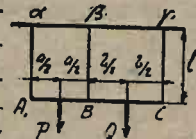


wej długości l , zaczepionych o niesprężystą połącz górną i obciążono siłami P i Q pionowymi, przyłożonemi po środku obu pręseł a i b belki. Wyznaczyć stały przekrój dwuteowy belki oraz średnice prętów stalowych zlewnych, aby po odkształceniu zawieszane punkty A, B, C belki leżały na linii poziomej. Założmy $P = 20000$ kg, $Q = 10000$ kg, $a = 1$ m, $b = 2$ m i $l = 10$ m. Równanie *Clapeyron'a* da nam w założeniu połączeń przegubowych $2(100 + 200)M_B = 20000 \times 50 \times [100^2 - 50^2] : 100 + 10000 \times 100 \times [200^2 - 100^2] : 200$, skąd $M_B = 375000$ (kg, cm).

Nadto dla odporu lewego będziemy mieli równanie $A \times 100 + 20000 \times 50 = M_B$, dla prawego zaś $C \times 200 + 10000 \times 100 = M_B$, skąd $A = -6250$ kg, $C = -3125$ kg. Odpór środkowy otrzymamy wprost z równania statyki $A + B + C + P + Q = 0$, czyli $B = -20625$ kg. Nadto w przekrojach obciążonych będziemy mieli skrajne momenty $M_P = -6250 \times 50 = -312500$ (kg, cm), $M_Q = -3125 \times 100 = -312500$ (kg, cm), na-



Rys. 65.

leży przeto dostateczny przekrój belki wyznaczyć z równania $W_x = M_B : k_g$. Weźmy dla stali zlewnej, w wypadku obciążenia stałego $k_g = 1500$ kg/cm² a wtedy $W_x = 250$ cm³. Tej wartości odpowiada dwuteownik № 21 dla którego $W_x = 244$ cm³, lepiej jednak wziąć numer następny, zawsze są bowiem możliwe pewne obniżenia punktów oporowych połączone ze znacznym wzrostem naprężeń. Bierzemy dwuteownik № 22 dla którego tablice podają $W_x = 278$ cm³. Należy zawiesić go tak, aby środek był w położeniu pionowym. Z kolei wyznaczmy średnice prętów. Znak odporów A, B, C ujemny wskazuje, że pręty te są rozciągane. W założeniu obciążenia stałego możemy wziąć $k_r = 1500$ kg/cm², będziemy mieli przeto wydłużenia $\Lambda_a = lA : EF_a$, $\Lambda_b = lB : EF_b$, $\Lambda_c = lC : EF_c$. Te wydłużenia muszą być jednakowe, dążymy bowiem do tego, aby belka po odkształceniu leżała punktami A, B, C na linii poziomej. Zatem $A : F_a = B : F_b = C : F_c = k_r$, co da nam $F_a = 4,167$ cm², $F_b = 13,75$ cm², $F_c = 2,083$ cm². Średnice prętów będą: $d_a = 2,3$ cm, $d_b = 4,2$ cm, $d_c = 1,6$ cm. Wszystkie trzy punkty podparcia obniżą się o $\Lambda = lk_g : E = 1000 \times 1500 : 2200000 = 0,68$ cm.

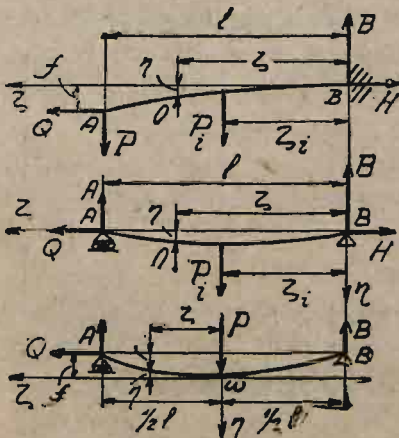
ROZDZIAŁ CZWARTY:

BELKI PROSTE ZGINANE MIMOŚRODKOWO.

§ 1. Równanie odkształconej. Weźmy pod uwagę łuk mn odkształconej belki pierwotnie prostej, płasko wygiętej mimośrodkowo Stałą

oś odciętych ζ ułożyliśmy na osi pierwotnej belki, oś rzędnych η skierowaliśmy ku dołowi, oś ξ ku patrzącemu. Rozpatrujemy wyłącznie tylko pręty jednorodnie zbudowane, wygięte płasko w płaszczyźnie gięcia $\zeta\eta$. Spółrzędne jakiegokolwiek przekroju poprzecznego O belki odkształconej niech będą ζ, η . Obciążenie zewnętrzne lewej części belki po sprowadzeniu do środka O przekroju da moment gnący M , siłę tnącą T , którą jak zwykle pomijamy i siłę osiową S , leżącą na stycznej odkształconej. W danym wypadku $S \neq 0$, rozpatrujemy bowiem wypadek gięcia płaskiego mimośrodowego. Zasadnicze równanie gięcia będzie miało postać $EJ[1 + S : EF] : \rho = M$, jakieśmy to ustalili w § 5 rozdziału drugiego. W tym wzorze wyraz $S : EF$ posiada nader małą wartość i wobec jedności może być pominięty. Łatwo się o tem przekonać, zważywszy, że $S : F$ oznacza dodatkowe naprężenie przekroju — rozciągające lub ściskające, towarzyszące naprężeniom gnącym momentu M , a więc nader nieznaczne w stosunku do E . Po skreśleniu tego wyrazu otrzymamy $EJ : \rho = M$, to samo zasadnicze równanie różniczkowe odkształconej, jakim dotąd posługiwaliśmy się przy rozpatrywaniu gięcia zwykłego. Nadto, dla wygięć nieznacznych, jedynie dopuszczalnych w praktyce $1 : \rho \approx \eta''$, ostatecznie więc możemy napisać zasadnicze równanie gięcia mimośrodowego płaskiego w postaci $EJ\eta'' = M$. Całkowanie tego równania da odkształconą. Kilka prostych przykładów najlepiej wyjaśni istotę rzeczy.

§ 2. Belka osadzona jednostronnie, pozioma (Rys. 66) dźwiga obciążenie gnące, złożone z sił prostopadłych do osi pierwotnej pręta, skupionych, lub rozłożonych szeregiem ciągłym w postaci obciążenia jednostkowego p na jednostkę długości, a nadto drugostronnie ulega jarzmu



Rys. 66, 67 i 68.

siły poziomej Q , rozciągającej lub ściskającej. Ze środka B przekroju osadzonego prowadzimy stałą oś $B\zeta$ na lewo po osi pierwotnej pręta, $B\eta$ kierujemy w dół, $B\xi$ ku patrzącemu. W tym układzie $+Q$ da siłę rozciągającą, $-Q$ ściskającą, a środek O jakiegokolwiek przekroju pręta odkształconego będzie miał współrzędne ζ, η . Dla środka A skrajnego lewego przekroju będziemy mieli l, f . Po sprowadzeniu do środka O siły pionowe dadzą moment M , siła $\pm Q$ da moment $\mp Q(f - \eta)$, a przeto równanie gięcia będzie tu $\eta'' \mp n^2(\eta - f) = M : EJ$, przyczem $n^2 = Q : EJ$. Oznaczmy przez $M_K = d^K M : d\zeta^K$, a otrzy-

mamy całkę tego równania w postaci $\eta = f + y \mp M : Q - M_2 : n^2 Q \mp M_4 : n^4 Q - M_6 : n^6 Q \mp \dots$, gdzie y czyni zadość równaniu pomocniczemu $y'' \mp n^2 y = 0$. Dla górnego znaku będziemy mieli $y = C \sin h n \zeta + D \cos h n \zeta$, dla dolnego $y = C \sin n \zeta + D \cos n \zeta$. Całkę powyższą stosujemy wtedy jedynie, gdy którakolwiek z pochodnych, dajmy na to $M_{2K+2} = 0$. W tym wypadku ostatni wyraz całki będzie zawierał pochodną M_{2K} . Warunek konieczny przy tem, aby M i jego wszystkie pochodne aż do M_{2K+1} włącznie były funkcjami ciągłymi ζ . W przeciwnym razie należy podzielić płaszczyznę gięcia na połacie w punktach odpowiadających przerwom ciągłości. Dla owych punktów rzędne η i ich pochodne η' muszą posiadać te same wartości, otrzymamy przeto szereg równań z których wyznaczymy stałe całkowania $C_1, D_1, C_2, D_2 \dots$ dla wszystkich połaci. Skrajne warunki zamocowania pręta również winny być wzięte pod uwagę przy wyznaczaniu stałych całkowania. Zupełnie tak samo możemy wyznaczyć warunki pracy w następującym przykładzie.

§ 3. Belka jednoprzęsłowa, statycznie wyznaczalna (Rys. 67)

dźwiga takie samo obciążenie gnące pionowe, a nadto ulega działaniu siły $\pm Q$, czynnej w A , ponad podporą rolkową. Zachowując znakowanie poprzedniego ustępu, umieszczamy początek stałych osi w przegubowej podporze prawej B . Równanie gięcia będzie tu $\eta'' \mp n^2 \eta = M : EJ$; w niem, jak poprzednio, oznaczyliśmy przez M moment sił gnących pionowych oraz odporu lewego A , który z łatwością wyznaczymy z równań statyki. Lewy odpór poziomy $H = \mp Q$. Zatem równanie to różni się jeno wartością $f = 0$, a wszystko to, cośmy powiedzieli wyżej, dotyczy i danego wypadku. Istotę rzeczy najlepiej uwypuklą najprostsze dwa przykłady.

Weźmy pod uwagę belkę osadzoną jednostronnie (Rys. 66), drugostronnie obciążoną siłą $Q > 0$ i P . W przekroju O będziemy mieli moment $= Q(f - \eta) + P(l - \zeta)$. Tutaj więc $M = P(l - \zeta)$, $M_2 = 0$, zatem równanie odkształconej: $\eta = f + C \sin h n \zeta + D \cos h n \zeta - P(l - \zeta) : Q$. Gdy oprócz siły P , działa jeszcze obciążenie jednostajne p , pokrywające całą belkę, należy moment M wypisać w postaci $P(l - \zeta) + 1/2 p(l - \zeta)^2$. Tutaj więc $M_2 = p$, $M_4 = 0$, a przeto $\eta = f + C \sin h n \zeta + D \cos h n \zeta - P(l - \zeta) : Q - 1/2 p(l - \zeta)^2 : Q - p : n^2 Q$. W obu wypadkach trzy niewiadome C, D, f wyznaczymy z warunków końcowego obciążenia pręta. W przekroju osadczym $\eta = \eta' = 0$ przy $\zeta = 0$, w skrajnym lewym przekroju $\eta = f$ przy $\zeta = l$. Stąd mamy $f + D - 1P : Q - 1/2 pl^2 : Q - p : n^2 Q = 0$, $\eta'_0 = [n C \cos h n \zeta + n D \sin h n \zeta + P : Q + p(l - \zeta) : Q]_0 = n C + P : Q + pl : Q = 0$, $f = f + C \sin h n l + D \cos h n l - p : n^2 Q = 0$. Z dwóch ostatnich równań wyznaczymy

$C = -P : Q_n - pl : Q_n$, $D = [(P + pl) \operatorname{Sin} h nl + p : n] : nQ \operatorname{Cos} h nl$.
Nadto z pierwszego $f = -[(P + pl) \operatorname{Sin} h nl + p : n] : nQ \operatorname{Cos} h nl +$
 $+ lP : Q + \frac{1}{2} pl^2 : Q + p : n^2Q$. Te wartości po podstawieniu we wzór
dla η dadzą równanie odkształconej.

Zupełnie te same wzory otrzymamy dla lewej połowy belki jedno-przęsłowej (Rys. 68), o ile początek stałych osi umieścimy w środkowym przekroju i miasto P, l napiszemy w nich $-\frac{1}{2} P$ i $\frac{1}{2} l$. Łatwo to udowodnić ze względu na zupełną symetrię obciążenia; w środkowym przekroju $\eta = \eta' = 0$, w skrajnym lewym $\eta = f$, jak wyżej — zatem otrzymamy te same równania warunkowe.

W wypadku działania siły Q ujemnej przyłożonej w A (Rys. 66) będziemy mieli moment gnący w środku O w postaci $Q(f - \eta) + P(l - \zeta) + \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$, zmieni się jeno znak u $Q(f - \eta)$. Równanie odkształconej będzie tu $\eta = f + C \operatorname{Sin} n\zeta + D \operatorname{Cos} n\zeta + P(l - \zeta) : Q + \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2 : Q - p : n^2Q$. Niewiadome C, D, f wyznaczymy z równań: $f + D + P : Q + \frac{1}{2} pl^2 : Q - p : n^2Q = 0$, $\eta'_0 = [n C \operatorname{Cos} n\zeta - n D \operatorname{Sin} n\zeta - P : Q - p(l - \zeta) : Q]_0 = n C - P : Q - pl : Q = 0$, $C \operatorname{Sin} nl + D \operatorname{Cos} nl - p : n^2Q = 0$. Stąd $C = (P + pl) : nQ$, $D = [p : n - (P + pl) \operatorname{Sin} nl] : nQ \operatorname{Cos} nl$, $f = -[p : n - (P + pl) \operatorname{Sin} nl] : nQ \operatorname{Cos} nl - P : Q - \frac{1}{2} pl^2 : Q + p : n^2Q$. Te wartości pozwolą wyznaczyć równanie odkształconej. I w danym wypadku, czyniąc $-\frac{1}{2} P$ miasto P i $\frac{1}{2} l$ miasto l otrzymamy bezpośrednio równanie odkształconej dla belki pracującej w sposób wskazany na (Rys. 68).)

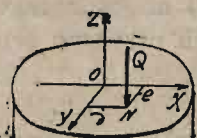
Wzory tylko co otrzymane na pozór nie różnią się od poprzednich, a jednak przy bliższem badaniu wykazać można zasadniczą różnicę pracy belek, zależną od kierunku działania siły Q . Łatwo to spostrzec, zważywszy, że w mianowniku pierwszego wyrazu wzoru dla strzałki f mamy zupełnie różne dwie funkcje: $\operatorname{Cos} h nl$ i $\operatorname{Cos} nl$. Pierwsza jest stale różna od zera, druga przechodzi przez zero okresowo, dla $nl = \frac{1}{2} \pi, \frac{3}{2} \pi, \frac{5}{2} \pi \dots$. Zatem w wypadku działania siły Q dodatniej skrajna strzałka ugięcia f nie może wzrosnąć nieograniczenie, natomiast przy $Q < 0$ możemy otrzymać $f = \infty$, gdy $nl = \frac{1}{2} \pi$, to jest gdy $n^2 l^2 = Ql^2 : EJ = \frac{1}{4} \pi^2$! Istnieje pewna szczególna wartość siły Q , zupełnie zresztą niezależna od P i p : w wypadku obciążenia podanego na (Rys. 66) będzie to $Q_0 = \pi^2 EJ : 4 l^2$, w wypadku obciążenia (Rys. 68) $Q_0 = \pi^2 EJ : l^2$. Te siły, zresztą, jak widzimy, skończone, dają nieskończenie wielką strzałkę ugięcia, wyginają pręt w sposób nadmierny, powodują tak zwane *wy-boczenie* pręta niezależnie od sił P i p ! Przeczy to prawu Hooke'a. Wkraczamy w nieznaną dziedzinę zjawisk, dotychczas bowiem odkształcenie było zawsze proporcjonalne do natężenia siły odkształcającej. Ta sprzeczność jest jednak tylko pozorna. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że moment siły Q zależy od rzędnej η , stanowi przeto funkcję odkształ-

cenia, które sam częściowo wywołał. Tutaj więc odkształcenie nie jest linjową funkcją obciążenia — prawo Hooke'a traci swą moc obowiązującą. Nadto siła Q dodatnia przeciwdziała wygięciu pręta. Łatwo to spostrzec, rzuciwszy okiem na rysunek. Siła Q rozciągająca prostuje pręt wygięty pod jarzmem sił P i p ; ujemna ściskająca powiększa jego krzywiznę, powstałą na tle działania sił pozostałych. Ten wniosek dotyczy niewątpliwie każdego obciążenia pionowego, niezależnie od sposobu działania i liczby sił P poprzecznych. We wszystkich jednak wypadkach siła Q dodatnia łągodzi odkształcenie gnące sił poprzecznych — ujemna wzmacnia, może więc przy sprzyjających warunkach wywołać ugięcie nadmierne — wyboczenie pręta. Godzi się jednak zaznaczyć, że siła Q ujemna sama przez się nie może wygiąć pręta i pręt doskonale prosty ulegnie jeno ściskaniu. Wybaczające działanie tej siły może więc powstać wyłącznie tylko na tle pierwotnego wygięcia pręta, pochodzącego od innych przyczyn, od siły Q niezależnych. Badanie tych przyczyn stanowi *naukę o wyboczeniu*.

§ 4. Istota zjawisk wyboczenia. Wyboczenie pręta może powstać pod jarzmem siły Q ściskającej, bez obciążenia poprzecznego, gdy pręt ma lekką krzywiznę pierwotną. Bez niej siła Q nie da momentu gnącego, pręt pozostanie prosty, jak był — doskonale. Nie znamy jednak prętów pierwotnie prostych — doskonale prostych. Rzeczywiste pręty są zawsze nieco krzywe. Każdy pręt rzeczywisty ulega wyboczeniu pod jarzmem osiowych sił cisnących. Proste doświadczenie niezbitie to stwierdza. W imadle osadzamy pionowo cienki pręt jaknajdokładniej wyprostowany, a mimo to posiadający pewną krzywiznę niedostępną dla oka. Na koniec pręta, swobodnie sterczący ku górze, zakładamy nieznaczny ciężarek. Pozostawiony samemu sobie pręt odchyła się od pionu, wygina się na bok, jak łodyga pod ciężarem kwiatu i trwa w równowadze odkształconej. Ciężarek dał na tle krzywizny pierwotnej moment gnący — wywołał wygięcie pręta nieznaczne, bo powstrzymane sprężystym sprzeciwem tworzywa. W ten sposób ustalona równowaga pręta jest stała — z łatwością możemy to sprawdzić, potrącając zlekka ciężarek: po pewnej liczbie wahnięć powróci poprzedni stan równowagi trwałej — otrzymamy tę samą strzałkę końcowego odchylenia. Te same zjawiska powtórzą się w nieco ostrzejszej formie, gdy powiększymy ciężarek. Zapanuje nowy stan równowagi trwałej przy większym odchyleniu końcowego przekroju od pionu; gdy jednak powiększymy ciężarek ponad pewną granicę, pręt wygnie się w pałąk, zakrzywi się, ciężarek zwiśnie i oprze się o imadło. Nastąpi wyboczenie pręta, pręt przestanie być sobą. Tylko co opisane zjawiska z łatwością możemy wyjaśnić, zważywszy, że ciężarek ciśnie na pręt siłą pionową. Gdy pręt jest doskonale prosty, siła ta układa się

wzdłuż osi pręta podłużnej, staje się osiową — ściskającą jeno pręt. Gdy pręt jest nieco ukośnie osadzony lub niezupełnie prosty, wtedy siła mija oś, obciążając przekroje poprzeczne mimośrodkowo, i powoduje opisane zjawisko gięcia. Skoro już pręt uległ wygięciu, by nieznacznemu nawet, ciężar wychyla się w bok, ramię momentu gnącego wzrasta, samoczynnie powodując dalszy przyrost odkształcenia, póki sprężysty sprzeciw nie zahamuje odkształceń, póki naprężenia gnące nie zrównoważą momentu. W tym wypadku zapanuje trwały stan równowagi — w przeciwnym razie nastąpi wyboczenie pręta. Zatem pierwotną przyczyną wyboczenia jest zawsze pewna *mimośrodkowość obciążenia*. Należy więc poznać przyczyny mimośrodkowości obciążeń rzeczywistych.

Przedewszystkiem *samo obciążenie pręta nie jest nigdy ściśle osiowe*. Weźmy pod uwagę skrajny przekrój pręta (Rys. 69). Zazwyczaj odkształ-



Rys. 69.

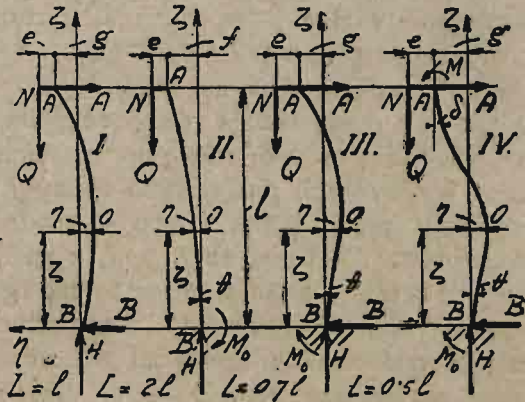
cająca siła Q trafia nieco mimośrodkowo w punkt N o współrzędnych d, e w układzie osi głównych. Im pręt obciążymy starannie, tem e, d będą mniejsze.

Z kolei *sam pręt nie jest doskonale prosty*. Jego oś podłużna stanowi w ogólnym wypadku krzywą przestrzenną, niewiele różniącą się od prostej. Jak zwykle będziemy brali pod uwagę wyłącznie pręty jednorodnie zbudowane o stałym przekroju poprzecznym, możemy przeto miasto krzywej przestrzennej — istotnej osi podłużnej pręta rozpatrywać jej rzuty na płaszczyzny główne, zawierające jednoimienne osie główne przekrojów poprzecznych. Otrzymane w ten sposób rzuty płaskie niewiele się będą różniły od prostej — teoretycznej osi podłużnej pręta doskonale prostego przy dokładnem i sumiennem wykonaniu. Godzi się tu zaznaczyć, że krzywizna osi istotnej, zależna w pierwszej mierze od niedokładności naszych środków technicznych, posiada charakter wypadkowy, uzależniony od bardzo wielu przyczyn, nie da się przeto ująć żadnym wzorem matematycznym, ani uzależnić od głównych wymiarów pręta, zwłaszcza, że ciągle ulega zmianom na tle odkształceń cieplikowych. Prąd cieplejszego powietrza wystarcza, aby ją zmienić nieznacznie.

Nadto *pręt nawet dokładnie prosty ulega skrzywieniu, gdy jakikolwiek jego przekrój poprzeczny nie jest jednolity*. Wyobraźmy sobie płytkę poprzeczną, utworzoną z powłók owego przekroju. Wobec różnorodności tworzywa płytki współczynnik ściśliwości E_c ma wartość zmienną, niejednakową dla poszczególnych włókienek. Po obciążeniu siłą osiową Q , ciśnącą, włókienka skrócą się niejednakowo — płytka ulegnie skrzywieniu, które pociągnie za sobą krzywiznę całego pręta. Wyczuć nieznaczną niejednorodność tworzywa, wyznaczyć drobne wahania E_c w przekroju nie leży w naszej mocy, a każde tworzywo jest mniej lub więcej różnolite. A zatem *obciążenie osiowe pręta prostego nie może być doskonale środkowem*.

Istnieje zawsze strzałka pierwotna przekroju poprzecznego o składowych g, h w płaszczyznach głównych pręta jednorodnie zbudowanego, zawierających jednoimiennie osie główne przekrojów. W tem założeniu rozpatrujemy przedewszystkiem:

§ 5. Pierwszy rodzaj wyboczenia. Pręt pierwotnie prosty u dołu zamocowany przegubowo, u góry rolkowo (Rys. 70) i obciążono siłą Q , cisnącą na górny przekrój pręta w kierunku średniej osi podłużnej pręta, równoległe do posuwu rolek. Początek stałych osi współrzędnych wstawiamy we środku dolnego przegubu B , oś $B\xi$ układamy równoległe do osi średniej pręta ku górze, oś $B\eta$ w płaszczyźnie głównej pręta poziomo na lewo, oś $B\xi$ — ku patrzącemu. Ze względu na pierwotną krzywiznę pręta, zakładamy, że środek A_0 górnego przekroju, podpartego rolkowo nie leży na osi $B\xi$; rzut jego na płaszczyznę gięcia wyznaczy punkt A o współrzędnych l, g . Współrzędna l ma wartość skończoną, równa jest bowiem długości pręta, g jest znikomo małe, pręt bowiem został sumiennie do granic możliwości technicznej wyprostowany. Wobec koniecznej zresztą mimośrodkowości obciążenia, siła Q mija środek górnego przekroju pręta: jej punkt przyłożenia da w rzucie na płaszczyznę gięcia punkt N o współrzędnych $l, e+g$. Odcinek e ma również bardzo małą wartość, starano się bowiem obciążyć pręt jaknajdokładniej środkowo. Siła Q zewnętrzna wywołuje odpory A, B poziome i odpór H pionowy. Równania statyki, wypisane dla punktu B , dadzą: $Q + H = 0, A + B = 0, Q(e + g) + Al = 0$. Stąd mamy $H = -Q, A = -Q(e + g) : l = -B$. Wobec pewnej, nieznaczącej zresztą mimośrodkowości obciążenia, pręt wygnie się. Obierzmy na odkształconej dowolny zresztą środek O przekroju w odległości ζ od początku osi współrzędnych. Składowa jego strzałki pierwotnej niech będzie h , końcowej η . Po sprowadzeniu do środka O sił odkształcających otrzymamy siłę pionową Q , poziomą A i moment gnący $Q(e + g - \eta) + A(l - \zeta)$. Siły Q i A dadzą osiową siłę S , ściskającą i T , tnącą przekroju. Przy wygięciach nieznaczących $S \propto Q, T \propto A$, działania ich możemy pominąć, jako nieznaczące. Moment gnący daje wygięcie pręta. Równanie gięcia będzie tu miało postać $\eta'' + n^2(\eta - e - g) =$



Rys. 70, 71, 72 i 73.

$= A(l - \zeta) : EJ$, przyczem $n^2 = Q : EJ$, $M = A(l - \zeta)$, $M_2 = 0$,
 a przeto jego całka $\eta = e + g + C \text{Sin } n\zeta + D \text{Cos } n\zeta + A(l - \zeta) : Q$.
 W danym wypadku $\eta = g$, gdy $\zeta = l$, oraz $\eta = 0$, gdy $\zeta = 0$. Stąd:
 $g = e + g + C \text{Sin } nl + D \text{Cos } nl$, $0 = e + g + D + Al : Q = e + g +$
 $+ D - Q(e + g) : Q = D$, czyli więc $D = 0$, $C = -e : \text{Sin } nl$ i osta-
 tecznie $\eta = h + y = (e + g)\zeta : l - e \text{Sin } n\zeta : \text{Sin } nl$. We wzorze tym y
 oznacza składową strzałki, zależną od siły Q . Gdy $e = g = h = 0$,
 a więc dla pręta doskonale prostego, obciążonego ściśle środkowo, bę-
 dziemy mieli $\eta = y = 0$. Gdy $\text{Sin } nl = 0$, ostatni wyraz wzrasta ponad
 wszelką miarę, a $\eta = y = \infty$. Jedną ze składowych strzałki będzie nie-
 skończenie wielką. Ten wypadek zachodzi istotnie wtedy, gdy $nl = \pi$,
 a więc gdy $Q = \pi^2 EJ : l^2$. Powtórzmy to samo rozumowanie dla dru-
 giej płaszczyzny głównej pręta, a otrzymamy podobne wyniki. Druga
 składowa strzałki będzie równa zeru dla pręta doskonale prostego, obcią-
 żonego ściśle osiowo; stanie się nieskończenie wielką przy $Q_1 = \pi^2 EJ_1 :$
 $: l^2$. We wzorach powyższych mamy J i J_1 — główne momenty stałego
 przekroju pręta; jeden z nich odpowiada minimum — drugi maximum
 momentów. Załóżmy, że $J_1 > J$, a wtedy przy $Q = Q_0 < Q_1$, otrzyma-
 my wyboczenie pręta w płaszczyźnie gięcia $\zeta B\eta$, w płaszczyźnie naj-
 mniejszej wartości momentów bezwładności przekrojów pręta. Stąd wnio-
 sek, że *wyboczenie zachodzi w płaszczyźnie głównej pręta o stałym prze-*
kroju, jednorodnie zbudowanego, przynależnej do najmniejszej wartości
momentu bezwładności przekrojów. Można się było spodziewać tego, po-
 nieważ niewątpliwie w tej płaszczyźnie gięcia, pręt jest wytrzymałości-
 wo najsiabszy. Gdy przekrój pręta jest obojętny, wyboczenie może na-
 stąpić w jakiegokolwiek płaszczyźnie gięcia. Drobne odstępstwa od praw
 powyższych zdarzają się czasami przy próbach, należy je przypisać każ-
 dorazowo istnieniu znaczniejszych strzałek pierwotnych. Tylko co pada-
 ne wyniki ostateczne dotyczą również i następnych wypadków wybocze-
 nia, nie będziemy ich przeto powtarzali, wyznaczymy jeno odnośne wzo-
 ry dla sił Q_0 .

§ 6. Drugi wypadek wyboczenia. Pręt zamocowano u dołu
 (Rys. 71) i obciążono siłą Q , cisnącą na górny przekrój pręta w kierun-
 ku średniej osi pręta podłużnej. Załóżmy nadto dodatkowo, że kierunek
 działania siły nie zmienia się przy odkształcaniu pręta, a otrzymamy po-
 wyżej opisany pręt doświadczalny. Początek stałych osi współrzędnych
 umieszczamy we środku przekroju osadczego, oś $B\zeta$ prowadzimy równo-
 ległe do osi średniej pręta ku górze, oś $B\eta$ na lewo w płaszczyźnie
 głównej pręta, oś $B\xi$ — ku patrzącemu. Wobec koniecznej mimośrodko-
 wości obciążenia nastąpi wygięcie pręta pod jarzmem siły Q . Po od-
 kształceniu środek końcowego przekroju swobodnego da w rzucie na

obraną płaszczyznę główną punkt A o współrzędnych l i f , a punkt przyłożenia siły Q da $N(l, e + f)$. Odcinek e stanowi składową mimośrodu siły Q ; odcinek f daje składową strzałki górnego przekroju. Dla pręta sumiennie wyprostowanego e jest nader nieznaczące, choć różne od zera. Gdziekolwiek na odkształconej, w odległości ζ od początku osi współrzędnych obieramy środek O . Składową strzałki tego przekroju będzie η . Po sprowadzeniu do środka O odkształcająca siła da moment $Q(e + f - \eta)$; siły osiową i tnącą pomijamy, jak w wypadku wyżej opisanym. Działanie ich jest nieznaczące, a wpływ na wyboczenie znikomy. Równanie gięcia otrzyma postać $\eta'' + n^2(\eta - e - f) = 0$. Jego całka $\eta = e + f + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta$ zawiera niewiadome C, D, f , które wyznaczymy z warunków skrajnych obciążenia pręta. Mamy tu $\eta = f$, gdy $\zeta = l$, skrócenie bowiem pręta pod jarzmem siły Q cisnącej pomijamy, jako nieznaczące. Nadto $\eta_0 = 0$ dla osadczego przekroju, a $\eta'_0 = \theta$. Pręt jako niezupełnie prosty może być nieco pochylony w przekroju osadczym ku swej osi średniej $B\zeta$. Zresztą kąt θ jest nader znikomy dla pręta sumiennie wyprostowanego. Stąd mamy $f = e + f + C \sin nl + D \cos nl$, $0 = e + f + D$, $\theta = nC$. Stąd $C = \theta : n$, $D = -(en + \theta \sin nl) : n \cos nl$, $f = (en + \theta \sin nl) : n \cos nl - e$ i ostatecznie $\eta = (\theta : n) \sin n\zeta + (en + \theta \sin nl) (1 - \cos n\zeta) : n \cos nl = h + y$. Przez h oznaczyliśmy tu składową strzałki pierwotnej przekroju, przez y przyrost tej składowej na tle działania gnącego siły Q . Dla pręta doskonale prostego $h = \theta = e = 0$, a zatem $\eta = y = 0$. Gdy $\cos nl = 0$, będziemy mieli $y = \eta = f = \infty$ przy wszelkich wartościach e, δ, h . Siła, czyniąca zadość równaniu $nl = \frac{1}{2} \pi$, powoduje wyboczenie pręta. Będzie to $Q_0 = \pi^2 EJ : 4 l^2$. Z założenia EJ jest najmniejsze dla rozpatrywanej płaszczyzny gięcia. Rozumując zupełnie tak samo, jak w wypadku poprzedzającym, dojdziemy do wniosku, że Q_0 stanowi istotnie obciążenie pręta niebezpieczne, bo grożące wyboczeniem. Tylko co otrzymany wzór otrzyma postać nieco prostszą $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$, gdy miasto istotnej długości pręta rozpatrywać będziemy *długość sprowadzoną* $L = 2l$, dwukrotnie większą.

