

539.4
WYDAWNICTWA NAUKOWE
„KOMISJI WYDAWNICZEJ”
TOWARZYSTWA BRATNIEJ POMOCY STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

LEON KARASIŃSKI

WYTRZYMAŁOŚĆ TWORZYW

WYDANIE DRUGIE.

Z ZAPOMOGI MINISTERSTWA
WYZNAŃ RELIGIJNYCH
I OŚWIECENIA PUBLICZNEGO.



WARSZAWA — 1921.



MP 2762

OD WYDAWCÓW.

Wypuszczając II-e wydanie w całości dzieła prof. Leona Karasińskiego pod tytułem: „Wytrzymałość Tworzyw“ (część I ukazała się drukiem w r. 1919 i została całkowicie wyczerpana), Zarząd Tow. Br. Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej poczuwa się do obowiązku złożenia na tem miejscu serdecznego podziękowania Min. Wyznań i Ośw. Publicznego za przychylne zajęcie stanowiska wobec zamierzonego przez Komisję Wydawniczą Tow. Br. Pomocy S. P. W. wydawnictwa dzieł technicznych i subsydjowanie pierwszego ukazującego się obecnie dzieła,

Jego Magnificencji Rektorowi Politechniki Warszawskiej, Prof. Ignacemu Radziszewskiemu za gorące poparcie starań naszych, podjętych u odpowiednich Władz celem subsydjowania i ułatwienia wydawnictwa.

Autorowi Wytrzymałości Tworzyw, prof. Leonowi Karasińskiemu za zrzeczenie się honorarjum autorskiego na rzecz Komisji Wydawniczej Tow. Br. Pomocy S. P. W. oraz objęcie kierownictwa przy pracy wydawniczej.

Zarząd Tow. Br. Pom. S. P. W.

SPÓŁKA AKC. ZAKŁADÓW GRAFICZNYCH „DRUKARNIA POLSKA” SZPITALNA Nr. 12.

KLISZE WYKONANO W ZAKŁADZIE FOTOHEMIGRAFICZNYM
ROMANA SAWICKIEGO, WSPÓLNA Nr. 45.

54-3-66K (40,-)

BZOFPK/035-20

Od Wydawców.

Ze względów natury technicznej, numeracja stron II części (księgi) „Wytrzymałość Tworzyw” zaczyna się od str. 1; numeracja stron księgi III — od strony 6.

KSIĘGA PIERWSZA.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

USTALENIE POJĘĆ ZASADNICZYCH.

§ 1. **Nauka o wytrzymałości tworzyw.** Wszelki twór budowlany lub techniczny stanowi zwartą całość, złożoną z oddzielnych ogniw, trwale ze sobą powiązanych. Ten układ ogniw pod jarzmem sił zewnętrznych pracuje celowo, powinien przeto być trwały i pewny w działaniu. Jego ogniwa muszą być trwałe i niezmiennie, bo każde wyraźniejsze odkształcenie wewnętrzne psuje wzajemne ustosunkowanie ogniw, dając zazwyczaj groźne zaburzenia, kończące się zniszczeniem całego układu. Skrzywienie koła wykołaja parowóz. Słowem — nadmierne odkształcenia ogniw burzą stateczność układu. Stąd konieczność *przewidywania* odkształceń i uzależniania odporności ogniwa od wymiarów wytycznych i kształtu. Wiotka karta papieru, zwinięta w rurkę, ujawnia sztywność dość znaczną. Ten prosty przykład wystarcza, aby podkreślić konieczność istnienia nauki o *wytrzymałości tworzyw*. Należy ona do gromady nauk mechaniki stosowanej, obejmujących rozległy obszar wiedzy doświadczałnej a zbudowanych na wspólnej podstawie — mechanice teoretycznej.

Wśród nich *wytrzymałość tworzyw jest nauką odkształceń ciała obciążonego*.

§ 2. **Odkształcenia ciał stałych.** Ustalone w mechanice teoretycznej czysto oderwane pojęcie ciała sztywnego, niezmiennego, traci swą moc obowiązującą wobec powyższego określenia, gdzie bierzemy pod uwagę ciała *odkształcające się*, a więc istotne ciała stałe, określając je w sposób następujący: *ciało stałe stanowi układ cząsteczkowy wyraźnego kształtu, sprzeciwiający się wszelkim zmianom, wywoływanym w układzie jego cząsteczek*.

Aby ten opór pokonać, należy użyć sił zewnętrznych. W tym jedynie wypadku kształt pierwotny ciała stałego ulegnie zmianie, ciało odkształci się. Siły te będziemy nazywali *odkształcającymi*. Zatem ciało obciążone ulega odkształceniu, podczas gdy ciało wolne od sił zewnętrz-

nych — żadnych odkształceń nie ujawnia, przyczem, zgodnie z tem, cośmy dotychczas ustalili, —

Odształceniem nazywamy wszelką zmianę w układzie cząsteczek ciała obciążonego, to jest znajdującego się pod jarzmem sił zewnętrznych.

Badanie warunków powstawania odkształceń na tle działania sił zewnętrznych rozszerza nasze pojęcia o budowie wewnętrznej ciała stałego, jako układu cząsteczkowego. Ponieważ liczba cząsteczek tego układu nie może oczywiście ulec zmianie przy odkształceniu, przeto zmuszeni jesteśmy przypuścić istnienie przestrzeni międzycząsteczkowych, a, co za tem idzie, i *odległości międzycząsteczkowych, zmieniających się pod działaniem energetycznych czynników zewnętrznych, jako to obciążenia układem sił, lub nagrzania.* Stąd wnioskujemy, że *wszelkie odkształcenie ciała stałego powstaje na tle szeregu zmian poszczególnych odległości międzycząsteczkowych, wywołanych działaniem czynników energetycznych.*

Ciało stałe nie jest więc zwykłym zlepkiem cząsteczek: jest ono raczej mgławicowym rojem cząstek odległych od siebie, a stanowiących jeden trwały układ. W ciele nieobciążonem, a więc nie ujawniającem żadnych odkształceń, odległości międzycząsteczkowe są niezienne. Dowodzi to istnienia trwałego stanu równowagi wewnętrznej — *szttywnego powiązania cząsteczek układu siłami wiążącemi.* Te siły wzajemnie się znoszą w działaniu, wytwarzając w ten sposób zupełny bezruch wewnętrzny ciała swobodnego, nieobciążonego. Pod wpływem energetycznych czynników zewnętrznych równowaga zostaje zachwiana: czynniki wprowadzają *nowe, dodatkowe siły międzycząsteczkowe — naprężenia odkształcające, zupełnie niezależne od sił wiążących.* Na tle działania tych sił dodatkowych poszczególne cząsteczki otrzymują odnośne przyspieszenia: *powstają ruchy wewnętrzne i zmiany odległości międzycząsteczkowych ciała obciążonego.*

Ponieważ jednak wszelka zmiana we wzajemnym ustosunkowaniu cząsteczek ciała stałego wywołuje w niem, jak wiemy, siły oporowe wewnętrzne, przeto na tle owych ruchów międzycząsteczkowych powstają w ciałach stałych siły międzycząsteczkowe, czyli *naprężenia oporowe,* które się sprzeciwiają zmianom dokonywanym i chcą je sprowadzić do zera. *Naprężenia oporowe powstają wyłącznie na tle zmian odległości międzycząsteczkowych i rosną wraz z niemi,* stanowiąc naturalny hamulec działania sił odkształcających, bo zmiany wewnętrznego układu cząsteczek ciała trwają dopóty, póki rosnące naprężenia oporowe nie zniweczą naprężeń odkształcających. Od tej chwili równowaga wewnętrzna ustala się ponownie: *ciało wchodzi w nowy stan równowagi trwałej* na tle zahamowania ruchów cząsteczkowych; od tej chwili naprężenia odkształcające i oporowe stanowią zrównoważony układ *sił wewnętrznych,* znoszących się wzajemnie, bo równych, lecz skierowanych przeciwnie. Możemy przeto utożsamić oba rodzaje naprężeń, o ile bierzemy pod uwagę ciało od-

kształcone; natomiast w ciałach odkształcających się naprężenia oporowe są oczywiście mniejsze.

Otrzymany stan równowagi ciała obciążonego zachodzi przy zmienionych odległościach międzycząsteczkowych i trwa dopóty, póki ciało ulega obciążeniu odkształcającemu. Jest to więc *trwały stan równowagi ciała odkształconego, stan równowagi naprężonej*.

Gdy obciążenie powiększymy w tym samym kierunku — powtórzy się przebieg tylko co opisany: otrzymamy nowe odkształcenia dodatkowe na tle trwałego stanu równowagi, różnego jednak od poprzedniego. Dalsze powiększanie obciążenia w tym samym kierunku da szereg nowych odkształceń dodatkowych, każdorazowo powstających na tle trwałego stanu równowagi ciała obciążonego; powtarzać się to będzie jednak tylko do pewnej wartości granicznej obciążenia, bo dalsze, nawet najdrobniejsze powiększenie w tym samym kierunku natężenia sił odkształcających wywoła już nadmierne ruchy cząsteczek, wykluczające wszelką możliwość równowagi wewnętrznej tworzywa: odległości międzycząsteczkowe wzrosną poza wpływ sił wewnętrznych — układ już nie zdoła rozwinąć naprężeń oporowych — przyspieszenia cząstek nie będą zahamowane — nastąpi rozdział cząstek, czyli *pęknięcie ciała*.

Nie możemy więc dowolnie obciążać ciała stałego: *jednokierunkowe powiększanie sił zewnętrznych musi w końcu zburzyć układ obciążony*. Wytrzymałość tworzyw winna wyznaczyć z góry to obciążenie *niebezpieczne*, wywołujące w ogólnym wypadku niszczący układ odkształceń tworzywa. Przy obecnym stanie nauki określenie obciążeń burzących nie nastęrcza żadnych trudności, to też wypadki pęknięcia ogniw stają się coraz radsze, zwłaszcza, że obciążenia praktycznie dopuszczalne, są zazwyczaj dosyć niskie, dają więc odkształcenia nader nieznaczne.

§ 3. Odkształcenia sprężyste i trwałe. Weźmy pod uwagę ciało stałe, pozostające w stanie trwałej równowagi pod jarzmem układu sił zewnętrznych, odkształcających. W pewnej chwili zagnęła usuńmy ciało rozpatrywane z pod wpływu sił zewnętrznych, które w niem wywołały układ naprężeń odkształcających, oraz równoważący układ naprężeń oporowych. Ciało, pozostawione samemu sobie, wejdzie w nowy stan równowagi, przyczem wogóle mogą zajść trzy wypadki:

1. Może się zdarzyć, że odkształcenie zginie wraz z obciążeniem odkształcającem. To znaczy, że naprężenia oporowe, nierównoważone działaniem naprężeń odkształcających, które znikają wraz z obciążeniem zewnętrznem w danym wypadku, przywrócą pierwotne odległości międzycząsteczkowe, jakie istniały w ciele nieobciążonem, i po dokonaniu tej pracy, zginą wraz z odkształceniem, które je wywołało. Mamy tu więc do czynienia ze zjawiskiem *odwracalnem*: znika wszelki ślad działania sił

odkształcających — ciało powraca do pierwotnego stanu równowagi: odkształcenie jest *sprężyste*. Rurka kauczukowa rozciągnięta, powraca do swej pierwotnej postaci.

Nazywamy sprężystem odkształcenie, znikające wraz z obciążeniem, które je wywołało.

2. Z kolei może się również okazać, że odkształcenie pozostanie niezmienione po wyzwoleniu ciała z pod jarzma sił odkształcających. To znaczy, że naprężenia pozostaną w napięciu, jako dodatkowe siły międzycząsteczkowe *wiążące* i nie sprowadzą do zera odkształceń, które je wywołały. Tutaj więc układ sił wiążących wewnętrznych zasadniczo się zmieni po odciążeniu: kosztem pracy sił odkształcających *wytworzy się jakoby inne ciało stałe*, różne od poprzedniego. Ciało to do pierwotnego stanu równowagi już nie powróci, bo odkształcenie stało się *trwałem*. Mamy tu więc do czynienia ze zjawiskiem *nieodwracalnym*. Gлина wilgotna zmienia swą postać pod uciskiem sił zewnętrznych i nie powraca do kształtu pierwotnego.

Nazywamy trwałem odkształcenie, pozostające w ciele wyzwolonym z pod jarzma sił odkształcających.

3. Może się wreszcie zdarzyć, że odkształcenie częściowo tylko zginie wraz z obciążeniem odkształcającym. Mamy wtedy do czynienia ze zjawiskiem *częściowo tylko odwracalnym*, a tego rodzaju odkształcenia nazywamy *mieszanymi*, ponieważ możemy je zawsze rozpatrywać, jako złożone z odkształceń sprężystych i trwałych.

Słowem, jedynie w pierwszym wypadku działanie obciążenia przemiąja bez śladu: w pozostałych powrót do pierwotnego stanu jest niemożliwy: ciało przybiera nieco odmienną postać po jednorazowym obciążeniu i odciążeniu, nie może być przeto użyte jako ogniwo. Wyznaczanie granicy odkształceń sprężystych stanowi jedno z ważniejszych zadań Wytrzymałości Tworzyw. Do tego celu dążymy, zbierając dane doświadczalne, dotyczące warunków powstawania odkształceń sprężystych na tle naprężeń, które je wywołały. Odkształcenia możemy mierzyć wprost, a naprężenia wyznaczać, jako pewien rodzaj sił na mocy praw mechaniki. To też niekiedy nazywają *wytrzymałość tworzyw — mechaniką sił wewnętrznych*.

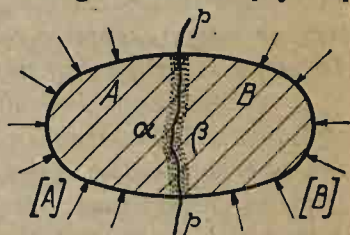
§ 4. Wyznaczanie naprężeń ciała obciążonego. Wyznaczanie naprężeń dokonywa się na mocy podstawowej zasady Wytrzymałości Tworzyw. Głosi ona, że: *wszelki przekrój myślowo poprowadzony w ciele odkształconem jest wykonalny istotnie, a poszczególne części rozciątego w ten sposób ciała odkształconego, stanowią również ciała stałe, podległe ogólnym prawom mechaniki.*

Zasada ta jest oczywista wtedy jedynie, gdy wyodrębniona część

daje się istotnie wyciąć z macierzystego ciała stałego, co niewątpliwie nie zawsze można skutecznie wobec niedokładności naszych środków technicznych. Tem niemniej prawo powyższe należy *à priori* uznać, jako słuszne bezwzględnie we wszystkich wypadkach, a więc nawet i wtedy, gdy wyodrębniona cząstka ciała stałego jest znikomo mała.

Aby wyznaczyć naprężenia na mocy tej zasady, bierzemy pod uwagę jakiegokolwiek ciało stałe, pozostające w trwałym stanie równowagi odkształconej pod jarzmem układu [E] sił zewnętrznych i prowadzimy myślowo powierzchnię pp , zupełnie zresztą dowolnego kształtu [Rys. 1], dzieląc nią ciało rozpatrywane na części A i B.

Oznaczmy przez [A] układ sił zewnętrznych, działających na część A, przez [B] układ sił, odkształcających drugą część B. W ten sposób dzielimy całkowity układ [E] na dwa składowe układy, co wyrażamy obrazowo pisząc $[A] + [B] = [E]$. Nadto, cząsteczki ciała stałego, sąsiadujące ze sobą wzdłuż powierzchni pp , zostały również podzielone na dwie gromady α i β cząstek, obustronnie rozsianych wzdłuż tej powierzchni.



Rys. 1.

Przed odkształceniem były one inaczej rozłożone. Łączyły je siły wiążące, skojarzone parami. Nie było ruchów cząsteczkowych, bo siły wiążące wzajemnie się znosiły, tworząc zrównoważony układ sił wiążących [W] ciała nieobciążonego. Po obciążeniu pojawiły się dodatkowe naprężenia odkształcające. Wówczas to wyprowadzone z równowagi więzów cząsteczki utworzyły sąsiadujące ze sobą gromady α i β . Nastąpił nowy stan równowagi, przyczem do istniejącego już dawniej układu [W] sił wiążących dołączył się nowy również zrównoważony układ naprężeń obu gromad, powstałych na tle działania sił zewnętrznych, odkształcających. Oba te układy stanowią zespół sił międzycząsteczkowych przekroju, przynależnych do gromad α i β .

Oznaczmy przez $[\alpha]$ układ naprężeń, przynależnych do cząstek α , a działających na cząsteczki β , oraz przez $[\beta]$ układ naprężeń, siedliskujących w gromadzie β , a działających na cząsteczki α . Wobec istnienia równowagi odkształconej, oba powyższe układy stanowić muszą łącznie zrównoważony układ naprężeń przekroju, zatem siły układów $[\alpha]$ i $[\beta]$ wzajemnie się znoszą, co wyrażamy obrazowo pisząc $[\alpha] + [\beta] = 0$, lub jeszcze inaczej $[\alpha] = -[\beta]$.

Zwróćmy uwagę, że siły układu $[\alpha]$ będą niejako siłami zewnętrznymi dla cząstek gromady β , ponieważ wychodzą z zewnątrz, z gromady α ; tak samo również siły układu $[\beta]$ będą miały wszelkie cechy sił zewnętrznych w stosunku do cząstek gromady α , jako pochodzące z zewnątrz,

z gromady β . W ten sposób część A ulega jarzmu układów [A] i $[\beta]$, a druga część B jarzmu układów [B] i $[\alpha]$. Nadto na cząstki obu gromad, sąsiadujące poprzez powierzchnie dotyku, działają siły wiążące układu [W], zupełnie zresztą niezależne od tylko co wymienionych czterech układów sił.

Części A i B pozostają w równowadze, bo i całe ciało znajduje się w stanie trwałej równowagi. Jednakowoż równowaga obu części natychmiast będzie zachwiana, gdy powierzchnia pp stanie się powierzchnią istotnego przekroju a więc zarazem i powierzchnią rozdziału części A i B. Aby się o tem przekonać, rozetniemy ciało wzdłuż pp . W tym celu należy *zniszczyć całkowity zespół sił międzycząsteczkowych obu gromad α i β* . To samo zresztą czyni nóż, krając.

W myśl podstawowej zasady obie rozcięte części winny podlegać ogólnym prawom mechaniki. Obie są przytem odkształcone, a więc niezmiennie w układzie cząsteczkowym, zachowują się przeto, jako ciała sztywne, niezmiennie. Jedyne obciążenie części A stanowi obecnie już tylko układ sił zewnętrznych [A], jedyne obciążenie części B układ [B]. W ogólnym wypadku układy te pojedynczo wzięte nie są zrównoważone, a zatem i części rozcięte nie mogą być w równowadze. Po rozcięciu ciało *rozpadnie się* w obie strony.

Chcąc temu przeszkodzić, trzeba zrównoważyć obciążenia rozciętych części A i B. Najprościej byłoby przywrócić całkowicie stan poprzedzający rozcięcie. Możnaaby mianowicie *skleić* rozcięte połowy, tworząc sztuczną spoiłość powierzchni dotyku. W tym celu należy wskrzesić działanie układów [W] $[\alpha]$ i $[\beta]$, a zapanuje poprzedni stan równowagi ciała odkształconego.

