

KVR S

GEOMETRII WYKREŚLNEJ

WEDŁUG WYKŁADÓW

PROF. GARLICKIEGO. [Stanisław]



NAKŁADEM

KOMISJI WYDAWNICZEJ

TOW. „BRATNIEJ POMOCY”

STUDENTÓW POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ.





nr. 3127



Publinski
Chojnice

91-1-68d

40,-

BZ09PK/018-04

WSTĘP.

§ 1. Istota i cel geometrii wykreślnej. Zagadnienie geometrii uważamy teoretycznie za rozwiązane, jeżeli zostało ono sprowadzone do zagadnień uprzednio rozwiązanych; drogą takich kolejnych redukcji dochodzimy do kilku zagadnień najprostszych, zwanych zasadniczymi, od których uzależnione jest rozwiązanie wszelkich innych. Do zagadnień zasadniczych zaliczyć możemy nap. następujące:

- 1) Przez dwa dane punkty poprowadzić prostą,
- 2) Na danej płaszczyźnie poprowadzić koło, mając jego środek i promień,
- 3) Na danej płaszczyźnie znaleźć punkt przecięcia dwóch prostych, albo prostej i koła, albo dwóch kół,
- 4) Przez dwie przecinające się proste poprowadzić płaszczyznę,
- 5) Znaleźć prostą przecięcia dwóch danych płaszczyzn.

Pierwsze trzy zagadnienia należą do zagadnień zasadniczych geometrii płaskiej; ostatnie dwa stanowią zasadnicze zagadnienia geometrii przestrzeni. Do zagadnień I grupy dadzą się sprowadzić rozwiązania wszystkich innych zagadnień geometrii płaskiej; rozwiązania zagadnień stereometrycznych sprowadza się natomiast do zagadnień zasadniczych obu grup powyższych.

Rozwiązanie praktyczne zagadnień geometrycznych będzie możliwe o tyle, o ile posiadamy narzędzia, za pomocą których
Arkusz 1.

rych można rozwiązać zagadnienia zasadnicze. Oto nasze narzędzia kreślarskie: ołówek, linjał i cyrkiel dają możliwość praktycznego rozwiązania zasadniczych zagadnień I grupy, a więc wszystkich zagadnień geometrii płaskiej; zagadnienia geometrii przestrzeni, które oprócz poprzednich wymagają jeszcze zagadnień drugiej grupy, musiałyby pozostać praktycznie nierozwiązalne. Dlatego też dla każdego rozwiązania teoretycznego zagadnienia geometrii płaskiej możemy z łatwością wykonać model, t.j. rysunek na papierze. Inaczej jest w geometrii przestrzeni: nawet dla zagadnień bardzo prostych nie jesteśmy najczęściej w stanie wykonać modelu rozwiązania. Weźmy dla przykładu zadanie następujące: znaleźć punkt jednakowo odległy od czterech punktów w przestrzeni danych A, B, C i D . Teoretycznie zadanie to rozwiązuje się nader łatwo: przez środki odcinków AB, BC, CD prowadzimy płaszczyzny do tych odcinków prostopadłe; punkt przecięcia tych trzech płaszczyzn będzie punktem szukanym. Praktyczne wykonanie modelu tej figury byłoby wszakże niezmiernie trudnym, mozolnym i kosztownym. Można kreślić w płaszczyźnie — nie można kreślić w przestrzeni.

Istnieje zatem jakby zasadnicza różnica pomiędzy zagadnieniami geometrii płaskiej i zagadnieniami geometrii przestrzeni; podczas gdy pierwsze mogą być nie tylko teoretycznie, ale i praktycznie rozwiązane, rozwiązanie drugich ma charakter wyłącznie teoretyczny. Ponieważ jednak rozwój nauk technicznych wymaga, aby i zagadnienia geometrii przestrzeni mogły być rozwiązane

praktycznie starano się zatym od najdawniejszych czasów wynajdywać sposoby, do tego celu służące. Ale dopiero Kacper Monge (1746 - 1818) uzupełnił, matematycznie uzasadnił i w jedną całość wszystkie te sposoby połączył. Pierwsze wydanie słynnej jego książeczki nosi tytuł: „Géométrie descriptive, Leçons données aux écoles normales” i ukazało się w roku 1795.

Zasadą wspólną wszystkich metod geometrii wykreślnej jest zasada odpowiedniości, która odgrywa wybitną rolę we wszystkich gałęziach dzisiejszej matematyki. W geometrii wykreślnej zastępujemy figurę przestrzenną przez figurę płaską, która jest z nią w określonym i stałym związku i może zatym figurę przestrzenną zastąpić. Dzięki temu wszelkie zagadnienie stereometryczne zostaje zastąpione przez odpowiednie zagadnienie geometrii płaskiej; jeżeli rozwiążemy to zagadnienie płaskie i otrzymamy figurę, która odpowiada odpowiednim warunkom, to figura przestrzenna, która na mocy ustalonego związku znalezionej figurze płaskiej odpowiada, uczyni zadość warunkom przez zagadnienie stereometryczne postawionym.

Zagadnienie wykonania modelu teoretycznego rozwiązania zadania stereometrycznego zastępujemy zatym następującym: odwzorować figurę przestrzenną na płaszczyźnie, t.j. zastąpić figurę przestrzenną przez odpowiednią figurę płaską. Streszczając nasze uwagi możemy dać takie określenie:

Geometria wykreślna jest nauką, która uczy, jak odwzorowywać na płaszczyźnie dane figury przestrzenne i jak na mocy tych odwzorowań rozwiązywać za pomocą rysunku zagadnienia tych figur dotyczące.

Sposobów odwzorowania figur przestrzennych na płaszczyźnie można by pomyśleć bardzo wiele; dla zastosowań praktycznych będą jednak brane w rachubę takie tylko odwzorowania, których rekonstrukcja nie jest zbyt trudna. Odwzorowanie takie otrzymamy przedewszystkiem przez naśladowanie procesu naszego widzenia; odnośna metoda geometrii wykreślnej nazywa się metodą rzutów środkowych lub perspektywą. Wszystkie w praktyce stosowane metody wykreślne są z nią pokrewne.

§ 2. Elementy niewłaściwe. Zanim się zwrócimy do wykładu poszczególnych metod wykreślnych, wprowadzimy do Słownictwa geometrycznego pewne terminy, które w znacznym stopniu uproścą nasz wykład. Mamy myśli elementy niewłaściwe.

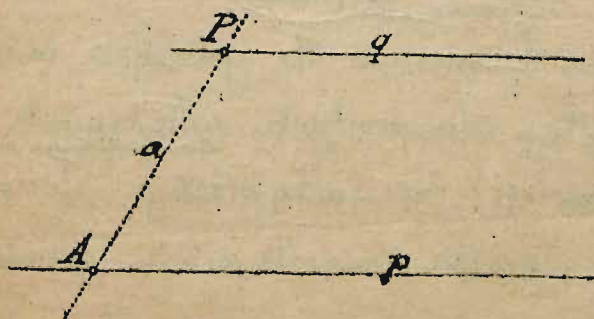
Dwa punkty zawsze wyznaczają prostą, istnieje bowiem zawsze prosta i tylko jedna, która łączy dwa jakiegokolwiek punkty. Natomiast dwie proste na płaszczyźnie nie zawsze wyznaczają punkt, nie zawsze bowiem istnieje ich przecięcie. Na zasadzie V postulatu Euklidesa przez każdy punkt płaszczyzny można poprowadzić jedną i tylko jedną prostą, która danej prostej nie przecina; prostą tę zwiemy równoległą do danej prostej, lub też prostą o tym samym kierunku. Dwie proste na płaszczyźnie mają zatem albo punkt

wspólny, albo wspólny kierunek. Powstaje teraz pytanie, czy nie można by pojęcia „punkt” rozszerzyć w taki sposób, aby wyjątek spowodowany przez możliwość prostych równoległych został usunięty?

Na pytanie to damy odpowiedź twierdzącą. Będziemy odtąd mianowicie przez słowo „punkt” rozumieć nie tylko punkty w dotychczasowym znaczeniu, t.j. punkty właściwe, ale i „kierunki” wszystkich możliwych prostych, t.j. punkty niewłaściwe. Możemy wtedy powiedzieć:

„Dwie proste na płaszczyźnie zawsze mają jeden i tylko jeden punkt wspólny: właściwy, albo niewłaściwy.”

Na każdej prostej mamy zatem nieskończenie wiele punktów właściwych i jeden punkt niewłaściwy, t.j. jej kierunek. Z chwila, gdy prosta jest dana, dany jest oczywiście jej kierunek, t.j. punkt niewłaściwy; na każdej prostej danej jest on tedy zawsze dany, czego nie można powiedzieć o żadnym punkcie właściwym tej prostej. Punkt niewłaściwy można by więc nazywać punktem absolutnym danej prostej; często jednak wolimy go nazywać punktem w nieskończoności, a to na zaradzie następującego rozważa-



Rys. 1.

nia: Niech będzie dana prosta p i punkt P na niej nie leżący (Rys. 1). Każdemu punktowi A prostej p odpowiada jedna i tylko jedna prosta a przechodząca przez P .

czyli, jak mówimy, rzucająca punkt A z punktu P . Gdy punkt A porusza się na prostej p , to prosta rzucająca a obraca się dookoła punktu P . Im dalej punkt A będzie się znajdował od pierwotnego swego położenia na prostej p , tym bardziej prosta a będzie się zbliżała do położenia równoległego q . Nawzajem im bardziej prosta a , obracając się dookoła punktu P , z jednej lub drugiej strony zbliża się do położenia równoległego q , tym bardziej punkt A oddala się od pierwotnego swego położenia. Gdy zatem prosta a stanie się równoległą do p , t.j. gdy punkt A przestanie być punktem właściwym prostej p , możemy powiedzieć, że znajduje się on dalej od każdego punktu właściwego prostej p , t.j. w nieskończoności.

Każda prosta posiada zatem jeden punkt w nieskończoności (punkt niewłaściwy, absolutny, kierunek); należy zatem prostą uważać za linię zamkniętą.

Tak samo rzeczy się mają z płaszczyznami: dwie płaszczyzny albo się przecinają według prostej, albo są równoległe. Podobnie, jak o prostych równoległych mówimy, że mają wspólny kierunek, tak o płaszczyznach równoległych powiemy, że mają wspólne ustawienie. Jeżeli teraz rozszerzymy pojęcie „prosta” przez dołączenie do prostych w dotychczasowym rozumieniu, t.j. do prostych właściwych, wszystkich możliwych ustawień, to zastąpimy słowo „ustawienie” przez słowo „prosta niewłaściwa” powiemy:

„Dwie płaszczyzny zawsze mają jedną i tylko jedną

prostą wspólną: właściwą lub niewłaściwą.

Na każdej płaszczyźnie mamy nieskończenie wiele prostych właściwych i jedną prostą niewłaściwą, t.j. ustawienie płaszczyzny. Z chwilą, gdy płaszczyzna jest dana, dane jest oczywiście jej ustawienie, t.j. prosta niewłaściwa; na każdej płaszczyźnie jest ona przeto zawsze dana; można by ją nazwać prostą absolutną płaszczyzny. Często wolimy ją nazywać prostą w nieskończoności, leżąca na niej bowiem wszystkie punkty w nieskończoności tej płaszczyzny.

Punkt właściwy wraz z punktem niewłaściwym wyznaczają prostą równie dobrze, jak dwa punkty właściwe. Połączmy punkt właściwy A z punktem niewłaściwym prostej b znaczy to przez punkt A poprowadzić równoległą do prostej b .

Dwa punkty niewłaściwe wyznaczają prostą niewłaściwą, albowiem dwa kierunki wyznaczają ustawienie. W tej samej rzeczy, jeżeli obierzemy dowolny punkt przestrzeni i poprowadzimy przez niego proste w obranych kierunkach, to te dwie proste wyznaczają płaszczyznę, której ustawienie nie zależy od wybranego punktu, lecz zależy jedynie od kierunków prostych przez ten punkt przechodzących.

Prosta właściwa a i punkt niewłaściwy prostej b , (albo punkt właściwy A i prosta niewłaściwa płaszczyzny B) wyznaczają płaszczyznę równie dobrze, jak każda inna prosta i punkt na niej nie leżący. Będzie to płaszczyzna przechodząca przez prostą a równoległe do prostej b (albo płaszczyzna przechodząca przez punkt A równoległe do płaszczyzny B).

Każde dwie proste niewłaściwe mają punkt niewłaściwy wspólny, t.j. dwa ustawienia wyznaczają kierunek. W samej rzeczy, obieramy znowu dowolny punkt przestrzeni i poprowadzimy przez ten dwie płaszczyzny o danych ustawieniach; kierunek prostej przecięcia tych płaszczyzn nie zależy od obecnego punktu, lecz zależy jedynie od ustawień płaszczyzn przez ten punkt przechodzących. Ogół prostych niewłaściwych ma zatem tę własność, że każde dwie z pomiędzy nich mają punkt niewłaściwy wspólny. Ale własność taką mieć mogą tylko proste, leżące w jednej płaszczyźnie, a więc

"Wszystkie proste niewłaściwe leżą w jednej płaszczyźnie."
Płaszczyzna ta nazywa się niewłaściwą, albo abolutną, albo płaszczyzną w nieskończoności.

Teoria elementów niewłaściwych da się streścić w następujących słowach:

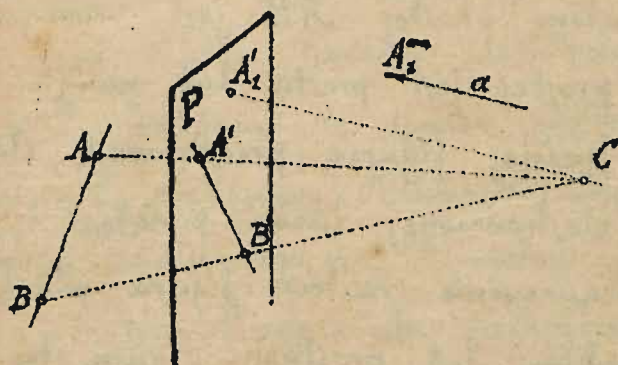
"Śród płaszczyzn wyróżnioną jest jedna przez to, że jest zawsze dana. Nazywa się ona płaszczyzną niewłaściwą; wszystkie inne płaszczyzny nazywamy właściwymi. Proste i punkty tej płaszczyzny nazywamy niewłaściwymi. Wszystkie inne proste i punkty nazywamy właściwymi."

"Równoległymi nazywamy dwie płaszczyzny właściwe, które mają prostą niewłaściwą wspólną, lub dwie proste właściwe, które mają punkt niewłaściwy wspólny.

Określenia te nie mają zastosowania, gdy jedna z dwóch płaszczyzn, lub gdy jedna albo obie proste są niewłaściwe."

Wprowadzenie do geometrii elementów niewłaściwych, upraszcza wystawienie wielu twierdzeń i ułatwia dowodzenia przez usunięcie w wielu razach przypadków szczególnych, które inaczej osobno musiałby być rozważane.

§ 3. Metoda rzutów. Niech będzie płaszczyzna P (Rys. 2) zwana płaszczyzną rzutów i nie leżący na niej punkt C , zwany środkiem rzutów. Rzutem środkowym punktu A nazywamy punkt A' , w którym prosta CA zwana prostą rzucającą przebija płaszczyznę P . Jeżeli punkt



Rys. 2.

A jest punktem niewłaściwym, t.j. kierunkiem prostej a , to jego rzutem jest punkt, w którym równoległa do a przebija płaszczyznę rzutów P . Jeżeli punkt A leży w płaszczyźnie P , to jest on własnym swoim rzutem;

będzie to miało miejsce również i wtedy, gdy punkt A jest punktem niewłaściwym płaszczyzny P , to jest kierunkiem prostej równoległej do płaszczyzny P . Gdy punkt A przystanie do środka rzutów C to prosta CA , a więc i rzut punktu A jest niewyznaczony. W ten sposób każdemu punktowi przestrzeni, z wyjątkiem punktu C , odpowiada na płaszczyźnie rzutów jeden jedyny punkt, a mianowicie jego rzut. Natomiast każdemu punktowi A' płaszczyzny P odpowiada nieskończenie wiele punktów prze-

Arzeni, że wszystkie mianowicie, które leżą na prostej CA' .

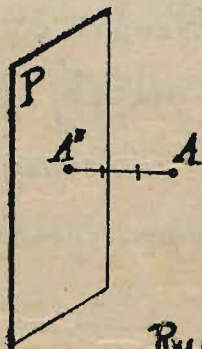
Weźmy drugi jeszcze punkt B i znajdziemy jego rzut B' ; rzutem prostej AB nazwiemy miejsce geometryczne, rzutów punktów prostej AB ; ponieważ wszystkie proste, które łączą punkt C z punktami prostej AB , leżą w płaszczyźnie CAB (zwanej płaszczyzną rzucającą), więc rzutem prostej AB będzie prosta $A'B'$, według której płaszczyzna CAB przecina płaszczyznę rzutów. Gdy jednak punkt B leży na prostej CA , t.j. gdy AB jest prostą rzucającą, to rzuty wszystkich jej punktów znajdują się w jednym punkcie A' ; rzutem prostej AB jest wtedy punkt A' . Tak więc rzutem prostej jest prosta lub punkt.

W ten sposób, każdej figurze przestrzennej, złożonej ze skończonej lub nieskończonej liczby punktów i prostych odpowiada na płaszczyźnie rzutów figura płaska, złożona również z punktów lub prostych. Figura ta nazywa się rzutem środkowym figury przestrzennej. Wyobraźmy sobie, że w punkcie C znajduje się nasze oko i że po wykonaniu rzutu figury przestrzennej na płaszczyznę P usunęliśmy figurę przestrzenną; pomimo że do naszego oka dojdą od wszystkich punktów rzutu te same promienie, które przedtym od usuniętej figury dochodziły, wywołując w naszej wyobraźni złudzenie tej figury. Rzut środkowy wywołuje zatem wrażenie prawie identyczne z wrażeniem wywołanym przez figurę przestrzenną, jeżeli umieścimy oko w pobliżu środka rzutów. Rekonstrukcja figury przestrzennej w wyobraźni jest więc tutaj bardzo łatwą; nie

jest jednak równie łatwą rekonstrukcją jej w rzeczywistości. Dzięki temu rzut środkowy ma większe znaczenie w sztukach plastycznych, niż w zastosowaniach technicznych. Jeżeli mamy na uwadze te ostatnie, to dogodniej jest obrócić punkt C w nieskończoności; proste rzucające staną się wtedy równoległe, a metoda odnośna nazywa się metodą rzutów równoległych. Szczególnie ważnym jest ten przypadek, gdy proste rzucające są prostopadłe do płaszczyzny rzutów; mamy wtedy do czynienia z metodą rzutów prostokątnych.

§4. Rzuty prostokątne na jedną płaszczyznę rzutów.

Niech będzie znów dana płaszczyzna P_2 , (Rys. 3) zwana płaszczyzną rzutów. Rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę P_2 nazywa się spodek prostopadłej, spuszczonej z punktu A na tę płaszczyznę. Każdemu punktowi właściwemu przestrzeni A odpowiada jego rzut A'' ; natomiast każdemu punktowi płaszczyzny rzutów A'' odpowiada nieskończenie wiele punktów przestrzeni,



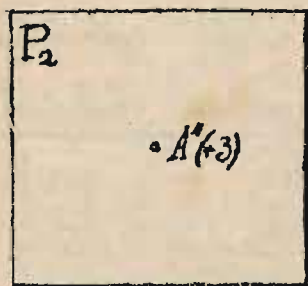
Rys. 3.

te wszystkie mianowicie, które leżą na prostopadłej, wystawionej w punkcie A'' do płaszczyzny P_2 . Tak więc dla wyznaczenia punktu w przestrzeni nie wystarczy podanie jego rzutu; należałoby wiedzieć na przykład jeszcze, jaką

jest jego odległość od swego rzutu i z której strony płaszczyzny P_2 punkt ten się znajduje. Wiadomości te winny być zanotowane w sposób umówiony tak, aby dla każdego punktu wraz z jego rzutem, dochodziła do nas jednoznacznie wskazówka, z której strony płaszczyzny P_2 i na jak

kiej od niej odległości punkt ten się znajduje. Różne sposoby notowania mogą być w tym celu zastosowane.

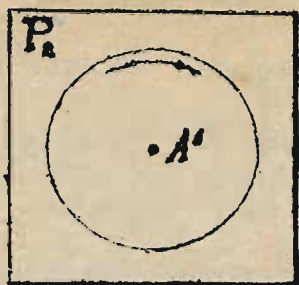
1. Rzuty cechowane. Najprostszym wydaje się odnotowanie obok rzutu punktu A odległości jego od swego rzutu wyrażonej w dogodnie obranych jednostkach długości (nap. w metrach) (Rys. 4). Aby przytem uniknąć dwuznaczności, możnaby uważać odległości punktów znajdujących się przed płaszczyzną P_2 za dodatnie,



Rys. 4.

odległości za punktów znajdujących się za nią - za ujemne. Po zrobieniu takiej umowy, położenie punktu A w przestrzeni będzie wyznaczonym, jeżeli jego rzut A'' opatrzymy t.zw. cechą, t.j. liczbą algebraiczną, wyrażającą co do wartości bezwzględnej i znaku jego odległość od płaszczyzny rysunku. Jak widzimy odzworowanie punktu jest tutaj zależne od obranej jednostki długości. Ponieważ metoda ta posługuje się liczbami, jest ona napoty tylko graficzną. Ma ona ważne zastosowanie w topografii, natomiast nie nadaje się do budowania geometrycznych własności figur przestrzennych.