§ 7. Trzeci wypadek wyboczenia. Pręt, pierwotnie prosty, zamocowano u dołu, u góry obciążono siłą Q , cisnącą w kierunku posuwu rolek górnej podpory przegubowej pręta. Posuw i siła są równoległe do osi średniej pręta. I w danym wypadku początek stałych osi współrzędnych umieszczamy we środku B przekroju osadczego; oś $B\zeta$, równoległą do średniej osi pręta, kierujemy do góry, oś $B\eta$ na lewo, $B\zeta$ — ku patrzącemu. Rozpatrujemy, jak zwykle, pręt jednorodnie zbudowany, o stałym przekroju poprzecznym, $\zeta B\eta$ stanowi jego płaszczyznę główną, odpowiadającą najmniejszej sztywności EJ . Wobec pierwotnej krzywizny pręta środek górnego przekroju w rzucie na obraną płaszczyznę gięcia

da punkt A o spólrzędnych l, g , a punkt przyłożenia siły Q da $N (l, e + g)$. To samo mieliśmy wyżej w § 5. Oba odcinki e, g są nader nieznaczne dla prętów sumiennie wyprostowanych. Siła Q zewnętrzna wywołuje odpory A, B poziome, odpór H pionowy i moment osadczy M_0 . Równania statyki, wypisane dla punktu B , dadzą $Q + H = O, A + B = O, Q(e + g) + Al + M_0 = O$. Wyznamy z nich B i M_0 w zależności od Q i statycznie niewyznaczalnej A . Obierzmy na odkształconej dowolny zresztą środek O przekroju o spólrzędnych ζ, η . Po sprowadzeniu sił odkształcających do tego środka otrzymamy siłę osiową i tnącą, które i w danym wypadku pominiemy, oraz moment gnący $Q(e + g - \eta) + A(l - \zeta)$. Równanie gięcia będzie przeto zupełnie takie, jak w § 5, a całka jego $\eta = e + g + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta + A(l - \zeta) : Q$. Niewiadome C, D, A wyznaczmy z warunków końcowych obciążenia. Dla górnego przekroju (Rys. 72) $\eta = g$ przy $\zeta = l$, dla osadczego $\eta = O$ i $\eta' = \theta$ przy $\zeta = O$, pręt bowiem, jako niezupełnie prosty, może w przekroju osadczym tworzyć pewien nieznaczny kąt θ nachylenia ku swej osi średniej. Stąd mamy: $g = e + g + C \sin nl + D \cos nl, O = e + g + D + A : Q, \theta = nC - A : Q$. Pomnóżmy ostatnie równanie przez l , po dodaniu do drugiego otrzymamy $D = -Cnl + l\theta - e - g$, stąd na mocy równania pierwszego będziemy mieli ostatecznie $C = [-e + (e + g - l\theta) \cos nl] : (\sin nl - nl \cos nl), D = [nle - (e + g - l\theta) \sin nl] : (\sin nl - nl \cos nl)$. Nadto $A = Q(nC - \theta)$. Te wartości określają równanie odkształconej, z którego możemy wyznaczyć η lub $h + y = \eta$. Dla pręta doskonale prostego $e = g = h = \theta = O$, a przeto również $C = D = A = O$, skąd $\eta = y = O$. Taki pręt osiowo obciążony nie ulega wyboczeniu, jeno ściśnięciu. Gdy $\sin nl - nl \cos nl = O$, wtedy $C = D = A = \infty$, otrzymamy przeto $\eta = y = \infty$. Siła, powodująca wyboczenie czyni zadość tylko co wypisanemu równaniu. Najmniejszy jego pierwiastek $nl = 1,4303 \pi$, a przeto $n^2 l^2 = 2,046 \pi^2 \approx 2 \pi^2$. Stąd ostatecznie wyznaczmy siłę $Q_0 = 2 \pi^2 EJ : l^2$, powodującą wyboczenie pręta. I ten wzór otrzyma prostszą postać $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$, gdy miasto istotnej długości pręta będziemy brali pod uwagę jego długość sprowadzoną $L = 0,7 l$, wtedy bowiem $L^2 = 0,49 l^2 \approx l^2 : 2$.

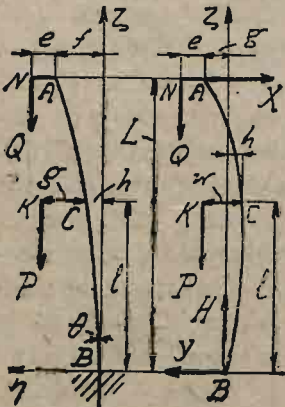
§ 8. Czwarty wypadek wyboczenia. Pręt pierwotnie prosty mocujemy obustronnie (Rys. 73) w sposób, umożliwiający jednak posuw górnego zamocowania w kierunku osi średniej pręta pod jarzmem siły Q , cisnącej z góry, a równoległej do tego posuwu. Początek stałych osi spólrzędnych umieszczamy we środku B dolnego przekroju osadczego. Oś $B\zeta$ prowadzimy do góry równoległe do osi średniej pręta, drugą oś $B\eta$ układamy w głównej płaszczyźnie pręta na lewo, oś $B\xi$ kierujemy ku patrzacemu. Rozpatrujemy wyłącznie tylko pręty jednorodnie

zbudowane o stałym przekroju poprzecznym, płaszczyzna główna $\zeta B\eta$ odpowiada najmniejszej sztywności pręta EJ . Na tej płaszczyźnie środek górnego przekroju da rzut $A(l, g)$, punkt przyłożenia siły Q da w rzucie $N(l, e + g)$, jak w wypadku poprzednio rozpatrywanym. W górnym przekroju będziemy mieli odpór poprzeczny A i moment osadczy M , w dolnym — odpór poprzeczny B , pionowy H i moment M_0 . Równania statyki, wypisane dla punktu B w postaci $Q + H = 0$, $A + B = 0$, $Q(e + g) + Al + M + M_0 = 0$ dadzą $H = -Q$, $B = -A$, $M_0 = -Q(e + g) - Al - M$. Mamy tu dwie wielkości statycznie niewyznaczalne A i M . Wobec koniecznej mimośrodkowości obciążenia pręt wygnie się w sposób wskazany na rysunku. Obierzmy na odkształconej dowolny zresztą środek przekroju $O(\zeta, \eta)$. Po sprowadzeniu sił górnego układu do środka O otrzymamy siłę osiową i tnącą, które jak zwykle pomijamy, i moment $M + Q(e + g - \eta) + A(l - \zeta)$. Równanie gięcia będzie więc $\eta'' + n^2(\eta - e - g) = [A(l - \zeta) + M] : EJ$. Jego całka $\eta = e + g + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta + [A(l - \zeta) + M] : Q$ zawiera cztery niewiadome C, D, M, A , które wyznaczymy z warunków skrajnego obciążenia pręta. W górnym przekroju mamy $\eta = g$, $\eta' = \delta$ przy $\zeta = l$, pręt bowiem, jako niedoskonale prosty, może ujawniać końcowe odchylenie osi o mały zresztą kąt δ od osi średniej. W dolnym przekroju przy $\zeta = 0$ będziemy mieli $\eta_0 = 0$, $\eta'_0 = \theta$, jak w wypadku poprzednio rozpatrywanym. Stąd mamy: $g = e + g + C \sin nl + D \cos nl + M : Q$, $\delta = -n C \cos nl - n D \sin nl - A : Q$, $0 = e + g + D + Al : Q$, $\theta = nC - A : Q$. Pomnóżmy ostatnie równanie przez l . Po dodaniu do trzeciego otrzymamy $0 = e + g - \theta l + Cnl + D + M : Q$. Ten wynik odejmujemy od pierwszego. Stąd otrzymamy: $C(\sin nl - nl) + D(\cos nl - 1) = g - \theta l$. Z kolei odejmujemy czwarte równanie od drugiego. Stąd: $C(\cos nl - 1) - D \sin nl = (\delta - \theta) : n$. Z tych równań otrzymamy $C = [(g - \theta l) \sin nl + (\delta - \theta)(\cos nl - 1) : n] : \Delta$, $D = [(g - \theta l)(\cos nl - 1) - (\delta - \theta)(\sin nl - nl) : n] : \Delta$, gdzie $\Delta = \sin^2 nl - nl \sin nl + \cos^2 nl - 2 \cos nl + 1 = 2(1 - \cos nl) - nl \sin nl = 4 \sin^2(1/2 nl) - 2nl \sin(1/2 nl) \times \cos(1/2 nl) = 4 \sin(1/2 nl) [\sin(1/2 nl) - 1/2 nl \cos(1/2 nl)]$. Dla pręta doskonale prostego, obciążonego ściśle osiowo $e = g = \delta = \theta = 0$, a przeto $C = D = 0$, oraz na mocy powyżej wypisanych równań $A = M = 0$ i ostatecznie $\eta = 0$. Tego rodzaju pręt wyboczeniu nie ulega. Istotne pręty nie są jednak zupełnie proste, należy więc zbadać, kiedy $\eta = \infty$. Z równania odkształconej wynika, że wartość $\eta = \infty$ możliwa jest jeno wtedy, gdy C, D, A lub M staną się nieskończenie wielkimi. Załóżmy, że $C = \infty$ lub $D = \infty$. W tem założeniu mamy $\Delta = 0$, czyli $\sin(1/2 nl) = 0$ lub $\sin(1/2 nl) - 1/2 nl \cos(1/2 nl) = 0$. Pierwsze równanie daje najmniejszy pierwiastek $1/2 nl = \pi$, drugie spotkał się w ustępie poprzednim, Da ono $1/2 nl = 1,403 \pi$. Szukamy najmniejszej

wartości siły Q , niebezpiecznej ze względu na wyboczenie pręta, należy przeto wziąć pod uwagę mniejszy z tych dwóch pierwiastków: $1/2, n/l = \pi$. Istotnie dla niego $D = \infty$, a przeto i $M = \infty$, jak o tem łatwo się przekonać, rozpatrując powyżej wypisane cztery równania warunkowe. Stąd bezpośrednio $n^2 l^2 = Q l^2 : EJ = 4 \pi^2$, siła przy której nastąpi wyboczenie będzie więc równa $Q_0 = 4 \pi^2 EJ : l^2$. I ten wzór można przedstawić w postaci $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$, rozpatrując miasto istotnej długości pręta l , długość sprowadzoną $L = 1/2 l$, dwukrotnie mniejszą.

§ 9. Wzory Euler'a. Wszystkie te cztery wzory zawdzięczamy *Euler'owi*. Połączyliśmy je w jeden wzór $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$, w którym Q_0 oznacza najmniejszą wartość siły, przy której następuje wyboczenie pręta, jednorodnie zbudowanego, stałego przekroju. Wyboczenia oczekiwać należy w płaszczyźnie głównej pręta odpowiadającej najmniejszej jego sztywności EJ . Nadto we wzorze mamy długość sprowadzoną pręta L , różną od jego długości istotnej l . W wypadku pierwszym, dla pręta jednostronnie opartego przegubowo, drugostronnie rolkowo $L = l$; dla pręta jednostronnie osadzonego $L = 2 l$; dla pręta jednostronnie osadzonego, drugostronnie prowadzonego rolkowo $L = 0,7 l$; wreszcie dla pręta obustronnie osadzonego $L = 0,5 l$. Są to cztery wypadki zasadnicze wyboczenia, wszystkie inne, złożęnsze, możemy sprowadzić do tych czterech najprostszych. Często spotykane proste przykłady najlepiej to uwytklą. Weźmy pod uwagę —

§ 10. Słup wspornikowy. Pręt osadzono u dołu, w górnym swobodnym przekroju obciążono osiową siłą Q , cisnącą na pręt w kierunku jego średniej osi podłużnej. Nadto jeden z pośrednich przekrojów pręta zaopatrzonego we wspornik, obciążony na końcu siłą P równoległą do Q i czynną w tym samym kierunku. Pręt ma być jednorodnie zbudowany. Początek stałych osi spółrzędnych obieramy we środku B przekroju osadczego, oś $B\xi$ kierujemy ku górze, równoległe do średniej osi pręta, oś $B\eta$ układamy w płaszczyźnie głównej pręta, odpowiadającej jego najmniejszej sztywności. Prowadzimy $B\eta$ na lewo, $B\xi$ — ku patrzącemu. Wobec mimośrodkowości obciążenia, pręt wygnie się. Środek skrajnego przekroju górnego da w rzucie na obraną płaszczyznę główną punkt $A(L, f)$, a punkt przyłożenia siły osiowej Q — rzut $N(L, e + f)$, siła bowiem Q ujawnia zawsze pewną znikomą mimośrodkowość przyłożenia. Środek przekroju, zaopatrzonego we wspornik da w rzucie na tę samą płaszczyznę punkt $C(L, h)$ a punkt końcowy wspornika, obciążony siłą P da rzut $K(l, g + h)$. Gdzie się tu zaznaczyć, że e i g należy zawsze rozpatrywać po jednej stronie pręta, ten układ bowiem



Rys. 74 i 75.

daje największe odkształcenia. Znamy istotny kierunek wspornika, nie wiemy jednak dokładnie, gdzie leży punkt przyłożenia siły Q w przekroju górnym, bo mimośrodkowość tego obciążenia jest dziełem wypadku — zachodzić może we wszystkich kierunkach zupełnie jednakowo z tym samym prawdopodobieństwem. Najlepiej przeto postawić zagadnienie w najgorszych warunkach, wtedy bowiem momenty obu sił będą działały w tym samym kierunku obrotowym. W danym wypadku wspornik dzieli płaszczyzną gięcia na dwie połacie zmienności momentów. W górnej panuje moment $Q(e+f-\eta)$, w dolnej $Q(e+f-\eta) + P(g+h-\eta)$. Zatem dla górnej połaci będziemy mieli równanie gięcia $\eta'' + n^2(\eta - e - f) = 0$, dla dolnej $\eta'' + m^2\eta = [Q(e+f) + P(g+h)] : EJ_2$, gdzie $n^2 = Q : EJ_1$, $m^2 = (Q+P) : EJ_2$, zakładamy bowiem, że pręt posiada sztywność najmniejszą EJ_1 w połaci górnej, EJ_2 — w dolnej. Obie te sztywności są zresztą jednakowe dla wszystkich przekrojów odnośnych połaci. Całkę pierwszego równania otrzymamy w postaci $\eta = e + f + A \sin n\zeta + B \cos n\zeta$, drugiego $\eta_1 = [Q(e+f) + P(g+h)] : (Q+P) + C \sin m\zeta + D \cos m\zeta$. Stałe całkowania wyznaczymy ze skrajnych warunków obciążenia. Przy $\zeta = L$, dla górnego przekroju mamy $\eta = f$, dla granicznego przy $\zeta = l$ będziemy mieli $h = \eta = \eta_1$ i $\eta' = \eta'_1$, odkształcona bowiem punktów podwójnych i osobliwych mieć nie może. Wreszcie dla przekroju osadczego przy $\zeta = 0$ otrzymamy $\eta_{10} = 0$, $\eta'_{10} = \theta$, jak dla ostatnich trzech typowych wypadków, rozpatrywanych powyżej. Stąd mamy kolejno $f = e + f + A \sin nL + B \cos nL$, $h = e + f + A \sin nl + B \cos nl$, $h = [Q(e+f) + P(g+h)] : (Q+P) + C \sin ml + D \cos ml$, $nA \cos nL - nB \sin nL = mC \cos ml - mD \sin ml$, $[Q(e+f) + P(g+h)] : (Q+P) + D = 0$, $mC = \theta$. Z piątego wzoru wyznaczymy $[Q(e+f) + P(g+h)] : (P+Q) = R = -D$ i podstawiamy w trzeci, skąd $C \sin ml + D(\cos ml - 1) = h$. Po uwzględnieniu szóstego równania, które da $C = \theta : m$, otrzymamy $D = (mh - \theta \sin ml) : m(\cos ml - 1)$. Mamy prawo tak zynić, ponieważ $\cos ml \neq 1$. Ze tak jest istotnie, możemy się łatwo przekonać, wtedy bowiem byłoby $ml = 2\pi$, otrzymalibyśmy przeto warunek wyboczenia dla pręta obustronnie zamocowanego, l długiego, a obciążonego siłą $P+Q$, co oczywiście nie zgadza się z istotą rzeczy. Z równania czwartego otrzymamy $A \cos nl - B \sin nl = [\theta \cos ml - (mh - \theta \sin ml) \times \sin ml : (\cos ml - 1)] : n = mh \sin ml : n(1 - \cos ml) - \theta : n$, z drugiego znów $A \sin nl + B \cos nl = h - (e+f)$. Te dwa równania dają $A = [mh \sin ml : n(1 - \cos ml) - \theta : n] \cos nl + (h - e - f) \sin nl$, $B = -[mh \sin ml : n(1 - \cos ml) - \theta : n] \sin nl + (h - e - f) \cos nl$. Po podstawieniu tych wartości w równanie pierwsze otrzymamy: $[mh \sin ml : n(1 - \cos ml) - \theta : m] \sin n\lambda + (h - e - f) \cos n\lambda = -e$, gdzie oznaczyliśmy $L - l = \lambda$. Niech będzie dalej $P = rQ$. Piąte równanie na nam $e + f = (mh - \theta \sin ml) (1+r) : m(1 - \cos ml) - r(g+h)$. Z tych dwóch równań rugujemy $e + f$ i ostatecznie otrzymujemy $h = [(\theta : n) \sin n\lambda - \theta(1+r) \sin ml \cos n\lambda : m(1 - \cos ml) - rg \cos n\lambda - e] : \{m \sin ml \sin n\lambda - n(1+r) \cos ml \cos n\lambda : n(1 - \cos ml)\}$. Wyboczeniu pręta odpowiada wartość $h = \infty$, a przeto warunek wyboczenia możemy wypisać w postaci $m \sin ml \sin n\lambda - n(1+r) \cos ml \cos n\lambda = 0$. Inaczej jeszcze $\operatorname{tg} ml \operatorname{tg} n\lambda = n(1+r) : m$. Równania tego w ogólnej postaci rozwiązać niepodobna, natomiast

w każdym szczególnym wypadku otrzymać można wartości $n = \sqrt{Q : EJ_1}$, $m = \sqrt{(P + Q) : EJ_2}$, czyniące mu zadość.

§ 11. Stójka wspornikowa. Pręt (Rys. 75) podparto u dołu przegubowo, u góry rolkowo i obciążono siłą Q , cisnącą na górny przekrój podparty, a równoległą do średniej osi pręta. Nadto jeden z pośrednich przekrojów pręta połączono sztywnie ze wspornikiem, obciążonym na końcu siłą P , równoległą do Q , cisnącą w dół. Pręt ma być jednorodnie zbudowany. Początek stałych osi spólrzędnych obieramy we środku B dolnego przekroju, oś $B\xi$ kierujemy do góry, równoległe do średniej osi pręta, oś $B\eta$ układamy w płaszczyźnie głównej pręta, odpowiadającej najmniejszej jego sztywności. Prowadzimy tę oś na lewo, a $B\xi$ ku patrzacemu. Rzut środka górnego przekroju podpartego w płaszczyźnie głównej da punkt o spólrzędnych L, g , rzut punktu przyłożenia siły Q będzie miał współrzędne $L, e + g$. Środek wspornikowego przekroju wyznaczy w rzucie punkt o spólrzędnych l, h , wreszcie koniec wspornika da w rzucie punkt o spólrzędnych $l, w + h$. I tu również mimośrodkowość obciążenia górnego, jako też zбочenie g obieramy po stronie w , aby otrzymać najgorsze warunki obciążenia. Niema w tem założeniu żadnej sprzeczności z istotą rzeczy, e bowiem i g są zupełnie przypadkowe, możemy im przypisać dowolny kierunek. Nazwijmy górny odpór poprzeczny przez X . Równanie momentów, wypisane dla punktu B da $Q(e + g) + P(w + h) + XL = 0$, skąd $X = -[Q(e + g) + P(w + h)] : L$. Przekrój wspornikowy dzieli płaszczyznę gięcia na dwie połaci: górną o sztywności EJ_1 i dolną o stałej sztywności EJ_2 . Dla górnej mamy równanie gięcia $EJ_1\eta'' = Q(e + g - \eta) + X(L - \zeta)$, dla dolnej $EJ_2\eta'' = Q(e + g - \eta) + P(w + h - \eta) + X(L - \zeta)$. Założmy $n^2 = Q : EJ_1$, $m^2 = (P + Q) : EJ_2$, a otrzymamy całkę pierwszego równania $\eta = e + g + A\text{Sin } n\zeta + B\text{Cos } n\zeta + X(L - \zeta) : Q$, drugiego $\eta_1 = C\text{Sin } m\zeta + D\text{Cos } m\zeta - X\zeta : (P + Q)$. Dla $\zeta = L$ mamy tu $\eta = g$, dla przekroju wspornikowego przy $\zeta = l$ będziemy mieli $\eta = \eta_1 = h$, $\eta' = \eta'_1$, wreszcie dla dolnego podpartego przekroju $\eta_1 = 0$ przy $\zeta = 0$. Stąd: $A\text{Sin } nL + B\text{Cos } nL = -e$, $A\text{Sin } nl + B\text{Cos } nl + e + g + Xl : Q = h$, $C\text{Sin } ml + D\text{Cos } ml - Xl : (P + Q) = h$, $nA\text{Cos } nl - nB\text{Sin } nl - X : Q = mC\text{Cos } ml - mD\text{Sin } ml - X : (P + Q)$, $D = 0$. Z równania trzeciego mamy $C = (h + t) : \text{Sin } ml$, gdzie oznaczyliśmy przez $t = Xl : (P + Q)$. I tutaj również $\text{Sin } ml \neq 0$, w przeciwnym bowiem razie mielibyśmy $ml = \pi$, skąd $P + Q = \pi^2 EJ_2 : l^2$, jak dla pręta o długości l , obciążonego siłami $P + Q$ w wypadku pierwszym wybożenia, co niewątpliwie stoi w sprzeczności z założeniem. Po podstawieniu C i $D = 0$ w równanie czwarte, otrzymamy: $A\text{Cos } nl - B\text{Sin } nl = (m : n)(h + t) \text{ctg } ml + X : nQ - X : n(P + Q) = (m : n)(h + t) \text{ctg } ml + s$, gdzie $s = PX : nQ(P + Q)$. Nadto z drugiego równania mamy: $A\text{Sin } nl + B\text{Cos } nl = h - e - g - u$, gdzie $u = Xl : Q$. Te dwa równania dają $A = (m : n)(h + t) \text{ctg } ml \text{Cos } nl + s\text{Cos } nl + (h - e - g - u) \text{Sin } nl$, $B = -(m : n)(h + t) \text{ctg } ml \text{Sin } nl - s\text{Sin } nl + (h - e - g - u) \text{Cos } nl$. Po podstawieniu tych wartości w równanie pierwsze, otrzymamy: $[(m : n)(h + t) \text{ctg } ml + s] \text{Sin } n\lambda + (h - e - g - u) \text{Cos } n\lambda = -e$. Z kolei wyznaczmy wartości $t = -[e + g + r(w + h)] l : (1 + r) L$, $s = -r[e + g + r(w + h)] : n(1 + r) L$, $u = -$

-- $[e + g + r(w + h)] \lambda : L$. Po podstawieniu tych wartości otrzymamy z ostatniego równania niewiadomą h w postaci $h = [(e + g + rw)(ml \times \times \text{ctg } ml + r) \sin n\lambda : n(1 + r) L + (el + gl - r\omega\lambda) \text{Cos } n\lambda : L - e] :$
 $: \{ [m(L + r\lambda) \text{ctg } ml - r^2] \text{Sin } n\lambda : nL(1 + r) + (L + r\lambda) \text{Cos } n\lambda : L \}$.
 Przy wyoboczeniu pręta $h = \infty$, a przeto musi być równy reru mianownik tylko co otrzymanego wzoru. Stąd otrzymujemy ostateczny warunek wyoboczenia w postaci $m \text{ctg } ml + n(1 + r) \text{ctg } n\lambda = r^2 : (L + r\lambda)$. Jest tu wzór *Jasńskiego*. Wzór, wyprowadzony w ustępie poprzedzającym, o ile wiem, nie był znany dotychczas. Oba te wzory mają jedną wadę — są bardzo niewygodne w rachunku. Stosują się również w wypadku e skończonego. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że wielkość e nie gra żadnej roli przy wyznaczaniu wartości krytycznej mianownika. Stanowi to poniekąd istotę powyższych wywodów, milcząco bowiem rozpatrywaliśmy wszystkie powyżej podane wypadki wyoboczenia proste i złożone, jako graniczne wypadki obciążeń mimośrodkowych.

§ 12. Zakres stosowalności wzorów Eulera. W rozdziale drugim zaznaczyliśmy wyraźnie, że wzory gięcia mogą być stosowane jedynie w tym wypadku, gdy α_g ma stałą wartość dla całego obszaru naprężeń gnących. Zatem naprężenia gnące nie powinny przekraczać granicy proporcjonalności $K_{gH} \propto K_H$. To samo zastrzeżenie dotyczy również i wzorów *Eulera*, jako wysnutych ze zwykłych wzorów gięcia. Zwęża ono zakres ich stosowalności, czyniąc koniecznem ustalenie pewnych dodatkowych warunków, przez długi czas zupełnie zapoznawanych. Warunki te jednak nie mogą być ustalone bezpośrednio, bo wzory na wyoboczenie nie zawierają naprężeń. Stanowią zatem pewien rodzaj zabezpieczenia przeciwko wyoboczeniu, wskazując siłę odkształcającą, która może wywołać zjawisko zasadniczo różne od zwykłych odkształceń, pochodzących od sił cisnących. Wyoboczenie w istocie swej nie różni się od gięcia mimośrodkowego. Jest jego wypadkiem granicznym. Wobec pierwotnej krzywizny pręta ściskanego w przekrojach panują siły osiowe S i momenty gnące M , zresztą nader nieznaczne dla prętów sumiennie wyprostowanych. To obciążenie daje naprężenia gnące $\sigma = -M_{yx} : J_y + + M_{xy} : J_x + S : F$, skrajne wartości naprężeń σ wyrokują o bezpieczeństwie pręta. Zatem warunkiem istotnym stosowalności wzorów *Eulera* musi być $\sigma_{max} \leq K_H$. Niestety, nie możemy korzystać z tej nierówności, nie znamy bowiem strzałki rozpatrywanego przekroju, nie umiemy więc wyznaczyć wartości momentu gnącego w sposób wystarczająco ścisły. Nie znamy skrajnych naprężeń przekroju, jeno ich wartość średnią $\sigma_0 = S : F$. Wiemy natomiast, że moment gnący ma wartość znikomą dla prętów sumiennie wyprostowanych, możemy przeto założyć, że skrajne naprężenia przekroju nie wiele się różnią od σ_0 . To założenie ma wszelkie cechy prawdopodobieństwa przy małych wygięciach poszczególnych płytek. W tym wypadku naprężenie średnie σ_0 stanowi przybli-

żoną miarę naprężeń przekroju. Zatem nierówność $\sigma_0 \leq K_H$ stanowi warunek stosowalności wzorów *Euler'a*. Stąd wnioskujemy, że siła Q_0 wyznaczona z tych wzorów istotnie może spowodować wyboczenie, o ile $\sigma_0 = Q_0 : F \leq K_H$. Ten czysto teoretyczny wniosek, zupełnie zresztą oczywisty, długi czas leżał odłogiem i wzory *Euler'a* były stosowane nieodpowiednio, dawały wyniki fałszywe. Nie dosyć na tem. Zwykły wzór ściskania wymaga, aby naprężenia cisnące były mniejsze od k_c , skrajnego dopuszczalnego naprężenia cisnącego, a przeto *pręty obciążone siłami osiowymi cisnącymi winny być liczone na wyboczenie według wzorów Euler'a i na ściskanie według zwykłego wzoru*. Bogaty dorobek doświadczalny stwierdza to prawo w całej rozciągłości.

Tetmajer nieco inaczej rozwiązuje zagadnienie, czyniąc we wzorze ogólnym *Euler'a* $J = Fi^2$, gdzie i oznacza ramię bezwładności najmniejsze stałego przekroju pręta jednorodnie zbudowanego. Stąd $Q_0 = \pi^2 EFi^2 : L^2$. Nazwijmy iloraz $Q_0 : F$ *wytrzymałością na wyboczenie* K_W . Będzie to niewątpliwie *średnie naprężenie pręta niebezpieczne*, grozi bowiem wyboczeniem. Z warunku powyżej ustalonego wypływa, że $K_W = \pi^2 E(i : L)^2 \leq K_H$. W tym jedynie wypadku należy oczekiwać *wyboczenia sprężystego*, mamy więc prawo korzystać ze wzorów *Euler'a* dla wyznaczenia Q_0 . Skoro więc $L : i \geq \pi \sqrt{E : K_H}$, siła $Q_0 = \pi^2 EJ : L^2$ daje wyboczenie sprężyste. Po odciążeniu pręt powraca do stanu pierwotnego. Znika wszelki ślad wyboczenia. Inaczej jednak rzecz się ma, gdy $K_W > K_H$, to jest gdy $L : i < \pi \sqrt{E : K_H}$, gdy naprężenia przekraczają granicę proporcjonalności. W tym wypadku stosować wzorów *Euler'a* nie należy. Wyboczenie ma charakter mniej lub więcej trwały — po odciążeniu pręt pozostaje wygięty. Liczne doświadczenia *Tetmajer'a* stwierdzają wywoły powyższe. Skrajna wartość $L : i = \pi \sqrt{E : K_H}$ stanowi zatem granicę stosowalności wzorów *Euler'a*. Z tego wzoru można z niejaką dokładnością wyliczyć $L : i$. Dla żelaza zlewego $E = 2150000 \text{ kg/cm}^2$, $K_H = 1800 \text{ kg/cm}^2$, zatem $L : i = 108$. Skoro więc $L : i \geq 108$, możemy korzystać ze wzorów *Euler'a*. Mimo to jednak wobec niepewnej wartości E_s i K_{Hg} , które właściwie powinniśmy byli brać tutaj pod uwagę, lepiej jest wartość graniczną $L : i$ wyznaczać doświadczalnie. Według *Tetmajer'a* wynosi ona 100 dla drzewa iglastego, 80 dla żeliwa, 112 dla żelaza zgrzewnego, 105 dla żelaza zlewego, 90 dla stali zlewnej. Pewniejsze wyniki podaje *Jasiński*: dla żelaza zgrzewnego 114,7 i dla żelaza zlewego i stali zlewnej 110,1. Z wartości powyższych łatwo możemy wyznaczyć najmniejszą długość L_0 pręta o danym przekroju, zachowującego się według wzorów *Euler'a* przy wyboczeniu. Dla mniejszych długości wzory te dają wyniki nieściśle, a nawet wprost fałszywe, o ile nie weźmiemy pod uwagę dodatkowego wzoru na ściskanie. Tą niedokład-

ność wzorów *Euler'a* starano się usunąć oddawna, budując wzory doświadczalne. Najwięcej miał powodzenia stary

§ 13. Wzór Navier-Schwarz-Rankine'a. Stanowi on sztuczne połączenie wzoru *Euler'a* ze zwykłym wzorem ściskania. Oznaczmy przez Q siłę cisnącą osiową, przez F przekrój stały pręta, a otrzymamy wzór $Q = Fk$, gdzie $k = k_c : [1 + m(l : i)^2]$. Dotyczy on prętów, rozpatrywanych w pierwszym wypadku wybożenia, a więc obustronnie podpartych. Uzasadnienie tego wzoru jest bardzo proste, im bowiem długość pręta l jest mniejsza, tem chyżej maleje wyraz drugi nawiasu, tem bardziej zbliżamy się do idealnego wypadku ściskania, przy $l = 0$, kiedy $k = k_c$. Natomiast im l jest większe, im głębiej wkraczamy w dziedzinę możliwości wybożenia, tem większą wartość wobec jedności ujawnia wyraz, zawierający współczynnik doświadczalny m . Przy l dostatecznie wielkim możemy pominąć jedynkę, a otrzymamy $Q = k_c F i^2 : m l^2$, wzór o postaci wzoru *Euler'owskiego*. Całe to teoretyczne podłoże jest jednak nieco chwiejne i, jak dowiodły doświadczenia *Bach'a*, nawet zgoła błędne, nie można bowiem doświadczalnie wyznaczyć stałej wartości dla m . Zazwyczaj biorą $m = 0,00016$ dla żelaza lanego, $0,00008$ dla żelaza zgrzewnego, $0,00004$ dla stali miękkiej, $0,00006$ dla stali twardej i $0,00015$ dla drzewa iglastego. Obecnie wzór powyższy utracił już swą wartość, utrzymał się jedynie szczątkowo w niektórych naszych fabrykach, dzięki zadawnionym nawyknieniom. Zresztą, *Bach* zaleca nawet jego stosowanie w szczególnym wypadku, kiedy napłask prostopadle do osi średniej pręta obcięte końce obustronnie dotykają cisnących powierzchni.

