

CZĘŚĆ II.

Aksonometria.

ROZDZIAŁ V.

Aksonometria prostokątna.

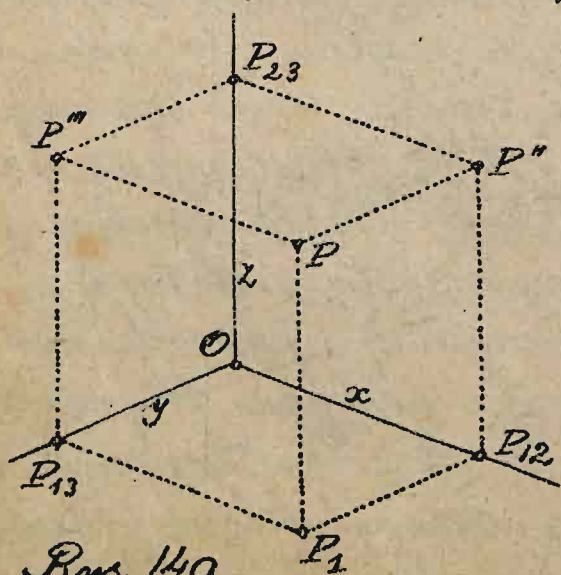
§ 55. Zalety i wady rzutów prostokątnych.

Cechą wybitną metody rzutów prostokątnych jest łatwość zmiany płaszczyzn rzutów i wykonywania obrotów i kładów. Dzięki temu wszelkie zadania miarowe dają się rozwiązywać w rzutach prostokątnych ze szczególną prostotą. Drugą zaletą tej metody jest względna łatwość wykreślenia rzutów figur najczęściej spotykanych w zastosowaniach technicznych. Większość przedmiotów, z którymi technik ma do czynienia, mianowicie uprzywilejowane kierunki krawędzi czyli wymiary i pewne ustawienia ścian, najczęściej wzajemnie prostopadłe. Otoż jeżeli jeden z tych kierunków jest prostopadły do jednej z płaszczyzn rzutów, to jeden z wymiarów przedmiotu znika, dwa zaś inne zachowują w rzucie na tę płaszczyznę niezmienną długość; o wielkości znikającego wymiaru wnosiemy zresztą z drugiego rzutu. Jeżeli wnioskowanie o prawdziwych wymiarach przedmiotu odbywa się wtedy z niezwykłą prostotą, to tem trudniejsza jest zato praca wyobraźni, która musi skojarzyć oba rzuty przedmiotu w jeden obraz

przestrzeny. Wprawdzie za pomocą obrotu figury do kąta odpowiednio obranej osi lub za pomocą zmiany płaszczyzn rzutów możemy utrzymać obrazy żywo do wyobraźni naszej przemawiające, ale tu poglądowość osiąga się za pomocą często zbyt długich i męczących wykreślań.

§ 56. Istota aksonometrii. W celu uniknięcia złych, a zachowania dobrych stron metody rzutów prostokątnych obmyślono sposoby, które dają na jednej płaszczyźnie rzutów obrazy, wywołujące wrażenie zbliżone do tego, które sprawiłby przedmiot rzeczywisty, a jednocześnie pozwalające wnosić o prawdziwych tego przedmiotu wymiarach. Wymaganiom tym czyni zadość metoda wykreślna, zwana aksonometrią.

Polega ona przedewszystkiem na określeniu wzajemnego położenia punktów figury za pomocą odniesienia ich do t. zw. układu współrzędnych prostokątnych. Układ taki składa się, jak wiadomo, z trzech wzajemnie prostopadłych przecinających się prostych x , y i z , zwanych osiami współrzędnych, z trzech



utworzonych przez nie wzajemnie prostopadłych płaszczyzn współrzędnych xy , yz i zx i wspólnego ich punktu O , zwanego początkiem współrzędnych. Aby określić położenie dowolnego punktu P przestrzeni,

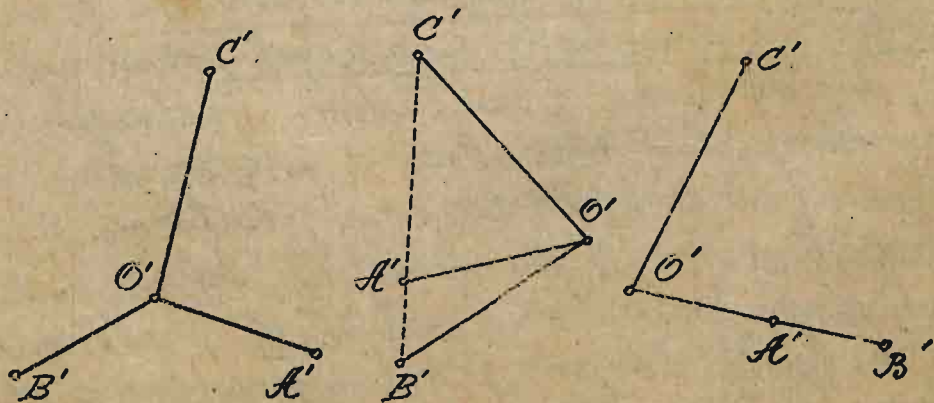
Rys. 140.

spuszczamy z niego trzy prostopadłe na płaszczyzny współrzędnych; długości tych prostopadłych GP , $G''P$, $G'''P$ nazywają się współrzędnymi punktu P . Odcinki te będą wyznaczone nie tylko co do długości, ale i co do znaku, jeżeli obierzemy na każdej płaszczyźnie współrzędnych stronę dodatnią, i jeżeli będziemy prostopadłą w jakimkolwiek punkcie tej płaszczyzny wystawioną uważali za dodatnią, jeżeli znajduje się z dodatniej strony płaszczyzny; w przeciwnym razie będziemy ją uważali za ujemną. Początek współrzędnych O oraz dany punkt P są przeciwległymi wierzchołkami prostopadłościanu, którego krawędziami są odcinki $OP_{12} = x$, $OP_{13} = y$, $OP_{23} = z$ co do długości i znaku równe współrzędnym punktu P . W ten sposób każdemu punktowi przestrzeni P odpowiada układ trzech co do długości i znaku określonych odcinków i nawzajem, każdemu układowi trzech takich odcinków odpowiada jeden i tylko jeden punkt przestrzeni P .

Obracamy teraz dowolnie płaszczyznę rzutu, zwaną płaszczyzną aksonometrią oraz kierunek promieni rzucających, rzućmy nasz przedmiot wraz z układem współrzędnych w tym kierunku na obraną płaszczyznę. Rzuty osi x , y i z będą trzema prostymi x' , y' i z' wychodzącymi z punktu O' , który jest rzutem początku współrzędnych O . Ponieważ proste równoległe w przestrzeni porzostaną w rzucie równoległe, a śluki odcinków, łączących na

każdej z osi nie ulegną zmianie, więc rzut P' każdego punktu P , którego dane są współrzędne, będzie wyznaczony, gdy znajdziemy rzuty osiowe x' , y' i z' i na każdym z nich rzut leżącej na odpowiedniej osi jednostki długości lub jej wielokrotności. W ten sposób trzy odcinki $O'A'$, $O'B'$ i $O'C'$ (Rys 141), wychodzące z punktu O' i leżące w płaszczyźnie aksometry, które uważamy za rzut równoległy figury złożonej z trzech równych i wzajemnie prostopadłych odcinków, pozwolą wyznaczyć rzut każdego punktu figury, którego współrzędne są wiadome.

§ 57. Twierdzenie Pohlke'go. Tutaj następuje pytanie, czy każde trzy odcinki $O'A'$, $O'B'$ i $O'C'$ płaski rysunek, wychodzące z dowolnego punktu O' mogą być uważane za rzuty równoległe trzech wzajemnie prostopadłych i równych odcinków OA , OB i OC . Pohlke pierwszy odpowiedział na to pytanie twierdząco (1853) z tym jedynym zastrzeżeniem, żeby wszystkie cztery punkty O' , A' , B' i C' nie leżały na jednej prostej (Rys. 141). Jeżeli połączymy punkty A' , B' i C' , to figura $O'A'B'C'$ staje się czworoscianem.



Rys. 141.

nam, którego podstawą ABE jest trójkątem równobocznym, a ściany boczne CEB , CEA i CEB są równymi trójkątami prostokątnymi i równoramionowymi. Otwierdzenie Pohlke'go jest wnioskiem z twierdzenia bardziej ogólnego:

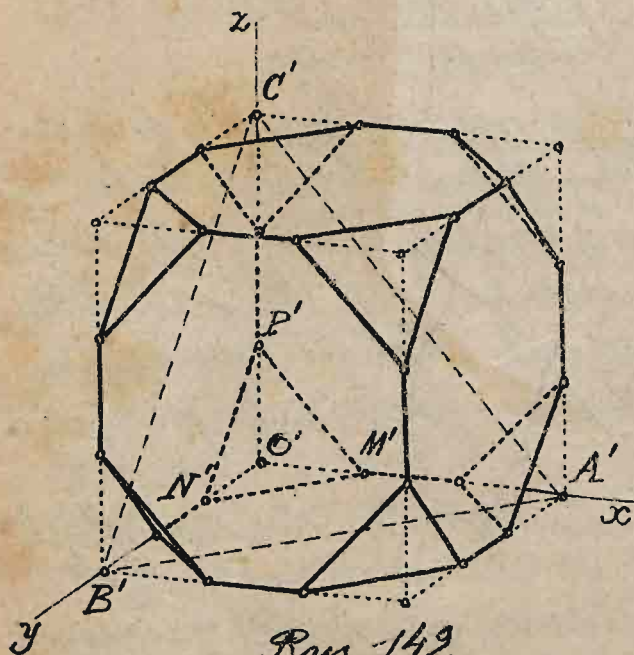
Każde cztery punkty O', A', B', C' plasujący się leżące na jednej prostej mogą być uważane za rzuty równoległe wierzchołków czworoscianu $OA'B'C'$, podobnego do danego jakiegokolwiek czworoscianu $O_1A_1B_1C_1$. Dowód tego twierdzenia musimy tutaj pominąć.

§ 58. Aksonometria ukośna ogólna. Na zasadzie twierdzenia Pohlke'go trzy jakiegokolwiek odcinki OA' , OB' i OC' , wychodzące z punktu O mogą być uważane za rzuty równych odcinków OA , OB i OC , leżących na ośiach współrzędnych. Wykreślenie rzutu aksonometrycznego danego przedmiotu polega na dwóch zasadach:

- 1) Rzuty aksonometryczne prostych równoległych są równoległe.
- 2) Rzuty odcinków, leżących na tej samej prostej lub na prostych równoległych są do tych odcinków proporcjonalne.

Wykreślmy np. w aksonometrii ogólnej rzut formy krystalicznej, stanowiącej kombinację sześcianu z osmiościanem foremnym, którego ściany są prostopadłe do przekątnych sześcianu. Obróćmy za osie współrzędnych trzy krawędzie sześcianu, wychodzące z jednego wierzchołka O wykreślmy najpierw rzut sześcianu za pomocą równoległych do $y'z'$, poprowadzonych przez A' , równoległych do $z'x'$, poprowadzo-

nych przez B' i równoległych do x' i y' , poprowadzonych przez E' . Obracamy na jednej z krawędzi sześcianu punkt M' , w którym ośmiościan tę krawędź przecina, wyznaczamy na sąsiednich krawędziach punkty N' i P' , prowadząc przez M' równoległe do $A'B'$ i $A'E'$; odmierając na rautach krawędzi równoległych do $O'A'$ odcinek $O'M'$ od obu ich końców i postępując tak samo z krawędziami równoległymi



Rys. 142.

do OB i OE , wyznaczymy wszystkie wierzchołki kryształu. Do tego samego celu doszlibyśmy również, uważając trzy jakiegokolwiek odcinki $O'A'$, $O'B'$ i $O'C'$ za rauty aksonometryczne trzech półosi ośmiościanu foremnego.

§59 Aksonometrie specyjalne.

Aksonometria ogólna jest

wyjątkowa wtedy, gdy wykreślenie danego przedmiotu nie wymaga znajomości kierunku rautów, którego wyznaczenie następnym razem tutaj dużo trudności. Łatwiej zatem stosujemy aksonometrię, w której zarówno położenie płaszczyzny rautów względem układu współrzędnych jak i kierunek rautów z góry jest określony lub łatwo może być wyznaczony.

Odróżniamy w szczególności:

1. Aksonometrię prostokątną, którą charakteryzuje:

a) dowolne położenie płaszczyzny rzutów względem układu współrzędnych (nie równoległej do żadnej z osi);

b) rzuty prostokątne na tę płaszczyznę.

2. Aksonometrię ukośną (rzut ukośny), która charakteryzuje:

a) płaszczyzna rzutów prostopadła do jednej z osi współrzędnych

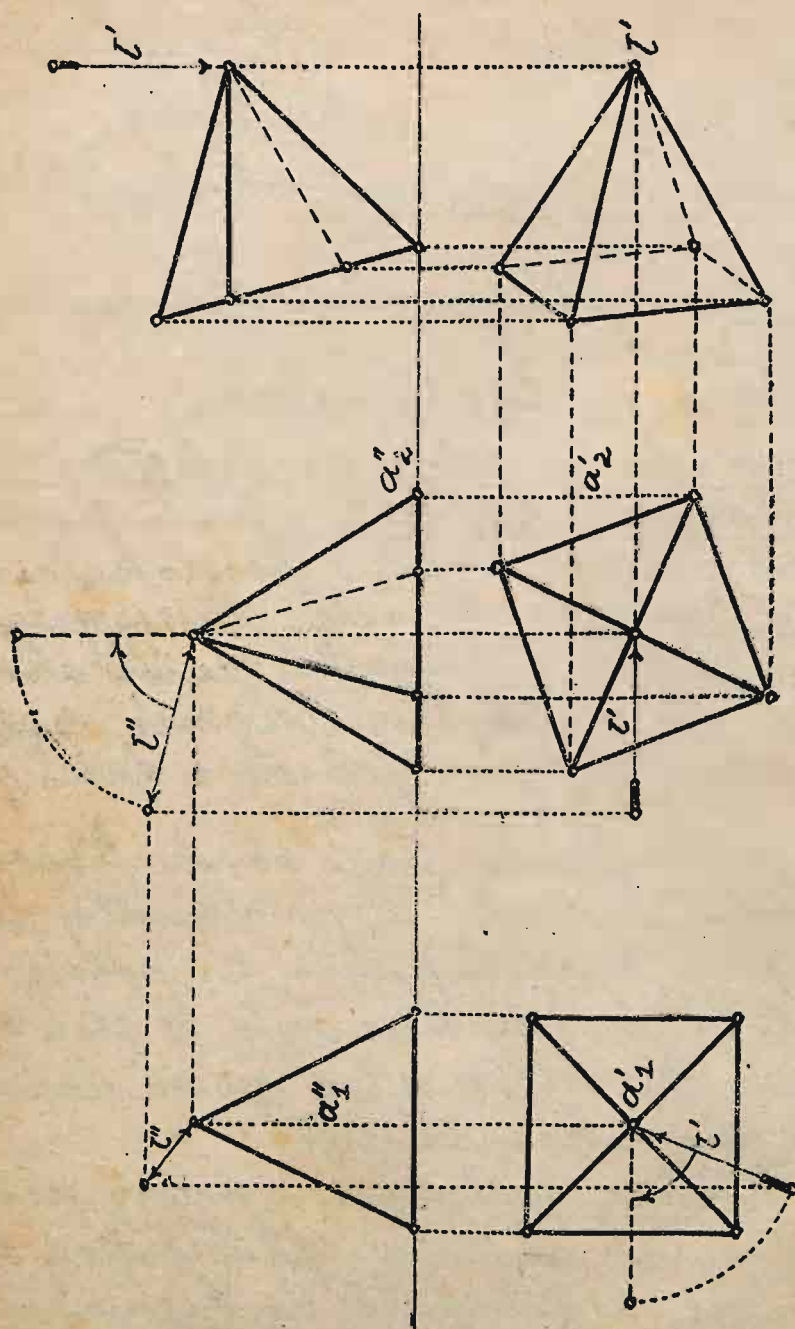
b) rzuty ukośne na tę płaszczyznę.

§ 60. Związek aksonometrii prostokątnej z metodą rzutów prostokątnych. Jeżeli figura jest dana za pomocą rzutów prostokątnych na dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny oraz dane są rzuty $l'l''$ kierunku rzutów aksonometrycznych, to moglibyśmy otrzymać rzut aksonometryczny tej figury jednym z dwóch sposobów:

1) albo za pomocą podwójnego obrotu figury, najpierw dookoła prostej a_1 prostopadłej do P_1 , a następnie dookoła prostej a_2 prostopadłej do P_2 , tak żeby kierunek l stał się prostopadły do P_1 , która w ten sposób stanie się płaszczyzną aksonometrii

2) albo za pomocą podwójnej zmiany płaszczyzn rzutów, tak aby nowa płaszczyzna rzutów P_4 stała się prostopadła do kierunku l , a więc aby została płaszczyzną aksonometrii.

Niech będzie np. dany czworoscian w rzutach prostokątnych oraz prosta $l'l''$ satywno z nim związana i wyznaczająca kierunek rzutu na płaszczyznę aksonometrii do tego kierunku prostopadłą. Na rys. 143 otrzymano



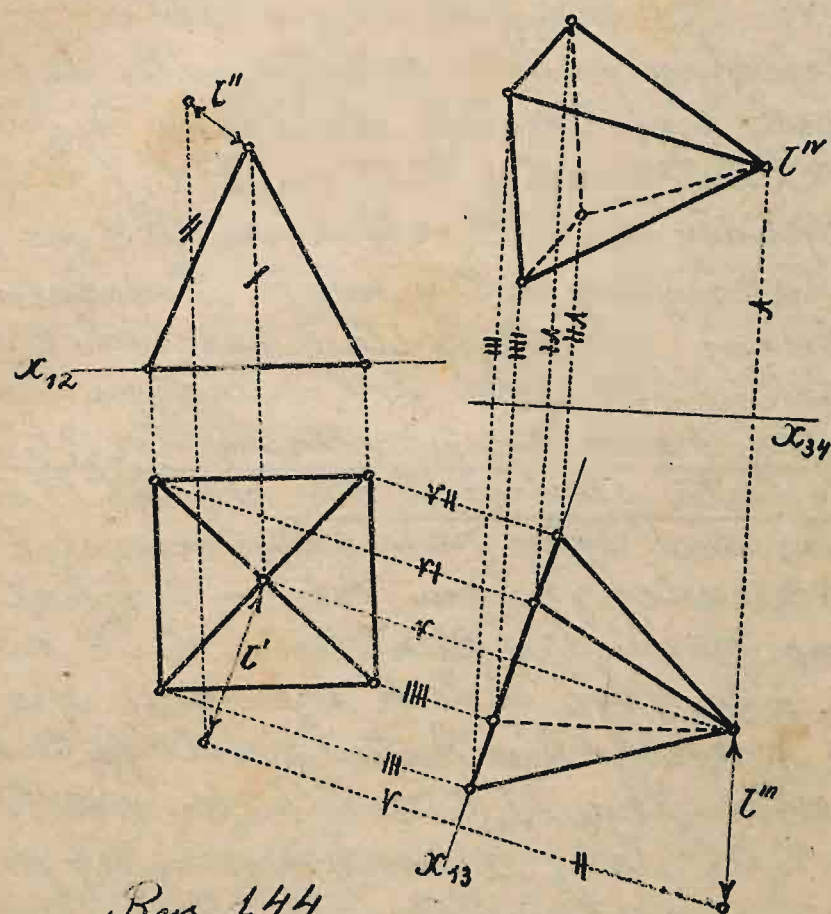
Rys. 143.

rant aksonometryczny ciwościanu za pomocą podwójnego obrotu, przytem dla więkšej przejrzystości wykreślono kolejne położenia figury obok siebie. To samo osiągnięto na rys. 144 za pomocą podwójnej zmiany płaszczyzn rantów. Jest oczywiste, że wyznaczenie tą drogą rantu

aksonometrycznego dowolnego wielościanu jest tym bardziej możelne, im więcej dany wielościan posiada wierzchołków. Okreśmy jednak niebawem, że wystarczy wyznaczyć ranty trzech wzajemnie prostopadłych osi z figurą sztywno związaną, aby wyznaczenie rantów wszystkich punktów figury dało się wykonać bezpośrednio.

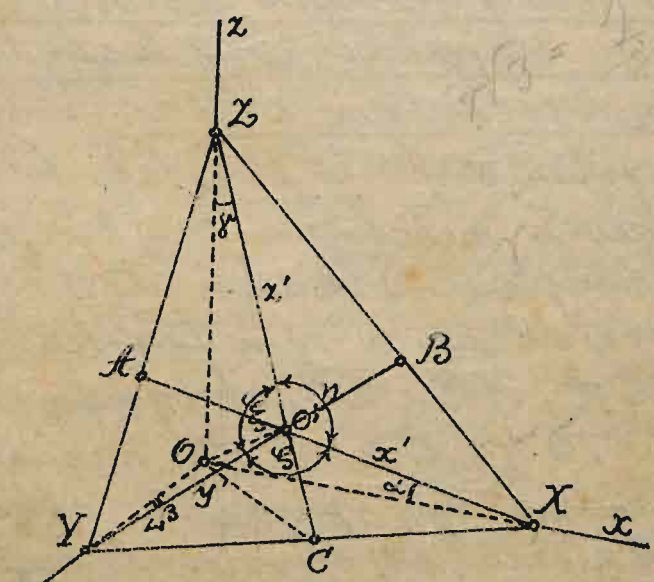
§ 61. Trójkąt śladów i rzuty osiowe. Niech

będzie układ
spółrzędnych
 $Oxyz$, do któ-
rego jest od-
niesiona da-
na figura.
Przetnijmy
trójscian
 $Oxyz$ pla-
szczyzną
aksonometriji
P w ten spo-
sób, aby ro-
staty prze-
ciaż przecię-
te dodatnie
półosie Ox ,
 Oy i Oz w
punktach X ,
 Y i Z . Trój-
kąt XYZ



Rys. 144.

nazywa się
trójkątem śladów.
Znajdźmy rzuty pro-
stokątne osi spół-
rzędnych na pla-
szczyznę P. W tym
celu z początku
układu O spuścimy
prostopadłą OO' na
płaszczyznę P i punkt
 O' potoczmy z X, Y i Z .



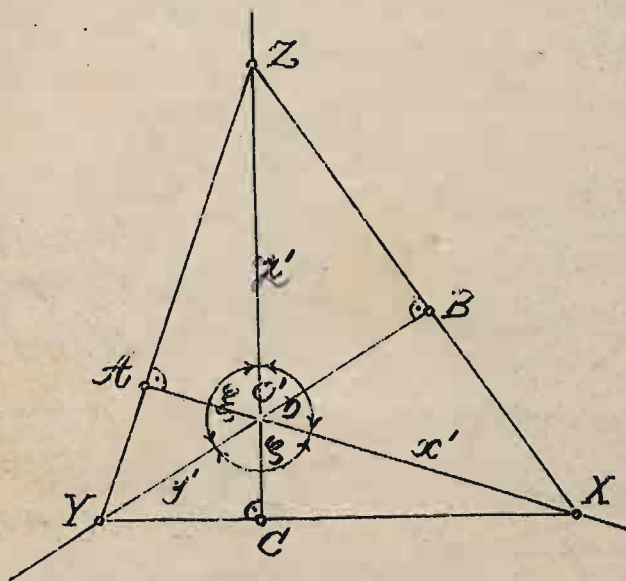
Rys. 145.

Łatwo okazać że proste $O'X$, $O'Y$ i $O'Z$ są prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta śladów XYZ . W samej rzeczy wiadomo, że rzut prostokątny prostej prostopadłej do płaszczyzny jest prostopadły do śladu tej płaszczyzny. Rzut prostej $O'Z$ na P t. j. $O'Z$ jest prostopadły do XY , albowiem XY jest śladem płaszczyzny α $O'y$ na P. Podobnie można okazać prostopadłość prostych $O'X$ i $O'Y$ do boków YZ wzgl. ZX . Innymi słowy, punkt O' jest punktem przecięcia trzech wysokości trójkąta śladów XYZ . Punkt O' na każdej wysokości leży pomiędzy wierzchołkiem, a przeciwległym mu bokiem trójkąta śladów: np. pomiędzy punktami Z i C na wysokości ZC , gdyż spodek wysokości spuszczonej z wierzchołka kąta prostego O na przeciwprostokątną ZC trójkąta prostokątnego ZOC leży zawsze pomiędzy pozostałymi wierzchołkami Z i C . Stąd wynika, że punkt O' jest punktem wewnętrznym trójkąta śladów; wszystkie trzy kąty tego trójkąta muszą być zatem ostre.

