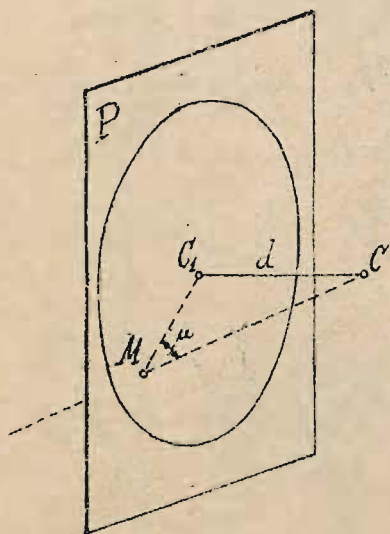


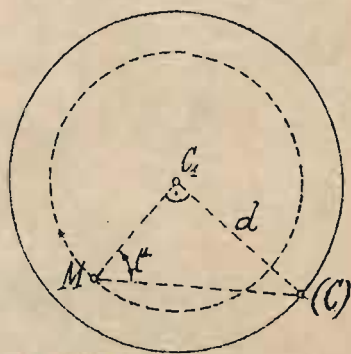
# CZĘŚĆ III. PERSPEKTYWA.

## ROZDZIAŁ VIII. PROSTA, PUNKT I PŁASZCZYZNA.

§99. Punkt główny i koło oddalenia. Niechaj będzie plaszczyna rzutów  $P$  i punkt  $C$  na niej nie leżący, zwany środkiem rzutów (Rys. 203). Plaszczynę rzutów  $P$  uczynimy



Rys. 203.



Rys. 204.

plaszczyną rysunku; aby położenie środka rzutów  $C$  było względem tej plaszczyny wyznaczone, niechaj będzie dany jego rzut prostokątny  $C_1$  na tę plaszczynę oraz odległość  $d$  punktu  $C$  od niej. Obierzmy zatem (Rys. 204) na plaszczynie rysunku punkt  $C_1$  zwany punktem głównym i z tego punktu jako środka, promieniem równym odcinkowi  $d$  (oddalenie) zakreślmy koło, które nazywać będziemy kołem oddalenia. Koło to w zupełności wyznacza w przestrzeni punkt  $C$ ; środek tego koła  $C_1$  jest rzutem

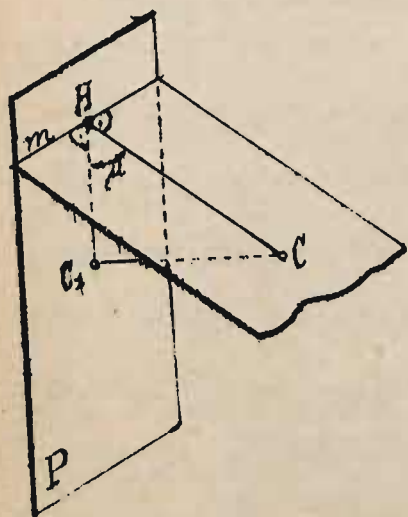
prostokątnym punktu  $C$ , a promień równy jest jego odległości od płaszczyzny rysunku. Aby zatem wyznaczyć środek rzutów  $C$ , wystawiamy w kierunku widza prostopadłą do płaszczyzny rysunku w punkcie  $C_1$  i odmierzamy na niej od tego punktu promień koła oddalenia  $d$ .

§ 100. Promienie i płaszczyzny rzucające. Każda prosta wychodząca ze środka rzutów  $C$  nazywa się promieniem rzucającym. Punkt  $M$  (Rys. 203 i 204), w którym promień rzucający jakiegokolwiek przebiega płaszczyznę rzutów  $P$ , nazywa się łładem promienia rzucającego. Prosta  $C_1M$  jest rzutem prostokątnym promienia rzucającego  $CM$ ; kąt  $C_1MC \equiv \mu$  jest zatem nachyleniem promienia rzucającego do płaszczyzny rzutów. Jeżeli dane jest koło oddalenia i łład promienia rzucającego, to wyznaczymy nachylenie jego  $\mu$ , wykreślając prawdziwy kształt i wielkość trójkąta prostokątnego  $C_1MC$ . Możemy sobie przytem wyobrazić, że trójkąt ten przez obrót dookoła  $C_1M$  przewrócony zostanie na płaszczyznę rzutów. Aby go wykreślić w tym położeniu, wystawiamy w punkcie  $C_1$  promień koła oddalenia prostopadły do  $C_1M$  i łączymy jego koniec ( $C$ ) z punktem  $M$ ; kąt  $C_1M(C)$  jest nachyleniem  $\mu$  promienia  $CM$  do płaszczyzny rzutów  $P$ . Wszystkie promienie rzucające, których łłady  $M$  znajdują się na okręgu koła spółśrodkowego z kołem oddalenia, mają to samo nachylenie  $\mu$  do płaszczyzny rzutów; nachylenie to zależy bowiem, jak to wynika z powyższego wykreślenia, jedynie od odległości punktu  $M$  od punktu

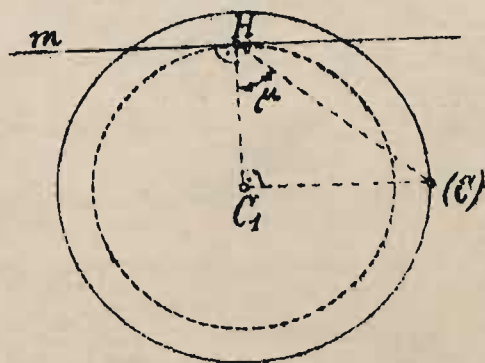


głównego  $C_1$ . Jest ono większe od  $45^\circ$ , gdy punkt  $M$  znajduje się wewnątrz koła oddalenia, równe  $45^\circ$ , gdy ten punkt znajduje się na okręgu koła oddalenia, mniejsze od  $45^\circ$ , gdy punkt  $M$  leży nazewnątrz koła oddalenia.

Każda płaszczyzna przechodząca przez środek rzutów  $C$  nazywa się płaszczyzną rzucającą. Prosta  $m$ , według której płaszczyzna rzucająca jakkolwiek przecina płaszczyznę rzutów  $P$ , nazywa się układem płaszczyzny rzucającej (Rys. 205 i 206). Z punktu głównego  $C_1$  spuścimy prostopadłą  $C_1H$



Rys. 205



Rys. 206

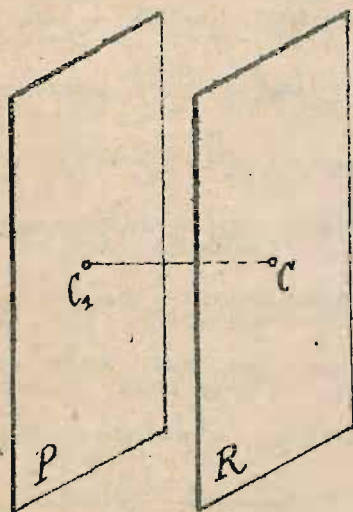
na  $m$  i  
połączmy  
spodek jej  
 $H$  ze środ-  
kiem rzu-  
tów  $C_1$ ;  
na za-  
sadzie twier-  
dzenia o  
trzech pro-  
stopadłych

prosta  $C_1H$  jest prostopadłą do układu  $m$ ; jest to zatem linia największego spadku płaszczyzny rzucającej, a kąt  $C_1HC \equiv \mu$  jest kątem lincowym kąta dwuściennego między płaszczyzną rzutów i płaszczyzną rzucającą. Kąt ten wykreślimy z łatwością, kreśląc prawdziwy kształt i wielkość trójkąta prostokątnego  $C_1HC$ ; możemy sobie przy tem wyobrazić, że trójkąt ten, obracając się dookoła  $C_1H$ ,

przewrócony zostanie na płaszczyznę rzutów. Przez punkt główny  $C_1$  prowadzimy zatem dwie proste: jedną  $C_1H$  prostopadłą, drugą  $C_1(C)$  równoległą do płaszczyzny  $m$ ; poczyniwszy spodek prostopadłej  $H$  z końcem  $(C)$  promienia leżącego na równoległej; kąt  $C_1H(C) \equiv \mu$  jest szukany kąt dwuścienny, t.j. nachyleniem płaszczyzny rzucającej  $C_m$  do płaszczyzny rzutów  $P$ . Nachylenie to jest zależne jedynie od odległości płaszczyzny  $m$  od punktu głównego  $C_1$ ; wszystkie zatem płaszczyzny rzucające, których płaszczyzny są styczne do tego samego koła środkowego z kołem oddalenia, mają to samo nachylenie. Jest ono większe od  $45^\circ$ , równe  $45^\circ$ , lub mniejsze od  $45^\circ$ , zależnie od tego, czy to koło jest mniejsze od koła oddalenia, przystaje do niego lub też jest od niego większe. Inaczej mówiąc: płaszczyzna rzucająca jest do płaszczyzny rzutów nachylona pod kątem większym od  $45^\circ$ , równym  $45^\circ$  lub mniejszym od  $45^\circ$ , zależnie od tego, czy jej płaszczyzna przecina koło oddalenia w dwóch punktach różnych, jest styczna do koła oddalenia lub tego koła nie przecina. Płaszczyzny rzucające, których płaszczyzny przechodzą przez punkt główny  $C_1$ , są prostopadłe do płaszczyzny rzutów  $P$ .

Zśród płaszczyzn rzucających na szczególną uwagę zasługuje płaszczyzna  $R$  (Rys. 207) równoległa do płaszczyzny rzutów  $P$ : jest to tak zwana płaszczyzna znikania; jej płaszczyzna  $r$  jest prostą niewłaściwą płaszczyzny  $P$ .





Rys. 207.

§ 101. Rzut środkowy punktu i prostej. Niech będzie jakiegokolwiek punkt przestrzeni  $A$ , różny od punktu  $C$ . Ślad  $A'$  promienia rzucającego  $CA$  nazywa się rzutem środkowym punktu  $A$ . Stąd wynika, że każdy punkt przestrzeni  $A$  (z wyjątkiem środka rzutów  $C$ ) wyznacza swój rzut środkowy  $A'$ ; natomiast rzut środkowy  $A'$  punktu  $A$  nie wyznacza

tego punktu; wszystkie bowiem punkty promienia rzucającego  $CA'$  mają ten sam rzut środkowy  $A'$ .

Niech będzie jakiegokolwiek prosta przestrzeni  $a$ , nie przechodząca przez środek rzutów  $C$ . Ślad  $a'$  płaszczyzny rzucającej  $Ca$  nazywa się rzutem środkowym prostej  $a$ . Jeżeli prosta przechodzi przez środek rzutów, t.j. jeżeli jest prostą rzucającą, to rzutem jej jest punkt, a mianowicie ślad tej prostej rzucającej. W każdym przypadku prosta wyznacza swój rzut środkowy; natomiast rzut środkowy  $a'$  prostej  $a$  nie wyznacza wogóle tej prostej; wszystkie bowiem proste płaszczyzny rzucającej  $Ca'$  mają ten sam rzut środkowy  $a'$ . Wyjątek stanowią jedynie proste, których rzut jest punktem; taki rzut wyznacza bowiem prostą rzucającą, której jest śladem.

Jeżeli punkt  $A$  leży na prostej  $a$ , to rzut  $A'$  to-

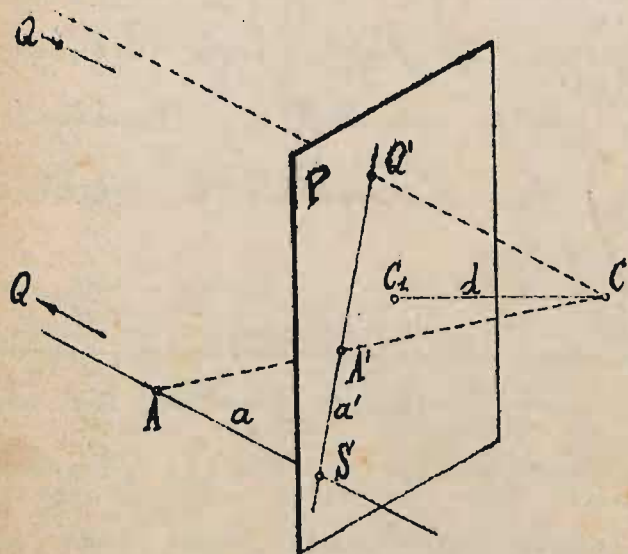


go punktu leży na rzucie  $a'$  tej prostej. Ale nie nawzajem, bo jeżeli rzut punktu  $A$  leży na rzucie prostej  $a$ , to można stąd wnosić tylko, że punkt  $A$  leży w płaszczyźnie rzucającej prostą  $a$ .