Dalszy postęp w tym samym kierunku stanowią:

§ 14. Wzory Tetmajera i Jasińskiego, wysnute czysto doświadczalnie z dużej ilości spostrzeżeń w ogólnej postaci $K_W = A + BL : i + CL^2 : i^2$ kg/cm². W tym wzorze L oznacza długość pręta sprowadzoną. *Tetmajer* podaje dla: 1° drzewa iglastego, sosnowego, jodłowego i świerkowego $K_W = 293 - 1,94 L^2 : i^2$ kg/cm², gdy $100 \geq L : i \geq 1,8$, 2° żelwa $K_W = 7760 - 120 L : i + 0,53 L^2 : i^2$ kg/cm², gdy $80 \geq L : i \geq 5$, 3° żelaza zgrzewnego $K_W = 3030 - 12,9 L : i$ kg/cm², gdy $112 \geq L : i \geq 10$, 4° żelaza zlewne $K_W = 3100 - 11,4 L : i$ kg/cm², gdy $105 \geq L : i \geq 10$, 5° stali zlewnej $K_W = 3350 - 6,4 L : i$ kg/cm², gdy $90 \geq L : i \geq 10$. Powyżej skrajnych lewych wartości $L : i$ należy stosować wzory *Euler'a*, poniżej skrajnych prawych — liczyć pręty, jako ściskane. Wzory powyższe wypełniają lukę pomiędzy tymi dwoma sposobami liczenia. Wadę ich stanowi brak teoretycznego umotywowania, to też w ostatnich czasach podnoszą się przeciwko nim nader ostre zarzuty, dotyczące niedokładności doświadczeń, z których

wysnuto owe wzory. Zwykły to zresztą los wszelkich wzorów doświadczalnych. Starzeją się. Nowe doświadczenia doskonalsze zadają kłam wartościom współczynników.

Tą samą drogą poszedł *Jasiński*; opierając się na doświadczeniach *Bauschinger'a*, *Considère'a* i *Tetmajer'a*, ustalił nieco inne wzory dla 1^o żelaza zgrzewnego $K_W = 3390,7 - 16,48 L : i$ kg/cm² z warunkiem stosowalności $114,7 \geq L : i \geq 73$, 2^o żelaza zlewne*go* i stali miękkiej $K_W = 3387 - 14,83 L : i$ kg/cm² z warunkiem $110,1 \geq L : i \geq 58$. Widzimy tu dość poważne rozbieżności, rzucające cień na wiarygodność powyższych wzorów, to też w ostatnich czasach wzory *Tetmajer'a* są coraz rzadziej używane, zwłaszcza ze względu na trudność użycia. Wzory *Jasińskiego* są pewniejsze, jako zbudowane na większej liczbie danych doświadczalnych.

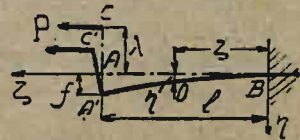
§ 15. Dopuszczalne naprężenia prętów ściskanych. Istotne naprężenia średnie prętów ściskanych muszą być niewątpliwie mniejsze od K_W , przy którym następuje wyboczenie. *Dopuszczalne naprężenie* $k_W = K_W : j_W$, gdzie j_W oznacza *stopień pewności na wyboczenie*. Dla żelaza zgrzewnego lub zlewne*go* oraz dla stali zlewnej w budowlach niewyszukanych, dla belkowań żelaznych, wiązarów i słupów, bierzemy zwykle $j_W = 4$, w budowlach większej wagi $j_W = 5$. Dla słupów żeliwnych, odlewanych pionowo $j_W = 8$. Dla słupów drewnianych $j_W = 10$. W wypadku obciążenia ciskącego powtarzanego, dla prętów silników i pomp bierzemy zazwyczaj $j_W = 8 + 11$, w wypadku obciążenia wahliwego $j_W = 16 + 25$. Pomnóżmy przez stały przekrój pręta tylko co wypisane równanie, a otrzymamy: $Q = Fk_W = FK_W : j_W = Q_0 : j_W$. Dopuszczalna siła, ciskąca istotnie na pręt osiowo, winna być j_W razy mniejsza od siły, dającej wyboczenie pręta. Zazwyczaj siła Q stanowi daną obciążenia, według niej należy liczyć pręt. Przedewszystkiem należy ustalić rodzaj obciążenia ciskącego, określić, który wypadek wyboczenia najlepiej odpowiada istotnym warunkom pracy pręta. W ten sposób z łatwością wyznaczymy sprowadzoną długość pręta L . Zaleca się tu ostrożność — nie należy przeceniać rodzaju pracy pręta, a zwłaszcza nie należy zbyt ufać sztywności osadzeń, to też zazwyczaj bierzemy jeno pod uwagę pierwsze dwa wypadki obciążenia. Trzeci i czwarty są nader trudne do urzeczywistnienia, a więc niepewne. Po ustaleniu L obieramy odpowiednią wartość j_W i stosujemy wzór *Euler'a* dla siły $Q_0 = j_W Q$, j_W — krotnie większej od danej. W ten sposób otrzymamy pewność j_W na wyboczenie, wzór *Euler'a* da najmniejszy moment bezwładności J stałego przekroju pręta poprzecznego, a według tego momentu i sam przekrój właściwy. Następnie stosujemy wzór $Q = Fk_c$, z którego wyznaczamy przekrój pręta poprzeczny. W ogólnym wypadku oba sposoby

liczenia dają różne wartości dla F , należy obrać większą i dla niej wyznaczyć $i = \sqrt{J : F}$ oraz $L : i$. Gdy się okaże, iż $L : i$ przekracza granicę stosowalności wzoru *Euler'a*, trzeba rozpocząć rachunek na nowo, korzystając ze wzorów *Jasińskiego*, lub *Tetmajer'a*. Poniżej podane przykłady najlepiej to uwypuklą.

W ostatnich czasach *Huber*, a zwłaszcza *Kármán* podali inne sposoby rachunku.

§ 16. Właściwa postać przekroju. We wszystkich wzorach powyższych J oznacza najmniejszą wartość momentu bezwładności przekroju, zatem jedynie przekrój obojętny pracuje na wyobczenie jednakowo we wszystkich kierunkach. Stąd prosty wniosek, że przekrój tego rodzaju stanowi najoszczędniejszą postać przekroju pręta. Z tego względu słupom drewnianym nadajemy zazwyczaj przekrój kwadratowy, żeliwnym pierścieniowy, jako najwygodniejszy w odlewie. Pręty żelazne lub stalowe budujemy o przekroju kołowym pełnym, albo też stosujemy przekroje złożone obojętne. Dawniej używano przeważnie przekroju, złożonego z czterech słupowników (I Rys. 29), okazało się to jednak niepraktyczne wobec niepodobierstwa zabezpieczenia pręta od rdzewienia wewnątrz. Obecnie używane są zazwyczaj przekroje: dwuceownikowe (I Rys. 21, 22, 23), czterokątownikowe (I Rys. 25) lub blachownice.

§ 17. Przykłady i ćwiczenia: 1° *Dwuceownik*, ustawiony środkiem pionowo zamocowano jednostronnie w B , drugostronnie sztywnie połączono ze wspornikiem AC i obciążono w C siłą poziomą $P = 2000$ kg. Długość pręta $l = 4$ m, wspornika $\lambda = 12$ cm. Jak zwykle początek stałych osi współrzędnych umieszczamy we środku przekroju zamocowanego, oś $B\zeta$ kierujemy po osi pierwotnej pręta, $B\eta$ w dół, $B\xi$ ku patrzącemu. Po odkształceniu skrajny przekrój A obniży się dając strzałkę $AA' = f$. Sprowadźmy do środka przekroju $O(\zeta, \eta)$ siłę P , w założeniu, że pochylenie wspornika jest nieznaczące i że siła P nie zmienia swego kierunku działania przy odkształceniu (Rys. 76). Po sprowadzeniu otrzymamy w O siłę osiową P i moment gnący $P(\lambda - f + \eta)$, a przeto dla pręta o przekroju stałym $EJ\eta'' = P(\lambda - f + \eta)$. Całka tego równania $\eta = f - \lambda + A\sin h n\zeta + B\cos h n\zeta$ zawiera dwie stałe całkowania, należy je wyznaczyć. Przy $\zeta = l$ mamy $\eta = f$, przy $\zeta = 0$ mamy $\eta = \eta' = 0$. Stąd $A\sin h nl + B\cos h nl = \lambda$, $f - \lambda + B = 0$, $nA = 0$, co daje $B = \lambda - f$, $A = \lambda / \cos h nl$, $f = \lambda(1 - \cos h nl)$ i ostatecznie $\eta = \lambda(\cos h n\zeta - 1) / \cos h nl$, $\eta' = n\lambda \sin h n\zeta / \cos h nl$. Wyznamy strzałkę końcową pręta i pochylenie skrajnej stycznej jego odkształconej. W tym celu określamy przedewszystkiem właściwe wymiary przekroju poprzecznego pręta, w założeniu żelaza zgrzewnego, jako tworzywa. W wypadku obciążenia trwałego mamy $k_g = 900$ kg/cm² dla tego tworzywa. Skrajna



Rys. 76.

wartość momentu = $P\lambda$, gdy $\eta = f$, a więc dla przekroju końcowego A . Wagę własną pręta i wspornika pomijamy, jako zgoła nieznaczną. W przekroju A panuje zatem naprężenie skrajne $\sigma_g = P\lambda : W_x + P : F = 900 \text{ kg/cm}^2 = 2000 \times 12 : W_x + 2000 : F$. Po kilku próbach przekonamy się, że przekrój dwuteownika № 10 czyni zadość temu równaniu, mamy bowiem $W_x = 34,1 \text{ cm}^2$, $F = 10,6 \text{ cm}^2$. Istotnie wtedy $\sigma_g = 2000 \times 12 : 34,1 + 2000 : 10,6 = 892 \text{ kg/cm}^2$. Metr bieżący tego profilu waży 8,33 kg, możemy zatem śmiało pominąć wagę własną ustroju. Po ustaleniu przekroju pręta wyznaczamy $n^2 = P : EJ_x$. Dla dwuteownika № 10 mamy z tablic $J_x = 170 \text{ cm}^4$, dla żelaza zgrzewnego $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$, skąd $n = 1 : 412,31$ oraz $nl = 400 : 412,31 = 0,970$. Z kolei mamy $\text{Cos } hnl = 1,5085$, $\text{Sin } hnl = 1,1294$, a przeto ostatecznie $f = 12 (1 - 1 : 1,5085) = 4,04 \text{ cm}$, $\theta = 12 \times 1,1294 : (412,31 \times 1,5085) = 0,02179 \approx 1^\circ,25$. Istotnie więc wygięcie jest bardzo małe.

2° *Stójka* obustronnie podparta, ulega jarzmu sił osiowych ciśnących, jak w wypadku pierwszym wybočenja. Jej stały przekrój kołowy ma średnicę d cm stałą dla całej długości L cm pręta. Zatem $i = d : 4$. Graniczną długość dla żelaza zlewne go otrzymamy, pisząc $L_0 = 110,1 i \approx 27,5 d$ cm. Dłuższe pręty zachowują się przy wyboczeniu według wzoru *Euler'a*, krótsze według wzoru *Jasińskiego*. Dla pierwszych $Q_0 = K_W F = \pi^2 E J : L^2$, dla drugich $Q^2 = K_W F = [3387 - 14,83 L : i] F$ kg, gdzie $F = \pi d^2 : 4 \text{ cm}^2$.

Gdy dany jest przekrój F i długość pręta L , możemy wyznaczyć z tych wzorów siłę Q_0 , powodującą wybočenje. Najprościej możemy to uskutecznić za pomocą tablicy, dającej K_W kg/cm² dla różnych tworzyw i różnych stosunków $L : i$. Początkowe jej kolumny pod znakiem № zawierają szereg wartości $L : i$, kolumny następne dają odnośne wartości K_W kg/cm² dla żelaza zlewne go i stali zlewne j (Ż. S.), dla żelaza zgrzewne go (Ż. Z.), żeliwa (Ż. L.) i drzewa iglaste go (D. I.). Dla żeliwa i drzewa brano pod uwagę wzory *Tetmajer'a*, dla tworzyw pozostałych — *Jasińskiego*, jako pewniejsze.

№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.
5	3313	3308	7173	283	90	2052	1907	1218	118	175	695	645	322	32
10	3239	3246	6613	274	95	1978	1825	1094	109	180	657	609	304	30
15	3165	3144	6079	264	100	1904	1743	937	99	185	622	577	288	29
20	3090	3061	5572	254	105	1830	1660	895	90	190	589	547	273	27
25	3016	2979	5091	244	110	1756	1578	816	82	195	560	519	260	26
30	2942	2895	4637	235	115	1609	1493	746	75	200	532	493	247	25
35	2868	2814	4209	225	120	1478	1371	686	69	205	507	469	235	23,5
40	2794	2732	3808	216	125	1362	1263	632	63	210	483	447	224	22,5
45	2720	2649	3433	206	130	1259	1168	584	58	215	460	426	214	21
50	2645	2567	3085	196	135	1168	1083	542	54	220	440	407	201	20
55	2571	2484	2763	186	140	1036	1007	504	50	225	420	389	195	19,5
60	2497	2402	2468	177	145	1012	939	470	47	230	402	372	187	19
65	2423	2319	2199	167	150	946	877	439	44	235	385	356	179	18
70	2349	2237	1957	157	155	886	822	411	41	240	369	341	171	17
75	2275	2155	1741	147	160	831	771	386	38	245	355	329	165	16,5
80	2201	2072	1552	138	165	782	725	363	36	250	340	307	158	16
85	2126	1990	1366	128	170	736	683	342	34					
№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.	№	Ż. S.	Ż. Z.	Ż. L.	D. I.

Założmy, dajmy na to, $d = 8$ cm oraz $L = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450$ i 500 cm. Zatem $F = 50$ cm², $i = d : 4$, $L : i = \frac{1}{2} L$, odnośne przeto wartości $K_H = 3016, 2645, 2275, 1904, 1362, 946, 695, 532, 420$ i 340 otrzymamy z tablicy. Stąd bezpośrednio $Q_0 = 150800, 132250, 113750, 95200, 68100, 47300, 34750, 26600, 21000, 17000$ kg. Zestawmy wyniki otrzymane w postaci wykresu. Na osi odciętych odłożmy wartości $N = L : i$, a prostopadle do nich odnośne wartości Q_0 . Początkowo linja wykresu będzie biegła po prostej aż do granicznej wartości $L_0 : i$. Wymaga tego wzor *Jasińskiego*, linjowy względem $L : i$. Dalej otrzymamy krzywą drugiego stopnia, odpowiadającą dziedzinie stosowalności wzoru *Euler'a*. W ten sposób za pomocą wzorów lub powyższej tablicy możemy zawsze wyznaczyć siłę Q_0 , grożącą wybočeniem. Będziemy mogli przeto wyznaczyć obciążenie dopuszczalne pręta $Q = Q_0 : j_W$, założywszy odnośną wartość j_W .

Inaczej rzecz się ma, gdy dano l cm, pierwotną długość pręta, oraz Q kg jego obciążenie istotne. Szukamy średnicy stójki. W tym celu należy przedewszystkiem uwzględnić wzór zwykłego ściskania. Założmy $Q = 20000$ kg $= 20 t$, oraz kolejno $L = 50, 100, 150, 200$ i 250 cm. Dla żelaza zlewego $E = 2150000$ kg/cm² $k_c = 900 \div 1200$ kg/cm² $\infty 1000$ kg/cm², zatem niezależnie zupełnie od długości będziemy mieli $F_0 = Q : k_c = 20$ cm². Stąd $d_0 \infty 5$ cm. Z kolei należy uwzględnić wzór *Euler'a* dla powyżej wymienionych długości pręta. W założeniu czterokrotnej pewności mamy $Q_0 = j_W Q = 80000 = \pi^2 E J : L^2$. Stąd otrzymamy odpowiednio $J = 9, 37, 83, 148, 231$, oraz $d = 3,7 - 5,3 - 6,4 - 7,4 - 8,3$. Pierwsza wartość dla pręta półmetrowego, jako mniejsza od $d_0 = 5$ cm powinna być odrzucona. Ostatecznie więc po uwzględnieniu wzorów ściskania i wybočenja *Euler'owskich* otrzymamy średnice $d = 5,0 - 5,3 - 6,4 - 7,4 - 8,3$ cm przy $L = 50 - 100 - 150 - 200 - 250$ cm. Odnośne wartości $L : i = 4 L : d = 40 - 75 - 94 - 108 - 120$. Stąd wnioskujemy, że cztery pierwsze wypadki wymagają raczej rachunku według wzoru *Jasińskiego* — ostatni jest policzony bez zarzutu. Zaczniemy od pierwszego, gdzie $L = 50$ cm. Weźmy na chybi trafi $L : i = 30$. Dla tej wartości $F = 80000 : K_W = 80000 : 2942 = 27,2$ cm², stąd $d = 5,9$ cm, $i = 5,9 : 4 = 1,445$ cm i ostatecznie $L : i = 50 : 1,475 = 34 \neq 30$. Wobec tej sprzeczności założmy $L : i = 40$, a otrzymamy kolejno $F = 80000 : 2794 = 28,6$ cm², $d = 6,05$, $i = 1,51$ cm, $L : i = 50 : 1,51 = 33 \neq 40$. Należy przeto wziąć $L : i \infty 35$, a wtedy $F = 80000 : 2868 = 27,9$ cm², $d = 6,0$ cm, $i = 1,5$ cm, $L : i = 50 : 1,5 = 33,3$. Ta wartość zbliża się do założonej w sposób zupełnie wystarczający. Tak samo, po kilku próbach otrzymamy dla następnej długości $L = 100$ cm, $L : i = 60$, $F = 80000 : 2497 = 32,0$ cm², $d = 6,4$ cm, $i = 1,6$ cm, $L : i = 100 : 1,6 = 62$ z przybliżeniem wystarczającym. Z kolei mamy dla $L = 150$ cm po kilku próbach $L : i = 85$, $F = 80000 : 2126 = 37,6$ cm², $d = 6,9$ cm $\infty 7$ cm, $i = 1,75$ cm, $L : i = 150 : 1,75 = 85,6$. Wreszcie dla $L = 200$ cm, $L : i = 105$, $F = 80000 : 1830 = 43,7$ cm², $d = 7,5$ cm, $i = 1,89$ cm, $L : i = 200 : 1,89 = 106$. Ostatecznie mamy więc $d = 6,0 - 6,4 - 7,0 - 7,5 - 8,3$ cm gdy $L = 50 - 100 - 150 - 200 - 250$ cm. Nadto $d = 5$ cm

stósuje się do wypadku zwykłego ściskania, przy nieznacznym L . Trudno wskazać istotną wartość tej krytycznej długości. Według *Tetmajera* będzie to przy $L : i \leq 10$. Tutaj $i = 1,25$ cm, zatem krytyczna długość $L = 12,5$ cm.

3° *Stup* o stałym pierścieniowym przekroju żeliwny, zamocowano u dołu i obciążono u góry siłą osiową $Q = 10000$ kg, cisnącą. Swobodna długość dręta $l = 4$ m. Jako dla drugiego wypadku wybożenia $L = 2l = 800$ cm. Dla żeliwa $E = 10^6$ kg/cm², $j_W = 8$, a przeto $Q_0 = j_W Q = 80000 = \pi^2 \times 1000000 \times J : 640000$. Stąd $J = 5120$ cm⁴. Po kilku próbach obierzemy średnicę zewnętrzną przekroju $D = 20$ cm, wewnętrzzną $d = 15$ cm. Moment bezwładności będzie tu $J = 7854 - 2485 = 5369$ cm⁴, pole $F = 314,2 - 176,7 = 137,5$ cm², a przeto $i = 6,25$ cm, oraz $L : i = 800 : 6,25 = 128$. Mieliśmy prawo stosować wzór *Euler'a*; otrzymany przekrój istotnie odpowiada wymaganiom.

Założmy z kolei, że $Q = 50000$ kg, $l = 1$ m. Stąd $L = 200$ cm, $Q_0 = 400000$ kg $= \pi^2 \times 1000000 \times J : 40000$. Zatem $J = 1600$ cm⁴. Po kilku próbach otrzymamy $D = 15$ cm, $d = 11,5$ cm. Dla tego przekroju $J = 2485 - 859 = 1626$ cm⁴, $F = 176,7 - 103,9 = 72,8$ cm², $i = 4,72$, $L : i = 200 : 4,72 = 42,4$. Tutaj nie można używać wzoru *Euler'a*, ponieważ otrzymana wartość jest mniejsza od granicznej $L_0 : i = 80$. Założymy najbliższą wartość tabliczną $L : i = 40$. Dla niej $K_W = 3808$, oraz $Q_0 : K_W = 400000 : 3808 = 105,0$ cm². Po kilku próbach otrzymamy $D = 16$ cm, $d = 11$ cm. Dla tego przekroju $J = 3217 - 718,7 = 2498,3$ cm⁴, $F = 201,1 - 95,0 = 106,1$ cm², $i = 4,85$ cm, $L : i = 200 : 4,85 = 41$. Wyznaczony przekrój odpowiada warunkom istotnym.

4° *Dyl* kwadratowy sosnowy zamocowano u dołu. Górny podparty przekrój dyla ulega jarzmu siły osiowej $Q = 1500$ kg cisnącej. Swobodna długość pręta $l = 3$ m. Tutaj niewątpliwie zachodzi trzeci wypadek wybożenia, zatem $L = 0,7 l = 210$ cm. Dla sośniny $E \approx 10^5$ kg/cm², $j_W = 10$, a przeto: $15000 = \pi^2 \times 100000 \times J : 210^2$. Stąd $J = 661,5$ cm⁴ $= \frac{1}{12} c^4$, gdzie przez c oznaczyliśmy bok kwadratowego przekroju $c = 9,4$ cm. Najbliższy wymiar dyla kwadratowego 10×10 cm. Dla niego $i^2 = \frac{1}{12} c^4 : c^2$, czyli $i = 2,89$ cm. Ponieważ jednak $L : i = 210 : 2,89 \approx 73$ leży poniżej granicznej wartości, przeto należy wziąć pod uwagę wzór *Tetmajer'a*. Założymy $L : i = 70$, a otrzymamy $K_W = 157$ kg/cm², skąd $F = 15000 : 157 = 95,5$ cm² $= c^2$. Stąd $c = 9,8$ cm ≈ 10 cm. Z kolei założymy $L : i = 75$, a otrzymamy $K_W = 147$, $F = 15000 : 147 = 102,0$ cm² $= c^2$. I znowu $c = 10,1$ cm ≈ 10 cm, dla którego, jak wyżej, $L : i = 73$. Zatem należy wziąć bal 10×10 cm.

5° *Dwuteownik* żelazny zgrzewny obustronnie przynitowano w sposób urzeczywistniający praktycznie osadzenie obu końców pręta i obciążono siłami osiowymi cisnącymi $Q = 40000$ kg. Jako dla czwartego wypadku wybożenia $L = 0,5 l$. Założymy $l = 40, 400, 760$ cm, $j_W = 4$. W pierwszym wypadku $L = 20$ cm. Jest to niezwykle mała nośna dłu-

gość pręta. Nasuwa to myśl, że pręt pracuje tylko na ściskanie. Istotnie tak jest. Dla żelaza zgrzewnego, w wypadku trwałego obciążenia $k_c = 900 \text{ kg/cm}^2$, zatem $F = 40000 : 900 = 44,4 \text{ cm}^2$. Dwuteownik zwykły № 24 ma $F = 46,1 \text{ cm}^2$, $J_{min} = 220 \text{ cm}^4$, a zatem $i = \sqrt{220 : 46,1} = 2,18 \text{ cm}$. Wzory *Tetmajer'a* dają niższą granicę $L : i = 10$ dla żelaza zgrzewnego. Poniżej pręty można liczyć na zwykłe ściskanie. W danym wypadku $L : i = 20 : 2,18 = 9,1$. Pręt jest policzony dobrze.

Z kolei bierzemy $l = 400 \text{ cm}$ czyli $L = 200 \text{ cm}$. Ze wzoru *Euler'a* mamy $Q_0 = j_W Q = 160000 = \pi^2 \times E \times J : L^2$. Tutaj $E = 2000000 \text{ kg/cm}^2$, a przeto $J = 320 \text{ cm}^4$. Ta wartość odpowiada dwuteownikowi № 27, dla którego $J_{min} = 325 \text{ cm}^4$, $F = 57,1 \text{ cm}^2$. A przeto $i = 2,39 \text{ cm}$, $L : i = 200 : 2,39 = 83,7$, należy więc użyć wzoru *Jasińskiego*. Po kilku próbach otrzymamy dla $L : i = 75$ z tablicy wyżej zamieszczonej $K_W = 2155 \text{ kg/cm}^2$. Zatem $F = 160000 : 2155 = 74,2 \text{ cm}^2$. Ta wartość odpowiada dwuteownikowi № 32, dla którego $J_{min} = 554 \text{ cm}^4$, $F = 77,7 \text{ cm}^2$, $i = 2,67 \text{ cm}$. Stąd $L : i = 200 : 2,67 = 75$.

Pozostaje nam jeszcze rozpatrzyć trzecie założenie $l = 760 \text{ cm}$ czyli $L = 380 \text{ cm}$. Ze wzoru *Euler'a* mamy: $160000 = \pi^2 \times 2000000 \times J : 380^2$, skąd $J = 1155 \text{ cm}^4$. Tej wartości odpowiada dwuteownik № 40, dla którego $J_{min} = 1160 \text{ cm}^4$, $F = 118 \text{ cm}^2$, $i = 3,13 \text{ cm}$. W danym wypadku $L : i = 380 : 3,13 = 121 > 114,7$, zatem pręt policzony dobrze, aczkolwiek we wszystkich trzech tylko co rozpatrywanych wypadkach otrzymujemy bardzo znaczne wymiary przekroju. Pochodzi to stąd, że dwuteownik nie należy do przekrojów obojętnych — nie nadaje się przeto w wypadku pracy na wyboczenie.

5° *Stup* o przekroju dwuceownikowym, żelazny zlewny oparto obustronnie i obciążono siłą $Q = 20 \text{ t}$ osiową cisnącą u góry. Wyznaczyć przekrój (I, Rys. 20) w założeniu długości $l = 5 \text{ m}$. Stosunkowo niewielkie różnice, jakie każdorazowo otrzymywaliśmy powyżej przy stosowaniu wzorów *Euler'a* i *Jasińskiego* naprowadziły na myśl praktyczną, aby ujednostajnić obliczenie prętów na wyboczenie, zwłaszcza, że liczenie podług wzorów *Tetmajer'a* i *Jasińskiego*, nawet przy pomocy tablicy — do przyjemności nie należy. W tym celu odrzucamy zupełnie oba wzory doświadczalne, pozostawiając jedynie wzory na wyboczenie i ściskanie. We wzorze *Euler'a* wzmacniamy j_W do 5 dla żelaza zlewego. W ten sposób będziemy mieli $Q = \pi^2 \times 2150000 \times J : [5 \text{ m}]^2$. Stąd $J = 2,357 Q l^2 \text{ cm}^4$, o ile wyrazimy Q siłę nośną w tonnach, a długość l — w metrach. Nadto $Q = F k_c$. Zazwyczaj $k_c = 1200 \text{ kg/cm}^2$, a przeto $F = Q : 1,2 \text{ cm}^2$, gdzie znowu Q mamy w tonnach. Tutaj więc $J = 2,357 \times 20 \times 25 = 1178 \text{ cm}^4$, $F = 20 : 1,2 = 16,7 \text{ cm}^2$. W założeniu przekroju dwuceownikowego obojętnego, $J = 2 J_{xc}$, zatem dla ceownika składowego otrzymamy $J_{xc} = 589 \text{ cm}^4$. Tej wartości odpowiada ceownik № 14. Dla niego $J_{xc} = 605 \text{ cm}^4$, $F = 20,4 \text{ cm}^2$, a przeto drugi wzór możemy śmiało pominąć. Należy jeszcze tylko określić rozstawienie x ceowników, z warunku równości obu głównych momentów złożonego przekroju. Tablice dają $x_c = 1,75 \text{ cm}$, $J_y = 62,7 \text{ cm}^4$, a przeto $2 J_{xc} = 2 J_{yc} + 2 F (x_c +$

$+ \frac{1}{2} x)^2$. skąd $x = 6,81 \text{ cm} \approx 6,8 \text{ cm}$. W razie zachowania tego rozstawienia oba główne momenty złożonego przekroju $J_x = J_y = 1210 \text{ cm}^4$.

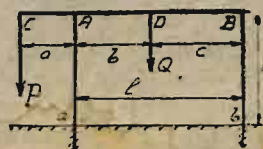
Załóżmy teraz $Q = 49 \text{ ton}$, $l = 3 \text{ m}$. W tym wypadku $J = 2,357 \times 49 \times 9 = 1039 \text{ cm}^4$, $F = 49 : 1,2 = 40,8 \text{ cm}^2$. Wystarczy więc ten sam № 14 — liczony jednak na zwykłe ściskanie. Załóżmy jeszcze $Q = 90 \text{ t}$, $l = 3 \text{ m}$, a otrzymamy $J = 1909 \text{ cm}^4$, $F = 75 \text{ cm}^2$. Podług J wystarczy z nadmiarem przekrój dwuceownikowy № 18, natomiast według F wystarczający przekrój otrzymamy aż przy № 22. Użyjemy więc № 22, jako sowitszy.

W ten sposób wyznaczamy przekroje prętów złożonych. Składowe pręty należy dobrze ze sobą powiązać, aby otrzymać spójną całość wewnętrzną. Inaczej pręt złożony rozpadnie się na poszczególne pręty składowe, a cały rachunek powyższy zawiedzie. W danym wypadku dosyć jest zczepić ceowniki blachami bocznymi ustawionymi jak na (Rys. 23) w pewnych odstępach. Wyznamy owe odstępki λ , rozpatrując każdy ceownik składowy, jako pręt obustronnie podparty, a narażony na wybozczenie siłą μQ . W danym wypadku przekrój składa się z dwóch ceowników, ustawionych symetrycznie względem środka, możemy zatem założyć $\mu = \frac{1}{2}$, bo siła osiowa Q powinna chyba rozłożyć się na oba pręty składowe jednakowo. W istocie jednak tak nie jest. Drobnie krzywizny, niedokładności budowy i montażu dają mimośrodkowość obciążenia. Jeden ceownik pracuje znacznie więcej. Który — nie wiemy, mimo to jednak chcemy to wziąć w rachubę — docenić, dając dużą wartość dla j'_{W} , przy obliczeniu zazwyczaj czterokrotnie większą od tej pewności, z jaką liczyliśmy przekrój złożony. Zatem $\mu Q j'_{W} = \pi^2 E J' : \lambda^2$, skąd $\lambda^2 = \pi^2 E J' : \mu Q j'_{W}$. W tym wzorze J' oznacza najmniejszy moment bezwładności pręta składowego. Wyżej liczyliśmy z $j_{W} = 5$, zatem tu $j'_{W} = 5 \times 4 = 20$ i ostatecznie $\lambda = \sqrt{1030 J' : \mu Q} \approx \sqrt{1000 J' : \mu Q}$, o ile w tym ostatnim wzorze wyrazimy Q w tonnach. Powyżej mieliśmy $Q = 20 \text{ t}$, $\mu = \frac{1}{2}$, $J' = J_{yc} = 62,7 \text{ cm}^4$, a przeto $\lambda = \sqrt{6270} \approx 80 \text{ cm}$.

7^o Słup o przekroju czworokątownikowym kwadratowym (I. Rys. 25) dźwiga obciążenie osiowe cisnące $Q = 45000 \text{ kg} = 45 \text{ t}$. Bok kwadratu $H = 20 \text{ cm}$, wysokość słupa obustronnie wspartego $l = 4 \text{ m}$. Mamy tu przeto pierwszy wypadek wybozczenia. Według powyższych wzorów $J = 2,357 \times 45 \times 16 = 1697 \text{ cm}^4$, $F = 45 : 1,2 = 37,5 \text{ cm}^2$. Po kilku próbach przekonamy się, że drugiemu równaniu czynią zadość cztery kątowniki $L 70 \times 70 \times 7 \text{ m/m}$, dla których $F = 4 \times 9,4 = 37,6 \text{ cm}^2$. Dla nich $J_{xc} = 42,3 \text{ cm}^4$, $x_c = 1,97 \text{ cm}$, a przeto $J = 4 J_{xc} + 4 F_c (\frac{1}{2} H - x_c)^2 = 4 [42,3 + 9,4 (10 - 1,97)^2] = 2594 \text{ cm}^4$. Tutaj więc słup należy liczyć jeno na ściskanie. I w danym wypadku cztery kątowniki naróżne muszą być powiązane w pewnych odstępach poprzecznymi wzmocnieniami, owijającemi słup w postaci równoległych kwadratowych obrączek. Wyznamy rozstawienie wzmocnień. W danym wypadku $J' = J_{min} = 17,6 \text{ cm}^4$, $\mu = \frac{1}{4}$, a przeto $\lambda \leq \sqrt{1000 \times 17,6 : \frac{1}{4} 45} \approx 40 \text{ cm}$.

Ten sam przekrój otrzymalibyśmy, lecz już ze wzoru *Euler'a*, gdybyśmy mieli $Q = 11 \text{ t}$ i $l = 10 \text{ m}$.

