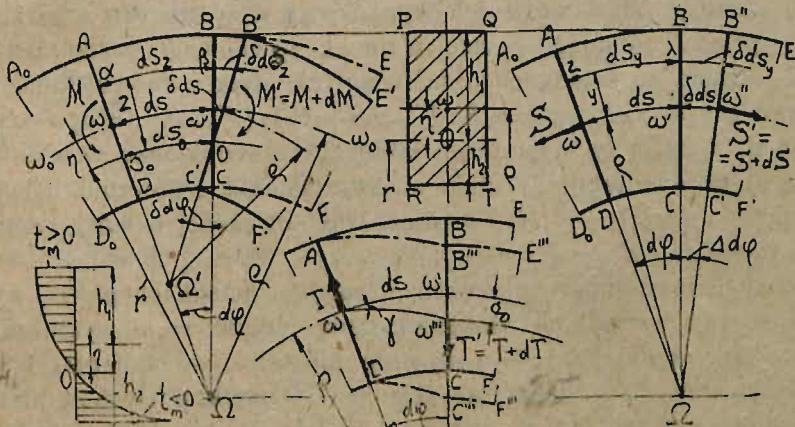


CZĘŚĆ SIÓDMA.

PRĘTY KRZYWE.

§ 1. Ustalenie pojęć zasadniczych. Rozpatrywać będziemy wyłącznie tylko krzywe pręty jednorodnie zbudowane, czyniące zadość warunkom następującym: oś pierwotna nieodkształcona pręta stanowi krzywą płaską, w jej płaszczyźnie leżą jednoimiennie osie główne wszystkich przekrojów poprzecznych pręta, a środki krzywizny osi nieodkształconej leżą poza prętem. Ten ostatni warunek jest konieczny, inaczej bowiem dwa sąsiednie przekroje pręta miałyby wspólne cząsteczki, uniemożliwiające wyodrębnienie płytki, a więc i wyznaczenie naprężeń sposobami dotychczas stosowanymi. Poniżej kolejno rozpatrzemy najczęściej spotykane obciążenia prętów krzywych, opierając rozważania na założeniach dotychczas ustalonych dla zasadniczych wypadków działania sił zewnętrznych.

§ 2. Obciążenia osiowe prętów krzywych. Bierzemy pod uwagę



Rys. 21—25.

wypadek szczególny, kiedy układ sił zewnętrznych po sprowadzeniu do środka ω w przekroju poprzecznego płaskiego AD , pręta krzywego (Rys. 23) daje siłę osiową S , styczną do krzywej osi pręta, a prostopadłą do przekroju. W myśl ogólnej teorii ustalonej w części drugiej zakładamy, że siła osiowa S i w danym wypadku daje wyłącznie tylko naprężenia osiowe

$\sigma_s = S:F$, proporcjonalne do siły osiowej i odwrotnie proporcjonalne do pola F przekroju AD . Wyodrębnijmy myślowo płytkę $ADBC$, prowadząc przekrój sąsiedni płaski BC w odległości znikomej $\omega'\omega = ds$ mierzonej po łuku krzywej osi pręta. W danym wypadku ścianki AD i BC płytki nie będą równoległe, ich płaszczyzny bowiem przecinają się wzdłuż prostej znaczącej ślad Ω w płaszczyźnie krzywej osi pręta — środka krzywizny tej osi. Pochylone będą pod kątem $d\varphi = ds:\zeta$, gdzie przez ζ oznaczyliśmy promień krzywizny osi pręta. Po środku ω lewej ścianki płytki panuje siła osiowa S —wypadkowa układu sił zewnętrznych lewej części pręta $A_0 ADD_0$, na ściance BC w jej środku ω' , leżącym na krzywej osi pręta panować będzie również siła osiowa S' styczna do osi i prostopadła do przekroju BC —wypadkowa układu sił zewnętrznych prawej części pręta— $BE'F'C$. W założeniu $ds=0$ obie te siły mają wspólny punkt zaczepienia ω powinny przeto wzajemnie się znosić w działaniu, ze względu na trwałą równowagę odkształconą, a przeto siły te muszą być równe lecz kierunkowo sprzeczne. W danym wypadku $ds \neq 0$, zatem siła S' będzie się nieco różniła od S , możemy przeto napisać, uwzględniając sprzeczne kierunki, że $-S' = S + dS$. Siły te utrzymują płytkę w równowadze odkształconej, nieznaczna bowiem różnica dS obciążenia jej ścianek oraz składowa $Sd\varphi$ zrodzona z pochylecia S ku S' o kąt $d\varphi$ stanowią układ równoważący obciążenie zewnętrzne samej płytki, pominięte przy obu sprowadzaniach, a więc siły zewnętrzne, przyłożone do cząsteczek samej płytki, lub działające na jej powłokę boczną. Te siły zewnętrzne stanowią najwidoczniej układ nader nieznaczny, wobec znikomej wartości ds , a nadto ich wypadkowa dąży do zera oraz z ds , możemy ją przeto pominąć, pisząc warunek równowagi płytki w postaci $-S' \approx S$. Zatem na ściankach przeciwległych płytki panować będą naprężenia osiowe $\sigma_s = S:F$ i $\sigma'_s = S':F' = (S+dS):(F+dF) = \sigma_s + d\sigma_s \approx \sigma_s$.

Pod działaniem tych naprężeń jakiegokolwiek włókienko $z\lambda$ w odległości y od osi pręta wyodrębnione ulegnie odkształceniu osiowemu. Jego pierwotna długość $ds_y = (\zeta + y) d\varphi$, wydłuży się lub skróci o δds_y , dając wydłużenie $\varepsilon_y = \delta ds_y : ds_y = \alpha \sigma_s = \sigma_s : E$.

Wobec jednostajności naprężeń σ_s na obu ściankach płytki, wydłużenia jednostkowe wszystkich włókienek będą jednakowe, a wydłużenia bezwzględne $\delta ds_y = \varepsilon_s ds_y = \varepsilon_s (\zeta + y) d\varphi$ proporcjonalne do odległości $\zeta + y$ od środka krzywizny. To znaczy, że ścianka BC płytki pozostanie płaską i po odkształceniu, wykona jednak obrót o kąt $\Delta d\varphi$ około osi prostopadłej do płaszczyzny krzywej osi pręta, a przechodzącej przez środek krzywizny Ω . Stąd bezpośrednio $\delta ds_y = \varepsilon_s (\zeta + y) d\varphi = (\zeta + y) \Delta d\varphi$ i ostatecznie $\Delta d\varphi = \varepsilon_s d\varphi = \sigma_s d\varphi : E = \alpha \sigma_s d\varphi$. Pod działaniem sił osiowych dwa sąsiednie przekroje poprzeczne pręta krzywego pochylają się ku sobie pod kątem nieznacznym na tle obrotu w płaszczyźnie osi krzywej pręta dookoła jej środka krzywizny pierwotnej. Zatem siły osiowe nie zmieniają krzywizny pierwotnej

pręta krzywego tylko go wydłużają lub skrócają. Miarą tych odkształceń osiowych może służyć wydłużenie środkowego włókna płytki ds , dla którego $\delta ds = \alpha \tau ds = S \tau d\varphi : EF$, albo też kąt $\Delta d\varphi = S d\tau : EF$.

§ 2. **Obciążenia tnące prętów krzywych.** Z kolei rozpatrujemy wypadek obciążenia zewnętrznego dającego po sprowadzeniu do środka ω przekroju poprzecznego pręta krzywego—pojedynczą siłę tnącą T w płaszczyźnie osi krzywej pręta (Rys. 25). Ta siła da naprężenia tnące w przekroju $\tau = \mu T : F$ w myśl ustalonej wyżej teorii przybliżonej lub ściślejszej (II). W pierwszym wypadku $\mu = 1$. Siła tnąca T stanowi wypadkową układu sił zewnętrznych lewej części pręta, na sąsiedniej ściance płytki w jej środku ω' panować będzie siła T' —wypadkowa obciążenia zewnętrznego prawej części pręta, leżącej poza płytką. Rozumując jak wyżej dojdziemy do przekonania, że kierunkowo sprzeczne siły T i T' , znikomo się tylko różnią, co wyrazimy pisząc— $T' = T + dT \approx T$. Pod działaniem naprężeń tnących $\tau = \mu T : F$ i $\tau' = \mu T' : F' = \mu (T + dT) : (F + dF) = \tau + d\tau \approx \tau$ poszczególne kostki płytki ulegną skrzywieniu, na tle względnych przesunięć ścianek zewnętrznych, przynależnych do obu obciążonych sąsiednich przekrojów pręta. Miarą skrzywienia kostki będzie w danym wypadku przesunięcie jednostkowe $\gamma = \beta = \tau : G$ jak dla prętów prostych. W założeniu teorii przybliżonej, obie ścianki płytki są jednostajnie naprężone, zatem i przesunięcia dla wszystkich kostek—tożsamościowe i równe przesunięciu γ kostki środkowej.

Teoria ściślejsza burzy ten wniosek: na włóknach skrajnych AB i CD panują zerowe wartości naprężeń tnących, dające skrajne wartości $\gamma = 0$, pośrodku, lub w sąsiedztwie środka τ jest najwyższe, odpowiada więc i najwyższym wartościom przesunięć γ jednostkowych. W obu wypadkach przesunięcie γ kostki środkowej daje przesunięcie względne $g = \gamma ds$ środków ω' i ω . Zazwyczaj obciążenia tnące prętów krzywych towarzyszą gnącym, nieznacznie tylko wpływając na odkształcenia, możemy je przeto pominąć, jak to stałe czyniliśmy i dla prętów prostych.

§ 3. **Zginanie płaskie prętów krzywych.** Bierzemy pod uwagę wypadek szczególny, gdy układ sił zewnętrznych odkształcających lewej części pręta po sprowadzeniu (Rys. 21) do środka ω daje moment M , leżący w płaszczyźnie przekroju poprzecznego na osi głównej prostopadłej do płaszczyzny krzywej osi pręta. Na sąsiedniej ściance płytki BC , panować będzie moment znikomo różny $M' = M + dM \approx M$, lecz różnoskrętny i tutaj bowiem rozumowania poprzednie zachowają swą moc obowiązującą. Doświadczenie uczy, że założenie Bernoulliego odpowiada dość ściśle istocie zjawisk w danym wypadku, aczkolwiek linja obojętna nie przechodzi przez środek przekroju, jak to się daje dostrzec przy zginaniu płaskim prętów prostych. To znaczy, że płytka pierwotna $ABCD$ odkształca się w $A'B'C'D'$, na tle obrotu ściany BC w stosunku do ściany AD o kąt $\delta d\varphi$ około pew-

nej osi prostopadłej do płaszczyzny gięcia — *liniji obojętnej*, tymczasem bliżej nieokreślonej. Ślad osi obrotu na płaszczyźnie gięcia oznaczamy przez O , odległość $O\Omega$ przez r , a nadto niech będzie $O\omega' = \eta$, zatem $\zeta = r + \eta$. Zatoczymy ze środka krzywizny Ω łuk $OO_0 = ds_0$. Ponieważ obrót ścianki BC zachodzi koło punktu O , przeto łuk OO_0 nie odkształca się wcale podczas obrotu, natomiast w dowolnej zresztą odległości $z = \eta + \gamma$ obrona kostka płytki po odkształceniu ujawni wydłużenia proporcjonalne do odległości z od O .

Wynika to bezpośrednio z poczynionych założeń. Oznaczmy długość tej kostki, mierzoną po łuku $\alpha\beta$ przez $ds_z = (r + z) d\varphi$, jej wydłużenie bezwzględne przez $\delta ds_z = z \delta d\varphi$. Stąd wydłużenie jednostkowe $\varepsilon_z = \delta ds_z : ds_z = z \delta d\varphi : (r + z) d\varphi$. To wydłużenie przypisujemy działaniu naprężeń gnających σ_z i $\sigma'_z = \sigma_z + d\sigma_z \cong \sigma_z$ normalnych do ścianek płytki, pomijając ich składową $\sigma_z d\varphi$, zrodzoną z pochylenia σ'_z ku σ_z pod kątem $d\varphi$, zresztą jak widzimy znikomą. Zatem możemy napisać, że $\varepsilon_z = \alpha \sigma_z = \sigma_z : E$ stąd $\sigma_z = E z \delta d\varphi : (r + z) d\varphi$. Ten wzór pozwala zbudować wykres (Rys. 24) uwypuklający rozkład naprężeń na obu przekrojach płytki.

Dla $z > 0$, a więc dla kostek ponad OO_0 naprężenia są niewątpliwie dodatnie i rosną od zera do najwyższej wartości $t_M = E h_1 \delta d\varphi : (r + h_1) d\varphi$, dla skrajnego szeregu kostek PQ (Rys. 22) oddalonych o h_1 od O_0O . Dla linii obojętnej, to jest dla szeregu kostek O_0O , gdzie $z = 0$ mamy $\sigma_z = 0$, wreszcie dla $z < 0$, a więc dla szeregu kostek poniżej O_0O leżących, naprężenia są ujemne i maleją od zera do najniższej wartości $t_m = -E h_2 \delta d\varphi : (r - h_2) d\varphi$, panującej w szeregu skrajnym kostek RT , odległym o h_2 od O_0O . Powyższe rozważania dotyczą obrotu $\delta d\varphi$, zwiększającego pierwotną krzywiznę osi pręta, jak to zresztą najlepiej uwypukla (Rys. 21). Gdy M działa w kierunku odwrotnym, krzywizna pierwotna maleje — naprężenia zmieniają znak, zawsze jednak wydłużeniom kostek, leżących po jednej stronie O_0O , towarzyszą skrócenia kostek pozostałych. Otrzymany wyżej wzór dla naprężeń wskazuje, że σ_z zmienia się hyperbolicznie w stosunku do z w granicach skrajnych wartości t_M i t_m . Czyniąc $k_g = t$ bezwzględnie większej z nich zabezpieczamy się z góry przeciwko wszelkim nadmiernym naprężeniom tworzywa przy obciążeniach I, II lub III, chcąc jednak skorzystać z tych wzorów trzeba wyznaczyć r i $E \delta d\varphi : d\varphi$ z równań statyki. Na przekrój lewy płytki działa moment M , zatem suma momentów sił cząsteczkowych $\sigma_z dF =$ całego przekroju winna go równoważyć: $M = \int \sigma_z z dF = \int [E z^2 \delta d\varphi : (r + z) d\varphi]$. Poza tem suma sił cząsteczkowych $\int \sigma_z dF = \int [E z \delta d\varphi : (r + z) d\varphi] = 0$. Poniżej granicy proporcjonalności $E \delta d\varphi : d\varphi = n$ ma wartość stałą dla całego przekroju,

a przeto $n \int [z dF : (z + r)] = 0$, oraz $n \int [z^2 dF : (z + r)] = M$. Inaczej

jeszcze $\int [z dF : (z + r)] = 0$, $M = n \int [z^2 dF : (z + r)] = n \int [z - rz : (r + z)] dF = n \int z dF - nr \int [z : (r + z)] dF = n \int z dF = nN$, gdzie przez N oznaczyliśmy moment statyczny przekroju względem linii obojętnej. Ponieważ $N = F\eta$, przeto ostatecznie $n = E\delta d\varphi : d\varphi = M : N = M : F\eta$.

Te wzory rozwiązują zagadnienie, bo równanie $\int [z : (r + z)] dF = 0$ każdorazowo pozwala wyznaczyć położenie linii obojętnej przekroju. Dla prętów o małej krzywiznie $r = \varsigma - \eta$ ma znaczne wartości, możemy przeto napisać, że $\int [z : (r + z)] dF = (1 : r) \int [z : (1 + z : r)] dF \simeq (1 : r) \int z dF = 0$, stąd $\int z dF = 0$, czyli że linia obojętna staje się osią obojętną, bo

moment statyczny przekroju, tylko dla osi środkowej ma wartość równą zeru. Stąd wniosek, że dla prętów o krzywiznie nieznacznej wystarcza zwykła teoria zginania taka, jak dla prętów prostych. Istotnie z drugiego wzoru $M = n \int [z^2 : (z + r)] dF = (n : r) \int [z^2 : (1 + z : r)] dF \simeq (n : r)$

$\int z^2 dF \simeq nI : r$, gdzie przez I oznaczyliśmy moment bezwładności przekroju pręta krzywego względem osi obojętnej, w danym wypadku osi głównej tego przekroju, prostopadłej do płaszczyzny krzywej osi pręta. Stąd $n = E\delta d\varphi : d\varphi = Mr : I \simeq M\varsigma : I$, ponieważ tutaj $\eta \simeq 0$. A zatem $\sigma_z = nz : (z + r) \simeq Mz\varsigma : I(z + \varsigma) \simeq Mz : (1 + z : \varsigma)I \simeq My : I$, ponieważ $z = \eta + y \simeq y$. W ten sposób odnajdujemy zwykły wzór, jaki wyprowadziliśmy dla prętów prostych, płasko zginanych. Stąd prosty wniosek: pręty o krzywiznie nieznacznej należy liczyć jak pręty proste według wzorów $\sigma_z = My : I$, $\sigma_{max} = M : W = k_z$, $n = E\delta d\varphi : d\varphi = M\varsigma : I$. Dla prętów o krzywiznie znacznej $\sigma_z = nz : (r + z)$, $n = M : F\eta$, przyczem należy każdorazowo wyznaczyć η ze wzorów $\eta = \varsigma - r$ oraz $\int [z : (r + z)] dF = 0$.

Zobaczmy jak się to uskutecznia dla przekrojów częściej używanych.

§ 4. Wyznaczenie osi obojętnej.

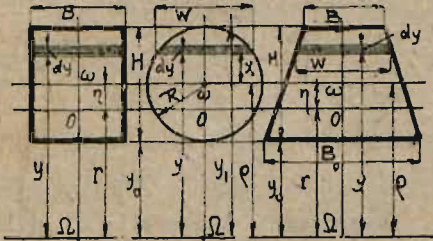
1-o *Przekrój prostokątny* $B \times H$. Płaszczyzna krzywej osi pręta (Rys. 26) przecina przekrój wzdłuż $\Omega\omega$, przez Ω przechodzi oś krzywizny, czyli prosta przecięcia się dwóch sąsiednich przekrojów, przez O linia obojętna. W danym wypadku $\omega\Omega = \varsigma$, $O\Omega = r$, $\omega O = \eta$. W odległości Y od osi krzywizny obieramy (Rys. 26) wąski paseczek $Bdy = dF$. Ponieważ

$z = Y - r$, przeto $\int [z : (z + r)] dF = \int_{Y_0}^{Y_0 + H} [1 - r : Y] B dY = BH - rB$
 $[\lg(Y_0 + H) - \lg Y_0] = 0$, stąd $r = H : \lg [1 + H : Y_0]$.

2-o *Przekrój kołowy* o promieniu R . Zachowajmy znakowania poprzednie. W danym wypadku (Rys. 27) będziemy mieli $dF = W dY$, a przeto
 $\int [z : (z + r)] dF = \int_{Y_0}^{Y_0 + 2R} [1 - r : Y] W dy = \pi R^2 - r \int_{Y_0}^{Y_0 + 2R} (W : Y) dy = 0$.

Wprowadźmy nową zmienną $x = Y - \zeta$. Dla niej $dx = dY$, a granice całkowania $x_0 = Y_0 - \zeta = -R$, $x_1 = Y_0 + 2R - \zeta = R$. Nadto $W = 2\sqrt{R^2 - x^2}$, zatem $\int_{Y_0}^{Y_0 + 2R} (W : Y) dY = 2 \int_{-R}^R [\sqrt{R^2 - x^2} : (x + \zeta)] dx =$
 $= 2 [\sqrt{R^2 - x^2} + \zeta \arcsin(x : R) + \sqrt{R^2 - x^2} \arctg \{ - (R^2 + \zeta x) :$
 $: \sqrt{\zeta^2 - R^2} \sqrt{R^2 - x^2} \}]_{-R}^{+R} = 2 (\pi \zeta - \pi \sqrt{\zeta^2 - R^2})$ i ostatecznie $r = R^2 :$
 $: 2 (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - R^2})$.

3 o *Przekrój trapezowy*, często używany przy obliczaniu haków dźwignic. Podstawy trapezu równoległe do osi krzywizny niech będą B_0 i B_1 , jak wskazuje (Rys. 28), wysokość H . Zachowując znakowania poprzednie będziemy mieli $\int [z : (z + r)]$



Rys. 26, 27, 28.

$dF = \int_{Y_0}^{Y_0 + H} [1 - r : Y] W dy = 1/2 H (B_0 + B_1) - r \int_{Y_0}^{Y_0 + H} (W : Y) dY$. W danym

wypadku z łatwością daje się zauważyć, że $W = B_0 - (B_0 - B_1)(Y - Y_0) :$

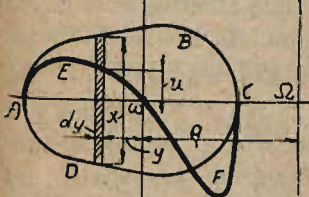
H , a przeto $\int_{Y_0}^{Y_0 + H} (W : Y) dy = [B_0 + (B_0 - B_1) Y_0 : H] \int_{Y_0}^{Y_0 + H} \frac{dY}{Y} -$
 $- [(B_0 - B_1) : H] \int_{Y_0}^{Y_0 + H} \frac{dY}{Y} = [B_0 + Y_0 (B - B_1) : H \lg [1 + H : Y_0] - B_0 +$
 $+ B_1$ i ostatecznie $r = 1/2 H (B_0 + B_1) : \{ [B_0 + (B_0 - B_1) Y_0 : H] \lg (1 +$
 $+ H : Y_0) - B_0 + B_1 \}$.

4-o *Przekrój dowolny*. Już z tych przykładów łatwo się daje ostrzec, że otrzymane wzory dają wyniki wątpliwe przy znacznych wartościach ζ w stosunku do wysokości H przekroju. Ta okoliczność stanowi poważny szkopuł praktyczny, zazwyczaj przeto przy znacznych ζ kiedy ζ i r niewiele się różnią od siebie wprowadzamy nową zmienną $y = z - \eta$, przyczem $\eta = \zeta - r$, oraz $r + z = r + y + \eta = \zeta + y$ i oznaczamy całkę

$$\int [y : (y + \varsigma)] dF = -\varphi F. \text{ Stąd: } \int [z : (r + z)] dF = \int [(y + \eta) : (\varsigma + y)]$$

$$dF = -\varphi F + \eta \int [1 : (\varsigma + y)] dF = -\varphi F + (\eta : \varsigma) \int [(\varsigma + y - y) : (\varsigma + y)]$$

$$dF = -\varphi F + \eta F : \varsigma + \eta \varphi F : \varsigma = O \text{ i statecznie } \eta = \varphi \varsigma : (1 + \varphi). \text{ Nadto dla}$$



Rys. 29.

$$\begin{aligned} & \text{prętów o dużej krzywiznie } \sigma_z = nz : (r + z) = \\ & = n(y + \eta) : (\varsigma + y) = My : (\varsigma + y) F \eta + M : \\ & : F(\varsigma + y) = My(1 + \varphi) : \varphi F \varsigma(\varsigma + y) + M : \\ & : F(\varsigma + y) = My : \varphi F \varsigma(\varsigma + y) + My : F \varsigma(\varsigma + \\ & + y) + M : F(\varsigma + y) = My : \varphi F \varsigma(\varsigma + y) + M : \\ & : F \varsigma. \text{ Powyższe przekształcenia sprowadzają za-} \end{aligned}$$

$$\text{gadnienie do wyznaczania całki } -\varphi F = \int [y :$$

$$(y + \varsigma)] dF = (1 : \varsigma) \int [y : (1 + y : \varsigma)] dF = =$$

$(1 : \varsigma) \int y [1 - y : \varsigma + y^2 : \varsigma^2 + y^3 : \varsigma^3 + \dots] dF.$ Całkowanie poszczególnych wyrazów szeregu nie nastęrcza żadnych trudności, a sam szereg jest szybko zbieżny, można więc zwykle poprzestać na kilku pierwszych jego wyrazach. Szybciej prowadzi do celu całkowanie wykreślne, które z łatwością można sprowadzić do zwykłego wyznaczania pola, zmniejszając (Rys. 29) rzędne x danego przekroju $ABCD$ w stosunku $y : (y + \varsigma)$. W ten sposób otrzymane rzędne $u = xy : (y + \varsigma)$ dadzą nową krzywą $AE \omega FC$.

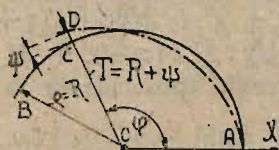
Pole $AE \omega FC \omega A$ tej krzywej wyraża się całką $\int u dy = \int [xy : (y + \varsigma)]$

$$dy = \int [y : (y + \varsigma)] dF, \text{ ponieważ oczywiście } xdy = dF.$$

§ 5. Wyznaczanie odkształconych prętów krzywych. Pierwotna długość środkowej kostki płytki zginanej (Rys. 21), mierzona po łuku osi nieodkształconej wynosi $ds = \varsigma d\varphi$, stąd $1 : \varsigma = d\varphi : ds$. Po odkształceniu przekrój BC pochylił się względem AD o kąt $\delta d\varphi$, sąsiednie przeto ścianki płytki odkształconej tworzą kąt $d\varphi + \delta d\varphi$. Ich płaszczyzny przetną się wzdłuż prostej, znaczącej ślad na płaszczyźnie krzywej osi pręta w punkcie Ω' — środku krzywizny odkształconej pręta, a odcinek $\omega\Omega' = \varsigma'$ będzie promieniem krzywizny pręta odkształconego. Dla prętów o małej krzywiznie oś obojętna przechodzi przez środek przekroju, zatem pierwotna długość kostki środkowej ds nie ulega zmianie, możemy więc napisać, że $ds = \varsigma' (d\varphi + \delta d\varphi)$. Stąd $1 : \varsigma' = (d\varphi + \delta d\varphi) : ds$. Odejmując otrzymamy $1 : \varsigma' - 1 : \varsigma = \delta d\varphi : ds = \delta d\varphi : \varsigma d\varphi = M : EI$. Czyniąc w tym wzorze $\varsigma = \infty$ odnajdziemy $1 : \varsigma' = M : EI$ znany wzór dla prętów prostych płasko zginanych. Dla prętów o krzywiznie znacznej linja obojętna leży po za środkiem przekroju. Pierwotna długość kostki środkowej staje się $ds + \delta ds = \varsigma' (d\varphi + \delta d\varphi)$, przyczem niewątpliwie $\delta ds = \eta \delta d\varphi$. Stąd $1 : \varsigma' =$

$(d\varphi + \delta d\varphi) : (ds + \eta \delta d\varphi)$. Odejmując mamy $1 : \zeta' - 1 : \zeta = (d\varphi + \delta d\varphi) : (ds + \eta \delta d\varphi) - d\varphi : ds = \delta d\varphi (1 - \eta : \zeta) : \zeta d\varphi (1 + \eta \delta d\varphi : \zeta d\varphi) = (M : EF\eta\zeta) (1 - \eta : \zeta) : (1 + M : EF\zeta) = (M : EF\eta\zeta^2) r : (1 + M : EF\zeta) \approx \approx M : EF\eta\zeta$.

Oba powyższe wzory wymagają znakowania dodatniego momentu, zwiększającego pierwotną krzywiznę pręta. Są bardzo niewygodne w użyciu. W szczególnym wypadku, gdy pierwotną oś pręta stanowi koło można ich prawe części nieco uprościć. W układzie biegunowych osi spórzędnych (Rys. 30) pierwotna kołowa oś ACB pręta wyrazi się równaniem $\zeta = R$. Po odkształceniu przejdzie w odkształconą AD o promieniu wodzącym $T = R + \psi$. Promień krzywizny odkształconej $\zeta' = [T + (dT : d\varphi)^2]^{3/2} : [T^2 + 2(dT : d\varphi)^2 - T(d^2T : d\varphi^2)] = [R^2 + 2R\psi + \psi^2 + \psi'^2]^{3/2} : [R^2 + 2R\psi + \psi^2 + 2\psi'^2 - R\psi'' - \psi\psi'']$. Dla odkształceń nieznacznych praktycznie jedynie dopuszczalnych $\psi^2 \approx 0$ oraz $\psi' = 0$, zatem $\zeta' \approx [R^2 + 2R\psi]^{3/2} : [R^2 + 2R\psi - R\psi'' - \psi\psi''] \approx R^3 [1 + 2\psi : R]^{3/2} : R^3 [1 + 2\psi : R - \psi'' : R - \psi''\psi : R] \approx R (1 + 3\psi : R - \dots) : [1 + 2\psi : R - \psi'' : R]$, i ostatecznie $1 : \zeta' - 1 : \zeta = (1 + 2\psi : R - \psi'' : R) : R (1 + 3\psi : R) - 1 : R \approx - (\psi'' + \psi) : R^2$ z pominięciem wszystkich wyrazów stosunkowo nieznacznych wartości. Nadto ponieważ w danym wypadku $ds = R d\varphi$, przeto ostatecznie $1 : \zeta' - 1 : \zeta = - d^2\psi : ds^2 - \psi : R^2$.

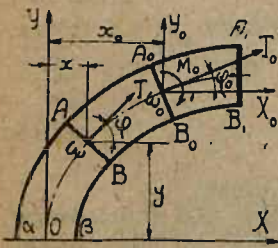


Rys. 30.

§ 6. Praca sprężysta prętów krzywych. Wyznamy pracę sprężystą II dla trzech powyżej rozpatrywanych obciążeń prętów o znacznej krzywiznie. W tym celu bierzemy pod uwagę płytkę $ABCD$ (Rys. 21, 23, 25), wyodrębnioną w pręcie krzywym płaskim. Na lewą ściankę płytki AD działają wypadkowo S, T, M lewej części pręta. Ich przesunięcia będą równe zeru, rozpatrujemy bowiem odkształcenia płytki w stosunku do przekroju AD . Na sąsiednią ściankę płytki działają wypadkowe obciążenia prawej części pręta $S' = S + dS \approx S, T' = T + dT \approx T, M' = M + dM \approx M$. Do siły S' należą przesunięcia środka ω' ścianki BC , zachodzące w kierunku stycznej do osi nieodkształconej, a więc przedewszystkiem $\delta ds = \zeta \Delta d\varphi$ (Rys. 23) oraz $\delta ds = \eta \delta d\varphi$ (Rys. 21). Pierwsze wywołują siły osiowe S i S' , drugie — momenty M i M' . Przy łącznym działaniu obu obciążeń, całkowite przesunięcie osiowe będzie $\zeta \Delta d\varphi + \eta \delta d\varphi$. Z kolei do siły T' należy przesunięcie poprzeczne które w myśl (§ 2. VI) możemy wyrazić w postaci $\mu T ds : GF$, wreszcie do siły uogólnionej M' należą oba znikome obroty względem ścianek płytki, a więc przedewszystkiem obrót $\delta d\varphi$, zależny od momentów M i M' i obrót $\Delta d\varphi$, zależny od sił osiowych S i S' . Przy łącznym działaniu obu obciążeń, całkowite przesunięcie siły M' będzie $S d\varphi + \Delta d\varphi$. Oznaczmy przez Π_e pracę sprężystą płytki. Na mocy pierwszego twierdzenia Castigliano $\partial \Pi_e : \partial S =$

$= \zeta \Delta d\varphi + \eta \delta d\varphi$, $\partial \Pi_e : \partial T = \mu T ds : GF$, $\partial \Pi_e : \partial M = \delta d\varphi + \Delta d\varphi$. Dla prętów o znacznej krzywiznie $\delta d\varphi = Md\varphi : EF \eta = Mds : EF \eta \zeta$. Nadto $\Delta d\varphi = Sds : EF \zeta$, a przeto $\partial \Pi_e : \partial S = Sds : EF + Mds : EF \zeta$, $\partial \Pi_e : \partial T = \mu T ds : GF$, $\partial \Pi_e : \partial M = Mds : EF \eta \zeta + Sds : EF \zeta$. Całkując mamy $\Pi_e = S^2 ds : 2EF + MSds : EF \zeta + \omega(T, M) = \mu T^2 ds : 2GF + \omega_1(S, M) = M^2 ds : 2EF \eta \zeta + MSds : EF \zeta + \omega_2(S, T)$. Porównanie tych trzech wyników daje odrazu $\Pi_e = [M^2 : 2EF \eta \zeta + MS : EF \zeta + S^2 : 2EF + \mu T^2 : 2GF] ds$, a więc dla całego pręta będziemy mieli, oznaczając przez s całkowitą długość jego osi nieodkształconej: $\Pi = \int_0^s \left[\frac{M^2}{2EF \eta \zeta} + \frac{MS}{EF \zeta} + \frac{S^2}{2EF} + \mu \frac{T^2}{2GF} \right] ds$, gdzie zresztą zazwyczaj pomijamy ostatni wyraz — pracę sił tnących, jako nieznaczną w stosunku do pozostałych. Dla prętów o nieznaczej krzywiznie linia obojętna przechodzi przez środek przekroju ω' , to jest $\eta = 0$. Mamy więc z pominięciem sił tnących $\partial \Pi_e : \partial S = \zeta \Delta d\varphi = Sds : EF$, $\partial \Pi_e : \partial M = \delta d\varphi + \Delta d\varphi = M \zeta ds : EI + Sds : EF \zeta = Mds : EI + Sds : EF \zeta \approx Mds : EI$, tutaj bowiem $\delta d\varphi = M \zeta : EI$ i $\zeta \approx \infty$. Całkując otrzymamy $\Pi_e = S^2 ds : 2EF + \omega(M) = M^2 ds : 2EI + \omega_1(S)$ i ostateczne $\Pi_e = S^2 ds : 2EF + M^2 ds : 2EI$, oraz dla całego pręta $\Pi = \int_0^s \left[\frac{M^2}{2EI} + \frac{S^2}{2EF} \right] ds$. Opierając się na wzorach tylko co wyprowadzonych, z łatwością będziemy mogli wyznaczyć wszelkie —

§ 7. Odkształcenia prętów krzywych. Weźmy pod uwagę jakikolwiek krzywy pręt (Rys. 31), obciążony pewnym układem sił odkształcających. W jednym ze skrajnych przekrojów pręta $\alpha\beta$, pośrodku umieszczamy początek O stałych osi współrzędnych, ułożonych w płaszczyźnie krzywej osi pręta tak, aby pionowa oś OY , styczna do owej osi pręta, skierowana była do góry, a prostopadła do niej oś OX — na prawo. Chcąc zdać sobie sprawę, jak się pręt odkształca, rozpatrujemy dowolny zresztą przekrój A_0B_0 . Współrzędne środka ω_0 tego przekroju oznaczamy przez x_0, y_0 , przez φ_0 — kąt nachylenia stycznej $\omega_0 T_0$ pierwotnej osi pręta ku OX . Te trzy wartości x_0, y_0, φ_0 , w zupełności określają pręt nieodkształcony w przekroju rozpatrywanym. Przy odkształceniu ujawnią się przyrosty $\delta x_0, \delta y_0, \delta \varphi_0$, które należy wyznaczyć dla wszystkich poszczególnych przekrojów. W tym celu wprowadzamy wrzekomie siły $X_0 \parallel OX, Y_0 \parallel OY$, przyłożone do środka ω_0 , oraz wrzekomy moment M_0 , prostopadły do płaszczyzny XOY , a przynależny do obranego przekroju. W stosunku do tych sił uogólnionych, przyrosty $\delta x_0, \delta y_0, \delta \varphi_0$, grać będą



Rys. 31.