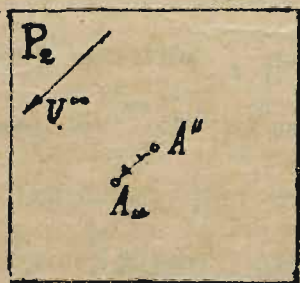
2. Cyklografja. Zamiast podawać obok rzutu punktu liczbę algebraiczną, możemy dla podania odległości punktu A od płaszczyzny rzutu zrobić umowę następującą: Z punktu A'' jako źródła zakreślićmy koło promieniem równym tej odległości (Rys. 5). Aby odróżnić od siebie punkty symetryczne względem płaszczyzny P_2 ,



Rys. 5.

dołączamy na okręgu zwrot określony. Jeżeli punkt A znajduje się przed płaszczyzną P_2 , to ten zwrot niechaj będzie taki, jaki posiadają wskazówki zegara; gdyby punkt A znajdował się za płaszczyzną P_2 , to zwrot okręgu byłby prze-

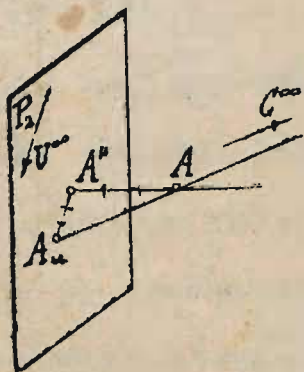
ciwny. Takie koło wraz z połączonym na nim zwrotem dokładnie informuje nas o położeniu punktu A w przestrzeni: aby go wyznaczyć należy w środku koła A' wystawić prostą do P_2 i odmierzyć na niej promień koła w jedną lub drugą stronę zależnie od zwrotu na okręgu danego. Punkt A jest przeto wierzchołkiem stożka obrotowego, którego tworzące nachylone są do płaszczyzny rzutów pod kątem 45° . Zwrot dany na okręgu wyda się dla oka, umieszczonego w punkcie A zawsze jednakowym (mianowicie zwrotem wskazówek zegara). Metoda cyklograficzna bywa nieraz użyteczną w poszukiwaniach teoretycznych; w praktyce używa jej się prawie wyłącznie dla wyznaczenia środka rzutów w perspektywie.



Rys. 6.

3. Rzut ukośny. Obierzmy na płaszczyźnie rzutów P_2 stały kierunek U^∞ (Rys. 6). Z rzutu prostokątnego A'' punktu A wyprowadźmy prostą w tym kierunku i odmiermy na niej od punktu A''

odcinek równy odległości punktu A od swego rzutu A'' , lub też odcinek w danym stosunku do tej odległości będący, nap. równy połowie odległości $A''A$. Ustawimy się pręty, że dla punktów A , leżących przed płaszczyzną P_2 , będziemy odmierzać te odcinki w jedną którąkolwiek stronę (nap. w stronę strzałki), dla punktów zaś leżących za płaszczyzną P_2 — w stronę przeciwną. Odcinek $A''A_u$ wyznacza wtedy punkt przestrzeni A . Metoda odwzorowania na tej umowie oparta nazywa się rzutem ukośnym.



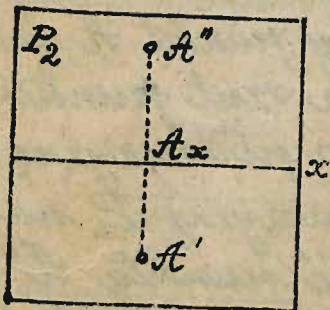
Rys. 7.

Istotnie punkt A_u (Rys. 7) jest rzutem punktu A z punktu niewłaściwego C^∞ , który jest kierunkiem przeciwprostokątnej A_uA trójkąta prostokątnego A_uAA'' . Gdy byśmy umieścili nasze oko w bardzo wielkiej (właściwie nieskończenie wielkiej) odległości od płaszczyzny rzutów w kierunku C^∞ , to od punktu A_u docho-

dziłby do naszego oka ten sam promień co od punktu A ; gdyby zatem usunięto punkt A , wrażenie przez nasze oko otrzymywane nie uległoby zmianie. To samo dotyczy wszystkich innych punktów figury przestrzennej; patrząc tedy na rysunek ze znacznej odległości w kierunku C^∞ ulegamy tym większemu złudzeniu, im odległość oka od rysunku jest większa. Metoda ta ma więc zaletę poglądowości; będziemy ją później rozważali szeregowo; na tym miejscu wydało nam się niezbędnym wspomnieć o niej jeszcze i dla

tego, że jest ona stosowana powszechnie, choć często nieświadomie, w rysunkach stereometry elementarnej i krystalografji.

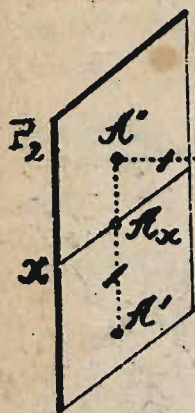
§5. Rzuty prostokątne na dwie prostopadłe płaszczyzny rzutów. Punkt przestworzenia możemy jeszcze odwzorować w sposób następujący:



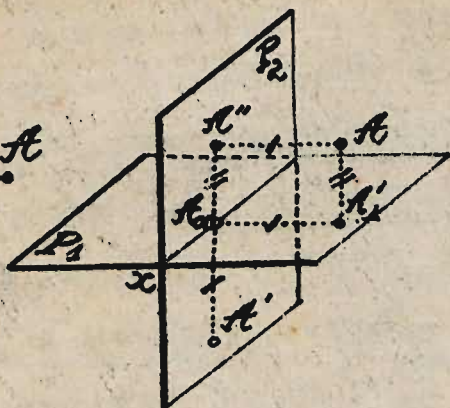
Rys. 8.

prostopadła P_2 , to ta odległość odmierzymy w jedną, w którąkolwiek stronę (np. pod ona x), gdyż oś jest obroną pozycją; gdyż zaś punkt A będzie leżał na płaszczyźnie P_2 , to odmierzymy ją w stronę przeciwną. W ten sposób dwa punkty A'' i A' , będące naszymi rzutami prostopadłymi do x , odwzorują punkt A w przestrzeni.

Punktowi A' można nadać atoli inne jeszcze znaczenie. Poprowadźmy przez oś x płaszczyznę P_1 , prostopadłą do P_2 i rzucmy punkt A' prostopadnie na tę nową płaszczyznę rzutów (Rys. 10). Połączmy otrzymany rzut A' z punktem Ax ; czworokąt $A'Ax$ jest prostokątem; odcinek $A'Ax$ jest równy odległości $A''Ax$ i prostopadły do x . Jeżeli obrócimy płaszczyznę P_2 dookoła



Rys. 9.



Rys. 10.

osi x tak, żeby P_2 upadła na P_1 , to punkt A' upadnie na A' , albowiem odcinki $A_x A'$ i $A_x A''$ są równe i oba są prostopadłe do x w tym samym punkcie A_x . Możemy tedy punkt A' uważać za rzut punktu A na płaszczyznę P_1 .

po dokonaniu kładzie płaszczyznę P_2 na płaszczyznę P_1 . Wtedy odległość punktu A'' od x , t. j. $A_x A''$ wyznacza odległość punktu A od P_1 . W ten sposób role punktów A' i A'' są zamienne: A' jest rzutem punktu A na P_1 , A'' jest rzutem punktu A na P_2 ; odległość punktu A'' od x jest równa odległości punktu A od P_1 , odległość punktu A' od x jest równa odległości punktu A od P_2 .

Metoda odwzorowania figur za pomocą rzutów prostokątnych na dwie płaszczyzny prostopadłe jest tak ważna, w zastosowaniach, że od niej rozpoczynamy systematyczny wykład geometrii wykreślnej.



CZĘŚĆ I. RZUTY PROSTOKĄTNE.

Rozdział I. Punkt, prosta i płaszczyzna.

§6. Rzuty punktów właściwych. Niech będą dwie płaszczyzny prostopadłe P_1 i P_2 (Rys. 11), prosta x niech będzie ich linią przecięcia. P_1 nazywa się pierwszą płaszczyzną rzutów, P_2 - drugą płaszczyzną rzutów; prosta x - osią rzutów. Co do położenia płaszczyzn P_1 i P_2 w przestrzeni nie potrzeba robić żadnej umowy; często

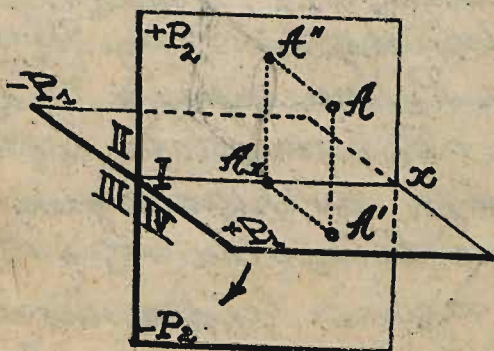
jednak wyobrażamy sobie, że P_1 jest poziomą, P_2 zaś pionową i nazywamy wtedy:

P_1 - poziomą płaszczyzną rzutów, a P_2 - pionową płaszczyzną rzutów.

Z danego punktu właściwego A przestrzeni spuszczamy prostopadłe AA' na P_1 i AA'' na P_2 ;

punkt A' nazywa się pierwszym rzutem punktu A (wzgl. rzutem poziomym), odległość AA' nazywa się pierwszą odległością punktu A ; punkt A'' nazywa się drugim rzutem punktu A (wzgl. rzutem pionowym), odległość AA'' nazywa się drugą odległością punktu A .

Przez proste AA' i AA'' poprowadzimy płaszczyznę, która przetnie oś x w punkcie A_x ; płaszczyzna ta będzie prostopadła do x , albowiem jest ona prostopadła zarówno do P_1 jak i do P_2 . Oś rzutów będzie zatem prosto-



Rys. 11.

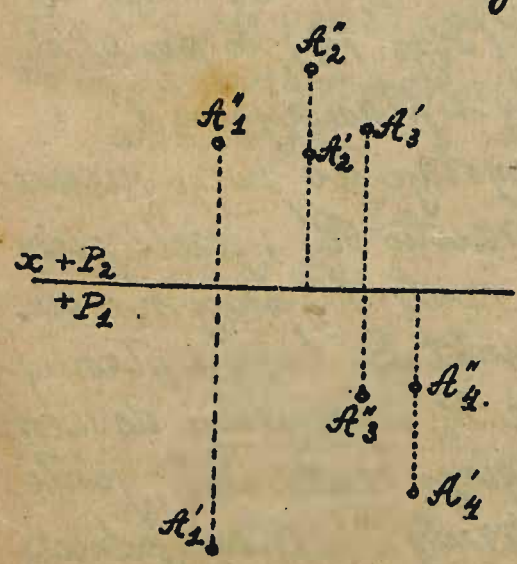
padła do każdej prostej w płaszczyźnie $A'A''$,
a więc $x \perp A'A''$ i $x \perp A'A'$. Odcinek $A'A''$ na-
zywa się pierwszą rzędną punktu A' ; odcinek $A'A'$
nazywa się jego drugą rzędną. Ponieważ czwor-
okąt $A'A''A'$ jest prostokątem, więc mamy:

"Pierwsza rzędna punktu A' równa się drugiej jego
odległości; druga rzędna punktu A' równa się
pierwszej jego odległości." Równość ta będzie dotyczyła
nie tylko wartości bezwzględnej, ale i znaku, jeżeli
zrobimy co do znaków umowę następującą: osi
rzutów dzieli każdą płaszczyznę rzutów na dwie
części; jedną, którąkolwiek z dwóch części płas-
czyzny P_1 (np. tę, która leży przed P_2) nazwijmy
pierwszą płaszczyzną dodatnią, $+P_1$; jedną, którą-
kolwiek z dwóch części płaszczyzny P_2 (np. tę, któ-
ra leży nad płaszczyzną P_1) nazwijmy drugą,
półpłaszczyzną dodatnią, $+P_2$, pozostałe części
nazwijmy pierwszą i drugą półpłaszczyzną
ujemną, $-P_1$ i $-P_2$. Rzędne leżące na $+P_1$ i $+P_2$
uważamy za dodatnie, rzędne leżące na $-P_1$
i $-P_2$ za ujemne. Podobną umowę zawie-
ramy co do pierwszych i drugich odległości.
Za dodatnie uważać będziemy pierwsze od-
ległości punktów, leżących po tej stronie
płaszczyzny P_1 , po której leży $+P_2$ (nad
płaszczyzną P_1), oraz drugie odległości punk-
tów, leżących po tej stronie płaszczyzny P_2 ,
po której leży $+P_1$ (przed P_2). Za ujemne uważać
będziemy pierwsze odległości punktów, leżących
po tej stronie płaszczyzny P_1 , po której leży
 $-P_2$ (pod P_1), oraz drugie odległości punktów, le-
żących po tej stronie płaszczyzny P_2 , po której leży
 $-P_1$ (za P_2).

Dwie płaszczyzny rzutów dzielą przestrzeń na cate-

my ćwiartki: 1-sza pomiędzy $+P_1$ i $+P_2$, druga między $-P_1$ i $+P_2$, trzecia między $-P_1$ i $-P_2$, czwarta między $+P_1$ i $-P_2$. Każdemu punktowi przestrzeni \mathcal{H} odpowiada para punktów, które są jego rzutami; jeden z nich \mathcal{H}' znajduje się na P_1 , drugi \mathcal{H}'' na P_2 . Jeżeli teraz, obracając jedną z płaszczyzn rzutów dookoła osi x , rozpostreżemy ją na drugiej tak, aby $+P_1$ przystało do $-P_2$, przywróćmy oczywiście $-P_1$ przystanie do $+P_2$, to obydwa te punkty \mathcal{H}' i \mathcal{H}'' znajdą się w jednej płaszczyźnie, którą obierzemy za płaszczyznę rysunku. Ponieważ $\mathcal{H} \perp \mathcal{H}x$ \mathcal{H}' i $\mathcal{H} \perp \mathcal{H}x$ \mathcal{H}'' , więc punkty \mathcal{H}' i \mathcal{H}'' będą leżały na wspólnej prostej prostej do osi rzutów. Tak więc punkt przestrzeni \mathcal{H} będzie odwzorowany na płaszczyźnie przez parę punktów \mathcal{H}' i \mathcal{H}'' , leżących na prostej prostej do osi x . Prostopadła $\mathcal{H}'\mathcal{H}''$ nazywa się linią rzędnych punktu \mathcal{H} .

Nawzajem, każdej parze punktów $\mathcal{H}'\mathcal{H}''$, leżących w płaszczyźnie rysunku na prostopadłej do x , odpowiada jeden jedyny punkt przestrzeni \mathcal{H} . W samej rzeczy, wprowadźmy

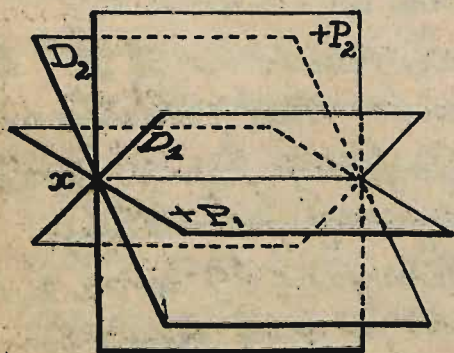


płaszczyznę P_2 wraz z leżącym w niej punktem \mathcal{H}' do pierwotnego położenia względem P_1 , t.j. uczynimy $P_2 \perp P_1$. W punkcie \mathcal{H}' wystawimy prostopadłą do P_1 , w punkcie \mathcal{H}'' prostopadłą do P_2 ; te dwie prostopadłe przecinają się w punkcie \mathcal{H} , gdyż leżą obydwie w płaszczyźnie.

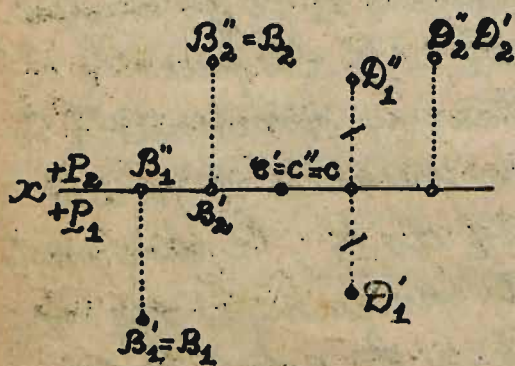
Rys. 12.

wyznaczonej przez Hx H' i Hx H'' , a więc prosto-
padłej do x .

Jeżeli punkt H_1 leży w pierwszej ćwiartce
(Rys 12), to obydwa rzędne są dodatnie, rzut
poziomy leży więc pod osią, rzut pionowy nad
nią. Jeżeli punkt H_2 leży w drugiej ćwiartce,
to pierwsza rzędna jest ujemna, druga dodatnia;
po dokonanych kładzie płaszczyzny P_1 na P_2 bę-
dą zatem obydwa rzuty nad osią. Punkt H_3 ,
znajdujący się w trzeciej ćwiartce, będzie miał
obydwa rzędne ujemne; rzut poziomy będzie
więc nad osią, rzut pionowy pod nią. Punkt
 H_4 znajdujący się w czwartej ćwiartce będzie
miał pierwszą rzędna ujemną, drugą dodatnią;
obydwa rzuty będą więc pod osią.



Rys. 13.



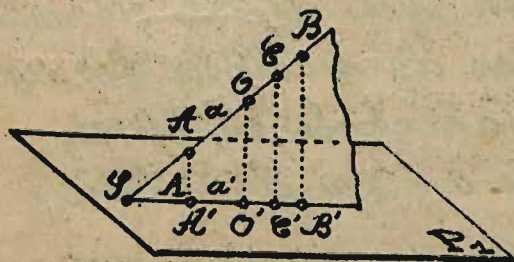
Rys. 14.

Godne uwagi są punkty,
których rzuty mają pewne
szczególne położenia wzglę-
dem osi rzutów. Jeżeli
drugi rzut B_2'' leży na
osi (Rys. 14), to punkt B_2
leży w płaszczyźnie P_1 i
przystaje do swego pionowe-
go rzutu B_2' ; jeżeli pierw-
szy rzut B_2' leży na osi,
to punkt B_2 leży w płaszczy-
źnie P_2 i przystaje do swego
drugiego rzutu B_2'' ; jeżeli
oba rzuty C' i C'' są zjednoczo-
ne w tym samym punkcie osi,
to i

punkt C jest z nimi zjednoczony. Gdy obydwie
rzedne punktu D są równe, równe są odległo-
ści punktu D od obu płaszczyzn rzutów; punkt
 D znajduje się przeto na jednej z dwóch płaszczyzn
dwusiecznych D_1 i D_2 kątów dwusiecz-
nych między płaszczyznami rzutów.

Płaszczyznę D_1 , przechodzącą przez ćwiartkę
pierwszą i trzecią, (Rys 13) nazywamy pierwszą
płaszczyzną dwusieczną; rzuty punktu D_1 w niej
leżącego są symetryczne względem osi. Płaszczyznę
 D_2 , przechodzącą przez ćwiartkę drugą i
czwartą nazywa się drugą płaszczyzną dwu-
sieczną; rzuty punktu D_2 w niej leżącego przy-
stają do siebie. Dlatego też niekiedy płaszczyznę
 D_2 nazywa się płaszczyzną spstrzoną.

§ 7. Rzuty prostej. W § 3 znaleźliśmy, że rzu-
tem środkowym prostej jest wogóle prosta. Pro-
sta zawsze wyznacza swój rzut, natomiast
rzut wogóle nie wyznacza prostej w przestrze-
ni. Gdy prosta przechodzi przez środek rzu-
tów, to jej rzut jest punktem; w tym i tylko
w tym przypadku rzut prostej wyznacza ją
w przestrzeni. Te same wyniki otrzymamy, gdy



Rys. 15.

środkiem rzutów jest
punkt niewłaściwy jaki-
kolwiek, a więc i wtedy,
gdy proste rzucające są pro-
stopadłe do płaszczyzny
rzutów. Niech A' i B' będą rzu-
tami prostokątnymi punktów
 A i B na płaszczyznę rzutów P .

(rys. 15.)

Rzuty wszystkich punktów prostej AB będą
 leżały na prostej $A'B'$, która jest linią prze-
 cięcia płas. czynny P z płaszczyzną π , prze-
 chodzącą przez AB prostopadle do P . Pła-
 szczyzna π nazywa się plaszczyną rzucającą
prostą AB . Każda prosta przestrzeni a ma
 jeden jedyny rzut a' na płaszczyźnie P , a więc każ-
 da prosta wyznacza swój rzut. Natomiast rzut a'
 nie wyznacza wogóle prostej w przestrzeni, gdyż
 każda prosta leżąca w płaszczyźnie π ma ten
 sam rzut a' . Rzutem prostokątnym prostej
 jest wogóle prosta; wyjątek stanowi prosta
 prostopadła do P , której rzutem jest punkt;
 w tym przypadku zresztą rzut wyznacza
 prosta. — Jeżeli punkt leży na prostej, to je-
 go rzut leży na rzucie prostej. Na prostej
 $AB \equiv a$ weźmy dowolnie punkt C ; rzut jego C'
 leży na rzucie $A'B' \equiv a'$. Proste rzucające równo-
 ległe AA' , BB' i CC' wyznaczają na prostych
 a i a' odcinki proporcjonalne; mamy więc:

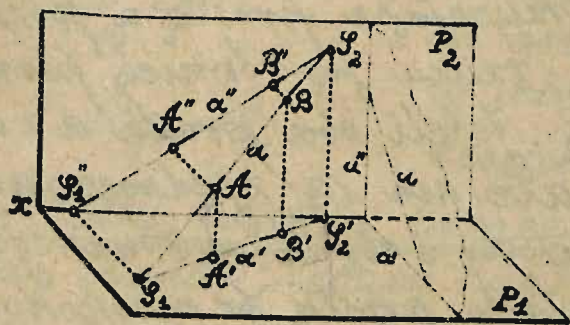
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

czyli: punkt C dzieli odcinek AB w tym sa-
 mym stosunku, w jakim rzut punktu C dzieli
 rzut odcinka AB . Równość tych dwóch stosunków
 jest prawdziwa nie tylko co do wartości bezwzględ-
 nej, ale i co do znaku, jakiegokolwiek zwroty
 prostych a i a' uznalibyśmy za dodatnie.

Punkt S , w którym prosta a przebiega płaszczy-
 nę rzutów nazywamy śladem prostej a na tej płaszc.
 Punkt ten jest oczywiście zjednoczony z własnym swoim

rzutem γ !

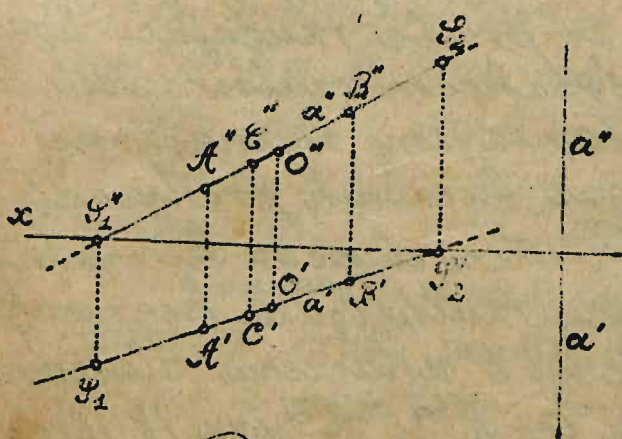
Wzińmy teraz dwa prostopadłe płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 , przecinające się według osi x (Rys. 16) i rzucimy prosta a na każdą z tych płaszczyzn. W tym celu obierzmy na prostej a dwa punkty jakiegokolwiek A i B , rzucimy



Rys. 16.

każdy z nich na obie płaszczyzny rzutów i połączmy ze sobą rzuty A' i B' oraz A'' i B'' . Prosta $a' = A'B'$ nazywa się pierwszym (leżącym) rzutem prostej a , prosta $a'' = A''B''$ nazywa się jej drugim

(pionowym) rzutem. Po rozpostarciu płaszczyzn P_1 i P_2 na płaszczyźnie rysunku otrzymamy w niej dwie proste a' i a'' (Rys. 17). Przypuszcimy, że żadna z nich nie jest prostopadłą do osi x . Powiadam, że takie dwie proste uważane: pierwszą a' za rzut pierwszy, drugą a'' za rzut drugi prostej właściwej a , wyznaczają tę prosta.