8^o *Dwuteownik* szerokopasowy leży na dwóch słupach zamocowanych u podnóży i dźwiga dwie siły, rozłożone w sposób wskazany na (Rys. 77). Wyznamy obciążenia słupów *Aa* i *Bb*. Będą to zarazem odpory dwuteownika górnego, wzięte z znakiem odwrotnym. Równanie statyki dla punktu *B* dadzą $A + B + P + Q + O, P(l+a) + Al + Qc = 0$. Stąd mamy: $A = -[P(a+l) + Qc] : l, B = +[Pa + Q(c-l)] : l$. Zatem słup lewy dźwiga $[P(a+l) + Qc] : l$ kg, prawy $[Q(l-c) - Pa] : l$ kg. Aby w obu słupach panowało naprężenie cisnące, musimy mieć $P > 0, Q > 0$, oraz $Q(l-c) - Pa > 0$, jak zwykle bowiem siły, skierowane w dół, znakujemy dodatnio. Oznaczmy wysokość obu słupów nieodkształconych przez *h*. Pod jarzmem sił cisnących *A, B* na słupy, długości ich skrócą się odpowiednio o $Ah : E_1 F_1, Bh : E_2 F_2$, na tle zwykłego ściskania. Nadto oba słupy pracują na wyboczenie. Założmy, że cały urząd wykonano z żelaza zlewne. Lewy słup należy przeto liczyć podług wzoru $J_1 = 2,357 A \times L^2$, lub też według $F_1 = A : 1,2$, prawy podług $J_2 = 2,357 B \times L^2$, lub $F_2 = B : 1,2$, gdzie niewątpliwie $L = 2h$, jako dla słupów swobodnych, jednostronnie zamocowanych. Zatem, gdy słupy będą liczone na ściskanie, z pominięciem wzorów wyboczenia, będziemy mieli $A : F_1 = B : F_2 = 1,2$. W tym szczególnym wypadku skrócenia obu słupów będą niewątpliwie jednakowe, ponieważ $E_1 = E_2$ przy jednakowym tworzywie urzadju.



Rys. 77.

Natomiast skrócenia owe w ogólnym wypadku będą niejednakowe, gdy jeden ze słupów lub oba wypadnie liczyć na wyboczenie z pominięciem wzorów zwykłego ściskania. Wynika to bezpośrednio ze wzorów powyżej wypisanych.

9^o *Pręt* sumiennie wyprostowany osadzono sprężystie u dołu (Rys. 72), u góry sprężystie podparto i obciążono siłą osiową *Q*, cisnącą równoległe do średniej osi pręta. We środku przekroju osadczego dolnego umieścimy początek osi współrzędnych *B*. Oś *Bξ* ułożymy ku górze na osi średniej pręta, oś *Bη* poprowadzimy na lewo, oś *Bξ* — ku patrzącemu. Odpór poziomy górnej sprężystej podpory oznaczamy przez *A*, dolnej przez $B = -A$. Nadto odpór pionowy dolnej podpory niech będzie $H = -Q$, moment osadczy M_0 . Wszystkie te odpory wywołują przesunięcia sprężyste podpór. Wobec powiązania układu osi z prętem, będziemy rozpatrywali jeno przesunięcia względne, sam bowiem układ przesuwa się wraz z prętem. Jak zwykle oś *Bη* ułożyliśmy w głównej płaszczyźnie pręta jednorodnie zbudowanego, przynależnej do najmniejszej wartości momentu bezwładności stałego przekroju. Po odkształceniu środek górnego przekroju da na tej płaszczyźnie rzut $A(l, g)$ a punkt przyłożenia siły *Q* da $N(l, e + g)$. Wobec sprężystości podpory górnej rzut *g* jest zmienny, zależy bowiem od natężenia odporu *A*. Założmy, że $g = g_0$, gdy $A = 0$, a wtedy niewątpliwie $g = g_0 - aA$, gdzie *a* oznacza odnośny współczynnik proporcjonalności dla podpory wzorowo sprężystej. W podobny sposób dojdziemy do wniosku, że kąt θ pochylenia odkształconej pręta ku osi *Bξ* w przekroju osadczym zależy od momentu M_B , panującego w tem miejscu. Gdy $M_B = 0$, mamy $\theta = \theta_0$,

zatem oznaczając odnośny współczynnik proporcjonalności przez m , będziemy mieli dla podpory wzorowo sprężystej $\theta = \theta_0 - m M_B$, gdzie $M_B = Q(e+g) + Al$. W danym wypadku równanie gięcia będzie $EJ\eta'' = Q(e+g-\eta) + A(l-\zeta)$. Jego całka $\eta = e + g + A(l-\zeta) : Q + C \sin n\zeta + D \cos n\zeta$ zawiera trzy niewiadome A, C, D , które wyznaczymy z warunków skrajnych zamocowania pręta. Gdy $\zeta = l$, mamy $\eta = g$, nadto $\eta = 0, \eta' = \theta$, gdy $\zeta = 0$. Stąd będziemy mieli: $g = e + g + C \sin nl + D \cos nl, e + g + Al : Q + D = 0, -A : Q + nC = \theta = \theta_0 - m [Q(e+g) + Al]$. Z ostatniego równania $C = [\theta_0 - mQ(e+g_0) + A(1 : Q - ml + maQ)] : n$, z drugiego $D = -e - g_0 + A(a - l : Q)$. Po podstawieniu tych wartości w pierwsze otrzymamy równanie, z którego wyznaczymy niewiadomą A w postaci ilorazu $R : T$. Mianownik tego ilorazu będzie $T = [(1 - mlQ + maQ^2) \sin nl + (aQ - l) n \cos nl] : nQ$. Łatwo spostrzec, że wyboczenie pręta zachodzić może jeno wówczas, gdy $T = 0$, wtedy bowiem $A = \infty$, a co idzie za tem i $\eta = \infty$. Ten warunek daje nam $n \operatorname{ctg} nl = 1 : (l - aQ) - nQ$, wzór, odpowiadający *Euler'owskiemu*, a wyprowadzony dla trzeciego wypadku wyboczenia w założeniu podpór pręta wzorowo sprężystych. Możemy zresztą z tego wzoru otrzymać wprost wzory *Euler'a*. Będzie to rodzaj sprawdzenia rachunku powyższego. Założmy $a = 0$ i $m = \infty$ — podparcie górne będzie zupełnie niesprężyste — u dołu będziemy mieli $M_B = 0$ — przegub pokrętny — swobodny. Słowem otrzymamy pierwszy wypadek wyboczenia. Czyniąc w powyższym wzorze $a = 0$ i $m = \infty$, otrzymamy $\operatorname{ctg} nl = -\infty$, skąd $\sin nl = 0, nl = \pi$, odnajdujemy przeto pierwszy wzór *Euler'a*, wobec tego, że $n = Q : EJ$. W drugim wypadku wyboczenia górny koniec pręta jest swobodny, dolny trwale zamocowany, zatem $A = 0$, czyli $a = \infty$ oraz $m = 0$. Po podstawieniu tych wartości we wzór powyższy otrzymamy $\operatorname{ctg} nl = 0$, skąd $\cos nl = 0, nl = \frac{1}{2} \pi$ i ostatecznie $Q = \pi^2 EJ : 4 l^2$, otrzymamy drugi wzór *Euler'a*. Wzór dla trzeciego wypadku również odnajdziemy z łatwością z powyższego równania, biorąc $a = m = 0$, wtedy bowiem $n \operatorname{ctg} nl = 1$, skąd $n^2 l^2 \approx 2 \pi^2$, jak to już zresztą wiemy oddawna.

10° *Słup wspornikowy* (Rys. 74) dźwiga ciężar dachu, jest więc u góry obciążony siłą osiową $Q = 8000$ kg, cisnącą. Nadto przez pośrednictwo wspornika w odległości $g = 50$ cm działa siła równoległa do poprzedniej — ciężar stropu $P = 16000$ kg. Cała wysokość słupa od przekroju osadczego wynosi $L = 9$ m, wspornik zamocowano na wysokości $l = 6$ m, mamy więc ponad wspornikiem u góry jeszcze trzy metry słupa, słowem $\lambda = L - l = 3$ m. W założeniu pewności $j_W = 5$ będziemy mieli obciążenie niebezpieczne $Q_0 = j_W Q = 40000$ kg, $R_0 = j_W(Q + P) = 120000$ kg, a nadto $r = P_0 : Q_0 = j_W P : j_W Q = 2, n^2 = Q_0 : EJ_1, m^2 = (P_0 + Q_0) : EJ_2 = R_0 : EJ_2$. Wzór wyboczenia złożonego będzie tu $\operatorname{tg} n \lambda \operatorname{tg} m \lambda = n(1 + r) : m = 3n : m$.

W założeniu stałego przekroju słupa będziemy mieli $n^2 = Q_0 : EJ, m^2 = R_0 : EJ = Q_0(1 + r) : EJ = 3n^2$. Na zasadzie powyżej wypisanych wartości mamy $l = 2 \lambda$, a przeto $m \lambda = 2 \sqrt{3} n \lambda = 2 \sqrt{3} x$. Stąd bezpośrednio $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} (2 \sqrt{3} x) = 3 : \sqrt{3} = \sqrt{3} = 1,7321$. Po kilku pró-

bach otrzymamy wystarczająco ścisły pierwiastek tego równania $x = 22^{\circ}9' = 22^{\circ}$, $15 = 22^{\circ}$, $15 \pi : 180^{\circ} = 0,386 = n\lambda = 300\sqrt{40000} : 2150000 J$. Zatem $J = 11240 \text{ cm}^4$. W założeniu obojętnego przekroju (I, Rys. 20), złożonego z dwóch ceowników, otrzymamy ceownik № 28, jako dostateczny, jego bowiem $J_x = 6276$, a przeto dla całego przekroju $J = 2J_x = 12552 \text{ cm}^4$. Nadto jeszcze górną część pręta ponad wspornikiem należy sprawdzić na ściskanie, dolną na gięcie mimośrodkowe. Zatem dla części górnej musi być $Q : F \leq k_c$, dla dolnej $(P + Q) : F + P \times g : W \leq k_g$. Dla obranego przekroju tablice dają $F = 2 \times 53,3 = 106,6 \text{ cm}^2$, $W = 2 \times 450 = 900 \text{ cm}^3$, stąd $Q : F = 8000 : 106,6 = 75 \text{ kg/cm}$ oraz $(P + Q) : F + P_g : W = 24000 : 106,6 + 16000 \times 50 : 900 = 1113 \text{ kg/cm}^2$. Ta ostatnia wartość jest nieco zbyt wysoka, lepiej przeto wziąć przekrój dwuceownikowy, złożony z ceowników № 30. W ten sposób górna część pręta jest wytrzymałościowo nie wykazana, lepiej przeto zbudować słup wspornikowy o dwóch przekrojach, stałych dla obu połaci zmienności momentów.

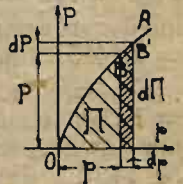
We wszystkich prostych wypadkach wyoboczenia iloczyn $n\lambda$ stanowi miarę pracy na wyoboczenie. W pierwszym $n\lambda = \pi$, w drugim $n\lambda = \frac{1}{2} \pi$, w trzecim $n\lambda = 1,4303 \pi$, w czwartym $n\lambda = 2 \pi$. Zatem *dwie pręty pracują na wyoboczenie jednakowo*, gdy odnośne wartości $n\lambda$ tych prętów są sobie równe. I w danym wypadku przeto słup wspornikowy będzie w swych obu częściach pracował na wyoboczenie jednakowo, gdy założymy $n\lambda = m\lambda$. Stąd $n : m = l : \lambda = 2$, a przeto oznaczywszy $n\lambda = m\lambda = x$, będziemy mieli z równania zasadniczego $tg^2 x = 2(1 + 2) = 6$, czyli $tg x = \sqrt{6} = 2,4495$. Stąd $x = 67^{\circ}50' \approx 67,8$, $\pi : 180 = 213 : 180 = 1,183 = n\lambda = m\lambda$. Inaczej jeszcze $300\sqrt{40000} : 2150000 J_1 = 600\sqrt{120000} : 2150000 J_2 = 1,183$, co da $J_1 = 1197 \text{ cm}^4$, $J_2 = 14360 \text{ cm}^4$. W założeniu przekrojów dwuceownikowych otrzymamy z tablic dla górnej połaci ceowniki № 14, dla dolnej № 30. Istotnie dla № 14 mamy $J_x = 605 \text{ cm}^4$ zatem dla całego przekroju złożonego otrzymamy $J = 2J_x = 1210 \text{ cm}^4$. Dla № 30 mamy $J_x = 8026 \text{ cm}^4$, a przeto $J = 2J_x = 16052 \text{ cm}^4$. Oba przekroje policzono z zapasem. Nadto jeszcze górną część pręta należy sprawdzić na ściskanie, dolną na gięcie mimośrodkowe. Dla górnej $Q : F_1 = 8000 : [2 \times 20,4] = 196 \text{ kg/cm}^2$, dla dolnej $(Q + P) : F_2 + P \times g : W_2 = 24000 : (2 \times 58,8) + 16000 \times 50 : (2 \times 535) = 951 \text{ kg/cm}^2$. Zazwyczaj dla żelaza zlewne naprężenie dopuszczalne $k_g = 1000 \text{ kg/cm}^2$, zatem oba powyższe wyniki są dostateczne. Godzi się zaznaczyć, że cały rachunek powyższy dotyczy również wypadku, gdy $g = 0$ — wypadku podwójnego wyoboczenia pręta jednostronnie osadzonego, zresztą swobodnego.

KSIĘGA TRZECIA.

CZĘŚĆ SZÓSTA.

PRACA SPRĘŻYSTA.

§ 1. **Praca siły zewnętrznej.** Weźmy pod uwagę ciało sprężyste odpowiednio podparte i przyłożmy w jego punkcie M siłę P odkształcającą. Po ustaleniu równowagi odkształconej punkt M przejdzie w M' . Rzut odkształcenia MM' na kierunek siły P oznaczamy przez p i nazywamy przesunięciem punktu zaczepienia siły odkształcającej, krócej *przesunięciem* siły P . Zależność przesunięcia od siły odkształcającej, ujęta w kształt ogólny $p = f(P)$ może być wyznaczona w ogólnym wypadku ze wzorów wytrzymałościowych, lub czysto doświadczalnie. W obu wypadkach wyniki najlepiej uwypukli wykres (Rys. 1), gdzie krzywa OA wyznacza ową zależność. Każdej wartości rzędnej P odpowiada szczególna wartość odciętej p , cechująca odnośny stan równowagi odkształconej w sposób jednoznaczny. W szczególnym wypadku prostej OA — ciało ulega pierwszemu prawu Hooke'a — jest *wzorowo sprężyste*. Gdy siła P wzrośnie o dP , przesunięcie jej otrzyma przyrost dp , przy czym siła odkształcająca wykona pracę elementarną $d\Pi = P dp$, jak to najlepiej zresztą spostrzec można z wykresu, a przy stopniowym wzroście siły od zera do skrajnego natężenia P , siła odkształcająca wykona pracę Π , wyrażoną zakreskowanym polem wykresu, ponieważ przy obciążeniu stopniowym, po każdym przyroście dP ustala się nowy stan równowagi na tle nowych przyrostów dp , również rosnących od zera do skrajnej wartości p , przynależnej od siły P . Zatem obciążając ciało stopniowo nie schodzimy z OA , *krzywej równowagi odkształconej*. Jest to zarazem krzywa najmniejszych wartości siły odkształcającej, przynależnych do danych przesunięć, inaczej jeszcze — krzywa najmniejszej pracy odkształcającej dla danej skrajnej wartości przesunięcia. Łatwo udowodnimy słuszność wniosków powyższych, zważywszy że przesunięcia z natury rzeczy muszą wzrastać w sposób ciągły do swej wartości końcowej p przynależnej do P , w myśl zależności $p = f(P)$; natomiast stany pośrednie zależą wyraźnie od rodzaju zmienności obciążenia odkształcającego. Przy obciążeniu powolnym stopniowaniem, z wystarczającymi przystankami, otrzymamy krzywą OA zasadniczego wy-



Rys. 1.

kresu, przy obciążaniu szybszem krzywa OA uwypukla się, na tle zjawiska uporności odkształceń, dając większą wartość dla Π . Pole wykresu Π stanowi zatem konieczne minimum pracy. Ciało sprężyste pochłania ją i przechowuje w postaci energii utajonej, gdy bowiem znów stopniowo poczniemy zmniejszać natężenie siły, ciało sprężyste z wolna zacznie powracać do stanu pierwotnego nieodkształconego, przesunięcia zajdą w kierunku odwrotnym, zwracając pochłoniętą pracę Π . Przy szybszem odciażaniu praca ta będzie mniejsza na tle zjawisk uporności, zatem Π przynależne do krzywej OA , stanowi zasób pracy sprężystej odwracalnej. Dla ciał wzorowo sprężystych praca sprężysta wyrazi się jako pole trójkąta wzorem: $\Pi = \frac{1}{2} Pp$.

§ 2. Praca sił wewnętrznych. Wyodrębnijmy myślowo znikomo małą kostkę z wnętrza ciała odkształconego sprężystości, i założmy, że równowaga kostki trwa pod jarzmem osiowym naprężeń σ , przyłożonych do przeciwnych ścianek kostki odkształconej. Pierwotne wymiary tych ścianek były dF_0 , jej długość nieodkształcona dz_0 . W danym wypadku wydłużenie bezwzględne $\delta dz = \varepsilon dz_0$ stanowi przesunięcie jednej z sił zewnętrznych kostki σdF_0 , zazwyczaj bowiem naprężenie wyznaczamy w stosunku do pierwotnego nieodkształconego przekroju F_0 , a więc i jego poletka dF_0 . Druga siła σdF_0 gra rolę sprzeciwu koniecznego do wywołania odkształcenia, stanowi odpór, słowem ma przesunięcie równe zeru. Łatwo to dostrzec, zważywszy, że przyrost δdz stanowi względną zmianę odległości obciążonych ścianek kostki przeciwnych. Stąd w założeniu powolnego obciążenia stopniowego $d\Pi = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon dz_0 dF_0 = \frac{1}{2} \sigma^2 dz_0 dF_0 : E$, zawsze bowiem istnieje zależność $\varepsilon = \tau : E$ nawet po za granicą proporcjonalności. Gdy obciążenie kostki stanowią naprężenia tnące τ , wywołujące przesunięcie $\Delta = \gamma dz_0$, górnego poletka względem dolnego, górna siła τdF_0 , stanowiąca obciążenie kostki zewnętrzne da pracę $d\Pi = \frac{1}{2} \tau \gamma dz_0 dF_0 = \frac{1}{2} \tau^2 dz_0 dF_0 : G$ i tu bowiem zawsze możemy napisać, że $\gamma = \tau : G$. Tylko co wyprowadzone wzory dla elementarnej pracy kostki dają wyniki niesłychanie cenne przy wyznaczaniu pracy sprężystej płytek, zastępujących przekroje ciała odkształconego. W wypadku obciążenia osiowego wszystkie kostki płytki są jednostajnie obciążone siłami osiowymi σdF_0 . Ich łączna praca będzie więc równa $\frac{1}{2} \sigma^2 F_0 dz_0 : E = \frac{1}{2} S^2 dz_0 : F_0 E$, wiadomo bowiem, że siła osiowa, wypadkowa obciążenia zewnętrznego $S = \sigma F_0$. Dla wszystkich płytek na całej pierwotnej długości l_0 pręta rozpatrywanego należy wziąć całkę, stąd $\Pi = \int_0^{l_0} [S^2 : 2EF_0] dz_0$, a dla pręta o stałym przekroju

$\Pi = S^2 l_0 : 2EF_0$. Nadal będziemy już pisali dz , F i l , zamiast dz_0 , F_0 i l_0 . W myśl przybliżonej teorii naprężeń tnących, wszystkie kostki płytki są również jednostajnie obciążone siłami tnącymi τdF . Ich łączna praca sprężysta będzie więc równa $\frac{1}{2} \tau^2 F dz : G = \frac{1}{2} T^2 dz : F'G$, ponieważ z teorii przy-

bliżonej wyżywa, że siła tnąca płytki — wypadkowa obciążenia osiowego $T = \tau F$. Całka w granicach O i l_0 wyznaczy pracę sprężystą dla szeregu płytek — czyli pręta o długości pierwotnej l_0 . Te wyniki ulegną zasadniczej zmianie o ile weźmiemy pod uwagę teorię ściślejszą dla sił tnących T , leżących na głównych osiach OY poszczególnych płytek, tutaj bowiem $\tau = TN : XI$. W samej rzeczy dla płytki prostokątnej $B \times H$ w (III § 6) wyprowadziliśmy wzór $\tau = \frac{3}{2} (T : F) [1 - 4y^2 : H^2]$, nadto mieliśmy $dF = Bdy$, zatem pracę sprężystą dla płytki otrzymamy w postaci $\frac{9}{4} \frac{T^2 B}{2GF^2} dz \int_{-1/2H}^{1/2H} [1 - 8 \frac{y^2}{H^2} + 16 \frac{y^4}{H^4}] dy = 1,2 \frac{T^2 dz}{2GF}$. W obu powyżej rozpatrywanych wypadkach pracę sprężystą płytki można wyrazić wzorem $\mu T^2 dz : 2GF$. W założeniu teorii przybliżonej $\mu = 1$, ściślejsza, daje jak widzimy dla płytki prostokątnej $\mu = 1,2$. W podobny sposób można również udowodnić, że dla płytki kołowej $\mu = 1,186$. Dla dwuteowej μ waha się w granicach od $\mu = 2,4$ (dla № 8) do $\mu = 2$ (dla № 50), średnia wartość $\mu = 2,2$ zupełnie wystarczy do celów praktycznych. Zatem dla szeregu płytek pracę sprężystą otrzymamy w postaci całki $\Pi = \mu \int T^2 dz : 2GI$ wziętej w granicach od O do l — łącznej długości wszystkich płytek współosiowych.

Przy skręcaniu płytki kołowej $\tau = M_0 \varsigma : I_0$, stąd praca sprężysta płytki wyrazi się całką $\int M_0^2 \varsigma^2 dz dF : 2GI_0^2 = \left[M_0^2 dz : 2GI_0^2 \right] \int \varsigma^2 dF = M_0^2 dz : 2GI_0$. Dla całego pręta będziemy mieli $\Pi = \int_0^{l_0} \left[M_0^2 dz : 2GI_0 \right]$, a dla pręta o stałym przekroju, dźwigającego wirowe obciążenie zewnętrzne M_0 na obu skrajnych przekrojach: $\Pi = M_0 l^2 : 2GI_0$. Wypadku szczególnym tylko co wyżej rozpatrywanym, występuje po raz pierwszy w roli obciążenia odkształcającego moment czyli siła uogólnienia, dająca również odkształcenie, które należy wziąć pod uwagę przy wyznaczaniu pracy sprężystej w myśl naszych rozważań ogólnych. Aby wyznaczyć przesunięcie tej siły uogólnionej, rozkładamy moment M_0 na parę obrotową w płaszczyźnie górnego skrajnego przekroju pręta. W tym celu w owej płaszczyźnie prowadzimy prostą, przecinającą podłużną oś pręta i symetrycznie w dwóch punktach tej prostej, odległych o λ od osi, rozpatrujemy dwie prostopadłe do λ siły P czyniące zadość równaniu $M_0 = 2\lambda P$. Nadto przez φ oznaczamy kąt względnego skręcenia górnego skrajnego przekroju pręta względem dolnego. W danym wypadku przesunięcia sił P będą niewątpliwie $\varphi \lambda$, a praca ich sprężysta $\frac{1}{2} \times 2 \varphi \lambda P = \frac{1}{2} M_0 \varphi$, zatem *kąt obrotu pary danego momentu należy uważać za przesunięcie tej siły uogólnionej.*

To samo wynika ze wzoru poprzednio otrzymanego dla Π ; łatwo to dostrzec, zważywszy, że $\varphi = Ml : GI_0$.

Dla płytki eliptycznej mieliśmy (IV § 1) $\tau = \frac{2M_0}{\pi ab} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$, zatem jej praca sprężysta będzie $\frac{4M_0^2 dz}{2\pi^2 a^2 b^2 G} \int \left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right] dF = \frac{M_0^2 dz}{2\pi^2 a^2 b^2 G} \left[\frac{\pi a^3 b}{4a^4} + \frac{\pi ab^3}{4b^4} \right] = \frac{M_0^2 dz}{2G \pi ab} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$. To samo powinniśmy otrzymać, biorąc pod uwagę pracę sprężystą siły uogólnionej M_0 dla płytki. Niech będzie $d\varphi$ — jej kąt skręcenia — a zarazem przesunięcie M_0 , zatem $1/2 M_0 d\varphi$ powinno dać wartość poprzednią. Stąd bezpośrednio $d\varphi = \frac{M_0 dz}{G \pi ab} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}$, wynik poprzednio podany w (IV § 7) bez dowodzenia.

Przy obciążeniu gnącem płytki $\sigma = -M_y x : I_y + M_x y : I_x + S : F$, a przeto praca sprężysta płytki będzie w danym wypadku równa: $(M_y^2 dz : 2 I_y^2 E) \int x^2 dF + (M_x^2 dz : 2 I_x^2 E) \int y^2 dF + (S^2 dz : 2 F^2 E) \int dF - (2 M_x M_y dz : 2 I_x I_y E) \int xy dF - (2 M_y S dz : 2 I_y F E) \int x dF + 2 M_x S dz : 2 I_x F E) \int y dF = M_y^2 dz : 2 I_y E + M_x^2 dz : 2 I_x E + S^2 dz : 2 F E$, jako że momenty statyczne i odśrodkowy mają wartości zerowe dla rozpatrywanych głównych osi płytki. Wynik tu otrzymany daje się z góry przewidzieć, zważywszy, że obciążenie gnące rozpada się w danym wypadku na dwa momenty M_x i M_y , czyli siły uogólnione o przesunięciach $M_x dz : E I_x$ i $M_y dz : E I_y$, oraz siłę osiową S , dla której przesunięcie równa się $S dz : E F$. W myśl prawa o niezależnem działaniu sił praca sprężysta tych trzech obciążeń odkształcających stanowi sumę prac poszczególnych, to samo cośmy tylko co otrzymali. To prawo ma zresztą powszechną doniosłość. *Praca sprężysta sił od siebie niezależnych stanowi sumę prac tych sił.* Łatwo to udowodnić, zważywszy że praca sprężysta jest pewną odmianą energii. W myśl tego prawa z łatwością możemy zbadać wpływ siły tnącej na strzałkę ugięcia pręta, dodając do pracy momentów gnących pracę sił tnących. Weźmy pod uwagę szczególny wypadek pręta l cm. długiego o stałym przekroju poprzecznym prostokątnym. Jeden koniec pręta dźwiga siłę P gnącą, drugi jest osadzony poziomo (V, Rys. 17). W przekroju O panuje siła tnąca $T = P$ oraz moment gnący $M = P(l - \zeta) = P\omega$, gdzie $\omega = l - \zeta$. Jak zwykle pionowe osie główne OY przekrojów $B \times H$ leżą w płaszczyźnie gięcia, zatem będziemy mieli pracę sprężystą

pręta $\Pi = \int_0^l (M^2 d\omega : 2EI_x) + \mu \int_0^l (T^2 d\omega : 2GF)$ tutaj niewątpliwie bowiem $dz = d\omega$. Inaczej jeszcze $\Pi = (P^2 : 2EI_x) \int_0^l \omega^2 d\omega + 1,2 (P^2 : 2GF) \int_0^l d\omega = P^2 l^3 : 6EI_x + 1,2 P^2 l : 2GF$, gdzie $I_x = \frac{1}{12} BH^3$, a $F = BH$. Stąd bezpośrednio $\Pi = (P^2 l : 2EBH) (4l^2 : H^2 + 1,2 E : G)$. Nadto $\Pi = \frac{1}{2} P f$, ponieważ końcowa strzałka f pręta stanowi przesunięcie siły odkształcającej P . Dla żelaza i stali (IV § 5) podaliśmy wzór $G = 0,385 E \approx 0,4E$ zatem $f = (Pl : EBH) (4l^2 : H^2 + 3)$. W tym wzorze ostatni wyraz drugiego nawiasu wyrokuję o wpływie siły tnącej na strzałkę ugięcia. Dla $l = 5H$, a więc dla bardzo krótkiego pręta pierwszy wyraz daje 100 — w tym przeto szczególnym wypadku siły tnące powiększają strzałkę ugięcia pręta zaledwie o 3%. Stąd wniosek, że działanie sił tnących śmiało może być pominięte dla prętów długich zazwyczaj stosowanych w praktyce.

Wyżej wyłożone prawo o dodawaniu prac sprężystych ułatwia zrozumienie dalszych rozważań.

§ 3. Praca sprężysta układu sił zewnętrznych. Ciało sprężyste nieodkształcone obciążamy układem sił odkształcających zwykłych lub uogólnionych. Po odkształceniu zapanuje trwały stan równowagi na tle przesunięć p_i sił odkształcających P_i układu ($i=1,2,\dots,n$). W najogólniejszym wypadku przesunięcie p_i zależy od wszystkich sił układu, inaczej mówiąc istnieje pewna funkcja $p_i = f_i(P_1, P_2, \dots, P_n)$, uzależniająca poszczególne przesunięcia od wszystkich sił układu. Gdy wszystkim siłom P_i nadamy odpowiednie przyrosty αP_i , równowaga zostanie zakłócona, ciało odkształcać się będzie dopóty, póki na tle przyrostów dp_i nie zapanuje ponowny stan równowagi trwałej. Przez ten czas każda siła układu wykonała pracę $P_i dp_i$, zatem elementarna praca całego układu będzie $d\Pi = \sum P_i dp_i$, gdzie dodawaniem należy objąć wszystkie n sił odkształcających. Ten wzór niewątpliwie nie zależy od kształtu funkcji f_i posiada więc znaczenie ogólne. Wyznacza *pracę sprężystą elementarną układu sił odkształcających, jako sumę iloczynów sił przez przyrosty przesunięć*. W istocie swej stanowi tak zwane—

§ 4. Pierwsze twierdzenie Castigliano w postaci różniczkowej. Dzieląc obustronnie wzór otrzymany przez którykolwiek przyrost dp_k otrzymamy $d\Pi : dp_k = \sum P_i dp_i : dp_k$. W ten sposób wyraża się również to samo prawo: *Częstkowa pochodna pracy sprężystej układu sił po jednym z przesunięć równa jest sumie iloczynów sił odkształcających przez cząstkowe pochodne przesunięć tych sił po owem przesunięciu*. Gdy przesunięcia są od siebie niezależne otrzymujemy wprost $d\Pi : dp_k = P_k$, wtedy bowiem $dp_i : dp_k = 0$

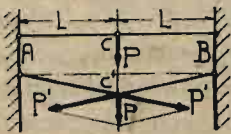
przy $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n$, a $\partial p_k : \partial p_k = 1$. *Cząstkowa pochodna pracy sprężystej po jednym z przesunięć daje odnośną siłę w wypadku przesunięć od siebie niezależnych.* Te trzy odmiany pierwszego twierdzenia Castigliano stosują się do wszelkich ciał sprężystych. Pierwsze twierdzenie Castigliano jest zatem ogólne.*

§ 5. Ciała wzorowo sprężyste. Ciało nazywamy wzorowo sprężystym w tym szczególnym wypadku, gdy przesunięcia p_i wyrażają się funkcjami linjowemi sił odkształcających, to jest gdy $p_i = a_{i1} P_1 + a_{i2} P_2 + \dots + a_{in} P_n$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Czyniąc kolejno wszystkie P_i równe zeru prócz jednej, możemy się przekonać z łatwością, że ciało wzorowo sprężyste ulegać musi pierwszemu prawu Hooke'a w stosunku do każdej z osobna siły odkształcającej, a nadto prawu o niezależności działania sił, zatem zależność powyższa wyraża tak zwane uogólnione prawo Hooke'a na n sił układu. Rozwiązując powyżej wypisane równania względem sił P_i otrzymamy $P_i = b_{i1} p_1 + b_{i2} p_2 + \dots + b_{in} p_n$. Stąd wniosek bezpośredni, że dla ciał wzorowo sprężystych siły odkształcające mogą być wyrażone w postaci funkcji linjowych przesunięć. Poprzednio wypisany szereg równań wskazuje, że przesunięcia p_i , jako zależne od sił odkształcających są niezależne od siebie, możemy przeto zastosować pierwsze prawo Castigliano w postaci $\partial \Pi : \partial p_k = P_k = b_{k1} p_1 + b_{k2} p_2 + \dots + b_{kn} p_n$, kolejno do wszystkich $k = 1, 2, \dots, n$ to jest do wszystkich równań dla P_i . Całkując bezpośrednio otrzymamy kolejno $\Pi = \frac{1}{2} b_{11} p_1^2 + b_{12} p_2 p_1 + \dots + b_{1n} p_n p_1 + \omega_1(p_2, p_3, \dots, p_n) = b_{21} p_1 p_2 + \frac{1}{2} b_{22} p_2^2 + \dots + b_{2n} p_n p_2 + \omega_2(p_1, p_3, \dots, p_n) = \dots$ i t. d. Ponieważ, jak to z samego całkowania wynika ω_1 dowolna funkcja całkowania nie może zawierać wyrazów z p_1 , a ω_n wyrazów z p_2 przeto $b_{12} p_2 p_1$ musi być tożsamościowe z $b_{21} p_1 p_2$ stąd $b_{12} = b_{21}$. Powtarzając to samo dowodzenie dla innych wyrazów odpowiednich, łatwo się przekonamy, że $b_{ki} = b_{ik}$ przy jakichkolwiek lecz różnych wartościach k, i , dowolnie obranych w szeregu $1, 2, \dots, n$. Zatem $\Pi = \sum \frac{1}{2} b_{ii} p_i^2 + \sum b_{ki} p_k p_i$, gdzie przy pierwszym sumowaniu należy kolejno uczynić $i = 1, 2, \dots, n$, a przy sumowaniu w drugim wyrazie — brać jakiegokolwiek dwie różne cyfry z tego samego szeregu aż do wyczerpania wszelkich możliwych zestawień. Nadto wyrazu stałego Π zawierać nie może, ponieważ praca sprężysta ciała nieodkształconego z natury rzeczy winna mieć wartość zerową, to jest inaczej mówiąc przy $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 0$ musi być $\Pi = 0$. Wyrażmy w tylko co otrzymanym wzorze przesunięcia p_i przez siły P_i , a otrzymamy znów funkcję jednorodną sił P_i również drugiego stopnia. Stąd wniosek: *praca sprężysta ciała wzorowo sprężystego jest jednorodną funkcją drugiego stopnia sił odkształcających, lub ich przesunięć.* Odwrotne twierdzenie również jest słuszne: gdy praca sprężysta wyraża się funkcją jednorodną

drugiego stopnia sił odkształcających, lub ich przesunięć — ciało jest wzorowo sprężyste. Łatwo to udowodnić bezpośrednio różniczkowaniem.

