

## CZĘŚĆ TRZECIA.

# SCINANIE.

§ 1. **Naprężenia tnące.** Obciążenie zewnętrzne nazywamy *tnącym* gdy układ sił odkształcających, po sprowadzeniu do środka przekroju daje siłę *tnącą*  $T$ , leżącą w płaszczyźnie przekroju. Dla tego wypadku we wzorach (3) dla naprężeń (I § 6) należy uczynić  $S=M_x=M_y=M_0=O$ . Ostatni wzór da wartość zerową naprężenia osiowego  $\sigma_z = O$ , dwa pierwsze mogłyby wyrokować o naprężeniach *tnących*, leżących w przekroju, gdybyśmy umieli określić współczynniki  $H, K, L, N$ , statycznie niewyznaczalne. W pewnych wypadkach wartości ich dają się wyznaczyć z warunków zachowania się powłoki ciała odkształconego, narazie jednak o odkształceniach jeszcze nic nie wiemy, czynimy przeto założenie najprostsze  $H = K = L = N = O$  spełniające zresztą warunek konieczny  $K + L = O$ . W ten sposób otrzymamy  $t_x = T_x : F, t_y = T_y : F, t_z = O$ , dla osi głównych przekroju  $OX, OY$  i prostopadłej osi  $OZ$ . Kierunek osi wyznaczamy jak zwykle tak, aby wskazówka zegara, leżącego pośrodku pola, tarczą w kierunku dodatniej osi  $OZ$ , spotykała w swym biegu dodatnią oś  $OX$ , a potem dopiero dodatnią oś  $OY$ . Na  $OX, OY$  leżą składowe  $T_x, T_y$  siły tnącej, w dowolnym punkcie  $\mu (x, y)$  *naprężenie tnące*  $\tau = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} : F = T : F$ , leżące w przekroju, zatem cały *przekrój jest jednostajnie naprężony*. Wynika to wprost z poczynionych założeń. Jak widać ze wzoru dla  $\tau$ , *naprężenie tnące jest wprost proporcjonalne do siły tnącej i odwrotnie proporcjonalne do pola przekroju*. Dwa przekroje o różnych obwodach  $K$ , lecz jednakowych polach  $F$ , dają tę samą wartość  $\tau$ , o ile ich siły tnące są jednakowe. Nadto składowe jednoimienne siły tnącej i naprężenia  $\tau$  są proporcjonalne — zatem *naprężenie tnące przekroju jest równoległe do siły tnącej i skierowane, jak ona*.

§ 2. **Odształcenia tnące.** Wobec zupełnej niezależności naprężenia tnącego od współrzędnych przekroju, a więc i kierunku osi w nim leżących obróćmy w przekroju osie tak, aby siła tnąca leżała na osi  $OY$ . W tym układzie nowych osi środkowych  $OX, OY, T_x = O, T_y = T$ , a zarazem  $t_x = o, t_y = \tau = T : F, t_z = o$ . To znaczy, że jednorodna bryła dowolnego kształtu (Rys. 72) pozostaje w równowadze odkształcanej pod jarzmem sił



zewnętrznych, które, po sprowadzeniu do środka  $O$  przekroju dzielącego owo obciążenie zewnętrzne na dwa układy  $[A]$  i  $[B]$ , daje dwie siły tnące  $T_A$  i  $T_B$ , leżące na osi  $OY$ . Wobec istnienia trwałej równowagi odkształconej:  $T_A + T_B = 0$ , siły tnące znoszą się w działaniu są przeto równe, lecz skierowane odwrotnie. Siła  $T_A$  wypadkowa układu  $[A]$  siedliskuje w gromadzie cząstek  $\alpha$ ,  $T_B$  — wypadkowa układu  $[B]$  w gromadzie cząstek  $\beta$  — drugiej powłoce przekroju. Możemy przeto i tu również rozpatrywać płytkę (II Rys. 32), wyodrębnioną z ciała odkształconego, a zastępującą przekrój poprzecznie rozpatrywany. Jej dolna ścianka  $F$ , zastępująca dolną powłokę przekroju będzie pod jarzmem siły tnącej  $T$ , leżącej na osi  $OY$ ; na górnej ściance  $F'$ , zastępującej górną powłokę przekroju, panować będzie siła tnąca  $T'$ . Pierwsza  $T$  stanowi wypadkową obciążenia dolnej części bryły, leżącej pod



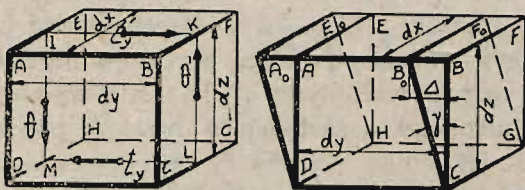
Rys. 72.

płytką — druga  $T'$  — wypadkową części górnej, leżącej nad płytką. W założeniu grubości płytki  $dz = 0$  oba układy sił zewnętrznych miałyby ten sam punkt sprowadzenia jak dla pojedynczego przekroju wyżej rozpatrywanego, tu jednak  $dz \neq 0$ , zatem bezwzględne wartości sił osiowych muszą być nieco różne, możemy przeto napisać, uwzględniając sprzeczne kierunki sił, że  $-T' = T + dT$ . Siły te utrzymują płytkę w równowadze odkształconej, nieznaczna bowiem różnica  $dT$  obciążenia obu ścianek oraz znikomo mały moment  $dM_x = Tdz$  jaki dają — równoważyć winny obciążenie samej płytki, które przy obu sprowadzeniach było oczywiście pominięte a więc siły zewnętrzne przyłożone do cząsteczek samej płytki, lub czynne na jej powłoce bocznej. Te siły zewnętrzne stanowią zresztą układ nader nieznaczny wobec znikomej wartości  $dz$ , a nadto ich wypadkowe  $dT$  i  $dM$  dążą do zera wraz z grubością płytki. Możemy przeto w pierwszym przybliżeniu nie brać ich pod uwagę, pisząc wprost  $T' \sim T$ .

I tu również, jak w (II § 2) możemy płytkę wyodrębnioną z bryły rozpatrywać, jako złożoną z kostek  $dx dy dz$ , podległych działaniu naprężeń tnących  $\tau = T : F$ , na dolnych ściankach  $dF$  oraz naprężeń tnących  $\tau' = T' : F' = [T + dT] : [F + dF]$  — na górnych. Wobec nieznacznych wartości  $dT$  i  $dF$  — mamy  $-\tau' = \tau + d\tau \simeq \tau$ . Te prawie równe, lecz skierowane odwrotnie naprężenia stanowią obciążenie odkształcające każdej kostki płytki, wyodrębnionej z bryły odkształconej. Pod ich jarzmem kostka niewątpliwie musi ulec odkształceniu w kierunku działania naprężeń, a więc (Rys. 73) w kierunku krawędzi  $dy$ , przyczem niewątpliwie jej górne i dolne poletka przesunęły się względem siebie o  $\Delta$ . Pierwotna kostka nieodkształcona ukośna  $A_0E_0B_0F_0DH_0CG$ , musiała przejść po odkształceniu w prostą  $AEFB_0DHGC$ , jaką myślowo wyodrębniliśmy z płytki. To *odkształcenie tnące* zaszło na tle przesunięcia  $\Delta = A_0A = B_0B$  obu ścianek górnej i dolnej obciążonych naprężeniami tnącymi. Po odkształceniu kostka



trwa w równowadze, stanowi bowiem cząstkę bryły odkształconej, a więc zrównoważonej wewnątrz. Na górne jej poletko działa siła  $(\tau + d\tau) dx dy$ , na dolne siła  $\tau dx dy$ , skierowana odwrotnie. Siły te znoszą się wzajemnie, czynią więc zadość warunkom równowagi, ponieważ wypadkowa ich



Rys. 73.

$d\tau dx dy$  jest znikomo mała w granicy równa zero. Stanowią jednak parę, która mogłaby wywołać obrót kostki, zakłócający równowagę odkształconą, lecz zgoła niemożliwy ze względu na sprzeczność sąsiednich kostek płytki. One to

dają naprężenia dodatkowe  $\Theta$  i  $\Theta'$  przeciwdziałające, na ściankach bocznych leżące w płaszczyźnie naprężeń  $\tau$  i  $\tau'$ , a zarazem siły sprzeciwu  $\Theta dx dz$  i  $\Theta' dx dz$ . Te siły stanowią dodatkowe obciążenie kostki odkształconej zewnątrz, jawią się bowiem na tle przeciwdziałania kostek sąsiednich. Ich wypadkowa winna być równa zero, a moment — równoważyć parę sił  $\tau$  i  $\tau'$ . W ten sposób równowaga odkształconej kostki winna być zachowana. Wypiszmy równanie momentów względem osi  $DH$  i  $BF$ , a otrzymamy  $\tau' dx dy dz = \Theta' dx dz dy$ , oraz  $\tau dx dy dz = \Theta dx dz dy$ . Stąd bezpośrednio  $\Theta' = \tau'$  i  $\Theta = \tau$ , istotnie więc wypadkowa sił dodatkowego obciążenia w granicy jest równa zero, wynosi bowiem  $d\tau dx dz$ . Układ naprężeń tylko co wyznaczony stanowi pełne obciążenie tnące kostki. Przynałężne doń naprężenia tnące działają w jednej płaszczyźnie, zbiegając się na przeciwległych krawędziach  $DH$  i  $BF$ . Dwie pozostałe ścianki kostki są odciążone. Ten układ naprężeń daje przesunięcie  $\Delta$ . Kostka pierwotnie skośna stała się prostą, stąd wniosek, że naprężenia tnące krzywią przy odkształceniu tnącym pierwotnie prostą kostkę pochylając jej ścianki, przylegające do kostek sąsiednich o kąt  $\gamma$ , na tle omówionego wyżej przesunięcia  $\Delta$ .

W założeniu bezwzględnie jednostajnego tworzywa — odkształcenia tnące wszystkich kostek płytki z konieczności muszą być jednakowe wobec zupełnej tożsamości warunków obciążenia na obu ściankach płytki, naprężonych jednakowo. To znaczy, że górna ścianka płytki przesunie się względem dolnej również o  $\Delta$ , a obwody  $K$  i  $K'$  nie zmienią swego kształtu pierwotnego. Zatem i przed odkształceniem obie ścianki płytki były płaskie i równoległe.

**§ 3. Przesunięcie jednostkowe.** Stosunek przesunięcia bezwzględnego  $\Delta$  kostki do odległości  $dz$  jej ścianek przesuniętych nazywamy przesunięciem jednostkowym i oznaczamy przez  $\gamma = \Delta : dz$ . Przesunięcie stanowi miarę odkształcenia tnącego, wyznacza bowiem kąt pochylenia ścianek kostki  $B_0 CB$ , jak to najlepiej uwypukla (Rys. 73). Pomiędzy przesunię-



ciami, a rodzajem je naprężeniami tnącymi powinna niewątpliwie istnieć pewna zależność w postaci funkcji  $\gamma = f(\tau)$ ; najprostszym kształtem tej zależności będzie oczywiście  $\gamma = \beta \tau$ , lub  $\gamma = \tau : G$ , gdzie  $G = 1 : \beta$ . W ogólnym wypadku współczynniki  $\beta$  i  $G$  mają wartości zmienne, dla pewnych tworzyw jednak i w pewnych granicach mogą być stałe, warunkując proporcjonalność przesunięć do naprężeń tnących w myśl pierwszego prawa Hooke'a. I tu również naprężenia wyznaczamy w  $\text{kg./cm.}^2$ ,  $\gamma$  jako stosunek  $\Delta$  i  $ds$  jest liczbą oderwaną, zatem *współczynnik  $G$  sprężystości poprzecznej* stały lub zmienny, ma wymiar  $[\text{kg./cm.}^2]$ , a współczynnik  $\beta$  *przesuwalności* — wymiar  $[\text{cm.}^2/\text{kg.}]$ .

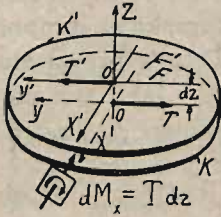
**§ 4. Naprężenia tnące kostek zewnętrznych.** Wobec zupełnej tożsamości obciążenia wszystkich kostek płytki, kostki leżące na obwodzie, a więc stanowiące jej powłokę zewnętrzną, boczną winny być obciążone na ściankach zewnętrznych powłokowych naprężeniami  $\Theta$  lub  $\Theta'$ . Wynika to bezpośrednio z rozważań powyższych. Stąd wniosek oczywisty, że powłoka boczna płytki winna być obciążona siłami zewnętrznymi stycznymi, dającymi owe naprężenia. Ten warunek konieczny wymaga nader skomplikowanego obciążenia, praktycznie niewykonalnego, nie znamy bowiem sił stycznych, prócz siły tarcia, a ta siła nie może być zastosowana w danym wypadku ze względu na niepokonane trudności techniczne. Zatem powyższa teoria naprężeń tnących nie odpowiada istotnym warunkom pracy ogniwo obciążonych siłami tnącymi, mimo to jednak dość często jest stosowana, daje bowiem wyniki przybliżone, które nieraz posłużyć się musimy w zagadnieniach bardziej złożonych. Ścisła ogólna teoria naprężeń tnących dotychczas nie istnieje — możemy jednak ustalić nieco doskonalszą od wyżej wyłożonej, a w każdym razie lepiej dostosowaną do warunków rzeczywistych, czyniąc nowe założenia bardziej zgodne z istotnym stanem rzeczy.

**§ 5. Naprężenia tnące przekrojów symetrycznych.** Powróćmy do dawnego układu osi głównych, rozpatrywanych w (I § 6). Założenie funkcji linjowych dla składowych naprężenia tnącego  $t_x$ ,  $t_y$  odrzucamy, prowadzi ono bowiem do powyżej ustalonej niedość ścisłej teorii; pozostawiamy jednak bez zmiany wzór (3) dla składowej  $t_z$  ze względu na prawidłowe wyniki, jakie zeń wysnuiliśmy w teorii naprężeń osiowych. Niema w tem żadnej sprzeczności wewnętrznej, jako że wzór (3) dla  $t_z$  wyprowadzony został z założenia funkcji linjowej dla tej składowej naprężenia niezależnie od kształtu funkcji dla  $t_x$  i  $t_y$ . Łatwo się o tem przekonać, biorąc pod uwagę wzory (1) w (I § 6).

Nadto bierzemy wyłącznie tylko pod uwagę *pręty proste* o przekrojach symetrycznych względem osi głównej  $OY$  i zakładamy, że obciążenie zewnętrzne po obustronnem sprowadzeniu do środków  $O$  i  $O'$  płytki (Rys. 74) da odpowiednio dwie siły osiowe  $T$  i  $T'$ , leżące na owej osi symetrii



przekroju. Te założenia zwiężają znacznie nasz zakres badań, odpowiadają jednak warunkom istotnej pracy ogniów budowlanych i technicznych. Siłę tnącą  $T'$  górnego przekroju  $F'$  dodatnią układamy na dodatniej osi  $OY$ .



Rysunek 74.

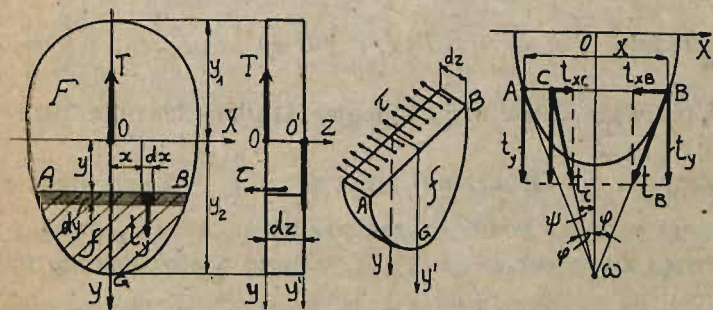
Ta siła stanowi wypadkową obciążenia zewnętrznego odciętej górnej części pręta. Obciążenie dolnej części odciętej da wypadkową  $T$  skierowaną odwrotnie. Wobec znikomej grubości płytki  $dz$  obie wypadkowe są prawie równe, lecz skierowane odwrotnie, możemy przeto napisać, że  $-T' = T + dT$ . W granicy przy  $dz = 0$  różnica  $dT = 0$  — zatem siły  $T'$  i  $T$  znoszą się wzajemnie; dają jednak parę sił  $T'dz \simeq Tdz$ , leżącą w płaszczyźnie osi  $YZ$ .