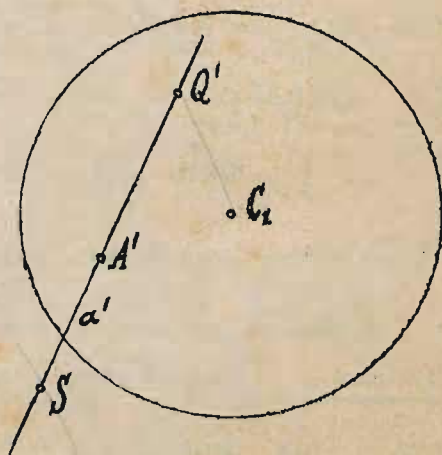
Rzutem każdej prostej, leżącej w płaszczyźnie znikania  $R$ , jest prosta niewłaściwa  $r$  płaszczyzny rzutów  $P$ ; rzutem każdego punktu, leżącego w płaszczyźnie znikania, jest punkt leżący na prostej  $r$ ; ta okoliczność tłumaczy nazwę „płaszczyzny znikania”, gdyż rzuty wszystkich figur leżących w tej płaszczyźnie leżą na prostej niewłaściwej płaszczyzny rzutów, t.j., jak się często mówi, „znikają” w nieskończoności.

§ 102. Odwzorowanie prostej za pomocą jej śladu i krawca. Widzieliśmy, że rzut środkowy punktu nie wyznacza tego punktu, aby więc punkt wyznaczyć, trzeba by o nim posiadać inną jeszcze wiadomość, nap. znać odległość jego od swego rzutu. W szczególności wyznaczone będą przez swoje rzuty te punkty, których odległość od swoich rzutów będzie równa zero lub nieskończoności. Pierwsze, które oznaczać będziemy literą  $S$ , opatrzoną ewentualnie wskaźnikiem, przystają do swoich rzutów; drugie, które oznaczać będziemy literą  $Q$  leżą w płaszczyźnie niewłaściwej, którą winniśmy uważać za daną. Otóż każda prosta ma jeden punkt pierwszej kategorii  $S$ , zwany śladem oraz jeden punkt drugiej kategorii  $Q$ , zwany kierunkiem. Ślad i kierunek, jak wogóle każde inne dwa punkty, wyznaczają prostą. Widzimy zatem, że

każda prosta będzie wyznaczona przez rzuty  $\mathcal{S}$  i  $Q'$  tych dwóch swoich punktów. Punkty  $\mathcal{S}$  i  $Q'$ , jako rzuty punktów prostej  $a$ , muszą leżeć na jej rzucie  $a'$ , który zatem jest przez te dwa punkty wyznaczony. Punkt  $\mathcal{S}$  jest punktem przecięcia płaszczyzny rzutów  $P$  prostą daną  $a$  (Rys. 208), punkt  $Q'$ , jako rzut punktu niewłaściwego prostej  $a$ , jest punktem, w którym równoległa do  $a$ , przez



Rys. 208.



Rys. 209.

punkt  $C$  poprowadzona, przebija płaszczyznę rzutów. Nawzajem punkty  $\mathcal{S}$  i  $Q'$  wyznaczają prostą  $a$ : jest to równoległa do  $CQ'$  poprowadzona przez punkt  $\mathcal{S}$ . Punkt  $Q'$  nazywamy krańcem prostej  $a$ ; możemy zatem powiedzieć, że prosta jest wyznaczona przez swój ślad  $\mathcal{S}$  i swój koniec  $Q'$ . Wyjątek stanowi ten przypadek, gdy ślad i koniec przystając do siebie leżą w nieskończoności; prosta  $a$  jest wtedy równoległą do  $P$  i przez swój rzut  $a'$  nie jest dostatecznie wyznaczoną (§ 103). Gdy punkty



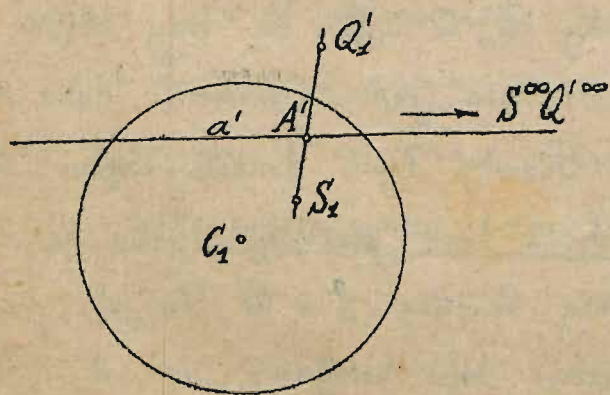
$S$  i  $Q'$  przystają do siebie, ale nie leżą w nieskończoności, prosta  $a$  jest rzucająca.

§ 103. Odzworowanie punktu. Aby teraz wyznaczyć położenie punktu  $A$ , którego rzut  $A'$  jest dany, poprowadźmy przez  $A'$  jakąkolwiek prostą  $a$  i wyznaczmy jej ślad  $S$  i kraniec  $Q'$ . (Rys. 208 i 209). Trzy punkty  $S$ ,  $Q'$  i  $A'$  wyznaczają punkt  $A$ , albowiem wyznaczają prostą  $a$  i prostą  $CA'$ , które leżąc w płaszczyźnie rzucającej prostą  $a$ , wyznaczają punkt przecięcia  $A$  tych dwóch prostych. Tak więc punkt przestrzeni  $A$  będzie wyznaczony przez swój rzut  $A'$  oraz ślad  $S$  i kraniec  $Q'$  prostej, na której leży.

Jeżeli punkt  $A_2$  leży między punktami  $A_1$  i  $A_3$  na prostej  $a$ , to rzut  $A'_2$  leży między rzutami  $A'_1$  i  $A'_3$  na rzucie  $a'$  prostej  $a$ . Otóż trzy płaszczyzny: płaszczyzna rzutów  $P$ , płaszczyzna niewłaściwa  $Q$  i płaszczyzna znikania  $R$  wyznaczają na każdej prostej trzy punkty  $S$ ,  $Q$  i  $R$ , które są zjednoczone tylko na prostych równoległych do  $P$ . Z wyjątkiem tedy tych prostych, każda prosta zostanie podzieloną przez płaszczyzny  $P$ ,  $Q$  i  $R$  na trzy części  $SQ$ ,  $QR$  i  $RS$ , z których ostatnia jest skończoną, dwie zaś pierwsze są nieskończone. Rauty tych trzech części są to odcinki  $SQ'$ ,  $Q'R'$  i  $R'S'$ ; z tych pierwszej tylko jest skończony. Punkty, które leżą między  $S$  i  $Q$ , to jest punkty leżące dla widza, którego oko znajduje się w środku rzutów, za płaszczyzną rzutów, mają swe rauty na odcinku  $SQ'$ ; punkty leżące między  $Q$  i  $R$ , t.j. za widzem

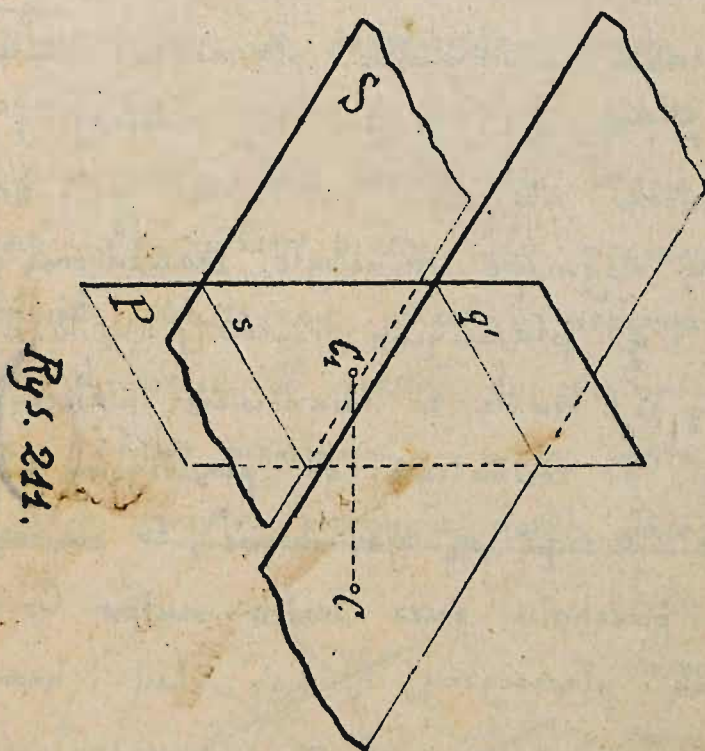


mają swe rzuty między punktami  $Q'$  i  $R'$ , t.j. poza kraniec  $Q'$ , wreszcie punkty leżące między  $R$  i  $S$ , t.j. między widzem i płaszczyzną rzutów, mają swe rzuty między punktami  $R'$  i  $S$ , t.j. przed śladem  $S$ . Teoretycznie rzeczy biorąc, punkty wszystkich tych trzech kategorii równie dobrze są wyznaczone przez swoje rzuty na prostej  $SQ'$ ; jeżeli jednak dbać chcemy o to, aby rzuty punktów i prostych czyniły na widzu, którego oko jest umieszczone w środku rzutów, wrażenie punktów i prostych, od których pochodzą, to jedynie punkty, których rzuty znajdują się na odcinku  $SQ'$  uczynią zadość temu wymaganiu. Płaszczyznę rzutów obramy bowiem na odległości najwyraźniejszego widzenia od środka rzutów (około 25 cm); niektóre zatem punkty leżące między okiem a płaszczyzną rzutów będą leżały zbyt blisko oka, aby mogły być wyraźnie widziane; punkty zaś znajdujące się za okiem zgoła widziane być nie mogą. Tak więc będzie wskazanym obracać w taki sposób płaszczyznę i środek rzutów, aby figura przestrzenna, którą odwzorować pragniemy, znajdowała się za płaszczyzną rzutów. Oczywiście, nie da się często uniknąć, aby pewne pomocnicze punkty wypadły w jednym z dwóch innych obszarów, na które przestrzeń została podzielona przez płaszczyznę  $P, Q$  i  $R$ .



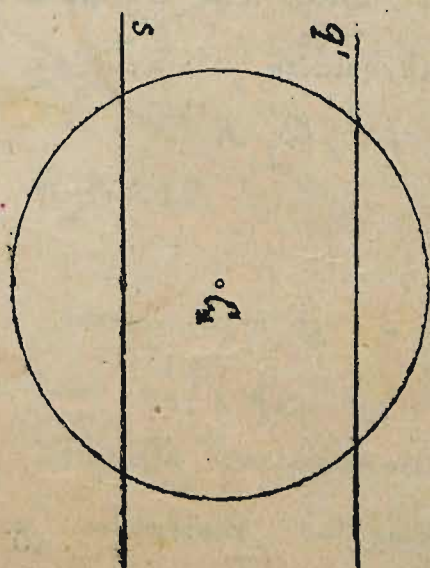
Rys. 210.

Co się tyczy prostych równoległych do płaszczyzny rzutów, to ponieważ zład i kraniec takiej prostej są zjednoczone w niekończoności (§ 102), więc dla jej wyznaczenia potrzeba innego jej punktu  $A$  (Rys. 210). Oprócz rzutu  $a'$  takiej prostej trzeba podać zład  $s$  i kraniec  $Q'$  prostej jakiegokolwiek  $a_1$ , która ją przecina.



Rys. 211.

§ 104. Odwzorowanie płaszczyzny za pomocą jej zładu i krańca. Są wzajemnie dwa rodzaje prostych, wyznaczonych dostatecznie przez swoje rzuty: proste leżące



Rys. 212

w płaszczyźnie  $P$  i proste leżące w płaszczyźnie  $Q$ , t.j. proste niewstańciewe. Pierwsze mają złady nieoznaczone, a krańce niewstańciewe, drugie mają krańce nieoznaczone, a złady niewstańciewe. Z prostych tych obu rodzajów korzystamy dla



odzworowania płaszczyzn.

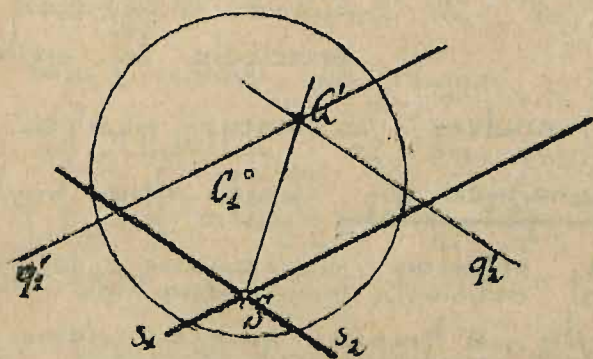
Na każdej płaszczyźnie  $S$  istnieje prosta  $s$  przecięcia z płaszczyzną rzutów, czyli śląd, oraz prosta niewstaściwa  $q$ , czyli wstawienie tej płaszczyzny. Rzut pierwszej prostej pada na  $s$ ; aby otrzymać rzut drugiej, czyli kraniec  $q'$  płaszczyzny  $S$ , trzeba poprowadzić płaszczyznę rzucającą równoległą do  $S$  (Rys. 211); ślad tej płaszczyzny rzucającej będzie kraniec płaszczyzny  $S$ . Ślad  $s$  i kraniec  $q'$  płaszczyzny  $S$  są oczywiście równoległe. Nawzajem, dwie proste równoległe  $s$  i  $q'$  płaszczyzny rzutów (Rys. 212) wyznaczają płaszczyznę  $S$ ; będzie to mianowicie płaszczyzna poprowadzona przez  $s$  równoległe do płaszczyzny  $Cq'$ .

