

## ROZDZIAŁ III. OBROTY I KŁADY.

§28. Ruch obrotowy. Zmiana płaszczyzn rzutów miała na celu nadanie figurze przestrzennej innego położenia względem płaszczyzn rzutów. Cel ten może być wszakże osiągnięty inną, jeszcze drogą. Zamiast zmieniać płaszczyzny rzutów, pozostawiając figurę nieruchomą w przestrzeni, możemy postąpić przeciwnie: pozostawiając bez zmiany płaszczyzny rzutów, możemy zmienić położenie figury w przestrzeni.

Wszelka zmiana położenia figury sztywnej może być dokonana za pomocą dwojkiego ruchu: przesunięcia równoległego lub obrotu dookoła osi. Przesunięciem równoległym nazywa się ruch, w którym wszystkie punkty figury zakresłają odcinki równe, równoległe i w jedną zwrócone stronę; oczywiście, rzuty wszystkich punktów figury zakresłają na płaszczyznach rzutów również odcinki równe, równoległe i w tę samą zwrócone stronę.

Przez taki ruch rzuty figury nie ulegają żadnym zmianom; zmienia się tylko położenie tych rzutów na płaszczyźnie rysunku. Inaczej mają się sprawy z ruchem obrotowym. Każdy punkt figury zakresła łuk koła, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi obrotu  $O$  i którego środek  $O$  leży na niej; promieniem koła, zakresłonego przez jakikolwiek punkt figury jest jego odległość od osi obrotu; wszystkie te promienie



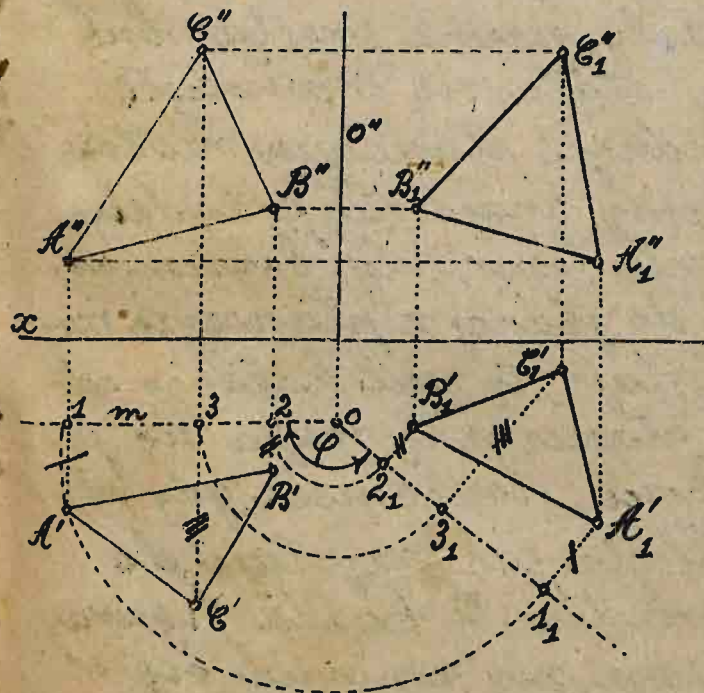
tów o ten sam kąt dokota pierwszego śladu osi  $o'$ , przesuwając jednocześnie drugie rzuty tych punktów po równoległych do  $x$ . Idy natomiast figura obraca się o kąt dany dokota osi prostopadłej do  $P_2$ , trzeba drugie rzuty wszystkich jej punktów obrócić dokota drugiego śladu osi  $o''$  o kąt dany, przesuwając jednocześnie pierwsze ich rzuty po równoległych do  $x$ .

Rozwiązamy np. następujące

Zadanie. Trójkąt  $A'B'C'$ ,  $A''B''C''$  obrócić dokota osi  $o'o''$  prostopadłej do  $P_1$  o kąt dany  $\varphi$  (Rys. 94).

Na mocy powyższej reguły należałoby przede wszystkim obrócić punkty  $A', B'$  i  $C'$  o kąt  $\varphi$  dokota punktu  $o'$ . Aby odrazu wykreślić nowe położenie trójkąta  $A'B'C'$  po dokonaniu obrotu

jego wierzchołków, adniesiemy punkty  $A', B'$  i  $C'$  do odpowiednio obranej prostej  $m$ , znajdując rzuty tych punktów na nią oraz odległości tych rzutów od stałego punktu tej prostej. Za taką prostą najdogodniej jest obrać równoległą do  $x$  przez punkt  $o'$  poprowadzoną, a



Rys. 94.

za stały punkt na niej obrany uważać sam punkt  $o'$ . Obróćmy teraz prostą  $m$  o kąt  $\varphi$  do położenia  $m_1$  wraz ze znajdującymi się na niej punktami  $1, 2$  i  $3$  i z nowych położen tych punktów  $1_1, 2_1$  i  $3_1$  wyprowadźmy odcinki  $1_1 A'_1, 2_1 B'_1$  i  $3_1 C'_1$  prostopadłe do  $m_1$  i równe odpowiednio odcinkom  $1 A', 2 B'$  i  $3 C'$ . Drugie rzuty punktów  $A, B$  i  $C$  w nowym położeniu otrzymamy w przecięciu równoległych do  $x$ , wyprowadzonych z punktów  $A'', B''$  i  $C''$ , z prostopadłymi do niej spuszczoneymi z punktów  $A'_1, B'_1$  i  $C'_1$ .

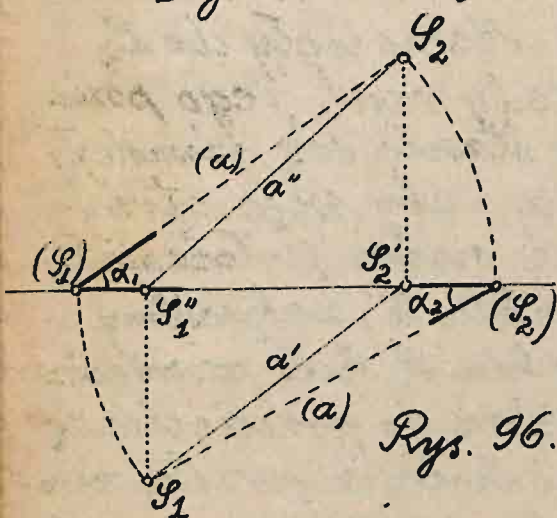
§ 30. Zastosowanie do zadań miarowych obrotu figur dokota osi prostopadłej do  $P_1$  lub do  $P_2$ .

Najczęściej kąt obrotu  $\varphi$  nie jest dany, natomiast trzeba daną figurę obrócić dokota danej osi o taki kąt, żeby pewna prosta lub pewna płaszczyzna stała się równoległa lub przystała do jednej z płaszczyzn rzutów. Tym sposobem możemy znajdować prawdziwą wielkość i kształt wielu figur, gdy bowiem prosta jest równoległa do jednej z płaszczyzn rzutów lub do niej przystaje, to rzut każdego odcinka prostej na tę płaszczyznę równa się jego naturalnej wielkości; podobnie, gdy płaszczyzna jest równoległa lub przystaje do jednej z płaszczyzn rzutów, to każda figura w płaszczyźnie położona nie zmienia się w swoim rzucie co do wielkości i kształtu.

Znajdźmy np. prawdziwą długość odcinka  $AB$ , którego rzuty są dane (Rys. 95). Obróćmy pla-



wego miejsca. Kąt  $\alpha_1$  prostej  $a$  z płaszczyzną  $P_1$  jest to kąt tej prostej ze swym rzutem  $a'$ ; po dokonanych

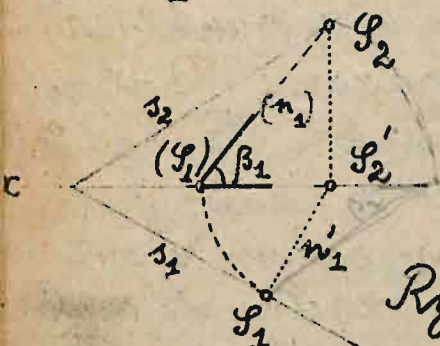


Rys. 96.

obrocie kąt ten leży na  $P_2$ : jest to kąt prostej  $(a)$  z osią  $x$ . W ten sam sposób znajdujemy  $\angle \alpha_2$  prostej  $a$  z płaszczyzną  $P_2$ .

Do zadania powyższego sprowadza się:

Zadanie. Znaleźć kąty  $\beta_1$  i  $\beta_2$  płaszczyzny  $s_1 s_2$  z płaszczyznami rzutów (Rys. 97).



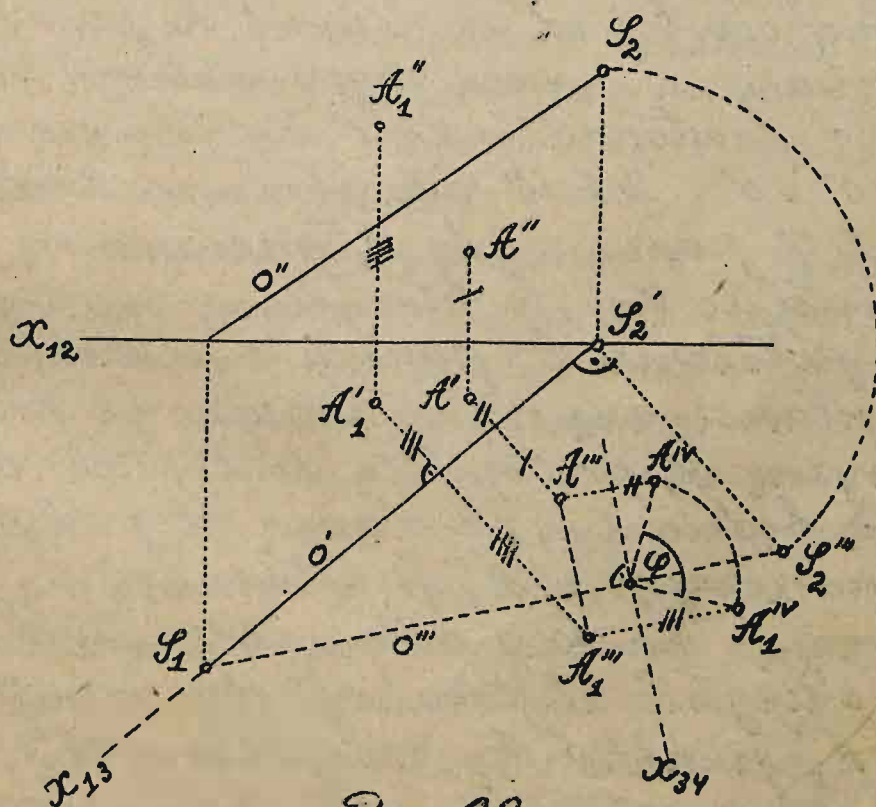
Rys. 97.

Znajdźmy np.  $\angle \beta_1$  płaszczyzny  $s_1 s_2$  z płaszczyzną  $P_1$ . Poprowadźmy w płaszczyźnie  $s_1 s_2$  prostą

największego spadku  $n_1$ ; kąt tej prostej ze swym pierwszym rzutem jest szukany kąt dwusiecznym. Pierwszy rzut tej prostej  $n_1'$  jest, jak wiadomo, prostopadły do  $s_1$ ; spodek jego na  $s_1$  jest tedy pierwszym śladem  $s_1$  prostej  $n_1$ ; drugi ślad  $s_2$  leży na  $s_2$  w przecięciu z linią rzędnych punktu  $P_2'$ , w którym  $n_1'$  przecina oś  $x$ . Przenosząc ślad  $s_1$  na oś  $x$  za pomocą obrotu do kota  $P_2'$  i taczając tak przeniesiony punkt  $s_1$  ze śladem  $s_2$ , otrzymamy prawdziwą wielkość  $P_2'(s_1)s_2$  kąta  $\beta_1$ . W podobny sposób znajdziemy kąt  $\beta_2$  płaszczyzny  $s_1 s_2$  z  $P_2$ .

§ 31. Obrót figury, dokota prostej jakiejkolwiek. Przyjmijmy teraz, że mamy obrócić figurę daną o kąt dany  $\varphi$  dokota prostej jakiejkolwiek  $o'o''$ . Wystarczy w. karać, jak znaleźć nowe położenie jednego jakiejkolwiek punktu figury, np. punktu  $A$ . Za pomocą dwójnej zmiany płaszczyzny rzutów możemy sprowadzić, że osi obrotu  $c$  będzie prostopadła do nowo przyjętych rzutów  $P_4$ ; obróciwszy wtedy punkt  $A$  dokota osi  $o$  o kąt  $\varphi$ , znajdziemy trzeci i czwarty rzut  $A_1'''$  i  $A_1''$  punktu  $A$  w nowym jego położeniu; powracając do pierwotnych płaszczyzn rzutów znajdziemy pierwszy i drugi rzuty tego punktu.

Niech więc będzie dany (Rys. 98) punkt  $A$  i prosta  $o'o''$ , której ślady oznaczmy przez  $S_1$  i  $S_2$ . Za trzecią, płaszczyznę rzutów obierzmy płaszczyznę



Rys. 98.

my płaszczyznę  
znę rzutów  
jącej prostej  
o położeniu  
tak że  
 $x_{13}$  przysię  
do rzutów  
Trzeci rzut  
o'' prostej  
otrzymamy  
Łącząc  $S_1$   
 $S_1$  z trzecim  
rzutem  
drugiego  
du  $S_2$ , k

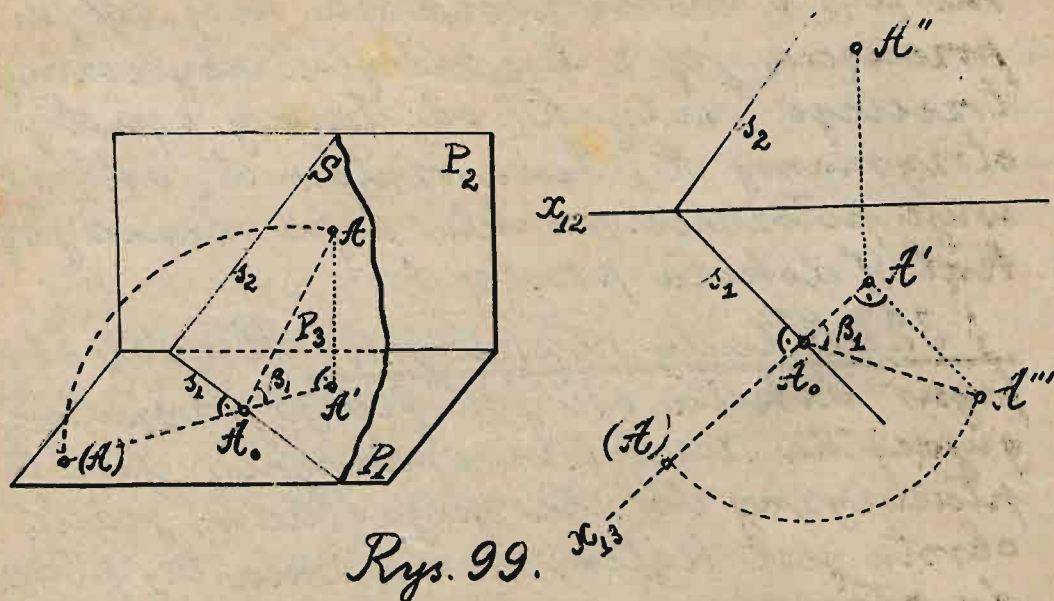
ry znajdziemy, odmierzając na prostopadłej do  $o'$  w punkcie  $S_2$  odległość drugiego śladu od zbytecznej osi  $x_{12}$ . Przeciśnięt punkt  $A$  otrzymamy, odmierzając na prostopadłej spuszczonej z  $A'$  na  $x_{13}$  od punktu przecięcia jej z tą osią odległość zbytecznego rzutu  $A''$  od dawnej osi  $x_{12}$ . Za czwartą płaszczyznę rzutów wybierzemy jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do  $o''$ , tak, że oś  $x_{34}$  będzie jakąkolwiek prostopadłą do  $o''$ . Czwarty rzut  $o''$  prostej  $o$  będzie punktem, w którym ta nowa oś przecina  $o''$ ; czwarty rzut  $A''$  punktu  $A$  znajdziemy odmierzając na prostopadłej do  $x_{34}$  spuszczonej z  $A''$  odległość zbytecznego t.j. pierwszego rzutu  $A'$  tego punktu od dawnej osi, t.j. od  $x_{13}$ . Punkt  $A$  jest teraz odwzorowany za pomocą swych rzutów  $A'''$  i  $A''$ , a prosta  $o$  prostopadła do  $P_4$  za pomocą swych rzutów  $o'''$  i  $o''$ . Jeżeli więc obrócimy  $A''$  dokoła  $o''$  o kąt  $\varphi$ , podczas gdy  $A'''$  przesunie się po równoległej do  $x_{34}$ , to otrzymamy rzuty  $A_1'''$   $A_1''$  nowego położenia  $A_1$  punktu  $A$ . Odrzucimy teraz płaszczyznę  $P_4$ , zastępując ją przez płaszczyznę  $P_1$  prostopadłą do  $P_3$ , tak, że nową osią będzie  $x_{13}$ , a dawną, t.j. zbyteczną  $x_{34}$ . Spuszczając z  $A_1'''$  prostopadłą na  $x_{13}$  i odmierzając na niej od punktu przecięcia z  $x_{13}$  odległość zbytecznego, t.j. czwartego rzutu  $A_1''$  punktu  $A_1$ , znajdziemy  $A_1'''$ . Zastąpmy teraz płaszczyznę  $P_3$  przez płaszczyznę  $P_2$  prostopadłą do  $P_1$ , t.j. wprowadzimy nową oś  $x_{12}$ . Spuszczając z  $A_1'''$  prostopadłą

na  $x_{12}$  i odmierzając na niej od punktu przecięcia jej z  $x_{12}$  odległość zbytecznego t.j. trzeciego rzutu  $H_1'''$  od danej osi, t.j. od  $x_{13}$  otrzymamy  $H_1''$ . Para rzutów  $H_1'$  i  $H_1''$  odzwiercudzi położenie punktu  $H$  po obrocie jego o kąt  $\varphi$  do kota prostej  $o$ .

