dar p. Rutkowskiej

POLITECHNIKA WARSZAWSKA.

KURS
EOMETRJI WYKREŚLNEJ

WEDŁUG WYKŁADÓW

PROF. GARLICKIEGO.

NAKŁADEM
KOMISJI WYDAWNICZEJ
TOW. BRAT. POM. STUD. POL. WARSZ.
1921 r.

WSTĘP.

§ 1. ISTOTA I CEL GEOMETRJI WYKREŚLNEJ. Zagadnienie geometrji uważamy teoretycznie za rozwiązane, jeżeli zostało ono sprowadzone do zagadnień uprzednio rozwiązanych; drogą takich kolejnych redukcji dochodzimy do kilku zagadnień najprostszych, zwanych zasadniczemi, od których uzależnione jest rozwiązanie wszelkich innych. Jeżeli się ograniczymy do tak zw. zagadnień I i II stopnia, to do zagadnień zasadniczych zaliczyć możemy nap. następujące:

1/ Przez dwa dane punkty poprowadzić prostą,

2/ Na danej płaszczyźnie poprowadzić koło, mając jego środek i promień,

3/ Na danej płaszczyźnie znaleźć punkt przecięcia dwuch prostych, albo prostej i koła, albo dwuch kół,

4/ Przez dwie przecinające się proste poprowadzić płaszczyznę,

5/ Znaleźć prostą przecięcia dwuch danych płaszczyzn.

Pierwsze trzy zagadnienia należą do zagadnień zasadniczych geometrji płaskiej; ostatnie dwa stanowią zasadnicze zagadnienia geometrji przestrzeni. Do zagadnień I grupy dadzą się sprowadzić rozwiązania wszystkich innych zagadnień geometrji płaskiej I i II stopnia; rozwiązania zagadnień stereometrycznych I i II stonia sprowadza się natomiast do zagadnień zasadniczych obu grup powyższych.

Rozwiązanie praktyczne zagadnień geometrycznych I i II stopnia będzie możliwe o tyle, o ile posiadamy narzędzia, zapomocą których można rozwiązać zagadnienia zasadnicze. Otóż nasze narzędzia kreślarskie: ołówek, linjał i cyrkiel dają możność praktycznego rozwiązania zasadniczych zagadnień I grupy, a więc wszystkich zagadnień geometrji płaskiej I i II stopnia; zagadnienia geometrji przestrzeni, które oprócz poprzednich wymagają jeszcze zagadnień drugiej grupy, musiałyby pozostać praktycznie nierozwiązalne. Dlatego też dla każdego rozwiązania teoretycznego zagadnienia geometrji płaskiej możemy z łatwością wykonać model, t. j. rysunek na papierze. Inaczej jest w geometrji przestrzeni: nawet dla zagadnień bardzo prostych nie jesteśmy najczęściej w stanie wykonać modelu rozwiązania. Weźmy dla przykładu zadanie następujące: znaleźć punkt jednakowo odległy od czterech punktów w przestrzeni danych

nych A , B , C i D . Teoretycznie zadanie to rozwiązuje się nader łatwo: przez środki odcinków AB BC , CD , prowadzimy płaszczyzny do tych odcinków prostopadłe, punkt przecięcia tych trzech płaszczyzn będzie punktem szukanym. Praktyczne wykonanie modelu tej figury byłoby wszakże niezmiernie trudnem, mozolnem i kosztownem. Można kreślić w płaszczyźnie - nie można kreślić w przestrzeni.

Istnieje zatem jakby zasadnicza różnica pomiędzy zagadnieniami geometrji płaskiej i zagadnieniami geometrji przestrzeni; podczas gdy pierwsze mogą być nietylko teoretycznie, ale i praktycznie rozwiązane, rozwiązanie drugich ma charakter wyłącznie teoretyczny. Ponieważ jednak rozwój nauk technicznych wymaga, aby i zagadnienia geometrji przestrzeni mogły być rozwiązane praktycznie, starano się zatem od najdawniejszych czasów wynajdywać sposoby, do tego celu służące. Ale dopiero Kacper Monge /1746 - 1818/ uzupełnił, matematycznie uzasadnił i w jedną całość wszystkie te sposoby połączył. Pierwsze wydanie słynnej jego książki nosi tytuł: "Géometrie descriptive. Leçons données aux écoles normales" i ukazało się w roku 1795.

Zasadą wspólną wszystkich metod geometrji wykreślnej jest zasada odpowiedniości, która odgrywa wybitną rolę we wszystkich gałęziach dzisiejszej matematyki. W geometrji wykreślnej zastępujemy figurę przestrzenną przez figurę płaską, która jest z nią w określonym i stałym związku i może zatem figurę przestrzenną zastąpić. Dzięki temu wszelkie zagadnienia stereometryczne zostaje zastąpione przez odpowiednie zagadnienie geometrji płaskiej; jeżeli rozwiążemy to zagadnienie płaskie i otrzymamy figurę, która odpowiada odnośnym warunkom, to figura przestrzenna, która na mocy ustalonego związku znalezionej figurze płaskiej odpowiada uczyni zadość warunkom przez zagadnienie stereometryczne postawionem.

Zagadnienie wykonania modelu teoretycznego rozwiązania zadania stereometrycznego zastępujemy zatem następującym: odwzorować figurę przestrzenną na płaszczyźnie, t.j. zastąpić figurę przestrzenną przez odpowiednią figurę płaską. Streszczając nasze uwagi możemy dać takie określenie:

Geometrja wykreślna jest nauką, która uczy, jak odwzorowywać na płaszczyźnie dane figury przestrzenne i jak na mocy tych odwzorowań rozwiązywać za pomocą rysunku zagadnienia tych figur dotyczące.

Sposobów odwzorowania figur przestrzennych na płaszczyźnie możnaby pomyśleć bardzo wiele; dla zastosowań praktycznych będą jednak brane w rachubę takie tylko odwzorowania, których rekonstrukcja w wyobraźni nie jest zbyt trudna. Odwzorowanie takie otrzymamy przedewszystkiem przez naśladowanie procesu naszego widzenia; odnośna metoda geometrji wykreślnej nazywa się metodą rzutów środkowych lub perspektywą. Wszystkie w praktyce stosowane metody wykreślne są z nią pokrewne.

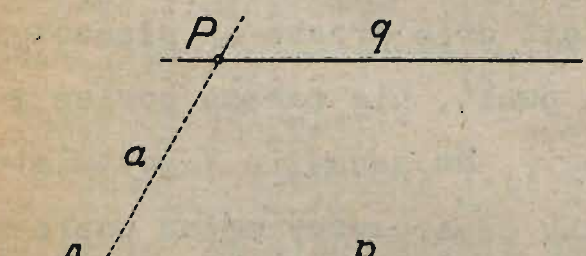
§ 2. ELEMENTY NIEWŁAŚCIWE. Zanim się zwrócimy do wykładu poszczególnych metod wykreślnych, wprowadzimy do słownictwa geometrycznego pewne terminy, które w znacznym stopniu uproszczą nasz wykład. Mam na myśli elementy niewłaściwe.

Dwa punkty zawsze wyznaczają prostą, istnieje bowiem zawsze prosta i tylko jedna, która łączy dwa jakiekolwiek punkty. Natomiast dwie proste na płaszczyźnie nie zawsze wyznaczają punkt, nie zawsze bowiem istnieje punkt ich przecięcia. Na zasadzie V postulatu Euklidesa przez każdy punkt płaszczyzny można poprowadzić jedną i tylko jedną prostą, która danej prostej nie przecina; prostą tę zwiemy równoległą do danej prostej, lub też prostą o tym samym kierunku. Dwie proste na płaszczyźnie mają zatem albo punkt wspólny albo wspólny kierunek. Powstaje teraz pytanie, czy nie możnaby pojęcia "punkt" rozszerzyć w taki sposób, aby wyjątek spowodowany przez możliwość prostych równoległych został usunięty?

Na pytanie to damy odpowiedź twierdzącą. Będziemy odtąd mianowicie przez słowo "punkt" rozumieć nie tylko punkty w dotychczasowem znaczeniu, t.j. punkty <u>właściwe</u>, ale i "<u>kierunki</u>" wszystkich możliwych prostych, t.j. punkty <u>niewłaściwe</u>. Możemy wtedy powiedzieć:

"Dwie proste na płaszczyźnie zawsze mają jeden i tylko jeden punkt wspólny: właściwy albo niewłaściwy".

Na każdej prostej mamy zatem nieskończenie wiele punktów właściwych i jeden punkt niewłaściwy, t.j. jej kierunek. Z chwilą, gdy prosta jest dana, dany jest oczywiście jej kierunek, t.j. punkt niewłaściwy; na każdej prostej danej jest on tedy zawsze dany, czego nie można powiedzieć o żadnym punkcie właściwym tej prostej. Punkt niewłaściwy możnaby więc nazywać <u>punktem absolutnym</u> danej prostej; czę-



Rys. 1.

sto jednak wolimy go nazywać punktem w nieskończoności, a to na zasadzie następującego rozważania: Niech będzie dana prosta p i punkt P na niej nie leżący /Rys.1/ Każdemu punktowi A prostej p odpowiada jedna i tylko jedna prosta a przechodząca przez P, czyli, jak mówimy, rzucająca punkt A z punktu P. Gdy punkt A porusza się na prostej p, to prosta rzucająca a obraca się dokoła punktu P. Im dalej punkt A będzie się znajdował od pierwotnego swego położenia na prostej p, tem bardziej prosta a będzie się zbliżała do położenia równoległego q. Nawzajem im bardziej prosta a, obracając się dokoła punktu P, z jednej lub drugiej strony zbliża się do położenia równoległego q, tym bardziej punkt A oddala się od pierwotnego swego położenia. Gdy zatem prosta a stanie się równoległą do p, t.j. gdy punkt A przestanie być punktem właściwym prostej p, możemy powiedzieć, że znajduje się on dalej od każdego punktu właściwego prostej p, t.j. w nieskończoności.

Każda prosta posiada zatem jeden punkt w nieskończoności /punkt niewłaściwy, absolutny, kierunek/; należałoby więc prostą uważać za linję zamkniętą.

Tak samo rzeczy się mają z płaszczyznami: dwie płaszczyzny albo się przecinają według prostej, albo są równoległe. Podobnie, jak o prostych równoległych mówimy, że mają wspólny kierunek, tak o płaszczyznach równoległych powiemy, że mają wspólne ustawienie. Jeżeli teraz rozszerzymy pojęcie "prosta" przez dołączenie do prostych w dotychczasowym rozumieniu, t.j. do prostych właściwych, wszystkich możliwych ustawień, to zastąpiwszy słowo "ustawienie" przez słowa "prosta niewłaściwa" powiemy:

"Dwie płaszczyzny zawsze mają jedną i tylko jedną prostą wspólną: właściwą lub niewłaściwą".

Na każdej płaszczyźnie mamy nieskończenie wiele prostych właściwych i jedną prostą niewłaściwą, t.j. ustawienie płaszczyzny. Z chwilą, gdy płaszczyzna jest dana, dana jest oczywiście jej ustawienie, t.j. prosta niewłaściwa; na każdej płaszczyźnie jest ona przeto zawsze dana; możnaby ją nazwać prostą absolutną płaszczyzny. Często wolimy ją nazywać prostą w nieskończoności, leżą na niej bowiem wszystkie punkty w nieskończoności tej płaszczyzny.

Punkt właściwy wraz z punktem niewłaściwym wyznaczają prostą równie dobrze, jak dwa punkty właściwe. Połączyć punkt właściwy A z punktem niewłaściwym prostej b znaczy to przez punkt A poprowadzić równoległą do prostej b.

Dwa punkty niewłaściwe wyznaczają prostą niewłaściwą, albowiem dwa kierunki wyznaczają ustawienie. W samej rzeczy, jeżeli obierzemy dowolny punkt przestrzeni i poprowadzimy przezeń proste w obranych kierunkach, to te dwie proste wyznaczają płaszczyznę, której ustawienie nie zależy od obranego punktu, lecz zależy jedynie od kierunków prostych przez ten punkt przechodzących.

Prosta właściwa a i punkt niewłaściwy prostej b /albo punkt właściwy A i prosta niewłaściwa płaszczyzny B / wyznaczają płaszczyznę równie dobrze, jak każda inna prosta i punkt na niej leżący. Będzie to płaszczyzna przechodząca przez prostą a równolegle do prostej b /albo płaszczyzna przechodząca przez punkt A równolegle do płaszczyzny B /.

Każde dwie proste niewłaściwe mają punkt niewłaściwy wspólny, t.j. dwa ustawienia wyznaczają kierunek. W samej rzeczy, obierzmy znowu dowolny punkt przestrzeni i poprowadźmy przezeń dwie płaszczyzny o danych ustawieniach; kierunek prostej przecięcia tych płaszczyzn nie zależy od obranego punktu, lecz zależy jedynie od ustawień płaszczyzn przez ten punkt przechodzących. Ogół prostych niewłaściwych ma zatem tę własność że każde dwie z pośród nich mają punkt niewłaściwy wspólny. Ale własność taką mogą mieć tylko proste, leżące w jednej płaszczyźnie, a więc

"Wszystkie proste niewłaściwe leżą w jednej płaszczyźnie". Płaszczyzna ta nazywa się niewłaściwą, albo absolutną, albo płaszczyzną w nieskończoności.

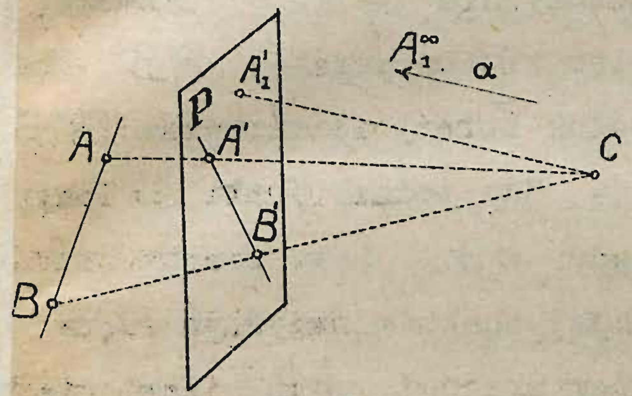
Teorja elementów niewłaściwych da się streścić w następujących słowach:

"Sród płaszczyzn wyróżniona jest jedna przez to, że jest zawsze dana. Nazywa się ona płaszczyzną niewłaściwą; wszystkie inne płaszczyzny nazywamy właściwemi. Proste i punkty tej płaszczyzny nazywamy niewłaściwemi. Wszystkie inne proste i punkty nazywamy właściwemi."

"Równoległemi nazywamy dwie płaszczyzny właściwe, które mają prostą niewłaściwą wspólną, lub dwie proste właściwe, które mają punkt niewłaściwy wspólny. Określenia te nie mają zastosowania, gdy jedna z dwuch płaszczyzn, lub gdy jedna albo obie proste są niewłaściwe."

Wprowadzenie do geometrji elementów niewłaściwych, upraszcza wysłowienie wielu twierdzeń i ułatwia dowodzenia przez usunięcie w wielu razach przypadków szczególnych, które inaczej osobno musiałyby być rozważane.

§ 3. METODA RZUTÓW. Niech będzie płaszczyzna P /Rys.2/ zwana płaszczyzną rzutów i nie leżący na niej punkt C, zwany środkiem rzutów. Rzutem środkowym punktu A nazywamy punkt A', w którym prosta CA, zwana prostą rzucającą, przebija płaszczyznę P. Jeżeli punkt A jest punktem niewłaściwym, t.j. kierunkiem prostej α, to jego rzutem jest punkt, w którym równoległa do α przebija płaszczyznę rzutów P. Jeżeli punkt A leży w płaszczyźnie P, to jest on własnym swoim rzutem; będzie to miało miejsce również i wtedy, gdy punkt A jest punktem niewłaściwym płaszczyzny P, to jest kierunkiem prostej równoległej do płaszczyzny P. Gdy punkt A przystanie do środka rzutów C, to prosta CA, a więc i rzut punktu A, jest niewyznaczony. W ten sposób każdemu punktowi przestrzeni, z wyjątkiem punktu C, odpowiada na płaszczyźnie rzutów jeden jedyny punkt, a mianowicie jego rzut. Natomiast każdemu punktowi A' płaszczyzny P odpowiada nieskończenie wiele punktów przestrzeni, te wszystkie mianowicie, które leżą na prostej CA'.



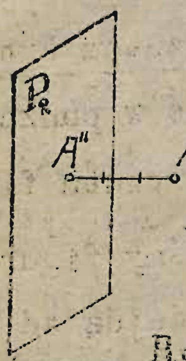
Rys.2.

Weźmy drugi jeszcze punkt B i znajdźmy jego rzut B' ; rzutem prostej AB nazwiemy miejsce geometryczne, rzutów punktów prostej AB ; ponieważ wszystkie proste, które łączą punkt C z punktami prostej AB , leżą w płaszczyźnie CAB /zwanej płaszczyzną rzucającą/, więc rzutem prostej AB będzie prosta $A'B'$, według której płaszczyzna CAB przecina płaszczyznę rzutów. Gdy jednak punkt B leży na prostej CA , t.j. gdy AB jest prostą rzucającą, to rzuty wszystkich jej punktów znajdują się w jednym punkcie A' ; rzutem prostej AB jest wtedy punkt A' . Tak więc rzutem prostej jest prosta lub punkt.

W ten sposób, każdej figurze przestrzennej lub nieskończonej liczby punktów i prostych, odpowiada na płaszczyźnie rzutów figura płaska, złożona również z punktów lub prostych. Figura ta nazywa się rzutem środkowym figury przestrzennej. Wyobraźmy sobie, że w punkcie C znajduje się nasze oko i że po wykonaniu rzutu figury przestrzennej na płaszczyznę P usunęliśmy figurę przestrzenną:, pomimo to do naszego oka dojdą od wszystkich punktów rzutu te same promienie, które przedtem od usuniętej figury dochodziły, wywołując w naszej wyobraźni złudzenie tej figury. Rzut środkowy wywołuje zatem wrażenie prawie identyczne z wrażeniem wywołanem przez figurę przestrzenną, jeżeli umieścimy oko w pobliżu środka rzutów. Rekonstrukcja figury przestrzennej w wyobraźni jest więc tutaj bardzo łatwą; nie jest jednak równie łatwą rekonstrukcja jej w rzeczywistości. Dzięki temu rzut środkowy ma większe znaczenie w sztukach plastycznych, niż w zastosowaniach technicznych. Jeżeli mamy na uwadze te ostatnie, to dogodniej jest obrać punkt C w nieskończoności, proste rzucające staną się wtedy równoległe, a metoda odnośna nazywa się metodą rzutów równoległych. Szczególnie ważnym jest ten przypadek, gdy proste rzucające są prostopadłe do płaszczyzny rzutów; mamy wtedy do czynienia z metodą rzutów prostokątnych.

§ 4. RZUTY PROSTOKATNE NA JEDNA PŁASZCZYZNE RZUTOW.

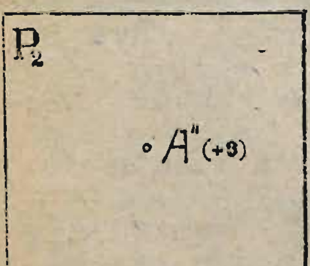
Niech będzie znowu dana płaszczyzna P_2 . /Rys.3/ zwana płaszczyzną rzutów. Rzutem prostokątnym punktu A na płaszczyznę P_2 nazywa się spodek prostopadłej, spuszczonej z punktu A na tę płaszczyznę. Każdemu punktowi właściwemu przestrzeni A odpowiada jego rzut A'' ; natomiast każdemu punk-



Rys.3

towi płaszczyzny rzutów A'' odpowiada nieskończenie wiele punktów przestrzeni, te wszystkie mianowicie, które leżą na prostopadłej, wystawionej w punkcie A'' do płaszczyzny P_2. Tak więc dla wyznaczenia punktu w przestrzeni nie wystarcza podanie jego rzutu; należałoby wiedzieć naprzykład jeszcze, jaką jest jego odległość od swego rzutu i z której strony płaszczyzny P_2 punkt ten się znajduje. Wiadomości te winny być zanotowane w sposób umówiony tak, aby dla każdego punktu wraz z jego rzutem, dochodziła do nas jednocześnie wskazówka, z której strony płaszczyzny P_2 i na jakiej od niej odległości punkt ten się znajduje. Różne sposoby notowania mogą być w tym celu zastosowane.

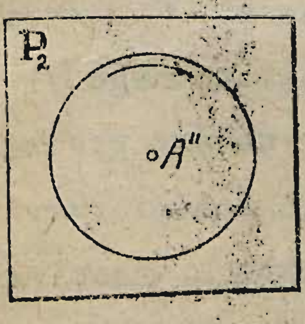
I. RZUTY CECHOWANE. Najprostszym wydaje się odnotowanie obok rzutu punktu A odległości jego od swego rzutu wyrażonej w dogodnie obranych jednostkach długości /np. w metrach/ /Rys.4/. Aby przytem uniknąć dwuznaczności, możnaby uważać odległości punktów znajdujących się przed płaszczyzną P_2 za dodatnie, odległości zaś punktów znajdujących się za nią za ujemne. Po zrobieniu takiej umowy, położenie punk-



Rys.4.

tu A w przestrzeni będzie wyznaczonem, jeżeli jego rzut A'' opatrzymy t.zw. cechą, t.j. liczbą algebraiczną, wyrażającą co do wartości bezwzględnej i znaku jego odległość od płaszczyzny rysunku. Jak widzimy odwzorowanie punktu jest tutaj zależne od obranej jednostki długości. Ponieważ metoda ta posługuje się liczbami, jest ona napoły tylko graficzną. Ma ona ważne zastosowanie w topografji, natomiast nie nadaje się do badania geometrycznych własności figur przestrzennych.

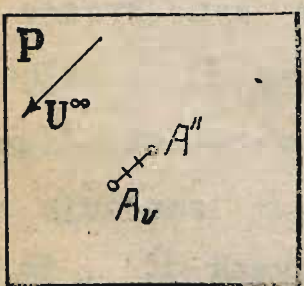
2. CYKLOGRAFJA. Zamiast podawać oprócz rzutu punktu liczbę algebraiczną możemy dla podania odległości punktu A od płaszczyzny rzutów zrobić umowę następującą: Z punktu A'' jako środka zakreślmy koło promieniem równym tej odległości /rys.5/. Aby odróżnić od siebie punkty symetryczne względem płaszczyzny P_2, dołączamy na okręgu zwrot określony. Jeżeli punkt A znajduje się przed płaszczyzną P_2, to ten zwrot niechaj będzie taki, jaki posiadają skazówki zegara; gdyby punkt A znajdował się za płaszczyzną P_2, to zwrot okręgu byłby przeciwny. Takie koło wraz z podanym na nim zwrotem dokładnie in-



Rys.5.

