

# KSIĘGA DRUGA.

## CZEŚĆ PIĄTA.

### ZGINANIE.

#### ROZDZIAŁ PIERWSZY:

#### NAPRĘŻENIA GNĄCE.

##### § 1. Wyznaczanie składowych naprężeń jednostkowych.

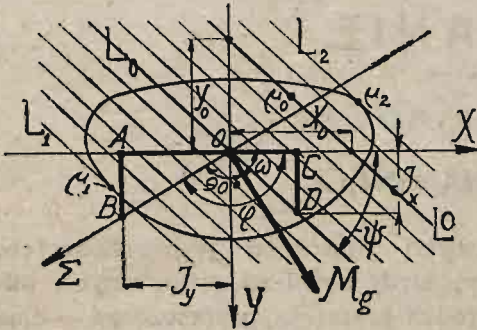
Bierzemy pod uwagę obciążenie gnące, kiedy układ sił zewnętrznych, odkształcających, po sprowadzeniu do środka przekroju poprzecznego — daje moment, leżący w przekroju, oraz siłę środkową prostopadłą do przekroju. Wobec  $T_x = T_y = M_n = 0$  składowe naprężeń dla osi głównych będą:

$$t_x = \frac{H}{J_y} x - \frac{K}{J_x} y = \tau_y; \quad t_y = \frac{L}{J_y} x + \frac{N}{J_x} y = \tau_x; \quad t_z = -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{S}{F} = \sigma_z.$$

Badanie układu naprężeń jednostkowych, panujących w poszczególnych punktach przekroju płaskiego, sprowadza się do badania wzorów wyżej wypisanych. Ostatni wyznacza naprężenia normalne, pozostałe dwa mogłyby wyrokować o naprężeniach, leżących w przekroju, gdybyśmy umieli określić współczynniki  $H, K, L, N$ , statycznie niewyznaczalne. W pewnych wypadkach wartości ich dają się wyznaczyć z warunków zachowania się powłoki ciała odkształconego, narazie jednak o odkształceniach jeszcze nic nie wiemy, czynimy przeto założenie najprostsze  $H = K = L = N = 0$ , spełniające warunek konieczny  $K + L = 0$ , inaczej mówiąc, zakładamy  $t_x = t_y = 0, t = t_z = \sigma_z$ . W ten sposób badanie naprężeń przekroju sprowadza się do badania jedynej różnej od zera składowej  $\sigma_z$ .

Rozpoczynamy przeto badanie naprężenia  $\sigma_z$ , wyraźnie podkreślając, że wzór wyżej podany dotyczy układu osi głównych przekroju poprzecznego płaskiego, a  $x, y$  oznaczają w nim współrzędne punktu  $\mu$ , dowolnie w przekroju obranego. Osie główne przekroju nazywamy przez  $OX, OY$  — trzecią oś  $OZ$  kierujemy ze środka przekroju prostopadłe do  $OX, OY$ , leżących w przekroju tak, aby wskazówka zegara, leżącego pośrodku pola tarczy zwróconą w kierunku dodatniej osi  $OZ$ , spotykała w swym biegu pierwotnie oś  $OX$ , a potem dopiero dodatnią oś  $OY$ .

W układzie tych osi składowe  $M_x, M_y$  wyznaczają moment, leżący w przekroju. Wyobrażamy go zwykle odcinkiem, nadając mu każdorazowo taki kierunek, aby umieściwszy oko w początku współrzędnych i spoglądając w kierunku odcinka, wyobrażającego moment, widać było obrót, jaki się stara wywołać para momentu, zawsze przeciwko strzałce zegara. W ten sposób określamy kierunek momentu, a zarazem i kąt  $\omega$  jego nachylenia ku głównej osi  $OX$  przekroju (rys. 1).



Rys. 1

Stosowanie się do powyższego prawa pozwala uniknąć gmatwaniwy, wynikającej z rozpatrywania momentów dodatnich i ujemnych, wszystkie bowiem, podług powyższego pravidła wyznaczone momenty mogą być uważane za dodatnie, jako należące do tego samego typu obrotowego. Nazwijmy moment, leżący w przekroju, momentem gnącym i oznaczmy przez  $M_g$ , a wtedy  $M_x = M_g \cos \omega$ ,  $M_y = M_g \sin \omega$ , co należy pod-

stawić we wzór dla  $\sigma_z$ .

Może się zdarzyć w szczególnym wypadku, że  $S = 0$ , wtedy jedynym obciążeniem przekroju jawi się moment gnący  $M_g$ , który z istoty rzeczy nie może być równy zero, inaczej bowiem mielibyśmy przekrój nieobciążony, lub obciążony, siłą  $S$  — rozciągającą, czy ściskającą, a ten wypadek poznaliśmy już dawniej.

**§ 2. Badanie rozkładu naprężeń gnących** sprowadza się do

badania wzoru dla  $\sigma_z = -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y + \frac{S}{F}$ , naprężenia

normalnego, występującego w punkcie  $\mu(x, y)$  danego przekroju (rys. 1) poprzecznego  $F$ , odkształconego pod jarzmem środkowej siły  $S$  prostopadłej do przekroju, oraz momentu gnącego  $M_g$ , leżącego w przekroju, a pochylonego pod kątem  $\omega$  ku osi głównej  $OX$ . Przedewszystkiem łatwo

zauważymy, że dla początku współrzędnych  $O(0,0)$  będzie  $\sigma_{s0} = \frac{S}{F}$ , a zatem: *naprężenie normalne, panujące w środku przekroju, jest niezależne od momentu gnącego i równe środkowej sile normalnej, dzielonej przez pole przekroju.* W szczególnym wypadku gdy  $S = 0$ , zarazem i  $\sigma_{s0} = 0$ . *W środku przekroju obciążonego momentem gnącym panuje zerowe naprężenie normalne.*

Z kolei, dając naprężeniu  $\sigma_z$  wartość ściśle określoną  $\sigma_g$ , czyli ina-



czej mówiąc, uważając  $\sigma_g$  w równaniu jako stałą, otrzymamy równanie

liniowe: 
$$-\frac{M_g \sin \omega}{J_y} X + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} Y + \frac{S}{F} - \sigma_g = 0,$$
 wiążące współrzędne

$X, Y$  tych wszystkich punktów  $\mu$  przekroju, w których panuje owo stałe naprężenie normalne. A więc punkty, w których panuje naprężenie normalne stałe, leżą wszystkie na prostej, zwanej linią równego naprężenia.

Nadto linie równych naprężeń tworzą rój prostych równoległych, pochylonych pod kątem  $\Psi = \arctg [J_x \operatorname{tg} \omega : J_y]$  ku osi  $OX$  — głównej osi przekroju. Z łatwością to udowodnimy, rozpatrując tylko co napisane wyżej równanie roju linii równych naprężeń  $L_i$ .

Ponieważ tedy:  $\operatorname{tg} \Psi = J_x \operatorname{tg} \omega : J_y$ , przeto oba te współczynniki kątowe są zawsze jednakowych znaków, a zatem — moment gnący i linia równego naprężenia, przechodząca przez środek przekroju, leżą zawsze w tym samym kącie osi współrzędnych. Wniosek, tylko co tu wypowiedziany, traci całkowicie swą moc wtedy, gdy moment gnący leży na jednej z głównych osi przekroju, a więc gdy  $\operatorname{tg} \omega = 0$  lub  $\operatorname{tg} \omega = \pm \infty$ . W tym szczególnym wypadku będziemy mieli odpowiednio:  $\operatorname{tg} \Psi = 0$ , lub  $\operatorname{tg} \Psi = \pm \infty$ , a zatem rój jest równoległy do głównej osi przekroju, gdy na niej leży moment gnący.

Poprowadźmy płaszczyznę przez oś  $OZ$ , prostopadłą do momentu gnącego. Wyznaczy ona ślad na przekroju — prostą  $O\Sigma$ , którą osią sił zwać będziemy. Kierunek osi sił ustalamy z łatwością, zważywszy, że tworzy ona z osią  $OX$  kąt  $\varphi = \omega + \frac{\pi}{2}$ , jak to najlepiej zresztą uwypukla

rysunek. Stąd  $\operatorname{tg} \omega = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$ , co podstawivszy we wzór odnośny, otrzymamy  $J_x + J_y \operatorname{tg} \Psi \operatorname{tg} \varphi = 0$ . Podobny wzór otrzymaliśmy przy badaniu elipsy bezwładności środkowej. Wnioskujemy zeń: kierunki linii równych naprężeń oraz kierunek osi sił wyznaczają kierunki średnic sprzężonych elipsy bezwładności środkowej.

Stąd łatwy sposób wyznaczania kierunku linii  $L_i$  roju. Gdy dana jest oś sił lub moment gnący, odkładamy na osi  $OX$  odcinek  $OA = J_y$ , tak, aby prostopadła  $AB \perp OA$  przecięła dodatnią część osi sił. Wtedy  $\operatorname{tg} \varphi = \pm AB : J_y$ .

Z kolei na tejże osi  $OX$  odkładamy odcinek  $OC = AB$  tego samego znaku, co i  $AB$  i w jego końcowym punkcie prowadzimy prostopadłą do  $OX$  w kierunku momentu gnącego. Odkładając na niej  $CD = J_x$  prowadzimy oś  $OD$ , która wyznaczy kierunek roju. Łatwo to udowodnić, zważywszy, że  $\operatorname{tg}(\angle DOC) = J_x : AB$ . Ponieważ kąty  $\angle DOC$  i  $\varphi$  leżą zawsze w sąsiednich ćwiartkach, przeto  $\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg}(\angle DOC) = -J_x AB : J_y AB$

stąd  $J_x + J_y \operatorname{tg}^2 \omega (DOC) = 0$  i ostatecznie  $DOC = \Psi$ , co należało udowodnić.)

**§ 3. Linja obojętna.** W szczególnym wypadku, gdy  $\sigma_g = 0$  otrzymujemy równanie:  $-\frac{Mg \operatorname{Sin} \omega}{J_y} X + \frac{Mg \operatorname{Cos} \omega}{J_x} Y + \frac{S}{F} = 0$ . Linji obojętnej, geometrycznego miejsca tych wszystkich punktów  $\mu_0 (X, Y)$ , w których panuje zerowa wartość naprężenia normalnego. Ponieważ najwiodoczniej istnieje tylko jedna *linja obojętna*, przeto stanowić ona musi granicę, oddzielającą dziedzinę naprężeń ujemnych od dodatnich.

Czy linja obojętna istotnie leży w przekroju?

W szczególnym wypadku, gdy  $S = 0$ , równanie linji obojętnej ma postać:  $-\frac{\operatorname{Sin} \omega}{J_y} X + \frac{\operatorname{Cos} \omega}{J_x} Y = 0$ , wskazującą, że *linja obojętna zawsze przechodzi przez środek przekroju, obciążonego momentem gnącym jedynie*. W danym wypadku rozróżnić trzeba dwa obszary: we wszystkich punktach pierwszego panować będą naprężenia jednego znaku, we wszystkich punktach drugiego — naprężenia znaku odwrotnego — na granicy tych obszarów, na linji obojętnej, przechodzącej przez środek, panować będzie wartość zerowa naprężeń normalnych. Są to *naprężenia gnące pierwszego rodzaju*.

W ogólnym wypadku, gdy  $S \neq 0$  — *linja obojętna nie może przechodzić przez środek przekroju, obciążonego środkową siłą normalną i momentem gnącym*. Może jednak mimo to leżeć w przekroju, i dzielić go na owe dwa obszary naprężeń różnego znaku. Może być również styczną obwołu, a wtedy we wszystkich punktach przekroju panować będą naprężenia jednego znaku, z wyjątkiem jednej tylko gromady punktów obwołu, leżących na owej stycznej, z wyjątkiem jej punktów lub punktu styczności, gdzie naprężenie normalne jest równe zeru. Jest to *drugiego rodzaju naprężeń gnących*.

Wreszcie linja obojętna może leżeć poza przekrojem. To znaczy, że we wszystkich jego punktach panować będą naprężenia jednego znaku tylko dodatnie, lub też tylko ujemne. W tym wypadku linja obojętna stanowi jeno pojęcie geometryczne, istotnego jednak znaczenia nie posiada, jako nie należąca do przekroju. *Ten trzeci rodzaj naprężeń gnących* w istocie rzeczy niczem się nie różni od drugiego.

Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt  $\mu (x, y)$  leżący w przekroju w odległości  $e$  od linji obojętnej. Panuje w nim naprężenie normalne dodatnie lub ujemne  $\sigma_x = -\frac{Mg \operatorname{Sin} \omega}{J_y} x + \frac{Mg \operatorname{Cos} \omega}{J_x} y + \frac{S}{F}$ , w zależności od położenia tego punktu względem linji obojętnej.



Jeżeli odległości  $e$  w obszarze naprężeń dodatnich będziemy uważali za dodatnie, a w sąsiednim obszarze naprężeń ujemnych—rozpatrywali je jako ujemne, to na zasadzie znanego wzoru będziemy mogli napisać:

$$e = \left[ -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y + \frac{S}{F} \right] : \sqrt{\frac{M_g^2 \sin^2 \omega}{J_y^2} + \frac{M_g^2 \cos^2 \omega}{J_x^2}} =$$

$$= e_{\pm} : M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} \quad \text{stąd:} \quad \sigma_{\pm} = e M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$$

Wzór ten wyprowadzony został w założeniu momentu gnącego dodatniego, różnego od zera. Głosi on, że *naprężenie normalne rośnie proporcjonalnie do odległości od linii obojętnej; skrajne wartości naprężeń normalnych panują w najbardziej oddalonych od linii obojętnej punktach przekroju. A więc na obwodzie.*

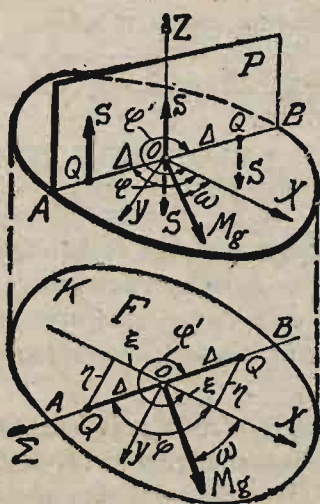
Gdy linja obojętna przecina przekrój—mamy dodatnią największość i najmniejszość ujemną naprężeń normalnych; gdy linja obojętna jest styczną przekroju, naprężenia normalne zmieniają się od zera do minimum ujemnego, albo też od zera do maximum dodatniego; wreszcie, gdy linja naprężeń leży poza przekrojem, naprężenia normalne rosną od minimum dodatniego do maximum dodatniego, lub też maleją od maximum ujemnego do minimum ujemnego, pozostając w obu wypadkach ciągle jednakowego znaku. We wszystkich tych trzech wypadkach naprężenia normalne rosną linjowo i oczywiście ciągle jednokierunkowo, lub w taki sam sposób maleją. Wyznaczenie ich skrajnych wartości nie nastrecza żadnych trudności — należy tylko zbudować skrajne linje  $L_1$  i  $L_2$  roju, styczne obwodu, a oddalone o  $e_1$  i  $e_2$  od linii obojętnej. Wartości  $e_1$  i  $e_2$  wyznaczają skrajne wartości naprężeń

$$\sigma_{s1} = e_1 M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} \quad \sigma_{s2} = e_2 M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} \quad \dots (2).$$

Bezwzględnie większa z tych dwóch wartości stanowi o bezpieczeństwie przekroju. W wypadku naprężeń gnących pierwszego rodzaju naprężenia skrajne, tylko co wypisane, są znaków odwrotnych, tutaj więc  $\sigma_{s1} \sigma_{s2} < 0$ . W wypadku naprężeń gnących drugiego rodzaju jedno z nich staje się zerem, to też iloczyn  $\sigma_{s1} \sigma_{s2} = 0$ , wreszcie w wypadku naprężeń gnących trzeciego rodzaju oba naprężenia skrajne są jednakowego znaku, a iloczyn  $\sigma_{s1} \sigma_{s2} > 0$ . A przeto *skrajne wartości naprężeń całkowicie określają rozkład naprężeń gnących przekroju.*

Wobec tego należy ustalić warunki powstawania układów naprężeń gnących owych trzech typów w zależności od sił zewnętrznych, odkształcających. Najłatwiej to skutecznie rozpatrując:

§ 4. Obciążenia mimośrodowe. Bierzemy pod uwagę (Rys. 2) obciążenie przekroju środkową siłą  $S$  prostopadłą do jego pola i momentem gnącym  $M_g$ , leżącym w tym polu.



Rys. 2.

Działanie momentu gnącego możemy niewątpliwie zastąpić działaniem jego pary, leżącej w płaszczyźnie, która przechodzi przez oś  $OZ$ , znacząc w przekroju ślad — oś sił  $O\Sigma$ . Wyznamy ramię tej pary z równania  $M_g = \pm \Delta S$  czyli  $\Delta = \pm M_g : S$ . Podwójny znak jest tu konieczny, bo owo ramię  $\Delta$  ma być rdzennie dodatnie, a nadto z założenia  $M_g > 0$  podczas gdy  $S \cong 0$ .

Gdy wypadkowa  $S$  obciążenia zewnętrznego jest dodatnia, wtedy para  $\Delta S$  łącznie z tą siłą da wypadkową  $S$ , również dodatnią, a przyłożoną do punktu  $Q$  o współrzędnych biegunowych: promieniu wodzącym  $\Delta$  i kącie biegunowym  $\varphi = \omega + \frac{\pi}{2}$ , jak to zresztą najłatwiej zau-

ważyć z rysunku. Natomiast, gdy wypadkowa  $S$  jest ujemna, wtedy para  $-\Delta S$ , łącznie z tą siłą daje wypadkową  $S$ , również ujemną, lecz przyłożoną do punktu  $Q$  o współrzędnych biegunowych:  $\Delta$  i  $\varphi = \omega + \frac{3}{2}\pi$ . Wynika to bezpośrednio z omówień wyżej poczynionych. W obu wypadkach obciążenie przekroju stanowić przeto będzie pojedyncza siła  $S$ , dodatnia lub ujemna, mimośrodowo przyłożona do punktu  $Q$  o współrzędnych biegunowych — promieniu wodzącym  $\Delta$  i kącie biegunowym  $\varphi$ . Wyznamy współrzędne prostokątne tych punktów. W wypadku siły środkowej  $S$  dodatniej będziemy mieli niewątpliwie

$$\xi = \Delta \cos \varphi = \frac{M_g}{S} \cos \left( \omega + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{M_g}{S} \sin \omega;$$

$$\eta = \Delta \sin \varphi = \frac{M_g}{S} \sin \left( \omega + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{M_g}{S} \cos \omega, \text{ a dla siły środkowej } S$$

$$\text{ujemnej } \xi = \Delta \cos \varphi = -\frac{M_g}{S} \cos \left( \omega + \frac{3}{2}\pi \right) = -\frac{M_g}{S} \sin \omega$$

$$\eta = \Delta \sin \varphi = -\frac{M_g}{S} \sin \left( \omega + \frac{3}{2}\pi \right) = \frac{M_g}{S} \cos \omega. \quad \text{Ponieważ nadto}$$

$$M_x = M_g \cos \omega, \quad M_y = M_g \sin \omega, \text{ przeto dla obu wypadków } \xi = -\frac{M_y}{S},$$

$\eta = \frac{M_x}{S}$ , co daje  $M_x = S\eta$ ,  $M_y = -S\xi$ . Stąd wnioskujemy bezpośrednio, że obciążenie przekroju siłą środkową doń prostopadłą i momen-



tem gnącym można zastąpić siłą pojedynczą, równoległą i równą poprzedniej, a przyłożoną mimośrodowo do pewnego punktu, leżącego w płaszczyźnie przekroju. Tego rodzaju obciążenie zwać będziemy mimośrodowym obciążeniem siłą  $S$ , a punkt  $Q$  uczepienia tej siły — środkiem naprężeń przekroju. Jako środek sprowadzenia sił, może on i nie leżeć w przekroju, a nawet w szczególnym wypadku, gdy  $S = 0$ , środek naprężeń ulata w nieskończoność, wtedy bowiem  $\xi = \eta = \infty$ . Nie należy się temu dziwić, jest to bowiem wypadek działania momentu gnącego, czyli pary dwóch sił równych zeru na ramię nieskończenie wielkie. Włączając i ten skrajny wypadek w krąg naszych rozważań, otrzymamy ogólny wzór dla naprężenia gnącego

$$\sigma_x = -\frac{M_y}{J_y}x + \frac{M_x}{J_x}y + \frac{S}{F} = S \left[ \frac{\xi x}{J_y} + \frac{\eta y}{J_x} + \frac{1}{F} \right] \dots \dots (3)$$

gdzie wchodzi współrzędne środka naprężeń. W tej nowej postaci wypisany wzór pozwoli otrzymać nowe, nader cenne własności układu naprężeń gnących.

**§ 5. Środek naprężeń.** Bierzemy pod uwagę przekrój płaski, obciążony siłą  $S$  mimośrodkową, działającą w środku naprężeń  $Q$  ( $\xi$ ,  $\eta$ ) prostopadłe do przekroju. Równanie linii obojętnej będzie tu

$$\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0.$$

Ta prosta przecina osie  $OX$ ,  $OY$  w punktach  $[X_0, 0]$ ,  $[0, Y_0]$ , przyczem  $X_0 = -J_y : F\xi$ ,  $Y_0 = -J_x : F\eta$ .

Spółrzędne  $\xi$ ,  $\eta$  i  $X_0$ ,  $Y_0$  są zawsze różnych znaków; stąd wnioskujemy, że linia obojętna przecina boki ćwiartki osi współrzędnych, wierzchołkowo przeciwległej ćwiartce, w której leży środek naprężeń.

Ten wniosek traci swą moc, gdy środek naprężeń leży na jednej z głównych osi przekroju. Wtedy albo  $\xi = 0$ , albo  $\eta = 0$  i odpowiednio do tego równanie linii obojętnej będzie:

$\frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0$ , lub też:  $\frac{\xi}{J_y} X + \frac{1}{F} = 0$ , a zatem linia obojętna jest prostopadła do głównej osi przekroju, gdy na tej osi leży środek naprężeń.

Powyższe wzory dają  $\xi = -J_y : FX_0$ ,  $\eta = -J_x : FY_0$ . Stąd łatwy sposób wyznaczania współrzędnych środka naprężeń według danej linii obojętnej przekroju. Lepiej to jednak czynić w sposób następujący. Weźmy na danej linii obojętnej (Rys. 1) dowolny zresztą punkt  $\mu_0$  ( $x$ ,  $y$ ). Równanie linii obojętnej, przez ten punkt przechodzącej będzie:  $Y - y = m(X - x)$ , gdzie  $m = tg\psi$ . Tylko co wypisane równanie różni się postacią jedynie od równania zwykłego  $\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0$  linii

obojętnej, to też współczynniki obu tych równań winny być proporcjonalne, musi być przeto:  $m : \left[ \frac{\xi}{J_y} \right] = -1 : \left[ \frac{\eta}{J_x} \right] = (y - mx) : \left[ -\frac{1}{F} \right]$ , skąd otrzymamy bezpośrednio wzory:

$$\xi = \frac{mJ_y}{F(y-mx)}, \quad \eta = -\frac{J_x}{F(y-mx)} \dots \dots \dots (4)$$

wyznaczające współrzędne środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej. Ponieważ między współrzędnymi obranego punktu  $\mu_0$  i współrzędnymi jakiegokolwiek innego punktu  $\mu_1 (x_1, y_1)$  na linii obojętnej zachodzi związek  $y - mx = y_1 - mx_1$ , przeto *współrzędne środka naprężeń, przynależnego do danej linii obojętnej, mogą być wyrażone w funkcji współrzędnych jakiegokolwiek punktu na linii tej leżącego, oraz jej współczynnika kąтового.*

Rozumowanie powyższe stosuje się do wszelkiego  $m$  skończonego; gdy jednak linja obojętna jest równoległa do osi  $OY$ , wtedy  $m = \infty$ , a równanie jej będzie  $X - x = 0$ . W danym wypadku warunki proporcjonalności współczynników będą:  $1 : \left[ \frac{\xi}{J_y} \right] = 0 : \left[ \frac{\eta}{J_x} \right] = -x : \left[ -\frac{1}{F} \right]$  Stąd otrzymamy wzory:  $\xi = J_y : Fx, \eta = 0$ .

To samo również możemy otrzymać bezpośrednio, kładąc we wzorach ogólnych  $m = \infty$ . A zatem wzory wyżej wypisane dla  $\xi$  i  $\eta$  stosują się do wszelkich wartości  $m$ .

Gdyśmy w ten sposób udowodnili zupełnej ogólności wzorów (4), przypuszczamy, że nieskończona liczba linii obojętnych przechodzi przez dany punkt  $\mu_0 (x, y)$  przekroju. Każdej z tych linii obojętnych, a raczej każdej poszczególnej wartości współczynnika  $m$  we wzorach — odpowiada pewien ściśle określony środek naprężeń. Zespół tych wszystkich środków utworzy miejsce geometryczne. Z łatwością wyznaczymy jego równanie rugując  $m$  z równań dla  $\xi, \eta$ . W tym celu mnożymy  $\xi$  przez  $x$ , a  $\eta$  przez  $y$  i dodajemy, otrzymując:

$$\frac{x}{J_y} \xi + \frac{y}{J_x} \eta + \frac{1}{F} = 0.$$

Tą drogą dostaliśmy równanie linii prostej, pochylonej ku osi  $OX$  pod kątem  $\chi = \text{arc tg} \left[ -\frac{J_x x}{J_y y} \right]$ .

*Nieskończonej ilości linii obojętnych, przechodzących przez dany punkt, odpowiada nieskończona liczba środków naprężeń, tworzących linię prostą.*

Dalsze własności linii obojętnych poznamy, rozpatrując

**§ 6. Rdzeń przekroju.** Niechaj w układzie osi głównych  $OX, OY$  przekroju równanie  $K(x, y) = 0$  wyznacza krzywą wypukłą, nie mającą punktów osobliwych — obwód pola  $F$  przekroju (Rys. 3). Założymy,



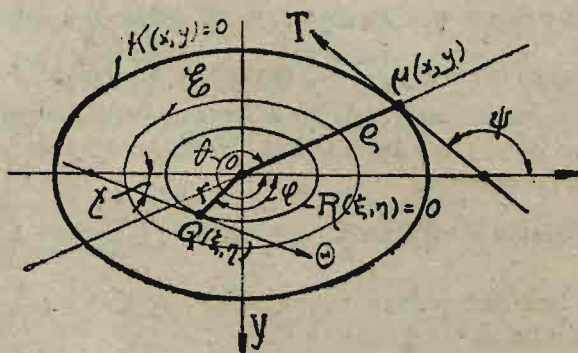
że linja obojętna jest styczną  $T$  obwodu w pewnym jego punkcie  $\mu(x, y)$ . Spółrzędne odnośnego środka naprężeń  $Q(\xi, \eta)$  będą odpowiednio:

$$\xi = \frac{J_y y'}{F(y - xy')}$$

$$\eta = -\frac{J_x}{F(y - xy')}$$

tutaj bowiem współczynnik kątowy linii obojętnej  $T$  wyznaczy się z równania obwodu w postaci:

$$m = \operatorname{tg} \Psi = y' = \frac{dy}{dx} = -\left[ \frac{\partial K(x, y)}{\partial x} \right] : \left[ \frac{\partial K(x, y)}{\partial y} \right]$$



Rys. 3.

