM PIERŚCIENIOWYM JEST WYTRZYMAŁOŚCIOWO DOSKONALSZY OD PRĘTA O PRZĘKROJU POPRZECZNYM PEŁNYM. Wniosek powyższy świadczy o przewadze przekroju pierścieniowego, niestety jednak tego rodzaju pręty



pierścieniowe są bardzo trudne do wykonania Z TWO-  
RZYW KUTYCH, wymagają bowiem rozwiercania średnicy  
wewnętrznej - obróbki nader kosztownej, to też za-  
wyczaj pręty skręcane - WAŁY KUTE STALOWE LUB ŻE-  
LAZNE ZLEWNE posiadają przekrój kołowy pełny. Wyję-  
tek tu stanowią wały o dużej średnicy, które zwykle  
przewiercane są na wylot, a to w celu zbadania ja-  
kości tworzywa, grube wały bowiem wykuwane są z  
ogromnych kawałów stali zlewnej, gdzie trudno o two-  
rzywo jednolite. Otwory te niewielkiej zresztą śred-  
nicy są nader kosztowne w wykonaniu, ale wydatek ten  
jest stosunkowo mały wobec kosztu wykonania całego  
wału, to też bywa chętnie ponoszony.

Dawniej robiono również wały żeliwne - obecnie  
są one w zupełnym zaniechaniu wobec małej wytrzyma-  
łości tego tworzywa, natomiast spotykamy coraz czę-  
ściej wały o przekroju pierścieniowym ze stali lanej.

Wyżej ustaliliśmy dla obu przekrojów kołowych  
ostateczną postać wzorów na skręcanie:  $\frac{T}{\varphi} = \frac{M_z}{W_o}$  oraz  
 $d\varphi = \frac{\beta M_z}{I_o} dz$ ; dawniej mniemano, że wzory te posia-  
dają wartość ogólną dla prętów o dowolnym przekroju  
poprzecznym, doświadczenie jednak zadało kłam temu  
mniemaniu, wykazując niezbitą prawidłowość tych  
wzorów wyłącznie i li tylko w zastosowaniu do wyżej  
wymienionych przekrojów kołowych, w tych bowiem je-  
dynie przekrojach MOGĄ POWSTAWAĆ NAPRĘŻENIA WIROWE,  
podobnie jak ruch wirowy cieczy może zachodzić jedy-

nie bez przeszkód w naczyniu kołowym lub pierścieniowym. W przekroju każdego innego kształtu nie kołowego UKŁAD NAPRĘŻEŃ WIROWYCH JEST NIEMOŻLIWY, bo naprężenia takiego układu muszą wychodzić poza przekrój, nie spotykając na jego powierzchni równoważącego obciążenia zewnętrznego, które ześrodkowane jest na obu końcach pręta, a nie na powierzchni bocznej pręta.

W odciążonej powłoce pręta mogą więc siedliskować jedynie naprężenia skierowane wewnątrz

pręta, lub styczne do powłoki.

Spróbujmy w przekroju kołowym

/rys.161/, obciążonym wirowo

wyznaczyć jakikolwiek inny

kształt przekroju, dajmy na to

trójkątny lub eliptyczny, a na-

tychmiast spostrzeżemy cały rój

naprężeń wychodzących poza wyznaczony przekrój, co

sprzeciwia się zasadniczemu prawom wytrzymałości ma-

teriałów. Stąd bezpośredni wniosek: DLA PRZEKROJÓW

OD KOŁOWEGO RÓŻNYCH ZAWODZI WYTRZYMAŁOŚCIOWA TEORIA

SKRĘCANIA. Należy więc zbudować nową, inaczej dobie-

rając kształt funkcji, wyznaczających składowe naprę-

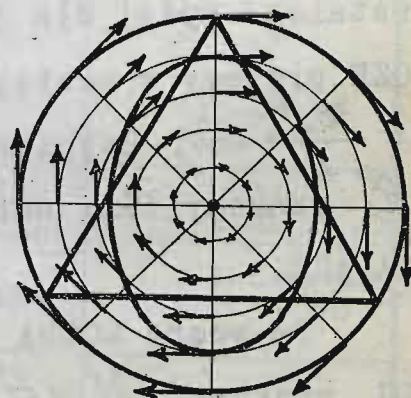
żeń jednostkowych w zależności od współrzędnych prze-

kroju, lub też rozwiązać to zagadnienie, opierając

się na podstawach TEORJI SPRĘŻYSTOŚCI, jak to pierw-

szy zrobił **BARRE DE SAINT VENANT** w sposób zupełnie

Rys. 161.





wyczerpujący i ogólny. Podane przezeń wzory były wielokrotnie sprawdzane przez BAUSCHINGERA, BACHA i innych badaczy. PODAJEMY JE PONIŻEJ Z POPRAWKAMI BACHA, nie tracąc czasu na wyprowadzenie tych wzorów, zwłaszcza, że w technice WYŁĄCZNIE SĄ UŻYWANE PRĘTY SKRĘCANE O PRZĘKROJU KOŁOWYM, JAKO WYTRZYMAŁOŚCIOWO NAJDOSKONALSZYM, O CZYM ZRESZTĄ MOŻNA PRZEKONAĆ SIĘ I CZYSTO TEORETYCZNIE. Rozpatrujemy więc:

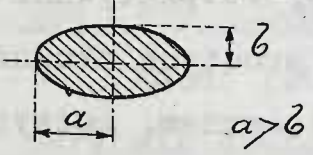
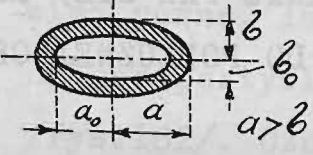
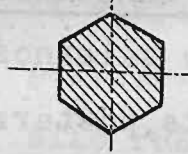
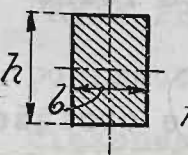
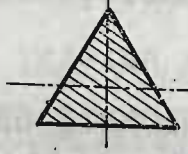
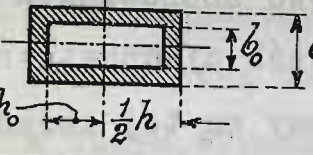
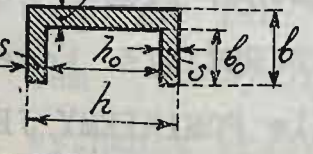
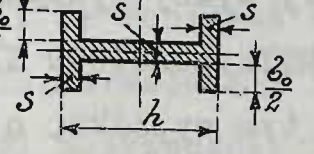
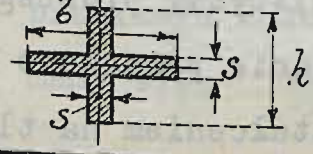
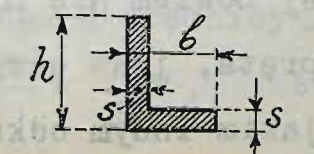
### § 10. WZORY WYTRZYMAŁOŚCIOWE DLA SKRĘCANYCH PRĘTÓW O RÓŻNORODNYCH PRZĘKROJACH POPRZECZNYCH.

Ustalone wyżej dla PRZĘKROJÓW KOŁOWYCH WZORY ZASADNICZE piszemy w następującej postaci  $R_k = \frac{M_z}{W_0}$ ,  $d\varphi = \frac{B M_z}{I_0} dz$ , czyniąc w nich  $t_k = R_k$ , gdzie przez  $R_k$  oznaczyliśmy skrajne DOPUSZCZALNE NAPRĘŻENIE SKRĘCAJĄCE.