Rys. 17.

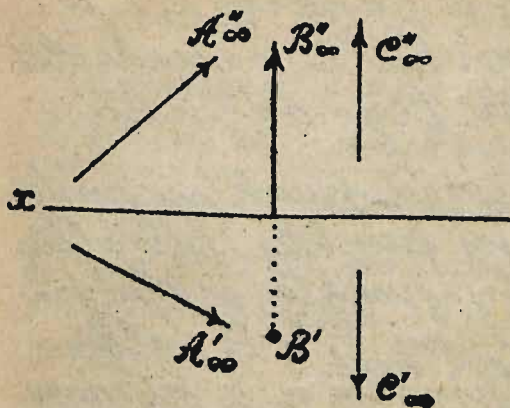
W samej rzeczy, sprowadzimy płaszczyznę P_2 wraz z leżącą w niej prostą a' do pierwotnego jej położenia względem P_1 , a następnie przez a' i a'' poprowadzimy płaszczyzny A_1 i A_2 prostopadłe odpowiednio do P_1 i P_2 .

przecięcie płaszczyzn Π_1 i Π_2 będzie prosta a .

Dwie proste płaszczyzny rysunku, z któ-
rych jedna jest prostopadła do osi, nie mo-
gą być rzutami prostej. Jeżeli bowiem jeden
rzut prostej a , np a' , jest prostopadły do x ,
to drugi jej rzut a'' przystaje do pierwszego,
gdyż płaszczyzna Π_1 , rzucająca prosta a poziomo,
t.j. prostopadłe do P_1 , rzuca ją również pionowo,
t.j. prostopadłe do P_2 . Jeżeli obie proste a' i a'' są
prostopadłe do osi, ale nie są zjednoczone, to
płaszczyzny rzucające Π_1 i Π_2 będą równoległe; wy-
znaczają więc one wtedy prosta w nieskończo-
ności, a mianowicie ustawienie płaszczyzn
prostopadłych do osi. Jeżeli obie proste a' i a''
są zjednoczone na prostopadłej do osi, to pła-
sczyzny rzucające Π_1 i Π_2 będą zjednoczone w pła-
sczyźnie prostopadłej do osi. Każda prosta tej
płaszczyzny będzie miała te same rzuty a' i
 a'' , w tym więc przypadku prosta a nie jest
przez swoje rzuty należycie wyznaczona.

§ 8. Rzuty punktów i prostych niewłaściwych.

Gdy punkt A^∞ jest niewłaściwy, t.j. gdy jest
danym kierunkiem, to prosta rzucająca łączy
go z niewłaściwym środkiem rzutów. Jest to
zatem ustawienie płaszczyzny wyznaczonej
przez dany kierunek oraz kierunek prostopadły
do płaszczyzny rzutów. Rzutem danego kierunku A^∞
na każdą z płaszczyzn rzutów będzie kierunek
wspólny temu ustawieniu i ustawieniu pła-
sczyzny rzutów; kierunki te A'^∞ i A''^∞ (rys. 18) będą
wyznaczone przez rzuty jakiegokolwiek prostej ma-
jącej kierunek A^∞ . Gdy dany kierunek B^∞ jest pro-



Rys. 18.

stopadły do jednej z płaszczyzn rzutów, to rzut jego na tę płaszczyznę jest jakimkolwiek punktem tej płaszczyzny; gdy dany kierunek C'' jest prostopadły do osi rzutów, to jego rzuty nie wyznaczają go należycie.

§. 9. Rzuty punktu, leżącego na prostej danej.
Każdy punkt, leżący na prostej ma swoje rzuty na odpowiednich rzutach prostej. Nawzajem, gdy pierwszy rzut punktu leży na pierwszym rzucie prostej, a jego drugi rzut na drugim rzucie prostej, to punkt i prosta, przez te rzuty wyznaczone należą do siebie. Możemy tedy rozstrzygać następująco

Zadanie: Na jednym z rzutów prostej dany jest odpowiedni rzut punktu na niej leżącego; wyznaczyć drugi rzut tego punktu. Niechaj będzie dana prosta a'' (Rys. 17); na jednym z jej rzutów, np. na a' niech będzie dany rzut C' punktu C , leżącego na prostej a . Drugi rzut C'' punktu C musi leżeć na prostej a'' oraz na linii rzędnych punktu C' . Jeżeli tedy z punktu C' spuścimy prostopadłą na oś x , to w przecięciu jej z prostą a'' otrzymamy szukany rzut C'' .

Gdy dane są rzuty dwóch punktów A i B (rys. 17) możemy wyznaczyć rzuty punktu C , dzielącego odcinek AB w stosunku danym: $m:n$. Połączmy $A'B'$ i $A''B''$ na prostej $a' \equiv A'B'$ wyznaczmy punkt C' , który dzieli odcinek $A'B'$ w danym stosunku; linja rzędnych przechodząca

prosta C' przecina $a'' \equiv A''B''$ w punkcie C'' . W szczególności rzutami środka O odcinka AB będą środki O' i O'' rzutów tego odcinka.

§ 10. Ślady prostej. Z pośród punktów prostej ważne są szczególnie te jej punkty, które leżą na płaszczyznach rzutów, t. j. punkty, w których ta prosta przebija płaszczyzny P_1 i P_2 , albo ślady. Punkt przecięcia prostej a z płaszczyzną P_1 nazywa się pierwszym, albo poziomym jej śladem S_1 ; punkt przecięcia prostej a z płaszczyzną P_2 nazywa się drugim, albo pionowym jej śladem S_2 (rys. 18).

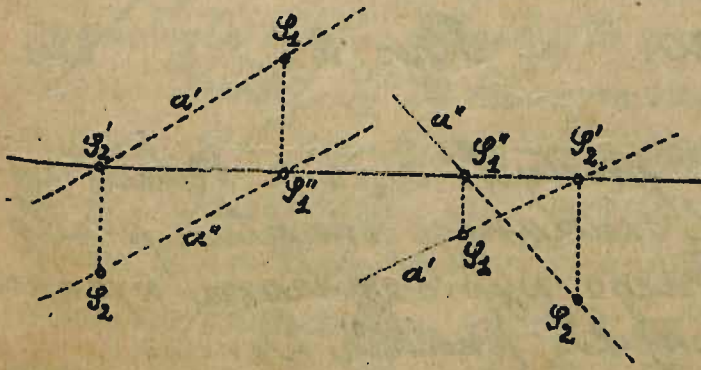
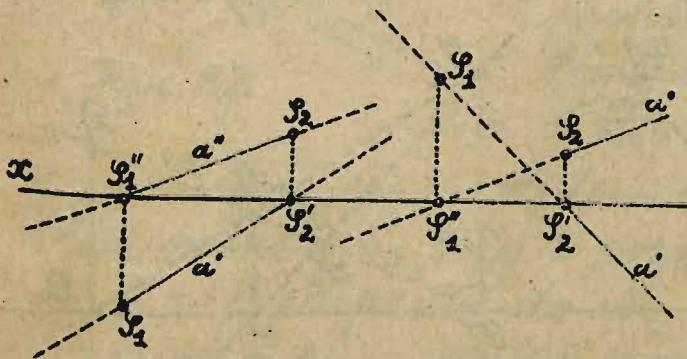
Zadanie. Mając rzuty a' i a'' prostej a wyznaczyć jej ślady S_1 i S_2 .

Ślad poziomy S_1 leży na P_1 (rys. 16. i 17), jego rzut pionowy S_1' leży zatem na osi; z drugiej strony musi on leżeć na rzucie pionowym a'' prostej a ; będzie to więc punkt przecięcia rzutu pionowego prostej z osią. Mając już rzut pionowy punktu leżącego na prostej $a'a''$, znajdziemy jego rzut poziomy, czyli sam ślad S_1 w przecięciu rzutu poziomego a' z linią rzędnych wyprowadzoną z punktu S_1' . W podobny sposób znajdziemy ślad pionowy S_2 . Jego rzut poziomy S_2' leżeć musi na osi (bo S_2 leży na P_2) oraz na rzucie poziomym a' (bo S_2 leży na a); będzie to więc punkt przecięcia rzutu poziomego a' z osią x . Prostopadła wystawiona w tym punkcie do osi wyznacza na rzucie pionowym a'' rzut pionowy tego śladu, który jest z nim zresztą zjednoczony.

Rozwiązanie powyższe zawodzi, gdy rzuty a' i a'' są zjednoczone na prostopadłej do x ; wtedy

zrewna, jak wiemy, rzuty prostej nie wyznaczają jej w przestrzeni.

Zadanie odwrotne: Mając ślady S_1 i S_2 prostej a , wykreślić jej rzuty a' i a'' , jest przypadkiem szczególnym wyznaczenia rzutów prostej przez rzuty jej dwóch punktów jakichkolwiek. Ślad poziomy S_1 (rys. 19) jest własnym swym rzutem poziomym S_1' ; rzut pionowy S_1'' tego śladu, jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej na os z punktu S_1 . Ślad pionowy S_2 jest własnym swym rzutem pionowym S_2' ; jego rzut poziomy S_2'' jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej na os z punktu S_2 . Prosta łącząca rzuty poziome S_1' i S_2' punktów S_1 i S_2 jest rzutem poziomym a' prostej a ; prosta łącząca rzuty pionowe S_1'' i S_2'' tych punktów jest jej rzutem pionowym a'' .



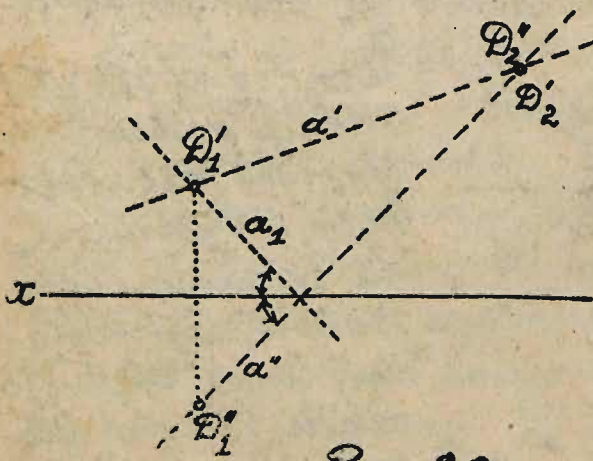
Rys. 19.

Częstokroć dla ułatwienia rekonstrukcji figur przestrzennych w wyobraźni na zasadzie ich rzutów, wykreślamy linję ciągłą te części rzutów, które znajdują się na $+P_1$ i $+P_2$, kreślimy natomiast linję przerywaną pozostałe ich części, t.j. te, które leżą na $-P_1$ i $-P_2$. Po dokonanych bowiem narysach planu i rzutu

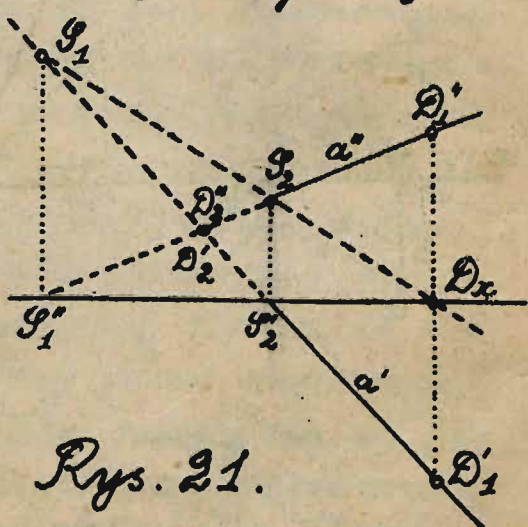
20

P_1 na P_2 , $+P_2$ przykrywa $-P_2$, a $+P_2$ przykrywa $-P_2$; gdyby ptaszczyzny rzutów były nieprzeciętne, to po rozpostarciu ptaszczyzn P_1 i P_2 na ptaszczyźnie rysunku pozostałyby widoczne tylko te części rzutów, które znajdują się na $+P_2$ i $+P_2$. Liniję ciągłą należy zatem wykreślić te tylko części rzutów prostej, na których leżą rzuty punktów I ćwiartki (Rys. 19).

§ 11. Punkty, w których prosta przebiega ptaszczyzny dwusieczne. Oprócz śladów same też są punkty przecięcia prostej z ptaszczyznami dwusiecznymi D_1 i D_2 . Aby wyznaczyć punkt D_1 , w którym prosta a przebiega D_1 (Rys. 20), należy na rzutach a' i a'' prostej a znaleźć dwa punkty D'_1 i D''_1 symetryczne względem osi x . W tym celu wyznaczamy prostą symetryczną do jednego z rzutów prostej; niech np. a_1 będzie symetryczną z a'' .



Rys. 20.



Rys. 21.

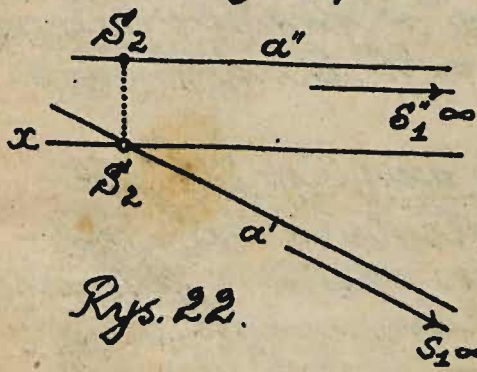
Punkt przecięcia prostych a_1 i a' będzie rzutem poziomym D'_1 szukanego punktu; prostopadła do osi z niego wyprowadzona wyznaczy na a'' rzut pionowy D''_1 punktu D_1 . Jeżeli ślady S_1 i S_2 prostej a są znane (rys 21),

to prosta $S_1 S_2$ przecina ω w punkcie D_x , który
wyznacza linię rzędną punktu D_1 , a więc i
oba jego rzuty D'_1 i D''_1 . Za pomocą trójkątów
podobnych można bowiem łatwo okazać, że
 $D_x D'_1 = D_x D''_1$.

Aby wyznaczyć punkt D_2 (Rys. 20 i 21), w którym a przebija D_2 , t. j. którego rzuty przystają do siebie (§6), wystarczy znaleźć punkt przecięcia $D_2'D_2''$ rzutów a' i a'' .

§ 12. Potożenia szczególne prostych względem pta-
szczyzn rantów.

1. Prosta równoległa do pierwszej płaszczyzny
wątków, czyli prosta pozioma (Rys. 22). Pierwsze



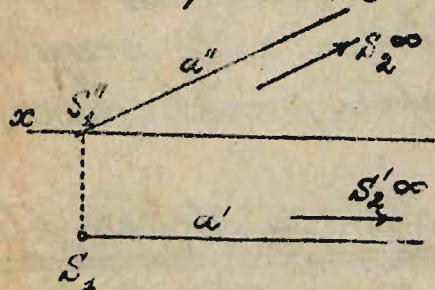
Rys. 22.

odległości wszystkich punktów
prostej a są równe; równe
są zatem wszystkie drugie
średnie tych punktów; rzut
pionowy a' jest prosto równo-
legły do osi. Rzut poziomy
 a jest równoległy do prostej

α , położenie jego względem osi jest jakiegokolwiek. Ślad pionowy S_2 leży w przecięciu rzutu pionowego α'' z prostą padłą do osi, wystawioną w punkcie przecięcia osi z rzutem poziomym α' . Ślad poziomy S_1 jest w nieskończoności, gdyż prosta α jest równoległa do P_1 . Wynika to zresztą również z wykreślenia. Punkt S_1'' , w którym rzut pionowy α'' przecina oś, jest punktem niewłaściwym osi; linja rzędnych tego punktu jest prostą, która go łączy z innym punktem niewłaściwym, mianowicie z kierunkiem prostopadłym do osi; jest to więc prosta niewłaściwa. Przecięcie prostej niewłaściwej z rzutem

W tym miejscu będzie zatym punktem niewła-
ściwym tego rzutu.

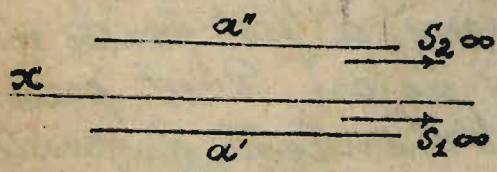
2. Prosta równoległa do drugiej płaszczyzny rzutów, czyli prosta frontowa (rys. 23). Drugie odległości wszystkich punktów prostej są równe; równe są zatem wszystkie pierwsze odległości tych punktów; rzut pozi-



Pyg. 23.

padła do osi i wystawiana w punkcie przecięcia osi z rzutem pionowym a'' . Ślad pionowy S_2 jest w nieskończoności.

3. Przosta równoległa do osi (Rys. 24). jest równoległa do obu płaszczyzn rzutowych; jest więc ona zarazem poziomą i frontową; obydwa jej rzuty są równoległe do osi. Sł.

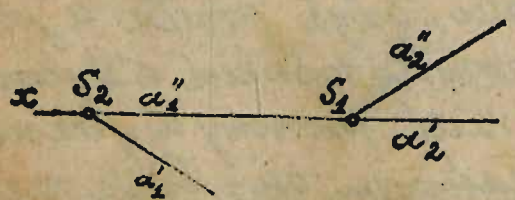


Rys. 24.

dy \mathcal{L}_1 i \mathcal{L}_2 są zjednoczone w punkcie niewłasnym osi.

4. Prosta, leżąca w jednej z płaszczyzn rzutów.
(Rys. 25). Prosta leżąca w płaszczyźnie P_1 przystaje do swego pierwszego rzutu, drugi zaś rzut leży na osi; ślad pierwszy jest niewyznaczony, dru-

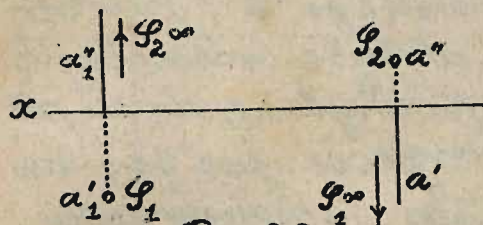
Rys. 25.



Kys. 25.

drugi jest niewyznaczony.

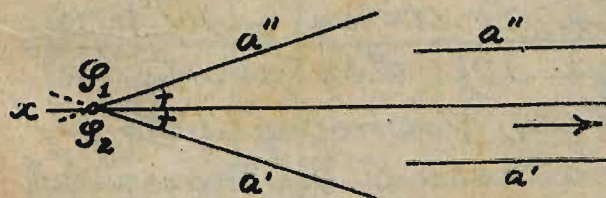
5. Prosta, prostopadła do jednej z płaszczyzn



Rys. 26.

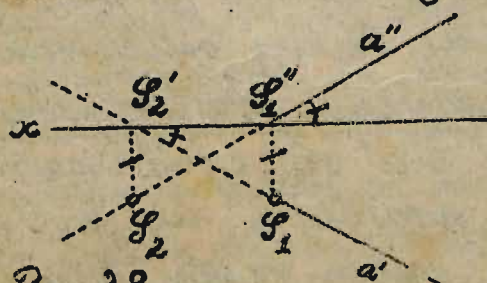
rzutów (Rys. 26). Jeżeli prosta jest prostopadła do P_1 , to pierwszy jej rzut jest punktem, drugi jest prostopadły do osi, pierwszy ślad przystaje do pierwszego rzutu, drugi jest w nieskończoności. Jeżeli prosta jest prostopadła do P_2 , to drugi jej rzut jest punktem, pierwszy jest prostopadły do osi, drugi ślad przystaje do drugiego rzutu, pierwszy jest w nieskończoności.

6. Prosta, leżąca w pierwszej płaszczyźnie dwusiecznej (Rys. 27). Rzuty wszystkich punktów takiej prostej są symetryczne względem osi; rzuty prostej muszą być zatem również symetryczne względem osi, t.j. muszą tworzyć z nią równe kąty i spotykać ją w tym samym punkcie, w którym oba ślady prostej są zjednoczone. Jeżeli rzuty prostej są równoległe do osi, to są na równych od niej odległościach.



Rys. 27.

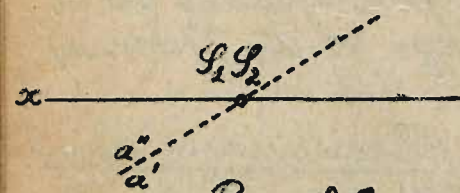
7. Prosta, równoległa do pierwszej płaszczyzny dwusiecznej (rys. 28). Aby prosta a była równoległa do D_1 , potrzeba i wystarcza, aby punkt przecięcia jej z tą płaszczyzną, a więc i oba jej rzuty leżały w nieskoń-



Rys. 28.

czoności. Ale rzut poziomy tego punktu jest przecięciem rzutu poziomego a' z prostą a_1 symetryczną do rzutu pionowego a'' ; potrzeba więc i wystarcza, aby a' była równoległa do a_1 , t.j. aby a' i a'' były nachylone do osi pod tym samym kątem, nie przecinając się na niej. Ślady są zawsze po tej samej stronie osi i na tej samej od niej odległości.

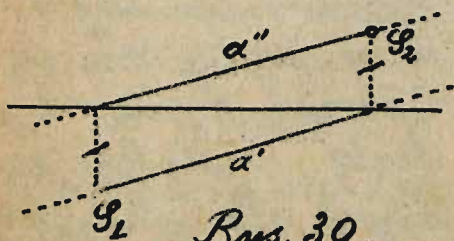
8. Prosta leżąca w drugiej płaszczyźnie dwusiecznej (Rys. 29) Rzuty



Rys. 29.

każdego punktu takiej prostej przystają do siebie, rzuty więc prostej również do siebie przystają. Ślady są zjednoczone w punkcie, w którym zjednoczone rzuty przecinają osi.

