

CZEŚĆ IV.

KRZYWE, STOŻKI I POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

Rozdział VII. Szeregi i pęki rutowe.

§ 133. Określenie geometrii rutowej.

Istota wszystkich metod geometrii wykreslonej, jak to zauwazyliśmy już w §1, polega na przekształceniu danej figury przestrzennej na figurę płaską za pomocą kolejnych dwóch czynności: runcania i przecinania. Lanim przystąpimy do dalszego rozwinięcia metod geometrii wykreslonej, trzeba bliżej poznać te własności figur, które zostają zachowane przy runcu i przecięciu. Do takich należy przede wszystkim wzajemna przynależność elementów geometrycznych (punktów i prostych, prostych i płaszczyzn). Jeżeli punkt A leży na prostej b , to prosta a runcająca punkt A z dowolnego punktu C leży w płaszczyźnie B runcającej z tego samego środka rutow prosta b ; jeżeli prosta a , leżąca w płaszczyźnie B przecniemy płaszczyzną jakąkolwiek, to punkt A , w którym płaszczyzna sieczna przecina prosta a , leży na prostej b , we-

dług której ta sama płaszczyzna przecina płaszczyznę B. Typowemi twierdzeniami, dotyczącemi własności, zachowujących się przez rzuty i przecięcia, są twierdzenia o trójkątach Desargues'a (§93, Rys 195).

Istota tych twierdzeń polega na istnieniu t. zw. konfiguracji Desargues'a, t. j. figury płaskiej, złożonej z 10 punktów i 10 prostych w ten sposób, że przez każdy punkt przechodzą 3 proste i na każdej prostej leżą 3 punkty. Jeżeli z jakiegokolwiek punktu P rzucimy wszystkie te 10 punktów i 10 prostych, to otrzymamy figurę złożoną z 10 prostych i 10 płaszczyzn wychodzących z punktu P w ten sposób, że przez każdą prostą przechodzą 3 płaszczyzny i w każdej płaszczyźnie leżą 3 proste. Stąd przekonywamy się o prawdziwości twierdzeń:

III. Jeżeli krawędzie dwóch trójscianów o wspólnym wierzchołku leżą parami w 3 płaszczyznach przechodzących przez jedną prostą, to ich ściany przecinają się parami według 3 prostych jednej płaszczyzny.

IV. Jeżeli ściany dwóch trójscianów o wspólnym wierzchołku przecinają się parami według 3 prostych jednej płaszczyzny, to ich krawędzie leżą parami w 3 płaszczyznach przechodzących przez jedną prostą.

Nawzajem, przecinając tę figurę, złożoną z 10 prostych i 10 płaszczyzn wychodzących z jednego punktu, płaszczyzną jakąkolwiek, otrzymalibyśmy figurę, z której wnioskowalibyśmy o prawdziwości twierdzeń I i II, § 93. Twierdzenia o trójkątach Desargues'a wyrażają więc własność, zachowującą się przez rzuty i przecięcia.

Część geometrii, której przedmiotem jest badanie własności figur nie zmieniających się przez rzuty i przecięcia, nazywa się geometrią rzutową.

§ 134. Geometria rzutowa płaska i geometria rzutowa wiazki.

Geometria płaska bada własności figur złożonych z punktów i prostych jednej płaszczyzny; przedmiotem geometrii wiazki są własności figur złożonych z prostych i płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt. Twierdzenia o trójkątach Desargues'a (§ 93) należą do geometrii płaskiej, twierdzenia o trójscianach Desargues'a (§ 133) należą do geometrii wiazki.

Z każdego twierdzenia geometrii rzutowej płaskiej można bezpośrednio otrzymać odpowiednie twierdzenie geometrii rzutowej wiazki, zastępując wyrazy oznaczające punkty i proste odpowiednimi wyrazami

oznaczającymi rzucające je proste i płaszczyzny, i nawzajem. Nie ma więc potrzeby rozwijać niezależnie obu geometrii, wystarczy zająć się geometrią rutową, płaską, w której jest dana łatwość dokładnego ilustrowania myśli za pomocą rysunku.

§ 135. Dwoistość w geometrii przestrzeni.
Istnieje inny jeszcze związek pomiędzy twierdzeniami geometrii rutowej płaskiej a twierdzeniami geometrii rutowej przestrzennej, pozwalający z każdego twierdzenia jednej z nich wyprowadzić bezpośrednio pewne twierdzenie drugiej. Związek ten nazywa się wzajemnością i opiera się na następującej zasadzie, zwanej zasadą dwoistości geometrii przestrzeni:

Jeżeli prawdziwe jest pewne twierdzenie, dotyczące wzajemnej przynależności punktów, prostych i płaszczyzn, to będzie prawdziwe inne twierdzenie, dotyczące tej samej własności, w którym zamiast pojęcia „punkt” figurować będzie pojęcie „płaszczyzna i nawzajem”.

Tak np. twierdzenia Desargues'a I i IV, II i III są wzajemne; a twierdzenia I (§ 93) otrzymalibyśmy IV (§ 133) zastępując pojęcie:
wierzchołek pojęciem ściana,

trójkąt	pojęciem	trójscian,
prosta	"	prosta,
bok	"	krawędź,
punkt	"	ptaszczyzna.

§ 136. Dwoistość w geometrii płaskiej i w geometrii wiązki.

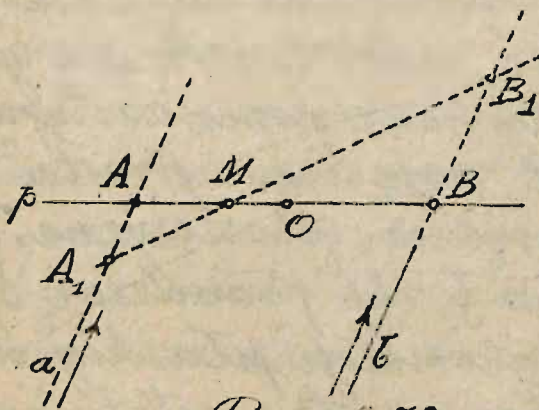
Jeżeli prawdziwe jest pewne wzajemne twierdzenie geometrii płaskiej, to na zasadzie § 134 prawdziwe być musi twierdzenie geometrii wiązki, otrzymane przez zastąpienie pojęcia „punkt” pojęciem „prosta” i pojęcia „prosta” pojęciem „ptaszczyzna”. Wtedy, na zasadzie § 135 prawdziwe być musi twierdzenie geometrii płaskiej, otrzymane przez zamianę w tem ostatniem twierdzeniu pojęcia „ptaszczyzna” pojęciem „punkt”, stąd wynika, że:

prawdziwe być musi twierdzenie geometrii płaskiej otrzymane przez zastąpienie w danym twierdzeniu geometrii płaskiej pojęcia „punkt” pojęciem „prosta” i pojęcia „prosta” pojęciem „punkt”.

W geometrii płaskiej istnieje więc również zasada dwoistości, polegająca na wzajemności pojęć „punkt” i „prosta” (np. twierdzenia I i II § 93 o trójkątach Desarguesa). Tak samo dowodzimy, że w geometrii wiązki istnieje zasada dwoistości, polegająca na wzajemności pojęć

„prosta” i płaszczyzna” (np. twierdzenia III i IV § 133 o trójszcianach Desargues'a).

§ 137. Dwustosunek 4 punktów jednej prostej. Niech będą na prostej p (Rys. 253) dwa stałe punkty A i B , zwane pierwszym i drugim punktem zasadniczym, oraz punkt



Rys. 253.

zmienny M , zwany punktem podziału. Uważamy zwrot OA z A do B za dodatni; zmierzmy dowolną jednostką odcinki AM i BM , uważając

każdy z nich za dodatni, jeżeli posiada ten sam zwrot, co AB , w przeciwnym razie uważamy go za ujemny. Stosunek

$$\mu = \frac{AM}{BM}$$

nazywamy stosunkiem podziału punktu M względem punktów A i B . Każdemu punktowi M prostej p odpowiada określona liczba, mianowicie jego stosunek podziału; liczba ta jest zresztą niezależna od tego, czy zwrot AB czy BA uznaliśmy za dodatni i jaką jednostkę obraliśmy.

Stosunek podziału jest ujemny dla wszystkich punktów leżących między A i B , gdyż

wtedy AM i BM , niezależnie od umowy, mają przeciwny znak, - jest on dodatni dla wszystkich punktów leżących zewnątrz odcinka AB , gdyż wtedy AM i BM mają zawsze ten sam znak. - Zbadajmy, w jaki sposób zmienia się stosunek μ , gdy M przebiega prostą p .

W tym celu poprowadzimy przez punkty A i B równoległe a i b w dowolnym kierunku i obracamy na obu tych prostych ten sam zwrot dodatni, odmierzymy na b odcinek $BB_1 = +1$ i połączymy B_1 z punktem M ; odległość punktu A od punktu A_1 , w którym B_1M przecina a , będzie co do wartości bezwzględnej i znaku równa μ , gdyż:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AA_1}{BM} = \frac{AM}{BM} = \mu.$$

Gdy M znajduje się w A , $AA_1 = \mu = 0$; gdy M posuwa się od A ku środkowi O odcinka AB , μ porostaje ujemne i osiąga w punkcie O wartość -1 ; pomiędzy O i B μ porostając ujemne wzrasta nieograniczenie co do wartości bezwzględnej i w punkcie B staje się $\pm \infty$, gdyż prosta B_1M jest wtedy równoległa do a . Dla wszystkich punktów zewnętrznych względem odcinka AB μ jest, jak to już zaznaczy-

liśmy, liczbą dodatnią; przytem dla punktów leżących po stronie punktu B μ jest zawarte pomiędzy $+\infty$ i $+1$, natomiast dla punktów leżących po stronie punktu A μ posiada wartości pomiędzy 0 i $+1$. Gdy M oddala się nieograniczenie w jedną lub drugą stronę, B , M staje się równoległa do p i $AA_1 = \mu = +1$. Tak więc:

Jeżeli na prostej p dane są dwa punkty A i B , to każdemu punktowi M tej prostej odpowiada jedna jedyna liczba (dodatnia lub ujemna), mianowicie stosunek podziału μ punktu M względem punktów A i B .

Nawzajem, każdej (dodatniej lub ujemnej) liczbie μ odpowiada wtedy jeden jedyny punkt M prostej p , ten mianowicie, którego stosunkiem podziału względem punktów A i B jest μ .

W samej rzeczy, poprowadźmy przez A i B równoległe a i b w dowolnym kierunku i obróćmy na obu jednakowy zwrot dodatni, omierzamy na nich odcinki AA_1 i BB_1 , których stosunek es do wartości bezwzględnej i znaku równy jest μ ; prosta A_1B_1 przecina p w punkcie szukany M .

Niechaj będą teraz (Rys. 254) dwa punk-

ty M i N , których stosunki podziału względem punktów zasadniczych A i B niech będą μ i ν . Stosunek $\frac{\mu}{\nu}$ nazywamy dwustosunkiem (stosunkiem anharmonicznym) 4-ech punktów A, B, M, N . Jest on dodatni, gdy M i N albo leżą oba wewnątrz albo oba zewnątrz odcinka AB , t.j. gdy pary punktów AB i MN się „nie” przecinają, ujemny, gdy jeden z dwóch punktów M i N znajduje się wewnątrz, a drugi zewnątrz odcinka AB , t.j. gdy pary AB i MN się „przecinają”.

Dwustosunek $\lambda = \frac{\mu}{\nu} = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$ oznaczamy symbolem $(ABMN)$, przestrzegając ściśle określonego następstwa liter. W symbolu tym pierwsza i druga litera oznacza pierwszy i drugi punkt zasadniczy, trzecia i czwarta - pierwszy i drugi punkt podziału. Jeżeli więc na prostej p obierzemy 4 punkty A, B, M, N , to $(ABMN)$ oznacza dwustosunek $\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$, podczas gdy nap. $(BMAN)$ oznaczałby $\frac{BA}{MA} : \frac{BN}{MN}$.

Ponieważ z 4 liter można utworzyć 24 przedstawienia, więc 4 punkty prostej p wyznaczają 24 dwustosunki, które jednak nie wszystkie są różne. W samej rzeczy wartość dwustosunku $(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$ nie

zmieni się przez następujące przestawienia:
 $(ABMN) = (MNA B) = (NMBA) = (BANM)$,

gdzie:

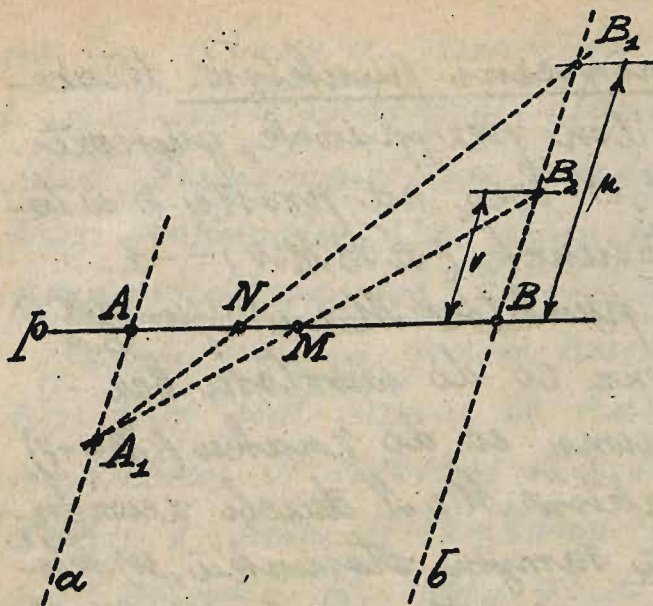
$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{AN}{BN} = \frac{MA}{NA} \cdot \frac{MB}{NB} = \frac{NB}{MB} \cdot \frac{NA}{MA} = \frac{BN}{AN} \cdot \frac{BM}{AM}$$

stąd wynika:

Dwustosunek 4 punktów nie zmienia swej wartości, gdy zmienimy jednocześnie porządek punktów zasadniczych i porządek punktów podziału, lub gdy punkty podziału uczynimy punktami zasadniczymi i nawzajem.

Jeżeli zśród 4 punktów A, B, M, N prostej p trzy, np. A, B i N uważać będziemy za state, a czwarty M za zmienny, to gdy punkt M przebiegać będzie prostą p , dwustosunek $(ABMN) = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{AN}{BN}$ przyjmie kolejno wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$. Gdy bowiem wartość drugiego stosunku $\nu = \frac{AN}{BN}$ jest stata i różna od zera, wartość pierwszego $\mu = \frac{AM}{BM}$ zmienia się w sposób ciągły otrzymując kolejno wszystkie wartości liczebne. Stosunek $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$ musi zatem również zmieniać swą wartość w granicach od $+\infty$ do $-\infty$.

Nawzajem, jeżeli dane są 3 punkty A, B i N prostej p , to każdej liczbie λ odpowiadać będzie jeden jedyny punkt M tej prostej, ten mianowicie, dla którego dwu-



Rys. 254.

stosunek $(ABMN) = \lambda$. W samej rzeczy, przez punkty A i B poprowadzimy równoległe a i b, odmierzymy na b takie dwa odcinki BB_1 i BB_2 , aby $\frac{BB_1}{BB_2} = \lambda$; poprowadzimy B_1N , wyznaczymy punkt A_1 , w którym B_1N przecię

na a, wreszcie poprowadzimy A_1B_2 , która przecięnie p w szukanym punkcie M. Gdyż

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AA_1}{BB_2}; \quad \frac{AN}{BN} = \frac{AA_1}{BB_1}, \text{ skąd}$$

$$(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN} = \frac{BB_1}{BB_2} = \lambda.$$

Dwustosunek $(ABMN)$ danych 4 punktów prostej p może być sprowadzony do stosunku podziału. W tym celu (Rys. 254) poprowadzimy przez A i B równoległe a i b i z wybranego na a punktu A_1 rzucimy N i M na prostą b, otrzymując na niej odcinki B_1B i B_2B , których stosunek $= (ABMN)$.

Gdy punkt N jest punktem niewłaściwym prostej p, to dwustosunek $(ABMN)$ staje się stosunkiem $\frac{AM}{BM}$, gdyż wtedy stosunek $\frac{AN}{BN} = +1$.

138. Grupy harmoniczne punktów. Przeciecznie ważnym jest ten przypadek, gdy zewnętrzne punkty A, B, M, N leżą na prostej p w taki sposób, że dwustosunek $(ABMN) = -1$.

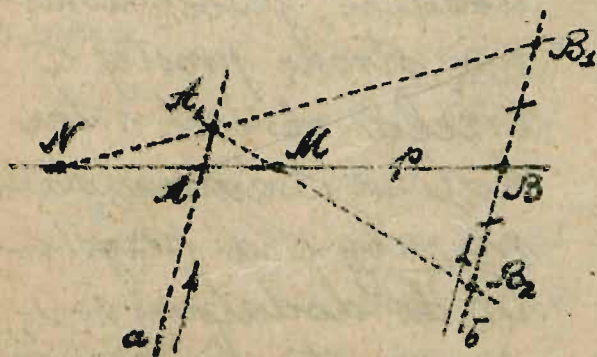
Stosunki podziału punktów M i N : $\mu = \frac{AM}{BM}$ i $\nu = \frac{AN}{BN}$ są wtedy równe co do wartości bezwzględnej lecz przeciwne co do znaku ($\mu = -\nu$), tak że jeden z punktów M i N dzieli zewnętrznie odcinek AB w tym samym stosunku, w którym drugi dzieli go wewnętrznie. O punktach A, B, M, N mówimy, że tworzą grupę harmoniczną; o punktach M i N mówimy, że dzielą harmonicznie odcinek AB , albo że są harmonicznie sprzężone względem punktów A i B .

Przestawienie liter A i B w dwustosunku $(ABMN) = -1$, zmieniając każdy ze stosunków μ i ν na jego odwrotność, nie zmienia ich ilorazu; podobnie, przestawienie liter M i N , zmieniając μ na ν i ν na μ , nie zmienia również ilorazu $\frac{\mu}{\nu} = -1$. Ponieważ wreszcie dwustosunek $(ABMN)$ nie zmienia się i wtedy, gdy litery M i N postawimy przed literami A i B , więc:

jeżeli punkty M i N są harmonicznie sprzężone względem punktów A i B (dzielą harmonicznie odcinek AB), to nawzajem punkty A i B są harmonicznie sprzężone względem punktów M i N (dzielą harmonicznie odcinek MN); nie potrzeba przytem zwracać uwagi

na to, który z punktów każdej pary AB i MN jest pierwszy. Ponieważ pary AB i MN wzajemnie się przegradają, mówimy więc prosto, że pary punktów AB i MN przegradają się harmonicznie.

Jeżeli jedna para punktów sprzężonych, np. AB jest dana, to każdemu trzeciemu punktowi N prostej AB odpowiada jeden z nim sprzężony czwarty harmoniczny punkt M . Aby go wyznaczyć stosujemy wykreślenie § 187; przez punkty A i B (Rys. 255) kreślimy w dowolnym kierunku równoległe a i b ; na prostej b odmierzamy



Rys. 255.

w przeciwno strony równe odcinki BB_1 i BB_2 dowolnej długości (wtedy $\frac{BB_1}{BB_2} = -1$) i punkt A_1 , w którym B_1N przecina a , łączymy z B_2 ; prosta A_1B_2 przecina b w

czwartym harmonicznym punkcie M .

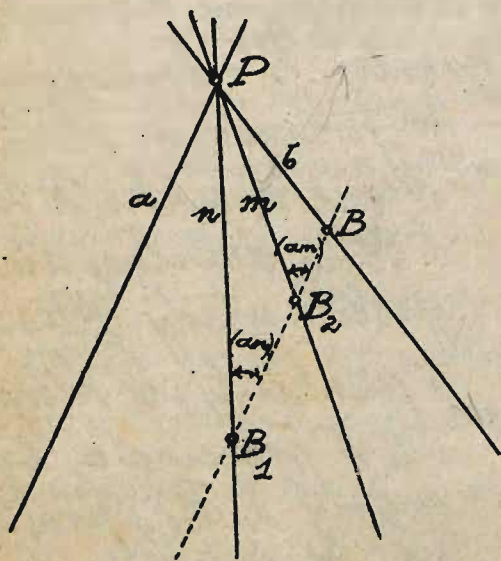
Gdy punkt N jest punktem niewłaściwym prostej p ($v = +1$), to punkt M musi być środkiem odcinka AB ($\mu = -1$). Każdy odcinek jest przez swój środek i punkt niewłaściwy podzielony harmonicznie.

Gdy punkt N przystanie do punktu A ($\mu = 0$), albo do punktu B ($\mu = \pm \infty$), to i punkt M przystanie do punktu A ($v = 0$) wzgl. do

punktu P ($v = \mp \infty$). Jeżeli dwa punkty grupy harmonicznej schodzą się w jednym punkcie, to jeszcze jeden punkt tej grupy upada w tym punkcie.

§ 139. Dwustosunek 4 promieni, wychodzących z jednego punktu.

Niechaj z punktu P wychodzą 4 proste a, b, m i n , leżące w jednej płaszczyźnie. Dokoła punktu P oraz na każdej z prostych a, b, m i n obierzmy zwroty dodatnie i umi



Rys. 256.

my się, że kąt $(ab) < \pi$ uważać będziemy za dodatni, jeżeli dodatnia strona prostej a trzeba obrócić o ten kąt w dodatnia stronę, aby na przystała do dodatniej strony prostej b . Wartość wyrażenia:

$$\lambda = \frac{\sin(am)}{\sin(bm)} : \frac{\sin(an)}{\sin(bn)}$$

nazywamy dwustosunkiem (stosunkiem anharmonicznym) 4 promieni a, b, m, n . Wartość ta jest zresztą niezależna od powyższej umowy; w samej rzeczy, zmiana zwrotu na którejkolwiek z prostych a, b, m, n powoduje zmianę znaku w dwóch wyrazach tego dwustosunku, a

Zmiana zwrotu doksta punktu P powoduje zmianę znaku wszystkich czterech wyrażeń.

Dwustosunek $(abmn)$ jest dodatni, gdy pary promieni ab i mn się nie przecinają, - ujemny, gdy te pary się przecinają. Podobnie jak w dwustosunkach 4 punktów mamy:

$$(abmn) = (mnab) = (nmab) = (banm).$$

Aby wyznaczyć dwustosunek $(abmn)$ poprowadzimy (Rys. 256) równoległą do prostej a , która niechaj przecnie proste b, m i n w punktach B, B_2 i B_1 . Z trójkąta PBB_2 mamy:

$$\frac{\sin(am)}{\sin(bm)} = \frac{PB}{BB_2},$$

z trójkąta PBB_1 :

$$\frac{\sin(an)}{\sin(bn)} = \frac{PB}{BB_1},$$

dzieląc te proporcje stronami otrzymamy:

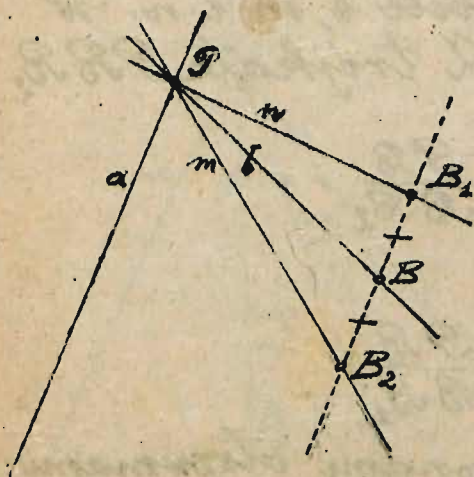
$$(abmn) = \frac{\sin(am)}{\sin(bm)} : \frac{\sin(an)}{\sin(bn)} = \frac{BB_1}{BB_2},$$

skąd łatwo sposób wykreślenia prostej m , gdy 3 proste, a, b i n oraz dwustosunek $(abmn)$ są dane.

§140. Grupy harmoniczne promieni.

Especially ważnym jest przypadek, gdy 4 proste a, b, m, n przechodzą przez punkt P w taki sposób, że dwustosunek $(abmn) = -1$. Mówimy w tym przypadku, że te 4 proste two-

raz grupę harmoniczną, lub że proste m i n harmonicznie dzielą kąt (ab) , albo że są sprzężone harmonicznie względem prostych a i b . Podobnie jak w grupach harmonicznych punktów łatwo okazać, że przestawienie liter a i b lub m i n lub obu liter ab z obu literami mn nie zmieni dwusunkunku $(abmn)$, tak że można będzie o dwóch parach promieni ab i mn grupy harmonicznej prosto powiedzieć, że się harmonicznie przegradzają.



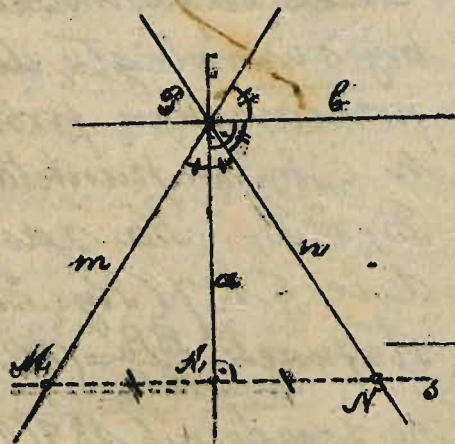
Rys. 257.

Jeżeli jedna para promieni sprzężonych jest dana, np. ab , to każdemu trzeciemu promieniowi n odpowiada jeden jedyny z nim sprzężony czwarty harmoniczny promień m . Aby go wyznaczyć (Rys. 257) stosujemy wykreślenie

§ 139: prowadzimy równoległą do a , która przecina proste b i n w punktach B i B_1 , poczyniemy odmierzamy $BB_2 = BB_1$ (wtedy $\frac{BB_1}{BB_2} = -1$) i tacyśmy $PB_2 \equiv m$.

Z wykreślenia tego wynika, że dwa boki m i n trójkąta PB_1B_2 są sprzężone harmonicznie względem środkowej b odpowiadającej trzeciemu bokowi i równoległej a do tego boku

z przeciwległego mu wierzchołka P . - Jak wiadomo, gdy środkowa trójkąta jest jego wysokością, to jest zarazem jego dwusieczną; stąd wniosek, że dwusieczne kątów, które tworzą dwie przecinające się proste, harmonicznie je przegradają. Jak wiadomo, te dwusieczne są wzajemnie prostopadłe; można dowieść, że nawzajem, jeżeli dwa promienie sprzężone a

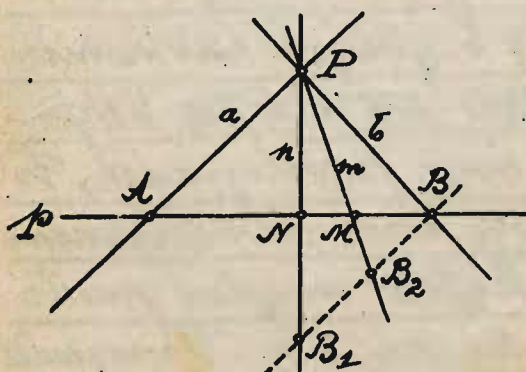


Rys. 257^a

i b grupy harmonicznej $a b m n$ są wzajemnie prostopadłe, to są one dwusiecznymi kątów między prostymi m i n . Poprowadzmy sieczną s prostopadłą do a , a więc równoległą do b , i

niechaj ta sieczna przecnie promienie a , b , m i n w punktach A , B^∞ , M i N (Rys. 257^a). Punkt B^∞ jest niewłaściwy, skąd wynika, że sprzężony z nim punkt A jest środkiem odcinka MN (§ 138). Trójkąt PMN jest równoramienny, gdyż wysokości PA jest zarazem środkową; musi więc ona być również i dwusieczną kąta MPN . Prosta b do niej prostopadła jest wtedy dwusieczną kąta przyległego.

§ 141. Twierdzenie. Dwustosunek jest
własnością rzutową, to jest zachowuje się
przez rzuty i przecięcia. Niech będą 4
punkty A, B, M i N (Rys. 258) leżące na
prostej p oraz punkt P nie leżący na niej.
Półajmy PA, PB, PM i PN prostymi $a, b,$
 m i n ; trzeba okazać, że $(ABMN) = (abmn)$.



Rys. 258.

Przez B poprowadzi-
my równoległą do a ,
przecinającą proste
 n i m w punktach
 B_1 i B_2 . Na zasa-
dzie § 137 (Rys. 254)
stosunek $\frac{PB_1}{PB_2} = (ABMN)$;
na zasadzie § 139 (Ry-
sunek 256) ten sam

stosunek $= (abmn)$, skąd wynika, że:

$$(ABMN) = (abmn), \text{ c. b. d. o.}$$

W szczególności, grupa promieni rzucają-
cych grupę harmoniczną punktów, oraz gru-
pa punktów przecięcia grupy harmoniczej
promieni, jest harmoniczna.

