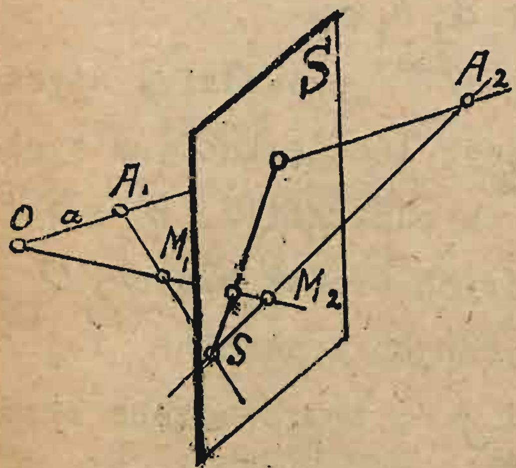
czają na prostej niewłaściwej 3 pary punktów t.j. kierunków odpowiednich; należy znaleść kierunki podwójne t.j, asymptotyczne. Przez punkt jakikolwiek np. przez 5 prowadzimy koło Steinera i z jego pomocą wyznaczamy proste podwójne z dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku 5. których proste $a_1' b_1' c_1'$ i $a_2' b_2' c_2'$ są równoległe do prostych $a_1 b_1 c_1$ i $a_2 b_2 c_2$

Znalazłszy kierunki I^∞ i J^∞ prowadzimy styczne w tych kierunkach do stożkowej; łącząc każdy z tych punktów niewłaściwych I^∞ i J^∞ z punktami 3, 4 i 5 otrzymamy dwa pęki rzutowe, których środek rzutowy O jest punktem przecięcia obu stycznych szukanych, t.j. środkiem stożkowej. Proste i i j, poprowadzone przez punkt O w kierunkach I^∞ i J^∞ są asymptotami, dwusieczne a i b kątów między niemi są osiami stożkowej.

ROZDZIAŁ XV.

POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

§ 193. Kolineacja środkowa dwóch układów przestrzennych. Niech będzie płaszczyzna S którą nazywać będziemy płaszczyzną kolineacji, punkt O, który nazwiemy środkiem kolineacji i dwa punkty A_1 i A_2, leżące na dowolnej prostej a, wychodzącej z punktu O /lub dwie płaszczyzny A_1 i A_2, przecinając się według prostej leżącej w płaszczyźnie S /Rys.378/. Dane powyższe wyznaczają dwa układy /dwie figury/ przestrzenne F_1 i F_2 w ten sposób, że



Rys.378.

1/ każdemu punktowi prostej lub płaszczyźnie układu F_1 odpowiada jeden jedyny punkt, prosta lub płaszczyzna układu F_2 i nawzajem.

2/ punktowi prostej i płaszczyźnie, należącym do siebie w jednym układzie, odpowiada punkt, prosta i płaszczyzna drugiego układu, które również do siebie należą,

3/ punkty odpowiednie leżą parami na prostych, przechodzących przez środek kolineacji O.

4/ płaszczyzny odpowiednie przecinyją się parami według prostych, leżących w płaszczyźnie kolineacji S.

5/ proste odpowiednie leżą parami w płaszczyznach przechodzących przez środek kolineacji O i przecinają się parami w punktach leżących w płaszczyźnie S i

6/ każde dwa szeregi odpowiednich punktów, każde dwa pęki odpowiednich płaszczyzn lub prostych są rzutowe.

Środek kolineacji oraz wszystkie punkty płaszczyzny kolineacji, - płaszczyzna kolineacji oraz wszystkie płaszczyzny, przechodzące przez środek kolineacji

proste, przechodzące przez środek kolineacji oraz proste leżące w płaszczyźnie kolineacji, - odpowiadają same sobie.

Płaszczyzna R_1, która odpowiada w I układzie płaszczyźnie niewłaściwej, zaliczonej do II układu / R_2^∞/ oraz płaszczyzna Q_2, która odpowiada w II układzie płaszczyźnie niewłaściwej, zaliczonej do I układu Q_1^∞/ - nazywają się <u>płaszczyznami wzajemnemi</u>, są one równoległe do płaszczyzny kolineacji S i mają tę własność, że odległość jednej z nich od środka kolineacji O i odległość drugiej od płaszczyzny kolineacji S są odcinkami równej długości i przeciwnego zwrotu. Kolineacja środkowa w przestrzeni moze być wyznaczona przez swój środek O, płaszczyznę S i jednę z płaszczyzn wzajemnych R_1 lub Q_2. Jeżeli płaszczyzny wzajemne i są zjednoczone /w równej odległości między środkiem i płaszczyzną kolineacji/, to kolineacja nazywa się inwolucyjną; w takiej kolineacji każdemu punktowi, płaszczyźnie lub prostej odpowiada ten sam punkt, płaszczyzna lub prosta, niezależnie od tego do którego układu tamten punkt, tamtą płaszczyznę lub prostą zaliczymy.

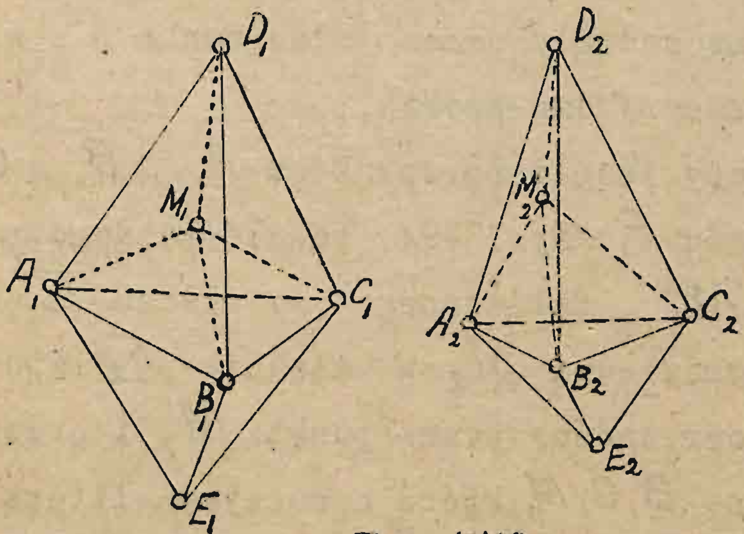
Kolineacja środkowa w przestrzeni ma zastosowanie w płaskorzeźbie perspektywicznej i w teatralnej sztuce dekoracyjnej.

§ 194. Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych. Z dwóch układów przestrzennych F_1 i F_2 które są w kolineacji środkowej, przesuńmy jeden w dowolny sposób. Z 6-ciu warunków, którym czyniły zadość te układy, niektóre mianowicie 3, 4 i 5 nie będą wogóle w nowem położeniu układów spełnione, natomiast pierwsze dwa i ostatni pozostaną w swej mocy. O układach takich mówi wciąż jeszcze, że są w kolineacji, która jednak nie będzie już wogóle środkową, mówimy wtedy, że układy F_1 i F_2 są w kolineacji ogólnej.

Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych jest wyznaczona przez 5 par punktów lub 5 par płaszczyzn odpowiednich z tem zastrzeżeniem, żeby żadne 4 z tych punktów w żadnym układzie nie leżały w jednej płaszczyźnie /a więc także żadne 3 na jednej prostej/ wzgl. żeby żadne 4 z tych płaszczyzn w żadnym układzie nie przechodziły przez jeden punkt / a więc także żadne 3 przez jedną prostą.

W samej rzeczy jeżeli np. punktom A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, układu F_1 /Rys.379/, to dla każdego punktu przestrzeni M, zaliczonego do układu F_1 znajdziemy punkt odpowiedni M_2 w układzie F_2 w sposób następujący: Poprowadźmy przez punkt M_1 i prostą B_1C_1 płaszczyznę $B_1C_1M_1$, którą oznaczymy literą $\mathbf{T}_1$, prosta B_1C_1 będzie osią czwórki płaszczyzn $B_1C_1A_1$, $B_1C_1D_1$, $B_1C_1E_1$ i $B_1C_1M_1 \equiv \mathbf{T}_1$ możemy więc wyznaczyć płaszczyznę $\mathbf{T}_2$ która z płaszczyznami $B_2C_2A_2$, $B_2C_2D_2$, $B_2C_2E_2$ tworzy ten sam dwustosunek; poprowadźmy następnie w układzie F_1 płaszyzczny $C_1A_1M_1 \equiv \mathbf{U}_1$ i $A_1B_1M_1 \equiv \mathbf{V}_1$ i wyznaczmy w taki sam sposób płaszczyzny $\mathbf{U}_2$ i $\mathbf{V}_2$ układu F_2 ; punkt przecięcia płaszczyzn $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{U}_2$ i $\mathbf{V}_2$ będzie szukanym punktem M_2 .

<u>§ 195</u>. <u>Korelacja dwóch układów przestrzennych.</u> - Kolineacja ogólna dwóch układów przestrzennych naprowadza nas na nowy związek geometryczny dwóch układów przestrzennych, zwany <u>korelacja</u>, a polegający na następujących własnościach:



Rys. 379.

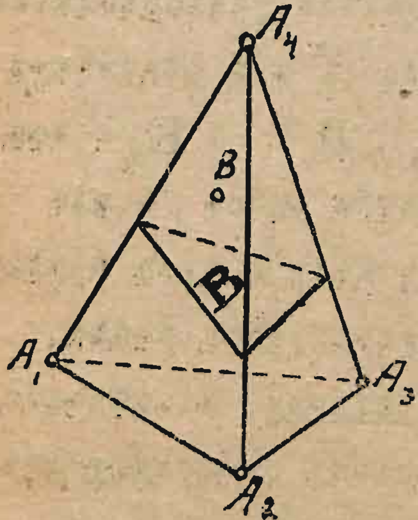
1/ każdemu punktowi układu F_1 odpowiada jedna jedyna płaszczyzna układu F_2; każdej płaszczyźnie układu F_1 odpowiada jedna jedyna płaszczyzna układu F_2 i nawzajem.

2/ punktowi i płaszczyźnie, należącym do siebie w jednym układzie odpowiadają płaszczyzna i punkt drugiego układu, które również do siebie należą; stąd wynika, że każdej prostej jednego układu /która łączy dwa jego punkty/ odpowiada prosta drugiego układu /która jest przecięciem odpowiednich tamtym punktom płaszczyzn/.

3/ każdej czwórce punktów jednego układu odpowiada czwórka płaszczyzn drugiego, która jest z tamtą rzutowa i nawzajem; wogóle każdemu szeregowi punktów jednego układu odpowiada pęk płaszczyzn drugiego i nawzajem; każdej czwórce /pękowi/ prostych jednego ukł du odpowiada rzutowa z nią czwórka prostych drugiego układu.

„Koreleacja" taka będzie wyznaczona przez założenie odpowiedniości wzajemnej 5 punktów jakichkolwiek A_1, B_1, C_1, D_1 i E_1 układu F_1 z 5 płaszczyznami drugiego układu $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_2$ i $\mathbf{E}_2$ z tem zastrzeżeniem, żeby z tych 5 punktów żadne 4 nie leżały w jednej płaszczyźnie, ani żeby z tych 5 płaszczyzn żadne 4 nie przechodziły przez jeden punkt.

§ 196. Układ biegunowy przestrzenny. Niech będzie czworościan $A_1A_2A_3A_4$ /którego ściany oznaczymy literami: $\mathbf{A}_1 \equiv A_2A_3A_4$, $\mathbf{A}_2 \equiv A_3A_4A_1$, $\mathbf{A} \equiv A_4A_1A_2$, i $\mathbf{A}_4 = A_1A_2A_3$, punkt jakikolwiek B nie leżący na żadnej ze ścian /a więc i na żadnej z krawędzi/ i płaszczyzna $\mathbf{B}$, nie przechodząca przez żaden z wierzchołków /a więc i przez żadną z krawędzi/ czworościanu $A_1A_2A_3A_4$ /Rys.380/. Na mocy poprzedniego artykułu odpowiedniość punktów $A_1A_2A_3A_4$ i B płaszczyznom $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ i $\mathbf{B}$ wyznacza korelację dwóch układów przestrzennycj. Korelacja ta ma tę własność, że każdemu punktowi odpowiada zawsze ta sama płaszczyzna, każdej płaszczyźnie ten sam punkt /a więc i każdej prostej ta sama prosta/ niezależnie od tego, do którego układu tamten punkt, tamta płaszczyzna /tamta prostą/ zaliczymy.



Rys.380.

Własności tej dowieść można w podobny sposób, jak dowiedliśmy analogicznej własności układu biegunowego płaskiego /§ 151/.

Te dwa układy korelacyjne można przeto uważać za jeden jedyny układ przestrzenny, w którym zachodzi wzajemne podporządkowanie punktów płaszczyznom i płaszczyzn punktom. Układ taki nazywa się biegunowym, płaszczyzna podporządkowana punktowi nazywa się jego płaszczyzną biegunową, punkt podporządkowany płaszczyźnie tej biegunem.

Ponieważ punktowi i płaszczyźnie należącym do siebie podporządkowane są płaszczyzna i punkt również do siebie należące, więc mamy twierdzenia:

Jeżeli punkt C leży w płaszczyźnie biegunowej punktu B, to płaszczyzna biegunowa punktu C przechodzi przez punkt B.

Jeżeli płaszczyzna **C** przechodzi przez biegun płaszczyzny **B**, to biegun płaszczyzny **C** leży w płaszczyźnie **B**.

Stąd wynika

1/ płaszczyznę biegunową punktu przecięcia 3 płaszczyzn **A**, **B** i **C** jest płaszczyzna poprowadzona przez ich bieguny A, B i C i nawzajem

biegunem płaszczyzny przechodzącej przez 3 punkty A, B i C jest punkt przecięcia ich płaszczyzn biegunowach **A**, **B** i **C**

2/ Bieguny płaszczyzn przechodzących przez jedną prostą leżą na drugiej i nawzajem:

płaszczyzny biegunowe punktów leżących na jednej prostej przechodzą przez drugą.

Dwie proste, mające tę własność, że bieguny płaszczyzn przechodzących przez jedną z nich leżą na drugiej nazywają się prostemi wzajemnie biegunowemi.

Dwie płaszczyzny mające tę własność, że biegun jednej z nich leży na drugiej, nazywają się płaszczyznami /biegunowo/ sprzężonemi. 2 punkty, z których jeden leży w płaszczyźnie biegunowej drugiego, nazywają się punktami /biegunowo/ sprzężonemi, dwie proste, z których każda przecina biegunową drugiej, nazywają się prostemi /biegunowo/ sprzężonemi.

Układ biegunowy przestrzenny wyznacza się w każdej płaszczyźnie pewien układ biegunowy płaski a dokoła każdego punktu pewien układ biegunowy wiązki.