Rozpatrzmy cały układ linii obojętnych  $T$ , tworzących rój stycznych obwodu. Każdą z prostych tego roju w zupełności określają współrzędne  $x, y$  punktu styczności  $\mu$ , oraz współczynnik kątowy  $y'$  w tym punkcie. Do każdej linii obojętnej — stycznej obwodu przynależy pewien określony środek naprężeń, bo krzywa obwodu, jak to wynika z założenia, punktów osobliwych nie posiada, każdej więc parze wartości  $x, y$ , czyniącej zadość równaniu  $K(y, x) = 0$  odpowiada pewna wartość pochodnej  $y'$ , a więc i para wartości współrzędnych  $\xi, \eta$  odnośnego środka naprężeń. Geometrycznym miejscem wszystkich tych środków naprężeń będzie krzywa zwana *rdzeniem przekroju*.

Jej równanie otrzymamy, wyznaczając z równań, określających  $\xi$  i  $\eta$  — zmienne  $x, y$  w postaci funkcji  $x = f(\xi, \eta)$ ,  $y = g(\xi, \eta)$  i podstawiając je w równanie obwodu. Tą drogą otrzymamy równanie  $K(f, g) = 0$  *rdzenia*. Istnieć ono będzie zawsze, o ile tylko krzywa obwodu będzie ciągła, bez punktów osobliwych. A zatem: *linjom obojętnym — stycznym obwodu przekroju odpowiada krzywa — rdzeń przekroju — geometryczne miejsce odnośnych środków naprężeń*.

Oznaczmy przez  $\chi$  kąt, jaki tworzy z osią  $OX$  styczna *rdzenia*, przechodząca przez punkt  $Q$ . Różniczkowaniem bezpośrednim wzorów dla  $\xi, \eta$  znajdziemy:

$$d\xi = \frac{J_y}{F} \frac{yy' dx}{(y - xy')^2}, \quad d\eta = -\frac{J_x}{F} \frac{xy' dx}{(y - xy')^2},$$

$$\eta' = \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{J_x}{J_y} \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \chi.$$

Z kolei oznaczmy przez  $\rho$  — promień wodzący punktu  $\mu$ , przez  $\theta$

jego kąt biegunowy, przez  $r$  promień wodzący odnośnego środka naprężeń. Ponieważ środek naprężeń leży na osi sił, przeto jego kąt biegunowy jest  $\varphi$ . Zważywszy, że  $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ , otrzymamy na zasadzie powyższego wzoru  $J_x + J_y \operatorname{tg}\chi \operatorname{tg}\theta = 0$ : styczna rdzenia, przechodząca przez dany środek naprężeń na rdzeniu, oraz promień wodzący odnośnego punktu na obwodzie wyznaczają kierunki sprzężonych średnic środkowej elipsy bezwładności.

Dzieląc wzory dla  $\xi, \eta$ , otrzymamy  $\frac{\xi}{\eta} = -\frac{J_y}{J_x} y'$ , skąd  $y' = -\frac{J_x}{J_y} \frac{\xi}{\eta} = \operatorname{tg}\Psi$ .

Ponieważ jednak niewątpliwie  $\operatorname{tg}\varphi = \eta : \xi$ , przeto ostatecznie będziemy mieli:  $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Psi = 0$ .

Styczna obwodu, przez dany punkt poprowadzona, oraz promień wodzący odnośnego środka naprężeń na rdzeniu—wyznaczają kierunki sprzężonych średnic elipsy bezwładności środkowej. Widzimy tu uderzające podobieństwo dwu ostatnich wniosków. Nie jest ono przypadkowe. Aby to udowodnić, określamy z równania dla  $\eta$  dwumian  $y - xy' = -\frac{J_x}{F\eta}$ .

Inaczej jeszcze

$$-\frac{J_x}{F\eta} = y \left( 1 - \frac{x}{y} y' \right) = y \left[ 1 + \frac{J_x}{J_y} \frac{\xi}{\eta} \frac{x}{y} \right] = y \left[ 1 - \eta' \frac{\xi}{\eta} \right].$$

Ostatecznie przeto otrzymamy dla spółrządnej

$$y = -\frac{J_x}{F(\eta - \xi\eta')}. \text{ Nadto } x = -\frac{J_y}{J_x} y\eta', \text{ skąd } x = \frac{J_y \eta'}{F(\eta - \xi\eta')}.$$

Te wzory dowodzą, że pomiędzy środkiem naprężeń na rdzeniu, a punktem odnośnym obwodu zachodzi wzajemność. Te same wzory łączą spółrządne obu punktów wprost i odwrotnie. Tem się objaśnia owo podobieństwo wniosków. Siega ono znacznie dalej nawet. Równanie stycznej w punkcie  $Q$  ( $\xi, \eta$ ) rdzenia przekroju jest  $H - \eta = \eta' (\Xi - \xi)$ . Wobec tego, że  $\eta' = -x J_x : y J_y$ , otrzymamy  $H - \eta = -\frac{J_x x}{J_y y} (\Xi - \xi)$ .

Ponadto inaczej jeszcze:

$$\frac{\Xi x}{J_y} + \frac{H y}{J_x} - \frac{\eta y}{J_x} - \frac{x \xi}{J_y} = \frac{x}{J_y} \Xi + \frac{y}{J_x} H + \frac{1}{F} = 0.$$

Otrzymane tu równanie stycznej rdzenia niczem się nie różni od równania linii obojętnej, przynależnej do środka naprężeń  $\mu(x, y)$ , leżącego na obwodzie pola. Stąd wniosek, że linja obojętna, przynależna do danego środka naprężeń, leżącego na obwodzie pola, stanowi styczną rdze-



nia w odnośnym punkcie. I w tym wniosku widzimy wzajemność między rdzeniem a obwodem.

Tylko co wyprowadzone wzory pozwalają otrzymać równanie rdzenia. Niechaj, jak dawniej, równanie  $K(x, y) = 0$  wyznacza obwód przekroju. Podstawiając w nie wartości dla  $x, y$ , otrzymamy równanie różniczkowe, zawierające  $\xi, \eta, \eta'$ , któremu oczywiście winno czynić zadość równanie rdzenia, jako jedna z całek. Aby ją otrzymać, całkujemy przez różniczkowanie:

$$\frac{dK}{d\xi} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{dy}{d\xi} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{J_y}{F} \frac{\eta\eta''}{(\eta - \xi\eta')^2} - \frac{\partial K}{\partial y} \frac{J_x}{F} \frac{\xi\eta''}{(\eta - \xi\eta')^2} = 0.$$

$$\text{Nadto: } \frac{\partial K}{\partial \eta'} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta'} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta'} = \frac{\partial K}{\partial x} \frac{J_y}{F} \frac{\eta}{(\eta - \xi\eta')^2} - \frac{\partial K}{\partial y} \frac{J_x}{F} \frac{\xi}{(\eta - \xi\eta')^2} =$$

$$= \left[ \frac{dK}{d\xi} \right] : \eta'. \text{ Ostatecznie } \frac{dK}{d\xi} = \frac{\partial K}{\partial \eta'} \eta' = 0.$$

Stąd bezpośrednio wnioskujemy, że  $\eta'' = 0$ , co daje  $\eta' = a$ . W ten sposób całka ogólna równania różniczkowego jest

$$K \left( \frac{J_y a}{F(\eta - \xi a)}, \frac{-J_x}{F(\eta - \xi a)} \right) = 0.$$

Rozwiązując to równanie względem dwumianu zawierającego  $\xi, \eta$ , otrzymamy  $\eta - \xi a = b$ , gdzie  $a$  i  $b$  są to niewątpliwie zupełnie dowolne wielkości — stałe całkowania. Całka ogólna wyobraża przeto rój prostych — układ stycznych rdzenia. W samej rzeczy, funkcja  $K$  staje się zerem wyłącznie i tylko dla spórzędnych  $x, y$  obwodu, a zatem musi być

$$a = \eta' = - \frac{J_x}{J_y} \frac{x}{y} \text{ oraz, jako tego wynik: } b = \eta - \xi\eta' = - \frac{J_x}{Fy},$$

$$\text{ostatecznie więc } \eta - \xi a - b = \eta + \frac{J_x}{J_y} \frac{x\xi}{y} + \frac{J_x}{Fy} = \left[ \frac{\eta y}{J_x} + \frac{\xi x}{J_y} + \frac{1}{F} \right] \frac{J_x}{y} = 0$$

$$\text{a przeto } \frac{\xi x}{J_y} + \frac{\eta y}{J_x} + \frac{1}{F} = 0. \text{ Jest to równanie stycznej rdzenia, w niem}$$

$\xi, \eta$  grają rolę spórzędnych bieżących, a zmienna  $x$  odgrywa rolę parametru, zmieniającego się ciągle w pewnych ściśle określonych granicach wraz z  $y$ , zależnym od  $x$  na zasadzie równania  $K(x, y) = 0$ . Zatem tą drogą nie możemy otrzymać równania rdzenia z całki ogólnej, jeno równanie roju jego stycznych. Mimo to jednak czynić winno mu ono zadość. *Równanie rdzenia stanowić musi całkę osobliwą, czyniącą zadość*

nie równaniu  $\eta'' = 0$ , a raczej  $\frac{\partial K}{\partial \eta'} = 0$ . Rugując  $\eta'$  z równań  $K(x, y) = 0$

i  $\frac{\partial K}{\partial r'} = 0$  z łatwością ją wyznaczymy. Otrzymamy w ten sposób równanie  $R(\xi, \eta) = 0$  rdzenia naszego przekroju. Z rachunku całkowego wiemy jednak, że tą samą drogą otrzymać można równanie *owijającej* roju prostych  $\eta - \xi a = b$ , roju *linji obojętnych, przynależnych do środków naprężeń, leżących na obwodzie*. A zatem rdzeń stanowi *owijającą roju linji obojętnych, przynależnych do środków naprężeń, leżących na obwodzie przekroju*.

Tylko co podany sposób wyznaczania rdzenia szybciej prowadzi do celu. Niech, dajmy na to, obwód przekroju wyraża się równaniem drugiego stopnia  $K(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy + g = 0$ . Podstawiając wartości dla  $x, y$  i mnożąc przez  $F^2(\eta - \xi\eta')$ , otrzymamy  $K(x, y) = N\eta'^2 - 2M\eta' + R = 0$ , gdzie:  $N = aJ_y^2 - 2dFJ_y\xi + gF^2\xi^2$ ,  $M = bJ_xJ_y - dFJ_y\eta + fFJ_x\xi + gF^2\xi\eta$ ,  $R = cJ_x^2 - 2fFJ_x\eta + gF^2\eta^2$ .

Pozatem różniczkując bezpośrednio mamy:  $\frac{\partial K}{\partial \eta'} = 2N\eta' - 2M = 0$ , stąd  $\eta' = \frac{M}{N}$  i ostatecznie równanie rdzenia będzie:  $R(\xi, \eta) = \frac{NM^2}{N^2} - \frac{2M^2}{N} + R = R - \frac{M^2}{N} = 0$ . Inaczej jeszcze  $M^2 - RN = F^2J_x^2(f^2 - cg)\xi^2 + 2F^2J_xJ_y(bg - df)\xi\eta + F^2J_y^2(d^2 - ga)\eta^2 + 2FJ_x^2J_y(cd - bf)\xi + 2FJ_xJ_y^2(af - bd)\eta + J_x^2J_y^2(b^2 - ac) = 0$ .

*Rdzeń pola, ograniczonego krzywą drugiego stopnia, jest też krzywą drugiego stopnia.*

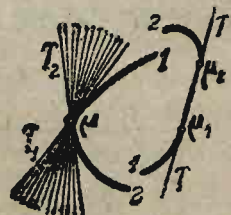
Z kolei niech znowu będzie równanie  $R(\xi, \eta) = 0$  rdzenia przekroju, którego obwód —  $K(x, y) = 0$ . Kładąc w równaniu  $R(\xi, \eta) = 0$  wartości  $\xi, \eta$  otrzymamy równanie różniczkowe, zawierające  $x, y, y'$ , któremu czynić winno zadość równanie obwodu, jako jedna z całek. Rozwiązując zupełnie tak samo, jak poprzednio, otrzymamy:

$$R\left(\frac{J_y a}{F(y-ax)}, \frac{-J_x}{F(y-ax)}\right) = 0,$$

które wyraża rój stycznych obwodu. Zatem równanie obwodu nie daje się otrzymać z całki ogólnej przez nadanie stałej całkowania wartości szczególnej, stanowi przeto całkę osobliwą, którą otrzymamy, rugując  $y'$  z równań  $R(\xi, \eta) = 0$  i  $\frac{\partial R}{\partial y'} = 0$ . Tą samą drogą otrzymujemy równanie *owijającej roju prostych stycznych obwodu, stanowiących linje obojętne środków leżących na rdzeniu, a przeto: obwód danego pola stanowi owijającą roju linji obojętnych, przynależnych do środków naprężeń, leżących na rdzeniu*. Ten wniosek można również otrzymać wprost na zasadzie prawa wzajemności.



Dotychczas rozpatrywaliśmy krzywe obwodów, pozbawione punktów osobliwych; obecnie należy rozszerzyć obszar badań, biorąc (Rys. 4) pod uwagę część obwodu, złożoną z dwóch łuków  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , zbiegających się pod kątem w punkcie  $\mu$ , który zwać będziemy *punktem zespolenia*. Styczne obu gałęzi tworzą w tym punkcie kąt różny od zera. Rozpatrując rój stycznych tej części obwodu, z łatwością dojdziemy do wniosku, na zasadzie już znanych własności, że:



Rys. 4.

1° każdemu łukowi krzywej obwodu (a więc łukom  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ) odpowiadają również ściśle określone łuki rdzenia ( $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ),

2° nieskończonej liczbie rzekomych stycznych, zawartych wewnątrz kąta, utworzonego przez skrajne styczne — obu łuków, zbiegających się w punkcie zespolenia, odpowiada prosta ( $T$ ), stanowiąca odnośną część rdzenia — zwana *prostą zespolenia*. Ta prosta stanowi wspólną styczną wyżej wspomnianych łuków rdzenia, równanie bowiem

$$\frac{E_x}{J_y} + \frac{H_y}{J_x} + \frac{1}{F} = 0$$

wyznacza zarówno prostą zespolenia, jakoteż i styczne łuków  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  w punktach  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , dla których punkt  $\mu$  jest odnośnym punktem obwodu. A przeto *gdy jakakolwiek część obwodu pola składa się z dwóch gałęzi, zbiegających się w punkcie zespolenia, wtedy odpowiednia część rdzenia będzie złożona z dwóch łuków, przynależnych do owych krzywych gałęzi obwodu, połączonych prostą zespolenia, styczną obu tych łuków. Prosta zespolenia stanowi odpowiednik punktu zespolenia.*

W podobny sposób z łatwością udowodnimy również, że, *gdy jakakolwiek część rdzenia składa się z dwóch krzywych łuków, połączonych ze sobą styczną zespolenia, wtedy odnośna część obwodu będzie złożona z dwóch krzywych, zbiegających się w punkcie zespolenia.*

Na mocy prawa wzajemności mamy nadto: *gdy jakakolwiek część rdzenia składa się z dwóch krzywych, zbiegających się pod kątem w punkcie zespolenia, wtedy odnośna część obwodu będzie złożona z dwóch łuków, przynależnych do owych krzywych gałęzi rdzenia, połączonych ze sobą prostą zespolenia, styczną obu łuków. Wniosek odwrotny również jest słuszny. Gdy jakakolwiek część obwodu składa się z dwóch łuków, połączonych wspólną styczną zespolenia, to odnośna część rdzenia będzie złożona z dwóch krzywych, zbiegających się pod kątem w punkcie zespolenia.*

Te wnioski pozwalają budować rdzeń dla wszelkiego przekroju, bo każdy obwód pola w ogólnym wypadku składa się w poszczególnych krzywych łuków, zbiegających się w punktach zespolenia, lub połączo-

nych prostemi zespolenia. Nadto pewne ułatwienie mogą dać następujące własności linii obojętnych:

Weźmy (Rys. 5) jakikolwiek przekrój, wyznaczmy jego obwód  $K$ , rzeń  $R$  i elipsę środkową bezwładności  $E$ , której równanie

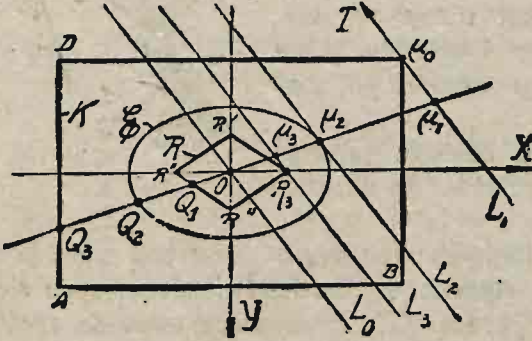
$$[x : i_y]^2 + [y : i_x]^2 = 1$$

możemy, dzieląc przez  $F$ , przedstawić w postaci:

$$\frac{x^2}{J_y} + \frac{y^2}{J_x} - \frac{1}{F} = 0. \text{ Obierzmy}$$

jakąkolwiek oś sił, a na niej środek naprężeń  $Q$  ( $\xi, \eta$ ), o współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$ . Linia obojętna, do tego środka przynależna, będzie:

$$\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y + \frac{1}{F} = 0.$$



Rys. 5.

Spółrzędne punktu przecięcia się tej linii obojętnej z osią sił będą oczywiście czyniły zadość temu równaniu, oraz równaniu osi sił, które możemy wypisać w postaci  $Y = X \operatorname{tg} \varphi = mX$ . Oznaczmy spółrzędne tego punktu przez  $X, Y$  prostokątne, przyczem  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2} = X \sqrt{1 + m^2} =$

$= X \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}$  oznaczać będzie jego promień wodzący. Ponieważ dalej  $\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \varphi$ , przeto  $Y\eta = m^2 X \xi$ , gdzie  $m = \operatorname{tg} \varphi$  i ostatecznie równanie

lini obojętnej będzie  $X \xi \left[ \frac{1}{J_y} + \frac{m^2}{J_x} \right] + \frac{1}{F} = 0$ , a więc z tego równania

wyływa, że  $X \xi$  jest wielkością stałą,  $X \xi = -J_x J_y : [J_x + m^2 J_y] F$ ; zatem również  $Y \eta$  jest wielkością stałą, albowiem  $Y \eta =$

$= m^2 X \xi = -J_x J_y, m^2 : [J_x + m^2 J_y] F$ . Podobnie też  $r \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

$\sqrt{X^2 + Y^2} = X \xi (1 + m^2) = -J_x J_y (1 + m^2) : [J_x + m^2 J_y] F$ : iloczyn

ten jest również stałą. A zatem, gdy środek naprężeń posuwa się po osi sił — odnośna linia obojętna również się posuwa, pozostając równoległą do osi elipsy środkowej bezwładności, kierunkowo z osią sił sprzężonej.

Nadto, gdy środek naprężeń leży w nieskończoności, to jest gdy  $\xi = \eta = \infty$ , wtedy  $X = Y = 0$ : linia obojętna przechodzi przez środek przekroju, gdy odnośny środek naprężeń jest nieskończenie daleki.

Gdy środek naprężeń wychodzi z nieskończoności i posuwa się po osi sił ku początkowi współrzędnych —  $\xi, \eta$  maleją, a  $XY$  rosną — równocześnie więc linia obojętna, wychodząc ze środka przekroju, oddala się równoległe do siebie samej.

Gdy środek naprężeń wkroczy na obwód w punkcie  $Q_3$ , linia obo-

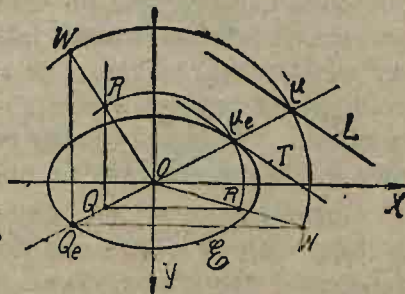


jętna dotknie rdzenia w  $R_3$ , przyczem dotyk należy tu pojmować już to jako istotne stykanie się geometryczne, już to jako zwykłą tylko współność punktu bez wyraźnej styczności w ścisłym tego słowa znaczeniu, jak to właśnie ma miejsce w rozpatrywanym wypadku. Gdy z kolei środek naprężeń porzuca obwód i dąży ku środkowej elipsie bezwładności przekroju, odnośna linja obojętna oddala się jeszcze bardziej. Gdy środek wkroczy na elipsę w  $Q_2$  o spólrzędnych  $X_e, Y_e$ , odnośna linja obojętna stanie się styczną tej elipsy w średnicowo przeciwnym punkcie  $\mu_2 (-X_e, -Y_e)$ . Łatwo to udowodnić zważywszy, że spólrzędne punktu  $Q_2$ , leżącego z założenia na elipsie, czynić winny zadość jej równaniu  $\frac{X_0^2}{J_y} + \frac{Y_0^2}{J_x} - \frac{1}{F} = 0$ . Z drugiej znow strony równanie linii obojętnej,

przynależnej do środka naprężeń  $Q_2(X_e, Y_e)$  będzie tu  $\frac{XX_e}{J_y} + \frac{YY_e}{J_x} + \frac{1}{F} = 0$ . Z porównania obu tych równań wynika, że  $X = -X_e$ ,

$Y = -Y_e$ , co należało udowodnić. Nadto owa linja obojętna, jako sprzężona kierunkowo z osią sił — musi być styczną elipsy. Widzimy stąd, że rdzeń zawarty jest całkowicie wewnątrz elipsy środkowej przekroju. Gdy znowu środek naprężeń porzuca elipsę dążąc ku krzywej rdzenia, odnośna linja obojętna jeszcze się bardziej oddala. Gdy środek naprężeń wkroczy na rdzeń w punkcie  $Q_1$ , linja obojętna dotknie obwodu, lub przejdzie przez jego punkt jedyny bez wyraźnej styczności, jak to ma miejsce w danym wypadku. Wreszcie, gdy środek naprężeń porzuci rdzeń i zbliża się do środka masy przekroju, odnośna linja obojętna porzuca obwód i oddala się w nieskończoność. Te wszystkie wnioski są oczywiste wobec stałości iloczynów  $X\xi, Y\eta$ . Gdy w nich  $\xi = \eta = 0$ , to wtedy  $X = Y = \infty$ .

Na zasadzie rozważań poprzednich łatwo jest ustalić wykreślny sposób budowania linii obojętnej, przynależnej do danego środka naprężeń (Rys. 6). W tym celu przez dany środek  $Q$  prowadzimy oś sił  $O\Sigma$ , która przetnie elipsę środkową bezwładności w punktach  $Q_e$  i  $\mu_e$ . Przez  $Q$  i  $Q_e$  prowadzimy proste równoległe do jednej z głównych osi przekroju. Kreśląc łuk  $\mu_e R$  promieniem  $O\mu_e$  do przecięcia się z ową prostą przez  $Q$  poprowadzoną, prowadzimy promień  $OR$  i przedłużamy do przecięcia się z równoległą przez  $Q_e$  poprowadzoną. Łuk, opi-



Rys. 6.

sany promieniem  $OW$  z owego punktu przecięcia, odetnie na osi sił odcinek  $O\mu$ . Przez  $\mu$  przejdzie szukana linja obojętna, przynależna do  $Q$ . Aby ją ostatecznie wykreślić, należy zbudować styczną  $T$  elipsy bezwładności, przechodzącą przez  $\mu_e$ . Szukana linja obojętna będzie jej równoległa.

Zupełnie tak samo możemy wyznaczyć środek naprężeń, przynależny do danej linii obojętnej  $L$ . Prowadzimy styczną  $T$  elipsy bezwładności przekroju środkowej, równoległą do  $L$ . Ta styczna przejdzie przez punkt styczności  $\mu_e$  na elipsie. Łączymy  $\mu_e$  ze środkiem przekroju osią sił  $O\Sigma$  która wyznaczy drugi punkt średnicowo przeciwległy  $Q_e$  na elipsie oraz punkt  $\mu$  przecięcia się z daną linią obojętną. Przez punkt  $Q_e$  prowadzimy prostą równoległą do jednej z osi głównych przekroju. Zataczając łuk  $\mu W$  promieniem  $O\mu$  znajdujemy punkt przecięcia się  $W$  tego łuku z prostą tylko co poprowadzoną. Łączymy  $W$  z  $O$  i zataczamy łuk promieniem  $O\mu_e$ , który wyznaczy na  $OW$  punkt przecięcia  $R$ . Prosta  $RQ$  równoległa do  $Q_eW$  poprowadzona przetnie oś  $O\Sigma$  w  $Q$  — szukanym środkiem naprężeń.

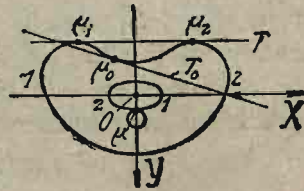
Aby to udowodnić oznaczamy  $OQ_e = r_e$ ,  $OQ = r$ ,  $O\mu_e = \rho_e$ ,  $O\mu = \rho$ . Wyżej widzieliśmy, że styczna  $T$  elipsy środkowej stanowi linję obojętną, przynależną do środka naprężeń  $Q_e$ , mamy więc  $r\rho = r_e\rho_e = \text{stałe}$ . To samo wynika z podobnych trójkątów  $\triangle Q_eWO$  i  $\triangle QRO$ , gdzie  $OQ_e : OQ = OW : OR = O\mu : O\mu_e$  czyli  $r_e : r = \rho : \rho_e$  i ostatecznie  $r_e\rho_e = r\rho$ , co należało udowodnić.

Na zasadzie wyżej wyłuszczonej wniosków z łatwością daje się zauważyć, że skoro środek naprężeń leży poza rdzeniem, przynależna doń linja obojętna przecina przekrój, a wtedy obciążenie przekroju składa się z naprężeń różnych znaków. W budownictwie tego rodzaju rozkładów naprężeń należy unikać, wobec nader małej wytrzymałości na rozciąganie kamieni, a zwłaszcza zapraw i cementu. Należy przeto przekroje obciążać jednoimiennymi naprężeniami ciśnącymi. Stąd wskazówka praktyczna, że środek naprężeń nie powinien wychodzić poza rdzeń przekroju, a zatem winien leżeć wewnątrz lub na rdzeniu. Jest to warunek konieczny. Czy dostateczny? Tak, o ile styczne obwodu nie przecinają pola przekroju, wtedy bowiem każda ze stycznych ma odnośny środek naprężeń na rdzeniu. W tym wypadku na stycznych panować będą naprężenia zerowe a cały przekrój będzie obciążony naprężeniami jednego znaku.

Inaczej rzecz się ma, gdy styczna przekroju przecina jego pole. Jako linja obojętna należy ona do środka naprężeń leżącego na rdzeniu, na niej panują naprężenia równe zeru, skoro więc przecina pole przekroju, zatem go dzieli na dwa obszary o naprężeniach różnych co do znaku.



