

biegunowe i bieguny. - W podobny sposób można określić punkty i proste biegunowo sprzężone, że 1/ na każdej prostej rzeczywistej układu biegunowego leżą dwa punkty sprzężone same ze sobą, t.j. leżące na własnych biegunowych; mogą one być rzeczywiste i odrębne, rzeczywiste i zjednoczone, lub urojone sprzężone, 2/ z każdego punktu rzeczywistego wychodzą dwie proste sprzężone same ze sobą, t.j. przechodzące przez własne bieguny; mogą one być rzeczywiste i odrębne, rzeczywiste i zjednoczone, lub urojone sprzężone.-

R O Z D Z I A Ł X I V .

STOŻKOWE I STOŻKI.

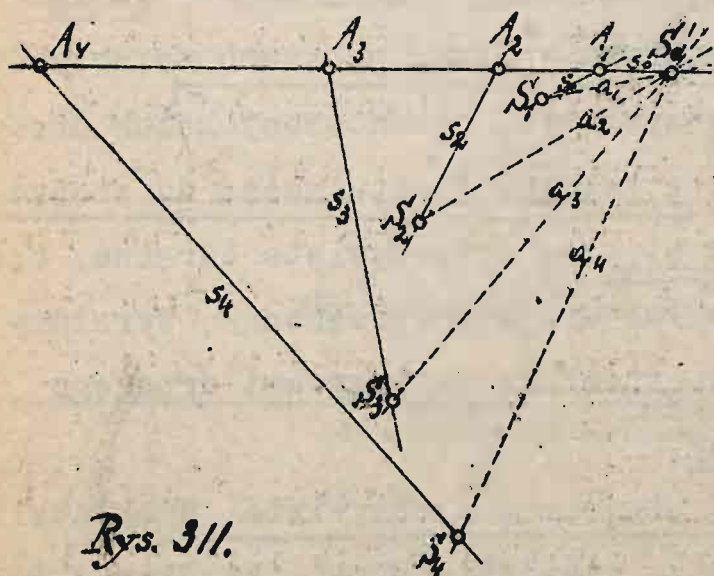
§ 166. Określenie stożkowych. Ogół punktów i prostych, rzeczywistych i urojonych, które w danym układzie biegunowym są sprzężone same ze sobą, nazywamy stożkową.

Punkty samosprzężone nazywamy punktami stożkowej tego układu; przechodzące przez nie własne ich biegunowe nazywamy stycznymi do stożkowej w tych punktach. Punkty stożkowej są to więc punkty podwójne inwolucji,

którą dany układ biegunowy wyznacza na jakiegokolwiek prostej rzeczywistej; styczne do stożkowej są to proste podwójne inwolucji, którą ten układ wyznacza dokoła jakiegokolwiek punktu rzeczywistego. Na każdej prostej rzeczywistej leżą dwa punkty stożkowej: rzeczywiste, urojone sprzężone lub zjednoczone; z każdego punktu rzeczywistego wychodzą dwie styczne: rzeczywiste, urojone sprzężone lub zjednoczone. Innymi słowy, każda prosta "przecina" stożkową w dwóch punktach /rzeczywistych odrębnych, rzeczywistych zjednoczonych lub urojonych sprzężonych/; z każdego punktu można do stożkowej wyprowadzić dwie styczne /rzeczywiste odrębne, rzeczywiste zjednoczone lub urojone sprzężone/. Wyrażamy to krótko, mówiąc, że stożkowe są krzywymi drugiego rzędu i drugiej klasy.

§ 167. Stożkowe urojone i rzeczywiste. W układzie biegunowym jednostajnym wszystkie punkty stożkowej i wszystkie styczne do stożkowej są urojone, gdyż inwolucja biegunowa na każdej prostej rzeczywistej i dokoła każdego punktu rzeczywistego jest eliptyczna. Stożkowa takiego układu jest więc urojona; mówimy, że każda prosta rzeczywista "przecina" ją w dwóch punktach urojonych sprzężonych i że z każdego punktu rzeczywistego "wychodzą" do niej dwie styczne urojone sprzężone.

W układzie biegunowym niejednostajnym istnieją punkty i styczne stożkowej zarówno rzeczywiste, jak urojone; dowiedzimy, że punktów i stycznych rzeczywistych jest nieskończenie wiele. Niechaj będzie w danym układzie biegunowym punkt S_0 , który leży na własnej swej biegunowej S_0 /Rys.311/; może to być np. punkt



Rys. 311.

podwójny hyperbolicznej involucji biegunowej na jednym z boków trójkąta biegunowego. Weźmy na prostej S_0 dowolny punkt A_1 ; jego biegunowa a_1 , przechodzić musi przez punkt S_0 ; w sa-

mej rzeczy wiemy, że jeżeli biegunowa punktu S_0 /t.j. prosta S_0 / przechodzi przez punkt A_1 , to nawzajem biegunowa punktu A_1 /t.j. prosta a_1 / przechodzi przez punkt S_0 /§161/. Punkty A_1 i S_0 są zatem sprzężone gdyż biegunowa jednego / A_1 / przechodzi przez drugi / S_0 /. W ten sposób involucja biegunowa na prostej S_0 jest paraboliczna, wszystkie bowiem punkty pro-

stej S_0 są sprzężone z jednym jedynym punktem S_0 , który jest punktem podwójnym tej inwolucji, zresztą jedynym.

Inaczej się rzeczy mają z prostą a_1 . Nie przecho-
dzi ona przez własny biegun; inwolucja biegunowa nie
jest więc na niej paraboliczna. Ponieważ zaś ta inwo-
lucja ma jeden punkt podwójny S_0 , musi ona być hy-
perboliczna i mieć zatem jeszcze drugi punkt podwójny

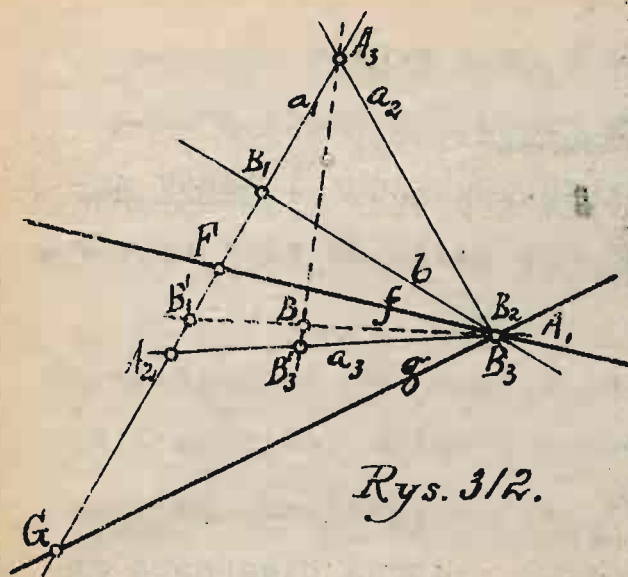
S_1 . Punkt ten jest sprzężony sam ze sobą, t.j. leży
na własnej biegunowej S_1 , która zresztą musi przejść
przez A_1 , gdyż jej biegun S_1 , leży na biegunowej
punktu A_1 , t.j. na prostej a_1 . Jeżeli na prostej S_0
obierzemy inny punkt A_2 , którego biegunowa a_2 prze-
chodzi zatem znowu przez S_0 , to na prostej a_2 znaj-
dziemy, jak poprzednio, drugi punkt podwójny S_2 , któ-
ry jest sprzężony z samym sobą, t.j. leży na własnej
swej biegunowej S_2 , przechodzącej przez A_2 . W ten
sposób w danym niejednostajnym układzie biegunowym każ-
demu punktowi A_n prostej S_0 sprzężonej samej ze sobą
podporządkowany być może punkt S_n sprzężony sam ze
sobą, t.j. leżący na własnej biegunowej S_n . Położenie
punktu S_n i prostej S_n zależy zatem wyłącznie od po-
łożenia punktu A_n na prostej S_0 .

Jeżeli sobie tedy pomyślimy, że pewien punkt zmien-

ny A poprzez punkty $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ porusza się w sposób ciągły po prostej s_0 , "opisując" tę prostą, to punkt zmienny S poruszać się będzie poprzez punkty $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ również w sposób ciągły, "opisując" stożkową rzeczywistą. Jednocześnie zaś prosta zmienna s , poruszając się w sposób ciągły poprzez proste $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ "powłóczyć" będzie tę samą stożkową. Stożkowa rzeczywista jest "miejscem geometrycznem" opisującego ją punktu i zarazem "obwiednią" powłóczącej ją prostej. Gdy punkt zmienny A , opisując prostą s_0 , przeszedłszy przez jej punkt niewłaściwy, powróci z przeciwnej strony do punktu s_0 , to i punkt zmienny S opisując stożkową powróci do punktu s_0 . Stożkowa rzeczywista jest przeto krzywą zamkniętą.

§ 168. Stożkowe zwyrodniałe. W § 161 określiliśmy układ biegunowy zapomocą trójkąta biegunowego A_1, A_2, A_3 i biegunowej B punktu jakiegokolwiek B z tem zastrzeżeniem, że punkt B nie leży na żadnym z boków a prosta B nie przechodzi przez żaden z wierzchołków trójkąta A_1, A_2, A_3 . Odrzućmy teraz te zastrzeżenia.

Przypuśćmy najpierw, że biegunowa B punktu jakiegokolwiek B przechodzi przez jeden z wierzchołków trójkąta biegunowego, np. przez A_1 /Rys. 312/. Jest



Rys. 312.

oczywistem, że inwolucja biegunowa na bokach a_1 i a_2 będzie paraboliczna, na trzecim zaś boku a_3 , albo hyperboliczna albo eliptyczna. W każdym przypadku biegunowa dowolnego punktu M może być wyznaczona i przejdzie przez punkt A_1 ; natomiast

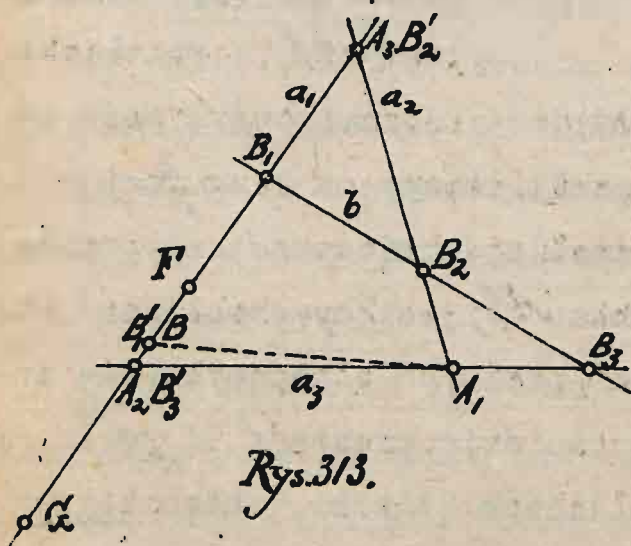
biegun dowolnej prostej m jest nieoznaczony; może to być mianowicie dowolny punkt leżący na biegunowej punktu a_1, m . - Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1 , a więc i dokoła punktu A_1 , jest hyperboliczna, to wszystkie punkty leżące na prostych podwójnych tej inwolucji są samosprężone; te dwie proste f i g i wszystkie punkty na nich leżące stanowią zatem stożkową rzeczywistą /Rys. 312/. Jeżeli inwolucja biegunowa na a_1 i dokoła A_1 , jest eliptyczna, to i wtedy urojone punkty, leżące na urojonych podwójnych tej inwolucji są samosprężone; te dwie urojone proste sprzężone oraz wszystkie na nich leżące punkty stanowią zatem stożkową urojoną, której jednym punktem rzeczywistym

stym jest A .

Dwie proste rzeczywiste i dwie proste urojone sprzężone są krzywą drugiego rzędu /bo każda prosta rzeczywista przecina ją w dwóch punktach/ i klasy zerowej /bo z dowolnego punktu nie można do niej wyprowadzić żadnej stycznej/.

Przypuśćmy następnie, że biegun B jakiejkolwiek danej prestej b leży na jednym z boków trójkąta biegunowego, np. na a_1 /Rys.313/; jest oczywiście, że inwe-

lucja biegunowa na bokach a_2 i a_3 będzie paraboliczna, na trzecim zaś boku a_1 , albo hyperboliczna, albo eliptyczna. W każdym przypadku biegun dowolnej prestej m może być wyznaczony i



Rys.313.

leży zawsze na a_1 ; natomiast biegunowa dowolnego punktu M jest nieznaczona; może to być mianowicie dowolna prosta przechodząca przez biegun prestej A, M . Jeżeli inwelucja biegunowa na prestej a_1 jest hyperboliczna, to wszystkie proste przechodzące przez punkty

Wan Rely

podwójne tej inwencji są samosprężone, te dwa punkty P i Q i wszystkie proste przez nie przechodzące stanowią zatem stożkową rzeczywistą /Rys. 313/. Jeżeli inwencja biegunowa na prostej a , jest eliptyczna, to i wtedy urejone proste; przechodzące przez urejone punkty podwójne tej inwencji są samosprężone; te dwa urejone punkty sprężone i wszystkie przez nie przechodzące proste stanowią zatem stożkową urejoną, której jedyną styczną rzeczywistą jest a .

Dwa punkty rzeczywiste i dwa punkty urejone sprężone są krzywą drugiej klasy / a z każdego punktu rzeczywistego wychodzą do niej dwie styczne/ i rzędu zerowego / bc dowolna prosta jej nie przecina/.

§ 169. Proste zewnętrzne, sieczne i styczne. Prosta, na której układ biegunowy wyznacza inwencję eliptyczną, nazywa się zewnętrzną względem stożkowej tego układu. Prosta wewnętrzna "przecina" zatem stożkową w dwóch punktach urejonych sprężonych, ma więc w punktach powrotnych inwencji eliptycznej, wyznaczonej przez układ biegunowy na tej prostej. Względem stożkowych urejonych wszystkie proste są zewnętrzne.

Prosta, na której inwencja biegunowa jest hyperboliczna, nazywa się sieczną stożkowej tego układu.

Każda sieczna "przecina" stożkową w dwóch punktach rzeczywistych, mianowicie w punktach podwójnych inwelucji biegunowej.

Presta, na której inwelucja biegunowa jest paraboliczną, jest styczna do stożkowej /§166/. Na stycznej leży jeden jedyny punkt samosprzężony, który jest jej biegunem i nazywa się punktem zetknięcia tej stycznej ze stożkową. Wszystkie inne preste przechodzące przez punkt zetknięcia się są sieczne, bo gdyby przezeń przechodziła presta zewnętrzna, to nie mógłby na niej leżeć punkt rzeczywisty stożkowej.

Jeżeli inwelucję paraboliczną uważać będziemy za przypadek "graniczny" inwelucji hyperbolicznej, to możemy powiedzieć, że styczna ma ze stożkową dwa punkty wspólne, które zostały "zjednoczone" w punkcie zetknięcia. Styczną do stożkowej w danym jej punkcie S_0 /Rys. 311/ możemy przeto uważać za granicę siecznej przez ten punkt przechodzącej, gdy drugi jej punkt przecięcia ze stożkową nieograniczenie zbliża się do punktu S_0 .

§ 170. Punkty wewnętrzne, punkty zewnętrzne i punkty leżące na stożkowej. - Punkt, około którego układ biegunowy wyznacza inwelucję eliptyczną, nazywa się wewnętrznym względem stożkowej tego układu. Z punktu wewnętrznego wychodzą do stożkowej dwie styczne ure-

jone sprzężone, mianowicie proste podwójne inwelucji eliptycznej, wyznaczonej przez układ biegunowy dekeła tego punktu. Względem steżkowych urejonych wszystkie punkty są wewnętrzne.

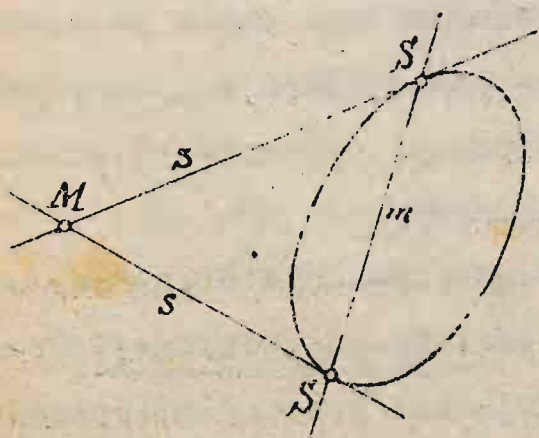
Punkt, dekeła którego inwelucja biegunowa jest hyperboliczna, nazywa się zewnętrznym względem steżkowej tego układu. Z punktu zewnętrznego można do steżkowej wyprowadzić dwie styczne rzeczywiste; są to proste podwójne inwelucji hyperbolicznej, wyznaczonej dekeła tego punktu przez układ biegunowy.

O punkcie, dekeła którego inwelucja biegunowa jest paraboliczna, mówimy, że leży na steżkowej. Przez taki punkt przechodzi jedna jedyna prosta samosprężona, która jest jego biegunową i nazywa się styczną do steżkowej w tym punkcie. Wszystkie inne punkty leżące na stycznej są zewnętrzną, bo gdyby leżał na niej punkt wewnętrzny, to nie mogłaby przez siebie przechodzić jedna styczna rzeczywista.

Jeżeli inwelucję paraboliczną uważać będziemy za przypadek "graniczny" inwelucji hyperbolicznej, to możemy powiedzieć, że z punktu leżącego na steżkowej wychodzą do niej dwie styczne "zjednoczone". Punkt zetknięcia steżkowej z daną prostą S_0 /Rys. 311/ możemy przeto uważać za granicę punktu zewnętrznego, na tej

prostej leżącego, gdy druga styczna, z tego punktu do stożkowej wychodząca, nieograniczenie zbliża się do stycznej s_0 .

Jeżeli z punktu zewnętrznego M wyprowadzimy do stożkowej dwie styczne s i s' , to prosta m , która łączy punkty zetknięcia S i S' /Rys. 314/ jest biegunową punktu M . W samej rzeczy, biegunowa punktu przecięcia M dwóch prostych s i s' łączy ich bieguny S i S' /§ 161/. Nawzajem punkt przecięcia stycznych s i s' jest biegunem prostej łączącej ich punkty zetknięcia S i



Rys. 314.

S , gdyż biegun prostej m jest przecięciem biegunowych dwóch punktów tej prostej. Punkty podwójne inwencji biegunowej na prostej m są przeto punktami zetknięcia stożkowej ze stycznymi, wyprowadzonymi do niej z bieguna prostej m , - i nawzajem, proste podwójne inwencji biegunowej dekola punktu M są stycznymi do stożkowej w punktach przecięcia jej przez biegunową punktu M .

Jeżeli stożkowa jest rzeczywista, to biegunowa punktu zewnętrznego jest sieczną, a biegunowa punktu wewnętrznego jest prostą zewnętrzną, co wynika stąd, że inwolucja biegunowa na prostej m jest w perspektywie z inwolucją biegunową dekeła bieguna prostej m /§165/. Ponieważ układ biegunowy jest wtedy niejednostajny, więc w każdym trójkącie biegunowym na dwóch bokach inwolucja biegunowa jest hyperboliczna, a na trzecim eliptyczna, t.j. dwa boki są siecznami, a trzeci prostą zewnętrzną, skąd wynika, że w każdym trójkącie biegunowym stożkowej rzeczywistej dwa wierzchołki są zewnętrzne, a trzeci jest wewnętrznym punktem tej stożkowej.

Każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny stożkowej rzeczywistej jest sieczną. W szczególności, utwórmy trójkąt biegunowy, którego bokami niech będą: prosta p przechodząca przez dany punkt wewnętrzny M , biegunowa m tego punktu i biegunowa n punktu przecięcia N prostych p i m . Ponieważ biegunowa m punktu wewnętrznego M jest prostą zewnętrzną, więc, oba pozostałe boki p i n muszą być siecznami.

W podobny sposób można okazać, że każdy punkt, leżący na prostej zewnętrznej względem stożkowej rzeczywistej, jest zewnętrznym.

Natomiast proste wychodzące z punktu zewnętrznego mogą być sieczne, styczne, lub proste zewnętrzne; punkty leżące na siecznej mogą być wewnętrzne, zewnętrzne, lub leżeć na stożkowej.

Wszystkie proste przechodzące przez punkt stożkowej są siecznymi z wyjątkiem stycznej /§ 166/; wszystkie punkty stycznej, z wyjątkiem punktu zetknięcia, są zewnętrzne, bo ich biegunowe są siecznymi.

§ 171. Metoda biegunowych wzajemnych. Zasada dwoistości w geometrii płaskiej polega, jak wiadomo /§136/ na tem, że jeżeli prawdziwe jest pewne rzutowe twierdzenie geometrii płaskiej, to musi być prawdziwe pewne inne twierdzenie, otrzymane przez zamianę w tem twierdzeniu pojęcia: "punkt" pojęciem "prosta" i nawzajem, pojęcia "prosta" pojęciem "punkt". Układ biegunowy płaski pozwala urzeczywistnić zasadę dwoistości, t.j. wykreślić figurę, która jest wzajemna względem danej figury płaskiej, a to przez zamianę każdego punktu na jego biegunową i każdej prostej na jej biegun, przez co każdy punkt i prosta do siebie należące zostaną zastąpione przez biegunową i biegun również do siebie należące. Dwie figury w ten sposób sobie wzajemnie podporządkowane nazywamy biegunowo wzajemnymi. Istnieją przytem figury, np. trójkąty biegunowe,

które przystają do własnych swych figur biegunowych. Do takich należy przedewszystkiem stożkowa danego układu biegunowego. Jeżeli przeto odnajdziemy jakąkolwiek rzutową własność stożkowej, to stosując biegunowość, która posłużyła do określenia tej stożkowej, otrzymamy pewną inną własność rzutową tej samej stożkowej.

/W ten sposób zostało np. odkryte twierdzenie Brianchona/. Metoda biegunowych wzajemnych nie ma bezpośredniego zastosowania do miarowych własności figur /równosć odcinków, kątów i pól, prostopadłość i równoległość prostych i wogóle te własności, które należą od elementów niewłaściwych i od involucji prostokątnej/.

§ 172. Trzy rodzaje stożkowych. - Stożkowa nazywa się hyperbolą, elipsą lub parabolą, zależnie od tego, czy involucja biegunowa na prostej niewłaściwej jest hyperboliczna, eliptyczną lub paraboliczną, t.j. zależnie od tego, czy prosta niewłaściwa jest sieczną, prostą zewnętrzną lub styczną. Wszystkie stożkowe urojone /a więc i dwie proste urojone sprzężone/ są elipsami; dwie proste rzeczywiste należy zaliczyć do rodzaju "hyperbola", jeżeli te proste przecinają się w punkcie właściwym; do rodzaju "parabola", jeżeli są równoległe lub zjednoczone. Dla dwóch punktów rzeczywistych lub urojonych sprzężonych, które są krzywą rzę-

du zerowego, w tej klasyfikacji niema miejsca, albowiem prosta niewłaściwa tej stożkowej nie przecina.

§ 173. Srodek, średnice, asymptoty. Biegun prostej niewłaściwej nazywa się środkiem stożkowej, a biegunowa każdego punktu niewłaściwego nazywa się średnicą. Wszystkie średnice stożkowej przechodzą przez jej środek, albowiem bieguny średnic leżą na biegunowej środka, t.j. na prostej niewłaściwej.

Srodek stożkowej jest punktem zewnętrznym w hyperboli /bo jego biegunowa jest styczna/, wewnętrznym w elipsie /bo jego biegunowa jest prostą zewnętrzną/. W paraboli środek jest punktem zetknięcia stożkowej z prostą niewłaściwą /bo jego biegunowa, t.j. prosta niewłaściwa, t.j. prosta niewłaściwa jest styczną do stożkowej/. Srodek więc jest punktem właściwym w hyperboli i elipsie, - niewłaściwym w paraboli. Wszystkie średnice paraboli są równoległe.

Inwolucja średnic sprzężonych, t.j. involucja biegunowa dokoła środka jest w perspektywie z involucją biegunową na prostej niewłaściwej /§165/, a więc jest ona hyperboliczną w hyperboli, eliptyczną w elipsie. Proste podwójne involucji średnic sprzężonych nazywają się asymptotami; są one rzeczywiste w hyperboli, urojone sprzężone w elipsie. Z określenia tego

wynika, że asymptoty są to styczne do stożkowej, wyprowadzone z jej środka; punkty zetknięcia są to punkty przecięcia biegunowej środka, t.j. prostej niewłaściwej, ze stożkową /§170/. Moglibyśmy więc określić asymptoty, jako styczne do stożkowej w punktach, w których stożkowa ta jest przecięta przez prostą niewłaściwą. Punkty te nazywamy kierunkami asymptotycznymi.

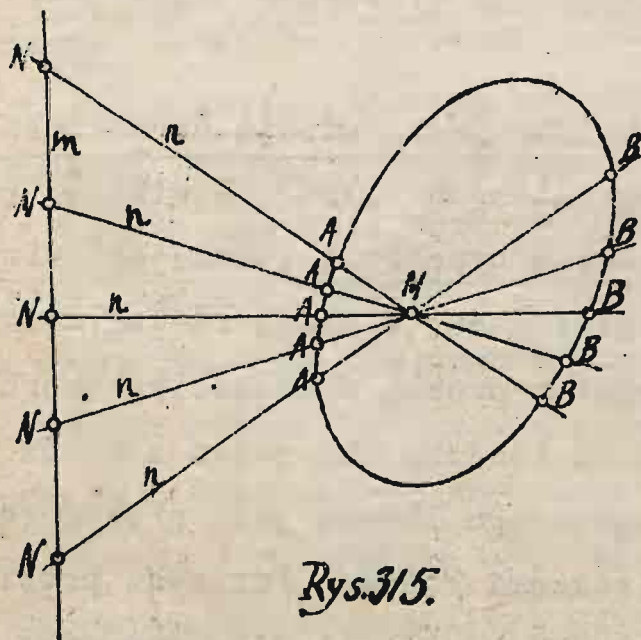
W hyperboli asymptoty przegrządzają harmonicznie każdą parę średnic sprzężonych /§154/. Powiadam, że z dwóch średnic sprzężonych hyperboli jedna jest sieczną, a druga prostą zewnętrzną. W samej rzeczy dwie średnice sprzężone wraz z prostą niewłaściwą tworzą trójkąt biegunowy; otóż wiadomo, że jeden z boków każdego trójkąta biegunowego zawsze jest prostą zewnętrzną, a dwa są siecznami /§169/. Ponieważ prosta niewłaściwa jest względem hyperboli sieczną, więc z dwóch pozostałych boków jeden musi być sieczną, a drugi prostą zewnętrzną.

