

czają na prostej niewłaściwej 3 pary punktów, t.j. kierunków odpowiednich; należy znaleźć kierunki podwójne t.j. asymptotyczne. Przez punkt jakikolwiek np. przez S prowadzimy koło Steinera i z jego pomocą wyznaczamy proste podwójne dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku S których proste $a, b, c,$ i a_1, b_1, c_1 są równoległe do prostych $a, b, c,$ i a_1, b_1, c_1 .

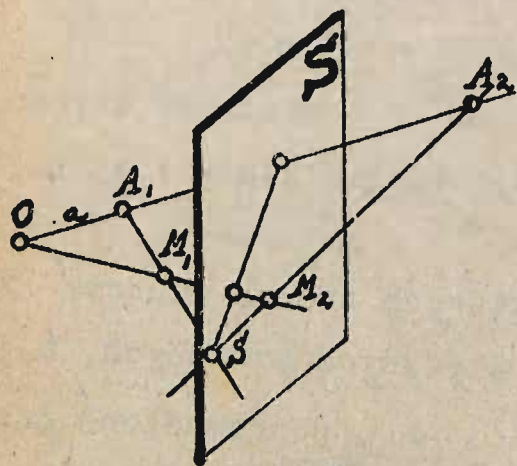
Znalazszy kierunki F^∞ i G^∞ , prowadzimy styczne w tych kierunkach do stożkowej. Łącząc każdy z tych punktów niewłaściwych F^∞ i G^∞ z punktami 3, 4 i 5 otrzymamy dwa pęki rzutowe, których środek rzutowy O jest punktem przecięcia obu stycznych szukanych, t.j. środkiem stożkowej. Proste f i g , poprowadzone przez punkt O w kierunkach F^∞ i G^∞ są asymptotami, dwusieczne a i b kątów między nimi są osiami stożkowej.

R O Z D Z I A Ł XV.

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

§ 203. Kolineacja środkowa dwóch układów przestrzennych. Niech będzie płaszczyzna S , którą nazywać będziemy płaszczyzną kolineacji, punkt O , który nazwiemy środkiem kolineacji i dwa punkty A_1 i A_2 , leżące na dowolnej prostej a , wychodzącej z punktu O /lub

dwie płaszczyzny A_1 i A_2 , przecinają się według prostej leżącej w płaszczyźnie S /Rys. 389/. Dane powyższe wyznaczają dwa układy /dwie figury/ przestrzenne F_1 i F_2 w ten sposób, że



Rys. 389.

1/ każdemu punktowi prostej lub płaszczyźnie układu F_1 odpowiada jeden jedyny punkt, prosta lub płaszczyzna układu F_2 i nawzajem.

2/ punktowi, prostej i płaszczyźnie, należącym do siebie w jednym układzie, odpowiada punkt, prosta i płaszczyzna drugiego układu, które również do siebie należą.

3/ punkty odpowiednie leżą parami na prostych, przechodzących przez środek kolineacji O .

4/ płaszczyzny odpowiednie przecinają się parami według prostych, leżących w płaszczyźnie kolineacji

S .

5/ proste odpowiednie leżą parami w płaszczyznach przechodzących przez środek kolineacji O i przecina-

ją się parami w punktach leżących w płaszczyźnie S i
6/ każde dwa szeregi odpowiednich punktów, każde
dwa pęki odpowiednich płaszczyzn lub prostych są rzu-
towe.

Środek kolineacji oraz wszystkie punkty płaszczy-
zny kolineacji - płaszczyzna kolineacji oraz wszystkie
płaszczyzny przechodzące przez środek kolineacji oraz

- proste, przechodzące przez środek kolineacji
oraz proste leżące w płaszczyźnie kolineacji, - odpo-
wiadają same sobie.

Płaszczyzna R_1 , która odpowiada w I układzie płaszczyźnie niewłaściwej, zaliczonej do I układu R_2^∞ /
oraz płaszczyzna Q_2 , która odpowiada w II układzie
płaszczyźnie niewłaściwej, zaliczonej do I układu Q_1^∞ /

- nazywają się płaszczyznami wzajemnymi, są one rów-
noległe do płaszczyzny kolineacji S i mają tę włas-
ność, że odległość jednej z nich od środka kolineacji

O i odległość drugiej od płaszczyzny kolineacji S
są odcinkami równej długości i przeciwnego zwrotu.

Kolineacja środkowa w przestrzeni może być wyznaczona
przez swój środek O , płaszczyznę S i jedną z płaszczyzn wzajemnych R_1 lub Q_2 . Jeżeli płaszczyzny
wzajemne R_1 i Q_2 są zjednoczone /w równej odległości

między środkiem i płaszczyzną kolineacji/, to kolineacja nazywa się inwolucyjną; w takiej kolineacji każdemu punktowi, płaszczyźnie lub prostej odpowiada ten sam punkt, płaszczyzna lub prosta, niezależnie od tego do którego układu ten punkt, płaszczyznę lub prostą zaliczymy.

Kolineacja środkowa w przestrzeni ma zastosowanie do płaskorzeźby perspektywicznej i w teatralnej sztuce dekoracyjnej.

§ 204. Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych. Z dwóch układów przestrzennych F_1 i F_2 , które są w kolineacji środkowej przesunemy jeden w dowolny sposób. Z 6-ciu warunków, którym czyniły zadość te układy, niektóre, mianowicie 3, 4 i 5 nie będą wogóle w nowym położeniu układów spełnione, natomiast pierwsze dwa i ostatni pozostaną w swej mocy. O układach takich mówimy wciąż jeszcze, że są w kolineacji, która jednak nie będzie już wogóle środkową, mówimy wtedy, że układy F_1 i F_2 są w kolineacji ogólnej.

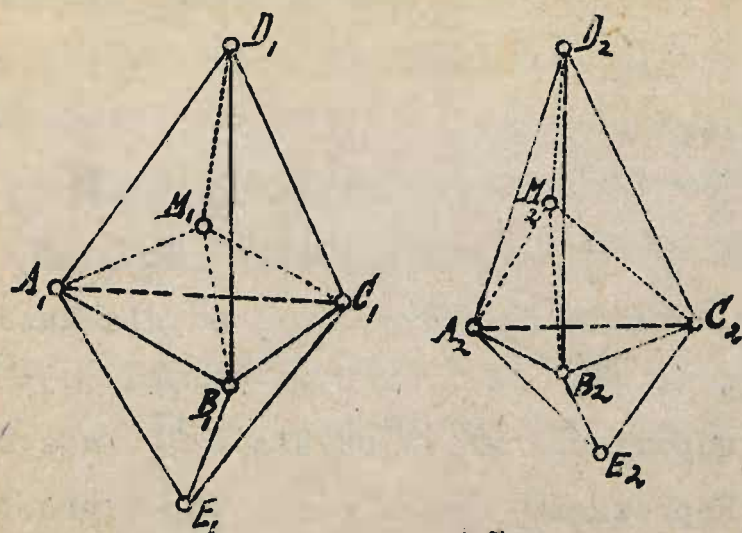
Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych jest wyznaczona przez 5 par punktów lub 5 par płaszczyzn odpowiednich z tem zastrzeżeniem, żeby żadne 4 z tych punktów w żadnym układzie nie leżały w jednej płaszczyźnie /a więc także żadne 3 na jednej prostej/

wzgl. żeby żadne 4 z tych płaszczyzn w żadnym układzie nie przechodziły przez jeden punkt /a więc także żadne 3 przez jedną prostą/.

W samej rzeczy, jeżeli np. punktom A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 układu F_1 odpowiadają punkty A_2, B_2, C_2, D_2, E_2 układu F_2 /Rys. 390/, to dla każdego punktu przestrzeni M_1 zaliczonego do układu F_1 znajdziemy punkt odpowiedni M_2 w układzie F_2 w sposób następujący: Poprowadźmy przez punkt M_1 i prostą B_1C_1 płaszczyznę $B_1C_1M_1$, którą oznaczmy literą T_1 , prosta B_1C_1 będzie osią czwórki płaszczyzn $B_1C_1A_1, B_1C_1D_1, B_1C_1E_1$ i $B_1C_1M_1 \equiv T_1$, możemy więc wyznaczyć płaszczyznę T_2 , która z płaszczyznami $B_2C_2A_2, B_2C_2D_2, B_2C_2E_2$ tworzy ten sam dwustosunek; poprowadźmy następnie w układzie F_1 płaszczyzny $C_1A_1M_1 \equiv U_1$ i $A_1B_1M_1 \equiv V_1$ i wyznaczmy w taki sam sposób płaszczyzny U_2 i V_2 układu F_2 ; punkt przecięcia płaszczyzn T_2, U_2 i V_2 będzie szukany punktem M_2 .

§ 205. Korelacja dwóch układów przestrzennych. -

Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych naprowadza nas na nowy związek geometryczny dwóch układów przestrzennych, zwany korelacją, a polegający na następujących własnościach:



Rys. 390.

1/ każdemu punktowi układu F_1 odpowiada jedna jedyna płaszczyzna układu F_2 ; każdej płaszczyźnie układu F_1 odpowiada jedna

jedyna płaszczyzna układu F_2 i nawzajem;

2/ punktowi i płaszczyźnie, należącym do siebie w jednym układzie odpowiadają płaszczyzna i punkt drugiego układu, które również do siebie nalożą, stąd wynika, że każdej prostej jednego układu /która łączy dwa jego punkty/ odpowiada prosta drugiego układu /która jest przecięciem odpowiednich płaszczyzn/,

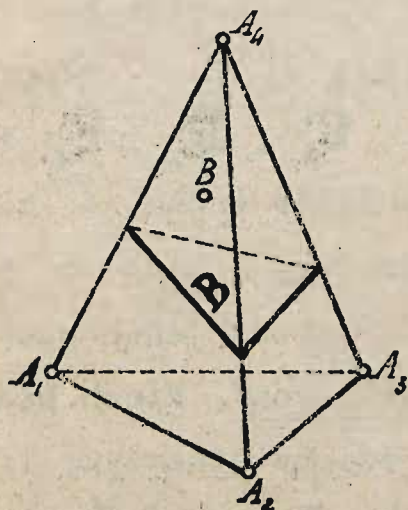
3/ każdej czwórce punktów jednego układu odpowiada czwórka płaszczyzn drugiego, która jest z tą samą rzutowa i nawzajem, wogóle każdemu szeregowi punktów jednego układu odpowiada pek płaszczyzn drugiego i nawzajem każdej czwórce /pekowi/ prostych jednego układu odpowiada

da rzutowa z nią czwórka ~~prosta~~ prostych drugiego układu.

"Korelacja" taka będzie wyznaczona przez założenie odpowiedniości wzajemnej 5 punktów jakichkolwiek A_1, B_1, C_1, D_1 i E_1 układu F_1 z 5 płaszczyznami drugiego układu A_2, B_2, C_2, D_2 i E_2 z tem zastrzeżeniem, żeby z tych 5 punktów żadne 4 nie leżały w jednej płaszczyźnie, ani żeby z tych 5 płaszczyzn żadne 4 nie przechodziły przez jeden punkt.

§ 206. Układ biegunowy przestrzenny. Niech będzie czworościan A, A_2, A_3, A_4 /którego ściany oznaczymy literami: $A_1 = A, A_2, A_4$, $A_2 = A, A_1, A_3$, $A_3 = A, A_1, A_4$ i $A_4 = A, A_2, A_3$, punkt jakikolwiek B nie leżący na żadnej ze ścian /a więc i na żadnej z krawędzi/ i płaszczyzna B , nie przechodząca przez żaden z wierzchołków /a więc i przez żadną z krawędzi/ czworościanu A, A_2, A_3, A_4 /Rys. 391/. Na mocy poprzedniego artykułu odpowiedność punktów A_1, A_2, A_3, A_4 i B płaszczyznom A_1, A_2, A_3, A_4 i B wyznacza korelację dwóch układów przestrzennych. Korelacja ta ma tę własność, że każdemu punktowi odpowiada zawsze ta sama płaszczyzna, każdej płaszczyźnie ten sam punkt /a więc i każdej prostej ta sama prosta/ niezależnie od tego, do którego układu tamten punkt, tamtą płaszczyznę /tamtą

nrasta/ salicwvuv



Rys. 391.

Własności tej dowieść można w podobny sposób, jak dowiedliśmy analogicznej własności układu biegunowego płaskiego /§ 161/.

Te dwa układy korelacyjne można przeto uważać za jeden jedyny układ przestrzenny, w którym zachodzi wzajemne podporządkowanie

punktów płaszczyznom i płaszczyzn punktom. Układ taki nazywa się biegunowym. płaszczyzna podporządkowana punktowi nazywa się jego płaszczyzną biegunową, punkt podporządkowany płaszczyźnie jej biegunem.

Ponieważ punktowi i płaszczyźnie należącym do siebie podporządkowane są płaszczyzna i punkt również do siebie należące, więc mamy twierdzenia:

Jeżeli punkt C leży w płaszczyźnie biegunowej punktu B , to płaszczyzna biegunowa punktu C prze-

chodzi przez punkt B .

Jeżeli płaszczyzna C przechodzi przez biegun płaszczyzny B , to biegun płaszczyzny C leży w płaszczyźnie B .

Stąd zaś wynika

1/ płaszczyznę biegunową punktu przecięcia 3 płaszczyzn A , B i C jest płaszczyzna poprowadzona przez ich bieguny A , B i C i nawzajem biegunem płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty A , B i C jest punkt przecięcia ich płaszczyzn biegunowych A , B i C .

2/ Bieguny płaszczyzn przechodzących przez jedną prostą leżą na drugiej i nawzajem: płaszczyzny biegunowe punktów leżących na jednej prostej przechodzą przez drugą.

Dwie proste, mające tę własność, że bieguny płaszczyzn przechodzących przez jedną z nich leżą na drugiej nazywają się prostami wzajemnie biegunowymi.

Dwie płaszczyzny mające tę własność, że biegun jednej z nich leży na drugiej, nazywają się płaszczyznami /biegunowo/ sprzężonymi. 2 punkty, z których jeden leży w płaszczyźnie biegunowej drugiego, nazywają się punktami /biegunowo/ sprzężonymi, dwie proste, z których każda przecina biegunową drugiej, nazywają się prostami.

mi /biegunowo/ sprzężonemi.

Układ biegunowy przestrzenny wyznacza w każdej płaszczyźnie pewien układ biegunowy płaski a dokoła każdego punktu pewien układ biegunowy wiązki.

Tak np. biegunową punktu M , leżącego w płaszczyźnie P jest w tej płaszczyźnie ślad m , płaszczyzny biegunowej M punktu M , biegunem prostej m , leżącej w płaszczyźnie P jest w tej płaszczyźnie ślad M prostej z nią biegunowej n . Układ biegunowy przestrzenny wyznacza na każdej prostej pewną involucję punktów /zwaną involucją biegunową na tej prostej/ i dokoła każdej prostej pewną involucję płaszczyzn /zwaną involucją biegunową dokoła tej prostej/. Niechaj będzie np. na podstawie m szereg punktów $m / K_1, L_1, M_1, \dots /$; płaszczyzny biegunowe tych punktów przechodzą wszystkie przez prostą biegunową n , tworząc dokoła niej pęk płaszczyzn $/ K_2, L_2, M_2, \dots /$ rzutowy z szeregiem $m / K_1, L_1, M_1, \dots /$; jeżeli przecięcia tych płaszczyzn z podstawą m oznaczymy literami K_2, L_2, M_2, \dots , to szeregi $m / K_1, L_1, M_1, \dots /$ i $m / K_2, L_2, M_2, \dots /$ będą rzutowe. Otóż każde dwa punkty odpowiednie tych szeregów, np. K_1 i K_2 odpowiadają sobie podwójnie, - jeżeli bowiem zaliczymy punkt K_2 do I szeregu, to punkt odpowiedni znajdziemy w

przecięciu podstawy m z płaszczyzną biegunową punktu K_2 , która musi przejść przez punkt K_1 , gdyż płaszczyzna biegunowa punktu K_1 przechodzi przez punkt K_2 .

§ 207. Czworościany biegunowe. Czworościan A, A_2, A_3, A_4 ma tę osobliwość, że 1/ każdy wierzchołek jest biegunem przeciwległej ściany, 2/ przeciwległe krawędzie, np. A, A_2 i A_3, A_4 są prostymi wzajemnie biegunowymi i 3/ każde dwie krawędzie nieprzeciwległe, każde dwa wierzchołki i każde dwie ściany są sprzężone. Czworościan taki nazywamy biegunowym. Czworościanów biegunowych jest nieskończenie wiele. Dla otrzymania któregośkolwiek z nich postępujemy jak następuje: Obieramy dowolny punkt M i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową M , w płaszczyźnie M obieramy dowolny punkt N i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową N , na mocy poprzedniego artykułu musi ona przejść przez punkt M ; na prostej przecięcia płaszczyzn M i N obieramy dowolny punkt P i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową P , która musi przejść przez prostą MN ; przez punkty M , N i P prowadzimy płaszczyznę Q , której biegunem będzie punkt przecięcia płaszczyzn M , N i P . Czworościan $MNPQ$ będzie biegunowy. Oczywiście ten sam układ biegunowy przestrzenny, który określiliśmy zapomocą czworościanu biegunowego A, A_2, A_3, A_4 , punktu

B i jego płaszczyzny biegunowej B , można określić zapomocą każdego innego czworościanu biegunowego $MNPQ$, jakiegokolwiek punktu R i jego płaszczyzny biegunowej R .

§ 208. Trzy rodzaje układów biegunowych przestrzennych. Niech będzie układ biegunowy wyznaczony przez czworościan biegunowy A, A_2, A_3, A_4 oraz płaszczyznę biegunową B dowolnego punktu B . przytem punkt B nie leży na żadnej ze ścian, a płaszczyzna B nie przechodzi przez żaden z wierzchołków tego czworościanu. Nastręczają się dwa pytania:

1/ Czy i w jakich warunkach mogą istnieć rzeczywiste punkty i płaszczyzny sprzężone same ze sobą, t.j. punkty leżące we własnych płaszczyznach biegunowych i płaszczyzny przechodzące przez własne bieguny?

2/ Jeżeli takie punkty i płaszczyzny istnieją, to czy mogą istnieć rzeczywiste proste sprzężone same ze sobą t.j. przystające do własnych prostych biegunowych który każdy punkt byłoby zatem sprzężony sam ze sobą?

