

— $M_g : W_{y^2} = 85 \text{ kg/cm}^2$. Żeliwo nie powinno pracować powyżej $k_r = 150 \text{ kg/cm}^2$, a przeto pęcherz powyżej opisany może się okazać niebezpiecznym dla całości pręta w wypadku obciążenia powtarzanego lub wahlowego.

10^o *Narożnik stołu* dębowego z deski e cm grubej odłamał się pod jarzmem siły P , przyłożonej w samym rogu stołu. Oderwany kawałek miał postać trójkąta prostokątnego; powierzchnia pęknięcia szła po przeciwprostokątnej, tworząc z przyprostokątną AB kąt φ . Chcąc wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość tego kąta oznaczamy długość AB przez b . Długość przeciwprostokątnej wyniesie $b : \text{Cos}\varphi$. Będzie to podstawa przekroju prostokątnego niebezpiecznego. Jego wysokość jest oczywiście e a wskaźnik wytrzymałościowy $\frac{1}{6} e^2 b : \text{Cos}\varphi$. Po sprowadzeniu do środka tego przekroju siła P da moment gnący $M_g = Pb \text{Sin}\varphi$, siłę tnącą P którą, jak zwykle, pominiemy, oraz moment skręcający M_o , który, jak się to wkrótce okaże, będzie równy zeru. Zatem $M_g = Pb \text{Sin}\varphi = \frac{1}{6} e^2 b \sigma_g : \text{Cos}\varphi$ czyli $\sigma_g = 3 P/e^2 \text{Sin} 2\varphi$. Jak widzimy, skrajne naprężenie przekroju niebezpiecznego zależy od kąta φ . Biorąc pochodną po $d\varphi$ naprężenia znajdziemy wartość kąta φ_0 odpowiadającą skrajnej wartości σ_g . Będzie to: $6 P/e^2 \text{Cos} 2\varphi_0 = 0$, skąd $\varphi_0 = 45^\circ$. Rożek odłamany utworzy trójkąt prostokątny równoramienny, a dla takiego trójkąta w istocie będzie $M_o = 0$, jak to z łatwością daje się spostrzec. Siła powodująca owo pęknięcie będzie $P = \frac{1}{3} e^2 K_g$. Dla dębiny $K_g = 600 \text{ kg/cm}^2$, a przeto dla deski calowej $P = \frac{1}{3} \times 600 \times 2,54^2 = 1290 \text{ kg}$.

ROZDZIAŁ TRZECI:

BELKI PROSTE ZGINANE.

§ 1. *Podpory i odpory. Pręt prosty, unieruchomiony na podporach zwiemy belką.* Nieważki pręt, pozbawiony obciążenia, nie wywiera żadnego działania na podpory; obciążony — poczyna cisnąć na nie, wywołując przeciwdziałanie podpór. *Wszelki sprzeciw podpory będziemy nazywali odporem.* Odpory są to poniekąd również siły zewnętrzne belki, zależą jednak od układu sił odkształcających, nie mogą bowiem, jak widać z powyżej powiedzianego, istnieć samodzielnie, słowem — są to siły zewnętrzne odkształcające, zależne od pozostałych. Różnią się jednak od nich znacznie. Siły zewnętrzne — to istotne *dane* obciążenia; odpory — to *niewiadome*, nie znamy bowiem ich natężenia ani kierunku działania, choć wiemy, że, łącznie z siłami odkształcającymi, stanowiąc

winny układ sił zewnętrznych zrównoważony. Tkwią przeto w równaniach statyki, jako niewiadome i niekiedy wprost z warunków równowagi układu sił odkształcających wyznaczyć się dają, a wtedy belkę zowie-my *statycznie wyznaczalną zewnątrznie*. Ponieważ rozpatrujemy jeno belki wyginane płasko, przeto wyłącznie mieć będziemy do czynienia z siłami, działającemi w płaszczyźnie gięcia. Warunków równowagi będzie więc tylko trzy. Łatwo z nich wyznaczymy trzy odpory. Stąd prosty wniosek, że *belka jest statycznie wyznaczalna zewnątrznie, gdy obciążenie jej wywołuje tylko trzy odpory*. Chcąc sobie zdać sprawę, kiedy to zachodzi istotnie, ustalamy:

§ 2. Rodzaje podpór. Przedewszystkiem belka spoczywać może na podporze *rolkowej*. Wyobraźmy sobie czop przegubu wahlowego przecinający prostopadle swą osią podłużną oś belki. Szczęki przegubu łączą się u dołu w płytę spoczywającą na kilku rolkach, ułożonych na nieruchomej płaszczyźnie oporowej. Osie rolek winny być równoległe do osi czopa przegubowego, a więc prostopadłe do osi podłużnej belki nieodkształconej. Płaszczyzna oporowa winna być nadto równoległa do tej osi nieodkształconej. Podpora tego rodzaju, o ile pominiemy tarcie rolek, umożliwiałaby posuw w kierunku osi belki nieodkształconej, — dać może przeto jedynie odpór, prostopadły do płaszczyzny oporowej.

Gdy szczęki tego rodzaju podpory trwale przygwoździmy do płaszczyzny oporowej, to otrzymamy podporę *przegubową*, skazującą na bezruch podparty punkt belki, przegubowo ze szczękami związany. Bezruch ten nie jest zupełny, bo oś belki może się pochylać swobodnie. Czop przegubu umożliwia jej ruch obrotowy.

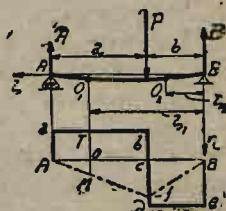
Wreszcie, gdy przegub z wahlowego staje się stałym, otrzymujemy podporę *stałą*, uniemożliwiającą wszelki ruch owego punktu belki — podpartego, a nadto i ruch obrotowy jej osi. Zatem punkt osi wsparty na podporę rolkową posiada dwa stopnie swobody: posuw w kierunku osi belki i możność obrotu. Podpora przegubowa pozostawia już tylko jeden stopień swobody — obrót — rozwijać przeto winna dwa odpory: siłę prostopadłą i równoległą do pierwotnej osi belki nieodkształconej; wreszcie podpora stała uniemożliwia wszelki ruch, dając trzy odpory: siłę prostopadłą, siłę równoległą do osi belki nieodkształconej oraz moment oporowy, czyli parę sił, uniemożliwiającą obrót w przegubie.

Stąd wniosek, że pręt jednostronnie zamocowany, a obciążony jakkolwiek, jest statycznie wyznaczalny zewnątrznie. Środek jego przekroju osadczego gra rolę punktu podpartego i nieruchomego. Łatwo moglibyśmy wyznaczyć jego trzy odpory — dwie siły i moment. Mało stąd jednak korzyści, bo wzory gięcia można ustalić wprost, nie biorąc owych czynników pod uwagę. Jest to zresztą jedyny wypadek belki o jednej

podporze — unieruchomionej a statycznie wyznaczalnej zewnętrznie. Gdy byśmy zastosowali tu podporę przegubową, to pręt mógłby się w koło niej obracać i należałoby go unieruchomić za pomocą nowej podpory. To samo da się powiedzieć i o podporze rolkowej.

§ 3. Belka na dwóch podporach może być również statycznie wyznaczalną zewnętrznie, gdy damy jej podporę rolkową, powiedzmy lewą i prawą — przegubową. Pierwotna, nieodkształcona oś belki niech będzie, dajmy na to pozioma. Początek osi nieruchomych ω obieramy w punkcie prawym podpartym przegubowo. Oś $\omega\xi$ kierujemy ku podporze lewej po osi podłużnej belki nieodkształconej. Oś $\omega\eta$ — kierujemy prostopadle wdół a oś $\omega\xi$ — ku patrzącemu. Odpory pionowe oznaczamy: lewy przez A , prawy przez B , nadto odpór prawy poziomy niech będzie H . Zawsze równa się on zeru, ilekroć obciążenie belki składa się z sił pionowych, leżących w płaszczyźnie gięcia $\zeta\omega\eta$. Wynika to wprost z warunków równowagi sił poziomych. Z pozostałych dwóch równań statyki wyznaczmy odpory A i B — niewiadome obciążenia. Należy nadto zbadać odkształcenia. W tym celu wystarczy wziąć pod uwagę cztery zasadnicze wypadki obciążenia — wszystkie inne bowiem możemy rozpatrywać, jako złożone z tych czterech prostych zasadniczych. Tu mamy:

§ 4. Obciążenie siłą skupioną, działającą pomiędzy podporami. Odległość siły pionowej P od lewej podpory (Rys. 32) oznaczamy przez a — od prawej przez b . Cała długość pręta niech będzie l . Oś siły P dzieli płaszczyznę gięcia na dwa obszary — lewy i prawy. Dla określenia odporów piszemy równania statyki w postaci $A + B + P = 0$ oraz $Al + Pb = 0$, przyczem momenty wyznaczamy względem punktu B . Stąd mamy $A = -Pb : l$, $B = -Pa : l$. Odpory, jako różniące się znakiem od siły P kierujemy ku górze, bo P skierowaliśmy tak, jak oś $B\eta$, to jest w dół. Wartość momentu gnącego w obszarze lewym będzie dla punktu O_1 , odległego o ζ_1 od początku współrzędnych: $M_1 = A(l - \zeta_1) = -Pb(l - \zeta_1) : l$. Dla drugiej połaci $M_2 = A(l - \zeta_2) + P(b - \zeta_2) = -Pb(l - \zeta_2) : l + P(b - \zeta_2)$. Pomijając znaczki u ζ i M , możemy oba te wzory połączyć w jeden, pisząc $M = -Pb(l - \zeta) : l + P(b - \zeta)$ z kreską \parallel , dzielącą. Wykres momentów będzie tu niewątpliwie trójkątny, jak widać z tego wzoru, zależność bowiem momentu od ζ jest liniowa. Nadto skrajna wartość momentu panować będzie w przekroju siły P , tam bowiem obie proste wykresu się przecinają. Chcąc wyznaczyć wykres sił tnących, należy zauważyć, że dla pierwszej połaci siła tnąca będzie równa A , podczas, gdy dla połaci drugiej wartość jej będzie $P + A = -B$. To samo wskazuje wykres.



Rys. 32.

W założeniu stałego przekroju pręta będziemy mieli dla skrajnej

wartości momentu $M_m = -Pb(l-b) : l = -Pab : l$ oraz $M_m = W_x k_g$. Wyznamy stąd W_x i ustalimy przekrój pręta, a wtedy, całkując zasadnicze równanie $E_g J_x \eta'' = Pb(l-\zeta) : l \parallel + P(b-\zeta)$, otrzymamy $E_g J_x \eta' = C + \frac{1}{2} Pb(l-\zeta)^2 : l \parallel - \frac{1}{2} P(b-\zeta)^2$ oraz $E_g J_x \eta = D + C\zeta - \frac{1}{6} Pb(l-\zeta)^3 : l \parallel + \frac{1}{6} P(b-\zeta)^3$. Stałe całkowania wyznaczmy z łatwością, zważywszy, że dla punktów podpartych $\eta = 0$. Mamy więc $\eta = 0$ dla $\zeta = 0$ lub $\zeta = l$, a przeto z trzeciego równania otrzymamy $D - \frac{1}{6} Pb l^2 + \frac{1}{6} Pb^3 = 0$ oraz $D + Cl = 0$. Stąd $D = \frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2)$, $C = -\frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2) : l$ i ostatecznie mamy $E_g J_x \eta = \frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2) - \frac{1}{6} Pb(l^2 - b^2)\zeta : l - \frac{1}{6} Pb(l-\zeta)^3 : l \parallel + \frac{1}{6} P(b-\zeta)^3$. Z tego równania możemy wyznaczyć strzałkę siły P , czyniąc $\zeta = b$. Będzie to ugięcie pręta pod siłą P , równe $p = Pa^2 b^2 : 3 l E_g J_x$. W szczególnym wypadku, gdy siła działa pośrodku, to jest, gdy $a = b$, będziemy mieli $p = Pl^3 : 48 E_g J_x$.

W ogólnym wypadku tylko co znaleziona strzałka nie daje najwyższej wartości współrzędnej η , nie jest więc strzałką ugięcia pręta. Tę by znaleźć, należy uczynić $\eta' = 0$, co da odpowiednią wartość dla ζ . Dla pierwszej połaci będzie $\zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)}$ z warunkiem $l \geq \zeta_0 \geq b$. Tej wartości odpowiada strzałka $f = \frac{1}{3} Pb \sqrt{[\frac{1}{3}(l^2 - b^2)]^3} : 3 l E_g J_x$, dająca istotne maximum rzędnych η , lecz tylko wtedy, gdy $b \leq \frac{1}{2} l$. Wynika to bezpośrednio z warunku dla ζ_0 , mamy bowiem $l - \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - b^2)} \geq b$, skąd z łatwością otrzymamy nierówność tylko co wypisaną. Gdy zaś $b \geq \frac{1}{2} l$, wtedy należy wyznaczyć ζ_0 z równania $\eta' = 0$ dla drugiego obszaru, albo wprost obrócić pręt o 180° i skorzystać z poprzedniego wzoru. W ten sposób z łatwością otrzymamy $\zeta_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(l^2 - a^2)}$, oraz odpowiednią strzałkę $f = \frac{1}{3} Pa \sqrt{[\frac{1}{3}(l^2 - a^2)]^3} : 3 l E_g J_x$. W obu wypadkach wartości ζ_0 odpowiada styczna odkształconej, równoległa do osi pręta pierwotnej. Godzi się tu zaznaczyć, że tylko co badany pręt o stałym przekroju poprzecznym nie jest wytrzymałościowo wyzyskany — jedynie bowiem przekrój obciążony siłą P pracuje z natężeniem właściwym — pozostałe przekroje są zbyt sowite. Aby tę wadę usunąć, należy wykonać pręt stałej wytrzymałości o przekroju poprzecznym zmiennym w taki sposób, aby wszystkie skrajne naprężenia $t_{gm} = M_g : W_x$ były równe k_g . Stąd $W_x = M_g : k_g$ — wzór, wyznaczający wymiary przekroju. Nadto $1 : \rho = M_g : E_g J_x = W_x k_g : E_g J_x$. Te dwa wzory rozwiązują zagadnienie. Dla pręta o kołowym przekroju: $k_g W_x = \frac{1}{32} \pi d^3 k_g = -Pb(l-\zeta) : l \parallel + P(b-\zeta)$. Jest to równanie paraboli sześcienniej, wiążące d z ζ . Wyznacza ono profil pręta w postaci dwóch krzywych tego typu, przecinających się na osi siły P .

Zachowując te same znakowania rozpatrzmy kolejno wszystkie obciążenia zasadnicze. Znaczki u M_g, E_g, J_x będziemy pomijali, pisząc wprost: M, E, J .

§ 5. Obciążenie jednostajne częściowe, cisnące na lewą połać

pręta w stosunku p kg na jednostkę długości odcinka b (Rys. 33). Połączenie $a = l - b$ pozostaje wolne. Oznaczmy przez P całkowity ciężar pb kg, a wtedy warunki równowagi będą: $A + B + P = 0$, $Al + \frac{1}{2} Pb = 0$, skąd: $A = -\frac{1}{2} Pb : l$, $B = -P(l - \frac{1}{2} b) : l$. W odcinku a będzie przeto panował moment $M = -\frac{1}{2} Pb(l - \zeta) : l$, w odcinku b natomiast $M = -\frac{1}{2} Pb(l - \zeta) : l + \frac{1}{2} p(b - \zeta)^2$. Zatem:



$EJ\eta'' = -\frac{1}{2} Pb(l - \zeta) : l + \frac{1}{2} P(b - \zeta)^2 : b$. Dla

rys. 33.

pręta o stałym przekroju poprzecznym: $EJ\eta' = C +$

$$+ \frac{1}{4} Pb(l - \zeta)^2 : l + \frac{1}{6} P(b - \zeta)^3 : b \text{ oraz } EJ\eta = D + C\zeta -$$

$$- \frac{1}{12} Pb(l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{24} P(b - \zeta)^4 : b. \text{ Tu niewątpliwie } \eta = 0, \text{ gdy}$$

$\zeta = 0$ i $\zeta = l$, a przeto $D - \frac{1}{12} Pbl^2 + \frac{1}{24} Pb^3 = 0$, $D + Cl = 0$ i ostatecznie $D = \frac{1}{12} Pbl^2 - \frac{1}{24} Pb^3$, $C = -\frac{1}{12} Pbl + \frac{1}{24} Pb^3 : l$, skąd otrzymamy równanie odkształconej w postaci: $EJ\eta = \frac{1}{12} Pbl^2 - \frac{1}{24} Pb^3 -$

$$- \frac{1}{12} Pbl\zeta + \frac{1}{24} Pb^3\zeta : l - \frac{1}{12} Pb(l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{24} P(b - \zeta)^4 : b.$$

Chcąc znaleźć strzałkę, piszemy dla połączenia pierwszej $EJ\eta' = -\frac{1}{12} Pbl + \frac{1}{24} Pb^3 : l + \frac{1}{4} Pb(l - \zeta_0)^2 : l = 0$, co daje $\zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{6} b^2}$ z warunkiem $l \geq \zeta_0 \geq b$. Lewa nierówność wypełnia się sama przez się, prawa wymaga, aby $b \leq 2l : (3 + \sqrt{2})$. Zatem dla połączenia pierwszej $f_1 = \frac{1}{6} Pb \sqrt{[\frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{6} b^2]^3} : EJl$. W razie, gdy $l \geq b \geq 2l : (3 + \sqrt{2})$, strzałka przechodzi do połączenia drugiej, gdzie $b \geq \zeta_0 \geq 0$. W tym wypadku należy brać całkowity wzór $EJ\eta' = -\frac{1}{12} Pbl + \frac{1}{24} Pb^3 : l + \frac{1}{4} Pb(l - \zeta_0)^2 : l - \frac{1}{6} P(b - \zeta_0)^3 : b = 0$, czyli $4l\zeta_0^3 - 6b(2l - b)\zeta_0^2 + b^3(2l - b)^2 = 0$.

W szczególnym wypadku, gdy obciążenie pokrywa cały pręt: $b = l$, a przeto równanie staje się: $4\zeta_0^3 - 6l\zeta_0^2 + l^3 = 0$. Daje ono $\zeta_0 = \frac{1}{2} l$. Pręt najmocniej ugina się pośrodku, dając strzałkę $f = \frac{5}{384} Pl^3 : EJ$. W wypadku ogólnym podstawiamy $\zeta_0 = x + b(2l - b) : 2l$ w równanie, skąd mamy: $x^3 + qx + r = 0$, gdzie $q = 3b^2(2l - b)^2 : 4l^3$, $r = -b^2(2l - b)^2(l - b)^2 : 4l^3$. Ponieważ niewątpliwie $(\frac{1}{3} q)^3 \geq (\frac{1}{3} r)^2$, przeto wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste równania można wypisać jednym wzorem w postaci

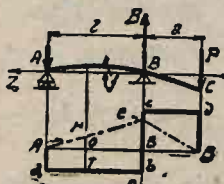
$$x_i = -b(2 - b : l) \cos \left[120^\circ i + \frac{1}{3} \arccos \frac{(l - b)^2}{b(2l - b)} \right].$$

$$\zeta_0 = \frac{b(2l - b)}{2l} \left\{ 1 - 2 \cos \left[120^\circ i + \frac{1}{3} \arccos \frac{(l - b)^2}{b(2l - b)} \right] \right\}, i = 1, 2, 3.$$

Jedna z tych trzech wartości czynić będzie zadość warunkom $b \geq \zeta_0 \geq 0$. Jak widać z rysunku, wykres momentów dla pierwszej połączenia jest prostoliniowy, dla drugiej — paraboliczny. Wykres sił tnących

stanowi łamaną. Z wykresu momentów widać, że skrajna wartość momentu $cf = M_m = -Pb(l+a)^2 : 8l^2$ panuje w połąci drugiej. Równanie $dM : d\zeta = 0$ da odnośne $\zeta = b(1 - \frac{1}{2} b : l)$. Ta wartość jest miarodajna przy wyznaczaniu wymiarów bezpiecznych pręta.

§ 6. Obciążenie siłą zewnętrzną, przyłożoną (Rys. 34) w punkcie o współrzędnych $(-a, 0)$. Równania statyki dają: $A + B + P = 0$, oraz w założeniu ośrodka momentów u prawego końca pręta: $A(l+a) + Ba = 0$. Stąd $A = Pa : l$, $B = -PL : l$, gdzie $L = a + l$. W połąci pierwszej, pomiędzy podporami panuje moment $M = A(l - \zeta)$, w drugiej, prawej, mamy $M = A(l - \zeta) - B\zeta$, przy czem znak minus jest tu konieczny, bo współrzędne ζ są ujemne, należy brać je zatem ze znakiem odwrotnym, jako ramiona momentów.



Rys. 34.

Stąd $EJ\eta'' = Pa(l - \zeta) : l \frac{1}{i} + PL\zeta : l$ Dla pręta

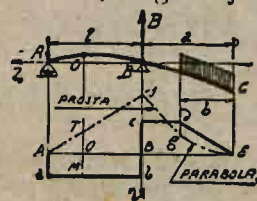
o stałym przekroju poprzecznym: $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} Pa(l - \zeta)^2 : l \frac{1}{i} + \frac{1}{2} PL\zeta^2 :$

$: l$ oraz $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6} Pa(l - \zeta)^3 : l \frac{1}{i} + \frac{1}{6} PL\zeta^3 : l$. Ponieważ niewątpliwie $\eta = 0$, gdy $\zeta = 0$ i $\zeta = l$, przeto: $D + \frac{1}{6} Pal^3 = 0$, $D + Cl = 0$, skąd: $D = -\frac{1}{6} Pal^3$, $C = \frac{1}{6} Pal$ i ostatecznie równanie odkształconej: $EJ\eta = -\frac{1}{6} Pal^3 + \frac{1}{6} Pal\zeta + \frac{1}{6} Pa(l - \zeta)^3 : l \frac{1}{i} + \frac{1}{6} PL\zeta^3 : l$.

Szukamy strzałki w połąci pierwszej, pisząc: $EJ\eta' = \frac{1}{6} Pal - \frac{1}{2} Pa(l - \zeta_0)^2 : l = 0$, skąd otrzymamy $\zeta_0 = l - l : \sqrt{3}$, z warunkiem $l \geq \zeta \geq 0$. Warunek ten wypełnia się istotnie, a przeto strzałka $f_1 = -Pal^3 : 9\sqrt{3} EJ$. W tej części pręt wygina się ku górze; wskazuje na to znak strzałki ujemny. W drugiej połąci, gdzie pręt swobodnie zwisa, strzałka ugięcia będzie najwyższa dla $\zeta = -a$, co daje ze wzoru dla odkształconej $f_2 = PLa^3 : 3 EJ$.

Rysunek podaje odnośne wykresy sił tnących i momentów. Skrajna wartość momentu panuje w przekroju podpartym B. Ona jest miarodajna przy wyznaczaniu bezpiecznych wymiarów pręta.

§ 7. Obciążenie jednostajne zewnętrzne na odcinku b w stosunku p kg na jednostkę długości (Rys. 35). Równania statyki dadzą tutaj: $A + B + P = 0$, $AL + Ba + \frac{1}{2} Pb = 0$, gdzie $P = pb$, $L = a + l$. Stąd $A = P(a - \frac{1}{2} b) : l$, $B = -P(l + a - \frac{1}{2} b) : l$. Dzieliąc pręt na trzy połąci zmienności momentów, na odcinku: l , $a - b$, b ,



Rys. 8.

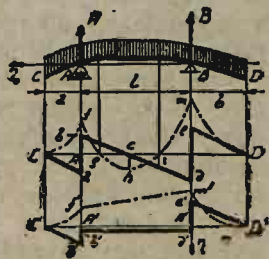
możemy napisać $EJ\eta'' = A(l - \zeta) \frac{1}{i} - B\zeta \frac{1}{i} + \frac{1}{2} P(\zeta + a - b)^2 : b$. Znak minus u B jest i tu konieczny

ze względu na to, że współrzędne ζ są ujemne dla połaci drugiej. Zatem $EJ\eta'' = P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta) : l \frac{1}{1} + P(l + a - \frac{1}{2}b)\zeta : l \frac{1}{1} + \frac{1}{2}P(\zeta + a - b)^2 : b$. Dla pręta o stałym przekroju: $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta)^2 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{2}P(l + a - \frac{1}{2}b)\zeta^2 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{6}P(\zeta + a - b)^3 : b$, oraz $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta)^3 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{6}P(l + a - \frac{1}{2}b)\zeta^3 : l \frac{1}{1} + \frac{1}{24}P(\zeta + a - b)^4 : b$. W danym wypadku $\eta = 0$, gdy

$\zeta = l$ lub $\zeta = 0$, a przeto: $D + Cl = 0$, $D + \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l^3 = 0$, skąd $D = -\frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l^3$, $C = \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l$. Te wartości pozwolą wypisać równanie odkształconej. Chcąc znaleźć strzałkę połaci pierwszej, czynimy $EJ\eta' = \frac{1}{6}P(a - \frac{1}{2}b)l - \frac{1}{2}P(a - \frac{1}{2}b)(l - \zeta_0)^2 : l = 0$, co daje: $\zeta_0 = l - l : \sqrt{3}$ z warunkiem $l \geq \zeta_0 \geq 0$, wypełniającym się istotnie. Dla tej wartości otrzymujemy szukaną strzałkę $f_1 = -P^2(a - \frac{1}{2}b) : 9\sqrt{3}EJ$. I tu również wygięcie pręta między podporami ujawnia strzałkę ujemną: pręt wygina się ku górze. W drugiej połaci strzałka będzie najwyższa przy $\zeta = -a$. Ta strzałka będzie $f_2 = P[4aL(2a - b) + b(b^2 - 2a^2)] : 24EJ$. Rysunek podaje odnośne wykresy sił tnących i momentów. Cechę wyróżniającą obu powyższych wypadków stanowi umiejscowienie strzałki f_1 —niezależnie od zewnętrznego obciążenia. Cztery wyżej rozpatrywane obciążenia zasadnicze są najprostsze. Ich skojarzenie daje wypadki złożone, które na mocy prawa o niezależności działania sił oraz drugiego prawa Hooke'a z łatwością sprowadzimy do tych czterech najprostszych. Obciążenia trójkątne pomijamy, jako rzadziej spotykane, natomiast bierzemy pod uwagę następujący przykład:

§ 8. Obciążenie jednostajne pręta obustronnie zwisającego.

Lewy koniec zwisający pręta (Rys. 36) ma długość a , prawy — b ; odległość pomiędzy podporami oznaczamy przez l , a całą długość pręta przez $2L = a + b + l$. Obciążenie p kg na jednostkę długości pokrywa cały pręt, cisnąc nań z siłą $P = 2Lp$. Równania statyki dadzą: $A + B + P = 0$ oraz względem prawego końca pręta, jako ośrodka sprowadzenia momentów $A(l + b) + Bb + PL = 0$. Stąd $A = -P(L - b) : l$, $B = -P(L - a) : l$. Osie podpór dzielą płaszczyznę gięcia na trzy połacie: a , l , b ; możemy prze-



Rys. 36.

to napisać $EJ\eta'' = \frac{1}{4}P(a + l - \zeta)^2 : L \frac{1}{1} + A(l - \zeta) \frac{1}{1} - B\zeta$. Dla pręta o stałym przekroju poprzecznym

mamy: $EJ\eta' = C - \frac{1}{12}P(a + l - \zeta)^3 : L \frac{1}{1} - \frac{1}{2}A(l - \zeta)^2 \frac{1}{1} - \frac{1}{2}B\zeta^2$ oraz

$EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{48}(a+l-\zeta)^4 : L \frac{1}{6} + \frac{1}{6} A(l-\zeta)^3 - \frac{1}{6} B\zeta^3$. Ponieważ $\eta = 0$, gdy $\zeta = 0$ lub $\zeta = l$, przeto: $D + Cl + Pa^4 : 48L = 0$, $D + \frac{1}{48}P(a+l)^4 : L + \frac{1}{6}Al^3 = 0$, skąd $C = -Pa^4 : 48Ll + P(a+l)^4 : 48Ll + \frac{1}{6}Al^3$, $D = -\frac{1}{6}Al^3 - \frac{1}{48}P(a+l)^4 : L$. Te wartości pozwolą wypisać równanie odkształconej, które zresztą możnaby również otrzymać, rozpatrując obciążenie, jako złożone z zasadniczych obciążeń najprostszych, wyżej rozpatrywanych.

Czyniąc w równaniu odkształconej $\zeta = a+l$, otrzymamy strzałkę lewego zwisającego końca, u skrajy pręta końcową z równania $EJf_1 = D + C(a+l)$. Po podstawieniu da ono $f_1 = Pa [3a^3 + 4a^2l - l^3 + 2lb^2] : 48EJL$. Tak samo zupełnie, zakładając $\zeta = -b$, moglibyśmy otrzymać skrajną strzałkę prawą, prościej jednak otrzymamy ją wprost, na mocy prawa symetrii, przedstawiając litery a i b , co da $f_3 = Pb [3b^3 + 4b^2l - l^3 + 2la^2] : 48EJL$. Chcąc z kolei wyznaczyć strzałkę połaci środkowej piszemy $EJ\eta' = C - \frac{1}{12}P(a+l-\zeta_1)^3 : L - \frac{1}{2}A(l-\zeta_1)^2 = 0$. Równanie to ma wogóle trzy pierwiastki, wyznaczające trzy skrajne wartości rzędnych η odkształconej dla tego obszaru. Świadczą one o istnieniu dwóch punktów przegięcia odkształconej. Spółrzędne tych punktów czynić będą zadość równaniu $\eta'' = 0$ czyli $M = 0$. Z łatwością spostrzec się daje, że obie strzałki skrajne tej środkowej połaci dają maxima rzędnych η , środkowa, oddzielona punktami przegięcia, — daje minimum. Spółrzędne punktów przegięcia wyznaczymy czyniąc: $M = \frac{1}{4}P(a+l-\zeta_0)^2 : L + A(l-\zeta_0) = 0$. Stąd $(a+l-\zeta_0)^2 - [(a+l)^2 - b^2](l-\zeta_0) : l = 0$, czyli $\zeta_0^2 - (b^2 + l^2 - a^2)\zeta_0 : l + b^2 = 0$ i ostatecznie

$$\zeta_0 = \frac{b^2 + l^2 - a^2}{2l} \pm \sqrt{\frac{(b^2 + l^2 - a^2)^2 - 4b^2l^2}{4l^2}}. \text{ Równanie daje dwa}$$

pierwiastki w ogólnym wypadku. O ile oba czynią zadość warunkom $l \geq \zeta_0 \geq 0$, to w środkowej połaci odkształcona ma dwa punkty przegięcia. Jest to zarazem wyżej omówiony wypadek trzech strzałek połaci środkowej. Zachodzi on wtedy, gdy $(b^2 + l^2 - a^2)^2 > 4b^2l^2$ oraz $b^2 + l^2 - a^2 > 0$. Gdy znów $(b^2 + l^2 - a^2)^2 < 4b^2l^2$, oba pierwiastki są urojone: niema punktów przegięcia w połaci środkowej. Wreszcie, gdy $[b^2 + l^2 - a^2]^2 = 4b^2l^2$ oraz $b^2 + l^2 - a^2 > 0$, oba pierwiastki są równe, a przynależny do nich punkt odkształconej staje się punktem podwójnego przegięcia. W jego sąsiedztwie odkształcona prostuje się, nie zmieniając krzywizny względem osi pierwotnej, nieodkształconej. Ponieważ $EJ\eta'' = M$, zatem możemy znaleźć punkty przegięcia odkształconej, budując wykres momentów. O ile krzywa jego przetnie oś w g lub i będziemy mieli dwa punkty przegięcia odkształconej. W wypadku styczności z osią wykresu dwa punkty g , i zlewają się w jeden punkt podwójny, znacząc podwójny punkt przegięcia odkształconej; wreszcie, gdy linja wykresu leży ponad osią — odkształcona punktów przegięcia w połaci środkowej nie ujawnia. Wykres momentów składa się z trzech gałęzi parabolicznych Cf , fhm , mD . Z wykresu łatwo znaleźć skrajne wartości momentów $Af = Pa^3 : 4L$, $Bm = Pb^3 : 4L$ dodatnie, oraz ch — ujemna w ogólnym wypadku. Bezwzględna wartość tych trzech momentów największa wyrokuje o przekroju pręta. Zazwyczaj bywa to jeden z bocz-

nych skrajnych momentów, czasami, przy dostatecznie wielkiem l w stosunku do a i b — należy brać wartość środkową. Chcąc ją wyznaczyć piszemy, jako dla minimum $\frac{dM}{d\zeta} = -\frac{1}{2} P (a + l - \zeta_1) : L - A = 0$, co daje $\zeta_1 = (b^2 + l^2 - a^2) : 2l$. Po podstawieniu tej wartości w równanie momentu otrzymamy $ch = P(a + b - l) (a + l - b) (b + l - a) : 8l^2$.

