

bliskim punktu A ; otóż ta normalna, jak każda in-
na, przecina osie AA' i BB' w takich punktach K i L
że $\frac{AK}{AL} = \frac{b^2}{a^2}$; ale $AL = AO = a$;

skąd

$$AK = \frac{b^2}{a} ;$$

Szukając środka krzywizny K , w wierzchołku B ,
znajdziemy: $\frac{BK}{BL} = \frac{a^2}{b^2}$; ale $BL = BO = b$;

skąd

$$BK = \frac{a^2}{b} ;$$

Punkty K i K' znajdziemy w przecięciu obu osi
z prostopadłą spuszczoną na cięciwę AB z punktu C ,
w którym się przecinają styczne w wierzchołkach A i B ;
w samej rzeczy, z trójkątów podobnych AOB i CAK
mamy: $\frac{AK}{AC} = \frac{OB}{OA}$; $\frac{AK}{b} = \frac{b}{a}$; $AK = \frac{b^2}{a}$;

z trójkątów zaś AOB , CBK ,

$$\frac{BK}{BC} = \frac{OA}{OB} ; \quad \frac{BK}{a} = \frac{a}{b} ; \quad BK = \frac{a^2}{b} ;$$

Wyznaczywszy punkty K' i K , symetryczne z punktami K i K' względem osi AA' i BB' i wykreśliwszy cztery koła krzywizny, możemy w wielu razach obejść się bez innych punktów lub stycznych elipsy..

R O Z D Z I A Ł XVII .

KRZYWE SKOŚNE.

§ 226. Krzywa skośna jako miejsce poruszającego się punktu. Nazywamy krzywa skośna albo wichrowata miej-

sce geometryczne poruszającego się według pewnego prawa punktu, o którym wtedy mówimy, że opisuje tę krzywą. Styczną do krzywej skośnej k w danym jej punkcie A nazywamy granicę położenia prostej łączącej punkt A z innym punktem B krzywej, gdy B zbliża się nieograniczenie do A ; punkt A nazywa się punktem zetknięcia stycznej t z krzywą k . Może się zdarzyć, że punkt T opisujący krzywą k przejdzie więcej niż raz jeden przez pewien punkt D ; krzywa będzie miała wtedy więcej niż jedną styczną w tym punkcie; punkt taki nazywamy podwójnym, potrójnym, wogóle n -krotnym punktem krzywej skośnej k .

Rzut krzywej skośnej k z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę jest oczywiście krzywa płaska k' ; rzut stycznej t w punkcie A krzywej k jest styczną t' w punkcie A' krzywej k' . Rzut punktu podwójnego krzywej skośnej k jest punktem podwójnym krzywej płaskiej k' ; nie każdy jednak punkt podwójny krzywej k' jest rzutem punktu podwójnego krzywej k ; punkt podwójny i wogóle n -krotny powstanie na krzywej k' zawsze wtedy, jeżeli promień rzucający przecina dwa lub wogóle n razy krzywą k .

Każda płaszczyzna przechodząca przez styczną t nazywa się płaszczyzną styczną krzywej skośnej k . Płaszczyzna styczna ma zatem z krzywą k przynajmniej dwa nieskończenie bliskie punkty wspólne. Śród płasz-

czyżn stycznych w każdym punkcie krzywej jest jednak taka, która ma z krzywą κ 3 punkty nieskończenie bliskie wspólne. Przez styczną ℓ i przez punkt C krzywej κ poprowadźmy płaszczyznę; jeżeli punkt C będzie się zbliżał nieograniczenie do punktu A , w którym ℓ jest styczna do κ , to położenie płaszczyzny ℓC dążyć będzie do pewnej płaszczyzny \mathcal{T} , zwanej płaszczyzną ściśle styczną, która z krzywą κ będzie miała przynajmniej trzy punkty nieskończenie bliskie wspólne.

Płaszczyznę ściśle styczną w punkcie A krzywej skośnej κ nazywamy granicą położenia płaszczyzny przechodzącej przez A i dwa inne punkty B i C krzywej; gdy oba te punkty nieograniczenie zbliżać się będą do punktu A .

Możemy teraz sobie wyobrazić powstanie krzywej κ w sposób następujący: Punkt T porusza się po prostej ℓ , podczas gdy ta prosta obraca się w płaszczyźnie \mathcal{T} dookoła punktu T , a płaszczyzna \mathcal{T} dookoła prostej ℓ . Jeżeli w pewnym punkcie A , podczas gdy punkt T opisujący krzywą przezeń przechodzi, nie zmienia się żaden ze zwrotów tych trzech ruchów, to punkt A nazywamy punktem zwyczajnym krzywej. Jeżeli punkt T w pewnym punkcie R zmienia na prostej ℓ zwrot swego ruchu, podczas gdy ani

prosta t , ani płaszczyzna T nie zmienia zwrotu swego obrotu, to punkt R nazywa się punktem zwrotu; jeżeli prosta t doszedłszy do pewnego położenia \hat{t} zmienia zwrot swego obrotu dookoła punktu T , podczas gdy ani punkt T , ani płaszczyzna T zwrotu swego obrotu dookoła prostej t , to prosta \hat{t} nazywa się styczna przegięcia, a jej punkt zetknięcia J z krzywą k - punktem przegięcia. Gdy wreszcie w pewnym położeniu R płaszczyzna T doznaje zmiany zwrotu swego obrotu dookoła prostej t , podczas gdy zarówno punkt T , jak prosta t , zachowują zwrot dotychczasowego ruchu, to płaszczyzna R nazywa się płaszczyzna zwrotu.

§ 227. Krzywizna i skracenie krzywych skośnych.

Z powyższego wynika że wszystkie własności krzywej k w pobliżu danego jej punktu A muszą zależeć od dwóch wielkości: od ilorazu szybkości obrotu prostej t przez szybkość punktu T , czyli krzywizny κ i od ilorazu szybkości obrotu płaszczyzny T przez szybkość punktu T , czyli od skracenia σ w tym punkcie krzywej. Ujmiemy te określenia nieco ściślej.

Podobnie jak dla krzywych płaskich [§ 217] nazwiemy krzywizną średnią krzywej k między punktem zwy-

czyjnym A i punktem jakimkolwiek A_1 , iloraz

$$\kappa_1 = \frac{\varphi}{s};$$

gdzie s jest długością wyprostowanego łuku AA_1 ,
a φ - kątem stycznych t i t_1 w tych punktach. - Gdy
punkt A_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do punk-
tu A , to łuk s będzie malał nieograniczenie; jed-
nocześnie atoli maleć będzie nieograniczenie kat φ .
który jest funkcją łuku s . - Krzywizną rzeczywistą
krzywej k w punkcie A nazywa się granicą ilorazu
 $\frac{\varphi}{s}$, gdy s dąży do zera, czyli

$$\kappa = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi}{s} = \frac{d\varphi}{ds};$$

Nieskończenie malejący łuk ds nazywamy elemen-
tem krzywej skośnej k ; zależny od niego nieskończe-
nie malejący kat $d\varphi$ nazywamy kątem styczności. Po-
dobnie jak dla krzywych płaskich, krzywizna w punkcie
 A krzywej skośnej k jest to iloraz kąta stycznoś-
ci przez odpowiadający mu element krzywej w punkcie
 A . - W punkcie zwrotu R : $ds=0$; $\kappa=\infty$; w punk-
cie przegięcia J : $d\varphi=0$; $\kappa=0$;

Skreśleniem średnim krzywej skośnej k pomiędzy
punktem zwyczajnym A i punktem jakimkolwiek A_1 , na-
zywamy iloraz

$$\tau = \frac{\vartheta}{s}$$

gdzie s , jak poprzednio, jest długością wyprostowa-

nego łuku AA_1 , a θ jest kątem płaszczyzny ściśle stycznych w punktach A i A_1 . Gdy łuk s maleć będzie nieograniczenie, to zależny od niego kąt θ również maleć będzie nieograniczenie. — Skróceniem rzeczywistym w punkcie A na wany granicę ilorazu $\frac{\theta}{s}$, gdy s dąży do zera, czyli

$$\tau = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\theta(s)}{s} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Nieskończenie malejący kąt $d\theta$ nazywamy kątem skrócenia; możemy tedy określić skrócenie τ krzywej k w punkcie A jako iloraz kąta skrócenia przez element krzywej w punkcie A .

Przez trzy punkty A , B i C krzywej skośnej k wyznaczone jest koło, które leży w płaszczyźnie ABC ; gdy punkty B i C dążyć będą nieograniczenie do punktu A , to płaszczyzna ABC dąży do płaszczyzny ściśle stycznej, koło zaś ABC dąży do koła k , którego krzywizna $\kappa = \frac{1}{r}$ jest ta sama, co krzywizna w punkcie A krzywej k . Koło to nazywamy kołem krzywizny w punkcie A ; jego środek — środkiem krzywizny, jego promień — promieniem krzywizny $r = \frac{1}{\kappa}$.

§ 228. Normalna główna i binormalna. Płaszczyzna prostopadła do stycznej τ w punkcie A krzywej skośnej k nazywa się płaszczyzną normalną w tym punkcie.

Każda prosta w tej płaszczyźnie przez punkt A przechodząca nazywa się normalną. Śród nich dwie są szczególnie ważne. Jedną n leżącą w płaszczyźnie ściśle stycznej nazywa się normalną główną; na niej to leży środek krzywizny; druga b prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej nazywa się binormalną. Trzy proste: t , n i b są wzajemnie prostopadłe i tworzą układ prostokątny współrzędnych, szczególnie dogodny do badania własności krzywej w pobliżu punktu A . Płaszczyzna tn jest ściśle styczna, płaszczyzna bn normalna, płaszczyzna bt nazywa się płaszczyzną rektyfikacyjną.