A zatem tylko co wymienione układy zrównoważyć muszą działanie układów [A] i [B] na części A i B. Ponieważ jednak układ [W] od pozostałych nie zależy zupełnie, przeto układów [A] i [B] zrównoważyć nie może. Wystarczy więc, gdy wskrzesimy jeno działanie układów $[\alpha]$ i $[\beta]$. Inaczej mówiąc, część rozcięta A pozostanie w równowadze pod jarzmem układów [A] i $[\beta]$, stanowiących jej obciążenie zewnętrzne po rozcięciu, a część B zachowa swą równowagę, skoro ją obciążymy układami [B] i $[\alpha]$, jako jej przynależnym obciążeniem zewnętrznym. Obrazowo możemy wypisać warunek równowagi części A w postaci $[A] + [\beta] = 0$. Podobnież dla części B będzie $[B] + [\alpha] = 0$. Stąd bezpośrednio $[\beta] = -[A]$ oraz $[\alpha] = -[B]$.

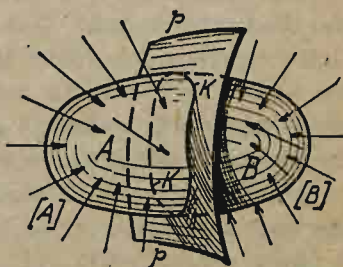
Układ naprężeń, przynależnych do cząstek jednostronnie rozsianych wzdłuż powierzchni, dowolnie wewnątrz ciała odkształconego poprowadzonej, równoważy obciążenie zewnętrzne tej części ciała odkształconego, która sąsiaduje drugostronnie poprzez ową powierzchnię z gromadą cząstek rozpatrywanych.

Wyżej zaznaczyliśmy, że $[a] = -[\beta]$, zatem być musi również $[B] = [A]$, skąd bezpośrednio $[A] + [B] = 0$. Ponieważ jednak z założenia $[A] + [B] = [E]$, przeto $[E] = 0$.

Obciążenie zewnętrzne ciała odkształconego stanowi zrównoważony układ sił.

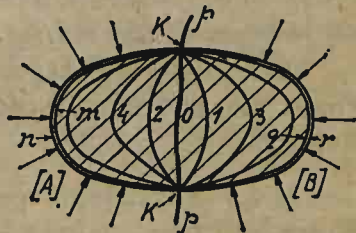
Inaczej mówiąc, siły układu odkształcającego winny być w równowadze po odkształceniu. Zatem wyznaczanie naprężeń wkracza w dziedzinę statyki. Przy rozrywaniu sznurka siły ciągnące obu rąk wzajemnie się równoważą. Ten sam sznurek, pociągany za jeden koniec, będzie się jedno włókno za ręką nieodkształcony. Stąd widzimy, że obciążenia nierównoważone nie dają odkształceń, czyli ruchów wewnętrznych, lecz przyspieszenie masy ciała czyli ruch zewnętrzny. Wypadki obciążeń nierównoważonych należą więc raczej do mechaniki ciał sztywnych, a nie do Wyttrzymałości Tworzyw.

Nie braliśmy dotąd jeszcze pod uwagę kształtu powierzchni przekroju. Ponieważ, jak to już wiemy z założenia, przekrój pp ciała odkształconego (Rys. 2) jest zupełnie dowolny, przeto możemy go mniej lub więcej wypuklać we wnętrzu ciała odkształconego w tym, lub w owym kierunku, pozostawiając jednak bez zmiany pierwotną przestrzenną krzywą K , leżącą w przekroju p , a zaznaczającą się jako ślad tego przekroju na powierzchni ciała stałego. Otrzymamy w ten sposób dowolną ilość przekrojów, oznaczonych cyframi parzystymi po lewej, a nieparzystymi po prawej stronie pierwotnego zasadniczego przekroju, oznaczonego zerem na (Rys. 3).



Rys. 2.

Wzdłuż każdego z tylko co wymienionych przekrojów możemy wyznaczyć gromady cząsteczek α i β , skupionych odpowiednio po obu stronach przekroju. Do lewych gromad cząsteczkowych α przynależą odnośne układy naprężeń $[a]$, działających na prawe gromady cząsteczek β ; z kolei w tych prawych gromadach cząsteczek siedliskują układy naprężeń $[\beta]$, działające na lewe gromady cząsteczek poprzez odnośny przekrój. Te prawe i lewe układy naprężeń każdego przekroju wzajemnie się znoszą, jako złożone z naprężeń odpowiednio równych, a skierowanych przeciwnie. Obrazowo to można wyrazić szeregiem równań $[a]_i = -[\beta]_i$, gdzie $i = 1, 2, 3, \dots$. Równania te warunkują równowagę przekrojów, wypeł-



Rys. 3.

niających wewnątrz ciała odkształconego, a równowaga przekrojów stanowi o równowadze wewnętrznej ciała odkształconego. A zatem we wszystkich punktach wewnątrz ciała odkształconego panują naprężenia, pozostające w równowadze napiętej na tle działania sił zewnętrznych, odkształcających.

Podobne warunki zachodzą również i na powierzchni. Skrajne przekroje m i q możemy niewątpliwie poprowadzić w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni bocznych n i r , stanowiących wspólnie powłokę zewnętrzną ciała odkształconego. Stąd wniosek, że i powierzchnie n i r muszą być również w równowadze, inaczej mówiąc, że cząsteczki ciała, jednostronnie rozsiane wzdłuż tych powierzchni, pozostają w równowadze trwałej, mimo działania sił zewnętrznych na powłokę zewnętrzną ciała odkształconego. Jest to możliwe wówczas jedynie, gdy wśród cząsteczek powierzchni n i r powstaną odpowiednie układy $[n]$ i $[r]$ naprężeń, równoważących działanie sił odkształcających. Słowem, powierzchnie n i r są poniekąd przekrojami granicznymi ciała odkształconego — przekrojami o jednostronnem li tylko skupieniu cząsteczek, podlegających działaniu sił zewnętrznych. Naprężenia, przynależne do gromady tych cząsteczek zewnętrznych, równoważone są działaniem sił zewnętrznych. Możemy więc i tu obrazowo napisać $[n] = - [A]$ oraz $[r] = - [B]$. A zatem *siły zewnętrzne, odkształcające, wywołują równoważny układ naprężeń, przynależnych do cząsteczek zewnętrznych ciała odkształconego.*

Wobec istnienia trwałej równowagi dochodzimy do przekonania, że naprężenia mogą wychodzić poza powłokę li tylko w tym wypadku, gdy powłoka znajduje się pod jarzmem sił zewnętrznych, naprężenia powłokowe muszą bowiem niweczyć działanie sił odkształcających; nie mogą więc powstawać tam, gdzie na powłoce niema obciążenia. W takich miejscach mogą jawić się tylko naprężenia wewnętrzne, nie wychodzące poza powłokę zewnętrzną, a więc jedynie styczne do powłoki ciała odkształconego.

Na powłoce ciała odkształconego, wolnej od jarzma sił zewnętrznych niema naprężeń zewnętrznych; jedynie naprężenia styczne do powłoki mogą panować w tem miejscu.

Ten szereg wniosków pozwala wyznaczać całe układy naprężeń przekroju. Chcąc z kolei wyznaczyć poszczególne naprężenia układu, rozpatrujemy:

§ 5. Naprężenia przekrojów płaskich ciała odkształconego.

Wobec znikomych odległości pomiędzy cząsteczkami ciała stałego, obszar działania naprężeń wydaje się być nader ograniczonym, możemy więc śmiało założyć, iż działanie naprężeń nie sięga zbyt głęboko, rozszerzając się jedynie na cząsteczki bezpośrednio ze sobą sąsiadujące poprzez powierzchnię przekroju. Nadto zakładamy, że cząsteczki są *jednostajnie*

rozłożone wzdłuż powierzchni przekroju. To założenie odpowiada istotnej budowie wewnętrznej ciała jednolitego, ponieważ ciało tego rodzaju stanowi układ cząsteczek jednostajnie skupionych w każdym punkcie tego układu. Dla ciała niejednolitego będzie to zaledwie przybliżony obraz warunków istotnych, ponieważ jednak w budownictwie technicznym stosujemy wyłącznie prawie ciała jednolite [żelazo zlewne, stal] przeto przypuszczenie powyższe jest zupełnie uprawnione w przeważnej większości wypadków, a wystarczająco zbliżone do rzeczywistości dla reszty.

Jeżeli nadto, zamiast przekroju dowolnego kształtu, rozpatrywać będziemy *przekrój płaski*, tnąc ciało odkształcone płaszczyną, to po obu jej stronach będziemy mieli gromady cząsteczek powiązanych naprężeniami. Gromady te będą płaskie o jednostajnej, choć znikomej grubości. Stanowiąc będą *ściany* przekroju. Wobec znikomej grubości obie te warstwy mogą być rozpatrywane, jako *pola materialne o jednostajnym skupieniu* cząsteczek, to jest, inaczej mówiąc o *niezmiennej gęstości*. To znaczy, że w jednostce pola, gdziekolwiek wyznaczonej na ściankach przekroju płaskiego, ilość cząsteczek pola materialnego jest zawsze ta sama. Stąd wniosek oczywisty, że pole przekroju płaskiego jest *miarą ilości* cząsteczek, rozsianych wzdłuż tego przekroju.

To też zamiast naprężeń, siedliskujących w cząsteczkach przekroju, lub do nich przyłożonych, możemy rozpatrywać naprężenia, przynależne do jednostki pola, jako wyobrazicielki pewnej ilości cząsteczek przekroju płaskiego. Tego rodzaju naprężenia zowiemy *naprężeniami jednostkowymi* i wyznaczamy ich wartość w jednostkach siły na jednostkę przekroju — a więc w *kilogramach na centymetr kwadratowy* [KG/CM^2]. Przez tę jednostkę przekroju przechodzą różnokierunkowe naprężenia międzycząsteczkowe, przynależne do poszczególnych drobin. Skoro więc miasto tych wszystkich naprężeń cząsteczkowych rozpatrujemy jedno naprężenie jednostkowe, to tym samym bierzemy niejako ich średnią wartość, co jest dostatecznie uprawnione przy nieznacznych wymiarach jednostki pola. Łatwo się o tem przekonać. Niech n oznacza przypuszczalną ilość cząsteczek w jednostce pola rozpatrywanego, a t (łacińskie tensio = naprężenie) oznacza naprężenie jednostkowe, panujące w tem polu; iloraz $t:n$ da wartość średnią naprężenia dla cząsteczek jednostki pola. Będzie ona tym bardziej zbliżona do istotnej wartości naprężeń międzycząsteczkowych, im jednostajniejszy jest rozkład naprężeń cząsteczkowych w poletku, a więc im ono jest mniejsze, a tworzywo bardziej jednolite. Dawniej wymiary poletka brano nader nieznaczne, bo wynoszące zaledwie *mili-metr kwadratowy*, z czasem przekonano się jednak, iż *pole* cm^2 zupełnie wystarcza, to też jest ono dzisiaj powszechnie stosowane.

Że naprężenia jednostkowe stanowią znacznie ściślejszą miarę istotnych naprężeń międzycząsteczkowych dla ciała jednolitego, niż dla ciała

różnolitego, o tem z łatwością można się przekonać rozumując w sposób następujący: weźmy w przekroju płaskim ciała odkształconego dwie jednostki pola o naprężeniach jednostkowych równych. W ciele jednolitem liczba cząsteczek będzie niewątpliwie ta sama dla obu poletek, przeto cząsteczki obu jednostek pola będą ulegać jednakowym średnim naprężeniom $t : n$ międzycząsteczkowym. Tutaj więc naprężenie jednostkowe stanowi dobrą miarę naprężeń międzycząsteczkowych.

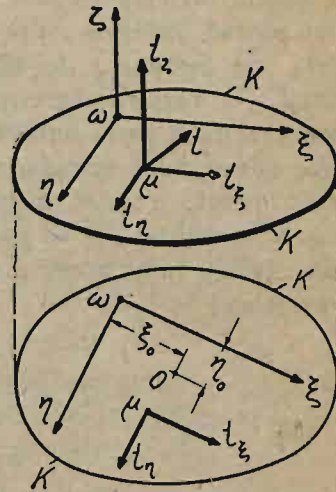
Inaczej atoli rzecz się ma dla ciała niejednolitego. Tu ilość cząsteczek będzie wogóle różna dla obu poletek: n_1 cząsteczek pierwszego będzie ulegało średniemu naprężeniu $t : n_1$, podczas gdy n_2 cząsteczek drugiego będzie pod jarzmem naprężenia średniego $t : n_2$. Tu więc przy jednakowych naprężeniach jednostkowych cząsteczki obu poletek *nie są jednakowo naprężone*. Stąd wnioskujemy, że *w ciele jednolitem odkształconem naprężenie jednostkowe stanowi miarę średniego naprężenia cząsteczek jednostki pola przekroju płaskiego, podczas gdy w ciele niejednolitem stanowi ono zaledwie miarę naprężeń międzycząsteczkowych przybliżoną*.

Wobec jednak braku jakichkolwiek danych, dotyczących stopnia skupienia cząsteczkowego w ciałach niejednolitych (ciała włókniste, kamienie, drzewo), zmuszeni jesteśmy mimo to rozpatrywać naprężenia jednostkowe, jako miarę naprężeń międzycząsteczkowych; czynimy to jednak z ostrożnością należytą.

Oznaczmy więc raz na zawsze przez t^{KG/CM^2} naprężenie jednostkowe, panujące w danej jednostce przekroju płaskiego, dowolnie przez ciało odkształcone przeprowadzonego. W ogólnym wypadku wartości t będą różne dla poszczególnych punktów przekroju; może się jednak zdarzyć, że t będzie *geometrycznie jednakowe* dla wszystkich punktów przekroju, a wtedy mówimy, że przekrój jest *jednostajnie naprężony*. W obu wypadkach zadaniem Wytrzymałości Tworzyw jest wyznaczyć wartości naprężeń jednostkowych dla poszczególnych punktów przekroju.

§ 6. Wyznaczanie naprężeń jednostkowych przekroju płaskiego ciała jednolitego. Bierzemy pod uwagę przekrój płaski p ciała jednolitego odkształconego. Jego rozcięte części A i B pozostają pod jarzmem odnośnych układów [A] i [B] sił zewnętrznych odkształcających. Po obu stronach przekroju, w gromadach cząsteczkowych α i β siedliskują układy naprężeń $[\alpha]$ i $[\beta]$. Ponieważ $[\alpha] = -[\beta]$ oraz $[A] = -[\beta]$ i $[B] = -[\alpha]$, przeto możemy rozpatrywać układy [A] i $[\beta]$; stanowiące obciążenie jednej tylko części ciała obciążonego, dajmy na to części A. Chcąc warunek $[A] + [\beta] = 0$ wyrazić w postaci zwykłych warunków równowagi układów sił [A] i $[\beta]$, bierzemy pod uwagę układ osi spójrznych prostokątnych, obierając początek osi ω gdziekolwiek w płaszczyźnie przekroju (Rys. 4), chociażby nawet poza jego obwodem. Osie $\omega\xi$, $\omega\eta$ ukła-

damy jakkolwiek w płaszczyźnie przekroju, a oś ωz prowadzimy prostopadle do tej płaszczyzny. W układzie tylko co obranych osi spólrzędnych wyznaczmy spólrzędne ξ, η, ζ zupełnie dowolnego punktu μ , leżące w przekroju, przyczem oczywiście $\zeta = 0$. Oznaczmy jak zwykle przez t^{KG/CM^2} naprężenie jednostkowe, panujące w punkcie μ . Jeżeli przez $dF = d\xi d\eta$ oznaczmy różniczkę pola, przynależną do punktu μ ($\xi, \eta, 0$) to poletko $dF \text{ cm}^2$ podlegać będzie działaniu siły elementarnej $t dF \text{ kg}$, a układ sił $t dF$ poletek całego przekroju będzie niewątpliwie układem [3], o którym była mowa nieco wyżej. Wobec zupełnej niezmienności przestrzeni międzycząsteczkowych ciała odkształconego, jego część A zachowuje się jak ciało sztywne, możemy więc sprowadzić układ [A] sił zewnętrznych, odkształcających do początku spólrzędnych ω jako ośrodka sprowadzenia, a otrzymane w ten sposób wypadkowe siła R i moment M zastąpią działanie układu [A], równoważąc zarazem układ sił $t dF$ przekroju.



Rys. 4.

Oznaczmy składowe naprężenia jednostkowego przez t_ξ, t_η, t_ζ . Mnożąc je przez dF otrzymamy składowe siły $t dF$. Ponieważ składowe R i M są odpowiednio R_ξ, R_η, R_ζ i M_ξ, M_η, M_ζ , przeto warunki równowagi obu układów z łatwością otrzymać możemy pisząc

$$\begin{aligned} R_\xi &= \Sigma t_\xi dF, & R_\eta &= \Sigma t_\eta dF, & R_\zeta &= \Sigma t_\zeta dF, \\ M_\xi &= \Sigma [\eta t_\zeta dF - \zeta t_\eta dF] = \Sigma \eta t_\zeta dF, & \dots & \dots & \dots & (1) \\ M_\eta &= \Sigma [\zeta t_\xi dF - \xi t_\zeta dF] = -\Sigma \xi t_\zeta dF, \\ M_\zeta &= \Sigma [\xi t_\eta dF - \eta t_\xi dF]. \end{aligned}$$

Prawe strony tych równań wypisaliśmy bez znaków ujemnych, wyznaczyliśmy przeto naprężenia układu — [3] czyli układu [x], co zresztą nie gra żadnej roli, wobec tożsamości obu układów naprężeń. Z równości tych niepodobna wyznaczyć składowych naprężeń bez założeń dodatkowych. W ogólnym wypadku składowe t_ξ, t_η, t_ζ mają wartości różne dla poszczególnych punktów przekroju, są więc funkcjami spólrzędnych ξ, η tych punktów. Nadto od czasu nie zależą zupełnie, mamy tu bowiem do czynienia z ciałem już odkształconem o wartościach naprężeń trwale ustalonych. Możemy przeto napisać $t_\xi = \Theta(\xi, \eta)$, $t_\eta = \Phi(\xi, \eta)$, $t_\zeta = \Psi(\xi, \eta)$, a w równaniach (1) miasto sum podstawić wszędzie znaki całkowania po dF .