Aby na te pytania odpowiedzieć, zauważmy, że czworościan biegunowy A, A_2, A_3, A_4 dzieli przestrzeń na 8 obszarów, z których jeden tylko jest skończony i nazywa się objętością czworościanu, - cztery mają z tą objętością po jednej ścianie wspólnej, a 3 mają z nią

dwie przeciwległe krawędzie wspólne. Ponieważ punkt B nie leży na żadnej ścianie czworościanu, więc może on należeć tylko do jednego obszaru, ponieważ płaszczyzna

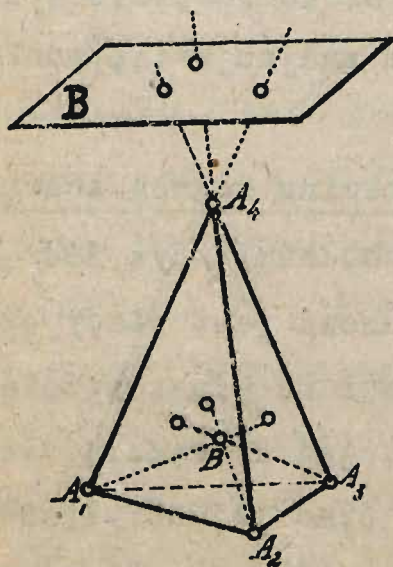
B nie przechodzi przez żaden wierzchołek, więc dla jednego obszaru musi ona pozostać obcą. Przypuśćmy np. że punkt B leży wewnątrz objętości czworościanu /co zresztą przez obiór odpowiedniego czworościanu biegunowego zawsze można sprawić/. Położenie płaszczyzny

B względem obszaru, w którym znajduje się punkt może być trojaki:

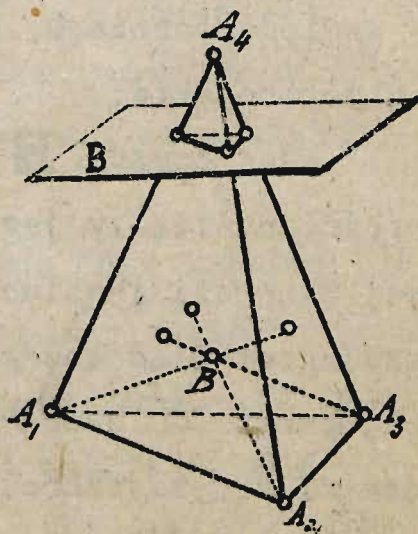
1/ Płaszczyzna B nie przecina żadnej krawędzi czworościanu między jego wierzchołkami /Rys. 392/. Na każdej krawędzi inwolucja biegunowa jest wtedy eliptyczna, gdyż ślad każdej krawędzi na płaszczyźnie, łączącej punkt B z przeciwległą jej krawędzią, leży zawsze między wierzchołkami, a ślad jej na płaszczyźnie B leży poza wierzchołkami, tak, że te dwa punkty sprzężone przegradzają wierzchołki na każdej krawędzi. Jeżeli wyznaczymy płaszczyznę biegunową dowolnego punktu M , to się pokaże, że ta płaszczyzna nie przenika do obszaru, w którym się znajduje punkt M . W takim więc układzie biegunowym nie istnieją punkty, któreby leżały we własnych płaszczyznach biegunowych, tembardziej nie istnieją proste, przystające do włas-

ných prostych biegunowych. - Na wszystkich płaszczyznach i dokoła wszystkich punktów, układ biegunowy /płaski lub wiązki/ jest jednostajny, - na wszystkich i dokoła wszystkich prostych inwolucja biegunowa jest eliptyczna.

2/ Płaszczyzna **B** przecina 3 krawędzie czworoscianu, wychodzące z jednego wierzchołka /Rys. 393/. Na



Rys. 392.



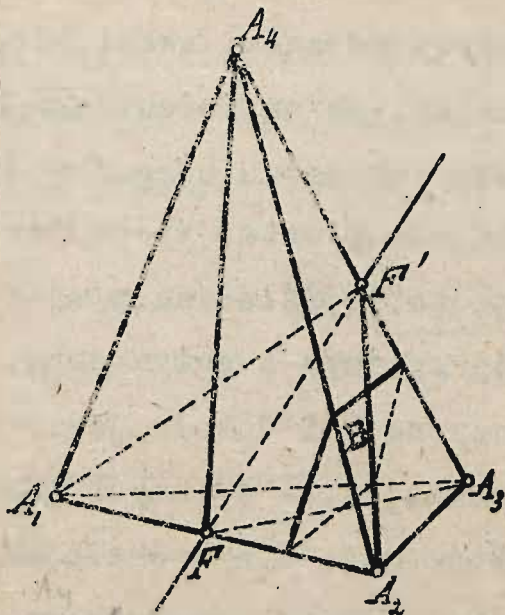
Rys. 393.

tych trzech krawędziach inwolucja biegunowa jest hyperboliczna, - na trzech pozostałych - eliptyczna. Na pierwszych trzech krawędziach istnieją przeto po dwa rzeczywiste punkty podwójne, t.j. sprzężone same ze sobą. Istnieją wtedy zatem punkty rzeczywiste leżące we własnych

płaszczyznach biegunowych, natomiast nie istnieją proste rzeczywiste, któreby były własnymi swymi biegunowymi. W samej rzeczy zauważamy, że na ścianie A, A_2, A_3 układ biegunowy przesurzenny wyznacza biegunowość płaską jednostajną, gdyby istniała prosta, która jest własną swoją prostą biegunową, to jej ślad na płaszczyźnie

A, A_2, A_3 byłby punktem sprzężonym z samym sobą, co niemożliwe. W jednych płaszczyznach i dokoła jednych punktów biegunowość jest jednostajna, - w innych płaszczyznach i dokoła innych punktów może ona być niejednostajna. W płaszczyznach przechodzących przez własne bieguny, t.j. sprzężonych z samymi sobą staje się ona inwolucją eliptyczną prostych sprzężonych dokoła bieguna. W samej rzeczy, w każdej płaszczyźnie M , przechodzącej przez własny biegun M , biegunowa a, b, c, \dots punktów A, B, C, \dots tej płaszczyzny przechodzą przez punkt M , tak że w płaszczyźnie M dokoła punktu M istnieje inwolucja prostych sprzężonych $a, MA, b, MB, c, MC, \dots$. Inwolucja ta jest eliptyczna, gdyż w przeciwnym razie istniałyby proste sprzężone same ze sobą: byłyby to proste podwójne tej inwolucji.

3/ Płaszczyzna **B** przecina 4 krawędzie czworoscianu biegunowego /Rys. 394/, np. A, A_2, A_3, A_4 .



Rys. 394.

A_1A_3, A_2A_4

Na tych czterech krawędziach inwolucja biegunowa jest hyperboliczna, na pozostałych dwóch eliptyczna. Podobnie jak w przypadku drugim, istnieją więc i tutaj punkty leżące we własnych płaszczyznach biegunowych

ale prócz tego istnieją także proste sprzężone same ze sobą t.j. przystające do własnych swych prostych biegunowych. W samej rzeczy, niech punkt F będzie jednym z punktów podwójnych inwolucji biegunowej na krawędzi A_1A_2 , a punkt F' niechaj będzie jednym z punktów podwójnych inwolucji biegunowej na krawędzi przeciwległej A_3A_4 , tak że punkty F i F' są punktami sprzężonymi z samymi sobą i leżą na dwóch prostych wzajemnie biegunowych A_1A_2 i A_3A_4 .

Płaszczyzna FA_3A_4 jest płaszczyzną biegunową.

punktu F /gdyż punkt F jest samosprzężony i leży na prostej A, A_1 /, podobnie płaszczyzna $F'A, A_2$ jest płaszczyzną biegunową punktu F' , prosta FF' jest prostą przecięcia tych dwóch płaszczyzn i zarazem łączy ich bieguny, jest to zatem prosta sprzężona sama ze sobą. We wszystkich płaszczyznach i dokoła wszystkich punktów biegunowość jest niejednostajna z wyjątkiem płaszczyzn i punktów samosprzężonych, gdzie biegunowość staje się hyperboliczną inwolucją biegunową dokoła bieguna wzgl. w płaszczyźnie biegunowej. Proste podwójne tej inwolucji są prostami samosprzężeniami, z każdego więc punktu samosprzężonego wychodzą i w każdej płaszczyźnie samosprzężonej leżą dwie proste samosprzężone.

§ 209. Powierzchnia drugiego stopnia. Ogół punktów płaszczyzn i prostych, rzeczywistych i urojonych, które w danym przestrzennym układzie biegunowym są samosprzężone, nazywamy powierzchnią drugiego stopnia. Punkty samosprzężone nazywamy punktami tej powierzchni, przechodzące przez nie własne ich płaszczyzny biegunowe nazywamy płaszczyznami stycznymi do tej powierzchni w tych punktach; proste samosprzężone nazywamy tworzącymi powierzchni. Punkty powierzchni są to więc punkty podwójne inwolucji biegunowej na jakiegokolwiek prostej

rzeczywistej, płaszczyzny styczne do tej powierzchni są to płaszczyzny podwójne inwolucji biegunowej dokoła jakiejkolwiek prostej rzeczywistej. Na każdej prostej rzeczywistej leżą dwa punkty powierzchni drugiego stopnia: rzeczywiste urojone sprzężone lub zjednoczone, w których ta prosta "przebiega" powierzchnię, przez każdą prostą rzeczywistą przechodzą dwie płaszczyzny styczne: rzeczywiste, urojone, sprzężone lub zjednoczone. Wyrażamy to krótko mówiąc, że powierzchnie drugiego stopnia są powierzchniami drugiego rzędu i drugiej klasy. Prosta nazywa się sieczną, prostą zewnętrzną lub styczną zależnie od tego, czy inwolucja biegunowa na niej jest hyperboliczna, t.j. czy przebiega ona powierzchnię w dwóch punktach rzeczywistych, urojonych sprzężonych, lub zjednoczonych. W każdej płaszczyźnie **P** dany układ biegunowy przestrzenny wyznacza pewien układ biegunowy płaski: jednostajny lub niejednostajny, normalny lub zwyrodniały/inwolucję biegunową/. Stożkowa tego układu płaskiego /urojona lub rzeczywista, normalna lub zwyrodniała/ jest "przecięciem powierzchni drugiego stopnia płaszczyzną **P**". Każda płaszczyzna "przecina" powierzchnię drugiego stopnia według stożkowej. Płaszczyzna nazywa się zewnętrzną, sieczną lub styczną, zależnie od tego, czy układ bie-

gunowy tej płaszczyzny jest jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały, t.j. czy przecina ona powierzchnię według stożkowej urojonej, rzeczywistej lub zwyrodniałej /dwie proste urojone sprzężone lub rzeczywiste/.

Wszystkie styczne do powierzchni w danym jej punkcie leżą w płaszczyźnie stycznej i stanowią involucję biegunową dokoła punktu zetknięcia. Dokoła każdego punktu

P dany układ biegunowy przestrzenny wyznacza pewien układ biegunowy wiązki: jednostajny lub niejednostajny, normalny lub zwyrodniały. Stożek tej biegunowości /urojony lub rzeczywisty, normalny lub zwyrodniały/ nazywamy stożkiem opisanym na powierzchni z tego punktu.

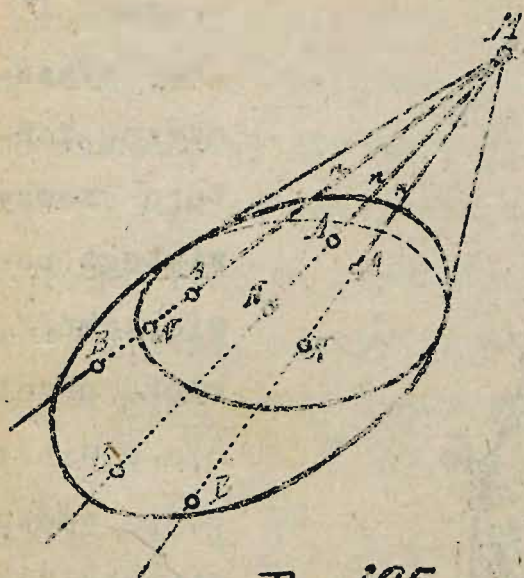
P . Z każdego punktu można opisać na powierzchni drugiego stopnia stożek drugiego stopnia. Punkt nazywa się wewnętrznym, zewnętrznym lub leżącym na powierzchni zależnie od tego, czy układ biegunowy wiązki dokoła niego jest jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały, t.j. czy stożek z niego na powierzchni opisany jest urojony, rzeczywisty lub zwyrodniały /gdzie proste urojone sprzężone lub rzeczywiste/.

Miejsce geometryczne punktów zetknięcia tego stożka z powierzchnią drugiego stopnia jest stożkową. W samej rzeczy, punkty zetknięcia płaszczyzny stycznych wyprowadzonych z punktu M , t.j. ich bieguny, leżą w

płaszczyźnie biegunowej M tego punktu /§ 205/, ogół tych punktów zetknięcia stanowi zatem stożkową, według której płaszczyzna M przecina powierzchnię. Nawzajem płaszczyzny styczne w punktach stożkowej, leżącej na powierzchni, przecinają się w biegunie M płaszczyzny tej stożkowej, powłócząc stożek drugiego stopnia, opisany na powierzchni.

Zarówno kontur rzeczywisty, jak i kontur widzialny /§ 26/ rzeczywistej powierzchni drugiego stopnia jest stożkową. Pierwszy jest miejscem punktów zetknięcia powierzchni ze stożkiem opisanym na niej ze środka rzutów, drugi jest przecięciem tego stożka płaszczyzną rzutów, ponieważ stożek ten jest drugiego stopnia, więc jego przecięcie jest stożkową.

Płaszczyzna biegunowa jest miejscem geometrycznym punktów sprzężonych harmonicznie z biegunem względem punktów, w których sieczne, wychodzące z bieguna, przebijają powierzchnię. Wyprowadzamy z bieguna M sieczną n , która przebiega powierzchnię w punktach A i B a płaszczyznę biegunową M w punkcie N /Rys. 395/. Punkty A i B są punktami podwójnymi involucji biegunowej na siecznej n , a punkty M i N są w tej involucji sprzężone, bo punkt N leży w płaszczyźnie biegunowej punktu M . Otóż wiadomo, /§ 151/, że punk-



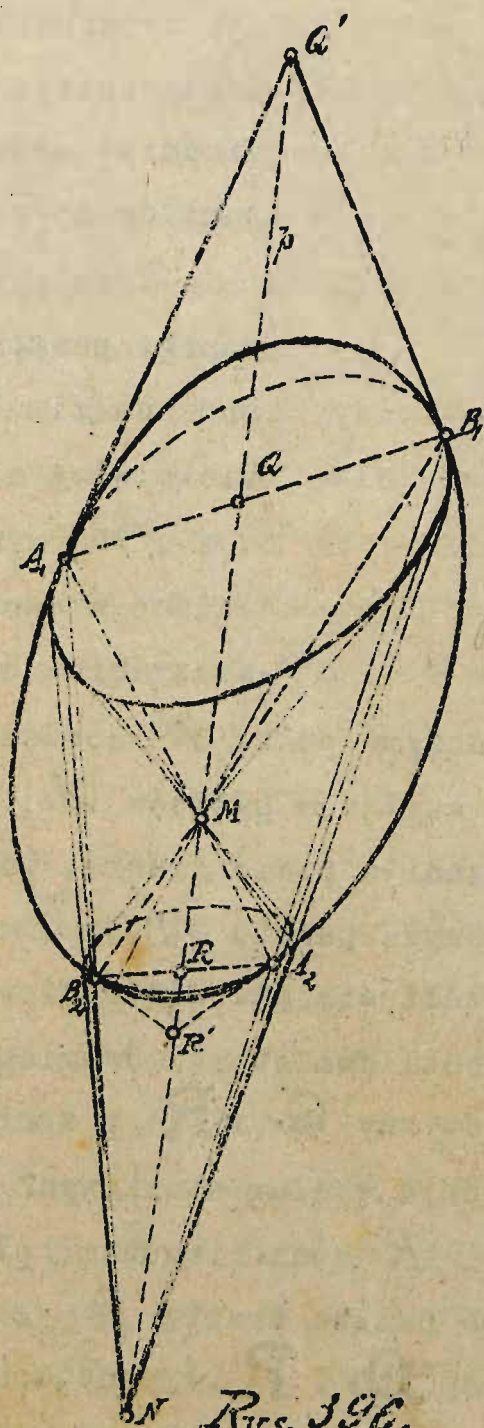
Rys. 395.

ty podwójne involu-
cji hyperbolicznej
przegradzają harmo-
nicznie każdą parę
punktów sprzężonych.

Jeżeli więc z
danego punktu M
poprowadzimy 3 ja-
kiegolwiek sieczne
 n, n, n , nie
leżące w jednej płą-
szczyźnie /Rys. 395/

i na każdej z nich wyznaczymy punkt N sprzężony har-
monicznie z punktem M względem punktów A i B ,
w których ta sieczna przebija powierzchnię, to N, N, N
będzie płaszczyzną biegunową punktu M .

Przez każde dwa przecięcia płaskie powierzchni
drugiego stopnia przechodzą dwa stożki drugiego stop-
nia. Niechaj dwie płaszczyzny Q i R przecinają po-
wierzchnię drugiego stopnia według stożkowych k_1 i k_2
/Rys. 396/, niechaj Q' i R' będą biegunami płaszczyzn
 Q i R , połączmy te punkty prostą p , która nie-
chaj przetnie płaszczyzny Q i R w punktach Q i R
Przez prostą p poprowadźmy dowolną płaszczyznę



Rys. 396.

sieczną P
/np. płaszczyznę kon-
turu rzeczy-
wistego po-
wierzchni/,
która przet-
nie powierz-
chnię według
stożkowej k
a płaszczyzny

Q i R

według pro-
stych A, B ,
i A_2, B_2 ,
które są bie-
gunowemi

punktów Q'
i R' wzglę-
dem stożko-
wej k . Wy-
kreślmy punk-
ty przekątne

M i N

czworokąta zupełnego A, B, A_2, B_2 wpisanego w stożkową;
na zasadzie § 186 punkty M i N leżą na prostej

$Q'R' = p$. Powiadam, że punkty M i N są stałymi punktami tej prostej, t.j. nie zależą od płaszczyzny P , tak że gdy płaszczyzna sieczna P obraca się dokoła prostej p , punkty te nie zmieniają swego położenia. W samej rzeczy, punkty te są 1/ sprzężone w inwolucji biegunowej danej przez dwie pary stałych punktów Q, Q' i R, R' 2/ sprzężone harmonicznie względem punktów Q i R /t.j. sprzężone w inwolucji hyperbolicznej, której punkty Q i R są punktami podwójnymi/ co wynika z własności czworoboku zupełnego o bokach

A, A_2 , A_2, B_1 , B_1, B_2 i B_2, A_1 , którego MN jest jedną przekątną, a A, B_1 i A_2, B_2 są dwiema innymi przekątnymi, punkty M i N są przeto wspólną parą punktów sprzężonych dwóch inwolucji i jako takie mogą być wyznaczone niezależnie od płaszczyzny P /§ 152/. Znalezione w ten sposób punkty M i N są wierzchołkami dwóch stożków, z których każdy przechodzi przez stożkowe k_1 i k_2 .

Z twierdzenia tego wynika ważny wniosek, że przecięcia powierzchni drugiego stopnia płaszczyznami równoległymi są stożkowymi podobnymi, - są to bowiem zarazem przecięcia równoległe stożka drugiego stopnia. Je-

żeli więc np. pewne przecięcie powierzchni drugiego stopnia jest kołem, to wszystkie przecięcia do niego równoległe są kołami.

Twierdzeniem wzajemnem do powyższego będzie: Krzywa przenikania dwóch stożków opisanych na powierzchni drugiego stopnia składa się z dwóch stożkowych.

§ 210. Srodek, średnice, osie, stożek asymptotyczny. Biegun płaszczyzny niewłaściwej nazywa się środkiem powierzchni drugiego stopnia; płaszczyzna biegunowa każdego punktu niewłaściwego nazywa się płaszczyzną średnicową; prosta biegunowa każdej prostej niewłaściwej nazywa się średnicą. Wszystkie płaszczyzny średnicowe i średnice przechodzą przez srodek, albowiem bieguny tych płaszczyzn i biegunowe tych prostych leżą w płaszczyźnie biegunowej środka, t.j. w płaszczyźnie niewłaściwej. Odcinek siecznej, zawarty pomiędzy punktami przebicia powierzchni nazywa się cięciwą i gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, to cięciwę leżącą na średnicy nazywamy poprostu średnicą. Srodek powierzchni jest zarazem środkiem każdego przecięcia powierzchni płaszczyzną średnicową i środkiem każdej "średnicy".