§ 32. Ktady ptaszczyzn. Między obrotami figur dokota osi jest jeden przypadek, zastępujący na szeregółowe omówienie. Jest to obrót ptaszczyzny dokota swego śladu, jeżeli kąt obrotu jest kątem nachylenia tej ptaszczyzny do ptaszczyzny rzutów lub jego spełnieniem. Po takim obrocie ptaszczyzna oczywiście przystanie do jednej z ptaszczyzn rzutów i figury w danej ptaszczyźnie położone w naturalnym swym kształcie i wielkości ukazywać się na tej ptaszczyźnie rzutów. Taki obrót nazywa się ktadem danej ptaszczyzny na jedną z ptaszczyzn rzutów.

W pewnych przypadkach szeregółowych dokonywalismy już ktadów ptaszczyzn. Takim ktadem było np. znalezienie rzutu punktu  $H$  na trzecią ptaszczyznę rzutów  $P_3$  prostopadłą do  $P_1$  lub  $P_2$ . Był to bowiem obrót ptaszczyzny  $P_3$  wraz z leżącym na niej punktem  $H'''$  o kąt prosty dokota jej śladu  $x_{13}$  lub  $x_{23}$ . Pozostaje nam tedy zbadać ktad ptaszczyzny nie prostopadłej do tej ptaszczyzny rzutów, na którą, przez obrót dokota odpowiedniego śladu mamy ktad wykonać.

Niech ptaszczyzna  $S$  będzie dana za pomocą pierwszego swego śladu  $s_1$  oraz rzutów



Rys. 99.

$A'A''$  punktu  $A$  w niej leżącego (Rys. 99). Mamy obrócić punkt  $A$  dokota  $s_1$  o jeden z kątów między płaszczyznami  $S$  i  $P_1$ , tak żeby punkt  $A$  znalazł się w płaszczyźnie  $P_1$ . Za nową płaszczyznę rzutów  $P_3$  weźmiemy płaszczyznę, w której dokonuje się obrót punktu  $A$ , tak że nową osią  $x_{13}$  będzie prostopadła spuszczo-  
na z punktu  $A'$  na  $s_1$ . Trzecim rzutem punktu  $A$  będzie punkt  $A''$ , otrzymany przez od-  
mierzenie drugiej rzędnej punktu  $A$  od punktu  $A'$  na prostopadłej w nim wystawionej do  $x_{13}$ ; trzecim rzutem prostej  $s_1$ , t.j. osi obrotu będzie punkt  $A_0$ , w którym  $x_{13}$  przecina  $s_1$ . Punkt  $A'''$  będzie zarazem kła-  
dem punktu  $A$ , leżącego na  $P_3$  dokota śla-  
du  $x_{13}$  tej płaszczyzny na  $P_1$ . Podczas gdy pierwszy rzut  $A'$  będzie się poruszał po  $x_{13}$ , trzeci rzut  $A'''$ , czyli sam punkt  $A$  obraca-  
jąc się dokota  $A_0$  dopóty, dopóki nie znaj-  
dzie się w płaszczyźnie  $P_1$ , t.j. na osi  $x_{13}$ .



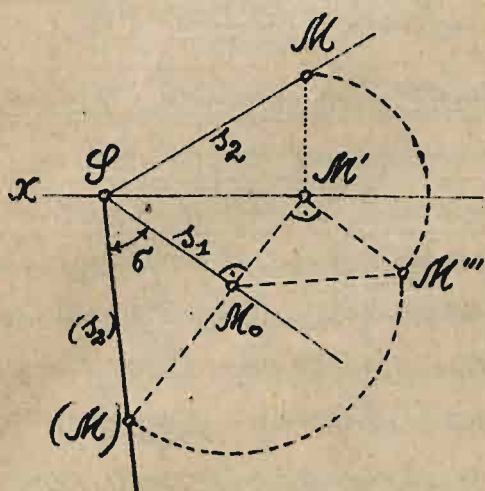
tego punktu.

Sposobu tego użyć możemy do rozwiązania zadania odwrotnego:

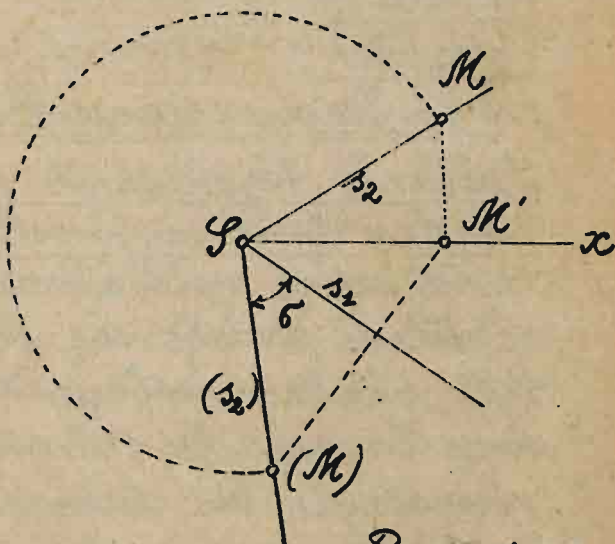
Dane są ślady  $s_1, s_2$  płaszczyzny oraz ktad  $(H)$  punktu  $H$  w niej leżącego; znaleźć rzuty punktu  $H$ . Znajdziemy najpierw, jak poprzednio,  $\perp P_1$  kreśląc trójkąt prostokątny  $M'M_0M''$ . (Rys 100) Z punktu  $(H)$  spuszczamy prostopadłą  $(H)H_0$  na ślad  $s_1$  i przez punkt  $H_0$  poprowadzimy równoległą do  $M_0M''$  i odmierzymy na niej od punktu  $H_0$  odległość punktu  $H_0$  od śladu  $s_1$ . Z otrzymanego tą drogą punktu  $H''$  poprowadzimy równoległą do  $s_1$ ; wtedy w przecięciu jej z prostą  $(H)H_0$  otrzymamy rzut poziomy  $H'$ . Mając rzut poziomy znajdziemy natychmiast rzut pionowy, zważywszy, że odcinek  $H'H''$  jest drugą rzędną punktu  $H$  (na rysunku nie wyznaczono punktu  $H''$ ).

Za pomocą powyższego wykreślenia można znaleźć ktad drugiego śladu  $s_2$  płaszczyzny  $s_1, s_2$  na  $P_1$ . W tym celu wystarczy znaleźć ktad dowolnego punktu  $M$  tego śladu i przetrząść punkt  $(M)$  z punktem  $S$ , który leżąc na osi obrotu  $s_1$ , nie ulega zmianie (Rys. 101).

Lecz ktad śladu  $s_2$  można otrzymać jeszcze prościej (Rys. 102) Zauważmy, że odcinek  $MS = (M)S$ ; jeżeli tedy z punktu  $M$  spuszczamy prostopadłą na  $s_1$ , to w przecięciu tej prostopadłej z kotem zakreślonym z punktu  $S$  promieniem  $SM$  otrzymamy punkt  $(M)$ . Kąt między śladem  $s_1$  i ktadem śladu  $s_2$  jest natu-



Rys. 101.

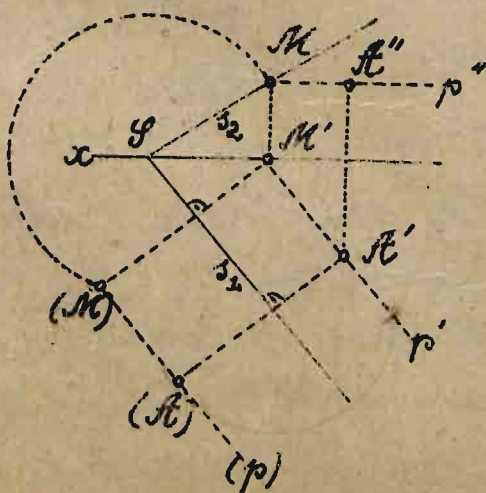


Rys. 102.

ralną wielkością kąta  $\delta$  między śladami.

Z powyższego wynika nowy sposób kreślenia kładu punktu  $K$  leżącego w płaszczyźnie danej za pomocą śladów  $s_1$  i  $s_2$ . Przypuśćmy, że dany jest pierwszy rzut  $K'$  punktu  $K$ . Poprowadzimy przez punkt  $K'$  linię poziomą  $p$  płaszczyzny  $s_1, s_2$ . Jej rzut pierwszy  $p'$  przechodzi przez  $K'$  równoległe do  $s_1$  i jej rzut drugi jest równoległy do  $x$ .

Wyznaczmy drugi ślad  $M$  tej prostej, znajdziemy jego kład ( $M$  na  $P_1$ ). Prosta ( $p$ ) poprowadzona przez ( $M$ ) równoległe do  $s_2$  jest kładem prostej poziomej  $p$ , na której leży

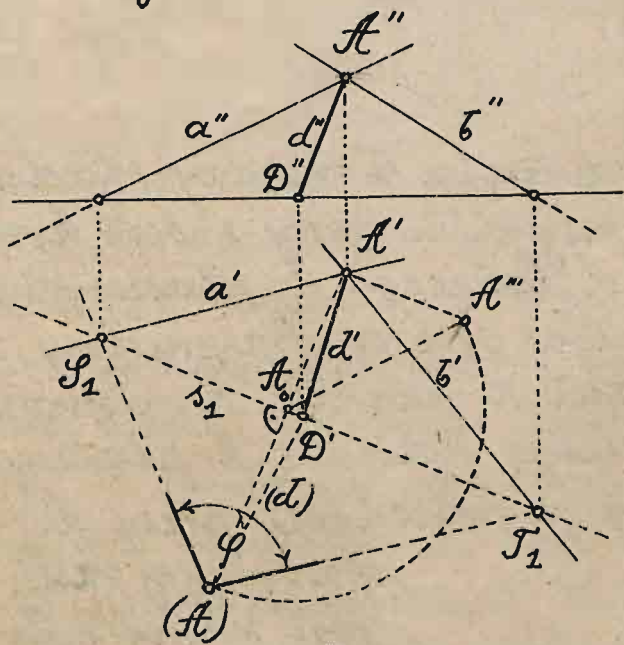


Rys. 103.

punkt  $H$ . Jeżeli zatem z punktu  $H$  spuścimy na  $s_1$  prostą  $pt_1$ , to w przecięciu jej z prostą  $(p)$  otrzymamy szukany kład ( $H$ ).

§ 33. Zastosowanie kładoń do zadań miarowych.

Zadanie. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta między dwiema prostymi  $a'a''$  i  $b'b''$  (Rys. 104). Nie zmieniając ogólności zagadnienia, możemy założyć, że dane proste się przecinają, gdyby bowiem było inaczej, wtedy obrawszy dowolny punkt przestrzeni  $H$ , poprowadzilibysmy przez ten punkt proste równoległe do danych i szukalibysmy wielkości kąta między nimi.



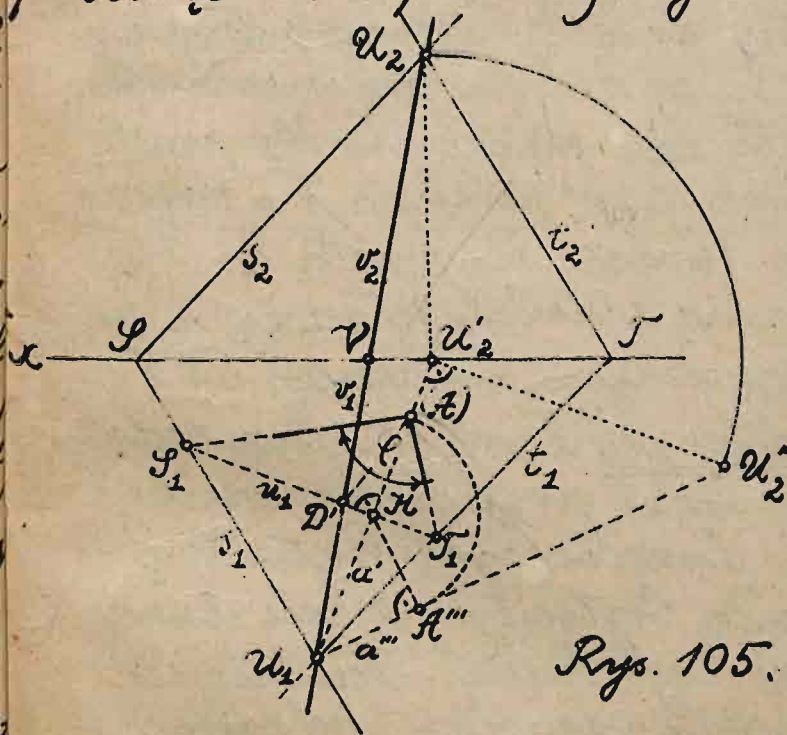
Rys. 104.

kąta między nimi.  
Wyznaczymy więc  
ślady  $S_1$  i  $T_1$  danych  
prostych i łącząc  
je prostą, znajdzie-  
my ślad  $s_1$  ptaszczy-  
zny tych prostych. Wy-  
konawszy kład punk-  
tu  $H$  tej ptaszczyzny  
na  $P_1$  i łącząc ( $H$ )  
z  $S_1$  i  $T_1$  otrzymamy  
kład szukanego  
kąta  $\varphi$ .

Wykreśliłmy przy tej sposobności rzut dwusiecznej kąta między prostymi  $a$  i  $b$ . W tym celu dzielimy  $\angle \varphi$  na połowy i wyznaczamy punkt  $D'$ , w którym dwusieczna ( $d'$ ) przecina ślad  $s_1$ ; następnie wyznaczamy drugi rzut  $D''$  punktu

i. Tęczyśmy  $A'D'$  oraz  $A''D''$ .

Zadanie. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta dwusiecznego między dwiema płaszczyznami  $s_1 s_2$  i  $t_1 t_2$ . Zadanie to możnaby prowadzić do poprzedniego, spuszczając z dowolnie obranego punktu prostopadłe na dane płaszczyzny i szukając prawdziwej wielkości kąta tych dwóch prostych. Będzie to kąt równy albo spełniający względem kąta dwusiecznego danych płaszczyzn. Ale znajdziemy bezpośrednio prawdziwą wielkość kąta linijowego płaszczyzn danych. W tym celu należy przeciąć obie płaszczyzny  $S$  i  $T$  (Rys. 105) do-



Rys. 105.

wolną płaszczyznę  $U$  prostopadłą do prostej przecięcia  $ST$  i wykonać kład otrzymanego w przecięciu kąta na  $P_1$  lub  $T_2$  do kąta odpowiedniego śladu  $u_1$  lub  $u_2$  płaszczyzny tego kąta. Pierwszy ślad  $u_1$

tej płaszczyzny jest tedy jakakolwiek prosta prostopadła do rzutu  $a'$  prostej przecięcia płaszczyzn  $s_1 s_2$  i  $t_1 t_2$ . Niechaj ta prosta przecina ślady  $s_1$  i  $t_1$  w punktach  $S_1$  i  $T_1$ .

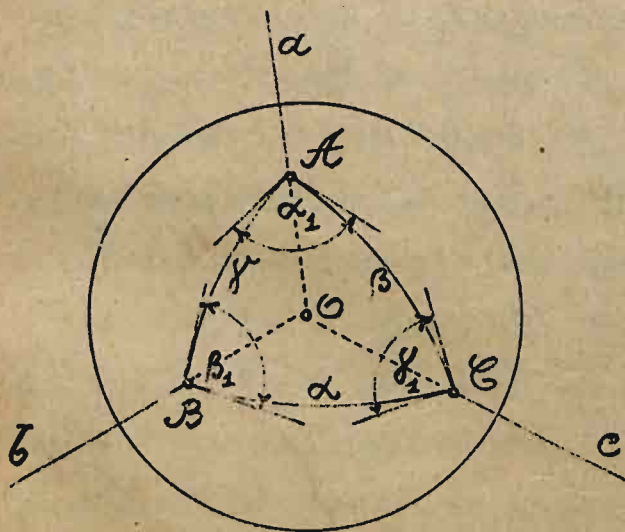
Punkt  $H$ , w którym płaszczyzna  $U$  przecina krawędź  $a$  kąta dwusiecznego  $ST$  jest spodem prostopadłej spuszczonej z punktu  $H \equiv a'u_1$  na  $a$ , t.j. wysokością trójkąta  $S_1 T_1 H$ . Jeżeli tedy znajdziemy trzeci rzut  $a'''$  ( $a$  zarazem kład) prostej  $a$  na płaszczyznę  $P$ , rzucającą prostopadło tę prostą i obróćmy ją do końca swego śladu  $a'$ , to odległość punktu  $H$  od prostej  $a'''$  będzie szukana wysokością. Odmierzając ją od punktu  $H$  na  $a'$  i tańcząc otrzymamy w ten sposób punkt ( $H$ ) z  $S_1$  i  $T_1$  otrzymamy kład  $S_1(H)T_1$  szukanego kąta liniowego  $\varphi$ .