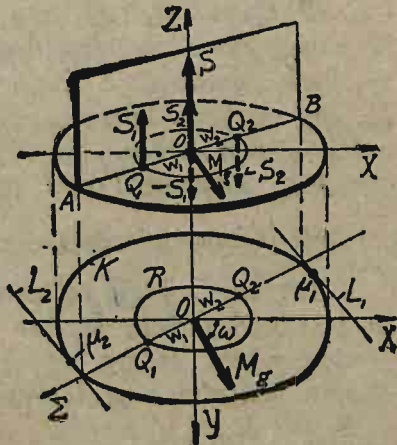
Ma to jedynie miejsce w tym wypadku, gdy na obwodzie przekroju zaznacza się zakłębienie, słowem gdy obwód nie jest krzywą wypukłą. Jest to samo przez się zrozumiałe: styczna  $T_0$  przekroju (Rys. 7) przechodząca przez punkt  $\mu_0$  zakłębienia musi przeciąć pole przekroju. Z tego powodu przy rozpatrywaniu rdzenia należy wyłączyć z pod rozpatrywania wszystkie styczne zakłębienia i ograniczyć się do wyznaczenia środka naprężeń, przynależnego do stycznej obwodu w punktach  $\mu_1$  i  $\mu_2$ , to jest do prostej zespolenia obu łuków, obejmujących zakłębienie. Ponieważ prostej zespolenia  $T$  i obu punktom styczności odpowiada jeden tylko środek naprężeń na rdzeniu, przeto pominięcie stycznych zakłębienia nie przerwie ciągłości rdzenia. Chcąc zatem wyznaczyć miejsce geometryczne skrajnych środków naprężeń, przynależnych do linii obojętnych, stycznych przekroju, lecz nie przecinających jego pola, należy pominąć wszystkie styczne zakłębień obwodu i ograniczyć się do rozpatrywania prostych zespolenia przerzuconych ponad zakłębieniami. Czyniąc tak wyłączamy z pod rozpatrywania część rdzenia, odpowiadającą zakłębieniu  $\mu_1\mu_0\mu_2$ .



Rys. 7.

która stanowi pętlę zewnętrzną, uczeponą do punktu zespolenia  $\mu$  dwóch łuków rdzenia zbiegających się w tym punkcie, przynależnym do prostej zespolenia  $T$  obwodu. Łuki rdzenia  $1\mu$ ,  $2\mu$  przynależą do łuków  $1\mu_1$ ,  $2\mu_2$  obwodu, pętlica zaś jest zawsze zewnętrzna w stosunku do rdzenia, bo zakłębienie  $\mu_1\mu_0\mu_2$  jako bliżej środka leżące da szereg środków naprężeń dalej od środka leżących niż punkt  $\mu$ , przynależny do stycznej  $T$ . A zatem jeżeli obwód przekroju posiada zakłębienie, to odpowiednia część rdzenia składa się z pętlicy leżącej na zewnątrz punktu zespolenia, przynależnego do prostej zespolenia, przerzuconej poprzez wklęsłość obwodu.

§ 7. Wyznaczanie skrajnych naprężeń normalnych przekroju za pomocą rdzenia. Weźmy pod uwagę przekrój (Rys. 8), odkształcony pod jarzmem środkowej siły  $S$  doń prostopadłej oraz momentu gnącego  $M_g$ , pochylonego ku osi głównej  $OX$  przekroju pod kątem  $\omega$ , a leżącego w przekroju. Wyznamy oś sił  $O\Sigma$  momentu i rdzeń przekroju. Oś sił przetnie rdzeń w punktach  $Q_1$ ,  $Q_2$ , odcinając promienie rdzenia  $w_1$  i  $w_2$ . Rozłożmy moment gnący na parę sił w taki



Rys. 8.

sposób, aby jedna z sił pary działała w środku przekroju, a druga w  $Q_1$  lub  $Q_2$  na rdzeniu. W pierwszym wypadku siłę pary wyznaczmy z równania  $M_g = w_1 S_1$ , a w drugim z  $M_g = w_2 S_2$ . W pierwszym wypadku w  $Q_1$  będzie działała siła  $S_1 = M_g : w_1$  dodatnia, oraz w środku przekroju siła  $-S_1$  ujemna łącznie z siłą  $S$ . W drugim natomiast w  $Q_2$  będziemy mieli siłę  $-S_2 = M_g : w_2$  ujemną, a w środku siłę  $S_2$  dodatnią, towarzyszącą sile  $S$ . Wyływa to bezpośrednio z założeń, dotyczących kierunku obrotowego momentu.

Godzi się tu zaznaczyć, że promień  $w_1$ , jako leżący na osi sił tuż za momentem ma kąt biegunowy  $\varphi_1 = \omega + \frac{\pi}{2}$ , podczas gdy promień  $w_2$ , poprzedniemu przeciwległy, przynależy do kąta biegunowego  $\varphi_2 = \omega + \frac{3}{2}\pi$ . W tem założeniu siła  $S_1$  przyłożona do  $Q_1$  jest zawsze dodatnia. Jej linja obojętna przecina boki przeciwległej ćwiartki, przechodząc przez punkt  $\mu_1$  obwodu. Wszystkie punkty tej linii  $L_1$ , a więc i punkt styczności  $\mu_1$  na obwodzie leżący, naprężeniowo od siły  $S_1$ , działającej w  $Q_1$ , nie zależą, ponieważ leżą na linii obojętnej, przynależnej do środka naprężeń  $Q_1$ . Natomiast pozostałe dwie siły środkowe  $-S_1$  i  $S$  dają dla punktu  $\mu_1$  naprężenie  $[-S_1 + S] : F = \frac{S}{F} - \frac{M_g}{Fw_1}$  takie samo, jak dla innych punktów przekroju, bo siły te, jako środkowe obciążają przekrój jednostajnie. Ponieważ sprowadziliśmy obciążenie przekroju od trzech sił tylko co wymienionych, przeto wzór otrzymany daje całkowitą wartość naprężenia w punkcie  $\mu_1$ .

Obciążenie zewnętrzne może być również sprowadzone do siły  $-S_2$  działającej mimośrodkowo w  $Q_2$  na rdzeniu oraz do sił środkowych  $S_2$  i  $S$ . Ponieważ  $Q_1$  i  $Q_2$  leżą na tej samej osi sił, przeto ich linje obojętne muszą być równoległe, bo są kierunkowo z tą osią sprzężone. Należy zatem poprowadzić drugą skrajną styczną obwodu  $L_2$ , równoległą do  $L_1$ , aby otrzymać linję obojętną dla środka naprężeń  $Q_2$ . Jej punkt styczności  $\mu_2$  naprężeniowo od siły  $-S_2$  nie zależy, leży bowiem na linii obojętnej, natomiast dwie pozostałe siły środkowe  $S_2$  i  $S$  obciążające przekrój jednostajnie dają dlań naprężenie  $[S_2 + S] : F = \frac{S}{F} + \frac{M_g}{Fw_2}$ .

Zwróćmy uwagę, że kierunkowo sprzężone z osią sił styczne obwodu  $L_1$  i  $L_2$  stanowią skrajne proste roju linii równych naprężeń, to też, zgodnie z tem cośmy wyżej wyprowadzili, wiemy, że na nich panują skrajne wartości naprężeń normalnych  $\sigma_{s1}$  i  $\sigma_{s2}$ . Mamy więc  $\sigma_{s1} = \frac{S}{F} - \frac{M_g}{Fw_1}$ ,  $\sigma_{s2} = \frac{S}{F} + \frac{M_g}{Fw_2}$ . A zatem możemy wypowiedzieć na-



stępujący wniosek: skrajne wartości naprężeń normalnych przekroju, obciążonego środkową siłą doń prostopadłą, oraz momentem gnącym, leżącym w przekroju, można wyznaczyć, dzieląc przez przekrój sumę i różnicę owej siły i momentu, podzielonego przez odnośne promienie rdzenia, leżące na osi sił momentu. Różnicy odpowiada promień rdzenia, leżący na osi sił tuż za momentem gnącym, — sumie dalszy promień pierwszemu przeciwnieległy. Inaczej mówiąc — różnicy odpowiada promień przynależny do kąta  $\omega + \pi/2$ , a sumie — promień przynależny do  $\omega + 3/2 \pi$ , gdzie  $\omega$  oznacza kąt pochylenia momentu gnącego ku głównej osi przekroju.

**§ 8. Przykłady i ćwiczenia. 1. Przekrój prostokątny.** Moment gnący leży na jednej z głównych osi przekroju. Wyznaczyć skrajne naprężenia w założeniu podstawy  $B = 10$  cm, wysokości przekroju  $H = 12$  cm i  $M_g = 0,2$  (tn, m). Korzystając ze znakowania (I. Rys. 14) mamy  $J_x = 1/12 \times 10 \times 12^3 = 1440$  cm<sup>4</sup>  $J_y = 1/12 \times 12 \times 10^3 = 1000$  cm<sup>4</sup>.

A zatem równanie linii obojętnej będzie:  $-\frac{\sin \omega}{1000} X + \frac{\cos \omega}{1440} Y = 0$ , a na-

prężenia skrajne wyznaczą się ze wzoru:  $e M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{1440^2} + \frac{\sin^2 \omega}{1000^2}}$ , gdy uczynimy w nim  $e = e_1$  i  $e = e_2$ .

Założmy przedewszystkiem, że moment leży na osi  $OX$ , zatem  $\omega = 0$  i linią obojętną będzie  $OX$ . Łatwo to spostrzec ze wzoru czyniąc w nim  $\cos \omega = 1$   $\sin \omega = 0$ . Tutaj więc  $e_1 = 1/2 H = 6$  cm,  $e_2 = -6$  cm. Zważywszy nadto, że  $M_g = 0,2 \times 1000 \times 100 = 20000$  (kg, cm), będzie-

my mieli  $\sigma_{s1} = 6 \times 20000 \times \sqrt{\frac{1}{1440^2}} = 83$  kg/cm<sup>2</sup>  $\sigma_{s2} = -83$  kg/cm<sup>2</sup>.

Te dwie wartości różnią się znakiem jedynie; naprężenie rozciągające skrajne panuje wzdłuż podstawy dolnej przekroju, ciśnące ujemne wzdłuż podstawy górnej.

Z kolei zakładamy, że moment leży na osi  $OY$  czyli że  $\omega = \frac{\pi}{2}$ .

Równanie linii obojętnej będzie tu  $X = 0$ , a przeto  $e_1 = \frac{B}{2} = 5$  cm  $e_2 =$

$= -5$  cm, a zatem  $\sigma_{s1} = 5 \times 20000 \sqrt{\frac{1}{1000^2}} = 100$  kg/cm<sup>2</sup> oraz  $\sigma_{s2} =$

$= -100$  kg/cm<sup>2</sup>. Te naprężenia skrajne panować będą wzdłuż krawędzi bocznych przekroju. Gdy oś  $OY$  skierujemy ku górze — w krawędzi lewej będziemy mieli naprężenie ciśnące, w prawej rozciągające.

**2. Dwuteownik.** Weźmy pod uwagę dwuteownik № 20. Oś symetrii, prostopadłą do średnika nazywamy  $OX$ , druga oś symetrii leży wewnątrz średnika. Tablice dają wartości momentów głównych  $J_x = 2139$  cm<sup>4</sup>  $J_y = 117$  cm<sup>4</sup>. Wysokość dwuteownika  $H = 20$  cm, szerokość obu pasów  $B = 9$  cm. Moment gnący  $M_g = 0,5$  (tn, m) pochyła

się ku osi  $OX$  pod kątem  $\omega = 28^\circ 20'$ . Wyznaczyć skrajne naprężenia przekroju. Ponieważ  $\text{Sin} \omega = 0,47460$ ,  $\text{Cos} \omega = 0,88020$  przeto

$$\sigma_x = - \frac{50000 \times 0,4746}{117} X + \frac{50000 \times 0,8802}{2139} Y$$

Równanie linii obojętnej będzie, gdy uczynimy w tym wzorze  $\sigma_x = 0$  — co da  $Y = 9,8576 X$ .

Przechodzi ona przez środek i pochyla się ku  $OX$  pod kątem  $\text{arctg} 9,8576 = 84^\circ 10'$ . Prowadząc skrajne styczne przekroju, równoległe do linii obojętnej, zauważymy, że dotkną one przekroju w punktach

$$\left(-\frac{B}{2}, \frac{H}{2}\right) \text{ oraz } \left(\frac{B}{2}, -\frac{H}{2}\right).$$

Tam będą panować skrajne wartości naprężeń normalnych, które wyznaczymy, pisząc  $\sigma_{x1} = 50000 \times 0,4746 \times$

$$\times 4,5 : 117 + 50000 \times 0,8802 \times 10 : 2139 = 1118,2 \text{ kg/cm}^2, \sigma_{x2} = -1118,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Te same wyniki moglibyśmy otrzymać również, wyliczając  $e_1$  i  $e_2$ . —

**3. Kątownik.** Weźmy (I. Rys. 15) pod uwagę kątownik równoramienny  $cm : 10 \times 10 \times 1$  i założmy, że moment gnący  $M_g = 0,3$  ( $tn, m$ ) pochyla się ku osi głównej  $OX$  przekroju pod kątem  $\omega = 14^\circ 40'$ . Tablice dają dla osi symetrii przekroju  $OX$ , pochylonej ku obu pasom pod  $45^\circ$ , wartości  $J_x = 280 \text{ cm}^4$ , a dla  $OY$  ku  $OX$  prostopadłej:  $J_y = 73,3 \text{ cm}^4$ . Ponieważ tutaj  $\text{Sin} \omega = 0,25320$ ,  $\text{Cos} \omega = 0,96742$ , przeto

$$\text{dla naprężenia normalnego otrzymamy wzór } \sigma_x = - \frac{30000 \times 0,2532}{73,3} x + \frac{30000 \times 0,96742}{280} y.$$

Czyniąc  $\sigma_x = 0$ , otrzymamy równanie linii obojętnej w postaci ostatecznej  $Y = 0,99978 X$ .

Przechodzi ona przez środek przekroju, pochylając się ku osi głównej  $OX$  pod kątem  $\approx 45^\circ$ . Jest to więc prosta prawie tożsamościowa z osią  $OY_0$ , kąt jej nachylenia ku osi  $OX$  jest jednak nieco mniejszy od  $45^\circ$ , przeto punkty najbardziej oddalone od linii obojętnej będą  $A$  i  $G$ . Wyznaczmy ich współrzędne. W układzie osi  $OX_0, OY_0$  będąc  $A (-2,82, 7,18)$  oraz  $G (7,18, -2,82)$  cm mamy bowiem dla tego przekroju  $\xi_0 = \eta_0 = 2,82$  cm. Zatem na mocy wzorów przejścia będziemy mieli w układzie osi głównych  $OX, OY$  dla punktu  $A$  współrzędne:  $x = -2,82 : \sqrt{2} + 7,18 : \sqrt{2} = 3,08$  cm,

$y = 2,82 : \sqrt{2} + 7,18 : \sqrt{2} = 7,07$  cm, a dla punktu  $G$  podobnie  $x = 3,08$  cm,  $y = -7,07$  cm. Zatem w  $A$  panować będzie naprężenie skrajne  $\sigma_{x1} = -30000 \times 0,2532 \times 3,08 + 73,3 + 30000 \times 0,96742 \times 7,07 : 280 = 413,6 \text{ kg/cm}^2$ , a w  $G$  panować będzie również naprężenie skrajne, lecz znaku przeciwnego  $\sigma_{x2} = -30000 \times 0,2532 \times 3,08 : 73,3 - 30000 \times 0,96742 \times 7,07 : 280 = -1052,0 \text{ kg/cm}^2$ . Bezwzględna wartość naprężenia w  $G$  jest większa. Można się było tego spodziewać, punkt bowiem  $G$  leży dalej od linii obojętnej niż  $A$ .



4°. **Przekrój kołowy.** Na przekrój kołowy średnicy  $D = 20$  cm działa moment gnący  $M_g = 3$  (tn, m) oraz siła środkowa  $S = 30, 120$  i  $150$  tn, prostopadła do przekroju. Wyznaczyć skrajne naprężenia normalne. Właściwie mówiąc są to trzy wypadki obciążenia mimośrodkowego siłami  $S_1 = 30$  tn,  $S_2 = 120$  tn i  $S_3 = 150$  tn prostopadłymi do przekroju, a działającymi w odległości:  $\Delta_1 = 300000 : 30000 = 10$  cm,  $\Delta_2 = 300000 : 120000 = 2,5$  cm i  $\Delta_3 = 300000 : 150000 = 2$  cm. Ponieważ mamy tu do czynienia z przekrojem obojętnym, przeto oś  $OX$  możemy ułożyć na kresie momentu, a wtedy współrzędne odnośnych środków naprężeń będą:  $Q_1(0,10)$ ,  $Q_2(0,2,5)$ ,  $Q_3(0,2)$  cm. Linje obojętne otrzymamy ze wzoru

ogólnego  $\frac{\xi}{J_y} X + \frac{\eta}{J_x} Y = \frac{1}{F} = 0$ , gdzie  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ ,  $\eta_1 = 10$  cm,  $\eta_2 = 2,5$  cm,  $\eta_3 = 2$  cm, a nadto  $J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$  oraz  $F = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$ . Ostatecznie więc otrzymamy równanie linii obojętnej w postaci

$\frac{64}{\pi D^4} Y \eta + \frac{4}{\pi D^2} = 0$  czyli  $Y = -D^2 : 16 \eta$ . Zatem kolejno będziemy mogli napisać:  $Y_1 = -400 : 16 \cdot 10 = -2,5$  cm,  $Y_2 = -400 : 16 \cdot 2,5 = -10$  cm,  $Y_3 = -400 : 16 \cdot 2 = -12,5$  cm. Wszystkie te trzy linje obojętne są równoległe do osi  $OX$ , przeto najbardziej oddalone punkty przekroju będą leżały na osi  $OY$ . W pierwszym wypadku będziemy mieli  $e_1 = 12,5$  cm,  $e_2 = -7,5$  cm, w drugim  $e_1 = 20,0$  cm,  $e_2 = 0$ , w trzecim  $e_1 = 22,5$  cm,  $e_2 = 2,5$  cm. Odnośne skrajne naprężenia otrzymamy ze wzoru

$$e M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}} = 300000 e \sqrt{\left[ 1 : \frac{\pi D^4}{64} \right]^2} = 300000 e \left[ \frac{\pi D^4}{64} \right] = 38,19 e.$$

W pierwszym wypadku będziemy mieli naprężenia skrajne różnych znaków  $\sigma_{s1} = 477,4$  kg/cm<sup>2</sup> i  $\sigma_{s2} = -286,4$  kg/cm<sup>2</sup>, w drugim  $\sigma_{s1} = 763,8$  kg/cm<sup>2</sup> i drugie zaś będzie równe zero — wszystkie naprężenia będą przeto dodatnie, wreszcie w trzecim wypadku  $\sigma_{s1} = 859,3$  kg/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_{s2} = 95,5$  kg/cm<sup>2</sup>. Mamy tu więc wszystkie trzy rodzaje układów naprężeń gnących odpowiednio do różnych wartości  $S$ .

5°. **Rdzeń przekroju prostokątnego.** Wychodzimy (rys. 5) z równań zasadniczych dla współrzędnych rdzenia  $\xi = J_y y' : F (y - xy')$ ,  $\eta = -J_x : F (x - xy')$ . W danym wypadku oznaczając przez  $H$  wysokość przekroju, przez  $B$  jego podstawę, mamy  $J_x = \frac{1}{12} BH^3$ ,  $J_y = \frac{1}{12} B^3 H$ ,  $F = BH$ , a przeto  $J_x : F = \frac{1}{12} H^2$ ,  $J_y : F = \frac{1}{12} B^2$ . Równanie prostej, przechodzącej przez dolną podstawę przekroju będzie tu  $y = +\frac{1}{2} H$ , a zatem  $y' = 0$  stąd odpowiedni punkt rdzenia wyznaczą współrzędne  $\xi = 0$   $\eta = -\frac{1}{12} H^2 : \frac{1}{2} H = -\frac{1}{6} H$ . Zatem podstawie  $AB$  przekroju odpowiadać będzie punkt  $R'$  rdzenia, podstawie  $D\mu_0$  symetryczny punkt  $R''$ , nadto odległość  $OR' = OR'' = \frac{1}{6} H = \frac{1}{6} AD$ . Z kolei równanie boku  $AD$  będzie  $x = -B/2$ , przyczem ta prosta jest równoległa do  $OY$ , a więc dla niej  $y' = \infty$ . Dzieliąc wzór dla  $\xi$  przez  $y'$  otrzymamy  $\xi = J_y : F \left( \frac{y}{y'} - x \right)$

stąd przy  $y' = \infty$  oraz  $x = -\frac{B}{2}$  będziemy mieli  $\xi = -\frac{1}{12} B^2 : \left(-\frac{B}{2}\right) = -\frac{1}{6} B$ . Drugi wzór daje  $\eta = 0$  przy  $y' = \infty$ . Zatem—krawędzi  $AD$  odpowiadać będzie punkt  $R_3$  rdzenia. Krawędzi zaś  $B\mu_0$  punkt  $R''$ . *Rdzeń przekroju prostokątnego ma postać ukośnika, leżącego wierzchołkami na osiach głównych przekroju. Podstawa ukośnika równa jest jednej trzeciej podstawy prostokąta, wysokość—trzeciej części wysokości macierzystego przekroju.*

**6°. Rdzeń dwuteownika** wyznaczamy w podobny sposób. Główną oś  $OX$  kierujemy przez środek prostopadle do środniczka, drugą  $OY$  układamy w środniczku. Równanie dolnej krawędzi będzie  $y = \frac{H}{2}$ , w założeniu, że oś  $OY$  kierujemy ku dołowi i przez  $H$  oznaczamy wysokość dwuteownika, a przez  $B$  szerokość obu jego pasów. Zatem  $y' = 0$  i odpowiedni punkt rdzenia otrzyma spólrzędne:  $\xi = 0, \eta = -\frac{J_x}{F} \frac{2}{H} = -2 J_x : FH$ . Symetryczny punkt rdzenia  $(0, 2 J_x : FH)$  będzie odpowiadał krawędzi górnego pasa. Równanie jej:  $y = -\frac{H}{2}$ . Miasto krawędzi bocznych — przekrój posiada wklęsłości, które należy, zgodnie z teorią ogólną, ominąć, przerzucając proste  $x = \frac{B}{2}$  i  $x = -\frac{B}{2}$ . Lewej krawędzi pionowej odpowiada równanie  $x = -\frac{B}{2}$  w założeniu, że oś  $OX$  kierujemy ku prawej ręce. Dla tej krawędzi nadto  $y' = \infty$ , a przeto odnośny punkt rdzenia będzie miał spólrzędne  $\xi = \frac{J_x}{F} \left[ \frac{y}{y'} - x \right] = 2 J_y : FB$  oraz  $\eta = 0$ . Krawędzi prawej będzie wobec tego odpowiadał symetryczny punkt rdzenia  $(-2 J_y : FB, 0)$ . I tu więc rdzeń będzie w kształcie ukośnika, boki jego proste będą bowiem odpowiadały punktom węglowym obwodu, gdzie krawędzie pasów przecinają się z krawędziami bocznymi.

W założeniu dwuteownika № 30 będziemy mieli  $J_x = 9785 \text{ cm}^4$ ,  $J_y = 449 \text{ cm}^4$ ,  $F = 69 \text{ cm}^2$ ,  $H = 30 \text{ cm}$  oraz  $B = 12,5 \text{ cm}$ , a przeto podstawa rdzenia będzie wynosiła  $2 \xi = 4 J_y : FB = 2,08 \text{ cm}$  a wysokość  $2 \eta = 4 J_x : FH = 18,90 \text{ cm}$ . Jest to więc ukośnik wydłużony w kierunku osi  $OY$ . Gdybyśmy miasto dwuteownika mieli zwykły przekrój prostokątny — podstawa ukośnika byłaby równa  $12,5 : 3 = 4,17 \text{ cm}$  a wysokość  $30 : 3 = 10 \text{ cm}$ . Dwuteownik zatem ma rdzeń węższy lecz dłuższy od rdzenia odpowiedniego prostokątnego przekroju.

Te same wzory posłużyć mogą do obliczenia wymiarów rdzenia przekroju czworokątnikowego (I rys. 25), złożonego z czterech kątowników, dajmy na to,  $65 \times 65 \times 11 \text{ m/m}$ . Jest to tak zwany *czworokątnikowy przekrój kwadratowy* o jednakowych momentach głównych bezwładności  $J_x = J_y = 4 J_{yc} + 4 F_c \left[ \frac{1}{2} H - \xi \right]^2$ , gdzie z tablic możemy wypisać  $J_{yc} = 48,7 \text{ cm}^4$ ,  $F_c = 13,2 \text{ cm}^2$ ,  $\xi = 2,0 \text{ cm}$ . Założmy  $H = 30 \text{ cm}$ , a wtedy

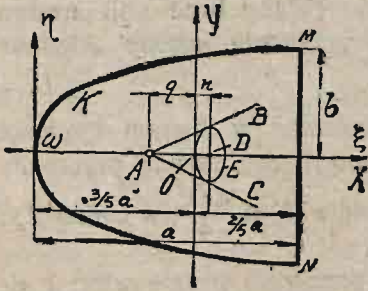


$J_x = J_y = 9118 \text{ cm}^4$ . Ponieważ nadto całkowity przekrój  $F = 4 F_c = 52,8 \text{ cm}^2$ , przeto w danym wypadku rdzeń będzie miał postać kwadratu, leżącego wierzchołkami na osiach głównych przekroju. Przekątnie tego kwadratu będą równe  $4 J_x : FH = 23,02 \text{ cm}$ . Gdyby brać pod uwagę przekrój pełny  $30 \times 30 \text{ cm}$ , to rdzeń takiego przekroju miałby zaledwie przekątnie  $10 \text{ cm}$  długie.

