czywiste, jak urojone .-

ROZDZIAŁ XIII.

Kolineacja i biegunowość .

§ 147. Perspektywiczność dwóch układów płaskich .

Rzucając figurę F , leżącą w płaszczyźnie S na płaszczyznę P z punktu O , nieleżącego na żadnej z tych płaszczyzn , otrzymujemy figurę F_1 , która z figurą F znajduje się w pewnym związku geometrycznym, polegającym na tem, że

1/ Każdemu punktowi figury F odpowiada jeden jedyny punkt figury F_1 i nawzajem, każdemu punktowi figury F_1 odpowiada jeden jedyny punkt figury F.

2/ Każdej prostej figury F odpowiada jedna jedyna prosta figury F_1 i nawzajem , każdej prostej figury F_1 odpowiada jedna jedyna prosta figury F .

3/ Punktowi i prostej należącym do siebie w jednej z tych figur odpowiadają punkt i prosta drugiej figury, które również do siebie należą .

4/ Punkty odpowiednie leżą parami na prostych , przechodzących przez jeden punkt /mianowicie przez punkt O / i

5/ Proste odpowiednie przecinają się w punktach leżących na jednej prostej /mianowicie na prostej przecięcia s płaszczyzn S i P .

Oczywista, że każdy punkt i każda prosta płaszczyzny S mogą być zaliczone do figury F ; a każdy punkt i każda prosta płaszczyzny P mogą być zaliczone do figury F_1 . Tak rozszerzone pojęcia figur płaskich nazywają się <u>układami płaskiemi</u> F i F_1 . Związek geometryczny dwóch układów płaskich, leżących w różnych płaszczyznach, polegający na powyższych 5-ciu własnościach, nazywa się ich <u>perspektywicznością</u> ; o układach F i F_1 mówimy, <u>że są w perspektywie</u> . Z rozważań rozdziału poprzedniego wynika, że każdemu szeregowi lub pękowi jednego układu odpowiada perspektywiczny ; a więc i rzutowy z nim szereg , lub pęk drugiego układu . Prostej niewłaściwej q^∞ układu F odpowiada w układzie F_1 prosta q_1 , która wogóle jest właściwa; jest to ślad na płaszczyźnie P płaszczyzny prowadzonej przez punkt O równolegle do płaszczyzny S ; prostej niewłaściwej r_1^∞ układu F_1 odpowiada w układzie F prosta r , która jest śladem na płaszczyźnie S płaszczyzny poprowadzonej przez punkt O równolegle do płaszczyzny P .

<u>§ 148. Kolineacja środkowa dwóch układów płaskich.</u>

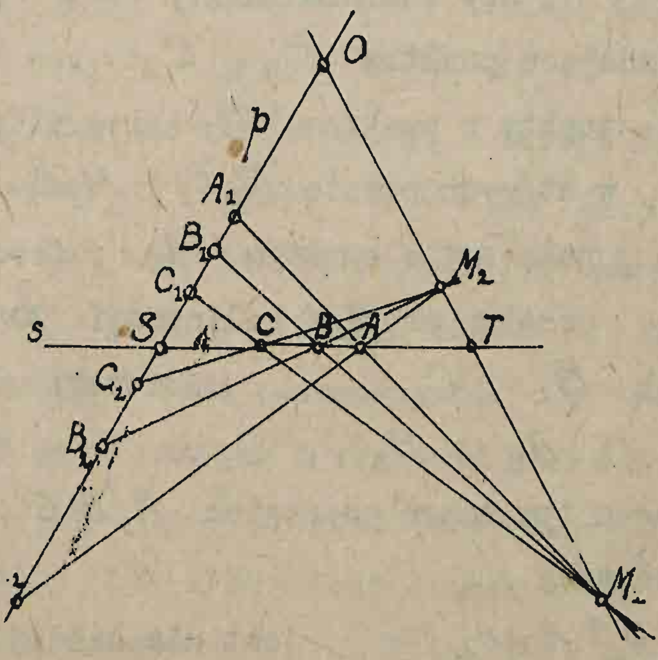
Jeżeli układ płaski F rzucimy z dwóch różnych punktów O_1 i O_2 na tę samą płaszczyznę P to otrzymamy w tej płaszczyźnie dwa układy płaskie F_1 i F_2, które są w związku scharakteryzowanym przez te same 5 własności wymienionych w artykule poprzednim. Związek ten nazywamy kolineacją środkową układów F_1 i F_2 /§§ 82 - 86/. Środkiem tej kolineacji jest punkt O, w którym prosta $O_1 O_2$ przebija płaszczyznę P; przez ten punkt przechodzą wszystkie proste łączące punkty odpowiednie dwóch układów A_1 i A_2; B_1 i B_2..... ; osią tej kolineacji jest ślad s płaszczyzny S układu F na płaszczyźnie P; na prostej s leżą wszystkie punkty przecięcia prostych odpowiednich dwóch układów : a_1 i a_2; b_1 i b_2... . Każde dwa szeregi odpowiednie, których podstawy nie przechodzą przez środek kolineacji O, są perspektywiczne, a więc i rzutowe; środkiem ich perspektywy jest punkt O; - każde dwa pęki odpowiednie, których wierzchołki nie leżą na osi kolineacji s, są perspektywiczne, a więc i rzutowe; - osią ich perspektywy jest prosta s. Środek kolineacji O oraz wszystkie punkty osi kolineacji s odpowiadają same sobie; oś kolineacji oraz wszystkie proste, przechodzące przez środek kolineacji O /promienie kolineacji/ odpowiadają same sobie . Prostej niewłaściwej q_1^∞ układu F_1 odpowiada prosta q_2 ; prostej niewłaściwej r_2^∞ układu F_2 odpowiada prosta r_1 ; proste q_2 i r_1 nazywają się osiami wzajemnemi ; są one równoległe do osi kolineacji s i mają tę własność, że odległość jednej z nich od środka kolineacji i odległość drugiej od osi kolineacji są odcinkami równej długości i przeciwnego zwrotu /§ 85/ .

Jeżeli jeden z dwóch punktów O_1 i O_2 , z których rzucamy układ F , np. punkt O_2 jest kierunkiem prostopadłym do płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego między płaszczyznami P i S to rzut F_2 układu F z tego punktu jest kładem układu F na płaszczyznę P dokoła śladu s .

Z dwóch układów leżących w kolineacji środkowej można zawsze jeden którykolwiek z nich uważać za kład układu , którego rzutem jest drugi .

Kolineacja środkowa jest wyznaczona przez swój środek O , swoją oś s i jedną parę punktów odpowiednich A_1 i A_2 , leżących na prostej przechodzącej przez środek O ; albo przez jedną parę prostych odpowiednich a_1 i a_2 przecinających się w punkcie , leżącym na osi s . W szczególności kolineacja środkowa będzie wyznaczona przez środek O oś s i jedną z osi wzajemnych q_2 lub r_1 / § 85/ .

Pary punktów odpowiednich A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ; C_1 i C_2 ; leżących na tym samym promieniu kolineacji p /Rys. 290/ tworzą dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p : $p(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge \barwedge p(A_2 B_2 C_2 \ldots)$. Środek kolineacji O i punkt S , w którym promień kolineacji p przecina oś kolineacji, są punktami tych szeregów.



Rys. 290

- W samej rzeczy, niechaj kolineacja środkowa będzie dana przez swój środek O , oś s i dwa punkty odpowiednie A_1 i A_2 , leżące na prostej p , przechodzącej przez punkt O . Aby wyznaczyć punkty B_2 , C_2 .... , odpowiadające w tej kolineacji punktom B_1 , C_1 .... prostej

p ; obierzmy najpierw punkt jakikolwiek M_1 , nie leżący ani na osi s ; ani na prostej p i wyznaczmy punkt odpowiedni M_2 . W tym celu połączmy punkty A_1 i M_1 ; i punkt A ; w którym prosta A_1M_1 przecina oś s ; połączmy z punktem A_2 ; prosta AA_2 przetnie promień kolineacji OM ; w szukanym punkcie M_2 . Aby znaleźć punkty B_2 , C_2 .... odpowiadające punktom B_1 , C_1 .... połączmy te ostatnie punkty z punktem M_1 i punkty B ; C .... ; w których proste M_1B_1 ; M_1C_1 ... przecinają oś s ; połączmy z punktem M_2 ; proste M_2B ; M_2C ... przetną promień kolineacji p w szukanych punktach B_2 ; C_2 .... . Szeregi ; A_1 , B_1 , C_1 ... i A_2 ; B_2 , C_2 ... są więc perspektywiczne z tym samym szeregiem A, B, C ... a więc są rzutowe ze sobą .

Dwustosunek $(O\,S\,A_1\,A_2)$ jest dla każdej kolineacji środkowej liczbą stałą t.j. niezależną ani od prostej p , na której leżą oba punkty A_1 i A_2 ani od położenia samych tych punktów na prostej p . W samej rzeczy, oznaczywszy literą T punkt, w którym prosta OM_1M_2 przecina oś kolineacji i zważywszy, że dla każdych dwóch punktów odpowiednich A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ... istnieje punkt osi A ,

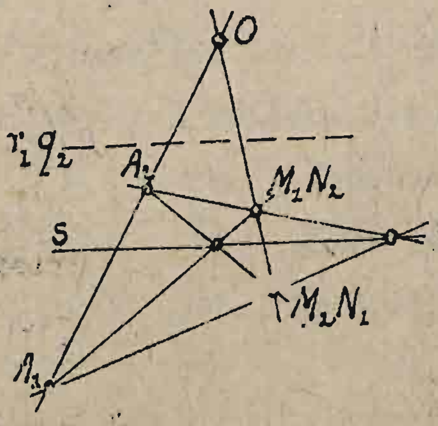
B .... który jest środkiem perspektywy czwórek OSA_1A_2 i OTM_1M_2 ; OSB_1B_2 i OTM_1M_2 .....

mamy $(OSA_1A_2)=(OSB_1B_2)=(OTM_1M_2)$

Wartość λ tego dwustosunku nazywa się <u>cechą</u> kolineacji środkowej ,- jest to wartość stosunku, w którym oś wzajemna r_1 dzieli odległość środka O od osi s /gdyż $(OSR_1R_2^\infty = \frac{OR_1}{SR_1}$ /,albo w którym oś wzajemna q_2 dzieli odległość osi s od środka O /gdyż $(OSQ_1^\infty Q_2 = \frac{SQ_2}{OQ_2}$ /.

Tak samo dowiedlibyśmy , że pary prostych odpowiednich a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , c_1 i c_2 , wychodzących z tego samego punktu S osi kolineacji tworzą dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku $S: S(a_1b_1c_1 ...) \barwedge S(a_2b_2c_2 ...)$ przytem dwustosunek (psa_1a_2) , gdzie $p \equiv OS$ jest liczbą stałą, równą zresztą tej samej liczbie λ , która jest wartością dwustosunku (OSA_1A_2) .

Jeżeli cecha kolineacji środkowej $\lambda = -1$, to ta kolineacja nazywa się <u>inwolucyjną</u> . Na każdym promieniu kolineacji punkty odpowiednie A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ... są wówczas sprzężone inwolucyjnie, tak że każdemu punktowi P odpowiada jeden jedyny punkt, niezależny od tego, czy punkt P zaliczymy do układu F_1 czy do układu F_2 .- Podobnież pary prostych odpowiednich a_1 i a_2; b_1 i b_2... ,wychodzących z tego samego punktu S osi , są w inwolucji, tak że każdej prostej p odpowiada jedna jedyna prosta, niezależna od tego, do którego układu tamtą prostą zaliczymy. W szczególności, prostej niewłaściwej odpowiada jedna jedyna oś wzajemna $q_2 \equiv r_1$, która leży pośrodku między środkiem a osią kolineacji .- Każde dwie pary punktów odpowiednich tworzą czworokąt zupełny /Rys.291/, którego jeden punkt przekątny jest środkiem, a drugi leży na osi kolineacji; każde dwie pary prostych odpowiednich tworzą czworobok zupełny, którego jedna przekątna jest osią , a druga przechodzi przez środek kolineacji .- Dwa układy płaskie w kolineacji inwolu-



Rys.291.

cyjnej stanowią właściwie jeden jedyny układ płaski, którego zarówno punkty, jak proste są parami sprzężone.

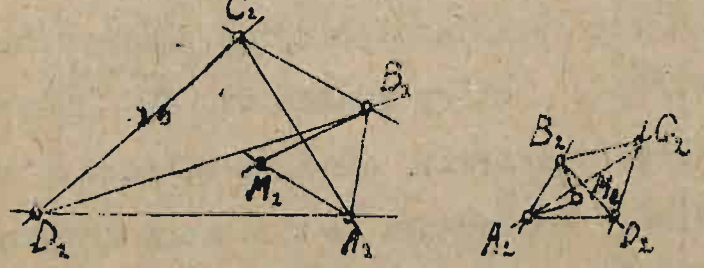
§ 149. Kolineacja ogólna dwóch układów płaskich.

Niech będą dwa układy płaskie F_1 i F_2, spełniające wszystkie 5 warunków § 147, a więc perspektywiczne, jeżeli nie leżą w jednej płaszczyźnie, lub w kolineacji środkowej, jeżeli leżą w jednej płaszczyźnie. Nie tykając jednego z tych układów, przenieśmy drugi w dowolny sposób; z 5 warunków, którym te układy czyniły zadość, ostatnie dwa nie będą wogóle w nowem położeniu tych układów spełnione, podczas gdy pierwsze trzy pozostaną w swej mocy, nie ustanie również rzutowość odpowiednich czwórek szeregów i pęków. O układach takich mówimy wciąż jeszcze, że są w kolineacji, która jednak nie będzie już wogóle środkową; ta ostatnia jest przypadkiem szczególnym owej kolineacji ogólnej.

Do kolineacji ogólnej dwóch układów płaskich możemy dojść na innej jeszcze drodze. Niech będą dwa układy perspektywiczne F_1 i F_2; rzucając jeden z nich np. F_2 z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę, otrzymamy układ F_3, który z układem F_1 nie będzie już wogóle w perspektywie, choć pozostanie z nimi w kolineacji ogólnej. Kolineacja ta zostanie zresztą zachowaną po dowolnej ilości kolejnych rzutów każdego z układów F_1 i F_2. - Podobnież, wychodząc z dwóch układów F_1 i F_2, znajdujących się w kolineacji środkowej i przekształcając środkowo-koalicyjnie w dowolny sposób jeden lub oba układy F_1 i F_2, otrzymamy nowe układy, które będą ze sobą w kolineacji ogólnej.

Kolineacja ogólna jest wyznaczona przez 4 pary punktów albo 4 pary prostych odpowiednich w tem zastrzeżeniem, żeby żadne 3 z tych punktów w żadnym układzie nie leżały na jednej prostej; względnie aby żadne 3 z tych prostych w żadnym układzie nie przechodziły przez jeden punkt.

Innemi słowy, kolineacja ogólna jest wyznaczona przez odpowiedniość dwóch czworokątów lub dwóch czworoboków zupełnych. W samej rzeczy, niech będą np. dwa czworokąty zupełne $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$, leżące w jednej lub w różnych płaszczyznach /Rys.292/; jeżeli założymy, że punktom A_1, B_1, C_1 i D_1, I układu odpowiadają punkty A_2, B_2, C_2 i D_2 II układu, to



Rys. 292.

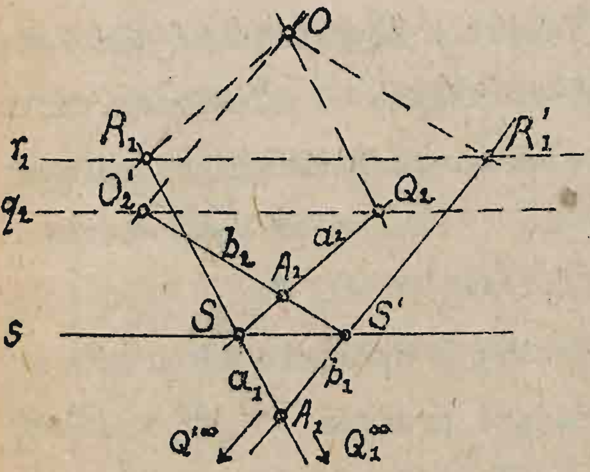
każdemu punktowi M_1 leżącemu w płaszczyźnie czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ i zaliczonemu do I układu odpowiada jeden jedyny punkt M_2, leżący w płaszczyźnie czworokąta $A_2B_2C_2D_2$ i należący do układu II. Połączmy punkt M_1 z dwoma którymikolwiek wierzchołkami czworokąta $A_1B_1C_1D_1$ np. z A_1 i B_1. Punkty te będą wierzchołkami dwóch czwórek $A_1(B_1C_1D_1M_1)$ i $B_1(A_1C_1D_1M_1)$. Wyznaczmy w układzie II proste A_2M_2 i B_2M_2 odpowiadające prostym A_1M_1 i B_1M_1 w czwórkach rzutowych

$$A_1(B_1C_1D_1M_1) \overline{\wedge} A_2(B_2C_2D_2M_2) \text{ i}$$
$$B_1(A_1C_1D_1M_1) \overline{\wedge} B_2(A_2C_2D_2M_2);$$

punkt przecięcia M_2 prostych A_2M_2 i B_2M_2 będzie odpowiadał punktowi M_1, który jest przecięciem prostych odpowiednich A_1M_1 i B_1M_1.

Każde dwa układy F_1 i F_2, znajdujące się w kolineacji ogólnej, można zawsze przez odpowiednie przesunięcie jednego z nich sprowadzić do kolineacji środkowej.

Zanim rozwiążemy to zagadnienie, zauważmy, że gdy dwa układy F_1 i F_2 są w kolineacji środkowej /Rys. 393/ to trójkąt $A_1R_1R_1'$, który tworzą dwie jakiekolwiek proste a_1 i b_1, I układu z osią wzajemną r_1, jest podobny do trójkąta OQ_2Q_2', który tworzy środek kolineacji O z punktami wzajemnemi Q_2 i Q_2' ;



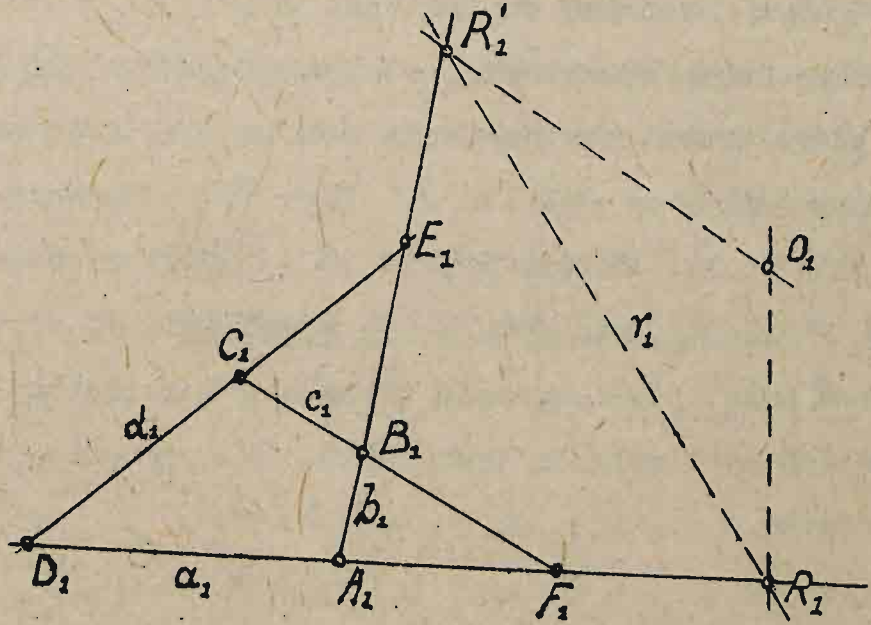
Rys.293 .

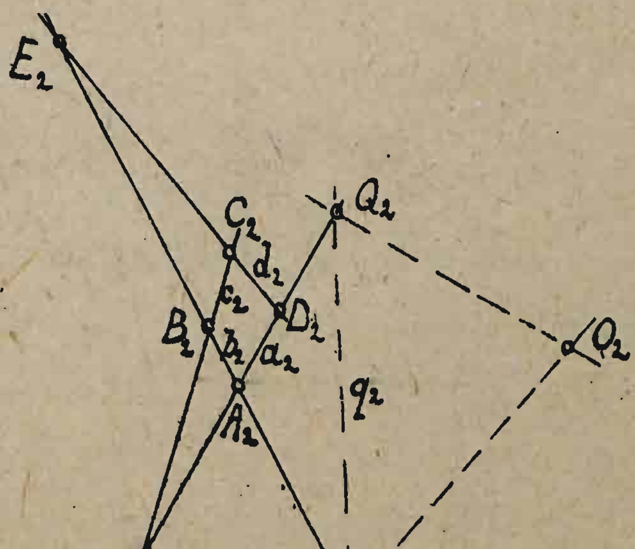
odpowiadającemi w układzie II punktom niewłaściwym Q_1^∞ i $Q_1'^\infty$ prostych a_1 i b_1. Tak samo oczywiście podobne będą trójkąty $A_2Q_2Q_2'$ i OR_1R_1' .Niech będzie teraz kolineacja ogólna dwóch układów F_1 i F_2 , wyznaczona np. przez czworoboki zupełne $a_1b_1c_1d_1$ i $a_2b_2c_2d_2$ /Rys.294/.

Wyznaczmy na bokach a_1 i b_1 punkty wzajemne R_1 i R_1' i na bokach a_2 i b_2 punkty wzajemne Q_2 i Q_2' za pomocą czwórek rzutowych

$$A_1D_1F_1R_1 \barwedge A_2D_2F_2R_2^\infty$$
$$A_1B_1E_1R_1' \barwedge A_2B_2E_2R_2'^\infty$$
$$A_2D_2F_2Q_2 \barwedge A_1D_1F_1Q_2^\infty$$
$$A_2B_2E_2Q_2' \barwedge A_1B_1E_1Q_1'^\infty$$

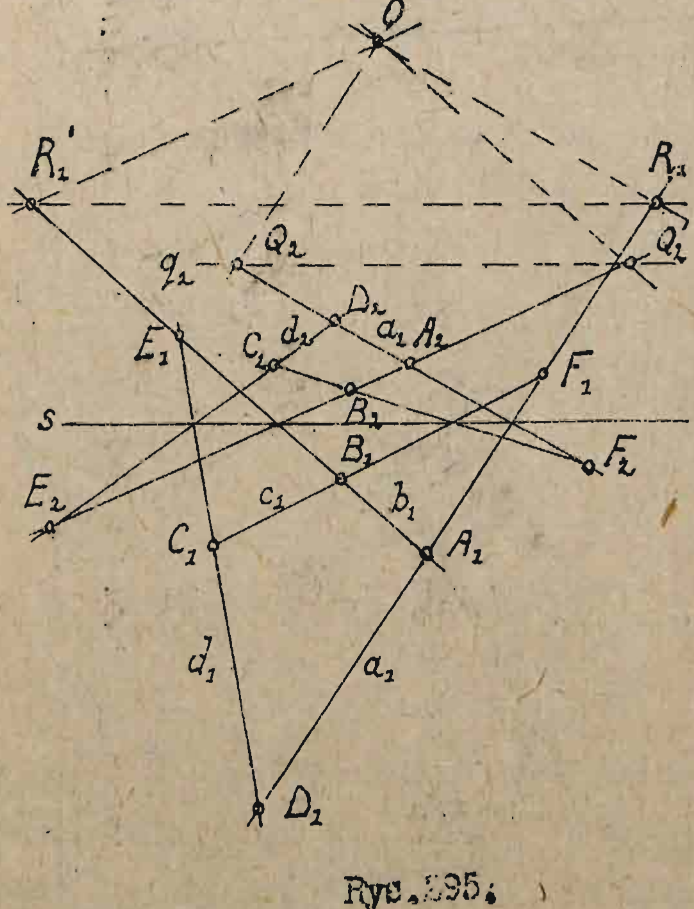
Proste R_1R_1' i Q_2Q_2' będą osiami wzajemnemi r_1 i q_2 układów F_1 i F_2 ; budując na odcinku R_1R_1' trójkąt $O_1R_1R_1'$ podobny do trójkąta $A_2Q_2Q_2'$


R_1'
E_1
O_1
r_1
C_1
c_1
d_1
B_1
b_1
D_1
a_1
A_1
F_1
R_1


E_2
Q_2
C_2
d_2
c_2
D_2
B_2
b_2
a_2
O_2
q_2
A_2
F_2
Q_2'

Rys.294.

/co można zrobić dwoma sposobami/ a na odcinku $Q_2 Q_2'$ trójkąt $O_2 Q_2 Q_2'$ podobny do trójkąta $A_1 R_1 R_1'$ / co możliwe także dwoma sposobami/, otrzymamy punkty O_1 i O_2 , które przez przeniesienie układu F_2 doprowadzamy do przystania w punkcie O /Rys.295/. Obracajmy teraz układ F_2 dokoła punktu O dopóty dopóki prosta $q_2 \equiv Q_2 Q_2'$ nie stanie się równoległą do prostej $r_1 \equiv R_1 R_1'$; układy będą natenczas w kolineacji środkowej, której środkiem jest punkt O , a osią pro-



Rys.295.

stą S , poprowadzona równolegle do osi wzajemnych r_1 i q_2 tak, aby odległość jej od jednej z tych prostych była odcinkiem równej odległości i przeciwnego zwrotu, niż odległość drugiej od środka O . Ponieważ zarówno punkt O_1 jak punkt O_2 może być wyznaczony dwoma sposobami, więc zagadnienie ma 4 rozwiązania .

§ 150. Korelacja dwóch układów płaskich . Kolineacja ogólna dwóch układów płaskich naprowadza nas na nowy związek geometryczny dwóch układów płaskich zwany korelacją , a polegający na następujących własnościach:

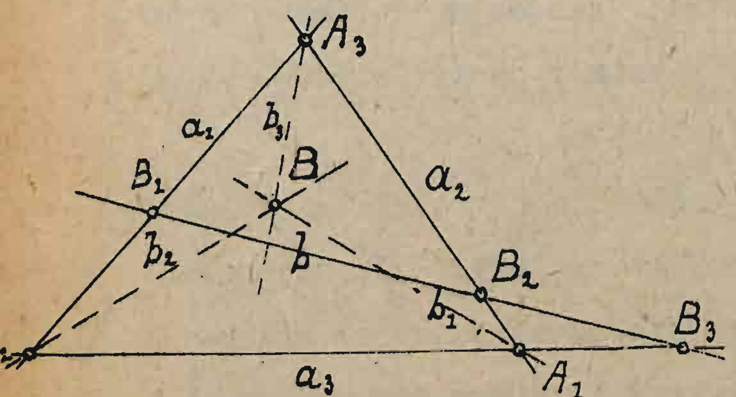
1/. Każdemu punktowi układu F_1 , odpowiada jedna jedyna prosta układu F_2 ; każdej prostej układu F_1 odpowiada jeden jedyny punkt układu F_2 i nawzajem .

2/. Punktowi i prostej, należącym do siebie w jednym układzie , odpowiada prosta i punkt drugiego układu, które również do siebie należą .

3/ Każdej czwórce punktów jednego układu odpowiada czwórka prostych drugiego, która jest z nią rzutowa i nawzajem ; wogóle każdemu szeregowi punktów jednego układu odpowiada pęk prostych drugiego i nawzajem .

"Korelacja" taka będzie wyznaczona przez założenie odpowiedniości wzajemnej 4 punktów jakichkolwiek I układu A_1 , B_1 , C_1 i D_1 , z 4 prostemi drugiego układu a_2 , b_2 , c_2 i d_2 z tem jedynem zastrzeżeniem, żeby z tych 4 punktów żadne 3 nie leżały na jednej prostej, ani z tych 4 prostych żadne 3 nie przechodziły przez jeden punkt ; innemi słowy przez założenie odpowiedniości czworokąta zupełnego $A_1 B_1 C_1 D_1$ z czworobokiem zupełnym $a_1 b_1 c_1 d_1$.

§ 151. Układ biegunowy. Niech będzie trójkąt $A_1 A_2 A_3$ /którego boki oznaczymy literami : $a_1 \equiv A_2 A_3$ $a_2 \equiv A_3 A_1$ i $a_3 \equiv A_1 A_2$ /, punkt jakikolwiek B nie leżący na żadnym z boków i prosta b nie przechodząca przez żaden z wierzchołków tego trójkąta /Rys.296/. Na mocy poprzedniego artykułu odpowiedniość punktów A_1, A_2, A_3 i B i prostych a_1, a_2, a_3 i b wyznacza korelację dwóch układów płaskich, leżących w tej samej płaszczyźnie. Korelacja ta ma tę własność, że każdemu punktowi tej płasz-



Rys. 296 .

czyzny odpowiada zawsze ta sama prosta; a każdej prostej ten sam punkt, niezależnie od tego, do którego układu tamten punkt albo tamta prosta zaliczymy .

Przedewszystkiem własność ta dotyczy punktów A_1 A_2 ; A_3 ; B i prostych a_1 ; a_2 , a_3 ; b. Jeżeli zaliczymy punkty A_1 ; A_2 ; A_3 i B do I układu; to na mocy założenia odpowiadają im proste a_1 ; a_2 ; a_3 i b . Jeżeli te punkty zaliczymy do II układu ; uważając je za przecięcia prostych a_2 i a_3 ; a_3 i a_1 ; a_1 i a_2 ; A_1B i A_2B to odpowiadać tym punktom będą w I układzie proste łączące punkty A_2 i A_3 ; A_3 i A_1 ; A_1 i A_2 ; a_1b i a_2b ; a więc te same proste a_1 ; a_2 , a_3 i b .

Stąd wynika; że tę samą własność posiadać będą punkty B_1 ; B_2 i B_3 , w których prosta b przecina boki a_1 ; a_2 i a_3 trójkąta $A_1A_2A_3$; oraz proste b_1 ; b_2 i b_3 ; które łączą punkt B z jego wierzchołkami A_1 ; A_2 i A_3 . Skoro bowiem punktom A_1 , A_2 , A_3 i B odpowiadają w obu układach te same proste a_1, a_2 ; a_3 i b ; to prostym $A_1B \equiv b_1$; $A_2B \equiv b_2$; $A_3B \equiv b_3$ odpowiadać muszą w obu układach te same punkty $a_1b \equiv B_1$ $a_2b \equiv B_2$ i $a_3b \equiv B_3$.

Tę samą własność rozszerzymy teraz na wszystkie punkty, leżące na którejkolwiek prostych a_1, a_2, a_3 i b i na wszystkie proste przechodzące przez którykolwiek z punktów A_1, A_2, A_3 i B. Ponieważ bowiem punktom A_2, A_3 i B_1, odpowiadają w obu układach te same proste a_2, a_3 i b_1, więc każdemu punktowi M_1 prostej a_1 odpowiadać będzie w obu układach ta sama prosta m_1, przechodząca przez punkt A_1 w ten sposób, aby

$$a_1(A_2 A_3 B_1 M_1) \barwedge A_1(a_2 a_3 b_1 m_1);$$

Wreszcie tę samą własność posiadać będą wszystkie inne punkty i proste płaszczyzny. Połączmy np. punkt P, nie leżący na żadnej z prostych a_1, a_2, a_3 i b z punktami A_1 i A_2 prostemi p_1 i p_2; ponieważ na mocy poprzedniego ustępu, prostym tym w obu układach odpowiadają te same punkty P_1 i P_2, z których pierwszy leży na prostej a_1, a drugi na prostej a_2, więc punktowi P odpowiadać musi w obu układach ta sama prosta $P_1 P_2 \equiv p$.

Te dwa układy korelacyjne można przeto uważać za jeden jedyny układ płaski, w którym zachodzi wzajemne podporządkowanie punktów prostym prostym punktom. Układ taki nazywamy __biegunowym__; prosta p, podporządkowana punktowi P, nazywa się jego __biegunową__;

punkt P podporządkowany prostej p nazywa się jej biegunem.

Ponieważ punktowi i prostej należącym do siebie podporządkowane są prosta i punkt również do siebie należące, więc mamy twierdzenia :

Jeżeli punkt C leży na biegunowej punktu B, to biegunowa punktu C przechodzi przez punkt B.

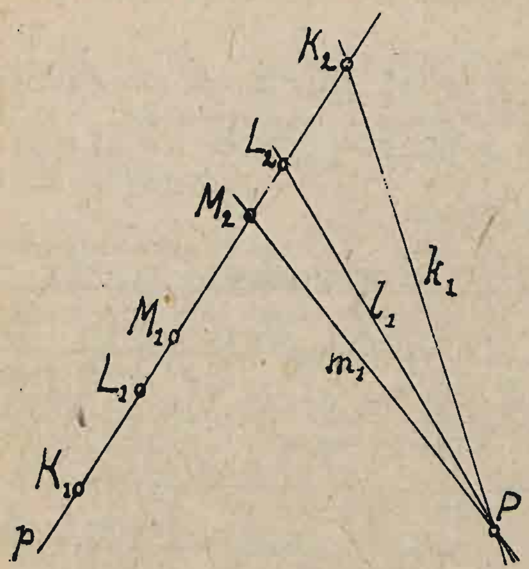
Jeżeli prosta c przechodzi przez biegun prostej b, to biegun prostej c leży na prostej b.

Stąd zaś wynika, że biegunowa punktu przecięcia prostych m i n jest prosta łącząca ich bieguny M i N i nawzajem biegunem prostej, łączącej punkty M i N jest punkt przecięcia ich biegunowych m i n.

§ 152. Punkty i proste sprzężone. Inwolucja biegunowa. Proste b i c, mające tę własność, że biegun jednej z nich leży na drugiej /a wtedy biegun drugiej leży na pierwszej/, nazywają się prostemi biegunowo sprzężonemi; punkty B i C, z których jeden leży na biegunowej drugiego /a wtedy drugi leży na biegunowej pierwszego/, nazywają się punktami biegunowo sprzężonemi.