Zazwyczaj moment pary wyobrażamy w postaci wektora prostopadłego do jej płaszczyzny, nadając mu taki kierunek, aby oko umieszczone w początku osi współrzędnych widziało obrót, jaki się stara wywołać para momentu — przeciwko strzałce zegara. W myśl tego prawa moment  $Tdz$  jest równoległy do  $OX$  lub  $OX'$ , lecz skierowany odwrotnie. Wobec istnienia odkształconej równowagi płytki, obciążenie zewnętrzne winno dać sprzeciw w postaci momentu równego  $Tdz$ , lecz skierowanego odwrotnie, inaczej bowiem równowaga nie da się utrzymać. W ten sposób obciążenie płytki stanowią siły tnące  $T'$  i  $T$ , oraz dodatkowy moment  $Tdz$ . Siły te dadzą naprężenia tnące  $t_x, t_y$ , oraz znikomo małe naprężenie osiowe, które z łatwością wyznaczymy ze wzoru (3) w postaci  $dt_z = d\tau_z = T y dz : I_x$ , zważywszy, że jedyną składową momentu będzie w danym wypadku  $Tdz$  na osi  $OX$  lub  $OX'$ , a nadto, że  $S = 0$  z założenia. Tylko co wyznaczone naprężenia osiowe panują niewątpliwie na górnej ściance płytki, dla której  $dz \neq 0$ , dla dolnej ścianki bowiem  $dz = 0$ , zatem i  $d\tau_z = 0$ . Zresztą wszystkie przyrosty różniczkowe dotychczas zawsze przypisywaliśmy górnej ściance płytki, jako powstałe na tle przyrostu  $dz$  — przesunięciu się po osi  $OZ$  do dalszego sąsiedniego przekroju.

Wyznaczamy naprężenia tnące przekroju. W tym celu w odległości  $y$  wyodrębniamy myślowo szereg  $AB$  kostek płytki, równoległy do osi głównych  $OX$  i  $OX'$  (Rys. 75) i zakładamy, że na wszystkich kostkach tego szeregu panuje ta sama składowa  $t_y$  naprężenia tnącego. Dolną część płytki  $ABC$  odcinamy wzdłuż  $AB$  płaszczyzną prostopadłą do jej ścianek równoległych. Płaszczyznę  $AB$  przekroju w ten sposób utworzonego, stanowią boczne ścianki kostek szeregu obciążone naprężeniem  $\tau = t_y$ , w myśl powyżej przytoczonych rozważań o równowadze odkształconej kostki. Te naprężenia pochodzą od sąsiednich kostek, przynależnych do pozostałej części płytki odkształconej, powinny przeto równoważyć układ sił zewnętrznych odciętego skrawka płytki. Oznaczmy pole górnej ścianki  $ABC$  skrawka przez  $f$ . W tem polu panują naprężenia osiowe  $d\tau_z$ , a raczej siły cząstecz-



kowe  $d\sigma_z dF$ , dające wypadkową  $\int d\sigma_z dF$  równoległą do osi  $OZ$ . Przekrój  $AB$ , jako naprężony jednostajnie ulega jarzmu sił cząsteczkowych  $\tau dz dx$  o wypadkowej  $\int \tau dx dz$ , równoległej do tej samej osi. Istnieje wprawdzie na bocznej powierzchni płytki obciążenie zewnętrzne równoważące przyrost  $dT$ , znikomo mały, sił tnących, lecz jako takie nie może dać wypadkowej równoległej do osi  $OZ$ , możemy przeto napisać pierwszy warunek równowagi skrawka  $ABG$  w postaci  $\int \tau dx dz = \int d\sigma_z dF$ . Niech  $AB = X$ , wobec stałej wartości  $\tau$  dla całego szeregu  $AB$  kostek, oraz jednakowego  $dz$  dla wszystkich kostek skrawka  $\int \tau dx dz = \tau X dz$  z kolei  $d\sigma_z = T y dz : I_x$ , mamy więc  $\tau X dz = \int (T y dz dF : I_x) = (T dz : I_x) \int y dF$ , gdzie całkowanie winno



Rysunek 75.

obejmować wszystkie kostki pola  $f$ . Oznaczamy przez  $N$  statyczny moment pola  $f$  względem osi  $OX'$ , a otrzymamy, wychodząc z określenia tego rodzaju omen-

tu, że  $\int y dF = N$ , i ostatecznie, po skróceniu przez  $dz$  będziemy mieli  $\tau = t_y = T N : X I_x$ . Prócz tej składowej naprężenia tnącego, równoległej do osi  $OY$  przekroju powinna istnieć składowa  $t_x$ . Z łatwością ją wyznaczymy w założeniu symetrii przekroju względem osi głównej  $OY$ , zważywszy, że w skrajnych punktach  $A$  i  $B$  szeregu naprężenia tnące  $t_A$  i  $t_B$  muszą być styczne do obwodu, nie mogą bowiem wychodzić poza powłokę płytki boczną wolną od sił stycznych obciążenia zewnętrznego. Stąd prosty wniosek, że naprężenia  $t_A$  i  $t_B$  powinny leżeć na stycznych obwodu, przechodzących przez jego punkty  $A$  i  $B$ .

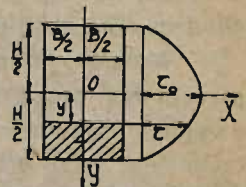
Wobec symetrii przekroju względem jego osi głównej  $OY$ , obie styczne przechodzą przez punkt  $\omega$  tej osi pod kątem  $\varphi$ , jak to najlepiej zresztą uwypukla rysunek. A przeto  $t_A = t_B = t_y$ ;  $\cos \varphi = T N : X I_x \cos \varphi$ , oraz  $t_{yA} = t_{yB} = t_y$ ,  $t_{xA} = -t_{xB} = t_y \operatorname{tg} \varphi = T N \operatorname{tg} \varphi : X I_x$ . Dla punktów pośrednich  $C$  szeregu  $AB$  ścisłego kierunku naprężeń tnących  $t_c$  nie znamy, czynimy jednak założenie najprostsze, że naprężenia  $t_c$  leżą na prostych, łączących owe punkty  $C$  pośrednie z  $\omega$ . Nadto z założeń poprzednich składowe  $t_{yc} = t_y$ , zatem  $t_c = t_y : \cos \psi$ , oraz  $t_{cx} = t_y \operatorname{tg} \psi$ , gdzie  $\psi$  oznacza kąt

pochylenia,  $C\omega$  ku  $OY$ . W ten sposób określony układ naprężeń istotnie możliwy jest tylko dla przekrojów symetrycznych względem osi głównej  $OY$ , w tym bowiem jedynie wypadku składowe  $t_{xc}$  dają wypadkową równą zero, każdej bowiem składowej  $t_{xc}$  odpowiada składowa  $-t_{xc}$  dla punktu symetrycznego szeregu  $AB$ . To samo dotyczy również innych szeregów kostek, a zatem wypadkowa naprężeń  $t_{xc}$  płytki ma wartość zerową. Ten wniosek nie przeczy założeniu umiejscowienia zewnętrznych sił tnących na osiach  $OY$ ,  $OY'$  przekrojów. Nadto jedynie tylko dla przekrojów symetrycznych względem osi  $OY$  i  $OY'$  składowe  $t_y$  mogą mieć wartości stałe dla poszczególnych szeregów kostek  $AB$ : wymaga tego wprost symetria obciążenia dla tworzywa jednolitego; należy jednak sprawdzić bezpośrednio czy wypadkowa sił cząsteczkowych  $t_y dF$  da wypadkową równoważącą obciążenie tnące  $T$  przekroju. W tym celu wyznaczyć należy wartość całki

$$\int t_y dF = \int [TN : XI_x] dF, \text{ przyczem, możemy niewątpliwie obrać } dF = X dy. \text{ Stąd bezpośrednio } \int t_y dF = (T : I_x) \int N dy = (T : I_x) \int_{y_1}^{y_2} dy \int_y^{y_2} y X dy, \text{ ponieważ pierwsza całka ma obejmować całkowite pole przekroju a druga tylko skrawek } f. \text{ Oznaczmy przez } w = \int_y^{y_2} y X dy. \text{ Będzie to pewna funkcja zmiennej } y, \text{ dolna bowiem granica jest zmienna i równa } y. \text{ Jej pochodna po } y \text{ wyrazi się przez } w' = -yX, \text{ o czym z łatwością można się zresztą przekonać. Zatem całkując przez części otrzymamy } \int_{y_1}^{y_2} dy w = [wy]_{y_1}^{y_2} + \int_{y_1}^{y_2} y^2 X dy = I_x, \text{ ponieważ dla obu skrajnych szeregów } AB \text{ przy } y = y_1, \text{ lub } y = y_2 \text{ statyczny moment równy jest zero, a ostatnia całka niewątpliwie stanowi moment bezwładności przekroju } F \text{ względem osi } OX. \text{ Ostatecznie więc } \int t_y dF = T \text{ co należało udowodnić. Zastosowania najlepiej uwypuklą powyższą teorię.}$$

**§ 6. Rozkład naprężeń tnących w przekroju.** Zachowajmy znakowania poprzednie i przedewszystkiem weźmy pod uwagę:

1-o *Przekrój prostokątny* o podstawie  $B$  i wysokości  $H$  (Rys. 76). W danym wypadku  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$ ,  $X = B$ ,  $I_x = \frac{1}{12} BH^3$ , pozostaje więc tylko wyznaczyć  $N$ . W tym celu prowadzimy równoległą do osi głównej  $OY$  w odległości  $y$ . Moment statyczny względem tej osi ma niewątpliwie wartość  $N = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} H + y) B (\frac{1}{2} H - y) = \frac{1}{8} B (H^2 - 4y^2)$ , a przeto  $\tau = \frac{3}{2} T [1 - (2y : H)^2]$ :

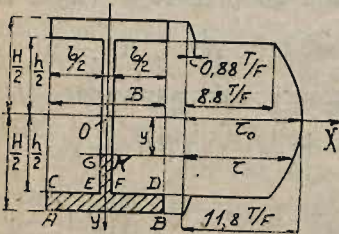


Rys. 76.



$BH = \frac{3}{2} (T : F) [1 - (2y : H)^2]$ , gdzie  $F = HB$  oznacza pole przekroju. Z łatwością można zauważyć, że rozkład naprężeń jest paraboliczny o skrajnych wartościach  $T = 0$  dla  $y = \pm \frac{1}{2} H$  i maximum  $T_0 = \frac{3}{2} T : F$  dla szeregu kostek leżącego, na osi głównej  $OX$ , a więc dla  $y = 0$ . Nadto, wobec  $\varphi = 0$  mamy dla wszystkich kostek przekroju  $t_y = \tau$   $t_x = 0$ . Rozkład naprężej tnących  $\tau$  uwypukła wykres.

2-o **Przekrój dwuteowy** o podstawie  $B$  i wysokości  $H$  (Rys. 77). Oznaczmy przez  $h$  odległość ścianek wewnętrznych pasów, przez  $B - b$  szerokość środnika. Dla ścianek pionowych przekroju jak wyżej  $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$ , a nadto dla pasów  $X = B$ . Ta wartość nagłym uskokiem przechodzi w  $X = B - b$  dla środnika. Wobec tej zmiany ciągłości wzory



Rys. 77.

powyżej wyprowadzone tracą swą wartość, mogą być przeto jedynie uważane jako przybliżone w braku ściślejszych. Nazwijmy stosunki  $b : B = m$ ,  $h : H = n$ , w tem założeniu  $J_x = \frac{1}{12} (BH^3 - bh^3) = \frac{1}{12} BH^3 (1 - mn^3)$ . Nadto dla wszelkich szeregów kostek pomiędzy  $AB$  i  $CD$ , w odległości  $y$  od osi głównej  $OX$  będziemy mieli  $N = \frac{1}{8} BH^2 [1 - (2y : H)^2]$  jak dla przekroju prostokątnego pełnego. Stąd dla szeregów

obu pasów  $\tau = \frac{3}{2} T [1 - 4y^2 : H^2] : F (1 - mn^3)$ , gdzie przez  $F$  oznaczyliśmy wrzekomy przekrój  $BH$ . W skrajnych szeregach  $AB$ , gdzie  $y = \pm \frac{1}{2} H$ , panuje wartość  $\tau = 0$ , w szeregach  $CD$ , gdzie  $y = \pm \frac{1}{2} h$  — wartość  $\tau_2 = \frac{3}{2} T (1 - n^2) : F (1 - mn^3)$ . Pomiedzy temi skrajnymi wartościami  $\tau$  zmienia się parabolicznie, jak zresztą wskazuje wykres. Dla szeregów  $GK$  środnikowych w odległości  $y$  od osi  $OX$  mamy  $N = \frac{1}{8} B [H^2 - h^2] + \frac{1}{8} (B - b) (h^2 - 4y^2)$ , jako sumę momentów statycznych prostokątów  $ABCD$  i  $GKFE$ . Inaczej jeszcze  $N = \frac{1}{8} BH^2 [1 - n^2 + (1 - m) (n^2 - 4y^2 : H^2)]$ , a przeto naprężenia tnące szeregów środnikowych  $\tau = \frac{3}{2} T [1 - n^2 + (1 - m) (n^2 - 4y^2 : H^2)] : F (1 - m) (1 - mn^3)$  zmieniają się również parabolicznie. Dla skrajnych przekrojów granicznych  $EF$ , gdzie  $y = \pm \frac{1}{2} h$ , będziemy mieli  $\tau_1 = \frac{3}{2} T (1 - n^2) : F (1 - m) (1 - mn^3)$ . W środkowym szeregu, gdzie  $y = 0$  panować będzie najwyższe naprężenie  $\tau_0 = \frac{3}{2} T (1 - mn^3) : F (1 - m) (1 - mn^3)$ . Rozkład naprężeń uwypukła wykres. Dla zwykłych dwuteowników  $m \simeq 0,90$ ,  $n \simeq 0,88$ , a przeto  $\tau_0 = 11,8 T : F$ ,  $\tau_1 = 8,8 T : F$ ,  $\tau_2 = 0,9 T : F$ . Widzimy stąd, że pasy są bardzo mało naprężone, a środnik prawie jednostajnie, możemy przeto przypuścić, że naprężenia tnące w przekroju dwuteownikowcm siedliskują wyłącznie w środniku, a nadto, że wartość ich jest stała. W tem założeniu ze wzoru przybliżonego będziemy mieli  $\tau = T : h (B - b) = T : F (1 - m) n \simeq 11,5 T : F$ , wartość, jak widzimy wystarczająco — ściśłą. Stąd prosty wniosek, że w przekroju dwuteowym

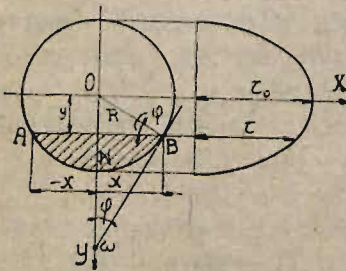


siła tnąca napręża jednostajnie wyłącznie tylko środkiem. Możemy więc zawsze dla dwuteownika, zwykłego lub złożonego, otrzymać przybliżoną wartość naprężenia tnącego, dzieląc siłę tnącą przez pole środka. Wystarczy to do celów praktycznych, zwłaszcza że powyższe wyprowadzenie ma duże braki. Istotnie wprowadza  $\cos\varphi = 1$  dla ścianek pionowych przekroju, jednak dla szeregów  $CD$  i  $FD - \varphi = 90^\circ$ ,  $\cos\varphi = 0$  a  $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ , -- a wzory ogólne dają zgoła nieprawdopodobne wartości  $t_x = \tau = \infty$ . Ta sprzeczność wynika z nagłej przerwy ciągłości  $X$  przy przejściu od szeregu  $CD$  do sąsiedniego  $EF$ , uniemożliwiającej ściśle stosowanie wzorów dla naprężeń. — Lepiej więc używać wzoru przybliżonego, zwłaszcza że istotny przekrój dwuteownika odbiega od wyżej rozpatrywanego.

3-o *Przekrój kołowy* o promieniu  $R$ . Dla tego przekroju (Rys. 78) mamy  $I_x = \frac{1}{4} \pi R^4$ ,  $X = AB = 2x = 2\sqrt{R^2 - y^2}$ ,  $\cos\varphi = x : R = \sqrt{R^2 - y^2} : R$ , należy więc jeszcze tylko wyznaczyć  $N$  dla części zakreskowanej  $ABN$ .