Ponieważ środek elipsy jest punktem wewnętrznym, więc wszystkie średnice elipsy są siecznami

Odcinek siecznej, zawarty między punktami przecięcia jej ze stożkową, nazywamy cięciwą stożkowej. Jeżeli nie zachodzi obawa druznaczności, to cięciwę prze-

chodzącą przez środek, t.j. leżącą na średnicy, również nazywamy średnicą.

§ 174. Własności harmoniczne bieguna i biegunowej
Niechaj będzie punkt M nieleżący na stożkowej i jego biegunowa m /Rys. 315/. Przez punkt M poprowadzmy



jakąkolwiek sieczną n ; involucja biegunowa na tej prostej jest hyperboliczna /§169/ a punkty podwójne tej involucji A i B są to punkty przecięcia siecznej n ze stożkową; otóż wiemy /§154/, że

punkty podwójne involucji hyperbolicznej przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych. Jedną z takich par stanowią punkty M i N , z których pierwszy jest biegunem, a drugi leży na jego biegunowej. Stąd twierdzenie:

Biegunowa jest miejscem geometrycznym punktów sprzężonych harmonicznie z biegunem względem punktów

w których sieczne wychodzące z bieguna przecinają stożkową.

/Stosując do tego twierdzenia zasadę dwoistości znajdziemy twierdzenie wzajemne.

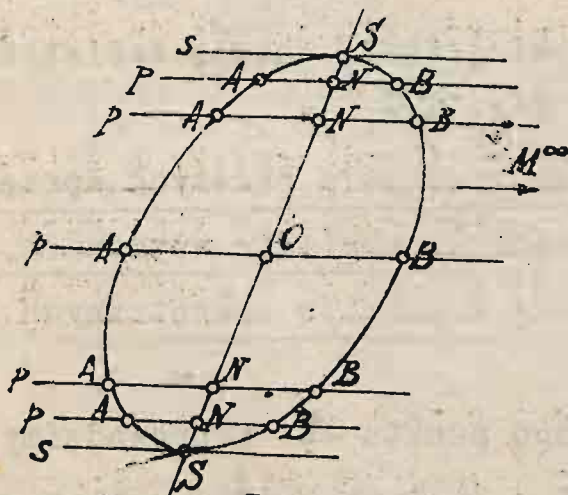
Biegun jest punktem spotkania prostych sprzężonych harmonicznie z biegunową względem stycznych, wyprowadzonych do stożkowej z punktów zewnętrznych biegunowej/.

Jeżeli więc z danego punktu M poprowadzimy dwie jakiekolwiek sieczne n , n i na każdej z nich wyznaczymy punkt N sprzężony harmonicznie z punktem M względem punktów A i B , w których ta sieczna przecina stożkową, to prosta NN będzie biegunową m punktu M . Jeżeli punkt M jest zewnętrzny, to jego biegunowa m przecina stożkową w punktach S , S , które są punktami zetknięcia stycznych s , s , wyprowadzonych do stożkowej z bieguna M /Rys.314/.

Jeżeli punkt M jest punktem niewłaściwym /Rys. 316/, to jego biegunowa jest średnicą, sieczne wychodzące z punktu N^∞ są równoległe; punkty N , N ... sprzężone harmonicznie z punktem N^∞ są środkami cięciw AB , AB

Środki cięciw równoległych leżą na średnicy.

Cięciwy te są sprzężone ze średnicą, bo przecho-



Rys. 316.

dzą przez biegun
średnicy, który
jest kierunkiem
tych cięciw.

Każda średnica
dzieli cięciwy z
nią sprzężone na
połowy.

Stąd wynika,
że średnica jest
dla stożkowej o-
sią symetrii /two-

góle ukośnej/.

Wśród cięciw sprzężonych z daną średnicą znajdu-
je się także średnica. Ponieważ każde dwie średnice
sprzecinają się w środku stożkowej, więc

Srodek stożkowej dzieli każdą średnicę na połowy.

Jest to zatem środek symetrii stożkowej.

Dwie średnice sprzężone mają tę własność, że każ-
da z nich dzieli cięciwy równoległe do drugiej na poło-
wy.

Styczne w końcach średnicy są równoległe do cię-
ciw z nią sprzężonych. Opierając się na tej ostatniej
własności wyznaczyć można punkt zetknięcia na stycznej

poprowadzonej do wykreślonej stożkowej. Jest to punkt w którym tę styczną przecina prosta łącząca środki dwóch jakichkolwiek cięciw do stycznej równoległych.

§ 175. Rozpoznanie rodzaju stożkowej według jej łuku. Opierając się na powyższych własnościach, można rozstrzygnąć, czy dany wykreślony łuk stożkowej należy do elipsy hyperboli lub paraboli /Rys. 317/. Popro-

wadźmy dowolną cięciwą

S_1, S_2 danego łuku,

wykreślmy w jej końcach

S_1 i S_2 styczne s_1 i

s_2 ; punkt przecięcia

M tych stycznych po-

łączmy ze środkiem N

cięciwy S_1, S_2 ; prosta

MN będzie średni-

cą stożkowej. Jeżeli li-

terą A oznaczmy punkt

w którym średnica MN przecina dany łuk, to mogą

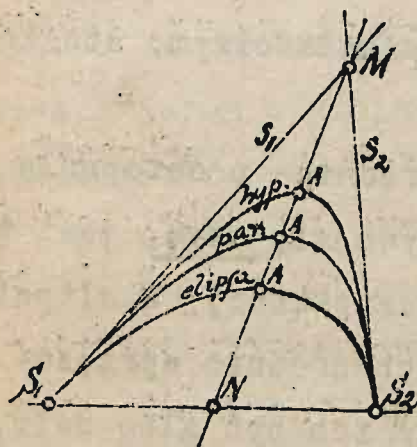
zajść trzy przypadki: 1/ punkt A jest bliżej punk-

tu N , niż punktu M , 2/ punkt A jest bliżej

punktu M , niż punktu N i 3/ punkt A leży w środ-

ku odcinka MN . Ponieważ punkty M i N są sprzę-

żone harmonicznie względem punktów, w których średnica



Rys. 317.

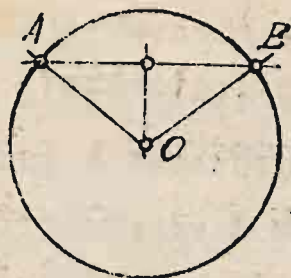
MN przecina stożkową, więc w I przypadku drugi z tych punktów B oraz środek odcinka AB t.j. środek stożkowej O , leży po przeciwnej stronie punktu A niż punkt M ; a więc środek O jest punktem wewnętrznym; stożkowa jest elipsą; w drugim przypadku punkt B oraz środek O odcinka AB leży po tej samej stronie punktu A , co punkt M , a więc środek O jest punktem zewnętrznym; stożkowa jest hyperbolą; wreszcie w III przypadku punkt B oraz środek O odcinka AB jest punktem niewłaściwym; stożkowa jest parabolą.

§ 176. Osie i wierzchołki. Średnica prostopadła do prostych z nią sprzężonych nazywa się osią; jest to więc dla stożkowej oś symetrii prostokątnej. W elipsie i hyperboli osią jest każda z dwóch średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych; może ich być albo dwie, albo nieskończenie wiele. W samej rzeczy, widzieliśmy /§151/, że w inwolucji dokoła punktu albo wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, albo tylko jedna. Osie elipsy i hyperboli mogą być wykreślone, jeżeli dane są dwie pary średnic sprzężonych. W szczególności osie hyperboli są dwusiecznymi kątów pomiędzy asymptotami.

Punkty, w których oś przecina stożkową, nazywamy

jej wierzchołkami. Gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, to odcinek osi zawarty pomiędzy rzeczywistymi wierzchołkami nazywamy również osią. W elipsie każda średnica, a więc i każda oś, przecina stożkową w punktach rzeczywistych; elipsa posiada zatem 4 wierzchołki rzeczywiste; większa z osi nazywa się wielką, mniejsza małą osią elipsy. W hyperboli jedna tylko oś, zwana główną, przecina stożkową w punktach rzeczywistych, hyperbola posiada zatem wierzchołki rzeczywiste i dwa urojone sprzężone. Parabola posiada jedną tylko oś właściwą i jeden właściwy wierzchołek; za drugą oś należy uważać prostą niewłaściwą, która jest średnicą sprzężoną z osią właściwą.

§ 177. Koło jako stożkowa. Okażemy teraz, że elipsa w której involucja biegunowa dokłała środka jest prostokątna, jest kołem. Niech A i B będą dwoma punktami takiej elipsy. Średnica prostopadła do cięciwy AB jest z nią sprzężona, a więc ją dzieli na połowy. Trójkąt OAB /Rys. 318/ jest równoramienny, gdyż jego wysokość jest zarazem środkową, skąd wynika $OA = OB$. Wszystkie punkty tej elipsy są zatem jednakowo odległe od środka; elipsa ta jest więc kołem. Każde dwie średnice wzajemnie prostopadłe są sprzężone; każda średnica koła jest jego osią, każdy



Rys 318.

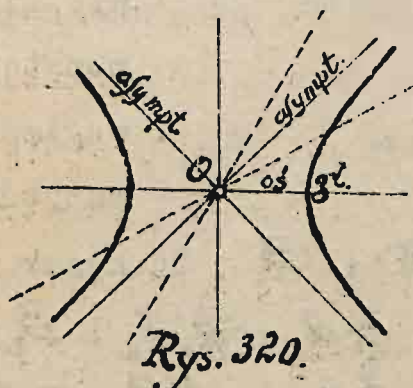
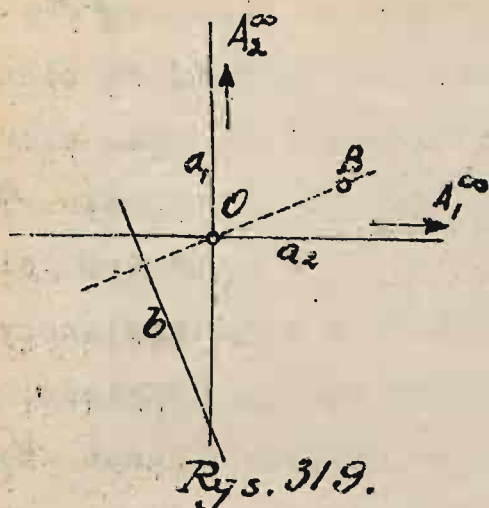
punkt koła jest jego wierzchołkiem.

Proste podwójne inwolucji średnic sprzężonych, t. j. urojone asymptoty koła są prostami jednorodnymi /§156/ Wszystkie koła leżące w jednej płaszczyźnie przechodzą przez punkty kołowe tej płaszczyzny /§156/; koło może być określone rzutowo, ja-

ko stożkowa przechodząca przez punkty kołowe.

Pod określenie "kół" podpadają przeto również te wszystkie stożkowe urojone, w których inwolucja dokoła środka jest prostokątna, przechodzą one bowiem również przez punkty kołowe. Mogą one być określone np. przez trójkąt biegunowy OA, A_∞, A_∞ /Rys. 319/, którego jeden bok A, A_∞ jest prostą niewłaściwą, a dwie inne są wzajemnie prostopadłe, oraz przez biegun B i biegunową b prostopadłą do OB , lecz nie przenikającą do ćwiartki, w której leży punkt B . Proste jednorodne należy uważać za koło zwyrodniałe.

§ 178. Hyperbola równoboczna. Hyperbola, w której inwolucja średnic sprzężonych jest symetryczną /§154/, nazywa się równoboczną; jej asymptoty są dwu-



siecznymi kątów dwóch jakichkolwiek średnic sprzężonych, a więc są wzajemnie prostopadłe /Rys.320/; jej oś, jak w każdej zresztą hyperboli, są dwusiecznymi kątów między asymptotami. Hyperbola równoboczna jest stożkową z wielu względów analogiczną do koła.

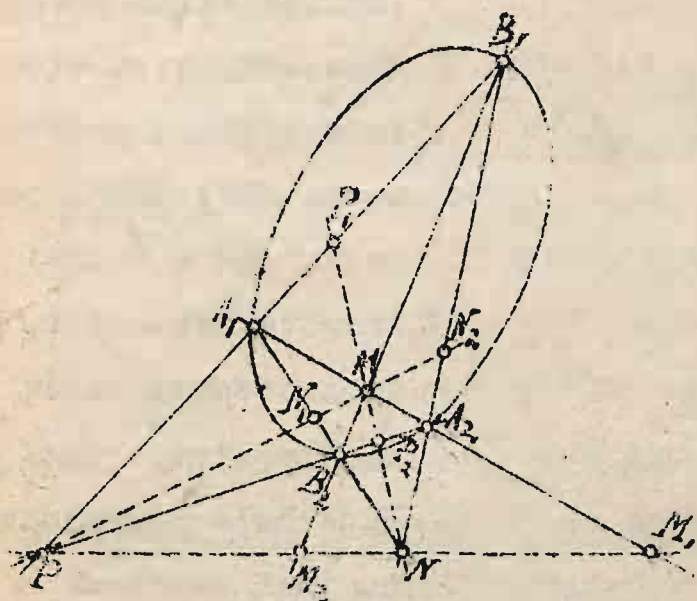
§ 179. Czworokąt
zupełny wpisany w
stożkową i czworobok
zupełny opisany na
stożkowej. - Niechaj

wierzchołki czworokąta zupełnego A, B, A_2, B_2 leżą na stożkowej /Rys.321/. Połączmy punkty przekątne N, N i P . Powiadam, że trójkąt MNP jest biegunowy.

W samej rzeczy, każdy bok tego trójkąta jest biegunową przeciwległego wierzchołka. Okażemy np., że bok

NP

jest biegunową wierzchołka M .
W tym celu wystarczy dowieść, że punkt M_1 jest sprzężony harmonicznie z punktem M względem punktów A_1



Rys. 321.

i A_2 , a punkt M_2 względem B_1 i B_2 . Zauważmy czworobok zupełny o bokach A_1B_1 , B_1A_2 , A_2B_2 i B_2A_1 , którego przekątnymi są A_1A_2 , B_1B_2 i NP : w czworoboku tym punkty przecięcia przekątnej A_1A_2 z przekątnymi B_1B_2 i NP są sprzężone harmonicznie względem wierzchołków, leżących na A_1A_2 [§142], t.j. punkty M i M_1 przegradzają harmonicznie punkty A_1 i A_2 , podobnie punkty przecięcia przekątnej B_1B_2 z przekątnymi A_1A_2 i NP są sprzężone harmonicznie względem wierzchołków, leżących na B_1B_2 , t.j. punkty M i

M_2 przegradzają harmonicznie punkty B_1 i B_2 , c. d. d. o.

Tak więc mamy twierdzenie:

Trójkąt, którego wierzchołkami są punkty przekątne

czworokąta zupełnego, wpisanego w stożkową, jest trójkątem biegunowym.

Jeżeli jednym z trzech punktów przekątnych czworokąta wpisanego jest środek stożkowej, to dwa pozostałe punkty przekątne są kierunkami średnic sprzężonych. Stąd wniosek: Ramiona kąta wpisanego opartego na średnicy stożkowej mają kierunki średnic sprzężonych /Rys. 322/. Na tem można oprzeć wykreślenie pary

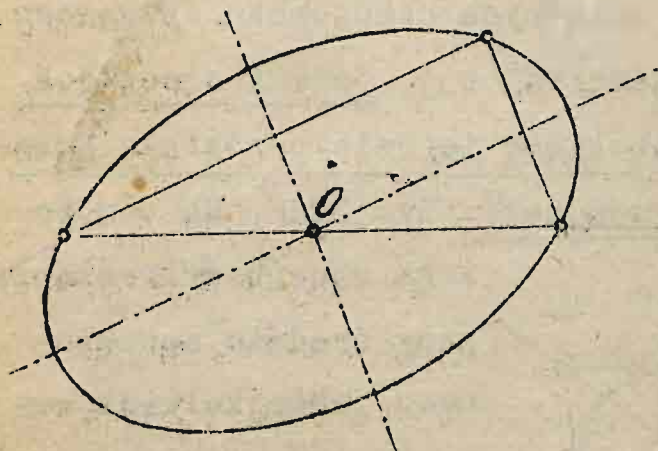
średnic sprzężonych jeżeli dana jest np. jedna oś i jeden punkt stożkowej.

Zupełnie tak samo moglibyśmy na zasadzie dwójstości dowieść twierdzenia wzajemnego,

które brzmi:

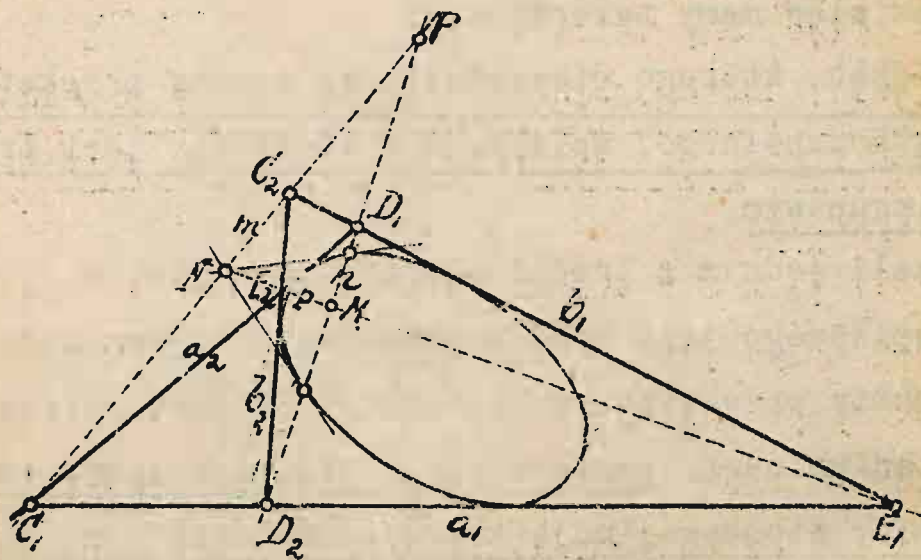
Trójkąt, którego bokami są przekątne czworoboku

zupełnego, opisanego na stożkowej, jest trójkątem bie-



Rys. 322.

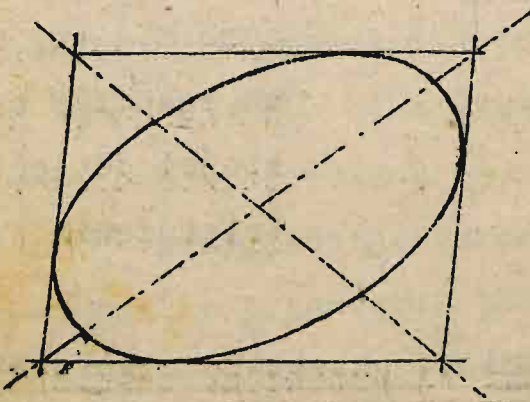
gunowym /Rys. 323/.



Rys. 323.

Jeżeli z trzech przekątnych czworoboku opisanego jedna jest prostą niewłaściwą, t.j. jeżeli czworobok opisany jest równoległobokiem, to dwie pozostałe przekątne są średnicami sprzężonemi /Rys. 324/. Na tem po-

lega sposób wykreślenia pary średnic sprzężonych jakiejkolwiek wykreślonej stożkowej.



Rys. 324.

§ 180 Wyznaczenie bieguna i biegunowej względem wykreślonej stożkowej /np. wzglę-

dem koła/. - W zadaniach tych przypuścimy, że stożkowa jest wykreślona, t.j., że możemy z należyłą dokładnością bezpośrednio wyznaczyć punkty przecięcia jakiejkolwiek siecznej ze stożkową oraz poprowadzić z każdego punktu zewnętrznego do niej obie styczne. Natomiast poprowadzenie stycznej w danym punkcie wykreślonej stożkowej i wyznaczenie punktu zetknięcia danej stycznej z taką stożkową należą do zadań, których bezpośrednio z należyłą dokładnością rozwiązać nie umiemy.

Niech będzie punkt M /Rys. 325/, nie leżący na stożkowej; aby wykreślić jego biegunową, prowadzimy z niego dwa jakiejkolwiek sieczne, które niechaj przecinają stożkową w punktach

A_1 i A_2 , B_1 i B_2 .

W czworokącie zupełnym

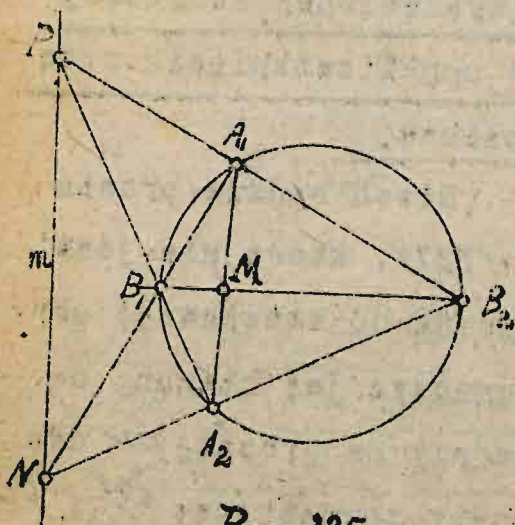
$AB_1A_2B_2$ punkt M jest

jednym z punktów przekątnych; łącząc A, B_1 i A_2B_2

oraz A_1B_2 i A_2B_1 , wyznaczymy dwa pozostałe punkty przekątne N i P ;

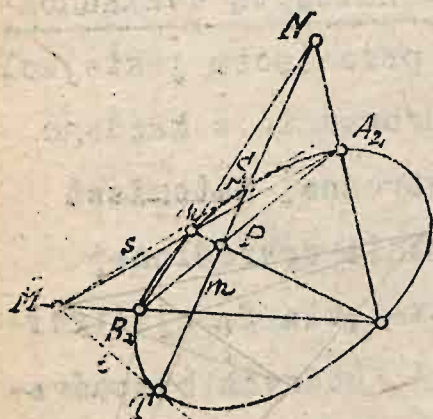
prosta MP jest biegunową punktu M , gdyż każdy

bok trójkąta biegunowego MNP jest biegunową prze-



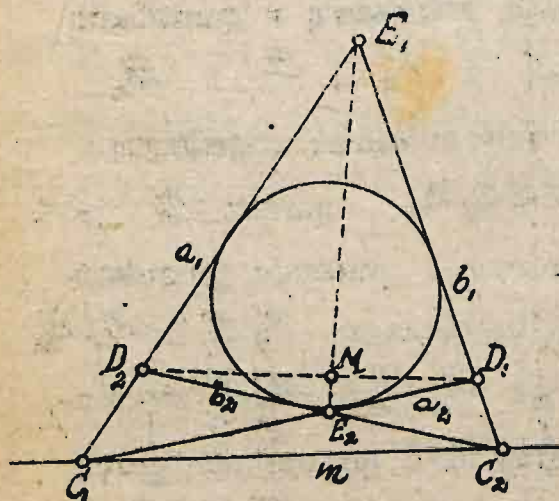
Rys. 325.

bieg trójkąta biegunowego MNP jest biegunową prze-



Rys. 326.

ciwległego mu wierzchołka. Jeżeli punkt M jest zewnętrzny /Rys. 326/, to punkty zetknięcia stycznych s i t z niego wyprowadzonych są punktami, w których biegunowa punktu M przecina stożkową /§169/. Wykreślenie powyższe daje przeto w tym przypadku rozwiązanie zadania: Wyznaczyć na danej stycznej s do wykreślonej stożkowej jej punkt zetknięcia z tą stożkową.

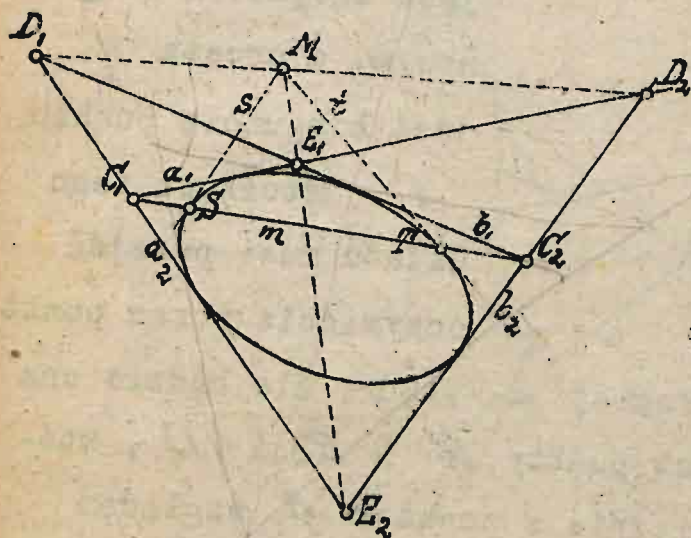


Rys. 327.

Niech będzie prosta m /327/, która nie jest styczną do stożkowej; aby wyznaczyć jej biegun, o bieramy na prostej m dwa punkty zewnętrzne C_1 i C_2 i prowadzimy z nich stycz-

ne a_1 i a_2 , b_1 i b_2 . W czworoboku zupełnym a, b, a_2, b_2 prosta m jest jedną z przekątnych: łącząc wierzchołki

D_1 i D_2 , E_1 i E_2 otrzymamy dwie pozostałe przekątne n i p ; ich punkt przecięcia M jest biegunem prostej m , gdyż każdy wierzchołek trójkąta biegunowego o bokach m , n i p jest biegunem przeciwległego mu boku. Jeżeli prosta m jest sieczną /Rys. 328/, to styczne w punktach przecięcia jej ze stożkową S i T

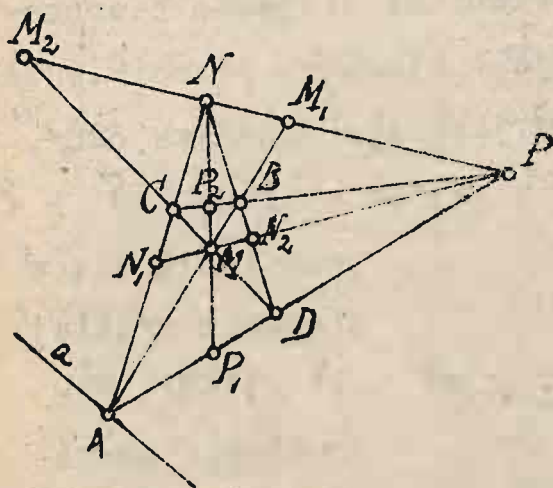


Rys. 328.

przecinają się w biegunie prostej m /§169/. Wykreślenie powyższe daje przeto w tym przypadku rozwiązanie zadania:
W danym punkcie S wykreślonej stożkowej wykreślić do niej styczną.