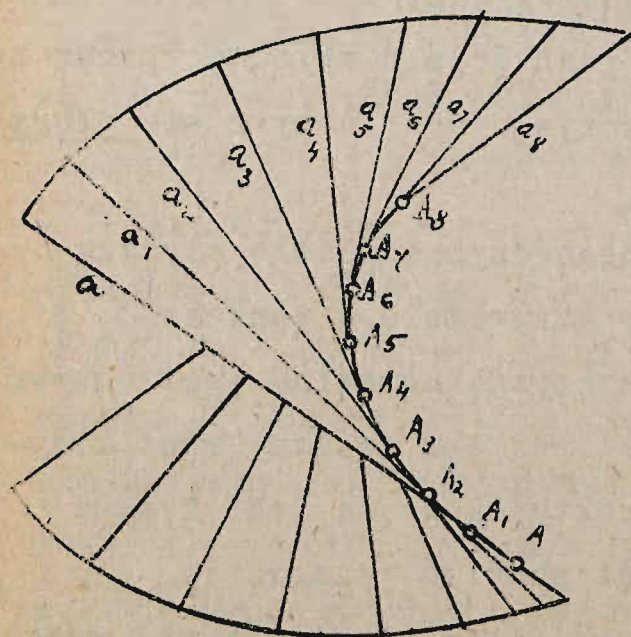
Rzut krzywej k na płaszczyznę ściśle styczną jest krzywą o tej samej krzywiznie w punkcie A ; rzut krzywej k na płaszczyznę normalną jest krzywą, dla której punkt A jest punktem zwrotu; rzut krzywej k na płaszczyznę rektyfikacyjną jest krzywą, dla której punkt A jest punktem przegięcia.

§ 229. Powierzchnie rozwijalne. Powierzchnia prostokreślna nazywamy miejsce geometryczne prostej t poruszającej się według pewnego prawa. Poszczególne położenia prostej t nazywają się tworzącymi powierzchni prostokreślniej. - Powierzchnie prostokreślnie dzielmy na powierzchnie rozwijalne / np. stożki i wal.

ce/ i skośne, czyli wichrowate /np. hyperboloid jed-
nopowłokowy i paraboloid hyperboliczny. § 214/.

Powierzchnia prostokreślna nazywa się rozwiąlna
jeżeli jej tworzące są styczne do krzywej skośnej

κ , która nazywa się krawędzią zwrotu powierzch-
ni rozwijalnej. Weźmy na krzywej skośnej κ /Rys. 430/



Rys. 430.

następstwo punktów

A, A_1, A_2, A_3, \dots ;

połączmy punkty A i

A_1 i A_2 ,

A_2 i A_3, \dots

prostymi $a, a_1,$

a_2, \dots ; każda

z tych prostych prze-

cina poprzednią i na-

stępna. Kąty $\angle aa_1,$

$\angle a_1 a_2,$ $\angle a_2 a_3,$

\dots będą miały tę

własność, że każdy z nich

ma z poprzednim i z na-

stępnym jedno ramie

wspólne. Obróćmy płasz-

czyznę kąta $\angle aa_1$ dookoła a , tak, żeby ta płasz-

czyzna przysłała do płaszczyzny kąta $\angle a_1 a_2$, w ten

sposób trzy proste a , a_1 i a_2 , leżeć będą w jednej płaszczyźnie; obróćmy następnie tę płaszczyznę dookoła a_2 tak, żeby przystała do płaszczyzny kąta $/ a_2 a_3$, w ten sposób cztery proste: a , a_1 , a_2 i a_3 będą leżały w jednej płaszczyźnie; obracając ją dookoła a_3 do przystania z płaszczyzną $/ a_3 a_4$ otrzymamy 5 prostych: a , a_1 , a_2 , a_3 i a_4 w jednej płaszczyźnie i tak postępujemy dalej, dopóki wszystkie proste nie będą leżały w jednej płaszczyźnie. O powierzchni wielościennej $a a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ mówimy wtedy, że została rozwinięta. - Jeżeli liczba punktów A , A_1 , A_2 , \dots na krzywej κ zwiększać się będzie nieograniczenie, podczas gdy ich odległości AA_1 , $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, \dots maleć będą nieograniczenie, to proste a , a_1 , a_2 , \dots zbliżać się będą do stycznych t , t_1 , t_2 , \dots a powierzchnia wielościenna $a a_1 a_2 a_3 \dots$ do powierzchni rozwijalnej, której krawędzią zwrotu będzie krzywa skośna κ . Postępując z nieskończenie małymi kątami: $/ t t_1$, $/ t_1 t_2$, $/ t_2 t_3$, \dots tak samo, jak postępowaliśmy z kątami $/ a a_1$, $/ a_1 a_2$, $/ a_2 a_3$, \dots , można będzie "rozwinąć" powierzchnię rozwijalną krzywej κ .

Powierzchnia rozwijalna krzywej skośnej składa się

z dwóch powłok, stycznych wzajemnie we wszystkich punktach krawędzi zwrotu. W samej rzeczy, przecięcie tej powierzchni jakąkolwiek płaszczyzną nie przechodzącą przez żadną z tworzących jest krzywą płaską, posiadającą w punkcie przecięcia z krzywą skośną punkt zwrotu I rodzaju. Stąd nazwa krawędź zwrotu, którą dajemy krzywej skośnej.

Przez rozwinięcie powierzchni wielościiennej

$a, a_1, a_2, a_3 \dots$ żaden z odcinków $AA_1, A_1A_2, A_2A_3 \dots$, ani żaden z kątów $\angle aa_1, \angle a_1a_2, \angle a_2a_3 \dots$ nie uległ oczywiście zmianie. Podobnież przez rozwinięcie powierzchni rozwijalnej żaden z elementów, ani żaden z kątów styczności krzywej skośnej nie doznał zmiany; krzywa skośna przez takie rozwinięcie przekształca się przeto na krzywą płaską o tej samej długości i tej samej krzywiznie w każdym z jej punktów. Jedynie skręcenie stało się dla wszystkich jej punktów równym zeru.

Jako powierzchnie rozwijalne powszechnie znane przytoczyć możemy stożki i walce; krawędź zwrotu redukuje się w tych powierzchniach do punktu właściwego dla stożków, niewłaściwego dla walców.

Jeżeli z dowolnego punktu P wyprowadzimy równo-

ległe do stycznych t , t_1 , t_2 , ... krzywej skośnej κ , to utworzymy powierzchnię, która się nazywa stożkiem kierunkowym krzywej κ . Płaszczyzny styczne do tego stożka są równoległe do płaszczyzn ściśle stycznych krzywej skośnej. Stożek kierunkowy krzywych płaskich redukuje się do płaszczyzny.

Powstanie krzywej skośnej możemy w inny teraz rozumieć sposób. Niechaj płaszczyzna T porusza się według pewnego prawa; prosta przecięcia dwóch położen A i B poruszającej się płaszczyzny dąży do pewnej granicy t , gdy położenie B zbliża się nieograniczenie do A ; granica ta jest tworzącą powierzchni rozwijalnej. Punkt przecięcia trzech położen A , B , i C poruszającej się płaszczyzny dąży również do pewnej granicy T' gdy położenia B i C zbliżają się nieograniczenie do A ; granica ta jest punkt krawędzi zwrotu T' .

Powierzchnie rozwijalne są figurami wzajemnymi względem krzywych skośnych. Podczas gdy krzywa skośna uważamy za miejsce poruszającego się punktu, powierzchnię rozwijalną uważamy za obwiednię poruszającej się płaszczyzny; stycznymi krzywej skośnej odpowiadają tworzące powierzchni rozwijalnej; płaszczyznom ściśle stycznymi krzywych skośnych odpowiadają

punkty krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnej.

§ 230. Linja śrubowa. Najprostszym przykładem krzywej skośnej jest linja śrubowa.

Niech będzie walec obrotowej S o osi OO' , kierownicy k i promieniu r /Rys. 431/. Wzdłuż tworzącej AB poprowadzmy płaszczyznę styczną S_0 , tj. poprowadzmy płaszczyznę przez AB i przez styczną k_0 do kierownicy k w punkcie A . Poprowadzmy przez punkt A w płaszczyźnie S_0 prostą s_0 nachyloną do k_0 pod kątem α , poczem „nawiniemy” płaszczyznę S_0 na powierzchnię walca; podczas gdy k_0 nawinie się na kierownicę k , prosta s_0 nawinie się na powierzchnię walca tworząc krzywą skośną, którą nazwiemy linja śrubowa. Linja śrubowa jest to więc krzywa leżąca na powierzchni walca obrotowego, która po rozwinięciu powierzchni przekształca się na prostą. - Powstanie linji śrubowej można rozumieć jeszcze inaczej. Niedługo płaszczyzna S_0 wraz z wykreśloną na niej prostą s_0 toczy się po powierzchni walca bez poślizgu; wtedy s_0 jest styczną do powierzchni walca w coraz to nowym punkcie; miejsce geometryczne tych punktów zetknięcia na powierzchni walca jest linja śrubowa. Gdy S_0 toczy się po S , k_0 toczy się po k ,

a s_0 po s , przytem k_0 jest wciąż styczna do k a s_0 do s ; punkt A kreśli w płaszczyźnie kierownicy ewolwentę koła /§ 219/.