Niechaj będzie szereg punktów K_1, L_1, M_1... na podstawie p /Rys.297/; biegunowe tych punktów

k_1 ; l_1 ; m_1.. przechodzić będą wszystkie przez biegun prostej p ; oznaczmy literami K_2 ; L_2 ; M_2 .... punkty; w których proste k_1 ; l_1 , m_1 .... przecinają prostą p. Ponieważ



Rys.297.

$$p(K_1 L_1 M_1 \ldots) \barwedge$$
$$\barwedge P(k_1 l_1 m_1 \ldots) \overline{\barwedge}$$
$$\overline{\barwedge}\ p(K_2 L_2 M_2 \ldots)$$
więc $p(K_1 L_1 M_1 \ldots) \barwedge$
$$\barwedge p(K_2 L_2 M_2 \ldots)$$

Łatwo okazać, że każde dwa punkty odpowiednie tych szeregów rzutowych na wspólnej podstawie odpowiadają sobie podwójnie. Zaliczmy np. punkt K_2 do I szeregu ; punkt odpowiedni znajdziemy w przecięciu prostej p z biegunową punktu K_2 ; ale na mocy I twierdzenia poprzedniego artykułu biegunowa punktu K_2 przechodzi przez biegun prostej k_1 , to jest przez punkt K_1 ; w ten sposób punkty K_1 i K_2 odpowiadają sobie podwójnie skąd już wynika , że <u>każde</u> dwa punkty odpowiednie L_1 i L_2 , M_1 i M_2 ... odpowiadają sobie podwójnie, tak że dwa szeregi rzutowe

$p(K_1L_1M_1K_2L_2M_2 \ldots)$ i $p(K_2L_2M_2K_1L_1M_1 \ldots)$ stanowią inwolucję punktów /§ 142 / . Mamy więc twierdzenie :

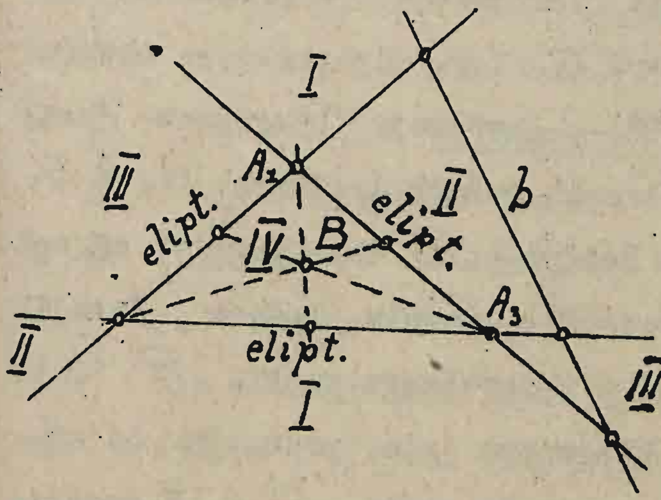
W układzie biegunowym na każdej prostej punkty biegunowo sprzężone stanowią inwolucję i wzajemnie : dokoła każdego punktu proste sprzężone biegunowo stanowią inwolucję . W ten sposób , układ biegunowy wyznacza na każdej prostej i dokoła każdego punktu pewną inwolucję , zwaną inwolucją biegunową ; tak że punkty lub proste sprzężone biegunowo są zarazem sprzężone w inwolucji biegunowej .

§ 153. Trójkąty biegunowe . Ponieważ proste a_1 a_2 i a_3 są biegunowemi punktów A_1 , A_2 i A_3 , więc każde dwie z tych prostych i każde dwa z tych punktów są ze sobą biegunowo sprzężone . Trójkąt $A_1A_2A_3$ ma tę osobliwość , że każdy jego wierzchołek jest biegunem przeciwległego mu boku , zarówno jego wierzchołki , jak i jego boki są sprzężone . Trójkąt taki nazywamy trójkątem biegunowym . Trójkątów biegunowych jest nieskończenie wiele . Dla otrzymania któregokolwiek z nich postępujemy , jak następuje : Obieramy dowolnie punkt M ; znajdujemy jego biegunową m ; na prostej m obieramy dowolnie punkt N i znajdujemy jego biegunową

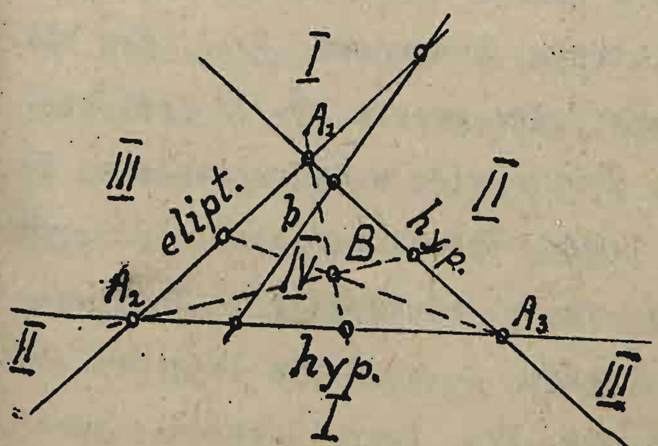
n , która na mocy twierdzenia § 151 przejdzie przez punkt M , wreszcie łączymy punkty M i N prostą p ; będzie to na zasadzie § 751 biegunowa punktu P , w którym się przecinają proste m i n . Trójkąt MNP będzie trójkątem biegunowym . Oczywiście ten sam układ biegunowy , który określiliśmy zapomocą trójkąta biegunowego $A_1A_2A_3$, punktu B i jego biegunowej b , można określić zapomocą każdego innego trójkąta biegunowego MNP jakiegokolwiek punktu Q i jego biegunowej q .

<u>§ 154. UKŁADY BIEGUNOWE JEDNOSTAJNE I NIEJEDNOSTAJNE</u> . Niech będzie układ biegunowy , wyznaczony przez trójkąt biegunowy $A_1A_2A_3$ oraz biegunową b punktu dowolnego B , przytem punkt B nie leży na żadnym z boków , a prosta b nie przechodzi przez żaden z wierzchołków trójkąta $A_1A_2A_3$. Trójkąt ten dzieli płaszczyznę na 4 obszary, z których jeden tylko bywa skończony i nazywa się wtedy polem trójkąta , a trzy są nieskończone . /Rys.298 i 299/ . Ponieważ punkt B nie może leżeć na żadnym z boków trójkąta , więc musi on należeć tylko do jednego z 4 obszarów płaszczyzny , ponieważ prosta b nie może przechodzić przez żaden wierzchołek , więc musi ona przenikać do trzech obszarów , dla czwartego pozosta-

jąc obcą . Wobec tego względne położenie punktu B i prostej b może być tylko dwojakie: albo prosta b nie przenika do obszaru, w którym leży punkt B, t.j. nie przecina obwodu tego obszaru /Rys.298/ - albo prosta b przenika do obszaru, w którym znajduje się punkt B t.j. przecina obwód tego



Rys. 298.



Rys. 299.

obszaru /Rys.299/. Pierwszy przypadek zachodzi np. wtedy, gdy punkt B znajduje się w obszarze IV, t.j. wewnątrz trójkąta biegunowego, a prosta b nie przenika do obszaru IV, t.j. nie przecina obwodu tego trójkąta /Rys.298/. Inwolucja biegunowa jest wtedy na wszystkich trzech bokach trójkąta $A_1A_2A_3$ eliptyczna, gdyż na każdym boku dwa punkty sprzężone przegradzają wierzchołki na nim leżące. Jeżeli wyznaczymy biegunową p dowolnego punktu P, to się pokaże, że ta biegunowa nie przenika do obszaru, w którym się znajduje punkt P. W samej rzeczy, zauważmy, że rzut któregokolwiek wierzchołka trójkąta biegunowego z punktu P na bok przeciwległy oraz punkt, w którym biegunowa p ten bok przecina są sprzężone /gdyż prosta A_1P jest biegunową punktu a_1p /, - a więc w danym razie są te punkty na każdym z boków przez wierzchołki przegrodzone, ponieważ zaś rzuty wierzchołków leżą zawsze na obwodzie obszaru, w którym leży środek rzutów P, więc prosta p tego obwodu nie przetnie t.j. nie przeniknie do obszaru, zawierającego punkt P. Możemy więc twierdzić stanowczo, że w takim układzie biegunowym <u>nie istnieją punkty rzeczywiste, któreby leżały na włas-</u>

nych biegunowych .

Układ biegunowy taki nazywamy jednostajnym , albowiem inwolucja biegunowa jest wtedy na każdej prostej i dokoła każdego punktu jednego rodzaju , mianowicie eliptyczna .

Drugi przypadek będzie miał miejsce wtedy np. , gdy punkt B znajdzie się w obszarze IV , t.j. wewnątrz trójkąta biegunowego , a prosta b nie omienie tego obszaru , t.j. przetnie obwód trójkąta , przytem dwa jego boki zostaną przez nią przecięte wewnętrznie , a trzeci zewnętrznie /Rys. 299/ . Jest oczywistem , że inwolucja biegunowa na tych dwóch bokach , które są przecięte wewnętrznie przez prostą b , będzie hyperboliczna . Na pierwszych dwóch bokach istnieją zatem po dwa rzeczywiste punkty podwójne , t.j. sprzężone same ze sobą , a więc leżące na własnych biegunowych . Natomiast na trzecim boku trójkąta biegunowego nie istnieją punkty rzeczywiste , leżące na własnych biegunowych . Układ biegunowy tak określony nazywamy niejednostajnym , albowiem inwolucja przezeń wyznaczona na różnych prostych i dokoła różnych punktów nie jest jednego rodzaju .

§ 155. BIEGUN I BIEGUNOWA UROJONA . Jest oczywistem że biegunowe punktów jakiejkolwiek inwolucji na prostej p są prostemi pewnej inwolucji dokoła jej bieguna P . Jeżeli w szczególności inwolucja na prostej jest biegunową , to biegunowe punktów sprzężonych tej inwolucji stanowią inwolucję biegunową dokoła bieguna prostej .

Inwolucja biegunowa na dowolnej prostej jest perspektywiczna z inwolucja biegunowa dokoła tej prostej , jeżeli bowiem punkty K_1 i K_2 ; L_1 i L_2 ... stanowią pary punktów sprzężonych inwolucji biegunowej na prostej p , to ich biegunowe k_1 i k_2 ; l_1 i l_2 ... stanowiące pary prostych sprzężonych inwolucji biegunowej dokoła punktu P , przechodzą odpowiednio przez pary punktów sprzężonych K_2 i K_1 ; L_2 i L_1 .... inwolucji biegunowej na prostej p.

Prosta urojona $P(k'l'k''l''$ nazywa się biegunową punktu urojonego $p(K'L'K''L'')$ jeżeli P jest biegunem prostej p , a proste k' ; l' ; k'' ; l'' są biegunowemi punktów K' ; L' , K'' ; L'' . Punkt urojony

$p(K'L'K''L'')$ nazywa się wtedy biegunem prostej urojonej $P(k'l'k''l'')$. Nietylko więc rzeczywistym, ale i urojonym punktom i prostym można w danym układzie biegunowym podporządkować proste i punkty t.j. biegunowe i bieguny. -
W podobny sposób można określić punkty i proste biegunowo sprzężone, że 1/ na każdej prostej rzeczwistej układu biegunowego leżą dwa punkty sprzężone same ze sobą, t.j. leżące na własnych biegunowych; mogą one być rzeczywiste i odrębne, rzeczywiste i zjednoczone, lub urojone sprzężone, 2/ z każdego punktu rzeczywistego wychodzą dwie proste sprzężone same ze sobą, t.j. przechodzące przez własne bieguny; mogą one być rzeczywiste i odrębne, rzeczywiste i zjednoczone, lub urojone sprzężone.-

ROZDZIAŁ XIV.

STOŻKOWE I STOŻKI.

§ 156. Określenie stożkowych. Ogół punktów i prostych, rzeczywistych i urojonych, które w danym układzie biegunowym są sprzężone same ze sobą , nazywamy stożkową .

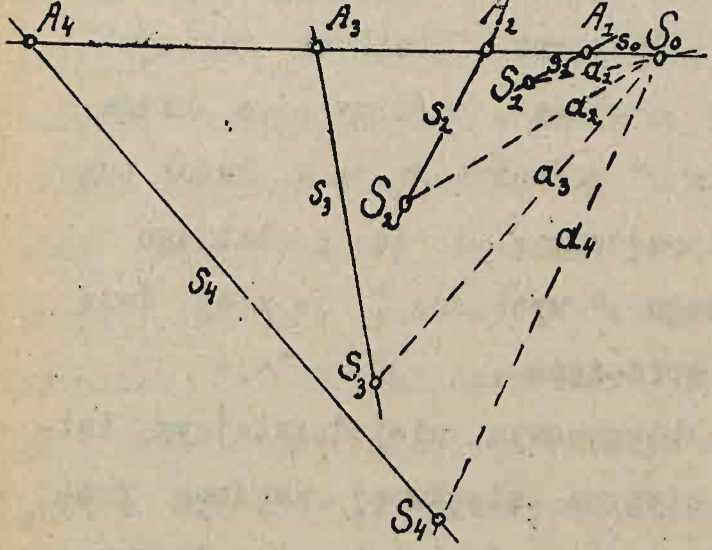
Punkty samosprzężone nazywamy punktami stożkowej tego układu ; przechodzące przez nie własne ich biegunowe nazywamy stycznemi do stożkowej w tych punktach . Punkty stożkowej są to więc punkty podwójne inwolucji , którą dany układ biegunowy wyznacza na jakiejkolwiek prostej rzeczywistej ; styczne do stożkowej są to proste podwójne inwolucji , którą ten układ wyznacza dokoła jakiegokolwiek punktu rzeczywistego . Na każdej prostej rzeczywistej leżą dwa punkty stożkowej : rzeczywiste , urojone sprzężone lub zjednoczone ; z każdego punktu rzeczywistego wychodzą dwie styczne : rzeczywiste , urojone sprzężone lub zjednoczone . Innemi słowy , każda prosta " przecina " stożkową w dwóch punktach / rzeczywistych odrębnych , rzeczywistych zjednoczonych lub urojonych sprzężonych / ; z każdego punktu można do stożkowej wyprowadzić dwie styczne / rzeczywiste odrębne , rzeczywiste zjednoczone lub urojone sprzężone / . Wyrażamy to krótko , mówiąc , że stożkowe są krzywemi drugiego rzędu i drugiej klasy .

§ 157. Stożkowe urojone i rzeczywiste.

W układzie biegunowym jednostajnym wszystkie punkty stożkowej i wszystkie styczne do stożkowej są urojone, gdyż inwolucja biegunowa na każdej prostej rzeczywistej i dokoła każdego punktu rzeczywistego jest eliptyczna. Stożkowa takiego układu jest więc urojona; mówimy, że każda prosta rzeczywista "przecina" ją w dwóch punktach urojonych sprzężonych i że z każdego punktu rzeczywistego "wychodzą" do niej dwie styczne urojone sprzężone.

W układzie biegunowym niejednostajnym istnieją punkty i styczne stożkowej zarówno rzeczywiste, jak urojone; dowiedziemy, że punktów i stycznych rzeczywistych jest nieskończenie wiele. Niechaj będzie w danym układzie biegunowym punkt S_o, który leży na własnej swej biegunowej s_o /Rys. 300/; może to być np. punkt podwójny hyperbolicznej inwolucji biegunowej na jednym z boków trójkąta biegunowego. Weźmy na prostej s_o dowolny punkt A_1; jego biegunowa a_1 przechodzić musi przez punkt S_o; w samej rzeczy wiemy, że jeżeli biegunowa punktu S_o /t.j. prosta s_o /

przechodzi przez punkt A_1 , to nawzajem biegunowa punktu A_1 /t.j. prosta a_1 / przechodzi przez punkt S_o /§ 151/ . Punkty A_1 i S_o są zatem sprzężone gdyż biegunowa jednego/ A_1 / przechodzi przez drugi / S_o /. W ten sposób



Rys. 300.

inwolucja biegunowa na prostej S_o jest paraboliczna , wszystkie bowiem punkty prostej S_o są sprzężone z jednym jedynym punktem S_o ; który jest punktem podwójnym tej inwolucji , zresztą jedynym .

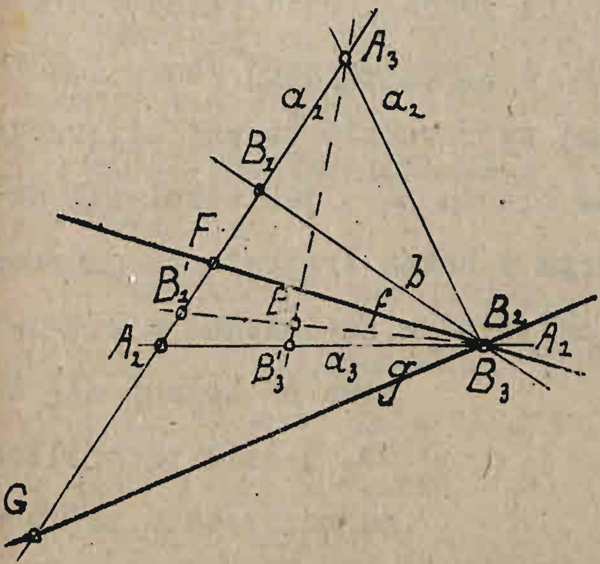
Inaczej się rzeczy mają z prostą a_1

Nie przechodzi ona przez własny biegun ; inwolucja biegunowa nie jest więc na niej paraboliczna . Ponieważ zaś ta inwolucja ma jeden punkt podwójny S_0 ; musi ona być hiperboliczna i mieć zatem jeszcze drugi punkt podwójny S_1 . Punkt ten jest sprzężony sam ze sobą ; t.j. leży na własnej biegunowej s która zresztą musi przejść przez A_1 ; gdyż jej biegun S_1 ; leży na biegunowej punktu A_1 ; t.j. na prostej a_1 . Jeżeli na prostej s_0 obierzemy inny punkt A_2 , którego biegunowa a_2 przechodzi zatem znowu przez S_0 ; to na prostej a_2 znajdziemy ; jak poprzednio ; drugi punkt podwójny S_2 ; który jest sprzężony z samym sobą ; t.j. leży na własnej swej biegunowej s_2 , przechodzącej przez A_2 . W ten sposób w danym niejednostajnym układzie biegunowym każdemu punktowi A_n prostej s_0 sprzężonej samej ze sobą podporządkowany być może punkt S_n sprzężony sam ze sobą , t.j. leżący na własnej biegunowej s_n . Położenie punktu S_n i prostej s_n zależy zatem wyłącznie od położenia punktu A_n na prostej s_0 .

Jeżeli sobie tedy pomyślimy , że powien punkt zmienny A poprzez punkty A_1 , A_2 , A_3 , ... A_4 ..... porusza się w sposób ciągły po prostej s_o , "opisując" tę prostą, to punkt zmienny S poruszać się będzie poprzez punkty S_1 S_2 , S_3 , S_4 ..... również w sposób ciągły, "opisując" stożkową rzeczywistą . Jednocześnie zaś prosta zmienna s , poruszając się w sposób ciągły poprzez proste s_1 , s_2 , s_3 , s_4 .... "powłóczyć" będzie tę samą stożkową . Stożkowa rzeczywista jest "miejscem geometrycznem" opisującego ją punktu i zarazem "obwiednią" powłóczącej ją prostej . Gdy punkt zmienny A , opisując prostą s_o , przeszedłszy przez jej punkt niewłaściwy, powróci z przeciwnej strony do punktu S_o , to i punkt zmienny S opisując stożkową powróci do punktu S_o . Stożkowa rzeczywista jest przeto krzywą zamknięta .

§ 158. Stożkowe zwyrodniałe . W § 151 określiliśmy układ biegunowy zapomocą trójkąta biegunowego $A_1 A_2 A_3$ i biegunowej b punktu jakiegokolwiek B z tem zastrzeżeniem, że punkt B nie leży na żadnym z boków , a prosta b nie przechodzi przez żaden z wierzchołków trójkąta $A_1 A_2 A_3$. Odrzućmy teraz te zastrzeżenia .

Przypuśćmy najpierw, że biegunowa b punktu jakiegokolwiek B przechodzi przez jeden z wierzchołków trójkąta biegunowego, np. przez A_1 /Rys.301/. Jest oczywistem, że inwolucja biegunowa na bokach a_2 i a_3 będzie paraboliczna, na trzecim zaś boku albo hyperboliczna albo eliptyczna. W każdym przypadku biegunowa dowolnego punktu M może być wyznaczona i przejdzie przez punkt A_1; natomiast biegun dowolnej prostej m jest nie oznaczony; może to być mianowicie dowolny punkt leżący na biegunowej punktu $a_1 m$.-Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1, a więc i dokoła punktu A_1 jest hyperboliczna, to wszystkie punkty leżące na prostych podwójnych tej inwolucji są samosprzężone; te dwie proste i i j i wszystkie punkty na nich leżące stanowią zatem stożkową rzeczywistą /Rys.301/. Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1 i dokoła punktu A_1 jest eliptyczna, to i wtedy urojone punkty, leżące na urojonych prostych podwójnych tej inwolucji są samosprzężone; te

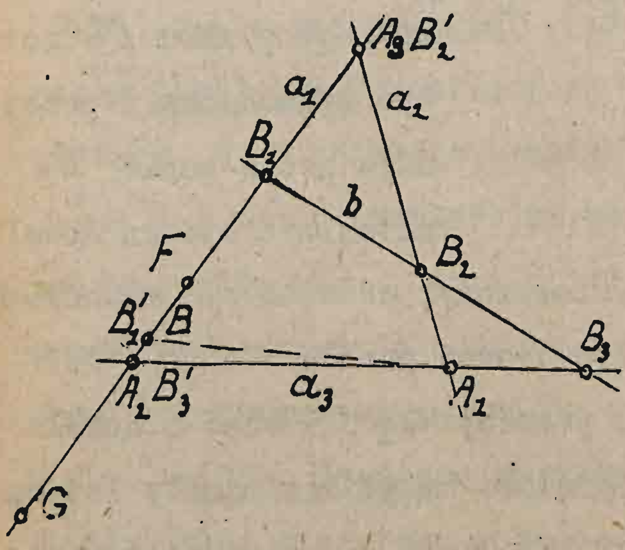


Rys. 301.

dwie urojone proste samosprzężone oraz wszystkie na nich leżące punkty stanowią zatem stożkową urojoną, której jednym punktem rzeczywistym jest A_1 .

Dwie proste rzeczywiste i dwie proste urojone sprzężone są krzywą drugiego rzędu /bo każda prosta rzeczywista przecina ją w dwóch punktach/ i klasy zerowej /bo z dowolnego punktu nie można do niej wyprowadzić żadnej stycznej/.

Przypuśćmy następnie, że biegun B jakiejkolwiek danej prostej b leży na jednym z boków trójkąta biegunowego, np. na a_1 /Rys.302/; jest oczywistem, że inwolucja biegunowa na bokach a_2 i a_3 będzie paraboliczna, na trzecim zaś boku a_1 albo hyperboliczna, albo eliptyczna. W każdym przypadku biegun dowolnej prostej m może być wyznaczony i leży zawsze na a_1; natomiast



Rys.302.

biegunowa dowolnego punktu M jest nieoznaczona; może to być mianowicie dowolna prosta przechodząca przez biegun prostej $A_1 M$. Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1 jest hyperboliczna, to wszystkie proste, przechodzące przez punkty podwójne tej inwolucji są samosprzężone, te dwa punkty I i J oraz wszystkie proste przez nie przechodzące stanowią zatem stożkową rzeczywistą /Rys.302/. Jeżeli inwolucja biegunowa na prostej a_1 jest eliptyczna, to i wtedy urojone proste, przechodzące przez urojone punkty podwójne tej inwolucji są samosprzężone ; te dwa urojone punkty sprzężone i wszystkie przez nie przechodzące proste stanowią zatem stożkową urojoną, której jedyną styczną rzeczywistą jest a_1 .

Dwa punkty rzeczywiste i dwa punkty urojone sprzężone są krzywą drugiej klasy /bo z każdego punktu rzeczywistego wychodzą do niej dwie styczne/ i rzędu zerowego /bo dowolna prosta jej nie przecina/ .

§ 152. Proste zewnętrzne, sieczne i styczne. Prosta, na której układ biegunowy wyznacza inwolucję eliptyczną, nazywa się zewnętrzna względem stożkowej tego układu . Prosta zewnętrzna "przecina" zatem stożkową w dwóch punktach urojonych sprzężonych, mianowicie w punktach podwójnych inwolucji eliptycznej, wyznaczonej przez układ biegunowy na tej prostej. Względem stożkowych urojonych wszystkie proste są zewnętrzne .

Prosta, na której inwolucja biegunowa jest hyperboliczna, nazywa się sieczną stożkowej tego układu .

Każda sieczna "przecina" stożkową w dwóch punktach rzeczywistych, mianowicie w punktach podwójnych inwolucji biegunowej .

Prosta, na której inwolucja biegunowa jest paraboliczną, jest styczną do stożkowej /§ 156/. Na stycznej leży jeden jedyny punkt samosprzężony, który jest jej biegunem i nazywa się punktem zetknięcia tej stycznej ze stożkową. Wszystkie inne proste, przechodzące przez punkt zetknięcia, są sieczne, bo gdyby przezeń przechodziła prosta zewnętrzna, to nie mógłby na niej leżeć punkt rzeczywisty stożkowej .

Jeżeli inwolucję paraboliczną uważać będziemy za przypadek "graniczny" inwolucji hyperbolicznej, to możemy powiedzieć, że styczna ma ze stożkową dwa punkty wspólne, które zostały "zjednoczone" w punkcie zetknięcia . Styczną do stożkowej w danym jej punkcie S_0 /Rys.300/ możemy przeto uważać za granicę siecznej przez ten punkt przechodzącej, gdy drugi jej punkt przecięcia ze stożkową nieograniczenie zbliża się do punktu S_0 .

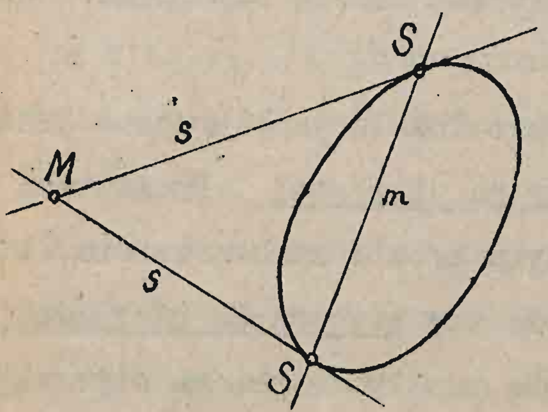
§ 160. Punkty wewnętrzne, punkty zewnętrzne i punkty leżące na stożkowej .- Punkt, dokoła którego układ biegunowy wyznacza inwolucję eliptyczną, nazywa się wewnętrznym względem stożkowej tego układu. Z punktu wewnętrznego wychodzą do stożkowej dwie styczne urojone sprzężone, mianowicie proste podwójne inwolucji eliptycznej, wyznaczonej przez układ biegunowy dokoła tego punktu . Względem stożkowych urojonych wszystkie punkty są wewnętrzne.

Punkt, dokoła którego inwolucja biegunowa jest hyperboliczna, nazywa się zewnętrznym względem stożkowej tego układu. Z punktu zewnętrznego można do stożkowej wyprowadzić dwie styczne rzeczywiste; są to proste podwójne inwolucji hyperbolicznej, wyznaczonej dokoła tego punktu przez układ biegunowy.

O punkcie, dokoła którego inwolucja biegunowa jest paraboliczna, mówimy, że leży na stożkowej . Przez taki punkt przechodzi jedna jedyna prosta samosprzężona, która jest jego biegunową i nazywa się styczną do stożkowej w tym punkcie . Wszystkie inne punkty leżące na stycznej są zewnętrzne, bo gdyby leżał na niej punkt wewnętrzny, to nie mogłaby przezeń przechodzić żadna styczna rzeczywista.

Jeżeli inwolucję paraboliczną uważać będziemy za przypadek "graniczny" inwolucji hyperbolicznej, to możemy powiedzieć, że z punktu leżącego na stożkowej wychodzą do niej styczne "zjednoczone". Punkt zetknięcia stożkowej z daną prostą s_o /Rys.300/ możemy przeto uważać za granicę punktu zewnętrznego, na tej prostej leżącego, gdy druga styczna, z tego punktu do stożkowej wychodząca, nieograniczenie zbliża się do stycznej s_o .

Jeżeli z punktu zewnętrznego M wyprowadzimy do stożkowej dwie styczne s i s, to prosta m, która łączy punkty zetknięcia S i S /Rys. 303/ jest biegunową punktu M. W samej rzeczy, biegunowa punktu przecięcia M dwóch prostych s i s łączy ich bieguny S i S /§151/. Nawzajem punkt przecięcia stycznych s i s jest biegunem prostej łączącej ich punkty zetknięcia S i S, gdyż



Rys. 303.

biegun prostej m jest przecięciem biegunowych dwóch punktów tej prostej. Punkty podwójne inwolucji biegunowej na prostej m są przeto punktami zetknięcia stożkowej ze stycznemi, wyprowadzonemi do niej z bieguna prostej m, - i nawzajem, proste podwójne inwolucji biegunowej dokoła punktu M są stycznemi do stożkowej w punktach przecięcia jej przez biegunową punktu M.

Jeżeli stożkowa jest rzeczywista, <u>to biegunowa punktu zewnętrznego jest sieczną</u>, a <u>biegunowa punktu wewnętrznego jest prostą zewnętrzną</u>, co wynika stąd, że inwolucja biegunowa na prostej m jest w perspektywie z inwolucją biegunową dokoła bieguna prostej m (§ 155). Ponieważ układ biegunowy jest wtedy niejednostajny, więc w każdym trójkącie biegunowym na dwóch bokach inwolucja biegunowa jest hyperboliczna, a na trzecim eliptyczna, t.j. dwa boki są siecznemi, a trzeci prostą zewnętrzną, skąd wynika, że <u>w każdym trójkącie biegunowym stożkowej rzeczywistej dwa wierzchołki są zewnętrzne, a trzeci jest wewnętrznym punktem tej stożkowej</u>.

<u>Każda prosta, przechodząca przez punkt wewnętrzny stożkowej rzeczywistej jest sieczną</u>. W samej rzeczy, utwórzmy trójkąt biegunowy, którego bokami niechaj będą: prosta p, przechodząca przez dany punkt wewnętrzny M, biegunowa m tego punktu i biegunowa n punktu przecięcia N prostych p i m. Ponieważ biegunowa m punktu wewnętrznego M jest prostą zewnętrzną, więc oba pozostałe boki p i m muszą być siecznemi.

W podobny sposób można okazać, że <u>każdy punkt, le</u>

żący na prostej zewnętrznej względem stożkowej rzeczywistej jest zewnętrzny.

Natomiast proste wychodząc z punktu zewnętrznego mogą być sieczne, styczne lub zewnętrzne: punkty leżące na siecznej mogą być wewnętrzne, zewnętrzne, lub leżeć na stożkowej.

Wszystkie proste, przechodzące przez punkt stożkowej, są siecznemi z wyjątkiem stycznej (§ 156); wszystkie punkty stycznej, z wyjątkiem punktu zetknięcia, są zewnętrzne, bo ich biegunowe są siecznemi.

§ 161. Metoda biegunowych wzajemnych. Zasada dwoistości w geometrji płaskiej polega, jak wiadomo (§124) na tem, że jeżeli prawdziwe jest pewne rzutowe twierdzenie geometrji płaskiej, to musi być prawdziwe pewne inne twierdzenie, otrzymane przez zamianę w tamtem twierdzeniu pojęcia: "punkt" pojęciem "prosta" i nawzajem pojęcia "prosta" pojęciem "punkt". Układ biegunowy płaski pozwala urzeczywistnić zasadę dwoistości, t.j. wykreślić figurę, która jest wzajemna względem danej figury płaskiej, a to przez zamianę każdego punktu na jego biegunową i każdej prostej na jej biegun, przez co każdy punkt i prosta do siebie należące zostaną zastąpione przez biegunową i biegun również do siebie należące. Dwie figury w ten sposób sobie wzajemnie podporządkowane nazywamy biegunowo wzajemnemi. Istnieją przytem figury, np. trójkąty biegunowe, które przystają do własnych swych figur biegunowych. Do takich należy przedewszystkiem stożkowa danego układu biegunowego. Jeżeli przeto odnajdziemy jakąkolwiek rzutową własność stożkowej, to stosując biegunowość, która posłużyła do określenia tej stożkowej, otrzymamy pewną inną własność rzutową tej samej stożkowej. (W ten sposób zostało nap.odkryte twierdzenie Brianchona). Metoda biegunowych wzajemnych niema bezpośredniego zastosowania do miarowych własności figur (równość odcinków, kątów i pól, prostopadłość i równoległość prostych i wogóle te własności, które zależą od elementów niewłaściwych i od inwolucji prostokątnej).

§ 162. Trzy rodzaje stożkowych.- Stożkowa nazywa się hyperbolą, elipsą lub parabolą, zależnie od tego, czy inwolucja biegunowa na prostej niewłaściwej jest hyperboliczna, eliptyczna lub paraboliczna, t.j. zależnie od tego, czy prosta niewłaściwa jest sieczną, prostą zewnętrzną lub styczną. Wszystkie stożkowe urojone (a więc i dwie proste urojone sprzężone) są elipsami; dwie proste rzeczywiste należy zaliczyć do rodzaju " hyperbola ", jeżeli te proste przecinają się w punkcie właściwym; do rodzaju " parabola ", jeżeli są równoległe lub zjednoczone. Dla dwóch punktów rzeczywistych lub urojonych sprzężonych, które są krzywą rzędu zerowego, w tej klasyfikacji niema miejsca, albowiem prosta niewłaściwa tej stożkowej nie przecina.

§ 163. Środek, średnica, symptomy. Biegun prostej niewłaściwej nazywa się środkiem stożkowej, a biegunowa każdego punktu niewłaściwego nazywa się średnicą. Wszystkie średnice stożkowej przechodzą przez jej środek, albowiem bieguny średnic leżą na biegunowej środka t.j. na prostej niewłaściwej.

Środek stożkowej jest punktem zewnętrznym w hyperboli (bo jego biegunowa jest sieczną), wewnętrznym w elipsie (bo jego biegunowa jest prostą zewnętrzną). W paraboli środek jest punktem zetknięcia stożkowej z prostą niewłaściwą (bo jego biegunowa, t.j. prosta niewłaściwa jest styczną do stożkowej). Środek więc jest punktem właściwym w hyperboli i elipsie, - niewłaściwym w paraboli. Wszystkie średnice paraboli są równoległe.