Ślady płaszczyzn dwusiecznej kąta dwusiecznego  $ST$  otrzymamy dzieląc  $\angle \varphi$  na połowy, wyznaczając punkt  $D'$  w którym dwusieczna kąta  $\varphi$  przecina  $u_1$ , tańcząc punkt  $D'$  z  $u_1$  prostą  $v_1$ , która przecina oś  $x$  w punkcie  $V$  i wreszcie tańcząc punkt  $V$  ze śladem  $u_2$  prostą  $v_2$ . Płaszczyzna  $v_1 v_2$  jest jedną z dwóch płaszczyzn dwusiecznych kąta dwusiecznego płaszczyzn  $S$  i  $T$ .

§34. Kąty trójsieczne. Dwa ostatnie zadania pozwalają wyznaczyć prawdziwą wielkość kątów płaskich i dwusiecznych kąta trójsiecznego lub wogóle trygonometrycznego, jeżeli dane są rzuty krawędzi tego kąta. Trudniejsze nieco są zagadnienia odwrotne, polegające na wykreśleniu rzutów krawędzi kąta trójsiecznego, którego te lub owe kąty płaskie i dwusieczne są dane. Zagadnienia te prowadzą do odrycia związków trygonometrycznych pomiędzy kątami płaskimi i dwusiecznymi kąta trójsiecznego.

Kątem trójsściennym albo trójsścianem nazywamy figurę utworzoną przez trzy promienie  $a, b$  i  $c$ , wychodzące z jednego punktu  $O$  i nie leżące w jednej płaszczyźnie. Punkt  $O$  nazywa się wierzchołkiem, promienie  $a, b$  i  $c$  — krawędziami, płaszczyzny  $bc, ca$  i  $ab$  — ścianami. Pod względem miarowym kąt trójsścienny wyznaczony jest przez sześć elementów: 3 kąty płaskie, t. j. kąty między krawędziami  $\alpha \equiv \widehat{bc}$ ,  $\beta \equiv \widehat{ca}$  i  $\gamma \equiv \widehat{ab}$  oraz 3 kąty dwusieczne t. j. kąty między ścianami:  $\alpha_1$  między  $ab$  i  $ac$ ,  $\beta_1$  między  $ab$  i  $bc$  i  $\gamma_1$  między  $ca$  i  $bc$ . Te sześć elementów nie są wzajemnie niezależne, albowiem, jak się to okaże, trzy jakiegokolwiek z pośród nich wyznaczają już kąt trójsścienny, t. j. wyznaczają trzy pozostałe elementy. Rozwiązać kąt trójsścienny znaczy to, mając dane trzy jego elementy, wyznaczyć

trzy pozostałe.



Rys. 106.

Jeżeli z wierzchołka kąta trójsściennego, jako środka, promieniem równym jednostce długości opiszemy kulę (Rys. 106), to krawędzie kąta trójsściennego wyznaczą na powierzchni kuli punkty  $A, B$  i  $C$ , ściany

zaś kąta trójsściennego wyznacza na niej Tuki wielkich kąt  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$ . Figura  $ABC$  na powierzchni kuli nazywa się trójkątem sferycznym; punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$  nazywają się wierzchołkami; Tuki  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  nazywają się bokami trójkąta sferycznego; wyprostowane ich długości są to miary naturalne kątów płaskich trójsściannu  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$ . Kątem trójkąta sferycznego nazywa się kąt pomiędzy sąsiednimi bokami, t.j. kąt pomiędzy stycznymi do tych łuków, które narzaliśmy bokami, w punkcie ich przecięcia, t.j. w wierzchołku. Łatwo stwierdzić, że są to kąty liniowe kątów dwusściennych trójsściannu; w samej rzeczy ramiona każdego z tych kątów leżą na ścianach kąta dwusściennego i są prostopadłe do jego krawędzi. Tak więc trójkąt sferyczny ma również sześć elementów: trzy boki  $BC$ ,  $CA$  i  $AB$  i trzy kąty  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Te sześć elementów mierzymy za pomocą radjanów lub stopni; w każdym przypadku liczby, które je mierzą, są równe liczbom, wyrażającym miarę kątów płaskich i dwusściennych trójsściannu, którego wierzchołek znajduje się w środku kuli, a krawędzie przechodzą przez wierzchołki trójkąta sferycznego. Stąd wynika, że miarowa teoria kątów trójsściennych jest identyczna z miarową teorią trójkątów sferycznych, t.j. z trygonometrią sferyczną.

Rozwiązanie kątów trójsściennych może być dokonane bądź metodą wykreślną, bądź metodą rachun-

Kowa, oparta na zasadniczych związkach pomiędzy elementami kąta trójsściennego względnie trójkąta sferycznego. Nie jest naszym zadaniem wykład trygonometrii sferycznej, okażemy wszakże, że rozwiązanie wykresłne kątów trójsściennych pozwala wyprowadzić zasadnicze równania trygonometrii sferycznej.

Przypadków rozwiązania kątów trójsściennych może być sześć, a mianowicie:

- |  |  |
|--|--|
| 1) Dane są trzy kąty płaskie $\alpha, \beta, \gamma$ ;                                       | 4) Dane są trzy kąty dwusieczne: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ;                                   |
| 2) Dwa kąty płaskie i kąt dwusieczny między nimi: $\alpha, \beta, \gamma_1$ ;                | 5) Dwa kąty dwusieczne i kąt płaski między nimi: $\alpha_1, \beta_1, \gamma$ ;                     |
| 3) Dwa kąty płaskie i kąt dwusieczny przeciw jednego z nich leżący: $\alpha, \beta, \beta_1$ | 6) Dwa kąty dwusieczne i kąt płaski na przeciw jednego z nich leżący: $\alpha_1, \beta_1, \beta$ . |

Okażemy niebawem, że wystarczy umieć rozwiązać trzy z tych sześciu przypadków np. 1., 2.; 3., gdyż trzy pozostałe: 4., 5., 6. dają się z łatwością do nich sprowadzić. Da się to uskutecznić za pomocą t. zw. trójscianu biegunowego.

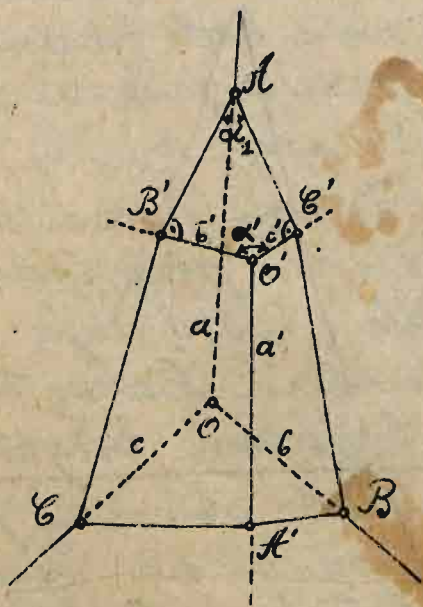
Wewnątrz trójscianu  $Oabc$  wybierzmy punkt dowolny  $O'$  i spuścimy z niego na ściany  $b'c$ ,  $ca$  i  $ab$  prostopadłe  $a'$ ,  $b'$  i  $c'$ . Te trzy promienie tworzą nowy trójscian  $O'a'b'c'$ , który nazwiemy biegunowym względem trójscianu  $Oabc$ .

Kierunki krawędzi  $a'$ ,  $b'$  i  $c'$  tego nowego trój-

ścianu nie zależą od położenia punktu  $O'$  wewnątrz trójscianu, a zależą jedynie od kierunków krawędzi  $a, b$  i  $c$ . Wszystkie trójsściany biegunowe względem trójscianu  $Oabc$  są ztym równe; jeżeli więc badamy trójsściany niezależnie od ich położenia w przestrzeni, to możemy powiedzieć, że względem każdego trójscianu istnieje jeden jedyny trójscian biegunowy.

Okazemy teraz, że związek pomiędzy każdym trójscianem, a trójscianem względem niego biegunowym ma cechy wzajemności, t.j. okażemy, że gdy trójscian  $O'a'b'c'$  jest biegunowym względem trójscianu  $Oabc$ , to nawzajem trójscian  $Oabc$  jest

biegunowym względem trójscianu  $O'a'b'c'$ . W samej rzeczy, 1) jeżeli punkt  $O'$  znajduje się wewnątrz trójscianu  $Oabc$ , to  $O$  znajduje się wewnątrz trójscianu  $O'a'b'c'$  i 2) jeżeli krawędzie  $a', b'$  i  $c'$  są prostopadłe odpowiednio do ścian  $bc, ca$  i  $ab$ , to nawzajem krawędzie  $a, b$  i  $c$  są prostopadłe odpowiednio



Rys. 107.

do ścian  $b'c', c'a'$  i  $a'b'$ . Dowiedzimy np., że krawędź  $a$  jest prostopadła do ściany  $b'c'$ . Ściana  $b'c'$  jest prostopadła do ściany  $ca$ , albowiem przechodzi przez prostą  $b'$ , która z założenia

jest prostopadła do ściany  $ca$ . Jest ona również prostopadła do ściany  $ab$ , przechodzi bowiem przez prostą  $c'$ , która z założenia jest prostopadła do  $ab$ . Jeżeli jednak obydwie ściany  $ca$  i  $ab$  są prostopadłe do ściany  $b'c'$ , to prosta przecięcia a ścian  $ca$  i  $ab$  musi być też do ściany  $b'c'$  prostopadła, c. t. d. o. Tak samo dowieść można, że krawędź  $b$  jest prostopadła do ściany  $c'a'$ , oraz, że krawędź  $c$  jest prostopadła do ściany  $a'b'$ . Widzimy stąd, że trójscian  $Oabc$  spełnia wszystkie warunki, wymagane przez skreślenie trójscianu biegunowego, że zatem możemy twierdzić, że trójsściany  $Oabc$  i  $O'a'b'c'$  są wzajemnie biegunowe.

Formuły elementami dwóch wzajemnie biegunowych trójscianów zachodzi związek nader ważny. Powiadam mianowicie, że kąty płaskie jednego są spełnieniem kątów dwóch ściennych drugiego. Oznaczmy elementy trójscianu  $Oabc$  przez  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , elementy trójscianu  $O'a'b'c'$  przez  $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ ; wtedy prawdziwe są następujące równości:

$$\begin{aligned} \alpha' + \alpha_1 &= \pi, & \alpha + \alpha'_1 &= \pi, \\ \beta' + \beta_1 &= \pi, & \beta + \beta'_1 &= \pi, & \dots\dots\dots (1) \\ \gamma' + \gamma_1 &= \pi, & \gamma + \gamma'_1 &= \pi. \end{aligned}$$

Wystarczy dowieść jednego z tych związków, np.  $\alpha' + \alpha_1 = \pi$ ,

wtedy dwa pozostałe tej samej kolumny wynikają z przestawienia kotowego liter  $\alpha, \beta, \gamma$ ,

trzy zaś związki drugiej kolumny wynikają na zasadzie wzajemności. Aby teraz wykazać związek  $\alpha' + \alpha_1 = \pi$ , zauważmy czworokąt  $O'B'AC'$ , którego dwa kąty  $B'$  i  $C'$  są proste, suma więc pozostałych  $O'$  i  $A'$  musi wynosić  $\pi$ . Otóż kąt  $B' O' C' = \alpha'$ , kąt zaś  $B' A' C'$  jest kątem liniowym kąta dwusieczennego  $\alpha_1$ , albowiem płaszczyzna czworokąta, t.j. ściana  $b'c'$  jest prostopadła do krawędzi kąta dwusieczennego  $\alpha$ .

Na mocy wzorów (1) możemy zredukować sześć przypadków rozwiązywania trójscianów do trzech. Przyjmijmy np., że umiemy rozwiązać przypadek 1, to jest umiemy na drodze wykreślnej znaleźć trzy kąty dwusieczne trójscianu, jeżeli dane są trzy jego kąty płaskie. Powiadam, że możemy wtedy na zasadzie wzorów (1) rozwiązać również przypadek 4, t.j. wyznaczyć wykreślnie kąty płaskie  $\alpha, \beta, \gamma$  trójscianu, gdy dane będą trzy jego kąty dwusieczne  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ . W samej rzeczy, z chwilą, gdy dane są kąty dwusieczne trójscianu  $O$ , dane będą również kąty płaskie trójscianu biegunowego  $O'$ :

$$\alpha' = \pi - \alpha_1, \quad \beta' = \pi - \beta_1, \quad \gamma' = \pi - \gamma_1.$$

Z założenia potrafimy wyznaczyć kąty dwusieczne tego trójscianu biegunowego  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ . Spełnienia tych kątów, a mianowicie:  
 $\alpha = \pi - \alpha_1', \quad \beta = \pi - \beta_1', \quad \gamma = \pi - \gamma_1'$   
 będą szukаныmi kątami płaskimi trójscianu  $O$ .

W ten sam sposób przypadek 5 sprowadza się

do 2. go, a 6. ty do 3. go.

W trygonometrii sferycznej, t. j. w teorii miarowej kąta trójsściennego mają trójsściany wzajemnie biegunowe duże znaczenie. Przypuśćmy, że znaleźliśmy jakikolwiek związek analityczny pomiędzy elementami trójsścianu, t. j. jakikolwiek wzór trygonometrii sferycznej. Kładąc w tym wzorze:

$$\alpha = \pi - \alpha'_1, \quad \beta = \pi - \beta'_1, \quad \gamma = \pi - \gamma'_1,$$

$$\alpha_1 = \pi - \alpha', \quad \beta_1 = \pi - \beta', \quad \gamma_1 = \pi - \gamma',$$

otrzymamy nowy wzór trygonometrii sferycznej, dotyczący elementów trójsścianu biegunowego. Ponieważ jednak na zasadzie wzajemności kątów trójsścian jest biegunowym szerego innego trójsścianu, wzór ten musi być ogólny i dotyczyć również danego trójsścianu; można zatem opuścić akcenty przy literach. W ten sposób znalazłszy pewną ilość wzorów trygonometrii sferycznej, możemy na tej drodze, niejako automatycznie poszukiwać nowych, których bezpośredni wywód mógłby być trudnym lub których istnienie mogłoby uciec naszej uwadze.

§ 35. Pierwszy przypadek rozwiązania trójsścianów. Niech będą dane trzy kąty płaskie  $\alpha, \beta, \gamma$  trójsścianu  $Oabc$ , mamy wyznaczyć jego kąty dwusieczne  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ . Wykreśliśmy najpierw rzuty tego trójsścianu w najprostszym jego położeniu, gdy mianowicie jedna z jego ścian np.  $bac$  leży w  $P_1$ . Drugie rzuty krawędzi  $ba$  i  $bc$  leżą na osi  $x$ , a kąt między pierwszymi rzutami, które



Jeżeli teraz będziemy z powrotem obracali ściany  $ab$  i  $ac$  do kota krawędzi  $b$  wzgl.  $c$  aż do pierwotnego tych ścian położenia, to pierwszy rzut punktu  $H$ , który w pierwszej chwili przystawał do punktu  $(H)$  wzgl.  $(H')$ , poruszać się będzie po prostopadłej do osi obrotu, t.j. do  $b$  wzgl.  $c$ . W przecięciu z tym tych dwóch prostopadłych musi leżeć punkt  $H'$ , to jest I rzut punktu  $H$  w pierwotnym położeniu krawędzi  $a$ . Aby wyznaczyć drugi rzut tego punktu, trzeba znaleźć wznesienie jego ponad  $P_1$ ; w tym celu zrobimy kład płaszczyzny, w której poruszał się punkt  $H$ , obracając się do kota  $b$ . Z punktu  $H$  promieniem  $H_0(H)$  zakreślamy koto, aż do przecięcia się jego z prostopadłą do  $(H)H'$  w punkcie  $H''$  wystawioną; odcinek  $H'H''$  jest pierwszą odległością punktu  $H$ . Odmierzając ten odcinek na linii rzędnych punktu  $H'$  od osi  $x$ , znajdziemy  $H''$ ; łącząc ten punkt z  $O''$  otrzymamy  $a''$ .

Kąt dwusieczny  $\beta_1$  jest to kąt  $H'H_0H''$ ; w samej rzeczy kąt ten jest kładem kąta liniowego, otrzymanego przez przecięcie ścian  $ab$  i  $bc$  płaszczyzną prostopadłą do krawędzi  $b$ ; w podobny sposób otrzymujemy kąt dwusieczny  $\gamma_1$ . Aby otrzymać kąt  $d_1$ , z punktu  $H$  wystawiamy na ścianach  $ab$  i  $ac$  prostopadłe do krawędzi  $a$  aż do przecięcia się ich z krawędziami  $b$  wzgl.  $c$  w punktach  $S_1$  wzgl.  $T_1$ . Jeżeli wyznaczymy kład trójkąta  $S_1HT_1$  do kota  $S_1T_1$ , to  $\angle H$

tego trójkąta będzie szukany. Jeżeli z punktu  $S_1$  promieniem  $S_1(H)$ , a z punktu  $T_1$  promieniem  $T_1(H^*)$  zakreslimy łuki, to punkt przecięcia tych łuków da nam trzeci wierzchołek  $H_1$  trójkąta  $S_1 H_1 T_1$  kąt  $S_1 H_1 T_1$  tego trójkąta jest kątem  $\alpha_1$ .