§ 181. Twierdzenie. Stożkowa jest wyznaczona przez 4 swoje punkty i styczną w jednym z nich - albo przez 4 swoje styczne i punkt zetknięcia na jednej z nich.

Niechaj będą 4 punkty A , B , C i D /Rys. 329/, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej i prosta a przechodząca przez punkt A . Trójkąt prze-



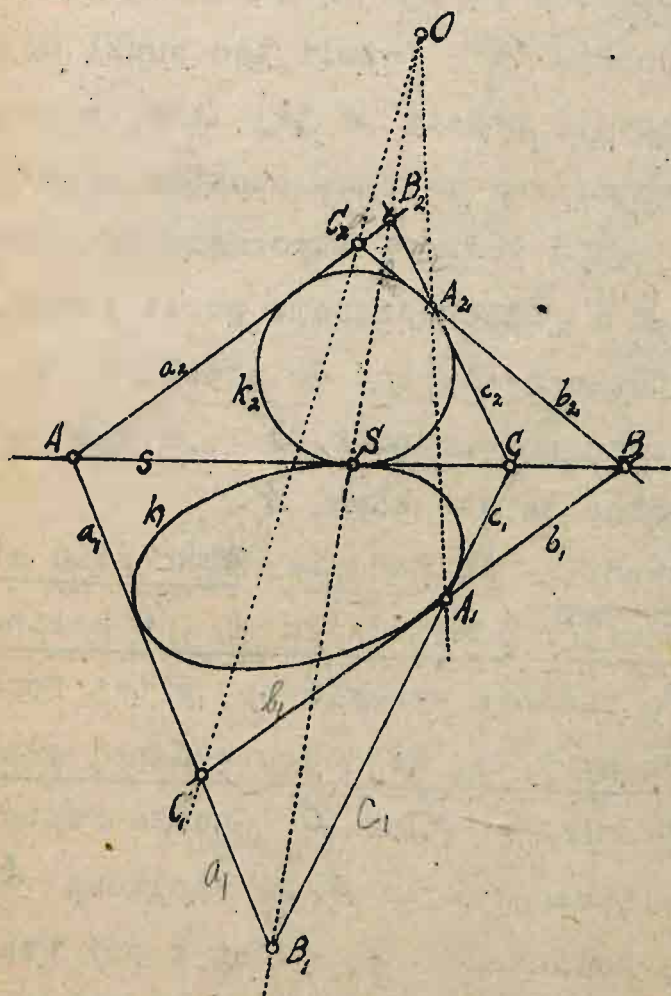
Rys. 329.

kątny MNP czworokąta zupełnego $ABCD$ wraz z punktem A i styczną a wyznacza układ biegunowy, dla którego ten trójkąt jest trójkątem biegunowym, a prosta a jest biegunową punktu A . Stożkowa tego układu musi przejść oczywiście przez punkt

A i być styczną do prostej a /§166/, ale będzie ona przechodziła także przez punkty B , C i D , które są sprzężone harmonicznie z punktem A względem punktów M i M_1 , N i N_1 , P i P_1 , a więc są punktami podwójnymi involucji biegunowych na prostych AB , AC i AD .

§ 182. Stożkowa rzeczywista, jako rzut koła. Ponieważ określenie stożkowych, podane w § 165 jest rzutowe, więc rzutem każdej stożkowej jest stożkowa, - w szczególności, rzutem koła jest stożkowa. Dowiedzemy teraz, że i nawzajem: każda stożkowa rzeczywista może być uważana za rzut każdej innej stożkowej rzeczywistej

stej, - w szczególności za rzut koła. W tym celu wystarczy dowieść, że każda stożkowa rzeczywista jest w kolineacji z kołem.



Rys 330.

Niech będzie stożkowa

k , /Rys. 330/;

w dowolnym jej punkcie S poprowadzimy do niej styczną s i wykreślimy jakąkolwiek inną stożkową lub koło k_2 styczne do prostej

s w tym samym punkcie S .

Na prostej s obierzmy jeszcze 3 punkty A ,

B i C i poprowadźmy z nich styczne a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i

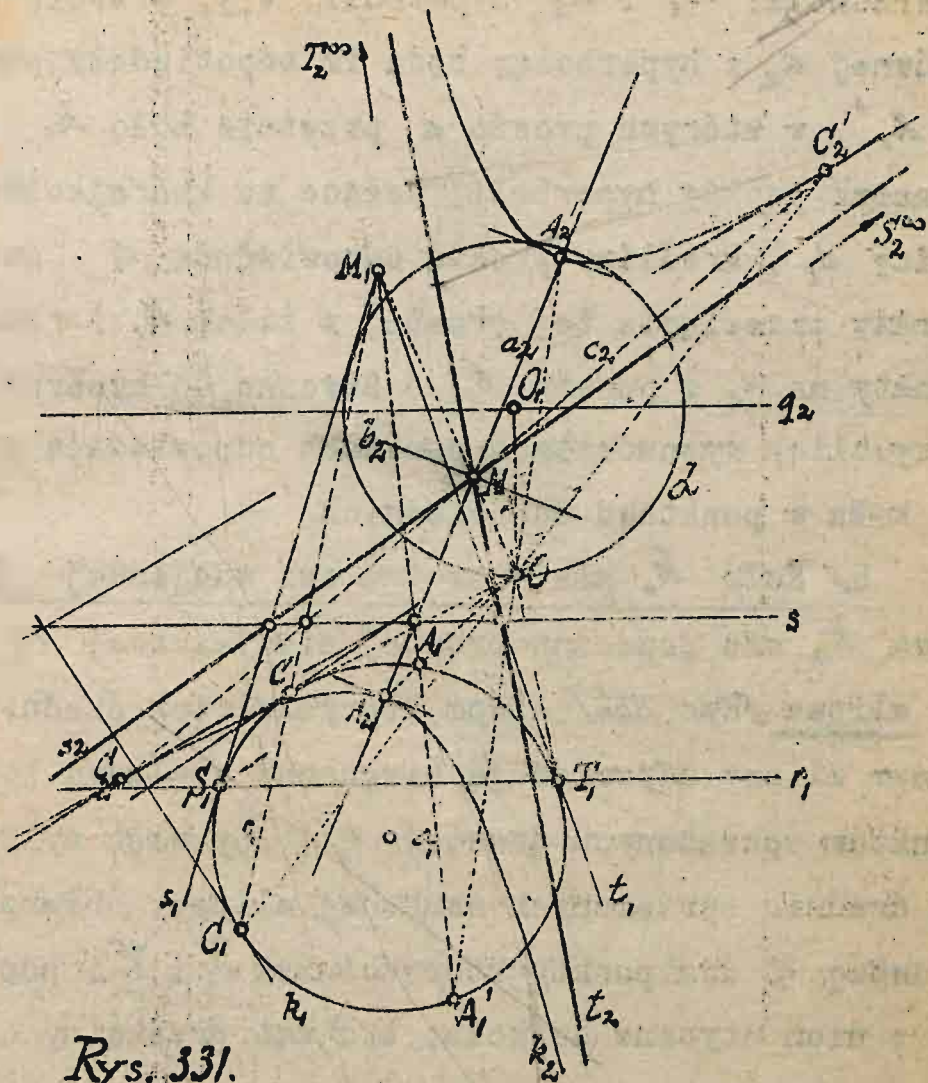
c_2 do stożkowej K_1 i do koła K_2 . Trójkąty a, b, c_1 i a_2, b_2, c_2 są trójkątami Desargues'a /gdyż ich boki przecinają się parami na prostej s /. więc proste A, A_2

B, B_2 i C, C_2 , łączące parami ich wierzchołki, przechodzą przez jeden punkt O . Jeżeli ten punkt uczynimy środkiem kolineacji, prostą s jej osią, a punkty A i A_2 uważać będziemy za parę punktów odpowiednich w tej kolineacji, to koło K_2 stycznym do prostych a_2, b_2, c_2 i s i przechodzącemu przez punkt S' odpowiadać będzie stożkowa styczna do prostych a, b, c i s i przechodząca przez punkt S' , a więc na zasadzie § 131 identyczna ze stożkową K_1 .

§ 183. Zastosowania - I. Zadanie. Wykreślić stożkową K_2 , która odpowiada danemu kołu K_1 , w kolineacji danej. Możemy to zadanie wyrazić np. w tej formie: Wykreślić rzut środkowy koła, leżącego w danej płaszczyźnie π . - Wyznaczymy kład O środka rzutów; będzie to środek kolineacji koła K_1 ze stożkową K_2 ;

s będzie osią tej kolineacji q_1 jedną z osi wzajemnych; wykreślimy drugą oś wzajemną r_1 /§97/. Odróżnimy 3 przypadki.

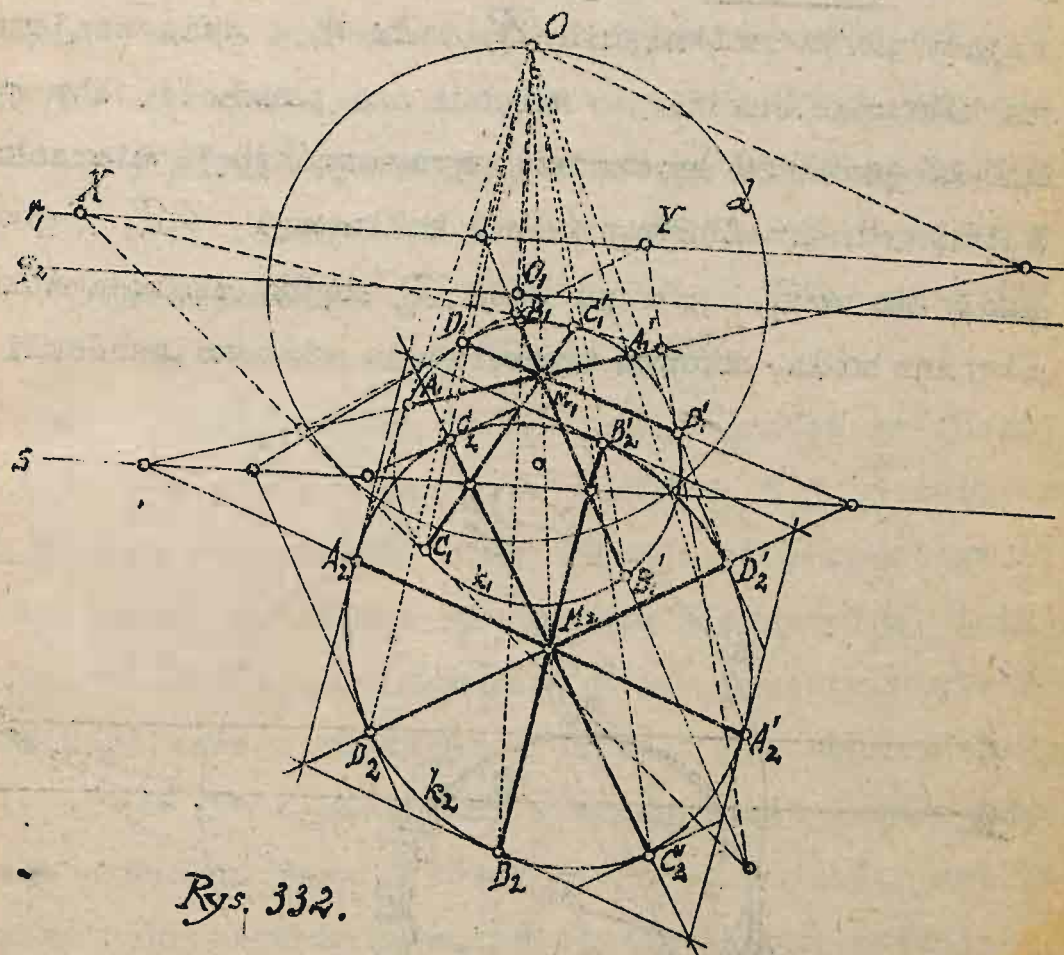
a/ Koło K_1 przecina oś wzajemną r_1 ; stożkowa K_2 przecina prostą niewłaściwą r_2 ; jest to więc hiperbola /331/. Stycznym s i t do koła K_1 w punktach



przecięcia tego koła z osią x , odpowiadają asymptoty \mathcal{H}_2 i \mathcal{H}_3 hyperboli /§173/; ich przecięcie M_2 jest środkiem hyperboli; dwusieczne kątów między asymptotami są osiami a_2 i b_2 hyperboli /§ 176/; wyznaczmy

wierzchołki A_2 i A_2' hyperboli, t.j. przecięcia osi głównej a_2 z hyperbolą; będą im odpowiadały punkty A i A' , w których prosta a , przetnie koło K . Aby wyznaczyć punkty hyperboli, leżące na którejkolwiek średnicy c_2 , kreślimy prostą odpowiednią c , znajdujemy punkty przecięcia tej prostej z kołem K , i rzucamy te punkty na c_2 z punktu O . Styczne do hyperboli we wszystkich wyznaczonych punktach odpowiadają stycznym do koła w punktach odpowiednich.

b/ Koło K , nie przecina osi wzajemnej c ; stożkowa K_2 nie przecina prostej niewłaściwej c_2 ; jest to elipsa /Rys. 332/. Dwom którymkolwiek średnicom sprzężonym elipsy odpowiadają biegunowe względem koła dwóch punktów sprzężonych prostej c . Aby więc wykreślić parę średnic sprzężonych szukanej elipsy, obierzmy na prostej c dwa punkty którekolwiek X i Y i poprowadźmy z nich styczne do koła; trójkąt przekątny czworoboku zupełnego w ten sposób utworzonego będzie trójkątem biegunowym względem koła /§ 179/; jednym jego bokiem jest prosta c ; dwa inne niechaj przecinają koło w punktach A , A' i B , B' ; proste A_2A_2' i B_2B_2' odpowiadające prostym A, A' i B, B' będą średnicami do elipsy w tych punktach; na każdej innej średnicy elipsy znajdziemy dwa jej punkty, kreśląc odpowiednio



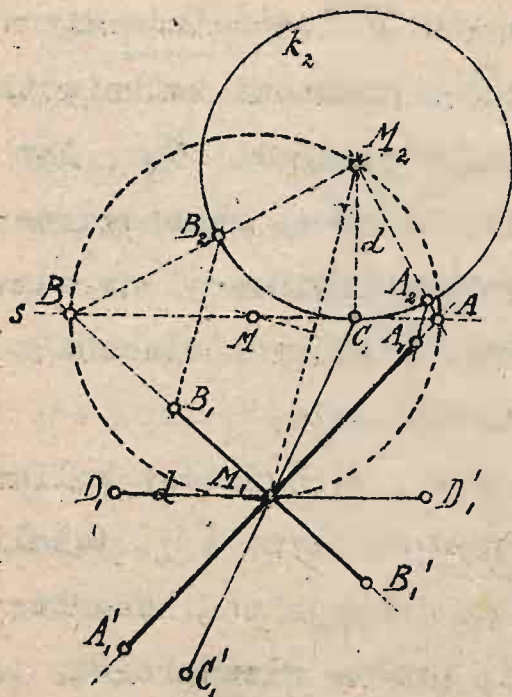
Rys. 332.

cięciwę koła i rzucając ją z punktu O na tę średnicę; styczne w dwóch końcach każdej średnicy są równoległe i odpowiadają stycznym do koła w końcach odpowiedniej cięciwy.

o/ Koło K jest styczne do osi wzajemnej ℓ ;

done z osią, a więc prostopadłe do niej; w szczególności stycznej do koła z punktu R' odpowiada styczna do paraboli w jej wierzchołku, a punktowi zetknięcia A , z kołem odpowiada wierzchołek paraboli A_e . Aby znaleźć parę punktów paraboli, które są symetryczne względem jej osi, rzucamy ze środka kolineacji na odpowiednią sieczną paraboli punkty, w których sieczna z punktu R' , wyprowadzona przecina koło.

II. Jeżeli środek rautó, albo środek kolineacji stanie się punktem niewłaściwym, t.j. jeżeli rzut stanie się równoległy, a kolineacja powinowactwem, to osć wzajemna γ stanie się prostą niewłaściwą, tak, że każdej stożkowej K , odpowiada w tem powinowactwie stożkowa tego samego rodzaju: hyperboli hyperbola, elipsie elipsa, paraboli parabola; w szczególności kołu odpowiada zawsze elipsa /rzutem równoległym koła jest elipsa/ średnica koła przekształca się na średnicę elipsy, środek koła na środek elipsy, średnice sprzężone koła, t.j. jakiegokolwiek dwie jego średnice wzajemnie prostopadłe, na średnice sprzężone elipsy. Na tem można oprzeć wykreślenie osi elipsy, której dane są dwie średnice sprzężone C, C' i D, D' . Przez jeden z końców C średnicy C, C' /Rys. 334/ prowadzimy prostą s równoległą do średnicy D, D' ; będzie to



Rys. 334.

styczna do elipsy w punkcie C' , /§174/. Następnie prowadzimy koło k_2 styczne do S w punkcie C' , o średnicy równej D, D' ; koło to będzie w powinowactwie z elipsą, przytem osią powinowactwa jest prosta S , a kierunek powinowactwa wyznaczony będzie przez dwa punkty odpowiednie M , i M_2 . Każdej parze średnic koła wzajemnie prosto-

padłych odpowiada para średnic sprzężonych elipsy; aby więc znaleźć jakiekolwiek dwie średnice sprzężone elipsy, prowadzimy ze środka koła M_2 dwie proste wzajemnie prostopadłe i łączymy środek elipsy M , ze śladami tych prostych na S . - Aby wyznaczyć osie elipsy, t.j. takie średnice sprzężone, które byłyby wzajemnie prostopadłe, znajdziemy na S punkt M jednakowo odległy od M , i M_2 , z tego punktu zakreślamy koło, przechodzące przez M , i M_2 i wyznaczymy punkty A i

małej połosi B, O i wyznaczmy punkt P , w którym

P, O przecina koło K . Równoległa do $A_2 A_2'$ z punktu P wyznacza na $P_2 O$ szukany punkt elipsy

P . Aby więc wykreślić punkt jakiegokolwiek elipsy, której osie $A_2 A_2'$ i B, B_1' są dane, zakreślamy na osiach koła K_2 i K , o wspólnym środku O ; wyprowadzamy ze środka dowolną prostą i z punktów przecięcia jej z kołami K_2 i K , prowadzimy równoległe do osi $A_2 A_2'$ i B, B_1' . Punkt przecięcia tych dwóch prostych będzie punktem elipsy P . Elipsa ta będzie w powinowactwie nie tylko z kołem K_2 , ale i z kołem K ; osią tego drugiego powinowactwa jest mała oś elipsy B, B_1' , kierunkiem powinowactwa - kierunek wielkiej osi $A_2 A_2'$, a cechą powinowactwa stosunek $\frac{A_2 O}{A O} = \frac{a}{b}$. Aby wykreślić styczną p do elipsy w punkcie P , prowadzimy w punkcie P_2 styczną p_2 do koła K_2 i punkt przecięcia S tej stycznej z osią $A_2 A_2'$ łączymy z punktem P ; - albo prowadzimy w punkcie P styczną p do koła K i punkt przecięcia T tej stycznej z osią B, B_1' łączymy z punktem P .

Z punktu P poprowadzimy równoległą l do P, O i niechaj ta równoległa przetnie osie B, B_1' i $A_2 A_2'$ w punktach M i N . Z równoległoboków $OP_2 PM$ i OP, PN wynika, że $PM = OP_2 = a$ i $PN = OP = b$; tak,

że M , N i P są punktami, których wzajemne odległości na zmiennej prostej ℓ są stałe, przytem punkt M pozostaje zawsze na osi B, B' , punkt N na osi A, A' , a punkt P na elipsie, której półosie są $PM = a$ i $PN = b$.

Jeżeli więc odcinek MN porusza się w ten sposób, że punkt M posuwa się po prostej n , a punkt N po prostopadłej do niej prostej m , to każdy inny punkt P prostej MN zakreśla elipsę o osiach $2PM$ i $2PN$, leżących na prostych m i n .

Na tem twierdzeniu opiera się konstrukcja t. zw. cyrkla eliptycznego, t. j. narzędzia, służącego do kreślenia elips o danych osiach. Prymitywnem takim narzędziem może być skrawek papieru, na którego prosto obciętej krawędzi odmierzone odcinki $PM = a$ i $PN = b$. Wykreśliwszy dwie proste wzajemnie prostopadłe, układamy skrawek w ten sposób, aby punkt M leżał na jednej z tych prostych, a N na drugiej, wtedy P będzie punktem elipsy o osiach $2a$ i $2b$. Zmieniając położenie skrawka wyznaczymy dowolną ilość punktów elipsy

§ 184. Stożki drugiego stopnia. - Ogół prostych rzucających punkty stożkowej K z dowolnego punktu nie leżącego w jej płaszczyźnie oraz ogół płaszczyzn rzucających styczne do tej stożkowej z tego punktu na-

zywamy stożkiem drugiego stopnia. Stożkowa K nazywa się kierownicą stożka; środek rzutów nazywa się środkiem albo wierzchołkiem stożka; proste, rzucające z wierzchołka punkty kierownicy nazywają się tworzącymi stożka; wszystkie inne proste wychodzące z wierzchołka nazywają się średnicami stożka; płaszczyzny rzucające z wierzchołka styczne do kierownicy nazywają się płaszczyznami stycznymi do stożka; wszystkie inne płaszczyzny przechodzące przez wierzchołek nazywają się płaszczyznami średnicowymi stożka. Na każdej płaszczyźnie stycznej leży jej tworząca zestknięcia ze stożkiem przez każdą tworzącą przechodzi jej płaszczyzna styczna ze stożkiem.

Stożki drugiego stopnia są tem w geometrii więz-
czem są stożkowe w geometrii płaskiej. Odpowiadają one
dwoiście stożkowym i mogą tak jak one być określone
zapomocą układu biegunowego wiązki, t.j. takiego wz-
ajemnego podporządkowania prostych i płaszczyzn, wycho-
dzących z jednego punktu, że prostej i płaszczyźnie
do siebie należącym podporządkowane są płaszczyzna i
prosta również do siebie należące /płaszczyzna biegu-
nowa prostej i prosta biegunowa płaszczyzny/ Układ ta-
ki byłby wyznaczony przez trójścian biegunowy QAA_2A_3 ,
i płaszczyznę biegunową OB jakiegokolwiek prostej

OB z tem zastrzeżeniem, żeby płaszczyzna OB nie przechodziła przez żadną krawędź, a prosta OB nie leżała na żadnej ścianie trójscianu $OA, A_2 A_3$.
 Takie niezależne od geometrii płaskiej określenie stożków drugiego stopnia o ile miałyby na celu własności rzutowe tych stożków, nie jest konieczne, gdyż wszystkie te własności odpowiadają dwójście rzutowym własnościom stożkowych.

Każda płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek stożka /płaszczyzna średnicowa/ przecina go według dwóch tworzących: rzeczywistych, urojonych lub zjednoczonych, które rzucają rzeczywiste, urojone lub zjednoczone punkty przecięcia kierownicy stożka przez ślad płaszczyzny siecznej na płaszczyźnie kierownicy. Stąd wynika, że każda prosta /z wyjątkiem średnicy/ przebija stożek drugiego stopnia w dwóch punktach, rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. Jeżeli bowiem przez daną prostą i wierzchołek stożka poprowadzimy płaszczyznę średnicową, to punkty przebicia stożka daną prostą będą punktami, w których ta prosta przecina dwie rzeczywiste, urojone sprzężone, lub zjednoczone proste przecięcia stożka płaszczyzną średnicową.