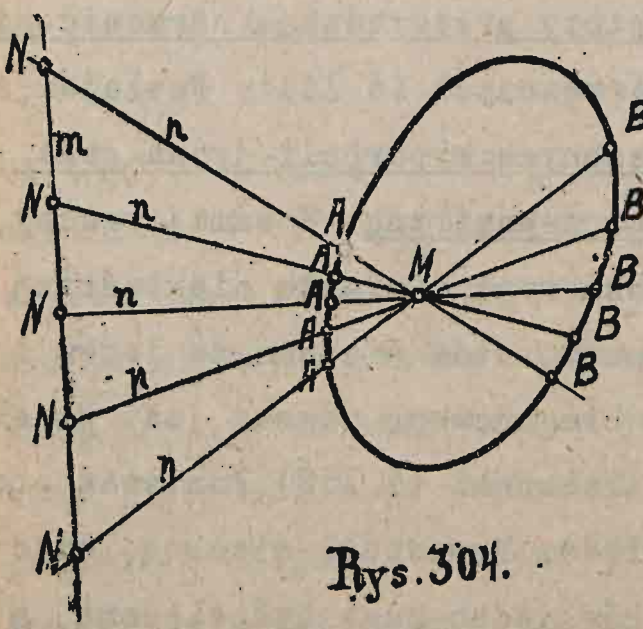
Inwolucja średnic sprzężonych, t.j. inwolucja biegunowa dokoła środka jest w perspektywie z inwolucją biegunową na prostej niewłaściwej (§165), a więc jest ona hyperboliczną w hyperboli, eliptyczną w elipsie. Proste podwójne inwolucji średnic sprzężonych nazywają się asymptotami; są one rzeczywiste, odrębne i właściwe w hyperboli, rzeczywiste, zjednoczone i niewłaściwe w paraboli, urojone sprzężone w elipsie. Z określenia tego wynika, że asymptoty są to styczne do stożkowej, wyprowadzone z jej środka; punkty zetknięcia są to punkty przecięcia biegunowej środka, t.j. prostej niewłaściwej, ze stożkową (§ 160). Moglibyśmy więc określić asymptody, jako styczne do stożkowej w punktach, w których stożkowa ta jest przecięta przez prostą niewłaściwą. Punkty te nazywamy kierunkami asymptotycznemi.

W hyperboli asymptoty przegradzają harmonicznie każdą parę średnic sprzężonych (§ 144). Powiadam, że z dwóch średnic sprzężonych hyperboli jedna jest sieczną, a druga prostą zewnętrzną. W samej rzeczy, dwie średnice sprzężone wraz z prostą niewłaściwą tworzą trójkąt biegunowy; otóż wiadomo, że jeden z boków każdego trójkąta biegunowego zawsze jest prostą zewnętrzną, a dwa są siecznemi (§ 159). Ponieważ prosta niewłaściwa jest względem hyperboli sieczną, więc z dwóch pozostałych boków jeden musi być sieczną, a drugi prostą zewnętrzną.

Ponieważ środek elipsy jest punktem wewnętrznym, więc wszystkie średnice elipsy są wiecznemi.

Odcinek siecznej, zawarty między punktami przecięcia jej ze stożkową, nazywamy cięciwą stożkową. Jeżeli nie zachodzi obawa dwuznaczności, to cięciwę przechodzącą przez środek, t.j. leżącą na średniey, również nazywamy średnicą. Lepiej wszakże nazywać ją cięciwą środkową.

§ 164. Własności harmoniczne bieguna i biegunowej. Niechaj będzie punkt M, nieleżący na stożkowej, i jego biegunowa m (Rys.304). Przez punkt M poprowadźmy jakąkolwiek sieczną n; inwolucja biegunowa na tej prostej jest hyperboliczna (§159) a punkty podwójne tej inwolucji A i B są to punkty przecięcia siecznej n ze stożkową; otóż wiemy (§ 144), że



Rys.304.

punkty podwójne inwolucji hyperbolicznej przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych. Jedną z takich par stanowią punkty M i N, z których pierwszy jest biegunem, a drugi leży na jego biegunowej. Stąd twierdzenie:

Biegunowa jest miejscem geometrycznem punktów sprzężonych harmonicznie z biegunem względem punktów w których sieczne wychodzące z bieguna przecinają stożkową.

(Stosując do tego twierdzenia zasadę dwoistości znajdziemy twierdzenie wzajemne.

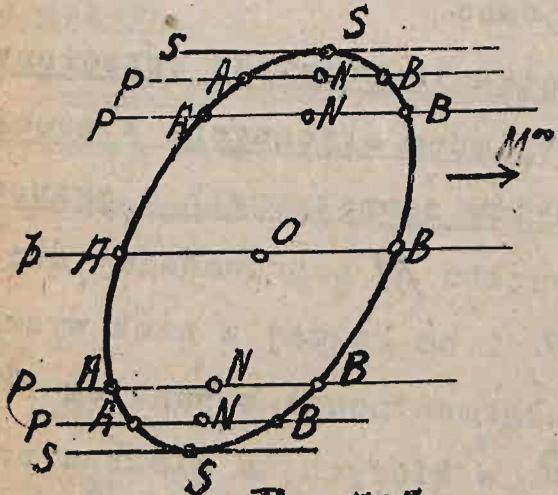
Biegun jest punktem spotkania prostych sprzężonych harmonicznie z biegunową względem stycznych, wyprowadzonych do stożkowej z punktów zewnętrznych biegunowej).

Jeżeli więc z danego punktu M poprowadzimy dwie jakiekolwiek sieczne n, n i na każdej z nich wyznaczymy punkt N, sprzężony harmonicznie z punktem M względem punktów A i B, w których ta wieczna przecina stożkową, to prosta NN będzie biegunową m punktu M. Jeżeli punkt M jest zewnętrzny, to jego biegunowa m przecina stożkową w punktach S, S, które są punktami zetknięcia stycznych s, s, wyprowadzonych do stożkowej z bieguna M (Rys.303).

Jeżeli punkt M jest punktem niewłaściwym (Rys. 305), to jego biegunowa jest średnicą, sieczne wychodzące z punktu M^{∞} są równoległe; punkty N, N sprzężone harmonicznie z punktem N^{∞} są środkami cięciw AB, AB....

Środki cięciw równoległych leżą na średnicy.

Cięciwy te są sprzężone ze średnicą, bo przechodzą przez biegun średniey, który jest kierunkiem tych cięciw.



Rys. 305.

Każda średnica dzieli cięciwy z nią sprzężone na połowy.

Stąd wynika, że kręta średnica jest dla stożkowej osią symetrji (wogóle ukośnej.

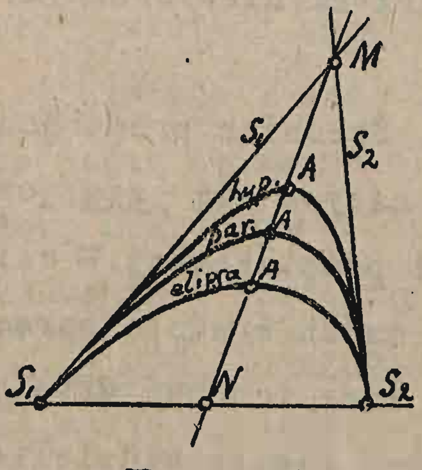
Wśród cięciw sprzężonych z daną średnicą znajduje się także średnica. Ponieważ każde dwie średnice przecinają się w środku stożkowej, więc

Środek stożkowej dzieli każdą cięciwę środkową na połowy. Jest to zatem środek symetrji stożkowej.

Dwie średnice sprzężone mają tę własność, że każda z nich dzieli cięciwy równoległe do drugiej na połowy.

Styczne w końcach średnicy są równoległe do cięciw z nią sprzężonych. Opierając się na tej ostatniej własności, wyznaczyć można punkt zetknięcia na stycznej, poprowadzonej do wykreślonej stożkowej. Jest to punkt, w którym tę styczną przecina prosta łącząca środki dwóch jakichkolwiek cięciw do stycznej równoległych.

§ 165. Rozpoznanie rodzaju stożkowej według jej łuku. Opierając się na powyższych własnościach, można rozstrzygnąć, czy dany wykreślony łuk stożkowej należy do elipsy, hyperboli lub paraboli (Rys. 306). Poprowadźmy dowolną cięciwę $S_1 S_2$ danego łuku wykreślmy w jej końcach S_1 i S_2 styczne s_1 i s_2; punkt przecięcia M tych stycznych połączmy ze środkiem N cięciwy $S_1 S_2$; prosta MN będzie średnicą stożkowej. Jeżeli litera A oznaczy punkt



Rys. 306.

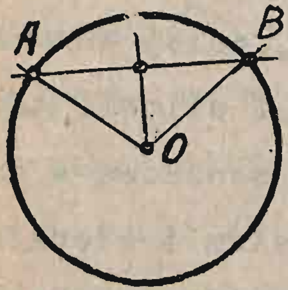
w którym średnica MN przecina dany łuk, to mogą zajść trzy przypadki: 1/ punkt A jest bliżej punktu N, niż punktu M, 2/ punkt A jest bliżej punktu M, niż punktu N i 3/ punkt A leży w środku odcinka MN. Ponieważ punkty M i N są sprzężone harmonicznie względem punktów, w których średnica

MN przecina stożkową, więc w I przypadku drugi z tych punktów B oraz środek odcinka AB t.j. środek stożkowej O, leży po przeciwnej stronie punktu A niż punkt zewnętrzny M; a więc środek O jest punktem wewnętrznym; stożkowa jest elipsą; w drugim przypadku punkt B oraz środek O odcinka AB leży po tej samej stronie punktu A, co punkt M, a więc środek O jest punktem zewnętrznym; stożkowa jest hyperbolą; wreszcie w trzecim przypadku punkt B oraz środek O odcinka AB jest punktem niewłaściwym; stożkowa jest parabolą.

§ 166. Osie i wierzchołki. Średnica prostopadła do prostych z nią sprzężonych nazywa się osią; jest to więc dla stożkowej oś symetrji prostokątnej. W elipsie i hyperboli osią jest każda z dwóch średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych; może ich być albo dwie, albo nieskończenie wiele. W samej rzeczy, widzieliśmy (§ 151), że w inwolucji dokoła punktu albo wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, albo tylko jedna. Osie elipsy i hyperboli mogą być wykreślone, jeżeli dane są dwie pary średnic sprzężonych. W szczególności osie hyperboli są dwusiecznemi kątów pomiędzy asymptotami.

Punkty, w których oś przecina stożkową, nazywamy jej wierzchołkami. Gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, to odcinek osi zawarty pomiędzy rzeczywistemi wierzchołkami nazywamy również osią, lepiej wszakże nazywać ten odcinek cięciwą osiową. W elipsie każda średnica, a więc i każda oś, przecina stożkową w punktach rzeczywistych; elipsa posiada zatem 4 wierzchołki rzeczywiste; większa z cipciw osiowych nazywa się wielką, mniejsza małą osią elipsy. W hyperboli jedna tylko oś, zwana główną, przecina stożkową w punktach rzeczywistych, hyperbola posiada zatem wierzchołki rzeczywiste i dwa urojone sprzężone. Parabola posiada jedną tylko oś właściwą i jeden właściwy wierzchołek; zaś drugą oś należy uważać prostą niewłaściwą, która jest średnicą sprzężoną z osią właściwą.

§ 167. Koło jako stożkowa. Okażemy teraz, że elipsa, w której inwolucja biegunowa dokoła środka jest prostokątna, jest kołem. Niech A i B będą dwoma punktami takiej elipsy. Średnica prostopadła do cięciwy AB jest z nią sprzężona, a więc ją dzieli na połowy. Trójkąt OAB (Rys.307) jest równoramienny, gdyż jego wysokość jest zarazem środkową, skąd wynika $OA = OB$. Wszystkie punkty tej elipsy są zatem jednakowo odległe od środka; elipsa ta jest więc kołem. Każde dwie średnice wzajemnie prostopadłe są sprzężone; każda średnica koła jest jego osią, każdy



Rys 307.

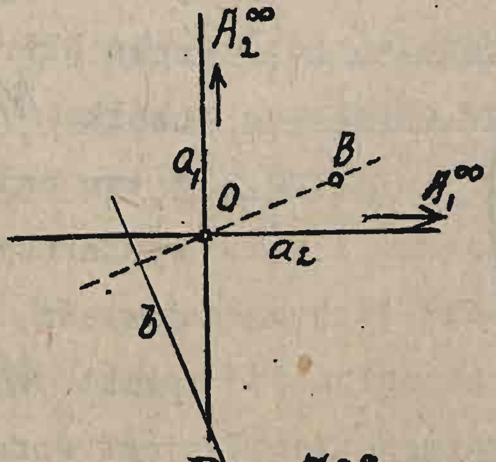
punkt koła jest jego wierzchołkiem.

Proste podwójne inwolucji średnic sprzężonych t.j. urojone symptoty koła są prostemi jednorodnemi (§ 146). Wszystkie koła leżące w jednej płaszczyźnie przechodzą przez punkty kołowe tej płaszczyzny (§ 146); koło może być określone rzutowo, jako stożkowa przechodząca przez punkty kołowe.

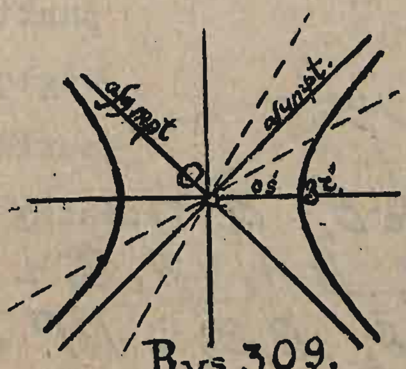
Pod określenie "kół" podpadają przeto również te wszystkie stożkowe urojone, w których inwolucja dokoła środka jest peostokątna, przechodzą one bowiem również przez punkty kołowe. Mogą one być określone np. przez trójkąt biegunowy $OA_1^{\infty}A_2^{\infty}$ (Rys.308), którego jeden bok $A_1^{\infty}A_2^{\infty}$ jest prostą niewłaściwą, a dwa inne są wzajemnie prostopadłe, oraz przez biegun B i biegunową b prostopadłą do OB, lecz nie przenikającą do ćwiartki, w której leży punkt B

Proste jednorodne należy uważać za koło zwyrodniałe.

§ 168. Hyperbola równoboczna. Hyperbola, w której inwolucja średnic sprzężonych jest symetryczna (§154) nazywa się równoboczną; jej asymptoty są dwusiecz-



Rys. 308

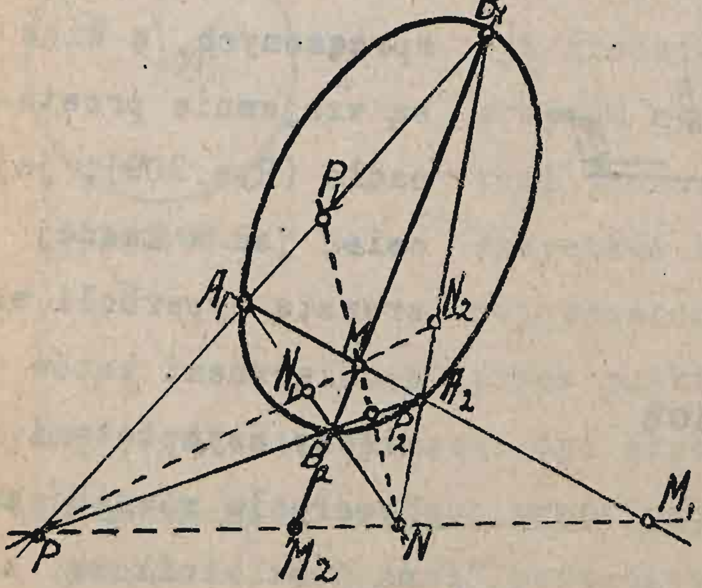


Rys.309.

nemi kątów dwóch jakichkolwiek średnic sprzężonych, a więc są wzajemnie prostopadłe (Rys.309); jej osie, jak w każdej zresztą hyperboli, są dwusiecznemi kątów między asymptotami. Hyperbola równoboczna jest stożkową z wielu względów analogiczną do koła.

§ 149. Czworokąt zupełny wpisany w stożkową i czworobok zupełny opisany na stożkowej. Niechaj wierzchołki czworokąta zupełnego A, B, A_2, B_2 leżą na stożkowej (Rys.310). Połączmy punkty przekątne M, N i P, Powiadam, że trójkąt MNP jest biegunowy.

W samej rzeczy, każdy bok tego trójkąta jest biegunową przeciwległego wierzchołka. Okażemy np. że bok



Rys.310.

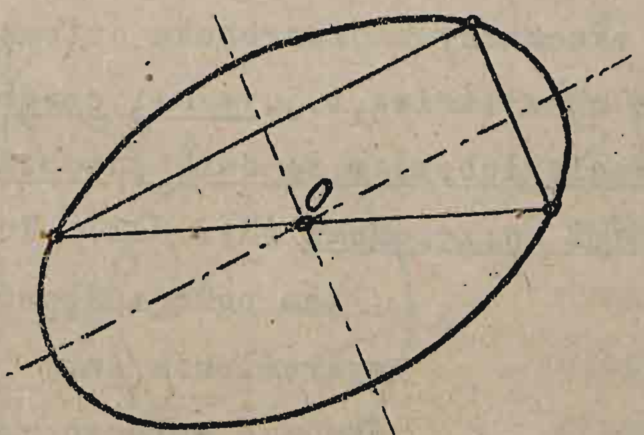
NP jest biegunową wierzchołka M. W tym celu wystarczy dowieść, że punkt M_1 jest sprzężony harmonicznie z punktem M względem punktów A_1 i A_2, a punkt M_2 względem B_1 i B_2. Zauważmy czworobok zupełny o bokach A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2 i B_2A_1, którego przekątnemi są A_1A_2, B_1B_2 i NP w czworoboku tym punkty przecięcia przekątnej A_1A_2 z przekątnemi B_1B_2 i NP są sprzężone harmonicznie względem wierzchołków, leżących na A_1A_2 (§ 130), t.j. punkty M i M_1 przegradzają harmonicznie punkty A_1 i A_2 podobnież punkty przecięcia przekątnej B_1B_2 z przekątnemi A_1A_2 i NP są sprzężone harmonicznie względem wierzchołków, leżących na B_1B_2, t.j. punkty M i

M_2 przegradzają harmonicznie punkty B_1 i B_2 c.b.d.o.

Tak więc mamy twierdzenie:

Trójkąt, którego wierzchołkami są punkty przekątne czworokąta zupełnego, wpisanego w stożkową, jest trójkątem biegunowym.

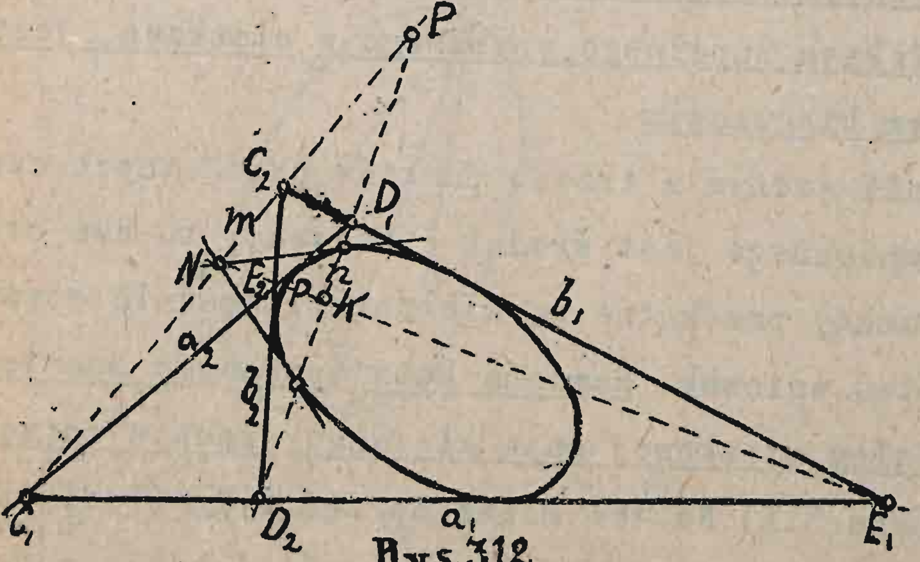
Jeżeli jednym z trzech punktów przekątnych czworokąta wpisanego jest środek stożkowej, to dwa pozostałe punkty przekątne są kierunkami średnic sprzężonych. Stąd wniosek: Ramiona kąta wpisanego opartego na średnicy stożkowej mają kierunki średnic sprzężonych (Rys.311). Na tem można oprzeć wykreślenie pary średnic sprzężonych jeżeli dana jest np. jedna oś i jeden punkt stożkowej.



Rys. 311.

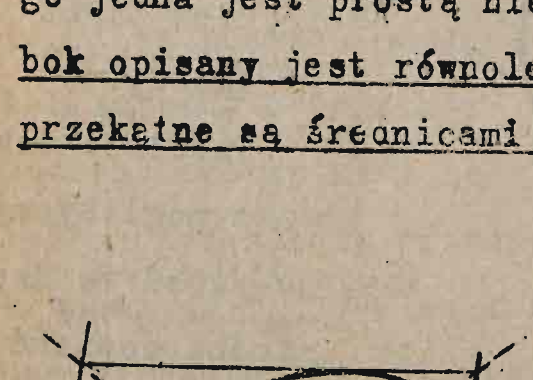
Zupełnie tak samo moglibyśmy na zasadzie dwoistości dowieść twierdzenia wzajemnego, które brzmi:

Trójkąt, którego bokami są przekątne czworoboku zupełnego, opisanego na stożkowej, jest trójkątem biegunowym (Rys.312).



Rys.312.

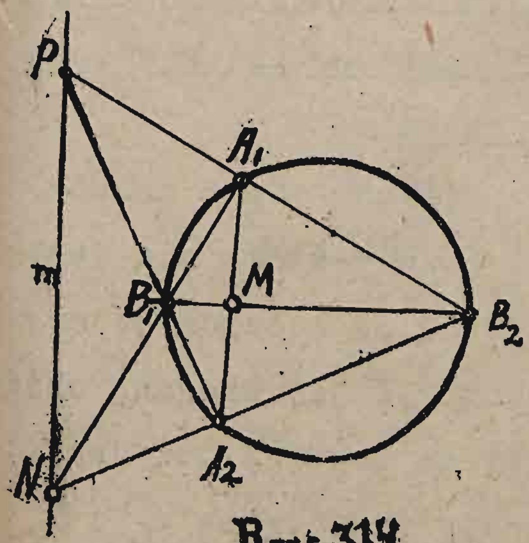
Jeżeli z trzech przekątnych czworoboku opisanego jedna jest prostą niewłaściwą, t.j. jeżeli czworobok opisany jest równoległobokiem, to dwie pozostałe przekatne są średnicami sprzężonemi (Rys.313). Na tem polega sposób wykreślenia pary średnic sprzężonych jakiejkolwiek wykreślonej stożkowej.



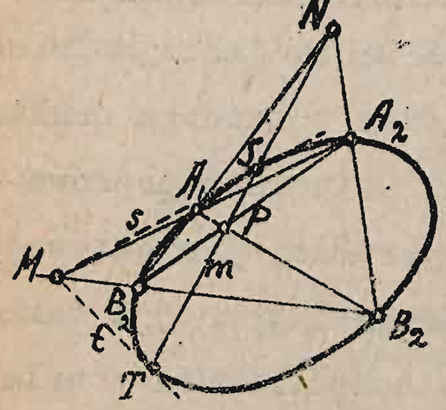
Rys. 313.

§ 170. Wyznaczenie bieguna i biegunowej względem wykreślnej stożkowej (np. względdem koła).- W zadaniach tych przypuścimy,że stożkowa jest wykreślona,t.j.że możemy z należytą dokładnością bezpośrednio wyznaczyć punkty przecięcia jakiejkolwiek siecznej ze stożkową oraz poprowadzić z każdego punktu zewnętrznego do niej obie styczne. Natomiast poprowadzenie stycznej w danym punkcie wykreślonej stożkowej i wyznaczenie punktu zetknięcia danej stycznej z taką stożkową należą do zadań, których bezpośrednio z należytą dokładnością rozwiązać nie umiemy.

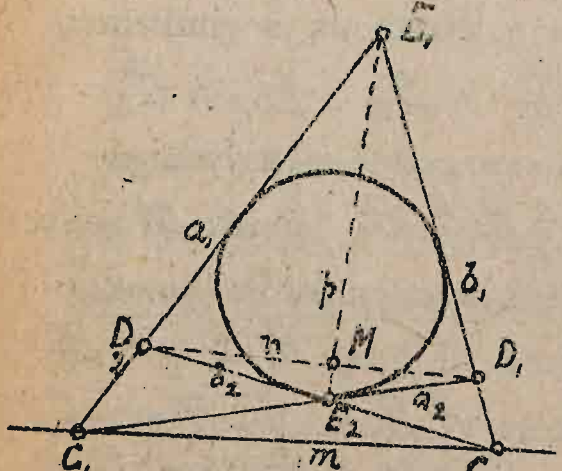
Niech będzie punkt M (Rys.314), nie leżący na stożkowej; aby wykreślić jego biegunową, prowadzimy z niego dwie jakiekolwiek sieczne, które niechaj przecinają stożkową w punktach A_1 i A_2, B_1 i B_2. W czworokącie zupełnym $A_1B_1A_2B_2$ punkt M jest jednym z punktów przekątnych; łącząc A_1B_1 i A_2B_2 oraz A_1B_2 i A_2B_1 wyznaczymy dwa pozostałe punkty przekątne N i P prosta NP jest biegunową punktu M , gdyż każdy bok trójkąta biegunowego MNP jest biegunową prze-



Rys.314.



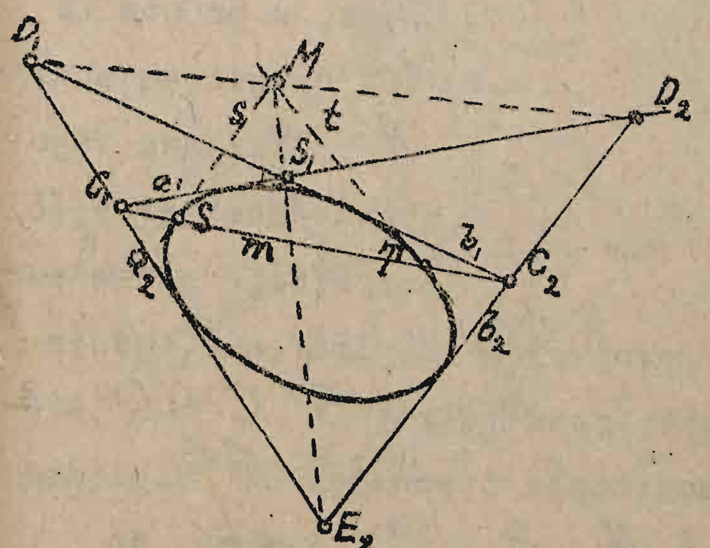
Rys. 315.



Rys. 316.

ciwległego mu wierzchołka Jeżeli punkt M jest zewnętrzny (Rys. 315), to punkty zetknięcia stycznych s i t z niego wyprowadzonych są punktami, w których biegunowa punktu M przecina stożkową (§ 159). Wykreślenie powyższe daje przeto w tym przypadku rozwiązanie zadania: <u>Wyznaczyć na danej stycznej s do wykreślonej stożkowej jej punkt zetknięcia z tą stożkową.</u>

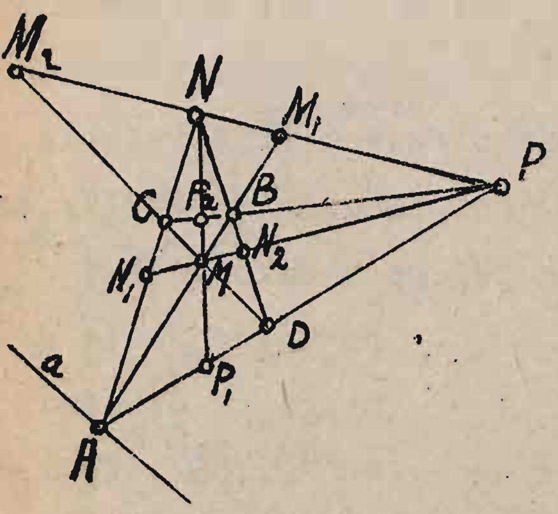
Niech będzie prosta (316), która nie jest styczną do stożkowej; aby wyznaczyć jej biegun, obieramy na prostej m dwa punkty zewnętrzne C_1 i C_2 i prowadzimy z nich styczne a_1 i a_2, b_1 i b_2. W czworoboku zupełnym $a_1 b_1 a_2 b_2$ prosta jest jedną z przekątnych: łącząc wierzchołki D_1 i D_2, E_1 i E_2 otrzymamy dwie pozostałe przekątne n i p; ich punkt przecięcia M jest biegunem prostej m, gdyż każdy wierzchołek trójkąta biegunowego o bokach m, n i p jest biegunem przeciwległego mu boku. Jeżeli prosta m jest sieczną /Rys.317/ to styczne w punktach przecięcia jej ze stożkową S i T przecinają się w biegunie prostej m /§ 159/. Wykreślenie powyższe daje przeto w tym przypadku rozwiązanie zadania: <u>W danym punkcie S wykreślonej stożkowej wykreślić do niej styczną.</u>



Rys.317.

<u>§ 171</u>. <u>Twierdzenie</u>. <u>Stożkowa jest wyznaczona przez 4 swoje punkty i styczną w jednym z nich - albo przez 4 swoje styczne i punkt zetknięcia na jednej z nich.</u>

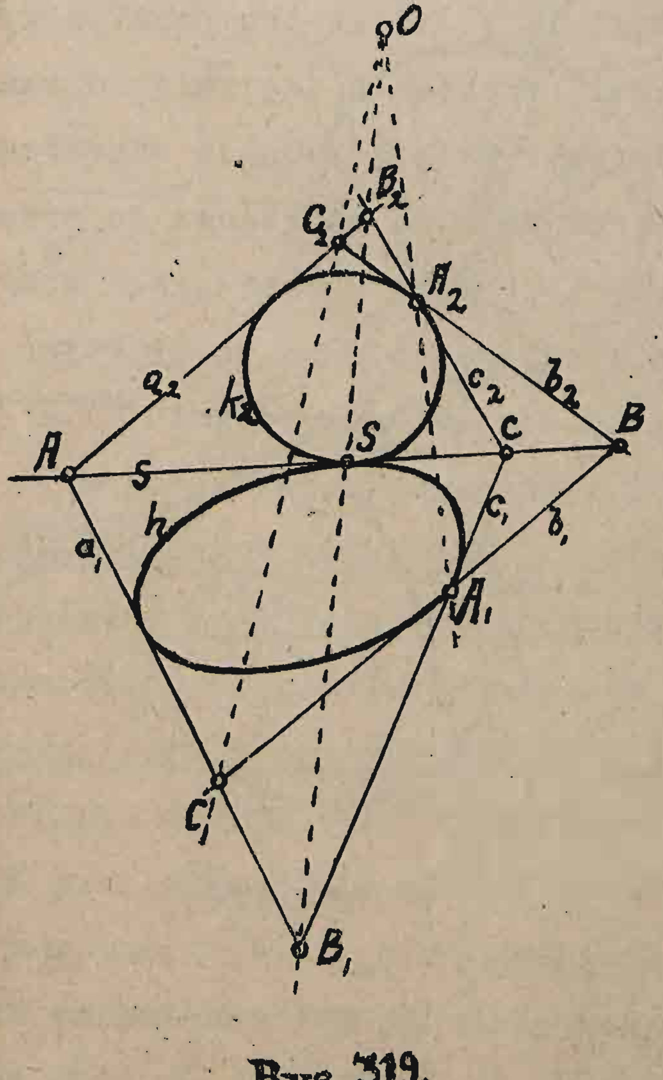
Niechaj będą 4 punkty A, B, C, i D /Rys. 318), z których każde 3 nie leżą na jednej prostej i prosta a przechodząca przez punkt A. Trójkąt prze-



Rys. 318.

kątny MNP czworokąta zupełnego $ABCD$ wraz z punktem A i styczną a wyznacza układ biegunowy, dla którego ten trójkąt jest trójkątem biegunowym, a prosta a jest biegunową punktu A. Stiżkowa tego układu musi przejść oczywiście przez punkt A i być styczną do prostrj a /§ 156/,ale będzie ona przechodziła także przez punkty B, C i D, które są sprzężone harmonicznie z punktem A względem punktów M i M_1, N i N_1, P i P_1, a więc są punktami podwójnemi inwolucji biegunowych na prostych AB, AC i AD.

§ 172. Stożkowa rzeczywista, jako rzut koła. Ponieważ określenie stożkowych, podane w § 156 jest rzutowe, więc rzutem każdej stożkowej jest stożkowa,- w szczególności, rzutem koła jest stożkowa. Dowiedźmy teraz, że i nawzajem: każda stożkowa rzeczywista może być uważana za rzut każdej innej stożkowej rzeczywistej, - w szczególności za rzut koła. W tym celu wystarczy dowieść, że każda stożkowa rzeczywista jest w kolineacji z kołem.



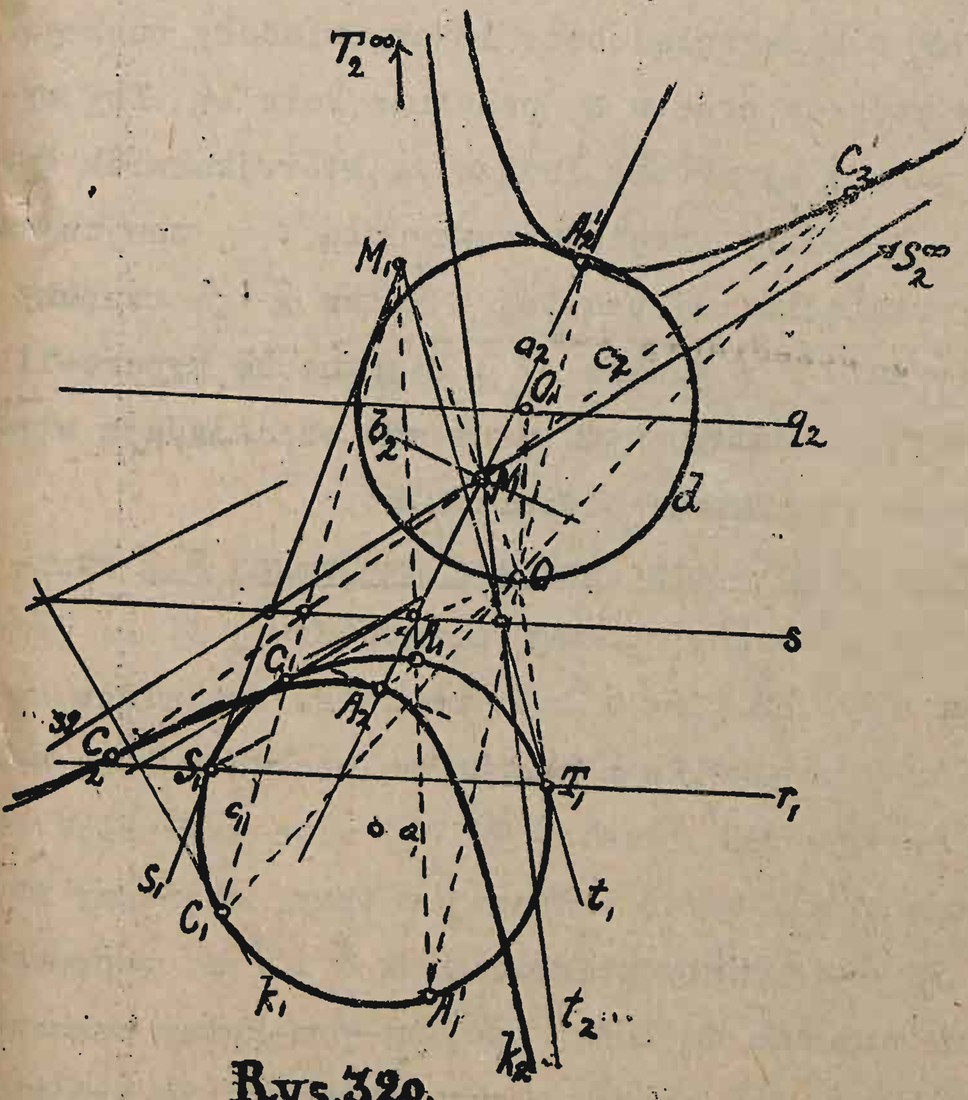
Rys. 319.