Dla sprawdzenia dokładności wykreślenia zauważmy: 1) proste  $a'$  i  $S_1 T_1$  winny być prostopadłe, gdyż rzut prostej i ślad płaszczyzny do niej prostopadłej muszą być prostopadłe, 2) punkt  $H_1$  musi leżeć na  $a'$ , albowiem rzut i kład punktu  $H$  muszą leżeć na prostopadłej do osi obrotu, która jest  $S_1 T_1$ , 3) odcinki  $H'H''$  i  $H'H'''$  muszą być równe, oba wyrażają bowiem odległość punktu  $H$  od  $P_1$ .

§ 36. Zasadnicze równania trygonometrii sferycznej. Rys. 108 pozwala wyprowadzić zasadnicze równania trygonometryczne pomiędzy elementami kąta trójsściennego t.j. Zasadnicze równania trygonometrii sferycznej. Zauważyliśmy już tożsamość:

$$H'H'' \equiv H'H''' \dots \dots \dots (1)$$

dwie inne tożsamości otrzymamy, spuszczając z  $H''$  prostopadłą na krawędź  $6$  i pisząc:

$$CH_0 \equiv OM + MH_0 \dots \dots \dots (2)$$

$$H_0^x M \equiv H_0^x N + NM \dots \dots \dots (3)$$

Obliczwszy poszczególnie wyrazy tych tożsamości i podstawivszy otrzymane wartości, znajdziemy trzy zasadnicze równania trygonometrii sferycznej.

Przekształcając je następnie za pomocą metody trójscianów wzajemnie biegunowych otrzymamy pozostałe równania.

1) Wróćmy się najpierw do tożsamości (1). Z trójkąta  $H'H_0H'''$  mamy  $H'H''' = H_0H''' \sin \beta_1$ . Ale  $H_0H''' = H_0(H)$  jako promień kąta,  $H_0(H)$  z trójkąta  $O H_0(H)$  równa się  $O(H) \sin \gamma$ , czyli  $\sin \gamma$ , albowiem  $OH = 1$ . Tak więc  $H'H''' = \sin \gamma \sin \beta_1$ . Podobnie znajdziemy  $H'H''' = H_0^x H''' \sin \gamma_1 = H_0^x(H^x) \sin \gamma_1 = O(H^x) \sin \beta \sin \gamma_1 = \sin \beta \sin \gamma_1$ . Tożsamość (1) daje nam zatem:

$$\sin \gamma \sin \beta_1 = \sin \beta \sin \gamma_1$$

Dzieląc obie strony tej równości przez  $\sin \beta \sin \gamma$  mamy ostatecznie

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma}.$$

Przez zamianę kątową liter  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  otrzymamy:

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha},$$

a łącząc w jedną całość te dwa równania,

$$\text{mamy: } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma} \dots (1)$$

czyli: wstawy kątów dwusiecznych są proporcjonalne do wstaw przeciwległych im kątów płaskich.

2) Znajdźmy teraz wartości wyrazów drugiej tożsamości:

$$OH_0 = OH + H'H_0$$

Z trójkąta  $O H_0(H)$  mamy:

$$C H_0 = C(H) \cos \gamma = \cos \gamma$$

Z trójkąta  $C M H_0^x$  mamy:

$C M = C H_0^x \cos \alpha$ , ale  $C H_0^x$  z trójkąta  $C H(A^x)$  równa się  $\cos \beta$ , zatem

$$C M = \cos \alpha \cos \beta$$

$M H_0 = N H'$  jako boki przeciwległe prostokąta, ale z trójkąta  $N H' H_0^x$ , którego  $\angle H_0^x = \alpha$  (są to bowiem kąty o ramionach wzajemnie prostopadłych) mamy:

$N H' = H' H_0^x \sin \alpha$ , atoli  $H' H_0^x$  z trójkąta  $H' H_0^x H''^x$  równa się

$$= H_0^x H''^x \cos \gamma_1 = H_0^x (H^x) \cos \gamma_1 = \sin \beta \cos \gamma_1, \text{ zatem}$$

$$M H_0 = N H' = H' H_0^x \sin \alpha = \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_1.$$

Podstawiając te wartości w tożsamość (2) otrzymamy:

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_1 \dots (2)$$

3) Pozostaje nam wreszcie przekształcić treść tożsamości

$$H_0^x M = H_0^x N + N M.$$

Z trójkąta  $O H_0^x M$ :  $H_0^x M = O H_0^x \sin \alpha = \cos \beta \sin \alpha$

Z trójkąta  $N H' H_0^x$ :  $H_0^x N = H' H_0^x \cos \alpha = H_0^x H''^x \cos \gamma_1 \cos \alpha =$   
 $= H_0^x (H^x) \cos \gamma_1 \cos \alpha = \sin \beta \cos \gamma_1 \cos \alpha.$

$$N M = H' H_0 = H_0 H''^x \cos \beta_1 = H_0 (H) \cos \beta_1 = \sin \gamma \cos \beta_1.$$

Podstawiając te wartości otrzymamy:

$$\cos \beta \sin \alpha = \sin \beta \cos \gamma_1 \cos \alpha + \sin \gamma \cos \beta_1$$

Dzieląc obie strony równości przez  $\sin \beta$ :

$$\cot \beta \cdot \sin \alpha = \cos \gamma_1 \cos \alpha + \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \cos \beta_1.$$

Alc ze względu na równanie (2) stosunek  $\frac{\sin \gamma}{\sin \beta}$  możemy zastąpić przez  $\frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_1}$ ; wtedy równanie

węznie postać:

$$\cot \beta \cdot \sin \alpha = \cos \gamma_1 \cot \alpha + \cot \beta_1 \sin \gamma_1 \dots (3)$$

Zastosujmy teraz metodę trójscianów wzajemnie biegunowych do trzech wzorów zasadniczych (1), (2) i (3). W tym celu należy dokonać podstawienia:  $\alpha = \pi - \alpha_1$ ,  $\beta = \pi - \beta_1$ ;  $\gamma = \pi - \gamma_1$ ,  $\alpha_1 = \pi - \alpha$ ,  $\beta_1 = \pi - \beta$ ,  $\gamma_1 = \pi - \gamma$ ; a uproszczony otrzymamy w ten sposób równania, opuścić akcenty. Łatwo się przekonać, że to podstawienie we wzorach (1) i (3) nie prowadzi do rzeczy nowych. Natomiast równanie (2):

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_1$$

daje po podstawieniu i opuszczeniu akcentów:

$$\cos (\pi - \gamma_1) = \cos (\pi - \alpha_1) \cos (\pi - \beta_1) + [\sin (\pi - \alpha_1) \cdot \sin (\pi - \beta_1) \cos (\pi - \gamma_1)];$$

$$- \cos \gamma_1 = \cos \alpha_1 \cos \beta_1 - \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \gamma_1;$$

$$\cos \gamma_1 = - \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \cos \gamma_1 \dots (4)$$

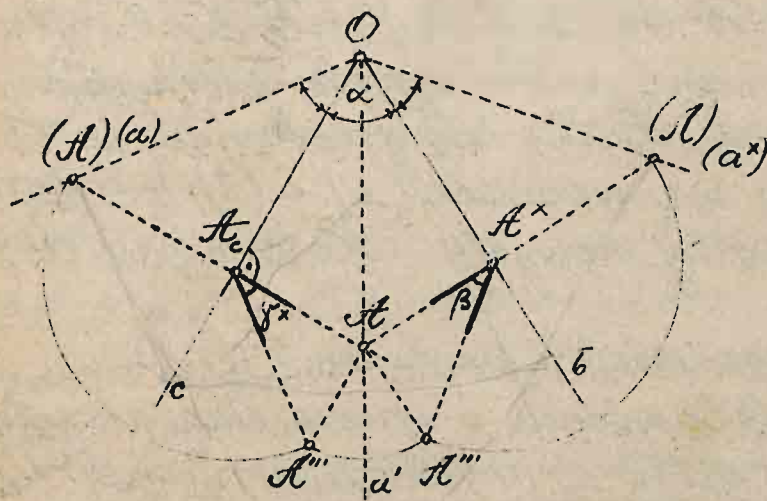
Oczywista, że równania (2), (3) i (4), jako nie przydatne do rachunku logarytmicznego, winny być przekształcone. Przekształcenia te należą do trygonometrii sferycznej i nie mogą tutaj być uwzględniane.

§ 37. Pozostałe przypadki rozwiązania trójscianów. Rozważmy teraz przypadek drugi:

Dane są dwa kąty płaskie  $\alpha$  i  $\beta$  oraz kąt dwusieczny  $\gamma_1$  między nimi; znaleźć kąt płaski  $\gamma$  oraz kąty dwusieczne  $\alpha_1$  i  $\beta_1$ .

Niechaj ściana  $bc$ , t.j. kąt dany  $\alpha$  leży na  $P_1$ ; obróćmy ścianę  $ac$ , t.j. kąt dany  $\beta$  do kota kra-

wędrze  $c$  do przystania  $x P_1$ . Na ktadzie krawędzi  $a$  weźmy punkt dowolny  $(H)$ , poczym obróćmy ścianę  $ac$  ruchem wstecznym o kąt  $\gamma_1 - \gamma_2$ . Płaszczyznę, w której porusza się punkt  $H$ , przewróćmy na  $P_1$ , obracając ją do kota  $(H)H_0 \perp c$ ; punkt  $(H)$  obróci się do kota  $H_0$  o kąt  $\pi - \gamma_2$ , spo-



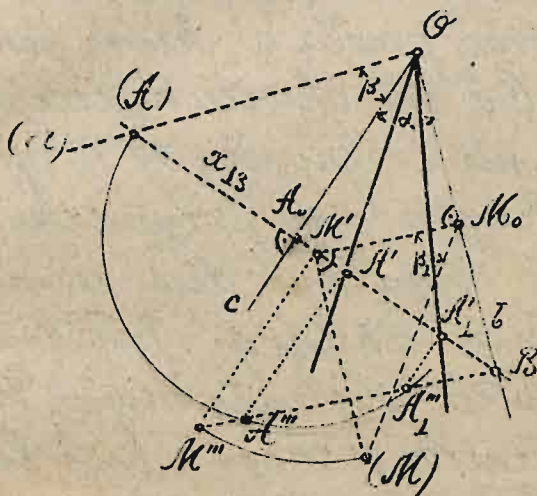
Rys. 109.

dek prostopad-  
tej  $H''H'$ , z punk-  
tu  $H'''$  na  $(H)H_0$   
spuszczanej, jest  
pierwszym ru-  
tem punktu  $H$ ;  
taćząc punkt  $H'$   
z punktem  $O$ , do-  
stajemy pierw-  
szy raut  $a'$  kra-

wędzi  $a$ . Odcinek  $H''H'$  jest wzniesieniem punk-  
tu  $H$  ponad  $P_1$ ; korzystając z tego odcinka, mo-  
żemy znaleźć odległość punktu  $H$  od krawędzi  
 $b$  oraz kąt dwusieczny  $\beta_1$ ; możemy mianowi-  
cie wykreslić trójkąt prostokątny, którego jed-  
na przyprostokątna  $H'H_0$  jest odległością  
punktu  $H'$  od  $b$ , a druga przyprostokątna  $H''H'''$   
jest wzniesieniem punktu  $H$  ponad  $P_1$ . Przeciwprostokątna tego trójkąta jest odległo-  
ścią punktu  $H$  od krawędzi  $b$ ; odmierzy-  
wszy tę odległość na prostopadłej  $H'H_0$  od  
punktu  $H_0$ , dostajemy ktad punktu  $H$  po obro-  
cie ściany  $ab$  do kota  $b$ ; taćząc go z punk-

tem  $\odot$  otrzymamy kąt płaski  $\gamma$ . Kąt  $H'H.A^{mx}$  jako kąt między prostymi do krawędzi  $t$  na ścianach kąta dwuściennego  $\beta_1$  jest jego kątem liniowym; kąt  $\alpha_1$  znajdziemy tak samo jak w przypadku pierwszym.

Przypadek trzeci. Dane są dwa kąty płaskie  $\alpha$  i  $\beta$  oraz kąt dwuścienny  $\beta_1$  naprzeciw jednego z nich leżący. Znaleźć pozostałe elementy kąta trójsściennego:  $\alpha_1$ ,  $\gamma$  i  $\gamma_1$ . Założmy znowu, że



Krys. 110.

ściana  $t$  c, t. j. kąt  $\alpha$  leży na  $P_1$ ; obróćmy na kładzie krawędzi  $a$  punkt  $(H)$  i poprowadźmy przez ten punkt płaszczyznę  $P_3$  prostopadłą do  $c$ . W tej płaszczyźnie obraca się punkt  $H$  przy obrocie ściany  $a$  c do kota  $c$ ; przewró-

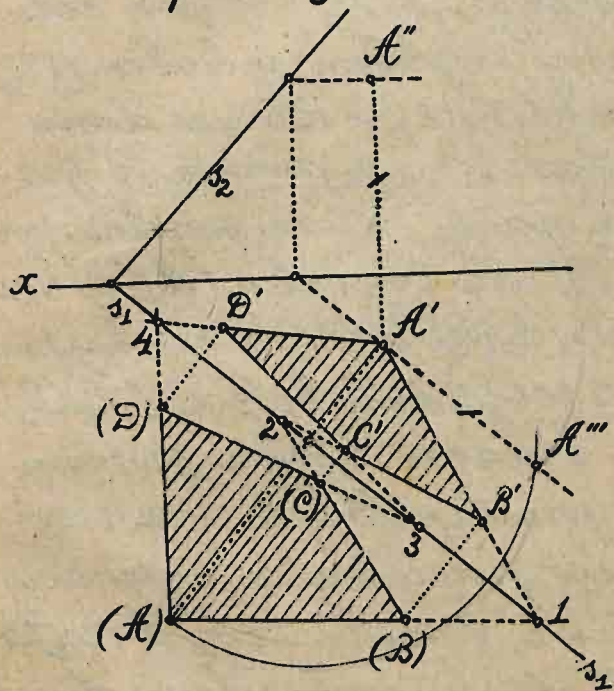
ciwszy  $P_3$  na  $P_1$ , możemy wykreślić kóło o środku  $H_0$  i promieniu  $H_0(H)$ , po którym porusza się punkt  $(H)$ . Z drugiej strony punkt  $H$  znajduje się na ścianie  $ab$ , musi więc on leżeć na prostej, według której ściana  $ab$  przecina  $P_3$ . Prosta tę w kładzie łatwo wykreślić: w tym celu znajdziemy odległość jakiegokolwiek punktu  $M$  tej prostej od swego rzutu  $M'$ ; będzie to przyprostokątna trójkąta, prostokątnego, którego druga przyprostokątna równa się odległo-

ści punktu  $M'$  od  $b$ , a roz ostry do niej przyległy równa się kątowi  $\beta_1$ ; odmierzając otrzymany w ten sposób odcinek  $M'(M)$  od punktu  $M'$  na prostopadłej do  $(H)H_0$  otrzymamy punkt  $M''$ ; prosta  $BM''$  jest kładem prostej przecięcia ściany  $ab$  z płaszczyzną  $P_3$ . Rzut  $H''$  punktu  $H$  musi leżeć zarówno na kole  $H_0$  jak i na prostej  $BM''$ , leży tedy w przecięciu tych linii. Otrzymany w ten sposób punkt  $H''$  pozwala natychmiast znaleźć rzut  $H'$  punktu  $H$  oraz prostą  $a'$ , która jest rzutem krawędzi  $a$ . Od tej chwili dalsze rozwiązanie zadania nie różni się od przypadku drugiego. Dyskusja tego przypadku nie sprawia trudności: mogą być dwa rozwiązania, jedno lub niema żadnego, podobnie jak w zadaniu: wykreślić trójkąt, mając dwa jego boki i kąt naprzeciw jednego z nich leżący.

Przypadki 4, 5 i 6 sprowadzają się za pomocą trójscianów biegunowych do 1., 2. i 3., jak to zaznaczono w § 33.