Te wzory MOŻNA UOGÓLNIĆ DLA WSZELKIEGO PRZĘKROJU, pisząc:  $M_z = A R_k$ ,  $d\varphi = B \beta M_z dz$ , przy-  
czem dla PRZĘKROJÓW KOŁOWYCH mamy  $A = W_0 = I_0 : R$ ,  
 $B = 1 : I_0$ , a dla innych PRZĘKROJÓW wartości  $A$  i  $B$  należy wziąć z podanej TABLICY JEDENASTEJ, zapożyczonej u BACHA. Zwracamy przytem uwagę, że podane w niej wartości  $A$  i  $B$  nie zależą już od momentów biegunowych  $I_0$  przekroju, jak to miało miejsce dla przekroju kołowego, zależą natomiast od wymiarów typowych dla każdego przekroju.

Na tem kończymy teorię skręcania i rozpatrujemy jej zastosowania. Korzystać będziemy przytem stale ze

TABLICA JEDENASTA.

| PRZĘKRÓJ:  | $d\varphi: \beta M_z dz = B = \frac{1}{J_0}$  | $M_z: K_K = A = W_0$                     |
|--|---|--|
|                                 | $\frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3}$   | $\frac{\pi a b^2}{2}$                    |
|                                 | $\frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3 [1 - m^4]}$<br>$a_0 = m a \quad b_0 = m b$            | $\frac{\pi [a b^3 - a_0 b_0^3]}{2 b}$    |
|  KAŻDY<br>BOK<br>= b            | $\frac{0.967}{b^4}$   | $\frac{b^3}{1.09}$                       |
|  h > b<br>m = $\frac{h}{b}$    | $\psi_0 \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$<br>$\psi_0 = 3.645 - 0.06 m$                     | $\frac{b^2 h}{3 + \frac{2.6}{m + 0.45}}$ |
|  KAŻDY<br>BOK<br>= b          | $\frac{46.2}{b^4}$  | $\frac{b^3}{2.0}$                        |
|  h > b<br>$h_0 : h = b_0 : b$ | $\frac{2[b^3 h - b_0^3 h_0]}{9 b}$  |  |
|                               |  | $\frac{2 s^3}{9} [h + 2 b_0]$            |
|                               |  | $\frac{2 s^3}{9} [h + b - s].$           |



wzorów wyżej wypisanych, pamiętając o tem, że współczynniki  $A$  i  $B$  wyznaczone być winny z naszej tablicy. Przedewszystkiem bierzemy pod uwagę: OBCIĄŻENIA RZECZYWISTE PRĘTÓW SKRĘCANYCH, bo wyżej rozpatrywane przez nas obciążenia wirowe prętów prostych trudno dają się urzeczywistnić w życiu codziennem, zazwyczaj bowiem PODDAJEMY PRĘT PROSTY DZIAŁANIU PAR SIŁ, LEŻĄCYCH W PŁASZCZYZNACH PROSTOPADŁYCH DO PODŁUŻNEJ OSI PRĘTA. W ten sposób wyznaczone

§ 11. OBCIĄŻENIE RZECZYWISTE PRĘTÓW SKRĘCANYCH  
może być TRWAŁE, POWTARZANE LUB WAHLIWE w zależności od tego, czy pary sił mają natężenia stałe, powtarzane lub wahliwe w granicach dwóch skrajnych różnoskrętnych wartości.

Wszystkie tylko co wymienione rodzaje obciążeń nazywamy krótko OBCIĄŻENIAMI WIROWEMI RZECZYWISTEMI pręta prostego. Działanie tego obciążenia należy, o ile się to da ROZPROWADZAĆ NA CAŁĄ POWIERZCHNIĘ OBU DEN PRĘTA SKRĘCANEGO ZA POMOCĄ CELOWO ZBUDOWANYCH MUR. Przypuśćmy, żeśmy w jakikolwiek sposób ujednostajnili obciążenie pręta wewnętrzne i chcemy na tej zasadzie zastosować doń wzory wyżej wyprowadzone, słowem CHCEMY GO OBLICZYĆ WYTRZYMAŁOŚCIOWO NA SKRĘCANIE. Możemy to uczynić tylko w tym wypadku, o ile POMINIEMY JEGO WAGĘ WŁASNĄ, inaczej bowiem nie mielibyśmy prostego wypadku skręcania pręta, jeno skręcanie połączone z rozciąganiem, lub jakim innym odkształceniem na tle

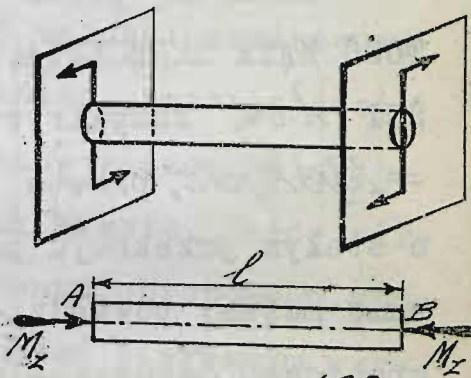
sił ciężarowych samego pręta. Tutaj rozpatrujemy przede wszystkim:

A. PRĘT PROSTY O STAŁYM PRZEKROJU POPRZECZNYM, OBCIĄŻONY DWIEMA ZRÓWNOWAŻONEMI PARAMI SKRĘCAJĄCEMI OBA JEGO KOŃCE.

Wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej, pary sił obciążających znoszą się wzajemnie, są więc równe, lecz różnoskrętne, jak to wyraźnie widać na perspektywicznym rysunku.

RYŚ. 162.

/rys.162/. Oznaczmy moment skręcający którejkolwiek pary przez  $M$ . Należy określić PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA PROSTEGO o stałym poprzecznym przekroju, obciążonego dwoma momentami



RYŚ. 163.

$M_x = M$  różnoskrętnymi, przyłożonymi do obu jego końców /rys.163/. W danym wypadku mamy dla każdego przekroju poprzecznego  $M_x = M = A R_k$ . [kg, cm]. ~

Wyznamy z TABLIC KURSU ĆWICZEŃ WARTOŚĆ  $R_k$ , przynależną do odpowiedniego typu obciążenia, które w danym wypadku może być wszystkich trzech rodzajów "I" "II" lub "III".- Ponieważ wartość  $M$  jest dana, zatem  $A = M : R_k$ . Określona w ten sposób wartość  $A$  wyznacza przekrój poprzeczny. Tak na przykład dla przekroju kołowego o średnicy  $D$  współczynnik  $A = \frac{\pi D^3}{16}$ , mamy więc  $\frac{\pi D^3}{16} = \frac{M_x}{R_k}$ , stąd:  $D = \sqrt[3]{\frac{16 M_x}{\pi R_k}}$ . cm. ~



Dla prętów KRÓTKICH ten sposób wyznaczania wymiarów w zupełności wystarcza, ponieważ pręty krótkie ujawniają znikome jeno wartości całkowitego kąta skręcenia. Inaczej jednak rzecz się ma dla prętów długich, gdzie kąt skręcenia ujawnia nieraz znaczne wartości praktycznie niedopuszczalne, zwłaszcza przy obciążeniach wahliwych, kiedy duże skręcenia powodują tak zwane drgania wirowe nader niebezpieczne dla całości pręta.

Oznaczmy przez  $\varphi_d$  — praktycznie DOPUSZCZALNĄ WARTOŚĆ KĄTA SKRĘCENIA, PRZYNALEŻNĄ DO JEDNOSTKI DŁUGOŚCI  $\lambda$  cm. rozpatrywanego pręta. Ponieważ  $d\varphi = \beta \beta M_x dz$ , przeto  $\varphi_d = \int_0^{\lambda} \beta \beta M_x dz$ . Dla pręta o stałym przekroju poprzecznym  $\beta$  jest stałe; to samo możemy powiedzieć i o  $M_x = M$ ; ponadto w granicach dopuszczalnych naprężeń wirowych  $\beta$  ma wartość stałą, zatem  $\varphi_d = \beta \beta M \lambda$ , stąd  $\beta = \varphi_d : \beta \lambda M$ . W ten sposób określona wartość wyznacza przekrój poprzeczny, zazwyczaj jednak różniący się wymiarami od poprzednio otrzymanego. Z tych dwóch przekrojów bierzemy niewątpliwie większy, jako czyniący zadość obu warunkom.