W tym celu wprowadzamy wrzekomie siły $X_0 \parallel OX, Y_0 \parallel OY$, przyłożone do środka ω_0 , oraz wrzekomy moment M_0 , prostopadły do płaszczyzny XOY , a przynależny do obranego przekroju. W stosunku do tych sił uogólnionych, przyrosty $\delta x_0, \delta y_0, \delta \varphi_0$, grać będą

rolę przesunięć. Nadto, niezależnie rozpatrujemy przekrój bieżący AB . Spółrządne środka ω tego przekroju niech będą x, y , pochylenie stycznej ωT ku OX oznaczmy przez φ . Po sprowadzeniu do środka ω , wszystkich sił odkształcających, prawej części pręta $AB A_1 B_1$ otrzymamy siłę osiową S , tnącą T , i moment gnący M — jako wypadkowe. Nadto tylko co wprowadzone siły wrzekome, dadzą po sprowadzeniu do ω : siłę osiową $X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi$, leżącą na ωT , siłę tnącą $-X_0 \sin \varphi + Y_0 \cos \varphi$, prostopadłą do poprzedzającej, a skierowaną podobnie jak siła Y_0 , wreszcie moment $X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x) + M_0$. Zatem dla prętów o znacznej krzywiznie,

będziemy mieli:
$$\Pi = \int_0^s \left\{ [M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)]^2 : 2EF\eta\zeta + [M + M_0 + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)] [S + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi] : EF\zeta + [S + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi]^2 : 2EI + \nu [T - X_0 \sin \varphi + Y_0 \cos \varphi]^2 : 2GF \right\} ds.$$

przyczem, jak zwykle przez s małe oznaczyliśmy całkowitą długość osi pierwotnej pręta. Na mocy drugiego prawa Castigliano: $\partial x_0 = \partial \Pi : \partial X_0$; $\partial y_0 = \partial \Pi : \partial Y_0$, $\partial \varphi_0 = \partial \Pi : \partial M_0$. W równaniach w ten sposób otrzymanych należy po wykonaniu różniczkowania uczynić $X_0 = Y_0 = M_0 = 0$, siły te bowiem nie działają w rzeczywistości. Tą drogą otrzymamy $\partial x_0 =$

$$= \int_0^s \left[\frac{M(y_0 - y)}{EF\eta\zeta} + \frac{M \cos \varphi}{EF\zeta} + \frac{S(y_0 - y)}{EF\zeta} + \frac{S \cos \varphi}{EF} - \nu \frac{T \sin \varphi}{GF} \right] ds, \partial y_0 =$$

$$= \int_0^s \left[-\frac{M(x_0 - x)}{EF\eta\zeta} + \frac{M \sin \varphi}{EF\zeta} - \frac{S(x_0 - x)}{EF\zeta} + \frac{S \sin \varphi}{EF} + \nu \frac{T \cos \varphi}{GF} \right] ds,$$

$$\partial \varphi_0 = \int_0^s \left[\frac{M}{EF\eta\zeta} + \frac{S}{EF\zeta} \right] ds. \text{ Dla prętów o krzywiznie nieznacznej bę-}$$

dziemy mieli zupełnie podobnie: $\Pi = \int_0^s \left\{ [M_0 + M + X_0(y_0 - y) - Y_0(x_0 - x)]^2 : 2EI + [S + X_0 \cos \varphi + Y_0 \sin \varphi]^2 : 2EF \right\} ds$, oraz $\partial x_0 = y_0 \int_0^s \frac{M ds}{EI} -$

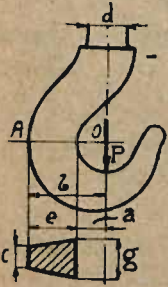
$$- \int_0^s \frac{M y ds}{EI} + \int_0^s \frac{S \cos \varphi ds}{EF}, \partial y_0 = -x_0 \int_0^s \frac{M ds}{EI} + \int_0^s \frac{M x ds}{EI} + \int_0^s \frac{S \sin \varphi ds}{EF}$$

$$\partial \varphi_0 = \int_0^s \frac{M ds}{EI}.$$

§ 8. Przykłady i ćwiczenia:

1 o. *Ilak* żelazny zlewny (Rys. 32), o przekroju OA trapezowym, dźwiga osiową siłę P . Wyznaczyć dopuszczalną wartość tej siły w założeniu następujących wymiarów: $a=4, c=2, d=4, e=9, g=6$ cm. Przede wszystkim wyznaczamy pole przekroju $F = \frac{1}{2} \times 9 \times (6+2) = 36$ cm.², oraz moment statyczny względem szerszej podstawy: $N = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \frac{1}{3} \times 9 + \frac{1}{2} \times 2 \times 9 \times \frac{2}{3} \times 9 = 135$ cm.³, stąd bezpośrednio $\zeta = 4 + 135 : 36 = 7,75$ cm. Z kolei wyznaczamy r według wzoru § 4 w postaci $r = \frac{1}{2} \times 9 \times (6+2) :$

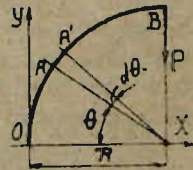
: $\{ [6 + (6-2) \times 4 : 9] \lg (1+9:4) - 6 + 2 \} = 6,97$ cm. Stąd $\eta = \varepsilon - r = 0,78$ cm. W danym wypadku $M = P\varepsilon$ zmniejsza krzywiznę pręta, daje więc w przekroju od strony A naprężenie ściskające $\sigma_1 = -P\varepsilon : I \eta (r + z) = -F \times 7,75 \times (\frac{1}{2} \cdot 9 + 0,78) : [36 \times 0,78 \times (6,97 + 0,78 + 4,5)] = -0,11896 P$. Od strony O da moment naprężenie rozciągające $\sigma_2 = +P \times 7,75 \times (\frac{1}{2} \cdot 9 - 0,78) : [36 \times 0,78 \times (6,97 - 4,5 + 0,78)] = 0,31591 P$. To ostatnie łącznie z naprężeniem rozciągającym $\sigma_3 = P : I = 0,02778 P$ da skrajne naprężenie przekroju $\sigma = 0,34369 P = k_r$. Dla żelaza zlewne go i obciążenia I mamy $k_r = 900 \div 1500$ kg./cm². Stąd $P = 2618 \div 4360$ kg. średnio 3,5 tonn.



Rys. 32.

2-o. *Żóraw* (Rys. 33) składa się z krzywego pręta osadzonego u dołu. Oś pręta stanowi ćwiartkę koła, pośrodku górnego pionowego przekroju panuje siła P pionowa. Wyznamy przesunięcie jej punktu uciepienia —

środku B górnego przekroju. W tym celu ze środka przekroju osadczego O przez środek krzywizny pręta prowadzimy oś OX , druga prostopadła OY stanowi styczną pierwotnej osi pręta. W układzie tych osi, spórzędne środka A bieżącego przekroju pręta będą $x = R (1 - \cos \Theta)$, $y = R \sin \Theta$, nadto odległość środków płytki $AA' = ds = Rd\Theta$. Prócz siły P istotnie uciepionej w B , rozpatrujemy wrzekomą siłę Q poziomą kierunkowo zgodną z osią OX . Pierwsza da przesunięcie p , druga q . Chcąc znaleźć te przesunięcia sprowadzamy do środka A przekroju bieżącego siły zewnętrzne P i Q . Te siły dadzą moment gnący $M = PR \cos \Theta + QR (1 - \sin \Theta)$ i siłę osiową $S = Q \sin \Theta - P \cos \Theta$,



Rys. 33.

stąd $\Pi = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{M^2}{2EI} + \frac{S^2}{2EF} \right] Rd\Theta$. W myśl twierdzenia Mena-

brea, będziemy mieli $\partial \Pi : \partial P = p$, $\partial \Pi : \partial Q = q$, przyczem niewątpliwie po zróżniczkowaniu należy tym wzorom przywrócić istotną wartość, czyniąc

$$Q=0. \text{ W ten sposób otrzymamy } p = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{PR^3}{EI} + \frac{PR}{EF} \right] \cos^2 \Theta d\Theta = \frac{\pi}{4} \frac{PR}{E} \left[\frac{R^2}{I} + \frac{1}{F} \right], q = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{PR^3(1 - \sin \Theta) \cos \Theta}{EI} - \frac{PR \sin \Theta \cos \Theta}{EF} \right] d\Theta = \frac{PR}{E} \left[\frac{R^2}{2I} - \frac{1}{F} \right].$$

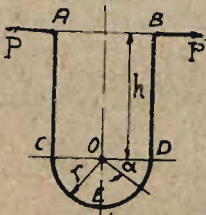
3-o *Sprężyna spiralna* (Rys. 34), zwinięta z taśmy stalowej półmili-metrowej, 5 cm. szerokiej, powinna skupiać zapas pracy sprężystej 200 kg./cm. Zewnętrzny promień sprężyny $R = 5$ cm, średnica nasady $D = 2$ cm. Wyznaczyć liczbę zwojów sprężyny oraz ilość obrotów klucza, w założeniu $k_g = 7500$ kg./cm², $E = 2200000$ kg./cm² dla tworzywa wzorowej stali sprężynowej. Nazwijmy przez P siłę osiową, jaką sprężyna rozwija w końcowym przekroju. Ta siła da moment $M = Py$ w bieżącym przekroju A , zatem pomijając pracę sił osio-



Rys. 34.

wych przekroju A , będziemy mieli $\Pi = \int_0^s [M^2 ds : 2EI]$, stąd całkowity obrót klucza $\varphi = \partial \Pi : \partial M = \int_0^s [M ds : EI] = (P : EI) \int_0^s y ds$. Przy dużej liczbie zwojów całka, wyrażająca niewątpliwie statyczny moment sprężyny, równa jest długości L sprężyny przez odległość jej środka ciężkości od P , a więc $\varphi = PLR : EI$. Średnia wartość bieżącego momentu $M = Py$ będzie $M_0 = PR$, a przeto w przybliżeniu, dla dużej liczby zwojów $\Pi = \frac{1}{2} M_0 \varphi = P^2 R^2 L : 2EI$. Skrajna wartość momentu panująca w przekroju średnicowo przeciwnym do B wynosi $2PR$. Dla tej wartości naprężenie dopuszczalne $k_g = 2PR$: $W = 2PR : \frac{1}{6} bh^2$. Wobec tego $\Pi = \frac{1}{144} k_g^2 b^2 h^4 L : 2E \frac{1}{12} b h^3 = k_g^2 bhL : 24 E$. W danym wypadku $b = 5$, $h = 0,05$ cm., $\Pi = 200$ kg./cm., a zatem $L = 200 \times 24 \times 2200000 : (7500^2 \times 0,05 \times 5) = 750,9$ cm. Oznaczmy liczbę zwojów przez n , a otrzymamy z wystarczającą ścisłością $L = 2\pi n \frac{1}{2} (R + \frac{1}{2}\Delta) = 2\pi n \frac{1}{2} (5 + 1)$, skąd szukana liczba zwojów $n = 39,8 \approx 40$. Wyznamy P z równania $k_g = 7500 = 2PR : \frac{1}{6} bh^2 = 10 P : (\frac{1}{6} \times 5 \times 0,0025)$, co da $P = 1,56$ kg. — oraz $M_0 = PR = 7,8$ kg./cm. Stąd bezpośrednio $\varphi = 2\Pi : M_0 = 400 : 7,8 = 51,28$. Oznaczmy przez m liczbę obrotów klucza, czyli nasady sprężyny, a otrzymamy $m = 51,28 : 2\pi = 51,28 : 6,28 = 8,16$.

4-o. Sprężyna w kształcie litery U dźwiga w skrajnych przekrojach obciążenie poprzeczne, wyznaczyć odkształconą odległość tych przekrojów. Oznaczmy przez r promień środkowej części sprężyny CED , przez h długość obu ramion AC i BD . W przekroju bieżącym, odległym o z od A lub B panować będzie moment gnący Pz , zatem praca sprężysta obu ramion wyniesie $2 \int_0^h [P^2 z^2 dz : 2EI]$. W części środkowej uwzględnimy tylko



Rys. 35.

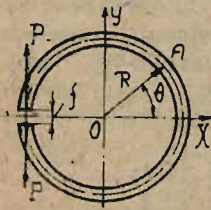
pracę sprężystą sił gnących. W bieżącym przekroju obranym pod kątem α panować będzie moment gnący P ($h + r \sin \alpha$), zatem praca sprężysta tej części wyrazi się w postaci $\int_0^\pi [P^2 (h + r \sin x)^2 r dx : 2EI]$ stąd roz-

sunięcie skrajnych przekrojów $p = \partial \Pi : \partial P = 2 \int_0^h [Pz^2 dz : EI] + \int_0^\pi P (h + r \sin x)^2 r dx : EI = P [\frac{2}{3} h^3 +$

$+ \pi r h^2 + 4r^2 h + \frac{1}{2} \pi r^3] : EI$. Skrajna wartość momentu $P(h + r)$ panować będzie w dolnym przekroju E — tę wartość należy wziąć pod uwagę przy wyznaczaniu właściwych wymiarów sprężyny. (Rys. 35).

5-o. Pierścień tłokowy żeliwny (Rys. 36) o przekroju prostokątnym $b \times h$ i średnicy zewnętrznej $2R + h$ przy zdejmowaniu z tłoka rozwiera się na f cm. Wyznaczyć skrajną bezpieczną wartość f dla pierścienia żeliwnego o wymiarach $R = 14,5$ cm., $h = 1$ cm., $b = 1,5$ cm. Przedewszystkiem wyznaczamy dopuszczalną wartość sił P , jakie należy przyłożyć do przekrojów styku, aby rozewrzeć sprężynę. Skrajna wartość momentu panować będzie niewątpliwie w przekroju OX , gdzie moment gnący wyniesie $2RP$. Dla żeliwa, przekroju prostokątnego obrobionego i obciążenia I mamy $k_g =$

$= 1,7 k_g = 1,7 \times 300 = 510 \text{ kg./cm.}^2$, zatem $2RP = \frac{1}{6} bh^2 k_g$ stąd $P = \frac{1}{6} \times$
 $\times 1,5 \times 1^2 \times 510 : 29 = 4,4 k_g$. Z kolei wyznaczmy pracę sprężystą pier-



Rys. 36.

ścienia, uwzględniając jedynie momenty gnące.

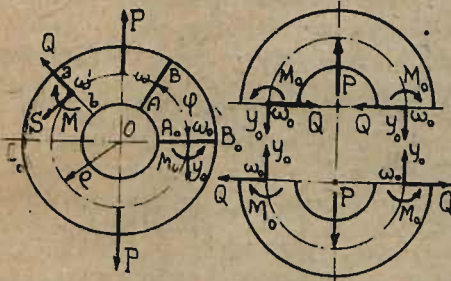
W przekroju bieżącym A siła P da moment gnący PR

$$(1 + \cos \Theta), \text{ a przeto } \Pi = 2 \int_0^\pi [P^2 R^2 (1 + \cos \Theta)^2 R d\Theta : 2EI], \text{ oraz } f = \partial \Pi : \partial P = 2 \int_0^\pi [PR^3 (1 + \cos \Theta)^2 d\Theta : EI] =$$

$$= 3 \pi PR^3 : EI = 3 \pi \times 4,4 \times 14,5^3 : [1000000 \times \frac{1}{12} \times 1,5 \times \times 1^3] = 0,23 \text{ cm.}$$

Z tego rachunku widać, że przy nakładaniu sprężyny na tłok z konieczności w niebezpiecznym przekroju OX występują bardzo znaczne naprężenia, powodujące tak częste pęknięcie.

6-o Ogniwko kołowe w postaci pierścienia (Rys. 37), lub odcinek rury obciążono siłami P średnicowo przeciwnieległymi, rozciągającymi, lub ściskającymi. Poprowadźmy przekrój średnicowy prostopadłe do osi sił i aby utrzymać równowagę obu rozciętych połówek ogniwa, przyłożmy do środków ω_0 rozciętych przekrojów siły osiowe Y_0 , tnące Q i momenty M_0 . Te



Rys. 37.

obciążenia winny być symetryczne ze względu na symetrię obu rozciętych połówek ogniwa, a nadto musi być $Q = 0$, inaczej bowiem symetria nie mogłaby być zupełna dla obu połówek. W danym wypadku równania statyki dają dla sił pionowych $2Y_0 + P = 0$, pozostanie więc jedynie moment M_0 , jako statycznie niewyznaczalna. Chcąc ją wyznaczyć rozpatrujemy przekrój bieżący AB pochylony pod kątem phi ku A_0B_0 i sprowadzamy do jego środka ω siły odkształcające. W ten sposób

otrzymamy siłę osiową $S = Y_0 \cos \varphi$, tnącą $T = Y_0 \sin \varphi$ i moment $M = M_0 + Y_0 \epsilon (1 - \cos \varphi)$, gdzie ϵ oznacza promień ogniwa nieodkształconego. Rozpatrując pierścień, jako pręt o znacznej krzywiznie, możemy wobec zupełnej sym-

metrii obciążenia czterech ćwiartek napisać, że $\Pi = 4 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{M^2}{2EF\eta\epsilon} + \frac{MS}{EF\epsilon} + \frac{S^2}{2EF} + \nu \frac{T^2}{2GF} \right] \epsilon d\varphi$. Stąd na mocy twierdzenia Menabrea:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{M_0 + \frac{1}{2} P \epsilon (1 - \cos \varphi)}{EF\eta\epsilon} + \frac{P \cos \varphi}{2EF\epsilon} \right\} \epsilon d\varphi = 0.$$

Wypełniając całkowanie otrzymamy dla pierścienia o stałym przekroju $\frac{1}{2} \pi M_0 : : EF\eta + \frac{1}{4} \pi P \epsilon : : EF\eta - P \epsilon : 2EF\eta + P : 2EF = 0$, skąd $M_0 = -\frac{1}{2} P \epsilon [1 - - 2 : \pi + 2\eta : \epsilon]$ oraz $M = \frac{1}{2} P \epsilon [2 (1 - \eta : \epsilon) : \pi - \cos \varphi]$. Ujemny znak momentu M_0 wskazuje, że kierunek obrotu wskazany na rysunku nie odpowiada warunkom istotnym w wypadku działania sił rozciągających.

Łatwo to pojąć, zważywszy, że siły rozciągające starają się pręt w sąsiedztwie przekroju A_0B_0 rozplaszczyc, co odpowiada momentom M_0 ujemnym. Wyznaczywszy w ten sposób statycznie niewyznaczalny czynnik M_0 , rozwiązaliśmy zadanie całkownie, odkształcenia bowiem $\delta x_0, \delta y_0, \delta \varphi_0$ dowolnego przekroju poprzecznego z łatwością będziemy mogli otrzymać, korzystając z ogólnej teorii. Pozostaje nam tylko wyznaczyć przesunięcie p sił odkształcających. Po podstawieniu M

$$\begin{aligned} \text{otrzymamy } \Pi &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{P\zeta^2}{2EF\eta} \left[\frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) - \cos \varphi \right]^2 + \frac{P^2\zeta}{EF} \left[2 \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) - \cos \varphi \right] \cos \varphi + \frac{P^2\zeta \cos^2 \varphi}{2EF} + \nu \frac{P^2\zeta \sin^2 \varphi}{2GF} \right\} d\varphi, \text{ skąd bezpośrednio } p = \\ &= \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{P\zeta^2}{EF\eta} \left[\frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) - \cos \varphi \right]^2 + \frac{P\zeta}{EF} \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) - 2 \cos \varphi \right] \cos \varphi + \frac{P\zeta}{EF} \cos^2 \varphi + \nu \frac{P\zeta}{GF} \sin^2 \varphi \right\} d\varphi = \frac{P\zeta^2}{EF\eta} \left\{ \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right)^2 - \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) + \frac{\pi}{2} \right\} + \frac{P\zeta}{EF} \left\{ \frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) - \frac{\pi}{2} \right\} + \frac{P\zeta}{EF} \frac{\pi}{4} + \nu \frac{P\zeta}{GF} \frac{\pi}{4} = \frac{P\zeta^2}{EF\eta} \left[2 - \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) + \frac{P\zeta}{EF} \left[\frac{4}{\pi} \left(1 - \frac{\eta}{\zeta} \right) - \frac{\pi}{4} \right] + \nu \frac{\pi}{4} \frac{P\zeta}{GF} \right]. \text{ W szczególnym} \\ \text{wypadku, gdy przekrój boczny pręta jest stosunkowo nieznaczny w porów-} \\ \text{naniu do promienia } \zeta, \text{ będziemy mieli } \Pi &= 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{[M_0 + 1/2 P\zeta (1 - \cos \varphi)]^2}{2EI} + \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{8EF} \right\} \zeta d\varphi, \text{ skąd } \frac{\partial \Pi}{\partial M_0} = 4 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{M_0 + 1/2 P\zeta (1 - \cos \varphi)}{EI} \right] \zeta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Dla pierścienia o stałym przekroju poprzecznym będziemy mieli $1/2 \pi M_0 + 1/4 \pi P\zeta - 1/2 P\zeta = 0$, co da $M_0 = -1/2 P\zeta (1 - 2 : \pi)$ oraz $M = 1/2 P\zeta (2 :$

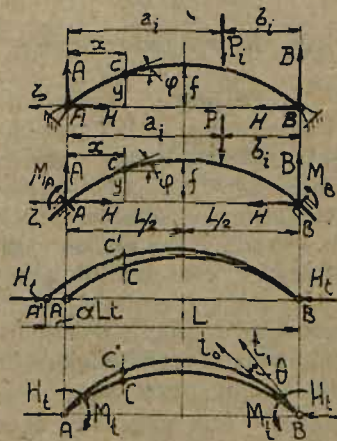
$$\begin{aligned} : \pi - \cos \varphi). \text{ Z tą wartością otrzymamy } \Pi &= 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{P^2\zeta^2}{8EI} \left[\frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right]^2 + \frac{P^2 \cos^2 \varphi}{8EF} \right\} \zeta d\varphi, \text{ a nadto } p = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = 4 \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{P\zeta^2}{4EI} \left[\frac{2}{\pi} - \cos \varphi \right]^2 + \frac{P \cos^2 \varphi}{4EF} \right\} \zeta d\varphi = \frac{P\zeta^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{4}{\pi^2} - \frac{4}{\pi} \cos \varphi + \cos^2 \varphi \right\} d\varphi + \frac{P\zeta}{EF} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{P\zeta^3}{EI} \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} + \frac{\pi}{4} \right\} + \frac{P\zeta}{EF} \frac{\pi}{4} = \frac{P\zeta^3}{EI} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{P\zeta}{EF} \frac{\pi}{4}. \text{ Mniej dokładne} \end{aligned}$$

wyniki otrzymamy całkując równanie odkształconej — $d^2\psi : d\varphi^2 - \psi = M :$
 $: EI = 1/2 P\zeta (2 : \pi - \cos \varphi) : EI$, skąd $\psi = A \sin \varphi + B \cos \varphi + (1/4 \varphi \sin \varphi - 1 : \pi) P\zeta^3 : EI$. Wobec zupełnej symetrii czterech ćwiartek ogniwa przekroje pionowe i poziome nie ulegają skrzywieniu przy odkształceniu, zatem w ω_0 i w punktach na krzyż leżących odkształcona jest styczna do pierwotnej osi pręta, stąd wnioskujemy że $d\psi : d\varphi = 0$ dla $\varphi = 0$ i $\varphi = 1/2 \pi$. Z tych warunków będziemy mieli $A = 0$ i $B = P\zeta^3 : 4EI$, a przeto $\psi = (\cos \varphi + \psi \sin \varphi - 4 : \pi) P\zeta^3 : 4EI$. Czyniąc w tem równaniu $\varphi = 1/2 \pi$,

otrzymamy $\psi_1 = (\pi : 4 - 2 : \pi) P \zeta^3 : 2EI = 1/2 \phi$, stąd $\phi = (\pi : 4 - 2 : \pi) P \zeta^3 : EI$. Z kolei czyniąc $\varphi_0 = 0$ otrzymamy $\psi_0 = (1/4 - 1 : \pi) P \zeta^3 : EI$; a przeto zwężenie się ogniwa w kierunku prostopadłym do osi sił P wyniesie $q = -(4 - \pi) P \zeta^3 : 2 \pi EI$. W ogólnym wypadku jakiegokolwiek obciążenia niesymetrycznego—w dowolnym przekroju obranym ab będziemy mieli trzy statycznie niewyznaczalne: siłę osiową S , tnącą Q , i moment M , które również z łatwością wyznaczymy, stosując twierdzenie Menabrea.

7-o *Pręt krzywy* o stałym promieniu ζ krzywizny pierwotnej obciążono obustronnie różnoskrętnymi parami sił $\mu = P\lambda$, jak na (Rys. 16 księgi drugiej). W dowolnym przekroju środkowej części pręta BC panować będzie stała wartość momentu μ dodatnia, jako że moment stara się powiększyć krzywiznę pierwotną do $1 : \zeta'$. Zatem równanie odkształconej będzie w danym wypadku $1 : \zeta' - 1 : \zeta = \mu : EI$ dla pręta o krzywiznie nieznacznej, a dla prętów wyraźnie krzywych $1 : \zeta' - 1 : \zeta = \mu : EF\eta\zeta$. Przeto w obu wypadkach $\zeta' = \text{stała}$: pręt w części środkowej zwiększy swą krzywiznę, oś jego podłużna będzie i nadal stanowiła łuk koła. Gdybyśmy środki A i D skrajnych przekrojów tego samego pręta obciążyli siłami P , ściskającymi, leżącymi na osi AD , to w bieżącym przekroju C , pochyłonym pod kątem φ ku osi symetrii pręta poziomej panowałby moment $M = Py$, gdzie przez y oznaczyliśmy odległość pionową środka bieżącego przekroju od osi poziomej AD . Wobec tego, że $y = \zeta \cos \varphi - \zeta + f$ równanie odkształconej otrzyma postać $d^2\psi : d\varphi^2 + \psi = -(\zeta \cos \varphi - \zeta + f) P : EI$ dla pręta o krzywiznie nieznacznej, a dla pręta o krzywiznie znacznej $d^2\psi : d\varphi^2 + \psi = -(\zeta \cos \varphi - \zeta + f) P : EF\eta\zeta$. W pierwszym wypadku oznaczamy przez $n^2 = P : EI$, w drugim przez $n^2 = P : EF\eta\zeta$, nadto niech będzie $d^2\psi : d\varphi^2 = \psi''$, stąd ostatecznie $\psi'' + \psi = -n^2(\zeta \cos \varphi - \zeta + f)$. Całkując otrzymamy $\psi = A \sin \varphi + B \cos \varphi - 1/2 n^2 \zeta \varphi \sin \varphi + n^2(\zeta - f)$. Dla obu skrajnych przekrojów gdzie $\varphi = \pm \varphi_0 = \pm [\text{arc sin } [(\lambda + 1/2 l) : \zeta]]$ będziemy mieli $\psi = 0$. W ten sposób otrzymano dwa równania warunkowe, z których z łatwością wyznaczymy stałe całkowania A i B . Z powyższych rozważań widzimy, że wyznaczanie odkształconych prętów krzywych ma ten sam przebieg co i dla prętów prostych.

8-o *Łuk przegubowy* (Rys. 38) w postaci symetrycznego pręta krzywego, opartego na podporach przegubowych dźwiga układ sił pionowych P_i ($i = 1, 2 \dots n$) odkształcających. Odległość podpór A i B stanowi tak zwaną rozpiętość łuku L . Oznaczmy pionowe odpory przez A i B , poziome przez H i H' . Z równań statyki mamy dla sił pionowych $A + B = \Sigma P_i$, poziomych $H + H' = 0$, oraz dla momentów względem prawego przegubu $AL = \Sigma P_i b_i$. Z tych równań wyznaczymy A, B , oraz $H' = -H$. Pozostaje więc jeden czynnik statycznie niewyznaczalny H . W stosunku do rozpiętości L poprzeczne wymiary łuku



Rys. 38, 39, 40, 41.

są zwykle nieznaczące, to też zazwyczaj łuki rozpatrujemy jako pręty o niewielkiej krzywiznie, pisząc $U = \int_0^s \left[\frac{M^2}{2EI} + \frac{S^2}{2EF} \right] ds$, a przeto $\partial U : \partial H = 0$

na mocy twierdzenia Menabrea w wypadku podpór niesprężystych, sztywnych. Dla podpór sprężystych, dających przyrost δL będziemy mieli na mocy Castigliano drugiego $\partial U : \partial H = \delta L$. W danym wypadku dla bieżącego przekroju C otrzymamy $M = Hy + M_0$, gdzie przez M_0 oznaczyliśmy moment pochodzący od odporu A i sił P_i , zawartych pomiędzy lewą podporą, a przekrojem bieżącym C . Obciążenie zewnętrzne rozkłada łuk, podpory dają sprzeczny temu odkształceniu, zatem odpory H muszą działać do wewnątrz, dając momenty Hy dodatnie, bo zwiększające krzywiznę pręta. Moment M_0 z łatwością można wyznaczyć, jak dla belki jednoprzęsłowej statycznie wyznaczalnej L cm. długiej, obciążonej siłami P_i pionowymi, działającymi w tych samych odległościach b_i od prawej podpory. Nadte w bieżącym przekroju panuje siła osiowa $S = -H \cos \varphi + S_0$, gdzie przez S_0 oznaczyliśmy składową zależną od sił zewnętrznych P_i , działających pomiędzy A i C oraz od pionowego odporu A . Składową odporu poziomego podaliśmy ze znakiem ujemnym, ponieważ odpór H powoduje ściskanie łuku. Zazwyczaj spotykane łuki nie są zbyt ostre, można więc bez znacznego błędu założyć $\cos \varphi \approx 1$, a S_0 całkowicie pominąć, pisząc wprost

$$S = -H. \quad \text{Stąd} \quad \frac{\partial U}{\partial H} = H \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} + \int_0^s \frac{M_0 y ds}{EI} - H \int_0^s \frac{dx}{EF} = 0, \text{ co}$$

$$\text{daje} \quad H = \int_0^s \frac{M_0 y ds}{EI} : \left[\int_0^s \frac{dx}{EF} - \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} \right]. \quad \text{Dla łuków o stałym prze-}$$

kroju $H = \int_0^s M_0 y ds : [i^2 s - \int_0^s y^2 ds]$, gdzie jak zwykle przez i oznaczyliśmy ramię bezwładności przekroju. Jest ono zazwyczaj nieznaczące wobec y , możemy przeto ustalić wzór przybliżony praktycznie wystarczająco

$$\text{ściśle dla wszelkich łuków przegubowych; } H = - \int_0^s M_0 y ds : \int_0^s y^2 ds.$$

W szczególnym wypadku łuku parabolicznego o środkowej strzałce f i obciążeniu q jednostajnie rozłożonym na całej rozpiętości L , będziemy mieli $A = B = \frac{1}{2} qL$. Równanie osi łuku będzie tu $y = Hfx(L-x) : L^2$, a moment $M_0 = \frac{1}{2} qx^2 - \frac{1}{2} qLx = -\frac{1}{2} qx(L-x) = -qL^2 y : 8f$, stąd dla łuku parabolicznego o stałym przekroju $H = qL^2 : 8f$. Ten wzór zazwyczaj stosujemy dla wszelkich łuków, jako pierwsze przybliżenie, przy ocenianiu doraźnym wartości H . Wszelki łuk przegubowy nie może się swobodnie rozszerzać w kierunku poziomym przy nagrzaniu o t^0 . Gdyby jedna z podpór była ruchoma, to rozpiętość łuku wzrosłaby o $\alpha_0 Lt$, aby więc powrócić do warunków istotnych należy zniszczyć ów przyrost, działając na końce A, B łuku siłami poziomymi H_t . W rzeczywistości zjawiska zachodzą nieco inaczej. Łuk nagrzany chce wyskoczyć z podpór, rozpiera podpory, wywołując sprzeciw w postaci odporów poziomych H_t . Te siły stanowią obciążenie łuku dodatkowe. Pod ich jarzmem łuk zwiększa swą krzywiznę (Rys. 41), bieżący przekrój z C przechodzi w C' , a skrajne styczne t_0 obra-

cają się o kąt Θ ku górze. Zatem w przekroju bieżącym powstaje moment $M = H_t y$ oraz siła osiowa $S' = -H_t \cos\varphi \approx -H_t$, dając dodatkowe wyrazy

dla pracy sprężystej $\int_0^s \frac{M'^2 ds}{2EI} + \int_0^s \frac{S'^2 ds}{2EF}$, które oznaczamy przez Π_t .

W myśl rozważań powyższych przesunięcie sił H_t będzie równe $\alpha_0 L t$,

a przeto na mocy twierdzenia Menabrea $\alpha_0 L t = \partial \Pi_t$: $\partial H_t = H_t \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} - H_t$

$\int_0^s \frac{ds}{EF}$, skąd $H_t = \alpha_0 L t$: $\left[\int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} - \int_0^s \frac{ds}{EF} \right]$ Przy łącznym działaniu nagrzania i sił zewnętrznych P_i odpór poziomy będzie $H_t + H_0$.

9-o Łuk wyżej opisany stanowi ustrój statycznie niewyznaczalny zewnętrznie. Z łatwością możemy go uczynić statycznie niewyznaczalnym wewnętrznie, dodając dolny pręt prosty AB obustronnie połączony z łukiem przegubowo, a nadto zmieniając lewą podporę na rolkową. Oznaczmy siłę osiową dolnego pręta przez H , jego przekrój przez f , a otrzymamy, ko-

rzystając z rozważań zadania poprzedniego $\Pi = \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI} + \int_0^s \frac{S^2 ds}{2EF} +$

$+ \frac{S^2 L}{2E_f}$. Stąd na mocy twierdzenia Menabrea $\frac{\partial \Pi}{\partial H} = H \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} +$

$+ \int_0^s \frac{M_0 y ds}{EI} - H \int_0^s \frac{ds}{EF} - \frac{HL}{E_f} = 0$ i ostatecznie $H = \left[\int_0^s M_0 y ds : EI \right] :$

$\left[\frac{L}{E_f} + \int_0^s \frac{ds}{EF} - \int_0^s \frac{y^2 ds}{EI} \right]$.

10-o Łuk zamocowany obustronnie (Rys. 39) w postaci symetrycznego pręta krzywego dźwiga układ sił P_i odkształcających. Zachowamy znakowania poprzednie, a nadto przez M_A i M_B nazwiemy momenty odporowe w A i B . W danym wypadku z równań statyki przekonamy się, że $H' = -H$. Równania sił pionowych i momentów pozwolą wyznaczyć odpory prawe w zależności od lewych, pozostaną więc statycznie niewyznaczalnymi odpory lewe A , H i M_A .