Jeżeli proste  $s$  i  $q'$  są zjednoczone, to płaszczyzna jest rzucająca, t. j. przechodzi przez środek rzutów  $C$ ; wyjątek stanowią jednak płaszczyzny, których ślad i kraniec są zjednoczone w nieskończoności; są to płaszczyzny równoległe do płaszczyzny rzutów. Dla ich wyznaczenia potrzeba połączyć jeden ich punkt jakikolwiek, leżący na prostej przecinającej płaszczyznę daną ( $S, Q', A'$ ).

# ROZDZIAŁ IX. ZAGADNIENIA POŁOŻENIA.

§105. Prosta leżąca w danej płaszczyźnie. Jeżeli prosta  $lQ'$  leży w płaszczyźnie  $sq'$ , to jej ślad  $l$  leży na śladzie  $s$ , a koniec  $Q'$  na końcu  $q'$  płaszczyzny. Aby więc w danej płaszczyźnie  $sq'$  poprowadzić prostą jakąkolwiek, wystarczy obrać na śladzie  $s$  dowolny punkt  $l$ , a na końcu  $q'$  dowolny punkt  $Q'$ ; prosta  $lQ'$  będzie leżała w płaszczyźnie  $sq'$ . Aby przez prostą  $lQ'$  poprowadzić płaszczyznę jakąkolwiek, wystarczy przez  $l$  poprowadzić dowolną prostą  $s$ , a przez  $Q'$  prostą do niej równoległą  $q'$ ; płaszczyzna  $sq'$  będzie przechodziła przez prostą  $lQ'$ .

§ 106. Prosta przecięcia dwóch płaszczyzn danych. Niech



Rys. 213.

będą (Rys. 213) dwie płaszczyzny  $s_1q_1$  i  $s_2q_2$ ; mamy znaleźć ich prostą przecięcia. Ponieważ prosta szukana jest wspólna obu płaszczyznom, więc jej ślad  $l$  musi być punktem

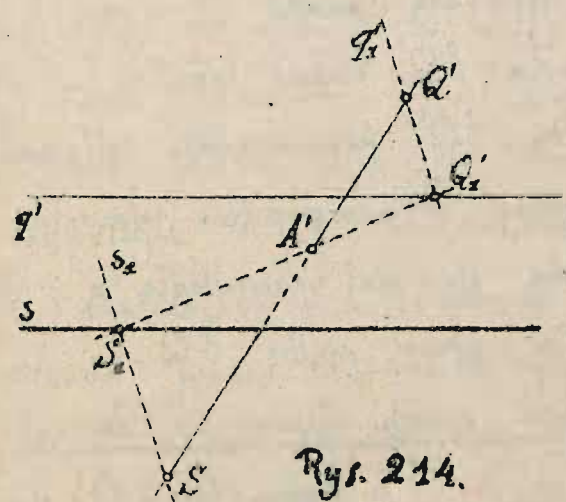
wspólnym obu śladom  $s_1$  i  $s_2$ , a koniec  $Q'$  punktem wspólnym obu końcom  $q_1$  i  $q_2$ .

Zauważmy, że dla rozwiązania tego zadania nie korzystamy z koła oddalenia. W zadaniach tej kategorii, zwanych zadaniami położenia, będziemy odtąd opuszczali koło oddalenia, stwierdzając przez to, że rozwiązanie tych zadań



wyda się poprawnym dla oka umieszczonego gdziekolwiek w przestrzeni.

§ 107. Punkt przebicia płaszczyzny prostą. Niech będzie (Rys. 214) płaszczyzna  $\pi q'$  i prosta na niej nie leżąca  $\pi Q'$ . Aby wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny  $\pi q'$  prostą  $\pi Q'$ , poprowadzimy przez tę ostatnią płaszczyznę jakąkolwiek  $\pi_1 q'_1$ . W tym celu pro-

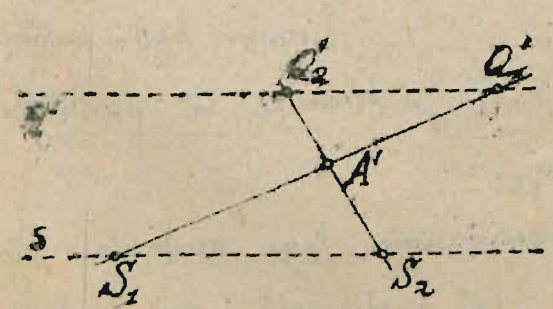


Rys. 214.

wadźmy przez  $\pi$  prostą dowolną  $\pi_1$ , a przez  $Q'$  prostą do niej równoległą  $q'_1$ . Wyznaczymy prostą  $\pi_1 Q'_1$ , według której płaszczyzny  $\pi q'$  i  $\pi_1 q'_1$  się przecinają; punkt przecięcia tej prostej z

daną prostą  $\pi Q'$  będzie rzutem szukanego punktu  $A$ .

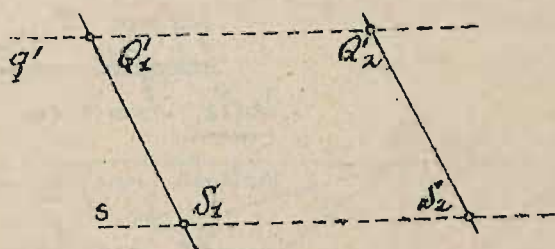
§ 108. Proste przecinające się. Jeżeli dwie proste się przecinają, to wyznaczają wspólną płaszczyznę; jej ślad łączy ślady danych prostych, a kraniec kraniec; wiemy już, że ślad i kraniec płaszczyzny muszą być równoległe. Tak



Rys. 215

więc warunkiem koniecznym i dostatecznym przecinania się dwóch prostych  $\pi_1 Q'_1$  i  $\pi_2 Q'_2$  (Rys. 215) jest ten, aby prosta  $q'_1$ , która łączy kraniec  $Q'_1$  i  $Q'_2$  była równoległą do

prostej  $s$ , która łączy lądy  $S_1$  i  $S_2$  tych prostych.



Rys. 216.

Rozważmy jeszcze dwa

przypadki szczególne:

1) Odcinki  $S_1Q_1'$  i

$S_2Q_2'$  są równe, równoległe i w te same zwrotne strony (Rys. 216).

Ponieważ wtedy proste

$s \equiv S_1S_2$  i  $q' \equiv Q_1'Q_2'$  bę-

dą równoległe, więc proste  $S_1Q_1'$  i  $S_2Q_2'$  się przecinają.

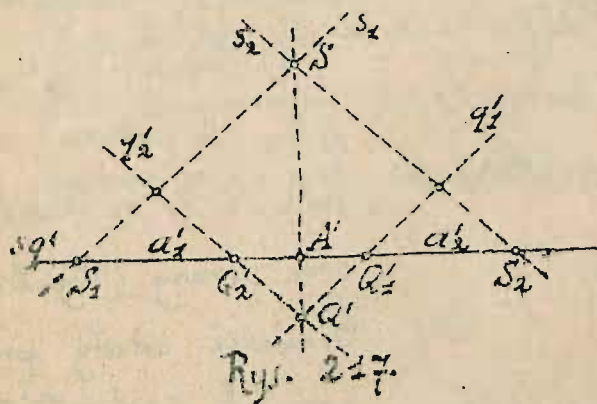
Rzut punktu ich przecięcia jest punktem niewłaściwym, zatem punkt przecięcia leży w płaszczyźnie znikania  $R$ .

T nawzajem, jeżeli punkt przecięcia dwóch prostych leży w płaszczyźnie znikania  $R$ , to odległości krawca od lądu na obu rzutach są równe i rzuty te są równoległe.

2) Rzuty  $a_1'$  i  $a_2'$  obu prostych leżą na tej samej prostej, t. j. cztery punkty  $S_1, Q_1', S_2$  i  $Q_2'$  leżą na prostej. Proste się przecinają, albowiem leżą w tej samej płaszczyźnie rzucającej; wyznaczenie rzutu punktu przecięcia jednak zawodzi, albowiem punkt przecięcia rzutów  $a_1'$  i  $a_2'$  jest nieoznaczony. Poprowadźmy przez prostą  $S_1Q_1'$  płaszczyznę jakąkolwiek  $s_1q_1'$ , a przez prostą  $S_2Q_2'$  płaszczyznę jakąkolwiek  $s_2q_2'$ . Trzy płaszczyzny:  $s_1q_1'$ ,  $s_2q_2'$  i płaszczyzna rzucająca  $sq'$ , przecinają się po dwie, według trzech prostych przechodzących przez jeden punkt, który jest punktem szukany, albowiem dwie z tych prostych są to  $S_1Q_1'$  i  $S_2Q_2'$ . Jego rzut  $A'$  leży w przecięciu prostej  $s \equiv q'$  z



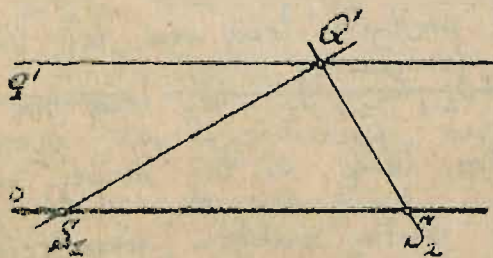
proste  $SQ'$ , według której przecinają się płaszczyzny pomocnicze  $\pi_1 q'_1$  i  $\pi_2 q'_2$ .



Rys. 217.

§109. Proste równoległe. Ponieważ proste równoległe mają wspólny punkt niewłaściwy, więc rzut tego punktu, czyli ich kraniec, jest wspólnym punktem ich rzutów. Proste równoległe

mają zatem kraniec wspólny. Nawzajem, dwie proste mające kraniec wspólny  $Q'$ , są równoległe, gdyż każda z nich jest równoległa do prostej rzucającej  $CQ'$ . W szczególności, proste mające kraniec w punkcie głównym  $C_1$ , są prostopadłe do płaszczyzny rzutów.



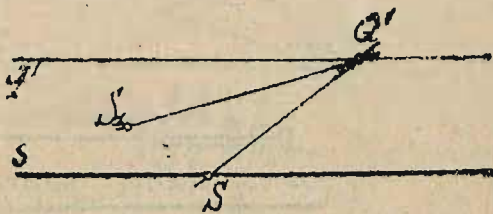
Rys. 218.

Aby przez dwie proste równoległe  $l_1 Q'_1$  i  $l_2 Q'_2$  (Rys. 218) poprowadzić płaszczyznę, Tęczyrasy płaszczyzny  $\pi_1$  i  $\pi_2$  prostą  $s$ , która

będzie płaszczyzną, i przez wspólny kraniec  $Q'$  równoległe do  $s$  prowadzimy prostą  $q'$ , która będzie krawędzią szukanej płaszczyzny.

§110. Proste i płaszczyzny równoległe. Prosta równoległa do płaszczyzny ma swój kraniec na krawędzi płaszczyzny. W samej rzeczy, prostą równoległą do danej

plaszczyny nazywamy prostą równoległą do jakiegokolwiek prostej tej plaszczyny. Otoż prosta jakiegokolwiek  $lQ'$  (Rys. 219) plaszczyny



Rys. 219.

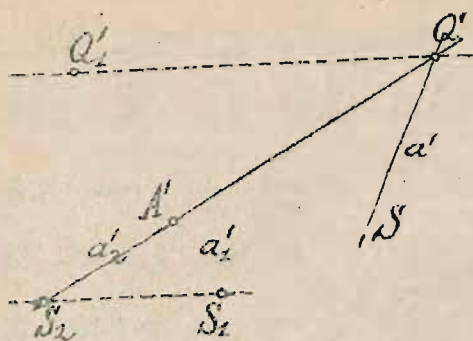
zoy  $sq'$  ma swój kraniec  $Q'$  na krańcu  $q'$  plaszczyny, a prosta  $l_1Q'$  równoległa do  $lQ'$  ma z nią kraniec  $Q'$  wspólny, który zatem leży na  $q'$ . Na-

wzajem, kraniec  $q'$  plaszczyny równoległej do prostej  $lQ'$  przechodzi przez jej kraniec  $Q'$ . W szczególności plaszczyny równoległe do  $CC_1$ , t.j. prostopadłe do plaszczyny rzutów mają kraniec przechodzący przez punkt główny  $C_1$ .