Weźmy na s_0 punkt jakikolwiek P_0 , którego rzutem na k_0 niechaj będzie punkt P'_0 ; gdy S_0 tocząc się po powierzchni walca obróci się o kąt φ , którego wyprostowany łuk na kierownicy $= AP'_0$, to P'_0 przystanie do P' , a P_0 do P . W tym położeniu prosta s_0 będzie styczna do s w punkcie P ; długość jej między punktami P i A' będzie równa P_0A , rzut jej $A'P' = AP'_0 = r\varphi$. Nachylenie stycznej s'_0 do płaszczyzny kierownicy pozostanie równym α ; kąt α nazywa się spadkiem linii śrubowej. Odcinek $P_0P'_0 = PP' = z$. Z trójkąta $AP_0P'_0$: $z = AP'_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha = r\varphi \operatorname{tg} \alpha = \varphi \cdot r \operatorname{tg} \alpha$; tj. wzniesienie z jest proporcjonalne do kąta obrotu φ . Współczynnik proporcjonalności $h_0 = r \operatorname{tg} \alpha$; nazywa się parametrem linii śrubowej, jest to wartość stałego stosunku $\frac{z}{\varphi}$. Na zasadzie powyższego możemy określić linię śrubową jako miejsce geometryczne punktu poruszającego się ruchem jednostajnym na prostej z podczas gdy z ruchem jednostajnym obraca się dookoła równoległej do niej prostej OO' . Param. h_0 .

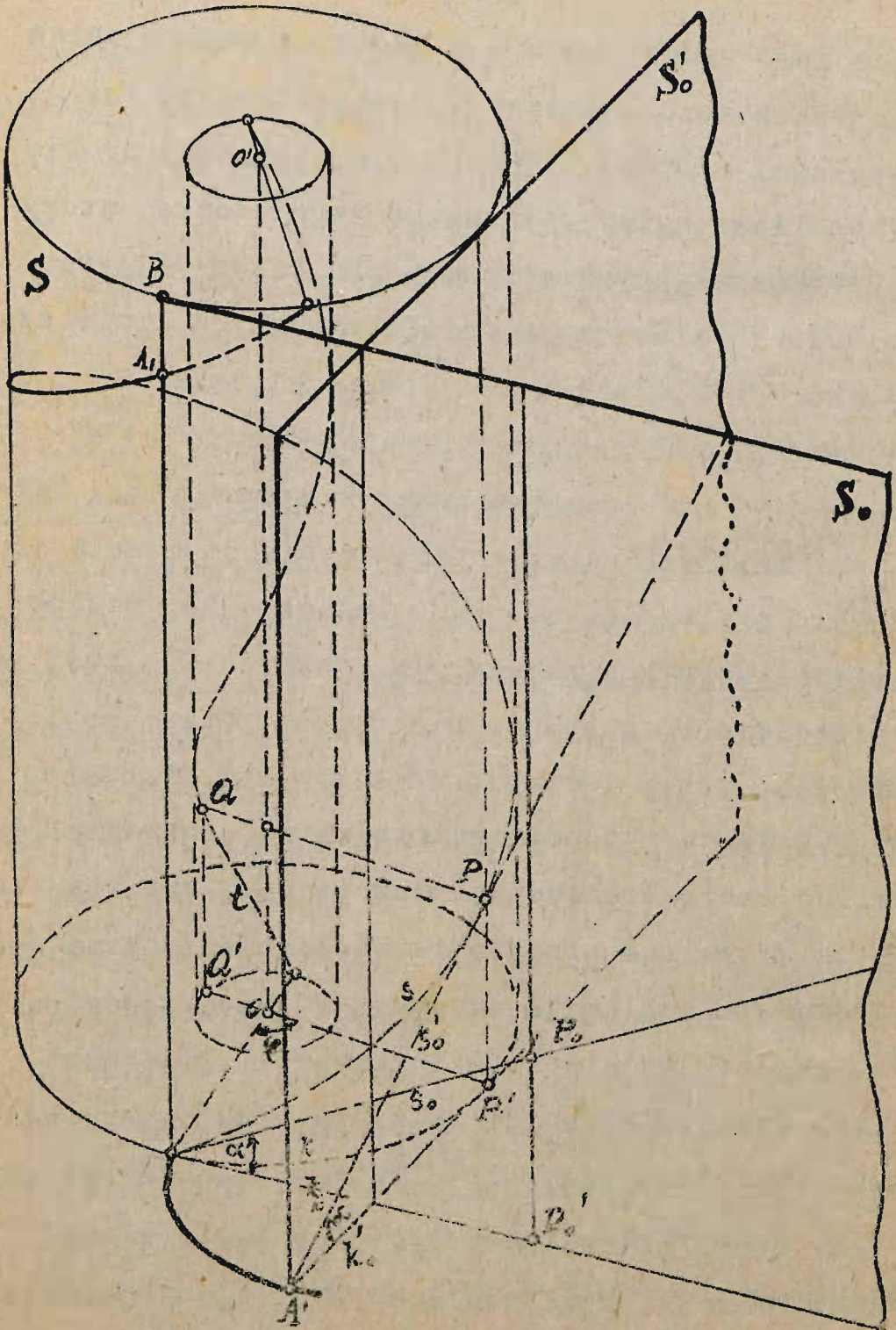
jest stosunkiem tych dwóch szybkości jednostajnych. Gdy kąt φ stanie się równym 2π , to punkt P znajdzie się na tworzącej AB w punkcie A . Odcinek $h = AA_1$ jest przesunięciem w kierunku osi odpowiadającym całemu obrotowi; h nazywa się skokiem linii śrubowej. Z równania $z = h_0 \varphi$ mamy, kładąc $\varphi = 2\pi$: $h = h_0 \cdot 2\pi$; skąd $h_0 = h : 2\pi$; dlatego to h_0 nazywa się też zredukowanym skokiem linii śrubowej.

Przez skok i spadek linja śrubowa nie jest jeszcze całkowicie wyznaczona, odróżniamy bowiem linje śrubowe prawo i lewo skretne. Linja śrubowa nazywa się prawoskretna, jeżeli dla widza umieszczonego wzdłuż osi walca punkt P posuwając się ku dołowi obraca się w kierunku wskazówki zegara; w przeciwnym razie jest lewo skretna.

Płaszczyzna ściśle styczna w punkcie P linii śrubowej jest nachylona pod kątem α do płaszczyzny kierownicy. W samej rzeczy utworzymy stożek kierunkowy linii śrubowej; w tym celu z dowolnego punktu przecięni należy wyprowadzić równoległe do jej stycznych; ponieważ zaś wszystkie styczne są nachylone pod tym samym kątem α do płaszczyzny kierownicy walca, więc te równoległe tworzą stożek obrotowy. Kie-

rownicą tego stożka będzie kierownica samego walca, jeżeli wierzchołek stożka H obierzemy na osi w odległości $r \operatorname{tg} \alpha = h_0$ od płaszczyzny kierownicy. Płaszczyzny styczne do tego stożka, nachylone do płaszczyzny kierownicy pod kątem α , są równoległe do płaszczyzn ściśle stycznych linii śrubowej / § 229/. Jeżeli tedy przez styczną s_0' przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do s_0' , a więc nachyloną do płaszczyzny kierownicy pod kątem α , to będzie to płaszczyzna ściśle styczna w punkcie P . Prostopadła do s_0' leżąca w tej płaszczyźnie, czyli normalna główna w punkcie P , musi zatem przecinać oś i być do niej prostopadłą. Na tej normalnej głównej leży środek krzywizny ρ dla punktu P ; aby wyznaczyć promień krzywizny, zauważmy, że krzywizna linii śrubowej w punkcie P , musi być ta sama, co krzywizna przecięcia walca płaszczyzną ściśle styczną, albowiem te dwie krzywe mają prócz punktu P jeszcze dwa nieskończenie małe punkty wspólne. Otóż przecięciem walca tą płaszczyzną będzie elipsa, dla której punkt P jest wierzchołkiem małej osi; oznaczając przez a i b półosie elipsy i zważywszy, że $a = \frac{r}{\cos \alpha}$; $b \neq r$ znajdziemy

$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{r}{\cos^3 \alpha};$$



Rys. 431.

promień krzywizny linii śrubowej jest przeto wielkością stałą. Własność tę dzieli linja śrubowa z kołem i prostą, które zresztą mogą być uważane za przypadki szczególne linii śrubowej, gdy $\alpha = 0$; wzgl. $\alpha = \frac{\pi}{2}$;

Środki krzywizny linii śrubowej leżą na innej linii śrubowej t , zwanej wzajemną, o tym samym skoku, krzywiznie i skręcie, ale o różnym promieniu i spad-

ku. Aby wyznaczyć promień krzywizny

linii śrubowej s w jej punkcie P , kreślimy trójkąt

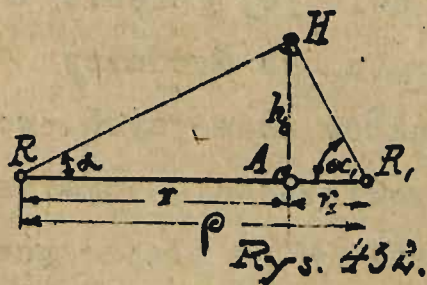
prostokątny AHR

/Rys 432/, którego ^{przy}prostokątna $AR = r$

a kąt do niej przyległy $ARH = \alpha$;

wtedy $HR = \frac{r}{\cos \alpha}$; budując na HR trójkąt prostokątny z tym samym kątem przyległym α otrzymamy $RR_1 = HR : \cos \alpha = \frac{r}{\cos^2 \alpha} = s$. Odcinek

$AR_1 = r$; jest promieniem walca, na którym leży linja śrubowa wzajemna t , a kąt $AR_1H = \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$; jest jej spadkiem; wyznaczając



w ten sam sposób promień krzywizny $\frac{r_1}{\cos^2 \alpha_1}$,
 tej drugiej linii śrubowej znajdziemy ten sam co po-
 przednio odcinek $RR_1 = s$.. Gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$,