Uzależnienie t_ξ, t_η, t_ζ od spólrzędnych punktów przekroju dałoby

możność ustalenia praw zmienności naprężeń, gdybyśmy mogli wyznaczyć kształt tylko co wypisanych funkcji. Ponieważ jednak nie znamy go, przeto idziemy zwykłą w takich razach drogą: nadajemy tym funkcjom postać możliwie najprostszą i badamy wyniki otrzymane. Gdy te okażą się zgodne z doświadczeniem, wnioskujemy o trafnym wyborze funkcji. W razie przeciwnym obieramy inną zawilszą postać. Najprostszym kształtem będą funkcje *linjowe* współrzędnych ξ, η , Ta postać zdaje się odpowiadać warunkom istotnym w pewnych prostych wypadkach, należy przeto zbadać *założenie funkcji linjowych* $t_\xi = a\xi + b\eta + c$, $t_\eta = d\xi + e\eta + f$, $t_z = g\xi + h\eta + j$, zawierających stałe współczynniki, które należy wyznaczyć z warunków równowagi (1). Po podstawieniu otrzymamy:

$$R_\xi = a \int \xi dF + b \int \eta dF + c \int dF,$$

$$R_\eta = d \int \xi dF + e \int \eta dF + f \int dF,$$

$$R_z = g \int \xi dF + h \int \eta dF + j \int dF,$$

$$M_\xi = g \int \xi \eta dF + h \int \eta^2 dF + j \int \eta dF,$$

$$M_\eta = -g \int \xi^2 dF - h \int \xi \eta dF - j \int \xi dF$$

$$M_z = d \int \xi^2 dF + e \int \xi \eta dF + f \int \xi dF - a \int \xi \eta dF - b \int \eta^2 dF - c \int \eta dF$$

Te równania można uprościć, obierając początek osi spólrzędnych *w środku masy O* przekroju. Spólrzedne ξ_0, η_0 tego środka czynią zadość równaniom $F\xi_0 = \int \xi dF$, $F\eta_0 = \int \eta dF$, gdzie F oznacza pole przekroju, a całki $\int \xi dF, \int \eta dF$ są to tak zwane *momenty statyczne* przekroju. Z tego środka prowadzimy oś OZ prostopadle do przekroju, pozostałe dwie osie OX, OY kierujemy wzdłuż *głównych osi przekroju*. W układzie tych nowych osi spólrzedne punktu μ będą odpowiednio x, y oraz $z = 0$, iloczyn $dF = dx dy$ da różniczkę pola, a składowe naprężenia jednostkowego będą, jak pierwej, funkcjami odnośnych współrzędnych linjowemi: $t_x = ax + by + c$, $t_y = dx + ey + f$, $t_z = gx + hy + j$. Zazwyczaj oznaczamy t_x przez τ_y , t_y przez τ_x oraz t_z przez σ_z . Nieco dalej wyjaśnimy treść wewnętrzną tego znakowania. Nadto składową siły R równoległą do osi OZ , oznaczamy przez S , składową, leżącą w przekroju przez T , a rzuty tej ostatniej na osi OX, OY odpowiednio przez T_x, T_y . Składowe momentu M niech będą M_x, M_y oraz $M_z = M_0$. Z równań statyki otrzymamy:

$$T_x = a \int x dF + b \int y dF + c \int dF, T_y = d \int x dF + e \int y dF + f \int dF, S = g \int x dF + h \int y dF + j \int dF$$

$$M_x = g \int xy dF + h \int y^2 dF + j \int y dF,$$

$$M_y = -g \int x^2 dF - h \int xy dF - j \int x dF.$$

$$M_0 = d \int x^2 dF + e \int xy dF + f \int x dF - a \int xy dF - b \int y^2 dF - c \int y dF.$$

Tutaj przedewszystkiem $\int dF = F$, a nadto $\int x dF = \int y dF = 0$, początek bowiem osi leży w środku masy przekroju. Całka $I_x = \int y^2 dF$ stanowi tak zwany *moment bezwładności przekroju względem osi OX*, a całka $I_y = \int x^2 dF$ — względem osi OY, wreszcie całka $J_{xy} = \int xy dF$ — *moment odśrodkowy przekroju względem osi OX, OY*. Niżej udowodnimy, że dla osi głównych $J_{xy} = 0$, a zatem $T_x = cF$, $T_y = jF$, $S = jF$, $M_x = hJ_x$, $M_y = -gJ_y$, $M_0 = dJ_y - bJ_x \dots \dots (2)$.

Z tych równości możemy wyznaczyć wszystkie współczynniki, prócz a, b, d, e , będziemy mieli przeto wzory dla składowych naprężenia jednostkowego:

$$t_x = ax + by + \frac{T_x}{F} = \tau_y, \quad t_y = dx + ey + \frac{T_y}{F} = \tau_x, \quad t_z = -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{S}{F}.$$

W celu ujednostajnienia tylko co otrzymanych wzorów możemy jeszcze dodatkowo oznaczyć

$$a = \frac{H}{J_y}, \quad b = -\frac{K}{J_x}, \quad d = \frac{L}{J_y}, \quad e = \frac{N}{J_x},$$

a otrzymamy postać ostateczną wzorów:

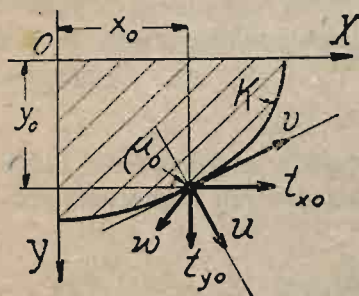
$$t_x = \frac{H}{J_y} x - \frac{K}{J_x} y + \frac{T_x}{F} = \tau_y, \quad t_y = \frac{L}{J_y} x + \frac{N}{J_x} y + \frac{T_y}{F} = \tau_x, \\ t_z = -\frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{S}{F} = \tau_s \dots \dots (3)$$

Spółczynniki K, L czynią tu zadość równaniu $K + L = M_0$, zależą zatem wyłącznie od tej składowej momentu, pozostałe dwa H i N , jako nie objęte warunkami (2), nie dają się wyznaczyć w wypadku ogólnym. W szczególnym natomiast możemy niekiedy wyznaczyć ich wartość z warunków dodatkowych, dotyczących powłoki ciała odkształconego. Weźmy pod uwagę jakikolwiek punkt μ_0 , leżący na obwodzie przekroju. Jego spólrzędne x_0, y_0 czynić będą zadość równaniu obwodu $K(x, y) = 0$. Składowe naprężenia, panującego w tym punkcie będą odpowiednio

$$t_{x_0} = \frac{H}{J_y} x_0 - \frac{K}{J_x} y_0 + \frac{T_x}{F}, \quad t_{y_0} = \frac{L}{J_y} x_0 + \frac{N}{J_x} y_0 + \frac{T_y}{F}.$$

Możemy je zresztą przedstawić nieco inaczej, w postaci sum składowych trzech na-

prężeń, pisząc $t_{x_0} = u_x + v_x + w_x$, $t_{y_0} = u_y + v_y + w_y$, gdzie przez u_x , u_y oznaczyliśmy składowe naprężenia, leżącego na normalnej obwodu, przez v_x , v_y składowe naprężenia stycznego do obwodu, wreszcie przez w_x , w_y składowe naprężenia $T:F$, panującego zresztą we wszystkich punktach przekroju, jego bowiem rzuty $w_x = T_x : F$, $w_y = T_y : F$ stanowią stałe wyrazy ogólnych wzorów dla t_x , t_y . Załóżmy, że naprężenia v mają kierunek wspólny na całym obwodzie przeciw strzałce zegara, że naprężenia u wychodzą poza przekrój (Rys. 5); proste rozważania geometryczne dadzą nam wzory



Rys. 5.

$$u_x dx_0 + u_y dy_0 = 0 \text{ oraz } \frac{v_x}{dx_0} = \frac{v_y}{dy_0}.$$

Ponieważ nadto, różniczkując, mamy $\frac{\partial K}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial K}{\partial y_0} dy_0 = 0$, przeto ostatecznie otrzymamy dwa równania warunkowe postaci: $u_x : \left[\frac{\partial K}{\partial x_0} \right] = u_y : \left[\frac{\partial K}{\partial y_0} \right]$ oraz $v_x \frac{\partial K}{\partial x_0} + v_y \frac{\partial K}{\partial y_0} = 0$, które się winny wypełniać

tożsamościowo dla wszystkich punktów obwodu.

Odkształcenia powłoki zewnętrznej mogą być dostrzeżone z łatwością, to też w niektórych prostszych wypadkach otrzymujemy na tej drodze dostateczne wskazówki co do kierunku działania naprężeń, możemy przeto wyznaczyć u i v . Zważywszy nadto, że

$$u_x + v_x = \frac{H}{J_y} x_0 - \frac{K}{J_x} y_0 \text{ oraz } u_y + v_y = \frac{L}{J_y} x_0 + \frac{N}{J_x} y_0 \text{ w pewnych wypadkach określimy brakujące współczynniki } K, H, L, N.$$

Tą drogą ostatecznie otrzymane wzory dla składowych naprężeń od powiadają istotnym warunkom w następujących prostych wypadkach obciążenia odkształcającego.

1. WYPADEK A. *Zewnętrzny układ [A] sił odkształcających sprowadza się do pojedynczej siły S , prostopadłej do przekroju płaskiego, a przyłożonej do środka jego masy. Jest to wypadek ściskania lub rozciągania.*

2. WYPADEK B. *Układ [A] sprowadza się do pojedynczej siły T , leżącej w przekroju. Jest to wypadek ścinania.*

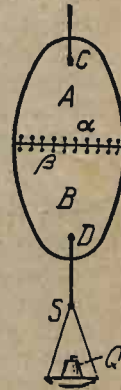
3. WYPADEK C. *Układ [A] sprowadza się do pojedynczego momentu M_0 , prostopadłego do przekroju. Jest to wypadek skręcania.*

4. WYPADEK D. *Układ [A] sprowadza się do momentów M_x ,*

M_y , leżących w przekroju, oraz do siły S , prostopadłej do tego przekroju. Jest to wypadek zginania.

§ 7. Przykłady i ćwiczenia. 1. By unaocznić przebieg powstawania naprężeń w przekroju, bierzemy kawałek skóry (Rys. 6), rozcinamy go wpoprzek pośrodku, przebijamy otworki wzdłuż obu brzegów przekroju, i, przewlekając sznurek gumowy przez te otworki, trwale łączymy oba kawałki tak, aby krawędzie przekroju się zeszyły. Wymaga to niewątpliwie pewnego natężenia sznurka gumowego. W ten sposób stworzyliśmy sztuczny obraz przekroju ciała stałego. Szeregi dziurek obustronnie wzdłuż brzegów przekroju rozsiane, wyobrażają gromady cząsteczek przekroju; sznurek zastępuje więzy tych cząstek, a jego natężenie działa, jak siły wiążące. Dzięki im obie połowy A i B zachowują się jak jedna całość. Wieszamy je pionowo na linie, przedzierzgniętej przez górny otwór C , przez dolny otwór D przewlekamy drugą linkę z szalką do ciężarków. Nieznaczna waga całości niewiele zmieni w układzie, dopiero gdy na szalkę położymy ciężar Q , utworzy się w miejscu rozcięciem szpara mniej lub więcej szeroka. Linka przeniosła działanie ciężarów na dolną część skóry, ta znowu oddała je sznurkom wiążącym: powstały w nich naprężenia odkształcające, sznurki poczęły się wydłużać, wreszcie sprężystość gumy wywołała naprężenia oporowe, które zahamowały odkształcenia. Nastąpił stan równowagi. Po dodaniu nowego ciężarka szpara powiększa się, naprężenia w sznurkach rosną; natomiast po zdjęciu tego ciężarka szpara maleje wraz z naprężeniami. Zupełnie tak samo działa każda ciężarek następny — ostatni wywoła nadmierne naprężenia: pękną sznurki wiążące. Położymy ze dwa ciężarki na szalkę i rozetnijmy wszystkie sznurki wiążące. Układ rozpadnie się: część dolna oddzieli się od górnej, przestaną bowiem działać naprężenia, utrzymujące równowagę odkształconą układu. Moznaby jednak część jego dolną utrzymać w równowadze, zastępując tylko co zniszczony układ naprężeń — odpowiednim układem sił zewnętrznych, równoważących ciężarki — wtedy równowaga całości trwałaby i nadal bez zmiany. Gdybyśmy chcieli jednak powrócić do stanu, poprzedzającego rozcięcie sznurków, to oprócz układu sił, równoważących ciężarki, trzeba by jeszcze powołać do życia układ dodatkowy, zastępujący działanie sił wiążących. Wtedy obie części nie tylko pozostałyby w dotyku obok siebie, lecz nadto stanowiłyby jedną całość, jak przed rozcięciem sznurków wiążących. Należy tu jeszcze podkreślić, że naprężenia od sił wiążących nie zależą, muszą bowiem równoważyć ciężarki położone na szalce. Ten prosty przykład wyraźnie więc zaznacza różnicę, zachodzącą pomiędzy siłami wiążącymi a naprężeniami, powstającymi na tle działania sił odkształcających.

Stosując miasto sznurków gumowych — sznurki z tworzywa rozciągliwego, możemy unaocznić powstawanie odkształceń mniej lub więcej trwałych, bo tego rodzaju więzy po zdjęciu z szalki ciężarków pozostaną jednak nieco rozciągnięte, rozcięte końce skóry nie zejda



Rys. 6

się, odkształcenie będzie trwało nadal po odciążeniu. Tutaj obciążenie zewnętrzne zmieniło układ sił wiążących.

2. Przy danem obciążeniu zewnętrznym naprężenia przekroju są ściśle określone. Nie możemy przeto wyznaczyć dowolnie składowych naprężeń, ponieważ w ogólnym wypadku równania $t_x = A$, $t_y = B$, $t_z = C$ wyłączają się wzajemnie, są bowiem w nadmiarze. Z trzech równań trzeba wyznaczyć dwie niewiadowe — współrzędne punktu o danej wartości naprężenia. Stąd wniosek, że A , B , C nie mogą być wybierane dowolnie. Wyznacznik tych trzech równań musi być równy zeru, słowem musi istnieć pewna zależność $f(A, B, C) = 0$, aby naprężenie

$$t = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

było istotnie jednym z naprężeń układu, wtedy bowiem możemy wyznaczyć współrzędne punktu, w którym panuje owo z góry określone naprężenie. Ten punkt może jednak nie leżeć w przekroju. Wyznamy równanie obwodu przekroju rozpatrywanego w postaci $K(x, y) = 0$. Skoro $K(x, y)$ staje się zerem na obwodzie, to dla wszystkich punktów przekroju jest jednakowego znaku takiego, jaki przynależy do środka przekroju, gdzie $x = y = 0$. W ten sposób, badając znak funkcji $K(x, y)$ z łatwością możemy określić, czy punkt wyznaczony leży w przekroju. Stanowi to drugi warunek konieczny.

3. Nazwaliśmy przekrój jednostajnie naprężonym, gdy wszystkie jego naprężenia były geometrycznie równe. Wtedy $t_x = A = \text{const.}$, $t_y = B = \text{const.}$, $t_z = C = \text{const.}$ Warunki równowagi statycznej będą tu

$$\begin{aligned} T_x &= \int t_x dF = AF, \quad T_y = \int t_y dF = BF, \\ S &= \int t_z dF = CF, \quad M_x = \int y t_z dF = C \int y dF = 0, \\ M_y &= -\int x t_z dF = -C \int x dF = 0, \\ M_0 &= \int x t_y dF - \int y t_x dF = B \int x dF - A \int y dF = 0. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$R = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + S^2} = F \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = tF \text{ oraz } M = 0.$$

Przekrój może być jednostajnie naprężony jedynie wtedy, gdy układ sił odkształcających po sprowadzeniu do środka przekroju daje wypadkowy moment równy zeru.

Jest to warunek konieczny, lecz nie dostateczny.

4. Wyznamy średnią wartość naprężenia przekroju, czyli jego średnie naprężenie. Składowe tego naprężenia wyznaczają się z równań

$$t_{xs}F = \int t_x dF, \quad t_{ys}F = \int t_y dF, \quad t_{zs}F = \int t_z dF.$$

Czyli więc

$$\begin{aligned} t_{xs}F &= T_x, \quad t_{ys}F = T_y, \quad t_{zs}F = S, \text{ stąd} \\ t_s &= \sqrt{t_{xs}^2 + t_{ys}^2 + t_{zs}^2} = \frac{R}{F} \end{aligned}$$

Srednie naprężenie przekroju równe jest sile wypadkowej, jaką daje odnośny układ sił odkształcających po sprowadzeniu do środka przekroju, dzielonej przez pole przekroju. Jest to wynik ogólny, niezależny od postaci funkcji naprężeń.

5. Wychodząc z założenia funkcji linjowych, otrzymamy dla środka przekroju, gdzie $x = y = 0$ składowe naprężenia

$$t_{x0} = \frac{T_x}{F}, \quad t_{y0} = \frac{T_y}{F}, \quad t_{z0} = \frac{S}{F}$$

Zatem $t_{x0} = t_{xs}$, $t_{y0} = t_{ys}$, $t_{z0} = t_{zs}$.

W środku przekroju panuje naprężenie równe średniej wartości naprężeń.

W założeniu funkcji linjowych składowych naprężeń przekroju, jego naprężenia środkowe i średnie są równe.

ROZDZIAŁ DRUGI.

MOMENTY PRZEKROJÓW PŁASKICH.

§ 1. **Wyznaczanie momentów przekrojów płaskich.** Weźmy pod uwagę przekrój płaski ciała jednorodnego (Rys. 7), czyli pole F ograniczone obwodem K . Krzywą K określamy równaniem $K(\xi, \eta) = 0$ w układzie osi prostokątnych $\omega\xi, \omega\eta$, leżących w przekroju. W poprzednim rozdziale otrzymaliśmy, prócz pola $F = \int dF$, całki następujące:

$\int \eta dF = F_{\xi}$ — moment statyczny względem osi $\omega\xi$,

$\int \xi dF = F_{\eta}$ — moment statyczny względem osi $\omega\eta$,

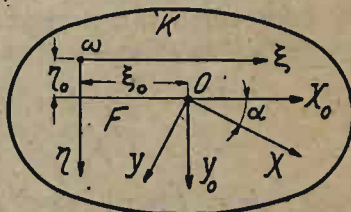
$\int \eta^2 dF = J_{\xi}$ — moment bezwładności względem osi $\omega\xi$,

$\int \xi^2 dF = J_{\eta}$ — moment bezwładności względem osi $\omega\eta$, oraz

$\int \xi\eta dF = J_{\xi\eta}$ — moment odśrodkowy względem osi $\omega\xi, \omega\eta$.

We wszystkich tych całkach $dF = d\xi d\eta$ oznacza różniczkę pola, a całkowanie winno się rozszerzać na cały przekrój. Są to więc całki podwójne typu $\int \xi^m \eta^n d\xi d\eta$. Granice całkowania po η będą w nich wogóle zależne od ξ i określą się, jako pierwiastki równania $K(\xi, \eta) = 0$; granice całkowania po ξ będą stałe, wyznaczyć je można w postaci pierwiastków równania, które otrzymamy, rugując η z równań

$$K(\xi, \eta) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0.$$



Rys. 7.

Wychodząc z rozpatrywania całki, jako granicy sumy, z łatwością możemy dla tych wszystkich powyżej ustalonych momentów przekroju wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Moment przekroju złożonego równy jest sumie odpowiednich momentów części przekroju, branych względem tej samej osi.