Pierwszy sposób wyznaczania przekroju nazywamy LICZENIEM PRĘTA NA SKRĘCANIE — drugi — LICZENIEM PRĘTA NA KĄT SKRĘCENIA.

Dla przekroju kołowego o średnicy  $D$  współczynnik  $\beta = 1 : \frac{\pi D^4}{32}$ , stąd  $\frac{\pi D^4}{32} = \frac{\lambda \beta M}{\varphi_d}$ , i ostatecznie:  
 $D = \sqrt[4]{\frac{32 \lambda \beta M}{\pi \varphi_d}} \text{ cm.}$

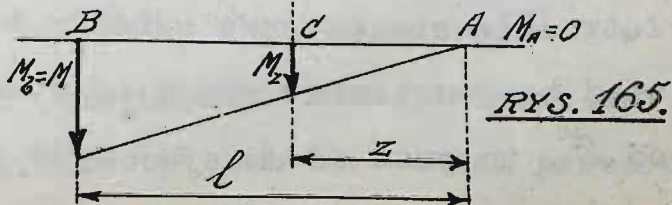
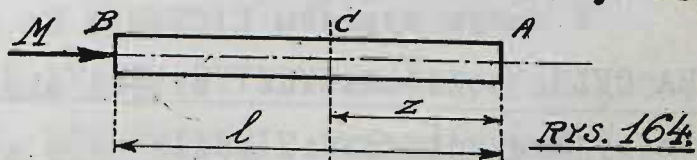
Pozostaje nam jeszcze znaleźć KĄT CAŁKOWITEGO SKRĘCENIA  $\varphi$  PRĘTA O DŁUGOŚCI  $l$  cm. Ponieważ  $\varphi = \int_0^l \beta B M_z dz$ , przeto w danym wypadku  $\varphi = \beta B M l$ , a dla pręta kołowego  $\varphi = \beta l M : I_0$ . — Z kolei rozpatrujemy w dalszym ciągu:

B. PRĘT PROSTY O STAŁYM PRZEEKROJU POPRZECZNYM, OBCIĄŻONY MOMENTEM  $M$ , SKRĘCAJĄCYM, RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONYM NA CAŁĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA. W ten sposób możemy czysto teoretycznie wyznaczyć warunki obciążenia wału turbiny parowej wielowirnikowej, rozwijającej moment obrotowy, złożony z momentów poszczególnych wirników, osadzonych na wale obok siebie. Każdy wirnik dorzuca część ogólnego momentu obrotowego, który w ten sposób rośnie od zera przed pierwszym wirnikiem, do swej wartości całkowitej poza ostatnim wirnikiem, gdzie moment obrotowy spotyka się z niszczącym go momentem oporowym, stanowiącym obciążenie pożytkowe turbiny. Przy nieskończonej wielkiej ilości wirników otrzymujemy warunki tu rozpatrywane:

Niech  $A$  oznacza swobodny koniec pręta  $AB$  /rys.164/

Moment  $M$ , jako rozłożony równomiernie na całej długości  $AB=l$ ,

będzie JEDNOSTAJNIE RÓŚŁ od swej pier-





wotnej wartości zerowej, panującej w  $A$  aż do całkowitej wartości  $M$  panującej w  $B$ . W jakimkolwiek punkcie pośrednim  $C$ , odległym o  $Z$  od  $A$  otrzymamy wartość momentu  $M_z = M \frac{Z}{\ell}$ , co wypływa z warunków założenia /rys.165/. Najwyższa wartość  $M$  tego momentu zmiennego spotyka w  $B$  moment oporowy równoważący. Wobec stałych wymiarów przekroju poprzecznego należy niewątpliwie oczekiwać NAJWYŻSZEGO NAPRĘŻENIA SKRĘCAJĄCEGO TAM, GDZIE PANUJE NAJWYŻSZA WARTOŚĆ MOMENTU ZMIENNEGO; MOŻEMY WIĘC NAPISAĆ DLA PRZEKROJU NIEBEZPIECZNEGO  $B$  RÓWNANIE  $M = A R_k$ . Stąd mamy wartość  $A = M : R_k$ , określającą stały poprzeczny przekrój pręta. Tę wartość  $A$  otrzymaliśmy już wyżej, rozpatrując wypadek poprzedzający. Stąd bezpośredni wniosek:

LICZENIE PRĘTA NA SKRĘCANIE DAJE TE SAME WYMIARY PRZEKROJU POPRZECZNEGO NIEZALEŻNIE OD TEGO, CZY PRĘT JEST OBCIĄŻONY MOMENTEM NIEZMIENNYM CZY TEŻ MOMENTEM RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONYM NA CAŁĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA, PRZYCZEM W OBU WYPADKACH WARTOŚĆ MOMENTU JEST TA SAMA.

W danym wypadku LICZENIE NA KĄT SKRĘCAJĄCY NIE MA CELU, ponieważ wał skręca się NIEJEDNAKOWO na całej swej długości. Możemy się o tem przekonać z łatwością pisząc  $d\varphi = \beta B M_z dz = \frac{\beta B M}{\ell} Z dz$ , stąd bezpośrednio wnioskujemy, że  $d\varphi$  jest zależne od  $Z$ , to jest od umiejscowienia rozpatrywanego

przekroju na przecie. Możemy natomiast i w danym wypadku wyznaczyć CAŁKOWITY KĄT SKRĘCENIA PRĘTA pisząc  $\varphi = \int_0^l \frac{\beta BM}{I} x dx = \frac{\beta BM}{I} \int_0^l x dx = \frac{1}{2} \beta BMl$ . Dla pręta o przekroju kołowym średnicy  $D$ .  $\varphi = \beta Ml : 2I_0 = 16 \beta Ml : \pi D^4$ .

Podobne wartości, tylko dwa razy większe otrzymaliśmy już wyżej, rozpatrując wypadek poprzedzający. Stąd bezpośredni wniosek:

PRĘT O STAŁYM PRZEKROJU, OBCIĄŻONY MOMENTEM SKRĘCAJĄCYM NIEZMIENNYM, UJAWNIA WARTOŚĆ KĄTA CAŁKOWITEGO SKRĘCENIA DWUKROTNIE WIĘKSZĄ OD ODPOWIEDNIEJ WARTOŚCI TEGOŻ KĄTA, UJAWNIONEJ W WYPADKU, KIEDY TEN SAM MOMENT SKRĘCAJĄCY JEST RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONY NA CAŁĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA.