9. Prosta równoległa do drugiej płaszczyzny dwusiecznej. (Rys. 30). Aby prosta a była równoległa do D_2 potrzeba i wystarcza, aby punkt przecięcia jej z tą

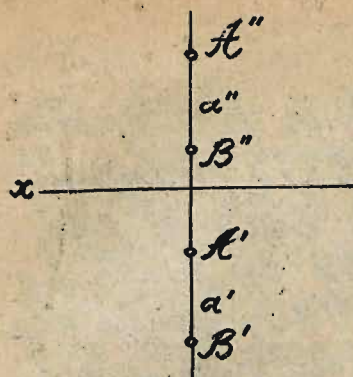


Rys. 30.

płaszczyznę leżała w nie-skończoności. Ale oba rzuty tego punktu są zjedno-

czone w punkcie przecięcia obu rzutów prostej; potrzeba więc i wystarcza, aby rzuty a' i a'' były równoległe. Ślady są zawsze po przeciwnych stronach osi i na tej samej od niej odległości.

10. Prosta leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do osi (Rys. 31). Oba rzuty a' i a'' są zjednoczone na prostopadłej do osi; prosta a nie jest wyznaczona należycie przez swoje rzuty. Dla wyznaczenia prostej mogą być wtedy dane rzuty dwóch jej punktów H i B . Wyznaczenie śladów

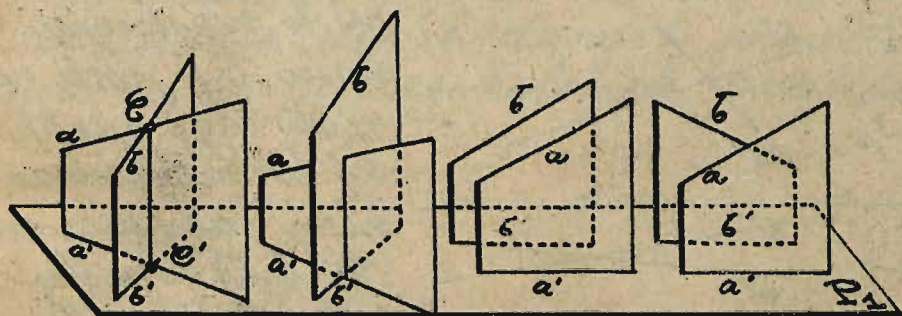


Rys. 31

takiej prostej oraz rzutów punktu na niej leżącego wymaga zastosowania rzutu na nową płaszczyznę rzutów P_2 , o czem będzie mowa w rozdziale następnym.

§ 13. Względne położenie dwóch prostych w przestrzeni. Dwie

proste w przestrzeni a i b mogą mieć położenie względne trojakie: mogą się one przecinać, t.j. mieć punkt właściwy wspólny, mogą być równoległe, t.j. mieć punkt niewłaściwy wspólny, albo mogą być skośne czyli wchrowate, t.j. nie mieć żadnego punktu wspólnego. Niech będą dwie proste prze-

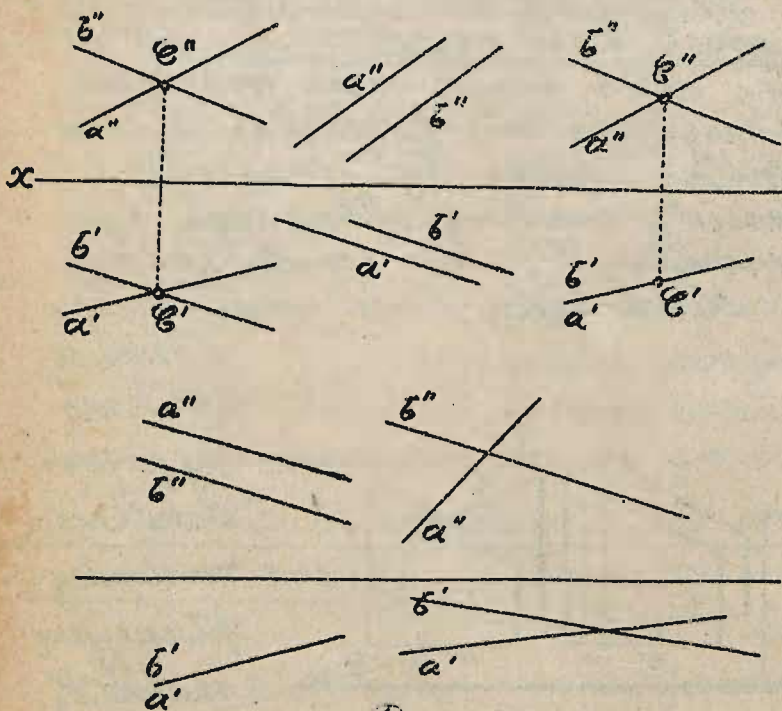


Rys. 32.

strzeni a i b . Rzućmy je prostopadłonie na dowolną płaszczyznę rzutów P_2 . Jeżeli te proste się

przecinają, to przecinają się również ich rzuty, i to w punkcie, który jest rzutem punktu przecięcia prostych. Ale jeżeli rzuty dwóch prostych się przecinają, to nie wynika stąd jeszcze, by te proste się przecinały. Jeżeli proste są równoległe, to równoległe są też ich rzuty, bo punkt przecięcia tych rzutów jest rzutem punktu w nieskończoności. Ale jeżeli rzuty dwóch prostych są równoległe, to nie wynika stąd jeszcze, by proste miały być równoległe (Rys. 32).

Przeźniemy teraz dane proste na dwie prostopadłe płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 (Rys. 33) i przypuści-
my, że żadna z tych prostych nie leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi. Aby te proste się przecinały, potrzeba i wystarczy, aby punkt prze-



Rys. 33.

cięcia pierwszych rzutów i punkt przecięcia drugich rzutów leżały na wspólnej prostopadłej do osi. Proste będą równoległe, jeżeli mają punkt wspólny w nieskończoności, t.j. jeżeli oba rzuty tego punktu są w nieskończoności; aby więc proste były równoległe, potrzeba i wystarczy, aby zarówno pierwsze

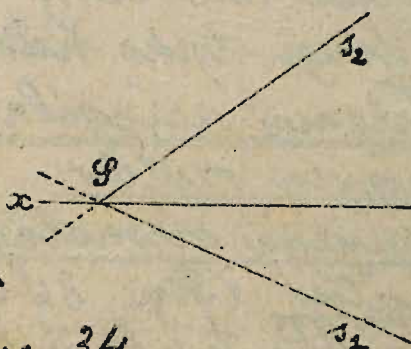
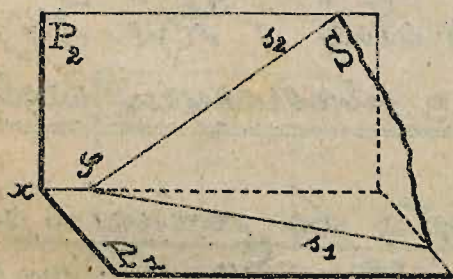
rzuty jak i drugie były równoległe. Można się zdarzyć, że pierwsze lub drugie rzuty dwóch prostych przystają do siebie. Wtedy proste leżą w tej samej płaszczyźnie rucającej i będą się przecinały albo będą równoległe, zależnie od tego, czy drugie ich rzuty się przecinają, albo czy są równoległe. Jeżeli punkt przecięcia pierwszych rzutów i punkt przecięcia drugich rzutów nie leżą na wspólnej prostopadłej do osi, to proste są wchrowate.

Jeżeli jedna z dwóch prostych, np. a jest prostopadła do P_1 , to druga prosta b przecina ją

wtedy i tylko wtedy, gdy jej pierwszy rzut b' przechodzi przez pierwszy ślad $S_1 \equiv a'$ prostej a . Tak samo mają się rzeczy, gdy a jest prostopadła do P_2 .

Jeżeli jedna lub obie proste a i b leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi, to określenie względnego położenia tych prostych wymaga zastosowania nowej płaszczyzny rzutów (Rozdział II).

§ 14. Odwzorowanie płaszczyzny za pomocą śladów. Płaszczyzna jest wyznaczona przez trzy swoje punkty, nie leżące na jednej prostej, lub też przez dwie swoje proste przecinające się lub równoległe. Pierwszy sposób wyznaczania sporządza się do drugiego, przez potęczenie dwóch danych punktów prostą i potęczenie jakiegokolwiek punktu tej prostej



Rys. 34.

(własnego lub niewłasnego) i trzecim danym punktem.

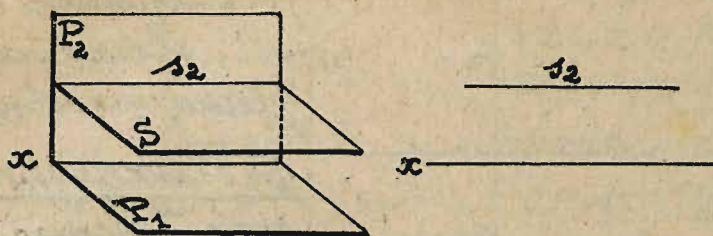
Dla wyznaczenia płaszczyzny trzeba będzie zatem wogóle

z czterech rzutów prostych: dwóch rzutów poziomych a' i b' i dwóch pionowych a'' i b'' , przytym punkt przecięcia C' rzutów poziomych i punkt przecięcia C'' rzutów pionowych winny leżeć na wspólnej prostopadłej do osi. Jeżeli jednak dane proste weźmiemy na płaszczyznach rzutów, to dwa z tych czterech ru-

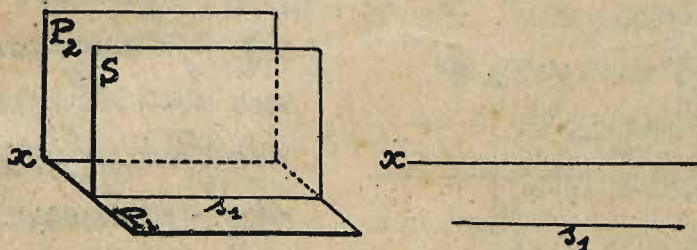
tów będą leżący na osi; do wyznaczenia ptaszczyny wystarczy wtedy dwa pozostałe rzuty, które zresztą są zjednoczone z samymi prostymi. Proste te nazywamy śladami ptaszczyny, są to linie przecięcia danej ptaszczyny S z ptaszczynami rzutów. Prosta przecięcia ptaszczyn S i P_1 nazywamy pierwszym śladem lub śladem poziomym s_1 ptaszczyny S ; prostą przecięcia ptaszczyn S i P_2 nazywamy drugim śladem lub śladem pionowym s_2 ptaszczyny S . Ślady s_1 i s_2 przecinają się oczywiście zawsze na osi, albowiem trzy proste s_1 , s_2 i x przecięcia ptaszczyn S , P_1 i P_2 spotykają się w jednym punkcie S , który jest wspólny tym ptaszczynom. Z każdego śladu jest widoczna ta jego część, która leży na dodatniej półptaszczynie rzutów, a więc pierwszy ślad kreślimy linią ciągłą tylko pod osią, drugi - tylko nad osią. (Rys. 34).

§ 15. Położenia szczególne ptaszczyn względem ptaszczyn rzutów.

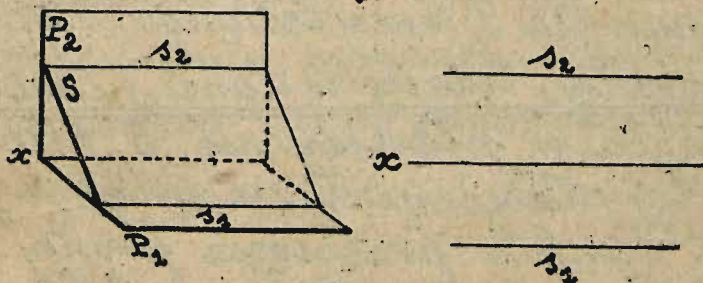
1. Ptaszczyna równoległa do jednej z ptaszczyn rzutów. (Rys. 35 i 36). Przypuścimy najpierw, że $S \parallel P_1$, t.j. że S jest ptaszczyną poziomą; przecina ona ptaszczynę P_1 w nieskończoności; drugi ślad s_2 jest równoległy do osi, albowiem dwie ptaszczyny równoległe P_1 i S przecięte ptaszczyną P_2 wyznaczą z nią proste x i s_2 równoległe. Podobnie, gdy $S \parallel P_2$, t.j. gdy S jest ptaszczyną frontową, to s_2 jest prostą w nieskończoności, s_1 zaś jest prostą równoległą do osi.



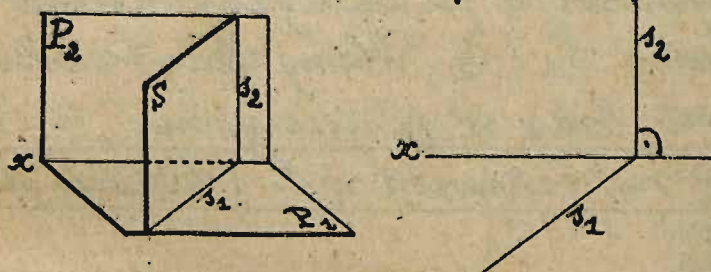
Rys. 35.



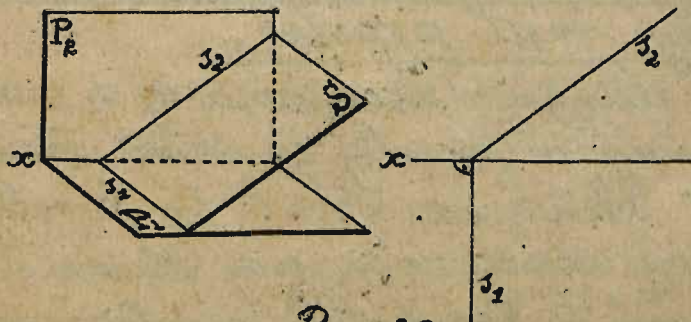
Rys. 36.



Rys. 37.



Rys. 38

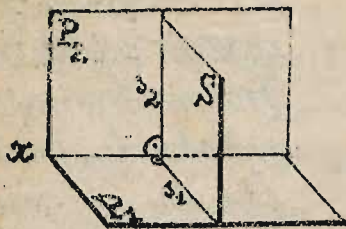


Rys. 39.

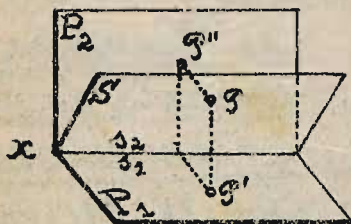
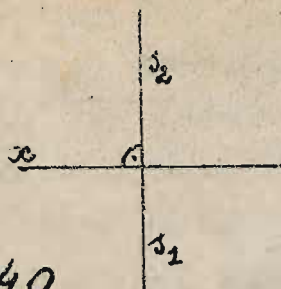
2. Plaszczyzna równoległa do osi.
Przecina ona os w nieskończoności, ślady jej muszą być zatem równoległe do osi (R. 37).

3. Plaszczyzna prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów.
(Rys. 38 i 39). Jeżeli $S \perp P_2$, to $s_2 \perp x$. W samej rzeczy, s_2 jest przecięciem dwóch płaszczyzn S i P_2 , które są prostopadłe do P_2 ; s_2 jest tedy również prostopadłą do P_2 ; ale wtedy jest ona prostopadłą do x , która leży w płaszczyźnie P_1 . Podobnie znajdziemy, że gdy $S \perp P_1$, to $s_1 \perp x$.

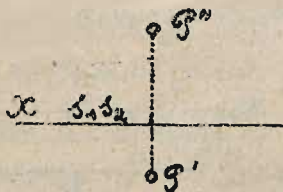
4. Plaszczyzna prostopadła do obu płaszczyzn rzutów, t.j. do osi (Rys. 40).
Obidwa ślady są



Rys. 40.



Rys. 41.



prostopadłe do osi, stanowiąc jedną prostą.

5. Płaszczyzna przechodząca przez osi. Obydwa ślady są zjednoczone na osi. Aby pociąć nie takiej płaszczyzny wyznaczyć, należy mieć rzuty

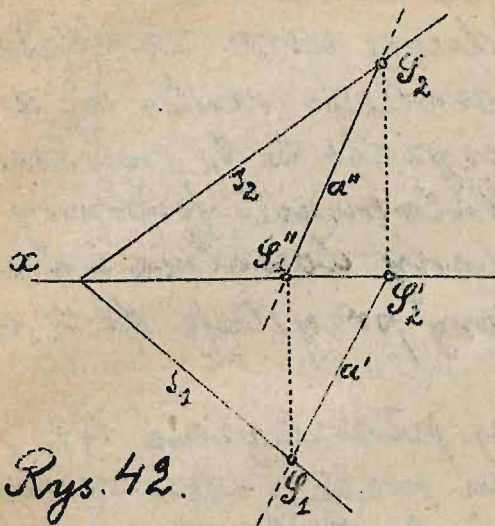
jakiegokolwiek punktu G , w niej leżącego. (Rys. 41).

§. 16. Rzuty prostej, leżącej w danej płaszczyźnie. Prosta, leżąca w płaszczyźnie S , przecina każdą prostą tej płaszczyzny, a więc i jej ślady s_1 i s_2 . Punkty przecięcia prostej ze śladami płaszczyzny są zarazem punktami, w których prosta przebija płaszczyzny rzutów, są to więc jej ślady s_1 i s_2 . Mamy tedy twierdzenie:

Jeżeli prosta a leży w płaszczyźnie S , to ślady prostej s_1 i s_2 leżą na odpowiednich śladach płaszczyzny s_1 i s_2 .

Zadanie. Mając jeden rzut prostej oraz oba ślady płaszczyzny przez nią przechodzącej, wyznaczyć drugi rzut prostej.

Niech będzie dana płaszczyzna $s_1 s_2$, oraz jeden z rzutów np. a' prostej a w tej płaszczyźnie położonej. Ponieważ ślad s_1 prostej a musi leżeć na jej rzucie a' i na śladzie s_1 płaszczyzny, musi to być zatem punkt przecięcia prostych a' i s_1 . Rzut poziomy śladu po-

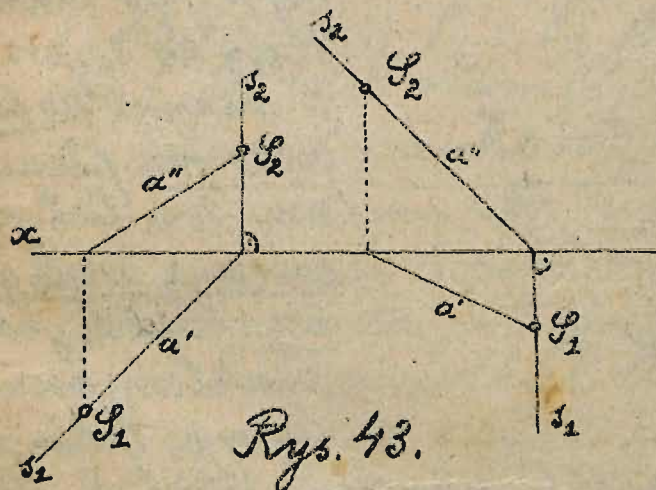


Rys. 42.

nowego s_2 musi leżeć na rzucie poziomym a' i na osi; jest to zatem punkt przecięcia rzutu a' z osią. Wystawiając w tym punkcie prostą do osi, znajdziemy w przecięciu tej prostej z śladem s_2 punkt S_2 , który jest śladem pionowym prostej a . Łącząc S_2 z rzutem

śladu S_1 na osi, otrzymamy szukany rzut pionowy a'' .

W jednym z przypadków, rzut a' nie może być dany dowolnie, stedy mianowicie, gdy ślad s_2 jest prostopadły do osi, t.j. gdy $s_1 s_2 \perp P_1$. (Rys. 43 z lewej strony). Pierwszy rzut każdej prostej w takiej płaszczyźnie położonej leży na śladzie s_1 ; płaszczyzna $s_1 s_2$ jest bowiem wówczas płaszczyzną rzucającą tę prostą na P_1 . Rzut a' jest więc wtedy dany



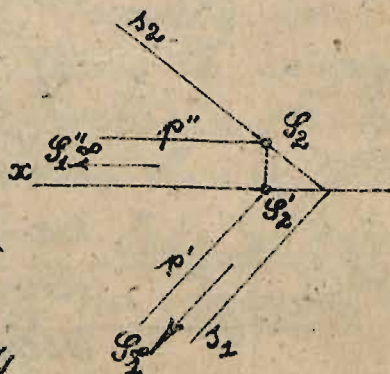
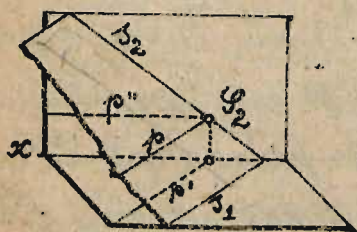
Rys. 43.

wraz ze śladem s_1 , ale nie wyznacza drugiego rzutu a'' , a więc i prostej a , leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$. Natomiast rzut a' może być dany dowolnie i wraz z rzutem a'' , który przystaje do s_1 , wyznacza tę prostą. Podobnie, gdy $s_1 \perp x$,

wraz ze śladem s_1 , ale nie wyznacza drugiego rzutu a'' , a więc i prostej a , leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$. Natomiast rzut a' może być dany dowolnie i wraz z rzutem a'' , który przystaje do s_1 , wyznacza tę prostą. Podobnie, gdy $s_1 \perp x$,

t.j. gdy $s_1 s_2 \perp P_2$, to a'' musi leżeć na s_2 ; drugi rzut jest więc wtedy dany wraz ze śladem s_2 , ale nie wyznacza pierwszego rzutu a' , a więc i prostej a w płaszczyźnie $s_1 s_2$ prożonej (Rys. 43 z prawej str.). Natomiast pierwszy rzut a' może być wtedy dany dowolnie i wraz z drugim rzutem a'' , który przystaje do s_2 , wyznacza tę prostą.

Prosta, leżąca w danej płaszczyźnie $s_1 s_2$, jest więc wogóle wyznaczona przez jeden ze swoich rzutów. Z posród prostych, które tym sposobem mogą być wzięte na płaszczyźnie $s_1 s_2$, na szczególną uwagę zasługują te, których jeden z rzutów jest równoległy lub prostopadły do odpowiedniego śladu płaszczyzny.

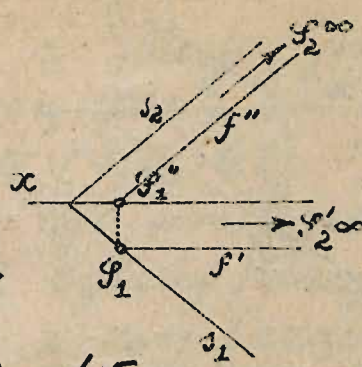
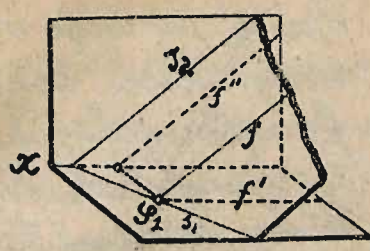


Rys. 44.