Niechaj teraz płaszczyzna P będzie płaszczyzną rysunku i niech na niej będzie dany ostrokątny trójkąt śladów XYZ .

(Rys. 146). Prowadząc w tym trójkącie trzy wysokości XA , YB i ZC , otrzymamy trzy rzuty osiowe $O'X$, $O'Y$ i $O'Z$. Kąty między nimi \angle , η i ξ muszą być rozwarte, albowiem są to spełnienia odpowiednich kątów trójkąta XYZ . Nawzajem, trzy półproste $O'x$, $O'y$ i $O'z$ wyprowadzone z jednego punktu

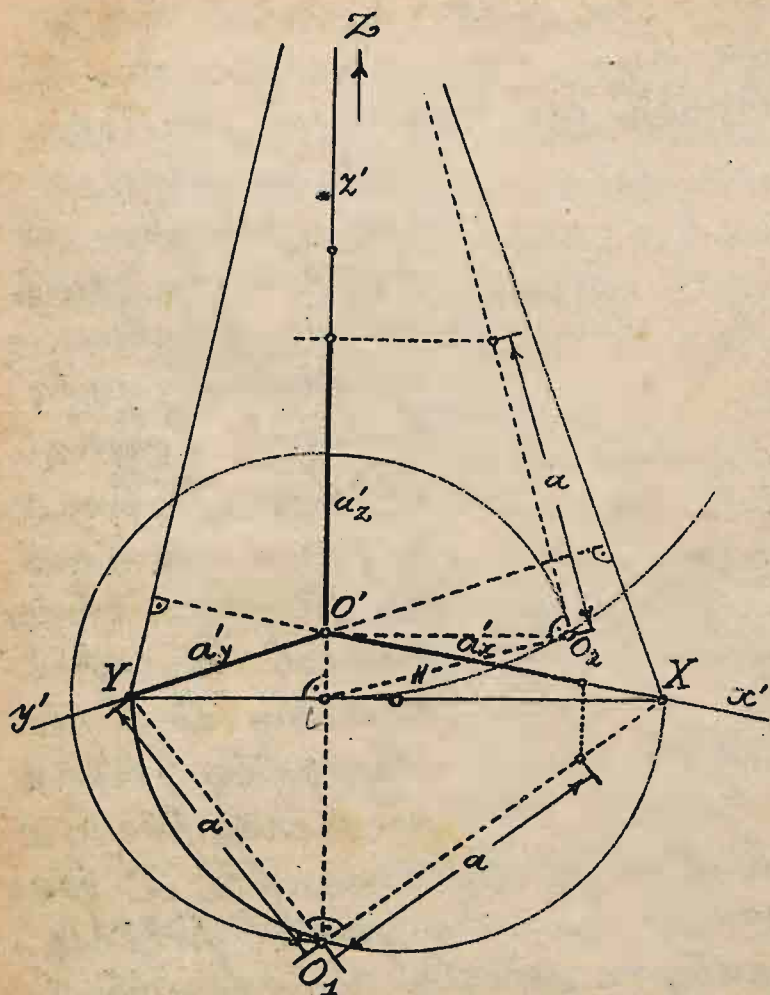
O*i* tworzące ze sobą jakiekolwiek kąty rozwarte, mogą być uważane za rzuty prostokątne trzech osi wzajemnie prostopad-
tych na płaszczy-
nę rysunku. Ma-
jąc bowiem rzuty
osiowe x i z i tworcą
wykreślamy jaki-
kolwiek trójkąt
śladów. W tym ce-
lu przez dowolnie
na prostej z' obrany
punkt E popro-
wadzimy do x pro-
stopadłą, która
przecina proste x'
i y' w punktach X wzgl. Y ; z punktu X opu-
szczamy prostopadłą na y' i punkt przecię-
cia tej prostopadłej z prostą z' nazwemy z ,
punktem Y . Ta ostatnia prosta YZ musi być
zresztą prostopadłą do x .



Rys. 146.

§ 62. Rzuty odcinka danej długości leżą-
cego na osiach współrzędnych. Dla wykreśle-
nia rzutu aksonometrycznego jakiegokolwiek
punktu, którego współrzędne są dane, trzeba
znać rzuty, tych współrzędnych, to jest trze-
ba wiedzieć, jakiemu skróceniu ulegają od-
cinki odmierzone na osiach. lub na prostych
do nich równoległych lub inaczej - jakier
odcinkom na rzutach osiowych równają się
rzuty jednostki długości lub wogóle odcinka da-
nej długości leżącego na osiach. W tym celu:
(Rys. 147) wykonamy kład kąta XOY na plany-

W tym celu :
(Rys. 147) wykonamy kład kąta XOY na plany-

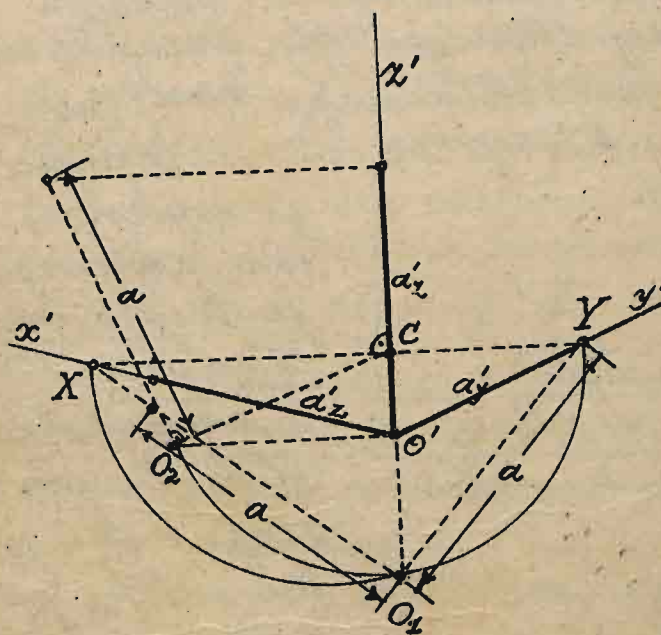


Rys. 147.

zne rysunku do-
kóta prostej XY .
Ponieważ kąt
 XOY jest prosty,
więc kład punk-
tu O będzie le-
żał na półokrę-
gu, zakreślonym
na boku XY jak
na średnicy. Po-
niważ punkt O
przy tym obrocie
będzie się poru-
szał w płaszczy-
źnie prostopadłej
do XY , więc je-
go rzut O' będzie
się poruszał po
linii prostopadłej
do XY . Punkt O_1
znajdziemy więc
w przecięciu pół-

okręgu XY z prostopadłą spuszczoną z O' na
 XY . Jeżeli na ramionach O_1X i O_1Y kąta pro-
stego O_1 odmierzymy odcinek danej długości a
równy np. O_1Y i obrócimy trójkąt XOY dokóta
 XY z powrotem na dawne miejsce, to otrzy-
mamy na rzutach osiowych rzuty odcinka
 a : $a'x$ i $a'y$. Aby otrzymać rzut tego samego od-
cinka na rzucie osiowym z' , można wyko-
nać kład trójkąta ZOX dokóta ZX lub
lepiej kład trójkąta ZOC dokóta ZC .
Ponieważ kąt ZOC jest, 90° , przeto kład

punktu O (oznaczonego przez O_2) znajdziemy w przecięciu półokręgu zakreślonego na ZC jako na średnicy z prostopadłą do ZC wystawioną w punkcie O' . Na kładzie osi OZ , t.j. na prostej O_2Z odmierzamy odcinek a , poczym powracamy z trójkątem ZOC na dawne miejsce. W ten sposób na rzutach osiowych $O'x$, $O'y$ i $O'z$ otrzymujemy trzy odcinki a_x , a_y i a_z , które są rzutami tego samego odcinka a , położonego bądź to na osi x , bądź na osi y , bądź wreszcie na osi z . Ponieważ kąt wychylenia osi x tworzy bardzo mały kąt z płaszczyzną aksonometrii ($\gamma \leq 20^\circ$), wskutek czego trójkąt śladów jest bardzo wydłużony i wierzchołek Z znajduje się poza granicami rysunku, więc dla wykreślenia odcinka a_z korzystamy z tego, że odcinki CO_1 i CO_2 , jako kłady tego samego odcinka CO , są równe. Z punktu C promieniem CO_1 zakreślamy łuk kóta do

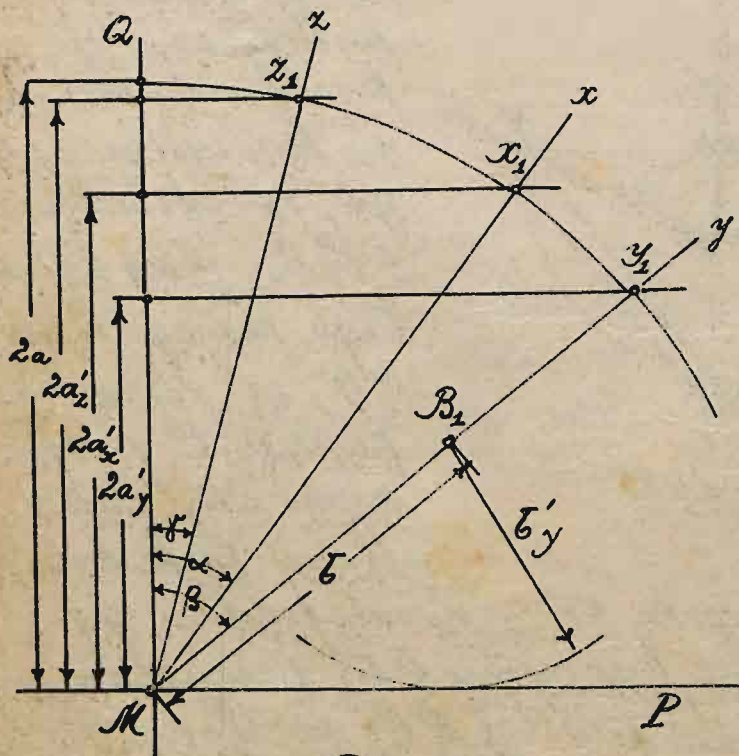


Rys. 148.

przecięcia z prostą $O'O_2$ prostopadłą do x' w punkcie O_2 ; tacyśmy CO_2 i wystawiamy w punkcie C do prostej CO_2 prostopadłą, na której odmierzamy a , poczym postępujemy jak

poprzednio. Bok XY trójkąta śladów może być poprowadzony również powyżej punktu O' (Rys. 148); jeżeli punkt O wyobrażamy sobie przed płaszczyzną aksonometrii, to w pierwszym przypadku płaszczyzna XOY widzimy z dołu, w drugim zaś z góry; rzeczy mają się przeciwnie, jeżeli punkt O wyobrażamy sobie za płaszczyzną aksonometrii.

§ 63. Podziatka katowa. Mając odcinki a'_x , a'_y i a'_z wraz z odcinkiem a , moglibyśmy wykreślić trzy podziatki osiowe obok podziatki oryginalnej i z ich pomocą moglibyśmy odmierzać na odpowiednim rzucie osiowym rzut odcinka danej długości. Aby uniknąć możnego i zawsze niedokładnego kreślenia podziatki możemy korzystać z następującego wykreślenia, zwanego podziatką katową (Rys. 149).

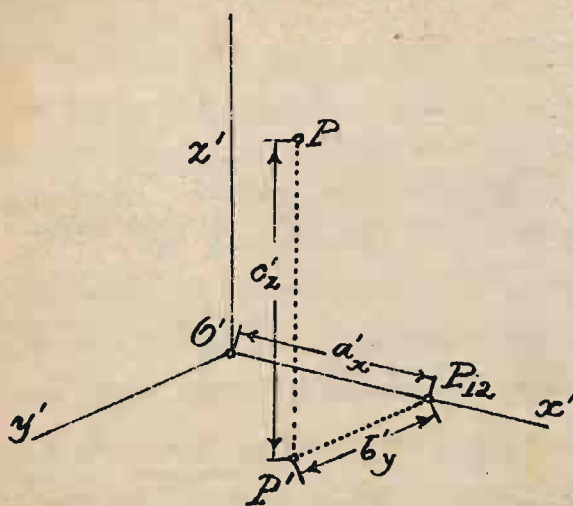


Rys. 149

go wykreślenia, zwanego podziatką katową (Rys. 149).
L. wierzchołka
M kąta prostego PKA jako środka promieniem równym odcinkowi a lub jego wielokrotności (w naszym przykładzie $2a$) zakreślamy ćwierć okręgu.

Na jednym z ramion kąta prostego, np. na MA odmierzamy odcinki a'_x , a'_y i a'_z lub ich wielokrotności (u nas $2a'_x$, $2a'_y$ i $2a'_z$) prociem z końców tych odcinków prowadzimy równoległe do drugiego ramienia kąta prostego, otrzymując w przecięciu z okręgiem punkty X_1 , Y_1 i Z_1 ; wreszcie łączymy te punkty z wierzchołkiem kąta prostego. Kąty $\angle MX_1$, $\angle MY_1$ i $\angle MZ_1$ są to kąty α , β i γ , które osie współrzędnych OX , OY i OZ tworzą ze swymi rzutami $O'X$, $O'Y$ i $O'Z$ na płaszczyźnie aksonometrii. Aby znaleźć rzut jakiegokolwiek danego odcinka b leżącego na jednej z osi, np. na y , odmierzamy ten odcinek na promieniu MY_1 od punktu M , prociem znajdujemy odległość końca tego odcinka B_1 od ramienia MP , co da się uskutecznić bez prowadzenia jakiegokolwiek linii, za pomocą cyrkla, którego jedno ostrze, pozostaje utkwione w punkcie B_1 , drugie zaś zatacza łuk styczny do ramienia MP .

§ 64. Wykreślenie aksonometrycznego rzutu punktu, którego współrzędne są dane. Aby znaleźć rzut aksonometryczny punktu P , którego współrzędne a , b i c są dane, znajdujemy w powyżej wskazany sposób ich rzuty a'_x , b'_y i c'_z , prociem na rzucie wionym x' odmierzamy od punktu O' odcinek $O'P_{12} = a'_x$, na równoległej do y' od punktu P_{12} odmierzamy $P_{12}P' = b'_y$, wreszcie na równoległej do z' z punktu P' wyprowadzonej odmierzamy odcinek $P'P = c'_z$ (Rys 150). W ten sposób otrzymujemy punkt P , który jest rzutem aksonometrycznym punktu przestrzeni tą samą literą oznaczonego.



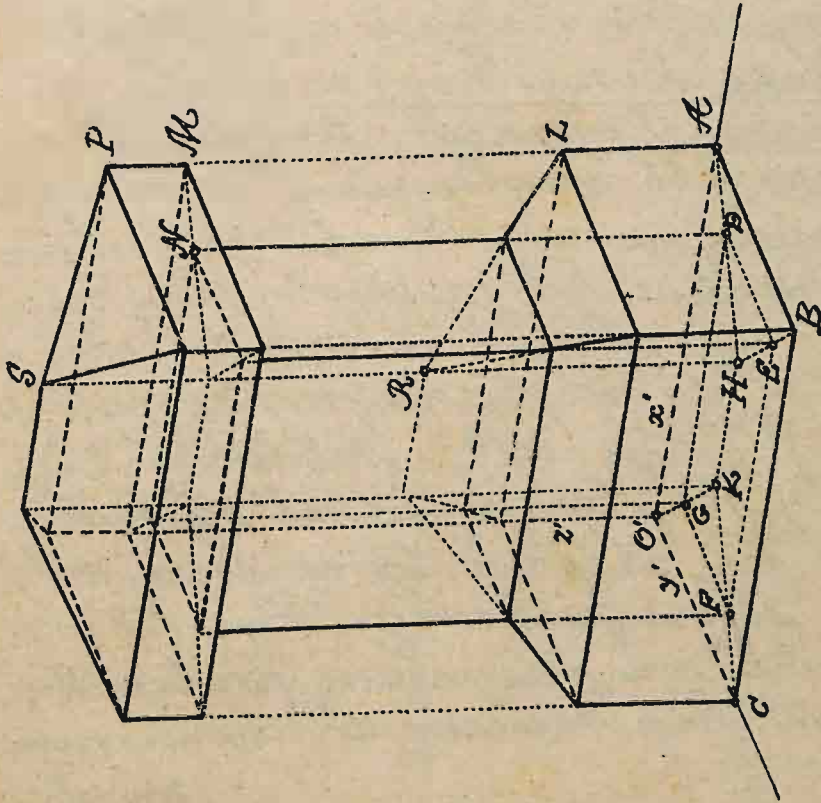
Rys. 150.

Nawracam, jeżeli są dane rzuty osiowe x' , y' i z' oraz rzuty aksjonometryczne P i P' punktów temi samymi literami oznaczonych, to można znaleźć współrzędne punktu P . W samej rzeczy, wykreślimy na zasadzie §§ 61, 62 i 63 podziatkę kątową, poczyniwszy z punktu P' poprowadzimy równoległą do y' do przecięcia z x' w punkcie P_{12} i wyznaczmy za pomocą podziatki kątowej prawdziwe długości współrzędnych a , b i c na podstawie ich rzutów $a' = O'P_{12}$, $b' = P_{12}P'$ i $c' = P'P$. W ten sposób, gdy dane są rzuty osiowe, to rzuty aksjonometryczne punktu P i jego rzutu P' na jedną z płaszczyzn współrzędnych (np. na xy) wyznaczają położenie punktu P w przestrzeni.

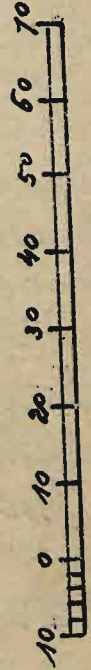
§ 65. Wykreślenie rzutu aksjonometrycznego figury, której rzuty prostokątne są dane.

Wykreślimy w podziatce 1:10 rzut aksjonometryczny słupa kamiennego, którego rzuty prostokątne i wymiary są dane. (Rys. 151) Za początek układu współrzędnych obierzmy lewy tylny dolny wierzchołek $O'O''$ za osie współrzędnych - trzy krawędzie z tego wierzchołka wychodzące: $x'x''$, $y'y''$, $z'z''$. Obierzmy nadto trzy rzuty osiowe, np. te, które wzięliśmy

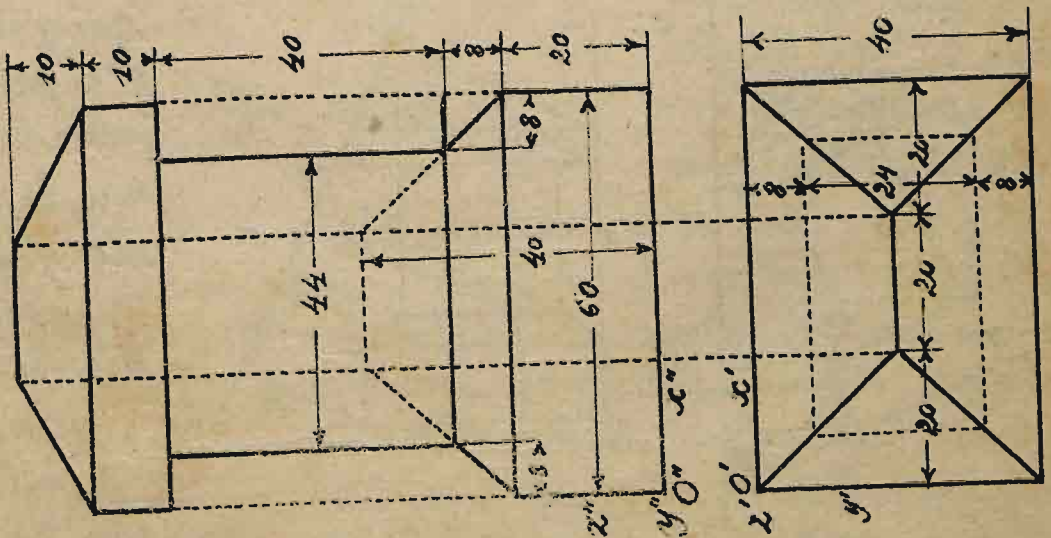
na Rys. 147 i wykreślmy odpowiednią podziatkę katową (Rys. 149), poczym przystąpmy do kreślenia rzutu aksonometrycznego figury, zaczynając od odwzorowania w płaszczyźnie xy rzutu poziomego. Z punktów



Podziatka 1:10.

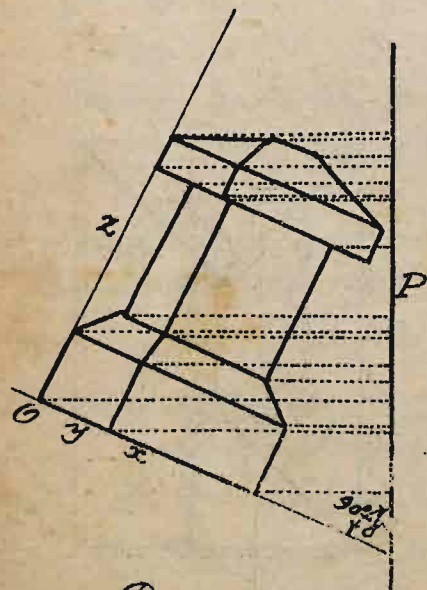


Rys. 151.

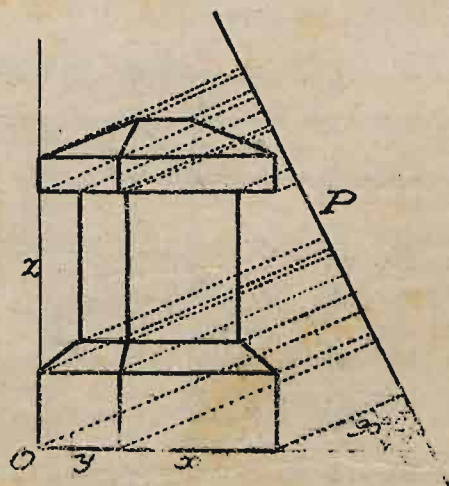


$O', H, B, C, D, E, F, G, H$ i K wystawiamy równoległe do z' i odmierzamy na nich za pomocą podziałki katowej zredukowane wysokości punktów L, M, N, P, R i S , a następnie uzupełniamy rysunek na tej zasadzie, że odcinki równe i równoległe pozostają w rzucie aksonometrycznym równe i równoległe.

§ 66. Warunki korzystnego wrażenia rysunku aksonometrycznego. Przeglądając się rysunkowi § 65 spostrzegamy pewien paradoks. Płaszczyzna aksonometrii jest płaszczyzną rysunku, którą wyobrażamy sobie pionową; oś z i wszystkie linie do niej równoległe są do tej płaszczyzny nachylone pod kątem φ (Rys. 149). Należałoby więc oczekiwać, że słup ten wydawać się będzie nachylonym ku widzowi, tymczasem robi on wrażenie słupa pionowego. Rys 152 przedstawia w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do P ten sam słup rzucony aksonometrycznie



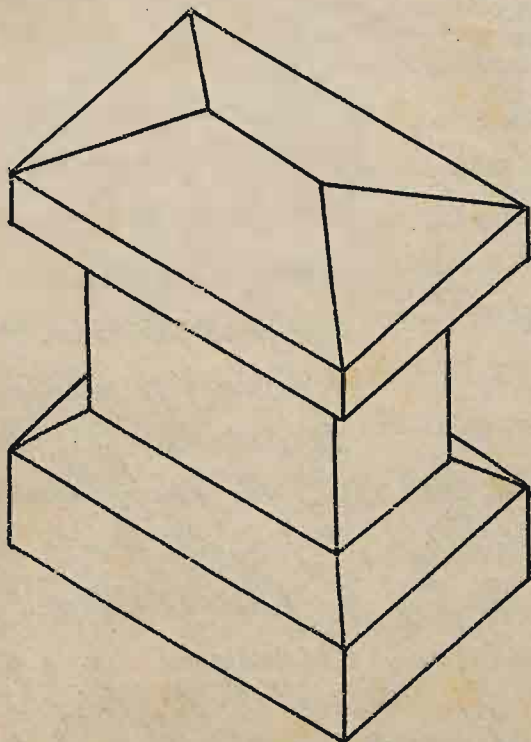
Rys. 152.