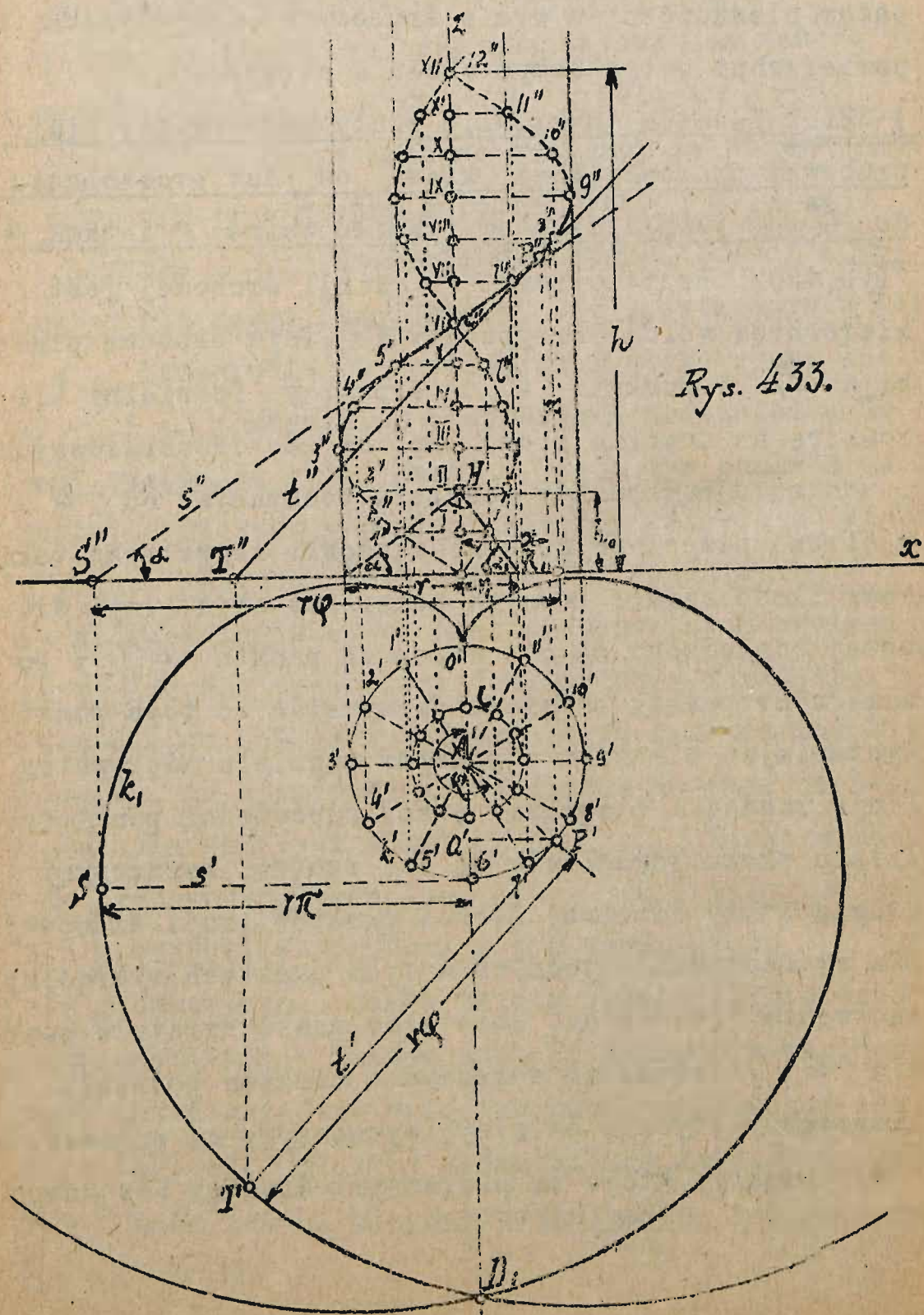
$r_1 = r$: linje śrubowe wzajemne są wtedy równe
 i symetryczne względem wspólnej osi.

Styczne s_0 do linii śrubowej s tworzą po-
wierzchnię rozwijalną, której krawędzią zwrotu jest
 s .. Przecięcie tej powierzchni płaszczyzną kierow-
 nicy, t.j. jakąkolwiek płaszczyzną prostopadłą do osi
 jest ewolwentą koła. Punkt A jest tym punktem ewol-
 wenty, z którego wychodzą dwie jej gałęzie do siebie
 styczne: jest to punkt zwrotu. Na średnicy AO le-
 ży nieskończenie wiele punktów podwójnych ewolwenty
 /§ 219/. Gdy przetniemy powierzchnię rozwijalną pro-
 stopadłe do osi na wysokości z od płaszczyzny kie-
 rownicy, to otrzymamy w przecięciu tę samą ewolwentę
 koła, ale obróconą o kąt $\varphi = \frac{z}{r_0}$. Punkt zwrotu
 A oraz punkty podwójne D_1, D_2, \dots zakre-
 ślają więc linje śrubowe o tym samym skoku h .. Miej-
 sce geometryczne punktu zwrotu stanowi linje śrubowa
 dana: ponieważ w każdym punkcie podwójnym ewolwenty
 koła przecinają się dwie tworzące powierzchni roz-
 wijalnej, więc miejsce geometryczne każdego punktu
 podwójnego jest linią samoprzenikania tej powierzch-

ni. Na powierzchni rozwijalnej linii śrubowej leży zatem nieskończenie wiele śrubowych samoprzenikania powierzchni o tym samym skoku i skręcie.

§ 231. Zadanie Wykreślić rzuty prostokątne linii śrubowej prawoskrętnej, której oś jest prostopadłą do P , jeżeli dane są promień walca r i skok h .

/Rys. 433/. Rzut poziomy k' linii śrubowej jest kierownicą walca. Przypuśćmy że linja śrubowa przebija P w punkcie O' kierownicy. Podzielmy kierownicę na dowolną ilość np. na 12, części równych i ponumerujmy punkty podziału poczynając od O' w stronę przeciwną ruchowi wskazówki zegara. Na taką samą ilość części równych podzielmy skok linii śrubowej odmierzony na osi walca od punktu O'' i ponumerujmy punkty podziału poczynając od tego punktu. Wystawiając w każdym z punktów podziału kierownicy linję rzędną i prowadząc przez odpowiedni punkt podziału skoku równoległą do osi rzutów, wyznaczymy drugie rzuty dowolnej ilości punktów linii śrubowej. Dla wyznaczenia stycznych w tych punktach wykreślimy ewolwentę kierownicy, obierając punkt zwrotu w punkcie O' . Prowadząc w każdym z punktów podziału kierownicy styczną do niej, wyznaczymy na ewolwencie k , punkty, które są pierwszymi śladami stycznych



do śrubowych w tych jej punktach, które odpowiadają punktom podziału kierownicy; łącząc drugie rzuty punktów linii śrubowej z drugimi rzutami odpowiednich pierwszych śladów wyznaczymy drugie rzuty szukanych stycznych.

Styczna do śrubowej w punkcie σ jest równoległa do P_2 ; kąt jej drugiego rzutu z osią rzutów jest przeto spadkiem α linii śrubowej. Prowadząc przez R równoległą do s'' , wyznaczymy na osi parametr AH linii śrubowej; w samej rzeczy: $AH = r \operatorname{tg} \alpha = h_0$. Prostopadła do RH w punkcie H wyznacza odcinek $A''R, = r$; jest to promień walca, na którym leży linia śrubowa wzajemna ℓ o tym samym skoku, promieniu krzywizny i skręcie. Odcinek RR_1 jest promieniem krzywizny obu tych linii śrubowych.

§ 232. Zadanie. Wykreślić rzuty punktu P linii śrubowej prawoskrętnej o osi prostopadłej do P_1 , oraz rzuty stycznej w tym punkcie, jeżeli dane są r , h i

φ . /Rys. 433/. Przypuśćmy znowu, że punkt, w którym linia śrubowa przebija P_1 jest punktem kierownicy najbliższym osi x . Odmierzmy w stronę przeciwną ruchowi wskazówki zegara kąt φ , którego jednym ramieniem jest $A'O'$; punkt P' , w którym drugie ramie tego kąta przecina kierownicę, będzie pierwszym rzutem punktu P . W punkcie P' poprowadźmy

styczna do kierownicy; odmierzymy na niej $P'I' = r\varphi$; punkt I' jest pierwszym śladem stycznej do śrubowej w punkcie P . Aby wyznaczyć wysokość z punktu P , odmierzymy na osi x od punktu S'' odcinek $r\varphi$; druga przyprostokątna trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna $= r\varphi$, a kąt do niej przyległy jest α , będzie równa szukanej wysokości. Łącząc punkt P'' z I'' , otrzymamy drugi rzut t'' stycznej t .

Na mocy powyższego wykreślenia znajdziemy łatwo równanie drugiego rzutu k'' linii śrubowej k . Obrawszy za osie współrzędnych proste z i x , mamy dla punktu P''/x , $x/$: $x = P'Q' = r \cdot \sin \varphi$;

z trójkątów zaś podobnych:
 $z : h_0 = r\varphi : r$. skąd $z = h_0 \cdot \varphi$;

Rugując φ , otrzymamy: $\frac{x}{r} = \sin \frac{z}{h_0}$; jest to równanie sinusoidy. Rzutem prostokątnym linii śrubowej na płaszczyznę równoległą do osi jest sinusoida.