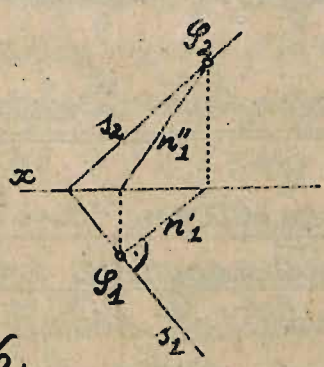
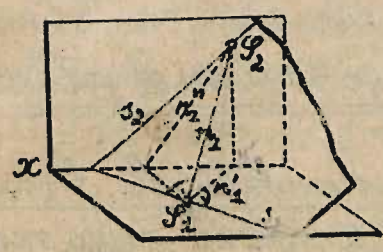
1.) Gdy rzut pionowy p'' jest równoległy do s_1 , prosta p nazywa się linią poziomą płaszczyzny $s_1 s_2$ lub jej pierwszą prostą główną. Ślad s_1 jest punktem niewidocznym; takim jest

też jego rzut pionowy s_1'' na osi. Ślad s_2 otrzymamy w przecięciu śladu s_2 płaszczyzny z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie jej przecięcia z rzutem p' ; rzut p'' , który łączy s_2 z s_1 jest równoległy do osi; prosta p jest więc równoległa do P_1 i do śladu s_1 .

2.) Gdy rzut pionowy p'' jest równoległy do s_2



Rys. 45.

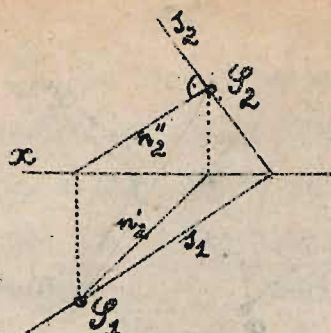
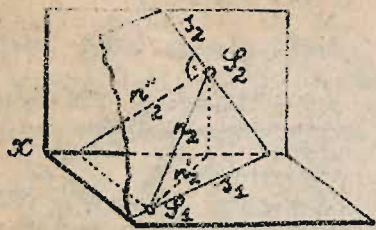


Rys. 46.

(rys. 45), prosta f nazywa się linią frontową płaszczyzny $s_1 s_2$ lub jej drugą prostą główną. Ślad s_2 jest punktem niewłaściwym; takim jest też jego rzut poziomy s_2' na si. Ślad s_1 otrzymamy w przecięciu śladu s_2 płaszczyzny z prostą f' do osi, wystawioną w punkcie jej przecięcia z rzutem f'' rzutu

f' , który łączy s_1 z s_2' jest równoległy do osi; prosta f jest więc równoległa do P_2 i do śladu s_2 .
 3) Gdy rzut poziomy n_1 jest \perp do s_1 (Rys. 46), prosta n_1 nazywa się pierwszą linią spadkową. Na zasadzie twierdzenia o trzech prostokątach prosta ta jest prostopadła do śladu s_2 , a więc i do wszystkich linii poziomych płaszczyzny $s_1 s_2$. Kąt każdej z tych prostych ze swym rzutem poziomym jest kątem linijowym kąta dwusiecznego ($\angle P_2$). Każda inna prosta płaszczyzny tworzy ze swym rzutem poziomym kąt mniejszy od kąta dwusiecznego ($\angle P_2$), co tłumaczy nazwę tych prostych.

4) Prosta której rzut poziomy n_2 jest prostopadły do s_2 (Rys. 47), nazywa się drugą linią



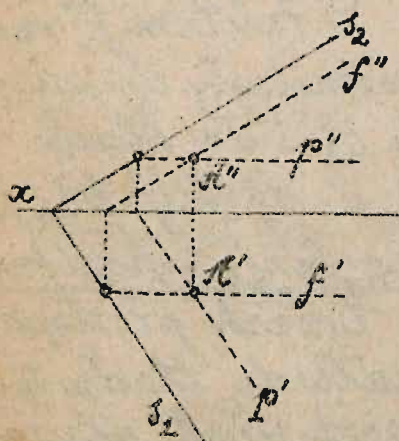
Rys. 47.

spadku. Jest ona prostopadła do śladu s_2 , a więc i do wszystkich linii frontowych płaszczyzny $s_1 s_2$. Kąt, który każda z tych prostych tworzy z

płaszczyzną P_2 , jest większy od kąta, który tworzy z tą płaszczyzną każda inna prosta płaszczyzny $s_1 s_2$.

§. 17. Rzut punktu leżącego w danej płaszczyźnie.

Zadanie. Mając jeden rzut punktu H , leżącego w danej płaszczyźnie $s_1 s_2$, znaleźć jego rzut drugi. Aby punkt H leżał w danej płaszczyźnie,



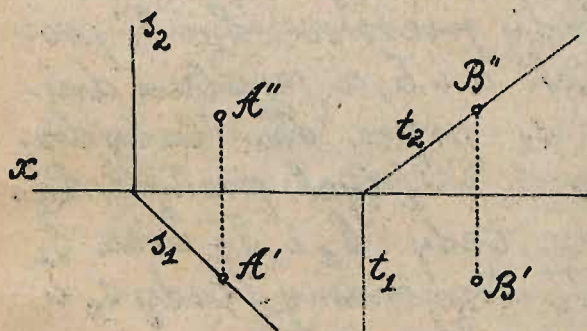
Rys. 48.

potrzeba i wystarcza, aby leżał na jakiegokolwiek prostej tej płaszczyzny. Przyjmijmy, że płaszczyzna dana $s_1 s_2$ nie jest prostopadła do P_1 , to jest, że s_2 nie jest $\perp x$, i niechaj będzie dany rzut H' punktu H , leżącego w płaszczyźnie $s_1 s_2$. Poprowadzimy przez

H' dowolną prostą p' nie prostopadłą do osi i uważajmy ją za rzut pierwszy prostej p , leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$ i przechodzącej przez punkt szukany. Wyznaczymy drugi rzut p'' prostej p , (§ 15) znajdziemy drugi rzut H punktu H' w przecięciu linii rędnych punktu H' z rzutem a'' . Ta prosta pomocnicza a' najlepiej wziąć prostą równoległą

do śladu s_1 lub do osi x ; prosta a jest wtedy linią poziomą $p'p''$, lub frontową $f'f''$ płaszczyzny s_1s_2 (Rys. 48).

Gdyby ślad s_2 był prostopadły do osi, to płaszczyzna s_1s_2 byłaby płaszczyzną rzucającą wszystkie proste w niej leżące, a więc na jej śladzie s_1 leżałyby wszystkie pierwsze rzuty punktów w niej leżących. Aby więc punkt A leżał w płaszczyźnie s_1s_2 prostopadłej do P_1 , potrzeba i wystarcza, aby jego rzut A' leżał na śladzie s_1 (Rys. 49 z lewej strony). Punkt



Rys. 49.

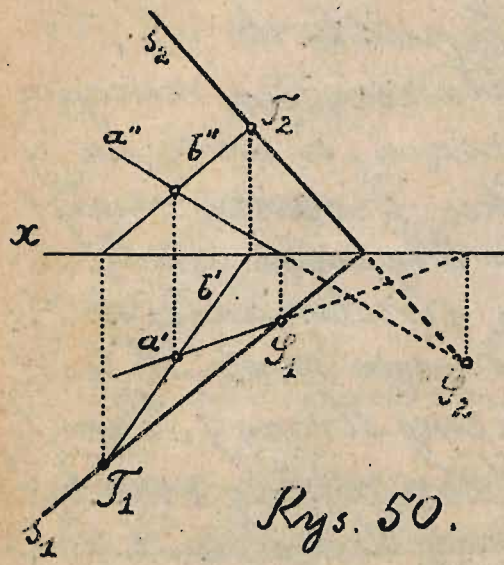
A' nie mógłby więc być dany dowolnie i musiałby leżeć na s_1 ; wtedy jednak drugi rzut A'' nie byłby przez s_1 , s_2 i A' należycie wyznaczony, wszystkie bowiem punkty prostej prostopadłej do P_1 w

punkcie A' leżałyby w płaszczyźnie s_1s_2 , mając ten sam rzut pierwszy A' . Natomiast rzut A'' wyznacza punkt A ; jego rzut pierwszy A' jest wtedy punktem, w którym linia rzędnych punktu A'' przecina ślad s_1 .

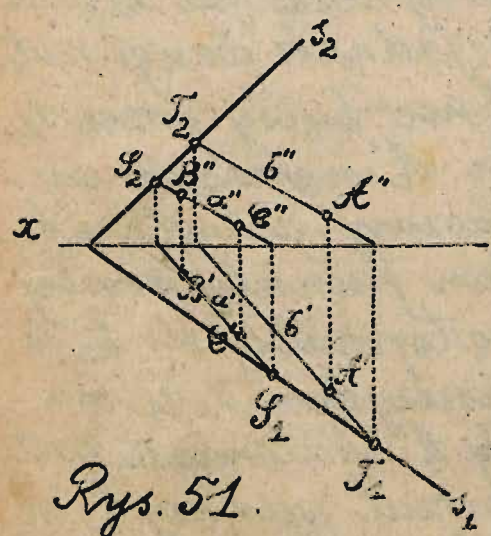
Podobnie, aby punkt B leżał w płaszczyźnie t_1t_2 prostopadłej do P_2 , potrzeba i wystarcza, aby rzut B'' leżał na śladzie t_2 ; rzut B'' nie wyznacza wtedy punktu B ; wyznaczy go natomiast rzut B' (Rys. 49 z prawej strony).

§ 18. Ślady płaszczyzny przecinającej przez dane proste i punkty.

Zadanie. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, przechodzącej przez dwie proste przecinające się lub równoległe. Niech będą dane punkty a'' i b'' dwóch prostych a i b przecinających się lub równoległych (Rys. 50 i 51).



Rys. 50.



Rys. 51.

Znajdźmy ślady S_1 i S_2 prostej a oraz ślady T_1 i T_2 prostej b . Ponieważ płaszczyzna szukana ma przechodzić przez obie proste dane, więc jej ślad pierwszy S_1 musi przejść przez oba ślady pierwsze S_2 i T_1 prostych a i b , a jej ślad drugi S_2 - przez oba ślady drugie S_2 i T_2 tych prostych. Łącząc tedy S_1 i T_1 oraz S_2 i T_2 otrzymamy ślady S_1 i S_2 szukanej płaszczyzny; winny one spotkać się na osi, co stanowi sprawdzenie dokładności wykreślenia.

Do tego zadania sprowadza się wyznaczenie śladów

płaszczyzny przechodzącej przez prostą daną i punkt na niej nie leżący lub przez trzy punkty dane, nie leżące na jednej prostej. Niech będzie np. dana prosta $a'a''$ oraz punkt $A'A''$; obróćmy na $a'a''$ punkt jakiegokolwiek $B'B''$ i połączymy $A'B'$ i $A''B''$, mamy poprowadzić płaszczyznę przez dwie przecina-

jące się proste $a'a''$ i $A'B, A''B'$. Najdogodniej będzie zresztą potążyć punkt $A'A''$ z punktem niewłaściwym prostej $a'a''$, t. j. przez punkt $A'A''$ poprowadzić równoległą do $a'a''$.

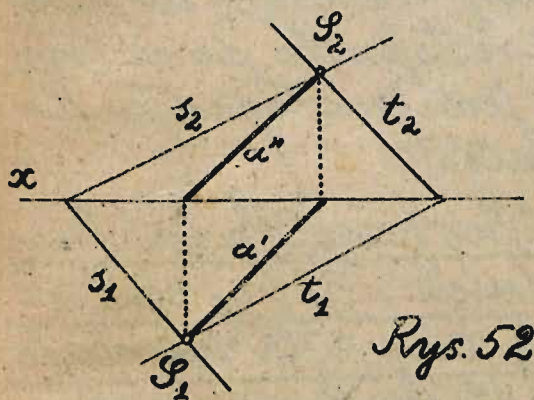
Gdy mamy trzy punkty $A'A'', B'B''$ i $C'C''$ (Rys. 51) nie leżące na jednej prostej, taczemy dwa z tych punktów, np. $B'B''$ i $C'C''$ prostą $a'a''$, przez co sprowadzamy ten przypadek do poprzedniego.

§ 19. Prosta przecięcia dwóch płaszczyzn.

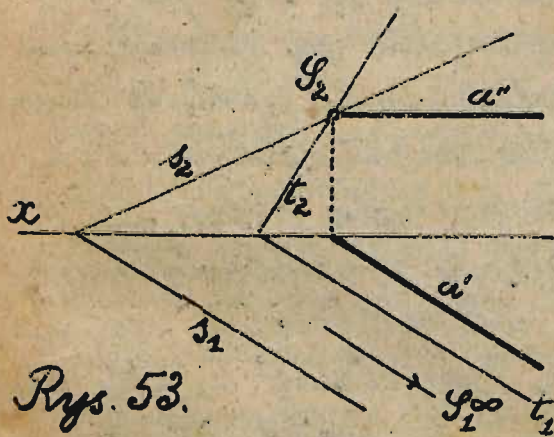
Zadanie. Wyznaczyć rzuty prostej przecięcia płaszczyzn danych s_1, s_2 i t_1, t_2 .

Ponieważ prosta szukana leży zarówno w płaszczyźnie S jak i w płaszczyźnie T , więc jej ślad pierwszy S_1 musi leżeć zarówno na śladzie pierwszym s_1 płaszczyzny S , jak i na śladzie pierwszym t_1 płaszczyzny T , a więc w ich przecięciu; podobnie ślad drugi S_2 będzie leżał w przecięciu śladów drugich s_2 i t_2 . Mając zaś ślady prostej, znajdziemy jej rzuty a' i a'' (Rys. 52).

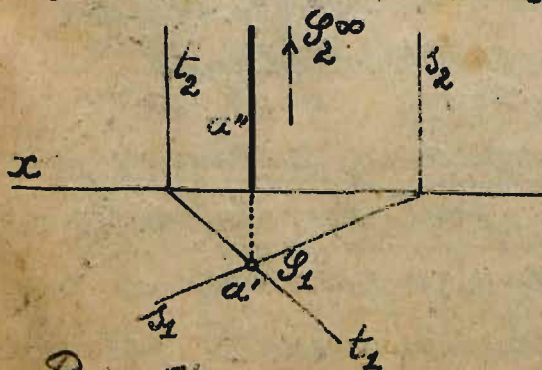
Rozważmy teraz przypadek szczególny tego zadania, w którym za-



Rys. 52



Rys. 53.

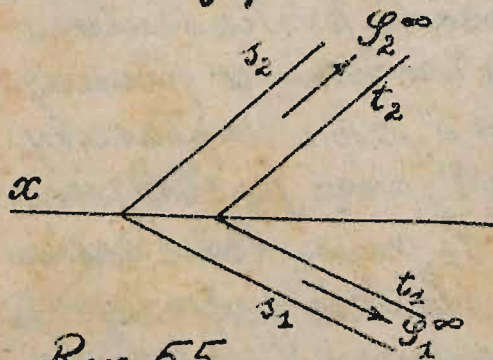


Rys. 54.

stosowanie powyższego sposobu rozwiązania mogłoby następczo pewne trudności.

1) Jedna para śladów odpowiednich np. s_1 i t_1 są to proste równoległe (Rys. 53). Ślad S_2 znajduje się w przecięciu śladów s_2 i t_2 ; ślad S_1 jest punktem niewłaściwym śladów s_1 i t_1 . Prosta a jest linią poziomą obu płaszczyzn; jej rzut a' jest równoległy do s_1 i t_1 , rzut a'' jest równoległy do osi.

W szczególności, gdy ślady, należące do jednej płaszczyzny rzutów, są prostopadłe do osi (rys. 54), to prosta przecięcia jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów.



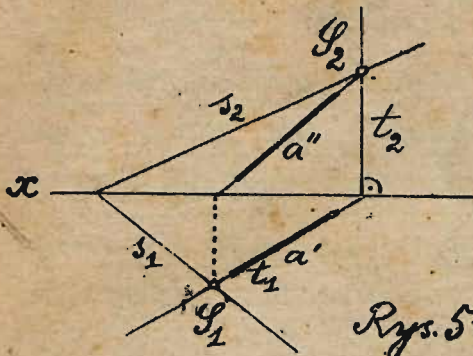
Rys. 55.

2) Obie pary śladów odpowiednich: s_1 i t_1 oraz s_2 i t_2 są to proste równoległe. Oba ślady S_1 i S_2 prostej przecięcia są punktami niewłaściwymi, jest to zatem prosta niewłaściwa. Pła-

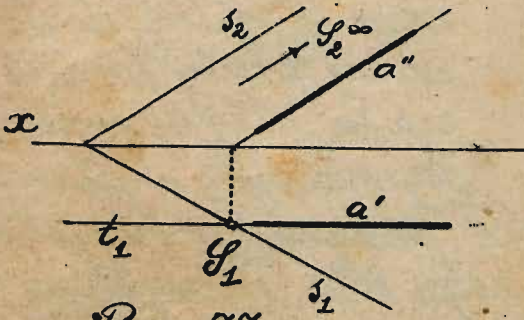
sczyzny S i T są więc równoległe (Rys. 55).

Nawzajem, dwie płaszczyzny równoległe mają ślady równoległe. Prosta ich przecięcia jest bowiem prostą niewłaściwą, jej ślady S_1 i S_2 są punktami niewłaściwymi, a więc ślady odpowiednie płaszczyzn są równoległe.

3) Jeden z śladów jednej z dwóch płaszczyzn, na przykład t_2 , jest prostopadły do osi. Jeden z rzutów prostej przecięcia, mianowicie a' leży na t_2 , płaszczyzna T jest więc płaszczyzną rzutującą poziomo prostą a (rys. 56).



Rys. 56.



Rys. 57.

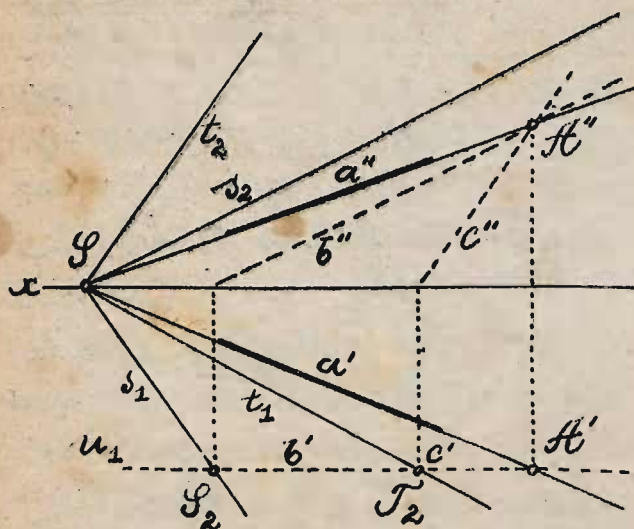
4.) Jeden ze śladów nap.
 t_1 jest równoległy do x , dru-
gi t_2 jest w nieskończono-
ści. Ślad s_1 jest przecię-
ciem śladów s_2 i t_1 ; ślad
 s_2 jest punktem niewłas-
wym prostej s_1 . Jeden raut
 a' prostej przecięcia przy-
 staje do t_1 , jest więc równo-
 legły do osi, drugi a'' jest
 równoległy do śladu s_2 ; prosta
 przecięcia jest pro-
 sta główna, mianowicie fron-
 tową płaszczyzny S. (Rys. 57).

Sposób ogólny rozwiązywania
 zagadnienia dwóch pta-

sczyzn zawodzi w tych razach, gdy ślady obu
 płaszczyzn przecinają się w tym samym punkcie
 osi, lub gdy jedna z dwóch płaszczyzn przecho-
 dzi przez osi, lub wreszcie gdy jeden lub oba
 punkty przecięcia śladów odpowiednich leżą
 poza granicami przeznaczonych na rysunek
 części płaszczyzny. Wtedy uciekamy się do tre-
 ciej płaszczyzny pomocniczej U, opierając się na
 następującej zasadzie:

Trzy płaszczyzny S, T i U, nie przechodzące
przez jedną prostą, przecinają się po dwie we-
dług trzech prostych a, b i c, spotykających się
w jednym punkcie H.

Za płaszczyznę pomocniczą U bieramy najchę-
 tniej płaszczyznę prostopadłą lub równoległą do



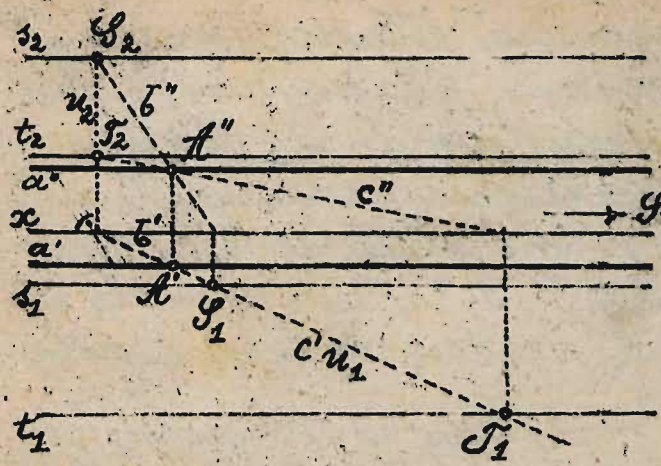
Rys. 58.

jednej z płaszczyzn
rzutów (Przyp. 3 i 4).

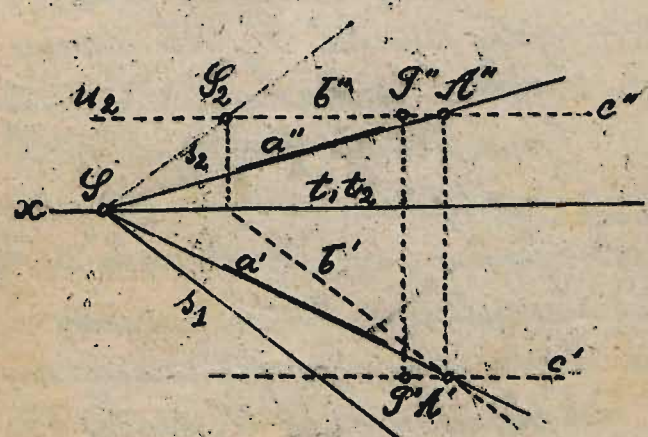
5) Przepuścimy naj-
pierw, że płaszczyzny
 S i T przecinają oś w
tym samym właściwym
punkcie S (Rys. 58).
Punkt ten jest więc
wspólny obu płaszczy-
znom i należy do szu-
kanej prostej przecię-
cia a . Aby tę prostą
wyznaczyć, wystarczy

zatem znaleźć rzuty jeszcze jednego jakiegokol-
wiek jej punktu. W tym celu obie płaszczyzny da-
ne przecinamy dowolną płaszczyzną pomocniczą
 U . Niechaj tą płaszczyzną będzie np. płaszczyzna
równoległa do P_2 ; jej ślad pierwszy u_1 jest ro-
wnoległy do osi; drugi ślad u_2 jest w nie-
skończoności. Trzy proste $SU=b$, $TU=c$ i $ST=a$
przecinają się w jednym punkcie H ; punkt
ten leży oczywiście na a i może być wyznaczo-
ny jako przecięcie prostych b i c . Wyznaczamy
tedy rzuty $b'b''$ prostej przecięcia płaszczyzn S
i U oraz rzuty $c'c''$ prostej przecięcia płaszczyzn T
i U (przyp. 4). Pierwsze rzuty tych prostych są
zjednoczone na u_1 ; drugie przecinają się w
punkcie H'' ; spuszczaając z H'' prostą do
osi znajdujemy na wspólnym pierwszym rzucie
obu prostych punkt H' . Łącząc punkt S z
punktem H' , otrzymujemy szukaną prostą
przecięcia $a'a''$.