§ 38. Klady figur płaskich. Przypuśćmy teraz (Rys 111), że w płaszczyźnie  $s_1 s_2$  dana jest figura prostokreślna jakakolwiek, np. czworokąt  $ABCD$ , zapomocą jednego ze swych rzutów np. poziomego  $A'B'C'D'$ . Znaleźlibysmy prawdziwy kształt i wielkość tego czworokąta wyznaczając klady wszystkich jego wierzchołków na płaszczyźnie  $P_1$ , ale jak się to zaraz okaże, po wyznaczeniu kładu jednego z nich, np.  $A$ , wyznaczenie pozostałych zostanie znako-

miecie uproszczone. Przedłużmy bok  $A'B'$  do przecięcia ze śladem  $s_1$  w punkcie 1. Punkt ten przy obrocie pozostanie nieruchomy, jako punkt leżący na osi obrotu; jeżeli więc potoczymy go z punktem  $(H)$ , to otrzymamy kład prostej  $H1$ . Spuszczając z punktu  $B'$  prostą na  $s_1$ , otrzymamy w przecięciu z prostą  $(H)1$  punkt  $(B)$ . W podobny sposób znajdujemy kład punktu  $C'$ : przedłużamy  $B'C'$  do przecięcia z  $s_1$  w punkcie 2, łączymy punkt 2 z punktem  $(B)$  i spuszczamy z  $C'$  prostą na  $s_1$ ; przecięcie tej prostopadłej z prostą  $(B)2$  da nam punkt  $(C)$ . Wyznaczamy jeszcze w



Rys. 111.

taki sam sposób punkt  $(D)$ , to jest przedłużamy  $C'D'$  do przecięcia z  $s_1$  w punkcie 3, łączymy  $(C)3$  i wyznaczamy przecięcie tej prostej z prostą na  $s_1$  spuszczoną z  $D'$  na  $s_1$ . Jako sprawdzian dokładności wykreślenia służyć będą proste  $H'D'$  i  $(H)(D)$ ,  $H'C'$  i  $(H)(C)$ ,  $B'D'$  i  $(B)(D)$ , które parami winny się przecinać na osi obrotu  $s_1$ .

Na tej samej własności rzutów i kładów figur prostokreślnych, oprócz możnā rozwiązanie za-

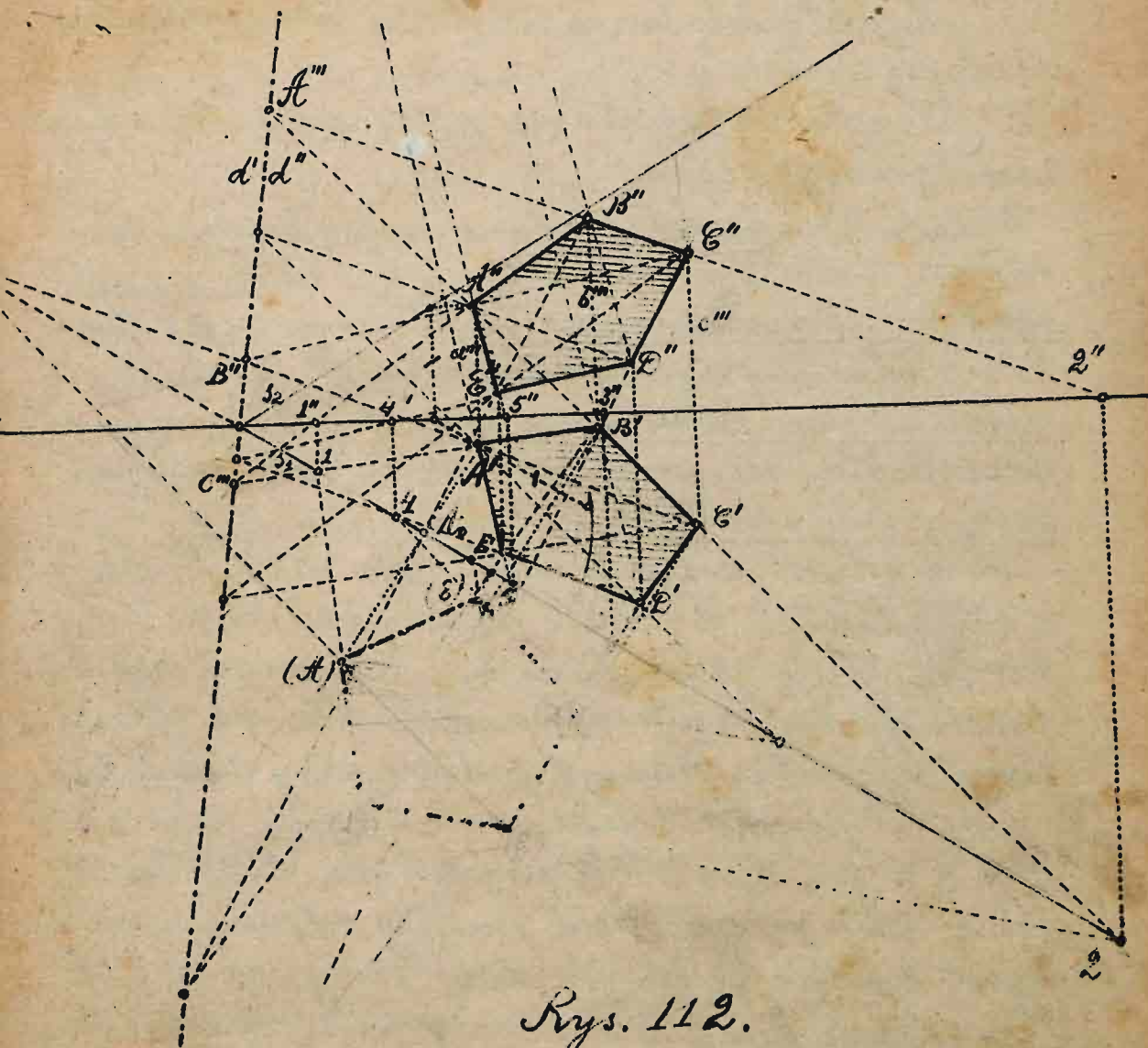
dania odwrotnego. Weźmy przykład następujący:

Mając ślady  $s_1$   $s_2$  płaszczyzny oraz rzut boku 5 kąta foremnego w niej leżącego, wykreślić rzuty tego 5 kąta (Rys. 112).

Wyznaczymy najprzód kład  $(H)(B)$  danego boku  $HB$  na płaszczyznę  $P_1$ . W tym celu łączymy wyznaczony zwykłym sposobem (§32) kład punktu  $H$  z punktem 1, w którym dany rzut  $H'B'$  przecina ślad  $s_1$ , i z punktu  $B'$  spuszczaemy prostopadłą na  $s_1$ , która przecnie prostą  $(H)1$  w punkcie  $(B)$ . Na odcinku  $(H)(B)$  kreślimy foremny 5 kąt  $(H)(B)(C)(D)(E)$  i niechaj punkty 2, 3, 4 i 5 będą przecięciami boków  $(B)(C)$ ,  $(C)(D)$ ,  $(D)(E)$  i  $(E)(H)$  ze śladem  $s_1$ . Za pomocą tych punktów oraz prostopadłych spuszcanych z wierzchołków pięciokąta wyznaczamy wierzchołki  $B'$ ,  $D'$  i  $E'$  rzutu tego 5-kąta. Dla sprawdzenia dokładności wykreślenia stwierdzimy, że przekątne kładu i rzutu 5 kąta winny się przecinać na śladzie  $s_1$ . Wyznaczenie  $\Pi$  rzutu 5-kąta nie sprawia żadnych trudności jeżeli skorzystamy z  $\Pi$  rzutów punktów 1, 2, 3, 4 i 5.

§ 39. Łowinowactwo geometryczne. Rzut i kład figury płaskiej na tę samą płaszczyznę są w pewnym szczególnym związku geometrycznym, który ma ważne teoretyczne i praktyczne znaczenie. Związek ten polega na następujących pięciu faktach:

1°. Każdemu punktowi pierwszej figury odpowiada jeden jedyny punkt drugiej figury i nawzajem,



Rys. 112.

- 2°. Każdej prostej pierwszej figury odpowiada jedna jedyna prosta drugiej figury i nawzajem.
- 3°. Punktowi i prostej należącym do siebie w pierwszej figurze odpowiadają w drugiej punkt i prosta również do siebie należące.

4°. Punkty odpowiednie leżą na prostych równoległych i

5°. Proste odpowiednie przecinają się w punktach jednej prostej.

© dwóch figurach, czyniących zadość tym pięciu warunkom, mówimy, że są w powinowactwie geometrycznym. Kierunek prostych, które łączą punkty odpowiednie nazywa się kierunkiem powinowactwa; prosta, na której przecinają się proste odpowiednie, nazywa się osią powinowactwa.

W naszym przykładzie (Rys. 112) 5<sup>cio</sup> kąty  $(A)(B)(C)(D)(E)$  i  $A'B'E'D'E'$  są w powinowactwie, którego osią jest ślad  $s_1$ , a kierunkiem kierunku do tej osi prostopadły. Ale na tym samym rysunku mamy jeszcze inny przykład figur w powinowactwie, mianowicie dwa rzuty  $A'B'E'D'E'$  i  $A''B''E''D''E''$  pięciokąta  $ABCEDE$ . W samej rzeczy, jeżeli za punkty odpowiednie 2 figur uważać będziemy dwa rzuty, np.  $A'$  i  $A''$  tego samego punktu  $A$ , a za proste odpowiednie dwa rzuty, np.  $A'B'$  i  $A''B''$  tej samej prostej  $AB$  leżącej w płaszczyźnie  $s_1 s_2$ , to punkty odpowiednie leżeć będą na prostych odpowiednich, mianowicie na liniach rzędnych, proste zaś odpowiednie przecinać się będą na zjednoczonych rzutach prostej  $d$ , według której płaszczyzna  $s_1 s_2$  przecina drugą płaszczyznę dwusieczną (§ 19, 8). Prosta  $d' \equiv d''$  jest tedy osią powinowactwa, kierunek linii rzędnych kierunkiem powinowactwa; kierunek ten nie jest wogóle prostopadły do osi powinowactwa.

Opierając się na tej własności rzutów prostokątnych figury płaskiej możemy z łatwością stwierdzić, czy dany za pomocą swych rzutów wielokąt jest płaski czy skośny. Jeżeli jest płaski, to boki i przekątne odpowiednie jego obu rzutów muszą się spotykać na prostej; jeżeli jest inaczej, to jest on skośny. Wielokąt płaski będzie zupełnie wyznaczony, jeżeli dany będzie jeden jego rzut, np. pierwszy, oraz drugie rzuty trzech jego wierzchołków; drugie rzuty pozostałych wierzchołków mogą być wyznaczone bez pomocy śladów  $s_1$   $s_2$  płaszczyzny tego wielokąta. Niech będzie np. dany (Rys. 112) rzut  $A'B'C'D'E'$  pięciokąta płaskiego  $ABCDE$  oraz rzuty  $A''$ ,  $B''$  i  $C''$  trzech jego wierzchołków. Znajdźmy punkty przecięcia 1, 2 i 6 prostych  $A'B'$  i  $A''B''$ ,  $B'E'$  i  $B''E''$ ,  $E'A'$  i  $E''A''$ . Punkty te muszą leżeć na jednej prostej  $d'd''$ , która będzie osią powinowactwa dwóch figur. Oś mając os powinowactwa i jedną choćby parę punktów odpowiednich (a więc i kierunek powinowactwa), możemy, jak to wynika z rysunku, dla każdego punktu i dla każdej prostej jednej figury znaleźć odpowiadający mu punkt lub prostą w drugiej.

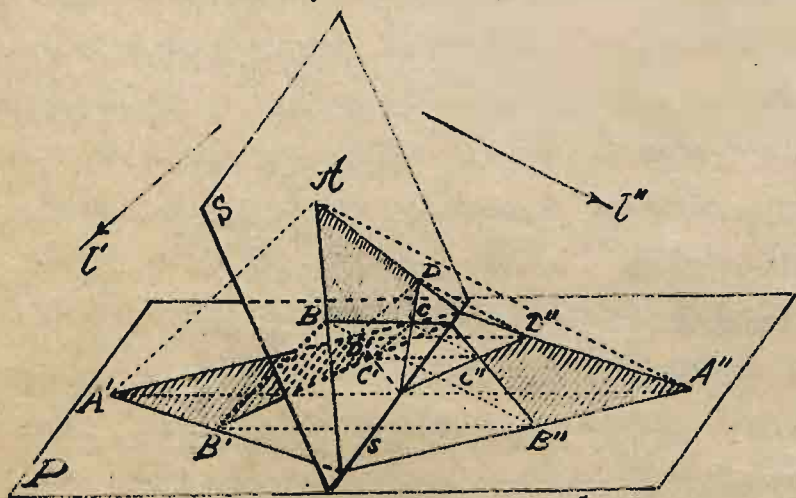
Przy tej sposobności odkryliśmy mimochodem następujące twierdzenie:

Jeżeli wierzchołki  $A'$  i  $A''$ ,  $B'$  i  $B''$ ,  $C'$  i  $C''$  trójkątów  $A'B'C'$  i  $A''B''C''$  leżą parami na trzech prostych równoległych  $a''$ ,  $b''$  i  $c''$ , to boki  $B'E'$  i  $B''E''$ ,  $E'A'$  i  $E''A''$ ,  $A'B'$  i  $A''B''$  przecinają się

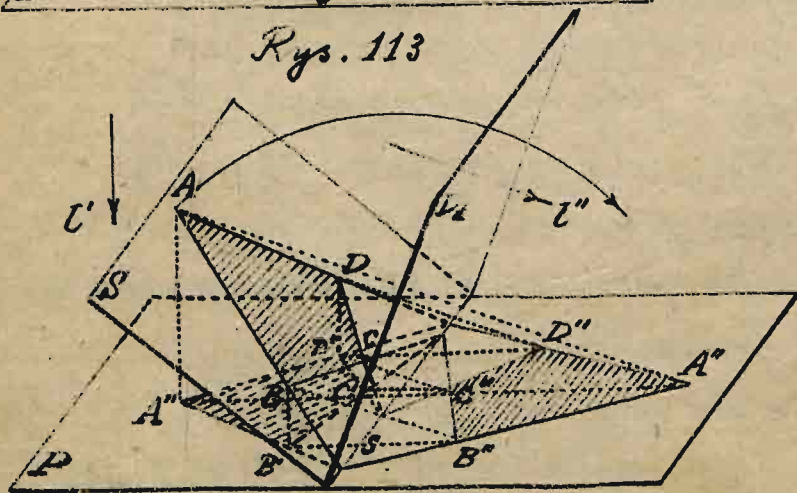
parami w trzech punktach  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  jednej prostej.

W samej rzeczy, jeżeli  $A'B'C'$  i  $A''B''C''$  uważać będziemy za rzuty prostokątne trójkąta  $ABC$ , to punkty  $A''$ ,  $B''$  i  $C''$  muszą leżeć na zjednoczonym I i II rzucie prostej  $d$ , według której płaszczyzna  $ABC$  przecina II płaszczyznę dwusieczną. Do twierdzenia tego powrócimy w sekcji 3. Otrzymując je jako wniosek z twierdzenia Desargues'a o trójkątach perspektywicznych.

Figury w powyższem otrzymujemy zawsze, gdy tę samą figurę płaską  $ABCD$ ... rzucamy



Rys. 113



Rys. 114.

równolegle na tę samą płaszczyznę rzutów  $P$  w dwóch różnych kierunkach  $l'$  i  $l''$  (Rys. 113).

W samej rzeczy, rzuty  $A'B'C'D'$ ... i  $A''B''C''D''$ ... są wtedy w takim związku, że punkty odpowiednie  $A'$  i  $A''$ ,  $B'$  i  $B''$ , ... leżą parami na prostych równoległych, według

których płaszczyzny równoległe do  $l'$  i do  $l''$ , a przechodzące przez punkty  $A, B, \dots$  przecinają  $P$ ; proste  $B'E'$  i  $B'E''$ ,  $C'D'$  i  $C'D''$ , ... przecinają proste  $BC, CD, \dots$  a więc i siebie wzajemnie na śladzie s płaszczyzny  $S$ . Jeżeli kierunek  $l''$  jest prostopadły do jednej z płaszczyzn dwusiecznych kąta dwusiecznego  $\angle P$ , to  $A'B'C'D''$  jest kładem figury  $ABCD$  na  $P$ ; jeżeli w dodatku  $l' \perp P$ , to figury  $A'B'C'D'$  i  $A'B'C'D''$  można uważać za rzut i kład figury  $ABCD$  na  $P$  (Rys. 114).

## ROZDZIAŁ IV.

### PRZESUWANIE RÓWNOLEGŁE OSI RZUTÓW.

§ 40. Przesuwanie figur w kierunku prostopadłym do I płaszczyzny dwusiecznej. W § 28 stwierdziliśmy już, że gdy figura doznaje przesunięcia równoległego, to oba jej rzuty zostają przesunięte równoległe, przez co zmienia się jedynie położenie tych rzutów na płaszczyźnie rysunku.

Przypuśćmy, że przesunięcie figury odbywa się w kierunku prostopadłym do I płaszczyzny dwusiecznej; jeżeli odległość jakiegokolwiek punktu od  $P_1$  wzrasta o odcinek  $a$ , to o ten sam odcinek maleje odległość tego punktu od  $P_2$ , tak, że odległość obu rzutów na linii rzędnych nie doznaje zmiany. To samo dotyczy wszystkich innych punktów figury, tak że oba rzuty przesuwają się w górę o ten sam odcinek  $a$ , nie zmieniając nie tylko własnego kształtu, ale i wzajemnego po-

Tworzenia. Jedynym wynikiem przesunięcia figury jest zmiana położenia osi rzutów; oczywiście, zamiast porostawiać os' nieruchomą i przesuwając oba rzuty w kierunku do niej prostopadłym prościej będzie porostawić je bez ruchu, przesuwając równolegle os' rzutów o odcinek  $a$  w kierunku przeciwnym.

Przesunięcie równoległe osi rzutów o odcinek  $a$  jest więc równoznaczne z przesunięciem figury w kierunku prostopadłym do I płaszczyzny dwusiecznej o odcinek  $a\sqrt{2}$ . Przy takim przesunięciu rzuty punktów i prostych oczywiście nie ulegną zmianie; natomiast ślady prostych oraz ślady płaszczyzn wogóle zostaną zmienione, wszakże kierunek tych ostatnich zostanie zachowany.