Niech będzie stożkowa k / Rys. 319 /; w dowolnym jej punkcie S poprowadźmy do niej styczną s i wykreślmy jakąkolwiek inną stiżkową lub koło k_2 styczną do prostej s w tym samym punkcie S. Na prostej s odbierzmy jeszcze 3 punkty A, B i C i poprowadźmy z nich styczne a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2

do stożkowej k_1 i do koła k_2. Trójkąty a, b, c, i a_2, b_2, c_2 są trójkątami Desargues'a /gdyż ich boki przecinają się parami na prostej s/ więc proste $A_1 A_2$ $B_1 B_2$ i $C_1 C_2$, łączące parami ich wierzchołki, przechodzą przez jeden punkt O. Jeżeli ten punkt uczynimy środkiem kolineacji, prostą s jej osią, a punkty A_1 i A_2 uważać będziemy za parę punktów odpowiednich w tej kolineacji, to kołu k_2 stycznemu do prostych a_2, b_2, c_2 i s i przechodzącemu przez punkt S odpowiadać będzie stożkowa styczna do prostych a, b, c, i s i przechodząca przez punkt S, a więc na zasadzie § 171 identyczna ze stożkową k.

§ 175. Zastosowania - I. Zadanie. Wykreślić stożkową k_2, która odpowiada danemu kołu k_1, w kolineacji danej. Możemy to zadanie wyrazić np. w tej formie: Wykreślić rzut środkowy koła, leżącego w danej płaszczyźnie sq_2. - Wyznaczmy układ O środka rzutów; będzie to środek kolineacji koła k_1, ze stożkową k_2, s będzie osią tej kolineacji q_2 jedną z osi wzajemnych; wykreślmy drugą oś wzajemną r_1 /§ 85/. Odróżnimy 3 przypadki.

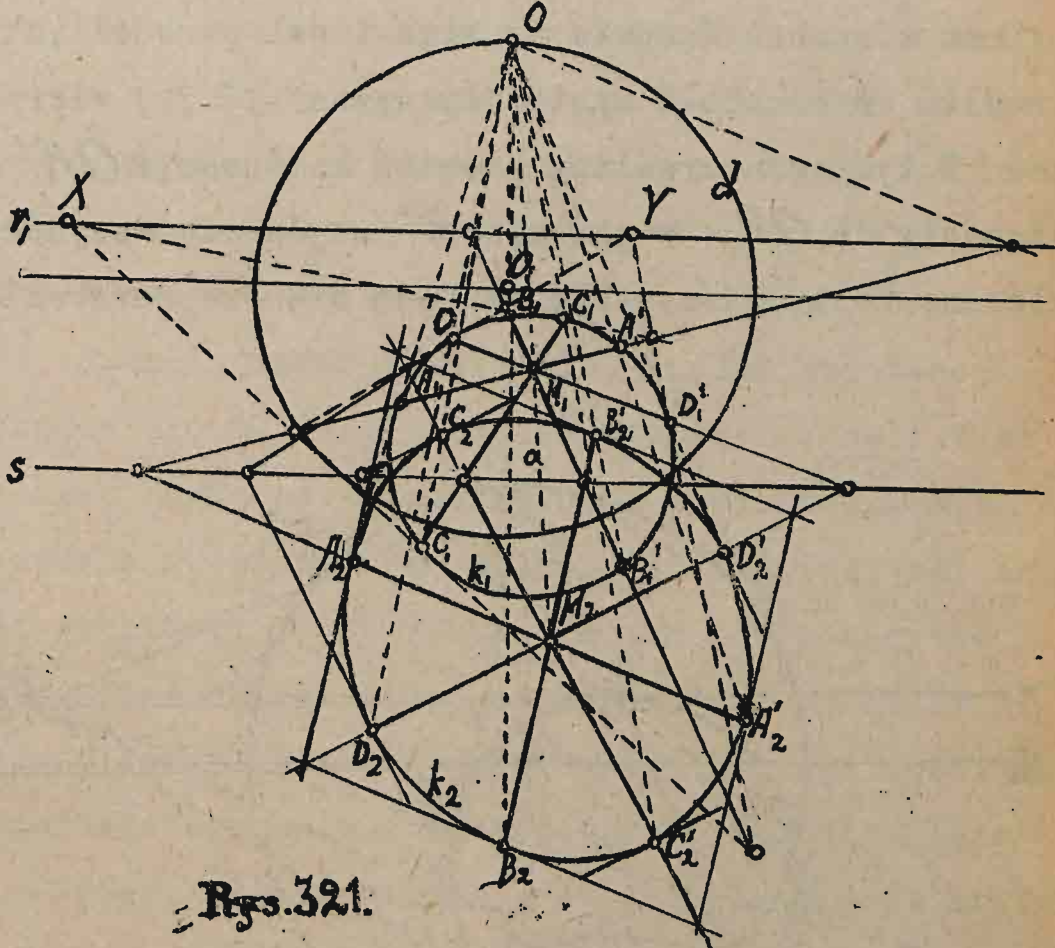
a/ Koło k_1 przecina oś wzajemną r_1; stożkowa k_2 przecina prostą niewłaściwą r_2; jest to więc hyperbola /Rys.320/. Stycznym s i t do koła k w punk-



Rys.320.

tach przecięcia tego koła z osią r_1 ,odpowiadają asymptoty s_2 i t_2 hyperboli /§ 163/;ich przecięcie M_2 jest środkiem hyperboli;dwusieczne kątów pomiędzy asymptotami są osiami a_2 i b_2 hyperboli /§ 166/; wyznaczmy wierzchołki A_2 i A_2' hyperboli, t.j. przecięcia osi głównej a_2 z hyperbolą; będą im odpowiadały punkty A_1 i A_1', w których prosta a_1 przetnie koło k_1. Aby wyznaczyć punkty hyperboli, leżące na którejkolwiek średnicy c_2, kreślimy prostą odpowiednią c_1, znajdujemy punkty przecięcia tej prostej z kołem k, i rzucamy te punkty na c_2 z punktu O. Styczne do hyperboli we wszystkich wyznaczonych punktach odpowiadają stycznym do koła w punktach odpowiednich.

b/ <u>Koło k nie przecina osi wzajemnej r_1</u>; stożkowa k_2 nie przecina prostej niewłaściwej r_2; jest to <u>elipsa</u> /Rys.321/. Dwom którymkolwiek średnicom sprzężonym elipsy odpowiadają biegunowe względem koła dwóch punktów sprzężonych prostej r_1. Aby więc wykreślić parę średnic sprzężonych szukanej elipsy, obierzmy na prostej r_1 dwa punkty którekolwiek X i Y i poprowadźmy z nich styczne do koła; trójkąt przekątny czworoboku zupełnego w ten sposób utworzonego będzie trójkątem biegunowym względem koła /§169/; jednym jego bokiem jest prosta r_1; dwa inne niechaj przecinają koło w punktach A_1, A_1' i B_1, B_1'; proste A_2A_2' i B_2B_2' odpowiadające prostym A_1A_1' i B_1B_1' będą średnicami elipsy w tych punktach; na każdej innej średnicy elipsy znajdziemy dwa jej punkty, kreśląc odpowiednią

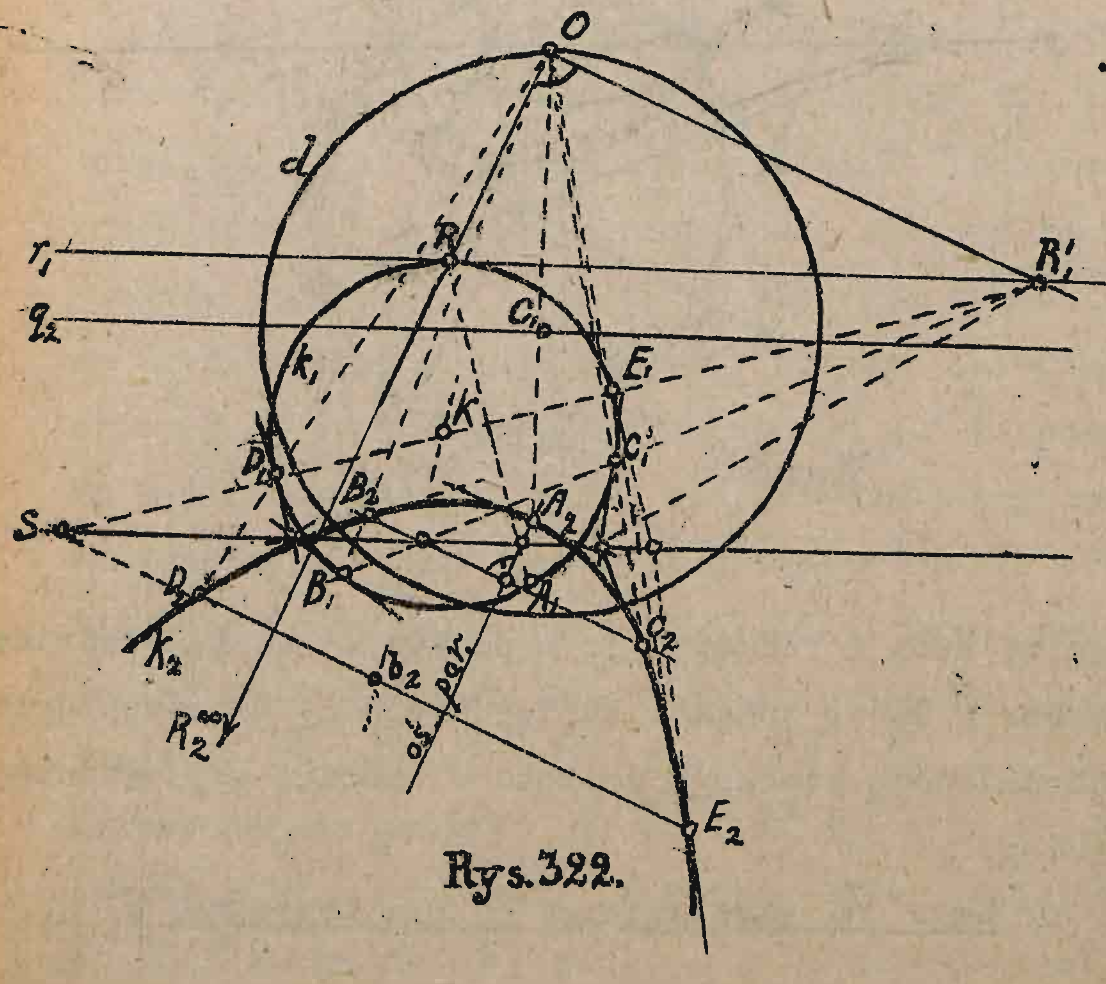


Rys.321.

cięciwę koła i rzucając ją z punktu O na tę średnicę; styczne w dwóch końcach każdej średnicy są równoległe i odpowiadają stycznym do koła w końcach odpowiedniej cięciwy.

c/ Koło k_1 jest styczne do osi wzajemnej r_1 ;

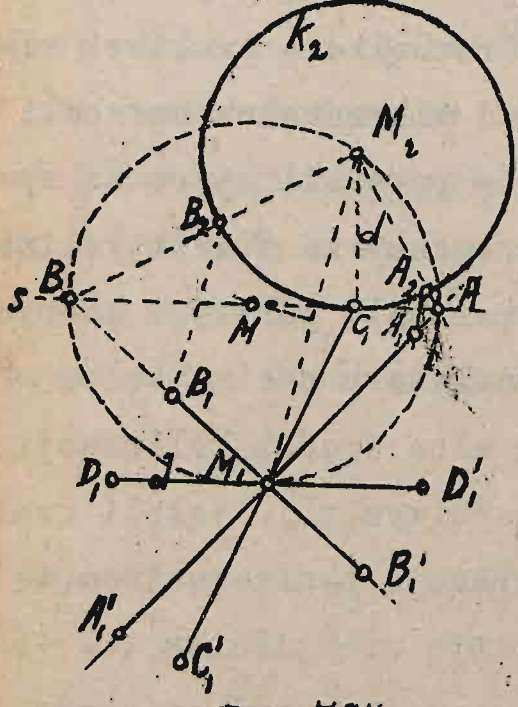
stożkowa k_2 jest styczna do prostej niewłaściwej r_2 ; jest to parabola /Rys.322/. Promień kolineacji, rzucający punkt zetknięcia R_1 koła k_1 z osią wzajemną r_1 ma kierunek średnie, a więc i osi paraboli, aby wykreślić oś paraboli wystarczy wyznaczyć jej wierzchołek. W tym celu kreślimy promień kolineacji OR_1' prostopadły do OR_1; w punkcie R_1' zejdą się wszystkie sieczne koła, którym odpowiadają sieczne paraboli



Rys.322.

sprzężone z osią, a więc prostopadłe do niej; w szczególności stycznej do koła z punktu R_1', odpowiada styczna do paraboli w jej wierzchołku, a punktowi zetknięcia A_1 z kołem odpowiada wierzchołek paraboli A_2. Aby znaleść parę punktów paraboli, które są symetryczne względem jej osi, rzucamy ze środka kolineacji na odpowiednią sieczną paraboli punkty, w których sieczna z punktu R_1', wyprowadzona przecina koło.

II. Jeżeli środek rzutów albo środek kolineacji O stanie się punktem niewłaściwym, t.j. jeżeli rzut stanie się równoległy, a kolineacja powinowactwem, to oś wzajemna r_1 stanie się prostą niewłaściwą, tak, że każdej stożkowej k_1 odpowiada w tem powinowactwie stożkowa tego samego rodzaju: hyperboli hyperbola, elipsie elipsa, paraboli parabola; w szczególności kołu odpowiada zawsze elipsa /rzutem równoległym koła jest elipsa/; średnica koła przekształca się na średnicę elipsy, środek koła na środek elipsy, średnice sprzężone koła, t.j. jakiekolwiek dwie jego średnice wzajemnie prostopadłe, na średnice sprzężone elipsy. Na tem można oprzeć wykreślenie osi elipsy, której dane są dwie średnice sprzężone C_1C_1' i D_1D_1'. Przez jeden z końców C_1 średnicy C_1C_1' /Rys.323/ prowadzimy prostą S równoległą do średnicy D_1D_1'; będzie to

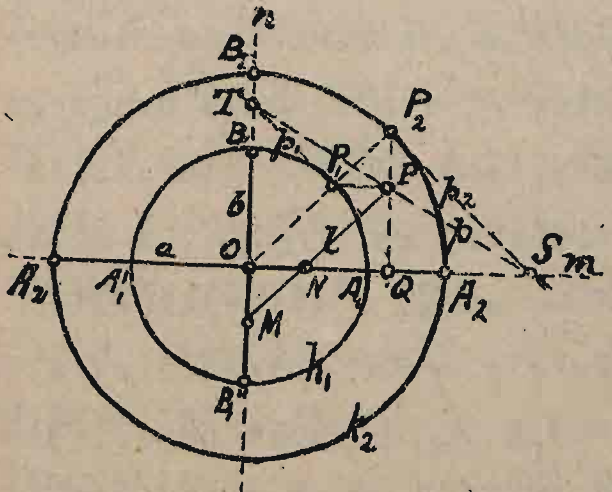


Rys.323.

styczna do elipsy w punkcie C_1 /§ 164/. Następnie prowadzimy koło K_2 styczne do s w punkcie C_1 o średnicy równej D_1D_1'; koło to będzie w powinowactwie z elipsą, przytem osią powinowactwa jest prosta s, a kierunek powinowactwa wyznaczony będzie przez dwa punkty odpowiednie M_1 i M_2. Każdej parze średnic koła wzajemnie prostopadłych odpowiada para średnic sprzężonych elipsy; aby więc znaleść jakiekolwiek dwie średnice sprzężone elipsy, prowadzimy ze środka koła M_2 dwie proste wzajemnie prostopadłe i łączymy środek elipsy M_1 ze śladami tych prostych na s. - Aby wyznaczyć osie elipsy, t.j. takie średnice sprzężone, które byłyby wzajemnie prostopadłe, znajdziemy na s punkt M jednakowo odległy od M_1 i M_2, z tego punktu zakreślamy koło, przechodzące przez M_1 i M_2 i wyznaczymy punkty A i

B, w których to koło przecina prostą S ; proste M_1A i M_1B są osiami elipsy. Wierzchołki elipsy znajdziemy prowadząc przez końce A_2 i B_2 średnic sprzężonych koła równoległe do M_1M_2, poczem odmierzamy $OA_1' = OA_1$ i $OB_1' = OB_1'$ W rozdziale XVI poznamy prostszą jeszcze konstrukcję osi elipsy.

III. Przypuśćmy teraz, że osią powinowactwa koła z elipsą jest wielka oś elipsy $A_2A_2' = 2a$ /Rys.324/ która jest zarazem średnicą koła k_2. Kierunek powinowactwa jest wtedy prostopadły do wielkiej osi a równoległy do małej $B_1B_1' = 2b$; cecha powinowactwa /§ 146/ równa jest stosunkowi $\frac{B_1O}{B_2O} = \frac{b}{a}$. Obrawszy punkt jakikolwiek P_2 na kole k_2, znajdźmy odpowiadający mu punkt elipsy P. Jest to taki punkt prostej P_2Q prostopadłej do A_2A_2', że $\frac{PQ}{P_2Q} = \frac{B_1O}{B_2O}$. Połączmy P_2O, poprowadźmy ze środka O koło k_1 o promieniu równym



Rys.324.

małej półosi B_1O i wyznaczmy punkt P_1, w którym P_2O przecina koło k. Równoległa do A_2A_2' z punktu P_1 wyznacza na P_1O szukany punkt elipsy P. Aby więc wykreślić punkt jakikolwiek elipsy, której osie A_2A_2' i B_1B_1' są dane, zakreślamy na osiach koła k_2 i k_1 o wspólnym środku O; wyprowadzamy ze środka dowolną prostą i z punktów przecięcia jej z kołami k_1 i k_2 prowadzimy równoległe do osi A_2A_2' i B_1B_1'. Punkt przecięcia tych dwóch prostych będzie punktem elipsy P. Elipsa ta będzie w powinowactwie nietylko z kołem k_2, ale i z kołem k_1; osią tego drugiego powinowactwa jest mała oś elipsy B_1B_1', kierunkiem powinowactwa - kierunek wielkiej osi A_2A_2', a cechą powinowactwa stosunek $\frac{A_2O}{A_1O} = \frac{a}{b}$. Aby wykreślić styczną p do elipsy w punkcie P, prowadzimy w punkcie P_2 styczną p_2 do koła k_2 i punkt przecięcia S tej stycznej z osią A_2A_2' łączymy z punktem P; albo prowadzimy w punkcie P_1 styczną p_1 do koła k_1 i punkt przecięcia T tej stycznej z osią B_1B_1' łączymy z punktem P.

Z punktu P poprowadźmy równoległą l do P_2O i niechaj ta równoległa przetnie osie B_1B_1' i A_2A_2' w punktach M i N. Z równoległoboków OP_2PM i OP_1PN wynika, że $PN = OP_2 = a$ i $PN = OP_1 = b$; tak, że M, N i P są punktami, których wzajemne odległości na zmiennej prostej l są stałe, przytem punkt M pozostaje zawsze na osi B_1B_1', punkt N na osi A_2A_2' a punkt P na elipsie, której półosie są $PM=a$ i $PN=b$

Jeżeli więc odcinek MN porusza się w ten sposób, że punkt M posuwa się po prostej n, a punkt N po prostopadłej do niej prostej m, to każdy inny punkt P prostej MN zakreśla elipsę o osiach $2PM$ i $2PN$ leżących na prostych m i n.

Na tem twierdzeniu opiera się konstrukcja t.zw. cyrkla eliptycznego, t.j. narzędzia, służącego do kreślenia elips o danych osiach. Prymitywnem takiem narzędziem może być skrawek papieru, na którego prosto obciętej krawędzi odmierzono odcinki $PM=a$ i $PN=b$ Wykreśliwszy dwie proste wzajemnie prostopadłe, układamy skrawek w ten sposób, aby punkt M leżał na jednej z tych prostych, a N na drugiej, wtedy P będzie punktem elipsy o osiach $2a$ i $2b$. Zmieniając położenie skrawka wyznaczymy dowolną ilość punktów elipsy.

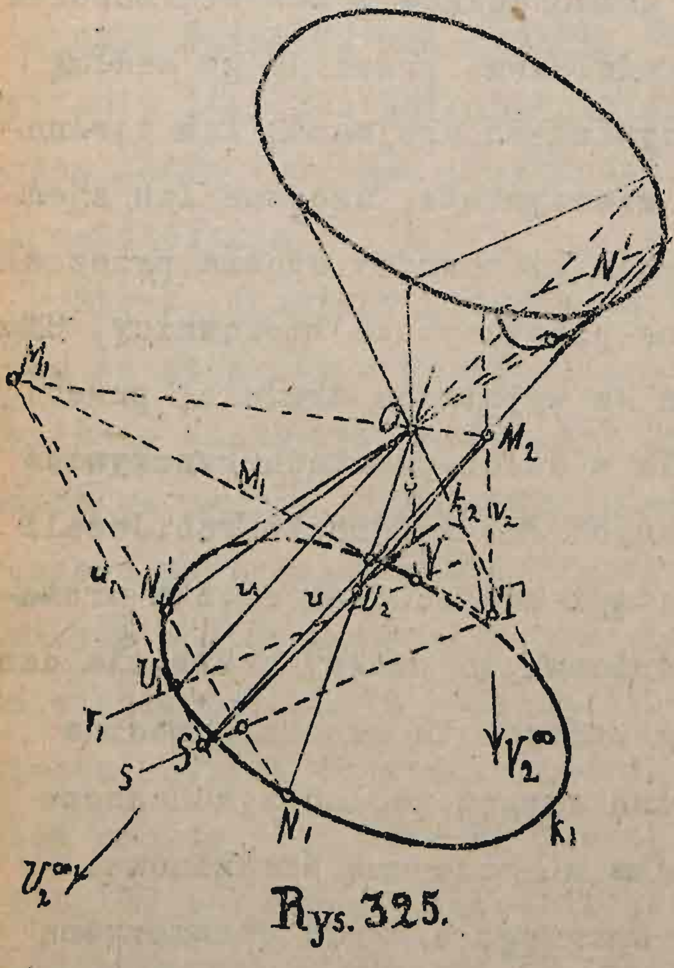
§ 174. Stożki drugiego stopnia. - Ogół prostych, rzucających punkty stożkowej k z dowolnego punktu nie leżącego w jej płaszczyźnie oraz ogół płaszczyzn rzucających styczne do tej stożkowej z tego punktu na zywamy stożkiem drugiego stopnia. Stożkowa k nazywa się kierownicą stożka; środek rzutów nazywa się środkiem albo wierzchołkiem stożka; proste, rzucające z wierzchołka punkty kierownicy nazywają się tworzącemi stożka; wszystkie inne proste, wychodzące z wierzchołka nazywają się średnicami stożka; płaszczyzny rzucające z wierzchołka styczne do kierownicy nazywają się płaszczyznami stycznemi do stożka; wszystkie inne płaszczyzny przechodzące przez wierzchołek nazywają się płaszczyznami średnicowemi stożka. Na każdej płaszczyźnie stycznej leży jej tworząca zetknięcia ze stożkiem; przez każdą tworzącą przechodzi jej płaszczyzna styczna ze stożkiem.

Stożki drugiego stopnia są tem w geometrji wiązki, czem są stożkowe w geometrji płaskiej. Odpowiadają one dwoiście stożkowym i mogą tak jak one być określone zapomocą układu biegunowego wiązki, t.j. takiego wzajemnego podporządkowania prostych i płaszczyzn, wychodzących z jednego punktu, że prostej i płaszczyźnie do siebie należącym podporządkowane są płaszczyzna i prosta również do siebie należące /płaszczyzna biegunowa prostej i prosta biegunowa płaszczyzny/. Układ taki byłby wyznaczony przez trójścian biegunowy $OA_1A_2A_3$ i płaszczyznę biegunową Ob jakiejkolwiek prostej

OB, z tem zastrzeżeniem, żeby płaszczyzna Ob nie przechodziła przez żadną krawędź, a prosta OB nie leżała na żadnej ścianie trójścianu $OA_1A_2A_3$. Takie niezależne od geometrji płaskiej określenie stożków drugiego stopnia, o ile miałoby na celu własności rzutowe tych stożków, nie jest konieczne, gdyż wszystkie te własności odpowiadają dwoiście rzutowym własnościom stożkowym.

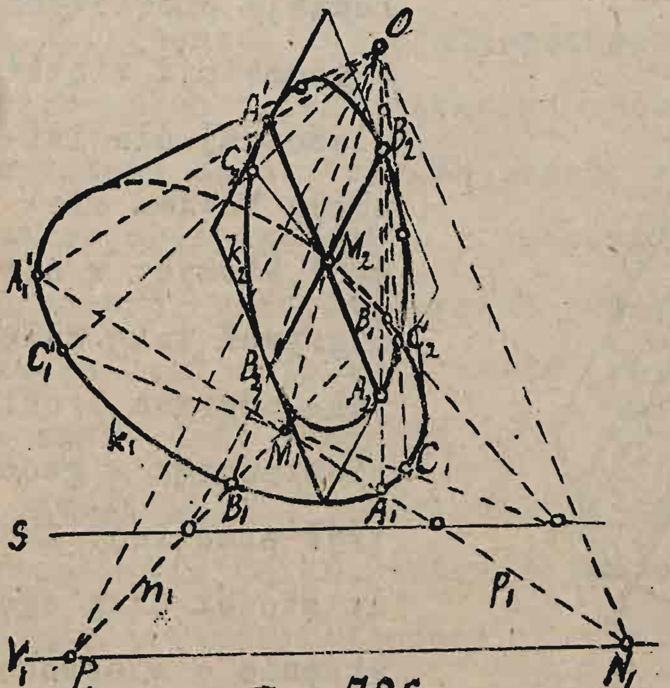
Każda płaszczyzna przechodząca przez wierzchołek stożka /płaszczyzna średnicowa/ przecina go według dwóch tworzących: rzeczywistych, urojonych lub zjednoczonych, które rzucają rzeczywiste, urojone lub zjednoczone punkty przecięcia kierownicy stożka przez ślad płaszczyzny siecznej na płaszczyźnie kierownicy. Stąd wynika, że każda prosta /z wyjątkiem średnic/ przebija stożek drugiego stopnia w dwóch punktach, rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. Jeżeli bowiem przez daną prostą i wierzchołek stożka prowadzimy płaszczyznę średnicową, to punkty przebicia daną prostą będą punktami, w których ta prosta przecina dwie rzeczywiste, urojone sprzężone, lub zjednoczone proste przecięcia stożka płaszczyzną średnicową.

Przecięcie stożka drugiego stopnia płaszczyzną nieprzechodzącą przez wierzchołek, jest oczywiście rzutem kierownicy z wierzchołka na płaszczyznę sieczną, a więc stożkową. Stożkowa ta jest hyperbolą, elipsą lub parabolą, zależnie od tego, czy płaszczyzna średnicowa Or_1 równoległa do płaszczyzny siecznej S przecina stożek według prostych rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. W samej rzeczy gdy płaszczyzna średnicowa Or_1 równoległa do płaszczyzny siecznej S przecina stożek według dwóch tworzących rzeczywistych u i v ./Rys. 325/, to stożkowa przecięcia, która jest miejscem geometrycznem punktów przebucia płaszczyzny S tworzącemi stożka, będzie miała dwa rzeczywiste punkty niewłaściwe, mianowicie punkty U_2^∞ i V_2^∞, w których te tworzące przebijają płaszczyznę S ; będzie to za-



Rys. 325.

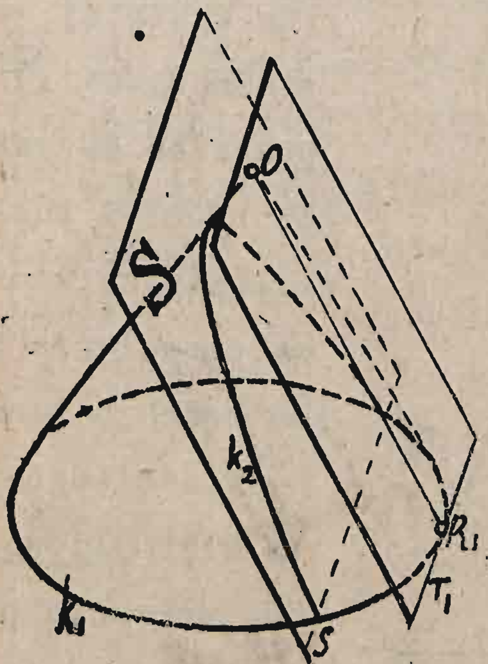
tem hyperbola. Jeżeli płaszczyzna średnicowa Or, /Rys. 326/, równoległa do płaszczyzny siecznej S nie ma ze stożkiem żadnej rzeczywistej, to płaszczyzna S przecina wszystkie tworzące w punktach właściwych; stożkowa przecięcia nie ma żadnego punktu niewłaściwego, jest to więc elipsa.



Rys. 326.

Gdy wreszcie płaszczyzna średnicowa równoległa do S jest styczną do stożka /Rys. 327/, t.j. ma z nią dwie zjednoczone tworzące wspólne, to płaszczyzna S przecina wszystkie tworzące w punktach właściwych z wyjątkiem tej jednej; przecięciem jest przeto stożkowa, posiadająca dwa zjednoczone punkty niewłaściwe, czyli parabola.

Z powyższego wynika, że niema zasady do rozróżniania trzech rodzajów stożków właściwych drugiego



Rys. 327.

stopnia, tak jak rozróżnialiśmy trzy rodzaje stożkowych. W geometrji wiązki właściwej nie istnieje bowiem element, któryby w niej odgrywał taką rolę jaką odgrywa prosta niewłaściwa w geometrji płaskiej. Każdy stożek drugiego stopnia o wierzchołku właściwym może być przecięty według hyperboli, elipsy lub paraboli; każdy więc z tych krzywych może być wzięta za kierownicę tego stożka.

Inaczej rzeczy się mają ze stożkami, których wierzchołki są punktami niewłaściwemi, czyli z walcami. Pomiędzy elementami wiązki niewłaściwej znajduje się jeden niewłaściwy, mianowicie płaszczyzna niewłaściwa. Płaszczyzna ta odgrywa w geometrji wiązki niewłaściwej tę samą rolę, co prosta niewłaściwa w geometrji płaskiej. Dlatego też walec drugiego stopnia może być hyperboliczny, eliptyczny lub paraboliczny, zależnie od tego czy płaszczyzna niewłaściwa przecina go według dwóch tworzących niewłaściwych rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. Każde przecięcie płaskie walca hyperbolicznego jest hyperbolą, której asymptotami są przecięcia płaszczyzną sieczną płaszczyzn asymptotycznych t.j. stycznych do walca w nieskończoność, podobnież każde przecięcie walca eliptycznego jest elipsą, a każde przecięcie walca parabolicznego jest parabolą.

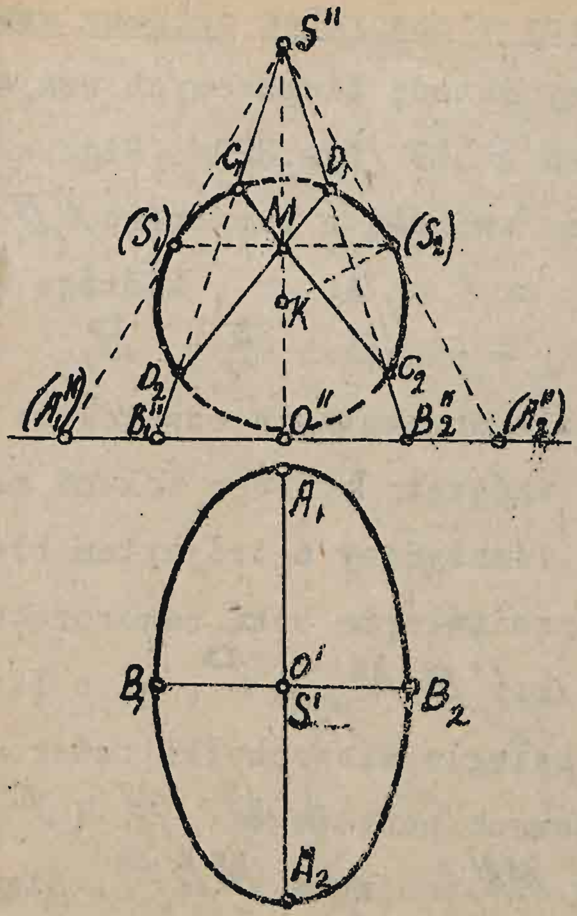
§ 175. Osie i przecięcia kołowe stożka drugiego stopnia - Trójścian, rzucający z wierzchołka stożka trójkąt biegunowy kierownicy, jest trójścianem biegunowym; każda jego ściana jest płaszczyzną biegunową przeciwległej mu krawędzi. Można dowieść /dowód musi tutaj być pominięty/, że istnieje jeden i wogóle tylko jeden trójścian biegunowy o krawędziach i ścianach wzajemnie prostopadłych. Każda z takich trzech krawędzi nazywa się osią stożka drugiego stopnia; jest to średnica, mająca tę własność, że biegunowa płaszczyzna średnicowa jest do niej prostopadła. Płaszczyzna którychkolwiek dwóch osi jest dla stożka płaszczyzną symetrji prostokątnej, każda z osi jest osią symetrji prostokątnej stożka. Dla stożków rzeczywistych jedna z osi jest wnętrzną,a pozostałe są zewnętrzne,t.j.przez dwie osie można poprowadzić do stożka płaszczyzny styczne rzeczywiste,a przez trzecią takiej płaszczyzny poprowadzić nie można.Jeżeli jedna z trzech osi np.oś wewnętrzna jest dana,to pozostałe dwie znajdziemy,prowadząc przez wierzchołek równoległe do osi jakiegokolwiek przecięcia,którego płaszczyzna jest prostopadła do osi danej. Gdy to przecięcie jest kołem,to stożek nazywa się obrotowym i posiada oprócz osi wewnętrznej zwanej osią obrotu,nieskończenie wiele osi zewnętrznych;każda prosta prostopadła do osi obrotu w wierzchołku takiego stożka jest jego osią zewnętrzną.