Można stwierdzić łatwo, że rzutem równoległym ukośnym linii śrubowej na płaszczyznę kierownicy, tj. na płaszczyznę prostopadłą do osi walca jest cykloida. W samej rzeczy, tworzenie linii śrubowej możemy rozumieć w ten sposób, że punkt P porusza się z szybkością stałą, na okręgu koła k , podczas gdy pla-

szczyzna tego koła przesuwają się również z szybkością stałą w kierunku do tej płaszczyzny prostopadłym. Jeżeli rzucimy ukośnie punkt ruchomy P na płaszczyznę P_1 , to jego rzut P'_u będzie w płaszczyźnie P_1 wykonywał jednocześnie dwa ruchy jednostajne: 1/ ruch na obwodzie koła k'_u , które jest rzutem ukośnym koła k , z szybkością równą szybkości punktu P na tym kole, i 2/ ruch postępowy wraz z kołem k'_u z szybkością, która jest rzutem szybkości płaszczyzny koła k . Jeżeli tak zakreślony przez punkt P'_u na kole k'_u jest w danym odstępie czasu równy odcinkowi, który w tym samym czasie przebiega środek koła, to krzywa opisana przez punkt P'_u jest cykloidą zwyczajną nastąpi to wtedy, gdy promienie rzucające punkt P są nachylone do P_1 pod kątem α . Jeżeli nachylenie promieni rzucających jest $> \alpha$, to cykloida jest skurczoną, jeżeli to nachylenie jest $< \alpha$, to cykloida jest wyciągniętą.

Wyniki tego rozważania można wyrazić w następujący sposób: Cieniem linii śrubowej na płaszczyźnie kierownicy, rzuconym przez promienie równoległe, jest cykloida zwyczajna, skurczona lub wyciągnięta, zależnie od tego, czy nachylenie promieni świetlnych do

płaszczyzny kierownicy jest równe, większe lub mniejsze od spadku linii śrubowej.

§ 233. Konoida śruby i powierzchnia śrubowa o ostrym

gwincie. Powierzchnia rozwijalna linii śrubowej jest przypadkiem szczególnym powierzchni śrubowych prostokreślnych, powstałych przez ruch śrubowy prostej jakiegokolwiek. Ważne znaczenie praktyczne mają przede wszystkim te powierzchnie prostokreślne skośne, w których tworząca przecina oś /powierzchnie śrubowe zamknięte/. Jeżeli tworzące są przytem prostopadłe do osi, to powierzchnia nazywa się konoida śruby.

Jest to powierzchnia utworzona przez normalną główną linii śrubowej; proste $1I$, $2II$, $3III$, . . .

/Rys. 434 / są tworzącymi tej powierzchni. Ma ona zastosowanie w śrubach o płaskim gwincie, powstających przez ruch śrubowy prostokąta, którego płaszczyzna przechodzi przez oś, a jeden z boków jest do niej równoległy i równa się wysokości skoku. - Jeżeli tworząca przecina oś pod kątem ostrym, to utworzona przez ruch śrubowy tej prostej powierzchnia nazywa się powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie. nazwanej tak dlatego, że ma ona zastosowanie w śrubach o ostrym gwincie. Nazywamy tak figury powstałe przez ruch śrubowy trójkąta równoramiennego, którego płaszczyz-

na przechodzi przez oś, a podstawa jest do niej równoległa i równa się wysokości skoku.

Zadanie. Wykreślić rzuty prostokątne powierzchni śrubowej o ostrym gwincie i wyznaczyć przecięcie jej płaszczyzną prostopadłą do osi. Oś dzieli powierzchnię na dwie powłoki; górną i dolną, jeżeli oś jest pionową. Wykreślimy jeden skok dolnej powłoki powierzchni śrubowej o ostrym gwincie. - Niech oś

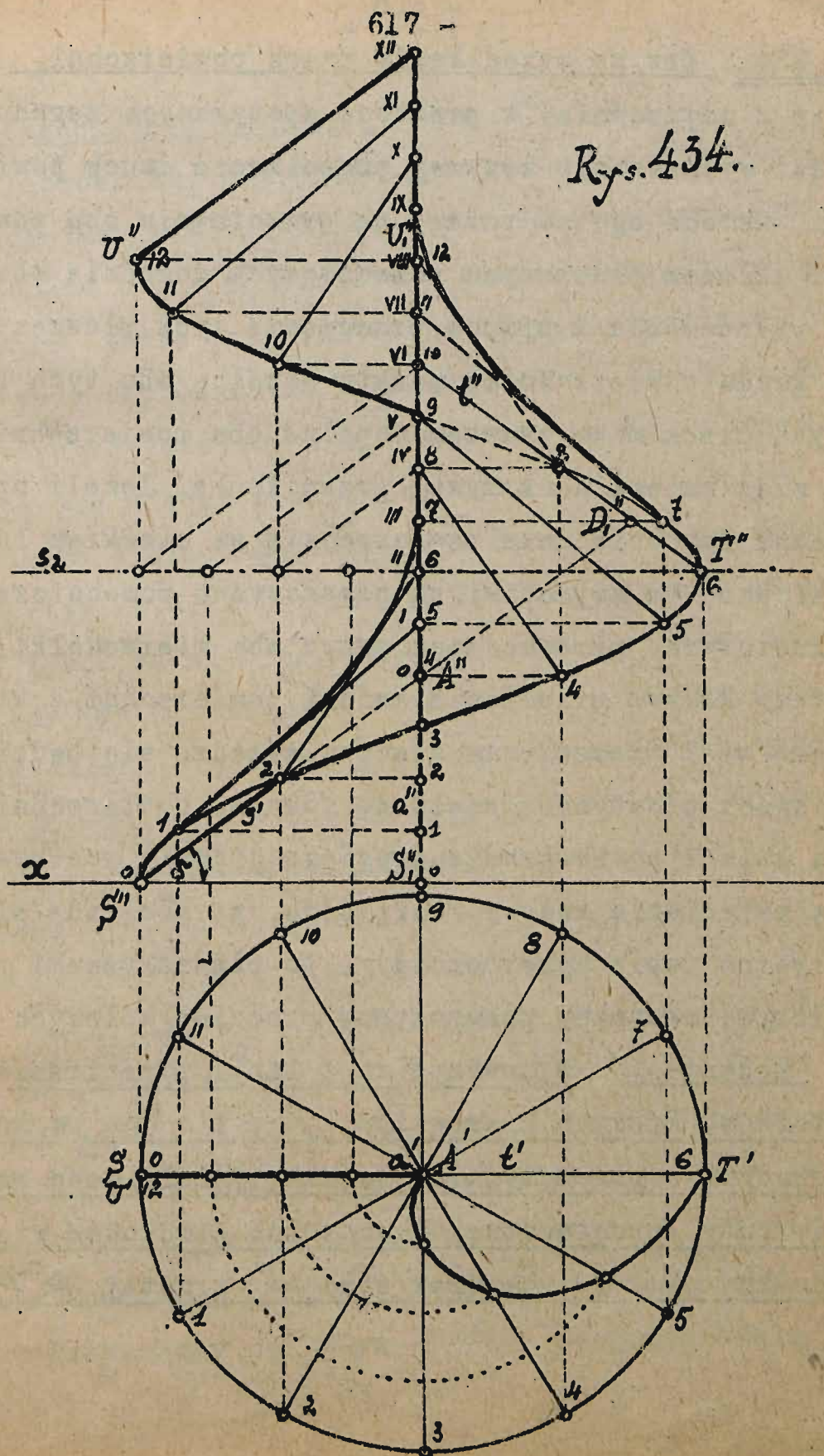
$a'a''$ /Rys. 434/ będzie prostopadła do P_1 a prosta $s's''$ niech będzie tworzącą powierzchni równoległą do P_2 , o nachyleniu ϕ do P_1 . Tworząca ta przecina oś a w punkcie $A'A''$ a P_1 przebiega w punkcie $S'S''$. $S'TU$ niechaj będzie jednym skokiem leżącej na powierzchni linii śrubowej; skok ten podzieliliśmy na 12 równych części w punktach: 1, 2, 3, ..., 11, przez które prowadzimy tworzące powierzchni; tworzące te wyznaczają na osi a odcinki $0I$, $I\text{II}$, IIIII , ..., IIIII , równe $\frac{1}{12}$ wysokości skoku $S'U$. Dla prostoty wykreślenia obraliśmy punkt A w jednym z punktów podziału wysokości skoku.

Każda płaszczyzna przechodząca przez oś a przecina powierzchnię według dwóch układów prostych równo-

ległych; w tej płaszczyźnie, która jest równoległa do P_2 , proste jednego układu są równoległe do S proste drugiego układu do Z . Punkty przecięcia

D_1, D_2, \dots prostych jednego układu z prostym drugiego leżą na liniach śrubowych zwanych krawędziami samoprzenikania powierzchni; wzdłuż tych linii powłoka górna przecina powłokę dolną powierzchni. — Przetnijmy powierzchnię płaszczyzną S prostopadłą do osi a . Krzywa przecięcia będzie miejscem geometrycznym punktów, w których tworzące przebijają płaszczyznę S . Otóż odległość punktu przebicia płaszczyzny S którakolwiek tworzącą od osi jest proporcjonalna do odległości tej płaszczyzny od punktu, w którym ta tworząca przecina oś, ta zaś jest proporcjonalna do kąta φ , który odpowiada łukowi śrubowej STU pomiędzy płaszczyzną S i tworzącą. Krzywa płaska posiadająca tę własność, że odległość dowolnego jej punktu od pewnego stałego punktu jej płaszczyzny jest proporcjonalna do kąta, zakreślonego przez promień wodzący tego dowolnego punktu, nazywa się spiralną Archimedeśską. Tak więc: przecięcie powierzchni śrubowej o ostrym gwincie płaszczyzną prostopadłą do osi jest spiralną Archimedeśką.

Rys. 434.