§ 111. Plaszczyny równoległe. Ponieważ plaszczyny równoległe mają wspólną prostą niewłaściwą, więc rzut tej prostej, czyli ich kraniec, jest obu tym plaszczynom wspólny. Plaszczyny równoległe mają kraniec wspólny.

§ 112. Zadanie. Przez dany punkt poprowadzić prostą równoległą do prostej danej. Niech będzie prosta  $lQ'$  oraz punkt  $A$ , dany przez swój rzut  $A'$  leżący na rzucie  $a'_1$  prostej  $l_1Q'_1$  (Rys. 220); rzut  $a'_2$  szukanej prostej otrzymamy przez połączenie punktu  $A'$  z punktem  $Q'$ ; pozostaje wyznaczyć jedynie  $l_2$  tej prostej. Ponieważ prosta szukana leży z prostą  $l_1Q'_1$  w jednej plaszczynie, więc jej  $l_2$  otrzymamy, prowadząc przez  $l_1$  równoległą do  $Q'Q'_1$  do przecięcia z rzutem  $a'_2$ . Zauważmy, że w zadaniu tym punkt  $l$  nie był potrzebny, do wyznaczenia bowiem prostej  $a_2$  wystarczy znać kierunek prostej danej, który



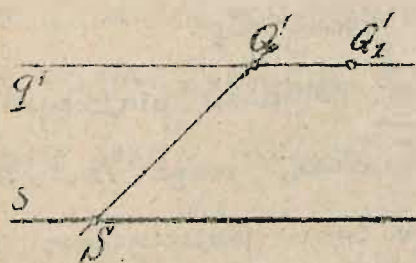


Rys. 220.

jest całkowicie wyznaczony przez jej kraniec  $Q'$ . Uwaga ta w równej mierze dotyczy i następnego zadania.

### § 113. Zadanie. Przez prostą daną poprowadzić

plaszczynę równoległą do innej prostej danej. Przypuśćmy, że przez prostą  $SQ'$  mamy przeprowadzić płaszczyznę równoległą do prostych, których kierunek jest wyznaczony przez dany ich kraniec  $Q'_1$ . Kraniec  $q'$  szukanej płaszczyzny

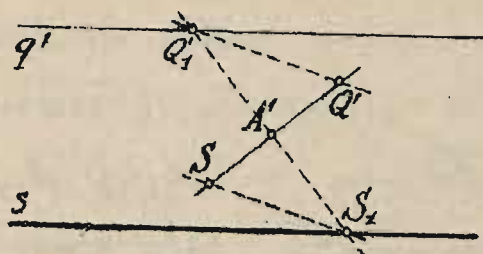


Rys. 221.

musi przechodzić przez  $Q'$ , gdyż prosta  $SQ'$  ma leżeć w tej płaszczyźnie; musi on jednak przechodzić również i przez  $Q'_1$ , gdyż proste, których ten punkt

jest kraniec, są równoległe do tej płaszczyzny; kraniec  $q'$  będzie to zatem prosta  $Q'Q'_1$ . Ślad  $s$  szukanej płaszczyzny otrzymamy prowadząc przez  $S$  równoległą do  $q'$ .

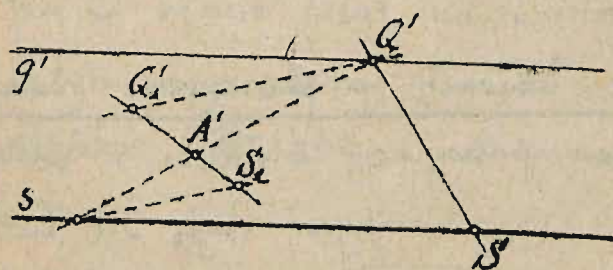
§ 114. Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej. Przypuśćmy, że przez punkt  $A(A', SQ')$  mamy poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny, której kraniec  $q'$  jest dany. Poprowadzimy najpierw przez punkt  $A$  jakąkolwiek prostą równoległą do tej płaszczyzny. W tym celu obieramy na  $q'$  dowolny punkt  $Q'_1$ , łączymy go z  $A'$



Rys. 222.

szczyzny szukanej, gdyż płaszczyzna ta, jako równoległa do danej, przechodzić musi przez prostą  $S_1Q_1$ . Kraniec szukanej płaszczyzny przystaje do kranca  $q'$ , pład zaś  $s$  będzie równoległą do  $q'$  poprowadzoną przez  $S_2$ .

§ 115. Zadanie. Przez daną prostą i punkt na niej

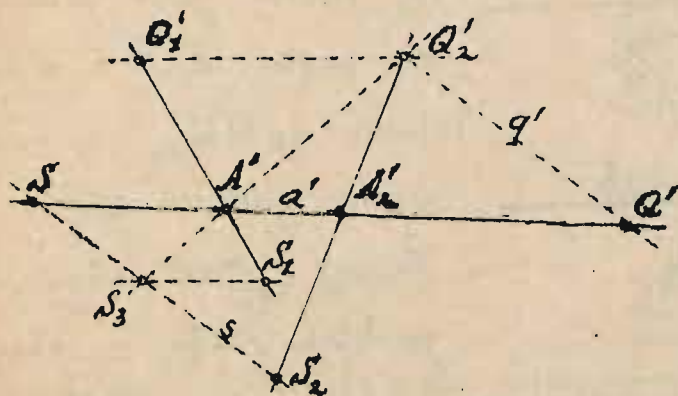


Rys. 223.

nie leżący poprowadzić płaszczyznę. Niech będzie prosta  $SQ'$  oraz punkt  $(A', S_1Q_1)$ ; poprowadzimy przez ten punkt  $S_2Q'$  równoległą do  $SQ'$  (§ 112), poczynym przez proste równoległe  $SQ'$  i  $S_2Q'$  poprowadzimy płaszczyznę  $sq'$  (§ 109).

§ 116. Zadanie. Poprowadzić prostą przez dwa punkty dane. Niech będą dwa punkty  $(A'_1, S_1, Q'_1)$  i  $(A'_2, S_2, Q'_2)$ , prosta  $A'_1A'_2$  będzie rzutem  $a'$  szukanej prostej; mamy znaleźć jej pład i kraniec. Przez punkt  $A'_1$  i prostą  $S_2Q'_2$  poprowadzimy płaszczyznę; prosta  $A'_1A'_2$  będzie leżała w tej płaszczyźnie, t.j. będzie miała pład  $s$  na pładzie  $s$ , a kraniec  $Q'$  na kranca  $q'$  tej płaszczyzny. Prowadzimy za-





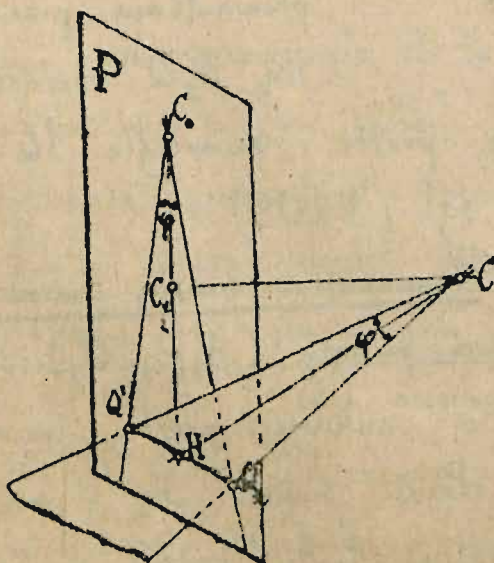
Rys. 224.

tyż przez  $A_1$  równoległą do  $s_2 Q_2'$  i przez proste równoległe  $s_2 Q_2'$  i  $s_3 Q_2'$  płaszczyznę  $s q'$ , której ślad  $s$  wyznaczy na rzucie  $a'$  ślad  $s$ , a kraniec  $q'$  kraniec  $Q'$  szukanej prostej.

## ROZDZIAŁ X. ZAGADNIENIA MIAROWE.

§ 117. Klasy figur leżących w płaszczyźnie rzucającej. Zagadnieniem dotyczącym prawdziwej wielkości i kształtu

figur klasy się łatwo rozwiązać, jeżeli te figury leżą w płaszczyźnie rzucającej. Należą tu przedewszystkiem dwa zadania.



Rys. 225

1) Wyznaczyć kąt między dwiema prostymi. Przez środek rzutów  $C$  poprowadzimy do danych prostych (przecinających się







(Rys. 227 i 228). Sposobem przed chwilą wskazanym znajdziemy kład  $C_0$  punktu  $C$ . W płaszczyźnie  $Ca$  leżą dwie proste równoległe:  $CQ'$  i  $a$  oraz proste rzucające  $CA_1$  i  $CA_2$ ; po dokonanych kładzie płaszczyzny  $Ca$  punkt  $C$  upadnie na  $C_0$ , punkty  $S$ ,  $Q'$ ,  $A'_1$  i  $A'_2$  nie zmieniają położenia, proste  $C_0Q'$  i  $(a)$  jako klady prostych równoległych  $CQ'$  i  $a$  pozostaną równoległe. Jeżeli tedy połączymy  $C_0Q'$ , to prosta  $(a)$  poprowadzona przez  $S$  równoległa do  $C_0Q'$  będzie kładem prostej  $a$ ; proste zaś  $C_0A'_1$  i  $C_0A'_2$  wyznaczą na tym kładzie punkty  $(A_1)$  i  $(A_2)$ , których odległość jest szukana.

§ 118. Klady figur leżących w płaszczyźnie jakiej-

kolwiek. Na

zasadzie § 98

Rys. 201

kład figu-

ry płaskiej

i jej rzut

środkowy są

w kolineacji;

której osią

jest kład pł-

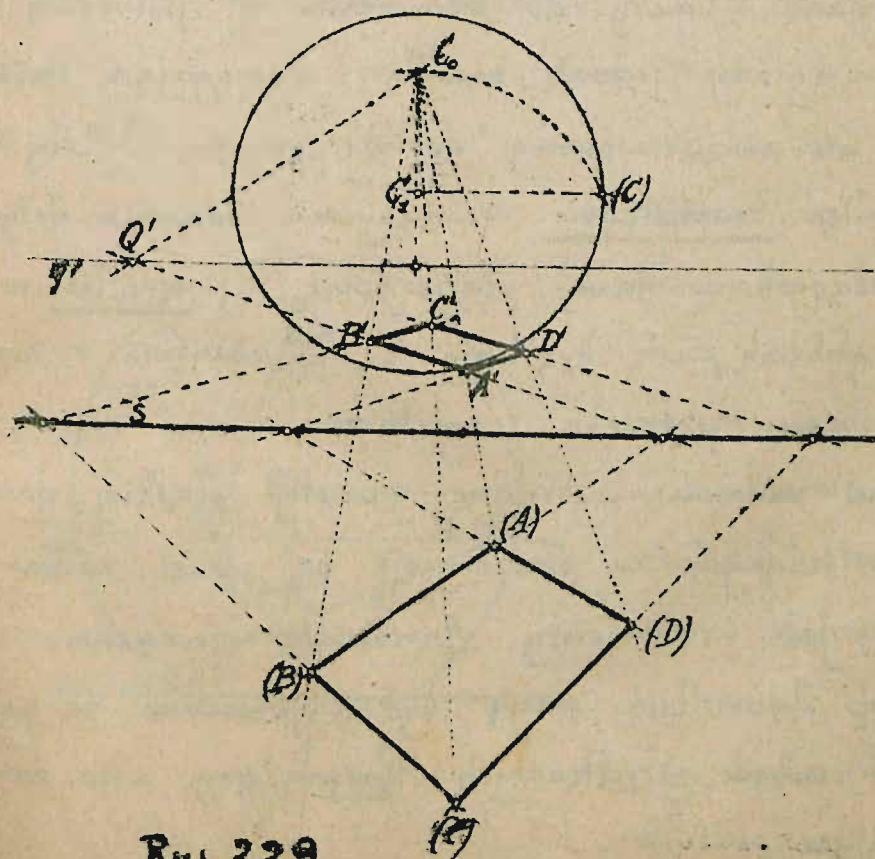
aszczyzny fi-

gury, jedną

z osi wia-

jemnych jest

kład płaszczy-



Rys. 229.



zoy rzucającej równoleglej do płaszczyzny figury, a środkiem jest kład środka rzutów dokoła tego śladu. Mając więc rzut  $A'B'C'D'$  figury płaskiej  $ABCD$  (Rys. 229) oraz ślad  $s$  i kraniec  $q'$  jej płaszczyzny, wyznaczamy kład  $(A')(B')(C')(D')$  tej figury na zasadzie kolineacji, której osią jest  $s$ , jedną z osi wzajemnych jest  $q'$ , a kład  $C_0$  środka rzutów  $C$  jest środkiem.