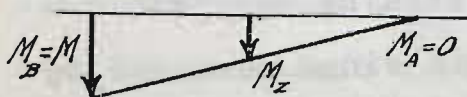
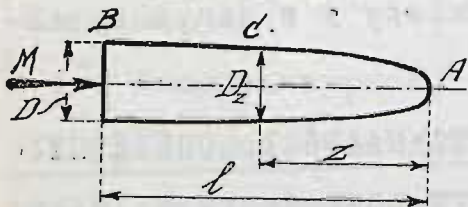
Jest to niewątpliwie duża zaleta pręta tylko co rozpatrywanego, posiada on natomiast wadę bardzo poważną - NIE JEST CIAŁEM STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI, JAK PRĘT, ROZPATRYWANY W WYPADKU „A”, ponieważ w danym wypadku zaledwie jeden jedyny przekrój w  $B$  jest wyciągnięty wytrzymałościowo, pozostałe są zbyt sówite, pręt jest przeładowany materiałem, budowa jego nie jest oszczędna. Aby tę wadę usunąć, należy i w danym wypadku wyznaczyć:

C. PRĘT PROSTY O STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI, OBCIĄŻONY MOMENTEM SKRĘCAJĄCYM, RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONYM NA CAŁĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA. W danym wypadku skrajne naprężenie w każdym przekroju poprzecznym pręta winno posiadać tę samą wartość  $R_k$ , mamy więc dla jakiegokolwiek przekro-



ju poprzecznego  $C$  /rys.164/, odległego o  $Z$  od końca  $A$  pręta -  $M_z = A_z R_k$ . Ponieważ  $M_z = M \frac{z}{l}$ , przeto współczynnik  $A_z = M_z : R_k \cdot l$  - MA WARTOŚCI ZMIENNE, WYZNACZA ZATEM PRZEKRÓJ ZMIENNY wzdłuż pręta. Dla skrajnego przekroju - DNA PRĘTA  $B$ , to jest dla  $z=l$ , otrzymujemy  $A = \frac{M}{R_k}$ . Tę wartość otrzymaliśmy już pierwszej, rozpatrując wypadek poprzedzający. Ponieważ wartość  $A = M : R_k$ , jest najwyższą wartością  $A_z$ , wyznacza ona zatem przekrój poprzeczny NAJSUTSZY pręta stałej wytrzymałości, RÓWNY PRZEKROJOWI POPRZECZNEMU PRĘTA POPRZEDNIO ROZPATRYWANEGO. Pręt stałej wytrzymałości jest więc znacznie uboższy w materiał, a więc znacznie LŻEJSZY od pręta o stałym przekroju W WYPADKU OBCIĄŻENIA MOMENTEM SKRĘCAJĄCYM RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONYM NA CAŁĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA. Aby wyznaczyć KSZTAŁT otrzymanego pręta stałej wytrzymałości, należy wyznaczyć szereg przekrojów poprzecznych, korzystając ze wzoru dla  $A_z$ . Wobec  $A = M : R_k$ , mamy tu  $A_z = A \cdot z : l$ . Dla pręta o przekroju kołowym średnicy

RYŚ. 166.



RYŚ. 167.

$D_z$  — mamy  $A = \frac{\pi D_z^3}{16} = \frac{M_z}{R_k}$ . Stąd mamy  $D_z = \sqrt[3]{\frac{16 M_z}{\pi R_k}}$ . Dla  $z=l$ , to jest dla przekroju  $B$ , największego, mamy  $D = \sqrt[3]{\frac{16 M}{\pi R_k} \cdot l}$ , stąd, dzieląc otrzymujemy bezpośrednio:  $D_z = D \sqrt[3]{\frac{z}{l}} = D \left( \frac{z}{l} \right)^{1/3}$ . Jest to RÓWNANIE PARABOLI SZE-

SCIENNEJ/rys.166/ określające prawo wzrostu średnic w miarę oddalania się od końca  $A$  pręta. Tego rodzaju pręty paraboliczne nader rzadko bywają stosowane w praktyce wobec nadmiernych trudności wykonawczych, zwłaszcza, że dają one znaczne wartości kąta całkowitego skręcenia. Aby tę wartość wyznaczyć, mamy w ogólnym wypadku

$d\varphi = B_z \beta M_z dz = \beta B_z M \frac{z}{l} dz$  stąd:  $\varphi = \int_0^l \frac{\beta M}{l} B_z z dz = \frac{\beta M}{l} \int_0^l B_z z dz$ , gdzie  $B_z$  winno być wyznaczone w zależności od  $z$ , aby umożliwić całkowanie. Dla przekroju kołowego średnicy  $D_z$  mamy:

$$\varphi = \int_0^l \frac{\beta M}{l} B_z z dz = \int_0^l \frac{\beta M}{l} \frac{32 z dz}{\pi D_z^4} = \int_0^l \frac{\beta M}{l} \frac{32 z dz}{\pi D^4 (\frac{z}{l})^{\frac{3}{2}}} = \int_0^l \frac{\beta M \sqrt{l}}{\frac{\pi D^4}{32}} z^{-\frac{1}{2}} dz = 3 \frac{16 \beta M l}{\pi D^4}$$

Podobną wartość, tylko trzy razy mniejszą otrzymaliśmy już wyżej, rozpatrując wypadek poprzedzający. Stąd wniosek bezpośredni:

W WYPADKU OBCIĄŻENIA MOMENTEM SKRĘCAJĄCYM RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONYM NA CAŁĄ DŁUGOŚĆ PRĘTA, KĄT CAŁKOWITEGO SKRĘCENIA PRĘTA STAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI JEST TRZYKROTNIE WIĘKSZY OD KĄTA CAŁKOWITEGO SKRĘCENIA PRĘTA O STAŁYM PRZEKROJU POPRZECZNYM. Z kolei rozpatrujemy:

$D$ , PRĘT O STAŁYM PRZEKROJU POPRZECZNYM ZAMOCOWANY PO OBU KOŃCACH, A OBCIĄŻONY PARĄ SIŁ, SKRĘCAJĄCĄ DOWOLNY PRZEKRÓJ POPRZECZNY PRĘTA. Oznaczmy moment pary skręcającej przez  $M$ , a przez  $P$  - płaszczyznę pary. Odległość tej płaszczyzny  $P$  od końców zamocowanych  $A$  i  $B$  pręta  $AB$  niech będzie odpowiednio  $a$  i  $b$ . ~ Wobec zamocowania obu końców pręta moment  $M$  obrócić



pręta nie może, bo para sił momentu jest obezwładniona na tle oporu zamocowanych końców pręta. To znaczy, że u obu końców pręta POWSTAJĄ MOMENTY, RÓWNOWAŻĄCE MOMENT  $M$ . Jeżeli więc oznaczymy przez  $M_A$  i  $M_B$  TE ODPORY MOMENTOWE, odpowiednio przynależne do końców zamocowanych  $A$  i  $B$  pręta, to na zasadzie praw statyki możemy napisać warunek równowagi, jedyny zresztą w danym wypadku, gdzie niema sił, a są jedynie momenty:  $M + M_A + M_B = 0$ . Stąd  $M_A + M_B = -M$ : SUMA MOMENTÓW ODPOROWYCH RÓWNOWAŻY MOMENT SKRĘCAJĄCY ZEWNĘTRZNYCH SIŁ. Tyle mówi statyka. Poszczególne pary  $M_A, M_B$  są więc STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE, natomiast z łatwością mogą być wyznaczone na mocy wzorów wytrzymałościowych.

Rozdzielmy moment  $M$  na sumę bliżej niewyznaczonych zresztą momentów  $M_A + M_B$  - DZIAŁANIE tej sumy będzie niewątpliwie takie same, jak działanie całego momentu  $M$  nierozdzielonego. Składnik  $M_A$  będzie równoważył opórę  $M_A$ , a składnik  $M_B$  - opórę momentową  $M_B$ . W ten sposób pręt całkowity rozpadnie się niejako na dwa pręty  $AC$  i  $CB$  /rys.168/, obciążone w sposób wyżej rozpatrywany w wypadku „A”.