Oznaczmy przez A_0 i B_0 odpory pionowe belki jednoprzęsłowej L cm. dłużej, statycznie wyznaczalnej, obciążonej tym samym układem sił P_i ; w przekroju bieżącym tej belki, odległym o x od lewej podpory, panować będzie moment M_0 . Zatem możemy napisać, że $A = A_0 + Y$, $H = X$, oraz $M_A = Z$, i wyznaczyć obciążenie przekroju bieżącego C łuku zamocowanego w postaci momentu $M = Xy - Yx + Z + M_0$ i siły osiowej $S = -X \cos\varphi - Y \sin\varphi + S_0$, gdzie S_0 i tym razem oznacza siłę osiową, jaką otrzymamy po sprowadzeniu do środka przekroju C sił A_0 i P_i zawartych pomiędzy A i C . Stąd dla zwykle używanego łuku o nieznacznej krzywiznie $\Pi =$

$= \int_0^s \frac{M^2 ds}{2EI} + \int_0^s \frac{S^2 ds}{2EF}$. Na mocy twierdzenia Menabrea mamy $\partial \Pi : \partial X =$

$= \partial \Pi : \partial Y = \partial \Pi : \partial Z = 0$. W ten sposób po skróceniu przez 1: E otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 X \int_0^s \left(\frac{Y^2}{I} + \frac{\cos^2 \varphi}{F} \right) ds - Y \int_0^s \left(\frac{xy}{I} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{F} \right) ds + Z \int_0^s \frac{Y}{I} ds = - \\
 \int_0^s \left(\frac{M_0 Y}{I} - \frac{S_0 \cos \varphi}{F} \right) ds - X \int_0^s \left(\frac{XY}{I} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{F} \right) ds + Y \int_0^s \left(\frac{X^2}{I} + \frac{\sin^2 \varphi}{F} \right) \\
 ds - Z \int_0^s \frac{X}{I} ds = \int_0^s \left(\frac{M_0 X}{I} + \frac{S_0 \sin \varphi}{F} \right) ds, X \int_0^s \frac{Y}{I} ds - Y \int_0^s \frac{X}{I} ds + \\
 + Z \int_0^s \frac{ds}{I} = - \int_0^s \frac{M_0 ds}{I}.
 \end{aligned}$$

Spółczynniki równań powyższych najlepiej obliczać wykreślnie, można również połączyć rachunek wykreślny ze sposobem Muellera podobnym w § 20, 10^o części poprzedniej. W szczególnym wypadku łuku parabolicznego obustronnie osadzonego, a niezbyt ostrego, możemy założyć $\sin \varphi \approx 0$, $\cos \varphi \approx 1$. W tem założeniu $ds = dx$, $s = L$, oraz niewątpliwie $S = -X$, ponieważ dla sił pionowych $S_0 = 0$. Dalej będziemy mieli

$$\begin{aligned}
 \text{dla łuku parabolicznego o stałym przekroju } \int_0^L dx = L, \int_0^L x dx = \frac{1}{2} L^2, \\
 \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} L^3, \int_0^L y dx = (4f : L^2) \int_0^L (Lx - x^2) dx = \frac{2}{3} fL, \int_0^L y^2 dx = \\
 (4f : L^2)^2 \int_0^L [Lx - x^2]^2 dx = \frac{8}{15} f^2 L, \int_0^L xy dx = (4f : L^2) \int_0^L [Lx^2 - x^3] \\
 dx = \frac{1}{3} fL^2, \text{ a przeto z równań poprzednio wyprowadzonych, po prostych} \\
 \text{skóceniach otrzymamy: } X[\frac{4}{5}f + 3i^2 : 2f] - \frac{1}{2}LY + Z = -(3 : 2fL) \\
 \int_0^L M_0 y dx, - \frac{2}{3}fX + \frac{2}{3}LY - Z = (2 : L^2) \int_0^L M_0 x dx, \frac{2}{3}fX - \frac{1}{2}LY + \\
 + Z = -\frac{1}{L} \int_0^L M_0 dx. \text{ Z tych równań z łatwością wyznaczymy } X, Y, Z.
 \end{aligned}$$

Dla obciążenia jednostajnego q poprzednio rozpatrywanego będziemy mieli

$$\begin{aligned}
 M_0 = -qL^2 y : 8f, \int_0^L M_0 dx = -\frac{1}{12} qL^3, \int_0^L M_0 x dx = -\frac{1}{24} qL^4, \int_0^L M_0 y dx = \\
 = -\frac{1}{15} qL^3 f, \text{ stąd : } X[\frac{4}{5}f + 3i^2 : 2f] - \frac{1}{2}LY + Z = \frac{1}{10} qL^2, - \\
 - \frac{2}{3}fX + \frac{2}{3}fY - Z = -\frac{1}{12} qL^2, \frac{2}{3}fX - \frac{1}{2}LY + Z = \frac{1}{12} qL^2. \text{ Doda-} \\
 \text{jąc dwa ostatnie równania otrzymamy bezpośrednio } Y = 0, \text{ zatem odpory} \\
 \text{pionowe } A = B = -\frac{1}{2} qL. \text{ Dalej z dwóch pierwszych równań otrzymamy} \\
 X = qL^2 : 2[4f + 45i^2 : f] \text{ oraz } Z = qL^2 : 12[1 + 4f^2 : 45i^2]. \text{ Wszelki} \\
 \text{łuk, obustronnie osadzony, po ogrzaniu o } t^0, \text{ stara się rozsunąć podpory.} \\
 \text{Gdyby jedna z nich, dajmy na to prawa była ruchoma, to rozpiętość łuku} \\
 \text{wzrostaby o } \alpha_0 L t, \text{ w istocie jednak ten przyrost jest niemożliwy ze względu} \\
 \text{na sprzeciw podpór w postaci sił } H_t, \text{ stąd wniosek, że przesunięciem} \\
 \text{siły } H_t \text{ będzie } \alpha_0 L t. \text{ Nadto jak już wiemy łuk pod działaniem tempera-} \\
 \text{tury zwiększa swą krzywiznę, przyczem skrajne jego stycznice odchylają się} \\
 \text{o kąt } \Theta. \text{ W istocie pojawienia się tych odchyłeń jest w danym wypadku} \\
 \text{niemożliwe, zatem, aby kąt prawy } \Theta \text{ i lewy } -\Theta \text{ sprowadzić do zera, na-}
 \end{aligned}$$

leży przyłożyć odpowiednio działające różnoskrętne momenty M_t po obu końcach łuku. Łączne działanie tych niewątpliwie równych momentów pokrywa się wzajemnie: ich przesunięcie ma wartość zerową, jako dla siły uogólnionej równej sumie momentów prawego i lewego. Tutaj więc dla przekroju C będziemy mieli $M' = H_t y - M_t$, oraz $S' = -H_t \cos\varphi$. Te siły pomnożą Π o wyrazy $\int_0^s \frac{M'^2 ds}{2EI} + \int_0^s \frac{S'^2 ds}{2EF}$, które oznaczemy przez Π_t . Na mocy twierdzenia Menabrea będziemy mieli $\partial\Pi_t : \partial H_t = \alpha_0 L t$, oraz $\partial\Pi_t : \partial M_t = 0$, stąd wyznaczymy H_t i M_t .

CZĘŚĆ ÓSMA.

NAPRĘŻENIA DYNAMICZNE.

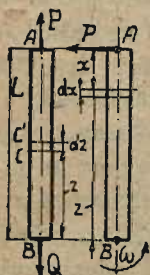
§ 1. **Ustalenie pojęć zasadniczych.** Dotychczasowy obszar naszych badań wytrzymałościowych nie wykraczał poza dziedzinę statyki. W myśl podstawowej zasady wyłożonej w zagajeniu rozpatrywaliśmy wyłącznie tylko ciała, pozostające w spoczynku. Wyznaczaliśmy naprężenia i odkształcenia wywołane działaniem zrównoważonych układów sił zewnętrznych. Obecnie rozważania dotyczyć będą ciał obdarzonych ruchem. W pewnych warunkach w ciałach poruszających się mogą wystąpić naprężenia odrębnego rodzaju, *naprężenia dynamiczne*. Te naprężenia powstają pod działaniem sił bezwładności, przy uderzeniach i drganiach. Wobec znacznych trudności doświadczalnych teoria naprężeń dynamicznych nie jest jeszcze opracowana dostatecznie i jak dotąd opiera się na założeniach dość wątpliwych, mimo to jednak daje poważne wyniki praktyczne.

§ 2. **Naprężenia sił bezwładności.** Ten rodzaj naprężeń występuje pod działaniem sił bezwładności w ciałach poruszających się. W danym wypadku wyznaczanie naprężeń dynamicznych sprowadza się do określania przyspieszeń, a co zatem idzie i sił bezwładności, stanowiących dodatkowy układ obciążenia odkształcającego. Wyznaczanie przyspieszeń ciał odkształcalnych nastęrcza duże trudności, z konieczności przeto pomijamy odkształcenia i rozpatrujemy ciała jako zupełnie sztywne. To założenie kazi istotę rzeczy, pozwala jednak otrzymać wyniki przybliżone, ponieważ dopuszczalne odkształcenia ogniw są zazwyczaj nader nieznaczne. Zatem przy wyznaczaniu naprężeń sił bezwładności, należy przedewszystkiem określić przyspieszenie w założeniu zupełnej sztywności ciała rozpatrywanego, znaleźć odpowiednie siły bezwładności i dołączywszy ten dodatkowy układ sił do układu sił istotnie działających na ciało, wyznaczyć naprężenia i odkształcenia, jak dla ciał pozostających w równowadze. Istotę tego postępowania poznamy najlepiej, rozpatrując odpowiednie przykłady. Weźmy pod uwagę pręt prosty, pionowy, poruszający się w kierunku siły osiowej P , działającej na górny przekrój — dno A pręta. Oznaczmy przez γ ciężar właściwy

tworzywa pręta, przez F przekrój poprzeczny stały, przez L długość pręta. Wobec pionowego położenia pręta, na dolną ściankę skrajnej płytki A działa osiowa siła $\gamma FL = G$, ciężar pręta niezależnie od P . Oznaczmy przez w przyspieszenie pręta, każda płytka elementarna o masie $mFdz$, gdzie $m = \gamma : g$, sprzeciwić się będzie ruchowi siłą bezwładności $wmFdz$, zatem

w górnym przekroju pręta będziemy mieli sprzeciw $S = G + \int_0^L wmFdz =$

$G + wmFL = G(1 + w : g)$ ponieważ w założeniu zupełnej sztywności pręta wszystkie jego płytki będą miały to samo przyspieszenie. Jeżeli nadto u dna dolnego uczepimy dodatkowy ciężar Q , w postaci masy $Q : g$ skupionej w środku dolnego przekroju B pręta, to sprzeciw S wzrośnie do $(G + Q)(1 + w : g)$, dając naprężenie dynamiczne $\sigma_z = (G + Q)(1 + w : g) : F$, zależne nie tylko od ciężaru samego pręta, od siły obciążającej Q , ale i od przyspieszenia w .



Rys. 42, 43.

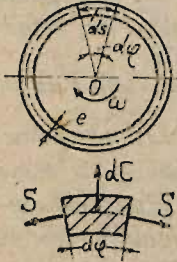
W podobny sposób działa siła odśrodkowa. Pręt L cm. długi obraca się z szybkością kątową stałą ω około środka przekroju dolnego B w kierunku strzałki P . Płytka myślowo wyodrębniona (Rys. 43) w odległości x od górnego dna pręta A o masie $mFdx$ rozwija siłę odśrodkową $\omega^2(L - x)mFdx$, zatem na dno górne wyodrębnionej

płytki działać będzie siła osiowa $S = \int_0^x m\omega^2(L - x)Fdx$. Dla pręta o stałym przekroju F będziemy mieli $S = m\omega^2Fx(L - \frac{1}{2}x)$. Ta siła osiąga swą wartość najwyższą dla dna dolnego B pręta, gdzie $S_M = \frac{1}{2}m\omega^2FL^2 = \frac{1}{2}mFv^2$. Tutaj przez $v = L\omega$ oznaczyliśmy szybkość obrotu w A . Siły osiowe S dają naprężenia dynamiczne dla wyodrębnionej płytki $\sigma_z = S : F$, powodujące wydłużenia płytek $\delta dx = \epsilon dx = (\sigma_z : E) dx$. Wydłużenie całego

pręta będzie $\Delta L = \int_0^L \frac{dx}{EF} \int_0^x m\omega^2(L - x)Fdx$. Dla pręta o stałym przekroju $\Delta L = m \frac{\omega^2}{E} \int_0^L (L - \frac{1}{2}x)xdx = \frac{1}{3}m\omega^2L^3 : E = \frac{1}{3}\gamma v^3L : gE$.

Jako ostatni przykład rozpatrujemy pierścień (Rys. 44), wirujący ze stałą szybkością kątową ω . Oznaczmy przez ζ średni promień pierścienia, przez F jego stały przekrój, przez e grubość w kierunku promienia i założmy, że e jest nieznaczne w stosunku do ζ . Masa elementarnego wycinka, o kącie środkowym $d\varphi$ będzie równa $mF\zeta d\varphi$, a jego siła odśrodkowa $dC = mF\zeta^2\omega^2 d\varphi = mFv^2 d\varphi$, gdzie przez v oznaczyliśmy szybkość obrotu pierścienia na osi w odległości ζ od środka O . Układ elementarnych sił dC zupełnie zresztą symetryczny względem środka promienia, stara się zwiększyć promień ζ o $d\zeta$, a zarazem wydłużyć obwód w tym samym

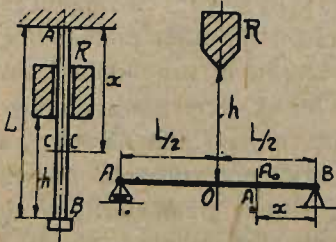
stosunku. Inaczej mówiąc, pod wpływem siły odśrodkowej, w przekrojach poprzecznych pierścienia powstaną siły osiowe S , rozciągające. Te siły łącznie z dC stanowią jedyne obciążenie wycinka, muszą więc równoważyć dC . Rzut sił S na kierunek dC da wypadkową $2S \sin(\frac{1}{2}d\varphi) \approx Sd\varphi = mFv^2 d\varphi$, stąd $S = mFv^2$.



Rys. 44.

W założeniu nieznaczącej grubości pierścienia możemy założyć, że siła S rozkłada się jednostajnie na przekrój poprzeczny, dając naprężenie dynamiczne $\sigma_z = S : F = mv^2$. Te naprężenia powodują wydłużenie $\epsilon = \sigma : E = mv^2 : E$, zwiększające średni obwód pierścienia $\lambda = 2\pi r$ o przyrost $\Delta\lambda = 2\pi mv^2 r : E$, a zatem i promień r o przyrost $\Delta r = mv^2 r^2 : E$. Ostatni wzór daje wydłużenie trzykrotnie większe niż dla ramienia wirującego, rozpatrywanego w poprzednim przykładzie. Zatem pierścień zaopatrzony w ramiona nie może się swobodnie odkształcać: występują dodatkowe naprężenia gnące. I bez tych dodatkowych naprężeń wytrzymałość pierścienia jest dość słaba. Dla żeliwa $\gamma = 7,5$ kg/cm, zatem już przy $v = 40$ m/sek otrzymamy naprężenie dynamiczne. $\sigma_z = \frac{1}{1000} \times 7,5 \times 40^2 \times 100^2 : 981 = 123$ kg/cm².

§ 3. Naprężenia przy uderzeniach. Obciążenie zewnętrzne z nagłą w pełnym natężeniu przyłożone daje naprężenia dynamiczne ciała, zupełnie różne od naprężeń statycznych zwykłych, wywołanych obciążeniem stopniowo rosnącym od zera do pełnego natężenia. Ten nagły rodzaj działania sił odkształcających zwiemy krótko *uderzeniem*. Naprężenia dynamiczne powstające po uderzeniu możemy dość ściśle wyznaczyć, gdy założymy, że masa ciała uderzonego nie daje wyraźnego sprzeciwu, to jest inaczej mówiąc, gdy pominiemy masę ciała uderzonego. Daje to dobre wyniki w tym wypadku, gdy owa masa jest nieznaczna w stosunku do masy ciała uderzającego. W rozważaniach będziemy różniali dwa rodzaje uderzeń: podłużne w kierunku osi podłużnej pręta uderzonego i poprzeczne, prostopadłe do owej osi. Zawieśmy (Rys. 45) pręt o stałym przekroju F pionowo. Długość L tego pręta liczymy od umocowanego górnego przekroju A aż do skrajnego dolnego, zakończonego płytką kot-



Rys. 45 i 46.

nierzową B , na którą opada ciężar R z wysokości h , sunąc po przecie bez tarcia. Gdy dolna powierzchnia ciężaru dotknie płytki nastąpi uderzenie podłużne w kierunku osi pręta podłużnej. Ten sam pręt ułożony poziomo na podporach przegubowej i rolkowej (Rys. 46) ulega uderzeniu poprzecznemu, gdy ciężar R , zawieszony dajmy na to ponad środkiem przekrojem O pręta z nagłą nań spadnie z wy-

sokości h , uderzając w O , zaostrzoną dolną krawędzią. Istota zjawiska pozostanie bez zmiany, gdy ciężar R uderzy w jakikolwiek inny przekrój pręta, wzory tylko będą nieco bardziej złożone. W obu wypadkach szybkość, jaką ciężar rozwinię w momencie dotyku będzie, jak wiadomo $v = \sqrt{2gh}$. Siła żywa spadku $\frac{1}{2} Rv^2 : g = Rh$ da przesunięcie r środka przekroju uderzonego, przyczem, zgodnie z założeniem masa pręta nie sprzeciwi się uderzeniu. Inaczej mówiąc pręt w przekroju uderzonym utożsamia się szybkościowo z masą uderzającą, która w ten sposób opadac będzie dalej swobodnie, jak gdyby na drodze jej nie było pręta i w końcu, przebiegłszy drogę r utraci ruch, powstrzymana sprzeciwem sprężystym pręta; któremu odmówiliśmy wprowadzić masy istotnej, lecz nie odjęliśmy własności sprężystych. Końcowa szybkość masy spadającej będzie $v' = \sqrt{2g(h+r)}$ a siła żywa spadku $\frac{1}{2} Rv'^2 : g = R(h+r)$ da pracę sprężystą $\Pi = R(h+r)$. Weźmy pod uwagę wrzekomą siłę P , która stopniowo rosnąc od zera do skrajnego natężenia wywoła owo przesunięcie r . Dla pręta pionowego z łatwością wyznaczmy ją z równania $r = PL : EF$. dla poziomego ze wzoru na strzałkę $r = PL^3 : 48 EI$. Stąd mamy odpowiednio $P = rEF : L$, oraz $P = 48 rEI : L^3$. Oznaczmy nadto przez r_0 , przesunięcie, jakiego zaszło istotnie, gdyby siła R działała na pręt stopniowo rosnąc od zera do najwyższego natężenia. Będzie to $r_0 = RL : EF$ oraz $r_0 = RL^3 : 48 EI$. W obu wypadkach otrzymamy, dzieląc $P = Rr : r_0$, a zatem $\Pi = \frac{1}{2} Pr = \frac{1}{2} Rr^2 : r_0 = R(h+r)$. Inaczej jeszcze $r^2 - 2r_0 r - 2r_0 h = 0$ i ostatecznie $r = r_0 [1 + \sqrt{1 + 2h : r_0}] = r_0 [1 + \sqrt{1 + v^2 : gr_0}]$. Zatem odkształcenia pręta nieważkiego rosną wraz z szybkością masy uderzającej. Gdy $v = 0$, a więc gdy pręt obciążymy z nagłą siłą R o pełnym natężeniu, wtedy $r = 2r_0$. *Obciążenia osiowe lub gnące z nagłą przyłożone w pełnym natężeniu dają odkształcenia dwukrotnie wyższe od zwykłych, towarzyszących obciążeniu stopniowemu.* Wyznaczmy naprężenie dynamiczne σ_z . Przy uderzeniu podłużnym $\sigma_z = P : F = (R : F) r : r_0 = \sigma_{zo} [1 + \sqrt{1 + v^2 : gr_0}] = \sigma_{zo} [1 + \sqrt{1 + EFv^2 : gRL}]$, przy poprzecznym $\sigma_z = M_{MAX} : W = PL : 4W = (RL : 4W) r : r_0 = \sigma_{zo} [1 + \sqrt{1 + 48EIv^2 : gRL^3}]$. Stąd wniosek: *Naprężenia dynamiczne pręta nieważkiego uderzonego poprzecznie lub podłużnie są tym wyższe od zwykłych statycznych, im większa szybkość masy uderzającej, im wyższy współczynnik sprężystości podłużnej pręta i jego przekrój poprzeczny szerszy, natomiast im pręt dłuższy i masa uderzająca większa, tem naprężenia dynamiczne są mniejsze w stosunku do statycznych.* Wniosek powyższy wyraźnie podkreśla zgubny wpływ wszelkich zwężeń przekroju prętów narażonych na uderzenia. Podtoczenia, szyjki, zmiany nagłe przekroju skupiają poniekąd całe działanie uderzenia, powodując w przekrojach zwężonych nadmierny wzrost naprężeń. Zatem pręty uderzone nie mogą mieć zmian gwałtownych przekroju: wszelkie zwężenie dzieli pręt na

części — na pręty krótsze o mniejszej długości i słabszym przekroju, a więc z dwóch względów gorzej wytrzymające uderzenia.

W rozważaniach dotychczasowych wychodziliśmy z założenia, że masa ciała uderzonego nie daje żadnego sprzeciwu, nie zmienia szybkości v po uderzeniu w sposób nagły. Gdy owej masy nie można pominąć w stosunku do masy uderzającej — zjawiska mają nieco inny przebieg: po uderzeniu następuje gwałtowna strata szybkości $v = \sqrt{2gh}$. Masa uderzająca, łącznie z przekrojem pręta uderzonym otrzyma szybkość w : nabyta szybkość w udzieli się częściowo sąsiednim przekrojom i dalszym według pewnego, bliżej nieznanego prawa rozkładu szybkości odkształceń. Zazwyczaj czynimy założenie, zresztą zupełnie dowolne, że rozkład szybkości nabytych w chwili uderzenia, zachodzi wzdłuż pręta zupełnie tak samo jak rozkład odkształceń zwykłych, towarzyszących obciążeniu stopniowemu siłą ciężaru masy uderzającej, przyłożoną do środka przekroju uderzonego. Zatem w wypadku uderzenia podłużnego przekrój poprzeczny CC , gdziekolwiek w odległości x od górnego A obrany — otrzyma szybkość $w_x = wr_x : r_0$, gdzie przez r_x oznaczyliśmy wydłużenie górnej części pręta AC , pod działaniem siły R osiowej. Stąd $r_x = Rx : EF$, a zatem $w_x = wx : L$. W tem założeniu siła żywa całego pręta o masie $m = G : g$, różnej od zera

wyrazi się w postaci $\int_0^L \frac{1}{2} m w_x^2 dx : L = (\frac{1}{2} G : g L^3) \int_0^L x^2 dx = G w^2 : 6g$,

a przeto w chwili uderzenia pręt zachowuje się tak, jak gdyby trzecia część jego masy skupiona była w przekroju uderzonym. W myśl tego wniosku możemy masę pręta zastąpić masą $\frac{1}{3} m$, skupioną w środku dolnego przekroju. Tę masę zastępczą możemy niewątpliwie uważać, jako swobodną, zatem wychodząc z zasady ilości ruchu będziemy mieli $Rv : g = (R + \frac{1}{3} G) w : g$ czyli $w = Rv : (R + \frac{1}{3} G)$ gdzie G oznacza ciężar samego pręta. Ostatecznie więc ciężar R rozwinie siłę żywą $Rw^2 : 2g$, masa zastępcza da siłę żywą $Gw^2 : 6g$, a nadto ciężar R po uderzeniu obniży się o r , rozwinie przeto pracę Rr . Suma tych prac przemieni się w pracę sprężystą Π , możemy przeto wypisać równanie $[R + \frac{1}{3} G] w^2 : 2g + Rr = \Pi = Rr^2 : 2r_0$. Inaczej jeszcze po uwzględnieniu wartości dla w , będziemy mieli $[R + \frac{1}{3} G] R^2 v^2 : 2g [R + \frac{1}{3} G]^2 + Rr = Rr^3 : 2r_0$, to jest $r^2 - 2r_0 r - v^2 r_0 : g [1 + \frac{1}{3} G : R] = 0$, skąd $r = r_0 [1 + \sqrt{1 + v^2 : g r_0 (1 + G : 3R)}]$

— W podobny sposób w wypadku uderzenia poprzecznego obieramy w odległości x od prawej podpory przekrój bieżący $A_0 A_0$. Otrzyma on szybkość $w_x = wr_x : r_0$, gdzie przez r_x oznaczyliśmy strzałkę ugięcia tego przekroju, przyczem zgodnie z § 2 (str. 59 książki drugiej) $r_x = RL^2 (x - 4x^3 : 3L) : 16EI$. A przeto $w_x = [RL^2 (x - 4x^3 : 3L) : 16EI] w : [RL^3 : 48EI] = (3x - 4x^3 : L^2) w : L$. Wobec zupełnej symetrii obciążenia, siła

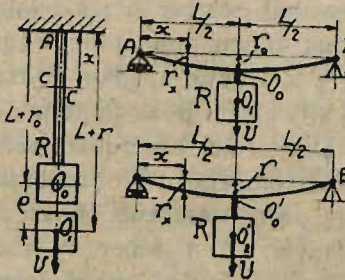
żywa całego pręta będzie $2 \int_0^{L/2} \frac{1}{2} m w_x^2 dx : L = \int_0^{L/2} m w^2 [9x^2 - 24x^4 : L^2 + 16x^6 : L^4] dx : L^3 = \frac{17}{35} G w^2 : 2g$. Tutaj więc pręt zachowuje się tak jakgdyby $\frac{17}{35}$ jego masy skupione było pośrodku pręta. Stosując i w danym wypadku zasadę ilości ruchu otrzymamy $Rv : g = (R + \frac{17}{35} G) w$, stąd $w = Rv : [R + \frac{17}{35} G]$. Wobec zupełnego podobieństwa wyników możemy wprost napisać, $r = r_0 [1 + \sqrt{1 + v^2 : g r_0 (1 + 17G : 35R)}]$. Oba powyższe wzory możemy połączyć, pisząc $r = r_0 [1 + \sqrt{1 + v^2 : g r_0 (1 + \mu G : R)}]$ gdzie $\mu = \frac{1}{3}$ dla uderzenia podłużnego, $\frac{17}{35}$ dla poprzecznego. Podobny zupełnie wzór, lecz różny wartością μ otrzymamy w ogólnym wypadku zawsze, ilekroć przesunięcie r rośnie proporcjonalnie do R . Stąd wnioskujemy, że *odkształcenia pręta ważkiego o stałym przekroju, uderzonego poprzecznie, lub podłużnie są tym mniejsze, im większa masa pręta*. Pozostałe wnioski wyprowadzone dla prętów nieważkich nie tracą swej mocy obowiązującej. Wynika to wprost z samej postaci wzoru.

W rozważaniach powyższych badaliśmy sam przebieg uderzenia nie troszcząc się o zjawiska następcze, obecnie należy uzupełnić i rozszerzyć zakres naszych badań, rozpatrując:

§ 4. Drgania sprężyste. Naprężenia dynamiczne ciała uderzonego przechodzą zwykłą miarę naprężeń, jakie wywołuje ciężar R , działając w sposób statyczny, w postaci masy zawisłej na końcu pręta pionowego, lub pośrodku pręta poziomego. Weszła tu w grę siła żywa spadku, rodząc owe naprężenia nadmierne. Po wygaśnięciu tej siły ciężar pozostanie w dotyku z prętem, działając więc będzie już tylko statycznie, nie zdoła przeto utrzymać w napięciu sił sprężystych pręta odkształconego. Wobec braku równowagi nastąpi gwałtowne odkształcenie się pręta wsteczne: poszczególne jego przekroje podążą w kierunku odwrotnym. Ten wsteczny ruch sprężysty da nowy zasób siły żywej, która ponownie wytrąci pręt z równowagi odkształconej, a cały szereg zjawisk tylko co opisanych rozpocznie się od nowa. Słowem pręt pocznie drgać sprężysto jak struna, odkształcając się w obie strony szeregiem odchyżeń od położenia właściwej równowagi. Teoretycznie drgania sprężyste powinny trwać bez końca, w istocie jednak ich energia wyczerpuje się z wolna na tle tarcia międzycząsteczkowego i innych czynników gładzących. Cały ten obszar zjawisk wymaga głębszego poznania. Przedewszystkiem rozpatrujemy:

§ 5. Drgania właściwe, czyli swobodne, zachodzące bez udziału czynników hamujących. Ten rodzaj drgań powstaje po uderzeniu. Weźmy pod uwagę dwa wyżej rozpatrywane wypadki pręta pionowego i poziomego z ciężarem R opartym o przekrój tylko co uderzony. Jak wyżej przez r_0 oznaczamy zwykle statyczne obniżenie się przekroju obciążonego ciężarem R . Dla

pręta pionowego (Rys. 47) będzie to wydłużenie $r_0 = RL : EF$ pierwotnej odległości środka ciężkości O_0 ciężaru od przekroju górnego A , natomiast dla pręta poziomego $r_0 = RL^3 : 48 EI$ stanowi strzałkę środkową (Rys. 48). Obie wartości r_0 odpowiadają stanom trwałe-równowagi odkształconej. Te stany nazwiemy krótko-stanami równowagi statycznej. Po uderzeniu masy R , lub pod działaniem siły V zgnąta przyłożonej i odjętej odkształcenia wzrosną do r (Rys. 47 i 48) i po chwilowym wygaśnięciu ruchu cząsteczek, nastąpią odkształcenia wsteczne ku położeniu równowagi statycznej. Uchwycimy jakikolwiek moment tego ruchu i oznaczmy chwilową odległość środka przekroju obciążonego siłą R od położenia równowagi statycznej, przez z . Dodatkowo wartości z odliczać będziemy w kierunku działania siły R . W założeniu zupełnego braku czynników hamujących, ruch ten zachodzi pod działaniem sił sprężystych pręta, oraz siły R . Te siły dadzą przyspieszenie $d^2z : dt^2 = z''$. Siły sprężyste będą niewątpliwie równe $(r_0 + z) EF : L = (r_0 + z) R : r_0 = R(1 + z : r_0)$ dla pręta pionowego, oraz $(r_0 + z) 48 EI : L^3 = (r_0 + z) R : r_0 = R(1 + z : r_0)$ dla poziomego, w obu przeto wypadkach, możemy napisać, pomijając masę pręta wobec masy $R : g$, równanie ruchu w postaci $Rz'' : g = R - R(1 + z : r_0) = - Rz : r_0$, jako że siły sprężyste przy ruchu wstecznym są oczywiście skierowane ku górze, a więc ujemne. Stąd bez-



Rys. 47 i 48.

pośrednio $z'' = -n^2z$, gdzie $n^2 = g : r_0$. Całką tego równania $z = A \sin nt + B \cos nt$. Wyznamy stałe całkowania. Czas poczynamy liczyć od punktu zwrotnego, zatem wartości początkowej $t=0$ odpowie $z_0 = r - r_0 = z$, oraz $v_0 = [dz : dt]_{t=0} = z'_0 = 0$, jako że dla punktu zwrotnego szybkość przechodzi przez zero. Stąd otrzymamy równanie warunkowe $z = B$ oraz $0 = An$, a zatem $z = r_0 \cos nt$. Wzór tylko co otrzymany wskazuje, że ruch jest okresowy. Skrajne wartości z zawarte są w granicach

$\pm z = \pm (r - r_0)$, a okres powrotu tożsamościowych wartości z wynosi $T = 2\pi : n = 2\pi \sqrt{r_0 : g}$. Słowem będą to drgania okresowe o rozwarości $\lambda = 2z = 2(r - r_0)$. Okres drgań podłużnych $T = 2\pi \sqrt{RL : gEF}$, poprzecznych $T = 2\pi \sqrt{RL^3 : 48 gEI}$, a przeto: *okres drgań właściwych pręta prostego o stałym przekroju, dźwigającego ciężar, jest tym wyższy im większa długość pręta, masa ciężaru znaczniejsza, im przekrój pręta słabszy i mniejszy współczynnik sprężystości podłużnej tworzywa pręta.*

Zupełnie te same wyniki otrzymamy, wychodząc z zasady zachowania energii. Energia potencjalna układu odpowiadająca odkształceniu $r_0 + z$ składa się z pracy sprężystej, przynależnej do owego odkształcenia. Należy od niej odjąć stratę energii położenia ciężaru R , powstałą na tle obniżenia

się jego środka ciężkości o z , czyli dodać energję Rz . Ta praca sprężysta równa jest $\frac{1}{2} P_z (r_0 + z)$, gdzie P_z oznacza wrzekomą siłę statyczną, dającą odkształcenie $r_0 + z$. Dla pręta pionowego będziemy mieli $P_z = EI (r_0 + z) : L$, dla poziomego $P_z = 48 EI (r_0 + z) : L^3$.

W obu wypadkach $P_z = R (r_0 + z) r_0$, a przeto energia potencjalna będzie równa $R (r_0 + z)^2 : 2r_0 - Rz$. Energia ruchu układu złożona jest z energii ruchu ciężaru R oraz energii ruchu cząsteczek samego pręta. Pierwsza wynosi $Rz^2 : 2g$, drugą w myśl założenia masy pręta równej zero możemy pominąć, co zresztą nie pociąga za sobą wyraźnego błędu w tym wypadku, gdy masa pręta jest nieznaczna w stosunku do masy $R : g$. A zatem w myśl zachowania energii: $Rz^2 : 2g + R (r_0 + z)^2 : 2r_0 - Rz = Rz^2 : 2g + Rz^2 : 2r_0 + \frac{1}{2} Rr_0 = \text{stałej}$, stąd różniczkując otrzymamy $Rz'z'' : g + Rz'z' : r_0 = 0$, a więc to samo równanie różniczkowe $z'' = -n^2z$ co i poprzednio. Inaczej jednak rzecz się ma, gdy masę pręta weźmiemy pod uwagę, w tym bowiem wypadku energia kinetyczna pręta pominąć się nie da. Stanowi to trudność poważną, nie znamy bowiem rodzaju drgań poszczególnych cząstek pręta. Zazwyczaj określamy je w sposób czysto doświadczalny, lub opieramy się na założeniu, z którego już korzystaliśmy poprzednio, przy rozważaniu odkształceń prętów uderzonych.

To założenie dało wprost siłę żywą pręta ważkiego przyczem okazało się, iż można było uwzględnić w obu rozpatrywanych wypadkach siłę żywą pręta o stałym przekroju, skupiając masę zastępczą $\mu G : g$ w środku przekroju, gdzie działa siła R . A zatem siłę żywą układu należy wzbogacić o $\mu Gz^2 : 2g$, czyniąc $\mu = \frac{1}{3}$ dla pręta pionowego i $\frac{1}{15}$ dla poziomego. W myśl zasady zachowania energii będziemy mieli $[R + \mu G] z'^2 : 2g + R (r_0 + z)^2 : 2r_0 - Rz = (R + \mu G) z'^2 : 2g + Rz^2 : 2r_0 + \frac{1}{2} Rr_0 = \text{stałej}$, stąd różniczkując otrzymamy: $(R + \mu G) z'z'' : g + Rz'z' : r_0 = 0$ i po skróceniu przez z' , ostatecznie $z'' = -n^2z$, jak poprzednio, z tą jednak różnicą, że $n^2 = g : r_0 (1 + \mu G : R)$. Wszystkie więc rozważania dawniejsze zachowują swą moc obowiązującą. I tu również równanie ruchu będzie $z = c \cos nt$, gdzie $z = r - r_0$, rozwartość drgań pozostanie ta sama, zmieni się tylko okres $T = 2\pi : n = 2\pi \sqrt{r_0 (1 + \mu G : R) : g}$, rosnąc wraz z masą samego pręta. Poza tem niewątpliwie wszystkie poprzednie wnioski są również słuszne i w danym wypadku. Gdy $R = 0$ powyższy wzór wyznacza okres drgań pręta wolnego, nieobciążonego ciężarem R , czyli *okres drgań właściwych pręta o stałym przekroju odciążonego*. Dla pręta pionowego będzie to $T = 2\pi \sqrt{LG : 3gEI}$, dla poziomego $T = 2\pi \sqrt{17L^3G : 1680gEI}$.