Przecięcie stożka drugiego stopnia płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołek, jest oczywiście

rzutem kierownicy z wierzchołka na płaszczyznę sieczną, a więc stożkową. Stożkowa ta jest hyperbolą, elipsą, lub parabolą, zależnie od tego, czy płaszczyzna

średnicowa $O r_i$ równoległa do płaszczyzny siecznej

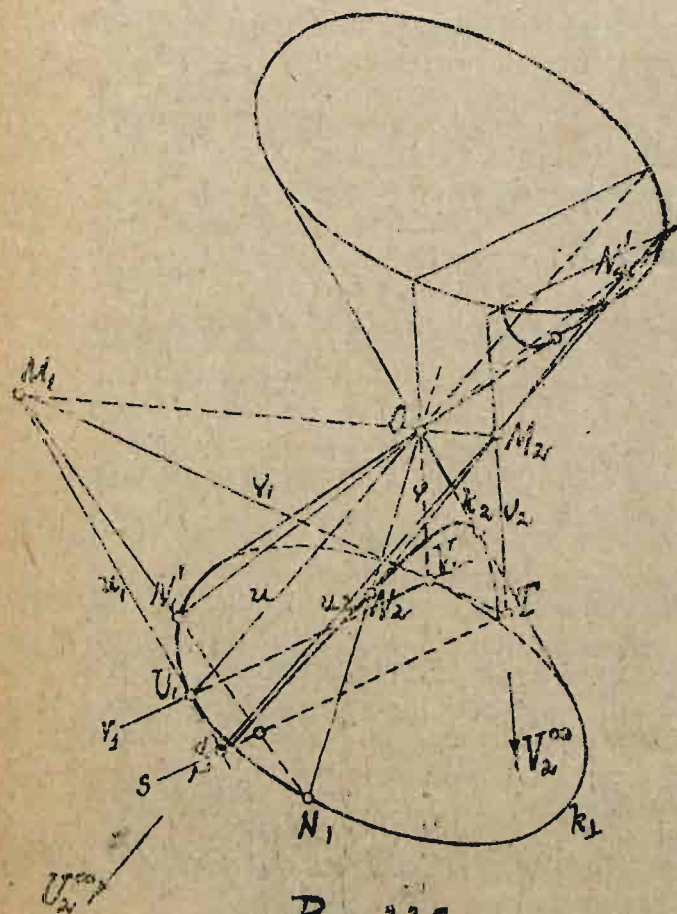
S przecina stożek według prostych rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. W samej rzeczy

gdy płaszczyzna średnicowa $O r_i$ równoległa do płaszczyzny siecznej S przecina stożek według dwóch

tworzących rzeczywistych u i u' /Rys. 336/, to stożkowa przecięcia, która jest miejscem geometrycznym punktów przebiecia płaszczyzny

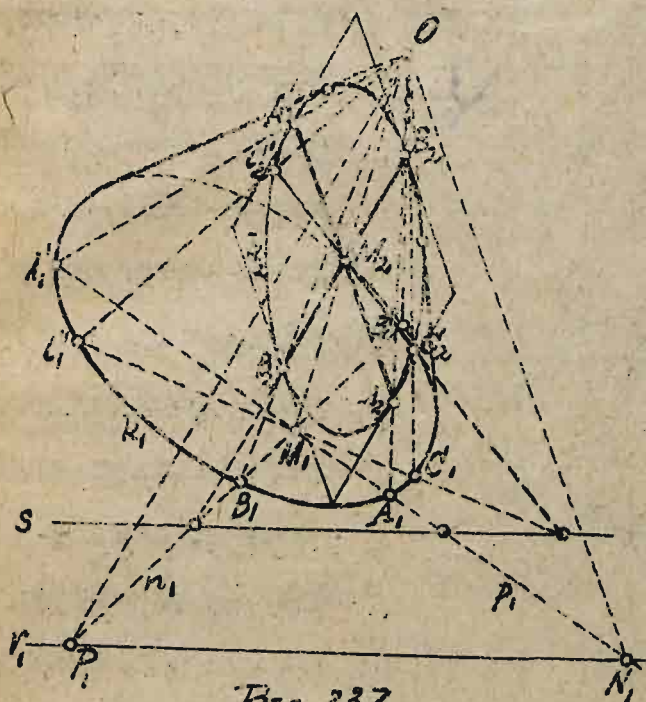
S tworzącymi stożka, będzie miała dwa rzeczywiste punkty niewłaściwe, mianowicie punkty U_2^∞ i V_2^∞ , w których te tworzące przebiegają płaszczyznę

S ; będzie to za-



Rys. 336.

tem hyperbola. Jeżeli płaszczyzna średnicowa O_1 /Rys. 337/, równoległa do płaszczyzny siecznej S nie ma

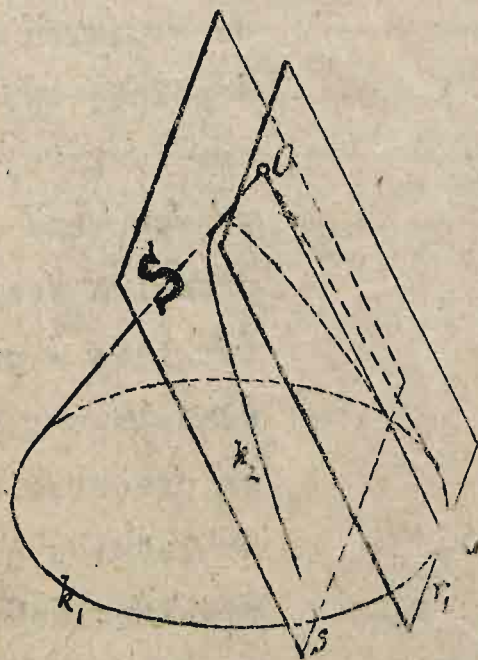


Fys. 337.

ze stożkiem żadnej wspólnej tworzącej rzeczywistej, to płaszczyzna S przecina wszystkie tworzące w punktach właściwych; stożkowa przecięcia nie ma żadnego punktu niewłaściwego, jest to więc elipsa. Gdy wreszcie płaszczyzna średnicowa równoległa do S jest styczna do

stożka /Rys. 338/, t.j. ma z nią dwie zjednoczone tworzące wspólne, to płaszczyzna S przecina wszystkie tworzące w punktach właściwych z wyjątkiem tej jednej przecięcia jest przeto stożkowa posiadająca dwa zjednoczone punkty niewłaściwe, czyli parabola.

Z powyższego wynika, że niema zasady do rozróżniania trzech rodzajów stożków właściwych drugiego



Rys. 338.

stopnia, tak jak
rozróżnialiśmy trzy
rodzaje stożkowych.
W geometrii wiązki
właściwej nie ist-
nieje bowiem ele-
ment, któryby w niej
odgrywał taką rolę
jaką odgrywa prosta
niewłaściwa w geome-
trji płaskiej. Każ-
dy stożek drugiego
stopnia o wierzchoł-
ku właściwym może
być przecięty wed-

ług hyperboli, elipsy lub paraboli; każdą więc z tych
krzywych może być wzięta za kierownicę tego stożka.

Inaczej rzeczy się mają ze stożkami, których wierz-
chołki są punktami niewłaściwymi, czyli z walcami. Po-
między elementami wiązki niewłaściwej znajduje się je-
den niewłaściwy, mianowicie płaszczyzna niewłaściwa.
Płaszczyzna ta odgrywa w geometrii wiązki niewłaściwej
tę samą rolę, co prosta niewłaściwa w geometrii płas-
kiej. Dlatego też walec drugiego stopnia może być hyper-

holiczny, eliptyczny, lub paraboliczny, zależnie od tego, czy płaszczyzna niewłaściwa przecina go według dwóch tworzących niewłaściwych rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. Każde przecięcie płaskie walca hyperbolicznego jest hyperbolą, której asymptotami są przecięcia płaszczyzną sieczną płaszczyzn asymptotycznych i j. stycznych do walca w nieskończoności, podobnież każde przecięcie walca eliptycznego jest elipsą, a każde przecięcie walca parabolicznego jest parabolą.

§ 185. Oś i przecięcia kołowe stożka drugiego stopnia. Trójscian, rzucający z wierzchołka stożka trójkąt biegunowy kierownicy jest trójscianem biegunowym; każda jego ściana jest płaszczyzną biegunową przeciwległej mu krawędzi. Można dowieść /dowód musi tutaj być pominięty/, że istnieje jeden i wogóle tylko jeden trójscian biegunowy w krawędziach i ścianach wzajemnie prostopadłych. Każda z takich trzech krawędzi nazywa się osią stożka drugiego stopnia; jest to średnica, mająca tę własność, że biegunowa płaszczyzna średnicowa jest do niej prostopadła. Płaszczyzna którykolwiek dwóch osi jest dla stożka płaszczyzną symetrii prostokątnej, każda z osi jest osią symetrii prostokątnej stożka. Dla stożków rzeczywistych jedna z osi jest we-

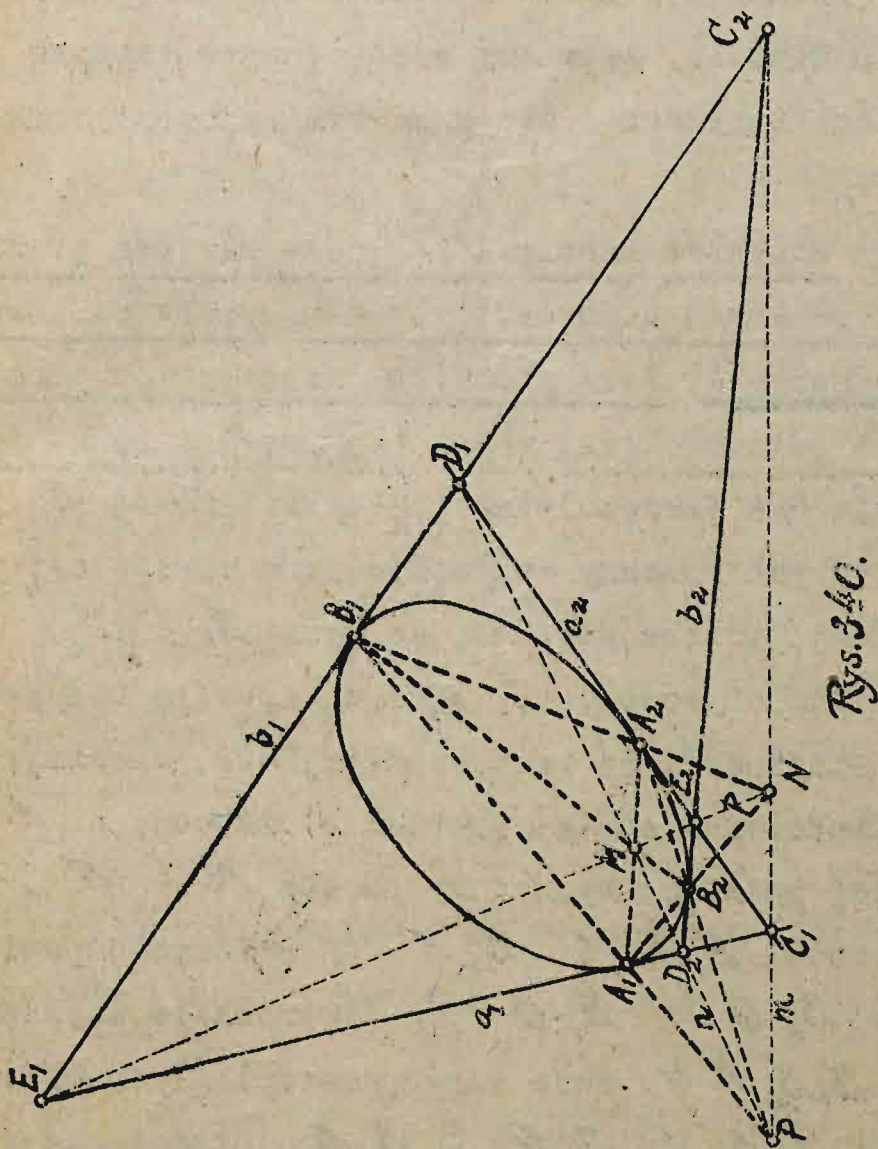
wnętrzną, a pozostałe są zewnętrzne, t.j. przez dwie osie można poprowadzić do stożka płaszczyzny styczne rzeczywiste, a przez trzecią takiej płaszczyzny poprowadzić nie można. Jeżeli jedna z trzech osi np. oś wewnętrzna jest dana, to pozostałe dwie znajdziemy, prowadząc przez wierzchołek równoległe do osi jakiegokolwiek przecięcia, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi danej. Gdy to przecięcie jest kołem, to stożek nazywa się obrotowym i posiada oprócz osi wewnętrznej zwanej osią obrotu, nieskończenie wiele osi zewnętrznych; każda prosta prostopadła do osi obrotu w wierzchołku takiego stożka jest jego osią zewnętrzną.

W stożku nieobrotowym /trójosiowym/ istnieją dwa ustawienia płaszczyzn przecinających stożek według kół tak, że kierownicą każdego stożka drugiego stopnia /obrotowego lub trójosiowego, ale nie zwyrodniałego/ może być koło.

W samej rzeczy niech będzie w rzutach prostokątnych stożek /Rys. 339/, którego kierownica jest elipsą o osiach A, A_1 i B, B_1 , otrzymaną w przecięciu stożka płaszczyzną prostopadłą do osi wewnętrznej SO . Obracząc na tej osi punkt jakikolwiek K , opisujemy z niego kulę styczną do tworzących SA_1 i SA_2 . Pionowy kontur rzeczywisty tej kuli jest kołem, leżą-

eym w płaszczyźnie SB, B_2 o promieniu $KS_1 = KS_2$ równym odległości punktu K od tworzących SA_1 i SA_2 . Połączmy punkty C_1 i C_2 oraz D_1 i D_2 , w których to koło przecina tworzące SB_1 i SB_2 , i przez cięciwy C_1C_2 i D_1D_2 poprowadźmy płaszczyzny **C** i **D**, prostopadłe do płaszczyzny SB, B_2 . Przecięcie kuli płaszczyzną **C** jest kołem, a przecięcie stożka tą samą płaszczyzną jest stożkową, która z tym kołem ma wspólne: 4 punkty C_1, C_2, S_1 i S_2 i styczne SA_1 i SA_2 w punktach S_1 i S_2 , a więc jest z niem identyczna /§ 181, 2//. Płaszczyzna **C** i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe przecinają więc stożek według kół; tak samo płaszczyzna **D** i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe.

§ 186. Czworokąt wpisany i czworobok opisany wzajemnie biegunowe. Zastosujmy metodę biegunowych wzajemnych /§ 171/ do obu twierdzeń § 179 /Rys. 340/. Figurę biegunowo wzajemną względem czworokąta zupełnego A, B, A_2, B_2 jest czworobok zupełny a, b, a_2, b_2 , którego boki są styczne do stożkowej w punktach A_1, B_1, A_2 i B_2 . Biegunowe punktów przekątnych czworokąta są przekątnymi czworoboku; trójkąt, którego bokami są te przekątne, będzie przeto identyczny z trójkątem biegunowym MNP . Ponieważ przeciwległe boki czwo-



Z twierdzeń powyższych wynikać może kilka ważnych grup twierdzeń: Steinera i Staudta. Odkładając na później twierdzenia Staudta, zajmiemy się przede wszystkim twierdzeniami Steinera i licznymi wynikającymi z nich wnioskami

§ 187. Stożkowa rzeczywista, jako miejsce punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych

Twierdzenie I. Pęki prostych, rzucających punkty stożkowej z jakiegokolwiek dwóch jej punktów są rzutowe

Niechaj będą dwa jakiegokolwiek punkty stożkowej S_1 i

S_2 , z których rzucaamy wszystkie inne punkty tej samej stożkowej; trzeba dowieść, że pęki S_1 i S_2 , których odpowiednie proste, np. a_1 i a_2 rzucają ten sam punkt A stożkowej, są rzutowe /Rys. 341/. Niechaj O

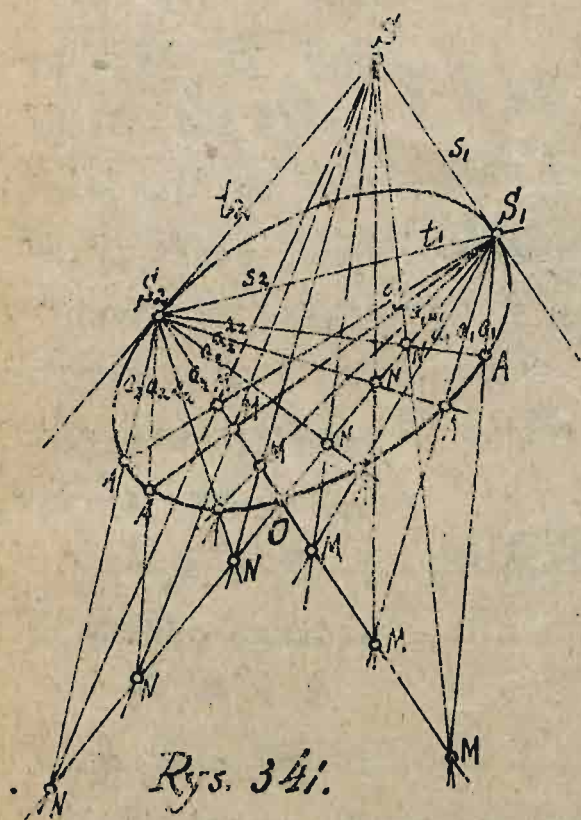
będzie jakimkolwiek stałym punktem stożkowej, a A zmiennym jej punktem; wyznaczmy punkty M i N , w których proste S_1A i S_2A przecinają odpowiednio proste S_2O i S_1O ; w czworokącie zupełnym

wpisanym S_1S_2AO dwie pary przeciwległych boków

S_1A i S_2A , S_1O i S_2O przecinają się w punktach M i N ; skąd wynika, że prosta MN

przechodzi przez biegun S boku S_1S_2 , - t.j. przez punkt przecięcia stycznych S_1 i t_2 w punktach S_1 i

S_2 . Gdy punkt A opisuje stożkową, proste a_1 i a_2

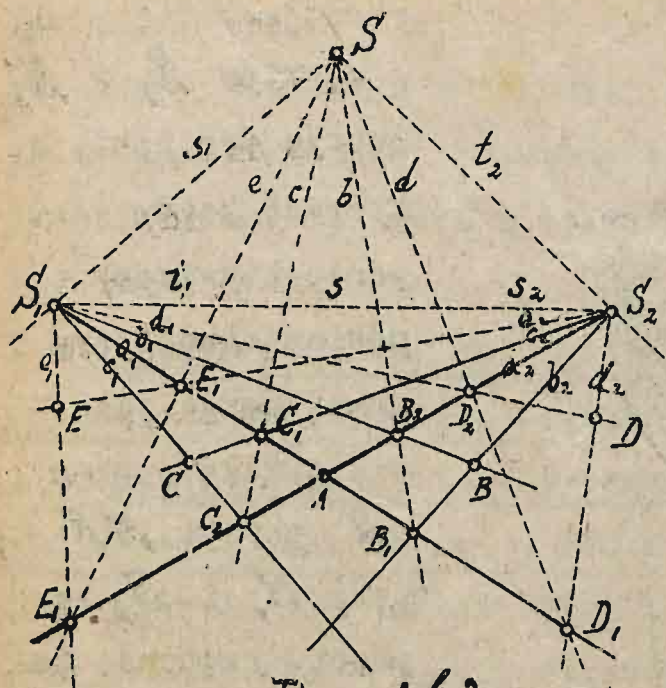


Rys. 341.

rzucające ten punkt z punktów S_1 i S_2 tworzą dwa pęki, z których każdy jest perspektywiczny z pękiem utworzonym przez obracającą się dookoła punktu S prostą MN ; pęki S_1 i S_2 są przeto rzutowe. Zauważmy, że punkt S jest środkiem rzutowym pęków S_1 i S_2 tak, że prostej, łączącej wierzchołki

S_1 i S_2 tych pęków i zaliczonej do jednego z nich odpowiada w drugim styczna do stożkowej w jego wierzchołku.

Twierdzenie II. /odwrotne/. Stożkowa jest miejscem geometrycznem punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych. Niech będą dwa pęki rzutowe /a-le nie perspektywiczne/: $S_1(a, b, c, \dots)$ i $S_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ /Rys. 342/, których odpowiednie proste przecinają się w



Rys. 342.

punktach A , B ,

C Wyzna-

czmy środek rzu-

towy S' tych pę-

ków /§ 147, II b/

Jest to, jak wia-

domo, punkt prze-

cięcia prostych

c i b , z któ-

rych pierwsza łą-

czy punkty $C_1 \equiv a, c_2$

i $C_2 \equiv a_2 c$,

a druga punkty

$B_1 = a, b_2$

i $B_2 = a_2 b$,

Połączmy punkty S' i S_1 prostą s_1 , a punkty S' i S_2 prostą s_2 . Na zasadzie § 181 przez punkty A , B , S_1 i S_2 przechodzi jedna jedyna stożkowa, która jest styczna do prostej s_1 ; na zasadzie zaś poprzedniego twierdzenia pęki, rzucające z punktów S' i S_2 wszystkie punkty tej stożkowej są rzutowe; rzutowość ta może być wyznaczona przez 3 którekolwiek pary prostych odpowiednich, np. przez pary: a , i a_2 , b , i b_2 , s_1 i s_2 , skąd wynika, że te pęki są identyczne

z pękami danymi.

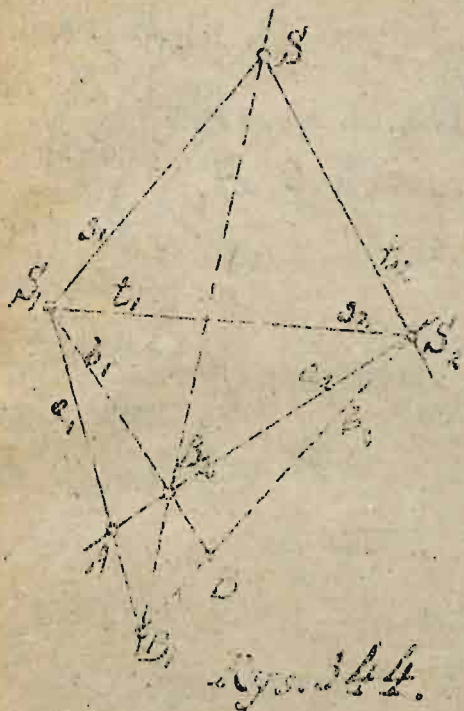
Jeżeli pęki S_1 i S_2 są perspektywiczne, to miejsce geometryczne punktów przecięcia prostych odpowiednich jest stożkowa zwyrodniała, złożoną z prostej $S_1 S_2$ łączącej wierzchołki pęków i osi perspektywy p tych pęków.

Na zasadzie obu powyższych twierdzeń można rozwiązać zadania:

Wykreślić dowolną ilość punktów stożkowej, przechodzącej przez 5 danych punktów /z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej/, - albo: przechodzącej przez 4 dane punkty i stycznej w jednym z nich do danej prostej, - albo: przechodzącej przez 3 dane punkty i stycznej w dwóch z nich do danych prostych, -

Pierwsze z tych zadań rozwiązaliśmy już w § 148 d; rozwiązujemy więc tutaj dwa inne zadania.

1/ Niechaj będą dane punkty A , B , S_1 i S_2 oraz styczna s_1 w punkcie S_1 /Rys. 343/. Połączmy punkty S_1 i S_2 z punktami A i B prostymi a_1 , b_1 i a_2 , b_2 ; prostą $S_1 S_2$ oznaczmy literą s_2 ; rzutowość pęków S_1 i S_2 jest wyznaczona przez 3 pary prostych odpowiednich a_1 , b_1 , s_1 i a_2 , b_2 , s_2 , /gdyż prostej łączącej wierzchołki S_1 i S_2 i zaliczonej do pęku S_2 odpowiada w pęku S_1 styczna s_1 do stożkowej



z tych pęków odpowiadającą styczną w wierzchołku drugiego. Prowadząc tedy z punktu S dowolną prostą b , która przecina proste a_1 i a_2 odpowiednio w punktach B_1 i B_2 , otrzymamy punkt stożkowej B , jako przecięcie prostych

$$S_1 B_1 \equiv b,$$

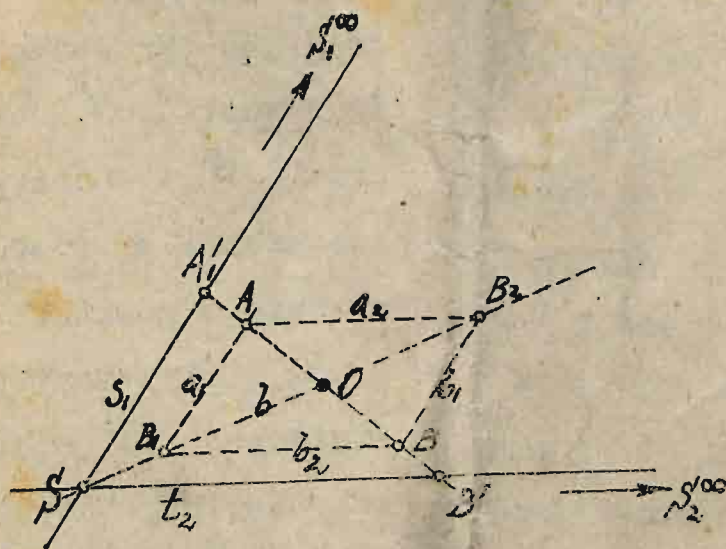
$$\text{i } S_2 B_2 \equiv b.$$

§ 188. Zastosowanie.

Wykreślić hyperbolę, mając

asymptoty s_1 i t_2 , oraz jeden punkt hyperboli A .

Asymptoty, jak wiemy, uważać można za styczne do stożkowej w jej punktach niewłaściwych. Mamy więc poprowadzić stożkową przez punkt A i punkty niewłaściwe S_1 i S_2 , w których ma ona być styczną do prostych s_1 i t_2 . /Rys. 345/. Łącząc punkt A z punktami niewłaściwymi S_1 i S_2 , t.j. kreśląc z punktu A równoległe a_1 i a_2 do prostych s_1 i t_2 i prowadząc z punktu $S \equiv t_2$ dowolną prostą b , znajdziemy na niej punkty B_1 i B_2 , które połączone znowu z punktami niewła-



Rys. 345.

ściwemi s_1
i s_2 dadzą
proste b_1 i
 b_2 , a ich
przecięcie
będzie punk-
tem hyper-
boli B .
Zauważmy, że
przekątna

AB

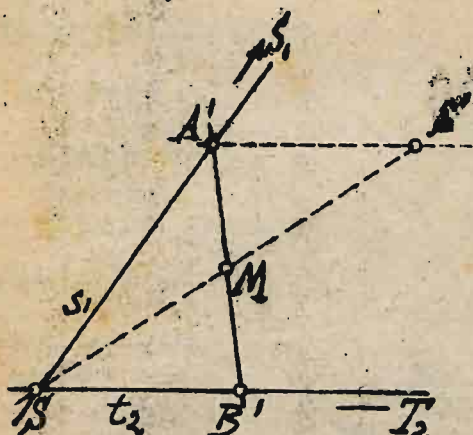
równoległo-

boku AB, BB_2 jest przez prostą b w punkcie O
podzielona na połowy. Otóż punkt O jest również środ-
kiem odcinka $A'B'$ prostej AB , zawartego między
asymptotami, albowiem trójkąty $A'SB'$ i AB, B
są podobne. Stąd wynika, że $AA' = BB'$

Na każdej siecznej hyperboli, odcinki między krzy-
wą, a jej asymptotami są równe.

W szczególności, gdy punkty A i B zostaną
zjednoszone w punkcie M /Rys. 346/, t.j. gdy sieczna
 AB stanie się styczną do hyperboli w tym punkcie
to odcinki MA' i MB' będą równe, t.j.

Punkt zetknięcia jest środkiem odcinka stycznej między



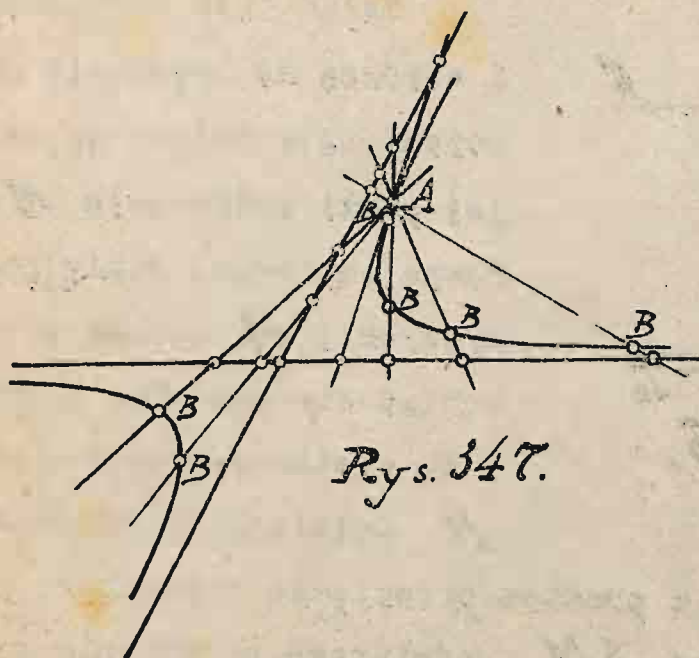
Rys. 346.

asymptotami.