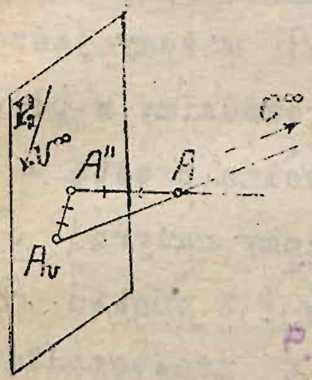
formuje nas o położeniu punktu A w przestrzeni: aby go wyznaczyć należy w środku koła A'' wystawić prostopadłą do P_2 i odmierzyć na niej promień koła w jedną lub drugą stronę zależnie od zwrotu na okręgu danego. Punkt A jest przeto wierzchołkiem stożka obrotowego, którego tworzące nachylone są do płaszczyzny rzutów pod kątem $45°$. Zwrot dany na okręgu wyda się dla oka, umieszczonego w punkcie A zawsze jednakowym /mianowicie zwrotem skazówek zegara/. Metoda cyklograficzna bywa nieraz użyteczną w poszukiwaniach teoretycznych; w praktyce używa jej się prawie wyłącznie dla wyznaczenia środka rzutów w perspektywie.

3. RZUT UKOŚNY. Obierzmy na płaszczyźnie rzutów P_2 stały kierunek U^∞ /rys. 6/. Z rzutu prostokątnego A'' punktu A wyprowadźmy prostą w tym kierunku i odmierzmy na niej od punktu A'' odcinek równy odległości punktu A od swego rzutu A, lub też odcinek w danym stosunku do tej odległości będący, nap. równy połowie odległości $A''A$. Umówimy się przytym, że dla punktów A, leżących przed płaszczyzną P_2, będziemy odmierzać te odcinki w jedną którąkolwiek



Rys. 6.

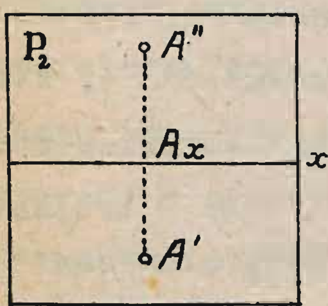
stronę /np. w stronę strzałki/, dla punktów zaś leżących za płaszczyzną P_2 — w stronę przeciwną. Odcinek $A''A_v$ wyznacza wtedy punkt przestrzeni A. Metoda odwzorowany na tej umowie oparta nazywa się r z u t e m u k o ś n y m. Istotnie punkt A_v /Rys.7/ jest rzutem punktu A z punktu niewłaściwego C^∞, który jest kierunkiem przeciwprostokątnej A_vA trójkąta prostokątnego A_vAA''.



Rys.7.

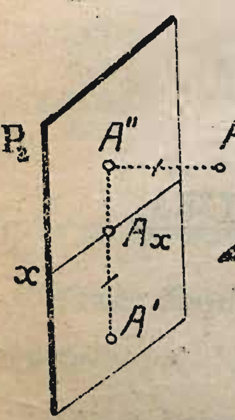
Gdybyśmy umieścili nasze oko w bardzo wielkiej /właściwie nieskończenie wielkiej/ odległości od płaszczyzny rzutów w kierunku C^∞, to od punktu A_v dochodziłby do naszego oka ten sam promień co od punktu A; gdyby zatem usunięto punkt A wrażenie przez nasze oko otrzymane nie uległoby zmianie. To samo dotyczy wszystkich innych punktów figury przestrzennej; patrząc tedy na rysunek ze znacznej odległości w kierunku C^∞ ulegamy tem większemu złudzeniu, im odległość oka od rysunku jest większa. Metoda ta ma więc zaletę poglądowości; będziemy ją później rozważali szczegółowo; na tym miejscu wydało nam się niezbędnem wspomnieć o niej jeszcze i dla tego, że jest ona stosowana powszechnie, choć często nieświadomie, w rysunkach stereometrji elementarnej i krystalografji.

§5. RZUTY PROSTOKĄTNE NA DWIE PROSTOPADŁE PŁASZCZYZNY RZUTÓW. Punkt przestrzeni A możemy jeszcze odwzorować w sposób następujący: Poprowadzimy w płaszczyźnie P_2 dowolną prostą x /Rys.8i9/ którą będziemy nazywać **o s i ą r z u t ó w**. Z punktu A'' spuśćmy na oś x prostopadłą $A''A_x$ i od jej spodka A_x odmierzmy na niej odcinek A_xA', równy odległości punktu A od swego rzutu A, umówiwszy się uprzednio, że gdy punkt A będzie leżał przed płaszczyzną P_2, to tę odległość odmierzymy w jedną którąkolwiek stronę /nap. pod osią x, gdy ta oś jest obraną poziomo/; gdy zaś punkt A będzie leżeć za płaszczyzną P_2, to odmierzymy ją w stronę przeciwną. W ten sposób dwa punkty A'' i A', leżące na wspólnej prostopadłej do x odwzorują punkt A w przestrzeni.

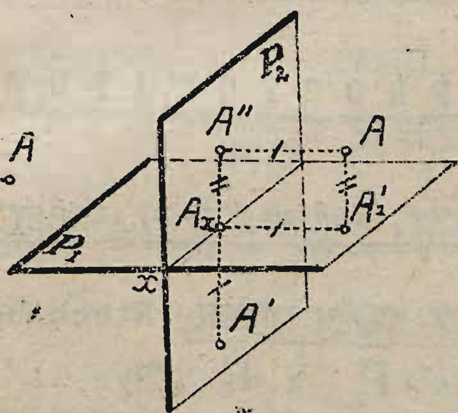


Rys. 8.

Punktowi A' można nadać atoli inne jeszcze znaczenie. Poprowadźmy przez oś x płaszczyznę P_1 prostopadłą do P_2 i rzućmy punkt A prostokątnie na tę nową płaszczyznę rzutów /Rys.10/ . Połączmy otrzymany rzut A' z punktem A_x ; czworokąt $A_x A_1' A A''$ — jest prostokątem; odcinek $A_x A_1'$ jest równy odległości $A''A$ i prostopadły do x . Jeżeli obrócimy płaszczyznę P_1 dokoła osi x tak, żeby P_1 upadła na P_2 to punkt A_1' upadnie na A' , albowiem odcinki $A_x A_1'$ i $A_x A'$ są równe i oba są prostopadłe do x w tym samym punkcie A_x . Możemy tedy punkt A' uważać za rzut punktu A na płaszczyznę P_1 <u>po dokonanym kładzie</u> płaszczyzny P_1 na płaszczyznę P_2 . Wtedy odległość punktu A'' od x , t.j. $A_x A''$ wyznacza odległość punktu A od P_1 . W ten sposób rolę punktów A' i A'' są zamienne: A' jest rzutem punktu A na P_1 , A'' jest rzutem punktu A na P_2 ; odległość punktu A'' od x jest równa odległości punktu A od P_1, odległość punktu A' od x jest równa odległości punktu A od P_2 .



Rys. 9.



Rys. 10.

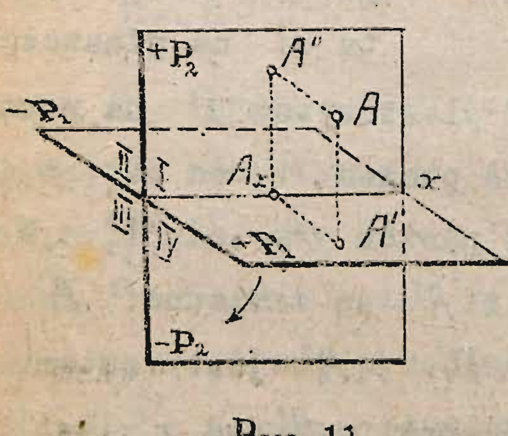
Metoda odwzorowania figur za pomocą rzutów prostokątnych na dwie płaszczyzny prostopadłe jest tak ważną w zastosowaniach, że od niej rozpoczynamy systematyczny wykład geometrji wykreślnej.

CZĘŚĆ I.

RZUTY PROSTOKĄTNE.

ROZDZIAŁ I. PUNKT, PROSTA I PŁASZCZYZNA.

§ 6. RZUTY PUNKTÓW WŁAŚCIWYCH. Niech będą dwie płaszczyzny prostopadłe P_1 i P_2 /Rys. 11/, prosta x niech będzie ich linją przecięcia. P_1 nazywa się pierwszą płaszczyzną rzutów, P_2 drugą płaszczyzną rzutów; prosta x — osią rzutów. Co do położenia płaszczyzn P_1 i P_2 w przestrzeni nie potrzeba robić żadnej



Rys. 11.

umowy; często jednak wyobrażamy sobie, że $\mathbf{P}_1$ jest poziomą, $\mathbf{P}_2$ zaś pionową i nazywamy wtedy: $\mathbf{P}_1$ - poziomą płaszczyzną rzutów, a $\mathbf{P}_2$ pionową płaszczyzną rzutów.

Z danego punktu właściwego A przestrzeni spuszczamy prostopadłe AA' na $\mathbf{P}_1$ i AA'' na $\mathbf{P}_2$; punkt A' azywa się pierwszym rzutem punktu A /wzgl. rzutem poziomym/, odległość $A'A$ nazywa się pierwszą odległością punktu A ; punkt A'' nazywa się drugim rzutem punktu A /wzgl. rzutem pionowym/, odległość $A''A$ nazywa się drugą odległością punktu A.

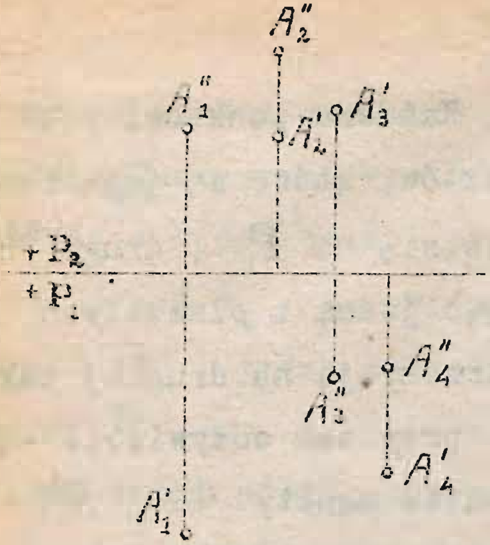
Przez proste $A'A$ i $A''A$ poprowadźmy płaszczyznę, która przetnie oś x w punkcie A_x ; płaszczyzna ta będzie prostopadła do x, albowiem jest ona prostopadła zarówno do $\mathbf{P}_1$ jak i do $\mathbf{P}_2$. Oś rzutów będzie zatem prostopadła do każdej prostej w płaszczyźnie $A'AA''$, a więc $x \perp A_xA'$ i $x \perp A_xA''$. Odcinek A_xA' nazywa się pierwszą rzędną punktu A ; odcinek A_xA'' nazywa się jego drugą rzędną. Ponieważ czworokąt $A'AA''A_x$ jest prostokątem, więc mamy:

„Pierwsza rzędna punktu A równa się drugiej jego odległości; druga rzędna punktu A równa się pierwszej jego odległości. Równość ta będzie dotyczyła nietylko wartości bezwzględnej, ale i znaku, jeżeli zrobimy co do znaków umowę następującą: Oś rzutów dzieli każdą płaszczyznę rzutów na dwie części; jedną którąkolwiek z dwóch części płaszczyzny P_1 /np. tę, która leży przed P_2 / nazwijmy pierwszą płaszczyzną dodatnią $+P_1$; jedną którąkolwiek z dwóch części płaszczyzny P_2 /np. tę, która leży nad płaszczyzną P_1 / nazwijmy drugą półpłaszczyzną dodatnią $+P_2$, pozostałe części nazwijmy pierwszą i drugą półpłaszczyzną ujemną $-P_1$ i $-P_2$. Rzędne leżące na $+P_1$ i $+P_2$ uważajmy za dodatnie, rzędne leżące na $-P_1$ i $-P_2$ za ujemne. Podobną umowę zawieramy co do pierwszych i drugich odległości. Za dodatni uważać będziemy pierwsze odległości punktów, leżących po tej stronie płaszczyzny P_1 ,po której leży $+P_2$ /nad płaszczyzną P_1 / oraz drugie odległości punktów, leżących po tej stronie płaszczyzny P_2 , po której leży $+P_1$ /przed P_2 /. Za ujemne uważać będziemy pierwsze odległości punktów leżących po tej stronie płaszczyzny P_1 , po której leży $-P_2$ /pod P_1 /, oraz drugie odległości punktów, leżących po tej stronie płaszczyzny P_2 , po której leży $-P_1$ /za P_2 /.

Dwie płaszczyzny rzutów dzielą przestrzeń na cztery ćwiartki: 1-sza pomiędzy $+P_1$ i $+P_2$, druga między $-P_1$ i $+P_2$, trzecia między $-P_1$ i $-P_2$.

czwarta między $+P_1$ i $-P_2$. Każdemu punktowi przestrzeni A odpowiada para punktów, które są jego rzutami; jeden z nich A' znajduje się na P_1, drugi A'' na P_2. Jeżeli teraz, obracając jedną z płaszczyzn rzutów dokoła osi x, rozpostrzemy ją na drugiej tak, aby $+P_1$ przystała do $-P_2$, przyczem oczywiście $-P_1$ przystanie do $+P_2$, to obydwa te punkty A' i A'' znajdą się w jednej płaszczyźnie, którą obierzemy za płaszczyznę rysunku. Ponieważ $x \perp A_x A'$ i $x \perp A_x A''$, więc punkty A' i A'' będą leżały na wspólnej prostopadłej do osi rzutów. Tak więc punkt przestrzeni A będzie odwzorowaną na płaszczyźnie przez parę punktów A' i A'', leżących na prostopadłej do osi x. Prostopadła $A'A''$ nazywa się linją rzędnych punktu A.

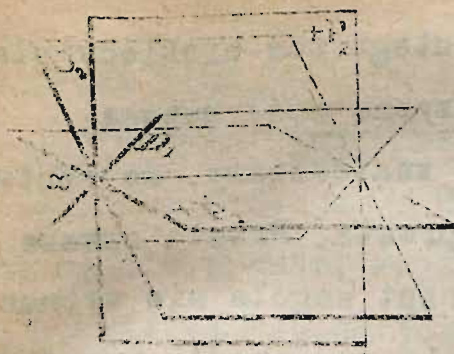
Nawzajem, każdej parze punktów $A'A''$, leżących w płaszczyźnie rysunku na prostopadłej do x, odpowiada jeden jedyny punkt przestrzeni A. W samej rzeczy, sprowadźmy płaszczyznę P_1, wraz z leżącym w niej punktem A' do pierwotnego położenia względem P_2, t. j. uczyńmy $P_1 \perp P_2$. W punkcie A' wystawimy prostopadłą do P_1, w punkcie A'' prostopadłą do P_2; te dwie prostopadłe przecinają się w punkcie A, gdyż leżą obydwie w płaszczyźnie, wyznaczonej przez $A_x A'$ i $A_x A''$, a więc prostopadłej do x.



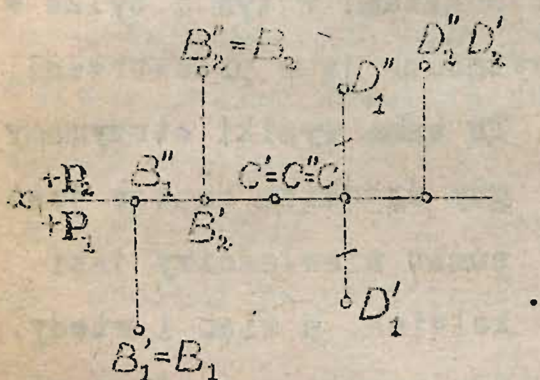
Rys. 12.

Jeżeli punkt A' leży w pierwszej ćwiartce /Rys.12/ to obydwie rzędne są dodatnie, rzut poziomy leży pod osią, mówiąc ogólnie, po tej stronie osi, po której zrobiliśmy napis $+P_1$; rzut pionowy nad nią, a więc po tej stronie osi, gdzie widnieje napis $+P_2$. Jeżeli punkt A_2 leży w drugiej ćwiartce, to pierwsza rzędna jest ujemna, druga dodatnia; po dokonanym kładzie płaszczyzny P_1 na P_2 będą zatem obydwa rzuty nad osią $x(+P_2)$. Punkt A_3 znajdujący się w trzeciej ćwiartce, będzie miał obydwie rzędne ujemne; rzut poziomy będzie więc nad osią $x(+P_2)$, rzut pionowy pod nią $(+P_1)$. Punkt A_4 znajdujący się w czwartej ćwiartce będzie miał pierwszą rzędną ujemną, drugą dodatnią; obydwa rzuty będą więc pod osią $(+P_1)$.

Godne uwagi są punkty, których rzuty mają pewne szczególne położenia względem osi rzutów. Jeżeli drugi rzut B_2'' leży na osi /Rys.14/, to punkt B' leży w płaszczyźnie P_1 i przystaje do swego pierwszego rzu-



Rys. 13.

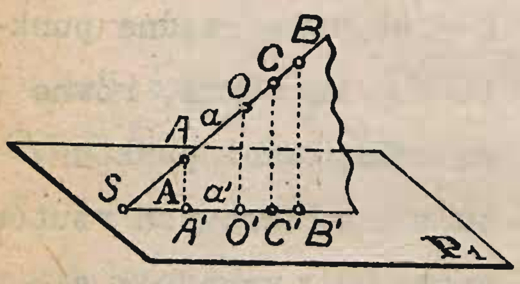


Rys. 14.

tu B'_2 ; jeżeli pierwszy rzut B'_2 leży na osi, to punkt B_2 leży w płaszczyźnie P_2 i przystaje do swego drugiego rzutu B''_2 , jeżeli oba rzuty C' i C'' są zjednoczone w tym samym punkcie osi, to i punkt C jest z nimi zjednoczony. Gdy obydwie rzędne punktu D są równe, równe są odległości punktu D od obu płaszczyzn rzutów; punkt D znajduje się przeto na jednej z dwóch płaszczyzn dwusiecznych D_1 i D_2 kątów dwuściennych między płaszczyznami rzutów.

Płaszczyznę D_1 , przechodzącą przez ćwiartkę pierwszą i trzecią, /Rys.13/ nazywamy pierwszą płaszczyzną dwusieczną; rzuty punktu D_1 w niej leżącego są symetryczne względem osi. Płaszczyzna D_2 , przechodząca przez ćwiartkę drugą i czwartą nazywa się drugą płaszczyzną dwusieczną; rzuty punktu D_2 w niej leżącego przystają do siebie. Dlatego też niekiedy płaszczyznę D_2 nazywa się płaszczyzną spółrzutową.

§ 7. RZUTY PROSTEJ. W § 3 znaleźliśmy, że rzutem środkowym prostej jest wogóle prosta. Prosta zawsze wyznacza swój rzut, natomiast rzut wogóle nie wyznacza prostej w przestrzeni. Gdy prosta przechodzi przez środek rzutów, to jej rzut jest punktem; w tym i tylko w tym przypadku rzut prostej wyznacza ją w przestrzeni.



Rys. 15.

Te same wyniki otrzymamy gdy środkiem rzutów jest punkt niewłaściwy jakikolwiek, a więc i wtedy, gdy proste rzucające są prostopadłe do płaszczyzny rzutów. Niech A' i B' będą rzutami prostokątnemi punktów A i B na płaszczyznę rzutów P_1. /rys15/

Rzuty wszystkich punktów prostej AB będą leżały na prostej $A'B'$, która jest linją przecięcia płaszczyzny P_1 z płaszczyzną A przechodzącą przez AB prostopadle do P_1. Płaszczyzna A nazywa się płaszczyzną rzucającą prostą AB. Każda prosta przestrzeni a ma jeden jedyny rzut a' na płaszczyźnie P_1, a więc każda prosta wyznacza swój rzut.

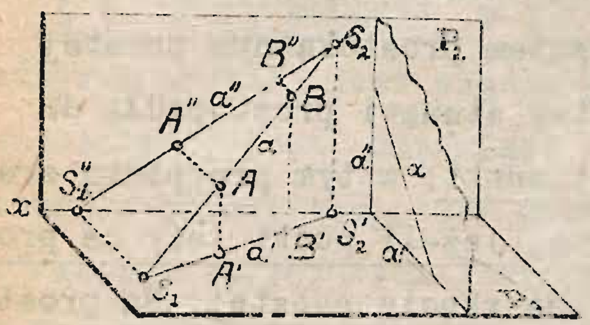
Natomiast rzut α' nie wyznacza wogóle prostej w przestrzeni, gdyż każda prosta leżąca w płaszczyźnie A ma ten sam rzut α'. Rzutem prostokątnym prostej jest wogóle prosta; wyjątek stanowi prostopadła do P_1, której rzutem jest punkt; w tym przypadku zresztą rzut wyznacza prostą. Jeżeli punkt leży na prostej, to jego rzut leży na rzucie prostej. Na prostej $AB \equiv \alpha$ weźmy dowolnie punkt C; rzut jego C' leży na rzucie $A'B' \equiv \alpha'$. Proste rzucające równoległe AA', BB' i CC' wyznaczają na prostych α i α' odcinki proporcjonalne; mamy więc:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}$$

czyli: punkt C dzieli odcinek AB w tym samym stosunku, w jakim rzut punktu C dzieli rzut odcinka AB. Równość tych dwóch stosunków dotyczy nietylko do wartości bezwzględnej, ale i znaku, jakiekolwiek zwroty prostych α i α' uznaliśmy za dodatnie.

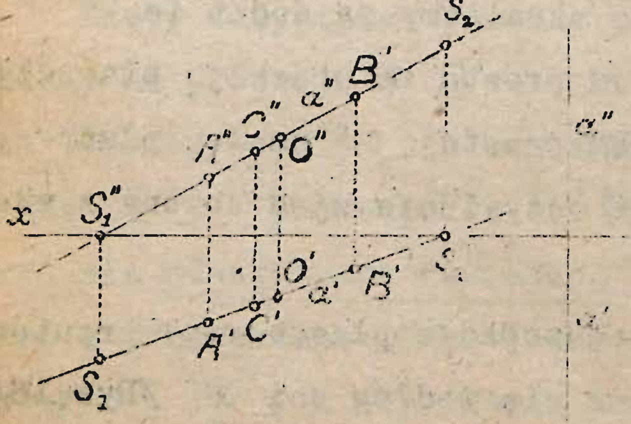
Punkt S, w którym prosta α przebija płaszczyznę rzutów nazywamy śladem prostej α na tej płaszczyźnie. Punkt ten jest oczywiście zjednoczony z własnym swoim rzutem S'.

Weźmy teraz dwie prostopadłe płaszczyzny rzutów P_1 i P_2, przecinające się według osi x /Rys.16/



Rys. 16.

i rzućmy prostą a na każdą z tych płaszczyzn. W tym celu obierzmy na prostej a dwa punkty jakiekolwiek A i B, rzućmy każdy z nich na obie płaszczyzny rzutów i połączmy ze sobą rzuty A' i B' oraz A'' i B''. Prosta $a' = A'B'$ nazywa się pierwszym /poziomym/ rzutem prostej a, prosta $a'' = A''B''$ nazywa się jej drugim /pionowym/ rzutem. Po rozpostarciu płaszczyzn P_1 i P_2 na płaszczyźnie rysunku otrzymamy w niej dwie proste a' i a'' /Rys.17/. Przypuśćmy, że żadna z nich nie jest prostopadłą do osi x.