W stożku nieobrotowym /trójosiowym/ istnieją dwa ustawienia płaszczyzn przecinających stożek według kół tak,że kierownicą każdego stożka drugiego stopnia /obrotowego lub trójosiowego,ale nie zwyrodniałego/ może być koło.

W samej rzeczy niech będzie w rzutach prostokątnych stożek /Rys.328/,którego kierownica jest elipsą o osiach A_1A_2 i B_1B_2, otrzymaną w przecięciu stożka płaszczyzną prostopadłą do osi wewnętrznej.

Obrawszy na tej osi punkt jakikolwiek K,opiszmy z niego kulę styczną do tworzących SA_1 i SA_2.

Pionowy kontur rzeczywisty tej kuli jest kołem,leżą-



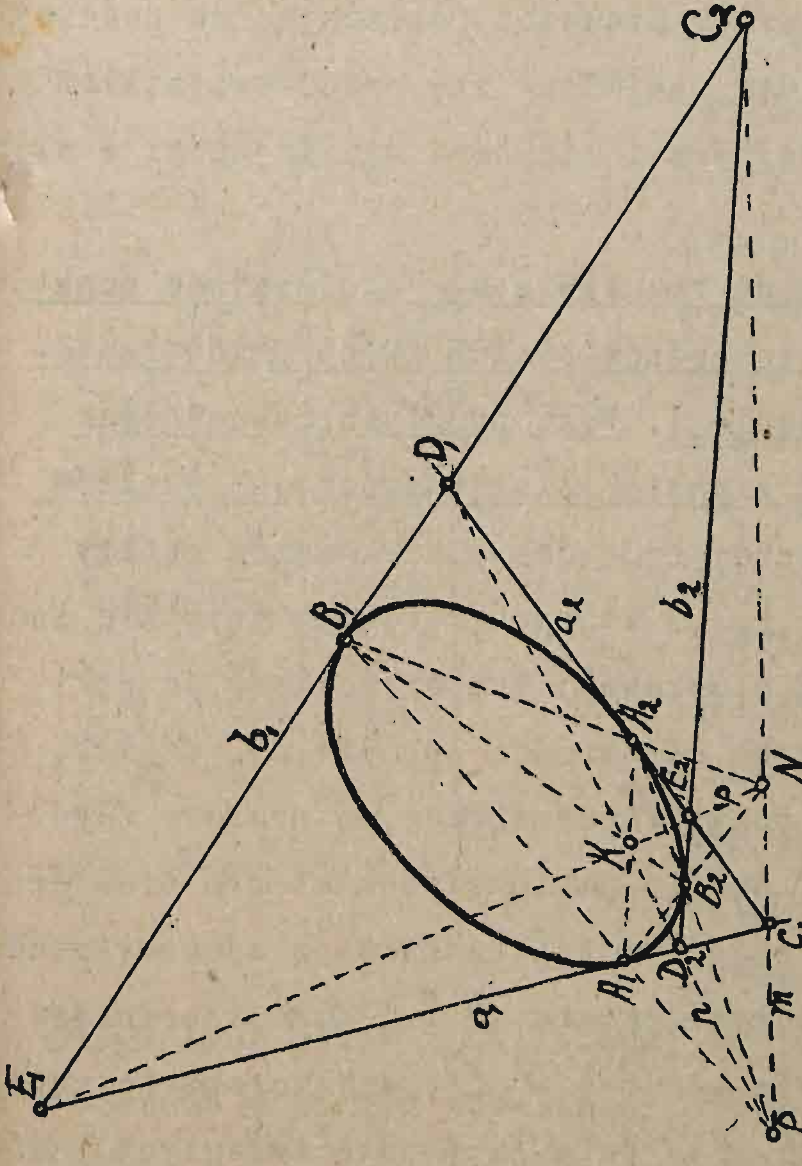
Rys.328.

cym w płaszczyźnie SB_1B_2 w promieniu $KS_1 = KS_2$ równym odległości punktu K od tworzących SA_1 i SA_2. Połączmy punkty C_1 i C_2 oraz D_1 i D_2 w których to koło przecina tworzące SB_1 i SB_2 i przez cięciwy C_1C_2 i D_1D_2 przeprowadźmy płaszczyzny $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, prostopadłe do płaszczyzny SB_1B_2. Przecięcie kuli płaszczyzną $\mathbf{C}$ jest kołem, a przecięcie stożka tą samą płaszczyzną jest stożkową, która z tym kołem ma wspólne: 4 punkty C_1, C_2, S_1 i S_2 i styczne w punktach S_1 i S_2, które są przecięciem płaszczyzny $\mathbf{C}$ z płaszczyznami stycznemi w tych punktach do stożka i zarazem do koła. Stożkowa ta jest przeto identyczna z kołem /§ 171, 2/. Płaszczyzna $\mathbf{C}$ i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe przecinają więc stożek według kół, tak samo płaszczyzna $\mathbf{D}$ i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe.

<u>§ 176. Czworokąt wpisany w czworobok opisany wzajemnie biegunowe</u>. Zastosujmy metodę biegunowych wzajemnych /§161/ do obu twierdzeń § 169 /Rys.329/. Figurą biegunowo wzajemną względem czworokąta zupełnego $A_1B_1A_2B_2$ jest czworobok zupełny $a_1b_1a_2b_2$, którego boki są styczne do stożkowej w punktach A_1, B_1, A_2 i B_2. Biegunowe punktów przekątnych czworokąta są przekątnemi czworoboku; trójkąt, którego bokami są te przekątne będzie przeto identyczny z trójkątem biegunowym MNP. Ponieważ przeciwległe boki czworokąta przechodzą parami przez punkty M N i P, więc bieguny tych boków t.j. przeciwległe wierzchołki czworoboku leżą parami na biegunowych punktów M, N i P t.j. na bokach NP, PM i MN trójkąta MNP. Stąd twierdzenie: <u>Punkty przecięcia dwóch par boków, przeciwległych czworokąta zupełnego wpisanego w stożkową oraz bieguny dwóch pozostałych boków leżą na jednej prostej</u>.

Stosując metodę biegunowych wzajemnych do drugiego twierdzenia § 168 otrzymamy twierdzenie wzajemne:

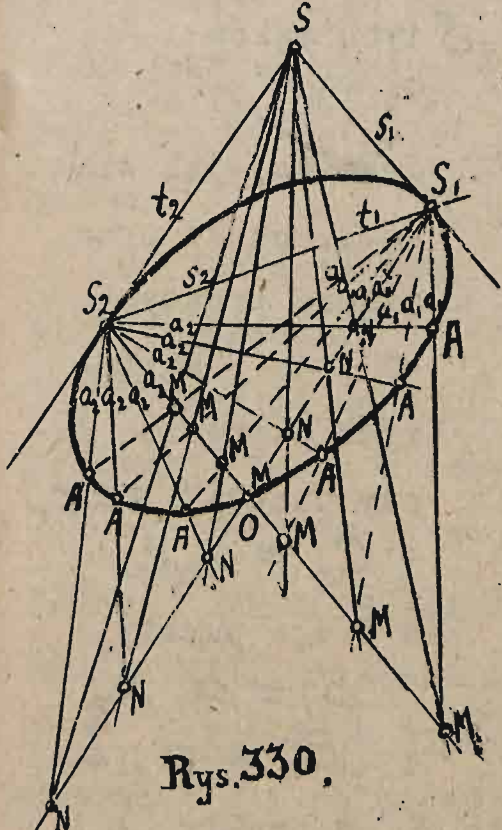
<u>Proste, łączące dwie pary wierzchołków przeciwległych czworoboku zupełnego opisanego na stożkowej oraz biegunowe dwóch pozostałych wierzchołków przechodzą</u> przez jeden punkt.



Rys. 329.

Z twierdzeń powyższszych wynikają dwie ważne grupy twierdzeń: Steinera i Staudta. Odkładając na później twierdzenia Staudta, zajmiemy się przedewszystkiem twierdzeniami Steinera i licznemi wynikającemi z nich wnioskami.

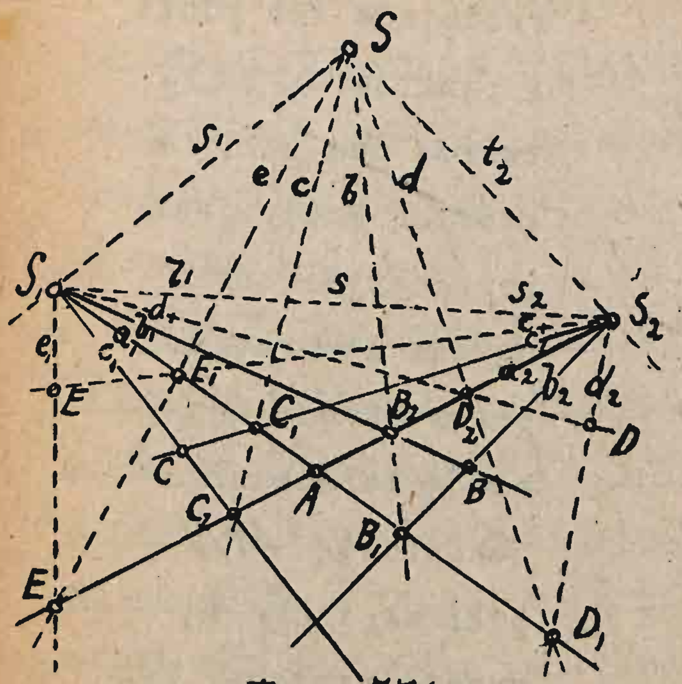
<u>§ 177. Stożkowa rzeczywista, jako miejsce punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych</u>. - <u>Twierdzenie I. Pęki prostych, rzucających punkty stożkowej z jakichkolwiek dwóch jej punktów są rzutowe</u>. Niechaj będą dwa jakiekolwiek punkty stożkowej S_1 i S_2, z których rzucamy wszystkie inne punkty tej samej stożkowej; trzeba dowieść, że pęki S_1 i S_2, których odpowiednie proste, np. a_1 i a_2 rzucają ten sam punkt A stożkowej, są rzutowe /Rys. 330/. Niechaj O będzie jakimkolwiek stałym punktem stożkowej, a A zmiennym jej punktem; wyznaczmy punkty M i N, w których proste S_1A i S_2A przecinają odpowiednio proste S_2O i S_1O; w czworokącie zupełnym wpisanym S_1S_2AO dwie pary przeciwległych boków S_1A i S_2A, S_1O i S_2O przecinają się w punktach M i N; skąd wynika, że prosta MN przechodzi przez biegun S boku S_1S_2, t.j. przez punkt przecięcia stycznych s_1 i t_2 w punktach S i S_2. Gdy punkt A opisuje stożkową, proste a_1 i a_2



Rys.330.

rzucające ten punkt z punktów S_1 i S_2 tworzą dwa pęki, z których każdy jest perspektywiczny z pękiem utworzonym przez obracającą się dokoła punktu S prostą MN : pęki S_1 i S_2 są przeto rzutowe. Zauważmy, że punkt S jest środkiem rzutowym pęków S_1 i S_2 tak, że prostej, łączącej wierzchołki S_1 i S_2 tych pęków i zaliczonej do jednego z nich, odpowiada w drugim styczna do stożkowej w jego wierzchołku.

<u>Twierdzenie II</u>./odwrotne/. <u>Stożkowa jest miejscem geometrycznem punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych</u>. Niech będą dwa pęki rzutowe /ale nie perspektywiczne/: $S_1(a,b,c,...)$ i $S_2(a_2,b_2,c_2,...)$ /Rys.331, z których odpowiednie proste przecinają się



Rys. 331.

w punktach A, B, C . . . . Wyznaczmy środek rzutowy S tych pęków /§ 135, II b/ Jest to, jak wiadomo, punkt przecięcia prostych c i b, z których pierwsza łączy punkty $C_1 \equiv a_1 c_2$ i $C_2 = a_2 c_1$, a druga punkty $B_1 = a_1 b_2$ i $B_2 = a_2 b_1$

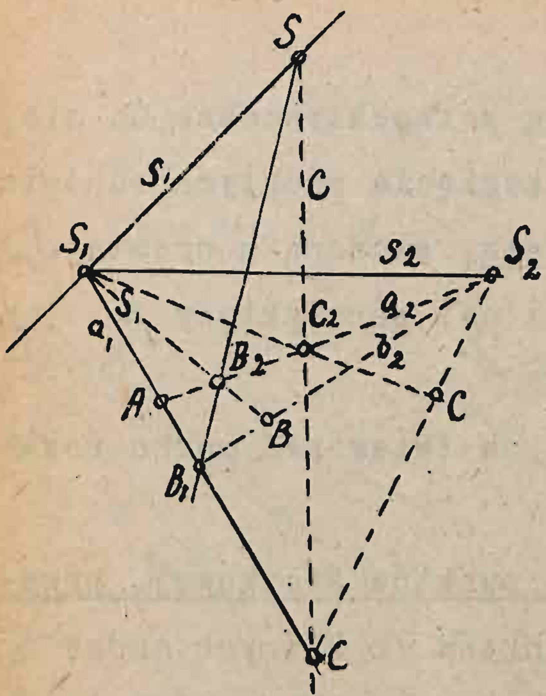
Połączmy punkty S i S_1 prostą s_1, a punkty S_1 i S_2 prostą, s_2 Na zasadzie § 181 przez punkty A B, S_1 i S_2 przechodzi jedna jedyna stożkowa, która jest styczna do prostej s_1; na zasadzie zaś poprzedniego twierdzenia pęki, rzucające z punktów S_1 i S_2 wszystkie punkty tej stożkowej są rzutowe; rzutowość ta może być wyznaczona przez 3 którekolwiek pary prostych odpowiednich, np. przez pary: a_1 i a_2, b_1 i b_2, s_1 i s_2 skąd wynika, że te pęki są identyczne z pękami danemi.

Jeżeli pęki S_1 i S_2 są perspektywiczne, to miejsce geometryczne punktów przecięcia prostych odpowiednich jest stożkową zwyrodniałą, złożoną z prostej S_1S_2 łączącej wierzchołki pęków i osi perspektywy p tych pęków.

Na zasadzie obu powyższych twierdzeń można rozwiązać zadania:

Wykreślić dowolną ilość punktów stożkowej, przechodzącej przez 5 danych punktów /z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej/, - albo przechodzącej przez 4 dane punkty i stycznej w jednym z nich do danej prostej, - albo: przechodzącej przez 3 dane punkty stycznej w dwóch z nich do danych prostych.- Pierwsze z tych zadań rozwiązaliśmy już w § 148 d; rozwiążemy więc tutaj dwa inne zadania.

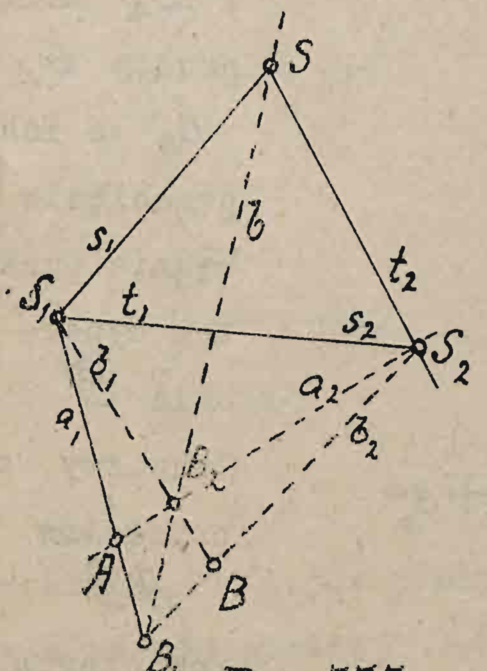
1/ Niechaj będą dane punkty A, B, S_1 i S_2 oraz styczna s, w punkcie S_1 /Rys.332/. Połączmy punkty S_1 i S_2 z punktami A i B prostemi $a_1 b_1$ i a_2 b_2; prostą S_1S_2 oznaczmy literą s_2; rzutowość pęków S_1 i S_2 jest wyznaczona przez 3 pary prostych odpowiednich a_1, b_1, s_1 i a_2, b_2, s_2, / gdyż prostej łączącej wierzchołki S_1 i S_2 i zaliczonej do pęku S_2 odpowiada w pęku S_1 styczna s_1 do stożkowej



Rys. 332.

w punkcie S_1 / Srodek rzutowy S jest przecięciem stycznej s_1 z prostą B_1B_2, która łączy punkt przecięcia prostych a_1 i b_2 punktem przecięcia prostych a_2 i b_1. Chcąc otrzymać jakikolwiek nowy punkt stożkowej C, wyprowadzamy z punktu S dowolną prostą która niechaj przetnie prostą a_1 w punkcie C_1, a prostą a_2 w punkcie C_2 proste S_1C_2 i S_2C_1 będą parą prostych odpowiednich pęków S_1 i S_2 a więc ich punkt przecięcia C będzie punktem stożkowej.

2/ Niechaj będą 3 punkty stożkowej S_1, S_2 i A oraz styczne s_1 i t_2 w punktach S_1 i S_2 /Rys. 333/. Punkt przecięcia S stycznych s_1 i t_2 będzie środkiem rzutowym pęków, rzucających z punktów S_1 i S_2 punkty stożkowej, rzutowość ta jest wyznaczona przez 3 pary prostych: $a_1\, s_1\, t_1$ i $a_2\, s_2\, t_2$ gdyż prostej $S_1S_2 \equiv t_1 \equiv s_2$ zaliczonej do jednego



Rys.333.

z tych pęków odpowiada styczna w wierzchołku drugiego. Prowadząc tedy z punktu S dowolną prostą b, która przetnie proste a_1 i a_2 odpowiednio w punktach B_1 i B_2, otrzymamy punkt stożkowej B, jako przecięcie prostych

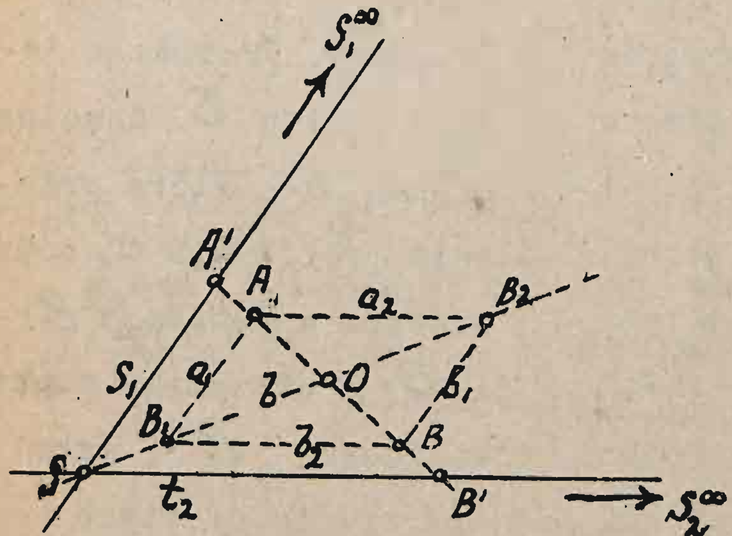
$$S_1B_2 \equiv b$$

i $S_2B_1 \equiv b_2$

§ 178. Zastosowanie

Wykreślić hyperbolę, mając asymptoty s_1 i t_2, oraz jeden punkt hyperboli A.

Asymptoty, jak wiemy, uważać można za styczne do stożkowej w jej punktach niewłaściwych. Mamy więc poprowadzić stożkową przez punkt A i punkty niewłaściwe S_1 i S_2, w których ma ona być styczną do prostych s_1 i t_2. /Rys.334/. Łącząc punkt A z punktami niewłaściwemi S_1 i S_2, t. j. kreśląc z punktu A równoległe a_1 i a_2 do prostych s_1 i t_2 i prowadząc z punktu $S \equiv s_1t_2$ dowolną prostą b, znajdziemy na niej punkty B_1 i B_2, które połączone znowu z punktami niewła-

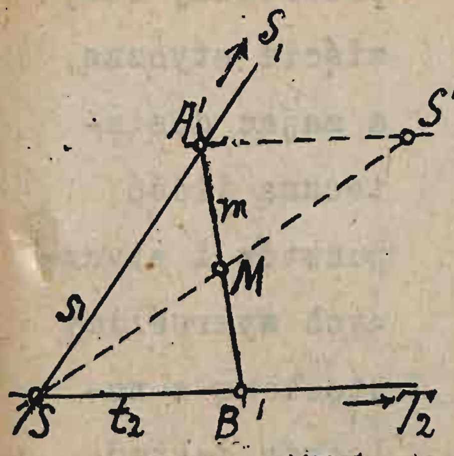


Rys. 334.

ściwemi S_1 i S_2 dadzą proste b_1 i b_2 a ich przecięcie będzie punktem hyperboli B. Zauważmy, że przekątna AB równoległoboku AB_1BB_2 jest przez prostą b w punkcie O podzielona na połowy. Otóż punkt O jest również środkiem odcinka $A'B'$ prostej AB, zawartego między asymptotami, albowiem trójkąty $A'SB'$ i AB_1B są podobne. Stąd wynika, że $AA' = BB'$

<u>Na każdej siecznej hyperboli, odcinki między krzywą, a jej asymptotami są równe</u>.

W szczególności, gdy punkty A i B zostaną zjednoczone w punkcie M /Rys.335/, t.j. gdy sieczna AB stanie się styczną do hyperboli w tym punkcie to odcinki MA' i MB' będą równe, t.j. <u>Punkt zetknięcia jest środkiem odcinka stycznej zawartej między</u>

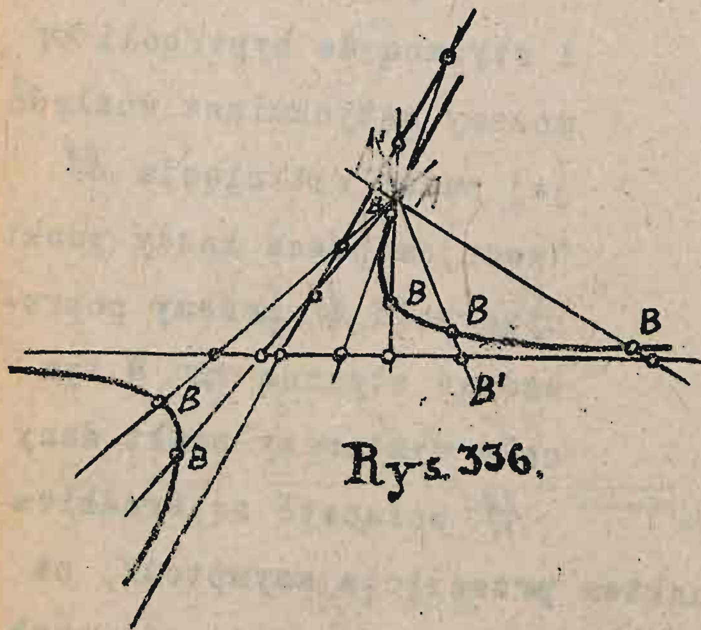


Rys. 335.

asymptotami.

Mając tedy asymptoty i styczną do hyperboli m możemy natychmiast znaleść jej punkt zetknięcia M Nawzajem przez każdy punkt hyperboli M możemy poprowadzić styczną m W tym celu wystarczy punkt dany M połączyć ze środkiem hyperboli S /t.j. z punktem przecięcia asymptot/; na przedłużeniu prostej SM odmierzyć po stronie punktu M odcinek $MS' = MS$; przez punkt S' poprowadzić równoległą do jednej z asymptot, np. do t_2 i punkt przecięcia A' tej równoległej z drugą asymptotą s połączyć z punktem M .

Te dwie właściwości pozwalają szybko i dokładnie wykreślać hyperbolę, gdy dane są jej asymptoty i jeden punkt właściwy A /lub jedna styczna a gdy wtedy znajdujemy natychmiast punkt zetknięcia A /. Prowadzimy mianowicie przez punkt A jakąkolwiek sieczną, która niechaj przetnie asymptoty w punktach A' i B' /Rys.336/ i od punktu B' odmierzamy odcinek $B'B = AA'$ W każdym z punktów w ten sposób otrzymanych



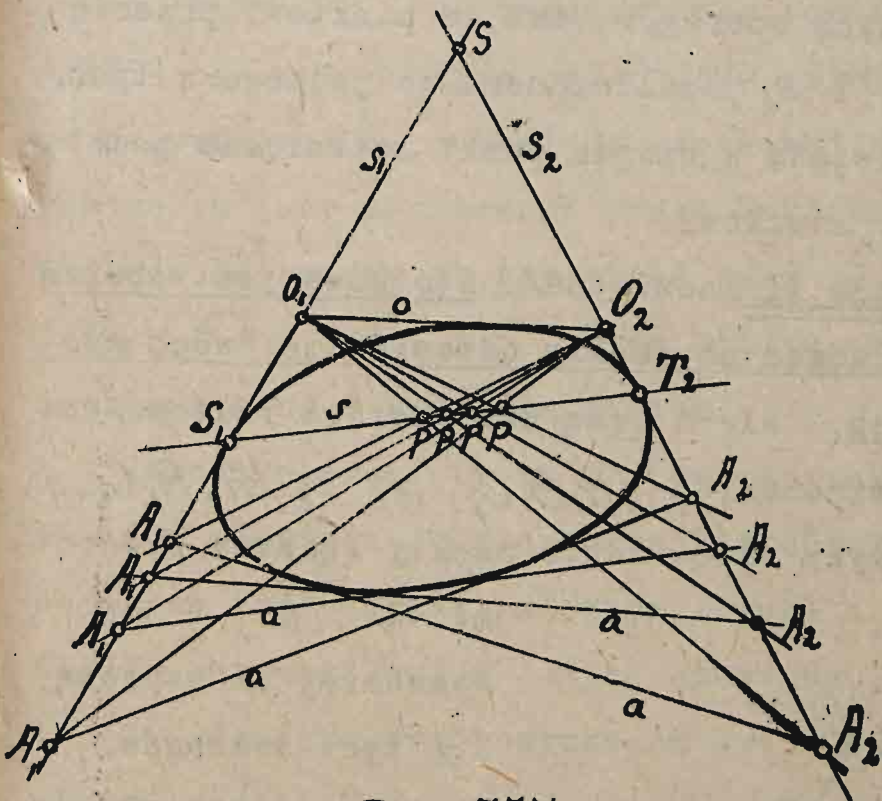
Rys. 336.

prowadzimy oczywiście styczną, a mając dostateczną ilość punktów i stycznych wykreślimy stożkową z należytą dokładnością.

§ 179.

Stożkowa rzeczywista, jako obwiednia prostych łączących punkty odpowiednie dwóch szeregów rzutowych.

Twierdzenie I. Szeregi punktów przecięcia stycznych do stożkowej z jakiemikolwiek dwiema stycznemi są rzutowe./Rys.337./ Niech będą dwie styczne do stożkowej S_1 i S_2, które przecinają wszystkie inne styczne do tej samej stożkowej; trzeba dowieść, że szeregi S_1 i S_2, których odpowiednie punkty np. A_1 i A_2 leżą na tej samej stycznej a są rzutowe. Niechaj o będzie jakąkolwiek stałą styczną do stożkowej; oznaczmy jej punkty przecięcia ze stycznemi S_1 i S_2 literami O_1 i O_2 prosta a niechaj będzie zmienną styczną

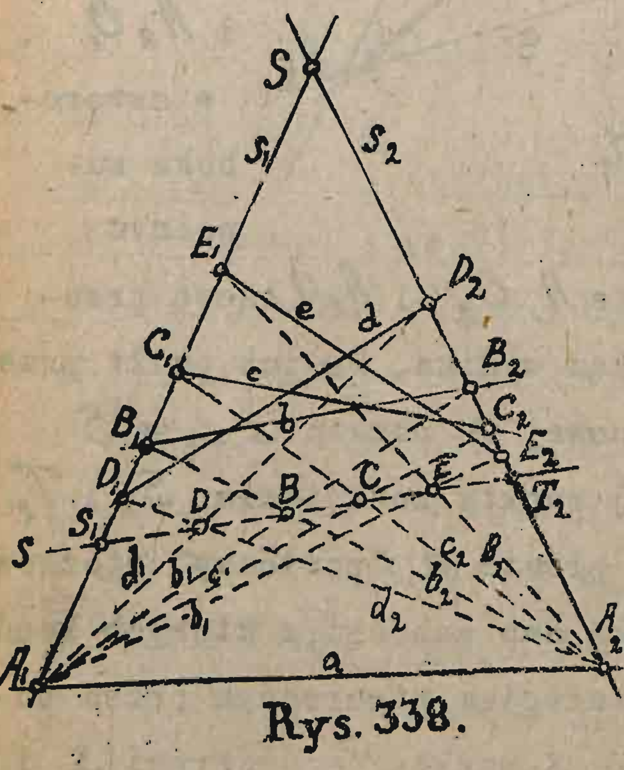


Rys.337.

do stożkowej; niechaj ta prosta przecina styczne s_1 i s_2 w punktach A_1 i A_2. Połączmy $A_1 O_2$ i $A_2 O_1$; w czworoboku zupełnym opisanym $s_1 s_2 a o$ proste $A_1 O_2$ i $A_2 O_1$ łączą przeciwległe wierzchołki, skąd wynika, że ich punkt przecięcia P leży na biegunowej s punktu $s_1 s_2 \equiv S$ t.j. na prostej łączącej punkty zetknięcia S_1 i T_2 stycznych s_1 i s_2. Gdy prosta a "powłóczy" stożkową punkty A_1 i A_2 tworzą dwa szeregi, z których każdy jest w perspektywie z szeregiem utworzonym przez poruszający się na prostej s punkt P; szeregi s_1 i

S_2 są przeto rzutowe. Zauważmy, że prosta S_1T_2 jest osią rzutową tych szeregów, tak, że punktowi przecięcia podstaw s_1 i s_2, zaliczonemu do jednego z tych szeregów, odpowiada w drugim punkt zetknięcia podstawy drugiego ze stożkową.

Twierdzenie II /odwrotne/. Stożkowa jest obwiednią prostych łączących punkty odpowiednie dwóch szeregów rzutowych. Niech będą dwa szeregi rzutowe/ale nie perspektywiczne/. $s_1/A_1B_1C_1\ldots/$ i $s_2/A_2B_2C_2\ldots/$ /Rys.338/, których odpowiednie punkty łączymy prostemi a, b, c ... Wyznaczmy oś rzutową s tych szeregów. Jest to, jak wiadomo, prosta łącząca punkty B i C z których pierwszy jest przecięciem prostych A_1B_2 i A_2B_1, a drugi prostych A_1C_2 i A_2C_1. Wyznaczmy punkty $ss_1 \equiv S_1$ i $ss_2 \equiv T_2$. Na



Rys. 338.

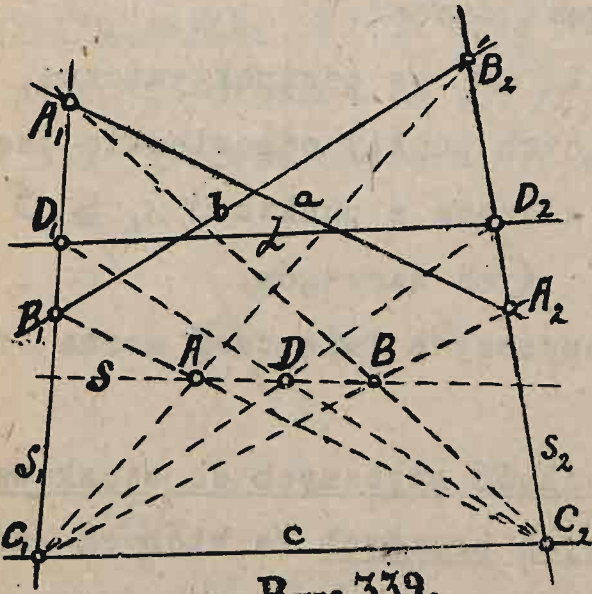
zasadzie § 181 istnieje jedna i tylko jedna stożkowa styczna do prostych a, b, s_1 i s_2 i przechodząca przez punkt ; na zasądzie zaś poprzedniego twierdzenia szeregi punktów przecięcia stycznych s_1 i s_2 ze wszystkiemi stycznemi do stożkowej są rzutowe; rzutowość ta jest wyznaczona przez 3 którekolwiek pary punktów odpowiednich, nap. przez pary A_1 i A_2, B_1 i B_2, S_1 i $S_2 \equiv S$, stąd wynika, że te szeregi są identyczne z szeregami danemi.

Jeżeli szeregi s_1 i s_2 są perspektywiczne, to obwiednią prostych łączących punkty odpowiednie jest stożkowa zwyrodniała, złożona z punktu $s_1 s_2 \equiv S$ i środka perspektywy P tych szeregów.

Na zasadzie obu powyższych twierdzeń można rozwiązać zadania:

Wykreślić dowolną ilość stycznych do stożkowej, stycznej do pięciu danych prostych /z których żadne 3 nie przechodzą przez jeden punkt/, - albo: stycznej do 4 danych prostych i mającej z jedną z nich dany punkt zetknięcia, - albo: stycznej do 3 danych prostych i mających z dwiema z nich dane punkty zetknięcia.

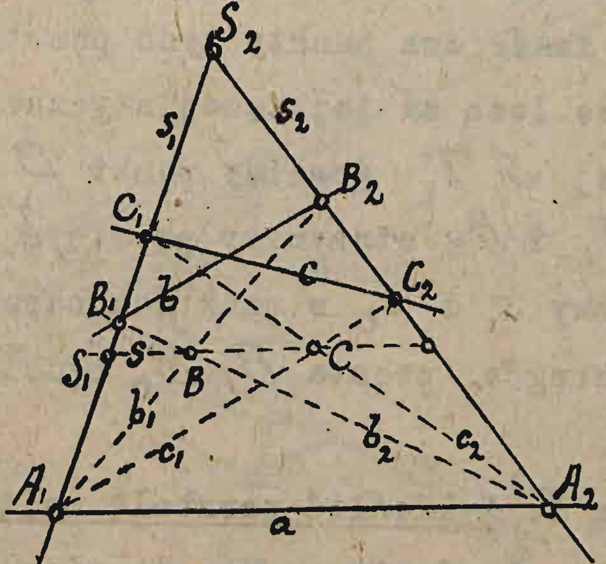
1/ Niech będą dane styczne s_1, s_2, a, b i c. Zadanie będzie rozwiązane, gdy wskażemy, jak z dowolnego punktu, leżącego na stycznej s , wyprowadzić drugą styczną d do stożkowej, która jest styczną do wszystkich 5 danych prostych. Zmieniając bowiem położenie tego punktu na stycznej s_1 ,znajdziemy dowolną ilość stycznych do tej stożkowej. /Rys.339/.