§ 6. Belka jednoprzęsłowa, obciążona ponad podporami momentami gnącymi stanowi dobry przykład zastosowania powyższych rozważań. W księdze drugiej (Str. 81) rozpatrywaliśmy belkę tego rodzaju, zachowywamy przeto te same znakowania, a nadto oznaczymy przez μ_0 moment obciążenia ponad podporą A . Łączne działanie momentów μ_0 i μ da pochylenia skrajnych stycznych $\Theta_A = (\frac{1}{3}\mu_0 - \frac{1}{6}\mu) l : EI$, oraz $\Theta_B = (\frac{1}{3}\mu - \frac{1}{6}\mu_0) l : EI$, co wypływa bez pośrednio z prawa o niezależności działania sił. Z tych równań wyznaczamy $\mu_0 = 2EI(2\Theta_A + \Theta_B) : l$ oraz $\mu = 2EI(\Theta_A + 2\Theta_B) : l$. Na mocy pierwszego prawa Castigliano: $\partial\Pi : \partial\Theta_A = \mu_0 = 2EI(2\Theta_A + \Theta_B) : l$, oraz $\partial\Pi : \partial\Theta_B = \mu = 2EI(\Theta_A + 2\Theta_B) : l$. Stąd całkując bezpośrednio mamy $\Pi = 2EI(\Theta_A^2 + \Theta_A\Theta_B) : l + \omega_1(\Theta_B) = 2EI(\Theta_A\Theta_B + \Theta_B^2) : l + \omega_2(\Theta_A)$. Tym dwum równaniami jedynie czyni zadość $\Pi = 2EI(\Theta_A^2 + \Theta_A\Theta_B + \Theta_B^2) : l$, a więc jednorodna funkcja przesunięć drugiego stopnia. Podstawiając wartości dla Θ_A i Θ_B znowu otrzymamy jednorodną funkcję drugiego stopnia $\Pi = (\mu_0^2 - \mu\mu_0 + \mu^2) l : 6EI$, tym razem jednak momentów — uogólnionych sił odkształcających. Stąd wniosek bezpośredni, że ustrój rozpatrywany jest wzorowo sprężysty.

§ 7. Ustrój nie wzorowo sprężysty da odmienną postać Π . Najlepiej to uwypukli przykład następujący. Haki zakończone przegubami (Rys. 2) wbito w ściany przeciwległe i połączono prętami L uczepionymi przegubowo po środku. Przegub C środkowy dźwiga ciężar P .



Rys. 2.

W założeniu zupełnej nieruchomości obu ścian pręty L pod jarzmem siły P poczną się wydłużać i wzrosną do $L' = AC' = BC'$, środkowy przegub obniży się z C do C' , dając przesunięcie $CC' = p$ siły odkształcającej P . Trwała równowaga odkształcona możliwa jest niewątpliwie tylko w tym wypadku, gdy składowe P' siły P ułożą się na osiach obu prętów pochyłonych o kąt α , a zatem $L' = L : \cos \alpha$, $p = L \operatorname{tg} \alpha$ oraz $\frac{1}{2} P = P' \sin \alpha$. Nadto wydłużenie prętów $\varepsilon = P' : FE$, gdzie przez F oznaczyliśmy ich przekrój poprzeczny stały. Stąd $L' = L(1 + \varepsilon) = L(1 + P' : FE) = L(1 + P : 2FE \sin \alpha) = L : \cos \alpha$, a przeto $1 : \cos \alpha = 1 + 2P : FE \sin \alpha$ oraz $P = 2EF \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \alpha) = 2EF \operatorname{tg} \alpha (1 - 1 : \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}) = 2EF p (1 - 1 : \sqrt{1 + p^2 : L^2}) : L$. Wobec znikomej wartości stosunku $p : L$ możemy ograniczyć się do pierwszych dwóch wyrazów w rozwinięciu $1 : \sqrt{1 + p^2 : L^2} = (1 + p^2 : L^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2} p^2 : L^2$ i ostatecznie otrzymać $P = EF p^3 : L^3$. Ten wzór wskazuje, że siła P nie jest funkcją liniową przesunięcia: układ nie jest wzorowo sprężysty, zatem i jego praca sprężysta nie może być funkcją jednorodną dru-

giego stopnia. Łatwo się o tem przekonać bezpośrednio, zważywszy, że wobec zupełnej ogólności pierwszego twierdzenia Castigliano $\delta\Pi : \delta p = P \approx FE p^3 : L^3$. Stąd $\Pi \approx FE p^4 : 4L^3$. Ten sam wynik możemy otrzymać bezpośrednio wyznaczając Π , jako sumę prac sprężystych obu prętów. Otrzymamy w ten sposób $\Pi = 2 \times \frac{1}{2} P' [L' - L] = P'^2 L : FE = P^2 L : 4EF \sin^2 \alpha = P^2 L (1 + 1 : \tan^2 \alpha) : 4EF = P^2 L (1 + L^2 : p^2) : 4EF \sim \sim F^2 E^2 p^6 (1 + L^2 : p^2) : 4FEL^5 \approx FE p^4 (L^2 + p^2) : 4L^3 \approx FE p^4 : 4L^3$.

§ 8. Twierdzenie Clapeyron'a wynika bezpośrednio z pierwszego twierdzenia Castigliano. Weźmy pod uwagę ciało wzorowo sprężyste, odkształcone pod jarzmem sił P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Praca sprężysta będzie w danym wypadku $\Pi = \sum \frac{1}{2} b_{ii} p_i^2 + \sum b_{ki} p_k p_i$. Korzystając ze wzorów dla P_i podanych w § 4, tworzymy samą $\sum P_i p_i = b_{11} p_1^2 + b_{12} p_2 p_1 + \dots + b_{1n} p_n p_1 + b_{21} p_1 p_2 + b_{22} p_2^2 + \dots + b_{2n} p_n p_2 + \dots + b_{nn} p_n^2$. Wyżej udowodniliśmy, że $b_{ki} = b_{ik}$, a przeto $\sum P_i p_i = \sum b_{ii} p_i^2 + \sum 2b_{ki} p_k p_i = 2\Pi$. Stąd bezpośrednio $\Pi = \frac{1}{2} \sum P_i p_i$, gdzie sumowaniem należy objąć wszystkie wartości $i = 1, 2, \dots, n$. Ten wzór wyraża twierdzenie Clapeyron'a: *praca sprężysta ciała wzorowo sprężystego równa jest połowie sumy iloczynów sił odkształcających przez odnośne przesunięcia*. Ten sam wynik otrzymaliśmy w § 1 bezpośrednio dla pojedynczej siły P i stosowaliśmy niejednokrotnie w § 2, obecnie, opierając się na uogólnionym wzorze dla n sił udowodnimy —

§ 9. Drugie twierdzenie Castigliano. Rozpatrujemy ciało wzorowo sprężyste, odkształcone pod jarzmem układu sił zwykłych, lub uogólnionych P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Na mocy twierdzenia Clapeyron'a możemy napisać dla danego wypadku, że $2\Pi = \sum P_i p_i$, stąd różniczkując bezpośrednio otrzymamy $2d\Pi = \sum P_i dp_i + \sum p_i dP_i$. Według pierwszego twierdzenia Castigliano $d\Pi = \sum P_i dp_i$, a przeto odejmując będziemy mieli $d\Pi = \sum p_i dP_i$, wzór stanowiący istotę drugiego twierdzenia Castigliano. Wyznacza ono *elementarną pracę sprężystą układu sił, odkształcających ciało wzorowo sprężyste, w postaci sumy iloczynów przesunięć przez przyrosty odnośnych sił odkształcających*.

Dzieląc obustronnie wzór otrzymany przez którykolwiek przyrost dP_k otrzymamy $\delta\Pi : \delta P_k = \sum p_i \delta P_i : \delta P_k$. W ten sposób również wyraża się to samo prawo: *Częstkowa pochodna pracy sprężystej układu sił, odkształcających ciało wzorowo sprężyste, po jednej z sił tego układu równa jest sumie iloczynów przesunięć przez cząstkowe pochodne odnośnych sił odkształcających po owej obranej sile*. Gdy wszystkie siły są od siebie niezależne mamy wprost $\delta\Pi : \delta P_k = p_k$, w tym bowiem wypadku $\delta P_i : \delta P_k = 0$ przy $i = 1, 2, \dots, k - 1, k + 1, \dots, n$, oraz $\delta P_k : \delta P_k = 1$. *Cząstkowa pochodna pracy sprężystej układu sił, odkształcających ciało wzorowo sprężyste, po jednej z sił tego układu daje odnośne przesunięcie, w wypadku sił od siebie niezależnych*. Te trzy odmiany drugiego twierdzenia Casti-

gliano stosują się wyłącznie tylko do ciał wzorowo sprężystych, samo twierdzenie bowiem opiera się na twierdzeniu Clapeyron'a. Mimo to posiada znacznie większą doniosłość praktyczną niż pierwsze. Łatwo się o tem przekonamy rozpatrując:

§ 10. Zastosowania drugiego prawa Castigliano. W księdze drugiej (str. 80), rozpatrywaliśmy pręt osadzony jednym końcem, u drugiego obciążony siłą gnącą P . Zachowajmy wszystkie znakowania, a nadto wprowadźmy nową zmienną $\omega = l - \zeta$. Wartość momentu gnącego dla przekroju bieżącego w O będzie $M = P\omega$, zatem $\Pi = \int_0^l \frac{M^2 d\omega}{2EI} = \frac{P^2 l^3}{6EI}$ i na

mocy Castigliano $\Pi : f = \partial \Pi : \partial P = Pl^3 : 3EI$, końcowa bowiem strzałka ugięcia pręta f stanowi przesunięcie siły P , jedynej odkształcającej. Ten sam pręt obciążamy u końca swobodnego momentem μ . Przesunięciem tej uogólnionej siły będzie kąt Θ pochylenia skrajnej stycznej odkształconej ku osi podłużnej pręta nieodkształconego. W danym wypadku we wszystkich przekrojach panuje stała wartość momentu, możemy przeto napisać, że $\Pi = \mu^2 l : 2EI$ i na mocy Castigliano Π wyznaczyć $\Theta = \partial \Pi : \partial \mu = \mu l : EI$. Te same wyniki otrzymaliśmy pierwiej drogą zwykłą. Gdybyśmy i tutaj chcieli znaleźć skrajną strzałkę ugięcia pręta, to należałoby wprowadzić dodatkową siłę P , działającą w swobodnym końcu pręta niezależnie od μ . Wtedy przy wspólnem działaniu sił P i μ w O panowałby moment $M =$

$= \mu + P\omega$, mielibyśmy przeto $\Pi = \int_0^l \frac{M^2 d\omega}{2EI} = \int_0^l \frac{(\mu + P\omega)^2}{2EI} d\omega$, a za-

razem na mocy Castigliano $\Pi : f = \frac{\partial \Pi}{\partial P} = \int_0^l \frac{\mu + P\omega}{EI} \omega d\omega$.

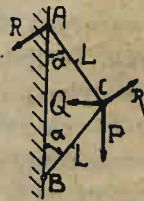
Jednak siła P nie działa w istocie rzeczy, należy zatem uczynić w wyniku otrzymanym $P=0$, co da szukaną strzałkę $f = \mu l^2 : 2EI$. Z kolei gdy byśmy chcieli wyznaczyć w dowolnym przekroju O kąt Θ_0 , pochylenia stycznej odkształconej ku pierwotnej osi pręta — to należałoby wprowadzić siłę uogólnioną, odpowiadającą temu przesunięciu — a więc moment μ_0 . Zatem w połąci BO , dla wszystkich przekrojów $M = \mu$, w drugiej połąci OA , również we wszystkich przekrojach panuje stała wartość momentu $\mu + \mu_0$, możemy przeto napisać, że $\Pi = [\mu^2(l - \zeta)^2 + (\mu + \mu_0)^2 \zeta] : 2EI$. Stąd na mocy Castigliano Π mamy $\Theta_0 = (\mu + \mu_0)\zeta : EJ$. Ponieważ w istocie $\mu_0 = 0$, przeto ostatecznie $\Theta_0 = \mu\zeta : EJ$. Gdybyśmy wreszcie chcieli znaleźć obniżenie się η przekroju O po odkształceniu, to należałoby wprowadzić mniemaną siłę P_0 , przynależną do owego przesunięcia. W pierwszej połąci byłoby po staremu $M = \mu$, w drugiej $M = \mu + P_0\omega$, trzebaby jednak odliczać ω od O ku A w kierunku osi pierwotnej pręta. Tutaj więc $\Pi = \mu^2(l - \zeta) : 2EJ +$

$+ \int_0^\zeta \frac{(\mu + P_0\omega)^2 d\omega}{2EI}$ Castigliano Π daje $\eta = \partial \Pi : \partial P_0 = \int_0^\zeta \frac{\mu + P_0\omega}{EJ} \omega d\omega$.

przyczem po zróżniczkowaniu należy uczynić $P_0=0$, siła mniemana bowiem nie istnieje w rzeczywistości. Stąd $\eta = \mu \zeta^2 : 2 EI$.

Weźmy pod uwagę jeszcze jeden przykład zastosowania tego samego twierdzenia. Uchwyty przegubowe A, B wbito w ścianę pionową ściśle nieruchomą i połączono prętami $AC = BC = L$. Na przegub C , środkowy działa siła pionowa P . Wyznamy jej przesunięcie, czyli obniżenie się przegubu (Rys. 3). Łatwo daje się spostrzec, że górny pręt będzie rozciągany, a dolny ściskany siłą $P : 2 \cos \alpha$, gdy oznaczymy kąty BAC i CBA przez α . W założeniu doskonałej sztywności muru odkształceniu ulegają jedynie pręty, możemy przeto napisać pracę sprężystą, jak dla sił osiowych w postaci $\Pi = 2P^2 L : 8EF \cos^2 \alpha$, gdzie F oznacza stały przekrój poprzeczny, wspólny dla obu prętów. Stąd $p = \partial \Pi : \partial P = PL : 2EF \cos^2 \alpha$. W ten sposób wyznaczyliśmy składową pionową przesunięcia środkowego przegubu.

Poziomą q wyznaczymy również z łatwością rozpatrując mniemaną siłę $Q \perp P$ i dajmy na to skierowaną ku ścianie. Ta siła da składowe $Q : 2 \sin \alpha$ ściskające oba pręty. Przy łącznym działaniu sił P i Q w górnym przecię będzie działała siła osiowa $P : 2 \cos \alpha - Q : 2 \sin \alpha = S$. Tutaj $S' = -P : 2 \cos \alpha - Q : 2 \sin \alpha$, zatem $\Pi = (S^2 + S'^2) L : 2 EF$, oraz $q = \partial \Pi : \partial Q = (S \partial S : \partial Q + S' \partial S' : \partial Q) L : EF = = -(S + S') L : 2 EF \sin \alpha = QL : 2 EF \sin^3 \alpha$. W istocie siła Q nie istnieje, należy zatem uczynić $Q=0$ w wyniku otrzymanym, stąd $q=0$. Przegub środkowy obniża się nie schodząc z linii działania siły P . Chcąc, dajmy na to, znaleźć kąt obrotu pręta AC , czyli przyrost $d\alpha$ kąta CAB —należy wprowadzić odpowiednią siłę uogólnioną—moment M o parze sił R przyłożonych do obu końców pręta. Obrót tej pary da $d\alpha$. Stąd $R = M : L$. Siła R wywołuje w przegubie A odpór, druga działająca na przegub C da dodatkowe siły osiowe w prętach. Z łatwością możemy je wyznaczyć, zważywszy że siła R jest pochylona ku przedłużeniu BC pod kątem $90^\circ - 2\alpha$. Zatem na górny pręt będzie działała siła osiowa $S = P : 2 \cos \alpha + R \operatorname{tg} (90^\circ - 2\alpha) = P : 2 \cos \alpha + M : L \operatorname{tg} 2\alpha$, a na dolny $S' = -P : 2 \cos \alpha + M : L \sin 2\alpha$. Stąd $\Pi = (S^2 + S'^2) L : 2 EF$, oraz $d\alpha = \partial \Pi : \partial M = (S \partial S : \partial M + S' \partial S' : \partial M) L : EF = (S : \operatorname{tg} 2\alpha + S' : \sin 2\alpha) : EF$, gdzie należy uczynić $M=0$. Ostatecznie więc $d\alpha = (P : 2 \cos \alpha \operatorname{tg} 2\alpha - P : 2 \cos \alpha \sin 2\alpha) : EF = P(\cos 2\alpha - 1) : 2 EF \cos \alpha \sin 2\alpha = P(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - 1) : 4 EF \sin \alpha \cos^2 \alpha = -P \sin \alpha : 2 EF \cos^2 \alpha$. Znak ujemny wskazuje, że obrót pręta zachodzi w kierunku odwrotnym do przyjętego kierunku pary sił R , co zresztą widoczne jest samo przez się, ponieważ przegub C opuszcza się w dół.



Rys. 3.

Jak widać z przykładów powyższych Costigliano Π oddaje nader cenne usługi. Jeszcze prostsze wyniki daje tak zwane—

§ 11. **Twierdzenie Menabrea**, zwłaszcza w zastosowaniu do ustrojów statycznie niewyznaczalnych. Rozróżniamy zazwyczaj ustroje statycznie niewyznaczalne zewnętrznie i wewnętrznie. Gdy liczba podpór jest zbyt wielka, a z równań statyki nie można wyznaczyć wszystkich odporów — mamy niewyznaczalność zewnętrzną — wewnętrzną, gdy liczba prętów, łączonych przegubowo, jest nadmierna, lub połączenia mają zbyt dużą sztywność, przedstawiają być przegubami wahlowymi, przy wystarczającej liczbie prętów. W obu wypadkach nadmierną liczbę czynników równowagi można z łatwością wyznaczyć, stosując Castigliano II, lub twierdzenie Menabrea, stanowiące prosty wynik poprzedniego i z tego powodu nieraz mylnie Castigliano III, zwane. Dajemy tutaj dowód ogólny zasady najmniejszej pracy — dotychczasowe grzeszyły zbytnią jednostronnością. Drugie prawo Castigliano wyraża się wzorem $\partial \Pi : \partial P_k = \sum \rho_i \partial P_i : \partial P_k$, w którym Π oznacza pracę sprężystą ustroju wzorowo sprężystego, odkształconego pod jarzmem sił stopniowo rosnących od zera aż do skrajnych natężeń P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), zaś ρ_i przesunięcie punktu uciepienia na osi siły P_i , lub kąt obrotu pary momentu P_i . Rozcięcie jednego z ogniw, lub łączy ustroju zakłóci trwałą równowagę odkształconą, chcąc ją przywrócić, należy wprowadzić zastępczy układ znoszących się wzajemnie siły $X_i - X$, $Y_i - Y$ i t. d. — wzamian zniszczonych. Te dodatkowe siły zewnętrzne powinny utrzymać powierzchnie przekroju w dotyku pierwotnym, muszą więc rosnąć równocześnie z P_i od zera do do swych skrajnych ostatecznych wartości. Weźmy pod uwagę dwie jakiegokolwiek siły zastępcze, dajmy na to X i $X' = -X$, uciepione w O , pewnym punkcie dokonanego przekroju. W wypadku *przekroju zewnętrznego*, to jest poprowadzonego pomiędzy ustrojem, a podporą przez teoretyczny punkt podparcia O , możemy uważać X , jako odpór, a X' jako działanie ustroju na podporę, zatem przy wyznaczaniu pracy sprężystej ustroju, otrzymamy w Π wyrazy zależne od siły zastępczej X , nie będzie natomiast wyrazów z X' , możemy przeto napisać: $\partial \Pi : \partial X = x + \sum \rho \partial \Pi : \partial X$, gdzie x małe oznacza rzut przesunięcia punktu O na oś siły X , czyli przesunięcie siły zastępczej X . Gdy odpór X jest *statycznie niewyznaczalny*, a więc od sił P *niezależny*, będziemy mieli wprost $\partial \Pi : \partial X = x$, wtedy bowiem wszystkie pochodne sumy są równe zeru. Wzór tylko co otrzymany wyraża twierdzenie Menabrea dla podpory sprężystej i dającej odpór X statycznie niewyznaczalny i przesunięcie x do tego odporu przynależne. Dla podpory niesprężystej $x = 0$, zatem $\partial \Pi : \partial X = 0$ — *pochodna pracy sprężystej ustroju wzorowo sprężystego po statycznie niewyznaczalnym odporze podpory niesprężystej jest równa zeru.*

W wypadku *przekroju wewnętrznego*, to jest poprowadzonego przez ogniwo lub łączenie kilku ogniw obie siły X i X' dadzą wyrazy dla Π a przeto $\partial \Pi : \partial X = x + x \partial X' : \partial X + \sum \rho \partial P : \partial X = \sum \rho \partial P : \partial X$, ponieważ po-

chodna X' po X równa jest—1. I tu znów x , małe oznacza rzut przesunięcia punktu O na oś sił XX' , i tu jak wyżej wszystkie pochodne sumy są równe zeru, gdy X jest statycznie niewyznaczalne, to jest niepowiązane z siłami P równaniami statyki. Zatem wzór $\partial\Pi : \partial X = 0$ wyraża twierdzenia Menabrea dla siły zastępczej X przekroju — statycznie niewyznaczalnej: *pochodna pracy sprężystej ustroju wzorowo sprężystego po statycznie niewyznaczalnej sile wewnętrznej jest równa zeru*. Ostatnie rozumowania zachowują swą moc i dla pozostałych sił zastępczych przekroju należy jednak dla statycznie wyznaczalnych zachować znak sumy. Daje to nieraz nader cenne wyniki. Godzi się tu zaznaczyć, że oprócz równań statyki mogą istnieć inne równania uzależniające daną siłę od pozostałych, należy więc i w tym szczególnym wypadku uwzględnić sumę w prawej części wzoru.

Rozwińmy nieco szerzej ten ścisły wykład, biorąc pod uwagę ustrój wzorowo sprężysty statycznie niewyznaczalny. W pierwszym wypadku, gdy liczba podpór jest nadmierna, równania statyki nie dadzą wszystkich odporów. Oznaczmy brakujące odpory statycznie niewyznaczalne przez X, Y, \dots, Z . Gdybyśmy usunęli odnośne podpory, równowaga zostałaby zakłócona, chcąc ją przywrócić należy przyłożyć dodatkowy układ sił zewnętrznych X, Y, \dots, Z zastępczych, bo działających jak odrzucone podpory. W ten sposób siły zewnętrzne pomnożą się o X, Y, \dots, Z , lecz cały ustrój pozbawiony podpór zbytecznych stanie się statycznie wyznaczalnym, w tem znaczeniu, że pozostałe odpory dadzą się wyznaczyć z równań statyki w zależności od sił zewnętrznych P oraz sił zastępczych, narazie jeszcze bliżej nieokreślonych, występujących w postaci znaków X, Y, \dots, Z we wzorach dla pozostałych odporów statycznie wyznaczalnych. W tej samej postaci dodatkowe siły zastępcze wejdą w Π . Weźmy pod uwagę jedną z nich, dajmy na to X . Gdy jej podpora jest niesprężysta t. j. przy odkształceniu pozostaje nieruchomą, lub porusza się prostopadle do odporu X , przesunięcie $x = 0$, a zatem $\partial\Pi : \partial X = 0$. W szczególnym wypadku podpory sprężyste, dającej przesunięcie x , będziemy mieli $\partial\Pi : \partial X = x$. W obu wypadkach dla każdego odporu statycznie niewyznaczalnego otrzymamy po jednym dodatkowym równaniu, te zaś łącznie z równaniami statyki pozwolą wyznaczyć istotne wartości sił zastępczych, czyli brakujące odpory ustroju. W razie ustroju statycznie wewnętrznie niewyznaczalnego, należy przedewszystkiem określić, czy ta statyczna niewyznaczalność pochodzi z nadmiernej liczby prętów, czy ze zbytecznej sztywności połączeń. W ustrojach przegubowych trójkątnych podwojona liczba węzłów mniej trzy winna dać liczbę prętów koniecznych. Dodajmy jeden pręt, a układ stanie się niewyznaczalnym i równania statyki nie wystarczą przy wyznaczaniu sił osiowych dla prętów. To samo okaże się, gdy połączymy dwa pręty ustroju nie przegubowo a trwale. W złączeniu powstanie moment statycznie nie wyznaczalny. W pierwszym wypadku możemy rozciąć ogniwo zbyteczne, w drugim od-

sztynąć łącznie właściwie dobraną powierzchnią przekroju, a usunięte w ten sposób siły wiążące przywrócić, dając odpowiednie siły zastępcze, które pomnożą układ sił zewnętrznych, a cały ustrój stanie się statycznie wyznaczalnym. Te siły zastępcze dadzą wyrazy dla Π , będziemy mieli przeto szereg równań $\partial \Pi : \partial X = \partial \Pi : \partial Y \dots = \partial \Pi : \partial Z = 0$ dodatkowych, z których określimy istotne wartości statycznie niewyznaczalnych $X, Y \dots Z$. Wszystkie rozważania powyższe dotyczą ustrojów wzorowo sprężystych, tylko bowiem w tym wypadku stosować możemy Castigliano II, z którego wypływa twierdzenie Menabrea, zwane jeszcze inaczej *zasadą najmniejszej pracy*, zgodnie z treścią odmiennego nieco wysłownienia: *Istotne wartości statycznie niewyznaczalnych dają najmniejszość pracy sprężystej ustroju wzorowo sprężystego, opartego na podporach niesprężystych*. Że tak jest istotnie, z łatwością możemy się przekonać, zważywszy, że wartości zerowe pochodnych pracy cząstkowych odpowiadają jej skrajnej wartości najmniejszej — bowiem praca sprężysta jako rdzennie dodatnia nie może mieć maximum. Istotę powyższych rozważań najlepiej uwypuklą—

§ 12. Zastosowania twierdzenia Menabrea. W księdze drugiej (str. 68) rozpatrywaliśmy belkę statycznie niewyznaczalną. Zachowajmy wszystkie znakowania, nadto przez X oznaczymy statycznie niewyznaczalny odpór, zastępujący oddziaływanie podpory A . W dowolnym przekroju O , obranym w odległości ω od tej podpory panować będzie moment $M = X\omega + \frac{1}{2} p\omega^2$, a przeto $\Pi = \int_0^l \frac{(X\omega + \frac{1}{2} p\omega^2)^2}{2EI} d\omega$. W założeniu niesprężystej podpory A

mamy, w myśl twierdzenia Menabrea: $\partial \Pi : \partial X = \int_0^l \frac{X\omega + \frac{1}{2} p\omega^2}{EI} \omega d\omega = [\frac{1}{3} Xl^3 + \frac{1}{3} pl^3] : EI = 0$, stąd $X = - \frac{3}{8} pl$. Możemy również zamiast X rozpatrywać moment osadczy, jako statycznie nie wyznaczalną. Chcąc go wyznaczyć, odrzucamy zamocowanie i wprowadzamy zastępczą, siłę uogólnioną — moment μ : w ten sposób otrzymamy belkę jednoprzęsłową opartą w A na podporze rolkowej i w B na przegubowej. Obciążenie jednostajne p , łącznie z dodatkowym momentem μ da odpory pionowe A i B . Odpór A z łatwością wyznaczmy, pisząc równanie statyki dla momentów względem punktu B . Będzie to $Al + \frac{1}{2} pl^2 + \mu = 0$, stąd $A = - \frac{1}{2} pl - \mu : l$, zatem w przekroju O panować będzie moment gnący $M = - (\frac{1}{2} pl + \mu : l) \omega + \frac{1}{2} p\omega^2$, a praca sprężysta różniczkowana cząstkowo po μ da $\partial \Pi : \partial \mu = \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial \mu} \frac{d\omega}{EI} = \int_0^l \left(\frac{1}{2} p\omega^2 - \frac{1}{2} pl\omega - \mu \frac{\omega}{l} \right) \frac{\omega}{l} \frac{d\omega}{EI} = (\frac{1}{8} pl^3 - \frac{1}{6} pl^3 - \frac{1}{3} \mu l) : EI = 0$. Stąd $\mu = - \frac{1}{8} pl^2$, jak w księdze drugiej.

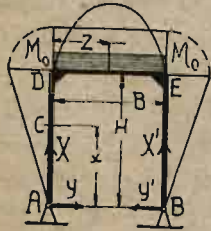
W tej samej księdze (str. 70) rozpatrywaliśmy belkę dwuprzęsłową. Zachowajmy wszystkie znakowania. Z równań statyki mamy $A = - \frac{1}{2} pl -$

— $Xb : l$ oraz $B = -pl - X - A = -\frac{1}{2}pl - Xa : l$, zatem w odległości z od lewej podpory A panować będzie moment $M = \frac{1}{2}pz^2 - (\frac{1}{2}pl + Xb : l)z$, a w odległości ω od prawej podpory: $M' = \frac{1}{2}p\omega^2 - (\frac{1}{2}pl + Xa : l)\omega$. Stąd $\Pi = \int_0^a \frac{M^2 dz}{2EI} + \int_0^b \frac{M'^2 d\omega}{2EI}$ oraz na mocy

twierdzenia Menabrea $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = \int_0^a M \frac{\partial M dz}{\partial X EI} + \int_0^b M' \frac{\partial M' d\omega}{\partial X EI} = \left[\int_0^a (\frac{1}{2}pz^2 - \frac{1}{2}plz - Xzb : l) (-bz : l) dz + \int_0^b (\frac{1}{2}p\omega^2 - \frac{1}{2}pl\omega - Xa\omega : l) (-a\omega : l) d\omega \right] : EI = 0$. Po scałkowaniu i skróceniu przez $ab : EI$ otrzymamy:

$-\frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : l + \frac{1}{6}p(a^2 + b^2) + \frac{1}{3}Xab(a + b) : l^2 = 0$. Stąd bezpośrednio $X = -\frac{1}{8}pl(a^2 + 3ab + b^2) : ab$. — Zamiast X możemy rozpatrywać inny czynnik statycznie niewyznaczalny, dajmy na to moment podporowy, panujący ponad podporą X . Chcąc zastosować twierdzenie Menabrea rozcinamy pręt ponad tą podporą i obciążamy oba rozcięte przekroje wzajemnie znoszącymi się momentami różnoskrętnymi μ . W ten sposób zamiast rozpatrywanego pręta statycznie niewyznaczalnego otrzymamy dwa statycznie wyznaczalne pręty tożsamościowe pod względem obciążenia z prętem ostatnio rozpatrywanym w poprzednim przykładzie, korzystając przeto z otrzymanych wyżej wzorów możemy od razu napisać $\partial \Pi : \partial \mu = (\frac{1}{8}pa^3 - \frac{1}{6}pa^3 - \frac{1}{3}\mu a + \frac{1}{8}pb^3 - \frac{1}{6}pb^3 - \frac{1}{3}\mu b) : EI = 0$ stąd $\mu = -\frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : l$.

Jako trzeci przykład rozpatrujemy *bramę dźwigową* (Rys. 4) obciążoną jednostajnie w stosunku p kg. na jednostkę długości połaci poziomej górnej, sztywno na węglach połączonej ze stojakami pionowymi, opartymi na podporach przegubowych A i B . Wysokość bramy H szerokość — B . Obciążenie daje odpory pionowe X i X' , poziome Y i Y' : o istnieniu tych ostatnich przekonamy się z łatwością zważywszy, że brama rozkracza się pod obciążeniem, stara się przeto rozsunąć podpory. Równania statyki będą dla sił:



Rys. 4.