Jeżeli 4 punkty A, B, M, N prostej p rzucimy
z dowolnego punktu P na prostą p_1 , otrzy-
mane w ten sposób punkty A_1, B_1, M_1, N_1
rzucimy z dowolnego punktu P_1 na prostą
 p_2 i t. d., to $(ABMN) = (A_1B_1M_1N_1) = (A_2B_2M_2N_2) = \dots$
Zastosujemy ten wniosek do grup harmoniczych.

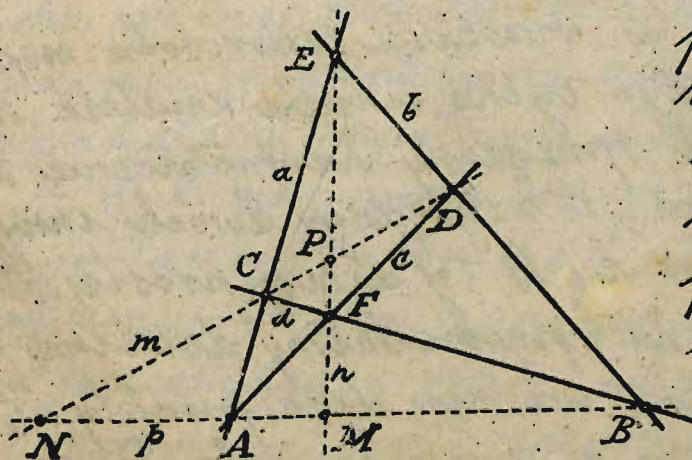
200

§142. Własności harmoniczne czworoboku i czworokąta zupełnego.

Figura utworzona przez 4 proste a, b, c, d płaszczyzny, z których żadne 3 nie przecinają się przez jeden punkt, oraz przez 6 punktów przecięcia tych prostych po dwie, nazywa się czworobokiem zupełnym $a b c d$.

Proste a, b, c, d nazywają się bokami, punkty ich przecięcia A, B, C, D, E, F nazywają się wierzchołkami czworoboku zupełnego.

Dwa wierzchołki nie leżące na wspólnym boku nazywają się przeciwległymi. Proste p, m i n , łączące wierzchołki przeciwległe A i B, C i D, E i F nazywają się przekątnymi (Rys. 259).



Rys. 259.

Rzucimy czworokąt punktów A, B, M, N z punktu E na prostą m . Otrzymamy w ten sposób punkty C, D, P, N stanowią czworokąt, której dwusieczna ($CDPN$) musi być równa dwusiecznej ($ABMN$) (§141)

Punkty C, D, P, N rzucimy z punktu F z powrotem na prostą p . Otrzymamy punkty B, A .

M, N , których dąstosunek $(BAMN)$ musi być rowny (EDN) . W ten sposób:

$$(ABMN) = (EDN) = (BAMN).$$

ale $(BAMN) = \frac{1}{(ABMN)}$, tak że

$$(ABMN)^2 = 1;$$

ponieważ zaś $(ABMN)$ nie może być rowny $+1$, gdyż wtedy punkty M i N musiałby przystać do siebie, więc:

$$(ABMN) = -1,$$

to znaczy, grupa $ABMN$ jest harmoniczna.

W czworoboku zupełnym punkty przecięcia jednej przekątnej z dwiema innymi są harmonicznie przezone względem wierzchołków na tej przekątnej leżących.

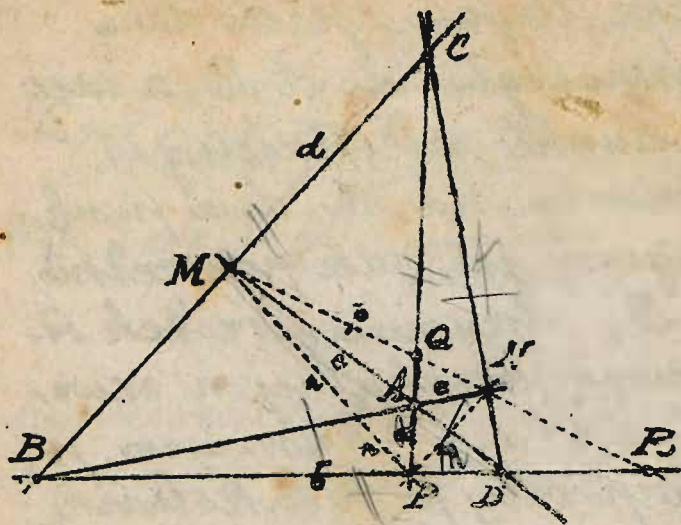
Na zasadzie tej własności czworoboku można za pomocą samego tylko linijatu znaleźć na prostej p punkt sprzężony harmonicznie z danym punktem N względem dwóch innych danych punktów A i B tej samej prostej. Przez punkt N (Fig. 259) prowadzimy dowolną prostą m i wybieramy na niej dwa punkty C i D , które łączymy z punktami A i B , tworząc czw. obok a b c d o przekątnych p i m ; trzecia przekątna n przecina p w punkcie szuk. nym M .

W sake zólności, jeżeli dany jest odcinek AB , możemy go podzielić na połowy za po-

mocą samego tylko linjatu, jeżeli dana jest prosta m równoległa do AB , a więc jeżeli dany jest punkt niewłaściwy N^∞ prostej AB . Obrazując na m dwa punkty C i D i potączywszy je, jak poprzednio, z punktami A i B , otrzymamy środek odcinka AB za pomocą prostej n exoroboku zupełnego $abcd$. - Nawzajem, jeżeli dany jest na prostej p jakikolwiek odcinek podzielony na połowy, to można przez punkt jakikolwiek C poprowadzić równoległą do p za pomocą konstrukcji linjowej, t.j. za pomocą samego tylko linjatu.

Figura utworzona przez 4 punkty A, B, C, D płaszczyzny, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej, oraz przez 6 prostych łączących te punkty po dwa, nazywa się czworokątem zupełnym $ABCD$. Punkty A, B, C, D nazywają się wierzchołkami, proste je łączące a, b, c, d, e, f nazywają się bokami czworokąta zupełnego. Dwa boki nie przechodzące przez wspólny wierzchołek nazywają się przeciwległymi. Punkty P, M i N przecięcia boków przeciwległych ab, cd i ef nazywają się punktami przekątnymi (Rys. 260).

Czworokąt zupełny jest figurą piąską,
wzajemną względem czworoboku zupełnego;



Rys. 260.

bokom, wierzchoł-
 kem i przekątnym
 pierwszego odpowia-
 dają wierzchołki,
 boki i punkty prze-
 kątnie drugiego i
 nawzajem. Na za-
 sadzie dwójności
 moglibyśmy prosto
 wnioskować o pra-
 wdziwość następu-
 jącego twierdzenia:

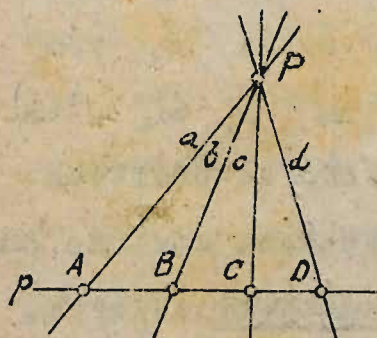
W czworokacie zupełnym proste łączące je-
 den punkt przekątny z dwoma innymi
 są harmonicznie sprzężone względem
 boków przez ten punkt przechodzących.

Dowód tego twierdzenia mógłby być równie-
 na zasadzie dwójności wywnioskowany z do-
 wodu twierdzenia o czworoboku zupełnym;
 prościej jednak można go okazać jak na-
 stępuje:

Niech będzie (Rys. 260) czworokąt zupełny
 $ABCD$; niechaj punkty P , M i N będą
 punktami przekątnymi tego czworokąta;
 dowiedzimy, że grupa promieni a b m n
 jest harmoniczna. Zauważmy czworobok zu-
 pełny $cdef$, którego jedną z przekątnych
 jest p . Na zasadzie twierdzenia poprzednie-
 go grupa punktów Q R N M jest harmo-

skąd wynika, że czwórka promieni $abmn$, rzucających te punkty z punktu P , jest harmoniczna /§ 141/.

§ 143. Czwórki perspektywiczne. Mówimy, że czwórka punktów $ABCD$, leżących na prostej $p[p(ABCD)]$ jest perspektywiczna z czwórką prostych $abcd$, wychodzących z punktu $P[P(abcd)]$. jeżeli proste a, b, c i d przechodzą odpowiednio przez punkty A, B, C i D tak że punkty A, B, C i D są przecięciami prostej p prostymi a, b, c i d , a proste a, b, c i d rzucają punkty A, B, C i D z punktu P . /Rys. 261/.



Rys. 261.

Prosta p nazywa się podstawą czwórki $p(ABCD)$ punkt P nazywa się wierzchołkiem czwórki $P(abcd)$. Perspektywiczność czwórek $p(ABCD)$ i $P(abcd)$ oznaczamy symbolem $p(ABCD) \overline{\wedge} P(abcd)$

Na zasadzie § 141 jeżeli te czwórki są perspektywiczne, to dwustosunki $(ABCD)$ i $(abcd)$ są równe.

Mówimy, że czwórki punktów $p_1(A, B, C, D_1)$ i

$p_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$ są perspektywiczne

$p_1(A, B, C, D_1) \overline{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$

jeżeli istnieje czwórka $P(abcd)$, której proste łączą

odpowiednio punkty A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , D_1 i D_2 , tak że obie czwórki punktów są przecięciami tej samej czwórki prostych. Punkt P nazywa się środkiem perspektywy czwórek $p_1(A, B, C, D_1)$ i $p_2(A_2 B_2 C_2 D_2)$

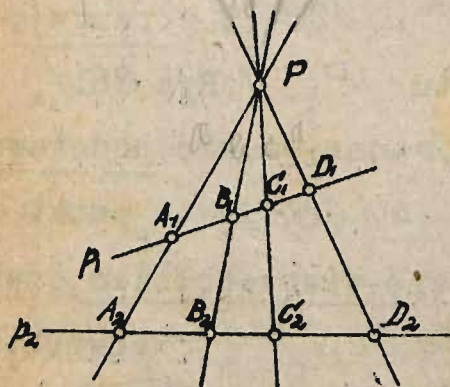
/ Rys. 262/ Mówimy, że czwórki prostych:

$P_1(a, b, c, d_1)$ i $P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ są perspektywiczne

$P_1(a, b, c, d_1) \approx P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$
jeżeli istnieje czwórka

$p(ABCD)$, któ-

rej punkty są odpowiednio przecięciami prostych a , i a_2 , b , i b_2 , c , i c_2 , d , i d_2 , tak że obie czwórki prostych rzucają tę samą czwórkę pun-



Rys. 262.

któw. Prosta p nazywa się osią perspektywy czwórek

$P_1(a, b, c, d_1)$ i $P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ /Rys. 263/.

Na zasadzie § 141, jeżeli

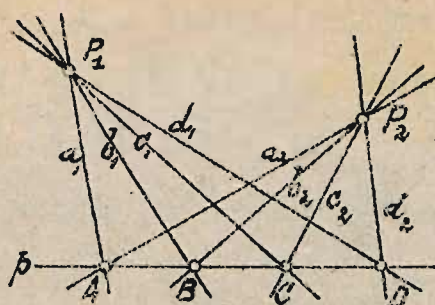
$p_1(A, B, C, D_1) \approx p_2(A_2 B_2 C_2 D_2)$ to $(A, B, C, D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$

jeżeli $P_1(a, b, c, d_1) = P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ to $(a, b, c, d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2)$

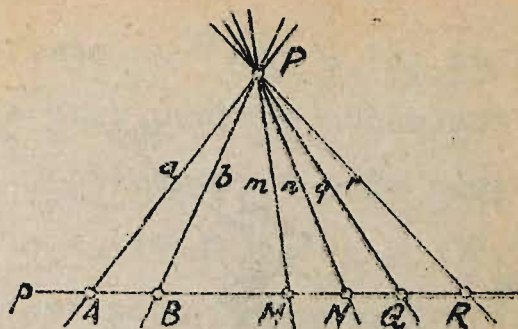
§ 145. Szeregi i pęki perspektywiczne. Niechaj bę-

dzie prosta p i punkt P na niej nie leżący /Rys. 264/.

Miedzy punktami prostej p i prostymi, wychodzącymi z



Rys. 263.



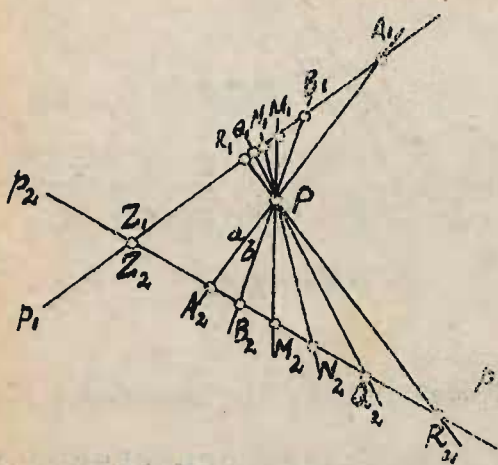
Rys. 264.

punktu P można ustalić odpowiedniość doskonałą, t. j. taką, że każdemu punktowi A prostej p odpowiadać będzie jedna jedyna prosta a wychodząca z punktu P , ta mianowicie, która przez punkt A przechodzi, - a każdej prostej b , wychodzącej z punktu P odpowiadać będzie na prostej p jeden jedyny punkt B , ten mianowicie, który leży na prostej b . Mówimy wtedy, że szerzeg punktów $p(AB....)$ jest perspektywiczny z pękiem prostych $P(a, b, \dots)$, co oznaczamy

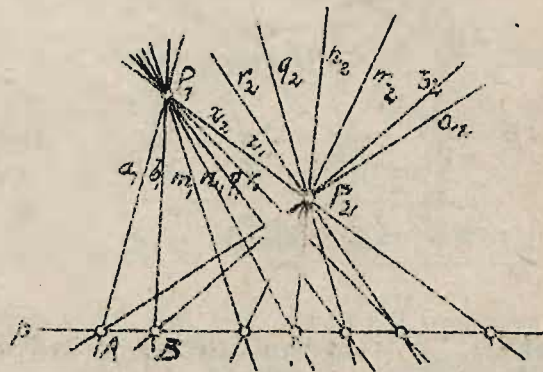
$$p(AB....) \bar{x} P(a, b, \dots)$$

Prosta p nazywa się podstawą szeregu $p(AB....)$; punkt P nazywa się wierzchołkiem pęku $P(a, b, \dots)$. Jeżeli M, N, Q , i R są jakimikolwiek czterema punktami szeregu $p(AB....)$, a proste m, n, q i r odpowiadają im w pęku $P(a, b, \dots)$, to czwórki $p(MNQ R)$ i $P(mnqr)$ są perspektywiczne tak, że

$$(MNQ R) = (mnqr);$$



Rys. 265.



Rys. 266.

Niech będą teraz w płaszczyźnie rysunku dwie proste p_1 i p_2 /Rys. 265/. Między punktami prostej p_1 i punktami prostej p_2 można ustalić odpowiedniość doskonałą, t.j. taką, że każdemu punktowi A_1 prostej p_1 odpowiadać będzie jeden jedyny punkt A_2 prostej p_2 i nawzajem, każdemu punktowi B_2 prostej p_2 odpowiadać będzie jeden jedyny punkt B_1 prostej p_1 . W tym celu obieramy w płaszczyźnie rysunku punkt jakikolwiek P nie leżący na żadnej z prostych p_1 i p_2 i umawiamy się że każdemu punktowi prostej p_1 , np. punktowi A_1 , będzie odpowiadał ten punkt A_2 prostej p_2 , który leży na prostej PA_1 , a każdemu punktowi prostej p_2 , np. punktowi B_2 odpowiadać będzie ten punkt B_1 ,

prostej p_1 , który leży na prostej PB_2 , tak że proste a, b, \dots , łączące pary punktów odpowiednich A_1 i A_2, B_1 i B_2, \dots , przechodzić będą zawsze przez punkt P . W ten sposób zarówno szereg $p_1(A, B, \dots)$ jak i szereg $p_2(A, B, \dots)$ jest perspektywiczny z tym samym pękiem prostych $P(a, b, \dots)$. Mówimy wtedy, że szeregi $p_1(A, B, \dots)$ i $p_2(A, B, \dots)$ są perspektywiczne, co oznaczamy

$$p_1(A, B, \dots) \bar{\wedge} p_2(A, B, \dots)$$

Proste p_1 i p_2 , nazywają się podstawami tych szeregów perspektywicznych. - punkt P nazywa się środkiem ich perspektywy. - Jeżeli M_1, N_1, Q_1 i R_1 , są jakimikolwiek czterema punktami prostej p_1 , a punkty M_2, N_2, Q_2 i R_2 odpowiadają im na prostej p_2 w szeregach perspektywicznych $p_1(A, B, \dots) \bar{\wedge} p_2(A, B, \dots)$, to czwórki punktów $p_1(M_1, N_1, Q_1, R_1)$ i $p_2(M_2, N_2, Q_2, R_2)$ są perspektywiczne, tak że na zasadzie § 141 $(M_1, N_1, Q_1, R_1) = (M_2, N_2, Q_2, R_2)$. Z określenia szeregów perspektywicznych $p_1(A, B, \dots)$ i $p_2(A, B, \dots)$ wynika, że punkt przecięcia podstaw p_1 i p_2 odpowiada samemu sobie; jeżeli więc punkt ten zaliczymy do szeregu $p_1(A, B, \dots)$ i oznaczmy nap. literą Z_1 , to gdy ten sam punkt zaliczymy do szeregu $p_2(A, B, \dots)$, winniśmy

go oznaczyć literą Z_2 .

Niechaj będą wreszcie w płaszczyźnie rysunku dwa punkty P_1 i P_2 /Rys. 266/. Między prostymi, wychodzącymi z punktu P_1 i prostymi, wychodzącymi z punktu P_2 , można ustalić odpowiedniość doskonałą t.j. taką, że każdej prostej a_1 , wychodzącej z punktu P_1 , odpowiadać będzie jedna jedyna prosta a_2 , wychodząca z punktu P_2 i nawzajem, każdej prostej b_2 , wychodzącej z punktu P_2 , odpowiadać będzie jedna jedyna prosta b_1 , wychodząca z punktu P_1 . W tym celu kreśliśmy w płaszczyźnie rysunku prostą jakąkolwiek p , nie przechodzącą przez żaden z punktów P_1 i P_2 , i umawiamy się, że każdej prostej, wychodzącej z punktu P_1 , nap. prostej a_1 , będzie odpowiadała ta prosta a_2 , wychodząca z punktu P_2 , która przechodzi przez punkt $p a_1$, a każdej prostej, wychodzącej z punktu P_2 , nap. prostej b_2 odpowiadać będzie ta prosta b_1 , wychodząca z punktu P_1 , która przechodzi przez punkt $p b_2$, - tak że punkty A, B, \dots przecięcia par prostych odpowiednich a_1 i a_2 , b_1 i b_2, \dots leżeć będą zawsze na prostej p . W ten sposób, zarówno pęk $P_1(a_1, b_1, \dots)$, jak pęk $P_2(a_2, b_2, \dots)$, jest perspektywiczny z tym samym szeregiem punktów $p(A, B, \dots)$.

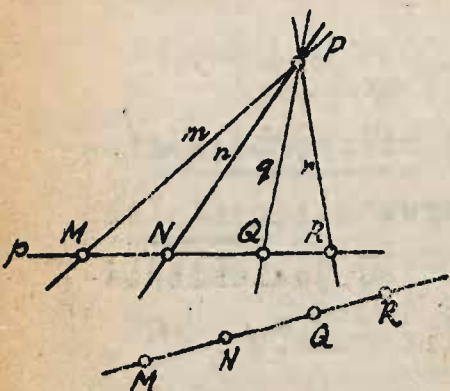
Mówimy wtedy, że pęki $P_1(a, b, \dots)$ i $P_2(a, b, \dots)$ są perspektywiczne, co oznaczamy

$$P_1(a, b, \dots) \bar{\sim} P_2(a, b, \dots)$$

Punkty P_1 i P_2 nazywają się wierzchołkami pęków perspektywicznych, prosta p nazywa się osią ich perspektywy. Jeżeli m_1, n_1, q_1 i r_1 są jakimikolwiek czterema prostymi, wychodzącymi z punktu P_1 , a wychodzące z punktu P_2 proste m_2, n_2, q_2 i r_2 odpowiadają im w pękach perspektywicznych $P_1(a, b, \dots)$ i $P_2(a, b, \dots)$, to czwórki prostych $P_1(m_1, n_1, q_1, r_1)$ i $P_2(m_2, n_2, q_2, r_2)$ są perspektywiczne, tak że $(m_1, n_1, q_1, r_1) = (m_2, n_2, q_2, r_2)$. Z określenia pęków perspektywicznych $P_1(a, b, \dots)$ i $P_2(a, b, \dots)$ wynika, że prosta P_1P_2 łącząca oba wierzchołki odpowiada samej sobie; jeżeli więc prostą tę zaliczymy do pędu $P_1(a, b, \dots)$ i oznaczmy nap. literą z ,

to gdy tę samą prostą zaliczymy do pędu $P_2(a, b, \dots)$, winniśmy ją oznaczyć literą z_2 .

§ 145. Czwórki i szeregi rzutowe. Niechaj czwórka punktów $p(MNQR)$ perspektywiczna z czwórką prostych $P(mnqr)$ [Rys. 267]; na zasadzie § 143 dwustosunki $(MNQR)$ i $(mnqr)$ są równe. Wyo-



Rys 267.

braźmy sobie teraz, że prosta p wraz z leżącymi na niej punktami M , N , Q i R zostanie w dowolny sposób ze swego miejsca przesunięta; ponieważ na skutek tego przesunięcia wzajemne odległości punktów M , N , Q i R nie zostaną zmienione, więc dwustosunki $(mnqr)$ i $(MNQR)$

wciąż jeszcze będą równe, choć czwórki te w ogóle przestaną być perspektywicznymi. Tak samo stałoby się, gdybyśmy nie ruszając czwórki punktów $p(MNQR)$ poruszyli z miejsca czwórkę prostych $P(mnqr)$

Podobnie, jeżeli z dwóch perspektywnych czwórek punktów $p_1(M_1N_1Q_1R_1)$ i $p_2(M_2N_2Q_2R_2)$ jedna przeniesioną zostanie w inne miejsce, to perspektywiczność tych czwórek w ogóle zostanie zatraconą, choć dwustosunki $(M_1N_1Q_1R_1)$ i $(M_2N_2Q_2R_2)$ pozostaną równe. Mówimy że dwie czwórki punktów:

$p_1(M_1N_1Q_1R_1)$ i $p_2(M_2N_2Q_2R_2)$ albo że dwie czwórki prostych $P_1(m_1n_1q_1r_1)$ i $P_2(m_2n_2q_2r_2)$, albo że czwórka punktów $p(MNQR)$ i czwórka prostych

$P(mnqr)$ są rzutowe, jeżeli dwustosunki

(M, N, Q, R_1) i (M_2, N_2, Q_2, R_2) są równe. Czwórki perspektywiczne są przeto zawsze rzutowe, ale czwórki rzutowe mogą nie być perspektywiczne. Rzutowość czwórek oznaczamy symbolem π , np. Piszemy

$$P_1(m, n, q, r) \pi P_2(m_2, n_2, q_2, r_2);$$

Jeżeli w obu równych dwustosunkach wykonamy to samo przestawienie liter, to nowe dwustosunki pozostaną równe. W samej rzeczy, łatwo się przekonać, że jeżeli w dwustosunku $(MNRQ) = \lambda$ wykonamy jakiegokolwiek przesawienie liter, to wartość nowego dwustosunku albo pozostanie równą λ , albo będzie równa jednej z liczb:

$$\frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1};$$

Stąd wynika, że dwie czwórki są rzutowe, jeżeli którykolwiek z 24 dwustosunków I czwórki równy jest dwustosunkowi utworzonemu w ten sam sposób z odpowiednich elementów II czwórki. Tak np. czwórki:

$p(MNRQ)$ i $P(mnrq)$ są rzutowe, jeżeli np

$$(MRNQ) = (mnrq)$$

albo jeżeli $(NRQM) = (nqrm)$ i t. d.

Niechaj będą w płaszczyźnie rysunku dwie proste

p_1 i p_2 . Na prostej p_1 obierzemy trzy punkty A_1, B_1 i C_1 , a na prostej p_2 trzy punkty A_2, B_2

i C_2 . Między punktami prostej p , a punktami prostej p_2 ustalimy odpowiedniość doskonałą w ten sposób, że

1/ punktowi A , prost. p , odpowiada punkt A_2 prost. p_2 i nawzajem

2/ " B , " " " " B_2 " " "

3/ " C , " " " " C_2 " " "

4/ każdemu innemu punktowi M , prostej p , odpowiadać będzie taki punkt M_2 prostej p_2 , że dwustosunki

(A, B, C, M) i (A_2, B_2, C_2, M_2) są równe.

Tak ustalona odpowiedniość między punktami prostej p , a punktami prostej p_2 nazywa się rzutowością szeregów $p, (A, B, C, \dots)$ i $p_2 (A_2, B_2, C_2, \dots)$, co oznaczamy

$$p, (A, B, C, \dots) \propto p_2 (A_2, B_2, C_2, \dots)$$

i mówimy, że te szeregi są rzutowe.

W ten sam sposób określamy rzutowość dwóch pęków

$$P(a, b, c, \dots) \propto P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

i rzutowość pęku i szeregu

$$P(abc\dots) \propto p(ABC\dots)$$

Jeżeli M , i M_2 , N , i N_2 , Q , i Q_2 , R , i R_2 są czterema parami punktów odpowiednich szeregów rzutowych $p, (A, B, C, \dots) \propto p_2 (A_2, B_2, C_2, \dots)$

to łatwo okazać, że dwustosunki (M, N, Q, R) i

(M_2, N_2, Q_2, R_2) są równe.

W samej rzeczy, na mocy określenia rzutowości tych szeregów mamy równości

$$11/ \quad (A, B, C, M_1) = (A_2 B_2 C_2 M_2)$$

$$12/ \quad (A, B, C, N_1) = (A_2 B_2 C_2 N_2)$$

$$13/ \quad (A, B, C, Q_1) = (A_2 B_2 C_2 Q_2)$$

$$14/ \quad (A, B, C, R_1) = (A_2 B_2 C_2 R_2)$$

Rozwinąwszy te dwustosunki i podzieliwszy stronami /1/ przez /2/, /1/ przez /3/ i /1/ przez /4/ otrzymamy

$$(A, B, N, M_1) = (A_2 B_2 N_2 M_2)$$

$$(A, B, Q, M_1) = (A_2 B_2 Q_2 M_2)$$

$$(A, B, R, M_1) = (A_2 B_2 R_2 M_2)$$

skąd wynikają równości:

$$15/ \quad (A, M, B, N_1) = (A_2 M_2 B_2 N_2)$$

$$16/ \quad (A, M, B, Q_1) = (A_2 M_2 B_2 Q_2)$$

$$17/ \quad (A, M, B, R_1) = (A_2 M_2 B_2 R_2)$$

Rozwinąwszy znowu te dwustosunki i podzieliwszy stronami /5/ przez /6/ i /5/ przez /7/, otrzymamy

$$(A, M, Q, N_1) = (A_2 M_2 Q_2 N_2)$$

$$(A, M, R, N_1) = (A_2 M_2 R_2 N_2)$$

skąd wynikają równości:

$$18/ \quad (M, N, A, Q_1) = (M_2 N_2 A_2 Q_2)$$

$$19/ \quad (M, N, A, R_1) = (M_2 N_2 A_2 R_2)$$

Rozwinąwszy jeszcze raz te dwustosunki i podzieliw-

szy stronami /8/ przez /9/ otrzymamy

$$(M, N, R, Q_1) = (M_2, N_2, R_2, Q_2) \text{ stąd wynika wreszcie}$$

$$(M, N, Q, R_1) = (M_2, N_2, Q_2, R_2)$$

Tak więc jeżeli M_1 i M_2 , N_1 i N_2 , Q_1 i Q_2 są trzema parami punktów odpowiednich dwóch szeregów rzutowych

$$p_1(A, B, C, \dots) \propto p_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$$

to ta rzutowość jest identyczna z rzutowością

$$p_1(M, N, Q_1) \propto p_2(M_2, N_2, Q_2)$$

gdyż każdemu punktowi R_1 prostej p_1 odpowiada w obu rzutowościach ten sam punkt R_2 prostej p_2 i nawzajem.

Rzutowość dwóch szeregów /peków, szeregu i paku/ jest przeto określona przez 3 którekolwiek pary elementów odpowiednich.