§ 9. Obustronne obciążenie jednostajne pręta, wystającego poza obie podpory, możemy rozpatrywać, jako wypadek szczególny poprzedniego obciążenia, tylko co opisanego. Należy jeno pozbawić obciążenia część środkową pręta. W tem założeniu równania statyki będą: $A + B + p(a + b) = 0$ oraz dla prawego końca pręta: $ap(\frac{1}{2}a + l + b) + A(l + b) + Bb + \frac{1}{2}pb^2 = 0$. Stąd $A = -ap - p(a^2 - b^2) : 2l$, $B = -bp - p(b^2 - a^2) : 2l$. I tu osie podpór dzielą płaszczyznę gięcia na trzy połacie: a, l, b , jak w wypadku poprzedzającym, przyczem

$$EJ\eta'' = \frac{1}{2} p (a + l - \zeta)^2 \frac{1}{l} + A(l - \zeta) - \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 \frac{1}{l} - B\zeta + \frac{1}{2} p\zeta^2.$$

Zatem dla pierwszej połaci a otrzymaliśmy zupełnie ten sam wzór co i pierwej, natomiast w drugiej połaci $M = \frac{1}{2} p (a + l - \zeta)^2 + A(l - \zeta) - \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 = \frac{1}{2} pa^2 - \frac{1}{2} p(a^2 - b^2) (l - \zeta) : l$ — moment zasadniczo się różni w danym wypadku. Wobec symetrii obu bocznych połaci pręta możemy niewątpliwie orzec zgóry, że w wykresie momentów obie krzywe boczne zachowują kształt paraboliczny, natomiast środkowa będzie prostą $f'm'$, łączącą skrajne wartości momentów $A'f'$ oraz $B'm'$. Podobny również będzie wykres sił tnących. Obustronnie (Rys. 36) pochyłe proste $C'a', e'D'$, pośrodku — prosta $b'd'$ równoległa do podstawy, nadto prostopadłe do niej odcinki $a'b' = A, d'e' = B$. Ponieważ niewątpliwie $a'A' = pa, a'b' = A$, przeto $b'A' = a'A' - a'b' = p(a^2 - b^2) : 2l$. Zatem gdy $a = b = \lambda$ to jest gdy pręt obustronnie jednakowo wystaje poza podpory — w środkowej części siła tnąca równa jest zeru. Nadto dla połaci środkowej wtedy $M = \frac{1}{2} p\lambda^2$, jest to więc pewien rodzaj wygięcia *Lamarlé'a*. W założeniu stałego przekroju poprzecznego odkształcona środkowa część będzie łukiem koła o promieniu ρ , czyniącym zadanie równaniu $1 : \rho = p\lambda^3 : 2EJ$. Skrajna wartość rzędnej η — pośrodku da strzałkę $f_0 = \rho - \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}l^2} = \rho (1 - \sqrt{1 - l^2 : 4\rho^2})$, podobnie, jak dla wygięcia *Lamarlé'a*. Zazwyczaj jednak $b \neq a$, należy przeto korzystać ze wzoru ogólnego. Dla pręta o stałym przekroju da on $EJ\eta' =$

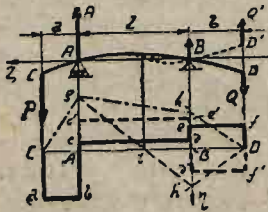
$$= C - \frac{1}{6} p (a + l - \zeta)^3 \frac{1}{l} - \frac{1}{2} A (l - \zeta)^2 + \frac{1}{6} p (l - \zeta)^3 \frac{1}{l} - \frac{1}{2} B \zeta^2 + \frac{1}{6} p \zeta^3 \text{ oraz } EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{24} p (a + l - \zeta)^4 \frac{1}{l} + \frac{1}{6} A (l - \zeta)^3 - \frac{1}{24} p (l - \zeta)^4 \frac{1}{l} - \frac{1}{6} B \zeta^3 + \frac{1}{24} p \zeta^4. \text{ Tutaj } \eta = 0 \text{ dla } \zeta = 0 \text{ i } \zeta = l,$$

a przeto: $D + Cl + \frac{1}{24} p a^4 = 0, D + \frac{1}{24} p (a + l)^4 + \frac{1}{6} A l^3 - \frac{1}{24} p l^4 = 0$. Stąd $D = -\frac{1}{24} p [a^2(a + 2l)^2 + 2b^2l^2]$ oraz $C = \frac{1}{12} p [2a^2(a + l) + b^2] \frac{1}{l}$. Po podstawieniu tych wartości otrzymamy równanie odkształconej. Czy-

niąc w niem $\zeta = a + l$ będziemy mieli dla skrajnej lewej strzałki pręta $EJf_1 = D + C(l + a)$, skąd $f_1 = \frac{1}{24} pa (3a^2 + 4a^2l + 2b^2l)$. Wobec symetrii odcinków a i b w stosunku do l , możemy wprost napisać dla prawej skrajnej strzałki połaci trzeciej $f_3 = \frac{1}{24} pb (3b^2 + 4b^2l + 2a^2l)$. Chcąc znaleźć strzałkę połaci środkowej w założeniu $b \neq a$ piszemy $EJ\eta' = 0$. Po podstawieniu i skróceniu da to $3(a^2 - b^2)\zeta_0^2 + 6b^2l\zeta_0 - l^2(a^2 + 2b^2) = 0$, skąd $\zeta_0 = [b^2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)}] l : (b^2 - a^2)$ z warunkiem $l \geq \zeta_0 \geq 0$. Możemy zawsze założyć, że $b > a$, gdyby było inaczej, to należałoby obrócić pręt o 180° . W tem założeniu pierwszy warunek da nam $b^2 - a^2 \geq b^2 \pm \sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)}$, należy przeto brać znak minus we wzorze powyżej wypisanym. Wtedy $-a^2 \geq -\sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)}$ czyli $3a^4 \leq a^4 + b^4 + a^2b^2$, co sprawdza się istotnie przy $b \geq a$. Drugi warunek daje $b^2 - \sqrt{\frac{1}{3}(a^4 + b^4 + a^2b^2)} \geq 0$ czyli $3b^4 \geq a^4 + b^4 + a^2b^2$, co również się sprawdza przy $b \geq a$. Zatem w środkowej połaci istnieje zawsze strzałka ugięcia f_0 , którą łatwo wyznaczymy ze wzoru dla odkształconej, czyniąc w nim $\zeta = \zeta_0$.

§ 10. Obustronne obciążenie siłami skupionymi zewnętrznymi.

Pierwotnie prosty pręt układamy na podporach poziomo i obciążamy u obu końców siłami pionowymi P i Q . Dla prawego końca pręta otrzymamy równania statyki: $A + B + P + Q = 0$, $P(a + l + b) + A(l + b) + Bb = 0$, skąd: $A = -[P(a+l) - Qb] : l$, $B = -[Q(b+l) - Pa] : l$. Oś podpór dzieli płaszczyznę gięcia na trzy połacie, będziemy mieli przeto: $EJ\eta' = P(l + a -$



Rys. 37.

$-\zeta) \frac{1}{1} + A(l - \zeta) \frac{1}{1} - B\zeta$. Dla pręta o przekroju poprzecznym stałym: $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} P(l + a - \zeta)^2 \frac{1}{1} - \frac{1}{2} A(l - \zeta)^2 \frac{1}{1} - \frac{1}{2} B\zeta^2$ oraz $EJ\eta =$

$= D + C\zeta + \frac{1}{6} P(l + a - \zeta)^3 \frac{1}{1} + \frac{1}{6} A(l - \zeta)^3 \frac{1}{1} - \frac{1}{6} B\zeta^3$. Tutaj $\eta = 0$

dla $\zeta = 0$ i $\zeta = l$, a zatem $D + C\zeta + \frac{1}{6} Pa^3 = 0$, $D + \frac{1}{6} P(l + a)^3 + \frac{1}{6} Al^3 = 0$, skąd $D = -\frac{1}{6} Pa(2l^2 + 3la + a^2) - \frac{1}{6} Qbl^2$, $C = \frac{1}{6} Pa(2l + 3a) + \frac{1}{6} Qbl$. Czyniąc $\zeta = a + l$ w równaniu odkształconej, otrzymamy lewą skrajną strzałkę z równania $EJf_1 = D + C(a + l)$, co daje: $f_1 = a[2Pa(a + l) + Qbl] : 6EJ$. Na mocy symetrii P i Q , a i b możemy napisać wprost wzór dla strzałki końcowej trzeciej połaci: $f_3 = b[2Qb(b + l) + Pal] : 6EJ$.

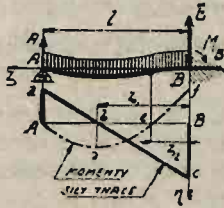
Czy i w połaci środkowej istnieją strzałki? Chcąc rozwiązać to pytanie, należy znaleźć skrajne wartości rzędnych η , czyli znaleźć pierwiastki równania $EJ\eta' = 0$, wypisanego dla połaci środkowej i podstawić w równanie odkształconej. Tylko co wypisane równanie sprowadza się do $3(Pa - Qb)\zeta_0^2 + 6Qbl\zeta_0 - l^2(2Qb + Pa) = 0$, skąd, przy $Pa \neq Qb$, otrzymamy $\zeta_0 = l[1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}(1 + n + n^3)}] : (1 - n)$, gdzie oznaczyliśmy

$n = Pa : Qb$. Nadto być musi, jako dla połąci środkowej, $l \geq \zeta_0 \geq o$. Zważmy, że wartość bezwzględna n można uczynić zawsze mniejszą od jedności, w razie bowiem przeciwnym wystarczy obrócić pręt o 180° . Wobec tego $1 - n > 0$ i ostatecznie warunek $l \geq \zeta_0 \geq o$ otrzyma postać $1 - n \geq 1 \pm \sqrt[1/3]{(1+n+n^2)} \geq o$. Prawa nierówność wypełnia się zawsze, ponieważ pierwiastek jest niewątpliwie mniejszy od jedności; lewa daje $-n \geq \pm \sqrt[1/3]{(1+n+n^2)}$. Gdy siły P i Q działają w jednym kierunku, wtedy $1 > n \geq o$, a zatem należy utrzymać jeno dolny znak przed pierwiastkiem. To znaczy, że w wypadku jednokierunkowego działania sił w połąci środkowej istnieje tylko jedna strzałka ugięcia. Gdy siły są różnokierunkowe, $o \geq n > -1$. I tu znak dolny przed pierwiastkiem należy również zachować, a nadto przy $n \leq -1/2$ zachodzi jeszcze nierówność $-n \geq \sqrt[1/3]{(1+n+n^2)}$. Zatem w wypadku różnokierunkowego działania sił w połąci środkowej istnieje jedna tylko strzałka, gdy $o \geq n > -1/2$. Gdy zaś $-1/2 \geq n \geq -1$, odkształcona w środkowej części wygina się podwójnie, ujawniając dwie strzałki, dające maximum i minimum rzędnych η dla tej połąci. Pomiedzy temi strzałkami istnieje zawsze punkt przegięcia. Nadto istnieje on zawsze w wypadku różnokierunkowego działania sił P i Q . Łatwo to udowodnić, zważywszy, że w punkcie przegięcia $EJ\eta'' = \bar{M} = P(l+a-\zeta_1) + A(l-\zeta_1) = o$, skąd mamy $\zeta_1 = l : (1-n)$ z warunkiem $l > \zeta_1 \geq o$. Warunek ten wymaga, aby $n \leq o$.

Chcąc wyznaczyć bezpieczne wymiary pręta, należy znaleźć skrajne wartości momentów. W połąciach bocznych momenty rosną linjowo od zera do $M_a = Pa$ i $M_b = Qb$. W połąci środkowej moment się zmienia linjowo pomiedzy temi dwiema wartościami. Odnośny wykres podaje (Rys. 37). Pełna odkształcona — odpowiada jednokierunkowemu działaniu sił, — przerywana — różnokierunkowemu. Wrysowano również łamaną wykresu sił tnących. W szczególnym wypadku, gdy $Pa = Qb$, mamy $M_a = M_b = M$. Środkowa linja wykresu jest wtedy równoległa do podstawy, a przeto środkowa część odkształconej stanowić będzie łuk koła o promieniu $\rho = EJ : M$ i strzałce pośrodku $f = \rho(1 - \sqrt{1 - l^2 : 4\rho})$. Nadto w tym wypadku: $A = -P$, $B = -Q$, a zatem w środkowej części pręta siła tnąca jest równa zeru.

§ 11. Belka na dwóch podporach, statycznie niewyznaczalna zewnątrznie, odpowiada wszelkiemu układowi podpór, różnemu od tylko co rozpatrywanego. Jeżeli mamy prawą podporę stałą, a lewą pozostawimy rolkową, to otrzymamy belkę jednostronnie zamocowaną a drugostronnie podpartą. Jest to jedyny układ o pojedynczej odporze poziomej H , która w wypadku działania sił prostopadłych do pierwotnej osi poziomej belki równa jest oczywiście zeru. I tu początek osi nieruchomych obieramy w podpartym punkcie prawym — pierwotnej osi $B\xi$. Oś $B\eta$ kierujemy w dół, oś $B\xi$ — ku patrzącemu. Odpory będą tu: pionowe A, B , poziomy H i moment osadczy prawy M_B . Rozpatrzmy dwa zasadnicze rodzaje obciążeń gnących:

§ 12. Obciążenie ciągłe, pokrywające całą belkę w stosunku p kg na jednostkę długości (Rys. 38). Równania statyki wypisane dla punktu B dadzą: $A + B + pl = 0$, $H = 0$, $Al + \frac{1}{2} pl^2 + M_B = 0$, skąd $M_B = -Al - \frac{1}{2} Pl$, $B = -A - P$,



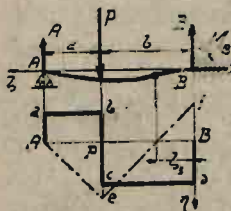
Rys. 38.

gdzie przez $P = pl$ oznaczyliśmy cały ciężar obciążenia. Zatem $EJ\eta'' = A(l - \zeta) + \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$, tu bowiem mamy tylko jedną połączności momentów. W tym wzorze A jest statycznie odporem niewyznaczalnym. Łatwo go jednak wyznaczymy z równań gięcia, gdy przekrój poprzeczny pręta jest stały. W tym założeniu mamy $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} A(l - \zeta)^2 - \frac{1}{6} p(l - \zeta)^3$ oraz $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6} A(l - \zeta)^3 + \frac{1}{24} p(l - \zeta)^4$. Tutaj dla $\zeta = l$ mamy $\eta = 0$, a nadto dla $\zeta = 0$ będzie $\eta = 0$

i $\eta' = 0$, co bezpośrednio wynika ze sposobu umocowania pręta w B . Zatem $D + Cl = 0$, $D + \frac{1}{6} Al^3 + \frac{1}{24} pl^4 = 0$, $C - \frac{1}{2} Al^2 - \frac{1}{6} pl^3 = 0$. Mnożąc trzecie równanie przez l dodajemy do drugiego. Stąd na zasadzie pierwszego mamy $A = -\frac{3}{8} pl$. Nadto $C = -\frac{1}{32} pl^3$, $D = \frac{1}{48} pl^4$. Te wartości wyznaczają równanie odkształconej. Chcąc znaleźć strzałkę, czynimy $EJ\eta' = 0$, co daje: $-8(l - \zeta_0)^3 + 9l(l - \zeta_0)^2 - l^3 = \zeta_0(8\zeta_0^2 - 15l\zeta_0 + 6l^2) = 0$. Stąd $\zeta_0 = l(15 - \sqrt{33}) : 16$. Ta wartość po podstawieniu w równanie odkształconej da strzałkę $f = (78 + 110\sqrt{33}) Pl^3 : (2 \times 16^4 \times EJ) \infty Pl^3 : 185 EJ$. Chcąc z kolei znaleźć punkt przegięcia, czynimy $EJ\eta'' = 0$, co daje $(l - \zeta_1)(l - 4\zeta_1) = 0$, skąd $\zeta_1 = \frac{1}{4} l$. Tutaj panuje nadto moment równy zeru.

Skrajną wartość momentu wyznaczymy z równania $\frac{dM}{d\zeta} = -A - p(l - \zeta_2)$, które daje $\zeta_2 = \frac{3}{8} l$. W tym punkcie wartość momentu wynosi $M_m = -\frac{9}{128} pl^2$. Po przejściu przez zero w punkcie przegięcia momenty z ujemnych stają się dodatnie i osięgają skrajną wartość w przekroju osadczym, gdzie $M_o = Al + \frac{1}{2} pl^2 = \frac{1}{8} pl^2 = -M_B$. Ta ostatnia wartość stanowi zarazem bezwzględne maximum, wyrokujące o dostatecznych wymiarach pręta. Wykresy momentów i sił tnących podaje rysunek.

§ 13. Obciążenie siłą skupioną, przyłożoną w odległości a od lewej rolkowej podpory. Niech (Rys. 39) nadto będzie $l = a + b$, a wtedy równania statyki dla punktu B dadzą $A + B + P = 0$, $Al + Pb + M_B = 0$. Stąd $M_B = -Al - Pb$, $B = -P - A$, zatem odpór A jest statycznie niewyznaczalny. Określimy go z łatwością dla belki o stałym przekroju poprzecznym, pisząc $EJ\eta'' =$



Rys. 39.

$= A(l - \zeta) + P(b - \zeta)$. Tutaj oś siły dzieli płaszczyzną gięcia na dwie połacie. Stąd $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} A(l - \zeta)^2 + \frac{1}{2} P(b - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta +$

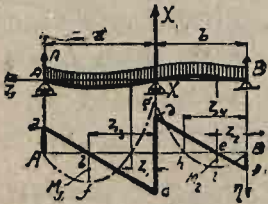
$+ \frac{1}{6} A (l - \zeta)^2 + \frac{1}{6} P (b - \zeta)^2$. I tu znów $\eta = 0$ gdy $\zeta = l$ a nadto $\eta = 0$ i $\eta' = 0$, gdy $\zeta = 0$. Skąd $D + Cl = 0$, $D + \frac{1}{6} Al^2 + \frac{1}{6} Pb^2 = 0$, $C - \frac{1}{2} Al^2 - \frac{1}{2} Pb^2 = 0$. Z tych równań mamy $A = -Pb^2 (3l - b) : 2l^3$, $C = -Pb^2 (l - b) : 4l$, $D = \frac{1}{4} Pb^2 (l - b)$. Korzystając z tych wartości snadnie wyznaczmy odkształconą. Czyniąc $\zeta = b$ w jej równaniu otrzymamy strzałkę siły $f_p = Pb^2 (l - b) [(2l - b)^2 - lb] : 12 EJl^3$. Chcąc wyznaczyć strzałkę ugięcia określamy z równania $EJ\eta' = 0$ odnośną wartość ζ_0 . Dla pierwszej połaci równanie to: $-Pb^2 (l - b) : 4l + Pb^2 (3l - b) (l - \zeta_0)^2 : 4l^3 = 0$ da: $\zeta_0 = l \left[1 \pm \sqrt{(l - b) : (3l - b)} \right]$ z warunkiem $l \geq \zeta_0 \geq b$. Pierwszej nierówności uczynimy zadość, zachowując jeno znak minus we wzorze; druga nierówność wymaga, aby $l - l\sqrt{(l - b) : (3l - b)} \geq b$. Ma to miejsce dla wszelkich wartości $b \leq l(2 - \sqrt{2})$, a wtedy mamy istotnie strzałkę w połaci pierwszej $f_0 = Pb^2 (l - b) \sqrt{(l - b) : (3l - b)} : 6 EJ$. Gdy $b > l(2 - \sqrt{2})$, strzałka przechodzi do połaci drugiej. Ze wzoru $EJ\eta' = C - \frac{1}{2} A (l - \zeta_1)^2 - \frac{1}{2} P (b - \zeta_1)^2 = 0$ wyznaczmy odcięte $\zeta_1 = 0$ i $\zeta_2 = 2lb [2l^2 - 3lb + b^2] : [2l^3 - 3lb^2 + b^3] = 2lb (2l - b) : (2l^2 + 2lb + b^2)$. Czyniąc we wzorze dla odkształconej $\zeta = \zeta_2$, otrzymamy szukaną strzałkę dla drugiej połaci. Wreszcie, gdy $b = l(2 - \sqrt{2})$, wtedy $\zeta_0 = b$, czyli $f = f_p$ — strzałka ugięcia stanowi strzałkę siły zarazem.

Chcąc znaleźć punkty przegięcia odkształconej, piszemy: $EJ\eta'' = A (l - \zeta_3) + P (b - \zeta_3) = 0$. To równanie daje dla połaci pierwszej $\zeta_3 = l$, zatem jedynie w połaci drugiej możemy oczekiwać istotnego punktu przegięcia, przy $\zeta_3 = bl(2l - b) : (2l^2 + 2lb + b^2) = \frac{1}{2} \zeta_2$. W tem miejscu panuje nadto wartość zerowa momentu gnącego. W pierwszej połaci moment maleje linjowo aż do skrajnej wartości $M_p = A(l - b)$; w połaci drugiej moment rośnie od tej wartości ujemnej, aż do wartości dodatniej $M_0 = Al + Pb = -M_B$ ponad podporą prawą. Odnośny wykres momentów i sił tnących podaje rysunek. Różnica $M_0 + M_p = Pb(l - b) (2l^2 - 4bl + b^2) : 2l^3$ staje się zerem dla $b = l(2 - \sqrt{2})$. Skoro więc $b < l(2 - \sqrt{2})$, wtedy M_0 stanowi maximum momentów bezwzględne, gdy zaś $b > l(2 - \sqrt{2})$ — maximum daje M_p .

§ 14. Belki wieloprzęsłowe. Belka tylko co rozpatrywana stanowi niewątpliwie jedyny ustrój dwupodporowy, nie ujawniający odporów poziomych przy obciążeniu gnącym pionowym, dalsze więc rozważanie ustrojów statycznie niewyznaczalnych z konieczności wkracza w dziedzinę belek wielopodporowych czyli *wieloprzęsłowych*, bo *przęsłem nazywamy część belki, przerzuconą ponad dwiema sąsiednimi podporami*. Zatem belkę, leżącą na $n + 1$ podporach zowiemy n — *przęsłową*. Przy obciąże-

niu gnącym pionowym n — przęsłowa belka pozioma nie daje odporów poziomych jedynie w tym wypadku, gdy n jej podpór należy do typu rolkowych, a pozostała, dajmy na to, prawa skrajna podpora B jest przegubowa, lub stała. W niej umieszczamy początek stałych osi współrzędnych, kierując oś $B\zeta$ po osi pierwotnej nieodkształconej belki. Oś $B\eta$ kierujemy w dół a oś $B\xi$ ku patrzącemu. Skrajną lewą podporę oznaczamy przez A , środkowe przez X, Y, Z i t. d. idąc od lewej ku prawej. Te same litery mianują zarazem odpory pionowe. Przy obciążeniu siłami pionowymi równania statyki pozwolą wyznaczyć dwa odpory pionowe, powiedzmy A i B , oraz odpór poziomy H prawej podpory, oczywiście równy zeru. Pozostałe odpory pionowe X, Y, Z, \dots oraz domniemany moment osadczy podpory prawej będą statycznie niewyznaczalnymi, które zresztą łatwo wyznaczymy z równań gięcia dla belki o stałym przekroju poprzecznym. Najlepiej to uwypuklą przykłady.

§ 15. Belka dwuprzęsłowa, dajmy na to, obciążona jednostajnie w stosunku p kg na jednostkę długości (Rys. 40). Długość lewego przęsła niech będzie a , prawego — b , nadto $l = a + b$. Podpory A, X są rolkowe, prawa B — przegubowa. Równania statyki w stosunku do punktu B dadzą: $A + X + B + pl = 0$, $Al + Xb + \frac{1}{2}pl^2 = 0$, można z nich wyznaczyć A i B w zależności od jedynej w danym wypadku statycznie niewyznaczalnej X . Mimo to możemy, nie określając A i B , wypisać równanie gięcia $EJ\eta'' =$



Rys. 40.

$= A(l - \zeta) + \frac{1}{2}p(l - \zeta)^2 + X(b - \zeta)$. W założeniu stałego przekroju belki będziemy mieli: $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}A(l - \zeta)^2 - \frac{1}{6}p(l - \zeta)^3 - \frac{1}{2}X(b - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}A(l - \zeta)^3 + \frac{1}{24}p(l - \zeta)^4 + \frac{1}{6}X(b - \zeta)^3$. Aby wyznaczyć C, D, X uwzględniamy warunki podparcia belki. Przy $\zeta = 0$ mamy $\eta = 0$ a nadto jeszcze $\eta' = 0$ dla $\zeta = b$ i $\zeta = l$. Stąd: $D + Cl = 0$, $D + Cb + \frac{1}{6}Aa^3 + \frac{1}{24}pa^4 = 0$, $D + \frac{1}{6}Al^3 + \frac{1}{24}pl^4 + \frac{1}{6}Xb^3 = 0$. Mnożymy pierwsze równanie przez b i odejmujemy od drugiego, pomnożonego przez l . Różnicę $Da + \frac{1}{6}Ala^3 + \frac{1}{24}pla^4 = 0$ odejmujemy od ostatniego równania, skąd: $Xb^2 + Al(2a + b) + \frac{1}{4}pl(3a^2 + 3ab + b^2) = 0$. Wreszcie mnożymy równanie momentów przez b i odejmujemy. W wyniku otrzymamy wprost $A = -\frac{1}{8}p(3a^2 + ab - b^2) : a = -\frac{1}{2}pa + \frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : al$. Na mocy symetrii możemy wypisać odrazu $B = -\frac{1}{2}pb + \frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : bl$, wreszcie z równania sił mamy: $X = -pl - A - B = -\frac{1}{2}pl - \frac{1}{8}p(a^3 + b^3) : ab$. Dalej z trzeciego równania: $D = \frac{1}{24}pa^3l - \frac{1}{48}pa(a^3 + b^3)$, $C = -\frac{1}{24}pa^3 + \frac{1}{48}pa(a^3 + b^3) : l$. W ten sposób wyznaczyliśmy wszystkie niewiadome, możemy przeto zbadać kształt i bieg

odkształconej. Rozwiązując równanie $EJ\eta' = 0$, otrzymamy strzałki ugięcia pręta. Nadto łatwo możemy znaleźć punkty przegięcia odkształconej, panuje w nich bowiem zerowa wartość momentu gnącego. Zatem w tych punktach $EJ\eta'' = 0$. Dla pierwszej połaci: $A(l - \zeta_0) + \frac{1}{2}p(l - \zeta_0)^2 = 0$, skąd: $\zeta_0 = l + 2A : p = b + (a^3 + b^3) : 4al$. Dla drugiej połaci: $A(l - \zeta_1) + \frac{1}{2}p(l - \zeta_1)^2 + X(b - \zeta_1) = 0$, co daje $\zeta_1 = -2B : p = b - (a^3 + b^3) : 4bl$. Należy przytem koniecznie sprawdzić, czy znalezione wartości odciętych czynią zadość warunkom: $l \geq \zeta_0 \geq b \geq \zeta_1 \geq 0$. Warunki $\zeta_0 \geq b \geq \zeta_1$ są oczywiste, należy przeto jeno zbadać, kiedy $l \geq \zeta_0$ i $\zeta_1 \geq 0$. Zawsze możemy założyć, że $b : a = n < 1$, w przeciwnym bowiem razie wystarczy obrócić pręt o 180° , aby otrzymać powyższą zależność. Zatem $b = an$, $l = a(1 + n)$, co podstawivszy w pierwszą nierówność wyżej zaznaczoną, otrzymamy $a(1 + n) \geq an + (1 + n^3)a : 4(1 + n)$, inaczej: $4 \geq 1 - n + n^2$. Otrzymana nierówność wyetlnia się zawsze przy wszelkiem n ułamkiem dodatniem. Stąd wniosek, że w większej połaci istnieje zawsze punkt przegięcia odkształconej. Drugi, powyżej wypisany warunek da nam $an - (1 + n^3)a : 4n(1 + n) \geq 0$, czyli $3n^2 + n - 1 \geq 0$. Ten warunek wypełnia się, gdy $1 \geq n \geq \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})$. Ostatecznie więc punkty przegięcia istnieją dla obu przęsel wtedy jedynie, gdy $a \geq b \geq \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})a$; natomiast, gdy $\frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})a \geq b \geq 0$, punkt przegięcia odkształconej istnieje tylko dla większego przęśla. Chcąc dalej znaleźć skrajne wartości momentów, piszemy

$$\frac{dM}{d\zeta} = -A - p(l - \zeta_3) = 0 \text{ dla pierwszego przęśla, skąd } \zeta_3 = l + A : p.$$

Po podstawieniu tej wartości we wzór otrzymamy skrajną wartość momentu pierwszej połaci $M_1 = -A^2 : 2p$. Dla połaci drugiej $\frac{dM}{d\zeta} =$

$$= -A - p(l - \zeta_4) - X = B + p\zeta_4 = 0, \text{ czyli } \zeta_4 = -B : p. \text{ Odnośna skrajna wartość momentu wyniesie } M_2 = -B^2 : 2p. \text{ Moment odporowy środkowy otrzymamy, czyniąc } \zeta = b \text{ we wzorze dla momentów: } M_x = A(l - b) + \frac{1}{2}p(l - b)^2 = a(A + \frac{1}{2}pa) = \frac{1}{3}p(a^3 + b^3) : l. \text{ Odnośny wykres momentów i sił tnących podaje rysunek. Godzi się tu zaznaczyć, że wartość skrajna momentu ujemna } M_1 \text{ istnieje zawsze dla połaci większej, druga zaś } M_2 \text{ tylko o tyle, o ile } a \geq b \geq \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{13})a, \text{ w przeciwnym razie w połaci drugiej moment splywa parabolicznie od } M_x \text{ do zera, nie przecinając podstawy wykresu. W szczególnym wypadku, gdy } a = b = \frac{1}{2}l, \text{ będziemy mieli } A = B = -\frac{3}{16}pl, X = -\frac{5}{8}pl, M_1 = M_2 = -\frac{9}{32}pl^2, M_x = \frac{1}{32}pl^2, \text{ przyczem obie skrajne wartości momentów ujemne leżą symetrycznie w odległości } \frac{5}{16}l \text{ od środkowej podpory, tutaj bowiem: } \zeta_3 = \frac{13}{16}l, \zeta_4 = \frac{3}{16}l, \text{ a nadto: } \zeta_0 = \frac{5}{8}l, \zeta_1 = \frac{3}{8}l.$$

Te rachunki nie należą do łatwych. Trudności rosną wraz z liczbą podpór, to też od dawna starano się rachunek bezpośredni ominąć sposobami, rychlej prowadzącymi do celu. Jeden z nich bierze za punkt wyjścia:

§ 17. Zastosowanie zasady niezależności działania sił do

obliczania belek wieloprzęsłowych. Weźmy pod uwagę jakąkolwiek belkę n przęsłową, obciążoną układem sił pionowych. Skrajna prawa jej podpora niech będzie przegubowa, pozostałe — rolkowe. Odrzucmy wszystkie pośrednie podpory X, Y, Z, \dots , a uczynimy pręt statycznie wyznaczalnym, będziemy mogli przeto łatwo wyznaczyć równanie jego odkształconej w założeniu stałego poprzecznego przekroju belki.

Z tego równania otrzymamy strzałki ugięcia belki w miejscach odrzuconych podpór. Nazwijmy je f_x, f_y, f_z, \dots . Te strzałki odpowiadają wygięciu pręta pod jarzmem istotnie działającego obciążenia sił pionowych, cisnących na belkę, spoczywającą jeno na skrajnych dwóch podporach. Odciążmy belkę, i, po wyprostowaniu się jej osi podłużnej, przyłożmy w miejscu, gdzie była dawniej podpora X — siłę X pionową. Ta siła ugnie pręt ponownie, dając w miejscach, skąd odrzuciliśmy podpory — odpowiednio strzałki ugięcia $f_{xx}, f_{yx}, f_{zx}, \dots$, które z łatwością wyznaczymy z odnośnego równania odkształconej. Z kolei odrzucamy siłę X i przykładamy nową siłę Y tam, gdzie uprzednio była podpora Y . I znów z odnośnego równania odkształconej wyznaczymy strzałki $f_{xy}, f_{yy}, f_{zy}, \dots$ w miejscach odrzuconych podpór. Tę czynność powtarzamy aż do wyczerpania wszystkich pośrednich punktów dawnego podparcia belki. Wreszcie po ostatniem odciążeniu belki, przywracamy pierwotne, rzeczywiste jej obciążenie łącznie z siłami X, Y, Z, \dots , które mają zastąpić działanie odrzuconych podpór. To łączne obciążenie da wypadkowe strzałki, które na mocy drugiego prawa Hooke'a oraz prawa o niezależnem działaniu sił stanowić będą sumy $f_x + f_{xx} + f_{xy} + f_{xs} + \dots = f_1, f_y + f_{yx} + f_{yy} + f_{ys} + \dots = f_2, f_z + f_{zx} + f_{zy} + f_{zs} + \dots = f_3$ i t. d. Zatem, aby działanie sił X, Y, Z, \dots , zastępujących podpory odrzucone, było istotne i zgodne z rzeczywistością, należy otrzymać $f_1 = f_2 = f_3 = \dots = 0$, belka bowiem ponad podporami nie zmienia poziomu, jako podparta. Słowem, z układu równań $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0, \dots$ trzeba wyznaczyć układ właściwych wartości X, Y, Z, \dots . Na tej prostej myśli polega cały sposób powyższy, niestety jednak nader niewygodny przy większej liczbie przęseł.

W zastosowaniu do belki dwuprzęsłowej, wyżej rozpatrywanej, sposób ten opiera się na odrzuceniu pośredniej podpory. Obciążenie belki jednostajne da w miejscu podpory odrzuconej strzałkę f_x , którą łatwo wyznaczymy, czyniąc $\zeta = b$ we wzorze odkształconej. W ustępie piątym tego rozdziału mieliśmy wzór $EJ\eta = \frac{1}{12} Pbl^2 - \frac{1}{24} Pb^3 - \frac{1}{12} Pbl\zeta + \frac{1}{24} Pb^2\zeta : l - \frac{1}{12} Pb(l - \zeta)^2 : l + \frac{1}{24} P(b - \zeta)^2 : b$. Ponieważ w danym wypadku obciążenie pokrywa całą belkę, przeto należy we wzorze napisać wszędzie l zamiast b , co da $EJ\eta = \frac{1}{24} p\zeta(\zeta^3 - 2l\zeta^2 + l^3)$. A zatem $EJf_x = \frac{1}{24} pb(b^3 - 2lb^2 + l^3) = \frac{1}{24} pab(a^2 + 3ab + b^2)$. Z kolei

obciążamy belkę siłą skupioną X , przyłożoną w odległości $\zeta = b$, a więc w miejscu odrzuconej podpory i wyznaczamy jej strzałkę siły f_{xx} ze wzoru $EJf_{xx} = Xa^2b^2 : 3l$, podanego w ustępie czwartym rozdziału niniejszego. Dobierzmy X tak, aby $f_x + f_{xx} = 0$, a otrzymamy istotną wartość odpory X , wszystkie trzy bowiem podpory pręta winny być na jednym poziomie, a podczas wygięcia pośrednia podpora obniżeniu nie ulegnie. Stąd mamy: $X = -\frac{1}{8} p (a^2 + 3ab + b^2) l : ab = -\frac{1}{2} p - \frac{1}{8} p (a^2 + b^2) : ab$. Tę samą wartość otrzymaliśmy uprzednio drogą bezpośrednią.

§ 18. Belka trójprzęsłowa. Weźmy pod uwagę pręt o stałym przekroju poprzecznym, wsparty na cztery podpory A, X, Y, B , uszeregowane poziomo. Długości przęseł oznaczamy odpowiednio przez a, λ, b , przyczem cała długość pręta $l = a + \lambda + b$ dźwiga obciążenie, dajmy na to, jednostajne p KG na jednostkę długości. Równania statyki dla skrajnej podpory prawej będą: $A + X + Y + B + pl = 0$, $Al + X(\lambda + b) + Yb + \frac{1}{2} pl^2 = 0$. Z nich wyznaczmy A i B w zależności od statycznie niewyznaczalnych X, Y . Trzeciego równania nie wpisujemy, zakładamy bowiem że prawa podpora B jest przegubowa a pozostałe — rolkowe. Jedyną zatem siłą poziomą będzie tu odpór H skrajnej podpory prawej. W założeniu sił wyłącznie pionowych $H = 0$. Chcąc wyznaczyć X, Y , odrzucamy obie podpory pośrednie i zakładamy, że pręt, jak dawniej, ulega obciążeniu jednostajnemu, które daje strzałki f_x i f_y w miejscach, gdzie były podpory X i Y . Czyniąc $\zeta = b + \lambda$ oraz $\zeta = b$ w odnośnym wzorze odkształconej, otrzymamy: $EJf_x = \frac{1}{24} pa (b + \lambda) [a^2 + 3a(b + \lambda) + (b + \lambda)^2]$ oraz $EJf_y = \frac{1}{24} pb (a + \lambda) [(a + \lambda)^2 + 3b(a + \lambda) + b^2]$. Z kolei zakładamy, że belka obciążona jest siłą X , przyłożoną w miejscu odrzuconej podpory X i wyznaczamy strzałkę tej siły $EJf_{xx} = Xa^2(b + \lambda)^2 : 3l$, oraz strzałkę f_{yx} ugięcia pręta w miejscu odrzuconej podpory Y . W ustępie czwartym rozdziału niniejszego mieliśmy wzór $EJ\eta = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) - \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) \zeta : l - \frac{1}{6} Pb (l - \zeta)^2 : l + \frac{1}{6} P (b - \zeta)^2$. Aby go dostosować do wypadku obecnego,

należy uczynić $P = X$, $b = \lambda + b$ oraz $\zeta = b$, a wtedy $6lEJf_{yx} = Xab [\lambda^2 + 2b\lambda + 2a\lambda + 2ab]$. Z kolei po raz ostatni zakładamy, że belka obciążona jest siłą skupioną Y , przyłożoną w miejscu odrzuconej podpory Y , i określamy strzałkę tej siły $EJf_{yy} = Y(a + \lambda)^2 b^2 : 3l$ oraz strzałkę ugięcia f_{xy} belki ponad odrzuconą podporą X . W tym celu w równaniu odkształconej, powyżej wypisanem, czynimy $P = Y$ oraz $\zeta = b + \lambda$. Odrzuciwszy wyraz poza kreską, otrzymamy: $6lEJf_{xy} = Yab (\lambda^2 + 2ab + 2a\lambda + 2b\lambda)$. W istocie wszystkie te trzy obciążenia działają równocześnie, siły bowiem X, Y mają zastąpić działanie podpór. W obec zupełnej nieruchomości podpór pośrednich, należy niewątpliwie uczynić $f_x + f_{xx} + f_{xy} = 0$, $f_y + f_{yx} + f_{yy} = 0$. Te dwa równania linjowe względem X, Y pozwolą wyznaczyć brakujące odpory.