$X + X' + pB = 0, Y + Y' = 0$, nadto dla momentów względem lewej podpory: $X'B + \frac{1}{2}pB^2 = 0$ stąd: $X' = -\frac{1}{2}pB = X$, nadto $Y' = -Y$. Odpór Y jest więc statycznie niewyznaczalny. Chcąc go

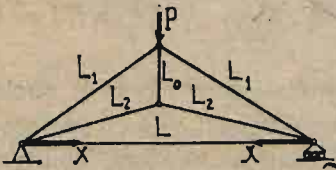
wyznaczyć, rozpatrujemy przekrój poprzeczny stojaka C w odległości x od podpory A . Obciążenie przekroju stanowi siła osłowa X , moment Yx i siła tnąca Y , którą jak zwykle pomijamy wobec momentu gnącego. Zatem w założeniu stałej sztywności E_0I_0 i stałego przekroju F_0 dla obu stojaków otrzymamy ich pracę sprężystą w postaci

$\Pi_\zeta = \frac{2X^2 H}{2E_0 F_0} + 2 \int_0^H \frac{Y^2 x^2}{2E_0 I_0} dx$. Z kolei na górnej pości rozpatrujemy przekrój poprzeczny w odległości x od lewego węzła D . Tutaj panować będzie siła osiowa Y , moment $M = YH + Xx + \frac{1}{2} \rho x^2$, i siła tnąca, którą pominiemy, pisząc wprost dla pości górnej: $\Pi_p = \frac{Y^2 B}{2EF} + \int_0^B \frac{M^2 dz}{2EJ}$.

Praca sprężysta ustroju $\Pi = \Pi_\zeta + \Pi_p$, zatem w myśl twierdzenia Menabrea:

$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 2 \int_0^H \frac{Yx^2}{E_0 J_0} dx + \frac{YB}{EF} + H \int_0^B \frac{(YH + Xz + \frac{1}{2} \rho z^2)}{EJ} dz = \frac{2}{3} YH^2 : E_0 I_0 + YB : EF + (YH^2 B - \frac{1}{4} \rho HB^3 + \frac{1}{6} \rho HB^3) : EJ = 0$. Stąd $Y = \rho B^2 : 11 H [1 + 1 : FE + 2 HEI : 3 BE_0 I_0]$. — Rysunek podaje zarazem wykresy momentów. W stojakach momenty rosną linjowo aż do skrajnej wartości $M_0 = YH$, która przez sztywne łączenie węzła przenosi się na pości górną. Obciążenie jednostajne daje momenty parabolicznie zmienne znaku odwrotnego, należy przeto brać dla górnej pości różnicę odejmując moment obciążenia od M_0 .

Jako ostatni przykład rozpatrujemy wiązarkę możliwie najprostszego kształtu, jak na (Rys. 5), lecz bez dolnego pręta L , oparty na podporach przegubowych, a więc nie tak jak na rysunku, gdzie prawa podpora jest rolkowa. Obciążenie wiazarki stanowi siła P pionowa na górnym węźle. Oznaczmy lewy odpór pionowy przez A prawy przez B , nadto pod jarzmem sił P wiazarkę stara się rozkaczyć — rozsunąć podpory, rodząc w nich sprzeciwy X skierowane po linii podpór do wewnątrz. Z równań statyki wynika że $A = B = -\frac{1}{2} P$, oraz, że odpór X jest statycznie niewyznaczalny.



Rys. 5.

Chcąc go wyznaczyć czynimy wiazarkę statycznie wyznaczalnym — zmieniając prawą podporę na rolkową i dając zastępcze siły X znoszące się wzajemnie. Nadto możemy zbudować dwa wykresy Cremony: jeden dla sił P, A, B drugi dla siły $X = 1$, a więc w skali $1 : X$, nie znamy bowiem istotnej wartości tej statycznie niewyznaczalnej. Z pierwszego wykresu otrzymamy dla prętów L_i ($i = 0, 1, 2$) siły osiowe $S'_i = a_i P$, z drugiego $S''_i = b_i \times 1$, gdzie współczynniki a_i i b_i w postaci oczywiście trygonometrycznej, wyznaczą się z łatwością, jako stosunki boków trójkątów wykresu, a zatem mogą być wyliczone cyfrowo.

Mnożąc S''_i przez X , otrzymamy ostateczne wartości sił osiowych S_i prętów w postaci $S_i = a_i P + b_i X$, a stąd i pracę sprężystą $\Pi = \Sigma (S_i^2 L_i : 2EF_i)$ gdzie znak sumy winien obejmować wszystkie pręty wiazarki. Zgodnie

z twierdzeniem Menabrea $\partial II: \partial X = \Sigma (S_i b_i L_i : EF_i) = \Sigma (a_i P + b_i X) b_i L_i : EF_i = O$ i ostatecznie $X = -P \Sigma (a_i b_i L_i : F_i) : \Sigma (b_i^2 L_i : F_i)$ o ile wszystkie pręty są z tego samego tworzywa t. j. o ile E jest dla wszystkich jednakowe. Tylko co rozpatrywany wiązar stanowi przykład ustroju statycznie niewyznaczalnego zewnątrz, uczynimy go statycznie niewyznaczalnym wewnątrz. W tym celu prawą podporę przegubową zmieniamy na rolkową, i dodajemy dolny pręt L . Liczba przegubów pozostała ta sama, cztery, prętów sześć — jeden więc, dajmy na to dolny jest zbyteczny, a jego siła osiowa X stanowi statycznie niewyznaczalną. Przetnijmy go tuż u przegubu A , dając siły zastępcze X osiowe. Jedną z nich da obciążenie dodatkowe przegubu, drugą osiowe obciążenie rozciętego pręta. Ta druga siła X wywołała sprzeciw w przegubie prawym — obciążenie więc będzie takie, jak dla wiązaru poprzedniego, gdzie siły X stanowiły sprzeciw odpór. Zatem i siły w prętach będą znów $S_i = a_i P + b_i X$, z wyjątkiem pręta L obciążonego siłą osiową X , tutaj więc praca sprężysta wzbogaci się o jeden wyraz $X^2 L : 2 F E$, w którym przez F oznaczyliśmy stały przekrój pręta L . Stąd $\partial II: \partial X = \Sigma (a_i P + b_i X) b_i L_i : EF_i + X L : F E = O$ i ostatecznie $X = -P \Sigma (a_i b_i L_i : F_i) : [\Sigma (b_i^2 L_i : F_i) + L : F]$. Z powyższych przykładów widzimy, że twierdzenie Menabrea stanowi nader sprawne narzędzie rachunku. W pewnych jednak wypadkach znacznie prędzej prowadzi do celu —

§ 13. Twierdzenie Betti czyli tak zwana *zasada wzajemności*. Wiemy już że dla ustrojów i ciał wzorowo sprężystych praca sprężysta stanowi jednorodną funkcję drugiego stopnia sił lub ich przesunięć, możemy przeto napisać w ogólnej postaci $II = aP^2 + bQ^2 + cR^2 + \dots + mPQ + nPR + \dots + wQR + \dots$ itd.

Na zasadzie Castigliano II, które zgodnie z założeniem da się zastosować w tym wypadku, będziemy mieli kolejno $p = \partial II : \partial P = 2aP + \dots + mQ + \dots + nR + \dots$, $q = \partial II : \partial Q = 2bQ + \dots + mP + \dots + wR + \dots$, $r = \partial II : \partial R = 2cR + \dots + nP + \dots + wQ + \dots$ itd., gdzie przez P, Q, R, \dots oznaczyliśmy siły odkształcające zewnętrzne, a przez p, q, r, \dots ich przesunięcia.

Weźmy pod uwagę dwa stany równowagi odkształconej: pierwszy I dla sił P_1, Q_1, R_1, \dots , i przesunięć p_1, q_1, r_1, \dots , drugi II dla P_2, Q_2, R_2, \dots oraz p_2, q_2, r_2, \dots itd. W tym założeniu tworzymy sumy iloczynów sił stanu I przez odpowiednie przesunięcia stanu II i odwrotnie, mamy: $P_1 p_2 + Q_1 q_2 + R_1 r_2 + \dots = 2aP_2 P_1 + \dots + mQ_2 P_1 + \dots + wR_2 P_1 + \dots + 2bQ_2 Q_1 + \dots + mP_2 Q_1 + \dots + wR_2 Q_1 + \dots + 2cR_2 R_1 + \dots + nP_2 R_1 + \dots + wQ_2 R_1 + \dots$ i t. d. oraz $P_2 p_1 + Q_2 q_1 + R_2 r_1 + \dots = 2aP_1 P_2 + \dots + mQ_1 P_2 + \dots + wR_1 P_2 + \dots + 2bQ_1 Q_2 + \dots + mP_1 Q_2 + \dots + wR_1 Q_2 + \dots + 2cR_1 R_2 + \dots + nP_1 R_2 + \dots + wQ_1 R_2 + \dots$ i t. d., a przeto na zasadzie tożsamości prawych części wzorów tylko

co wypisanych możemy napisać, że $P_1 p_2 + Q_1 q_2 + R_1 r_2 + \dots = P_2 p_1 + Q_2 q_1 + R_2 r_1 + \dots$. Tę wzór stanowi istotę twierdzenia Betti: *Suma sił odkształcających, przynależnych do pierwszego stanu równowagi ustroju wzorowo sprzężonego, mnożonych przez odnośne przesunięcia drugiego stanu równowagi, równa jest sumie iloczynów sił drugiego stanu, przez odnośne przesunięcia pierwszego.* O siłach wewnętrznych niema tu mowy—występują wyłącznie i tylko siły zewnętrzne z przesunięciami. Tę cechę wyróżniającą twierdzenie Betti należy wyraźnie podkreślić, stanowi ona bowiem zaletę niesłychanie doniosłą. W wypadku działania tylko dwóch sił, rozpatrujemy zazwyczaj dla stanu pierwszego wartości P_1 i $Q_1 = 0$ wraz z odnośnemi przesunięciami p_1 i q_1 ; dla stanu drugiego odwrotnie $P_2 = 0$ i Q_2 z przesunięciami p_2 i q_2 . Na mocy twierdzenia Betti $P_1 p_2 = Q_2 q_1$. Gdy nadto obierzemy z góry $P_1 = Q_2$, to otrzymamy $p_2 = q_1$.

§ 14. **Zastosowania twierdzenia Betti.** Weźmy pod uwagę pręt (Księga II Rys. 42) obsadzony jednostronnie, drugostronnie obciążony zrazu siłą $P_1 = P$, a potem momentem $Q_2 = M$. Obie te siły wywołują ugięcie pręta, w obu wypadkach otrzymamy skrajne ugięcia pręta f_1 i f_2 oraz kąty θ_1 i θ_2 nachylenia końcowych stycznych odkształconej ku pierwotnej osi pręta. Na mocy twierdzenia Betti: $P f_2 = M \theta_1$, gdy nadto siłę P liczbowo uczynimy równą sile uogólnionej M , to wtedy otrzymamy jednakowe liczbowe wartości $f_2 = \theta_1$. Łatwo się o tem przekonać bezpośrednio, zważywszy że $f_2 = M l^2 : 2EJ$, a $\theta = P l^2 : 2EJ$. Weźmy nadto pod uwagę zresztą zupełnie dowolny przekrój poprzeczny O tego pręta w odległości ζ od osady. Przekrój O obniży się o η pod jarzmem siły P przyłożonej do swobodnego końca pręta, a styczna odkształconej pochyli się w punkcie O pod kątem θ_0 , gdy skrajny przekrój pręta obciążymy momentem M . Przesuńmy siłę P ponad ów przekrój O , a koniec swobodny pręta obniży się o η ; przenieśmy moment M w płaszczyznę przekroju O , a styczna końcowa odkształconej utworzy kąt θ_0 z pierwotną osią pręta. Wymaga tego twierdzenie Betti, to samo dadzą wzory § 24.

Jako drugi przykład bierzemy pod uwagę pręt oparty na dwóch podporach (Księga II Rys. 44). Przesuniemy siłę P z jej punktu uciepienia C w O_1 , a otrzymamy w C tę samą strzałkę ugięcia, jaka była poprzednio w O_1 .

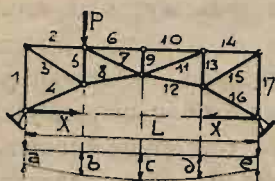
Zasada wzajemności oddaje nader cenne usługi w zastosowaniu do belek wieloprzęsłowych. W księdze drugiej rozpatrywaliśmy belkę dwuprzęsłową (Rys. 45), obciążoną siłą P pionową w odległości c od prawej podpory B . Odrzućmy podporę X i siłę P , do środka przekroju poprzednio podpartego przyłożmy siłę $X = 1$. Po odrzuceniu podpory X pręt stał się belką jednoprzęsłową statycznie wyznaczalną, możemy przeto z łatwością wyznaczyć ze wzorów ścisłych lub przybliżonych (Księga trzecia IX) strzałkę ugięcia g jedynej siły zewnętrznej $X = 1$ oraz ugię-

cia pręta f w przekroju, gdzie poprzednio działała siła P obecnie odrzucona. W danym wypadku obciążenie rzeczywiste pręta stanowią siły $P=P_1$ oraz odpór $X=Q_1$, jako jedyne siły zewnętrzne pręta pierwszego stanu równowagi. Dla stanu drugiego $P_2=0$, $Q_2=1$, oraz odnośne przesunięcia $p_2=f$ i $q_2=g$. Na mocy twierdzenia Betti $Pf + Xg = P_2p_1 + Q_2q_1 = 0p_1 + 1 \times 0 = 0$, ponieważ w założeniu niesprężystej podpory pośredniej X dla pierwszego stanu mieliśmy $q_1=0$. Stąd bezpośrednio $X = -Pf : g$. Wobec niewątpliwie stałej wartości $P : g$ odkształcona wyznaczona wzorem ścisłym, lub przybliżonym dla stanu drugiego da w skali $P : g$ wszystkie wartości odporu X dla poszczególnych położeń obciążenia P na belce. Odkształcona stanowi przeto tak zwaną linię wpływu siły P na odpór X , dającą nader cenne usługi przy rozpatrywaniu obciążenia ruchomego. W wypadku działania n sił pionowych P_i ($i = 1, 2 \dots n$) będziemy mieli niewątpliwie $X = -1/g \sum P_i f_i$, gdzie przez f_i oznaczyliśmy strzałki odkształconej, jaką daje pojedyncza siła $X=1$ przy odrzuceniu pośredniej podpory, wyznaczone dla punktów uciepienia sił P_i .

Gdybyśmy zamiast statycznie niewyznaczalnej X — chcieli określić moment odporowy panujący ponad podporą X , to w tym wypadku mielibyśmy dla stanu pierwszego $P_1=P$, $Q_1=\mu$, oraz $R_1=-\mu$, ponieważ płytka ponad podporą X obciążona jest obustronnie różnoskrętnymi momentami μ . Aby otrzymać stan drugi, należy rozciąć belkę przez środek owej płytki tuż nad podporą X i obciążyć obie powłoki przekroju rozciętego momentami $\mu=1$ i $\mu=-1$, różnoskrętnymi, odrzuciwszy siłę P . W ten sposób belka statycznie niewyznaczalna rozpada się na dwie statycznie wyznaczalne jednoprzęsłowe, obciążone jak belka (Rys. 43 książki drugiej). Zatem dla stanu drugiego będziemy mieli $P_2=0$, $Q_2=1$, $R_2=-1$ wraz z przesunięciami $p_2=f$, $q_2=1/3 \mu a : EI$, $r_2 = -1/3 \mu b : EI$, gdzie przez f oznaczyliśmy ugięcie w miejscu, gdzie dawniej działała siła P . W myśl twierdzenia Betti $Pf + \mu \times 1/3 \mu a : EI + (-\mu) (-1/3 \mu b : EI) = P_2p_1 + Q_2q_1 + R_2r_1 = 0p_1 + (\mu - \mu) \cdot \theta = 0$, gdzie przez θ oznaczyliśmy kąt pochylenia stycznej odkształconej belki nierozciętej ponad podporą X . Stąd mamy $\mu = -EI Pf : 1/3 (a + b) = -(EI : 3l) Pf$. W razie działania n sił P_i ($i = 1, 2 \dots n$) otrzymamy $\mu = -EI : 3l \sum P_i f_i$, gdzie przez f_i oznaczyliśmy przesunięcia sił P_i dla stanu drugiego.

W podobny sposób można wyznaczyć odpory pośrednie X, Y statycznie niewyznaczalne belki trójprzęsłowej (książka druga Rys. 50), obciążonej gdziekolwiek siłą pionową P . Dla określenia X, Y , bierzemy pod uwagę trzy stany równowagi trwałej — pierwszy istotny z dodatkowymi siłami XY , zastępującymi działanie podpór, drugi i trzeci bez podpór środkowych, a więc dla belki statycznie wyznaczalnej opartej na podporach: A rolkowej i B przegubowej. W drugim jedyną siłą zewnętrzną ma być $X=1$:

w trzecim $Y = 1$. Dla stanu II i III z łatwością wyznaczmy ze wzorów ścisłych, lub przybliżonych strzałki ugięcia w miejscach, gdzie przedtem tkwiły podpory oraz gdzie działała siła P . Zatem dla pierwszego $P_1 = P$, $Q_1 = X$, $R_1 = Y$, $p_1 = f$, $q_1 = o$, $r_1 = o$, dla drugiego $P_2 = O$, $Q_2 = 1$, $R_2 = O$, $p_2 = g$, $q_2 = h$, $r_2 = i$, wreszcie dla stanu trzeciego $P_3 = O$, $Q_3 = O$, $R_3 = 1$, $p_3 = k$, $q_3 = m$, $r_3 = n$. Na mocy twierdzenia Betti; dla stanów I i II mamy $Pg + Xh + Yi = Of + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$ w podobny sposób dla I i III otrzymamy: $Pk + Xm + Yn = O \cdot f + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$. Z tych dwóch równań wyznaczmy X, Y w postaci ułamków o mianownikach niezależnych ani od g ani od k , lecz tylko od stałych wartości h, i, m, n i tu więc z łatwością znajdziemy linję wpływu obciążenia ruchomego P na wartości X, Y . (Jako ostatni przykład rozpatrzmy ustrój mostowy (Rys. 5) oparty na dwóch podporach przegubowych, a więc statycznie niewyznaczalny, prócz bowiem odporów pionowych, które z łatwością znajdziemy z równań statyki, będziemy mieli nadto odpory poziome X , statycznie niewyznaczalne. Wyznaczamy X dla obciążenia, stałego lub ruchomego, pionowemi siłami P . Przy obciążeniu ruchomem należy wyznaczyć linję wpływu dla odporów X . W tym celu obciążamy kolejno górne węzły ustroju siłą pionową $P = 1$ i wyznaczamy odpowiednie wartości X , znacząc je na wykresie pod odpowiednimi węzłami. W ten sposób wyznaczony wykres służyć może dla wszelkiego P , da bowiem wartości X w skali $1 : P$. Zatem obciążmy jak na rysunku, węzeł 2—6 siłą $P = 1$ będzie to I stan równowagi ustroju. Dla stanu drugiego rozpatrujemy obciążenie siłami $X = 1$, działającymi na węzły podporowe, przyczem obie podpory odrzucamy, czyniąc w ten sposób ustrój statycznie wyznaczalnym. Pod obciążeniem sił $X = 1$ oba skrajne węzły podporowe zbliżą się ku sobie na h cm. Z wykresu Villiot'a z łatwością wyznaczmy przesunięcia pionowe a, b, c, d, e górnych węzłów ustroju dla stanu II, a wtedy na mocy twierdzenia Betti będziemy mogli napisać $Xh + 1b = 0$, stąd $X = -b : h$. Czynniki $1 : h$ ma niewątpliwie wartość stałą dla wszystkich węzłów, zatem wykres przesunięć a, b, c, d, e wyznaczy w skali $P : h$, wszystkie wartości X dla siły ruchomej P , kolejno obciążającej górne węzły ustroju. Jego krzywa stanowi szukaną linję wpływu ruchomego ciężaru P na odpór X statycznie niewyznaczalny.



Rys. 5.

Gdybyśmy ten sam ustrój oparli na prawej podporze przegubowej i lewej rolkowej, a nadto złączyli dolne przeguby ściągaczem poziomym, idącym po linii XX , to otrzymalibyśmy statyczną niewyznaczalność wewnętrzną, a to z powodu zbyt dużego dolnego pręta. Siły osiowe X tego pręta nie mogą być wyznaczone z równań statyki. I tu również rozpatru-

jemy obciążenie odkształcające, w postaci sił pionowych, działających na górne węzły. W wypadku obciążenia ruchomego — należy wykreślić linię wpływu dla X . W tym celu obciążamy kolejno wszystkie węzły górne siłą równą jedności. Towarzyszący każdemu z tych obciążeń stan równowagi trwałe nazywamy pierwszym. Pod jarzmem sił zewnętrznych pręt zbyteczny da wydłużenie $XL : EF$, gdzie przez L oznaczyliśmy długość ściągaacza, przez F jego stały przekrój. Drugi stan równowagi odkształconej otrzymamy po odrzuceniu obu podpór, usunięciu ściągaacza i obciążeniu dolnych skrajnych węzłów siłami $X = 1$, słowem będzie to stan drugi wyżej rozpatrywany. Zatem dla stanu pierwszego $P_1 = 1$, $Q_1 = X$ i $R_1 = -X$, a nadto niewątpliwie $q_1 = XL : EF$, oraz $r_1 = 0$ bierzemy bowiem wydłużenie ściągaacza względne — to jest zmianę odległości skrajnych dolnych węzłów. Dla stanu drugiego $P_2 = 0$, $Q_2 = 1$ i $R_2 = -1$ oraz po starciu $p_2 = b$, $q_2 = h$, $r_2 = 0$, zatem na mocy twierdzenia Betti możemy napisać $Xh + 1 \cdot b = 1 \cdot XL : EF$, stąd $X = -b : (h + L : EF)$. Mianownik wzoru otrzymanego jest stały bo niezależny od umiejscowienia siły P na węzłach górnych — a przeto wykres przesunięć a, b, c, d, e wyznaczy w skali $P : (h + L : EF)$ wszystkie wartości siły X dla siły P ruchomej, kolejno obciążającej górne węzły ustroju. I tu więc jego krzywa wyznaczy linię wpływu dla X .

§ 15. Twierdzenie Mohra. Weźmy pod uwagę ustrój wzorowo sprężysty, pozostający w równowadze pod jarzmem układu sił odkształcających P_i ($i=1, 2, \dots, n$). Na tle działania tych sił zrodził się układ sił wewnętrznych — naprężeń t_k ($k=1, 2, \dots, \infty$). Przesunięcia sił odkształcających oznaczamy przez p_i , odkształcenia, czyli przesunięcia sił wewnętrznych przez θ_k . Wobec istnienia trwałe równowagi ustroju odkształconego, możemy doń zastosować zasadę prac możliwych (virtuel) pisząc $P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \dots + P_n \delta p_n = t_1 \delta \theta_1 + t_2 \delta \theta_2 + \dots$ itd., gdzie warjacyjne przyrosty, mają oznaczać przesunięcia możliwe w danych warunkach obciążenia. W powyższem równaniu niema sprzeczności, bo siły odkształcające P_i równoważą układ wewnętrznych t_k , czynna praca pierwszych powinna przeto przejść w pracę drugich bierną, a więc różną co do znaku. Na mocy prawa zachowania energii, suma tych prac musi być równa zeru dla ciał sprężystych, wtedy bowiem praca czynna całkowicie przechodzi w pracę sprężystą naprężeń. Tylko co otrzymane równanie, aczkolwiek bezwzględnie ścisłe nie daje się stosować praktycznie wobec sumowania nieskończonej liczby składników $t_k \delta \theta_k$, może jednak oddać cenne usługi tam, gdzie to sumowanie nie sprawia zbyt trudności, a więc przedewszystkiem w wypadku ustroju złożonego z prętów prostych łączonych przegubowo. Gdy siły zewnętrzne działają tylko na przeguby — w prętach powstają siły osiowe R_k . Te siły zastępują układy naprężeń, panujące w prętach, dając te same wydłużenia $\delta r_k = \delta L_k$, gdzie przez L_k oznaczyliśmy długość danego pręta k , zatem dla m prętów

ustroju, będziemy mieli $\sum P_i \delta p_i = \sum R_k \delta r_k$, pierwszy znak sumy winien obejmować n sił odkształcających, drugi m sił w prętach. Tylko co wyprowadzony wzór ma zastosowanie rozliczne.

1-o. W wypadku ustroju prętowego o złączach przegubowych statycznie wyznaczalnego może służyć do wyznaczania sił R_k w prętach. Łatwo to udowodnić zważywszy, że w ustroju tego rodzaju wydłużenia poszczególnych prętów są zupełnie dowolne w pewnych granicach. Istotnie, skoro odrzucimy jeden z prętów, wtedy dwa sąsiednie trójkąty utworzą czworobok o niematerjalnej przekątnej w miejscu odrzuconego pręta, możemy więc, nie zmieniając reszty ustroju, skrzywić czworobok w sposób zupełnie dowolny i wstawić nowy pręt krótszy, lub dłuższy aż do pewnych granic, zależnych od stosunków boków sąsiednich. Stąd wniosek, że przyrosty δr_k , ustrojów prętowych przegubowych, statycznie wyznaczalnych są niezależne od siebie, a nadto w pewnych granicach zupełnie dowolne. Zatem na tle przyrostu δr obranego pręta pewne węzły ustroju przesuną się nieco, ujawniając przesunięcia δp węzłów przegubowych,—przesunięcia sił zewnętrznych P . Stąd na mocy twierdzenia Mohra $\sum P \delta p = R \delta r$, a przeto $R = + \sum P \delta p : \delta r$. Praktycznie przyrost warjacyjny δr nie daje się skutecznie jako znikomo mały, z łatwością jednak można zauważyć, że wszystkie δp muszą zachodzić proporcjonalnie do δr , co wprost wynika z założenia wzorowej sprężystości ustroju, możemy przeto zamiast δr , dać przyrost znikomo mały, skończony h i odpowiednio wykreślić lub trygonometrycznie wyznaczyć przyrosty Δp , a wtedy $R = \sum P \Delta p : h$.

To zastosowanie twierdzenia Mohra daje nader cenne wyniki w tych wypadkach, gdy zwykle sposoby statyki wykreślnej zawodzą.

2-o. Gdy ustrój wzorowo sprężysty przegubowo prętowy ma więzy lub pręty zbyteczne, dowolność wszelkich δr jest oczywiście niemożliwa, istnieje bowiem zawsze pewna liczba przyrostów δr , zależnych od pozostałych. Wobec zależności przyrostów δr , tylko co wyżej wskazany sposób rachunkowy zawodzi, trzeba więc nieco inaczej zastosować twierdzenie Mohra, aby wyznaczyć siły w prętach ustroju. Weźmy przedewszystkiem ustrój o jednym pręcie zbytecznym, siłę osiową tego pręta oznaczamy przez X , wyjmujemy go z przegubów i wzamian pręta odrzuconego dajemy na tych przegubach dwie siły zastępcze X i $-X$, zwiększając w ten sposób układ sił zewnętrznych P . Ten układ sił mianujemy pierwszym. Da on siły R w prętach; chcąc je wyznaczyć budujemy dwa wykresy Cremony: jeden dla sił P z którego wyznaczymy siły w prętach R^0 zależne wyłącznie od P , drugi zaś dla sił $X = -X = 1$. Ten ostatni wykres da siły w prętach R' . Budowa obu wykresów nie nastęrczy żadnych trudności, ponieważ po odrzuceniu pręta zbytecznego ustrój staje się statycznie wyznaczalnym. Zatem będziemy mieli dla stanu pierwszego układ sił w prętach $R = R^0 + X R'$, dających wydłużenie $\Delta r = (R^0 + X R') L : EF$, nadto wydłuże-

nie odrzuconego pręta zbytecznego $\Delta x = Xl : EF$, gdzie przez L i l oznaczyliśmy odpowiednio długości prętów, przez f i F ich stałe przekroje poprzeczne. Chcąc otrzymać drugi stan równowagi, zakładamy wszystkie siły $P=0$, odrzucamy pręt zbyteczny i obciążamy jego przeguby siłami $X = -X=1$. Będą to jedyne siły zewnętrzne układu drugiego. Dadzą one siły R' w prętach, które już przedtem wyznaczyliśmy za pomocą drugiego wykresu Cremony. W stosunku do sił układu II zewnętrznych X i $-X$ i wewnętrznych R' przyrosty Δr i Δx grają niewątpliwie rolę przesunięć możliwych, a nadto w założeniu wzorowej sprężystości ustroju, proporcjonalnych do nieskończenie małych przyrostów warjacyjnych δr i δx , co wprost wypływa z linjowych zależności przesunięć od sił; możemy przeto na mocy twierdzenia Mohra napisać $\Delta x = \Sigma R' \Delta r$ to jest inaczej jeszcze $Xl : Ef = \Sigma R' (R^0 + XR') L : EF$, stąd $X = \Sigma (R^0 R' L : EF) : [l : Ef + \Sigma (R'^2 L : EF)]$. Wrazie zbytecznej podpory niesprężystej — i jej odporu X , będziemy mieli $\Delta x = 0$, a zatem $X = \Sigma (R^0 R' L : EF) : \Sigma (R'^2 L : EF)$. Wreszcie dla kilku statycznie niewyznaczalnych $X, Y, Z \dots$ należy zbudować kolejno wykresy Cremony — jeden dla sił zewnętrznych P , drugi dla sił zastępczych $X=1$, trzeci dla $Y=1$, czwarty dla $Z=1$, i t. d. Te wykresy dadzą odpowiednie siły w prętach R^0, R', R'', R''' i t. d., a przeto dla stanu pierwszego, gdy siły zewnętrzne P działają łącznie z zastępczemi $X, Y, Z \dots$ będziemy mieli siły w prętach $R = R^0 + XR' + YR'' + ZR''' + \dots$ itd. I tu również budowa wykresów nie nastręczy żadnych trudności, ponieważ więzy zbyteczne odrzuciliśmy, uczyniliśmy przeto ustrój statycznie wyznaczalnym. Dla stanu drugiego czynimy wszystkie $P=0$, odrzucamy wszystkie więzy zbyteczne i obciążamy ustrój siłami $X = -X=1$. W ten sam sposób dla sił zastępczych $Y = -Y=1$ otrzymamy stan III, dla sił $Z = -Z=1$ — stan IV itd. W stosunku do tych układów sił odkształcających przyrosty Δr , przynależne do stanu I, będą grały rolę przesunięć możliwych i w założeniu wzorowej sprężystości ustroju — proporcjonalnych do δr , będziemy przeto mogli napisać na mocy twierdzenia Mohra, następujący szereg równań linjowych względem X, Y, Z , a mianowicie: $1 \cdot XL_x : E_x F_x = \Sigma R' [R^0 + XR' + YR'' + ZR''' + \dots] L : EF$, $1 \cdot YL_y : E_y F_y = \Sigma R'' [R^0 + XR' + YR'' + ZR''' + \dots] L : EF$, $1 \cdot ZL_z : E_z F_z = \Sigma R''' [R^0 + XR' + YR'' + ZR''' + \dots] L : EF$ itd., z których z łatwością wyznaczmy wszystkie statycznie niewyznaczalne.

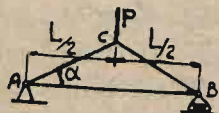
3-o. Po określeniu wszystkich statycznie niewyznaczalnych możemy wyznaczyć wydłużenia wszystkich prętów pod jarzmem sił osiowych R , i uwzględniając w ten sposób otrzymane długości i odkształcone prętów — otrzymać przesunięcia p przegubów na które działają siły zewnętrzne P . Ta droga jest dość uciążliwa i tu również twierdzenie Mohra szybciej prowadzi do celu. Jak wyżej zewnętrzne siły P wraz z wyznaczonemi zastępczemi $X, Y, Z \dots$ nazywamy układem I; chcąc dajmy na to określić przesunięcie p_k przegubu, gdzie działa siła P_k , rozpatrujemy układ drugi, obejmujący

mujący jedyną siłę $P_k=1$ zwykłą lub uogólnioną. Da ona siły w prętach R_k , które z łatwością wyznaczymy, odrzucając wszystkie więzy zbyteczne, słowem czyniąc ustrój statycznie wyznaczalnym. Nadto oznaczymy przez Δr wydłużenia prętów pod jarzmem sił osiowych R , układu, pierwszego, a zatem na mocy twierdzenia Mohra będziemy mieli $1 \cdot p_k = \sum R_k \Delta r$, co da szukaną wartość p_k .

Rozważania powyższe jaskrawo podkreślając doniosłość twierdzenia Mohr'a w stosunku do ustrojów prętowych przegubowych.

§ 16. Zastosowania twierdzenia Mohr'a.

1 o Bierzemy pod uwagę (Rys. 6) wiązarn najprostszego typu złożony z trzech prętów łączonych przegubowo $AC = CB$ i AB . Lewy dolny przegub oparty jest na podporze rolkowej, prawy na przegubowej. Na przegub górny C działa siła pionowa P . Wobec symetrii przekroju odpory pionowe $A = B = -\frac{1}{2}P$. Z wykresu Cremony z łatwością znajdziemy, że w dolnym przecię poziomym panować będzie siła osiowa $R_0 = \frac{1}{2}P \operatorname{ctg} \alpha$, dodatnia, a więc rozciągająca, w obu prętach górnych siła $R = -\frac{1}{2}P$:

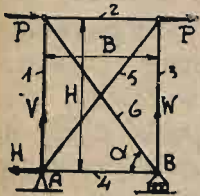


Rys. 6.