Jeżeli wierzchołkiem czworościanu biegunowego jest srodek powierzchni, to krawędzie tego czworościanu wychodzące ze środka, są średnicami sprzężonemi. Cię-

ciwy równoległe do jednej z trzech średnic sprzężonych są przez płaszczyznę dwóch pozostałych przecięte na połowy; płaszczyzny sieczne równoległe do dwóch średnic sprzężonych są przez trzecią przebite w środkach stożkowych przecięcia. Płaszczyzny styczne w końcach jednej z 3-ch średnic sprzężonych są równoległe do płaszczyzny dwóch pozostałych średnic. Każde diwe średnice sprzężone powierzchni są zarazem średnicami sprzężeniami stożkowej według której płaszczyzna tych średnic przecina powierzchnię.

Można dowieść, że istnieje zawsze układ trzech średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych /dowód musi tutaj być pominięty/; każdą z tych trzech średnic nazywamy osią powierzchni; punkty w których oś przebija powierzchnię nazywamy wierzchołkami. Płaszczyzna dwóch którejkolwiek osi jest dla powierzchni płaszczyzną symetrii prostokątnej; każda z osi jest osią symetrii prostokątnej. Jeżeli przecięcie prostopadłe do jednej z osi jest kołem, to wszystkie przecięcia do niej prostopadłe są kołami i powierzchnia nazywa się obrotową; wszystkie średnice prostopadłe do osi obrotu są osiami tej powierzchni.

Stżek opisany na powierzchni drugiego stopnia z jej środka nazywa się stożkiem asymptotycznym tej po-

wierzchni, z którą posiada wspólne osie. Stożkowa zetknięcia tego stożka z powierzchnią leży w płaszczyźnie niewłaściwej. Każde dwie tworzące tego stożka są asymptotami stożkowej, według której płaszczyzna tych tworzących przecina powierzchnię.

§ 211. Klasyfikacja powierzchni drugiego stopnia. W § 208 odróżniliśmy 3 rodzaje układów biegunowych przestrzennych zależnie od tego, czy istnieją punkty, płaszczyzny i proste samosprężone. Na tej zasadzie dzielimy powierzchnie drugiego stopnia na urojone, krzywokreślne i prostokreślne. Druga zasada klasyfikacji polega na zachowaniu się tych powierzchni względem płaszczyzny niewłaściwej, która może dla tych powierzchni być zewnętrzną /elipsoid/, sieczną /hyperboloidy/ lub styczną /paraboloidy/.

§ 212. Powierzchnie urojone odpowiadają układom biegunowym I rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu, leżącego wewnątrz czworościanu biegunowego, nie przecina żadnej jego krawędzi. Wszystkie punkty tej powierzchni i wszystkie płaszczyzny do niej styczne są urojone. Każdy /rzeczywisty/ punkt jest względem tej powierzchni wewnętrznym; każda płaszczyzna i prosta - zewnętrzna. Środek, średnica i osie są tutaj, jak zresztą zawsze, rzeczywiste. Ponieważ płaszczyzna

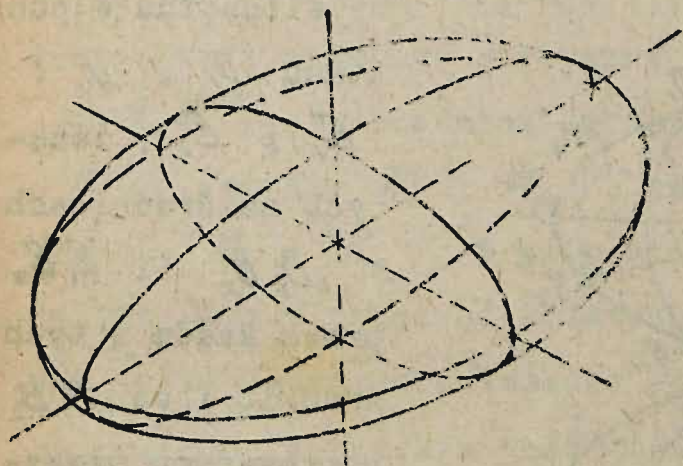
niewłaściwa jest względem tej powierzchni zewnętrzna; możemy przeto powierzchnię urojoną uważać za elipsoid.

§ 213. Powierzchnie krzywokreślnie odpowiadają układom biegunowym II rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu, leżącego wewnątrz czworościanu biegunowego, przecina trzy jego krawędzie. Punkty samosprężone stanowią punkty tej powierzchni, płaszczyzny samosprężone są styczne do niej; istnieją zatem tutaj zarówno rzeczywiste jak i urojone punkty leżące na powierzchni i płaszczyzny styczne do niej. Natomiast nie istnieją w tych układach rzeczywiste proste samosprężone, t.j. rzeczywiste tworzące powierzchni. Z pośród prostych rzeczywistych jedno są zewnętrzne względem powierzchni /jeżeli inwolucja biegunowa jest na nich eliptyczna/, inne są sieczne /gdy inwolucja biegunowa jest na nich hyperboliczna/, jeszcze inne są styczne do powierzchni /gdy inwolucja biegunowa jest na niej paraboliczna/. Przez sieczną nie można poprowadzić do powierzchni rzeczywistej płaszczyzny stycznej /bo inwolucja biegunowa dokoła siecznej jest eliptyczna/; przez prostą zewnętrzną przechodzą dwie płaszczyzny styczne /bo inwolucja dokoła niej jest hyperboliczna; płaszczyzny te zostaną zjednoczone, gdy prosta zewnętrzna stanie się styczną. Styczne do powierzchni w którymkolwiek

jej punkcie leżą wszystkie w płaszczyźnie stycznej i stanowią dokoła punktu zetknięcia eliptyczną involucję prostych sprzężonych. Z pośród rzeczywistych punktów, nie leżących na powierzchni jedno są wewnętrzne /jeżeli układ biegunowy wiązki dokoła nich jest jednostajny/, inne zewnętrzne /gdy ten układ jest niejednostajny/. Z każdego punktu zewnętrznego można opisać na powierzchni rzeczywisty stożek drugiego stopnia; natomiast stożek opisany z punktu wewnętrznego jest urojony.

Z pośród rzeczywistych płaszczyzn, które nie są styczne do powierzchni, jedno są zewnętrzne /jeżeli układ biegunowy płaski jest na nich jednostajny/, inne są sieczne /gdy ten układ jest na nich niejednostajny/. Każda płaszczyzna sieczna przecina powierzchnię według stożkowej rzeczywistej; płaszczyzna zewnętrzna powierzchni nie przecina, lub raczej przecina ją według stożkowej urojonej. Płaszczyzna biegunowa punktu zewnętrznego jest sieczną; płaszczyzna biegunowa punktu wewnętrznego jest zewnętrzną.

a/ Powierzchnia drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa, jest zewnętrzną, t.j. której środkiem jest punktem wewnętrznym, nazywa się elipsoidem. Wszystkie średnice, a więc i osie są siecznami, wszyst-

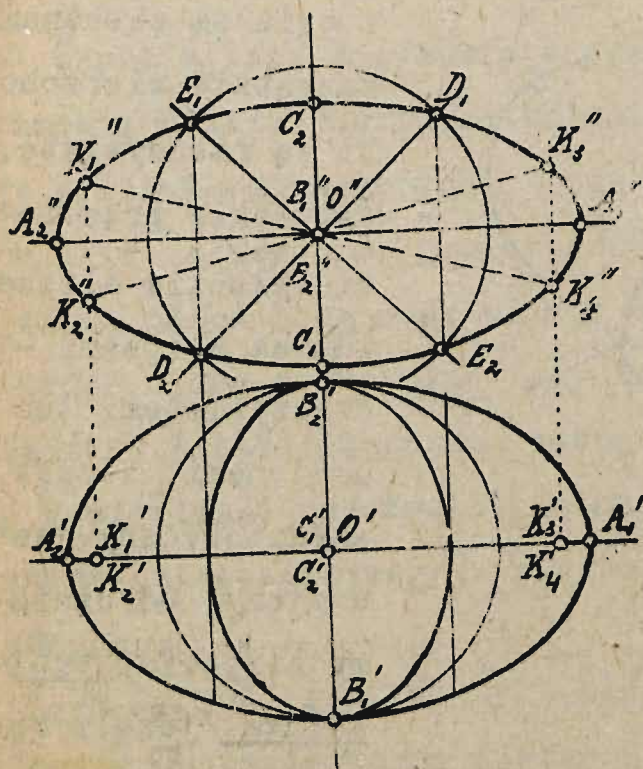


Rys. 398

kie średnice, a więc i osie są siecznami, wszystkie wierzchołki są rzeczywiste, wszystkie przecięcia płaskie elipsoidu są elipsami - rzeczywistymi lub urojonymi; stożek asymptotyczny jest urojony. Odróżniamy elipsoidy trójosiowe /jeżeli cię-

ciwy osiowe są nierówne/, obrotowe /jeżeli dwie cięciwy osiowe są równe/, a wśród nich elipsoid splaszczony, wydłużony i kulę, zależnie od tego czy oś obrotu jest krótsza, dłuższa lub równa każdej z dwóch osi równych.

W elipsoidzie trójosiowym istnieją dwa ustawienia których płaszczyzny przecinają powierzchnię według kół. Niechaj będą dane w rzutach prostokątnych /Rys. 398/ trzy osie A, A_1 , B, B_1 i C, C_1 elipsoidu i przypuśćmy, że $A, A_1 > B, B_1 > C, C_1$. Ze środka O zakreslmy kulę o średnicy równej średniej osi B, B_1 , jej pionowy kontur rzeczywisty będzie kołem, przecinają-



Rys. 398.

cem kontur pionowy elipsoidu w punktach D_1 , D_2 ,

E_1 i E_2 , leżących na średnicach

$D_1 D_2$ i $E_1 E_2$ przez każdą z tych średnic i oś $B_1 B_2$

poprowadźmy płaszczyznę: **D** i **E**

Przecięcie kuli płaszczyzną **D**

jest kołem, a przecięcie elipsoidu tą samą płaszczyzną jest elipsą,

która z tym kołem ma wspólne punkty D_1 , D_2 , E_1 i

E_2 i styczne w punktach B_1 i B_2 , a więc jest

z niem identyczna /§ 181/; płaszczyzna **D** i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe przecinają więc powierzchnię według kół;

tak samo płaszczyzna **E** i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe. Dotyczy to nie tylko

płaszczyzn siecznych, ale i zewnętrznych /koła urejone/ i w szczególności stycznych /inwolucja ortotekalna pro-

stokątna prostych sprzężonych/, których punkty zetknięcia z powierzchnią nazywają się punktami kołowymi powierzchni i mogą być otrzymane w przecięciu elipsy

A, A_2, C, C_2 średnicą sprzężoną bądź ze średnicą

D, D_2 /punkty H_1 i K_2 /, bądź ze średnicą E, E_2

/punkty K_2 i K_3 /. W elipsoidzie trójosiowym istnieją dwa układy przecięć kołowych w elipsoidzie obrotowym tylko jeden, prostopadły do osi obrotu, w kuli każde przecięcie płaskie jest kołem. W elipsoidzie trójosiowym istnieją 4 punkty kołowe, w obrotowym tylko dwa /wierzchołki osi obrotu/, w kuli wszystkie punkty powierzchni są wierzchołkami i punktami kołowymi.

Rzut jakiegokolwiek przecięcia płaskiego K elipsoidu z punktu kołowego K na płaszczyznę P odpowiedniego przecięcia kołowego, t.j. na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej w punkcie K , jest kołem. W samej rzeczy, punkt kołowy K jest zwyrodniałem przecięciem kołowym powierzchni płaszczyzną styczną w tym punkcie; przecięcie stożka rzucającego płaszczyznę P równoległą do płaszczyzny stycznej musi być figurą podobną do tego zwyrodniałego koła, a więc musi też być kołem. Jeżeli elipsoid jest kulą, to rzut taki nazywa się stereograficznym; środkiem rzutów jest jakiegokolwiek punkt powierzchni kuli K .

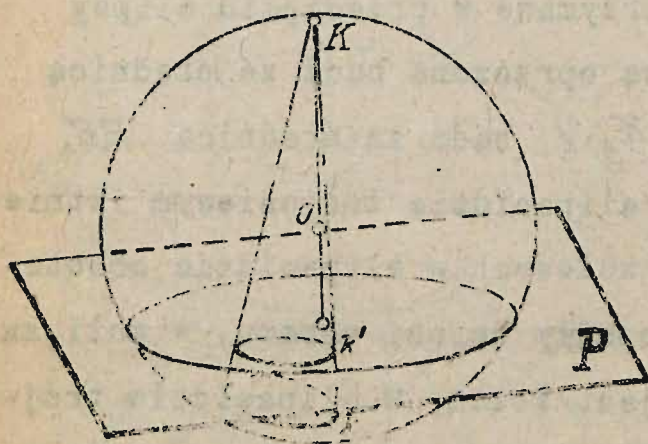
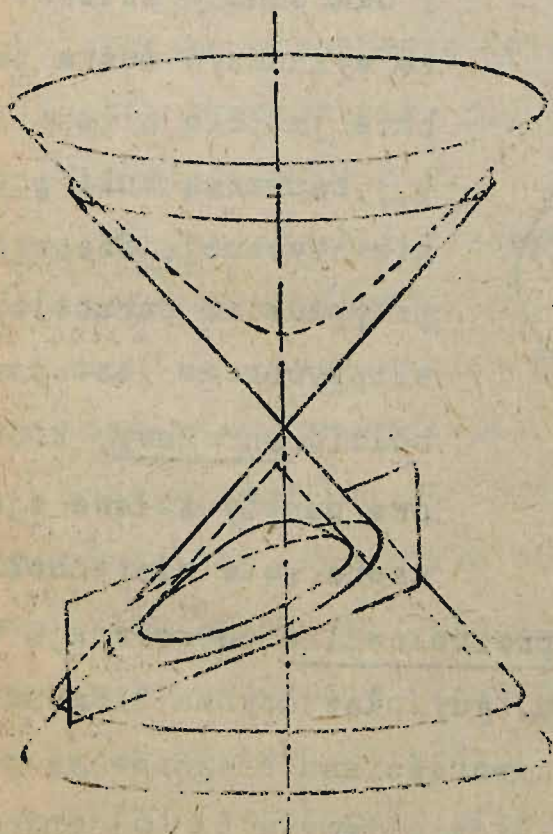


Fig. 399.

a płaszczyzną rzutów jest jakakolwiek płaszczyzna prostopadła do średnicy OK . Rzut stereograficzny każdego koła leżącego na kuli jest kołem; łatwo okazać, że w rzucie tym zostaje zachowany kąt jakichkolwiek dwóch krzywych przecinających się na powierzchni kuli. Na tej zasadzie rzut stereograficzny ma zastosowanie w teorii funkcji, kartografii i krytalografii.

b/ Powierzchnia krzywekreslna drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest sieczną, t.j. której środek jest punktem zewnętrznym, nazywa się hyperboleidem dwupowłokowym. Z każdych trzech średnic sprzężonych, a więc i z trzech osi, tylko jedna jest sieczną; hyperboloid dwupowłokowy posiada tylko dwa wierzchołki rzeczywiste. Stożek asymptotyczny jest rzeczywisty. Każde przecięcie powierzchni płaszczyzną jest podobne do przecięcia stożka asymptotycznego tą samą płaszczyzną, gdyż pierwsze z tych przecięć jest zarazem przecięciem

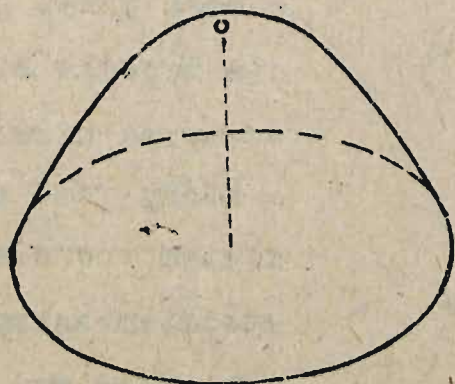


Rys. 400.

stożka, który przechodzi przez przecięcia hyperboloиду płaszczyzną niewłaściwą i który jest przesuniętym równolegle stożkiem asymptetycznym. Stąd wynika, że płaszczyzna, która przecina stożek asymptetyczny według koła, przecina w ten sam sposób i hyperboloida dwupowłokowy. Powierzchnia ta posiada zatem wogóle

4 punkty kołowe, które w hyperboloidzie obrotowym zostaną zjednoczone w dwóch jej wierzchołkach.

c/ Powierzchnia krzywekreslna drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest styczną, nazywa się parabeleidem eliptycznym. Z trzech osi tylko jedna jest właściwą. Każde przecięcie parabeleidu eliptycznego jest elipsą z wyjątkiem przecięć równoległych do osi, które są parabolami. Parabeleid eliptyczny posiada



Rys. 401.

jeden wierzchołek, dwa układy przecięć kołowych i dwa punkty kołowe, które wyznaczyć można podobnie jak dla elipsoidu, t.j. zapomocą kuli podwójnie stycznej. Szczególnym przypadkiem paraboloidu eliptycznego jest paraboloid obrotowy, którego dwa punkty kołowe zjednoczone są w wierzchołku.

§ 214. Powierzchnie prestokreślne odpowiadają układom biegunowym III rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu leżącego wewnątrz czworościanu biegunowego przecina 4 jego krawędzi. Jak widzieliśmy w § 208 istnieją wówczas nie tylko punkty i płaszczyzny, ale i proste samosprężone, zwane tworzącymi powierzchni. Każdy punkt takiej prostej jest punktem powierzchni, każda płaszczyzna, przechodząca przez taką prostą jest styczną do powierzchni. Z pośród innych prostych przestrzeni jedno są styczne, inne zewnętrzne lub wewnętrzne, zależnie od tego, czy inweluca biegunowa jest na nich paraboliczna eliptyczna lub hyperboliczna. W przeciwieństwie do pe-

wierzchni krzywokreślnych przez prostą zewnętrzną nie można poprowadzić płaszczyzny stycznej rzeczywistej a przez sieczną przechodzą dwie takie płaszczyzny. Wszystkie punkty przestrzeni, nie leżące na powierzchni, są względem niej zewnętrzne, t.j. z każdego punktu można opisać na powierzchni rzeczywisty stożek drugiego stopnia; wszystkie płaszczyzny, które nie są styczne, są sieczne, t.j. każda z nich przecina powierzchnię według stożkowej rzeczywistej.