Tak np. biegunowa punktu M, leżącego w płaszczyźnie **P** jest w tej płaszczyźnie ślad m płaszczyzny biegunowej **M** punktu M, biegunem prostej m, leżącej w płaszczyźnie **P** jest w tej płaszczyźnie ślad M prostej z nią biegunowej n. Układ biegunowy przestrzenny wyznacza na każdej prostej pewną inwolucję punktów /zwaną inwolucją biegunową na prostej/ i dokoła każdej prostej pewną inwolucję płaszczyzn /zwaną inwolucją biegunową dokoła tej prostej/. Niechaj będzie nap. na podstawie m szereg punktów m / K_1, L_1, M_1, ... /; płaszczyzny biegunowe tych punktów przechodzą wszystkie przez prostą biegunową n, tworząc dokoła niej pęk płaszczyzn n / $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{M}_2$,..../ rzutowy z szeregiem m / K_1, L_1, M_1, ... / jeżeli przecięcia tych płaszczyzn z podstawą m oznaczymy literami K_2 L_2, M_2, ..., to szeregi m / K_1, L_1, M_1, ... / i m / K_2, L_2, M_2,.... / będą rzutowe. Otóż każde dwa punkty odpowiednie tych szeregów, np. K_1 i K_2 odpowiadają sobie podwójnie,- jeżeli bowiem zaliczymy punkt K_2 do I szeregu, to punkt odpowiedni znajdziemy w przecięciu podstawy m z płaszczyzną biegunową punktu K_2, która musi przejść przez punkt K_1, gdyż płaszczyzna biegunowa punktu K_1 przechodzi przez punkt K_2

§ 197. Czworościany biegunowe. Czworościan $A_1A_2A_3A_4$ ma tę osobliwość,że 1/ każdy wierzchołek jest biegunem przeciwległej ściany, 2/ przeciwległe krawędzie,np A_1A_2 i A_3A_4 są prostemi wzajemnie biegunowemi i 3/ każde dwie krawędzie nieprzeciwległe, każde dwa wierzchołki i każde dwie ściany są sprzężone.Czworościan taki nazywamy biegunowym.Czworościanów biegunowych jest nieskończenie wiele. Dla otrzymania któregokolwiek z nich postępujemy jak następuje: Obieramy dowolny punkt M i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową $\mathbf{M}$, w płaszczyźnie $\mathbf{M}$ obieramy dowolny punkt N i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową $\mathbf{N}$, na mocy poprzedniego artykułu musi ona przejść przez punkt M; na prostej przecięcia płaszczyzn $\mathbf{M}$ i $\mathbf{N}$ obieramy dowolny punkt P i znajdujemy jego płaszczyznę biegunową $\mathbf{P}$, która musi przejść przez prostą MN; przez punkty M, N i P prowadzimy płaszczyznę $\mathbf{Q}$, której biegunem będzie punkt przecięcia płaszczyzn $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ i $\mathbf{P}$ Czworościan $MNPQ$ będzie biegunowy. Oczywiście ten sam układ biegunowy przestrzenny, który określiliśmy zapomocą czworościanu biegunowego $A_1A_2A_3A_4$

punktu B i jego płaszczyzny biegunowej $\mathbf{B}$, można określić za pomocą każdego innego czworościanu biegunowego $MNPQ$ jakiegokolwiek punktu R i jego płaszczyzny biegunowej $\mathbf{R}$.

§ 198. Trzy rodzaje układów biegunowych przestrzennych. Niech będzie układ biegunowy wyznaczony przez czworościan biegunowy $A_1A_2A_3A_4$ oraz płaszczyzną biegunową $\mathbf{B}$ dowolnego punktu B, przytem punkt B nie leży na każdej ze ścian, a płaszczyzna $\mathbf{B}$ nie przechodzi przez żaden z wierzchołków tego czworościanu. Nastręczają się dwa pytania:

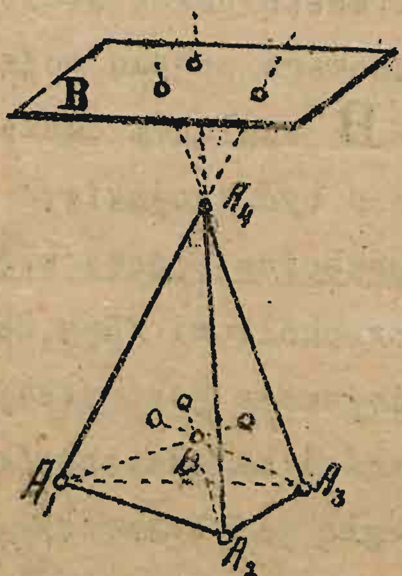
1/ Czy i w jakich warunkach mogą istnieć rzeczywiste punkty i płaszczyzny sprzężone same ze sobą t.j. punkty leżące we własnych płaszczyznach biegunowych i płaszczyzny przechodzące przez własne bieguny?

2/ Jeżeli takie punkty i płaszczyzny istnieją, to czy mogą istnieć rzeczywiste proste sprzężone same ze sobą t.j. przystające do własnych prostych biegunowych, których każdy punkt byłby zatem sprzężony sam ze sobą?

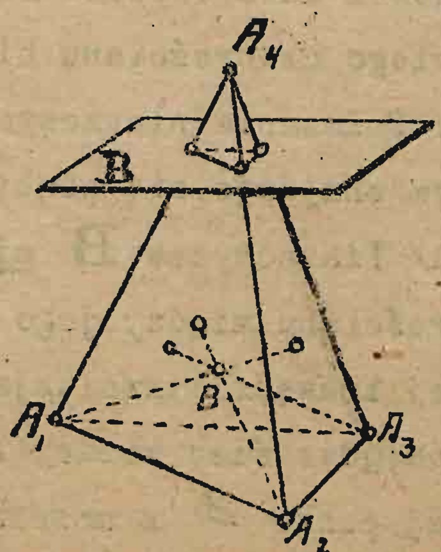
Aby na te pytania odpowiedzieć, zauważmy, że czworościan biegunowy $A_1A_2A_3A_4$ dzieli przestrzeń na 8 obszarów, z których jeden tylko bywa skończony i nazywa się wtedy objętością czworościanu,- cztery mają z tą objętością po jednej ścianie wspólnej, a 3 mają z nią dwie przeciwległe krawędzie wspólne. Ponieważ punkt nie leży na żadnej ścianie czworościanu, więc może on należeć nietylko do jednego obszaru, ponieważ płaszczyzna **B** nie przechodzi przez żaden wierzchołek, więc dla jednego obszaru musi ona pouostać obcą. Przypuśćmy np. że punkt $\mathcal{B}$ leży wewnątrz objętości czworościanu /co zresztą przez odbiór odpowiedniego czworościanu biegunowego zawsze można sprawić/. Położenie płaszczyzny **B** względem obszaru, w którym znajduje się punkt może być trojakie:

1/ Płaszczyzna **B** nie przecina żadnej krawędzi czworościanu między jego wierzchołkami /Rys.381/.Na każdej krawędzi inwolucja biegunowa jest wtedy eliptyczna,gdyż ślad każdej krawędzi na płaszczyźnie,łączącej punkt $\mathcal{B}$ z przeciwległą jej krawędzią, leży zawsze między wierzchołkami, a ślad jej na płaszczyźnie **B** leży poza wierzchołkami, tak,że te dwa punkty sprzężone przegradzają wierzchołki na każdej krawędzi.Jeżeli wyznaczymy płaszczyznę biegunową dowolnego punktu M ,to się pokaże,że ta płaszczyzna nie przenika do obszaru,w którym się znajduje punkt M W takim więc układzie biegunowym nie istnieją punkty któreby leżały we własnych płaszczyznach biegunowych tembardziej nie istnieją proste,przystające do własnych prostych biegunowych.-Na wszystkich płaszczyznach i dokoła wszystkich punktów, układ biegunowy /płaski lub wiązki/ jest jednostajny,- na wszystkich i dokoła wszystkich prostych inwolucja biegunpwa jest eliptyczna.-

2/ Płaszczyzna **B** <u>przecina 3 krawędzie</u> czworościanu, wychodzące z jednego wierzchołka /Rys.382.



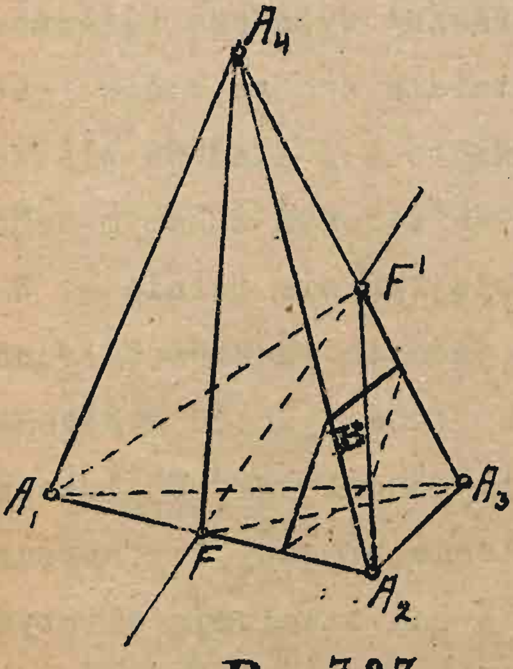
Rys.381.



Rys.382.

Na tych trzech krawędziach inwolucja biegunowa jest hyperboliczna,- na trzech pozostałych - eliptyczna. Na pierwszych trzech krawędziach istnieją przeto po dwa rzeczywiste punkty podwójne,t.j.sprzężone same ze sobą. Istnieją wtedy zatem punkty rzeczywiste leżące we własnych płaszczyznach biegunowych, natomiast nie ist nieją proste rzeczywiste, któreby były własnemi swemi biegunowemi. W samej rzeczy zauważmy, że na ścianie $A_1 A_2 A_3$ układ biegunowy przestrzenny wyznacza biegunowość płaską jednostajną, gdyby istniała prosta, która jest własną swoją prostą biegunową, to jej ślad na płaszczyźnie $A_1 A_2 A_3$ byłby punktem sprzężonym z samym sobą, a taki punkt w układzie jednostajnym nie istnieje. W jednych płaszczyznach i dokoła jednych punktów biegunowość jest jednostajna, - w innych płaszczyznach i dokoła innych punktów może ona być niejednostajna. W płaszczyznach przechodzących przez własne bieguny, t.j. sprzężonych z samemi sobą, staje się ona inwolucją eliptyczną prostych sprzężonych dokoła bieguna. W samej rzeczy, w każdej płaszczyźnie $\mathbf{M}$, przechodzącej przez własny biegun M, biegunowe a, b, c punktów $A, B, C, \ldots$ tej płaszczyzny przechodzą przez punkt M, tak że w płaszczyźnie $\mathbf{M}$ dokoła punktu M istnieje inwolucja prostych sprzężonych $a, MA, b, MB, c, MC, \ldots$. Inwolucja ta jest eliptyczna, gdyż w przeciwnym razie istniałyby proste sprzężone same ze sobą: byłyby to proste podwójne tej inwolucji.

3/ Płaszczyzna $\mathbf{B}$ <u>przecina 4 krawędzie czworościanu</u> biegunowego /Rys.383/, np. $A_1 A_2$, $A_3 A_4$



Rys. 383.

A_1A_3, A_2A_4

Na tych czterech krawędziach inwolucja biegunowa jest hyperboliczna, na pozostałych dwóch eliptyczna. Podobnie jak w przypadku drugim, istnieją więc i tutaj punkty leżące we własnych płaszczyznach biegunowych, ale oprócz tego istnieją także proste sprzężone same ze sobą t.j. przystające do własnych swych prostych biegunowych. W samej rzeczy niech punkt F będzie jednym z punktów podwójnych inwolucji biegunowej na krawędzi A_1A_2, a punkt F' niechaj będzie jednym z punktów podwójnych inwolucji biegunowej na krawędzi przeciwległej A_3A_4, tak że punkty F i F' są punktami sprzężonemi z samemi sobą i leżą na prostych wzajemnie biegunowych A_1A_2 i A_3A_4

Płaszczyzna FA_3A_4 jest płaszczyzną biegunową punktu F /gdyż punkt F jest samosprzężony i leży na prostej $A_1 A_2$ /, podobnież płaszczyzna jest płaszczyzną biegunową punktu F'; prosta FF' jest prostą przecięcia tych dwóch płaszczyzn i zarazem łączy ich bieguny, jest to zatem prosta sprzężona sama ze sobą. We wszystkich płaszczyznach i dokoła wszystkich punktów biegunowość jest niejednostajna z wyjątkiem płaszczyzn i punktów samosprzężonych, gdzie biegunowość staje się hyperboliczną inwolucją biegunową dokoła bieguna względnie w płaszczyźnie biegunowej. Proste podwójne tej inwolucji są prostemi samosprzężonemi, z każdego więc punktu samosprzężonego wychodzą i w każdej płaszczyźnie samosprzężonej leżą dwie proste sprzężone.

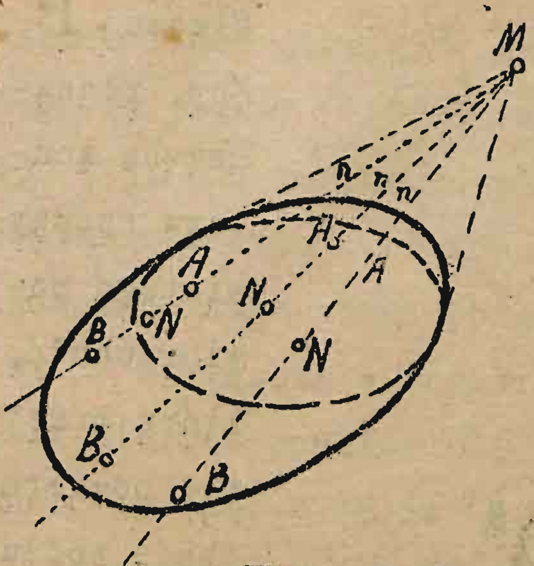
§ 199. Powierzchnie drugiego stopnia. Ogół punktów płaszczyzn i prostych, rzeczywistych i urojonych, które w danym przestrzennym układzie biegunowym są samosprzężone, nazywamy powierzchnią drugiego stopnia. Punkty samosprzężone nazywamy punktami tej powierzchni, przechodzące przez nie własne ich płaszczyzny biegunowe nazywamy płaszczyznami stycznemi do tej powierzchni w tych punktach; proste samosprzężone nazywamy tworzącemi powierzchni. Punkty powierzchni są to więc punkty podwójne inwolucji biegunowej na jakiejkolwiek prostej rzeczywistej, płaszczyzny styczne do tej powierzchni są to płaszczyzny podwójne inwolucji biegunowej dokoła jakiejkolwiek prostej rzeczywistej. Na każdej prostej rzeczywistej leżą dwa punkty powierzchni drugiego stopnia: rzeczywiste urojone sprzężone lub zjednoczone,w których ta prosta "przebija" powierzchnię, przez każdą prostą rzeczywistą przechodzą dwie płaszczyzny styczne: rzeczywiste,urojone,sprzężone lub zjednoczone. Wyrażamy to krótko mówiąc,że powierzchnie drugiego stopnia są powierzchniami drugiego rzędu i drugiej klasy. Prosta nazywa się sieczną, prostą zewnętrzną lub styczną zależnie od tego czy inwolucja biegunowa na niej jest hyperboliczna, eliptyczna lub paraboliczna t.j. czy przepija ona powierzchnię w dwóch punktach rzeczywistych, urojonych sprzężonych lub zjednoczonych. W każdej płaszczyźnie P dany układ biegunowy przestrzenny wyznacza pewien układ biegunowy płaski: jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały /inwolucję biegunową/. Stożkowa tego układu płaskiego /urojona, rzeczywista lub zwyrodniała/ jest przecięciem powierzchni drugiego stopnia płaszczyzną P_2. Każda płaszczyzna "przecina" powierzchnię drugiego stopnia według stożkowej. Płaszczyzna nazywa się zewnętrzną, sieczną lub styczną, zależnie od tego,czy

czy układ biegunowy tej płaszczyzny jest jednostajny lub zwyrodniały t.j. czy przecina ona powierzchnię według stożkowej urojonej, rzeczywistej lub zwyrodniałej /dwie proste urojone sprzężone lub rzeczywiste/. Wszystkie styczne do powierzchni w danym jej punkcie leżą w płaszczyźnie stycznej i stanowią inwolucję biegunową dokoła punktu zetknięcia. Dokoła każdego punktu P dany układ biegunowy przestrzenny wyznacza pewien układ biegunowy wiązki: jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały. Stożek tej biegunowości /urojony, rzeczywisty lub zwyrodniały/ nazywamy stożkiem opisanym na powierzchni z punktu P. Z każdego punktu można opisać na powierzchni drugiego stopnia stożek drugiego stopnia. Punkt nazywa się wewnętrznym, zewnętrznym lub leżącym na powierzchni zależnie od tego czy układ biegunowy wiązki dokoła niego jest jednostajny, niejednostajny lub zwyrodniały, t.j. czy stożek z niego na powierzchni opisany jest urojony, rzeczywisty lub zwyrodniały /dwie proste urojone sprzężone lub rzeczywiste/.