Rys.339.

Obierzmy styczne s_1 i s_2 za podstawy szeregów wyznaczonych przez styczne do stożkowej. Jeżeli styczne a b i c przecinają styczną s w punktach A_1, B_1 i C_1, a styczną s_2 w punktach A_2 B_2 C_2 to te trzy pary punktów wyznaczą rzutowość szeregów $s_1 (A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge s_2 (A_2 B_2 C_2 \ldots)$, które przez położenie odpowiednich punktów utworzą stożkową styczną do wszystkich 5 danych prostych. Aby z punktu D_1 , leżącego na stycznej s , wyprowadzić nową styczną d ,odnajdziemy w szeregu s_2 punkt D_2 odpowiadający rzutowo punktowi D_1 ; styczna d łączy dwa punkty odpowiednie D_1 i D_2 . Wykreślmy więc najpierw oś rzutową s tych szeregów, łącząc punkt A przecięcia prostych B_1C_2 i B_2C_1 z punktem B przecięcia prostych A_1C_2 i A_2C_1. Wyznaczmy następnie punkt D przecięcia prostych D_1C_2 i s i połączmy DC_1 ; punkt D_2 będzie przecięciem prostych DC_1 i s_2 ; prosta D_1D_2 będzie szukaną styczną d . Zauważmy, że oś rzutowa s przecina styczne s_1 i s_1 w punktach zetknięcia.

2/ Niechaj będą dane styczne a , b , s_1 i s_2 oraz punkt zetknięcia S_1 stycznej s_1 /Rys.340/.



Rys. 340.

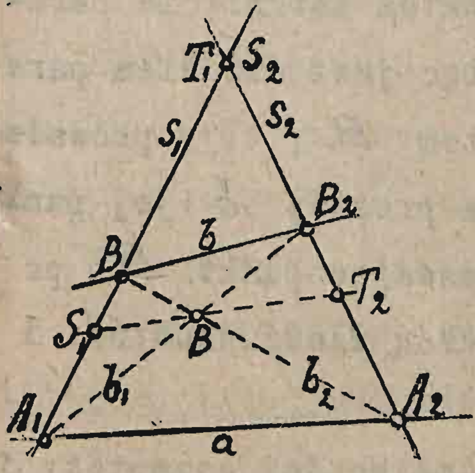
Wyznaczmy punkty A_1, B_1 i A_2 B_2 ,w których proste a i b przecinają s_1 i s_2 ; punkt s_1s_2 oznaczmy literą S_2 ;rzutowość szeregów s_1 i s_2 jest wyznaczona przez 3 pary punktów odpowiednich $A_1B_1S_1$ i $A_2B_2S_2$ /gdyż punktowi przecięcia podstaw s_1 i s_2 zaliczonemu do szeregu s_2 odpowiada w szeregu s_1 punkt.

zetknięcia stycznej S_1 ze stożkową/. Oś rzutowa s łączy punkt S z punktem przecięcia prostych $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$. Chcąc otrzymać jakąkolwiek nową styczną do stożkowej, obieramy na prostej s dowolny punkt C i łączymy go z punktami A_1 i A_2 prostemi c_1 i c_2 ; punkty $s_1 c_2$ i $s_2 c_1$ będą parą punktów odpowiednich szeregów S_1 i S_2, a więc prosta, która je połączy, będzie styczną c do stożkowej.

3/ Niechaj wreszcie będą 3 styczne S_1, S_2 i a oraz punkty zetknięcia S_1 i T_2 na stycznych S_1 i S_2 /Rys.341/. Prosta $S_1 T_2$ będzie osią rzutową szeregów, których podstawami są styczne S_1 i S_2, a punktami odpowiedniemi każde dwa punkty tych prostych /np. A_1 i A_2/, które leżą na tej samej stycznej a. Obrawszy tędy na prostej $S_1 T_2$ dowolny punkt B i łącząc go z punktami A_1 i A_2 otrzymamy proste b_1 i b_2 które przecinają podstawy S_1 i S_2 w punktach odpowiednich B_2 i B_1 tych szeregów; prosta $B_1 B_2$ będzie styczną do stożkowej.

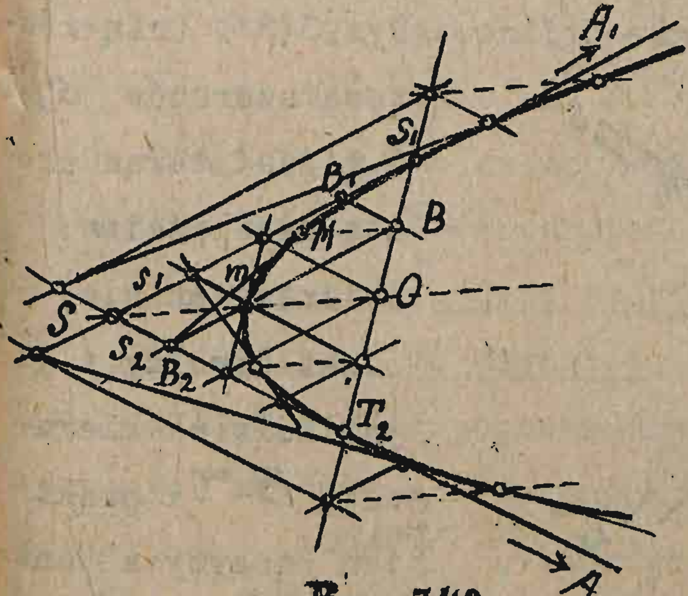
<u>§ 180. Zastosowania</u> I. <u>Wykreślić parabolę mając jej 4 styczne a, b, c i s. Ponieważ</u> prosta niewłaściwa jest styczną do paraboli, więc memy wówczas 5 danych stycznych do stożkowej.

II. <u>Wykreślić parabolę, mając jej dwie styczne</u>



Rys. 341.

s_1 i s_2 wraz z punktami zetknięcia S_1 i T_2 /Rys.342/. Mamy teraz dane trzy styczne / s_1, s_2 i prosta niewłaściwa a /, oraz punkty zetknięcia na stycznych s_1 i s_2. Stosując rozwiązanie ogólne obieramy na prostej S_1T_2 dowolny punkt B i łącząc go z punktami niewłaściwemi A_1 i A_2 prostych s_1 i s_2 /t.j. prowadząc z punktu B równoległe do stycznych s_1 i s_2/, otrzymamy na prostych s_1 i s_2

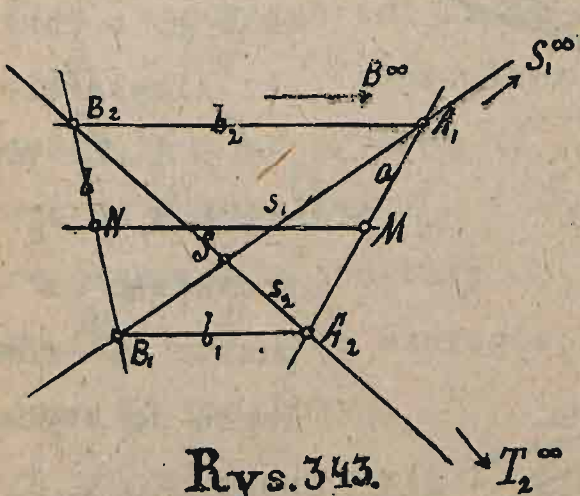


Rys.342.

punkty B_1 i B_2; prosta B_1B_2 jest styczną do paraboli. - Prosta, łącząca punkt $s_1 s_2 \equiv S$ ze środkiem

O cięciwy S_1T_2 jest średnicą sprzężoną z cięciwą S_1T_2 i jej kierunek jest punktem zetknięcia paraboli z prostą niewłaściwą /a więc jest środkiem paraboli/. Łącząc ten punkt z punktem B, t.j. prowadząc $BM \parallel OS$, otrzymamy na prostej b jej punkt zetknięcia M z parabolą. Przesuwając punkt B po prostej S_1T_2 wyznaczymy potrzebną ilość punktów i stycznych paraboli.

III. Wykreślić hyperbolę, mając jej asymptoty S_1 i S_2 oraz jedną styczną a. Zadanie to rozwiązaliśmy już w § 178, ale prościej jeszcze można je rozwiązać, stosując rozwiązanie ogólne. /Rys.343/. Osią rzutową szeregów S_1 i S_2 jest teraz prosta niewłaściwa; obieramy na niej punkt dowolny, t.j. jakikolwiek kierunek B^∞ i punkt ten łączymy z punktami A_1 i A_2, w których styczna a przecina styczne S_1 i S_2; innemi słowy z punktów A_1 i A_2 prowadzimy w dowolnym kierunku dwie równoległe b_1 i b_2; punkty B_1 i B_2, w



Rys.343.

których te proste przetną s_1 i s_2, łączymy nową styczną b. W ten sposób możemy otrzymać dowolną ilość stycznych. Prowadząc przez środek M odcinka $A'B'$ równoległą do obranego kierunku B^{∞} otrzymamy zarazem punkt zetknięcia N na każdej nowej stycznej b.

Z tego wykreślenia wyciągamy wniosek:

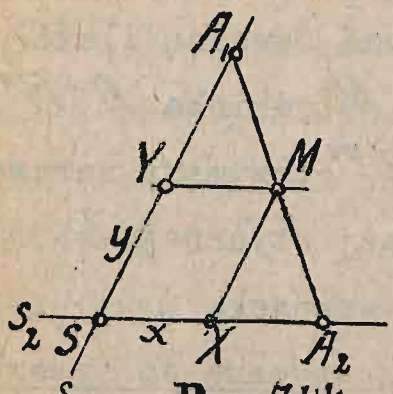
Pola trójkątów, które dowolna styczna do hyperboli tworzy z jej asymptotami, są stałe.

W samej rzeczy trójkąty $A_1A_2B_2$ i $B_1B_2A_1$ mają dwa wierzchołka A_1 i B_2, a więc i bok A_1B_2 wspólne, trzecie zaś wierzchołki A_2 i B_1, leżą na równoległej do tego boku; są to zatem trójkąty równoważne. Odejmując po trójkącie A_1SB_2 od każdego z tych trójkątów (względnie odejmując każdy z tych ~~trójkątów~~ od trójkąta A_1SB_2) otrzymamy trójkąty równoważne A_1A_2S i B_1B_2S

Własność ta znajduje swój wyraz w równaniu hyperboli, odniesionej do asymptot. Z dowolnego punktu M hyperboli /Rys.344/ poprowadźmy równoległe do asymptot uważanych za osie spółrzędnych; utworzy się wtedy równoległobok $SXMY$, którego pole jest połową pola trójkąta A_1A_2S; to ostatnie zaś jest stałe, t.j. od położenia punktu M na hyperboli niezależne. Stąd

$$SX \cdot SY \cdot \sin(s_1 s_2) = stałej$$

Oznaczając jak zwykle, $SX = x$, $SY = y$

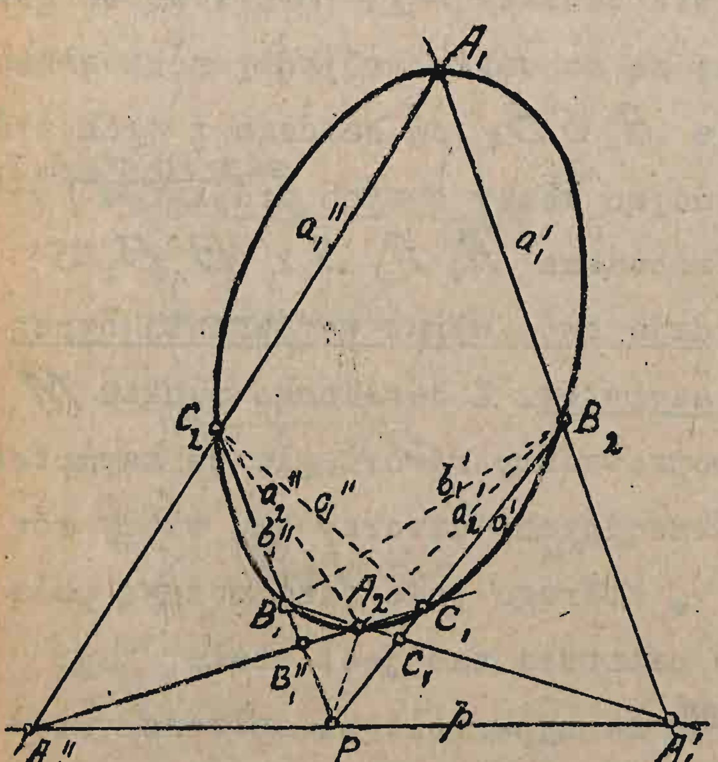


Rys.344.

i zauważywszy, że kąt $/S_1 S_2/$ jest stały, mamy równanie hyperboli, odniesionej do asymptot:

$$x \cdot y = \text{stałej}.$$

§ 181. Twierdzenie Pascala. W sześciokącie wpisanym w stożkową boki przeciwległe przecinają się parami w trzech punktach, leżących na jednej prostej. Niech będzie sześciokąt $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ wpisany w stożkową /Rys. 345/; trzeba dowieść, że punkty P, A_1'' i A_1' w których się przecinają pary boków przeciwległych B_1C_2 i B_2C_1, C_1A_2 i C_2A_1, A_1B_2 i A_2B_1 leżą na jednej prostej. Z dwóch wierz-

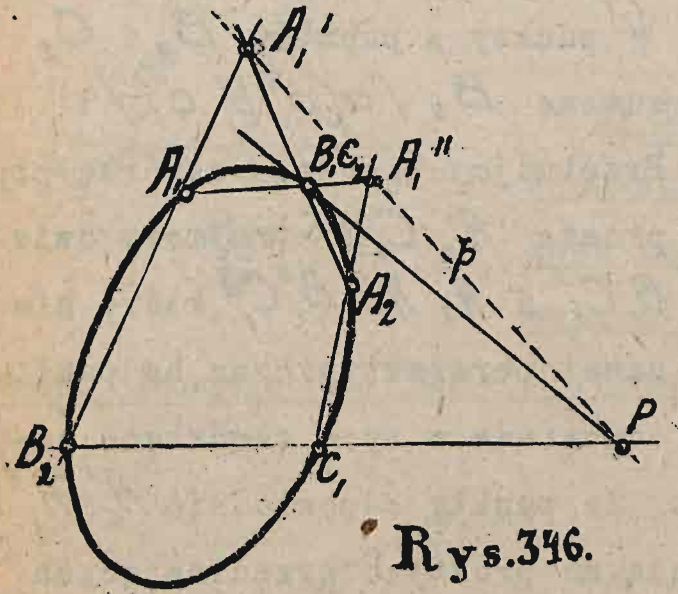


Rys. 345.

chołków niesąsiednich i nieprzeciwległych, np. z B_2 i C_2, rzućmy pozostałe 4 wierzchołki: A_2, A_1, B_1 i C_1. Na zasadzie twierdzenia Steinera /§ 177/ I/ proste rzucające te 4 punkty z punktów B_2 i C_2 stanowią dwie czwórki rzutowe $B_2/a_2'a_1'b_1'c_1'/$ i $C_2/a_2''a_1''b_1''c_1''/$. Przetnijmy pierwszą czwórkę prostą A_2B_1, a drugą prostą A_2C_1; otrzymamy dwie czwórki punktów $A_2A_1'B_1C_1'$ i $A_2A_1''B_1''C_1$, które nie tylko będą rzutowe, ale nawet perspektywiczne, bo punkt przecięcia podstaw A_2 odpowiada w tych czwórkach samemu sobie. Stąd wynika, że punkty odpowiednie A_1' i A_1'', B_1 i B_1'', C_1 i C_1' leżą na prostych przecinających się w jednym punkcie, mianowicie w środku perspektywy P tych dwóch perspektywicznych czwórek punktów. Innemi słowy, prosta $A_1'A_1''$ przechodzi przez punkt przecięcia prostych B_1B_1'' i C_1C_1', t.j. przez punkt P, tak, że 3 punkty P, A_1' i A_1'' leżą na jednej prostej, c.b.d.o.

Twierdzenie to pozostaje w swej mocy, gdy w sześciokącie wpisanym w stożkową jedna, dwie lub trzy pary wierzchołków sąsiednich zostaną zjednoczone, przez co sześciokąt wyrodnieje i staje się wpisanym pięciokątem, czworokątem lub trójkątem, a zwyrodniałe boki stają się stycznemi do stożkowej w wierzchołkach zjednoczonych.

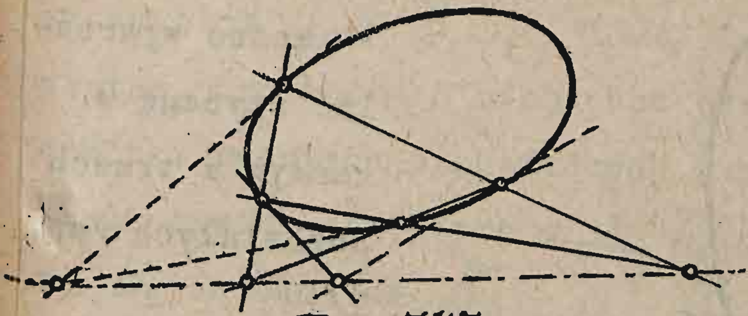
1/ Przypuśćmy najpierw, że w sześciokącie wpisanym $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ /Rys.346/ jedna para sąsiednich wierzchołków jest zjednoczona; załóżmy np. że wierzchołek C_2 przystaje do B_1, tak że sześciokąt zniekształca się na pięciokąt wpisany $A_1B_2C_1A_2B_1$, w którego jednym wierzchołku /B_1/ dana jest styczna.



Rys.346.

W pięciokącie wpisanym w stożkową punkty przecięcia dwóch par niesąsiednich boków oraz punkt przecięcia piątego boku ze styczną w przeciwległym mu wierzchołku, leżą na jednej prostej.

2/ Załóżmy powtóre /Rys.347/, że w sześciokącie wpisanym $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ dwie pary sąsiednich wierzchołków, np. B_2C_1 i B_1C_2 zostały zjednoczone. Figura staje się wpisanym czworokątem $A_1B_2A_2B_1$ i twierdzenie Pascala przekształca się na znane nam dobrze twierdzenie o czworokącie wpisanym § 186, które



Rys.347.

można sformułować jeszcze tak:
W czworokącie wpisanym w stożkową punkty przecięcia boków przeciwległych oraz punkty przecięcia stycznych w wierzchołkach przeciwległych leżą na jednej prostej.

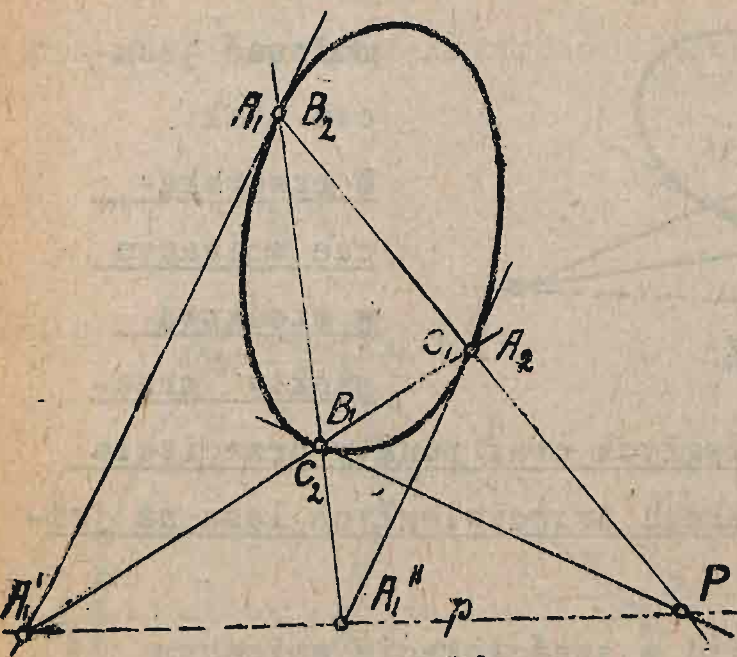
3/ Niechaj wreszcie w sześciokącie wpisanym $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ /Rys.348/ trzy pary sąsiednich wierzchołków A_1 i B_2, C_1 i A_2, B_1 i C_2, zostaną zjednoczone w punktach A_1, C_1 i B_1. Mamy wtedy do czynienia z trójkątem wpisanym w stożkową, w którego wierzchołkach dane są styczne.

W trójkącie wpisanym w stożkową punkty przecięcia boków ze stycznemi w wierzchołkach tym bokom przeciwległych, leżą na jednej prostej.

Na zasadzie powyższych wniosków można rozwiązać zadania:

1/ Jeżeli dane są 5 punktów stożkowej, to można w każdym z nich poprowadzić styczną /wn.1/;

2/ Jeżeli dane są 4 punkty stożkowej i styczna



Rys. 348.

w jednym z nich, to można wykreślić styczne w każdym z trzech pozostałych /wn. 2/;

3/ Jeżeli dane są 3 punkty stożkowej i styczne w dwóch z nich, to można wykreślić styczną w trzecim wierzchołku /wn.3/.

§ 182. Twierdzenie odwrotne i jego zastosowania.

Zarówno twierdzenie Pascala, jak i wymienione wyżej 3 wnioski mogą być odwrócone. Tak np. prawdziwe jest twierdzenie:

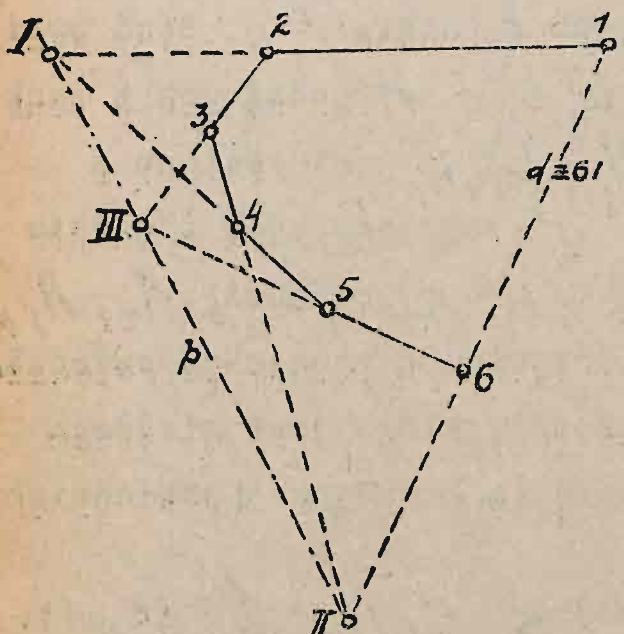
Jeżeli przeciwległe boki sześciokąta przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej, to stożkowa przechodząca przez 5 jego wierzchołków, przechodzi także przez szósty. Niech będzie sześciokąt $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ /Rys.345/ mający tę własność, że boki przeciwległe B_1C_2 i B_2C_1, C_1A_2 i C_2A_1, A_1B_2 i A_2B_1 przecinają się w punktach P, A_1''.

i A_1', leżących na prostej p. Mamy dowieść, że wszystkie 6 wierzchołków leżą na jednej stożkowej. Dwie czwórki punktów $A_2 A_1' B_1 C_1'$ i $A_2 A_1'' B_1'' C_1$ są perspektywiczne, gdyż każda z nich jest przecięciem tej samej czwórki prostych wychodzących z punktu P. Stąd wynika, że czwórka prostych $a_2' a_1' b_1' c_1'$ wychodzących z punktu B_2 do punktów A_2, A_1', B_1, C_1' jest rzutową z czwórką prostych $a_2' a_1'' b_1'' c_1''$, wychodzących z punktu C_2 do do punktów A_2, A_1'', B_1'', C_1; punkty A_2, A_1', B_1'' i C_1, w których się przecinają proste odpowiednie tych czwórek, leżą na stożkowej, która jest miejscem geometrycznem punktów przecięcia prostych odpowiednich dwóch pęków rzutowych:

$$B_2(a_2' a_1' b_1' c_1') \barwedge C_2(a_2'' a_1'' b_1'' c_1'');$$

Stożkowa ta, jak wiadomo, przechodzi przez oba wierzchołki pęków B_2 i C_2

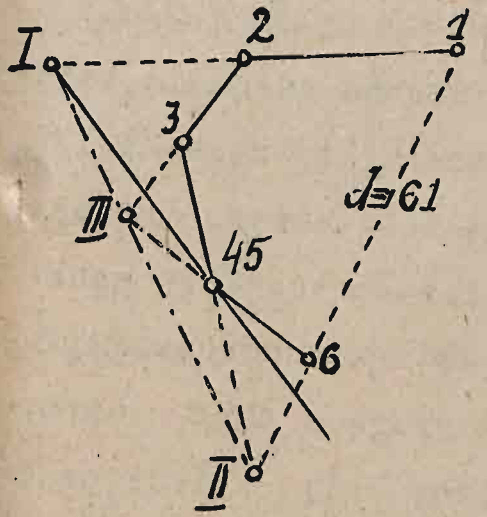
<u>Na zasadzie tego twierdzenia można wyznaczyć dowolny</u> szósty punkt stożkowej, której 5 punktów 1, 2, 3, 4 i 5 są dane /Rys.349/. Szukamy wierzchołka 6 sześciokąta wpisanego, którego pozostałe wierzchołki 1, 2, 3, 4 i 5 oraz bok $61 \equiv d$ jest dany. Wiemy, że boki przeciwległe 12 i 45, 34 i 61, 23 i 56 przecinają się w trzech punktach I, II, i III, leżących na



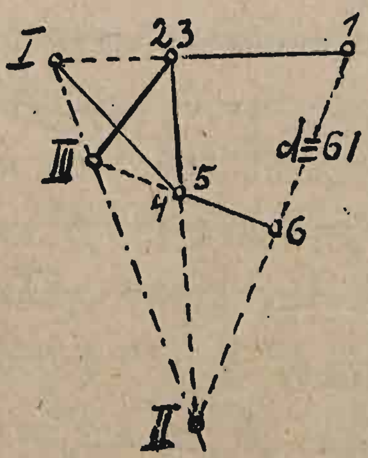
Rys.349.

jednej prostej osi Pascala/.Połączywszy punkty 12 i 45 znajdziemy w przecięciu tych prostych punkt I, w przecięciu prostej 34 z 61 ≡ d znajdziemy punkt II, prosta I II jest osią Pascala p na której musi leżeć punkt III. Będzie to oczywiście punkt, w którym prosta 23 przecina prostą p, łącząc go z punktem 5 otrzymamy w przecięciu z prostą 61 ≡ d punkt szukany III.

Rozwiązanie nie ulega zasadniczej zmianie, gdy dwa którekolwiek z danych punktów, np. 4 i 5 są zjednoczone, t.j. gdy dane są 4 punkty: 1, 2, 3 i 45 oraz styczna w punkcie 45 /Rys.150/ - albo gdy dwa punkty 2 i 3, oraz dwa inne 4 i 5 są zjednoczone, t.j. gdy dane są 3 punkty 1, 23 i 45 oraz styczne w punktach 23 i 45 /Rys.351/.



Rys. 350.

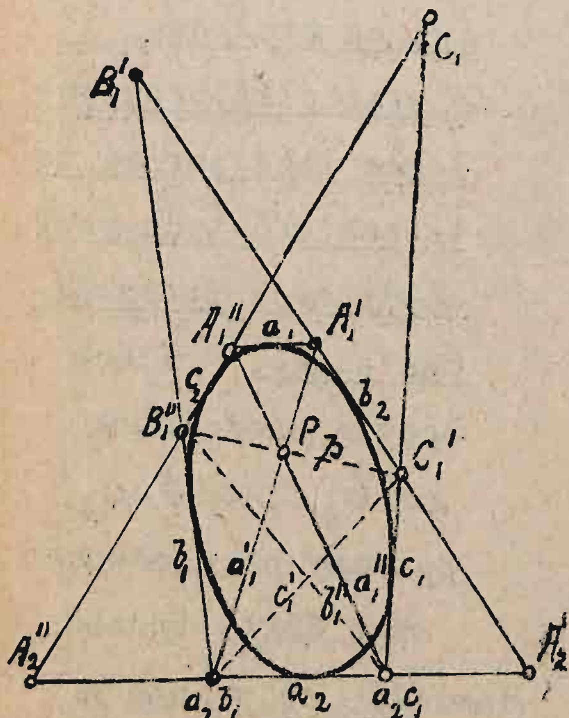


Rys.351.

§ 183. Twierdzenie Brianchona. W sześcioboku opisanym na stożkowej wierzchołki przeciwległe leżą parami na trzech prostych przechodzących przez jeden punkt. - Niech będzie sześciobok

$a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$

opisany na stożkowej /Rys.352/, trzeba dowieść, że proste p, a_1' i a_1'', które łączą pary wierzchołków przeciwległych: $b_1 c_2$ i $b_2 c_1$, $c_1 a_2$ i $a_2 c_1$, $a_1 b_2$ i $a_2 b_1$ przechodzą przez jeden punkt. Na dwóch bokach niesąsiednich i nieprzeciwległych, nap. na b_2 i c_1, pozostałe 4 boki a_2, a_1, b_1

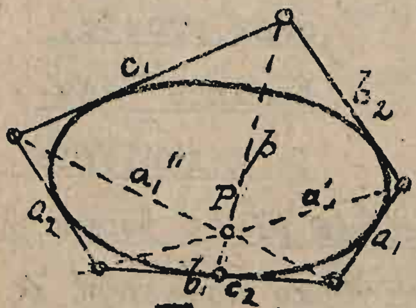


Rys.352.

i C_1 wyznaczają dwie czwórki punktów $A_2' A_1' B_1' C_1'$ i $A_2'' A_1'' B_1'' C_1''$ które na zasadzie twierdzenia Steinera /§ 179 I/ są rzutowe. Rzućmy pierwszą czwórkę punktów z wierzchołka $a_2 b_1$, a drugą z $a_2 c_1$ ozrzymamy dwie czwórki prostych $a_2 a_1' b_1 c_1'$ i $a_2 a_1'' b_1'' c_1$ które nietylko będą rzutowe, ale nawet perspektywiczne, bo prosta a_2 łącząca wierzchołki, odpowiada w tych czwórkach samej sobie. Stąd wynika, że proste odpowiednie a_1' i a_1'', b_1 i b_1'', c_1' i c_1 przecinają się w punktach leżących na jednej prostej, mianowicie na osi perspektywy p tych dwóch perspektywicznych czwórek. Innemi słowy, punkt $a_1'a_1''$ leży na prostej, łączącej punkty $b_1 b_1''$ i $c c_1$, t.j. na prostej p, tak że 3 proste: p, a_1' i a_1'' przechodzą przez jeden punkt P, co b.d.o.

Twierdzenie to pozostanie w mocy, gdy w sześcioboku opisanym na stożkowej jedna, dwie lub trzy pary boków sąsiednich zostaną zjednoczone, przez co sześcio bok wyrodnieje i staje się opisanym pięciobokiem, czworobokiem lub trójkątem, a zwyrodniałe wierzchołki stają się punktami zetknięcia na bokach zjednoczonych.

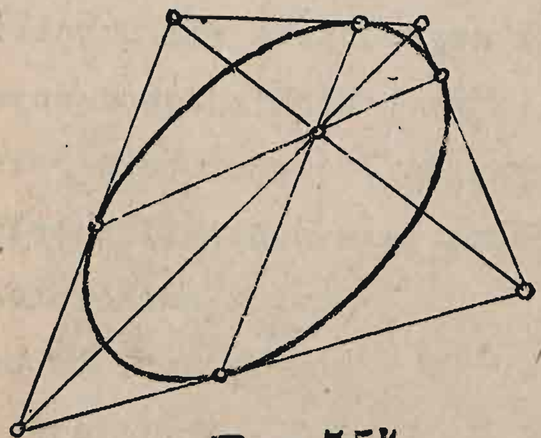
1/ Przypuśćmy najpierw, że w sześcioboku opisanym $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ /Rys.353/ jedna para sąsiednich boków jest zjednoczona, załóżmy nap. że bok c_2 przystaje do b_1, tak że sześciobok $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ przekształca się na pięciobok opisany $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1$, na którego jednym boku / b_1 / dany jest punkt zetknięcia $b_1 c_2$



Rys.353.

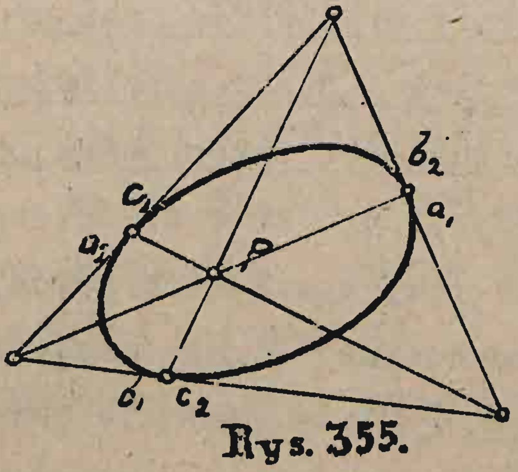
W pięcioboku opisanym na stożkowej, proste, łączące dwie pary niesąsiednich wierzchołków oraz prosta, która łączy piąty wierzchołek z punktem zetknięcia na przeciwległym mu boku, przechodzą przez jeden punkt.

2/ Załóżmy powtóre /Rys.354/, że w sześcioboku opisanym $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ dwie pary sąsiednich boków, np. $b_2 c_1$ i $b_1 c_2$ zostały zjednoczone. Figura staje się opisanym czworobokiem $a_1 b_2 a_2 b_1$ i twierdzenie Brianchona przekształca się na znane nam dobrze twierdzenie o czworoboku opisanym /§ 176/ W czworoboku opisanym na stożkowej proste, łączące wierzchołki przeciwległe oraz proste, łączące punkty zetknięcia na bokach przeciwległych, przechodzą przez jeden punkt.



Rys. 354.

3/ Niechaj wreszcie w sześcioboku opisanym $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ /Rys.355/ trzy pary sąsiednich boków a_1 i b_2, c_1 i a_2, b_1 i c_2 zostaną zjednoczone na bokach a_1, b_1 i c_1. Mamy wtedy do czynienia z opisanym na stożkowej trójkątem, na którego bokach dane są punkty zetknięcia.



Rys. 355.