Mając tedy asymptoty i styczną do hyperboli m możemy natychmiast znaleźć jej punkt zetknięcia M . Nawzajem, przez każdy punkt hyperboli M możemy poprowadzić styczną m . W tym celu wystarczy punkt dany M połączyć ze środkiem

hyperboli S /t.j. z punktem przecięcia asymptot/; na przedłużeniu prostej SM odmierzyć po stronie punktu M odcinek $MS' = MS$, przez punkt S' poprowadzić równoległą do jednej z asymptot, np. do s_2 , i punkt przecięcia A' tej równoległej z drugą asymptotą s_1 , połączyć z punktem M .

Te dwie własności pozwalają szybko i dokładnie wykreślić hyperbolę, gdy dane są jej asymptoty i jeden punkt właściwy A /lub jedna styczna a , gdyż wtedy znajdujemy natychmiast punkt zetknięcia A /. Prowadzimy natomiast przez punkt A jakąkolwiek sieczną, która niechaj przetnie asymptoty w punktach A' i B' /Rys. 347/ i od punktu B' odmierzymy odcinek $B'B = AA'$. W każdym z punktów w ten sposób otrzymanych



Rys. 347.

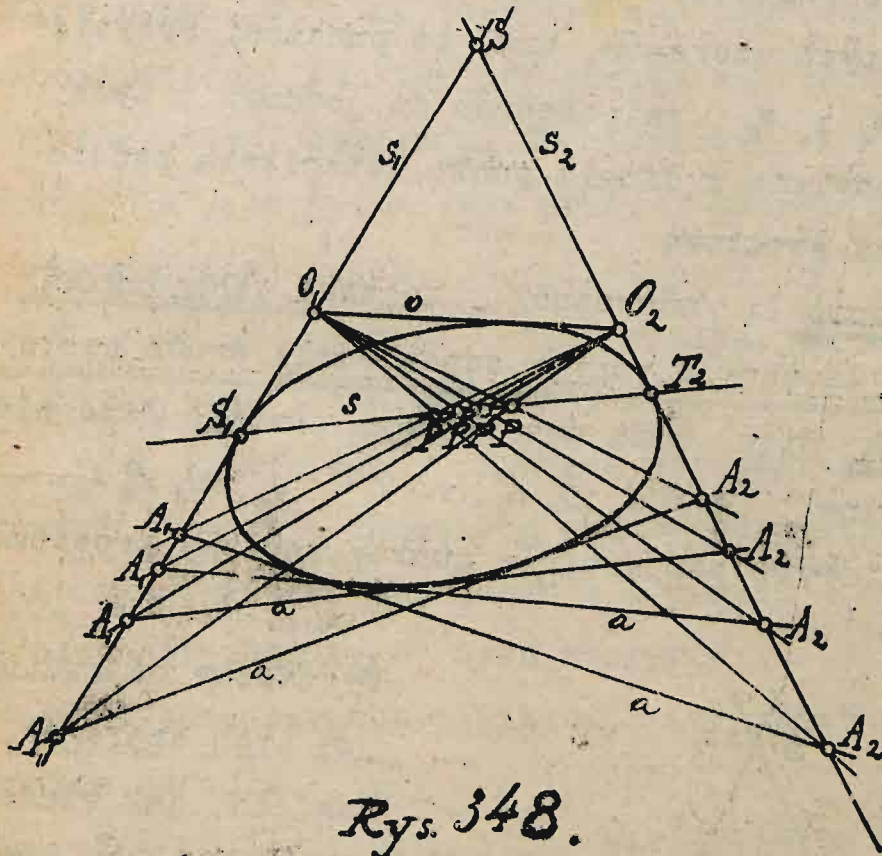
prowadzimy oczywiście styczną, a mając dostateczną ilość punktów i stycznych wykreślimy stożkową z należytą dokładnością.

§ 189.

Stożkowa rzeczywista, jako ob-

wiednia prostych łączących punkty odpowiednie dwóch szeregów rzutowych.

Twierdzenie I. Szeregi punktów przecięcia stycznych do stożkowej z jakimkolwiek dwiema stycznymi są rzutowe. /Rys. 348/. Niech będą dwie styczne do stożkowej s_1 i s_2 , które przecinają wszystkie inne styczne do tej samej stożkowej: trzeba dowieść, że szeregi s_1 i s_2 , których odpowiednie punkty np. A_1 i A_2 leżą na tej samej stycznej a są rzutowe. Niechaj o będzie jakąkolwiek stałą styczną do stożkowej; oznaczmy jej punkty przecięcia ze stycznymi s_1 i s_2 literami O_1 i O_2 ; prosta a niechaj będzie dowolną styczną



Rys. 348.

do stoż-
kowej;
niechaj
ta prosta
przecina
styczne
 s_1 i s_2
w punkt-
tach A_1
i A_2 .
Połączmy
 $A_1 O_2$
i $A_2 O_1$;
w czworo-
boku zu-
pełnym

opisanym s, s_2, a proste $A_1 O_2$ i $A_2 O_1$ łączą prze-
ciwległe wierzchołki, skąd wynika, że ich punkt prze-
cięcia P leży na biegunowej s punktu $s, s_2 \equiv S$
t.j. na prostej łączącej punkty zetknięcia S_1 i T_2 .
stycznych s_1 i s_2 . Gdy prosta a "powłóczy" stożkową
punkty A_1 i A_2 tworzą dwa szeregi, z których każdy
jest w perspektywie z szeregiem utworzonym przez po-
ruszający się na prostej s punkt P ; szeregi s_1 i

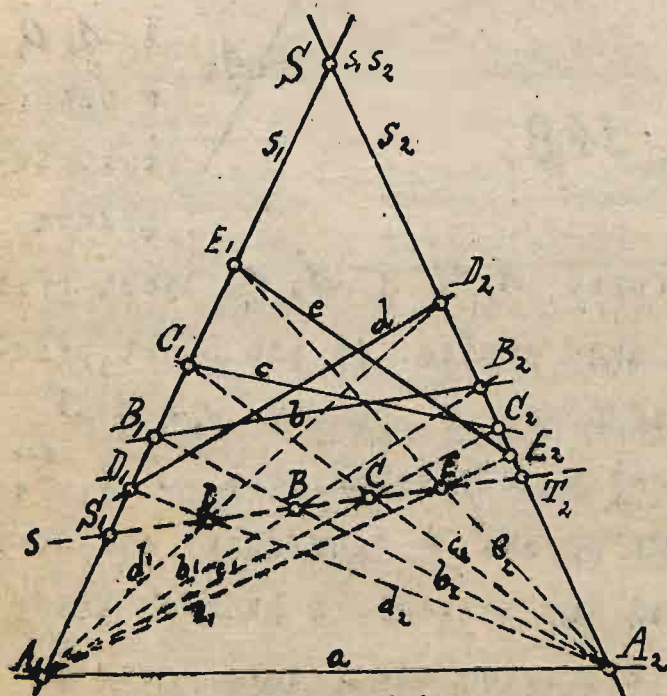
s_2 są przeto rzutowe. Zauważmy, że prosta S, T_2 jest osią rzutową tych szeregów, tak, że punktowemu przecięciu podstaw s_1 i s_2 , zaliczonemu do jednego z tych szeregów, odpowiada w drugim punkt zetknięcia podstawy drugiego ze stożkową.

Twierdzenie II /odwrotne/. Stożkowa jest obwiednią prostych łączących punkty odpowiednie dwóch szeregów rzutowych. Niech będą dwa szeregi rzutowe /ale nie perspektywiczne/: $s_1 / A, B, C, \dots /$ i $s_2 / A_2, B_2, C_2, \dots /$ /Rys. 349/, których odpowiednie punkty łączymy prostymi:

a, b, c, \dots

Wyznaczymy oś rzutową s tych szeregów.

Jest to, jak wiadomo, prosta łącząca punkty B i C , z których pierwszy jest przecięciem prostych A, B_2 i A_2, B , a drugi prostych A, C_2 i A_2, C . Wyznaczymy punkty $s_1 \equiv S$ i $s_2 \equiv T_2$. Na



Rys. 349.

zasadzie § 181 istnieje jedna i tylko jedna stożkowa styczna do prostych a , b , s , i s_2 i przechodząca przez punkt S ; na zasadzie zaś poprzedniego twierdzenia szeregi punktów przecięcia stycznych s i s_2 ze wszystkimi stycznymi do stożkowej są rzutowe; rzutowość ta jest wyznaczona przez 3 którekolwiek pary punktów odpowiednich, np. przez pary A i A_2 , B i B_2 , s i $s_2 \equiv S$, stąd wynika, że te szeregi są identyczne z szeregi danymi.

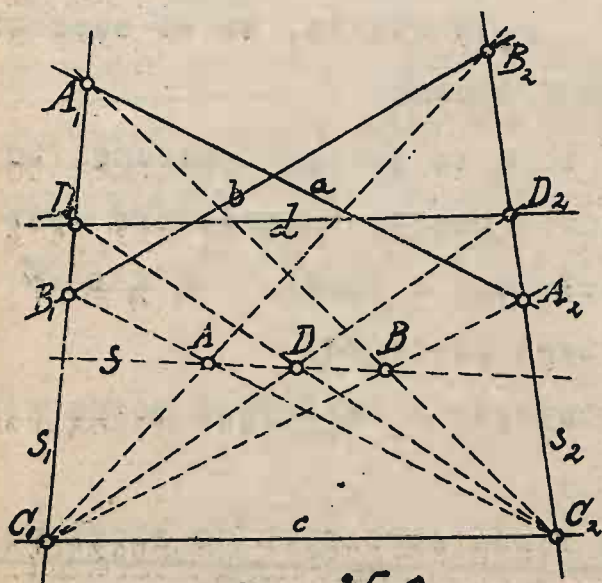
Jeżeli szeregi s i s_2 są perspektywiczne, to odpowiednią prostych łączących punkty odpowiednie jest stożkowa zwyrodniała, złożona z punktu s , $s_2 \equiv S$ i środka perspektywy P tych szeregów.

Na zasadzie obu powyższych twierdzeń można rozwiązać zadania:

Wykreślić dowolną ilość stycznych do stożkowej, stycznej do pięciu danych prostych /z których żadne 3 nie przechodzą przez jeden punkt/, - albo: stycznej do 4 danych prostych i mającej z jedną z nich dany punkt zetknięcia, - albo: stycznej do 3 danych prostych i mających z dwiema z nich dane punkty zetknięcia.

- 1/ Niech będą dane styczne s , s_2 , a , b i c . Zadanie będzie rozwiązane, gdy wskażemy, jak z

dowolnego punktu, leżącego na stycznej s , wyprowadzić drugą styczną d do stożkowej, która jest styczną do wszystkich 5 danych prostych. Zmieniając bowiem położenie tego punktu na stycznej s , , znajdziemy dowolną ilość stycznych do tej stożkowej. /Rys.350/.



Rys. 350.

Obierzmy styczne

s_1 i s_2 za podstawy szeregów wyznaczonych przez styczne do stożkowej. Jeżeli styczne a , b i c przecinają styczną s , w punktach A_1 , B_1 i C_1 , to te trzy pary punktów wyznaczają rzutowość

szeregów $s_1 (A_1, B_1, C_1, \dots)$ π $s_2 (A_2, B_2, C_2, \dots)$,

które przez połączenie odpowiednich punktów utworzą stożkową styczną do wszystkich 5 danych prostych. Aby z punktu D_1 , leżącego na stycznej s_1 , wyprowadzić nową styczną d , odnajdziemy w szeregu s_2 punkt

D_2 odpowiadający rzutowo punktowi D_1 ; styczna d łączy dwa punkty odpowiednie D_1 i D_2 . Wykreślmy

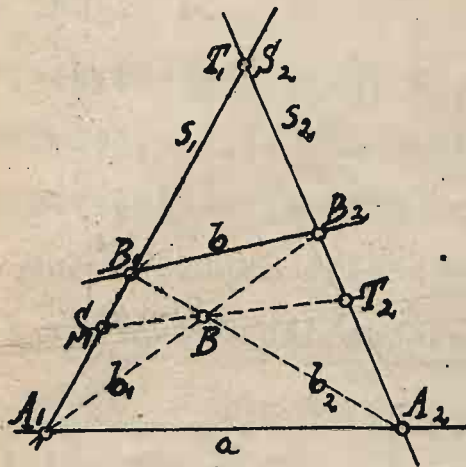
zetknięcia stycznej s , ze stożkową. Oś rzutowa s łączy punkt S , z punktem przecięcia prostych A, B_2 i A_1, B_1 . Chcąc otrzymać jakąkolwiek nową styczną do stożkowej, obieramy na prostej s dowolny punkt C i łączymy go z punktami A_1 i A_2 prostymi c_1 i c_2 ; punkty s, c_1 i s_2, c_2 będą parą punktów odpowiednich szeregów s_1 i s_2 , a więc prosta, która je połączy, będzie styczną c do stożkowej.

3/ Niechaj wreszcie będą 3 styczne s, s_1, s_2 i a oraz punkty zetknięcia S, T_1 na stycznych s i s_2 /Rys. 352/. Prosta S, T_2 będzie osią rzutową szeregów których podstawami są styczne s i s_2 , a punktami odpowiedniami każde dwa punkty tych prostych /np. A_1 i A_2 /, które leżą na tej samej stycznej a . Obrawszy tedy na prostej S, T_2 dowolny punkt B i łącząc go z punktami A_1 i A_2 otrzymamy proste b_1 i b_2 które przecinają podstawy s i s_2 w punktach odpowiednich B_1 i B_2 tych szeregów; prosta B, B_2 będzie styczną do stożkowej.

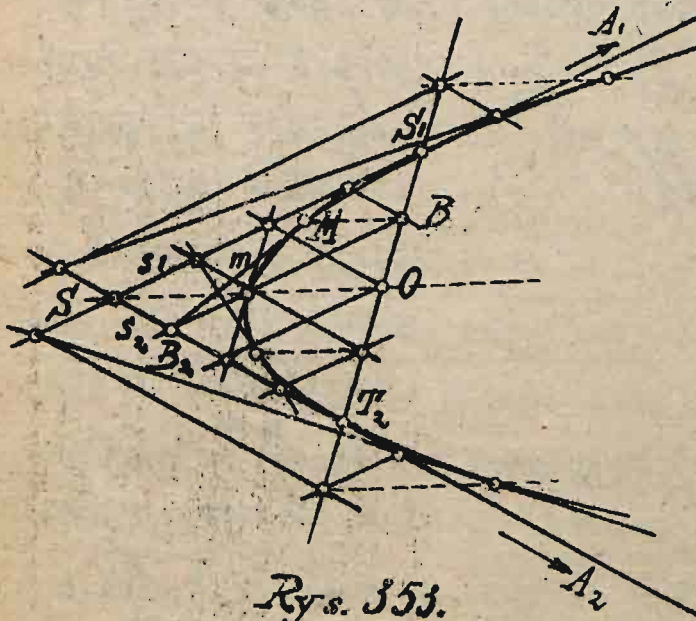
§ 190. Zastosowania. I. Wykreślić parabolę mając jej 4 styczne a, b, c i s . Ponieważ prosta niewłaściwa jest styczną do paraboli, więc mamy wówczas

5 danych stycznych do stożkowej;

II Wykreślić parabolę, mając jej dwie styczne



Rys. 352.



Rys. 353.

s_1 i s_2 wraz z punktami zetknięcia S , i

T_2 /Rys. 353/ Mamy

teraz dane trzy styczne / s_1 , s_2 i prosta niewłaściwa a /, oraz

punkty zetknięcia na stycznych s_1 i s_2 .

Stosując rozwiązanie

ogólne obieramy na prostej S , T_2 dowolny

punkt B i łącząc go z punktami niewłaściwymi

A_1 i A_2 prostych s_1 i s_2 /t.

wj. prowadząc z punktu B równoległe do stycznymi s_1 i s_2 /,

otrzymamy na prostych s_1 i s_2

punkty B_1 i B_2 ; prosta B, B_2 jest styczną do paraboli.

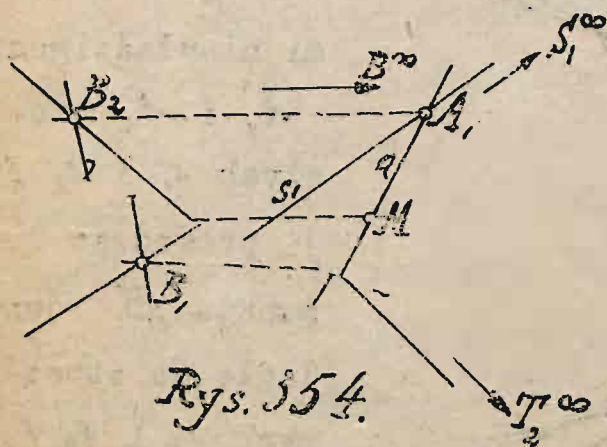
- Prosta, łącząca punkt $S, S_2 \equiv S'$ ze środkiem

paraboli.

O cięciwy S, T_2 jest średnicą sprzężoną z cięciwą S, T_2 i jej kierunek jest punktem zetknięcia paraboli z prostą niewłaściwą /a więc jest środkiem paraboli/. Łącząc ten punkt z punktem B , t.j. prowadząc $BM \parallel OS$, otrzymamy na prostej δ jej punkt zetknięcia M z parabola. Przesuwając punkt B po prostej S, T_2 wyznaczymy potrzebną ilość punktów i stycznych paraboli.

III. Wykreślić hyperbole, mając jej asymptoty S , i S_2 , oraz jedną styczną a . Zadanie to rozwiązaliśmy już w § 188, ale prościej jeszcze można je rozwiązać, stosując rozwiązanie ogólne. /Rys. 354/ Osią rzutową szeregów S , i

S_2 jest teraz prosta niewłaściwa; o- bieramy na niej punkt dowolny, t.j. jakikolwiek kierunku B^∞ , i punkt ten łączymy z punktami A_1 i A_2 , w



których styczna a przecina styczne S , i S_2 ; innemi słowy z punktów A_1 i A_2 prowadzimy w dowolnym kierunku dwie równoległe δ , i δ_2 ; punkty B , i B_2 , w

których te proste przetną S , i S_2 . łączymy nową styczną δ . W ten sposób możemy otrzymać dowolną ilość stycznych. Prowadząc przez środek M odcinka $A'B'$ równoległą do obranego kierunku B^∞ otrzymamy zarazem punkt zetknięcia N na każdej nowej stycznej δ .

Z tego wykreślenia wyciągamy wniosek:

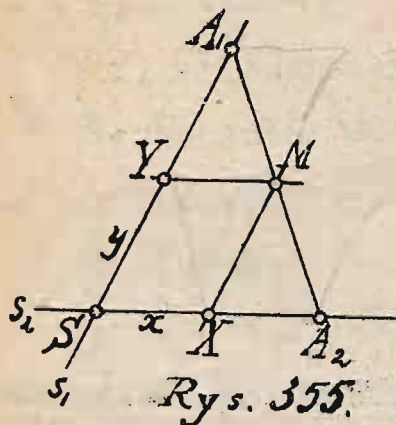
Pola trójkątów, które dowolna styczna do hyperboli tworzy z jej asymptotami, są stałe.

W samej rzeczy trójkąty A, A_2, B_2 i B, B_2, A_1 mają dwa wierzchołki A_1 i B_2 , a więc i bok A_1, B_2 wspólny, trzecie zaś wierzchołki A_2 i B , leżą na równoległej do tego boku; są to zatem trójkąty równoważne. Odejmując po trójkącie A, S, B_2 od każdego z tych trójkątów, otrzymamy trójkąty równoważne A, A_2, S i B, B_2, S .

Własność ta znajduje swój wyraz w równaniu hyperboli, odniesionej do asymptot. Z dowolnego punktu M hyperboli /Rys. 355/ poprowadźmy równoległe do asymptot uważanych za osie współrzędnych; utworzy się wtedy równoległobok $SXMY$, którego pole jest połową pola trójkąta A, A_2, S ; to ostatnie zaś jest stałe, t.j. od położenia punktu M na hyperboli niezależne. Stąd

$$SX \cdot SY \cdot \sin(s, s_2) = \text{stałej.}$$

Oznaczając jak zwykle, $SX = x$. . . $SY = y$



i zauważywszy, że kąt $\angle S_1 S_2$ /
jest stały, mamy równanie hy-
perboli, odniesionej do asymp-
tot:

$$x \cdot y = \text{stałej.}$$

§ 191. Twierdzenie Pascala
W sześciokacie wpisanym w stoż-
kową boki przeciwległe przeci-
nają się parami w trzech punk-

tach, leżących na jednej prostej. Niech będzie sześciok-

kat $A_1 B_2 C_1 A_2$.

$B_1 C_2$ wpisany

w stożkową /Rys.

356/; trzeba do-

wieść, że punkty

P, A_1'' i A_1' ,

w których się prze-

cinają pary boków

przeciwległych

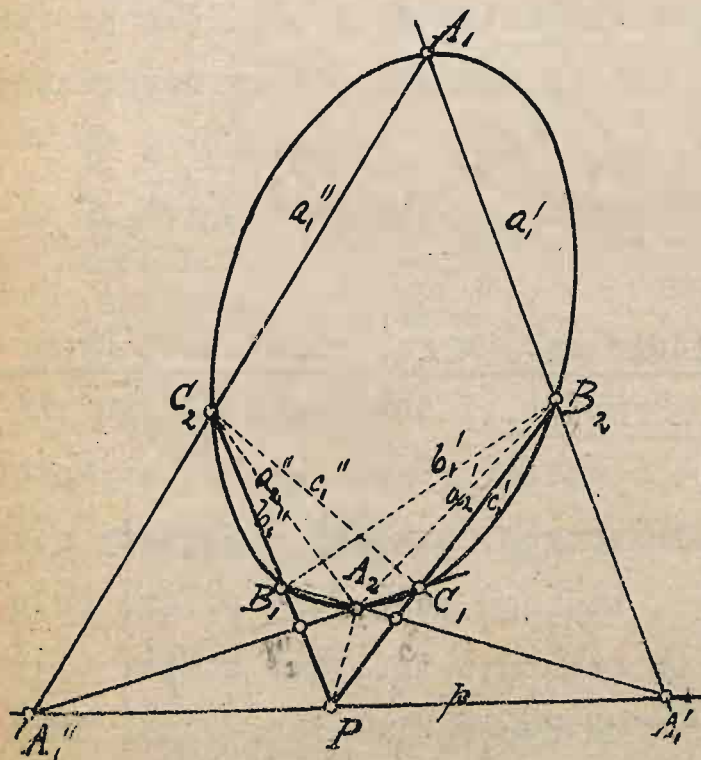
$B_1 C_2$ i $B_2 C_1$,

$C_1 A_2$ i $C_2 A_1$,

$A_1 B_2$ i $A_2 B_1$,

leżą na jednej pro-

stej. Z dwóch wierz-

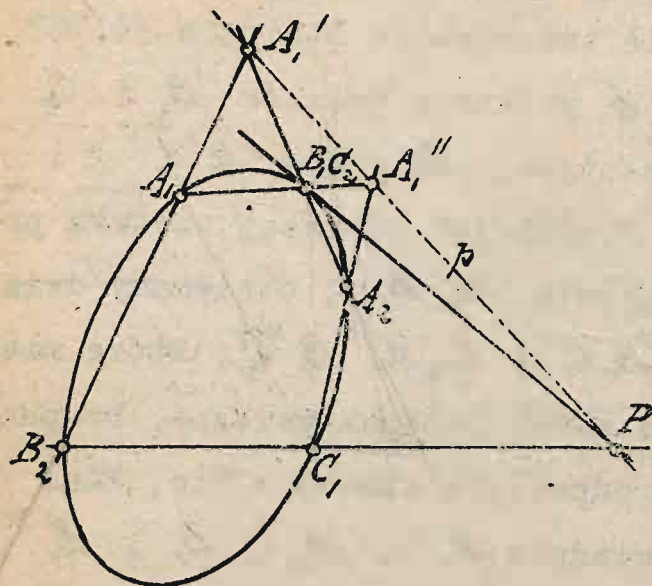


Rys. 356.

chołków niesąsiednich i nieprzeciwległych, np. z B_2 i C_2 , rzućmy pozostałe 4 wierzchołki: A_2 , A_1 , B_1 i C_1 . Na zasadzie twierdzenia Steinera /§. 187, 1/ proste rzucające te 4 punkty z punktów B_2 i C_2 stanowią dwie czwórki rzutowe $B_2 / a_2' a_1' b_1' c_1' /$ i $C_2 / a_2'' a_1'' b_1'' c_1'' /$. Przetnijmy pierwszą czwórkę prostą $A_2 C_1$, a drugą prostą $A_2 B_1$; otrzymamy dwie czwórki punktów $A_2 A_1' B_1 C_1'$ i $A_2 A_1'' B_1 C_1''$, które nie tylko będą rzutowe, ale nawet perspektywiczne, bo punkt przecięcia podstaw A_2 odpowiada samemu sobie. Stąd wynika, że punkty odpowiednie A_1' i A_1'' , B_1 i B_1'' , C_1 i C_1' leżą na prostych przecinających się w jednym punkcie, mianowicie w środku perspektywy P tych dwóch perspektywicznych czwórek punktów. Innymi słowy, prosta $A_1' A_1''$ przechodzi przez punkt przecięcia prostych $B_1 B_1''$ i $C_1 C_1'$, t.j. przez punkt P , tak, że 3 punkty P , A_1' i A_1'' leżą na jednej prostej, c. b. d. o.

Twierdzenie to pozostaje w swej mocy, gdy w sześciokącie wpisanym w stożkową jedna, dwie lub trzy pary wierzchołków sąsiednich zostaną sjednoczone, przez co sześciokąt wyrodnieje do pięciokąta, czworokąta, lub trójkąta wpisanego, a zwyrodniałe boki stają się stycznymi do stożkowej w wierzchołkach sjednoczonych.

1/ Przypuśćmy najpierw, że w sześciokacie wpisanym A, B_2C, A_2B, C_2 /Rys. 357/ jedna para sąsiednich



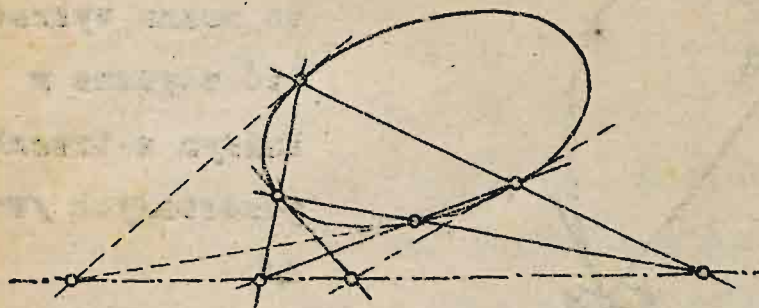
Rys. 357.

wierzchołków jest zjednoczona; założmy np. że wierzchołek C_2 przystaje do B_1 , tak że sześciokąt przekształca się na pięciokąt wpisany A, B_2C, A_2B , w którego jednym wierzchołku B_1 dana

jest styczna.