6). Gdy płaszczyzny S i T przecinają oś w tym



Rys. 59.

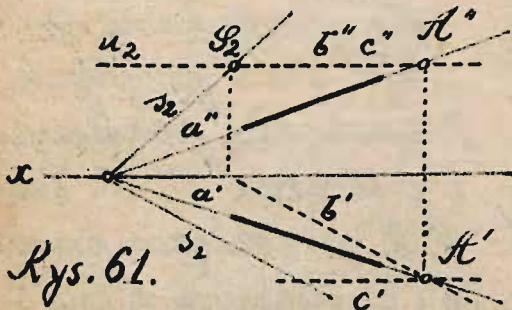


Rys. 60.

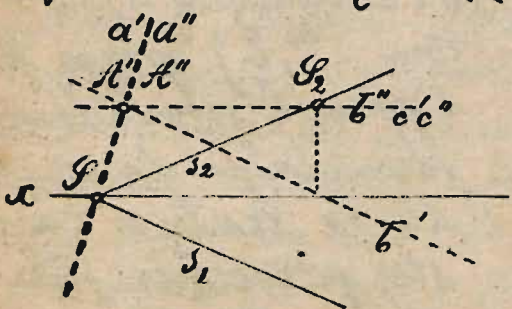
tem samym punkcie właściwym S^∞ (Rys 59) to jest gdy ślady obu danych płaszczyzn są równoległe do osi, musimy obrać inną płaszczyznę pomocniczą U . Niechaj nią będzie np. płaszczyzna prostopadła do P_1 . Znajdźmy rzuty $b'b''$ i $c'c''$ prostych przecięcia płaszczyzn S i U oraz T i U . Punkt $h'h''$ przecięcia prostych b i c łączymy z punktem S^∞ , t.j. przez h' i przez h'' prowadzimy równoległe do osi; będą to rzuty a' i a'' prostej przecięcia płaszczyzn S i T .

7). Gdy jedna z dwóch płaszczyzn, np. T , przechodzi przez oś, wtedy jej położenie jest wyznaczone przez rzuty punktu P w niej leżącego (§ 14, - 5 rys 41). Płaszczyzna taka ma z każdą inną płaszczyzną $S = s_1 s_2$ (rys. 60) wspólny punkt S na osi; aby wyznaczyć prostą przecięcia płaszczyzn S i T , poprowadzimy przez punkt $P'P''$ płaszczyznę pomocniczą U równoległą do P_1 . Jej pierwszy ślad u_1 będzie w nieskończoności; drugi u_2 jest prostą poprowadzoną z punktu P'' równoległą do osi. Wyznaczą

my prostą $b'b''$ przecięcia płaszczyzn S i U ; będzie to linja prosta płaszczyzny S , której drugi ramię b'' przystaje do u_2 . Wyznamy również prostą $c'c''$ przecięcia płaszczyzn I i U ; będzie to oczywiście równoległa do osi, poprowadzona przez punkt P . Pozostaje wreszcie wyznaczyć punkt $H'H''$ przecięcia $b'c$ i potęczyć $H'S$.



Rys. 61.



Rys. 62.

8) Gdy w szczególności jedna z dwóch danych płaszczyzn jest I lub II płaszczyzną dwusieczną, t.j. gdy punkt P jest dany jako jakakolwiek para punktów symetrycznych względem osi, względnie jako jakakolwiek para punktów zjednoczonych, śladem u_2 płaszczyzny pomocniczej U może być jakakolwiek prosta równoległa do osi; ramię c'' prostej c przecięcia płaszczyzn I i U przystaje do u_2 , a ramię c' tej prostej jest w pierwszym przypadku symetryczny do śladu u_2 , w drugim przystaje do niego.

(Rys 61 i 62). Punkt $H'H''$ jest punktem, w którym prosta prosta $b'b''$ płaszczyzn $s_1 s_2$ przecięcia I wzgl. II płaszczyznę dwusieczną (§ 11).

9). Płaszczyzna U równoległa do jednej z płaszczyzn ramion może być zastosowana i wtedy, gdy ślady odpowiednie np. drugie dwóch danych płaszczyzn nie przecinają się w obrębie ry-

sunku. Przecinając bowiem dane płaszczyzny

S i T płaszczyzna U , znajdziemy dwie proste b i c (Rys. 63), których punkt przecięcia H leży na prostej a ; łącząc ten punkt ze śladem S_1 otrzymamy prostą a .

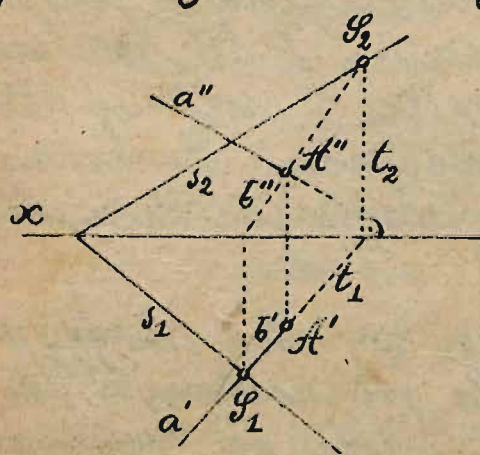
Gdyby punkt S_1 leżał również poza obrysem punktu, należałoby poprowadzić drugą płaszczyznę pomocniczą V za

jej pomocą znaleźć drugi punkt B wspólny obu danym płaszczyznom.

§ 20. Punkt przecięcia płaszczyzny prostej.

Zadanie. Wyznaczyć rzuty punktu, w którym dana prosta $a'a''$ przebija daną płaszczyznę s_1s_2 . Przypuszczając, że rzuty prostej a nie leżą na wspólnej prostopadłej do osi, poprowadzimy przez prostą a dowolną płaszczyznę, np. pierwszą płaszczyznę rzucającą. Jej ślad pierwszy t_1

przystaje do pierwszego rzutu a' danej prostej, drugi ślad t_2 jest prostopadły do osi. Wykreśliśmy rzuty prostej b przecięcia płaszczyzn s_1s_2 i t_1t_2 . Proste a i b muszą się przeciąć, albowiem leżą w tej samej płaszczyźnie t_1t_2 ; ich punkt przecięcia H będzie punktem

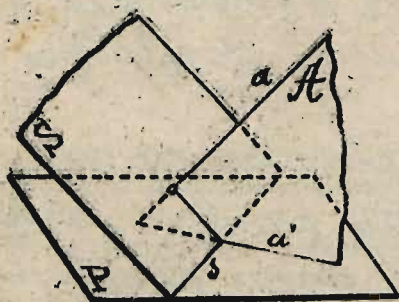


Rys. 64.

wspólnym prostej a i płaszczyzny π_1, π_2 , to jest szukany punkt przecięcia. Jego rzut drugi A'' będzie punktem przecięcia rzutów b'' i a'' ; rzut pierwszy A' znajdziemy na linii rzędnych, punktu A' w przecięciu jej ze wspólnym pierwszym rzutem prostych a i b .

§ 21. Proste i płaszczyzny prostopadłe.

Twierdzenie. Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to rzut prostej jest prostopadły do śladu płaszczyzny. Niech będzie płaszczyzna



Rys. 65.

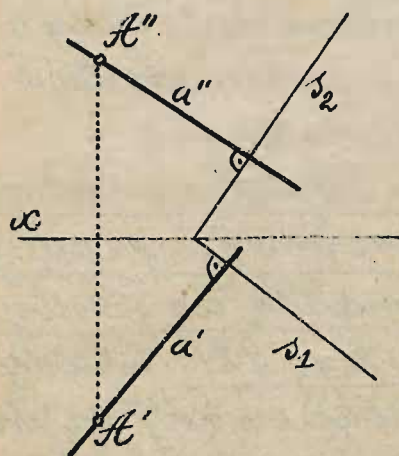
rzutów P i płaszczyzna jakiegokolwiek S , której śladem jest prosta s , oraz prosta a prostopadła do płaszczyzny S . Rzucimy prosta a prostopadnie na P , to jest przez a poprowadzimy płaszczyznę A prostopadłą do P ; jej ślad a'

jest rzutem prostej a ; trzeba okazać, że $a' \perp s$. W samej rzeczy, płaszczyzna A jest prostopadła do dwóch płaszczyzn P i S , jest więc ona prostopadła i do prostej s , według której te płaszczyzny się przecinają. Ponieważ $s \perp A$, jest więc ona prostopadła do a' , która leży w płaszczyźnie A , c.d.d.o.

Z twierdzenia powyższego wynika, że gdy prosta a jest prostopadła do płaszczyzny S , to $a' \perp s_1$ i $a' \perp s_2$. Nawzajem, jeżeli oba rzuty prostej a są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny S , to $a \perp S$. Każda bowiem z płaszczyzn rzucających prosta a jest prostopadła

ca do odpowiedniego śladu, a więc i do płaszczyzny S ; linja ich przecięcia t.j. prosta a jest więc również prostopadła do S .

Zadanie. Przez punkt H'' poprowadzić prostą prostopadłą do płaszczyzny $s_1 s_2$.



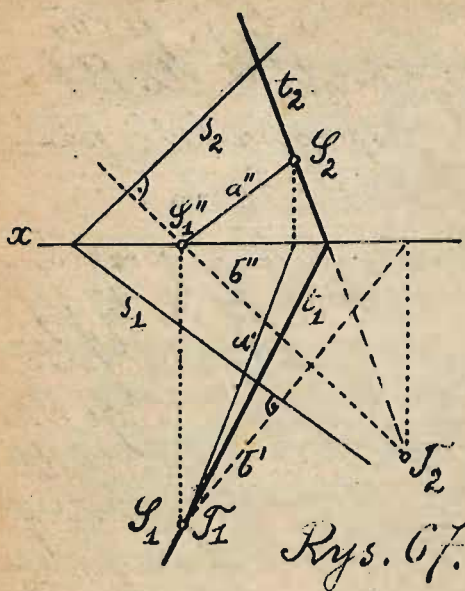
Rys. 66.

Jeżeli prosta szukana przechodzi przez punkt H , to rzuty jej przechodzą przez odpowiednie rzuty punktu H , prócz tego rzuty te mają być prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny.rowadzimy zatem przez H' rzut a' prostopadły do s_1 , a przez H'' rzut a'' prostopadły do s_2 .

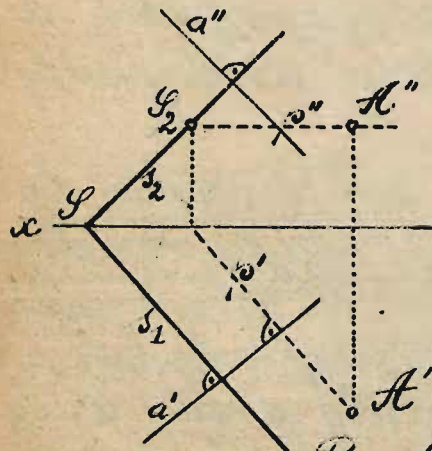
Płaszczyzna prostopadła do I płaszczyzny dwuwiecznej ma ślady symetryczne. W samej rzeczy, płaszczyzna prostopadła do D_1 jest prostopadła do jakiegokolwiek prostej d_1 tej płaszczyzny. Ale rzuty prostej d_1 są symetryczne względem osi, a więc i ślady płaszczyzny do niej prostopadłej są symetryczne.

Jak samo okażemy, że płaszczyzna prostopadła do II pł. dwuwiecznej ma ślady zjednoczone.

Zadanie. Przez daną prostą $a'a''$ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danej $s_1 s_2$ (Rys. 67). Znajdźmy ślady S_1 i S_2 prostej $a'a''$; z jakiegokolwiek punktu tej prostej, np. ze śladu S_1 , spuścimy prostopadłą $S_1 S_2$ na płaszczyznę $s_1 s_2$; pierwszy ślad tej prostej T_1 przystaje do S_1 ; znajdziemy drugi ślad T_2 . Płaszczyzna



Rys. 67.



Rys. 68.

- 54 -
 ... której ślad pionowy
 toczy s_2 i T_2 , a ślad po-
 ziomny t_2 przechodzi przez
 $s_1 T_1$, jest szukana, albo-
 wiem przechodzi ona przez
 prostą a i jest prostopadłą
 do płaszczyzny $s_1 s_2$ (gdyż
 przechodzi przez prostą b
 do niej prostopadłą.)

Zadanie. Przez punkt da-
 ny $A'A''$ poprowadzić płaszczy-
 znę prostopadłą do prostej
 danej $a'a''$ (Rys. 68). Ślady
 szukanej płaszczyzny są pro-
 stopadłe do odpowiednich rzu-
 tów prostej a . Poprowadzimy
 przez punkt A jedną z pro-
 styh głównych szukanej pła-
 szczyzny, np. linię poziomą
 p . Jej pierwszy rzut p' jest
 równoległy do śladu s_1 szu-
 kanej płaszczyzny, a więc prostopadły do a' ;
 drugi rzut p'' jest równoległy do osi. Wy-
 znaczymy ślad s_2 prostej p , poprowadzimy prze-
 zen ślad s_2 szukanej płaszczyzny prostopadłe do
 a'' , a z punktu $s_2 x \equiv s$ ślad s_1 prostopadły do a' .

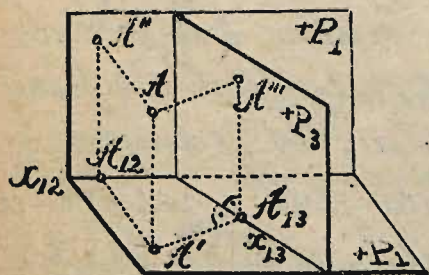
Do powyższego zadania sprowadza się nastę-
 pujące: Przez dany punkt $A'A''$ poprowadzić pro-
 stą przecinającą daną prostą $a'a''$ i prosto-
 padłą do niej. Przez punkt $A'A''$ prowadzimy
 płaszczyznę prostopadłą do $a'a''$, wyznaczamy
 jej punkt przecięcia prostą $a'a''$ i taczymy ten
 punkt z punktem $A'A''$.

ROZDZIAŁ II. ZMIANA PŁASZCZYZN RZUTÓW.

§ 22. Rzut punktu na płaszczyznę prostopadłą do P_1 , lub do P_2 .

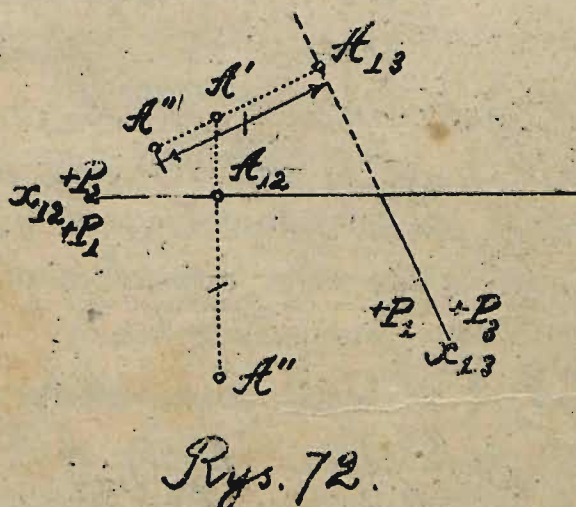
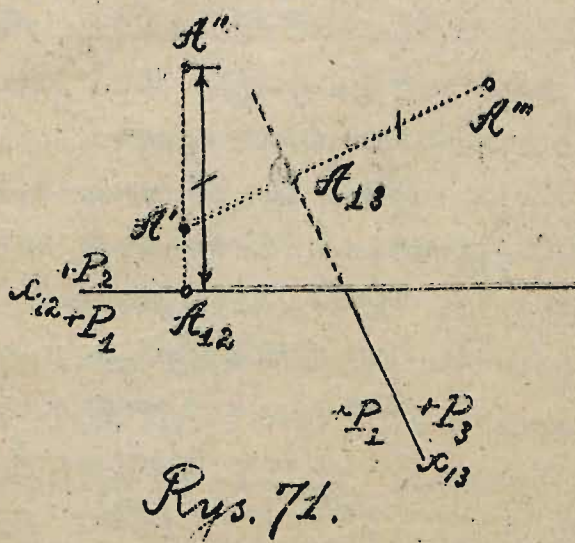
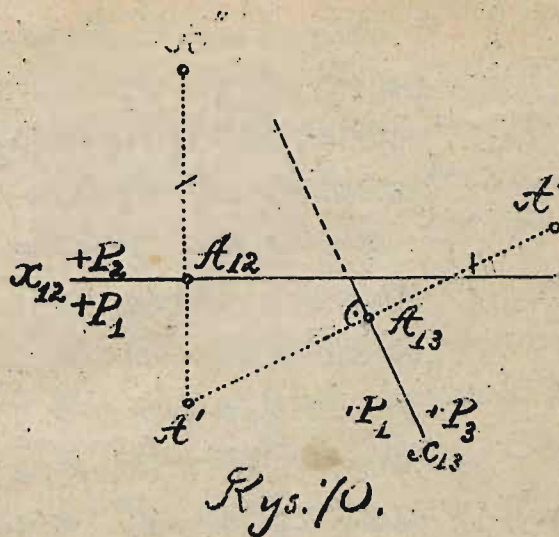
Nieraz bywa użytecznym rzut figury przestrzennej na płaszczyznę różną od P_1 i P_2 . Często się zdarza np., że niektóre proste i płaszczyzny figury przestrzennej są prostopadłe do jednej lub do obu płaszczyzn rzutów, dzięki czemu rzuty niektórych prostych są zjednoczone. Wprowadzić rzuty tak położonej w przestrzeni figury zwykle łatwiej mogą być wykreślone; tym trudniej zaś wyobrazić sobie figurę na podstawie tych rzutów. Z drugiej znów strony, liczne zagadnienia geometrii przestrzeni łatwo mogą być rozwiązane wykreślnie, gdy pewne części figury zajmą szczególne położenie względem płaszczyzn rzutów, - gdy np. pewna płaszczyzna figury postaje do jednej z płaszczyzn rzutów lub jest do niej równoległa, albo gdy pewna prosta jest do jednej z tych płaszczyzn prostopadła. W jednym i drugim przypadku pożądanym jest znaleźć rzut figury na nową płaszczyznę rzutów, mającą względem tej figury pewne położenie szczególne. Ponieważ każdą figurę uważać możemy za zbiór punktów położonych prostymi i płaszczyznami, wystarczy zatem umieć znaleźć rzut jednego punktu na nową płaszczyznę rzutów. Jak zobaczymy niebawem, można się przytem ograniczyć do płaszczyzn prostopadłych do P_1 lub P_2 . Niechaj będą dwie płaszczyzny rzutów P_1 i P_2

(Rys. 69), ich prostą przecięcia, czyli oś rzutów oznaczymy tym samym przez x_{12} ; jedną z dwóch części, na które oś x_{12} dzieli każdą z tych płaszczyzn uważać będziemy za dodatnią, oznaczając ją $+P_1$ lub $+P_2$. Niech będzie punkt przestrzeni A , którego rzuty oznaczymy jak zwykle A' i A'' ; rzędnę tego punktu będą $H_{12}A'$ i $H_{12}A''$; każdą z nich uważać będziemy za dodatnią, gdy leży na dodatniej półpłaszczyźnie rzutów; w przeciwnym razie uważać ją będziemy za ujemną. Niech będzie teraz nowa płaszczyzna rzutów P_3 prostopadła do P_2 ; jej ślad pierwszy oznaczymy przez x_{13} i nazwiemy krótko nową osią. Dzieli ona płaszczyznę P_3 na dwie części; oznaczmy przez $+P_3$ tę z nich, która leży po tej samej stronie P_1 , co $+P_2$. Z punktu A spuścmy prostopadłą na płaszczyznę P_3 , jej spodek A''' nazwiemy trzecim rzutem punktu A . Jest oczywiste, że $H_{12}A'' = H_{13}A'''$ i że ta równość jest prawdziwa nie tylko co do wartości bezwzględnej, ale i co do znaku. Przytym zarówno $H_{13}A'''$ jak i $H_{13}A'$ jest \perp do x_{13} . Obróćmy teraz

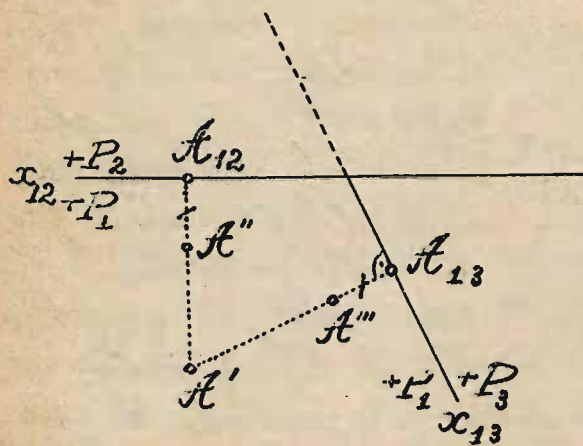


Rys. 69.