Miejsce geometryczne punktów zetknięcia tego stożka z powierzchnią drugiego stopnia jest stożkową. W samej rzeczy, punkty zetknięcia płaszczyzn stycznych wyprowadzonych z punktu M, t.j. ich bieguny, leżą w płaszczyźnie biegunowej $\mathbf{M}$ tego punktu /§ 195/, ogół tych punktów zetknięcia stanowi zatem stożkową, według której płaszczyzna $\mathbf{M}$ przecina powierzchnię. Nawzajem płaszczyzny styczne w punktach stożkowej, leżącej na powierzchni, przecinają się w biegunie M płaszczyzny tej stożkowej, powłócząc stożek drugiego stopnia, opisany na powierzchni.

Zarówno kontur rzeczywisty, jak i kontur widzialny /§ 26/ rzeczywistej powierzchni drugiego stopnia jest stożkową. Pierwszy jest miejscem punktów zetknięcia powierzchni ze stożkiem opisanym na niej ze środka rzutów, drugi jest przecięciem tego stożka płaszczyzną rzutów; ponieważ stożek ten jest drugiego stopnia, więc jego przecięcie jest stożkową.

Płaszczyzna biegunowa jest miejscem geometrycznem punktów sprzężonych harmonicznie i biegunem względem punktów, w których sieczne, wychodzące z bieguna przebijają powierzchnię. Wyprowadźmy z bieguna M sieczną n, która przebija powierzchnię w punktach A i B a płaszczyznę biegunową $\mathbf{M}$ w punkcie N /Rys.384/. Punkty A i B są punktami podwójnemi inwolucji biegunowej na siecznej n a punkty M i N są w tej inwolucji sprzężone, bo punkt N leży w płaszczyźnie biegunowej punktu M. Otóż wiadomo, /§ 151/, że punk-



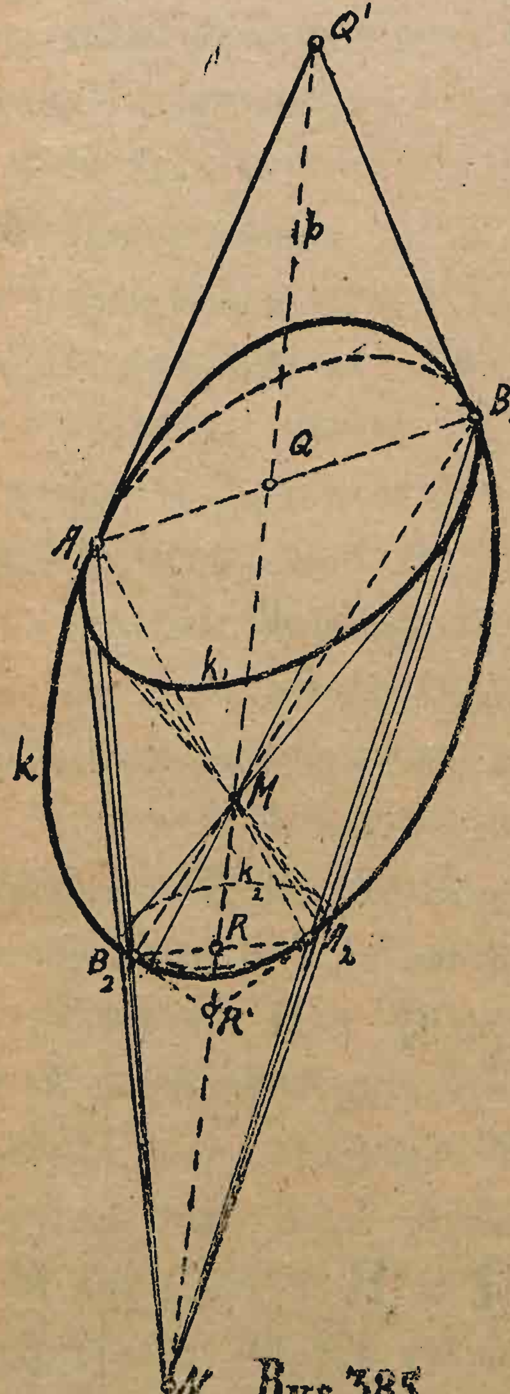
Rys.384.

ty podwójne inwolucji hyperbolicznej przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych.

Jeżeli więc z danego punktu M poprowadzimy 3 jakiekolwiek sieczne n, n, n, nie leżące w jednej płaszczyźnie /Rys.395/ i na każdej z nich wyznaczymy punkt N sprzężony harmonicznie z punktem M wtedy punktów A i B, w których ta sieczna przebija powierzchnię, to N, N, N, będzie płaszczyzną biegunową punktu M.

Przez każde dwa przecięcia płaskie powierzchni drugiego stopnia przechodzą dwa stożki drugiego stopnia. Niechaj dwie płaszczyzny $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ przecinają powierzchnię drugiego stopnia według stożkowych k_1 i k_2 /Rys.385/, niechaj Q' i R' będą biegunami płaszczyzn $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ połączmy te punkty prostą p, która niechaj przebija płaszczyzny $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ w punkatych Q i R

Przez prostą p poprowadźmy dowolną płaszczyznę



Rys.385.

sieczną **P** /np. płaszczyznę konturu rzeczywistego powierzchni/, która przetnie powierzchnię według stożkowej k a płaszczyzny **Q** i **R** według prostych A_1B_1 i A_2B_2 , które są biegunowemi punktów Q' i R' względem stożkowej k. Wykreślmy punkty przekątne M i N

czworokąta zupełnego $A_1B_1A_2B_2$ wpisanego w stożkową; na zasadzie § 186 punkty M i N leżą na prostej $QR' \equiv p$. Powiadam, że punkty M i N są stałemi punktami tej prostej, t.j. nie zależą od płaszczyzny P, tak że gdy płaszczyzna sieczna P obraca się dokoła prostej p, punkty te nie zmieniają swego położenia. W samej rzeczy punkty te są 1/ sprzężone w inwolucji biegunowej danej przez dwie pary stałych punktów Q,Q' i R,R' 2/ sprzężone harmonicznie względem punktów Q i R /t.j. sprzężone w inwolucji hyperbolicznej, której punkty Q i R są punktami podwójnemi/ co wynika z własności czworoboku zupełnego o bokach A_1A_2, A_2B_1, B_1B_2 i B_2A_1 którego MN jest jedną przekątną, a A_1B_1 i A_2B_2 są dwiema innemi przekątnemi, punkty M i N są przeto wspólną parą punktów sprzężonych dwóch inwolucji i jako takie mogą być wyznaczone niezależnie od płaszczyzny P /§ 142/. Znalezione w ten sposób punkty M i N są wierzchołkami dwóch stożków, z których każdy przechodzi przez stożkowe k_1 i k_2.

Z twierdzenia tego wynika ważny wniosek, że <u>przecięcia powierzchni drugiego stopnia płaszczyznami równoległemi są stożkowemi podobnemi</u>,- są to bowiem zarazem przecięcia równoległe stożka drugiego stopnia. Jeżeli więc np. <u>pewne przecięcie powierzchni drugiego stop-</u>

nia jest kołem, to wszystkie przecięcia do niego równoległe są kołami.

Twierdzeniem wzajemnem do powyższego będzie: Krzywa przenikania dwóch stożków opisanych na powierzchni drugiego stopnia składa się z dwóch stożkowych.

§ 200. Środek, średnice, osie, stożek asymptotyczny. Biegun płaszczyzny niewłaściwej nazywa się środkiem powierzchni drugiego stopnia; płaszczyzna biegunowa każdego punktu niewłaściwego nazywa się płaszczyzną średnicową ; prosta biegunowa każdej prostej niewłaściwej nazywa się średnicą. Wszystkie płaszczyzny średnicowe i średnie przechodzą przez środek, albowiem bieguny tych płaszczyzn i biegunowe tych prostych leżą w płaszczyźnie biegunowej środka, t.j. w płaszczyźnie niewłaściwej. Odcinek siecznej, zawarty pomiędzy punktami przebicia powierzchni nazywa się cięciwą i gdy nie zachodzi obawa dwuznaczności, to cięciwę leżącą na średnicy nazywamy poprostu średnicą. Środek powierzchni jest zarazem środkiem każdego przecięcia powierzchni płaszczyzną średnicową i środkiem każdej "średnicy".

Jeżeli wierzchołkiem czworościanu biegunowego jest środek powierzchni, to krawędzie tego czworościanu wychodzące ze środka, są średnicami sprzężnemi. Cięciwy równoległe do jednej z trzech średnic sprzężonych są płaszczyznami dwóch pozostałych przecięte na połowy; płaszczyzny sieczne równoległe do dwóch średnic sprzężonych są przez trzecią przebite w środkach stożkowych przecięcia. Płaszczyzny styczne w końcach jednej z 3-ch średnic sprzężonych są równoległe do płaszczyzny dwóch pozostałych średnic. Każde dwie średnice sprzężone powierzchni są zarazem średnicami sprzężonemi stożkowej, według której płaszczyzna tych średnic przecina powierzchnię.

Można dowieść, że istnieje zawsze układ trzech średnic sprzężonych wzajemnie prostopadłych /dowód musi tutaj być pominięty/; każdą z tych trzech średnic nazywamy osią powierzchni; punkty, w których oś przebija powierzchnię nazywamy wierzchołkami. Płaszczyzna dwóch którychkolwiek osi jest dla powierzchni płaszczyzną symetrji prostokątnej; każda z osi jest osią symetrji prostokątnej. Jeżeli przecięcie prostopadłe do jednej z osi jest kołem, to wszystkie przecięcia do niej prostopadłe są kołami i powierzchnia nazywa się obrotową; wszystkie średnice prostopadłe do osi obrotu są osiami tej powierzchni.

Stożek opisany na powierzchni drugiego stopnia z jej środka nazywa się stożkiem asymptotycznym tej powierzchni, z którą posiada wspólne osie. Stożkowa zetknięcia tego stożka z powierzchnią leży w płaszczyźnie niewłaściwej. Każde dwie tworzące tego stożka są asymptotami stożkowej, według której płaszczyzna tych tworzących przecina powierzchnię.

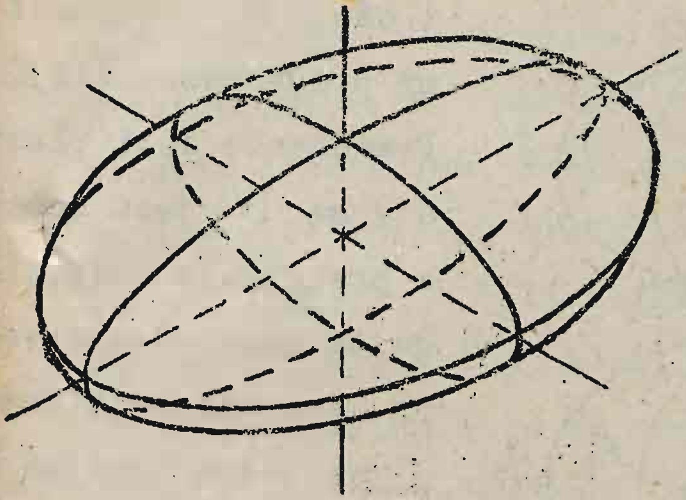
§ 201. Klasyfikacja powierzchni drugiego stopnia. W § 198 odróżniliśmy 3 rodzaje układów biegunowych przestrzennych zależnie od tego, czy istnieją punkty, płaszczyzny i proste samosprzężone. Na tej zasadzie dzielimy powierzchnie drugiego stopnia na urojone, krzywokreślne i prostokreślne. Druga zasada klasyfikacji polega na zachowaniu się tych powierzchni względem płaszczyzny niewłaściwej, która może dla tych powierzchni być zewnętrzną /elipsoid/, sieczną /hyperboloidy/ lub styczną /paraboloidy/.

§ 202. Powierzchnie urojone odpowiadają układom biegunowym I rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu, leżącego wewnątrz czterościanu biegunowego, nie przecina żadnej jego krawędzi. Wszystkie punkty tej powierzchni i wszystkie płaszczyzny do niej styczne są urojone. Każdy /rzeczywisty/ punkt jest względem tej powierzchni wewnętrznym; każda płaszczyzna i prosta - zewnętrzną. Środek, średnica i osie są tutaj, jak zresztą zawsze, rzeczywiste. Ponieważ płaszczyzna niewłaściwa jest względem tej powierzchni zewnętrzna możemy przeto powierzchnię urojoną uważać za elipsoid.

§ 203. Powierzchnie krzywokreślne odpowiadają układom biegunowym II rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu, leżącego wewnątrz czworościanu biegunowego przecina trzy jego krawędzie. Punkty samosprzężone stanowią punkty tej powierzchni, płaszczyzny samosprzężone są styczne do niej; istnieją zatem tutaj zarówno rzeczywiste jak i urojone punkty leżące na powierzchni i płaszczyzny styczne do niej. Natomiast nie istnieją w tych układach rzeczywiste proste samosprzężone, t.j. rzeczywiste tworzące powierzchni. Z pośród prostych rzeczywistych jedne są zewnętrzne względem powierzchni /jeżeli inwolucja biegunowa jest na nich eliptyczna/, inne są sieczne /gdy inwolucja biegunowa jest na nich hyperboliczna/, jeszcze inne są styczne do powierzchni /gdy inwolucja biegunowa jest na niej paraboliczna/. Przez sieczną nie można poprowadzić do powierzchni rzeczywistej płaszczyzny stycznej /bo inwolucja biegunowa dokoła siecznej jest eliptyczna/; przez prostą zewnętrzną przechodzą dwie płaszczyzny styczne /bo inwolucja dokoła niej jest hyperboliczna; płaszczyzny te zostaną zjednoczone, gdy prosta zewnętrzna stanie się styczną. Styczne do powierzchni w którymkolwiek jej punkcie leżą wszystkie w płaszczyźnie stycznej i stanowią dokoła punktu zetknięcia eliptyczną inwolucję prostych sprzężonych Z pośród rzeczywistych punktów, nie leżących na powierzchni, jedne są wewnętrzne /jeżeli układ biegunowy wiązki dokoła nich jest jednostajny/, inne zewnętrzne /gdy ten układ jest niejednostajny/. Z każdego punktu zewnętrznego można opisać na powierzchni rzeczywisty stożek drugiego stopnia; natomiast stożek opisany z punktu wewnętrznego jest urojony.