Kąt całkowitego skreślenia PRĘTA  $AC$  będzie więc  $\varphi_{AC} = \int_0^a \beta B M_A dz = \beta B M_A \int_0^a dz = \beta B M_A a$ ; a zaś kąt skreślenia PRĘTA  $CB$ ;  $\varphi_{CB} = \int_0^b \beta B M_B dz = \beta B M_B b$ . Ponieważ pręt po środku w punkcie  $C$  NIE ULEGŁ PRZERWANIU zatem niewątpliwie PRZEKRÓJ  $C$  UJAWNI JEDNAKOWE

KĄTY SKRĘCENIA WZGLĘDEM  
OBU PRZEKROJÓW SKRAJNYCH,  
TO JEST OBU KOŃCÓW PRĘTA

$A$  i  $B$ . Stąd  $\varphi_{AC} = \varphi_{CB}$ ,  
co daje  $\beta B M_A \alpha = \beta B M_B \beta$ ,  
to jest  $\alpha M_A = \beta M_B$  i osta-  
tecznie  $M_A = \frac{\beta}{\alpha} M_B$ . Wo-  
bec  $M_A + M_B = -M$  mamy:

$$M_B + \frac{\beta}{\alpha} M_B = -M \quad \text{skąd}$$

$$M_B = -\frac{\alpha}{\alpha + \beta} M, \text{ oraz zupełnie tak samo } M_A = -\frac{\beta}{\alpha + \beta} M.$$

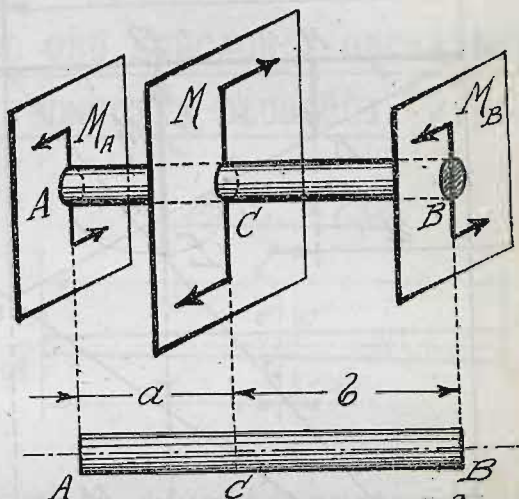
W ten sposób wyznaczamy odpory momentowe.

Niech będzie dajmy na to  $\beta > \alpha$ , wtedy  $M_A > M_B$ ,  
a zatem większy moment  $M_A$  winien być użyty do wy-  
znaczenia przekroju bezpiecznego, rozpatrywanego prę-  
ta. Mamy więc  $M_A = A K_K$ , skąd określamy  $A$  oraz sam  
przekrój pręta.

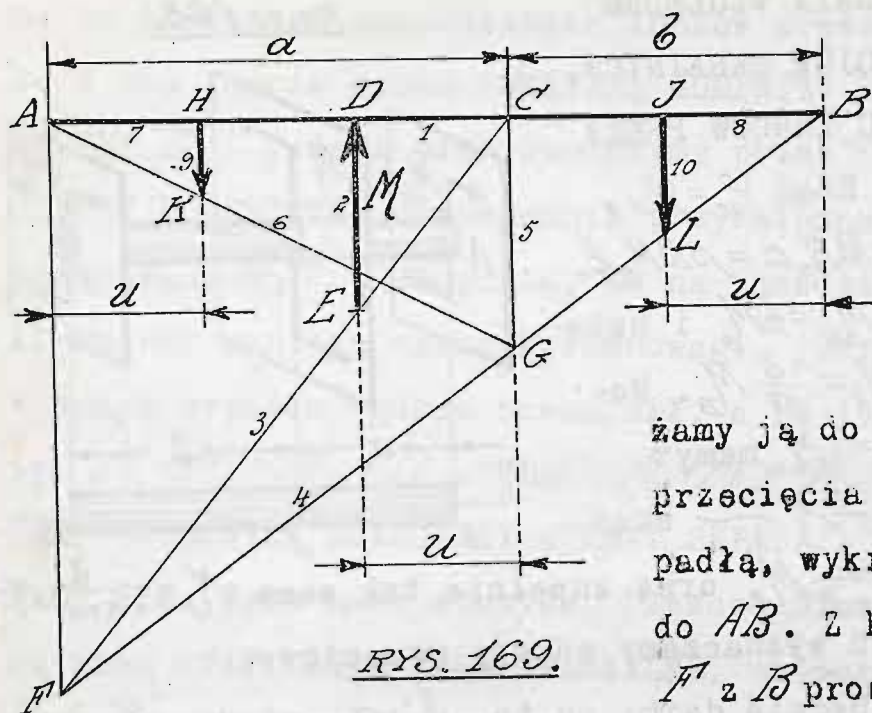
Zaznaczony tutaj rozkład momentu odkształcające-  
go  $M$  na składniki  $M_A$  i  $M_B$  można wykonać WYKREŚLNIĘ  
w następujący nader prosty sposób oparty na metodzie  
PROFESORA LEODYJSKIEGO UNIWERSYTETU HOLZER'A. Niechaj  
/rys.169/ odcinek  $AB$  wyobraża całkowitą długość prę-  
ta skręcanego, obciążonego w przekroju  $C$  momentem  $M$ ,  
przyczem  $AC = \alpha$ ,  $CB = \beta$  oraz  $\alpha + \beta = l$ . —

Z punktu  $C$  w kierunku  $A$  lub  $B$  odkładamy odcie-  
nek  $CD = u$ . W punkcie końcowym  $D$  tego odcinka odkła-  
damy prostopadle do  $AB$  odcinek  $DE$ , wyobrażający  
w dowolnej zresztą skali wartość momentu  $M$ . Mamy

rys. 168.







więc:

$$M = DE.$$

łączymy

C z E

prostą i

przedłu-

żamy ją do punktu F

przecięcia się z prosto-

padłą, wykreśloną w A

do AB. Z kolei łączymy

F z B prostą, prowadzi-

my w punkcie C prosto-

padłą do AB do przecięcia się z FB w punkcie G -

wreszcie łączymy G z B - prostą. Odkładając AH = BJ =

CD = u prowadzimy HK ⊥ AB oraz JL ⊥ AB. Odcinek

HK da nam w skali wartość momentu  $M_A$ , a odcinek JL

wartość momentu  $M_B$  w tej samej skali co i M. Aby

to udowodnić rozpatrujemy trójkąty podobne  $\triangle CDE \sim$

$\sim \triangle CAF$  skąd mamy  $\overline{AF} = \overline{DE} \times \overline{AC} : \overline{DC} = \alpha M : u.$

Z drugiej znów strony z podobieństwa trójkątów

$\triangle BAF \sim \triangle BJL$  wypływa bezpośrednio:  $JL = \overline{AF} \times \overline{JB} : \overline{AB} =$

$= \overline{AF} \times u : l = \alpha M : l = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} M = M_B$ , co należało dowieść.

Z kolei znów rozpatrując podobne trójkąty  $\triangle BCG \sim$

$\sim \triangle BJL$ , mamy  $\overline{CG} = \overline{JL} \times \overline{CB} : \overline{JB} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} M \frac{\beta}{u}.$  I wresz-

cie rozpatrując podobne trójkąty  $\triangle ACG \sim \triangle AHK$ , mamy

ponadto ostatecznie  $HK = \overline{CG} \times \overline{AH} : \overline{AC} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} M \frac{\beta}{u} \frac{u}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} M$  -

co również należało udowodnić. Tylko co rozpatrywany

wypadek można uogólnić, rozpatrując:

E. PRĘT ZAMOCOWANY PO OBU KOŃCACH I OBCIĄŻONY SKRĘCAJĄCYM MOMENTEM  $m$  NA JEDNOSTKĘ DŁUGOŚCI. /rys.

170/.

RYC. 170.