Niechaj prosta a będzie tworzącą powierzchni prostokreślnej. Wszystkie punkty tej prostej leżą na powierzchni, gdyż ich płaszczyzny biegunowe przechodzą przez nie; wszystkie płaszczyzny przechodzące przez tę prostą są styczne do powierzchni, gdyż ich bieguny leżą w nich. Poprowadźmy przez tworzącą a jakąkolwiek płaszczyznę P . Przecnie ona powierzchnię według stożkowej; ponieważ zaś prosta a wchodzi w skład tego przecięcia, więc ową stożkową mogą być tylko dwie przecinające się proste: jedną z nich jest prosta a , drugą niechaj będzie prosta k , przecinająca prostą w pewnym punkcie P , który jest punktem zetknięcia płaszczyzny P z powierzchnią. Prosta k jest tworzącą powierzchni; gdy płaszczyzna P obracać się będzie dookoła prostej a , tworząca k opisywać będzie powie-

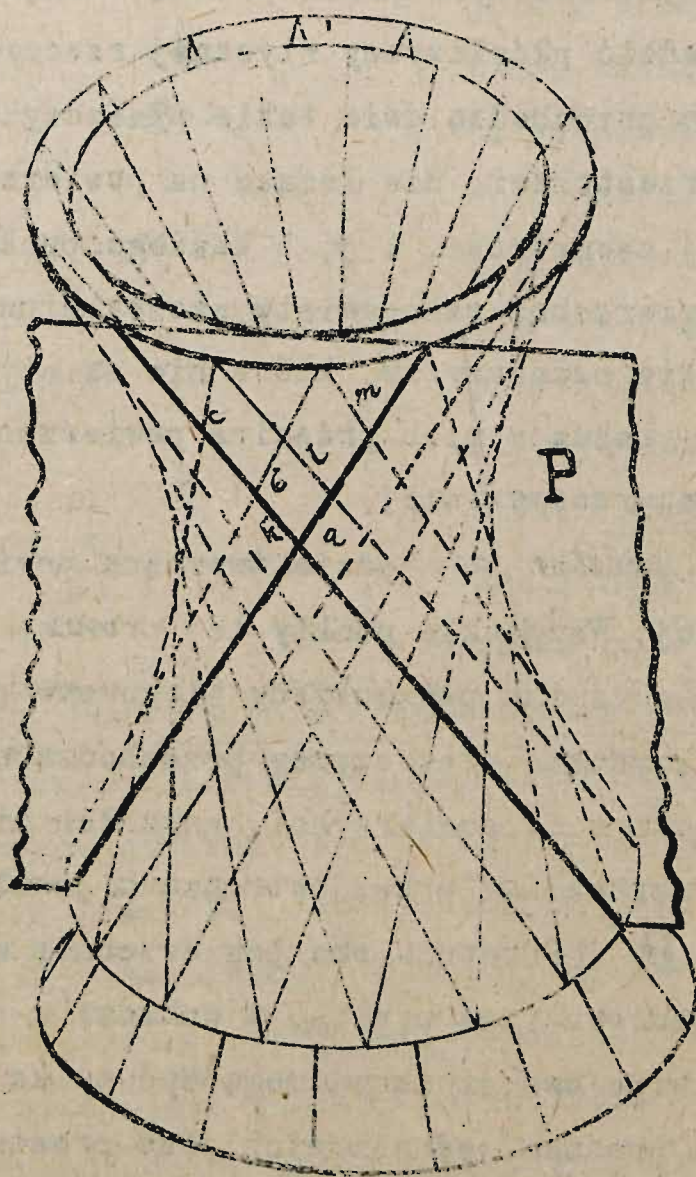


Fig. 102.

rażnię, przecinając tworzącą a w coraz to nowym punkcie P_a zetknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią. Poszczególne położenia tworzącej $k : k, l, m, \dots$ są wszystkie skośno ze sobą, bo gdyby dwie którekolwiek z tych prostych, np. k i l , się przecinały, to ponieważ każda z nich przecina prostą a , więc wszystkie 3 proste a, k i l leżałyby w płaszczyźnie

P , która w ten sposób przecinałaby powierzchnię drugiego stopnia według 3 prostych, co niemożliwe /byłaby to bowiem krzywa 3 rzędu/. Jeżeli płaszczyznę

P obracać będziemy dookoła prostej k , to tworzącą a opisywać będzie powierzchnię, przecinając tworzącą k w coraz to nowym punkcie P_k zetknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią; poszczególne położenia tworzącej $a : a, b, c, \dots$ będą wszystkie skośne ze sobą. W ten sposób na powierzchni prostekrośnie leżą dwa układy tworzących: $k, l, m, \dots; a, b, c, \dots$, mające tę własność, że każde dwie tworzące, należące do tego samego układu są skośne, a każde dwie tworzące, należące do układów różnych się przecinają, tak, że przez każdy punkt powierzchni przechodzą i w każdej płaszczyźnie stycznej leżą dwie tworzące należące do różnych układów.

Niech będą trzy proste skośne a, b i c /kie-

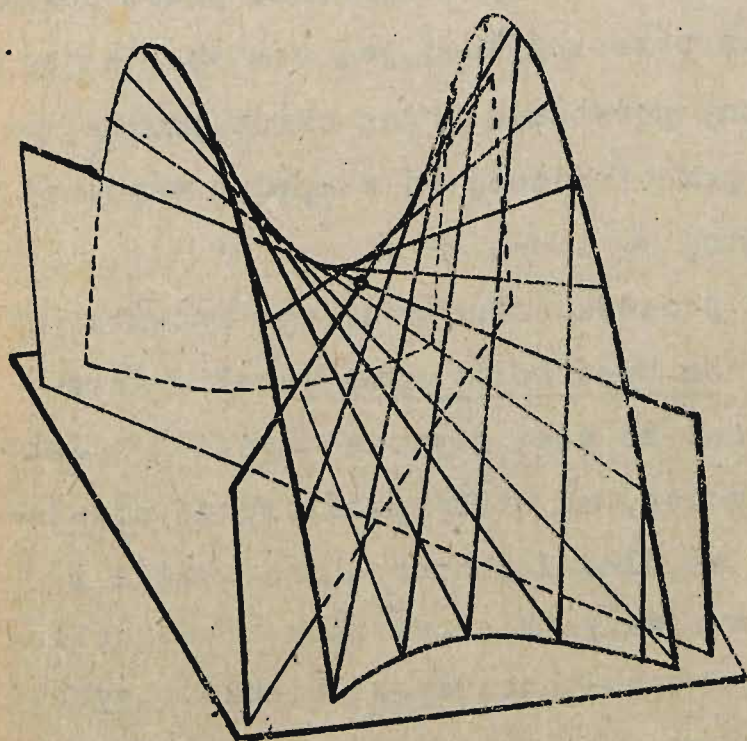
rownice/ i niechaj prosta k /tworząca/ porusza się w ten sposób, że w każdym położeniu przecina wszystkie 3 proste a , b i c /ślizgając się po nich/; powierzchnia opisana przez tworzącą k będzie powierzchnią prostokreślną drugiego stopnia. Jeżeli obierzemy 3 dowolne położenia tworzącej k : k , l i m , o których wiemy, że są skośne, i będziemy poruszali tak prostą

a , aby ona w każdym położeniu przecinała wszystkie trzy proste k , l i m , to tworząca a opisze tę samą powierzchnię prostokreślną.

a/ Powierzchnia prostokreślna drugiego stopnia nazywa się hyperboloidem jednowłokowym, płaszczyzna niewłaściwa jest względem niej sieczną /Rys. 402/. Z pośród trzech średnic sprzężonych, a więc i z pośród trzech osi, dwie są siecznymi; stożek asymptotyczny jest rzeczywisty, każda jego tworząca jest równoległa do jednej z tworzących hyperboloidu każdego układu. Tak samo, jak w powierzchniach krzywkreślnych istnieją i tutaj dwa układy przecięć kołowych; płaszczyzny przecinające hyperboloid według kół, przecinają jego stożek asymptotyczny według kół spółśredkowych. Wszystkie 4 punkty kołowe są wszakże urojone, albowiem średnica sprzężona z dwiema wzajemnie prostopadłymi średnicami przecięcia kołowego, przechodzącego przez środek

powierzchni, nie przebija powierzchni w punktach rzeczywistych. Hyperboloid jednopowłokowy stanie się obrotowy, jeżeli oba układy przecięć kołowych zostaną zjednoczone, powierzchnia taka może być utworzona przez obrót prostej a dookoła nie przecinającej jej osi o , a jej stosunek asymptotyczny powstanie przez obrót prostej równoległej do a i przecinającej o w spodku wspólnej prostopadłej do prostej a i osi o .

b/ Powierzchnia prostokreślna drugiego stopnia nazywa się paraboloidem hyperbolicznym, jeżeli płaszczyzna niewłaściwa jest do niej styczna /Rys. 403/. Jak każda płaszczyzna styczna, ma wtedy płaszczyzna niewłaściwa dwie tworzące wspólne z powierzchnią, każda z innego układu. Ponieważ wszystkie tworzące właściwe I układu przecinają tę z tych tworzących niewłaściwych która należy do II układu, a wszystkie tworzące II układu przecinają tę z nich, która należy do I układu, więc tworzące każdego układu mają wspólne ustawienie. Paraboloid hyperboliczny może przeto być utworzony przez ruch prostej ślizgającej się po trzech prostych równoległych do jednej płaszczyzny, wszystkie położenia tej tworzącej będą równoległe do innej płaszczyzny. Z trzech osi tylko jedna pozostaje właściwą. Płaszczyzny, przechodzące przez tę o w danych dwóch ustawieniach, są



Rys. 403.

zwyrodnia-
łym stoż-
kiem asymp-
totycznym
tej powierz-
chni. Każde
przecięcie
paraboloidu
hyperbolicz-
nego jest
hyperbolą
z wyjątkiem
przecięć
równoległych
do osi, któ-
re są para-
bolami. Pa-
raboloid

hyperboliczny jest jedyną powierzchnią drugiego stopnia, która nie posiada przecięć kołowych i która nie może być obrotową.

§ 215. Powierzchnie drugiego stopnia zwyrodniałe.
Układ biegunowy przestrzenny określiliśmy zapomocą
czworościanu biegunowego A, A_2, A_3, A_4 i płaszczyzny

biegunowej B punktu jakiegokolwiek B z tem zastrzeżeniem, że punkt B nie leży w żadnej ze ścian, a płaszczyzna B nie przechodzi przez żaden z wierzchołków czworoscianu $A_1 A_2 A_3 A_4$. Odrzućmy teraz te zastrzeżenia.

Przypuśćmy najpierw, że płaszczyzna biegunowa B punktu jakiegokolwiek B przechodzi przez jeden z wierzchołków czworoscianu biegunowego, np. przez A_4 , układy biegunowe płaskie na ścianach zawierających wierzchołek A_4 będą zwyrodniałe, na ścianie zaś $A_1 A_2 A_3$ układ biegunowy płaski może być albo jednostajny, albo niejednostajny. Płaszczyzna biegunowa każdego punktu M przechodzi przez A_4 , natomiast biegun każdej płaszczyzny M jest nieoznaczony, może to być mianowicie dowolny punkt pewnej prostej m , przechodzącej przez A_4 . W ten sposób układ biegunowy przestrzenny staje się układem biegunowym wiązki dookoła punktu A_4 zależnie od tego, czy ten układ będzie jednostajny lub niejednostajny, powierzchnia tego układu będzie stożkiem urojonym lub rzeczywistym. Gdy płaszczyzna B przechodzi przez dwa wierzchołki czworoscianu biegunowego, A_4 i A_1 , to jest przez krawędź $A_4 A_1$, stożek ten zniekształca się do dwóch płaszczyzn urojonych sprzężonych lub rzeczywistych, przecinających się we-

dług krawędzi A_1A_2 .

Stożek urojony lub rzeczywisty oraz dwie płaszczyzny urojone sprzężone lub rzeczywiste stanowią powierzchnię drugiego rzędu /bo każda prosta przebija ją w dwóch punktach / i klasy zerowej /bo przez dowolną prostą nie można wogóle do niej wyprowadzić żadnej płaszczyzny stycznej/.

Przypuśćmy następnie, że biegun B jakiegokolwiek danej płaszczyzny B leży w jednej ze ścian czworościanu biegunowego, np. w ścianie $A_1A_2A_3$. Układ biegunowy przestrzenny staje się wtedy układem biegunowym płaskim w tej ścianie, zależnie od tego, czy ten układ jest jednostajny lub niejednostajny, powierzchnia tej biegunowości jest stożkową urojoną lub rzeczywistą. - Gdy punkt B leży na jednej z krawędzi czworościanu biegunowego, np. na A_1A_2 , ta stożkowa zniekształca się do dwóch punktów urojonych sprzężonych lub rzeczywistych, leżących na tej krawędzi.

Stożkowa urojona lub rzeczywista oraz dwa punkty urojone, sprzężone lub rzeczywiste stanowią powierzchnię drugiej klasy /bo przez każdą prostą można do niej przeprowadzić dwie płaszczyzny styczne/ i rzędu zerowego / bo dana prosta wogóle jej nie przebija/.

Streszczając powyższe, możemy podzielić powierz-

chnie drugiego stopnia jak następuje:

I. POWIERZCHNIE DRUGIEGO RZĘDU I DRUGIEJ KLASY

Powierzchnie krzywokreślne.

1. Powierzchnia /elipsoid/ urojona.
2. Elipsoid rzeczywisty.
3. Hyperboloid dwupowłokowy.
4. Paraboloid eliptyczny.

Powierzchnie prostokreślne.

5. Hyperboloid jednopowłokowy
6. Paraboloid hyperboliczny

II. POWIERZCHNIE DRUGIEGO

RZĘDU I KLASY ZEROWEJ

7. Stożek urojony
8. 2 płaszczyzny urojone sprzężone.
9. Stożek rzeczywisty.
10. Dwie płaszczyzny rzeczywiste.

III. POWIERZCHNIE DRUGIEJ

KLASY I RZĘDU ZEROWEGO.

11. Stożkowa urojona
12. Dwa punkty urojone sprzężone.
13. Stożkowa rzeczywista
14. Dwa punkty rzeczywiste

C Z E Ś C V.

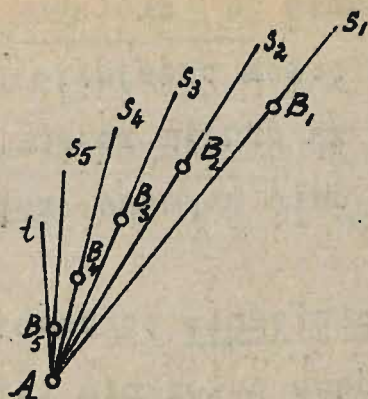
KRZYWE I POWIERZCHNIE W OGÓLNOŚCI.

ROZDZIAŁ XVI. KRZYWE PŁASKIE.

§ 216. Krzywa płaska jako miejsce i jako obwiednia. Przy badaniu stożkowych rzeczywistych rozważaliśmy te krzywe z dwojakiego stanowiska: albo jako miejsce geometryczne poruszającego się według pewnego prawa punktu, który tę krzywą opisuje, albo jako obwiednię poruszającej się według pewnego prawa prostej, która tę krzywą powłóczy. Ta dwoistość określenia tej samej krzywej nie ogranicza się bynajmniej do stożkowych ale dotyczy wogóle wszystkich krzywych płaskich. Każda krzywa płaska jest zarazem miejscem i obwiednią.

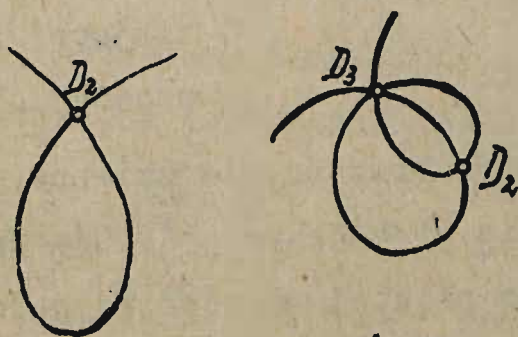
Gdy krzywą k uważamy za miejsce poruszającego się punktu, to możemy dla każdego położenia tego punktu /z pewnymi wyjątkami, o których zaraz będzie mowa/ określić prostą przez ten punkt przechodzącą i zwaną styczną do krzywej k w tym punkcie.

Z pośród położen poruszającego się punktu obierzmy jedno stałe A /Rys. 404/ oraz drugie zmienne B i



Rys. 404.

i t.d. będą stanowiły ciąg promieni pęku A . Prosta t , która jest granicą ciągu tych siecznych, gdy odcinek AB dąży do zera, nazywa się styczną do krzywej k w punkcie A , punkt A nazywa się jej punktem zetknięcia z krzywą.



Rys. 405.

połączmy $AB \equiv s$

Gdy punkt B zbliżać się będzie do punktu A poprzez punkty

B_1, B_2, B_3, \dots

krzywej, tak że odcinek AB maleć będzie nieograniczenie,

to sieczne: $s_1 = AB_1$,

$s_2 = AB_2, s_3 = AB_3$

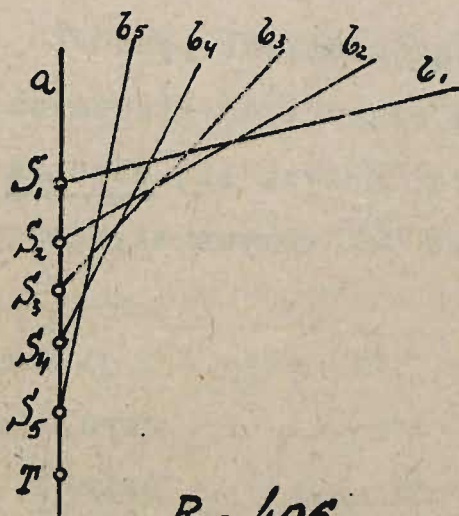
Może się zdarzyć, że punkt B opisujący krzywą przejdzie przez ten sam punkt płaszczyzny D dwa lub więcej razy /Rys. 405/, punkt taki nazy-

wa się punktem podwójnym względnie n -krotnym. Wogóle punkt ruchomy B za pierwszym razem nadejdzie do punktu D poprzez inne punkty niż za drugim razem, w punkcie podwójnym mamy tedy wogóle dwie styczne, w punkcie n -krotnym - n stycznych.

Gdy krzywą κ uważamy za obwiednię poruszającej się prostej, to możemy dla każdego położenia tej prostej, z pewnymi wyjątkami, o których zaraz będzie mowa

określić punkt na tej prostej leżący i zwany punktem zetknięcia tej prostej z krzywą κ .

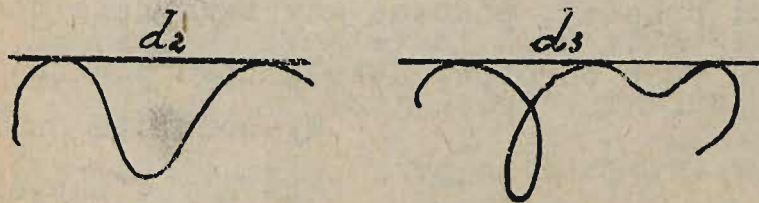
Z pośród położeń poruszającej się prostej obierz-



Rys. 406.

my jedno stałe a /Rys. 406/ oraz drugie zmiennie b i wyznaczmy punkt przecięcia $ab \equiv S$. Gdy prosta b zbliżać się będzie do prostej a poprzez położenia b_1, b_2, b_3, \dots , tak, że kąt $/ab/$ maleć będzie nieograniczenie, to punkty $S_1 \equiv ab_1, S_2 \equiv ab_2, S_3 \equiv ab_3$, i t. d. będą stanowiły ciąg punktów

prostej a . Punkt T , który jest granicą ciągu tych punktów, gdy kąt $/ a \hat{b} /$ dąży do zera, nazywa się punktem zetknięcia prostej a z krzywą k , prosta a nazywa się styczną do krzywej w tym punkcie.



Rys. 407.

Może się zdarzyć że prosta b powłóczająca krzywą przystanie do tej samej prostej płaszczyzny d dwa

lub więcej razy /Rys. 407/, prosta taka nazywa się styczną podwójną, względnie n -krotną. Wogóle prosta ruchoma b za pierwszym razem przystanie do prostej d po przejściu innych położeń niż za drugim razem, na stycznej podwójnej leżeć tedy będą wogóle dwa punkty zetknięcia, na stycznej n -krotnej - n punktów zetknięcia.