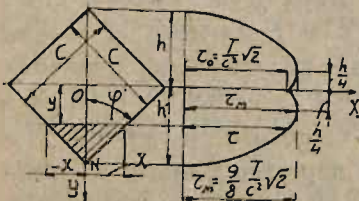
$$\text{Tutaj } N = \int_y^R yXdy = 2 \int_y^R y\sqrt{R^2 - y^2} dy = -\frac{2}{3} [(R^2 - y^2)^{3/2}]_y^R = \\ = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \text{ a przeto } \tau = \frac{4}{3} T \sqrt{R^2 - y^2} : \pi R^3 = \frac{4}{3} T \sqrt{R^2 - y^2} :$$

$: FR$ , gdzie  $F = \pi R^2$ . Z otrzymanego wzoru wynika, że  $\tau$  zmienia się eliptycznie, co zresztą uwypukla wykres. Dla  $y = \pm R$  mamy  $\tau = 0$ , w szeregu środkowym, gdzie  $y = 0$  panuje skrajna wartość  $\tau_0 = \frac{4}{3} T : F$ . Z powyżej przytoczonych przykładów wydawać by się mogło, że naprężenie tnące jest zawsze największe dla środkowego szeregu. Łatwo się jednak przekonać o niesłuszności tego wniosku. W tym celu bierzemy pod uwagę:



Rys. 78.

4-o *Przekrój kwadratowy* w stosunku do jednej z przekątni, jako osi symetrii (Rys. 79). Oznaczmy bok kwadratu przez  $C$ , wysokość  $O.V$  przez



Rys. 79.

$h = c : \sqrt{2}$ . W danym wypadku  $\cos\varphi = \cos 45^\circ = 1 : \sqrt{2}$ ,  $X = 2(h - y)$ , a nadto jako dla przekroju obojętnego (I, § 4) mamy  $I_x = \frac{1}{12} c^4$ .

Dla części zakreskowanej  $N = \int_y^h yX dy = 2$

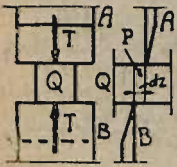
$$\int_y^h y(h - y) dy = \frac{1}{3} h^3 - hy^2 + \frac{2}{3} y^3, \text{ a naprężenie}$$

tnące  $\tau = 2\sqrt{2} T (h^3 - 3hy^2 + 2y^3) : c^4 (h - y) = 2\sqrt{2} T (h^2 + hy - 2y^2) : c^4$ . Wzór otrzymany wskazuje, że naprężenie tnące zmienia się parabo-



licznie. Czyniąc jego pochodną równą zero, otrzymamy,  $h-4y=0$ , największa przeto wartość naprężenia leży w odległości  $y=+1/4h$ , a więc nie na szeregu osiowym, gdzie  $\tau_0 = 2\sqrt{2}Th^2 : c^4 = \sqrt{2}T : c^2 = \sqrt{2}T : F = = 1,4142 T : F$ , podczas gdy owa najwyższa wartość będzie  $\tau_M = 3/8 \cdot 2\sqrt{2}Th^2 : c^4 = 3/8 \sqrt{2}T : F = 1,5910 T : F$ . W danym wypadku wykres jest symetryczny względem  $OX$  i złożony z dwóch parabol, przecinających się na tej osi.

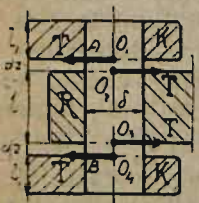
§ 7. Próby na ścinanie. Podaliśmy wyżej dwie zupełnie różne teorie ścinania. Która z nich lepiej odpowiada istocie zachodzących zjawisk nie wiemy — na to pytanie mogą jedynie dać odpowiedź próby bezpośrednie, niesłychanie zresztą trudne i nader wątpliwe co do wyników ze względu na trudność ścisłego urzeczywistnienia warunków teorii. Zazwyczaj przy próbach ścinamy pręt o przekroju poprzecznym  $F$  za pomocą nożyc  $A$  i  $B$  (Rys. 80) ustawionych w znikomej odległości  $dz$ . Nóż górny ciśnie na boczną ściankę pręta z siłą tnącą  $T$ , dolny daje sprzeciw  $T$  w postaci równej siły tnącej. Te dwie siły stanowią obciążenie tnące płytki  $P$  w założeniu idealnego wy-



Rys. 80.

ostrzenia obu noży. W rzeczywistości jednak ostrza noży zawsze mają pewną grubość, nie można przeto w ten sposób uzyskać dokładnego obciążenia siłami tnącymi — równoległych pojedynczych przekrojów płytki, — a przeto próby nie dają ścisłych wyników. O wiele dokładniejsze warunki obciążenia tnącego można otrzymać ścinając próbkę w przegubie (Rys. 81). W danym wypadku widlasto zakończonego pręta obejmuje szczękami  $K$  główkę pręta  $R$ . Przez

otwory szczęki i główki przechodzi sworzień tej samej średnicy  $\delta$ , stanowiący właściwą próbkę. Pomimo dokładnego przylegania obu szczęk do główki  $R$ , pomiędzy powierzchniami dotyku istnieje zawsze pewien luz  $dz$ , możemy przeto wyodrębnić myślowo dwie płytki  $O_1O_2$  i  $O_3O_4$  na sworzniu pomiędzy szczękami a główką. Osiowa siła pręta rozwidlonego, po sprowadzeniu do środków  $O_1$  i  $O_4$  zewnętrznych ścianek tych płytek da siły tnące  $T$  jednokierunkowe, siła osiowa pręta  $R$ , sprowadzona do środków  $O_2$  i  $O_3$  wewnętrznych ścianek płytek da drugie dwie siły tnące  $T$ , lecz skierowane odwrotnie. W ten sposób otrzymamy obciążenie tnące dla obu płytek. Oznaczmy przez  $F$  poprzeczny przekrój próbki —



Rys. 81.

jego naprężenie tnące da wzór  $\tau = \mu T : F$ . W myśl pierwszej teorii przybliżonej  $\mu = 1$ , w myśl drugiej ścisłej  $\mu = 4/3$  dla kołowego przekroju,  $3/2$  dla prostokątnego i t. d. W obu wypadkach dopuszczalne naprężenie tnące oznaczamy przez  $k_t$ , niszczące przez  $K_t$ . Ze wzoru  $S_t = K_t F : \mu$  z łatwością określimy siłę ścinającą, przy której następuje rozdział cząstek — ścięcie

próbki w przekrojach obciążonych. Bach hołdujący teorii ścisłej otrzy-

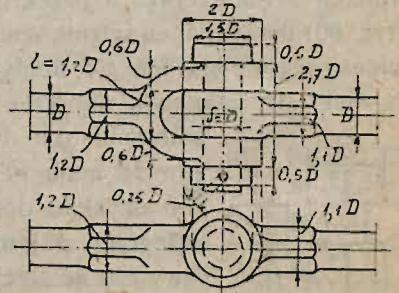


mał  $k_t : k_r = K_t : K_r = 0,75 \div 0,80$  dla próbek o przekroju kołowym, żelaznych i stalowych, dla żeliwnych  $1,02 \div 1,17$ .

### § 8. Przykłady i ćwiczenia:

1-o *Przegub* stanowi dość często używane w Ameryce połączenie prętów rozciąganych. Nie różni się on w zasadzie od wyżej opisanego. Wymiary główne podaje (Rys. 82). Oznaczmy przez  $P$  siłę osiową obu prętów przegubu rozciągającą. Ze wzoru  $F_0 = P : k_r = \frac{1}{4} \pi D^2$  określimy ich wspólną średnicę  $D$ . W założeniu teorii ściślejszej naprężenie tnące sworznia przegubowego średnicy  $\delta$  wyznaczy się, że wzoru  $\tau = \frac{4}{3} P : 2F_1$ , gdzie  $F_1 = \frac{1}{4} \pi \delta^2$ , a  $\tau < k_t$  — dopuszczalnego skrajnego naprężenia tnącego tworzywa sworznia. Stąd  $F_1 = 2P : 3k_t$ , inaczej jeszcze  $F_1 : F_0 = -2k_r : 3k_t$ . Dla żelaza i stali, zwykłych tworzyw przegubu  $k_t = 0,75 \div 0,8k_r$ , a przeto  $F_1 : F_0 = 0,89 \div 0,83$ , stąd  $\delta = 0,94 \div 0,91 D \approx D$ .

zgodnie z rysunkiem. Na środkową część sworznia ciśnię główka pręta, na sąsiednie dolne części sworznia cisną w odwrotnym kierunku szczęki pręta lewego. Te części przegubu pracują na docisk powierzchni cylindrycznych. Dla tego wypadku w (§ 12, 4-o) podaliśmy wzór  $k = P : lD$ . Zazwyczaj dla tego rodzaju przegubów  $k = k_t$  to jest  $P : lD = \frac{4}{3} P : 2F_1$ , stąd  $l = \frac{3}{8} \pi D = 1,18 D \approx 1,2 D$ . Pozostałe wymiary, czysto praktyczne, podaje rysunek. Godzi się tu zaznaczyć, że przegub powyższy używa się tylko w wypadku obciążenia trwałego. Po-



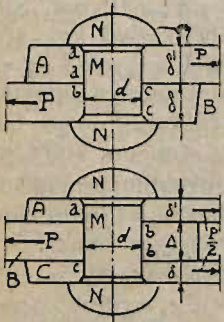
Rys. 82.

przednio (II, § 12, 9-o) rozpatrywany krzyżulec może służyć jako przykład przegubu pracującego pod obciążeniem zmiennym. Łżywy  $K$  krzyżulca (Rys. 70) ślizgają się w prowadnicach bagnetu; przy ruchu tłoka naprzód i wstecz zmienia się znak siły  $P = 20000$  kg., zatem czop krzyżulcowy pracuje na scinanie jako przegub pod obciążeniem wahlwym. Dla stali — zwykłego tworzywa czopa  $k_t = 320 \div 480$  kg./cm.<sup>2</sup>, nie można jednak z tą wartością wyznaczyć średnicy czopa  $\delta$ , ponieważ zachodzą tu zjawiska wtórne. Wobec konieczności sprawnego smarowania tego przegubu, pomiędzy czopem, a panewkami, zwykle bronzowemi, musi być pewna gra. Przy każdej zmianie obciążenia dotyk czopa przenosi się na przeciwległą panewkę. Powstają przytem uderzenia zależne od wielkości gry. Zazwyczaj średnicę czopa liczą na docisk do panewki cylindrycznej w założeniu stosunku długości czopa  $l : \delta = 1,5 \div 1,75$ , oraz wartości  $k = 80 \div 90$  kg./cm.<sup>2</sup>, we wzorze  $k = P : l\delta$ . Niech będzie  $l = 1,6\delta$ ,  $k = 85$  kg./cm.<sup>2</sup>, zatem  $85 = = 20000 : (1,6\delta^2)$ , stąd  $\delta = \approx 12,5$  cm.  $l = 20$  cm. Gdybyśmy chcieli policzyć  $\delta$  w sposób zwykły dla średniej wartości  $k_t = 400$  kg./cm.<sup>2</sup>, to przy średnicy  $\delta = 12,5$  cm. otrzymalibyśmy ze wzoru  $k_t = \frac{4}{3} P : 2F_1$  t. j.  $400 = = \frac{4}{3} P : (2 \times 122,72)$  — wartość  $P = 73630$  kg. — 3,58 krotnie wyższą. Zatem przy tego rodzaju uderzeniach należy brać współczynnik bezpieczeństwa 3,5 krotnie wyższy. W ustroju krzyżulcowym mamy jeszcze drugi przykład ogniwa, pracującego na scinanie, a mianowicie klin  $L$ , który



siła  $P$ , rosnąca w danym wypadku od zera do 20000 kg, chce ściąć wzdłuż dwóch powierzchni cylindrycznych. Pomijając zaokrąglenie klina oraz krzywiznę promienia  $\frac{1}{2}d'$ , możemy te przekroje rozpatrywać jako prostokątne płaskie o polach  $F' = ef$ . Zazwyczaj czynimy  $f = 4e$ , co daje  $F' = 4e^2$ , dla stali zlewnej zwykłego tworzywa klina w założeniu obciążenia powtarzanego  $k_t = 640 - 960 \text{ kg./cm.}^2$  Należy tu brać wartość najmniejszą ze względu na tęgie początkowe wbicie klina, mamy więc  $640 = \frac{3}{2} \times 20000 : F'$ , stąd  $e = 2,41 \approx 2,5 \text{ cm.}$  oraz  $f = 10 \text{ cm.}$

2-o Nit. Przez otwór  $ac$  (Rys. 83), wywiercony lub przebity w kilku warstwach blach przedzierza się rozżarzony sworzeń nita z główką  $N$ . Wystający nazewnątrz koniec sworznia rozkuwa się w drugą główkę.



Rys. 83.

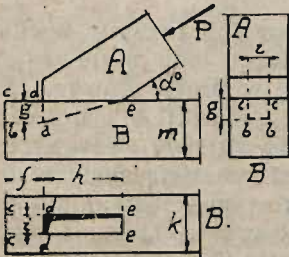
ostudzeniu sworzni kurczy się, główki  $N$  cisną obustronnie na blachy, zwierając warstwy wewnętrzne w powierzchniach dotyku. Zazwyczaj łączymy w ten sposób dwie blachy  $A$  i  $B$  nitowym ścięciem lub też trzy blachy  $A, B, C$ . Po znitowaniu łączenie może pracować pod znacznym obciążeniem rozciągającym. Oznaczmy przez  $P$  siłę przypadającą na jeden nit ścięgu. W wypadku dwóch blach siły  $P$  kierunkowo różne chcą ściąć sworzeń nita w przekroju  $bc$  łączenia, jedna z blach bowiem wywiera nacisk na boczną powierzchnię nita  $cc$  — druga na przeciwległą górną  $aa$ . W wypadku trzech warstw, środkowa blacha  $B$  cisnie na średnią część sworznia  $bb$ , dwie skrajne blachy  $A$  i  $C$  na przeciwległe sąsiednie części

sworznia  $a$  i  $c$ , a siły  $P$  chcą ściąć sworzni w przekrojach  $ab$  i  $cb$  łączenia. W obu wypadkach sworzni nita przeciwdziała tym siłom, pracuje na ścinanie w przekroju  $F = \frac{1}{4}\pi d^2$ , przyczem  $d$  oznacza średnicę sworznia. Oprócz sprzeciwu sworznia na ścinanie działa tu dodatkowo dość znaczna siła tarcia w styku blach, rodząca się z nacisku główek, nie może więc być mowy tutaj o wyłącznej pracy nita na ścinanie. Mimo to jednak liczymy przekrój nita na ścinanie, z pominięciem wpływu siły tarcia w łączeniu, zazwyczaj przytem korzystamy ze wzorów przybliżonej teorii, pisząc  $k_t = P : nF$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę przekrojów, ścinanych jednego nita. Dla nitów żelaznych zlewnych używanych w ustrojach budowlanych  $k_t = 600 - 1000 \text{ kg./cm.}^2$ . Średnica nita wyznacza się ze wzoru  $d = \sqrt{5s} - 0,2 \text{ cm.}$  w zależności od największej grubości blach łączenia. Dla dwóch blach  $A$  i  $B$  będziemy mieli  $n = 1$  oraz  $s = \delta$ , o ile  $\delta' < \delta$ , dla trzech  $ABC$  —  $n = 2$  oraz  $s = \Delta$  widocznie bowiem tutaj  $\Delta > \delta$  i  $\Delta > \delta'$ . Zwykle wymiary  $d = 1,2 - 1,6 - 2,0 - 2,3 - 2,6 \text{ cm.}$ , do tych wartości należy zaokrąglić średnicę wyznaczoną ze wzoru, i sprawdzić czy naprężenie tnące w przekroju  $P : nF$  nie przekracza powyżej wskazanych granic. Nadto należy zawsze sprawdzić pracę nita na docisk sworznia do blach, według zwykłego wzoru  $k = P : de$ , w którym  $e$  oznacza najmniejszą łączną grubość blach obciążonych siłą  $P$ . Dla blach  $A, B$ :  $e = \delta'$ , gdy  $\delta' < \delta$ , dla blach  $ABC$ :  $e = \Delta$ , gdy  $\Delta < \delta' + \delta$ . W ten sposób wyznaczone  $k$  nie powinno przekraczać  $2 k_t$ . Odległość osi nita od brzegu blachy —  $1,5 - 2,0d$ , podziałka t. j. odstęp od osi do osi nitów w szeregu =  $2,5 - 3,5d$ , najwyższa  $5 - 8d$ . Łączna grubość wszystkich blach nie powinna przekra-



czać 3 ÷ 4,5*d*. W ustrojach technicznych, a zwłaszcza w kotłach i zbiornikach wymiary nitów są nieco odmienne.