§ 119. Zadania miarowe dotyczące figur leżących w danej płaszczyźnie  $sq'$ . Jeżeli zadanie dotyczy figury leżącej w danej płaszczyźnie  $sq'$ , to można by je rozwiązać za pomocą trzech kolejnych czynności: 1) kładu danej figury płaskiej na płaszczyznę rzutów, 2) rozwiązania zadania w tej płaszczyźnie i 3) powrotu uzupełnionej przez rozwiązanie zadania figury do pierwotnego jej położenia. Metoda taka byłaby jednak zawilż i wymagająca dużo miejsca, które nie zawsze mamy do dyspozycji. Byłoby pożądanym umieć bezpośrednio rozwiązywać zadania dotyczące figur leżących w danej płaszczyźnie, t.j. kreślić w płaszczyźnie  $sq'$  tak, jak kreślimy w płaszczyźnie rysunku. W tym celu potrzeba i wystarcza umieć rozwiązać zasadnicze zadania wykreślne geometrii płaskiej, dotyczące figur leżących w płaszczyźnie  $sq'$ , jeżeli zarówno te figury, jak i elementy stanowiące rozwiązanie tych zadań są dane lub mają być wyznaczone za pomocą swych rzutów środkowych. Rozwiśniemy więc zadania następujące:

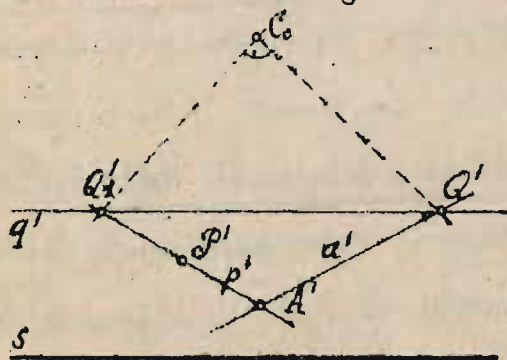
1) Z danego punktu do danej prostej poprowa-



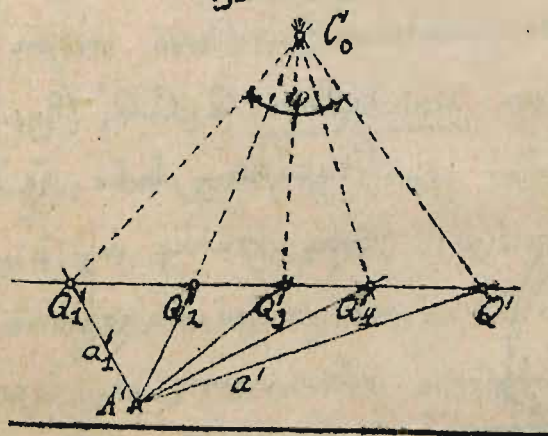


połączmy  $Q'_1 C_0$  i odmierzymy kąt  $Q'_1 C_0 Q'_2 = \varphi$ , wreszcie połączmy  $Q'_2 A' \equiv a'_2$ . Prawdziwa wielkość kąta między prostymi  $a_1$  i  $a_2$  będzie równa  $\varphi$ .

Jeżeli w płaszczyźnie  $\pi q'$  (Rys. 231) dana jest prosta  $a$  i punkt  $P$  (za pomocą rzutów  $a'$  i  $P'$ ) to na tej samej zasadzie możemy z punktu  $P$  spuścić prostopadłą  $p$  na prostą  $a$ . Wyznaczymy krawiec  $Q'$  prostej  $a$  i wykreślimy kąt prosty  $Q' C_0 Q'_1$ , połączymy  $Q'_1 P$  prostą  $p'$ , która będzie rzutem szukanej prostopadłej.



Rys. 231



Rys. 232.

Gdy chcemy kąt  $A$  (duży za pomocą rzutów swych ramion  $a'$  i  $a'_1$ ) podzielić na kilka części równych (Rys. 232), znajdujemy krawiec  $Q'$  i  $Q'_1$  jego ramion i podzielimy kąt  $Q' C_0 Q'_1$  na części równe wyznaczamy na krawcu  $q'$  punkty  $Q'_2, Q'_3, Q'_4, \dots$ . Proste, które łączą te punkty z punktem  $A'$  są rzutami prostych dzielących

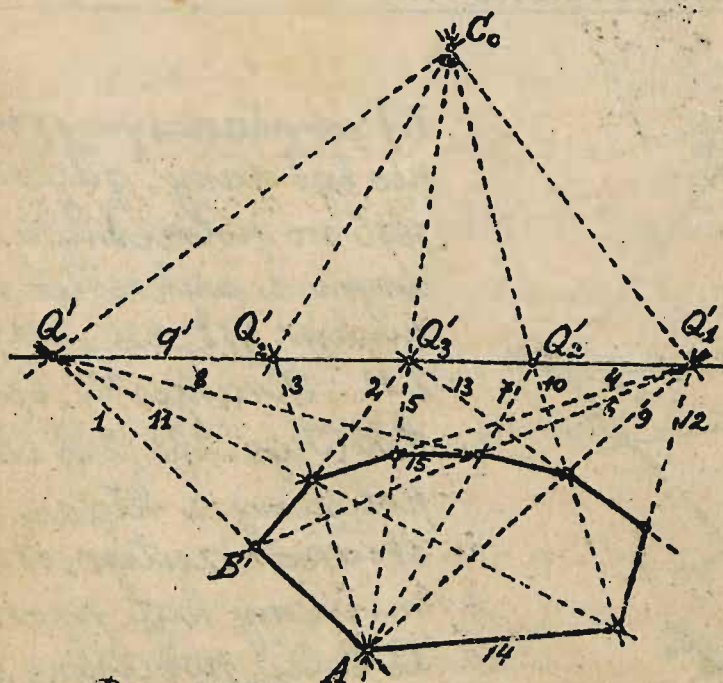
kąt ( $a a_1$ ) na części równe.

Jako zastosowanie powyższych zadań zadniczych rozwiążmy zadanie następujące: Dany jest rzut  $A'B'$  odcinka  $AB$  leżącego w płaszczyźnie o krawcu  $q'$ ; wykreślić rzut

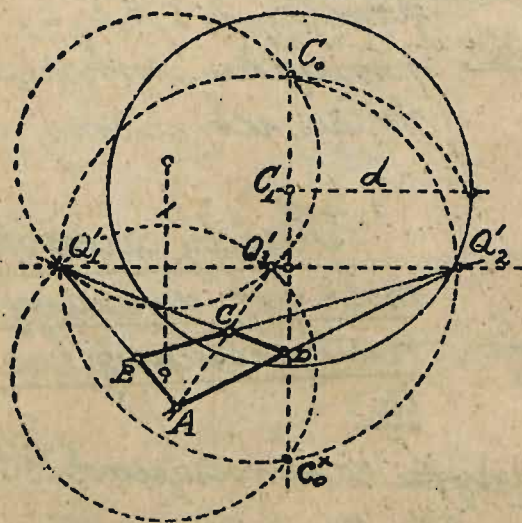








Rys. 235.



Rys. 236.

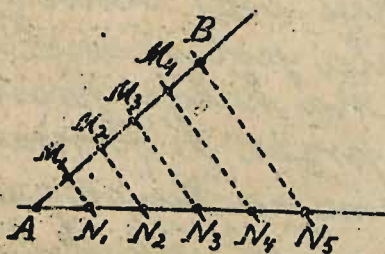
$q'$ , za kraniec przekątnej tego kwadratu. Punkty  $C_0$  i  $C_0^x$ , które są przecięciem kół opisanych na  $Q_1Q_2$  jak na średnicy z kółami, obejmującymi kąt  $45^\circ$  i opisanymi na  $Q_1Q_2$  są kłódamy środka wórtów  $C$  do kół  $q'$ . Punkt główny  $C_1$  może być jakimkolwiek punktem, obranym wewnątrz  $C_0C_0^x$ ; jeżeli w szczególności  $C_1$  leży na  $q'$ , to płaszczyzna kwadratu jest prostopadłą do płaszczyzny wórtów.

§ 121. Zadanie płaskie  
zosaadnicze, dotyczące  
odcinków. Punkty mia-  
rowe.

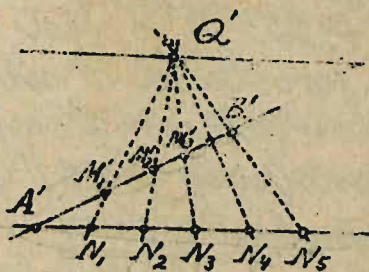
1.) Leżący w płaszczyźnie  $sq'$  odcinek  $AB$ , którego wórt  $A'B'$  jest dany, podzielić na części równe t.j. wyznaczyć wórtu  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , punktu  $M_1, M_2, M_3, \dots$  dzielących ten odcinek na części równe, nie kładąc odcinka mapła



szczytne rzutów.



Rys. 237.



Rys. 238.

W tych warunkach wycie cyrkla jest wyklu-  
czane, bowiem rzuty równych odcinków wogół  
nie są równe. Tylko na śladzie z planowania  
są oraz na prostych do niego równoległych rzu-  
ty równych odcinków są równe i podział odcin-  
ka leżącego na jednej z tych prostych mógłby  
być dokonany za pomocą cyrkla. Otoż wie-  
domo, iż podział jakiegokolwiek odcinka na  
części równe może być za pomocą równoległych  
sprowadzony do podziału innego odcinka, leżą-  
cego na prostej o dowolnym kierunku. Przyjmu-  
my np., że mamy podzielić odcinek  $AB$  na 5  
części równych (Rys. 237), ale warunki od nas  
niezależne nie pozwalają na wycie cyrklem  
na prostej o kierunku  $a$ , natomiast wycie je-  
go na prostej o kierunku  $s$  nie podlega żad-  
nym ograniczeniom. Przez jeden z końców  
odcinka  $AB$  prowadzimy prostą o kierunku  $s$ ,  
na której odmierzamy cyrklem 5 dowolnych  
równych odcinków  $AN_1, N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4$  i  $N_4N_5$ .  
Poczym przez punkty  $N_1, N_2, N_3$  i  $N_4$  prowadzimy  
równoległe do prostej  $BN_5$ , które wyznaczą na  
odcinku  $AB$  punkty podziału  $M_1, M_2, M_3$  i  $M_4$ .



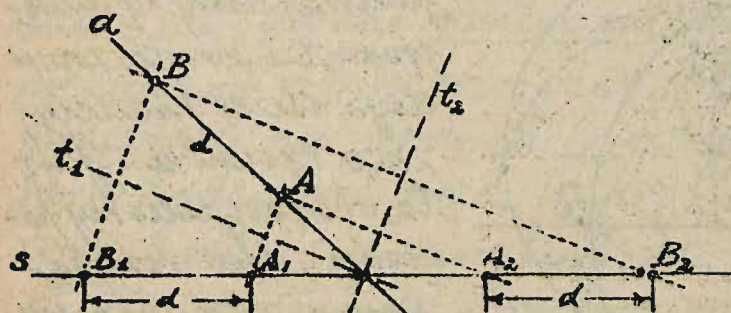
Ten sam sposób zastosujemy do podzielenia leżącego w płaszczyźnie  $sq'$  odcinka  $AB$ , którego rzut  $A'B'$  jest dany (Rys. 238). Ponieważ na prostej  $AB$  użycie cyrkla jest niemożliwe, natomiast możemy go użyć na każdej prostej równoległej do  $s \parallel q'$ , przeto przez  $A'$  prowadzimy równoległą do  $q'$  i odmierzamy na niej od punktu  $A'$  pięć jakichkolwiek równych odcinków  $A'N_1$ ,  $N_1N_2$ ,  $N_2N_3$ ,  $N_3N_4$ , i  $N_4N_5$ , wyznaczamy kraniec  $C'$  prostej  $B'M_5$  i łączymy z nim punkty  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$  i  $N_4$ ; proste te wyznaczają na  $A'B'$  rzuty  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  i  $M_4$  punktów podziatu  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  i  $M_4$ . —

2). Dany jest rzut prostej i punktu, na niej leżącego; wyznaczyć rzut odcinka danej długości, odmierzonego na prostej od danego na niej punktu.