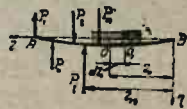
W szczególnym wypadku, gdy $a = \lambda = b = \frac{1}{3} l$, będziemy mieli $f_x = f_y = \frac{11}{972} pl^4 : EJ$, $f_{xx} = \frac{1}{243} Xl^3 : EJ$, $f_{yx} = \frac{1}{486} Xl^3 : EJ$, $f_{yy} = \frac{1}{243} Yl^3 : EJ$ oraz $f_{xy} = \frac{1}{486} Yl^3 : EJ$. Dodając odnośne strzałki,

otrzymamy po skróceniu przez l^3 : $972 EJ$ równania $11 lp + 16 X + 14 Y = 11 lp + 16 Y + 14 X = 0$. Stąd bezpośrednio $X = Y = -\frac{11}{150} lp$. Nadto z równań statyki mamy: $A = B = -\frac{2}{15} lp$. W ten sposób zagadnienie sprowadza się do dziedziny znanej. Tylko co rozpatrywany wypadek jest już daleko bardziej złożony: trudności rosną wraz z liczbą podpór pośrednich. Należy przeto poznać sposoby, nie posiadające tej wady. W tym celu ustalimy przedewszystkiem:

§ 19. Prawo znakowania wzoru dla gięcia właściwego płaskiego. Wybór znaku we wzorze przybliżonym: $\pm EJ\eta'' = M$ zależy niewątpliwie od położenia stałych osi, które zazwyczaj prowadzimy ze skrajnej prawej podpory B , kierując oś $B\zeta$ na lewo po osi pierwotnej pręta, oś $B\eta$ w dół, a $B\xi$ — ku patrzącemu. Nadto znak wzoru zależy niewątpliwie od kierunku sprowadzania sił gnących do środków przekrojów poprzecznych. Zazwyczaj rozpoczynamy od skrajnego lewego przekroju pręta, idąc poprzez wszystkie przekroje dalsze — ku skrajnemu prawemu. Kolejno przytem uwzględniamy siły gnące, spotykane po drodze, sprowadzamy bowiem do środka każdego przekroju poprzecznego każdorazowo tylko lewy układ sił gnących. Siły gnące i odpory dodatnie, a więc jednokierunkowe z osią $B\eta$, bo skierowane w dół, przy sprowadzeniu do środka przekroju na prawo od nich leżącego — dają momenty lewoskrętne, przeciwko strzałce zegara dla patrzącego; natomiast siły i odpory ujemne, a więc skierowane odwrotnie, dają momenty prawoskrętne, zgodne ze strzałką zegara pod względem kierunku odnośnej pary obrotowej. Każdy moment prawoskrętny wygina ku górze lewą część pręta, poza przekrojem sprowadzenia leżącą, — lewoskrętny stara się nachylić ją ku dołowi. Zatem — moment prawoskrętny wygina pręt wypukłością do dołu a wklęsłością ku górze, o ile powstał ze sprowadzenia układu sił gnących lewego w stosunku do przekroju rozpatrywanego. Gdy środek tego przekroju leży pod osią $B\zeta$, wtedy w sąsiedztwie środka spólrzędne odkształconej są dodatnie, a odkształcona — obrócona wklęsłością ku osi $B\zeta$. Musi być przeto $\eta\eta'' < 0$, czyli $\eta'' < 0$, ponieważ tutaj $\eta > 0$. Gdy znowu środek przekroju sprowadzenia leży ponad osią $B\zeta$ — odkształcona względem tej osi jest wypukła, musi być przeto $\eta\eta'' > 0$. Tu jednak rzędne η są ujemne, zatem i w tym wypadku mamy również $\eta'' < 0$. Ujemna wartość η'' odpowiada momentom prawoskrętnym. Rozumując zupełnie tak samo z łatwością przekonamy się, że dodatnia wartość η'' odpowiada momentom lewoskrętnym. Istotnie, gdy środek sprowadzenia leży pod osią $B\zeta$, odkształcona jest wypukłością zwrócona ku osi, musi być przeto $\eta\eta'' > 0$, skąd, wobec $\eta > 0$ mamy $\eta'' > 0$. Gdy znowu środek leży nad osią $B\zeta$, odkształcona zwraca się ku niej wklęsłością, a zatem musi być $\eta\eta'' < 0$, czyli znów $\eta'' > 0$ wobec $\eta < 0$. Stąd wniosek ostateczny, że wszór $EJ\eta'' = M$ dotyczy momentu

lewoskrętnego, wzór zaś: $-EJ\eta'' = M$ — prawoskrętnego, wszelki bowiem moment znakujemy dodatnio według umowy.

Weźmy (Rys. 41) jednorodnie zbudowany pręt pierwotnie prosty, odkształcony pod jarzmem układu sił gnących, prostopadłych do osi pierwotnej pręta $B\zeta$. Na odkształconej obierzmy dowolny zresztą punkt o (ζ, η) — środek odnośnego przekroju poprzecznego. Płaszczyzna tego przekroju podzieli obciążenie zewnętrzne na dwa układy — lewy i prawy. Siły i odpory układu lewego oznaczymy przez P_i ($i=1, 2, \dots, n$).



Rys. 41.

Po sprowadzeniu tego układu do środka o otrzymamy wypadkową siłę tnącą $T = \Sigma P_i$, równą algebraicznej sumie poszczególnych sił P_i . Znak sumy da kierunek siły tnącej. Dodatnia będzie skierowana w dół, ujemna — do góry. Nadto każda z sił układu, po sprowadzeniu da moment $M_i = P_i (\zeta_i - \zeta)$, gdzie ζ_i oznacza odcięta punktu przyłożenia siły P_i . Dla sił lewego układu $\zeta_i > \zeta$, przeto znak M_i zależy od znaku siły P_i . Ujemną wartość da siła ujemna, zatem wartość ujemna iloczynu $P_i (\zeta_i - \zeta)$ daje moment prawoskrętny, jako pochodzący od siły, skierowanej ku górze. Dodatnia wartość tego iloczynu da moment lewoskrętny — siły P_i , dodatniej, bo skierowanej w dół. Moment wypadkowy $M = \Sigma M_i = \Sigma P_i (\zeta_i - \zeta)$, rozpatrywany, jako algebraiczna suma momentów wszystkich sił P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), będzie miał wartość dodatnią, lub ujemną. Dodatniej odpowie moment lewoskrętny, ujemnej — prawoskrętny. Możemy zatem napisać wprost $EJ\eta'' = M$, pomijając znak podwójny w lewej części wzoru, jako zbyteczny, bo utajony w jego części prawej.

Przy wyznaczaniu momentu sił gnących lewej części pręta należy zachować właściwy znak siły gnącej i mnożyć ją przez odległość od środka sprowadzenia. Dodając algebraicznie otrzymane iloczyny, otrzymamy moment wypadkowy, równy $EJ\eta''$.

To prawo obejmuje również wypadek szczególny, kiedy wśród obciążeń układu lewego znajdują się momenty, możemy bowiem zawsze każdy moment obciążenia zewnętrznego rozłożyć na odpowiednią parę sił pionowych. Pozwala ono nadto ustalić:

§ 20. Zależność między siłą tnącą a momentem gnącym przekroju. Weźmy pod uwagę belkę wygiętą płasko pod jarzmem obciążenia, leżącego w płaszczyźnie gięcia pionowej. Kierunek sprowadzania sił gnących niech będzie taki, jak poprzednio: od skrajnego lewego przekroju poprzecznego pręta do skrajnego prawego. Kolejno zatem rozpatrujemy przekroje pręta poprzeczne. Ich płaszczyzny każdorazowo dzielą obciążenie zewnętrzne na dwa układy — sił gnących prawych i lewych. Do środka każdego przekroju sprowadzamy zawsze tylko siły

gnące lewego układu. Te siły dają wypadkową siłę tnącą, leżącą w płaszczyźnie gięcia, oraz — moment gnący, prostopadły do tej płaszczyzny. Oznaczmy przez O środek któregośkolwiek przekroju, przez T i M — jego siłę tnącą i moment — wypadkowe lewego układu sił odkształcających. W kierunku sprowadzenia sił, a więc nieco dalej na prawo od O wyznaczamy sąsiedni punkt O_1 na odkształconej, znikomo o $d\zeta$ odległy od O i zakładamy, że na przestrzeni OO_1 nie działa żadna siła skupiona, natomiast w samym punkcie O_1 może panować siła P_{n+1} , pierwsza zwiastunka układu odkształcającego prawego. Łatwo uczynić zadość temu warunkowi, biorąc OO_1 dostatecznie małe. Słowem wolno nam zbliżyć się do punktu przyłożenia siły P_{n+1} , lecz nie przekroczyć go nigdy! Ponieważ z założenia w odcinku OO_1 nie działa żadna siła gnąca, przeto po sprowadzeniu układu lewego sił gnących do środka O_1 , otrzymamy moment wypadkowy $M_1 = M + Td\zeta$. Łatwo się o tem przekonać, zważywszy, że układ lewy po sprowadzeniu do środka O zastąpiony został wypadkowami M i T . Zatem przy sprowadzeniu do środka O_1 możemy brać pod uwagę jeno te wypadkowe. Moment M , jako wektor swobodny, może być wprost przeniesiony w O_1 ; siła tnąca T po przeniesieniu do O_1 da taką samą siłę tnącą oraz dodatkowy moment $Td\zeta$, który, wraz z M da wypadkowy moment M_1 . Będzie on nieco różny od M , jak to wynika ze wzoru tylko co wypisanego, możemy przeto oznaczyć $M_1 = M + dM$, a wtedy $dM = Td\zeta$. Ten sam wynik otrzymamy również i w tym wypadku, gdy nadto ponad odcinkiem OO_1 odkształconej panuje obciążenie jednostkowe p kg na jednostkę długości. Tutaj przy przejściu od O do O_1 moment M jeszcze dodatkowo wzrośnie o $pd\zeta \times \frac{1}{2} d\zeta$, będziemy mieli przeto $dM = Td\zeta + \frac{1}{2} pd\zeta^2$. Pomijając wyższego rzędu małe, mamy stąd, jak dawniej $dM = Td\zeta$. *Elementarny przyrost momentu gnącego przy przejściu od danego przekroju poprzecznego do sąsiedniego w kierunku sprowadzania momentów równy jest sile tnącej owego przekroju, pomnożonej przez odległość obu przekrojów, mierzoną w tym samym kierunku.* Inaczej jeszcze $T = dM : d\zeta$, co zresztą istoty rzeczy nie zmienia.

W powyżej rozpatrywanym wypadku (Rys. 41) belki wygiętej płasko pod jarzmem sił pionowych mieliśmy dla środka $O(\zeta, \eta)$ siłę tnącą $T = \Sigma P_i$ i moment gnący $M = \Sigma P_i(\zeta_i - \zeta)$, wypadkowe sprowadzenia lewego układu sił P_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Weźmy w kierunku sprowadzenia sił, a więc nieco dalej na prawo środek $O_1(\zeta_1, \eta_1)$ sąsiedniego przekroju na odkształconej. Ponieważ $\zeta_1 - \zeta = -d\zeta$, jak to zresztą najlepiej wiadać z rysunku, przeto powinniśmy mieć dla danego wypadku $dM = -Td\zeta$ na mocy twierdzenia powyższego. Sprawdza się to istotnie, mamy bowiem $dM = d\Sigma P_i(\zeta_i - \zeta) = -\Sigma P_i d\zeta = -Td\zeta$.

W ogólnym wypadku mamy, całkując: $M = \int Td\zeta + C$, możemy

przeto wyznaczyć wartości momentów gnących, gdy znamy siły tnące przekrojów poprzecznych. Najlepiej to uskutecznić wykreslnie.

Gdy $T = 0$, wtedy i $dM = 0$ zatem: *Skrajne wartości momentów gnących panują w przekrojach pręta płasko wyginanego, gdzie siła tnąca ma wartość równą zero.* Tem się tłumaczy, dlaczego skrajne wartości wykresu momentów zachodzą w miejscach przecięcia się krzywej wykresu sił tnących z podstawą. Dość jest przejrzeć powyżej podane rysunki, aby się o tem przekonać naocznie.

§ 21. Zależność między obciążeniem jednostkowym a siłą tnącą przekroju. Zachowując znakowania ustępu poprzedniego, zakładamy, że siły skupione prawego układu działają poza środkiem O_1 , natomiast odcinek odkształconej OO_1 dźwiga obciążenie jednostkowe p kg na jednostkę długości pierwotnej pręta. Oznaczmy, jak dawniej przez T — siłę tnącą, panującą w O , przez T_1 , siłę tnącą w O_1 . Ponieważ z założenia w odcinku OO_1 niema sił skupionych, przeto po sprowadzeniu lewego układu sił do środka O_1 , otrzymamy wypadkową siłę tnącą $T_1 = T + pd\zeta$. Z tego równania wynika, że siła tnąca nieco się zmienia przy przejściu od O do O_1 , możemy przeto oznaczyć $T_1 = T + dT$, a wtedy $dT = pd\zeta$. *Elementarny przyrost siły tnącej przy przejściu od danego przekroju poprzecznego do sąsiedniego w kierunku sprowadzania sił, równy jest obciążeniu jednostkowemu, panującemu ponad owym przekrojem, mnożonemu przez odległość obu przekrojów, mierzoną w tym samym kierunku.* I tu również można napisać $p = dT : d\zeta$. Całkując, mamy $T = \int pd\zeta + D$, możemy przeto wyznaczyć wartości sił tnących, gdy znamy obciążenia jednostkowe, panujące w poszczególnych przekrojach pręta. I tu najlepiej uskutecznić rachunek wykreslnie, całkując wykres obciążenia p . Gdy $p = 0$, wtedy i $dT = 0$, a zatem: *Skrajne wartości sił tnących panują w przekrojach poprzecznych pręta płasko zginanego, pozbawionego obciążenia jednostkowego.* Tem się objaśnia, dlaczego obciążeniom skupionym odpowiada łamana krzywa wykresu sił tnących. Łatwo się o tem przekonać rozpatrując podane wyżej rysunki.

§ 22. Równania różniczkowe odkształconej. Korzystając z powyżej udowodnionych zależności możemy ustalić kilka postaci równania różniczkowego odkształconej w założeniu pręta o stałym przekroju poprzecznym. Wyznamy równanie odkształconej pręta płasko zginanego. Będzie to $\eta = f$, gdzie f oznacza strzałkę ugięcia, a zarazem może służyć, jako znak funkcji zmiennej ζ . Ta funkcja stanowi równanie odkształconej. Umiemy ją wyznaczać dla wszelkich obciążeń gnących. Zatem: *rzędna odkształconej daje strzałkę ugięcia pręta płasko zginanego w odnośnym przekroju poprzecznym.* Różniczkując, otrzymamy bezpośred-

nio $\eta' = df : d\zeta = tg \theta \approx 0$, gdzie przez θ oznaczyliśmy kąt, jaki tworzy z pierwotną osią pręta stycznica odkształconej, poprowadzona przez środek danego przekroju poprzecznego. Zatem: *pierwsza pochodna rzędnej odkształconej daje kąt pochylenia osi pierwotnej prętu ku stycznej odkształconej, poprowadzonej przez środek odnośnego przekroju poprzecznego*. Godzi się tu zaznaczyć, że ma to miejsce jedynie dla wygięć nieznacznych, wtedy bowiem możemy bezkarnie pominąć znak tangensa, pisząc wprost $\eta' \approx 0$. Następnie mamy wzór zasadniczy gięcia płaskiego $\eta'' = M : EJ$, który głosi, że: *druga pochodna rzędnej odkształconej daje moment odnośnego przekroju poprzecznego, dzielony przez sztywność pręta w tym przekroju*. Dla pręta o przekroju stałym będziemy mieli dalej różniczkując: $\eta''' = dM : (EJd\zeta) = T : EJ$. Zatem: *trzecia pochodna rzędnej odkształconej daje siłę tnącą odnośnego przekroju poprzecznego, dzieloną przez sztywność pręta w tym przekroju*. Podobnie otrzymamy $\eta'''' = dT : (EJd\zeta) = p : EJ$, skąd wnioskujemy, że: *czwarta pochodna rzędnej odkształconej daje obciążenie jednostkowe, panujące w odnośnym przekroju poprzecznym, dzielone przez sztywność pręta w tym przekroju*. W ten sposób otrzymaliśmy cały szereg równań dla rzędnych odkształconej oraz ich pierwszych czterech pochodnych. Ostatnie dwa równania dotyczą pręta o stałym przekroju. Są to również równania różniczkowe odkształconej. Rzadko je stosujemy, ponieważ nie są wygodne, jako równania wyższego rzędu. Zazwyczaj korzystamy jeno z trzeciego równania $\eta'' = M : EJ$. Daje ono najmniejszą liczbę stałych całkowania.

Przepiszmy jeszcze raz równania powyższe w postaci: $EJ\eta = EJf$, $EJ\eta' = EJ\theta$, $EJ\eta'' = M$, $EJ\eta''' = T$, $EJ\eta'''' = p$. Ostatnie — daje się zawsze otrzymać bezpośrednio, zawiera bowiem obciążenie jednostkowe p — zasadniczą daną wszelkiego wytrzymałościowego zagadnienia. Zazwyczaj wyznaczamy p w postaci wykresu o podstawie równoległej do pierwotnej osi pręta. Pionowe rzędne, poprowadzone ponad odnośnymi przekrojami poprzecznymi dadzą wartości obciążeń miejscowych. Dodając te rzędne wykresu w kierunku sprowadzania sił, otrzymamy siły tnące dla poszczególnych przekrojów pręta. Uszeregowane pionowo we właściwym porządku utworzą one wykres sił tnących T . Dodając z kolei rzędne tego wykresu w tym samym kierunku, otrzymamy momenty dla poszczególnych przekrojów, a zarazem będziemy mogli zbudować wykres momentów gnących M dla całego pręta. Umiemy zatem z wykresu p otrzymać T , a z wykresu T — wyznaczyć M dla tego samego przekroju poprzecznego. *Powtórzmy te same działania, biorąc wykres M miasto wykresu p , a otrzymamy $EJ\theta$ zamiast T , oraz EJf miasto M . Łatwo się o tem przekonać, biorąc pod uwagę poprzednio wypisane równania. Dla pręta o przekroju stałym tak samo różniczkując otrzymamy $EJ\theta$ z EJf , jak T z M , tak samo dostaniemy M z $EJ\theta$, jak p z T . Na odwrót z p*

otrzymamy T i M zupełnie tak samo, jak $\approx M - EJ\theta$ i EJf . Na tych prostych wywodach opiera się:

§ 23. Sposób rachunkowo wykreślny wyznaczania strzałek i kątów pochylenia stycznych odkształconej. Weźmy pod uwagę belkę, wygiętą płasko pod jarzmem obciążenia zewnętrznego. Zbudujmy odnośny wykres momentów gnących M i wyobraźmy sobie nową belkę tej samej długości, dźwigającą obciążenie jednostkowe p_w kg na jednostkę długości, zmieniające się ściśle podług wykresu momentów M . Słowem, zamiast pręta istotnego bierzemy pod uwagę tej samej długości pręt wyobraźalny, dźwigający obciążenie jednostkowe $p_w = M$. Wyznaczmy dla tego obciążenia wykresy sił tnących T_w i momentów gnących M_w . W myśl wniosków powyżej udowodnionych rzędne wykresu pierwszego dadzą odnośne wartości $EJ\theta$, a rzędne wykresu drugiego — wartości EJf . Tą drogą otrzymamy strzałki ugięcia pręta rzeczywistego oraz kąty pochylenia ku jego osi pierwotnej — stycznych odkształconej, słowem — wyznaczmy wygięcie pręta rzeczywistego.

Pewne trudności nastrocza tutaj należyte określenie typu podpór pręta wyobraźalnego, nie jest to bowiem zwykła belka, a raczej twór pomocniczy, ciało stałe, podległe swoistej statyce. Jego podporom przypisujemy własność wzbudzania odporów pionowych i momentów odporowych. Odpory poziome pomijamy wobec zupełnego braku obciążeń poziomych. Pręt wyobraźalny opieramy zawsze tylko końcami obustronnie, lub jednostronnie, zatem odpory pionowe mogą nań działać jedynie w skrajnych przekrojach poprzecznych. Przyłożone gdzieindziej powodowałyby przerwę ciągłości wykresu T_w . Odkształcona miałaby przeto punkt osobliwy o dwóch różnych stycznych, co jest zgoła wykluczone dla pręta rzeczywistego, jako że wtedy powłoki odnośnej płytki musiałyby się przeciąć — wniknąć w siebie wzajemnie.

Odpory pionowe równoważą siły obciążenia pionowego. Warunek ten stanowi istotę równania sił pionowych, pierwszego równania statyki dla pręta wyobraźalnego. Drugie równanie—sił poziomych odpada, pozostaje zatem równanie momentów. To równanie w zastosowaniu do pręta wyobraźalnego może być wypisane tylko dla pewnych punktów. Wiemy, że M_w daje wartość EJf . Ponad podporami pręta rzeczywistego $f = 0$, przeto w odnośnych punktach pręta wyobraźalnego panować winna zero-wa wartość momentu M_w . Ile więc podpór dźwiga pręt rzeczywisty, tyle możemy równań momentów wypisać dla pręta wyobraźalnego. Z nich wyznaczmy niewiadome odpory i momenty odporowe. Poza tem wiemy, że T_w daje wartość $EJ\theta$. Dla przekrojów pręta rzeczywistego zamocowanych: $\theta = 0$, zatem w odnośnych punktach pręta wyobraźalnego pano-

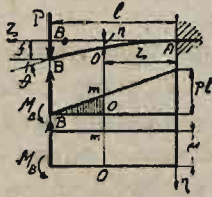
wać winna zerowa wartość siły tnącej T_w . Na mocy rozważań powyższych możemy ustalić następujące prawa ogólne:

W podpartym skrajnym przekroju pręta wyobraźlanego panuje odpór pionowy i moment odporowy, gdy odpowiedni koniec pręta rzeczywistego nie jest podparty.

W podpartym skrajnym przekroju pręta wyobraźlanego panuje jeno odpór pionowy, gdy odpowiedni koniec pręta rzeczywistego spoczywa na podporze rolkowej, lub przegubowej.

Skrajny przekrój pręta wyobraźlanego nie jest podparty, gdy odpowiedni koniec pręta rzeczywistego jest zamocowany. Przykłady najlepiej wyjaśnią istotę rzeczy.

§ 24. Pręt osadzony jednostronnie. W założeniu siły skupionej P , działającej w skrajnym przekroju swobodnym pręta otrzymamy wykres momentów gnących M w postaci (Rys. 42) trójkąta prostokątnego, w którym podstawa równa l a wysokość—druga przyprostokątna równa jest Pl . W danym wypadku wobec zamocowania prawego końca pręta rzeczywistego, pręt wyobraźlany może mieć tylko jedną podporę lewą. Siedliskuje w niej odpór pionowy B i moment odporowy M_B . Równanie sił pionowych będzie:



Rys. 42.

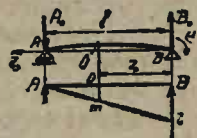
$B + \frac{1}{2} Pl^2 = 0$. Stąd: $B = -\frac{1}{2} Pl^2$. Równanie momentów, wypisane dla skrajnego prawego przekroju da nam: $M_B + Bl + \frac{1}{6} Pl^3 = 0$. Stąd $M_B = \frac{1}{3} Pl^3$.

Oznaczmy przez f końcową strzałkę pręta rzeczywistego, przez θ — kąt nachylenia ku osi B i skrajnej stycznej odkształconej. Na mocy powyżej wyłożonej teorii $\theta = -B : EJ = \frac{1}{2} Pl^2 : EJ$, $f = M_B : EJ = \frac{1}{3} Pl^3 : EJ$. Te same wzory otrzymaliśmy w § 4. Zmieniliśmy wyżej znak u B na odwrotny. Konieczność tej zamiany narzuca się w danym wypadku, ponieważ kierunki sprowadzania sił i wzrostu odciętych ξ są sprzeczne, należy przeto wzory podstawowe wypisać w postaci $EJ\eta'' = M$, $EJ\eta''' = dM : (-d\xi) = -T$, $EJ\eta'''' = (-dT) : (-d\xi) = p$, ponieważ dM i $d\xi$, dT i $d\xi$ są znaków odwrotnych. Ta uwaga dotyczy również i następujących przykładów. Wyznamy w dalszym ciągu siłę tnącą T_w , panującą w przekroju O , gdziekolwiek na pręcie wyobraźlanym. Odnosny środek przekroju pręta rzeczywistego będzie miał spórzędne ξ i η . Zatem $T_w = B + \frac{1}{2} (l - \xi) \times Om = -\frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} P (l - \xi)^2$, ponieważ $Om = Pl(l - \xi) : l$. Inaczej jeszcze $T_w = -P\xi(l - \frac{1}{2}\xi) = -EJ\eta'$. Z kolei wyznaczamy dla tego samego przekroju $M_w = M_B + B(l - \xi) + \frac{1}{2} P (l - \xi)^2 \times \frac{1}{3} (l - \xi) = \frac{1}{3} Pl^3 - \frac{1}{2} Pl^2 (l - \xi) + \frac{1}{6} P (l - \xi)^3 = \frac{1}{2} P \xi^2 (l - \frac{1}{3}\xi) = EJ\eta$. To samo mieliśmy w § 4. Załóżmy teraz, iż miasto siły P w końcowym przekroju pręta rzeczywistego działa moment gnący μ , a otrzymamy wykres momentów w postaci prostokąta o podstawie równej l i wysokości μ . Prostokąt leży na pręcie wyobraźlanym, który i w danym wypadku będzie miał tylko lewą podporę B . Równanie sił daje: $B + \mu l = 0$, skąd $B = -\mu l$.

Nadto z równania momentów: $M_B + Bl + \frac{1}{2} \mu l^2 = 0$ otrzymamy $M_B = -\frac{1}{2} \mu l^2$. Zachowując poprzednie znakowania możemy napisać $\theta = -T_{wB} : EJ = \mu l : EJ$, $f = M_B : EJ = \frac{1}{2} \mu l^2 : EJ$, a nadto $T_w = -\mu l + \mu(l - \zeta) = -\mu \zeta = -EJ\eta'$ oraz $M_w = M_B + B(l - \zeta) + \frac{1}{2} \mu(l - \zeta)^2 = \frac{1}{2} \mu \zeta^2 = EJ\eta$.

Sprawdźmy to bezpośrednio, całkując równanie gięcia $EJ\eta'' = \mu$. Daje ono $EJ\eta' = C + \mu \zeta$, $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{2} \mu \zeta^2$. W obec osadzenia pręta $\eta = \eta' = 0$ dla $\zeta = 0$, a zatem $C = D = 0$, skąd $EJ\eta' = \mu \zeta$, $EJ\eta = \frac{1}{2} \mu \zeta^2$, jak wyżej.

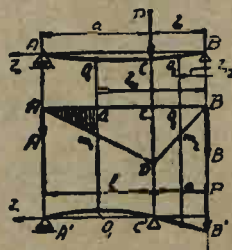
§ 25. Belka jednoprzęsłowa, obciążona momentem gnącym ponad podporą. Belkę poziomą opartą na prawej przegubowej i lewej rodkowej podporze (Rys. 43) obciążono momentem gnącym μ w skrajnym podpartym przekroju prawym. Obciążenie to da odpory pionowe A_0 i B_0 , czyniące zadość równaniom statyki $A_0 + B_0 = 0$, $A_0 l + \mu = 0$. Stąd $A_0 = -\mu : l$, $B_0 = \mu : l$. W odległości ζ od początku spórzędnych obieramy przekrój poprzeczny i sprowadzamy do jego środka odporę A_0 . Da ona moment gnący $M = -\mu(l - \zeta) : l$. Wykres momentów M będzie miał postać trójkąta ABb , przyczem $AB = l$, $Bb = -\mu$. Trójkąt spoczywa na pręcie wyobraźalnym, podpartym w A i B . Łatwo wyznaczymy odpory pionowe pręta wyobraźalnego, pisząc równanie sił: $A + B - \frac{1}{2} \mu l = 0$ i momentów dla punktu A lub B . Dla B będziemy mieli $Al - \frac{1}{2} \mu l \times \frac{1}{3} l = 0$, skąd: $A = \frac{1}{6} \mu l$, $B = \frac{1}{3} \mu l$. Zatem $T_w = A + \frac{1}{2} \mu(l - \zeta) \times Om = \frac{1}{6} \mu l - \frac{1}{2} \mu(l - \zeta)^2 : l$, ponieważ $Om = -\mu(l - \zeta) : l$. Inaczej jeszcze $T_w = \frac{1}{6} \mu l - \frac{1}{2} \mu(l - \zeta)^2 : l = -EJ\eta'$.



Rys. 43.

Czyniąc w tym wzorze kolejno $\zeta = l$ i $\zeta = 0$, znajdziemy pochylenie skrajnych stycznych odkształconej $\theta_A = -\frac{1}{6} \mu l : EJ$, $\theta_B = \frac{2}{3} \mu l : EJ$. Dalej mamy: $M_w = A(l - \zeta) - [\frac{1}{2} \mu(l - \zeta)^2 : l] \times \frac{1}{3}(l - \zeta) = \frac{1}{6} \mu l(l - \zeta) - \frac{1}{6} \mu(l - \zeta)^3 : l = \frac{1}{6} \mu l^2 - \frac{1}{6} \mu l \zeta - \frac{1}{6} \mu(l - \zeta)^3 : l = EJ\eta$. Te same wzory możemy otrzymać bezpośrednio, całkując równanie $EJ\eta'' = A_0(l - \zeta) = -\mu(l - \zeta) : l$. Dla pręta o stałym przekroju będziemy mieli $EJ\eta' = C + \frac{1}{2} \mu(l - \zeta)^2 : l$, $EJ\eta = D + C\zeta - \frac{1}{6} \mu(l - \zeta)^3 : l$. W danym wypadku $\eta = 0$, gdy $\zeta = l$, lub $\zeta = 0$. Stąd $D + Cl = 0$, $D - \frac{1}{6} \mu l^2 = 0$, co daje $D = \frac{1}{6} \mu l^2$, $C = -\frac{1}{6} \mu l$. Podstawiając te wartości, odnajdziemy bezpośrednio otrzymane wzory.

§ 26. Belka jednoprzęsłowa, obciążona siłą skupioną. W wypadku obciążenia siłą skupioną wewnętrzną P , otrzymamy (Rys. 44) dla tej samej belki wykres w postaci trójkąta ABD , leżącego na pręcie wyobraźalnym. Łatwo wyznaczymy oba jego odpory, nazywając przez a odległość osi siły P od lewej podpory, przez b — od prawej. W tem założeniu wysokość trójkąta $H = CD = -Pab : l$, gdzie $l = a + b$. Równania statyki, wypisane dla prawego końca pręta wyobraźalnego dadzą:



Rys. 44.

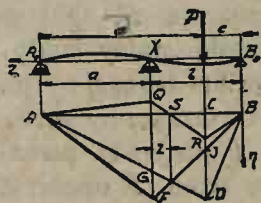
$A + B + \frac{1}{2} Hl = A + B - \frac{1}{2} Pab = 0$, $Al + \frac{1}{2} Ha (b + \frac{1}{3} a) + \frac{1}{2} Hb \times$
 $\times \frac{2}{3} b = Al - \frac{1}{2} Pab (ab + \frac{1}{3} a^2 + \frac{2}{3} b^2) : l = 0$. Stąd bezpośrednio
 $A = \frac{1}{6} Pab (a + 2b) : l = \frac{1}{6} Pb (l - b) (l + b) : l = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) : l$.
 Na mocy symetrii liter $B = \frac{1}{6} Pa (l^2 - a^2) : l$, a przeto dla lewej pości
 wykresu, w odcinku a , będziemy mieli $T_w = A + \frac{1}{2} (l - \zeta) \times O_1 m_1 =$
 $= \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) : l - \frac{1}{2} Pb (l - \zeta)^2 : l = -EJ\eta'$, $M_w = A (l - \zeta) +$
 $+ \frac{1}{2} (l - \zeta) \times O_1 m_1 \times \frac{1}{3} (l - \zeta) = \frac{1}{6} Pb (l^2 - b^2) (l - \zeta) : l - \frac{1}{6} Pb (l -$
 $- \zeta)^3 : l = EJ\eta$, tutaj bowiem $O_1 m_1 = H (l - \zeta) : a = -Pb (l - \zeta) : l$.
 To samo mieliśmy w § 4 niniejszego rozdziału. Dla drugiej pości, w od-
 cinku b , mamy: $-T_w = B + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 = \frac{1}{6} Pa (l^2 - a^2) : l -$
 $- \frac{1}{2} Pa \zeta^2 : l = EJ\eta'$, $-M_w = B \zeta + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 \times \frac{1}{3} \zeta = \frac{1}{6} Pa (l^2 -$
 $- a^2) \zeta : l - \frac{1}{6} Pa \zeta^3 : l = \frac{1}{6} Pa \zeta (l^2 - a^2 - \zeta^2) : l = EJ\eta$, tutaj bowiem
 $O_2 m_2 = H \zeta : b = -Pa \zeta : l$. Znak ujemny przed T_w i M_w jest tu ko-
 nieczny, zmieniamy bowiem kierunek sprowadzania sił na odwrotny. Te
 same wzory, choć w innej nieco postaci mieliśmy już w § 4.

Z kolei rozpatrujemy obciążenie skupioną siłą P , zewnętrzną. Wy-
 kres momentów będzie miał kształt zupełnie podobny, różnić się jeno bę-
 dzie wartością H . Oznaczmy przez l odległość pomiędzy podporami prę-
 ta rzeczywistego A' i C' , przez a odległość punktu przyłożenia siły P
 od osi prawej podpory. Równania statyki, wypisane dla prawego skraj-
 nego przekroju pręta rzeczywistego, dadzą $A' + C' + P = 0$, $A' (l +$
 $+ a) + C'a = 0$. Stąd: $A' = Pa : l$, $C' = -P (l + a) : l$, a przeto
 $H = A'l = Pa$. Z kolei wyznaczmy odpory A , B oraz moment odpo-
 rowy M_B pręta wyobraźnego. Równanie sił pionowych da nam $A +$
 $+ B + \frac{1}{2} Pa (a + l) = 0$, nadto, ponieważ $M_{wc} = 0$, przeto dla tego
 punktu możemy wypisać równanie momentów w postaci $Al + \frac{1}{2} Hl \times$
 $\times \frac{1}{3} l = 0$, skąd $A = -\frac{1}{6} Pal$. Nadto z równania sił pionowych $B =$
 $= -\frac{1}{3} Pal - \frac{1}{2} Pa^2$. Równanie momentów dla punktu B da: $A (l +$
 $+ a) + \frac{1}{2} Hl (a + \frac{1}{3} l) + \frac{1}{2} Ha \times \frac{2}{3} a = M_B$, skąd $M_B = \frac{1}{3} Pa^2 (l + a)$.
 Dla lewej pości wykresu, w odcinku l , będziemy mieli, umieszczając
 początek stałej osi $B'\zeta$ w prawym końcu pręta wyobraźnego: $T_w = A +$
 $+ \frac{1}{2} (l + a - \zeta) \times O_1 m_1 = -\frac{1}{6} Pal + \frac{1}{2} Pa (l + a - \zeta)^2 : l = -EJ\eta'$.
 $M_w = A (l + a - \zeta) + \frac{1}{2} (l + a - \zeta) \times O_1 m_1 \times \frac{1}{3} (l + a - \zeta) =$
 $= -\frac{1}{6} Pal (l + a - \zeta) + \frac{1}{6} Pa (l + a - \zeta)^3 : l = EJ\eta$, tutaj bowiem $O_1 m_1 =$
 $= Pa (l + a - \zeta) : l$. Te same wzory, choć w innej nieco postaci, mie-
 liśmy już w § 6 niniejszego rozdziału. Dla drugiej pości, w odcinku a ,
 mamy: $-T_w = B + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 = -\frac{1}{3} Pal - \frac{1}{2} Pa^2 + \frac{1}{2} P \zeta^2 = EJ\eta'$,
 $-M_w = M_B + B \zeta + \frac{1}{2} \zeta \times O_2 m_2 \times \frac{1}{3} \zeta = \frac{1}{3} Pa^2 (l + a) - \frac{1}{3} Pal \zeta -$
 $- \frac{1}{2} Pa^2 \zeta + \frac{1}{6} P \zeta^3 = EJ\eta$, tu bowiem $O_2 m_2 = Pa \zeta : a = P \zeta$. I tu
 znak ujemny przed T_w i M_w jest konieczny, zmieniliśmy bowiem kieru-
 nek sprowadzania sił. Wzory powyższe różnią się tylko kształtem od
 wzorów § 6. Są przytem znacznie prostsze.