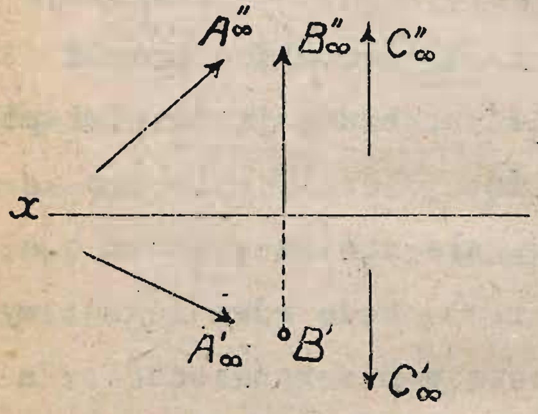
Rys. 17.

Powiadam, że takie dwie proste uważane: pierwsza a' za rzut pierwszy, druga a'' za rzut drugi prostej właściwej a, wyznaczają tę prostą. W samej rzeczy sprowadźmy płaszczyznę P_1 wraz z leżącą w niej prostą α' do pierwotnego jej położenia względem P, a następnie przez α' i α'' poprowadźmy płaszczyzny A_1 i A_2 prostopadłe odpowiednio do P_1 i do P_2 ; przecięcie płaszczyzn A_1 i A_2 będzie prostą α.

Dwie proste płaszczyzny rysunku, z których jedna jest prostopadła do osi, nie mogą być rzutami prostej. Jeżeli bowiem jeden rzut prostej α, np. α', jest prostopadły do x, to drugi jej rzut α'' przystaje do pierwszego, gdyż płaszczyzna A_1 rzucająca prostą α poziomo, t.j. prostopadle do P_1, rzuca ją również pionowo, t.j. prostopadle do P_2. Jeżeli obie proste α' i α'' są prostopadłe do osi x, ale nie są zjednoczone, to płaszczyzny rzucające A_1 i A_2 będą równoległe; wyznaczają więc one wtedy prostą w nieskończoności, a mianowicie ustawienie płaszczyzn prostopadłych do osi. Jeżeli obie proste α' i α'' są zjednoczone na prostopadłej do osi, to płaszczyzny rzucające A_1 i A_2 będą zjednoczone w płaszczyźnie prostopadłej do osi. Każda prosta tej płaszczyzny będzie miała te same rzuty α' i α'', w tym więc przypadku prosta α nie jest przez swoje rzuty należycie wyznaczona.

5. RZUTY PUNKTÓW I PROSTYCH NIEWŁAŚCIWYCH.

Gdy punkt A jest niewłaściwy, t.j. gdy jest danym kierunkiem, to prosta rzucająca łączy go z niewłaściwym środkiem rzutów . Jest to zatem ustawienie płaszczyzny wyznaczonej przez dany kierunek oraz kierunek prostopadły do płaszczyzny rzutów. Rzutem danego kierunku A^{∞} na każdą z płaszczyzn rzutów będzie kierunek wspólny temu ustawieniu i ustawieniu płaszczyzny rzutów; kierunki te A'_{∞} i A''_{∞} /Rys.18/ będą wyznaczone przez rzuty jakiejkolwiek prostej mającej kierunek A^{∞}. Gdy dany kierunek B^{∞} jest prostopadły do jednej z płaszczyzn rzutów , to rzut jego na tę płaszczyznę jest jakimkolwiek punktem tej płaszczyzny ; gdy dany kierunek C^{∞} jest prostopadły do osi rzutów , to jego rzuty nie wyznaczają go należycie .



Rys. 18.

§ 9 . RZUTY PUNKTU LEŻĄCEGO NA PROSTEJ DANEJ.

Każdy punkt, leżący na prostej ma swoje rzuty na odpowiednich rzutach prostej. Nawzajem, gdy pierwszy rzut punktu leży na pierwszym rzucie prostej, a jego drugi rzut na drugim rzucie prostym, to punkt i prosta, przez te rzuty wyznaczone należą do siebie. Neżemy tedy rozwiązać następujące

ZADANIE: Na jednym z rzutów prostej dany jest odpowiedni rzut punktu na niej leżącego; wyznaczyć drugi rzut tego punktu. Niechaj będzie dana prosta $a'a''$ /Rys.17/; na jednym z jej rzutów, np. na a' niech będzie prócz tego dany rzut C' punktu C musi leżeć na prostej Drugi rzut C'' punktu C musi leżeć na prostej a''; a. oraz na linji rzędnych punktu C. Jeżeli tedy z punktu C' spuścimy prostopadłą na oś x, to w przecięciu jej z prostą a'' otrzymamy szukany rzut C''.

Gdy dane są rzuty dwóch punktów A i B /rys.17/ możemy wyznaczyć rzuty punktu C, dzielącego odcinek AB w stosunku danym: $m:n$. Połączmy $A'B'$ i $A''B''$ na prostej $a' \equiv A'B'$ wyznaczmy punkt C', który dzieli odcinek $A'B'$ w danym stosunku; linja rzędnych przechodząca przez C' przetnie $a'' \equiv A''B''$ w punkcie C''. W szczególności rzutami środka O odcinka AB będą środki O' i O'' rzutów tego odcinka.

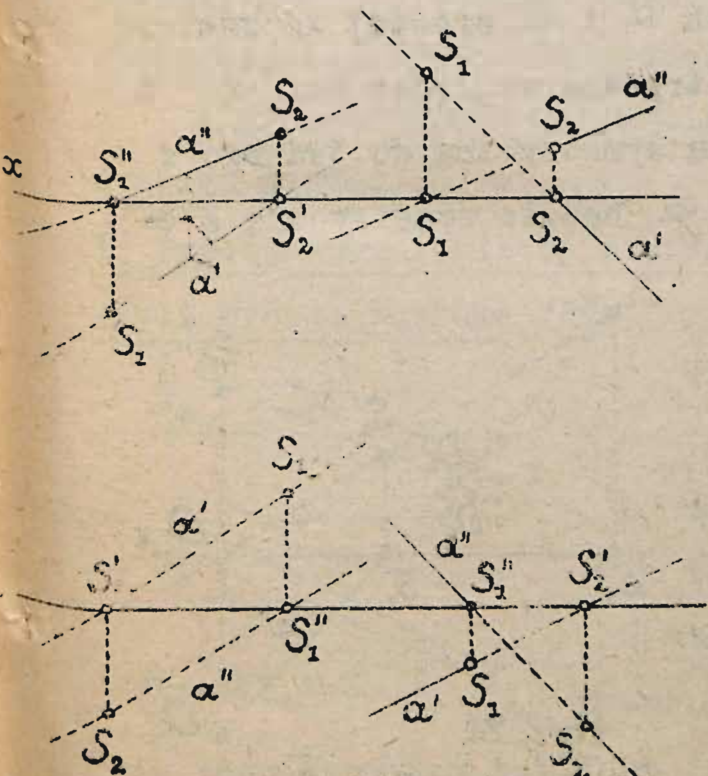
§10. ŚLADY PROSTEJ. Z pośród punktów prostej ważne są szczególnie te jej punkty, które leżą na płaszczyznach rzutów, t.j. punkty, w których ta prosta przebija płaszczyzny P_1 i P_2, albo ślady. Punkt przebicia prostej a z płaszczyzną P_1 nazywa się pierwszym, albo poziomym jej śladem S_1; punkt przebicia prostej α z płaszczyzną P_2 nazywa się drugim, albo pionowym jej śladem S_2 /rys.18/.

ZADANIE. Mając rzuty α' i α'' prostej α wyznaczyć jej ślady S_1 i S_2.

Ślad poziomy S_1 leży na P_1 /rys.16 i 17/, jego rzut pionowy S_1'' leży zatym na osi; z drugiej strony musi on leżeć na rzucie pionowym α'' prostej α; będzie to więc punkt przecięcia rzutu pionowego prostej z osią. Mając już rzut pionowy punktu leżącego na prostej $\alpha'\alpha''$, znajdziemy jego rzut poziomy, czyli sam ślad S_1, w przecięciu rzutu poziomego α' z linją rzędnych wyprowadzoną z punktu S_1''. W podobny sposób znajdziemy ślad pionowy S_2. Jego rzut poziomy S_2' leżeć musi na osi / bo S_2 leży na P_2 / oraz na rzucie poziomym α' / bo S_2 leży na α /; będzie to więc punkt przecięcia rzutu poziomego α' z osią x. Prostopadła wystawiona w tym punkcie do osi wyznacza na rzucie pionowym α'' rzut pionowy tego śladu, który jest z nim zresztą zjednoczony.-

Rozwiązanie powyższe zawodzi, gdy rzuty α' i α'' są zjednoczone na prostopadłej do x; wtedy zresztą jak wiemy, rzuty prostej nie wyznaczają jej w przestrzeni.

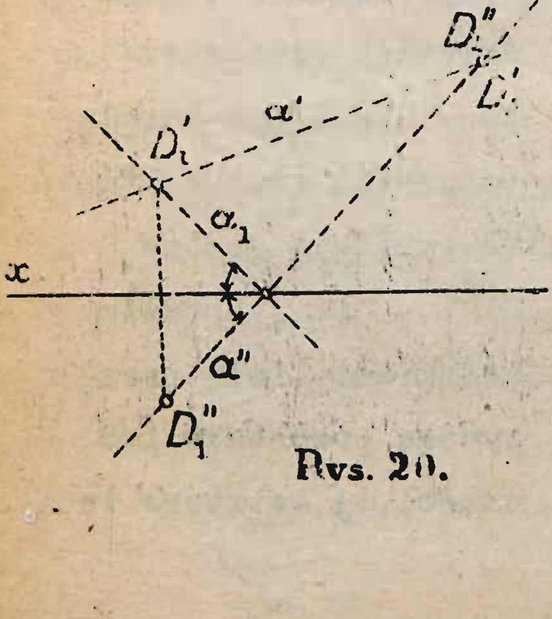
ZADANIE ODWROTNE: Mając ślady S_1 i S_2 prostej α wykreślić jej rzuty α' i α'', jest przypadkiem szczególnym wyznaczenia rzutów prostej przez rzuty jej dwóch punktów jakichkolwiek. Slad poziomy S_1 /rys.19/ jest własnym swym rzutem poziomym S_1'; rzut pionowy S_1'' tego śladu jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej na oś z punktu S_1. Slad pionowy S_2 jest własnym swym rzutem pionowym S_2''; jego rzut poziomy S_2' jest spodkiem prostopadłej, spuszczonej na oś z punktu S_2. Prosta łącząca rzuty poziome S_1 i S_2' punktów S_1 i S_2 jest rzutem poziomym α' prostej α; prosta łącząca rzuty pionowe S_1'' i S_2 tych punktów jest jej rzutem pionowym α''.



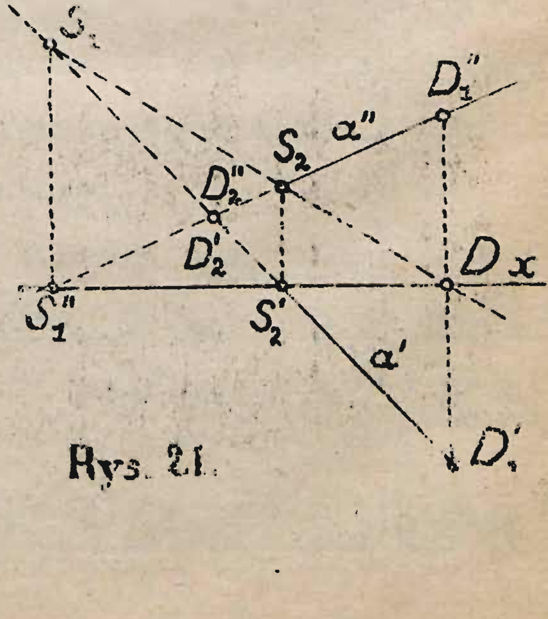
Rys.19

Częstokroć dla ułatwienia rekonstrukcji figur przestrzennych w wyobraźni na zasadzie ich rzutów, wykreślamy linją ciągłą te części rzutów, które znajdują się na $+P_1$ i $+P_2$, kreślimy natomiast linją przerywaną pozostałe ich części, tj. te, które leżą na $-P_1$ i $-P_2$. Po dokonanym bowiem kładzie płaszczyzny P_1 na P_2, $+P_1$ przykrywa $-P_2$, a $+P_2$ przykrywa $-P_1$; gdyby płaszczyzny rzutów były nieprzezroczyste, to po rozpostarciu płaszczyzn P_1 i P_2 na płaszczyznie rysunku pozostałyby widoczne tylko te części rzutów, które znajdują się na $+P_1$ i $+P_2$. Linją ciągłą należy zatem wykreślić te tylko części rzutów prostej, na których leżą rzuty punktów I ćwiartki /Rys.19/.

§ 11. Punkty, w których prosta przebija płaszczyzny dwusieczne. Oprócz śladów ważne też są punkty przebicia prostej z płaszczyznami dwusiecznemi D_1 i D_2. Aby wyznaczyć punkt D_1, w którym prosta α przebija D /Rys.20/, należy na rzutach α' i α'' prostej α znaleźć dwa punkty D_1' i D_1'' symetryczne względem osi x. W tym celu wyznaczamy prostą symetryczną do jednego z rzutów prostej; niech np. α_1 będzie symetryczną z α''.



Rys. 20.



Rys. 21.

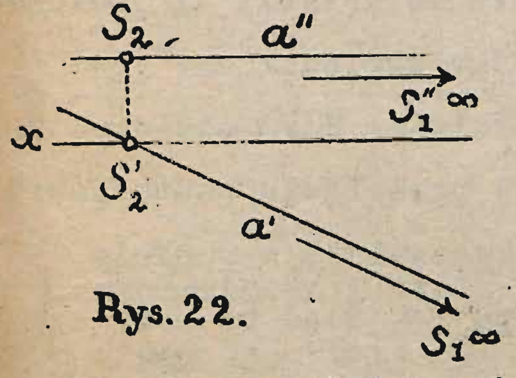
Punkt przecięcia prostych α_1 i α' będzie rzutem poziomym D_1' szukanego punktu; prostopadła do osi z niego wyprowadzona wyznaczy na α'' rzut pionowy D_1'' punktu D_1

Jeżeli ślady S_1 i S_2 prostej α są znane /rys. 21/, to prosta $S_1 S_2$ przecina oś w punkcie D_x, który wyznacza linję rzędnych punktu D_1, a więc i oba jego rzuty D_1' i D_1''. Za pomocą trójkątów podobnych można bowiem łatwo okazać, że $D_x D_1' = D_x D_1''$

Aby wyznaczyć punkt D_2 /Rys. 20 i 21/, w którym α przebija D_2 tj. którego rzuty przystają do siebie /§6/, wystarczy znaleźć punkt przecięcia $D_2' D_2''$ rzutów α' i α''

§ 12. POŁOŻENIA SZCZEGÓLNE PROSTYCH WZGLĘDEM PŁASZCZYZN RZUTÓW.

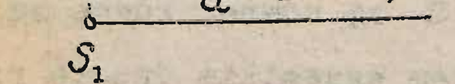
1. Prosta równoległa do pierwszej płaszczyzny rzutów, czyli prosta pozioma /Rys. 22/. Pierwsze odległości



Rys. 22.

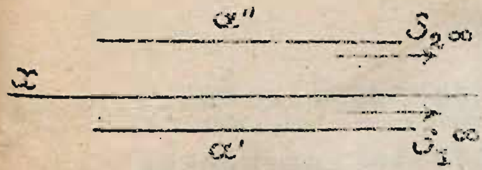
wszystkich punktów prostej α są równe; równe są zatem wszystkie drugie rzędne tych punktów; rzut pionowy α'' jest przeto równoległy do osi. Rzut poziomy α' jest równoległy do prostej α, położenie jego względem osi jest jakiekolwiek. Ślad pionowy S_2 leży w przecięciu rzutu pionowego α'' z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie przecięcia osi z rzutem poziomym α'. Ślad poziomy S_1 jest w nieskończoności, gdyż prosta α jest równoległa do P_1. Wynika to zresztą również z wykreślenia. Punkt S_1'' w którym rzut pionowy α'' przecina oś, jest punktem niewłaściwym osi; linja rzędnych tego punktu jest prostą, któ:a go łączy z innym punktem niewłaściwym, mianowicie z kierunkiem prostopadłym do osi; jest to więc prosta niewłaściwa. Przecięcie prostej niewłaściwej z rzutem poziomym α' będzie zatym punktem niewłaściwym tego rzutu.

2. <u>Prosta równoległa do drugiej płaszczyzny rzutów, czyli prosta frontowa</u> /rys. 23/. Drugie odległości wszystkich punktów prostej α są równe; równe są zatem wszystkie pierwsze rzedne tych punktów; rzut poziomy α' jest przeto równoległy do osi. Rzut pionowy α'' jest równoległy do prostej α, położenie jego względem osi jest jakiekolwiek. Slad poziomy S_1 leży w przecięciu rzutu poziomego α' z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie przecięcia osi z rzutem pionowym α''. Ślad pionowy S_2 jest w nieskończoności.



Rys. 23.

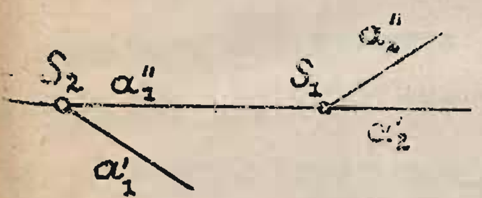
3. Prosta równoległa do osi, /Rys.24/ jest równoległa do obu płaszczyzn rzutów; jest więc



Rys. 24.

ona zarazem poziomą i frontową; obydwa jej rzuty są równoległe do osi. Slady S_1 i S_2 są zjednoczone w punkcie niewłaściwym osi.

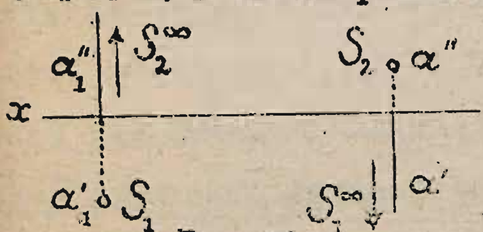
4. Prosta, leżąca w jednej z płaszczyzn rzutów. /Rys.25/



Rys. 25.

Prosta leżąca w płaszczyźnie P_1 przystaje do swego pierwszego rzutu, drugi zaś rzut leży na osi; ślad pierwszy jest niewyznaczony, drugi leży na osi. Prosta leżąca w płaszczyźnie P_2 przystaje do swego drugiego rzutu, pierwszy zaś rzut leży na osi; ślad pierwszy leży na osi, drugi jest niewyznaczony.

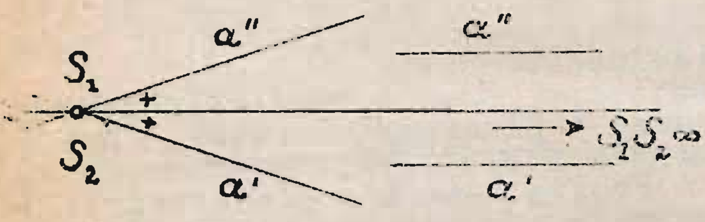
5. Prosta, prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów /Rys.26/. Jeżeli prosta jest prostopadła do P_1, to



Rys. 26.

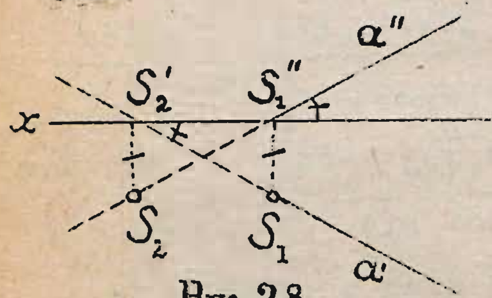
pierwszy jej rzut jest punktem, drugi jest prostopadły do osi, pierwszy ślad przystaje do pierwszego rzutu, drugi jest w nieskończoności. Jeżeli prosta jest prostopadła do P_2, to drugi jej rzut jest punktem, pierwszy jest prostopadły do osi; drugi ślad przystaje do drugiego rzutu, pierwszy jest w nieskończoności.

6. <u>Prosta, leżąca w pierwszej płaszczyźnie dwusiecznej</u> /Rys.27/. Rzuty wszystkich punktów takiej prostej są symetryczne względem osi; rzuty prostej muszą być zatem również symetryczne względem osi tj. muszą tworzyć z nią równe kąty i spotykać ją w tym samym punkcie, w którym oba ślady prostej są zjednoczone. Jeżeli rzuty prostej są równoległe do osi, to są na równych od niej odległościach.



Rys. 27.

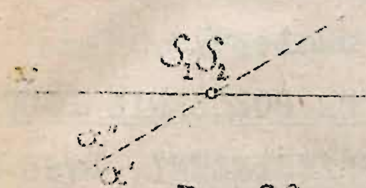
7. <u>Prosta, równoległa do pierwszej płaszczyzny dwusiecznej</u> /Rys.28/. Aby prosta α była równoległa do D_1 potrzeba i wystarcza, aby punkt przebicia jej z tą płaszczyzną a więc i oba jego rzuty leżały w nieskończoności. Ale rzut poziomy tego punktu jest przecięciem rzutu poziomego α' z prostą α_1 symetryczną do rzutu pionowego α''; potrzeba więc i wystarcza, aby α' była równoległą do α_1, t.j. aby α' i α'' były nachylone do osi pod tym samym kątem, nie przecinając się na niej. Ślady są zawsze po tej sa-



Rys. 28.

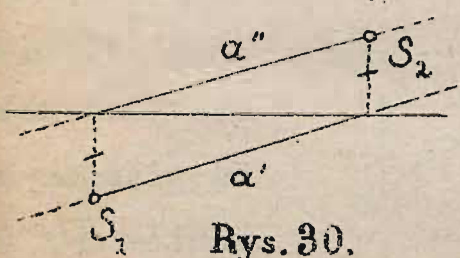
mej stronie osi i na tej samej od niej odległości.

8. Prosta leżąca w drugiej płaszczyźnie dwusiecznej /Rys 29/ Rzuty każdego punktu takiej prostej przystają do siebie, rzuty więc prostej również do siebie przystają. Ślady są zjednoczone w punkcie, w którym zjednoczone rzuty przecinają oś.



Rys. 29.

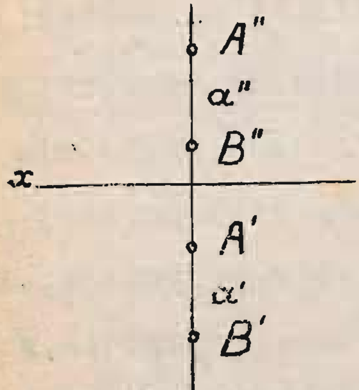
9. Prosta równoległa do drugiej płaszczyzny dwusiecznej. /Rys. 30/. Aby prosta α była równoległa do Π_2, potrzeba i wystarcza, aby punkt przebicia jej z tą płaszczyzną leżał w nieskończoności. Ale oba rzuty tego punktu są zjednoczone w punkcie przecięcia obu rzutów prostej; potrzeba więc i wystarcza, aby rzuty α' i α'' były równoległe. Ślady są zawsze po przeciwnych stronach osi i na tej samej od niej odległości.