§ 6. *Drgania zamierające*: Drgania prętów, pogrążonych w ośrodku hamującym zamierają zwolna. Tak samo działa tarcie wewnętrzne międzycząsteczkowe, rozwijając siłę oporową Q . Prawa zmienności sił Q —

oporowych ośrodków hamujących nie są dostatecznie zbadane, zazwyczaj przeto zakładamy, że $Q = -qz'$, jest proporcjonalne do szybkości, a współczynnik q zależy od postaci ciała drgającego. Ta siła hamująca daje sprzeciw siłom czynnym, możemy przeto wypisać równanie zasadnicze w postaci: $(R + \mu G)z'' : g = -Rz : r_0 - qz'$. Inaczej jeszcze $z'' + 2mz' + n^2z = 0$, gdzie postaremu $n^2 = g : r_0 (1 + \mu G : R)$, oraz $2m = qg : (R + \mu G)$. Całka tego równania $z = [A \sin t \sqrt{n^2 - m^2} + B \cos t \sqrt{n^2 - m^2}] e^{-mt}$. I tu znów przy $t = 0$ mamy jak dawniej $z_0 = z$, oraz $z'_0 = 0$, możemy przeto każdorazowo wyznaczyć stałe całkowania. Obecność mnożnika e^{-mt} stale malejącego z biegiem czasu, wyraźnie podkreśla zamieranie drgań. Rozwartość drgań zmniejsza się stale, dążąc do zera wraz z owym mnożnikiem. Są to więc drgania zamierające. Ich okres $T_z = 2\pi : \sqrt{n^2 - m^2} = 2\pi : n \sqrt{1 - m^2 : n^2}$ zależy od m , a więc od oporu ośrodka, a mianowicie — *okres drgań zamierających pręta wąskiego o stałym przekroju wzrasta wraz z oporem ośrodka hamującego*. Opór powietrza jest nader słaby — praktycznie równy zeru, zatem dla tego ośrodka $T_z \approx T$. Jest to więc ośrodek prawie obojętny, natomiast dla cieczy lepkich m posiada wartości dość znaczne, a nawet może się zdarzyć, że $1 - m^2 : n^2$ będzie równe zeru. W tym wypadku okres drgań T_z wzrasta do nieskończoności, a gdy $m > n$ — przestaje istnieć zupełnie, ruch przestaje być okresowym: drgania są niemożliwe, choć nawet i w tych ośrodkach zachodzić mogą, jako —

§ 7. **Drgania wymuszone**, wywołane działaniem sił zmiennych okresowo. Tego rodzaju siły mogą dajmy na to działać na górny przekrój A pręta pionowego, lub też na podstawę, czyli odrazu i jednakowo na obie podpory A i B pręta poziomego. W obu wypadkach siły te powodują drgania przekrojów oporowych układu według pewnego prawa, które najprościej możemy wyrazić w postaci $z_1 = a \sin bt$. I tu, jak dawniej R oznacza ciężar na pręcie, G wagę samego pręta, którą chcemy uwzględnić w postaci masy zastępczej $\mu G : g$, skupionej w przekroju obciążonym. Łączna masa ciężaru i pręta da siłę bezwładności $(R + \mu G)z'' : g$, stawiając opór siłom czynnym. Nadto pośrodku przekroju obciążonego działa siła R , oraz sprzeciw ośrodka hamującego $-qz'$, wreszcie wypadkowa sił sprężystych, które w danym wypadku wyrażą się w postaci $R(r_0 + z + z_1) : r_0$, jako, że przesunięciu z towarzyszy przesunięcie z_1 , przekrojów oporowych, wspólne dla całego ustroju, a pochodzące od działania sił czynnych. A zatem $(R + \mu G)z'' : g = R - R(r_0 + z + z_1) : r_0 - qz'$, inaczej jeszcze $z'' + 2mz' + n^2z + p \sin bt = 0$, gdzie po staremu $2m = qg : (R + \mu G)$, $n^2 = g : r_0 (1 + \mu G : R)$, oraz $p = ag : r_0 (1 + \mu G : R) = an^2$. Całka tego równania $z = [A \sin t \sqrt{n^2 - m^2} + B \cos t \sqrt{n^2 - m^2}] e^{-mt} - [p(n^2 - m^2) \sin bt -$

— $2mb\phi \cos bt$] : $[(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2]$. Pierwszy wyraz tego wzoru daje dobrze nam znane drgania zamierające z_s , drugi stanowi o drganiach innego rodzaju powstających na tle drgań z_1 przekrojów oporowych. Są to drgania *wymuszone* z_w . Łącznie z drganiami zamierającymi dadzą one złożone drgania przekroju $z = z_s + z_w$. Oznaczmy przez $C \cos w = -p(n^2 - b^2) : [(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2]$, $-C \sin w = 2mb\phi : [(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2]$, przyczem oczywiście $C = -\sqrt{p^2(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2\phi^2} : [(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2] = p : \sqrt{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2} = an^2 : \sqrt{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2} = -an^2 \sin w : 2mb$, oraz $\operatorname{tg} w = 2mb\phi : (n^2 - b^2)$, a otrzymamy $z_w = C(\sin bt \cos w - \cos bt \sin w) = C(\sin bt - w)$. Z tego wzoru wynika bezpośrednio, że okres drgań wymuszonych $T_w = 2\pi : b$, a zatem *okres drgań wymuszonych wąskiego pręta o stałym przekroju, jest tożsamościowy z okresem drgań przekrojów oporowych pręta, podległych bezpośrednio działaniu sił okresowych wymuszających drgania*. Okres drgań właściwych $T = 2\pi : n$, zatem, gdy $n > b$, to jest gdy $T < T_w$, wtedy $w > 0$, gdy zaś $n < b$, to jest $T > T_w$, wtedy $w < 0$, co zresztą widać bezpośrednio ze wzoru dla w . Stąd wniosek bezpośredni, że: *gdy okres drgań właściwych wąskiego pręta, o stałym przekroju jest mniejszy od okresu drgań wymuszonych, wtedy drgania wymuszone spóźniają się w stosunku do drgań przekrojów oporowych pręta, podległych bezpośrednio działaniu sił wymuszających, w wypadku nierówności okresów odwrotnie—wyprzedzają*.

W szczególnem wypadku, gdy $T = T_w$, to jest gdy $n = b$, wtedy $\operatorname{tg} w = \infty$, $w = +\frac{1}{2}\pi$. Stąd wniosek, że *w razie równości okresów drgań właściwych i wymuszonych, drgania wymuszone zachodzą o ćwierć okresu później lub wcześniej od drgań przekrojów oporowych pręta*. A zatem środek przekroju, obciążonego ciężarem R , przechodzi przez położenie średnie, przynależne do odkształcenia r_0 , — gdy przekroje oporowe znajdują się w jednym ze skrajnych odchyień. Z kolei biorąc pod uwagę wzór dla C z łatwością zauważymy, że przy b nieznacznem— $w \approx 0$, $\operatorname{tg} w : 2mb \approx \sin w : 2mb \approx 1 : n^2$, a zatem $C \approx a$. *Rozwartość drgań wymuszonych wąskiego pręta o stałym przekroju przy dużym okresie drgań wymuszonych, zbliża się wartościowo, do rozwartości drgań przekrojów oporowych podległych bezpośrednio działaniu sił wymuszających*. Zatem, gdy siły wymuszające rodzą drgania powolne, to wtedy przekrój, obciążony ciężarem, drga tak samo jak i przekroje oporowe, gdy drgania tych przekrojów są szybkie, co odpowiada dużym wartościom b , rozwartość drgań wymuszonych C dąży do zera. Stąd wniosek bezpośredni: *Siły wymuszające krótko okresowe, dają nieznaczące rozwartości drgań pręta wąskiego o stałym przekroju*.

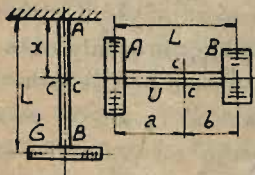
Czyniąc pochodną $dC : db = 2an^2b(b^2 - n^2 + 2m^2) : \sqrt{(n^2 - b^2)^2 + 4m^2b^2} = 0$ z łatwością wyznaczmy skrajną wartość C dla szczególnej wartości $b_0 =$

$= \sqrt{n^2 - 2m^2}$, dającej zarazem maximum rozwartości drgań wymuszonych. Wobec znikomości m dla zwykłych ośrodków, a zwłaszcza dla powietrza: $b_0 \approx n$. Stąd prosty wniosek, że rozwartość drgań wymuszonych wąskiego pręta o stałym przekroju jest tym większa, im bardziej zbliżają się do siebie okresy drgań właściwych i wymuszonych tego pręta. Ten wzrost rozwartości drgań wymuszonych występuje tym silniej im mniejszą wartość m ujawnia dany ośrodek. Przy $m=0$ oraz $b=n$ mamy $C=\infty$ — to znaczy, że drgania wymuszone dają pęknięcie pręta. Na tem polegają tak zwane:

§ 8. Oddźwięk sprężysty. To zjawisko występuje bardzo często w ustrojach technicznych i budowlanych, a zwłaszcza przy pracy silników, dających zazwyczaj drgania okresowe. Łatwo to udowodnimy zważywszy, że rozważania powyżej wyłożone, zachowują swą moc obowiązującą nawet i wtedy, gdy unieruchomimy przekroje oporowe pręta, a na przekrój obarczony ciężarem R , będziemy działali siłą okresową $P=u \sin \beta t$. Tego rodzaju siły dają ruchome masy silników tłokowych, zwłaszcza spalinowych. Zatem silnik tłokowy, ustawiony na belce poziomej pośrodku, poczyna się kołysać, wymuszając drgania poprzeczne, powtarzające się okresowo za każdym obrotem wału. Tutaj więc $\beta = \omega$, gdzie przez ω oznaczyliśmy stałą szybkość kątową wału silnika. Gdy okres drgań wymuszonych belki zrówna się z okresem jej drgań właściwych, rozwartość C wzrośnie niepomniernie, zagrażając całemu ustrojowi. Trzeba więc aby $n \neq \omega$, co można z łatwością uczynić zmieniając liczbę obrotów silnika lub przekrój belki, a więc dając inne wartości n lub ω . Podobne zjawiska oddźwięku sprężystego zachodzą podczas przemarszu wojska przez most, to też dla uniknięcia nadmiernego rozbujania mostu, zazwyczaj wojsko idzie tłumem bezładnym, a nie w szyku, zawsze bowiem obawiać się należy miarowego tupotu nóg, kroczących rytmicznie. Ten sam wynik sprawiają czasami przeciwwagi kół parowozu, spłaszczone bandaże kół wagonowych, a zwłaszcza miarowe uderzenia kół o styki szyn, nie dość równo ułożonych.

§ 9. Drgania wirowe. Weźmy pod uwagę nieważki pręt o stałym przekroju F i długości L . W górnym przekroju A pręt zamocowano, ciężką tarczę G nasadzono na koniec dolny B pręta i wywołano obrót tarczy o kąt φ_0 , działaniem chwilowem odpowiedniej pary sił. Po odjęciu pary odkształcającej, układ, pozostawiony samemu sobie, poczyna odkształcać się w kierunku wstecznym: cząsteczki tarczy nabierają rozpędu, przekraczają położenie równowagi pierwotnej, pręt skręca się nadal, póki jego siły sprężyste nie powstrzymają rozpędu tarczy. To samo zjawisko powtórzy się znowu, lecz już w kierunku odwrotnym i będzie się powtarzało okresowo — otrzymamy szereg skręceń, następujących po sobie, różnoskrętnych — nastąpią drgania wirowe pręta, podobne do ruchów wahadła ze-

garka kieszonkowego. Uchwyćmy jakikolwiek moment tego ruchu, odpowiadający pośredniej wartości kąta skręcenia $\varphi < \varphi_0$. Siły sprężyste, przynależne do tego skręcenia, dadzą moment $M = GI_0 \varphi : L$ u dolnego końca pręta. Weźmy go wyłącznie pod uwagę, pomijając rozciąganie pręta, wywołane ciężarem tarczy i wypiszmy równanie ruchu obrotowego tarczy w postaci $R\varphi'' + GI_0 \varphi : L = 0$, w którym R oznacza jej moment bezwładności względem osi, a $\varphi'' = d^2\varphi : dt^2$. Inaczej jeszcze $\varphi'' = -n^2\varphi$, gdzie $n^2 = GI_0 : RL$. Całka tego równania $\varphi = A \sin nt + B \cos nt$, a stałą całkowania należy wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Załóżmy $t = 0$ dla początkowej wartości kąta φ_0 , a wtedy dla $t = 0$ będziemy mieli $\varphi' = d\varphi : dt = 0$, jako że początkowa szybkość tarczy ma wartość równą zero. Stąd bezpośrednio $B = \varphi_0$ oraz $An = 0$ i ostatecznie $\varphi = \varphi_0 \cos nt$. Są to więc drgania okresowe sprężyste, wirowe.



Rys 50 i 51.

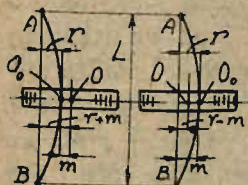
Okres ich $T_0 = 2\pi : n = 2\pi \sqrt{RL : GI_0}$. Załóżmy z kolei, że na oporowy przekrój górny A działa okresowy moment wymuszający. Ten moment okresowy da drgania tego samego rodzaju, przy których nastąpią skręcenia górnego przekroju oporowego o kąt $\varphi_1 = a \sin bt$. Załóżmy nadto, że opór ośrodka hamującego ruch wirowy jest jak wyżej proporcjonalny do szybkości według prawa $q\varphi'$, a otrzymamy nowe równanie ruchu: $R\varphi'' + q\varphi' + GI_0 : L + a \sin bt = 0$. Pozostaje nam jeszcze tylko uwzględnić masę pręta. W tym celu skorzystamy z poprzednio omówionego założenia, dotyczącego rozkładu szybkości mas pręta wąskiego. Szybkość kątowa w przekroju bieżącym cc , odległym o x od przekroju górnego, będzie w myśl tego założenia równa $\omega_x = x\varphi' : L$. Niech U oznacza moment bezwładności całego pręta względem osi obrotu, a wtedy siła żywa pręta będzie $\int_0^L \frac{1}{2} U \omega_x^2 dx : L = \frac{1}{2} U \varphi'^2 \int_0^L x^2 dx : L^3 = \frac{1}{6} U \varphi'^2$, możemy więc i w danym wypadku uwzględnić masę pręta, dodając trzecią część jego momentu bezwładności do momentu bezwładności tarczy. W ten sposób otrzymamy równanie ruchu $(R + \frac{1}{3}U)\varphi'' + q\varphi' + GI_0 : L + a \sin bt = 0$. Inaczej jeszcze $\varphi'' + 2m\varphi' + n^2\varphi + p \sin bt = 0$ gdzie $2m = q : (R + \frac{1}{3}U)$, $n^2 = GI_0 : L(R + \frac{1}{3}U)$, oraz $p = a : (R + \frac{1}{3}U)$. To samo równanie mieliśmy już wyżej w § 7, możemy przeto powtórzyć bez zmiany wszystkie poprzednie wnioski, które tu pomijamy dla uniknięcia powtarzania się. Zaznaczymy jedynie, że w danym wypadku drgania wymuszone wzrastają gwałtownie, gdy okresy drgań właściwych T_0 i wymuszonych zbliżą się wartościowo. I tu więc zachodzi zjawisko oddźwięku sprężystego, dla odróżnienia zwiemy go wirowym.

Rozważania powyższe z łatwością mogą być zastosowane (Rys. 51) do wału, dzwigającego obustronnie na końcach ciężkie tarcze zamachowe

Odpowiedni układ łożysk pozwala pominąć obciążenie gnące i rozpatrywać wał jako skręcany. Skręcimy tarczę A względem tarczy B o pewien kąt. Po odjęciu par skręcających układ pocznie się odkształcać sprężystość w kierunku odwrotnym, nastąpią drgania wirowe, tarcze będą się poruszały okresowo zawsze w przeciwnych kierunkach, a zatem niewątpliwie będzie istniał pewien pośredni przekrój cc , nie ulegający skręcaniu ani w tą ani w ową stronę. Oznaczmy odległości tego nieruchomego przekroju od osi tarcz A i B przez a i b , całą długość pręta przez L , biegunowy moment przekroju pręta przez I_0 , wreszcie przez A, B, U momenty bezwładności tarczy A i B oraz wałka względem osi obrotowej. Wobec zupełnego unieruchomienia przekroju cc , możemy obustronnie zastosować wzory poprzednio wyprowadzone, pisząc wartości odnośnych okresów drgań dla obu części układu: lewej i prawej w postaci $T_A = 2\pi : n_A = 2\pi \sqrt{a(A + \frac{1}{3}Ua : L) : GI_0}$, $T_B = 2\pi : n_B = 2\pi \sqrt{b(B + \frac{1}{3}Ub : L) : GI_0}$. Wobec tożsamości różnoskrętnych wahań tarcz $T_A = T_B$, czyli $a(A + \frac{1}{3}Ua : L) = b(B + \frac{1}{3}Ub : L)$, nadto $a + b = L$, a przeto mamy $aA + \frac{1}{3}Ua^2 : L = LB - Ba + \frac{1}{3}UL - \frac{2}{3}Ua + \frac{1}{3}Ua^2 : L$. Stąd bezpośrednio $a = (B + \frac{1}{3}U) L : (A + B + \frac{2}{3}U)$ oraz $b = (A + \frac{1}{3}U) L : (A + B + \frac{2}{3}U)$. Podstawiając te wartości otrzymamy okres drgań ustroju $T = T_A = T_B = 2\pi \sqrt{L(A + \frac{1}{3}U)(B + \frac{1}{3}U) : GI_0(A + B + \frac{2}{3}U)}$. W wypadku praktycznie najczęściej spotykanym wału o różnych średnicach należy we wzorach powyższych zamiast L podstawić długość zastępczą, wyliczoną w myśl następującego rozumowania. Każde zgrubienie wału zwiększa jego odporność sprężystą na skręcanie, a więc zmniejsza kąt skręcenie, który jak wiadomo jest proporcjonalny do długości i odwrotnie proporcjonalny do momentu biegunowego bezwładności przekroju, możemy przeto zgrubiony odcinek wału o średnicy d_i i długości l_i odrzucić, a na jego miejsce wstawić odcinek średnicy d_0 i długości $l = l_i d_0^4 : d_i^4$. W ten sposób otrzymamy całkowitą zastępczą długość wału $L = \sum l_i d_0^4 : d_i^4 + l_0$, gdzie d_0 oznacza średnicę, a l_0 długość którejkolwiek części wału. Wzór powyższy oddaje cenne usługi w zastosowaniu do wałów długich, a zwłaszcza do wałów przenoszących ruch silników okrętowych na śrubę. Gdy okres drgań silnika stanie się równym okresowi drgań właściwych T_0 wału, nastąpią gwałtowne drgania wirowe o wielkiej rozwartości, mogące wywołać pęknięcie wału. Nastąpi to wtedy niewątpliwie gdy silnik pracować ma przy $n = 60 : T_0$ obrotach na minutę, w tym wypadku nie pozostaje nic innego, jak tylko zmienić przekrój wału. Można go przytem śmiało zmniejszyć, a będzie mimo to bardziej wytrzymały ponieważ nie będzie działał nań odświtek sprężysty. Różnica stosunkowo dość nieznaczna—kilku obrotów na minutę wystarczy w zupełności, jak uczy doświadczenie. Podobne

zjawiska zachodzą również i przy wirowym ruchu turbin, gdzie nadto jeszcze występują zjawiska zupełnie innego rodzaju, a mianowicie tak zwane wyboczenie wirowe.

§ 10. **Wyboczenie wirowe wałków gibkich**, używanych w turbinach de Laval'a. Weźmy pod uwagę wałek o nieznacznym przekroju poprzecznym stałym. Oznaczmy przez I moment bezwładności przekroju wałka, przez L jego długość. Pośrodku wałek dźwiga ciężki wirnik (Rys. 52), ważący R kg. Środek masy wirnika O w ogólnym wypadku nie leży ściśle na osi wałka, tworząc w ten sposób lekką mimośrodkowość $O_0O = m$, zatem przy wirowaniu wałka pionowego w łożyskach A i B rozwija się



Rys. 52 i 53.

znaczną siłą odśrodkową, sprawiającą wygięcie wałka.

Położmy wałek poziomo na podporach umieszczonych tam, gdzie przedtem były łożyska, a więc u obu jego końców A i B . Pod ciężarem wirnika wałek się ugnie, dając strzałkę środkową r_0 równą $RL^3 : 48EI$, gdy wałek spoczywa na podporach przegubowej i rolkowej, lub $RL^3 : 192EI$, gdy wałek jest obustronnie osadzony. Oba wyniki możemy połączyć jednym wzorem, pisząc $r_0 = \mu RL^3 : EI$. Ustawmy wałek pionowo i nadajmy mu

szybki obrót. Masa wirnika rozwinię siłę odśrodkową Q , która da wygięcie pręta o strzałce środkowej $r = \mu QL^3 : EI$, gdzie μ zależy od sposobu osadzenia łożysk A i B . Dla łożysk wahlowych $\mu = 1/48$, dla stałych $\mu = 1/192$. W obu wypadkach otrzymamy, dzieląc bezpośrednio $r = Qr_0 : R$, co zresztą wypływa również i wprost z pierwszego prawa Hooke'a.

Wobec istnienia mimośrodkowości m wygięcie wirnika jest konieczne i zajęć musi w kierunku działania siły odśrodkowej Q , a więc w kierunku m . Inaczej mówiąc odcinki m i r ułożą się na jednej prostej, a środek masy wirnika O zajmie położenie nazewnątrz wypukłej odkształconej, jak to najlepiej zresztą uwypukla wspomniany wyżej rysunek. A przeto $Q = R\omega^2(r + m) : g$, gdzie przez ω oznaczyliśmy kątową szybkość wirowania. Stąd mamy $Rr : r_0 = R\omega^2(r + m) : g$ i ostatecznie otrzymamy dla strzałki ugięcia

wzór $r = r_0 m \omega^2 : (g - r_0 \omega^2)$. Daje on dla szybkości krytycznej $\omega_0 = \sqrt{g : r_0}$ nieskończoną wartość strzałki r , wyznacza przeto szybkość krytyczną ω_0 , przy której następuje wyboczenie wirowe wałka. Ta szybkość odpowiada okresowi jego obrotu $T = 2\pi : \omega_0 = 2\pi \sqrt{r_0 : g}$, równemu okresowi poprzecznych drgań właściwych wałka. Stąd wniosek, że: *nieważki pionowy gibki wałek o stałym przekroju, z osadzonym po środku wirnikiem, ulega wyboczeniu wirowemu, gdy okres jednego obrotu staje się równym okresowi drgań właściwych poprzecznych wałka.* Zatem wałek choćby najmocniejszy musi ulec pęknięciu przy tej krytycznej szybkości, o ile jednak zdołamy za pomocą odnośnych urządzeń powstrzymać poczynające się wyboczenie wi-

rowe i nagłem wstrząśnięciem zakłócić przebieg zjawiska, to wtedy możemy otrzymać ponowny stan równowagi, lecz już przy wyższych szybkościach kątowych $\omega > \omega_0$. Stwierdzają to doświadczenia bezpośrednio. Teoretycznie z łatwością wyjaśnimy istotę tego napozór zgoła niemożliwego zjawiska, zważywszy że wstrząśnienia, o których tylko co wyżej była mowa, powinny powtarzać się dopóty, póki mimośrodowość m nie ułoży się wewnątrz odkształconej, to jest pomiędzy odkształconą i pierwotną osią pręta na linii strzałki r , jak to najlepiej zresztą uwywukła (Rys. 53). Wtedy $Q = R\omega^2 (r - m) : g$, a przeto $R\omega^2 (r - m) : g = Rr : r_0$, stąd bezpośrednio $r = r_0 m \omega^2 : [r_0 \omega^2 - g] = m : [1 - g : r_0 \omega^2] = m : [1 - (\omega_0 : \omega)^2]$. Ten wzór wskazuje, że strzałka ugięcia dąży nawet do zera przy nieograniczonem wzrastaniu ω , co zresztą stwierdza doświadczenie. Stąd wnioskujemy, że: *pionowy g-bki wałek o stałym przekroju z osadzonym po środku wirnikiem może wirować bezpiecznie z szybkością kątową wyższą od krytycznej.* Ze wzoru $\omega_0 = \sqrt{\mu E / g : RL^3}$, zauważymy z łatwością, że *pionowy g-bki wałek o stałym przekroju z osadzonym po środku wirnikiem ma szybkość krytyczną tym niższą, im mniejszą posiada wartość moment bezwładności przekroju wałka.* Wałki te winny być przeto istotnie możliwie najbardziej giętkie, o ile pracować mają jak w turbinach de Leval'a przy szybkościach kątowych wyższych od krytycznej.

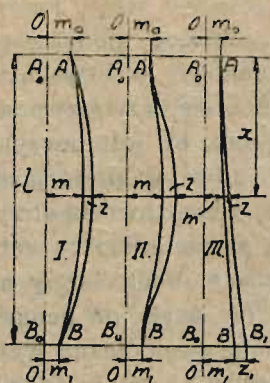
Inaczej nieco zachodzą te zjawiska przy wirowaniu giętkiego wałka poziomego. Wobec oddziaływania okresowego siły ciężaru wirnika R na wałek, strzałka r ulega zmianom okresowym przez czas jednego obrotu wałka, stanowi przeto zmienną zależną od t , zatem prócz siły odśrodkowej $R\omega^2 (r + m) : g$ w środku wirnika będzie działała dodatkowa siła bezwładności $-Rr'' : g$, gdzie przez r'' oznaczyliśmy przyspieszenie $d^2r : dt^2$ zmian okresowych strzałki r . Obie te siły leżą niewątpliwie na osi strzałki r . Ten sam kierunek ma również i sprężysty $P = E/r : \mu L^3$ przynależny do strzałki r , natomiast siła ciężaru wirnika tworzy z osią r kąt okresowo zmienny. Zgódźmy się liczyć czas t od chwili dolnego przejścia strzałki r przez pionową płaszczyznę, przechodzącą przez pierwotną oś AB wałka nieodkształconego. W moment t siła pionowa R utworzy kąt ωt z osią strzałki r , dając na osi tej strzałki składową $R \cos \omega t$. Wychodząc z zasady d'Alemberta możemy napisać, że $-Rr'' : g + R\omega^2 (r + m) : g + R \cos \omega t - E/r : \mu L^3 = 0$, inaczej jeszcze $r'' + n^2 r - g \cos \omega t - \omega^2 m = 0$, gdzie $n^2 = E/g : \mu RL^3 - \omega^2 = g : r_0 - \omega^2$. Całka tego równania $r = A \sin nt + B \cos nt + p \cos \omega t + \omega^2 m : n^2$, gdzie $p = g : (n^2 - \omega^2)$, zawiera dwie stałe całkowania. Te stałe mogą być wyznaczone w następujący sposób. Oznaczmy przez r_1 wartość strzałki r dla momentu początkowego, a otrzymamy $r = B + p + \omega^2 m : n^2$. Nadto dla $t_2 = \pi : 2n$ niech będzie $r = r_2$, a zatem $r_2 = A + p \cos(\omega \pi : 2n) + \omega^2 m : n^2$. Z tych wzorów od razu się daje spostrzec, że gdy $n^2 = \omega^2$, lub $n^2 = 0$ strzałka r staje się nieskończenie wielką — na-

stępuje wyboczenie wirowe. Zatem dla wałka gibkiego poziomego mamy aż dwie krytyczne szybkości $\omega_1^2 = n^2 = g : r_0 = \omega_0^2$, to jest $\omega_1 = \sqrt{g : 2r_0} = \omega_0 : \sqrt{2} \approx 0,7 \omega_0$, oraz ω_0 oraz $\omega_0 = g : r_0$. Stąd prosty wniosek, że *niższa krytyczna szybkość kątowa poziomego wałka gibkiego o stałym przekroju, z osadzonym pośrodku wirnikiem, stanowi 70% szybkości kątowej krytycznej tego samego wałka, lecz wirującego pionowo.*

W wypadku kilku wirników osadzonych na tym samym wałku bardzo dobre wyniki daje wzór Dunkerley'a potwierdzony doświadczalnie. Wyznacza on szybkość kątową krytyczną ω_0 w postaci $1 : \omega_0^2 = \Sigma (1 : \omega_i^2)$ gdzie ω_i oznacza szybkość krytyczną tego samego wałka, wirującego z jednym tylko wirnikiem i , a dodawaniem objąć należy wszystkie wartości ω_i , przynależne do i wirników.

§ 11. Wyboczenie wirowe wałków sztywnych. Weźmy pod uwagę pręt o stałym przekroju F i długości L , ustawiony pionowo w łożyskach. Pręt ten wiruje z szybkością kątową ω , i jak doświadczenie uczy przy pewnej krytycznej szybkości ω_0 , ulega wyboczeniu wirowemu, to jest poczyna drgać, wygina się i pęka. Poprowadźmy przez oś obrotową pręta jakąkolwiek płaszczyznę, wirującą wraz z wałem. Wobec niemożliwości otrzymania zupełnej jednorodności tworzywa i niezupełnej prostoliniowości wału środki mas poszczególnych jego przekrojów poprzecznych będą leżały na krzywej przestrzennej, wogóle różnej od osi obrotu OO , czyli od geometrycznej osi panewek. Ta krzywa środków mas—istotna oś podłużna wału w rzucie na tylko co poprowadzoną płaszczyznę da krzywą znikomo odchylającą się od osi obrotu, zakładamy bowiem, że wał jest praktycznie doskonały, czyli w granicy naszych środków technicznych prosty i z jednolitego tworzywa odkuty. Istnienie mimo to pewnych krzywizn przypisać należy nieudolności naszych środków technicznych. W odległości x od górnej panewki obieramy dowolny przekrój poprzeczny o środku masy rzutującym się na owej płaszczyźnie w końcowym punkcie odcinka m , gdy pręt pozostaje w spoczynku. Początek odcinka m , składowej istotnej strzałki pierwotnej wału leży na osi obrotu OO , koniec stanowi zarazem rzut środka masy elementarnej płytki, jaką otrzymamy, prowadząc sąsiedni przekrój odległy o dx od poprzedniego poprowadzonego. Gdy pręt pocznie wirować masa tej płytki $\delta F dx$, gdzie przez δ oznaczyliśmy iloraz z ciężaru właściwego tworzywa przez g , rozwinie się odśrodkową. Łączne działanie wszystkich tych sił elementarnych wygnie pręt, a ostatecznie linja wygięcia ułoży się w rzucie na prowadzonej uprzednio płaszczyźnie w postaci nowej krzywej nieco bardziej wklęsłej w stosunku do osi obrotu OO . Zatem pierwotna składowa strzałki m wzrośnie do $y = m + r$, jak to najlepiej zresztą uwypuklają (Rys. 54, 55 i 56).

Rzut siły odśrodkowej masy $\delta F dx$ na ową płaszczyznę będzie $\omega^2 \delta F y dx$, możemy przeto cały pręt rozpatrywać, jako obciążony siłami gnącymi rozłożonymi w stosunku $\omega^2 \delta F y$ na jednostkę długości pręta, a zatem w myśl § 22 księgi drugiej możemy wypisać równanie gięcia w postaci $EI y'''' = \omega^2 \delta F y$, gdzie I oznacza stały moment bezwładności przekroju wału. Oznaczmy przez $n^4 = \omega^2 \delta F : EI$, a wtedy $y'''' = n^4 y$. Całka tego równania $y = Ae^{nx} + Be^{-nx} + C \sin nx + D \cos nx$ zawiera cztery stałe całkowania, które należy wyznaczyć z warunków zamocowania wału. Przedewszystkiem założymy, że oba łożyska A_0 i B_0 , należą do typu wahlowych (Rys. 54), tutaj więc przy $x=0$ mamy $y=m_0$, oraz $y_0''=0$, ponieważ łożysko nie da momentu odpornego, któryby mógł zrównoważyć moment $M_0 = EI y_0''$. To samo będzie dla $x=l$, gdzie odpowiednienie wartości $y_1=m_1$, oraz $y_1''=0$. Te warunki



Rys. 54, 55, 56

dadzą równania $m_0 = A + B + D$, $0 = A + B - D$, $m_1 = Ae^{nl} + Be^{-nl} + C \sin l + D \cos l$, $0 = Ae^{nl} + Be^{-nl} - C \sin l - D \cos l$. Z pierwszych dwóch równań wynika, że $D = \frac{1}{2} m_0$, oraz $A + B = \frac{1}{2} m_0$. Dodając dwa ostatnie równania będziemy mieli $Ae^{nl} + Be^{-nl} = \frac{1}{2} m_1$. Stąd bezpośrednio $A = \frac{1}{2} (m_1 - m_0 e^{nl}) : (e^{nl} - e^{-nl}) = (m_1 - m_0 e^{nl}) : 4 \sin hnl$, $B = \frac{1}{2} (m_0 e^{-nl} - m_1) : (e^{nl} - e^{-nl}) = (m_0 e^{-nl} - m_1) : 4 \sin hnl$. Nadto dwa ostatnie równania dają bezpośrednio $C \sin nl + D \cos nl = \frac{1}{2} m_1$ skąd $C = \frac{1}{2} (m_1 - m_0 \cos nl) : \sin nl$. Ten ostatni współczynnik staje się nieskończenie wielkim, a nim i y przy $\sin nl = 0$, to jest przy $nl = \pi$ stąd

$\pi^4 = n^4 l^4 = \delta F \omega_0^2 l^4 : EI$. Oznaczmy masę wału przez $\mu = \delta F l$, a otrzymamy wartość krytyczną szybkości kątowej $\omega_0 = \pi^2 \sqrt{EI : \mu l^3}$, przy której wał niewątpliwie ulegnie wyboczeniu. Będzie to szybkość krytyczna najniższa, istnieją bowiem szybkości krytyczne wyższych rzędów, przynależne do dalszych pierwiastków równania $\sin nl = 0$ to jest do wartości $nl = 2\pi, 3\pi$ i t. d. Stąd wniosek bezpośredni, że szybkości krytyczne mają się jak 1:4:9... i t. d. to jest $\omega'_0 = 4\omega_0$, $\omega''_0 = 9\omega_0$ i t. d.

Z kolei dla łożysk nieruchomych (Rys. 55) będziemy mieli przy $x=0$ wartości $y_0 = m_0$, $y'_0 = \Theta_0$, oraz przy $x=l$ wartości $y_1 = m_1$, $y'_1 = \Theta_1$ ponieważ łożyska nawet najściślej osiowo ustawione, umożliwiają zawsze pewne nieznaczne zresztą pochylenia się wału Θ_0 i Θ_1 w panewkach. Stąd otrzymamy warunki $m_0 = A + B + D$, $\Theta_0 : n = A - B + C_1$, $m_1 = Ae^{nl} + Be^{-nl} + C \sin nl + D \cos nl$, $\Theta_1 : n = Ae^{nl} - Be^{-nl} + C \cos nl - D \sin nl$. Z pierwszych dwóch równań mamy bezpośrednio $D = m_0 - A - B$, $C = \Theta_0 : n - A + B$, zatem z dwóch ostatnich po podstawieniu otrzymamy $MA + NB = V$, $PA + QB = W$, skąd $A = (QV - NW) : \Delta$, oraz $B = (MW - PV) : \Delta$, gdzie dla skrócenia oznaczyliśmy: $M = e^{nl} - \sin nl -$

— $\cos nl$, $N = e^{nl} + \sin nl - \cos nl$, $P = e^{nl} + \sin nl - \cos nl$, $Q = -e^{nl} + \sin nl + \cos nl$, $V = m_0 - (\Theta_0 : n) \sin nl - m_0 \cos nl$, $W = \Theta_1 : n - (\Theta_0 : n) \cos nl + m_0 \sin nl$. Z tych wzorów wynika, że y staje się nieskończenie wielkim, gdy wyznacznik $\Delta = MQ - NP = 0$. Po zebraniu wyrazów $\Delta = 2(e^{nl} + e^{-nl}) \cos nl - 4 = 4[\cosh nl \cos nl - 1] = 0$. Równanie $\cosh nl \cos nl = 1$ ma pierwiastki $nl = 1,518\pi \approx 3/2\pi$, $nl \approx 5/2\pi$, $nl \approx 7/2\pi \dots nl \approx 3/2(2n+1)\pi$. Zatem dla najniższej wartości otrzymamy najniższą szybkość kątową krytyczną $\omega_0 = 3/4\pi \sqrt{EI : \mu L^3}$. Szybkości wyższych rzędów będą rosły w stosunku $5^2 : 3^2$, $7^2 : 3^2$ t. d. to jest $\omega'_0 = (5/3)^2 \omega_0$, $\omega''_0 = (7/3)^2 \omega_0$ i t. d.