Jeżeli wychodząc z jakiegokolwiek paku

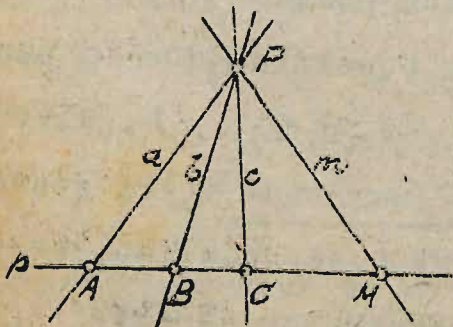
$P_1(a, b, c, \dots)$, przetniemy go dowolną prostą p_1 , to otrzymamy perspektywiczny z tym pakiem szereg $p_1(A, B, C, \dots)$; rzucając ten szereg z dowolnego punktu otrzymamy pak $P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ perspektywiczny z szeregiem $p_1(A, B, C, \dots)$ i pakiem $P_1(a, b, c, \dots)$; przecinając pak P_2 dowolną prostą p_2 , otrzymamy szereg p_2 , który będzie perspektywiczny z pakiem P_2 i szeregiem p_1 , ale który w ogóle nie będzie już perspe-

którego z pękiem P choć będzie wciąż jeszcze z nim rzutowy; postępując w ten sam sposób dalej, otrzymać będziemy na zmianę to pęk, to szereg, który będzie rzutowy z każdym poprzednim pękiem lub szeregiem, ale perspektywiczny będzie tylko z ostatnim pękiem i z ostatnim szeregiem. Wyrażamy to krótko, mówiąc:

Rzutowość zachowuje się przez rzuty i przecięcia; perspektywiczność w ogóle zatracą się przez rzuty i przecięcia.

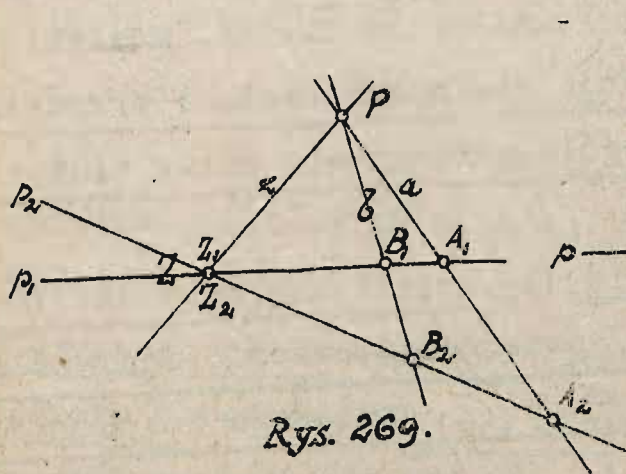
§ 146. Twierdzenia. I. Jeżeli 3 proste a , b i c pęku $P(a\ b\ c\ \dots)$ przechodzą przez 3 odpowiadające im punkty A , B i C rzutowego z tym pękiem szeregu $p(ABC\ \dots)$ to ten pęk i szereg są perspektywiczne. W samej rzeczy każda czwarta prosta m wychodząca z punktu P /Rys. 268/ musi przejść wtedy

przez odpowiadający jej punkt M , na prostej p istnieje bowiem jedyny punkt M , dla którego dwustosunek $(ABCM)$ byłby równy dwustosunkowi $(abcm)$ § 138.

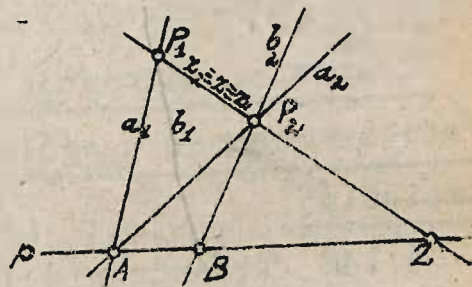


Rys. 268.

II. Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych punkt przecięcia Z podstaw p_1 i p_2 odpowiada samemu sobie $Z \equiv Z_1 \equiv Z_2$, to te szeregi są perspektywiczne. Niechaj A_1 i A_2 , B_1 i B_2 będą dwiema parami punktów odpowiadających sobie wzajemnie w rzutowości danej /Rys. 269/



Rys. 269.



Rys. 270.

Połączmy punkty A_1 i A_2 prostą a , punkty B_1 i B_2 prostą b ; oznaczmy punkt przecięcia prostych a i b literą P ; połączmy wreszcie punkt P z punktem Z prostą z . Ponieważ proste a , b i z pęku $P(abz...)$ przechodzą przez odpowiadające im punkty A_1 , B_1 i Z_1 szeregu $p_1(A, B, Z, ...)$, więc na zasadzie twierdzenia I pęk $P(a b z....)$ i szereg $p_1(A, B, Z, ...)$ są perspektywiczne; ponieważ te same proste a , b i z przechodzą przez punkty A_2 , B_2 i Z_2 szeregu $p_2(A_2, B_2, Z_2, ...)$, więc na tej samej zasadzie pęk $P(a b z....)$ i szereg $p_2(A_2, B_2, Z_2, ...)$ są perspektywiczne.

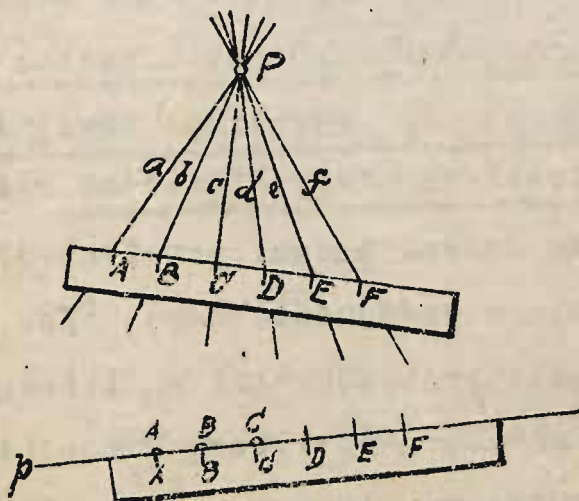
są perspektywiczne, tak że szeregi $p_1(A, B, Z, \dots)$ i $p_2(A_2, B_2, Z_2, \dots)$ są perspektywiczne z tym samym pękiem $P(a, b, z, \dots)$ a więc są perspektywiczne ze sobą.

III. Jeżeli w dwóch rzutowych prosta z , łącząca wierzchołki P_1 i P_2 odpowiada samej sobie $z \equiv z, \equiv z_2$, to te pęki są perspektywiczne. Niechaj a_1 i a_2 , b_1 i b_2 będą dwiema parami prostych odpowiadających sobie wzajemnie w rzutowości danej /Rys. 270/ Oznaczmy punkt przecięcia prostych a_1 i a_2 literą A , punkt przecięcia prostych b_1 i b_2 literą B ; połączmy punkty A i B prostą p ; oznaczmy wreszcie literą Z punkt przecięcia prostych p i z . Ponieważ punkty A , B i Z szeregu $p(ABZ, \dots)$ leżą na odpowiadających im prostych a_1 , b_1 i z , pęku $P_1(a_1, b_1, z, \dots)$, więc na zasadzie twierdzenia I szereg $p(ABZ, \dots)$ i pęk $P_1(a_1, b_1, z, \dots)$ są perspektywiczne; na tej samej zasadzie szereg $p(ABZ, \dots)$ jest perspektywiczny z pękiem $P_2(a_2, b_2, z_2, \dots)$, skąd wynika, że pęki $P_1(a_1, b_1, z, \dots)$ i $P_2(a_2, b_2, z_2, \dots)$ są perspektywiczne.

§ 147 Wyznaczanie elementów odpowiednich dwóch rzutowych szeregów, albo pęków, albo szeregu i pęku.

I sposób. a/ Niechaj będzie dowolna ilość prostych a, b, c, d, e, f, \dots wychodzących z punktu P , a na prostej p niechaj będą 3 punkty A ,

B i C , które mają odpowiadać prostym a , b i c w rzutowości $P(a b c \dots)$ $\pi p (A B C \dots)$ /Rys. 271/



Rys. 271.

Wziąwszy skrawek papieru, którego jedna krawędź jest prostą i przyłożywszy go tą krawędzią do prostej p , odetnijmy na skrawku punkty A , B i C , pasem oddjawszy go od prostej p , szukajmy takiego położenia tego skraw-

ka, aby proste a , b i c przechodziły odpowiednio przez punkty A , B i C . Gdy to zostanie osiągnięte, odetnijmy na skrawku punkty D , E , F , w których proste d , e , f przecinają jego krawędź , poczem przyłożywszy skrawek znowu do prostej p w ten sposób, aby punkty A , B i C przystały do zrobionych poprzednio znaków , przenieśmy ze znanych na skrawku punkty D , E , F na prostą p .

b/ W taki sam sposób postąpić należy, gdy należy wyznaczyć proste d , e , f , odpowiadające:

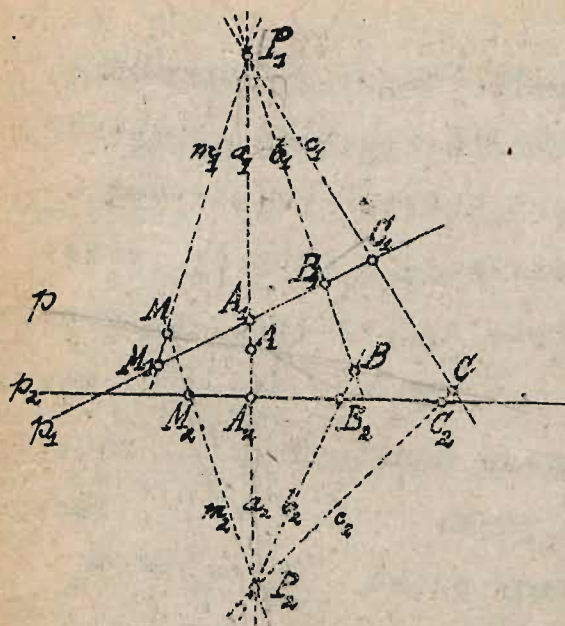
punktem D , E , F , ... w rzutowości $P(a, b, c, \dots) \neq p(ABC, \dots)$. Przyłożywszy skrawek do prostej p , odcinamy na nim punkty A, B, C, D, E, F, \dots poczem szukamy takiego położenia skrawka, aby punkty A, B, C , leżały odpowiednio na prostych a, b i c . Gdy to zostanie osiągnięte, przenosimy zaznaczone na skrawku punkty D, E, F, \dots na papier i łączymy je z punktem P .

c/ Niechaj na prostej p_1 dana będzie dowolna ilość punktów $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, \dots$ a na prostej p_2 niechaj będą dane 3 punkty A_2, B_2 i C_2 , które mają odpowiadać punktom A_1, B_1 , i C_1 w rzutowości $p_1(A_1 B_1 C_1 \dots) \neq p_2(A_2 B_2 C_2 \dots)$. Obrawszy jakikolwiek punkt P_1 nie leżący na prostej połączymy go ze wszystkimi punktami $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, \dots$. Weźmy znowu skrawek papieru, przyłożymy jego krawędź do prostej p_2 , odetnijmy na niej punkty A_2, B_2 , i C_2 i szukajmy takiego położenia skrawka, aby odcięte na jego krawędzi punkty leżały odpowiednio na prostych $P_1 A_1, P_1 B_1$ i $P_1 C_1$ wtedy proste $P_1 D_1, P_1 E_1, P_1 F_1, \dots$ wyznaczą na tej krawędzi punkty D_2, E_2, F_2, \dots które pozostaje tylko przenieść na prostą p_2 .

d/ Niechaj z punktu P_2 wychodzi dowolna ilość prostych $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, \dots$ a z punktu P_2 niechaj wychodzą 3 proste a_2, b_2 i c_2 , które mają odpowiadać prostym a_1, b_1 i c_1 w rzutowości:

$P_2(a_1, b_1, c_1, \dots) \equiv P_2(a_2, b_2, c_2)$. Ułożywszy w dowolny sposób skrawek papieru, odetnijmy na jego krawędzi punkty A, B, C, D, E, F, \dots , w których proste $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, \dots$ przecinają tę krawędź, poczem umieścimy ten skrawek w taki sposób, aby proste a_2, b_2 i c_2 przechodziły przez punkty A, B i C ; wtedy proste, łączące punkt P_2 z pozostałymi punktami D, E, F, \dots będą odpowiadały w danej rzutowości prostym d_1, e_1, f_1, \dots pęku $P_2(a_1, b_1, c_1, \dots)$.

II sposób. Ze stanowiska praktyki kreślarskiej sposoby powyższe są bardzo użyteczne, gdyż przesuwając w tę lub ową stronę skrawek papieru z odciętymi na jego krawędzi punktami A, B i C , możemy po kilku próbach z dostatecznem przybliżeniem umieścić te punkty odpowiednio na prostych a_1, b_1 i c_1 . Ze stanowiska teorii rozwiązania te nie mają wartości, gdyż nie wskazano tutaj w jaki sposób można sprawić, aby 3 dowolne punkty danej prostej upadły dokładnie na 3 dane proste, wychodzące z jednego punktu. Wskażemy przeto inne,



Rys. 272.

wprawdzie mniej praktyczne, ale za to ściśle sposoby rozwiązania tych samych zagadnień, przy tem okaże się, że do ich zastosowania wystarczy użycie samego tylko linjażu /konstrukcje linjowe, zagadnienia I stopnia/.

✓ Niech będą

/Rys. 272/ dwa szeregi

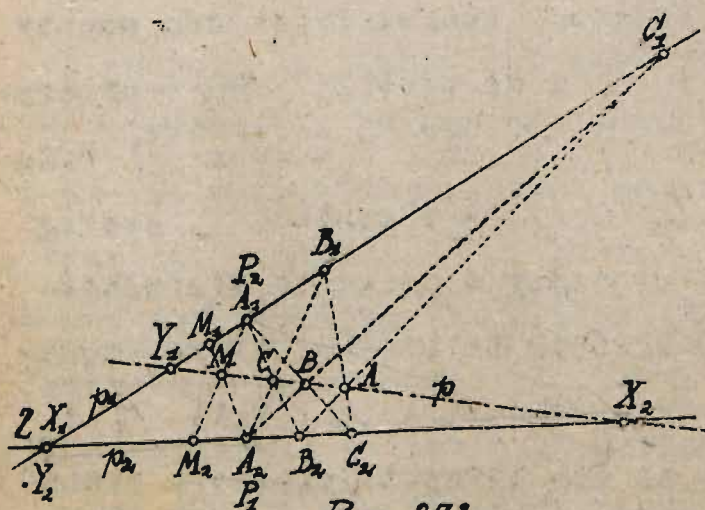
o podstawach p_1 i p_2 , których rzutowość jest dana za pomocą 3 par punktów odpowiednich A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 . Połączmy którekolwiek dwa punkty odpowiednie np. A_1 i A_2 i na prostej A_1A_2 obierzmy dowolnie dwa punkty P_1 i P_2 . Z punktu P_1 rzucmy szereg $p_1 (A_1 B_1 C_1 \dots)$, a z punktu P_2 szereg $p_2 (A_2 B_2 C_2 \dots)$ i uważajmy w pękach o wierzchołkach P_1 i P_2 za odpowiednie te proste, które rzucają odpowiednie punkty szeregów p_1 i p_2 . Pęki P_1 i P_2 są rzutowe, gdyż są one perspektywiczne z rzutowymi szeregami $p_1 (A_1 B_1 C_1 \dots) \neq p_2 (A_2 B_2 C_2 \dots)$ są one nadto perspektywiczne, gdyż prosta łącząca wierzchoł-

ki P_1, P_2 odpowiada samej sobie ($a_1 = a_2$) odpowied-
nie proste pęków P_1 i P_2 muszą się więc przecinać na
prostej /osi perspektywy tych pęków/; będą ona wyzna-
czona przez dwa jakiegokolwiek swoje punkty np. przez

$B \equiv b_1 b_2$ i $C \equiv c_1 c_2$. Proste każdej innej pary prze-
cinać się muszą na prostej $BC \equiv p$. Aby więc wyzna-
czyć punkt M_2 , odpowiadający punktowi M_1 , łączymy

$P_1 M_1 \equiv m_1$, wyznaczamy punkt $p \cap m_1 \equiv M$, łączymy
my $P_2 M \equiv m_2$ i wyznaczamy punkt $p \cap m_2 \equiv M_2$.

Ponieważ punkty P_1 i P_2 są dowolnymi punktami
prostej A, A_2 , przeto dogodnie będzie wziąć punkt
 P_1 w punkcie A_2 , a punkt P_2 w punkcie A , /Rys.



Rys. 273.

273/; osią perspe-
ktywy pęków P_1 i
 P_2 będzie prosta
 p /zwana osią rzu-
tową szeregów p_1 i
łącząca punkt C
przecięcia prostych
 $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$,
z punktem B prze-
cięcia prostych $A_1 C_2$
i $A_2 C_1$; dwa punk-
ty M_1 i M_2 są od

powiednie w szeregu $\beta_1 (A, B, C, \dots) \propto \beta_2 (A_2, B_2, C_2, \dots)$ jeżeli proste A, H_2 i A_2, M_2 przecinają się w punkcie którymkolwiek M osi rzutowej β .

Jeżeli szeregi rzutowe β_1 i β_2 nie są perspektywiczne, to punkt przecięcia Z podstaw β_1 i β_2 nie odpowiada samemu sobie. Jeżeli ten punkt zaliczymy do szeregu β_1 , oznaczając go literą X_1 , to punkt odpowiedni X_2 znajdziemy stosując regułę ogólną: trzeba na prostej β_2 wyznaczyć taki punkt X_2 , aby proste A, X_1 i A_2, X_2 przecinały się na prostej β_1 . Ale $A, X_1 \equiv \beta_1$; X_2 musi być przeto takim punktem prostej β_2 , aby prosta A, X_2 przecinała prostą β_1 na prostej β , t.j. $X_2 \equiv \beta/\beta_1$. Jeżeli punkt Z zaliczymy do szeregu β_2 , oznaczając go literą Y_2 , to punkt odpowiedni Y_1 będzie leżał w przecięciu prostych β i β_1 , tak że:

punktowi przecięcia podstaw dwóch szeregów rzutowych odpowiadają w obu szeregach punkty, w których oś rzutowa przecina podstawy i nawzajem oś rzutowa dwóch szeregów rzutowych β_1 i β_2 łączy punkty X_1 i Y_1 odpowiadające w obu szeregach $X_1 \equiv Y_1$ przecięcia podstaw β_1, β_2 .

Ponieważ każdemu punktowi jednego z dwóch szeregów rzutowych, np. X_1 albo Y_2 odpowiada w drugim

jeden jedyny punkt X_2 względnie Y_2 . więc oś rzutowa nie zależy od tego czy wierzchołki boków P_1 i P_2 obierzemy w punktach A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , M_1 i M_2 Stąd wniosek:

Jeżeli wierzchołki pierwszy trzeci i piąty sześciokąta $A, B_2, C_1, A_2, B_1, C_2$ leżą na prostej p_1 , a wierzchołki drugi czwarty i szósty na prostej p_2 , to punkty A, B i C przecięcia boków "przeciwnych" B, C_2 i B_2, C_1 , A, C_2 i A_2, C_1 , A, B_2 i A_2, B_1 leżą na jednej prostej p .

Jest to z resztą przypadek szczególny twierdzenia Pascala o sześciokącie wpisanym stożkowo, o którym będzie mowa niebawem.

Rzutowość dwóch szeregów na danych podstawach p_1 i p_2 jest wyznaczona przez oś rzutową p oraz jedną parę A_1 i A_2 punktów odpowiednich, gdyż oś rzutowa jest równoznaczna z dwiema parami punktów odpowiednich:

X_1 i X_2 , Y_1 i Y_2 .

Jeżeli punkty niewłaściwe prostych p_1 i p_2 nie odpowiadają sobie wzajemnie, to oznaczymy literą R_1 punkt odpowiadający w szeregu p_1 punktowi niewłaściwemu R_2^∞ szeregu p_2 , a literą Q_2 punkt odpowiadający w szeregu p_2 punktowi niewłaściwemu Q_1^∞ szeregu p_1 . Punkty R_1 i Q_2 nazywają się punktami wzajemnymi sze-

regów p_1 i p_2 . Ponieważ dwuosunki (A, B, Q_1^∞, R_1) i $(A_2, B_2, Q_2^\infty, R_2)$ są równe, więc $\frac{B_1 R_1}{A_1 R_1} = \frac{A_2 Q_2}{B_2 Q_2}$; § 137/, skąd wynika $A_1 R_1 \cdot A_2 Q_2 = B_1 R_1 \cdot B_2 Q_2$; czyli:

Iloczyn odległości dwóch punktów odpowiednich A_1 i A_2 od punktów wzajemnych R_1 i Q_2 jest liczbą stałą.

Jeżeli punkty niewłaściwe obu szeregów rzutowych odpowiadają sobie wzajemnie, to gdy oznaczymy literą Q_1^∞ punkt niewłaściwy prostej p_1 , wypadnie oznaczyć literą Q_2^∞ punkt niewłaściwy prostej p_2 . Niechaj A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , będą trzema parami punktów odpowiednich tych szeregów; dołączając czwartą parę Q_1^∞ i Q_2^∞ punktów odpowiednich, możemy napisać

$$(A_1, B_1, C_1, Q_1^\infty) = (A_2, B_2, C_2, Q_2^\infty), \text{ skąd}$$

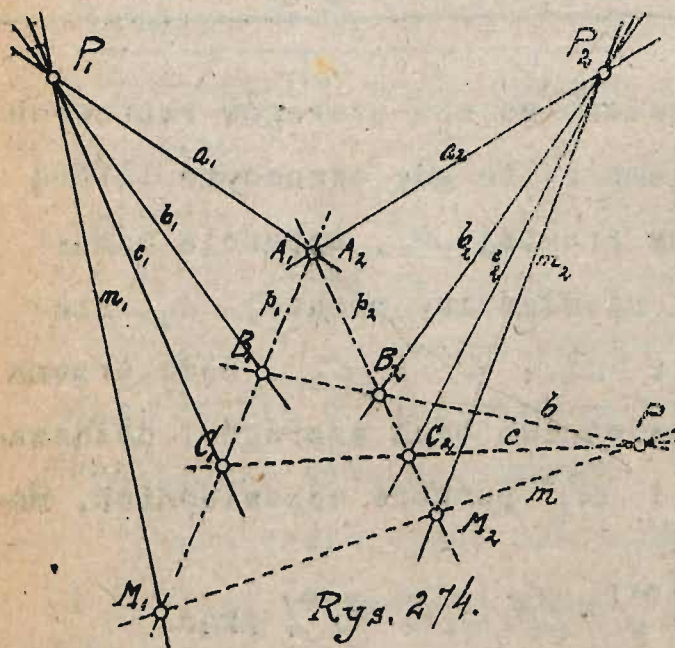
$$\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} = \frac{A_2 C_2}{B_2 C_2} \quad (\S 137.)$$

Mamy tedy wniosek:

Jeżeli punkty niewłaściwe dwóch szeregów rzutowych odpowiadają sobie wzajemnie, to te szeregi są "podobne", to jest stosunek odległości dwóch którychkolwiek punktów jednego szeregu do odległości odpowia-

dających im punktów drugiego szeregu jest liczbą stałą

b/ Niech będą dwa pęki o wierzchołkach P_1 i P_2 których rzutowość jest dana za pomocą 3 par prostych odpowiednich a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 /Rys. 274/



Rys. 274.

Przez punkt przecięcia którykolwiek z dwóch promieni odpowiednich np. a_1 i a_2 , poprowadźmy dowolnie dwie proste p_1 i p_2 , przecinające pęki P_1 i P_2 i uważajmy w szeregach p_1 i p_2 za odpowiednie te punkty, które są przecięciem odpowiednich prostych pę-

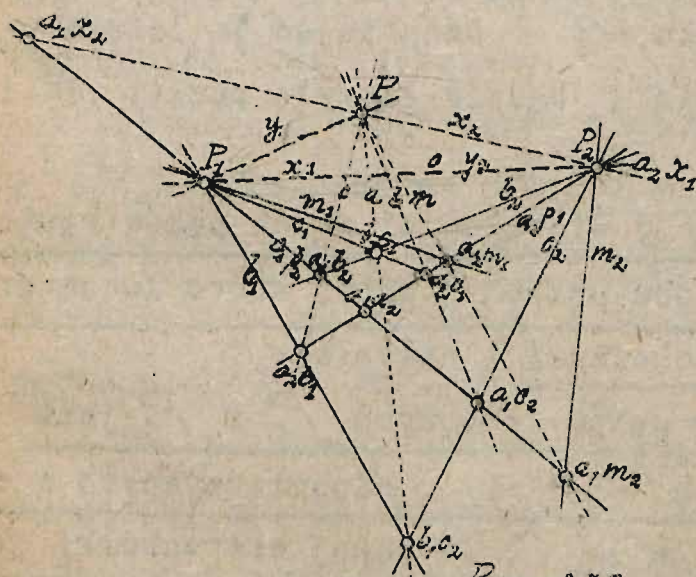
ków P_1 i P_2 . Szeregi p_1 i p_2 są rzutowe, gdyż są one perspektywiczne z rzutowymi pękami $P_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ i $P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ są one nadto perspektyczne, gdyż punkt przecięcia podstaw p_1, p_2 odpowiada samemu sobie ($A_1 \equiv A_2$). Odpowiednie punkty szeregów p_1 i p_2 muszą przeto leżeć na prostych przecinających się w jednym punkcie /środku perspektywy tych szeregów'; będzie on wyznaczony przez dwie jakiekolwiek proste

przezeń przechodzące, np. przez $b \equiv B, B_2$ i $c \equiv C, C_2$. Punkty odpowiednie każdej innej pary leżeć muszą na prostej, wychodzącej z punktu $bc \equiv P$. Aby więc wyznaczyć prostą m_2 , odpowiadającą prostej m_1 , wyznaczamy punkt $\beta_1 m_1 \equiv M_1$, łączymy $PM_1 \equiv m$, wyznaczamy punkt $\beta_2 m \equiv M_2$ i łączymy $P_2 M_2 \equiv m_2$.

Ponieważ proste β_1 i β_2 są dowolnymi prostymi wyprowadzonymi z punktu a, a_2 , przeto dogodnie będzie uczynić $\beta_1 \equiv a_2$ i $\beta_2 \equiv a_1$, [Rys. 274]. Środkiem

perspektywy szeregów β_1 i β_2 będzie punkt P

[zwany środkiem rzutowym pęków P_1 i P_2], który jest przecięciem prostej c , łączącej punkty a, b_2 i a_2, b_1 , z prostą b , łączącą



Rys. 275.

punkty a, c_2 i a_2, c_1 ; dwie proste m_1 i m_2 są odpowiednio w pękach $P_1(a, b, c, \dots)$ i $P_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$. Jeżeli prosta m łącząca punkty a, m_2 i a_2, m_1 , przechodzi przez środek rzutowy P .

Jeżeli pęki rzutowe P_1 i P_2 nie są perspektywiczne, to prosta z , łącząca wierzchołki P_1 i P_2 , nie odpowiada samej sobie. Jeżeli tę prostą zaliczymy do pęku P_1 , oznaczając ją literą x_1 , to prostą odpowiednią znajdziemy, prowadząc z punktu P_2 taką prostą x_2 , aby prosta, łącząca punkty $a_2 x_1$ i $a_1 x_2$ przechodziła przez punkt P . Ale $a_2 x_1 \equiv P_2$ musi być przeto taką prostą, wychodzącą z punktu P_2 aby prosta, łącząca punkty $a_1 x_2$ i P_2 przechodziła przez punkt P , t.j. $x_2 \equiv P P_2$. Jeżeli prostą

z zaliczymy do pęku P_2 , oznaczając ją literą y_2 , to prosta odpowiednia y_1 będzie łączyła punkty P i P_1 , tak, że

prostej, łączącej wierzchołki dwóch pęków rzutowych odpowiada w obu pękach proste, które łączą środek rzutowy z wierzchołkami i nawzajem

środek rzutowy pęków rzutowych P_1 i P_2 jest przecięciem prostych x_2 i y_1 , odpowiadających w obu pękach prostej $x_1 \equiv y_2$, łączącej wierzchołki P_1 i P_2 .

Ponieważ każdej prostej jednego z dwóch pęków rzutowych, np. x_1 lub y_2 , odpowiada w drugim jedna jedyna prosta x_2 wzgl. y_1 , więc środek rzutowy nie zależy od tego, czy za podstawy szeregów P_1 i P_2 obra-

liśmy proste $a, i a_2, b, i b_2, c, i c_2, m, i m_2 \dots$

Stąd wniosek:

Jeżeli boki: pierwszy, trzeci i piąty sześcioboku
 a, b_2, c, a_2, b, c_2 przechodzą przez punkt P_1 , a
 boki: drugi, czwarty i szósty przez punkt P_2 , to
proste a, b i c , łączące wierzchołki "przeciwe-
głe" b, c_2 i b_2, c , a, c_2 i a_2, c , a, b_2 i a_2, b ,
przechodzą przez jeden punkt P .