Rys. 30.

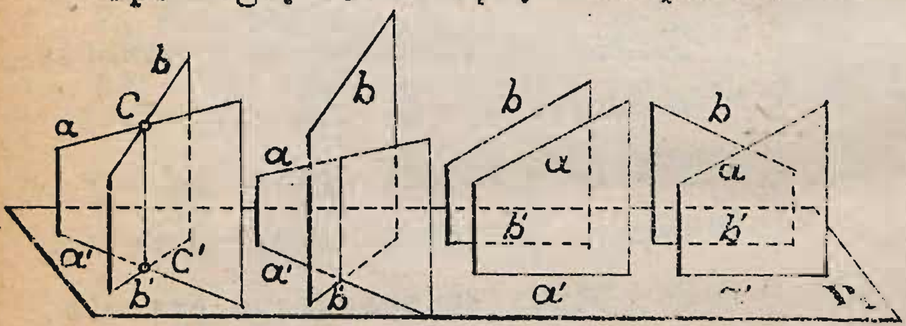
10. Prosta leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do osi /Rys. 31/. Oba rzuty α' i α'' są zjednoczone na prostopadłej do osi; prosta α nie jest wyznaczona należycie przez swoje rzuty. Dla wyznaczenia prostej mogą być wtedy dane rzuty dwóch jej punktów A i B. Wy-

znaczenie śladów takiej prostej oraz rzutów punktu na niej leżącego wymaga zastosowania rzutu na nową płaszczyznę rzutów P_3, o czem będzie mowa w rozdziale następnym.



Rys. 31.

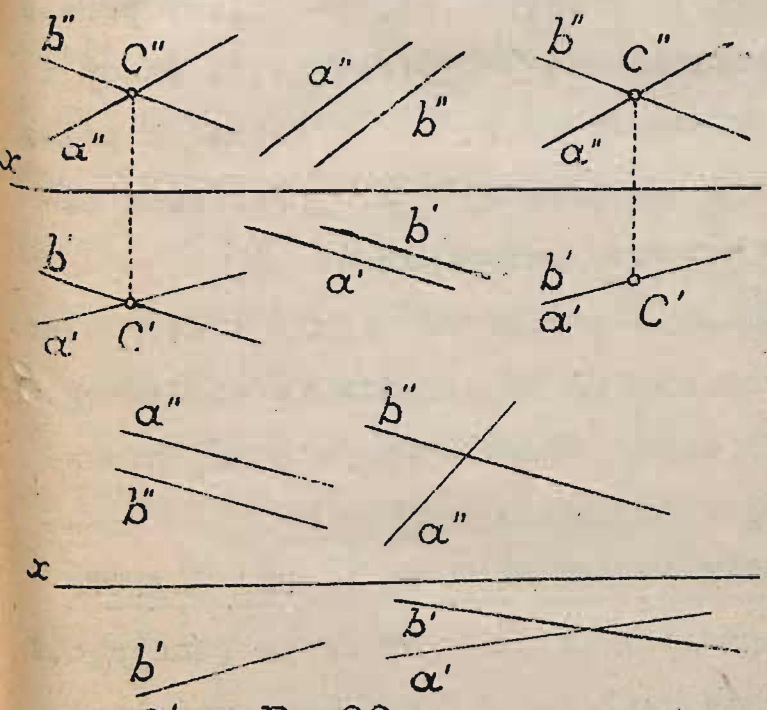
§ 13. WZGLĘDNE POŁOŻENIE DWÓCH PROSTYCH W PRZESTRZENI. Dwie proste w przestrzeni a i b mogą mieć położenie, względnie trojakie: mogą się one przecinać, tj. mieć punkt właściwy wspólny, mogą być równoległe, tj. mieć punkt niewłaściwy wspólny, albo mogą być skośne czyli wichrowate, tj. nie mieć żadnego punktu wspólnego. Niech będą dwie proste a i b. Rzućmy je prostokątnie na dowolną płaszczyznę rzutów P_1. Jeżeli te proste się prze-



Rys. 32.

cinają, to przecinają się również ich rzuty, i to w punkcie, który jest rzutem punktu przecięcia prostych. Ale jeżeli rzuty dwóch prostych się przecinają, to nie wynika stąd jeszcze, by te proste się przecinały. Jeżeli proste są równoległe, to równoległe są też ich rzuty, bo punkt przecięcia tych rzutów jest rzutem punktu w nieskończoności. Ale jeżeli rzuty dwóch prostych są równoległe, to nie wynika stąd jeszcze, by proste miały być równoległe /Rys.32/.

Rzućmy teraz dane proste na dwie prostopadłe płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 /Rys.33/ i przypuśćmy, że żadna z tych prostych nie leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi. Aby te proste się przecinały, potrzeba i wystarcza, aby punkt przecięcia pierwszych rzutów i punkt przecięcia drugich rzutów leżały na wspólnej prostopadłej do osi. Proste będą równoległe, jeżeli mają punkt wspólny w nieskończoności t.j. jeżeli oba rzuty tego punktu są w nieskończoności; aby więc proste były równoległe, potrzeba i wystarcza, aby zarówno pierwsze rzuty jak i drugie były równoległe. Może się zdarzyć, że pierwsze lub drugie rzuty dwóch prostych przystają do siebie. Wtedy proste leżą w tej samej płaszczyźnie rzucającej i będą się przecinały albo będą równoległe, zależnie od tego, czy dru-



Rys.33.

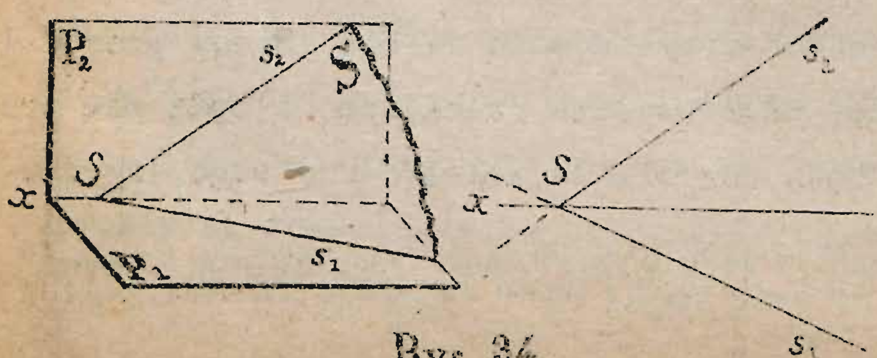
gie ich rzuty się przecinają albo czy są równoległe; Jeżeli punkt przecięcia pierwszych rzutów i punkt przecięcia drugich rzutów nie leżą na wspólnej prostopadłej do osi, to proste są skośne.

Jeżeli jedna z dwóch prostych, np. a , jest prostopadła do P_1 , to druga prosta b przecina ją wtedy i tylko wtedy, gdy jej pierwszy rzut b' przechodzi przez pierwszy ślad $S_1 = a'$ prostej a . Tak samo mają się rzeczy, gdy a jest prostopadła do P_2 .

Jeżeli jedna lub obie proste a i b leżą w płaszczyznach prostopadłych do osi, to określenie względnego położenia tych prostych wymaga zastosowania nowej płaszczyzny rzutów /Rozdział II/.

§ 14. ODWZOROWANIE PŁASZCZYZNY ZA POMOCĄ ŚLADÓW.

Płaszczyzna jest wyznaczona przez trzy swoje punkty, nie leżące na jednej prostej, lub też przez dwie swoje proste przecinające się lub równoległe. Pierwszy sposób wyznaczenia sprowadza się do drugiego przez połączenie dwóch danych punktów prostą i połączenie jakiegokolwiek punktu tej prostej /właściwego lub niewłaściwego/ z trzecim danym punk-



Rys. 34.

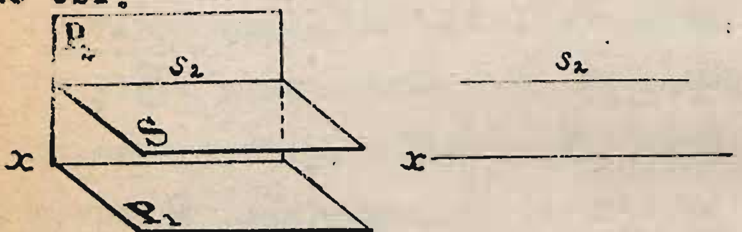
tem. Dla wyznaczenia płaszczyzny trzeba będzie zatem wogóle aż czterech rzutów prostych: dwóch rzutów poziomych a' i b' i dwóch pionowych a'' i b'', przytem punkt przecięcia C' rzutów poziomych, i punkt przecięcia C'' rzutów pionowych winny leżeć na wspólnej prostopadłej do osi. Jeżeli jednak dane proste weźmiemy na płaszczyznach rzutów, to dwa z tych czterech rzutów będą leżały na osi; do wyznaczenia płaszczyzny wystarczą wtedy dwa pozostałe rzuty, które zresztą są zjednoczone z samemi prostemi. Proste te nazywamy **ś l a d a m i** płaszczyzny; są to linje przecięcia danej płaszczyzny S z płaszczyznami rzutów.

Prostą przecięcia płaszczyzn S i P_1 nazywamy **pierwszym śladem** lub **śladem poziomym** s_1 płaszczyzny S; prostą przecięcia płaszczyzn S i P_2 nazywamy **drugim śladem** lub **śladem pionowym** s_2 płaszczyzny S. Ślady s_1 i s_2 przecinają się oczywiście zawsze na osi, albowiem trzy proste s_1, s_2 i x przecięcia płaszczyzn S, P_1 i P_2 spotykają się w jednym punkcie S_x który jest wspólny tym płaszczyznom. Z każdego śladu jest widoczną ta jego część, która leży na dodatniej półpłaszczyźnie rzutów, a więc pierwszy ślad kreślimy linją ciągłą tylko pod osią, drugi tylko nad osią. /Rys.34/.

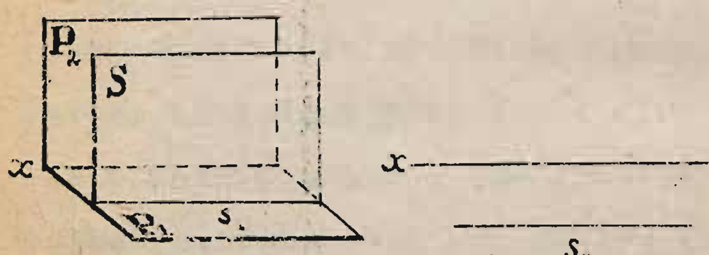
§ 15. POŁOŻENIA SZCZEGÓLNE PŁASZCZYZN WZGLĘDEM

PŁASZCZYZN RZUTÓW.

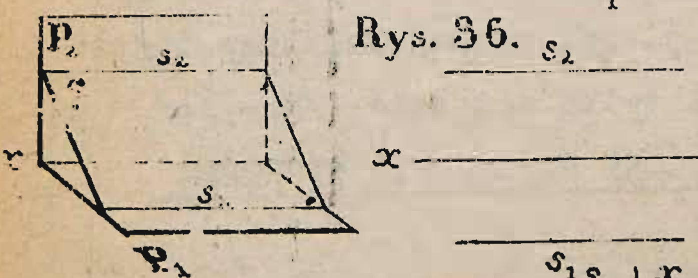
1. Płaszczyzna równoległa do jednej z płaszczyzn rzutów /Rys. 35 i 36/. Przypuśćmy najpierw, że $S \parallel P_1$ tj. że S jest płaszczyzną poziomą; przecina ona płaszczyznę P_1 w nieskończoności; drugi ślad s_2 jest równoległy do osi, albowiem dwie płaszczyzny równoległe P_1 i S przecięte płaszczyzną P_2, wyznaczają z nią proste x i s_2 równoległe. Podobnież, gdy $S \parallel P_2$ tj. gdy S jest płaszczyzną frontową, to s_2 jest prostą w nieskończoności, s_1 zaś jest prostą równoległą do osi.



Rys. 35.



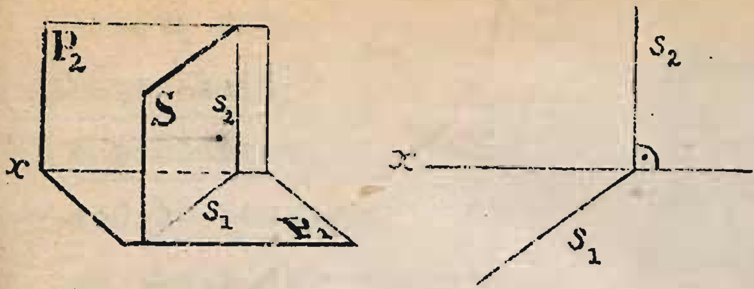
Rys. 36.



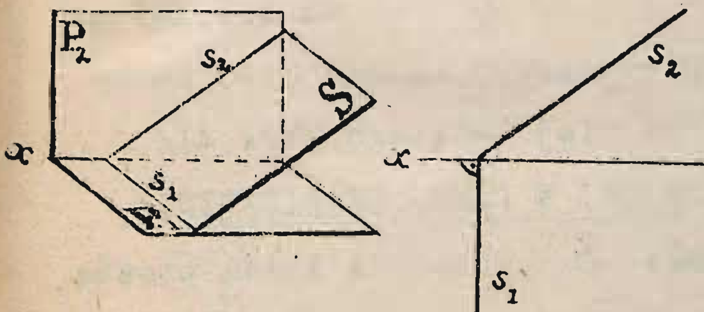
Rys. 37.

2. Płaszczyzna równoległa do osi. Przecina ona oś w nieskończoności, ślady jej muszą być zatem równoległe do osi /Rys. 37/.

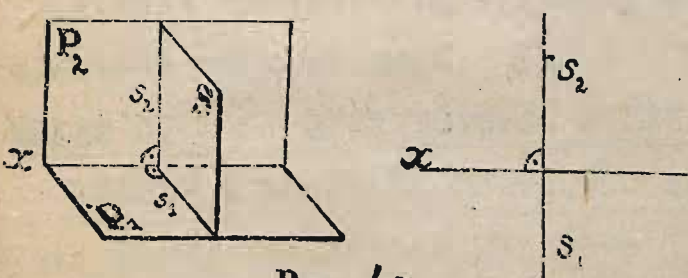
3. Płaszczyzna prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów /Rys. 38 i 39/. Jeżeli $S \perp P_1$, to $s_2 \perp x$. W samej rzeczy, s_2



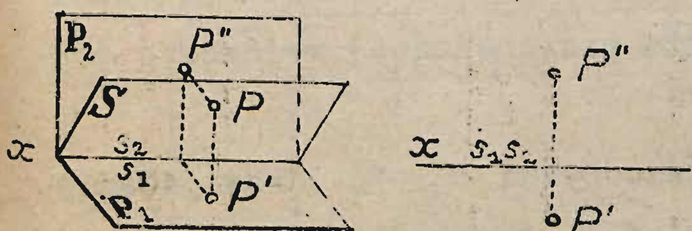
Rys. 38.



Rys. 39.



Rys. 40.



Rys. 41.

jest przecięciem dwóch płaszczyzn S i P_2 które są prostopadłe do P_1 ; s_2 jest tedy również prostopadłą do P_1, ale wtedy jest ona prostopadłą bo która leży w płaszczyźnie P_1. Podobnie znajdziemy, że gdy $S \perp P_2$, to $s_1 \perp x$.

4. Płaszczyzna prostopadła do obu płaszczyzn rzutów, tj. do osi /Rys. 40/. Obydwa ślady są prostopadłe do osi, stanowiąc

jedną prostą.

5. Płaszczyzna przechodząca przez oś. Obydwa ślady są zjednoczone na osi. Aby położenie takiej płaszczyzny wyznaczyć, należy mieć rzuty jakiegokolwiek punktu P w niej leżącego. /Rys. 41/.

§ 16. RZUTY PROSTEJ, LEŻĄCEJ W DANEJ PŁASZCZYZNIE.

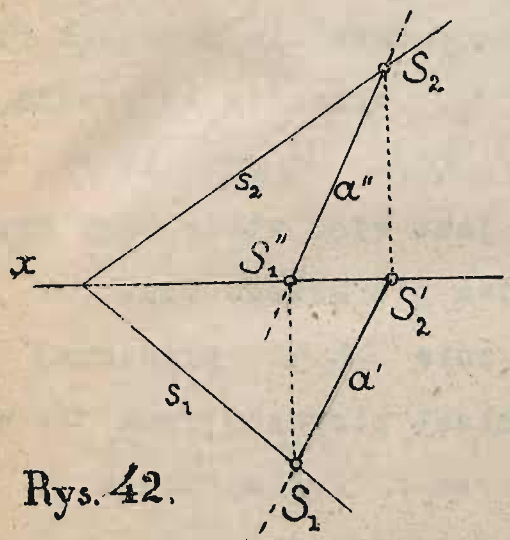
Prosta, leżąca w płaszczyźnie S, przecina każdą prostą tej płaszczyzny, a więc i jej ślady s_1 i s_2. Punkty przecięcia prostej ze śladami płaszczyzny są zarazem punktami, w których prosta przebija płaszczyzny rzutów, są to więc jej ślady S_1 i S_2. Mamy tedy twierdzenie:

JEŻELI PROSTA a LEŻY W PŁASZCZYŹNIE S TO ŚLADY PROSTEJ S_1 i S_2 LEŻĄ NA ODPOWIEDNICH ŚLADACH PŁASZCZYZNY.

Z a d a n i e. Mając jeden rzut prostej oraz oba ślady płaszczyzny przez nią przechodzącej, wyznaczyć drugi rzut prostej.

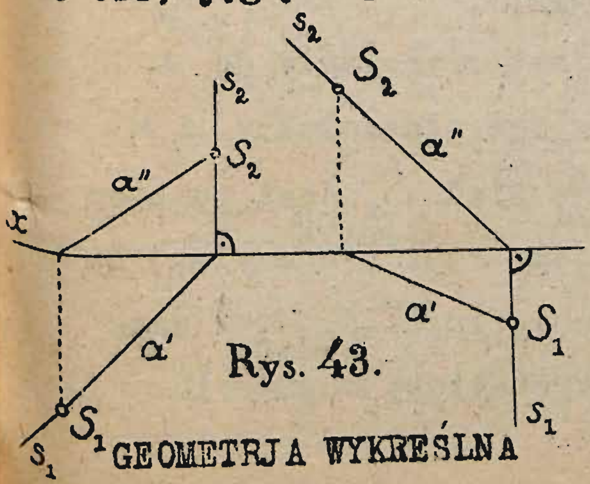
Niech będzie dana płaszczyzna s_1 i s_2, oraz jeden z rzutów np. a' prostej a w tej płaszczyźnie położonej. Ponieważ ślad S_1 prostej a musi leżeć na jej rzucie

α' i na śladzie s_1 płaszczyzny, musi to być zatym punkt przecięcia prostych α' i s_1. Rzut poziomy śladu pionowego S_2' musi leżeć na rzucie poziomym α' i na osi; jest to zatem punkt przecięcia rzutu z osią. Wystawiając w tym punkcie prostopadłą do osi, znajdziemy w przecięciu tej prostopadłej ze śladem s_2 punkt S_2 który jest śladem pionowym prostej α. Łącząc S_2 z leżącym na osi drugim rzutem śladu S_1, otrzymamy szukany rzut pionowy α''.



Rys. 42.

W jednym przypadku rzut α' nie może być dany dowolnie, wtedy mianowicie, gdy ślad s_2 jest prostopadły do osi, tj. gdy $s_1 s_2 \perp P_1$ /Rys. 43 z lewej strony/. Pierwszy rzut każdej prostej w takiej płaszczyźnie położonej leży na śladzie s_1; płaszczyzna $s_1 s_2$ jest bowiem wówczas płaszczyzna rzu-

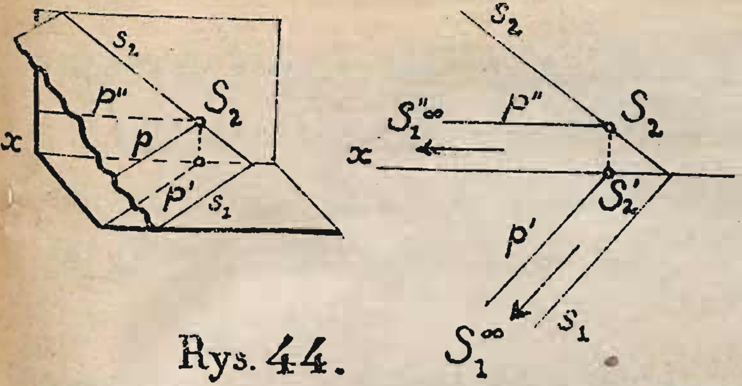


Rys. 43.

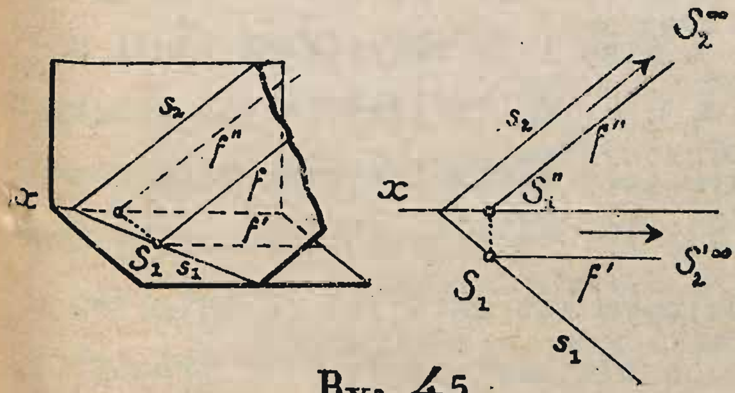
cająca tę prostą na P_1. Rzut a' jest więc wtedy dany wraz ze śladem s_1, ale nie wyznacza drugiego rzutu a'', a więc i prostej a, leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$. Natomiast rzut a'' może być dany dowolnie i wraz z rzutem a''', który przystaje do s_1, wyznacza tę prostą. Podobnież, gdy $s_1 \perp x$, tj. gdy $s_1 s_2 \perp P_2$ to a'' musi leżeć na s_2; drugi rzut jest więc wtedy dany wraz ze śladem s_2, ale nie wyznacza pierwszego rzutu a', a więc i prostej a w płaszczyźnie $s_1 s_2$ położonej /Rys.43 z prawej strony/. Natomiast pierwszy rzut a' może być wtedy dany dowolnie i wraz z drugim rzutem a'', który przystaje do s_2 wyznacza tę prostą.

Prosta, leżąca w danej płaszczyźnie $s_1 s_2$, jest więc wogóle wyznaczona przez jeden ze swoich rzutów. Z pośród prostych, które tym sposobem mogą być wzięte na płaszczyźnie $s_1 s_2$, na szczególną uwagę zasługują te, których jeden z rzutów jest równoległy lub prostopadły do odpowiedniego śladu płaszczyzny.