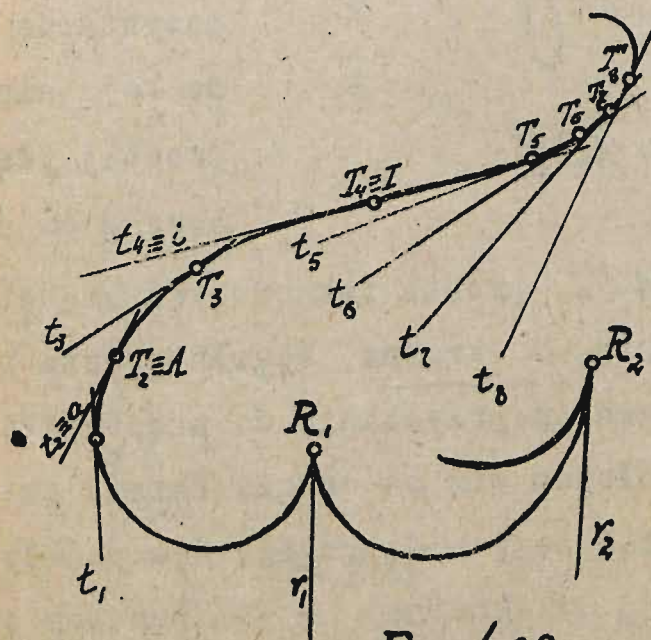
Możemy odtąd uważać, że krzywa k powstaje jednocześnie obu sposobami: jako miejsce poruszającego się punktu i jako obwiednia stycznej w tym punkcie. Wyobraźmy sobie, że punkt T porusza się po prostej ϵ , podczas gdy ta prosta obraca się jednocześnie dokoła

punktu T . W każdym położeniu punktu T prosta t jest styczną do krzywej w tym punkcie; w ten sposób, gdy punkt T opisuje krzywą, prosta t jednocześnie ją powłóczy.

Gdy np. tniemy papier nożycami, to punkt spotkania się dwóch ostrzy nożyc, trzymanych w prawej ręce, posuwa się wzdłuż prostej, podczas gdy lewa ręka nadaje kartce papieru ruch obrotowy dokoła tego punktu.

Wychodzi to na to, jak gdyby papier był nieruchomy, a prosta przez nożyce wycinana obracała się dokoła tego punktu w przeciwną stronę.

Jeżeli w pewnym punkcie A krzywej /Rys.408/ ani ruch punktu



Rys.408.

T po prostej t , ani obrót tej prostej dokoła punktu T nie zmienia zwrotu, t.j. gdy punkt T przechodzi na prostej t z jednej strony punktu A na drugą a jednocześnie ta prosta przechodzi z jednej strony

prostej a na drugą, to punkt A i styczna a nazywają się punktem zwyczajnym i styczną zwyczajną krzywej. Takie są np. wszystkie punkty łuku, wycinanego nożycami z papieru, jeżeli w ciągu wycinania ruch nożyc nie został zatrzymany, a kartka papieru była obracana wciąż w tę samą stronę. Z określenia punktu zwyczajnego wynika, że punkty krzywej nieskończenie mu bliskie, a po obu jego stronach leżące, znajdują się po tej samej stronie stycznej, strona ta nazywa się stroną wklęsłości krzywej w punkcie A .

Jeżeli punkt T przechodzi na prostej t przez punkt J z jednej jego strony na drugą, podczas gdy prosta t zatrzymuje się w położeniu i , aby natychmiast zmienić zwrot obrotu na przeciwny, to punkt J jest punktem przegięcia krzywej, a styczna i w tym punkcie jest styczną przegięcia. Przy wycinaniu papieru nożycami otrzymamy taki punkt w chwili, gdy nie przerywając prawą ręką ruchu nożyc, zmienimy lewą ręką nagle zwrot obrotu kartki papieru.

Jest rzeczą oczywistą, że punkty krzywej nieskończenie bliskie punktu przegięcia, a po obu jego stronach leżące, znajdują się po przeciwnych stronach stycznej przegięcia; styczna ta przechodzi zatem w punkcie przegięcia z jednej strony krzywej na drugą.

Jeżeli prosta t nie przestaje w pewnym położeniu \mathcal{K} obracać się w tę samą wciąż stronę, podczas gdy punkt T , dokoła którego jej obrót się odbywa, zatrzyma się w punkcie R , aby zmienić zwrot swego ruchu na tej prostej, to prosta \mathcal{K} nazywa się styczną zwrotu, a punkt R , punktem zwrotu I rodzaju. Zapomocą krajania papieru nożycami trudniej taki punkt otrzymać, ponieważ nożyce krają w jedną tylko stronę; należałoby więc, doszedłszy do punktu i przerwawszy krajanie, wykonać dodatkowo obrót papieru o 180° , poczem, rozpoczynając krajanie, obracać papier w tę samą stronę, co poprzednio.

Wreszcie może się zdarzyć, że w pewnej chwili jednocześnie ulegają zatrzymaniu i doznają zmiany zwrotu zarówno ruch punktu T wzdłuż prostej t , jak i obrót prostej t dokoła punktu T . Punkt R_2 , w którym to następuje, nazywa się punktem zwrotu II rodzaju albo dziobem. Dziób krzywej jest przeto zjednoczonym punktem przegięcia i punktem zwrotu I rodzaju. Aby otrzymać taki punkt na krzywej wyciątanej nożycami z papieru, należałoby dosięgłszy punktu R_2 , przerwać krajanie, wykonać obrót papieru o 180° , poczem, rozpoczynając krajanie, obracać papier w przeciwną stronę niż poprzednio.

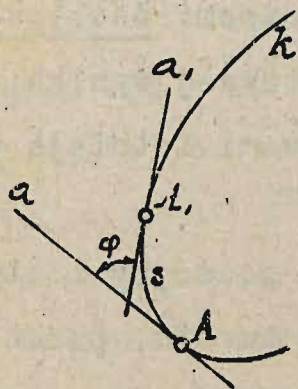
Punkty i styczne: podwójne, wielokrotne, przegięcia i zwroty nazywamy punktami i stycznymi osobliwymi. Z samego określenia tych elementów krzywej wynika, że pomiędzy punktami i stycznymi osobliwymi istnieje wzajemność dwoista.

Wzajemnymi są mianowicie: punkt podwójny i styczna podwójna, punkt przegięcia i styczna zwrotu, punkt zwrotu i styczna przegięcia.

§ 217. Koło krawizny. Ponieważ krzywa k powstaje przez obrót prostej t dookoła jej punktu T , który się na niej jednocześnie porusza, więc wszystkie własności krzywej w pobliżu danego jej punktu A zależą muszą wyłącznie od ilorazu szybkości tych dwóch ruchów w chwili, gdy punkt T przechodzi przez punkt A , t.j. od krawizny K w tym punkcie. Ujmiemy to określenie nieco ściślej.

Niech będą na krzywej k punkt zwyczajny A i punkt jakikolwiek A_1 , /Rys. 409/. Poprowadźmy w tych punktach styczne a i a_1 . Długość wyprostowanego łuku AA_1 , oznaczamy przez s ; naturalną miarę kąta $/aa_1/$ oznaczamy przez φ . Krzywną średnią krzywej k między punktami A i A_1 , nazywamy iloraz:

$$K_s = \frac{\varphi}{s};$$



Rys. 408.

Gdy punkt A_1 zbli-
żać się będzie ku
punktowi A , to
łuk s będzie malał
nieograniczenie,
jednocześnie maleć
będzie nieogranicze-
nie kąt φ , który
jest funkcją łuku
 s . Krzywizną rze-
czywistą krzywej k

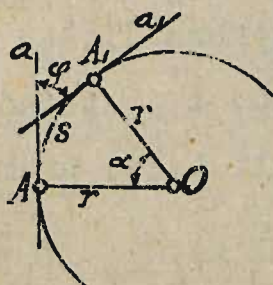
w punkcie A nazywa się granicą ilorazu $\frac{\varphi}{s}$, gdy s
dąży do zera, czyli

$$\kappa = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s)}{s} = \frac{d\varphi}{ds};$$

Nieskończenie malejący łuk ds nazywamy elemen-
tem krzywej k ; zależny od niego, nieskończenie maleją-
cy kąt $d\varphi$ między stycznymi w końcach elementu ds
nazywamy kątem styczności. Możemy więc powiedzieć, że
krzywizną w punkcie A krzywej nazywa się iloraz kąta
styczności przez odpowiadający mu element krzywej w
punkcie A . W punkcie przegięcia I kąt styczności

$$d\varphi = 0; \text{ , a więc krzywizna w tym punkcie } \kappa = 0$$

W punkcie zwrotu I rodzaju R , $ds = 0$; $\kappa = \infty$.



Rys. 410.

Wśród krzywych płaskich jest jedna, której krzywizna w każdym punkcie jest stała: jest to koło.

W samej rzeczy, niech będzie koło O /Rys. 410/ promienia r i na nim dwa punkty A

i A_1 , oraz styczne a i a_1 w tych punktach, kąt między temi stycznymi φ kątowi α między promieniami punktów A i A_1 , łuk $AA_1 \equiv s = r\alpha$, a więc krzywizna średnia

$$\kappa_1 = \frac{\varphi}{s} = \frac{\alpha}{r\alpha} = \frac{1}{r};$$

Gdy A_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do A i krzywizna średnia dążyć będzie do krzywizny rzeczywistej w punkcie A , wartość $\frac{1}{r}$ jako liczba stała nie ulegnie zmianie, tak, że krzywizna rzeczywista w punkcie A :

$$\kappa = \frac{1}{r};$$

Krzywizna koła w każdym jego punkcie jest przeto liczbą stałą i równa się odwrotności promienia koła.

Przypuśćmy teraz, że mamy krzywą χ , której krzy-

wiznę κ w zwyczajnym jej punkcie A obliczyliśmy na zasadzie jej równania, biorąc pochodną kąta φ względem łuku s . Zamiast notować otrzymaną liczbę κ , moglibyśmy zanotować jej odwrotność, t.j. podać promień koła tej samej krzywizny, czyli t.zw. promień krzywizny w punkcie A .

$$r = \frac{1}{\kappa};$$

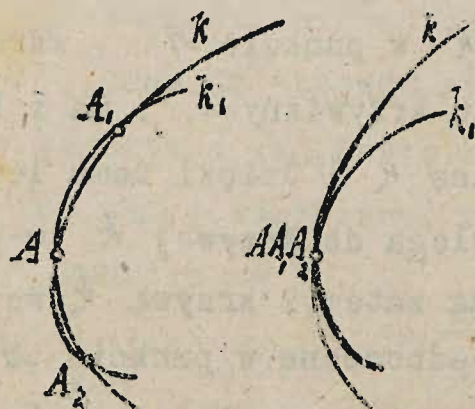
Jeżeli koło to wykreślimy w ten sposób, by jego okrąg przechodził przez punkt A by jego styczna w tym punkcie przystała do stycznej a krzywej k i by punkty nieskończenie bliskie punktu A na krzywej k i na kole k , leżały po tej samej stronie wspólnej stycznej a , to te dwie krzywe posiadać będą we wspólnym punkcie A wspólną styczną a i wspólną krzywiznę κ . Aby wyznaczyć środek K koła k , wystawmy w punkcie A do stycznej a prostopadłą, czyli t.zw. normalną krzywej k w punkcie A i po stronie wklęsłości od punktu A odmierzymy na tej normalnej promień krzywizny $r = \frac{1}{\kappa}$. Z otrzymanego w ten sposób punktu K zakresłmy koło k , promieniem $r \equiv \frac{1}{\kappa} = KA$, koło to nazywamy kołem krzywizny, jego środek K - środkiem krzywizny w punkcie A .

O każdym kole, które ma z krzywą k wspólny punkt A i wspólną w nim styczną a , możemy powiedzieć,

że ma z tą krzywą wspólne dwa punkty, zjednoczone w punkcie A . Miejscem geometrycznem środków tych kół jest normalna n krzywej k w punkcie A , wśród tych kół jedno, mianowicie koło krzywizny k , ma z krzywą k nadto wspólną krzywiznę κ i dzięki temu lepiej od wszystkich innych przylega do krzywej k w pobliżu punktu A . Koło k , ma zatem z krzywą k wspólne przynajmniej 3 punkty, zjednoczone w punkcie A . Stąd wynika następujące czysto geometryczne określenie środka, promienia i koła krzywizny:

Poprowadźmy do krzywej k w punkcie A styczną a i obrawszy na krzywej k inny punkt jakikolwiek A_2 , poprowadźmy koło przechodzące przez punkty A i A_2 oraz styczne do a . Zbliżajmy teraz punkt A_2 do punktu A i w każdym położeniu punktu A_2 wyznaczajmy koła przechodzące przez A i A_2 i styczne do a . Środki tych kół K' , K'' , K''' , ... leżeć będą oczywiście na normalnej n . Środkiem krzywizny krzywej k w jej punkcie A nazywa się punkt K normalnej n , który jest granicą ciągu punktów K' , K'' , K''' , ... gdy odcinek AA_2 dąży do zera.

Gdy dwie krzywe k i k' mają 2 , 3 , 5 i wogóle nieparzystą ilość punktów wspólnych, to punkt opisujący jedną z tych krzywych po przejściu przez



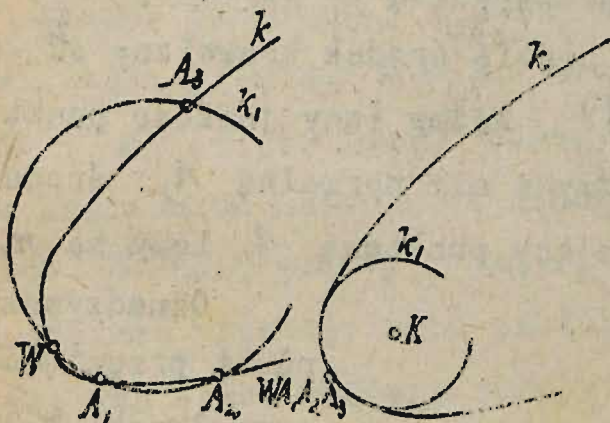
Rys. 411.

wszystkie punkty wspólne musi wy-
dostać się na dru-
gą stronę drugiej
krzywej. Ponieważ
koło krzywizny ma
z krzywą przynaj-
mniej trzy punkty
zjednoczone wspól-
ne, więc będzie ono

wogóle przechodzić w punkcie A z jednej strony krzy-
wej k na drugą /Rys. 411/, podobnie jak styczna w punk-
cie przegięcia przechodzi z jednej strony krzywej na
drugą /Rys. 408/.

Gdy dwie krzywe k i k_1 mają 2, 4, 6 i
wogóle parzystą ilość punktów wspólnych, to punkt opi-
sujący jedną z tych krzywych po przejściu przez wszyst-
kie punkty wspólne musi pozostać po tej samej stronie
drugiej krzywej. Otóż na krzywej mogą się zdarzyć ta-
kie punkty zwyczajne W , że koło krzywizny, wyznaczo-
ne, jak zawsze, przez punkt W i dwa punkty nieskończe-
nie mu bliskie A_1 i A_2 /Rys. 412/ przecina ją jeszcze
w jednym punkcie nieskończenie bliskim A_3 . Punkty,
posiadające tę własność, nazywają się wierzchołkami

krzywej.



Rys. 4/12.

Ponieważ promień krzywizny jest odwrotnością krzywizny, zatem w punkcie przegięcia promień krzywizny jest nieskończenie wielki, koło krzywizny zniekształca się do prostej

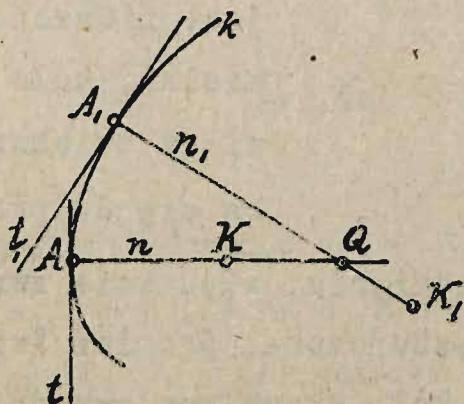
a mianowicie do stycznej przegięcia; w punkcie zwrotu I rodzaju krzywizna jest nieskończona, promień krzywizny równy więc jest zeru; koło krzywizny wyrodnieje do punktu, a mianowicie do punktu zwrotu.

§ 218. Ewoluta i ewolwenta. Gdy punkt T opisuje krzywą k , to środek krzywizny opisuje inną krzywą zwaną odwijającą albo evolutą krzywej k . Nawzajem, krzywa k nazywa się odwiniętą albo evolwentą krzywej

. Ewoluta jest miejscem geometrycznym środków krzywizny ewolwenty. W punktach zwrotu ewoluta dotyka ewolwenty; punkty ewoluty, które odpowiadają punktom przegięcia ewolwenty, leżą w nieskończoności.

Ewoluta krzywej k może być jednak inaczej jeszcze

określona. W punkcie A krzywej /Rys. 413/ poprowadźmy normalną n , t.j. prostopadłą do stycznej t . Na tej normalnej n leżeć będzie środek krzywizny K odpowiadający punktowi A . Weźmy inny jeszcze punkt krzywej A_1 , i poprowadźmy w nim normalną n_1 ; środek krzywizny K_1 , odpowiadający punktowi A_1 , leży na n_1 .



Rys. 413.

Oznaczywszy punkt przecięcia normalnych n i n_1 , przez Q zbliżajmy punkt A_1 nieograniczenie do punktu A ; środek krzywizny K_1 , leżąc wciąż na nor-

malnej n , zbliżać się będzie nieograniczenie do środka K leżącego na n . Dzięki temu punkt Q również zbliżać się musi do K , tak że granicą punktu Q , gdy A_1 zbliża się nieograniczenie do A , jest środek krzywizny K krzywej k w punkcie A . Gdy teraz punkt A opisywać będzie krzywą k , to normalna n w tym punkcie powłóczy będzie krzywą k' , która jest miejscem geometrycznym środków krzywizny, czyli evoluta krzywej k . Ewoluta jest obwiednią normalnych ewol-

wenty.