W pięciokacie wpisanym w stożkową punkty przecięcia dwóch par niesąsiednich boków oraz punkt przecięcia piątego boku ze styczną w przeciwległym mu wierzchołku, leżą na jednej prostej.

2/ Założmy powtórę /Rys. 358/, że w sześciokacie wpisanym A, B_2C, A_2B, C_2 dwie pary sąsiednich wierzchołków, np. B_2C i B, C_2 zostały zjednoczone. Figura staje się wpisanym czworokątem A, B_2A_2B i twierdzenie Pascala przekształca się na znane nam dobrze twierdzenie o czworokacie wpisanym § 136, które



Rys. 358.

można sformułować jeszcze tak:

W czworoką-
cie wpisanym
w stożkową
punkty prze-
cięcia stycz-

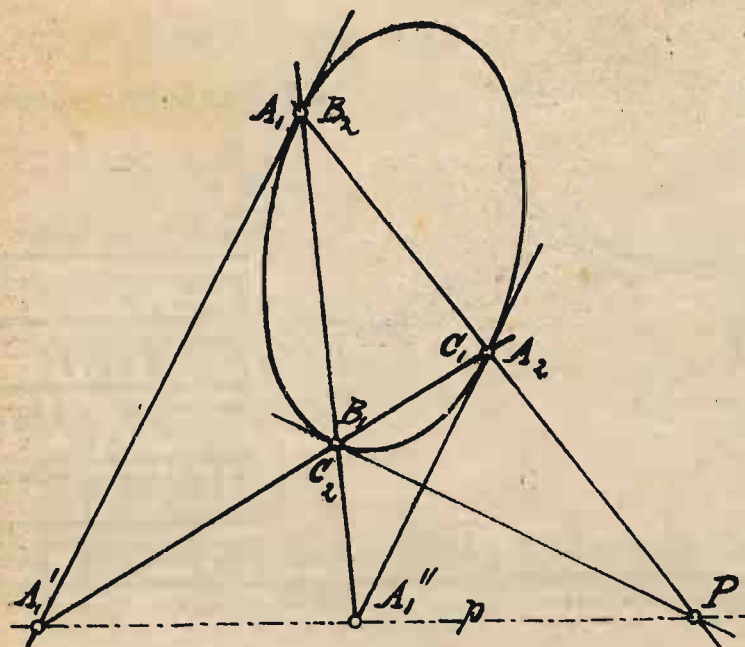
nych w wierzchołkach przeciwległych leżą na jednej pro-
stej.

3/ Niechaj wreszcie w sześciokącie wpisanym A, B, C, A_2, B_2, C_2 /Rys. 359/ trzy pary sąsiednich wierzchołków A , i B_2 , C , i A_2 , B , i C_2 zostaną zjednoczone w punktach A_1 , C_1 , i B_1 . Mamy wtedy do czynienia z trójkątem wpisanym w stożkową, w którego wierzchołkach dane są styczne.

W trójkącie wpisanym w stożkową punkty przecięcia
boków ze stycznymi w wierzchołkach tym bokom przeciw-
ległych leżą na jednej prostej.

Na zasadzie powyższych wniosków można rozwiązać zadania:

- 1/ Jeżeli dane są **5** punktów stożkowej, to można w każdym z nich poprowadzić styczną /wn.1/;
- 2/ Jeżeli dane są **4** punkty stożkowej i styczna



Rys. 359.

w jednym z nich,
to można wykreślić styczne w
każdym z trzech
pozostałych /wn.
2/;

3/ Jeżeli dane
są 3 punkty
stożkowej i sty-
czne w dwóch z
nich, to można
wykreślić stycz-

na w trzecim wierzchołku /wn. 3/

§ 192. Twierdzenie odwrotne i jego zastosowania.

Zarówno twierdzenie Pascala, jak i wymienione wy-
żej 3 wnioski mogą być odwrócone. Tak np. prawdziwe
jest twierdzenie :

Jeżeli przeciwległe boki sześciokąta przecinają
się parami w trzech punktach jednej prostej, to stożko-
wa przechodząca przez 5 jego wierzchołków, przecho-
dzi także przez szósty. Niech będzie sześciokąt

A, B, C, A_1, B_1, C_1 /Rys. 356/ mający tę własność, że boki
przeciwległe B, C_1 i A, C , C, A_1 i C_1, A ,
 A, B_1 i A_1, B , przecinają się w punktach $P, A_2,$

i A_1' , łączących na prostej p . Mamy dowiedzieć, że wszystkie 6 wierzchołków leżą na jednej stożkowej. Dwie czwórki punktów A_2, A_1, B_1, C_1' i A_2, A_1', B_1, C_1 są perspektywiczne, gdyż każda z nich jest przecięciem tej samej czwórki prostych, wychodzących z punktu P .

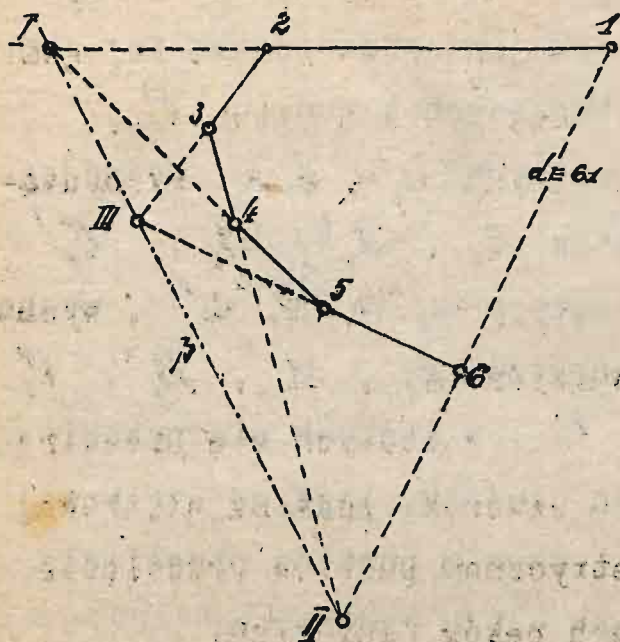
Stąd wynika, że czwórka prostych a_2', a_1', b_1', c_1' wychodzących z punktu B_2 do punktów A_2, A_1', B_1, C_1' jest rzutowa z czwórką prostych $a_2'', a_1'', b_1'', c_1''$ wychodzących z punktu C_2 do punktów A_2, A_1'', B_1'', C_1'' , punkty A_2, A_1, B_1, C_1 w których się przecinają proste odpowiednie tych czwórek, leżą na stożkowej która jest miejscem geometrycznym punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych:

$$B_2 (a_2' a_1' b_1' c_1') \sim C_2 (a_2'' a_1'' b_1'' c_1'');$$

Stożkowa ta, jak wiadomo, przechodzi przez oba wierzchołki pęków B_2 i C_2 .

Na zasadzie tego twierdzenia można wyznaczyć dowolny szósty punkt stożkowej, której 5 punktów 1, 2

3, 4 i 5 są dane /Rys. 360/. Szukamy wierzchołka 6 sześciokąta wpisanego, którego pozostałe wierzchołki 1, 2, 3, 4 i 5 oraz bok $61 \equiv d$, jest dany. Wiemy, że boki przeciwległe 12 i 45, 34 i 61, 23 i 56 przecinają się w trzech punktach I, II i III, leżących na jednej prostej /osi Pas-

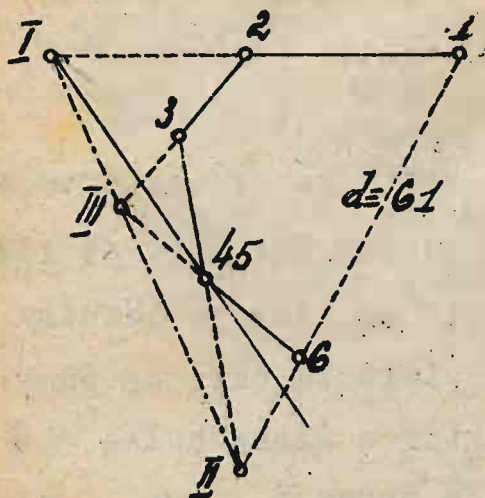


Rys. 360.

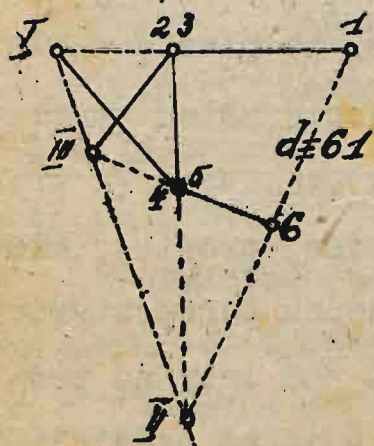
cala/. Połączymy punkty 12 i 45 znajdziemy w przecięciu tych prostych punkt I , w przecięciu prostej 34 z $61 \equiv d$, znajdziemy punkt II , prosta $I II$ jest osią Pascala p , na której musi leżeć punkt III . Będzie to oczywiście punkt, w którym prosta 23 przecię-

na prostą p , łącząc go z punktem 5 otrzymamy w przecięciu z prostą $61 \equiv d$, punkt szukany III .

Rozwiązanie nie ulega zasadniczej zmianie, gdy dwa którekolwiek z danych punktów, np. 4 i 5 są zjednoczone, t.j. gdy dane są 4 punkty: 1, 2, 3 i 45 oraz styczna w punkcie 45 /Rys.361/ - albo gdy dwa punkty 2 i 3, oraz dwa inne 4 i 5 są zjednoczone, t.j. gdy dane są 3 punkty 1, 23 i 45 oraz styczne w punktach 23 i 45 /Rys.362/.



Rys. 361.



Rys. 362.

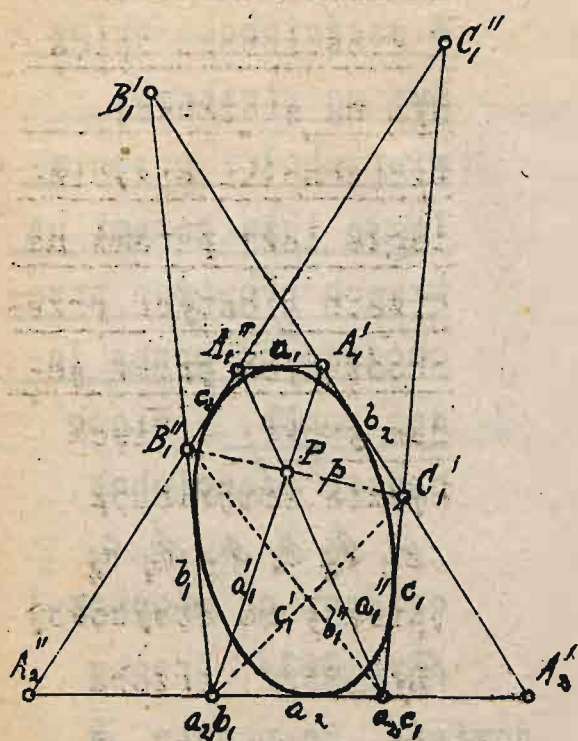
§ 193. Twier- dzenie Brianchona

W sześcioboku opisa-
nym na stożkowej
wierzchołki przeciw-
ległe leżą parami na
trzech prostych prze-
chodzących przez je-
den punkt. - Niech
będzie sześciobok

$a_1, b_2, c, a_2, b_1, c_2$
opisany na stożkowej

/Rys. 363/, trzeba

dowieść, że prosta p ,
 a_1'' i a_1' , które łączą
pary wierzchołków prze-
ciwległych: b_1, c_2 i b_2, c ,
 c, a_2 i a_2, c , a, b_2 i
 a_2, b_1 , przechodzą przez
jeden punkt. Na dwóch
bokach niesąsiednich i
nieprzeciwległych, np.
na b_2 i c , pozostałe
4 boki $a_2, a_1, b_1,$



Rys. 363.

i c , wyznaczają dwie czwórki punktów $A'A'$, $B'C'$ i $A''A''$, $B''C''$,

które na zasadzie twierdzenia Steinera /§ 189

I/ są rzutowe. Rzućmy pierwszą czwórkę punktów z wierzchołka a_2b_1 ,

a drugą z a_2c_1 , o-

trzymamy dwie czwórki prostych a_2a', b_1c' i

a_2a'', b_1c'' , które

nie tylko będą rzutowe

ale nawet perspektywiczne,

bo prosta a_2 łą-

cząca wierzchołki, odpowiada samej sobie. Stąd wynika że proste odpowiednie a' i a'' , b' i b'' , c' i c'' przecinają się w punktach leżących na jednej prostej, mianowicie na osi perspektywy p tych dwóch perspektywicznych czwórek. Innymi słowy, punkt $a'a''$ leży na prostej, łączącej punkty b_1b'' i c_1c' , t.j. na prostej p , tak że 3 proste: p , $a'a'$ i $a''a''$ przechodzą przez jeden punkt P , co b.d.o.

Twierdzenie to pozostanie w mocy, gdy w sześci-

boku opisanym na stożkowej jedna, dwie, lub trzy pary boków sąsiednich zostaną zjednoczone, przez co sześciobok wyrodnieje do pięcioboku, czworoboku lub trójkąta opisanego, a zwyrodniałe wierzchołki stają się punktami zetknięcia na bokach zjednoczonych.

1/ Przypuśćmy najpierw, że w sześcioboku opisanym a, b, c, a_2, b_2, c_2 /Rys. 364/ jedna para sąsiednich boków

jest zjednoczona, za-

łożmy np., że bok

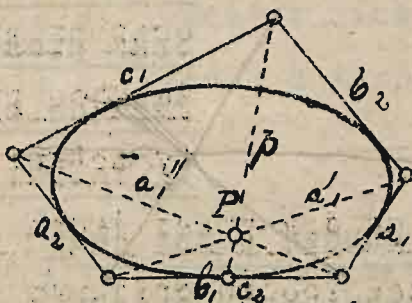
c_2 przystaje do c ,

tak, że sześciobok

przekształca się na

pięciobok opisany

a, b, c, a_2, b_1 , na

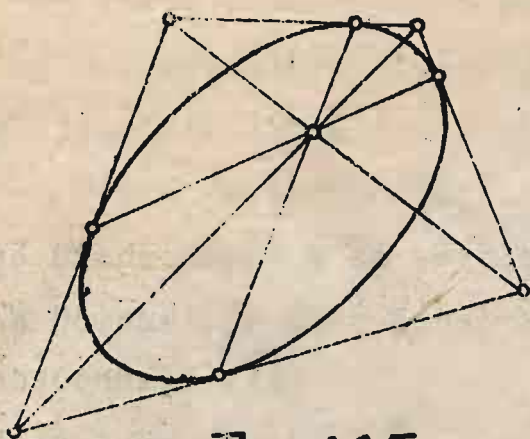


Rys. 364.

którego jednym boku b_1 dany jest punkt zetknięcia.

W pięcioboku opisanym na stożkowej prosta, łącząca dwie pary niesąsiednich wierzchołków oraz prosta, która łączy piątą wierzchołek z punktem zetknięcia na przeciwległym mu boku, przechodzą przez jeden punkt.

2/ Założmy powtórę /Rys. 365/, że w sześcioboku opisanym a, b, c, a_2, b_2, c_2 dwie pary sąsiednich boków, np. b_1, c_1 i b_2, c_2 zostały zjednoczone. Figura staje się opisany czworobokiem a, b, a_2, b_1 i twierdzenie Brianchona przekształca się na znane nam dobrze twierdzenie o

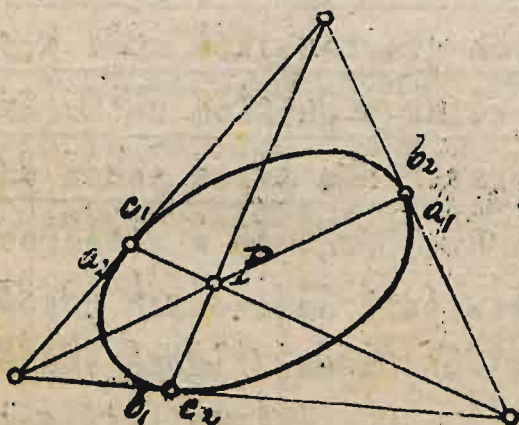


Rys. 365.

czworoboku o-
pisanym /§ 186/
W czworoboku
opisanym na
stożkowej pro-
ste, łączące
wierzchołki
przeciwnie
oraz proste,
łączące punk-
ty zetknięcia

na bokach przeciwnych prz chodzą przez jeden punkt.

3/ Niechaj wreszcie w sześcioboku opisanym a, b_2, c, a_2, b_1, c_2 /Rys.366/ trzy pary sąsiednich boków $a, i b_2, c, i a_2, b_1, i c_2$ zostaną zjednoczone na bokach $a, b, i c$.



Rys. 366.

$b, i c$. Mamy wtedy do czynienia z trójkątem opisanym na stożkowej na którego bokach dane są punkty zetknięcia.

W trójkacie
opisanym na stoż-

kowej proste łączące wierzchołki z punktami zetknięcia na bokach tym wierzchołkom przeciwległych przechodzą przez jeden punkt.

Na zasadzie powyższych wniosków można rozwiązać zadania:

1/ Jeżeli dane są 5 stycznych do stożkowej, to można na każdej z nich wyznaczyć punkt zetknięcia /Wn.1/

2/ Jeżeli dane są 4 styczne do stożkowej i punkt zetknięcia na jednej z nich, to można wyznaczyć punkty zetknięcia na każdej z trzech pozostałych stycznych /Wn.2/

3/ Jeżeli dane są 3 styczne do stożkowej i punkty zetknięcia na dwóch z nich, to można wyznaczyć punkt zetknięcia na trzeciej stycznej /Wn.3/.

§ 194. Twierdzenie odwrotne i jego zastosowania.
Rozumując w ten sam sposób, jak § 192 dowiedlibyśmy twierdzenia odwrotnego:

Jeżeli proste, łączące przeciwległe wierzchołki sześcioboku przechodzą przez jeden punkt, to stożkowa styczna do pięciu jego boków jest styczną także do szóstego.

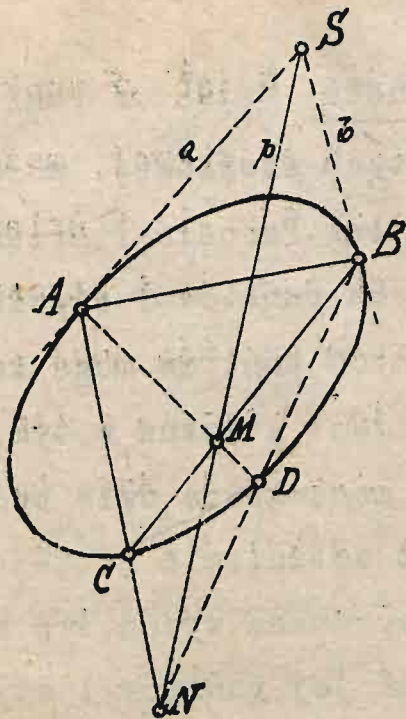
Na zasadzie tego twierdzenia można wykreślić dowolną szóstą styczną do stożkowej, której 5 stycznych: 1, 2, 3, 4 i 5 są dane /Rys. 367/.

zestknięcia na dwóch z nich. Styczne, na których dane są punkty zetknięcia opatrujemy poprostu dwoma numerami kolejnymi np. 56, dany punkt zetknięcia na tej stycznej uważamy za punkt przecięcia szczytnych 5 i 6

§ 195. Twierdzenie Staudta. Mając 5 punktów, albo pięć stycznych rzeczywistych stożkowej, możemy na zasadzie twierdzeń Steinera lub Pascala i Brianchona wykreślić dowolną ilość nowych punktów i stycznych stożkowej - przytem z 5 danych punktów mogą każde dwa być zjednoczone /wtedy dana jest styczna w tym punkcie/ albo z 5 danych stycznych mogą każde dwie być zjednoczone /wtedy dany jest punkt zetknięcia na tej stycznej/. Powstaje pytanie, - czy można wyznaczyć stożkową /t.j. wykreślić dowolną ilość jej punktów i stycznych/ jeżeli z pomiędzy pięciu danych jej elementów /5 punktów lub 5 stycznych/ dwa albo dwa i jeszcze dwa, są urojone sprzężone, - t.j. jeżeli zamiast dwóch punktów rzeczywistych dana jest biegunowa involucja eliptyczna na prostej zewnętrznej, albo jeżeli zamiast dwóch stycznych rzeczywistych dana jest biegunowa involucja eliptyczna dokoła punktu wewnętrznego? Odpowiedź na to pytanie dają twierdzenia Staudta.

I. Punkty, w których dwa boki trójkąta wpisanego

w stożkową przecinają prostą przechodzącą przez biegun
trzeciego boku, są biegunowo sprzężone. - Niech bę-
 dzie /Rys. 368/ trójkąt ABC wpisany w stożkową i



Rys. 368.

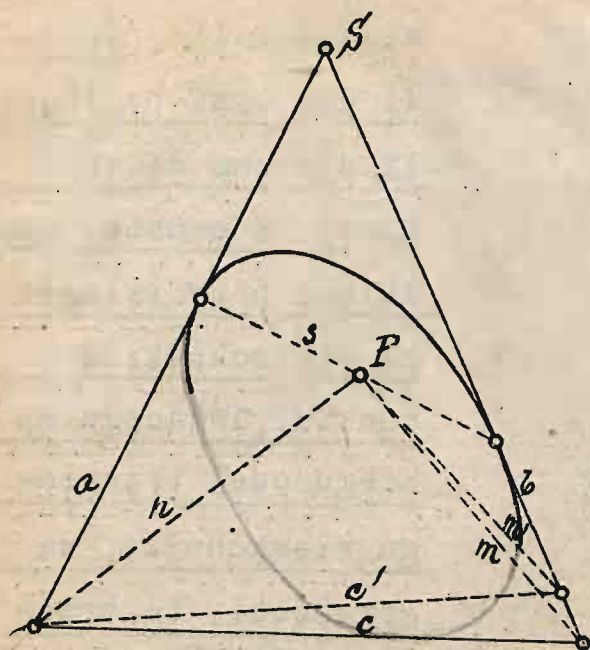
niechaj punkt S
 będzie biegunem
 boku AB . Po-
 prowadźmy przez
 punkt S jakąkol-
 wiek prostą p ;
 trzeba dowieść, że
 punkty M i N ,
 w których ta pro-
 sta przecina bo-
 ki BC i AC
 są biegunowo sprzę-
 żone. Połączmy BN ;
 prosta BN jest
 sieczną stożkowej

/§ 169 / i przecina ją zatem jeszcze w jednym punkcie
 D . Połączmy AD ; powiadam, że AD przecho-
 dzi przez punkt M . W samej rzeczy. - w czworokącie
 zupełnym wpisanym $ABCD$ dwa punkty przekątne i bie-
 gun boku AB muszą leżeć na jednej prostej /§ 186/,
 t.j. trzy proste AD , BC i SN muszą przecho-

dzić przez jeden punkt. Punkty M i N , jako wierzchołki trójkąta biegunowego są sprzężone.

II. /Odrotne względem I/. Jeżeli dwa wierzchołki trójkąta leżą na stożkowej, a przeciwległe im boki przecinają prostą, wychodzącą z bieguna trzeciego boku, w punktach sprzężonych, to trzeci wierzchołek trójkąta leży na stożkowej. Niech będą dwa punkty stożkowej A i B /Rys. 369/, a na prostej p , przechodzącej przez biegun S prostej AB niech będą dane dwa punkty biegunowo sprzężone M i N ; trzeba dowieść, że proste AN i BM przecinają się w punkcie C , który leży na stożkowej. Przypuśćmy, że jest inaczej, t.j. że punkt C nie leży na stożkowej. W takim razie prosta AN która jest sieczną /bo nie jest styczną AS , § 169/ musiałaby przeciąć stożkową w pewnym punkcie C' , różnym od C . Połączywszy BC' , otrzymalibyśmy na prostej p pewien punkt M' , który byłby różny od M i na zasadzie twierdzenia I sprzężony z N , co nie możliwe.

III. /wzajemne względem I /. Proste, które łączą dwa wierzchołki trójkąta opisanego na stożkowej z punktem leżącym na biegunowej trzeciego wierzchołka, są biegunowo sprzężone.



Rys. 371.

nia III sprzężona z n , co niemożliwe.

§ 196. ZADANIE.