Mogemy przypuścić, że dana jest płaszczyzna, w której prosta leży; gdyby bowiem były dane tylko ślad i kraniec prostej, to dwie równoległe w dowolnym kierunku przez te punkty poprowadzone wyznaczyłyby taką płaszczyznę  $sq'$ . Oczywiście, zadanie to nie może być rozwiązane za pomocą odmierzenia danego odcinka cyrklem, gdyż w perspektywie długości odcinków ulegają wogóle zmianie. Istnieje wszakże jedna prosta płaszczyzny  $sq'$ , mianowicie ślad  $s$ , na której powyższe zadanie mogłoby być rozwiązane bezpośrednio, a więc za pomocą cyrkla. Otóż, wiadom, że odmierzenie odcinka danej długości na jednej prostej może być za pomocą prowadzenia równoległych sprowadzone do odmierzenia tego samego odcinka na innej prostej. Przypuścimy, że mamy odmierzyć odcinek danej długości  $d$  na prostej  $a$  od punktu  $t$ , ale dla pewnych względów użycie cyrkla na tej prostej nie jest możliwe,



natomiast możliwe jest ono na innej prostej  $s$ . (Rys. 239). Prowadzę dwusieczną  $t_1$  i  $t_2$  kątów



Rys. 239.

wynaczonych przez proste  $a$  i  $s$  i przez punkt  $A$  prowadzę prostą padłą do jednej dwusiecznej  $t_1$ , a więc równoległą do drugiej  $t_2$ ; od punktu  $A$  otrzymam

możemy w ten sposób na prostej  $s$  odm. mierz za pomocą cyrkla odcinek  $d$  do punktu  $B_1$ ; wreszcie przez punkt  $B_1$  prowadzę znow równoległą do  $t_2$  do przecięcia z prostą  $a$  w punkcie  $B$ . Odcinek  $AB$  równa się odcinkowi  $A_1B_1$ . Ten sam cel możemy oczywiście osiągnąć, jeżeli z punktu  $A$  poprowadzimy równoległą do dwusiecznej  $t_1$ , a otrzymawszy na prostej  $s$  punkt  $A_2$ , odmierzymy na niej odcinek  $d$  do punktu  $B_2$  i przez ten punkt poprowadzimy jeszcze raz równoległą do dwusiecznej  $t_2$ . Do rozwiązania tego zadania wystarczy posiadać kierunek jednej lub drugiej dwusiecznej kąta ( $as$ ).

Przeprowadzimy to samo wykreślenie w perspektywie (Rys. 240). Niech  $P$  będzie śladem  $a$  a krancem prostej  $a$ , a  $A'$  rzutem punktu  $A$  na nią leżącego; od tego punktu na prostej  $a$  odmierzono odcinek danej długości  $d$ ; trzeba znaleźć rzut  $B'$  końca tego odcinka. Poprowadzimy przez prostą  $PQ'$  dowolną płaszczyznę  $\pi$ ; bezpośrednie odmierzenie odcinka  $d$  z pomocą







na prostych do niej równoległych, nazywają się punktami miarowymi prostej  $a$  (lub mniej trawnie: punktami dzielenia). Koło o środku  $Q'$  i promieniu  $Q'Q$ , zwane kołem miarowym prostej  $a$ , jest niezmiennie od piaszczyzny  $sq'$ ; punkty miarowe prostej  $a$  na końcach wszystkich piaszczyzn, przechodzących przez tę prostą, leżą na okręgu tego koła. — Zauważmy, że koło oddalenia jest kołem miarowym prostych prostopadłych do piaszczyzny rzutów.

Znaleźć punkty miarowe (Zazwyczaj jeden z nich tylko bywa dostępny, jeden zresztą tylko jest wogóło potrzebny), taczmy jeden z nich, np.  $T_1$  z punktem  $A'$  i otrzymujemy w przecięciu z  $s$  punkt  $A_1$ ; odmierzamy od tego punktu na prostej  $s$  odcinek  $A_1B_1 \equiv d$  i punkt  $B_1$ . Taczmy z  $T_1$ , otrzymując w przecięciu z  $a'$  szukany punkt  $B'$ .

To samo wykreślenie postawić można do rozwiązania zadania odwrotnego: Znaleźć prawdziwą długość odcinka, którego rzut na danej prostej  $PQ$  jest dany. Będzie ono miało przewagę prostoty: oszczędności miejsca nad rozwiązaniem podanym w § 117, a opartym na metodzie kładow.

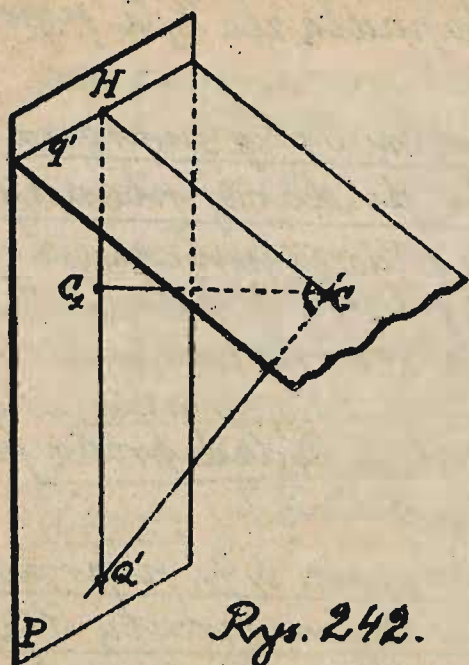
§ 122. Lastosowanie powinowactwa do wyznaczenia punktu przecięcia prostych, których rzuty przecinają się pod małym kątem.

Wyznaczenie punktu  $A$ , w którym przecinają się proste  $P_1Q_1$  i  $P_2Q_2$  leżące w piaszczyźnie  $sq'$  staje się tym mniej dokładne, im odległość prostych  $s$  i  $q'$  jest mniejsza. Dla podniesienia do-

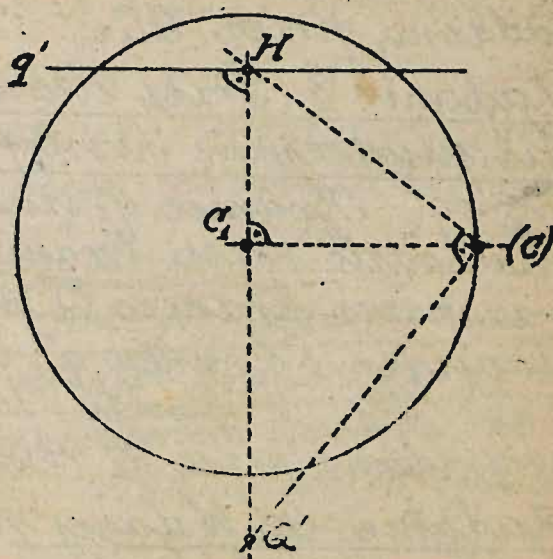








Rys. 242.



Rys. 243.

go  $C_1$  od kranca  $q'$ . Przewróćmy trójkąt  $H C Q'$  na płaszczyznę rzutów dokota prostej  $C_1 H$  i wykreślmy go w tym położeniu; punkty  $H$ ,  $C_1$  i  $Q'$  jako należące do osi obrotu nie zmieniają przytem swego położenia. Aby wyznaczyć punkt szukany  $Q'$ , spuszczaemy z punktu głównego na  $q'$  prostopadłą, spodek jej  $H$  łączymy z końcem  $(C)$  równoległego do  $q'$  promienia koła oddalenia i w punkcie  $(C)$  wystawiamy prostopadłą do  $H(C)$ . Punkt  $Q'$  leży w przecięciu tej prostopadłej z prostą  $C_1 H$ .

Zadanie 2. Dana jest prosta rzucająca  $CQ'$ ; wyznaczyć płaszczyznę rzucającą do niej prostopadłą; czyli: wyznaczyć kraniec  $q'$  płaszczyzn prostopadłych do prostych o danym kranie  $Q'$ . Rozwiązanie polega oczywiście na wykreśleniu ktadu tego samego trójkąta prostokątnego  $H C Q'$ , z tą jedynie różnicą, że nie punkt  $Q'$ , ale punkt  $H$  jest szukany (Rys. 242



i 243). Krawiec  $q'$  jest prostopadłą do  $Q_1 Q_2$  poprowadzoną przez  $H$ .

Zadanie 3. Przez daną prostą  $S_1 Q_1$  poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej płaszczyzny  $sq'$ . Krawiec  $q_1$  szukanej płaszczyzny musi przechodzić przez krawiec  $Q_1$  danej prostej (§ 105) oraz przez krawiec  $Q'$  prostych prostopadłych do płaszczyzn o krawcu  $q'$ ; będzie to zatem prostą tą, która oba te punkty; ślad zaś  $s_1$  będzie prostą poprowadzoną przez  $S_1$  równoległą do  $q_1$ .

Zadanie 4. W danej płaszczyźnie  $S, S_1$  poprowadzić prostą, która przecina daną prostą  $S Q_1$  i jest do niej prostopadła. Krawiec  $Q_1$  szukanej prostej musi leżeć na krawcu  $q_1$  danej płaszczyzny (§ 105) oraz na krawcu  $q'$  płaszczyzn prostopadłych do prostych o krawcu  $Q'$ ; będzie to zatem punkt przecięcia obu tych prostych; ślad  $S_1$  będzie punktem, w którym równoległa do  $Q_1 Q_2$  poprowadzona przez  $S$  przecina  $s_1$ .

Zadanie 5. Przez dany punkt  $(H', S_1 Q_1)$  poprowadzić prostą prostopadłą do płaszczyzny danej  $sq'$ . Wyznaczymy najpierw krawiec  $Q'$  prostych prostopadłych do płaszczyzn o krawcu  $q'$ , poczym przez punkt  $(H', S_1 Q_1)$  poprowadzimy prostą o krawcu  $Q'$  (§ 112) i, jeżeli potrzeba, wyznaczymy punkt przecięcia tej prostej z płaszczyzną  $sq'$  (§ 107).

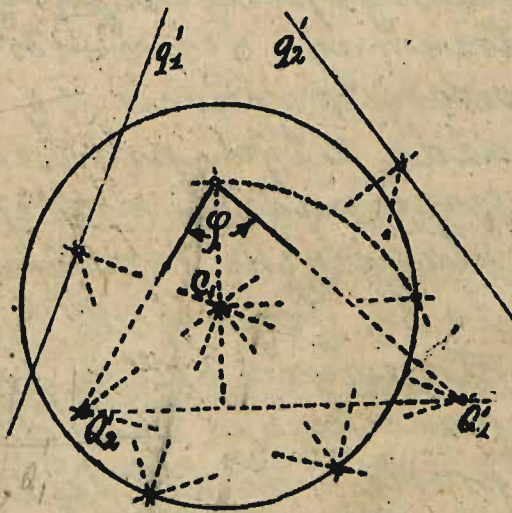
Zadanie 6. Przez dany punkt  $(H', S_1 Q_1)$  poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej prostej  $S Q_1$ . Wyznaczymy najpierw krawiec  $q'$  płaszczyzn prostopadłych do prostych o krawcu  $Q'$ ,



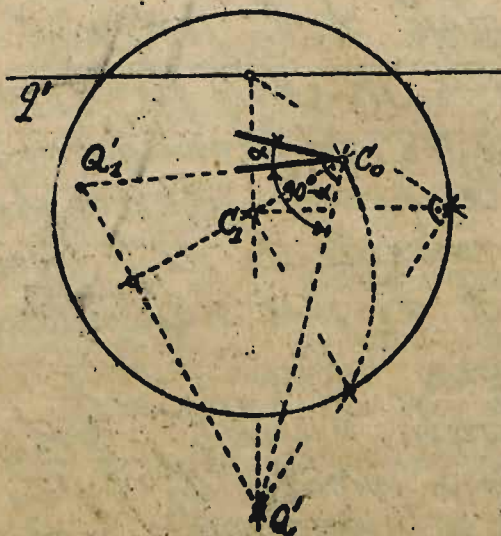
proczym przez punkt ( $H'$ ,  $Q_1Q_2$ ) poprowadzi-  
my płaszczyznę o krańcu  $q'$  (§ 114) i, jeże-  
li potrzeba, wyznaczmy punkt, w którym  
ta płaszczyzna przecina prostą  $QC'$  (§ 107).

### § 124. Kąty dwuscienne.

Zadanie. Znaleźć wielkość kąta dwusciennego  
go dwóch płaszczyzn, których krawędzie  $q_1$  i  $q_2$  są  
dane. Jeżeli z jakiegokolwiek punktu, np. z



Rys. 244.



Rys. 245.

środku rzutów spuszczmy  
prostopadłe  $EC_1$  i  $EC_2$   
na obie płaszczyzny, to  
kąt między temi prosto-  
padłymi równy jest  
kątom dwusciennemu  
tych płaszczyzn, lub z  
nim spełniający.

Znajdźmy prosto (rys  
244) Kąty  $Q_1$  i  $Q_2$  pro-  
mieni rzucających pro-  
stopadłych do tych  
płaszczyzn (§ 123, zad. 1)  
proczym wyznaczmy ką-  
 $Q_1EC_2$  przez kład tró-  
kąta  $Q_1EC_2$  do kota  $Q_1Q_2$   
(§ 117).