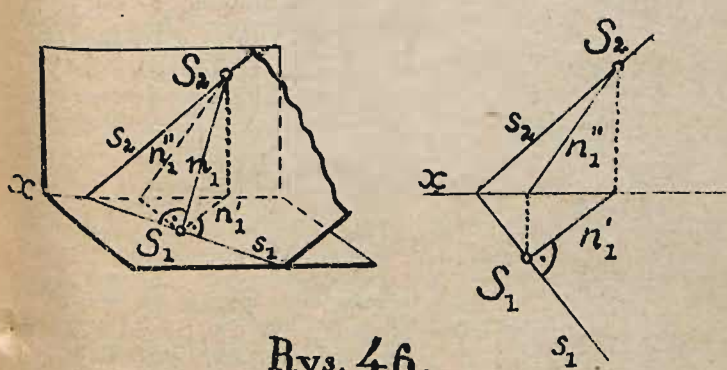
1/. Gdy rzut poziomy p' jest równoległy do s_1, prosta p nazywa się <u>linją poziomą</u> płaszczyzny $s_1 s_2$ lub jej <u>pierwszą prostą główną</u>. Ślad S_1 jest punktem niewłaściwym; takim jest też jego rzut pionowy S_1'' na osi. Ślad S_2 otrzymany w przecięciu śladu s_2 płaszczyzny z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie jej



Rys. 44.



Rys. 45.



Rys. 46.

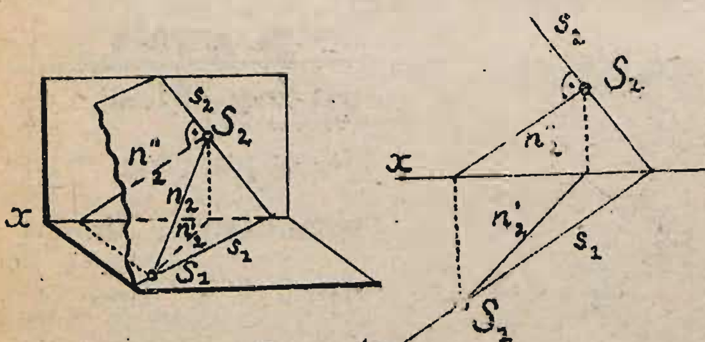
przecięcia z rzutem p'; rzut p'', który łączy S_2 z S_1'' jest równoległy do osi; prosta p jest więc równoległa do P_1 i do śladu s_1.

2/. Gdy rzut pionowy f'' jest równoległy do s_2 /rys. 45/, prosta f nazywa się linją <u>frontową płaszczyzny</u> $s_1 s_2$ lub jej <u>drugą prostą główną</u>. Ślad S_2 jest punktem niewłaściwym; takim jest też jego rzut poziomy S_2' na osi. Ślad S_1

otrzymany w przecięciu śladu s_1 płaszczyzny z prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie jej przecięcia z rzutem f''; rzut f', który łączy S_1 z S_2' jest równoległy do osi; prosta f jest więc równoległa do P_2 i do śladu s_2.

3/. Gdy rzut poziomy n_1' jest $\perp$ d s_1 /rys.46/, prosta n_1 nazywa się pierwszą linją spadku. Na zasadzie twierdzenia o trzech prostopadłych prosta ta jest prostopadła do śladu s_1, a więc i do wszystkich linji poziomych płaszczyzny $s_1 s_2$. Kąt każdej z tych prostych ze swym rzutem poziomym jest kątem linjowym kąta dwuściennego (SP_1). Każda inna prosta płaszczyzny tworzy ze swym rzutem poziomym kąt mniejszy od kąta dwuściennego (SP_1), co tłomaczy nazwę tych prostych.

4/. Prosta, której rzut pionowy n_2'' jest prostopadły do s_2 /Rys.47/ nazywa się drugą linją spadku. Jest ona prostopadła do śladu S_2, a więc i do wszystkich linji frontowych płaszczyzny $s_1 s_2$.



Rys.47.

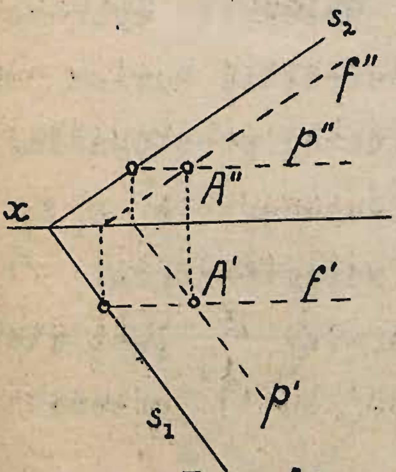
Kąt, który każda z tych prostych tworzy z płaszczyzną

P_2 , jest większy od kąta, który tworzy z tą płaszczyzną każda inna prosta płaszczyzny $s_1 s_2$.

§ 17. RZUTY PUNKTU LEŻĄCEGO W DANEJ PŁASZCZYŹNIE.

ZADANIE. Mając jeden rzut punktu A , leżącego w danej płaszczyźnie $s_1 s_2$, znaleźć jego rzut drugi.

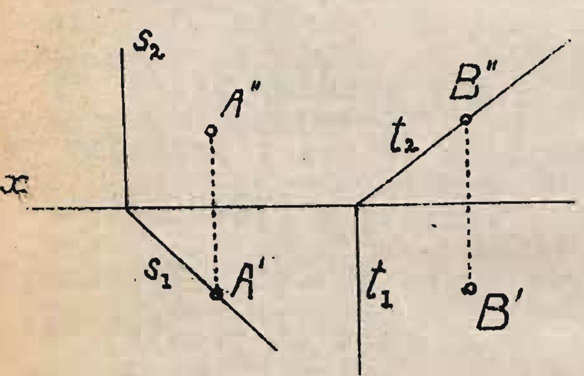
Aby punkt A leżał w danej płaszczyźnie, potrzeba i wystarcza, aby leżał na jakiejkolwiek prostej tej płaszczyzny. Przypuśćmy, że płaszczyzna dana $s_1 s_2$ nie jest prostopadła do P_1 , to jest, że s_2 nie jest $\perp x$, i niechaj będzie dany rzut A' punktu A , leżącego w płaszczyźnie $s_1 s_2$. Poprowadźmy przez A' dowolną prostą a' nie prostopadłą do osi i uważajmy ją za rzut pierwszy prostej a , leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$ i przechodzącej przez punkt szukany. Wyznaczywszy drugi rzut a'' prostej a , /§ 15/ znajdziemy drugi rzut A'' punktu A w przecięciu linji rzędnych punktu A' z rzutem a''. Za prostą pomocniczą a' najlepiej wziąć prostą równoległą do śladu s_1 lub do osi x ; prosta a jest wtedy linją poziomą $p'p''$, lub frontową $f'f''$ płaszczyzny



Rys. 48.

$s_1 s_2$ /Rys.48/.

Gdyby ślad s_2 był prostopadły do osi, to płaszczyzna $s_1 s_2$ byłaby płaszczyzną rzucającą wszystkie proste w niej leżące, a więc na jej śladzie s_1 leżałyby wszystkie pierwsze rzuty punktów w niej leżących. Aby więc punkt A leżał w płaszczyźnie $s_1 s_2$ prostopadłej do P_1, potrzeba i wystarcza, aby jego rzut A' leżał na śladzie s_1 /Rys.49 z lewej strony/. Punkt A' nie mógłby więc dany dowolnie i musiałby leżeć na s_1, wtedy jednak drugi rzut A'' nie byłby przez s_1, s_2 i A' należycie wyznaczony, wszystkie bowiem punkty prostej prostopadłej



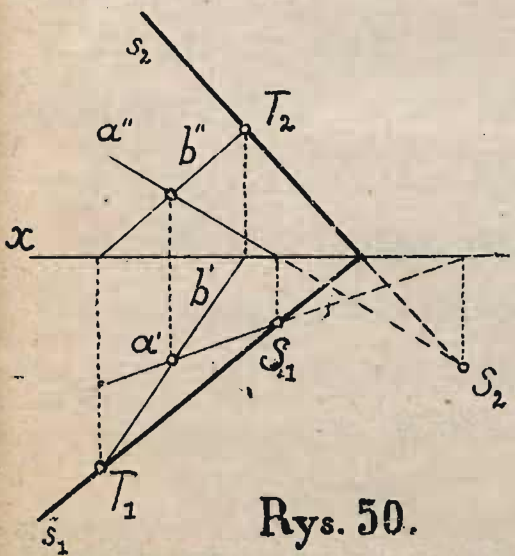
Rys. 49.

do P_1 w punkcie A leżałyby w płaszczyźnie $s_1 s_2$, mając ten sam rzut pierwszy A'. Natomiast rzut A'' wyznacza punkt A; jego rzut pierwszy A' jest wtedy punktem, w którym linja rzędnych punktu A'' przecina ślad s_1.

Podobnie, aby punkt B leżał w płaszczyźnie $t_1 t_2$ prostopadłej do P_2 potrzeba i wystarcza, aby rzut B'' leżał na śladzie t_2; rzut B'' nie wyznacza wtedy punktu B ; wyznaczy go natomiast rzut B' /Rys.49 z prawej strony/.

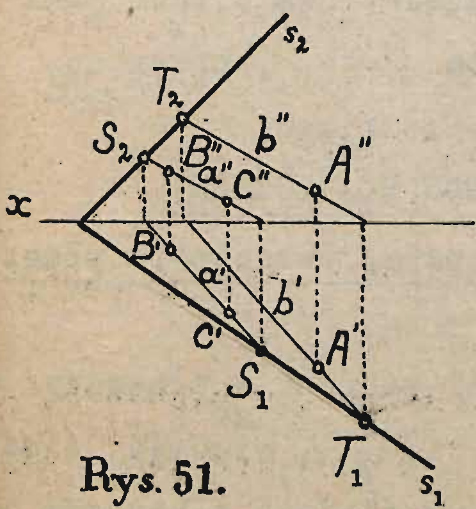
§ 18. ŚLADY PŁASZCZYZNY PRZECHODZĄCEJ PRZEZ DANE PROSTE I PUNKTY.

ZADANIE. Wyznaczyć ślady płaszczyzny, przechodzącej przez dwie proste przecinające się lub równoległe.



Rys. 50.

Niech będą dane rzuty $a'a''$ i $b'b''$ dwóch prostych a i b przecinających się lub równoległych /Rys.50 i 51/. Znajdziemy ślady S_1 i S_2 prostej a oraz ślady T_1 i T_2 prostej b. Ponieważ płaszczyzna szukana ma przechodzić przez obie proste dane, więc jej ślad pierwszy s_1 musi przejść przez oba ślady pierwsze S_1 i T_1 prostych a i b, a jej ślad drugi s_2 - przez oba ślady drugie S_2 i T_2 tych prostych. Łącząc tedy S_1 i T_1 oraz S_2 i T_2 otrzy-



Rys. 51.

mamy ślady s_1 i s_2 szukanej płaszczyzny; winny one spotkać się na osi, co stanowi sprawdzenie dokładności wykreślenia.

Do tego zadania sprowadza się wyznaczenie śladów płaszczyzny przechodzącej przez prostą daną i punkt na niej nie leżący lub przez trzy punkty dane, nie leżące na jednej prostej. Niech będzie np. dana prosta $a'a''$ oraz punkt $A'A''$; obrawszy na $a'a''$ punkt jakikolwiek $B'B''$ i połączywszy $A'B'$ i $A''B''$, mamy poprowadzić płaszczyznę przez dwie przecinające się proste $a'a''$ i $A'B'$, $A''B''$. Najdogodniej będzie zresztą połączyć punkt $A'A''$ z punktem niewłaściwym prostej $a'a''$, t.j. przez punkt $A'A''$ poprowadzić równoległą do $a'a''$.

Gdy mamy trzy punkty $A'A''$, $B'B''$ i $C'C''$ (Rys. 5 nie leżące na jednej prostej, łączymy dwa z tych punktów, np. $B'B''$ i $C'C''$ prostą $a'a''$, przez co sprowadzamy ten przypadek do poprzedniego.

§ 19. PROSTA PRZECIĘCIA DWÓCH PŁASZCZYZN.

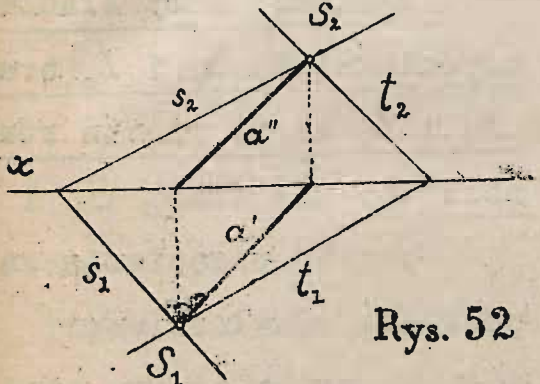
ZADANIE. Wyznaczyć rzuty prostej przecięcia płaszczyzn danych $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$.

Ponieważ prosta szukana leży zarówno w płaszczyźnie $s_1 s_2$ jak i w płaszczyźnie $t_1 t_2$, więc jej ślad pierwszy S_1 musi leżeć zarówno na śladzie pierwszym s_1

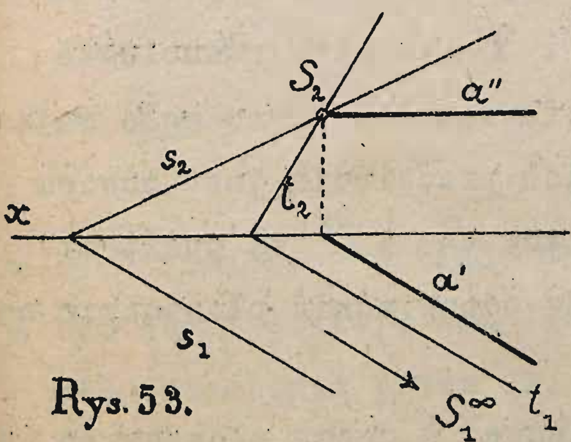
płaszczyzny S , jak i na śladzie pierwszym t_1 płaszczyzny T , a więc w ich przecięciu; podobnież ślad drugi S_2 będzie leżał w przecięciu śladów drugich s_2 i t_2 . Mając zaś ślady prostej α , znajdziemy jej rzuty α' i α'' /Rys.52/.

Rozważmy teraz przypadki szczególne tego zadania, w których zastosowanie powyższego sposobu rozwiązania mogłoby nastręczać pewne trudności.

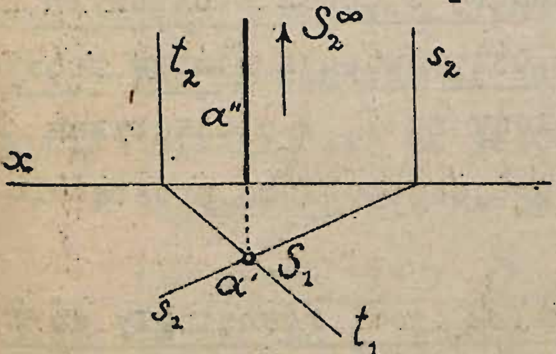
1/. Jedna para śladów odpowiednich np. s_1 i t_1 są to proste równoległe /Rys.53/. Ślad S_2 znajduje się w przecięciu śladów s_2 i t_2 ; ślad S_1 jest punktem niewłaściwym śladów s_1 i t_1 . Prosta α jest linją poziomą obu płaszczyzn; jej rzut α' jest równoległy do s_1 i t_1 , rzut α'' jest równoległy do osi.



Rys. 52

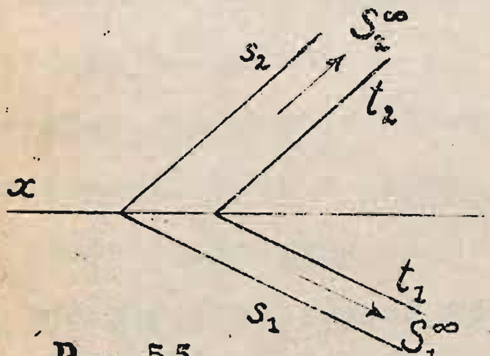


Rys. 53.



Rys. 54.

W szczególności, gdy ślady należące do jednej płaszczyzny rzutów, są prostopadłe do osi /Rys.54/, to prosta przecięcia jest prostopadła do pierwszej płaszczyzny rzutów.

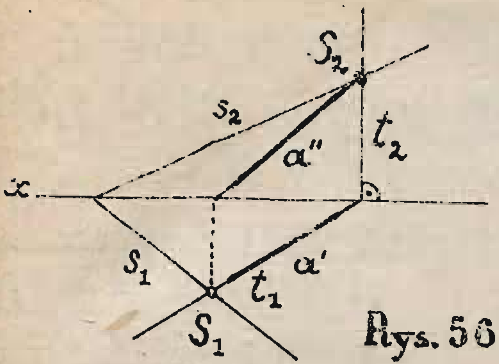


Rys. 55.

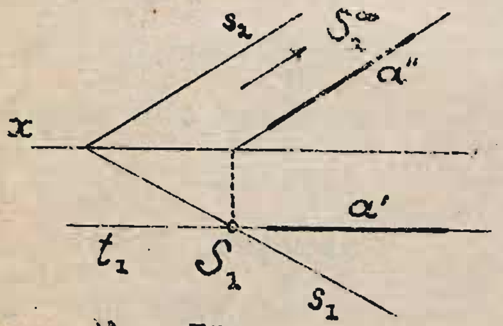
2/. Obie pary śladów odpowiednich: s_1 i t_1 oraz s_2 i t_2 są to rposte równoległe. Oba ślady S_1 i S_2 prostej przecięcia są punktami niewłaściwemi, jest to zatem prosta niewłaściwa. Płaszczyzny S i T są więc równoległe /Rys.55/. Nawzajem, dwie płaszczyzny równoległe mają ślady równoległe. Prosta ich przecięcia jest bowiem prostą niewłaściwą, jej ślady S_1 i S_2 są punktami niewłaściwymi, a więc ślady odpowiednie płaszczyzn są równoległe.

3/. Jeden ze śladów jednej z dwóch płaszczyzn, np. t_2, jest prostopadły do osi. Jeden z rzutów prostej przecięcia, mianowicie a' leży na t_1, płaszczyzna T jest bowiem płaszczyzną rzucającą poziomo prostą a /Rys.56/.

4/. Jeden ze śladów np. t_1 jest równoległy do x, drugi t_2 jest w nieskończoności. Ślad S_1 jest prze-



Rys. 56.



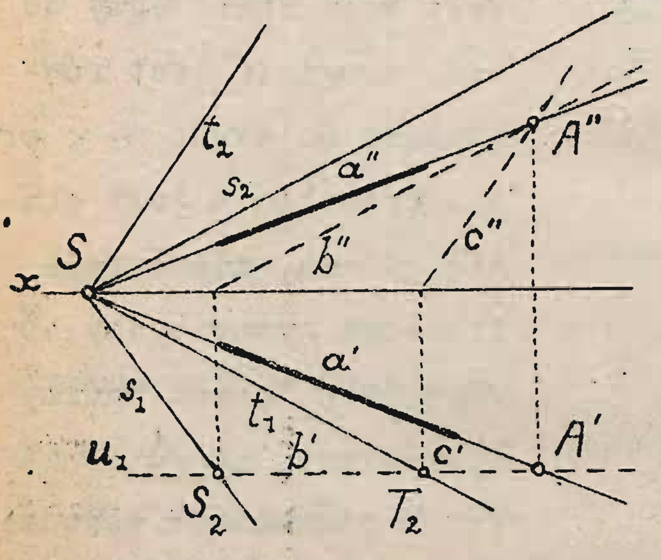
Rys. 57.

cięciem śladów s_1 i t_1; ślad S_2 jest punktem niewłaściwym prostej s_2. Jeden rzut a' prostej przecięcia przystaje do t_1, jest więc równoległy do osi, drugi a'' jest równoległy do śladu s_2; prosta przecięcia jest prostą główną, mianowicie frontową płaszczyzny S. /Rys.57/. Sposób ogólny rozwiązania zagadnienia dwóch płaszczyzn zawodzi w tych razach, gdy ślady obu płaszczyzn przecinają się w tym samym punkcie osi, lub gdy jedna z dwóch płaszczyzn przechodzi przez oś, lub wreszcie gdy jeden lub oba punkty przecięcia śladów odpowiednich leżą poza granicami przeznaczonej na rysunek części płaszczyzny. Wtedy uciekamy się do trzeciej płaszczyzny pomocniczej U, opierając się na następującej zasadzie:

Trzy płaszczyzny S, T i U, nie przechodzące przez jedną prostą, przecinają się po dwie według trzech prostych a, b i c, spotykających się w jednym punkcie A .

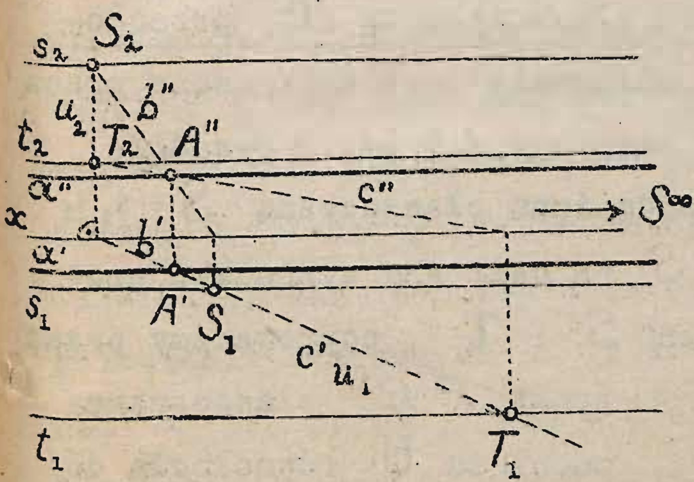
Za płaszczyznę pomocniczą U obieramy najchętniej płaszczyznę prostopadłą lub równoległą do jednej z płaszczyzn rzutów /Przyp.3 i 4/.

5/. Przypuśćmy najpierw, że płaszczyzny S i T przecinają oś w tym samym właściwym punkcie S /Rys.58/. Punkt ten jest więc wspólny obu płaszczyznom i należy do szukanej prostej przecięcia α . Aby tę prostą wyznaczyć wystarczy zatem znaleźć rzuty jeszcze jednego jakiegokolwiek jej punktu. W tym celu obie płaszczyzny dane przecinamy ~~przecinamy~~ dowolną płaszczyzną pomocniczą U . Niechaj tą płaszczyzną będzie np. płaszczyzna równoległa do P_2 ; jej ślad pierwszy u_1 jest równoległy do osi; drugi ślad u_2 jest w nieskończoności. Trzy proste $SU \equiv b$, $TU \equiv c$, i $ST \equiv \alpha$ przecinają się w jednym punkcie A ; punkt



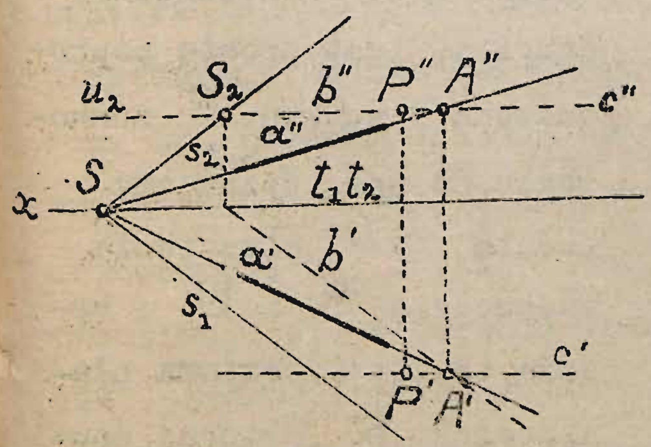
Rys. 58.

ten leży oczywiście na α i może być wyznaczony jako przecięcie prostych b i c. Wyznaczamy tedy rzuty $b'b''$ prostej przecięcia płaszczyzn S i U, /przyp.4/. ~~oraz rzuty $c'c''$ prostej przecięcia płaszczyzn T i U~~ Pierwsze rzuty tych prostych są zjednoczone na u_1; drugie przecinają się w punkcie A''; spuszczając z A'' prostopadłą do osi, znajdujemy na wspólnym pierwszym rzucie obu prostych punkt A'. Łącząc punkt S z punktom $A'A''$, otrzymujemy szukaną prostą przecięcia $\alpha'\alpha''$.