W ogólnym wypadku wartości momentów zależą od układu osi spólrzędnych. Momenty F_{ξ} , F_{η} , $J_{\xi\eta}$ mogą być przytem dodatnie, ujemne lub równe zeru, pozostałe zaś F , J_{ξ} , J_{η} są rdzennie dodatnie. Widzieliśmy już, że zerowym wartościom pierwszych trzech momentów odpowiada najprostsza postać składowych naprężeń — trzeba więc umieć obrać układ odpowiednich osi spólrzędnych, aby możliwie największa ilość momentów miała wartość równą zeru. W tym celu przedewszystkiem wyznaczamy:

§ 2. Osie środkowe przekroju. Wyznaczamy spólrzędne ξ_0, η_0 środka przekroju O , które, jak wiemy z mechaniki, czynią zadość równaniom $F\xi_0 = F_{\eta}$, $F\eta_0 = F_{\xi}$ i umieszczamy w tym punkcie początek nowych osi spólrzędnych OX_0, OY_0 , równoległych do starych, a więc również prostokątnych. W układzie tych nowych osi *środkowych* ponownie wyznaczamy momenty przekroju. Opierając się na wzorach przejścia od starych do nowych osi spólrzędnych $\xi = \xi_0 + x_0$, $\eta = \eta_0 + y_0$, możemy poprzednio rozpatrywane całki wyrazić za pomocą nowych, zważywszy, że $dF = d\xi d\eta = dx_0 dy_0 = dF_0$. Będziemy przeto mieli kolejno

$$F_{\xi} = \int (\eta_0 + y_0) dF_0 = F\eta_0 + \int y_0 dF_0 = F\eta_0 + F_{x_0},$$

$$F_{\eta} = \int (\xi_0 + x_0) dF_0 = F\xi_0 + F_{y_0}$$

$$J_{\xi} = \int (\eta_0 + y_0)^2 dF_0 = F\eta_0^2 + 2\eta_0 \int y_0 dF_0 + \int y_0^2 dF_0 = \\ = F\eta_0^2 + 2\eta_0 F_{x_0} + J_{x_0}.$$

$$J_{\eta} = \int (\xi_0 + x_0)^2 dF_0 = F\xi_0^2 + 2\xi_0 \int x_0 dF_0 + \int x_0^2 dF_0 = F\xi_0^2 + 2\xi_0 F_{y_0} + J_{y_0}.$$

$$J_{\xi\eta} = \int (\xi_0 + x_0)(\eta_0 + y_0) dF_0 = F\xi_0\eta_0 + \xi_0 \int y_0 dF_0 + \eta_0 \int x_0 dF_0 + \\ + \int x_0 y_0 dF_0 = F\xi_0\eta_0 + \xi_0 F_{x_0} + \eta_0 F_{y_0} + J_{x_0 y_0}.$$

Wiemy z założenia, że $F\xi_0 = F_{\eta}$ oraz $F\eta_0 = F_{\xi}$, a zatem z pierwszych dwóch równań mamy bezpośrednio $F_{x_0} = F_{y_0} = 0$. Ponieważ wobec dowolności osi $\omega\xi, \omega\eta$ kierunek osi OX_0, OY_0 jest również zupełnie dowolny, przeto *moment statyczny przekroju, brany względem osi środkowej jest równy zeru.*

W dalszym ciągu, wobec $F_{x_0} = F_{y_0} = 0$, mamy $J_{\xi} = J_{x_0} + F\eta_0^2$, $J_{\eta} = J_{y_0} + F\xi_0^2$ stąd: *moment bezwładności przekroju względem dowolnej osi równy jest momentowi bezwładności względem osi środkowej, równole-*

głej, dodanemu do pola przekroju, pomnożonego przez kwadrat odległości tej osi dowolnej od środka przekroju.

Wobec $F_{x_0} = F_{y_0} = 0$ mamy również $J_{\xi\eta} = J_{x_0y_0} + F_{\xi_0\eta_0}$, skąd moment odśrodkowy przekroju względem dowolnych osi współrzędnych prostokątnych równy jest momentowi odśrodkowemu względem osi środkowych równoległych, dodanemu do pola przekroju, mnożonego przez iloczyn odległości tych osi dowolnych od środka przekroju.

§ 3. Osie główne przekroju. Idąc dalej po drodze tu wyznaczonej, bierzemy pod uwagę nowy układ osi OX, OY , środkowych, tworzących kąt α pomiędzy osiami OX i OX_0 i znów w układzie tych osi wyznaczamy momenty przekroju. Są to osie środkowe, zatem dla nich

$\int ydF = F_x = 0, \int xdF = F_y = 0$, nadto ponieważ $x = x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha$,
 $y = -x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha$ oraz $dF = dx dy = dx_0 dy_0 = dF_0$, przeto

$$J_x = \int [-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha]^2 dF_0 = J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{x_0y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_y = \int [x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha]^2 dF_0 = J_{x_0} \sin^2 \alpha + J_{y_0} \cos^2 \alpha + J_{x_0y_0} \sin 2\alpha,$$

$$J_{xy} = \int [x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha] [-x_0 \sin \alpha + y_0 \cos \alpha] dF_0 = -J_{y_0} \sin \alpha \cos \alpha + J_{x_0y_0} [\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha] + J_{x_0} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} [J_{x_0} - J_{y_0}] \sin 2\alpha + J_{x_0y_0} \cos 2\alpha.$$

Dobierzemy kąt α w taki sposób, aby $J_{xy} = 0$. Układ osi OX, OY , do tej wartości $\alpha = \alpha_0$ kąta przynależny, zwiemy układem osi głównych przekroju. Dla tych osi

$$J_{xy} = \frac{1}{2} [J_{x_0} - J_{y_0}] \sin 2\alpha_0 + J_{x_0y_0} \cos 2\alpha_0 = 0$$

stad $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2J_{x_0y_0} : [J_{y_0} - J_{x_0}]$.

Wyznamy kąt α_0 , czyniący zadość temu warunkowi. Prócz α_0 , czynić mu będzie zadość jeszcze i $\alpha_0 + \pi/2$, można więc zawsze znaleźć dwie wartości kąta α , różniące się o kąt prosty, a wyznaczające kierunki osi głównych przekroju. Dla tych osi $J_{xy} = 0$, ta wartość wyróżnia układ osi głównych z pośród innych układów osi środkowych, przynależnych do różnorodnych wartości kąta α .

Istnieje i druga własność osi głównych. Wyznamy pochodne

$$\frac{dJ_x}{d\alpha} = -2 \cos \alpha \sin \alpha J_{x_0} + 2 \sin \alpha \cos \alpha J_{y_0} - 2 \cos 2\alpha J_{x_0y_0} =$$

$$= [J_{y_0} - J_{x_0}] \cos 2\alpha \left\{ \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{2 J_{x_0y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} \right\}$$

$$\frac{dJ_y}{d\alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha J_{x_0} - 2 \cos \alpha \sin \alpha J_{y_0} + 2 \cos 2\alpha J_{x_0y_0} =$$

$$= -[J_{y_0} - J_{x_0}] \cos 2\alpha \left\{ \operatorname{tg} 2\alpha - \frac{2 J_{x_0y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} \right\}$$

$$\frac{d^2 J_x}{d\alpha^2} = 2 \operatorname{Cos} 2\alpha [J_{y_0} - J_{x_0}] + 4 \operatorname{Sin} 2\alpha J_{xy_0} =$$

$$= 4 J_{xy_0} \operatorname{Cos} 2\alpha \left\{ \frac{J_{y_0} - J_{x_0}}{2 J_{xy_0}} + \operatorname{tg} 2\alpha \right\}$$

$$\frac{d^2 J_y}{d\alpha^2} = -2 \operatorname{Cos} 2\alpha [J_{y_0} - J_{x_0}] - 4 \operatorname{Sin} 2\alpha J_{xy_0} =$$

$$= -4 J_{xy_0} \operatorname{Cos} 2\alpha \left\{ \frac{J_{y_0} - J_{x_0}}{2 J_{xy_0}} + \operatorname{tg} 2\alpha \right\}$$

Widzimy stąd, że drugie pochodne są zawsze różnych znaków, a pierwsze stają się równe zeru dla α_0 lub $\alpha_0 + \pi/2$; te wartości wyznaczają, jak wiemy, kierunki *osi głównych przekroju*. Zatem odwrotność znaków drugich pochodnych wskazuje, iż mamy tu do czynienia z największością i najmniejszością momentów. Stąd: *istnieją zawsze dwa wzajemnie prostopadłe kierunki, odpowiadające największości i najmniejszości momentów bezwładności przekroju, branych dla osi środkowych*.

Oba te kierunki dają w istocie rzeczy jeden i ten sam układ krzyżujących się *osi głównych przekroju*, z tą jeno różnicą, że przy $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$ osie są obrócone o kąt prosty. A więc, gdzie przy $\alpha = \alpha_0$ była oś OY , tam przy $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$ będzie oś OX , gdzie była oś OX ujemna, tam leżeć będzie oś OY dodatnia. Słowem, osie będą przemianowane. Ponieważ jednak przemianowanie osi powoduje przemianowanie całek J_x , J_y na J_y , J_x , przeto kąt α_0 wyznaczy maximum i minimum momentów w sposób odwrotny, niż kąt $\alpha_0 + \pi/2$. Widać to również bezpośrednio ze wzorów wyżej wyprowadzonych, mamy bowiem $\operatorname{Cos} 2\alpha_0 = -\operatorname{Cos}(2\alpha_0 + \pi)$, co spowoduje zmianę znaku obu wtórych pochodnych przy zmianie α_0 na $\alpha_0 + \pi/2$.

Największości i najmniejszości momentów bezwładności przekroju wyznaczają kierunki jego osi głównych prostokątnych środkowych.

Układ osi głównych środkowych jest najwygodniejszy, daje bowiem największą ilość wartości momentów zerowych. Przypuśćmy, żeśmy wyznaczyli kierunki osi głównych OX , OY przekroju. Dla tych osi $F_x = F_y = J_{xy} = 0$ a J_x , J_y są to *główne momenty bezwładności przekroju*. Dla jakiegokolwiek nowego układu środkowych osi prostokątnych Ov , Ou — wyznaczamy kąt φ pomiędzy osią Ov a osią główną OX , zatem $v = x \operatorname{Cos} \varphi + y \operatorname{Sin} \varphi$, $u = -x \operatorname{Sin} \varphi + y \operatorname{Cos} \varphi$. Dla tych nowych osi będzie więc $J_v = J_x \operatorname{Cos}^2 \varphi + J_y \operatorname{Sin}^2 \varphi - J_{xy} \operatorname{Sin} 2\alpha = J_x \operatorname{Cos}^2 \varphi + J_y \operatorname{Sin}^2 \varphi$, możemy przeto, znając J_x , J_y wyznaczyć moment bezwładności J_v względem jakiegokolwiek osi środkowej Ov , nachylonej pod kątem φ ku osi OX . Stąd: *główne momenty bezwładności przekroju całkowicie określają rodzaj zmienności momentu bezwładności, branego względem dowolnej osi środkowej.*

Wyliczanie momentów podług tego wzoru jest jednak dosyć kłopotliwe, prościej możemy to uskutecznić, rozpatrując tak zwaną elipsę przekroju środkową lub koło bezwładności przekroju.

§ 4. Środkowa elipsa przekroju. Wprowadźmy pojęcie *ramienia bezwładności*, czyniącego zadość równaniu $Fr^2 = J$. Stąd ramię bezwładności, przynależne do danego momentu

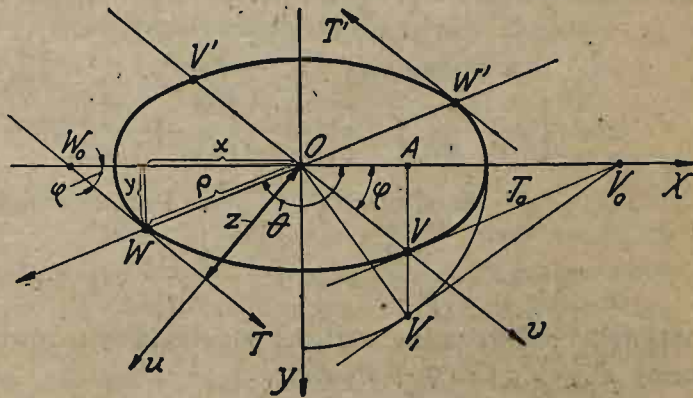
$$i = \sqrt{J/F}$$

określa się, jako *odcinek równy pierwiastkowi kwadratowemu z momentu, dzielonego przez pole przekroju*. Niech będzie:

$$i_v = \sqrt{J_v/F}, \quad i_x = \sqrt{J_x/F}, \quad i_y = \sqrt{J_y/F},$$

a wtedy wyżej wyprowadzony wzór da bezpośrednio $i_v^2 = i_x^2 \cos^2\varphi + i_y^2 \sin^2\varphi$. Aby go wykreślić, budujemy w układzie osi głównych środkową elipsę przekroju, określoną równaniem $[x:i_x]^2 + [y:i_y]^2 = 1$. Elipsę tego rodzaju wykreślimy łatwo, zważywszy, że jej półoś jedna jest równa i_x , a druga: i_y . Aby z pomocą tej krzywej wyznaczyć i_v dla dowolnej osi Ov środkowej, pochylonej pod kątem φ ku osi Ox , należy (Rys. 8) zbudować styczną T elipsy środkowej, pochyloną ku osi Ox pod kątem φ .

Ta styczna T , równoległa do osi Ov , wyznaczy punkt dotyku W elipsy o współrzędnych x, y prostokątnych lub też ρ, θ biegunowych. Przedłużając promień wodzący ρ w obie strony, otrzymamy nową oś Ow , pochyloną ku osi Ox pod kątem θ .



Rys. 8.

Os Ov przecina elipsę w punktach V i V' , a os Ow w punktach W i W' . Odcinki VV' i WW' nazywamy *średnicami elipsy sprzężonymi*, możemy przeto również nazywać osie Ov, Ow *osiami sprzężonymi elipsy przekroju środkowej*. Budowa stycznej T nie następuje żadnej trudności. Wykreślamy ze środka elipsy koło promieniem równym półosi wielkiej i_y . Pion AV , prostopadły do osi Ox , a przechodzący przez punkt V przecięcia się elipsy z osią Ov , wyznaczy na tym kole

punkt V_1 . Budując styczną koła w punkcie V_1 i przedłużając ją do przecięcia się z osią OX , wyznaczmy punkt V_0 , przez który przechodzi styczna T_0 elipsy, przynależna do punktu V . W dalszym ciągu przez środek elipsy prowadzimy oś Ow , równoległą do stycznej T_0 i przez jej punkty W i W' przecięcia się z elipsą — proste T i T' , równoległe do Ow . Obie te proste będą stycznymi elipsy, jedna z nich będzie tworzyła kąt φ , druga kąt $180 - \varphi$ z osią OX , jak to widać na (Rys. 8), gdzie styczne owijają elipsę w kierunku przeciwnym strzałce zegara. Szukaną styczną będzie prosta T , przechodząca przez punkt W , przecięcia się osi Ow z elipsą tuż za punktem V w kierunku rosnących kątów biegunowych θ , które odliczamy w kierunku strzałki zegara.

Wyznaczmy równanie stycznej T , przechodzącej przez punkt $W(x, y)$ w postaci $Y - y = tg\varphi [X - x]$, gdzie $tg\varphi = y'$.

Różniczkując, mamy z równania elipsy

$\frac{x}{i^2_y} + \frac{yy'}{i^2_x} = 0$, a zatem $y' = tg\varphi = - [xi^2_x] : [yi^2_y]$. Wyznaczmy odległość stycznej T od środka przekroju. Odległość tę mierzymy oczywiście wzdłuż Ou , osi prostopadłej do Ov , a więc i do T . Oznaczmy ją przez z .

Na mocy znanego wzoru $z = [xtg\varphi - y] : \sqrt{1 + tg^2\varphi}$ ponieważ dla środka przekroju $X = Y = 0$. Stąd $z^2 = [xtg\varphi - y]^2 : [1 + tg^2\varphi] = [x - yctg\varphi]^2 Sin^2\varphi$. Wyżej widzieliśmy, że $tg\varphi = - [xi^2_x] : [yi^2_y]$

a zatem $yctg\varphi = - [y^2 i^2_y] : [xi^2_x]$, co da

$$z^2 = \left[x + \frac{y^2 i^2_y}{x i^2_x} \right]^2 Sin^2\varphi = \frac{i^4_y}{x^2} \left[\frac{x^2}{i^2_y} + \frac{y^2}{i^2_x} \right]^2 Sin^2\varphi = \frac{i^4_y}{x^2} Sin^2\varphi.$$

Stąd $x^2 = i^4_y \frac{Sin^2\varphi}{z^2}$. Poza tym mamy

$$tg\varphi = - \frac{x i^2_x}{y i^2_y} \text{ skąd } y^2 = \frac{x^2 i^4_x}{i^4_y} Ctg^2\varphi = i^4_x \frac{Cos^2\varphi}{z^2}.$$

Obie tylko co otrzymane wartości podstawiamy w równanie elipsy, a otrzymamy $z^2 = i^2_x Cos^2\varphi + i^2_y Sin^2\varphi$.

Wyżej widzieliśmy, że $i^2_y = i^2_x Cos^2\varphi + i^2_y Sin^2\varphi$, przeto $z = i_y$. *Ramię momentu bezwładności, przynależnego do danej osi środkowej, wyznacza się odległością środka przekroju od prostej, równoległej do tej osi, a stycznej do elipsy środkowej przekroju.*

Jest to nader ważna własność elipsy. Aby otrzymać jej drugą własność, wyznaczamy współrzędne biegunowe wyżej rozpatrywanego punktu W , a mianowicie, jego promień wodzący $\rho = OW$ i kąt biegunowy θ .

$$\text{Stąd } x = \rho Cos\theta, y = \rho Sin\theta, \text{ co daje } tg\varphi = - \frac{i^2_x \rho Cos\theta}{i^2_y \rho Sin\theta}.$$

skąd bezpośrednio $i_x^2 + i_y^2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$. Mnożąc wzór tylko co otrzymany przez F , to jest przez pole przekroju, będziemy mieli:

$Fi_x^2 + Fi_y^2 \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$ skąd $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$. To równanie uzależnia współczynniki kierunkowe kątów φ i Θ . Wyżej mówiliśmy, że przynależne do tych kierunków średnice VV' i WW' stanowią osie sprzężone elipsy Ov i Ow , zatem zależność $J_x + J_y \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\Theta = 0$ wyznacza kierunki osi sprzężonych środkowej elipsy przekroju.

W szczególnym wypadku, gdy oba główne momenty przekroju są równe, to jest, gdy $J_x = J_y = J$, elipsa bezwładności staje się kołem o promieniu $i = \sqrt{J/F}$.

Tutaj oczywiście $z = \rho = i$, a przeto $J_v = Fi^2 = J$, jak to zresztą najlepiej uwypukla (Rys. 9), na którym wyraźnie widać styczną T , równoległą do osi Ov , nachylonej ku OX pod kątem φ . Ten sam wynik otrzymać można i czysto analitycznie z równania

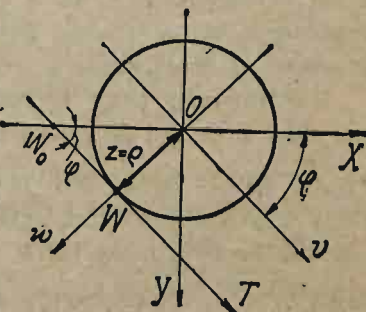
$$J_v = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi = J(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = J.$$

Stąd wnioskujemy, że przekrój o jednakowych obu momentach głównych ujawnia stałą wartość momentów bezwładności dla wszystkich osi środkowych.