Jest to zresztą przypadek szczególny twierdzenia Brianchona o sześcioboku opisanym na stożkowej, o którym będzie mowa niebawem.

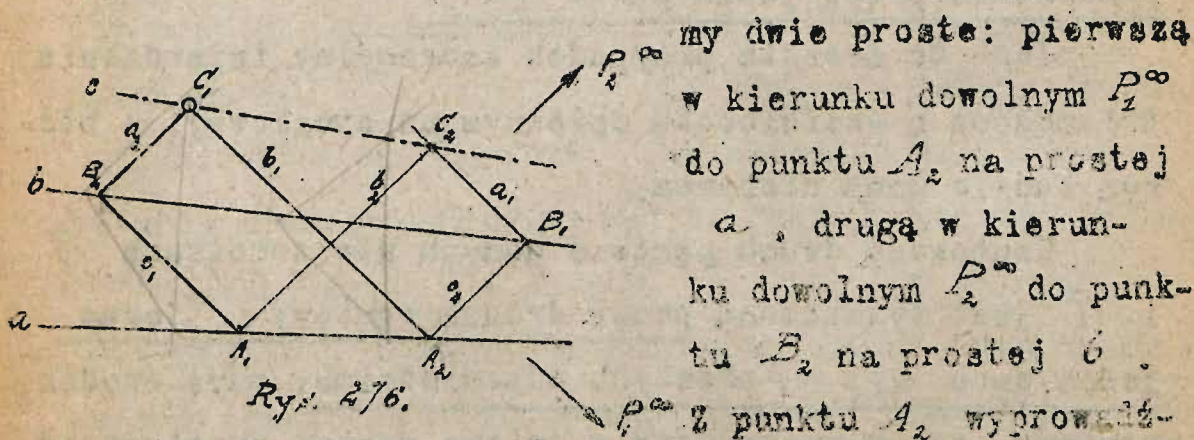
Rzutowość dwóch pęków o danych wierzchołkach P_1 i P_2 jest wyznaczona przez środek rzutowy P oraz
jedną parę $a, i a_2$ prostych odpowiednich, gdyż środek
rzutowy jest równoznaczny z dwiema parami prostych od-
powiednich $x, i x_2, y, i y_2$.

Dwa pozornie różne wzajemne twierdzenia: o sześciokącie, którego wierzchołki leżą na dwóch prostych p_1 i p_2 i o sześcioboku, którego boki przechodzą przez dwa punkty P_1 i P_2 , są w rzeczy samej tem samem twierdzeniem, którego istota polega na istnieniu t. zw. konfiguracji Pascala, złożonej z 9 punktów i 9 prostych w ten sposób, że przez każdy punkt przechodzą 3 proste i na każdej prostej leżą 3 punkty. Hilbert

dowód, że konfiguracja Pascala jest niezależna od konfiguracji Desarguesa / § 133 /.

§ 148. Zastosowania. a/ Zastosujmy twierdzenie o sześcioboku a, b, c, a_2, b_2, c_2 , którego boki a, b, c przechodzą przez punkt P_1 , a boki a_2, b_2, c_2 przez punkt P_2 , do rozwiązania zagadnienia:

Połączyć punkt C_1 z niedostępnym punktem przecięcia prostych a i b /Rys. 276/. Z punktu C_1 wyprowadź-



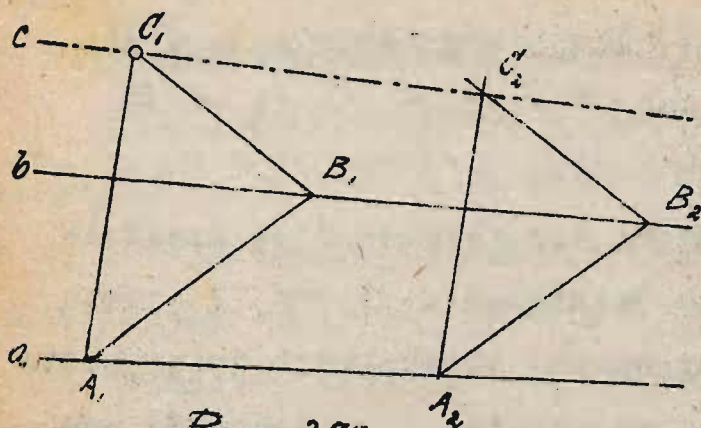
my dwie proste: pierwszą w kierunku dowolnym P_1^∞ do punktu A_2 na prostej a , drugą w kierunku dowolnym P_2^∞ do punktu B_2 na prostej b . Z punktu A_2 wyprowadźmy równoległą do C_1B_2 do punktu B_3 na prostej b , a z punktu B_3 równoległą do C_1A_2 do punktu A_3 na prostej a . Z punktu B_3 wyprowadźmy znowu równoległą do C_1A_2 i z punktu A_3 równoległą do C_1B_2 i połączmy wreszcie punkt C_1 z punktem C_2 w którym przecinają się ostatnie dwie proste. Powiadam, że prosta C_1C_2 przechodzi przez punkt ab . W samej rzeczy, w sześcioboku $A_1, C_1, A_2, B_2, C_2, B_1$ boki pierwszy, trzeci i piąty przechodzą przez punkt P_1^∞ a boki drugi, czwarty i szósty przez punkt P_2^∞ .

skąd wynika, że proste, łączące przeciwległe wierzchołki tego sześcioboku A, A_2, B, B_2 i C, C_2 przechodzą przez jeden punkt.

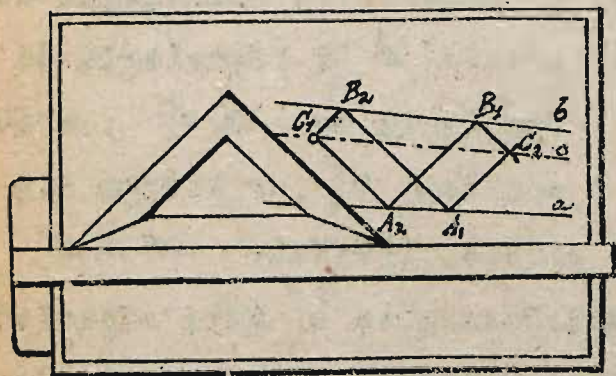
Zagadnienie to można też rozwiązać na zasadzie twierdzeń o trójkątach Desargues'a /§ 93/. Z punktu /Rys. 277/ wyprowadzamy znowu jakiekolwiek dwie proste pierwszą do punktu A , na prostej a , drugą do punktu B , na prostej b i łączymy punkty A , i B . Przez dowolny punkt A_2 prostej a prowadzimy równoległą do A, B , do punktu B_2 na prostej b i równoległą do A, C , a z punktu B_2 równoległą do B, C ; wreszcie łączymy punkt C z punktem C_2 , w którym się przecinają dwie ostatnie proste. Trójkąty A, B, C , i A_2, B_2, C_2 są trójkątami Desargues'a, gdyż odpowiednie ich boki przecinają się w trzech punktach niewłaściwych, które, jak wiadomo, leżą na jednej prostej /mianowicie na prostej niewłaściwej §2/.

Z tych dwóch rozwiązań pierwsze jest bardziej praktyczne, zwłaszcza, jeżeli się posługujemy rajszyzną i po niej ślizgającą się egielką, jak to wskazuje rys. 278.

b/ W § 121 wskazaliśmy, w jaki sposób można wyznaczyć rzuty punktów podziału odcinka na n części równych lub proporcjonalnych do n danych liczb lub



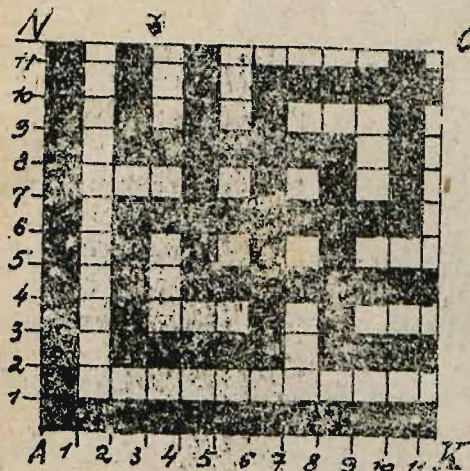
Rys. 277.



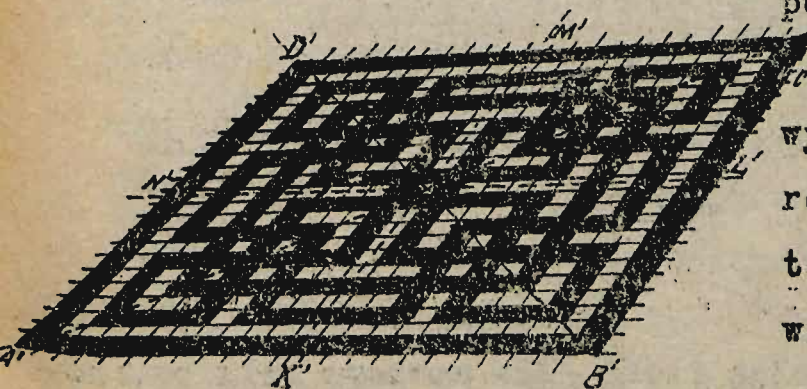
Rys. 278.

odcinków. Sposób ten jest praktyczny, gdy n jest liczbą niewielką, ale gdy n jest duże, sposób ten wymagałby prowadzenia wielu prostych pomocniczych która gmatwają rysunek. Niechaj np. mamy narysować perspektywę posadzki, ułożonej w kwadracie, którego ćwiartkę

przedstawia rys. 279. Przypuśćmy, że wykreśliśmy już rzut tego kwadratu i wyznacziliśmy w nim już rzuty środków wszystkich jego boków. Na zasadzie § 120 może tu być jakikolwiek czworokąt: $A'B'C'D'$
/Rys. 281/ punkt przecięcia jego przekątnych O' będzie rzutem środka tego kwadratu; prostej łączące punkt O' z kraniami boków podziela te boki w punktach, które



Rys. 279.



Rys. 281.

są rzutami środków tych boków. /Jeżeli krawce boków są niedostępne, to radzimy sobie, jak wskazano pod a)/. Zważmy teraz, że punkty podziału każdego z boków kwadratu na 23 równe części, np. punkty podziału boku AB , odpowiadają rzutom tych punktów na odcinku

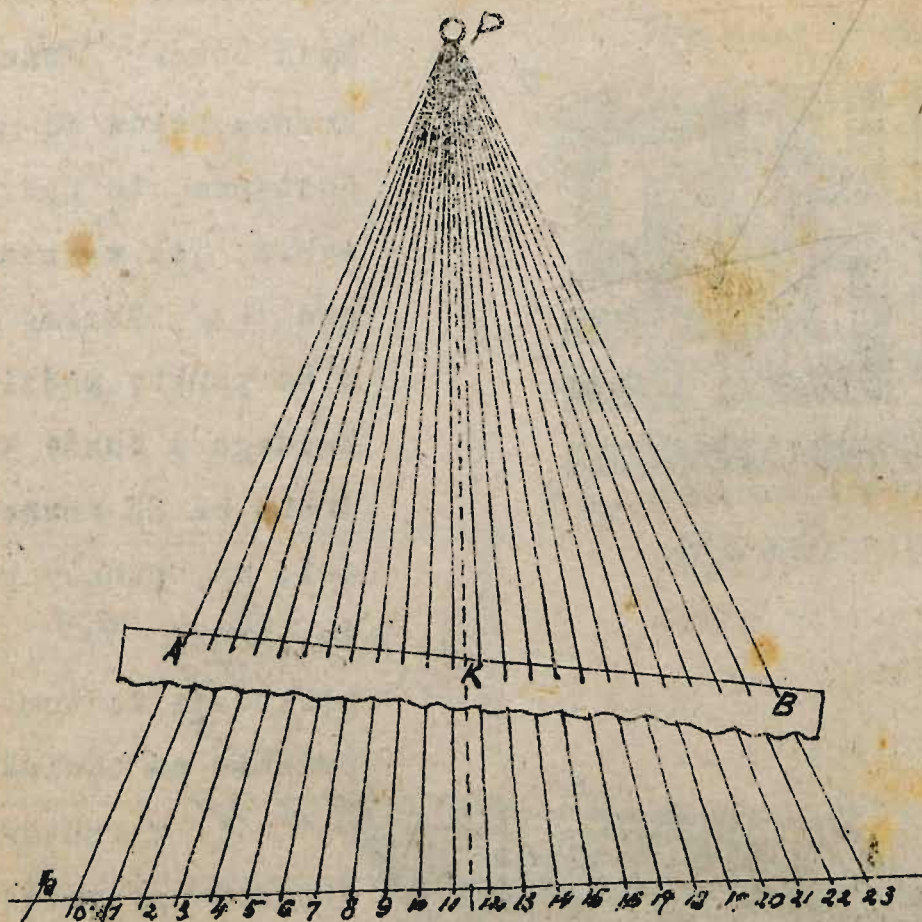
$A'B'$ w rzutowości, wyznaczonej przez którekolwiek 3 pary punktów odpowiednich, a więc np. przez pary

A i A' , K i K'

B i B' . Aby wy-

znaczyć wszystkie pun-

kty podziału odcinka $A'B'$, kreślmy sobie raz na zawsze t.zw. podziałkę rzutową /najlepiej na osobnym kawałku papieru/. Na prostej p /Rys. 280/ odmierzamy



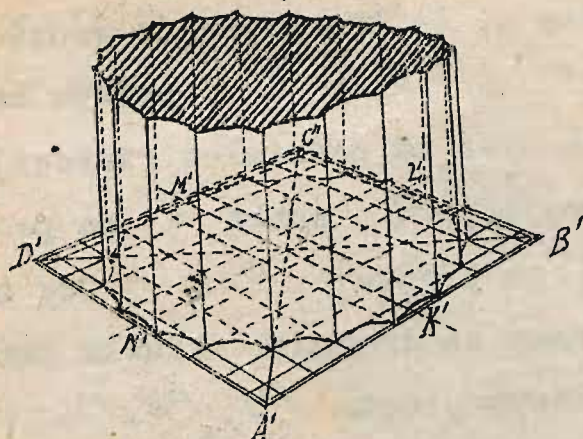
Rys. 280.

jeden na drugim dowolną ilość /dla naszego celu potrze-
ba przynajmniej 23/ równych odcinków. Wszystkie tak o-
trzymane punkty $0, 1, 2, \dots$ łączymy z dowol-
nie obranym punktem P , który powinien być, o ile
można jak najdalej od prostej AB . Bierzemy następnie
skrawek papieru, którego przynajmniej jedna krawędź

jest prostą i przyłożywszy go tą krawędzią do prostej $A'B'$ odcinamy punkty A', K' i B' , poczem szukamy takiego położenia skrawka na podziałce rzutowej, aby punkt A' leżał na prostej P_0 , punkt K' na prostej $P_{11\frac{1}{2}}$, a punkt B' na prostej $P_{23\frac{1}{2}}$. Gdy to zostanie osiągnięte odcinamy na krawędzi skrawka punkty $1', 2', 3', 4', \dots, 22'$, w których proste $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{22}$ tę krawędź przecinają, i przenosimy wszystkie te punkty na odcinek $A'B'$. Tak samo postępujemy z odcinkami $D'C', B'C'$ i $A'D'$, łączymy odpowiednie punkty i t.d.

c/ Dany jest czworokąt $A'B'C'D'$, który jest rzutem kwadratu /§ 120/; wykreślić rzut koła w ten kwadrat wpisanego. Rzut środkowy koła jest krzywą zwaną stożkową, której własności poznamy później. Będziemy mogli wykreślić tę stożkową tem dokładniej, im więcej jej punktów /lub stycznych/ wyznaczymy. Najdogodniej w tym celu obrać rzuty wierzchołków wpisanego w koło wielokąta foremnego /lub rzuty boków opisanego na koło wielokąta foremnego/.

Przypuśćmy np., że chcemy wykreślić rzut środkowy podstawy kolumny stożkowej o 20 żłobkach. Niechaj czworokąt $A'B'C'D'$ /Rys.282/ będzie rzutem kwadratu opisanego na koło żłobkowanem /Rys.283/.



Rys. 282.

Prowadzimy przekątne

$A'C'$ i $B'D'$,

/ w ich przecięciu leży

rzut O' środka tego

koła/, a następnie

wykreślamy sobie raz

na zawsze dla wszy-

stkich kół żłobkowa-

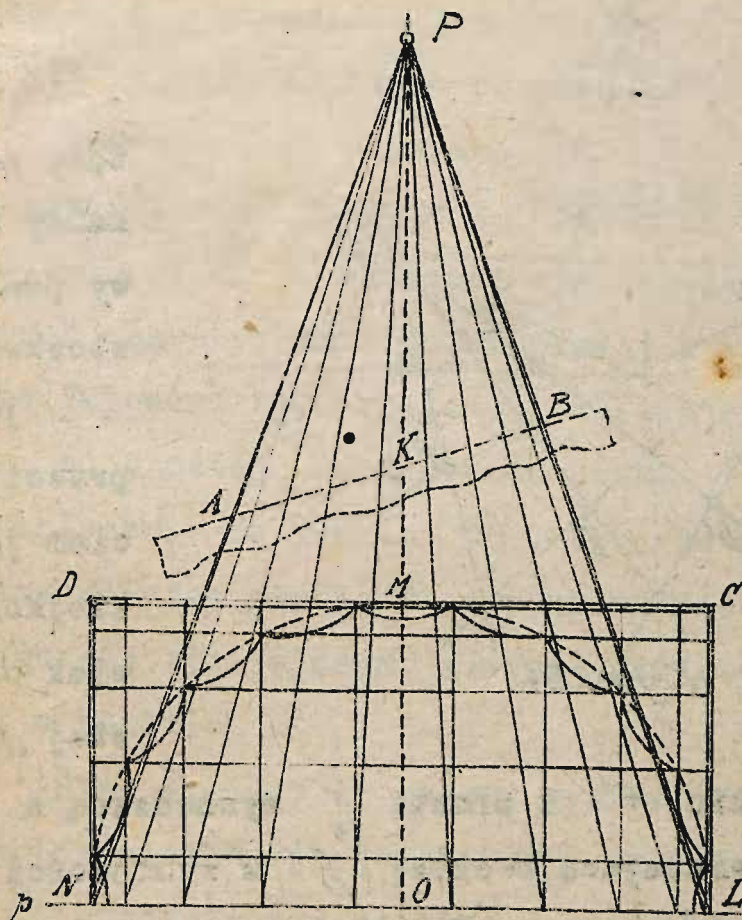
nych o 20 żłob-

kach pewną specjalną

podziałkę rzutową. Dzielimy mianowicie dowolne koło na

20 części /Rys. 283/; przez środki dwóch przeciwległych boków prowadzimy średnicę ρ , na którą rzucamy prostokątnie wszystkie punkty podziału. Na średnicy prostopadłej do tamtej w dość dużej od niej odległości odbieramy punkt P i łączymy go ze wszystkimi rzutami punktów podziału na średnicy ρ . Dalej postępujemy tak jak w poprzednim zadaniu.

d/. Przypuśćmy, że znaleźliśmy 5 punktów A' , B' , C' , D' i E' leżących na rzucie koła, t.j. na stożkowej. /Rys. 284/. Powiadam, że można teraz wykreślić dowolną ilość punktów tej stożkowej. W samej rzeczy, jeżeli punkt F' jest jakimkolwiek szóstym punktem koła na którym leżą punkty A , B , C , D i E i



Rysz. 283.

jeżeli połą-
czymy punkty

$C, D,$

E i F z

punktem A

prostymi $c,$

$d, e,$ i $f,$

a z punktem

B prostymi

c_2, d_2, e_2

i f_2 , to ką-

ty (c, d_1)

i (c_2, d_2) ,

(d, e_1) i

(d_2, e_2) ,

(e, f_1) i

(e_2, f_2) są

parami rów-

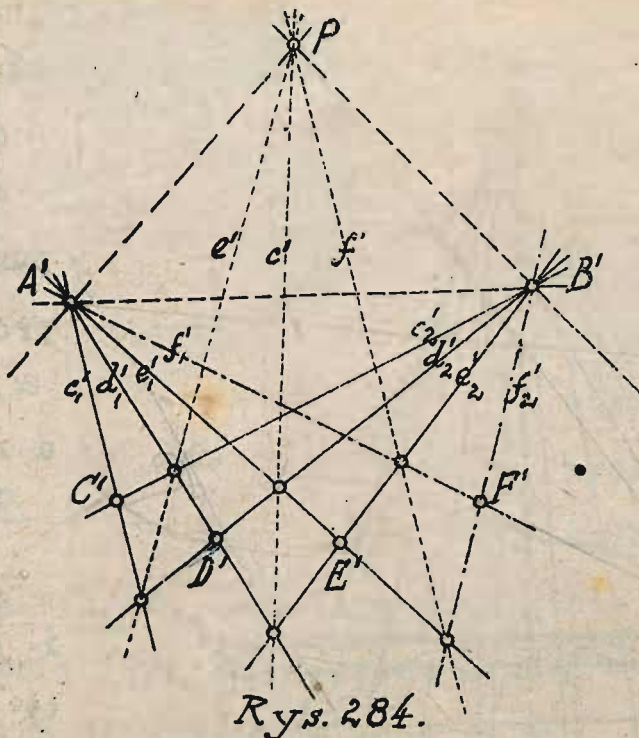
ne, jako wpisane w koło i oparte na tych samych łukach

CD, DE i EF . Stąd wynika, że dwusto-

sunki (c, d_1, e, f_1) i (c_2, d_2, e_2, f_2) czwórek $A(c, d,$

$e, f_1)$ i $B(c_2, d_2, e_2, f_2)$ są równe, a więc będą

równe także dwustosunki rzutów tych czwórek $A'(c', d', e', f')$



Rys. 284.

i $B'(c_2'd_2'e_2'f_2')$
tak, że
każdy no-
wy punkt
stożkowej
 F' jest
przebie-
ciem ja-
kiejkol-
wiek pro-
stej f_1'

wychodzącej z punktu A' z prostą f_2' wychodzącą z punktu B' i odpowiadającą prostej f_1' w rzutowości

$$A'(c_1'd_1'e_1'...) \pi B'(c_2'd_2'e_2'...)$$

Stąd wynika następujące wykreślenie / § 148. IIb /

Łączymy punkty C' , D' i E' z punktem A' pro-
stymi c_1' , d_1' i e_1' , a z punktem B' prostymi c_2' , d_2'
i e_2' . Łączymy punkty $c_1'd_2'$ i $c_2'd_1'$ prostą e' , a punk-
ty $d_1'e_2'$ i $d_2'e_1'$ prostą c' ; punkt przecięcia prostych
 e' i c' jest środkiem rzutowym P . Z punktu A' pro-
wadzimy dowolną prostą f_1' i punkt $e_2'f_1'$ łączymy z
punktem P prostą f_2' , a punkt, w którym prosta f_2'

przecina prostą e_1 , łączymy z punktem B' . Będzie to prosta f_2' , odpowiadająca prostej f_1' , a przecięcie $f_1'f_2'$ będzie szukany punktem F' .

Zauważmy, że prosta PA' i PB' , które w rzutowości $A'(e_1'd_1'e_1'....) \cap B'(e_2'd_2'e_2'....)$ odpowiadają prostej $A'B'$, łączącej wierzchołki tych pęków rzutowych, są st stycznymi do stożkowej w punktach A' i B' . Jeżeli bowiem np. prosta f_1' zbliża się nieograniczenie do prostej $A'B'$, to punkt F' zbliża się nieograniczenie do punktu B' , tak, że prosta $B'F' \equiv f_2'$ łączy wówczas punkt B' z punktem nieograniczenie do niego się zbliżającym, a więc jest styczną do stożkowej w punkcie B' .

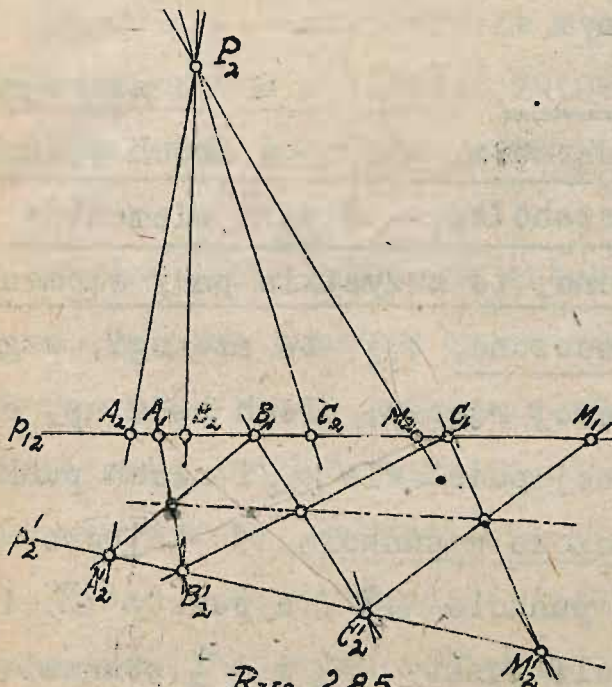
Stąd wynika, że możemy wykreślić dowolną ilość punktów stożkowej, jeżeli mamy trzy jej punkty A' , B' i C' oraz styczne do niej w punktach A' i B' , mamy bowiem wówczas środek rzutowy P jako przecięcie tych stycznych i jedną parę odpowiednich prostych pęków rzutowych o wierzchołkach A' i B' , mianowicie $A'C'$ i $B'C'$.

§ 149. SZEREGI RZUTOWE NA WSPÓLNEJ PODSTAWIE I PĘKI RZUTOWE O WSPÓLNYM WIERZCHOŁKU. Ponieważ dwustosunek czterech elementów szeregu lub pęku zachowuje się



przez rzuty i przecięcia, więc przez dowolną ilość rzutów i przecięć dochodzimy zawsze do szeregu lub pęku rzutowego z pierwszym szeregiem lub pękiem. Przypadkiem szczególnie ważnym rzutowości dwóch szeregów lub dwóch pęków będzie ten, gdy podstawy szeregów lub gdy wierzchołki pęków przystają do siebie / i zjednoczone / Zdarzy się to np. wówczas, gdy wyszedłszy z pewnego szeregu o podstawie p , po pewnej liczbie rzutów i przecięć przetniemy pęk P_{n-1} prostą p , i wtedy na prostej p będą leżały dwa szeregi rzutowe $p, (A, B, C, \dots) \pi \pi p, (A_n, B_n, C_n, \dots)$. I podobnież co do pęków: może się zdarzyć, że wyszedłszy z pewnego pęku o wierzchołku P , po pewnej liczbie przecięć i rzutów, rzucimy szereg p_{n-1} z punktu P ; wtedy punkt P , będzie wspólnym wierzchołkiem dwóch pęków rzutowych $P(a, b, c, \dots) \pi \pi P(a_n, b_n, c_n, \dots)$. Takie dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie lub pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku, jak każde wogóle rzutowe szeregi lub pęki, są wyznaczone przez 3 pary elementów odpowiednich, ale wykreślenia podane w poprzednim artykule, służące do wyznaczania elementów odpowiednich w tym przypadku zaniedbaj.

Niechaj będą na prostej p_{12} /Rys. 285/ 3 pary A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 punktów, które wyznaczają dwa szeregi rzutowe $p_{12} (A_1, B_1, C_1, \dots) \pi p_{12} (A_2, B_2, C_2, \dots)$:



Rys. 285.

aby wyznaczyć dla punktu M , pierwszego szeregu odpowiadający mu punkt M_2 drugiego rzędu z dowolnego punktu P_2 punkty A_2 , B_2 i C_2 na dowolną prostą p_2 i znajdziemy na tej prostej taki punkt M_2' , że punkty M i M_2' odpowiadają sobie

rzutowo w szeregach $p_{12} (A, B, C, \dots)$ i $p_{2'} (A_2', B_2', C_2', \dots)$, poczem rzucimy punkt M_2' z punktu P_2 na p_{12} ; otrzymany w ten sposób punkt M_2 jest szukany. gdyż / § 144 /

$$(A, B, M, C) = (A_2' B_2' M_2' C_2');$$

a na mocy § 141

$$(A_2' B_2' M_2' C_2') = (A_2 B_2 M_2 C_2);$$

skąd wynika:

$$(A, B, M, C) = (A_2 B_2 M_2 C_2);$$

Opierając się na zasadzie dwiistości znaleźlibyś-

my analogiczne wykreślenie linjowe, pozwalające odnaleźć prostą m_2 , odpowiadającą danej prostej m , w dwóch płaskach rzutowych o wspólnym wierzchołku.