Rys. 153.

na płaszczyznę P w przypuszczeniu, że płaszczyzna ta jest pionową; Rys. 153 przedstawia ten sam słup

w przypuszczeniu, że os. z jest pionową. Ponieważ rys. 153 różni się od rys. 152 tylko swym protożeniem, wnosimy stąd, że ze stanowiska geometrycznego obydwie interpretacje są równouprawnione. Jeżeli z tych dwóch interpretacji wybieramy instyktownie drugą, to przyczyna musi być

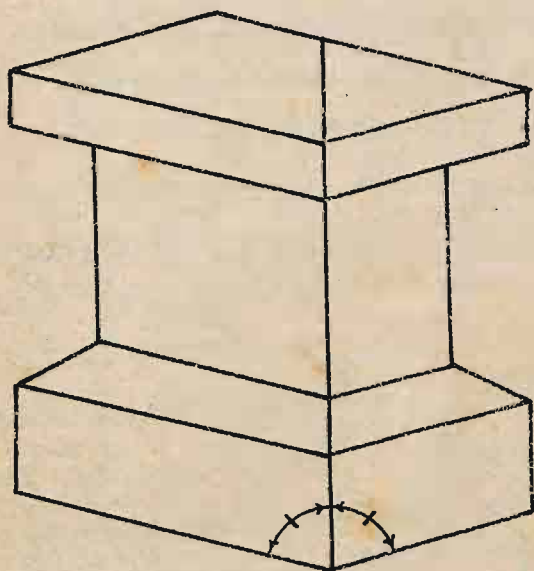


Rys. 154.

psychologicznej natury; przyzwyczailiśmy się bowiem przedmioty takie jak stupy kamienne widzieć najczęściej w protożeniu pionowym. Gdyby wszakże kąt φ był dość duży, to rysunek aksonometryczny tego samego stupa wywołałby wrażenie przechylenia ku widzowi, jak to widzimy na rysunku 154, gdzie $\varphi = 48^\circ$; to ma-

czy się to tem, że przedmioty tego rodzaju rzadko obserwujemy ze znaczącej wysokości. Aby wykreślony aksonometrycznie przedmiot nie sprawiał wrażenia przechyłego, należy tak obrócić rzuty osiowe, aby kąt φ nie był większy od 20° , a więc $\sin \varphi$ nie większy od $\frac{1}{3}$, t.j. CO_1 przynajmniej 3 razy większe od CO' (Rys. 147).

Rys. 155.



Drugim warunkiem korzystnego wrócenia rysunku aksonometrycznego jest ten, aby żadna z płaszczyzn figury nie była prostopadła do płaszczyzny aksonometrii. Taki niekorzystny efekt powstaje w szczególności wtedy, gdy płaszczyzny dwusieczne kątów dwusiecznych między pionowymi ścianami figury, czy-

li t. zw. płaszczyzny uciosu, są prostopadłe do płaszczyzny aksonometrii, t. j. gdy kąty α i β , które tworzą osie x i y z płaszczyzną aksonometrii (t. j. z rzutami osiowymi x' i y') są równe (Rys. 145). Z równości kątów α i β wynika, że stosunki skróceń odcinków równoległych do x i y są równe; łatwo okazać, że wtedy x' dzieli kąt między x' i y' na połowy, t. j. że trójkąt śladów jest równoramienny. W samej rzeczy, równość $\alpha = \beta$ pociąga za sobą równość $O'X = O'Y$, tak że trójkąt $XO'Y$ jest równoramienny i jego wysokość $O'C$ jest zarazem dwusieczną i środkową, skąd znowu wynika, że w trójkącie śladów XYZ wysokość ZE jest środkową, tak że ten trójkąt jest równoramienny.

Na rys. 155 wykreślono słup kamienny w rzucie t. zw. dimetrycznym ($\alpha = \beta$); ponieważ płaszczyzna uciosu jest prostopadła do P , więc wszystkie krawędzie w tej płaszczyźnie leżące mają swoje rzuty aksjonometryczne na śladzie tej płaszczyzny, co utrudnia naleyte zrozumienie rysunku.

§ 67. Rzut izometryczny. Obydwie wyżej przytoczone wady: zbytne nachylenie figury do płaszczyzny aksjonometri ($\alpha = \beta = \gamma = 35^\circ$) i prostopadłość płaszczyzny uciosu do płaszczyzny aksjonometri posiada rzut izometryczny. Wady te są jednak skupione tak ważnemi zaletami, że pomimo to rzut izometryczny ma ważne w praktyce znaczenie.

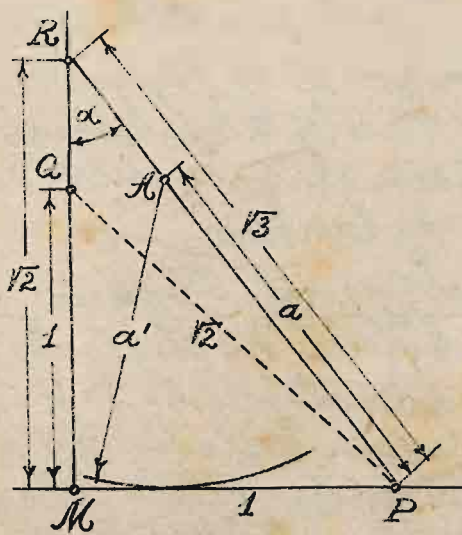
Aksjonometria nazywa się rzutem izometrycznym, gdy płaszczyzna aksjonometri P jest nachylona do wszystkich trzech osi pod tym samym kątem $\alpha = \beta = \gamma$ (Rys. 145). Trójkąt śladów jest równobocznym, kąty między rzutami osiowymi są równe $\varepsilon = \eta = \zeta = 120^\circ$. Kąty $\alpha = \beta = \gamma$ mogą być łatwo obliczone. Przyjmąwszy za jednostkę długości bok $X'Y = Y'Z = Z'X$ trójkąta śladów mamy z trójkąta $X'YZ$ (Rys. 145): $O'X = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

a z trójkąta OXY :

$$OX = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ stąd}$$

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{O'X}{OX} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Podziałka kątowa redukuje się do jednego tylko kąta α , który wykreślamy w sposób następujący (Rys. 156). Na ramionach ką-



Rys. 156.

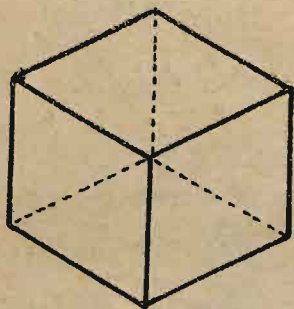
ta prostego PM odmierzamy dowolny odcinek $MP = MQ$, który możemy np. uważać za bok trójkąta śladów, t. j. za jednostkę długości. Wtedy przeciwprostokątna $PQ = \sqrt{2}$; odmierzając $MR = PQ = \sqrt{2}$ na MQ od punktu M znajdziemy: $PR = \sqrt{3}$; kąt $MRP = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \alpha$. Chcąc znaleźć rzut izometryczny a'

odcinka a , łączącego na którejkolwiek z osi, odmierzamy go od punktu P na PR i znajdujemy odległość jego końca A od MP . - Jeżeli jak to najczęściej bywa, celem rysunku aksonometrycznego jest jedynie poznanie względnego położenia części figury i na podziatce nic nam nie zależy, to odmierzamy na wszystkich trzech rzutach osiowych współrzędne nie zredukowane, przez co kształt figury nie ulegnie zmianie, a tylko jej rozmiary zostaną powiększone w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ względem rozmiarów, którebyśmy otrzymali redukując wszystkie współrzędne. Wykreślenie odbywa się szerególnie łatwo, jeżeli nie kreślić z góry rzutów osiowych, posługujemy się rąbryną i ekierką o kątach 90° , 60° i 30° w ten sposób, że większa przyprostokątna ekierki śli-

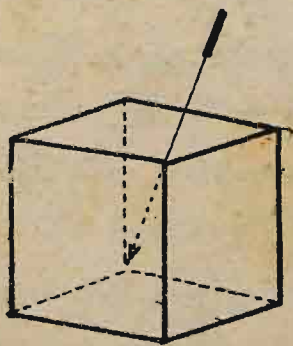
ga się po brzegu rajszyzny; druga przyprosto-
katna i przeciwprostokątna ekierki, obracanej
na obie swe strony, dają kierunki spółrzed-
nych, na których odmierzamy nie zredukowa-
ne ich długości.

Z tego, co powiedziano w § 66 wynika, że
należy unikać rzutów izometrycznych ta-
kich wielościanów, których ściany lub płaszczy-
zny przekątne statyby się w tym rzucie pro-
stopadłe do płaszczyzny aksonometrii.

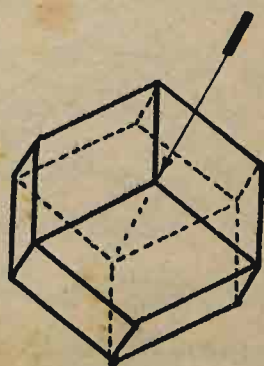
Następujący przykład jest w tym względzie
bardzo pouczający. Rys. 157 jest rzutem iso-
metrycznym dwóch zgoda różnych figur: sze-
ścianu i dwunastościanu rombowego, których
rzuty trimetryczne wykreślone są obok na ry-
sunk. 158 i 159. Rzut izometryczny w podob-
nych wypadkach jest oczywiście niewskazany.



Rys. 157.



R. 158.



R. 159.

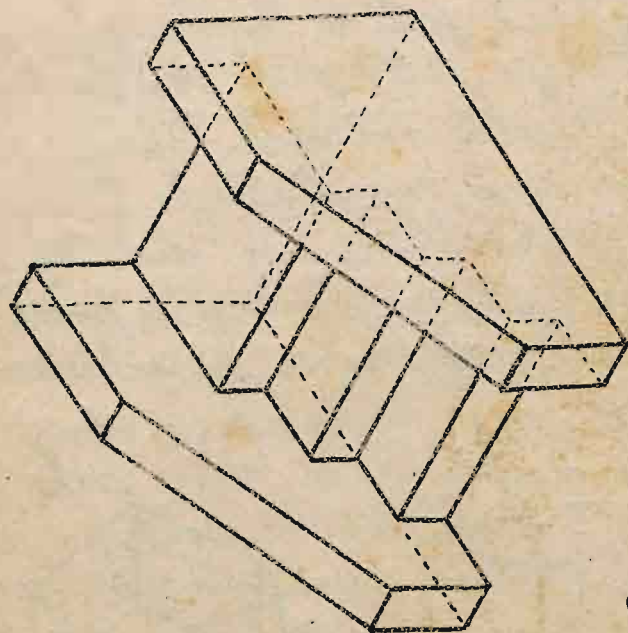
Gdy jednak figura nie posiada takich ścian lub
ważnych płaszczyzn uciosu, które w rzucie iso-
metrycznym statyby się prostopadłe do płaszczy-
zny aksonometrii, a przedmiot, który rysujemy,

nie należą do tych, które rzadko oglądamy z góry, to rzut izometryczny może sprawić niełe wrażenie. Na rys. 160 wykreślono nap. w rzucie izometrycznym schodki stożone z trzech stopni, do których z obu stron przylegają dwie ściany.

§ 68. Aksonometria prostokątna jako metoda konstrukcyjna. Dotychczasowe wywody miały na celu od-

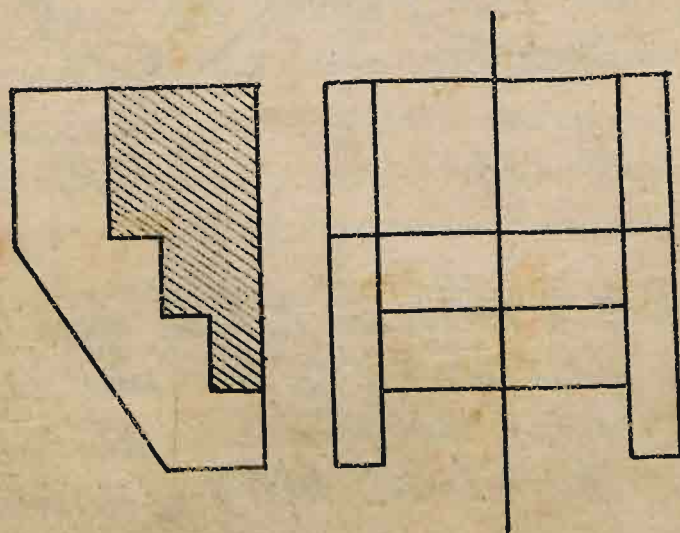
wzorowanie aksonometryczne takich jedynie figur, których rzuty prostokątne były dane. Obecnie wypada nam rozważyć czy aksonometria prostokątna nadaje się do bezpośredniego odwzorowania figur i do rozwiązywania zagadnień tych figur dotyczących.

W tym celu trzeba rozstrzygnąć dwie sprawy: 1) odworo-



Rys. 160.

Podziałka $\sqrt{3} : 5\sqrt{2} = 1 : 4,08$.



Podziałka 1:5

wania elementów geometrycznych i 2) rozwią-
zania najprostszych zagadnień, dotyczących
tych elementów.

W § 64 zauważyliśmy, że położenie punktu
 P w przestrzeni jest wyznaczone, jeżeli dane są
rzutny osiowe $x'y'$ i x' oraz rzut aksometrycz-
ny punktu P i jego rzutu P' na płaszczyznę
 xy . W ten sposób para punktów (P_a, P'_a) , le-
żących na prostej równoległej do x' , wyznacza
punkt P równie dobrze, jak w metodzie rzu-
tów prostokątnych para punktów (P, P'') leżą-
cych na prostopadłej do osi x . Idę prostą p
przechodzi przez punkt P , to jej rzut na do-
wolną płaszczyznę przechodzi przez rzut punk-
tu. Prosta p , łącząca dwa punkty (P_a, P'_a) i
 (Q_a, Q'_a) będzie zatem wyznaczona przez dwie
proste: $p_a \equiv P_a Q_a$ i $p'_a \equiv P'_a Q'_a$ tak samo do-
brze jak w metodzie rzutów prostokątnych,
była wyznaczona przez dwie proste $p \equiv P Q$
i $p'' \equiv P'' Q''$. Proste równoległe p i q będą od-
wzorowane przez dwie pary prostych równo-
ległych $p_a \parallel q_a$ i $p'_a \parallel q'_a$; proste przecinające
się r i s będą odwzorowane przez dwie pary
prostych r_a, s_a i r'_a, s'_a , przecinających się
w punktach, leżących na równoległej do x' .
Takie dwie proste równoległe lub przecinają-
ce się wyznaczają płaszczyznę pq wzgl. rs .
Prosta m leży w płaszczyźnie pq , jeżeli prze-
cina zarówno prostą p jak prostą q w punk-
cie różnym od pq . Zarówno sposób odwzorowa-
nia punktów, prostych i płaszczyzn jak i wa-
runki, aby jedne należały do drugich są za-

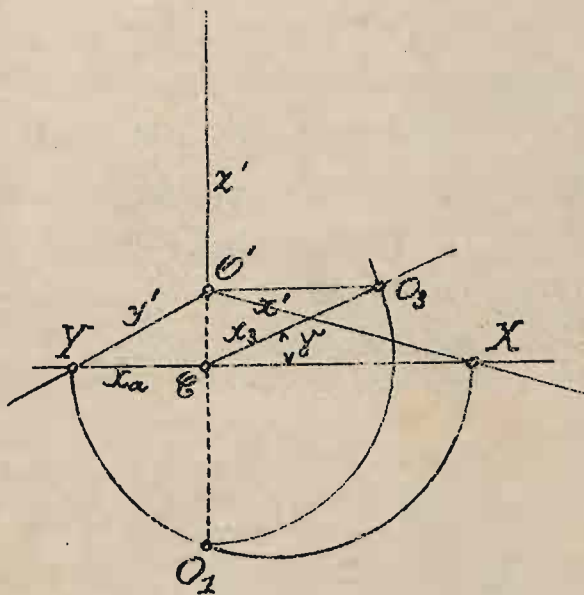
tym w aksjonometrii prostokątnej te same, co w rzutach prostokątnych na dwie płaszczyzny prostopadłe. Stąd wynika:

Wszystkie zadania dotyczące przynależności punktów, prostych i płaszczyzn, czyli t. zw. zagadnienia położenia, rozwiązać się dadzą w aksjonometrii prostokątnej za pomocą tych samych prostych i punktów, które były potrzebne do rozwiązania tych zadań metodą rzutów prostokątnych na dwie płaszczyzny prostopadłe.

Nie należy zapominać, że znaczenie punktów P_a i P'_a i prostych p_a i p'_a jest zgoła odmiennie od znaczenia punktów P' i P'' i prostych p' i p'' . Tak np. punkt P lub prosta p , których rzuty prostokątne $P'P''$ wzgl. $p'p''$ były zjednoczone, leżały w drugiej płaszczyźnie dwusiecznej D_2 , która tym sposobem była płaszczyzną spółrztową (§6). W aksjonometrii prostokątnej punkt P i prosta p , których rzuty P_a i P'_a wzgl. p_a i p'_a są zjednoczone, leżą w płaszczyźnie xy , która za tym jest tutaj płaszczyzną spółrztową.

Jeżeli dany jest układ osi x, y, z za pomocą swych rzutów $x'y'z'$ oraz para punktów P_a i P'_a , wyznaczających w odniesieniu do tego układu punkt przestrzeni P , to układ xyz można zastąpić innym jakimkolwiek układem $x^x y^x z^x$, w którym osi x^x i y^x są jakimkolwiek dwiema prostopadłymi, leżącymi w płaszczyźnie xy , a oś z^x jest równoległa do z , wyprowadzona z punktu $O^x \equiv x^x y^x$.

Tę taką zamianę układu xyz na układ



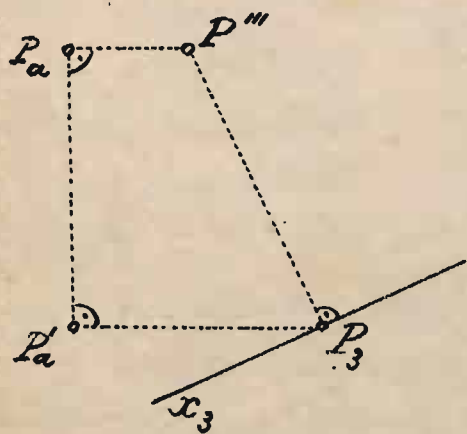
Rys. 161.

$x'y'x'$ zostają nie-
zmienione dwie re-
czy: bok $x_a \equiv XY$
trójkąta śladów
 XYZ , t.j. prosta, we-
dług której pla-
szczyzna $xy \equiv x'y'x' \equiv$
 P_1 przecina płaszczy-
znę aksonometrii P ,
oraz kąt γ tych dwóch
płaszczyzn. Układ
wzrusów osiowych $x'y'x'$
dogodnie jest pręto
zastąpić przez pro-
stą x_a i kąt γ (Rys.

161), przytem, podobnie jak w rzutach prosto-
kątnych, przesunięcie równoległe osi x nie
wpływało na względne położenie punktów i
prostych odniesianych do płaszczyzn rzutów
 P_1 i P_2 , - tak tutaj przemieszczenie równoległe
osi x_a nie wpłynie również na względne po-
łożenie punktów i prostych, aksonometrycznie
odwzorowanych. Dzięki temu bywa zazwyczaj
dogodnym uważać za dany jedynie kierunek
osi x_a , a jej położenie porzucić dopóty nie-
określonym, dopóki względy praktyczne nie
wskazują najdogodniejszego jej położenia.

Aksonometria będzie pręto wyznaczona przez
kierunki dwóch prostych x_a i x_3 , z których pierw-
sza jest śladem płaszczyzny $P_1 \equiv xy$ na płaszczy-
źnie aksonometrii P , a druga śladem tej sa-

mej płaszczyzny na płaszczyźnie P_3 prostopadłej do P_1 i do P po dokonanych kładzie płaszczyzny P_3 na P ; kąt tych dwóch prostych $= \gamma$. Ponieważ przez rzuty aksometryczne P_a i P'_a jakiegokolwiek punktu P kierunku prostej x_a jest wyznaczony ($x_a \perp P_a P'_a$), wystarcza więc, aby kierunek prostej x_3 był wyznaczony, aby rzuty aksometryczne jakiegokolwiek figury można było zastąpić przez jej rzuty prostokątne na płaszczyzny P_1 i P_3 .



Rys. 162.

W samej rzeczy, aby wyznaczyć rzuty prostokątne P_a i P'_a punktu P , gdy dane są jego rzuty aksometryczne P_a i P'_a (Rys. 162), prowadziemy przez punkty P_a i P'_a prostopadłe $P_a P'''$ i $P'_a P_3$ do prostej PP_3 t.j. do prostej $P_a P'_a$, która jest do niej równoległa, i w punkcie przecięcia P_3

prostej $P'_a P_3$ z prostą x_3 wystawiamy do niej prostopadłą, która przecina prostą $P_a P'''$ w punkcie P''' ; tak samo postąpimy z rzutami aksometrycznymi każdego innego punktu danej figury.

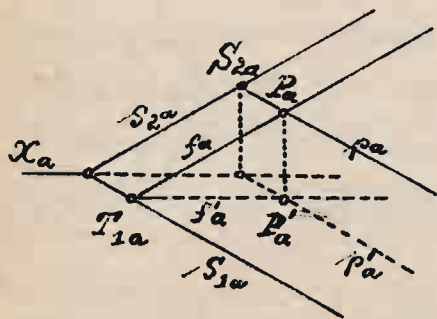
Zamiana rzutów aksometrycznych na prostokątne jest często wskazana w celu rozwiązania zadań miarowych. Jakkolwiek można podać sposoby bezpośrednie rozwiązania tych zadań, będąc jednak wogóle prościej wyzna-

czyć rzuty prostokątne figury lub jej części, rozwiązując zadanie w rzutach prostokątnych i powrócić do rzutów aksjonometrycznych, w ten sposób bowiem możemy się posługiwać zmianą płaszczyzn rzutów i metodą obrotów, które stanowią cechę wybitną metody rzutów prostokątnych (§ 55).

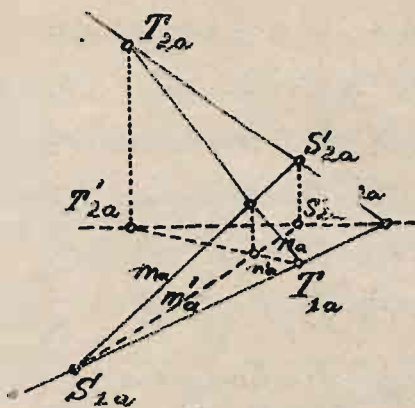
Zadania położenia atoli prościej będzie rozwiązywać bezpośrednio, widzieliśmy bowiem wyżej, że zadania te wymagają w obu metodach tych samych linii i punktów pomocniczych. Pozostaje nam podać kilka przykładów rozwiązania zadań pierwszego i drugiego typu.

§ 69. Zadania położenia. Podobnie jak w rzutach prostokątnych, prosta może być odwzorowana przez dwa jakiegokolwiek swoje punkty, a płaszczyzna przez dwie jakiegokolwiek swoje proste przecinające się lub równoległe. Wiele zadań dotyczących prostych i płaszczyzn da się rozwiązać szczególnie łatwo, jeżeli punktami wyznaczającymi prostą p będą jej punkty przecięcia S_1 i S_2 , a prostymi, wyznaczającymi płaszczyznę S proste jej przecięcia S_1 i S_2 z płaszczyzną P_1 i płaszczyzną P_2 do niej prostopadłą, a przez oś x przechodzącą. Rzuty aksjonometryczne S_{1a} i S_{2a} punktów S_1 i S_2 oraz rzuty aksjonometryczne S_{1a} i S_{2a} prostych S_1 i S_2 wyznaczają prostą p i płaszczyznę S w sposób równie prosty, jak ślady S_1 i S_2 wzgl. S_1 i S_2 w metodzie rzutów prostokątnych.