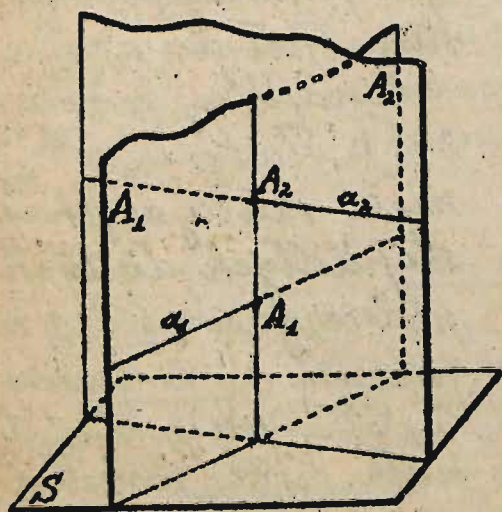
### § 125. Kąt prostej z płaszczyzną.

Zadanie. Znaleźć wiel-  
kość kąta prostej z pła-  
szczyzną, jeżeli ich  
krawędzie  $Q_1$  i  $q'$  są dane



Kąt prostej i płaszczyzna jest dopełnieniem kąta prostej i prostopadłą do płaszczyzny. Jeżeli  $Q_1$  jest końcem danej prostej (rys. 245), a  $q$  końcem danej płaszczyzny, to znajdziemy najpierw koniec  $Q'$  prostopadłych do płaszczyzny o końcu  $q$ , a następnie wyznaczamy kąt między prostymi, których końce są  $Q_1$  i  $Q'$ ; kąt dopełniający będzie szukany kąt  $\alpha$ .

§ 126. Odległość prostych skośnych. Jest to długość wspólnej prostopadłej, przecinającej obie proste. Aby ją otrzymać poprowadzimy płaszczyznę  $S$  do obu prostych równoległą (Rys. 246) i przez każdą z tych prostych

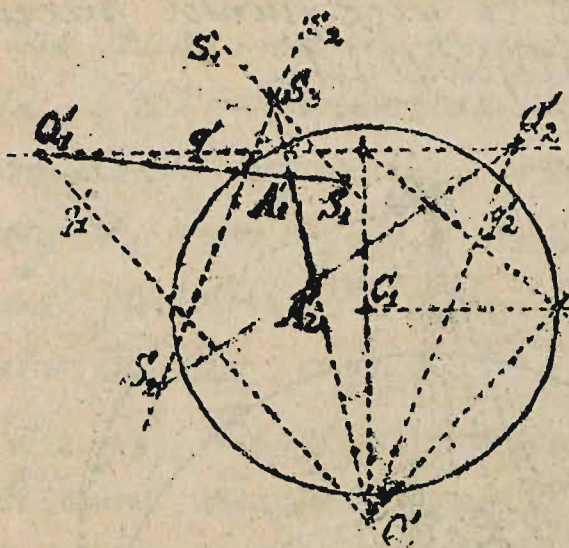


Rys. 246.

poprowadzimy następnie płaszczyznę prostopadłą do  $S$ . Przecięcie tych płaszczyzn będzie prostą przecinającą obie dane proste i do każdej z nich prostopadłą. Aby się przekonać, że istotnie odległość  $A_1A_2$  jest najkrótszą między prostymi  $a_1$  i  $a_2$ , poprowadzimy przez te proste płaszczyzny równoległe do  $S$ ; odcinek  $A_1A_2$  jest najkrótszą od-

ległością tych płaszczyzn; każdy inny odcinek łączący jakikolwiek punkt prostej  $a_1$  z jakimkolwiek punktem prostej  $a_2$  byłby pochyty do obu tych płaszczyzn, a zatem dłuższy od odcinka  $A_1A_2$ .





Rys. 247.

Niech będą (Rys 247) dwie proste  $P_1Q_1$  i  $P_2Q_2$ , prosta  $q' \equiv Q_1Q_2$  jest krawędzią płaszczyzn do obu tych prostych równoległych. Wyznaczmy krawiec  $Q_1'$  prostych do płaszczyzn tych prostopadłych (§ 123 zad 1) i za pomocą tego punktu wykreślmy krawiec  $q_1$  i  $q_2$  i ślady  $s_1$  i

$s_2$  płaszczyzn przechodzących przez  $P_1Q_1$  i  $P_2Q_2$  i prostopadłych do płaszczyzn o krawcu  $q'$ . Prosta  $P_3Q_3$  przecięcia tych płaszczyzn przecina obie proste w punktach  $A_1$  i  $A_2$ , których odległość może być znaleziona np. za pomocą jednego z punktów miarowych prostej  $P_3Q_3$ .

### § 127. Zastosowanie.

Zadanie. Wykreślić rzut środkowy prostopadłego, jeżeli dane są krawce  $Q_1$ ,  $Q_2$  i  $Q_3$  oraz długości  $a$ ,  $b$  i  $c$  krawędzi, wychodzących z wierzchołka, leżącego w danym punkcie  $S$  płaszczyzny rzutów.

Ponieważ  $Q_1$ ,  $Q_2$  i  $Q_3$  (Rys 248) są krawcami trzech prostych wzajemnie prostopadłych, więc punkt główny  $C_1$  będzie leżał na prostopadłej  $Q_3H$  spuszczonej z  $Q_3$  na







$U_1$ , prostych o brancu  $Q_1$  wzgl.  $Q_2$ ; koto  
 zas. zakreslone z punktu  $Q_3$  promieniem  
 $Q_3(E)$  (= odleglosci brancu  $Q_3$  od srodka  
 rzutow) wyznaczony na  $Q_2 O_3$  punkt miaro-  
 wy  $V_1$  prostych o brancu  $Q_3$ . Odmierzmy  
 od punktu  $S$  odcinki  $a$  i  $b$  na rownoległej  
 do  $Q_1 Q_2$ , a odcinek  $c$  na rownoległej do  
 $Q_2 Q_3$ . Łącząc konice tych odcinków z pun-  
 ktami miarowymi  $T_1, U_1$  i  $V_1$  otrzymu-  
 my na prostych  $SQ_1, SQ_2, SQ_3$  punkty  
 $A, B$  i  $C$ , które są rzutami wierzchołków  
 prostopadloscianu leżacych na krawędziach  
 wychodzących z wierzchołka  $S$ ; pozostałe  
 wierzchołki wyznaczony bez trudności za-  
 pomocą branców  $Q_1, Q_2$  i  $Q_3$  krawędzi pro-  
 stopadloscianu.





## Rozdział XI

### Perspektywa stosowana.

Przedmiotem perspektywy stosowanej jest wykresanie rzutów środkowych figur, których rzuty prostokątne są dane, z uwzględnieniem anatomicznych i fizjologicznych właściwości ludzkiego oka oraz warunków praktycznego wykonania rysunku.

#### § 128. Stożek i koto wyraźnego widzenia.

Jeżeli, jak to zwykle mieć chcemy, płaszczyzna rzutów  $P$  jest pionową, a oko, w środku rzutów  $C$  umieszczone, jest skierowane na punkt główny  $C_1$ , to wyraźnie widziane mogą być te tylko figury, które znajdują się, wewnątrz stożka obrotowego, mającego za oś prostą  $CC_1$ , a którego tworzące są od tej osi odchylone pod kątem nie większym od  $30^\circ$ . Podstawą tego stożka wyraźnego widzenia będzie na płaszczyźnie rzutów koto o środku  $C_2$ , którego promień będzie równy mniej więcej połowie promienia koto oddalenia (co odpowiada odchyleniu tworzącej stożka od osi  $\alpha = \arctg \frac{1}{2} = 26^\circ 30'$ ). Jeżeli perspektywa figury ma wywołać złudzenie rzeczywistości, to rzut figury musi być zawarty wewnątrz tego koto, zwanego kotem wyraźnego widzenia. Brzegi obrazu perspektywicznego, mającego zwykle kształt prostokąta, nie powinny w żadnym razie być prostymi zewnętrznymi względem



kota wyraźnego widzenia.

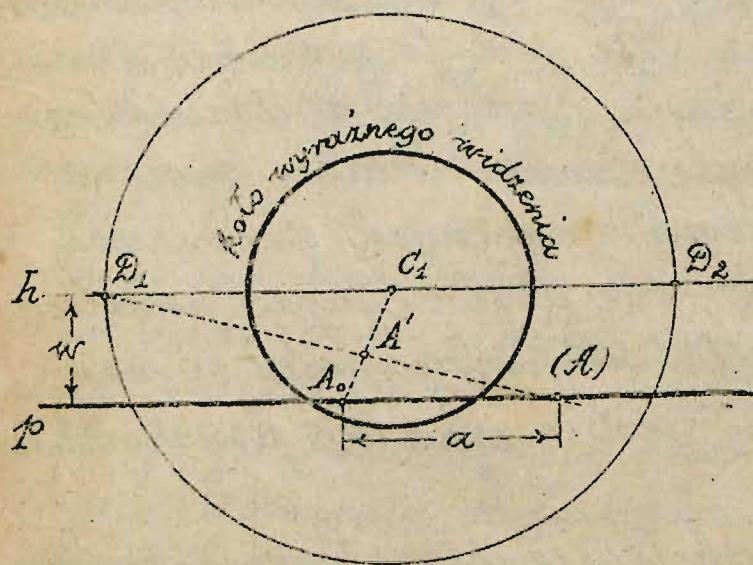
§. 129. Wybór kota oddalenia. Punkt główny  $E_1$  obieramy zazwyczaj w pobliżu środka prostokąta przeznaczanego na obraz perspektywiczny. Jeżeli przypuszczamy, że normalne oko ludzkie widzi wyraźnie tylko takie przedmioty, które znajdują się od niego w odległości nie mniejszej od 25 cm., to stąd wynikłoby, że promień kota oddalenia nie powinien być mniejszy od 25 cm. Wniosek taki byłby zbyt przypisany. Bez wątpienia należy unać zasadę, że obraz perspektywiczny najlepsze wywrze wrażenie, gdy oko będzie umieszczone w środku rzutów. Nie jest to wszakże bezwzględnie konieczne; wiemy z doświadczenia, że przy oglądaniu obrazu możemy zmieniać w dość znacznych granicach punkt widzenia, nie dostrzegając powstającej z tego powodu niepoprawności obrazu. Przyczyna tego jest oczywiście psychologicznej natury.

Pobudki psychologicznej natury sprawdzają również, że uważamy za poprawny każdy obraz, który jest figurą podobną do obrazu perspektywicznego i to nawet wtedy, gdy z powodu znacznego zmniejszenia obrazu (a więc i oddalenia), oko nie mogłoby znajdować się w środku rzutów, leżącego wtedy



na zbyt małej odległości od płaszczyzny obrazu, aby z tego punktu mogły być wyraźnie widziane figury w niej wykreślone. Kąt oddalenia może więc być dowolnie małym pod warunkiem, aby zmniejszeniu normalnego oddalenia odpowiadało proporcjonalne zmniejszenie wymiarów figury, która ma być odwzorowana.

§ 130. Linja przysiemna, horyzont, punkty oddalenia. Jedną z płaszczyzn poziomych zwieemy płaszczyzną przysiemną, jej ślad p



Rys. 249.

nazwamy linją przysiemną, jej kraniec h - horyzontem (Rys. 249).

Odległość tych dwóch prostych w nazwamy wysokością horyzontu; jest ona równa wysokości środka rzutów, t.j. oka, nad płaszczyzną przysiemną.