Pochodzenie nazw: ewoluta = odwijająca i ewolwenta = odwinięta tłumaczy następujące rozwiązanie:

Weźmy na krzywej κ /Rys.414/ dowolną ilość punktów, które oznaczmy w kolei ich następstwa A_1 , A_2 , A_3 , A_4 ,; jeżeli odległości każdego dwóch punktów sąsiednich maleć będą nieograniczenie, to każdy z łuków A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 ,można będzie uważać za odcinek prostej, albo za łuk koła przechodzącego przez dwa końce każdego łuku krzywej i jeszcze jeden punkt następny, popełniając przytem błąd nieskończenie mały rzędu wyższego niż pierwszy. W środku odcinka

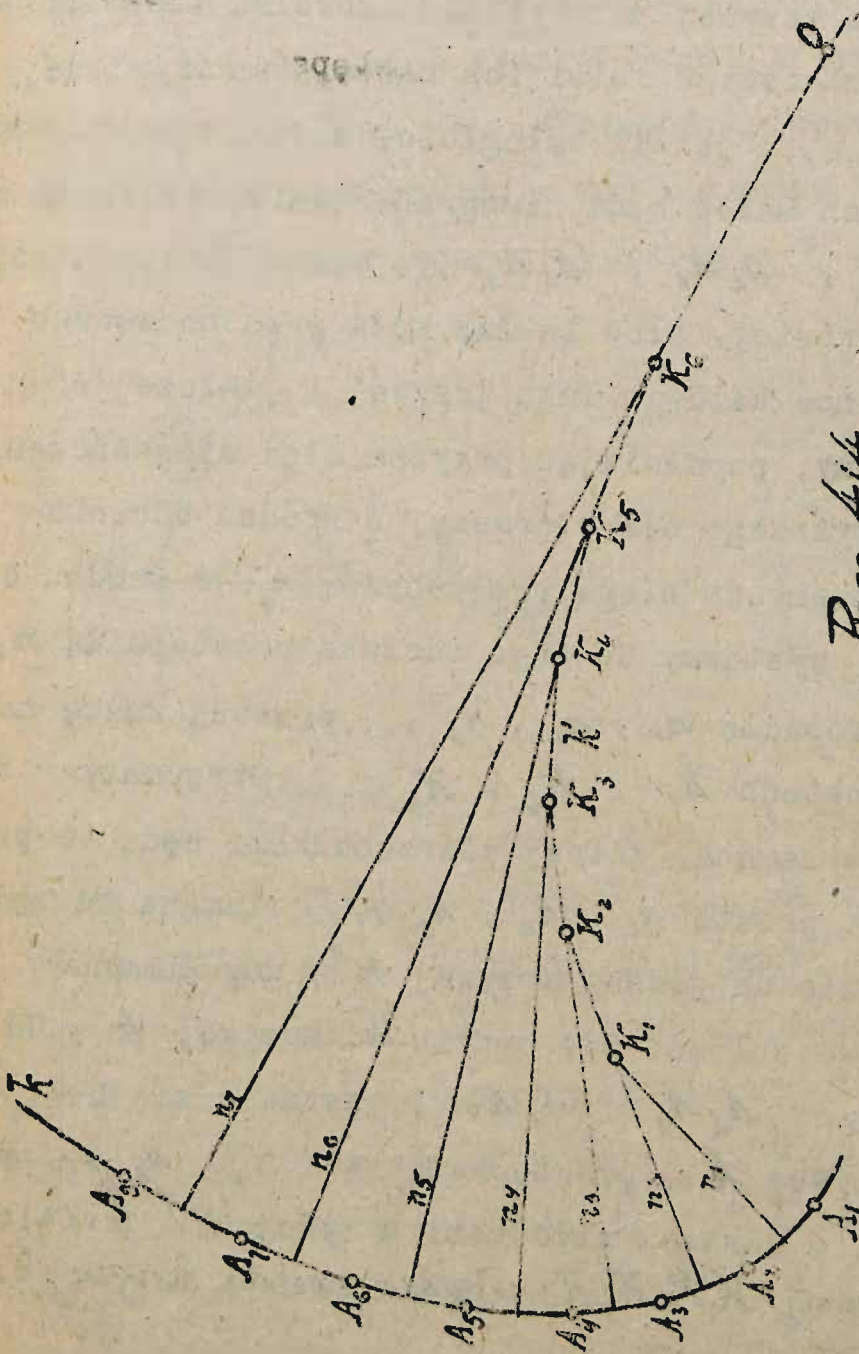
A_1A_2 wystawmy do niego prostopadłą n_1 , w środku odcinka A_2A_3 wystawmy do tego odcinka prostopadłą n_2 i t.d. Prostopadłe n_1 , n_2 , n_3 ,przetną każdą następną w punktach K_1 , K_2 , K_3 , Otrzymamy w ten sposób linję łamaną, której wierzchołkami będą te punkty, a bokami proste n_1 , n_2 , n_3 ,; łamana ta zbliżać się będzie do pewnej krzywej κ' , gdy łamana

$A_1A_2A_3A_4$,.... zbliżać się będzie do krzywej κ . Odcinki A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 ,stawać się będą elementami krzywej κ , prostopadłe n_1 , n_2 , n_3 , ... jej normalnemi, a zarazem stycznemi krzywej κ' . Granicą więc linji łamanej $K_1K_2K_3K_4$,.... będzie ewoluta krzywej κ .

W dowolnym punkcie O ostatniego łuku tej łamanej
umocujemy nio

giętką i
nierozcią-
gliwą i
napreżyw-
szy nawiń-
my ją na
linję ka-
mana

$\kappa, \kappa_2, \kappa_3, \dots$,
drugi zaś
koniec tej
nici z przy-
mocowanym
do niego
ołówkiem
umieścimy
w punkcie
 A_2 i na-
stępnie
odwinemy
naprężo-
ną nić



dopóki jej koniec nie przystanie do punktu A_1 . Koniec
 nici opisze łuk koła o środku K_1 , przechodzącego przez
 punkty A_1 , A_2 i A_3 ; koło to stanie się kołem krzy-
 wizny w punkcie A_2 , gdy te trzy punkty zbliżać się
 będą do siebie nieograniczenie. Nieskończenie mały łuk
 tego koła między punktami A_2 i A_3 nie będzie wtedy
 różnił się od łuku krzywej między temi punktami. Odwi-
 jając dalej nic tak, aby jej koniec przeniósł się z
 punktu A_3 do punktu A_4 , wykreślimy znowu łuk koła
 o środku K_2 , które przechodzi przez punkty A_2 , A_3
 i A_4 i które stanie się kołem krzywizny w punkcie A_3 ,
 gdy te trzy punkty zbliżą się do siebie nieogranicze-
 nie; dzięki temu łuk tego koła między punktami A_3 i
 A_4 nie będzie się w granicy różnił od łuku krzywej
 K . Postępując dalej w ten sposób, przekonamy się,
 że miejsce środków krzywizny K , lub co to samo, ob-
 wiednia normalnych n danej krzywej K , jest krzywą
 mającą tę własność, że nic na nią nawinięta, w jednym
 jej punkcie umocowana, drugim swym końcem opisałaby
 krzywą K , gdyby ten koniec w początkowym swym położe-
 niu przystał do jednego z jej punktów.

Każdy bok linii łamanej K, K_2, K_3, \dots, K_n równa
 się oczywiście różnicy promieni kół, których środkami
 są końce tego boku. Oznaczywszy te promienie odpowied-

nie literami $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, mamy:

$$K_1 K_2 = r_2 - r_1;$$

$$K_2 K_3 = r_3 - r_2;$$

$$K_3 K_4 = r_4 - r_3;$$

.....

$$K_{n-1} K_n = r_n - r_{n-1};$$

Dodając te równości stronami, otrzymamy

łamana:

$$K_1 K_n = r_2 - r_1 + r_3 - r_2 + r_4 - r_3 + \dots + r_{n-1} - r_{n-2} + r_n - r_{n-1} = r_n - r_1;$$

czyli: obwód linii łamanej $K_1 K_2 K_3 K_4 \dots K_n$ = różnicy promieni kół, których środki są końcami tej łamanej. Przechodząc do granicy, mamy twierdzenie:

Długość łuku ewoluty równa się różnicy promieni krzywizny ewolwenty w punktach odpowiadających końcom tego łuku.

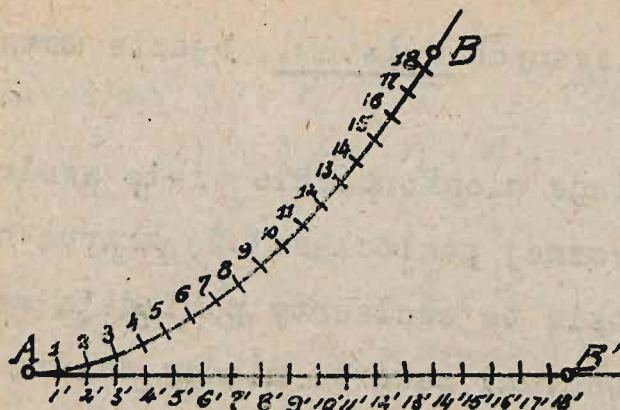
Stąd wynika możliwość rektyfikacji łuków tych krzywych, dla których ewolwenty umiemy wyznaczać promienie krzywizny. Zrobimy z tego użytek dla cykloidy.

Na zasadzie powyższego twierdzenia możliwą jest inna jeszcze interpretacja ewolwenty: Zostanie ona mianowicie opisana przez punkt A prostej n toczącej się bez poślizgu po krzywej k . Ewolwenta należy zatem do krzywych, które opisuje punkt sztywno związany z krzywą toczącą się bez poślizgu po innej krzywej sta-

lej. O krzywych tych, zwanych ruletami, będzie mowa w § 220.

Każda krzywa posiada nieskończenie wiele ewolwent każdy bowiem punkt stycznej powłóczącej tę krzywą opisuje ewolwentę. Wszystkie te ewolwenty posiadają wspólne normalne, których odcinki zawarte między dwiema ewolwentami są równe. Krzywe posiadające tę własność nazywamy równoległymi.

§ 219. Ewolwenta koła. Z rozważań powyższych wynika, że dla wykreślenia ewolwenty danej krzywej trzeba umieć wyprostować dowolny jej łuk. Zadanie to można wogóle rozwiązać tylko w przybliżeniu. Jeżeli mamy np. wyznaczyć długość wyprostowanego łuku AB krzywej danej k /Rys. 415/, to obieramy na nim pewną ilość punktów $1, 2, 3, 4, \dots$ i następnie na prostej a od punktu A' odmierzamy cięciwę $A1$ do punktu $1'$ od punktu $1'$ cięciwę 12 do punktu $2'$ i t.d. W ten sposób zastępujemy łuki $A1, 12, 23, \dots$ cięciwami tej samej nazwy; oczywiście, że długość łuku AB będzie wyznaczona tem dokładniej im mniej więcej punktów pośrednich weźmiemy pomiędzy punktami A i B . Wykreślenie będzie łatwiejsze, gdy punkty $1, 2, 3, \dots$ będą tak obrane na krzywej, że wszystkie cięciwy $A1, 12, 23, \dots$ z wyjątkiem może



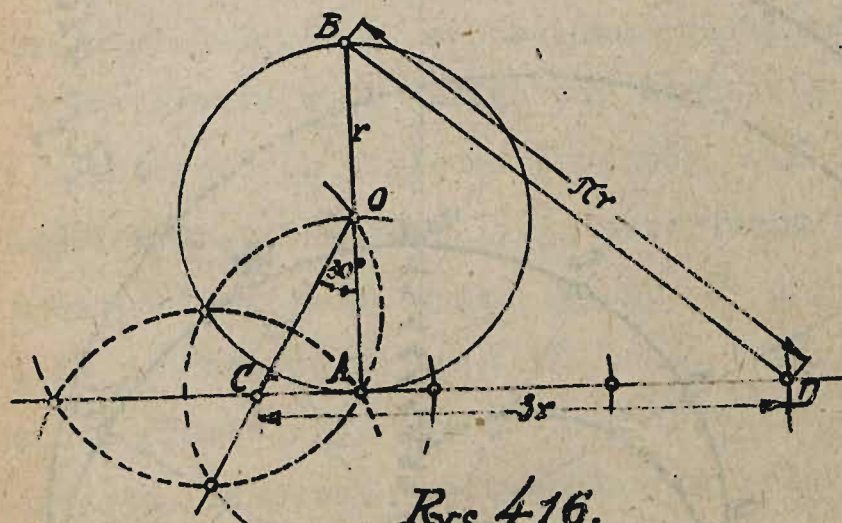
Rys 415.

ostatniej $18B$
będą równe.

Gdy krzywa
którą mamy wypro-
stować jest ko-
ło lub jego
część wymierna,
wtedy najlepiej
zastosować spo-
sób Kochańskie-

go, który ma tę osobliwość, że daje się wykreślić jed-
nym otwarciem cyrkla. W końcu A średnicy AB /Rys.
416/ kreślimy styczną do koła. Poprowadziwszy promień
pod kątem 30° do średnicy AB , odmierzamy od
punktu C , w którym ten promień przecina styczną od-
cinek $CD = 3r$; . Odcinek BD , jak łatwo obli-
czyć $= 3,14153r = 7r$ z dokładnością do $0,0001r$
Przy wyprostowaniu okręgu o średnicy $1m$ błąd jest
mniejszy od $0,1 \frac{m}{m}$ a więc jest znacznie mniejszy niż
błąd który dzięki niedokładności narzędzi kreślarskich
popołniamy np. przy wyznaczaniu punktu przecięcia dwóch
prostych.

Wykreślimy np. ewolwentę koła. Niech będzie koło
 A /Rys. 417/; poprowadźmy do niego styczną w punk-



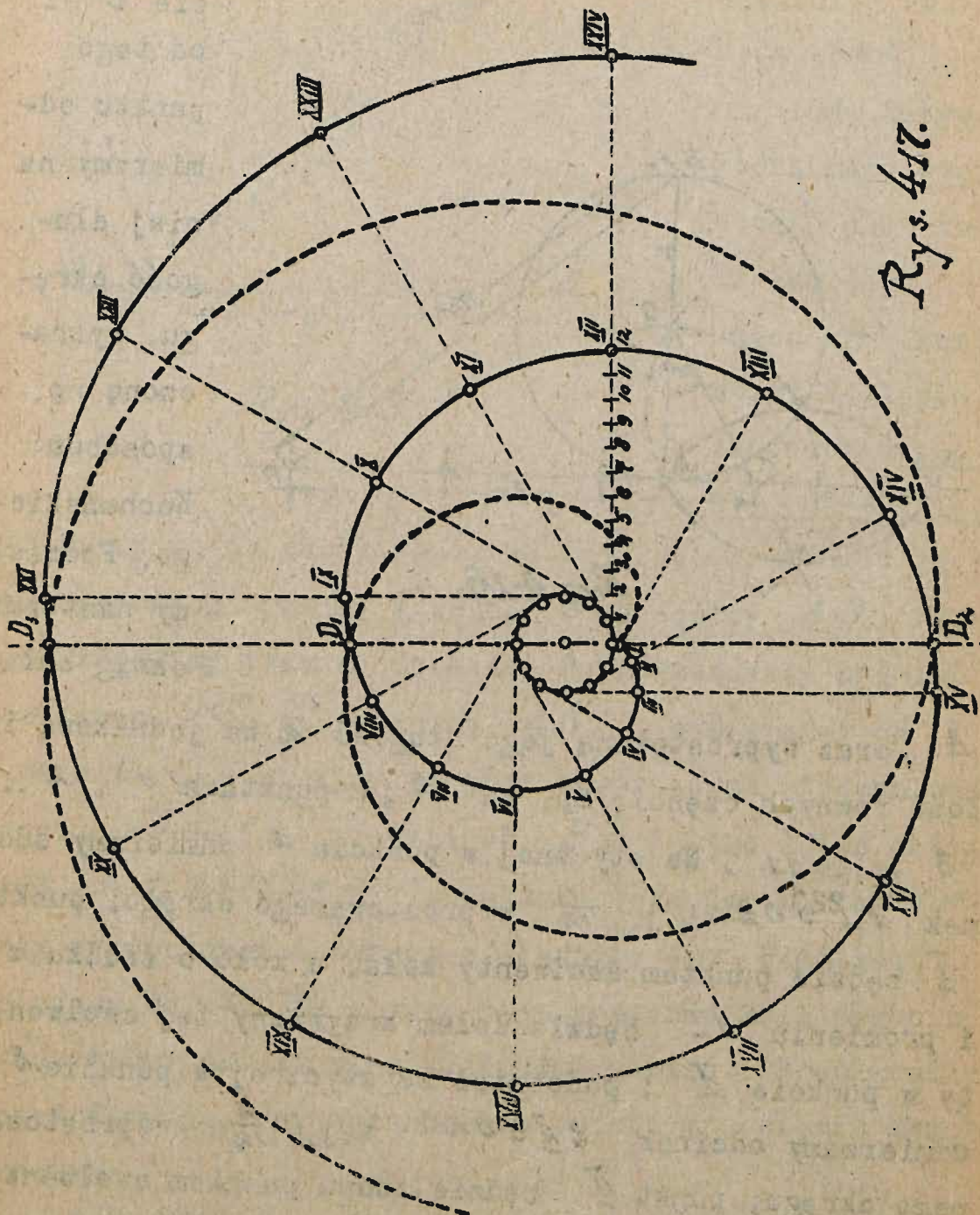
Rys. 416.

cie O i
od tego
punktu od-
mierzymy na
niej dłu-
gość okrę-
gu, wyzna-
czoną np.
sposobem
Kochańskie-
go. Podziel-
my następnie
okrąg koła

A oraz wyprostowaną jego długość a na jednakową i-
lość równych części, np. na 12 ; w punktach 1 , 2 ,
 3 11 . Na stycznej w punkcie 1 odmierzymy odcie-
nek $1I = O1$ t.j. $\frac{1}{12}$ wyprostowanego okręgu; punkt

I będzie punktem ewolwenty koła, a koło o środku 1
i promieniu $1I$ będzie kołem krzywizny tej ewolwen-
ty w punkcie I ; podobnie na stycznej w punkcie 2
odmierzamy odcinek $2II = O2$ t.j. $\frac{2}{12}$ wyprostowa-
nego okręgu; punkt II będzie znowu punktem ewolwentys
koło o środku 2 i promieniu $2II$ będzie kołem jej
krzywizny w punkcie II . Postępując w ten sposób, doj-

Rys. 417.

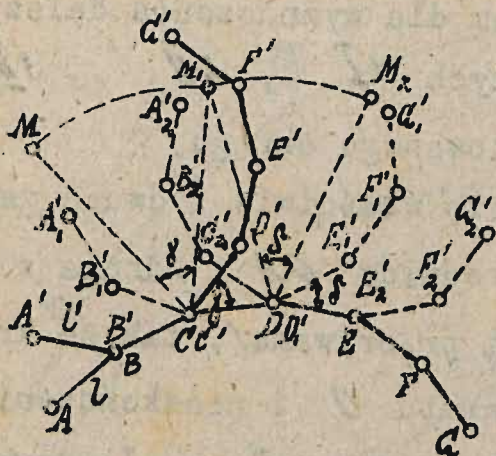


dziemy do punktu III , poczem dla wyznaczenia dalszych punktów wystarczy na normalnych 1I , 2II , 3III ,.... odmierzać długość a wyprostowanego okręgu.

Ewolwenta koła składa się właściwie z dwóch gałęzi symetrycznych względem średnicy OA /druga z tych gałęzi wykreślona jest linią przerywaną/, tak że krzywa ta posiada jeden punkt zwrotu O i nieskończenie wiele punktów podwójnych D_1 , D_2 , D_3 ,.... leżących na osi symetrii po obu stronach środka A . Godzi się zauważyć, że przez obrót ewolwenty koła dookoła środka A otrzymujemy ewolwentę równą i równoległą; odległością tych dwóch krzywych jest mianowicie wyprostowany łuk koła A , odpowiadający kątowi obrotu. Jest to własność wyróżniająca ewolwentę koła od wszystkich innych krzywych płaskich.