§ 27. Belka dwuprzęsłowa, obciążona siłą skupioną. Roz-
 pięćtość lewego przęsła (Rys. 45) oznaczamy przez a , prawego przez b .
 Prawa podpora niech będzie przegubowa, lewa i środkowa — rolkowe.
 W odległości c od prawej podpory i d od lewej działają na belkę siła sku-

pionowa P . Odrzućmy podporę środkową i na jej miejsce wprowadźmy pionowy odpór X . Łączne działanie sił X, P wytworzy oczywiście te same warunki, możemy przeto rozpatrywać jednocześnie dwa wykresy momentów gnących ABD siły P i ABF odpory X .

Oba wykresy dają obciążenie pręta wyobraźnego, przyczem niewątpliwie wysokość pierwszego trójkąta $H = -Pcd : l$, drugiego $K = -Xab : l$, gdzie $l = a + b = c + d$. Wyznamy odpory pręta wyobraźnego. Ponieważ pod podporami $M_{wA} = M_{wX} = M_{wB} = 0$, przeto możemy napisać $M_{wB} = A(a + b) + \frac{1}{2} aK(b + \frac{1}{3} a) + \frac{1}{2} bK \times \frac{2}{3} b + \frac{1}{2} dH(c + \frac{1}{3} d) + \frac{1}{2} cH \times \frac{2}{3} c = A(a + b) - \frac{1}{6} Xab(a + 2b) - \frac{1}{6} Pcd(d + 2c) = 0$, $M_{wX} = Aa + \frac{1}{2} aK \times$



Rys. 45.

$\times \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} a \times XG \times \frac{1}{3} a = Aa - \frac{1}{6} Xa^3b : (a + b) - \frac{1}{6} Pa^3c : (a + b) = 0$, ponieważ odnośna rzędna wykresu momentów $XG = Ha : d = -Pac : (a + b)$. Ostatnie równanie da nam $A(a + b) - \frac{1}{6} Xa^2b - \frac{1}{6} Pa^2c = 0$, zatem, odejmując od pierwszego otrzymamy: $X = Pc(a^2 - d^2 - 2cd) : 2ab^2 = -Pc(b^2 + 2ab - c^2) : 2ab^2$. Po podstawieniu tej wartości w jedno z równań powyższych otrzymamy $A = -Pac(b^2 - c^2) : 12b(a + b)$. Równanie sił pionowych $A + B + \frac{1}{2} l(H + K) = 0$ da nam: $B = Pc(b - c)^2 : 4b - A = Pc(b - c)^2 : 4b + Pac(b^2 - c^2) : 12b(a + b)$. Z kolei mamy $K = -Xab : l = Pc(b^2 + 2ab - c^2) : 2b(a + b) > 0$, ponieważ zaś $XG = -Pac : (a + b) < 0$ przeto $GF = K + XG = Pc(b^2 - c^2) : 2b(a + b) > 0$, możemy bowiem zawsze założyć, że $P > 0$. Podobnie również $CJ = KC : b = -Xac : l = -Pc^2(a^2 - d^2 - 2cd) : 2b^2(a + b) > 0$. Wobec tego, że $CD = -Pcd : (a + b) < 0$, będziemy mieli $JD = CD + CJ = -Pc[2d(b^2 - c^2) - c(d^2 - a^2)] : 2b^2(a + b) = -Pc(b - c)[2d(b + c) - c(d + a)] : 2b^2(a + b) = -Pc(b - c)[2bd + c(d - a)] : 2b^2(a + b) < 0$. Odlóżmy odcinek $XQ = GF$ na osi podpory środkowej, oraz $CR = JD$ na osi siły P , a otrzymamy wykres momentów gnących w postaci łamanej $AQRB$, przecinającej podstawę w drugiej połaci wykresu XB . Zawsze więc pomiędzy osią siły, a podporą środkową odkształcona ma punkt przegięcia w S . Z podobieństwa trójkątów wypływa: $s : (b - c - s) = XQ : CR = b(b + c) : [2db + c(d - a)]$. Stąd $s = b(b^2 - c^2) : [2db + c(b - c) + b(b + c)]$. Wyznaczenie T_w, M_w z wykresu z łatwością każdorazowo może być wykonane. Powyższy przykład wskazuje, jak cennym narzędziem staje się sposób rachunkowo wykresalny przy wyznaczaniu warunków pracy belek wieloprzęsłowych. Dzięki jemu również nie stręczy żadnych trudności poważnych badanie wygięcia —

§ 28. **Belki o zmiennym przekroju poprzecznym.** Przekrój poprzeczny belek tego rodzaju może się zmieniać w sposób ciągły, jak w prętach stałej wytrzymałości, o których była mowa wyżej, lub też nagłymi skokami, jak na (Rys. 46), gdzie mamy połowę wału o trzech uskokach średnicy. Właściwie mówiąc przekrój F wybiega poza dziedzinę naszych założeń zasadniczych, ponieważ powłoki tego przekroju różnią

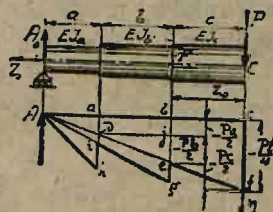
się o wartość skończoną. Mimo to stosujemy i w danym wypadku wzory zwykle w braku właściwszych. Błąd popełniany w ten sposób zapewne nie jest znaczny, bo zwykle wzory gięcia zawodzą tylko dla samego przekroju F , obustronnie natomiast mogą być stosowane bez zastrzeżeń. Zresztą istotny nagły uskok przekroju spotyka się dość rzadko, zazwyczaj bowiem łagodzimy przejście zaokrągleniami.

Oznaczmy przez EJ_b sztywność pręta w odnośnej powłoce przekroju F po lewej, przez EJ_c po prawej stronie przekroju. Moment gnący przekroju F oznaczamy przez M i zakładamy, że zmienia się on w tym miejscu w sposób ciągły. Przekrój F dzieli płaszczyznę gięcia na dwa obszary zmienności, możemy przeto napisać dla lewego obszaru $EJ_b\eta'' = M$, dla prawego $EJ_c\eta'' = M$. Oznaczmy przez $\varphi(\zeta)$ funkcję całkową M , a przez $\Psi(\zeta)$ taką funkcję $\varphi(\zeta)$. W tem założeniu, całkując, mamy dla lewej połaci $EJ_b\eta' = C_b + \varphi(\zeta)$, $EJ_b\eta = D_b + C_b\zeta + \Psi(\zeta)$, dla prawej $EJ_c\eta' = C_c + \varphi(\zeta)$, $EJ_c\eta = D_c + C_c\zeta + \Psi(\zeta)$. Czyniąc w tych wzorach $\zeta = \zeta_0$, otrzymamy η_0 i η_0' dla środka przekroju F , a więc dla punktu odkształconej, leżącego na granicy obu obszarów. Obie grupy wzorów muszą dać niewątpliwie te same wartości w danym wypadku. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że odkształcona podwójnego punktu mieć nie może w tym samym przekroju, wartości $\zeta = \zeta_0$ musi więc odpowiadać jedna tylko wartość η_0 . Nadto wartości $\zeta = \zeta_0$ winna odpowiadać również tylko jedna wartość η_0' , w przeciwnym bowiem razie nastąpiłoby przecięcie się obu powłok przekroju F , co niewątpliwie należy uważać, jako niemożliwe dla pręta istotnego. A przeto: $[C_b + \varphi(\zeta_0)] : J_b = [C_c + \varphi(\zeta_0)] : J_c$, $[D_b + C_b\zeta_0 + \Psi(\zeta_0)] : J_b = [D_c + C_c\zeta_0 + \Psi(\zeta_0)] : J_c$. Tym równaniom możemy uczynić zadość tożsamościowo przy wszelkiej różnicy J_b i J_c i dla wszelkich obciążeń tylko w tym wypadku, gdy $\varphi(\zeta_0) : J_b$, $\Psi(\zeta_0) : J_b$, $C_b : J_b$, $D_b : J_b$ dla lewej połaci będą odpowiednio równe $\varphi(\zeta_0) : J_c$, $\Psi(\zeta_0) : J_c$, $C_c : J_c$, $D_c : J_c$ dla prawej. Inaczej mówiąc należy jedną połączyć do drugiej w stosunku odnośnych sztywności pręta, to jest miasto istotnego pręta brać pręt sprowadzony o przekroju stałym. W ten sposób zbudowany pręt wyobraźalny będzie niewątpliwie tożsamościowy z rzeczywistym co do wymiarów i obciążenia po jednej stronie granicznego przekroju, po drugiej zaś otrzyma przekrój szerszy w stosunku sztywności, lecz wzajemian za to powinien ulegać obciążeniu zwielokrotnionemu w tym samym stosunku. Słowem, jak w danym wypadku, miasto pręta rzeczywistego, obciążonego momentem M , pręta o sztywnościach EJ_b i EJ_c po obu stronach przekroju F , należy wziąć pod uwagę pręt wyobraźalny stałego przekroju, dajmy na to o sztywności EJ_c . W ten sposób sztywność prawej połaci pozostanie ta sama, lewej zwiększy się w stosunku $J_c : J_b$. W tym samym stosunku należy zwielokrotnić obciążenie lewej połaci, aby warunki pracy po-

zostały bez zmiany. Zatem po lewej stronie przekroju granicznego wi-
nien panować moment gnący $M_{J_c} : J_b$, po prawej dawny moment M .
Odształcona pręta wyobraźnalnego będzie oczywiście odształconą pręta
rzeczywistego. Istotę powyższego sposobu najlepiej ocenimy, rozpatrując
przykład. Przy sposobności zaznaczamy, że dla pręta o stałym przekroju
 $J_b = J_c$ zatem i $C_b = C_c$, $D_b = D_c$, o ile moment M zmienia się w spo-
sób ciągły ponad przekrojem rozpatrywanym. Wynika to bezpośrednio
ze wzorów powyżej wypisanych. Na tej zasadzie opieraliśmy się milcząco,
pisząc wzory momentów z kreskami dla różnorodnych pości zmienności
momentów. Dzięki temu przy całkowaniu mieliśmy zawsze tylko
dwie stałe całkowania co znacznie ułatwia rachunek.

Łatwo to zrozumiemy przejrawszy ponownie poszczególne przykła-
dy gięcia. Gdybyśmy w nich dla każdej pości zmienności momentów
wypisywali oddzielnie równania gięcia, to liczba stałych całkowania była-
by równa podwojonej liczbie pości, a wyznaczanie stałych stałoby się
ciężką pracą. Ominięcie tej trudności zawdzięczamy *Clebsch'owi*.

**§ 29. Belka jednoprzęsłowa o zmiennym przekroju po-
przecznym.** Przykład najprostszj najlepiej uwypukli istotę rzeczy,
zwłaszcza, że często spotyka się w praktyce. Zakłady elektrotechniczne
wymagają pewnej skrajnej strzałki ugięcia wałów obustronnie podpar-
tych, a obciążonych po środku wirnikiem prądnicy. Bierzemy tedy pod
uwagę połowę symetrycznego wału (Rys. 46), obustronnie końcami pod-
partego, a obciążonego siłą P po środku. W od-
cinkach skrajnych a panuje stała sztywność EJ_a ,
w odcinkach b — sztywność EJ_b , wreszcie w od-
cinku środkowym $2c$ mamy sztywność EJ_c . Istotny
wykres momentów, a raczej jego połowę daje
trójkąt Acf , gdzie $cf = -\frac{1}{4}Pl = -\frac{1}{2}P(a + b + c)$.
Obierzmy najsutszj przekrój jako prze-
krój pręta wyobraźnalnego. Odnośną część $bcfe$
wykresu momentów należy przeto pozostawić bez
zmiany, natomiast w odcinku b — zwiększyć rzęd-
ne wykresu w stosunku $m = J_c : J_b$, oraz w odcinku a — w stosunku
 $n = J_c : J_a$. W ten sposób otrzymamy wykres wyobraźalny momentów
 $Ahigfc$. Łatwo zrozumieć, że promienie Ah , ig , ef przecinają się w A .



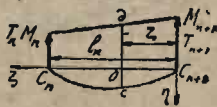
Rys. 46.

Wyznaczamy środkową strzałkę ugięcia pręta, stosując sposób rachunko-
wo wykresiny. W tym celu wyznaczamy odpór A , równy polu połowy
wykresu. Pole wykresu dzielimy na trzy trójkąty i dwa prostokąty.
Będą to: trójkąt Aad , z wielokrotnionym w stosunku n , prostokąt $abjd$ i trójkąt
 dje — m razy większe, wreszcie prostokąt $bcke$ oraz trójkąt ekf . Po-
nieważ $da = -\frac{1}{2}Pa$, $ej = -\frac{1}{2}Pb$, $kf = -\frac{1}{2}Pc$, przeto $A =$
 $= \frac{1}{4}P [na^2 + m(2ab + b^2) + 2c(a + b) + c^2]$ oraz $M_{woc} = A(a + b +$
 $+ c) - \frac{1}{4}nPa^2(\frac{1}{2}l + \frac{2}{3}a) - \frac{1}{2}mPab(c + \frac{1}{2}b) - \frac{1}{4}mPb^2(c + \frac{1}{2}b) -$
 $- \frac{1}{2}Pc(a + b) \times \frac{1}{2}c - \frac{1}{4}Pc^2 \times \frac{1}{3}c = \frac{1}{6}nPa^3 + \frac{1}{6}mP(3a^2b +$
 $+ 3ab^2 + b^3) + \frac{1}{6}P[3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 + c^3] = \frac{1}{6}P(a + b +$

$+ c^3 + \frac{1}{6} P (n-1) a^3 + \frac{1}{6} P (m-1) (3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3) = E J_c f$
 Stąd: $f = \frac{1}{48} P l^3 : E J_c + \frac{1}{6} P a^3 (1 : E J_a - 1 : E J_c) + \frac{1}{6} P (3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3) (1 : E J_b - 1 : E J_c)$. Wzór ten wyprowadziliśmy dla pręta o trzech uskokach przekroju najczęściej spotykanego. Dla pręta o dwóch uskokach należy uczynić $c = 0$ i $m = 1$, co da $M_{wc} = \frac{1}{6} P (a + b)^2 + \frac{1}{6} P (n-1) a^3 = E J_b f$, skąd $f = \frac{1}{48} P l^3 : E J_b + \frac{1}{6} P a^3 (1 : E J_a - 1 : E J_b)$. Widzimy tu pewien algorytm, to też bez żadnych trudności możemy dla pręta o czterech uskokach przekroju wypisać wprost:
 $E J_d f = \frac{1}{48} P l^3 + \frac{1}{6} (n-1) P a^3 + \frac{1}{6} (m-1) P (3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3) + \frac{1}{6} (k-1) P [3 (a + b)^2 c + 3 (a + b) c^2 + c^3]$, gdzie $n = J_c : J_d$, $m = J_b : J_d$, $k = J_c : J_d$. Istota algorytmu polega na tem: podnosimy do sześciannu, $\frac{1}{2} l = a + b + c + d + \dots$, wyłączając ostatni składnik. W poprzednio rozpatrywanym wypadku będzie to oczywiście d . Będziemy mieli przeto $[(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3 (a + b)^2 c + 3 (a + b) c^2 + c^3$. Odrzuciwszy pierwszy składnik, otrzymamy współczynnik wymiarowy ostatniego wyrazu dla $E J_f$. Z kolei w odrzuconym wyrazie $(a + b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$ pomijamy składnik pierwszy, reszta da znów współczynnik wymiarowy przedostatniego wyrazu wzoru dla $E J_f$, a odrzucony składnik da współczynnik pierwszego wyrazu. Łatwo to uogólnić. Przy $n = m = k = \dots = 1$ wszystkie te wzory dają $f = \frac{1}{48} P l^3 : E J$. To samo otrzymaliśmy w § 4 rozdziału niniejszego.

§ 30. Twierdzenie o trzech momentach. Podany powyżej sposób rachunkowo wykreślony stanowi duże ułatwienie przy wyznaczaniu warunków pracy belek wieloprzęsłowych, nie daje jednak rozwiązania ogólnego, jakie inną drogą otrzymamy.

Wyodrębnijmy myślowo jakiegokolwiek przęsło belki (Rys. 47), spoczywające na podporach C_n, C_{n+1} . Początek stałych osi obierzemy w podporze prawej C_{n+1} , prowadząc oś $C_{n+1} \zeta$ wzdłuż pierwotnej osi belki. Oś $C_{n+1} \eta$ kierujemy w dół. $C_{n+1} \xi$ — ku patrzącemu. Wyznamy w układzie tych osi odkształconą, a na niej dowolny środek przekroju poprzecznego $O(\zeta, \eta)$. Panuje w nim moment gnący M na tle obciążenia belki, złożonego z sił prostopadłych do $C_{n+1} \zeta$, leżących w płaszczyźnie gięcia $\zeta C_{n+1} \eta$. Chcemy go wyznaczyć. Płaszczyzna przekroju poprzecznego dzieli obciążenie gnące na dwa układy — lewy i prawy, będziemy nadal każdorazowo zawsze sprowadzali lewe układy sił do środka odnośnego przekroju. W danym wypadku przedewszystkiem należy uwzględnić pominiętą część układu lewego, obejmującą siły gnące, czynne na lewo od C_n . Uskuteczmy to z łatwością, sprowadziwszy całe obciążenie lewej części pręta do środka C_n przekroju podpartego, gdzie w ogólnym wypadku otrzymamy siłę tnącą T_n i moment gnący M_n . Te wypadkowe zastąpią działanie pominiętej części lewego układu. Oznaczmy nadto siły gnące



rys. 47

połaci $C_n O$ przez P_i ($i = 1, 2, \dots, n$), przez P_j ($j = n + 1, n + 2, \dots, s$) siły połaci OC_{n+1} ; po sprowadzeniu do środka O lewego układu odkształcającego otrzymamy wypadkowy moment gnący $M = M_n + T_n (l_n - \zeta) + \sum P_i (\zeta_i - \zeta)$, gdzie dodawanie winno objąć wszystkie siły gnące połaci $C_n O$, odległe o ζ_i od osi prawej podpory. Czyniąc w tym wzorze $\zeta = 0$, otrzymamy moment $M_{n+1} = M_n + T_n l_n + \sum P_j \zeta_j$, panujący ponad podporą C_{n+1} . Jest to moment wypadkowy sprowadzenia obciążenia lewej części belki. W tym wzorze dodawanie obejmuje wszystkie siły gnące całego przęsła. Zatem $T_n = [M_{n+1} - M_n - \sum P_j \zeta_j] : l_n$ i ostatecznie $M = M_n + (M_{n+1} - M_n) (l_n - \zeta) : l_n + \sum P_i (\zeta_i - \zeta) - \sum P_j \zeta_j (l_n - \zeta) : l_n$.

Rozetnijmy belkę ponad podporami C_n i C_{n+1} , i, nie zmieniając układu sił gnących tego przęsła, ustawmy wyciętą część na podporze przegubowej — prawej i lewej — rolkowej. Powstaną w nich natychmiast odpory, które z łatwością wyznaczymy z równań statyki, wypisanych dla podpory prawej. Równanie sił będzie tu $C_n + C_{n+1} + \sum P_j = 0$, momentów: $C_n l_n + \sum P_j \zeta_j = 0$. Stąd $C_n = -\sum P_j \zeta_j : l_n$, a moment przekroju O będzie niewątpliwie dla belki rozciętej równy $\mu = -\sum P_j \zeta_j (l_n - \zeta) : l_n + \sum P_i (\zeta_i - \zeta)$. Zatem będziemy mieli $M = M_n + (M_{n+1} - M_n) (l_n - \zeta) : l_n + \mu$.

Wzór otrzymany stanowi tak zwane *twierdzenie o trzech momentach*: Wyznaczymy, idąc w kierunku sprowadzania sił, dwa przekroje pręta płasko zginanego — pierwszy i drugi, oraz ich momenty gnące pierwszy i drugi, a otrzymamy moment gnący jakiegokolwiek przekroju pośredniego w postaci sumy trzech momentów: momentu pierwszego więcej różnica momentu drugiego mniej pierwszy, mnożona przez odległość pośredniego przekroju od pierwszego i dzielona przez odległość przekrojów skrajnych, wreszcie więcej moment, jakoby powstał w przekroju pośrednim, gdyby pręt rozpiłowano wsadź oba przekrojów skrajnych, i, zachowując w całości obciążenie gnące, czynne pomiędzy nimi, oparto na podporach przegubowej i rolkowej. To twierdzenie najlepiej się uwydatnia w oświetleniu wykresłem. Niech krzywa $C_n C C_{n+1}$ stanowi wykres momentów μ przęsła, a nadto niech $C_n M_n = M_n$, $C_{n+1} M_{n+1} = M_{n+1}$. Łączyny końce tych odcinków prostą. Prowadząc cOd prostopadłe do podstawy wykresu przez środek O danego przekroju, będziemy mieli $Od = M_n + (M_{n+1} - M_n) (l_n - \zeta) : l_n$, $Oc = \mu$, zatem $dc = M$.

Momenty M_n , M_{n+1} nazywamy zazwyczaj *momentami odporowymi*. Są one wygodniejsze w użyciu, niż siły — odpory, zwłaszcza w wypadkach belek statycznie niewyznaczalnych, gdzie nadto zazwyczaj stosujemy:

§ 31. Całkowe równanie odkształconej. Weźmy pod uwagę pręt płasko zgięty pod jarzinem sił gnących, leżących w płaszczyźnie

gięcia a prostopadłych do osi pierwotnej pręta. Ułożmy na niej oś $\omega\xi$, obierając gdziekolwiek początek osi współrzędnych stałych. Oś $\omega\xi$ kierujemy na lewo, oś $\omega\eta$ w dół, oś $\omega\xi$ — ku patrzącemu. Na odkształconej obieramy dwa jakiegokolwiek punkty: jeden bieżący $O(\zeta, \eta)$ i drugi $O_0(\zeta_0, \eta_0)$, stały „punkt wyjścia“. Przekrój poprzeczny pręta zakładamy zmienny. W danym wypadku z równania zasadniczego mamy $\eta'' = M : EJ$, skąd:

$$\eta' = \int \frac{M}{EJ} d\zeta + C, \quad \eta = \int \left[\int \frac{M}{EJ} d\zeta \right] d\zeta + C\zeta + D = \zeta \int \frac{M}{EJ} d\zeta - \int \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + C\zeta + D.$$

Tym trzem równaniom czynią zadość współrzędne punktu O . Ponieważ punkt wyjścia leży również na odkształconej,

$$\text{przeto: } \eta'_0 = \left[\int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 + C, \quad \eta_0 = \zeta_0 \left[\int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 - \left[\int \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta \right]_0 + C\zeta_0 + D.$$

Odejmując te równania od poprzednio otrzymanych:

$$\eta' - \eta'_0 = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta, \quad \eta - \eta_0 = \zeta \int \frac{M}{EJ} d\zeta - \zeta_0 \left[\int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + C(\zeta - \zeta_0) = \zeta \int \frac{M}{EJ} d\zeta - \zeta_0 \left[\int \frac{M}{EJ} d\zeta \right]_0 - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + (\zeta - \zeta_0) \left\{ \eta'_0 - \left[\int \frac{M}{EJ} d\zeta \right] \right\} = \zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta + \eta'_0 (\zeta - \zeta_0).$$

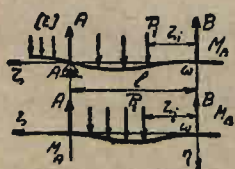
Inaczej jeszcze możemy napisać $\eta' = \eta'_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta$, $\eta = \eta_0 + (\zeta - \zeta_0) \eta'_0 + \zeta \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$. Są to całkowite równania odkształconej.

Można otrzymać z nich trzeci wzór, jako wynik bezpośredni. Pomnóżmy pierwsze równanie przez $(\zeta - \zeta_0)$ i odejmijmy od drugiego,

$$\text{a otrzymamy } \eta - \eta_0 = \eta' (\zeta - \zeta_0) + \zeta_0 \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta.$$

Ostatecznie będziemy mieli

$$\eta' = \frac{\eta - \eta_0}{\zeta - \zeta_0} + \frac{1}{\zeta - \zeta_0} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{M(\zeta - \zeta_0)}{EJ} d\zeta.$$



Rys. 48.

Te trzy wzory całkowite są nader wygodne w użyciu. Zwłaszcza dla belek zamocowanych prowadzą bardzo szybko do celu, możemy bowiem zawsze przekrój osadzony rozpatrywać, jako początek współrzędnych, a wtedy $\zeta_0 = \eta_0 = \eta'_0 = 0$. Dwa proste przykłady najlepiej to uwypuklą. Bierzemy (Rys. 48) pod uwagę belkę jednostronnie osadzoną, drugostronnie wystającą poza podporę A rolkową, oraz belkę

obustronnie osadzoną. Obciążenie gnące obu belek stanowią siły P_i , działające w odległości ζ_i od prawego przekroju osadzonego — skrajnego przekroju belki. Zgodnie z powyżej uczynioną uwagą — w tym przekroju umieścimy początek osi stałych, kierując oś $B\zeta$ na lewo po osi pręta pierwotnej. Oś $B\eta$ — w dół, a oś $B\xi$ — ku patrzącemu. W odległości l od początku współrzędnych leży druga podpora A dla pierwszej belki rolkowa, dla drugiej stała. Odległość środka O dowolnego przekroju poprzecznego od przekroju osadczego oznaczamy przez ζ , przez M — moment gnący tego przekroju. Wreszcie przez μ — oznaczamy moment gnący, jakiby panował w tym samym przekroju, gdyby pręt rozpięto w A i B i, nie zmieniając obciążenia czynnego pomiędzy temi przekrojami, wsparto końcami na podporach rolkowej i przegubowej. Dla obu belek środek przekroju osadczego prawego gra rolę punktu wyjścia, zatem tu $\zeta_0 = \eta_0 = \eta'_0 = 0$ i nasze wzory otrzymają postać

$$\eta' = \int_0^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta, \quad \eta = \zeta \int_0^{\zeta} \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_0^{\zeta} \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta. \quad \text{W tych wzorach należy wyznaczyć wartość momentu gnącego.}$$

§ 32. **Belka osadzona jednostronnie.** Z równań statyki, wypisanych dla początku współrzędnych w postaci $A + B + \Sigma P_i = 0$, $Al + \Sigma P_i \zeta_i + M_B = 0$, wyznaczmy odpory pionowe A , B w zależności od statycznie niewyznaczalnego momentu osadczego M_B , który równoważy moment gnący skrajnego swobodnego przekroju pręta. Dla lewej podpory mamy $\eta = 0$ przy $\zeta = l$, a przeto z drugiego wzoru mamy

$$l \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta = \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta. \quad \text{Pierwszy jest nieużyteczny w danym wy-$$

padku. Oznaczmy przez M_1 moment gnący, jaki panuje w przekroju podpartym lewym. Możemy go zawsze wyznaczyć bezpośrednio, sprowadzając do środka przekroju A cały lewy układ $[E]$ sił gnących, czynny na zwisającej części belki. Gdybyśmy znali wartość odporu A , moglibyśmy wyznaczyć moment M_0 prawego skrajnego przekroju, idąc w tym samym kierunku przy sprowadzaniu sił. Nie znamy jednak tej wartości, natomiast wiemy, że $M_0 + M_B = 0$. Zatem $M = M_1 + (M_0 - M_1)(l - \zeta) : l + \mu = M_1 - (M_B + M_1)(l - \zeta) : l + \mu$ dla podpar-
tej części pręta. Po podstawieniu tej wartości we wzór poprzednio otrzy-

mamy będziemy mieli:

$$\int_0^l \frac{M(l - \zeta)}{EJ} d\zeta = M_1 \int_0^l \frac{l - \zeta}{EJ} d\zeta - \frac{M_B + M_1}{l} \int_0^l \frac{(l - \zeta)^2}{EJ} d\zeta + \int_0^l \frac{\mu(l - \zeta)}{EJ} d\zeta = 0. \quad \text{Z tego równania}$$

wyznamy M_B . W szczególnym wypadku, gdy pręt urywa się ponad podporą A , układ sił $[E]$ nie istnieje i $M_1 = 0$. Zatem:

$$M_B = l \int_0^l \frac{\mu(l - \zeta)}{EJ} d\zeta : \int_0^l \frac{(l - \zeta)^2}{EJ} d\zeta. \quad \text{Nadto dla pręta o przekroju}$$

stałym będziemy mieli wprost: $M_B = l \int_0^l \mu (l - \zeta) d\zeta : \int_0^l (l - \zeta)^2 d\zeta =$
 $= \frac{3}{l^2} \int_0^l \mu (l - \zeta) d\zeta$. Gdy pręt jest jednostajnie obciążony w stosunku
 p kg na jednostkę długości, mamy $\mu = -\frac{1}{2} p l (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2$,
 a przeto $M_B = -\frac{3}{2} \frac{p}{l} \int_0^l (l - \zeta)^2 d\zeta + \frac{3}{2} \frac{p}{l^2} \int_0^l (l - \zeta)^3 d\zeta = -$
 $-\frac{1}{2} p l^2 + \frac{3}{8} p l^2 = -\frac{1}{8} p l^2$. Gdy na pręt działa siła skupiona P
 w odległości b od przekroju osadczego, mamy $\mu = -Pb (l - \zeta) : l +$
 $+ P (b - \zeta)$, przyczem płaszczyzna gięcia winna być podzielona osią si-
 ły P na dwa obszary zmienności momentów. Odpowiednio również na-
 leży dobrać granice całkowania. Moment odpory A równy $-Pb (l - \zeta) : l$
 panuje na całej długości l , drugi moment składowy $P (b - \zeta)$ — jeno
 w odcinku b , dla tego też $M_B = -3 \frac{Pb}{l^3} \int_0^l (l - \zeta)^2 d\zeta + 3 \frac{P}{l^2} \int_0^b (l -$
 $- \zeta) (b - \zeta) d\zeta = -Pb + \frac{3P}{l^2} \int_0^b [lb - (l + b)\zeta + \zeta^2] d\zeta = -Pb (2l^2 -$
 $- 3lb + b^2) : 2l^2$. Te same wyniki mieliśmy w § 12 i § 13 rozdziału
 niniejszego.

§ 33. Belka osadzona obustronnie. Z równań statyki, wypisa-
 nych dla początku współrzędnych w postaci $A + B + \Sigma P_i = 0$, $H_A +$
 $+ H_B = 0$, $M_A + Al + \Sigma P_i x_i + M_B = 0$, wyznaczmy oba odpory pio-
 nowe A, B w zależności od statycznie niewyznaczalnych momentów
 osadczych M_A, M_B . Nadto drugie równanie wiąże odpory poziome, któ-
 re tu jawią się na tle działania obciążenia gnącego przy bezwzględnej
 nieruchomości podpór. Istotnie, pierwotna oś pręta jest krótsza, niż od-
 kształcona, zatem przy gięciu podpory muszą się zbliżyć ku sobie, lub
 też w wypadku podpór stałych pręt musi się wydłużyć odpowiednio. To
 wydłużenie nie istniało zupełnie w powyżej rozpatrywanych wypadkach,
 ponieważ zawsze mieliśmy jedną tylko podporę nieruchomą przy pozost-
 ałych — rolkowych. Pręt mógł wyginać się zupełnie swobodnie. Tu-
 tutaj przy dwóch podporach stałych zachodzi gięcie mimośrodowe płaskie,
 na tle rozciągających sił H_A i H_B . Zazwyczaj jednak bierzemy pod uwa-
 gę tylko gięcie, czyniąc $H_A = H_B = 0$, a to dla tego, że podpór bez-
 względnie stałych nie umiemy budować, a nadto głównie jeszcze i dla
 tego, że przy nieznacznych, praktycznie jeno dopuszczalnych, wygięciach
 pręta — rozciąganie jest niewątpliwie nader nieznaczne. Możemy przeto
 pominąć odpory poziome. W ten sposób mamy już tylko dwie statycz-
 nie niewyznaczalne. Łatwo je wyznaczymy, stosując wzory wyżej otrzy-
 mane. Dla prawej podpory $\eta_1 = \eta'_1 = 0$ przy $\zeta_1 = l$, a przeto

$$\int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta = 0 \text{ oraz } l \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta = \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta. \text{ Inaczej jeszcze } \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta =$$

$$= \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta = 0. \text{ I tu znów, jak wyżej } M = M_1 + (M_0 - M_1)(l - \zeta) :$$

$$: l + \mu = M_A - (M_B + M_A)(l - \zeta) : l + \mu = (M_A + M_B)\zeta : l +$$

$$+ \mu = M_B, \text{ a przeto możemy napisać: } \frac{M_A + M_B}{l} \int_0^l \frac{\zeta d\zeta}{EJ} - M_B \int_0^l \frac{d\zeta}{EJ} +$$

$$+ \int_0^l \frac{\mu d\zeta}{EJ} = \frac{M_A + M_B}{l} \int_0^l \frac{\zeta^2 d\zeta}{EJ} - M_B \int_0^l \frac{\zeta d\zeta}{EJ} + \int_0^l \frac{\mu \zeta}{EJ} d\zeta = 0. \text{ Z tych}$$

równań wyznaczmy oba momenty statycznie niewyznaczalne. Dla pręta o stałym przekroju otrzymamy po skróceniu przez $1 : EJ$ i całkowaniu:

$$M_A - M_B + \frac{2}{l} \int_0^l \mu d\zeta = 2M_A - M_B + \frac{6}{l^2} \int_0^l \mu \zeta d\zeta = 0. \text{ Stąd: } M_A =$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \mu d\zeta - \frac{6}{l^2} \int_0^l \mu \zeta d\zeta, \quad M_B = \frac{4}{l} \int_0^l \mu d\zeta - \frac{6}{l^2} \int_0^l \mu \zeta d\zeta. \text{ W wypadku}$$

obciążenia jednostajnego p kg na jednostkę długości mamy, jak wyżej $\mu = -\frac{1}{2} p l (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 = -\frac{1}{2} p l \zeta + \frac{1}{2} p \zeta^2$. Zatem

$$\int_0^l \mu d\zeta = -\frac{1}{12} p l^3, \quad \int_0^l \mu \zeta d\zeta = -\frac{1}{24} p l^4, \text{ a przeto } M_A = \frac{1}{12} p l^2 = -$$

$-M_B = M_0$. Wobec tego wyniku równania statyki wypiszemy w postaci:

$$A + B + \Sigma P_i = A + B + \int_0^l p d\zeta = A + B + pl = 0, \quad Al + \Sigma P_i \zeta_i =$$

$$= Al + \int_0^l p \zeta d\zeta = Al + \frac{1}{2} p l^2 = 0. \text{ Stąd } A = B = -\frac{1}{2} p l. \text{ Nadto}$$

$$M = -M_B + \mu = \frac{1}{12} p l^2 - \frac{1}{2} p l \zeta + \frac{1}{2} p \zeta^2. \text{ Z równania } M = 0 \text{ wyzna-}$$

czymy odcięte $\zeta = \frac{1}{2} l (1 \pm 1 : \sqrt{3})$ punktów przegięcia odkształconych.