§ 234. Krzywa przenikania dwóch powierzchni. Jednym z najczęściej w praktyce spotykanych zagadnień jest wyznaczenie krzywej przenikania dwóch powierzchni. Metoda ogólna polega na przecinaniu obu powierzchni układem płaszczyzn pomocniczych dogodnie obranym i wyznaczaniu krzywych przecięcia tych płaszczyzn z każdą powierzchnią; punkty wspólne obu tych krzywych płaskich są zarazem wspólne obu powierzchniom, a więc należą do krzywej przenikania. Jeżeli np. jedna lub obie dane powierzchnie są stożkiem lub walcami, to najlepiej za płaszczyzny pomocnicze wziąć płaszczyzny przechodzące przez oba wierzchołki; wtedy krzywe przecięcia każdej powierzchni z którąkolwiek płaszczyzną sieczną składać się będzie z dwóch prostych. Jeżeli np. danymi powierzchniami są kula i powierzchnia drugiego stopnia posiadająca przecięcia kołowe /elipsoida, paraboloida eliptyczna, obie hyperboloidy/, to płaszczyznami pomocniczymi nazywamy płaszczyzny przecięć kołowych i t.d.

Zadanie. Wyznaczyć rzut linii przenikania dwóch stożków, których kierownice κ_1 i κ_2 są kołami leżącymi w płaszczyźnie rysunku, jeżeli dane są nadte rzuty /prostokątne, ukośne lub środkowe/ wierzchołków S_1 i S_2 oraz ślad S prostej $S_1 S_2$.

w płaszczyźnie rysunku . /Rys 435/.

Poprowadźmy pęk płaszczyzn o osi $s \equiv S, S_2$ ślady tych płaszczyzn będą promieniami wychodzącymi z punktu S .. Oczywiście w grę wchodzi tylko te promienie, które przecinają oba koła kierownicze; jeżeli tedy poprowadzimy z S styczne do obu kół, to korzystać będziemy z tych tylko promieni, które znajdują się między promieniami p i q stycznymi do jednego a siecznymi względem drugiego koła. Mogą przytem zajść 4 przypadki: 1/ Obie styczne do jednego z kół są sieczne względem drugiego koła. Mówimy wtedy, że przenikanie jest zupełne; krzywa przenikania składa się z dwóch gałęzi nie mających wspólnego punktu, 2/ Jedna ze stycznych do k_1 przecina k_2 , a druga jest zewnętrzna względem k_2 , Wtedy mówimy, że przenikanie, jest częściowe; krzywa przenikania stanowi jedną jedyną krzywą, 3/ Koła k_1 i k_2 mają jedną wspólną styczną wychodzącą z S ; krzywa przenikania posiada jeden punkt podwójny i 4/ koła k_1 i k_2 mają obie styczne wychodzące z S wspólne; krzywa przenikania posiada dwa punkty podwójne i rozkłada się na dwie przecinające się stożkowe, leżące w różnych płaszczyznach.

Przypuśćmy np. /Rys 435/, że przenikanie jest

częściowe, t.j. że styczna p do k_2 przecina k_1 w punktach P_1 i P_2 , a styczna q do k_1 przecina k_2 w punktach Q_1 i Q_2 . Aby wyznaczyć 4 punkty krzywej przenikania, leżące w jednej płaszczyźnie pomocniczej, prowadzimy z S' promień jakiegokolwiek m , który niechaj będzie śladem tej płaszczyzny; oznaczmy literami M_1 , M_2 , M_3 i M_4 punkty, w których m przecina koła k_1 i k_2 . Łącząc M_1 i M_2 z S'_1 otrzymamy rzuty dwóch tworzących m_1 i m_2 , według których płaszczyzna sm przecina stożek S_1 ; łącząc M_3 i M_4 z S'_2 , otrzymamy podobnie rzuty tworzących m_3 i m_4 , według których ta sama płaszczyzna przecina stożek S_2 ; punkty A , B , C i D , według których m_1 i m_2 przecinają m_3 i m_4 , są punktami linii przenikania. Aby w którymkolwiek z tak otrzymanych punktów np. w A poprowadzić styczną do krzywej, zauważmy, że owa styczna musi leżeć w każdej z obu płaszczyzn stycznych, które można poprowadzić do stożków S_1 i S_2 w ich punkcie wspólnym A . Śladami tych płaszczyzn stycznych są styczne a_1 i a_2 do kierownic k_1 i k_2 w punktach M_1 i M_3 ; punkt $T \equiv a_1 a_2$ jest śladem szukanej stycznej; prosta AT jest więc jej rzu-

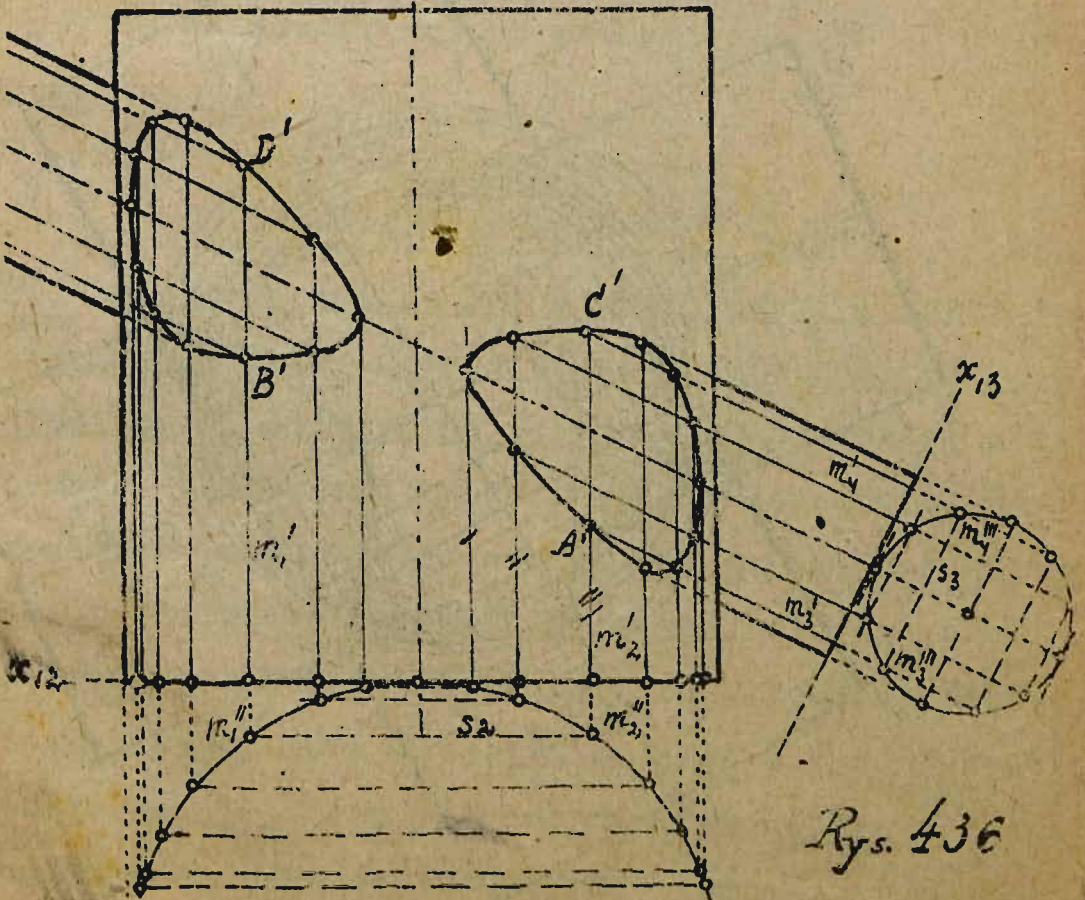
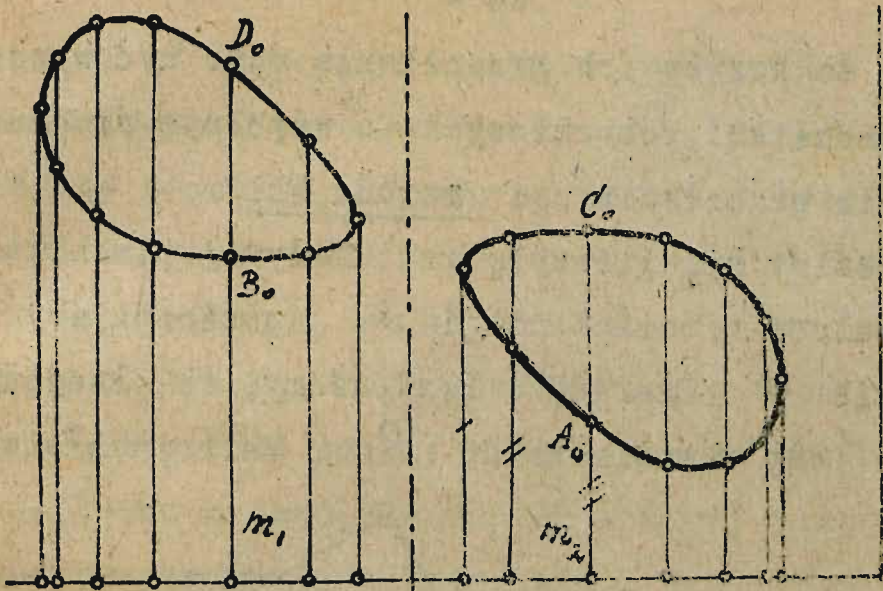
tem. — Dla szybkiego i dokładnego wykreślenia krzywej przenikania zaleca się przedewszystkiem wyznaczenie 1/ punktów P , P^* , Q i Q^* , w których krzywa jest styczna do tworzących p_1 , p_2 , q_1 i q_2 , 2/ punktów R , R^* , U , U^* , V i V^* , w których krzywa jest styczna do konturu rzeczywistego obu stożków.