§ 220. Rulety. Niech będą w płaszczyźnie rysunku dwie linje łamane: $l = ABCD$,.... i $l' = A'B'C'D'$,.... o odpowiednio równych bokach, tak że $AB = A'B'$,

$BC = B'C'$, $CD = C'D'$,.... /Rys. 418/. Niechaj dwa odpowiednie boki tych łamanych, np. BC i $B'C'$ będą zjednoczone; przypuśćmy nadto, że z łamaną l' związany jest sztywno punkt jakikolwiek M . Obróćmy łamaną l' wraz z punktem M dookoła $C \equiv C'$ o kąt $D'CD = \varphi$ tak, żeby bok $C'D'$ przystał do CD ; punkt M

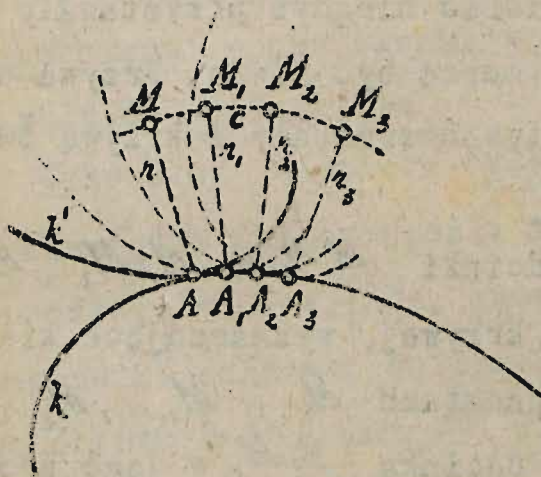


Rys. 418.

obróci się dokoła C również o kąt γ i zajmie położenie punktu M_1 . Następnie obróćmy łamaną \mathcal{L}' wraz z punktem M dokoła $D \equiv D'$ o kąt $E'DE = \delta$ tak, żeby bok $D'E'$ przystał do DE

punkt M związany sztywno z łamaną \mathcal{L}' obróci się dokoła D o kąt δ i zajmie położenie M_2 . Gdy postępować będziemy w ten sposób dalej, tocząc łamaną \mathcal{L}' po \mathcal{L} bez poślizgu, punkt M będzie zakreślał łuki kół, których środki będą się przenosić od wierzchołka do wierzchołka łamanej \mathcal{L} , a kąty środkowe będą za każdym razem sumą kątów spełniających odpowiednie kąty obu łamanych.

Niech będą w płaszczyźnie rysunku dwie krzywe \mathcal{K} i \mathcal{K}' /Rys. 419/, z których pierwsza jest stała, a druga ruchoma, i niechaj w pewnej chwili krzywe te będą styczne w punkcie A ; przypuśćmy znowu, że z krzywą ruchomą \mathcal{K}' związany jest sztywno punkt jakikolwiek M .



Rys. 419.

Wpiszmy w każdą z tych krzywych począwszy od wspólnego ich punktu A , łamaną o bokach równych; przytem wspólną długość boków możemy obrać dowolnie małą. Im mniejsza będzie ta długość, tem bardziej łamane

\mathcal{L} i \mathcal{L}' zbliżać się będą do krzywych k i k' . Gdy z łamanymi \mathcal{L} i \mathcal{L}' postępować będziemy tak jak poprzednio, to punkt M zakreślać będzie łuki kół, których środki będą w każdorazowym punkcie wspólnym łamanych \mathcal{L} i \mathcal{L}' . Gdy długości boków maleć będą nieograniczenie i łamane \mathcal{L} i \mathcal{L}' zbliżać się będą do krzywych k i k' , to droga opisana przez punkt M zbliżać się będzie do pewnej krzywej c , albowiem punkty M, M_1, M_2, \dots staną się nieskończenie bliskie. Mówimy wtedy że krzywa k' , zwana tworzącą, toczy się bez poślizgu po krzywej k , zwanej kierownicą. Z określenia krzywej

tworzącej wynika, że długości łuków pomiędzy punktem zetknięcia krzywej tworzącej z kierownicą a punktami tych krzywych, które do siebie niegdyś przystawały lub z czasem przystawać będą, muszą być równe. Krzywa opisana przez punkt M , sztywno związany z krzywą tworzącą, nazywa się ruleta.

Nieskończenie małe odcinki MM_1 , M_1M_2 , M_2M_3 możemy uważać za elementy krzywej, wyznaczające kierunki stycznych do rulety w punktach M , M_1 , M_2 , Prostopadła wystawiona do odcinka MM_1 w jego środku przechodzi przez punkt C ; gdy punkt M_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do punktu M , prostopadła ta stanie się normalną do rulety w punkcie M . Stąd twierdzenie: Normalna do rulety przechodzi przez każdorazowy punkt zetknięcia krzywej tworzącej z kierownicą.

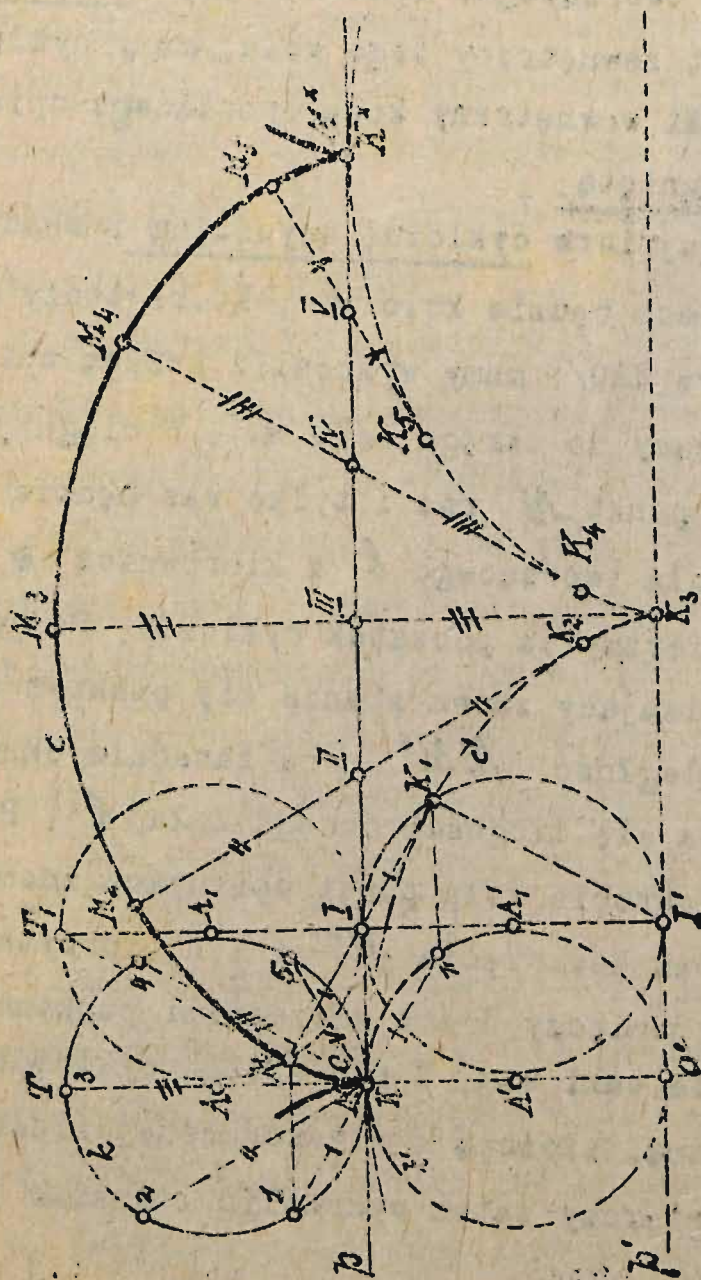
§ 221. Cykloidy. Wspomnieliśmy poprzednio /§ 218/ że każda krzywa płaska może być uważana za ruletę, dla której krzywą tworzącą jest prosta, a kierownicą - ewoluta danej krzywej. Często jednak dogodniej będzie za krzywą tworzącą wziąć inną krzywą, np. koło.

Szczególnie ważnemi są rulety, opisane przez punkt związany sztywno z kołem toczącym się po prostej. Krzywe w ten sposób powstałe nazywamy ogólnie cykloidami.

jeżeli przytem punktem opisującym jest punkt należący do okręgu koła tworzącego, cykloida jest zwyczajną, gdy jest nim punkt zewnętrzny tego koła, mamy cykloidę skurczoną; punkt wewnętrzny koła tworzącego opisuje cykloidę wyciągniętą.

Wykreślimy najpierw cykloidę zwyczajną i zbadajmy jej własności. Niech będzie koło k , które toczy się po prostej p /Rys. 420/; mamy wykreślić krzywą opisaną przez punkt należący do okręgu koła k . W ciągu jednego obrotu koła punkt M raz i tylko raz będzie punktem zetknięcia koła tworzącego k z kierownicą p . Ten punkt M obierzmy za początek cykloidy. Po jednym obrocie punkt opisujący znowu stanie się punktem zetknięcia M^x ; odległość MM^x , na zasadzie określania rulety, równa się długości okręgu koła k . Po drugim zupełnym obrocie koła punkt opisujący znowu stanie się punktem zetknięcia M^{xx} i t.d., przytem kształt krzywej pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami zetknięcia będzie taki sam. W ten sposób cykloida jest krzywą perjodyczną, złożoną z nieskończonej ilości równych zwojów. Wystarczy zatem wykreślić i zbadać jeden taki zwój MM^x .

Wykreśliwszy koło A styczne w punkcie M do prostej p , odmierzymy odcinek MM^x równy długości



określu ko-
ła K Po-
dzielmy o-
krąg koła
oraz jego
wyposto-
waną dłu-
gość

 MM^x

na jedna-
kową ilość
równych
części, np.
na 6, w
punktach

0, 1,

2. 3.

4 i 5

względnie

0, 1,

II, III,

$$\bar{y}_i - \bar{y}.$$

Wyznaczymy punkty cykloidy, odpowiadające $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$,
 $\frac{3}{6}$ obrotu koła.

Zmianę położenia punktu M , gdy koło k toczy się po prostej p od punktu O do punktu I , zawdzięczamy dwóm jednoczesnym ruchom: obrotowi punktu M dookoła środka A o kąt $\frac{\pi}{3}$ i przesunięciu całego koła a więc i punktu M o odcinek $O\bar{I}$. Aby więc wyznaczyć położenie punktu M po $\frac{1}{6}$ całego obrotu, możemy najpierw obrócić punkt M dookoła nieruchomego środka A o kąt $\frac{\pi}{3}$, przez co punkt M dostanie się do punktu I , potem zaś przesunąć punkt I równolegle do p o odcinek $IM_1 = O\bar{I} = \frac{2\pi r}{6}$. Połączmy M_1 i $I M_1$, punkt M_1 jest wierzchołkiem równoległoboku, zbudowanego na odcinkach OI i $O\bar{I}$; wyznaczymy go więc najprościej, wyprowadzając z punktu \bar{I} odcinek $\bar{I}M_1$ równy i równoległy odcinkowi OI . Podobnie aby wyznaczyć punkt M_2 , w którym punkt opisujący znajdzie się po $\frac{2}{6}$ obrotu, zbudujemy równoległobok na odcinkach $O\bar{2}$ i $O\bar{II}$, t.j. z punktu \bar{II} wyprowadzimy odcinek równy i równoległy odcinkowi $O\bar{2}$. Punkt M_2 znajdziemy, wyprowadzając z punktu \bar{III} odcinek $\bar{III}M_2 \parallel O\bar{3}$; i t.d.

Wykreślmy styczne w tak otrzymanych punktach M_1, M_2, M_3, \dots . W tym celu zauważmy, że na zasadzie ogólnego, wszystkich rulet dotyczącego twierdzenia /§ 220/ normalne do cykloidy w tych punktach przechodzić

muszą przez każdorazowe punkty zetknięcia koła \mathcal{K} z prostą p , będą to więc proste MO , M_1I , M_2II , M_3III ,; styczne zaś, jako proste do nich prostopadłe będą prostymi MT , M_1T_1 , M_2T_2 , M_3T_3 .

Wykreślmy teraz koło \mathcal{K}' , równe kołu \mathcal{K} i styczne do niego oraz do kierownicy p w tym samym punkcie O ; równolegle do p poprowadźmy styczną p' do koła \mathcal{K}' i założmy, że koło to toczy się po prostej p' ; jeżeli punktem opisującym będzie punkt $H \equiv M$, to krzywa przezeń opisana będzie cykloidą c' równą cykloidzie c i przesuniętą o ηr w kierunku prostej p i o $2r$ w kierunku do niej prostopadłym. Dowiedzimy, że cykloida c' jest ewolutą cykloidy c

Gdy koło \mathcal{K}' obróci się o $\frac{1}{6}$ całego obrotu, to punkt opisujący zakresli łuk $\mathcal{K}\mathcal{K}'$ cykloidy c' , punkt \mathcal{K} , otrzymamy, jak poprzednio, obracając najpierw punkt \mathcal{K} dookoła nieruchomego środka A' o kąt $\frac{\pi}{3}$, przez co punkt \mathcal{K} dostanie się do punkta $1'$, potem zaś przesuwając punkt $1'$ równolegle do p' i odcinek $1'\mathcal{K} = O'T' = OI = \frac{2}{3}r$. Prosta $\mathcal{K}I'$ jest normalną do cykloidy c' w punkcie \mathcal{K} , prostopadła zaś do niej prosta $\mathcal{K}I$ jest styczna do tej krzywej.

Otóż M_1I i $I\mathcal{K}$ stanowią jedną prostą, której środkiem jest punkt I . A więc normalna M_1I

do cykloidy c jest zarazem styczną do cykloidy c' ; ta ostatnia krzywa jest przeto obwiednią normalnych do pierwszej, czyli jej ewolutą.

Aby więc wyznaczyć środek krzywizny K , w punkcie M , cykloidy c , wystarczy na normalnej M, I od punktu I odmierzyć $IK, = MI$. Promień krzywizny cykloidy równa się podwojonej normalnej.

Dzięki tej własności cykloidy bardzo mała ilość punktów wystarcza do dokładnego jej wyznaczenia. Zauważmy, że punkt M jest punktem zwrotu cykloidy c , gdyż promień krzywizny w tym punkcie $= 0$, punkt M jest wierzchołkiem cykloidy; w samej rzeczy koło krzywizny dla tego punktu leży z obu jego stron po tej samej stronie krzywej, gdyż prosta M, K , jest osią symetrii cykloidy.

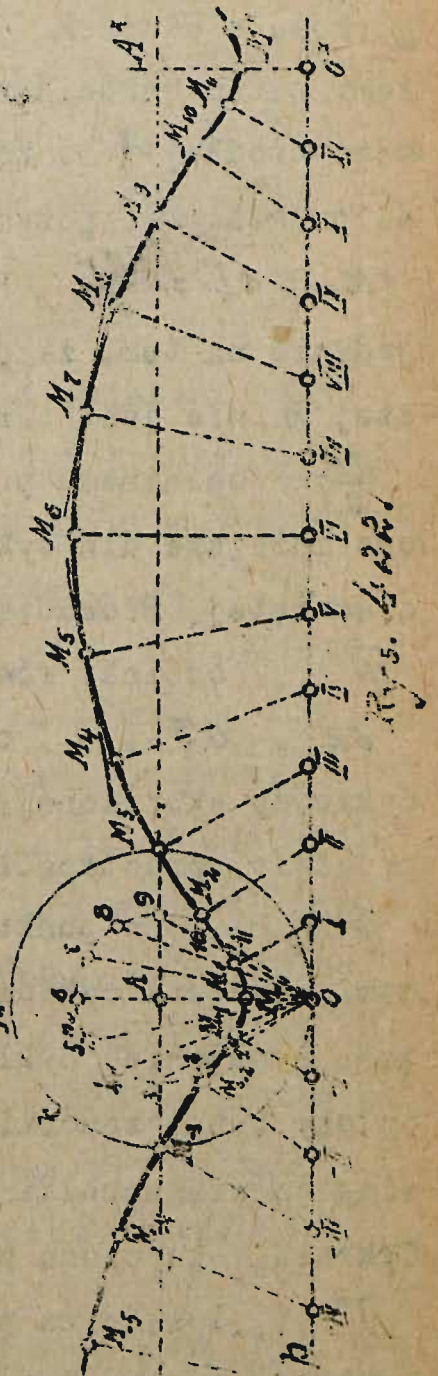
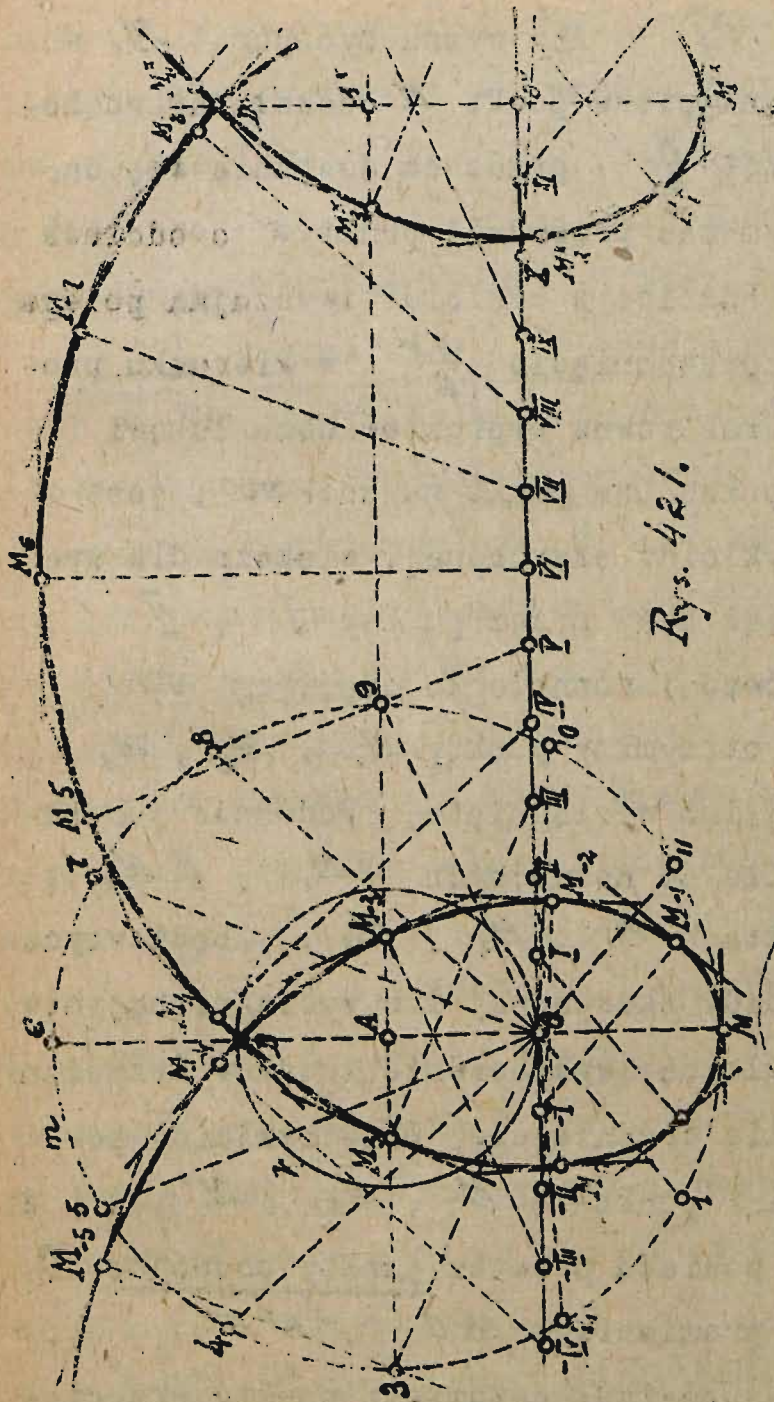
Na zasadzie dowiedzionego w § 218 twierdzenia, długość łuku ewoluty równa się różnicy promieni krzywizny ewolwenty w punktach, odpowiadających końcom tego łuku. Stąd wynika, że np. łuk $KK, =$ odcinkowi $M, K, = 2 K I'$; Łuk cykloidy, mierzony od jej wierzchołka = podwojonej cięciwie odpowiadającego mu łuku koła tworzącego. W szczególności łuk $KK, = K, M, = 4r$ stąd wniosek:

Długość jednego zwoju cykloidy

cztery razy większa od średnicy koła tworzącego.—

W taki sam sposób, jak dla cykloidy zwyczajnej, wyznaczamy punkty oraz styczne do cykloidy skurczonej lub wyciągniętej. Niech koło \mathcal{K} toczy się po prostej β , a punktem opisującym krzywą niech będzie punkt M , sztywno z kołem tworzącym związany i względem niego zewnętrzny /cykloida skurczona, Rys. 421/ lub wewnętrzny /cykloida wyciągnięta Rys. 422/. Przypuśćmy że w chwili rozpoczęcia ruchu punkt M leży na promieniu styczności AO . Gdy koło obróci się raz jeden, to jego środek przesunie się o wyprostowaną długość okręgu koła \mathcal{K} ; punkt opisujący znajdzie się wtedy znowu na promieniu styczności, przesuwawszy się równolegle do kierownicy β o odcinek $MM^x = OO^x = 2\pi r$. Krzywa będzie się zatem składać z nieskończonej wielu równych zwojów, z których jeden MM^x wykreślimy.