Czyniąc $dM = 0$ określimy przekrój o skrajnej wartości momentu gnącego.

Równanie to daje $\zeta_0 = \frac{1}{2} l$, a przeto $M_m = -\frac{1}{24} p l^2$. Moment

gnący staje się minimum pośrodku pręta, na obu skrajach posiada natomiast

wartość najwyższą $M_A = M_0 = \frac{1}{12} p l^2$. Zmienia się parabolicznie.

Łatwo wyznaczyć wykres momentów i sił tnących. Równanie odkształco-

$$nej będzie tu $EJ\eta = \zeta \int_0^{\zeta} M d\zeta - \int_0^{\zeta} M \zeta d\zeta = [\frac{1}{12} p l^2 \zeta - \frac{1}{4} p l \zeta^2 + \frac{1}{6} p \zeta^3] \zeta -$$$

$$- \frac{1}{24} p l^2 \zeta^2 + \frac{1}{6} p l \zeta^3 - \frac{1}{6} p \zeta^4 = \frac{1}{24} p \zeta^2 (l - \zeta)^2. \text{ Chcąc wyznaczyć strzał-$$

$$kę ugięcia pręta, czynimy $\eta' = \frac{1}{12} p \zeta (l - \zeta)^2 - \frac{1}{12} p \zeta^2 (l - \zeta) = 0$, co$$

$$\text{daje } \zeta = \frac{1}{2} l. \text{ Pośrodku zatem mamy strzałkę } f = \frac{1}{384} p l^4 : EJ.$$

W wypadku obciążenia siłą skupioną P , czynną w odległości a

od lewej i b od prawej podpory, mamy $\mu = -Pb(l - \zeta) : l + P(b -$

$$- \zeta) = -Pb + P\zeta : l + Pb - P\zeta. \text{ Zatem } \int_0^l \mu d\zeta = \int_0^l (-Pb +$$

$$+ P\zeta : l) d\zeta + \int_0^b (Pb - P\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2} Pbl + \frac{1}{2} Pb^2, \quad \int_0^l \mu \zeta d\zeta = \int_0^l (-$$

$- Pb\zeta + Pb\zeta^2 : l) d\zeta + \int_0^b (Pb\zeta - P\zeta^2) d\zeta = -1/6 Pbl^2 + 1/6 Pb^3$, a przeto $M_A = Pb^2 (l - b) : l^2 = Fab^2 : l^2$, $M_B = -Pb + 1/2 Pb^2 : l - Pb^3 : l^2 = -Pb (l - b)^2 : l^2 = -Pba^2 : l^2 = -M_0$. Równania statyki będą tu $A + B + P = 0$, $Pab^2 : l^2 + Al + Pb - Pba^2 : l^2 = 0$. Stąd: $A = -Pb (l^2 + ab - a^2) : l^3 = -Pb^2 (3a + b) : l^3$, $B = -Pa^2 (a + 3b) : l^3$. Nadto $M = (M_A + M_B) \zeta : l - M_B + \mu = Pab (b - a) \zeta : l^3 + Pa^2 b : l^3 - Pb + Pb\zeta : l \parallel + Pb - P\zeta = -Pb^2 (a + l) : l^2 + Pb^2 (3a + b) \zeta : l^3 \parallel + Pb - P\zeta$. Z równania $M = 0$ wyznaczmy odcięte punktów przegięcia odkształconej. Dla pierwszej połaci otrzymamy $\zeta_1 = (2a + b)l : (3a + b)$, dla drugiej $\zeta_2 = bl : (a + 3b)$. Obie te wartości istotnie dają zawsze punkty przegięcia, odrazu bowiem widać, że $l > \zeta_1 > b$ oraz $b > \zeta_2 > 0$. Ponieważ momenty zmieniają się linijowo, przeto najwyższe ich wartości dodatnie panować będą w przekrojach osadczych. Są to M_A i $M_0 = -M_B$. Ku środkowi belki momenty maleją, przechodzą przez zero, dążąc obustronnie do najmniejszości ujemnej w przekroju siły P , gdzie mamy moment gnący $M_m = -Pb^2 (a + l) : l^2 + Pb^3 (3a + b) : l^3 = -2Pa^2 b^2 : l^3$. Krzywa wykresu momentów jest więc łamana. Wyznacza ona trzy skrajne wartości momentów. Chcąc orzec, która z nich stanowi maximum bezwzględne, miarodajne przy wyznaczaniu właściwych wymiarów pręta, założmy, że $a \geq b$. To założenie w niczem ogólności naszych rozważań nie uszczupli, zawsze bowiem można obrócić pręt o 180° , aby wypełnić powyższą nierówność. W tem założeniu M_0 jest większe od M_A , należy przeto jeszcze zbadać znak różnicy $M_0 + M_m = Pa^2 b (a - b) : l^3$. Jest ona dodatnia gdy $a > b$. Zatem, gdy $a > b$, M_0 stanowi skrajną wartość momentów gnących. Gdy $a < b$, wtedy $M_A > M_0$ i znowu $M_A + M_m = Pab^2 (b - a) : l^3 > 0$. Bezwzględnie największa wartość momentu gnącego panuje zawsze w jednym z przekrojów osadczych. Równanie odkształconej będzie tu $EJ\eta = \zeta \int_0^{\zeta} Md\zeta - \int_0^{\zeta} M\zeta d\zeta = [-Pb^2 (2a + b) / l^3 \int_0^{\zeta} d\zeta + Pb^2 (3a + b) / l^3 \int_0^{\zeta} \zeta d\zeta + Pb \int_0^b d\zeta - P \int_0^b \zeta d\zeta] \zeta + Pb^3 (2a + b) / l^3 \int_0^{\zeta} \zeta d\zeta - Pb^2 (3a + b) / l^3 \int_0^{\zeta} \zeta^2 d\zeta - Pb \int_0^b \zeta d\zeta + P \int_0^b \zeta^2 d\zeta \parallel + [Pb \int_b^{\zeta} d\zeta - P \int_b^{\zeta} \zeta d\zeta] \zeta - Pb \int_b^{\zeta} \zeta d\zeta + P \int_b^{\zeta} \zeta^2 d\zeta = Pb^2 (3a + b) \zeta^3 : 6 l^3 - Pb^2 (2a + b) \zeta^2 : 2 l^3 + 1/2 Pb^3 \zeta - 1/6 Pb^3 \parallel + 1/6 P (b - \zeta)^3 = Pb^2 a (l - \zeta)^3 : 2 l^3 - Pb^2 (3a + b) (l - \zeta)^3 : 6 l^3 \parallel + 1/6 P (b - \zeta)^3$. Czyniąc tu $\zeta = b$ otrzymamy strzałkę siły $f_p = Pa^2 b^3 : 3 EJ l^3$. Aby z kolei wyznaczyć strzałkę ugięcia, czynimy $\eta' = 0$. Dla pierwszej połaci, w odcinku a , otrzymamy z łatwością z tego równania $\zeta_1 = l - 2al : (3a + b)$ z warunkiem: $l \geq \zeta_1 \geq b$. Pierwsza nierówność wypełnia się sama przez się, druga zachodzi przy $a \geq b$. Zatem strzałka ugięcia istotnie należy do połaci pierwszej, gdy $a \geq b$. Będzie to $f_1 = 2 Pb^2 a^3 : 3 EJ (3a + b)^2$. Dla drugiej połaci mamy z równania $\eta' = 0$ wartość

$\zeta_s = 2bl : (a + 3b)$ z warunkiem $b \geq \zeta_s \geq a$. Prawa nierówność jest oczywista, lewa daje warunek pochodny $b \geq a$. Zatem strzałka wygięcia należy do połaci drugiej, gdy $b \geq a$. Jest to $f_s = 2Pa^2b^3 : 3EJ(a + 3b)^3$.

W szczególnym wypadku, gdy $a = b = \frac{1}{2}l$, mamy $M_A = \frac{1}{3}Pl = M_0 = -M_B$, $\zeta_1 = \frac{3}{4}l$, $\zeta_2 = \frac{1}{4}l$ — punkty przegięcia są symetryczne względem środka. Pośrodku moment $M_m = -\frac{1}{3}Pl$, tutaj więc skrajne momenty są tożsamościowe. Nadto $A = B = -\frac{1}{2}P$. Równanie odkształconej będzie tu $EJ\eta = \frac{1}{16}Pl(l - \zeta)^2 - \frac{1}{12}P(l - \zeta)^3 + \frac{1}{6}P(b - \zeta)^3$. Strzałka siły $f_p = Pl^3 : 192EJ$ stanowi zarazem środkową strzałkę pręta.

§ 34. Belka jednoprzęsłowa. Równania całkowe odkształconej również nader szybko prowadzą do celu w wypadku belki wspartej na podporach rolkowej lub przegubowej. Przykład najlepiej wyjaśni istotę rzeczy. Weźmy pod uwagę belkę jednoprzęsłową, statycznie wyznaczalną, a obciążoną dowolnym układem sił gnących prostopadłych do pierwotnej osi belki. Początek osi stałych umieszczamy w prawej podporze przegubowej B . Oś $B\zeta$ prowadzimy wzdłuż osi pierwotnej belki ku lewej podporze A rolkowej, — oś $B\eta$ w dół, $B\xi$ — ku patrzącemu. Podparty punkt B — jest punktem wyjścia dla nas — zatem $\zeta_0 = \eta_0 = 0$, skąd

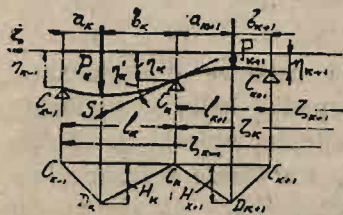
$\eta = \zeta\eta'_0 + \zeta \int_0^\zeta \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_0^\zeta \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$. Spółrzędne drugiej podpory rolkowej $\zeta_1 = l$, $\eta_1 = 0$ czynią również zadość temu równaniu, możemy prze-

to napisać $0 = l\eta'_0 + l \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta - \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$. Rugując η'_0 otrzyma-

my równanie odkształconej: $\eta = -\zeta \int_0^l \frac{M}{EJ} d\zeta + \zeta \int_0^\zeta \frac{M}{EJ} d\zeta + \zeta/l \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta - \int_0^\zeta \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta = -\zeta \int_\zeta^l \frac{M}{EJ} d\zeta + \zeta/l \int_0^l \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta - \int_0^\zeta \frac{M\zeta}{EJ} d\zeta$.

§ 35. Belki wieloprzęsłowe. Idąc w kierunku sprowadzania sił, oznaczamy przez C_0 skrajną lewą podporę belki n przęsłowej, przez C_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) podpory pośrednie, przez C_n skrajną podporę prawą, w której umieszczamy początek stałych osi współrzędnych. Oś $C_n\zeta$ układamy na osi pierwotnej belki ku C_0 , oś $C_n\eta$ kierujemy w dół, $C_n\xi$ — ku patrzącemu. Pierwotnie wszystkie podpory leżały na osi $C_n\zeta$, a więc na jednym poziomie w odległościach ζ_i od początku współrzędnych. Po obciążeniu podpory mogły uleść obniżeniu lub podwyższeniu ponad

poziom, pierwotne jednak odległości ζ_i nie mogły się wyraźnie zmienić, z założenia bowiem rozpatrujemy wygięcie nader nieznaczące. Spółrzędne podpór pręta odkształconego będą więc ζ_i, η_i ($i = 1, 2, \dots, n$), różnice $\zeta_{i-1} - \zeta_i = l_i$ dają długości przeseł belki, pomiędzy sąsiednimi podpórami C_{i-1} i $C_i \dots$. Oznaczmy przez C_i odpór pionowy podpory C_i , przez M_i jej moment odporowy. Odpory poziome podpór przegubowych i stałych zakładamy równe zeru, są bowiem z istoty rzeczy nader nieznaczące przy niewielkiem ugięciu belki, jakie wyłącznie tylko chcemy brać pod uwagę. W ten sposób odpada jedno równanie statyki—z dwóch



Rys. 49.

pozostałych wyznaczymy jeno dwa odpory pionowe. Reszta stanowi $n-1$ statycznie niewyznaczalnych. Chcąc je wyznaczyć, bierzemy (Rys. 49) trzy sąsiednie podpory C_{k-1}, C_k, C_{k+1} pod uwagę. Dwie pierwsze wyznaczają rozpiętość $l_k = \zeta_{k-1} - \zeta_k$ przęsła k , dwie drugie — rozpiętość $l_{k+1} = \zeta_k - \zeta_{k+1}$ przęsła $k+1$. Korzystając z trzeciego wzoru całkowego odkształconej, możemy napisać dwukrotnie:

$$\eta'_k = \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} + \frac{1}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \frac{M(\zeta - \zeta_{k-1})}{EJ} d\zeta = \frac{\eta_k - \eta_{k+1}}{\zeta_k - \zeta_{k+1}} + \frac{1}{\zeta_k - \zeta_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{M(\zeta - \zeta_{k+1})}{EJ} d\zeta.$$

$$\text{Stąd: } \frac{\eta_{k-1} - \eta_k}{l_k} - \frac{\eta_k - \eta_{k+1}}{l_{k+1}} - \frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{M(\zeta_{k-1} - \zeta)}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{M(\zeta - \zeta_{k+1})}{EJ} d\zeta = 0.$$

Na mocy twierdzenia o trzech momentach możemy napisać dla k przęsła: $M = M_{k-1} + (M_k - M_{k-1})(\zeta_{k-1} - \zeta) : l_k + \mu$ oraz dla $k+1$ przęsła: $-M = -M_{k+1} + (-M_k + M_{k+1})(\zeta - \zeta_{k+1}) : l_{k+1} - \mu$. Znaki ujemne momentów drugiego wzoru są tu konieczne ze względu na zmieniony kierunek. Po podstawieniu otrzymamy:

$$\frac{\eta_{k-1} - \eta_k}{l_k} + \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{l_{k+1}} - M_{k-1} \left[\frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{\zeta_{k-1} - \zeta}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_k^2} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{(\zeta_{k-1} - \zeta)^2}{EJ} d\zeta \right] - M_k \left[\frac{1}{l_k^2} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{(\zeta_{k-1} - \zeta)^2}{EJ} d\zeta + \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta \right] - M_{k+1} \left[\frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{\zeta - \zeta_{k+1}}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta \right] = 0.$$

$$- \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta \left] - \frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{\mu (\zeta_{k-1} - \zeta)}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{\mu (\zeta - \zeta_{k+1})}{EJ} d\zeta = 0.$$

Jest to *Wzór Clerc'a*. Wiąże on linjowo trzy sąsiednie momenty odporowe. Ponieważ z założenia mamy n przęseł, możemy go zatem wypisać kolejno dla 1 i 2, 2 i 3 . . . przęśla, słowem otrzymać $n-1$ linjowych równań dla momentów odporowych. Z tych równań wyznaczymy $n-1$ momentów prócz, dajmy na to, skrajnych M_0 i M_n . Te dwa ostatnie określimy z warunków końcowego obciążenia belki. Gdy belka kończy się ponad skrajnymi podporami typu rolkowego lub przegubowego, wtedy $M_0 = M_n = 0$, gdy belka zwisa poza podpory skrajne, a wystające jej końce ulegają jarzmu układów zewnętrznych $[E]_0$ i $[E]_n$ sił gnących, możemy owe układy sprowadzić do środka skrajnych podpartych przekrojów i bezpośrednio otrzymać w ten sposób M_0 i M_n . Wreszcie, gdy belka jest końcami zamocowana, możemy dwukrotnie zastosować trzeci wzór całkowy do skrajnych przęseł, a otrzymamy:

$$\eta'_0 = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\zeta_0 - \zeta_1} + \frac{1}{\zeta_0 - \zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{M(\zeta - \zeta_1)}{EJ} d\zeta = 0,$$

$$\eta'_n = - \frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{l_n} - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{M(l_n - \zeta)}{EJ} d\zeta = 0$$

dla pierwszego i ostatniego, tutaj bowiem $\zeta_n = \eta'_0 = \eta'_n = 0$ oraz $\zeta_{n-1} = l_n$. Na mocy twierdzenia o trzech momentach mamy dla przęśla pierwszego: $M = M_1 + (M_0 - M_1)(\zeta - \zeta_1) : l_1 + \mu$, dla ostatniego: $M = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1})(l_n - \zeta) : l_n + \mu$. W ten sposób otrzymamy dwa wzory dodatkowe:

$$\eta_0 - \eta_1 + M_1 \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{\zeta - \zeta_1}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{EJ} d\zeta \right] + \frac{M_0}{l_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{EJ} d\zeta + \int_{\zeta_1}^{\zeta_0} \frac{\mu (\zeta - \zeta_1)}{EJ} d\zeta = 0,$$

$$\eta_n - \eta_{n-1} + M_{n-1} \left[\int_0^{l_n} \frac{l_n - \zeta}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{(l_n - \zeta)^2}{EJ} d\zeta \right] + \frac{M_n}{l_n} \int_0^{l_n} \frac{(l_n - \zeta)^2}{EJ} d\zeta + \int_0^{l_n} \frac{\mu (l_n - \zeta)}{EJ} d\zeta = 0,$$

z których wyznaczymy brakujące momenty M_0 i M_n .

Pozostają nam jeszcze odpory. Chcąc wyznaczyć C_i nazywamy przez T_i siłę tnącą ponad podporą C_i . Ponad C_{k-1} , C_k , C_{k+1} będą

więc panowały siły tnące T_{k-1} , T_k , T_{k+1} . Oznaczmy nadto przez P_j siłę gnącą, czynną w odległości ζ_j od osi podpory prawej C_{k+1} , a otrzymamy $M_{k+1} = M_k + T_k l_{k+1} + \sum P_j \zeta_j$, gdzie dodawaniem należy objąć wszystkie siły tnące przęsła $k+1$. Stąd $T_k = (M_{k+1} - \sum P_j \zeta_j - M_k) : l_{k+1}$. W ten sposób, idąc w kierunku sprowadzania sił, a więc od C_0 ku C_n , wyznaczmy wykres sił tnących belki. To samo możemy również zrobić, zmieniawszy kierunek sprowadzania sił na odwrotny. Idąc od C_n ku C_0 otrzymamy nowe wartości sił tnących T'_k , panujących ponad podporami. Stąd niewątpliwie $T_k + T'_k = C_k$. W ten sposób rozwiążaliśmy całokształt zagadnienia. Jediną trudność stanowi tu wyznaczenie całek; to też zazwyczaj czynimy to wykreślnie.

Dla pręta o przekroju stałym mamy ze wzoru ogólnego:

$$6 EJ \left[\frac{\eta_{k-1} - \eta_k}{l_k} + \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{l_{k+1}} \right] = l_k M_{k-1} + 2(l_k + l_{k+1}) M_k + l_{k+1} M_{k+1} + \frac{6}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \mu (\zeta_{k-1} - \zeta) d\zeta + \frac{6}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \mu (\zeta - \zeta_{k+1}) d\zeta.$$

§ 36. Wzór Clapeyron'a. Chcąc wyznaczyć całki tego wzoru sierzemy pod uwagę zrazu tylko jedną siłę P_k w przęśle k oraz siłę P_{k+1} w przęśle $k+1$. Odległość tych sił od podpór lewych C_{k-1} i C_k odpowiednio oznaczamy przez a_k i a_{k+1} , od prawych C_k i C_{k+1} — przez b_k i b_{k+1} . Wykresy momentów μ tych sił będą oczywiście trójkątne. Wysokość trójkątów $H_k = -P_k a_k b_k : l_k$, $H_{k+1} = -P_{k+1} a_{k+1} b_{k+1} : l_{k+1}$. Łatwo spostrzec, że pierwsza całka stanowi moment statyczny trójkąta $C_{k-1} C_k D_k$ względem punktu C_{k-1} jest zatem równa: $\frac{2}{3} a_k \times \frac{1}{2} a_k \times P_k a_k b_k : l_k - (a_k + \frac{1}{3} b_k) \times \frac{1}{2} b_k \times P_k a_k b_k : l_k = -\frac{1}{6} P_k a_k b_k (a_k + b_k) (b_k + 2 a_k) : l_k = -\frac{1}{6} P_k a_k b_k (l_k^2 + a_k^2) = -\frac{1}{6} P_k a_k (l_k^2 - a_k^2)$. Druga całka stanowi moment statyczny trójkąta $C_k C_{k+1} D_{k+1}$ względem punktu C_{k+1} i równa się $-\frac{1}{6} P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2)$. Po podstawieniu tych wartości we wzór ustępu poprzedniego otrzymamy: $6 EJ [(\eta_{k-1} - \eta_k) : l_k + (\eta_{k+1} - \eta_k) : l_{k+1}] = l_k M_{k-1} + 2(l_k + l_{k+1}) M_k + l_{k+1} M_{k+1} - \sum P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) : l_k - \sum P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) : l_{k+1}$. W szczególnym wypadku, gdy nadto jeszcze działa obciążenie jednostajne w stosunku p_k kg na jednostkę długości przęsła k , poczynające się w odległości c_0 i kończące w odległości c od podpory C_{k-1} , będziemy mieli $\sum P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) =$

$$= \int_{c_0}^c p_k \zeta (l_k^2 - \zeta^2) d\zeta = \frac{1}{4} p_k (c^2 - c_0^2) (2 l_k^2 - c^2 + c_0^2).$$

Nadto gdy obciążenie jednostajne p_{k+1} prawego przęsła poczyną się w odległości d_0 i kończy w odległości d od podpory C_{k+1} otrzymamy $\sum P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 -$

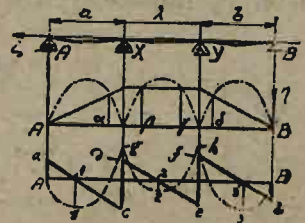
$$-b^2_{k+1}) = \int_{d_0}^{\partial} p_{k+1} \zeta (l^2_{k+1} - \zeta) d\zeta = 1/4 p_{k+1} (\partial^2 - d_0^2) (2 l^2_{k+1} - \partial^2 +$$

+ d_0^2). A przeto wzór wydłuży się w prawej części o te dwa wyrazy, dzielone odpowiednio przez $-l_k$ i $-l_{k+1}$. Gdy sił skupionych brak, a obciążenia jednostajne pokrywają całe przęsła, to jest gdy: $P_k = P_{k+1} = 0$, $c_0 = d_0 = 0$, $c = l_k$, $d = l_{k+1}$, otrzymamy wzór Clapeyron'a: $6 EJ [(\eta_{k-1} - \eta_k) : l_k + (\eta_k - \eta_{k+1}) : l_{k+1}] = l_k M_{k+1} + 2(l_k + l_{k+1}) M_k + l_{k+1} M_{k+1} - 1/4 p l^3_k - 1/4 p l^3_{k+1}$. Kilka przykładów najlepiej uwypukli istotę stosowania powyższych wzorów.

§ 37. Belka dwuprzęsłowa. Weźmy ponownie pod uwagę belkę dwuprzęsłową (Rys. 40). W założeniu jednostajnego obciążenia p kg na jednostkę długości, pokrywającego całkowitą długość belki, będziemy mieli przedewszystkiem $M_A = M_B = 0$. Chcąc wyznaczyć M_x wypisujemy równanie Clapeyron'a. Wobec tego, że wszystkie trzy podpory belki o przekroju stałym leżą na jednym poziomie po odkształceniu: $2(a + b) M_x = 1/4 p (a^3 + b^3)$. Stąd $M_x = 1/8 p (a^3 + b^3) : l$. Opierając się na tej wartości łatwo wyznaczmy obie podpory skrajne. Idąc od A ku X możemy napisać $Aa + 1/2 pa^2 = M_x$, skąd $A = -1/2 pa + 1/8 p (a^3 + b^3) : a$. Zmieniając znów kierunek sprowadzania sił, a więc idąc od B ku X będziemy mieli $Bb - 1/2 pb^2 = -M_x$, skąd $B = -1/2 pb + 1/8 p (a^3 + b^3) : b$. Te same wartości otrzymaliśmy w § 15 niniejszego rozdziału.

W założeniu siły skupionej (Rys. 45), cisnącej na przekrój pośredni przęsła prawego będziemy mieli znowu $M_{AO} = M_{BO} = 0$, a dla M_x możemy napisać $2(a + b) M_x = Pc (b^2 - c^2) : b$ skąd $M_x = Pc (b^2 - c^2) : 2 bl$. I tu również $A_0 a = M_x$ skąd $A_0 = Pc (b^2 - c^2) : 2 abl$. Podobnie zupełnie: $-B_0 b - P(b - c) = -M_x$, skąd $B_0 = -P + Pc (b^2 + 2 bl - c^2) : 2 b^2 l$. Wyznaczmy siłę tnącą przed podporą środkową. Idąc od A ku X , a więc w kierunku sprowadzania momentów, otrzymamy $T_x = A_0 = Pc (b^2 - c^2) : 2 abl$. Idąc zaś w kierunku odwrotnym: $T'_x = B_0 + P = Pc [b^2 + 2 bl - c^2] : 2 b^2 l$ stąd $-X = T_x + T'_x = -Pc [b^3 - c^2 b + ab^2 + 2 abl - ac^2] : 2 ab^2 l = -Pc (b^2 + 2 ab - c^2) : 2 ab^2$. To samo otrzymaliśmy w § 26 rozdziału niniejszego.

§ 38. Belka trójprzędłowa o przekroju stałym, obciążona jednostajnie w stosunku p kg na jednostkę długości. Obciążenie pokrywa całą belkę. Podpory A, X, Y, B zakładamy nieruchome i prowadzimy przez nie oś pierwotną belki $B\zeta$, oś $B\eta$ kierujemy w dół, $B\xi$ — ku patrzącemu. Prócz przegubowej podpory B — pozostałe są rolkowe, zatem $M_A = M_B = 0$. Chcąc wyznaczyć (Rys. 50) pozostałe dwa momenty M_x, M_y , wypisujemy dwukrotnie równanie Clapeyron'a w postaci: $2(a + \lambda) M_x + \lambda M_y =$



Rys. 50.

$= \frac{1}{4} p (a^2 + \lambda^3), \lambda M_x + 2 (\lambda + b) M_y = \frac{1}{4} p (\lambda^3 + b^3)$. Stąd mamy $M_x = p [2 (\lambda + b) (a^3 + \lambda^3) - \lambda (\lambda^3 + b^3)] : 4 [4 (a + \lambda) (\lambda + b) - \lambda^2]$. $M_y = p [2 (a + \lambda) (\lambda^3 + b^3) - \lambda (a^3 + \lambda^3)] : 4 [4 (a + \lambda) (\lambda + b) - \lambda^2]$. Następnie mamy $Aa + \frac{1}{2} a^2 p = M_x$, $Bb + \frac{1}{2} p b^2 = M_y$, $A (a + \lambda) + X\lambda + \frac{1}{2} p (a + \lambda)^2 = M_y$, oraz $A + B + X + Y + p (a + b + \lambda) = 0$. Z tych równań wyznaczmy odpory.

Rozpatrzmy bliżej wypadek szczególny, kiedy $a = b = \lambda = \frac{1}{3} l$. W tem założeniu otrzymamy $M_x = M_y = \frac{1}{90} p l^2$, $A = B = -\frac{2}{15} p l$, $X = Y = -\frac{11}{30} p l$. Te wartości pozwolą nam wypisać ogólny wzór dla momentu gnącego $M = A (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 \parallel + X (\frac{2}{3} l - \zeta) \parallel + Y (\frac{1}{3} l - \zeta) = -\frac{2}{15} p l (l - \zeta) + \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 \parallel - \frac{11}{30} p l (\frac{2}{3} l - \zeta) - \frac{11}{30} p l (\frac{1}{3} l - \zeta)$. Czyniąc tu $M = 0$, znajdziemy odcięte punktów przegięcia odkształconej. Dla połaci pierwszej będziemy mieli $\zeta_1 = \frac{11}{15} l$, dla drugiej — dwie wartości $\zeta_2 = \frac{1}{2} l (1 \pm 1 : 3 \sqrt{5})$, dla trzeciej: $\zeta_3 = \frac{4}{15} l$. Będą to punkty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Z kolei czyniąc $dM = 0$ wyznaczmy odcięte, odpowiadające skrajnym wartościom momentów. Dla połaci pierwszej będziemy mieli $\zeta_4 = \frac{13}{15} l$, dla drugiej $\zeta_5 = \frac{1}{2} l$, dla trzeciej $\zeta_6 = \frac{2}{15} l$. Będą to punkty 1, 2, 3. Panują w nich odpowiednio momenty $M_1 = M_3 = -\frac{2}{225} p l^2$, $M_2 = -\frac{1}{360} p l^2$. Bezwzględnie skrajnemi wartościami najwyższemi będą tu $M_x = M_y = \frac{1}{90} p l^2$. Wobec tego, że $EJ\eta'' = M$, otrzymamy całkując $EJ\eta' = C + \frac{1}{15} p l (l - \zeta)^2 - \frac{1}{6} p (l - \zeta)^3 \parallel + \frac{11}{60} p l (\frac{2}{3} l - \zeta)^2 \parallel + \frac{11}{60} p l (\frac{1}{3} l - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta - \frac{1}{45} p l (l - \zeta)^3 + \frac{1}{24} p (l - \zeta)^4 \parallel - \frac{11}{180} p l (\frac{2}{3} l - \zeta)^3 \parallel - \frac{11}{180} p l (\frac{1}{3} l - \zeta)^3$. Dla skrajnych przekrojów mamy $\eta = 0$ dla $\zeta = 0$ i $\zeta = l$, zatem $D - \frac{1}{45} p l^3 + \frac{1}{24} p l^4 - \frac{11}{180} p l \times \frac{8}{27} l^3 - \frac{11}{180} p l \times \frac{1}{27} l^3 = 0$, $D + C l = 0$. Skąd: $D = \frac{1}{1080} p l^3$, $C = -\frac{1}{1080} p l^3$. Czyniąc $\eta' = 0$, wyznaczmy odcięte, przynależne do skrajnych strzałek pręta. Łatwo znajdziemy, że w połaci pierwszej będzie $\zeta_7 = [13 - 4 \cos (240^\circ + \frac{1}{3} \text{arcCos } \frac{11}{64})] l : 15 \approx 0,882 l$, w drugiej $\zeta_8 = \frac{1}{2} l$ i w trzeciej $\zeta_9 = l - \zeta_7 \approx 0,118 l$. Podstawiawszy te wartości we wzór odkształconej, otrzymamy odnośne strzałki ugięcia.

§ 39. Twierdzenie o dwóch momentach. Powyższe przykłady należą do najłatwiejszych. Przy większej liczbie przęseł rozwiązywanie równań nawet za pomocą wyznaczników nastęrcza poważne trudności, które łatwo możemy ominąć, stosując miasto wzorów *Clerc'a* lub *Clapeyron'a* — *twierdzenie o dwóch momentach*. Oznaczmy spółczynniki momentów odporowych we wzorze *Clerc'a* przez: $N = [\eta_{k-1} - \eta_k] : l_k +$

$$+ [\eta_{k+1} - \eta_k] : l_{k+1}, R_{k-1} = \frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{\zeta_{k-1} - \zeta}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_k^2} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{(\zeta_{k-1} - \zeta)^2}{EJ} d\zeta,$$

$$R_k = \frac{1}{l_k^2} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{(\zeta_{k-1} - \zeta)^2}{EJ} d\zeta + \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta,$$

$$R_{k+1} = \frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{\zeta - \zeta_{k+1}}{EJ} d\zeta - \frac{1}{l_{k+1}^2} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{(\zeta - \zeta_{k+1})^2}{EJ} d\zeta,$$

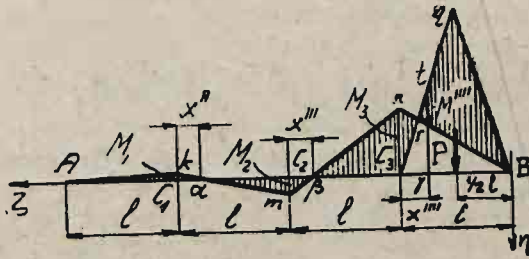
$$S = \frac{1}{l_k} \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k-1}} \frac{\mu (\zeta_{k-1} - \zeta)}{EJ} d\zeta + \frac{1}{l_{k+1}} \int_{\zeta_{k+1}}^{\zeta_k} \frac{\mu (\zeta - \zeta_{k+1})}{EJ} d\zeta,$$

a wtedy $R_{k-1} M_{k-1} + R_k M_k + R_{k+1} M_{k+1} = N + S$. To samo wyrażenie może oczywiście dotyczyć i wzoru *Clapeyron'a*. W tym jednak wypadku $R_{k-1} = l_k$, $R_k = 2(l_k + l_{k+1})$, $R_{k+1} = l_{k+1}$, $S = = \Sigma P_k a_k (l_k^2 - a_k^2) : l_k + \Sigma P_{k+1} b_{k+1} (l_{k+1}^2 - b_{k+1}^2) : l_{k+1}$. Tutaj N będzie oznaczało: $6 EJ [(\eta_{k-1} - \eta_k) : l_k + (\eta_{k+1} - \eta_k) : l_{k+1}]$. Według znanego wzoru: $M' = M_{k-1} + (M_k - M_{k-1})(\zeta_{k-1} - \zeta) : l_k + \mu'$ dla momentu w przęśle k , oraz $M'' = M_{k+1} + (M_k - M_{k+1})(\zeta - \zeta_{k+1}) : l_{k+1} + \mu''$ dla przęśla $k+1$. Z tych wzorów, oznaczając $\zeta_{k-1} - \zeta = x'$, $\zeta_k - \zeta = x''$ będziemy mieli $M_{k-1} = [(M' - \mu') l_k - M_k x'] : (l_k - x')$, $M_{k+1} = [(M'' - \mu'') l_{k+1} - M_k (\zeta - \zeta_{k+1})] : (l_{k+1} - \zeta + \zeta_{k+1}) = [(M'' - \mu'') l_{k+1} - M_k (\zeta - \zeta_k + \zeta_k - \zeta_{k+1})] : (\zeta_k - \zeta_{k+1} - \zeta + \zeta_{k+1}) = = [(M'' - \mu'') l_{k+1} - M_k (l_{k+1} - x'')] : x''$. Po podstawieniu tych wartości otrzymamy: $R_{k-1} (M' - \mu') l_k : (l_k - x') + R_{k+1} (M'' - \mu'') l_{k+1} : x'' - M_k [R_{k-1} x' : (l_k - x') + R_{k+1} (l_{k+1} - x'') : x'' - R_k] = N + S$. *Wczmy pod uwagę parę wartości x' , x'' , czyniących zadość równaniu: $R_{k-1} x' : (l_k - x') + R_{k+1} (l_{k+1} - x'') : x'' - R_k = 0$, a odnośne momenty gnące M' i M'' czyniąć będą zadość równaniu $R_{k-1} (M' - \mu') l_k : (l_k - x') + R_{k+1} (M'' - \mu'') l_{k+1} : x'' = N + S$. Ten prosty wniosek sianowi twierdzenie o dwóch momentach.*

W szczególnym wypadku belki o stałym przekroju równania powyższe przechodzą w: $x' l_k : (l_k - x') + (l_{k+1} - x'') l_{k+1} : x'' - 2(l_k + l_{k+1}) = 0$, $(M' - \mu') l_k^2 : (l_k - x') + (M'' - \mu'') l_{k+1}^2 : x'' = N + S$. Jest to tak zwane *twierdzenie Lévy*. Stanowi ono wypadek szczególny twierdzenia o dwóch momentach. Oba są bardzo wygodne w zastosowaniu do belek wieloprzęsłowych. Najlepiej to uwytkli przykład:

§ 40. Belka czteroprzęsłowa. Oznaczmy przęśla kolejne przez l_1, l_2, l_3, l_4 . Skrajną prawą podporę B zakładamy przegubową — pozostałe niech będą rolkowe. Oś $B\zeta$ prowadzimy po osi pręta pierwotnej na lewo, $B\eta$ — w dół, $B\xi$ — ku patrzącemu (Rys. 51). Niezależnie od typu obciążenia $M_0 = M_4 = 0$, ponad podporami skrajnymi belki. W ten sposób odrazu otrzymaliśmy jedną wartość momentu gnącego $M_0 = 0$, przynależną do $x' = 0$. Odnośną wartość x'' znajdziemy z równania powyżej wyprowadzonego. W przekroju, przynależnym do x'' , panować będzie moment gnący M'' , który również wyznaczmy z łatwością. W ten sposób, idąc od przęśla do przęśla otrzymamy szereg wartości x'', x''', x''', \dots wraz o odnośnymi momentami M', M'', M''', \dots . W ostat-

niem przeszłe będą więc dwa znane momenty — ostatni szeregu tylko co wypisanego i $M_B = 0$. Te dwie wartości określają cały wykres zmienności momentów w ostatnim prześle. Łatwo się o tem przekonamy, rzuciwszy okiem na (Rys. 47).