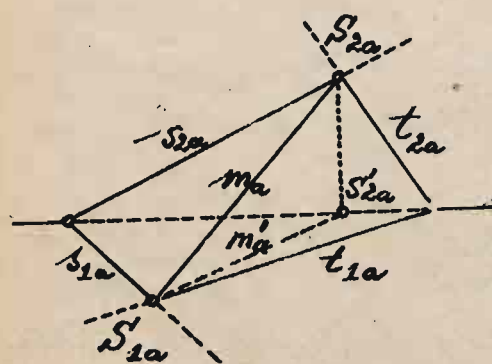
Kys. 163 przedstawia płaszczyznę S_{1a} S_{2a} wraz



Rys. 163.



Rys. 164.



Rys. 165.

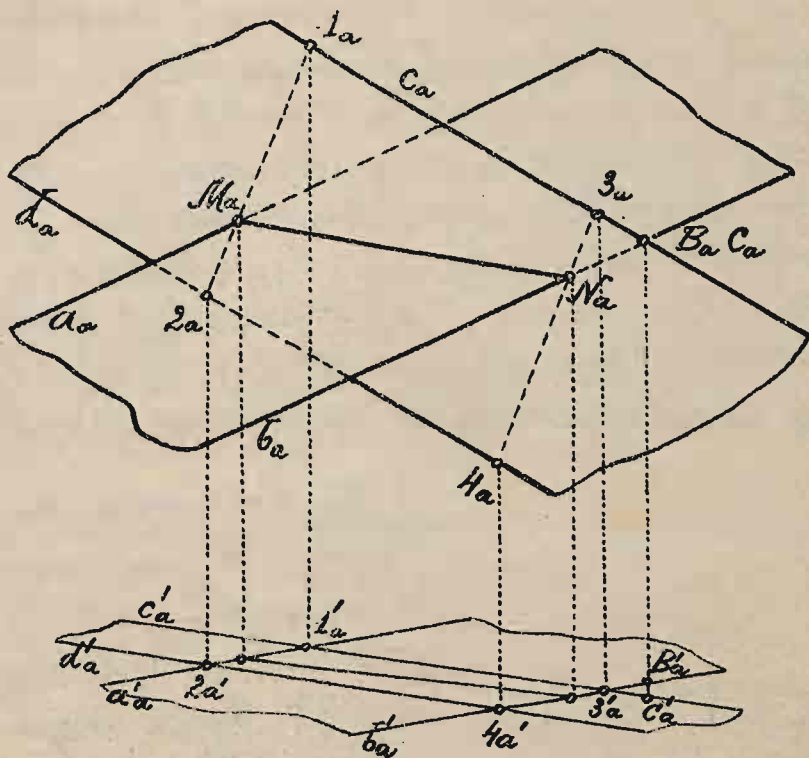
x leżącym na niej punktem P , którego rzut aksonometryczny P_a jest dany, a rzut P'_a jest wyznaczony za

pomocą jednej z dwóch prostych głównych p lub f .

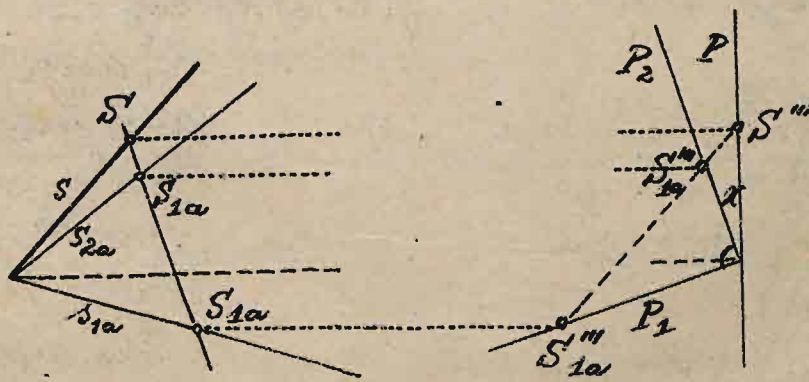
Rys. 164 przedstawia wyznaczenie rzutów s_{1a} i s_{2a} śladów s_1 i s_2 płaszczyzny, której dwie proste m i n są dane za pomocą rzutów m_a, m'_a i n_a, n'_a .

Rys. 165 przedstawia przecięcie dwóch płaszczyzn s_{1a} s_{2a} i t_{1a}, t_{2a} . Przykłady te wskazują, że rozwiązanie zadań położenia za pomocą elementów śladowych jest w aksonometrii prostsze, nawet niż w rzutach prostokątnych (Por. Rys. 48, 50, 52).

Rys. 166 przedstawia ostatnie z powyższych zadań rozwiązane bez pomocy elementów śladowych, t.j. w przypuszczeniu, że płaszczyzny S i T są dane za pomocą dwóch par prostych równoległych. Wykreślenie to nie różni się od wykreślenia podanego w § 45 dla rzutów prostokątnych.



Rys. 166.



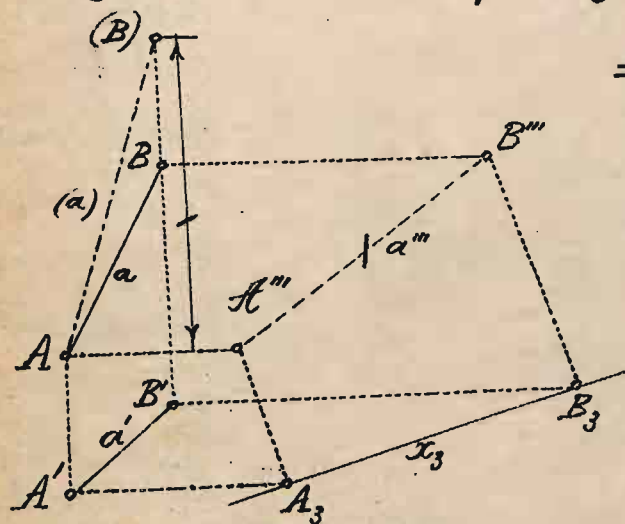
Rys. 167.

Ponieważ
 w aksono-
 metryj pro-
 stokątnej
 $P_1 = xy$ jest
 płaszczyzną
 spółrztową,
 więc dwa
 rzuty akso-
 nometryczne
 każdej figu-
 ry płaskiej
 są w powinowactwie, któ-
 rego kierun-
 kiem jest
 kierunek
 prostopadły
 do x_a (równoległy do x'),
 a oś rzut
 aksonome-
 tryczny s_{1a}
 śladu s_1 pła-
 szczyzny tej
 figury. Z po-
 winowactwa

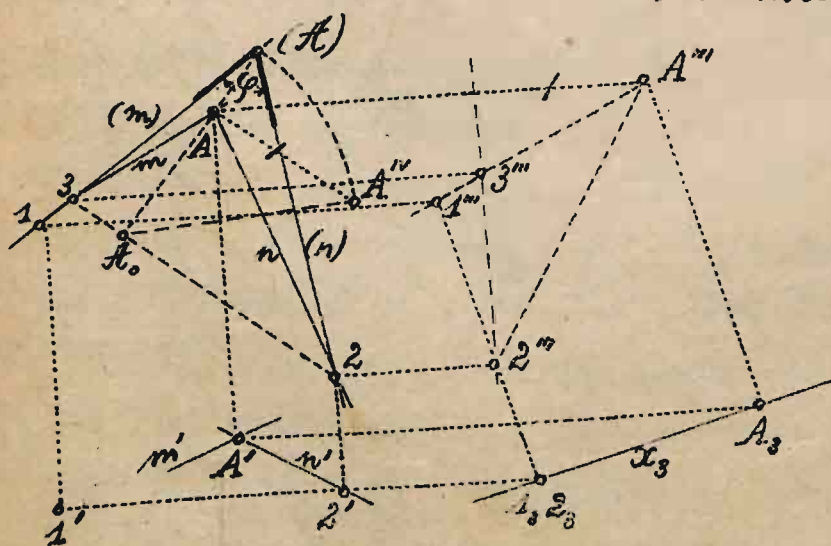
tego korzystamy ilekroć mamy wykreślić
 rzut aksonometryczny figury płaskiej, a zna-
 leliśmy albo mamy dany rzut aksonometryczny

jej rzutu na P_1 .

Korzystając z elementów śladowych należy się wystrzegać rozpowszechnionego błędu, który polega na mniemaniu, że punkt S_2 i prosta s_2 należą do płaszczyzny aksjonometrii. Aby usunąć w tym względzie wszelką niejasność, na rys. 167 wykreślono ślady $S_{1\alpha}$, $S_{2\alpha}$ i s prostej p , oraz ślady $S_{1\alpha}$, $S_{2\alpha}$ i s płaszczyzny S przez nią przechodzącej na płaszczyznach P_1, P_2 i P , postępując się rzutem prostej p na płaszczyznę P_3 .



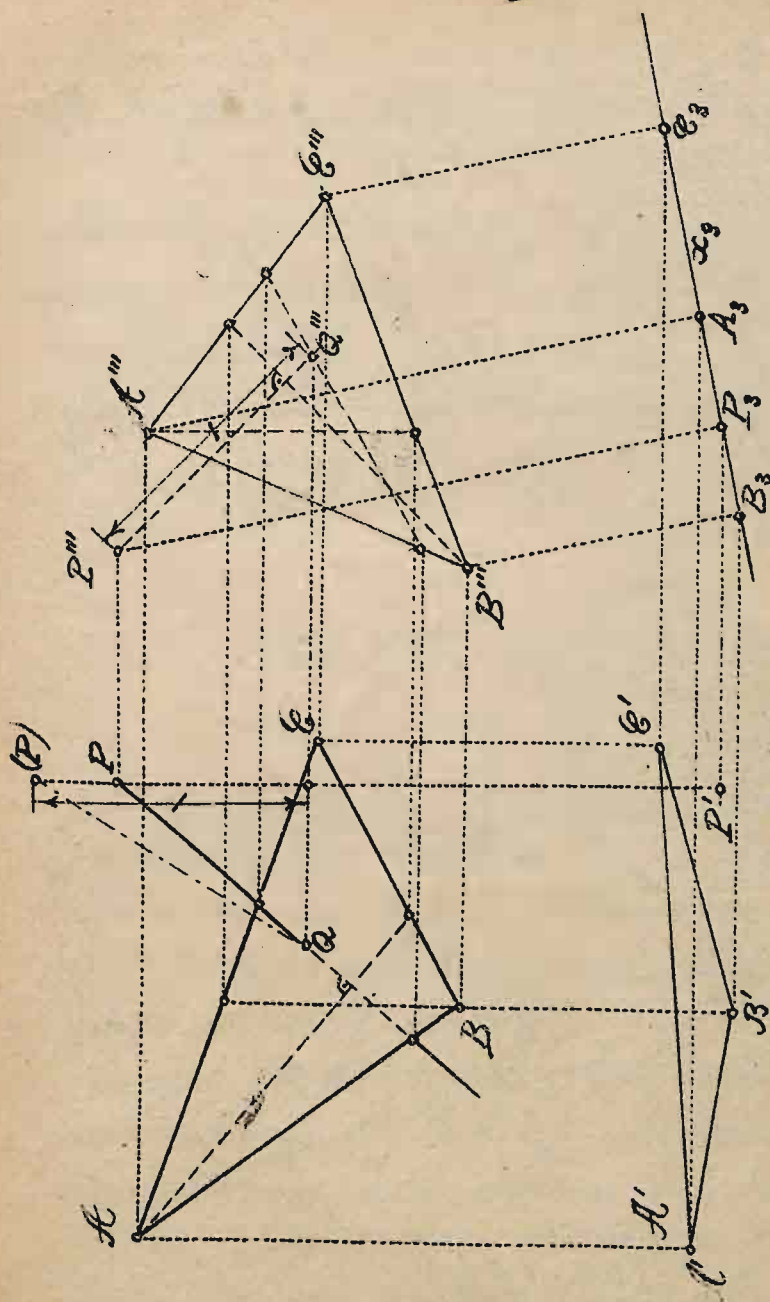
Rys. 168.



Rys. 169.

§ 70. Zadania miarowe. W zadaniach miarowych, jak to już zauważyliśmy w § 68, bywa najczęściej korzystnem zamienić rzuty aksjonometryczne na rzuty prostokątne. Tak postępujemy nap. w zadaniach, dotyczą-

cych praw-
dziwej wiel-
kości odcin-
ków (R. 168)
i kątów (Rys.
169), prosto-
padłości pro-
stych i pła-
szczyzn (Rys.
170) i t. p.



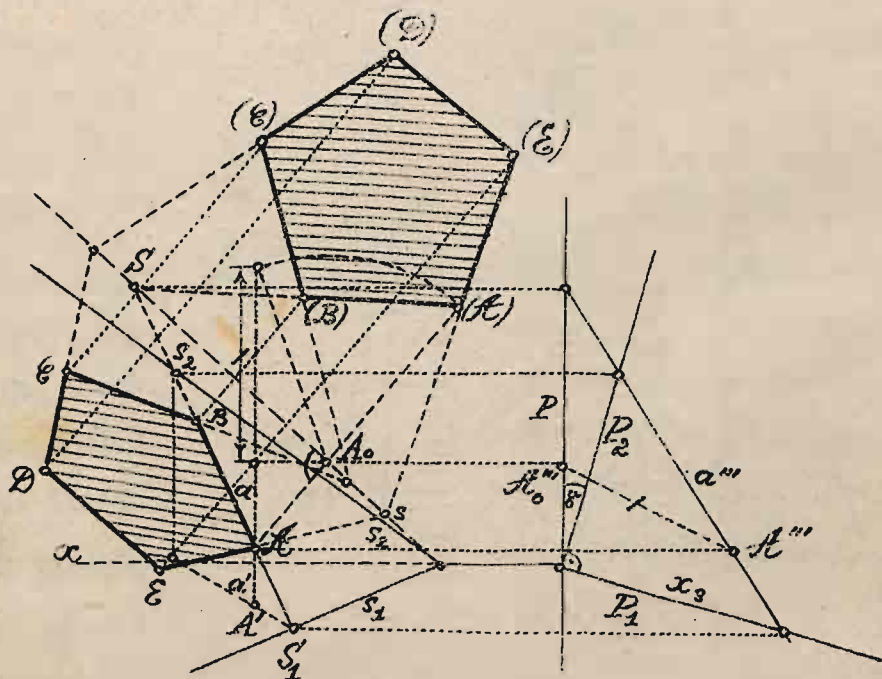
Rys. 170.

W zadaniach dotyczących figur płaskich bywa jednak nieraz korzystnym kład płaszczyzny figury dokoła śladu s tej płaszczyzny na płaszczyznę aksonometrii. Postępujemy tak zwłastą dla wykreślenia rzutu aksonometrycznego figury danej co do wielkości i kształtu, a leżącej w płaszczyźnie P_1 . Ale może

to być wskazaniem i przy innem położeniu płaszczyzny figury, a to z powodu, że kład i rzut figury płaskiej na płaszczyznę aksonometrii są w powinowactwie prostokątnem, którego osią, jest ślad s. Przyjmijmy np., że mamy wyznaczyć rzut aksonometryczny 5-kąta foremnego o danym boku, leżącego w danej płaszczyźnie $s_1 s_2$,

jeżeli dane są nadto: rzut aksonometryczny jednego wierzchołka H i rzut boku a przecięń przechodzącego.

Znajdziemy (Rys. 171) przy pomocy prostej a ślad s płaszczyzny $s_1 s_2$ na płaszczyźnie aksonometrii (§ 69, rys. 167) i wykonajmy kład płaszczyzny $s_1 s_2$ dokota s na płaszczyźnie aksonometrii. W tym celu spuścimy z H



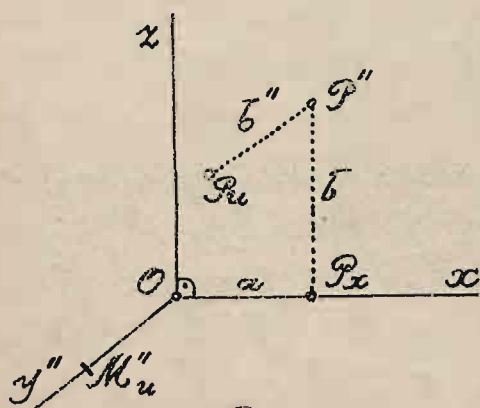
Rys. 171.

prostopadłą HA_0 na s i od punktu H_0 odmierzymy prawdziwą długość odcinka HA_0 , która znajdziemy tak, jak na rys. 168, poczem za pomocą powinowactwa prostokątnego o osi s wyznaczymy rzut aksonometryczny 5-kąta.

W rysunkach 168-171 opuszciliśmy wszędzie wskaźnik a .

ROZDZIAŁ VI. RZUTY UKOŚNE.

§ 71. Odwzorowanie punktu. Przyjmijmy te-
raz, że płaszczyzna rzutów P jest równoległa



Rys. 172.

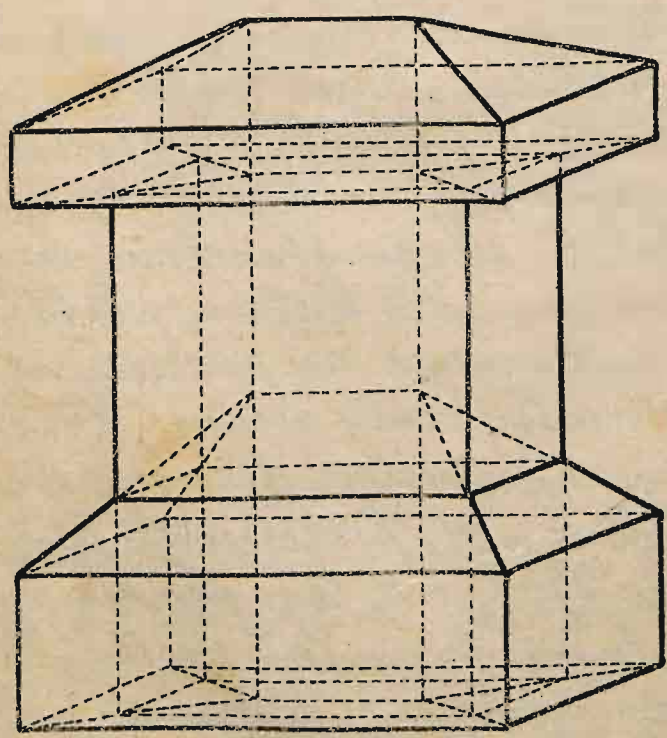
lub nawet przystaje do
jednej z płaszczyzn
spółrzędnych, np. do zx
lub xy , kierunek zaś
rzutów jest ukośny
względem tej płaszczyzny.

Wtedy mamy do czynie-
nia z aksonometrią
ukośną, zwaną też ru-
tami ukośnymi, per-
spektywą równoległą

lub kawalerską. Każda figura, położona w
płaszczyźnie rzutów lub w płaszczyźnie do niej
równoległej, będzie odwzorowana w natural-
nej wielkości i kształcie. Dwie współrzędne każ-
dego punktu figury (x i z albo x i y) odwzo-
rowują się w naturalnej wielkości; trzecia
współrzędna (y lub z) ulega skróceniu wzgl.
wydłużeniu, zależnemu od kąta α , pod którym
padają promienie rzucające na płaszczyznę P .

Aby zatem wykreślić rzuty osiowe, trzeba
w płaszczyźnie rysunku wziąć dwie osie prosto-
padłe x i z albo x i y , przecinające się
w punkcie O (Rys 172), i z tego punktu wypro-
wadzić w dowolnym kierunku prostą, któ-
ra będzie rzutem ukośnym trzeciej osi y albo
 z . Na tym rzucie osiowym weźmiemy dowolny
odcinek OM_u , uważając go za rzut ukośny
odcinka znanej długości (np. jednostki dłu-

gości) leżącego na trzeciej osi. Mając współrzędne a, b i c jakiegokolwiek punktu P , odmierzamy na osi x od punktu O współrzędną a w naturalnej wielkości do punktu P_x , w tym punkcie wystawiamy prostopadłą do osi x (a więc równoległą do osi z) i od punktu P_x odmierzamy na niej również w naturalnej wielkości współrzędną c do punktu P'' ; wreszcie z punktu P'' prowadzimy równoległą do y'' i od punktu P'' odmierzamy na niej odcinek $P''P_u$, który tak się ma do współrzędnej b , jak odcinek OM_u do prawdziwej wielkości odcinka OM leżącego na osi y . W ten sposób współrzędna b ulega skróceniu (lub wydłużeniu) w stosunku $\cos \alpha$, gdzie α jest kątem promieni rzucających z płaszczyznę rysunku.



§ 72. Rzut ukośny figury, której rzuty prostokątne są dane.

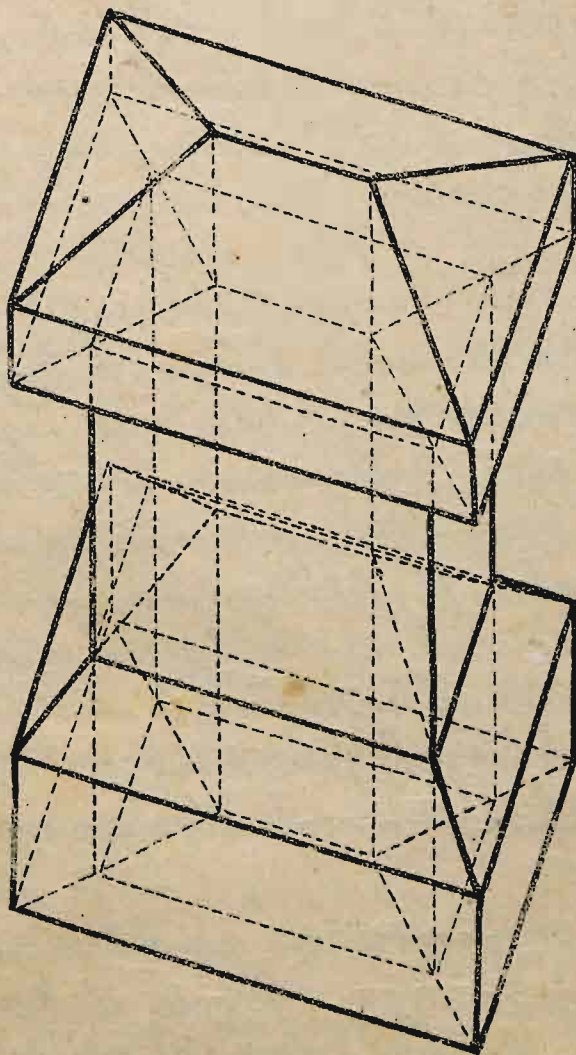
Wykreślmy rzut ukośny słupa kamiennego, którego rzuty prostokątne były-

Rys. 173.

podane na rys. 151, przypuszczając, że skrócenie na osi y , t. j. $\cotg \alpha = \frac{1}{2}$ (Rys. 173).

Sposób wykreślenia różni się od sposobu podanego w § 65 tym jedynie, że dla wykonania rysunku potrzebna jest redukcja, zupełnie zresztą dowolna, jednego tylko wymiaru.