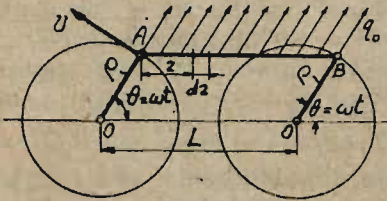
Wreszcie, gdy wał tkwi w nieruchomem łożysku A , a drugi koniec wału swobodnie wiruje niczem nie podparty (Rys. 56) będziemy mieli dla $x=0$ wartości $y_0 = m_0$, $y'_0 = \Theta_0$, a dla $x=l$ wartości $y_1'' = 0$, oraz $y_1''' = 0$ ponieważ w skrajnym swobodnym przekroju wału nie może pa nować ani moment $M_1 = Ely_1''$, ani siła tnąca $T_1 = Ely_1'''$. Te warunki dają $m_0 = A + B + D$, $\Theta_0 : n = A - B + C$, $Ae^{nl} + Be^{-nl} - C \sin nl - D \cos nl = 0$, $Ae^{nl} - Be^{-nl} - C \cos nl + D \sin nl = 0$. I tu znów $D = m_0 - A - B$, $C = \Theta_0 : n - A + B$, a nadto z dwóch ostatnich równań po podstawieniu otrzymamy $MA + NB = V$, $PA + QB = W$, stąd $A = (QV - NW) : \Delta$, $B = (MW - PV) : \Delta$, gdzie $\Delta = e^{nl} + \sin nl + \cos nl$, $N = e^{nl} - \sin nl + \cos nl$, $P = e^{nl} - \sin nl + \cos nl$, $Q = -e^{nl} - \sin nl - \cos nl$, $V = (\Theta_0 : n) \sin nl + m_0 \cos nl$, $W = (\Theta_0 : n) \cos nl - m_0 \sin nl$. I w danym wypadku wyboczenie wirowe nastąpi, gdy $\Delta = MQ - PN = -2(e^{nl} + e^{-nl}) \cos nl - 4 = -4(\cosh nl \cos nl + 1) = 0$. Najniższy pierwiastek tego równania $nl = 0,594\pi$ daje krytyczną szybkość pierwszego rzędu $\omega_0 = 0,353\pi^2 \sqrt{EI : \mu L^3}$. Istnienie szybkości krytycznych pierwszego i wyższych rzędów zostało stwierdzone doświadczalnie dla wszystkich trzech powyżej rozpatrywanych wypadków osadzenia wału w łożyskach. Gdy szybkość kątowa zbliża się do ω_0 wał poczyna wirować niespokojnie: bije na boki tem silniej im bardziej zbliżamy się do ω_0 , skoro ją jednak raz przekroczymy przy sztucznem powstrzymaniu wyboczenia, wał znowu wiruje spokojnie. To samo się powtarza i przy następnych szybkościach krytycznych. Zazwyczaj wały sztywne pracują poniżej ω_0 . Godzi się tu zaznaczyć, że we wszystkich trzech powyżej rozpatrywanych wypadkach wał może dźwigać szereg wirników. Nie zwiększa to jego momentu bezwładności, natomiast pomnaża masę wału, można przeto korzystać ze wzorów powyższych, czyniąc w nich μ równe masie wału z nasadzonymi wirnikami.

§ 12. Przykłady i ćwiczenia.

1-0. Dyl o przekroju kwadratowym $c \times c$, długości l leży na płaszczyźnie. Na środek prawego skrajnego przekroju B działa osiowa siła P . Wyznaczyć naprężenia dynamiczne, panujące w poszczególnych przekro-

jach. Na dolną powierzchnię dotyku do płaszczyzny działa siła tarcia fQ , gdzie f oznacza współczynnik tarcia a $Q = \gamma c^2 l$ — wagę dyla, zatem dyl. rozpatrywany jako ciało sztywne otrzyma pod działaniem wypadkowej $P - Q$ przyspieszenie $p = (P - fQ) : (Q : g) = g (P : Q - f)$. W odległości x od lewego skrajnego przekroju A dyla obieramy dowolny zresztą przekrój C . Panować w nim będzie naprężenie osiowe $\sigma_x = (m_{AC} p + Q_{AC} \cdot f) : c^2$, gdzie przez m_{AC} oznaczyliśmy masę, przez Q_{AC} — ciężar lewej części dyla od A do C . Pierwszy wyraz nawiasu oznacza siłę bezwładności — drugi tarcia. Wobec tego, że $m_{AC} = Qx : gl$, oraz $Q_{AC} = Qx : l$, będziemy mieli $\sigma_x = [Px : l - Qfx : l + Qfx : l] : c^2 = Px : c^2 l$. Nadto wobec mimośrodowości przyłożenia siły tarcia $Q_{AC} f = Qfx : l$ w przekroju C panować będzie dodatkowo moment $M = \frac{1}{2} Qfxc : l$ dający dla włókien dolnych naprężenie rozciągające $M : W = 6Qfxc : 2lc^3 = 3Qfx : lc^2$, dla górnych ściskające. Zatem na górnej powierzchni panować będą naprężenia $(P - 3Qf) x : lc^2$, na dolnej dotykającej do powierzchni — naprężenia $(P + 3Qf) x : lc^2$. Skrajna wartość naprężenia panować będzie we włóknach dolnych przekroju A . Będzie to $(P + 3Qf) : c^2$.

2-o Łącznik korbowy (Rys. 57), sprzęgający koła parowozu, łączy czopy AB . Promienie obu korb oznaczamy przez r , rozstawienie kół, a zarazem długość łącznika przez L . Wobec ruchu postępowego ustroju, każdy punkt łącznika porusza się jednakowo z szybkością $v = \omega r$ i przyspieszeniem dośrodkowym $w = \omega^2 r$, gdzie przez ω oznaczyliśmy szybkość kątową obu korb. W założeniu stałej wartości ω , kąt Θ odchylenia obu korb, będzie równy ωt . Wyznamy w odległości z od lewego czopa A



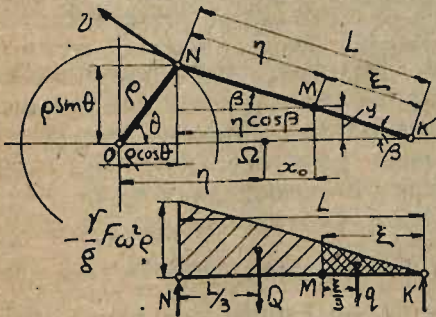
Rys. 57.

znikomą płytkę dz o masie $\delta l \cdot dz$, gdzie F oznacza przekrój poprzeczny stały łącznika, a δ jak zwykle — iloraz $\gamma : g$. Ta masa da siłę odśrodkową $\delta F \omega^2 z \cdot dz$, pochyloną pod kątem Θ ku osi podłużnej łącznika. Zatem łącznik możemy rozpatrywać jako pręt obustronnie podparty, a obciążony jednostajnie w stosunku $q_0 = \delta F \omega^2 r$ na jednostkę długości. To obciążenie działa pochyło, składowe jego osiowe $q_0 \cos \Theta$ dadzą naprężenia osiowe, a składowe poprzeczne $q_0 \sin \Theta$ — naprężenia dynamiczne gnące. Jak zwykle siły osiowe pomijamy wobec obciążenia gnącego, które osiąga najwyższą wartość q_0 przy $\Theta = \frac{1}{2} \pi$.

Do tej skrajnej wartości dochodzi waga własna łącznika, który w ten sposób będzie dźwigał obciążenie jednostajne $q = q_0 \pm \gamma F$ na jednostkę długości. Najwyższy moment gnący będzie niewątpliwie panował pośrodku pręta. Będzie to $M = \frac{1}{8} q L^2 = \frac{1}{8} L^2 [\delta F \omega^2 r + \gamma F] = \frac{1}{8} \gamma F L^2 [\omega^2 r : g + 1] = \frac{1}{8} G L [\omega^2 r : g + 1]$, gdzie przez G oznaczyliśmy ciężar łącznika. Ten moment da skrajne naprężenie dynamiczne $\sigma_g = M : W$ gnące.

3-o Korbowód (Rys. 58) o stałym przekroju poprzecznym F łączy czop korbki N z czopem K krzyżulca. W poszczególnych przekrojach korbowodu panują przyspieszenia niejednakowe. Oznaczmy odpowiednio przez ξ i η odległości dowolnie zresztą obranego przekroju poprzecznego M korbowodu od osi czopa krzyżulca i korbki. Cała długość korbowodu niech

będzie $L = \xi + \eta$, a promień korby ε . W założeniu stałej szybkości ką-
towej ω , kąt odchylenia korby od linii martwych punktów OK będzie $\Theta =$



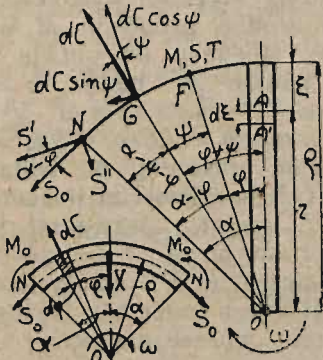
Rys. 58, 59.

$= \omega t$. Odłożmy $O\Omega = \eta$ i wyznaczmy odległość y środka przekroju M od linii OK . W stosunku do punktu Ω współrzędne punktu M będą: $x = \varepsilon \cos \Theta + \eta \cos \beta - \eta = \varepsilon \cos \omega t - \eta (1 - \cos \beta)$ oraz $y = \xi \sin \Theta : L = (\xi : L) \sin \omega t$, przyczem, jak widać z trójkąta KON będziemy mieli nadto $\sin \beta = (\varepsilon : L) \sin \omega t$. Zazwyczaj w ustrojach korbowych $L : \varepsilon = 1 : 4 \div 1 : 6$, a najczęściej $L = 5\varepsilon$. W tych granicach kąt β jest nader nieznaczny, możemy przeto wprost napisać $x = \varepsilon \cos \omega t$, $y = (\xi : L) \varepsilon \sin \omega t$, co odpowiada przybliżonej wartości $\beta = 0$.

A zatem przyspieszenie $d^2x : dt^2 = x'' = -\varepsilon \omega^2 \cos \omega t$, może być uważane, jako równoległe do osi podłużnej korbowodu, a przyspieszenie $d^2y : dt^2 = y'' = -(\xi : L) \varepsilon \omega^2 \sin \omega t$ jako doń prostopadłe. Przyspieszenia x'' dają naprężenia dynamiczne osiowe y'' — gnące. Pierwsze jak zwykle pomijamy, wobec gnących i rozpatrujemy w odległości ξ elementarną płytkę, grubości $d\xi$. Jej masa $\delta F d\xi$ da siłę bezwładności $\delta F d\xi y''$. Maximum tej siły — $\delta F \omega^2 \xi d\xi : L$ odpowiada wartości $\Theta = \frac{1}{2} \pi$, a przeto możemy rozpatrywać korbówód, jako belkę opartą obustronnie i obciążoną na jednostkę długości w stosunku — $\delta F \omega^2 \xi : L$, a więc obciążeniem zmieniającem się linjowo według prawa trójkąta od zera dla skrajnej podpory K przegubowej do maximum — $\delta F \omega^2 \varepsilon$ dla drugiej skrajnej podpory N ruchomej. Odnośny wykres obciążenia podaje (Rys. 59). W danym wypadku odpór K będzie równy $\frac{1}{3} Q$, gdzie $Q = \frac{1}{2} \delta F \omega^2 \varepsilon L$. Moment panujący w M wyzna czymy w postaci $K\xi + \frac{1}{3} q\xi = \frac{1}{6} \delta F \omega^2 \varepsilon L \xi - \frac{1}{6} \delta F \omega^2 \varepsilon \xi^3 : L = \frac{1}{6} \delta F \omega^2 \varepsilon [L\xi - \xi^3 : L]$. Czyniąc równą zeru pochodną $dM : d\xi = \frac{1}{6} \delta F \omega^2 \varepsilon [L - 3\xi^2 : L] = 0$, otrzymamy dla $\xi = L : \sqrt{3}$ skrajną wartość momentu $M_M = \delta F \omega^2 \varepsilon L^2 : 9 \sqrt{3} g$, która wyznaczy skrajne naprężenie dynamiczne gnące $\sigma = M_M : W$. Wobec niezbyt ścisłych założeń i uproszczeń, jakie czyniliśmy, wzór ten może być również, bez znacznego błędu, użyty i do korbowodu o zmiennym przekroju, należy jednak zamiast F podstawić średnią wartość wszystkich przekrojów korbowodu.

4-o Koło zamachowe o ciężkim wieńcu obraca się na wale z szybkością kątową ω . Jego ramiona, wstrzymujące rozszerzanie się wieńca, dają w nim dodatkowe naprężenia gnące. Pochodzi to stąd, że wieńiec swobodny rozszerza się znacznie od ramion, pociąga więc ramiona siłą X (Rys 60). Poprowadźmy z przekrojów średnicowych płaskich, przecinających wieńiec pośrodku między z ramionami. Wobec zupełnej symetrii obciążeń koła swobodnie wirującego, naprężenia tylko co otrzymanych przekrojów wieńca dają wypadkową siłę osiową S_0 i moment M_0 gnący. Siła tnąca przekroju musi być równa zero, inaczej bowiem symetria obciążenia obu rozciętych połówek nie dałaby się utrzymać. Prócz tylko co wymienionych S_0 i M_0 wieńiec ulega działaniu ściągającemu X ramienia, oraz

siłom odśrodkowym. Oznaczmy przez F poprzeczny stały przekrój wieńca, przez ε promień jego środka ciężkości, przez φ kąt pomiędzy osią rozpatrywanego ramienia, a płaszczyzną dowolnego przekroju. (Rys. 61). Prowadząc przekrój sąsiedni



Rys. 60 i 61.

otrzymamy wycinek wieńca odpowiadający różnicy kąta $d\varphi$. Masa wycinka $\delta F \varepsilon d\varphi$ daje siłę odśrodkową $dC = \delta F \varepsilon^2 \omega^2 d\varphi$. Wobec zupełnej symetrii obciążenia dwa równania statyki wypełniają się same przez się, pozostaje przeto jedyny warunek równowagi rzutów sił na oś podłużną ramienia. Ten warunek da: $2 \cdot S_0 \sin \alpha +$

$$+ X = 2 \int_0^\alpha \delta F \varepsilon^2 \omega^2 \cos \varphi d\varphi = 2 \delta F \varepsilon^2 \omega^2 \sin \alpha, \text{ gdzie}$$

przez α oznaczyliśmy połowę kąta pomiędzy ramionami sąsiednimi. Stąd mamy $S_0 = \delta F \varepsilon^2 \omega^2 - X : 2 \sin \alpha$, moment M_0 pozostaje statycznie niewyznaczalnym. Chcąc go określić wyznaczamy

pracę sprężystą rozpatrywanego wycinka koła zamachowego. W tym celu oznaczamy przez S_1 siłę osiową poprzecznego przekroju ramienia i rozpatrujemy wieńiec, jako pręt o nieznacznej krzywiźnie. W ten sposób

$$\text{otrzymamy ze względu na symetrię obu połówek wycinka } \Pi = 2 \int_0^{\alpha-\varphi} \frac{M^2 \varepsilon d\varphi}{2EI} +$$

$$+ 2 \int_0^{\alpha} \frac{S^2 \varepsilon d\varphi}{2EF} + \int_0^{\alpha} \frac{S_1^2 dz}{2E_1 F_1}, \text{ gdzie przez } l \text{ oznaczyliśmy moment bezwładności wieńca względem osi głównej równoległej do osi obrotu, przez } E \text{ i } E_1 \text{ współczynniki sprężystości tworzywa wieńca i ramion, przez } F_1 \text{ stały przekrój ramienia. Nadto pomijając wymiary piasty długość ramienia czynimy równą } \varepsilon. \text{ W danym wypadku mamy niewątpliwie } M = M_0 - S_0 \varepsilon [1 -$$

$-\cos(\alpha - \varphi)] + \int_0^{\alpha-\varphi} \delta F \omega^2 \varepsilon^2 d\psi \varepsilon \sin \psi = M_0 - S_0 \varepsilon [1 - \cos(\alpha - \varphi)] + \delta F \omega^2 \varepsilon^3 [1 - \cos(\alpha - \varphi)] = M_0^0 - [S_0 - \delta F \omega^2 \varepsilon^2] \varepsilon [1 - \cos(\alpha - \varphi)]$, jak to zresztą najlepiej daje się spostrzec z rysunku. Z kolei na mocy poprzednio otrzymanego wzoru dla S_0 otrzymamy ostatecznie $M = M_0 + \frac{1}{2} X \varepsilon [1 - \cos(\alpha - \varphi)] : \sin \alpha$.

W podobny sposób otrzymamy $S = S_0 \cos(\alpha - \varphi) + \int_0^{\alpha-\varphi} \delta F \omega^2 \varepsilon^2 d\psi \sin \psi = S_0 \cos(\alpha - \varphi) + \delta F \omega^2 \varepsilon^2 [1 - \cos(\alpha - \varphi)] = \delta F \omega^2 \varepsilon^2 + [S_0 - \delta F \omega^2 \varepsilon^2] \cos(\alpha - \varphi) = \delta F \omega^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{2} X \cos(\alpha - \varphi) : \sin \alpha$, oraz $T = S_0 \sin(\alpha - \varphi) - \int_0^{\alpha-\varphi} \delta F \omega^2 \varepsilon^2 d\psi \cos \psi = S_0 \sin(\alpha - \varphi) - \delta F \omega^2 \varepsilon^2 \sin(\alpha - \varphi) = [S_0 - \delta F \omega^2 \varepsilon^2] \sin(\alpha - \varphi) = -\frac{1}{2} X \sin(\alpha - \varphi) : \sin \alpha$. Na mocy zasady najmniejszej pracy możemy napisać $\partial \Pi : \partial M_0 = \partial \Pi : \partial X = 0$. Pierwsze z tych równań da $\int_0^\alpha M \varepsilon d\varphi =$

$$= M_0 \varepsilon \alpha + X \varepsilon^2 \alpha : 2 \sin \alpha - X \varepsilon^2 \sin \alpha : 2 \sin \alpha = 0, \text{ stąd } M_0 = -\frac{1}{2} X \varepsilon (1 : \sin \alpha - 1 : \alpha), \text{ a przeto } M = -\frac{1}{2} X \varepsilon (1 : \sin \alpha - 1 : \alpha) + \frac{1}{2} X \varepsilon [1 : \sin \alpha - \cos(\alpha - \varphi) : \sin \alpha] = \frac{1}{2} X \varepsilon [1 : \alpha - \cos(\alpha - \varphi) : \sin \alpha]. \text{ Chcąc skorzystać z równania } \partial \Pi : \partial X = 0 \text{ należy wyznaczyć wartość siły } R_1. \text{ Weźmy pod uwagę siłę odśrodkową ramienia. W tym celu w odległości } \xi \text{ od środka przekroju}$$

wieńca wyodrębniamy płytkę AA' . Jej masa $\delta_1 F_1 d\xi$ rozwija siłę odśrodkową $\delta_1 F_1 \omega^2 (\xi - \xi) d\xi$. Oznaczmy przez $z = \xi - \xi$. Przekrój AA' , odległy o z od osi obrotowej koła ulegać będzie sile rozciągającej X , oraz wypadkowej sił odśrodkowych, tylko co wyznaczonych, a przynależnych do wszystkich płytek górnej części ramienia, możemy przepisać, że siła osiowa

$$\text{tego ramienia } S_1 = X + \int_0^{\xi} \delta_1 F_1 \omega^2 (\xi - \xi) d\xi = X - \frac{1}{2} \delta_1 F_1 \omega^2 [(\xi - \xi)^2 -$$

$$- \xi^2] = X + \frac{1}{2} \delta_1 F_1 \omega^2 (\xi^2 - z^2). \text{ Ostatecznie więc } \partial X = 2 \int_0^{\xi} \frac{M \xi d\varphi}{EI}$$

$$\frac{\partial M}{\partial X} + 2 \int_0^{\xi} \frac{S \xi d\varphi}{EF} \frac{\partial S}{\partial X} + \int_0^{\xi} \frac{S_1 d\xi}{E_1 F_1} \frac{\partial S_1}{\partial X} = \frac{1}{2} \int_0^{\xi} X \xi^3 \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \right]^2 \frac{d\varphi}{EI} -$$

$$- \int_0^{\xi} [\delta F \omega^2 \xi^2 - \frac{1}{2} X \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}] \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} \frac{d\varphi}{EF} + \int_0^{\xi} [X + \frac{1}{2} \delta_1 F_1 \omega^2 (\xi^2 -$$

$$z^2)] \frac{dz}{E_1 F_1} = \frac{X \xi^3}{2EI} \int_0^{\xi} \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{2 \cos(\alpha - \varphi)}{\alpha \sin \alpha} + \frac{\cos^2(\alpha - \varphi)}{\sin^2 \alpha} \right] d\varphi - \delta \frac{F \omega^2 \xi^3}{EF \sin \alpha}$$

$$\int_0^{\xi} \cos(\alpha - \varphi) d\varphi + \frac{X \xi}{2EF \sin^2 \alpha} \int_0^{\xi} \cos^2(\alpha - \varphi) d\varphi + \frac{X \xi}{E_1 F_1} + \frac{1}{2} \delta_1 F_1 \omega^2 (\xi^3 -$$

$$- \frac{1}{3} \xi^3) \frac{1}{E_1 F_1} = \frac{X \xi^3}{2EF} \left[\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha}{2 \sin^2 \alpha} + \frac{\sin 2\alpha}{4 \sin^2 \alpha} \right] - \delta \frac{F \omega^2 \xi^3}{EF} + \frac{X \xi}{2EF \sin^2 \alpha}$$

$$\left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right] + \frac{X \xi}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \delta_1 F_1 \omega^2 \frac{\xi^3}{E_1 F_1} = 0. \text{ Stąd ostatecznie } X =$$

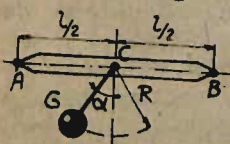
$$= \omega^2 \xi^2 (\gamma - \frac{1}{3} \gamma_1 E : E_1) : g [(\sin 2\alpha + 2\alpha) (1 : F + \xi^2 : I) : 8 \sin^2 \alpha - \xi^2 :$$

$$: 2\alpha I + E : E_1 F_1]. \text{ Dla ułatwienia wyliczeń podajemy tu tabelicę wartości } 2\alpha \text{ i } f = (\sin 2\alpha + 2\alpha) : 8 \sin^2 \alpha \text{ dla różnych wartości liczby ramion:}$$

$i =$	4	6	8	10	12
$2\alpha =$	1,5707963	1,0471976	0,7853982	0,6283185	0,5235988
$f =$	0,6427004	0,9566222	1,2739308	1,5918995	1,9100612

Tylko co rozpatrzone wzór można również stosować w wypadku ramienia o przekroju zmiennym należy jednak dla F_1 brać średni przekrój ramienia. Cała powyższa teoria wyprowadzona była w założeniu stałej kątowej szybkości ω koła zamachowego. Dalsze rachunki prowadzą się jak przy obliczaniu prętów krzywych.

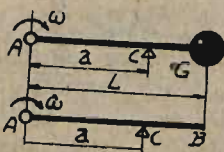
5-o. *Wahadło* (Rys. 62) złożone z ciężaru G i pręta R zawieszono na przegubie C pośrodku belki poziomej AB . Wyznaczyć naprężenia dynamiczne jakie powstają w belce przy ruchu wahadła. Oznaczmy całkowitą długość belki przez l , przez I moment bezwładności kuli wahadła względem osi obrotu, przez φ odchylenie pręta od pionu, przez α skrajną wartość tego odchylenia. Z równania momentu ilości ruchu otrzymamy przyspieszenie kątowe obrotu $p = GR \sin \varphi : I$. Nadto niewątpliwie oznaczywszy przez ω szybkość kątową obrotu, będziemy mieli $p = d\omega : dt$ stąd bezpośrednio $p : \omega = - d\omega : d\varphi$, ponieważ ω zmienia się odwrot-



Rys. 62.

nie do φ . Zatem $2\omega d\omega = -2Gr \sin\varphi d\varphi : I$, stąd, całkując w granicach φ i α otrzymamy $\omega^2 = 2GR (\cos\varphi - \cos\alpha) : I$ ponieważ dla punktów zwrotnych, to jest dla $\varphi = \alpha$ szybkość kątowa staje się równą zeru. Ruch wahadłowy daje w przegubie C nacisk poziomy X i pionowy Y , przyczem oś CX kierujemy na prawo oś, CY do góry. W tym układzie spólrzędnych, spólrzędne środka ciężaru G będą $x = -r \sin\varphi$, $y = -r \cos\varphi$, a przeto $X = G [R\omega^2 \sin\varphi - R\omega (d\omega : d\varphi) \cos\varphi] : g = GR (\omega^2 \sin\varphi + p \cos\varphi) : g = G^2 R^2 \sin\varphi (3\cos\varphi - 2\cos\alpha) : Ig$, oraz $Y = G [R\omega^2 \cos\varphi + R (d\omega : d\varphi) \omega \sin\varphi] : g + G = G^2 R^2 (2\cos^2\varphi - 2\cos\alpha \cos\varphi - \sin^2\varphi) : gI + G$. Siła osiowa X , jako działająca pośrodku belki daje odpory osiowe $A = B = \frac{1}{2} X$, poziome wywołujące naprężenie wahlwe $\sigma_x = X : 2F$, gdzie F oznacza stały przekrój belki. W samej rzeczy, oznaczymy statycznie niewyznaczalny odpór A przez Z . Praca sprężysta dla sił osiowych Z, X, B będzie $\Pi_x = \frac{1}{2} l [Z^2 + (X - Z)^2] : 2EF$, skąd na mocy twierdzenia Menabrea $\partial \Pi_x : \partial Z = [Z - X + Z] l : 2EF = 0$, co da $Z = \frac{1}{2} X$. Druga siła Y daje skrajną wartość momentu w środkowym przekroju, a zarazem i naprężenie $\sigma_g = Yl : 4W$, gdzie W oznacza skaźnik wytrzymałości belki. Skrajne naprężenie dynamiczne panować będzie w środkowym przekroju. Będzie to $\sigma = Yl : 4W + X : 2F$. Czyniąc $ds : d\varphi = 0$ z łatwością wyznaczymy kąt $\varphi = \beta$, dający najwyższą wartość dla σ . Ta wartość będzie miarodajna przy wyznaczaniu właściwych wymiarów belki.

6-o. *Drąg* (Rys. 63) AG , zakończony znacznym ciężarem G obraca się swobodnie około przegubu A z szybkością kątową stałą ω . W pewnym momencie ruchu w punkcie C ustawiono podporę niesprężystą o którą pręt uderza. W założeniu przegubu A i podpory C niesprężystych całkowita siła żywa ustroju, wyładowana przy uderzeniu



Rys. 63 i 64.

przejdzie w pracę sprężystą drąga. Jego masę możemy oczywiście pominąć, wobec masy $m = G : g$, a zatem siła żywa ustroju będzie $\frac{1}{2} m\omega^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 L^2$. Wyznamy pracę sprężystą pręta. W tym celu rozpatrujemy pręt oparty na dwóch podporach A i C i obciążony w G siłą wrzekomą P . Lewy odpór będzie równy $A = P(L - a) : a$. Da on w przekroju bieżącym lewej części AC drąga odległym o x od podpory A moment gnący Ax . Dla prawej części pręta w przekroju poprzecznym odległym o z od G , będzie panował moment Pz , a zatem praca sprężysta pręta

$$\Pi = \int_0^a \frac{P^2 (L-a)^2 x^2}{2EIa^2} dx + \int_0^{L-a} \frac{P^2 z^2 dz}{2EI} = \frac{1}{6} P^2 (L-a)^2 L : EI. \text{ Czyniąc}$$

Π równe sile żywej poprzednio wyznaczonej będziemy mogli otrzymać wartość siły wrzekomej P , a lepiej jeszcze skrajną wartość momentu gnącego, dla przekroju C w postaci $M = P(L-a) = \omega \sqrt{3EI mL}$, który da skrajne naprężenie gnące. Odrzucmy ciężar G . Siła żywa drąga AB , wirującego ze stałą szybkością kątową ω około przegubu A wyznaczy się jako suma sił żywych poszczególnych płytek pręta. Oznaczmy przez μ całkowitą masę pręta — masa płytki dx grubej, wyodrębnionej w odległości x od przegubu A wynosi $\mu dx : L$, szybkość zaś $x\omega$, stąd siła żywa

drąga $\int_0^L \frac{1}{2} \mu \omega^2 x^2 dx : L = \frac{1}{6} \mu \omega^2 L^2$. Wyznaczmy pracę sprężystą. W da-

nym wypadku każda poszczególna płytką gra rolę ciężaru G . Jej ilość ruchu wynosi $\omega \mu x dx : L$, a zatem obciążenie drąga winno być proporcjonalne do $\omega \mu x dx : L$ i równe $q x dx$ gdzie przez q oznaczyliśmy $n^2 \omega \mu : L$, a n^2 gra rolę współczynnika proporcjonalności. Będzie to więc obciążenie trójkątne. Z równań statyki $A + B + \frac{1}{2} q L^2 = 0$, $B a + \frac{2}{3} L \cdot \frac{1}{2} q L^2 = 0$ otrzymamy $B = -\frac{1}{3} q L^3 : a$, $A = \frac{1}{6} q L^2 (2L - 3a) : a$. W pierwszej pości AC w przekroju bieżącym odległym o x od osi obrotu panować będzie moment $M_1 = Ax + \frac{1}{2} q x^2 - \frac{1}{3} q x^3 = Ax + \frac{1}{6} q x^3$, w pości drugiej

$M_2 = Ax + B(x-a) + \frac{1}{6} q x^3$, zatem praca sprężysta $\Pi = \left[\int_0^a M_1^2 dx + \int_0^L M_2^2 dx \right] : 2EI$. Czyniąc $\Pi = \frac{1}{6} \mu \omega^2 L^2$ wyznaczmy n^2 a z tym

i skrajną wartość momentu $M_M = Aa + \frac{1}{6} q a^3$, panującą ponad przekrojem C . Ta wartość da najwyższe naprężenie dynamiczne gnące.

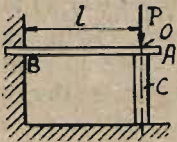
7-o. Wał obraca się w łożyskach z szybkością kątową ω stałą. Tuż za łożyskami na jednym końcu wału tkwi korba, na drugim koło o bardzo ciężkim wieńcu. Całkowita długość wału od nasady korby do piasty koła wynosi L , średnica D . Wskutek wypadku korba została nagle unieruchomiona—wyznaczyć skrajne naprężenie dynamiczne wału. Oznaczmy przez Θ biegunowy moment bezwładności koła względem osi obrotu wału. Siła żywa koła będzie więc $\frac{1}{2} \Theta \omega^2$. Wobec znacznej masy koła — możemy śmiało pominąć masę samego wału, zachowując jego własności sprężyste, a przeto po unieruchomieniu korby cała siła żywa tylko co wyznaczona, przetworzy się w pracę sprężystą wału, dając kąt skręcenia φ . Oznaczmy przez M_0 domniemany moment skręcający obciążenia stopniowego, przynależny do tej wartości φ . Jego praca sprężysta będzie $\Pi = \frac{1}{2} \varphi M_0$, ponieważ jednak $\varphi = M_0 L : G I_0$, gdzie przez I_0 jak zwykle oznaczyliśmy biegunowy moment bezwładności przekroju wału, zatem $\Pi = \frac{1}{2} \varphi^2 G I_0 : L = \frac{1}{2} \Theta \omega^2$. Stąd wyznaczmy φ , a, co zatem idzie i M_0 . Z kolei z równania $\tau_0 = M_0 : W_0$ otrzymamy skrajną wartość naprężenia dynamicznego wirowego.

8-o. Dwuteownik № 20 pięć metrów długi obustronnie końcami spoczywa na podp. rach przegubowej i rolkowej. Ponad środkowym jego przekrojem wisi ciężar $R=1t$. Z jakiej wysokości h ciężar spaść powinien, aby dwuteownik pękł przy uderzeniu? W danym wypadku przekrój dwuteownika $F=33,5 \text{ cm}^2$, $I=2142 \text{ cm}^4$, $W=214 \text{ cm}^3$, nadto metr bieżący waży 26,3 kg., wobec tego ciężar dwuteownika wynosi $G=5 \times 26,3 = 131,5 \text{ kg}$. Dla żelaza zlewnego $K_g=5000 \text{ kg/cm}^2$ a zatem w myśl wzoru

§ 3 będziemy mieli $\sigma_s = \sigma_{s0} [1 + \sqrt{1 + 48 E I v^3 : g R L^3}] = [R L : 4 W] [1 + \sqrt{1 + 96 E / h : R L^3}]$. Inaczej jeszcze $5000 = [1000 \times 500 : (4 \times 214)] \cdot [1 + \sqrt{1 + 96 \times 2150000 \times 2142 \times h : 1000 \times 500^3}]$, skąd $h = 15,8 \text{ cm}$. Wynik ten się nieco zmieni gdy uwzględnimy masę dwuteownika. W tym celu we wzorze powyższym należy zamiast $R=1000$ postawić $R=1000 + 17 \times$

$\times 131,5 : 35 = 1063,6$. W ten sposób otrzymamy $h' = 16,9$ cm. Obie powyższe wartości w rzeczywistości będą nieco większe, ponieważ uderzeniu ulega cały szereg płytek środkowych dwuteownika.

9-o. Dyl sosnowy (Rys. 65) o przekroju prostokątnym $B \times H$ stałym jednostronnie osadzono i obciążono ciężarem R skupionym w przekroju O w odległości l od przekroju osadczego. Dzięki podpórce C odpowiedniej



Rys. 65.

wysokości, ustawionej na podłodze, dyl pod ciężarem P nie daje odkształconej. Wyznaczyć skrajną wartość naprężenia dynamicznego i zbadać drgania jakie powstaną, gdy podpora znagła zostanie usunięta. Niech będzie $H=20$, $B=24$ cm., $l=2$ m, $R=450$ kg., zatem przy obciążeniu stopniowem w przekroju osadczym panować będzie naprężenie skrajne $\sigma_0 = RL : W = 450 \times 200 : (1/6 \times 24 \times 20 \times 20) = 56,25$ kg/cm². Aby wyznaczyć naprężenia dynamiczne, przy nagłym działaniu ciężaru należy ustalić odnośne wzory. Założmy przedewszystkiem, że ciężar R uderza na belkę, spadając na przekrój O z wysokości h po usunięciu podpórki C i wyznaczmy energję kinetyczną dyla. W danym wypadku statyczna strzałka ugięcia dyla w przekroju odległym o ζ od B (§ 9 księga. druga str. 41) będzie $\eta = 1/2 P \zeta^2 (l - 1/3 \zeta) : EI$ a w przekroju $O: r_0 = R l^3 : 3EI$, zatem szybkość, jaką nabędzie po uderzeniu przekrój bieżący otrzymamy w myśl zwykłego założenia: $w_x = w \eta : f = 1/2 w [3(\zeta : l)^2 - (\zeta : l)^3]$. Oznaczmy przez G ciężar części BO

dyla, a otrzymamy jego siłę żywą $L = \int_0^l 1/2 G w^2 d\zeta : l g = 1/2 \frac{G w^2}{4gl} \int_0^l [9(\zeta : l)^4 - 6(\zeta : l)^3 + (\zeta : l)^6] d\zeta = 1/2 \left[\frac{33}{140} \frac{G}{g} \right] w^2$. Zatem możemy uwzględnić masę

dyla w postaci masy zastępczej $m = \frac{33}{140} G : g$, skupionej w przekroju O , a przeto, jak w § 3 otrzymamy $r = r_0 [1 + \sqrt{1 + v^2 : g r_0 (1 + \frac{33}{140} G : g)}]$. W danym wypadku $v=0$, jak to wynika z warunków zadania, mamy więc $r = 2 r_0$ oraz $\sigma = 2 \sigma_0 = 112,5$ kg/cm², wartość naprężenia dynamicznego, nie przekraczającą granic dla drzewa sosnowego $k_g = 100 \div 120$ kg/cm².