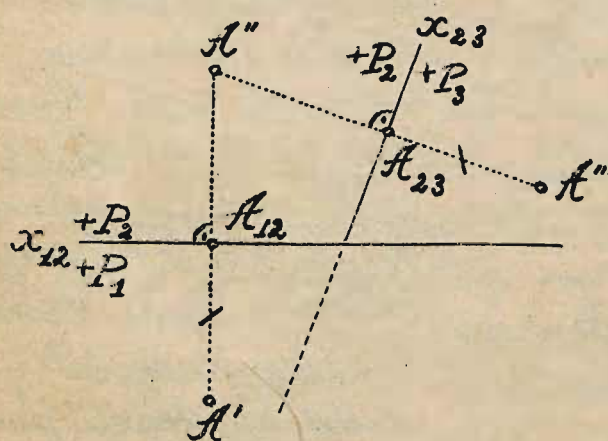
P_3 do kota x_{13} tak, aby ta płaszczyzna przystała do P_1 ; będzie to możliwe dwoma sposobami; po tej stronie nowej osi, po której upadnie $+P_3$ zrobmy odnośny napis; będzie to strona dodatnich trzecich rzędnych (Rys. 70, 71, 72, 73). Oczywiście, przeciwna strona nowej osi będzie przez nas czona dla dodatnich pierwszych rzędnych



względem, nowej osi;
możemy więc tutaj
umieścić napis $+P_1$.
Umieścimy również na-
pisy $+P_1$ i $+P_2$ po obu
stronach dawnej osi
 x_{12} . Aby znaleźć tre-
ci punkt punktu A , któ-
rego punkt pierwszy A' i
drugi A'' są dane, na-
leży z punktu A' spu-
ścić prostą $A'A_{13}$
na nową oś x_{13} i na
tej prostej od punk-
tu A_{13} przecięcia jej
z nową osią odmie-
rzyć co do wielkości i
co do znaku odcinek
 $A_{13}A''' = A_{12}A''$, przytym
każdy z tych odcinków
bierzemy uwarali ze
dodatni, jeżeli punkt
 A''' względnie A'' będzie
się znajdował po tej
stronie odpowiedniej
osi, po której znajdu-
je się napis $+P_3$ wzgl
 $+P_2$, - za ujemnym w
przeciwnym razie.
Rysunki 70, 71, 72 i
73 przedstawiają wy-
kreślenia trzeciego ru-
tu punktu A , jeżeli
ten punkt znajduje się w I, II, III lub IV



Rys. 73.



Rys. 74.

ćwiartce.

Zupełnie tak samo postępować będziemy, jeżeli nowa płaszczyzna rzutów P_3 będzie prostopadła do P_2 . Oznaczmy znowu przez $+P_3$ tę część płaszczyzny P_3 , która znajduje się po tej samej stronie płaszczyzny P_2 , co $+P_1$. Umieścimy napis $+P_3$ po tej stronie nowej osi x_{23} , po której ma upaść $+P_3$; będzie to strona dodatnich trzecich rzędnych; oczywiście, strona przeciwna będzie przeznaczona dla dodatnich drugich rzędnych względem nowej osi. Aby wyznaczyć trzeci rzut punktu H ,

spuścimy z punktu H'' prostopadłą $H''H_{23}$ na nową oś i na tej prostopadłej od punktu H_{23} przecięcia jej z nową osią odmierzymy co do wartości bezwzględnej i co do znaku odcinek $H_{23}H''' = H_{12}H'$.

Dwa rzuty $H'H'''$ lub $H''H'''$ tak samo dobrze wyznaczają punkt H , jak dwa rzuty $H'H''$. Jeden z dwóch danych rzutów punktu H zastępujemy w ten sposób przez rzut nowy, podczas gdy

inny pozostaje niezmienny.

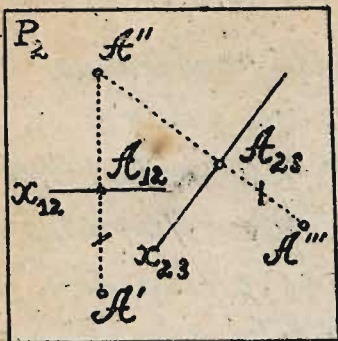
Wyznaczenie nowego rzutu odbywa się przede według następującej reguły:

Aby otrzymać nowy rzut punktu, spuścimy z rzutu, który nie ma ulegać zmianie, prostopadłą na nową oś i na tej prostopadłej odmierzymy od punktu przecięcia z osią odcinek równy co do wartości i znaku odległości zbytecznego rzutu od dawnej osi.

Odległości nowego rzutu od nowej osi = odległości zbytecznego rzutu od dawnej osi.

W ten sposób, dane rzuty punktu π na P_1 i P_2 możemy zastąpić rzutami jego na jedną z tych płaszczyzn, np. na P_2 , oraz na płaszczyznę do niej prostopadłą, przytym wyobrażamy sobie, iż płaszczyzna P_2 przez obrót w jedną lub drugą stronę dokota swego śladu na płaszczyźnie P_2 zostanie na niej rozpostarta.

Podany powyżej sposób postępowania jest oczywiście, jeżeli rzuty prostokątne rozważać będziemy według określenia, które daliśmy w § 5. Wprowadziliśmy tam początkowo tylko jedną płaszczyznę rzutów, mianowicie P_2 ; wyznaczenie punktu przestrzeni π odbyło się za pomocą jego rzutu π'' oraz w umówiony sposób odnotowanej odległości $\pi''\pi$. W tym celu poprowadziliśmy w płaszczyźnie rzutów dowolną prostą x_{12} i spuściwszy na nią z punktu π'' prostopadłą odmierzyliśmy na niej od spodka π_{12} w tę lub ową stronę odcinek równy odległości $\pi''\pi$. Otóż, gdy zamiast pro-

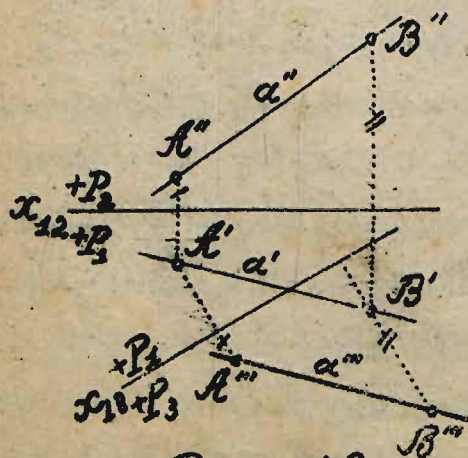


Rys. 75.

stej x_{12} weźmiemy inną, prostą x_{23} , to dla odzworowania punktu A wypadnie na prostopadłej spuszczonej z A'' na x_{23} odmierzyć od jej spodku A_{23} w tę lub ową stronę ten sam odcinek $A''A$. Mając więc odzworowany punkt A w jeden jakiegokolwiek sposób np.

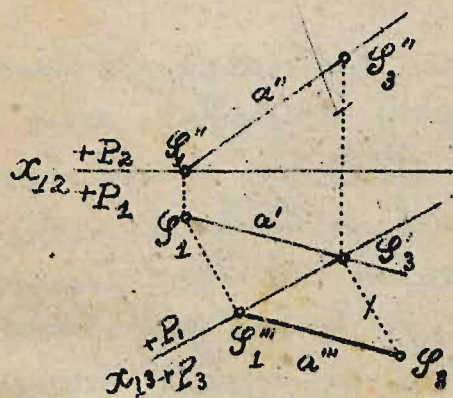
za pomocą osi x_{12} , możemy go odzworować za pomocą każdej innej x_{23} .

§ 23. Kąt prosty i ślad płaszczyzny na nowej płaszczyźnie rzutów prostopadłej do P_1 lub P_2 . Gdy chcemy wyznaczyć trzeci rzut prostej $a'a''$, to tacyśmy trzeci ruty dwóch jakiegokolwiek punktów tej prostej (Rys. 76.) Punktami tymi mogą być w szczególności (Rys. 77): ślad na płaszczyźnie, która ma pozostać niezmienną, oraz ślad na nowej płaszczyźnie rzutów. Kąt tego ostatniego punktu leżący w przecięciu nowej osi z tym rzutem prostej, który nie ma ulec zmianie.

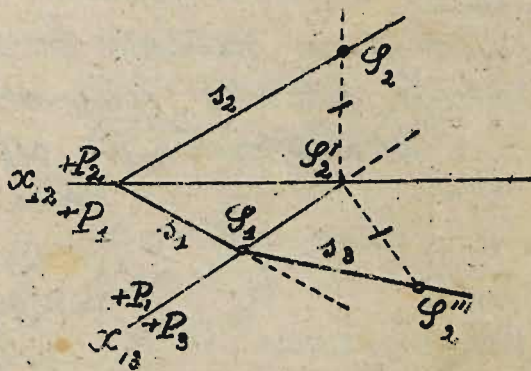


Rys. 76.

Aby wyznaczyć ślad płaszczyzny $s_1 s_2$ na nowej płaszczyźnie rzutów P_3 prostopadłej do P_1 lub P_2 , należy znaleźć trzeci ruty prostej przecięcia płaszczyzny $s_1 s_2$ z P_3 . W tym celu najlepiej skorzystać ze śladów s_1 i s_2 tej prostej (Rys. 78).



Rys. 77



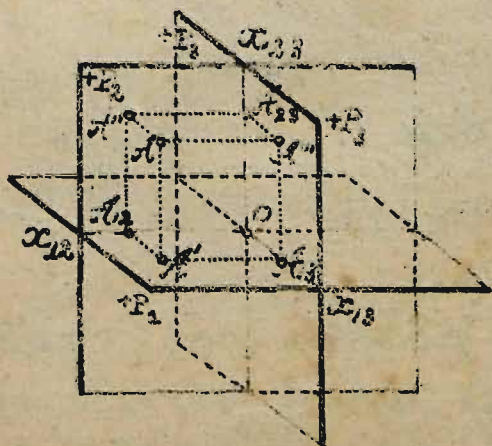
Rys. 78.

Ślady s_1 i s_3 lub s_2 i s_3 równie dobrze wyznaczają płaszczyznę S , jak ślady s_1 i s_2 .

§ 24. Płaszczyzna rzutów boczna. Z posród płaszczyzn rzutów, prostopadłych do P_2 lub P_3 , wyróżniają się te, które są do obu tych płaszczyzn, a więc i do osi x_{12} prostopadłe.

Płaszczyzny takie nazywamy bocznymi (Rys. 79)

Płaszczyzna boczna P_3 przecina P_1 i P_2 według prostych x_{13} i x_{23} , z których każda może uchodzić za nową oś rzutów, zależnie od tego, czy płaszczyznę P_3 rozprostujemy na

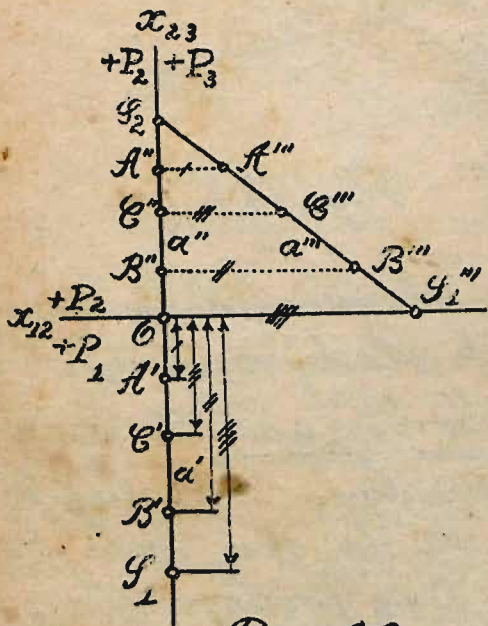


Rys. 79

płaszczyźnie P_1 czy na płaszczyźnie P_2 . Wzajemnie prostopadłe proste: x_{12} , x_{13} i x_{23} nazywamy osiami współrzędnymi, ich punkt przecięcia O początkiem współrzędnych, a pierwsza, dru-

ga i trzecią rzędną każdego punktu - spół-
rzednymi tego punktu.

Plaszczyzna rzutów boczna jest szczególnie
wartecka wtedy, gdy w grę wchodzi pta-
szczyzna prostopadła do osi. Trzecie rzuty figur,
leżących w takich pta-
szczyznach są tym. figurom
równe, podczas gdy dwa
pierwsze ich rzuty, leżąc
na zjednoczonych śladach
ptaszczyzny, figur tych
należycie nie wyznaczają.
W szczególności korzystamy
z ptaszczyzny bocznej rzu-
tów dla rozwiązania za-
dań, dotyczących prostych
prostopadłych do osi.

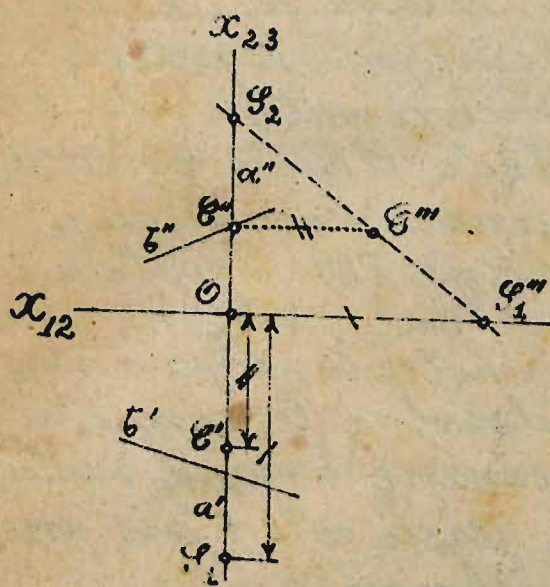


Rys. 80.

Niech będzie np. (Rys. 80)
prosta AB leżąca w pta-
szczyźnie prostopadłej do osi, a więc nie wy-
znaczona przez swoje rzuty a' i a'' , które le-
żą na zjednoczonych śladach ptaszczyzny.
Przyjmijmy, że dane są rzuty $A'A''$ i $B'B''$
punktów A i B tej prostej, mamy wyznaczyć
pierwszy rzut C' punktu C , leżącego na
tej prostej, gdy drugi jego rzut C'' jest
dany.

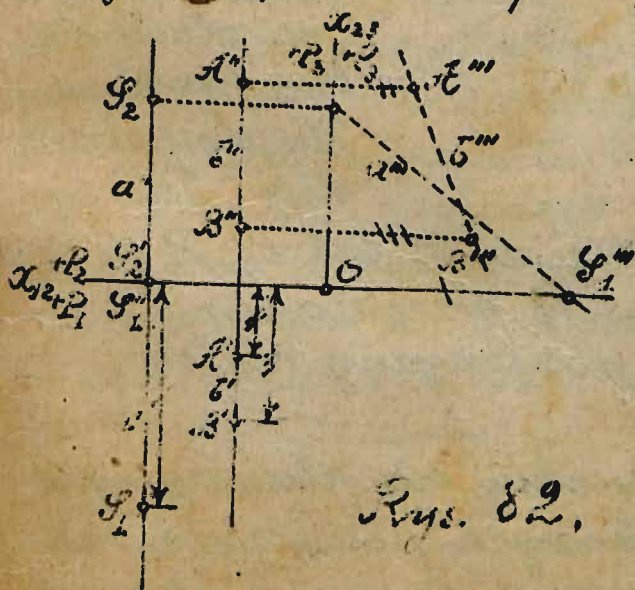
Obierzmy za nową ptaszczyznę rzutów
ptaszczyznę, w której dana prosta leży,
a za nową oś ślad x_{23} tej ptaszczy-
zny na P_2 . Wyznaczymy za pomocą

punktów A i B trzeci rzut α''' prostej a , znajdziemy trzecią rzędną $C''C'''$ punktu C ; odmierając ją zaś na α' od punktu C według zwykłej umowy znajdziemy szukany punkt C' . W szczególności znajdziemy tym sposobem ślady S_1 i S_2 prostej AB .



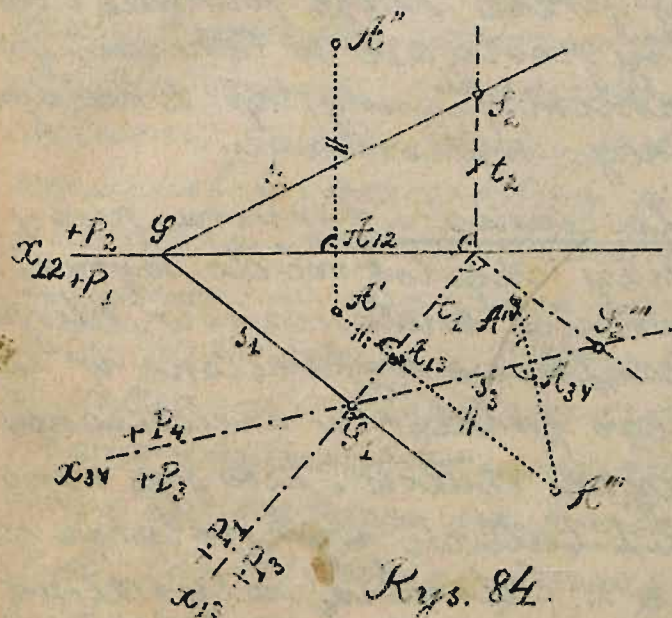
Rys. 81.

dana jest przez swoje rzuty b' i b'' (Rys. 81). Proste a i b nie mogą być równoległe; aby się przekonać, czy się przecinają, zważymy, że jeżeli punkt wspólny C tych prostych istnieje, to jego drugi rzut musi być punktem, w którym się przecinają. Drugie rzuty prostych a i b , t.j. punktem C'' . Mając drugi rzut punktu C , leżącego na prostej a , możemy na zasadzie poprzedniego zadania znaleźć jego



Rys. 82.

plasczyn rautów. Rozwiążmy tedy
Zadanie. Dane są pierwsze i drugie rau-
ty punktów A, B, C, \dots oraz ślady s_1 i s_2 pla-
sczyn S ; znaleźć rauty danych punktów na
plasczyn S , rozpoczając w plasczynie
rysunku. Znajdźmy np. raut punktu A na pla-
sczyn S ; tak
 samo wyznaczmy
 rauty wszystkich
 innych danych
 punktów. Spro-
 wadźmy plasczynę
 $P_3 (t_1, t_2)$ pro-
 stopadłą do P_1
 i do S , a więc pro-
 stopadłą do pro-
 stej ich przecię-
 cia s_1 . Jej pierw-
 szy ślad t_1 ozna-
 czymy przez x_{23} ,



Rys. 84.

będzie on prostopadły do s_1 ; drugi ślad t_2 bę-
 dzie prostopadły do osi x_{12} . Obróćmy P_3 za no-
 wą plasczynę rautów, a więc jej ślad t_2 za
 nową os x_{13} , znajdziemy ślad s_3 plasczyny
 S oraz raut A'' punktu A względem nowej osi.

W nowym układzie plasczyn rautów P_1, P_2, P_3
 śladami plasczyny S będą proste s_1 i s_3 ,
 rautami punktu A punkty A', A'' . Aby teraz
 znaleźć raut punktu A na S , wybieramy ją
 za nową plasczynę rautów, a jej ślad
 s_3 za nową os x_{34} , poczynym znajdujemy
 czwarty raut A''' punktu A , spuszczając z
 punktu A'' prostopadłą na nową os i odmie-
 rzając na niej od punktu A_{34} odcinek $A_{34} A'''$.

rowny co do wartości i znaku odległości zby-
tecznego rzutu H' od dawnej osi x 13. Punkt
 H'' jest rzutem punktu H na S gdy ta pta-
szczyzna po obrocie do kąta δ_3 zostanie roz-
postarta na płaszczyźnie rysunku.

Chcąc na danej płaszczyźnie S_1 zstrzymać
rzuty figury danej przez swoje pierwsze i dru-
gie rzuty, trzeba by postąpić w ten sam spo-
sób z każdym punktem figury, np. z każdym
wierzchołkiem danego wielościanu.

§ 26. Rzuty wielościanów. Zmiana pła-
szczyzn rzutów służy częstokroć do wyrazi-
stszego przedstawienia wielościanów, których
rzuty zostały początkowo wykreślone w za-
łożeniu szczególnego położenia wielościanów
względem płaszczyzn rzutów. Jak już wspo-
minaliśmy w § 21 łatwość wykreślenia nie
idzie tu w parze z łatwością odtworzenia
figury w wyobraźni; rzuty wielościanu wo-
góle tym łatwiej wykreślić, im bardziej wy-
jątkowe jest jego położenie względem pła-
szczyzn rzutów; tym trudniej zaś na za-
sadzie tych rzutów odtworzyć go w wyobra-
źni. Przez jedno- lub dwukrotną zmianę
płaszczyzn rzutów położenie wyjątkowe wzglę-
dem płaszczyzn rzutów zostaje zniesione.

Zanim damy odpowiedni przykład, słów
kilka powiedzieć musimy o kreśleniu rzu-
tów wielościanów. Rzut wielościanu jest wyzna-
czony, jeżeli znaleziono są rzuty wszystkich
jego wierzchołków i jeżeli o każdym wierz-
chołku wiadomo, z którymi z pozostałych
wierzchołków łączą go wychodzące z niego kraw-

wędrze. Aby rysunek uczynić bardziej pro-
glądowym, przypuszczamy, że wielościany są
nieprzezroczyste. Jeżeli oko umieścimy na do-
statecznie wielkiej (ew. nieskończonej) odległości
od płaszczyzny rzutów po dodatniej jej stro-
nie, to jedne krawędzie, ściany i wierzchołki
będą widzialne, inne będą zastonięte; rzuty
krawędzi widzialnych kreślimy linią ciągłą;
rzuty krawędzi zastoniętych - linią przerywaną.
Każda ściana, ograniczona wytyczeniem krawę-
dziami widzialnymi, jest widzialna, każdy
wierzchołek, przez który przechodzi krawędź
widzialna jest widzialny. Na każdym wie-
łościanie istnieje linja tamana zamknięta, wo-
gółce wierzchołkowa, której bokami są krawędzie
wielościanu i która odgranicza część widzialną
powierzchni wielościanu od części niewidzialnej;
linja ta nazywa się konturem prawdziwym;
rzut zaś tej tamanej nazywa się konturem
widzialnym.