§ 150. ELEMENTY PODWOJNE. Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych na wspólnej podstawie, - albo w dwóch płaskach rzutowych o wspólnym wierzchołku, - 3 pary elementów odpowiednich są zjednoczone, to wszystkie pary elementów odpowiednich są zjednoczone, t.j. te szeregi, wzgl. płaski, są identyczne. W samej rzeczy, niech będą np. dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie $p_{1,2}$ i niech punkty A_1 i A_2 będą zjednoczone w punkcie A tej prostej, punkty B_1 i B_2 w punkcie B , a punkty C_1 i C_2 w punkcie C . Jeżeli punkty M_1 i M_2 stanowią jakąkolwiek inną parę punktów odpowiednich, to na zasadzie § 145

$$(A, B, M_1, C_1) = (A_2, B_2, M_2, C_2); \text{ t.j.}$$

$$(ABM_1, C_1) = (ABM_2, C_2);$$

skąd wynika, że punkty M_1 i M_2 są identyczne.

Jeżeli więc dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie /albo dwa płaski rzutowe o wspólnym wierzchołku/ nie są identyczne, to mogą mieć najwyżej dwie pary elementów odpowiednich zjednoczonych, t.j. na wspólnej podstawie $p_{1,2}$ istnieją najwyżej dwa punkty $F_{1,2}$ i $G_{1,2}$

/ze wspólnego wierzchołka $P_{1,2}$ wychodzą najwyżej dwie proste $f_{1,2}$ i $g_{1,2}$, które odpowiadają samym sobie.

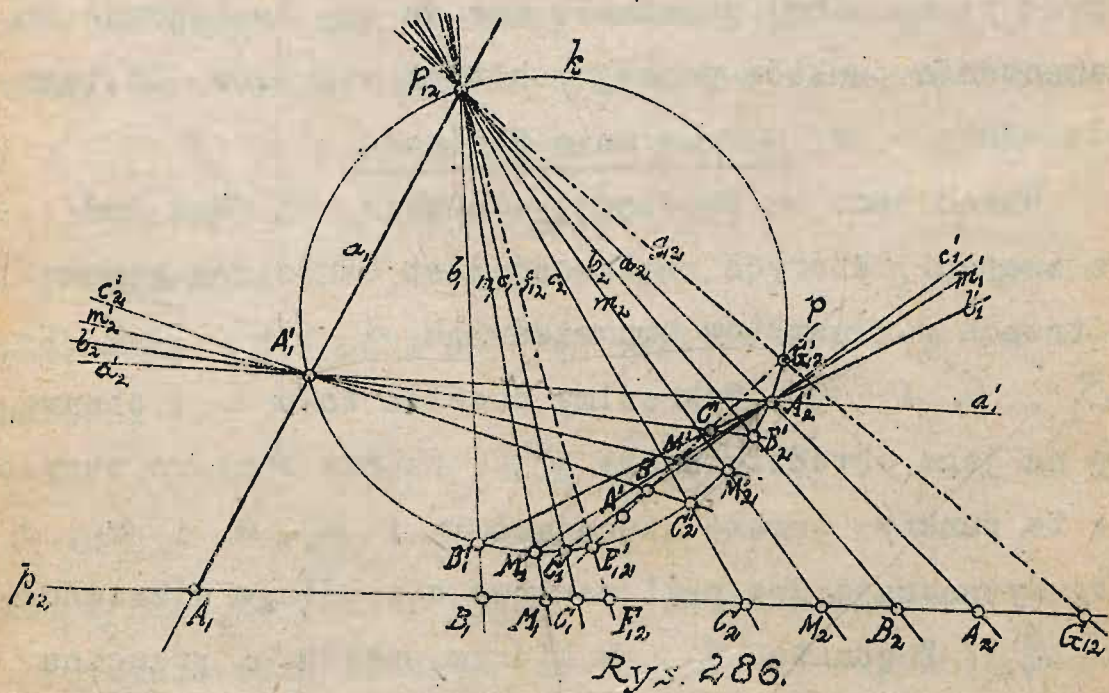
Punkty $F_{1,2}$ i $G_{1,2}$ nazywamy punktami podwójnymi szeregów rzutowych $p_{1,2}(A, B, C, \dots)$ π $p_{1,2}(A_2, B_2, C_2, \dots)$ proste $f_{1,2}$ i $g_{1,2}$ nazywamy prostami podwójnymi pęków rzutowych

$$P_{1,2}(a, b, c, \dots) \pi P_{1,2}(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

Wykreślenie podane w artykule poprzednim dla wyznaczenia pary punktów odpowiednich dwóch szeregów rzutowych na wspólnej podstawie nie da się zastosować do wyznaczenia punktów podwójnych tych szeregów. Do tego celu służy t. zw. wykreślenie Steinera.

Niech będą na wspólnej podstawie $p_{1,2}$ /Rys. 286/ dwa szeregi, których rzutowość jest określona zapomocą trzech par punktów odpowiednich A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 . Wykreślmy dowolne koło k i obrawszy na jego obwodzie punkt $P_{1,2}$, rzućmy z niego wszystkie te punkty; proste rzucające a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 wyznaczają dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku $P_{1,2}$. Z punktu A_1' , w którym prosta a_1 przecina koło, rzućmy punkty A_2' , B_2' i C_2' ; proste rzucające a_2' , b_2' i c_2' , na zasadzie znanego twierdzenia o kątach wpisanych w koło, opartych na tym samym łuku, tworzą ze sobą te same kąty, co proste a_2 , b_2 i c_2 .

tak, że pęki $P_{12}(a_2, b_2, c_2, \dots)$ i $A_1'(a_1', b_1', c_1', \dots)$ są równe, a więc tembardziejie rzutowe. Podobnież z punktu A_2' w którym prosta a_2 przecina koło, rzućmy punkty A_1' , B_1' i C_1' ; proste rzucające: a_1' , b_1' i c_1' tworzą ze sobą te same kąty, co proste a_1 , b_1 i c_1 , tak że pęki $P_{12}(a, b, c, \dots)$ i $A_2'(a_1', b_1', c_1', \dots)$ są równe, a więc tembardziejie rzutowe.



Ponieważ $P_{12}(a, b, c, \dots) \propto P_{12}(a_2, b_2, c_2, \dots)$ więc

$$A_2'(a_1', b_1', c_1', \dots) \propto A_1'(a_2', b_2', c_2', \dots)$$

pęki te jednak nie tylko są rzutowe, ale i perspektyw-

wieczne, albowiem prosta, łącząca wierzchołki A_1' i A_2' odpowiada samej sobie w tych pękach ($a_1' \equiv a_2'$). Stąd wynika, że punkty przecięcia promieni odpowiednich $b_1' b_2'$, $c_1' c_2'$, $m_1' m_2'$, leżą na jednej prostej p , która jest zatem wyznaczoną przez dwa którekolwiek z tych punktów, np. przez $C' \equiv b_1' b_2'$ i $B' \equiv c_1' c_2'$. Aby wyznaczyć jakąkolwiek inną parę prostych odpowiednich, wystarczy połączyć dowolny punkt M' prostej $B'C' \equiv p$ z punktami A_1' i A_2' .

Stąd wynika, że dla wyznaczenia punktu M_2 , który w drugim szeregu odpowiada punktowi M_1 pierwszego szeregu, należy postąpić, jak następuje:

Połączyć punkty A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 i M_1 z punktem P_2 prostymi a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 i m_1 ; wyznaczyć punkty A_1' , B_1' , C_1' , A_2' , B_2' , C_2' i M_1' , w których te proste przecinają koło k ; połączyć $A_1' B_2' \equiv b_1'$ i $A_2' B_1' \equiv b_1'$; wyznaczyć punkt $b_2' b_1' \equiv B'$; połączyć $A_1' C_2' \equiv c_2'$ i $A_2' C_1' \equiv c_1'$; wyznaczyć punkt $c_2' c_1' \equiv C'$; połączyć $B'C' \equiv p$; wyznaczyć punkt $m_1' p \equiv M$; połączyć $M'A_1' \equiv m_2$; wreszcie wyznaczyć punkt $m_1' m_2' \equiv M_2$.

Trojakie może być położenie prostej p względem koła k : albo może to być prosta zewnętrzna względem tego koła, albo styczna do niego, albo wreszcie jego

sieczna. Przypuśćmy, że prosta p przecina koło k w dwóch punktach $F'_{1,2}$ i $G'_{1,2}$. Każdy z tych punktów wyznacza z punktem $P_{1,2}$ prostą, która odpowiada samej sobie w pękach rzutowych $P_{1,2}(a, b, c, \dots) \propto P_{1,2}(a_1, b_1, c_1, \dots)$. Punkty $F'_{1,2}$ i $G'_{1,2}$, w których tak wyznaczone proste $f_{1,2}$ i $g_{1,2}$ przecinają prostą $p_{1,2}$, są zatem punktami podwójnymi szeregów rzutowych $p_{1,2}(A, B, C, \dots) \propto p_{1,2}(A_1, B_1, C_1, \dots)$. Jeżeli prosta p jest styczną do koła k , to punkty $F'_{1,2}$ i $G'_{1,2}$ a więc i punkty $F_{1,2}$ i $G_{1,2}$ są zjednoczone; istnieje więc wtedy tylko jeden punkt podwójny tych szeregów. Jeżeli wreszcie prosta p jest zewnętrzną względem koła k , to punkty podwójne nie istnieją wcale.

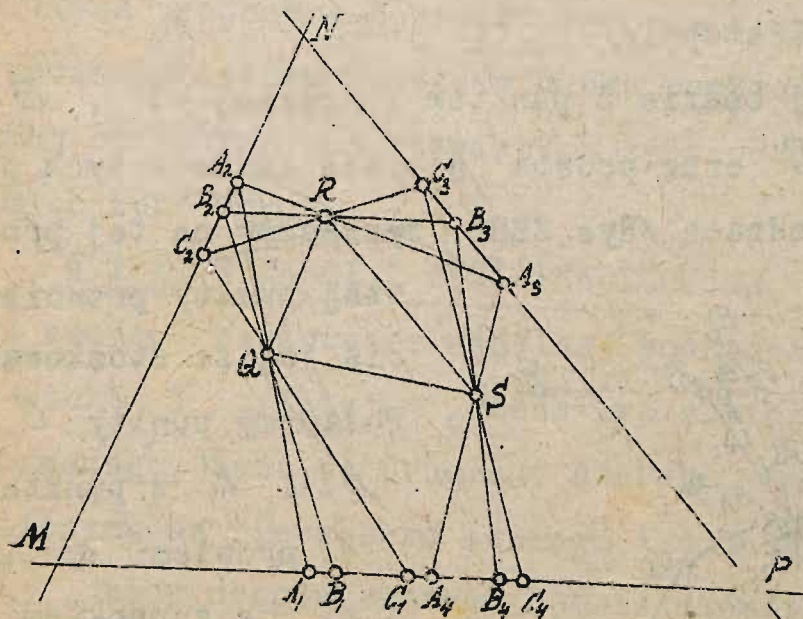
W wykreśleniu powyższem zawarte już jest oczywiście wyznaczenie par prostych odpowiednich oraz prostych podwójnych $f_{1,2}$ i $g_{1,2}$ dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku $P_{1,2}$: $P_{1,2}(a, b, c, \dots) \propto P_{1,2}(a_1, b_1, c_1, \dots)$.

Wyznaczenie punktów podwójnych dwóch szeregów rzutowych na jakiejkolwiek podstawie $p_{1,2}$ oraz wyznaczenie prostych podwójnych dwóch pęków rzutowych o jakimkolwiek wierzchołku $P_{1,2}$ da się uskutoczyć zapomocą jednego jedynego koła k , leżącego w płaszczyźnie tych podataw i wierzchołków. Wykreślenie to nie wymaga zatem użycia cyrkla, jeżeli tylko w płaszczyźnie rysun-

ku raz na zawsze wykreślone jest jakiekolwiek koło / zwane kołem Steinerja/.

§ 151. ZASTOSOWANIA. a/ Wykreślić trójkąt, wpisany w trójkąt MNP i opisany na trójkącie QRS

Na boku MP /Rys. 287/ obierzmy trzy dowolne punkty



Rys. 287.

$A, B,$
i $C,$
rzućmy
je z
punktu
 Q na
bok
 MN
otrzy-
mane
punkty

A_1, B_1 i C_1 rzućmy z punktu R na bok NP
wreszcie tak otrzymane punkty A_3, B_3 i C_3 rzućmy
jeszcze raz z punktu S na bok MP . F. nieważ sze-
regi

$A_1, B_1, C_1 \dots$ i A_2, B_2, C_2
 $A_2, B_2, C_2 \dots$ i A_3, B_3, C_3
 $A_3, B_3, C_3 \dots$ i A_4, B_4, C_4

są perspektywiczne /środkami perspektywy są kolejno punkty Q , R i S , więc szeregi

$$A, B, C, \dots \text{ i } A_4, B_4, C_4$$

są rzutowe na wspólnej podstawie MP ; zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia punktów podwójnych

$F'_{1,4}$ i $G'_{1,2}$ tych szeregów i ma 2, 1 lub 0 rozwiązań /Zagadnienie II stopnia/

b/ Niechaj będzie 5 punktów stożkowej A , B , C , D i E oraz prosta p przez zaden z tych punktów nie przechodząca /Rys. 288/. Wyznamy na tej pro-

stej punkty przecięcia jej ze stożkową.

Połączmy punkty C ,

D i E z punktem

A prostami c , d ,

i e , a z punktem B

prostami c_2 , d_2 i

e_2 i niechaj te pro-

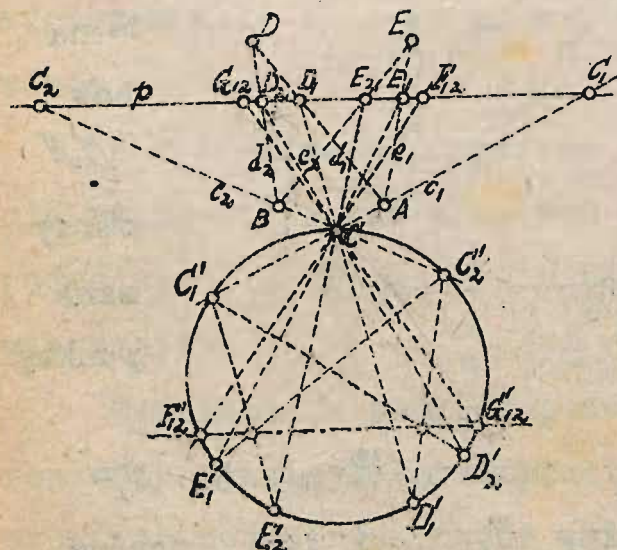
ste przetną prostą p

w punktach C' , D' ,

E' ; C_2 , D_2 i E_2

Rys. 288.

Jeżeli szeregi rzutowe $p(C, D, E, \dots)$ i $p(C_2, D_2, E_2, \dots)$ mają punkty podwójne, to każdy z tych punktów, np. $F'_{1,2}$



130
40
52.00

musi leżeć na stożkowej, będzie to bowiem przecięcie prostych $AF_{1,2}$ i $BF_{1,2}$, które sobie odpowiadają wzajemnie w rzutowości $\rho(C, D, E, \dots) \pi \rho(C_2, D_2, E_2, \dots)$. Prosta ρ może przeto przecinać stożkową najwyżej w dwóch punktach /Zag. II stopnia/. Zresztą określimy później na drodze czysto geometrycznej pojęcie punktów i prostych urojonych i przekonamy się wówczas, że prosta przecina stożkową zawsze w dwóch punktach: rzeczywistych odrębnych, rzeczywistych zjednoczonych, lub urojonych sprzężonych.

§ 152. SZEREGI I PEKI INWOLUCYJNE. Niechaj będą dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie $\rho_{1,2}$. Każdy punkt M prostej $\rho_{1,2}$ może być zaliczony bądź do pierwszego, bądź do drugiego szeregu. Jeżeli punkt M zaliczymy do pierwszego szeregu i oznaczymy go literą A_1 , to w drugim szeregu będzie mu odpowiadał pewien punkt, który oznaczymy literą A_2 . Jeżeli ten sam punkt zaliczymy do drugiego szeregu i oznaczymy go literą B_2 , to w pierwszym szeregu będzie mu odpowiadał pewien punkt B_1 , który wogóle będzie różny od punktu A_2 . Może się wszakże zdarzyć, że punkty A_2 i B_1 przystaną do siebie w pewnym punkcie N prostej $\rho_{1,2}$, t.j. że punkty M i N odpowiadają sobie podwójnie, tak, że punktowi M odpowiada zawsze ten sam punkt N .

niezależnie od tego, do którego z dwóch szeregów zaliczymy punkt M .

Podobnież dla pęków. Może się zdarzyć, że w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku $P_{1,2}$ dwie proste m i n , wychodzące z punktu $P_{1,2}$, odpowiadają sobie podwójnie, t.j. że prostej m odpowiada zawsze ta sama prosta n , niezależnie od tego, do którego z dwóch pęków prostą m zaliczymy. Dowiedziemy teraz twierdzenia:

Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych na wspólnej podstawie, albo w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku dwa elementy odpowiednie odpowiadają sobie podwójnie, to każde dwa elementy odpowiednie odpowiadają sobie podwójnie.

Niech będą np. dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie i niech istnieje jedna para punktów odpowiednich A_1 i A_2 , które odpowiadają sobie podwójnie, tak że jeżeli

$$A_1 \equiv B_2 \quad \text{to} \quad A_2 \equiv B_1$$

Trzeba okazać, że wtedy każda para punktów odpowiednich, np. C_1 i C_2 odpowiada sobie podwójnie, t.j. że jeżeli

$$D_1 \equiv C_2 \quad \text{to} \quad D_2 \equiv C_1$$

Otóż na zasadzie § 145;

$$(A, B, C, D_1) = (A_2, B_2, C_2, D_2)$$

kładąc na mocy założenia $A_2 \equiv B_1$, $B_2 \equiv A_1$, $C_2 \equiv D_1$,

otrzymamy $(A, B, C, D_1) = (B, A, D_1, D_2)$;

czyli $\frac{A, C_1}{B, C_1} : \frac{A, D_1}{B, D_1} = \frac{B, D_1}{A, D_1} : \frac{B, D_2}{A, D_2}$, t. j.

$$\frac{A, C_1}{B, C_1} = \frac{A, D_2}{B, D_2}$$

co oznacza, że stosunki podziału punktów C_1 i D_2 względem punktów A_1 i B_1 są równe, skąd wynika że $C_1 \equiv D_2$ c. b. d. o.

Dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie $\rho_{1,2}$, w których jedna, a więc wszystkie pary punktów odpowiednich odpowiadają sobie podwójnie, nazywają się inwolucją na prostej $\rho_{1,2}$. Każdemu punktowi prostej $\rho_{1,2}$, odpowiada jeden jedyny punkt tej samej prostej, o którym mówimy, że jest z tem samym inwolucyjnie sprzężony.

Ponieważ rzutowość dwóch szeregów jest wyznaczona przez 3 którekolwiek pary punktów odpowiednich, więc inwolucja na prostej $\rho_{1,2}$ będzie wyznaczona przez dwie którekolwiek pary punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ; każda z tych dwóch par bowiem po przestawieniu jej elementów utworzy nową parę punktów odpowiednich tych dwóch szeregów rzutowych, które stanowią inwolucję:

$$\rho_{12} (A_1 B_1 A_2 B_2) \pi \rho_{12} (A_2 B_2 A_1 B_1 \dots)$$

Dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku P_{12} , w których jedna, a więc wszystkie pary prostych odpowiednich odpowiadają sobie podwójnie, nazywają się inwolucją dokoła punktu P_{12} . Każdej prostej wychodzącej z punktu P_{12} , odpowiada jedna jedyna wychodząca z tegoż punktu prosta, o której mówimy, że jest z tą samą inwolucyjnie sprzężona.

Inwolucja dokoła punktu P_{12} jest wyznaczona przez którekolwiek dwie pary prostych sprzężonych a_1 i a_2 ,

b_1 i b_2 ; po przestawieniu bowiem elementów jednej z tych par otrzymamy nową parę prostych odpowiednich tych dwóch pęków rzutowych, które stanowią involucję:

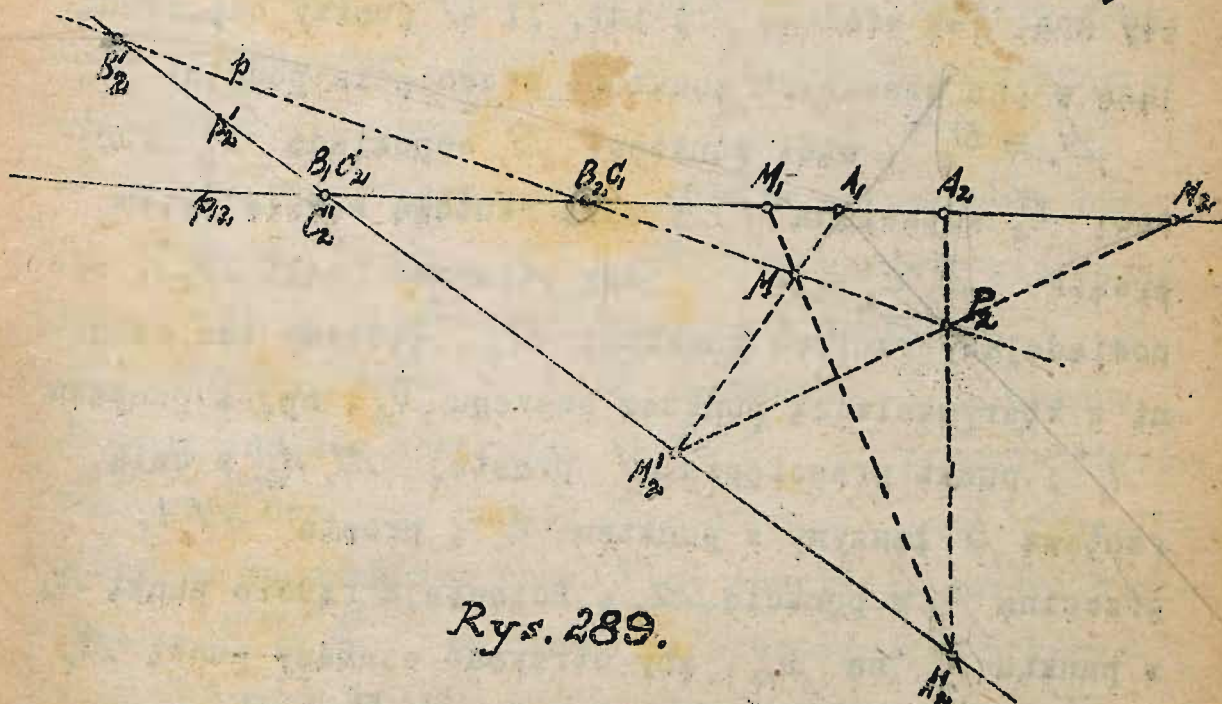
$$P_{12} (a_1 b_1 a_2 b_2 \dots) \pi P_{12} (a_2 b_2 a_1 b_1 \dots)$$

§ 151. Własności involucyjne czworokąta i czworoboku zupełnego. Niechaj będzie dana involucja, t.j.

takie dwa rzutowe szeregi na wspólnej podstawie ρ_{12} , że dwa punkty tej proste odpowiadają sobie podwójnie, tak że jeśli w jednym z nich przystaną do siebie punkt

B_1 pierwszego szeregu z punktem C_2 drugiego szeregu, to w drugim przystaną do siebie punkt B_2 drugiego szeregu z punktem C_1 pierwszego. Rzutowość tych dwóch szeregów jest tedy wyznaczona przez 3 pary punktów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , przytem druga i trze-

cia para są zjednoczone w dwóch punktach $B_1 \equiv C_2$ i



Rys. 289.

$B_2 \equiv C_1$ /Rys. 289./. Wyznamy na prostej p_{12} punkt M_2 sprzężony inwolucyjnie z jakimkolwiek danym punktem M_1 tej samej prostej. Stosując wykreślenie § 149 /Rys. 285/ trzeba najpierw, jak wiemy, z dowolnego punktu P_2 rzucić punkty A_2 , B_2 i C_2 na dowolną prostą p_2' . Poprowadźmy tę prostą przez punkt $B_1 \equiv C_1$ i obracając gdziekolwiek punkt P_2 , rzućmy z niego punkty A_2 , B_2 i C_2 na prostą p_2' ; otrzymawszy punkty A_2' , B_2' i $C_2' \equiv B_1 \equiv C_1$. Znajdźmy teraz punkt M_2' , odpowiadający rzutowo punktowi M_1 w szeregach

$$p_{12} (A_1 B_1 C_1 \dots) \pi p_2' (A_2' B_2' C_2' \dots)$$

W tym celu znajdziemy oś rzutową tych szeregów. Łączy ona, jak wiadomo / § 147, II a/ punkty odpowiadające w obu szeregach punktowi przecięcia podstaw

$B_1 \equiv C_2'$; otóż punktowi B_1 odpowiada B_2' , punktowi C_2' odpowiada C_1 ; osią rzutową będzie zatem prosta $B_2'C_1 \equiv p$. Aby otrzymać punkt M_2' , odpowiadający rzutowo punktowi M_1 , łączymy ten ostatni z którymkolwiek punktem szeregu p_2' , np. z punktem A_2' ; punkt przecięcia M prostej M_1A_2' z osią rzutową p łączymy z punktem A_1 ; prosta MA_1 przecina p_2' w punkcie M_2' . Pozostaje rzucić punkt M_2' z punktu P_2 na $p_{1,2}$, aby otrzymać szukany punkt M_2 .

Zauważmy czworokąt zupełny $MP_2A_2'M_2'$ którego dwa przeciwległe boki p i p_2' przechodzą przez punkty $B_2 \equiv C_1$ i $B_1 \equiv C_2$, dwa inne MM_2' i P_2A_2' - przez punkty A_1 i A_2 , jeden z pozostałych przez M_1 , a drugi przez M_2 . Stąd twierdzenie:

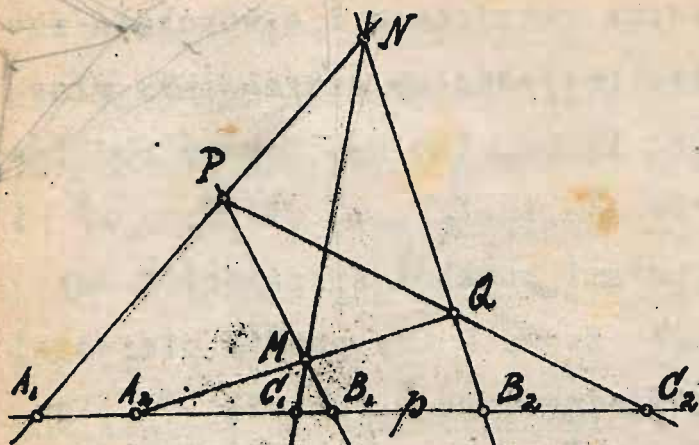
Boki przeciwległe czworokąta zupełnego przecinają dowolną prostą w trzech parach punktów inwolucji.

Na zasadzie dwoistości wnioskujemy o słuszności twierdzenia wzajemnego.

Proste, rzucające z dowolnego punktu wierzchołki przeciwległe czworoboku zupełnego, stanowią trzy pary prostych inwolucji.

Własności harmoniczne czworoboku i czworokąta zupełnego /§ 142/ są tylko przypadkiem szczególnym własności inwolucyjnych tych figur. Tak np. 3 pary punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , M i N stają się dwiema parami punktów sprzężonych harmonicznie A_1 i B_1 , M i N , gdy punkty pierwszej pary A_1 i A_2 zostaną zjednoczone w punkcie A , a punkty drugiej pary B_1 i B_2 w punkcie B ; prosta p przecinająca czworokąt $CFDE$ przechodzi wówczas przez dwa jego punkty przekątne A i B /Rys. 259. Punkty te są punktami podwójnymi inwolucji, którą czworokąt $CFDE$ wyznacza na prostej p ; przegradzają one harmonicznie każdą parę punktów M i N , sprzężonych inwolucyjnie.