: $\sin \alpha$ ściskająca. Wyznamy te same siły, stosując twierdzenie Mohr'a, a nadto postawmy nieco szerzej całe to zagadnienie. Załóżmy, że trójkąt ABC stanowi część większego ustroju przegubowego, inaczej mówiąc, że z przegubów A i B rozchodzą się dalsze pręty ustroju, a pręty AC i $CB \neq AC$ dają przegub C obciążony siłą P skierowaną jakkolwiek. Wydłużmy jeden z prętów, dajmy na to BC o przyrost $h > 0$, a więc leżący na przedłużeniu osi BC poza przegubem C i odliczmy w kierunku strzałki zegara kąt ω pomiędzy kierunkiem przyrostu $h > 0$, a kierunkiem siły P , oraz $\varphi = BCA$ — kąt pochylenia obu prętów zbiegających się w C , liczony w tym samym kierunku od pręta wydłużonego. Promieniem $CB + h$ i AC zataczamy łuki — w przecięciu otrzymamy nowe położenie przegubu C' na tle przyrostu h . Proste rozważania geometryczne dadzą wartość przesunięcia bezwzględnego $CC' = h : \sin \varphi$. Rzut jego na kierunek siły P da przesunięcie $p = h \sin (\varphi - \omega) : \sin \varphi$. Zatem dla siły R osiowej pręta CB będziemy mieli w myśl twierdzenia Mohr'a $Rh = Pp = Ph \sin (\varphi - \omega) : \sin \varphi$; stąd $R = P \sin (\varphi - \omega) : \sin \varphi$. W danym wypadku dla górnego węzła $\omega = 270^\circ - \alpha$, $\varphi = 180^\circ - 2\alpha$, a więc $R = -\frac{1}{2}P : \sin \alpha$. W podobny sposób dla lewego dolnego węzła, gdzie siła zewnętrzna skierowana ku górze $A = \frac{1}{2}P$ mamy w stosunku do przyrostu $h > 0$ pręta poziomego $\omega = 90^\circ$, $\varphi = 360^\circ - \alpha$, stąd $R_0 = \frac{1}{2}P \operatorname{ctg} \alpha$.

2-o Weźmy pod uwagę ustrój ramowy (Rys. 7), złożony z sześciu prętów połączonych przegubowo. Dolne przeguby spoczywają na podporach: lewej przegubowej i prawej rolkowej. Na węzły górne działają siły

poziome P , skierowane na prawo. Te siły dają odpór poziomy H , oraz odpory pionowe V i W . Z równań statyki mamy dla sił poziomych $H + 2P = 0$, stąd $H = -2P$; ten odpór zatem działa po osi BA i jest skierowany odwrotnie do sił P . Równanie momentów względem punktu A da nam $2HP + WB = 0$, stąd $W = -2PH : B = -2Ptg \alpha$; nadto z równania sił pionowych $V + W = 0$; widzimy, że



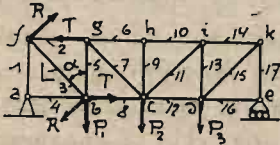
Rysunek 7.

V i W mają kierunki odwrotne: $W = 2Ptg \alpha$ działa cisnąco na ustrój, jako skierowane ku górze, $V = 2Ptg \alpha$ jest skierowane w dół. Rzut oka na rysunek od razu to uwypukli, siły bowiem P starają się unieść ustrój ponad podporę A i przycisnąć go do B , wywołują przeto sprzeczwy odwrotne. Te same wyniki otrzymamy jeszcze wyraźniej, prowadząc z B oś $BA X$ poziomą

i BY pionową w dół. W danym wypadku podwojona liczba węzłów $2 \times 4 - 3 = 5$; jeden pręt jest więc zbyteczny, dajmy na to № 5. Jego siła osiowa X stanowi jedyną statycznie niewyznaczalną ustroju. Odrzućmy ten pręt zbyteczny i zastąpmy jego działanie na przeguby siłami X ; wobec braku jakichkolwiek danych, kierujemy te siły ku sobie, inaczej mówiąc, zakładamy, że w pręcie № 5 panują siły osiowe rozciągające, tylko w tym bowiem wypadku pręt przeciwdziała siłami X , skierowanymi ku sobie po osi pręta. W ten sposób ustrój stał się statycznie wyznaczalnym, możemy przeto określić siły jego prętów R , budując dwa wykresy Cremony — lub też korzystając z poprzednio wyprowadzonego wzoru. Pierwszy wykres da siły w prętach zależnie od P, V, W, H , drugi od sił $X = 1$, gdy równocześnie $P = V = W = H = 0$. W ten sposób otrzymamy z pierwszego wykresu $R'_1 = 2Ptg \alpha, R'_2 = P; R'_3 = 0, R'_4 = 2P, R'_6 = -2P : \cos \alpha$. Drugi wykres da znowu $R''_1 = -\sin \alpha, R''_2 = -\cos \alpha, R''_3 = -\sin \alpha, R''_4 = -\cos \alpha, R''_6 = 1$. Zatem przy łącznym działaniu sił P i X siły osiowe będą $R_1 = 2Ptg \alpha - X \sin \alpha, R_2 = P - X \cos \alpha, R_3 = -X \sin \alpha, R_4 = 2P - X \cos \alpha, R_6 = -2P : \cos \alpha + X$, a nadto jeszcze pręt odrzucony będzie miał siłę osiową $-X = R_5$. Długości prętów w danym wypadku są: $L_1 = L_3 = H, L_2 = L_4 = Hctg \alpha, L_5 = L_6 = H : \sin \alpha$, ich wydłużenia pod jarzmem sił R_i będą $\Delta r_i = R_i L_i : E_i F_i$ ($i = 1, 2 \dots 6$), a przeto na mocy twierdzenia Mohr'a możemy napisać, że $1 \cdot \Delta r_5 = \Sigma R_i \cdot \Delta r_i$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4, 6$. Stąd bezpośrednio otrzymamy równanie dla statycznie niewyznaczalnej $1 \cdot (-XH : E_5 F_6 \sin \alpha) = -H \sin \alpha (2Ptg \alpha - X \sin \alpha) : E_1 F_1 - H \cos \alpha ctg \alpha (P - X \cos \alpha) : E_2 F_2 - H \sin \alpha (-X \sin \alpha) : E_3 F_3 - H \cos \alpha ctg \alpha (2P - X \cos \alpha) : E_4 F_4 + 1 \cdot H (-2P : \cos \alpha + X) : E_6 F_6 \sin \alpha$, z którego z łatwością wyznaczymy X w postaci: $X = P (2 \sin^3 \alpha : E_1 F_1 + \cos^3 \alpha : E_2 F_2 + 2 \cos^3 \alpha : E_4 F_4 + 2 : E_6 F_6) : (1 : E_5 F_5 + 1 : E_6 F_6 + \sin^3 \alpha : E_1 F_1 + \cos^3 \alpha : E_2 F_2 + \sin^3 \alpha : E_3 F_3 + \cos^3 \alpha : E_4 F_4) \cos \alpha$. Ponieważ ten sposób wyznaczone X jest oczywiście dodatnie, przeto obrany kierunek sił zastęp-

czych był właściwy, a pręt odrzucony istotnie rozciągany, co zresztą można było z góry przewidzieć.

3-o Jako ostatni przykład rozpatrzmy kratowy dźwigar mostowy (Rys. 8) oparty na dwóch podporach: lewej przegubowej i prawej rolkowej. Ten ustrój przy 10 węzłach przegubowych posiada 17 prętów jest przeto statycznie wyznaczalny wewnętrznie. Obciążenie dźwigara stanowią siły P_1, P_2, P_3 pionowe na dolnych węzłach. To obciążenie nazywamy pierwszym i wyznaczamy przynależne doń siły w prętach R , a następnie i wydłużenia prętów $\Delta r = RL:EF$. Aby wyznaczyć pionowe przesunięcie p_1 jednego z węzłów dajmy na to węzła b , gdzie działa siła P_1 rozpatrzmy obciążenie II, kiedy wszystkie siły zewnętrzne są równe zero, prócz jednej tylko $P_1 = 1$. Dla tego obciążenia, siły w prętach będą R' , zatem na mocy twierdzenia Mohr'a będziemy mieli: $1 \cdot p_1 = \Sigma R' \Delta r = p_1$.



Rys. 8.

Gdybyśmy, dajmy na to chcieli wyznaczyć pochylenie, czyli kąt obrotu Θ przekątni L pod jarzmem obciążenia pierwszego, to należałoby wprowadzić odpowiednią siłę uogólnioną, dla której owo Θ grałoby rolę przesunięcia. Tą siłą uogólnioną będzie oczywiście moment μ o parze sił R , przyłożonych do skrajnych przegubów przekątni. Należy więc uczynić siłę uogólnioną $\mu = RL$ równą jedności i dla tego obciążenia II wyznaczyć siły R'' w prętach. W myśl twierdzenia Mohr'a otrzymamy $1 \cdot \Theta = \Sigma R'' \Delta r = \Theta$. Gdybyśmy wreszcie chcieli wyznaczyć zmianę, jakiej przy odkształceniu uległ kąt α pomiędzy przekątną L a stójką 5 pod jarzmem obciążenia pierwszego, to należałoby wprowadzić aż dwie pary sił RL i TH , różnoskrętne o siłach R , działających na skrajne przeguby przekątni L i siłach T — czynnych w przegubach stójki H . Szukana zmiana $\Delta \alpha$ grałaby w tym wypadku rolę przesunięcia względem owej uogólnionej siły, złożonej z dwóch par $RL = TH = 1$. Zatem dla tego obciążenia drugiego należy wyznaczyć siły R''' w prętach dźwigara; w myśl twierdzenia Mohr'a będziemy mieli $1 \cdot \Delta \alpha = \Sigma R''' \Delta r = \Delta \alpha$.

4-o Wyżej zaznaczyliśmy, że twierdzenie Mohr'a daje dobre wyniki w zastosowaniu do ustrojów prętowych przegubowych, w stosunku do innych ustrojów twierdzenie to również może być stosowane, aczkolwiek prowadzi zazwyczaj do zawikłanych wzorów. Jako przykład weźmiemy pod uwagę belkę (księga druga Rys. 38). W jej bieżącym przekroju O , odległym o x od podpory A , panować będzie moment gnący $M = Xx + \frac{1}{2} px^2$, gdzie przez X oznaczyliśmy statycznie niewyznaczalny odpór A . Tej siły uogólnionej M odpowiada przesunięcie — kąt $d\varphi$ pochylenia obu ścianek równoległych płytki, a zastępujących powłoki przekroju poprzecznego w O . Z teorii zginania wiemy, że $d\varphi = Mdx : EI$. Układ sił uogólnionych M , łącznie z X stanowić będą obciążenie I dla danego wypadku. Odrzucmy

podporę A i wszystkie siły uogólnione M , a otrzymamy pręt jednostronnie osadzony. Swobodny koniec tego pręta obciążamy siłą $X=1$. Będzie to obciążenie II, da ono w poprzednio rozpatrywanym przekroju moment $1 \cdot x = M_1$. Oznaczmy nadto przez f przesunięcie siły X dla obciążenia I,

a otrzymamy według twierdzenia Mohr'a $1 \cdot f = \sum M_1 d\varphi = \int_0^l M_1 M dx : EI$.

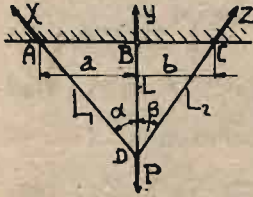
W danym wypadku w założeniu podpory niesprężystej $f = 0$, stąd mamy $\int_0^l (Xx + \frac{1}{2} \rho x^2) x dx : EI = 0$. Po wykonaniu całkowania $X = -$

$-\frac{3}{8} \rho l$. W wypadku kilku statycznie niewyznaczalnych $X, Y, Z \dots$ rozpatrujemy kolejno obciążenia II, gdy siły uogólnione $M=0$ a $X=1$, III gdy $Y=1$; IV gdy $z=1$ i t. d. Z szeregu równań wypisanych dla obciążeń I i II, I i III, I i IV i t. d. linjowych względem $X, Y, Z \dots$. Z łatwością wyznaczmy wszystkie statycznie niewyznaczalne. I w tym wypadku twierdzenie Mohr'a daje dobre wyniki, nastęrcza jednak dość poważne trudności rachunkowe.

§ 17. Twierdzenie Levy opiera się na czysto geometrycznych podstawach i stosuje do ustrojów prętowych statycznie nie wyznaczalnych łączonych przegubowo. Niech tego rodzaju ustrój zawiera k prętów nad liczbowych; odrzucimy pręty zbyteczne, a otrzymamy ustrój statycznie wyznaczalny. Odwrotnie chcąc powrócić do pierwotnego ustroju należy te k prętów ponownie założyć, łącząc odpowiednie przeguby. Stąd oczywisty wniosek, że długość każdego pręta zbytecznego zależy od prętów koniecznych, istnieje przeto k równań $f(L_1, L_2, \dots, L_n) = 0$ uzależniających czysto geometrycznie pierwotne nieodkształcone długości prętów nadliczbowych od pierwotnych wymiarów $n + k$ prętów pozostałych. Po obciążeniu przegubów ustroju siłami zewnętrznymi pojawiają się osiowe siły R w n prętach ustroju i spowodują wydłużenia $\Delta r = RL : EF$. Dla ustroju wzorowo sprężystego te wydłużenia Δr będą proporcjonalne do wydłużeń elementarnych δr , a przeto biorąc pełne różniczki równań $f=0$, otrzymamy k równań postaci $df = (\partial f : \partial L_1) dL_1 + (\partial f : \partial L_2) dL_2 + \dots + (\partial f : \partial L_n) dL_n = 0$, w których możemy przyrosty nieskończenie małe $dL = \delta r$ zastąpić proporcjonalnymi przyrostami skończonymi Δr . W ten sposób będziemy mieli k równań: $(\partial f : \partial L_1) R_1 L_1 : E_1 F_1 + (\partial f : \partial L_2) R_2 L_2 : E_2 F_2 + \dots + (\partial f : \partial L_n) R_n L_n : E_n F_n = 0$, z których wyznaczemy k sił R osiowych dla prętów nadliczbowych — statycznie niewyznaczalnych.

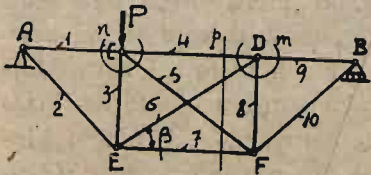
§ 18. Zastosowania twierdzenia Levy. W przegubach A, B, C sztywnej połąci górnej (Rys. 9) zawieszono pręty L_1, L, L_2 , i połączono u dołu wspólnym przegubem D . Środkowy pręt jest pionowy, dwa boczne pochylają się ku niemu pod kątami α i β . Wspólny przegub dźwiga siłę pio-

nową P . Oznaczmy siły osiowe prętów przez X, Y, Z , będą to zarazem odpory górnych przegubów ustroju. Równania statyki $X \cos \alpha + Y + Z \cos \beta = P$, $X \sin \alpha = Z \sin \beta$, zawierają jedną statycznie niewyznaczalną.



Rys. 9.

Chcąc ją określić, wyznaczamy geometryczny związek $f = 0$. Będzie to w danym wypadku: $a^2 + b^2 = L_1^2 - 2L^2 + L_2^2$. Stąd różniczkując otrzymamy $L_1 dL_1 - 2L dL + L_2 dL_2 = 0$, należy bowiem rozpatrywać a i b jako stałe wobec założenia bezwzględnej sztywności połączeń górnej. Dla ustroju rozpatrywanego, niewątpliwie wzorowo sprężystego przyrosty nieskończenie małe, możemy zastąpić proporcjonalnymi przyrostami skończonymi $\Delta L_1 = XL_1 : E_1 F_1$, $\Delta L = YL : EF$, $\Delta L_2 = ZL_2 : E_2 F_2$ zatem $XL_1^2 : E_1 F_1 - 2YL^2 : EF + ZL_2^2 : E_2 F_2 = 0$. W ten sposób wyznaczone równanie dołączone do równań statyki pozwoli określić istotne wartości X, Y, Z . W szczególnym wypadku ustroju symetrycznego: $L_1 = L_2 = L_0$, $a = b$, $F_1 = F_2 = F_0$, $\cos \alpha = \cos \beta = L : L_0$, $\sin \alpha = \sin \beta$, a przeto będziemy mieli układ trzech równań: $(X + Z) L : L_0 + Y = P$, $X = Z$, $(X + Z) L_0^2 : E_0 F_0 = 2YL^2 : EF$, skąd otrzymamy bezpośrednio $X = Z = P : [2L : L_0 + EFL_0^2 : E_0 F_0 L^2]$, $Y = P : [1 + 2E_0 F_0 L^3 : EFL_0^3]$. Jako drugi przykład rozpatrujemy belkę (Rys. 10) opartą na prawej podporze rolkowej i lewej przegubowej. Obciążenie belki stanowi siła pionowa P na węźle górnym C . Z równań statyki wyznaczmy oba odpory pionowe A i B , oraz odpór lewy poziomy najwidoczniej równy zeru, mimo to belka jest statycznie niewyznaczalna wewnątrz, zawiera bowiem jeden pręt nadlicz-



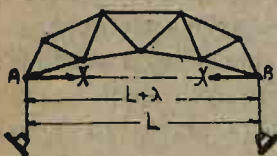
Rys. 10.

bowy. Łatwo się o tem przekonać: podwojona liczba węzłów $12 - 3$ daje 9, a nie 10 prętów jak to widzimy z rysunku. Wyznaczmy siły w prętach korzystając z twierdzenia Levy, Przedewszystkiem wyznaczamy odpory A i B z równań momentów względem podpór A i B . Niech L_0 oznacza całkowitą długość belki, zatem będziemy mieli $A = -P(L_4 + L_9) : L_0$ oraz $B = -PL_1 : L_0$. Oba odpory są skierowane ku górze. Budując wykresy Cremony, lub też stosując wzór ustalony w § 16 z łatwością wyznaczamy siły osiowe R_1, R_2, R_9 i R_{10} , dalej jednak tą drogą pójść nie będziemy mogli ze względu na obecność nadliczbowego pręta. Prowadzimy przeto pionowy przekrój p , odcinający lewą część belki. Jej działanie zastępujemy siłami osiowymi R_4, R_5, R_6 i R_7 , skierowanymi dajmy na to nazewnątrz prętów rozciętych. Równania momentów wypisane względem punktów F i D , dadzą po uwzględnieniu kierunków $R_4 H + R_6 H \cos \beta + BL_9 = 0$, oraz $BL_9 - R_7 H - R_9 H \cos \beta = 0$. Trzecie równanie otrzymamy rzucając na DF siły osiowe

prętów rozciętych: $-R_5 \sin \beta + R_6 \sin \beta - B = 0$. Pozostałe dwa równania będziemy mieli, rzucając na kierunek DE siły zbiegające się w węzłach C i D . Będą to. $R_8 + R_6 \sin \beta = 0$ oraz $P + R_3 + R_5 \sin \beta = 0$. Tyle da nam statyka; brakujące równanie możemy otrzymać na mocy twierdzenia Levy, zważywszy, że dla środkowego kwadratu $L_5^2 + L_6^2 = L_3^2 + L_4^2 + L_7^2 + L_8^2$. Stąd różniczkując otrzymamy: $L_5 dL_5 + L_6 dL_6 = L_3 dL_3 + L_4 dL_4 + L_7 dL_7 + L_8 dL_8$, gdzie zamiast przyrostów nieskończone małych możemy podstawić przyrosty skończone $RL : EF$ proporcjonalne do dL , ustrój bowiem jako przegubowo prętowy jest wzorowo sprężysty. Oznaczmy $L_3 = L_8 = H$, $L_4 = L_7 = K$, $L_5 = L_6 = M$, a wtedy $M^2 [R_5 : E_5 F_5 + R_6 : E_6 F_6] = H^2 [R_3 : E_3 F_3 + R_8 : E_8 F_8] + K^2 [R_4 : E_4 F_4 + R_7 : E_7 F_7]$. Z tych równań wyznaczmy pozostałe siły osiowe $R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8$.

§ 19. Naprężenia wtórne ustrojów statycznie niewyznaczalnych.

Wyżej udowodniliśmy, że w ustrojach statycznie wyznaczalnych długość jakiegokolwiek pręta nie zależy od wymiarów prętów pozostałych, a przeto pewna w granicach możliwości zawarta zmiana długości tego pręta nie może wywołać naprężeń w innych prętach ustroju. Inaczej rzecz się ma w ustrojach statycznie niewyznaczalnych, gdzie ogniwa są powiązane pomiędzy sobą w ten lub inny sposób. Tu każdy pręt nadliczbowy musi mieć wymiar ściśle określony, inaczej bowiem nie mógłby łączyć przegubów ustroju statycznie wyznaczalnego. Trzebaby uprzednio cały ustrój odkształcić odpowiednio, aby założyć pręt nadliczbowy niedokładnych wymiarów. Stąd prosty wniosek, że pręty nadliczbowe, o ile nie są ściśle dopasowane wywołują odkształcenia pewnych prętów ustroju, a co za tem idzie, rodzą w nich naprężenia dodatkowe *wtórne*. Wiązar, dajmy na to, oparty na dwóch podporach przegubowych, winien ściśle trzymać miarę — rozstawienia obu podpór, inaczej bowiem już przy ustawianiu na podporach ulegnie odkształceniu, zanim nań poczną działać siły zewnętrzne obciążenia. Weźmy jako przykład *sierpownicę* o rozpiętości węzłów dolnych $AB = L + \lambda$ nieco większej od rozstawienia podpór przegubowych — nieruchomych. Ten ustrój (Rys. 11) nie da się ustawić na podporach bez



Rys. 11.

uprzedniego ściśnięcia siłami X poziomymi, z góry tak dobranymi, aby skróciły rozpiętość sierpownicy o λ . Oznaczmy przez R' siły w prętach ustroju obciążonego siłami $X = 1$. Układ sił R' wyznaczyny z łatwością budując wykresy Cremony, odrazu bowiem widać z rysunku, że sierpownica jest statycznie wyznaczalna wewnętrznie. Zatem dla

sił X różnych od jedności powstaną w prętach siły osiowe $R = XR'$, a praca sprężysta całego ustroju będzie $\Pi = \frac{1}{2} \sum X^2 R'^2 : EF$, gdzie sumo-

waniem należy objąć wszystkie pręty. Stąd na mocy drugiego twierdzenia Castigliano $\lambda = \partial \Pi : \partial X = \Sigma X R'^2 l : EF$, ponieważ λ gra rolę przesunięcia siły X . Z tego równania z łatwością wyznaczmy wartość X odpowiadającą danej różnicy λ .

Ta sama sierpownica ze ściągaczem AB stanowi urządzenie statycznie niewyznaczalne wewnątrznie. Długość jej pręta nadliczbowego AB , musi być ściśle dopasowana do rozpiętości urządzenia. Gdyby pręt AB był o λ zbyt krótki to należałoby przed założeniem ściągacza — uprzednio ścisnąć sierpownicę siłami X , z góry tak dobranymi, aby rozpiętość AB zmalała pod ich jarzmem o λ . Dopiero wtedy możnaby założyć ściągacz, poczem siły ściskające X usunąć, jako już zgoła zbyteczne. W ten sposób odkształcony wiązark nie pozostanie w równowadze — będzie się bowiem odkształcał sprężysto w odwrotnym kierunku dopóty, póki na tle pewnego wydłużenia Δ ściągacza nie zapanuje nowy stan równowagi urządzenia. W ten sposób wiązark nie powróci do stanu pierwotnego, bo na tle wydłużenia Δ ściągacza, zrodzą się siły X_0 , utrzymujące sierpownicę w stanie naprężonym, a przeto odkształcenie λ urządzenia nie zniknie całkowicie, jeno zmaleje o Δ . Inaczej mówiąc, pierwotne przymusowe ściśnięcie wiązarki częściowo pokryje się wydłużeniem ściągacza, pozostanie zaś jego część $\omega = \lambda - \Delta$. W danym wypadku praca sprężysta wiązarki pod jarzmem sił X_0 , dających siły osiowe $X_0 R'$ w prętach, wyraża się w postaci $\Pi_0 = \frac{1}{2} \Sigma X_0^2 R'^2 l : EF$, praca sprężysta ściągacza będzie $\Pi_s = X_0^2 L : 2E_0 F_0$, zatem na mocy drugiego twierdzenia Castigliano $\Delta = \partial \Pi_s : \partial X_0 = X_0 L : E_0 F_0$ oraz $\omega = \partial \Pi_0 : \partial X_0 = \Sigma X_0 R'^2 l : EF$, stąd ostatecznie $\lambda = \omega + \Delta = X_0 L : E_0 F_0 + \Sigma X_0 R'^2 l : EF$. Z tego wzoru z łatwością wyznaczmy wartość X_0 , odpowiadającą danemu λ , a następnie siły osiowe $X_0 R'$, jakie powstaną w sierpownicy po założeniu ściągacza, a więc jeszcze przed obciążeniem właściwym. Tego rodzaju naprężenia nie mogą oczywiście powstawać w urządzeniach statycznie wyznaczalnych. To też urządzenia statycznie niewyznaczalne wymagają wykonania znacznie staranniejszego, a zwłaszcza niesłychanie dokładnej zbiórki. Każdy błąd, lub drobna usterka dają nieraz dość znaczne naprężenia wtórne, stąd pewna niechęć do urządzeń statycznie niewyznaczalnych, wyrażna zwłaszcza u domorosłych wytrawnych konstruktorów, nieraz zresztą oparta na nieznajomości powyżej wyłożonych twierdzeń.

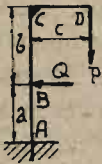
W podobny sposób powstają w urządzeniach statycznie niewyznaczalnych naprężenia wtórne na tle zmian temperatury poszczególnych prętów, lub całego urządzenia. Aby to udowodnić powróćmy do naszego przykładu i założymy, że temperatura wszystkich prętów sierpownicy wzrosła o t^0 , każdy więc pręt otrzyma przyrost długości $\alpha_0 t^0$, a cała rozpiętość — $\alpha_0 L t^0$. W obu wzorach α_0 oznacza współczynnik rozszerzalności cieplikowej. Nieruchome podpory stają temu na przeszkodzie, zmuszając wiązark do zachowania rozpiętości pierwotnej. Ten sprzeciw podpór rodzi siły X poziome, a z niemi

siły osiowe $R = R'X$ w prętach. Łatwo to udowodnić. Rozgrzany wiązark rozszerza się i ciśnię na podpory — wywołując w nich sprzecznię X poziomy, wszelki bowiem odpór pionowy, jako niezrównoważony nie może istnieć w danym wypadku. Stąd praca sprężysta ustroju $\Pi = \frac{1}{2} \Sigma X^2 R'^2 l : EF$. Gdyby ustrój wyskoczył nagle z podpór, to jego rozpiętość AB wzrosłaby znową o $\alpha_0 Lt$, i należałoby go ścisnąć o ten przyrost, aby móc ponownie ustawić na podporach. Zatem $\alpha_0 Lt$ gra tu rolę przesunięcia siły X , i na mocy twierdzenia Castigliano: $\alpha_0 Lt = \partial \Pi : \partial X = \Sigma X R'^2 l : EF$, stąd wyznaczymy z łatwością X , a następnie i siły osiowe $R = R'X$ prętów, ustroju ogrzanego o t^0 . Godzi się jednak zaznaczyć, że tego rodzaju jednostajne rozgrzanie lub oziębienie wiązarki rzadko kiedy zachodzi istotnie. Zazwyczaj rozgrzewa się jeno pewna gromada prętów, a czasem nawet tylko jedno ogniwo ustroju. W wypadku rozgrzania się pręta nadliczbowego w pozostałych powstają naprężenia wtórne, zupełnie tak samo jak przy zakładaniu źle dopasowanego pręta zbytecznego. Ogrzany pręt jest zbyt długi — trzeba odpowiednio rozsunąć przeguby o $\delta = \alpha_0 Lt$, działając siłami X_0 w kierunku osi owego pręta. Wtedy dopiero można założyć pręt ogrzany, a siły X_0 usunąć jako zbyteczne. Przeguby rozsunięte nie pozostaną jednak w równowadze. Ustrój będzie się odkształcał w kierunku odwrotnym dopóki nie ustali się ostateczny stan trwałej równowagi, na tle odpowiedniego wydłużenia ujemnego δ' , przynależnego do ostatecznej wartości sił osiowych X' w pręcie nagrzanym. W ten sposób odkształcenie $\alpha_0 Lt$ nie zniknie całkowicie pozostanie jego część trwała $\Delta = \delta - \delta'$, odpowiadająca jego siłom ciskającym X' i nagrzanemu. Praca sprężysta i w danym wypadku będzie $\Pi_v = \Sigma \frac{1}{2} X'^2 R'^2 l : EF$ dla całego ustroju, a dla pręta nagrzanego $\Pi_n = X'^2 L : 2EF_0$, stąd na mocy Castigliano $\delta' = \partial \Pi_v : \partial X' = \Sigma X' R'^2 l : EF$, $\Delta = X' L : EF_0$, a przeto $\delta = \Delta + \delta' = \Sigma X' R'^2 l : EF + X' L : EF_0 = \alpha_0 Lt$. Z tego wzoru z łatwością obliczymy X' , a zatem i naprężenia wtórne prętów ustroju: $R = X'R'$ powstałe przez nagrzanie jednego z prętów. Zazwyczaj nagrzanemu ulega cała gromada prętów. Weźmy pod uwagę ustrój statycznie niewyznaczalny, pozostający pod jarzmem układu sił odkształcających P . Wzajemian odpór i prętów zbytecznych wprowadzamy siły zastępcze X, Y, \dots, Z , czyniąc go statycznie wyznaczalnym. Siły w prętach tego ustroju wyznaczają się więc z łatwością z wykresu Cremony w postaci $R = R^0 + R'X + R''Y + R'''Z + \dots$, a wydłużenia prętów przy łącznym działaniu tych sił i nadwyżki temperatury t będą odpowiednio $\delta = Rl : EF + \alpha_0 Lt$. To obciążenie zwiemy pierwszym. Dla drugiego odrzucamy siły zewnętrzne i zastępcze i zamiast jednej z tych ostatnich, dajmy na to X , wprowadzamy siłę równą jedności. Obciążenie drugie da niewątpliwie siły R' w prętach ustroju, zatem na mocy twierdzenia Mohr'a : $1[XL : EF_0 + \alpha_0 Lt] = \Sigma R' \delta$, gdzie wyraz w nawiasach oznacza wydłużenie odrzuconego pręta zbytecznego, powstałe na tle działania sił X i wzrostu temperatury t .

Czyniąc kolejno $X=1$, $Y=1$, $Z=1$ i t. d. wypiszemy cały szereg równań tego typu, wyznaczymy z nich X, Y, Z, \dots siły osiowe R w prętach i wreszcie naprężenia wtórne ustroju.

§ 20. Przykłady i ćwiczenia.

1-o *Słup* (Rys. 12) pionowy osadzony w dolnym przekroju, dźwiga siłę pionową P , na końcu połaci górnej sztywnie z nim połączonej. W pośrednim punkcie słup podparto. Wyznaczyć poziomy nacisk na podpórę niesprężystą B . W dolnym przekroju osadczym A panować będą odpory pionowy V , poziomy H i moment osadczy μ . Sprzeciw podpory w B poziomy oznaczamy przez Q . Z równań statyki $P+V=0$, $Q+H=0$, $P(a+b)+Qa+\mu=0$, wyznaczmy dajmy na to V, H, μ , pozostanie statycznie niewyznaczalną Q . Oznaczmy sztywność i przekrój słupa EI i F , połaci górnej



Rysunek 12.

przez $E_0 I_0$ i F_0 . W przekrojach połaci górnej odległych o z od swobodnego przekroju D panować będą momenty gnące zmienne Pz , i siły tnące P , które, jak zwykle pominiemy. W przekrojach górnych słupa ponad B będziemy mieli momenty gnące stałe Pc i siłę osiową stałą cisnącą P , a nadto dla przekrojów leżących poniżej podpory B w odległości X od B dodatkowo jeszcze i moment zmienny $+QX$. Praca sprężysta ustroju $\Pi = \int_0^c P^2 Z^2 dz$:

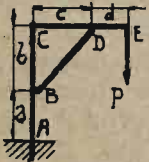
$$: 2E_0 I_0 + P^2 c^2 b_0 : 2EI + P^2(a+b) : 2FE + \int_0^a [Pc + Qx]^2 dx : 2EF. \text{ Na mocy Castigliano II, w założeniu podpory } B \text{ niesprężystej mamy } \partial \Pi : \partial Q =$$

$$= \int_0^a [Pc + Qx] x dx : EI = 0, \text{ stąd } Q = -\frac{1}{2} Pc : a.$$

Tylko co otrzymany wzór nie jest ścisły, pominieliśmy bowiem przy rozważaniach powyższych zależność momentu gnącego siły P od strzałki ugięcia słupa. Chcąc trzymać wyniki dokładne dzielimy słup na dwie połacie obciążenia: górną CB i dolną BA . W obu połaciach słup pracuje na gięcie mimośrodkowe. Dla górnej $EI\eta'' = P(c - \eta)$, dla dolnej $EI\eta'' = P(c - \eta) + Q(a - \zeta)$, przyczem oś $A\zeta$ układamy po nieodkształconej słupa, a $A\eta$ kierujemy na prawo. Całki równań powyższych będą: $\eta = A \sin n\zeta + B \cos n\zeta + c$, oraz $\eta = A' \sin n\zeta + B' \cos n\zeta + (Pc + Qa - Q\zeta) : P$. Cztery stałe całkowania i niewiadomy odpór Q wyznaczymy z warunków zamocowania. W danym wypadku przy $\zeta = a$, a więc na granicy obu połaci mamy $A \sin na + B \cos na + c = A' \sin na + B' \cos na + c = 0$ oraz $n A \sin na - n B \cos na = n A' \cos na - n B' \sin na - Q : P$. Nadto dla przeproju osadczego gdzie $\zeta = 0$ mamy $\eta = B' + (Pc + Qa) : P = 0$ oraz $\eta' = nA' - Q : P = 0$. Stąd $B' = -(Pc + Qa) : P$, $A' = Q : Pn$. Po podstawieniu w drugie równanie warunkowe otrzymamy $Q = -(Pc : a) (1 - \cos na) : (\sin na : na - \cos na)$, gdzie niewątpliwie $n^2 = P : EI$. Z otrzymanego wzoru natychmiast spozrzec się daie, że ustrój nie jest wzorowo sprężysty, zatem nie mielibyśmy prawa stosować Castigliano II.