**7°. Rdzeń przekroju kołowego.** Ponieważ w danym wypadku każda para osi prostokątnych środkowych stanowi parę główną, przeto dla jakiegokolwiek pary:  $J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$ , nadto  $F = \frac{\pi D^2}{4}$ , a zatem  $J_x : F = J_y : F = \frac{\pi D^4}{64} : \frac{\pi D^2}{4} = \frac{D^2}{16}$ . Dla tego przekroju będzie więc:  $\xi = \frac{D^2}{16} \frac{y'}{y - xy'}$ ,  $\eta = -\frac{D^2}{16} \frac{1}{y - xy'}$ , gdzie spólrzędne  $x, y$  czynić winny zadość równaniu koła czyli równaniu  $x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}$ . Różniczkując, mamy:  $2x + 2yy' = 0$ , skąd  $y' = -x : y$ , a przeto:  $\xi = \frac{D^2}{16} \frac{-x}{y^2 + x^2} = -x : 4$ ,  $\eta = -\frac{D^2}{16} \frac{1}{y + x^2/y} = -\frac{D^2}{16} \frac{y}{y^2 + x^2} = -y : 4$ . Stąd bezpośrednio otrzymamy  $x = -4\xi$ ,  $y = -4\eta$  i podstawiając w równanie obwodu mamy ostatecznie równanie rdzenia w postaci:  $\xi^2 + \eta^2 = [D : 8]^2$ . *Rdzeń przekroju kołowego jest kołem o średnicy czterokrotnie mniejszej.*

Dla przekroju pierścieniowego o średnicach:  $D$  zewnętrznej i  $d$  wewnętrznej mamy  $J_x : F = J_y : F = \left[ \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} \right] : \left[ \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right] = \frac{D^2 + d^2}{16}$ , a zatem tutaj będzie:  $\xi = \frac{D^2 + d^2}{16} \frac{y'}{y - xy'}$ ,  $\eta = -\frac{D^2 + d^2}{16} \frac{1}{y - xy'}$ , przyczem spólrzędne  $x, y$  czynić winny zadość równaniu  $x^2 + y^2 = \frac{D^2 + d^2}{4}$ . I tu więc  $y' = -\frac{x}{y}$ , co podstawivszy we wzory:  $\xi = -\frac{D^2 + d^2}{16} \frac{x}{y^2 + x^2} = -\frac{D^2 + d^2}{4} \frac{x}{D^2}$ ,  $\eta = -\frac{D^2 + d^2}{16} \frac{y}{y^2 + x^2} = -\frac{D^2 + d^2}{4} \frac{y}{D^2}$ , otrzymamy  $x = -4\xi \frac{D^2}{D^2 + d^2}$ ,  $y = -4\eta \frac{D^2}{D^2 + d^2}$ . I ostatecznie podstawiając te wartości w równanie obwodu, otrzymamy równanie rdzenia  $\xi^2 + \eta^2 = \frac{D^2}{4} \left[ \frac{D^2 + d^2}{4 D^2} \right]^2 = \frac{[D^2 + d^2]^2}{64 D^2}$ . Zatem możemy wypowiedzieć ogólny wniosek: *rdzeń przekroju kołowego pierścieniowego jest kołem o średnicy  $\frac{D^2 + d^2}{4 D}$ .*

8°. **Rdzeń pola parabolicznego.** Weźmy pod uwagę przekrój paraboliczny (Rys. 9). Środek jego znajduje się w odległości  $\omega O = \frac{2}{5} a$  od wierzchołka paraboli, przeto równanie



Rys. 9.

względem osi głównych  $OX, OY$  obwodu pola będzie:  $K(x, y) = (y^2 - 2px - \frac{2}{5}pa)(x - \frac{2}{5}a)$ , łuk bowiem paraboli wyraża się  $\eta^2 = 2p\xi$  dla osi wierzchołkowych, a wzory przejścia są:  $\eta = y$  oraz  $\xi = \frac{2}{5}a + x$ .

Nadto dla osi głównych  $J_x = \frac{4}{15}ab^3$ ,  $J_y = \frac{16}{175}a^3b$ , przyczem  $b^2 = 2pa$ , wreszcie  $F = \frac{4}{3}ab$ . Określmy na mocy tych danych rdzeń przekroju. Dla punktu  $M(\frac{2}{5}a, b)$  będziemy mieli linię prostą

$$\frac{x\xi}{J_y} + \frac{y\eta}{J_x} + \frac{1}{F} = 0 \text{ czyli } \frac{175}{16} \times \frac{2}{5} \frac{a}{a^3b} \xi +$$

$$+ \frac{15}{4} \frac{b}{ab^3} \eta + \frac{3}{4ab} = 0, \text{ ostatecznie } \frac{35}{2a} \xi + \frac{15}{b} \eta + 3 = 0. \text{ Ta prosta}$$

przecina oś  $OX$  w punkcie  $A(-\frac{6a}{35}, 0)$ , który to punkt rdzenia odpowiada prostej  $MN$  obwodu. Symetryczny punkt obwodu  $N$  da symetryczną prostą  $AB$  o równaniu  $\frac{35}{2a} \xi - \frac{15}{b} \eta + 3 = 0$ .

Następnie dla łuku parabolicznego  $M\omega N$  będziemy mieli na mocy ogólnego wzoru dla rdzenia, przynależnego do obwodu drugiego stopnia:  $\xi^2 \{ F^2 J_x^2 \frac{6}{5} pa \} + \eta^2 \{ F^2 J_y^2 p^2 \} - 2 \xi \{ F J_x^2 J_y p \} = 0$ . Po podstawieniu odnośnych wartości otrzymamy  $\xi^2 - \frac{4a}{35} \xi + \frac{12}{245} \frac{a^2}{b^2} \eta^2 = 0$ . Niech

będzie  $n = \frac{2a}{35}$ ,  $m = \frac{b}{\sqrt{15}}$ , a wtedy tylko co wypisane równanie przy-

bierze kształt:  $\frac{(\xi - n)^2}{n^2} + \frac{\eta^2}{m^2} = 1$ , otrzymamy przeto dla łuku paraboli

elipsę, jako odnośną część składową rdzenia. Środek tej elipsy  $E$  leży na osi  $OX$  w odległości  $n = \frac{2a}{35}$  od środka przekroju. Elipsa przechodzi

przez środek  $O$ . Jej mała półoś wynosi  $n = \frac{2a}{35}$ , duża zaś  $m = \frac{b}{\sqrt{15}}$ .

Obie powyżej otrzymane proste  $AB$  i  $AC$  są styczne tej elipsy, co z łatwością można udowodnić i bezpośrednio. W danym wypadku zatem rdzeń składa się z dwóch prostych, zbiegających się w punkcie zespoleńia  $A$ , stycznych elipsy  $E$ .

9°. **Skrajne naprężenia przekroju prostokątnego** wyznaczamy za pomocą promieni rdzenia w wypadku rozpatrywanego przez nas obciążenia, kiedy moment gnący  $M_g = 0,2$  ( $tn, m$ ) leży na jednej z głów-



nych osi przekroju. Załóżmy przedewszystkiem że moment leży na osi  $OX$ , a zatem jego osią sił staje się oś  $OY$ . Odnośne promienie rdzenia będą tu  $w_1 = w_2 = \frac{1}{6} H$ , a przeto prowadząc, jak dawniej, oś  $OY$  pionowo ku górze, będziemy mieli dla podstawy górnej skrajną wartość na-

$$\text{prężenia } \sigma_{s1} = -\frac{M_g}{Fw_1} = -20000 \times 6 : H^3 B = -20000 \times 6 : 12^3 \times 10 =$$

$= -83 \text{ KG/CM}^2$ , a dla podstawy dolnej przekroju  $\sigma_{s2} = +M_g : Fw_2 = = 83 \text{ KG/CM}^2$ . Te same wyniki otrzymaliśmy bezpośrednio, rozpatrując przykład pierwszy. To samo również otrzymamy w wypadku, gdy moment leżeć będzie na osi  $OY$ , wtedy bowiem oś  $OX$  będzie jego osią sił, a odnośne promienie rdzenia będą  $w_1 = w_2 = \frac{1}{6} B$ . Tutaj więc dla le-

wej krawędzi będziemy mieli naprężenie  $\sigma_{s1} = -\frac{M_g}{Fw_1} = -20000 \times \times 6 : B^3 H = -20000 \times 6 : [10^3 \times 12] = -100 \text{ KG/CM}^2$ , a dla prawej krawędzi pionowej  $\sigma_{s2} = M_g : Fw_2 = 100 \text{ KG/CM}^2$ .

**10°. Skrajne naprężenia przekroju kołowego** mogą być również wyznaczone za pomocą rdzenia w wypadku obciążenia rozpatrywanego w przykładzie czwartym nieco powyżej. Skierujemy oś  $OY$  w dół, oś  $OX$  w prawo. Ponieważ moment  $M_g = 3 (tn, m)$  leży na  $OX$ , przeto osią sił jego będzie  $OY$ . Ta oś przetnie u góry i u dołu obwód prze-

kroju. Dla punktu górnego będziemy mieli  $\sigma_{s1} = \frac{S}{F} - \frac{M_g}{Fw_1}$ , podczas gdy dla punktu dolnego będzie  $\sigma_{s2} = \frac{S}{F} + \frac{M_g}{Fw_2}$ . W danym wypadku

$$w_1 = w_2 = \frac{D}{8} = \frac{20}{8} = 2,5 \text{ cm. a nadto } F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 20^2}{4} = 314,159 \text{ cm}^2,$$

stad  $\frac{M_g}{Fw_2} = \frac{M_g}{Fw_1} = \frac{300000}{2,5 \times 314,159} = 382,0 \text{ KG/CM}^2$ . Dalej, kolejno czyniąc

$s = 30, 120$  i  $150 \text{ tn}$ , będziemy mieli  $\frac{S}{F} = 95,5$ , lub  $382,0$ , albo też

$477,5 \text{ KG/CM}^2$ . W tych trzech wypadkach otrzymamy przeto:  $\sigma_{s1} =$

$= -286,5 \text{ KG/CM}^2$ , lub też  $\sigma_{s1} = 0$ , albo  $\sigma_{s1} = 95,5 \text{ KG/CM}^2$  oraz  $\sigma_{s2} =$

$= 477,5 \text{ KG/CM}^2$ , albo  $\sigma_{s2} = 764 \text{ KG/CM}^2$ , lub też  $\sigma_{s2} = 859,5 \text{ KG/CM}^2$ . Odnaj-

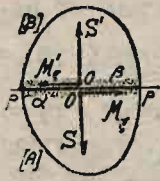
dujemy te same wartości, któreśmy wyżej inną drogą otrzymali. Podany tu sposób o wiele szybciej prowadzi do celu.

## ROZDZIAŁ DRUGI.

### ODKSZTAŁCENIA GNĄCE.

**§ 1. Odkształcenia gnące płytki.** Weźmy pod uwagę (Rys. 10) jakąkolwiek bryłę, odkształconą pod jarzmem sił zewnętrznych i załóżmy, że pewien przekrój płaski  $pp$  dzieli jej obciążenie na dwa układy [A]

i  $[B]$  sił odkształcających, które po sprowadzeniu do środka przekroju dadzą obciążenia gnące. To znaczy, że układ  $[A]$  da siłę środkową  $S$



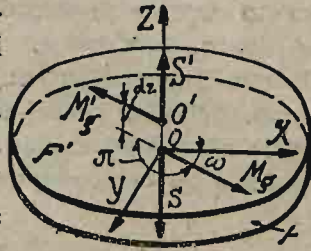
Rys. 10.

normalną i moment gnący  $M_g$ , a układ  $[B]$  da odpowiednio  $S'$  i  $M'_g$ . Ponieważ  $[A] + [B] = 0$ , zatem być musi również  $\overline{M}_g + \overline{M}'_g = 0$  oraz  $\overline{S} + \overline{S}' = 0$ . Te równania obrazowo wskazują, że momenty gnące muszą być równe, lecz *różnoskretne*, a więc, zgodnie z tem cośmy o kierunkach momentów mówili, muszą być skierowane odwrotnie. Nadto siły osiowe również winny się znosić w działaniu. Muszą być przeto równe, lecz skierowane przeciwnie. Godzi się tu wyraźnie zaznaczyć, że moment  $M_g$  i siła  $S$ , zastępując działanie układu  $[A]$ , równoważą układ naprężeń  $[\beta]$ , a więc siedliskują w gromadzie cząsteczek  $\alpha$  — powłoki przekroju, podczas gdy moment  $M'_g$  i siła  $S'$ , równoważąc naprężenia  $[\alpha]$ , siedliskują w gromadzie cząsteczek  $\beta$  — sąsiedniej drugiej powłoce przekroju. Należałoby więc, właściwie mówiąc, miasto przekroju płaskiego rozpatrywać obie jego powłoki, wyodrębniając je w postaci *dwu sąsiednich przekrojów płaskich równoległych, znikomo odległych o  $ds$* . Środki ich winny leżeć na wspólnej prostopadłej do obu przekrojów, a obwody nieznacznie tylko się różnić od siebie tak, aby obwód jednego pola prawie pokrywał w rzucie obwód drugiego, a różnica pól  $F' - F$  była nieznaczna, porządku  $dF$ . Te dwa przekroje sąsiednie stanowią *plytkę*, wyodrębnioną z ciała odkształconego, a zastępującą przekrój poprzednio rozpatrywany. Jej dolna ścianka, zastępująca powłokę dolną owego przekroju, pozostawać winna pod jarzmem siły osiowej  $S$ , prostopadłej do pola  $F$  ścianki, oraz momentu  $M_g$  gnącego, leżącego w tem polu, podczas gdy na górnej ściance płytki, zastępującej górną powłokę przekroju, panować winien moment gnący  $M'_g$ , leżący w jej polu  $F'$  oraz siła osiowa  $S'$ , prostopadła do pola. Aby otrzymać  $M_g$  i  $S$ , należy sprowadzić do środka  $O$  dolnego przekroju płytki układ sił odkształcających dolnej części bryły; tak samo również, aby otrzymać  $M'_g$  i  $S'$ , trzeba sprowadzić do środka  $O'$  górnego przekroju płytki układ sił odkształcających, należnych do górnej części bryły. W założeniu grubości płytki równej zeru oba te układy miałyby jeden i ten sam punkt sprowadzenia, jak dla pojedynczego przekroju. Tu jednak  $ds \neq 0$ , zatem bezwzględne wartości momentów i sił muszą być nieco różne, i, uwzględniając znak sił osiowych, możemy napisać, że  $S' = -(S + dS)$  oraz  $M'_g = M_g + dM_g$ . Pod jarzmem tych obciążeń płytka trwa w stanie równowagi odkształconej, nieznaczne bowiem różnice  $dM_g$  i  $dS$  obciążenia obu jej ścianek stanowią układ, równoważący siły zewnętrzne samej płytki, siedliskujące w jej cząsteczkach, lub działające na jej powierzchnię boczną. Te siły są zresztą nader nieznaczne wobec znikomej wartości  $ds$  a nadto dążą do zera wraz z grubością płytki. Różnice przeto  $dM_g$



i  $dS$  stają się równe zero w granicy — dla przekroju płaskiego wyżej rozpatrywanego. Możemy je zatem pominąć, pisząc warunki równowagi płytki w postaci  $M_g' \approx M_g$  oraz  $S' \approx S$ , przyczem podkreślić należy, że kierunki momentów  $M_g$  i  $M_g'$  winny się różnić o kąt rozwarły, jak tego wymaga równowaga płytki (Rys. 11).

Wyznamy główne osie  $OX, OY$  dolnego pola  $F$  płytki. Będą one zarazem rzutami głównych osi górnego pola  $F'$ , różnica bowiem znikoma obu pól powodować może jeno znikomą różnicę kierunków osi głównych obu przekrojów. Trzecią osią  $OZ$  przebijamy pole  $F'$  po środku. W tych warunkach poletko  $dF = dx \times dy$  gdziekolwiek w dolnym poletku leżące, będzie rzutem górnego poletka  $dF'$  pola  $F'$ .



Rys. 11.

Ma to miejsce dla wszystkich poletek obu przekrojów, prócz poletek skrajnych, dotykających odwodów, gdzie  $dF'$  mogą się różnić od  $dF$  o małe wyższych rzędów na tle nieznacznych różnic obu obwodów. Możemy więc płytkę wyodrębnioną z bryły rozpatrywać, jako złożoną z kostek  $dx \times dy \times dz$ , podległych działaniu naprężeń

$\sigma_s = -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y + \frac{S}{F}$ , przyłożonych do ścian dolnych  $dF$  kostek, oraz naprężeń tego samego rodzaju:

$$\sigma'_s = -\frac{[M_g + dM_g] \sin(\omega + \pi)}{J_y + dJ_y} x + \frac{[M_g + dM_g] \cos(\omega + \pi)}{J_x + dJ_x} y + \frac{-(S + dS)}{F + dF}$$

, przyłożonych do ścianek górnych  $dF'$ . Wobec nie-

znacznych wartości wszystkich przyrostów:  $\sigma'_s = -(\sigma_s + d\sigma_s) \approx -\sigma_s$ . Zatem naprężenia gnące  $\sigma_s$  i  $-\sigma_s$  stanowią będą obciążenie kostki rozpatrywanej — rozciągające, lub ściskające w kierunku osi  $OZ$ . Stąd wnioskujemy, że pod jego jarzmem kostka musiała ulec wydłużeniu lub skróceniu o pewną część swej pierwotnej długości  $dz_0$ , o przyrost  $\Delta dz$ . Ponieważ długość kostek odkształconych jest jednakowa i równa  $dz$ , przeto  $\Delta dz = dz - dz_0$ . Stąd  $\Delta dz = \epsilon_g dz_0 = dz - dz_0$ , a przeto  $dz_0 = dz : (1 + \epsilon_g) = dz [1 - \epsilon_g + \epsilon_g^2 - \epsilon_g^3 + \dots]$ . Wobec nieznacznej wartości dopuszczalnych wydłużeń jednostkowych możemy napisać wprost  $dz_0 = dz (1 - \epsilon_g) = dz - \epsilon_g dz$  i ostatecznie  $\epsilon_g dz = dz - dz_0 = \Delta dz$ . Te wydłużenia jednostkowe, przynależne do poszczególnych kostek płytki zależą niewątpliwie od natężenia i znaku naprężeń  $\sigma_s$ . Rządzi niemi prawo, które tu wypisać należy w postaci  $\epsilon_g = a_g \sigma_s$ , znane z teorii rozciągania i ściskania. Dla tworzyw, ulegających

prawu *Hooké'a*, współczynnik tego wzoru ma wartość stałą — dla innych tworzyw — zmienną. Wzór tylko co wypisany pozwoli zbadać odkształcenia gnące.

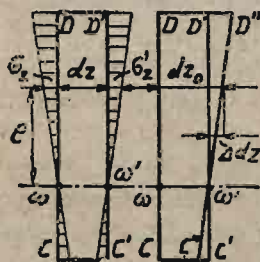
Wyznamy linje obojętne obu powłok płytki. Wobec znikomej wartości  $dz$ , linje te będą się pokrywały w rzucie na dolnej powłoce. Wynika to wprost ze wzorów tylko co wyżej wypisanych, o ile uczynimy w nich  $\sigma_z = \sigma'_z = 0$ . Poprowadźmy płaszczyznę środkową, prostopadłą do obu linii obojętnych. Przetnie ona oba roje prostych równego naprężenia. Wzdłuż każdej prostej roju panować będzie naprężenie normalne ściśle określonej wartości, rosnącej proporcjonalnie, jak wiemy, do odległości  $e$  od osi obojętnej. Ta wartość wyrazi się wzorem:

$$\sigma_z = eM_g \sqrt{\frac{\text{Cos}^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\text{Sin}^2 \omega}{J_y^2}}.$$

Stąd bezpośrednio będziemy mieli kolejno:  $\Delta dz = \epsilon_g dz =$   
 $= \alpha_g \sigma_z dz = \alpha_g eM_g dz \sqrt{\frac{\text{Cos}^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\text{Sin}^2 \omega}{J_y^2}}$ . W tym wzorze zmienia

się tylko  $e$  — odległość punktu  $\mu$  od linii obojętnej, a przeto również i odkształcenia kostek przekroju muszą być proporcjonalne do odległości kostek od osi obojętnych obu powłok, o ile  $\alpha_g$  ma wartość stałą dla całego obszaru naprężeń, panujących w przekroju. (Rys. 12).

Zatem i przed odkształceniem obie powłoki płytki musiały być płas-



Rys. 12.

kie, a płaszczyzny ich — przechodzić przez odnośne osie obojętne, tworząc pewien kąt pomiędzy sobą. Łatwo to udowodnić. Wyznamy ślady  $\omega$  i  $\omega'$  linii obojętnych obu ścianek płytki na płaszczyźnie środkowej, prostopadłej do owych linii obojętnych. W tej płaszczyźnie ścianki odkształcone zaznaczą się śladami  $CD$  i  $C'D'$  odcinków równoległych prostych, przechodzących przez  $\omega$  i  $\omega'$ . Załóżmy, że i przed odkształceniem ślady obu powłok zaznaczały się na tej samej płaszczyźnie przekroju w postaci odcinków dwóch

prostych, przechodzących przez  $\omega$  i  $\omega'$ . Zatem przy odkształceniu płytki obie te proste musiały się pochylić ku sobie, przechodząc w równoległe  $CD$  i  $C'D'$ . Jest to możliwe tylko wtedy, gdy wydłużenia wszystkich kostek płytki pierwotnie ukośnej będą proporcjonalne do odległości kostek od osi obojętnych. Wynika to wprost z rysunku, gdzie dla wszystkich wartości  $e$  musi się wypełniać zależność  $\text{tg} (d\varphi) = d\varphi = \Delta dz : e$ . Tylko w tym wypadku obie płaskie powłoki płytki, pierwotnie pochylone ku sobie pod kątem  $d\varphi$ , staną się równoległymi pod jarzmem naprężeń

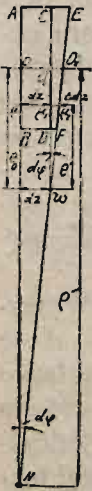


gnących, a płytką pierwotnie ukośną może się stać prosta. Stąd również wniosek bezpośredni, że płytką pierwotnie prosta  $CDC'D'$  stanie się ukośną, o ile zmienimy obciążenie na odwrotne, to jest o ile przestawimy siły i momenty. Wszystkie tylko co wypowiedziane wnioski dotyczą tworzyw o stałej wartości  $\alpha_g$  we wzorze  $\varepsilon_g = \alpha_g \sigma_z$  dla całego obszaru naprężeń, panujących w przekroju. Nazwijmy tu rozpatrywane obciążenie płytki *gnącym*, a wtedy będziemy mieli zupełnie ogólny wniosek: *płytką o płaskich równoległych ściankach przechodzi pod działaniem obciążenia gnącego w płytkę ukośną o ściankach również płaskich, pochylonych ku sobie pod kątem  $d\varphi$ , lecz jednak tylko wtedy, gdy współczynnik  $\alpha_g$  ma wartość stałą dla całego obszaru naprężeń, panujących w obu ściankach płytki odkształconej.*

Ten wniosek stanowi tak zwane „założenie Bernoulli'ego”. Wyptywa on bezpośrednio z badania naprężeń i odkształceń gnących — może być jednak wypowiedziany wprost a priori, jako zasada, na której łatwo zbudować całą teorię gięcia. W naszym wykładzie zasada Bernoulli'ego stanowi sprawdzian praktyczny, o ile bowiem zgadza się z doświadczeniem — posłużyć może jako dowód bezpośredni prawidłowości samej teorii. Wielokrotne doświadczenia poważnych badaczy stwierdziły, że założenie to sprawdza się dla wszelkich tworzyw w mniej lub więcej szerokich granicach obciążenia. Należy przeto powyżej wyłożoną teorię gięcia uznać, jako wystarczająco zgodną z istotą rzeczy i podać jej zastosowania praktyczne. W tym celu bierzemy przedewszystkiem pod uwagę tak zwane:

**§ 2. Gięcie mimośrodkowe.** Zachodzi ono wtedy, gdy obciążenie gnące płytki stanowią siły środkowe  $S$ , prostopadłe do obu jej ścianek oraz momenty gnące  $M_g$ . Wyznamy osie główne jednego przekroju płytki, nazwijmy je przez  $OX$ ,  $OY$ ; trzecią oś  $OZ$  poprowadzimy przez płytkę prostopadłe do  $OX$ ,  $OY$ , a więc i przez środek sąsiedniej ścianki płytki, wyciętej w ciele nieodkształconem. Oba przekroje płytki czynić winny zadość warunkom następującym: *środkami ich winny leżeć na wspólnej prostopadłej — osi  $OZ$  w odległości znikomej  $dz = OO'$ , a obwody pokrywać się w rzucie nieomal, ujawniając znikomą różnicę pól  $F' - F$  obu ścian płytki.* Wyznamy jakikolwiek punkt  $\mu(x, y)$ , leżący w polu  $F$ . Odnośny punkt  $\mu_1$  pola  $F'$  będzie miał te same współrzędne  $x, y$ , a kostka  $dx \times dy \times dz$ , wyodrębniona z płytki, stanowić będzie włókienko  $\mu\mu_1$ , łączące oba punkty. Na zasadzie wniosku wyżej wypowiedzianego, odkształcenie gnące kostki ujawni pochylenie obu ścian płytki o kąt  $d\varphi$ , przyczem oba przekroje pozostaną płaskie i po odkształceniu. Inaczej mówiąc, przy odkształceniu jedna ze ścian, dajmy na to  $F'$ , pochyli się ku drugiej  $F$  o pewien kąt, pozostając niezmiennie płaską,

musi więc istnieć oś obrotu względnego owych ścianek płytki o kąt  $d\varphi$ . Poprowadźmy płaszczyznę środkową przez  $OZ$  prostopadle do owej osi obrotowej. W tej płaszczyźnie (Rys. 13) ścianki płytki nieodkształconej



zaznaczają się śladami  $AB$  i  $CD$ , a oś obrotowa da punkt  $\omega$ , leżący niewątpliwie na przedłużeniu prostej  $CD$ . Po odkształceniu  $CD$  pochyli się względem  $AB$ , znacząc nowy ślad w postaci odcinka  $EF$  prostej, która przejdzie również przez  $\omega$ , tworząc kąt  $d\varphi = E\omega C$ . To odkształcenie gnące dokona się pod jarzmem odpowiedniego obciążenia gnącego płytki. Przyłożmy do środka  $O$  ścianki  $AB$  płytki nieodkształconej siłę  $S$ , czynną wzdłuż osi  $OZ$ , oraz moment  $M_g$ , leżący w polu  $F$ , a pochylony ku osi  $OX$  pod kątem  $\omega$ . Sąsiednią ściankę  $CD$  płytki nieodkształconej obciążamy pośrodku w  $O$  siłą osiową  $S'$ , działającą wzdłuż osi  $OZ$ , oraz momentem  $M'_g$ , leżącym w polu  $F'$ . To obciążenie rozwinie naprężenia, które sprowadzą opisany wyżej obrót, przyczem poszczególne włókienka skrócą się lub wydłużą, rozwijając siły oporowe. Gdy owe siły oporowe zrównoważą naprężenia, płytka wejdzie w stan równowagi trwałej. Przypuśćmy, że ten stan istotnie nastąpił przy pewnej wartości kąta  $d\varphi$ . Pierwotna długość  $OO_1$  otrzymała przy

Rys. 13.

tem przyrost  $O_1O_2$ , leżący niewątpliwie na osi  $OZ$ , zachodziły tu bowiem jedynie i wyłącznie zjawiska rozciągania lub ściskania, wszelkie przeto skrzywienia tego włókienka trzeba z góry wykluczyć, jako zgoła niemożliwe. Zatem punkt przyłożenia siły  $S'$  przesunął się po osi  $OZ$  w tę lub ową stronę, siła ta przeto po odkształceniu będzie i nadal środkową, choć nie prostopadłą do ścianki  $EF$ , pochyli się bowiem ku niej pod kątem  $\pi/2 - d\varphi$ . Inaczej nieco będzie działał moment  $M'_g$  po odkształceniu — nie będzie bowiem leżał w polu  $F'$ , jeno się z niego wychyli pod kątem, zawartym w granicach od zera do  $d\varphi$ , a zależnym od położenia momentu względem osi obrotowej przekroju. Mimo to jednak możemy nadal rozpatrywać  $S'$  i  $M'_g$ , jako obciążenie gnące pola  $F'$  odkształconego, ponieważ kąt  $d\varphi$  jest znikomo drobny. Właściwiej jednak należałoby miasto  $S'$  brać  $S' \cos d\varphi$  oraz zastąpić  $M'_g$  — odnośnym rzutem na ściankę  $M'_g \cos(Kd\varphi)$ , dzie  $o \leq K \leq 1$ , wiemy jednak, że  $\cos d\varphi = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} d\varphi^3 + \dots$  zatem popełnimy błąd nader nieznaczny biorąc wprost  $S'$  i  $M'_g$ .