Z pośród rzeczywistych płaszczyzn, które nie są styczne do powierzchni, jedne są zewnętrzne /jeżeli układ biegunowy płaski jest na nich jednostajny/, inne są sieczne /gdy ten układ jest na nich niejednostajny/. Każda płaszczyzna sieczna przecina powierzchnię według stożkowej rzeczywistej; płaszczyzna zewnętrzna powierzchni nie przecina, lub raczej przecina ją według stożkowej urojonej. Płaszczyzna biegunowa punktu zewnętrznego jest sieczną; płaszczyzna biegunowa punktu wewnętrznego jest zewnętrzną.

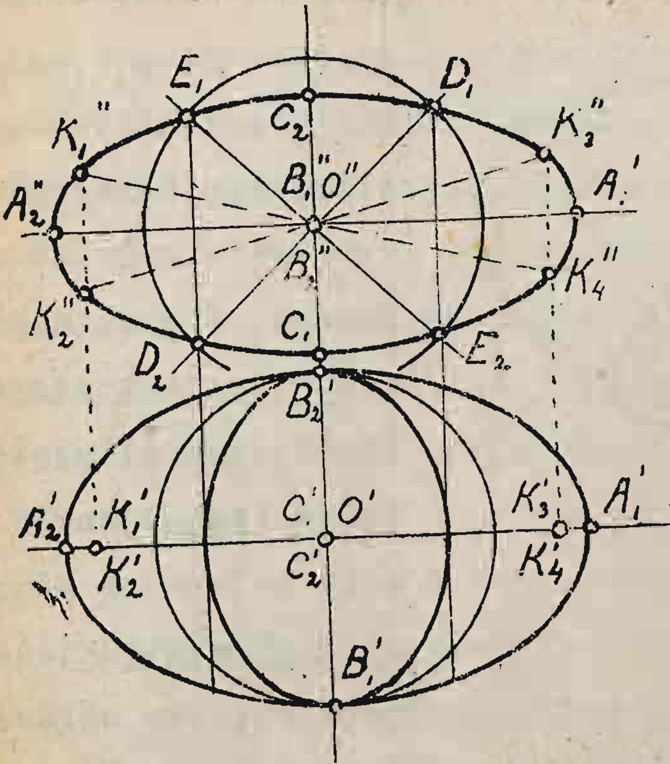
a/ Powierzchnia drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest zewnętrzną, t.j. której środek jest punktem wewnętrznym, nazywa się elipsoidem. Wszystkie średnice a więc i osie są siecznemi,



Rys.386

wszystkie wierzchołki są rzeczywiste, wszystkie przecięcia płaskie elipsoidu są elipsami - rzeczywistemi lub urojonemi; stożek asymptotyczny jest urojony. Odróżniamy elipsoidy trójosiowe /jeżeli cięciwy osiowe są nierówne/, obrotowe /jeżeli dwie cięciwy osiowe są równe/, a wśród nich elipsoid spłaszczony, wydłużony i kulę, zależnie od tego czy oś obrotu jest krótsza, dłuższa lub równa każdej z dwóch osi równych.

W elipsoidzie trójosiowym istnieją dwa ustawienia, których płaszczyzny przecinają powierzchnię według kół. Niechaj będą dane w rzutach prostokątnych /Rys.387/ trzy osie A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 elipsoidu i przypuśćmy, że $A_1A_2 > B_1B_2 > C_1C_2$. Ze środka O zakreślmy kulę o średnicy równej średniej osi B_1B_2, jej pionowy kontur rzeczywisty będzie kołem, przecinającem kontur pionowy elipsoidu w punktach D_1, D_2, E_1 i E_2, leżących na średnicach D_1D_2 i E_1E_2 przez

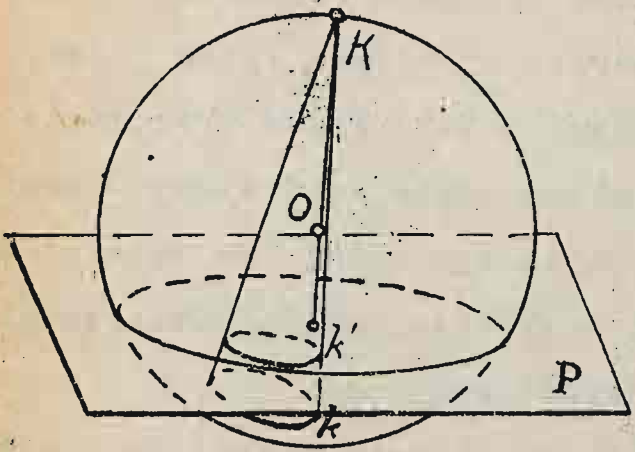


Rys. 387.

każdą z tych średnic i oś B_1B_2 poprowadźmy płaszczyzny D i E. Przecięcie kuli płaszczyzną D jest kołem a przecięcie elipsoidu tą samą płaszczyzną jest elipsą, która z tym kołem wspólne punkty D_1, D_2, B_1 i B_2 i styczne w punktach B_1 i B_2, a więc jest z niem identyczna /§ 171/; płaszczyzna D i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe przecinają więc powierzchnie według kół; tak samo płaszczyzna E i wszystkie płaszczyzny do niej równoległe. Dotyczy to nietylko płaszczyzn siecznych, ale i zewnętrznych /koła urojone/ i w szczególności stycznych /inwolucja prostokątna prostych sprzężonych/, których punkty zetknięcia z powierzchnią nazywają się <u>punktami kołowemi</u> powierzchni i mogą być otrzymane w przecięciu elipsy $A_1A_2C_1C_2$ średnicą sprzężoną bądź ze średnicą D_1D_2 /punkty K_1 i K_4/, bądź ze średnicą E_1E_2 /punkty K_2 i K_3/.

W elipsoidzie trójosiowym istnieją dwa układy przecięć kołowych w elipsoidzie obrotowym tylko jeden, prostopadły do osi obrotu, w kuli każde przecięcie płaskie jest kołem. W elipsoidzie trójosiowym istnieją 4 punkty kołowe, w obrotowym tylko dwa /wierzchołki osi obrotu/, w kuli wszystkie punkty powierzchni są wierzchołkami i punktami kołowemi.

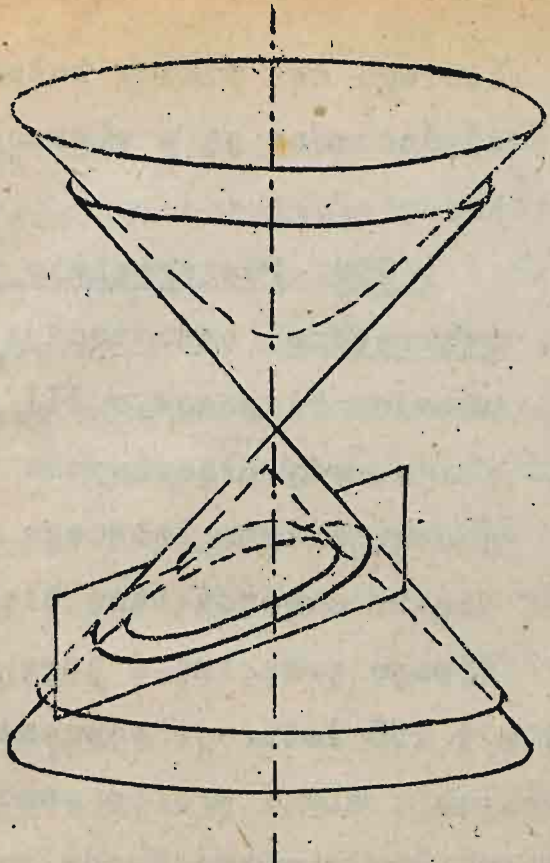
Rzut jakiegokolwiek przecięcia płaskiego k elipsoidu z punktu kołowego K na płaszczyznę P odpowiedniego przecięcia kołowego, t.j. na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny stycznej w punkcie K, jest kołem. W samej rzeczy punkt kołowy K jest zwyrodniałem przecięciem kołowem powierzchni płaszczyzną styczną w tym punkcie; przecięcie stożka rzucającego płaszczyzną P równoległą do płaszczyzny stycznej musi być figurą podobną do tego zwyrodniałego koła, a więc musi też być kołem. Jeżeli elipsoid jest kulą, to rzut taki nazywa się <u>stereograficznym</u>; środkiem rzutów jest jakikolwiek punkt powierzchni kuli K, a płaszczyzną rzutów jest jakakolwiek płaszczyzna prostopadła do średnicy OK. Rzut stereograficzny każdego koła leżącego na kuli jest kołem; łatwo okazać, że w rzucie tym zostaje zachowany kąt



Rys.388-

jakichkolwiek dwuch krzywych, przecinających się na powierzchni kuli. Na tej zasadzie rzut stereograficzny ma zastosowanie w teorji funkcji, kartografji i krystalografji.

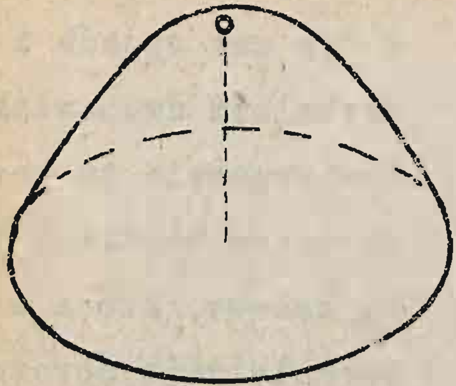
b/ Powierzchnia krzywokreślna drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest sieczną, t.j. której środek jest punktem zewnętrznym, nazywa się <u>hyperboloidem dwupowłokowym</u>. Z każdych trzech średnic sprzężonych, a więc i z trzech osi, tylko jedna jest sieczną; hyperboloid dwupowłokowy posiada tylko dwa wierzchołki rzeczywiste. Stożek asymptotyczny jest rzeczywisty. Każde przecięcie powierzchni płaszczyzny jest podobne do przecięcia stożka asymptotycznego tą samą płaszczyzną, gdyż pierwsze z tych przecięć jest zarazem przecięciem stożka, który przechodzi przez przecięcia hyperboloidu płaszczyzną niewłaściwą i który jest przesuniętym równolegle stożkiem asymptotycznym. Stąd wynika, że płaszczyzna, która przecina stożek asymptotyczny



Rys. 389.

według koła, przecina w ten sam sposób i hyperboloid dwupowłokowy. Powierzchnia ta posiada zatem wogóle 4 punkty kołowe, które w hyperboloidzie obrotowym zostaną zjednoczone w dwóch jego wierzchołkach.

c/ Powierzchnia krzywokreślna drugiego stopnia, dla której płaszczyzna niewłaściwa jest styczną, nazywa się paraboloidem eliptycznym. Z trzech osi tylko jedna jest właściwą. Każde przecięcie paraboloidu eliptycznego jest elipsą z wyjątkiem przecięć równoległych do osi, które są parabolami. Paraboloid eliptyczny posiada jeden wierzchołek, dwa układy przecięć kołowych i dwa punkty kołowe, które wyznaczyć można podobnie jak dla elipsoidu, t.j. za pomocą kuli podwójnie stycznej. Szczególnym przypadkiem paraboloidu eliptycznego jest paraboloid obrotowy.

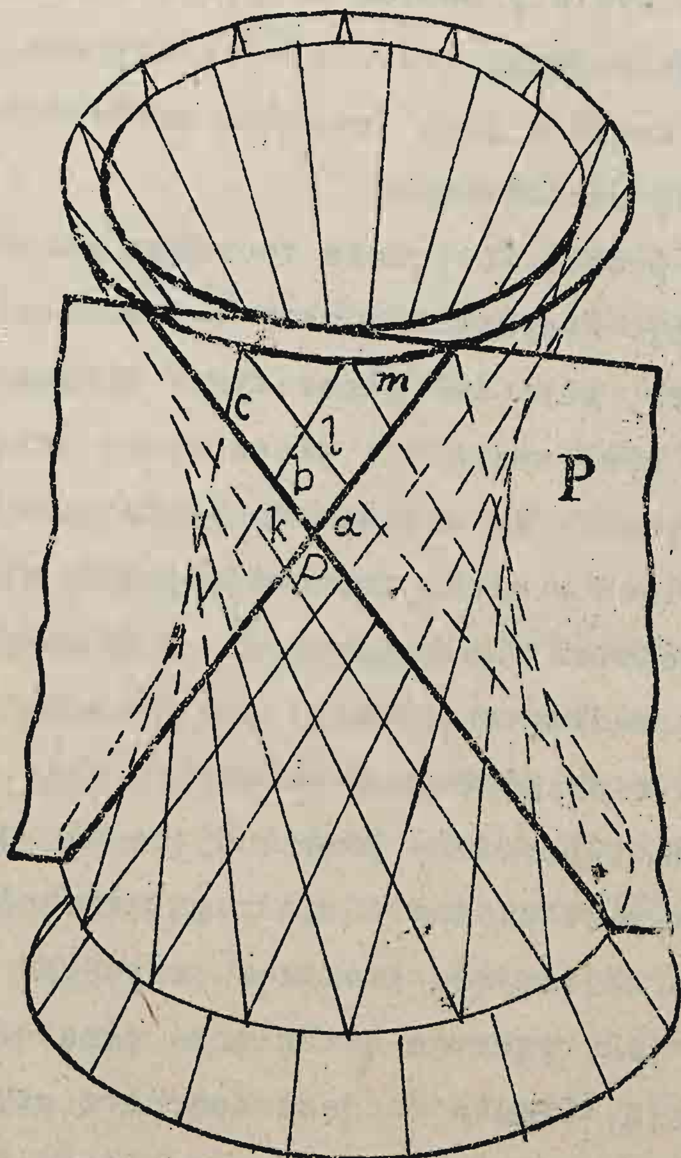


Rys.390.

którego dwa punkty kołowe zjednoczone są w wierzchołku.

§ 204. Powierzchnie prostokreślne odpowiadają układom biegunowym III rodzaju, gdy płaszczyzna biegunowa punktu leżącego wewnątrz czworościanu biegunowego przecina 4 jego krawędzie. Jak widzieliśmy w § 198 istnieją wówczas nietylko punkty i płaszczyzny, ale i proste samosprzężone, zwane tworzącemi powierzchni. Każdy punkt takiej prostej jest punktem powierzchni, każda płaszczyzna, przechodząca przez taką prostą jest styczną do powierzchni. Z pośród innych prostych przestrzeni jedne są styczne, inne zewnętrzne lub sieczne, zależnie od tego, czy inwolucja biegunowa jest na nich paraboliczna, eliptyczna lub hyperboliczna. W przeciwieństwie do powierzchni krzywokreślnych przez prostą zewnętrzną nie można przeprowadzić płaszczyzny stycznej rzeczywistej a przez sieczną przechodzą dwie takie płaszczyzny. Wszystkie punkty przestrzeni nie leżące na powierzchni są względem niej zewnętrzne, t.j. z każdego punktu można opisać na powierzchni rzeczywisty stożek drugiego stopnia; wszystkie płaszczyzny, które nie są styczne, są sieczne, t.j. każda z nich przecina powierzchnię według stożkowej rzeczywistej.

Niechaj prosta α będzie tworzącą powierzchni prostokreślnej. Wszystkie punkty tej prostej leżą na powierzchni, gdyż ich płaszczyzny biegunowe przechodzą przez nie; wszystkie płaszczyzny przechodzące przez tę prostą są styczne do powierzchni, gdyż ich bieguny leżą w nich. Poprowadźmy przez tworzącą α jakąkolwiek płaszczyznę P. Przetnie ona powierzchnię według stożkowej; ponieważ zaś prosta α wchodzi w skład tego przecięcia, więc ową stożkową mogą być tylko dwie przecinające się proste: jedną z nich jest prosta α, drugą niechaj będzie prosta k, przecinająca prostą α w pewnym punkcie p, który jest punktem zetknięcia płaszczyzny P z powierzchnią. Prosta k jest tworzącą powierzchni; gdy płaszczyzna P obracać się będzie dokoła prostej α, tworząca k opisywać będzie powierzchnię, przecinając tworzącą α w coraz to nowym punkcie P_α zetknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią. Poszczególne położenia tworzącej k: k, l, m .....