W trójkącie opisanym na stożkowej proste łączące wierzchołki z punktami zetknięcia na bokach tym wierzchołkom przeciwległych, przechodzą przez jeden punkt.

Na zasadzie powyższych wniosków można rozwiązać zadania:

1/ Jeżeli dane są 5 stycznych do stożkowej, to można na każdej z nich wyznaczyć punkt zetknięcia/Wn.1/

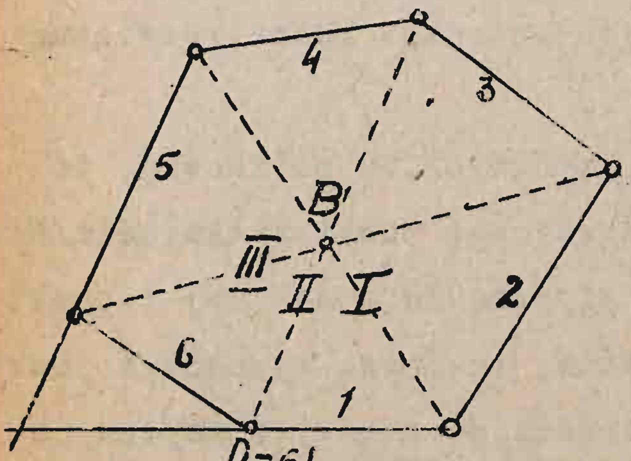
2/ Jeżeli dane są 4 styczne do stożkowej i punkt zetknięcia na jednej z nich, to można wyznaczyć punkty zetknięcia na każdej z trzech pozostałych stycznych çWn.2/.

3/ Jeżeli dane są 3 styczne do stożkowej i punkty zetknięcia na dwóch z nich, to można wyznaczyć punkt zetknięcia na trzeciej stycznej /Wn.3/.

§ 184. Twierdzenie odwrotne i jego zastosowania. Rozumując w ten sam sposób, jak § 182 dowiedlibyśmy twierdzenia odwrotnego:

Jeżeli proste, łączące przeciwległe wierzchołki sześcioboku przechodzą przez jeden punkt, to stożkowa styczna do pięciu jego boków jest styczną także do szóstego.

Na zasadzie tego twierdzenia można wykreślić dowolną szóstą styczną do stożkowej, której 5 stycznych 1, 2, 3, 4 i 5 są dane /Rys.350/



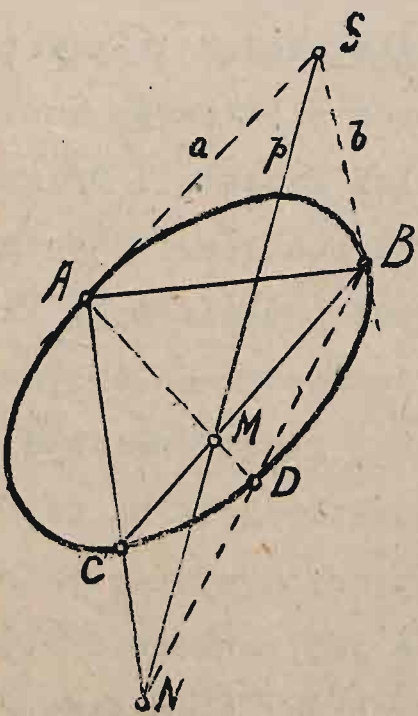
Rys. 356.

Szukam boku 6 sześcioboku opisanego, którego pozostałe boki 1, 2, 3, 4 i 5 oraz wierzchołek $6d \equiv D$ jest dany. Wiemy, że wierzchołki przeciwległe 12 i 45, 34 i 61, 23 i 56 leżą parami na prostych I, II, III, przechodzących przez jeden punkt /punkt Brianchona/. Połączmy punkty 12 i 45 prostą I, a punkty 34 i $61 \equiv D$, prostą II; punkt przecięcia prostych I i II jest punktem Brianchona - B; przez który przejść musi również prosta III. Łączy ona oczywiście punkt 23 z punktem B, w przecięciu jej z prostą 5 otrzymamy punkt 56, który wraz z punktem $61 \equiv D$, wyznaczy szukaną styczną 6.

Rozwiązanie to może być zastosowane również i wtedy, gdy jedna lub dwie pary danych stycznych są zjednoczone, t.j. gdy dane są 4 styczne i punkt zetknięcia na jednej z nich, lub gdy dane są 5 styczne i punkty zetknięcia na dwóch z nich. Styczne, na których dane są punkty zetknipcia opatrujemy poprostu dwoma numerami kolejnemi np. 56, dany punkt zetknięcia na tej stycznej uważamy za punkt przecięcia stycznych 5 i 6

§ 185. Twierdzenia Staudta. Mając 5 punktów, albo pięć stycznych rzeczywistych stożkowej, możemy na zasadzie twierdzeń Steinera lub Pascala i Brianchona wykreślić dowolną ilość nowych punktów i stycznych stożkowej - przytem z 5 danych punktów mogą każde dwa być zjednoczone /wtedy dana jest styczna w tym punkcie/ albo z 5 danych stycznych mogą każde dwie być zjednoczone /wtedy dany jest punkt zetknięcia na tej stycznej/. Powstaje pytanie, - czy można wyznaczyć stożkową /t.j. wykreślić dowolną ilość jej punktów i stycznych/ jeżeli z pomiędzy pięciu danych jej elementów /5 punktów lub 5 stycznych/ dwa, albo dwa i jeszcze dwa, są urojone sprzężone, - t.j. jeżeli zamiast dwóch punktów rzeczywistych dana jest biegunowa inwolucja eliptyczna na prostej zewnętrznej, albo jeżeli zamiast dwóch stycznych rzeczywistych dana jest biegunowa inwolucja eliptyczna dokoła punktu wewnętrznego? Odpowiedź na to pytanie dają twierdzenia Staudta.

I. Punkty, w których dwa boki trójkąta wpisanego w stożkową przecinają prostą sprzężoną z trzecim bokiem są sprzężone. - Niech będzie /Rys.357/ trójkąt ABC wpisany w stożkową i niechaj punkt S będzie biegunem boku AB . Poprowadźmy przez punkt S jakąkolwiek prostą p ; trzeba dowieść, że punkty M i N w których ta prosta przecina boki BC i AC są biegunowo sprzężone. Połączmy BN prosta BN jest sieczną stożkowej /§ 159/ i przecina ją zatem jeszcze w jednym punkcie . Połączmy AD ; powiadam, że AD przwchodzi przez punkt M . W samej rzeczy, - w czworokącie zupełnym wpisanym $ABCD$ dwa punkty przekątne M i N i biegun boku AB muszą leżeć na jednej prostej /§ 176/ ,t j. trzy proste AD, BC i SN muszą p...

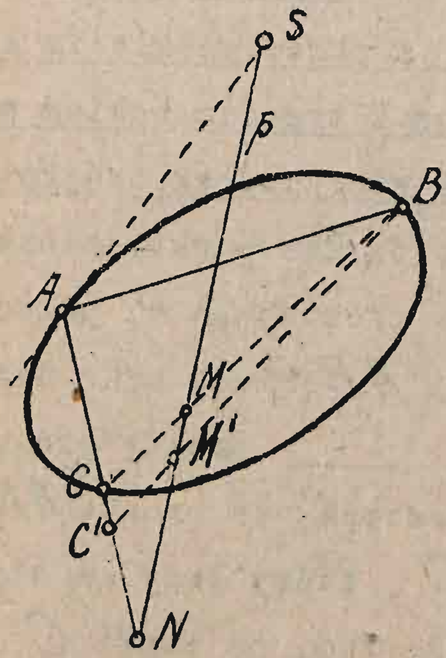


Rys. 357.

dzić przez jeden punkt M. Punkty M i N, jako wierzchołki trójkąta biegunowego są sprzężone.

II. /Odwrotne względem I/. Jeżeli dwa wierzchołki trójkąta leżą na stożkowej, a przeciwległe im boki przecinają prostą, sprzężoną z trzecim bokiem w punktach sprzężonych, to trzeci wierzchołek trójkąta leży także na stożkowej. Niech będą dwa punkty stożkowej A i B /Rys.358/, a na prostej p, przechodzącej przez biegun S prostej AB niech będą dane dwa ______________________ punkty biegunowo sprzężone M i N; trzeba dowieść, że proste AN i BM przecinają się w punkcie C, który leży na stożkowej. Przypuśćmy, że jest inaczej, t.j. że punkt C nie leży na stożkowej. W takim razie prosta AN która jest sieczną / bo nie jest styczną AS, § 159 / musiałaby przeciąć stożkową w pewnym punkcie C', różnym od C. Połączywszy BC', otrzymalibyśmy na prostej p pewien punkt M', który byłby różny od M i na zasadzie twierdzenia I sprzężony z N, co nie jest możliwe.

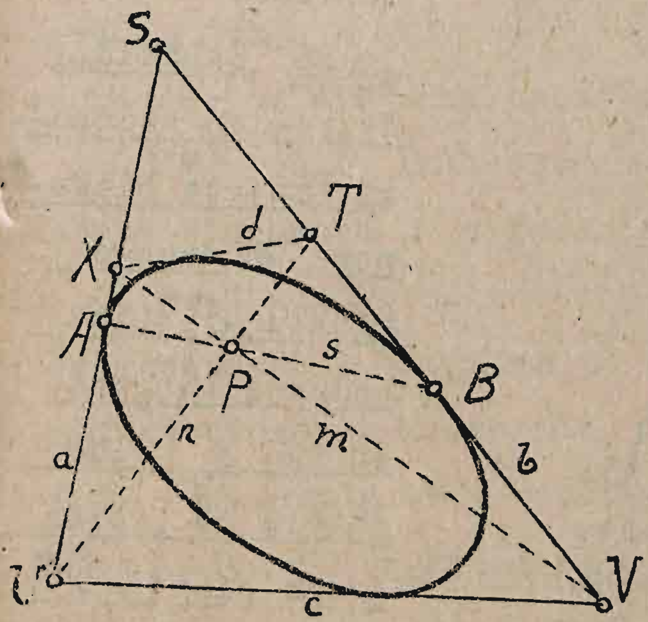
III. /wzajemne względem I/. Proste, które łączą dwa wierzchołki trójkąta opisanego na stożkowej z punktem sprzężonym z trzecim wierzchołkiem, są sprzężone.



Rys.358.

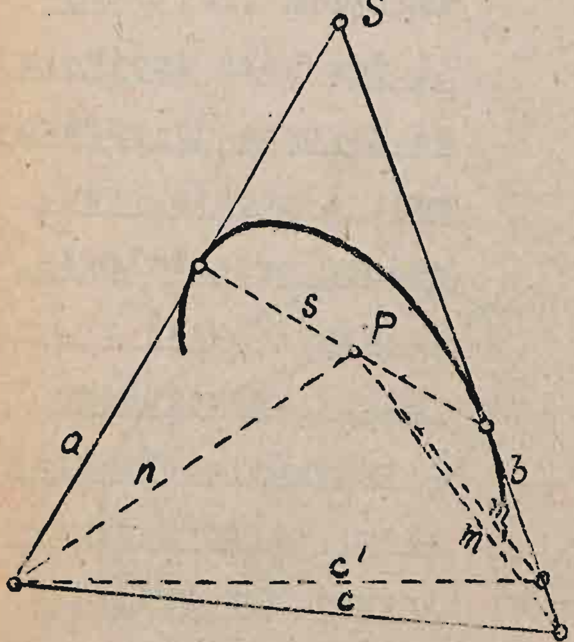
Niech będzie trójkąt SUV /Rys.159/ opisany na stożkowej i niechaj s będzie biegunową wierzchołka S. Obierzmy na prostej s punkt jakikolwiek P; trzeba dowieść, że proste m i n, które rzucają punkt P z wierzchołków U i V są sprzężone. Punkt T, w którym prosta n przecina styczną b, jest punktem zewnętrznym /§ 160/, można więc z niego wyprowadzić jeszcze jedną styczną d. Powiadam, że prosta m przechodzi przez punkt X w którym d przecina styczną a. W samej rzeczy, w czworoboku zupełnym opisanym $abcd$ dwie przekątne m i n i biegunowa s wierzchołka S muszą przechodzić przez jeden punkt P /§ 176/, t.j. trzy punkty X, V i P muszą leżeć na jednej prostej m. Proste m i n, jako dwa boki trójkąta biegunowego są sprzężone.

IV. /odwrotne względem III i wzajemne względem II/. Jeżeli dwa boki trójkąta są styczne do stożkowej, a proste, rzucające przeciwległe im wierzchołki z punktu sprzężonego z trzecim wierzchołkiem, są sprzężone, to trzeci bok trójkąta jest także styczny do stożkowej.



Rys.359.

Niech będą dwie styczne do stożkowej a i b /Rys.360/ oraz dwie proste sprzężone m i n, wychodzące z punktu P, leżącego na biegunowej s punktu ab; trzeba dowieść, że prosta c, która łączy punkty an i bm jest styczną dla stożkowej. Przypuśćmy, że jest inaczej, t.j. że prosta c nie jest styczną do stożkowej. W takim razie z punktu an, który jest zewnętrzny / § 160 /, możnaby wyprowadzić do stożkowej pewną styczną c' różną od c. Prosta m' rzucająca punkt bc' z punktu B byłaby różna od m i na zasadzie twierdzenia III sprzężona z n, co nie jest możliwe.

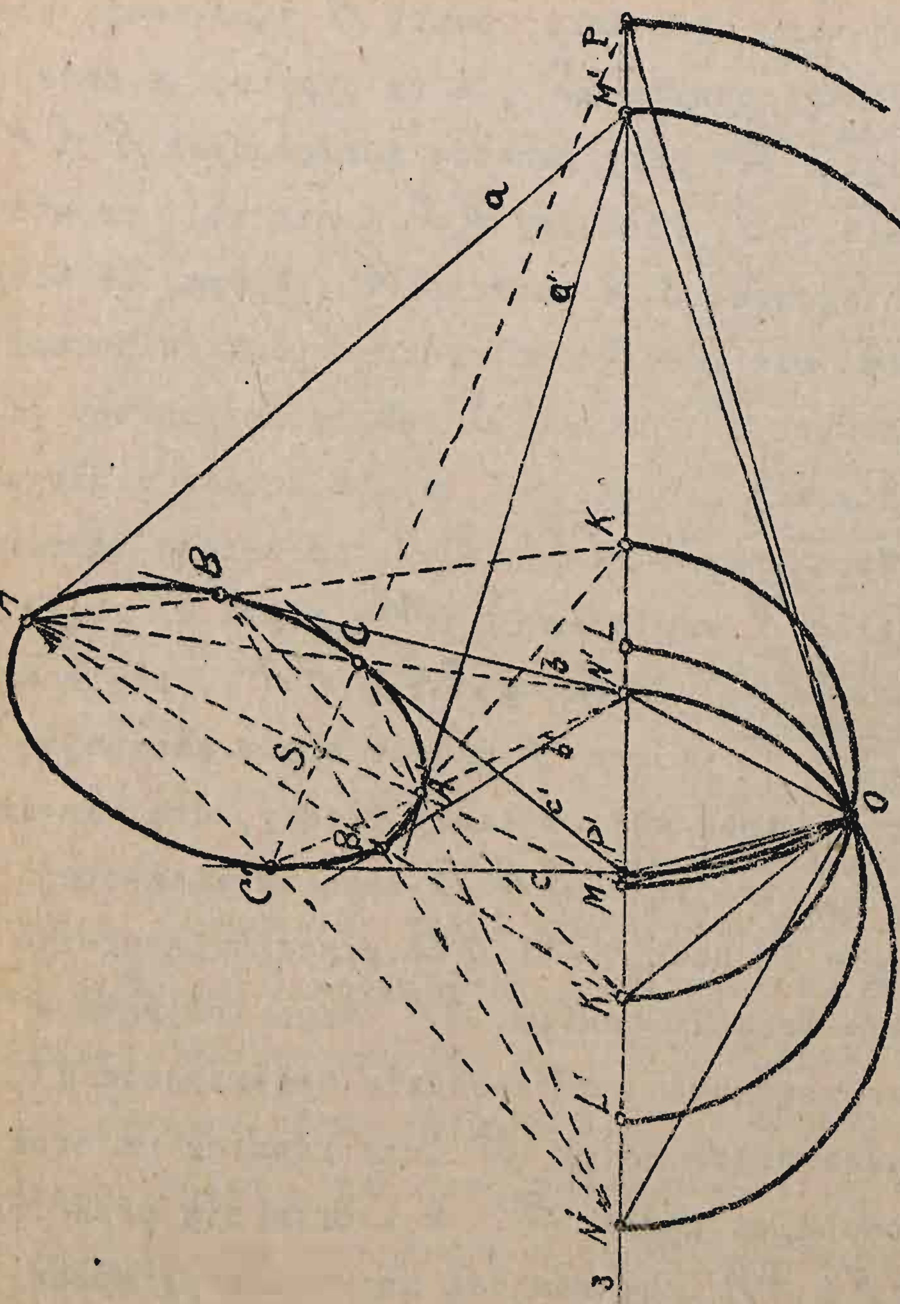


Rys. 360.

§ 186. ZADANIE. Wykreślić stożkową, mającą biegunową s danego punktu S, inwolucję biegunową na s, lub dokoła S, oraz jeden punkt A stożkowej.

Jeżeli dana inwolucja jest hiperboliczna, to prosta jest sieczną, a punkty podwójne S_1 i S_2 tej inwolucji są rzeczywistemi punktami stożkowej, proste zaś s_1 i s_2 które je łączą z biegunem są rzeczywistemi stycznemi do stożkowej w tych punktach. Jeżeli dana inwolucja jest eliptyczna, to s jest prostą zewnętrzną, a punkty podwójne inwolucji są urojonemi sprzężonemi punktami stożkowej, proste zaś podwójne perspektywicznej inwolucji dokoła bieguna S są urojonemi stycznemi w tych punktach. Rozwiązanie w obu razach jest jednakowe, przypuśćmy jednak, że dana inwolucja jest eliptyczna.

Niechaj więc będą dane: punkt A stożkowej, biegunowa s danego punktu S, a na prostej s dwie przegradzające się pary punktów sprzężonych K i K', L i L' /Rys.361/. Połączmy AS i niechaj prosta przetnie biegunową s w punkcie M. Wiemy, że biegunowa s ~~jest~~ miejscem geometrycznem punktów harmonicznie sprzężonych z biegunem S względem punktów przecięcia stożkowej z siecznemi, wychodzącemi z bieguna /§ 164/. Wyznaczmy tedy punkt A sprzężony harmonicznie z punktem A względem S i M; punkt A' będzie punktem stożkowej. Połączmy AK i $A'K'$, powiadam, że punkt B, w którym te proste się przecinają, jest punktem stożkowej. W samej rzeczy, dwa wierzchołki A i A' trójkąta $AA'B$ leżą na stożkowej a przeciwległe im boki $A'B$ i AB przecinają prostą , sprzężoną z trzecim bokiem AA' tego trójkąta w punktach sprzężonych; na zasadzie twierdzenia II § 185 trzeci wierzchołek B leży również na stożkowej. Podobnież punkt B', w którym się przecinają prosta AK' i $A'K$ leży również na stożkowej. Każda para punktów sprzężonych prostej s pozwala w tęn sposób wyznaczyć dwa nowe punkty stożkowej. Na zasadzie własności czworokąta $AA'BB'$ wpisanego w stożkową, wynika że prosta BB' przechodzi przez punkt S (§ 169), co



Rys. 361.

prosta BB przechodzi przez punkt S § 169, co pozwala od razu wykreślić styczne w punktach B i B'. Punkt przecięcia tych stycznych N' jest biegunem prostej BB'; leży on na s, albowiem biegun prostej s leży na BB'. Będzie to zatem punkt sprzężony z punktem N, w którym prosta BB' przecina s i jako taki może być wynaleziony.

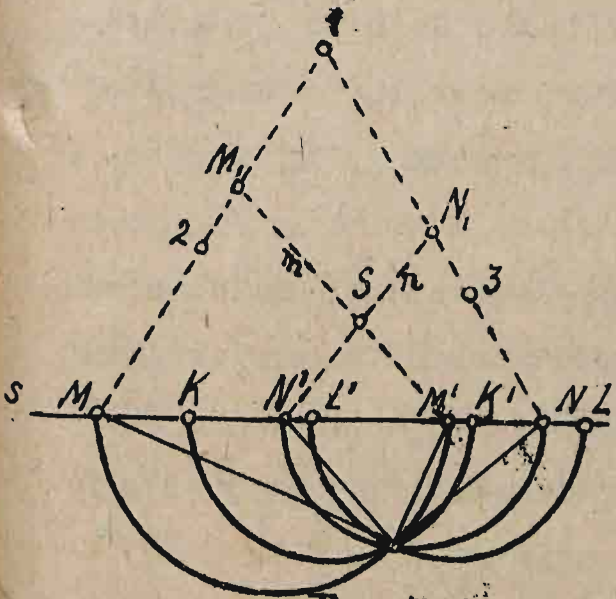
Aby więc po wyznaczeniu punktów B i B' szybko znaleźć dostateczną ilość dalszych punktów i stycznych, najlepiej postępować tak:

Połączmy BB' i niechaj prosta BB' przetnie s w punkcie N; wyznaczmy punkt N' sprzężony z N i połączmy go z B i B', będą to styczne b i b'. Korzystając z punktów sprzężonych N i N', znajdźmy dwa nowe punkty stożkowej C i C', będą to, jak wiemy punkty przecięcia prostych AN i $A'N'$ oraz AN' i $A'N$ Połączmy CC' i niechaj prosta CC' przetnie s w punkcie P; wyznaczmy punkt P' sprzężony z P; połączmy go z C i C' będą to styczne c i c'. W ten sposób postępujmy dalej: a więc korzystając z punktów P i P', wyznaczmy dwa nowe punkty D i D', połączmy DD' i td. Jeżeli dana prosta s będzie prostą niewłaściwą, a inwolucja dokoła bieguna S /środka stożkowej/ będzie prostokątna, to stożkowa będzie kołem, odcinki AS i $A'S$ staną się równe, a proste AK i $A'K'$ oraz AK'' i $A'K$ prostopadłe; odnajdujemy więc znaną własność koła, polegającą na tem, że z punktów jego okręgu widać średnicę AA' pod kątem prostym.

Do tego samego zadania można sprowadzić rozwiązanie zadania wzajemnego:

Wykreślić stożkową, mając biegun S danej prostej s, inwolucję biegunową dokoła S /lub na s / oraz jedną styczną a stożkowej. W tym celu wystarczy wyznaczyć punkt zetknięcia A na stycznej a /Rys.261/. Wyznaczywszy punkt M', w którym a przecina s, połączymy punkt M, sprzężony z M', z biegunem S prostej s; w przecięciu prostych a i MS leży punkt A.

§ 187. ZADANIE. Wykreślić stożkową mając jej 3 punkty 1, 2 i 3 oraz inwolucję biegunową na danej prostej s. Zadanie to dałoby się sprowadzić do poprzedniego, gdybyśmy zdołali wyznaczyć biegun S prostej s. Moglibyśmy wtedy bowiem uważać za dane: biegunową s danego punktu S, inwolucję biegunową na s /lub perspektywiczną z nią inwolucję biegunową dokoła S / oraz jeden punkt stożkowej, naprz. 1. Dla wykreślenia bieguna prostej s wystarczy znaleźć biegunowe dwóch punktów tej prostej, naprz. punktów M i N, w których proste 12 i 13 przecinają s /Rys.362/. Aby wykreślić biegunową m punktu M



Rys. 362.

zważmy, że do tej prostej muszą należeć: 1/ punkt M_1 sprzężony harmonicznie z M względem 1 i 2 2/ punkt M' sprzężony z M w danej inwolucji biegunowej. Podobnież biegunowa n punktu N łączy punkty N_1 i N', z których pierwszy jest harmonicznie sprzężony z N względem 1 i 3, a drugi jest sprzężony z N w danej inwolucji biegunowej. Przecięcie prostych m i n jest biegunem S prostej $MN \equiv s$

Jeżeli daną prostą s będzie prosta niewłaściwa, a dana na niej inwolucja biegunowa będzie inwolucją kierunków prostopadłych, t.j. gdy stożkowa stanie się kołem, to stosując podane rozwiązanie, odnajdziemy znaną konstrukcję środka koła, którego dane są trzy punkty 1, 2 i 3. W samej rzeczy punkty M i N staną się niewłaściwe, punkty M_1 i N_1, będą zatem środkami cięciw 12 i 13. Aby więc znaleźć biegun prostej niewłaściwej względem koła t.j. jego środek, należy w środkach cięciwy 12 i 13 wystawić do nich prostopadłe i wyznaczyć ich przecięcie; jest to powszechnie znane wykreślenie środka koła, opisanego na trójkącie 123.

Ta sama konstrukcja da się zastosować również wtedy, gdy z pośród trzech danych punktów rzeczywistych dwa, np. 1 i 2, są zjednoczone, t.j. gdy dane są dwa punkty 1 i 2, styczna w jednym z nich, np. w 1 oraz inwolucja biegunowa na prostej 3.
Biegunowa m punktu M, w którym dana styczna przecina s, przechodzi wtedy przez punkt 1.

Zupełnie w taki sam sposób rozwiązalibyśmy zadanie wzajemne:

Wykreślić stożkową, mającą 3 styczne 1, 2 i 3 oraz inwolucję biegunową dokoła danego punktu S, -

przytem z pośród stycznych rzeczywistych 1, 2 i 3 dwie mogłyby być zjednoczone, t.j. mogą być dane dwie styczne, punkt zetknięcia na jednej z nich oraz inwolucja biegunowy dokoła danego punktu S.

§ 188. ZADANIE. Wykreślić stożkową, mając jej punkt oraz dwie inwolucje biegunowe na dwóch prostych s i t. Wykreślmy na prostych s i t punkty S i T, które są sprzężone w danych inwolucjach z punktem P przecięcia prostych s i t; prosta ST będzie biegunową p punktu P. Jeżeli oznaczymy literami B i C punkty przecięcia siecznej p ze stożkową, to na zasadzie twierdzenia I Staudta proste AB i AC przetną zarówno prostą s, jak i prostą t w punktach sprzężonych, skąd wynika, że proste AB i AC stanowią parę prostych sprzężonych zarówno w inwolucji rzucającej z punktu A inwolucję biegunową na prostej s, jak i w inwolucji, rzucającej z tego samego punktu inwolucję biegunową na prostej t /§ 142/.

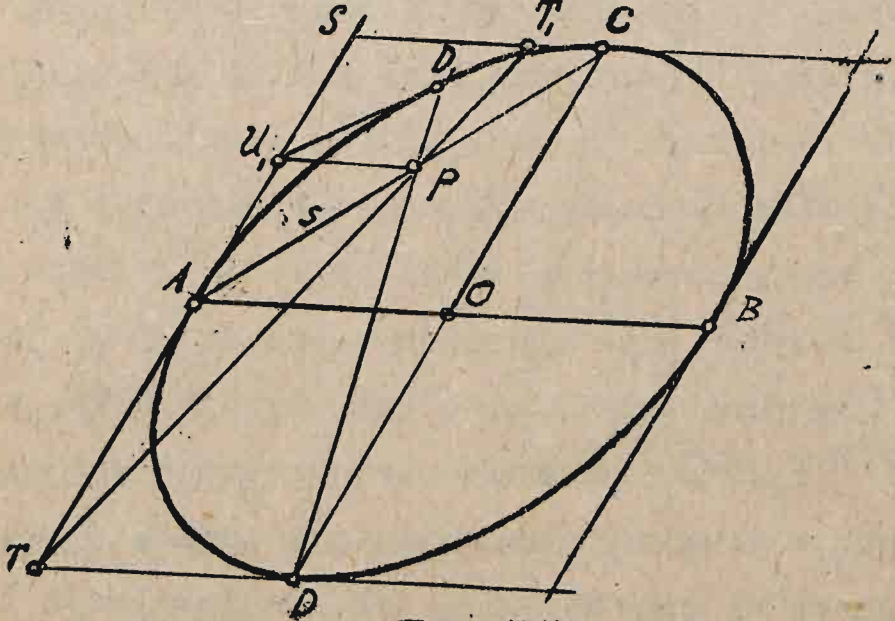
Tak samo rozwiązujemy zadanie wzajemne:

Wykreślić stożkową, mając jej styczną a oraz dwie inwolucje biegunowe dokoła dwóch punktów S i T.

Ze wszystkich dotychczas rozważanych przypadków wynika zatem:

Stożkowa jest wyznaczona przez 5 punktów lub przez 5 stycznych, które mogą być parami urojone, sprzężone lub zjednoczone.

§ 189. ZADANIE. Wykreślić elipsę, mając parę średnic sprzężonych AB i CD /Rys.363./



Rys. 363.

Poprowadzić przez punkty A i B równoległe do CD, a przez punkty C i D równoległe do AB; otrzymamy równoległobok, opisany na stożkowej. Wystarczy wykreślić łuk elipsy zawarty pomiędzy punktami A i C; pozostałą część krzywej można wykreślić na zasadzie symetrji ukośnej względem średnic AB i CD oraz na zasadzie symetrji względem środka O. Zauważmy trójkąt STU^{∞}, którego wierzchołek U^{∞} jest punktem niewłaściwym średnicy AB; biegunową s wierzchołka S jest prostą AC; obrawszy na niej punkt dowolny P , rzućmy go z dwóch pozostałych wierzchołków U^∞ i T na boki przeciwległe ST i SU^∞ i połączmy rzuty U_1 i T_1 ; prosta U_1T_1 będzie styczną do stożkowej. Ponieważ w czworoboku opisanym o wierzchołkach U^∞, T, U_1 i T znamy punkt zetknięcia D na boku TU^∞, więc prosta DP wyznaczy na przeciwległym boku U_1T_1 , punkt zetknięcia D_1 /§183,3/ Przesuwając punkt P wzdłuż odcinka AC otrzymamy dowolną ilość stycznych i punktów łuku elipsy między punktami A i C . Wykreślenie powyższe ma tę ważną zaletę, że wszystkie punkty pomocnicze zawarte są wewnątrz równoległoboku opisanego na elipsie.

<u>§ 190</u>. <u>Własności ogniskowe stożkowych</u>. Punkty, dokoła których inwolucja biegunowa jest prostokątną, nazywamy <u>ogniskami</u>. Urojone sprzężone proste podwójne tej inwolucji, t.j. proste jednorodne /§ 146/ wychodzące z ogniska są styczne do stożkowej. Jak wiemy, wszystkie proste jednorodne przechodzą przez punkty kołowe, ogniska są to więc punkty przecięcia dwóch par stycznych urojonych, wyprowadzonych do dtożkowej z obu punktów kołowych. Styczne te tworzą czworobok, którego dwa wierzchołki są punktami kołowemi, a pozostałe cztery - ogniskami stożkowej.

Srodek koła jest jego ogniskiem, albowiem inwolucja biegunowa dokoła tego punktu jest prostokątną. Jak zobaczymy niebawem, w środku koła są zjednoczone wszystkie cztery jego ogniska.

Aby znaleźć rzeczywiste jego ogniska stożkowej, która nie jest kołem, ustalmy kilka własności ognisk, które wynikają z ich określenia.

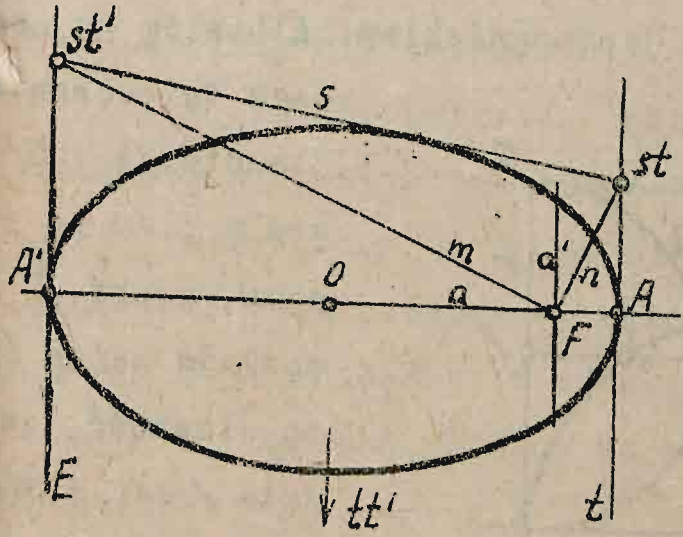
1/ Ponieważ inwolucja biegunowa dokoła każdego ogniska jest prostokątną, a więc eliptyczną, więc <u>każde ognisko rzeczywiste jest punktem wewnętrznym stożkowej.</u>

2/ <u>Każde ognisko rzeczywiste musi leżeć na jednej</u> osi. W samej rzeczy niechaj punkt wewnętrzny F będzie ogniskiem. Połączmy go ze środkiem O stożkowej. Na zasadzie określenia ogniska, prostą sprzężoną z prostą $FO \equiv a$ w inwolucji biegunowej dokoła F jest prosta a' prostopadła do FO. Srednica FO ma więc tę własność, że jedna, a więc wszystkie cięciwy z nią sprzężone są do niej prostopadłe, jest to więc oś stożkowej.

3/ Ponieważ ognisko F jest punktem zewnętrznym stożkowej, więc oś FO, na której ono leży, musi przecinać stożkową; jeżeli zatem stożkowa jest hyperbolą, to rzeczywiste ogniska mogą tylko leżeć na osi głównej.

Niech będzie stożkowa o środku właściwym t.j.

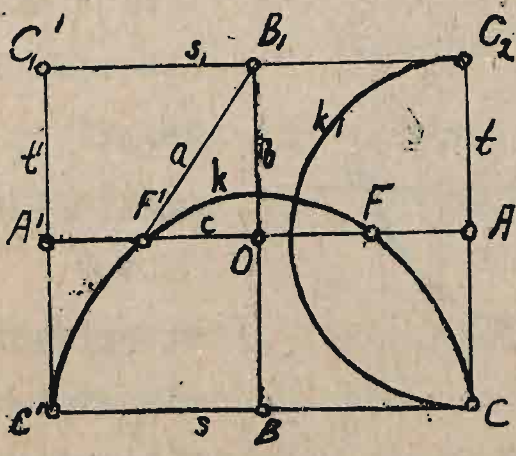
elipsa lub hyperbola /Rys.364./ i niech F będzie jej ogniskiem. W wierzchołkach A i A', w których oś FO przecina stożkową, poprowadźmy styczne t i t'; są to proste równoległe do a', a więc prostopadłe do AA'. Poprowadźmy trzecią styczną jakąkolwiek s i zastosujmy twierdzenie III Staudta /§ 187/ do opisanego na stożkowej trójkąta stt'. Biegunową wierzchołka tt' jest oś AA'; proste, które rzucają pozostałe dwa wierzchołki st i st' z każdego punktu osi AA' są sprzężone, a więc na zasadzie określenia ogniska, wzajemnie prostopadłe. Stąd twierdzenie:



Rys.364.