Poprowadźmy ze środka A koła m o promieniu $R = AM$ i podzielmy koło m oraz wyprostowany okrąg koła \mathcal{K} , t.j. odcinek OO^x na jednakową ilość równych części, np. na 12 w punktach $M, 1, 2, 3, \dots, 11$ wzgl. O, I, II, III, \dots, XI . Punkt M dostaje się do jakiegokolwiek innego punktu cykloidy, np. do M , dzięki dwóm jednoczesnym swym ruchom: obrotowi na kole m o łuk $M1$ oraz przesuwaniu się

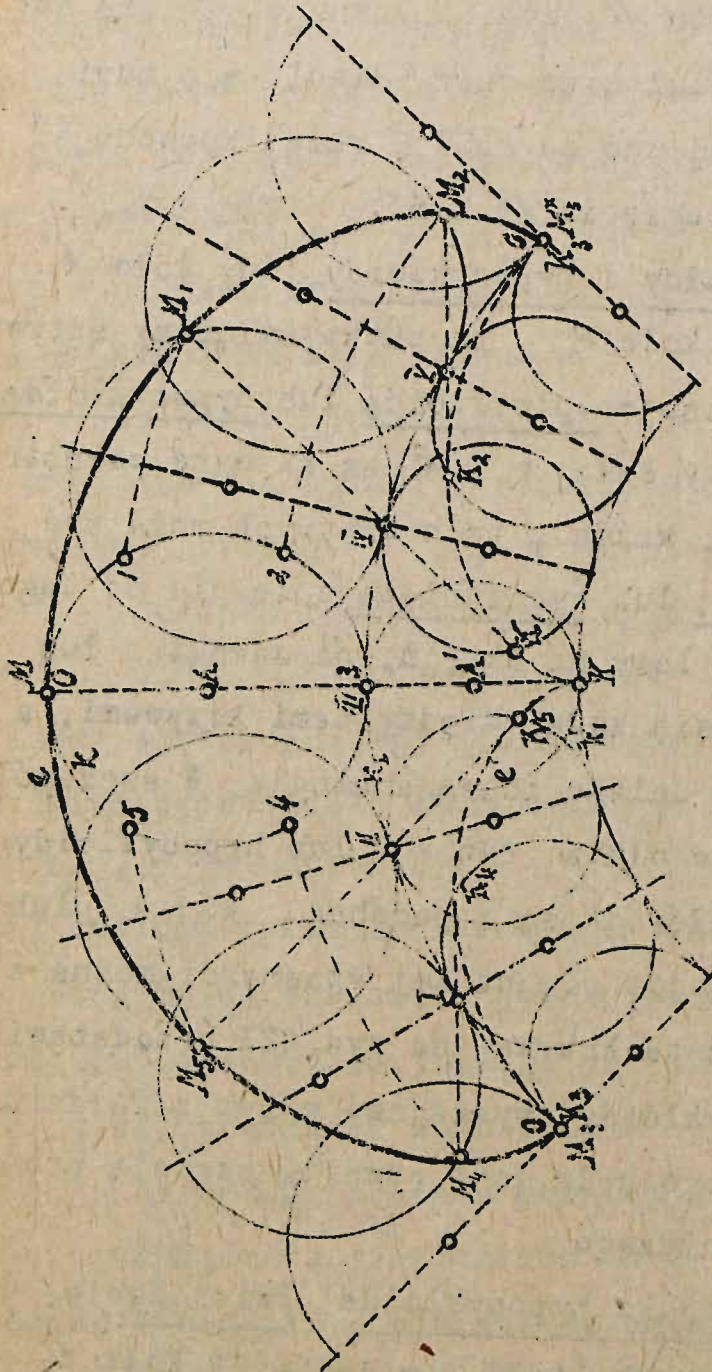


go koła o odcinek $O\bar{I}$. Aby wyznaczyć punkt M , możemy zatem obrócić najpierw punkt M dookoła nieruchomego środka A o kąt $\frac{\pi}{6}$, przez co dostanie się on do punktu $\bar{1}$, potem zaś przesunąć punkt $\bar{1}$ o odcinek $\bar{1}M_1 = O\bar{I} = \frac{\pi r}{6}$. Różnica z cykloidą zwyczajną polega jedynie na tem, że przesunięcie $\frac{\pi r}{6}$ w kierunku prostej p nie jest teraz równe wyprostowanemu łukowi $\frac{\pi R}{6}$ opisanemu przez ten punkt na kole m ; jest ono mniejsze dla cykloidy skurczonej, większe dla wyciągniętej. Prowadząc tedy przez punkty \bar{I} , \bar{II} , \bar{III} odcinki równe i równoległe cięciwom $O\bar{1}$, $O\bar{2}$, $O\bar{3}$, otrzymamy punkty M_1 , M_2 , M_3 ... cykloidy skurczonej lub wyciągniętej. Podobnie jak poprzednio, prostopadłe do normalnych $\bar{I}M_1$, $\bar{II}M_2$, $\bar{III}M_3$ w punktach M_1 , M_2 , M_3 będą stycznymi. Ewoluta cykloidy skurczonej lub wyciągniętej nie jest bynajmniej cykloidą; wyznaczenie środków krzywizny byłoby tutaj znacznie trudniejsze. Obie cykloidy posiadają wierzchołki w punktach M , M_6 , M^* , i t.d. Cykloida skurczona posiada poza tem punkty podwójne D , D^* leżące na promieniach AO , A^*O^* ; cykloida wyciągnięta posiada natomiast punkty przegięcia, o czem się łatwo przekonać zważywszy, iż normalna dwa razy w czasie jednego obrotu koła tworzącego zmie-

nia zwrot swojego obrotu, wtedy mianowicie, gdy równoległa do niej z punktu O wyprowadzona staje się styczną do koła m . Tyleż więc razy zmienić się musi zwrot obrotu stycznej, co za każdym razem spowoduje powstanie punktu przegięcia /§ 216/.

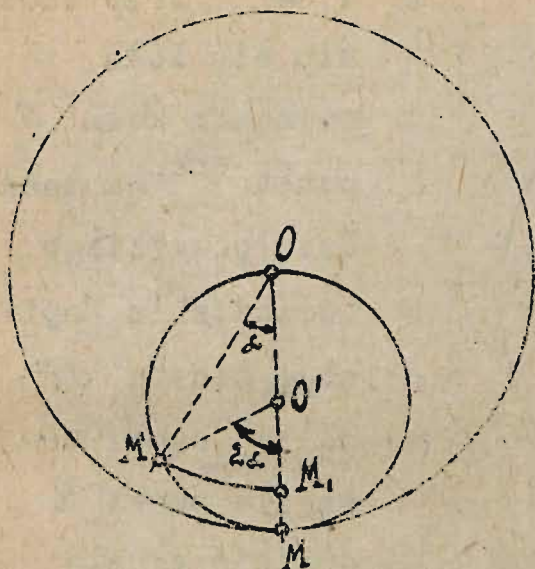
§ 222. Epicykloidy i hypocykloidy. Gdy koło k toczy się po stałym kole K , to punkt związany sztywno z kołem ruchomem opisuje epicykloide lub hypocykloide, zależnie od tego, czy koła k i K są styczne zewnętrznie lub wewnętrznie; każda z tych krzywych może być zwyczajną, skurczoną lub wyciągniętą zależnie od tego czy punkt opisujący leży na okręgu, na zewnątrz lub wewnątrz toczącego się koła. Między temi krzywymi, a cykloidami istnieje daleko idąca analogja. W szczególności zauważmy, że ewoluta $epi =$ lub hypocykloidy zwyczajnej jest spółśrodkową i podobną $epi =$ lub hypocykloidą. Opierając się na tej własności można z łatwością wykreślić te krzywe. Na rys. 423 przedstawiono jeden zwój epicykloidy zwyczajnej w tym założeniu że promień tworzącego koła jest czwartą częścią promienia koła kierowniczego.

§ 223. Elipsa jako hypocykloida. Twierdzenie. Gdy koło O' o promieniu r toczy się wewnątrz koła O o promieniu $4r$, to każdy punkt należący do okręgu ko-



Rys. 423.

ła O' opisu-
 je średnicę
 koła O . W
 czasie jedne-
 go pełnego
 obrotu koła
 O' każdy
 punkt M je-
 go okręgu raz
 i tylko raz
 jest punktem
 zetknięcia
 obu kół /Rys.
 424/. Od tego
 położenia roz-
 poczniemy ba-
 danie krzy-
 wej, którą
 opisuje punkt
 M . Punkt
 ten jest ob-
 darczony dwo-
 ma ruchami
 obrotowymi o

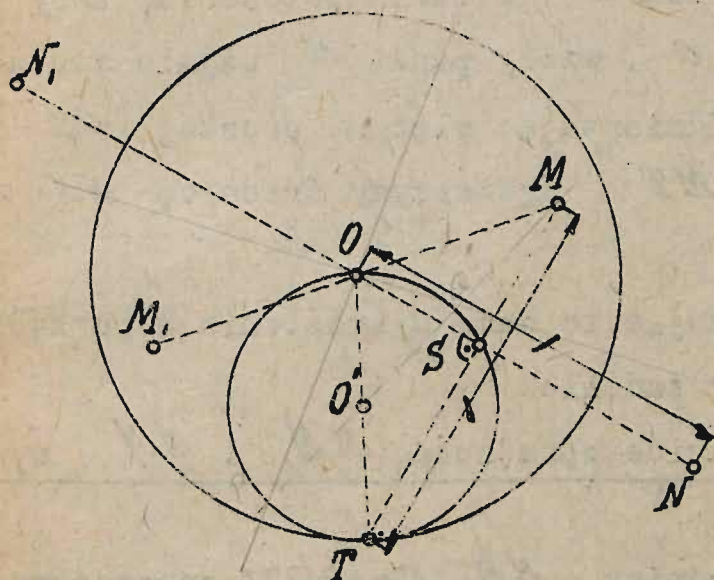


Rys. 424.

przeciwnych zwrotach: dokoła środka O' i dokoła środka O . Ponieważ obwód koła O' jest dwa razy mniejszy od obwodu koła O , więc szybkość obrotowa punktu M dokoła O'

jest dwa razy większa niż jego szybkość obrotowa dokoła O . Nowe położenie jakie—kolwiek M , punktu M może być przeto znalezione w taki sposób: Obróćmy punkt M dokoła O' o kąt jakikolwiek 2α , poczem obróćmy go w przeciwną stronę dokoła O o kąt α ; jest oczywistem, że po wykonaniu tych dwóch obrotów punkt M pozostanie na średnicy OM .

Twierdzenie. Gdy koło O' o promieniu r toczy się wewnątrz koła O o promieniu $2r$, to każdy punkt sztywno związany z kołem O' opisuje elipsę współśrodkową z kołem O . Punkt M sztywno związany z kołem O' /Rys. 425/ połączmy ze środkiem tego koła i niechaj prosta $O'M$ przetnie koło O' w punktach P



Rys. 426.

punkt zetknięcia
krzywej tworzącej
z krzywą kierowni-
czą /§ 208/; nor-
malna do elipsy w
punkcie M przecho-
dzi tedy przez punkt
 T zetknięcia kół
 O i O' . Otóż
wiemy, że średnica
sprzężona z daną
średnicą OM
jest równoległa

do stycznej w punkcie M /§ 170/ a więc jest prosto-
padła do normalnej MT . Z punktu O spuszcza-
my tedy prostopadłą OS na MT ; OS jest śred-
nicą sprzężoną z OM ; aby wyznaczyć jej długość,
zauważmy, że przy toczeniu koła O' wewnątrz koła O
punkt S pozostaje na OS , punkt T na OT ,
a odległości MS i MT nie ulegają zmianie. E-
lipse opisana przez punkt M powstaje więc również i
w ten sposób, że prosta MST porusza się ślizgając
się punktem S po prostej OS , a punktem T po
prostej OT .

Aby więc znaleźć koniec N średnicy OS , trzeba wykreślić prostą $MS'T$ w takim położeniu, żeby punkt T upadł na O , wtedy punkt M zajmie szukane położenie N . Odmierzając więc na prostej OS odcinki $ON = ON_1 = MT$ wyznaczymy średnicę NN_1 sprzężoną z MM_1 .

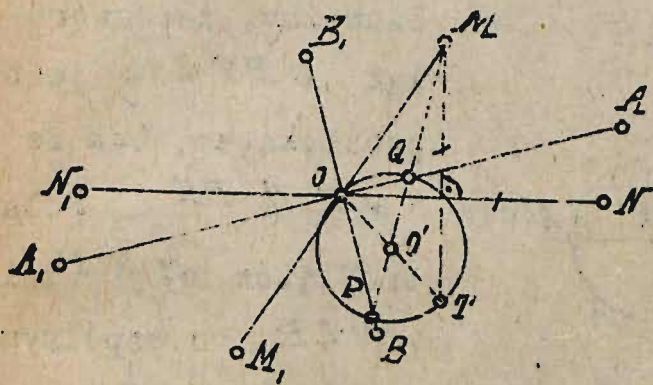
Nawzajem, wykonując te same wykreślenie w porządku odwrotnym rozwiążemy zadanie:

Mając dwie średnice sprzężone MM_1 i NN_1 wykreślić osie elipsy.

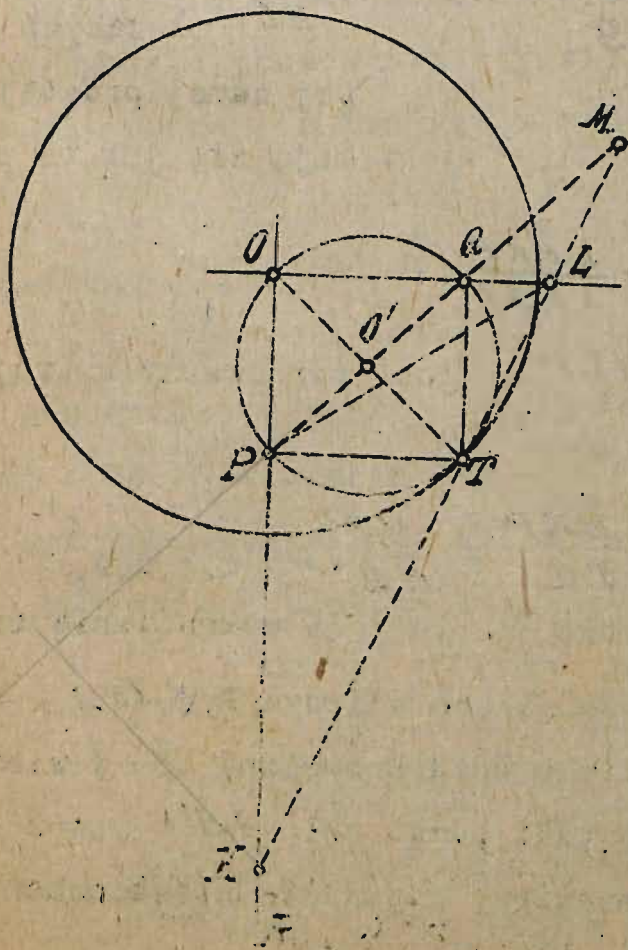
Z końca M średnicy MM_1 /Rys. 427/ spuszcza-
my prostopadłą na średnicę NN_1 i odmierzamy na tej pro-
stopadłej od punktu M w jedną lub drugą stronę $MT =$
 $= ON$; na OT zakreślamy koło jak na średnicy i
środek tego koła O' łączymy z M . Niechaj prosta $O'M$
przecina koło O' w punktach P i Q ; odmierzając na
prostych OQ i OP odcinki $OA = OA_1 = MP$
i $OB = OB_1 = MQ$, otrzymamy osie elipsy AA_1 i
 BB_1 .

§ 225. Środki krzywizny elipsy w jej wierzchoł-
kach. Twierdzenie. Normalna do elipsy w jej punkcie
jakimkolwiek M przecina osie elipsy w takich punk-
tach K i L , że:

$$\frac{MK}{ML} = \frac{a^2}{b^2};$$



Rys. 427.



Niech elipsa będzie opisana przez punkt M sztywno związany z kołem O' , toczącym się we-
wnątrz dwa razy
większego koła

O . /Rys. 428/

Wyznamy osię
łącząc $O'M$ i
prowadząc OP
i OQ . Prosta
 MT będzie nor-
malną do elipsy
w punkcie M .
Oznaczmy litera-
mi K i L
punkty, w których
ta normalna prze-
cina osie OP i
 OQ . Trzeba
dowieść, że:

bliskim punktu A ; otóż ta normalna, jak każda in-
na, przecina osie AA' i BB' w takich punktach K i L
że $\frac{AK}{AL} = \frac{b^2}{a^2}$; ale $AL = AO = a$;

skąd

$$AK = \frac{b^2}{a} ;$$

Szukając środka krzywizny K , w wierzchołku B ,
znajdziemy: $\frac{BK}{BL} = \frac{a^2}{b^2}$; ale $BL = BO = b$;

skąd

$$BK = \frac{a^2}{b} ;$$

Punkty K i K' , znajdziemy w przecięciu obu osi
z prostopadłą spuszczoną na cięciwę AB z punktu C ,
w którym się przecinają styczne w wierzchołkach A i B ;
w samej rzeczy, z trójkątów podobnych AOB i CAK
mamy: $\frac{AK}{AC} = \frac{OB}{OA}$; $\frac{AK}{b} = \frac{b}{a}$; $AK = \frac{b^2}{a}$;

z trójkątów zaś AOB , CBK ,

$$\frac{BK}{BC} = \frac{OA}{OB} ; \quad \frac{BK}{a} = \frac{a}{b} ; \quad BK = \frac{a^2}{b} ;$$

Wyznaczymy punkty K' i K'' , symetryczne z punktami K i K' względem osi AA' i BB' i wykreśliwszy cztery koła krzywizny, możemy w wielu razach obejść się bez innych punktów lub stycznych elipsy..

R O Z D Z I A Ł XVII .

KRZYWE SKOŚNE.

§ 226. Krzywa skośna jako miejsce poruszającego się punktu. Nazywamy krzywa skośna albo wichrowata miej-