Stosuje się to niewątpliwie do przekrojów kołowych, pierścieniowych i wieloboków prawidłowych. We wszystkich wypadkach, gdy elipsa środkowa staje się kołem bezwładności środkowem, kierunek osi głównych jest oczywiście obojętny: każda para osi prostokątnych środkowych może być rozpatrywana, jako osie główne przekroju, dla każdej bowiem $J_{xy} = 0$, co wypływa bezpośrednio ze wzoru $J_v = J_x \cos^2\varphi + J_y \sin^2\varphi - J_{xy} \sin 2\varphi$, gdy uczynimy w nim $J_x = J_y = J_v = J$. Tego rodzaju przekrój możemy nazwać obojętnym. Stąd: moment odśrodkowy, brany względem dowolnych osi środkowych prostokątnych, posiada wartość zerową dla przekroju obojętnego.

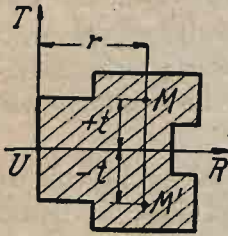
W zwykłym przekroju ma to miejsce wyłącznie tylko dla jednej pary osi prostokątnych — osi głównych przekroju. Niekiedy można zgóry przewidzieć zerową wartość momentu odśrodkowego, a mianowicie w wypadku istnienia symetrii przekroju w kierunku prostopadłym do danej osi, zwanej osią symetrii. Aby to udowodnić, bierzemy pod uwagę przekrój symetryczny względem osi UR w kierunku prostopadłym do tej prostej (Rys. 10). Poprowadźmy oś UT równoległą do kierunku symetrii przekroju przez jakikolwiek punkt U , leżący na UR .

Rozpatrując całkę $\int rtdF = J_{rt}$ w układzie tych osi, jako sumę



Rys. 9.

składników $r t d r d t$, z łatwością zauważymy, że $J_{rt} = 0$. Wynika to bezpośrednio z określenia osi UR , jako osi symetrii, możemy bowiem zawsze dla jakiegokolwiek punktu $M(r, t)$ przekroju — wyznaczyć punkt $M'(r, -t)$, symetryczny względem osi UR , a również należący do przekroju; każdej przeto różniczce $r t d r d t$ odpowiadać będzie różniczka — $r t d r d t$ pod znakiem całki, która musi przeto równać się zeru.



Rys. 10.

To rozumowanie dotyczy wszelkiej całki typu

$\int r^m t^n d r d t$, przy n nieparzystym, wtedy bowiem różniczki $r^m t^n d r d t$, wyznaczone dla punktów symetrycznych są różnego znaku i przy całkowaniu dadzą w sumie zero.

Mamy więc również $\int t d r d t = 0$. To znaczy, że spórzędna środka masy przekroju $t_0 = 0$, a zatem *środek przekroju leży na osi symetrii przekroju, która stanowi jedną z głównych osi tego przekroju. Druga — przecina ją prostopadle w środku przekroju.*

Natomiast, przy n parzystym różniczki $r^m t^n d r d t$, wyznaczone dla punktów $M(r, t)$ i $M'(r, -t)$ symetrycznych, będą jednakowego znaku i całka $\int r^m t^n d r d t$, brana wzdłuż całego pola, będzie sumą dwóch jednakowych całek tego samego typu, branych dla obu części symetrycznych przekroju. Ułatwia to wyliczanie całek. Gdybyśmy, dajmy na to, chcieli wyznaczyć całkę $\int t^n d r d t$ dla przekroju symetrycznego względem osi UR , to należałoby ją wyznaczyć jeno dla jednej z dwu części symetrycznych przekroju, a wynik otrzymany — podwoić. Będzie to wartość szukana. To samo dotyczy całki $\int d r d t$ wyznaczającej pole przekroju. Zatem *obie części symetryczne przekroju mają te same pola.*

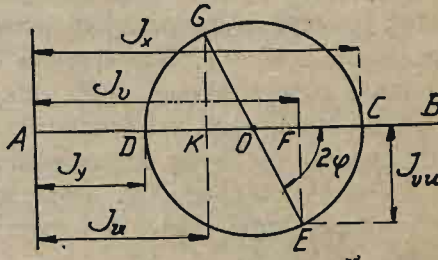
§ 5. Wykres Mohr'a. Wykreślanie elipsy środkowej jest niewygodne: w zastosowaniu zmuadne, to też zazwyczaj stosujemy *wykres kołowy Mohr'a*. W tym celu rozpatrujemy układ osi głównych OX, OY przekroju, oraz główne momenty J_x, J_y , przyczem zakładamy, że $J_x \geq J_y$. Gdyby się okazało odwrotnie, to przemianowaniem osi znowu uczynimy zadość temu warunkowi. Ze środka przekroju prowadzimy nową parę osi prostokątnych Ov, Ou i oznaczamy kąt φ nachylenia osi Ov ku OX . Ponieważ $v = x \cos \varphi + y \sin \varphi$, oraz $u = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$, przeto

$J_v = \int [-x \sin \varphi + y \cos \varphi]^2 dF = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi$ oraz $J_{uv} = \int [x \cos \varphi + y \sin \varphi] [-x \sin \varphi + y \cos \varphi] dF = [J_x - J_y] \sin \varphi \cos \varphi$. Wzór dla J_u pomijamy, możemy go bowiem wypisać każdorazowo wprost, zmieniając we wzorze dla J_v kąt φ na $\varphi + \pi/2$. Na mocy wzorów $2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos 2\varphi$

oraz $2 \sin^2 \varphi = 1 - \cos 2\varphi$ mamy

$$J_v = \frac{1}{2} [J_x + J_y] + \frac{1}{2} [J_x - J_y] \cos 2\varphi \text{ oraz } J_{uv} = \frac{1}{2} [J_x - J_y] \sin 2\varphi.$$

Te wzory dają wykres *Mohr'a* (Rys. 11). Odkładamy na prostej AB odcinki $AD = J_y$, $AC = J_x$. Na różnicy DC tych odcinków, jako na średnicy, budujemy koło, przyczem $AO = \frac{1}{2} [J_x + J_y]$, gdzie przez O oznaczyliśmy środek koła. Jego promień będzie $R = \frac{1}{2} DC = \frac{1}{2} [J_x - J_y]$. Odkładając od punktu C kąt $\sphericalangle COE = 2\varphi$, prowadzimy średnicę GE i prostopadłe GK i FE do AB . Zatem $OF = R \cos 2\varphi$ i ostatecznie



Rys. 11.

$$AF = AO + OF = \frac{1}{2} [J_x + J_y] + \frac{1}{2} [J_x - J_y] \cos 2\varphi = J_v. —$$

Aby otrzymać J_u należy miasto φ brać $\varphi + \pi/2$, czyli miasto 2φ brać $2\varphi + \pi$, zatem $AK = J_u$. Również mamy $GK = EF = R \sin 2\varphi = \frac{1}{2} [J_x - J_y] \sin 2\varphi = J_{uv}$.

Wyznaczyliśmy więc J_v , J_u , J_{uv} .

Odwrotne zagadnienie również nie nastręcza trudności, możemy bowiem wyznaczyć zawsze J_x , J_y oraz kierunki osi głównych według danych J_v , J_u , J_{uv} , przynależnych do jakiegokolwiek pary osi prostokątnych środkowych. W tym celu odkładamy na prostej AB , począwszy od punktu A odcinki $AF = J_v$ oraz $AK = J_u$, przyczem znów zakładamy, jak wyżej, że $J_v > J_u$. Następnie budujemy prostopadłe do AB odcinki $EF = KG = J_{uv}$. Łączymy E z G i zataczamy promieniem $\frac{1}{2} EG = R$ koło, które wyznaczy na AB punkty C i D . Będziemy przeto mieli $AC = J_x$, $AD = J_y$, a kąt odchylenia osi Ov od Ox określi połowa łuku CE .

Możemy również wyznaczyć J_x , J_y rachunkowo. Z wykresu widzimy, że $AO = \frac{1}{2} [AF + AK] = \frac{1}{2} [J_v + J_u]$, nadto $FO = \frac{1}{2} [AF - AK] = \frac{1}{2} [J_v - J_u]$ oraz $OC = R = \sqrt{FO^2 + FE^2}$, zatem wobec tego, że $J_x = AO + OC$ oraz $J_y = AO - OC$ będziemy mieli dla *momentów głównych*

$$J_x = \frac{1}{2} [J_v + J_u] + \sqrt{\frac{1}{4} [J_v - J_u]^2 + J_{uv}^2},$$

$$J_y = \frac{1}{2} [J_v + J_u] - \sqrt{\frac{1}{4} [J_v - J_u]^2 + J_{uv}^2} \dots (5)$$

Nadto rzut oka na wykres pozwoli nam wyprowadzić nader ciekawą włas-

ność momentów bezwładności przekroju. Ponieważ

$$OA = \frac{1}{2} [J_x + J_y] = \frac{1}{2} [J_v + J_u], \text{ przeto } J_x + J_y = J_v + J_u.$$

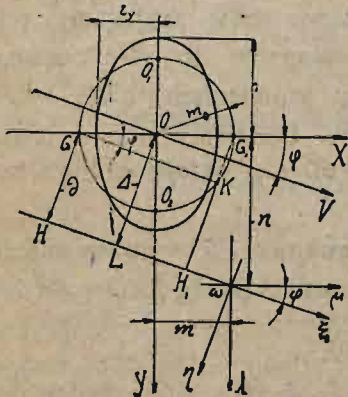
§ 6. Moment biegunowy przekroju. Ten sam wynik możemy również otrzymać, rozpatrując jakikolwiek punkt M przekroju o promieniu wodzącym $OM = \rho$. Współrzędne tego punktu niech będą x, y . Będziemy mieli przeto $\rho^2 = x^2 + y^2$. Weźmy nadto pod uwagę jakikolwiek inny układ prostokątnych osi środkowych Ov, Ou . Spółrzędne punktu M dla tych nowych osi będą odpowiednio v, u , przyczem znowu $\rho^2 = v^2 + u^2$. Stąd $x^2 + y^2 = v^2 + u^2 = \rho^2$. Ponieważ $dF = dx dy$, lub też $dF = dv du$, albo $dF = \rho d\rho d\theta$, gdzie przez θ oznaczyliśmy kąt biegunowy, przynależny do punktu M , przeto

$$\int x^2 dF + \int y^2 dF = \int v^2 dF + \int u^2 dF = \int \rho^2 dF$$

co daje bezpośrednio $J_x + J_y = J_v + J_u = J_0$, gdzie przez $J_0 = \int \rho^2 dF$ oznaczyliśmy *moment biegunowy przekroju*.

Stąd wnioskujemy, że *suma momentów bezwładności, przynależnych do dwu prostokątnych osi środkowych jest wielkością stałą, niezależną od kierunku osi i daje wartość momentu biegunowego przekroju.*

§ 7. Osie mimośrodkowe. Weźmy pod uwagę osie prostokątne mimośrodkowe $\omega\xi, \omega\eta$, wyprowadzone z dowolnego punktu ω . Oznaczmy przez m, n spółrzędne tego punktu (rys. 12) w układzie osi głównych



Rys. 12.

OX, OY środkowych przekroju i poprowadźmy przezeń osie $\omega\mu, \omega\lambda$, równoległe do osi głównych OX, OY . Kąt nachylenia osi $\omega\xi$ ku $\omega\mu$ niech będzie φ ; nadto przez J_x, J_y oznaczmy główne momenty przekroju, przez $J_\mu, J_\lambda, J_\xi, J_\eta$ — momenty bezwładności mimośrodkowe względem osi $\omega\mu, \omega\lambda, \omega\xi, \omega\eta$, wreszcie przez $J_{\mu\lambda}, J_{\xi\eta}$ odnośne momenty odśrodkowe. Na mocy wzorów przejścia $\xi = \mu \cos \varphi + \lambda \sin \varphi, \eta = -\mu \sin \varphi + \lambda \cos \varphi$ otrzymamy

$$J_\xi = \int \eta^2 dF = \int [\mu \sin \varphi - \lambda \cos \varphi]^2 d\mu d\lambda = \\ = J_\mu \sin^2 \varphi + J_\lambda \cos^2 \varphi - J_{\mu\lambda} \sin 2\varphi,$$

$$J_\eta = \int \xi^2 dF = \int [\mu \cos \varphi + \lambda \sin \varphi]^2 d\mu d\lambda = J_\mu \cos^2 \varphi + J_\lambda \sin^2 \varphi + J_{\mu\lambda} \sin 2\varphi,$$

$$J_{\xi\eta} = \int \xi \eta dF = \int [\mu \cos \varphi + \lambda \sin \varphi] [-\mu \sin \varphi + \lambda \cos \varphi] d\mu d\lambda = \\ = \frac{1}{2} [J_\mu - J_\lambda] \sin 2\varphi + J_{\mu\lambda} \cos 2\varphi.$$

Zupełnie podobne wzory mieliśmy wyżej dla osi środkowych, powtarzając przeto słowo w słowo szereg rozumowań, możemy wypowiedzieć następujący uogólniony wniosek: *istnieją zawsze dwa wzajemnie prostopadłe kierunki, odpowiadające największości i najmniejszości momentów bezwładności przekroju, branych dla osi mimośrodkowych. Te skrajne wartości przynależą do osi mimośrodkowych prostokątnych, dla których moment odśrodkowy ma wartość równą zeru.*

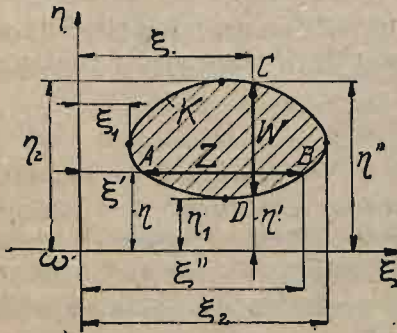
Chcąc wyznaczyć kierunek tych osi, należy znaleźć odnośny kąt φ z równania $\operatorname{tg} 2\varphi = 2 J_{\mu\lambda} : [J_\lambda - J_\mu]$. Osie prostokątne w ten sposób wyznaczone zwiemy *osiami głównymi mimośrodkowymi*, a przynależne do nich *skrajne momenty bezwładności momentami głównymi mimośrodkowymi*, przyczem niewątpliwie i tu znów: *główne momenty bezwładności mimośrodkowe całkowicie określają rodzaj zmienności momentu bezwładności, branego względem dowolnej osi mimośrodkowej*. I tu przeto możemy wyznaczyć *elipsę bezwładności mimośrodkową*, która w szczególnym wypadku może przejść w *koło*. Obie te krzywe mają podobne własności. I tu wykres *Mohr'a* oddaje cenne usługi, ułatwiając wyliczanie momentów.

§ 8. Punkty obojętne przekroju. *Punkt przekroju, przynależny do koła bezwładności, mimośrodkowego, zwiemy obojętnym.* Dla takiego punktu $J_\xi = J_\eta = J_\mu = J_\lambda = J$. Z tych warunków wypływa również $J_{\mu\lambda} = J_{\xi\eta} = 0$ na mocy tylko co wyprowadzonych wzorów. Oznaczmy współrzędne punktu obojętnego przez $m_0 n_0$ w układzie osi głównych środkowych OX, OY . Ponieważ niewątpliwie $J_\mu = J_x + F n_0^2$, $J_\lambda = J_y + F m_0^2$ oraz $J_{\mu\lambda} = F m_0 n_0$, przeto dla punktu obojętnego $J_x + F n_0^2 = J_y + F m_0^2$ czyli $i_x^2 + n_0^2 = i_y^2 + m_0^2$ oraz $m_0 n_0 = 0$. Niech będzie dajmy na to $i_x > i_y$ czyli $J_x > J_y$. W tym wypadku $n_0 = 0$ oraz $m_0 = \pm \sqrt{i_x^2 - i_y^2}$. Aby wykreślić otrzymane w ten sposób punkty obojętne, zataczamy ze środka przekroju koło, przechodzące przez ogniska elipsy środkowej. To *koło ogniskowe* wyznaczy na drugiej osi punkty obojętne przekroju. Z łatwością można to spostrzedz, zważywszy, że odległość ogniskowa wynosi $\sqrt{i_x^2 - i_y^2}$ w wypadku gdy $i_x > i_y$. Dla przekroju obojętnego $m_0 = n_0 = 0$ oba punkty obojętne leżą w środku przekroju.

Istnieją zawsze dwa punkty obojętne, leżące na prostej, przechodzącej przez małą oś środkowej elipsy bezwładności w odległości ogniskowej od środka przekroju; panuje w nich stała wartość momentów bezwładności mimośrodkowych oraz zerowa wartość momentu odśrodkowego dla wszelkich osi prostokątnych, przez te punkty przechodzących. Dla przekrojów obojętnych istnieje tylko jeden punkt obojętny — środek przekroju.

Punkty obojętne umożliwiają wyznaczanie momentów bezwładności mimosrodkowych. Prowadzimy (Rys. 12) oś OV pod kątem φ do osi OX , a wtedy dla tej osi $J_v = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi = F(i_x^2 \cos^2 \varphi + i_y^2 \sin^2 \varphi) = F[i_x^2 - (i_x^2 - i_y^2) \sin^2 \varphi] = F[i_x^2 - m_0 \sin^2 \varphi]$. Ponieważ osie OV i $\omega\xi$ są równoległe, przeto $J_\xi = J_v + F\Delta^2$, gdzie Δ oznacza odległość OL środka przekroju od osi $\omega\xi$. Stąd $J_\xi = F[i_x^2 + \Delta^2 - m_0 \sin^2 \varphi] = F[i_x^2 + (\Delta + m_0 \sin \varphi)(\Delta - m_0 \sin \varphi)]$. Poprowadzmy z punktów obojętnych G i G_1 odcinki $GH = \delta$ i $G_1H_1 = f$ prostopadłe do osi $\omega\xi$ oraz $GK \parallel \omega\xi$. Ponieważ niewątpliwie kąt $G_1GK = \varphi$, przeto $\delta = \Delta - m_0 \sin \varphi$ oraz $f = \Delta + m_0 \sin \varphi$ i ostatecznie $J_\xi = F[i_x^2 + fd]$.