To znaczy, że w ODLE-  
GŁOŚCI  $Z$  OD KOŃCA  $A$  PRĘ-  
TA NA DŁUGOSTKĘ  $dz$  PRZY-  
PADA MOMENT  $m dz$ , gdzie



wogóle  $m=f(Z)$ , a zatem na całą długość pręta  $l$   
PRZYPADA MOMENT SKRĘCAJĄCY CAŁKOWITY  $M=\int_0^l m dz$ . Wo-  
bec zamocowania obu końców pręta w  $A$  i  $B$  powstają OD-  
PORY MOMENTOWE  $M_A$  i  $M_B$ , czyniące zadość jednemu rów-  
naniu statyki:  $M_A + M_B + M = 0$ . Oznaczmy przez  $M_Z$   
WARTOŚĆ MOMENTU SKRĘCAJĄCEGO, panującego w  $C$ , odleg-  
łym o  $Z$  od końca  $A$  pręta. Ponieważ obciążenia ze-  
wnętrzne stanowią tu jedynie momenty skręcające, za-  
tem możemy z łatwością sprowadzić układ sił zewnętrz-  
nych odkształcających do wypadkowego momentu  $M_Z$  pa-  
nującego w  $C$ . Będzie to  $M_Z = M_A + \int_0^Z m dz$ . Na tle  
działania obciążenia skręcającego, środkowa część  
pręta ulega skręceniu, które dla długości pręta  $dz$   
wyniesie:  $d\varphi = \beta B M_Z dz$ , a dla całego pręta:  $\varphi =$   
 $= \int_0^l \beta B M_Z B dz$ . Oznaczmy przez  $n = F(Z) = B \int_0^Z m dz = B \int_0^Z f(z) dz$ ,  
wtedy wobec tego, że:  $d\varphi = \beta B dz \{ M_A + \int_0^Z m dz \} =$

$= \beta B M_A dz + \beta B dz \int_0^Z m dz = \beta B M_A dz + \beta n dz$ , będziemy mie-  
li  $\varphi = \int_0^l \beta B M_A dz + \int_0^l \beta n dz = \beta M_A \int_0^l B dz + \beta \int_0^l n dz$ . Dzie-  
dzi



ki zamocowaniu, końce pręta nie mogą ulegnąć skręceniu względem siebie, zatem  $\varphi=0$  co daje  $M_A \int_0^l B dz + \int_0^l n dz = 0$ , skąd  $M_A = \left[ \int_0^l n dz \right] : \left[ \int_0^l B dz \right]$ . Z drugiej znów strony mamy  $M_A + M_B + \int_0^l n dz = 0$ , zatem  $M_B = \left[ \int_0^l n dz \right] : \left[ \int_0^l B dz \right] - \int_0^l n dz$ . Odpory momentowe są więc wyznaczone.

Aby z kolei wyznaczyć WYSTARCZAJĄCY PRZEKRÓJ pręta należy znaleźć najwyższą wartość  $M_Z$ . W tym celu bierzemy pochodną  $\frac{dM_Z}{dz}$  i czynimy ją równą zeru. W ten sposób wyznaczymy wartość odnośną  $Z$  przynależną do najwyższej wartości momentu  $M_{ZM}$ . Dla tej wartości  $M_{ZM} = A R_K$ , skąd wyznaczamy  $A$  oraz przekrój poprzeczny pręta.

Jako ostatni przykład zastosowania wzorów na skręcanie niech służy:

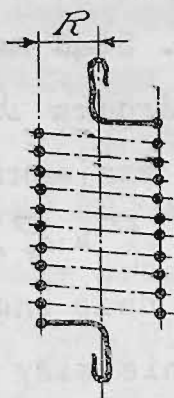
## § 12. TEORIA SPRĘŻYN ŚRUBOWYCH.

Drut stalowy zwinięty śrubowo cylindrycznie /rys. 171/ lub stożkowo /rys. 172/ stanowi SPRĘŻYNĘ ŚRUBOWĄ WALCOWATĄ lub STOŻKOWĄ, złożoną z pewnej liczby ZWOJÓW. Skrajne zwoje sprężyn zakończone są zazwyczaj zakrzywieniem drutu, skierowanym ku osi sprężyny; drut następnie wygina się po osi i kończy haczykiem, jak to zresztą widać na rys. 171 i 172. Na sprężynę działa obciążenie zewnętrzne ROZCIĄGAJĄCE.

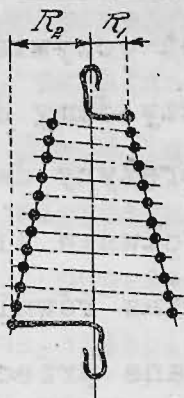
Skoro jednak sprężyna ma ulegać obciążeniu ŚCIŚKAJĄCEMU, wtedy spłaszczamy jej ostatnie zwoje i zcinamy odpowiednio drut /rys. 173/, aby otrzymać płaską powierzchnię dotyku po obu końcach sprężyny. W obu

wypadkach ob-  
ciążenie dzia-  
ła osiowo po  
osi podłużnej  
sprężyny z si-  
łą  $P$  rozciąga-  
jącą lub cis-  
nącą.

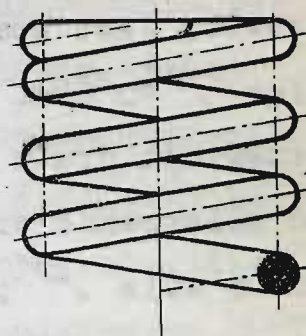
RYS. 171.



RYS. 172.

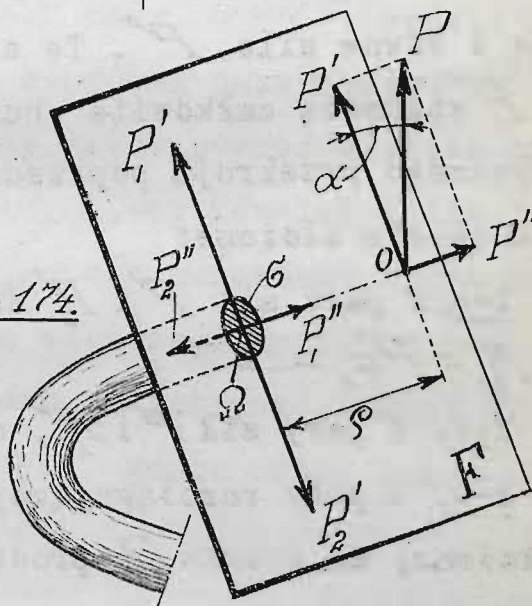


RYS. 173.



Jeżeli gdzie-  
kolwiek przet-  
niemy drut  
sprężyny płas-  
zczyzną  $F$  PO-  
PRZECZNEGO  
PRZEKROJU, to  
oś podłużna  
sprężyny da na

RYS. 174.



tej płaszczyźnie ŚLAD PRZEJŚCIA w postaci punktu  $O$ ,  
gdzie przyłożona jest siła  $P$  - OBCIĄŻENIA ZEWNĘTRZ-  
NEGO ROZCIĄGAJĄCA, lub ŚCISKAJĄCA, jako działająca  
wzdłuż osi podłużnej sprężyny /rys.174/. Oznaczmy  
przez  $\rho$  - PROMIEN SPRĘŻYNY, czyli odległość punktu  
 $O$  od środka  $\Omega$  poprzecznego przekroju drutu i roz-  
łożmy siłę  $P$  - obciążenia zewnętrznego na składowe  
 $P'$ , LEŻĄCĄ W PŁASZCZYŹNIE  $F$  i  $P''$  - PROSTOPADŁĄ DO  
TEJ PŁASZCZYŻNY. Niech będzie ponadto  $\alpha$  - KĄT NA-  
CHYLENIA ŚRUBOWEGO ZWOJÓW. Ten sam kąt  $\alpha$  utworzy z  
WYTRZYMAŁOŚĆ MATERJAŁÓW - ARKUSZ XVI.