10-o. Silnik spalinowy obciąża połową ciężaru własnego $R=1400$ kg., środkowe przekroje dwóch równoległych dwuteowników № 22, opartych końcami na podporach rolkowej i przegubowej. Wyznaczymy okres drgań właściwych tego podłoża w założeniu czterometrowej długości dwuteowników. Będzie to $T = 2\pi \sqrt{r_0 (1 + \nu G : R) : g}$ według wzoru § 5. W danym wypadku $r_0 = RL^3 : 48 EI, \nu = 1/33$. Dla dwuteowników № 24 mamy z tablic $I=3060$ cm⁴, $W=278$ cm³ oraz wagę bieżącego metra 31,09 kg. Tutaj więc $G=4 \times 31,09 = 124,36$ kg, $g=981$ cm/sek², a przeto $T=0,1087$. Jak wiadomo silnik spalinowy daje drgania wymuszone. Oznaczmy przez n liczbę obrotów silnika na minutę, zatem okres tych drgań będzie $T_w = 60 : n$. W myśl naszych rozważań możemy oczekiwać zjawiska oddźwięku sprężystego, gdy $T_w = T$. Stąd $n_0 = 60 : 0,1087 = 552$. Nieco słabsze drgania wystąpią przy $n_1 = 552 : 2 \approx 276$ obrotach silnika na minutę, jeszcze słabsze przy $n_2 = 552 : 3 \approx 184$ i t. d. Założmy, że przy 276 obrotach silnika na minutę oddźwięk sprężysty wystąpił tak silnie, że aż wzbudził obawę o ca-

łość ustroju. Obrotów silnika zmienić nie można ze względu na wymiary kół pędnianych — nie pozostaje nic innego, jak tylko zmienić przekrój belki. Statyczne naprężenia gnące dwuteowników № 22 wynosiło $\sigma = Pl : 4 W = 1400 \times 400 : 4 \times 278 = 503,6 \text{ kg./cm.}^2$. Dla belek № 17 mamy $G = 4 \times 19,78 = 79,12$, $I = 1106$, $W = 137$, a przeto $T = 0,1797$ oraz $n_0 = 60 : 0,1797 = 334$, $n_1 = 167$. Ta belka nie daje więc zupełnie zjawisk oddźwięku sprężystego, aczkolwiek naprężenie skrajne statyczne będzie dla niej $\sigma = 1400 \times 400 : 4 \times 137 = 1021,7 \text{ kg./cm.}^2$, a więc dwukrotnie wyższe od poprzedniego.

CZĘŚĆ DZIEWIĄTA.

STATECZNOŚĆ USTROJÓW.

§ 1. **Metoda autora.** Uderzająca różnorodność twierdzeń części *szóstej*, opartych na energetycznych podstawach nasuwa myśl o konieczności istnienia twierdzenia macierzystego, z którego owe poszczególne twierdzenia winny wypływać w postaci wniosków bezpośrednich. To twierdzenie istnieje i daje niesłychanie doniosłe wyniki praktyczne. Stanowi uzupełnienie i rozwinięcie podstawowej zasady Wytrzymałości Tworzyw, ogłoszonej w zagajeniu. Weźmy pod uwagę ciało sprężyste, pozostające w trwałej równowadze odkształconej, pod jarzmem zrównoważonego układu sił zewnętrznych. W założeniu budowy ciała cząsteczkowej, każda jego drobina trwa w stanie równowagi pod jarzmem sił wiążących, naprężeń odkształcających i oporowych. Będziemy rozpatrywali wyłącznie tylko ciała stałe bez pierwotnych naprężeń w napięciu, możemy przeto pierwszy układ sił wiążących pozostawić bez uwagi: siły jego, jako zrównoważone, dają wypadkową równą zeru dla każdej drobiny, a zatem i pracę równą zeru przy wszelkich zmianach odległości międzycząsteczkowych. Oznaczamy przez δC elementarną pracę naprężeń odkształcających danej drobiny przy pewnym możliwym odkształceniu, a właściwie mówiąc — przesunięciu tej drobiny. Przez δB oznaczamy takąż pracę naprężeń oporowych. Dla wszystkich drobin otrzymamy $\Sigma \delta C + \Sigma \delta B$, a przeto wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej będziemy mogli napisać w myśl zasady prac możliwych (virtuel), że $\Sigma \delta C + \Sigma \delta B = 0$. Naprężenia odkształcające powstają wyłącznie tylko pod jarzmem sił zewnętrznych i giną wraz z niemi, z założenia bowiem rozpatrujemy wyłącznie tylko ciała sprężyste. Stąd wniosek bezpośredni, że $\Sigma \delta C$ wyraża pracę sił zewnętrznych δL — możliwą, bo przynależną do odkształceń możliwych. W myśl tego samego założenia praca naprężeń oporowych $\Sigma \delta B$ stanowi wydatek energii wewnętrznej, inaczej mówiąc rodzi się z utraty pewnej części energii sprężystej wewnętrznej, czyli pracy sprężystej II, możemy przeto ustalić *zasadnicze równanie równowagi odkształconej* ciała sprężystego $\delta L - \delta II = 0$. Głosi ono, że elementarna praca możliwa sił zewnętrznych przechodzi w *pracę sprężystą w wypadku równowagi odkształconej*.

Ten energetyczny warunek równowagi odkształconej stanowi owo wspomniane wyżej podstawowe twierdzenie Wytrzymałości Tworzyw, wymaga jednak pewnych omówień dodatkowych, a nadewszystko ustalenia pojęcia „możliwych odkształceń“, o których wyżej była mowa.

W tym celu obieramy pewien, zresztą zupełnie dowolny układ jakichkolwiek osi spólrzędnych stałych i wyznaczamy pierwotne spólrzędne danej drobiny ciała rozpatrywanego dla stanu równowagi odciążonej. Po obciążeniu i ponownem ustaleniu się trwałej równowagi odkształconej, spólrzędne pierwotne rozpatrywanej drobiny ujawnią pewne znikomo małe przyrosty — *składowe przesunięcia, czyli odkształcenia poosiowe* q — danej drobiny, zależne od jej położenia w ciele oraz od sił odkształcających. Zatem możemy przedstawić q w postaci $q = \sum a_m f_m$ ($m = 1, 2, \dots$), gdzie przez f_m oznaczyliśmy pewne, zupełnie zresztą ściśle określone funkcje wyłącznie tylko pierwotnych spólrzędnych drobiny. Na razie jeszcze nie wyznaczone spólczynnikami a_m uzależnić mają q od sił zewnętrznych P_i ($i = 1, 2, \dots, r$) odkształcających, możemy przeto rozpatrywać a_m , jako uogólnione siły wewnętrzne, powodujące odkształcenie q danej drobiny. W ten sposób ciało rozpada się poniekąd na gromadę cząsteczek, obciążonych uogólnionymi siłami a_m , które dają te same odkształcenia, co i siły zewnętrzne P_i , istotnie działające. To odwrócenie istotnego stanu rzeczy możliwe jest oczywiście wtedy jedynie, gdy wszystkie odkształcenia q są od siebie niezależne, trzeba więc, dla uniknięcia sprzeczności, z góry tak dobrać funkcje f_m , aby spełniały wszelkie warunki geometrycznej zależności rozpatrywanego ciała stałego od pozostałych, w tym bowiem tylko wypadku będziemy pewni, że mamy prawo uniezależnić drobiny; w każdym innym otrzymamy pewne warunki, wiążące całe gromady q . Uwzględnienie warunków geometrycznych przez właściwy dobór funkcji f_m , pozwala wyznaczyć odkształcenia możliwe $\delta q = \sum f_m \delta a_m$, przynależne do warjacyjnych przyrostów sił uogólnionych a_m , umożliwia przeto ustalenie właściwej postaci i wartości Π , jako funkcji tych sił uogólnionych i przesunięć, a nadto jeszcze ułatwia wyznaczenie przesunięć sił zewnętrznych p_i w postaci $p_i = q_i = \sum a_m f_{im}$, gdzie dodawanie należy wypełnić według wskaźnika m .

Wyznaczamy funkcję $U = \sum P_i p_i - \Pi$ — *energję* rozpatrywanego ciała sprężystego. Pierwszy jej wyraz daje niewątpliwie pracę sił zewnętrznych P_i , czyli pracę L , drugi — pracę sprężystą, możemy przeto podstawowy warunek równowagi wypisać w postaci $\delta L - \delta \Pi = \delta U = 0$. Stąd wniosek bezpośredni, że *równowaga ciała sprężystego odpowiada skrajnym wartościom jego energii*, czyli maximum lub minimum funkcji U . Praca sił wewnętrznych uogólnionych jest niewątpliwie rdzennie dodatnie, to samo dotyczy i pracy sprężystej, zatem *wartości skrajnej najwyższej U winna odpowiadać równowaga odkształcona stateczna ciała sprężystego, najniższej zaś — równowaga niestateczna*. Z łatwością można to udowodnić, zważywszy, że w pierwszym wy-

padku przy wszelkiem możliwym odkształceniu praca sprężysta ciała *rośnie* w drugim — *maleje*, a przeto w pierwszym wypadku wytrącenie z równowagi może być dokonane tylko z pomocą energii zewnętrznej, w drugim odbywa się kosztem energii wewnętrznej sprężystej: ciało raz wytrącone ze stanu równowagi odkształconej niestatecznej, odkształca się samo dalej, wydając własną energię sprężystą. Zatem warunkom najzupełniej ogólnym $\delta U = 0$, $\delta^2 U < 0$ odpowiada równowaga odkształcona ciała sprężystego *stateczna*, warunkom zaś $\delta U = 0$, $\delta^2 U > 0$ — *niestateczna*. W szczególnym wypadku całego szeregu kolejnych warjacyjnych przyrostów $\delta U = \delta^2 U \dots = \delta^{2k-1} U = 0$ o stateczności równowagi odkształconej wyrokuje znak ujemny pierwszego różnego od zera przyrostu $\delta^{2k} U$ parzystego, o równowadze niestatecznej jego znak dodatni. Może się jednak zdarzyć, że wszystkie przyrosty wyższych rzędów począwszy od U^{2k} , są równe zeru, nieskończoności, lub występują w postaci nieoznaczonej całkowicie, lub w stosunku do poszczególnych swych składników. W tych szczególnych wypadkach równowaga odkształcona jest *wątpliwa* i każdorazowo powinna podlegać badaniu. Wszystkie powyższe wnioski dotyczą również i całych ustrojów, złożonych z poszczególnych ogniw — ciał sprężystych, o ile całość jest usztywniona wewnątrznie tak, aby mogła grać rolę ciała stałego sprężystego.

Rozwińmy nieco szerzej powyższy ścisły wykład. Zasadniczy warunek równowagi $\delta U = 0$ można niewątpliwie wypisać w postaci $\delta U = \Sigma (\partial U : \partial a_m) \cdot \delta a_m = 0$. Wobec zupełnej dowolności warjacyjnych przyrostów δa_m , tylko co wypisane równanie rozpada się na cały szereg równań wtórnych $\partial U : \partial a_m = 0$, z których z łatwością dają się wyznaczyć wszystkie dotychczas bliżej nieokreślone siły uogólnione a_m w funkcji sił zewnętrznych P_i . Z kolei, korzystając z r równań dla przesunięć sił zewnętrznych $p_i = \Sigma a_m f_{im}$ możemy wyznaczyć a_m w zależności od przesunięć p_i , a co zatem idzie i pracę sprężystą Π w funkcji przesunięć p_i sił zewnętrznych P_i . Zazwyczaj siły zewnętrzne P_i , jako zasadnicze dane wszelkiego praktycznego zagadnienia równowagi odkształconej, mają wartości niezienne dla wszelkich możliwych przesunięć. Stąd wniosek bezpośredni, że $\delta U = \Sigma P_i \delta p_i - \delta \Pi = 0$, gdzie, zgodnie z ostatnimi rozważaniami należy uważać Π , jako funkcję przesunięć p_i . Tylko co otrzymany wzór wyraża *Twierdzenie pierwsze Castigliano*, ogólne dla wszelkich wypadków, jako pochodne, zasadniczego. Dzieląc go przez którykolwiek z warjacyjnych przyrostów δp_n , otrzymamy to samo twierdzenie w postaci nieco odmiennej: $\Sigma P_i (\partial p_i : \partial p_n) = \partial \Pi : \partial p_n$. Wypiszmy równania równowagi statycznej sił P_i . Z tych równań pewna liczba sił zewnętrznych może być wyznaczona w zależności od pozostałych. Powtarzając rozumowania poprzednie dla uszczuplonej w ten sposób liczby przesunięć p_i i sił P_i niezależnych już od siebie, z łatwością przekonamy się, że wszystkie a_m bę-

dziemy mogli wyznaczyć w funkcji tych sił, a więc i w zależności od p_i , a nadto praca sprężysta Π będzie i w danym wypadku również funkcją przesunięć niezależnych p_i . Zatem ostatni wzór da wprost $P_n = \partial\Pi : \partial p_n$ — trzecią postać tego samego twierdzenia. To twierdzenie dotyczy wszelkich ciał i ustrojów sprężystych, a nadto, jak widzimy stanowi prosty wynik podstawowego. — Z kolei, czyniąc założenie wzorowej sprężystości rozpatrywanego ciała, lub ustroju, udowodnimy na mocy powyższego twierdzenia podany w części szóstej szereg twierdzeń: Clapeyrona, Castigliono II, Menabrea i Betti. Twierdzenia Mohr'a wyprowadzać tą drogą nie trzeba, ponieważ stanowi ono bezpośrednie zastosowanie podstawowego $\delta L = \delta\Pi = 0$. Godzi się tu zaznaczyć, że dla ustrojów wzorowo sprężystych, w myśl twierdzenia Clapeyrona $\Sigma P p = 2\Pi$, a przeto $U = 2\Pi$ — $\Pi = U/2$. Z tej uwagi skorzystamy w następstwie.

Na szczególną uwagę zasługują wypadki równowagi wątpliwej, stanowią bowiem rubież graniczną dwóch różnych dziedzin równowagi odkształconej — statecznej i chwiejnej: wyrokują o *granicach stateczności* ustroju. Przynależne do stanu równowagi wątpliwej obciążenie zewnętrzne nazywamy *krytycznem*: przekroczenie tego obciążenia w tę lub w ową stronę zaznacza się przejściem równowagi wątpliwej w stateczną lub — chwiejną. Stąd wielka doniosłość czysto praktyczna badań, mających na celu wyznaczenie układu sił zewnętrznych obciążenia krytycznego. Wyżej mówiliśmy, że znak $\delta^2 U$, względnie znak pierwszego różnego od zera przyrostu $\delta^{2k} U$ stanowi o rodzaju równowagi odkształconej. Wątpliwą cechuje szereg nieskończony zerowych wartości wszystkich $\delta^n U$, które tu dla skrócenia wprost oznaczymy przez $U_n = \delta^n U$. Zwróćmy uwagę, że wszelki przyrost U_n stanowi funkcję jednorodną n — go rzędu przyrostów warjacyjnych $\delta a_m = \Delta_m$, zatem na mocy twierdzenia Eulera o funkcjach jednorodnych możemy napisać, że: $n U_n = \Sigma_m [\partial U_n : \partial \Delta_m] \Delta_m$. Wobec zupełnej niezależności Δ_m warunek $U_n = 0$, cechujący stan równowagi wątpliwej rozpada się na szereg wtórnych: $\partial U_n : \partial \Delta_m = 0$. Każdy z tych ostatnich stanowi równanie jednorodne $n-1$ stopnia przyrostów Δ_m , a przeto wyznacznik układu tych równań musi być równy zeru, inaczej bowiem wszystkie warjacyjne przyrosty Δ_m musiałyby mieć wartości zerowe, cechujące, sprzecznie z założeniem, stan *równowagi odosobnionej*. Istotną doniosłość posiadają zazwyczaj tylko dwa pierwsze wyznaczniki szeregu.

Z warunku $U_1 = 0$ mamy: $\partial U_1 : \partial \Delta_m = \partial U : \partial a_m = 0$, to jest otrzymujemy podstawowy warunek istnienia równowagi odkształconej — $\delta U = 0$. Drugi warunek $U_2 = 0$ daje w ogólnym wypadku warunki wtórne, stanowiące o równowadze wątpliwej. W istocie $U_2 = \delta^2 U = \Sigma_m [\partial^2 U : \partial a_m^2] \Delta_m + \Sigma_m [\partial^2 U : \partial a_i \partial a_k] \Delta_i \Delta_k$, zatem warunki wtórne: $\partial U_2 : \partial \Delta_m = 0$ dadzą kolejny szereg równań:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a_m \partial a_1} \Delta_1 + \frac{\partial^2 U}{\partial a_m \partial a_2} \Delta_2 + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial a_m \partial a_{m-1}} \Delta_{m-1} + \frac{\partial^2 U}{\partial a_m^2} \Delta_m +$$

$$+\frac{\partial^2 U}{\partial a_m \partial a_{m+1}} \Delta_{m+1} + \dots + \frac{\partial^2 U}{\partial a_m \partial a_w} \Delta_w = 0, \text{ których wyznacznik funkcyjny}$$

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial a_1} & \frac{\partial U}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial U}{\partial a_w} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_w \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie $I=0$ pozwala w większości wypadków wyznaczyć warunki obciążenia krytycznego, jak to najlepiej zresztą wyjaśnią przykłady. W wypadku funkcji dwóch zmiennych $U = f(a, \delta)$ mamy $I = [\partial^2 U : \partial a \partial \delta]^2 - [\partial^2 U : \partial a^2] [\partial^2 U : \partial \delta^2] = 0$. Wszystko to dotyczy zerowych wartości przyrostów $\delta^n U$, inne szczególne wartości wymagają podobnych rozważań, które tu pomijamy. Godzi się zaznaczyć, że metoda tylko co wyłożona stanowi ogólne rozwiązanie tak zwanego wypadku wątpliwego maximum i minimum funkcji wielu zmiennych, i, o ile wiem nie była dotychczas znana. Poznajmy zastosowania powyżej podanej teorii.

§ 2. Zastosowania powyższej teorii: Weźmy pod uwagę pręt, o stałym przekroju, pionowy u dołu oparty na podporze przegubowej u góry na rolkowej. (Rys. 67, 1). Długość pręta oznaczamy przez l , początek osi współrzędnych umieszczamy w dolnej podporze B przegubowej, oś $B\zeta$ kierujemy do góry wzdłuż osi pierwotnej pręta, oś $B\eta$ w lewo prostopadle do $B\zeta$. Obciążenie pręta stanowi pionowa siła P ściskająca. Wobec nieznacznych mimośrodkowości obciążenia, które tu zresztą pomijamy, pręt uległ pewnemu ugięciu. Równanie gięcia będzie w danym wypadku $EI\eta'' = -P\eta$, czyli wprost $\eta'' = -n^2\eta$, a jego całka $\eta = A\sin n\zeta + B\cos n\zeta$. Dla podpory dolnej niezależnie od wartości n , będziemy mieli $\eta=0$ przy $\zeta=0$, skąd $B=0$ i ostatecznie równanie odkształconej otrzymamy w postaci $\eta = A\sin n\zeta$. W danym wypadku η gra rolę odkształcenia poosiowego q jakiegokolwiek środka poprzecznego przekroju, a zatem jedyna funkcja $f_m = \sin n\zeta$ oraz $a_m = A$. Uczynimy zadość warunkom oparcia pręta, dając odpowiednią wartość, dla n z góry tak obraną, aby przy $\zeta=0$, lub $\zeta=l$ współrzędna η miała wartość zerową. Z łatwością możemy zauważyć, że tym warunkom czyni zadość postać funkcji $\sin(\pi\zeta : l)$. Nadto środkową strzałkę ugięcia pręta oznaczamy przez a , jej wartość wyznaczy się równaniem $a = A \sin \frac{1}{2} \pi = A$, ostatecznie więc będziemy mieli $\eta = a \sin(\pi\zeta : l)$, $\eta' = (a\pi : l) \cos(\pi\zeta : l)$, $\eta'' = -(a\pi^2 : l^2) \sin(\pi\zeta : l)$. W ten sposób uczyniliśmy warunkom geometrycznym zadość. Wyznamy przesunięcie p siły zewnętrznej P odkształcającej i pracę sprężystą. Jak wiadomo $\Pi = \int_0^l M^2 d\zeta : 2EI = \frac{1}{2} EI \int_0^l \eta''^2 d\zeta = (\pi^4 EI a^2 : 2l^4) \int_0^l \sin^2(\pi\zeta : l) d\zeta = \pi^4 EI a^2 : 4l^4$, gdzie oczywiście i nadal a pozostaje niewyznaczonem. Wyznaczanie p nastęrcza pewne trudności, należy bowiem uwzględnić obniżenie się punktu przyłożenia siły P , a więc skrajnego górnego przekroju pręta A , powstałe na

tle wygięcia pręta oraz wydłużenia ujemnego pod naciskiem tej siły. Aby to skutecznie w sposób wystarczająco przybliżony nazywamy ds różniczkę łuku odkształconej. Różnica między ds a rzutem na pierwotną oś pręta równa $ds(1 - \cos\eta') = 2 ds \sin^2(\frac{1}{2}\eta') \approx \frac{1}{2}\eta'^2 ds = \frac{1}{2}\eta'^2 d\xi$, ponieważ przy nieznacznym wygięciu pręta $ds = d\xi$. Stąd niewątpliwie $p =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \eta'^2 d\xi + Pl : EF. \text{ Zazwyczaj przy liczeniu pręta na wyboczenie}$$

nadajemy mu przekrój poprzeczny bardzo słaby, możemy przeto śmiało drugi wyraz wypisanego wzoru pominąć, jako nieznacznym wobec pierwszego. Stąd

$$\text{ostatecznie } p = \frac{1}{2} \int_0^l \eta'^2 d\xi = (\pi^2 a^2 : 2l^2) \int_0^l \cos^2(\pi\xi : l) d\xi = \pi^2 a^2 : 4l, \text{ a przeto}$$

$$U = Pp - \Pi = (\pi^2 a^2 : 4l) (P - \pi^2 EI : l^2). \text{ Zatem mamy } \delta U = (P - \pi^2 EI : l^2) \pi^2 a : 2l$$

$$\text{oraz } \delta^2 U = (P - \pi^2 EI : l^2) \pi^2 : 2l. \text{ Przedostatnie równanie daje } a = 0, \text{ ostatnie}$$

wyrokuje o rodzaju równowagi odkształconej. Zerowa wartość a wskazuje,

że jedyną postacią odkształconej będzie w danym wypadku prosta $\eta =$

$$= a \sin(\pi\xi : l) = 0 \text{ — pierwotna oś pręta, i ta postać będzie odpowiadała}$$

równowadze statecznej, dopóki $\delta^2 U$ będzie mniejsze od zera, to jest dopóki

siła $P < \pi^2 EI : l^2$. Gdy siła odkształcająca przekroczy wartość krytyczną

$\pi^2 EI : l^2$, warjacyjny przyrost $\delta^2 U$ będzie większy od zera — równowaga będzie

niestateczna. W tym wypadku pręt może pozostać prostym o ile istotnie

wszystkie mimośrodkowości obciążenia będą ściśle równe zeru — a więc

jedynie w warunkach idealnych, zgodnych z założeniem. — W każdym

razie jednak będzie to równowaga niestateczna — najdrobniejsza przyczyna

zewnątrzna, nawet w warunkach idealnych da natychmiastowe wyboczenie

pręta przy $P > \pi^2 EI : l^2$. W ten prosty sposób otrzymujemy wzór Eulera

$$P_w = \pi^2 EI : l^2, \text{ wyznaczający wartość graniczną siły; tej wartości odpo-}$$

wiada równowagą wątpliwą. Nieco dalej przekonamy się, co należy w danym

wypadku rozumieć pod tą nazwą.

Z kolei bierzemy pod uwagę ustrój przegubowo prętowy, statycznie

wyznaczalny, złożony z $2w - 3 = m$ prętów, połączonych w węzłami przegubowymi.

Dwa zupełnie zresztą dowolne przeguby opieramy na podporach: lewej przegubowej i

prawej rolkowej, początek stałych osi spólrzędnych umieszczamy w podporze

nieruchomej, oś Y kierujemy ku górze, oś X przez podporę ruchomą na prawo.

W układzie tych osi pierwotne spólrzędne węzłów będą x, y , ich składowe przesunięcia ξ, η . Zatem dla

$$\text{pręta } n\text{-tego możemy napisać } (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l_n^2, (x_1 + \xi_1 - x_2 - \xi_2)^2 +$$

$$+ (y_1 + \eta_1 - y_2 - \eta_2)^2 = (l_n + \lambda_n)^2, \text{ gdzie wskaźniki dotyczą obu przegubów}$$

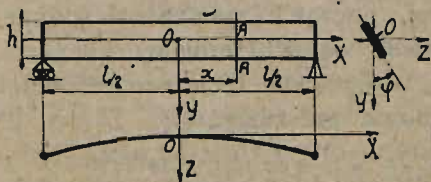
połączonych prętem, l_n oznacza jego długość pierwotną, λ_n jego wydłużenie.

Idąc kolejno ku coraz to dalszym węzłom, począwszy od początkowego — przegubu

lewego nieruchomego, wyznaczymy z tych równań wszystkie ξ, η , a co za tem idzie i przesunięcia p_i sił zewnętrznych P_i ($i =$

$= 1, 2, \dots, r$) obciążających przeguby. W ten sposób otrzymamy $U = \sum_r P_i p_i - \frac{1}{2} \sum_n E F_n \lambda_n^2 : l_n$, ponieważ dla n -go pręta $l_n = \frac{1}{2} S_n^2 l_n : E F_n$, a jego siła osiowa $S_n = E F_n \lambda_n : l_n$. Stąd $\delta U = \sum_n [\sum_r P_i (\delta p_i : \delta \lambda_n) - E F_n \lambda_n : l_n] \delta \lambda_n = 0$. Ten warunek równowagi daje szereg równań $\sum_r P_i (\delta p_i : \delta \lambda_n) = E F_n \lambda_n : l_n = S_n$, bezpośrednio wyznaczających siły w prętach. Zastosujmy to do najprostszego ustroju prętowego (Rys. 19), złożonego z dwóch jednakowych prętów $AC = CB = l$, opartych na podporach przegubowych A i C , a połączonych u góry przegubem B . Obciążenie stanowi siła P pionowa, skierowana w dół. Ta siła obciąża przegub górny, daje więc strzałkę przegubu p . Wobec zupełnej symetrii ustroju poziome przesunięcie górnego przegubu $\xi = 0$, a przeto: $(l + \lambda)^2 = \frac{1}{4} L^2 + (h + \eta)^2 = \frac{1}{4} L^2 + (h + p)^2$. Przed odkształceniem mieliśmy $l^2 = \frac{1}{4} L^2 + h^2$, a przeto $2l \delta \lambda = 2(h + p) \delta p$, $\delta \lambda = \frac{h + p}{l} \delta p$. Stąd różniczkując otrzymamy $l \delta \lambda + \lambda \delta \lambda = h \delta p + p \delta p$, oraz $(\delta \lambda)^2 = h \delta^2 p + (\delta p)^2 + p \delta^2 p$. Te równania dają z pominięciem małych rzędów wyższych $\delta p : \delta \lambda = l : h$, $\delta^2 p : \delta \lambda^2 = [1 - (\delta p : \delta \lambda)^2] : h = -L^2 : 4h^3$, a przeto $U = -Pp - E F \lambda^2 : l$, $\delta U = -[Pl : h + 2EF \lambda : l] \delta \lambda = 0$, oraz $\delta^2 U = -[-PL^2 : 4h^3 + 2EF : l] \delta \lambda^2$. Stąd bezpośrednio $S = EF \lambda : l = -\frac{1}{2} Pl : h$, oraz $\delta^2 U = -\frac{1}{2} [L^2 \lambda : 4h^2 l + 1] 2EF : l \delta \lambda^2$. Zatem $\delta^2 U < 0$ o ile h nie jest bardzo małe — porządku λ , w tym bowiem wypadku $\delta^2 U = -\sim \delta \lambda^2$. Ten skrajny wypadek rozpatrywaliśmy na str. 12. Jako ostatni przykład powyższej teorii poznamy tak zwane

§ 3. Zwichrzenie pręta zginanego. Pręt o stałym przekroju prostokątnym, wysmukłym (Rys. 66) oparto na podporach przegubowej i rolkowej, umożliwiającących obrót skrajnych przekrojów, podpartych około osi pionowych i poziomych. W środkowym przekroju O działa ciężar Q . Przy znacznym stosunku wysokości h przekroju, do podstawy b i pewnej krytycznej wartości siły $Q = Q_c$, pręt ulega zwichrzeniu, zakłesa pośrodku, krzywiąc się w tę lub w ową stronę, przyczem bieżący przekrój AA pochyla się pod kątem φ do płaszczyzny gięcia. Zatem w pewnych wypadkach zginaniu pręta towarzyszy skręcanie. Wobec zupełnej symetrii obciążenia początek stałych osi współrzędnych umieszczamy w środkowym przekroju, oś OX układamy wzdłuż osi pierwotnej pręta, OY kierujemy w dół, OZ ku patrzącemu. Osiowa odległość bieżącego przekroju niech będzie x . Panuje w nim moment gnący $M = P(\lambda - x)$, gdzie dla wygody oznaczyliśmy przez $P = \frac{1}{2} Q$, przez $\lambda = \frac{1}{2} l$. Ten moment



Rys. 65.

jest prostopadły do płaszczyzny gięcia XOZ , daje więc składowe na osiach głównych przekroju: $M' = M \sin \varphi \approx P(\lambda - x) \varphi$ dla osi która początkowo była pionową, i $M \cos \varphi$ dla osi prostopadłej. W założeniu wysmu-

kłości przekroju, składową $M \cos \varphi$ możemy pominąć, jako dającą stosunkowo nieznaczące wygięcie pręta w porównaniu do składowej $P(\lambda - x)\varphi$, która leży w płaszczyźnie prostopadłej. Oznaczmy sztywność pręta $B = \frac{1}{12} h b^3 E$, a wtedy w myśl zwykłego równania $B(\partial^2 Z : \partial x^2) = Bz'' = P(\lambda - x)\varphi$, ponieważ te składowe momentu dają odkształconą, w płaszczyźnie XOZ leżącą. Nadto na przekrój AA działa dodatkowo moment skręcający M_0 , zrodzony z mimośrodowego działania siły Q , jako że środek bieżącego przekroju po zwichrzeniu schodzi z osi pierwotnej pręta OX . Ten moment daje elementarny jednostkowy kąt skręcenia płytki $\Phi = \partial \varphi : \partial x = \varphi' = M_0 : GI_0 = M_0 : C$, gdzie przez C oznaczyliśmy sztywność wiorową pręta. W danym wypadku praca sprężysta pręta będzie $\Pi = 2$

$$\int_0^\lambda [M'^2 dx : 2B] + 2 \int_0^\lambda [M_0^2 dx : 2C] = B \int_0^\lambda z''^2 dx + C \int_0^\lambda \varphi'^2 dx.$$

Chcąc z kolei wyznaczyć pracę siły zewnętrznej należy znaleźć strzałkę środkowego przekroju. Wskutek zginania się pręta w kierunku najmniejszej sztywności, płytka AA ujawni elementarne skrzywienie o kąt $d\psi = M' dx : B = z'' dx$, zatem koniec podparty pręta opisze łuk $d\psi (\lambda - x) = z'' (\lambda - x) dx$ w stosunku do swego pierwotnego położenia na osi OX . Składowa pionowa tego przesunięcia będzie $z'' (\lambda - x) \varphi dx$, a przeto strzałka siły Q wyrazi się wzorem $p = \int_0^\lambda z'' (\lambda - x) \varphi dx$. W ten sposób otrzymamy $U = 2P$

$$\int_0^\lambda z'' (\lambda - x) \varphi dx - B \int_0^\lambda z''^2 dx - C \int_0^\lambda \varphi'^2 dx,$$

z dodatkowym warunkiem $Bz'' = P(\lambda - x)\varphi$. Po podstawieniu będzie $U = 2P^2 \int_0^\lambda (\lambda - x)^2 \varphi^3 dx :$

$$B - \int_0^\lambda P^2 (\lambda - x)^2 \varphi^2 dx : B - C \int_0^\lambda \varphi'^2 dx = (P^2 : B) \int_0^\lambda (\lambda - x)^2 \varphi^2 dx -$$

$$C \int_0^\lambda \varphi'^2 dx.$$

W myśl poczynionych założeń φ musi mieć wartość zerową dla skrajnych podpartych przekrojów — i niewątpliwie najwyższą wartość $\varphi = a$ dla środkowego. Tym warunkom geometrycznym czyni zadość wzór przybliżony $\varphi = a \cos(\pi x : 2\lambda)$. Stąd $\varphi' = -(\pi a : 2\lambda) \sin(\pi x : 2\lambda)$, a przeto

$$U = (a^2 P^2 : B) \int_0^\lambda (\lambda - x) \cos^2(\pi x : 2\lambda) dx - [C \pi^2 a^2 : 4\lambda^2] \int_0^\lambda \sin^2(\pi x : 2\lambda) dx =$$

$$= \Delta a^2,$$

gdzie oznaczyliśmy przez $\Delta = [1 : 6 + 1 : \pi^2] P^2 \lambda^3 : B - C \pi^2 : 8\lambda$. Zatem mamy $\delta U = 2\Delta a \delta a = 0$, $\delta^2 U = 2\Delta \delta a^2$. Pierwsze z tych równań daje $a = 0$, a więc i $\varphi = 0$, jako jedyny możliwy stan równowagi bez zwichrzenia pręta. Drugi warunek wymaga, aby przytem Δ było mniejsze od zera, inaczej bowiem równowaga nie będzie stateczna i najdrobniejsza przyczyna zewnętrzna spowoduje zwichrzenie. Najniższa wartość siły zwichrzającej

da się wyznaczyć z równania $\Delta = 0$, które daje $Q = 2P = 17,168 \sqrt{BC} : l^2$, jako wynik przybliżony ze względu na dowolność założenia co do φ . Wynik ścisły różni się tylko wartością 16,920 współczynnika, zatem jeno o 1,46% niższą od przybliżonej. W ten sam sposób można rozwiązać również i pozostałe wypadki zwichrzenia: dla pręta jednostajnie obciążonego na całej długości w stosunku q kg. na centymetr bieżący, będziemy mieli ścisły wzór $Q = ql = 28,320 \sqrt{BC} : l^2$. Dla pręta jednostronnie osadzonego, drugostronnie obciążonego skupioną siłą $Q = 16,04 \sqrt{BC} : l^2$. Niestykanie bogaty zbiór przeliczonych wzorów dla sił zwichrzających zawiera przepiękne dzieło Timoszenki pod tytułem „O stateczności ustrojów sprężystych“.

Powyżej wyłożona teoria daje, jak widzimy nader cenne wyniki praktyczne. Wpływa z niej bezpośrednio

§ 4. **Sposób Ritz'a.** Weźmy pod uwagę ciało wzorowo sprężyste obciążone zrównoważonym układem sił zewnętrznych P_i ($i=1,2,\dots,r$). Jak wyżej przez p_i oznaczamy przesunięcia sił P_i , przez $q = \sum a_m f_m$ ($m=1,2,\dots$) odkształcenia drobin. W założeniu wzorowej sprężystości ustroju $U = \Pi$, zatem będziemy mieli w myśl poprzednio wyłożonej teorii $\delta U = \delta \Pi = \sum (\partial \Pi : \partial a_m) \delta a_m = 0$, stąd $\partial \Pi : \partial a_m = 0$, przyczem pracę sprężystą ustroju należy oczywiście wyrazić w funkcji zmiennych a_m . Oznaczmy pracę sprężystą sił zewnętrznych przez L . W myśl twierdzenia Clapeyrona $L = \frac{1}{2} \sum P_i p_i = \Pi$, a przeto również i $\partial L : \partial a_m = 0$. Z równania $L = \Pi$ możemy którąkolwiek zmienną, dajmy na to a_s , wyznaczyć w funkcji pozostałych, a przeto na mocy drugiego twierdzenia Castigliano, będziemy mieli, jako dla ustroju wzorowo sprężystego: $\partial \Pi : \partial a_m = \partial L : \partial a_m + (\partial \Pi : \partial a_s) (\partial a_s : \partial a_m) = 0$, oraz $\partial L : \partial a_m + (\partial L : \partial a_s) (\partial a_s : \partial a_m) = 0$, gdzie ($m=1,2,\dots$). Wyłączmy pochodne $\partial a_s : \partial a_m$ z tych dwóch szeregów, a otrzymamy równania $(\partial \Pi : \partial a_m) (\partial L : \partial a_s) = (\partial L : \partial a_s) (\partial \Pi : \partial a_m)$, dla $m=1,2,\dots$ (prócz s). Ten ostateczny szereg równań, łącznie z $L = \Pi$ pozwoli wyznaczyć wszystkie a_m w zależności od P_i , które weszły w L . Istotę tego sposobu poznamy najlepiej rozpatrując następujący prosty przykład.