§ 9. Momenty przekrojów wypukłych. Nazywamy przekrój wypukłym, gdy jakakolwiek prosta przecina jego obwód w dwu punktach. Weźmy pod uwagę przekrój wypukły (Rys. 13). Zgodnie z założeniem



Rys. 13.

wszelka prosta, w odległości η równoległe do osi $\omega\xi$ poprowadzona, przetnie obwód przekroju w punktach $A(\xi', \eta)$ i $B(\xi'', \eta)$, a prosta w odległości ξ równoległe do osi $\omega\eta$ poprowadzona da punkty przecięcia obwodu $C(\xi, \eta')$ i $D(\xi, \eta'')$. Oznaczmy skrajne współrzędne obwodu, równoległe do $\omega\xi$ przez ξ_1 i ξ_2 , a równoległe do $\omega\eta$ przez η_1 i η_2 , przyczem musi być oczywiście $\xi_2 \geq \xi \geq \xi_1$ oraz $\eta_2 \geq \eta \geq \eta_1$. W tym założeniu mamy bezpośrednio

$$\int \xi^m \eta^n dF = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^m d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} \eta^n d\eta \quad \int \xi^m \eta^n dF = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^n d\eta \int_{\xi'}^{\xi''} \xi^m d\xi \quad (6)$$

Tutaj obie wartości η' i η'' są w ogólnym wypadku zależne od ξ i otrzymane być mogą jako pierwiastki równania obwodu $K(\xi, \eta) = 0$, rozwiązanego względem η . Rozwiązując to samo równanie względem ξ otrzymamy ξ' i ξ'' w funkcji η . Nadto skrajne wartości ξ_1 i ξ_2 otrzymamy, jako pierwiastki stałe równania, które wyznaczymy, rugując η z równań

$$K(\xi, \eta) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0.$$

Podobnie wartości η_1 i η_2 otrzymamy jako pierwiastki stałe równania, które wyznaczymy, rugując tym razem ξ z równań

$$K(\xi, \eta) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial K(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0.$$

Gdy $m = 0$, a więc dla F, F_{ξ}, J_{ξ} będziemy mieli

$$\int \eta^n dF = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta^n d\eta \int_{\xi'}^{\xi''} d\xi = \int_{\eta_1}^{\eta_2} [\xi'' - \xi'] \eta^n d\eta = \int_{\eta_1}^{\eta_2} Z \eta^n d\eta \dots (7).$$

Całkę tę wyznaczmy z łatwością, wyraziwszy $z = \xi'' - \xi' = AB$ w zależności od η . Gdy z kolei $\eta = 0$, a więc dla F, F_{η}, J_{η} będziemy mieli znowu:

$$\int \xi^m dF = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \xi^m d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta = \int_{\xi_1}^{\xi_2} [\eta'' - \eta'] \xi^m d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} W \xi^m d\xi \dots (8)$$

gdzie należy oczywiście wyznaczyć $w = \eta'' - \eta' = CD$ w funkcji od ξ , aby móc całkować. Tylko co wyprowadzone wzory stanowią nieraz dość znaczne ułatwienie przy wyznaczaniu momentów, należy jeno przekrój dzielić na składowe przekroje wypukłe.

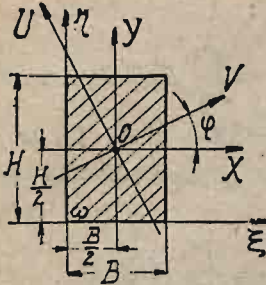
§ 10. Momenty przekrojów rzutowanych. Rzucając wszystkie punkty przekroju na daną płaszczyznę otrzymamy przekrój rzutowany. Momenty przekroju rzutowanego zależą od momentów przekroju macierzystego. Aby to udowodnić, ułożmy oś $\omega\xi$ na prostej przecięcia się płaszczyzn obu przekrojów. W dowolnym punkcie ω tej osi poprowadzimy oś prostopadłą $\omega\eta$, w płaszczyźnie przekroju macierzystego leżąca i oś $\omega\eta_1$ w płaszczyźnie jego rzutu. W ten sposób oś $\omega\eta_1$ będzie rzutem osi $\omega\eta$, przyczem pierwotne spółrządne η zmieniają się w rzucie w jednakowym stosunku, przechodząc w rzuty η_1 . Zatem $\eta_1 = \eta \cos \alpha$, gdzie przez α oznaczyliśmy kąt, jaki tworzą osie $\omega\eta$ i $\omega\eta_1$. Stąd również $d\eta_1 = \cos \alpha d\eta$, cały bowiem przekrój macierzysty wydłuży się w rzucie jednostajnie w kierunku prostopadłym do osi $\omega\xi$, przyczem jednak wszystkie jego odcięte ξ pozostaną niezmienione. Wobec $\xi_1 = \xi$ możemy tedy napisać w ogólnym wypadku:

$$\int \xi_1^m \eta_1^n d\xi_1 d\eta_1 = \cos^{n+1} \alpha \int \xi^m \eta^n d\xi d\eta = \cos^{n+1} \alpha \int \xi^m \eta^n dF \dots (9)$$

Moment przekroju rzutowanego równy jest odnośnemu momentowi przekroju macierzystego, pomnożonemu przez $[\cos \alpha]^{n+1}$.

§ 11. Przykłady i ćwiczenia. 1^o. Przekrój prostokątny. Oznaczmy przez H wysokość, przez B podstawę prostokąta (rys. 14). Przez środek przekroju O prowadzimy $OX \parallel B$ i $OY \parallel H$. Jako wzajemnie prostopadłe dwie osie symetrii przekroju, stanowią one układ osi głównych. Dla tych osi $F_x = F_y = J_{xy} = 0$. Wyznaczmy pozostałe momenty. W tym celu wypisujemy równanie obwodu

$$\Lambda(x, y) = \left[y^2 - \frac{H^2}{4} \right] \left[x^2 - \frac{B^2}{4} \right] = 0,$$



Rys. 14.

czyli łączne równanie czterech prostych

$$y = \frac{H}{2}, y = -\frac{H}{2}, x = \frac{B}{2}, x = -\frac{B}{2}.$$

Da ono po rozwiązaniu względem y granice całkowania

$$y'' = \frac{H}{2}, y' = -\frac{H}{2}$$

w danym wypadku zupełnie niezależne od zmiennej x . Aby z kolei wyznaczyć granice całkowania po tej zmiennej, bierzemy

$$\frac{\partial K(xy)}{\partial y} = 2y = 0$$

i tę wartość podstawiamy w równanie obwodu. Jako wynik wyrugowania y otrzymamy

$$x^2 = \frac{B^2}{4} \text{ stąd } x_1 = -\frac{B}{2}, x_2 = \frac{B}{2}$$

zatem

$$J_x = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dx \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} y^2 dy = \frac{1}{12} BH^3, J_y = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dy = \frac{1}{12} B^3 H \dots \dots \dots (10).$$

Dla osi jakiegokolwiek OV pochylonej pod kątem φ ku osi głównej OX będziemy mieli

$$J_v = J_x \cos^2 \varphi + J_y \sin^2 \varphi = \frac{BH}{12} [H^2 \cos^2 \varphi + B^2 \sin^2 \varphi],$$

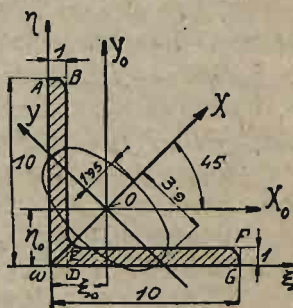
a dla prostopadłej OU podobnie: $J_u = J_x \sin^2 \varphi + J_y \cos^2 \varphi = \frac{BH}{12} [H^2 \sin^2 \varphi + B^2 \cos^2 \varphi]$ Nadto $J_{uv} = \frac{1}{2} [J_x - J_y] \sin 2\varphi = \frac{1}{24} BH [H^2 - B^2] \sin 2\varphi.$

Dla jakichkolwiek innych osi równoległych do głównych, lecz odległych o ξ_0, η_0 od środka mamy wartości momentów $J_\xi = J_x + F\eta_0^2$, $J_\eta = J_y + F\xi_0^2$, $J_{\xi\eta} = F\xi_0\eta_0$. Dla osi wierzchołkowych nadto $\xi_0 = \frac{B}{2}$, $\eta_0 = \frac{H}{2}$ zatem $J_\xi = \frac{1}{12} BH^3 + \frac{1}{4} BH^3 = \frac{1}{3} BH^3$, $J_\eta = \frac{1}{12} B^3 H + \frac{1}{4} B^3 H = \frac{1}{3} B^3 H$, $J_{\xi\eta} = \frac{1}{4} B^2 H^2$. Nadto oczywiście $F_\xi = \eta_0 F = \frac{1}{2} BH^2$ oraz $F_\eta = \xi_0 F = \frac{1}{2} BH^2$.

Chcąc wyznaczyć elipsę środkową przekroju określamy wartość

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \frac{H}{\sqrt{12}}, i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{B}{\sqrt{12}}.$$

2°. **Kątownik równoramienny.** Bierzemy pod uwagę przekrój kątownika równoramiennego № 10. Pomijając drobne zaokrąglenia, wyznaczmy jego momenty przekroju, a nadto podamy w nawiasach [—] ściśłą ich tabliczną wartość, jaką otrzymalibyśmy, biorąc pod uwagę zaokrąglenia. Przedewszystkiem wyznaczmy środek O przekroju (rys. 15). Pole przekroju $F = 10 \times 1 + 9 \times 1 = 19 \text{ cm}^2$ [19,2], przy-



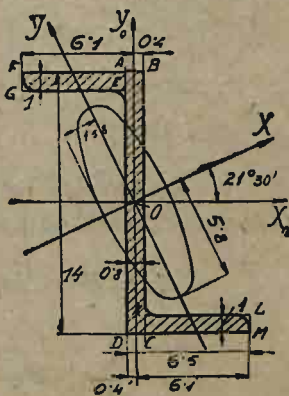
Rys 15.

czem rozpatrujemy przekrój, jako złożony z dwu prostokątów $AB\omega D$ i $DEFG$. Podział ten i nadal utrzymamy przy wyznaczaniu momentów. Dla osi wierzchołkowych, idących wzdłuż pasów ωA i ωG , będziemy mieli $F_{\xi} = 1 \times 10 \times 5 + 1 \times 9 \times 0,5 = 54,5 \text{ cm}^3$, a więc spólrzędna środka $\eta_0 = F_{\xi} : F = 2,87 \text{ cm}$. [2,82]. Ponieważ mamy tu do czynienia z przekrojem równoramiennym, posiadającym oś symetrii ωX , pochyloną ku $\omega \xi$ pod kątem 45° , przeto na mocy symetrii $\eta_0 = \xi_0 = 2,87 \text{ cm}$. Nadto $J_{\xi} = \frac{1}{3} \times 1 \times 10^3 + \frac{1}{3} \times 9 \times 1^3 = 336,3 \text{ cm}^4$

Prowadząc przez środek osie OX_0, OY_0 równoległe do wierzchołkowych, mamy $J_{x_0} = J_{\xi} - F\eta_0^2 = 336,3 - 19 \times 2,87^2 = 179,8 \text{ cm}^4$ [177], przy czem na mocy symetrii $J_{y_0} = J_{x_0} = 179,8 \text{ cm}^4$. Zatem we wzorze dla $\tan 2\alpha$ mianownik będzie równy zeru, co da $\alpha = 45^\circ$, o ile $J_{x_0 y_0} \neq 0$. Należy to sprawdzić, inaczej bowiem, przy $J_{x_0 y_0} = 0$ mielibyśmy miasto elipsy — koło bezwładności środkowe. Mamy $J_{\xi \eta} = 1 \times 10 \times 5 \times 0,5 + 1 \times 9 \times 0,5 \times 5,5 = 49,8 \text{ cm}^4 = J_{x_0 y_0} - F\xi_0 \eta_0$. Stąd $J_{x_0 y_0} = 49,8 - 19 \times 2,87^2 = -106,7 \text{ cm}^4$ i ostatecznie $J_x = J_{x_0} \cos^2 45^\circ + J_{y_0} \sin^2 45^\circ - J_{x_0 y_0} \sin 90^\circ = 179,8 + 106,7 = 286,5 \text{ cm}^4$ [280]. Momentu J_y można nie wyliczać, ponieważ $J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0} = 2 \times 179,8 \text{ cm}^4$, a zatem $J_y = 359,6 - 286,5 = 73,1 \text{ cm}^4$ [73,3]. Nadto z łatwością znajdziemy $i_x = 3,88 \text{ cm}$. [3,82] oraz $i_y = 1,96 \text{ cm}$. [1,95], będziemy więc mogli wykreślić odnośną elipsę.

3°. **Zetownik.** Choć przekrój zetownika nie ma osi symetrii,

to jednak od razu spostrzec się daje, że jego środek (rys. 16) leży w punkcie O , na połowie wysokości środnika $ABCD$. Środkową oś OX_0 prowadzimy przez oś środnika, drugą oś OY_0 kierujemy prostopadłe i rozpatrujemy przekrój, jako złożony z trzech prostokątów $AEGF, ABCD$ i $CKLM$. Pomijając drobne zaokrąglenia mamy przeto $J_{x_0} = \frac{1}{12} \times 0,8 \times 14^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 5,7 \times 1^3 + 2 \times 5,7 \times 1 \times 6,5^2 = 665,5 \text{ cm}^4$ [676], $J_{y_0} = \frac{1}{12} \times 14 \times 0,8^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 5,7^3 + 2 \times 5,7 \times 1 \times [0,4 + \frac{1}{2} \times 5,7]^2 = 151,9 \text{ cm}^4$ [148] Nadto, ponieważ moment odśrodkowy środnika jest oczywiście zerem dla osi OX_0, OY_0 , przeto należy jeno wy-



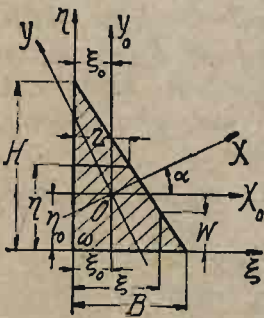
Rys. 16.

znaczyć momenty odśrodkowe obu bocznych prostokątów, aby otrzymać $J_{x_{y_0}}$. Oznaczmy przez ξ_0, η_0 spólrzędne środków owych prostokątów. Moment odśrodkowy każdego z nich będzie $F_0 \xi_0 \eta_0$, gdzie F_0 oznacza pole prostokąta bocznego. Zatem $J_{x_{y_0}} = 5,7 \times 1 \times [7 - 0,5] \times [-3,25] + 5,7 \times 1 \times [-6,5] \times 3,25 = -240,8 \text{ cm}^4$ [239]. Stąd $\operatorname{tg} 2\alpha = 2J_{x_{y_0}} : [J_{y_0} - J_{x_0}] = -2 \times 240,8 : [151,9 - 665,5] = 0,9377$, co daje $\alpha = 21^\circ 30' [21^\circ 5']$. Oś główna OX , pod tym kątem poprowadzona i prostopadła do niej OY wyznacza momenty: $J_x = J_{x_0} \cos^2 \alpha + J_{y_0} \sin^2 \alpha - J_{x_{y_0}} \sin 2\alpha = 665,5 \times 0,9304^2 + 151,9 \times 0,3665^2 + 240,8 \times 0,6820 = 760,7 \text{ cm}^4$ [768]. Ponieważ $J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0} = 817,4 \text{ cm}^4$, przeto $J_y = 817,4 - 760,7 = 56,7 \text{ cm}^4$ [56,4].

Wreszcie by wyznaczyć elipsę bezwładności środkową, określamy pole przekroju $F = 14 \times 0,8 + 2 \times 1 \times 5,7 = 22,6 \text{ cm}^2$ [22,9] skąd bez trudu znajdziemy $i_x = 5,80 \text{ cm}$ [5,79] oraz $i_y = 1,58 \text{ cm}$ [1,57], co da odnośną elipsę.

W praktyce przeważnie przekroje złożone są z prostokątów. Powyższe dwa przykłady wskazują, jak wyznaczać momenty takich przekrojów. Czasami spotykamy jednak składowe przekroju—trójkąty lub trapezy. Trapez możemy zawsze rozłożyć na prostokąt i dwa trójkąty prostokątne, a trójkąt na dwa trójkąty prostokątne, chcąc przeto rozszerzyć zakres naszych badań należy wziąć pod uwagę:

4°. Trójkąt prostokątny. Wierzchołkową oś $\omega\xi$ prowadzimy przez podstawę B trójkąta—drugą oś $\omega\eta$ przez wysokość H . Przeciwprostokątna odetnie na osiach odcinki B i H . Z łatwością (rys. 17) daje się tu zauważyć, iż $\xi_1 = 0, \xi_2 = B, \eta_1 = 0, \eta_2 = H$, a nadto $\xi' = 0, \xi'' = Z, \eta' = 0, \eta'' = W$, jak to zresztą najlepiej widać z rysunku. Ponieważ z góry wiemy, gdzie szukać środka przekroju, przeto odrazu wyznaczamy te momenty, które posłużą do określenia kąta α ; a więc



Rys. 17.

$$J_{\xi} = \int_0^H \eta^2 d\eta \int_0^Z d\xi = \int_0^H Z \eta^2 d\eta,$$

$$J_{\eta} = \int_0^B \xi^2 d\xi \int_0^W d\eta = \int_0^B W \xi^2 d\xi,$$

$$J_{\xi\eta} = \int_0^H \eta d\eta \int_0^Z \xi d\xi = 1/2 \int_0^H Z^2 \eta d\eta.$$

Z podobieństwa trójkątów z łatwością ustalimy następujące proste zresztą zależności $Z : B = [H - \eta] : H, W : H = [B - \xi] : B$ skąd

$$Z = B - \frac{B}{H} \eta \text{ oraz } W = H - \frac{H}{B} \xi \text{ i ostatecznie:}$$

$$J_{\xi} = \int_0^H [B - \frac{B}{H} \eta]^2 \eta^2 d\eta = 1/12 B H^3, \quad J_{\eta} = \int_0^B [H - \frac{H}{B} \xi]^2 \xi^2 d\xi = 1/12 B^3 H,$$

$$J_{\xi\eta} = \frac{1}{2} \int_0^H \left[B - \frac{B}{H} \eta \right]^2 \eta d\eta = \frac{1}{24} B^2 H^2.$$

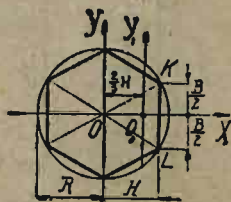
Ponieważ spólrzędne środka przekroju są $\xi_0 = \frac{B}{3}$, $\eta_0 = \frac{H}{3}$, przeto dla osi OX_0 , OY_0 , środkowych a równoległych będziemy mieli $J_{x_0} = J_{\xi} - F\eta_0^2 = \frac{1}{12} BH^2 - \frac{1}{2} BH \times \frac{1}{9} H^2 = \frac{1}{36} BH^2$, $J_{y_0} = J_{\eta} - F\xi_0^2 = \frac{1}{12} B^3H - \frac{1}{2} BH \times \frac{1}{9} B^2 = \frac{1}{36} B^3H$, $J_{x_0y_0} = J_{\xi\eta} - F\xi_0\eta_0 = \frac{1}{24} B^2H^2 - \frac{1}{2} BH \times \frac{H}{3} \times \frac{B}{3} = -\frac{1}{72} B^2H^2$. Stąd $I_{g^2\alpha} = 2J_{x_0y_0} : [J_{y_0} - J_{x_0}] = -\frac{2}{72} B^2H^2 : \frac{1}{36} BH [B^2 - H^2] = BH : [H + B] [H - B]$ i ostatecznie na mocy wzorów ogólnych będziemy mieli dla momentów głównych:

$$J_x = \frac{1}{2} [J_{x_0} + J_{y_0}] + \sqrt{\frac{1}{4} [J_{x_0} - J_{y_0}]^2 + J_{x_0y_0}^2} = \\ = \frac{HB}{72} [H^2 + B^2 + \sqrt{[H^2 - B^2]^2 + H^2B^2}].$$

$$J_y = \frac{1}{2} [J_{x_0} + J_{y_0}] - \sqrt{\frac{1}{4} [J_{x_0} - J_{y_0}]^2 + J_{x_0y_0}^2} = \\ = \frac{HB}{72} [H^2 + B^2 - \sqrt{[H^2 - B^2]^2 + H^2B^2}],$$

z których bezpośrednio wyznaczymy również i i_x , i_y .