osią podłużną sprężyny również i płaszczyzna  $F'$ , co zresztą jest wprost oczywiste. Stąd mamy  $P' = P \cos \alpha$ , oraz  $P'' = P \sin \alpha$ . Przyłożmy do środka  $\Omega$  poprzecznego przekroju drutu sprężyny dwie wzajemnie znoszące się, bo skierowane przeciwnie siły  $P'_1$  i  $P'_2$ , równoległe i równe sile  $P'$ ; oraz również dwie znoszące się wzajemnie, bo skierowane przeciwnie siły  $P''_1$  i  $P''_2$  równoległe i równe sile  $P''$ . Te siły łącznie z siłami  $P'_1$  i  $P''_1$  stanowią całkowite obciążenie zewnętrzne rozpatrywanego przekroju poprzecznego rozciągniętego drutu, a mianowicie złożone:

1-o. z pary sił  $P'_1$  i  $P'_2$  dającej MOMENT SKRĘCAJĄCY  
 $M_k = P' \rho$ , —

2-o. z pary sił  $P''_1$  i  $P''_2$ , dającej MOMENT  $P'' \rho$ ; —

3-o. z siły rozciągającej lub ściskającej  $P''$ , przyłożonej do środka  $\Omega$  prostopadle do przekroju; wreszcie:

4-o. z siły tnącej  $P'$  przyłożonej do środka  $\Omega$  w płaszczyźnie przekroju  $F'$ . —

Mamy tu więc do czynienia z nader złożonym obciążeniem; jednak dla zwykłych sprężyn, używanych w praktyce, możemy pewną część tego obciążenia pozostawić bez uwagi, jako złożoną z sił stosunkowo nieznacznych mało odkształcających sprężynę w porównaniu do reszty obciążenia. Przedewszystkiem wobec nader małych wartości kąta  $\alpha$  spotykanych w praktyce, możemy uważać  $\cos \alpha \cong 1$  oraz  $\sin \alpha \cong 0$ , co daje  $P' \cong P$  i  $P'' \cong 0$ ;

pozostaje więc już tylko moment  $M_K = P\varrho$ -i siła tnąca  $P$  z obciążenia zewnętrznego przekroju. Ponadto wobec momentu skręcającego  $M_K$  działanie siły tnącej jest nieznaczne - PIERWSZY powoduje bowiem naprężenie  $\tau_K = M_K : A$  - zaś DRUGA - naprężenie  $\tau_\ell = P : G$ , gdzie przez  $G$  oznaczamy przekrój poprzeczny drutu. Stąd  $\tau_K : \tau_\ell = M_K G : A P = \varrho G : A$ . Dla najczęściej używanego DRUTU OKRĄGŁEGO o średnicy  $d = 2r$  mamy  $G = \pi r^2$  oraz  $A = \frac{\pi}{2} r^2$ , a zatem  $\tau_K : \tau_\ell = 2\varrho : r$ . - Ponieważ zazwyczaj  $\varrho > 5r$ , zatem  $\tau_K$  jest przynajmniej dziesięćkroć większe od  $\tau_\ell$ ; Zupełnie podobny wynik otrzymujemy również i dla innych przekrojów, możemy więc bez znacznego błędu POMI-  
NĄĆ  $\tau_\ell$  wobec wielokrotnie większego naprężenia  $\tau_K$ ,  
inaczej mówiąc możemy wprost rozpatrywać MOMENT SKRĘ-  
CAJĄCY  $M_K = P\varrho$ , jako jedyną, godną uwagi część ob-  
ciążenia zewnętrznego.

W ten sposób sprowadzamy tu rozpatrywany wypadek do zwykłego SKRĘCANIA i stosujemy doń wyżej ustalone wzory, pisząc przedewszystkiem  $M_K = P\varrho = A R_K$ . Po-  
zatem, biorąc pod uwagę DŁUGOSTKĘ  $ds = \varrho d\omega$  - DRUTU  
sprężyny, odpowiadającą wartości  $d\omega$  kąta osiowego,  
inaczej mówiąc - rozpatrując znikomą krótki wycinek  
sprężyny  $ds$  długi skręcany pod działaniem momentu  
 $M_K$ , wyznaczamy dla tego wycinka elementarny KĄT skrę-  
cenia  $d\varphi$  /rys.176/ w postaci:

$$d\varphi = \beta B M_K ds = \beta B P \varrho ds = \beta B P \varrho^2 d\omega. \sim$$

To skrócenie uzewnętrznia się ODCHYLENIEM GÓRNEJ

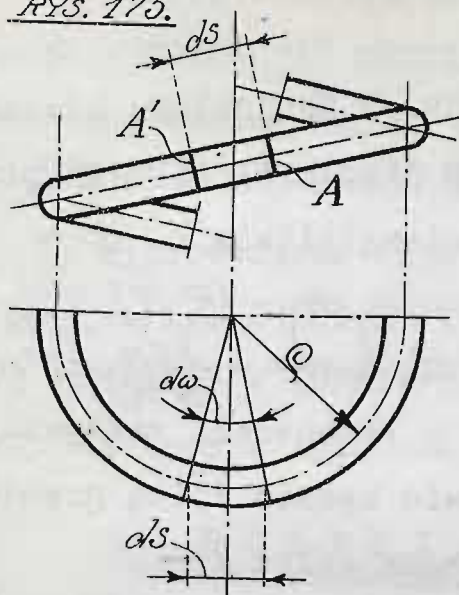


CZĘŚCI /rys.177/ sprężyny, rozpościerającej się ku górze ponad przekrojem  $A$  rozpatrywanym /rys.175/ względem pozostałej dolnej części sprężyny, idącej ku dołowi, poczynając od sąsiedniego przekroju  $A'$ . —

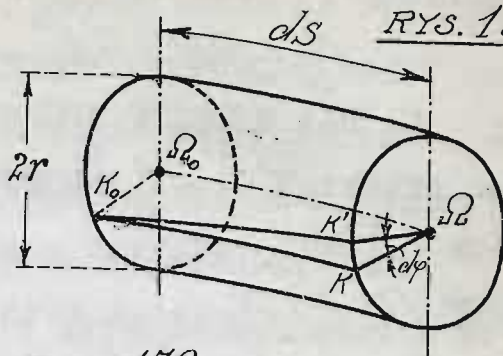
W samej rzeczy, pierwotnie, przed odkształceniem promień wodzący  $OK$  przekroju poprzecznego sprężyny wyznaczał w przedłużeniu PUNKT  $O$  na osi podłużnej sprężyny. Po odkształceniu wycinka  $OK$  promień wodzący  $OK$  obróci się o kąt  $\alpha$ , ZNACZĄC JUŻ TYM RAZEM PUNKT  $O'$ , odległy od poprzedniego punktu  $O$  o  $\Delta Z$  mierzone wzdłuż osi /rys.178/.