W księdze drugiej (str. 39) wyznaczyliśmy odkształconą prętą poziomego, osadzonego jednym końcem. Obciążenie jego stanowiła siła pionowa P , działająca na skrętny przeciwległy koniec pręta. Zachowamy wszystkie znakowania. W danym wypadku $q = \eta = e + f\zeta + g\zeta^2 + h\zeta^3$. Z geometrycznych warunków jednostronnego osadzenia pręta wynika, że $\eta = \eta' = 0$ przy $\zeta = 0$, a przeto musi być $e = f = 0$, i ostatecznie $\eta = g\zeta^2 + h\zeta^3$. Stąd $\eta' = 2g\zeta + 3h\zeta^2$, $\eta'' = 2g + 6h\zeta$, $\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^l \eta''^2 d\zeta = 2EI \int_0^l [g^2 + 6gh\zeta + 9h^2 \zeta^2] d\zeta = 2EI [g^2 l + 3ghl + 3h^2 l^2]$. Z kolei według Clapeyrona $L = \frac{1}{2} Pp = \frac{1}{2} P [gl^2 + hl^3] = \frac{1}{2} Pl^2 [g + hl]$, a przeto stosując wzór Ritz'a otrzymamy różniczkując $(\partial \Pi : \partial g) (\partial L : \partial h) - (\partial \Pi : \partial h) (\partial L : \partial g) = PEI l^3 [2g + 3hl - 3g -$

$6hl = -PEI^3 [g + 3hl] = 0$. Stąd $g + 3hl = 0$. Ten warunek łącznie z warunkiem $L = 11$ da nam bezpośrednio $g = \frac{1}{2} Pl : EI$, $h = -\frac{1}{6} P : EI$, i ostatecznie $\eta = \frac{1}{2} P (\zeta^2 - \frac{1}{3} \zeta^3) : EI$. To otrzymaliśmy (str. 41) całkując równanie $EI\eta'' = P(l - \zeta)$. Gdybyśmy założyli $\eta = e + f\zeta + g\zeta^2 + h\zeta^3 + i\zeta^4 + k\zeta^5 + \dots$ itd., to otrzymaliśmy z równań Ritz'a $i = k = \dots = 0$, zatem w danym wypadku sposób Ritz'a daje wynik ścisły, jak również we wszystkich wypadkach belek zginanych, ilekroć moment gnący może być wyrażony przez jedną funkcję analityczną ciągłą dla całej belki. W innych daje wyniki przybliżone i tym ścisłejsze im większą ilość wyrazów weźmiemy w rozwinięciu dla η . Ten sposób jednak jest dość uciążliwy w rachunku, daleko prostsze wyniki daje —

§ 5. Sposób Timoszenki wyznaczania przybliżonych odkształconych, stanowiący bezpośrednie zastosowanie ogólnej metody wyłożonej do wypadku zginania płaskiego. Timoszenko korzysta również z rozwinięcia dla q , uwzględnia jednak prócz geometrycznych dodatkowe warunki statyczne, a następnie wyznacza współczynniki z warunków pochodnych podstawowego $\delta U = 0$. Istotę tego sposobu najlepiej poznamy, przeliczając ten sam przykład. Założmy jak wyżej $\eta = e + f\zeta + g\zeta^2 + h\zeta^3$. Z warunków geometrycznych osadzenia pręta otrzymamy znowu $e = f = 0$. Nadto uwzględnimy warunek statyczny. W skrajnym przekroju pręta, gdzie działa siła P , panuje niewątpliwie zerowa wartość momentu, a przeto przy $\zeta = l$ powinno być $\eta'' = 2g + 6hl = 0$, stąd bezpośrednio $g = -3hl$, oraz $\eta = -3hl\zeta^2 + h\zeta^3$, $\eta' = -6hl\zeta + 3h\zeta^2$, $\eta'' = 6h(\zeta - l)$. Zatem $\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^l \eta''^2 d\zeta = 18h^2 EI \int_0^l (\zeta - l)^2 d\zeta = 6EIh^2 l^3$. Nadto $L = Pp = P[-3hl^3 + hl^3] = -2Plh^3$ i ostatecznie $U = -Phl^3 - 6EIh^2 l^3$. A więc $\delta U = [-2Pl^3 - 12EIhl^3] \delta h = 0$, stąd $h = -\frac{1}{6} P : EI$, oraz $g = \frac{1}{2} Pl : EI$. Te same wartości otrzymaliśmy wyżej, lecz w sposób więcej złożony. Jeszcze bardziej proste wyniki daje sposób Timoszenki, gdy odkształcenia belek zginanych wyrazimy w postaci szeregu Fouriera, dobierając wyrazy tak, aby z góry czyniły zadość warunkom geometrycznym i statycznym. Tak, dla belki statycznie wyznaczalnej jednoprzęsłowej będziemy mieli η w postaci szeregu $\eta = \sum a_m \sin(m\pi\zeta : l)$, czyniącego zadość warunkom geometrycznym i statycznym. W istocie będziemy mieli warunek geometrycznym $\eta = 0$, oraz statyczny $\eta'' = 0$ przy $\zeta = 0$ i $\zeta = l$, ponieważ w przekrojach skrajnych przegubowo podpartych, momenty powinny mieć wartości zerowe. Łatwo się można przekonać, że wyżej wypisana postać η czyni tym warunkom zadość, tutaj bowiem $\eta'' = -(\pi^2 : l^2) \sum a_m m^2 \sin(m\pi\zeta : l)$. Stąd bezpośrednio $\Pi = (\pi^4 EI : 2l^4) \int_0^l [\sum a_m m^2 \sin(m\pi\zeta : l)]^2$

$d\zeta = (a_1^2 + 2^4 a_2^2 + 3^4 a_3^2 + \dots) EI\pi^4 : 4l^3$, ponieważ wyrazy pod znakiem całki $\sin(n\pi\zeta : l) \sin(k\pi\zeta : l)$ dają przy całkowaniu w granicach od 0 do l wartości zerowe przy $n \neq k$, i równe jedności przy $k = n$. Z kolei wyznaczamy pracę sił zewnętrznych. Będzie to $\sum_r P_i \eta_i = \sum_r (P_i \sum_m a_m \sin(m\pi\zeta_i : l))$, a przeto z szeregu równań $\partial U : \partial a_m = \sum_r [P_i \sin(m\pi\zeta_i : l)] - EI\pi^4 m^4 a_m : 2l^3 = 0$ otrzymamy $a_m = [2l^3 \sum_r P_i \sin(m\pi\zeta_i : l)] : m^4 \pi^4 EI$. Dla pojedynczej siły P pośrodku belki $\zeta_1 = 1/2 l$, $\sin(m\pi : 2) = 1$, gdy m nieparzyste i $\sin(m\pi : 2) = 0$, gdy m parzyste, a przeto: $\eta = 2Pl^3 [\sin(\pi\zeta : l) - 1/3^4 \sin(3\pi\zeta : l) + 1/5^4 \sin(5\pi\zeta : l) - \dots] : EI\pi^4$. Praktycznie wystarczy zazwyczaj pierwszy wyraz, najwyżej dwa pierwsze wyrazy szeregu. Z łatwością można to udowodnić, wychodząc ze wzoru dla strzałki siły P . Będzie to $f = 2Pl^3 [1 - 1 : 3^4 + 1 : 5^4 - \dots] : EI\pi^4$. Biorąc tylko jeden wyraz otrzymamy $f = Pl^3 : 48,7EI$, zamiast wartości ścisłej $f = Pl^3 : 48EI$, a więc o 1,44% mniej. Dwa wyrazy dadzą współczynnik 48,1, trzy 48,01. Znacznie gorsze wyniki otrzymamy dla strzałek w sąsiedztwie podpór. Zatem, zachowując tylko pierwszy wyraz rozwinięcia będziemy mieli w wypadku działania wielu sił $\eta = a_1 \sin(\pi\zeta : l)$, gdzie $a_1 = [2l^3 \sum_r P_i \sin(\pi\zeta_i : l)] : EI\pi^4$. W tym ostatnim wzorze sumę należy zastąpić przez całkę, gdy zamiast sił skupionych, działać będzie obciążenie jednostkowe q , poczynające się w odległości b od prawej podpory B i kończące się

w odległości c . W ten sposób otrzymamy wyraz dla $a_1 = [2l^3 \int_b^c q \sin(\pi\zeta : l) d\zeta] : EI\pi^4$, możemy bowiem obciążenie q rozpatrywać, jako złożone z elementarnych sił $q d\zeta$, działających w odległości ζ od prawej podpory B .

Dla obciążenia q jednostajnego dla całej długości belki: $a_1 = [2l^3 q \int_0^l \sin(\pi\zeta : l) d\zeta] : EI\pi^4 = 4ql^4 : EI\pi^4 = ql^4 : 76,5EI$. Z łatwością możemy zauważyć, że a_1 wyznacza strzałkę ugięcia środkową, o ile we wzorze dla η zachowamy ten jeden tylko parametr. Zatem w ostatnio rozpatrywanym wypadku otrzymaliśmy wartość—strzałki nader zbliżoną do istotnej $f = ql^4 : 76,8EI$.

Dla belki jednoprzęsłowej obustronnie zamocowanej należy uczynić $\eta = 1/2 a [1 - \cos(2\pi\zeta : l)]$, ta postać bowiem spełnia warunki geometryczne obustronnego osadzenia belki, a ograniczeń statycznych niema w danym wypadku. Łatwo się o tem przekonać, zważywszy, że wzór powyższy dla $\zeta = 0$ i $\zeta = l$, daje $\eta = \eta' = 0$, oraz η'' różne od zera zgodnie z istotnymi warunkami, jako że w skrajnych przekrojach pręta panują momenty osadcze. Różniczkując kolejno otrzymamy: $\eta' = (a\pi : l) \sin(2\pi\zeta : l)$,

$$\eta'' = (2a\pi^2 : l^2) \cos(2\pi\zeta : l), \text{ stąd } \Pi = 1/2 EI \int_0^l \eta''^2 d\zeta = (2a^2 EI\pi^4 : l^4)$$

$\int_0^l \cos^2(2\pi\zeta : l) d\zeta = a^2 EI\pi^4 : l^3$. Praca sił zewnętrznych jak dawniej $L = \sum_r P_i \cdot \frac{1}{2} a [1 - \cos(2\pi\zeta : l)]$, a przeto $\partial U : \partial a = \frac{1}{2} \sum_r P_i [1 - \cos(2\pi\zeta : l)] - 2a\pi^4 EI : l^3$ i ostatecznie $a = l^3 \sum_r P_i [1 - \cos(2\pi\zeta_i : l)] : 4\pi^4 EI$. W szczególnym wypadku działania pojedynczej siły P pośrodku belki $a = Pl^3 : 2\pi^4 EI = Pl^3 : 194,8 EI$. Wartość tej strzałki ściska różni się współczynnikiem: powinno być 192, to jest o 1,46% mniej. Podane przykłady wystarczająco uwypuklają zalety sposobu Timaszenki, występują one jeszcze jaskrawiej przy wyznaczaniu odkształconych belek zginanych mimośrodkowo.

§ 6. **Belki zginane mimośrodkowo.** Weźmy jeszcze raz pod uwagę obie powyżej rozpatrywane belki jednoprzęstowe i dołączmy do obciążenia sił gnących P_i dodatkowe siły osiowe S , czynne w skrajnych przekrojach podpartych. W danym wypadku, zwłaszcza przy znacznej liczbie sił P_i , bezpośrednie ściśle wyznaczanie odkształconych nastrocza niepokonane trudności, które z łatwością pominiemy, dając rozwiązanie przybliżone. W myśl poczynionych uproszczeń w teorii belek obciążonych mimośrodkowo $EI\gamma'' \approx M$, a zatem i tutaj możemy skorzystać ze wzoru dla pracy sprężystej $U = \frac{1}{2} EI \int_0^l \gamma''^2 d\zeta$, pomijając stosunkowo drobny wpływ sił osiowych na odkształcenia gnące. Nadto dla wydłużenia bezwzględnego pręta zastosujemy uprzednio już wyprowadzony wzór $\Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \gamma'^2 d\zeta$, który

dla belki statycznie wyznaczalnej da $\Delta l = (a^2 \pi^2 : 2l^2) \int_0^l \cos^2(\pi\zeta : l) d\zeta =$

$$= a^2 \pi^2 : 4l, \text{ a dla obustronnie zamocowanej } \Delta l = (a^2 \pi^2 : 2l^2) \int_0^l \sin^2(2\pi\zeta : l) d\zeta =$$

$$= a^2 \pi^2 : 4l. \text{ Zatem w obu wypadkach praca zewnętrzna sił osiowych wyrazi się w postaci } Sa^2 \pi^2 : 4l.$$

Należy ją dodać do pracy sił gnących w wypadku sił S ściskających, odjąć w wypadku rozciągających, ponieważ pierwsze współdziałają z gnąciami w pracy zginania, powiększając krzywiznę belki, drugie przeciwdziałają gnącym. Stąd dla belki statycznie wyznaczalnej otrzymamy $U = \sum_r P_i a \sin(\pi\zeta_i : l) \mp Sa^2 \pi^2 : 4l - a^2 EI\pi^4 : 4l^3$, oraz $\partial U : \partial a = \sum_r P_i \sin(\pi\zeta_i : l) \mp Sa^2 \pi^2 : 2l - a EI\pi^4 : 2l^3 = 0$, i ostatecznie $a = [2l^3 \sum_r P_i \sin(\pi\zeta_i : l)] : [EI\pi^4 (1 \mp S l^2 : \pi^2 EI)]$. Oznaczmy przez $m^2 = S l^2 : \pi^2 EI$, przez $f = [2l^3 \sum_r P_i \sin(\pi\zeta_i : l)] : EI\pi^4$ — strzałkę środkową ugięcia belki statycznie wyznaczalnej pod jarzmem wyłącznym sił gnących, a otrzymamy $a = f : (1 \mp m^2)$. Będzie to zarazem środkowa strzałka ugięcia belki statycznie wyznaczalnej przy współdziałaniu sił osiowych z gnąciami. Górny znak należy brać dla sił S rozciągających, dolny — dla ściskających.

W podobny sposób dla belki obustronnie osadzonej otrzymamy $U = \frac{1}{2} \sum_r P_i a [1 - \cos(2\pi \zeta_i : l)] + Sa^2 \pi^{-2} : 4l - a^2 \pi^{-4} EI : l^3$, stąd $\partial U : \partial a = \frac{1}{2} \sum_r P_i [1 - \cos(2\pi \zeta_i : l)] + Sa\pi^{-2} : 2l - 2a EI \pi^{-4} : l^3 = 0$ i ostatecznie $a = l^3 \sum_r P_i [1 - \cos(2\pi \zeta_i : l)] : [4EI \pi^{-4} (1 + Sl^2 : \pi^2 EI)] = f(1 + m^2 : 4)$, gdzie $f = l^3 \sum_r P_i [1 - \cos(2\pi \zeta_i : l)] : 4EI \pi^{-4}$ — oznacza środkową strzałkę ugięcia tej belki, obciążanej tylko siłami gnącymi P_i , a zaś $am^2 = Sl^2 : \pi^2 EI$. Oba powyżej otrzymane wzory wskazują, że *siły osiowe S rozciągające zmniejszają strzałkę ugięcia sił gnących, a ścis-kające powiększają tę strzałkę f*. Działanie to wyraźniej się uwidoczni dla belki statycznie wyznaczalnej. Gdy siły cisnące staną się równe wartości krytycznej $S_0 = \pi^2 EI : l^2$ dla belki statycznie wyznaczalnej lub $S_0 = 4\pi^2 EI : l^2$ dla obustronnie osadzonej, to strzałka ugięcia staje się nieskończenie wielką pręt ulega wyboczeniu. To zjawisko jest zgoła niemożliwe dla sił S rozciągających, ponieważ mianownik $1 + m^2$ lub $1 + m^2 : 4$ nie mogą mieć wartości zerowych. Wzory dla sił krytycznych S_0 nie różnią się od wzorów Eulera, stąd wniosek, że siły gnące nie obniżają wartości siły, powodującej wyboczenie pręta bez ich udziału jednak tylko wtedy, gdy siły gnące dają nieznaczne odkształcenia, w tem bowiem założeniu została ustalona cała powyższa teoria.

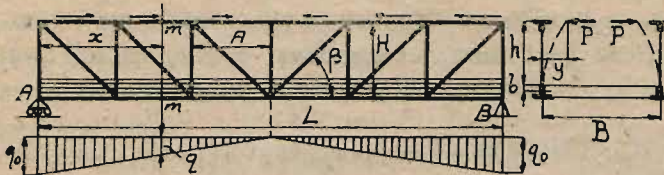
W szczególnym wypadku obu skrajnych podpór nieruchomych siły S nie mogą działać jako obciążenie zewnętrzne belki, natomiast na tle ugięcia obu belek, połączonego z wydłużeniem się jej osi pierwotnej koniecznym ze względu na nieruchomość obu podpór, rodzą się sprzeczwy, czyli odpory S poziome, które z łatwością mogą być wyznaczone z równania $\Delta l = Sl : EF$, w którym F oznacza stały przekrój belki. W obu wypadkach $\Delta l = \pi^2 a^2 : 4l$, oraz $S = m^2 \pi^2 EI : l^2$, zatem $\pi^2 a^2 : 4l = m^2 \pi^2 EI : l^2 EF$, skąd $\frac{1}{4} a^2 = m^2 l : F = m^2 i^2$, gdzie i oznacza ramię bezwładności przekroju belki. Na tle działania sił gnących oś belki wydłuża się, stara się przeto zmniejszyć odległość pierwotną podpór, rodząc w nich odpory S , skierowane nazewnątrz belki, a więc rozciągające. Stąd wniosek, że dla belki opartej na dwóch podporach przegubowych: $f^2 : 4(1 + m^2)^2 = m^2 i^2$, a dla belki obustronnie nieruchomo osadzonej $f^2 : 4(1 + m^2 : 4)^2 = m^2 i^2$, inaczej jeszcze $m^2(1 + m^2)^2 = f^2 : 4i^2$, oraz $\frac{1}{4} m^2(1 + \frac{1}{4} m^2)^2 = f^2 : 16i^2$. Z tych równań z łatwością możemy wyznaczyć m , a co za tem idzie i niewiadomy odpór S , poziomy na podporach nieruchomych. W ostatnio rozpatrywanych dwóch przykładach wkroczyliśmy ponownie w dziedzinę zagadnień, dotyczących stateczności ustrojów. Prócz metody ogólnej wyłożonej na początku, również dobre daje wyniki — metoda Timoszenki, a raczej —

§ 7. Zasada Timoszenki. Głosi ona, że *wszystkie wartości krytyczne obciążenia zewnętrznego, dla których równowaga odkształconego ustroju sprężystego staje się niestateczną, czynią zadość równaniu $L = \Pi$* , gdzie Π jak zwykle oznacza pracę sprężystą ustroju, przynależną do danego stanu równowagi odkształconej, a $L = \sum_r P_i p_i$ — pracę sił ze-

wewnętrznych P_i , które ów stan wywołały, ujawniając przy tem przesunięcia p_i . Zasada powyższa wypływa wprost z naszych rozważań ogólnych. Łatwo to udowodnić, zważywszy że dla rozpatrywanego krytycznego stanu równowagi odkształconej, wszystkie pochodne energii U muszą mieć wartości zerowe, a przeto sama energia U ma wartość stałą. Stąd prosty wniosek, że $U = L - \Pi = O$ ponieważ ani L , ani Π nie zawierają stałego wyrazu. Inaczej można to jeszcze udowodnić, wychodząc z założenia, że stan równowagi krytycznej, wątpliwej, jakęśmy wyżej nazwali, może jedynie istnieć przy wszelkich warjacyjnych przyrostach a_m równych zeru, zatem przynależna doń energia $U = const = O$. Widzimy stąd, że zasada Timoszenki stanowi wniosek bezpośredni naszej ogólnej teorii, a jako taka może być używana na równi z nią. Ma nader bogate zastosowania praktyczne, drobniawo opracowane przez Timoszenkę w dziele wspomnianem wyżej. Podamy tu kilka przykładów:

Weźmy pod uwagę najprostszy wypadek wyboczenia pręta pionowego, opartego u dołu na podporze przegubowej, u góry na rolkowej i obciążonego osiową siłą P cisnącą. Wyznamy jej przesunięcie ze wzoru $p = \Delta l = \frac{1}{2} \int_0^l \gamma_1^2 dz$, zakładając $\gamma_1 = \sum_m a_m \sin(m\pi z : l)$. Całkując otrzymamy $p = (\pi^2 : 2l^2) \int_0^l [\sum_m a_m m \cos(m\pi z : l)]^2 dz = (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + 3^2 a_3^2 + 4^2 a_4^2 + \dots) \pi^2 : 4l$. Uprzednio już otrzymaliśmy dla obranej postaci γ_1 wartość $\Pi = (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + 3^2 a_3^2 + 4^2 a_4^2 + \dots) EI \pi^4 : 4l^3$, zatem w myśl zasady Timoszenki będziemy mieli $Pp - \Pi = (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + 3^2 a_3^2 + 4^2 a_4^2 + \dots) P \pi^2 : 4l - (a_1^2 + 2^2 a_2^2 + 3^2 a_3^2 + 4^2 a_4^2 + \dots) EI \pi^4 : 4l^3 = O$. Wyznamy najniższą krytyczną wartość siły P , przynależną do stanu równowagi wątpliwej. W tym celu bierzemy pełną różniczkę obustronnie. Wobec niezależności a_m otrzymamy szereg równości $(P \pi^2 m^2 2 a_m : 4l) = (EI \pi^4 m^4 2 a_m : 4l^3)$, skąd $P_m = \pi^2 EI m^2 : l^2$ przy $(m=1, 2, 3, \dots)$. Najniższa wartość siły wybaczącej będzie $P_1 = \pi^2 EI : l^2$. To samo otrzymamy stosując naszą metodę ogólną. W danym wypadku $U = Pp - \Pi = \sum [P \pi^2 a_m^2 m^2 : 4l - EI \pi^4 a_m^2 m^4 : 4l^3]$, $\delta U = \sum [2P \pi^2 a_m m^2 : 4l - 2 \pi^4 EI a_m m^4 : 4l^3] \delta a_m$, $\delta^2 U = \sum 2 [P \pi^2 m^2 : 4l - \pi^4 EI m^4 : 4l^3] (\delta a_m)^2$. Dla równowagi wątpliwej $\delta^2 U$ nie powinno być ani większe ani mniejsze od zera, słowem *powinien zachodzić tak zwany wypadek wątpliwy maximum i minimum funkcji w celu zmiennych*. Tutaj funkcja U nie zawiera wcale iloczynów przyrostów δa_m , δa_n , zatem wprost $\delta^2 U : \delta a_m = O$, co da ten sam szereg równości, jaki otrzymaliśmy tylko co stosując zasadę Timoszenki. Jako drugi przykład zastosowania tej zasady, lub, co na jedno wychodzi, naszej teorii ogólnej — rozpatrujemy tak zwane—

§ 8. **Zadanie Jasińskiego.** Weźmy pod uwagę ustrój mostowy (Rys. 67), złożony z dwóch kratowych dźwigarów pionowych i jezdni dolnej. Całkowite obciążenie mostu $2Q$ kg. jednostajnie rozłożone na całą powierzchnię jezdni da dla dźwigaru Q kg., a przeto stanowić będzie jego obciążenie jednostkowe $r = Q : L$ kg. na centymetr bieżący stałe. Przy znacznej liczbie krat siła ściskająca w stójce jest prawie równa sile tnącej dźwigara $T = -\frac{1}{2}Q + Qx : L = Q(x - \frac{1}{2}L) : L$, przyczem przez x oznaczyliśmy odległość bieżącego przekroju poprzecznego mm od skrajnej lewej podpory mostu przegubowej. Łatwo się o tem przekonać bezpośrednio, badając odpowiednie wykresy. A zatem siła osiowa ściskająca w pasie górnym tuż obok stójki będzie $(Q : L)(x - \frac{1}{2}L) \operatorname{ctg} \beta = QA(x - \frac{1}{2}L) : LH$, jak to zresztą najlepiej widać z rysunku, gdzie przez H oznaczyliśmy wysokość, przez A szerokość krat. Stąd na jednostkę długości pasa górnego otrzymamy $q = Q(x - \frac{1}{2}L) : LH = \mu(x - \frac{1}{2}L)$, oznaczywszy przez $\mu = Q : LH$. Rozkład obciążeń jednostkowych wyznaczonych tym wzorem dla pasa górnego uwypuklony jest na załączonym wykresie.



Rys. 67.

Obciążenia rosną linjowo od skrajnych wartości $q_0 = \pm \frac{1}{2}\mu l$ dla skrajnych przekrojów opartych na podporach rolkowej A i przegubowej B—do zera dla środkowe-

go przekroju. Zatem środkowa płytka pasa górnego jest osiowo najbardziej obciążona, jej bowiem siły cisnące $S_0 = \frac{1}{8}\mu l^2$ —są równe zakresowanym połom trójkątów wykresu, stanowią bowiem sumę obciążeń jednostkowych połowy pasa górnego. Pod jarmem tych obciążeń pas górny może ulec wyboczeniu w płaszczyźnie poziomej, jako że w kierunku poziomym pionowe pręty kraty dają najmniejszy opór sprężysty. Opór sprężysty przekątni możemy śmiało pominąć, są to bowiem pręty liczone na rozciąganie, a więc znacznie smuklejsze od stоек, dających główny sprzeciw. Zatem przy wyboczeniu pasa górnego w płaszczyźnie poziomej stójki się wygną: ich górne końce zejną z pionów, dając strzałki y . Załóżmy, że dolna pozioma część mostu, dźwigająca jezdnię, stanowi ustrój sztywny. To założenie przeczy rzeczywistości, zazwyczaj jednak daje się utrzymać praktycznie, wobec istotnie tęgiej budowy tej części ustroju, a przeto możemy rozpatrywać stójki, jako osadzone u dołu w sztywnym pasie dolnym. Oznaczmy przez h długość stójki mierzoną od górnego skraju pasa dolnego do środka przekrojów pasa dolnego. Dla tego rodzaju belki strzałka końcowa ugięcia będzie w myśl wzorów wyprowadzonych na str. 41 książki drugiej: $y_0 = Ph^3 : 3E_1I_1$. W tym wzorze P oznacza siłę zewnętrzną, dającą strzałkę y_0 , E_1I_1 sztywność stójki w płaszczyźnie gięcia — a więc w płaszczyźnie poprzecznego przekroju mostu. Niejaki wpływ na strzałkę ugięcia wywiera siła osiowa stójki. Rozpatrując stójkę, jako połowę belki obustronnie osadzonej z łatwością dojdziemy do przekonania, że strzałka $y = y_0 : (1 - m^2)$, gdzie przez m^2 oznaczyliśmy, jak w ustępie szóstym stosunek siły osiowej $S = T = Q(x - \frac{1}{2}L) : L$, ściskającej stójkę do siły krytycznej $\pi^2 E_1 I_1 : 4h^2$. Stąd bezpośrednio $P = 3E_1 I_1 (1 - m^2) y : h^3$. Zastąpmy układ sił P

skupionych w złączeniach pasa górnego ze stójkami układem sił jednostkowych $p = P : A = ny$, gdzie oznaczyliśmy przez $n = 3E_1 I_1 (1 - m^2) : Ah^3$. Ta zamiana obciążeń skupionych ciągiem jest zupełnie dopuszczalna praktycznie przy większej liczbie kręt dźwigaru. Z kolei wyodrębniamy myślowo dwa, symetryczne względem środka, poprzeczne przekroje pasa górnego — jednem nm w odległości x od skrajnego lewego, drugi — w odległości $L - x$. Przy odkształceniu gnącym pasa górnego te dwa przekroje

zbliżą się o $\Delta l_x = \frac{1}{2} \int_x^{L-x} y'^2 dx$ w myśl często już wyżej stosowanego wzoru.

Panować w nich będą siły osiowe $q dx$ obciążenia jednostkowego cisnącego, a przeto praca tych sił będzie równa $-\frac{1}{2} \mu (x - \frac{1}{2} L) dx \int_x^{L-x} y'^2 dx$. Stąd

dla całego pasa górnego otrzymamy pracę sił zewnętrznych w postaci $L = - \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \mu (x - \frac{1}{2} L) dx \int_x^{L-x} y'^2 dx$. Różniczkowanie przez części da nam $L =$

$= \frac{1}{2} \mu [x (\frac{1}{2} L - x) \int_x^{L-x} y'^2 dx]_0^{L/2} - \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} x [- \int_x^{L-x} y'^2 dx + (\frac{1}{2} L - x) \{y'_{L-x}$

$(-1) - y'_{L-x} (1)\}] dx$. Pierwszy wyraz najoczywiściej równa się zeru — w ostatnim widzimy pochodną całki oznaczonej w granicach zależnych od

zmiennych x . W tej pochodnej oznaczyliśmy przez y'_{L-x} oraz y'_x wartości pochodnych y' dla rozpatrywanych symetrycznych przekrojów, a tuż przy nich w nawiasach pochodne granic zmiennych całki po x . Wobec zupełnej symetrii obciążenia $y'_{L-x} = -y'_x$, zatem $y'^2_{L-x} = y'^2_x = y'^2$ i ostatecznie $L =$

$= \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} x dx \int_x^{L-x} y'^2 dx + \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} x (L - 2x) y'^2 dx$. Ponowne całkowanie przez

części da nam $L = \frac{1}{2} \mu [\frac{1}{2} x^2 \int_x^{L-x} y'^2 dx]_0^{L/2} - \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} \frac{1}{2} x^2 [y'^2 (-1) - y'^2 (1)]$

$dx + \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} x (L - 2x) y'^2 dx$. Wobec tego, że $[\frac{1}{2} x^2 \int_x^{L-x} y'^2 dx]_0^{L/2} = \frac{1}{8} L^2$

$\int_0^{L/2} y'^2 dx - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_0^{L/2} y'^2 dx = 0$, przeto otrzymamy ostatecznie $L = \frac{1}{2} \mu$

$\int_0^{L/2} x^2 y'^2 dx + \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} x (L - 2x) y'^2 dx = \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} x (L - x) y'^2 dx$. Zatem wy-

znaczmy pracę sprężystą. Dla pasa górnego będziemy mieli $W = \frac{1}{2} EI$

$\int_0^L y''^2 dx + \frac{1}{2} n \int_0^L y^2 dx$.

Pierwszy wyraz tego wzoru wyraża dobrze nam znaną pracę naprężeń gnących, drugi pracę sił wewnętrznych — sprzeciwów stójek. Że tak

jest istotnie z łatwością się przekonamy zważywszy, że elementarna siła $p dx = ny dx$ ma przynależne przesunięcie y , zatem w myśl twierdzenia Clapeyrona jej praca sprężystą będzie $\frac{1}{2} ny^2 dx$. Dla całego pasa górnego

należy wziąć całkę w granicach od zera do L . Stąd $U = \frac{1}{2} \mu \int_0^{L/2} x(L-x)$

$$y'^2 dx - \frac{1}{2} EI \int_0^L y''^2 dx - \frac{1}{2} n \int_0^L y^2 dx = 0. \quad \text{W założeniu stójek wzorowo}$$

gibkich pas górny może być rozpatrywany, jako pręt swobodny, wyginający się przy wyboczeniu w kształt sinusoidy bez punktów przegięcia. Gdy stójki są zupełnie sztywne pręt pozostaje w stanie pierwotnym, to jest odkształca się według sinusoidy o nieskończonej liczbie fal. W warunkach istotnych sztywności stójek skończonej odkształcona pasa górnego stanowić będzie sinusoidę o pewnej liczbie punktów przegięcia tym większej im większa sztywność stójek. Zatem dla stójek gibkich możemy założyć idąc za Timoszenką, że $y = a \sin(\pi x : L) + b \sin(3\pi x : L)$. Można by również wziąć i dalsze wyrazy tego rozwinięcia, zawierające pod znakiem sinusa nieparzyste liczby, praktycznie jednak dwa wystarczą w zupełności. W ten sposób wyznaczona odkształcona niema punktów przegięcia, nadaje się przeto dla stójek o stosunkowo nieznacznej sztywności. Różniczkując bezpośrednio: $y' = (\pi a : L) \cos(\pi x : L) + (3\pi b : L) \cos(3\pi x : L)$, $y'' = -(\pi^2 a : L^2) \sin(\pi x : L) - (9\pi^2 b : L^2) \sin(3\pi x : L)$, a nadto, zważywszy,

$$\text{że } \int x(L-x) \cos^2 kx dx = \frac{1}{2} \int (Lx - x^2) dx + \frac{1}{2} \int (Lx - x^2) \cos 2kx dx =$$

$$= \frac{1}{4} Lx^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4k} (Lx - x^2) \sin 2kx - \frac{1}{4k} \int (L - 2x) \sin 2kx dx = \frac{1}{4}$$

$$Lx^2 - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{4k} (Lx - x^2) \sin 2kx + \frac{1}{8k} (L - 2x) \cos 2kx + \frac{1}{8k^2} \sin 2kx$$

$$\int x(L-x) \cos \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{\pi x}{L} = \frac{1}{2} \int x(L-x^2) \cos(h-k)x dx + \frac{1}{2} \int (Lx -$$

$$- x^2) \cos(h+k)x dx, \text{ z łatwością otrzymamy wynik ostateczny w postaci}$$

$$U = \frac{1}{2} \mu \cdot [\frac{1}{8} \pi^2 a^2 L (1 : 3 - 1 : \pi^2) - \frac{15}{8} \pi^2 a b L : 2 \pi^2 + \frac{1}{8} \pi^2 b^2 L (3 - 1 : \pi^2)] -$$

$$- \frac{1}{2} EI (\pi^4 a^2 : 2 L^3 + 81 \pi^4 b^2 : 2 L^3) - \frac{1}{2} n (\frac{1}{2} a^2 L + \frac{1}{2} b^2 L). \text{ Rozwińmy}$$

to zagadnienie według naszej ogólnej metody. W danym wypadku U jest funkcją dwóch zmiennych niezależnych, należy przeto zastosować wyniki

nauki o skrajnych wartościach tego rodzaju funkcji. Oznaczmy przez $r =$

$= \partial^2 U : \partial a^2$, $s = \partial^2 U : \partial a \partial b$, $t = \partial^2 U : \partial b^2$. Wiadomo, że funkcja U ma

minimum, lub maximum, gdy $s^2 - rt < 0$, niema ani jednego ani drugiego,

gdy ten wyraz jest większy od zera, wreszcie gdy $s^2 = rt$ zachodzi tak

zwany wypadek wątpliwy, kiedy istnienie skrajnych wartości zależy od

pochodnych wyższych rzędów. Ten wypadek wątpliwy należy oczywiście

wziąć pod uwagę. Różniczkując otrzymamy r, t, s , a zatem z równania

$rt = s^2$ będziemy mogli wyznaczyć krytyczną wartość obciążenia pasa gór-

nego $R = \frac{1}{8} \mu L^2$. To samo możemy wykonać, stosując zasadę Timoszenki.