Rys.391.

są wszystkie skośne ze sobą, bo gdyby dwie którekolwiek z tych prostych np. k i l, się przecinały, to ponieważ każda z nich przecina prostą a, więc wszystkie 3 proste a, k i l leżałyby w płaszczyźnie P, która w ten sposób przecinałaby powierzchnię drugiego stopnia według 3 prostych, co niemożliwe /byłaby to bowiem krzywa 3 rzędu/. Jeżeli płaszczyznę P obracać będziemy dokoła prostej k, to tworząca a opisywać będzie powierzchnię, przecinając tworzącą k w coraz to nowym punkcie P_k zetknięcia tej płaszczyzny z powierzchnią; poszczególne położenia tworzącej a: a, b, c ..., będą wszystkie skośne ze sobą. W ten sposób na powierzchni prostokreślnej leżą dwa układy tworzących k, l, m..; a, b, c, ..., mające tę własność, że każde dwie tworzące, należące do tego samego układu są skośne, a każde dwie tworzące do układów różnych się przecinają tak, że przez każdy punkt powierzchni przechodzą i w każdej płaszczyźnie stycznej leżą dwie tworzące należące do różnych układów.

Niech będą trzy proste skośne a, b i c /kierownice i niechaj prosta k /tworząca/ porusza się w ten sposób, że w każdem położeniu przecina wszystkie trzy proste a, b i c /ślizgając się po nich/;

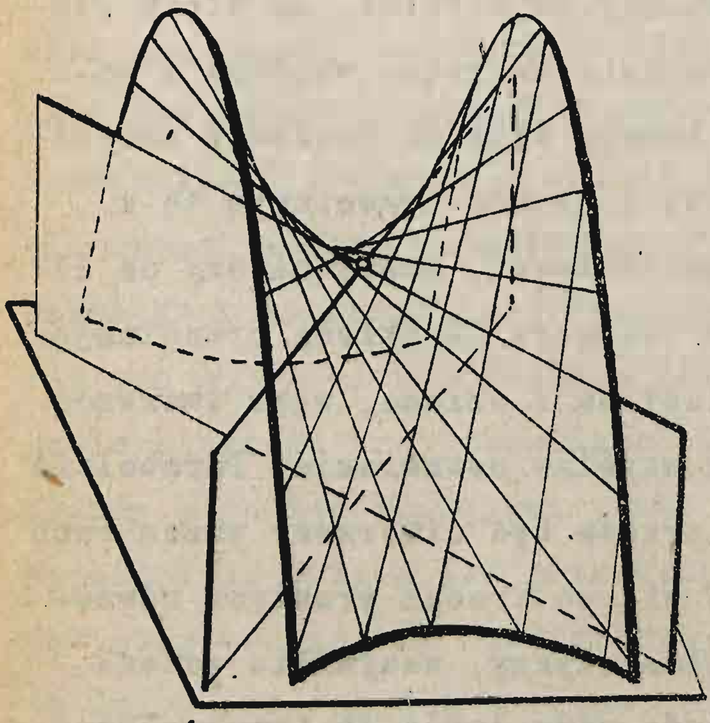
powierzchnia opisana przez tworzącą k będzie powierzchnią prostokreślną drugiego stopnia. Jeżeli obierzemy trzy dowolne położenia tworzącej k : k, l i m, o których wiemy że są skośne i będziemy poruszali tak prostą a, aby ona w każdem położeniu przecinała wszystkie trzy proste k, l i m, to tworząca a opisze tę samą powierzchnię prostokreślną. Powierzchnię prostokreślną można przeto utworzyć przez „ślizganie" prostej a po trzech prostych wzajemnie skośnych: k, l i m.

Na każdych dwóch tworzących tego samego układu, np. na tworzących a i b, tworzące drugiego układu k, l, m, ... wyznaczają szeregi rzutowe. W samej rzeczy przez którąkolwiek tworzącą c pierwszego układu oraz przez wszystkie przecinające ją tworzące drugiego układu: k, l, m, ... wyznaczony jest pęk płaszczyzn o osi c, który na tworzących a i b daje dwa szeregi perspektywiczne, a więc rzutowe. Powierzchnię prostokreślną drugiego stopnia można przeto utworzyć łącząc odpowiednie punkty dwóch szeregów rzutowych o podstawach skośnych.

Nawzajem dokoła każdych dwóch tworzących pierwszego układu, np. dokoła tworzących a i b, tworzące drugiego układu: $k, l,$ m... wyznaczają pęki płaszczyzn rzutowe. W samej rzeczy na którejkolwiek tworzącej c pierwszego układu przez wszystkie przecinające ją tworzące drugiego układu: $k, l, m,...$ wyznaczony jest szereg punktów o podstawie c, który wraz z tworzącemi a i b wyznacza dwa pęki płaszczyzn perspektywiczne. Powierzchnię prostokreślną można więc jeszcze utworzyć przez przecinanie się odpowiednich płaszczyzn dwóch rzutowych pęków płaszczyzn o osiach skośnych.

a/ Powierzchnia prostokreślna drugiego stopnia nazywa się hyperboloidem jednopowłokowym, jeśli płaszczyzna niewłaściwa jest względem niej sieczną. /Rys.391/. Hyperkoloid jednopowłokowy utworzony zostanie przez „ślizganie" prostej a po trzech prostych skośnych $k, l, m,...$ nie równoległych do jednej płaszczyzny. W samej rzeczy prosta, która łączy punkty niewłaściwe prostych k i l, nie przecina wówczas prostej m, żadna przeto prosta niewłaściwa nie może być tworzącą, skąd wynika, że płaszczyzna niewłaściwa nie może być styczną do powierzchni. - Hypertoloid jednopowłokowy można utworzyć łącząc odpowiednie punkty dwóch szeregów rzutowych nie podobnych o podstawach skośnych, - gdyby bowiem szeregi te były podobne, to ich punkty niewłaściwe odpowiadałyby sobie wzajemnie, tak że prosta niewłaściwa byłaby tworzącą, a więc płaszczyzna niewłaściwa byłaby styczną. Z pośród trzech średnic sprzężonych, a więc i z pośród trzech osi, dwie są siecznemi, stożek asymptotyczny jest rzeczywisty, każda jego tworząca jest równoległa do jednej z tworzących hyperboloidu każdego układu. Tak samo jak w powierzchniach krzywokreślnych istnieją i tutaj dwa układy przecięć kołowych; płaszczyzny przecinające hyperboloid według kół przecinają jego stożek asymptotyczny według kół spółśrodkowych. Wszystkie i punkty kołowe są wszykie urojone, albowiem średnica sprzężona z dwiema wzajemnie prostopadłemi średnicami przecięcia kołowego, przechodzącego przez środek powierzchni, nie przebija powierzchni w punktach rzeczywistych. Hyperboloid jednopowłokowy stanie się obrotowy jeżeli oba układy przecięć kołowych zostaną zjednoczone, powierzchnia taka może być utworzona przez obrót prostej a dokoła nieprzecinającej jej osi o, a jej stosunek asymptotyczny powstanie przez obrót prostej równoległej do a i przecinającej oś w spodku wspólnej prostopadłej do prostej α i osi O.

b/ Powierzchnia prostokreślna drugiego stopnia nazywa się <u>paraboloidem hyperbolicznym</u>, jeżeli płaszczyzna niewłaściwa jest do niej styczną /Rys. 392/. Jak każda płaszczyzna styczna, ma wtedy płaszczyzna niewłaściwa dwie tworzące wspólne z powierzchnią,każda z innego układu. Ponieważ wszystkie tworzące właściwe I układu przecinają tę z tych tworzących niewłaściwych, która należy do II układu, a wszystkie tworzące II układu przecinają tę z nich,która należy do I układu, więc tworzące każdego układu mają wspólne ustawienie. Paraboloid hyperboliczny może przeto być utworzony przez ruch prostej ślizgającej się po trzech prostych równoległych do jednej płaszczyzny, wszystkie położenia tej tworzącej będą równoległe do innej płaszczyzny. Paraboloid hyperboliczny utworzyć można jeszcze łącząc punkty odpowiednie dwóch szeregów podobnych (albo równych) o podstawach skośnych; w samej rzeczy prosta, łącząca ich punkty niewłaściwe jest wówczas tworzącą, a przechodząca przez nią płaszczyzna niewłaściwa jest styczną.Z trzech osi tylko jedna pozostaje właściwą.Płaszczyzny, przechodzące przez tę oś w danych dwóch ustawie-



Rys. 392.

zwyrodniałym stożkiem asymptotycznym tej powierzchni. Każde przecięcie paraboloidu hyperbolicznego jest hyperbolą z wyjątkiem przecięć równoległych do osi, które są parabolami. Paraboloid hyperboliczny jest jedyną powierzchnią drugiego stopnia, która nie posiada przecięć kołowych i która nie może być obrotową.

§ 205. Powierzchnie drugiego stopnia zwyrodniałe. Układ biegunowy przestrzenny określiliśmy za pomocą czworościanu biegunowego $A_1 A_2 A_3 A_4$ i płaszczyzny biegunowej B punktu jakiegokolwiek B z tem zastrze żeniem, że punkt B nie leży w żadnej ze ścian, a płaszczyzna B nie przechodzi przez żaden z wierzchołków czworościanu $A_1A_2A_3A_4$. Odrzućmy teraz te zastrzeżenia.

Przypuśćmy najpierw, że płaszczyzna biegunowa B punktu jakiegokolwiek B przechodzi przez jeden z wierzchołków czworościanu biegunowego np. przez A_4, układy biegunowe płaskie na ścianach zawierających wierzchołek A_4 będą zwyrodniałe, na ścianie zaś $A_1A_2A_3$ układ biegunowy płaski może być albo jednostajny, albo niejednostajny. Płaszczyzna biegunowa każdego punktu M przechodzi przez A_4, natomiast biegun każdej płaszczyzny M jest nieozna czony, może to być mianowicie dowolny punkt pewnej prostej m, przechodzącej przez A_4. W ten sposób układ biegunowy przestrzenny staje się układem biegunowym wiązki dokoła punktu A_4, zależnie od tego czy ten układ będzie jednostajny lub niejednostajny, powierzchnia tego układu będzie stożkiem urojonym lub rzeczywistym. Gdy płaszczyzna B przechodzi przez dwa wierzchołki czworościanu biegunowego, A_4 i A_1, to jest przez krawędź A_4A_1, stożek ten zniekształca się do dwóch płaszczyzn urojonych sprzężonych lub rzeczywistych, przecinających się według krawędzi $A_4 A_1$.

Stożek urojony lub rzeczywisty oraz dwie płaszczyzny urojone, sprzężone lub rzeczywiste stanowią powierzchnię drugiego rzędu /bo każda prosta przebija ją w dwóch punktach/ i klasy zerowej/ bo przez dowolną prostą nie można wogóle do niej wyprowadzić żadnej płaszczyzny stycznej/.

Przypuśćmy następnie, że biegun B jakiejkolwiek danej płaszczyzny B leży w jednej ze ścian czworościanu biegunowego, np. w ścianie $A_1 A_2 A_3$. Układ biegunowy przestrzenny staje się wtedy układem biegunowym płaskim w tej ścianie, zależnie od tego, czy ten układ jest jednostajny lub niejednostajny, powierzchnia tej biegunowości jest stożkową urojoną lub rzeczywistą. Gdy punkt B leży na jednej z krawędzi czworościanu biegunowego, np. na $A_4 A_1$, ta stożkowa zniekształca się do dwóch punktów urojonych sprzężonych lub rzeczywistych, leżących na tej krawędzi. Stożkowa urojona lub rzeczywista oraz dwa punkty urojone, sprzężone lub rzeczywiste stanowią powierzchnię drugiej klasy /bo przez każdą prostą można do niej przeprowadzić dwie płaszczyzny styczne/ i rzędu zerowego /bo dana prosta wogóle jej nie przebija/.

Streszczając powyższe, możemy podzielić powierzchnie drugiego stopnia jak następuje:

I. POWIERZCHNIE DRUGIEGO RZĘDU I DRUGIEJ KLASY

Powierzchnie krzywokreślne

1. Powierzchnia /elipsoid/ urojona.
2. Elipsoid rzeczywisty.
3. Hyperboloid dwupowłokowy.
4. Paraboloid eliptyczny.

Powierzchnie prostokreślne

5. Hyperboloid jednopowłokowy
6. Paraboloid hyperboliczny

II. POWIERZCHNIE DRUGIEGO RZĘDU I KLASY ZEROWEJ

7. Stożek urojony
8. 2 płaszczyzny urojone sprzężone
9. Stożek rzeczywisty
10 Dwie płaszczyzny rzeczywiste.

III. POWIERZCHNIE DRUGIEJ KLASY I RZĘDU ZEROWEGO.

11. Stożkowa urojona
12. Dwa punkty urojone sprzężone
13. Stożkowa rzeczywista
14. Dwa punkty rzeczywiste.

C Z Ę Ś Ć V.

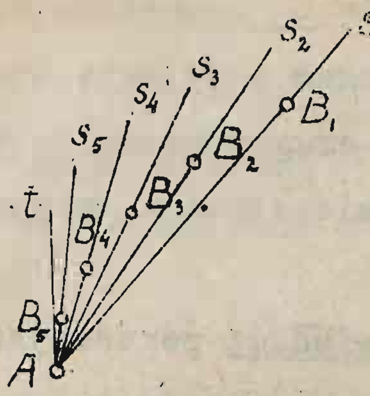
KRZYWE I POWIERZCHNIE W OGÓLNOŚCI.

ROZDZIAŁ XVI. KRZYWE PŁASKIE.

§ 206. Krzywa płaska jako miejsce i jako obwiednia. Przy badaniu stożkowych rzeczywistych rozważaliśmy te krzywe z dwojakiego stanowiska: albo jako miejsce geometryczne, poruszającego się według pewnego prawa punktu, który tę krzywą opisuje, albo jako obwiednię poruszającej się według pewnego prawa prostej, która tę krzywą powłóczy. Ta dwoistość określenia tej samej krzywej nie ogranicza się bynajmniej do stożkowych ale dotyczy wogóle wszystkich krzywych płaskich. Każda krzywa płaska jest zarazem miejscem i obwiednią.

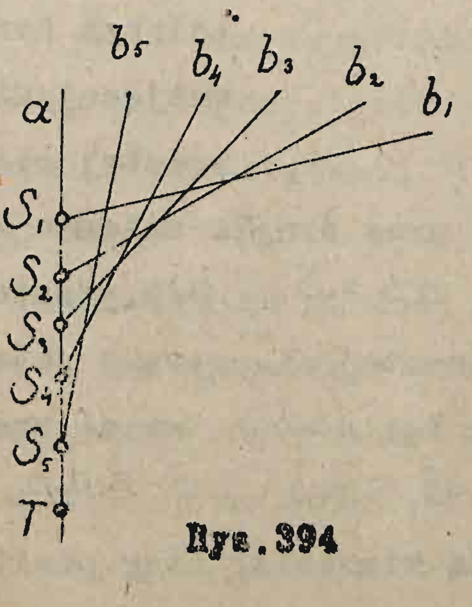
Gdy krzywą k uważamy za miejsce poruszającego się punktu, to możemy dla każdego położenia tego punktu /pewnymi wyjątkami, o których zaraz będzie mowa/ określić prostą przez ten punkt przechodzącą i zwaną styczną do krzywej k w tym punkcie.