§. 73. Perspektywa wojskowa. Rzut ukośny będzie szczególnie dogodny, gdy $\cotg \alpha = 1$, t. j. gdy $\alpha = 45^\circ$; jeżeli płaszczyznę rzutów jest płaszczyzną xy , to rzut nazywa się perspektywą wojskową. Rzut ten otrzymujemy bezpośrednio z rzutu poziomego t. j. z planu figury, wyprowadzając ze wszystkich jego punktów linie w dowolnym kierunku i odmierając na nich wysokości tych punktów (Rys. 174) Perspektywa wojskowa jest jedną z najprostszych metod odzworowania figur danych w rzutach



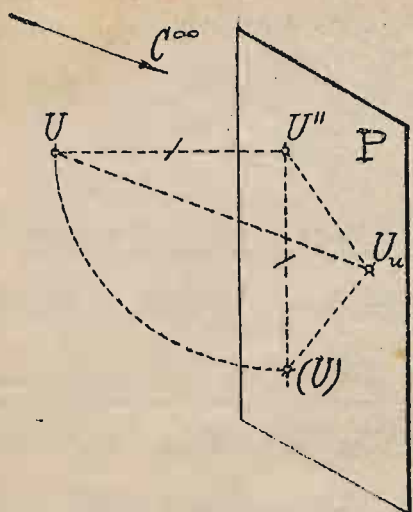
Rys. 174.

prostokątnych; podobnie, jak w rzucie izometrycznym (§67), możemy z rysunku bezpośredniego wybierać prawdziwe wymiary współrzędnych każdego punktu; z drugiej strony obrazy otrzymane są w znacznym stopniu zniekształcone.

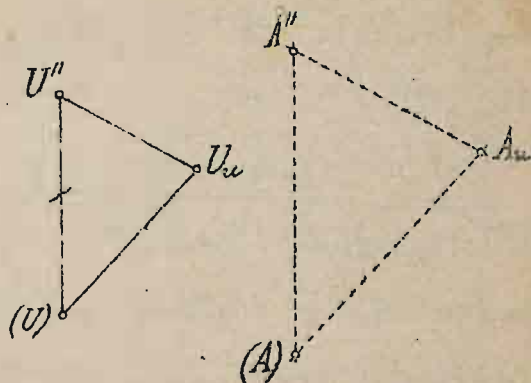
§. 74. Trójkąt rzutowy. W §4 określiliśmy rzut ukośny, jako metodę odwzorowania figur przestrzennych polegającą na tem, że gdy dana jest płaszczyzna rzutów P i kierunek promieni rzucających C^∞ , to każdy punkt przestrzeni A jest wyznaczony przez swój rzut prostokątny A'' i swój rzut ukośny A_u (Rys. 6 i 7). Oś leżące w płaszczyźnie rzutów nie mają bowiem znaczenia; mogą to być dowolne dwie prostopadłe, leżące w płaszczyźnie rysunku lub w płaszczyźnie do niej równoległej. Kierunek rzutów ukośnych C^∞ mógłby być dany za pomocą swego rzutu prostokątnego na płaszczyznę rysunku oraz jego kąta α z tą płaszczyzną; dogodniej wszakże będzie go wyznaczyć za pomocą prostokątnego i ukośnego rzutu punktu U , którego odległość od P jest dana. Kierunek rzutu będzie wtedy dany za pomocą dwóch odcinków $U''U_u$ i $U''(U)$ (Rys. 175 i 176) z których pierwszy jest rzutem ukośnym odcinka równego drugiemu i prostopadłego do P .

Punkt (U) możemy uważać za kład punktu U po dokonany jego obrocie do kosi osi leżącej w P i przechodzącej przez U'' .

Trójkąt $U''(U)U_u$ nazywa się trójkątem rzutowym; stosunek $U''U_u : U''(U) = \cot \alpha$;



Rys. 175.



Rys. 176

przez podanie takiego trójkąta kąt α , a więc i kierunek rzutu ukośnego jest wyznaczony. Trójkątów rzutowych jest oczywiście nieskończenie wiele; ten sam rzut ukośny może być określony przez trójkąty rzutowe różne co do położenia, wielkości i kształtu.

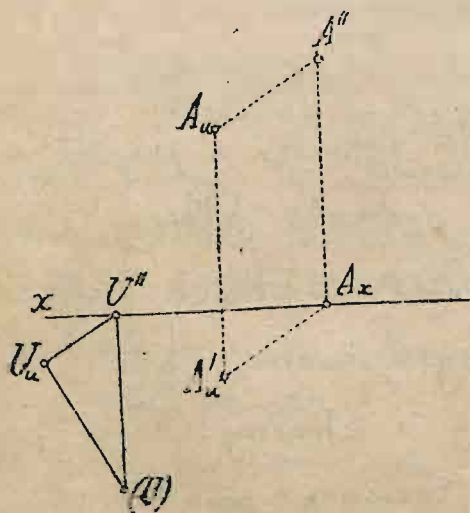
Aby trójkąt był rzutowym wystarczy, by jeden jego bok był równoległy do stałego kierunku oraz by stosunek tego boku do jednego z pozostałych równał się $\cotg \alpha$. Przez podanie któregośkolwiek trójkąta rzutowego odległości wszystkich punktów od płaszczyzny rysunku są wyznaczone, jeżeli dane są ich rzuty: prostokątny i ukośny. Niech będą nap. dane rzuty A'' i A_u pewnego punktu A , (Rys. 176); kreśląc na odcinku $A''A_u$ trójkąt jednokładny z trójkątem rzutowym, t.j. trójkąt o bokach od-

Arkus 12.

powiednio równoległych do boków trójkąta rzutowego, wyznaczymy odcinek $A''(A)$, który jest prawdziwą odległością punktu A od płaszczyzny rysunku, t.j. od punktu A'' .

§ 75. Pierwsza i druga płaszczyzna rzutów.

Wprowadzimy teraz nową płaszczyznę rzutów prostopadłą do P , którą nazwiemy pierwszą płaszczyzną rzutów i oznaczymy przez P_1 . Będzie ona wyznaczona przez swój układ x na dotychczasowej płaszczyźnie rzutów P , którą od tej chwili nazywać będziemy drugą płaszczyzną rzutów i oznaczymy przez P_2 . Mając rzut ukośny A_u i rzut prostokątny A'' na drugą płaszczyznę rzutów, można z łatwością znaleźć rzut ukośny A'_u rzutu prostokątnego na drugą płaszczyznę rzutów. Z punktu A'' spuścimy prostopadłą na oś x



Rys. 177.

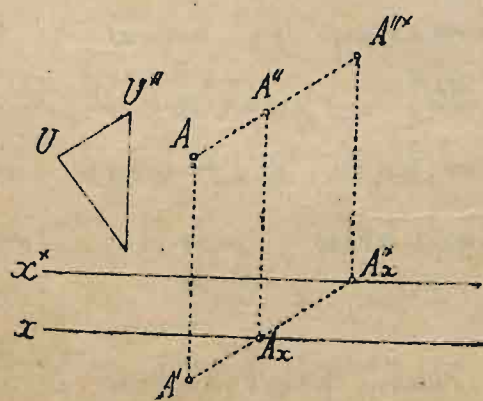
(Rys. 177) i na odcinkach $A''A_u$ i $A''A_x$ zbudujemy równoległobok; czwarty wierzchołek A'_u tego równoległoboku będzie szukany punkt. Nawzajem, mając rzut ukośny A_u i rzut ukośny A'_u pierwszego rzutu A' , możemy znaleźć rzut drugi A'' . W tym celu z

punktu A'_u prowadzimy równoległą do boku U_uU'' trój-

kąta rzutowego; z punktu przecięcia A_x tej równoległej z osią x wystawiamy do niej prostopadłą, na której odmierzamy $A_x A'' = A'_u A_u$. Prosta AA'' jest równoległa do płaszczyzny rysunku P_2 , zatem jej rzut ukłonny $A_u A''_u$ jest jej równy i do niej równoległy. Gdy nie będzie zachodziła obawa pomieszczenia pojęcia punktu przestrzeni A z jego rzutem ukłonnym A_u oraz pierwszego rzutu A' z rzutem ukłonnym pierwszego rzutu A'_u , będziemy opuszczali wykładnik „u”. Widzimy zatem, że zamiast odwzorowywać punkt A za pomocą pary punktów A_u, A'' , leżących na prostej o stałym kierunku $u_u u''$, możemy go odwzorować za pomocą pary punktów A_u, A'_u , leżących na prostej o stałym kierunku prostopadłym do osi x . Odcinek $A'_u A_u$ jest przytym równy i równoległy do pierwszej odległości punktu A .

Tak pojęta metoda rzutów ukłonnych nie jest dla nas nową; stosowaliśmy ją wielokrotnie dla objaśnienia wykreśleń metody rzutów prostokątnych.

§ 76. Przeniesienie równoległe osi. Z wykreślenia



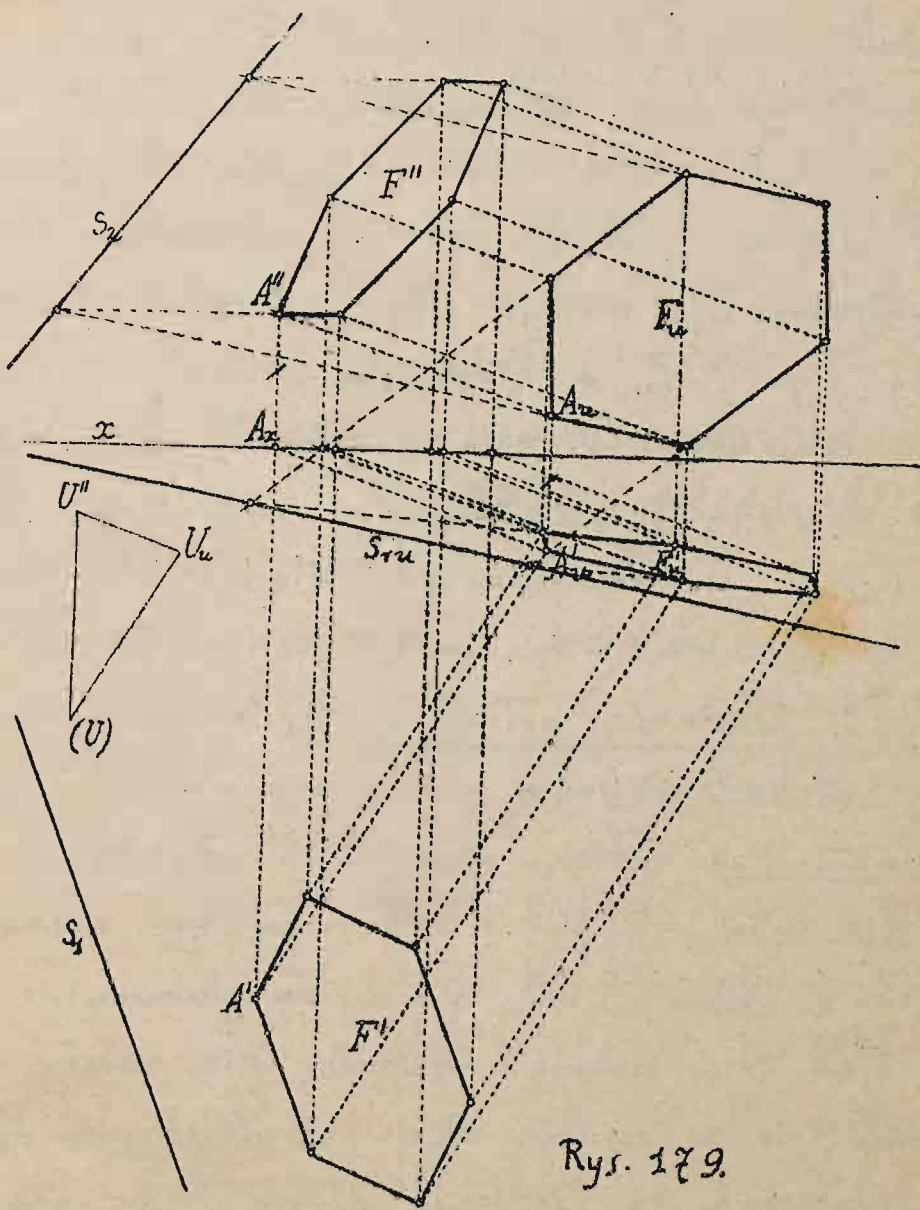
Rys. 178

podanego w § poprzednim dla znalezienia rzutu A'_u wynika, że przez przeniesienie równoległe osi x drugie odległości punktów odwzorowanej w rzutach ukłonnych figury powiększają się lub zmniejszają o ten sam odci-

nek. Jeżeli zatem dane są rzuty ukłonne F_u i F'_u figury F , to przeniesienie równoległe osi x nie ma wpływu na rozwiązanie z tych rzutów ukłonnych, natomiast drugi rzut F'' ulega przeniesieniu w kierunku równoległym do UU'' na odległość $A_x A_x''$. Podobnie jak w rzutach prostokątnych opuszczamy zatem zazwyczaj oś x i wprowadzamy ją w miarę potrzeby, licząc się z jaknajdogodniejszym jej dla naszego celu położeniem. Kierunek osi x jest wyznaczony, gdy dane są rzuty ukłonne A, A' jednego choćby punktu A , albowiem pierwsza odległość AA' tego punktu, a więc i jej rzut ukłonny $A_u A'_u$, jest do osi x prostopadły.

§ 77. Związek rzutów ukłonnych danej figury z jej rzutami prostokątnymi. Jeżeli dane są rzuty ukłonne F_u i F'_u figury F , oraz trójkąt rzutowy $U'' U(U)$, to można znaleźć jej rzuty prostokątne F'' i F' i to w sposób znacznie prostszy, niż to miało miejsce w akionometrii prostokątnej. Poprowadzimy dowolną prostopadłą do prostej łączącej rzuty ukłonne jakiegokolwiek punktu A i obracamy ją za oś x , wyznaczmy drugie rzuty A'', B'', \dots punktów A, B, \dots (§ 75), poczynym za pomocą trójkąta rzutowego znajdziemy pierwsze rzuty tych punktów, jak to widać na rys. 179.

Nawzajem, gdy dane są rzuty prostokątne $F' F''$ figury F , to otrzymamy jej rzuty ukłonne w sposób następujący. Obracamy trójkąt rzutowy $U'' U_u(U)$ i :



Rys. 179.

x , z pierwszego rzutu A' każdego punktu A prowadzę równoległą do $(U)U''$, a z punktu A_x , w którym rzędna $A'A''$ przecina x , równoległą do $U''U_u$; w przecięciu tych dwóch równoległych otrzymam rzut ukłony A'_u pierwszego rzutu A' . Wystawiając w tym punkcie prostą równą i równoległą do pierwszej odległości $A_x A''$ punktu A , otrzymam rzut ukłony

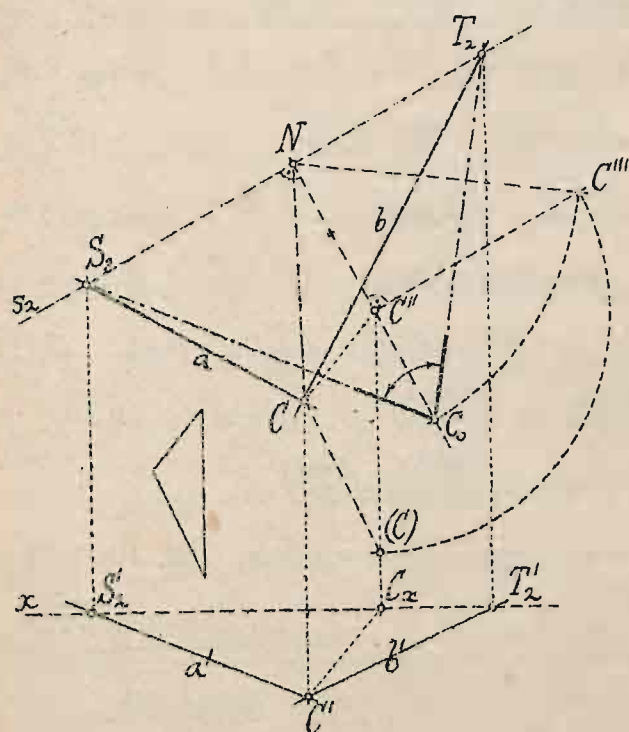
punktu A .

Pierwszy rzut F' i jego rzut ukośny F'_u są w powinowactwie, którego osią jest x , a kierunkiem — kierunek boku $(U)U_u$ trójkąta rzutowego; jeżeli F jest figurą płaską, to drugi rzut F'' jest w powinowactwie z rzutem ukośnym F'_u , którego osią jest drugi układ s_2 płaszczyzny figury F , a kierunkiem — kierunek boku $U''U_u$ trójkąta rzutowego. Wreszcie, podobnie jak w aksonometrii prostokątnej (§69) tak i w rzutach ukośnych, F_u i F'_u są w powinowactwie, którego osią jest układ s_{1u} , a kierunkiem — kierunek prostopadły do osi x .

§ 78. Zadania położenia. Rozwiązanie tych zadań w rzutach ukośnych najczęściej nie różni się od rozwiązania ich metodą aksonometrii prostokątnej. Tak np. Rys. 163, 164, 165 i 166 mogą być uważane za rozwiązanie zadań § 69 zarówno w aksonometrii prostokątnej jak i w rzutach ukośnych. Nie należy wszakże zapominać, że w rzutach ukośnych płaszczyzna P_2 jest płaszczyzną rysunku, że więc drugie układy prostych i płaszczyzn są zarazem ich układami na płaszczyźnie rysunku.

§ 79. Zadania miarowe. Dzięki tej ostatniej okoliczności, układy figur płaskich dają się dokonać w rzutach ukośnych znacznie prościej niż w aksonometrii prostokątnej. Jakkolwiek więc można by wszystkie zadania miarowe sprowadzić do rzutów prostokątnych (§77), będzie wogóle prościej rozwiązywać te zadania bezpośrednio;

§ 81. Kład płaszczyzny, wyznaczonej przez dwie przecinające się proste (Wyznaczenie kąta dwóch prostych).

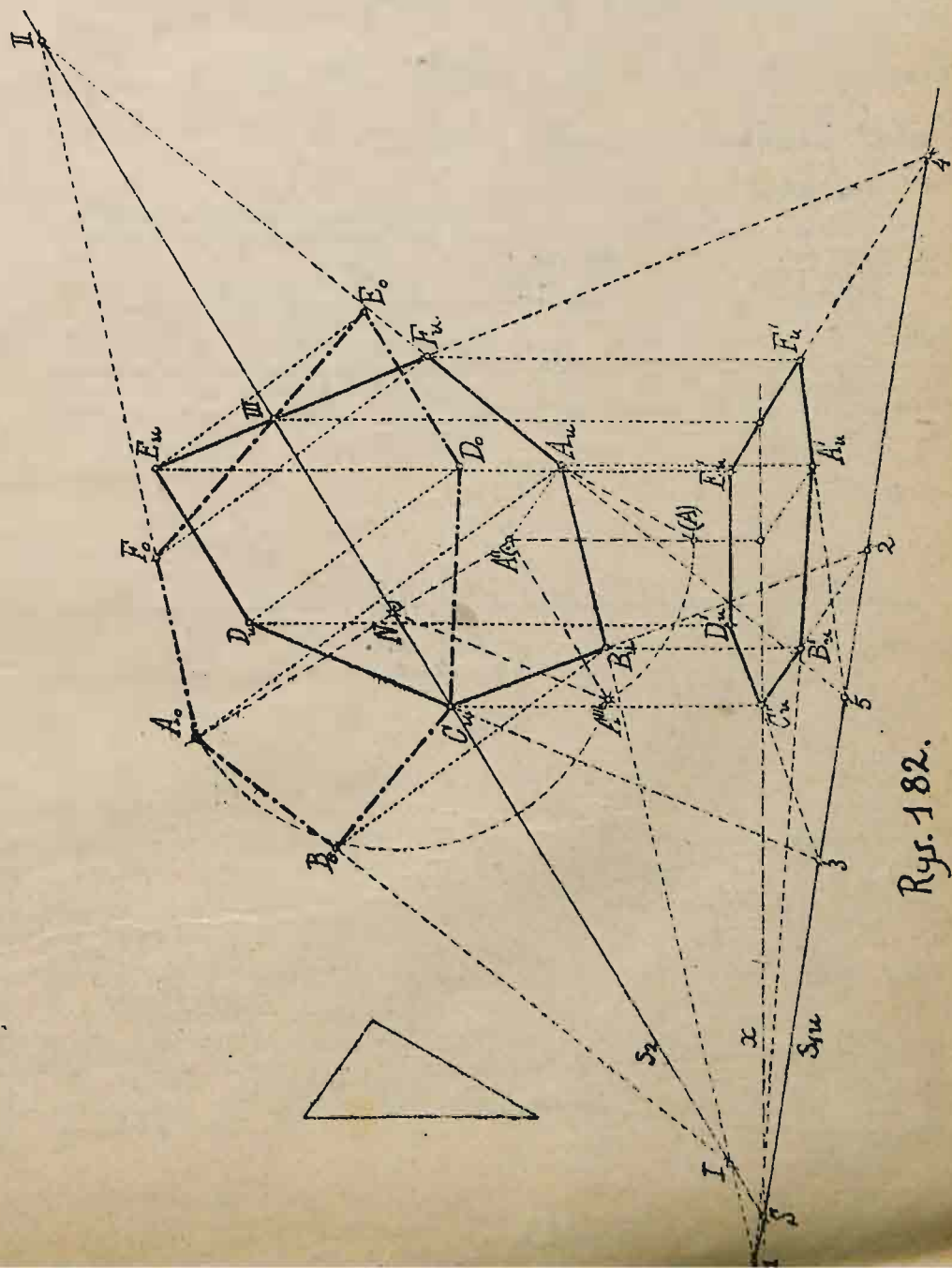


Rys. 181.

Niech będą dwie proste (aa') i (bb') przecinające się w punkcie (CC') (Rys. 181); poprowadźmy oś x prostopadłą do CC' i wyznaczmy płaszczyzny S_2 i T_2 prostych (aa') i (bb') . Długość prostej $s_2 \equiv S_2 T_2$, która jest drugim układem płaszczyzny

wzajemnej ab , dokonajmy kładu tej płaszczyzny; punkty S_2 i T_2 jako należące do osi obrotu pozostaną nieruchome; wystarczy wyznaczyć kład punktu (CC') . Znajdźmy najpierw drugi rzut C'' tego punktu oraz odległość jego $C''(C)$ od P_2 . Na prostopadłej $C''N$ do układu s_2 odmierzamy od punktu N odległość punktu C od układu s_2 , wyznaczoną jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego $C''NC'''$, którego jedna przyprostokątna $C''N$ jest rzutem prostokątnym tej odległości na P_2 , a druga $C''C'''$ jest odległością punktu C od P_2 , a więc równa $C''(C)$. Znalezionej w ten sposób punkt C . Łączymy z S_2 i T_2 , kąt $S_2 C T_2$ jest kątem dwóch danych prostych.

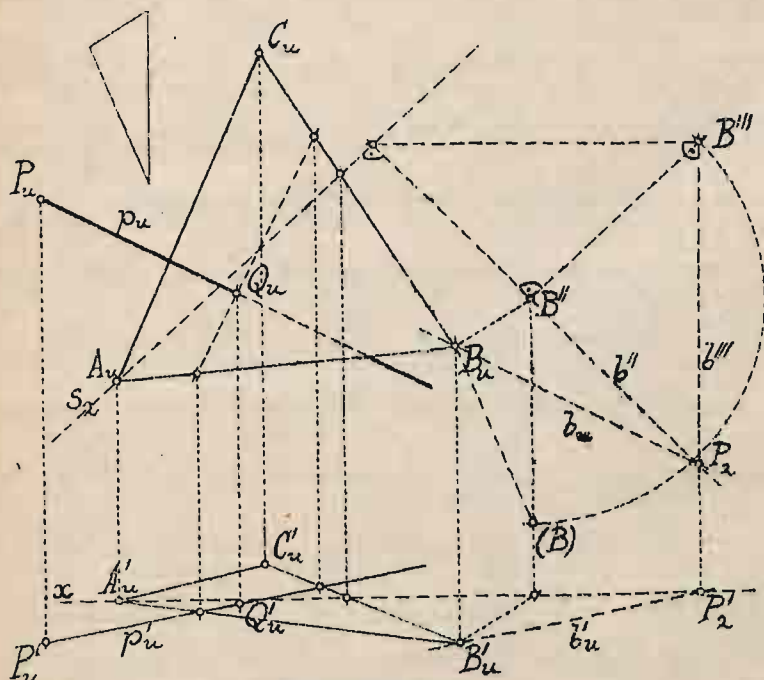
§ 82. Kłady figur płaskich. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby dana w rzutach ukośnych figura F była płaską, jest, aby jej rzuty ukośne F_u i F'_u były w powinowactwie; oś powinowactwa jest rzutem ukośnym pierwszego układu płaszczyzny figury s_{1u} (§ 77). Jeżeli ten warunek jest spełniony, to znajdziemy prawdzi-



obraczamy dowolnie o x , moglibyśmy wyznaczyć pład s_2 i drugi rzut ukłony A'_u punktu A . Przez punkt A poprowadzimy płaszczyznę P_3 prostopadłą do s_2 ; w tej płaszczyźnie leżąc musi szukana prostopadła p , której drugi pład P_2 musi leżąc na drugim pładzie płaszczyzny P , t.j. na prostopadłej p'' spuszczonej z punktu A'' na s_2 . Obróćmy płaszczyznę P_3 dookoła s_2 na P_2 i wyznaczmy pład A''' punktu A ; prosta $A''A'''$ będzie pładem linii największego spadku płaszczyzny danej, prosta $p''' \equiv A'''P_2$ do niej prostopadła — pładem szukanej prostopadłej, a punkt P_2 , w którym p''' przecina p'' — drugim pładem prostej p . Łącząc P_2A_u otrzymamy rzut ukłony p_u , łącząc $P'_2A'_u$ otrzymamy p'_u . Trójkąt $A_uA''A'''$ jest równym; odmierzywszy na p''' $A'''B''' \equiv d$ i poprowadzimy $B'''B_u \parallel A'''A_u$ otrzymamy B_u , którego rzędną $B_uB'_u$ wyznacza na p'_u punkt B'_u .