Wysokość horyzontu bierzemy więc zazwyczaj w granicach 150-200 cm. w tej chwili, w jakiej wyobrażamy sobie zmniejs-



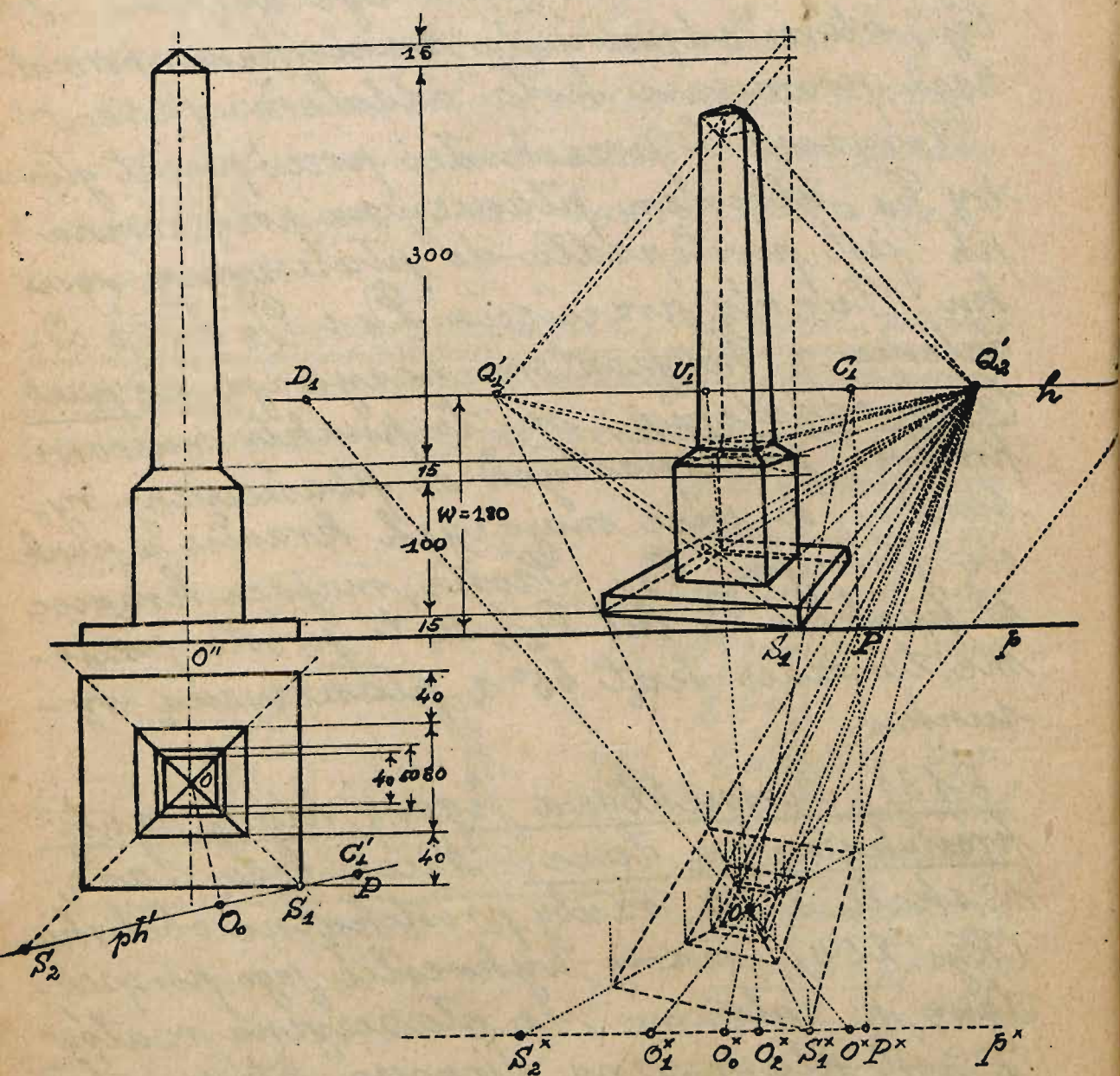
szaona figure, która odwzorować pragniemy; skala ta nie może być większa od tej, która odpowiada zmniejszeniu normalnego promienia kota oddalenia (25 cm).

Horyzont  $h$  przechodzi przez punkt główny  $C_1$ , albowiem płaszczyzna przyziemna  $ph$  jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Punkty przecięcia  $D_1$  i  $D_2$  kota oddalenia z horyzontem nazywają się punktami oddalenia; są to punkty miarowe prostych prostopadłych do płaszczyzny rysunku, a więc mających kraniec w punkcie głównym  $C_1$ . Proste, mające kraniec w punkcie  $D_1$  lub  $D_2$ , są to proste poziome tworzące kąt  $45^\circ$  z płaszczyzną rysunku.

§131. Perspektywa figury, której rzuty prostokątne są dane. Niech będą dane, w skali 1:50, rzuty prostokątne obelisku (Rys. 250); mamy wykreślić jego perspektywę w zatożeniu, ze płaszczyzna rzutów  $P$  jest płaszczyzną pionową, której ślad poziomy, czyli linja przyziemna, jest prostą  $p$ , przechodzącą przez jeden z wierzchołków  $S_1$  podstawy obelisku; - będzie to zarazem rzut poziomy  $h'$  horyzontu  $h$ , którego wysokość niechaj będzie  $W=180$  cm (w skali 1:50). Obieramy na  $p \equiv h'$  punkt



Skala 1:50.



Rys. 250.

$C'_1 \equiv P$ , który uważajmy za rzut poziomy punktu głównego,  $C_1$ , leżącego na horyzoncie  $h$ . Ze środka  $O$  podstawy obelisku spuścimy prostą na  $ph'$ ; wyznaczmy



jej spodek  $O$  oraz punkty  $S_1$  i  $S_2$ , w których przekątne rzutu poziomego obelisku przecinają prostą  $p$ .

Wykresliwszy linię przyziemną  $p$  i horyzont  $h$  ( $w = 180$  cm), obieramy na horyzoncie punkt  $C_1$ , od którego w jedną którąkolwiek stronę (np. w lewo) odmierzamy odleganie  $d = C_1 O_1 = 400$  cm (w skali 1:50).

Pierwszym zadaniem naszym będzie wykreślić w płaszczyźnie  $ph$ , albo lepiej w płaszczyźnie  $p^x h$  do niej równoległej (§ 122), rzut poziomy obelisku. W tym celu wyznaczmy na  $p^x$  punkt  $P^x$ , który jest spodem prostopadłej spuszczonej z  $C_1$  na  $p^x$ , i od punktu  $P^x$  odmierzmy na  $p^x$  odcinki  $P^x O^x = P O$ ,  $P^x S_1^x = P S_1$ ;  $P^x S_2^x = P S_2$  i  $O^x O^x = O O$ . Połączmy  $O^x C_1$  i  $O^x O_1$ ; przecięcie tych prostych wyznaczy rzut środkowy  $O'$  punktu  $O$ ; proste  $O' S_1^x$  i  $O' S_2^x$  będą środkowymi rzutami przekątnych rzutu poziomego obelisku; kraniec pierwszy z nich może być wyznaczony ( $Q'_1$ ), kraniec drugiej jest niedostępny. Na rzutach środkowych prostych  $O S_1$  i  $O S_2$  trzeba teraz wyznaczyć rzuty środkowe wierzchołków czterech kwadratów, z których składa się rzut poziomy obelisku.

Najłatwiej tego dokonać za pomocą punktów miarowych  $T_1$  i  $U_1$  tych prostych (§ 121); znajdziemy je, odmierzając na  $p^x$  odcinki



$P^x O_1^x = I_1 O$  i  $I_2^x O_2^x = I_2 O$  i łącząc  $O_1^x O'$  i  $O_2^x O'$ .

Wyznaczywszy rzuty środków, wierzchołków 4 kwadratów, sprawdzimy dokładność wykreślenia, wyznaczając na horyzoncie punkt  $Q_2$ , w którym powinny się przeciąć rzuty ośmiu równoległych boków tych kwadratów; punkt  $Q_3$ , w którym powinny się przeciąć rzuty pozostałych boków, jest niedostępny. Wykreśliśmy teraz perspektywę kwadratu leżącego w płaszczyźnie przyziemnej  $p^h$  za pomocą punktów  $Q_1$  i  $Q_2$  oraz równoległych do  $CP^x$ , wychodzących z wierzchołków rzutu takiego samego kwadratu leżącego w płaszczyźnie  $p^h$ . Następnie w punkcie  $I_1$  wystawmy prostopadłą do  $p$ ; ponieważ leży ona w płaszczyźnie rysunku, odmierzamy na niej od punktu  $I_1$  wysokość wszystkich wierzchołków obelisku. Łącząc otrzymane w ten sposób punkty z krawędziem  $Q_1$ , otrzymamy na prostopadłych do  $p$ , wystawianych w wierzchołkach figury leżącej w płaszczyźnie  $p^h$ , połowę pozostałych wierzchołków obelisku; drugą połowę wierzchołków otrzymamy za pomocą tych samych prostopadłych oraz punktu  $Q_2$ . -





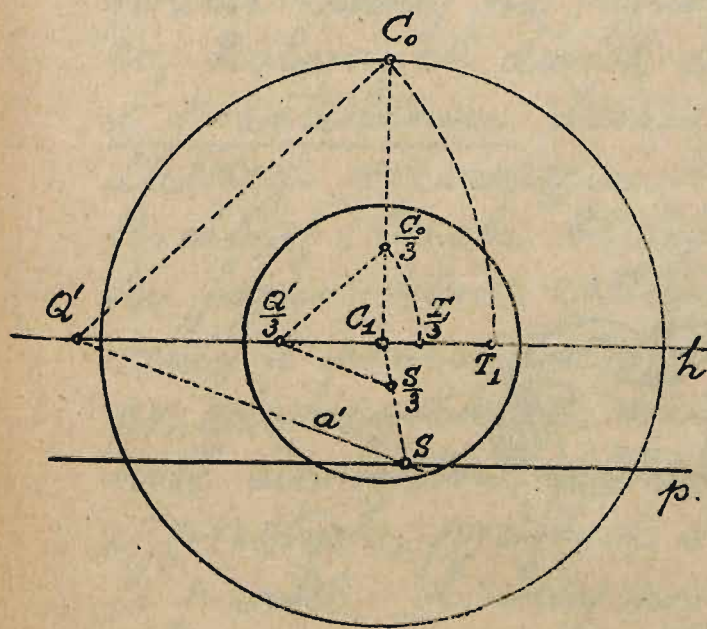


przysięmnej p. W tym celu należałoby postąpić tak jak w § poprzednim postąpiliśmy dla wyznaczenia punktu  $O'$ ; potaćzyć  $H_0 C_1$ , odmierzyć od punktu  $H_0$  w jedną lub w drugą stronę prostej p odcinek  $H_0(H) = a$ , potaćzyć punkt  $(H)$  z tym z dwóch punktów  $D_1$  lub  $D_2$ , który leży po przeciwnej stronie prostej  $H_0 C_1$  niż punkt  $(H)$ ; punkt przecięcia prostych  $H_0 C_1$  i  $(H) D_1$  jest rzutem punktu  $H$  (Rys. 251). Wykreślenie to zawodzi, gdy jeden choćby z dwóch punktów  $D_1$  i  $(H)$  lub  $D_2$  i  $(H)$  jest niedostępny; postąpimy wtedy jak następuje: odmierzymy na horyzoncie  $h$  od punktu głównego  $C_1$  w jedną lub drugą stronę odcinki  $C_1 D_1$  i  $C_1 \frac{D_2}{3}$  równe np. trzeciej części oddalenia  $C_1 D_1$ ; od punktu  $H_0$  odmierzymy odcinek  $H_0 \left(\frac{H}{3}\right)$  równy trzeciej części odcinka  $H_0(H) = \frac{a}{3}$ ; jest szczywistem, że prosta  $\left(\frac{H}{3}\right) D_1$  przecina prostą  $H_0 C_1$  w tym samym punkcie  $H'$ , w którym ją przecina prosta  $(H) D_1$ . Potrzebne do wyznaczenia punktu  $H'$  punkty  $\frac{D_1}{3}$  i  $\left(\frac{H}{3}\right)$  leżą w obrębie kota wyraźnego widzenia.

Przypuśćmy teraz, że dany jest rzut  $a'$  prostej  $a$ , której ślad  $S$  leży w obrębie kota wyraźnego widzenia, a rzut  $k'$



niec  $Q'$  leży poza jego obrybem; mamy znaleźć punkt miarowy  $T_1$  lub  $T_2$  tej prostej, nie korzystając w tym celu z żadnego punktu leżącego naewnierz koła wyraźnego widzenia. Gdyby to ograniczenie nie było nam narzucone, znaleźlibyśmy punkt  $T_1$  na horyzoncie w przecięciu z okręgiem koła zakreślonego z krawca  $Q'$  promieniem  $Q'C_0$ ; przytem punkt  $C_0$ , t. j. kład środka rzutów  $C$  leży teraz na kole oddalenia. Aby uniknąć punktów  $Q'$  i  $C_0$ , które leżą poza obrybem



Rys. 252.

koła wyraźnego widzenia; dzielimy  $C_1S$  na kilka, np. na trzy części równe i z punktu  $S$  prowadzimy równoległą do  $a'$ , otrzymując na horyzoncie punkt  $Q_3$ , którego odległość od  $C_1$  jest trzecią częścią odległości punktu  $Q'$  od  $C_1$ . Punkt

$Q_3$  łączymy z punktem  $C_3$ , którego odległość od  $C_1$  jest trzecią częścią oddalenia, poczem promieniem  $Q_3C_3$  z punktu  $Q_3$  za-



kreślamy koło przecinające horyzont w punkcie  $\frac{T_1}{3}$ . Punkt ten będzie od  $C_1$  trzy razy bliżej niż  $T_1$ , co wynika stąd, że figury  $PQ'C_1T_1$  i  $\frac{P}{3}Q'\frac{C_1}{3}\frac{T_1}{3}$  są podobne; środkiem podobieństwa tych figur jest  $C_1$  a stosunek podobieństwa równa się 3. Aby więc znaleźć punkt  $T_1$  odmierzamy na horyzoncie odcinek  $C_1T_1$  równy co do wielkości i znaku trzy razy wziętemu odcinkowi  $C_1\frac{T_1}{3}$ . W ten sposób wszystkie punkty w tym wykreśleniu użyte znalazły się wewnątrz koła wyrażonego widzenia. -