5°. Wielobok prawidłowy. Tego rodzaju przekroje, jako posiadające więcej niż dwie osie symetrii, należą do przekrojów obojętnych. Wystarcza przeto wyznaczyć ich moment bezwładności dla jakiegokolwiek osi środkowej OX . Aby to uskutecznić, dzielimy przekrój (rys. 18) na n trójkątów, odpowiednio do n boków wielokąta, za pomocą n promieni wierzchołkowych. Weźmy pod uwagę jeden z tych trójkątów OKL ; oś środkową OX skierujmy prostopadłe do boku B — podstawy trójkąta. Wysokość jego niech będzie H . Promień koła opisanego $R = OK = OL = \sqrt{H^2 + \frac{1}{4}B^2}$. Na mocy wzorów, wyżej wyprowadzonych, moment trójkąta OKL względem osi OX będzie



Rys. 18.

$J' = 2 \times \frac{1}{12} \times H \times \left[\frac{B}{2} \right]^2 = \frac{1}{48} HB^3$, a względem osi O_1Y_1 , przechodzącej przez środek O_1 trójkąta OKL , będzie

$$J_1 = 2 \times \frac{1}{36} \times H^3 \times \frac{B}{2} = \frac{1}{36} BH^3.$$

Ponieważ oś OY wierzchołkowa jest równoległa do środkowej osi O_1Y_1 , przeto dla tej osi moment bezwładności

$$J'' = J_1 + F \times OO_1^2 = \frac{1}{36} BH^3 + \frac{1}{2} BH \times \left[\frac{2}{3} H \right]^2 = \frac{1}{4} BH^3.$$

Nazwijmy wierzchołkowym momentem biegunowym trójkąta tylko co rozpatrywanego moment $J_w = J' + J'' = \frac{1}{48} HB^3 + \frac{1}{4} BH^3$.

Z łatwością postrzec się daje, że moment biegunowy przekroju $J_o = nJ_w = J_x + J_y$. Ponieważ jednak dla przekroju obojętnego $J_x = J_y = J$ przeto

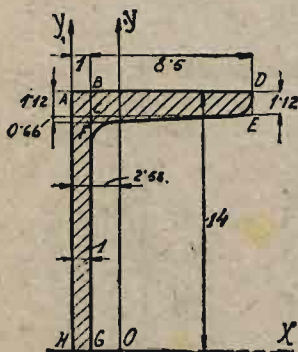
$$J = \frac{1}{2} J_o = \frac{n}{2} J_w = \frac{n}{2} BH \left[\frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{4} H^2 \right] = F \left[\frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{4} H^2 \right] = \\ = \frac{F}{4} \left[H^2 + \frac{B^2}{12} \right] = \frac{F}{4} [R^2 - \frac{1}{6} B^2],$$

gdzie przez F oznaczyliśmy pole wieloboku. Dla sześciokąta dajmy na to mamy $B = R$, a przeto $J = \frac{5}{24} FR^2 = \frac{5}{16} \sqrt{3} R^4$.

Nader ciekawy wypadek otrzymamy gdy $B = 0$, wtedy bowiem wielobok przechodzi w koło. Dla tego przekroju będzie więc

$$J = \frac{1}{4} FR^2 = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

6°. Ceownik. Bierzemy pod uwagę przekrój ceownika № 28 (podany na rys. 19). Pomijamy drobne zaokrąglenia i wyznaczamy jego momenty, pisząc w nawiasach ścisłą ich tabliczną wartość, jaką otrzymalibyśmy, uwzględniając owe zaokrąglenia w przekroju. Wobec zupełnej symetrii przekroju bierzemy pod uwagę jeno połowę, ponad osią symetrii HX leżącą, która jest oczywiście wobec tego osią główną przekroju. Chcąc wyznaczyć momenty, dzielimy przekrój na dwa prostokąty $ABGH$, i $BDEC$ oraz trójkąt ECF .

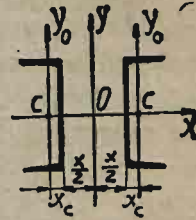


Rys. 19.

Przedewszystkiem wyznaczamy pole przekroju, nie znamy bowiem położenia jego środka O . Połowa pola $\frac{1}{2}F = 1 \times 14 + 8,5 \times 1,12 + \frac{1}{2} \times 8,5 \times 0,66 = 26,3 \text{ cm}^2$. Stąd $F = 52,6 \text{ cm}^2$ [53,3]. Chcąc dalej znaleźć moment statyczny przekroju względem osi HY_1 , biegnącej wzdłuż środniaka, piszemy sumę odnośnych momentów: $F_1 = 2 \times 14 \times 1 \times 0,5 + 2 \times 8,5 \times 1,12 [1 + 0,5 \times 8,5] + 2 \times \frac{1}{2} \times 8,5 \times 0,66 \times [1 + \frac{1}{3} \times 8,5] = 135,7 \text{ cm}^3$.

Stąd spórzędna środka przekroju $HO = F_1 : F = 2,58 \text{ cm}$ [2,53]. Przez wyznaczony w ten sposób środek O prowadzimy drugą oś główną OY . A zatem dla momentów głównych będziemy mieli: $J_x = 2 \times [\frac{1}{3} \times 1 \times 14^3 + \frac{1}{12} \times 8,5 \times 1,12^3 + 8,5 \times 1,12 \times (14 - 0,5 \times 1,12)^2 + \frac{1}{36} \times 8,5 \times 0,66^3 + \frac{1}{2} \times 8,5 \times 0,66 \times (14 - 1,12 - \frac{1}{3} \times 0,66)^2] = 6251,2 \text{ cm}^4$ [6276], $J_y = 2 \times [\frac{1}{12} \times 14 \times 1^3 + 14 \times 1 \times (2,58 - 0,5)^2 + \frac{1}{12} \times 1,12 \times 8,5^3 + 8,5 \times 1,12 \times (1 + \frac{1}{2} \times 8,5 - 2,58)^2 + \frac{1}{36} \times 0,66 \times 8,5^3 + \frac{1}{2} \times 0,66 \times 8,5 \times (1 + \frac{1}{3} \times 8,5 - 2,58)^2] = 405,2 \text{ cm}^4$ [399]. Dalej mamy $i_x = 10,84 \text{ cm}$ [1085] oraz $i_y = 2,77 \text{ cm}$ [2,74].

7°. Przekrój dwuceownikowy. Dwa równoległe ceowniki dają przekrój dwuceownikowy (Rys. 20). Wyznaczmy jego momenty w założeniu ceowników № 22, ustawionych średnikami ku sobie w odległości x cm, jak to zresztą najlepiej uwypukla rysunek. Środek przekroju złożonego, wytworzonego w ten sposób leży oczywiście na osi symetrii OY równoległe do obu średników poprowadzonej w odległości $\frac{1}{2}x$ od obu ceowników. Druga oś symetrii OX prostopadła do obu średników, przechodzi przez środki C obu składowych ceowników przekroju. Są to niewątpliwie główne osie przekroju złożonego, jako osie symetrii. Korzystając z tablic, wyznaczamy momenty główne przekroju. W tym celu przez oba środki C ceowników prowadzimy osie CY_0 prostopadłe do OX . Otrzymane w ten sposób osie CX , CY_0 stanowią układ osi głównych ceownika. Dla tych osi tablice ceowników podają $J_{xc} = 2690 \text{ cm}^4$ $J_{yc} = 197 \text{ cm}^4$. Nadto pole ceownika $F = 37,4 \text{ cm}^2$, a odległość środka ceownika C od ścianki zewnętrznej średnika $x_c = 2,14 \text{ cm}$. Tyle nam dają tablice. Zatem dla złożonego przekroju mamy $J_x = 2 J_{xc} = 5380 \text{ cm}^4$ $J_y = 2 J_{yc} + 2 F [\frac{1}{2}x + x_c]^2 = 394 + 18,7 [x + 4,28]^2 = [18,7 x^2 + 160 x + 736,6] \text{ cm}^4$.

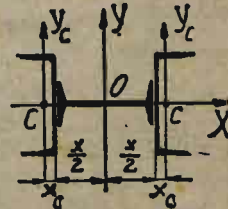


Rys. 20.

Ten wymiar x możemy wyznaczyć dowolnie, to też zazwyczaj obieramy x w taki sposób, aby $J_x = J_y$, to jest aby przekrój był obojętny. To da nam $18,7 x^2 + 160 x + 736,6 = 5380$. Jedyńy dodatni pierwiastek tego równania będzie $x = 12,0 \text{ cm}$. Dla tej szczególnej wartości x będziemy mieli $J_x = J_y = 5380 \text{ cm}^4$.

8°. Przekrój dwuceownikowy ze średnikiem dwuteowym.

Łącząc dwuteownikiem średniki ceowników, otrzymujemy przekrój złożony (Rys. 21) o dwóch osiach symetrii OX , OY , jego osiach głównych. Weźmy pod uwagę, dajmy na to, ceowniki № 20 i dwuteownik № 20. Przez C oznaczamy środek ceownika składowego, przez F_c jego pole, przez x_c odległość środka C od strony zewnętrznej średnika. Prowadząc osie CY_c prostopadłe do OX , będziemy mieli z tablic dla osi głównych CX , CY_c ceowników momenty $J_{xc} = 1911 \text{ cm}^4$ $J_{yc} = 148 \text{ cm}^4$. Również z tablic dla dwuteownika będziemy mieli, zważywszy że osie OX , OY są jego osiami głównymi — momenty $J_{xd} = 117 \text{ cm}^4$ $J_{yd} = 2139 \text{ cm}^4$. Stąd dla całego przekroju $J_x = 2 J_{xc} + J_{xd} = 3939 \text{ cm}^4$. $J_y = 2 J_{yc} + 2 F_c [\frac{1}{2}x + x_c]^2 + J_{yd} = 2 \times 148 + 2 \times 32,2 \times [10 + 2,01]^2 + 2139 = 11724 \text{ cm}^4$, ponieważ tutaj x równe jest wysokości dwuteownika, to jest $x = 20 \text{ cm}$, a $F_c = 32,2 \text{ cm}^2$ i $x_c = 2,01 \text{ cm}$ według tablic.



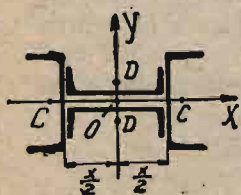
Rys. 21.

9°. Przekrój czterocownikowy. Dwuteownik tylko co roz-

patrywanego przekroju zastępujemy dwoma ceownikami, ustawionymi symetrycznie a równolegle do osi OX . Odległość pomiędzy ściankami zewnętrznymi ich śródników niech będzie $y \geq 0$. Zachowując znakowania poprzedniego przykładu, oznaczamy nadto przez J_{xs} J_{ys} momenty główne ceowników śródnikowych, przez F_s ich pola, a przez y_s — odległość ich środków D od ścianek zewnętrznych śródników. Dla całkowitego przekroju będziemy mieli

$$J_x = 2 J_{xc} + 2 J_{xs} + 2 F_s \left[\frac{1}{2} y + y_s \right]^2,$$

$$J_y = 2 J_{yc} + 2 J_{ys} + 2 F_c \left[\frac{1}{2} x + x_c \right]^2.$$



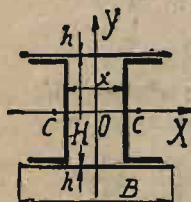
Rys. 22.

Weźmy (Rys. 22) pod uwagę przekrój złożony z czterech ceowników № 20 i załóżmy $y = 2,0$ cm. Dla takiego przekroju $x = 20$ cm, $F_c = F_s = = 32,2$ cm² $x_c = y_s = 2,01$ cm, $J_{xc} = J_{ys} = 1911$ cm⁴ $J_{yc} = J_{xs} = 148$ cm⁴, a przeto

$$J_x = 2 \times 1911 + 2 \times 148 + 2 \times 32,2 [0,5 \times 2 + + 2,01]^2 = 4700,9$$

$$J_y = 2 \times 148 + 2 \times 32,2 [0,5 \times 20 + 2,01]^2 + 2 \times 1911 = 13407$$

10°. Przekrój dwuceownikowy z nakładkami. Nitując obustronnie płaskowniki symetryczne (Rys. 23), wzmacniamy przekrój dwuceownikowy. Aby wyliczyć jego momenty, zachowujemy znakowania poprzednie, a nadto przez H oznaczamy wysokość ceownika składowego, a przez h grubość obu nakładek B szerokich. Szerokość pasów ceownika niech będzie, dajmy na to, b , a wtedy



Rys. 24.

$B = 2b + x + 2 \times 0,5$ cm, nakładki bowiem zazwyczaj na 0,5 cm wystają poza pasy ceowników. Zatem

$$J_x = 2 J_{xc} + 2 \times \frac{1}{12} \times B \times h^3 + 2 Bh \left[\frac{1}{2} H + \frac{1}{2} h \right]^2,$$

$$J_y = 2 J_{yc} + 2 F_c \left[\frac{1}{2} x + x_c \right]^2 + 2 \times \frac{1}{12} h B^3.$$

Weźmy pod uwagę № 22 ceownika i załóżmy, jak w przykładzie siódmym $x = 12$ cm. Niech będzie nadto $h = 1$ cm. Dla takiego ceownika $b = 8$ cm, stąd $B = 29$ cm oraz

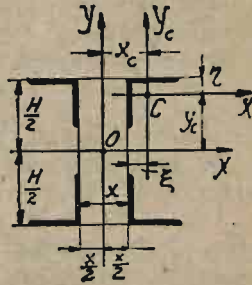
$$J_x = 2 \times 2690 + 2 \times \frac{1}{12} \times 29 \times 1^3 + 2 \times 29 \times 1 \times \left[\frac{1}{2} \times 22 + \frac{1}{2} \right]^2 = = 13055$$

$$J_y = 2 \times 197 + 2 \times 37,4 [0,5 \times 12 + 2,14]^2 + 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 29^3 = 9415$$

cm⁴. Porównyując wartości momentów tu otrzymane z odnośnymi wartościami przykładu siódmego, widzimy, że dodanie nakładek znacznie zwiększa wartość momentów przekroju.

11°. Przekrój czworokątownikowy. Słupy ciężkie mają zazwyczaj przekrój złożony z czterech kątowników, tworzących jakby dwa ceowniki o przerwanym śródniku (Rys. 24). Tego rodzaju przekrój ma oczywiście dwie osie symetrii OX , OY — osie główne przekroju. Oznaczmy przez F_c pole kątownika składowego, przez C jego środek, przez x odległość pomiędzy ściankami zewnętrznymi pasów,

równoległych do OY , przez H — odległość pomiędzy ściankami ze wewnętrznymi pasów, równoległych do OX , wreszcie przez CX_c , CY_c , osie kątownika środkowe, równoległe do OX , OY . W układzie osi OX , OY współrzędne środka c oznaczamy przez x_c , y_c , a wtedy dla przekroju złożonego możemy wypisać momenty główne $J_x = 4J_{xc} + 4F_c y_c^2$, $J_y = 4J_{yc} + 4F_c x_c^2$, gdzie przez J_{xc} , J_{yc} nazwaliśmy momenty bezwładności kątownika względem osi CX_c , CY_c . Wymiar x możemy dobrać tak, aby było $J_x = J_y$, zatem dla obojętnego przekroju winno być $J_{xc} - J_{yc} = F_c (x_c^2 - y_c^2)$.

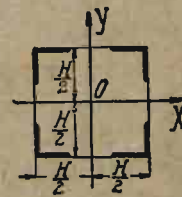


Rys. 24.

Oznaczmy przez ξ odległość środka C kątownika od jego ścianki zewnętrznej, równoległej do osi OY , przez η — odległość środka C od ścianki zewnętrznej, równoległej do OX . Wtedy $x_c = 1/2 x + \xi$, $y_c = 1/2 H - \eta$ zatem mamy $J_{xc} - J_{yc} = F_c [(1/2 x + \xi)^2 - (1/2 H - \eta)^2]$.

Dla kątowników równoramiennech, najczęściej używanych $J_{xc} = J_{yc}$, zatem $1/2 H - \eta = 1/2 x + \xi$, nadto $\xi = \eta$, a przeto $x = H - 4\xi$. Weźmy, jako przykład, przekrój, złożony z czterech kątowników równoramiennech $90 \times 90 \times 9$ i założmy, że $H = 20$ cm. Z tablic mamy $J_{xc} = J_{yc} = 116$ cm⁴, $F_c = 15,5$ cm², $\xi = \eta = 2,54$ cm, a zatem $x = 20 - 4 \times 2,54 = 9,84$ cm. Niech będzie $x = 10$ cm, a wtedy $x_c = 5 + 2,54 = 7,54$ cm, $y_c = 10 - 2,54 = 7,46$ cm, $J_x = 4 \times 116 + 4 \times 15,5 \times 7,46^2 = 3914,4$ cm⁴. $J_y = 4 \times 116 + 4 \times 15,5 \times 7,54^2 = 3988,8$ cm⁴. Drobną różnicę wartości momentów pochodzi stąd, żeśmy nieco zaokrąglili wartość x .

12°. Przekrój czworokątnikowy kwadratowy. Te same momenty główne posiada również odmiana (Rys. 25) przekroju tylko co rozpatrywanego, o czym z łatwością możemy się przekonać wypisując wartości J_x dla tego przekroju. Ponieważ przekrój ten można otrzymać z poprzednio rozpatrywanego, przedstawiając prawą jego część na miejsce lewej, przeto niewątpliwie układ cząsteczek w stosunku do osi OX nie może ulec zmianie. będziemy mieli przeto tę samą wartość dla $J_x = 4J_{xc} + 4F_c y_c^2 = 4J_{xc} + 4F_c [1/2 H - \eta]^2$.



Rys. 25.

Gdy wszystkie kątowniki składowe tego przekroju są równoramienne, wtedy cały przekrój jest obojętny, wtedy bowiem $J_x = J_y$; w przeciwnym razie $J_y = 4J_{yc} + 4F_c x_c^2 = 4J_{yc} + 4F_c [1/2 H - \xi]^2$, przyczem zachowujemy znakowanie przykładu poprzedniego.