3-o Łączenie dwóch dyli pod kątem  $\alpha$  można wykonać w sposób wskazany na (Rys. 84). Dyl *A* opiera się ukośnie o dyl *B*, cisnąc nań z siłą *P*. Pod działaniem tej siły ukośnej dyl *A* mogłoby się ześlizgnąć po górnej powierzchni dyla *B*, przeszkadza temu dolna wpustka dyla górnego

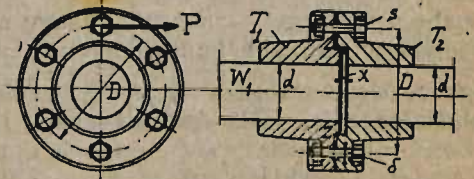


Rysunek 84.

oparta o ściankę *dd*, odpowiedniego wydrążenia w dolnym dyle. Pod naciskiem siły *P* wpustka chce wytłoczyć z dolnego dyla kostkę *abcd* o wymiarach  $f \times g \times i$ , to jest ściąg tworzywo wzdłuż korytkowego przekroju *cbbc*. Niech będzie  $P=1000$  kg.  $\alpha=30^\circ$ , wymiary dyla  $m=k=12$  cm. Siła tnąca  $T=P \cos \alpha=1000 \times 0,86603=866$  kg, stanowi obciążenie tnące przekroju  $F=2gf+if=f(2g+i)$ , a nadto ciśnienie na ściankę pionową wpustki, daje więc obciążenie cisnące przekroju  $F_1=gi$ . Dla sośniny  $K_c=280$ ,  $K_t=45$  kg./cm.<sup>2</sup> w kierunku włókien, stąd w założeniu sześciokrotnej pewności, z jaką zazwyczaj tego rodzaju ustroje są budowane

$k_c=43,3$   $k_t=7,5$  kg./cm.<sup>2</sup>, możemy więc napisać  $f(2g+i)=866:7,5=115,5$  oraz  $gi=866:43,3=20$ ; obierzmy  $i=6$  cm., a wtedy  $g=3,5$   $f=9$  cm. Ta sama siła chce ściąg wpustkę u nasady *de* wzdłuż przekroju  $i$   $h$ , zatem  $ihk_t=T$ , skąd po podstawieniu  $h=20$  cm. Nadto poziomy przekrój  $(k-i) \times h=(12-6) \times 20=120$  pracuje na zgniecenie z  $\sigma_z=P \sin \alpha:120=1000 \times 0,5:120 \approx 4$  kg./cm.<sup>2</sup> jest więc zbyt sowyty.

4-o Łącznik (Rys. 85) złożony z dwóch tarcz osadzonych na wałach średnicy *d*, po ześrubowaniu może przenieść pewien moment obrotowy  $M_0$  przy *n* obrotach obu wałów na minutę. Jedna z tarcz ma cylindryczną wpustkę, druga zagłębienie tej samej średnicy—w ten sposób ściśła współosiowość obu wałów jest bezwzględnie zapewniona. Tarcze osadzone są na wałach na gorąco i zaklinowane. Oznaczamy przez *D* średnicę wieńca



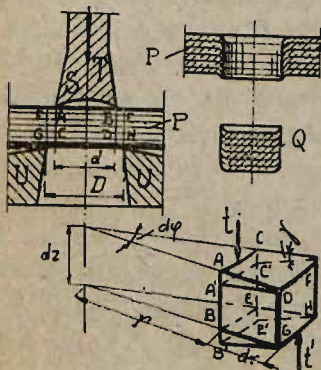
Rysunek 85

i śrub rozłożonych w równych odstępach, przez  $\delta$  — średnicę sworzni śruby. Nazwijmy jeden z wałów pędzącym — drugi pędzonym, Pierwszy daje moc, drugi sprawia opór. Pomijając tarcie obu tarcz w płaszczyznach dotyku, przypuszczamy, że ściśle osadzone w swych otworach sworznie śrub *S* pracują tu na ścinanie, wałek pędzący chce bowiem obrócić swą tarczę w stosunku do tarczy wału pędzonego — chce przeciąć śruby w płaszczyźnie styku. Oznaczamy przez *P* siłę tnącą jednej śruby, ta siła da moment  $\frac{1}{2} PD$  w stosunku do osi wałów, zatem  $M_0=\frac{1}{2} n PD$ . Punkt zaczepienia siły *P* za każdym obrotem łącznika przebiega drogę  $\pi D$ , możemy przeto wyznaczyć pracę siły *P* na obrót, w postaci  $\pi PD$ , a pracę wszystkich śrub —  $i \pi PD=2 \pi M_0$ . Na minutę będziemy już mieli  $2 \pi n M_0$  kg/m., o ile siłę *P* wyrazimy jak zwykle w kg., a *D* w m. Na sekundę  $2 \pi n M_0:60$ , co



czyln  $2 \pi n M_0 : [60 \times 75] = N$  koni mechanicznych przenoszonych przez łączniki. Stąd mamy  $M_0 = 716,1972 N:n$  (kg./m.) = 71620  $N:n$  (kg./cm.). Dorzucmy tu jeszcze wartość siły  $P$  wyznaczoną w myśl dokładniejszej teorii ścinania, ze wzoru  $k_t = \frac{1}{3} P : \frac{1}{4} \pi \delta^2$ , a otrzymamy odpowiedź na pytanie, jaką liczbę koni przenosi łącznik, gdy  $n = 100$ ,  $D = 33$  cm.,  $i = 6$ ,  $\delta = 3$  cm. Wobec braku jakichkolwiek bliższych danych na wszelki wypadek rozpatrujemy obciążenie jako wahlwe. W tem założeniu dla sworzni śrub, zazwyczaj żelaznych zlewnych mamy  $k_t = 240 \div 400$  średnio 300 kg./cm.<sup>2</sup>, stąd  $P = \frac{3}{4} \times 7,0686 \times 300 = 1590$  kg.,  $M_0 = \frac{1}{2} \times 6 \times 1590 \times 33 = 157410$  (kg./cm.) i ostatecznie  $N = 157410 \times 100 : 71620 \approx 220$  koni.

5-o *Przebijanie*. Górna powierzchnia twardej matrycy  $U$  (Rys. 86), zlekka stożkowo wzniesiona ku środkowemu otworowi średnicy  $D$ , rozszerzającej się nieco u dołu, stanowi stół przebijarki. Na tej matrycy kładziemy blachę  $P$  i przyciskamy przebijakiem  $S$  średnicy  $d$  nieco mniejszej od  $D$ . Dolna powierzchnia dotyku przebijaka jest słabo wgłębiona, jej brzegi wzniesione cisną na blachę na całym obwodzie i powodują zanurzenie się przebijaka wgłęb blachy. Odwrotnie działa matryca; następuje więc ścinanie blachy kończące się przebiciem, przyczem wypada wytłoczone krążek  $Q$ . Przebicie połączone jest ze znacznym odkształceniem tnącym



Rysunek 86.

cząsteczek sąsiednich, jak to zresztą najlepiej uwypukla przekrój blachy przebitej i krążka, wyraźnie widzimy tu ostre wywinięcie brzegów otworu — skrzywienie warstw blachy. Oznaczmy znikomą różnicę średnic przez  $D - d = 2 dr$ , przez  $\delta$  grubość blachy  $P$  i wyobraźmy sobie dwa współśrodkowe przekroje cylindryczne  $ABCD$  i  $EFGH$ , myślowo wydobyte w głębi blachy. Te dwa przekroje stanowią cylinder wydrążony o grubości ścianek  $dr$ . Wyżej zazaczyliśmy, że dotyk przebijaka ustala się wzdłuż obwodu  $\pi d$ , możemy więc bez znacznego błędu założyć, że parcie  $T$  przebijaka na blachę jest rozłożone równomiernie wzdłuż tego obwodu i skierowane wgłęb blachy po wewnętrznej powierzchni

$\pi d \delta$  cylindra. Ten układ sił równoważą odpory matrycy, statycznie nie wyznaczalne, i tutaj więc w braku dokładniejszych danych możemy bez znacniejszego błędu przypuścić, że te sprzeczne są równomiernie rozłożone wzdłuż obwodu  $\pi D$  i skierowane wgłęb blachy po zewnętrznej powierzchni  $\pi D \delta$  cylindra. Cylinder dzielimy na płytki pierścieniowe  $dz$  grube, płytki na kostki przekrojami średnicowymi płaskimi, pochyłymi ku sobie pod kątem  $d\varphi$ . W myśl poczynionych założeń na ściankach wewnętrznych kostek  $ACDE$  panować będą naprężenia tnące  $t$ , pochodzące od siły przebijającej  $T$ , a więc równoległe i skierowane jak ona; w odwrotnym kierunku działać będą równoległe naprężenia oporowe  $t'$ , przyłożone do ścianek zewnętrznych  $DFGH$  kostek — naprężenia sprzeciwu matrycy. Wobec zupełnej symetrii osiowej warunków obciążenia kostek, możemy założyć, że  $t$  i  $t'$  mają wartości stałe, inaczej mówiąc, że siły  $T$  dają natężenia przekrojów jednostajne  $t = T : \pi d \delta$  oraz  $t' = T : \pi D \delta = T : \pi \delta (d + 2 dr) \approx t$ .



Są to niewątpliwie naprężenia tnące — pod ich jarzmem kostki ulegają, skrzywieniu, jak to najlepiej zresztą uwypukla rysunek. Przy dostatecznie wielkiej skrajnej wartości  $t$ , równej  $K_1$ , nastąpi rozdział cząstek w kostkach — przebicie blachy. Stąd wartość siły przebijającej  $Q = K_1 \pi d \delta$ . — Podana tu teoria przebijania grzeszy zbyt dużą dowolnością założeń, wystarcza jednak do celów praktycznych. Przebijanie daje dużą sprawność pracy, posiada natomiast poważną wadę: powoduje zmęczenie cząsteczek wewnętrznej powłoki otworu, to też zazwyczaj używane są przebijaki o średnicy nieco mniejszej, a następnie otwory przebite rozwiercane do średnicy właściwej. W ten sposób powłoka zmęczona zostaje usunięta.



## CZĘŚĆ CZWARTA.

# SKRĘCANIE.

§ 1. **Naprężenia wirowe.** Obciążenie zewnętrzne nazywamy *skręcającym*, gdy układ sił odkształcających, po sprowadzeniu do środka przekroju, daje moment  $M_0$ , prostopadły do przekroju. Dla tego wypadku we wzorach (3) dla naprężeń (I, § 6) należy uczynić  $T_x = T_y = S = M_x = M_y = 0$ . Ostatni wzór da wartość zerową naprężenia osiowego  $\sigma_z = 0$ , dwa pierwsze mogłyby wyrokować o naprężeniach *skręcających*, leżących w przekroju, gdybyśmy umieli określić współczynniki  $H, K, L, N$  statycznie niewyznaczalne. W pewnych wypadkach wartości ich dają się wyznaczyć z warunków zachowania się powłoki ciała odkształconego; narazie jednak o odkształceniach jeszcze nic nie wiemy, czynimy przeto *założenie* najprostsze  $H = N = 0$ . Pozostałe współczynniki  $K, L$  nie mogą być równe zeru, wobec warunku koniecznego  $K + L = M_0$ . W ten sposób otrzymany  $t_x = -Ky$ :  $t_y = Lx$ ;  $\sigma_z = 0$ , dla osi głównych przekroju  $OX, OY$  i prostopadłej osi  $OZ$ —środkowych. Kierunek osi wyznaczamy, jak zwykle tak, aby wskazówka zegara leżącego pośrodku pola tarczą w kierunku dodatniej osi  $OZ$ , spotykała w swym biegu dodatnią oś  $OX$ , a potem dopiero dodatnią oś  $OY$ . Na  $OZ$  leży moment skręcający  $M_0$ , w dowolnym punkcie  $\mu(x, y)$  przekroju panuje naprężenie skręcające  $\tau = \sqrt{t_x^2 + t_y^2}$ , dotychczas bliżej nieokreślone, lecz niewątpliwie należące do rodzaju tnących poprzednio rozpatrywanych. Oznaczmy przez  $\mu_0(x_0, y_0)$  punkt leżący na obwodzie przekroju rozpatrywanego, przez  $\tau_0$ , panujące w nim naprężenie skręcające. W myśl uwag poczynionych w (III § 4)  $\tau_0$  nie może wychodzić po za przekrój w przeciwnym bowiem razie na bocznej powłoce przekroju istniałby układ naprężeń tnących  $\Theta$ , powłokowych, wymagających, nader zawikłanego, praktycznie niewykonalnego, obciążenia zewnętrznego. Zatem  $\tau_0$  musi leżeć na stycznej obwodu przechodzącej przez  $\mu_0$ , inaczej mówiąc jego składowe  $v_x = -Ky_0 : I_x$ ,  $v_y = Lx_0 : I_y$  powinny czynić zadość *warunkowi brzęgowemu*  $v_x dy_0 = v_y dx_0$ , ustalonomu w zagajeniu (I, § 6). Oznaczamy przez  $y'_0 = dy_0 : dx_0$ , po podstawieniu otrzymamy  $L I_x x_0 + K I_y y_0 y'_0 = 0$ . Tej zależności czynić winny zadość spórzędne bieżącego punktu  $\mu_0$  obwodu, a przeto całka tylko co otrzymanego równania różniczkowego stanowi



będzie równanie roju obwodów, czyniących zadość poczynionym wyżej założeniom. Całkując bezpośrednio mamy:  $LI_x x_0^2 + KI_y y_0^2 = C$ , lub też  $x_0^2 : [C : LI_x] + y_0^2 : [C : KI_y] = 1$ . Jest to równanie roju elips spółśrodkowych, podobnych, stąd prosty wniosek, że podana wyżej teoria dotyczy wyłącznie tylko przekrojów eliptycznych, kołowych pełnych, lub pierścieniowych. W stosunku do innych obwodów daje wyniki błędne. W ten sposób zwęża się zakres naszych rozważań. Bierzemy pod uwagę:

1-o *Przekrój eliptyczny*. Jego równanie obwodu  $x_0^2 : a^2 + y_0^2 : b^2 = 1$  stanowi jedną ze szczególnych całek rozpatrywanego powyżej równania różniczkowego, to znaczy że  $C : LI_x = a^2$  oraz  $C : KI_y = b^2$ . Inaczej jeszcze  $La^2 I_x = Kb^2 I_y$ . Zważywszy, że  $I_x = \frac{1}{4} \pi ab^3$ ,  $I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b$ , otrzymamy  $L = K$ , a przeto wobec  $K + L = M_0$ , będziemy mieli ostatecznie  $K = L = \frac{1}{2} M_0$  i bezpośrednio potem dla wszystkich punktów przekroju  $t_x = -\frac{1}{2} M_0 y : \pi ab^3$ ,  $t_y = 2 M_0 x : \pi a^3 b$ . Chcąc zbadać własności otrzymanego układu naprężeń, wyznaczamy kąt  $\omega$ , pochylenia  $\tau$  ku osi  $OX$  ze wzoru  $t_g \omega = t_y : t_x = -b^2 x : a^2 y = -b^2 : a^2 \operatorname{tg} \Theta$ , gdzie przez  $\Theta$  oznaczyliśmy kąt biegunowy punktu  $\mu (x, y)$ . Otrzymany wzór nie zawiera drugiej spółrzędnej biegunowej punktu  $\mu$  — promienia wodzącego  $\varsigma$ , stąd prosty wniosek, że  $\omega$  ma wartość stałą dla wszystkich naprężeń  $\tau$ , przynależnych do punktów  $\mu$  uszeregowanych na promieniu wodzącym bieżącego punktu  $\mu$ , obwodu. W układzie współrzędnych biegunowych  $x = \varsigma \cos \Theta$ ,  $y = \varsigma \sin \Theta$

stąd  $\tau = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = \frac{2 M_0}{\pi ab} \varsigma \sqrt{\frac{\cos^2 \Theta}{a^4} + \frac{\sin^2 \Theta}{b^4}}$  : przy stałej wartości  $\Theta$

naprężenia  $\tau$  rosną proporcjonalnie do  $\varsigma$ . Stąd wniosek bezpośredni, że naprężenia skręcające, przynależne do punktów uszeregowanych na promieniu wodzącym punktu bieżącego obwodu eliptycznego są równoległe do stycznej obwodu przechodzącej przez ów punkt bieżący i rosną od zera do skrajnej wartości na obwodzie proporcjonalnie do odległości danego punktu przekroju od początku osi, mierzonej po promieniu wodzącym. Maxima naprężeń panują w punktach obwodu, wyznaczmy maximum i minimum maximorum. Z łatwością można wprost zauważyć że maximum maximorum  $\tau_M$  da wartości  $\Theta = \frac{1}{2} \pi$ , lub  $\Theta = \frac{3}{2} \pi$ , minimum maximorum  $\tau_m$  — kąt  $\Theta = 0$ , lub  $\Theta = \pi$ . W istocie wobec  $a > b$ , naprężenie  $\tau_M = 2 M_0 : \pi ab^2$ , będzie większe od  $\tau_m = 2 M_0 : \pi a^2 b$ : najwyższe naprężenie przekroju eliptycznego panuje w skrajnych punktach jego małej osi głównej — najniższe — w skrajnych punktach dużej osi na obwodzie. Składowe tych skrajnych naprężeń będą odpowiednio  $t_{xM} = \pm 2 M_0 y : \pi ab^3$ ,  $t_{yM} = 0$ , oraz  $t_{xm} = 0$ ,  $t_{ym} = \pm 2 M_0 x : \pi a^2 b$ . Podwójny znak wskazuje, że w przeciwległych punktach osi panują naprężenia kierunkowo odwrotne. Ten sam warunek dotyczy również naprężeń przynależnych do wszelkiej średnicy elipsy: naprężenia wirują w przekroju



zachowując kierunek obiegu jednakowy, stanowią przeto układ *naprężeń wirowych*. Dolna część (Rys. 88), leżąca pod osią  $OX$  dostatecznie to uwypukła. Z kolei rozpatrujemy:

2-o *Przekrój kołowy*. W danym wypadku  $a = b = R$ , a przeto  $t_x = -2M_0y : \pi R^3$ ,  $t_y = 2M_0x : \pi R^3$ . Dalej mamy, zachowując znakowania poprzednie  $tg\omega = -tg\Theta$ : *naprężenie  $\tau$  jest prostopadłe do promienia wodzącego punktu, w którym panuje*. Oznaczmy moment biegunowy przekroju kołowego pełnego przez  $I_0 = \frac{1}{2} \pi R^4$ , a wtedy  $\tau = \sqrt{t_x^2 + t_y^2} = 2M_0 \sqrt{x^2 + y^2} : \pi R^3 = M_0 \varsigma : I_0$ . Stąd wniosek bezpośredni, że *naprężenie skręcające kołowego przekroju jest wprost proporcjonalne do momentu skręcającego, do odległości od środka przekroju punktu, w którym panuje i odwrotnie proporcjonalne do biegunowego momentu bezwładności przekroju*. Rośnie więc od wartości zerowej, panującej w środku przekroju do skrajnej wartości  $\tau_0 = M_0 R : I_0$ , stałej dla wszystkich punktów obwodu. Iloraz  $I_0 : R = \frac{1}{2} \pi R^3$  nazywamy zazwyczaj *biegunowym wskaźnikiem wytrzymałości* i oznaczamy przez  $W_0$ . I tutaj również naprężenia  $\tau$  zachowują kierunek obiegu jednakowy: wirują w przekroju, stanowią zatem układ naprężeń wirowych. Górna lewa część (Rys. 88) dostatecznie to uwypukła. Weźmy jeszcze pod uwagę:

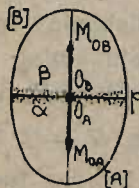
3-o *Przekrój kołowy pierścieniowy*, o promieniach zewnętrznym  $R_2$  i wewnętrznym  $R_1$ . Wszystko to, cośmy powiedzieli o naprężeniach wirowych przekroju pełnego — może być powtórzone bez zmiany, z tą drobną różnicą, że tutaj  $I_0 = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4)$ ,  $W_0 = \frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) : R_2$ . Na obwodzie zewnętrznym naprężenie wirowe ma stałą wartość  $\tau_2 = M_0 : W_0$  najwyższą, na wewnętrznym najniższą  $\tau_1 = M_0 R_1 : I_0$ , i rośnie proporcjonalnie do  $\varsigma$  w tych granicach. Że tak jest istotnie z łatwością możemy się przekonać, zważywszy, że układ wirowy spełnia warunki brzegowe na obu obwodach zewnętrznym i wewnętrznym.

W poprzednio rozpatrywanych wypadkach rozciągania, ściskania i ścinania skrajna wartość naprężenia była zależna od pola przekroju, tutaj tę samą rolę gra, jak widzimy wskaźnik wytrzymałościowy, równy  $\frac{1}{2} \pi ab^2$  dla przekroju eliptycznego,  $\frac{1}{2} \pi R^3$  dla kołowego pełnego i  $\frac{1}{2} \pi (R_2^4 - R_1^4) : R_2$  dla pierścieniowego, należy przeto zdać sobie sprawę, który z tych trzech przekrojów jest najdoskonalszy wytrzymałościowo przy tej samej zasobności przekroju w tworzywo. Inaczej mówiąc, który z tych trzech przekrojów daje najniższą skrajną wartość naprężenia skręcającego, przy tem samym obciążeniu  $M_0$  i tem samym polu  $F$  przekroju. Czynimy zadość warunkowi pól, pisząc  $\pi ab = \pi R^2 = \pi (R_2^2 - R_1^2)$  i porównujemy skrajne na-



prężenia tych trzech przekrojów. Wobec  $a > b$ , oraz  $R_2 > R_1$  będziemy mieli  $a > R > b$  oraz  $R_2 > R > R_1$ . Stosunek skrajnych naprężeń dla przekroju eliptycznego i kołowego będzie  $\tau_M : \tau_0 = R^3 : ab^2 = R : b > 1$ , ponieważ z założenia  $R^2 = ab$ , a dla przekrojów kołowego pełnego i pierścieniowego  $\tau_0 : \tau_1 = (R_2^4 - R_1^4) : R^3 R_2 = (R_2^2 - R_1^2) (R_2^2 + R_1^2) : R^3 R_2 = (R_2^2 + R_1^2) : RR_2$ , wobec tego że  $R_2^2 - R_1^2 = R^2$ . Inaczej jeszcze  $\tau_0 : \tau_1 = R_2 : R + R^2 : RR_2$ , a przeto  $\tau_0 : \tau_1 > 1$ , ponieważ już pierwszy wyraz prawej części jest większy od jedności. Zatem wytrzymałościowo najdoskonalszy jest przekrój pierścieniowy, potem idzie kołowy pełny — wreszcie eliptyczny. Od uposażenia przekroju w tworzywo przy pozostałych jednakowych warunkach zależy cena ogniwa, należałoby przeto oddać pierwszeństwo przekrojom pierścieniowym skręcanym, wchodzą tu jednak w grę dodatkowe koszty obróbki, zazwyczaj przewyższające cenę tworzywa, a stosunkowo najtańsze dla przekrojów kołowych toczonych pełnych, dlatego też należy uważać przekrój kołowy pełny, jako najdoskonalszy pod względem wytrzymałości na skręcanie. Praktyka potwierdza ten wniosek w całej pełni, wobec tego przedewszystkiem rozpatrujemy:

§ 2. **Odształcenia wirowe przekrojów kołowych.** Bierzemy pod uwagę bryłę odształconą pod jarzmem sił zewnętrznych i zakładamy (Rys. 87), że pewien przekrój kołowy  $p$  dzieli jej obciążenie na dwa układy  $[A]$  i  $[B]$  sił odształcających, które po sprowadzeniu do środka przekroju dadzą obciążenia skręcające. To znaczy, że układ  $[A]$  da moment  $M_{0A}$ , skręcający, prostopadły do przekroju, a układ  $[B]$  moment  $M_{0B}$  tego samego rodzaju. Wobec istnienia trwałej równowagi  $M_{0A} + M_{0B} = 0$  — momenty skręcające znoszą się wzajemnie, są przeto równe, lecz skierowane odwrotnie. Moment  $M_{0A}$ , wypadkowy układu  $[A]$ , siedliskuje w gromadzie cząstek  $\alpha$ ,  $M_{0B}$  — wypadkowy układu  $[B]$  — w gromadzie cząsteczek  $\beta$  — drugiej powłocy przekroju. Zatem i tutaj możemy również rozpatrywać płytkę (Rys. 89) kołową, zastępującą przekrój tylko co rozpa-



Rys. 87.

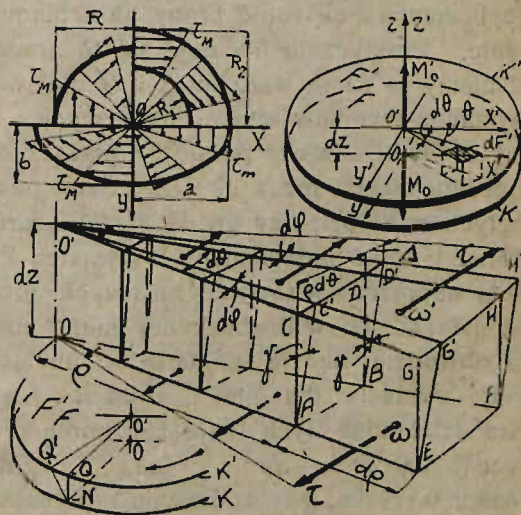
W założeniu grubości płytki  $dz = 0$  oba układy sił zewnętrznych miałyby ten sam punkt sprowadzenia, jak dla pojedynczego przekroju wyżej rozpatrywanego, tu jednak  $dz \neq 0$ , zatem bezwzględne wartości momentów muszą być nieco różne, możemy przeto napisać, uwzględniając ich sprzeczne kierunki, że  $-M'_0 = M_0 + dM_0$ . Te



momenty utrzymują płytkę w równowadze odkształconej, nieznaczną bowiem różnica  $dM_0$  obciążenia obu ścianek, równowagę winna obciążenie samej płytki, które przy obu sprowadzeniach zostało oczywiście pominięte, a więc siły zewnętrzne przyłożone do cząstek samej płytki, lub czynne na jej powłoce bocznej. Te siły zewnętrzne stanowią zresztą układ nader nieznaczący wobec znikomej wartości  $dz$ , a nadto ich wypadkowa  $dM_0$  dąży do zera wraz z grubością płytki. Możemy przeto napisać, że  $M'_0 \approx M_0$ .

Zupełnie dowolna para osi  $OX, OY$  środkowych stanowi zarazem układ osi głównych dolnego kołowego przekroju płytki  $F$ . Rzuty osi  $OX, OY$  na górny również kołowy przekrój płytki, wyznaczają jego osie główne  $OX', OY'$ . Trzecią osią  $OZ$  przebijamy pole  $F'$  przez środek  $O'$ . Od osi głównych  $OX, OX'$  w kierunku strzałki zegara, leżącego na płycie tarczą do góry, odliczamy kąt biogunowy  $\Theta$ . W sąsiedztwie punktu  $\mu(\zeta, \Theta)$  wyznaczamy poletko  $dF = \zeta d\zeta d\Theta$  i budujemy na niem kostkę  $\zeta d\zeta d\Theta dz$ . Jej górna ścianka  $dF' = \zeta d\zeta d\Theta$  da w rzucie na  $F$  — ściankę dolną  $dF$ . To samo okaże się słusznem i dla wszystkich kostek płytki, a nawet i dla skrajnych kostek dotykających obwodów, gdzie  $dF'$  mogą się różnić od  $dF$  o małe wyższych rzędów na tle nieznaczących różnic obu obwodów, zastępujących powłokę górną i dolną poprzednio rozpatrywanego przekroju  $p$ . W ten sposób możemy płytkę rozpatrywać, jako złożoną z kostek  $\zeta d\zeta d\Theta dz$ , podległych działaniu naprężeń wirowych  $\tau = \frac{M_0 \zeta}{I_0}$  na dolnych ściankach  $dF$ , oraz naprężeń również wirowych  $\tau' = \frac{M'_0 \zeta}{I'_0} = \frac{(M_0 + dM_0) \zeta}{(I_0 + dI_0)}$  na górnych  $dF'$ . Wobec nieznaczących różnic pol  $F'$  i  $F$  różnica  $I'_0 - I_0 = dI_0$  jest znikomo mała, będziemy przeto mieli, uwzględniając kierunki naprężeń —  $\tau' = \tau + d\tau \approx \tau = \frac{M_0 \zeta}{I_0}$ . Te prawie równe, choć skierowane odwrotnie naprężenia wirowe, stanowią obciążenie odkształcające każdej kostki płytki, wyodrębnionej z bryły odkształconej.

W istocie rzeczy mamy tu do czynienia z obciążeniem tnącym dającym odkształcenia tnące (III § 2). Dla odróżnienia nazwijmy rozpatrywane tutaj obciążenie *wirowem*. Jego siły  $\tau \zeta d\zeta d\Theta$  powodują przesunięcia górnej ścianki  $dF'$  kostki względem dolnej (Rys. 90) o  $\Delta = CC' = DD'$  na tle przesunięcia kąтового, zwanego wprost przesunięciem  $\gamma = \Delta : dz$ , jak to zresztą już wiemy z teorii ścinania. Górna



Rys. 88, 89, 90, 91.

90) o  $\Delta = CC' = DD'$  na tle przesunięcia kąтового, zwanego wprost przesunięciem  $\gamma = \Delta : dz$ , jak to zresztą już wiemy z teorii ścinania. Górna



ścianka kostki nie zmienia przytem swego kształtu pierwotnego, przesuwają się jeno o  $\Delta$  w kierunku prostopadłym do promienia wodzącego  $\zeta$ , inaczej mówiąc *skręca się o kąt*  $d\varphi = CO'C' = DO'D'$  względem osi  $OZ$ . Nazwijmy kąt  $d\varphi$  *elementarnym kątem skręcenia*. Ponieważ  $\Delta = \zeta d\varphi = \gamma dz$ , zatem  $d\varphi = \gamma dz : \zeta$ . I tu również, jak w wypadku ścinania, na bocznych ściankach kostki prostej odkształconej powstają równoważące naprężenia:  $\tau$  na ścianie  $ACGE$  i  $\tau'$  na  $BDHF$ . Układ naprężeń tylko co wyznaczony stanowi pełne obciążenie wirowe kostki, wyodrębnionej gdziekolwiek myślowo z płytki. Przynależne doń naprężenia wirowe leżą w jednej płaszczyźnie środkowej kostki, prostopadłej do promienia wodzącego i zbiegają się na przeciwległych ściankach  $AE$  i  $DH$  kostki. Dwie pozostałe ścianki kostki  $ACDB$  i  $EGHF$  są odciążone. Ten układ naprężeń daje przesunięcia  $\Delta$ . Kostka pierwotnie ukośna stała się prostą — w tej postaci bowiem wyodrębniliśmy ją z płytki, naodwrot przeto kostka pierwotnie prosta skrzywi się o kąt  $\gamma$ , dając elementarne skręcenie  $d\varphi$ . — Pomiedzy przesunięciami  $\gamma$ , a naprężeniami wirowymi  $\tau$  powinna niewątpliwie istnieć zależność w postaci funkcji  $\gamma = f(\tau)$ , jak w wypadku ścinania, i tutaj więc możemy napisać że  $\gamma = \beta\tau = \tau : G$ , gdzie  $G = 1 : \beta$ . W ogólnym wypadku współczynniki  $\beta$  i  $G$  mają wartości zmienne, dla pewnych jednak tworzyw i w pewnych granicach mogą być stałe w myśl *pierwszego prawa Hooke'a*. Wobec tego, że naprężenia wirowe stanowią pewną odmianę tnących — wartości  $\beta$  i  $G$  utożsamiamy dla obu tych wypadków, aczkolwiek mogą tu jednak zachodzić pewne różnice, które być może dałyby się stwierdzić, gdybyśmy umieli robić próby na ścinanie z taką dokładnością, jak na skręcanie. Praktycznie nie daje się to urzeczywistnić, to też do czasu zapisujemy te same wartości  $\beta$  i  $G$  dla obu odmian naprężeń. Chcąc skorzystać z wyników wyżej otrzymanych, bierzemy pod uwagę wycinek z płytki, zawarty pomiedzy płaszczyznami pochyłonymi pod kątem  $d\Theta$ , przechodzącymi przez oś  $OZ$ . Szeregiem powierzchni cylindrycznych, odległych o  $d\zeta$  dzielimy go na kostki  $\zeta d\zeta d\Theta dz$  aż do powłoki kołowej płytki. Górne i dolne poletka tych wszystkich kostek wycinka pozostają pod jarzmem naprężeń wirowych, rosnących proporcjonalnie do odległości kostek od osi  $OZ$ , co w dostatecznej mierze uwypukla (Rys. 90). Skrajna kostka na obwodzie będzie najbardziej obciążona, bo wartość naprężenia wirowego wyniesie dla niej  $\tau_0 = M_0 R : I_0$  gdzie  $R$  oznacza promień płytki. Pod działaniem tych naprężeń górne poletka przesuną się względem dolnych o kąt  $d\varphi = \gamma dz : \zeta = \beta\tau dz : \zeta = \beta M_0 dz : I_0$ , jednakowy dla wszystkich kostek wycinka, gdy współczynnik przesuwalności  $\beta$  ma wartość stałą dla wszystkich naprężeń wirowych aż do skrajnego  $\tau_0$  włącznie. W razie przeciwnym, oznaczywszy przez  $\beta$  średnią wartość tego współczynnika dla naprężeń  $\tau \leq \tau_0$  otrzymamy średni kąt skręcania  $d\varphi = \beta M_0 dz : I_0$  wycinka kołowego. W pierwszym wypadku (Rys. 91) skrajny górny punkt  $Q$  jed-



nej z bocznych ścianek płaskich wycinka przesunie się po odkształceniu w  $Q'$ , skręci się o kąt  $d\varphi = Q'O'Q$ , przyczem niewątpliwie krawędź  $QO'$  pozostanie niezmiennie prostą. W drugim wypadku krawędź ta ulegnie zwichrzeniu, a obwodowy łuk skręcenia  $QQ'$  nie będzie miarą ścisłą kąta  $d\varphi$ , lecz tylko przybliżoną. Rozpatrując z kolei cały szereg wycinków kołowych, możemy powyższe wyniki uogólnić dla całego krążka. Wobec zupełnej tożsamości warunków obciążenia odkształcenia wszystkich wycinków będą jednakowe, a  $d\varphi$  w stosunku do płytki da kąt skręcenia górnej powierzchni krążka względem dolnej. I tu również obwodowy łuk  $QQ'$  skręcenia będzie miarą kąta  $d\varphi$  ścisłą zupełnie, gdy  $\beta$  jest stałe dla  $\tau \ll \tau_0$ , oraz wystarczająco przybliżoną, gdy  $\beta$  ma wartość zmienną w tej dziedzinie. W obu wypadkach możemy przeto napisać  $QQ' = R d\varphi$ . W ten sposób uzewnętrznia się odkształcenia *wirowe* płytki kołowej. Górne jej dno wykonało tylko obrót względem dolnego, ponadto oba dna płytki nie uległy żadnym odkształceniom. Wynika to bezpośrednio z poczynionych założeń. Powyższe rozważania w całości można zastosować do płytki kołowej pierścieniowej.