Zadanie. Wyznaczyć rzut krzywej przenikania dwóch walców, których osie są równoległe do P_1 .

/Rys. 436/. Zadanie to różni się od poprzedniego tylko tym, że wierzchołki obu stożków są niewłaściwe.

Za płaszczyzny pomocnicze obieramy płaszczyzny równoległe do osi obu walców, t.j. do P_1 . Wykreśliwszy rzuty walców na płaszczyzny P_2 i P_3 prostopadłe do P_1 , wyznaczymy pierwsze rzuty tworzących m_1 , m_2 , m_3 i m_4 , według których jakakolwiek płaszczyzna S równoległa do P_1 przecina jeden i drugi walec. Punkty A , B , C i D , w których tworzące m_1 i m_2 przecinają tworzące m_3 i m_4 należą do krzywej przenikania. — Rozwinawszy powierzchnię boczną jednego z walców wyznaczamy na niej z łatwością punkty A_0 , B_0 , C_0 i D_0 należące do rozwinięcia krzywej przenikania.

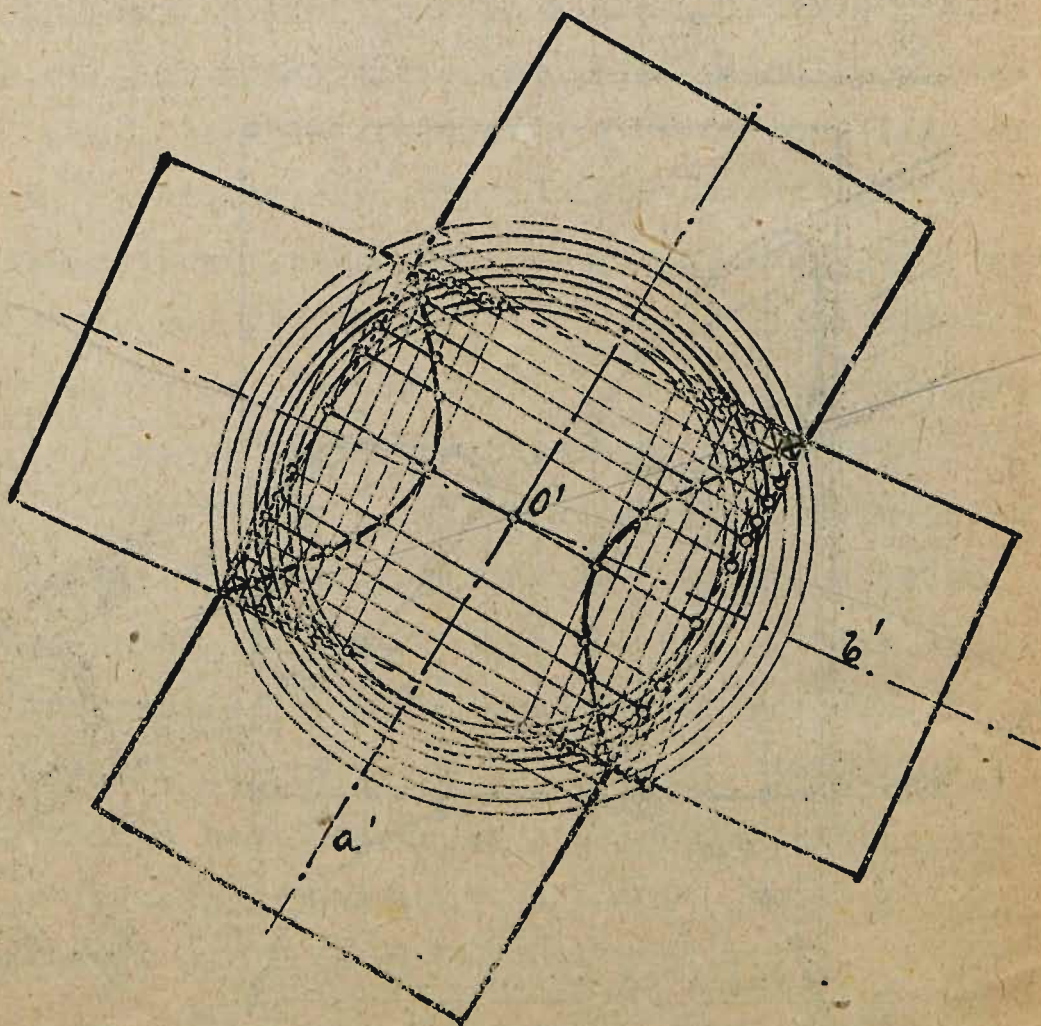
Jeżeli osie dwóch powierzchni obrotowych się prze-



Rys. 436

cinają, to krzywa ich przenikania może być wyznaczona za pomocą kul pomocniczych o wspólnym środku w punkcie przecięcia osi /metoda kul/.

Wykreślmy np. pierwszy rzut krzywej przenikania dwóch walców o osiach a i b , przecinających się w punkcie O /Rys. 437/. Przypuśćmy, że płaszczyzna ab jest równoległa do P_1 . Kula jakakolwiek



Rys. 437.

o środku O przecina oba walce według kół, których płaszczyzny są prostopadłe do P , a więc których rzuty są prostymi, łączącymi punkty przecięcia konturu widzialnego kuli z konturami walców. Punkty wspólne obu kołom, są wspólne obu walcom, a więc należą do krzywej przenikania. Rzuty tych punktów są to oczywiście punkty przecięcia rzutów obu kół. Można łatwo okazać, że rzutem krzywej przenikania w tym przypadku jest hyperbola, dla której rzuty osi walców są średnicami sprzężonymi. -

R O Z D Z I A Ł XVIII.

O POWIERZCHNIACH OBROTOWYCH.

§ 235. Pojęcie ogólne o powierzchniach. Płaszczyzny styczne, styczne główne. Punkty hyperboliczne, paraboliczne i eliptyczne. Przez ruch prostej utworzyć można oczywiście tylko takie powierzchnie, na których leży nieskończenie wiele prostych, jak stożki, walce, powierzchnie rozwijalne, hyperboloide jedno-powłokowy, paraboloid hyperboliczny, konoida śrubowa, powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie i t.d. Wszystkie te powierzchnie obejmujemy wspólną nazwą prostokreślnych. Stanowią one przypadek szczególny powierzchni krzywokreślnych, utworzonych ogólnie przez ruch

krzywej płaskiej lub skośnej, bądź niezmiennej, bądź zmieniającej swój kształt w sposób ciągły według danego prawa.

Niech będzie na powierzchni Π punkt jakikolwiek P . Połączmy go z jakimkolwiek innym punktem P_1 tej powierzchni i zbliżajmy P_1 do P na jakiejkolwiek krzywej leżącej na powierzchni i łączącej punkty P i P_1 . Granicę położenia prostej PP_1 gdy P_1 zbliża się nieograniczenie do P , nazwiemy styczna t do powierzchni w punkcie P .

Jest to więc prosta, mająca z powierzchnią dwa punkty zjednoczone wspólnie. Każda płaszczyzna przechodząca przez styczną t przetnie powierzchnię według krzywej płaskiej stycznej do t w punkcie zetknięcia P .

W każdym punkcie P powierzchni Π istnieje nieskończenie wiele stycznych $t_1, \dots, t_2, t_3, \dots$ albowiem w punkcie P przecina się nieskończenie wiele krzywych leżących na Π . Dowiedzimy, że wszystkie te styczne leżą w jednej płaszczyźnie.

W samej rzeczy, obierzmy dwie jakiekolwiek styczne w punkcie P : t_1, t_2 i poprowadźmy płaszczyznę $T \equiv t_1, t_2$. Przecina ona Π według krzywej stycznej zarówno do t_1 , jak do t_2 w tym samym

punkcie P . Punkt ten jest przeto punktem podwójnym /wzgl. punktem odosobnionym/ krzywej przecięcia i każda prosta t_3 , t_4 , t_5 , ..., leżąc w płaszczyźnie \hat{T} i przechodząca przez punkt L , ma z tą krzywą, a więc i z powierzchnią dwa punkty zjednoczone wspólne; jest to więc styczna do powierzchni Π w punkcie P .

Płaszczyzna T , w której leżą wszystkie styczne do powierzchni Π w punkcie P , nazywa się płaszczyzną styczną do Π w tym punkcie. Prosta prostopadła do T w punkcie P nazywa się normalną do powierzchni w punkcie P .

Z pośród stycznych do powierzchni Π w punkcie P wyróżniamy dwie, zwanymi stycznymi głównymi, które mają już nie dwa, ale trzy zjednoczone punkty wspólne z krzywą przecięcia, a więc i z powierzchnią Π . Każda z nich jest granicą położenia siecznej, która łączy punkt podwójny P z punktem P_2 lub P_3 jednej z gałęzi krzywej przecięcia, gdy te punkty zbliżają się nieograniczenie do P . Każda płaszczyzna przechodząca przez jedną z tych stycznych przecina powierzchnię według krzywej, która w punkcie P ma punkt przegięcia.

Styczne główne mogą być albo rzeczywiste i różne

/punkt P jest wtedy punktem podwójnym krzywej przecięcia/, albo rzeczywiste i zjednoczone /punkt P jest wtedy punktem zwrotu/, albo urojone sprzężone /punkt P jest wtedy punktem odosobnionym krzywej przecięcia/. W pierwszym przypadku punkt P nazywa się punktem hyperbolicznym powierzchni, w drugim - parabolicznym, w trzecim - punktem eliptycznym.

§ 236. Pojęcie ogólne o powierzchniach obrotowych.