W tem celu oznaczmy przez $z = b : a$, przez $N^2 = n L^4 : 16 EI$, a otrzy-

mamy $R = \pi^2 EI : (\lambda L)^2$, gdzie spółczynnik długości ma wartość $\lambda^2 = [2(1 :$

$: 3 - 1 : \pi^2) - 15z : \pi^2 + 2(3 - 1 : \pi^2) z^2] : [1 + 81 z^2 + 16 N^2 (1 + z^4) :$

$: \pi^4]$, a więc zależną od z . Biorąc pochodną λ po z z łatwością wyzna-

czymy szczególną wartość z dającą minimum siły R , powodującej wybo-

czenie pasa górnego. Wyniki w ten sposób otrzymane stosują się do stó-

jek gibkich, mało sztywnych, a więc dla małych wartości N^2 . Poza war-

tością $N^2 \approx 20$ należy już uwzględnić nową postać odkształconej — wziąć pod uwagę sinusoidę z jednym punktem przegięcia, czyniąc $y = a \sin(2\pi x : L) + b \sin(4\pi x : L)$ i powtórzyć wszystkie rachunki powyższe. Wyniki w ten sposób otrzymane Timoszenko zestawiał w następującej tablicy, wystarczającej do celów praktycznych

$N^2 = 0$	5	10	15	20	25	50	100	150	200	300
$\lambda = 0,694$	0,524	0,443	0,394	0,374	0,354	0,333	0,289	0,263	0,245	0,224
$N^2 = 500$	1000.									
$\lambda = 0,204$	0,174.	Przy obliczeniach Timoszenko radzi brać stójkę o naj-								

mniejszej wartości n a dla pasa górnego przekrój najszerszy. Jako ostatnie zastosowanie zasady Timoszenki rozpatrujemy:

§ 9. Wyboczenie prętów złożonych. W dotychczasowych rozważaniach zjawisk wyboczenia pomijaliśmy stałe działanie sił tnących, jako znikome. To uproszczenie daje poważne błędy przy wyznaczaniu prętów złożonych (Rys. 68, II), należy przeto obecnie wziąć pod uwagę działanie tych sił. W tym celu rozpatrujemy najprostszypodstawowy wypadek pręta pionowego (Rys. 68; I) opartego u dołu na podporze przegubowej A , u góry na rolkowej B ; obciążenie pręta stanowi siła osiowa P cisnąca na przekrój górny. Jak zwykle początek osi współrzędnych umieszczamy w dolnym przegubie A oś $A\eta$ kierujemy w lewo oś $A\xi$ ku górze po osi pręta nieodkształconej. W przekroju bieżącym ω , obranym w odległości ξ od początku współrzędnych, panować będzie siła tnąca $Q = P \sin \beta \approx P\gamma_1'$ powstała na tle pochylenia się przekroju o kąt $\beta = \gamma'$ względem poziomu. Pracę sprężystą tych sił należy dodać do pracy naprężeń gnących, siły tnące bowiem współdziałają gnącym, zwiększając krzywizną pręta. W danym wypadku nie możemy korzystać ze zwykłego wzoru dla pracy sprężystej naprężeń gnących ponieważ odkształcone y zależą nie tylko od momentów gnących, ale i od

sił tnących, natomiast możemy napisać że $\Pi_g = \frac{1}{2} \int_0^l M^2 d\xi : EI = (P^2 :$

$: 2 EI) \int_0^l \gamma_1'^2 d\xi$, ponieważ najwidoczniej $M = -P\gamma_1$, jak to zresztą wystarczająco uwypukla rysunek. Na str. 8 Księgi trzeciej wyznaczyliśmy pracę

sił tnących w postaci $\Pi_t = \mu \int_0^l T^2 d\xi : 2 GF$ w danym wypadku przeto

otrzymamy $\Pi_t = (\mu P^2 : 2 GF) \int_0^l \gamma_1'^2 d\xi$. Nadto jak wiemy praca siły ze-

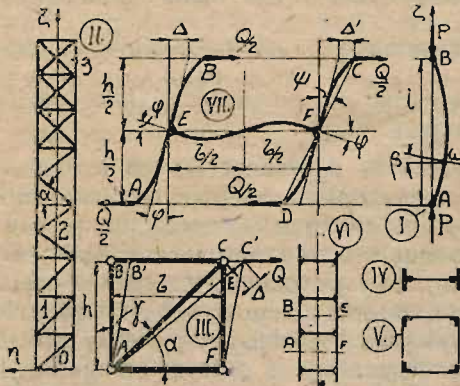
wewnętrznej $L = \frac{1}{2} P \int_0^l \gamma_1'^2 d\xi$, a zatem w myśl zasady Timoszenki $U = P \int_0^l$

$\gamma_1'^2 d\xi - (\frac{1}{2} P^2 : EI) \int_0^l \gamma_1^2 d\xi - (\frac{1}{2} P^2 \mu : GF) \int_0^l \gamma_1'^2 d\xi = 0$. Załóżmy, jak

zwykle $\gamma_1 = a \sin(\pi x : l)$, a otrzymamy k tyyczną wartość siły $P_w = 1 :$

$[l^3 : \pi^2 EI + \mu : EF]$. Oznaczmy przez $P_e = \pi^2 EI : l^2$ przez $P_t = GF : \mu$, a otrzymamy ostatecznie $P_w : P_e m$, gdzie $m = P_t : (P_e + P_t)$. Dla prętów zwykłych współczynnik m jest prawie równy jedności, możemy przeto

pisząc wprost, że $P_w = P_e$. Inaczej jednak rzecz się ma dla prętów złożonych z poszczególnych ogniw, gdzie wpływ sił tnących wyraźnie się zaznacza. Weźmy pod uwagę pręt, a raczej ustrój tego rodzaju, złożony z dwóch pasów bocznych równoległych (Rys. 68, II, № 1) i zbrojenia wewnętrznego kratowego. Początek osi współrzędnych umieszczamy pośrodku dolnego przekroju pręta, oś O_z układamy po nieodkształconej pręta ku górze, O_x w lewo, O_y ku patrzącemu.



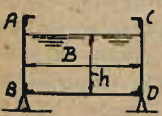
Rys. 68.

Nazywamy przez I moment bezwładności poprzecznego przekroju pręta względem osi głównej równoległej do O_z . Będzie to niewątpliwie moment obu pasów, zbrojenia bowiem możemy pominąć, jako wprost niemożliwe do uwzględnienia przy wyznaczaniu I . Przy znacznej liczbie krat, możemy jedną z nich $ABEF$ wydobyć (Rys. 68, III) i rozpatrywać, jako płytkę zastępującą bieżący przekrój ω . Przy wygięciu pręta w płaszczyźnie rysunku pod jarzmem siły P osiowej, cisnącej na górny przekrój krata ulegnie skrzywieniu o kąt γ , stanie się równoległo-

bokiem $AB'CF$ na tle przesunięcia względnego CC' górnego ogniwa względem dolnego. To przesunięcie przynależy niewątpliwie do siły tnącej przekroju Q . W rzeczywistości zjawiska mają przebieg nieco odmienny. W prętach poziomych panują siły osiowe ściskające równe Q , w pionowych siły cisnące obciążenia zewnętrznego, na węzłach niema przegubów zatem nietylko wyłącznie pręt pochyły ulegnie odkształceniu, jak to ma miejsce przy wyżej opisanem skrzywieniu się kraty. Mimo to jednak możemy te odkształcenia na razie pominąć, ponieważ pręty poziome, a zwłaszcza pionowe kraty są stosunkowo znacznie mocniejsze od pochyłego, liczonego na rozciąganie — zatem w pierwszym przybliżeniu uwzględnimy tylko wydłużenie tego pręta $\Delta = EC'$. Oznaczmy przez h wysokość, przez b szerokość kraty, przez α kąt pochylenia przekątnej, przez F_s jej przekrój poprzeczny. Długość przekątnej będzie wobec tego $h : \sin \alpha$, jej siła osiowa rozciągająca $Q : \cos \alpha$, jak to z łatwością zresztą można zauważyć z rysunku, a przeto wydłużenie $\Delta = Qh : EF_s \cos \alpha \sin \alpha$, oraz przesunięcie jednostkowe $\gamma = CC' : h = Q : EF_s \cos^2 \alpha \sin \alpha$. Elementarna praca sił tnących dla płytki rozpatrywanej będzie $\Pi_p = \frac{1}{2} p \cdot Q \delta z : GF$, zatem na mocy Castigliano II będziemy mieli przesunięcie CC' tej siły równe $\partial \Pi_p : \partial Q = p \cdot Q \delta z : GF \approx p \cdot Qh : GF$. Stąd $p \cdot Q : GF = Q : EF_s \cos^2 \alpha \sin \alpha$ i ostatecznie $p : GF = 1 : EF_s \cos^2 \alpha \sin \alpha$. Ta wartość jest, jak widzimy stała dla wszystkich krat ustroju, a przeto w pierwszym przybliżeniu $P_w = 1 : [l^2 : \pi^2 EI + + 1 : EF_s \cos^2 \alpha \sin \alpha]$. Wynik ściślejszy otrzymamy, uwzględniając ujemny przyrost poziomego pręta BC , równy $Qb : EF_p$, gdzie przez F_p oznaczyliśmy stały przekrój tego pręta. W danym wypadku CC' wzrośnie o ten przyrost, będziemy mieli przeto $\gamma = Q : EF_s \cos^2 \alpha \sin \alpha + Qb : EF_p \cdot h$, a nadto powtarzając poprzednie rozważania otrzymamy wzór ostateczny

dla $P_w = 1 : [l^2 : \pi^2 EI + 1 : EF_s \cos^2 \alpha \sin \alpha + 1 : EI_p \operatorname{tg} \alpha]$, ponieważ niewątpliwie $b : h = \operatorname{tg} \alpha$. Według tego wzoru należy liczyć ustrój kratowy № 1 z pojedynczemi przekątniami. W razie przekątni krzyżujących się jak w № 3 należy we wzorze zamiast F_s , wziąć $2F_s$. Dla pręta № 2 należy wziąć $F_p = 0$. Wzory powyższe dotyczą prętów o pojedynczych pasach, jak to najlepiej uwidocznia (Rys. 68, № IV). Dla prętów o przekroju poprzecznym (Rys. 68, № V) należy przekroje zbrojeń *podwajać*. W szczególnym wypadku pręta (Rys. 68, № VI) wzór powyższy traci swą moc obowiązującą, mamy tu bowiem zbrojenie poprzeczne sztywnie z pasami połączone przy zupełnym braku przekątni. Wyodrębnimy myślową płytkę $ABEF$, prowadząc dwa przekroje sąsiednie, dzielące odcinki pasów po połowie. Pod działaniem sił tnących Q pręt poprzeczny EF (Rys. 68. VII) odkształci się w pełną falę sinusoidy, jego przekroje skrajne pochylą się o kąt φ , nie zejną jednak z osi pierwotnej pręta, możemy przeto rozpatrywać pręt poziomy, jako belkę statycznie wyznaczalną, obciążoną ponad podporami dwoma jednakowymi momentami gnącymi $M = \frac{1}{2} Q h$. W myśl wzorów wyprowadzonych na str. 12 księgi trzeciej, będziemy mieli $\varphi = \frac{1}{6} Mb : EI_p = \frac{1}{12} Qbh : EI_p$, gdzie I_p oznacza moment pręta. Oznaczmy przez I_q moment bezwładności pasa. Jego część AB obróci się o ten sam kąt φ , znacząc na osi BC składową $\Delta = \frac{1}{2} h\varphi$ przesunięcia siły poprzecznej $\frac{1}{2} Q$. Nadto ta część pręta pionowego zegnije się pod jarzmem siły $\frac{1}{2} Q$, dając drugą składową $\Delta' = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} Q \times (\frac{1}{2} h)^3 : EI_q$ w myśl wzoru dla pręta jednostronnie osadzonego. Ostatecznie więc przesunięcie siły tnącej Q będzie równe $2(\Delta + \Delta') = \frac{1}{12} Qbh^2 : EI_p + \frac{1}{24} Qh^3 : EI_q$. Wobec tego, że $2(\Delta + \Delta') : h = \mu Q : GF$ będziemy mieli $P_w = 1 : [l^2 : \pi^2 EI + bh : 12 EI_p + h^2 : 24 EI_q]$.

§ 10. Przykłady i ćwiczenia. 1-o. *Zbiornik*. (Rys. 69) zbudowany w kształcie koryta prostego o przekroju prostokątnym $ABCD$ zawiera warstwę wody cztery metry wysoką. Szerokość zbiornika $B=75$ cm., grubość blachy płaskiego dna 0,7 cm. wyznaczyć skrajne naprężenia tej blachy w założeniu nieruchomych podpór B i D . Weźmy pod uwagę jednostkę długości zbiornika $L=1$ cm. Odpowiednia część blachy dna dolnego stanowi pasek 1 cm. szeroki, 0,7 cm. gruby i 75 cm. długi, zatem dla tego pasemka $F=1 \times 0,7=0,7$ cm.² $I=\frac{1}{12} \times 1 \times 0,7^3=0,02858$ cm.⁴, $W=\frac{1}{6} \times 1 \times 0,7^2=0,08167$ cm.³ $i^2=I : F=0,04083$ cm.². Środkowa strzałka ugięcia blachy w założeniu podpór: przegubowej i rolkowej wy-



Rys. 69.

niesie $f = \frac{5}{384} p l^4 : EI$, zgodnie ze wzorem księgi drugiej (Str. 61). W danym wypadku $p=0,4$ kg. na centymetr bieżący, $E=2150000$ kg./cm.², $l=75$ cm. a przeto strzałka $f=5 \times 0,4 \times 75^4 : [384 \times 2150000 \times 0,02858]=2682$ cm. Zatem mamy $m^2 (1+m^2)^2=f^2 : 4i^2=44,043$. Po kilku próbach otrzymamy $m^2=2899$, stąd odpór poziomy $S=m^2 \pi^2 EI : l^3=3126$ kg oraz istotna strzałka ugięcia pręta $f_s=f : (1+m^2)=0,688$ cm. W przekroju ś odkowym najwyższa panować będzie wartość momentu gnącego $M=\frac{1}{8} p l^2 - S f_s=66,2$ kg. cm. a przeto skrajne naprężenie tego przekroju $\sigma=M : W + S : F=,257,2$ kg. cm.². Załóżmy z kolei, że w obu skrajnych przekro-

jach blachę dna przytwierdzono do nieruchomych podpór; w tem założeniu pasemka obustronnie osadzonego będziemy mieli, zgodnie ze wzorem księgi drugiej (Str. 91) $f = \frac{1}{381} \rho l^4 : EI = 0,536 \text{ cm}$. Stąd $\frac{1}{4} m^2 (1 + \frac{7}{1} m^2)^2 = f^2 : 16 z^2 = 0,440$, co daje po kilku próbach $\frac{1}{4} m^2 = 0,272$, oraz $S = m^2 \pi^2 EI : 4l^2 = 117,3 \text{ kg}$. Strzałka ugięcia ist. tna $f_s = f : (1 + \frac{1}{4} m^2) = 0,421 \text{ cm}$. wobec tego $M = \frac{1}{12} \rho l^2 - S f_s = 138,1 \text{ kg. cm}$. i ostatecznie $\tau = M : W + S : F = 1858,5 \text{ kg./cm}^2$. Wyniki tu otrzymane są o 8–10% niższe od ścisłych. Widzimy z nich, że umocowanie obustronne blachy jest bezwzględnie szkodliwe. Praktycznie należy przeto dla wszelkiej pewności liczyć blachę, jako obustronnie osadzoną.

2-o. *Śłup wspornikowy* zbadany był przez nas w księdze drugiej (str. 134). Otrzymaliśmy wprawdzie wzór ścisły, ale nader niewygodny w użyciu. Obecnie zachowując wszystkie poprzednie znakowania, podamy wzór przybliżony. Możemy przytem śmiało założyć $g = 0$, jako że ostateczny wzór ścisły tej danej nie zawiera. W danym wypadku obieamy: $\eta = f [1 - \cos(\pi z : 2L)]$, ta bowiem postać czyni zadość warunkom geometrycznym i statycznym. W istocie, różniczkując otrzymamy $\eta' = (\pi f : 2L) \sin(\pi z : 2L)$, $\eta'' = -(\pi^2 f : 4L^2) \cos(\pi z : 2L)$. Te wzory czynią zadość warunkom geometrycznym: przy $z = 0$ dają $\eta = \eta' = 0$, przy $z = L$ mamy $\eta = f$. Nadto w swobodnym przekroju końcowym A panować winna zerowa wartość momentu. Istotnie dla $z = L$ mamy $\eta'' = 0$. Praca siły górnej Q będzie niewątpliwie

$$\frac{1}{2} Q \int_0^L \eta'^2 dz = Q \pi^2 f^2 : 16L, \text{ praca zaś siły } P \text{ wyrazi się w postaci } \frac{1}{2} P \int_0^L \eta'^2 dz = (P \pi^2 f^2 : 8L^2) \int_0^L \sin^2(\pi z : 2L) dz = (P \pi^2 f^2 : 16L) [l : L - \frac{1}{\pi} \sin(\pi l : L)].$$

Nadto praca sprężysta pręta $\Pi = \frac{1}{2} EI \int_0^L \eta''^2 dz = \pi^4 EI f^2 : 64L^3$. Stosując

zasadę Timoszenki będziemy mieli po odpowiednich skróceniach: $Q + P [l : L - \frac{1}{\pi} \sin(\pi l : L)] = \pi^2 EI : 4L^2$. Zastosujemy tylko co otrzymany wzór do przykładu przel. zonego nieco dalej (str. 148). Biorąc pewn. śc pięciokrotną będziemy mieli: $40000 + 80000 [600 : 900 - \frac{1}{\pi} \sin 120^\circ] = \pi^2 \times 2150000 \times \times l : (4 \times 900^2)$. Stąd bezpośrednio $l = 10884 \text{ cm.}^4$ wartość tylko o 3,17% niższa od ścisłej $l = 11240 \text{ cm.}^4$, jaką otrzymaliśmy w założeniu stałego przekroju pręta. Zatem wzór przybliżony wystarcza do celów praktycznych.

3-o. *Stójka wspornikowa* zbadana była przez Jasińskiego. Wyniki podaliśmy na (str. 136) w postaci wzoru bardzo niewygodnego w użyciu. Wyznaczmy wzór przybliżony, czyniąc w równem zeru i tutaj bowiem wzór ścisły tej danej nie zawiera. W danym wypadku jak zwykle zakładamy $\eta = f \sin(\pi z : L)$, skąd $\eta' = (\pi f : L) \cos(\pi z : L)$, $\eta'' = -(\pi^2 f : L^2) \sin(\pi z : L)$, oraz $\Pi = \pi^4 EI f^2 : 4L^3$. Praca siły zewnętrznej górnej będzie tu $\frac{1}{2} Q \int_0^L \eta'^2$

$$dz = Q \pi^2 f^2 : 4L, \text{ dolnej zaś: } \frac{1}{2} P \int_0^L \eta'^2 dz = (P \pi^2 f^2 : 4L) [l : L + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi l : L)],$$

a przeto stosując zasadę Timoszenki lub co zawsze na jedno wychodzi, nasze rozważania ogólne, otrzymamy $Q + P [l : L + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi l : L)] = \pi^2 EI : L_2$.

4-o *Belka na wzorowo sprężystym podłożu* rozpatrywana była w księdze drugiej na (str. 104). Obciążenie jej stanowiła siła pionowa P , skupiona w środkowym przekroju belki, długość belki zakładaliśmy nieskończoną ze względu na trudności całkowania równań różniczkowych. Obecnie wyznaczmy wzór przybliżony, odrzucając to zgoła nieprawdopodobne założenie. Załóżmy, że belka L cm. długa spoczywa na sprężystym podłożu, dającym sprzeciw proporcjonalny do miejscowego osiadania belki, możemy przeto założyć, że sprzeciw podłoża równy jest $m\eta$ dla bieżącego przekroju. Pierwotnie w stanie odciążonym oś podłużna belki leżała w poziomej powierzchni podłoża, po obciążeniu belki pośrodku ciężarem P przekrój bieżący osiadł, obniżył się o η . Skrajne przekroje belki również się osunęły, zeszyły z poziomu. Wobec zupełnej symetrii obu połówek belki oba skrajne przekroje musiały niewątpliwie obniżyć się jednakowo o $\eta_s = a$, możemy przeto założyć, że $\eta = a + b \sin(\pi \zeta : L)$, ta bowiem postać spełnia warunki geometryczne. Zwróćmy uwagę, że parametry a i b są zgoła od siebie niezależne. Gdyby belka była zupełnie sztywna, to wszystkie przekroje miałyby to samo obniżenie, zatem parametr b , uwypuklający wygięcie belki zależy od jej własności sprężystych, drugi zaś a od własności sprężystych podłoża. Wyznaczmy pracę sprężystą ustroju, złożonego z belki i sprężystego podłoża. Praca sprężysta samej belki zależy tylko od składowej $\eta_B = b \sin(\pi \zeta : L)$ wyraża się

$$\text{przeto wzorem tylokrotnie już spotykanym } \Pi_B = \frac{1}{2} EI \int_0^L \eta_B''^2 d\zeta = \pi^4 EI b^2 :$$

$: 4L^3$. Praca sprężysta podłoża stanowi sumę prac sprzeciwów, panujących wzdłuż długości belki $d\zeta$, a więc sprężystych sił $m\eta d\zeta$. Ich przesunięcia są oczywiście równe obniżeniom η odpowiednich przekrojów, a praca elementarna każdej z sił wyraża się w myśl twierdzenia Clapeyrona w postaci $\frac{1}{2} \eta m \eta d\zeta$, jako dla podłoża z założenia wzorowo sprężystego. Łączna praca

$$\text{wszystkich sił będzie równa } \Pi_P = \frac{1}{2} m \int_0^L \eta^2 d\zeta = \frac{1}{2} m \int_0^L [a + b \sin(\pi \zeta : L)]^2$$

$$d\zeta = \frac{1}{2} m [a^2 \zeta - \frac{2}{\pi} abL \cos(\pi \zeta : L) + \frac{1}{2} b^2 \zeta - (b^2 L : 2\pi) \sin(\pi \zeta : L)]_0^L =$$

$$= \frac{1}{2} mL (a^2 + 4ab : \pi + \frac{1}{2} b^2). \text{ Praca siły zewnętrznej będzie tu } P(a + b),$$

$$\text{ponieważ obniżenie środkowego przekroju równe jest } a + b. \text{ Zatem mamy } U = P(a + b) - \Pi_B - P_P \text{ stąd bezpośrednio: } \partial U : \partial a = P - mL a -$$

$$- 2mLb : \pi = 0 \text{ oraz } \partial U : \partial b = P - \pi^4 EI b : 2L^3 - 2mLa : \pi - \frac{1}{2} mL b = 0.$$

$$\text{Z równania pierwszego otrzymamy } a = P : mL - 2b : \pi. \text{ Po podstawieniu w następnym z łatwością wyznaczymy } b \text{ w postaci } b = (1 - 2 : \pi) P : [\pi^4 EI :$$

$$: 2L^3 + mL(1 : 2 - 4 : \pi^2)], \text{ a zatem i } \eta. \text{ Ten przykład najlepiej uwypukla doniosłość metod przybliżonych. Dość jest porównać prostotę rachunków}$$

powyższych ze ścisłymi zaznaczonymi tylko w księdze drugiej.

5-o *Odporzy statycznie niewyznaczalne belek wieloprzęślowych* również można z łatwością wyrazić metodą przybliżoną, korzystając z twierdzenia Betti. Weźmy pod uwagę belkę dwuprzęsłową, opartą na skrajnej podporze prawej przegubowej, pozostałych rolkowych. Początek osi współrzędnych umieszczamy jak zwykle w środku skrajnego prawego przekroju

podpartego B , oś $B\zeta$ układamy na nieodkształconej belki i kierujemy w lewo, oś $B\eta$ w dół. Skrajne podpory A i B wyznaczają się z równań statyki w zależności od sił pionowych gnących P_i ($i = 1, 2 \dots n$) obciążenia ze-

wnętrznego, pośredni odpór X da twierdzenie Betti w postaci $X = -\frac{1}{g} \sum P_i f_i$ w myśl naszych rozważań podanych na (str. 23). W podobny sposób powiążemy dwoma linjowemi równaniami statycznie niewyznaczalne odpory X, Y pośrednich podpór belki trójprzęsłowej (str. 24). Ta ścisła metoda daje się znacznie uprościć przy zastosowaniu wzorów przybliżonych, przyczem dla przesunięć sił zewnętrznych P_i wystarcza zazwyczaj pierwszy wyraz szeregu, dla sił zastępczych należy brać o jeden nie równy zero wyraz więcej niż poprzednio. Przy dużej różnicy długości poszczególnych przęseł, oraz przy skupieniu sił P_i w pobliżu podpór należy brać dla f_i dwa pierwsze wyrazy szeregu, dla sił zastępczych trzy, lub cztery o ile trzeci jest równy zero. Istotę tego sposobu poznamy najlepiej, biorąc następujący prosty przykład. W księdze drugiej na (str. 73), rozpatrywaliśmy belkę trójprzęsłową jednostajnie obciążoną o równych przęsełach. Wobec symetrii zupełnej $X_1 = X_2 = X = -\frac{1}{30} pl = -0,3667 pl$.

Zastąpimy metodę przybliżoną. Odrzucamy obie pośrednie podpory, czyniąc w ten sposób belkę statycznie wyznaczalną. Dajemy siłę zastępczą $X_1=1$ w odległości 2λ od skrajnej prawej podpory, a następnie siłę zastępczą $X_2=1$ w odległości λ . W obu wypadkach rozwinięcie dla η urywamy na drugim wyrazie. Dla określenia współczynników będziemy mieli dla pierwszego wypadku $a_{11} = (2l^3 : \pi^4 EI) [1 \cdot \sin(\pi 2\lambda : 3\lambda)] = N \sin(\frac{2}{3}\pi)$, $a_{21} = \frac{1}{2} N \sin[2\pi \cdot 2\lambda : 3\lambda] = \frac{1}{2} N \sin(\frac{4}{3}\pi)$, dla drugiego $a_{12} = N \sin(\frac{1}{3}\pi)$, $a_{22} = \frac{1}{2} N \sin(\frac{2}{3}\pi)$, gdzie oznaczyliśmy dla skrócenia przez $N = 2l^3 : \pi^4 EI$. Zatem otrzymamy odkształconą dla obciążenia drugiego siłą $X_1=1$ w postaci $\eta_{12} = a_{11} \sin(\pi \zeta : l) + a_{21} \sin(2\pi \zeta : l) = N \frac{1}{2} \sqrt{3} [\sin(\pi \zeta : l) - \frac{1}{16} \sin(2\pi \zeta : l)]$, a dla trzeciego $\eta_{13} = \frac{1}{2} \sqrt{3} N [\sin(\pi \zeta : l) + \frac{1}{16} \sin(2\pi \zeta : l)]$, stąd stosując twierdzenie Betti do pierwszego i drugiego obciążenia, oraz do pierwszego i trzeciego będziemy mieli $\left\{ X_1 [\sin(\frac{2}{3}\pi) - \frac{1}{16} \sin(\frac{4}{3}\pi)] + X_2 [\sin(\frac{1}{3}\pi) - \frac{1}{16} \sin(\frac{2}{3}\pi)] + p \int_0^l \sin(\pi \zeta : l) d\zeta \right\} \frac{1}{2} \sqrt{3} N = 0$ oraz $\left\{ X_1 [\sin(\frac{2}{3}\pi) + \frac{1}{16} \sin(\frac{4}{3}\pi)] + X_2 [\sin(\frac{1}{3}\pi) + \frac{1}{16} \sin(\frac{2}{3}\pi)] + p \int_0^l \sin(\pi \zeta : l) d\zeta \right\} \frac{1}{2} \sqrt{3} N = 0$.

Po wypisaniu właściwych wartości sinusów, skróceniu przez $\frac{1}{2} \sqrt{3} N$ i wyznaczeniu całek otrzymamy $17X_1 + 15X_2 = 15X_1 + 17X_2 = -64 pl : \pi \sqrt{3}$. Widzimy stąd, że $X_1 = X_2 = -2pl : \pi \sqrt{3} = -0,3675 pl$, a więc o 0,22% zbyt wiele.



PP. 2762

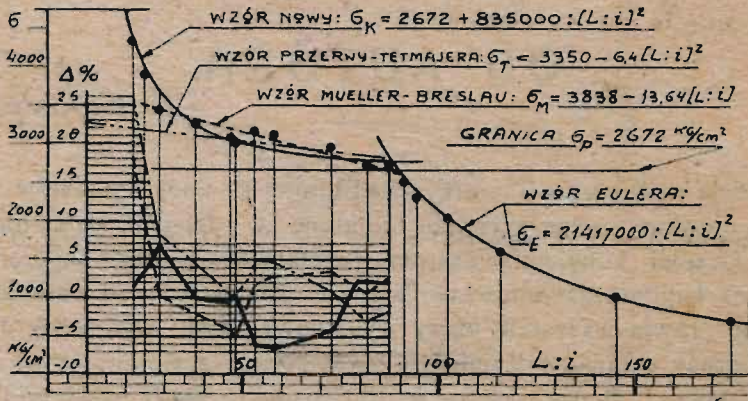
539.4

OD AUTORA.

Komisja wydawnicza Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej zaznaczyła się chlubnie w dziejach istnienia naszej Wyższej Uczelni kilkuletnią szeroką działalnością. Bez poparcia z zewnątrz, bez kapitału zakładowego, w niesłychanie trudnych warunkach zdołała wydać prawie wszystkie kursy wykładowe dzięki wyteżonej, a bezinteresownej pracy członków Komisji, a zwłaszcza Przewodniczących PP. S. Młotkowskiego, I. Budzyńskiego, A. Karisbada, E. Bęczkowskiego i S. Mańkiewicza. Obecnie wydana Wytrzymałość stanowi również owoc jej działalności: myśl napisania tej książki zawdzięczam Komisji. Wytrzymałość Tworzyw ma zapoczątkować i umożliwić wydanie całego szeregu wydawnictw Naukowych Komisji zakreślonego na bardzo szeroką skalę. Może w ten sposób Polska uzyskać nową placówkę wydawniczą na polu piśmiennictwa technicznego, dotychczas tak ubogiego. Jedyne oryginalne dzieło polskie o Wytrzymałości Klugera wyszło w 1877 roku.

W obecnie wydanej Wytrzymałości Tworzyw, pominąłem działy, wkraczające w dziedzinę matematycznej teorii odkształceń, noszę się bowiem z zamiarem wydania „Sprężystości Tworzyw“, opartej na podstawach zgoła odmiennych, od zwykłych, dotychczas obowiązujących. Nie wiem kiedy to nastąpi, chcę więc choć na tem miejscu podać jeden z wyników moich badań, rzucający pewne światło na istotę zjawisk wyboczenia niesprężystego. Czysto teoretyczne rozważania oparte na pewnych założeniach, dotyczących budowy ciał odkształcalnych, dają dla tworzyw wzorowo sprężystych wzór $\sigma_w = \sigma_{pg} + \alpha E_g (i : L)^2$, gdzie σ_w oznacza naprężenie wyboczenia niesprężystego, σ_{pg} i E_g granicę proporcjonalności i spólczynnik sprężystości przy zginaniu, L - długość pręta o końcach prowadzonych, i - promień bezwładności przekroju, wreszcie $\alpha = m : 2(m + 1)$. W ostatnim wzorze m oznacza stosunek wydłużenia osiowego do poprzecznego. Wzór powyższy łącznie ze wzorem Eulera, również teoretycznym rozwiązuje zagadnienie wyboczenia. Graniczną wartość $L : i$ łatwo można wyznaczyć, czyniąc σ_w

tego wzoru równem σ_w wzoru Eulera. Drugą graniczną wartość $L:i$ otrzymamy z równania $\sigma_w = \sigma_{qg}$. Dla innych tworzyw wzór ma postać nieco odmienną. Próby robione w L. W. T. P. W., lecz nie dość liczne, dały mi bardzo zgodne wyniki. Klasyczne próby Karmana również stwierdzają prawidłowość wzoru powyższego, o ile w nim podstawimy wartość σ_{pK} i E_g wyznaczone przez tego Badacza. Na załączonym wykresie (Rys. 70) grube linje dają wartości σ_w wyliczone ze wzoru nowego, oraz ze wzoru



Rys. 70.

Eulera, czarne kółka odpowiadają danym doświadczalnym. Zupełna zgodność obu tych wzorów z wynikami prób nie ulega żadnej wątpliwości. Dla porównania na tym samym wykresie zaznaczyłem linje dla wzorów Przerwy — Tetmajera i Mueller — Breslau'a. Współczynniki tego ostatniego wzoru wyznaczone były ad hoc z doświadczeń Karmana, mimo to jednak wzór Mueller—Breslau'a daje mniejszą zgodność z wynikami prób od teoretycznego naszego wzoru. Łatwo to dostrzec z podanego niżej zestawienia różnic odsetkowych wyników wzorów i prób. Dla naszego wzoru różnice te wahają się falisto w granicach $\pm 5,7\%$, dla wzoru Mueller — Breslau'a dochodzą do 18% , dla Przerwy — Tetmajera do 26% . Dla pewnego gatunku żelaza zlewnego, badanego w L. W. T. P. W. nasz wzór ma postać liczbowa $\sigma_w = 2000 + 850000 (i:L)^2$. Pierwotnie chciałem umieścić cały ten ustęp w tekście, konieczność jednak zastosowania matrycy pierwszego wydania stanęła temu na przeszkodzie. Stąd pochodzą również różnice druku, oraz podział na trzy księgi i trzy niezależne numeracje stronic.

Pisałem „Wytrzymałość Tworzyw“ dla Studentów, musiałem przeto baczną zwrócić uwagę na drobiazgowo wyprowadzanie wzorów i zaopatrzenie poszczególnych działów w przykłady i ćwiczenia, przeliczone liczbowo aż do wyników ostatecznych. Wzory podałem wprost w tekście z pew-

nym uszczerbkiem dla wzroku, a to jedynie w tym celu, aby możliwie zmniejszyć ogólny koszt nakładu.

Pozatem chciałbym tu jeszcze wyrazić szczerą podziękę byłemu i obecnemu Zarządowi Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej i Komisji Wydawniczej, a przede wszystkim PP.: S. Borkowskiemu, T. Zamoyskiemu, S. Mańkiewiczowi za zabiegi o wydanie drukiem *Wytrzymałość* PP.: T. Jabłczyńskiemu, K. Kamińskiemu i F. Szelańskiemu za chętną pomoc w pracy oraz wszystkim PP. Pracownikom „Drukarni Polskiej“ za życzliwe zajęcie się wydawnictwem.

L. Karasiński.

Warszawa, dnia 5 kwietnia 1921 r.

SKRÓCONY SPIS RZECZY.

1. OD WYDAWCÓW — 2.

2. KSIĘGA PIERWSZA.

A. CZĘŚĆ I. Naprężenia i odkształcenia.

I. ROZDZIAŁ I. Ustalenie pojęć zasadniczych.

§ 1 3. Odkształcenia — 4. § 4-6. Naprężenia — 6. § 7. Ćwiczenia — 17.

II. ROZDZIAŁ II. Momenty przekrojów płaskich.

§ 1 — 8. Osie przekrojów — 19. § 9 — 10. Wyznaczanie momentów — 30. § 11. Ćwiczenia — 31.

B. CZĘŚĆ II. Rozciąganie i ściskanie.

I. ROZDZIAŁ I. Ustalenie pojęć zasadniczych.

§ 1 — 11. Naprężenia i wydłużenia osiowe — 45. § 12 — Ćwiczenia — 65.

II. ROZDZIAŁ II. Wytrzymałościowe własności ciał.

§ 1 — 6. Cechy wytrzymałości — 72. § 7 — 9. Rodzaje obciążeń — 82. § 10. Ćwiczenia — 88.

C. CZĘŚĆ III. Ścinanie.

§ 1 — 4. Teoria przybliżona — 96. § 5 — 7. Teoria ściślejsza — 99. § 8. Ćwiczenia — 106.

D. CZĘŚĆ IV. Skręcanie.

§ 1 — 7. Naprężenia i odkształcenia wirowe — 111. § 8. Ćwiczenia — 123.

3. KSIĘGA DRUGA.

E. CZĘŚĆ V. Zginanie.

I. ROZDZIAŁ I. Naprężenia gnące.

§ 1 — 5. Naprężenia gnące — 1. § 6 — 7. Rdzeń przekroju — 8. § 8. Ćwiczenia — 19.

II. ROZDZIAŁ II. Odkształcenia gnące.

§ 1 — 6. Odkształcenia gnące — 25. § 7 — 13. Przykłady — 38. § 14 — 21. Zasada niezależności — 45. § 22. Ćwiczenia — 53.

III. ROZDZIAŁ III. Belki proste zginane.

§ 1 — 18. Rodzaje belek — 57. § 19 — 34. Równania odkształconych — 74. § 35 — 40. Wzory Clerc'a i Clapeyrona — 93. § 41 — 55. Belki na podłożu sprężystym — 101. § 56. Ćwiczenia — 116.

IV. ROZDZIAŁ IV. Belki proste zginane mimośrodowo.

§ 1 — 3. Odkształcone — 123. § 4 — 16. Wyboczenie — 127. § 17. Ćwiczenia — 141.



nr. 2762