Ponieważ w zastosowaniach praktycznych zwiarek danej figury z płaszczyznami rzutów nie ma znaczenia, przeto opuszczamy zazwyczaj os' rzutów, uważając jedynie za dany jej kierunek jako prostopadły do linii rzędnych. W takim przypadku wśród elementów, które wyznaczają daną figurę, nie może być oczywiście śladów prostych i płaszczyzn. W ciągu rozwiązywania danego zadania możemy jednak te elementy wprowadzać tyle razy, ile nam się podoba; przytym przez przesunięcie równoległe osi wszystkie elementy śladowe ulegają zmianie. Na tym właśnie polega pożytek nieznaczności osi, - możemy ją zawsze wybrać tak, aby potrzebne elementy śladowe były w dogodnym dla nas położeniu; nie nie stoi

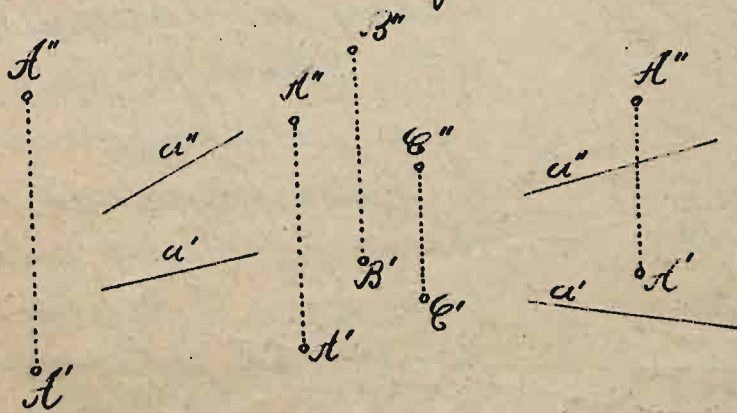
- 117 -

przytym na przeszkodzie, aby w ciągu tego samego zadania oś kilkakrotnie bywała przesuwana.

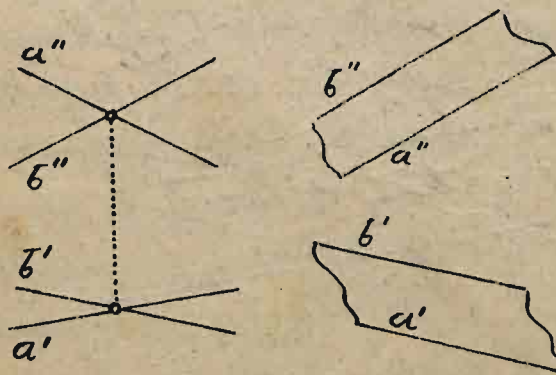
§ 41. Odwrócenie elementów geometrycznych z pominięciem osi rzutów. Punkt przestrzeni odwrócony będzie przez dwa punkty leżące na prostej równoległej do starego kierunku (kierunku rzędnych) Rys. 115. Prosta przestrzeni odwrócony będzie przez 2 proste jakiegokolwiek oraz kierunek rzędnych (Rys. 116). Płaszczyzna może być dana albo przez 3 punkty nie leżące na jednej prostej (Rys. 117), albo przez punkt i prostą przereź nieprzechodzącą (Rys. 118), albo przez dwie proste przecinające się (Rys. 119) lub równoległe (Rys. 120). Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby punkt

leżał na prostej jest ten, aby oba rzuty punktu leżały na odpowiednich rzutach prostej; warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby prosta leżała

w płaszczyźnie, jest ten, aby przecinała dwie proste tej płaszczyzny, nie przechodząc przez ich punkt wspólny; aby wreszcie



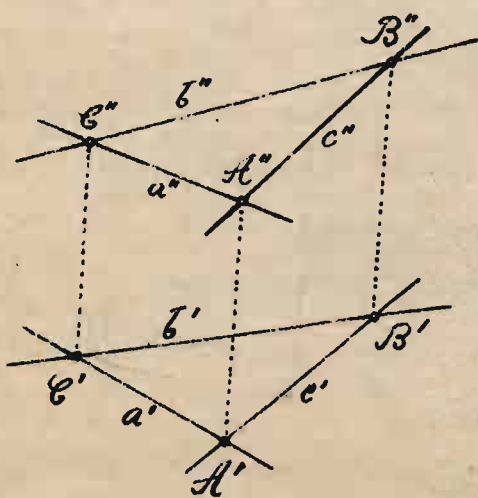
R. 115. R. 116. R. 117. Rys. 118.



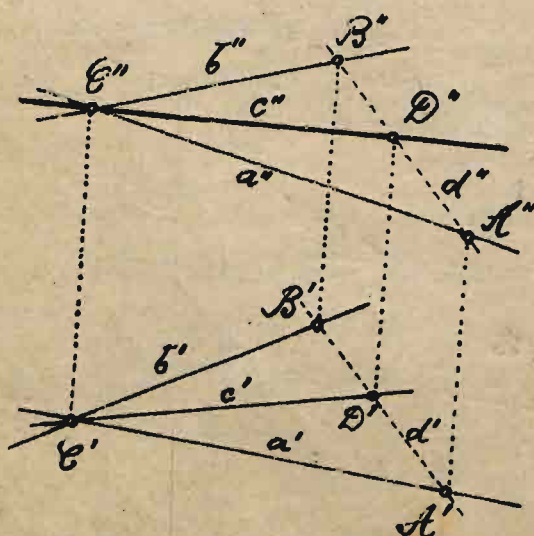
Rys. 119.

Rys. 120.

punkt leżał w płaszczyźnie potrzeba i wystarcza, aby on leżał na jakiegokolwiek prostej tej płaszczyzny. Na tej zasadzie możemy rozwiązać kilka następujących zadań zasadniczych § 42. Zadanie. Dana jest płaszczyzna oraz jeden rzut prostej leżącej w tej płaszczyźnie, znaleźć drugi rzut tej prostej.



Rys. 121

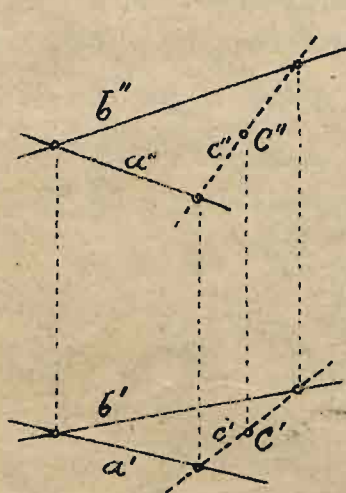


Rys. 122.

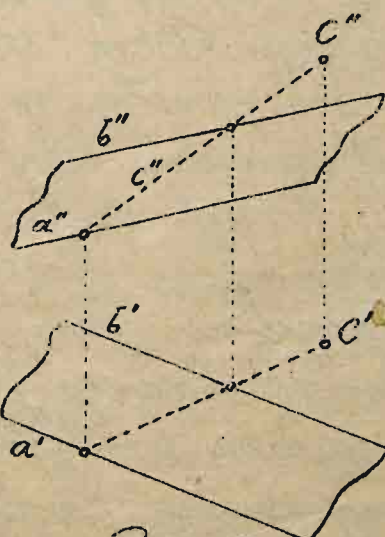
Niechaj (Rys. 121) płaszczyzna będzie dana przez rzuty dwóch prostych  $a$  i  $b$ , przecinających się w punkcie  $E$  i niech będzie przez tego dany rzut  $c'$  prostej  $c$  leżącej w płaszczyźnie  $ab$ . Skoro prosta  $c$  leży w płaszczyźnie  $ab$ , to musi przecinać zarówno prostą  $a$  jak i prostą  $b$ ; I rzutem punktu  $ac$  jest punkt  $A' \equiv a'c'$ ; podobnie. I rzutem punktu  $bc$  jest punkt  $B' \equiv b'c'$ . Mając pierwsze rzuty punktów  $A$  i  $B$ , leżących na prostych  $a$  wzgl.  $b$ , znajdziemy ich drugie rzuty  $A''$  i  $B''$ ; łącząc te punkty otrzymamy drugi rzut  $c''$  prostej  $c$ . - Konstrukcja

ta zawodzi, jeżeli  $c'$  przechodzi przez  $E'$ . Wtedy (Rys. 122) prowadzimy dowolną prostą  $d'$  przecinającą proste  $a'$  i  $b'$  w punktach  $A'$  i  $B'$ , znajdujemy jak powyżej drugi rzut prostej  $d'$  leżącej w płaszczyźnie  $ab$ ; wreszcie mając jeden rzut prostej  $c$ , przecinającej proste  $a$  i  $d$ , znajdujemy drugi. W tym celu z punktu  $D'$  przecięcia prostych  $c'$  i  $d'$  prowadzimy linię rzędną i punkt jej przecięcia  $D''$  z prostą  $d''$  łączymy z punktem  $c''$ .

§43. Zadanie. Dana jest płaszczyzna oraz jeden rzut punktu w niej leżącego; znaleźć drugi rzut tego punktu. Niech płaszczyzna będzie dana przez dwie proste  $a$  i  $b$  przecinające się (Rys. 123) lub równoległe (Rys. 124); niech będzie nadto dany rzut  $c'$  punktu  $C$  leżącego w tej płaszczyźnie,



Rys. 123



Rys. 124

będzie dana przez dwie proste  $a$  i  $b$  przecinające się (Rys. 123) lub równoległe (Rys. 124); niech będzie nadto dany rzut  $c'$  punktu  $C$  leżącego w tej płaszczyźnie,

trzeba znaleźć  $c''$ . Przez  $c'$  poprowadzimy dowolną prostą  $c'$  i uwarajmy ją za pierwszy rzut prostej  $c$  leżącej w płaszczyźnie  $ab$ ; znajdziemy jak powyżej II rzut  $c''$  tej prostej; punkt  $C'$  będzie wtedy i tylko wtedy leżał w płaszczyźnie  $ab$ , jeżeli II rzut  $C''$  tego punktu będzie

leżał na  $\Pi$  rzucie prostej  $c$ . Prowadząc tedy przez  $C'$  linję rzędnych, strzymamy w przecięciu jej z prostą  $c''$  szukany rzut  $C''$ .

§ 44 Zadanie. Wyznaczyć rzuty punktu przebiecia danej płaszczyzny prostą daną.

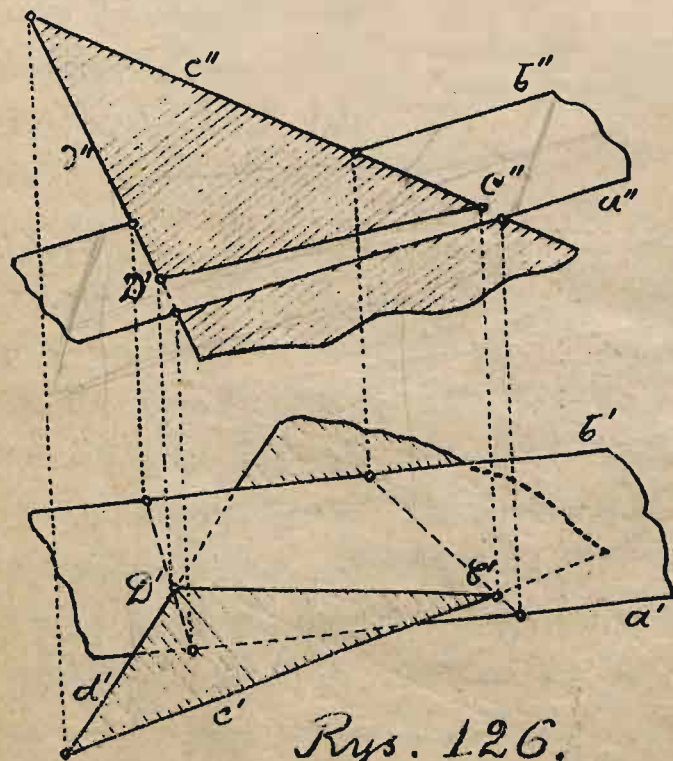
Niechaj płaszczyzna (Rys. 125) będzie dana za pomocą trzech swoich punktów; to jest niech będą dane rzuty trójkąta  $ABC$ , leżącego w tej płaszczyźnie; prócz tego niech będą dane rzuty  $m''m'$  prostej  $m$ . Uważajmy jeden z rzutów danej prostej, np.  $m'$  jednocześnie za I rzut prostej  $n$  leżącej w płaszczyźnie  $ABC$  i znajdziemy drugi rzut  $n''$  tej prostej (§ 42). Proste  $m$  i  $n$  muszą się przecinać, albowiem leżą w tej samej płaszczyźnie pozio-  
mo rzucającej. Punkt przecięcia tych prostych  $M$  jest punktem szukanym, gdyż leży on zarówno na prostej  $m$ , jak i w płaszczyźnie  $ABC$  (ponieważ leży na prostej  $n$  tej płaszczyzny). Drugi rzut tego punktu jest punktem przecięcia prostych  $m''$  i  $n''$ ; pierwszy rzut znajdzie się w przecięciu lini rzędnych przechodzącej przez  $M'$  ze wspólnym pierwszym rzutem prostych  $m$  i  $n$ .

Jeżeli przypuszczamy, że płaszczyzna  $ABC$  jest nieprzezroczysta, to jedna strona prostej  $m$  będzie w każdym rzucie widzialna, druga zastonięta; granicą części widzialnej od zastoniętej będzie oczywiście punkt  $M'$  wzgl.  $M''$ . Dla zdecydowania która część prostej  $m$  w każdym rzucie jest widzialna wystarczy z tym rozstrzygnąć sprawę widzialności lub



cie niewidzialna. Uważajmy teraz punkt przecięcia prostych  $m''$  i  $h''c''$  za wspólny II rzut dwóch punktów  $D$  i  $D_1$ , z których pierwszy leży na  $m$ , a drugi na  $h'c'$ , a więc w płaszczyźnie  $ABE$ . Widzielnym w rzucie pionowym będzie ten z nich, którego pierwszy rzut jest niżej, a więc  $D$ ; w ten sposób ta część prostej  $m$ , na której leży punkt  $D$ , będzie widzialna w rzucie pionowym; pozostała część prostej  $m$  będzie w tym rzucie niewidzialna.

§ 45. Zadanie. Wyznaczyć rzuty prostej przecięcia dwóch płaszczyzn.



Rys. 126.

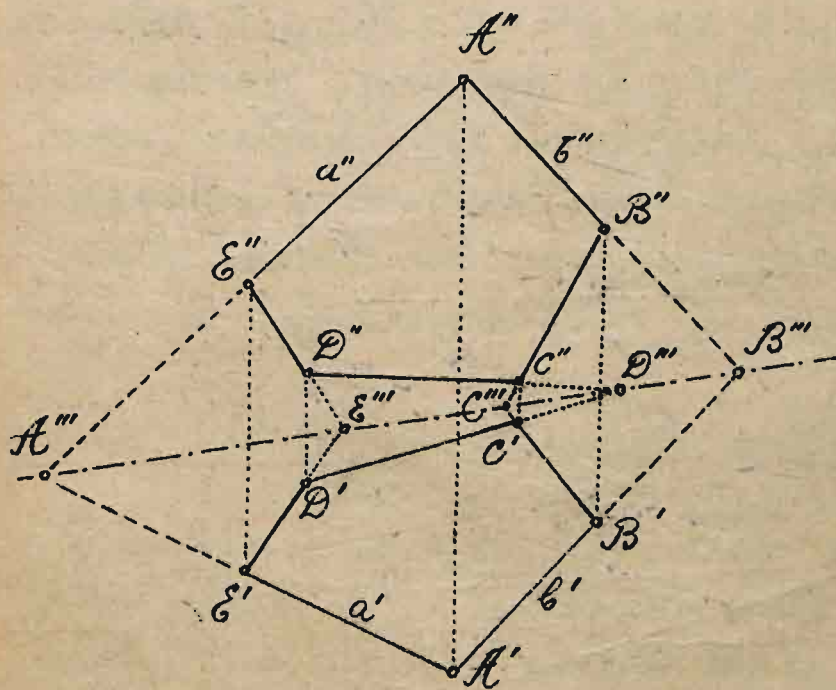
Niechaj jedna z płaszczyzn (Rys. 126) będzie dana za pomocą dwóch prostych równoległych  $a$  i  $b$ , a druga za pomocą dwóch prostych przecinających się  $c$  i  $d$ . Wyznacamy najpierw punkt przecięcia prostej  $c$  z płaszczyzną  $ab$ , następnie punkt przecięcia prostej  $d$  z tą samą pła-

szczyzną  $ab$ ; prosta, która łączy te dwa punkty przecięcia będzie prostą przecięcia, gdyż jest to prosta wspólna obu płaszczyznom. Dla uświadomienia, która część każdej

ptaszczyzny jest widzialna, pokreskowano  
część widzialną ptaszczyzny  $cd$ ; granica  
między częścią widzialną i niewidzialną  
każdej ptaszczyzny jest prosta przecięcia  $CD$ .

Jeżeli jedna z dwóch danych ptaszczyzn jest  
 $\Pi$  ptaszczyzną dwusieczną, to rozwiązanie  
jest niezwykle proste: należy połączyć punkty  
przecięcia  $A'''$  prostych  $a'$  i  $a''$  z punktem przecię-  
cia  $B'''$  prostych  $b'$  i  $b''$ . Prosta  $A'''B'''$  jest zjedno-  
czesnym  $I$  i  $\Pi$  rzutem prostej przecięcia  $d$ .