Zadanie II. Z punktu $(P_uP'_u)$ na płaszczyznę $(A_uB_uC_u, A'_uB'_uC'_u)$ spuścić prostopadłą. Przez punkt A'_u poprowadzimy o x i wyznaczmy drugi pład s_2 płaszczyzny ABC , poczyn na mocy poprzedniego zadania wykreślmy rzuty ukłony $b_ub'_u$ prostopadłej b wystawionej w punkcie B do płaszczyzny ABC (Rys. 184). Z punktu $(P_uP'_u)$ poprowadzimy prostą $(p_u p'_u) \parallel (b_ub'_u)$. Punkt przecięcia $(Q_uQ'_u)$ prostej p z płaszczyzną ABC wyznaczamy według §§ 78 i 69.

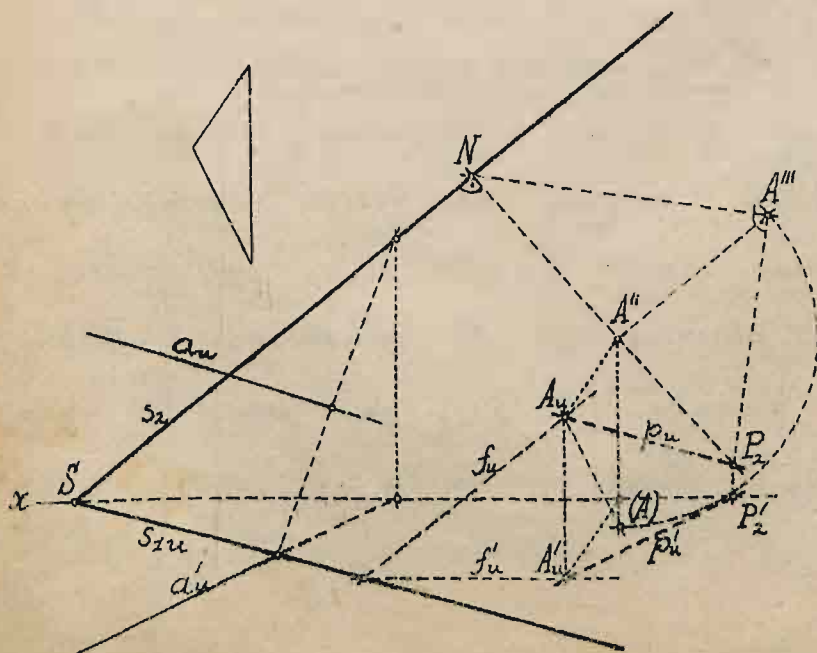
Zadanie III. Do danej prostej $(a_ua'_u)$ przez da-



Rys. 184.

znając A'' oraz odległość $A''(A)$ punktu A od P_2 , wykreślimy trójkąt prostokątny $P_2 A'' N$, w którym dana jest wysokość

$$A'' A''' = A''(A)$$



Rys. 185.

z punktu $(A_u A'_u)$
przeprowadzić pro-

stopadłą do $(a_u a'_u)$

Przez punkt

$(A_u A'_u)$ (Rys. 185)

poprowadzimy pro-

stopadłą $(p_u p'_u)$ równo-

ległą do $(a_u a'_u)$

i obracając o x

wyznaczymy dru-

gi układ $(P_2 P'_2)$

tej prostej. Wyzna-

czając drugi

układ $(A'' A''')$

i jeden z od-

cińków prze-

ciwprostokąt-

nej, mianowi-

cie $A'' P_2$. Pro-

sta S_2 pro-

stopadła do

$A'' P_2$ w punk-

cie N jest

drugim ukła-

dem szukanej

plaszczyny; pierwszy układ s_1 znaleziony nap. za pomocą linii frontowej ($f_u f'_u$) przechodzącej przez punkt ($A_u A'_u$).

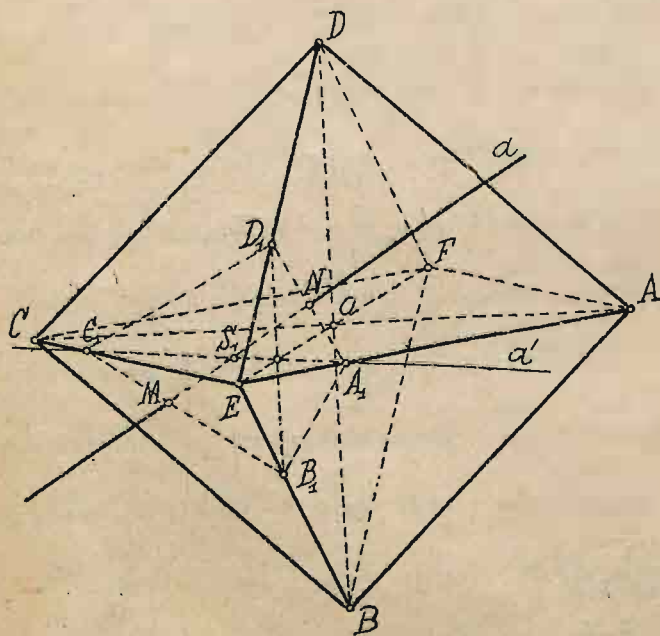
§ 84. Aksonometria prostokątnej a rzuty ukośne.

Z zestawienia wykreślenia aksonometrii prostokątnej i rzutów ukośnych, przytoczonych w dwóch ostatnich rozdziałach, zdawałoby się mogło, że rzuty ukośne są dogodniejsze. Wszakże rozumowanie takie byłoby słuszne jedynie dla zagadnień dotyczących figur prostokreślnych; w zagadnieniach dotyczących figur krzywokreślnych, a w szczególności powierzchni obrotowych, przewagę jest po stronie aksonometrii prostokątnej. Tak nap. kontur widzialny kuli jest kołem w aksonometrii prostokątnej, elipsą w rzutach ukośnych; rzut aksonometryczny koła jest elipsą, której osie są rzutami przechodzących przez środek linii poziomu i największego spadku płaszczyny koła, podczas gdy rzut ukośny koła jest elipsą o osiach, które dopiero z niejaką trudnością znalezione być mogą. Ponieważ przytym oglądamy zazwyczaj rysunek w położeniu prostopadłym do kierunku naszego wzroku, więc rzut ukośny musi wydawać się mniej lub więcej zniekształconym, podczas gdy rzut aksonometryczny wyda się w tym założeniu poprawnym, jeżeli tylko odległość oka od rysunku jest dostatecznie wielką. Z tych wszystkich względów oddajemy w wielu razach pierwszeństwo aksonometrii prostokątnej.

ROZDZIAŁ VII.

PRZECIĘCIA I PRZENIKANIA WIEŁOŚCIANÓW.

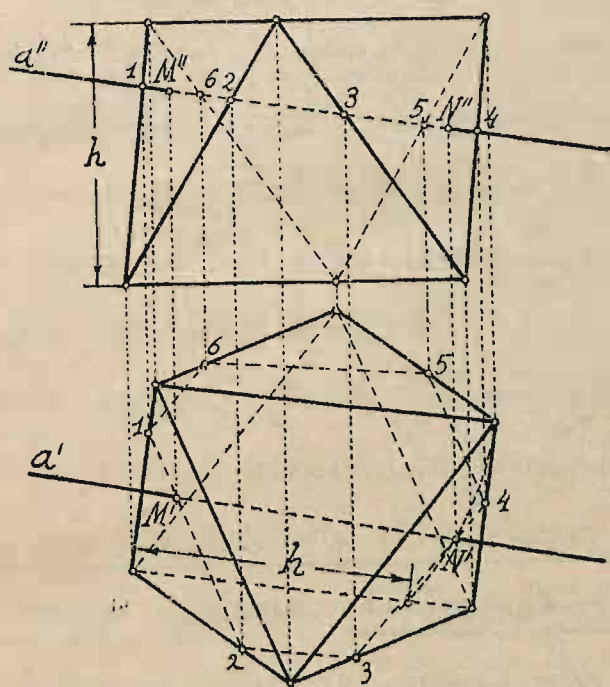
§ 85. Przebiecie wielościanu prostą. Metoda ogólna, według której wyznaczamy punkty przebiecia wielościanu prostą daną, polega na poprowadzeniu przez tę prostą płaszczyzny pomocniczej i wyznaczeniu rantów wielokąta, który jest przecięciem wielościanu ową płaszczyzną. Punkty, w których dana prosta przecina obwód tego wielokąta, należą zarówno do prostej danej, jak do powierzchni wielościanu, są to więc szukane punkty przebiecia. Obiór płaszczyzny pomocniczej zależy będzie wogóle od wielościanu i od metody, którą jest odwzorowany. Najczęściej posługujemy się jedną z płaszczyzn rzucających daną prostą. Na Rys. 186



Rys. 186.

wyznaczyliśmy w ten sposób punkty przebiecia 8'cianu foremnego $ABCEEF$ danego w rzucie ukłósnym prostą aa' . Płaszczyzną pomocniczą jest tutaj płaszczyzna aa' rzucająca prostą a poziomo; przecina ona 8'cian według czworokąta $A_1B_1C_1D_1$.

punkty M i N , w których a przecina obwód tego czworokąta, są szukаныmi punktami przebicia. Podobnie dla wyznaczania punktów, w których prosta $a'a''$ przebija ścian foremny dany w rzutach prostokątnych prowadzimy (Rys. 187)



Rys. 187.

plaszczynę rzucającą prosta a pionowo, wyznaczamy rzut poziomy b kęta przecięcia, a następnie punkty M' i N' , w których a' przecina jego obwód. W pewnych wypadkach dogodniej jest obrócić inną plaszczynę pomocniczą, której przecięcie z wielościanem jest wielokątem możliwie najprostszym. Jeżeli

nap. szukamy punktów, w których prosta przebija ostrosłup albo graniastosłup, to najdogodniej będzie zastosować plaszczynę przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa, względnie plaszczynę równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa (Rys. 189 i 190).

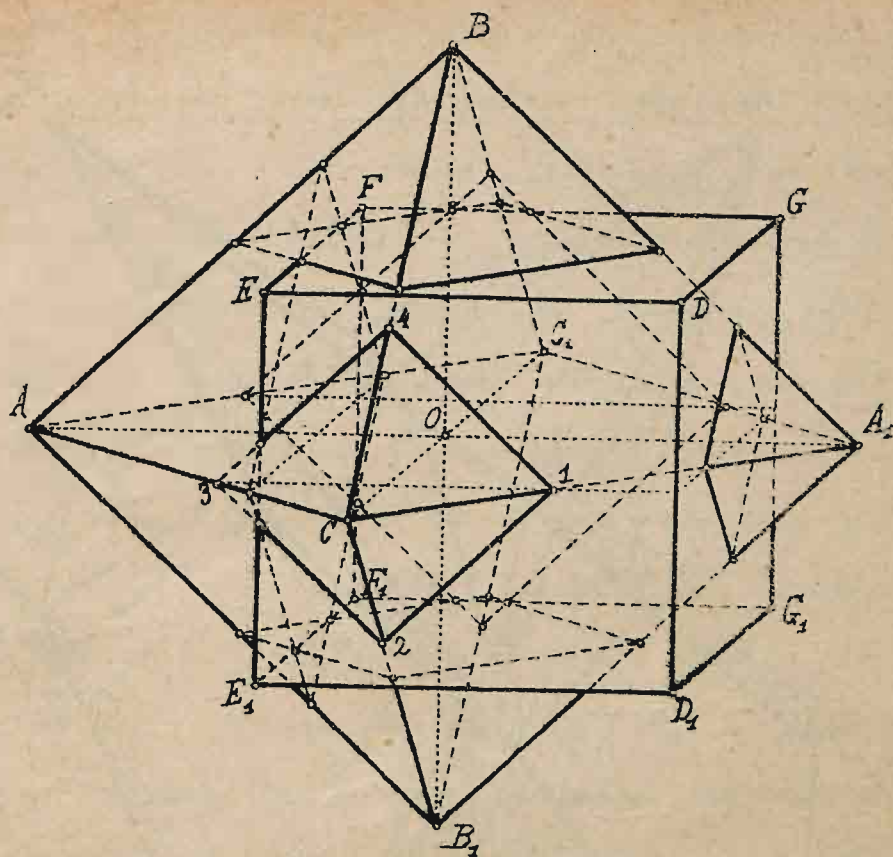
§ 86. Wzajemne przenikanie dwóch wielościanów.

Do zagadnień o przebijaniu wielościanów prostymi sprowadzają się zagadnienia wzajemnego przenikania się wielościanów. Jeżeli dwa wielościany mają część

objętości wspólnej, mówimy, że się przenikają; istnieje wtedy jedna lub kilka linii Tamanych zamkniętych, leżących na obu wielościanach; wierzchołki tych Tamanych są punktami przecięcia ścian jednego wielościanu przez krawędzie drugiego. Figurę przenikania dwóch wielościanów można wyznaczyć dwoma sposobami: 1) albo wyznaczając przecięcie każdej ściany jednego wielościanu z drugim i uwzględniając tylko te części każdego przecięcia, które leżą wewnątrz obwodu tej ściany, 2) albo wyznaczając punkty przecięcia jednego wielościanu krawędziami drugiego i nawzajem, a następnie tak łącząc te punkty, aby połączone punkty leżały na tej samej ścianie zarówno w jednym, jak w drugim wielościanie.

§ 87. Przenikanie sześciannu i ośmiościanu foremnego o osiach wzajemnie równoległych. Niechaj będzie dany w rzutach ukośnych ośmiościan foremny o osiach AA_1 , BB_1 i CC_1 oraz sześciann $DEFGD_1E_1F_1G_1$, którego krawędzie są odpowiednio równoległe do osi ośmiościanu. Wyznamy najpierw kwadrat 1234 , według którego płaszczyzna ściany DD_1E_1E przecina ośmiościan i uwzględnijmy tę tylko część tego kwadratu, która leży wewnątrz ściany DD_1E_1E . Postępując w ten sam sposób ze wszystkimi innymi ścianami sześciannu otrzymamy figurę przenikania złożoną z jednego 14 kąta skośnego, dwóch trójkątów i jednego kwadratu.

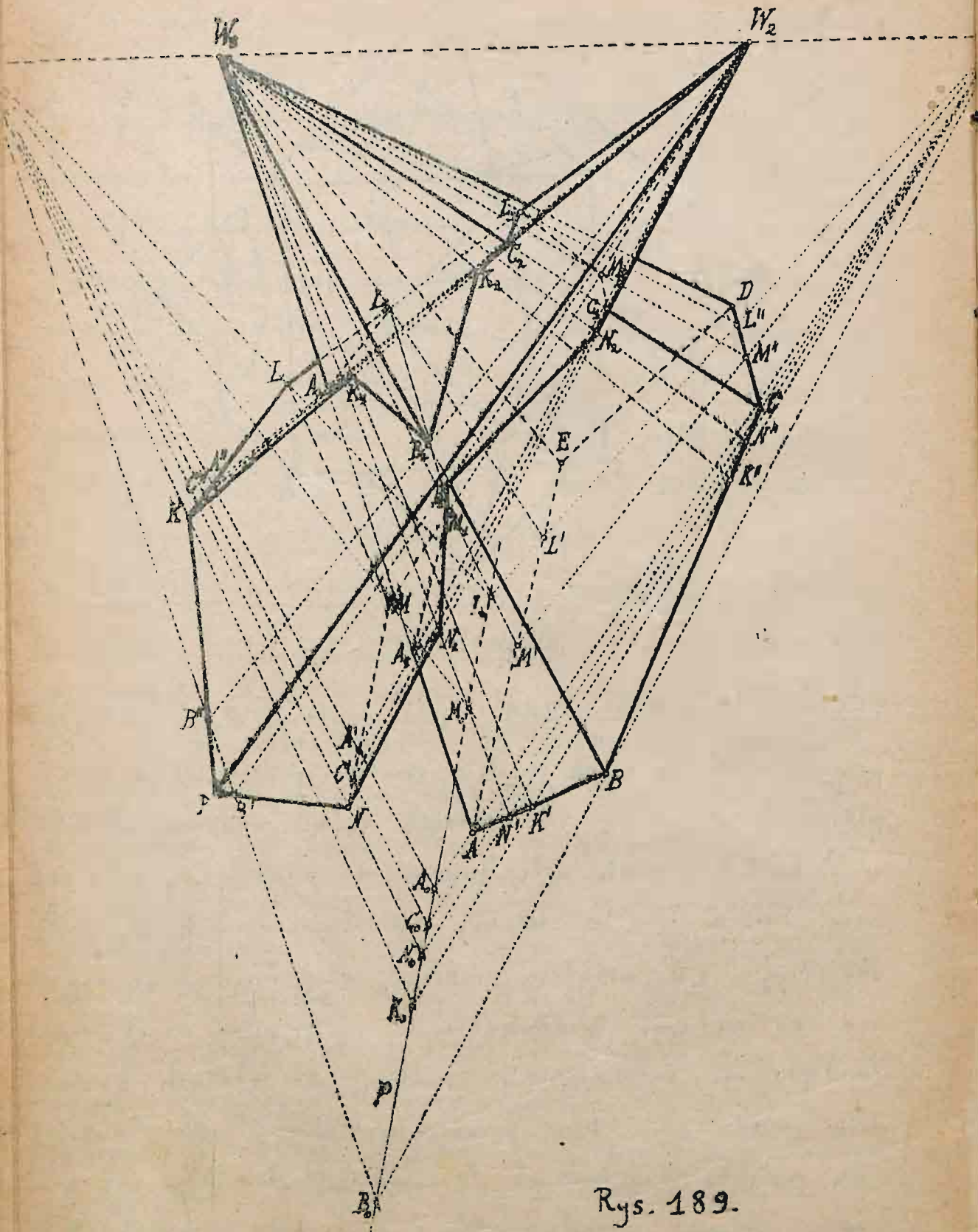
§ 88. Przenikanie dwóch ostrosłupów. Niech $\omega_1 ABCDE$



Rys. 188.

i $\omega_2 KLMNP$ (Rys. 189) będą rautami dwóch ostrosłupów, prosta p niech będzie rautem prostej przecięcia płaszczyzn S_1 i S_2 , w których leżą podstawy $ABCE$ i $KLMNP$ tych ostrosłupów, a punkty S_1 i S_2 rautami śladów prostej $\omega_1\omega_2$ na płaszczyznach S_1 i S_2 ; obojętną jest przytem rzecz, czy mamy do czynienia z rautami prostokątnymi, ukośnymi lub nawet środkowymi. Wyznaczymy punkty, w których krawędzie ostrosłupa ω_1 przebijają ściany ostrosłupa ω_2 , oraz punkty, w których krawędzie ostrosłupa ω_2 przebijają ściany ostrosłupa ω_1 . Przez oba wierzchołki

Arkusz 13.



Rys. 189.

ω_1 i ω_2 poprowadzimy płaszczyzny pomocnicze, przechodzące zarówno przez krawędzie jednego, jak przez krawędzie drugiego ostrosłupa. Przecinają one każdy ostrosłup według trójkątów o wspólnym wierzchołku ω_1 lub ω_2 i o podstawach, które są płaszczyznami tych płaszczyzn na S_1 lub S_2 . Wykreślmy najpierw w płaszczyźnie S_1 płaszczyznę przechodzącą przez krawędzie ω_1 i wierzchołek ω_2 ; w tym celu łączymy punkt ω_2 z punktem A . Wyznaczymy punkt A_0 , w którym prosta $\omega_2 A$ przecina p ; prosta $A_0 \omega_2$ jest płaszczyzną na S_2 ; łącząc wierzchołek ω_2 z punktami A' i A'' , w których ta prosta przecina obwód $KLMNP$, otrzymamy trójkąt $\omega_2 A' A''$ przecięcia z ostrosłupem ω_2 , a punkty A_1 i A_2 , w których krawędzie ω_2 przecina obwód tego trójkąta są punktami przecięcia ostrosłupa ω_2 krawędzią $\omega_1 A$. W ten sam sposób znajdziemy punkty B_1 i B_2 oraz C_1 i C_2 , w których krawędzie $\omega_1 B$ i $\omega_1 C$ przebijają ostrosłup ω_2 , krawędzie $\omega_1 D$ i $\omega_1 E$ nie przebijają go wcale, albowiem płaszczyzny przez te krawędzie przechodzące nie przecinają obwodu jego podstawy. Znajdźmy teraz punkty, w których krawędzie ostrosłupa ω_2 przebijają ostrosłup ω_1 : Łącząc punkt ω_2 z punktem K i przedłużając tę prostą do przecięcia z p w punkcie K_0 , a później łącząc ten punkt z ω_1 , otrzymamy płaszczyznę $\omega_1 \omega_2$ na S_2 , który przecina obwód pierwszej podstawy

w punktach K' i K'' ; proste $\omega_1 K'$ i $\omega_1 K''$ przecinają krawędź $\omega_2 K$ w punktach K_1 i K_2 , które są punktami przecięcia ostrosłupa ω_1 krawędzią $\omega_2 K$. Podobnie znajdziemy punkty L_1 i L_2 , M_1 i M_2 , N_1 i N_2 , w których krawędzie $\omega_2 L$, $\omega_2 M$ i $\omega_2 N$ przebijają ostrosłup ω_1 .

Tak więc mamy 14 punktów przecięcia $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1$ i N_2 .