2-o *Żoraw wspornikowy* składa się ze słupa AC osadzonego w przekroju dolnym, połaci górnej CE , połączonej ze słupem przegubowo w C , oraz ogniwa BD , przegubowo uciepionego w B do słupa AC i w D do połaci górnej (Rys. 13). W skrajnym przekroju E połaci górnej działa siła

pionowa P . Znaleźć jej przesunięcie pionowe w założeniu jednakowego przekroju stałego i tego samego tworzywa dla wszystkich ogniw ustroju.



Rys. 13

Wyodrębnijmy myślowo pręt górnej połaci, zastępując działanie na przegubach C i D , pominiętych prętów AC i DB siłami pionowymi C i D oraz poziomymi H i K . Wobec trwałej równowagi górnego pręta będziemy mieli $C + D + P = 0$, $H + K = 0$, oraz w stosunku do punktu C równanie momentów: $P(c + d) - Dc = 0$. Stąd bezpośrednio $D = -P(c + d) : c$, $C = -P - D = Pd : c$. Zatem sprzeciw C jest skierowany tak jak siła P , sprzeciw D do góry. Nadto $H = K$. Obciążenie pręta BD , jako

obustronnie połączonego przegubowo może być tylko osiowe. Panować w nim będzie siła cisnąca S , wypadkowa składowych $-D$ i $-K$, skierowana po osi, zatem oznaczywszy przez α kąt CBD , będziemy mieli $D = -S \cos \alpha$, $H = S \sin \alpha$, oraz $H = D \operatorname{tg} \alpha$. Stąd wnioskujemy, że H jest skierowane ku E , stanowi przeto obciążenie rozciągające części CD połaci górnej. Zatem $H = P(c + d) \operatorname{tg} \alpha : c$, oraz $S = -P(c + d) : c \cos \alpha$. Z kolei wyodrębnijmy myślowo pręt AC , zastępując działanie na przegubach C i B pominiętych prętów CE i BD odpowiednimi siłami. Na przegub górny będzie działała siła pionowa C skierowana ku górze, rozciągająca część słupa CB , oraz siła pozioma H skierowana ku E . Pod jarzmem tej siły nastąpi zginanie pręta. Na przegub B działać będzie pionowo siła $D = S \cos \alpha$ skierowana ku dołowi, oraz pozioma siła H — w lewo. Dolna część pręta będzie przeto obciążona osiowo siłami C i D , nadto jej obciążenie gnące stanowią będą siły H , obciążające przegub B i C . W części ED połaci górnej, w przekroju odległym o x od E , panować będzie moment gnący Px , w przekroju dalszej jej części DC , odległym o x od C — moment gnący $Pdx : c$ oraz siła osiowa $P(c + d) \operatorname{tg} \alpha : c = P(c + d) c : cb = P(c + d) : b$. W górnej części CB słupa, w przekroju odległym o x od C — panować będzie moment gnący $Hx = P(c + d) x : b$ oraz siła osiowa $Pd : c$. W ogniwie BD panować będzie siła osiowa $S = H : \sin \alpha = H \sqrt{b^2 + c^2} : c = P(c + d) \sqrt{b^2 + c^2} : b$. Wreszcie w części dolnej BA słupa, w przekroju odległym o x od przegubu B , będziemy mieli moment gnący $H(b + x - x) = Hb = P(c + d)$, stałą oraz siłę osiową cisnącą $D + C = -P(c + d) : c + Pd : c = -P$. Stąd praca sprężysta:

$$\Pi = \int_0^d P^2 x^2 dx : 2EI + \int_0^c P^2 d^2 x^2 dx : 2c^2 EJ + P^2 (c + d)^2 c : 2b^2 EF + \int_0^b P^2 (c + d)^2 x^2 dx : 2b^2 EI + P^2 d^2 b : 2c^2 EF + P^2 (c + d)^2 (b^2 + c^2) \sqrt{b^2 + c^2} : 2b^2 EF + P^2 (c + d)^2 a : 2EJ + P^2 a : 2EF.$$

Na mocy Castigliano II otrzymamy przesunięcie siły P w postaci $p = \partial \Pi : \partial P$. W szczególnym wypadku gdy $d = c = b = a$, będziemy mieli pomijając pracę sił osiowych, zazwyczaj nader nieznaczną w stosunku do pracy momentów gnących, $\Pi = 3P^2 a^3 : EI$, stąd $p = 6Pa^3 : EJ$.

3-o *Wielobok przegubowy* (Rys. 14) podparto w jednym z przegubów i obciążono w środkowym przegubie siłą P pionowo działającą w kierunku jednego z prętów wewnętrznych. Wyznaczyć siły w prętach w założeniu jednakowego stałego przekroju i tego samego tworzywa wszystkich prętów. W danym wypadku podwojona liczba węzłów mniej trzy daje o je-

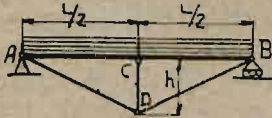
den pręt za mało, niezależnie od liczby boków zewnętrznych. Jeden z prętów dajmy na to № 16 jest nadliczbowy, a jego siła osiowa X — statycznie niewyznaczalna. Odrzucmy go, dając obustronnie przegubom siły zastępcze X . Z wykresu Cremony, lub wprost ze wzoru podanego w § 16, z łatwością się przekonamy, że we wszystkich prętach zewnętrznych panować będzie ta sama siła osiowa X . W prętach wewnętrznych będziemy mieli również jednakowe siły osiowe Y . Chcąc je wyznaczyć w zależności od X oznaczamy przez n liczbę prętów zewnętrznych — (na rysunku osiem), proste rozważania geometryczne dadzą $Y = -2X \sin \pi/n$ dla wszystkich prętów wewnętrznych prócz jednego, obciążo-



Rys. 14.

nego dodatkowo sprzeciwem P podpory. W tym pręcie będziemy mieli siłę osiową $P - 2X \sin \pi/n$. Oznaczmy przez r długość pręta wewnętrznego, długość zewnętrznego będzie $2R \sin \pi/n$. Stąd praca sprężysta ustroju $U = nX^2 \cdot 2R \sin \pi/n : 2EI + (n-1) 4X^2 \sin^2 \pi/n R : 2EI + (P - 2X \sin \pi/n)^2 R : 2EI$, oraz na mocy twierdzenia Menabrea: $\partial U : \partial X = 0$ co po skróceniu przez $2R \sin \pi/n : EI$ da $X = P : n (1 + 2 \sin \pi/n)$.

4-o. *Belka* podparta na podporach przegubowej i rolkowej (Rys. 15) dźwiga na całej swej długości L obciążenie jednostajne p kg. na centymetr bieżący. W środkowym przekroju belki uczepiono przegubowo słupek CD pionowy, połączony również przegubowo prętami AD i DB z przegubami podpór. Wysokość słupka oznaczamy przez h . Wyznamy od-



Rys. 15.

pory z równań statyki rozpatrując ustrój jako całość. Dla sił pionowych otrzymamy $A + B + pL = 0$, poziomy odpór w A jest niewątpliwie równy zero, z równania momentów względem punktu B mamy $AL + \frac{1}{2} pL^2 = 0$, stąd $A = B = -\frac{1}{2} pL = -\frac{1}{2} P$. Ze względu na ciągłość górnej belki nie możemy zastosować wykresu Cremony do węzła A — inaczej mówiąc ustrój jest statycznie niewyznaczalny. Oznaczamy siłę osiową słupka h przez $-X$, kąt CAD przez α . Z wykresu Cremony, lub ze wzoru § 16 z łatwością otrzymamy dla prętów AD i BD siły osiowe $X : 2 \sin \alpha$. Zatem po odrzuceniu dolnego wzmocnienia belki należy w przegubach A, B i C dać zastępcze siły. W ten sposób w przegubie środkowym otrzymamy siłę pionową X , skierowaną do góry, w przegubach A i B składowe poziome ciśnące $-X \cos \alpha : 2 \sin \alpha = -X : 2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} XL : h$ oraz pionowe $X : 2$ skierowane w dół. W przekroju poprzecznym górnej belki w odległości z od A będzie panował moment gnący $M = \frac{1}{2} (X - pl) z + \frac{1}{2} pz^2$ i siła ciśnąca $-\frac{1}{2} XL : h$. Wobec zupełnej symetrii obciążenia

praca sprężysta górnej belki będzie $2 \int_0^{L/2} M^2 dz : 2EI + (\frac{1}{2} XL : h)^2 L : 2EI$

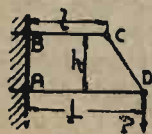
Pracę sprężystą prętów bocznych otrzymamy w postaci $2 (X : 2 \sin \alpha)^2 L : 4E_1 F_1 \cos \alpha$, dla pręta pionowego $X^2 h : 2E_0 F_0$. Suma tych prac da pracę sprężystą ustroju. Stosując twierdzenie Menabrea, otrzymamy $\partial U : \partial X =$

$$= 1/EI \int_0^{L/2} [\frac{1}{2} (X - pl) z + \frac{1}{2} pz^2]^2 dz + XL^3 : 4EFh^2 + XL : 4E_1 F_1 \sin^2$$

$\alpha \cos \alpha + Xh : E_0 F_0 = 0$. Z tego wzoru wyznaczmy X , zważywszy że $\sin \alpha = h : l, \cos \alpha = L : 2l$, gdzie $l^2 = h^2 + \frac{1}{4} L^2$.

5-o. *Wspornik* złożony z dwóch prętów BC i AD (Rys. 16), osadzonych w murze niesprężystym i połączonych przegubowo prętym CD , dźwiga

w dolnym przegubie siłę pionową P . Oznaczmy przez X siłę osiową pręta CD : siła X stanowi jedyne obciążenie tego pręta jako przegubowego. Po odrzuceniu pręta CD należy w górnym przegubie C przyłożyć siły X o składowych: poziomej rozciągającej $X \cos \alpha$ i pionowej, skierowanej w dół



Rys. 16.

$X \sin \alpha$, przyчем przez α oznaczyliśmy kąt ADC . Druga zastępcza siła X w dolnym przegubie da składowe: poziomą ściskającą $X \cos \alpha$ i pionową $X \sin \alpha$ skierowaną do góry. Zatem w przekrojach prętów poziomych odległych z od przegubów C i D będą odpowiednio panowały momenty gnące $(P - X \sin \alpha)z$, a nadto siły osiowe $X \cos \alpha$. Pra-

ca sprężysta ustroju będzie: $\Pi = \int_0^l X^2 z^2 \sin^2 \alpha dz + 2 E_1 I_1 +$

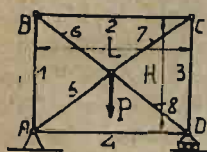
$$+ \int_0^L (P - X \sin \alpha)^2 z^2 dz + 2 E_2 I_2 + X^2 \cos^2 \alpha l + 2 E_1 F_1 + X^2 \cos^2 \alpha L + 2 E_2 F_2 + X \lambda : 2 E_0 F_0$$

gdzie $\lambda^2 = h^2 + (L - l)^2$. W myśl twierdzenia Menabrea $\partial \Pi : \partial X =$

$$= \int_0^l X \sin^2 \alpha z^2 dz : E_1 I_1 - \int_0^L (P - X \sin \alpha) \sin \alpha z^2 dz : E_2 I_2 + X \cos^2 \alpha l : E_1 F_1 +$$

$$+ X \cos^2 \alpha L : E_2 F_2 + X \lambda : E_0 F_0, \text{ stąd z łatwością wyznaczmy } X.$$

6-o Rama spoczywa na dwóch podporach przegubowej i rolkowej (Rys. 17). Złożona jest z prętów łączonych przegubowo—czterech zewnętrznych, stanowiących prostokąt $L \times H$ i czterech wewnętrznych, połączonych w środkowym przegubie, gdzie działa siła pionowa P . Ze względu na symetrię obciążenia oba odpory pionowe $A = B = -\frac{1}{2}P$, a nadto niewątpliwie odpór poziomy w A ma wartość zerową. Ustrój jest statycznie



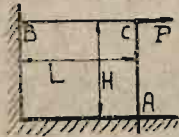
Rys. 17

niewyznaczalny wewnętrznie, jako, że podwojona liczba węzłów $= 10 - 3 = 7$ daje o jeden pręt za mało. Nazwijmy przez X siłę osiową w przecie nadliczbowym dajmy na to dolnym AD i w założeniu jednakowego stałego przekroju i tego samego tworzywa dla wszystkich prętów, wyznaczmy siły w prętach. W tym celu odrzucimy pręt nadliczbowy AO i w jego przegubach przyłożmy siły zastępcze $+X$ skierowane nazewnątrz po

osi pręta usuniętego. Z wykresu Cremony, lub ze wzoru § 16 wynika że siły osiowe prętów zależne od P będą $R_1 = R_3 = -\frac{1}{2}P$, $R_2 = -\frac{1}{2}P$: $\operatorname{tg} \alpha$, $R_5 = R_8 = 0$, $R_6 = R_7 = \frac{1}{2}P$: $\sin \alpha$, gdzie przez α oznaczyliśmy kąt CAD . W podobny sposób dla sił $X = -1$ otrzymamy: $R'_1 = R'_3 = -\operatorname{tg} \alpha$, $R'_2 = -1$, $R'_5 = R'_8 = 1 : \cos \alpha$, $R'_6 = R'_7 = 1 : \cos \alpha$. Przy łącznym działaniu sił P i $-X$ siły osiowe prętów otrzymamy w postaci $R + XR'$, a wydłużenia $(R + XR')l : EF$, zatem dla sił -1 i R' otrzymamy po skróceniu przez $1 : EF$ na mocy twierdzenia Mohr'a : $2(-\frac{1}{2}P - X \operatorname{tg} \alpha)(-\operatorname{tg} \alpha) H - 1 \cdot (-\frac{1}{2}P : \operatorname{tg} \alpha - X) \cdot L + 2(X : \cos \alpha)(1 : \cos \alpha)(L : 2 \cos \alpha) + 2(\frac{1}{2}P : \sin \alpha + X : \cos \alpha)(1 : \cos \alpha)(L : 2 \cos \alpha) = -1 \cdot XL$, stąd z łatwością wyznaczmy X . W szczególnym wypadku rama kwadratowej $H = L$, $\alpha = 45^\circ$, a zatem $X = -P(3 + 2\sqrt{2}) : 8(1 + \sqrt{2})$.

7-o Pręt pionowy (Rys. 18), osadzony w dolnym przekroju, w górnym połączono przegubowo ze ściągaczem poziomym BC . Na przegub C działa

siła pozioma P . Z łatwością możemy zauważyć, że ustrój jest statycznie niewyznaczalny. Oznaczmy przez X siły osiowe pręta poziomego. Po wyjęciu tego pręta z przegubów B i C na przegub C pręta pionowego będzie działała siła $P - X$. Układ sił zewnętrznych $P, -X$, stanowi obciążenie pierwsze. Drugie otrzymamy, odrzucając P i czyniąc $X = 1$. To obciążenie da strzałkę końcową pręta pionowego $\frac{1}{3}H^3 : EI$ i wydłużenie pręta poziomego o $L : E_1 F_1$. Zatem w myśl twierdzenia Mohr'a możemy napisać, że $XL : E_1 F_1 = \frac{1}{3}(P - X)H^3 : EI$. Stąd $X = P : [1 + 3EL : E_1 F_1 H^3]$.

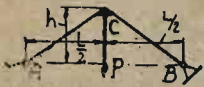


Rys. 18.

8 o Wiązar (§ 16 Rys. 6) oparty na podporach rolkowej i przegubowej dźwiga na górnym węźle siłę pionową 12 tonn. W założeniu przegubów w A, B, C z łatwością wyznaczmy siły osiowe w prętach. W pasie górnym AC i CB będziemy mieli siłę ściskającą $S = -P : 2 \sin \alpha$, w dolnym rozciągającą $S_0 = P : 2 \tan \alpha$. Przez α oznaczyliśmy kąt CAB . Dana rozpiętość wiaźaru $AB = 4$ m., wysokość 1,5 m., stąd mamy $AC = CB = 2,5$ m., $\sin \alpha = 1,5 : 2,5 = 3 : 5$, $\tan \alpha = 1,5 : 2 = 3 : 4$, a przeto $S = -12000 \times 5 : 2 \times 3 = 10000$ kg. $S_0 = 12000 \times 4 : 2 \times 3 = 8000$ kg. Licząc z pewnością $j = 4$ na wyoboczenie, otrzymamy dla pasa górnego $Q_w = 4 \times 10000$ kg. Po kilku próbach z łatwością znajdziemy, że dla dwóch kątowników $80 \times 80 \times 8$ m/m ustawionych tak, aby stanowiły złożony teownik $F = 24,6$ cm.² $i = 2,42$ cm. Stąd $L : i = 250 : 2,42 = 103,3 \approx 105$. Z tablicy (księga druga str. 142) dla tej wartości i żelaza zlewne (ŻZ) mamy $K_w = 1660$ kg/cm², zatem $Q_w = 24,6 \times 1660 = 40836$ kg. Pas dolny pracuje na rozciąganie. Dla żelaza zlewne i obciążenia trwałego $k_r = 900 - 1500$, średnio 1200 kg/cm². Obierzmy $k_r = 1000$ kg/cm², licząc na osłabienie przekroju w złączeniach nitowych, którego tu nie bierzemy pod uwagę, a otrzymamy $F_0 = S_0 : k_r = 8$ cm². Dwa kątowniki $45 \times 45 \times 5$ m/m w taki sam sposób ustawione dają $F = 8,6$ cm². Zatem w pasie górnym panować będzie naprężenie $\sigma_1 = 10000 : 24,6 = 406,5$ kg/cm², ściskające, w dolnym $\sigma_2 = 8000 : 8,6 = 930$ kg/cm², należy zbadać, jak się te naprężenia zmieniają przy doskonałym usztywnieniu górnego węzła? Wiązar stanie się statycznie niewyznaczalnym wewnątrz, odpory jednak pozostaną te same. Oznaczmy przez X siły osiowe pasa dolnego i odrzucmy pręt dolny, dając siły zastępcze X , skierowane po linii AB do wewnątrz. Zatem na dolne przeguby A i B będą działały siły X i odpory $\frac{1}{2} P$, skierowane ku górze. Te siły dadzą w rzucie na pręty pasa górnego, siłę ściskającą $-X \cos \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha$, a nadto drugą składową $X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha$. Zatem w przekroju poprzecznym odległym o z od przegubu A panować będzie moment $M = (X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha) z$, a praca sprężysta całego ustroju $H = 2 \int_0^l M^2 dz : 2EI + 2(-X \cos \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha)^2 l : 2EF + X^2 l : 2EF_0$, gdzie L oznacza rozpiętość wiaźaru, a l długość pręta górnego AC lub BC . Na mocy twierdzenia Menabrea $\partial H : \partial X = 2l [X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha] \sin \alpha : 3EI + 2l [X \cos \alpha + \frac{1}{2} P \sin \alpha] \cos \alpha : EF + Xl : EF_0 = 0$. — W danym wypadku z tablic kątowników mamy $l = 144,6$; zatem po podstawieniu $X = P [l^3 : 3l - l : F] \sin \alpha \cos \alpha : [\frac{2}{3} l^3 \sin^2 \alpha : l + 2l \cos^2 \alpha : F + L : F_0] = 1200 [250^3 : 3 \times 144,6 - 250 : 24,6] \times 3 \times 4 : 5 \times 5 [2 \times 250^3 \times 15^2 : 3 \times 144,6 \times 25^2 + 2 \times 250 \times 20^2 : 24,6 \times 25^2 + 400 :$

: 8,6] = 7938,6 kg, a w dolnym pręcie naprężenie zmniejszy się do $\sigma_1 = 923$ to jest o 0,75%. Skrajna wartość momentu pręta górnego panować będzie w przekroju węzła górnego. Będzie to $M_c = (7938,6 \times 3 : 5 - \frac{1}{2} \times 12000 \times 4 : 5) 250 = -9210$ kg/cm. Nadto w tym pręcie panuje siła osiowa $-X \cos \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha = -[7938,6 \times 4 + 6000 \times 3] : 5 = -9950,9$ kg. Ujemny znak wskazuje, że moment jest prawoskrętny — da przeto w górnych warstwach przekroju naprężenie ściskające $\sigma' = M_c : W'$, w dolnych rozciągające $\sigma'' = M_c : W''$. Z tablic $W' = 64,0$, $W'' = 25,2$ cm³, a przeto $\sigma' = -144$ kg/cm², $\sigma'' = 365,5$ kg/cm². Siła ściskająca da naprężenie $\sigma''' = -9950,9 : 24,6 = -404,5$ kg/cm², zatem najwyższe naprężenie pása górnego wzrośnie do $\sigma = -144 - 404,5 = -548,5$ kg/cm², to jest o 34,94%.

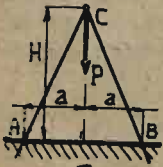
Jeszcze raz weźmy pod uwagę ten sam ustrój z usztywnionym węzłem górnym. Odrzucimy pręt dolny i dajmy wzajemian obie podpory przegubowe (Rys. 19). Z równań statyki z łatwością wyznaczmy odpory pionowe. Poziome, jako statycznie niewyznaczalne niech będą X . Zatem powyższe rozważania dotyczą również i danego wypadku, a praca sprężysta będzie się tylko różniła od poprzednio otrzymanej — jedynie brakiem wyrazu $X^2 L : 2EF_0$. W ten sposób będziemy mieli $X = 7981,2$ kg. Powtarzając bez zmiany wszystkie powyższe rachunki otrzymamy $\sigma = -531$ kg/cm², a więc nieco mniej niż poprzednio, ale zawsze jednak o 30,63% więcej niż dla ustroju prętowo-przegubowego. Z przeliczonego przy-



Rys. 19.

kladu widać, że naprężenia dość znacznie rosną przy usztywnianiu węzłów.)

9-o *Brama* złożona z dwóch prętów u góry, połączonych przegubowo i osadzonych u dołu, dźwiga obciążenie siły pionowej P na przegubie. Wyznaczyć siły w prętach w założeniu symetrii względem osi siły pionowej. Nazwijmy przez V pionowy odpór lewej podpory, przez H poziomy, przez μ moment osadczy. Dla prawej V' , H' i μ' , a otrzymamy z równań statyki $V + V' + P = 0$, $H + H' = 0$, $\mu + A \cdot 2a + Pa + \mu' = 0$. Załóżmy nadto zupełną symetrię przekrojów obu prętów, a wtedy $V = V' = -\frac{1}{2} P$, $H = -H' = X$, $\mu = -\mu' = Y$. Będą to dwie statycznie niewyznaczalne zewnętrznie. Wypiszmy jeszcze dodatkowo równanie momentów w stosunku do osi obrotowej górnego przegubu, gdzie niewątpliwie panować winna zerowa wartość momentu: $-\frac{1}{2} Pa +$



Rys. 20.

$+XH + Y = 0$; stąd $Y = \frac{1}{2} Pa - XH$. Zatem w istocie mamy tu tylko jedną statycznie niewyznaczalną X . Oznaczmy jak zwykle kąt CAB przez α i rzućmy oba odpory lewe na oś pręta AC . W ten sposób, kierując odpór X ku środkowi otrzymamy siłę osiową pręta ściskającą $S = -X \cos \alpha - \frac{1}{2} P \sin \alpha$, oraz drugą składową prostopadłą do osi pręta, skierowaną w dół $X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha$, która w przekroju odległym o z od podpory A da moment gnący $M = (X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha)$

$Z + Y$; tutaj więc praca sprężysta będzie $\Pi = 2 \int_0^l M^2 dz : 2EJ + 2S^2 l :$

: $2EF$. Na mocy twierdzenia Menabrea otrzymamy $\partial\Pi : \partial x = \int_0^l [M \delta M : \delta X + M (\delta M : \delta Z) (\delta Z : \delta X)] dz : 2EJ + 2Sl : EF = 0$, gdzie przez l oznaczyliśmy długość prętów AC i CB . Zatem będziemy mieli po skróceniu przez $2 : E$ wzór: $\int_0^l [(X \sin \alpha - \frac{1}{2} P \cos \alpha) z + Y] [z \sin \alpha - l] dz : l + Sl : F = 0$, z którego po wykonaniu całkowania wyznaczymy X . W wypadku górnego węzła sztywnego, drugą statycznie niewyznaczalną stanowi moment osadczy Y . W myśl twierdzenia Menabrea z łatwością wyznaczymy X, Y z równań $\partial\Pi : \partial X = \partial\Pi : \partial Y = 0$.

10^o Łamana wypukła utworzona z prętów prostych sztywnie na węzłach połączonych stanowi tak zwany ciąg prętów, czyli ramę złożoną ze składowych — prętów prostych. Weźmy pod uwagę ciąg obustronnie osadzony. Najprostszym przykładem ustroju tego rodzaju będzie powyżej rozpatrywana brama z górnym węzłem sztywnym. Ze względu na zupełną ogólność rozważań nie podajemy rysunku, pierwotną oś pionową $A\eta$ kierujemy ku górze, poziomą $A\zeta$ — w prawo, początek osi współrzędnych A umieszczamy pośrodku osadzonego przekroju skrajnego lewego pręta ciągu, a cały ciąg mniej więcej w ćwiartce pierwszej osi. Ścisłe kierunki osi wyznaczymy w następstwie.

W bieżącym punkcie ciągu $M (\zeta, \eta)$ prowadzimy przekrój poprzeczny i wyznaczamy panujący w nim moment gnący M . W tym celu oznaczamy przez M_0 wypadkowy moment obciążenia sił zewnętrznych, jakiby panował w punkcie M , gdyby ciąg w przekroju osadczym lewym miał podporę przegubową, a w skrajnym prawym B , również osadzonym — podporę rolkową, słowem gdybyśmy uczynili pręt statycznie wyznaczalnym. Wyznaczenie M_0 nie nastreczy żadnych trudności, możemy bowiem dla tego zmienionego ciągu wyznaczyć pionowe odpory A i B , równoległe do $O\eta$ oraz poziomy H podpory przegubowej. Dla ciągu istotnego właściwy odpór pionowy będzie $A + Y$, poziomy $H + X$, nadto w przekroju A panować będzie moment osadczy μ , będziemy mieli przeto $M = \mu + X\eta - Y\zeta + M_0$. Przenieśmy początek osi współrzędnych do punktu $O(a, b)$ i poprowadźmy $OX \parallel O\zeta$ i $OY \parallel O\eta$, a otrzymamy $\zeta = a + x$, $\eta = b + y$ oraz $M = \mu + Xb + Xy - Ya - Yx + M_0 = Xy - Yx + Z + M_0$, gdzie przez Z oznaczyliśmy nowy moment osadczy $Z = Xb - Ya + \mu$, jaki otrzymujemy, łącząc A z O sztywnym prętem po przeniesieniu do nowego początku osi układu sił X, Y, μ . Wyznamy pracę sprężystą ciągu, pomijając siły osiowe i tnące, co jest zawsze możliwe przy znaczniejszej wysokości ciągu złożonego przynajmniej z trzech prętów

sztywnie połączonych. Będzie to $\Pi = \int M^2 ds : 2EI$, gdzie ds oznacza bieżącą grubość płytek, kolejno wszystkich prętów ciągu. Na mocy twier-

dzenia Menabre'a mamy $\partial\Pi : \partial X = \int [Xy - Yx + Z + M_0] y ds : EI = 0$,

$\partial\Pi : \partial Y = \int [Xy - Yx + Z + M_0] x ds : EI = 0$, $\partial\Pi : \partial Z = \int [Xy - Yx +$

$+Z + M_0) ds : EI = 0$. Pomnóżmy wszystkie te trzy równania przez pewną stałą sztywność $E_0 I_0$ i oznaczmy przez $dq = E_0 I_0 ds : EI$. Przypisując poszczególnym płytkom ciągu wrzekome ciężary dq — otrzymamy wrzekomy ciężar całego ciągu: $Q = \int dq$ — wypadkową wszystkich dq , która ma pewien punkt uczepienia. Z łatwością wyznaczymy spólrzędne tego punktu w postaci $\int \zeta dq : Q$, $\int \eta dq : Q$, korzystając ze znanych wzorów dla środka ciężkości. Załóżmy, że właśnie w tym punkcie uczepienia siły Q — obraliśmy początek O nowych osi spólrzędnych, to jest, że tylko co wyżej wypisane całki dają spólrzędne jego a i b . Zatem dla

wszelkich osi prostokątnych środkowych Ox_0, Oy_0 . Całki $\int x_0 dq = \int y_0 dq = 0$, dla osi *głównych ciągu* OX, OY — całki $\int x dq = \int y dq = \int xy dq = 0$

$R_x = \int y^2 dq$, $R_y = \int x^2 dq$, a przeto z równań wyżej wypisanych $X = -$

$-1/R_x \int M_0 y dq$, $Y = 1/R_y \int M_0 x dq$, $Z = -1/Q \int M_0 dq$. Te całki z łatwością dają się wyznaczać wykreślnie. Jako przykład zastosowania powyższej teorii Muellera rozpatrujemy ramę (Rys. 3) osadzoną w obu dolnych przekrojach A i B . Zachowajmy poprzednie znakowania, a nadto niech będzie $n = EI : E_0 I_0$, zatem dla połaci górnej $dq = d\zeta^2$, dla obu słupów $dq = nd\eta$. Stąd bezpośrednio $Q = B + 2nII$, $\int \eta dQ = 2n \int_0^H \eta d\eta +$

$+ H \int_0^B dx = nII^2 + BH = H(nII + B)$ i ostatecznie $b = H(B + nII) :$

$(B + 2nII)$. Nadto ze względu na symetrię ustroju $a = 1/2 B$, zatem układ osi OX, OY jest ustalony. Dla tego układu osi i górnej połaci $M_0 = -1/2 \rho B (1/2 B + x) + 1/2 \rho (1/2 B + x)^2 = 1/2 \rho (x^2 - 1/4 B^2)$, dla obu

słupów $M_0 = 0$, a przeto $\int M_0 x dq = \int_{-B/2}^{+B/2} 1/2 \rho (x^2 - 1/4 B^2) x dx = 0$,

$\int M_0 y dq = (II - b) \int_{-B/2}^{+B/2} 1/2 \rho (x^2 - 1/4 B^2) dx = -1/12 (II - b) \rho b^3$, $\int M_0$

$dq = \int_{-B/2}^{+B/2} 1/2 \rho (x^2 - 1/4 B^2) dx = -1/12 \rho B^3$. Zatem widzimy wprost, że

$Y = 0$, odpory przeto pionowe $A = B = -1/2 \rho B$. — Nadto $Z = 1/12 \rho B^2 : (1 + 2nH : B)$. Chcąc wyznaczyć X , należy określić R_x . Oznaczmy przez z odległość bieżącego przekroju słupa od osi DE , dla tej osi $R = 2$

$\int_0^H z^2 ndz = 2/3 nII^3$, a przeto na mocy ogólnego wzoru $R_x = R - Q$

$(H - b)^2 = \frac{1}{3} n H^3 (2 + n H : B) : (1 + 2 n H : B)$ i ostatecznie:
 $X = p B^2 : 4 H (2 + n H : B)$. Te same wartości da twierdzenie Menabre'a, o ile pominiemy pracę sił osiowych i tnących. To pominięcie nieraz stanowi źródło błędu. Rama (Rys. 20), obciążona siłą P pionową w górnym węźle stanowi przykład jaskrawy. Gdy pominiemy siły osiowe w pracy sprężystej — otrzymamy $Z = 0$, sprzecznie z istotą rzeczy. Inaczej nawet być nie może, bo wtedy pręty nie ulegają skróceniu, górny przegób nie obniży się — a zatem pręty się nie zegną nie dadzą momentów osadczych. Należy przeto owo pomijanie pracy sił osiowych stosować nader oględnie.