Rozważania nasze ograniczymy do wielo-
ścianów wypukłych, t. j. takich, których po-
wierzchnie dowolna prosta, na żadnej z jego
ścian nie leżąca, przebija najwyżej w dwóch
punktach. Proste rzucające przebijają zatem
wielościan wogółem w dwóch punktach; wyjątek
stanowią te proste rzucające, które przecho-
dzą przez punkty konturu prawdziwego, sty-
kając się w tych punktach z wielościanem.
Tworzą one graniastostup prosty na danym
wielościanie opisany; kontur widzialny, t.
to przecięcie tego graniastostupa płaszczyzną
rzutów. Bardzo łatwo z posród rzutów wierz-

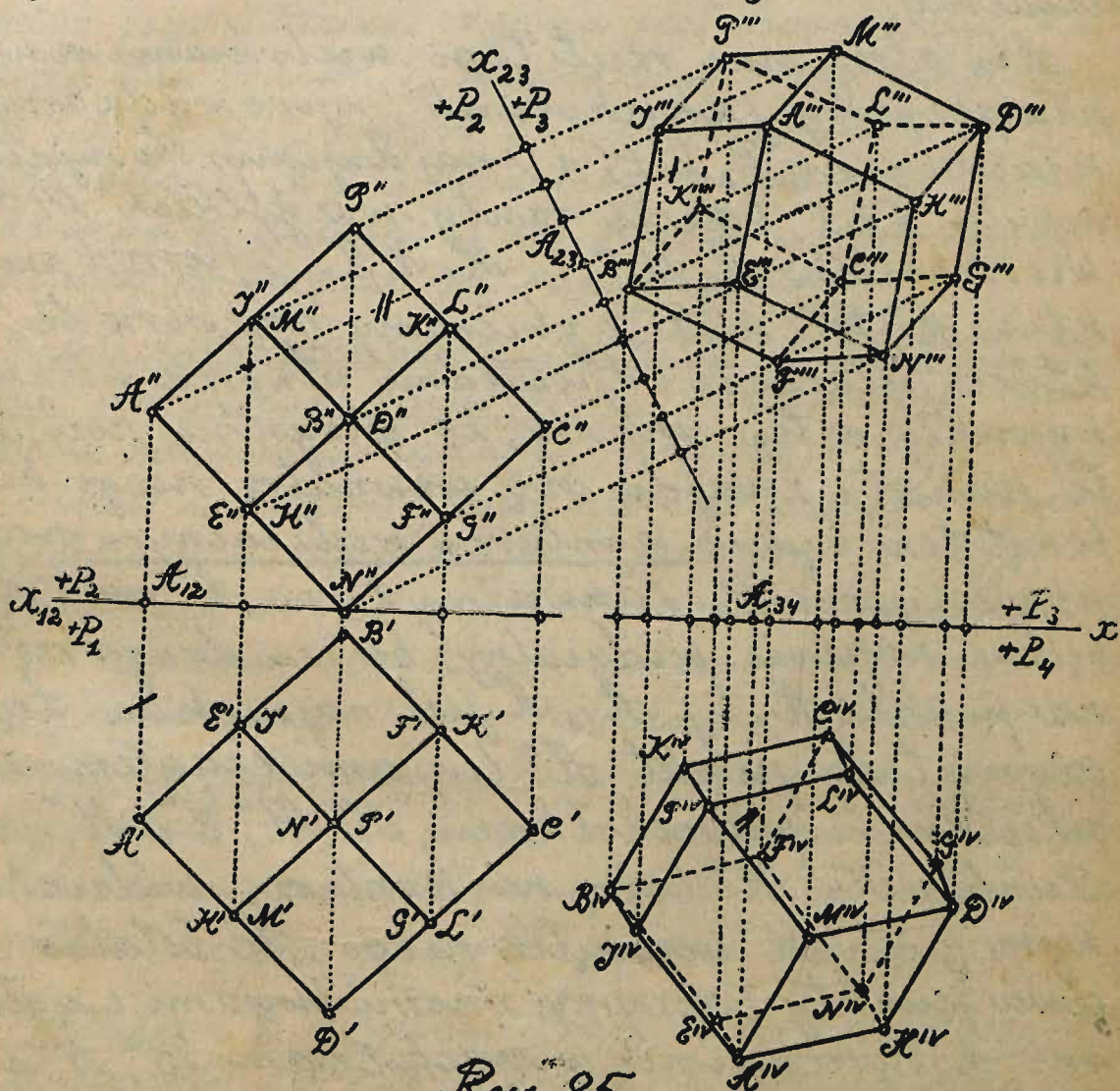
chołków i krawędzi wyróżnić te, które stawiają kontur widzialny, rzuty bowiem wszystkich innych wierzchołków i krawędzi muszą się znaleźć wewnątrz niego.

Gdy wyznaczymy resztę kontur widzialny, znajdziemy, które krawędzie i wierzchołki są widzialne, jeżeli określimy widzialność lub niewidzialność jednego choćby wierzchołka, którego rzut znajduje się wewnątrz konturu; wszystkie bowiem krawędzie, wychodzące z wierzchołka widzialnego, nie leżące na konturze, będą widzialne; a zatem widzialne będą też wierzchołki, do których one prowadzą; krawędzie, z tych wierzchołków wychodzące będą znów widzialne i t. d.

Tym sposobem, od rzutu dowolnego wierzchołka widzialnego wewnątrz konturu dojdziemy widzialnymi krawędziami do wszystkich wierzchołków konturu; pozostałe krawędzie będą niewidzialne.

Aby znaleźć ten jeden nie leżący na konturze wierzchołek widzialny, można rozumować tak: widzialnym napewno będzie ten wierzchołek, którego odległość od płaszczyzny rzutów jest największa; nie może on być bowiem zasłonięty przez żadną ścianę wielościanu. Otóż odległość punktu od jednej płaszczyzny rzutów równa jest rzędnej tego punktu na drugiej płaszczyźnie rzutów; przeto widzialnym na jednej płaszczyźnie rzutów jest napewno ten wierzchołek, którego rzędna na drugiej płaszczyźnie rzutów jest największa.

Wzimy teraz przykład następujący:
Zadanie. Wykreślić rzuty dwunastościanu
rombowego o danej wsi w położeniu jakim-
kolwiek. Dwunastościanem rombowym nazywa
 się wielościan wypukły, ograniczony przez 12
 płaszczyzn, przechodzących przez krawędzie
 sześciannu lub ośmiścianu foremnego w ten
 sposób, że kąty dwusieczne, które każda z
 tych płaszczyzn tworzy z przyległymi ściana-
 mi sześciannu lub ośmiścianu, są równe. Rzu-
 ty tego wielościanu będzie wykreślić niezmier-



nie łatwie, jeżeli jedna z ośmiościanu, z którego powstaje dwunastościan rombowy jest prostopadła do L_1 , druga prostopadła do P_2 , a trzecia równoległa do x_{12} . Wtedy rzutem dwunastościanu na każdą z płaszczyzn rzutów jest kwadrat o danej przekątnej, podzielony liniami środkowymi na cztery kwadraty (Kys. 85). Każdą z 12 równych odcinków takiej figury jest rzutem dwóch krawędzi, z których jedna jest widzialna.

Aby otrzymać rzut tego wielościanu na płaszczyznę jakiegolwiek, wprowadzamy płaszczyznę $P_3 \perp L_2$ i znajdziemy, stosując regułę § 21, trzecie rzuty wszystkich 14^{tych} wierzchołków $A, B, C, \dots M, N, P$. Z pośród punktów $A'', B'', \dots M'', P''$ wybieramy najpierw te, które potężone odpowiednio utworzą wielokąt wypukły w ten sposób, że wszystkie pozostałe punkty znajdują się wewnątrz niego. Wielokąt ten będzie konturem widzialnym na płaszczyźnie L_3 . Zauważmy teraz, że punkt A'' będzie napewno widzialny, bowiem druga rzędna punktu A , t.j. A_2 , A'' jest największa. Łączymy tedy punkt A'' liniami ciągłymi z sąsiednimi wierzchołkami J'', M'', E'' i H'' . Punkty J'' i M'' leżą na konturze widzialnym; E'' i H'' wewnątrz niego. Te ostatnie dwa punkty łączymy znowu liniami ciągłymi z sąsiednimi wierzchołkami B'', N'' i D'' , które leżą na konturze widzialnym. Rzuty pozostałych krawędzi, jako niewi-

działne kreślimy linjami przerywanymi.

Mozemy teraz wprowadzić jeszcze jedną płaszczyznę rzutów P_4 prostopadłą do P_3 , przytym w naszym przykładzie obralimy nową S_4 tak, aby stanowiła ona przedłużenie osi x_{12} . Postępując tak samo, jak poprzednio znajdriemy 14 czwartych rzutów wierzchołków A'''' , B'''' , ..., N'''' , P'''' . Utworzywszy znowu wielokąt wypunkty, ogarniający wszystkie te punkty, znajdziemy, że z pośród punktów nie leżących na konturze, punkt M'''' napewno jest widzialny, gdyż jego trzecia rzędna jest największa. Łącząc ten punkt z sąsiednimi wierzchołkami A'''' , D'''' i E'''' ; punkt F'''' z sąsiednimi E'''' i L'''' , a ten ostatni z C'''' , dojdriemy w ten sposób krawędziami i działnemi do konturu. Rzuty pozostałych krawędzi są niewidzialne.

§ 27. Zastosowanie zmiennej płaszczyzn rzutów do zadań miarowych. Zadaniem miarowem nazywamy zadania, dotyczące wielkości odcinków i kątów figur geometrycznych. Zmiana płaszczyzn rzutów jest jednym z najpotężniejszych środków, służących do rozwiązania tych zadań. Większość zadań miarowych da się mianowicie łatwo rozwiązać, jeżeli przez zmienną płaszczyzn rzutów zdotamy sprawić, by pewne części figur rozważanych miały względem nowej płaszczyzny rzutów położenie szczególne. Kilka przykładów to wyjaśni.

Zadanie. Znaleźć kąt, który prosta, łącząca punkty $A'A''$ i $B'B''$ tworzy z płaszczyzną P_1 oraz odległość tych punktów. Niech nową pta-

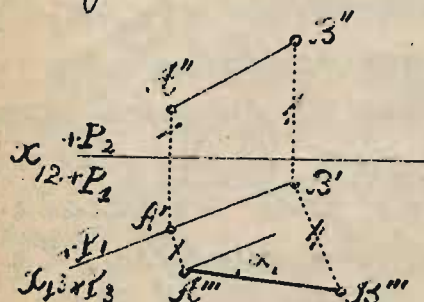
szczyzną rzutów P_3 będzie płaszczyzna ru-
cająca prostą AB na P_1 i nową osią x_{13} bę-
dzie wtedy pierwszy rzut $A'B'$. Trzeci rzut
 $A''B''$ odcinka AB jest temu odcinkowi równy,
albowiem prosta AB wystaje do swego trze-
ciego rzutu. Kątem prostej $AB \perp P_1$ będzie kąt
 α_1 , który ta prosta tworzy

ze swym pierwszym rzu-
tem, a więc będzie to kąt
prostej $A''B'' \perp$ prostą $A'B'$.

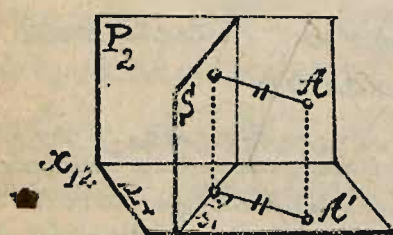
Zadanie. Znaleźć odległość
punktu $A'A''$ od płaszczyzny S .

Zadanie to rozwiązuje się
nader łatwo, gdy płaszczyzna
 S jest prostopadła do jednej
z płaszczyzn rzutów np. do P_2
(Rys. 87). Odległość punktu A
od płaszczyzny S jest wtedy
równa odległości rzutu pun-

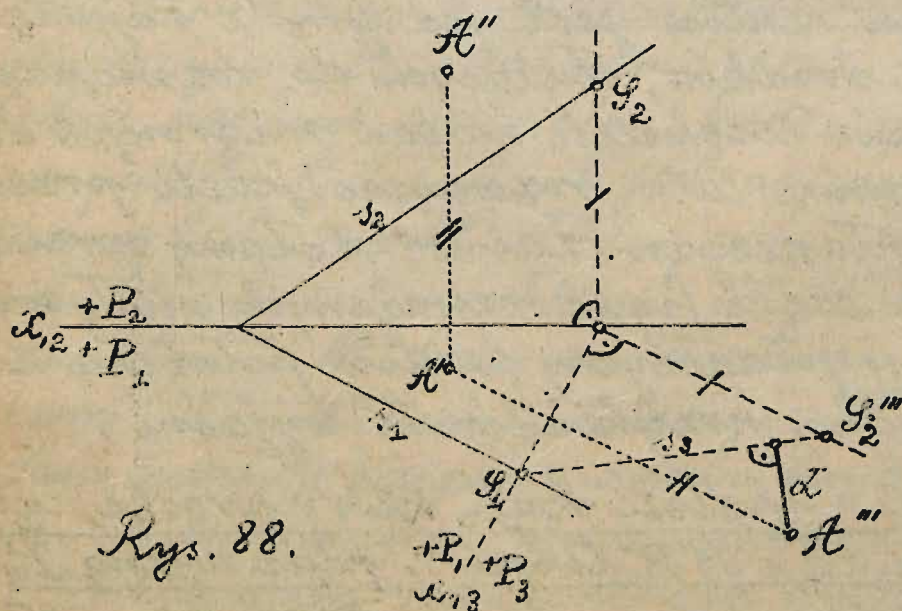
ktu A od śla-
du płaszczy-
zny S . Popro-
wadźmy tedy
nową pła-
szczyznę ru-
tów P_3 prosto-
padłą do P_1
i do S , a więc
prostopadłą
do S_1 (rys 88);
pierwszy ślad



Rys. 86.



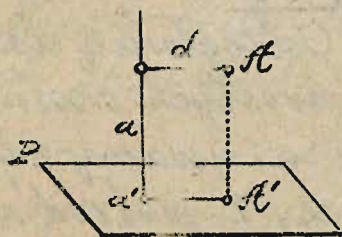
Rys. 87.



Rys. 88.

tej płaszczyzny będzie nową osią x_{13} . Znajdziemy trzeci rzut A''' punktu A oraz trzeci ślad s_3 płaszczyzny S ; odległość punktu A''' od śladu s_3 będzie szukana odległością d .

Zadanie. Znaleźć odległość danego punktu A od danej prostej a . Gdy dana prosta jest prostopadła do płaszczyzny rzutów (Rys. 89), wtedy odległość punktu A od niej równa jest odległości rzutu punktu A od śladu (a zarazem rzutu) prostej a . Otóż przez dwu-



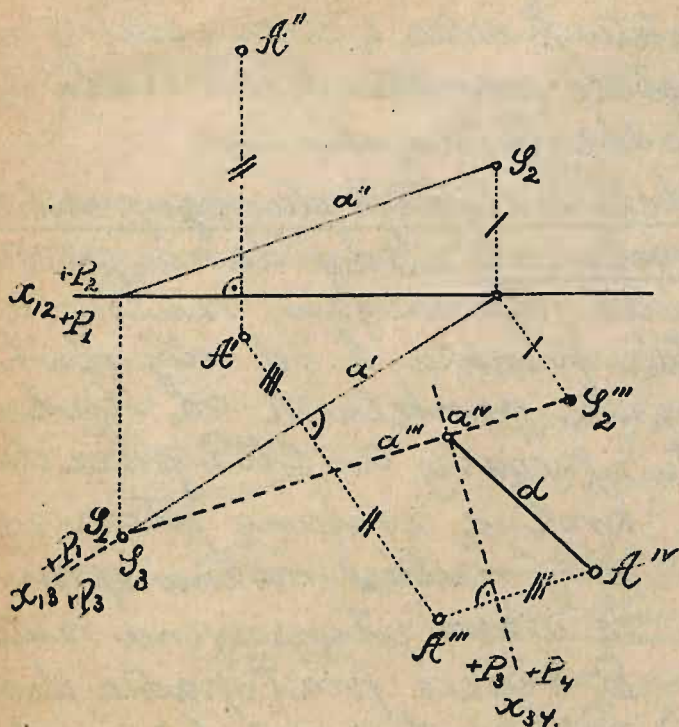
Rys. 89.

kratną zmianę płaszczyzny rzutów można sprawić, że nowa płaszczyzna rzutów P_4 będzie prostopadła do danej prostej a (§ 25). Odcinek, który łączyci będzie czwarty rzut A'' punktu A z czwartym rzutem a'' prostej a

będzie szukana odległością.

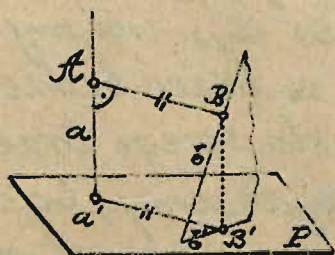
Za trzecią płaszczyznę rzutów P_3 weźmy płaszczyznę rzucającą daną prostą a na P_1 (Rys. 90), a więc za os x_{13} weźmy rzut a prostej a , tak że prosta a leżąc będzie w płaszczyźnie P_3 , przystając do swego trzeciego rzutu a''' . Rzut ten znajdziemy, łącząc pierwszy ślad s_1 (który jest zarazem trzecim rzutem s_1''') z trzecim rzutem drugiego śladu s_2''' . Za czwartą płaszczyznę rzutów P_4 weźmy jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do a''' ; os x_{34} będzie zatem jakąkolwiek prostopadłą do a''' . Ponieważ a leży w P_3 i jest prostopadła do P_4 , więc jej czwartym rzutem a

jest punkt, w którym a''' przecina oś x_3y .



Rys. 90.

czy punkt jednej prostej z punktem drugiej. Łatwo okazać, że taki odcinek musi być prostopadły do każdej z dwóch danych prostych.



Rys. 91.

Niczym bowiem odcinek AB , który łączy punkt A prostej a z punktem B prostej b będzie najkrótszy. Przypniemy, że nie jest on prostopadły do a , wtedy odcinek prostopadły spuszczonej z punktu B na a byłby krótszy od AB , co przeczyłoby założeniom.

Wyznaczenie odległości dwóch prostych

Znaleźć według znanej reguły trzeci, a później czwarty rzut punktu A , rotujemy $A''a''$, będzie to szukana odległość d .

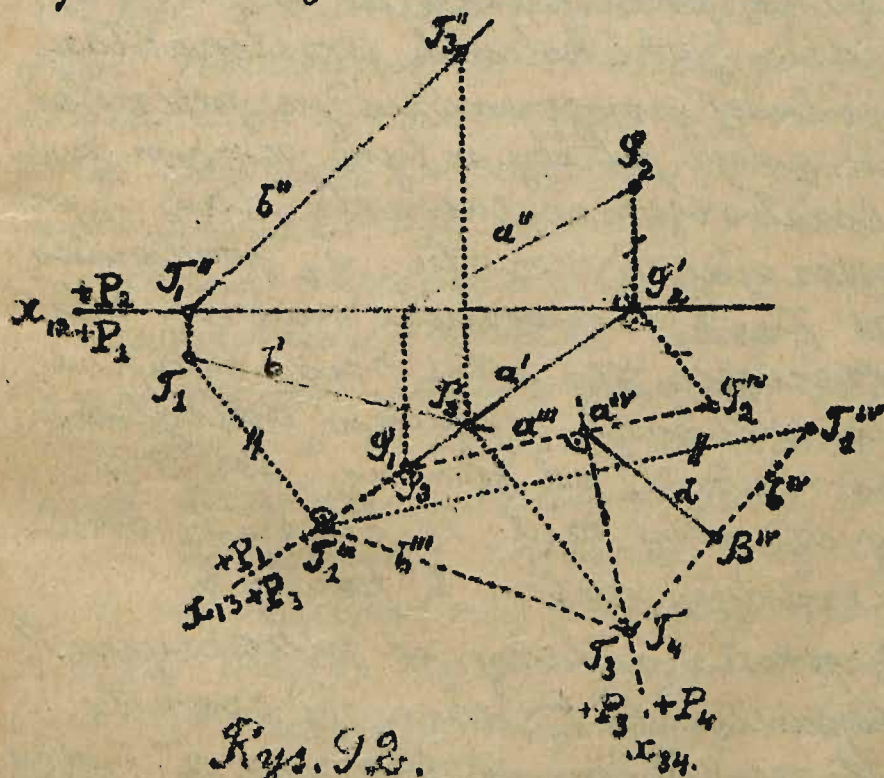
Zadanie. Znaleźć odległości dwóch prostych skośnych a i a'' i b i b'' .

Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy najkrótszy z pośród odcinków, które łą-

skośnych jest nader łatwe, gdy jedna z danych prostych, np. a jest prostopadła do płaszczyzny rzutów P (Rys. 91).

W samej rzeczy, każdy odcinek prostopadły do a jest wtedy równoległy do płaszczyzny rzutów. Rzut każdego odcinka prostopadłego do a , którego jeden koniec leży na a , a drugi na b , jest temu odcinkowi równy i tacyż rzut a' prostej a z tym lub owym punktem rzutu b' prostej b . Najkrótszy więc z tych odcinków będzie ten, który jest prostopadły do b .

Niech będą dane rzuty $a'a''$ i $b'b''$ dwóch prostych skośnych a i b (Rys. 92). Za trzecią płaszczyznę rzutów P_3 obierzmy płaszczyznę rzucającą proste a na P_1 , oś x_{13} będzie przeto rzut a' prostej a . Wyznaczmy trzeci rzut a''' prostej a . Ponieważ ta prosta leży w płaszczyźnie P_3 ,



Rys. 92.

więc jej trzeci ślad S_3 jest zjednoczony z pierwszym jej śladem S_1 ; połączywszy go z trzecim rzutem drugiego śladu S_2'' , otrzymamy a''' . Aby otrzymać trzeci rzut prostej b , zacyśmy trzecie

ściany jej trzeci ślad S_3 jest zjednoczony z pierwszym jej śladem S_1 ; połączywszy go z trzecim rzutem drugiego śladu S_2'' , otrzymamy a''' . Aby otrzymać trzeci rzut prostej b , zacyśmy trzecie

rzuty dwóch dowolnych jej punktów. Za takie punkty możemy obrać np. ślad pierwszy T_1 i ślad trzeci T_3 . Pierwszy rzut T_3 punktu T_3 jest oczywiście przecięciem rzutu t' z nową osią $x_{13} \equiv a'$. Trzeci jego rzut czyli sam ślad T_3 strzamyamy, odmierając na prostopadłej wystawionej do x_{13} w punkcie T_3' odcinek równy co do wielkości i znaku odległości zbytecznego rzutu T_3'' od dawnej osi x_{12} . Trzeci rzut T_1''' śladu T_1 leżący będzie na nowej osi w spodku prostopadłej spuszczonej na nią z T_1 .

Za czwartą płaszczyznę rzutów P_4 wybierzmy płaszczyznę prostopadłą do a'' ; nową oś x_{34} będzie jakakolwiek prostopadła do a'' . Najdogodniej poprowadzić ją przez ślad T_3 prostej t , gdyż wtedy w tym samym punkcie będzie leżał również czwarty ślad T_4 prostej t . Spuszczając z punktu T_1''' prostopadłą na nową oś x_{34} i odmierając na niej od punktu przecięcia jej z tą osią odcinek równy co do wielkości i znaku odległości zbytecznego rzutu T_1 od dawnej osi x_{13} , znajdziemy czwarty rzut T_1'''' śladu T_1 . Prosta $T_4 T_1''''$ jest czwartym rzutem t'' prostej t .

Ponieważ prosta a leży w płaszczyźnie P_3 i jest prostopadła do P_4 , więc jej czwarty rzut a'' jest punktem, w którym a'' przecina oś x_{34} . Długość odcinka prostopadłej spuszczonej z punktu a'' na prostą t'' jest równa odległości prostych skończonych a i t .