Opierając się na własnościach inwolucyjnych czworokąta zupełnego można za pomocą konstrukcji linjowej wyznaczyć punkt C_2 sprzężony z jakimkolwiek danym punktem C_1 w inwolucji, wyznaczonej przez dwie pary punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 . Przypuśćmy, że na prostej p /Rys. 290/ dane są dwie pary punktów inwolucyjnie sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 oraz punkt C_1 . Aby znaleźć punkt C_2 z nim sprzężony, poprowadźmy przez C_1 prostą jakąkolwiek i weźmy na niej dowolne dwa punkty M i N . Połączmy



Rys. 290.

punkt M z punktami należącymi do par różnych, np. z A_2 i B_1 , a punkt N z pozostałym punktami tych par A_1 i B_2 ; w utworzonym w ten sposób czworokącie $MNPQ$

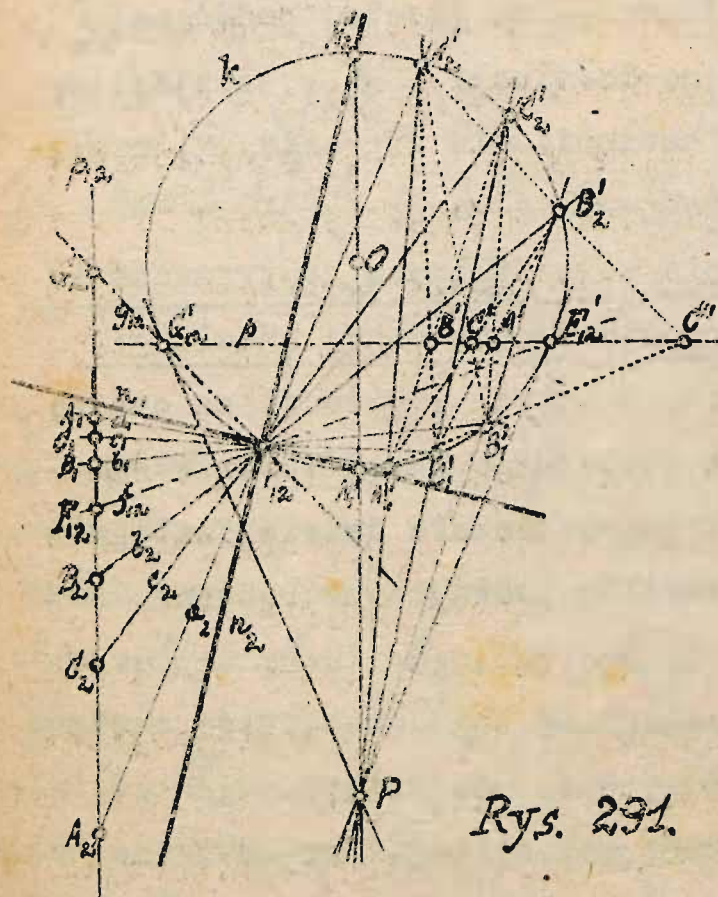
poprowadźmy szósty bok PQ ; w przecięciu jego z prostą p otrzymamy szukany punkt C_2 . - Jeżeli jedna z dwóch danych par punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , np. A_1 i A_2 jest zjednoczona w punkcie podwójnym F_{12} , to drugi punkt podwójny inwolucji G_{12} znajdziemy jako punkt sprzężony harmonicznie z punktem F_{12} względem punktów drugiej pary B_1 i B_2 .

Podobnie, opierając się na własnościach inwolucyjnych czworoboku zupełnego można podać konstrukcję linjową prostej c_2 sprzężonej z daną jakąkolwiek prostą c_1 w inwolucji wyznaczonej przez dwie pary prostych sprzężonych a_1 i a_2 , b_1 i b_2 . Możemy zresztą to zagadnienie sprowadzić do poprzedniego, opierając

się na tej zasadzie, że involucja zachowuje się przez rzuty i przecięcia. - Jeżeli jedna z dwóch danych par prostych sprzężonych involucyjnie a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , np. a_1 i a_2 , jest zjednoczona na prostej podwójnej f_{12} , to drugą prostą podwójną involucji, g_{12} , znajdziemy jako prostą sprzężoną harmonicznie z prostą f_{12} względem prostych drugiej pary b_1 i b_2 .

§ 152. Zastosowanie koła Steinera do wyznaczenia elementów sprzężonych i podwójnych danej involucji.
Konstrukcja elementów sprzężonych involucji za pomocą czworokąta i czworoboku zupełnego /Rys. 290/ nie zawsze jest praktyczna, a już wcale nie da się zastosować do wyznaczania elementów podwójnych. Ponieważ involucja jest przypadkiem szczególnym rzutowości dwóch szeregów na wspólnej podstawie lub dwóch pęków o wspólnym wierzchołku, można więc do niej zastosować koło Steinera. / § 150, Rys. 286/. Niech będą /Rys. 291/ na prostej p_{12} dwie pary punktów sprzężonych involucyjnie A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ; mamy 1/ wyznaczyć nową parę punktów sprzężonych C_1 i C_2 i 2/ wyznaczyć punkty podwójne F_{12} i G_{12} tej involucji. Obracamy na dowolnem kole k punkt P_{12} , rzućmy z niego punkty A_1 , A_2 , B_1 i B_2 . Proste rzucające a_1 , a_2 , b_1 i b_2 wyznaczają dwa pęki rzutowe $P_{12}(a_1, a_2, b_1, b_2, \dots)$ i $P_{12}(a_2, b_1, b_2, \dots)$

o wspólnym wierzchołku P_{12} . Zastosujemy do tych pęków wykreślne § 150.



Rys. 291.

Wyznaczywszy punkty A_1' , A_2' , B_1' i B_2' w których proste a_1 , a_2 , b_1 i b_2 przecinają koło, znajdziemy punkt przecięcia C' prostych $A_1'B_1'$ i $A_2'B_2'$, a następnie połączmy punkty C' i C'' prostą β . Aby wyznaczyć nową jakąkolwiek parę punktów sprzężonych C_1' i C_2' .

łączymy dowolny punkt B' prostej β z punktami A_1' i A_2' ; punkty C_1' i C_2' w których proste $A_2'B'$ i $A_1'B'$ przecinają koło, rzucamy z punktu P_{12} na prostą β_{12} .

Punkt A' przecięcia prostych $B_1'C_1'$ i $B_2'C_2'$ i

punkt B' przecięcia prostych $A_1'C_2'$ i $A_2'C_1'$ leżą również na prostej p . W samej rzeczy, ponieważ pęki $A_1'(A_2'B_1'B_2'C_1'C_2')$ i $A_2'(A_1'B_2'B_1'C_2'C_1')$ są perspektywiczne, więc proste $A_1'B_1'$ i $A_2'B_2'$, $A_1'B_2'$ i $A_2'B_1'$, $A_1'C_1'$ i $A_2'C_2'$ przecinają się parami w punktach C'' , C' i B' leżących na jednej prostej /osi perspektywy tych pęków/; na tej samej prostej leży także punkt A' , w którym się przecinają proste $B_1'C_2'$ i $B_2'C_1'$ pęków perspektywicznych $B_1'(B_2'A_1'A_2'C_1'C_2'...)$ i $B_2'(B_1'A_2'A_1'C_2'C_1'...)$. Zauważmy teraz dwa trójkąty $A_1'B_1'C_2'$ i $A_2'B_2'C_1'$; są to trójkąty Desargues'a /§ 93/, gdyż boki ich przecinają się parami w punktach A' , B' , C' , leżących na prostej p ; stąd wynika, że wierzchołki tych trójkątów A_1' i A_2' , B_1' i B_2' , C_1' i C_2' leżą parami na prostych przechodzących przez jeden punkt P .

Aby więc znaleźć nową parę punktów sprzężonych C_1' i C_2' , wystarczy 1/ wyznaczyć punkt P jako przecięcia prostych $A_1'A_2'$ i $B_1'B_2'$, 2/ z punktu P wyprowadzić jakąkolwiek sieczną do koła k i 3/ punkty przecięcia tej siecznej z kołem C_1' i C_2' rzucić z punktu $P_{1,2}$ na prostą $p_{1,2}$. Jeżeli punkt P jest zewnętrznym względem koła k , to rzuty punktów zetknięcia $F'_{1,2}$ i $G'_{1,2}$ stycznych, wyprowadzonych z

punktu P do koła, są punktami podwójnymi $F_{1,2}$ i $G_{1,2}$. Punkty takie nie istnieją, gdy P jest punktem wewnętrznym koła, i są zjednoczone, gdy P leży na okręgu. Należy więc odróżnić 3 rodzaje inwolucji: hyperboliczną o dwóch odrębnych elementach podwójnych, paraboliczną o zjednoczonych elementach podwójnych, i eliptyczną, - bez tych elementów.

W wykreśleniu powyższem zawarte już jest oczywiście wyznaczenie par prostych sprzężonych C_1 i C_2 oraz prostych podwójnych $f_{1,2}$ i $g_{1,2}$ inwolucji dokoła punktu

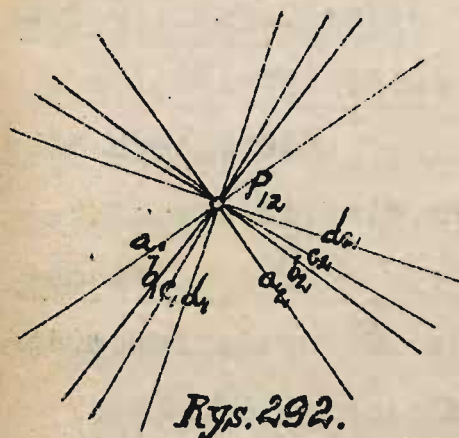
$P_{1,2}$. Zastosujmy jeszcze to wykreślenie do wyznaczenia prostokątnej pary prostych sprzężonych danej inwolucji. W tym celu wystarczy wyprowadzić z P średnicę koła; proste n_1 i n_2 , rzucające z punktu $P_{1,2}$ końce

N_1' i N_2' tej średnicy będą wzajemnie prostopadłymi prostymi sprzężonymi. Jeżeli punkt P leży w środku O koła K , to oczywiście każda sieczna z niego wychodząca jest średnicą, wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne.

W inwolucji dokoła punktu alb wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, a bo tylko jedna.

Jeżeli inwolucja dokoła punktu P jest hyperboliczna, /Rys. 29/, to prostokątna para prostych sprzężonych n_1 i n_2 dzieli na połów kąty między prostymi pod-

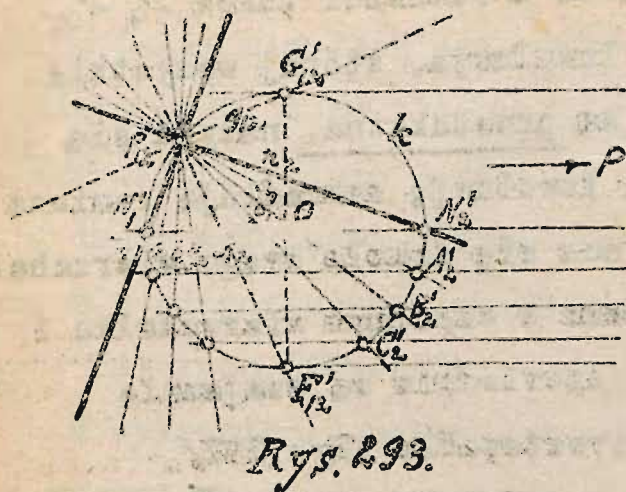
wójnemi f_{12} i g_{12} . Wynika to z równości łuków $N_2'F_{12}'$ i $N_2'G_{12}'$ ($ON_2' \perp F_{12}'G_{12}'$) Inwolucja, której wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, nazywa się prostokątną. Eliptyczną tę inwolucję zakreślają ramiona kąta prostego, gdy ten obraca się dookoła swego wierzchołka; są to więc dwa pęki równe o wspólnym wierzchołku i zwrocie, w których proste odpowiednie są wzajemnie prostopadłe /Rys.292/.



Jeżeli punkt P jest niewłaściwy, to łuki odcięte na okręgu przez sieczne z tego punktu wychodzące są równe. Hyperboliczna inwolucja, która temu położeniu punktu P odpowiada, nazywa się

symetryczną; proste podwójne są wzajemnie prostopadłe; są one dwusiecznymi kątów między każdą dwiema prostymi sprzężonymi. /Rys.293/. Inwolucja ta jest więc utworzona przez dwa pęki równe o wspólnym wierzchołku i zwrotach przeciwnych. Dwusieczne kątów między prostymi podwójnymi stanowią parę sprzężonych prostych prostokątnych tej inwolucji.

Zagadnienie wyznaczenia pary prostokątnej prostych sprzężonych inwolucji jest tylko przypadkiem szcze-



Rys. 293.

gólnym zadania.

Dane są dwie
inwolucje na wspólnej
podstawie albo o wspólnym
wierzchołku; znaleźć parę sprzecznych
elementów zarówno w
jednej, jak i w drugiej
inwolucji.

Niech będą np.

dwie involucje prostych o wspólnym wierzchołku

$S(a_1 a_2, b, b_2)$ i $S(cc', d, d')$. Na dowolnym kole k przechodzącym przez S wyznaczmy punkty $A_1, A_2, B_1, B_2, C, C', D$ i D' w których proste $a_1, a_2, b, b_2, c, c', d$ i d' przecinają to koło. Wyznaczmy punkt P jako przecięcie prostych $A_1 A_2$ i $B_1 B_2$ oraz punkt Q jako przecięcie prostych CC' i DD' . Jeżeli prosta PQ przecina koło k w punktach M_1 i M_2 , to proste $SM_1 \equiv m_1$ i $SM_2 \equiv m_2$ są sprzężone zarówno w pierwszej, jak w drugiej involucji. Zagadnienie nie ma więc rozwiązania tylko wtedy, gdy prosta PQ jest zewnętrzną względem koła. Łatwo się przekonać, że wówczas punkty zetknięcia $F_{1/2}$ i $G_{1/2}$ stycznych do koła wyprowadzonych z punktu P

przegradzają punkty zetknięcia H i I stycznych, wyprowadzonych z punktu Q ; skąd wynika, że zagadnienie nie ma rozwiązania jedynie wtedy, gdy obie inwolucje są hyperboliczne i gdy elementy podwójne jednej z nich przegradzają elementy podwójne drugiej.-

§ 153. Inwolucja hyperboliczna paraboliczna i eliptyczna. W artykule poprzednim nazwaliśmy inwolucję hyperboliczną, paraboliczną lub eliptyczną, zależnie od tego czy ma dwa, jeden, lub czy nie ma żadnego elementu podwójnego. Okażemy teraz, jak nie wyznaczając elementów podwójnych możemy jednym rzutem oka rozpoznać, którą z tych trzech inwolucji wyznaczają dwie pary elementów w niej sprzężonych.

Niechaj będzie na prostej p_{12} inwolucja $A_1 B_1 B_2$, /t.j. inwolucja wyznaczona przez pary punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 /. Inwolucja ta jest utworzona przez dwa szeregi rzutowe $p_{12}(A_1 A_2 B_1 B_2) \pi$ $\pi p_{12}(A_1 A_2 B_1 B_2)$ w ten sposób, że każdemu punktowi prostej p_{12} odpowiada w obu szeregach ten sam punkt. Punkty wzajemne R_1 i Q_2 tych szeregów /§ 147. II a/ są przeto zjednoczone w pewnym punkcie O , który nazwiemy środkiem inwolucji $A_1 A_2 \cdot B_1 B_2$. Porównaj iloczyn odległości dwóch punktów odpowiednich A_1 i A_2 , lub B_1 i B_2 , lub C_1 i C_2 , od punktów wzajemnych R_1 ,

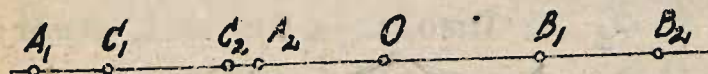
i Q_2 jest liczbą stałą, więc

Iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest liczbą stałą

$$OA_1 \cdot OA_2 = OB_1 \cdot OB_2 = OC_1 \cdot OC_2 = \dots$$

Przypuśćmy najpierw, że ta liczba jest dodatnia $+k^2$. Punkty sprzężone np. A_1 i A_2 , muszą leżeć po tej samej stronie środka inwolucji O , a więc albo obydwie po prawej, albo obydwie po lewej jego stronie. Prócz tego łatwo dowieść, że każde dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, t.j. że oba punkty jednej pary leżą zewnątrz punktów drugiej pary. Jest to oczywiste, gdy pary A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 leżą po przeciwnych stronach środka inwolucji O .

/Rys. 294/. Przypuśćmy więc, że pary A_1 i A_2 oraz C_1 i C_2 leżą po tej samej stronie środka inwolucji O .



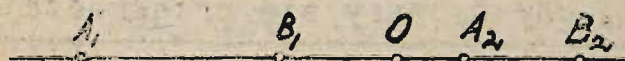
Rys. 294.

Ponieważ $OA_1 \cdot OA_2 = OC_1 \cdot OC_2$, więc jeżeli C_1 leży bliżej punktu O niż A_1 , to C_2 musi leżeć dalej niż A_2 od punktu O i naodwrot. gdyby C_1 leżał dalej niż A_1 od punktu O , to C_2 leżałby bliżej niż A_2 , tak że jedna z tych par punktów obejmie zawsze

drugą. Z powyższego wynika, że gdy punkt pewien M_1 , porusza się w jedną stronę prostej β_{12} , to sprzężony z nim punkt M_2 porusza się zawsze w stronę przeciwną.

Zupełnie inaczej rzeczy się mają, gdy iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest liczbą ujemną $-k^2$. Punkty sprzężone muszą oczywiście leżeć po przeciwnych stronach środka inwolucji O .

Łatwo dowieść, że każde dwie pary punktów sprzężonych się przeznaczają. W samej rzeczy, jeżeli punkt B_1 leży bliżej od środka inwolucji O , niż punkt A_1 , to punkt B_2 musi leżeć dalej od O , niż A_2 , tak że, gdy B_1 leży między A_1 i A_2 , to B_2 musi leżeć nazewnątrz odcinka $A_1 A_2$ [Rys. 295]. Gdy zatem pewien



Rys. 295.

punkt M_1 porusza się w jedną stronę prostej β_{12} to sprzężony z nim punkt M_2 porusza się w tę samą

stronę.

Przypuśćmy wreszcie, że iloczyn odległości każdego dwóch punktów sprzężonych od środka inwolucji równy jest zeru. Ponieważ iloczyn dwóch liczb tylko wtedy jest zerem, gdy jedna z tych liczb jest zerem, więc wszystkie punkty prostej β_{12} + sprzężone ze środkiem

inwolucji O . Punkt ten jest więc także sprzężony sam ze sobą i może uchodzić za punkt podwójny tej inwolucji zresztą jedyny.

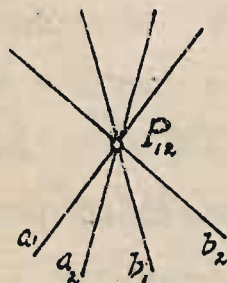
Jeżeli punkt podwójny inwolucji $A, A_2 \cdot B, B_2$ oznaczmy literą F'_{12} , to dla jego wyznaczenia mamy równanie:

$$OF'_{12}, OF'_{12} = OF'_{12}{}^2 = \text{stałej};$$

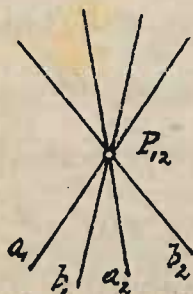
Równanie to będzie miało dwa pierwiastki rzeczywiste i odrębne tylko wtedy, gdy ta stała będzie liczbą dodatnią $+k^2$; $OF'_{12} = \pm k$. Jeżeli stała jest liczbą ujemną, to punkty podwójne nie istnieją; gdy stała jest zerem punkt podwójny jest jeden tylko, mianowicie środek inwolucji. A zatem

Inwolucja punktów jest hyperboliczną, gdy którekolwiek dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, eliptyczną zaś, gdy te pary się przegradzają.

Inwolucja prostych jest hyperboliczną, paraboliczną lub eliptyczną, zależnie od tego, czy inwolucja punktów, wyznaczona przez nią na dowolnej prostej jest hyperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna. Stąd wynika, że w inwolucji hyperbolicznej prostych pary prostych sprzężonych się nie przegradzają /Rys. 295/ w inwolucji eliptycznej te pary się przegradzają /Rys. 297/ w inwolucji parabolicznej wszystkie proste są sprzężone-



Rys. 296

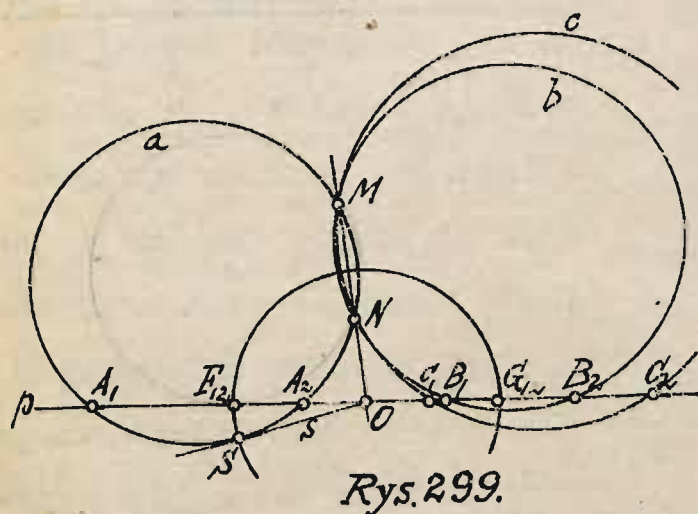
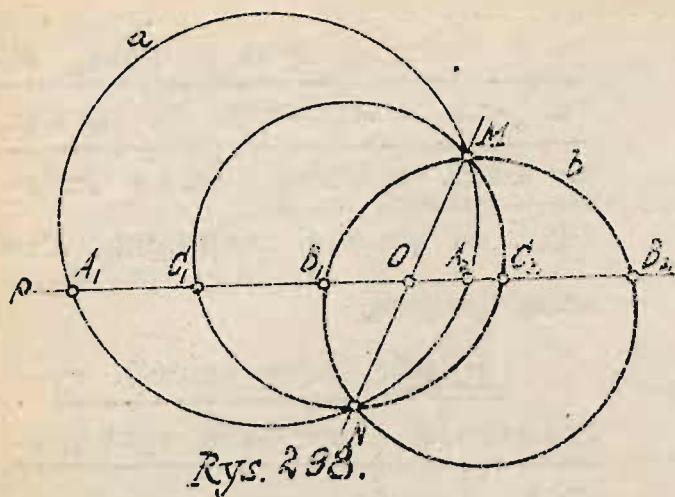


Rys. 297.

ne z jedną jedyną prostą, która jest zatem również sprzężona sama ze sobą i może uchodzić za prostą podwójną, resztą jedyną.

§ 154. Inny sposób wyznaczenia elementów sprzężonych i podwójnych inwolucji.
Na tej własności każdej inwolucji punktów, że iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest stały, można oprzeć wykreślenie par punktów sprzężonych i podwójnych. Niech będą na prostej p dane dwie pary punktów A , i A_2 , B , i B_2

przeznaczających się /Rys.298/ lub nie /Rys.299 i 300/ Poprowadźmy dwa przecinające się wzajemnie koła a i b dowolnego promienia, jedno przez punkty A , i A_2 , drugie przez B , i B_2 . Połączmy punkty M i N przecięcia się tych kół; powiadam, że prosta MN wyznacza na prostej p ów środek inwolucji O . W samej

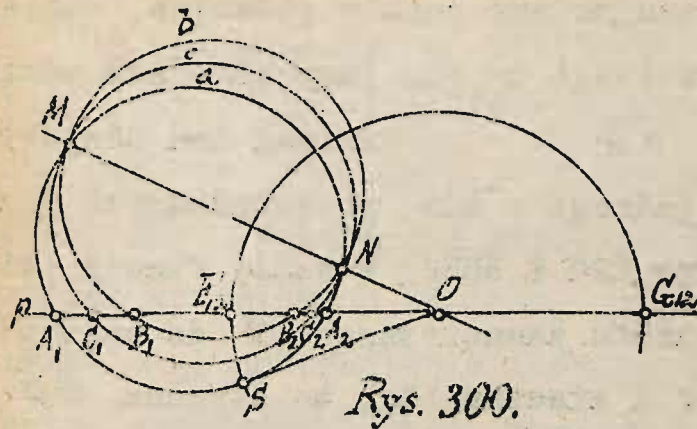


rzeczy, z punktu O do każdego z tych kół wychodzą dwie sieczne p i MN ; iloczyn odległości punktu O od punktów przecięcia każdej siecznej z kołem ma być stały, przytem dodatni, gdy punkt O leży zewnątrz koła, ujemny, gdy O leży wewnątrz niego. Mamy zatem w każdym przypadku:

$$OA_1 \cdot OA_2 = OM \cdot ON = OB_1 \cdot OB_2;$$

co możliwe tylko wówczas, gdy punkt O jest środkiem inwolucji. Chcąc otrzymać na prostej p parę punktów sprzężonych, prowadzimy przez punkty M i N jakiekolwiek koło c ; punkty C_1 i C_2 , w których ono przecina prostą p są sprzężone. W samej rzeczy:

$$OC_1 \cdot OC_2 = OM \cdot ON = \text{stałej}.$$



Rys. 300.

Z wykreślenia powyższego wynika, że punkt zetknięcia prostej ℓ z kołem przechodzącem przez punkty M i N i stycznym do ℓ jest punktem podwójnym inwolucji.

Jeżeli pominiemy przypadek paraboliczny, jako już wyczerpany, to zagadnienie wyznaczenia punktów podwójnych inwolucji albo ma dwa rozwiązania, albo nie ma żadnego. Jeżeli mianowicie punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej ℓ , to mamy dwa rozwiązania, jeżeli zaś leżą one po przeciwnych stronach prostej ℓ , to nie istnieje żadne. Ale punkty M i N leżą wtedy i tylko wtedy po jednej stronie ℓ , gdy pary A_1 i A_2 , B_1 i B_2 się nie przegradzają, po przeciwnych zaś tylko wtedy, gdy te pary się przegradzają.

Jeżeli inwolucja na prostej ℓ jest hyperboliczna, t.j. jeżeli każde dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, a iloczyn odległości punktów każdej takiej pary od środka inwolucji jest liczbą

dodatnią $\pm k^2$, to znajdziemy punkty podwójne, odmierając od środka involucji po obu jego stronach odcinek $OF'_{12} = OQ'_{12} = \pm k$. Odcinek ten znajdziemy jako styczną do jednego z kół, przechodzących przez punkty M i N /Rys. 299 i 300/. W samej rzeczy, wiadomo, że jeżeli z punktu zewnętrznego O do koła poprowadzić styczną s i sieczną p , to styczna OS jest średnią proporcjonalną między całą sieczną OA , i jej odcinkiem zewnętrznym OA_2 , czyli:

$OS^2 = OA \cdot OA_2 = \pm k^2$; $OS = |k|$. Odmierzając tedy styczną OS na prostej p po obu stronach punktu O otrzymamy dwa punkty podwójne F'_{12} i Q'_{12} . Będą to oczywiście punkty zetknięcia kół, przechodzących przez punkty M i N i stycznych do prostej p . Punkty te, jak już wiemy, przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych A , i A_2 , B , i B_2 , C , i C_2

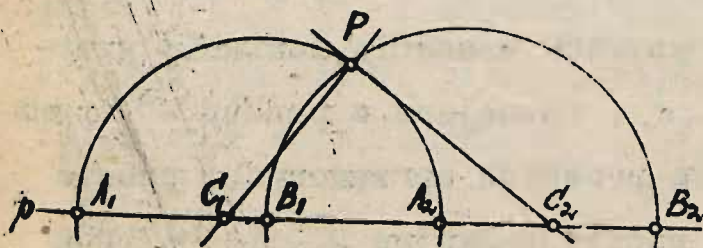
Szczególnie łatwym jest wykreślanie par punktów sprzężonych w inwolucji symetrycznej t.j. takiej involucji hyberbolicznej, której jeden punkt poiwójny jest niewłaściwy. Punkty sprzężone A , i A_2 są symetryczne względem drugiego punktu podwójnego, który wraz z pierwszym t.j. z punktem niewłaściwym, przegradza harmonicznie. Są to więc dwa szeregi równe na wspólnej pol-

stawie i o zwrotach przeciwnych.

Dla wyznaczenia par prostych sprzężonych inwolucji dokoła punktu P oraz dla wyznaczenia prostych podwójnych, gdy one istnieją t.j. w przypadku inwolucji hyperbolicznej zaleca się przecięcie dwóch danych par prostych sprzężonych a_1 i a_2 , b_1 i b_2 prostą jakąkolwiek p i sprowadzenie zadania do wyznaczenia par punktów sprzężonych, wzg. punktów podwójnych, inwolucji na prostej p , wyznaczonej przez pary punktów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , w których prosta p przecina proste a_1 i a_2 , b_1 i b_2 . Jeżeli w dodatku sieczna p będzie równoległa do jednej z czterech danych prostych np. do b_2 , to prosta b_1 z nią sprzężona wyznaczy na siecznej p odrazu środek inwolucji O , przez co znalezienie nowych par punktów znacznie zostanie przyspieszone. Proste c_1 i c_2 , rzucające z punktu P punkty C_1 i C_2 , będą parą prostych sprzężonych; proste $f_{1,2}$ i $g_{1,2}$, rzucające punkty podwójne $F_{1,2}$ i $G_{1,2}$ będą prostami podwójnymi. Proste te przegradzają harmonicznie każdą parę a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 prostych sprzężonych.