Wobec istnienia równowagi trwałej musi być  $S' = -(S + dS)$  oraz  $M'_g = M_g + dM_g$  z warunkiem, aby moment  $M'_g$  pochylony był ku osi  $OX$  pod kątem  $\omega + \pi$ . I tu znów drobne różnice  $dS$  i  $dM_g$  winny zrównoważyć siły zewnętrzne, siedliskujące w cząsteczkach samej płytki, lub działające na jej powierzchnię boczną. Tylko co wyznaczone



obciążenie gnące płytki da układ naprężeń gnących, przyczem obustronne

naprężenia włókienek  $\mu\mu_1$  będą:  $\sigma_z = -\frac{M_g \sin \omega}{J_y} x + \frac{M_g \cos \omega}{J_x} y +$

$+\frac{S}{F}$ . Dla środkowego włókienka  $OO_1$ , gdzie  $x = y = 0$ , będziemy

mieli  $\sigma_{z0} = S : F$ , możemy przeto, korzystając z ogólnego wzoru, wyznaczyć odnośne wydłużenie jednostkowe pisząc  $\epsilon_{g0} = \alpha_g \sigma_{z0}$ , a zatem

$$O_1 O_2 = \epsilon_{g0} \times OO_1 = \epsilon_{g0} dz = \alpha_g \sigma_{z0} dz = \alpha_g \frac{S}{F} dz.$$

Dla linii obojętnej  $\sigma_z = 0$ . Istnieje przeto szereg włókienek istotnie należących do przekroju lub tylko wyobrażalnych, łączących odpowiednie punkty pokrywających się w rzucie linii obojętnej obu przekrojów płytki. Włókna te nie ujawnią żadnego odkształcenia, bo dla nich  $\epsilon_g = 0$ . Stąd prosty wniosek, że oś obrotowa musi leżeć na linii obojętnej, co zresztą wynika bezpośrednio z ogólnej teorii.

Oznaczmy przez  $e$  odległość jakiegokolwiek włókienka  $\mu\mu_1$  od osi obrotu, czyli od linii obojętnej, a wtedy dla tego włókienka będziemy

$$\text{mieli: } \sigma_z = e M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}. \text{ Wydłużenie jego będzie: } \Delta ds =$$

$$= \epsilon_g dz = \alpha_g \sigma_z dz = \alpha_g e M_g dz \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}. \text{ Poprowadźmy}$$

skrajne styczne obu odkształconych ścianek płytki, równoległe do osi obrotowej — linii obojętnej. Będą to linie skrajnych naprężeń normalnych, przynależnych do skrajnych włókienek płytki, łączących odnośne punkty styczności. Gdy oś obrotowa leży poza przekrojem, oba skrajne włókienka ulegną skróceniom, lub, jak na rysunku — wydłużeniom  $CE$  i  $DF$ , pod działaniem skrajnych naprężeń, które z łatwością wyznaczymy z ogólnego wzoru, czyniąc w nim kolejno  $e_1 = C\omega$  oraz  $e_2 = D\omega$ . Bezwzględnie większa z tych wartości da bezwzględną największość naprężenia. W danym wypadku będzie to oczywiście

$$\sigma_{z1} = e_1 M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}, \text{ ponieważ } e_1 > e_2, \text{ a obie są tego samego}$$

znaku. Skrajną naprężenia należy uczynić równą najwyższemu dopuszczalnemu naprężeniu gnącemu danego tworzywa, a więc  $\sigma_{z1} = k_g$ , uwzględniając przy tem rodzaj obciążenia, które i w tym wypadku może być *stałe, powtarzane* lub *zmienne*.

W ten sposób możemy sprawdzić wytrzymałość pręta, pozostałe bowiem naprężenia włókienek, jako bezwzględnie mniejsze od  $\sigma_{z1}$ , nie przekroczą owej skrajnej wartości dopuszczalnej. Chcąc z kolei wyznaczyć

odkształcenia gnące, przedłużamy proste  $AB$  i  $EF$  do przecięcia się w  $N$  i nazywamy odległość tego punktu od osi  $OZ$  przez  $\rho$ . Nadto niech będzie  $e_0$  odległość osi obrotu od osi  $OZ$ , a wtedy z podobieństwa trójkątów:  $tg(d\varphi) = OO_2 : \rho = O_1O_2 : e_0 = \mu_1\mu_2 : c$ . Wyżej widzieliśmy, że  $O_1O_2 = \alpha_g \frac{S}{F} dz$ , zatem  $OO_2 = OO_1 + O_1O_2 = dz \left(1 + \alpha_g \frac{S}{F}\right)$ . Nadto, wobec nieznaczących wymiarów kąta  $d\varphi$  możemy niewątpliwie pominąć znak  $tg$ , pisząc wprost:

$$d\varphi = \frac{dz(1 + \alpha_g S : F)}{\rho} = \frac{\alpha_g S dz}{e_0 F} = \frac{\alpha_g c M_g dz}{e} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}},$$

$$\text{skąd } \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha_g M_g}{1 + \alpha_g \frac{S}{F}} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}, \quad d\varphi = \alpha_g M_g dz \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}},$$

$$e_0 = S : FM_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}. \quad \text{Te wzory rozwiązują całokształt za}$$

gadnienia. Godzi się jednak zaznaczyć, że stosują się jedynie i wyłącznie do tworzyw, ujawniających stałą wartość  $\alpha_g$  dla całego obszaru naprężeń, panujących na obu powłokach płytki odkształconej.

Gdy oś obrotowa leży poza płytką, wtedy obie odległości  $e_1 e_2$  są jednego znaku, mamy więc  $e_1 e_2 > 0$ , a na całej płytce panują naprężenia jednoimienne. Gdy znów oś obrotowa przecina płytkę, wtedy  $e_1 e_2 < 0$ , linje obojętne przecinają płytkę, pokrywając się w rzucie wzajemnie. Istnieje przeto szereg włókienek obojętnych, łączących odnośne punkty obu linii obojętnych. Te włókienka nie ulegają żadnym odkształceniom, a cała płytka dzieli się w danym wypadku na dwa obszary. W jednym panują naprężenia i wydłużenia dodatnie — w drugim — ujemne. Na granicy obu obszarów naprężenia i odkształcenia gnące są równe zeru. W szczególnym wypadku mogą obie linje obojętne przechodzić przez środki odnośnych przekrojów. Wtedy  $e_0 = 0$ , co jest możliwe tylko wtedy, gdy  $S = 0$ . Jest to wypadek gięcia właściwego.

**§ 3. Gięcie właściwe.** Wyodrębnijmy płytkę z ciała odkształconego, prowadząc dwa sąsiednie przekroje. Środki ich winny leżeć na wspólnej prostopadłej, a obwody pokrywać się w rzucie nieomal, ujawniając znikomą różnicę pól  $F' - F$  porządku  $dF$ . Wyznamy osie główne  $OX, OY$  jednego z przekrojów, oś  $OZ$  poprowadźmy przez środek  $O'$  drugiej ścianki płytki, odległej o  $dz = OO'$ . Tę płytkę obciążamy parą momentów gnących. Jeden z nich  $M_g$  leży w polu  $F$ , pod kątem  $\omega$  ku osi  $OX$  — drugi  $M'_g$  w  $F'$  pod kątem  $\omega + \pi$  ku tejże osi. Łączne działanie obu momentów da odkształcenie gnące. Weźmy pod uwagę dowolny zresztą punkt  $\mu$  ( $x, y$ ) pola  $F$ . Odnośny punkt  $\mu_1$  pola  $F'$  bę-

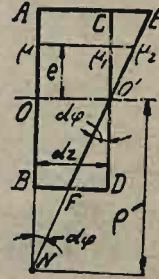


dzie miał te same spólrzędne  $x, y$ , a kostka  $dx \times dy \times dz$ , wyodrębniona z płytki nieodkształconej stanowić będzie włókienko  $\mu\mu_1$ , łączące poletkę  $dF$  i  $dF'$  przynależne do pól  $F$  i  $F'$ . W  $dF$  panować będzie na-

prężenie normalne gnące  $\sigma_s = -\frac{M_g \text{Sin } \omega}{J_y} x + \frac{M_g \text{Cos } \omega}{J_x} y$ , podczas

gdy  $dF'$  ulegać będzie naprężeniu  $\sigma'_s = -(\sigma_s + d\sigma_s) \infty - \sigma_s$ , o czym z łatwością przekonamy się, rozumując zupełnie tak samo, jak w powyższej rozpatrywanym ogólnym wypadku. Dla środków płytki mamy  $x=y=0$ , dla nich przeto  $\sigma_s = 0$ , linje obojętne istotnie więc przechodzą przez środki  $O, O'$  obu ścianek płytki.

Poprowadźmy płaszczyznę środkową przez  $OZ$  prostopadłą do linii obojętnych. W tej płaszczyźnie (Rys. 14) ścianki płytki nieodkształconej zaznaczają się śladami  $AB, CD$ . Po odkształceniu  $CD$  pochyli się ku  $AB$ , znacząc nowy ślad w postaci odcinka prostej  $EF$ , przechodzącej przez środek  $O'$  przekroju  $CD$  — tam bowiem leży linja obojętna — oś względnego obrotu ścian płytki o kąt  $d\varphi$ . Przy obrocie jedynie tylko włókienka, zawarte pomiędzy linjami obojętnymi, nie ulegną odkształceniom. Ten szereg włókien obojętnych zaznaczy wyraźną granicę różnorodnych obszarów odkształceń. W jednym wszystkie włókienka ulegną wydłużeniom — w drugim skróceniom tem znaczniejszym, im dalej leżeć będą od osi obojętnych. Oznaczmy przez  $e$  odległość jakiegokolwiek włókienka  $\mu\mu_1$  od linii obojętnej. Pierwotna jego długość  $\mu\mu_1 = dz$  otrzyma przyrost  $\Delta dz = \mu_1 \mu_2 = \epsilon_g dz$  na tle obu-



Rys. 14.

stronnego działania naprężeń gnących:  $\sigma_s = \epsilon_g M_g \sqrt{\frac{\text{Cos}^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\text{Sin}^2 \omega}{J_y^2}}$

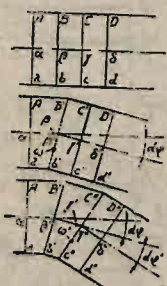
rozciągających, lub ściskających. Poprowadźmy skrajne stycznice obu ścian płytki odkształconej, równoległe do osi obrotowej — linii obojętnej. Będą to linje skrajnych naprężeń normalnych *różnego znaku*. Jedną skrajną włókienko, łączące punkty styczności — będzie ściskane, — przeciwnie — rozciągane. Odnośne wartości naprężeń łatwo wyznaczymy z powyższego wzoru, czyniąc w nim  $e$  równem  $e_1 = CO'$  lub  $e_2 = DO'$ , przyczem tu niewątpliwie  $e_1 e_2 < 0$ , jako, że linje obojętne przechodzą przez środki przekrojów. Bezwzględnie większą z tych dwóch wartości naprężeń należy uczynić równą najwyższemu dopuszczalnemu naprężeniu gnącemu  $k_g$ , aby zapewnić trwałość tworzywa.

Chcąc z kolei poznać odkształcenia gnące, przedłużamy proste  $AB$  i  $EF$  do przecięcia się w  $N$  i nazywamy odległość tego punktu od osi  $OZ$  przez  $\rho$ . Z podobnych trójkątów będziemy mieli:  $\text{tg}(d\varphi) = OO' : \rho = \mu_1 \mu_2 : e$ . I tu znów wobec nieznaczących wartości kąta  $d\varphi$  możemy

napisać poprostu:  $d\varphi = \frac{dz}{\rho} = \frac{\alpha_g M_g dz}{c} \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ , co da  $\frac{1}{\rho} =$   
 $= \alpha_g M_g \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ ,  $d\varphi = \alpha_g M_g dz \sqrt{\frac{\cos^2 \omega}{J_x^2} + \frac{\sin^2 \omega}{J_y^2}}$ . Ten

sam wynik otrzymamy, czyniąc  $S = 0$  we wzorach ogólnych, poprzednio wyprowadzonych. W ten sposób rozwiązaliśmy całokształt zagadnienia w zastosowaniu jednak wyłącznie tylko do tworzyw, ujawniających stałą wartość  $\alpha_g$  dla całego obszaru naprężeń, panujących na obu powłokach płytki po odkształceniu.

**§ 4. Odkształcenia gnące prętów prostych.** Weźmy pod uwagę pręt prosty dowolnego zresztą przekroju poprzecznego, stałego, lub



Rys 15.

zmiennego (Rys. 15) i wyznaczmy na tym pręcie szereg przekrojów poprzecznych  $Aa, Bb, Cc, Dd \dots$  znikomo odległych od siebie. Ich środki  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$  leżeć będą na osi prostej pręta w odległościach  $\alpha\beta = dz, \beta\gamma = dz', \gamma\delta = dz'' \dots$  W ten sposób wyznaczamy myślowo w pręcie *nieodkształconym* szereg płytek prostych. Po odkształceniu gnącym płytki te przejdą w ukośne. Chcąc zdać sobie sprawę ze zjawisk tu zachodzących, rozpatrujemy zrazu pierwszą płytkę i zakładamy, że tylko ta jedna uległa odkształceniu, a pozostałe — zachowały kształt pierwotny. Po zgięciu ścianka  $Bb$  obróciła się o pewien kąt —

— pochyliła się ku  $Aa$  na tle obrotu około osi obojętnej, a jednak pozostała niezmiennie płaska. Obrót odbył się około linii obojętnej  $\omega$ , leżącej w płaszczyźnie  $Bb$ . Środkowe włókienka  $\alpha\beta$  uległo skróceniu lub wydłużeniu o przyrost  $\beta\beta'$ , zależny od siły osiowej  $S$  panującej w płytce, wiemy bowiem już, że  $\beta\beta' = \alpha_g \frac{S}{F} dz$ . W szczególnym wypadku, gdy  $S = 0$ , wtedy i  $\beta\beta' = 0$ . Tutaj więc środkowe włókienko pozostaje niezmienione przy odkształceniu i równe swej pierwotnej długości  $dz$ , a linja obojętna przecina oś pręta w  $\beta'$ , przechodząc przez środek przekroju. W obu wypadkach tylko co wyszczególnionych, dalsza część pręta pochyliła się o kąt obrotu  $d\varphi$ , a oś podłużna pręta ulega ostremu załamaniu w  $\beta'$ , pozostając jednak dalej prostą od tego punktu począwszy. To samo należy słowo w słowo powtórzyć w stosunku do następnej płytki, która również po odkształceniu przejdzie w płytkę ukośną. Jej środkowe włókienko  $\beta'\gamma'$  ulegnie przytem skróceniu lub wydłużeniu o przyrost  $\gamma'\gamma''$ , który w szczególnym wypadku może być równy zeru, gdy odnośna siła  $S' = 0$ . Na tle ponownego obrotu około nowej linii obojętnej  $\omega'$ , oś podłużna pręta ulegnie powtórnemu załamaniu, tym razem jednak już



w punkcie  $\gamma''$  — i — pochyleniu o kąt nowy  $d\varphi'$ . Gdy nowa oś obrotowa  $\omega'$  równoległa jest do  $\omega$ , wtedy niewątpliwie oba kąty  $d\varphi$  i  $d\varphi'$  leżą w jednej płaszczyźnie. W ogólnym wypadku linie obojętne nie są równoległe i kąty leżą w różnych płaszczyznach obrotu. Powtarzając to samo rozumowanie w stosunku do dalszych płytek, dochodzimy do wniosku, że pręt pierwotnie prosty ujawnia pod jarzmem obciążenia gnącego odkształcenia następujące:

1° Oś jego podłużna pierwotnie prosta, staje się w ogólnym wypadku krzywą przestrzenną, lub — krzywą płaską w szczególnym, gdy wszystkie linie obojętne, grające rolę osi obrotowych płytek, są równoległe. Oś podłużną pręta odkształconą zwiemy zwykle krótko *odkształconą*.

2° Wszystkie poprzeczne przekroje płaskie pręta, prostopadłe do jego osi podłużnej pierwotnie prostej, będą prostopadłe do odkształconej i pozostaną płaskie i po odkształceniu. Ten punkt jest wprost oczywisty, ponieważ kąty  $\alpha\alpha\beta'$ ,  $\beta'\beta'\gamma'$ ,  $\gamma'\gamma''\delta''$  . . . są proste, a w granicy odległości  $\alpha\beta'$ ,  $\xi'\gamma''$ , . . . dążą do zera.

3° Długości łuków osi podłużnej pręta pierwotnie prostej, nie ulegną zmianie przy przejściu tej osi w odkształconą, o ile siły, środkowe wszystkich płytek są równe zeru; w przeciwnym razie oś pręta przy odkształceniu wydłuży się lub skróca, w zależności od znaku sił osiowych poszczególnych płytek. Istotnie, gdy  $S = S' = \dots = 0$ , wtedy  $\beta\beta' = \gamma'\gamma'' = \dots = 0$ , a przeto i odcinki  $dz$ ,  $dz'$ ,  $dz''$ , . . . pozostaną niezmiennione po odkształceniu. Gdy jednak siły osiowe nie są równe zeru,

wydłużenia zależą od znaku sił, mamy bowiem  $\beta\beta' = \alpha_g \frac{S}{F} dz$ ,  $\gamma'\gamma'' = \alpha_g \frac{S'}{F'} dz'$  i t. d. —

**§ 5. Wygięcie płaskie pręta prostego.** Wygięcie pręta prostego nazywamy płaskim, gdy jego oś podłużna, pierwotnie prosta, staje się krzywą płaską po odkształceniu. Płaszczyznę, w której leży odkształcona, zwiemy *płaszczyzną gięcia*. Tego rodzaju odkształcenie gnące zachodzi wtedy jedynie, gdy osie obrotowe wszystkich przekrojów są równoległe, a zatem prostopadłe do płaszczyzny gięcia, w której leży odkształcona. Z łatwością dojdziemy do przekonania, że *pręt prosty ulega gięciu płaskiemu, gdy jednoimienne osie główne wszystkich jego przekrojów poprzecznych leżą w tych samych płaszczyznach do siebie prostopadłych, a wszystkie momenty gnące zawiera jedna z nich. Druga staje się wtedy płaszczyzną gięcia*. Istotnie z ogólnej teorii naprężeń gnących wiemy, że oś sił momentu gnącego jest kierunkowo sprzężona z linią obojętną. Gdybyśmy przeto założyli, że osie główne poszczególnych przekrojów pręta nie leżą w tych samych płaszczyznach, to wtedy trzeba by

było w każdym poprzecznym przekroju inaczej pochyłać moment ku osiom głównym, aby otrzymać odnośne linje obojętne równoległe. Wymagałoby to niesłychanie złożonego obciążenia, które w ogólnym wypadku wprost pomyśleć się nie daje. Należy przeto zwęzić krąg rozpatrywania, biorąc pod uwagę pręty *jednorodnie zbudowane*. Przekroje poprzeczne prętów tego rodzaju zmieniają się w sposób ciągły a nieznaczny, a osie główne jednoimienne owych przekrojów — leżą w tych samych płaszczyznach prostopadłych do siebie.

Z ogólnej teorii gięcia wiemy, że linje obojętne są równoległe do osi głównej, gdy na tej osi leży moment gnący. Zatem warunek drugi gięcia płaskiego wymaga, aby wszystkie momenty gnące przekrojów poprzecznych pręta — leżały na jednoimiennych osiach głównych odnośnych przekrojów. To należało udowodnić.

Płaszczyzny, zawierające jednoimienne osie główne przekrojów poprzecznych pręta będziemy nazywali *płaszczyznami głównymi pręta*. Założmy, że osie główne  $OX$  leżą w takiej płaszczyźnie, a na nich — odnośne momenty gnące. Wtedy dla każdej płytki  $\omega = 0$ , a przeto dla

$$\text{gięcia mimośrodkowego płaskiego: } \frac{1}{\rho} = \frac{\alpha_g}{1 + \alpha_g S/F} \frac{M_g}{J_x}, \quad d\varphi = \alpha_g M_g \frac{dz}{J_x}$$

$$e_0 = \frac{S J_x}{F M_g}, \quad \sigma_z = \frac{M_g}{J_x} y + \frac{S}{F} = e \frac{M_g}{J_x} \quad \text{a zaś dla gięcia właściwego płas-$$

$$\text{kiego: } \frac{1}{\rho} = \alpha_g \frac{M_g}{J_x}, \quad d\varphi = \alpha_g M_g \frac{dz}{J_x}, \quad e_0 = 0, \quad \sigma_z = \frac{M_g}{J_x} y = e \frac{M_g}{J_x},$$

tu bowiem linje obojętne przecinają odkształconą pręta.

We wzorach ogólnych przez  $\rho$  nazwaliśmy odległość włókna środkowego płytki od prostej przecięcia się obu odkształconych ścian płytki. Szereg płytek stanowi pręt. Ich ścianki dają przekroje poprzeczne pręta. Odkształcona składa się z włókien środkowych płytek odkształconych, kolejno po sobie idących. Wynika stąd, że ścianki płytki odkształconej, leżą w sąsiednich płaszczyznach normalnych odkształconej pręta, a zatem  $\rho$  stanowi promień *krzywizny odkształconej*. Ten wniosek dotyczy wszystkich rodzajów gięcia, szczególną jednak uwagę posiada w wypadku gięcia płaskiego, jak to zobaczymy w następstwie.

**§ 6. Wskaźnik wytrzymałościowy.** W wypadku gięcia płaskiego mimośrodkowego lub właściwego z łatwością wyznaczmy skrajne naprężenia gnące w postaci:  $\sigma_{z1} = M_g \frac{e_1}{J_x} + \frac{S}{F}$ ,  $\sigma_{z2} = M_g \frac{e_2}{J_x} + \frac{S}{F}$ .

W obu wypadkach odnośna linja obojętna jest równoległa do głównej płaszczyzny pręta, w której leżą momenty gnące i leży w odległości  $e_0$ .



od tej płaszczyzny. Gdy  $S = 0$ , wtedy i  $e_0 = 0$ , a przeto momenty gnące leżą na liniach obojętnych w wypadku gięcia płaskiego właściwego. Nadto w tym wypadku  $e_1$  i  $e_2$  zależą wyłącznie tylko od postaci samego przekroju. Nazwijmy wskaźnikiem przekroju — iloraz jego momentu głównego bezwładności, dzielonego przez odległość skrajnego włókna od osi tego momentu i oznaczymy przez  $W_{x1} = J_x : e_1$ ,  $W_{x2} = J_x : e_2$  a wtedy w wypadku gięcia płaskiego właściwego, — moment gnący, dzielony przez wskaźnik odnośnego przekroju, da wartość skrajną naprężenia gnącego, którą należy uczynić równą  $k_g$ .

Wyznamy wskaźnik przekrojów częściej spotykanych w praktyce:

1° *Przekrój prostokątny*. Dla osi głównej  $OX$ , równoległej do podstawy  $B$  przekroju:  $e_1 = -\frac{1}{2}H$ ,  $e_2 = +\frac{1}{2}H$ , a przeto  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{1}{6}BH^2$ . Dla drugiej osi głównej  $OY$ , równoległej do wysokości  $H$  prostokąta:  $e_1 = -\frac{1}{2}B$ ,  $e_2 = \frac{1}{2}B$ , a przeto  $W_y = -W_{y1} = W_{y2} = \frac{1}{6}HB^2$ .

2° *Przekrój kołowy*. Dla wszelkiej osi  $OX$  środkowej:  $e_1 = -R$ ,  $e_2 = R$ , będziemy mieli przeto:  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{\pi}{4}R^3 = \frac{\pi}{32}D^3$ . Zupełnie te same wartości  $e_1 = -R$ ,  $e_2 = R$  otrzymamy dla przekroju pierścieniowego o promieniu zewnętrznym  $R$  i wewnętrznym  $r$ , a więc dla pierścienia kołowego:  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{\pi}{4}R(R^2 - r^2) = \pi [D^3 - d^3] : 32 D$ .

3° *Przekrój eliptyczny*. Dla osi głównej  $OX$ , na której leży duża półos elipsy,  $e_1 = -b$ ,  $e_2 = b$ , zatem  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = \frac{\pi}{4}ab^2$ ; dla drugiej głównej osi  $OY$  podobnie:  $e_1 = -a$ ,  $e_2 = a$ , co daje  $W_y = -W_{y1} = W_{y2} = \frac{\pi}{4}a^2b$ .

4° *Dwuteownik № 25*. Główną oś  $OX$  tego przekroju prowadzimy przez środek prostopadle do średnika, drugą  $OY$  — przez środek prostopadle do  $OX$ . Dla  $OX$  tablice podają wartość  $J_x = 4954 \text{ cm}^4$  nadto dla tej osi:  $e_1 = -\frac{1}{2}H = -12,5 \text{ cm}$ ,  $e_2 = 12,5 \text{ cm}$ , wysokość bowiem dwuteownika, w kierunku osi  $OY$  mierzona, wynosi  $H = 25 \text{ cm}$ . Stąd  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = 4954 : 12,5 = 396 \text{ cm}^3$ . Tę wartość dają również i tablice. Dla drugiej osi  $e_1 = -\frac{1}{2}B = -5,5 \text{ cm}$ ,  $e_2 = 5,5 \text{ cm}$ , szerokość bowiem pasów:  $B = 11 \text{ cm}$ . Nadto z tablic  $J_y = 255 \text{ cm}^4$ , a przeto  $W_y = -W_{y1} = W_{y2} = 255 : 5,5 = 46,4 \text{ cm}^3$ .

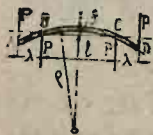
5° *Ceownik № 28*. Korzystając ze znakowania (I. Rys. 19) zauważymy, że dla osi głównej  $OX$ , osi symetrii przekroju:  $e_1 = -\frac{1}{2}H = -14 \text{ cm}$ ,  $e_2 = 14 \text{ cm}$ , cała bowiem wysokość ceownika, mierzona w kierunku osi  $OY$ , wynosi  $H = 28 \text{ cm}$ . Zatem  $W_x = -W_{x1} = W_{x2} = J_x : 14 = 6276 : 14 = 448 \text{ cm}^3$ , tablice bowiem podają  $J_x = 6276 \text{ cm}^4$ .

Inaczej rzecz się ma dla osi  $OY$ ; tutaj:  $e_1 = HO = -2,53$  cm, a przeto  $e_2 = AD - HO = B - 2,53 = 9,5 - 2,53 = 6,97$  cm, bo szerokość obu pasów  $B = 9,5$  cm. Nadto z tablic:  $J_y = 399$  cm<sup>4</sup>. W danym wypadku obie wartości wskaźników są różne:  $W_{y1} = 399 : (-2,53) = -157,7$  cm<sup>3</sup> oraz  $W_{y2} = 399 : 6,97 = 57,2$  cm<sup>3</sup>. —

Z powyższych przykładów widać, że obie wartości wskaźnika nie różnią się wartością bezwzględną dla osi symetrii przekroju, natomiast w wypadku przekroju niesymetrycznego względem osi głównej mogą ujawniać dość znaczne różnice. W tym wypadku oznaczamy zazwyczaj przez  $W_x$  bezwzględnie mniejszą wartość  $W_{x1}$  i  $W_{x2}$ , mając na widoku wyznaczenie skrajnego najwyższego naprężenia  $\sigma_s \max = M_g : W_x = k_g$ .