Rys. 59.

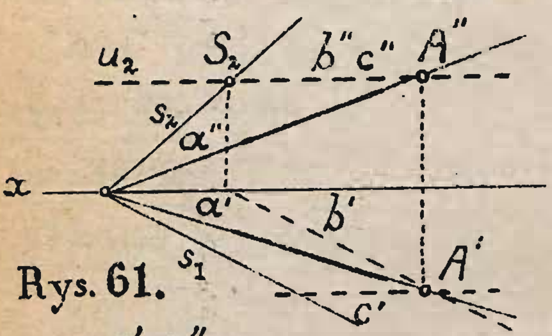
6/. Gdy płaszczyzny S i T przecinają oś w tym samym punkcie niewłaściwym S^∞ /Rys. 59/ to jest gdy ślady obu danych płaszczyzn są równoległe do osi, musimy obrać inną płaszczyznę pomocniczą U. Niechaj nią będzie np. płaszczyzna prostopadła



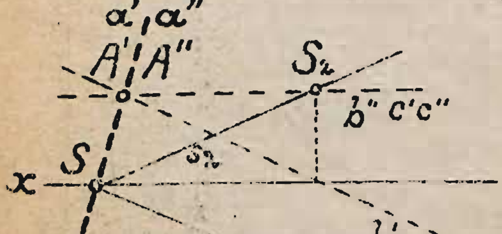
Rys. 60.

do P_1 . Znajdziemy rzuty $b'b''$ i $c'c''$ prostych przecięcia płaszczyzn S i U oraz T i U . Punkt $A'A''$ przecięcia prostych b i c łączymy z punktem S^∞ t.j. przez A' i przez A'' prowadzimy równoległe do osi; będą to rzuty a' i a'' prostej przecięcia płaszczyzn S i T .

7/ Gdy jedna z dwóch płaszczyzn np. T przechodzi przez oś, wtedy jej położenie jest wyznaczone przez rzuty punktu P w niej leżącego / § 14,-5 rys.41/. Płaszczyzna taka ma z każdą inną płaszczyzną $S \equiv s_1 s_2$ /rys.60/ wspólny punkt S na osi; aby wyznaczyć prostą przecięcia płaszczyzn S i T , poprowadźmy przez punkt $P'P''$ płaszczyznę mocniczą U równoległą do P_1 . Jej pierwszy ślad u_1 będzie w nieskończoności; drugi u_2 jest prostą poprowadzoną z punktu P'' równolegle do osi. Wyznaczmy prostą $b'b''$ przecięcia płaszczyzn S i U ; będzie to linja pozioma płaszczyzny S , której dru-



Rys. 61.

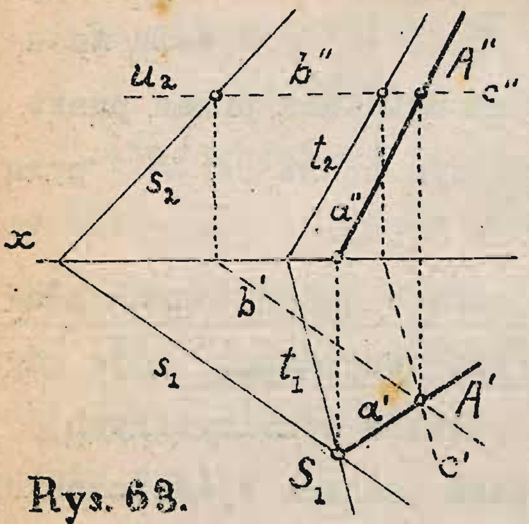


Rys. 62.

gi rzut b'' przystaje do u_2. Wyznaczmy również prostą $c'c''$ przecięcia płaszczyzn T i U; będzie to oczywiście równoległa do osi, poprowadzona przez punkt P. Pozostaje wreszcie wyznaczyć punkt $A'A''$ przecięcia b i c i połączyć AS.

8/. Gdy w szczególności jedną z dwóch danych płaszczyzn jest I lub II płaszczyzną dwusieczną, t.j. gdy punkt P jest dany jako para punktów symetrycznych względem osi, względnie jako para punktów zjednoczonych śladem u_2 płaszczyzny pomocniczej U może być jakakolwiek prosta równoległa do osi; rzut c'' prostej c przecięcia płaszczyzn T i U przystaje do u_2, a rzut c' tej prostej jest w pierwszym przypadku symetryczny do śladu u_2, w drugim przystaje do niego /rys. 61 i 62/. Punkt $A'A''$ jest punktem, w którym prosta pozioma $b'b''$ płaszczyzny $s_1 s_2$ przebija I wzgl. II płaszczyznę dwusieczną /§ 11/.

9/. Płaszczyzna U równoległa do jednej z płaszczyzn rzutów może być zastosowaną i wtedy, gdy ślady odpowiednie np. drugie, dwóch danych płaszczyzn nie przecinają się w obrębie rysunku. Przecinając bowiem dane płaszczyzny S i T płaszczyzną U, znajdziemy dwie proste b i c /Rys 63/, których punkt przecięcia A leży na prostej a; łącząc ten punkt ze



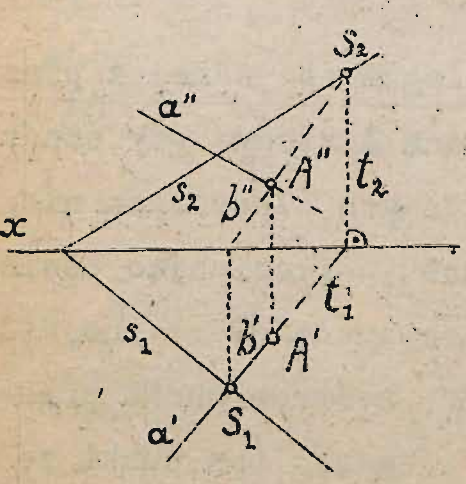
Rys. 63.

śladem S_1, otrzymamy prostą a.

Gdyby punkt S_1 leżał również poza obrębem rysunku, należałoby poprowadzić drugą płaszczyznę pomocniczą V i za jej pomocą znaleźć drugi punkt B wspólny obu danym płaszczyznom.

§ 20. PUNKT PRZEBICIA PŁASZCZYZNY PROSTĄ.

ZADANIE. Wyznaczyć rzuty punktu, w którym dana prosta $a'a''$ przebija daną płaszczyznę $s_1 s_2$. Przypuszczając, że rzuty prostej a nie leżą na wspólnej prostopadłej do osi, poprowadźmy przez prostą a dowolną płaszczyznę, np. pierwszą płaszczyznę rzucającą.

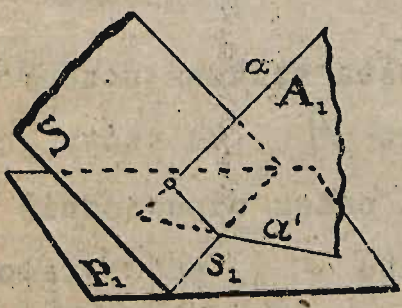


Rys. 64.

Jej ślad pierwszy t_1 przystaje do pierwszego rzutu a' danej prostej, drugi ślad t_2 jest prostopadły do osi. Wykreślmy rzuty prostej b przecięcia płaszczyzn $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$. Proste a i b muszą się przeciąć, albowiem leżą w tej samej płaszczyźnie $t_1 t_2$; ich punkt przecięcia A będzie punktem wspólnym prostej a i płaszczyzny $s_1 s_2$, to jest szukanym punktem przebicia. Jego rzut drugi A'' będzie punktem przecięcia rzutów b'' i a''; rzut pierwszy A' znajdziemy na linji rzędnych punktu A w przecięciu jej ze wspólnym pierwszym rzutem prostych a i b .

§ 21. PROSTE I PŁASZCZYZNY PROSTOPADŁE.

TWIERDZENIE. Jeżeli prosta jest prostopadła do płaszczyzny, to rzut prostej jest prostopadły do śladu płaszczyzny. Niech będzie płaszczyzna rzutów P_1 i płaszczyzna jakakolwiek S , której śladem jest prosta s_1 oraz prosta a prostopadła do płaszczyzny S . Rzućmy prostą a prostokątnie na P_1 to jest przez a poprowadźmy płaszczyznę A_1 prostopadłą do P_1 ; jej ślad a' jest rzutem prostej a ; trzeba okazać, że $a' \perp s_1$. W samej rzeczy, płaszczyzna A_1 jest prostopadła do dwóch płaszczyzn P_1 i S , jest więc ona prostopadła i do prostej s_1 , według której te płaszczyzny się przecinają.

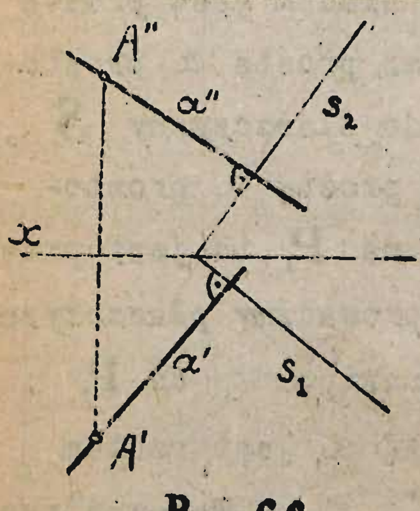


Rys. 65.

Ponieważ $s_1 \perp A_1$, jest więc ona prostopadła do a', która leży w płaszczyźnie A_1, c.b.d.o.

Z twierdzenia powyższego wynika, że gdy prosta a jest prostopadła do płaszczyzny S, to $a' \perp s_1$ i $a'' \perp s_2$. Nawzajem, jeżeli oba rzuty prostej a są prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny S, to $a \perp S$. Każda bowiem z płaszczyzn rzucających prostą a jest prostopadła do odpowiedniego śladu, a więc i do płaszczyzny S; linja ich przecięcia, t.j. prosta a jest więc również prostopadła do S.

ZADANIE. Przez punkt $A'A''$ poprowadzić prostą prostopadłą do płaszczyzny $s_1 s_2$.



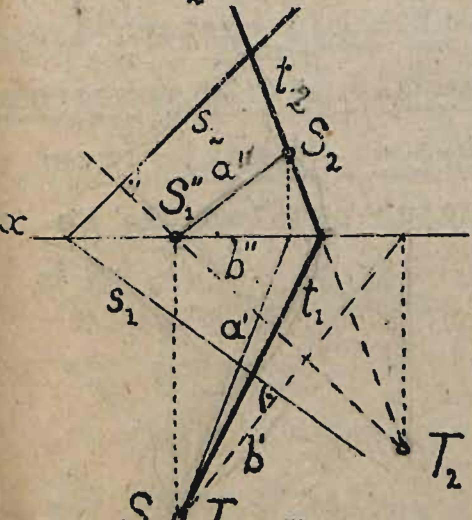
Rys. 66.

Jeżeli prosta szukana przechodzi przez punkt A, to rzuty jej przechodzą przez odpowiednie rzuty punktu A, prócz tego rzuty te mają być prostopadłe do odpowiednich śladów płaszczyzny. Prowadzimy zatem przez A' rzut a' prostopadły do s_1, a przez A'' rzut a'' prostopadły do s_2.

Płaszczyzna prostopadła do I płaszczyzny dwusiecznej ma ślady symetryczne. W samej rzeczy, płaszczyzna prostopadła do D_1 jest prostopadła do jakiejkolwiek prostej d_1 tej płaszczyzny. Ale rzuty prostej d_1 są symetryczne względem osi, a więc i ślady płaszczyzny do niej prostopadłej są symetryczne.

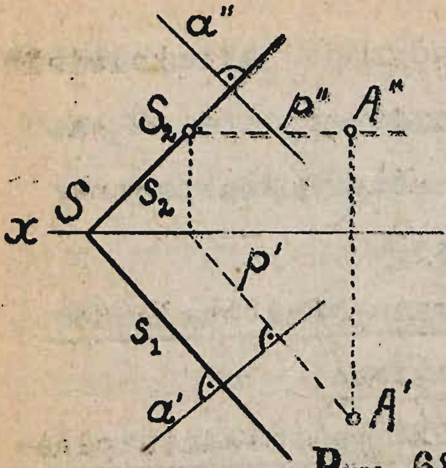
Tak samo okażemy, że <u>płaszczyzna prostopadła do II pł. dwusiecznej ma ślady zjednoczone.</u>

<u>ZADANIE. Przez daną prostą $a'a''$ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny danej s_1s_2</u> /Rys.67/ Znajdźmy ślady S_1 i S_2 prostej $a'a''$; z jakiegokolwiek punktu tej prostej, np. ze śladu S_1, spuśćmy prostopadłą $b'b''$ na płaszczyznę s_1s_2; pierwszy ślad tej prostej T_1 przystaje do S_1; znajdźmy drugi ślad T_2. Płaszczyzna, której ślad pionowy t_2 łączy S_2 i T_2, a ślad poziomy t_1 przechodzi przez S_1T_1, jest szukaną, albowiem przechodzi ona przez prostą a i jest prostopadłą do płaszczyzny s_1s_2 /gdyż przechodzi przez prostą b do niej prostopadłą/



Rys. 67.

<u>ZADANIE. Przez punkt dany $A'A''$ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do prostej danej $a'a''$</u> /Rys.68/. Ślady szukanej płaszczyzny są



Rys. 68.

prostopadłe do odpowiednich rzutów prostej a. Poprowadźmy przez punkt A jedną z prostych głównych szukanej płaszczyzny, np. linję poziomą p. Jej pierwszy rzut p' jest równoległy do śladu S_1 szukanej płaszczyzny, a więc prostopadły do a'; drugi rzut p'' jest równoległy do osi. Wyznaczmy ślad S_2 prostej p, poprowadźmy przezeń ślad s_2 szukanej płaszczyzny prostopadle do a'', a z punktu $s_2 x \equiv S$ ślad s_1 prostopadły do a'.

Do powyższego zadania sprowadza się następujące: <u>Przez dany punkt $A'A''$ poprowadzić prostą przecinającą daną prostą $a'a''$ i prostopadłą do niej.</u> Przez punkt $A'A''$ prowadzimy płaszczyznę prostopadłą do $a'a''$, wyznaczamy jej punkt przebicia prostą $a'a''$ i łączymy ten punkt z punktem $A'A''$.

ROZDZIAŁ II.

ZMIANA PŁASZCZYZN RZUTÓW.

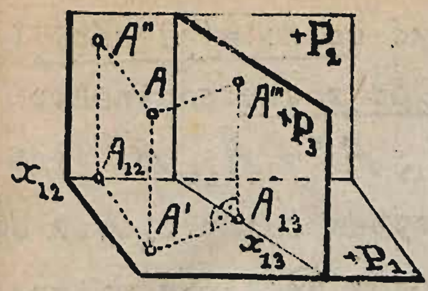
§ 29. RZUT PUNKTU NA PŁASZCZYZNĘ PROSTOPADŁĄ DO P_1 LUB P_2.

Nieraz bywa użytecznym rzut figury na płaszczyznę różną od P_1 i P_2. Często się zdarza np., że niektóre proste i płaszczyzny figury są prostopadłe do jednej lub do obu płaszczyzn rzutów, dzięki czemu rzuty niektórych prostych są zjednoczone. Wprawdzie rzuty tak położonej w przestrzeni figury zwykle łatwiej mogą być wykreślone; tym trudniej zato wyobrazić sobie figurę na podstawie tych rzutów. Z drugiej znów strony, liczne zagadnienia geometrji przestrzeni łatwo mogą być rozwiązane wykreślnie, gdy pewne części figury zajmą szczególne położenie względem płaszczyzn rzutów, - gdy np. pewna płaszczyzna figury przystaje do jednej z płaszczyzn rzutów lub jest do niej równoległa, albo gdy pewna prosta jest do jednej z tych płaszczyzn prostopadła. W jednym i drugim przypadku pożądanem jest znalezienie rzutu figury na nową płaszczyznę rzutów, mającą względem tej figury pewne położenie szczególne.

Ponieważ każdą figurę uważać możemy za zbiór punktów połączonych prostemi i płaszczyznami, wystarczy zatem umieć znaleźć rzut jednego punktu na nową płaszczyznę rzutów. Jak zobaczymy niebawem, można się przytem ograniczyć do płaszczyzn prostopadłych do P_1 lub P_2.

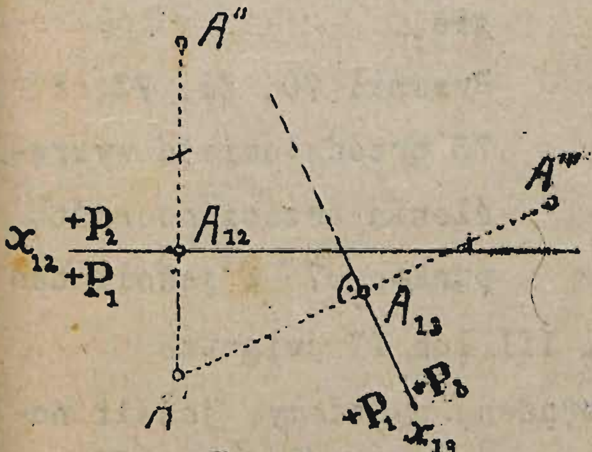
Niechaj będą dwie płaszczyzny rzutów P_1 i P_2 /Rys.69/, ich prostą przecięcia, czyli oś rzutów oznaczymy tym razem przez x_{12}; jedną którąkolwiek z dwóch części, na której oś x_{12} dzieli każdą z tych płaszczyzn uważać będziemy za dodatnią, oznaczając ją $+P_1$ lub $+P_2$. Niech będzie punkt przestrzeni A, którego rzuty oznaczymy jak zwykle A' i A''; rzędne tego punktu będą $A_{12}A'$ i $A_{12}A''$; każdą z nich uważać będziemy za dodatnią, gdy leży na dodatniej półpłaszczyźnie rzutów; w przeciwnym razie uważać ją będziemy za ujemną.

Niech będzie teraz nowa płaszczyzna rzutów P_3 prostopadła do P_1; jej ślad pierwszy oznaczymy przez x_{13} i nazwiemy krótko nową osią. Dzieli ona płaszczyznę P_3 na dwie części; oznaczmy przez $+P_3$ tę z nich, która leży po tej samej stronie P_1, co $+P_2$. Z punktu A spuśćmy prostopadłą na płaszczyznę P_3, jej spadek A''' nazwiemy trzecim rzutem punktu A. Jest oczywiste, że $A_{12}A'' = A_{13}A'''$ i że ta równość



Rys. 69.

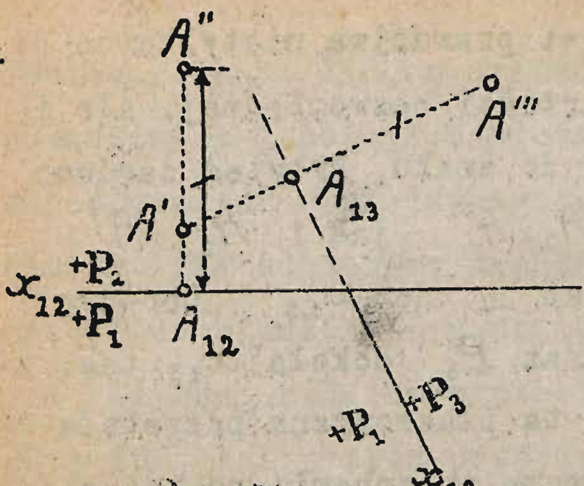
jest prawdziwa nietylko co do wartości bezwzględnej, ale i co do znaku. Przytem zarówno $A_{13}A'''$ jak i $A_{13}A'$ jest $\perp$ do x_{13}. Obróćmy teraz P_3 dokoła x_{13} tak, aby ta płaszczyzna przystała do P_1; będzie to możliwe dwoma sposobami; po tej stronie nowej osi, po której upadnie $+P_3$ zróbmy odnośny napis; będzie to strona dodatnich trzecich rzędnych /Rys.70, 71, 72, 73/. Oczywiście przeciwna strona nowej osi będzie przeznaczona dla dodatnich pierwszych rzędnych względem nowej osi; możemy więc tutaj umieścić



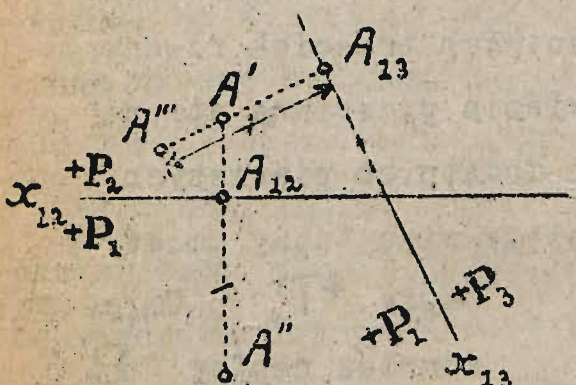
Rys. 70.

napis $+P_1$. Umieśćmy również napisy $+P_1$ i $+P_2$ po obu stronach dawnej osi x_{12}.

Aby znaleźć trzeci rzut punktu A, którego rzut pierwszy A' i drugi A'' są dane, należy z punktu A' spuścić prostopadłą $A'A_{13}$ na nową oś x_{13} i na tej prostopadłej od punktu A_{13} przecięcia jej z nową osią odmie-



Rys. 71.

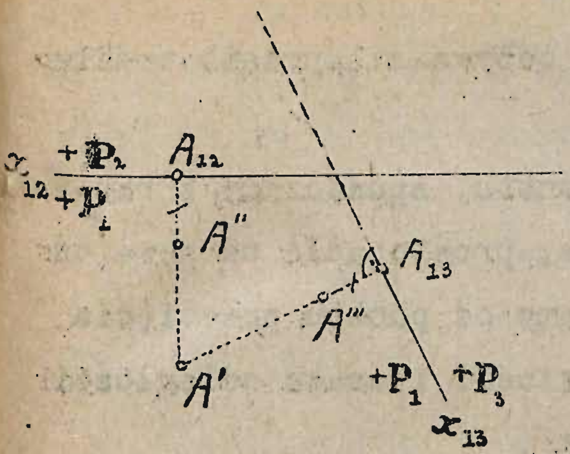


Rys. 72.