Odcinek stycznej s, zawarty pomiędzy stycznemi t i t' w wierzchołkach A i A' stożkowej, jest widziany z każdego ogniska leżącego na AA' pod kątem prostym.

Nawzajem, jeżeli istnieje na osi AA' punkt F z którego odcinek stycznej zawarty pomiędzy stycznemi w wierzchołkach A i A' widziany jest pod kątem prostym - to ten punkt jest ogniskiem. Albowiem na zasadzie twierdzenia IV Staudta /§ 185/ proste n i m są sprzężone, punkt F, posiada zatem tę własność, że dwie /aa' i mn/ a więc wszystkie pary prostych sprzężonych przezeń przechodzących są prostokątne.



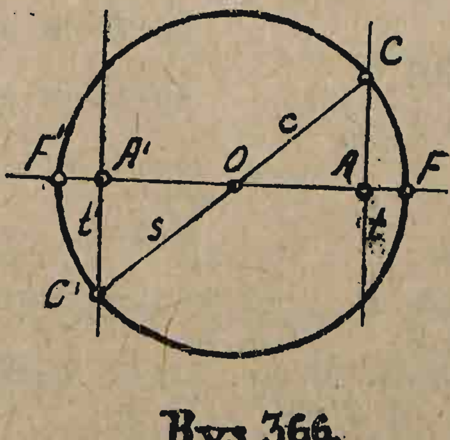
Rys.365.

Wyznaczmy ogniska elipsy /Rys.365/, której dane są cztery wierzchołki: A, A', B i B_1.

Szukajmy najpierw ognisk, leżących na wielkiej osi. Prowadźmy w wierzchołkach A, A' i B styczne t, t' i s. Pierwsze dwie są równoległe do BB_1, trzecia jest równoległa do AA'. Szukane ogniska będą punktami osi AA', z których odcinek CC' stycznej s widziany jest pod kątem prostym. Jeżeli tedy na odcinku $CC' = AA'$ zakreślamy koło k jak na średnicy, to punkty przecięcia tego koła z osią AA' będą ogniskami. Na osi AA' leżą dwa ogniska rzeczywiste F i F', albowiem promień koła k jest większy niż odległość jego środka od osi AA'.

Aby znaleźć ogniska, leżące na małej osi BB_1 trzebaby wyznaczyć punkty przecięcia tej osi z kołem k, zakreślonem na prostej CC_1 jak na średnicy. Punkty te będą urojone sprzężone, albowiem promień koła k, jest mniejszy od odległości jego środka od osi BB_1 Ogniska, leżące na osi BB_1 są zatem urojone sprzężone.

Jeżeli osie AA' i BB_1 są równe, t.j. gdy elipsa jest kołem, to wszystkie cztery ogniska są zjednoczone w środku koła, albowiem każde z kół k i k_1 jest styczne do jednej z osi AA i BB_1.



Rys.366.

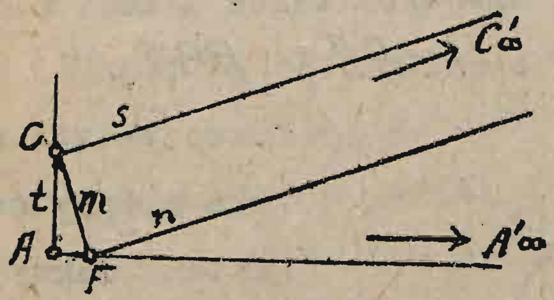
Rzeczywiste ogniska elipsy są to zatem punkty, które leżą na wielkiej osi po obu stronach środka w odległości

$$c = \sqrt{a^2 - b^2};$$

jeżeli, jak zwykle

oznaczymy $OA = a$, $OB = b$.

Aby wyznaczyć rzeczywiste ogniska hyperboli /Rys. 366/, prowadźmy znowu w wierzchołkach głównej osi A i A' styczne t i t', a za trzecią styczną uważajmy asymptotę s, która niechaj przecina tamte styczne w punktach C i C'. Na odcinku CC' zakreślmy koło k jak na średnicy, punkty jego przecięcia z osią AA' będą ogniskami F i F' Hyperbola posiada zatem również dwa i tylko dwa ogniska rzeczywiste. Odległości tych punktów od środka O równe są promieniowi koła k, t.j. połowie odcinka CC'. Jeżeli przez analogję z elipsą długość odcinka AC oznaczymy przez b, to $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; Dla wyznaczenia ognisk paraboli /Rys.367/ poprowadźmy w wierzchołku właściwym A styczną t; styczna t w wierzchołku niewłaściwym jest prostą niewłaściwą. Jeżeli dana



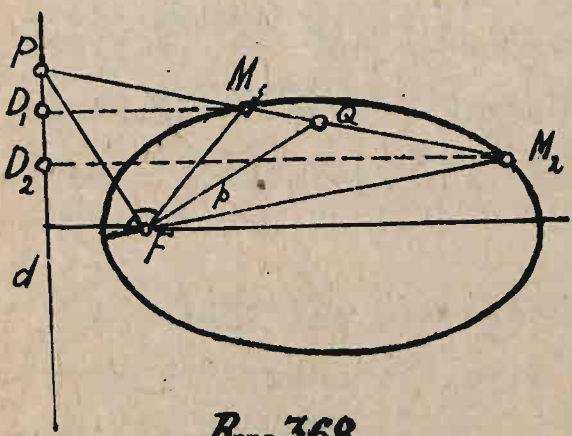
Rys. 367

jest styczna jakakolwiek s, przecinająca t w punkcie C i posiadająca kierunek C'^∞, to ogniskiem będzie taki punkt F osi AA'^∞, z którego CC'^∞

widać pod kątem prostym. Jeżeli w punkcie C wystawimy do S prostopadłą m, to punkt F w którym m przecina AA'^{∞}, będzie ogniskiem paraboli. Ponieważ z każdego innego punktu właściwego osi AA'^{∞} odcinek CC'^{∞} byłby widziany pod kątem różnym od prostego, więc punkt F jest jedynem rzeczywistem i właściwem ogniskiem paraboli.

Biegunowe ognisk nazywają się <u>kierownicami</u>. W elipsie i hyperboli istnieją dwie kierownice rzeczywiste, są to proste zewnętrzne, symetryczne względem środka i prostopadłe do osi /wielkiej w elipsie, głównej w hyperboli. W paraboli istnieje tylko jedna kierownica właściwa, jest to prostopadła do osi w punkcie symetrycznym z ogniskiem względem wierzchołka.

<u>Twierdzenie</u>. <u>Stosunek odległości punktów stożkowych od ogniska i jego biegunowej /kierownicy/ jest stały</u>. Weźmy dwa jakiekolwiek punkty stożkowej M_1 i M_2 /Rys.368/ niechaj sieczna M_1M_2 przetnie biegunową d ogniska F /kierownicę/ w punkcie P; biegunowa p punktu P przejdzie przez ognisko F /§ 151/ i przetnie sieczną M_1M_2 w punkcie Q, który jest harmonicznie sprzężony z P względem M_1 i M_2; proste FP i FQ jako sprzężone i wychodzące z ogniska są wzajemnie prostopadłe. Czwórka prostych



Rys. 368.

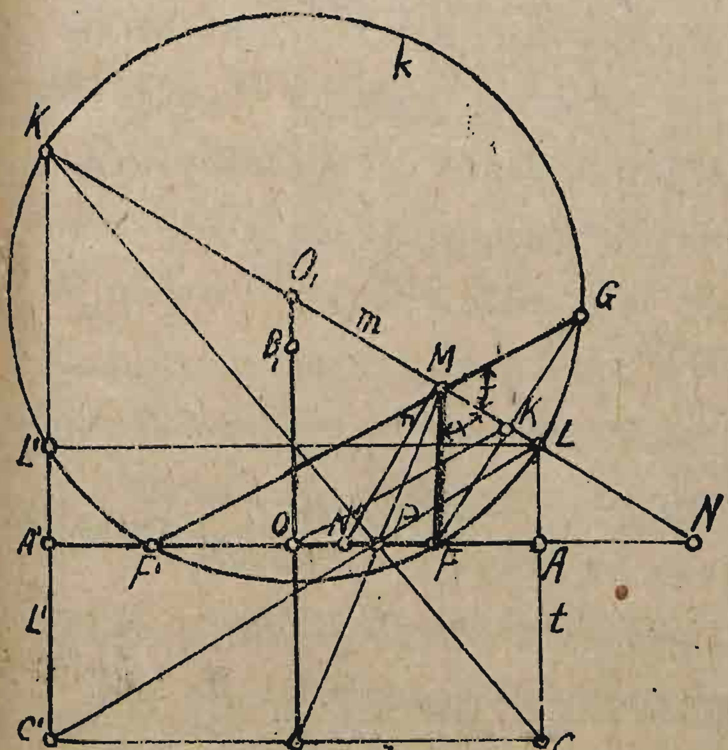
$F(M_1 M_2 PQ)$ rzucająca harmoniczną czwórkę $M_1 M_2 P Q$ jest harmoniczną; ponieważ zaś proste sprzężone FP i FQ są wzajemnie prostopadłe, więc są one dwusiecznemi kątów między prostemi FM_1 i FM_2 / § 128/; w trójkącie FM_1M_2, FP jest jedną z dwusiecznych kąta F, a więc $\frac{FM_1}{FM_2} = \frac{PM}{PM_2} = \frac{M_1D}{M_2D_2}$; przestawiając wyrazy średnie w proporcji, złożonej ze stosunków pierwszego i trzeciego, otrzymamy

$$\frac{FM_1}{M_1D_1} = \frac{FM_2}{M_1D_2} ; \text{ c.b.d.o}$$

Wartość tego stałego stosunku nazywamy <u>mimośrodem</u> stożkowej i oznaczamy literą e ; biorąc punkt M_1 w jednej z wierzchołków stożkowej łatwo obliczyć, że dla elipsy i hyperboli $e = \frac{c}{a}$, gdzie c jest odległością ogniska od środka stożkowej i równa się $\sqrt{a^2-b^2}$ dla elipsy, a $\sqrt{a^2+b^2}$ dla hyperboli. Mimośród jest przeto mniejszy od 1 dla elipsy, większy od 1 dla hyperboli i równy 1 dla paraboli.

TWIERDZENIE. Styczna i normalna w każdym punkcie stożkowej są dwusiecznemi kątów między prostemi, które łączą ten punkt z ogniskami.

a/ Niech będzie elipsa o osiach AA' i BB_1 /Rys.369/. Wyznaczmy jakąkolwiek styczną m do elipsy i jej punkt zetknięcia M. W tym celu /§179, II,3/ poprowadźmy styczne t, t' i s w wierzchołkach A, A' i B i obrawszy na osi AA' jakikolwiek punkt P rzućmy go z punktów C i C' na styczne t i t'; prosta łącząca rzuty K i L jest styczną m do stożkowej;

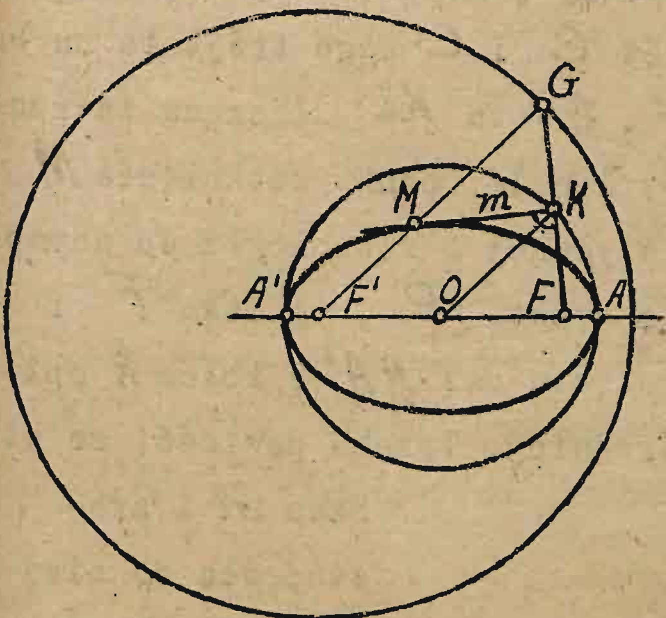


Rys.369.

punkt zetknięcia M znajdziemy w przecięciu prostej m z prostą BP /§ 183,3/; ogniska F i F' otrzymamy w przecięciu osi AA' z kołem k opisanym na KL jak na średnicy. Połączmy FM i $F'M$; trzeba okazać, że styczna m i prostopadła do niej w punkcie M normalna n są dwusiecznemi kątów pomiędzy FM i $F'M$. W trójkącie $CC'P$ środkowa PB i równoległa do boku CC' przegradzają harmonicznie pozostałe boki PC i PC' /§ 134/, stąd wniosek, że czwórka punktów $KLMN$ jest harmoniczna. Normalna n jest biegunową punktu N względem koła k, gdyż jest to prostopadła do średnicy KL przechodząca przez punkt sprzężony harmonicznie z punktem N względem końców tej średnicy. Stąd wynika, że czwórka punktów $FF'NN'$ jest harmoniczna /gdyż punkty F i F' są punktami przecięcia siecznej NO z kołem k, a punkt N leży na biegunowej punktu N /§ 174/, a więc rzucająca ją grupa prostych $M(FF'NN')$ jest też harmoniczna. Ale wiadomo /§ 128/, że jeżeli dwie proste harmonicznie sprzężone m i n są wzajemnie prostopadłe, to są one dwusiecznemi kątów między pozostałemi prostemi MF i MF' c.b.d.o.

<u>WNIOSEK I.</u> <u>Suma odległości każdego punktu elipsy od obu ognisk równa się wielkiej osi.</u> Przedłużmy

$F'M$ o długość $MQ' = MF$; /Rys.369/ tak że $F'G = F'M + FM$. Dzięki symetrji punktów F i G względem średnicy KL punkt G leży na kole k, łuki $F'L'$, FL i LG są równe, skąd wynika $F'G = LL' = AA'$



Rys. 370.

Wniosek 2.

Gdy punkt M opisuje elipsę, punkt G opisuje koło o środku F i promieniu:

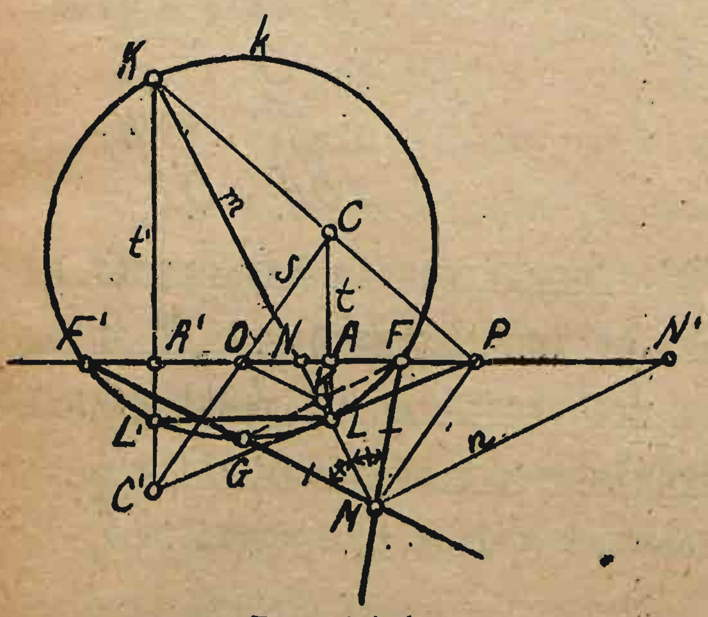
$$F'G = AA'$$

/koło kierownicze/, a punkt H koło o środku O i promieniu $OH = OA = OA'$;

/koło główne/ /Rys.370/. Jeżeli przeto kąt prosty porusza się w ten sposób, że jego wierzchołek H opisuje koło, a jedno ramię przechodzi przez punkt wewnętrzny F tego koła, to drugie ramię powłóczy elipsę.

b/ Niech będzie dana oś główna hyperboli AA'

oraz asymptota s /Rys.271/. Wyznaczmy w taki sam sposób, jak w przypadku elipsy, styczną m do hiperboli i jej punkt zetknięcia M. Styczne t i t' w wierzchołkach A i A' oraz asymptoda s stanowią trójkąt opisany na hyperboli; na biegunowej wierzchołka tt' t.j. na osi głównej AA' obierzmy jakikolwiek punkt P i rzućmy go z wierzchołków C i C' tego trójkąta na boki przeciwległe t i t'. Prosta KL łącząca te rzuty będzie styczną m /§ 195,I/; punkt zetknięcia M leży w przecięciu tej stycznej z równoległą do asymptoty s wyprowadzoną z punktu P, ogniska F i F' znajdziemy w przecięciu osi AA' z kołem k opisanem na KL jak na średnicy. Trzeba dowieść, że styczna m i prostopadła do niej normalna n do hyperboli w punkcie M są dwusiecznemi kątów pomiędzy FM i $F'M$. -

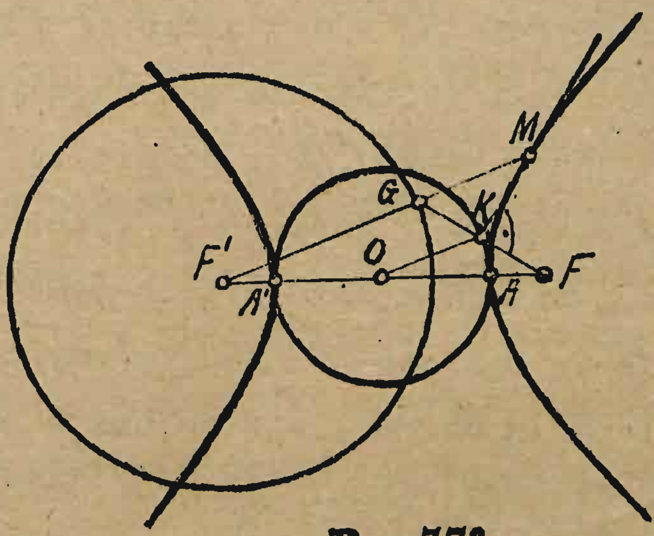


Rys.371.

W trójkącie $CC'P$ środkowa PO

równoległa do boku CC' przegradzają harmonicznie boki PC i PC', stąd wniosek, że czwórka punktów $KLMN$ jest harmoniczna. Normalna n jest biegunową punktu N względem koła k, skąd wynika, że czwórka punktów $FF'NN'$ i czwórka prostych $M(FF'NN')$ są harmoniczne. Ponieważ proste m i n są wzajemnie prostopadłe, więc są one dwusiecznemi kątów między MF i MF', c.b.d.o.

Wniosek 1. Różnica odległości każdego punktu hyperboli od obu ognisk równa się osi głównej. Odmierzmy $MG = MF$ /Rys.371/ zaś, że $F'G = F'M - FM$. Dzięki symetrji punktów F i G względem średnicy KL punkt G leży na kole k, łuki $F'L' = FL$ i LG są równe, skąd wynika: $F'G = LL' = AA'$

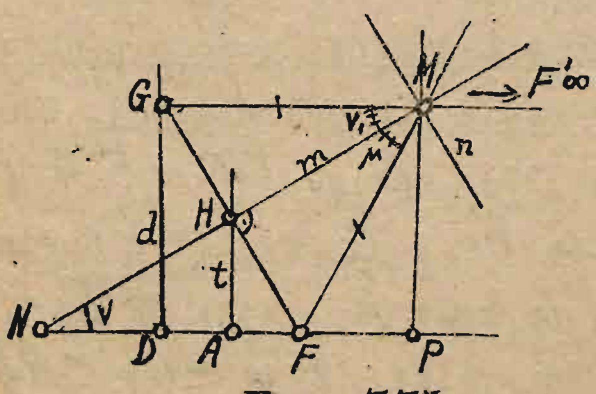


Rys.372.

Wniosek 2. Gdy punkt M opisuje hyperbolę, punkt G opisuje koło o środku F' i promieniu $F'G = AA'$ a punkt H koło o środku O i promieniu

$OH=OA=OA'$ /Rys.372/. Jeżeli przeto kąt prosty porusza się w ten sposób, że jego wierzchołek H opisuje koło, a jedno ramię przechodzi przez punkt <u>zewnętrzny F</u> tego koła, to drugie ramię opisuje <u>hyperbolę.</u>

c/ W paraboli jeden wierzchołek A' i jedno ognisko F' leżą w punkcie niewłaściwym osi. Niech A będzie wierzchołkiem właściwym paraboli, t - styczną w tym wierzchołku, m - styczną jakąkolwiek, która niechaj przecina



Rys.373.

oś w punkcie N a styczną t - w punkcie H /Rys. 373/. Aby wyznaczyć punkt zetknięcia M na stycznej m, wykreślmy biegunową punktu N. Będzie to prostopadła do osi, wystawiona w punkcie P symetrycznym z N względem A; punkt M będzie przeto symetryczny z N względem H. Ognisko F znajdziemy w przecięciu osi z prostopadłą do m, wystawioną w punkcie H. Przez M poprowadźmy równoległą MF'^{∞} do osi t.j. prostą w kierunku ogniska niewłaściwego. Trójkąt

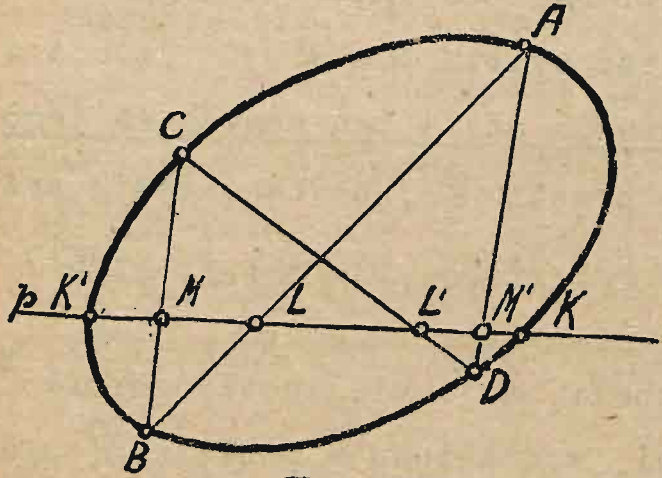
FMN jest równoramienny /bo $MH = NH$ i $HF \perp MN$ /, stąd wynika $u = v = \nu$,c.b.d.o.

Gdy kąt prosty porusza się w ten sposób że jego wierzchołek H opisuje prostą t , a jedno ramię przechodzi przez punkt F nie leżący na t , to drugie ramię powłóczy parabolę.

Kierownica d paraboli, t.j. biegunowa ogniska F jest prostopadłą do osi, wystawioną w punkcie D symetrycznym z ogniskiem F względem wierzchołka A . Odległość każdego punktu M paraboli od ogniska i od kierownicy są równe, co już wiemy / $MF = MG$; /.

§ 191. Twierdzenia Desargues'a. I. Punkty, w których dowolny sieczna przecina stożkową, oraz punkty w których ta sieczna przecina boki przeciwległe czworokąta wpisanego w stożkową, stanowią 3 pary punktów sprzężonych inwolucji. Z wierzchołków przeciwległych A i C czworokąta wpisanego $ABCD$/Rys.374/ rzućmy pozostałe 4 punkty stożkowej K , K' , B i D Na zasadzie § 177,I czwórki prostych rzucających te punkty z wierzchołków A i C są rzutowe; przecięcie tych czwórek prostą p stanowić przeto będzie dwie czwórki punktów na wspólnej podstawie:

$$p(KK'LM') \barwedge p(KK'ML');$$



Rys.374.

Ale drugą z tych czwórek jest rzutowa z czwórką $K'K'L'M$ /bo dwustosunki $/KK'ML/$ i $/K'KL'M/$ są równe,/§ 125/ skąd wynika:

$p/KK'LM'/ \barwedge /K'KL'M/$. Ponieważ punkty K i K' odpowiadają sobie w tych czwórkach podwójnie, więc wszystkie inne pary punktów odpowiednich,a więc L i L', M i M' również odpowiadają sobie podwójnie,t.j. są w inwolucji /§ 142/, c-b-d.o./Inwolucji tej nie należy oczywiście mieszać z inwolucją biegunową na prostej p /.

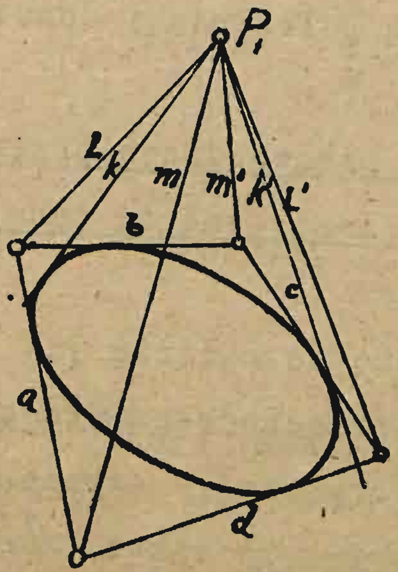
Twierdzenie powyższe pozostanie w mocy jeszcze wtexy, gdy sieczna p stanie się styczną do stożkowej. W punkcie zetknięcia zostaną wtedy zjednoczone oba punkty K i K', skąd wynika:

<u>Punkt zetknięcia stycznej ze stożkową jest jednym z punktów podwójnych inwolucji, którą na tej stycznej wyznaczają boki przeciwległe dowolnego czworokąta wpi</u>

sanego w stożkową.

Posługując się zasadą dwoistości dowiedlibyśmy twierdzenia wzajemnego /Rys.375/.

II. Styczne wyprowadzone do stożkowej z dowolnego punktu zewnętrznego oraz proste, rzucające z tego punktu wierzchołki przeciwległe czworoboku opisanego na stożkowej, stanowią trzy pary prostych sprzężonych inwolucji.



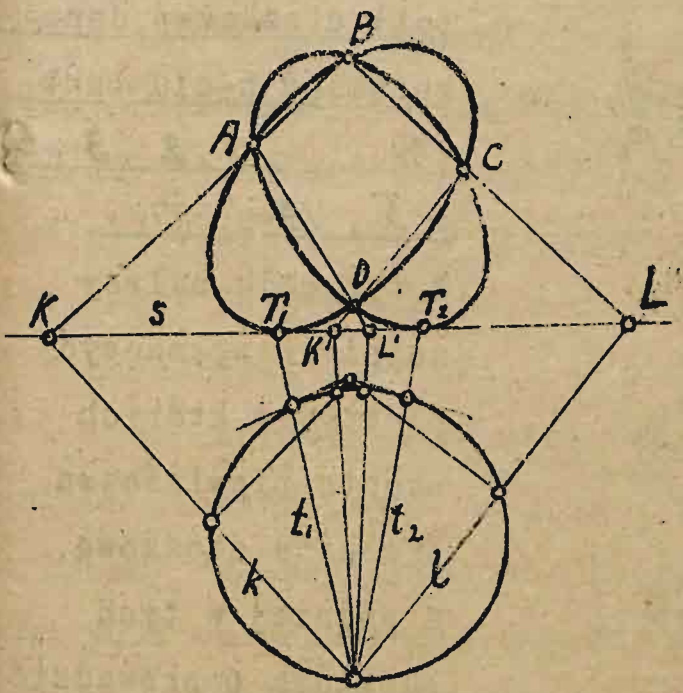
Rys.375.

Twierdzenie Desargues'a, podobnie, jak twierdzenie Pascala i Brianchona wyrazają zależność linjową między 6 punktami lub 6 stycznemi stożkowej. Dlatego też na tych twierdzeniach można oprzeć jeszcze jeden sposób wykreślenia linjowego stożkowej przechodzącej przez 5 danych punktów lub stycznej do 5 danych prostych.

§ 192. Zagadnienie 2-go stopnia. Wyznaczenie stożkowej przez 5 jej elementów tego samego rodzaju jest zagadnieniem, które w każdym przypadku ma jedno i tylko jedno rozwiązanie i da się uskutecznić zapomocą konstrukcji linjowej t.j. bez użycia cyrkla i ekierki Mówimy o takich zagadnieniach, że są pierwszego stopnia. Poniżej podajemy kilka przykładów zagadnień drugiego stopnia, t.j. takich, które mają wogóle dwa rozwiązania. Zagadnienia te wymagają użycia cyrkla, a zapomocą konstrukcji linjowej dadzą się rozwiązać jedynie wtedy, gdy w płaszczyźnie rysunku mamy wykreślone koło w dowolnem zresztą położeniu i dowolnej wielkości /Steiner/.

I. Wykreślić stożkową, przechodzącą przez 4 dane punkty A, B, C i D i styczną do danej prostej s.

Zadanie to sprowadzi się do zadania już rozwiązanego: "Wykreślić stożkową przechodzącą przez 5 danych punktów, jeżeli zdołamy na stycznej wyznaczyć punkt zetknięcia T. Zauważmy, że czworokąt $ABCD$ /Rys.387/ jest wpisany w stożkową, na zasadzie artykułu poprzedniego punkt zetknięcia na stycznej s jest jednym z dwóch punktów podwójnych inwolucji $KK'LL'$ którą wyznaczają boki przeciwległe czworokąta $ABCD$ Zależnie od tego, czy inwolucja ta jest hyperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna, znajdziemy dwa, jedno lub "zero" rozwiązań.

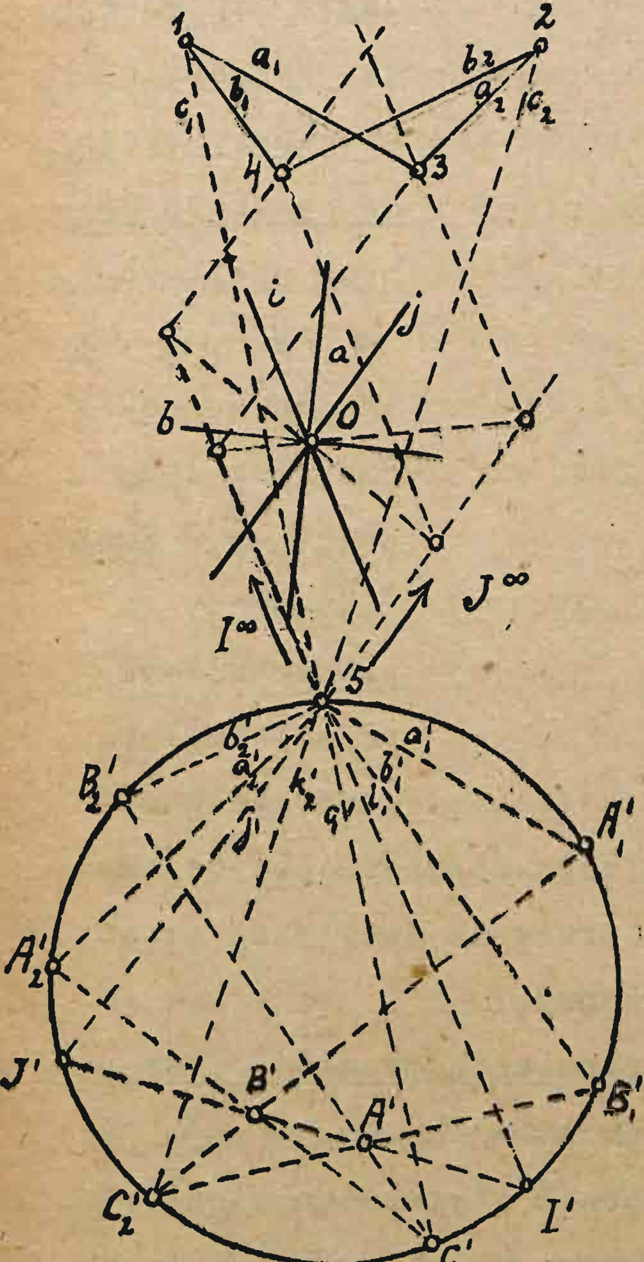


Rys. 376.

Zupełnie tak samo rozwiążemy zadanie wzajemne: II. <u>Wykreślić stożkową styczną do czterech danych prostych</u> a, b, c i d i przechodzącą przez dany punkt S. Punkt S łączy z wierzchołkami przeciwległemi czworoboku opisanego $abcd$ i zapomocą koła Steinera znajdujemy proste podwójne inwolucji przez te dwie pary prostych dokoła punktu S wyznaczonej.

III. <u>Znaleść punkty przecięcia prostej ze stożkową</u>, wyznaczoną przez 5 punktów 1, 2, 3, 4 i 5 lub z punktu S wyprowadzić styczne do stożkowej, wyznaczonej przez stycznych 1, 2, 3, 4 i 5.

Pierwsze z tych dwóch zadań wzajemnych rozwiązaliśmy już w § 139 /Rys.276/. Zastosujmy to rozwiązanie do następującego przypadku szczególnego.



Rys.377.

Wykreślić asymptoty stożkowej, danej zapomocą 5-ciu punktów 1, 2, 3, 4 i 5. /Rys.377/.

W tym celu należy najpierw wyznaczyć punkty, w których prosta niewłaściwa przecina stożkową, a później w tych punktach poprowadzić styczne /§ 163/. Dla rozwiązania pierwszej części zadania tworzymy pęki rzutowe

$$1(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge 2(a_2 b_2 c_2 \ldots)$$

które rzucają z punktów 1 i 2 wszystkie punkty stożkowej. Proste a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2 wyznaczają na prostej niewłaściwej 3 pary punktów t.j. kierunków odpowiednich; należy znaleść kierunki podwójne t.j, asymptotyczne. Przez punkt jakikolwiek np. przez 5 prowadzimy koło Steinera i z jego pomocą wyznaczamy proste podwójne z dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku 5 których proste $a_1' b_1' c_1'$ i $a_2' b_2' c_2'$ są równoległe do prostych $a_1 b_1 c_1$ i $a_2 b_2 c_2$

Znalazłszy kierunki I^∞ i J^∞ prowadzimy styczne w tych kierunkach do stożkowej; łącząc każdy z tych punktów niewłaściwych I^∞ i J^∞ z punktami 3, 4 i 5 otrzymamy dwa pęki rzutowe, których środek rzutowy O jest punktem przecięcia obu stycznych szukanych, t.j. środkiem stożkowej. Proste i i j, poprowadzone przez punkt O w kierunkach I^∞ i J^∞ są asymptotami, dwusieczne a i b kątów między niemi są osiami stożkowej.

ROZDZIAŁ XV.

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

§ 193. Kolineacja środkowa dwóch układów przestrzennych. Niech będzie płaszczyzna S którą nazywać będziemy płaszczyzną kolineacji, punkt O, który nazwiemy środkiem kolineacji i dwa punkty A_1 i A_2, leżące na dowolnej prostej a, wychodzącej z punktu O /lub