Rys. 51.

Z tego wykresu otrzymamy moment odporowy przedostatni, będziemy znowu przeto mieli dwie wartości momentów gnących, wyznaczone dla przęśta przedostatniego. Znowu zbudujemy wykres momentów gnących, otrzymamy moment odporowy dalszej podpory i t. d. aż do

skrajnego przęśta lewego. Założmy, a założenie to w niczem ogólności rozważań naszych nie uszczupli, że $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$. Ułatwi to nam jeno rozwiązywanie równań, a przykład uczyni przejrzystszym. Dla belki o stałym przekroju wobec $x' = 0$ otrzymamy $(l - x') l = 2 x' (2 l)$, skąd $x'' = \frac{1}{5} l$. Dalsze równanie $\frac{1}{5} l^2 : (l - \frac{1}{5} l) + (l - x''') l : x'''' = 2 (l + l)$ da $x''' = \frac{4}{19} l$. W ten sposób otrzymamy szereg wartości $x' = 0$, $x'' = \frac{1}{5} l$, $x''' = \frac{4}{19} l$, $x'''' = \frac{15}{71} l$. Łatwo tu zauważyć pewien algorytm. Licznik następnego ułamka równy jest mianownikowi poprzedniego mniej licznik poprzedniego. Mianownik następnego ułamka równy jest pięciokrotnemu swemu licznikowi mniej licznik ułamka poprzedniego. Te wartości wyznaczają momenty. W założeniu siły skupionej P , czynnej po środku prawego przęśta skrajnego, będziemy mieli dla dwóch pierwszych przęśtów $(M' - \mu') : (l - x') + (M'' - \mu'') : x'' = (N + S) : l^2$. Ponad temi przęśtami brak obciążenia zewnętrznego, — zatem $S = 0$. Nadto gdy wszystkie podpory leżą na jednym poziomie, $N = 0$. Ponieważ przy tem $M' = \mu' = x' = \mu'' = 0$, przeto i $M'' = 0$. W podobny sposób znajdziemy, że i $M''' = 0$. Dla trzeciego przęśta i ostatniego $(M'''' - \mu''') : (l - x''') + (M'''' - \mu''''') : x'''' = S : l^2 = P \times \frac{1}{2} l \times (l^2 - \frac{1}{4} l^2) : l^2 = \frac{3}{8} P$. Tutaj $M''' = \mu''' = 0$, bo ponad przęśtem trzecim niema obciążenia. Zatem $M'''' - \mu'''' = \frac{45}{368} Pl$ i wobec $\mu'''' = -\frac{1}{2} P \times \frac{15}{71} l = -\frac{15}{142} Pl$ mamy $M'''' = -\frac{15}{568} Pl$. Otrzymaliśmy w ten sposób dla przęśta ostatniego dwie wartości momentu gnącego: tylko co wyznaczoną, panującą w odległości $\frac{15}{71} l$ od C_3 , oraz $M_B = M_4 = 0$. Chcąc znaleźć odnośny wykres momentów gnących dla tego przęśta, oznaczamy przez x odległość jakiegokolwiek przekroju poprzecznego belki od C_3 , przez M_x moment w tym przekroju. Na mocy twierdzenia o trzech momentach $M_x = M_3 + (M_4 - M_3) x : l + \mu_x$, czyli $M_x - \mu_x = M_3 + (M_4 - M_3) x : l$. Łatwo zbudować wzór tylko co otrzymany. Wyznaczamy wykres momentów μ ostatniego przęśta. W danym wypadku będzie to trójkąt $C_3 q B$ o podstawie $C_3 B = l$ i wysokości $-\frac{1}{4} Pl$. W odległości $C_3 \gamma = \frac{15}{71} l$ wyznaczamy rzędną γt , która jest oczywiście równa μ'''' i od punktu t w dół odkładamy $tr = M''''$. Wtedy $r \gamma = M'''' - \mu''''$, możemy przeto uczynić zadość powyższej linjowej zależności, prowadząc prostą Brn . Skrajna jej rzędna $C_3 n = M_3$. Wykres momentów gnących otrzymamy, biorąc pod uwagę pola zakreskowane

wykresu. Łatwo zauważymy, że $M_2 = \gamma r \times l : (l - x''') = [^{15/142} - ^{15/568}] Pl^2 : (l - ^{15/71} l) = ^{15/448} Pl$. W ten sposób dla przedostatniego trzeciego przęsta mamy już dwie wartości momentów M_3 i $M''' = 0$, panującą w odległości $C_2\beta = x'''$. Na mocy twierdzenia o trzech momentach łatwo udowodnimy, że przy braku obciążenia zewnętrznego moment gnący zmieniać się będzie linjowo. To samo zauważymy odrazu, rzuciwszy okiem na (Rys. 47). Możemy zatem otrzymać wykres momentów gnących, łącząc n z β prostą mn . Odetnie ona $C_2m = M_2 < 0$, przy czym $M_2 = -C_3n \times C_2\beta : \beta C_3 = -^{3/112} Pl$. Z kolei, rozumując zupełnie tak samo, dochodzimy do przekonania, że należy połączyć m z α prostą mk , która odetnie $C_1k = M_1 = ^{3/448} Pl > 0$. Łącząc k z A zakończymy wykres momentów.

Te same wartości otrzymamy ze wzoru *Clapeyron'a*. Stosując go kolejno otrzymamy $4IM_1 + IM_2 = 0$, $IM_1 + 4IM_2 + IM_3 = 0$, $IM_2 + 4IM_3 = ^{3/8} Pl^2$. Stąd $M_2 = -4M_1$, $M_3 = 15M_1$, $M_1 = ^{3/448} Pl$, a przeto $M_2 = -^{3/112} Pl$, $M_3 = ^{15/448} Pl$. Zwróćmy uwagę na bieg łamanej wykresu. Rozfalowana w ostatnich dwóch przęstach ledwo oddalą się od podstawy w pierwszym. Obciążenie przęsta daje się odczuwać jeno w najbliższych przęstach sąsiednich. Im dalej, tem jego wpływ staje się bardziej nieznacznym. Przypisać to należy usztywniającemu działaniu podpór. Im więcej podpór, tem belka sztywniejsza.

§ 41. Belka na podłożu sprężystem. Ustawmy podpory obok siebie w szereg nieprzerwany, a otrzymamy tak zwane *podłoże*. Belka na podłożu stałem jest niewątpliwie całkowicie sztywna. Nie wygnie jej żadne obciążenie gnące, chyba, że samo podłoże podda się pod jarzmem obciążenia belki, a wtedy będziemy mieli do czynienia z *podłożem sprężystem*. Ułóżmy na niem belkę pierwotnie prostą. Po obciążeniu siłami gnącemi belka poczyna cisnąć na podłoże wzdłuż całej dolnej powierzchni dotyku. Podłoże, jako sprężyste, podda się nieco, belka się weń zagłębi tem silniej, im mocniej ciśnie na podłoże w tem miejscu. *Gdy osiadanie belki jest proporcjonalne do nacisku, wywieranego w tem miejscu na podłoże — podłoże jest wzorowo sprężyste.*

Ułóżmy na pierwotnej osi belki stałą oś $\omega\zeta$, biorąc początek spółrzędnych w środku ω dowolnego przekroju poprzecznego; oś $\omega\zeta$ kierujemy na lewo, $\omega\eta$ — w dół, a $\omega\xi$ — ku patrzącemu. Po odkształceniu belka wygnie się, otrzymamy rzędne η — odkształconej — jako miarę osiadania belki. Sprzeciw podłoża wzorowo sprężystego będzie przeto $q = -m\eta$, ujemny, bo skierowany oczywiście ku górze. Stanowi on niejako obciążenie belki zewnętrzne jednostkowe, cisnące od spodu w stosunku q kg na jednostkę długości. Spółczynnik proporcjonalności oznaczamy tu przez m . Sprzeciw podłoża należy włączyć do obciążenia odkształcającego, aby z równań ogólnych otrzymać dane, dotyczące pracy belki na wzorowo sprężystem podłożu. Przykłady najlepiej to wyjaśnią.

§ 42. Belka podwalinowa. Belka pozioma na ziemnym podłożu dźwiga w swej części środkowej w odcinku $2a$, symetryczne obciążenie jednostkowe p kg na jednostkę długości. Tak ciśnie również mur $2a$ gruby na belkę podwalinową. Opieramy go nie na podłożu bezpośrednio, a na belce, chcąc rozłożyć ciśnienie na większą powierzchnię podłoża. Dlatego belka, a raczej płyta podwalinowa, zawsze wystaje poza krawędzie muru, które w płaszczyźnie gięcia wyodrębniają trzy połacie obciążenia. W obu skrajnych (Rys. 52) belka ulega jeno parciu podłoża. Według doświadczeń *Föppl'a* zwykły grunt stanowi podłoże prawie zupełnie wzorowo sprężyste, możemy przeto napisać dla obu bocznych połaci: $EJ\eta'''' = q = -m\eta$. W połaci środkowej $EJ\eta'''' = -m\eta + p$. Dla belki o stałym przekroju otrzymamy całą równania pierwszego $\eta = Ae^{n\zeta} \sin n\zeta + Be^{n\zeta} \cos n\zeta + Ce^{-n\zeta} \sin n\zeta + De^{-n\zeta} \cos n\zeta$, gdzie $4n^4 = m : EJ$. Całka drugiego równania ma postać zupełnie podobną, należy jeno w prawej części dorzucić wyraz $+p : m$. Różniczkowanie da w obu wypadkach wzory różniące się tylko wartościami stałych całkowania: $\eta' = n(Ae^{n\zeta} - De^{-n\zeta})(\sin n\zeta + \cos n\zeta) - n(Be^{n\zeta} + Ce^{-n\zeta})(\sin n\zeta - \cos n\zeta)$, $\eta'' = 2n^2(Ae^{n\zeta} - Ce^{-n\zeta})\cos n\zeta + 2n^2(De^{-n\zeta} - Be^{n\zeta})\sin n\zeta$, $\eta''' = -2n^3(Ae^{n\zeta} + De^{-n\zeta})(\sin n\zeta - \cos n\zeta) - 2n^3(Be^{n\zeta} - Ce^{-n\zeta})(\sin n\zeta + \cos n\zeta)$. Należy wyznaczyć stałe całkowania. W tym celu ze względu na zupełną symetrię obciążenia, konieczną dla wszelkiej belki podwalinowej, możemy umieścić początek stałych osi spólrzędnych w przekroju belki środkowym i rozpatrywać jeno jej lewą połowę. Prawa będzie symetryczna pod względem naprężeń i odkształceń. Oznaczmy całą długość belki przez $2b$. W przekroju, leżącym pod muru krawędzią, w odległości a od początku spólrzędnych, będziemy mieli jednakową wartość η i η' dla obu połaci, ponieważ odkształcona nie może mieć punktów podwójnych w tym samym przekroju, ani osobliwych. Nadto w tym przekroju siła tnąca i moment nie doznają przerwy ciągłości. Dla belki o stałym przekroju $M = EJ\eta''$, $T = -EJ\eta'''$, zatem przy $\zeta = a$ będziemy mieli te same wartości η'' i η''' dla obu połaci. Oznaczmy przez $A_0, B_0, C_0, D_0, \eta_0, \eta_0', \eta_0'', \eta_0''', \eta_0''''$ odnośne wartości dla pierwszej skrajnej lewej połaci, dla drugiej środkowej przez $A_1, B_1, C_1, D_1, \eta_1, \eta_1', \eta_1'', \eta_1''', \eta_1''''$, zatem przy $\zeta = a$ będzie $\eta_{0a} = \eta_{1a}$, $\eta'_{0a} = \eta'_{1a}$, $\eta_{0a}'' = \eta_{1a}''$, $\eta_{0a}''' = \eta_{1a}'''$, niech nadto $\alpha = (A_0 - A_1)e^{na}$, $\beta = (B_0 - B_1)e^{na}$, $\gamma = (C_0 - C_1)e^{-na}$, $\delta = (D_0 - D_1)e^{-na}$, a wtedy z warunków tylko co wypisanych otrzymamy cztery równania: $\alpha \sin na + \beta \cos na + \gamma \sin na + \delta \cos na = p : m$, $\alpha (\sin na + \cos na) - \beta (\sin na - \cos na) - \gamma (\sin na - \cos na) - \delta (\sin na + \cos na) = 0$, $\alpha \cos na - \beta \sin na - \gamma \cos na + \delta \sin na = 0$, $\alpha (\sin na - \cos na) + \beta (\sin na + \cos na) - \gamma (\sin na + \cos na) + \delta (\sin na - \cos na) = 0$. Łatwo spostrzec, że tym czterem równaniom czynią zadość wartości $\alpha = \gamma = \Delta \sin na$, $\beta = \delta = \Delta \cos na$, gdzie $\Delta = p : 2m$. Zatem $A_0 = A_1 + (p : 2m)e^{-na} \sin na$, $B_0 = B_1 + (p : 2m)e^{-na} \cos na$, $C_0 = C_1 + (p : 2m)e^{na} \sin na$, $D_0 = D_1 + (p : 2m)e^{na} \cos na$.

Z kolei zauważymy, że w skrajnym lewym przekroju belki siła tnąca moment gnący muszą być równe zeru, jako w końcowym nieobciążonym, a przeto przy $\zeta = b$ musi być $\eta_{0b}''' = 0$, $\eta_{0b}'' = 0$. Stąd

$$A_0 e^{nb} \cos nb - B_0 e^{nb} \sin nb - C_0 e^{-nb} \cos nb + D_0 e^{-nb} \sin nb = 0$$

oraz $A_0 e^{nb} (\sin nb - \cos nb) + B_0 e^{nb} (\sin nb + \cos nb) - C_0 e^{-nb} (\sin nb + \cos nb) + D_0 e^{-nb} (\sin nb - \cos nb) = 0$.

Na mocy powyższych otrzymanych wartości możemy jeszcze inaczej napisać to samo: $A_1 e^{nb} \cos nb - B_1 e^{nb} \sin nb - C_1 e^{-nb} \cos nb + D_1 e^{-nb} \sin nb = K = (p : m) \sin n (b - a) \sinh n (b - a)$ oraz $A_1 e^{nb} (\sin nb - \cos nb) + B_1 e^{nb} (\sin nb + \cos nb) - C_1 e^{-nb} (\sin nb + \cos nb) + D_1 e^{-nb} (\sin nb - \cos nb) = L = - (p : m) [\sin n (b - a) \cosh n (b - a) + \cos n (b - a) \sinh n (b - a)]$. W ten sposób otrzymaliśmy piąte i szóste równanie dla określenia stałych całkowania. Chcąc wyznaczyć brakujące dwa, bierzemy pod uwagę, iż w przekroju środkowym siła tnąca winna być równa zeru. Ten wniosek narzuca się prosto, gdyby bowiem przy $\zeta = 0$ było $T \neq 0$, to po rozcięciu belki wzdłuż przekroju środkowego mielibyśmy w jednej jego powłoce $T_0 > 0$ — w drugiej $T_0 < 0$. Symetria obciążenia uległa by zakłóceniu. Zatem przy $\zeta = 0$ musi być $\eta_{10}'' = A_1 + D_1 - B_1 + C_1 = 0$. Nadto pośrodku belki styczna odkształconej winna być równoległa do $\omega\zeta$: wymaga tego znowu symetria obciążenia. Zatem dla $\zeta = 0$ mamy: $\eta_{10}' = A_1 - D_1 + B_1 + C_1 = 0$. Dodając i odejmując mamy $A_1 + C_1 = B_1 - D_1 = 0$, a przeto z równań piątego i szóstego: $A_1 \cos nb \cosh nb - B_1 \sin nb \sinh nb = \frac{1}{2} K$, $A_1 (\sin nb \cosh nb - \cos nb \sinh nb) + B_1 (\sin nb \cosh nb + \cos nb \sinh nb) = \frac{1}{2} L$. Z tych równań z łatwością wyznaczymy wszystkie stałe całkowania, będziemy przeto mogli zbadać odkształconą. Pośrodku panować będzie skrajna wartość momentu gnącego $M_0 = EJ\eta_{10}'' = 2 n^2 EJ (A_1 - C_1) = 4 n^2 EJ A_1$.

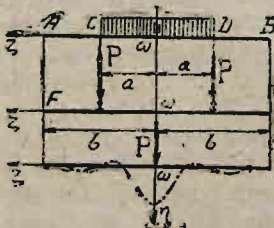
Cały ten rachunek nie należy do łatwych. Dla tego też zazwyczaj zakładamy wprost, że sprzeciw podłoża jest jednostajny na całej długości belki. W tem założeniu, oczywiście zupełnie fałszywym, otrzymamy $M_0 = -\frac{1}{2} qb^2 + \frac{1}{2} pa^2$. Z równania sił pionowych będziemy mieli nadto: $2 pa - 2 bq = 0$ i ostatecznie $M_0 = -\frac{1}{2} pa (b - a)$. Nie wchodzi tu m : wzór pomija własności sprężyste podłoża. Nie powinno to dziwić ze względu na zupełną dowolność założenia.

§ 43. Podkład kolejowy stanowi również belkę stałego przekroju — na podłożu ziemnym, a więc wzorowo sprężystym. I tu również wobec zupełnej symetrii obciążenia początek stałych osi współrzędnych umieścimy w przekroju środkowym, gdzie siła tnąca musi być równa zeru, a styczna odkształconej — równoległa do osi $\omega\zeta$ — pierwotnej osi podkładu. Oznaczmy przez $2b$ całkowitą długość podkładu, przez $2a$ rozstawienie szyn (Rys. 53). Wobec symetrii obciążenia siłami skupionymi P pionowymi, cisnąciami na szyny, możemy znowu rozpatrywać jeno lewą część belki. W skrajnym przekroju lewym, dla $\zeta = b$ siła tnąca i moment gnący są niewątpliwie równe zeru. Zatem ostatnie cztery równania ustępu poprzedniego zachowują swą moc obowiązującą i w danym wypadku. Należy jeno wyznaczyć K i L na mocy czterech pierwszych, które tu mają nieco inną postać. W przekroju pod szyną, w odległości $\zeta = a$, siła tnąca zmienia się nagłym skokiem o wartość skończoną P . Oś siły P stanowi przeto granicę dwóch połaci obciążenia. Dla obu po-

łaci równanie odkształconej różniczkowe będzie miało tę samą postać $EJ\eta'''' = -m\eta = q$, całkowite natomiast różnić się będzie stałami całkowania. Chcąc je wyznaczyć wypisujemy dla przekroju pod szyną równania warunkowe. Odciętej $\zeta = a$ odpowiada ta sama wartość rzędnej $\eta_{0a} = \eta_{1a}$, ten sam kąt nachylenia stycznej odkształconej $\eta'_{0a} = \eta'_{1a}$ oraz ta sama wartość momentu gnącego, czyli $EJ\eta''_{0a} = EJ\eta''_{1a}$. Nadto, przy $\zeta = a$ siła tnąca zmienia się nagłym skokiem, mamy bowiem dla połączenia lewej $EJ\eta'''_{0a} = -T_a$ dla prawej $EJ\eta'''_{1a} = -T_a - P$ ostatecznie więc $\eta'''_{0a} - \eta'''_{1a} = P : EJ$. W ten sposób otrzymamy cztery pierwsze równania, różniące się jeno prawymi stronami od równań poprzedniego ustępu. Czynią im zadose wartości $\alpha = -\Delta (\text{Sin } na - \text{Cos } na)$, $\beta = -\Delta (\text{Sin } na + \text{Cos } na)$, $\gamma = \Delta (\text{Sin } na + \text{Cos } na)$, $\delta = -\Delta (\text{Sin } na - \text{Cos } na)$, gdzie $\Delta = P : 4 EJ$.

Po podstawieniu w równania piąte i szóste, otrzymamy $K = -P [\text{Sin } n(b-a) \text{Cosh } n(b-a) + \text{Cos } n(b-a) \text{Sinh } n(b-a)] : 2 EJ$, $L = (P : EJ) \text{Cos } n(b-a) \text{Cosh } n(b-a)$, będziemy przeto mogli wyznaczyć wszystkie stałe całkowania i w danym wypadku.

§ 44. Obciążenie skupione. Odrzućmy prawą połowę podkładu (Rys. 53), a otrzymamy belkę $F\omega$ na wzorowo sprężystym podłożu, obciążoną siłą P w odległości a od początku osi współrzędnych. W danym wypadku cztery pierwsze równania będą oczywiście te same, co i w ustępie poprzedzającym; te same będą również piąte i szóste równania, natomiast siódme i ósme należy zbudować nieco inaczej. W skrajnym prawym przekroju belki, przy $\zeta = 0$ panować będzie moment gnący i siła tnąca równe zero, zatem tu: $\eta''_{10} = A_1 - C_1 = 0$ oraz $\eta'''_{10} = A_1 + D_1 - B_1 + C_1 = 0$. Te dwa równania łącznie z piątym i szóstym pozwolą wyznaczyć A_1, B_1, C_1, D_1 . Nadto z czterech pierwszych równań wyznaczymy A_0, B_0, C_0 i D_0 — otrzymamy przeto odkształconą, będziemy mogli wyznaczyć momenty i sprzeciwy podłoża. Rachunki te są niesłychanie zawile, to też zazwyczaj staramy się o ile można uprościć sprawę, czyniąc mniej lub więcej prawdopodobne założenia. Możemy naprzykład dla belki bardzo długiej, obciążonej siłą P skupioną po środku rozpatrywać obie połowy belki, jako nieskończenie długie. Srodek współrzędnych



Rys. 52, 53, 54.

umieszczamy po środku belki, gdzie ze względu na symetrię obciążenia panuje wartość zerowa siły tnącej, a styczna odkształconej winna być równoległa do osi pierwotnej belki. Zatem przy $\zeta = 0$ mamy $\eta'_0 = 0$, oraz $EJ\eta''_0 = -T_0$, $T_0 + P/2 = 0$, skąd $EJ\eta''_0 = 1/2 P$. W danym wypadku możemy również rozpatrywać wyłącznie tylko lewą połowę belki ze względu na zupełną symetrię obciążenia. Dla niej cała równania $EJ\eta'''' = q = -m\eta$ będzie $\eta = Ae^{n\zeta} \text{Sin } n\zeta + B e^{n\zeta} \text{Cos } n\zeta + C e^{-n\zeta} \text{Sin } n\zeta + D e^{-n\zeta} \text{Cos } n\zeta$.

Na końcu belki, a więc dla skrajnego lewego jej przekroju $\eta = 0$, tam bowiem działanie siły P sięgać nie może, jako do nieskończenie dalekiego punktu, odległego o $\zeta = \infty$ od początku współrzędnych. Po podstawieniu tych wartości w tylko co wypisany wzór, otrzymamy $A = B = 0$

czyli będzie wprost $\eta = (C \sin n\zeta + D \cos n\zeta) e^{-n\zeta}$, oraz $\eta' = -n [(C \sin n\zeta - D \cos n\zeta) C + (C \sin n\zeta + D \cos n\zeta) D] e^{-n\zeta}$. Dla środkowego przekroju $\eta'_0 = C - D = 0$, zatem ostatecznie $\eta = C (\sin n\zeta + \cos n\zeta) e^{-n\zeta}$. Stąd $\eta' = -2 C e^{-n\zeta} n \sin n\zeta$, $\eta'' = 2 C e^{-n\zeta} n^2 (\sin n\zeta - \cos n\zeta)$, $\eta''' = -4 C e^{-n\zeta} n^3 \cos n\zeta$. Zatem dla środkowego przekroju $4 C n^3 = 1/2 P : EJ$, skąd $C = 1/8 P : EJ n^3$, gdzie, jak zwykle $4 n^4 = m : EJ$. Ostatecznie $\eta = 1/8 (P : EJ n^3) e^{-n\zeta} (\sin n\zeta + \cos n\zeta)$. Strzałka ugięcia belki najwyższa pod siłą P będzie $f = 1/8 P : EJ n^3 = P n : 2 m$. Od tej skrajnej wartości począwszy odkształcona szybko zcichającymi falami przecina okresowo osi $\omega\zeta$ ujawniając kolejno rzędne $\eta > 0$ i $\eta < 0$. Strzałki $\eta = 0$ otrzymujemy dla rzędnych ζ , czyniących zadość równaniu $\sin n\zeta + \cos n\zeta = 0$, a więc kolejno w odległościach $\lambda = 3/4 \pi : n$ po obu stronach osi $\omega\eta$. Skrajne wychylenia odkształconej odpowiadają rzędnym, czyniącym zadość równaniu $\eta' = 0$ czyli $\sin n\zeta = 0$. Wierzchołki fali leżą przeto w odległościach $\Delta = \pi : n$. Odnośną postać odkształconej zaznaczyliśmy na (Rys. 54). W podobny sposób zmienia się również i moment gnący. Skrajna jego wartość, pośrodku belki wynosi $M_m = EJ \eta_0'' = -2 C n^2 EJ = -P : 4 n$.

Okresowość tego samego rodzaju wykazują również odkształcone i momenty wszystkich powyżej rozpatrywanych belek. Dla tego też nie badaliśmy ich praw zmienności w poszczególnych wypadkach. Wyznaczanie warunków pracy belek na sprężystym podłożu jest, jak widzieliśmy, nader uciążliwe.

§ 45. Podpory sprężyste i sztywne. Pojęcie sprężystości podłoża rodzi pokrewne pojęcie sprężystości podpór nie powiązanych w podłoże. Weźmy pod uwagę podporę sprężystą, a więc usuwającą się pod naciskiem belki. *Gdy obniżenie podpory wzrasta proporcjonalnie do nacisku, podporę zowiemy wzorowo sprężystą.* Oznaczmy jej odpór przez R , przez f — poddawanie się podpory w kierunku działania nacisku, który wywołuje ów odpór. Będzie to więc strzałka osiadania podpory mierzona na osi siły odporowej, lub kąt pochylenia przekroju podpartego w kierunku obrotowym pary sił momentu odporowego, wywołującego moment osadczy — sprzeciw podpory. Ponieważ nacisk na podporę równoważy jej sprzeciw, równy jest przeto — R . Dla podpory wzorowo sprężystej będziemy mieli wobec tego $f = -nR$, gdzie przez n oznaczyliśmy odnośny współczynnik proporcjonalności. Gdy $n = 0$ wtedy i $f = 0$ — podpora jest niesprężysta, sztywna, oczywiście w stosunku do rozpatrywanego odporu. Gdy $n = \infty$, $R = 0$ podpora odporu R nie może rozwinąć. W ogólnym wypadku podpora daje trzy odpory: pionowy V , poziomy H i moment osadczy μ . Podpora sprężysta da te same odpory, a nadto ujawni osiadanie sprężyste $f = -nV$, zboczenie sprężyste $h = -tH$ i obrót sprężysty $\delta = -s\mu$. Gdy wszystkie trzy powyższe współczynniki proporcjonalności mają wartości skończone różne od zera, podpora należy do *wzorowo sprężystych statych*, gdy jeno $s = \infty$, a pozostałe n i t

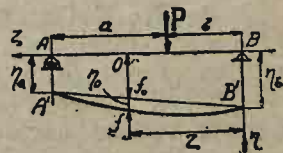
są skończone i różne od zera podpora jest *wzorowo sprężysta przegubowa*, gdy wreszcie $s = \infty$, $t = \infty$, a n jest skończone i nie równe zeru — *wzorowo sprężysta rolkowa*. Rzeczywiste podpory są zawsze sprężyste wobec istotnej sprężystości wszelkiego budulca. Niekiedy jednak strzałki podpór są tak znikome, że bez znacznego błędu możemy owe podpory uważać jako niesprężyste, czyniąc $n = t = s = 0$. W innych wypadkach należy jednak strzałki podpór brać pod uwagę, — rozpatrywać pręt na podporach sprężystych. Wyobraźmy sobie belkę, leżącą na jednakowych poprzecznych belkach, uszeregowanych równolegle w pewnych odstępach. O ile belka leży pośrodku poprzecznic, będziemy mieli strzałkę ugięcia pionową $f = -Rl^3 : 48 E_0 J_0$, gdzie l oznacza długość poprzecznic, R jej odpór pionowy, a $E_0 J_0$ odnośną sztywność w założeniu niezmiennego przekroju poprzecznego. Tutaj więc $n = l^3 : 48 E_0 J_0$. Tylko co opisany ustrój przeważnie się nie spotyka, natomiast jezdni mostu kolejowego, złożona z poprzecznie uszeregowanych równolegle i obustronnie podpartych stanowi najczęściej spotykane podłoże toru. Obie szyny toru leżą przeto na poprzecznicach — wzorowo sprężystych podporach. Z łatwością wyznaczmy odnośną wartość współczynnika n . Zwyczajny szereg podkładów stanowi również układ podpór wzorowo sprężystych dla szyn kolejowych. Te przykłady wystarczą narazie.

§ 46. Belki na podporach wzorowo sprężystych statycznie wyznaczalne. Weźmy pod uwagę belkę poziomą, spoczywającą na podporach wzorowo sprężystych. Po obciążeniu siłami gnącymi, prostopadłymi do osi pierwotnie prostej belki nastąpi wygięcie płaskie, rozpatrujemy bowiem pręt jednorodnie zbudowany. Wygięciu belki towarzyszyć będą odkształcenia podpór, proporcjonalne do wywołanych odporów: sprężyste strzałki i kąty obrotu. Po odkształceniu, gdy zapanuje stan równowagi trwałej, będziemy mogli wypisać równania statyki, wiążące siły zewnętrzne z niewiadomymi — odporami. Dla belki płasko wygiętej trzy równania statyki pozwolą wyznaczyć jeno trzy odpory — pozostałe będą statycznie niewyznaczalnymi. Zatem: *belka, płasko wygięta, wsparta na podporach wzorowo sprężystych, jest statycznie wyznaczalna, o ile obciążenie zewnętrzne wywołuje jeno trzy odpory*. W tym szczególnym wypadku odpory są niezależne od sprężystych własności podpór. Zależą jedynie od obciążenia zewnętrznego, od wymiarów belki i rozkładu jej punktów oparcia, tylko te bowiem wielkości wchodzić do równań statyki. ¹⁾Zatem pręt ugnie się zupełnie tak samo, jak na tych samych podporach, lecz niesprężystych. *Krzywizna jego wszędzie pozostanie ta sama*. Wynika to wprost z równania zasadniczego momentów $EJ_1'' = M$. Prawa jego część stanowi sumę wyrazów zawierających odpory lub siły zewnętrzne mnożone przez odnośne ramiona momentów. Tylko co wyżej mówiliśmy, że w wy-

padku statycznej niewyznaczalności odpory są niezależne od własności sprężystych podpór. Zatem prawa część równania nie zależy od własności sprężystych podpór — pręt wygnie się zupełnie tak samo, jak na podporach niesprężystych, ulegnie jednak, jako całość odkształcona, osunięciu i skrzywieniu z poziomu. Stąd prosty wniosek, że i *po odkształceniu gnącem belki statycznie wyznaczalnej podpory wzorowo sprężyste leżą na prostej*. To proste prawo umożliwia wyznaczanie wygięcia belki statycznie wyznaczalnej spoczywającej na podporach wzorowo sprężystych. Należy wyznaczyć odkształconą $\eta_0 = f$ w założeniu tych samych podpór — niesprężystych. Istotna odkształcona pręta będzie się różniła o funkcję liniową strzałek podpór wzorowo sprężystych. Prosty przykład najlepiej to uwytkni.

§ 47. Belka statycznie wyznaczalna na dwóch podporach wzorowo sprężystych.

Ułożmy poziomo belkę stałego przekroju prostopadłe do osi belki, poprzecznicach. Obie poprzecznicę ustawiamy prostopadłe do osi belki, poprzecznicę obustronnie podpieramy. Prawy skrajny przekrój belki *B* oparty jest na poprzecznicę obustronnie wspartej na podporach przegubowych—lewy *A*—opiera się na poprzecznicę obustronnie spoczywającej na podporach rolkowych. Zatem belka ma prawą podporę wzorowo sprężystą, przegubową — lewą — rolkową. Po obciążeniu siłą *P* w odległości (Rys. 55) *a* od lewej podpory i *b* od prawej—podpory obniżą się pionowo pod jarzmem nacisku. Otrzymamy strzałkę lewej podpory η_a — prawej η_b , zatem $\eta_a = -n_a A$, $\eta_b = -n_b B$, poprzecznicę mogą bowiem być wogóle niejednakowe, co pociąga za sobą konieczność rozróżniania współczynników proporcjonalności n_a i n_b . Strzałki tylko



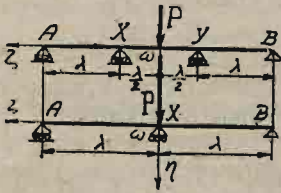
Rys. 55.

co wypisane stanowią w danym wypadku jedyne odkształcenie podpór. Wynika to wprost ze sposobu podparcia pręta. Z równań statyki: $A + B + P = 0$, $Al + Pb = 0$, gdzie przez *l* oznaczyliśmy całą długość pręta, otrzymamy: $A = -Pb : l$, $B = -Pa : l$, możemy przeto niezależnie od sprężystych własności podpór wypisać zasadnicze równanie gięcia: $EJ\eta'' = -Pb(l - \zeta) : l \parallel + P(b - \zeta)$, stąd: $EJ\eta' = C + \frac{1}{2} Pb(l - \zeta)^2 : l \parallel - \frac{1}{2} P(b - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta - \frac{1}{6} Pb(l - \zeta)^3 : l \parallel + \frac{1}{6} P(b - \zeta)^3$. Dla określenia stałych całkowania bierzemy pod uwagę, iż przy $\zeta = 0$, $\eta = \eta_b$, a przy $\zeta = l$, $\eta = \eta_a$, a przeto: $EJ\eta_a = -EJn_a A = D + Cl$, $EJ\eta_b = -EJn_b B = D - \frac{1}{6} Pbl^2 + \frac{1}{6} Pb^3$, skąd bezpośrednio $C = EJP(n_a b - n_b a) : l^2 - \frac{1}{6} Pbl + \frac{1}{6} Pb^3 : l = EJP(n_a b - n_b a) : l^2 + C_0$, $D = EJn_b Pa : l + \frac{1}{6} Pbl^2 - \frac{1}{6} Pb^3 = EJn_b Pa : l + D_0$. Przez C_0 , D_0 oznaczyliśmy tutaj wartości stałych całkowania, jakie otrzymaliśmy już w § 4 w założeniu podpór niesprężystych, a więc przy $n_a = n_b = 0$. Zatem po podstawieniu otrzymamy równanie odkształconej: $\eta = \eta_0 + Pan_b : l + P(n_a b - n_b a) \zeta : l^2 = \eta_0 + \eta_b + (\eta_b - \eta_a) \zeta$. Ten wzór stwierdza nasze przewidywania

teoretyczne. Odłóżmy $AA' = \eta_a$, $BB' = \eta_b$ i poprowadźmy prostą $A'B'$. Strzałka ugięcia pręta na sprężystych podporach $Of = Of_0 + f_0f$ gdzie $f_0f = \eta_0$. Należy zatem odłożyć rzędne η_0 w kierunku pionowym poniżej prostej $A'B'$ aby otrzymać wykres strzałek ugięcia istotnych.