Równoleżniki i południki. Jeżeli krzywa płaska lub skośna κ , sztywno związana z prostą a , obraca się dokoła niej, to powierzchnia przez ruch krzywej κ utworzona nazywa się obrotowa. Prosta a nazywa się osią powierzchni. Każdy punkt P krzywej tworzącej κ opisuje koło, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi a i którego środek na niej leży. Koła te nazywamy równoleżnikami.

Powierzchnie obrotowe są najpospolitsze z powierzchni spotykanych w technice i w życiu codziennym, że wspomnimy tylko niezliczone ciała otrzymane na tokarni i kole garncarskim.

Ze sposobu w jaki powstaje powierzchnia obrotowa, wynika że przez obrót dokoła osi a przesuwać się ona będzie sama w sobie, że zatem może ona powstać przez ruch obrotowy każdej wykreślonej na niej krzy-

wej, która przecina wszystkie równoleżniki. W szczególności powstanie ona przez obrót krzywej przecięcia powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez oś. Krzywa taka nazywa się południkiem powierzchni. Ponieważ przez obrót o 180° płaszczyzna południka powraca do swego położenia pierwotnego, przechodząc przez położenia wszystkich innych południków, więc: wszystkie południki są równe i każdy z nich jest symetryczny względem osi.

Przez swoją oś i południk powierzchnia obrotowa jest wyznaczona. Przez każdy punkt powierzchni przechodzi jeden równoleżnik i jeden południk; przecinają się one pod kątem prostym, gdyż płaszczyzna każdego południka przecina każdy równoleżnik prostopadnie.

Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w danym jej punkcie P jest, jak zawsze, wyznaczona przez dwie jakiegokolwiek styczne do powierzchni w tym punkcie, a więc przez styczną do równoleżnika i styczną do południka przechodzącego przez punkt P .

Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach jednego południka są prostopadłe do płaszczyzny tego południka, albowiem przechodzą przez prostopadłe do niej styczne do równoleżnika. Płasz-

czyzny te powłóczą walec rzucający powierzchnię obrotową w kierunku prostopadłym do płaszczyzny południka.

Jeżeli oś jest prostopadła do P_1 , to południk, którego płaszczyzna jest równoległa do P_2 , nazywa się południkiem głównym. Jest on konturem rzeczywistym pionowym powierzchni obrotowej; konturem widzialnym pionowym jest równy mu rzut pionowy tego południka.

Ponieważ przez obrót dookoła osi płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej przystanie do innej płaszczyzny stycznej, a punkt zetknięcia pozostanie na tym samym równoleżniku, więc:

Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach jednego równoleżnika powłóczą wogóle stożek obrotowy, którego osią jest a , a tworzącymi są styczne do południków w punktach przecięcia ich z tym równoleżnikiem.

W dwóch wypadkach atoli stożek ten wyrodnieje:

1/ gdy styczna do południka jest równoległa do osi; wtedy płaszczyzny styczne powłóczą walce a punkty zetknięcia leżą na równoleżniku maximum /równik/ lub minimum /koło szczyne/; są to kontury rzeczywiste poziome równe zresztą konturom widzialnym poziomym;

2/ gdy styczna do południka jest prostopadła do osi, wtedy płaszczyzny styczne są zjednoczone w płaszczyznę prostopadłą do osi.

§ 237. Rzuty punktu leżącego na powierzchni obrotowej. Zadanie.

Powierzchnia obrotowa jest dana przez rzut poziomy osi prostopadłej do P_1 , oraz przez rzut pionowy południka głównego /kontur pionowy/. Mając jeden rzut punktu leżącego na powierzchni wyznaczyć rzut drugi. Niech k'' /Rys. 438/ będzie rzutem pionowym południka głównego, $a'a''$ rzutami osi obrotu; prócz tego dany jest jeden rzut, np. P'' , punktu P , leżącego na powierzchni. Przez P'' poprowadźmy równoległą do x ; będzie to rzut pionowy równoleżnika m przechodzącego przez P . Odcinek $P_0''M''$ jest promieniem tego równoleżnika; jeżeli przeto z punktu a' zakreslimy tym promieniem koło, to otrzymamy rzut poziomy równoleżnika m , Linja rzędnych punktu P'' wyznacza na m' dwa punkty P' i $P'x$ które są poziomymi rzutami punktów powierzchni mających P'' za rzut pionowy. - Gdyby dany był rzut poziomy P' punktu powierzchni a należało znaleźć rzut pionowy P'' , to obróciwszy P' dookoła a' do położenia P_0' i wyznaczyszy P_0'' na południku głównym

kreślimy rzut pionowy równoleżnika m , na którym linja rzędnych punktu P' wyznaczy punkt P'' .

Płaszczyzna styczna S do powierzchni w tak wyznaczonym jej punkcie $P'P''$ będzie określona przez prostą poziomą ρ oraz prostą największego spadku

n , przechodzące przez punkt P ; ρ' jest styczną do m' , ρ'' jest równoległą do osi x ;

$n' \equiv P'M'$; aby znaleźć n'' , obracamy południk punktu P do przystania z południkiem głównym i

w nowym położeniu punktu P prowadzimy do niego styczną; punkt jej przecięcia O z osią a przy obrocie pozostaje bez ruchu, zatem $O''P'' \equiv n''$

Ślad poziomy s , płaszczyzny stycznej $S = \rho n$ będzie styczny do koła, zakreślonego w płaszczyźnie

P , przez ślad S_i prostej OP i równoległy do ρ' .

§ 238. Punkty przebicia powierzchni obrotowej prostą. Zadanie:

Wyznaczyć punkty przebicia danej powierzchni obrotowej prostą $\zeta'\zeta''$. Niechaj powierzchnia obrotowa będzie dana zapomocą osi $a'a''$ i południka głównego k'' /Rys 438/. Wyznaczymy rzut pionowy krzywej, według której płaszczyzna B , rzucająca poziomo prostą ζ , przecina powierzchnię. Rzut

poziomy tej krzywej przystaje do śladu poziomego płaszczyzny B_1 , t.j. do ϕ' ; biorąc na ϕ' różne punkty Q' , znajdziemy na zasadzie poprzedniego artykułu punkty Q'' należące do szukanego pionowego rzutu krzywej przecięcia. Rozwiązanie zadania znacznie zostanie ułatwione dzięki symetrii krzywej przecięcia; osią tej symetrii jest prosta ϕ przecięcia płaszczyzny B_1 z płaszczyzną T , przechodząca przez oś prostopadle do B_1 . Rzut pionowy H'' punktu H , którego poziomy rzut $H' = \phi'$, będzie najwyższym lub najniższym punktem krzywej, w którym styczna jest równoległa do P_1 , a jej rzut pionowy równoległy do x ; w punktach R i R' równika styczne będą prostopadłe do x . Styczne w innym jakimkolwiek punkcie Q krzywej przecięcia znajdziemy jako przecięcie płaszczyzny B_1 z płaszczyzną styczną do powierzchni w punkcie Q ; rzut pionowy tej stycznej otrzymamy przez połączenie punktu Q'' z rzutem pionowym punktu, w którym ϕ' przecina ślad u , płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie Q . - Rzuty pionowe punktów przebicia C i D powierzchni prosta ϕ będą punktami, w których ϕ'' przecina rzut pionowy krzywej przecięcia; rzuty poziome tych punktów wyznaczone zostaną na

b' przez linję rzędnych punktów c'' i d'' .

§ 239. Przecięcie powierzchni obrotowej płaszczyzną styczną. Zadanie:

Powierzchnię utworzona przez obrót koła dokoła prostej zewnętrznej leżącej w jego płaszczyźnie, przeciąć płaszczyzną styczną do tej powierzchni w danym jej punkcie hyperbolicznym $A'A''$.

Wyznaczyć styczne główne w punkcie A . Południkiem tej powierzchni, zwanej pierścieniem kołowym są dwa koła O i O' , symetryczne względem osi $a'a''$ /Rys.439/. Niechaj oś $a'a''$ będzie prostopadła do P_1 i niechaj dany będzie rzut poziomy A' punktu A leżącego na powierzchni; znajdziemy A'' i wyznaczmy linję poziomą $b'b''$ i linję największego spadku $n'n''$ oraz ślady s_1 i s_2 płaszczyzny stycznej $b'n$. Zauważmy przedewszystkiem, że n jest osią symetrii krzywej; dzięki czemu n' jest osią symetrii prostokątnej, a n'' osią symetrii ukośnej rzutów krzywej przecięcia. Każdemu punktowi i stycznej krzywej przecięcia odpowie przeto punkt i styczna symetryczna. Obracwszy dowolnie rzut poziomy m' równoleżnika m i znalazłszy jego rzuty pionowe m'' i m''^x , wyznaczmy od razu 4 punkty krzywej przecięcia M , M' , M^x , i M_1^x , jako punkty, w których równoleżnik m i m^x

przecinają płaszczyznę styczną S, S_2 . Styczne w tych punktach będą prostymi, w których płaszczyzny styczne do pierścienia przecinają płaszczyznę S, S_2 . Dla szybkiego wykreślenia rzutów krzywej szczególnie pomocne będą punkty 1 i 2, które leżą na osi symetrii punkty 3, 4, 5 i 6, leżące w płaszczyźnie południka głównego, punkty 7, 8, 9 i 10, leżące w płaszczyźnie równika oraz punkty 11 i 12 leżące na najniższym równoleżniku. Styczne w punktach 1, 2, 11 i 12 są liniami poziomymi płaszczyzny S, S_2 ; rzuty poziome stycznych w punktach 7, 8, 9 i 10 są stycznymi do równika wzgl. do koła szczytnego wreszcie rzuty pionowe stycznych w punktach 3, 4, 5 i 6 są stycznymi do południka głównego. Styczne do obu gałęzi krzywej, przecinających się w punkcie podwójnym $A'A''$ są stycznymi głównymi. --



nr 3127