**§ 3. Skręcanie wałów.** Wszystkie wyżej otrzymane wyniki teoretyczne bezwzględnie muszą być sprawdzone doświadczalnie, zbyt bowiem wiele czyniliśmy założeń, być może nie odpowiadających istocie zjawisk rzeczywistych. Należy obrać kształt bryły najbardziej odpowiadający warunkom badania, a zarazem najprostszy, słowem wał o przekroju kołowym stałym — najczęściej zresztą stosowane ogniwo skręcane ustrojów. Zatem bierzemy pod uwagę wał prosty nieważki, doskonale jednorodny o poprzecznym przekroju kołowym stałym. Pierwotną długość wału  $l$  mierzoną pomiędzy skrajnymi przekrojami — dnami pręta dzielimy na  $n$  równych części szeregiem przekrojów poprzecznych, znacząc na bocznej powierzchni wału obwody kołowe  $K$  w jednakowych odległościach  $z = l/n$ . Nadto na bocznej powierzchni wału zaznaczamy ryskami  $L$  szereg tworzących równoległych do osi, zresztą obranych zupełnie dowolnie. Oba dna pręta obciążamy momentami skręcającymi różnoskrętnymi  $M_0$ . Te dwa wzajemnie znoszące się układy sił zewnętrznych dają obciążenie wirowe stałe dla wszystkich przekrojów pręta, niewyłączając zewnętrznych — obu den wału. Zatem i odkształcenia wirowe będą tożsamościowe dla wszystkich płytek wału: górne dno każdej płytki wykona obrót względem dolnej o kąt  $d\varphi$  mierzony na obwodzie łukiem  $QQ'$  (Rys. 91). Przed odkształceniem obwody każdej płytki ściśle się pokrywały w rzucie, po odkształceniu wirowym będą się nadal pokrywać w rzutach, aczkolwiek nie tymi samymi punktami obwodów, co przedtem. Obwody  $K$  kołowe pozostaną niezmiennie w swej postaci, przekroje poprzeczne nie wyjdą z płaszczyzn prostopadłych do osi wału, siedliska ich środków. Natomiast ryski podłużne  $\alpha$  zwichrzą się i przejdą w *linie śrubowe*. Aby to udowodnić podzielmy myślowo odległość  $Z$  dwóch sąsiednich obwodów  $K$  na elementarne odcinki  $dz$  szere-



giem przekrojów poprzecznych. Dla wszystkich  $m$  płytek w ten sposób wyodrębnionych skręcenia  $QQ'$  będą stałe, a zarazem i kąty  $Q'NQ$  będą tożsamościowe. Zatem na całej długości wału elementarne odcinki  $QN$  którejkolwiek ryski  $L$  pochylą się wszędzie pod tym samym kątem  $Q'QN$  ku osi wału: ryska  $L$  stanie się linią śrubową. Oznaczmy stosunek skręcenia  $d\varphi = QQ' : R$  względnego dwóch sąsiednich przekrojów płytki do odległości tych przekrojów  $dz$  przez  $\Phi$  i nazwijmy go *skręceniem jednostkowym*. Wobec tożsamościowych odkształceń wirowych dla wszystkich  $m$  płytek  $\Phi$  będzie stałe, zatem po odkształceniu obwody wału  $m$  płytek, czyli dwie sąsiednie ryski  $K$  ujawnią skręcenia zewnętrzne w postaci łuku  $QQ' m$  — kroc większego, który da kąt względny skręcenia  $\Delta\varphi = m QQ' : R = md\varphi$  oraz skręcenie jednostkowe  $\Delta\varphi : z = md\varphi : mdz = \Phi$ . To samo dotyczy wszystkich  $n$  płytek, a zatem i całego wału, który po odkształceniu ujawni całkowity kąt skręcenia  $\varphi$  dna górnego względem dolnego na tle skręcenia jednostkowego  $\varphi : l = \Phi$ . Wał o stałym przekroju ujawnia jednakowe skręcenia jednostkowe na całej swej długości. W danym wypadku  $\Phi = d\varphi : dz = M_0 : G I_0$  zatem całkowity kąt skręcenia wału  $\varphi = \Phi l = M_0 l : G I_0$ . Te wszystkie czysto teoretyczne wnioski powinny być poparte doświadczeniem. W tym celu używamy zazwyczaj próbki o pomiarowej długości cylindrycznej zakończonej kwadratowymi łbami. Odpowiednio zbudowane imadła nadają główkom obrót względny o kąt  $\varphi$  całkowitego skręcenia części pomiarowej: jedno z nich skręca próbkę, drugie, połączone z dynamometrem daje sprzeciw równoważący moment oporowy, który z łatwością można wyznaczyć z odczytów dynamometru. W ten sposób obciążenie wirowe działa na próbkę za pośrednictwem główek, co w dostatecznej mierze zapewnia rozkład wirowy naprężeń w przekrojach jej części pomiarowej, czyni więc zadość warunkom wyżej wyliczonym. Środkową pomiarową część próbki dzielimy na kratki ryskami kołowymi  $K$  i podłużnymi  $L$ . W ten sposób przygotowaną próbkę poddajemy działaniu obciążenia wirowego i zapomocą nader dokładnych przyrządów badamy jej część pomiarową, biorąc pod uwagę wzajemne położenie rysek  $K$  i  $L$ . Okazuje się przytem, że ryski  $K$  pozostają kołowymi — natomiast ryski  $L$  stają się liniami śrubowemi pochylonemi w kierunku skręcania pod stałym kątem. Nadto biorąc próbki o różnych średnicach i długościach możemy stwierdzić, że kąty całkowitego ich skręcenia są wprost proporcjonalne do długości i odwrotnie proporcjonalne do  $I_0$ . Te spostrzeżenia stwierdzają bezwzględną ścisłość naszych przewidywań teoretycznych w stosunku do prętów prostych o stałym przekroju kołowym, a zarazem pośrednio i prętów o przekroju kołowym zmiennym, ponieważ pręt tego rodzaju można podzielić na szereg płytek znikomej grubości, a każdą z nich rozpatrywać, jako odcinek pręta o stałym przekroju. W ten sam sposób można doświadczalnie stwierdzić przewidywania teoretyczne dla prętów prostych



o przekroju pierścieniowym, stałym lub zmiennym. Godzi się tu zaznaczyć, że pręty obu powyżej rozpatrywanych rodzajów żadnych poprzecznych zmian przekroju nie ujawniają przy próbach na skręcanie. Badania powyższe pozwolą również ustalić doświadczalnie:

**§ 4. Prawo zmienności skręceń jednostkowych w stosunku do naprężeń wirowych.** Próbkę mocujemy w uchwytach i poddajemy działaniu sił skręcających. Na pomiarowej części próbki w odległości  $l$  mocujemy ostrza na jednej z linii  $L$ , i za pomocą celowo zbudowanych dźwigni i sznurów, przetwarzamy ich względne skręcenia w obrót bębna z nawiniętym papierem, w taki sposób, aby obroty bębna były proporcjonalne do skręceń ostrzy. Na papierze wykresowym w kierunku poprzecznym, równoległym do osi znaczy w pewnej skali momenty skręcające ołówek, połączony z dynamometrem maszyny probierczej. Tak wykreśla się samoczynnie wykres wytrzymałościowy przy skręcaniu próbki. Oś wykresu nakerślona w kierunku obrotu bębna przy obciążeniu zerowym próbki, wyznaczy kierunek odmierzenia całkowitych skręceń  $\varphi$  w skali wykresu, a zarazem w skali  $l$  razy mniejszej — skręceń jednostkowych  $\Phi = \varphi : l$ . Ta oś zwie się przeto *osią skręceń*  $O\Phi$ . Druga oś prostopadła wskaże kierunek pomiaru momentów skręcających, a zarazem i naprężeń wirowych  $\tau_0$  w zmiennej skali, zowie się przeto *osią momentów*  $OM$ . W ten sposób otrzymane wykresy należą do rodzajów „WS“ (II Rys. 47, 48) lub „WK“ (Rys. 49). Tworzywa ciągliwe dają wykres „WS“ o wyraźnie zaznaczonej lub niewyraźnej granicy płynności  $Q$ , przynależnej do naprężenia  $\tau_q$  zwanego *granicy płynności nu skręcanie*. Poniżej  $Q$  leży drugi punkt krytyczny wykresu — granice proporcjonalności  $P$ , przynależna do naprężenia  $\tau_p < \tau_q$ , zwanego *granicy proporcjonalności*. Od punktu wyjścia  $O$  — początku wykresu ołówek bieży po prostej aż do  $P$ . W tym pierwszym okresie proporcjonalności skręcenia jednostkowe są proporcjonalne do naprężeń wirowych, a nadto prawie doskonale sprężyste, należą jednak do typu mieszanych, o czym z łatwością przekonać się można za pomocą czułych pomiarów optycznych. W punkcie  $P$  krzywa wykresu porzuca linię prostą i pochyla się ku  $O\Phi$ , — następuje drugi okres *skręceń nieproporcjonalnych*, zawierających już znacznie większą część trwałą, aczkolwiek jeszcze nieznaczną w stosunku do części sprężystej. W punkcie  $Q$  tworzywo poczyna się gwałtownie skręcać: traci swą wytrzymałość, przechodzi zamęt wewnętrzny. Wyraźny okres płynności zaznacza się na wykresie zupełnie tak samo jak przy rozciąganiu — niewyraźny stanowi granicę niedostrzegalną przejścia do ostatniego okresu *skręceń znacznych* kończącego się nagłym ukruceniem próbki przy skrajnej wartości naprężenia wirowego  $\tau_{om} = K_0$ , zwanego wytrzymałością na skręcanie. Skrajnemu naprężeniu wirowemu odpowiada najwyższe skręcenie jednostkowe  $\Phi_0$ . Okresu ostatniego RR' wykresy na skręcanie nie ujawniają, ponieważ zniszczenie następuje bez sztyki w jed-



nym z poprzecznych przekrojów, prostopadle do osi próbki. Zatem ten typ wykresu pozwala ustalić następujące cechy wytrzymałościowe tworzywa, granice:  $\tau_p$  — proporcjonalności,  $\tau_q$  — płynności i  $\tau_s$  — sprężystości, określone zupełnie w taki sam sposób jak przy obciążeniach osiowych, naprężenie niszczące  $K_0$ , czyli wytrzymałość na skręcanie, odpowiadającą całkowitemu skręcaniu jednostkowemu próbki  $\Phi_0$ , wreszcie pracę jednostkową wykresu  $\Pi_0$  na skręcanie. Wartość  $\Pi_0$  możemy wyznaczyć z łatwością, prowadząc skrajną rzędną wykresu. Pole wykresu, ograniczone tą rzędną, należy wyrazić w kg. cm. i podzielić przez objętość części pomiarowej próbki w  $\text{cm}^3$ .

Tworzywa nieciągliwe, twarde, a zwłaszcza żeliwo dają i tutaj wykres „WK”, złożony z nader krótkiego okresu proporcjonalności  $OP$ , praktycznie zazwyczaj równego zeru, oraz okresu — skręceń nieproporcjonalnych urywającego się nagle w  $Q$ , przy naprężeniu niszczącym  $K_0$ . Cechy przynależne do tego wykresu:  $\tau_p$ ,  $K_0$ ,  $\Phi_0$  i  $\Pi_0$  wyznaczają się zupełnie tak samo. W obu wypadkach cechy wytrzymałościowe określają zasadnicze własności wytrzymałościowe tworzyw przy skręcaniu. Naprężenie niszczące  $K_0$  stanowi miarę obciążenia stopniowego, statycznego,  $\Pi_0$  — nagłego, dynamicznego, jak dla sił osiowych (II § 9),  $\Phi_0$  — daje miarę skrętności tworzywa. W wypadku obciążenia statycznego, stopniowego wyczerpywania się energii oporowej próbki następuje na tle zwolna rosnących skręceń, wywołanych działaniem sił odkształcających, które zwolna choć ciągle rosną aż do najwyższego natężenia  $K_0$ , statycznej wytrzymałości na skręcanie. Inaczej rzecz się ma, gdy obciążenie zewnętrzne działa w sposób nagły, gdy siły wirowe z nagłą przyłożone, w nader krótkim przeciągu czasu rozwijają swe natężenie całkowite, słowem, gdy siły skręcające działają w sposób dynamiczny. W tym wypadku idzie raczej o zasób pracy niszczącej, a nie o natężenie siły ukręcającej — tutaj  $\Pi_0$  stanowi miarę wytrzymałości. Ciała twarde, gromady wykresowej „WK” ujawniają nader słabe wartości  $K_0$  i  $\Phi_0$  i  $\Pi_0$  — nie powinny być przeto narażane na wstrząśnienia lub uderzenia wirowe. Tem się tłumaczy, dlaczego obecnie zaprzestano budowy wałów żeliwnych, dawniej dość często używanych. Próby powyżej opisane umożliwiają:

### § 5. Wyznaczanie wartości współczynników sprężystości poprzecznej.

Wyżej już zaznaczyliśmy, że oś wykresu  $OM$  może być rozpatrywana jako oś naprężeń wirowych  $\tau_0 = M_0 : W_0$ , w podobny sposób oś skręceń jednostkowych  $O\Phi$  można uważać jako oś przesunięć jednostkowych  $\gamma_0$  na obwodzie płytki, a to w myśl wzoru dla  $\Phi = d\varphi : dz = M_0 : GI_0 = M_0 R : G W_0 = = \tau_0 R : G = \tau_0 R$ , gdzie niewątpliwie  $\gamma_0$  oznacza kąt  $Q'NQ$  (Rys. 91) pochylenia ścianek kostki na obwodzie. Poniżej  $\tau_p$  krzywa wykresu bieży po prostej, tworzącej kąt  $\Theta$  z osią  $O\Phi$ , możemy przeto, korzystając z uwag tylko co wyżej wypowiedzianych, wyznaczyć  $\tan \Theta = \tau_0 : \gamma_0 = \beta = 1/G$ , mierząc



bezpośrednio skręcenia  $\Phi$ , przynależne do pewnych określonych obciążeń wirowych  $M_0$ . W ten sposób z łatwością otrzymamy wartości  $G$  lub  $\beta$  dla tworzyw pierwszych dwóch gromad wykresowych, zachowujących się podług prawa Hooke'a w pierwszej dziedzinie wykresu. Po za granicą  $P$  proporcjonalności otrzymane w ten sposób wartości będą zmienne. Dla tworzyw ostatniej gromady wykresowej również otrzymamy zmienne wartości  $G$ , mimo to jednak ze względu na stosunkowo dość szczupłe podstawy tych wykresów, każdorazowo można ustalić średnie wartości dla  $G$  i  $\beta$  lub też podać ich granice zmienności. Na końcu książki podane są w tablicach wartości  $G$  dla tworzyw częściej używanych w praktyce. W teorii sprężystości wyprowadzimy zależność pomiędzy  $G$  i  $E$  dla tworzyw jednolitych w postaci  $G = mE : 2(m + 1)$ . Dla żelaza i stali  $m = 10/3$ , stąd  $G = 0,385 E$  co odpowiada wartościom podanym w tablicach.