Z pośród położeń poruszającego się punktu obierzmy jedno stałe A (Rys. 393) oraz drugie zmienne B i



Rys.393.

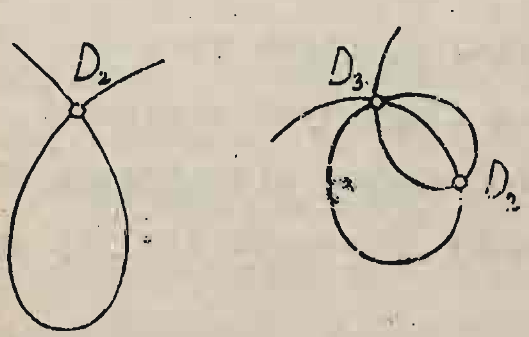
połączymy $AB \equiv s$ Gdy punkt B zbliżać się będzie do punktu A poprzez punkty B_1, B_2, B_3 ..... krzywej, tak że odcinek AB maleć będzie nieograniczenie, to sieczne: $s_1 = AB_1$ $s_2 = AB_2$, $s_3 = AB_3$ i t.d. będą stanowiły ciąg prostych pęku A . Prosta t która jest granicą ciągu tych siecznych, gdy odcinek AB dąży do zera, nazywa się styczną do krzywej k w punkcie A , punkt A nazywa się jej punktem zetknięcia z krzywą.



Rys.394

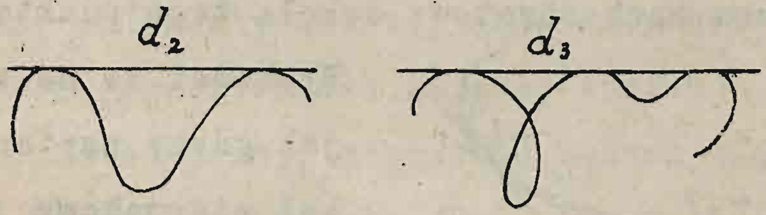
Może się zdarzyć, że punkt B opisujący krzywą przejdzie przez ten sam punkt płaszczyzny D dwa lub więcej razy (Rys.394), punkt taki nazywa się punktem podwójnym względnie ___ - krotnym. Wogóle punkt ruchomy B za pierwszym razem nadejdzie do punktu D poprzez inne punkty niż za drugim razem, w punkcie podwójnym mamy tedy wogóle dwie styczne, w punkcie n - krotnym - n stycznych.

Gdy krzywą k uważamy za obwiednię poruszającej się prostej, to możemy dla każdego położenia tej prostej, z pewnymi wyjątkami, o których zaraz będzie mowa określić punkt na tej prostej leżący i zwany punktem zetknięcia tej prostej z krzywą k .



Rys.395.

Z pośród położeń poruszającej się prostej obierzmy jedno stałe a (Rys.395) oraz drugie zmienne b i wyznaczmy punkt przecięcia $ab \equiv S$ Gdy prosta b zbliżać się będzie do prostej a poprzez położenia b_1, b_2, b_3 ..... tak, że kąt $/ab/$ maleć będzie nieograniczenie, to punkty $S_1 \equiv ab_1$, $S_2 \equiv ab_2$, $S_3 \equiv ab_3$, i t.d. będą stanowiły ciąg punktów prostej a. Punkt T, który jest granicą ciągu tych punktów, gdy kąt /ab/ dąży do zera, nazywa się punktem zetknięcia prostej a z krzywą k, prosta a nazywa się styczną do krzywej w tym punkcie.



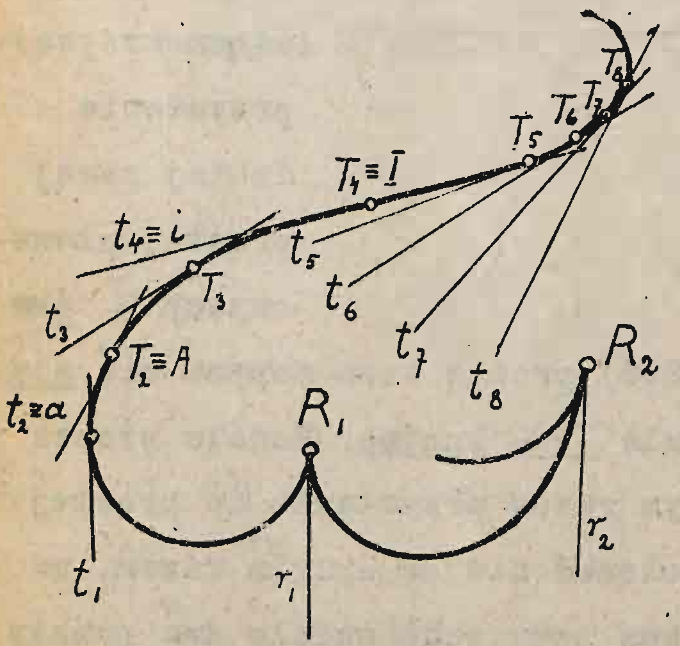
Rys. 396.

Może się zdarzyć że prosta b powłócząca krzywą przystanie do tej samej prostej płaszczyzny d dwa lub więcej razy (Rys.396), prosta taka nazywa się styczną podwójną, względnie n - krotną. Wogóle prosta ruchoma b za pierwszym razem przystanie do prostej d po przejściu innych położeń niż za drugim razem, na stycznej podwójnej leżeć tedy będą wogóle dwa punkty zetknięcia, na stycznej n - krotnej - n punktów zetknięcia.

Możemy odtąd uważać, że krzywa k powstaje jednocześnie obu sposobami: jako miejsce poruszającego się punktu i jako obwiednia stycznej w tym punkcie. Wyobraźmy sobie, że punkt T porusza się po prostej t, podczas gdy ta prosta obraca się jednocześnie dokoła.

punktu T . W każdem położeniu punktu T prosta t jest styczną do krzywej w tym punkcie; w ten sposób, gdy punkt T opisuje krzywą, prosta t jednocześnie ją powłóczy.

Gdy np. tniemy papier nożycami, to punkt spotkania się dwóch ostrzy nożyc, trzymanych w prawej ręce, posuwa się wzdłuż prostej, podczas gdy lewa ręka nadaje kartce papieru ruch obrotowy dokoła tego punktu.



Rys.397.

Wychodzi to na to, jak gdyby papier był nieruchomy, a prosta przez nożyce wycinana obracała się dokoła tego punktu w przeciwną stronę.

Jeżeli w pewnym punkcie A krzywej (Rys 397) ani ruch punktu T po prostej t , ani obrót tej prostej dokoła punktu T nie zmienia zwrotu, t.j. gdy punkt T przechodzi na prostej t z jednej strony punktu A na drugą a jednocześnie ta prosta przechodzi z jednej strony prostejana drugą, to punkt A i styczna α nazywają się <u>punktem zwyczajnym i styczną zwyczajną krzywej</u>. Takie są np. wszystkie punkty łuku, wycinanego nożycami z papieru, jeżeli w ciągu wycinania ruch nożyc nie został zatrzymany, a kartka papieru była obracana wciąż w tę samą stronę. Z określenia punktu zwyczajnego wynika, że punkty krzywej nieskończenie mu bliskie, a po obu jego stronach leżące, znajdują się po tej samej stronie stycznej, strona ta nazywa się <u>stroną wklęsłości</u> krzywej w punkcie A .

Jeżeli punkt T przechodzi na prostej t przez punkt J z jednej jego strony na drugą, podczas gdy prosta t zatrzymuje się w położeniu i , aby natychmiast zmienić zwrot obrotu na przeciwny, to punkt J jest <u>punktem przegięcia</u> krzywej, a styczna i w tym punkcie jest <u>styczną przegięcia</u>. Przy wycinaniu papieru nożycami otrzymamy taki punkt w chwili, gdy nie przerywając prawą ręką ruchu nożyc, zmienimy lewą ręką nagle zwrot obrotu kartki papieru.

Jest rzeczą oczywistą, że punkty krzywej nieskończenie bliskie punktu przegięcia, a po obu jego stronach leżące, znajdują się po przeciwnych stronach stycznej przegięcia; styczna ta przechodzi zatem w punkcie przegięcia z jednej strony krzywej na drugą.

Jeżeli prosta t nie przestaje w pewnym położeniu r_1 obracać się w tę samą wciąż stronę, podczas gdy punkt T, dokoła którego jej obrót się odbywa, zatrzyma się w punkcie R_1, aby zmienić zwrot swego ruchu na tej prostej, to prosta r_1, nazywa się styczną zwrotu, a punkt R_1 punktem zwrotu I rodzaju. Za pomocą krajania papieru nożycami trudniej taki punkt otrzymać, ponieważ nożyce krają w jedną tylko stronę; należałoby więc, doszedłszy do punktu R_1 i przerwawszy krajanie, wykonać dodatkowy obrót papieru o 180°, potem, rozpocząwszy krajanie, obracać papier w tę samą stronę, co poprzednio.

Wreszcie może się zdarzyć, że w pewnej chwili jednocześnie ulegają zatrzymaniu i doznają zmiany zwrotu zarówno ruch punktu T wzdłuż prostej t, jak i obrót prostej t dokoła punktu T. Punkt R_2, w którym to następuje, nazywa się punktem zwrotu II rodzaju albo dziobem. Dziób krzywej jest przeto zjednoczonym punktem przegięcia i punktem zwrotu I rodzaju. Aby otrzymać taki punkt na krzywej wycinanej nożycami z papieru, należałoby dosięgłszy punktu R_2, przerwać krajanie, wykonać obrót papieru o 180°, potem, rozpocząwszy krajanie, obracać papier w przeciwną stronę niż poprzednio.

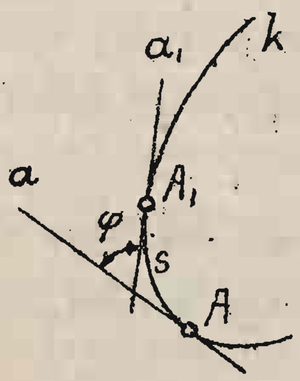
Punkty i styczne: podwójne, wielokrotne, przegięcia i zwroty nazywamy punktami i stycznemi osobliwemi. Z samego określenia tych elementów krzywej wynika, że pomiędzy punktami i stycznemi osobliwemi istnieje wzajemność dwoista.

Wzajemnemi są mianowicie: punkt podwójny i styczna podwójna, punkt przegięcia i styczna zwrotu, punkt zwrotu i styczna przegięcia.

§ 207. Koło krzywizny. Ponieważ krzywa k powstaje przez obrót prostej t dokoła jej punktu T, który się na niej jednocześnie porusza, więc wszystkie własności krzywej w pobliżu danego jej punktu A zależeć muszą wyłącznie od ilorazu szybkości tych dwóch ruchów w chwili, gdy punkt T przechodzi przez punkt A, t.j. od krzywizny k w tym punkcie. Ujmiemy to określenie nieco ściślej.

Niech będą na krzywej k punkt zwyczajny A i punkt jakikolwiek A_1 (Rys.398). Poprowadźmy w tych punktach styczne a i a_1. Długość wyprostowanego łuku AA_1 oznaczamy przez s; naturalną miarą kąta (aa_1) oznaczamy przez φ. Krzywizną - średnią krzywej k między punktem A i A_1 nazywamy iloraz:

$$k_1 = \frac{\varphi}{s};$$

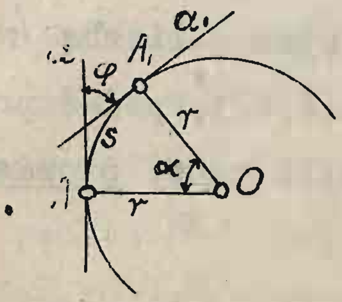


Rys.398.

Gdy punkt A_1 zbliżać się będzie ku punktowi A, to łuk s będzie malał nieograniczenie, jednocześnie maleć będzie nieograniczenie kąt φ, który jest funkcją łuku s. Krzywizną rzeczywistą krzywej k w punkcie A nazywa się granica ilorazu $\frac{\varphi}{s}$, gdy s dąży do zera, czyli

$$k = \lim_{s=0} \frac{\varphi(s)}{s} = \frac{d\varphi}{ds};$$

Nieskończenie malejący łuk ds nazywamy elementem krzywej k; zależny od niego, nieskończenie malejący kąt $d\varphi$ między stycznemi w końcach elementu ds nazywamy kątem styczności. Możemy więc powiedzieć, że krzywizną w punkcie A krzywej nazywa się iloraz kąta styczności przez odpowiadający mu element krzywej w punkcie A. W punkcie przegięcia J kąt styczności $d\varphi = 0$, a więc krzywizna w tym punkcie $k = 0$. W punkcie zwrotu I rodzaju R, $ds = 0$; $k = \infty$.



Rys. 399.

Wśród krzywych płaskich jest jedna, której krzywizna w każdym punkcie jest stała: jest to koło. W samej rzeczy, niech będzie koło O (Rys. 199) promienia r i na nim dwa punkty A i A_1, oraz styczne a i a_1 w tych punktach, kąt między temi stycznemi φ kątowi α między promieniami punktów A i A_1, łuk $AA_1 = s = r.\alpha$;, a więc krzywizna średnia

$$k_1 = \frac{\varphi}{s} = \frac{\alpha}{r\alpha} = \frac{1}{r};$$

Gdy A_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do A i krzywizna średnia dążyć będzie do krzywizny rzeczywistej w punkcie A, wartość $\frac{1}{r}$ jako liczba stała nie ulegnie zmianie, tak, że krzywizna rzeczywista w punkcie A:

$$k = \frac{1}{r};$$

Krzywizna koła w każdym jego punkcie jest przeto liczbą stałą i równa się odwrotności promienia koła.

Przypuśćmy teraz, że mamy krzywą k z której krzywiznę k w zwyczajnym jej punkcie A obliczyliśmy na zasadzie jej równania, biorąc pochodną kąta φ względem łuku s . Zamiast notować otrzymaną liczbę k, moglibyśmy zanotować jej odwrotność, t.j. podać promień koła tej samej krzywizny, czyli t.zw. promień krzywizny w punkcie A

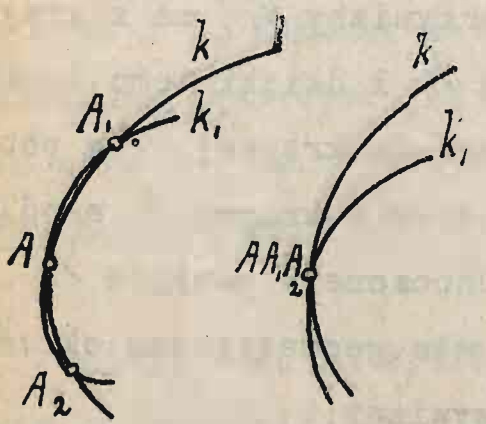
$$r = \frac{1}{k} ;$$

Jeżeli koło to wykreślimy w ten sposób, by jego okrąg przechodził przez punkt A, by jego styczna w tym punkcie przystała do stycznej a krzywej k i by punkty nieskończenie bliskie punktu A na krzywej k i na kole k, leżały po tej samej stronie wspólnej stycznej a to te dwie krzywe posiadać będą we wspólnym punkcie A wspólną styczną a i wspólną krzywiznę k Aby wyznaczyć środek K koła k, wystawmy w punkcie A do stycznej a prostopadłą, czyli t.zw. normalną krzywej k w punkcie A i po stronie wklęsłości od punktu A odmierzmy na tej normalnej promień krzywizny $r = \frac{1}{k}$. Z otrzymanego w ten sposób punktu K zakreślmy koło k, promieniem $r = \frac{1}{k} = KA$, koło to nazywamy kołem krzywizny, jego środek K - środkiem krzywizny w punkcie A .