Ponieważ boki linii przenikania mają leżeć na ścianach obu ostrosłupów, więc należy tylko te punkty, które leżą na tej samej ścianie zarówno w pierwszym, jak i w drugim ostrosłupie. Każdy ze znalezionych 14 punktów leży na trzech ścianach, których jest przecięciem, jak to uwidoczniło w następującym wykazie:

A_1	$\omega_1 AB$	$\omega_1 AC$	$\omega_2 MN$	K_1	$\omega_2 KL$	$\omega_2 KP$	$\omega_1 BC$
A_2	$\omega_1 AB$	$\omega_1 AC$	$\omega_2 KL$	L_1	$\omega_2 LM$	$\omega_2 KL$	$\omega_1 AC$
B_1	$\omega_1 BC$	$\omega_1 AB$	$\omega_2 NP$	L_2	$\omega_2 LM$	$\omega_2 KL$	$\omega_1 CD$
B_2	$\omega_1 BC$	$\omega_1 AB$	$\omega_2 KP$	M_1	$\omega_2 MN$	$\omega_2 LM$	$\omega_1 AC$
C_1	$\omega_1 CD$	$\omega_1 BC$	$\omega_2 MN$	M_2	$\omega_2 MN$	$\omega_2 LM$	$\omega_1 CD$
C_2	$\omega_1 CD$	$\omega_1 BC$	$\omega_2 KL$	N_1	$\omega_2 NP$	$\omega_2 MN$	$\omega_1 AB$
K_1	$\omega_2 KL$	$\omega_2 KP$	$\omega_1 AB$	N_2	$\omega_2 NP$	$\omega_2 MN$	$\omega_1 BC$

Aby znaleźć punkt, z którym należy połączyć A_1 , weźmy dwie jego ściany do dwóch ostrosłupów należące, nap. $\omega_1 AB$ i $\omega_2 MN$ i szukajmy wśród pozostałych punktów takiego, któryby leżał na tych ścianach: będzie to punkt N_1 ; ale punkt ten

leży również na przecięciu ścian $\omega_1 AB$ i $\omega_2 NP$, szukamy więc środ pozostałych punktów takiego, któryby leżał na obu tych ścianach: będzie to punkt B_1 . Punkt ten leży również na przecięciu ścian $\omega_1 BC$ i $\omega_2 NP$; drugim punktem na tych samych obu ścianach leżącym będzie N_2 . Punkt N_2 leży prócz tego na ścianach $\omega_1 BC$ i $\omega_2 MN$; na tych samych dwóch ścianach leży punkt C_1 . W ten sposób możemy postępowanie dopóty, dopóki nie dojdziemy z powrotem do punktu A_1 co może nastąpić albo po wymienieniu wszystkich pozostałych punktów, albo też może z pominięciem niektórych z podróci nich. W pierwszym przypadku mówimy że przenikanie jest częściowe, w drugim — zupełne. W naszym przykładzie mamy przenikanie częściowe: wszystkie 14 punktów dadzą się ustawić w taki sposób, że każdy punkt należy połączyć z następnym, a ostatni z pierwszym:

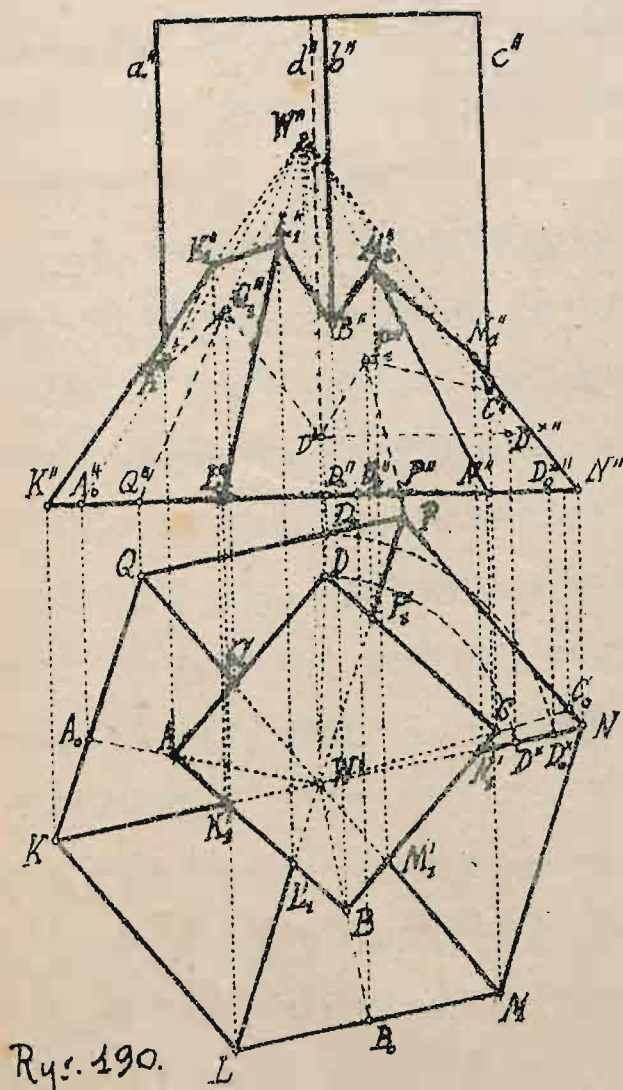
$A_1 N_1 B_1 N_2 C_1 M_2 L_2 C_2 K_2 B_2 K_1 A_2 L_1 M_1$

Figurą przenikania jest przeto 14-kąt skośny; dla zdecydowania, który z łuków tego 14-kąta jest widzialny, stuzymy zawsze oczywista, że tylko taki bok jest widzialny, który leży na widzialnej ścianie pierwszego i na widzialnej ścianie drugiego ostrostupa.

§ 89. Przenikanie dwóch graniałostupów lub ostrostupa z graniałostupem. Ten sam sposób może być zastosowany do wyznaczenia figury przenikania dwóch graniałostupów, lub ostrostupa z graniałostupem.

tem, jeżeli zważymy, że graniastójup można uważać za ostroś, którego wierzchołek jest punktem niewidocznym.

Przechodząc pomocniczo przez ten wierzchołek przeciętny stają się równoległe do krawędzi graniastójupa. Przyjmujemy napr. (Rys. 190), że mamy wyznaczyć figurę przekroju graniastójupa foremnego o podstawie trójkątowej ABC leżącej w P_1 z ostroścem foremnym 6-kątnym o wierzchołku $W'W''$ i pod-

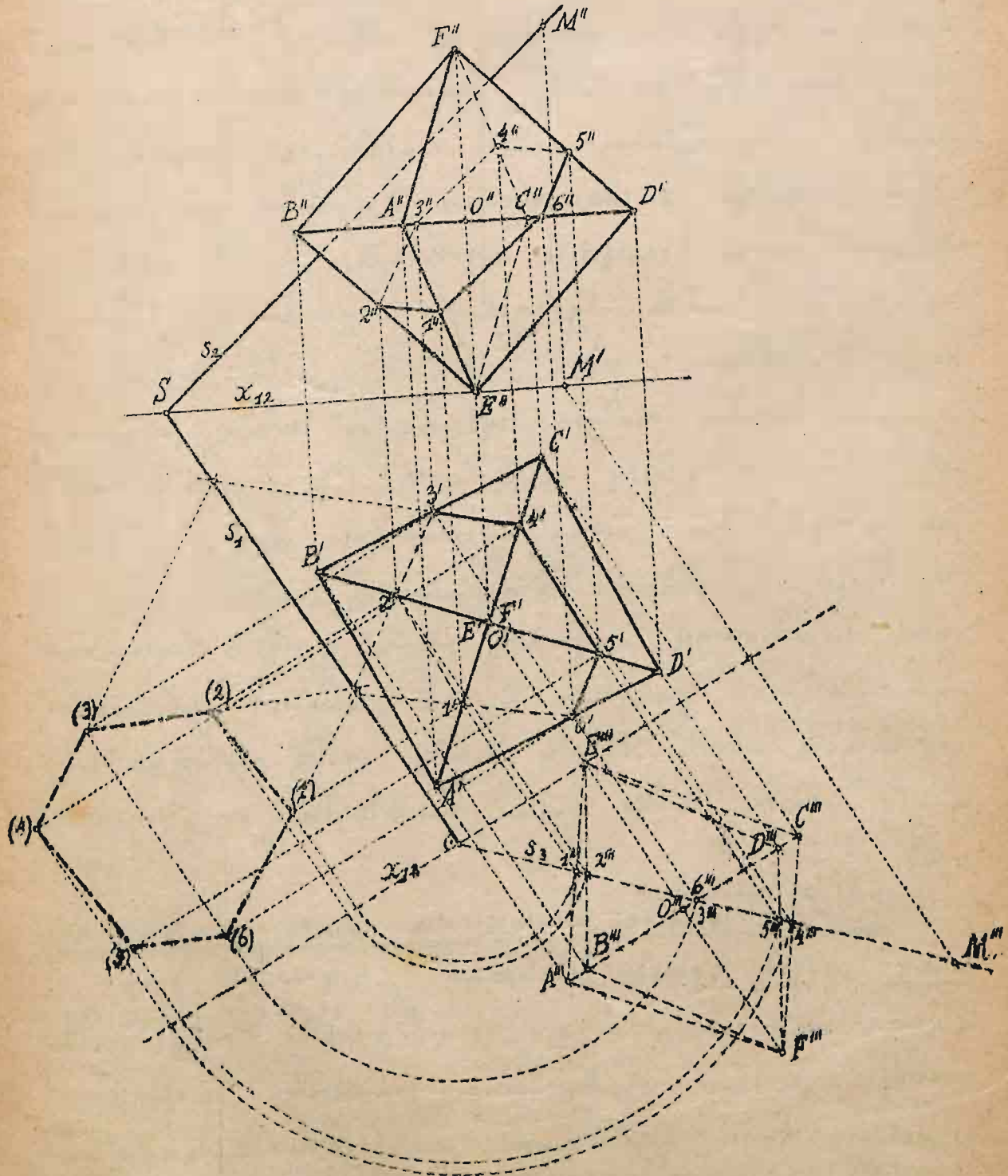


Rys. 190.

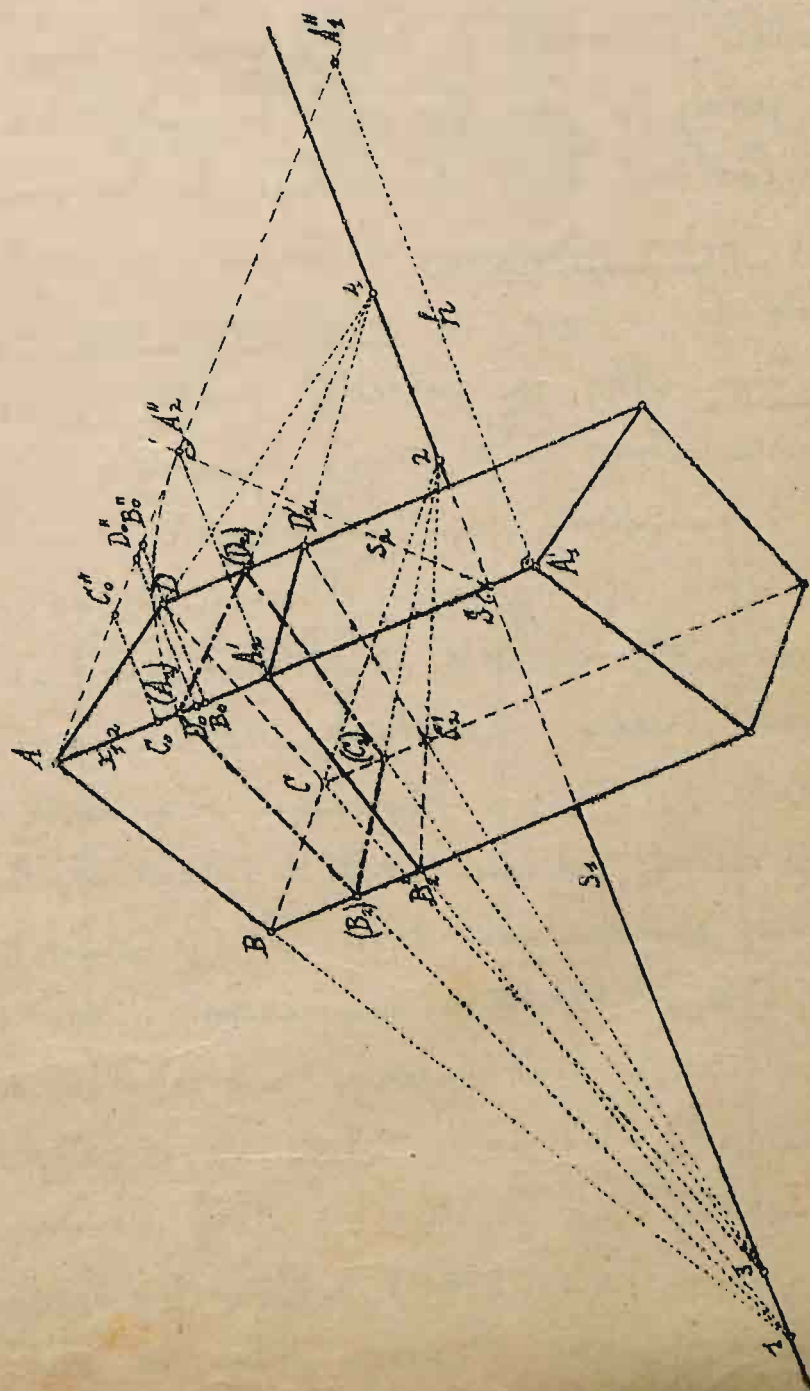
stawie $KLMNPQ$ leżącej również w P_1 . Płaszczyzny pomocnicze będą to płaszczyzny przechodzące przez W' i równoległe do krawędzi graniastójupa, a więc prostopadłe do P_1 . Pierwsze ślady tych płaszczyzn będą to proste wyprowadzone z W' do wszystkich 10 wierzchołków obu postaw. Pierwsze ramy punktów przecięcia krawędzi ostrośca z ciętami graniastójupa

są to punkty, w których pierwsze ruty tych krawędzi przecinają obwód podstawy graniastosłupa; pierwsze ruty punktów przecięcia krawędzi graniastosłupa ze ścianami ostrosłupa będą to oczywiście wierzchołki A, B, C, D podstawy graniastosłupa. Aby wyznaczyć drugie ruty tych punktów, wyznaczamy drugie ruty prostych przecięcia ścian ostrosłupa z płaszczyznami pomocniczymi, przechodzącymi przez krawędzie ostrosłupa, jak to wskazują rysunek. Wszakże wyznaczenie punktu D_1 byłoby nader niedokładne, gdyż proste d'' i $W'D_0$ przecinają się pod bardzo małym kątem. W takim przypadku obracamy prostą $W'D_0$ dookoła wysokości ostrosłupa o taki kąt, aby wyznaczenie na niej punktu D_1 dało się dokonać z dostateczną dokładnością, po czym powracamy z prostą $W'D_0$ wraz z wyznaczonym na niej punktem D_1 do położenia pierwotnego. Użycie obrotu byłoby zresztą zgoła nieuniknione, gdyby prosta $W'D$ była równoległa do linii rzędnych.

§ 90. Przecięcie wielościanu płaszczyzną jakiegokolwiek. Niech będzie wielościan jakiegokolwiek, np. ośmiościan foremny o osi prostopadłej do P_1 (Rys. 191); mamy wyznaczyć ruty oraz prawdziwą wielkość przecięcia tego ośmiościanu płaszczyzną $s_1 s_2$. Za nową płaszczyznę rzutów P_1 weźmy płaszczyznę, której pierwszej pład, czyli nowa d' α_{13} , jest prostopadły do s_2 . Znajdźmy trzeci rzut ośmiościanu oraz trzeci



blad s_3 płaszczyzny $s_1 s_2$, a to za pomocą punktu M wziętego dowolnie na drugim płaszczyźnie s_2 . Trzeci rzuty przecięcia leżą w punktach $1'''$, $2'''$, $3'''$, $4'''$, $5'''$ i $6'''$ na płaszczyźnie s_3 ; stąd znajdziemy pierwsze, a następnie drugie rzuty wierzchołków wielokąta przecięcia. Przepi-



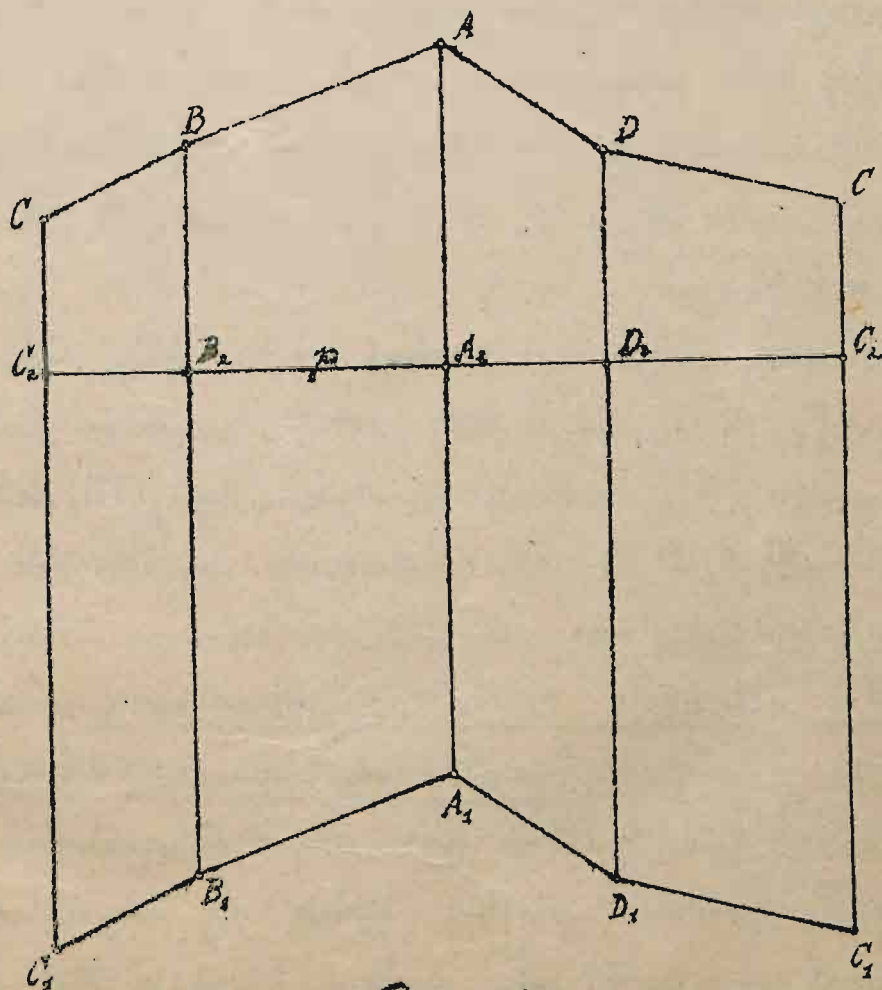
Rys. 192.

wą wielkość i kształt przecięcia znajdziemy kładąc płaszczyznę $s_1 s_2$ około s_1 na P_1 .

§ 91. Rozwinięcie powierzchni graniastopuła. Niech będzie dana leżąca w płaszczyźnie P_1 podstawa $ABCD$ graniastopuła pochyłego, pierwszy rzut AA_1' jego krawędzi bocznej AA_1 oraz wysokość graniastopuła h (Rys. 192). Jeżeli powierzchnię boczną graniastopuła rozciąć według jednej z jego krawędzi bocznych, napr. według CC_1 i rozprzecz kątły dwuścienne, to ta powierzchnia staje się połem płaskim, złożonym z czterech równoległoboków. Pole to nazywa się rozwinięciem powierzchni bocznej graniastopuła. Aby je wykreślić prześlijmy przedwzrostkiem graniastopuła płaszczyznę prostopadłą do krawędzi bocznych i znajdziemy prawdziwy kształt i wielkość tego przecięcia. Ślad s_1 płaszczyzny dzielonej będzie jakąkolwiek prostą prostopadłą do AA_1' (§ 21). Pierwszy rzut rzutownego przecięcia będzie z podstawą $ABCD$ w podobnym wielokątach którego osią jest s_1 , a kierunkiem — kierunek rzutu AA_1' . W samej rzeczy, podstawą $ABCD$ i rzut $A_1'B_1'C_1'D_1$ są rzutami równoległymi tego samego czworokąta płaskiego $A_2B_2C_2D_2$ (§ 39). Dla wyznaczenia więc tego rzutu wystarczy znaleźć rzut jednego wierzchołka tego czworokąta, napr. A_2' . Obracając AA_1' za osi s_1 znajdziemy A_2'' symetrycznie $A_1'A_1'' \equiv h$; AA_1'' jest drugim rzutem i rzutem rzeczywistą długością krawędzi AA_1 . Spuszczając z punktu A_2'' prostopadłą na AA_1'' , znajdziemy drugi ślad s_2 płaszczyzny dzielonej, a punkt A_2'' w

którym ten układ przecina AA_1'' , będzie drugim rzutem szukanego punktu A_2 , rzędna punktu A_2'' wyznaczy na AA_1' pierzasty rzut A_2' tego punktu.

Kład przecięcia $A_2 B_2 C_2 D_2$ na P_2 jest w powinowactwie z jego rzutem (§ 39), przytem oś i kierunek powinowactwa zostają te same. Aby więc wyznaczyć prawdziwą wielkość i kształt tego przecięcia, wystarczy znaleźć kład jednego jego wierzchołka, nap. A_2 ; w tym celu odmieramy na AA_1' od punktu A odcinek $AA_2 \equiv AA_2''$.



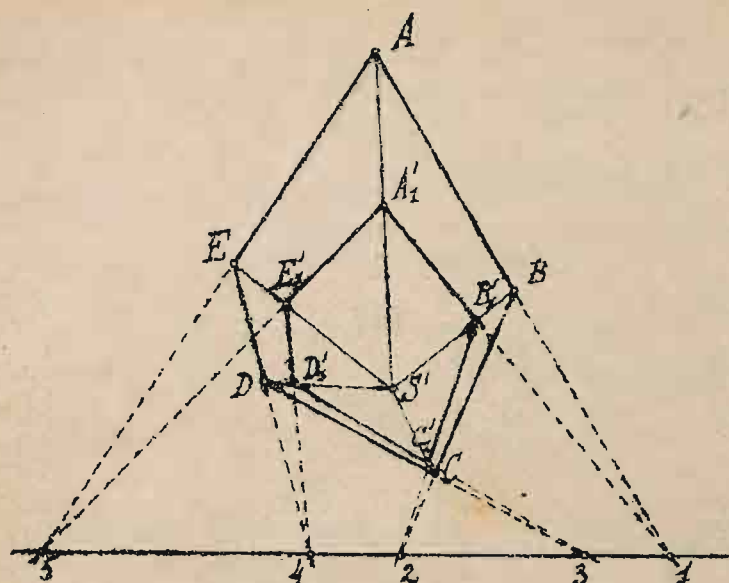
Rys. 193.

Łącząc punkt (A_2) z punktami 1 i 4, w których boki AB i AD podstawy $ABCD$ przecinają s otrzymamy dwa boki $(A_2)(B_2)$ i $(A_2)(D_2)$ szukanego kładu; dwa pozostałe boki znajdziemy również za pomocą powinowactwa z podstawą $ABCD$.

Na dowolnej prostej p odmierzymy teraz (Rys. 193) obwód ciworokąta $A_2B_2C_2D_2$; w punktach A_2, B_2, C_2 i D_2 wystawmy prostopadłe do p i odmierzymy na nich odcinki A_2A, B_2B, C_2C i D_2D równe odpowiednio prawdziwym długościom odcinków tej samej nazwy na krawędziach graniastopu. Jeden z nich AA_2 równy jest odcinkowi AA''_1 ; inne znajdujemy w taki sam sposób na prostej AA''_1 za pomocą równoległych do $A'_2A''_2$ wykreślonych w końcach B_0, C_0 i D_0 odcinków $AB_0 \equiv BB'_1, AC_0 \equiv CC'_1$ i $AD_0 \equiv DD'_1$.

Odmierzmy teraz na prostych AA_2, BB_2, CC_2 i DD_2 odcinki AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 , równe prawdziwej długości krawędzi, t.j. odcinkowi AA''_1 (Rys. 192); wielokąt $CBADCC_1D_1A_1B_1C_1$ jest rozwinięciem powierzchni bocznej danego graniastopu.

§ 92. Przecięcie ostrostupa płaszczyzną. Niech będzie (Rys. 194) w płaszczyźnie P podstawa $ABCD$ ostrostupa i niech S' będzie rzutem jego wierzchołka S na płaszczyznę P ; prosta s niechaj będzie na niej płaszczyzny S' , a punkt A'_1 rzutem punktu A_1 , w którym ta płaszczyzna przecina krawędź SA ; mamy znaleźć rzut przecięcia $A_1B_1C_1D_1E_1$ ostrostupa płaszczy-



Rys. 194.

znajdź S .