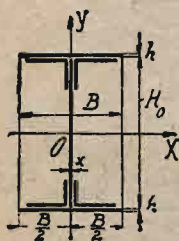
13°. Blachownica dwuteowa. Korzystając ze wzorów tylko co wprowadzonych, z łatwością wyznaczmy momenty przekroju,

złożonego z blachy środkowej H_0 wysokiej, x grubej, oraz dwu pasów blaszanych B szerokich, h grubych, przynitowanych u skrajów środka za pomocą kątowników. W ten sposób wytworzony przekrój ma dwie osie symetrii OX, OY . Aby znaleźć przynależne do nich momenty główne, oznaczamy pole i momenty środka znacznikiem s , dla pasów znacznikiem p i dla kątowników znacznikiem c , a wtedy mamy:

$$J_x = J_{xs} + 2J_{xp} + 2F_p \left[\frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} h \right]^2 + 4J_{xc} + 4F_c \left[\frac{1}{2} H_0 - \eta \right]^2,$$

$$J_y = J_{ys} + 2J_{yp} + 4J_{yc} + 4F_c \left[\frac{1}{2} x + \xi \right]^2.$$

W tych wzorach opieraliśmy się na znakowaniu obu przykładów poprzednich. Weźmy, dajmy na to, (Rys. 26) wysokość środka $H_0 = 50$ cm $x = 1$ cm. U obu jego końców przynitujemy kątowniki $80 \times 120 \times 10$, krótszymi ramionami dotykając środka, a do nich — pasy nieco u boków wystające, a więc, powiedzmy, 28 cm szerokie i 1 cm grube. Tablice kątowników dają $J_{xc} = 98,2$ cm⁴ dla osi środkowej, równoległej do ramienia dłuższego $J_{yc} = 276$ cm⁴ dla osi środkowej, równoległej do pasa krótszego, $\xi = 3,92$ cm odległość środka od ścianki zewnętrznej ramienia krótszego, a $\eta = 1,95$ cm odległość środka od ścianki zewnętrznej ramienia dłuższego; wreszcie $F_c = 19,1$ cm².

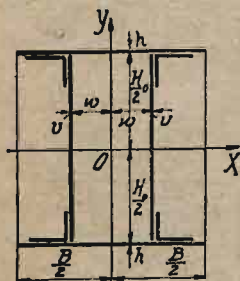


Rys. 26.

Stąd $J_x = \frac{1}{12} \times 1 \times 50^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 28 \times 1^3 + 2 \times 28 \times 1 \times \left[\frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{2} \right]^2 + 4 \times 98,2 + 4 \times 19,1 \times \left[\frac{1}{2} \times 50 - 1,95 \right]^2 = 87819,6$ cm⁴.

$J_y = \frac{1}{12} \times 50 \times 1^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 28^3 + 4 \times 276 + 4 \times 19,1 \times \left[\frac{1}{2} + 3,92 \right]^2 = 6259,5$ cm⁴.

14^o. Blachownica dwuceowa. Dwie równoległe (Rys. 27) blachy pionowe H_0 wysokie, v grube dotykają pasów poprzecznych B szerokich, h grubych, przynitowanych za pośrednictwem kątowników do blach. Całość w ten sposób otrzymana tworzy przekrój złożony o dwu osiach symetrii OX, OY . Korzystając ze znakowania przykładu poprzedniego, z łatwością możemy wyznaczyć momenty główne przekroju. W tym celu oznaczamy przez $2w$ rozstawienie blach środkowych,



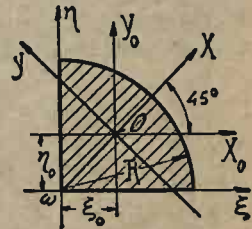
Rys. 27.

Wysokość blach środkowych niech będzie, dajmy na to 50 cm, grubość 1 cm. Do tych blach nitujemy kątowniki $80 \times 120 \times 10$ ramionami krótszemi, a do ich ramion dłuższych — oba pasy, nieco po bokach wystające. Rozstawienie blach środkowych wynosi powiedzmy $2w = 20$ cm zatem szerokość obu pasów $B = 50$ cm, a grubość 1 cm. Stąd, jak dla przykładu tylko co wyżej rozpatrzonego $J_x = 2 \times \frac{1}{12} \times 1 \times 50^3 + 2 \times \frac{1}{12} \times 50 \times 1^3 + 2 \times 50 \times 1 \times \left[\frac{1}{2} \times 50 + \frac{1}{2} \right]^2 + 4 \times 98,2 +$

$$+ 4 \times 19,1 \times [1/2 \times 50 - 1,95]^2 = 126851,0 \text{ cm}^4, J_y = 2 \times 1/12 \times 50 \times 1^3 + 2 \times 50 \times 1 \times [1/2 \times 20 + 1/2]^2 + 2 \times 1/12 \times 1 \times 50^3 + 4 \times 276 + 4 \times 19,1 \times [1/2 \times 20 + 1 + 3,92]^2 = 49977,8 \text{ cm}^4.$$

W obu tylko co rozpatrywanych wypadkach wyznaczyliśmy momenty główne przekroju całkowitego, nie uwzględniając otworów na nity, które nieraz dość znacznie osłabiają przekrój i obniżają wartość momentów. Dla odróżnienia nazywamy przekroje bez potrącania dziur na nity przekrojami brutto. W przekroju dziura na nit stanowi prostokąt — łatwo przeto tę przerwę przekroju uwzględnić, a wtedy otrzymamy przekrój netto.

15°. Czwartka koła. Gdybyśmy chcieli posunąć dalej dokładność naszych wyznaczeń momentów, należałoby brać pod uwagę zaokrąglenia przekrojów, które w większości wypadków stanowią ćwiartki koła. Należy przeto obecnie wyznaczyć momenty dla tego przekroju (Rys. 28), jako składowego wielu innych. Wierzchołek ω kąta prostego ćwiartki obieramy jako biegun osi wierzchołkowych $\omega\xi$, $\omega\eta$. Oś $\omega\xi$ może być nadto rozważana, jako oś biegunowa spółrzednych: ρ — promienia wodzącego oraz θ kąta biegunowego, który będziemy odliczali od osi biegunowej przeciw strzałce zegara. Wtedy $\zeta = \rho \cos\theta$, $\eta = \rho \sin\theta$, a poletko $dF = \rho d\rho d\theta$, jak uczy rachunek nieskończonościowy. A zatem kolejno będziemy mieli:



Rys. 28.

$$F_{\xi} = \int \eta dF = \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{R^3}{3};$$

$$J_{\xi} = \int \eta^2 dF = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right] d\theta = 1/16 \pi R^4 - \frac{R^4}{16} \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d(2\theta) = 1/16 \pi R^4,$$

$$J_{\xi\eta} = \int \xi\eta dF = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = 1/16 R^4 \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d(2\theta) = \frac{R^4}{8},$$

nadto $F = 1/4 \pi R^2$.

Wobec oczywistej symetrii przekroju względem osi ωX , pochylonej ku obu osiom pod kątem 45° , będziemy mieli $F_{\eta} = F_{\xi}$, oraz $J_{\eta} = J_{\xi}$. Współrzedne środka O przekroju będą również jednakowe

$$\xi_0 = \eta_0 = \frac{F_{\eta}}{F} = \frac{F_{\xi}}{F} = \frac{4R}{3\pi}. \text{ Poprowadzimy osie środkowe } OX_0,$$

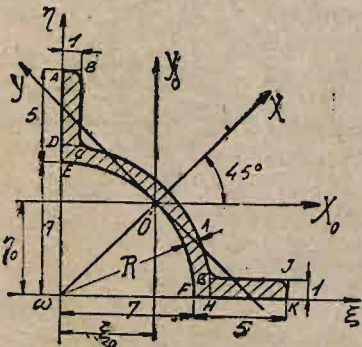
OY_0 równoległe do wierzchołkowych. Dla tych osi będziemy mieli

$$J_{x_0} = J_{\xi} - F\eta_0^2 = 1/16 \pi R^4 - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{16 R^2}{9 \pi^2} = \left[\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right] R^4 = J_{y_0} \text{ oraz}$$

$$\begin{aligned}
 J_{xy_0} &= J_{\xi\eta} - F_{\xi_0\eta_0} = \frac{1}{8} R^4 - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{16R^2}{9\pi^2} = \left[\frac{1}{8} - \frac{4}{9\pi} \right] R^4. \text{ Ponieważ osie główne } OX, OY \text{ tworzą z } OX_0, OY_0 \text{ kąty } 45^\circ, \text{ przeto możemy bezpośrednio napisać, że } J_x = J_{x_0} \cos^2 45^\circ + J_{y_0} \sin^2 45^\circ - \\
 - J_{xy_0} \sin 90^\circ &= \frac{\pi}{16} R^4 - \frac{4R^4}{9\pi} - \frac{R^4}{8} + \frac{4R^4}{9\pi} = \left[\frac{\pi}{2} - 1 \right] \frac{R^4}{8} \quad J_y = \\
 = J_{x_0} \sin^2 45^\circ + J_{y_0} \cos^2 45^\circ + J_{xy_0} \sin 90^\circ &= \frac{\pi}{16} R^4 - \frac{4R^4}{9\pi} + \frac{R^4}{8} - \frac{4R^4}{9\pi} = \\
 = \left[\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi} \right] \times R^4.
 \end{aligned}$$

Jako bezpośrednie zastosowanie wzorów tylko co otrzymanych, bierzemy pod uwagę:

16°. Słupownik. Tak nazywamy (rys. 29) ceownik o średniku zaokrąglonym. Znitowane bokami cztery słupowniki tworzą cylinder z wystającymi listwami podłużnymi. Całość tworzy słup. Stąd nazwa.



Rys. 29.

Wyznamy momenty przekroju, podając obok w nawiasach ściśle tabliczne ich wartości; jak zwykle pomijając będziemy drobne zaokrąglenia. Aby umożliwić zadanie, prowadzimy łuki DC i GH , dzieląc w ten sposób cały przekrój na dwa boczne prostokąty $ABCD$ i $GHJK$, oraz środkową krzywą część $DEFH$. Prowadzimy nadto przez zewnętrzne ścianki pasów osie $\omega\xi$, $\omega\eta$. Dla tych

$$\begin{aligned}
 \text{osi } F_{\xi} = F_{\eta} &= \frac{8^3}{3} - \frac{7^3}{3} + 4 \times 1 \times \\
 &\times [8 + 0,5 \times 4] + 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = 98,3 \text{ cm}^3. \\
 \text{Nadto pole } F &= \frac{1}{4}\pi 8^2 - \frac{1}{4}\pi 7^2 + 2 \times 4 \times \\
 &\times 1 = 19,8 \text{ cm}^2 \text{ [20]}. \text{ Stąd mamy spó-}
 \end{aligned}$$

$$\text{rzedne środka } \xi_0 = \eta_0 = \frac{F_{\xi}}{F} = 4,97 \text{ cm. [4,97]}.$$

Korzystając nadal ze wzorów dla momentów ćwiartki koła, możemy napisać $J_{\xi} = J_{\eta} = \frac{1}{16} \pi 8^4 - \frac{1}{16} \pi 7^4 + \frac{1}{12} \times 1 \times 4^3 + 4 \times 1 \times [8 + 0,5 \times 4]^2 + \frac{1}{12} \times 4 \times 1^3 + 4 \times 1 \times [\frac{1}{2}]^2 = 739,8 \text{ cm}^4$ [745], $J_{\xi\eta} = \frac{1}{8} 8^4 - \frac{1}{8} 7^4 + 4 \times 1 \times [8 + 0,5 \times 4] \times \frac{1}{2} + 4 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 10 = 251,6 \text{ cm}^4$.

Prowadząc równoległe do wierzchołkowych osie OX_0, OY_0 środkowe, będziemy mieli dla nich $J_{x_0} = J_{\xi} - F_{\eta_0}^2 = 739,8 - 19,8 \times 4,97^2 = 250,7 \text{ cm}^4 = J_{y_0}$; $J_{xy_0} = J_{\xi\eta} - F_{\xi_0\eta_0}^2 = 251,6 - 19,8 \times 4,97^2 = -237,5 \text{ cm}^4$. Ponieważ $J_{x_0} = J_{y_0}$ oraz $J_{xy_0} \neq 0$, przeto oś główna OX pochyla się ku osi OX_0 pod kątem 45° . Dla tej osi $J_x = J_{x_0} \cos^2 45^\circ + J_{y_0} \sin^2 45^\circ - J_{xy_0} \sin 90^\circ = \frac{1}{2} [J_{x_0} + J_{y_0}] - J_{xy_0} = 488,2 \text{ cm}^4$ [479]. Nadto $J_x + J_y = J_{x_0} + J_{y_0} = 501,4 \text{ cm}^4$ i ostatecznie $J_y = 501,4 - 488,2 = 13,2 \text{ cm}^4$ [13,3].

17°. Przekrój kołowy. Bierzemy pod uwagę jakikolwiek układ osi środkowych prostokątnych. Będą to osie główne przekroju OX , OY . Nadto, niech ρ oznacza promień wodzący jakiegokolwiek punktu przekroju, a θ — odnośny kąt biegunowy. Biegunowy moment bezwładności kołowego przekroju będzie więc

$$J_o = \int \rho^2 dF = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi R^4, \text{ gdzie przez } R \text{ oznaczyliśmy}$$

promień koła. Wobec tego, że przekrój kołowy należy do rodzaju obojętnych, jego $J_x = J_y = \frac{1}{2} J_o$, a zatem $J_x = J_y = \frac{1}{4} \pi R^4$ oraz $i_x = i_y = \sqrt{\frac{1}{4} \pi R^4 : \pi R^2} = \frac{1}{2} R$.

Przekrój kołowy ma koło środkowe bezwładności o promieniu dwukrotnie mniejszym.

18°. Przekrój eliptyczny. Wielką półoś elipsy oznaczamy przez a , małą przez b ; dają one kierunki osi głównych przekroju, jako jego osie symetrii. Niech a leży na OX , b na OY . Ponieważ przekrój eliptyczny można rozpatrywać, jako rzut przekroju kołowego o promieniu a pod kątem $\alpha = \text{arcCos} \frac{b}{a}$, przeto na zasadzie ogólnych wzorów dla przekrojów rzutowanych będziemy mieli $J_x = \text{Cos}^3 \alpha \frac{\pi a^4}{4} =$

$$= \frac{\pi}{4} ab^3, \quad J_y = \text{Cos} \alpha \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi}{4} a^3 b.$$

Nadto pole elipsy $F = \text{Cos} \alpha \pi a^2 = \pi ab$, a przeto $i_x = \frac{1}{2} b$, $i_y = \frac{1}{2} a$. *Przekrój eliptyczny ma elipsę środkową bezwładności o półosiach dwukrotnie mniejszych.*

19°. Pierścień kołowy mimośrodkowy. Promieniem r zataczamy (rys. 30) koło ze środka ω , leżącego na osi ωX . Od tego punktu w kierunku dodatnim odkładamy $\omega \Omega = e$ i zataczamy koło promieniem R ze środka Ω tak, aby było $R > r + e$.

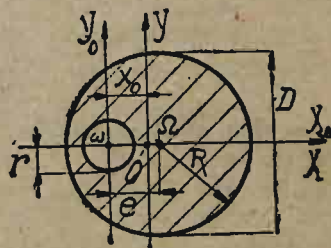
W ten sposób wytworzony pierścień kołowy o mimośrodku e ma oś symetrii ωX — oś główną. Chcąc wyznaczyć oś drugą, prowadzimy przez środek ω oś $\omega Y_o \perp \omega X$. Dla tej osi moment statyczny przekroju będzie $F_{y_o} = \pi R^2 e$. Ponieważ pole $F = \pi (R^2 - r^2)$, przeto spórzędną x_o środka O otrzymamy

$$\text{w postaci } x_o = \frac{F_{y_o}}{F} = \frac{R^2 e}{R^2 - r^2}. \text{ Przez}$$

wyznaczony w ten sposób środek prowa-

dźmy oś główną OY . Dla osi głównych $J_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$

$$\text{oraz } J_y = \frac{\pi R^4}{4} + \pi R^2 (e - x_o)^2 - \frac{\pi r^4}{4} - \pi r^2 x_o^2 = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) + \pi R^2 [e -$$



Rys. 30

$$- R^2 e : (R^2 - r^2)^2 - \pi r^2 \frac{R^4 e^2}{(R^2 - r^2)^2} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) + \frac{\pi e^2}{(R^2 - r^2)^2} [r^4 K^2 - r^2 R^4] = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) - \frac{\pi e^2 R^2 r^2}{R^2 - r^2}.$$

Dla zwykłego przekroju kołowego *pierścieniowego* o promieniu R zewnętrznym i r wewnętrznym mamy $e = 0$. Tutaj więc $J_x = J_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$. Ten sam wynik otrzymać można również i bezpośrednio, rozpatrując pierścień, jako różnicę dwóch przekrojów kołowych.

20°. Przekrój paraboliczny. W układzie osi wierzchołkowych łuk paraboli (V. rys. 9) wyrazi się równaniem $\eta^2 = 2\rho\xi$. Poprowadzmy prostą $\xi = a$, a otrzymamy odcinek paraboli symetryczny względem osi $\omega\xi$. Aby wyznaczyć jego drugą oś symetrii szukamy momentów. W tym celu piszemy równanie obwodu w postaci $K(\xi, \eta) = (\eta^2 - 2\rho\xi)(\xi - a) = 0$. Da ono dwa pierwiastki $\eta' = -\sqrt{2\rho\xi}$, $\eta'' = \sqrt{2\rho\xi}$, jako granice całkowania po η . Aby otrzymać granice całkowania po ξ , wyłączamy η z równań $K(\xi, \eta) = 0$ i $\frac{\partial K}{\partial \eta} = 0$, co daje $2\eta = 0$, a zatem $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = a$. Wobec symetrii przekroju $F_\xi = J_{\xi\eta} = 0$, a zatem możemy wypisać kolejno momenty pozostałe:

$$F = \int dF = \int_0^a d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta = \frac{1}{3} a \sqrt{2\rho a} = \frac{1}{3} ab,$$

$$F_\eta = \int_0^a \xi d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta = 2\sqrt{2\rho} \int_0^a \sqrt{\xi^3} d\xi = \frac{4}{5} a^2 \sqrt{2\rho a} = \frac{4}{5} a^2 b,$$

$$J_\xi = \int_0^a d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} \eta^2 d\eta = \frac{2}{3} \sqrt{(2\rho)^3} \int_0^a \sqrt{\xi^5} d\xi = \frac{4}{15} ab^3,$$

$$J_\eta = \int_0^a \xi^2 d\xi \int_{\eta'}^{\eta''} d\eta = 2\sqrt{2\rho} \int_0^a \sqrt{\xi^5} d\xi = \frac{4}{7} a^3 \sqrt{2\rho a} = \frac{4}{7} a^3 b;$$

przyczem $b^2 = 2\rho a$ jak to zresztą wskazuje rysunek. Spółrzędna środka będzie tu $\xi_0 = F_\eta : F = \frac{8}{5} a$. Prowadzimy przezeń oś główną OY . Dla osi głównych: OX , leżącej na osi $\omega\xi$ i OY będziemy mieli $J_x = J_\xi = \frac{4}{15} ab^3$, $J_y = J_\eta - F\xi_0^2 = \frac{4}{7} a^3 b - \frac{4}{3} ab \frac{8}{25} a^2 = \frac{16}{175} a^3 b$.