Gdyby więc w całej sprężynie odkształcił się jedynie tylko co rozpatrywany wycinek, sprężyna uległaby wyżej opisanemu odchyleniu, a pierwotna odległość skrajnych zwojów, czyli tak zwana WYSOKOŚĆ NIEODKSZTAŁCONEJ SPRĘŻYNY  $H$  /rys.179/, mierzona wzdłuż osi sprężyny - OTRZYMAŁABY PRZYROST  $\Delta Z$  dodatni w wypadku obciążenia rozciągającego - ujemny w wypadku ściskającego, a należałoby ją mierzyć wzdłuż osi sprężyny lekko zgiętej w miejscu, gdzie nastąpiło odchylenie samej sprężyny. A jednak sprężyna jest PROSTĄ i po odkształceniu. Pochodzi to stąd, że odkształcenie wycinka średnicowo przeciwległego wyżej rozpatrywanemu PONOWNIE ODCHYLA sprężynę W ODWROTNYM KIERUNKU i przytem wobec niezmienności warunków obciążenia - ŚCIŚLE O TEN SAM KĄT  $\alpha$ , powodując nowy przyrost  $\Delta Z = 2\alpha \cdot$  długości  $H$ , mierzonej ZNÓW wzdłuż osi sprężyny TYM RAZEM

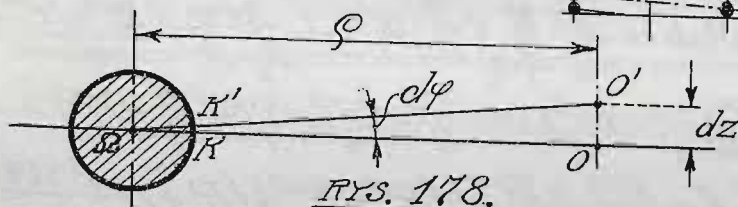
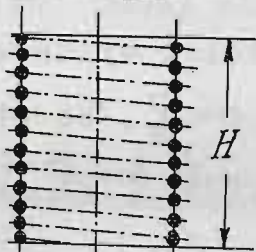
RYS. 175.



RYS. 176.



RYS. 179.



RYS. 178.



RYS. 177.

JUŻ PROSTEJ.

W ten sposób, przechodząc kolejno przez wszystkie wycinki obchodzimy WSZYSTKIE  $N$  ZWOJÓW I WYZNACZAMY CAŁKOWITY PRZYROST  $Z$  WYSOKOŚCI PIEWOTNEJ  $H$  pisząc  $Z = \int \rho d\phi = \int \beta B P \rho^3 d\omega$ . Przyrost  $Z$  zwiemy STRZAŁKĄ ODKSZTAŁCONEJ SPRĘŻYNY.

Zazwyczaj zwijamy drut o stałym przekroju, zatem  $Z = \beta B P \int \rho^3 d\omega$ , gdzie CAŁKUJĄC NALEŻY OBEJŚĆ WSZYSTKIE  $N$  ZWOJÓW SPRĘŻYNY. Tutaj mogą zachodzić dwa wypadki:

A. DLA SPRĘŻYN WALCOWATYCH  $N$  ZWOJOWYCH  $\rho = R =$  STAŁEJ /rys-171/. Zatem mamy  $\int \rho^3 d\omega = R^3 d\omega = 2\pi n R^3$  i ostatecznie  $Z = f = 2\pi n \beta B P R^3$ , gdzie przez  $f$  ozna-



czyliśmy strzałkę ugięcia sprężyny. Ponadto :

$$M_k = PR = AR_k. \sim$$

B. DLA SPRĘŻYN STOŻKOWYCH  $N$  ZWOJOWYCH, oznaczając przez  $R_1$  i  $R_2$  PROMIENIE SKRAJNYCH UZWOJEŃ, przy-  
czem  $R_2 > R_1$ , będziemy mieli niewątpliwie :  $\varphi =$

$$= R_2 - \{R_2 - R_1\} \frac{\omega}{2\pi n}, \text{ stąd różniczkując } d\varphi = -\{R_2 - R_1\} \frac{d\omega}{2\pi n};$$

$$\text{a zatem } \int \varphi^3 d\omega = \int \varphi^3 \{-2\pi n : [R_2 - R_1]\} d\varphi = -\frac{2\pi n}{R_2 - R_1} \int \varphi^3 d\varphi. \sim$$

Granice tej całki wyznaczymy z łatwością, zważywszy, że przy  $\omega = 0$ ,  $\varphi = R_2$ , co stanowić będzie dolną granicę, zatem górna jest  $\varphi = R_1$ , a sama całka :

$$\int \varphi^3 d\omega = -\frac{2\pi n}{R_2 - R_1} \int_{R_2}^{R_1} \varphi^3 d\varphi = \frac{2\pi n}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} \varphi^3 d\varphi = \frac{2\pi n}{R_2 - R_1} \cdot \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{n}{R_2 - R_1} (R_2^3 + R_1^3)(R_2^2 - R_1^2) = \frac{\pi n}{2} (R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1). \sim$$

$$\text{i ostatecznie : } f = \frac{\pi n}{2} \beta B P \{R_2^2 + R_1^2\} \{R_2 + R_1\}. \sim$$

W danym wypadku największą wartością momentu skręcającego będzie wartość  $M_k = PR_2$ , możemy więc drugi wzór napisać w postaci :  $PR_2 = AR_k. \sim$

W obu wyżej rozpatrywanych wypadkach STRZAŁKA ODKSZTAŁCONEJ SPRĘŻYNY JEST WPROST PROPORCJONALNA DO SIŁY ODKSZTAŁCAJĄCEJ, co zresztą wypływa bezpośrednio z ogólnego wzoru, wyżej wyprowadzonego  $f = \beta B P \int \varphi^3 d\omega$ , a więc stosuje się do KAŻDEGO wypadku.

Dla DRUTU ZE STALI SPRĘŻYNOWEJ możemy brać średnio  $\beta = 1:840000 \frac{\text{cm}^2}{\text{kg}}$ ; dla STALI SPRĘŻYNOWEJ TWAR-  
DZONEJ  $R_k = 4300 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$  NIETWARDZONEJ :  $R_k = 3600 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ .

Ponadto dla najczęściej spotykanego DRUTU OKRĄGŁEGO ŚREDNICY  $d$  mamy  $A = W_0 = \frac{1}{16} \pi d^3$  oraz  $B = 1:J = 32:\pi d^4$ ,

a dla DRUTU PROSTOKĄTNEGO, gdy  $h$  OZNACZA WYSOKOŚĆ,  
a  $b$  - SZEROKOŚĆ PROSTOKĄTNEGO PRZEKROJU DRUTU możemy  
napisać według BACHA:  $A = b^2 h : \left[ 3 + \frac{2 \cdot 6}{0.45 + m} \right]$ , oraz  $B =$   
 $= [4.175 - 0.15m] (h^2 + b^2) : h^3 b^3$ , gdzie  $m = h \cdot b$ . Wzory te  
były wyprowadzone czysto doświadczalnie.

Na tym kończymy teorię skręcania. Odnośne przykła-  
dy podajemy w KURSIE ĆWICZEŃ, tutaj zaś rozpoczynamy  
ogólną teorię zginania.

## R O Z D Z I A Ł   P I Ą T Y.

### O G Ó L N A   T E O R J A   Z G I N A N I A.

#### § 1. WYZNACZANIE SKŁADOWYCH NAPRĘŻEŃ JEDNOSTKO- WYCH.

Rozpatrujemy zaznaczone w końcowym ustępie zaga-  
jenia kursu ostatnie dwa wypadki, a mianowicie:

1-o. WYPADEK „D”, kiedy zewnętrzny układ  $E_\alpha$  sił  
odkształcających sprowadza się do pojedynczego momen-  
tu  $M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$ , leżącego w przekroju, oraz:

2-o WYPADEK „E”, kiedy zewnętrzny układ  $E_\alpha$  sił  
odkształcających sprowadza się do pojedynczego momen-  
tu  $M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$  —, leżącego w przekroju płaskim i  
do pojedynczej siły  $R_z$ , prostopadłej do tego przekro-  
ju, a przyłożonej do środka jego masy.

Oba wypadki są tożsamościowe dla szczególnej war-  
tości  $R_z = 0$ ; ponadto, gdy  $M_p = 0$  - wypadek „D” traci  
swą rację bytu, zaś wypadek „E” przechodzi w wypadek