**§ 6. Naprężenia dopuszczalne.** To, cośmy powiedzieli w (II, Rozdział II, § 9), może być bez zmiany zastosowane również w wypadkach ścinania i skręcania. *Stosunek naprężenia niszczącego  $K_I$  lub  $K_0$  do bezpiecznego, praktycznie dopuszczalnego  $k_I$  lub  $k_0$*  nazywamy stopniem bezpieczeństwa i oznaczamy przez  $j_I = K_I : k_I$  lub  $j_0 = K_0 : k_0$ . Wartości  $j$  zależą od cech wytrzymałościowych tworzywa, jego budowy, mniej lub więcej jednolitej, a nadto od rodzaju obciążenia stałego, powtarzanego lub wahałego. W myśl praw Wöhlera, które mogą być doświadczalnie stwierdzone dla ścinania i skręcania  $K_I : K_{II} : K_{III} = k_I : k_{II} : k_{III} = 3 : 2 : 1$ , co zresztą wyraźnie się zaznacza w tablicy Bacha umieszczonej na końcu Wytrzymałości. Wszystko to również stosuje się i do zginania, o którym pomówimy w księdze drugiej, — słowem prawa Wöhlera obejmują wszystkie proste rodzaje obciążeń rozpatrywane w Wytrzymałości tworzyw.

**§ 7. Przybliżone wyznaczanie naprężeń wirowych.** W teorii sprężystości wyłożymy ścisłą teorię skręcania prętów o przekroju różnym od kołowego, — tutaj podamy zarys teorii przybliżonej, wystarczająco ściślej do celów praktycznych. Założmy, że przekrój płaski  $p$  bryły wyżej rozpatrywanej (IV § 1) ma obwód różny od kołowego. W układzie osi głównych  $OX, OY$  tego przekroju, krzywa obwodu wyrazi się równaniem  $K(x, y) = 0$ . Oznaczmy przez  $p$  pochodną cząstkową  $\partial K : \partial x$ , przez  $q$  pochodną  $\partial K : \partial y$ . W wypadku obciążenia wirowego przekroju momentem  $M_0$ , warunek brzegowy (I § 6) wyrazi się wzorem  $t_x \cdot p + t_y \cdot q = 0$ , w którym przez  $t_x, t_y$  oznaczyliśmy składowe naprężenia wirowego przekroju. Temu warunkowi z łatwością możemy zadośćuczynić, czyniąc  $t_x = -\mu \cdot q, t_y = \mu \cdot p$ , gdzie  $\mu$  gra rolę współczynnika stałego. W dowolnym punkcie  $\mu(x, y)$  przekroju  $p$ , wyznaczmy poletko  $dF = dx \cdot dy$ . Siła cząsteczkowa starowiąca obciążenie wirowe tego poletka będzie miała składowe  $t_x \cdot dF$  i  $t_y \cdot dF$ , dające moment elementarny  $t_y \cdot dF \cdot x - t_x \cdot dF \cdot y$  względem osi  $OZ$  prostopadłej do przekroju. W danym wypadku,



jak zwykle oś  $OZ$ , wyprowadzamy prostopadle ze środka przekroju, a główne osie przekroju  $OX$ ,  $OY$  układamy w nim tak, aby wskazówka zegara, leżącego tarczą w kierunku osi  $OZ$ , spotykała w swym biegu dodatnią oś  $OX$ , a potem dopiero dodatnią oś  $OY$ . W tym układzie osi siła  $t_y dF$  da moment kierunkowo zgodny z  $OZ$ , a więc dodatni, siła  $t_x dF$  — ujemny, jako różnoskrętny. Łączny moment wszystkich naprężeń wirowych kostek powinien równoważyć obciążenie wirowe przekroju, możemy przeto napisać:

$$M_0 = \int [t_y x - t_x y] dF = \mu \int [px + qy] dF$$
, gdzie całkowanie obejmować ma wszystkie poletka krzekroju  $F$  bryły. Z tego wzoru z łatwością wyznaczymy  $\mu$  —  $a$ , co zatem idzie i  $t_x$ ,  $t_y$ . Jako przykład bierzemy pod uwagę przekrój prostokątny (II Rys. 75) o wysokości  $H = 2h$  i podstawie  $B = 2b$ . Równanie obwodu będzie tu  $K(x, y) = (x^2 - b^2)(y^2 - h^2) = 0$ ,  $p = 2x(y^2 - h^2)$ ,  $q = 2y(x^2 - b^2)$ . Wyznamy całkę  $\int [px + qy] dF =$

$$= \int [2x^2(y^2 - h^2) + 2y^2(x^2 - b^2)] dF = \int [4x^2y^2 - 2h^2x^2 - 2b^2y^2] dF =$$

$$= 4 \int x^2y^2 dF - 2h^2 \int x^2 dF - 2b^2 \int y^2 dF = 4 \int x^2y^2 dF - 2h^2 I_y - 2b^2 I_x.$$

Pierwszy wyraz otrzymanego wzoru  $\int x^2y^2 dF = \int_{-b}^{+b} x^2 dx \int_{-h}^{+h} y^2 dy = \frac{4}{9} b^3 h^3$ ,

zatem  $\int [px + qy] dF = \frac{4}{9} b^3 h^3 - 2h^2 \cdot \frac{1}{12} B^3 H - 2b^2 \cdot \frac{1}{12} B H^3 = \frac{4}{18} B^3 H^3$ .

Stąd bezpośrednio  $\mu = 18M_0 : B^3 H^3$ , oraz  $t_x = -9M_0 y (4x^2 - B^2) : B^3 H^3$ ,  $t_y = 9M_0 x (4y^2 - H^2) : H^3 B^3$ . Z łatwością zauważyć się daje, że skrajne wartości naprężenia, przy  $H > B$  panować będą na osi  $OX$  w skrajnych punktach przekroju, gdzie  $X = \pm \frac{1}{2} B$ ,  $y = 0$ . Składowe tego naprężenia będą:  $t_x = 0$ ,  $t_y = \pm \frac{9}{2} M_0 : B^3 H$ . Wzory tu otrzymane nie są ścisłe. W teorii sprężystości udowodnimy, że podany wyżej sposób wyznaczania naprężeń wirowych daje dobre wyniki tylko wtedy, gdy  $\partial^2 K : \partial x^2 + \partial^2 K : \partial y^2 = \text{stałe}$ . Ten warunek nie spełnia się dla przekroju prostokątnego, należy przeto wzory powyższe uważać, jako przybliżone.

**§ 7. Wzory Bach'a.** Jako uzupełnienie wyników dotychczasowych podajemy wzory Bach'a, wyznaczające współczynniki wytrzymałości na skręcanie  $W_0$  i skręcenia jednostkowe  $\Phi$ , dla przekrojów najczęściej używanych w praktyce: 1-o *Elipsa*. Półoś wielka  $a$  — mała  $b$  —  $W_0 = \frac{1}{2} \pi a b^2$ ,  $\Phi = \beta M_0 (a^2 + b^2) : \pi a^3 b^3$ ; 2-o *Pierścień eliptyczny*. Półosie wielkie  $a$  i  $a_0 < a$ , małe  $b$  i  $b_0 < b$  —  $W_0 = \pi (ab^3 - a_0 b_0^3) : 2b$ ,  $\Phi = \beta M_0 (a^2 + b^2) : \pi a^3 b^3 (1 - m^4)$ , gdzie  $m = a_0 : a = b_0 : b$ ; 3-o *Sześciokąt*. Bok sześciokąta  $b$ . —  $W_0 = b^3 : 1,09$ ,  $\Phi = 0,967 \beta M_0 : b^4$ ; 4-o *Prostokąt*. Wysokość  $h$ , podstawa  $b < h$  —  $W_0 = b^2 h : [3 + 2,6 : (h : b + 0,45)]$ ,  $\Phi = \beta M_0 (b^3 + h^3) (3,645 - 0,066 h : h) : b^3 h^3$ ; 5-o *Trójkąt prawidłowy*. Bok trójkąta  $b$ . —

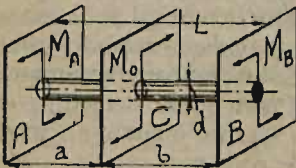


—  $W_0 = \frac{1}{20} b^3$ ,  $\Phi = 46,2 \beta M_0 : b^4$ ; 6-o *Prostokąt wydrążony*. Wysokości  $h$  i  $h_0$ , podstawy  $b$  i  $b_0$ , przyczem  $h_0 : h = b_0 : b$  oraz  $h > b$ . —  $W_0 = 2(b^3 h - b_0^2 h_0) : 9b$ ; 7-o *Dwuteownik* wysokość  $h$ , szerokość środka  $s$ , grubość pasów  $s$  podstawa  $b + s$ . —  $W_0 = \frac{2}{9} s^2 (h + 2b_0)$  —  $\Phi = (40 \div 42) \cdot \beta M_0 I_0 : F^4$ , gdzie  $I_0$  oznacza moment biegunowy przekroju a  $F$  jego pole; 8-o *Przekrój krzyżowy*. Wysokość  $h$ , szerokość  $b$ , grubość ramion  $s$ . —  $W_0 = \frac{2}{9} s^2 (h + b - s)$ ; 9-o *Ceownik*. Wysokość  $h$ , podstawa  $b$ , wysokość wnęki  $h_0$ , podstawa wnęki  $b_0$ . —  $W_0 = \frac{2}{9} s^2 (h + 2b_0)$ ; 10-o *Kątownik*. Wysokość  $h$ , podstawa  $b$ , grubość ramion  $s$ . —  $W_0 = \frac{2}{9} s^2 (h + b - s)$ .

### § 8. Przykłady i ćwiczenia.

1-o *Wał o stałym przekroju poprzecznym kołowym*,  $l$  cm. długi obciążony różnoskrętnymi momentami  $M_0$  w skrajnych przekrojach wału. Wyznaczamy odpowiednio do rodzaju obciążenia, trwałego, powtarzanego, lub wahlowego skrajną wartość dopuszczalną naprężenia  $k_0$ . Stąd  $W_0 = M_0 : k_0 = \frac{1}{16} \pi d^3$ . Z tego wzoru wyznaczmy średnicę wału. Dla prętów krótkich powyższy sposób wyznaczania średnic wystarcza w zupełności ponieważ pręty krótkie ujawniają znikome wartości skręceń  $\varphi$ . Inaczej jednak rzecz się ma dla prętów długich. Oznaczmy przez  $\Phi$  dopuszczalną wartość skręcenia jednostkowe. Ponieważ  $d\varphi = M_0 dz : GI_0$ , przeto  $\Phi = M_0 : GI_0$ , stąd  $I_0 = M_0 : G\Phi$ . W ten sposób określona wartość  $I_0$  wyznacza przekrój poprzeczny, zazwyczaj jednak różniący się wymiarami od poprzednio otrzymanego. Z tych dwóch przekrojów wybieramy większy, jako czyniący zadość obu postawionym warunkom. Pierwszy sposób liczenia pręta nazywamy liczeniem pręta na skręcanie, drugi — na kąt skręcenia. Dla przekroju kołowego  $W_0 = \frac{1}{2} \pi R^3 = \frac{1}{16} \pi d^3$ ,  $I_0 = \frac{1}{4} \pi R^4 = \frac{1}{32} \pi d^4$ . Zazwyczaj dopuszczalna wartość  $\Phi$  wynosi  $\frac{1}{4}^\circ$  na metr bieżący długości pręta.

W podobny sposób liczy się pręt o stałym przekroju poprzecznym, zamocowany u obu końców, a obciążony parą sił, skracającą pewien pośredni przekrój poprzeczny pręta. Oznaczamy moment pary skracającej przez  $M_C$ , przez  $C$  płaszczyznę tej pary (Rys. 92). Odległość tej płaszczyzny od końców zamocowanych pręta niech będzie odpowiednio  $a$  i  $b$ . Wobec zamocowania obu końców pręta, moment  $M_C$ , obrócić go nie może, bo para sił momentu  $M_C$  jest obezwładniona sprzeciwem końców pręta. To znaczy że u obu końców pręta powstają momenty  $M_A$  i  $M_B$ , równoważące moment  $M_C$ , możemy przeto napisać, że:  $M_C + M_A + M_B = 0$ . Tyle mówi statyka. Momenty  $M_A$  i  $M_B$  są więc statycznie niewyznaczalne, mogą być jednak z łatwością określone ze wzorów wytrzymałościowych. Rozdzielmy moment  $M_C$  na sumę ściśle zresztą niewyznaczonych momentów  $M_A$  i  $M_B$ . Działanie tej sumy będzie niewątpliwie takie same, jak  $M_C$  — momentu nierozdzielonego. Składnik  $M_A$  — będzie równoważył sprzeciw zamocowania  $M_A$ , a składnik  $M_B$  sprzeciw  $M_B$ . W ten sposób całkowity pręt rozpadnie się niejako na dwa pręty  $AC$  i  $CB$ , obciążone momentami skracającymi  $M_A$  i  $M_B$ . Kąt całkowitego skręcenia pręta  $AC$  będzie  $\varphi_A = \beta M_A a : W_0$ , a kąt całkowitego skręcenia pręta  $CB$  —  $\varphi_B = \beta M_B b : W_0$ . Ponieważ



Rys. 92.

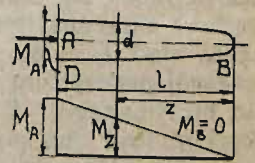
moment  $M_C$ , możemy przeto napisać, że:  $M_C + M_A + M_B = 0$ . Tyle mówi statyka. Momenty  $M_A$  i  $M_B$  są więc statycznie niewyznaczalne, mogą być jednak z łatwością określone ze wzorów wytrzymałościowych. Rozdzielmy moment  $M_C$  na sumę ściśle zresztą niewyznaczonych momentów  $M_A$  i  $M_B$ . Działanie tej sumy będzie niewątpliwie takie same, jak  $M_C$  — momentu nierozdzielonego. Składnik  $M_A$  — będzie równoważył sprzeciw zamocowania  $M_A$ , a składnik  $M_B$  sprzeciw  $M_B$ . W ten sposób całkowity pręt rozpadnie się niejako na dwa pręty  $AC$  i  $CB$ , obciążone momentami skracającymi  $M_A$  i  $M_B$ . Kąt całkowitego skręcenia pręta  $AC$  będzie  $\varphi_A = \beta M_A a : W_0$ , a kąt całkowitego skręcenia pręta  $CB$  —  $\varphi_B = \beta M_B b : W_0$ . Ponieważ



pośrodku, w przekroju płaszczyzny  $C$ , pręt nie uległ przerwaniu, zatem niewątpliwie przekrój  $C$  ujawni jednakowe skręcenia względem obu przekrojów skrajnych. Stąd  $\varphi_A = \varphi_C$ , co daje  $\beta M_A a : W_0 = \beta M_B b : W_0$  i ostatecznie  $aM_A = bM_B$ . Wobec  $M_A + M_B + M_C = 0$  mamy  $M_A = bM_C : (a+b) = bM_C : L$  oraz  $M_B = aM_C : L$ . Niech będzie, dajmy na to  $a > b$ , w tym wypadku  $M_B > M_A$ , zatem większy moment  $M_B$  winien być użyty do wyznaczenia przekroju właściwego ze wzoru  $M_B = W_0 k_0$ , stąd określimy wymaganą średnicę pręta.

2-o *Wał o stałym przekroju poprzecznym obciążony momentem równomiernie rozłożonym na całą długość pręta.* W ten sposób możemy czysto teoretycznie ująć warunki obciążenia wału turbiny wielowirnikowej, rozwijającej moment obrotowy, złożony z momentów poszczególnych wirników, osadzonych na wale obok siebie. Każdy wirnik następnego dorzucza cząstkę ogólnego momentu obrotowego, rosnącego w ten sposób od zera pod pierwszym wirnikiem, do swej wartości całkowitej po za ostatnim wirnikiem, gdzie moment obrotowy spotyka sprzeciw w postaci momentu oporowego — obciążenia pożytkowego turbiny. Przy nieskończonej wielkiej liczbie wirników możemy rozpatrywać moment, jako równomiernie rozłożony na całej długości  $l$  wału. Niech  $B$  oznacza swobodny koniec wału (Rys. 93). Moment  $M_0$  będzie jednostajnie rósł od swej pierwotnej wartości zerowej dla końca wału  $B$  aż do całkowitej wartości  $M_A = M_0$ , panującej w skrajnym przekroju pręta w  $A$ .