O każdym kole, które ma z krzywą k wspólny punkt A i wspólną z nim styczną a , możemy powiedzieć że ma z tą krzywą wspólne dwa punkty, zjednoczone w punkcie A. Miejscem geometrycznem środków tych kół jest normalna n krzywej k w punkcie A, wśród tych kół jedno mianowicie koło krzywizny k_1, ma z krzywą k nadto wspólną krzywiznę k i dzięki temu lepiej od wszystkich innych przylega do krzywej k w pobliżu punktu A. Koło k_1 ma zatem z krzywą k wspólne przynajmniej 3 punkty, zjednoczone w punkcie A. Stąd wynika następujące czysto geometryczne określenie środka promienia i koła krzywizny:

Poprowadźmy do krzywej k w punkcie A styczną a i obrawszy na krzywej k inny punkt jakikolwiek A_2 poprowadzimy koło przechodzące przez punkty A i A_2 oraz styczne do a. Zbliżajmy teraz punkt A_2 do punktu A i w każdym położeniu punktu A_2 wyznaczajmy koła przechodzące przez A i A_2 i styczne do a. Środki tych kół K', K'', K''' .... leżeć będą oczywiście na normalnej n. Środkiem krzywizny krzywej k w jej punkcie A nazywa się punkt K normalnej n, który jest granicą ciągu punktów K', K'', K''' .... gdy odcinek AA_2 dąży do zera.

Gdy dwie krzywe k i k_1 mają 1, 3, 5, ... i wogóle nieparzystą ilość punktów wspólnych, to punkt opisujący jedną z tych krzywych po przejściu przez

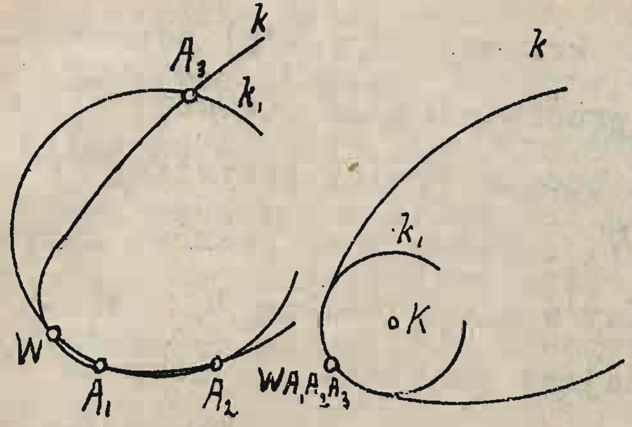


Rys. 400.

wszystkie punkty wspólne musi wydostać się na drugą stronę drugiej krzywej. Ponieważ koło krzywizny ma z krzywą przynajmniej trzy punkty zjednoczone wspólne, więc będzie ono wogóle przechodzić w punkcie A z jednej strony krzywej k na drugą (Rys.400), podobnie jak styczna w punkcie przegięcia przechodzi z jednej strony krzywej na drugą (Rys.397)

Gdy dwie krzywe k i k_1 mają 2, 4, 6, ... i wogóle parzystą ilość punktów wspólnych, to punkt opisujący jedną z tych krzywych po przejściu przez wszystkie punkty wspólne musi pozostać po tej samej stronie drugiej krzywej. Otóż na krzywej mogą się zdarzyć takie punkty zwyczajne W, że koło krzywizny, wyznaczone, jak zawsze przez punkt W i dwa punkty nieskończenie mu bliskie A_1 i A_2 (Rys.401) przecina ją jeszcze w jednym punkcie nieskończenie bliskim A_3. Punkty, posiadające tę własność, nazywają się <u>wierzchołkami</u>

krzywej. Ponieważ promień krzywizny je odwrotnością krzywizny, zatem w punkcie przegięcia promień krzywizny jest nieskończenie wielki, koło krzywizny zniekształca się do prostej a mianowicie do stycznej przegięcia; w punkcie zwrotu I rodzaju krzywizna jest nieskończona, promień krzywizny równy więc jest zeru; koło krzywizny wyrodnieje do punktu, a mianowicie do punktu zwrotu.

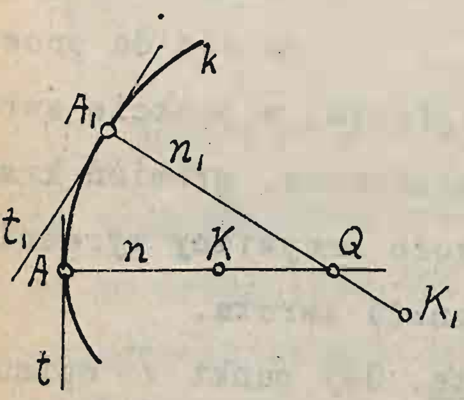


Rys. 401.

§ 208. Ewoluta i ewolwenta. Gdy punkt T opisuje krzywą k, to środek krzywizny opisuje inną krzywą zwaną odwijającą albo ewolutą krzywej k. Nawzajem, krzywa k nazywa się odwiniętą albo ewolwentą krzywej.

Ewoluta jest miejscem geometrycznem środków krzywizny ewolwenty. W punktach zwrotu ewoluta dotyka ewolwenty; punkty ewoluty, które odpowiadają punktom przegięcia ewolwenty, leżą w nieskończoności.

Ewoluta krzywej k może być jednak inaczej jeszcze określona. W punkcie A krzywej (Rys.402) poprowadźmy normalną n, t.j. prostopadłą do stycznej t. Na tej normalnej n leżeć będzie środek krzywizny K odpowiadający punktowi A. Weźmy inny jeszcze punkt krzywej A_1 i poprowadźmy w nim normalną n_1; środek krzywizny K_1 odpowiadający punktowi A_1 leży na n_1.



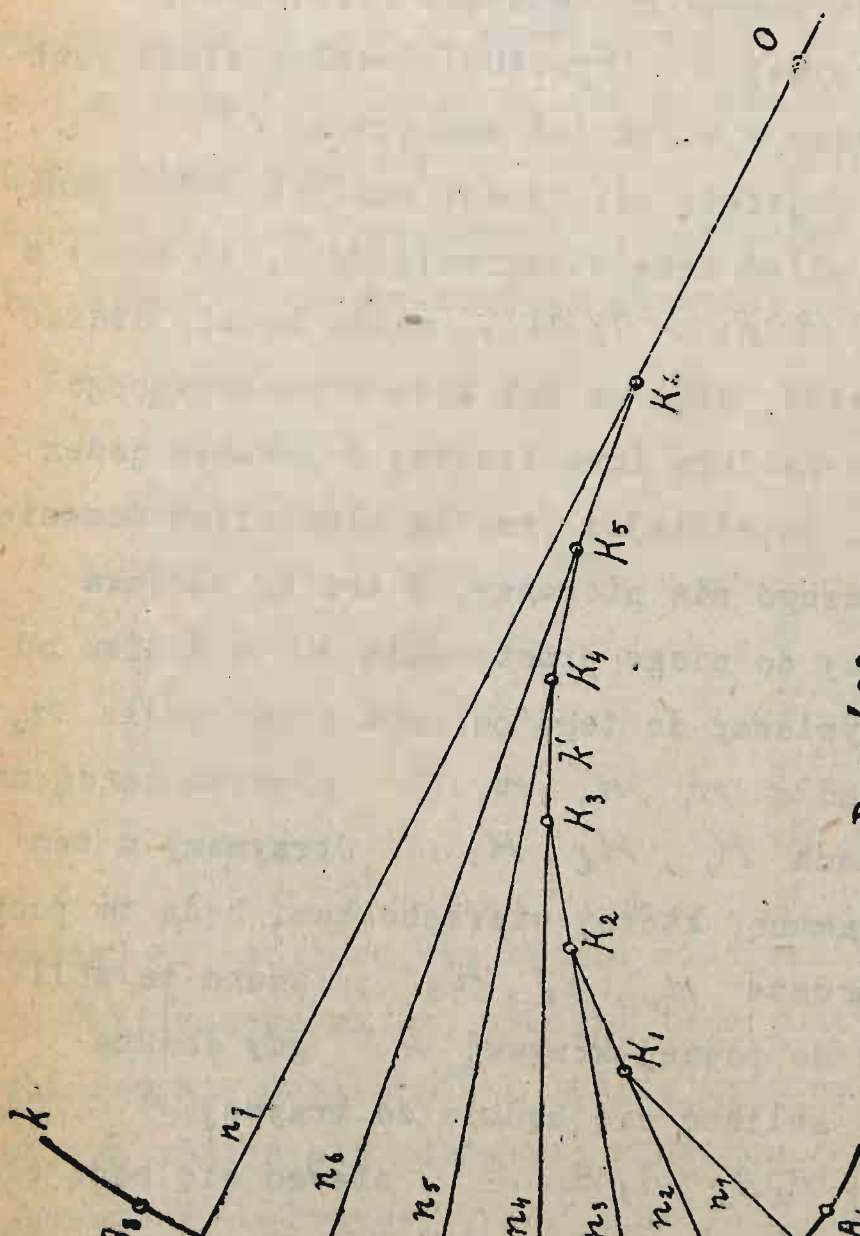
Rys. 402.

Oznaczywszy punkt przecięcia normalnych n i n_1 przez Q zbliżajmy punkt A_1 nieograniczenie do punktu A; środek krzywizny K_1 leżąc wciąż na normalnej n, zbliżać się będzie nieograniczenie do środka K leżącego na n. Dzięki temu punkt Q również zbliżać się musi do K, tak, że granicą punktu Q, gdy A_1 zbliża się nieograniczenie do A, jest środek krzywizny K krzywej k w punkcie A. Gdy teraz punkt A opisywać będzie krzywą k, to normalna n w tym punkcie powłóczyć będzie krzywą k, która jest miejscem geometrycznem środków krzywizny, czyli ewolutą krzywej k. Ewoluta jest obwiednią normalnych ewolwenty.

Pochodzenie nazw: ewoluta = odwijająca i ewolwenta = odwinięta tłomaczy następujące rozważanie:

Weźmy na krzywej k (Rys.403) dowolną ilość punktów, które oznaczmy w koleż ich następstwa A_1, A_2, A_3, A_4 .... ; jeżeli odległości każdych dwóch punktów sąsiednich maleć będą nieograniczenie, to każdy z łuków A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4,... można będzie uważać za odcinek prostej, albo za łuk koła przechodzącego przez dwa końce każdego łuku krzywej i jeszcze jeden punkt następny, popełniając przytem błąd nieskończenie mały rzędu wyższego niż pierwszy. W środku odcinka A_1A_2 wystawmy do niego prostopadłą n_1 w środku odcinka A_2A_3 wystawmy do tego odcinka prostopadłą n_2 i t.d. Prostopadłe n_1, n_2, n_3, ... przetną każdą następną w punktach K_1, K_2, K_3.... Otrzymamy w ten sposób linję łamaną, której wierzchołkami będą te punkty, a bokami proste n_1, n_2, n_3 ; łamana ta zbliżać się będzie do pewnej krzywej k' gdy łamana $A_1A_2A_3A_4$... zbliżać się będzie do krzywej k . Odcinki A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4.... stawać się będą elementami krzywej k , prostopadłe n_1, n_2, n_3.... jej normalnemi, a zarazem stycznemi krzywej k' . Granicą więc linji łamanej $K_1K_2K_3K_4$... będzie ewoluta krzywej k

W dowolnym punkcie O ostatniego boku tej łamanej umocujmy nić giętką i nierozciągliwą i naprężywszy nawińmy ją na linję łamaną, $K, K_2, K_3 \ldots,$ drugi zaś koniec tej nici z przymocowanym do niego ołówkiem umieśćmy w punkcie A_2 i następnie odwijajmy naprężoną nić



Rys. 403.

dopóki jej koniec nie przystanie do punktu A_3. Koniec nici opisze łuk koła o środku K, przechodzącego przez punkty A_1, A_2, A_3; koło to stanie się kołem krzywizny w punkcie A_2, gdy te trzy punkty zbliżać się będą do siebie nieograniczenie. Nieskończenie mały łuk tego koła między punktami A_2 i A_3 nie będzie wtedy różnił się od łuku krzywej między temi punktami. Odwijając dalej nić tak, aby jej koniec przeniósł się z punktu A_3 do punktu A_4, wykreślimy znowu łuk koła o środku K_2, które przechodzi przez punkty A_2, A_3, i A_4 i które stanie się kołem krzywizny w punkcie A_3 gdy te trzy punkty zbliżą się do siebie nieograniczenie; dzięki temu łuk tego koła między punktami A_3 i A_4 nie będzie się w granicy różnił od łuku krzywej k. Postępując dalej w ten sposób, przekonamy się, że miejsce środków krzywizny K, lub co to samo, obwiednia normalnych danej krzywej k, jest krzywą mającą tę własność, że nić na nią nawinięta w jednym jej punkcie umocowana, drugim swym końcem opisałaby krzywą k, gdyby ten koniec w początkowym swym położeniu przystał do jednego z jej punktów.

Każdy bok linji łamanej $K_1, K_2 K_3 \ldots\ldots K_n$ równa się oczywiście różnicy promieni kół, których środkami są końce tego boku. Oznaczywszy te promienie odpowiednio literami $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$, mamy:

$$K_1K_2 = r_2 - r_1;$$
$$K_2K_3 = r_3 - r_2;$$
$$K_3K_4 = r_4 - r_3;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$K_{n-1}K_n = r_n - r_{(n-1)};$$

Dodając te równości stronami, otrzymamy łamaną:

$$K_1K_n = r_2 - r_1 + r_3 - r_2 + r_4 - r_3 + \dots + r_{n-1} - r_{n-2} + r_n - r_{n-1} = r_n - r_1;$$

czyli: obwód linji łamanej $K_1K_2K_3K_4 \dots K_n =$ różnicy promieni kół, których środki są końcami tej łamanej. Przechodząc do granicy, mamy twierdzenie:

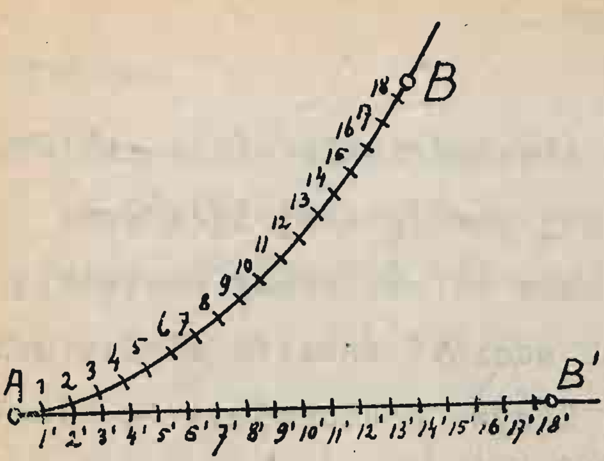
Długość łuku ewoluty równa się różnicy promieni krzywizny ewolwenty w punktach odpowiadających końcom tego łuku.

Stąd wynika możliwość rektyfikacji łuków tych krzywych, dla których ewolwenty umiemy wyznaczać promienie krzywizny. Zrobimy z tego użytek dla cykloidy.