§ 48. Belki statycznie niewyznaczalne. Inaczej zupełnie zachowują się belki statycznie niewyznaczalne na podporach sprężystych, ponieważ odpory ich zależą od własności sprężystych odnośnych podpór. I tu również całkowanie zasadniczego równania gięcia stanowi rozwiązanie ogólne zagadnienia, wobec jednak trudności rachunkowych nie zawsze łatwo prowadzi do celu. Wypisujemy równanie gięcia zasadnicze, znacząc odpowiednio odpory niewiadome i całkujemy wprost w wypadku stałego przekroju poprzecznego. W wypadku belki o przekroju zmiennym korzystamy z równania odkształconej całkowego. W ten sposób prócz dwóch stałych całkowania będziemy mieli wszystkie odpory — niewiadome, które wyznaczymy z odnośnych równań warunkowych i równań statyki. Istotą tego sposobu poznamy najłatwiej biorąc pod uwagę następujący prosty przykład:

§ 49. Belka trójprzęsłowa na podporach wzorowo sprężystych. Założmy, a założenie to w niczem ogólności naszych rozważań nie uszczupli, że przekrój poprzeczny belki jest stały i jednakowy dla wszystkich przęseł (Rys. 56), że wszystkie przęsła mają jednakową rozpiętość λ , i że wszystkie podpory mają ten sam współczynnik n różny od zera skończony. Nadto bierzemy pod uwagę obciążenie siłą pionową P



Rys. 56 i 57.

czynną pośrodku belki. Wobec zupełnej symetrii obciążenia umieszczamy początek stałych osi współrzędnych po środku belki, kierując oś $\omega\zeta$ na lewo po osi pierwotnej pręta, oś $\omega\eta$ w dół, a $\omega\xi$ — ku patrzącemu. Odpór skrajnej prawej podpory przegubowej oznaczamy przez B , pozostałych rolkowych przez A, X, Y , idąc od lewej ku prawej. Równania statyki, wypisane dla skrajnego prawego punktu B pręta nieodkształconego, będą $A + X + Y + B + P = 0$, $3A\lambda + 2X\lambda +$

$+ 2Y\lambda + P = 0$. Nadto równanie momentów dla punktu A da $3B\lambda + 2Y\lambda + \frac{3}{2}P + X\lambda = 0$. Stąd prosty wniosek, zresztą zupełnie oczywisty ze względu na symetrię obciążenia, że $A = B$, $X = Y$. Ostatecznie otrzymamy jedno tylko wypadkowe równanie $A + X + \frac{1}{2}P = 0$.

Mimo to możemy wypisać równanie gięcia w postaci $EJ\eta'' = A(\frac{3}{2}\lambda - \zeta) \parallel + X(\frac{1}{2}\lambda - \zeta)$. Całkując otrzymamy: $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}A(\frac{3}{2}\lambda - \zeta)^2 \parallel - \frac{1}{2}X(\frac{1}{2}\lambda - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}A(\frac{3}{2}\lambda - \zeta)^3 \parallel + \frac{1}{6}X(\frac{1}{2}\lambda - \zeta)^3$. Te trzy równania dotyczą jeno lewej połowy belki — prawa ze względu na zupełną symetrię obciążenia będzie niewątpliwie tożsamościowa pod względem naprężeń i odkształceń, możemy jej zatem nie brać pod uwagę. Dla określenia stałych całkowania mamy cztery równania warunkowe. Na lewym skraju belki przy $\zeta = \frac{3}{2}\lambda$, $\eta = \eta_a = -nA$,

ponad podporą X , przy $\zeta = \frac{1}{2} \lambda$ będzie $\eta = \eta_x = -nX$, wreszcie ze względu na symetrię obciążenia kąta nachylenia stycznej odkształconej ku osi $\omega\zeta$ równy jest zeru pośrodku belki, czyli więc $\eta'_0 = 0$ dla $\zeta = 0$. Inaczej jeszcze $-EJnA = D + \frac{3}{2} C\lambda$, $-EJnX = D + \frac{1}{2} C\lambda + \frac{1}{6} A\lambda^2$, $C - \frac{1}{2} A \times \frac{9}{4} \lambda^2 - \frac{1}{2} X \times \frac{1}{4} \lambda^2 = 0$. Różnica pierwszych dwóch równań da: $EJn(X-A) = C\lambda - \frac{1}{6} A\lambda^2$. Na mocy trzeciego $EJn(X-A) = \frac{23}{24} A\lambda^2 + \frac{1}{8} X\lambda^2$. Ponieważ na mocy równania statyki $X = -A - \frac{1}{2} P$ przeto ostatecznie $A = (3\lambda^2 - 24EJn)P : (40\lambda^2 + 96EJn) = B$, $X = -(23\lambda^2 + 24EJn)P : (40\lambda^2 + 96EJn) = Y$. Z łatwością również wyznaczmy C i D , będziemy mogli przeto wyznaczyć odkształconą Z powyższych wzorów wynika, że X , Y nie mogą mieć wartości zerowych, natomiast przy $3\lambda^2 = 24EJn$ obie skrajne odpory $A=B=0$. W tym szczególnym wypadku są one zbyt małe. Gdy znów $3\lambda^2 < 24EJn$, odpory skrajne są ujemne, pręt na nie wywiera nacisk, lecz gdy $3\lambda^2 > 24EJn$, wtedy $A > 0$ i $B > 0$ — odpory skrajne należy dać ponad pręt, inaczej bowiem pręt uniesie się końcami ponad podpory, będziemy przeto mieli wypadek powyżej rozpatrywany — belki opartej na dwie podpory a obciążonej siłą P pośrodku.

Rozwiązywanie równań warunkowych stanowi poważną wadę powyżej podanego sposobu. Trudności rachunkowe rosną wraz z ilością przecięć, to też zazwyczaj stosujemy do belek wieloprzęsłowych:

§ 50. Twierdzenie o pięciu momentach. Weźmy pod uwagę belkę wieloprzęsłową na wzorowo sprężystych podporach, uszeregowanych pierwotnie na jednej prostej. Ułóżmy na tej prostej — pierwotnej osi belki nieodkształconej stałą oś $\omega\zeta$, obierając początek współrzędnych dajmy na to w skrajnym prawym przekroju belki, lub w którymkolwiek przekroju podpartym. Oś $\omega\zeta$ kierujemy na lewo, $\omega\eta$ w dół, a $\omega\xi$ — ku patrzącemu. Po obciążeniu belki siłami gnącymi prostopadłymi do osi pierwotnej — nastąpi wygięcie płaskie — wyłącznie bowiem rozpatrujemy belki jednorodnie zbudowane. Po odkształceniu podpory sprężyste zejść z poziomu — ujawnią strzałki pionowe. Ich strzałki poziome możemy pominąć, jako znikome przy nieznacznych, praktycznie jedynie dopuszczalnych wygięciach belki. Korzystamy ze znakowania § 35 i obieramy na belce odkształconej dwa sąsiednie przęsła k i $k+1$. Ich podpory C_{k-1} , C_k , C_{k+1} dały strzałki η_{k-1} , η_k , η_{k+1} . W założeniu wzorowej sprężystości podpór: $\eta_{k-1} = -n_{k-1} C_{k-1}$, $\eta_k = -n_k C_k$, $\eta_{k+1} = -n_{k+1} C_{k+1}$, rozpatrujemy bowiem podpory różnych rodzajów o niejednakowych współczynnikach sprężystości w ogólnym wypadku. Owe strzałki, a właściwie mówiąc odpory, stanowią niewiadome zagadnienia, nie możemy przeto korzystać z równań *Clerc'a* i *Clapeyron'a* bo wyraz N obu tych wzorów zawiera właśnie owe strzałki η_{k-1} , η_k , η_{k+1} . Usuńmy je ze wzorów. W tym celu możemy wypisać dla przęsła k równanie momentów w postaci $M_{k-1} + T_{k-1} l_k + \Sigma P_k b_k = M_k$, dla przęsła $k+1$ otrzymamy $M_k + T_k l_{k+1} + \Sigma P_{k+1} b_{k+1} = M_{k+1}$, korzystając ze zna-

kowania (Rys. 49). Dodawanie obejmuje wszystkie siły gnące pierwszego przęsła P_k w pierwszym równaniu, w drugim — siły P_{k+1} drugiego przęsła. Ponieważ niewątpliwie $T_k = T_{k-1} + \Sigma P_k + C_k$, przeto $M_k + T_{k-1} l_{k+1} + l_{k+1} \Sigma P_k + C_k l_{k+1} + \Sigma P_{k+1} b_{k+1} = M_{k+1}$. Rugując z tych wzorów T_{k-1} otrzymamy $C_k = M_{k-1} : l_k - (1 : l_k + 1 : l_{k+1}) M_k + M_{k+1} : l_{k+1} - \Sigma P_k a_k : l_k - \Sigma P_{k+1} b_{k+1} : l_{k+1}$, mamy bowiem $a_k = l_k - b_k$. W ten sposób możemy wyrazić C_{k-1} , C_k i C_{k+1} w zależności od M_{k-2} , M_{k-1} , M_k , M_{k+1} , M_{k+2} i mnożąc przez $-n_{k-1}$, $-n_k$, $-n_{k+1}$ podstawić we wzory *Clerc'a* lub *Clapeyron'a*. W wyniku otrzymamy wzory wiążące owe pięć momentów odporowych, a stanowiące istotę *twierdzenia o pięciu momentach*, które zostało wyprowadzone przez *H. Czopowskiego*, w założeniu stałych, choć niejednakowych sztywności poszczególnych przęseł i tak nazwane.

Można również korzystać ze wzorów *Clerc'a* i *Clapeyron'a* łącznie z powyżej wypisanymi wzorami dla C_k . Istotnie, w założeniu $n-1$ przęsłowej belki, będziemy mieli n odporów $C_0, C_1 \dots C_n$ i n momentów odporowych $M_0, M_1 \dots M_n$. Wzory *Clerc'a* lub *Clapeyron'a* dadzą jak wiemy $n-2$ równań warunkowych, linjowych względem momentów i odporów powyżej wyszczególnionych. Nadto możemy niewątpliwie wypisać $n-2$ równań dla $C_1, C_2 \dots C_{n-1}$ — linjowych względem momentów odporowych. Z tych $2n-4$ równań wyznaczymy $2n-4$ odporów i momentów odporowych. Brakujące nam jeszcze równania otrzymamy częściowo z warunków równowagi belki odkształconej, częściowo zaś z warunków końcowego obciążenia belki. Gdy belka kończy się ponad skrajnymi podporami typu rolkowego lub przegubowego, $M_0 = M_n = 0$, gdy belka obustronnie zwisa — momenty M_0 i M_n można wyznaczyć bezpośrednio sprowadzeniem układów sił gnących czynnych na owych końcach. Dla belek o końcach osadzonych możemy wypisać nowe dwa równania *Clerc'a*, wiążące dodatkowo M_0 i M_n . Nadto we wszystkich wypadkach mamy dwa równania statyki. W ten sposób wyznaczymy wszystkie odpory i momenty odporowe. Następujący prosty przykład najlepiej wyjaśni istotę rzeczy.

§ 51. Belka dwuprzęsłowa na podporach wzorowo sprężystych. Weźmy pod uwagę belkę o stałym poprzecznym przekroju, wspartą na trzech wzorowo sprężystych podporach A, X, B , leżących na linii prostej — pierwotnej osi belki nieodkształconej w równych odległościach λ od siebie (Rys. 57). Po obciążeniu siłą skupioną P czynną na osi pośredniej podpory pręt ugnie się a podpory obniżą, ujawniając strzałki $\eta_a = -n_a A$, $\eta_x = -n_x X$, $\eta_b = -n_b B$. W danym wypadku mamy jeno dwa przęsła, przyczem $M_0 = M_A = 0$ oraz $M_B = M_3 = 0$, zakładamy bowiem prawą skrajną podporę przegubową — a pozostałe rolkowe. W środkowej umieściliśmy początek stałych osi współrzędnych,

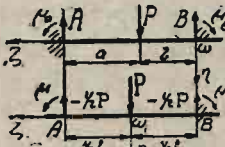
kierując oś $\omega\zeta$ na lewo po osi pierwotnej belki, oś $\omega\eta$ w dół, a $\omega\xi$ — ku patrzącemu. Równanie *Clapeyron'a* da nam: $4\lambda M_2 = 4\lambda M_x = 6EJ(\eta_a - 2\eta_x + \eta_b) : \lambda = -6EJ(n_a A - 2n_x X + n_b B) : \lambda$. Równanie dla środkowego odporu będzie tu $X = -2M_x : \lambda - P$, przyczem siłę P możemy zaliczyć do jednego, lub do drugiego przęsła. Oznaczmy przez $2m = \lambda^3 : 3EJ$, a wtedy z tych dwóch równań otrzymamy $n_a A - 2(n_x + m)X + n_b B = 2mP$. Nadto równania statyki, wypisane dla skrajnej podpory prawej dadzą $A + X + B + P = 0$, $2A\lambda + (P + X)\lambda = 0$. Z nich bezpośrednio wypływa, że $A = B$ oraz $X = -P - 2A$, co podstawivszy w równanie poprzednio otrzymane, będziemy mieli: $A = -2n_x P : [n_a + 4(n_x + m) + n_b] = B$, $X = -P + 4n_x P : [n_a + 4(n_x + m) + n_b]$. W założeniu obu skrajnych podpór niesprężystych będziemy mieli $A = B = -Pn_x : 2(n_x + m)$. Sprawdzimy to bezpośrednio, całkując równanie gięcia $EJ\eta'' = A(\lambda - \zeta)$, które wypisaliśmy dla lewej części belki ze względu na zupełną symetrię obciążenia. Zatem $EJ\eta' = C - \frac{1}{2}A(\lambda - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6}A(\lambda - \zeta)^3$. W danym wypadku przy $\zeta = \lambda$ mamy $\eta = 0$. Nadto styczna odkształconej pośrodku musi być równoległa do osi $\omega\zeta$. Wymaga tego symetrija obciążenia. Zatem $C = \frac{1}{2}A\lambda^2$ oraz $D + C\lambda = 0$. Poza tem przy $\zeta = 0$ mamy $\eta = \eta_x = f = -n_x X$ a przeto $-EJn_x X = D + \frac{1}{6}A\lambda^3$. Dołączmy jeszcze równania statyki $B = A$ i $X = -P - 2A$ a otrzymamy kolejno: $A = B = -Pn_x : 2(n_x + m)$, $C = -Pn_x\lambda^2 : 4(n_x + m)$, $D = -Pn_x\lambda^3 : 4(n_x + m)$, $X = -Pm : (n_x + m)$. Równanie odkształconej będzie tu $EJ\eta = [\lambda^3 - \lambda^2\zeta - \frac{1}{3}(\lambda - \zeta)^3] Pn_x : 4(n_x + m) = [3\lambda^2(\lambda - \zeta) - (\lambda - \zeta)^3] P : 12(1 + m : n_x)$. Czyniąc w powyższych wzorach $n_x = \infty$ odnajdziemy równania, dotyczące belki obciążonej siłą skupioną pośrodku jednoprzęsłowej statycznie wyznaczalnej.

§ 52. Belki na wielu podporach wzorowo sprężystych równoodległych. W wypadku belki spoczywającej na wielu podporach wzorowo sprężystych, ustawionych w odległości λ jedna od drugiej, trudności rachunkowe uniemożliwiają rozwikłanie zagadnienia. Zazwyczaj też korzystamy ze wzorów dla belek na sprężystym podłożu, jako bardziej rachunkowo dostępnych. W tym celu skupiony nacisk pionowy podpory R zastępujemy ciśnieniem rzekomego podłoża $q = R : \lambda$. Jest to niewątpliwie niezgodne z istotą rzeczy — błąd jednak w ten sposób popełniany maleje wraz z liczbą podpór szeregu.

Dotychczas wyłącznie tylko rozpatrywaliśmy podpory wzorowo sprężyste, rolkowe lub przegubowe, pomijając milcząco stałe, które prócz strzałek dają kąt Θ proporcjonalny do pary obrotowej momentu odporowego lub osadczego. Zatem $\Theta = -m\mu$. Szczególna wartość $m = 0$ cechuje podporę stałą niesprężystą, czyli przekrój osadzony, gdy znowu $m = \infty$ — odnośny przekrój połączony jest przegubowo bez tarcia z podporą. Może się zdarzyć, że pewna liczba podpór belki wieloprzęsłowej

należy do typu stałych. Odnośne sprzeciwy należy dołączyć do sił zewnętrznych. W danym wypadku najlepsze wyniki daje sposób całkowania zasadniczego równania gięcia. Proste przykłady najlepiej to uwypuklą.

§ 53. Belka jednoprzęsłowa na dwóch wzorowo sprężystych podporach stałych. Weźmy pod uwagę belkę poziomą obustronnie zamocowaną w podporach wzorowo sprężystych stałych. Początek stałych osi (Rys. 58) spólrzędnych umieścimy w środku prawego zamocowanego przekroju, oś $\omega\xi$ poprowadzimy na lewo ku lewej podporze po osi pierwotnej pręta, oś $\omega\eta$ w dół, a $\omega\xi$ ku patrzącemu. Po obciążeniu siłą P pionową, przyłożoną w odległości a od lewej i b od prawej podpory, pręt ugnie się, jego skrajne przekroje podparte obniżą się i odkształcą, ujawniając strzałki pionowe $\eta_a = -n_a A$, $\eta_b = -n_b B$, proporcjonalne do odporów pionowych A i B , a nadto kąty obrotu $\Theta_a = -m_a \nu_a$, $\Theta_b = -m_b \nu_b$ proporcjonalne do momentów odporowych μ_a i μ_b . Przesunięcia boczne pomijamy, jak zwykle, jako



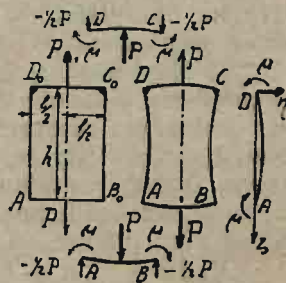
Rys. 58 i 59.

zgoła nieznaczne dla małych praktycznie jeno dopuszczalnych ugięć pręta. Równanie gięcia da nam: $EJ\eta'' = \mu_a + A(l - \zeta) \parallel + P(b - \zeta)$, skąd: $EJ\eta' = C + \mu_a \zeta - \frac{1}{2} A(l - \zeta)^2 \parallel - \frac{1}{2} P(b - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{6} \mu_a \zeta^3 + \frac{1}{6} A(l - \zeta)^3 \parallel + \frac{1}{6} P(b - \zeta)^3$. Dla określenia niewiadomych C , D , A , B , μ_a i μ_b mamy dwa równania statyki, które możemy wypisać dla początku spólrzędnych w postaci $A + P + B = 0$, $\mu_a + Al + Pb + \mu_b = 0$, oraz cztery równania warunkowe. Dla $\zeta = 0$ mamy $EJ\Theta_b = -EJm_b \nu_b = C - \frac{1}{2} Al^2 - \frac{1}{2} Pb^2$, $EJ\eta_b = -EJn_b B = D + \frac{1}{6} Al^3 + \frac{1}{6} Pb^3$. Nadto dla $\zeta = l$ będziemy mieli $EJ\Theta_a = -EJm_a \nu_a = C + \mu_a l$, $EJ\eta_a = -EJn_a A = D + Cl + \frac{1}{2} \mu_a l^2$. Z tych równań wyznaczmy wszystkie niewiadome i otrzymamy równanie odkształconej.

W szczególnym wypadku, gdy siła P działa pośrodku belki l długiej, a obie podpory są jednakowo sprężyste, najlepiej umieścić początek spólrzędnych w środkowym przekroju (Rys. 59) i rozpatrywać jeno lewą połowę belki, jako zupełnie symetryczną. Równania statyki dadzą tu $A = B = -\frac{1}{3} P$, $\mu_a = -\mu_b = \mu$. Całkując zasadnicze równanie $EJ\eta'' = \mu - \frac{1}{2} P(\frac{1}{2} l - \zeta)$, otrzymamy $EJ\eta' = C + \mu\zeta + \frac{1}{4} P(\frac{1}{2} l - \zeta)^2$, $EJ\eta = D + C\zeta + \frac{1}{2} \mu\zeta^2 - \frac{1}{12} P(\frac{1}{2} l - \zeta)^3$. Pośrodku stycznca odkształconej musi być równoległa do osi $\omega\xi$ ze względu na symetrię obciążenia i sprężystości obu podpór. Zatem $0 = C + \frac{1}{4} P \times \frac{1}{4} l^2$, skąd $C = -\frac{1}{16} Pl^2$. Nadto dla $\zeta = \frac{1}{2} l$ mamy w założeniu $n_a = n_b = n$, $m_a = m_b = m$ nowe równania warunkowe: $EJ\Theta_a = -EJm\mu = -\frac{1}{16} Pl^2 + \frac{1}{2} \mu l$, $EJ\eta_a = -EJnA = \frac{1}{2} EJnP = D - \frac{1}{32} Pl^3 + \frac{1}{8} \mu l^2$. Z tych równań otrzymamy $\mu = Pl^2 : 8(l + 2EJm)$, będziemy przeto mogli ustalić równanie odkształconej. Belka tylko co zbadana stanowi dosyć często spotykaną część ustrojów budowlanych; dwie belki tego rodzaju zawiera tak zwana —

§ 54. **Ramownica.** Cztery belki połączone węglami w sposób sztywny stanowią ramownicę. Najczęściej używane są ramownice prostokątne (Rys. 60) o dwóch jednakowej sztywności $E_1 J_1$ pionowych prętach bocznych $A_0 B_0$ i $C_0 D_0$ i dwóch poprzecznicach — górnej $D_0 C_0$ i dolnej $A_0 B_0$ również jednakowej sztywności $E_0 J_0$. W wypadku zupełnego usztywnienia węglów, kąty proste wierzchołkowe ramownicy nie ulegają zmianie przy odkształceniu, mogą się jednak obracać w płaszczyźnie gięcia. Tego rodzaju ramownice usztywnione na węglach będziemy wyłącznie rozpatrywali — odkształcone ich prętów składowych przecinają się zawsze pod kątem prostym na każdym rogu. To założenie, praktycznie może niezupełnie ściśle, wszelkie bowiem połączenie zupełnie sztywne być nie może, znacznie ułatwi nam wyznaczanie odkształceń ramownicy.

Oznaczmy rozstawienie jej prętów pionowych — podłużnic przez l , poziomych — poprzecznic przez h i założmy, że obie podłużnice ulegają działaniu sił pionowych, leżących na osi ramownicy, a skierowanych nazewnątrz. Pod jarzmem tych sił pręty poziome wygną się w łuki, pochylone końcami ku osiom pierwotnym poprzecznic pod kątem Θ na węglach. Wobec doskonałości usztywnień węglowych odkształcenie to pociągnie za sobą skrzywienie obu pierwotnie prostych podłużnic. Ich odkształcone pochyłają się pod tym samym kątem Θ na węglach ku swym pierwotnie prostym osiom pionowym. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że odkształcone prętów ramownicy muszą przecinać się pod kątem prostym na węglach. Kąt Θ miałby zerową wartość jedynie w wypadku zupełnej sztywności podłużnic. Podłużnice ulegałyby jeno rozciąganiu siłami $\frac{1}{2} P$, a poprzecznice można by było uważać, jako zamocowane na węglach. Nie znamy jednak tworzyw sztywnych, kąt Θ jest zawsze różny od zera, zamocowania poprzecznic należą do typu wzorowo sprężystych. Łatwo to udowodnimy. W tym celu rozcinamy ramownicę po rogach, zastępując działanie zniszczonych w ten sposób węglowych usztywnień odpowiednimi parami sił — momentami węglowymi μ . Wobec zupełnej symetrii momenty na węglach będą jednakowe, choć różnoskrętne. Odkształcenie ramownicy wyraźnie wskazuje, że dolny pręt w lewym końcu swym A pod działaniem siły P obróci się nieco naokoło A w kierunku strzałki zegara. Ten obrót niewątpliwie wywołał sprzeciw sprężysty w postaci momentu o parze sił sprecznej co do kierunku obrotu — dał zatem moment oporowy μ lewoskrętny, stanowiący odpór zamocowania lewego poprzecznicy. Rozumując w podobny zupełnie sposób dojdziemy do przekonania, że odporem zamocowania prawego będzie również moment μ lecz prawoskrętny. Te dwa momenty łącznie z siłą P i jej odporami pionowymi — $\frac{1}{2} P$, pochodzącymi od górnej siły P , stanowią obciążenie zewnętrzne poprzecznicy. W ustępie poprzednim badaliśmy belkę w ten sposób obciążoną i wyznaczaliśmy dla końcowego punktu odkształconej — pochylenie ku osi pierwotnej $\Theta = (-\frac{1}{16} P l^2 + \frac{1}{2} \mu l) : E_0 J_0$. W danym wypadku μ stanowi niewiadomą zagadnienia. Chcąc ją wyznaczyć bierzemy pod uwagę podłużnicę

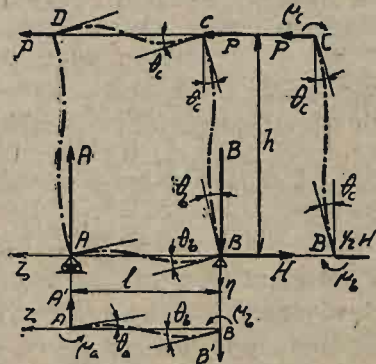


Rys. 60.

AD, lewą. Przy odkształceniu oba jej końce nie schodzą z pioną, jeno się nieco oddalają od siebie w kierunku pionowym pod jarzmem sił rozciągających $\frac{1}{2}P$, a nadto zbliżają się, zresztą nader nieznacznie, ku osi sił P na tle wygięcia obu poprzecznic. Słowem możemy założyć, że końce *A*, *B* podłużnicy pozostają na osi jej pierwotnej, pionowej. Wobec tego początek stałych osi umieszczamy w *D*, oś $D\zeta$ prowadzimy w dół przez *A*, oś $D\eta$ na prawo, a $D\xi$ ku patrzącemu. Będzie to więc belka obustronnie podparta, a obciążona siłami $\frac{1}{2}P$ rozciągającymi i momentami μ zastępującymi działanie poprzecznic odciętych. Dolny jej koniec ulega działaniu momentu gnącego μ prawoskrętnego, na górny działa również moment μ , lecz lewoskrętny, w tych bowiem dwóch kierunkach lewe końce poprzecznic chcą wygiąć podłużnicę po obu jej końcach. W myśl prawa o znakowaniu zasadniczego wzoru gięcia $-E_1J_1\eta'' = \mu$ skąd $-E_1J_1\eta' = C + \mu\xi$, $-E_1J_1\eta = D + C\xi + \frac{1}{2}\mu\xi^2$. Przy $\xi=0$ i $\xi=h$ mamy $\eta=0$ a przeto $D=0$, $C = -\frac{1}{2}\mu h$ i ostatecznie $-E\eta' = -\frac{1}{2}\mu h + \mu\xi$. Czyniąc w tym wzorze $\xi=h$ otrzymamy końcowe pochYLENIE odkształconej $\Theta' = -\frac{1}{2}\mu h : E_1J_1$. Wobec doskonałego usztywnienia węglowego $\Theta = \Theta'$, czyli: $[-\frac{1}{16}Pl^2 + \frac{1}{2}\mu l] : E_0J_0 = -\frac{1}{2}\mu h : E_1J_1$, skąd $\mu = \frac{1}{8}Pl^2 : [l + hE_0J_0 : E_1J_1]$. W rachunku powyższym pominęliśmy działanie sił rozciągających $\frac{1}{2}P$: popełniony w ten sposób błąd jest zgoła nieznaczny dla podłużnic niezbyt długich; w razie przeciwnym należy siły rozciągające wziąć pod uwagę — oba pręty boczne ulegną wygięciu mimośrodkowemu, o którym będzie mowa niżej jeszcze. Zatem w założeniu podłużnic mocnych a krótkich możemy śmiało rozpatrywać jeno moment μ . Po środku strzałka ugięcia wyniesie $-E_1J_1f_1 = -\frac{1}{2}\mu h \times \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}\mu \times (\frac{1}{2}h)^2$. Zakłębnięcie ramownicy będzie więc równe $2f_1 = \frac{1}{4}\mu h^2 : E_1J_1$. W podobny sposób otrzymamy strzałkę poprzecznic f_0 , czyniąc we wzorach ustępu poprzedzającego $\xi=0$. W danym wypadku wydłużenie pręta bocznego, powstałe na tle działania sił rozciągających $\frac{1}{2}P$ będzie niewątpliwie równe $\frac{1}{2}Ph : E_1F_1$, gdzie przez F_1 oznaczyliśmy poprzeczny przekrój podłużnicy. Zatem tu $n=h : E_1F_1$. Spółczynnik ten ma oczywiście wartość nieznaczną dla prętów krótkich a tęgich. W tem założeniu $-n=0$, a zatem $D = \frac{1}{32}Pl^3 - \frac{1}{8}\mu l^2$ i ostatecznie $E_0J_0f_0 = \frac{1}{32}Pl^3 - \frac{1}{8}\mu l^2 - \frac{1}{12}P(\frac{1}{2}l)^3$. Stąd uwypuklenie ramownicy $2f_0 = [\frac{1}{24}Pl^3 - \frac{1}{4}\mu l^2] : E_0J_0$. W danym wypadku moment gnący podłużnic posiada wartość stałą μ . Ta sama wartość momentu gnącego panuje w obu końców poprzecznic. Pośrodku natomiast mamy $\mu_0 = \mu - \frac{1}{2}P \times \frac{1}{2}l$. Z tych dwóch wartości wyższą należy wziąć pod uwagę przy wyznaczaniu właściwych wymiarów poprzecznic. Dla podłużnic bierzemy μ .

§ 55. **Ramownica mostowa.** Ustawmy lewy dolny węgiel *A* tylko co rozpatrywanej ramownicy na podporze rolkowej, prawy *B* na przegubowej, a otrzymamy ramownicę mostową (Rys. 61). W górnych jej węglach *C*, *D* przykładamy dwie jednakowe siły poziome P dodatnie, bo skierowane tak, jak oś stała $B\zeta$. Tę oś prowadzimy przez obie podpory na lewo. Oś $B\eta$ układamy na osi prawej podłużnicy w dół — oś $B\xi$ kierujemy ku patrzącemu. Pionowe odpory oznaczamy przez *A*, *B*, jedyny odpór poziomy podpory przegubowej przez *H*. Równania statyki będą tutaj $A + B = 0$, $H + 2P = 0$, oraz dla prawej podpory, jak

środku sprowadzenia momentów: $Al + 2Ph = 0$. Stąd $A = -2Ph : l = -B$, $H = -2P$. Przy odkształceniu — siły P przesuną poprzecznice górną w kierunku swego działania, obie boczne podłużnice pochyłają się za nią, a przeto wobec usztywnień węglowych lewy koniec poprzecznic dolnej zostanie obrócony przeciw strzałce zegara na kąt Θ_a , prawy na kąt Θ_b oczywiście również w tym samym kierunku pochylenia się bocznych prętów. Wyznamy oba te kąty. W tym celu rozcinamy ramownicę po rogach, zastępując działanie zniszczonych w ten sposób węglowych usztywnień odpowiednimi momentami węglowymi μ_a , μ_b , μ_c i μ_d . Przęsto dolne stanowi zatem belkę leżącą na podporach A, B , wygiętą pod jarzmem momentów μ_a i μ_b prawoskrętnych. Wobec zupełnej tożsamości warunków pracy obu podłużnic mających z założenia jednakową sztywność $E_1 J_1$, oba kąty obrotu Θ_a i Θ_b będą oczywiście równe. To samo dotyczy również i momentów, które owe odkształcenia wywołały, będziemy mieli przeto $\mu_a = \mu_b = \mu_0$. Obciążenie tego typu da odpory pionowe A', B' , które z łatwością wyznaczymy z równań statyki, wypisanych dla początku spórzędnych w postaci $A_1 + B_1 = 0$, $2\mu_0 + A_1 l = 0$. Stąd $A_1 = -2\mu_0 : l$, $B_1 = 2\mu_0 : l$, a przeto zasadnicze równanie gięcia będzie $E_0 J_0 \eta'' = \mu_0 - 2\mu_0(l - \zeta) : l$. Całkując mamy $E_0 J_0 \eta' = C + \mu_0 \zeta + \mu_0(l - \zeta)^2 : l$, $E_0 J_0 \eta = D + C\zeta + \frac{1}{2}\mu_0 \zeta^2 - \frac{1}{3}\mu_0(l - \zeta)^3 : l$. W danym wypadku $\eta = 0$ gdy $\zeta = 0$ lub $\zeta = l$. Stąd mamy $D - \frac{1}{3}\mu_0 l^2 = 0$, $D + Cl + \frac{1}{2}\mu_0 l^2 = 0$, co daje $D = \frac{1}{3}\mu_0 l^2$, $C = -\frac{5}{6}\mu_0 l$. Na mocy tylko co otrzymanych wartości będziemy mieli $E_0 J_0 \Theta_b = -\frac{5}{6}\mu_0 l + \mu_0 l = \frac{1}{6}\mu_0 l$ stąd $\Theta_b = \frac{1}{6}\mu_0 l : E_0 J_0$. W tym wzorze μ_0 stanowi wiadomą. Chcąc ją wyznaczyć, bierzemy pod uwagę prawą podłużnicę. Wobec doskonałości usztywnienia węglowego odkształcona podłużnica przetnie się z odkształconą poprzecznicy dolnej pod kątem prostym, a przeto koniec dolny podłużnicy pochylił się pod kątem Θ_b ku osi pionowej tego pręta — pionowej — na tle obrotu o ten sam kąt całej podłużnicy około punktu B . Po uwzględnieniu tego obrotu końcowy przekrój dolny podłużnicy możemy niewątpliwie rozpatrywać, jako zamocowany, a sam pręt uważać za belkę, obciążoną drugostronnie u góry w C siłą poziomą P i momentem μ_c , zastępującym działanie odrzuconej poprzecznic górnjej. Przy odkształceniu podłużnice pochyłają się wierzchołkami naprzód w kierunku osi $B\zeta$ dodatnim, muszą więc odpowiednio wyginać końce poprzecznic górnjej — prawy od górn, lewy ku dołowi. Oba w kierunku jednakowym — przeciw strzałce zegara. Te odkształcenia świadczą o istnieniu momentów μ_c , μ_d lewoskrętnych, stanowiących obciążenie zewnętrzne poprzecznic górnjej. Momenty μ_c , μ_d zastępują działanie podłużnic. Wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej pasowe wygięcie poprzecznic górnjej wytwarza sprzeczny w po-



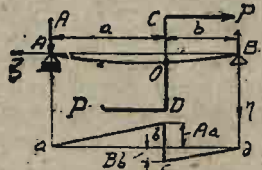
Rys. 61.

stacji momentów μ_c i μ_d prawoskrętnych. Jeden z nich stanowi część obciążenia zewnętrznego pręta BC , osadzonego u dołu, daje więc pochylenie skrajnej stycznej odkształconej w C ku pierwotnej osi pręta pionowej. Wzór odnośny wyznaczaliśmy w § 24 rozdziału niniejszego. Dla momentu μ_c prawoskrętnego otrzymamy żeń $\theta' = -\mu_c h : J_1 E_1$. Zupełnie niezależnie od μ_c działa na belkę BC siła gnąca P , powodując pochylenie skrajnej stycznej odkształconej w C ku pierwotnej osi pręta niezależne od tylko co wyznaczonego. Będzie to $\theta'' = \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1$, zgodnie z § 9 tego samego rozdziału. Ostatecznie więc całkowite pochylenie górnego końca odkształconej podłużnicy $\theta_c = \theta_b + \theta' + \theta'' = \frac{1}{6} \mu_0 l : E_0 J_0 - \mu_c h : E_1 J_1 + \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1$. Nadto z warunków równowagi wyodrębnionej części BC będziemy mieli $Ph = \mu_0 + \mu_c$, jedyną zatem niewiadomą w danym wypadku stanowi moment μ_c . Chcąc ją wyznaczyć, bierzemy pod uwagę górną poprzecznicę CD . Przy odkształceniu oba jej końce przesuwały się nieco w kierunku działania sił P , a nadto zbliżają się, zresztą nader nieznacznie, ku osi $B\xi$ na tle wygięcia obu podłużnic. Słowem możemy założyć, że końce $C_1 D_1$ poprzeczniczy górnej pozostają na osi jej pierwotnej — poziomej. Jest to więc belka obustronnie podparta, a obciążona momentami μ_c , μ_d lewoskrętnymi na końcach. Wobec zupełnej tożsamości warunków pracy obu podłużnic $\mu_c = \mu_d$ zupełnie jak dla poprzeczniczy dolnej. A zatem również i w danym wypadku $\theta_c = \frac{1}{6} \mu_c l : E_2 J_2$ przyczem przez $E_2 J_2$ oznaczyliśmy sztywność poprzeczniczy górnej, zazwyczaj w ramownicach mostowych znacznie słabszą od $E_0 J_0$. Wobec doskonałej sztywności węglów możemy niewątpliwie napisać $\frac{1}{6} \mu_0 l : E_0 J_0 - \mu_c h : E_1 J_1 + \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1 = \frac{1}{6} \mu_c l : E_2 J_2 = \frac{1}{6} Phl : E_0 J_0 - \frac{1}{6} \mu_c l : E_0 J_0 - \mu_c h : E_1 J_1 + \frac{1}{2} Ph^2 : E_1 J_1$, stąd $\mu_c = Ph \{ l : E_0 J_0 + 3 h : E_1 J_1 \} : \{ l : E_2 J_2 + l : E_0 J_0 + 6 h : E_1 J_1 \} = Ph - \mu_0$. Te dwie wartości tylko co wyznaczone rozwiązują zagadnienie.