**§ 7. Wygięcie Lamarle'a.** Ten rodzaj wygięcia stanowi najprostszy przykład gięcia płaskiego a zarazem jedyny ściśły wypadek urzeczywistnienia powyżej poczynionych założeń. Weźmy pod uwagę pręt prosty poziomy. W punktach  $B$  i  $C$  jego pierwotnie prostej osi przyłożmy dwie jednakowe siły  $P$ , dajmy na to skierowane ku górze, oraz dwie takie same siły skierowane w dół w punktach  $A$  i  $D$ , odległych o  $\lambda$  od  $C$  i  $B$ . Wszystkie te cztery siły są równe, równoległe i prostopadłe do osi pierwotnej pręta, a przy odkształceniu nie schodzą ze swych linii działania. Jakikolwiek przekrój poprzeczny pręta o środku  $O$ , leżącym na osi, dzieli obciążenie gnące na dwie gromady, prawą i lewą, zawierające po jednej parze sił. Każda z nich po sprowadzeniu do ośrodka  $O$  da poedyńczy moment gnący  $M_g = P\lambda$ , prostopadły do płaszczyzny sił — stały dla wszystkich przekrojów poprzecznych, zawartych pomiędzy  $C$  i  $B$ . (Rys. 16).

Zbudujmy pręt jednorodnie, aby osie główne  $OY$  jego przekrojów poprzecznych leżały w płaszczyźnie sił — wtedy momenty gnące będą leżały na osiach głównych  $OX$ . Gięcie będzie płaskie; płaszczyzna sił stanie się płaszczyzną gięcia. Możemy przeto dla przekroju poprzecznego, przechodzącego przez środek  $O$ , wypisać wzory ogólne:



Rys. 16.

$$k_g = \frac{P\lambda}{W_x}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dz} = \alpha_g \frac{P\lambda}{J_x}$$

tutaj bowiem  $S = 0$  a więc i  $e_0 = 0$  — momenty gnące leżą na liniach obojętnych  $OX$ .

Gdy przekrój poprzeczny pręta jest stały, wtedy dla wszystkich przekrojów  $J_x$ ,  $W_x$  mają wartości stałe, a wszystkie przekroje poprzeczne między  $C$  i  $B$  są jednakowo naprężone. Jest to więc pręt o stałej wytrzymałości na gięcie, bo wszystkie jego przekroje w środkowej części trzające, są jednakowo wytrzymałościowo wyzyskane. Godzi się jednak zauważyć, że w pozostałych częściach pręta warunki obciążenia będą zupełnie inne — wszystko to, cośmy tu mówili, dotyczy przeto wyłącznie środkowej części pręta. Dla niej promień krzywizny odkształconej jest stały — *odkształcona środkowej części pręta jest łukiem koła*, co stanowi cechę wygięcia Lamarle'a. Z łatwością wyznaczmy strzałkę tego łuku czyli tak zwaną środkową strzałkę wygięcia.



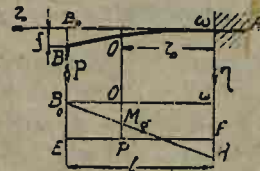
Będzie to  $f = \rho - \sqrt{\rho^2 - [1/2 \lambda]^2} = [J_x : \alpha_g P \lambda] \{1 - \sqrt{1 - [\alpha_g P \lambda : 2 J_x]^2}\}$ .

Gdy przekrój poprzeczny pręta jest zmienny, poszczególne przekroje nie są jednakowo obciążone, a ich promienie krzywizny — zmienne. Wygięcie środkowej części przestaje być kołowym. Odkształcona staje się krzywą, którą z łatwością wyznaczyć można z warunku  $J_x : \rho = \text{stałej}$ . Nie jest to już wygięcie *Lamarle'a*.

**§ 8. Obciążenia gnące.** Tylko co rozpatrywany układ sił stanowi jedyny rodzaj obciążenia gnącego, dającego po sprowadzeniu moment gnący, leżący w poprzecznym przekroju pręta odkształconego. Inne obciążenia gnące tej własności nie posiadają, dają bowiem w przekrojach, prócz momentów gnących jeszcze i *siły tnące*. Jest to zupełnie zrozumiałe — chcemy otrzymać gięcie właściwe, bez domieszek rozciągania, ściskania i skręcania, gmatwających pierwotną czystość zjawisk gięcia właściwego, dlatego też z góry wyłączamy przedewszystkiem wszelkie siły, pochylone ku podłużnej osi pręta nieodkształconego pod kątem różnym od prostego. Siły tego rodzaju muszą dać składową  $S$ , a zatem spowodować gięcie mimośrodkowe. Ponadto z sił pozostałych, a więc prostopadłych do osi podłużnej pręta nieodkształconego należy odrzucić siły leżące poza obręb płaszczyzny gięcia, jako dające dodatkowe momenty skręcające. Będziemy zatem rozpatrywali obciążenia gnące, złożone wyłącznie z sił prostopadłych do podłużnej osi pręta nieodkształconego, a leżących w płaszczyźnie gięcia. Każda z sił tego rodzaju, sprowadzona do środka danego przekroju poprzecznego, daje moment gnący równy sile mnożonej przez jej odległość od punktu sprowadzenia oraz — siłę tnącą, przyłożoną do tego środka, równą danej sile, równoległą jej i kierunkowo działającą jak ona. Jeżeli sprowadzimy kilka takich sił, to otrzymamy moment wypadkowy równy sumie poszczególnych momentów i siłę tnącą wypadkową równą sumie wszystkich sił tnących. W szczególnym wypadku, kiedy wypadkowa siła tnąca równa jest zeru — będziemy mieli obciążenie gnące właściwe.

Mimo to wzory gięcia stosujemy i do innych obciążeń gnących, pomijając działanie sił tnących. Czyniąc tak, popełniamy błąd, który jednak na ostateczny wynik obliczeń ma wpływ niewielki w warunkach zwykłych. Inaczej mówiąc w zjawisku wytrzymałościowo złożonym pomijamy część podrzędną *cięcie*, oddając wyłączne pierwszeństwo *gięciu*. W jednym z następnych działów kursu rozpatrzymy ową część pominiętą, ustalimy wzajemny stosunek odkształceń, i przekonamy się, że prawie zawsze ścisanie może być całkowicie pominięte. Jako drugi typowy przykład rozpatrujemy:

**§ 9. Pręt osadzony jednym końcem, u drugiego obciążony siłą gnącą.** Pierwotnie prosty pręt, jednym końcem osadzony nieruchomo, obciążamy siłą  $P$  u drugiego końca, prostopadle do osi podłużnej pręta przyłożoną. Pod jarzmem tej siły pręt (Rys. 17) ugnie się w dół: jego oś podłużna, pierwotnie prosta, wykrzywi się, stanie się *krzywą*  $AB$  —  *płaską*. Część osadzoną pręta oznaczamy



Rys. 17.

przez  $A\omega$ . Od punktu  $\omega$  pręt ulega wygięciu, jest to skrajny punkt nie-ruchomy pręta. Poprowadźmy zeń stałą oś  $\omega\zeta$  wzdłuż osi podłużnej pręta nieodkształconego, oś  $\omega\eta$  ułożmy w płaszczyźnie siły  $P$  — trzecią oś  $\omega\xi$  kierujemy prostopadle do płaszczyzny gięcia ku patrzącemu. W odległości  $\zeta$  od początku współrzędnych na odkształconej wybieramy dowolny zresztą punkt  $O$ , środek odnośnego poprzecznego przekroju pręta odkształconego. Współrzędne tego punktu będą odpowiednio  $\zeta$  i  $\eta$ . Główną oś tylko co wyznaczonego przekroju, leżącą w płaszczyźnie siły  $P$ , oznaczymy przez  $OY$ ; druga oś  $OX$  będzie szła ku patrzącemu, — trzecią kierujemy po stycznej, poprowadzonej w punkcie  $O$  do odkształconej, nadając jej kierunek zgodny z osią  $O\xi$ . Kierunek osi  $OZ$  wyznacza zarazem kierunek osi  $OY$ , którą tu trzeba prowadzić w dół, zgodnie z ogólnym prawem, podanym na początku tej części kursu. W założeniu pręta jednorodnie zbudowanego jednoimienne osie główne  $OY$  wszystkich przekrojów poprzecznych ułożą się w płaszczyźnie gięcia — na osiach  $OX$  będą leżały momenty gnące  $M_g = P(l - \zeta)$  — nadto w środku  $O$  każdego przekroju poprzecznego panować będzie siła tnąca  $P$ . Łatwo to udowodnić, rozpatrując w środku  $O$  dwie równe  $P$  i równoległe lecz skierowane przeciwnie, a więc znoszące się wzajemnie. Jedna z nich łącznie z siłą  $P$  utworzy parę sił o ramieniu  $l - \zeta$ , gdzie  $l$  — oznacza odległość siły  $P$  od przekroju osadczego czyli pierwotną długość pręta. Druga — da siłę tnącą — stałą dla wszystkich środków  $O$  sprowadzenia. Ponieważ momenty  $M_g$  rosną wraz z  $l - \zeta$ , przeto z łatwością otrzymać możemy odnośny wykres momentów w postaci trójkąta  $\omega B_0 H$ . Prostokąt  $\omega B_0 EF$  stanowić będzie wykres sił tnących. Prowadząc w odległości  $\omega O = \zeta$  równoległą do  $\omega H$ , otrzymamy z tych wykresów w odnośnej skali moment gnący  $M_g = OM_g$  i siłę tnącą  $P = OP$  dla środka sprowadzenia  $O$ . Skrajna wartość momentu  $M_m = Pl = \omega H$  panować będzie w przekroju osadczym, gdzie  $\zeta = 0$ .

W założeniu stałego przekroju poprzecznego pręta, skrajne wartości naprężeń przekrojów wyrażą się wzorem  $\sigma_{zm} = M_g : W_x = P(l - \zeta) : W_x$ . W przekroju osadczym panować będzie najwyższa wartość naprężenia  $k_g = Pl : W_x$ . Ten przekrój jest niebezpieczny — dla niego należy wyznaczyć właściwe wymiary, dobierając odpowiednią wartość  $W_x = Pl : k_g$ . Tak, dajmy na to, dla przekroju prostokątnego będzie  $\frac{1}{6} BH^2 = Pl : k_g$ , skąd określimy  $H$  lub  $B$ , biorąc stosunek  $m = B : H$ .

Wyznaczywszy w ten sposób przekrój poprzeczny pręta, możemy ze wzoru dla  $\frac{1}{\rho} = \alpha_g \frac{P(l - \zeta)}{J_x}$  otrzymać równanie  $\eta = f(\zeta)$  odkształco-

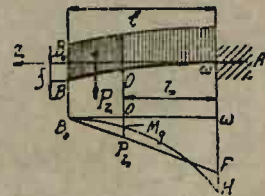
nej, ponieważ:  $\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\eta''}{(1 + \eta'^2)^{3/2}}$ , gdzie  $\eta' = \frac{d\eta}{d\zeta}$  oraz  $\eta'' = \frac{d^2\eta}{d\zeta^2}$ . To

równanie różniczkowe jest nader trudne do całkowania, daje się jednak uprościć. Ponieważ skrajne naprężenie  $k_g$  jest stosunkowo niskie, przeto praktycznie dopuszczalne wygięcie pręta jest nader nieznaczne, a odchylenia  $\eta$  od osi  $\omega\zeta$  — znikome. To znaczy, że styczne odkształconej tworzą bardzo mały kąt z osią  $\omega\zeta$ , możemy przeto utożsamić długość pierwotną pręta  $l$  z długością odkształconą, oraz pominąć zupełnie  $\eta'$



w mianowniku, pisząc  $\pm J_x \eta'' = \alpha_g P (l - \zeta)$ , co znacznie ułatwia całkowanie. Wyniki, jakie tą drogą otrzymamy, nie będą zupełnie ścisłe, lecz wystarczająco przybliżone dla małych wygięć pręta. Wprowadźmy oznaczenie  $E_g = 1 : \alpha_g$ . — Współczynnik  $E_g$  będziemy nazywali *spółczynnikiem sprężystości na zginanie*, a iloczyn  $E_g J_x$  — *szywnością pręta w danym przekroju*. Zatem  $\pm E_g J_x \eta'' = P (l - \zeta) = M_g$ . Siła  $P$  stara się wygiąć pręt ku dołowi, dając odkształconą — wypukłą względem osi  $\omega\zeta$ . Ponieważ wszystkie rzędne  $\eta$  odkształconej są dodatnie, oznaką przeto wypukłości będzie tu  $\eta\eta'' > 0$  czyli  $\eta'' > 0$ , trzeba więc zachować znak dodatni we wzorze  $E_g J_x \eta'' = P (l - \zeta)$ . Całkując mamy:  $E_g J_x \eta' \pm = C - \frac{P}{2} (l - \zeta)^2$  oraz  $E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{P}{6} (l - \zeta)^3$ . Stałe całkowania  $D$  i  $C$  wyznaczymy z łatwością, zważywszy, że w punkcie  $\omega$  odkształcona musi być styczną do osi  $\omega\zeta$ , co niewątpliwie wypływa bezpośrednio ze sposobu zamocowania pręta, którego koniec  $\omega A$  tkwi w ścianie i nie ulega żadnym odkształceniom, jako osadzony trwale. Zatem w punkcie  $\omega$  dla  $\zeta = 0$  mamy  $\eta = 0$  oraz  $\eta' = 0$ , co da:  $C - \frac{P}{2} l^2 = 0$  oraz  $D + \frac{1}{6} Pl^3 = 0$  i ostatecznie  $E_g J_x \eta = \frac{1}{2} Pl^2 \zeta - \frac{1}{6} Pl^3 + \frac{1}{6} P (l - \zeta)^3 = \frac{1}{2} P \zeta^2 [l - \frac{1}{3} \zeta]$ . Widzimy stąd bezpośrednio, że najwyższej wartości  $\zeta = l$  odpowiada najwyższa wartość  $\eta = f$ , czyli tak zwana strzałka ugięcia pręta oraz najwyższy kąt pochylenia stycznej ku osi  $\omega\zeta$  — kąt  $\theta = \arctg \eta' \approx \eta'$ . Zatem  $f = \frac{1}{3} Pl^3 : E_g J_x$ . Ponieważ  $E_g J_x \eta' = \frac{1}{2} Pl^2 - \frac{1}{2} P (l - \zeta)^2 = P \zeta [l - \frac{1}{2} \zeta]$ , przeto  $\theta = \frac{1}{2} Pl^2 : E_g J_x$ .

**§10. Pręt osadzony jednym końcem, a obciążony jednostajnie.** Tego rodzaju obciążenie możemy sobie wyobrazić, jako warstwę piasku stałej grubości, ułożoną na pręcie. Jej ciężar całkowity  $P$ , dzielony przez długość pręta pierwotną, da obciążenie jednostkowe  $p$ , które zazwyczaj wyrażamy w KG na jednostkę długości pręta. Korzystając ze znakowania ustępu poprzedniego, z łatwością wyznaczymy moment gnący dla dowolnego przekroju poprzecznego, w odległości  $\zeta$  od nasady pręta poprowadzonego. W tym celu bierzemy pod uwagę siły, cislące na część  $OB$  pręta odkształconego. Wypadkowa ich  $P_\zeta = p \times OB$ . Przy nieznacznym wygięciu (Rys. 18) możemy napisać że  $OB = l - \zeta$ , a zatem  $P_\zeta = p (l - \zeta)$ . Punkt uciepienia tej siły leży pośrodku odcinka  $OB$ , to też po sprowadzeniu tej siły do środka  $O$  otrzymamy  $M_g = \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2 = \frac{P}{2l} (l - \zeta)^2$ , oraz siłę tnącą  $P_\zeta$ , którą, jak zwykle, pomijamy. Tutaj więc siły tnące będą miały wykres trójkątny  $B_0\omega F$ , a momenty — paraboliczny  $B_0H\omega$ , jak to najlepiej uwypukla rysunek.



Rys. 18.

W założeniu stałego przekroju poprzecznego skrajne naprężenia będą równe  $\sigma_{sm} = M_g : W_x = P (l - \zeta)^2 : 2 l W_x$ . Ich najwyższa wartość panować będzie w przekroju osadczym, gdzie  $\zeta = 0$ .

Czynimy ją równą  $k_g = Pl : 2W_x$ , skąd  $W_x = Pl : 2k_g$ . W ten sposób wyznaczmy właściwe wymiary przekroju.

Chcąc z kolei znaleźć równanie odkształconej, piszemy  $E_g J_x \eta'' = \frac{P}{2l} (l - \zeta)^2$ , skąd:  $E_g J_x \eta' = C - \frac{P}{6l} (l - \zeta)^3$ ,  $E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{P}{24l} (l - \zeta)^4$ . Z warunków panujących w przekroju osadczym mamy  $\eta = \eta' = 0$  dla  $\zeta = 0$ , co da:  $C = \frac{1}{6} Pl^2$ ,  $D = -\frac{1}{24} Pl^3$ . Stąd równanie odkształconej:  $E_g J_x \eta = -\frac{1}{24} Pl^3 + \frac{1}{6} Pl^2 \zeta + \frac{1}{24} \frac{P}{l} (l - \zeta)^4$ . Czyniąc w niem  $\zeta = l$  otrzymamy, jak w przykładzie poprzednim:  $f = Pl^3 : 8 E_g J_x$  oraz  $\theta = Pl^2 : 6 E_g J_x$ .

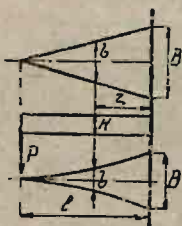
W obu tylko co rozpatrywanych wypadkach jeden tylko przekrój osadczy pręta jest należycie wytrzymałościowo wyzyskany — pozostałe są zbyt sówite. Aby tę zbytnią rozrzutność usunąć, należałoby wykonać:

**§ 11. Pręt stałej wytrzymałości jednostronnie osadzony.** Przekroje tego pręta należy tak dobrać, aby dla wszystkich przekrojów poprzecznych spełniało się równanie  $M_g = W_x k_g$ . Dla takiego pręta  $\frac{1}{\rho} = M_g :$

$E_g J_x = W_x k_g : E_g J_x$ . W założeniu przekroju prostokątnego  $J_x = \frac{1}{12} bh^3$ ,  $W_x = \frac{1}{6} bh^2$ . Uczyńmy wysokość wszystkich przekrojów stałą i równą  $H$ , wtedy dla  $b$  otrzymamy wzór  $b = 6 M_g : H^2 k_g$ . Nadto  $\frac{1}{\rho} = \eta'' = 2 k_g : H E_g =$  stałej. Wygięcie byłoby ściśle kołowe, gdyby

nie było sił tnących. W istocie jest ono jednak nieco inne, zbliża się jednak do kołowego. Chcąc wyznaczyć  $b$  dla poszczególnych przekrojów, należy wyrazić  $M_g$ . W pierwszym wypadku, gdy działa siła  $P$  u końca pręta:  $M_g = P(l - \zeta)$ , w drugim:  $M_g = \frac{P}{2l} (l - \zeta)^2$ , stąd odpowiednio:  $b =$

$= 6 P (l - \zeta) : H^2 k_g$  oraz  $b = 3 P (l - \zeta)^2 : H^2 k_g l$ . Pierwszy wzór wskazuje, że  $b$  zmienia się linjowo, rosnąc wraz z  $l - \zeta$  — drugi, że zmiana  $b$  jest paraboliczna; pierwszej zmienności odpowiada (rys. 19), drugiej (rys. 20). W obu wypadkach dla przekroju osadczego mamy  $B = 6 Pl : H^2 k_g$  oraz  $B = 3 Pl : H^2 k_g$ . A zatem  $b = B (l - \zeta) : l$  oraz  $b = B (l - \zeta)^2 : l^2$ . Chcąc w obu wypadkach otrzymać strzałkę ugięcia, należy całkować równanie wyżej wypisane



nie  $\eta'' = \frac{2k_g}{HE_g}$ ,  $\eta' = C + \frac{2k_g}{HE_g} \zeta$ ,  $\eta = D + C\zeta + \frac{k_g}{HE_g} \zeta^2$ , gdzie

stałe całkowania wyznaczyć można z warunków dla przekroju osadczego. Ponieważ  $\eta = \eta' = 0$  przy  $\zeta = 0$ , przeto

Rys 19 i 20.  $C = D = 0$  i ostatecznie  $\eta = \frac{k_g}{HE_g} \zeta^2$ . Czyniąc tu  $\zeta = l$ , otrzymamy ostatecznie strzałkę  $f = k_g l^2 : HE_g$ . W pierwszym wypadku, gdy



działa siła  $P$ , mamy:  $k_g = 6 Pl : BH^2$ , w drugim:  $k_g = 3 Pl : BH^2$ , zatem odpowiednio:  $f = 6 Pl^3 : E_g BH^3$  oraz  $f = 3 Pl^3 : E_g BH^3$ .

Załóżmy z kolei, że szerokość  $b$  wszystkich poprzecznych przekrojów pręta jest stała i równa  $B$ . Tutaj  $h^2 = 6M_g : Bk_g$ , nadto  $\frac{1}{\rho} = \eta'' = 2k_g : E_g h$ . Gdy działa siła  $P$ , wtedy  $h^2 = 6P(l-\zeta) : Bk_g$ , w wypadku zaś obciążenia jednostajnego:  $h^2 = 3P(l-\zeta)^2 : lBk_g$ . Pierwsza zależność jest paraboliczna i odpowiada budowie pręta, wskazanej na (rys. 21), druga jest oczywiście linjowa. Pręt czyniący jej zadość podaje (rys. 22).

W obu wypadkach dla przekroju osadczego mamy  $H^2 = 6Pl : Bk_g$  oraz  $H^2 = 3Pl : Bk_g$ , a zatem mamy po podzieleniu:  $h^2 = H^2(l-\zeta) : l$  oraz  $h^2 = H^2(l-\zeta)^2 : l^2$ . Chcąc w obu wypadkach otrzymać strzałkę ugięcia końcową, należy całkować równanie  $\eta'' = 2k_g : E_g h$ . W pierwszym wypadku przyjmuje ono postać:  $\eta'' = \frac{12 Pl^{3/2}}{E_g BH^3 \sqrt{l-\zeta}}$ . Stąd:

$$\eta' = C - \frac{24 Pl^{3/2}}{E_g BH^3} \sqrt{l-\zeta}, \quad \eta = D + C\zeta + \frac{16 Pl^{3/2}}{E_g BH^3} \sqrt{(l-\zeta)^3}.$$

I tutaj znów  $\eta' = 0$   $\eta = 0$ , gdy  $\zeta = 0$ , zatem będziemy mieli:

$$C = \frac{24 Pl^{3/2}}{E_g BH^3}, \quad D = - \frac{16 Pl^{3/2}}{E_g BH^3}.$$

Podstawiając te wartości w równanie odkształconej i czyniąc w nim  $\zeta = l$ , otrzymamy końcową strzałkę ugięcia

$$f = \frac{8 Pl^3}{E_g BH^3}.$$

W drugim wypadku:  $\eta'' = \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3(l-\zeta)}$ , skąd:  $\eta' = C - \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3} \lg(l-\zeta)$ ,

$$\eta = D + C\zeta + \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3} [\lg(l-\zeta) - 1] (l-\zeta).$$

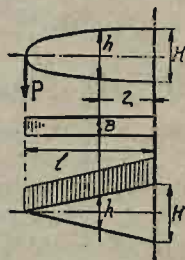
I znów przy

$$\zeta = 0 \text{ mamy } \eta' = \eta = 0, \text{ stąd: } C = \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3} \lg l, \quad D = \frac{6 Pl^2}{E_g BH^3} (1 - \lg l).$$

Podstawiając te wartości we wzór dla odkształconej i czyniąc w nim  $\zeta = l$ , otrzymamy strzałkę  $f = 6 Pl^3 : E_g BH^3$ . Wszystkie te strzałki pręta stałej wytrzymałości są znacznie większe, od strzałek pręta o stałym przekroju prostokątnym  $B \times H$ . Jest to zresztą prawo ogólne. Nie powinno dziwić—pręt stałej wytrzymałości, jako oszczędniej zbudowany, a więc słabszy—mocniej się ugina.

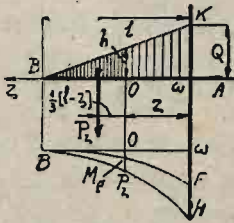
**§ 12. Obciążenie trójkątne pręta jednostronnie osadzonego.**

Pręt wyżej rozpatrywany obciążamy piaskiem, usypanym w kształcie warstwy trójkątnej (rys. 23). Ciężar całkowity piasku  $= P = \frac{1}{2} Ql$ , gdzie  $Q = \omega h$ ,



Rys. 21 i 22.

a  $l$ —oznacza pierwotną długość pręta. Weźmy pod uwagę jakikolwiek przekrój w odległości  $\zeta$  od przekroju osadczego. Obciążenie tego przekroju stanowić będzie trójkąt o wysokości  $h = Q(l - \zeta) : l$ . Pole trójkąta  $\frac{1}{2} Q(l - \zeta)^2 : l$  da wartość tego obciążenia, którą wprost oznaczymy przez  $P_\zeta$ . Punkt uciepienia tej siły będzie niewątpliwie leżał w odległości  $\frac{1}{3}(l - \zeta)$  od rozpatrywanego przekroju poprzecznego, a zatem moment gnący  $M_g = \frac{1}{6} Q(l - \zeta)^3 : l$ . W założeniu stałego przekroju będziemy mieli  $E_g J_x \eta'' =$

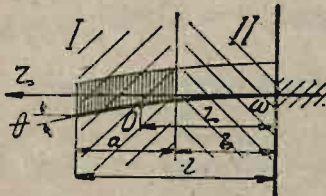


Rys. 23.

$$= \frac{1}{6l} Q(l - \zeta)^3, \text{ skąd dwukrotnie całkując: } E_g J_x \eta' = C - \frac{1}{24l} Q(l - \zeta)^4 \text{ oraz } E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{1}{120l} Q(l - \zeta)^5.$$

Dla przekroju osadczego, gdzie  $\zeta = 0$ , mamy  $\eta' = \eta = 0$ , a zatem:  $C = \frac{Q}{24} l^3$  oraz  $D = -\frac{Q}{120} l^4$ . Podstawiając te wartości we wzór dla  $\eta$  i czyniąc w nim  $\zeta = l$ , otrzymamy końcową strzałkę ugięcia  $f = Ql^4 : 30 E_g J_x$ . Kąt, jaki utworzy skrajna stycznia odkształconej z pierwotną osią pręta, będzie  $\theta = Ql^3 : 24 E_g J_x$ . Skrajna wartość momentu gnącego w przekroju osadczym:  $M_{gm} = \frac{1}{6} Ql^2$ . Wykres momentów będzie tu paraboliczny. Podobny doń będzie również i wykres sił tnących  $P_\zeta$ , które, jak zwykle, pomijamy. Oba wykresy podaje rysunek.