W jakimkolwiek przekroju pośrednim, odległym o  $z$  od  $B$  otrzymamy moment  $M_z = M_0 z : l$ , co wypływa bezpośrednio z warunków założenia. Najwyższa wartość  $M_0$  tego momentu spotyka w  $A$  moment oporowy równoważący. Wobec stałych wymiarów przekroju poprzecznego należy niewątpliwie oczekiwać najwyższego naprężenia wirowego tam, gdzie panuje najwyższa wartość momentu zmiennego, możemy przeto napisać dla przekroju *niebezpiecznego*  $A$  równanie  $M_0 = W_0 k_0$ . Stąd mamy  $W_0 = M_0 : k_0$ , a zatem i średnicę  $d$ , określającą stały przekrój wału. Tę samą średnicę otrzymaliśmy w punkcie poprzednim, jako średnicę wału obciążonego momentem niezmiennym  $M_0$ . Zatem liczenie wału na skręcanie daje tę samą średnicę przekroju poprzecznego, niezależnie od tego, czy pręt jest obciążony momentem niezmiennym, czy też momentem równomiernie rozłożonym na całą długość pręta. Wyznamy całkowity kąt skręcenia tylko co policzonego wału.



Rys. 93.

Będzie to  $\varphi = \int M_z dz : GI_0 = (M_0 : GI_0 l) \int_0^l z dz = 1/2 M_0 l : GI_0$ . Podobną

wartość lecz dwa razy większą otrzymaliśmy wyżej, zatem wał o stałym przekroju, obciążony momentem skręcającym stałym dla całej długości ujawnia całkowity kąt skręcenia dwukrotnie większy od kąta skręcenia wału obciążonego takim samym momentem skręcającym, równomiernie rozłożonym na całej długości pręta. Jest to niewątpliwie duża zaleta wału tylko co rozpatrywanego, posiada on natomiast wadę bardzo poważną: nie jest on stałej wytrzymałości, jak pręt rozpatrywany w przykładzie pierwszym, ponieważ w danym wypadku zaledwie przekrój  $A$  jest wytrzymałościowo należycie wyzyskany, pozostałe przekroje są zbyt słabe, pręt jest przeladowany tworzywem, budowa jego nie jest oszczędna. Aby tą wadę usunąć rozpatrujemy:



3-o *Wał o stałej wytrzymałości obciążony momentem skręcającym, równomiernie rozłożonym na całej długości pręta.* W danym wypadku skrajne naprężenie każdego przekroju poprzecznego winno posiadać tę samą skrajną dopuszczalną wartość  $k_0$ , mamy więc dla dowolnego przekroju poprzecznego (Rys. 93), odległego o  $z$  od końca  $B$  pręta —  $M_z = M_0 z : l = W_z k_0$ , a zatem wskaźnik wytrzymałościowy  $W_z$  ma wartość zmienną, wyznacza przeto przekrój pręta zmienny. Dla skrajnego przekroju — dna pręta  $A$ , to jest dla  $z = l$  mamy  $W_0 = M_0 : k_0$ . Tę wartość otrzymaliśmy już przedtem dla poprzednich wypadków. Ponieważ wartość  $W_0$  jest najwyższą, wyznacza przeto przekrój poprzeczny najbardziej suty równy przekrojowi poprzecznemu prętów poprzednio rozpatrywanych. Pręt o stałej wytrzymałości jest więc znacznie uboższy w tworzywo, a więc i znacznie lżejszy od pręta o stałym przekroju. Chcąc wyznaczyć kształt wału stałej wytrzymałości należy określić średnice dla wszystkich przekrojów poprzecznych, korzystając ze wzoru dla  $W_z = M_0 z : l k_0$ ; dzieląc ten wzór przez  $W_0 = M_0 : k_0$  otrzymamy  $W_z : W_0 = z : l$ , stąd zważywszy, że  $W_z = \frac{1}{2} \pi d_z^3$

oraz  $W_0 = \frac{1}{2} \pi d^3$ , będziemy mieli  $d_z = d \sqrt[3]{z : l}$ . Jest to równanie paraboli sześcienniej, określające prawo zmian średnicy wału. Tego rodzaju wały nader rzadko bywają stosowane w praktyce, wobec nadmiernych trudności wykonawczych, zwłaszcza, że dają one znaczne wartości kąta

całkowitego skręcenia, tutaj bowiem  $\varphi = \int_0^l \frac{M_z}{GI_z} dz$  gdzie  $I_z = \frac{1}{32} \pi d_z^4 = \frac{1}{32} \pi d^4 (z : l)^4 = I_0 (z : l)^4$ ; zatem  $\varphi = (M_0 l^{1/3} : GI_0) \int_0^l z^{1/3} dz = \frac{3}{2} M_0 l :$

$G l_0$ . Podobną wartość lecz trzy razy mniejszą otrzymaliśmy dla wału o stałym przekroju tak samo obciążonego. Zatem w wypadku obciążenia wirowego momentem równomiernie rozłożonym na całą długość wału, kąt całkowitego skręcenia dla wału stałej wytrzymałości jest trzykrotnie większy od kąta całkowitego skręcenia dla wału o stałym przekroju poprzecznym kołowym.

4-o *Wał pędniany żelazny zgrzewny, lub zlewny winien przenosić  $N$  koni mechanicznych przy  $n$  obrotach na minutę.* Wyznamy jego średnicę  $d$ . Jest to podstawowe zadanie, jakie stale rozwiązywać należy przy obliczaniu pędni fabrycznych. Dla wałów krótkich główny nacisk położony być winien na wytrzymałość, średnicę wału należy więc wyznaczyć ze wzoru na skręcanie  $k_0 = M_0 : W_0$  dla skrajnej dopuszczalnej wartości naprężenia  $k_0 = 120 \text{ kg/cm}^2$ , przynależnej do obciążenia III i żelaza zgrzewnego. W ten sposób z góry chcemy się zabezpieczyć przeciwko wszelkim niespodziankom, liczymy przeto na tworzywo najslabsze, na żelazo zgrzewne, a nadto z góry uwzględniamy wszelkie szarpania i uderzenia, zachodzące w pędniach, przy obciążaniu maszyn pędzonych. Stąd  $M_0 = 120 \times \frac{1}{16} \pi d^3$ . W zadaniu czwartem (III § 8), wyprowadziliśmy wzór dla momentu  $M_0 = 71620 N : n \text{ (kg./cm.)}$ , zatem  $71620 N : n = 120/16 \pi d^3$  i ostatecznie  $d = 14,5 \sqrt[3]{N : n} \text{ cm}$ . Według tego wzoru należy liczyć wałki krótkie. Długie należy liczyć na kąt skręcenia jednostkowego, który nie powinien przekraczać ćwierci stopnia na metr bieżący długości wału. Ćwierć stopnia



w naturalnej mierze kąta wyniesie  $\frac{1}{4}\pi : 180$ . W teorii skręcania wyprowadziliśmy dla kąta skręcenia  $\varphi = M_0 l : GI_0$ , gdzie  $l$  — należy brać w cm.; gdy  $l$  bierzemy w metrach będziemy mieli  $\varphi = 100 M_0 l : GI_0$ . Stąd bezpośrednio  $\frac{1}{4}\pi : 180 = 100 M_0 l : GI_0$ . Dla żelaza zgrzewnego  $G = 770000$ , dla zlewego  $G = 830000$ , średnio  $800000$  kg./cm.<sup>2</sup>, zatem po podstawieniu tej

wartości oraz wartości dla  $M_0 = 71620$   $N:n$  otrzymamy  $d = 12,024 \sqrt[4]{N:n} \approx$

$\approx 12 \sqrt[4]{N:n}$ . Według tego wzoru należy obliczać wałki pędziane długie. Oba powyżej wyznaczone wzory dają tę samą wartość średnicy  $d$ , gdy

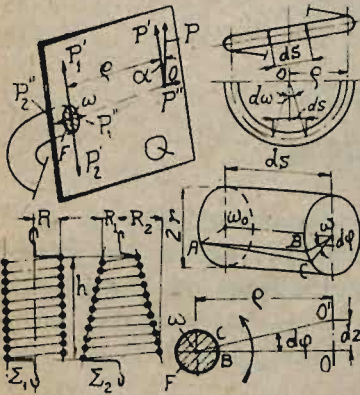
$14,5 \sqrt[3]{N:n} = 12 \sqrt[4]{N:n}$ . Logarytmując mamy  $lg\ 14,5 + \frac{1}{3} lg(N:n) = lg\ 12 + \frac{1}{4} lg(N:n)$ , stąd  $lg(N:n) = 12(lg\ 12 - lg\ 14,5)$ . Z tego wzoru otrzymamy  $N:n = 0,10322$ . Gdy więc  $N:n > 0,1$  wzór drugi daje mniejsze wymiary dla  $d$ , gdy  $N:n < 0,1$  mniejsze  $d$  otrzymuje się ze wzoru pierwszego. W pierwszym wypadku przeto należy stosować wzór pierwszy, w drugim drugi — inaczej bowiem wartość  $d$  może się okazać zbyt słabą.

5-o *Sprężyny śrubowe*. Drut stalowy zwinięty śrubowo cylindrycznie lub stożkowo, stanowi sprężynę śrubową, złożoną z pewnej liczby zwojów. Skrajne zwoje sprężyn zakończone są zazwyczaj zakrzywieniem drutu skierowanym ku osi sprężyny. Drut następnie wygina się ku osi i kończy haczykami, jak to zresztą najlepiej uwypukła (Rys. 94). Na tego rodzaju sprężynę winno działać obciążenie rozciągające  $P$ . Skoro sprężyna ma ulegać obciążeniu osiowemu ściskającemu, wtedy należy spłaszczyć jej skrajne zwoje, aby otrzymać płaską powierzchnię dotyku u obu końców sprężyny. W obu wypadkach obciążenie działa osiowo. Jeżeli gdziekolwiek przetniemy drut sprężyny płaszczyzną  $Q$  poprzecznego przekroju, to oś podłużna sprężyny da na tej płaszczyźnie ślad przejścia w postaci punktu  $O$ , gdzie przyłożona jest siła  $P$  obciążenia zewnętrznego rozciągająca, lub ściskająca. Oznaczmy przez  $\omega$  promień sprężyny, czyli odległość punktu  $O$  od środka  $\omega$  poprzecznego przekroju drutu i rozłóżmy siły  $P$  obciążenia zewnętrznego na składowe  $P'$  — leżącą w płaszczyźnie  $Q$  i  $P''$  — prostopadłą do tej płaszczyzny. Niech będzie nadto  $\alpha$  — kąt nachylenia śrubowego zwojów. Ten sam kąt utworzy z osią podłużną sprężyny płaszczyzna  $Q$ , co zresztą jest wprost oczywiste. Stąd mamy  $P' = P \cos \alpha$ , oraz  $P'' = P \sin \alpha$ . Przyłożmy do środka  $\omega$  poprzecznego przekroju drutu sprężyny po dwie wzajemnie znoszące się, bo skierowane odwrotnie siły  $P'_1$  i  $P'_2$ , oraz  $P''_1$  i  $P''_2$ . Te siły łącznie z  $P'$  i  $P''$  stanowią całkowite obciążenie zewnętrzne rozpatrywanego przekroju poprzecznego drutu. Składa się ono: 1-o z pary sił  $P'$  i  $P'_2$ , dającej moment skręcający  $M_0 = P'\zeta$ , 2-o z pary sił  $P''$  i  $P''_2$ , dającej moment  $P''\zeta$ , 3-o z siły osiowej  $P_1''$ , wreszcie 4-o z siły osiowej  $P'_1$ , przyłożonej do środka  $\omega$  przekroju. Mamy tu więc do czynienia z nader złożonym obciążeniem, jednak dla zwykłych sprężyn używanych w praktyce, możemy pewną część tego obciążenia pozostawić bez uwagi, a to ze względu na stosunkowo małą wartość kąta  $\alpha$ , dającą  $\cos \alpha \approx 1$  oraz  $\sin \alpha \approx 0$ . Stąd mamy  $P' \approx P$  i  $P'' \approx 0$ , pozostaje więc tylko moment skręcający  $M_0 = P\zeta$  i siła tnąca  $P$ . Ponad to, wobec momentu skręcającego tą siłą tnącą możemy śmiało pominąć, ponieważ daje ona naprężenie tnące kilkakrotnie mniejsze od wirowego. Prosty rachunkiem można to z łatwością udowodnić. W ten sposób nader złożony



wypadek obciążenia daje się sprowadzić do zwykłego skręcania. Stosujemy wzory wyżej ustalone pisząc przede wszystkim  $M_0 = P\zeta = W_0 k_0$ . Nadto biorąc pod uwagę długostkę  $ds = \zeta d\omega$  drutu sprężyny, odpowiadającą wartości  $d\omega$  kąta osiowego rozpatrujemy krótki wycinek sprężyny  $ds$  skręcony wirowo. Jego kąt skręcenia  $d\varphi = \beta M_0 ds : I_0 = \beta P \zeta^2 d\omega : I_0$  uze-wnętrznii się odchyleniem górnej części sprężyny, rozpościerającej się ku górze ponad przekrojem  $\omega$ , rozpatrywanym — względem pozostałej dolnej części, poczynającej się w sąsiednim przekroju  $\omega_0$ . W istocie, przed od-

kształceniem promień wodzący  $\omega BO$  przekroju poprzecznego wyznaczał w przedłużeniu punkt  $O$  na osi podłużnej sprężyny; po odkształceniu wycinka  $ds$  promień wodzący obróci się o kąt  $d\varphi$ , znacząc już tym razem punkt  $O'$ , odległy od poprzedniego o  $dz$ , mierzone wzdłuż osi. Gdyby więc w całej sprężynie odkształcił się jedynie tylko ten wycinek, uległaby ona wyżej odpisanemu odchyleniu, a pierwotna wysokość nieodkształconej sprężyny  $h$  otrzymałaby przyrost  $dz$  dodatni w wypadku obciążenia rozciągającego, — ujemny w wypadku ścisniającego. Wysokość  $h + dz$  należałoby przytem mierzyć wzdłuż osi sprężyny lekko zgiętej w miejscu, gdzie nastąpiło skręcenie. A jednak sprężyna pozostaje prostą.



Rys. 94.

Pochodzi to stąd, że odkształcenia wycinka średnicowo przeciwległego wyżej rozpatrywanemu, ponownie odchyli sprężynę w odwrotnym kierunku i przytem, wobec niezmienności warunków obciążenia dla wszystkich punktów zwojów — ściśle o ten sam kąt  $d\varphi$ , powodując nowy przyrost  $dz$ , mierzony wzdłuż osi sprężyny, tym razem już prostej. W ten sposób, przechodząc kolejno przez wszystkie  $n$  zwojów, wyznaczymy całkowity przy-

rost  $f$  wysokości  $h$ , pisząc  $f = \int \zeta d\varphi = (\beta P : I_0) \int \zeta^3 d\omega$ . Przyrost  $f$  zwiemy

*strzałką* sprężyny odkształconej. Zazwyczaj zwiija się drut o stałym przekroju, dlatego też w tylko co ustalonym wzorze  $I_0$  nie wchodzi pod znak całki. Dla *sprężyn walcowych*  $n$  zwojowych  $\zeta = R$  zatem  $f = 2 \pi n \beta P R^3 : I_0$ . Dla *sprężyn stożkowych*  $n$  zwojonych, o skrajnych promieniach  $R_1$  i  $R_2 > R_1$  będziemy mieli niewątpliwie  $\zeta = R_2 - (R_2 - R_1) \omega : 2 \pi n$ . Stąd różniczkując:

$d\zeta = -(R_2 - R_1) d\omega : 2 \pi n$ , zatem  $\int \zeta^3 d\omega = -[2 \pi n : (R_2 - R_1)] \int \zeta^3 d\zeta$ . Granice

tej całki wyznaczymy z łatwością, zważywszy, że przy  $\omega = 0$  promień  $\zeta = R_2$ , co stanowić będzie dolną granicę. Górna jest  $\zeta = R_1$ , a sama całka

$\int \zeta^3 d\omega = 2 \pi n (R_2^4 - R_1^4) : 4 (R_2 - R_1) = 1/2 \pi n (R_2^2 + R_1^2) (R_2 + R_1)$  i osłatecznie

$f = 1/2 \pi n \beta P (R_2^2 + R_1^2) (R_2 + R_1) : I_0$ . W danym wypadku największą wartość momentu skręcającego będzie wartość  $M_m = PR_2$ , w pierwszym ta wartość będzie stała  $M_m = PR$ , możemy przeto napisać, że  $W_0 = M_m : k_0$ .

W obu wypadkach strzałka jest proporcjonalna do siły odkształcającej, co