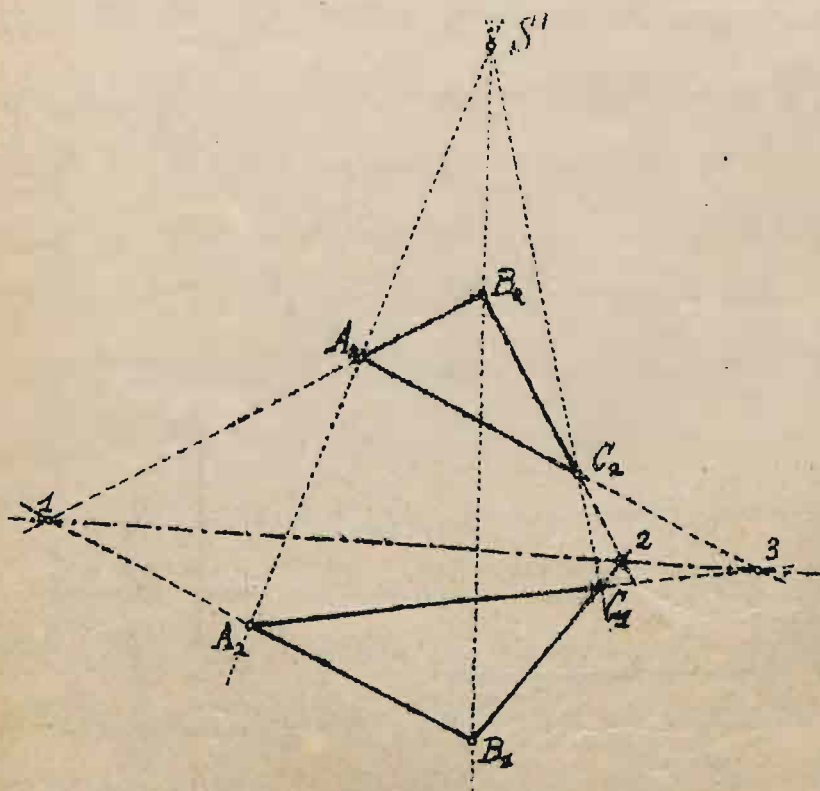
Trzy płaszczyzny: P, S i SAB przecinają się po dwóch według 3 prostych przechodzących przez jeden punkt, który nazywamy punktem przecięcia tych 3 płaszczyzn. Dwie z tych prostych są

to s i AB ; trzecia A_1B_1 , a więc i jej rzut $A'_1B'_1$, musi zatem przechodzić przez punkt 1, w którym AB przecina s . Punkt B'_1 znajdziemy przez to w sposób następujący: przedłużmy AB do przecięcia z s w punkcie 1, z którym łączymy punkt A'_1 ; prosta $1A'_1$ przecina A_1B_1 w punkcie B'_1 . Tak samo znajdziemy następny punkt C'_1 , gdyż proste BC i B'_1C_1 muszą się również przecinać na prostej s , i tak kolejno wszystkie inne D'_1, E'_1 ; dla sprawdzenia dokładności rysunku stwierdzimy, że proste $E'_1A'_1$ i E_1A przecinają się na prostej s .

§ 93. Trójkąty Desargues'a. Niech będą (Rys. 195) dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, których wierzchołki A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 leżą parami na prostych A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 przechodzących przez jeden punkt S' . Jeden z tych trójkątów, np. $A_2B_2C_2$ możemy uważać za podstawę ostrosłupa trójkątnego (czworoboku); punkt S' może-

my uważać za rzut prostokątny wierzchołka tego ostrosłupa na płaszczyznę trójkąta $A_1B_1C_1$; wtedy trójkąt $A_2B_2C_2$ będzie rzutem prostokątnym trójkąta ABC , którego wierzchołki leżą na krawędziach ostrosłupa. Płaszczyzna trójkąta $A_2B_2C_2$ musi przecinać płaszczyznę trójkąta $A_1B_1C_1$ według pewnej prostej s , na której spotkać się muszą boki A_1B_1 i A_2B_2 , B_1C_1 i B_2C_2 , C_1A_1 i C_2A_2 . Stąd twierdzenie:

Jeżeli wierzchołki dwóch trójkątów leżą parami na trzech prostych przechodzących przez jeden punkt, to boki tych trójkątów przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej.



Rys. 195.

Naważem, niech będą dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, których boki A_1B_1 i A_2B_2 , B_1C_1 i B_2C_2 , C_1A_1 i C_2A_2 przecinają się parami w trzech punktach 1, 2 i 3 prostej s . Jeden z tych trójkątów, np. $A_2B_2C_2$ możemy uważać za rzut prostokątny trójkąta ABC

leżące w płaszczyźnie π przecinającej płaszczyznę trójkąta $A_1B_1C_1$ według prostej s , przytem boki A_1B_1 i AB , B_1C_1 i BC , C_1A_1 i CA przecinają się parami w tych samych punktach 1, 2 i 3. Prowadząc płaszczyznę przez każdą parę tych prostych, otrzymamy ostrołup trójkątny o podstawie $A_1B_1C_1$, na którego krawędziach będą leżały wierzchołki trójkąta ABC , rzuty tych wierzchołków, t. j. punkty A_2 , B_2 i C_2 będą zatem leżały na rzutach krawędzi A_1B_1 , B_1C_1 i C_1A_1 , to jest na prostych $s'A_1$, $s'B_1$ i $s'C_1$. Stąd twierdzenie:

Jeżeli boki dwóch trójkątów przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej, to wierzchołki tych trójkątów leżą parami na trzech prostych przechodzących przez jeden punkt.

394. Kolineacja wrodzona. Figury $ABCDE$ i $A_1B_1C_1D_1E_1$ (Rys. 194) albo $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ (Rys. 195) są w pewnym szczególnym związku geometrycznym, który zasługuje na bliższe zbadanie. Związek ten polega na następujących 5 faktach:

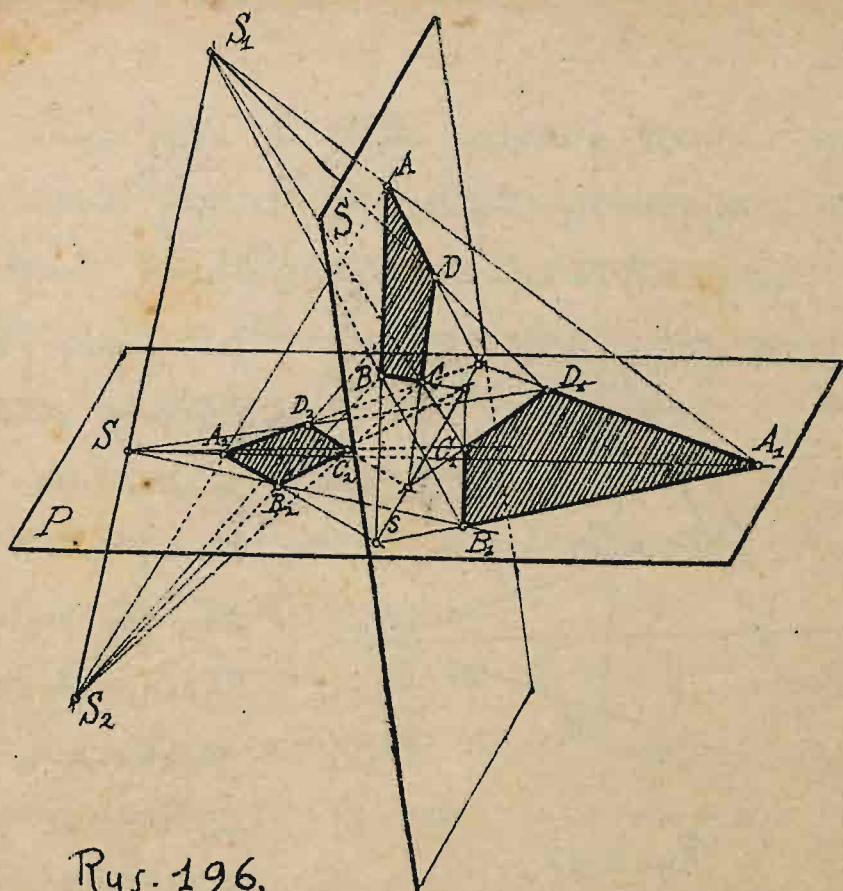
- 1) Każdemu punktowi pierwszej figury odpowiada jeden jedyny punkt drugiej figury i nawzajem,
- 2) Każdej prostej pierwszej figury odpowiada jedna jedyna prosta drugiej figury i nawzajem,
- 3) Punktowi i prostej należącym do siebie w pierwszej figurze odpowiadają w drugiej punkt i prosta również do siebie należące,
- 4) Punkty odpowiednie leżą na prostych przechodzą-

5) Proste odpowiednie przecinają się w punktach jednej prostej.

O dwóch figurach, czyniących zadość tym 5 warunkom mówimy, że są w kolineacji środkowej, albo że są homologiczne. Punkt S' , w którym spotykają się proste łączące punkty odpowiednie, nazywa się środkiem kolineacji, prosta s , na której przecinają się proste odpowiednie, nazywa się osią kolineacji. Jeżeli środek kolineacji stanie się punktem niewłaściwym, to kolineacja staje się powinowactwem (§ 39).

§ 95. Figury homologiczne, jako rzuty środkowe tej samej figury płaskiej z dwóch punktów na tę samą płaszczyznę. Figury homologiczne otrzymujemy zawsze, gdy figurę płaską $ABCD...$ rzucamy na tę samą płaszczyznę P z dwóch różnych punktów S_1 i S_2 (Rys. 196). W samej rzeczy rzuty $A_1B_1C_1D_1...$ i $A_2B_2C_2D_2...$ są wtedy w takim związku, że punkty odpowiednie A_1 i A_2 , B_1 i $B_2...$ leżą parami na prostych, według których płaszczyznę przechodzącą przez S_1 i S_2 , oraz punkty $A, B, ...$ przecinają płaszczyznę P ; proste te przechodzą oczywiście przez układ S prostej S_1S_2 na płaszczyźnie P . Proste odpowiednie A_1B_1 i A_2B_2 , B_1C_1 i $B_2C_2, ...$ przecinają proste $AB, BC, ...$ a więc i siebie wzajemnie na układzie s płaszczyzny S .

§ 96. Wyznaczenie kolineacji. Figura homologiczna z daną figurą $A_1B_1C_1D_1...$ jest wyznaczona, je-



Rys. 196.

A_2, B_2 i C_2 lub trzy proste a_2, b_2 i c_2 drugiej figury, co wychodzi zresztą na to samo, gdyż trójkąty $A_1 B_1 C_1$ i $A_2 B_2 C_2$ względnie $a_1 b_1 c_1$ i $a_2 b_2 c_2$ są trójkątami Desargues'a, które wyznaczają oś i środek kolineacji.

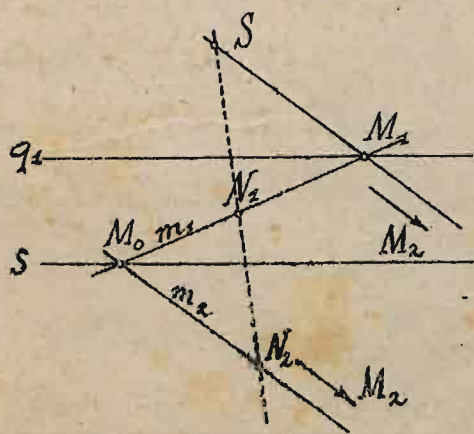
Niechaj więc oprócz środka S i osi s będą dane na prostej wychodzącej z S dwa punkty odpowiednie A_1 i A_2 ; aby znaleźć punkt drugiej figury, odpowiadający jakiemukolwiek punktowi M_1 pierwszej figury (Rys. 197), Tęczymsy $A_1 M_1$ i wyznaczamy punkt M_0 , w którym ta prosta przecina s ; prostej $A_1 M_0$ odpowiada prosta $A_2 M_0$ przecinająca ją na osi s i przechodząca przez A_2 ; punkt M_2 musi leżeć na prostej $A_2 M_0$ oraz na pro-

zeli dane
są: śro-
dek koline-
acji S ,
oś koline-
acji s
oraz je-
den punkt
 A_1 lub
jedna pro-
sta a_1
drugiej
figury,
albo trzy
punkty

żana -a dana, więc wystarczy wtedy oprócz osi i prostej połączyć jedną prostą q_1 lub r_2 , która odpowiada bądź w pierwszej, bądź w drugiej figurze prostej niewłaściwej zliczonej bądź do drugiej figury (oznaczamy ją wtedy literą q_1^∞), bądź do pierwszej (oznaczamy ją wtedy literą r_1^∞). Proste q_1 i r_2 nazywamy osiami wzajemnymi, są one oczywiście równoległe do osi s , gdyż każda z nich przecina s w punkcie niewłaściwym. Kolineacja jest przeto wyznaczona, gdy dane są: środek i oś kolineacji oraz jedna z osi wzajemnych.

Niech będą nap. dane S , s i q_1 , mamy znaleźć prostą m_2 odpowiadającą danej prostej m_1 oraz punkt N_2 odpowiadający danemu punktowi N_1 .

Wyznaczamy (Rys. 199) jak poprzednio punkty $m_1 q_1 \equiv M_1$ i $m_1 s \equiv M_0$, w których prosta m_1 przecina q_1 i s ; punkt M_0 odpowiada samemu sobie, jako punkt leżący na osi kolineacji, punkt M_2 będzie przecięciem prostej $S M_1$ z prostą q_2^∞ t.j. z prostą niewła-



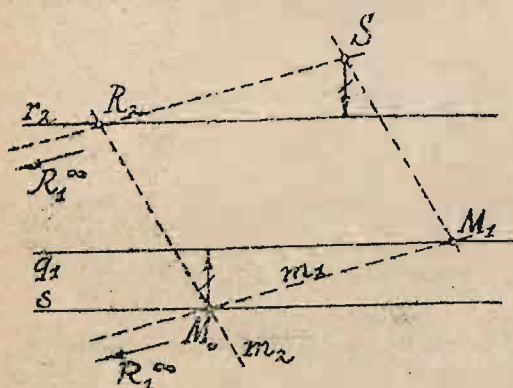
Rys. 199.

ściwą, będzie to więc kierunek prostej $S M_1$; m_2 będzie przeto prostą wychodzącą z M_0 i posiadającą ten sam kierunek, co prosta $S M_1$, t.j. równoległą do niej.

Aby znaleźć punkt N_2 , odpowiadający danemu

punktowi N_1 , prowadzimy przez N_1 dowolną prostą m_1 i znajdujemy jak poprzednio prostą jej odpowiadającą m_2 i punkt N_2 będzie przecięciem prostych ℓN_1 i m_2 .

W szczególności, jeżeli punkt R_1 jest punktem niewłaściwym prostej m_1 (Rys. 200), to odpowiadający mu punkt R_2 prostej m_2 należy do drugiej osi wzajemnej r_2 , która w ten sposób może być wyznaczona.



Rys. 200.

Aby więc wykreślić oś wzajemną r_2 , jeżeli dane są s , ℓ i q_1 , wyznaczamy punkt R_2 odpowiadający punktowi niewłaściwemu prostej jakiegokolwiek m_1 . W tym celu kreślimy najpierw prostą m_2 (równoległą do ℓM_1 przez M_0), przecyśmy ℓR_1^∞

(t.j. przez ℓ prowadzimy równoległą do m_1) i w przecięciu z m_2 otrzymujemy punkt R_2 . Równoległa do s poprowadzona przez R_2 jest osią wzajemną r_2 .

Z równoległoboku $\ell M_1 M_0 R_2$ wynika:

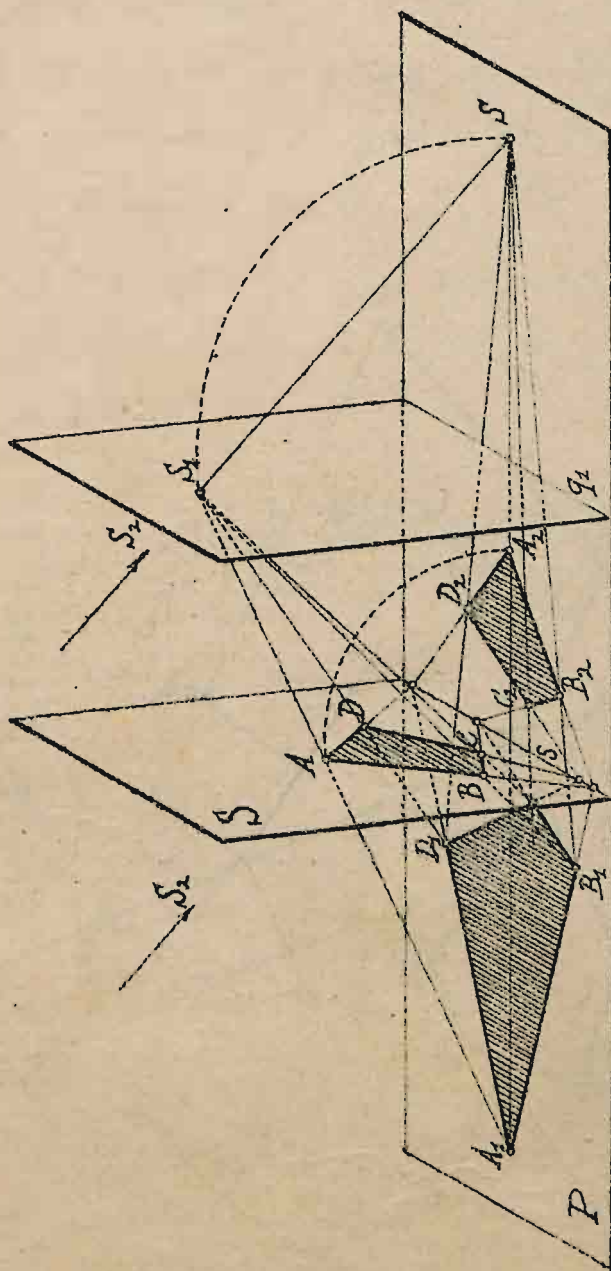
Odległość jednej z osi wzajemnych od środka kolineacji ℓ i odległość drugiej od osi kolineacji s są odcistkami równej długości lecz przeciwnego zwrotu.

§ 98. Rzut środkowy i kład figury płaskiej.

Rzuty figury płaskiej na tę samą płaszczyznę P będą w kolineacji środkowej, gdy jeden (ale tylko jeden) z dwóch punktów ℓ_1 i ℓ_2 jest niewłaściwy. Przypadek ten jest spec.

Wz. 14

gólnie ważny, gdy punkt ten jest kierunkiem prostopadłym do jednej z płaszczyzn dwusiecznych kąta dwusiecznego $S.P.$. Rzut figury $ABCD...$ z tego punktu niewłaściwego jest poprostu kładem jej na płaszczyznę P przez obrót dokoła s (Rys. 201). Stąd wniosek, że rzut yrodkowy figury płaskiej i jej kład



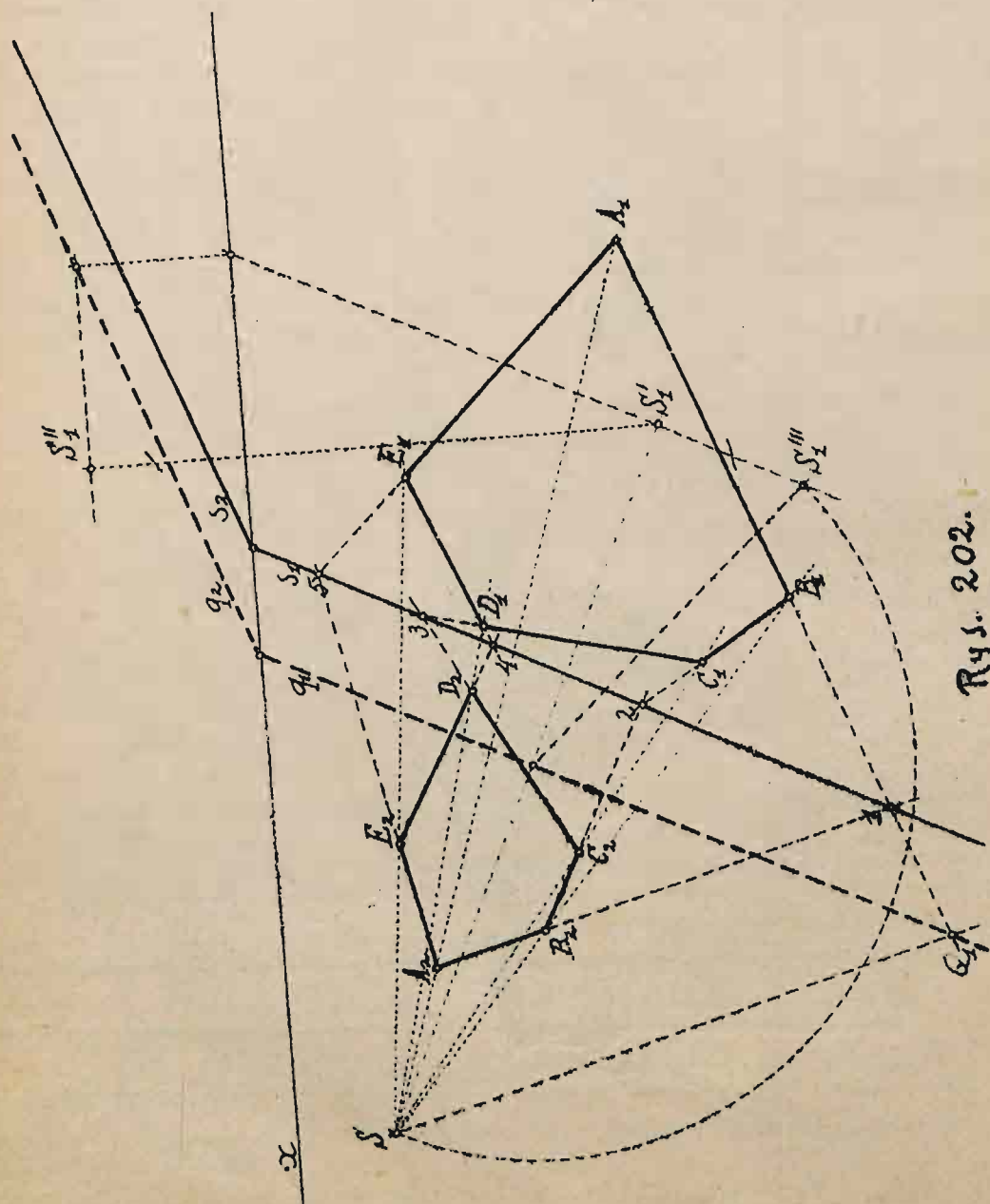
Rys. 201.

na płaszczyznę rzutu są w kolineacji yrodkowej. Główną kolineacją jest kład s płaszczyzny S_1 yrodkiem jest kład punktu rzutu S_2 dokoła klada q_1 płaszczyzny S_2 poprowadzonej przez S_1 równoległej do s , s i q_1 jak wiadomo (§97) wyznaczają kolineację figur $A_1B_1C_1D_1...$ i $A_2B_2C_2D_2...$

Na zawieszce powyższej własności możemy wyznaczyć prawdziwą wielkość i kształt przedmiotu $s, A_1B_1C_1D_1...$

plaszczyną S , nie kreśląc rzutów prostokątnych tego przecięcia.

Niech s_1' i s_1'' będą rzutami prostokątnymi ostrosłupa, którego podstawa $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ leży w płaszczyźnie P_1 (Rys. 202). Przez s_1 poprowadźmy płaszczyznę $q_1 q_2$ równoległą do $s_1 s_2$ i zróbmy kład tej płaszczyzny do kota



Rys. 202.

q_1 wraz z leżącym w niej punktem s_1 . Kład przecięcia ostrosłupa płaszczyzną $s_1 o_2$ jest w kolineacji yrodkowej z podstawą $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ostrosłupa; osią tej kolineacji jest płaszczyzna s_1 , yrodkiem s jest kład punktu s_1 , a prosta q_1 jest jedną z osi wzajemnych. Średniemy bok $A_1 B_1$ do przecięcia z osiami s i q_1 w punktach 1 i Q_1 ; prowadząc przez 1 prostą równoległą do $Q_1 s$, otrzymamy prostą odpowiadającą prostej $A_1 B_1$, na której proste $s A_2$ i $s B_2$ wyznaczą punkty A_2 i B_2 szukanego kładu. Podobnie punkty C_2, D_2 i E_2 znajdziemy na tej zasadzie, że boki $B_1 C_1$ i $B_2 C_2$, $C_1 D_1$ i $C_2 D_2$, $D_1 E_1$ i $D_2 E_2$ przecinają się na osi s_1 .