**§ 13. Pręt zamocowany jednostronnie częściowo obciążony w stosunku  $p$  KG na jednostkę długości. Obciążenie ciągłe pręta urywa się w odległości  $b$  od przekroju osadczego. Poprowadźmy wyraźną graniczną linię, dzieląc pręt na dwa obszary zmienności momentów. W lewej części pręta, obciążonej (rys. 24), moment będzie równy  $M_{g1} = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$ .**



Rys. 24.

Gdyby obciążenie ciągłe pokrywało cały pręt, to wyrażenie tylko co wypisane byłoby prawdziwe dla całego pręta; ponieważ jednak poza wartością  $\zeta = b$  obciążenia brak, przeto dla tej części pręta będziemy mieli:  $M_{g2} = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2 - \frac{1}{2} p(b - \zeta)^2$ , należy bowiem potrać obciążenie brakujące. Oba te wzory możemy połączyć

w jeden ogólny wzór, pisząc  $M_g = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$ ;

gdzie kreska ma rozgraniczać momenty obu dziedzin.

Dla lewej—wzór poza kreską należy odrzucić, poprzestając na pierwszym wyrazie — dla prawej dziedziny brać całość wzoru z pominięciem kreski.

Stąd, w założeniu stałego przekroju pręta  $E_g J_x \eta'' = \frac{1}{2} p(l - \zeta)^2$ ;

Całkując:  $E_g J_x \eta' = C - \frac{1}{6} p(l - \zeta)^3$ ;

$E_g J_x \eta = D + C\zeta + \frac{1}{120} p(l - \zeta)^4$ ;



$$= D + C\zeta + \frac{1}{24} p (l-\zeta)^3 - \frac{1}{24} p (b-\zeta)^3. \text{ Dla przekroju osadczego } \zeta=0$$

oraz  $\eta=\eta'=0$ , co da:  $C=\frac{1}{6} pl^3 - \frac{1}{6} pb^3$  oraz podobnie  $D=-\frac{1}{24} pl^4 + \frac{1}{24} pb^4$ . Piszemy oba te wzory bez kresek, ponieważ przekrój osadczy należy do prawej dziedziny. Podstawiając te wartości i czyniąc w odnośnych wzorach  $\zeta=l$ , otrzymamy skrajną strzałkę ugięcia  $f=\frac{1}{24} p [3l^4 - 4lb^3 + b^4] : E_g J_x$  i kąt nachylenia skrajnej stycznnej  $\theta=\frac{1}{6} p [l^3 - b^3] : E_g J_x$ . W założeniu  $b=0$ , odnajdziemy poprzednio wyprowadzone wzory dla pręta obciążonego jednostajnie na całej długości.

**§ 14. Zasada niezależności działania sił w wytrzymałości tworzyw.** Przy wyprowadzaniu powyższych wzorów milcząco opieraliśmy się na zasadzie niezależności działania sił, którą możemy wypowiedzieć w następującej postaci: *siła niezależna powoduje swoiste odkształcenia, niezależnie od innych sił na to samo ciało działających.* Każda więc siła zewnętrzna, odkształcająca, niezależnie od innych sił układu działająca, wywołuje w ciele odkształconem swoiste odkształcenia niezależnie od sił pozostałych. W ten sposób na tle swoistych odkształceń danej siły jawią się również swoiste naprężenia, możemy więc również wypowiedzieć tę samą zasadę w innej jeszcze postaci: *siła niezależna powoduje swoiste naprężenia, niezależnie od innych sił na to samo ciało działających.* Te naprężenia, jako siły cząsteczkowe, dodają się według prawa równoległoboku. Ich wypadkowym—odpowiadają odkształcenia wypadkowe, złożone z poszczególnych odkształceń składowych w myśl prawa, które znamy, jako

**§ 15. Drugie prawo Roberta Hooke'a.** Brzmi ono tak: *nieznaczne odkształcenia dodają się — jednokierunkowe algebraicznie, różnokierunkowe—geometrycznie.* To prawo łącznie z poprzedzającym umożliwia rozpatrywanie złożonych wypadków działania sił gnących. Jako wybitny przykład, bierzemy pod uwagę:

**§ 16. Pręt jednostronnie osadzony. Obciążenie złożone.** U wolnego końca pręta osadzonego jednostronnie, działa (rys. 25) siła  $P$ , dalej w odległości  $b$  od przekroju osadczego — siła  $Q$ . Nadto w odległości  $c$  od przekroju osadczego rozpoczyna się obciążenie ciągłe i trwa aż do nasady pręta w stosunku  $p$  KG na jednostkę długości. Tu mamy aż trzy typy momentów: Na całym przecie panuje moment gnący  $M_1=P(l-\zeta)$ , pochodzący od siły  $P$ ; na długość  $b$ , prócz tego momentu panuje jeszcze i  $M_2=Q(b-\zeta)$ , pochodzący od siły  $Q$ , wreszcie począwszy od  $\zeta=c$  dochodzi trzeci moment  $M_3=\frac{1}{2} p (c-\zeta)^2$ .



Rys 25.

Wyraźnie więc zaznaczają się tu trzy obszary obciążenia. To samo otrzymamy, pisząc jak dawniej:  $M_g = P(l-\zeta) + Q(b-\zeta) + \frac{1}{2} p (c-\zeta)^2$ ,

gdzie dla pierwszego obszaru brać jeno trzeba pierwszy wyraz, dla drugiego—dwa pierwsze, a dla trzeciego—cały wzór z pominięciem kreszek. Dla przekroju osadczego skrajną wartość naprężenia otrzymamy ze wzoru  $k_g = M_g : W_x$ , gdzie moment  $M_g$  możemy wyznaczyć, czyniąc we wzorze powyżej wypisanym  $\zeta=0$ . To samo otrzymamy w myśl zasady o niezależności działania sił, rozpatrując  $k_g$  jako sumę naprężeń, pochodzących od trzech składowych momentów  $Pl$ ,  $Qb$  i  $\frac{1}{2}pc^2$ .

Podobnie również, w założeniu stałego przekroju pręta, możemy od razu wypisać wzór odkształconej, korzystając ze wzorów uprzednio wy-

$$\begin{aligned} \text{prowadzonych, w postaci: } E_g J_x \eta' &= C - \frac{1}{2} P (l - \zeta)^2 \frac{1}{l} + C' - \frac{1}{2} Q \\ (l - \zeta)^2 \frac{1}{l} + C'' - \frac{1}{6} p (c - \zeta)^3, \quad E_g J_x \eta &= D + C\zeta + \frac{1}{6} P (l - \zeta)^3 \frac{1}{l} + D' + \\ + C'\zeta + \frac{1}{6} Q (b - \zeta)^3 \frac{1}{b} + D'' + C''\zeta + \frac{1}{24} p (c - \zeta)^4. \quad \text{Dla osadczego prze-} \\ \text{kroju, jako leżącego w ostatnim obszarze, należy pominąć kreski. Tam} \\ \zeta=0, \text{ a nadto: } \eta' = \eta = 0 \text{ czyli: } C + C' + C'' &= \frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3 \\ \text{oraz } D + D' + D'' &= -\frac{1}{6} Pl^3 - \frac{1}{6} Qb^3 - \frac{1}{24} pc^4 \text{ i ostatecznie: } E_g J_x \eta' = \\ = \frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3 - \frac{1}{2} P (l - \zeta)^2 \frac{1}{l} - \frac{1}{2} Q (b - \zeta)^2 \frac{1}{b} - \frac{1}{6} p (c - \zeta)^3, \\ E_g J_x \eta &= -\frac{1}{6} Pl^3 - \frac{1}{6} Qb^3 - \frac{1}{24} pc^4 + [\frac{1}{2} Pl^2 + \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3] \zeta + \\ + \frac{1}{6} P (l - \zeta)^3 \frac{1}{l} + \frac{1}{6} Q (b - \zeta)^3 \frac{1}{b} + \frac{1}{24} p (c - \zeta)^4. \end{aligned}$$

To samo zupełnie mogliśmy otrzymać, całkując wzór ogólny  $E_g J_x \eta'' = M_g$ . W danym wypadku odkształcenia  $\eta$  są jednokierunkowe, to też je dodawaliśmy algebraicznie w myśl drugiego prawa Hooke'a. Czyniąc we wzorach  $\zeta=l$ , otrzymamy końcową strzałkę ugięcia pręta oraz kąt pochylenia skrajnej stycznej odkształconej. W szczególnym wypadku, gdy uczynimy nadto  $Q=p=0$ , będziemy mieli odnośne wartości dotyczące pręta obciążonego pojedynczą siłą  $P$ .

O wiele ciekawszy wynik otrzymamy czyniąc w nich  $P=0$ , wtedy bowiem możemy wyznaczyć końcową strzałkę i kąt dla pręta  $l$  długiego, obciążonego w sposób ciągły  $p$   $KG$  na jednostkę długości w odcinku  $c$  oraz siłą  $Q$  w odległości  $b$  od przekroju osadczego przyłożoną. Całe to obciążenie nie może oczywiście odkształcić lewej części pręta —  $(l - b)$  długiej. Pozostanie ona prostą, o czym możemy się przekonać, rozpatru-

$$\text{jąc wzór } E_g J_x \eta' = \frac{1}{2} Qb^2 + \frac{1}{6} pc^3 \frac{1}{l} - \frac{1}{2} Q (b - \zeta)^2 \frac{1}{b} - \frac{1}{6} p (c - \zeta)^3,$$

który dla całego pierwszego obszaru obciążeń daje jedną i tę sama wartość kąta pochylenia stycznej odkształconej osi pręta.

Podany przykład można uogólnić na wypadek działania dowolnej liczby sił gnących. Każda z nich, w myśl prawa o niezależności działania sił, wywołuje swoiste naprężenia i odkształcenia gnące, chcąc zatem, dajmy na to, wyznaczyć strzałkę ugięcia w pewnym punkcie pręta — określamy dla tego punktu poszczególne strzałki sił układu i dodajemy je algebraicznie.



tu bowiem odkształcenia są jednokierunkowe. Inaczej jednak rzecz się ma, gdy siły gnące nie leżą w jednej płaszczyźnie.

**§ 17. Pręt wyginany ukośnie.** Gdy moment gnący  $M_g$  pochyla się ku osi głównej  $OX$  odnośnego przekroju poprzecznego pod kątem  $\omega$ , wtedy zachodzi ogólny wypadek gięcia właściwego, o którym mówiliśmy wyżej. Dla prętów jednorodnie zbudowanych możemy jednak, opierając się na prawie o niezależnym działaniu sił, sprowadzić ten ogólny wypadek gięcia do dwóch prostszych. W tym celu rozkładamy wszystkie siły gnące na składowe leżące w płaszczyznach głównych pręta, otrzymując w ten sposób dwie gromady sił składowych, leżących w prostopadłych do siebie *płaszczyznach gięcia*. Obie te gromady dają niezależne naprężenia i odkształcenia. Chcąc je wyznaczyć, sprowadzamy obie gromady sił do środka dowolnego przekroju poprzecznego pręta. Ponieważ siły gnące są prostopadłe do pierwotnej osi pręta, przeto obie gromady dadzą momenty gnące, leżące w płaszczyznach głównych pręta jednorodnie zbudowanego, każda więc z obu gromad wygnie pręt  *płasko*. W ten sposób otrzymamy *dwie* odkształcone pręta, w dwóch płaszczyznach głównych do siebie prostopadłych leżące. Ponieważ obie gromady sił działają jednocześnie i łącznie, zatem wyznaczymy *odkształconą istotną, dodając geometrycznie rzędne obu odkształconych płaskich*, stanowiących niejako jej rzuty na obie płaszczyzny gięcia. Wypływa to bezpośrednio z drugiego prawa *Hooke'a*. W tak prosty sposób możemy sprowadzić *gięcia właściwe* do dwóch gięć płaskich — lecz tylko dla pręta jednorodnie zbudowanego. Jako przykład typowy tylko co ustalonego sposobu weźmiemy pod uwagę:

**§ 18. Pręt jednostronnie osadzony, a obciążony ukośnie.** Pręt o płaszczyznach głównych pionowej i poziomej, zamocowany jednostronnie poziomo, dźwiga na całej swej długości obciążenie ciągłe  $p$  KG na jednostkę długości, pionowe, a nadto u wolnego końca obciążony jest siłą poziomą  $Q$  KG, równoległą do stałej osi  $\omega\xi$  i skierowaną jak ona. — Weźmy pod uwagę jakikolwiek przekrój poprzeczny pręta w odległości  $\zeta$  od przekroju osadczego. Po sprowadzeniu obciążenie ciągłe da w tym przekroju moment gnący  $M_1 = \frac{1}{2} p (l - \zeta)^2$ , leżący na osi głównej poziomej, a siła  $Q$  da moment  $M_2 = Q(l - \zeta)$  na osi głównej pionowej tego przekroju leżący. Dla określenia właściwych wymiarów pręta miarodajnym będzie przekrój osadczy, gdzie panują skrajne wartości obu tych momentów  $M_1 = \frac{1}{2} p l^2$  i  $M_2 = Ql$ . Oba wywołują jednokierunkowe naprężenia normalne, które wyznaczymy z łatwością ze wzorów ogólnych dla gięcia płaskiego w postaci  $\sigma_{z1} = -\frac{M_1}{J_x} y$ ,  $\sigma_{z2} = -\frac{M_2}{J_y} x$ , zważywszy,

że dla pierwszego  $\omega = \pi$ , a dla drugiego  $\omega = \pi/2$ .

Wypadkową tych dwóch naprężeń na mocy prawa o niezależności

działania sił otrzymamy w postaci  $\sigma_z = -\frac{M_2}{J_y}x - \frac{M_1}{J_x}y$ , pozostaje więc

tylko wyznaczyć punkt przekroju osadczego o skrajnej wartości tego naprężenia, a więc parę wartości  $x, y$ , przynależnych do tego przekroju, dającą maximum  $\sigma_z$ . Ten sam wynik otrzymamy, stosując wzór ogólny,

tutaj bowiem  $M_g = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$  przyczem  $M_x = -M_1$ ,  $M_y = M_2$ .

Podobnie również w założeniu stałego przekroju pręta dla momentów  $M_1$  otrzymamy odkształconą  $E_g J_x \eta = -\frac{1}{24}pl^4 + \frac{1}{6}pl^3\zeta + \frac{1}{24}p(l-\zeta)^4$ , a dla momentów  $M_2$  będziemy mieli  $E_g J_y \xi = \frac{1}{2}Q(l - \frac{1}{3}\zeta)\zeta^2$ .

Będą to rzuty odkształconej istotnej — na obie płaszczyzny główne pręta. Chcąc, dajmy na to, wyznaczyć końcową strzałkę  $f$  ugięcia pręta, należy znaleźć obie jej składowe, czyniąc w tych wzorach  $\zeta = l$ , co da:  $f_1 = pl^4 : 8 E_g J_x$  oraz  $f_2 = Ql^3 : 3 E_g J_y$ . Stąd bezpośrednio  $f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ , a strzałka pochyła się ku osi głównej końcowego przekroju pręta pod kątem  $\varphi = \text{arctg}[f_1 : f_2]$ .

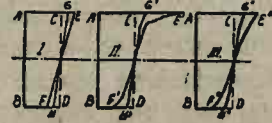
Poznaliśmy już wszystkie rodzaje odkształceń gnących. Zanim podamy zastosowania nie od rzeczy będzie jeszcze raz przypomnieć, że cała powyżej podana teoria wymaga zachowania stałej wartości  $\alpha_g$  lub  $E_g = 1 : \alpha_g$  dla całego obszaru naprężeń, panujących w przekroju poprzecznym pręta wygiętego. Trzeba więc jeszcze zbadać, kiedy warunek ten istotnie jest zachowany.

**§ 19. Współczynniki rozciągłości i ściśliwości przy wyginaniu.** Weźmy pod uwagę płytkę pręta pierwotnego, nieodkształconą. Krając ją środkową płaszczyzną prostopadłą do linii obojętnej, zakładamy, a założenie to w niczem ogólności naszych rozważań nie uszczupli, że linje obojętne przechodzą przez środki  $O, O_1$  obu powłók płytki. Po obciążeniu siłami gnącymi w powłokach powstaną naprężenia, proporcjonalne do odległości od osi obojętnej. Skrajne naprężenia przekrojów płytki niech będą  $\sigma_r$  i  $\sigma_c$  — rozciągające i cisnące. Gdyby poszczególne włókienka płytki ułożone były luźno obok siebie w kierunku podłużnej osi pręta i wzajemnie na siebie nie oddziaływały, to ich wydłużenia dodatnie i ujemne zachodziłyby według odnośnych wykresów próbek rozciąganych i ściskanych. Założmy, że tak jest istotnie. Gdy nadto tworzywo zachowuje się według pierwszego prawa Hooke'a aż do skrajnych naprężeń  $\sigma_r$  i  $\sigma_c$ , słowem, gdy cały obszar naprężeń płytki nie wykracza poza granicę proporcjonalności, to wtedy odnośne wydłużenia włókien płytki, jako proporcjonalne do naprężeń, będą również rosły proporcjonalnie do odległości od linii obojętnej. Płyta po odkształceniu pozostanie płaska obustronnie, choć jej powłoki pochyła się nieco ku sobie. Inaczej jednak rzecz się będzie miała gdy skrajne naprężenia płytki wykrócą poza granicę proporcjonalności. W tym wypadku włókna środkowe pozostaną pod jarzmem naprężeń nie przekraczających granic proporcjonalności —



— wydłużą się więc lub skrócą proporcjonalnie do odległości od osi obrotowej; — skrajne natomiast włókna płytki, leżące poza tylko co omawianymi, ulegną wydłużeniom i skróceniom znacznym, jakie widzimy na wykresach wytrzymałościowych poza granicami proporcjonalności. Tutaj więc powłoka płytki winna by się odkształcić podług krzywej wykresu (Rys. 26) zjednoczonego danego tworzywa  $E'F'$ .

Z kolei gdy tworzywo zachowuje się sprzecznie z prawem *Hooke'a*, włókienka wydłużać się będą i skrócić nieproporcjonalnie do naprężeń i powłoka płytki otrzyma kształt  $E''F''$  linii wykresu zjednoczonego rozpatrywanego tworzywa.



Rys. 26.

Z tych wywodzeń wypływa, że założenie *Bernoulli'ego* jedynie w wypadku pierwszym powinno mieć miejsce istotnie; tymczasem liczny materiał doświadczalny niezbitnie dowodzi, iż posiada ono zakres znacznie szerszej stosowności. Przekroje poprzeczne pręta zachowują swój kształt płaski nawet wtedy, gdy znacznie przekroczymy granice proporcjonalności dla skrajnych włókien w wypadku zginania tworzyw, zachowujących się podług pierwszego prawa *Hooke'a*. Nie dosyć na tem. Założenie *Bernoulli'ego* sprawdza się dosyć ściśle nawet i dla tworzyw, nie ulegających prawu *Hooke'a*. Przyczyna istotna tej sprzeczności leży w naszym założeniu, z gruntu oczywiście fałszywym. Włókienka płytki nie są luźno ułożone, a *powiązane ze sobą w sposób nader ścisły*, i, jako takie, wzajemnie działają na siebie przy niejednakowym odkształceniu. Dwa sąsiednie włókna, niejednakowo ściskane lub rozciągane, hamują wzajemnie swe odkształcenia, starają się je wyrównać, zmniejszyć ich różnicę na tle wewnętrznego tarcia o siebie. Należy przeto włókna znacznie wyżej obciążać przy wyginaniu pręta niż przy rozciąganiu lub ściskaniu, aby otrzymać to samo skrajne wydłużenie. W pierwszym przeto wypadku istotny kształt powłoki będzie  $GH$  a nie  $EF$ , przyczem niewątpliwie tylko co omówiona zdolność hamowania wystąpi wszędzie z jednakową siłą — powłoka pozostanie więc płaską. W drugim wypadku zamiast  $EF'$  otrzymamy  $G'H'$  — kształt powłoki wyraźnie płaski w środkowej części, lekko tylko zakrzywiony na skrajach, gdzie zdolność hamownicza musiała wystąpić z wielką siłą na tle ostrych różnic pomiędzy naprężeniami sąsiadujących włókien. To samo widzimy w wypadku trzecim, gdzie miasto wyraźnie krzywej linii esowej  $E''F''$  otrzymamy znacznie mniej wygiętą linię  $G''H''$ . Tylko co opisane zjawisko hamowania, prostując linje wykresów wytrzymałościowych, opóźnia pojawianie się faz wykresowych, należy zatem przy wyginaniu pręta — oczekiwać znacznie wyższej granicy proporcjonalności i płynności, niżli przy ściskaniu lub rozciąganiu tego samego tworzywa, oraz znacznie wyższego naprężenia niszczącego. Wszystko to niezbitnie stwierdziły liczne do-

świadczenia badaczy. *Consideré* stwierdził, że granica proporcjonalności  $K_h$  przy zginaniu płaskim jest o 30 + 40% wyższa niż przy ściskaniu lub rozciąganiu okrągłego pręta zlewnego, lecz tylko o 10% wyższa dla dwuteownika z tego samego tworzywa. Te wyniki stwierdzają nasze przewidywania, a zarazem wykazują pewną ich zależność od kształtu przekroju poprzecznego. Nie może być inaczej: włókienka, dalej od linii obojętnej położone, ulegają odkształceniom większym — hamowane są zatem przez włókienka bliżej linii obojętnej leżące. Zjawisko przez nas przewidziane powinno zależeć i od kształtu poprzecznego przekroju i występować tem silniej, im stosunkowo więcej cząsteczek skupia się koło linii obojętnej przekroju. Najsilniej przeto występować winno w przekroju kwadratowym, gdy linia obojętna przechodzi przez przekątną, słabiej w przekroju kołowym, tu bowiem cięciwy, równoległe do osi obojętnej, lepiej są w cząsteczki uposażone, i najsłabiej dla dwuteownika. Wyznamy stosunek naprężenia łamiącegogo  $K_g$  do naprężenia rozrywającego  $K_r$ , wtedy dla prętów podanych na (Rys. 27) będziemy mieli, kolejno idąc na



Rys. 27.

prawo:  $K_g : K_r = 1,45 - 1,52 -$   
 $- 1,73 - 1,75 - 2,12 - 2,14 -$   
 $- 2,35$ , jak to wynika z doświadczeń *Bacha* dla prętów żeliwnych. Powyższe wyniki stwierdzają teoretyczne przewidywania w całej

rozciągłości. Podobnie zachowują się przy próbach tworzywa, ujawniające wyższą wytrzymałość na ściskanie niż na rozciąganie. Dla takich tworzyw pęknięcie poczyna się od skrajnego włókna rozciąganego przy wyginaniu. To samo dały tworzywa wytrzymalsze na rozciąganie, jak drzewo, tu jednak przy wyginaniu pierwszej pęka włókno ściskane, to też dla drzewa należy brać miasto poprzedniego stosunku — stosunek  $K_g : K_c$ , wynoszący średnio 1,5 według *Tetmajera*.

Biorąc pod uwagę wszystko to, cośmy powiedzieli, dochodzimy do przekonania, że współczynnika  $\alpha_g$  nie należy utożsamiać ze współczynnikami rozciągliwości lub ściśliwości, posiada on bowiem znacznie *mniejszą* wartość. To samo powiedzieć należy i o *skałniku sprężystości*  $E_g = 1 : \alpha_g$ , którego wartość jest wogóle *większa* od wartości  $E_r$  i  $E_c$ . Dla określenia  $\alpha_g$  lub  $E_g$  poddajemy pręty próbom na zginanie, stosując obciążenie *Lamarle'a*, aby uniknąć sił tnących. Pomiary dotyczą strzałki ugięcia środkowej. Wzory odnośne dadzą  $E_g$  lub  $\alpha_g$ . Okazuje się przy tem, że to samo naprężenie silniej odkształca włókno przy rozciąganiu lub ściskaniu, niż przy gięciu. Stwierdza to nasze przewidywania. Zazwyczaj jednak, wobec braku dostatecznego materiału doświadczalnego, używamy jednej i tej samej wartości  $E$  we wszystkich rachunkach wytrzymałościowych.



§ 20. **Przekrój niejednolity.** Powyższe rozważania tracą swą moc w wypadku przekroju niejednolitego o włóknach różnorodnych ściśle powiązanych ze sobą. Trudno jest orzec, jak takie włókna działają wzajemnie na siebie i czy zasada *Bernoulli'ego* sprawdzać się może i w danym wypadku. Pytania tego rodzaju coraz to częściej stawiane są obecnie w teorii *żelbetu*, czekają dotąd jednak na odpowiedź, liczenie bowiem prętów betonowych na gięcie wiele pozostawia do zyczenia i chyba nigdy dokładnem nie będzie. Weźmy pod uwagę (Rys. 28) płytkę betonową prostokątną, zawierającą w dolnej części rozciąganej — zbrojenia żelazne, złożone z okrągłych drutów. Oznaczmy przez  $f$  całkowity przekrój zbrojenia, przez  $a$  odległość jego środka od dolnego skraju płytki, przez  $H$  — wysokość, przez  $B$  jej podstawę wreszcie przez  $h$  odległość linii obojętnej od górnego skraju płytki. Zazwyczaj naprężeń rozciągających betonu nie bierzemy pod uwagę, uwzględniając w rachunku wyłącznie tylko naprężenia rozciągające  $\sigma_s$  zbrojenia oraz — naprężenia cisnące górnej betonowej części płytki, linowo rosnące od zera na linii obojętnej do skrajnej wartości  $\sigma_b$  dla górnych włókien płytki. Wypadkowa wszystkich tych górnych naprężeń  $\frac{1}{2} B h \sigma_b$  działa w odległości  $\frac{2}{3} h$  od linii obojętnej, a bezwzględna jej wartość jest niewątpliwie równa wypadkowej  $f \sigma_s$  naprężeń zbrojenia, ponieważ naprężenia przekroju, obciążonego tylko momentem gnącym  $M_g$ , nie mogą dać wypadkowej siły osiowej. Musi być przeto  $f \sigma_s = \frac{1}{2} B h \sigma_b$ . Obie wypadkowe naprężeń stanowią tedy parę o ramieniu  $m = H - a - \frac{1}{3} h$ , równoważącą moment  $M_g$ , a zatem



Rys. 28.