§ 46. Zadanie. Dany jest  $I$  rzut wielokąta  
płaskiego oraz  $\Pi$  rzuty dwóch jego boków;  
wyznaczyć  $\Pi$  rzut tego wielokąta.



Rys. 127.

Rzuty wielo-  
kąta są w po-  
winowactwie,  
którego kie-  
runkiem jest  
kierunek rzed-  
nych, a oś  
jest zjednoczo-  
ny  $I$  i  $\Pi$  rzut  
prostej prze-  
cięcia pta-  
szczyzny wie-  
łokąta z  $\Pi$   
ptaszczyzną dwu-  
sieczną (§ 39).

Na zasadzie poprzedniego zadania zjednoczo-  
ny rzut tej prostej otrzymamy łącząc punk-  
ty przecięcia danych  $\Pi$  rzutów boków  $a$  i  $b$

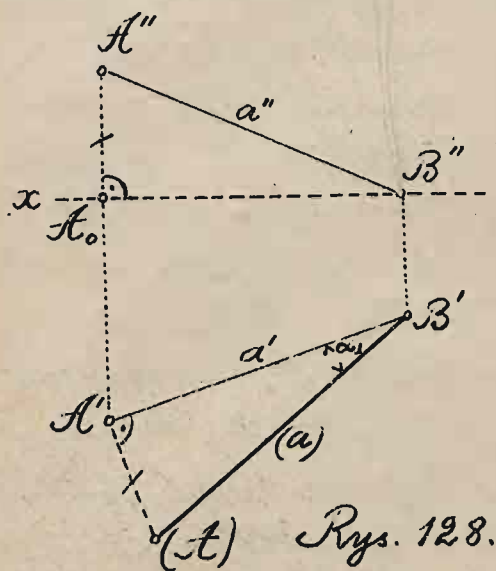
z odpowiednimi I rzutami tych samych bokiów (Rys. 127). Mając zaś oś i kierunek powinowactwa oraz dwa punkty odpowiednie  $H \equiv a'b'$  i  $H'' \equiv a''b''$  wyznaczymy pozostałe drugie rzuty  $B'', C'', D'', E'' \dots$  wierzchołków wielokąta.

§ 47. Zadania miarowe. Zadania dotyczące prawdziwej wielkości odcinków i kątów płaskich i dwusiecznych, nie mogą być rozwiązane bez wprowadzenia osi rzutów. Ośią może być jakkolwiek prosta prostopadła do linii rzędnych; oczywiście staramy się obrać ją w taki sposób, by rozwiązanie zadania było możliwie najprostsze. Jeżeli zadanie jest złożone z kilku zadań prostszych, to możemy, dla każdego z zadań składowych obrać oś inaczej; nie może to wpłynąć na wynik rozwiązania żadnego z tych zadań, jeżeli pomiędzy elementami danymi i wyznaczonymi w każdym z nich nie będzie elementów śladowych, t. j. śladów prostych i śladów płaskich.

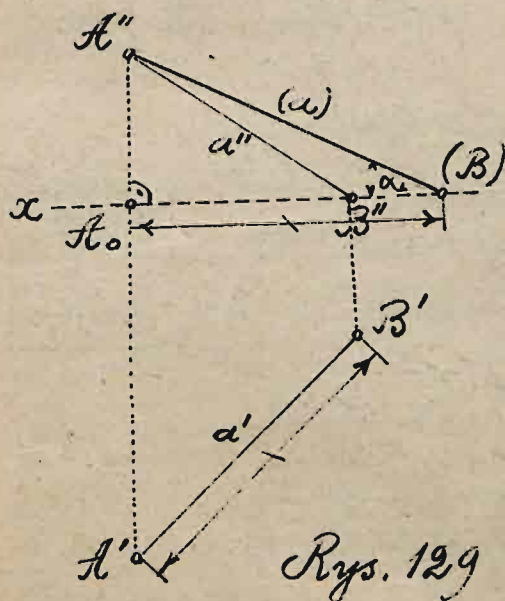
§ 48. Zadanie. Wyznaczyć prawdziwą długość odcinka, którego rzuty są dane.

Niech będą dane (Rys. 128) rzuty  $H'B'$ ,  $H''B''$  odcinka  $a$ . Poprowadzimy oś  $xc$  przez jeden z końców II rzutu odcinka, np. przez  $B''$ . Wykonajmy kład płaski, rzucający poziomo odcinek  $a$ ; odcinek ten jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym, w którym jedną przyprostokątną jest rzut poziomy  $a'$  odcinka, a drugą przyprostokątną jest pierwsza odległość punktu  $H$ , t. j. odległość rzutu

$H''$  od  $x$ . Kąt  $\alpha_1$  między kładem (a) odcinka i jego rzutem poziomym  $a'$  jest oczywiście kątem prostej  $a$  z płaszczyzną  $P_1$ .



Rys. 128.



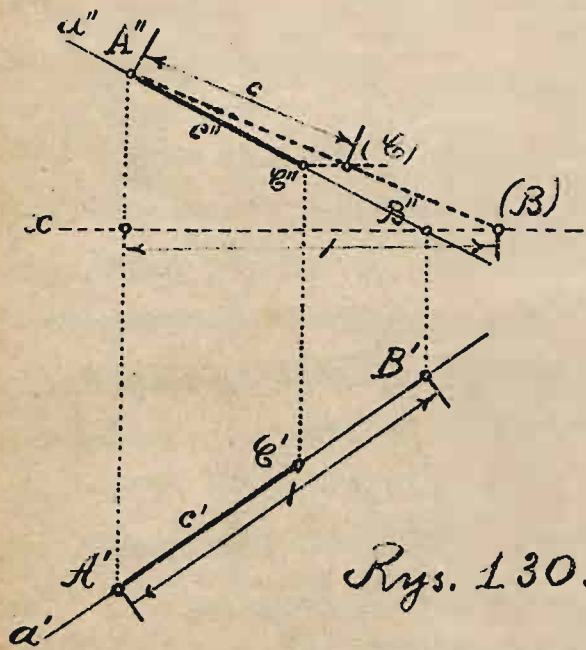
Rys. 129

Kładąc odcinek  $a$  na  $P_2$ , otrzymalibyśmy kąt  $\alpha_2$ , t.j. kąt prostej  $a$  z płaszczyzną  $P_2$ .

Nieco prościej można rozwiązać to zadanie, obracając płaszczyznę rzucającą poziomo odcinek  $a$  do kota prostej rzucającej  $HH''$ , aż do położenia równoległego do  $P_2$ . Wtedy rzut pionowy odcinka  $a$  będzie temu odcinkowi równy, jednocześnie zaś rzut pionowy rzutu poziomego  $a'$  będzie równy  $a'$ . Wychodzi to na to samo, co wykreślić trójkąt  $(H)$   $H'B$  tak, aby jego kąt prosty upadł na kąt  $H_0$ , przez co oszczędzamy sobie kreślenia kąta prostego  $H'$  (Rys. 129).

Grzy tej sposobności, jak poprzednio, znajdziemy kąt  $\alpha_1$ . Możemy rozwiązać teraz następujące zadanie: Na danej prostej  $a'a''$  od danego na niej punktu  $H'H''$  odmierzyć dany odcinek  $c$ . To prowadzimy dowolnie oś  $x$  w kierunku prostopadłym do

linji rzędnych punktu  $H$ . Niech oś przecinie  $a''$  w punkcie  $B''$ ; znalaztoży I rzut  $B'$  punktu  $B$  wyznaczamy za pomocą obrotu do kota  $H''$  prawdziwą długość odcinka  $HB$ . Na prostej  $H''(B)$  odmierzymy od punktu  $H''$  dany odcinek  $c$  do punktu  $(C)$ , poczym powróćmy z prostą  $HB$  do położenia pierwotnego. Prowadząc z punktu  $(C)$  równoległą do  $x$ , otrzymamy na  $a''$  punkt  $C''$ ; linja rzędnych tego punktu daje na prostej  $a'$  punkt  $C'$ .

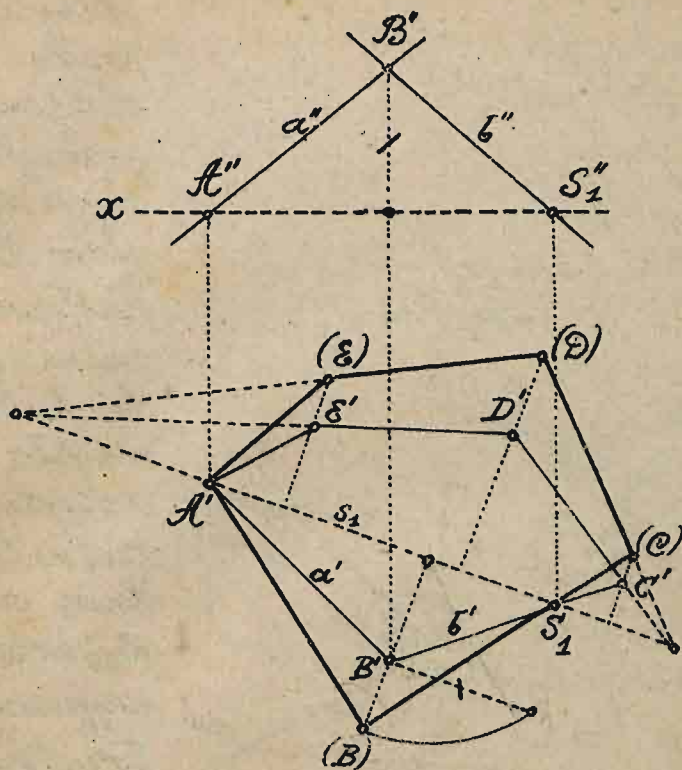


Rys. 130.

Odcinek  $H'C'$ ,  $H''C''$  jest szukany.

§ 49. Zadanie. Znaleźć prawdziwą wielkość kąta między dwiema danymi prostymi, lub ogólnie: znaleźć prawdziwy kąt i wielkość wielokąta płaskiego, którego jeden rzut i dwa boki drugiego rzutu są dane.

Niech będą dane (Rys 131) dwie przecinające się proste  $a''a'$  i  $b''b'$  lub ogólnie I rzut wielokąta  $ABCE$ ... i II rzuty  $a''i b''$  dwóch jego boków wychodzących z wierzchołka  $B$ . Poprowadzimy oś  $x$  przez II rzut wierzchołka  $B$ , który znajdziemy w przecięciu linji rzędnych punktu  $B$  z prostą  $a'$  i wyznaczmy I ślady prostych  $a$  i  $b$ . I śladem prostej  $a$  będzie punkt  $A''H''$ ; I ślad prostej  $b$  wyznaczamy, wystawiając w punkcie  $S_1 \equiv b''$  x linję rzędnych do przecięcia z  $a'$  w

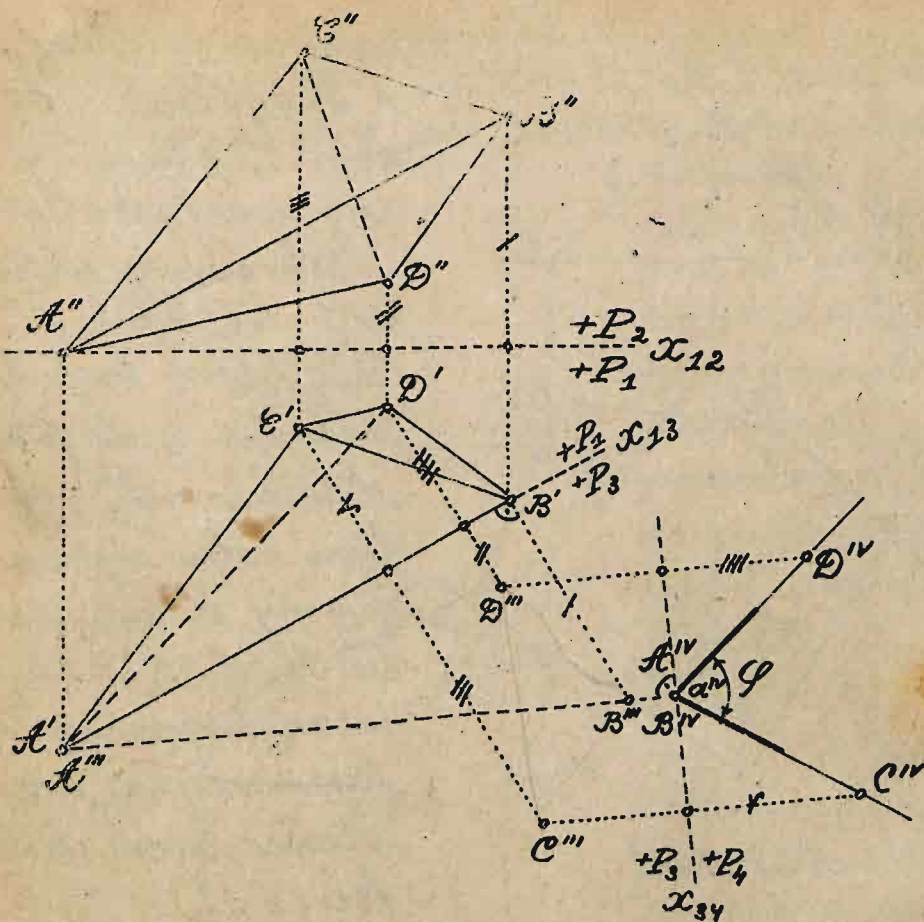


Rys. 131.

punkcie  $S_1$ . Prosta  $A'G_1$  będzie I śladem  $s_1$  płaszczyzny wielokąta. Obróćmy wielokąt  $ABEDG...$  (względnie kąta  $B$ ) do kąta  $s_1$  do przystania  $\alpha P_1$ ; w tym celu wyznaczmy kład punktu  $B$  (§ 32) i za pomocą powinowactwa wyznaczmy pozostałe wierzchołki (§ 38).

§ 50. Kąt dwusieczny dwóch płaszczyzn danych. Przyпускаmy, jak to bywa najczęściej, że dwie płaszczyzny, których kąt mamy wyznaczyć, dane są za pomocą swej prostej wspólnej i jednego punktu na niej nie leżącego. Możemy wtedy zadanie sformułować, jak następuje:

Zadanie: Dane są rzuty czworosiannu  $ABCD$ ; wyznaczyć jego kąty dwusieczne (Rys. 132). Wystarczy znaleźć kąt  $\varphi$  krawędzi  $AB$ ; w tym celu pociągniemy czworosiann płaszczyzną  $P_1$  prostopadłą do  $AB$ ; proste przecięcia sienn  $ABE$  i  $ABD$  płaszczyzną  $P_1$  utworzą kąt

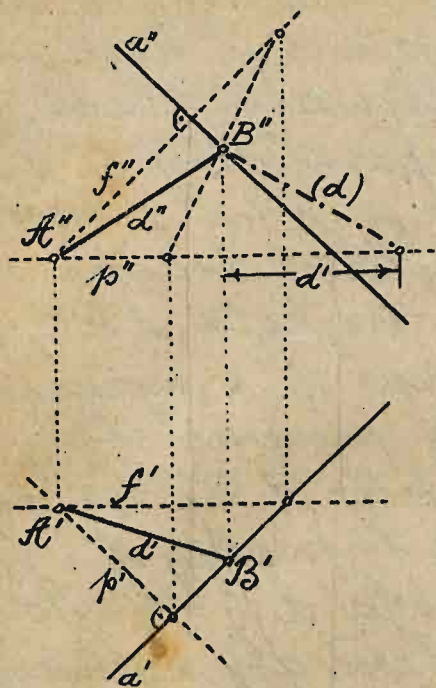


Rys. 132.

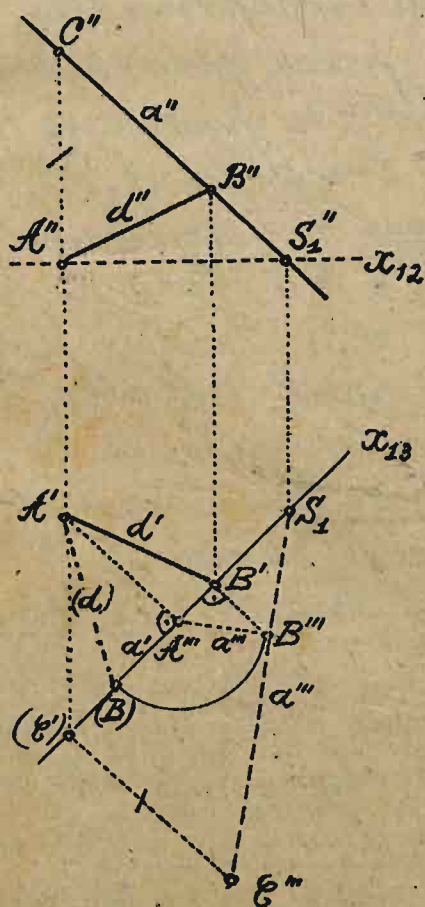
szukamy.  
Aby te  
proste  
otrzymać  
poprowadzi-  
my oś  $x_{12}$   
przez  $A'$ ,  
następnie  
zmienimy  
dwukrot-  
nie płaszczyznę  
rzutów. Za  
nową oś  
 $x_{13}$  weźmy  
najpierw  
I rzut krawędzi  $AB$ ,  
wyznaczy-  
wszy III ru-  
ty punk-

tów  $B, C$  i  $D$  wprowadzimy nową oś  $x_{34}$  prostopadłą do  $A''B''$ ; tańcząc punkt  $A'' \equiv B'' \equiv a''$  z punktem  $E''$  i  $D''$ , otrzymamy kąt  $E''a''D''$ , równy kątowi liniowemu  $\angle$  kąta dwusiecznego płaszczyzn  $ABC$  i  $ABD$ .