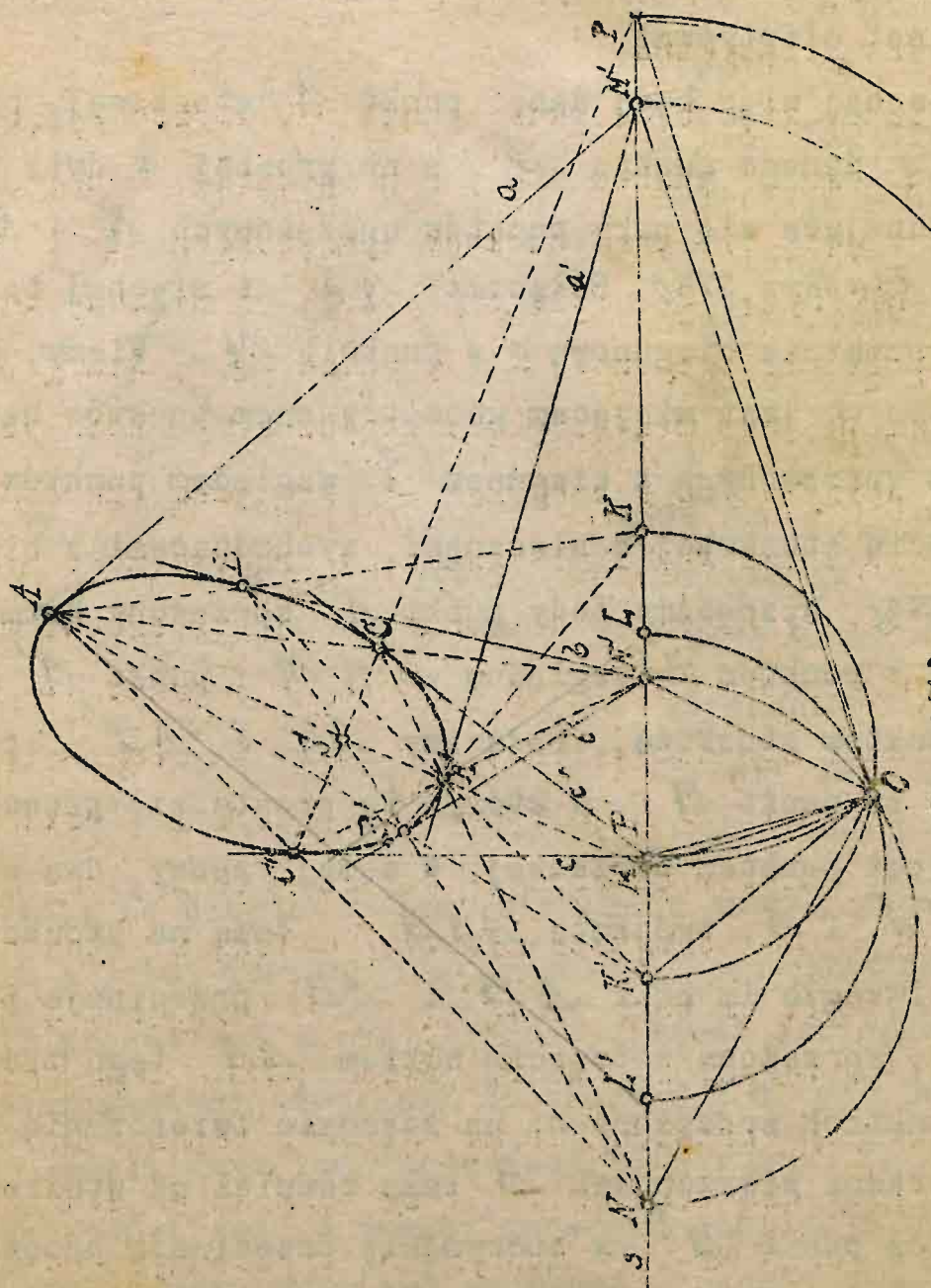
Wykreślić stożkową, mając biegunową s danego punktu S , inwolucję biegunową na s , lub dokoła S' , oraz jeden punkt A stożkowej.

Jeżeli dana inwolucja jest hiper-

boliczna, to prosta s jest sieczną a punkty podwójne S_1 i S_2 tej inwolucji są rzeczywistymi punktami stożkowej, proste zaś s_1 i s_2 które je łączą z biegunem są rzeczywistymi stycznymi do stożkowej w tych punktach. Jeżeli dana inwolucja jest eliptyczna, to s jest prostą zewnętrzną, a punkty podwójne inwolucji są urojonymi sprzężonymi punktami stożkowej, proste zaś podwójne perspektywicznej inwolucji dokoła bieguna S są urojonymi stycznymi w tych punktach. Rozwiązanie w obu ra-

zach jest jednakowe, przypuśćmy jednak, że dana inwolucja jest eliptyczna.

Niechaj więc będą dane: punkt A stożkowej, biegunowa s danego punktu S , a na prostej s dwie przegradzające się pary punktów sprzężonych K i K' i L i L' /Rys. 372/. Połączmy AS i niechaj ta prosta przetnie biegunową s w punkcie M . Wiemy, że biegunowa s jest miejscem geometrycznym punktów harmonicznie sprzężonych z biegunem S względem punktów przecięcia stożkowej z siecznymi, wychodzącymi z bieguna /§ 174/. Wyznamy tedy punkt A' sprzężony harmonicznie z punktem A względem S i M ; punkt A' będzie punktem stożkowej. Połączmy AK i $A'K'$, powiadam, że punkt B , w którym te proste się przecinają, jest punktem stożkowej. W samej rzeczy, dwa wierzchołki A i A' trójkąta $AA'B$ leżą na stożkowej a przeciwległe im boki $A'B$ i AB przecinają prostą s , sprzężoną z trzecim bokiem AA' tego trójkąta w punktach sprzężonych; na zasadzie twierdzenia II § 195 trzeci wierzchołek B leży również na stożkowej. Podobnież punkt B' , w którym się przecinają prosta AK' i $A'K$ leży również na stożkowej. Każda para punktów sprzężonych prostej s pozwala w ten sposób wyznaczyć dwa nowe punkty stożkowej. Na zasadzie własności



Ry. 372.

harmonicznych czworokąta $ABAB'$ łatwo stwierdzić, że sieczna BB' przechodzi przez S . Ten fakt pozwala odrazu wykreślić styczne w punktach B i B' . Punkt przecięcia tych stycznych N' jest biegunem prostej BB' ; leży ^{on} na S , albowiem biegun prostej S leży na BB' . Będzie to zatem punkt sprzężony z punktem N , w którym prosta BB' przecina S i jako taki może być znaleziony.

Aby więc po wyznaczeniu punktów B i B' szybko znaleźć dostateczną ilość dalszych punktów i stycznych najlepiej postępować tak:

Połączmy BB' i niechaj prosta BB' przetnie S w punkcie N ; wyznaczmy punkt N' sprzężony z N i połączmy go z B i B' , będą to styczne b i b' . Korzystając z punktów sprzężonych N i N' , znajdziemy dwa nowe punkty stożkowej C i C' , będą to, jak wiemy, punkty przecięcia prostych AN i $A'N'$ oraz AN' i $A'N$. Połączmy CC' i niechaj prosta CC' przetnie S w punkcie P ; wyznaczmy punkt P' sprzężony z P ; połączmy go z C i C' będą to styczne c i c' . W ten sposób postępujemy dalej: a więc korzystając z punktów P i P' , wyznaczmy dwa nowe punkty D i D' , połączmy DD' i t.d. - Jeżeli dla prosta S będzie prostą niewłaściwą, a involucja dała bieguna S' /środek stożkowej/ będzie prostokątna,

to stożkowa będzie kołem, odcinki AS i $A'S$ sta-
ną się równe, a proste AK i $A'K'$ oraz AK' i
 $A'K$ prostopadłe; odnajdujemy więc znaną własność ko-
ła, polegającą na tem, że z punktów jego okręgu widać
średnicę AA' pod kątem prostym.

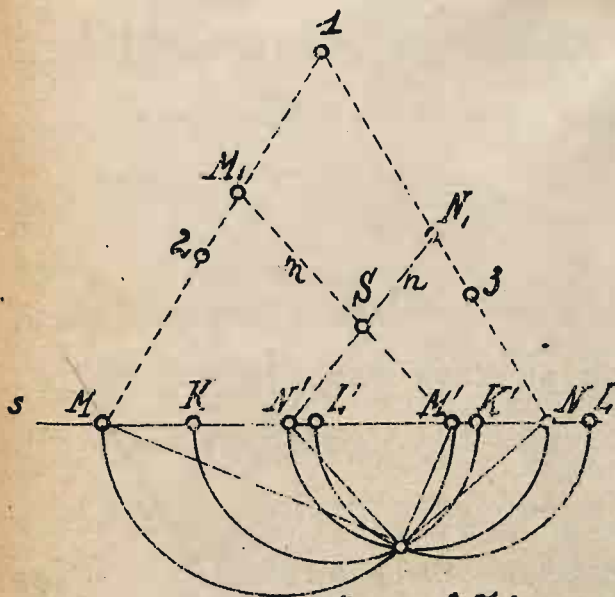
Do tego samego zadania można sprowadzić rozwiąza-
nie zadania wzajemnego:

Wykreślić stożkową, mając biegun S danej prostej
 s , involucję biegunową dokoła S /lub na s / oraz
jedną styczną a stożkowej. W tym celu wystarczy wyzna-
czyć punkt zetknięcia A na stycznej a /Rys. 372/.

Wyznaczwszy punkt M' , w którym a przecina s , po-
łączymy punkt M sprzężony z M' z biegunem S pro-
stej s ; w przecięciu prostych a i MS leży punkt
 A .

§ 197. ZADANIE. Wykreślić stożkową mając jej 3
punkty 1, 2 i 3 oraz eliptyczną involucję bieguno-
wą na danej prostej s . Zadanie to dałoby się sprowa-
dzić do poprzedniego, gdybyśmy zdołali wyznaczyć bie-
gun S prostej s . Moglibyśmy wtedy bowiem uważać
za dane: biegunową s danego punktu S , involucję
biegunową na s /lub perspektywiczną z nią involucją
biegunową dokoła S / oraz jeden punkt stożkowej, np.
1. Dla wykreślenia bieguna prostej s w płaszczyźnie

leżó biegunowe dwóch punktów tej prostej, np. punktów M i N , w których proste 12 i 13 przecinają s /Rys. 373/. Aby wykreślić biegunową m punktu M



Rys. 373.

zważmy, że do tej prostej muszą należeć: 1/ punkt M , sprzężony harmonicznie z M względem 1 i 2 , 2/ punkt M' sprzężony z M w danej inwolucji biegunowej. Podobniez biegunowa n punktu N łączy punkty N'

i N' , z których pierwszy jest harmonicznie sprzężony z N względem 1 i 3 , a drugi jest sprzężony z N w danej inwolucji biegunowej. Przecięcie prostych m i n jest biegunem prostej $MN \equiv s$.

Jeżeli daną prostą s będzie prosta niewłaściwa, a dana na niej inwolucja biegunowa będzie inwolucją kierunków prostopadłych, t.j. gdy stożkowa stanie się kołem, to stosując podane rozwiązanie odnajdziemy znaną konstrukcję środka koła, którego dane są trzy punkty 1 , 2 i 3 . W samej rzeczy, punkty M i N staną

się niewłaściwe, punkty M i M' będą zatem środkami cięciw 12 i 13 . Aby więc znaleźć biegun prostej niewłaściwej względem koła, t.j. jego środek, należy w środkach cięciwy 12 i 13 wystawić do nich prostopadłe i wyznaczyć ich przecięcie: jest to powszechnie znane wykreślenie środka koła, opisanego na trójkącie

123 .

Ta sama konstrukcja da się zastosować również wtedy, gdy z pośród trzech danych punktów rzeczywistych dwa, np. 1 i 2 , są zjednoczone, t.j. gdy dane są dwa punkty 1 i 2 , styczna w jednym z nich, np. w 1 oraz eliptyczna involucja biegunowa na prostej s .

Biegunowa m punktu M , w którym dana styczna przecina s , przechodzi wtedy przez punkt 1 .

Zupełnie w taki sam sposób rozwiązalibyśmy zadanie wzajemne:

Wykreślić stożkową, mając 3 styczne $1, 2$ i 3 oraz eliptyczną involucję biegunową dokoła danego punktu S , -

przytem z pośród stycznych rzeczywistych $1, 2$ i 3 dwie mogą być zjednoczone, t.j. mogą być dane dwie styczne, punkt zetknięcia na jednej z nich oraz eliptyczna involucja biegunowa dokoła danego punktu S .

§ 198. ZADANIE. Wykreślić stożkową, mając jej punkt z oraz dwie eliptyczne inwolucje biegunowe na dwóch prostych s i t . Wykreślmy na prostych s i t punkty S i T , które są sprzężone w danych inwolucjach z punktem P przecięcia prostych s i t ; prosta ST będzie biegunową p punktu P . Jeżeli oznaczymy literami B i C punkty przecięcia siecznej p ze stożkową, to na zasadzie twierdzenia I Staudta proste AB i AC przetną zarówno prostą s , jak i prostą t w punktach sprzężonych, skąd wynika, że proste AB i AC stanowią parę prostych sprzężonych zarówno w inwolucji rzucającej z punktu A inwolucję biegunową na prostej s , jak i w inwolucji, rzucającej z tego samego punktu inwolucję biegunową na prostej t /§ 152/.

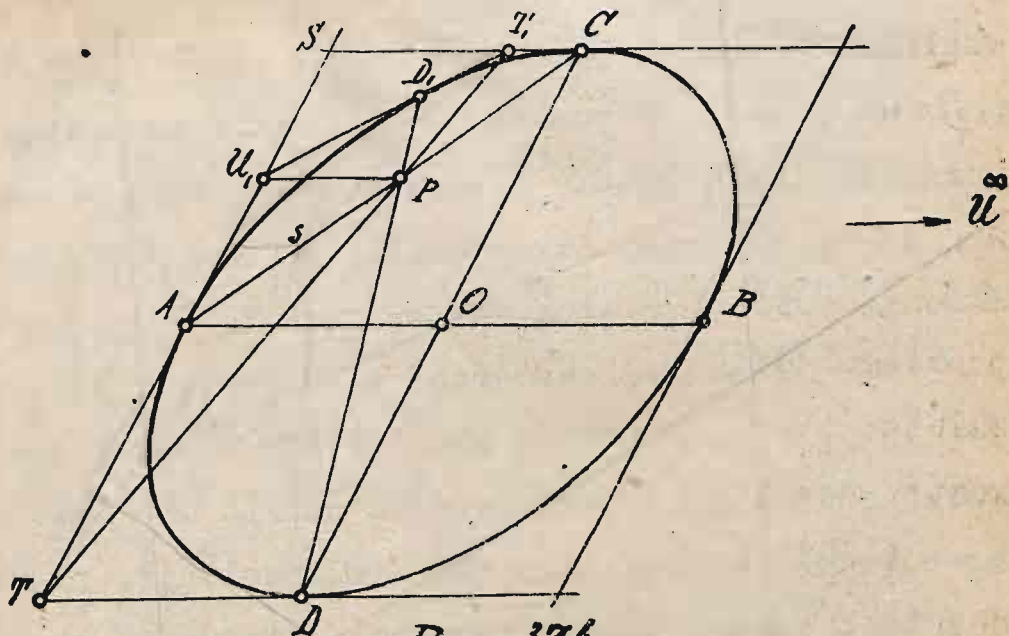
Tak samo rozwiązujemy zadanie wzajemne:

Wykreślić stożkową, mając jej styczną z oraz dwie eliptyczne inwolucje biegunowe dokoła dwóch punktów S i T .

Ze wszystkich dotychczas rozważanych przypadków wynika zatem:

Stożkowa jest wyznaczona przez 5 punktów lub przez 5 stycznych, które mogą być parami urojone sprzężone, lub...

nie sprzężonych AB i CD Rys. 374/.



Rys. 374.

Poprowadźmy przez punkty A i B równoległe do CD , a przez punkty C i D równoległe do AB . Otrzymamy równoległobok, opisany na stożkowej. Wystarczy wykreślić łuk elipsy zawarty pomiędzy punktami A i C ; pozostałą część krzywej można wykreślić na zasadzie symetrii ukośnej względem średnic AB i CD oraz na zasadzie symetrii względem środka O . Zauważmy trójkąt STU^∞ , którego wierzchołek U^∞ jest punktem niewłaściwym średnicy AB , biegunowa S wierzchołka S jest prostą AC ; obrawszy na niej

punkt dowolny P , rzućmy go z dwóch pozostałych wierzchołków U^∞ i T na boki przeciwległe ST i SU^∞ i połączmy rzuty U i T ; prosta UT będzie styczną do stożkowej. Ponieważ w czworoboku opisanym o wierzchołkach U^∞ , T , U i T , znany punkt zetknięcia D na boku TU^∞ , więc prosta DP wyznaczy na przeciwległym boku UT punkt zetknięcia D , /§193,3// Przesuwając punkt P wzdłuż odcinka AC otrzymamy dowolną ilość stycznych i punktów łuku elipsy między punktami A i C . Wykreślenie powyższe ma tę ważną zaletę, że wszystkie punkty pomocnicze zawarte są wewnątrz równoległoboku opisanego na elipsie.

§ 200. Własności ogniskowe stożkowych. Punkty, dokoła których inwolucja biegunowa jest prostokątna, nazywamy ogniskami. Urojone, sprzężone proste podwójne tej inwolucji, t.j. proste jednorodne /§156/ wychodzące z ogniska są styczne do stożkowej. Jak wiemy, wszystkie proste jednorodne przechodzą przez punkty kołowe, ogniska są to więc punkty przecięcia dwóch par stycznych urojonych, wyprowadzonych do stożkowej z obu punktów kołowych. Styczne te tworzą czworobok którego dwa wierzchołki są punktami kołowymi, a pozostałe cztery - ogniskami stożkowej.

Srodek koła jest jego ogniskiem, albowiem inwolucja

cja biegunowa dokoła tego punktu jest prostokątną. Jak zobaczymy niebawem, w środku koła są zjednoczone wszystkie cztery jego ogniska.

Aby znaleźć ogniska stożkowej, która nie jest kołem, ustalmy kilka własności ognisk, które wynikają z ich określenia.

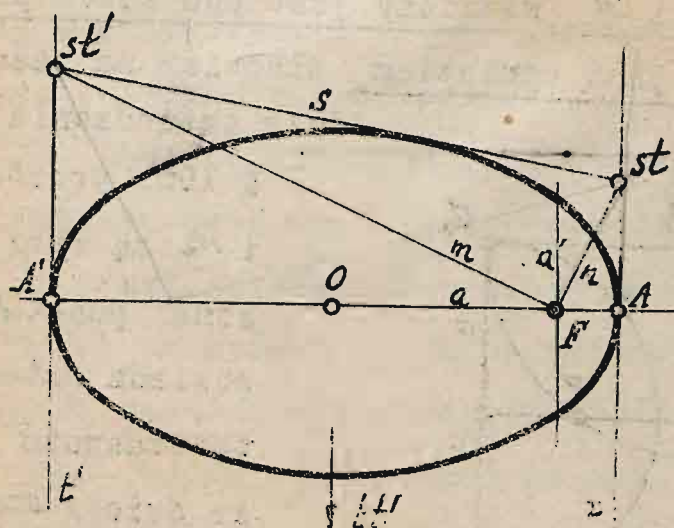
1/ Ponieważ involucja biegunowa dokoła każdego ogniska jest prostokątną, a więc eliptyczną, więc każde ognisko jest punktem wewnętrznym stożkowej

2/ Każde ognisko musi leżeć na jednej osi. W samej rzeczy niechaj punkt wewnętrzny F' będzie ogniskiem. Połączmy go ze środkiem O stożkowej. Na zasadzie określenia ogniska, prostą sprzężoną z prostą $F'O \equiv a$ w involucji biegunowej dokoła F' jest prosta a' prostopadła do $F'O$. Średnica $F'O$ ma więc tę własność, że jedna, a więc wszystkie cięciwy z nią sprzężone są do niej prostopadłe, jest to więc oś stożkowej.

3/ Ponieważ ognisko F' jest punktem wewnętrznym stożkowej, więc oś $F'O$, na której ono leży, musi przecinać stożkową; jeżeli zatem stożkowa jest hyperbolą, to rzeczywiste ogniska mogą tylko leżeć na osi głównej.

Niech będzie stożkowa o środka właściwym, t.

elipsa lub hyperbola /Rys. 375/ i niech F będzie jej ogniskiem. W wierzchołkach A i A' , w których oś FO przecina



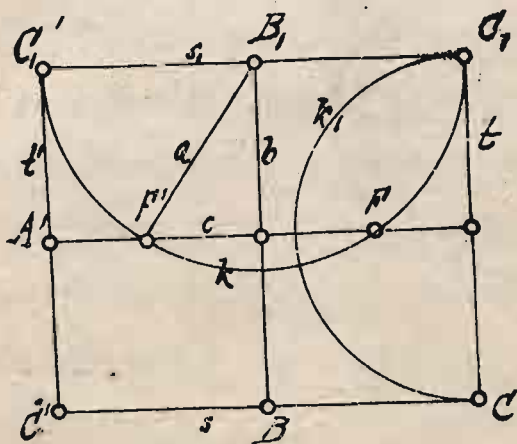
Rys. 375.

stożkową, poprowadźmy styczne t i t' ; są to proste równoległe do a' , a więc prostopadłe do AA' . Poprowadźmy trzecią styczną, jakkolwiek S i zastosujemy twier-

dzenie III § 197 do opisanego na stożkowej trójkąta stt' . Biegunową wierzchołka tt' jest oś AA' proste, które rzucają pozostałe dwa wierzchołki st i st' z każdego punktu osi AA' , są sprzężone, a więc na zasadzie określenia ogniska, wzajemnie prostopadłe. Stąd twierdzenie:

Odcinek stycznej s , zawarty pomiędzy stycznymi t i t' w wierzchołkach A i A' stożkowej, jest widziany z każdego ogniska leżącego na AA' pod kątem prostym.

Nawzajem, jeżeli istnieje na osi AA' punkt F z którego odcinek stycznej zawarty pomiędzy stycznymi w wierzchołkach A i A' widziany jest pod kątem prostym - to ten punkt jest ogniskiem. Albowiem na zasadzie twierdzenia \bar{IV}



Rys. 376.

§ 195, proste n i m są sprzężone, punkt F posiada zatem tę własność że dwie aa' i m i, a więc wszystkie pary prostych

sprzężonych przezeń przechodzących są prostokątne.

Wyznamy ogniska elipsy /Rys376/, której dane są cztery wierzchołki: A , A' , B i B' .

Szukajmy najpierw ognisk, leżących na wielkiej osi AA' .

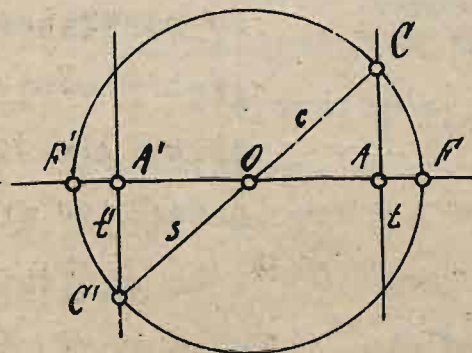
Poprowadźmy w wierzchołkach A , A' i B styczne

t , t' i s . Pierwsze dwie są równoległe do BB' , trzecia jest równoległa do AA' . Szukane ogniska będą punktami osi AA' , z których odcinek CC' stycznej s widziany jest pod kątem prostym. Jeżeli tedy na odcinku $CC' = AA'$ zakreślamy koło K jak

na średnicy, to punkty przecięcia tego koła z osią AA' będą ogniskami. Na osi AA' leżą dwa ogniska rzeczywiste F i F' , albowiem promień koła k jest większy niż odległość jego środka od osi AA' .

Aby znaleźć ogniska, leżące na małej osi BB , trzeba by wyznaczyć punkty przecięcia tej osi z kołem k , zakreślonym na prostej CC' , jak na średnicy. Punkty te będą urojone sprzężone, albowiem promień koła k , jest mniejszy od odległości jego środka od osi BB . Ogniska, leżące na osi BB , są zatem urojone sprzężone.

Jeżeli osie AA' i BB , są równe, t.j. gdy elipsa jest kołem, to wszystkie cztery ogniska są zjednoczone w środku koła, albowiem każde z kół k i k' , jest styczne do jednej z osi AA' i BB .



Rys. 377.

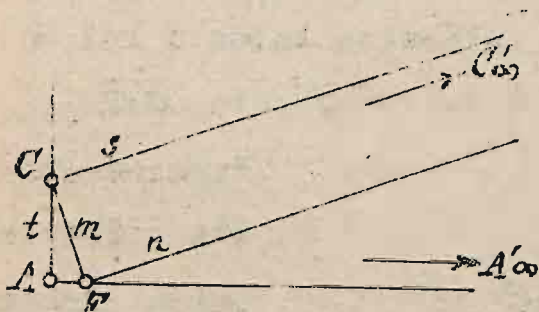
Rzeczywiste ogniska elipsy są to zatem punkty, które leżą na wielkiej osi po obu stronach środka w odległości

$$c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

jeżeli, jak zwykle

oznaczymy $OA = a$, $OB = b$.

Aby wyznaczyć rzeczywiste ogniska hyperboli /Rys. 377/, poprowadźmy znowu w wierzchołkach głównej osi A i A' styczne t i t' , a za trzecią styczną uważajmy asymptotę s , która niechaj przecina tamte styczne w punktach C i C' . Na odcinku CC' zakresłmy koło k jak na średnicy, punkty jego przecięcia z osią AA' będą ogniskami F i F' . Hyperbola posiada zatem również dwa i tylko dwa ogniska rzeczywiste. Odległość tych punktów od środka O równe są promieniowi koła k , t.j. połowie odcinka CC' . Jeżeli przez analogję z elipsą długość odcinka AC oznaczmy przez b , to $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; Dla wyznaczenia ognisk



Rys. 378.

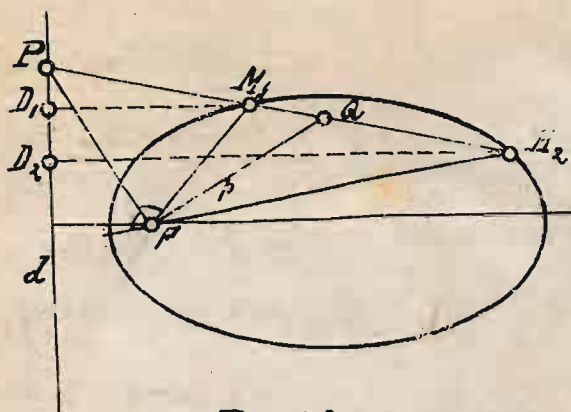
paraboli /Rys. 378/ poprowadźmy w wierzchołku właściwym A styczną t ; styczna t' w wierzchołku niewłaściwym jest prostą niewłaściwą. Jeżeli dana

jest styczna jakakolwiek s , przecinająca t w punkcie C i posiadająca kierunek $C'\infty$, to ogniskiem będzie taki punkt F osi $AA'\infty$, z którego $CC'\infty$

widać pod kątem prostym. Jeżeli w punkcie C wystawimy do s prostopadłą m , to punkt F w którym m przecina AA'^{∞} będzie ogniskiem paraboli. Ponieważ z każdego innego punktu właściwego osi AA'^{∞} odcinek CC'^{∞} byłby widziany pod kątem różnym od prostego, więc punkt F jest jedynym rzeczywistym i właściwym ogniskiem paraboli.

Biegunowe ognisk nazywają się kierownicami. W elipsie i hyperboli istnieją dwie kierownice rzeczywiste, są to proste zewnętrzne symetryczne względem środka i prostopadłe do osi /wielkiej w elipsie, głównej w hyperboli. W paraboli istnieje tylko jedna kierownica właściwa, jest to prostopadła do osi w punkcie symetrycznym z ogniskiem względem wierzchołka.