Istnieje wszakże jeden przypadek inwolucji eliptycznej dokoła punktu, w którym nietylko pary prostych sprzężonych mogą być bezpośrednio łatwo wyznaczone,

ale który nawet nadaje się do tego, aby wykreślanie par punktów sprzężonych każdej inwolucji eliptycznej na prostej było do niego sprowadzane. Mam na myśli inwolucję prostokątną, w której proste sprzężone są do siebie prostopadłe /§152, Rys. 292/. Jeżeli na prostej p /Rys. 301/ dane są dwie pary przegradzających się punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , to łatwo znaleźć jeden z dwóch punktów P lub Q , z których odcinek A_1A_2 oraz B_1B_2 widać pod kątem prostym. W tym celu na A_1A_2 oraz na B_1B_2 zakreślamy koła jak na średnicach i niech P będzie jednym z dwóch punktów przecięcia się tych kół. Proste PA_1 i PA_2 oraz PB_1 i PB_2 są prostopadłe, wyznaczone przez



Rys. 301.

te dwie pary prostopadłych prostych inwolucja nie może zatem różnić się od inwolucji prostokątnej perspektywicznej z daną in-

wolucją punktów. Jeżeli chcemy znaleźć punkt C_2 sprzężonym z dowolnym danym punktem C_1 , łączymy P z C_1 i w punkcie P wystawiamy do PC_1 prostopadłą, która przecina prostą p w szukanym punkcie C_2 . Łatwo spo-

strzegamy, że wykreślenie to nie różni się zasadniczo od wykreślenia, podanego na Rys. 298.

§ 155. Punkty i proste urojone. W przypadku inwolucji eliptycznej równanie dla wyznaczenia odległości punktów podwójnych od środka inwolucji.

$$OF_{1,2}^2 = -k^2;$$

ma dwa pierwiastki urojone $OF_{1,2} = \pm ki$; możemy wtedy powiedzieć, że same te punkty podwójne są urojone.

W przypadku hyperbolicznym, t.j. gdy pary punktów sprzężonych, wyznaczają inwolucję, się nie przegradzają, te dwie pary, jak to widzieliśmy, pozwalają istotnie wyznaczyć punkty podwójne, które nawzajem wyznaczają inwolucję. W wielu zadaniach można by zatem niewątpliwie zastąpić te dwa punkty przez dwie pary punktów sprzężonych inwolucji hyperbolicznej, przez owe punkty podwójne wyznaczonej. Naturalnie, takie zastępstwo nie miałoby żadnego praktycznego znaczenia, gdyż nie upraszczałoby, a raczej utrudniałoby każde zadanie. Atoli inaczej rzeczy się mają w przypadku inwolucji eliptycznej; tutaj punkty podwójne są urojone, t.j. jako punkty w dotychczasowym rozumieniu nie istnieją. To, co byłoby dziwactwem w przypadku hyperbolicznym, stać się może, jak zobaczymy, pożytecznem uogólnieniem

w przypadku eliptycznym. Zastępując bowiem termin: "inwolucja eliptyczna na prostej" przez termin "punkty urojone" osiągnąć możemy, dzięki daleko idącej analogji między punktami rzeczywistymi i urojonymi, pożądaną jednolitość i prostotę w brzmieniu wielu twierdzeń i nieocenione wskazówki przy rozwiązywaniu licznych zadań. Jeżeli zatem na prostej p dana jest involucja eliptyczna np. przez dwie pary przegradzających się punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , to powiemy, że dane są na tej prostej dwa punkty urojone, mianowicie punkty podwójne tej involucji. Napotykamy jednak odrazu na poważną trudność w rozstrzygnięciu pytania: jak odróżnić od siebie te dwa punkty urojone, t. j. jak określić geometrycznie każdy z tych punktów z osobna?

Idąc śladem Standta nazywamy punktem urojonym involucję eliptyczną na danej prostej wraz z określonym zwrotem tej prostej. Przypuśćmy, że punkty A_1 , B_1 , A_2 i B_2 następują po sobie kolejno na prostej p ; wtedy grupa tych czterech punktów, wziętych w kolei sąsiedztwa z określonym zwrotem, np. A_1, B_1, A_2, B_2 określa punkt urojony, jeżeli punkty A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 są parami punktów involucyjnie sprzężonych. Dwa punkty urojone, różniące się tylko zwrotem, nazy-

wamy punktami urojonymi sprzężonymi; takimi będą np. punkty urojone $\bar{p}(A, B, A_2, B_2)$ i $\bar{p}(B_2, A_2, B, A)$. Z określenia punktu urojonego wynika oczywiście, że grupy A, B, A_2, B_2 i M, N, M_2, N_2 oznaczają ten sam punkt urojony, jeżeli pary M, M_2 i N, N_2 są sprzężone w inwolucji wyznaczonej przez pary A, A_2 i B, B_2 i jeżeli zwrot M, N, M_2, N_2 jest ten sam, co zwrot A, B, A_2, B_2 . Punkt urojony $\bar{p}(A, B, A_2, B_2)$ jest zatem identyczny z punktem urojonym $\bar{p}(A_2, B_2, A, B)$ gdyż wyznaczone są przez tę samą inwolucję i te same zwroty; słusznie zatem uważamy punkt urojony $\bar{p}(A, B, A_2, B_2)$ za punkt podwójny inwolucji wyznaczonej przez pary punktów A, A_2 i B, B_2 , albowiem jest on identyczny z punktem urojonym $\bar{p}(A_2, B_2, A, B)$ który mu w tej inwolucji odpowiada.

Prostą urojoną nazywamy inwolucję eliptyczną dokoła danego punktu wraz z określonym dokoła niego zwrotem. Przypuśćmy, że proste a_1, b_1, a_2, b_2 następują po sobie kolejno dokoła punktu P , wtedy grupa tych czterech prostych wziętych w kolei sąsiedztwa z określonym zwrotem np. a_1, b_1, a_2, b_2 określa prostą urojoną, jeżeli proste a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 są parami prostych sprzężonych inwolucji. Dwie proste urojone, różniące się tylko zwrotem, nazywamy prostymi urojonymi sprzężonymi.

żonemi; takimi będą np. proste urojone $P(a, b, a_2, b_2)$ i $P(b_2, a_2, b, a,)$. Z określenia prostej urojonej wynika oczywiście, że grupy a, b, a_2, b_2 i m, n, m_2, n_2 oznaczają tę samą prostą urojoną, jeżeli pary m, m_2 i

n, n_2 są sprzężone w inwolucji, wyznaczonej przez pary a, a_2 i b, b_2 i jeżeli zwrot m, n, m_2, n_2 jest ten sam, co zwrot a, b, a_2, b_2 . Prosta urojona $P(a, b, a_2, b_2)$ jest zatem identyczna z prostą urojoną $P(a_2, b_2, a, b,)$ gdyż wyznaczone są one przez tę samą inwolucję i te same zwroty; słusznie zatem uważamy prostą urojoną

$P(a, b, a_2, b_2)$ za prostą podwójną inwolucji

$P(a, a_2, b, b_2)$ albowiem jest ona identyczną z prostą urojoną $P(a_2, b_2, a, b,)$ która jej w tej inwolucji odpowiada.

Jeżeli inwolucja dokoła punktu P jest w perspektywie z inwolucją na prostej p , to mówimy, że prosta urojona, określona przez inwolucję i zwrot dokoła punktu P , oraz punkt urojony, określony przez inwolucję i zwrot na prostej p , naletą do siebie

/albo: prosta urojona "przechodzi" przez punkt urojony albo: punkt urojony "leży" na prostej urojonej/. Innymi słowy: prosta $P[m, n, m_2, n_2]$ "przechodzi" przez punkt $p(A, B, A_2, B_2)$ jeżeli proste m, n, m_2 i n_2 przechodzą odpowiednio przez takie punkty M, N .

M_1 i N_1 prostej b , że pary M, M_1 i N, N_1 są sprzężone w inwolucji $A, A_1 \cdot B, B_1$ i zwrot M, N, M_1, N_1 jest ten sam, co zwrot A, B, A_1, B_1 . W ten sposób,

przez każdy punkt urojony przechodzi jedna prosta rzeczywista /mianowicie podstawa inwolucji, która go określa/ i nieskończenie wiele prostych urojonych; nawzajem, na każdej prostej urojonej leży jeden punkt rzeczywisty /mianowicie wierzchołek inwolucji, który ją określa/ i nieskończenie wiele punktów urojonych. Każdy punkt rzeczywisty można "połączyć" z każdym punktem urojonym, rzucając z pierwszego inwolucję określającą drugi; prosta, łącząca te dwa punkty będzie rzeczywistą tylko wtedy, gdy punkt rzeczywisty leży na podstawie inwolucji, określającej punkt urojony.

Nawzajem każda prosta rzeczywista "przecina" każdą prostą urojoną w punkcie, który będzie rzeczywistym tylko wtedy, gdy prosta rzeczywista przechodzi przez wierzchołek inwolucji, określającej prostą urojoną.

Można dowieść, że każde dwa punkty urojone wyznaczają prostą, która wogóle będzie urojoną i rzeczywistą zaś tylko wtedy, gdy inwolucje, określające dane punkty urojone mają wspólną podstawę; w szczególności, punkty urojone sprzężone wyznaczają prostą rzeczywistą. Można dowieść, że każde dwie proste urojone wyznaczają

punkt, który wogóle będzie urojonym; rzeczywistym zaś tylko wtedy, gdy inwolucje określające dane proste urojone, mają wspólny wierzchołek; w szczególności proste urojone sprzężone wyznaczają punkt rzeczywisty.

Na zasadzie przytoczonych wyżej własności mogłoby się zdawać, że punkty i proste urojone mają wogóle wszystkie te same własności co punkty i proste rzeczywiste. Przed tak daleko posuniętą identyfikacją należy jednak przestrzedz: analogja między utworami rzeczywistymi, a urojonemi nie dotyczy wszystkich tych własności, które zależą od uporządkowania elementów; dzięki temu np. pojęcie odcinka i kąta urojonego nie może być geometrycznie określone. Wiele natomiast własności punktów i prostych rzeczywistych, a mianowicie te, które dotyczą wzajemnego należenia punktów i prostych zachodzą również dla punktów i prostych urojonych, dzięki czemu wyniki, dotyczące elementów rzeczywistych dadzą się nieraz uogólnić dla elementów urojonych.

§ 156. Proste jednorodne i punkty kołowe. Na szczególną uwagę zasługują proste urojone sprzężone, określone przez inwolucję prostokątną dokoła jakiegokolwiek punktu właściwego. Są to tak zwane proste jednorodne. Wszystkie one przechodzą przez dwa urojone sprzężone punkty niewłaściwe, które nazywamy punkta-

mi kołowemi, iktóre są określone przez t.zw. inwolucję absolutną na prostej niewłaściwej, t.j. przez inwolucję w kierunkówwzajemnie prostopadłych. Jak zobaczymy później, przez te punkty urojone przechodzą również wszystkie koła leżące w płaszczyźnie uważanej, zarówno rzeczywiste, jak urojone.

ROZDZIAŁ XIII.

Kolineacja i biegunowość.

§ 157. Perspektywiczność dwóch układów płaskich.

Rzucając figurę F' , leżącą w płaszczyźnie S na płaszczyznę P z punktu O , nieleżącego na żadnej z tych płaszczyzn, otrzymujemy figurę F , która z figurą F' znajduje się w pewnym związku geometrycznym, polegającym na tem, że

1/ Każdemu punktowi figury F' odpowiada jeden jedyny punkt figury F , i nawzajem, każdemu punktowi figury F , odpowiada jeden jedyny punkt figury F' .

2/ Każdej prostej figury F' odpowiada jedna jedyna prosta figury F , i nawzajem, każdej prostej figury

F' odpowiada jedna jedyna prosta figury F .

3/ Punktowni i prostej należącym do siebie w jednej z tych figur odpowiadają punkt i prosta drugiej figury, które również do siebie należą.

4/ Punkty odpowiednie leżą parami na prostych, przechodzących przez jeden punkt /mianowicie przez punkt

O / i

5/ Proste odpowiednie przecinają się w punktach leżących na jednej prostej /mianowicie na prostej przecięcia S płaszczyzny S i P .

Oczywista, że każdy punkt i każda prosta płaszczyzny S mają być zaliczone do figury F' , a każdy punkt i każda prosta płaszczyzny P mogą być zaliczone do figury F . Tak rozszerzone pojęcia figur płaskich nazywają się układami płaskimi F' i F .

Związek geometryczny dwóch układów płaskich, leżących w różnych płaszczyznach, polegający na powyższych 5-ciu własnościach, nazywa się ich perspektywicznością; o układach F' i F , mówimy, że są w perspektywie. Z rozważań rozdziału poprzedniego wynika, że każdemu szeregowi lub pękowi jednego układu odpowiada perspektywiczny, a więc i rzutowy z nim szereg, lub pęk drugiego układu. Prostej nieoskoścowej q^∞ układu F' odpowiada w układzie F prosta q , która wogóle jest

właściwa; jest to ślad na płaszczyźnie P płaszczyzny prowadzonej przez punkt O równolegle do płaszczyzny S ; prostej niewłaściwej r_∞ układu F odpowiada w układzie F' prosta r , która jest śladem na płaszczyźnie P płaszczyzny poprowadzonej przez punkt O równolegle do płaszczyzny P .

§ 158. Kolineacja środkowa dwóch układów płaskich
Jeżeli układ płaski F' rzucimy z dwóch różnych punktów O_1 i O_2 na tę samą płaszczyznę P to otrzymamy w tej płaszczyźnie dwa układy płaskie F_1 i F_2 które są w związku scharakteryzowanym przez te same 5 własności wymienionych w artykule poprzednim. Związek ten nazywamy kolineacją środkową układów F_1 i F_2 /§§94 - 98/. Środkiem tej kolineacji jest punkt O w którym prosta $O_1 O_2$ przebija płaszczyznę P ; przez ten punkt przechodzą wszystkie proste łączące wszystkie punkty odpowiednie dwóch układów A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ,; osią tej kolineacji jest ślad s płaszczyzny S układu F' na płaszczyźnie P ; na prostej s leżą wszystkie punkty przecięcia prostych, odpowiednich dwóch układów: a_1 i a_2 , b_1 i b_2 .. Każde dwa szeregi odpowiednie, których podstawy nie przechodzą przez środek kolineacji O są perspektywiczne, a więc i rzutowe; środkiem ich perspektywy jest

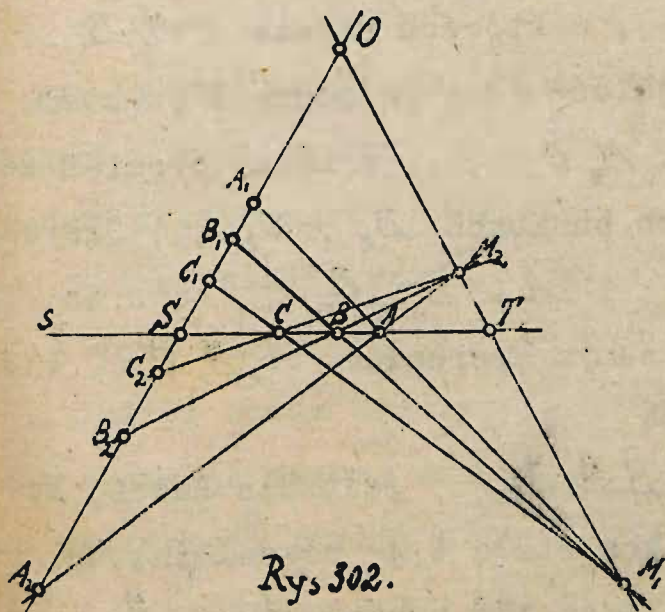
punkt O ; - każde dwa paki odpowiednie, których wierzchołki nie leżą na osi kolineacji S , są perspektywiczne, a więc i rzutowe, - osią ich perspektywy jest prosta S . Środek kolineacji O oraz wszystkie punkty osi kolineacji S odpowiadają same sobie osi kolineacji oraz wszystkie proste, przechodzące przez środek kolineacji O /promienie kolineacji/ odpowiadają same sobie. Prostej niewłaściwej q_1^∞ układu F_1' odpowiada prosta q_2 ; prostej niewłaściwej q_2^∞ układu F_2' odpowiada prosta q_1 ; proste q_2 i q_1 , nazywają się osiami wzajemnymi; są one równoległe do osi kolineacji S i mają tę własność, że odległość jednej z nich od środka kolineacji i odległość drugiej od osi kolineacji są odcinkami równoległości i przeciwnego zwrotu /§97/.

Jeżeli jeden z dwóch punktów O_1 i O_2 , z których rzucamy układ F , np. punkt O_2 jest kierunkiem do płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego między płaszczyznami P i S , to rzut F_2' układu F z tego punktu jest kładem układu F , na płaszczyznę P dookoła śladu S . Z dwóch układów leżących w kolineacji środkowej można zawsze jeden którykolwiek z nich uważać za kład układu, którego rzutem jest drugi.

Kolineacja środkowa jest wyznaczona przez swój

środek O , swoją oś s i jedną parę punktów odpowiednich A_1 i A_2 , leżących na prostej przechodzącej przez środek O , albo przez jedną parę prostych odpowiednich a_1 i a_2 przecinających się w punkcie, leżącym na osi s . W szczególności kolineacja środkowa będzie wyznaczona przez środek O , oś s i jedną z osi wzajemnych q_1 lub q_2 / § 97/.

Pary punktów odpowiednich A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 , leżących na tym samym promieniu kolineacji p / Rys. 302/ tworzą dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p :



$p(A_1, B_1, C_1, \dots)$

$\pi p(A_2, B_2, C_2, \dots)$

Środek kolineacji O i punkt S , w którym promień kolineacji p przecina oś kolineacji, są punktami podwójnymi tych szeregów. - W samej rzeczy, niechaj ko-

lineacja środkowa będzie dana przez swój środek O , oś s i dwa punkty odpowiednie A_1 i A_2 , leżące na prostej p , przechodzącej przez punkt O . Aby wyz-

naczyć punkty B_2, C_2, \dots , odpowiadające w tej kolineacji punktom B, C, \dots prostej p , obierzmy najpierw punkt jakikolwiek M , nie leżący ani na osi s , ani na prostej p i wyznaczmy punkt odpowiedni M_2 . W tym celu połączmy punkty A i M , i punkt A_2 , w którym prosta AM przecina oś s , połączmy z punktem A_2 ; prosta AA_2 przetnie promień kolineacji OM , w szukanym punkcie M_2 . Aby znaleźć punkty B_2, C_2, \dots , odpowiadające punktom B, C, \dots , połączmy te ostatnie punkty z punktem M , i punkty B, C, \dots , w których proste MB, MC, \dots przecinają oś s , połączmy z punktem M_2 ; proste M_2B, M_2C, \dots przetną promień kolineacji p w szukanых punktach B_2, C_2, \dots . Szeregi A, B, C, \dots i A_2, B_2, C_2, \dots są więc perspektywiczne z tym samym szeregiem A, B, C, \dots , a więc są rzutowe ze sobą.

Dwustosunek (OSA, A_2) jest dla każdej kolineacji środkowej liczbą stałą t.j. niezależną ani od prostej p , na której leżą oba punkty A, A_2 ; ani od położenia samych tych punktów na prostej p . W samej rzeczy, oznaczwszy literą T punkt, w którym prosta OM, M_2 przecina oś kolineacji i zważywszy, że dla każdych dwóch punktów odpowiednich A i A_2 .

B_1 i B_2 istnieje punkt osi A, B, \dots , który jest środkiem perspektywy czwórek OSA, A_2 i OTM, M_2 , OSB, B_2 i OTM, M_2

mamy $(OSA, A_2) = (OSB, B_2) = (OTM, M_2)$

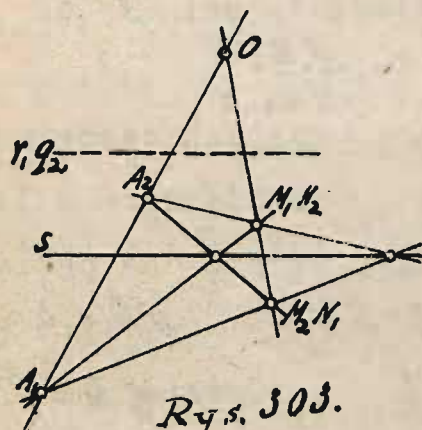
Wartość λ tego dwustosunku nazywa się cechą kolineacji środkowej, - jest to wartość stosunku, w którym oś wzajemna r dzieli odległość środka O od osi s / gdyż $(OSR, R_2^\infty) = \frac{OR}{sR}$ /, albo w którym oś wzajemna q_2 dzieli odległość osi s od środka O / gdyż $(OSQ, Q_2^\infty) = \frac{sQ}{OQ}$ /.

Tak samo dowiedlibyśmy że pary prostych odpowiednich $a, i a_2, b, i b_2, c, i c_2$, wychodzących z tego samego punktu S osi kolineacji tworzą dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku S : $S(a, b, c, \dots)$ i $S(a_2, b_2, c_2, \dots)$ przytem dwustosunek $(k s a, a_2)$, gdzie $k \equiv OS$ jest liczbą stałą, równą zresztą tej samej liczbie λ która jest wartością dwustosunku (OSA, A_2) .

Jeżeli cecha kolineacji środkowej $\lambda = -1$, to ta kolineacja nazywa się inwolucyjną. Na każdym promieniu kolineacji punkty odpowiednio $A, i A_2, B, i$

B_2, \dots są wówczas sprzężone involucyjnie, tak że każdemu punktowi P odpowiada jeden jedyny punkt, niezależny od tego, czy punkt P zaliczymy do układu F_1 , czy do układu F_2 . - Podobnież pary prostych odpowiednich $a, i a_2, b, i b_2, \dots$, wychodzących z tego

samego punktu S' osi, są w inwolucji, tak że każdej prostej p odpowiada jedna jedyna prosta, niezależna od tego, do którego układu tą samą prostą zaliczymy. W szczególności prostej niewłaściwej odpowiada jedna jedyna oś wzajemna $q_2 \equiv r_1$, która leży pośrodku między środkiem a osią kolineacji. - Każde dwie pary punktów odpowiednich tworzą czworokąt zupełny /Rys. 303/



którego jeden punkt przekątny jest środkiem, a drugi leży na osi kolineacji; każde dwie pary prostych odpowiednich tworzą czworobok zupełny, którego jedna przekątna jest osią, a druga przechodzi przez środek kolineacji. - Dwa układy płaskie w kolineacji inwolucyjnej stanowią właści-

wie jeden jedyny układ płaski, którego zarówno punkty, jak proste są parami sprzężone.

§ 159. Kolineacja ogólna dwóch układów płaskich.

Niech będą dwa układy płaskie F_1 i F_2 , spełniające wszystkie 5 warunków § 157, a więc perspektywiczne, jeżeli nie leżą w jednej płaszczyźnie, lub w kolineacji środkowej, jeżeli leżą w jednej płaszczyźnie. Nie

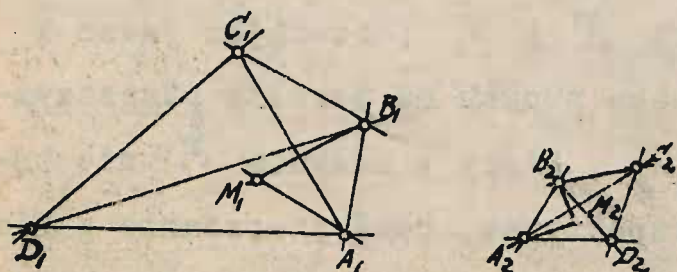
tykając jednego z tych układów, przeniesmy drugi w dowolny sposób; z 5 warunków, którym te układy czyniły zadość, ostatnie dwa nie będą wogóle w nowym położeniu tych układów spełnione, podczas gdy pierwsze trzy pozostaną w swej mocy, nie ustanie również rzutowość odpowiednich czwórek, szergów i pęków. O układach takich mówimy wciąż jeszcze, że są w kolineacji, która jednak nie będzie już wogóle środkową; ta ostatnia jest przypadkiem szczególnym owej kolineacji ogólnej.

Do kolineacji ogólnej dwóch układów płaskich możemy dojść na innej jeszcze drodze. Niech będą dwa układy perspektywiczne F_1 i F_2 ; rzucając jeden z nich np. F_2 z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę, otrzymamy układ F_3 , który z układem F_1 nie będzie już wogóle w perspektywie, choć pozostanie z nim w kolineacji ogólnej. Kolineacja ta zostanie zresztą zachowaną po dowolnej ilości kolejnych rzutów każdego z układów F_1 i F_2 . - Podobnie, wychodząc z dwóch układów F_1 i F_2 , znajdujących się w kolineacji środkowej i przekształcając środkowo - koalicyjnie w dowolny sposób jeden lub oba układy F_1 i F_2 , otrzymamy nowe układy, które będą ze sobą w kolineacji ogólnej.

Kolineacja ogólna jest wyznaczona przez 4 pary

punktów albo 4 pary prostych odpowiednich z tem zastrzeżeniem, żeby żadne 3 z tych punktów żadnym układzie nie leżały na jednej prostej, względnie aby żadne 3 z tych prostych w żadnym układzie nie przechodziły przez jeden punkt,

Innemi słowy, kolineacja ogólna jest wyznaczona przez odpowiedniość dwóch czworokątów lub dwóch czworoboków zupełnych. W samej rzeczy, niech będą np. dwa czworokąty zupełne A, B, C, D i A_2, B_2, C_2, D_2 leżące w jednej lub w różnych płaszczyznach /Rys. 304/; jeżeli



Rys. 304.

założymy, że
punktom A_1 ,
 B_1 , C_1 i
 D_1 , I układu
odpowiadają
punkty A_2 , B_2 ,
 C_2 i D_2 II
układu, to każ-

demu punktowi M_1 leżącemu w płaszczyźnie czworokąta A_1, B_1, C_1, D_1 i zaliczonemu do I układu odpowiada jeden jedyny punkt M_2 , leżący w płaszczyźnie czworokąta A_2, B_2, C_2, D_2 i należący do układu II. Połączmy punkt M_1 z dwoma któremikolwiek wierzchołkami czworokąta A_1, B_1, C_1, D_1 , np. z A_1 i B_1 . Punkty te będą wierzchoł-

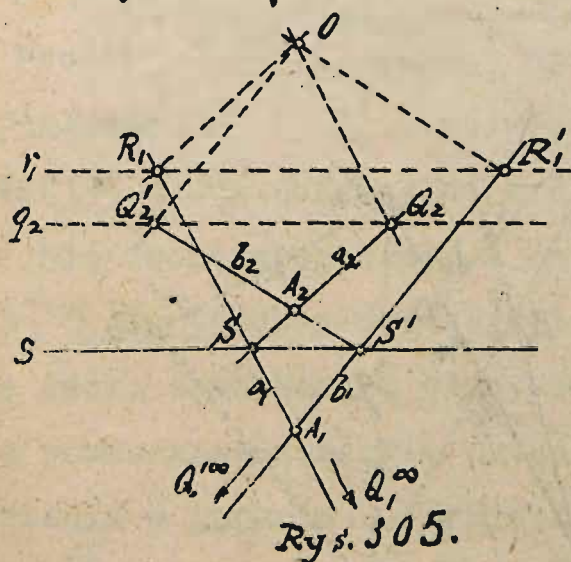
kami dwóch czwórek $A, (B, C, D, M_1)$ i $B, (A, C, D, M_1)$
 Wyznaczymy w układzie II proste A_2M_2 i B_2M_2 odpowiadające prostym A, M_1 i B, M_1 w czwórkach rzutowych
 $A, (B, C, D, M_1) \propto A_2, (B_2, C_2, D_2, M_2)$ i

$$B, (A, C, D, M_1) \propto B_2, (A_2, C_2, D_2, M_2) ;$$

punkt przecięcia M_2 prostych A_2M_2 i B_2M_2 będzie odpowiadał punktowi M_1 , który jest przecięciem prostych odpowiednich A, M_1 i B, M_1 .