§ 51. Zadanie. Wyznaczyć odległość punktu  $A'$  od prostej  $a'a$ . Przez punkt  $A'$  (Rys. 133) poprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do  $a'a$ . W tym celu przez punkt  $A'$  poprowadzimy dwie proste tej płaszczyzny, np. dwie proste główne: poziomą  $p$  i frontową  $f$ . Linia pozioma  $p'p''$  ma II rzut prostopadły do linii rzędnych, a I rzut prostopadły do  $a'a$ ; linia frontowa  $f'f''$  ma I rzut prostopadły do linii rzędnych, a



Rys. 133.



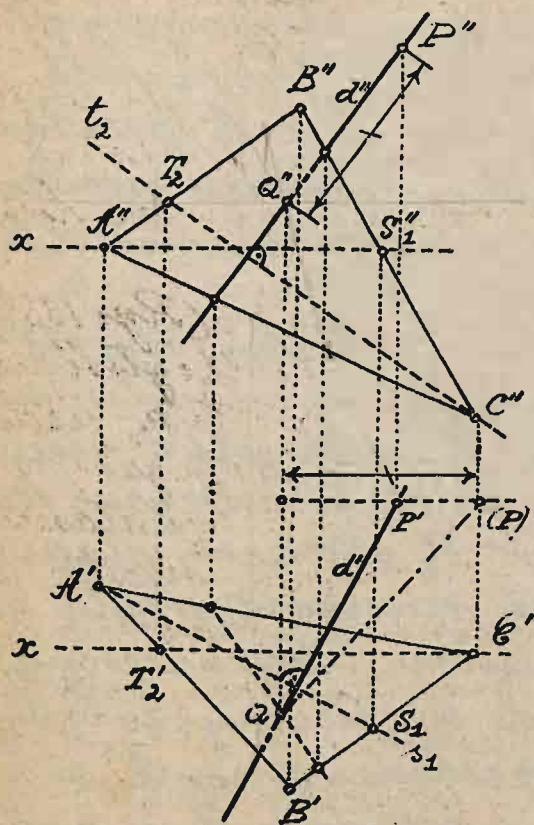
Rys. 133 k

Trzeci prostopadły do  $a'$ . Wyznaczymy punkt  $B$  przecięcia płaszczyzny  $\pi$  z prostą  $a$  (§44) i poprowadzimy go z  $H$ , pozostaje tylko wyznaczyć prawdziwą długość odcinka  $AB = (d)$  (§48).

Również łatwo (Rys 133<sup>st</sup>) wyznaczamy odległość punktu  $A$  od prostej  $a$ , jeżeli za nową płaszczyznę rzutów  $P_3$  obierzemy płaszczyznę rzucającą prostopadło. Wyznaczymy  $a'''$  i  $A'''$  w założeniu, że oś  $x_{12}$  przechodzi przez  $H''$ , a oś  $x_{13}$  przystaje do  $a'$ ; prostopadła  $d''' \equiv A'''B'''$  spuszczone z punktu  $A'''$  na  $a'''$  jest III rzutem odległości  $Aa$ . Mając  $d'''$  znajdziemy  $d'$ ,  $d''$ , i  $(d)$ .

§ 52. Zadanie, Z danego punktu  $P$  spustić prostopadłą na płaszczyznę  $ABE$  i wyznaczyć jej długość (Rys. 134).

Rzuty szukanej prostopadłej są prostopadłe do śladów płaszczyzny  $ABE$ ; trzeba więc najpierw wyznaczyć kierun-



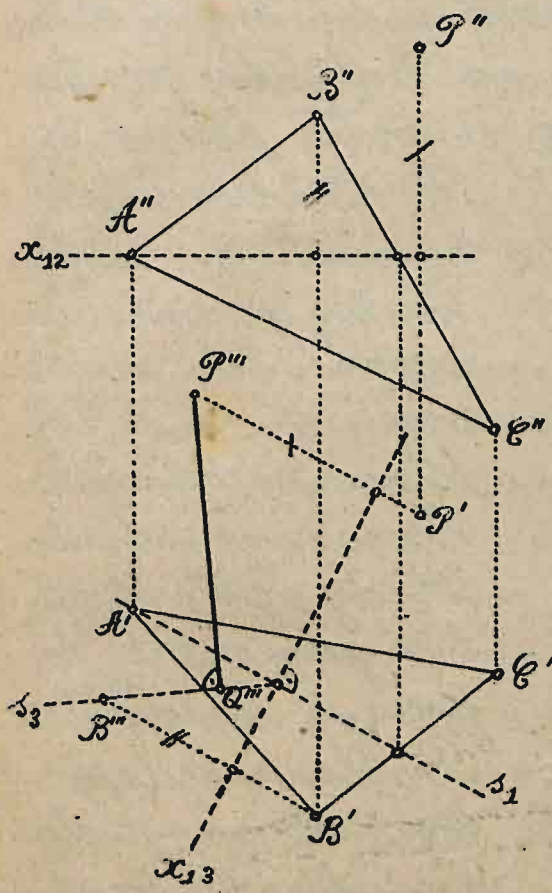
Rys. 134.

ki tych śladów. Aby wyznaczyć kierunek pierwszego śladu  $s_1$ , poprowadzimy oś  $x$  przez jeden z wierzchołków drugiego rzutu trójkąta  $ABC$ , np. przez  $A''$ , i wyznaczmy pierwsze ślady boków  $AB$  i  $BC$ , będą to punkty  $A'$  i  $S_1$ ; prosta  $A'S_1 = s_1$ . Podobnie aby wyznaczyć kierunek drugiego śladu  $t_2$ , poprowadzimy oś  $x$  przez jeden z wierzchołków pierwszego rzutu trójkąta  $ABC$ , np. przez  $C'$  i wyznaczmy

drugie ślady boków  $AB$  i  $BC$ , będą to punkty  $T_2$  i  $C''$ ; prosta  $T_2C'' = t_2$ . Prosta  $d'$  spuszczona z  $P'$  prostopadłe na  $s_2$  i prosta  $d''$  spuszczona z  $P''$  prostopadłe na  $t_2$  są rzutami szukanej prostopadłej  $d$ . Pozostaje wyznaczyć punkt  $Q'Q''$  przebiecia płaszczyzny  $ABC$  prosta  $d$  (§ 44) i znaleźć prawdziwą długość odcinka  $PQ$  (§ 48).

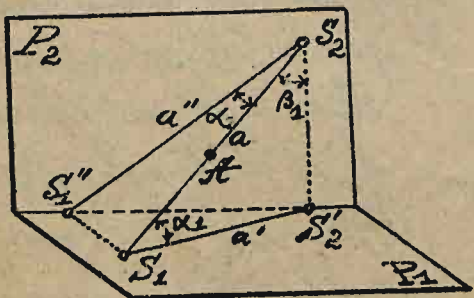
Jeżeli nam nie zależy na rzucie i prostopadłej  $d$ , a jedynie potrzeba znać odległość punktu  $P$  od płaszczyzny  $ABC$ , to łatwiej przedrzeć do celu przez zmianę płaszczyzny rzutów. Zważymy mianowicie, że przy zmianie

zna  $s_1, s_3$  jest prostopadła do  $P_3$ , to odległość punktu  $P$  od płaszczyzny  $s_1$  równa się odległości rzutu  $P'''$  od śladu  $s_3$ . Poprowadzimy tedy (Rys. 135), jak poprzednio,



Rys. 135.

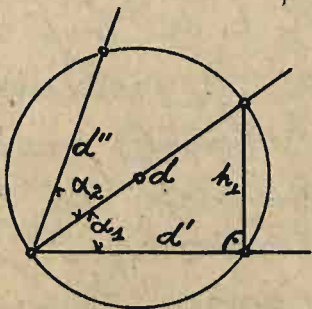
oś  $x$  przez  $A''$  i znalazemy pierwszy ślad  $s_1$  płaszczyzny  $A'B'C'$ , kwadrantem za trzecią płaszczyznę rzutów  $P_3 \perp s_1$ , t. j. za nową oś  $x_{13}$  obrócimy jakąkolwiek prostą prostopadłą do  $s_1$ ; wyznaczmy  $P'''$  i  $s_3$  (za pomocą trzeciego rzutu jakiegośkolwiek punktu płaszczyzny  $A'B'C'$ , np.  $B'''$ ) i prostopadła z  $P'''$  na  $s_3$  jest szukana odległością  $P'''Q''' = PQ$ .



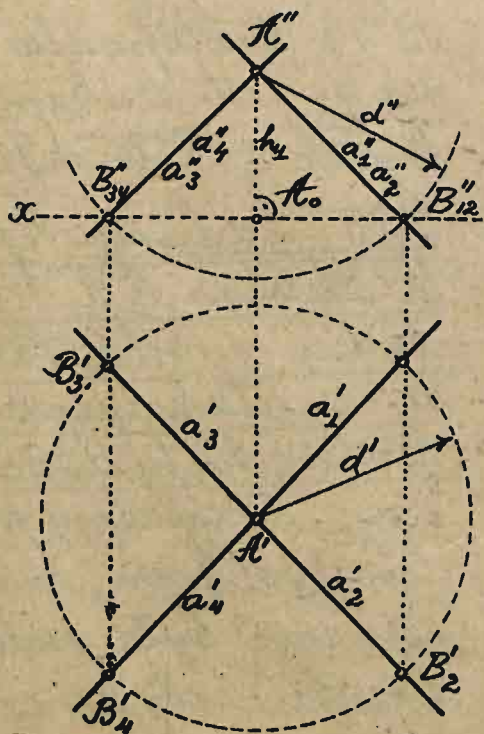
Rys. 136.

§ 53. Zadanie. Z punktu danego  $A''$  wyprowadzić prostą tworzącą z płaszczyznami rzutów kąty dane  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Zauważmy poprzedzającym, że aby zadanie było możliwe trzeba, żeby  $\alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$ . W samej rzeczy (Rys. 136),

niech prosta  $a$  będzie prostą szukaną.  
 Z trójkąta prostokątnego  $S_1 S_2' S_2$  mamy  
 $\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$ . Ale kąt  $\alpha_2$  jest wogóle mniej-  
 szy od  $\beta_1$ , bo kąt prosty  $a$  ze wym rzu-  
 tem  $a''$  jest mniejszy od kąta tej prostej  
 z jakąkolwiek inną prostą przechodzącą



Rys. 137.



Rys. 138.

$P_2$ . Kładąc więc  $\alpha_2$   
 zamiast  $\beta_1$ , zamie-  
 niamy powyższą  
 równość na nierów-  
 ność  $\alpha_1 + \alpha_2 < 90^\circ$ ,  
 która przestanie  
 równością jedynie  
 wtedy, gdy  $\alpha_2 = \beta_1$ ,  
 t. j. gdy  $a' \perp x$ , co  
 pociąga za sobą  $a'' \perp x$ .

Prosta  $a$  będzie  
 wyznaczona, jeżeli  
 znajdziemy rzuty  
 jakiegokolwiek  
 punktu  $B$  tej pro-  
 stej. Oznaczywszy  
 długość odcinka  $AB$   
 przez  $d$ , mamy:

$$A'B' = d' = d \cos \alpha_1$$

$$A''B'' = d'' = d \cos \alpha_2$$

Różnicę pierwszych  
 odległości punktów  
 $A$  i  $B$ , czyli wnie-  
 sienie punktu  $A$  po-

nad  $B$  oznaczmy przez  $h_1$ , wtedy  $h_1 = d \sin \alpha_1$ . Wykreślmy (Rys. 137) kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  tak, aby miały jedno ramie i wierzchołek wspólne; na wspólnym ramieniu odmierzymy od wspólnego wierzchołka dowolny odcinek  $d$  i znajdziemy jego rzuty  $d'$  i  $d''$  na pozostałe ramiona oraz odcinek  $h_1 = d \sin \alpha_1$ . Odmierzymy też (Rys. 138) na prostej  $H'H''$  od punktu  $H''$  odcinek  $H''H_0 = h_1$  i przez  $H_0$  prostopadłe do linii rzędnych  $H'H''$  poprowadzimy oś  $x$ . Tym samym zakładamy, że punkt  $B$  leży w płaszczyźnie  $P_1$ . Z punktu  $H''$  promieniem  $d''$  zakreślmy koto; w przecięciu jego z osią  $x$  leży punkt  $B''$ . Załóżmy, że przecięcie to będzie zawsze rzeczywiste, albowiem z nierówności  $\alpha_2 \leq 90^\circ - \alpha_1$  wynika:  $\cos \alpha_2 \geq \sin \alpha_1$ ; mnożąc obie strony przez  $d$ , mamy  $d'' \geq h_1$ . Aby otrzymać pierwszy rzut punktu  $B$ , t.j. pierwszy ślad prostej  $a$ , wyznaczamy punkt przecięcia linii rzędnych punktu  $B''$  z kotem zakreślonym z punktu  $H'$  promieniem  $d'$ . Łatwo się przekonać, że przecięcie to jest również zawsze rzeczywiste; jak widać z rysunku, istnieje wogóle wtedy, gdy  $\alpha_2 > \alpha_1$ .

Do powyższego zadania doprowadzamy następująco:

Zadanie. Przez punkt  $H'H''$  poprowadzić płaszczyznę tworzącą z płaszczyznami



kąty  $\alpha$  i  $\beta$ . Wykreślić trzecią prostą  $c$ , która przechodzi przez punkt  $O$  i tworzy z prostą  $a$  kąt  $\beta$ , a z prostą  $b$  kąt  $\alpha$ .

Obramny (Rys. 139) os  $oc$  i wyznaczwszy ślad  $s_1$  płaszczyzny  $ab$ , wykonajmy kład płaszczyzny  $ab$  do kota  $s_1$  na  $P_1$ . Stosując I przypadek rozwiązania kąta trójściennego do kładu kąta  $(ab) \equiv \gamma$  i kątów danych  $\alpha$  i  $\beta$  wyznaczymy rzuty punktu  $C_1$  leżącego na prostej  $c_1$  tworzącej z kładem  $a_1$  prostą  $a$  kąt  $\beta$ , a z kładem  $b_1$  prostą  $b$  kąt  $\alpha$ . Obróćmy ruchem wstecznym punkt  $C_1$  do kota śladu  $s_1$  o kąt  $\varphi$  płaszczyzny  $ab$  z  $P_1$  (§31); potaczącwszy tak otrzymany punkt  $C$  z punktem  $O$ , otrzymamy szukaną prostą  $c$ . Dan rozwiązanie.

Do powyższego zadania sprowadzają się liczne inne np.

Zadanie. Dane są dwie proste skośne  $a$  i  $b$ ; wykreślić prostą  $c$  przecinającą  $a$  pod kątem  $\beta$ , a  $b$  pod kątem  $\alpha$ .

Przez punkt dowolny  $H$  prostej  $a$  poprowadźmy prostą  $b_1$  równoległą do  $b$ , poczem wyprowadźmy z punktu  $H$  prostą  $c_1$ , tworzącą z  $a$   $\angle \beta$ , a z  $b_1$   $\angle \alpha$ . Przez dowolny punkt  $P$  prostej  $b$  poprowadźmy prostą  $c_2$  równoległą do  $c_1$ , wreszcie wyznaczmy prostą  $c$ , jako przecięcie płaszczyzn  $ac_1$  i  $bc_2$ .

Zadanie. Dane są dwie płaszczyzny  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , oraz dwa kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ ; przez dany punkt  $P$  poprowadzić prostą  $a_3$ , która z płaszczyzną  $\pi_1$  tworzy kąt  $\alpha_1$ , a z płaszczyzną  $\pi_2$  kąt  $\alpha_2$ .

Z punktu  $P$  spuścimy prostopadłe  $a_1$  i  $a_2$  na  $\pi_1$  i  $\pi_2$  i poprowadzimy przecięć prostą  $a_3$ , która z  $a_1$  tworzy kąt  $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$ , a z  $a_2$  kąt  $\frac{\pi}{2} - \alpha_2$ .

Zadanie. Dane są dwie płaszczyzny  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , oraz dwa kąty  $\beta_1$  i  $\beta_2$ ; przez dany punkt  $P$  poprowadzić płaszczyznę  $\pi_3$ , która tworzy z płaszczyzną  $\pi_1$  kąt  $\beta_1$ , a z płaszczyzną  $\pi_2$  kąt  $\beta_2$ .

Z punktu  $P$  spuścimy prostopadłe  $a_1$  i  $a_2$  na  $\pi_1$  i  $\pi_2$  i poprowadzimy przecięć prostą  $a_3$ , która z  $a_1$  tworzy kąt  $\beta_1$ , a z  $a_2$  kąt  $\beta_2$ ; płaszczyzna  $\pi_3$  wyprowadzona z punktu  $P$  prostopadłe do  $a_3$  jest szukana.