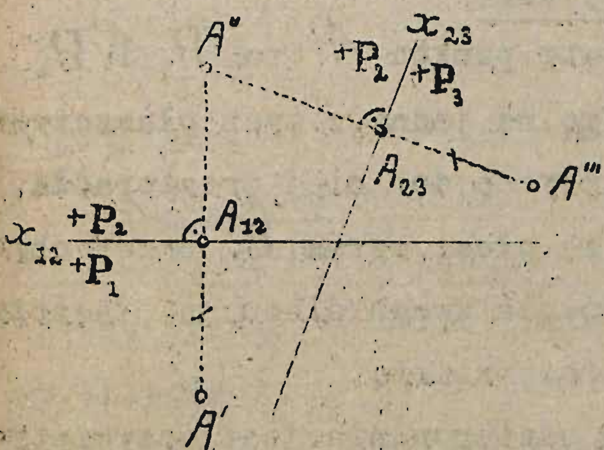
rzyć co do wielkości i co do znaku odcinek $A_{13}A''' = A_{12}A''$, przytem każdy z tych odcinków będziemy uważali za dodatni, jeżeli punkt A''', względnie A'' będzie się znajdował po tej stronie odpowiedniej osi, po której znajduje się napis $+P_3$ wzgl. $+P_2$ - za ujemny w przeciwnym razie.

Rysunki 70, 71, 72, i 73 przedstawiają wykreślenia trzeciego rzutu punktu A, jeżeli ten punkt znajduje się w I, II, III lub IV ćwiartce.

Zupełnie tak samo postępować będziemy, jeżeli nowa płaszczyzna rzutów P_3 będzie prostopadła do P_2. Oznaczmy znowu przez $+P_3$ tę część płaszczyzny P_3, która znajduje się po tej samej stronie płaszczyzny P_2, co $+P_1$. Umieśćmy napis $+P_3$ po tej stronie



Rys. 73.



Rys. 74.

nowej osi x_{23}, po której ma upaść $+P_3$: będzie to strona dodatnich trzecich rzędnych oczywiście strona przeciwna będzie przeznaczona dla dodatnich drugich rzędnych względem nowej osi. Aby wyznaczyć trzeci rzut punktu A, spuśćmy z punktu A prostopadłą $A''A_{23}$ na nową oś i na tej prostopadłej od punktu A_{23} przecięcia jej z nową osią odmierzmy co do wartości bezwzględnej i co do znaku odcinek $A_{23}A''' = A_{12}A'$

Dwa rzuty $A'A'''$ lub $A''A'''$ tak samo dobrze wyznaczają punkt A, jak dwa rzuty $A'A''$. Jeden z dwóch danych rzutów punktu A zastępujemy w ten sposób przez rzut nowy, podczas gdy inny pozostaje niezmieniony.

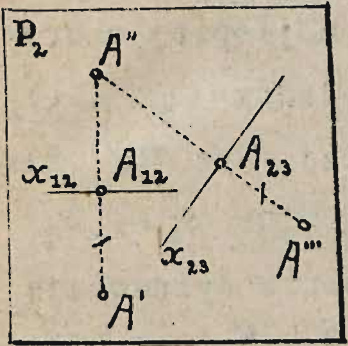
Wyznaczenie nowego rzutu odbywa się przeto według następującej reguły:

Aby otrzymać nowy rzut punktu, spuszczamy z rzutu, który nie ma uledz zmianie, prostopadłą na nową oś i na tej prostopadłej odmierzamy od punktu przecięcia z osią odcinek równy co do wartości i znaku odległości zbytecznego rzutu od dawnej osi.

Odległość nowego rzutu od nowej osi = odległości zbytecznego rzutu od dawnej osi.

W ten sposób, dane rzuty punktu A na P_1 i P_2 możemy zastąpić rzutami jego na jedną z tych płaszczyzn np. na P_2, oraz na płaszczyznę do niej prostopadłą, przytem wyobrażamy sobie, że płaszczyzna P_3 przez obrót w jedną lub drugą stronę dokoła swego śladu na płaszczyźnie P_2 zostanie na niej rozpostartą.

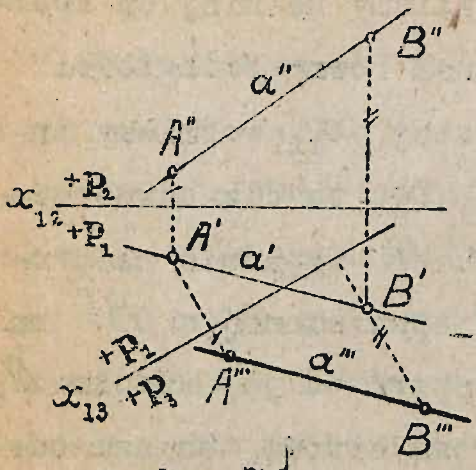
Podany powyżej sposób postępowania jest oczywisty jeżeli rzuty prostokątne rozważać będziemy według określenia, które daliśmy w § 5. Wprowadziliśmy tam początkowo tylko jedną płaszczyznę rzutów, mianowicie P_2; wyznaczenie punktu przestrzeni A odbyło się zapomocą jego rzutu A'' oraz w umówiony sposób odnotowanej odległości $A''A$. W tym celu poprowadziliśmy w płaszczyźnie rzutów dowolną prostą x_{12} i spuściwszy na nią z punktu A'' prostopadłą, odmierzyliśmy na niej od spodka A_{12} w tę lub ową stronę odcinek równy odległości $A''A$. Otóż, gdy zamiast prostej x_{12} weźmiemy inną prostą x_{23} to dla odwzorowania punktu A wypadnie na prostopadłej spuszczonej z A'' na x_{23} odmierzyć od jej spodka A_{23} w tę lub ową stronę ten sam odcinek $A''A$. Mając więc odwzorowany punkt A w jeden jakikolwiek sposób np. zapomocą osi x_{12} możemy go odwzorować zapomocą każdej innej x_{23}.



Rys. 75.

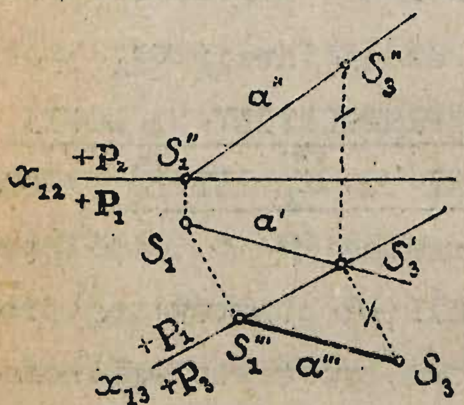
§ 23. RZUT PROSTEJ I ŚLAD PŁASZCZYZNY NA NOWEJ PŁASZCZYŹNIE RZUTÓW PROSTOPADŁEJ DO P_1 LUB P_2. Gdy chcemy wyznaczyć trzeci rzut prostej $a'a''$, to łączymy trzecie rzuty dwóch jakichkolwiek punktów tej prostej /Rys.76/. Punktami tymi mogą być w szczególności /Rys.77/: ślad na płaszczyźnie, która ma pozostać niezmienioną, oraz ślad na nowej płaszczyźnie rzutów. Rzut tego ostatniego punktu leży oczywiście w przecięciu nowej osi z tym rzutem prostej, który nie ma ulegać zmianie.

Aby wyznaczyć ślad płaszczyzny $s_1 s_2$ na nowej płaszczyźnie rzutów P_3 prostopadłej do P_1 lub P_2,

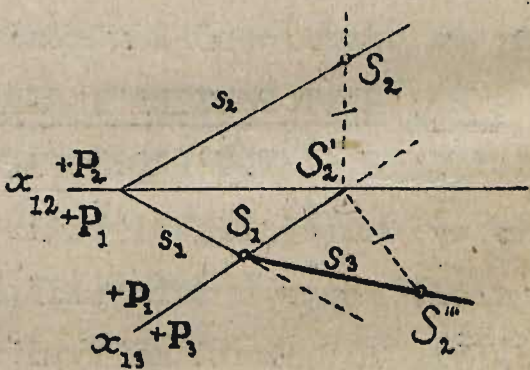


Rys. 76.

należy znaleźć trzeci rzut prostej przecięcia płaszczyzny $s_1 s_2$ z P_3. W tym celu najlepiej skorzystać ze śladów S_1 i S_2 tej prostej /Rys.78/. Ślady s_1 i s_3 lub s_2 i s_3 równie dobrze wyznaczają płaszczyznę S_1 jak ślady s_1 i s_2.



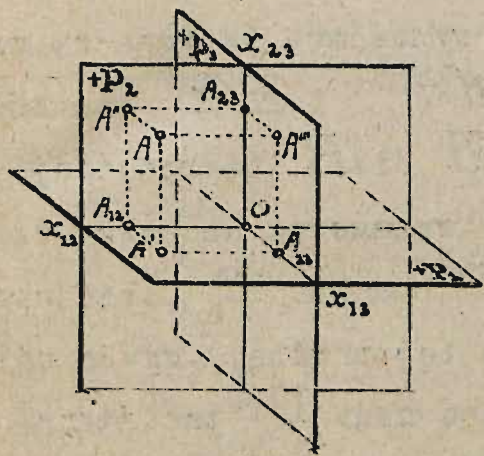
Rys. 77.



Rys. 78.

§ 24. PŁASZCZYZNA RZUTÓW BOCZNA. Z pośród płaszczyzn rzutów prostopadłych do P_1 lub P_2 wyróżniają się te, które są do obu tych płaszczyzn, a więc i do osi x_{12} prostopadłe. Płaszczyzny takie nazywamy bocznemi /Rys.79/. Płaszczyzna boczna P_3 przecina P_1 i

P_2 według prostych x_{13} i x_{23}, z których każda może uchodzić za nową oś rzutów, zależnie od tego, czy płaszczyznę P_3 rozpostrzemy na płaszczyźnie P_1 czy na płaszczyźnie P_2.

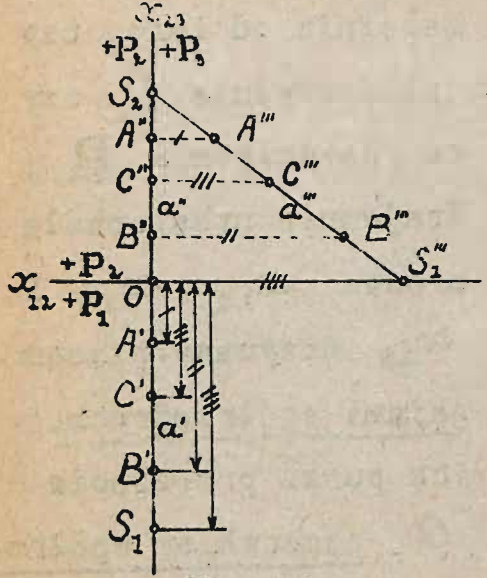


Rys.79.

Wzajemnie prostopadłe proste: x_{12}, x_{13} i x_{23} nazywamy czasem osiami spółrzędnych, ich punkt przecięcia O początkiem spółrzędnych, a pierwszą, drugą i trzecią rzędną każdego punktu - spółrzędnymi tego punktu.

Płaszczyzna rzutów boczna jest szczególnie użyteczna wtedy, gdy w grę wchodzą płaszczyzny prostopadłe do osi. Trzecie rzuty figur, leżących w takich płaszczyznach są tym figurom równe, podczas gdy dwa pierwsze ich rzuty, leżąc na zjednoczonych śladach płaszczyzny, figur tych należycie nie wyznaczają. W szczególności korzystamy z płaszczyzny bocznej rzutów dla rozwiązania zadań, dotyczących prostych prostopadłych do osi.

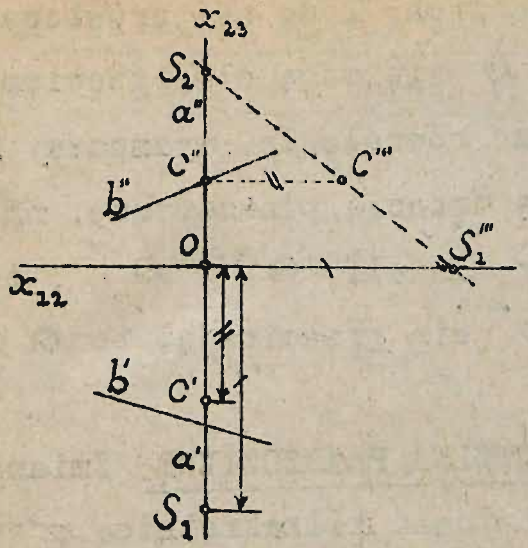
Niech będzie np. /Rys.80/ prosta AB leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do osi a więc nie wyznaczo-



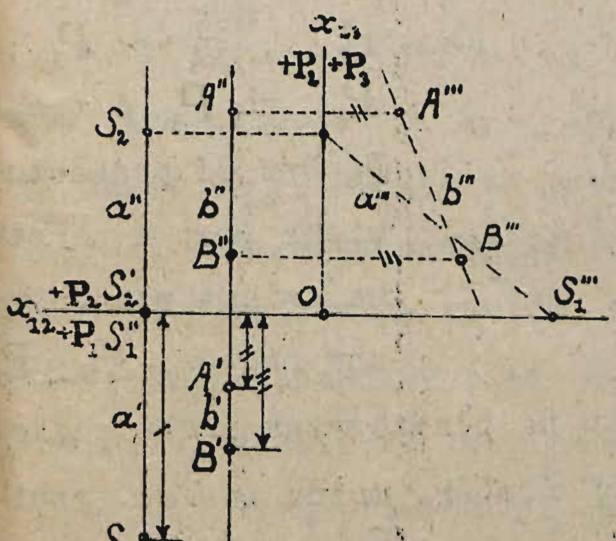
Rys. 80.

na przez swoje rzuty a' i a'', które leżą na zjednoczonych śladach płaszczyzny. Przypuśćmy, że dane są rzuty $A'A''$ i $B'B''$ punktów A i B tej prostej, mamy wyznaczyć pierwszy rzut C' punktu C, leżącego na tej prostej, gdy drugi jego rzut C'' jest dany. Obierzmy za nową płaszczyznę rzutów, płaszczyznę, w której dan prosta leży, a za nową oś ślad x_{23} tej płaszczyzny na P_2. Wyznaczywszy zapomocą punktów A i B trzeci rzut a''' prostej a, znajdziemy trzecią rzędną $C''C'''$ punktu C; odmierzając ją zaś na a' od punktu O według zwykłej umowy znajdziemy szukany punkt C'. W szczególności znajdziemy tym sposobem ślady S_1 i S_2 prostej AB.

Albo niech będą dwie proste a i b i przypuśćmy, że jedna z nich, np. a leży w płaszczyźnie prostopadłej do osi i dana jest przez swoje ślady S_1 i S_2, druga zaś prosta b nie leży w takiej płaszczyźnie i dana jest przez swoje rzuty b' i b'' /Rys.81/. Proste



Rys. 81.



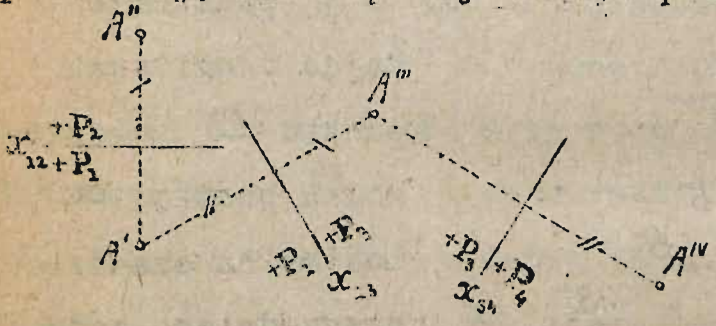
Rys. 82.

a i b nie mogą być równoległę; aby się przekonać, czy się przecinają, zważmy, że jeżeli punkt wspólny C tych prostych istnieje to jego drugi rzut musi być punktem, w którym się przecinają drugie rzuty prostych a i b t.j. punktem C''.

Mając drugi rzut punktu C, leżącego na prostej a, musimy na zasadzie poprzedniego zadania znaleźć jego rzut pierwszy C'. Jeżeli punkt C' leży w przecięciu pierwszych rzutów a' i b', to proste a i b się przecinają. W przeciwnym razie są one wichrowate.

Albo jeszcze niech będą dwie proste a i b, leżące w płaszczyznach równoległych, a do osi prostopadłych /Rys.82/. Proste a i b nie mogą się przecinać; aby się przekonać, czy są one równoległe, wyznaczmy ich rzuty a''' i b''' na dowolną trzecią płaszczyznę, np. na płaszczyznę boczną rzutów. Jeżeli $a''' \parallel b'''$, to $a \parallel b$, jeżeli a''' i b''' się przecinają, to a i b są wichrowate.

§ 25. RZUT PUNKTU NA DOWOLNĄ PŁASZCZYZNĘ. Zmiana płaszczyzny rzutów może następować kilkakrotnie, przytem nowa płaszczyzna rzutów ma być prostopadła do poprzedniej. Tak więc P_3 ma być prostopadła do P_1 lub P_2, P_4 do P_3; P_5 do P_4 i t.d. Na Rys.83 przedstawiona jest dwukrotna zmiana płaszczyzny rzutów: $P_3 \perp P_1$, $P_4 \perp P_3$.

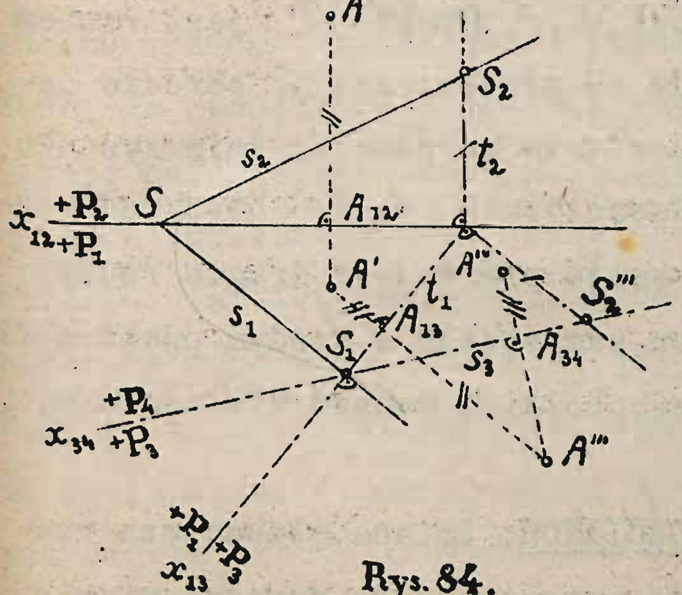


Rys. 83.

Znajdując rzuty punktu na płaszczyzny prostopadłe do każdorazowych płaszczyzn rzutów, można znaleźć rzut tego punktu na dowolną płaszczyznę S, której ślady s_1 i s_2 są dane, przytem wystarcza dwukrotna zmiana płaszczyzny rzutów. Rozwiążmy tedy

ZADANIE. Dane są pierwsze i drugie rzuty punktów A, B, C .... oraz ślady s_1 s_2 płaszczyzny S;

znaleźć rzuty danych punktów na płaszczyznę S, rozpostartą w płaszczyźnie rysunku. Znajdźmy np. rzut punktu A na płaszczyznę S; tak samo wyznaczymy rzuty wszystkich innych danych punktów. Poprowadźmy płaszczyznę $P_3 /t_1\, t_2/$ prostopadłą do P_1 i do S, a więc prostopadłą do prostej ich przecięcia s_1. Jej pierwszy ślad t_1 oznaczmy przez x_{13}, będzie on prostopadły do s_1; drugi ślad t_2 będzie prostopadły do osi x_{12}. Obrawszy P_3 za nową płaszczyznę rzutów, a więc jej ślad t_1 za nową oś x_{13}, znajdźmy ślad s_3 płaszczyzny S oraz rzut A''' punktu A względem nowej osi. W nowym układzie płaszczyzn rzutów $P_1\, P_3$ śladami płaszczyzny S będą proste s_1 i s_3, rzutami punktu A punkty $A'A'''$. Aby teraz znaleźć rzut punktu A na S, obieramy ją za nową płaszczyznę rzutów, a jej ślad s_3 za nową oś x_{34}, poczem znajdujemy czwarty rzut A^{IV} punktu A spuszczając z punktu A''' prostopadłą na nową oś i od-



Rys. 84.

mierzając na niej od punktu A_{34} odcinek $A_{34}A^{IV}$ równy co do wartości i znaku odległości zbytecznego rzutu A' od dawnej osi x_{13}. Punkt A^{IV} jest rzutem punktu A na S, gdy ta płaszczyzna po obrocie dokoła s_3 zostanie rozpostarta na płaszczyźnie rysunku.

Chcąc na danej płaszczyźnie $s_1 s_2$ otrzymać rzuty figury danej przez swoje pierwsze i drugie rzuty, trzebaby postąpić w ten sam sposób z każdym punktem figury, np. z każdym wierzchołkiem danego wielościanu.

§ 26. RZUTY WIELOŚCIANÓW. Zmiana płaszczyzn rzutów służy częstokroć do wyrazistszego przedstawienia wielościanów, których rzuty zostały początkowo wykreślone w założeniu szczególnego położenia wielościanów względem płaszczyzn rzutów. Jak już wspominaliśmy w § 21 łatwość wykreślenia nie idzie tu w parze z łatwością odtworzenia figury w wyobraźni; rzuty wielościanu wogóle tym łatwiej wykreślić, im bardziej wyjątkowe jest jego położenie względem płaszczyzn rzutów; tym trudniej zato na zasadzie tych rzutów odtworzyć go w wyobraźni. Przez jedno - lub dwukrotną zmianę płaszczyzny rzutów, położenie wyjątkowe względem płaszczyzn rzutów zostaje zniesione.

Zanim damy odpow[illegible] powiedzieć musimy o kreśleniu rzutów wielościanów. Rzut wielościanu jest wyznaczony, jeżeli znalezione są rzuty wszystkich jego wierzchołków i jeżeli o każdym wierzchołku wiadomo, z którymi z pozostałych wierzchołków łączą go wychodzące z niego krawędzie. Aby rysunek uczynić bardziej poglądowym, przypuszczamy, że wielościany są nieprzezroczyste. Jeżeli oko umieścimy na dostatecznie wielkiej /ew.nieskończonej/ odległości od płaszczyzny rzutów po dodatniej jej stronie, to jedne krawędzie, ściany i wierzchołki będą widzialne, inne będą zasłonięte; rzuty krawędzi widzialnych kreślimy linją ciągłą; rzuty krawędzi zasłoniętych - linją przerywaną. Każda ściana ograniczona wyłącznie krawędziami widzialnemi jest widzialna, każdy wierzchołek, przez który przechodzi krawędź widzialna jest widzialny. Na każdym wielościanie istnieje linja łamana zamknięta, wogóle skośna, której bokami są krawędzie wielościanu i która odgranicza część widzialną powierzchni wielościanu od części niewidzialnej; linja ta nazywa się konturem prawdziwym; rzut zaś tej łamanej nazywa się konturem widzialnym.