Twierdzenie. Stosunek odległości punktów stożkowych od ogniska i jego biegunowej /kierownicy/ jest stały. Weźmy dwa jakiekolwiek punkty stożkowej M_1 i M_2 /Rys. 379/ niechaj sieczna $M_1 M_2$ przetnie biegunową d ogniska F /kierownicę/ w punkcie P ; biegunowa β punktu P przejdzie przez ognisko F /§161/ i przetnie sieczną $M_1 M_2$ w punkcie Q który jest harmonicznie sprzężony z P względem M_1 i M_2 ; proste FP i PQ jako sprzężone i wychodzące z ogniska są wzajemnie prostopadłe. Czwórka prostych



Rys. 379.

$F(M, M_2, PQ)$
 rzucająca harmo-
 niczną czwórkę

M, M_2, P, Q

jest harmoniczną
 ponieważ proste
 sprzężone FP
 i FQ są wz-
 ajemnie prostopa-
 dłe więc są one
 dwusiecznymi ką-

tów między prostymi FP i FQ (§ 140); w trójką-
 cie FM, M_2, FP jest dwusieczną kąta F , a więc
 $\frac{FM}{FM_2} = \frac{PM}{PM_2} = \frac{M, D_1}{M, D_2}$; przedstawiając wyrazy
 średnie w proporcji złożonej ze stosunków pierwszego
 i trzeciego, otrzymamy

$$\frac{FM}{M, D_1} = \frac{FM_2}{M, D_2}; \quad c. b. d. o.$$

Wartość tego stałego stosunku nazywamy mimośrodem
 stożkowej i oznaczamy literą e ; biorąc punkt M
 w jednym z wierzchołków stożkowej łatwo obliczyć, że
 dla elipsy i hyperboli $e = \frac{c}{a}$, gdzie c jest odleg-
 łością ogniska od środka stożkowej i równa się $\sqrt{a^2 - b^2}$
 dla elipsy, a $\sqrt{a^2 + b^2}$ dla hyperboli. Mimośród jest

mniejszy od \angle dla elipsy, większy od \angle dla hyperboli i równy \angle dla paraboli.

TWIERDZENIE. Styczna i normalna w każdym punkcie stożkowej są dwusiecznymi kątów między prostymi, które łączą ten punkt z ogniskami.

a/ Niech będzie elipsa o osiach AA' i BB' ,

/Rys. 380/. Wyznamy jakąkolwiek styczną m do elipsy i jej punkt zet-

knięcia M .

W tym celu popro-

wadźmy styczne t , t' i s w wierz-

chołkach A , A' i B i obrawszy

na osi AA' jaki-

kolwiek punkt P

rzućmy go z wierz-

chołków C i C'

trójkąta opisanego

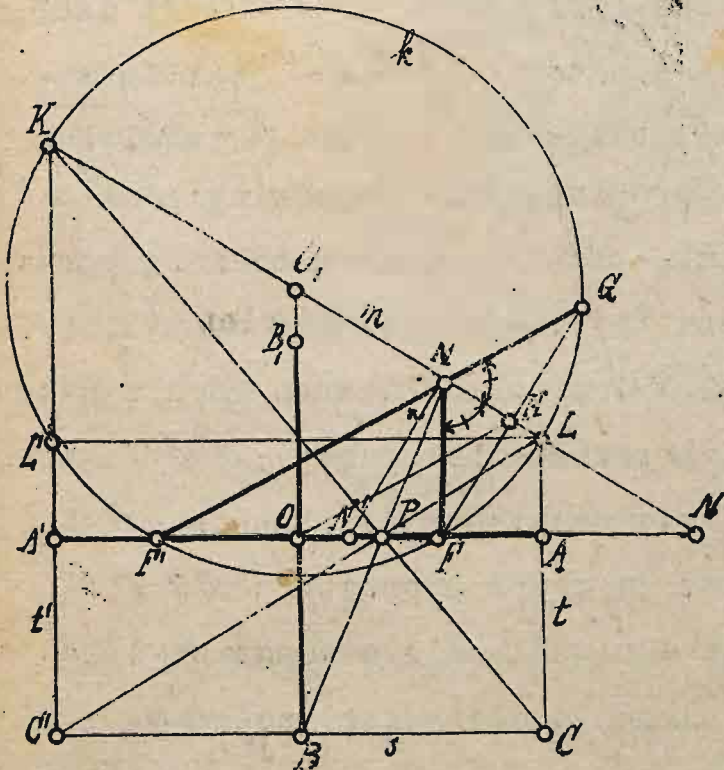
stt' na boki

przeciwległe, t i

t' ; prosta łączą-

ca rzuty K i L

jest styczną m



Rys. 380.

do stożkowej; punkt zetknięcia M znaleźliśmy w przecięciu prostej m z prostą BP /§ 193,3/; ogniska F i F' otrzymamy w przecięciu osi AA' z kołem k opisanym na KL jak na średnicy. Połączmy FM i $F'M$; trzeba okazać, że styczna m i prostopadła do niej w punkcie M normalna n są dwusiecznymi kątów pomiędzy FM i $F'M$. W trójkącie $CC'P$ środkowa PB i równoległa do boku CC' przegradzają harmonicznie pozostałe boki PC i PC' /§ 146/, stąd wniosek że czwórka punktów $KLMN$ jest harmoniczna. Normalna n jest biegunową punktu N względem koła k , gdyż jest to prostopadła do średnicy KL przechodząca przez punkt sprzężony harmonicznie z punktem N względem końców tej średnicy. Stąd wynika, że czwórka punktów $FF'NN'$ jest harmoniczna /gdyż punkty F i F' są punktami przecięcia siecznej NO z kołem k , a punkt N' leży na biegunowej punktu N § 174/, a więc rzucająca ją grupa prostych $M / F F'NN' /$ jest też harmoniczną. Ale wiadomo /§ 140/ że jeżeli dwie proste harmonicznie sprzężone m i n są wzajemnie prostopadłe, to są one dwusiecznymi kątów między pozostałymi prostymi. MF i MF' , c.b.d.o.

WNIOSEK I. Suma odległości każdego punktu elipsy od obu ognisk równa się wielkiej osi. Przedłużmy

Wzrostek

$F'M$ o długość $MQ = MF$; /Rys. 380/., tak że
 $F'G = F'M + FM$. Dzięki symetrii punktów F' i G
 względem średnicy KL , punkt G leży na kole k ,
 łuki $F'L'$, FL i LQ są równe, skąd wynika

$$F'G = LL' = AA'$$

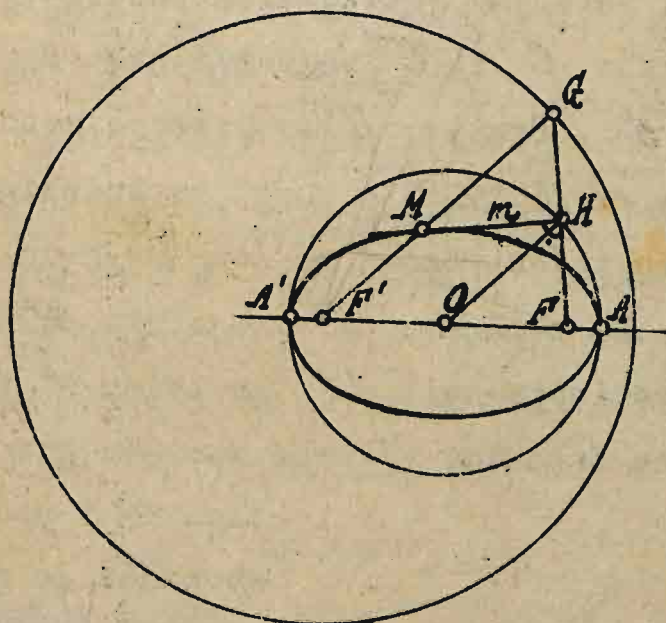
Wniosek 2.

Gdy punkt M
 opisuje elipsę,
 punkt G opi-
 suje koło o środ-
 ku F i promie-
 niu :

$$F'G = AA'$$

/koło kierowni-
 cze/, a punkt

H koło o środ-
 ku O i pro-
 mieniu $OH =$
 $= OA = OA'$;



Rys. 381.

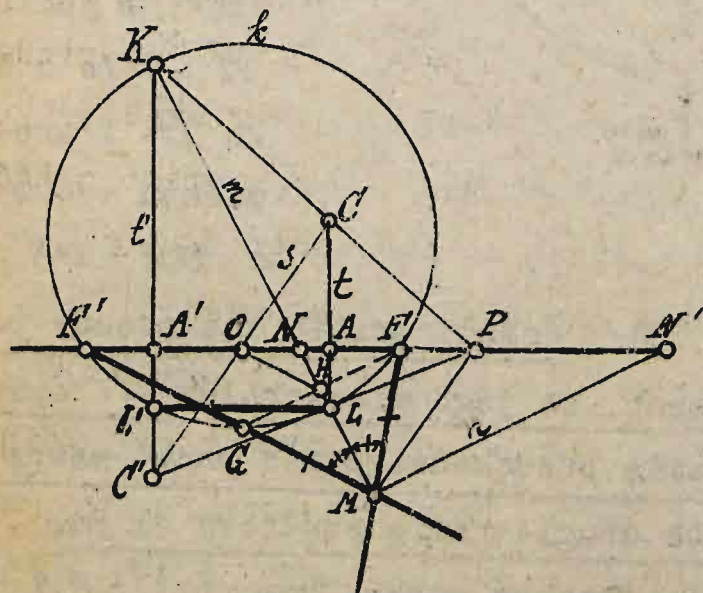
/koło główne/ /Rys. 381/. Jeżeli przeto kąt prosty po-
 rusza się w ten sposób, że jego wierzchołek H opisu-
 je koło, a jedno ramie przechodzi przez punkt wewnętr-
 zny F' tego koła, to drugie ramie powłóczy elipsę.

b/ Niech będzie dana oś główna hyperboli AA'

oraz asymptota s /Rys. 382/. Wyznaczymy w taki sam sposób, jak w przypadku elipsy, styczną m do hiperboli i jej punkt zetknięcia M . Styczne t i t' w wierzchołkach A i A' oraz asymptota s stanowią trójkąt opisany na hiperboli; na biegunowej wierzchołka tt' , t.j. na osi głównej AA' obierzmy jakikolwiek punkt P i rzucmy go z wierzchołków C i C' tego trójkąta na boki przeciwległe t i t' . Prosta KL , łącząca te rzuty, będzie styczną m /§ 195, I/; punkt zetknięcia M leży w przecięciu tej stycznej z równoległą do asymptoty s wyprowadzoną z punktu P ; ogniska F i F' znajdziemy w przecięciu osi AA' z kołem k opisanem na KL jak na średnicy. Trzeba dowieść, że sty-

czna m i prostopadła do niej normalna n do hyperboli w punkcie M są dwusiecznymi kątów pomiędzy FM i $F'M$.

W trójkącie $CC'P$ środkowa PO

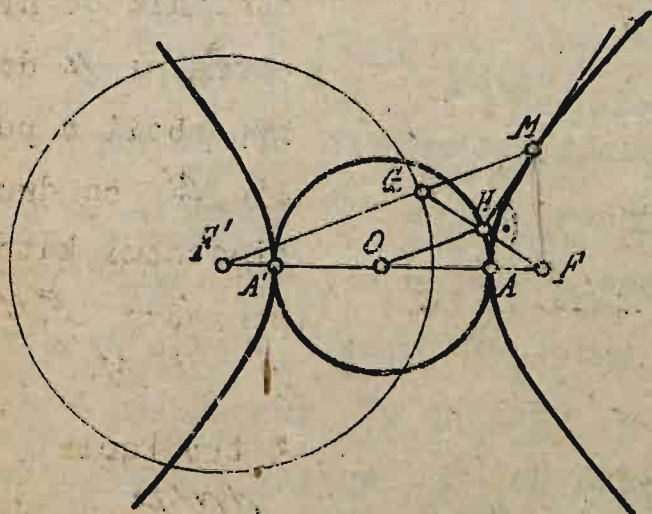


Rys. 382.

równoległa do boku CC' przegradzają harmonicznie boki PC i PC' , stąd wniosek, że czwórka punktów $KLMN$ jest harmoniczna. Normalna n jest biegunową punktu N względem koła k , skąd wynika, że czwórka punktów $FF'NN'$ i czwórka prostych $M(FF'NN')$ są harmoniczne. Ponieważ proste m i n są wzajemnie prostopadłe, więc są one dwusiecznymi kątów między MF i MF' , c.b.d.o.

Wniosek 1. Różnica odległości każdego punktu hyperboli od obu ognisk równa się osi głównej. Odmierzmy

$MQ = MF$ [Rys. 382], tak że $F'Q = F'M - FM$. Dzięki symetrii punktów F i F' względem średnicy KL punkt Q leży na kole k , łuki $F'Q' = FL$ i LQ są równe, skąd wynika: $F'Q = LL' = AA'$



Rys. 383.

Wniosek 2. Gdy punkt M opisuje hyperbolę, punkt Q opisuje koło o środku F' i promieniu $F'Q = AA'$ a punkt H koło o środku O i promieniu

FMN jest równoramienny (bo $MH = NH$ i $HF \perp MN$), stąd wynika $\mu = \nu = \nu$, c.b.d.o.

Gdy kąt prosty porusza się w ten sposób że jego wierzchołek H opisuje prostą ℓ , a jedno ramie przechodzi przez punkt F nie leżący na ℓ , to drugie ramie powłóczy parabolę.

Kierownica d paraboli, t.j. biegunowa ogniska F jest prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie D symetrycznym z ogniskiem F względem wierzchołka A . Odległość każdego punktu M paraboli od ogniska i od kierownicy są równe, co już wiemy / $MF = MA$; /.

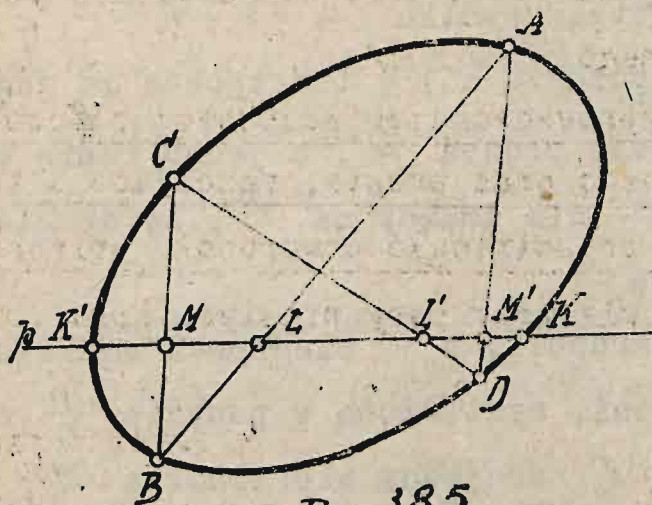
§ 201. Twierdzenie Desargues'a. I. Punkty, w których dowolna sieczna przecina stożkową,

oraz punkty, w

których ta sieczna przecina boki przeciwległe czworokąta wpisanego w stożkową, stanowią 3 pary punktów sprzężonych inwolucji. Z wierzchołków przeciwległych

A i C czworokąta wpisanego $ABCD$ /Rys. 385/ rzućmy pozostałe 4 punkty stożkowej X , X' , B i D . Na zasadzie § 187, I czwórki prostych rzucających te punkty z wierzchołków A i C są rzutowe; przecięcie tych czwórek prostą p stanowić przeto będą dwie czwórki punktów na wspólnej podstawie:

$$p(KK'LM') \times p(KK'ML');$$



Rys. 385.

Ale druga z tych czwórek jest rzutowa z czwórką

$$K'K^*L'M$$

/bo dwustosunki

$$/ KK'ML' /$$

$$i / K'KL'M /$$

są równe, § 137/,

skąd wynika:

$p / KK'LM' / \pi / K'KL'M /$. Ponieważ punkty K i K' odpowiadają sobie w tych czwórkach podwójnie, więc wszystkie inne pary punktów odpowiednich, a więc L i L' , M i M' również odpowiadają sobie podwójnie, t.j. są w inwolucji /§ 152/, c.b.d.o. /Inwolucji tej nie należy oczywiście mieszać z inwolucją biegunową na prostej p /.

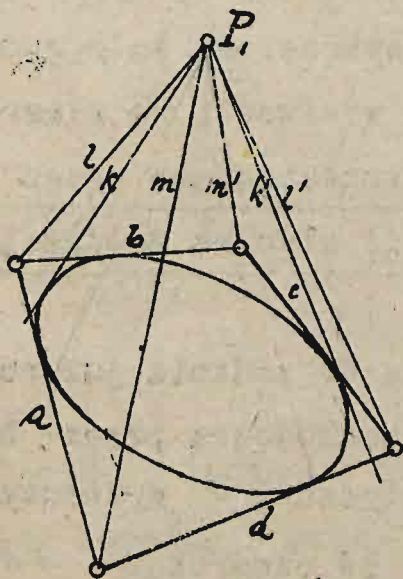
Twierdzenie powyższe pozostanie w mocy jeszcze wtedy, gdy sieczna p stanie się styczną do stożkowej. W punkcie zetknięcia zostaną wtedy zjednoczone oba punkty K i K' , skąd wynika:

Punkt zetknięcia stycznej ze stożkową jest jednym z punktów podwójnych inwolucji, która na tej stycznej wyznaczają boki przeciwległe dowolnego czworokąta wpi-

zanego w stożkową.

Posługując się zasadą dwoistości dowiedlibyśmy twierdzenia wzajemnego /Rys. 386/:

II. Styczne wyprowadzone do stożkowej z dowolnego punktu zewnętrznego oraz proste, rzucające z tego punktu wierzchołki przeciwległe czworoboku opisanego na stożkowej, stanowią trzy pary prostych sprzężonych inwolucji.



Rys. 386.

Twierdzenia Desargues'a, podobnie, jak twierdzenia Pascala i Brianchona wyrażają zależność liniową między 6 punktami lub 6 stycznymi stożkowej. Dlatego też następnych twierdzeniach można oprzeć jeszcze jeden sposób wykreślenia linjowe-

go stożkowej przechodzącej przez 5 danych punktów lub stycznej do 5 danych prostych.

§ 202. Zagadnienia 2-go stopnia. Wyznaczenie stożkowej przez 5 jej elementów tego samego rodzaju jest

zagadnieniem, które w każdym przypadku ma jedno i tylko jedno rozwiązanie i da się uskutecznić zapomocą konstrukcji linjowej, t.j., bez użycia cyrkla i ekiarki.

Mówimy o takich zagadnieniach, że są pierwszego stopnia.

Poniżej podajemy kilka przykładów zagadnień drugiego stopnia, t.j. takich, które mają wogóle dwa rozwiązania.

Zagadnienia te wymagają użycia cyrkla, a zapomocą konstrukcji linjowej dadzą się rozwiązać jedynie wtedy, gdy w płaszczyźnie rysunku mamy wykreślone koło w dowolnem zresztą położeniu i dowolnej wielkości /Steiner/.

I. Wykreślić stożkową, przechodzącą przez 4 dane punkty A , B , C i D i styczną do danej prostej

s .

Zadanie to sprowadzi się do zadania już rozwiązanego: "Wykreślić stożkową przechodzącą przez 5 danych punktów, jeżeli zdołamy na stycznej s wyznaczyć punkt zetknięcia T ". Zauważmy, że czworokąt $ABCD$

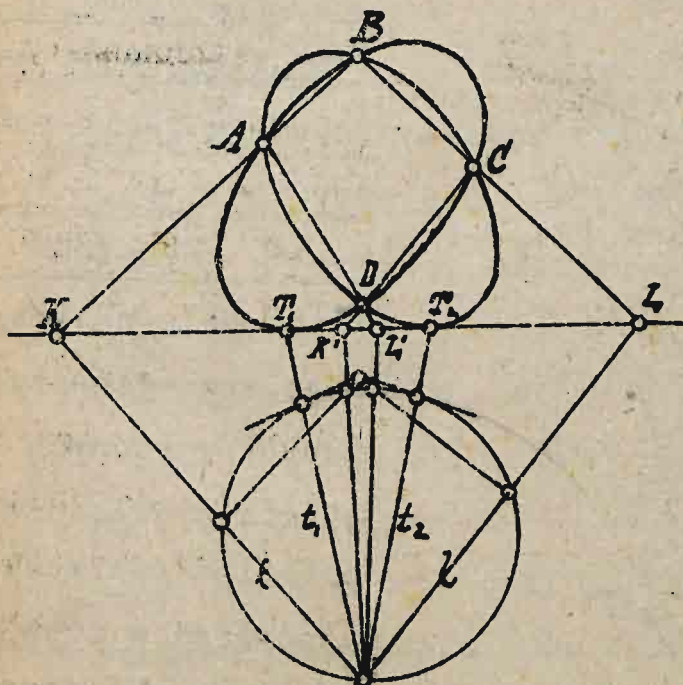
/Rys. 387/. jest wpisany w stożkową, na zasadzie artyku-

ku poprzedniego punkt zetknięcia na stycznej s jest jednym z dwóch punktów podwójnych inwolucji $XX'LL'$,

którą wyznaczają boki przeciwległe czworokąta $ABCD$

Zależnie od tego, czy inwolucja ta jest hyperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna, znajdziemy dwa, jedno lub

"zero" rozwiązań



Rys. 387.

Zupełnie tak samo rozwiążemy zadanie wzajemne:

II. Wykreślić stożkową styczną do czterech danych prostych a, b, c i d i przechodzącą przez dany punkt S . Punkt S łączymy z wierzchołkami przeciwległymi czworoboku opisanego $abcd$ i za pomocą koła Steinera znajdujemy proste podwójne inwolucje przez te dwie pary prostych do koła punktu S wyznaczonej.

III. Znaleźć punkty przecięcia prostej s ze stożkową, wyznaczoną przez 5 punktów $1, 2, 3, 4$ i 5 lub z punktu S wyprowadzić styczne do stożkowej, wyznaczonej przez 5 stycznych $1, 2, 3, 4$ i 5 .

5. Pierwsze z tych dwóch zadań wzajemnych rozwiąaliśmy już w § 151 /Rys. 288/. Zastosujmy to rozwiązanie

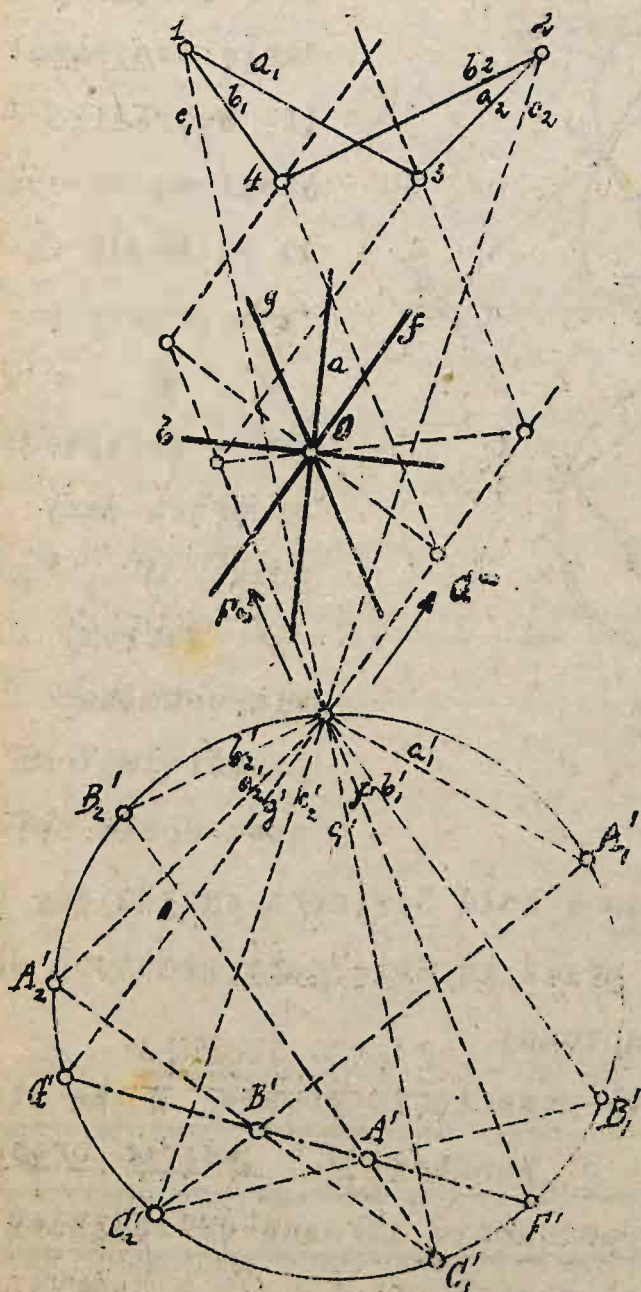
do następującego przypadku szczególnego.

Wykreślić asymptoty stożkowej, danej
zapomocą 5-ciu punkt-
tów 1, 2, 3, 4
i 5. /Rys. 388/.

W tym celu należy
najpierw wyznaczyć
punkty w których
prosta niewłaściwa
przecina stożkową,
a później w tych
punktach poprowadzić
styczne /§ 173/. Dla
rozwiązania pierwszej
części zadania two-
rzymy pęki rzutowe

$$1(a, b, c, \dots) \pi 2(a_1, b_1, c_1, \dots)$$

które rzucają z punk-
tów 1 i 2 wszyst-
kie punkty stożkowej.
Proste a , i a_1 , b ,
 b_1 , c , i c_1 wyzna-



Rys. 388.

czają na prostej niewłaściwej 3 pary punktów, t.j. kierunków odpowiednich; należy znaleźć kierunki podwójne t.j. asymptotyczne. Przez punkt jakikolwiek np. przez S prowadzimy koło Steinera i z jego pomocą wyznaczamy proste podwójne dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku S których proste $a, b, c,$ i a_1, b_1, c_1 są równoległe do prostych $a, b, c,$ i a_1, b_1, c_1 .

Znalazszy kierunki F^∞ i G^∞ , prowadzimy styczne w tych kierunkach do stożkowej. Łącząc każdy z tych punktów niewłaściwych F^∞ i G^∞ z punktami 3, 4 i 5 otrzymamy dwa pęki rzutowe, których środek rzutowy O jest punktem przecięcia obu stycznych szukanych, t.j. środkiem stożkowej. Proste f i g , poprowadzone przez punkt O w kierunkach F^∞ i G^∞ są asymptotami, dwusieczne a i b kątów między nimi są osiami stożkowej.

R O Z D Z I A Ł XV.

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

§ 203. Kolineacja środkowa dwóch układów przestrzennych. Niech będzie płaszczyzna S , którą nazywać będziemy płaszczyzną kolineacji, punkt O , który nazwiemy środkiem kolineacji i dwa punkty A_1 i A_2 , leżące na dowolnej prostej a , wychodzącej z punktu O /lub