W szczególnym wypadku, gdy dolna poprzecznicza jest bardzo tęga, możemy założyć $E_0 J_0 \stackrel{\infty}{=} \infty$, a wtedy $\mu_c = 3 Ph^2 : \{ l E_1 J_1 : E_2 J_2 + 6 h \}$. Nadto gdy brak górnej poprzeczniczy $E_2 J_2 = 0$ wtedy $\mu_c = 0$, $\mu_0 = Ph$.

§ 56. Przykłady i ćwiczenia. ¹⁰ *Belka wieloprzesłowa* statycznie wyznaczalna (Rys. 62) dźwiga poprzeczne ramię CD leżące w przekroju pośrednim O w odległości a od lewej rolkowej i b od prawej przegubowej podpory. Na ramię działają obustronnie siły poziome P skierowane odwrotnie, słowem w przekroju O panuje moment $\mu = P \times CD$ lewoskrętny, stanowiący obciążenie zewnętrzne belki. Przekrój O dzieli płaszczyznę gięcia na dwie połacie lewą i prawą, w pierwszej panuje moment $M_1 = A(l - \zeta)$ w drugiej zaś $M_2 = A(l - \zeta) + \mu$. Początek stałych osi współrzędnych, jak zwykle, umieszczamy w prawej podporze, kierując przytem oś $B\xi$ wzdłuż osi pierwotnej belki na lewo, $B\eta$ w dół, a $B\xi$ ku patrzącemu. Równania statyki dla początku współrzędnych wypisane w postaci $A + B = 0$, $Al + \mu = 0$ dadzą $A = -\mu : l = -B$. W ten sposób dla pierwszej połaci otrzymamy $EJ\eta_1'' = -\mu(l - \zeta_1) : l$, dla drugiej zaś $EJ\eta_2'' = -\mu(l - \zeta_2) : l + \mu$. Całkując będziemy mieli

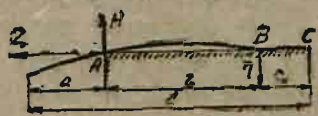
kolejno w założeniu stałego przekroju belki: $EJ\eta_1' = C_1 + \frac{1}{2} \mu (l - \zeta_1)^2 : l$, $EJ\eta_1 = D_1 + C_1 \zeta - \frac{1}{6} \mu (l - \zeta)^3 : l$ oraz $EJ\eta_2' = C_2 + \frac{1}{2} \mu (l - \zeta_2)^2 : l + \mu \zeta$, $EJ\eta_2 = D_2 + C_2 \zeta - \frac{1}{6} \mu (l - \zeta)^3 : l + \frac{1}{2} \mu \zeta^2$, tutaj bowiem na granicy obu połaci moment zmienia się nagłym skokiem, nie można przeto łączyć obu wzorów, dzieląc odnośne wyrazy momentów kreskami, jak w zwykłych wypadkach działania sił skupionych. Dla określenia czterech stałych całkowania będziemy mieli $\eta = 0$ przy $\zeta = 0$ i $\zeta = l$, a nadto dla granicznego przekroju, gdzie $\zeta = b$, będzie $\eta_1 = \eta_2$ oraz $\eta_1' = \eta_2'$. Stąd $D_1 + C_1 l = 0$, $D_2 - \frac{1}{6} \mu l^3 = 0$, $C_1 + \frac{1}{2} \mu a^2 : l = C_2 + \frac{1}{2} \mu a^2 : l + \mu b$, $D_1 + C_1 b - \frac{1}{6} \mu a^3 : l = D_2 + C_2 b - \frac{1}{6} \mu a^3 : l + \frac{1}{2} \mu b^2$ i ostatecznie: $C_1 = -\frac{1}{6} \mu l + \frac{1}{2} \mu b^2 : l$, $D_1 = \frac{1}{6} \mu l^2 - \frac{1}{2} \mu b^2$, $C_2 = -\frac{1}{6} \mu l + \frac{1}{2} \mu b^2 : l - \mu b$, $D_2 = \frac{1}{6} \mu l^2$. Te wartości określają odkształconą. Chcąc znaleźć strzałkę ugięcia szukamy pierwiastków równania $\eta' = 0$. Dla pierwszej połaci będziemy mieli $\zeta_0 = l - \sqrt{\frac{1}{3} l^2 - b^2}$ z warunkiem $l > \zeta_0 \geq b$, który istotnie wypełnia się przy $l \geq b \sqrt{3}$. Tej wartości ζ_0 odpowiada strzałka $f_0 = \mu \sqrt{(\frac{1}{3} l^2 - b^2)^3} : 3 EJl$. W drugiej połaci będziemy mieli $\zeta_1 = \sqrt{2 bl - b^2 - \frac{2}{3} l^2} - \frac{2}{3} l^2$ — odnośna strzałka będzie $f_1 = -\mu \sqrt{(2 bl - b^2 - \frac{2}{3} l^2)^3} : 3 EJl$, z warunkiem $2 bl - b^2 - \frac{2}{3} l^2 \geq 0$. Wobec odwrotności znaków obu strzałek wnioskujemy o istnieniu pośredniego punktu przegięcia odkształconej. Wykres momentów $abcd$ wskazuje, że punkt przegięcia istnieje w przekroju obciążonym, tam bowiem krzywa wykresu przechodzi przez zero.



Rys. 62

2° *Ciężki linjał mierniczy* należy podeprzeć w dwóch punktach w taki sposób, aby odkształcenie było najmniejsze, a linjał w przybliżeniu poziomy. Wobec wymagania ostatniego podpory muszą być niewątpliwie symetryczne względem środka, ustawione, dajmy na to, w odległości x od obu końców linjału, obciążonego jeno wagą własną. Oznaczmy wagę linjału przez Q — na jednostkę długości będziemy mieli przeto $q = Q : l$ kg. Ponad podporą panować będzie moment gnący $M_x = \frac{1}{2} q x^2$ pośrodku zaś linjału moment $M_0 = \frac{1}{2} q [\frac{1}{2} l]^2 - \frac{1}{2} Q \times [\frac{1}{2} l - x] = \frac{1}{2} q l [x - \frac{1}{4} l]$. Są to wartości skrajne momentów. Na zasadzie pierwszego prawa Hooke'a odkształcenie winno być proporcjonalne do siły odkształcającej — zatem najbardziej poziomy kształt odkształconej otrzymamy niewątpliwie wtedy, gdy $M_x = -M_0$. Stąd $x^2 + lx - \frac{1}{4} l^2 = 0$, czyli $x = \frac{1}{2} l (\sqrt{2} - 1)$. Odległość podpór winna być przeto $l - 2x = (2 - \sqrt{2}) l \approx 0,586 l$.

3° *Deska* spoczywa na sztywnym podłożu (Rys. 63); lewy jej koniec zwisa poza skraj A powodując wygięcie środkowej części. Wyznamy przekrój B w którym następuje dotyk wygiętej deski do podłoża, dalej bowiem już deska spoczywa całą swą dolną powierzchnią nieodkształconą. Całą długość deski oznaczamy przez l , jej część zwisającą przez a , część podpartą odkształconą przez b — pozostałą przez c .



Rys. 63.

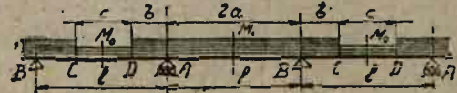
W przekroju A belka opiera się o kant podłoża, tutaj więc $\eta = 0$, dalej w B mamy ścisły już dotyk belki, a przeto $\eta = 0$, i $\eta' = 0$. Nadto w B panować musi zerowa wartość momentu, inaczej bowiem dalsze przekroje belki musiałyby ulec wygięciu. Nazwijmy przez q ciężar deski na jednostkę długości, przez A odpór, jaki powstaje na skraju podłoża w A . Będziemy przeto mieli dla punktu B równanie momentów: $\frac{1}{2} q (a+b)^2 + Ab = 0$. Stąd $A = -\frac{1}{2} q (a+b)^2 : b$. Umieścimy początek stałych osi współrzędnych w B , oś $B\xi$ poprowadzmy po powierzchni podłoża poziomej na lewo, oś $B\eta$ w dół, $B\xi$ — ku patrzacemu. Zasadnicze równanie gięcia będzie tu $EJ\eta'' = \frac{1}{2} q (a+b-\xi)^2 \parallel -\frac{1}{2} q (a+b)^2 (b-\xi) : b$ w założeniu stałego przekroju deski. Całkując, mamy $EJ\eta' = C - \frac{1}{6} q (a+b-\xi)^3 \parallel + \frac{1}{4} q (a+b)^2 (b-\xi)^2 : b$, $EJ\eta = D + C\xi + \frac{1}{24} q (a+b-\xi)^4 \parallel -\frac{1}{12} q (a+b)^2 b-\xi^3 : b$. Przy $\xi = 0$ mamy $\eta = 0$ i $\eta' = 0$, przy $\xi = b$ mamy $\eta = 0$. Zatem $C - \frac{1}{6} q (a+b)^3 + \frac{1}{4} q (a+b)^2 b = 0$, $D + \frac{1}{24} q (a+b)^4 - \frac{1}{12} q (a+b)^2 b^2 = 0$, $D + Cb + \frac{1}{24} qa^4 = 0$. Z pierwszego równania mamy $C = \frac{1}{6} q (a+b)^3 - \frac{1}{4} q (a+b)^2 b$. Mnożąc tę wartość przez b podstawiamy w trzecie równanie. Po odjęciu drugiego i pomnożeniu przez 24 : q otrzymamy: $4(a+b)^3 b - 4(a+b)^2 b^2 + a^4 - (a+b)^4 = 2a^2 b^2 - b^4 = 0$. Stąd $b = a\sqrt{2}$. Skoro więc $l \geq a(1 + \sqrt{2})$, deska po odkształceniu wygląda tak, jak na rysunku. Gdy $l < a(1 + \sqrt{2})$ opiera się jeno prawym swym końcem o podłoże. Gdy $l = 2a$ deska jest podparta tylko w A , kołysać się może swobodnie, wreszcie, gdy $l < 2a$ deska spada z podłoża.

4° *Budynek fabryczny* podzielono stropem na parter i piętro. Ustawiono podwójnym szeregiem słupy żelazne w odstępach pięciometrowych równoległe do osi podłużnej budynku, dzieląc w ten sposób parter na trzy nawy sześciometrowej szerokości. Na słupach położono belki podłużne podciągowe, łączące ściany poprzeczne, a na nich belki poprzeczne w odstępach metrowych. Na belkowaniu żelaznem ułożono wpoprzek deski tworzące właściwy strop. Przepuszczalne obciążenie stropu wynosi łącznie z wagą desek, belek poprzecznych i podłużnych — $q = 500$ kg/m². Jest to dość znaczne obciążenie, wyższe od rzeczywistego — z zapasem. Strop w ten sposób obliczony wytrzymuje z łatwością ciężar lżejszych obrabiarek z obsługą. Należy wyznaczyć właściwe wymiary stropu. Rozpoczynamy od desek. W tym celu zakładamy, że deski są łączone ponad osiami belek poprzecznych. Przeczy to istocie rzeczy, zazwyczaj bowiem deska pokrywa parę przęseł belkowania. Należałoby je właściwiej liczyć, jako belki wieloprzęsłowe, wobec jednak dość znacznej wartości q możemy uprościć zadanie, rozpatrując je, jako obustronnie podparte na sąsiednich belkach poprzecznych. Oznaczmy szerokość belki przez a cm, grubość przez e cm. Nośna długość deski równa jest oczywiście rozstawieniu belek, wynosi przeto $\lambda = 1$ m. Całkowite obciążenie jednego przęsła deski wynosi $Q = q \times 1 \times a : 100 = 5a$ kg. Skrajna wartość momentu pośrodku deski będzie $M_m = \frac{1}{8} Q\lambda = \frac{1}{8} \times 100 \times 5a = 62,5a$ (kg, cm) zgodnie z § 5 niniejszego rozdziału. Ponieważ tutaj dla deski $W = \frac{1}{6} ae^3$ przeto $\frac{1}{6} ae^3 k_g = 62,5a$. Dla sośniny $k_g \approx \infty 75$ kg/cm² zatem $e = 2,24$ cm. Należy użyć całówek. Z kolei obliczamy belki poprzeczne, zakładając, że połączenia ich wykonano na belkach

podciągowych. Zatem szerokość budynku mieści trzy belki sześciometrowe. Każdą z nich uważamy jako obustronnie podpartą, a obciążoną jednostajnie deskowaniem na całej długości. Obciążenie jednej belki wynosi $R = 500 \times 6 \times 1 = 3000$ kg, ciśnie bowiem na nią połącz deskowania 6 metrów długa i metr szeroka. Po środku skrajna wartość momentu wyniesie $M_m = 1/8 \times 3000 \times 600 = 225000$ (kg/cm). W danym wypadku lwią część obciążenia stanowią siły ciężarowe, a więc stałe. Dla żelaza zlewnego możemy wziąć $k_g = 1200$ kg/cm² ze względu na duży zapas q . Zatem $W_x = M_m : k_g = 187,5$ cm³. Dla dwuteownika zwykłego № 19 tablice podają $W_x = 185$ cm³. Ten profil należy użyć, stawiając środkiem pionowo. Zupełnie w podobny sposób wyznaczymy belkę podciągową; można ją również rozpatrywać, jako złożoną z poszczególnych belek obustronnie opartych na słupach, aczkolwiek właściwie jest to belka wieloprzęstowa. Obciążenie jej stanowią siły skupione — nacisku belek poprzecznych. Wobec równomiernego rozłożenia tych belek na podciągu możemy od biedy rozpatrywać to obciążenie, jako jednostajne. Wyniesie ono od słupa do słupa $V = 500 \times 6 \times 5 = 15000$ kg, słupy bowiem ustawione są w odstępach pięciometrowych, a zatem na karb jednego przęsła podciągowego wypada połącz stropu 5 metrów długa i 6 metrów szeroka. Skrajna wartość momentu po środku będzie równa $M_m = 1/8 \times 15000 \times 500 = 937500$ (kg, cm), zatem $W_x = M_m : k_g = 937500 : 1200 = 781$ cm³. Tej wartości odpowiada dwuteownik № 32 zwykły, lub też № 24 — szerokopasowy, dla którego $W_x = 855$ cm³.

5^o *Belki wspornikowe.* Wyznaczanie belek wieloprzęstowych jest nader uciążliwe, z tego powodu nieraz stosują belki wspornikowe, zwłaszcza w wypadku wielu podpór ustawionych w jednakowych odstępach l . Ustawmy szereg belek *DABC* wystających poza podpory *A*, *B* i połączmy je przegubowo belkami *CD*. Obciążenie pierwszych jednostajne niech będzie p — drugich q na jednostkę długości. Wobec przegubowego zamocowania obustronnego—ogniwa *CD* mogą być rozpatrywane, jako belki statycznie wyznaczalne, obustronnie podparte w *C* i *D*. Ogniwa te wywierają nacisk na belki sąsiednie podparte, wywołując w przegubach odpory pionowe $C = D = -1/2 qc$. Odpory poziome pomijamy, jako z istoty rzeczy nieznaczne przy słabych wygięciach, jedynie praktycznie dopuszczalnych.

Skrajna wartość momentu gnącego panuje niewątpliwie po środku belki *CD*. Będzie to $M_0 = -1/2 qc \times 1/2 c + 1/2 q (1/2 c)^2 = -1/8 qc^2$. Ta wartość jest miarodajna przy wyznaczaniu właściwego przekroju belki. Siły pionowe $1/2 qc$



Rys. 64.

łącznie z obciążeniem jednostajnym p stanowią układ odkształcający belkę podpartych, tak zwanych wspornikowych *DABC*. To obciążenie wywołuje pionowe odpory $A = B = -p(a + b) - 1/2 qc$, możemy przeto wypisać skrajne wartości momentów — ponad podporą *A* lub *B* w postaci $M_a = M_b = 1/2 qcb + 1/2 pb^2 = 1/2 b(qc + pb)$ i pośrodku pomiędzy podporami $M_1 = 1/2 qc(b + a) + 1/2 p(b + a)^2 - [1/2 qc + p(b + a)]a = 1/2 b(qc + pb) - 1/2 pa^2$. Znaczenie użytych liter w dostatecznej mierze

wyjaśnia (Rys. 64). Momenty M_a i M_1 jako skrajne wyrokują o właściwych wymiarach belki wspornikowej. W szczególnym wypadku, gdy przekrój i tworzywo belek jest jednakowe, możemy wyznaczyć najkorzystniejsze ustosunkowanie długości a, b, c . Należy jeno w tym celu uczynić — $M_0 = M_a$, wtedy bowiem oba rodzaje belek ustroju będą pracowały jednakowo w przekrojach niebezpiecznych. Stąd mamy w założeniu $p = q$ równanie $c^2 = 4b(c + b)$. Ponieważ rozpiętość podpór $l = 2b + c$ przeto $(l - 2b)^2 = 4b(l - b)$, stąd $b = (\frac{1}{2} - 1 : \sqrt{8}) l \approx 0,147 l$. W tym szczególnym wypadku wyznaczmy właściwy przekrój stały belek z równania $W = \frac{1}{8} pc^2 : k_g$.

6° *Belka dwuprzęsłowa* (Rys. 45) dźwiga po środku pierwszego przęsła siłą pionową $P_0 = 5000$ kg, po środku drugiego $P = 10000$ kg. Rozpiętość pierwszego przęsła $a = 4$ m, drugiego $b = 2$ m. W założeniu belki o stałym przekroju poprzecznym możemy wypisać równanie Clapeyron'a w postaci: $2 [400 + 200] M_x = 5000 \times 200 \times [400^2 - 200^2] : 400 + 10000 \times 100 \times [200^2 - 100^2] : 200$. Stąd $M_x = 375000$ (kg, cm). Dwie drugie skrajne wartości momentu gnącego wyznaczmy dla przekrojów obciążonych obu przęsł. W tym celu wyznaczamy odpory. Mamy tu $A \times 400 + 5000 \times 200 = M_x$ oraz $B \times 200 + 10000 \times 100 = M_x$ a zatem $A = -1562,5$ kg, $B = 3125$ kg. Nadto $A + B + X + P_0 + P = 0$ a zatem $X = -10312,5$ kg i ostatecznie otrzymamy dla środkowego przekroju pierwszego przęsła $M_0 = A \times 200 = -312500$ (kg, cm) — i drugiego $M_1 = B \times 100 = -312500$ (kg, cm), należy przeto wyznaczyć przekrój poprzeczny z równania $W_x = M_x : k_g$. Załóżmy, jak wyżej $k_g = 1200$ kg/cm² a wtedy $W_x = 375000 : 1200 = 312,5$ cm³. Tej wartości odpowiada dwuteownik zwykły № 23 ustawiony środkami pionowo, tablice bowiem dają dlań $W_x = 314$ cm³.

Zupełnie tą samą drogą idziemy przy wyznaczaniu belek wieloprzęsłowych o zmiennym przekroju. Z początku liczymy je, jako belki o przekroju stałym; wyznaczamy skrajne momenty i odpory. Podług momentów dobieramy odpowiednie przekroje, a następnie przeliczamy od nowa momenty i odpory, biorąc za punkt wyjścia tylko co wyznaczoną belkę tymczasowo. W ten sposób powtórnie otrzymane wartości momentów pozwolą wyznaczyć nowy kształt belki, ponownie zatem powtarzamy obliczenie, póki nie otrzymamy właściwych ostatecznych przekrojów. Podany sposób jest zrozumiały sam przez się. W danym wypadku, wobec niewielkiej różnicy wartości skrajnych momentów belka o stałym przekroju stanowi najkorzystniejsze, bo najprostsze rozwiązanie.

Założmy, że środkowa podpora obniżyła się o m cm, należy przeto moment M_x zwiększyć o $\Delta M_x = 6 EJ [-m : 400 - m : 200] : 1200 = 6 \times 2150000 \times 3605 m : 160000 = -290653 m$ (kg, cm), mamy bowiem dla dwuteownika № 23 z tablic $J = 3605$. Zatem już przy $m = -\frac{1}{3}$ cm poprzednio wyznaczona belka nie wystarcza, mamy bowiem wtedy $M_x = 375000 + 96884 = 471884$ (kg, cm) a przekrój niebezpieczny pracuje na gięcie przy 1502 kg/cm². Nadto będziemy mieli $A \times 400 + 5000 \times 200 = M_x$, $B \times 200 + 10000 \times 100 = M_x$ czyli $A = -$

— 1320 kg, $B =$ — 2640 kg oraz $X =$ — 11040 kg. Stąd znowu $M_0 =$ — 264000 (kg, cm), $M_1 =$ — 264000 (kg, cm); istotnie więc przekrój ponad podporą pośrednią jest niebezpieczny. Godzi się tu wyraźnie zaznaczyć wzrost momentu M_x i odpory X , połączone z dodatkowym naprężeniem tworzywa. Tem się objaśnia grzanie łożyska pośredniego wałów trójłożyskowych, pojawiające się nader często przy niedokładnym ustawieniu silnika. Czasami nawet wał pęka ponad podporą pośrednią. W pewnych warunkach różnica 0,5 m/m może już spowodować znaczną zmianę pracy wału, grożącą niszczęciem.

7° *Wał generatora prądu trójfazowego.* (Rys. 46) dźwiga pośrodku ciężar wirnika. Załóżmy $a = 22$ cm, $b = 18$ cm, $c = 60$ cm i odpowiednio średnice tych części $d_a = 29$ cm, $d_b = 31$ cm, $d_c = 36$ cm. Wyznamy skrajną wartość siły P — ciężaru wirnika, dającą strzałkę ugięcia środkową $f = 0,035$ cm najwyższą dopuszczalną dla generatorów tego rodzaju. Tworzywo wału — stal zlewna, dla której $E = 2200000$ kg/cm². W § 29 mieliśmy wzór $f = \frac{1}{48} Pl^3 : EJ_c + \frac{1}{6} Pa^3 [1 : EJ_a - 1 : EJ_c] + \frac{1}{6} P (3 a^2 b + 3 ab^2 + b^3) [1 : EJ_b - 1 : EJ_c]$. W danym wypadku $J_a = 34719$ cm⁴, $J_b = 45333$ cm⁴, $J_c = 82448$ cm⁴, $l = 2(a + b + c) = 200$ cm, a przeto po podstawieniu odnośnych wartości otrzymamy: $P = 1028032$ $f = 36280 \cong 36,3$ t. Rachunek ten nie należy do łatwych.

8° *Belkowanie złożone z dwóch dyli dębowych, skrzyżowanych pod kątem prostym wykonano w sposób następujący.* W przeciwległych ścianach wieży kwadratowej wycięto otwory i ułożono belkę poziomą o przekroju stałym kwadratowym, w sąsiednich ścianach przeciwległych wybito również nieco wyżej otwory tak, aby wetknięty w nie dyl tego samego przekroju dolegał do poprzedniego bez nacisku. Przez skrzyżowanie dyli przerzucono łańcuch, jak szelkę, a na nim zawieszono blok, dźwigający na sznurze ciężki dzwon, wagi P kg. Całość możemy oczywiście rozpatrywać, jako dwie belki skrzyżowane, obustronnie podparte, a obciążone pośrodku siłą P , łącznie działającą na oba dyle. Wyznamy ich przekrój właściwy, zakładając odległość ścian wieży przeciwległych $l = 4$ m i $P = 1900$ kg. Część siły P równa nP ciśnie na dyl górny, pozostała $(1 - n)P$ na dolny. W ogólnym wypadku dyle mogą się różnić przekrojami i tworzywem; oznaczymy sztywność górnego przez EJ , dolnego przez $E_1 J_1$. Siły, powyżej wypisane, działają niezależnie od siebie — pierwsza daje strzałkę siły $f_1 = nPl^3 : 48 EJ$, druga $f_2 = (1 - n) Pl^3 : 48 E_1 J_1$. W założeniu stałego dotyku belek mamy $f_1 = f_2$, stąd $n : EJ = (1 - n) : E_1 J_1$ a przeto $n = 1 : (1 + E_1 J_1 : EJ)$. W rozpatrywanym przez nas wypadku $E_1 J_1 = EJ$, zatem połowa siły stanowi obciążenie dyla górnego, połowa — dolnego. Pośrodku obu dyli panuje moment największy $M_m = \frac{1}{4} (\frac{1}{2} P) l = \frac{1}{8} \times 1900 \times 400 = 95000$ (kg, cm) możemy przeto napisać $W = M : k_g$. Dla dębiny, w założeniu pewności sześciokrotnej $k_g = K_g : 6 = 600 : 6 = 100$ kg/cm², skąd ostatecznie $W = 950$ cm³ = $\frac{1}{6} c^3$, gdzie przez c oznaczyliśmy bok przekroju kwadratowego dyla. Inaczej jeszcze $c^3 = 5700$ cm³ i ostatecznie $c = 17,9 \cong 18$ cm. Należy użyć dyli 18×18 cm. Opisany ustrój jest

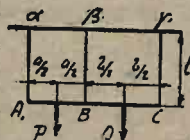
niewątpliwie statycznie niewyznaczalny; ułamek n może być określony jedynie na mocy zasady niezależnego działania sił, którą stosowaliśmy w danym wypadku.

9° *Deska sosnowa* leży na sprężystym podłożu, które pod ciśnieniem jednego kilograma na centymetr kwadratowy osiada sprężystość na t cm. Prawy koniec belki ulega jarzmu siły pionowej P . Szerokość deski wynosi s cm, wyznaczmy jej grubość stałą z cm, w założeniu znacznej długości deski. Początek stałych osi współrzędnych ω obieramy w środku skrajnego przekroju prawego deski, oś $\omega\zeta$ prowadzimy po osi deski nieodkształconej na lewo, oś $\omega\eta$ w dół, $\omega\xi$ — ku patrzącemu. Zgodnie z założeniem odcięta lewego końcowego przekroju będzie $l = \infty$. Zasadnicze równanie gięcia będzie tu $EJ\eta'''' = p = -m\eta$, gdzie p oznacza obciążenie jednostkowe — sprzeciw podłoża a m odnośny współczynnik proporcjonalności. Obierzmy jako jednostkę długości deski centymetr. W tem założeniu $p = s$ kg/cm, a przeto $m = s : t$ kg/cm³. Całka równania gięcia będzie tu $\eta = Ae^{n\zeta} \text{Sin } n\zeta + Be^{n\zeta} \text{Cos } n\zeta + Ce^{-n\zeta} \text{Sin } n\zeta + De^{-n\zeta} \text{Cos } n\zeta$. Dla lewego skraju belki przy $l = \infty$ mamy $\eta = 0$, tam bowiem nie sięga wpływ siły odkształcającej. A przeto stałe całkowania A i B muszą być równe zeru. Nadto w prawym skrajnym przekroju moment gnący jest oczywiście równy zeru, a siła tnąca $T = -P$, równoważy bowiem siłę skupioną P obciążenia zewnętrznego. Zatem przy $\zeta = 0$ mamy $\eta_0'' = 0$, $\eta_0'''' = -T : EJ = P : EJ$. Różniczkując bezpośrednio otrzymamy $\eta' = -nCe^{-n\zeta}(\text{Sin } n\zeta - \text{Cos } n\zeta) - nDe^{-n\zeta}(\text{Sin } n\zeta + \text{Cos } n\zeta)$, $\eta'' = -2n^2 Ce^{-n\zeta} \text{Cos } n\zeta + 2n^2 De^{-n\zeta} \text{Sin } n\zeta$, $\eta''' = 2n^3 Ce^{-n\zeta}(\text{Sin } n\zeta + \text{Cos } n\zeta) - 2n^3 De^{-n\zeta}(\text{Sin } n\zeta - \text{Cos } n\zeta)$. Czyniąc w tych wzorach $\zeta = 0$ otrzymamy $-2n^2 C = 0$, $2n^3 C + 2n^3 D = P : EJ$, przyczem, jak zwykle $n^4 = m : 4EJ = s : 4EJt$. Stąd bezpośrednio $C = 0$, $D = P : 2n^3 EJ$ i ostatecznie $EJ\eta = [P : 2n^3] e^{-n\zeta} \text{Cos } n\zeta$, a nadto jeszcze $EJ\eta' = -[P : 2n^2] e^{-n\zeta}(\text{Sin } n\zeta + \text{Cos } n\zeta)$, $EJ\eta'' = M = [P : n] e^{-n\zeta} \text{Sin } n\zeta$ oraz $EJ\eta''' = -T = -Pe^{-n\zeta}(\text{Sin } n\zeta - \text{Cos } n\zeta)$. Wyznamy skrajną wartość momentu. W tym celu wyznaczamy ζ z równania $dM : d\zeta = -T = -Pe^{-n\zeta}(\text{Sin } n\zeta - \text{Cos } n\zeta) = 0$, które da $n\zeta = \frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \dots$ a przeto największy moment gnący $M_m = [P : n] e^{-1/4\pi} \text{Sin } (\frac{1}{4}\pi) = [P : n\sqrt{2}] e^{-1/4\pi} = Wk_g$. Podnosząc do potęgi czwartej otrzymamy $P^4 e^{-\pi} : 4n^4 = EJP^4 e^{-\pi} : m = EJt P^4 e^{-\pi} ; s = W^4 k_g^4$. W danym wypadku $J = \frac{1}{12} sz^3$, $W = \frac{1}{6} sz^2$, a przeto po skróceniu otrzymamy równanie $108 EtP^4 = s^4 z^5 e^\pi k_g^4$, z którego wyznaczymy z łatwością z . Założmy $P = 1000$ kg, $s = 20$ cm, $t = 0,025$ cm. Dla drzewa sosnowego $E \cong 100000$ kg/cm², $K_g = 420$ kg/cm². Przy pewności sześciokrotnej $k_g = 70$ kg/cm², a przeto $z = 4,97 \cong 5$ cm. Wyznamy odkształconą. Po podstawieniu odnośnych wartości otrzymamy: $\eta = 0,1392 e^{-n\zeta} \text{Cos } n\zeta$. Stąd dla $\zeta = 0$ mamy $\eta_0 = 0,1392$ cm $\cong 1,4$ m/m.

10° *Belkę stalową* (Rys. 65) zawieszono na trzech prętach jednako-

wej długości l , zaczepionych o niesprężystą połącz górną i obciążono siłami P i Q pionowymi, przyłożonemi po środku obu pręseł a i b belki. Wyznaczyć stały przekrój dwuteowy belki oraz średnice prętów stalowych zlewnych, aby po odkształceniu zawieszane punkty A, B, C belki leżały na linii poziomej. Załóżmy $P = 20000$ kg, $Q = 10000$ kg, $a = 1$ m, $b = 2$ m i $l = 10$ m. Równanie *Clapeyron'a* da nam w założeniu połączeń przegubowych $2(100 + 200)M_B = 20000 \times 50 \times [100^2 - 50^2] : 100 + 10000 \times 100 \times [200^2 - 100^2] : 200$, skąd $M_B = 375000$ (kg, cm).

Nadto dla odporu lewego będziemy mieli równanie $A \times 100 + 20000 \times 50 = M_B$, dla prawego zaś $C \times 200 + 10000 \times 100 = M_B$, skąd $A = -6250$ kg, $C = -3125$ kg. Odpór środkowy otrzymamy wprost z równania statyki $A + B + C + P + Q = 0$, czyli $B = -20625$ kg. Nadto w przekrojach obciążonych będziemy mieli skrajne momenty $M_P = -6250 \times 50 = -312500$ (kg, cm), $M_Q = -3125 \times 100 = -312500$ (kg, cm), na-



Rys. 65.

leży przeto dostateczny przekrój belki wyznaczyć z równania $W_x = M_B : k_g$. Weźmy dla stali zlewnej, w wypadku obciążenia stałego $k_g = 1500$ kg/cm² a wtedy $W_x = 250$ cm³. Tej wartości odpowiada dwuteownik № 21 dla którego $W_x = 244$ cm³, lepiej jednak wziąć numer następny, zawsze są bowiem możliwe pewne obniżenia punktów oporowych połączone ze znacznym wzrostem naprężeń. Bierzemy dwuteownik № 22 dla którego tablice podają $W_x = 278$ cm³. Należy zawiesić go tak, aby środek był w położeniu pionowym. Z kolei wyznaczmy średnice prętów. Znak odporów A, B, C ujemny wskazuje, że pręty te są rozciągane. W założeniu obciążenia stałego możemy wziąć $k_r = 1500$ kg/cm², będziemy mieli przeto wydłużenia $\Lambda_a = lA : EF_a$, $\Lambda_b = lB : EF_b$, $\Lambda_c = lC : EF_c$. Te wydłużenia muszą być jednakowe, dążymy bowiem do tego, aby belka po odkształceniu leżała punktami A, B, C na linii poziomej. Zatem $A : F_a = B : F_b = C : F_c = k_r$, co da nam $F_a = 4,167$ cm², $F_b = 13,75$ cm², $F_c = 2,083$ cm². Średnice prętów będą: $d_a = 2,3$ cm, $d_b = 4,2$ cm, $d_c = 1,6$ cm. Wszystkie trzy punkty podparcia obniżą się o $\Lambda = lk_g : E = 1000 \times 1500 : 2200000 = 0,68$ cm.

ROZDZIAŁ CZWARTY:

BELKI PROSTE ZGINANE MIMOŚRODKOWO.

§ 1. Równanie odkształconej. Weźmy pod uwagę łuk mn odkształconej belki pierwotnie prostej, płasko wygiętej mimośrodkowo. Stałą