Rozważania nasze ograniczymy do wielościanów wypukłych, t.j. takich, których powierzchnię dowolna prosta, na żadnej z jego ścian nie leżąca, przebija najwyżej w dwóch punktach. Proste rzucające przebijają zatem wielościan wogóle w dwóch punktach; wyjątek stanowią te proste rzucające, które przechodzą przez punkty konturu prawdziwego, stykając się w tych punktach z wielościanem. Tworzą one graniastosłup prosty na danym wielościanie opisany; kontur widzialny jest to przecięcie tego graniastosłupa płaszczyzną rzutów. Bardzo łatwo z pośród rzutów wierzchołków i krawędzi wyróżnić te, które stanowią kontur widzialny, rzuty bowiem wszystkich innych wierzchołków i krawędzi muszą się znaleźć wewnątrz niego.

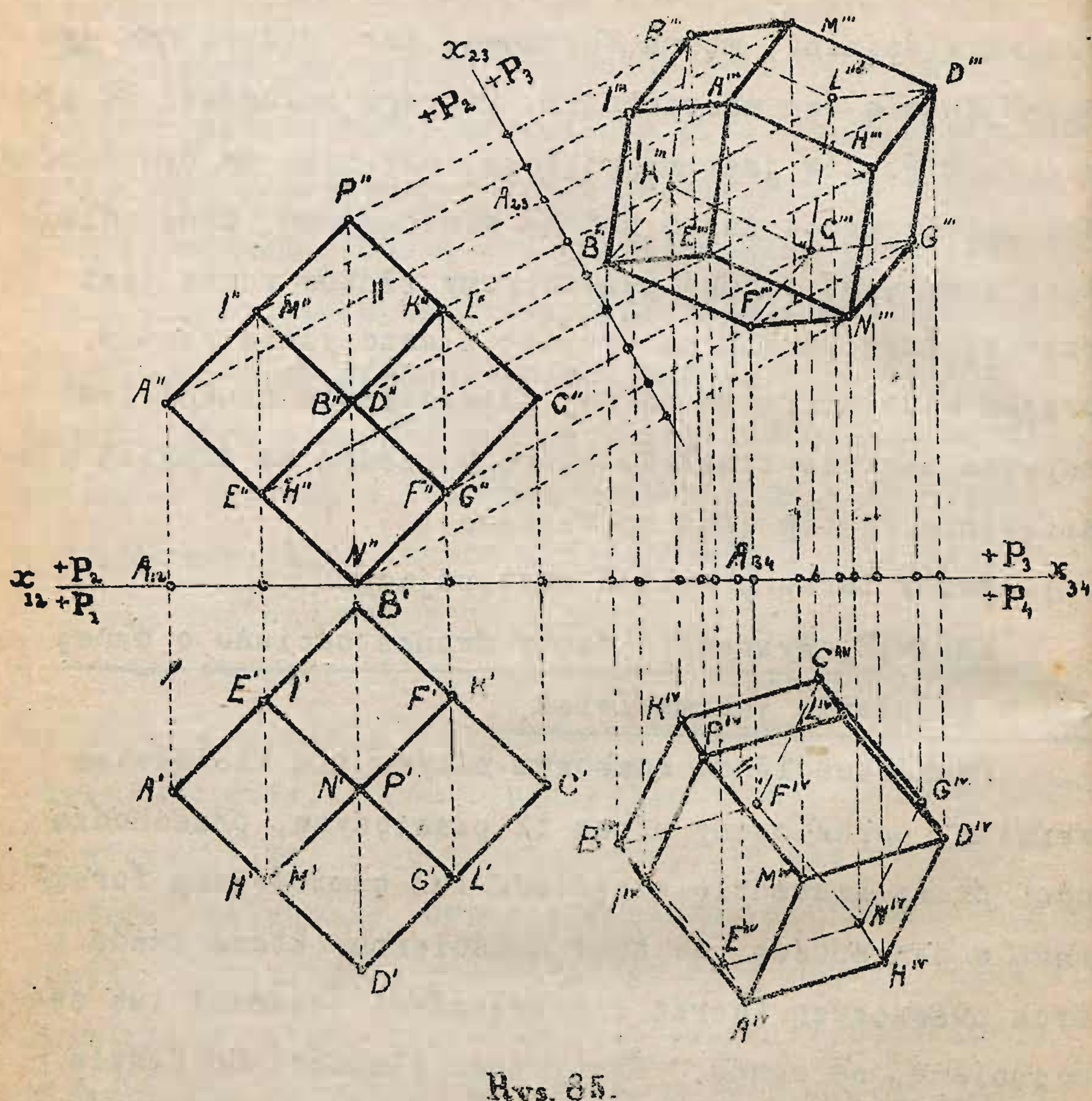
Gdy wyznaczona został kontur widzialny, znajdziemy które krawędzie i wierzchołki są widzialne, jeżeli określimy widzialność lub niewidzialność jednego choćby wierzchołka, którego rzut znajduje się wewnątrz konturu; wszystkie bowiem krawędzie, wychodzące z wierzchołka widzialnego, nie leżącego na konturze, będą widzialne; a zatem widzialne będą też wierzchołki, do których one prowadzą; krawędzie z tych wierzchołków wychodzące będą znów widzialne i t.d. Tym sposobem, od rzutu dowolnego wierzchołka widzialnego wewnątrz konturu dojdziemy widzialnemi krawędziami do wszystkich wierzchołków konturu; pozostałe krawędzie będą niewidzialne.

Aby znaleźć ten jeden nie leżący na konturze wierzchołek widzialny, można rozumować tak: widzialnym napewno będzie ten wierzchołek, którego odległość od płaszczyzny rzutów jest największa, nie może on być bowiem zasłonięty przez żadną ścianę wielościanu. Otóż odległość punktu od jednej płaszczyzny rzutów równa jest rzędnej tego punktu na drugiej płaszczyźnie rzutów; przeto widzialnym na jednej płaszczyźnie rzutów jest napewno ten wierzchołek, którego rzędna na drugiej płaszczyźnie rzutów jest największa.

Weźmy teraz przykład następujący:

ZADANIE. Wykreślić rzuty dwunastościanu o danej osi w położeniu jakimkolwiek.

Dwunastościanem rombowym nazywa się wielościan wypukły, ograniczony przez 12 płaszczyzn, przechodzących przez krawędzie sześcianu lub ośmiościanu foremnego w ten sposób, że kąty dwuścienne, które każda z tych płaszczyzn tworzą z przyległymi ścianami lub ośmiościanu, są równe. Rzuty tego wielościanu będzie wykreślić niezmiernie łatwo, jeżeli jedna oś ośmiościanu, z którego powstaje dwunastościan rombowy jest prostopadła do P_1, druga prostopadła do P_2, a trzecia równoległa do x_{12}. Wtedy rzutem dwunastościanu na każdą z płaszczyzn rzutów jest kwadrat o danej przekątnej,



Rys. 85.

podzielony linjami środkowemi na cztery kwadraty /Rys. 85/. Każdy z 12 równych odcinków takiej figury jest rzutem dwóch krawędzi, z których jedna jest widzialna.

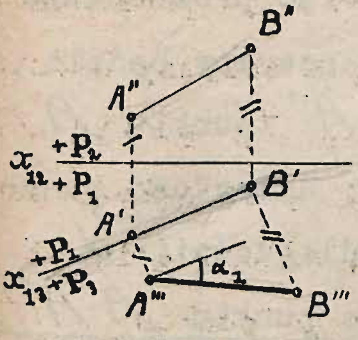
Aby otrzymać rzuty tego wielościanu na płaszczyzny jakiekolwiek, wprowadzamy płaszczyznę $P_3 \perp P_2$

znajdujemy, stosując regułę § 21, trzecie rzuty wszystkich 14 wierzchołków A, B, C, ..., M, N, P. Z pośród punktów A''', B''', ..., N''', P''' wybieramy najpierw te, które połączone odpowiednio utworzą wielokąt wypukły w ten sposób, że wszystkie pozostałe punkty znajdą się wewnątrz niego. Wielokąt ten będzie konturem widzialnym na płaszczyźnie P_3. Zauważmy teraz, że punkt A''' będzie napewno widzialny, bowiem druga rzędna punktu A, t.j. $A_{23}A''$ jest największa. Łączymy tedy punkt A''' linjami ciągłemi z sąsiednimi wierzchołkami I''', M''', E''' i H'''. Punkty I''' i M''' leżą na konturze widzialnym E''' i H''' wewnątrz niego. Te ostatnie dwa punkty łączymy znowu linjami ciągłemi z sąsiedniemi wierzchołkami B''', N''' i D''', które leżą na konturze widzialnym. Rzuty pozostałych krawędzi, jako niewidzialne kreślimy linjami przerywanemi.

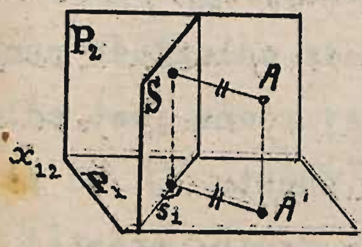
Możemy teraz wprowadzić jeszcze jedną płaszczyznę rzutów P_4 prostopadłą do P_3, przytem w naszym przykładzie obraliśmy nową oś tak, aby stanowiła ona przedłużenie osi x_{12}. Postępując tak samo jak poprzednio znajdziemy 14 czwartych rzutów wierzchołków A^{IV}, B^{IV} ... N^{IV} P^{IV}. Utworzywszy znowu wielokąt wypukły, ogarniający wszystkie te punkty, znajdziemy, że z pośród punktów nie leżących na konturze, punkt M^{IV} napewno jest widzialny, gdyż jego trzecia rzędna jest największa. Łącząc ten punkt z sąsiednimi wierzchołkami A^{IV} D^{IV} i P^{IV}; punkt P^{IV} z sąsiednimi I^{IV} i L^{IV}, a ten ostatni z C^{IV}, dojdziemy w ten sposób krawędziami widzialnemi do konturu. Rzuty pozostałych krawędzi są niewidzialne.

§ 27. ZASTOSOWANIE ZMIANY PŁASZCZYZN RZUTÓW DO ZADAŃ MIAROWYCH. Zadaniami miarowemi nazywamy zadania dotyczące wielkości odcinków i kątów figur geometrycznych. Zmiana płaszczyzn rzutów jest jednym z najpotężniejszych środków służących do rozwiązania tych zadań. Większość zadań miarowych da się mianowicie łatwo rozwiązać, jeżeli przez zmianę płaszczyzn rzutów zdołamy sprawić, by pewne części figur rozważanych miały względem nowej płaszczyzny rzutów położenie szczególne. Kilka przykładów to wyjaśni.

ZADANIE. Znaleźć kąt, który prosta łączącą punkty $A'A''$ i $B'B''$ tworzy z płaszczyzną $\mathbf{P}$ oraz wzajemna odległość tych punktów. Niech nową płaszczyzną rzutów $\mathbf{P}_3$ będzie płaszczyzna rzucająca prostą AB na $\mathbf{P}_1$; nową osią x_1, będzie wtedy pierwszy rzut $A'B'$. Trzeci rzut $A'''B'''$ odcinka AB jest temu odcinkowi równy, albowiem prosta AB przystaje do swego trzeciego rzutu. Kątem prostej AB z P_1 będzie kąt α_1, który ta prosta tworzy ze swym pierwszym rzutem, a więc będzie to kąt prostej $A'''B'''$ z prostą $A'B'$.

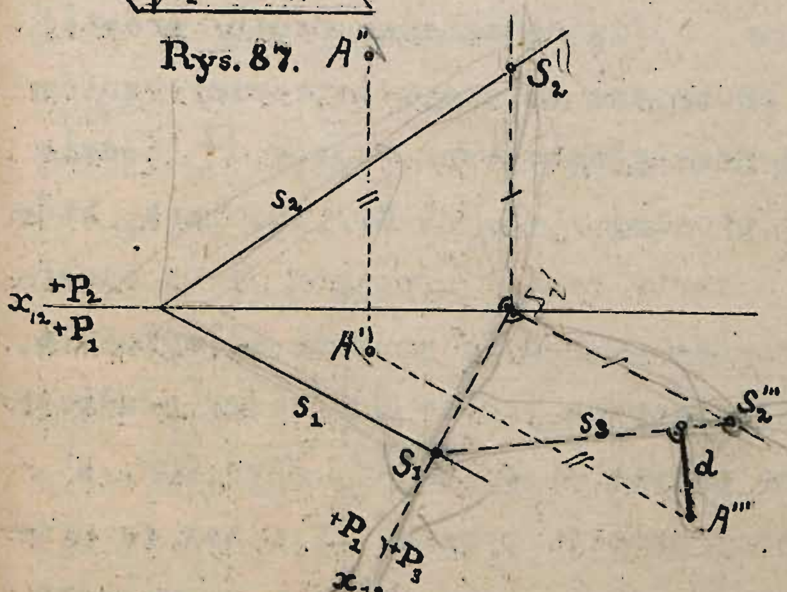


Rys. 86.



Rys. 87.

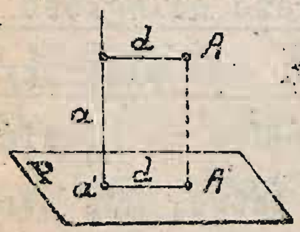
__ZADANIE. Znaleźć odległość punktu $A'A''$ od płaszczyzny $s_1 s_2$.__ Zadanie to rozwiązuje się nader łatwo, gdy płaszczyzna S jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów np. do P_1 /Rys. 87/. Odległość punktu A od płaszczyzny S jest



Rys. 88.

wtedy równa odległości rzutu punktu A od śladu płaszczyzny S . Poprowadźmy tedy nową płaszczyznę rzutów P_3 prostopadłą do P_1 i do S , a więc prostopadłą do s_1 /Rys.88/; pierwszy ślad tej płaszczyzny będzie nową osią x_{13}. Znajdźmy trzeci rzut A''' punktu A oraz trzeci ślad s_3 płaszczyzny S ; odległość punktu A''' od śladu s_3 będzie szukaną odległością d .

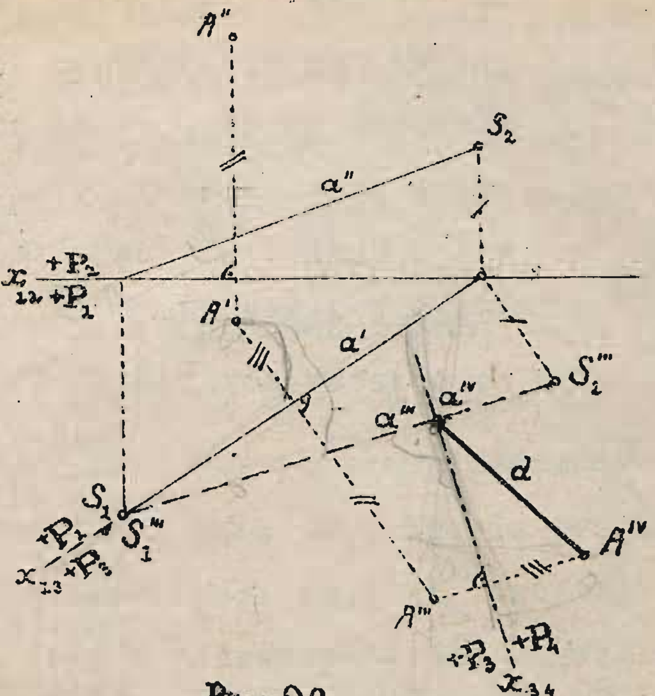
ZADANIE. Znaleźć odległość danego punktu $A'A''$ od danej prostej $a'a''$. Gdy dan prosta jest prostopadła do płaszczyzny rzutów /Rys.89/, wtedy odległość punktu A od niej równa jest odległości rzutu punktu A od śladu /a zarazem rzutu/ prostej a .



Rys. 89.

Otóż przez dwukrotną zmianę płaszczyzny rzutów można sprawić, że nowa płaszczyzna rzutów P_4 będzie prostopadła do danej prostej $a'a''$ /§ 25/. Odcinek, który łączyć będzie czwarty rzut A^{IV} punktu A z czwartym rzutem a^{IV} prostej a będzie szukaną odległością.

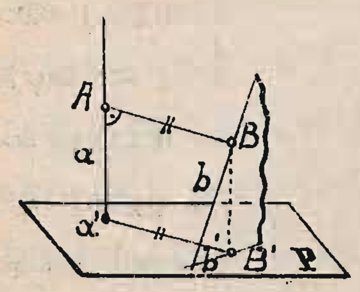
Za trzecią płaszczyznę rzutów P_3 weźmy płaszczyznę rzucającą daną prostą $a'a''$ na P_1 /Rys.90/, a więc za oś x_{13} weźmy rzut a' prostej a , tak że prosta a leżeć będzie w płaszczyźnie P_3 , przystająca do swego trzeciego rzutu a''' . Rzut ten znajdziemy łącząc pierwszy ślad S_1 /który jest zarazem swoim trze-



Rys.90.

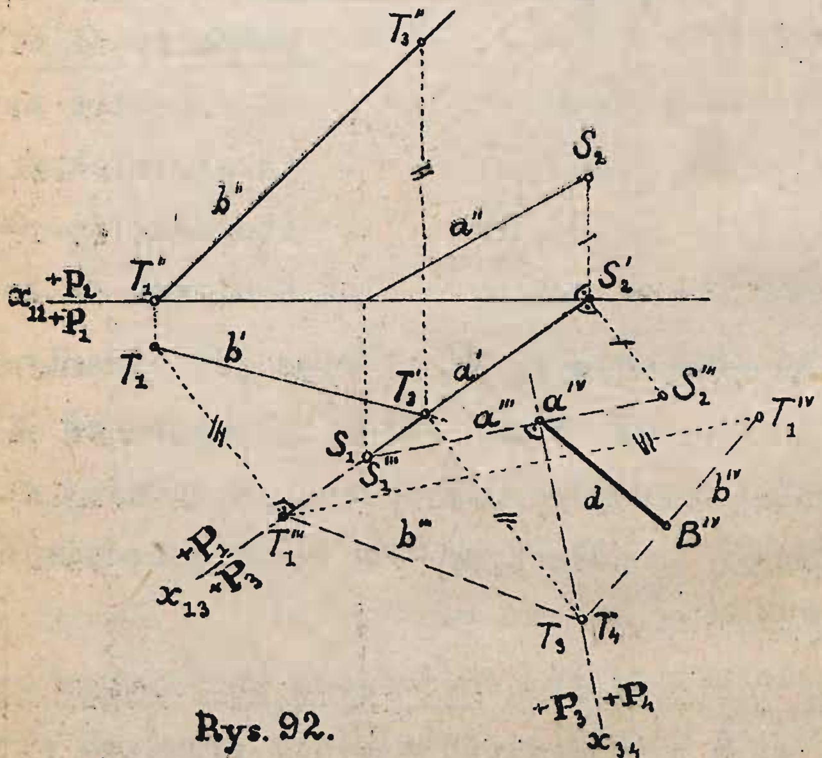
cim rzutem S_1''' / z trzecim rzutem drugiego śladu S_2'''. Za czwartą płaszczyznę rzutów P_4 weźmy jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do a'''; oś x_{34} będzie zatem jakąkolwiek prostopadłą do a'''. Ponieważ a leży w P_3 i jest prostopadła do P_4, więc jej czwartym rzutem a^{IV} jest punkt, w którym a''' przecina oś x_{34}. Znalazszy według znanej reguły trzeci, a później czwarty rzut punktu A, połączymy $A^{IV}a^{IV}$; będzie to szukana odległość d.

ZADANIE. Znaleźć odległość dwóch prostych skośnych $a'a''$ i $b'b''$. Odległością dwóch prostych skośnych nazywamy najkrótszy z pośród odcinków, które łączą punkt jednej prostej z punktem drugiej. Łatwo okazać, że taki odcinek musi być prostopadły do każdej z dwóch danych prostych. Niech bowiem odcinek AB, który łączy punkt A prostej a z punktem B prostej



Rys.91.

b będzie najkrótszy. Przypuśćmy, że nie jest on prostopadły do α, wtedy odcinek prostopadłej spuszczonej z punktu B na α byłby krótszy od AB, co przeczyłoby założeniu.



Rys. 92.

Wyznaczenie odległości dwóch prostych skośnych jest nader łatwe, gdy jedna z danych prostych np. α jest prostopadła do płaszczyzny rzutów P /Rys.91/.

W samej rzeczy, każdy odcinek prostopadły do α jest wtedy równoległy do płaszczyzny rzutów.

Rzut każdego odcinka prostopadłego do α, którego jeden koniec leży na a, a drugi na b, jest temu odcinkowi równy i łączy rzut a' prostej a z tym lub owym punktem rzutu b' prostej b. Najkrótszy więc z tych odcinków będzie ten, który jest prostopadły do b'.

Niech będą dane rzuty $a'a''$ i $b'b''$ dwuch prostych skośnych a i b /Rys.92/. Za trzecią płaszczyznę rzutów P_3 obieramy płaszczyznę rzucającą prostą a na P_1, osią x_{13} będzie przeto rzut a' prostej a. Wyznaczmy trzeci rzut a''' prostej a. Ponieważ ta prosta leży w płaszczyźnie P_3, więc jej pierwszy ślad S_1 jest zjednoczony ze swym trzecim rzutem S_1'''; połączywszy go z trzecim rzutem drugiego śladu S_2''' otrzymamy a'''. Aby otrzymać trzeci rzut prostej b łaczymy trzecie rzuty dwuch dowolnych jej punktów. Za takie punkty możemy obrać np. ślad pierwszy T_1 i ślad trzeci T_3. Pierwszy rzut T_3' punktu T_3 jest oczywiście przecięciem rzutu b' z nową osią $x_{13} \equiv a'$. Trzeci jego rzut, czyli sam ślad T_3 otrzymamy odmierzając na prostopadłej wystawionej do x_{13} w punkcie T_3' odcinek równy co do wielkości i znaku odległości zbytecznego rzutu T_3'' od dawnej osi x_{12}. - Trzeci rzut T_1''' śladu T_1 leżeć będzie na nowej osi w spodku prostopadłej spuszczonej na nią z T_1.

Za czwartą płaszczyznę rzutów P_4 obierzmy płaszczyznę prostopadłą do a'''; nową osią x_{34} będzie jakakolwiek prostopadła do a'''. Najdogodniej poprowadzić ją przez ślad T_3 prostej b, gdyż wtedy w tym samym punkcie będzie leżał również czwarty ślad T_4 prostej b. Spuszczając z punktu T_1''' prostopadłą na nową oś x_{34} i odmierzając na niej od punktu przecięcia jej z tą osią odcinek równy co do wielkości i znaku odległości zbytecznego rzutu T_1 od dawnej osi x_{13} znajdziemy czwarty rzut T_1^{IV} śladu T_1. Prosta $T_4 T_1^{IV}$ jest czwartym rzutem b^{IV} prostej b.

Ponieważ prosta a leży w płaszczyźnie P_3 i jest prostopadła do P_4, więc jej czwarty rzut a^{IV} jest punktem, w którym a''' przecina oś x_{34}. Długość odcinka prostopadłej spuszczonej z punktu a^{IV} na prostą b^{IV} jest równa odległości prostych skośnych a i b.

ROZDZIAŁ III.

OBROTY I KŁADY.

§ 28. Ruch obrotowy. Zmiana płaszczyzn rzutów miała na celu nadanie figurze przestrzennej innego położenia względem płaszczyzn rzutów. Cel ten może być