$M_g = m f \sigma_s = \frac{1}{2} m B h \sigma_b$ , skąd mamy ostatecznie:  $\sigma_b = \frac{2 M_g}{m B h}$ ,  $\sigma_s = \frac{M_g}{m f}$ . Należy więc jeszcze tylko wyznaczyć  $h$ . Wychodząc z założenia

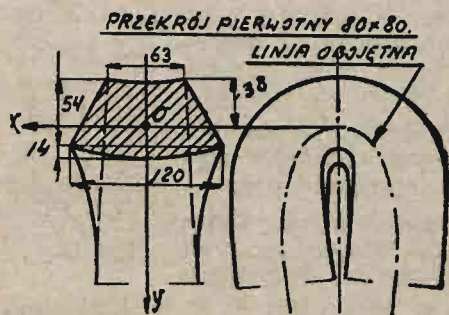
*Bernoulli'ego*, przyjmujemy, że wydłużenia poszczególnych włókien przekroju rosną proporcjonalnie do odległości od linii obojętnej, a przeto  $[\sigma_b : E_b] : h = [\sigma_s : E_s] : (H - h - a)$ . Stąd, oznaczając stosunek wskaźników sprężystości żelaza i betonu przez  $n = E_s : E_b$ , mamy  $n(H - h - a) : h = \sigma_s : \sigma_b = \frac{1}{2} B h : f$  i ostatecznie

$$h = \frac{nf}{B} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2 B (H - a)}{nf}} - 1 \right\}.$$

W ten sposób wyznaczyliśmy  $h$  — dalej wyznaczymy  $m$ ,  $\sigma_s$  i  $\sigma_b$ , całe to jednak obliczenie bynajmniej nie można nazwać ścisłym. —

§ 21. **Naprężenia, leżące w przekroju poprzecznym pręta zginanego.** Na samym początku części piątej kursu zaznaczyliśmy istnienie naprężeń składowych  $t_x$ ,  $t_y$ , leżących w przekroju. Nie umieliśmy ich wyznaczyć z równań statyki, należy je zatem zbadać doświadczalnie. Poznaliśmy działanie naprężeń normalnych, upodobniliśmy je do rozcią-

gania i ściskania, przy których zachodzą zjawiska zwężeń i rozszerzeń przekroju poprzecznego. Sprobujmy tę naszą wiedzę zastosować do danego wypadku, należy się spodziewać bowiem, że i tu włókna rozciągane przekroju będą się zwężać poprzecznie— a ściskane—rozszerzać. Aby to sprawdzić, bierzemy pod uwagę pręt o niezłożonym przekroju, najlepiej kwadratowym (Rys. 29) i wyginamy go zupełnie, tak, aby w miejscu wygięcia utworzyła się wypukłość, a oba końce pręta zeszyły się z sobą



Rys. 29.

Pierwotnie proste szeregi tych kwadracików utworzą łuki współśrodkowe, równoległe do skrajnych odkształconych boków przekroju. To zjawisko zrozumiemy z łatwością, gdy zważymy, że każdy kwadracik dolnej części przekroju — ściskany — pęcznieje, a w górnej rozciągany — chudnie poprzecznie. Kwadraciki osi obojętnej pozostają niezmienione — szereg ich jednak wygina się końcami ku górze.

Wobec symetryczności przekroju odkształconego względem płaszczyzny gięcia  $OY$ , oś ta  $OY$  pozostanie główną osią przekroju i po odkształceniu, druga natomiast oś  $OX$  zmieni swe położenie w przekroju. Przez środek przekroju odkształconego poprowadźmy nową oś  $OX$  prostopadle do  $OY$ — będzie to niewątpliwie oś obojętna przekroju odkształconego. Ta oś obojętna przetnie boczne proste ścianki przekroju w punktach, zbliżonych do górnych krawędzi pręta. Stąd mamy prosty wniosek: *przy odkształceniach znacznych prostokątny przekrój pręta wygiętego przechodzi w wycinek pierścienia kołowego, zwypuklony po stronie włókien ściskanych, zakłęsnięty po stronie rozciąganych; ślad linii obojętnej na bocznych ściankach mniej więcej płaskich posuwa się ku skrajnym włóknom ściskany.* Wszystko to zachodzi jeno w przybliżeniu i tylko przy wygięciach nader znacznie poza granice proporcjonalności posuniętych. Zazwyczaj przeto nie bierzemy wcale pod uwagę tych zjawisk dodatkowych, świadczących o działaniu naprężeń leżących w przekroju, dopuszczalne bowiem praktycznie wygięcia są nader nieznaczne, a owe zjawiska wtórne wprost niedostrzegalne. To też je zawsze pomijamy.



§ 22. Przykłady i ćwiczenia. 1<sup>o</sup> *Tyczka wbita w ziemię* pionowa o przekroju stałym kwadratowym, ulega parciu wiatru, cisnącego z siłą 150 kg na metr kwadratowy powierzchni płaskiej, prostopadłej do jego kierunku. Wysokość słupa wynosi *cztery* metry, zatem siłę wiatru otrzymamy, mnożąc boczną powierzchnię słupa przez parcie wiatru. Oznaczmy przez  $b$  bok kwadratu w cm, a wtedy siła wiatru  $P = 4 \times b \times 150 : 100 = 6b$  kg. Ta siła cisnie pośrodku bocznej powierzchni słupa, daje więc moment u podstawy równy  $M_g = 6b \times 200 = 1200b$  (kg, cm) oraz siłę tnącą  $P$ , którą pomijamy. Moment  $M_g$  leży w przekroju dolnym słupa, tworząc kąt  $\omega = 0$  z odnośną osią główną, możemy przeto napisać, że  $M_g = 1200b = \frac{1}{6} b^3 k_g$ . Dla sośniny naprężenie  $K_g = 470$  kg/cm<sup>2</sup>. W założeniu sześciokrotnej pewności będzie przeto  $k_g = 470 : 6 = 78,3 \approx 80$  kg/cm<sup>2</sup>, a zatem  $b^3 = 7200 : 80 = 90$ , co da  $b = 9,5$  cm. Zwykły wymiar dyla wynosi  $10 \times 10$  cm — należy go użyć. Chcąc nadto wyliczyć końcową strzałkę ugięcia, stosujemy wzór dla pręta, obciążonego jednostajnie:  $f = Pl^3 : 8 E_g J_x$ . Tutaj:  $P = 6 \times 10$  kg,  $l = 400$  cm,  $E_g = E = 100000$  kg/cm<sup>2</sup>,  $J_x = \frac{1}{12} \times 10 \times 10^3$  cm<sup>4</sup>. Stąd  $f = 5,76$  cm.

2<sup>o</sup> *Dyl jednostronnie wmurowany* drugostronnie zaopatrzone w hak, na haku zawieszono drut, dźwigający ciężar  $P = 500$  kg — w odległości dwóch metrów od ściany. Aby wyznaczyć bezpieczny przekrój prostokątny dyla, wyliczamy moment gnący dla przekroju osadczego, w płaszczyźnie muru leżącego:  $M_g = 500 \times 200$  (kg, cm) i oznaczamy przez  $H$  wysokość, przez  $B$  — podstawę tego przekroju. Zatem  $M_g = W_x k_g$ , skąd:  $\frac{1}{6} BH^2 = M_g : k_g$ . Dla dębiny  $K_g = 600$  kg/cm<sup>2</sup> i, w założeniu pewności sześciokrotnej:  $k_g = 100$  kg/cm<sup>2</sup>, a przeto  $BH^2 = 6 M_g : k_g = 6000$  cm<sup>3</sup>. Dla dyla kwadratowego  $18 \times 18$  cm mamy  $BH^2 = 18^3 = 5832$  cm<sup>3</sup>, a więc zbyt mało, należy przeto wziąć dyl zwykłej wielkości:  $H = 20$  cm,  $B = 16$  cm, dla którego  $BH^2 = 6400$  cm<sup>3</sup>. Wzór  $f = Pl^3 : 3 E_g J_x$  da nam końcową strzałkę ugięcia. Tutaj  $P = 500$  kg,  $l = 200$  cm,  $E_g = E = 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>,  $J_x = \frac{1}{12} \times 16 \times 20^3 = 10667$  cm<sup>4</sup>, stąd  $f = 1,25$  cm.

3<sup>o</sup> *Pręt prosty, jednostronnie osadzony*, obciążamy jakkolwiek siłami gnącymi, leżącymi w pionowej płaszczyźnie gięcia i nadajemy wymiary przekrojom poprzecznym, jednorodnie zbudowanym tak, aby dla każdego przekroju stosunek  $M_g : E_g J_x$  był stały i równy  $\mu$ . Tutaj równanie  $E_g J_x \eta'' = M_g$  przeobrazi się w:  $\eta'' = \mu$ , skąd:  $\eta' = \mu \zeta + C$ ,  $\eta = \frac{1}{2} \mu \zeta^2 + C \zeta + D$ . Dla przekroju osadczego, gdzie  $\zeta = 0$ , mamy  $\eta' = \eta = 0$ , zatem  $\eta = \frac{1}{2} \mu \zeta^2$ . Odształcona jest parabola. Dla  $\zeta = l$  otrzymamy końcową strzałkę ugięcia  $f = \frac{1}{2} \mu l^2$ .

4<sup>o</sup> *Dwuteownik jednostronnie osadzony* obciążamy u końca wolnego siłą 1000 kg ukośnie. Dwuteownik stawiamy pionowo, prowadząc wzdłuż osi środniaka — osie główne  $OY$  przekrojów poprzecznych i kierując je ku dołowi. Kąt, jaki tworzy siła  $P$  z osią  $OX$ , wynosi  $35^\circ 30'$ , a długość

pręta  $l = 100$  cm. Weźmy pod uwagę przekrój poprzeczny pręta w odległości  $\zeta$  od przekroju osadczego. Po sprowadzeniu do jego środka  $O$  siła  $P$  da moment gnący  $M_g = P(l - \zeta)$  i siłę tnącą, którą pomijamy. Kąt pochylenia tego momentu ku osi  $OX$ , poprowadzonej na prawo dla oka, patrzącego od strony wolnego końca pręta, wyniesie  $\omega = 90^\circ + 35^\circ 30'$ , będziemy mieli przeto dla tego przekroju naprężenie  $\sigma_x = -P(l - \zeta) \cdot \frac{\sin \omega x}{J_y} + P(l - \zeta) \frac{\cos \omega y}{J_x}$ . Rośnie ono wraz z momentem, to też, chcąc wyznaczyć bezpieczne wymiary pręta, bierzemy pod uwagę skrajny osadczy przekrój, gdzie panuje najwyższa wartość  $M_g = Pl$ . Wobec  $\sin 125^\circ 30' = 0,81412$ ,  $\cos 125^\circ 30' = -0,58070$  mamy:  $\sigma_x = -1000 \times 100 \times 0,81412 \frac{x}{J_y} - 1000 \times 100 \times 0,58070 \frac{y}{J_x}$ . Przekrój jest symetryczny względem osi  $OX, OY$ , a przeto skrajną wartością  $x/J_y$  będzie niewątpliwie  $1:W_y$ , a skrajną wartością  $y/J_x - 1:W_x$  i ostatecznie:  $\sigma_x = -81412 : W_y - 58070 : W_x$ . W założeniu dwuteownika № 30 mamy  $W_x = 652$  cm<sup>3</sup>,  $W_y = 71,9$  cm<sup>3</sup> — skrajne naprężenie będzie więc tu  $\sigma_{sm} = -1221,4$  kg/cm<sup>2</sup>. Jest to nieco zbyt dużo, jak dla żelaza zlewnego, które w założeniu obciążenia trwałego wytrzymałe jest tylko  $k_g = 900 - 1200$  kg/cm<sup>2</sup>. Należałoby przeto wziąć № 32, lepiej jednak zmienić osie dwuteownika, stawiając go środkami poziomo. Wtedy № 30 da:  $W_x = 71,9$  cm<sup>3</sup>,  $W_y = 652$  cm<sup>3</sup>, skąd  $\sigma_{sm} = -81412 : 652 - 58070 : 71,9 = -932$  kg/cm<sup>2</sup>. Wystarczy przeto № 30, ułożony napłask środkami. Chcąc wyznaczyć strzałkę ugięcia, rozkładamy siłę  $P$  na składową pionową  $P_y = P \sin 35^\circ 30' = 580,7$  kg i poziomą  $P_x = P \cos 35^\circ 30' = 814,1$  kg. Pierwsza da strzałkę  $f_1 = P_y l^3 : 3 E_g J_x$ , druga zaś  $f_2 = P_x l^3 : 3 E_g J_y$ . Zważywszy, że dla żelaza zlewnego  $E_g = E = 2150000$  kg/cm<sup>2</sup>, a dla dwuteownika № 30 —  $J_x = 449$  cm<sup>4</sup>,  $J_y = 9785$  cm<sup>4</sup>, będziemy mieli  $f_1 = 0,20$  cm,  $f_2 = 0,01$  cm. Strzałka wypadkowa  $f = \sqrt{0,2^2 + 0,01^2} = 0,20$  cm — pochyla się ku  $OX$  pod kątem  $\chi = \arctg(0,2 : 0,01) \approx 87^\circ$ .

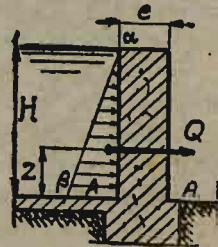
5° *Pręt pionowy* prostokątnego przekroju  $B \times H$ , dźwiga zawieszony u dołu ciężar  $P$  kg. Mniej więcej w połowie wysokości pręta wyciosano wręb, dochodzący aż do osi podłużnej pręta — słowem, wycięto zeń boczną kostkę o wymiarach  $B \times \frac{1}{2} H \times 20$  cm, zwięzając w ten sposób poprzeczny przekrój pręta o połowę wysokości  $H$  przekroju. Ponieważ siła rozciągająca jest skierowana wzdłuż osi pręta — w przekroju pełnym panować będą naprężenia rozciągające  $\sigma_r = P : BH$ , natomiast w przekroju zwięzonym będziemy mieli prócz siły rozciągającej  $P$  jeszcze nadto i moment gnący  $P \times \frac{1}{4} H$ . Łatwo to spostrzec, przyłożywszy do środka przekroju zwięzowanego dwie równe, a znoszące się wzajemnie siły  $P$ . Jedna z nich da owo rozciąganie, druga, łącznie z siłą istotnie działającą, da moment  $M_g = \frac{1}{4} PH$ . Przekrój zwięzowany pracować będzie przeto na gięcie mimośrodkowe. Skrajne naprężenia będą w nim:  $\sigma_{s1} = P : F + M_g : W_x = P : \frac{1}{2} BH + \frac{1}{4} PH : \frac{1}{6} B [\frac{1}{2} H]^2 = 8 P : BH = 8 \sigma_r$  oraz  $\sigma_{s2} = P : F - M_g : W_x = -4 P : BH = -4 \sigma_r$ . W sto-



sunku do przekroju pełnego będziemy tu mieli ośm razy większe naprężenie rozciągające i cztery razy większe ściskające; zatem wycięcie to może mieć groźne następstwa. Bywa czasami, że wskutek przeoczenia podobny pręt nadcięty liczą wprost na rozciąganie, dzieląc siłę przez przekrój osłabiony. W ten sposób otrzymujemy naprężenie  $\sigma'_r = P : \frac{1}{2} BH = 2 \sigma_r$  dwa razy większe niż w przekroju pełnym. Istotne jednak naprężenia tego przekroju nadciętego są:  $\sigma_{s1} = 8 \sigma_r = 4 \sigma'_r$  oraz  $\sigma_{s2} = -4 \sigma_r = -2 \sigma'_r$ , a więc znacznie większe od policzonego.

6° *Krótki słup pierścieniowy* o promieniu zewnętrznym  $R$  i wewnętrznym  $r$  przekroju obciążono mimośrodkowo siłą  $P = 20000$  kg, cisnącą w odległości  $e$  cm od środka przekroju. Naprężenia skrajne będą tu — cisnące  $\sigma_{s1} = -P : F - M_g : W$  i rozciągające  $\sigma_{s2} = -P : F + M_g : W$ , przyczem siłę  $P$  bierzemy ze znakiem minus, jako cisnącą. Wiadomo, że odlew żeliwny, wytrzymały na ciśnienie, łatwo ulega rozerwaniu, o ile więc możemy śmiało dopuścić w wypadku działania siły trwałej  $k_c = 900$  kg/cm<sup>2</sup>, o tyle  $k_r$  nie powinno przekraczać 300 kg/cm<sup>2</sup>. Dla wszelkiej pewności, a tej dość nigdy przy tak kapryśnym tworzywie jak żeliwo, zakładamy  $k_c = 450$  kg/cm<sup>2</sup> oraz  $k_r = 150$  kg/cm<sup>2</sup>. Zważywszy, że  $k_c : k_r = 3$  oraz, że  $M_g = Pe$ , mamy, pomijając znak minus u  $\sigma_{s1}$  — równanie  $[P : F + Pe : W] = 3 [-P : F + Pe : W]$ . Stąd  $2W = eF$ . Ponieważ  $F = \pi R^2 - \pi r^2$  oraz  $W = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) : R$ , przeto  $\frac{1}{4} \times 2 \pi (R^4 - r^4) = e \pi R (R^2 - r^2)$ , co da  $R^2 + r^2 = 2eR$ . Nadto mamy  $k_r = P [-1 + eF : W] : F = P [-1 + 2W : W] : F = P : F$ , a zatem:  $R^2 - r^2 = P : \pi k_r$ . Dodając tylko co otrzymane równania:  $2R^2 = 2eR + P : \pi k_r$ , otrzymamy ostatecznie  $R = \frac{1}{2} e + \sqrt{\frac{1}{4} e^2 + P : 2 \pi k_r}$ . Załóżmy, dajmy na to  $e = 8$  cm, wtedy  $R = 4 + \sqrt{16 + 20000 : 2 \pi 150} = 10,1 \approx 10$  cm a więc  $100 + r^2 = 2 \times 8 \times 10$  co daje  $r = 7,7$  cm. Ostatecznie zewnętrzną średnicę słupa uczynimy  $D = 20$  cm, a wewnętrzną  $d = 15$  cm. Ponieważ  $r^2 = 2eR - R^2 = R [2e - R]$ , przeto zadanie jest tylko wtedy możliwe, gdy  $e \geq \frac{1}{2} R$ , w przeciwnym bowiem razie nie otrzymamy przekroju pierścieniowego i trzeba będzie obrać pełny.

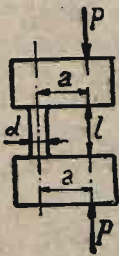
7° *Mur oporowy wodny*, stanowiący tamę, ulega ciśnieniu słupa wody, dochodzącej do brzegu górnego muru. (Rys. 30). To ciśnienie rośnie wraz z odległością od górnego poziomu — będziemy przeto mieli wykres ciśnień trójkątny. Wysokość jego  $H$  równa jest wysokości muru, a podstawa wykresu —  $qH$ , gdzie przez  $q$  oznaczyliśmy ciężar właściwy wody w kg/cm<sup>3</sup>. Pole wykresu  $Q = \frac{1}{2} qH^2$  daje nam obciążenie całego muru, cisnące nań w odległości  $\frac{1}{3} H$  od przekroju dolnego tamy. Moment siły  $Q$  względem tego przekroju wynosi  $M_g = \frac{1}{3} QH = \frac{1}{6} qH^3$ . Ponad to przekrój dolny ulega ciśnieniu górnych warstw muru. Oznaczmy przez  $q'$  ciężar właściwy muru i wyodrębnijmy myślowo dowolną jego długość  $\delta$  cm. Dla tej dłu-



Rys. 30.

gości obciążenie przekroju dolnego będzie stanowił moment  $M_g = \frac{1}{6} q \partial H^3$  oraz siła ciężaru warstw górnych muru  $q' e \partial H$ , przyczem przez  $e$  oznaczyliśmy grubość muru. Mamy tu przeto wypadek gięcia mimośrodkowego. Wskaźnik wytrzymałościowy podstawy będzie  $\frac{1}{6} \partial e^2$ , pole —  $\partial e$ , zatem skrajne naprężenia  $\sigma_{s1} = -q' e \partial H : \partial e = -\frac{1}{6} q \partial H^3 : \frac{1}{6} \partial e^2 = -q' H - q' H^3 : e^2$  oraz  $\sigma_{s2} = -q' H + q' H^3 : e^2$ . Skrajne naprężenie cisnące  $\sigma_{s1}$  nie powinno przekroczyć wartości  $k_c$ , a nadto należy baczyć, aby środek naprężeń tego obciążenia mimośrodkowego nie wyszedł poza rdzeń przekroju, mur bowiem nie znosi naprężeń rozciągających, jeno cisnące. Musi być przeto  $M_g : P = \frac{1}{6} q \partial H^3 : q' \partial e H < \frac{1}{6} e$ , czyli  $e \geq H \sqrt{q : q'}$ . Metr sześcienny muru betonowego waży 2000 kg, a więc dwa razy więcej, niż metr sześcienny wody, stąd  $e \geq H : \sqrt{2}$  czyli  $e \geq 0.7 H$ . Wniosujemy na mocy tego wzoru, że mur prosty postaci wskazanej na rysunku nie jest oszczędny, to też zazwyczaj nadają mu nieco inny kształt trapezu obróconego skarpą nazewnątrz.

8° *Próbka* wytoczona z pełnej kostki tworzy jakby dwie cegielki (Rys. 31) stalowe, połączone środkową częścią cylindryczną o średnicy  $d$ .



Obie szczęki obciążono siłami  $P$ , równoległymi do osi części środkowej próbki, a przyłożonemi w odległości  $a$  cm od niej. Każdy więc przekrój części środkowej będzie obciążony siłą  $P$ , ściskającą, oraz momentem gnącym  $Pa$ . Skrajne naprężenia na obwodzie będzie tu  $\sigma_{s1} = -P : F - Pa : W$  oraz  $\sigma_{s2} = -P : F + Pa : W$ . Gdy siła  $P$  rośnie nieograniczenie — środkowa część próbki pęka przy naprężeniu niszczącem  $K_g = -P : F + Pa : W = P [a : \frac{1}{32} \pi d^3 - 1 : \frac{1}{4} \pi d^2]$ , — niewątpliwie rozciągającym.

Rys. 31.

9° *Wałek żeliwny* średnicy  $D = 2 R$  obciążono siłami rozrywającymi  $S = 20000$  kg, działającymi wzdłuż osi jego podłużnej. W obawie wszelkiej niespodzianki możliwej założono tylko  $k_r = 100$  kg/cm<sup>2</sup>. Ustalony w ten sposób przekrój średnicy  $D = 16$  cm wykazuje naprężenie  $\sigma_r = S : \pi R^2 = 99,4$  kg/cm<sup>2</sup>  $\infty k_r$ . Przy odlewie jednak w jednym ze środkowych przekrojów pręta wytworzył się pęcherz okrągły o promieniu  $r$  cm mimośrodkowo w odległości  $e$  cm od osi podłużnej pręta. Osłabiony przekrój jest przeto pierścieniowy mimośrodkowy (I, Rys. 30). Obciążenie jego stanowi siła  $P$ , działająca wzdłuż osi walca  $\Omega$ . Ta siła po sprowadzeniu do środka  $O$  przekroju osłabionego da moment gnący  $M_g = P \times O\Omega$  i siłę  $P$  — środkową. Założmy  $r = 5$  cm,  $e = 2$  cm. Ponieważ w największem miejscu pozostanie jeszcze ścianka centymetrowa, przeto nic zewnątrz nie zdradzi istnienia owego pęcherza. W tem założeniu będziemy mieli  $\omega O = R^2 e : [R^2 - r^2] = 3,28$  cm, zatem  $O\Omega = 3,28 - 2 = 1,28$  cm, a więc  $M_g = 25600$  (kg, cm) Odnośny wskaźnik wytrzymałościowy przekroju otrzymamy wyznaczając:  $J_y = \frac{1}{4} \pi (R^4 - r^4) - \pi R^2 r^2 e^2 : (R^2 - r^2) = 2211$  cm<sup>4</sup> oraz  $e_1 = R + O\Omega$  i  $e_2 = R - O\Omega$ . Przeto:  $W_{y1} = 238$  cm<sup>3</sup>,  $W_{y2} = 329$  cm<sup>3</sup>, skąd  $\sigma_{s1} = S : F + M_g : W_{y1} = 20000 : 122 + 25600 : 238 = 270$  kg/cm<sup>2</sup> oraz  $\sigma_{s2} = S : F -$



—  $M_g : W_{y^2} = 85 \text{ kg/cm}^2$ . Żeliwo nie powinno pracować powyżej  $k_r = 150 \text{ kg/cm}^2$ , a przeto pęcherz powyżej opisany może się okazać niebezpiecznym dla całości pręta w wypadku obciążenia powtarzanego lub wahlowego.

10<sup>o</sup> *Narożnik stołu* dębowego z deski  $e$  cm grubej odłamał się pod jarzmem siły  $P$ , przyłożonej w samym rogu stołu. Oderwany kawałek miał postać trójkąta prostokątnego; powierzchnia pęknięcia szła po przeciwprostokątnej, tworząc z przyprostokątną  $AB$  kąt  $\varphi$ . Chcąc wyznaczyć najprawdopodobniejszą wartość tego kąta oznaczamy długość  $AB$  przez  $b$ . Długość przeciwprostokątnej wyniesie  $b : \text{Cos}\varphi$ . Będzie to podstawa przekroju prostokątnego niebezpiecznego. Jego wysokość jest oczywiście  $e$  a wskaźnik wytrzymałościowy  $\frac{1}{6} e^2 b : \text{Cos}\varphi$ . Po sprowadzeniu do środka tego przekroju siła  $P$  da moment gnący  $M_g = Pb \text{Sin}\varphi$ , siłę tnącą  $P$  którą, jak zwykle, pominiemy, oraz moment skręcający  $M_o$ , który, jak się to wkrótce okaże, będzie równy zeru. Zatem  $M_g = Pb \text{Sin}\varphi = \frac{1}{6} e^2 b \sigma_g : \text{Cos}\varphi$  czyli  $\sigma_g = 3 P/e^2 \text{Sin} 2\varphi$ . Jak widzimy, skrajne naprężenie przekroju niebezpiecznego zależy od kąta  $\varphi$ . Biorąc pochodną po  $d\varphi$  naprężenia znajdziemy wartość kąta  $\varphi_0$  odpowiadającą skrajnej wartości  $\sigma_g$ . Będzie to:  $6 P/e^2 \text{Cos} 2\varphi_0 = 0$ , skąd  $\varphi_0 = 45^\circ$ . Rożek odłamany utworzy trójkąt prostokątny równoramienny, a dla takiego trójkąta w istocie będzie  $M_o = 0$ , jak to z łatwością daje się spostrzec. Siła powodująca owo pęknięcie będzie  $P = \frac{1}{3} e^2 K_g$ . Dla dębiny  $K_g = 600 \text{ kg/cm}^2$ , a przeto dla deski calowej  $P = \frac{1}{3} \times 600 \times 2,54^2 = 1290 \text{ kg}$ .

## ROZDZIAŁ TRZECI:

### BELKI PROSTE ZGINANE.

§ 1. *Podpory i odpory. Pręt prosty, unieruchomiony na podporach zwiemy belką.* Nieważki pręt, pozbawiony obciążenia, nie wywiera żadnego działania na podpory; obciążony — poczyna cisnąć na nie, wywołując przeciwdziałanie podpór. *Wszelki sprzeciw podpory będziemy nazywali odporem.* Odpory są to poniekąd również siły zewnętrzne belki, zależą jednak od układu sił odkształcających, nie mogą bowiem, jak widać z powyżej powiedzianego, istnieć samodzielnie, słowem — są to siły zewnętrzne odkształcające, zależne od pozostałych. Różnią się jednak od nich znacznie. Siły zewnętrzne — to istotne *dane* obciążenia; odpory — to *niewiadome*, nie znamy bowiem ich natężenia ani kierunku działania, choć wiemy, że, łącznie z siłami odkształcającymi, stanowiąc