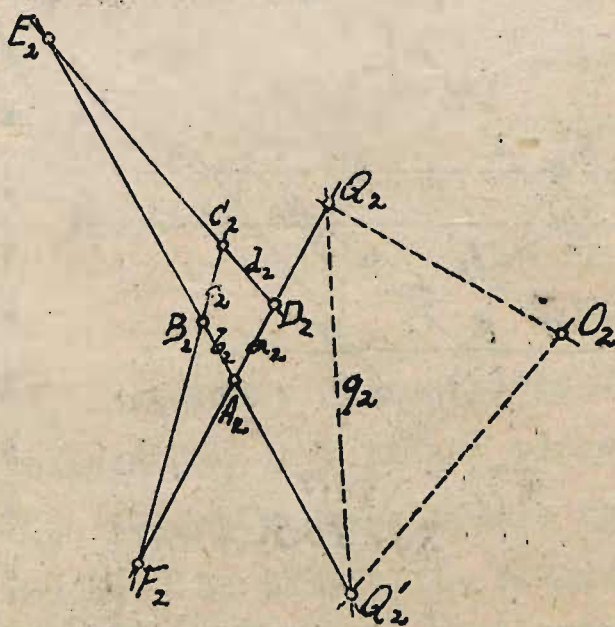
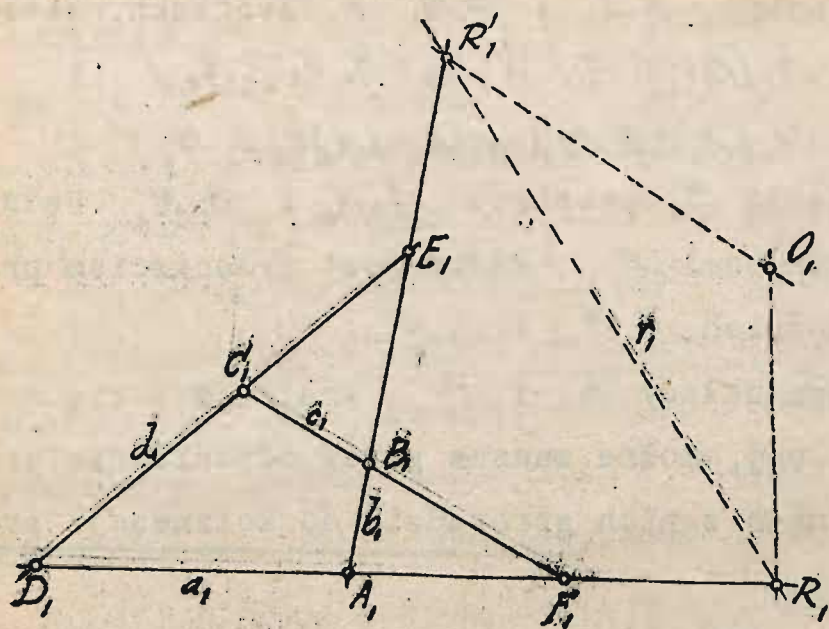
Każde dwa układy F i F_2 , znajdujące się w kolineacji ogólnej, można zawsze przez odpowiednie przesunięcie jednego z nich sprowadzić do kolineacji środkowej.

Zanim rozwiążemy to zagadnienie, zauważmy że gdy dwa układy F i F_2 są w kolineacji środkowej /Rys. 305/



Rys. 305.

to trójkąt A, R, R' , który tworzą dwie jakiekolwiek proste a , i b , i układu z osią wzajemną l , jest podobny do trójkąta OQ_2Q_2' , który tworzy środek kolineacji O z punktami wzajemnymi Q_2 i Q_2' .



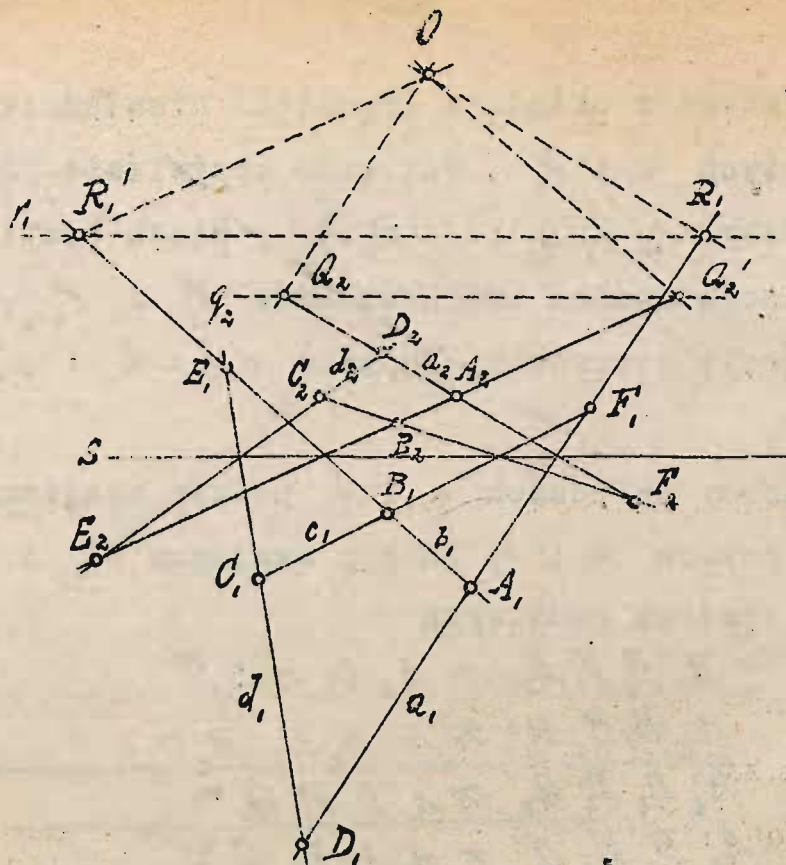
Rys. 306.2

odpowiadającymi w układzie II punktem niewłaściwym Q_1^∞ i Q_2^∞ prostych a_1 i b_1 . Tak samo oczywiście podobne będą trójkąty $A_2 Q_2 Q_2'$ i $O R, R'$. Niech będzie teraz kolineacja ogólna dwóch układów F_1 i F_2 , wyznaczona np. przez czworoboki zupełne a, b, c, d_1 i a_2, b_2, c_2, d_2
 /Rys. 306a/.

Wyznamy na bokach a_1 i b_1 punkty wzajemne R_1 i R_1' i na bokach a_2 i b_2 punkty wzajemne Q_2 i Q_2' za pomocą czwórek rzutowych

$$\begin{aligned} A, D, F, R_1 &\pi A, D, F, R_2^\infty \\ A, B, E, R_1' &\pi A, B, E, R_2'^\infty \\ A_2, D_2, F_2, Q_2 &\pi A, D, F, Q_1^\infty \\ A_2, B_2, E_2, Q_2' &\pi A, B, E, Q_1'^\infty \end{aligned}$$

Proste R, R' i $Q_2 Q_2'$ będą osiami wzajemnymi π_1 i π_2 układów F_1 i F_2 ; budując na odcinku R, R' trójkąt O, R, R' podobny do trójkąta $A_2 Q_2 Q_2'$ /co można zrobić dwoma sposobami/ a na odcinku $Q_2 Q_2'$ trójkąt $O_2 Q_2 Q_2'$ podobny do trójkąta A, R, R' /co możliwe także dwoma sposobami/, otrzymamy punkty O_1 i O_2 , które przez przeniesienie układu F_2 doprowadzamy do przystania w punkcie O /Rys. 306b/. Obracamy teraz układ F_2 dookoła punktu O dopóty dopóki prosta $\pi_2 \equiv Q_2 Q_2'$ nie stanie się równoległą do prostej $\pi_1 \equiv R, R'$; układy będą natenczas w kolineacji środ-



Rys. 306.^b

kowej, której środkiem jest punkt O , a osią prosta S , poprowadzona równolegle do osi wzajemnych q_1 i q_2 tak, aby odległość jej od jednej z tych prostych była odcinkiem równej odległości i przeciwnego zwrotu, niż odległość drugiej od środka O . Ponieważ zarówno punkt O , jak punkt Q_2 może być wyznaczony dwoma sposobami, więc zagadnienie ma 4 rozwiązania.

§ 160. Korelacja dwóch układów płaskich. Kolineacja ogólna dwóch układów płaskich naprowadza nas na

nowy związek geometryczny dwóch układów płaskich zwany korelacją, a polegający na następujących własnościach:

1/. Każdemu punktowi układu \mathcal{K}_1 , odpowiada jedna jedyna prosta układu \mathcal{K}_2 ; każdej prostej układu \mathcal{K}_1 odpowiada jeden jedyny punkt układu \mathcal{K}_2 i nawzajem.

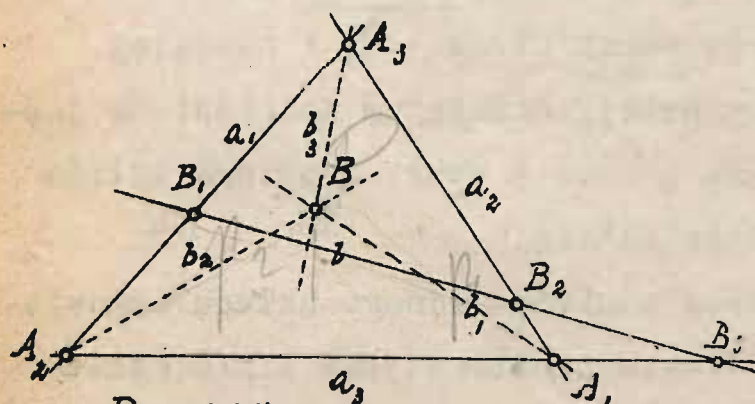
2/. Punktowi i prostej, należącym do siebie w jednym układzie odpowiada prosta i punkt drugiego układu które również do siebie należą;

3/. Każdej czwórce punktów jednego układu odpowiada czwórka prostych drugiego, która jest z nią rzutowa i nawzajem; wogóle każdemu szeregowi punktów jednego układu odpowiada pęk prostych drugiego i nawzajem.

"Korelacja" taka będzie wyznaczona przez założenie odpowiedniości wzajemnej 4 punktów jakichkolwiek I układu A, B, C, D , z 4 prostymi drugiego układu a, b, c, d , z tem jedynem zastrzeżeniem, żeby z tych 4 punktów żadne 3 nie leżały na jednej prostej, ani z tych 4 prostych żadne 3 nie przechodziły przez jeden punkt; innemi słowy przez założenie odpowiedniości czworokąta zupełnego A, B, C, D , z czworobokiem zupełnym a, b, c, d .

§ 161. Układ biegunowy. Niech będzie trójkąt A, A_2, A_3 /którego boki oznaczamy literami:

$a_1 \equiv A_2 A_3$; $a_2 \equiv A_3 A_1$; i $a_3 \equiv A_1 A_2$, punkt jakikolwiek B nie leżący na żadnym z boków i prosta δ nie przechodząca przez żaden z wierzchołków tego trójkąta /Rys. 307/



Rys. 307.

Na mocy poprzedniego artykułu odpowiedniość punktów A_1 , A_2 , A_3 i B i prostych a_1 , a_2 , a_3 i δ wyznacza korelację dwóch układów płaskich leżących

w tej samej płaszczyźnie. Korelacja ta ma tę własność, że każdemu punktowi tej płaszczyzny odpowiada zawsze ta sama prosta, a każdej prostej ten sam punkt, niezależnie od tego, do którego układu tamten punkt albo tamtą prostą zaliczymy.

Przedewszystkiem własność ta dotyczy punktów A_1 , A_2 , A_3 , B i prostych a_1 , a_2 , a_3 , δ . Jeżeli zaliczymy punkty A_1 , A_2 , A_3 i B do I układu, to na mocy założenia odpowiadają im proste a_1 , a_2 , a_3 i δ . Jeżeli te punkty zaliczymy do II układu uważając

je za przecięcia prostych a_1 i a_2 , a_1 i a_3 , a_2 i a_3 ,
 A_1B i A_2B , to odpowiadać tym punktom będą w I
 układzie proste łączące punkty A_1 i A_2 , A_1 i A_3 ,
 A_2 i A_3 , a_1b i a_2b , a więc te same proste
 a_1 , a_2 , a_3 i b .

Stąd wynika, że te samą własność posiadać będą punk-
 ty B_1 , B_2 i B_3 , w których prosta b przecina boki
 a_1 , a_2 i a_3 trójkąta $A_1A_2A_3$, oraz proste b_1 , b_2
 i b_3 , które łączą punkt B z jego wierzchołkami A_1 ,
 A_2 i A_3 . Skoro bowiem punktom A_1 , A_2 , A_3 i B
 odpowiadają w obu układach te same proste a_1 , a_2 , a_3
 i b , to prostym $A_1B \equiv b_1$, $A_2B \equiv b_2$, $A_3B \equiv b_3$
 odpowiadać muszą w obu układach te same punkty $a_1b \equiv B_1$,
 $a_2b \equiv B_2$ i $a_3b \equiv B_3$.

Tę samą własność rozszerzymy teraz na wszystkie
 punkty, leżące na którejkolwiek prostych a_1 , a_2 , a_3
 i b i na wszystkie proste przechodzące przez którykol-
 wiek z punktów A_1 , A_2 , A_3 i B . Ponieważ bowiem
 punktom A_2 , A_3 i B , odpowiadają w obu układach
 te same proste a_2 , a_3 i b , więc każdemu punktowi M ,
 prostej a_1 odpowiadać będzie w obu układach ta sama
 prosta m_1 , przechodząca przez punkt A_1 ten sposób,
 aby

$$a_1 (A_2 A_3 B M_1) \propto A_1 (a_2 a_3 b m_1);$$

Wreszcie tę samą własność posiadać będą wszystkie inne punkty i proste płaszczyzny. Połączmy np. punkt P , nie leżący na żadnej z prostych a_1, a_2, a_3 i b z punktami A_1 i A_2 prostymi β_1 i β_2 ; ponieważ na mocy poprzedniego ustępu, prostym tym w obu układach odpowiadają te same punkty P_1 i P_2 , z których pierwszy leży na prostej a_1 , a drugi na prostej a_2 , więc punktowi P odpowiadać musi w obu układach ta sama prosta $P, P_1 \equiv \beta$.

Te dwa układy korelacyjne można przeto uważać za jeden jedyny układ płaski, w którym zachodzi wzajemne podporządkowanie punktów prostym i prostych punktom. Układ taki nazywamy biegunowym; prosta β podporządkowana punktowi P nazywa się jego biegunową; punkt P podporządkowany prostej β nazywa się jej biegunem.

Ponieważ punktowi i prostej należącym do siebie podporządkowane są prosta i punkt również do siebie należące, więc mamy twierdzenia:

Jeżeli punkt C leży na biegunowej punktu B , to biegunowa punktu C przechodzi przez punkt B .

Jeżeli prosta c przechodzi przez biegun prostej b , to biegun prostej c leży na prostej b .

Stąd zaś wynika, że biegunową punktu przecięcia

prostych m i n jest prosta łącząca ich bieguny M i N i nawzajem biegunem prostej, łączącej punkty M i N , jest punkt przecięcia ich biegunowych m i n .

§ 162. Punkty i proste sprzężone. Inwolucja biegunowa. Proste b i c , mające tę własność że biegun jednej z nich leży na drugiej / a wtedy biegun drugiej leży na pierwszej /, nazywają się prostami biegunowo sprzężonymi; punkty B i C , z których jeden leży na biegunowej drugiego / a wtedy drugi leży na biegunowej pierwszego /, nazywają się punktami biegunowo sprzężonymi.

Niechaj będzie szereg punktów K, L, M, \dots

na podstawie b /Rys.

308/; biegunowe tych punktów $K, L, M,$

przechodząc będą

wszystkie przez bie-

gun prostej b ; oz-

naczymy literami K_2

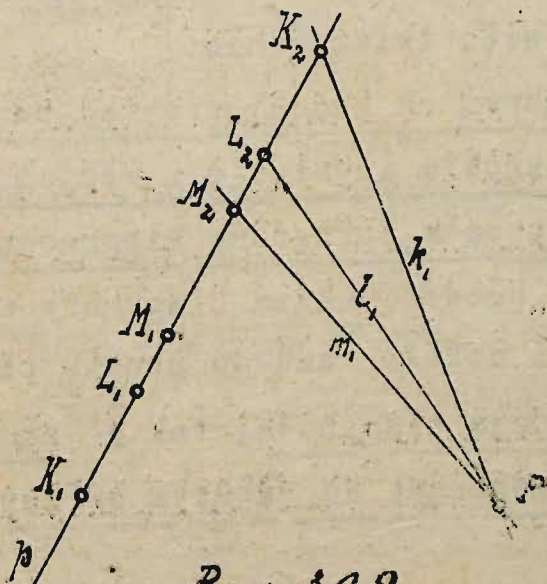
L_2, M_2, \dots pun-

kty, w których pros-

te K, L, M, \dots

przecinają prostą b

Ponieważ



Rys. 308.

$$\rho(K, L, M, \dots) \pi P(K, L, m, \dots) \bar{\pi} \rho(K_2, L_2, M_2, \dots)$$

więc

$$\rho(K, L, M, \dots) \pi \rho(K_2, L_2, M_2, \dots)$$

Łatwo okazać, że każde dwa punkty odpowiednie tych szeregów rzutowych na wspólnej podstawie odpowiadają sobie podwójnie. Zaliczmy np. punkt K_2 do I szeregu; punkt odpowiedni znajdziemy w przecięciu prostej $\bar{\rho}$ z biegunową punktu K_2 ; ale na mocy I twierdzenia poprzedniego artykułu biegunowa punktu K_2 przechodzi przez biegun prostej K_1 , to jest przez punkt K_1 ; w ten sposób punkty K_1 i K_2 odpowiadają sobie podwójnie, skąd już wynika, że każde dwa punkty odpowiednie L_1 i L_2 , M_1 i M_2 , ... odpowiadają sobie podwójnie, tak dwa szeregi rzutowe $\rho(K_1, L_1, M_1, K_2, L_2, M_2, \dots)$ i $\rho(K_2, L_2, M_2, K_1, L_1, M_1, \dots)$ stanowią involucję punktów /§ 152/. Mamy więc twierdzenie:

W układzie biegunowym na każdej prostej punkty biegunowo sprzężone stanowią involucję i wzajemnie: dokoła każdego punktu proste sprzężone biegunowo stanowią involucję. W ten sposób, układ biegunowy wyznacza na każdej prostej i dokoła każdego punktu pewną involucję, zwaną inwolucją biegunową; tak że punkty lub proste sprzężone biegunowo są razem sprzężone w involucji biegunowej.

§ 163. Trójkąty biegunowe. Ponieważ proste a_1, a_2

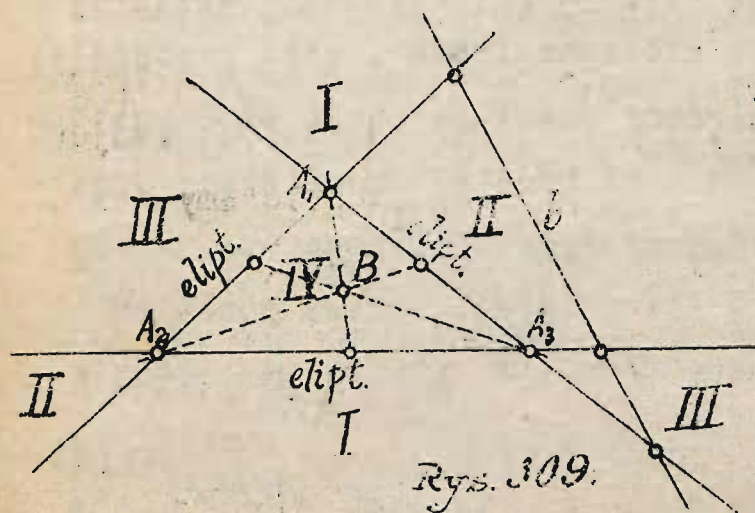
i Q_3 są biegunowemi punktów A_1 , A_2 i A_3 , więc każde dwie z tych prostych, każde dwa z tych punktów są ze sobą biegunowo sprzężone. Trójkąt $A_1A_2A_3$ ma tę osobliwość, że każdy jego wierzchołek jest biegunem przeciwległego mu boku, zarówno jego wierzchołki, jak i jego boki są sprzężone. Trójkąt taki nazywamy trójkątem biegunowym. Trójkątów biegunowych jest nieskończoność wiele. Dla otrzymania któregośkolwiek z nich postępujemy jak następuje: Obieramy dowolnie punkt M ; znajdujemy jego biegunową m ; na prostej m obieramy dowolnie punkt N i znajdujemy jego biegunową n , która na mocy twierdzenia § 161 przejdzie przez punkt M , wreszcie łączymy punkty M i N prostą p ; będzie to na zasadzie § 161 biegunowa punktu P , w którym się przecinają proste m i n . Trójkąt MNP będzie trójkątem biegunowym. Oczywiście ten sam układ biegunowy, który określiliśmy za pomocą trójkąta biegunowego $A_1A_2A_3$, punktu B i jego biegunowej b , można określić za pomocą każdego innego trójkąta biegunowego MNP , jakiegokolwiek punktu Q i jego biegunowej q .

§ 164. UKŁADY BIEGUNOWE JEDNOSTAJNE I NIEJEDNOSTAJNE

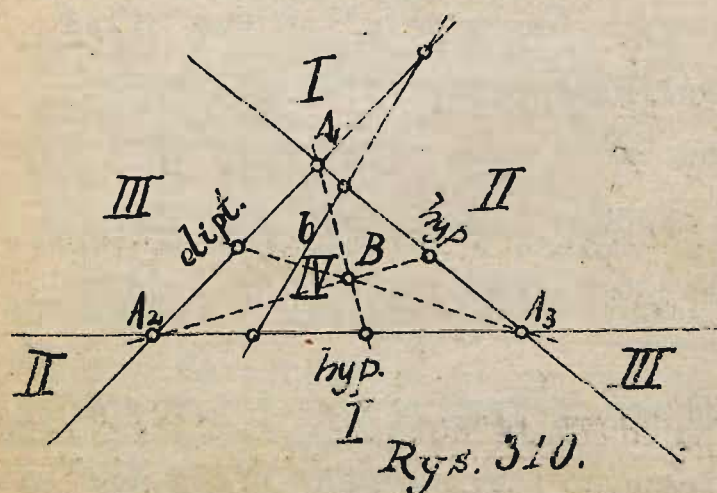
Niech będzie układ biegunowy, wyznaczony przez trójkąt biegunowy $A_1A_2A_3$ oraz biegunową b punktu dowolnego

B , przytem punkt B nie leży na żadnym z boków, a prosta B nie przechodzi przez żaden z wierzchołków trójkąta A_1, A_2, A_3 . Trójkąt ten dzieli płaszczyznę na 4 obszary, z których jeden tylko bywa skończony i nazywa się wtedy polem trójkąta, a trzy są nieskończone

/Rys. 309 i 310/.



Rys. 309.



Rys. 310.

Ponieważ punkt

B nie może leżeć na żadnym z boków trójkąta więc musi on należeć tylko do jednego z 4 obszarów płaszczyzny, ponieważ prosta B nie może przechodzić przez żaden wierzchołek, więc musi ona przenikać do trzech obszarów, dla czwartego pozostając obcą. Wobec tego

względne położenie punktu B i prostej δ może być tylko dwojakie: albo prosta δ nie przenika do obszaru, w którym leży punkt B , t.j. nie przecina obwodu tego obszaru /Rys.309/ - albo prosta δ przenika do obszaru, w którym znajduje się punkt B , t.j. przecina obwód tego obszaru /Rys.310/. Pierwszy przypadek zachodzi np. wtedy, gdy punkt B znajduje się w obszarze IV, t.j. wewnątrz trójkąta biegunowego, a prosta δ nie przenika do obszaru IV, t.j. nie przecina obwodu tego trójkąta /Rys.309/. Inwolucja biegunowa jest wtedy na wszystkich trzech bokach trójkąta A, A_1, A_2 eliptyczna, gdyż na każdym boku dwa punkty sprzężone przegradzają wierzchołki na nim leżące. Jeżeli wyznaczymy biegunową ρ dowolnego punktu P , to się pokaże, że ta biegunowa nie przenika do obszaru, w którym się znajduje punkt P . W samej rzeczy, zauważmy, że rzut któregośkolwiek wierzchołka trójkąta biegunowego z punktu P na bok przeciwny oraz punkt, w którym biegunowa ρ ten bok przecina są sprzężone /gdyż prosta A, P jest biegunową punktu a, ρ /, - a więc w danym razie są te punkty na każdym z boków przez wierzchołki przegrodzone; ponieważ zaś rzuty wierzchołków leżą zawsze na obwodzie obszaru, w którym leży środek rzutów P , więc prosta ρ tego obwodu nie przetnie t.j. nie przeniknie

do obszaru, zawierającego punkt P . Możemy więc twierdzić stanowczo, że w takim układzie biegunowym nie istnieją punkty rzeczywiste, któreby leżały na własnych biegunowych.

Układ biegunowy taki nazywamy jednostajnym, albowiem involucja biegunowa jest wtedy na każdej prostej i dokoła każdego punktu jednego rodzaju, mianowicie eliptyczna.

Drugi przypadek będzie miał miejsce wtedy np., gdy punkt B znajdzie się w obszarze IV, t.j. wewnątrz trójkąta biegunowego, a prosta z nie ominie tego obszaru, t.j. przecnie obwód trójkąta, przytem dwa jego boki zostaną przez nią przecięte wewnętrznie, a trzeci zewnętrznie /Rys. 310/. Jest oczywiste, że involucja biegunowa na tych dwóch bokach, które są przecięte wewnętrznie przez prostą z , będzie hyperboliczna. Na pierwszych dwóch bokach istnieją zatem po dwa rzeczywiste punkty podwójne, t.j. sprzężone same ze sobą, a więc leżące na własnych biegunowych. Natomiast na trzecim boku trójkąta biegunowego nie istnieją punkty rzeczywiste, leżące na własnych biegunowych. Układ biegunowy tak określony nazywamy niejednostajnym, albowiem involucja przezeń wyznaczona na różnych prostych i dokoła różnych punktów nie jest jednego rodzaju.

§ 165. BIEGUN I BIEGUNOWA. UROJONE. Jest oczywiste, że biegunowe punktów jakiegokolwiek inwolucji na prostej p są prostymi pewnej inwolucji dokoła jej bieguna P . Jeżeli w szczególności inwolucja na prostej jest biegunową, to biegunowe punktów sprzężonych tej inwolucji stanowią inwolucję biegunową dokoła bieguna prostej.

Inwolucja biegunowa na dowolnej prostej jest perspektywiczna z inwolucją biegunową dokoła bieguna tej prostej, jeżeli bowiem punkty K_1 i K_2 , L_1 i L_2 , stanowią pary punktów sprzężonych inwolucji biegunowej na prostej p , to ich biegunowe K_1 i K_2 , L_1 i L_2 , ... stanowiące pary prostych sprzężonych inwolucji biegunowej dokoła punktu P , przechodzą odpowiednio przez pary punktów sprzężonych K_2 i K_1 , L_2 i L_1 , inwolucji biegunowej na prostej p .

Prosta urojona $P(k'l'k''l'')$ nazywa się biegunową punktu urojonego $p(K'L'K''L'')$ jeżeli P jest biegunem prostej p , a proste k' , l' , k'' , l'' są biegunowymi punktów K' , L' , K'' , L'' . Punkt urojony $p(K'L'K''L'')$ nazywa się wtedy biegunem prostej urojonej $P(k'l'k''l'')$. Nietylko więc rzeczywiście, ale i urojonym punktom i prostym można w danym układzie biegunowym podporządkować proste i punkty t.j.

biegunowe i bieguny. - W podobny sposób można określić punkty i proste biegunowo sprzężone, że 1/ na każdej prostej rzeczywistej układu biegunowego leżą dwa punkty sprzężone same ze sobą, t.j. leżące na własnych biegunowych; mogą one być rzeczywiste i odrębne, rzeczywiste i zjednoczone, lub urojone sprzężone, 2/ z każdego punktu rzeczywistego wychodzą dwie proste sprzężone same ze sobą, t.j. przechodzące przez własne bieguny; mogą one być rzeczywiste i odrębne, rzeczywiste i zjednoczone, lub urojone sprzężone.-

R O Z D Z I A Ł X I V .

STOŻKOWE I STOŻKI.

§ 166. Określenie stożkowych. Ogół punktów i prostych, rzeczywistych i urojonych, które w danym układzie biegunowym są sprzężone same ze sobą, nazywamy stożkową.

Punkty samosprzężone nazywamy punktami stożkowej tego układu; przechodzące przez nie własne ich biegunowe nazywamy stycznymi do stożkowej w tych punktach. Punkty stożkowej są to więc punkty podwójne inwolucji,