Na zasadzie powyższego twierdzenia możliwą jest inna jeszcze interpretacja ewolwenty. Zostanie ona mianowicie opisana przez punkt A prostej n toczącej się bez poślizgu po krzywej k. Ewolwenta należy zatem do krzywych, które opisuje punkt sztywno związany z krzywą toczącą się bez poślizgu po innej krzywej stałej. O krzywych tych zwanych ruletami, będzie mowa w § 220.

Każda krzywa posiada nieskończenie wiele ewolwent każdy bowiem punkt stycznej powłóczącej tę krzywą opisuje ewolwentę. Wszystkie te ewolwenty posiadają wspólne normalne, których odcinki zawarte między dwiema ewolwentami są równe. Krzywe posiadające tę własność nazywamy równoległemi.

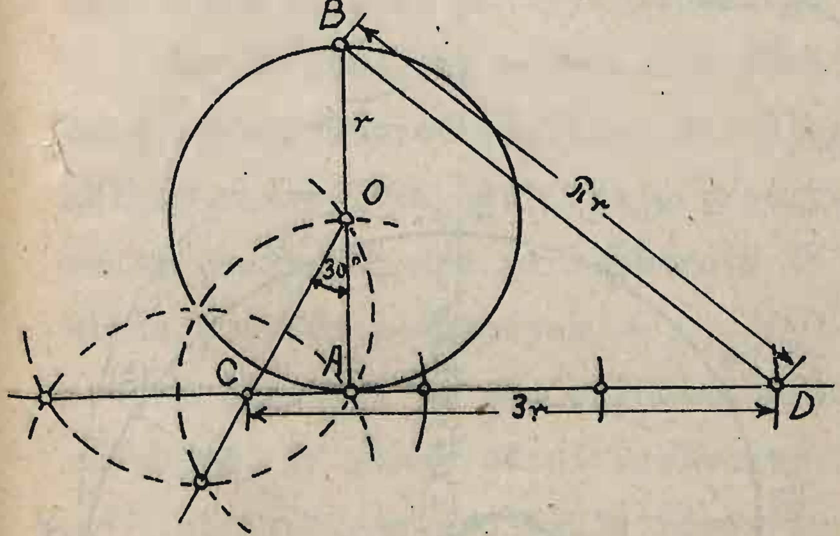
§ 209. Ewolwenta koła. Z rozważań powyższych wynika, że dla wykreślenia ewolwenty danej krzywej trzeba umieć wyprostować dowolny jej łuk. Zadanie to można wogóle rozwiązać tylko w przybliżeniu. Jeżeli mamy np. wyznaczyć długość wyprostowanego łuku AB krzywej danej k (Rys.404), to obieramy na nim pewną ilość punktów $1, 2, 3, 4$ ...... i następnie na prostej a od punktu A' odmierzamy cięciwę $A1$ do punktu $1'$ od punktu $1'$ cięciwę 12 do punktu $2'$ i t.d. W ten sposób zastępujemy łuki $A1$, 12, 23, ... cięciwami tej samej nazwy; oczywista, że długość łuku AB będzie wyznaczona tem dokładniej im więcej punktów pośrednich weźmiemy pomiędzy punktami A i B Wykreślenie będzie łatwiejsze, gdy punkty $1, 2, 3$, ... będą ta obrane na krzywej, że wszystkie cięciwy $A1$, 12, 23, ... z wyjątkiem może ostatniej $18B$ będą równe.



Rys. 404.

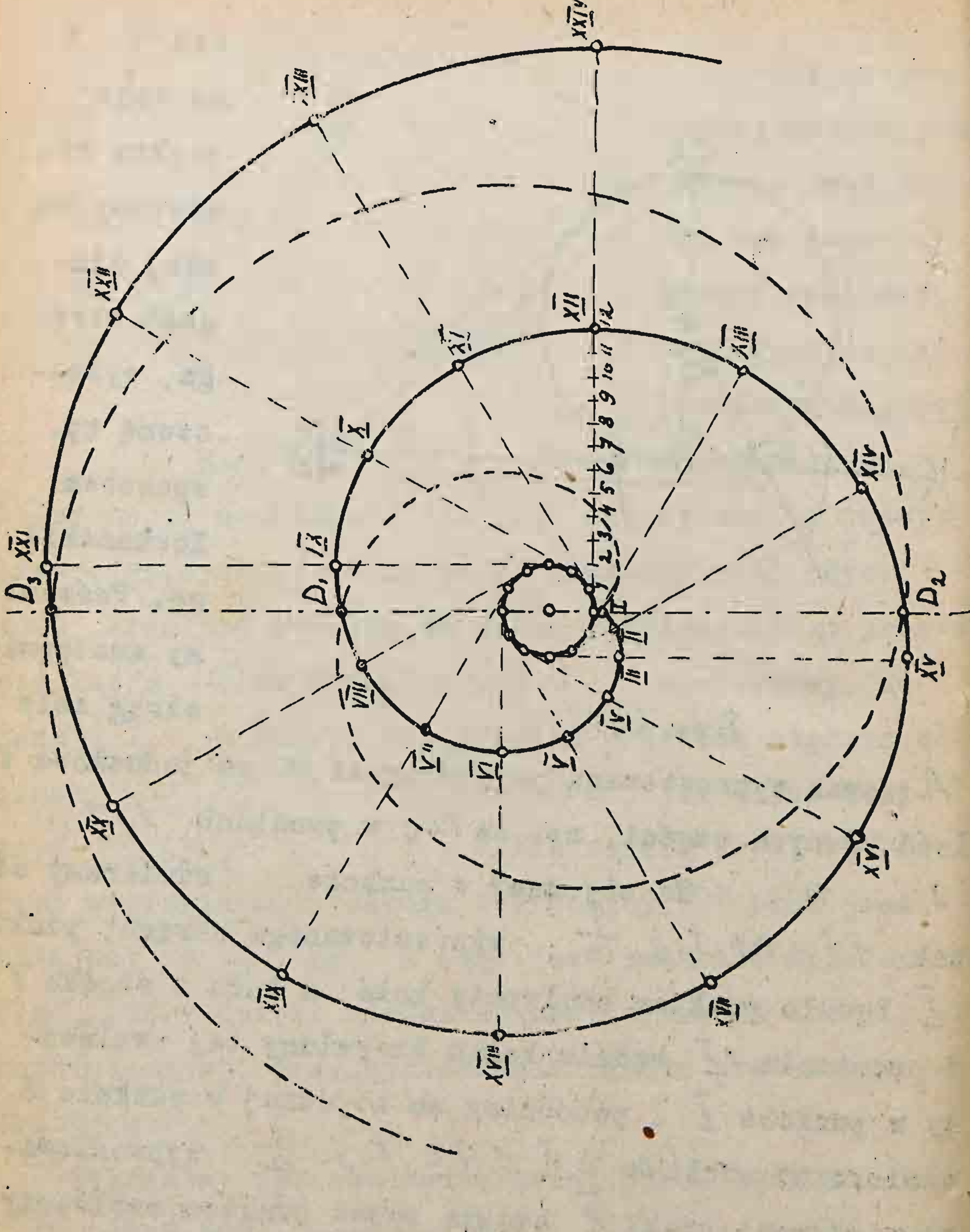
Gdy krzywą którą mamy wyprostować jest koło lub jego część wymierna, wtedy najlepiej zastosować sposób Kochańskiego, który ma tę osobliwość, że daje się wykreślić jednym otwarciem cyrkla. W końcu A średnicy AB (Rys. 405) kreślimy styczną do koła. Poprowadziwszy promień pod kątem $30°$ do średnicy AB, odmierzamy od punktu C, w którym ten promień przecina styczną odcinek $CD = 3r$; Odcinek BD, jak łatwo obliczyć $= 3,14153r = \pi r$ z dokładnością do $0,0001r$. Przy wyprostowaniu okręgu o średnicy $1m$ błąd jest mniejszy od $0,1 \, m/m$ a więc jest znacznie mniejszy niż błąd, który dzięki niedokładności narzędzi kreślarskich popełniamy np. przy wyznaczaniu punktu przecięcia dwuch prostych.

Wykreślmy np. ewolwentę koła. Niech będzie koło A (Rys. 406); poprowadźmy do niego styczną w punk-



Rys. 405.

cie O i od tego punktu odmierzmy na niej długość okręgu, wyznaczoną np. sposobem Kochańskiego. Podzielmy następnie okrąg koła A oraz wyprostowaną jego długość a na jednakową ilość równych części, np. na 12; w punktach 1, 2, 3, ... 11. Na stycznej w punkcie odmierzmy odcinek $1\bar{I} = 01$ t.j $\frac{1}{12}$ wyprostowanego okręgu; punkt $\bar{I}$ będzie punktem ewolwenty koła, a koło o środku 1 i promieniu $1\bar{I}$ będzie kołem krzywizny tej ewolwenty w punkcie $\bar{I}$; podobnież na stycznej w punkcie 2 odmierzamy odcinek $2\overline{II} = 02$ t.j. $\frac{2}{12}$ wyprostowanego okręgu; punkt $\overline{II}$ będzie znowu punktem ewolwenty; koło o środku 2 i promieniu $2\overline{II}$ będzie kołem tej krzywizny w punkcie $\overline{II}$. Postępując w ten sposób, doj-

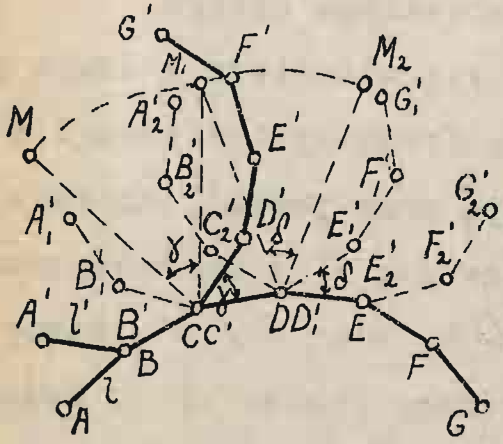

D3
D1
D2
XXI
XXII
XXIII
XXIV
XIX
XX
XVIII
XVII
XVI
XV
XIV
XIII
XII
XI
X
IX
VIII
VII
VI
V
IV
III
II
I
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Rys. 406.

dziemy do punktu $\overline{XII}$, poczem dla wyznaczenia dalszych punktów wystarczy na normalnych $1\overline{I}$, $2\overline{II}$, $3\overline{III}$... odmierzać długość α wyprostowanego okręgu.

Ewolwenta koła składa się właściwie z dwuch gałęzi symetrycznych względem średnicy OA (druga z tych gałęzi wykreślona jest linją przerywaną), tak że krzywa ta posiada jeden punkt zwrotu O i nieskończenie wiele punktów podwójnych D_1, D_2, D_3,... leżących na osi symetrji po obu stronach środka A. Godzi się zauważyć, że przez obrót ewolwenty koła dokoła środka A otrzymujemy ewolwentę równą i równoległą; odległością tych dwóch krzywych jest mianowicie wyprostowany łuk koła A, odpowiadający kątowi obrotu. Jest to własność wyróżniająca ewolwentę koła od wszystkich innych krzywych płaskich.

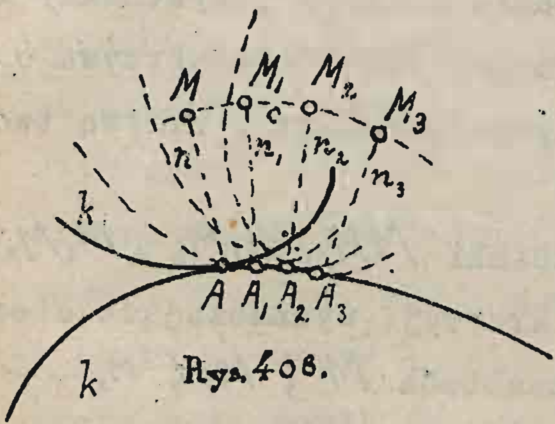
<u>§ 210.</u> <u>Rulety</u>. Niech będą w płaszczyźnie rysunku dwie linje łamane: $l = ABCD$.... i $l' = A'B'C'D'$... o odpowiednich równych bokach, tak że $AB = A'B'$ $BC = B'C'$, $CD = C'D'$.... (Rys.407). Niechaj dwa odpowiednie boki tych łamanych, np. BC i $B'C'$ będą zjednoczone; przypuśćmy nadto, że z łamaną l' związany jest sztywno punkt jakikolwiek M. Obróćmy łamaną l' wraz z punktem M dokoła $C \equiv C'$ o kąt $D'CD = \gamma$ tak, żeby bok $C'D'$ przystał do CD; punkt M



Rys. 407.

obróci się dokoła C również o kąt γ i zajmie położenie punktu M_1. Następnie obróćmy łamaną l' wraz z punktem M dokoła $D \equiv D'$, o kąt $E'_1DE = \delta$ tak, żeby bok $D'_1E'_1$ przystał do DE punkt M związany sztywno z łamaną l' obróci się dokoła D o kąt δ i zajmie położenie M_2. Gdy postępować będziemy w ten sposób dalej, tocząc łamaną l' po l bez ślizgu, punkt M będzie zakreślał łuki kół, których środki będą się przenosić od wierzchołka do wierzchołka łamanej l, a kąty środkowe będą za każdym razem sumą kątów spełniających odpowiednie kąty obu łamanych.

Niech będą w płaszczyźnie rysunku dwie krzywe k i k' (Rys.408), z których pierwsza jest stała, a druga ruchoma, i niechaj w pewnej chwili krzywe te będą styczne w punkcie A; przypuśćmy znowu, że z krzywą ruchomą E' związany jest sztywno punkt jakikolwiek M.



Rys. 408.

Wpiszmy w każdą z tych krzywych, począwszy od wspólnego ich punktu A, łamaną o bokach równych; przytem wspólną długość boków możemy obrać dowolnie małą. Im mniejsza będzie ta długość, tem bardziej łamane l i l' zbliżać się będą do krzywych k i k'. Gdy z łamanemi l i l' postępować będziemy tak jak poprzednio, to punkt M zakreślać będzie łuki kół, których środki będą w każdorazowym punkcie wspólnym łamanych l i l'. Gdy długości boków maleć będą nieograniczenie i łamane l i l' zbliżać się będą do krzywych k i k', to droga opisana przez punkt M zbliżać się będzie do pewnej krzywej c, albowiem punkty M, M_1, M_2 .... staną się nieskończenie bliskie. Mówimy wtedy że krzywa k', zwana tworzącą, toczy się bez poślizgu po krzywej k, zwanej kierownicą. Z określenia krzywej tworzącej wynika, że długości łuków pomiędzy punktem zetknięcia krzywej tworzącej z kierownicą a punktami tych krzywych, które do siebie niegdyś przystawały lub z czasem przystawać będą, muszą być równe. Krzywa opisana przez punkt M, sztywno związany z krzywą tworzącą, nazywa się <u>ruletą</u>.

Nieskończenie małe odcinki MM_1, M_1M_2, M_2M_3.... możemy uważać za elementy krzywej, wyznaczające kierunki stycznych do rulety w punktach M, M_1, M_2..... Prostopadła wystawiona do odcinka MM_1, w jego środku przechodzi przez punkt C; gdy punkt M_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do punktu M, prostopadła ta stanie się normalną do rulety w punkcie M.

Stąd twierdzenie: <u>Normalna do rulety przechodzi przez każdorazowy punkt zetknięcia krzywej tworzącej z kierownicą.</u>

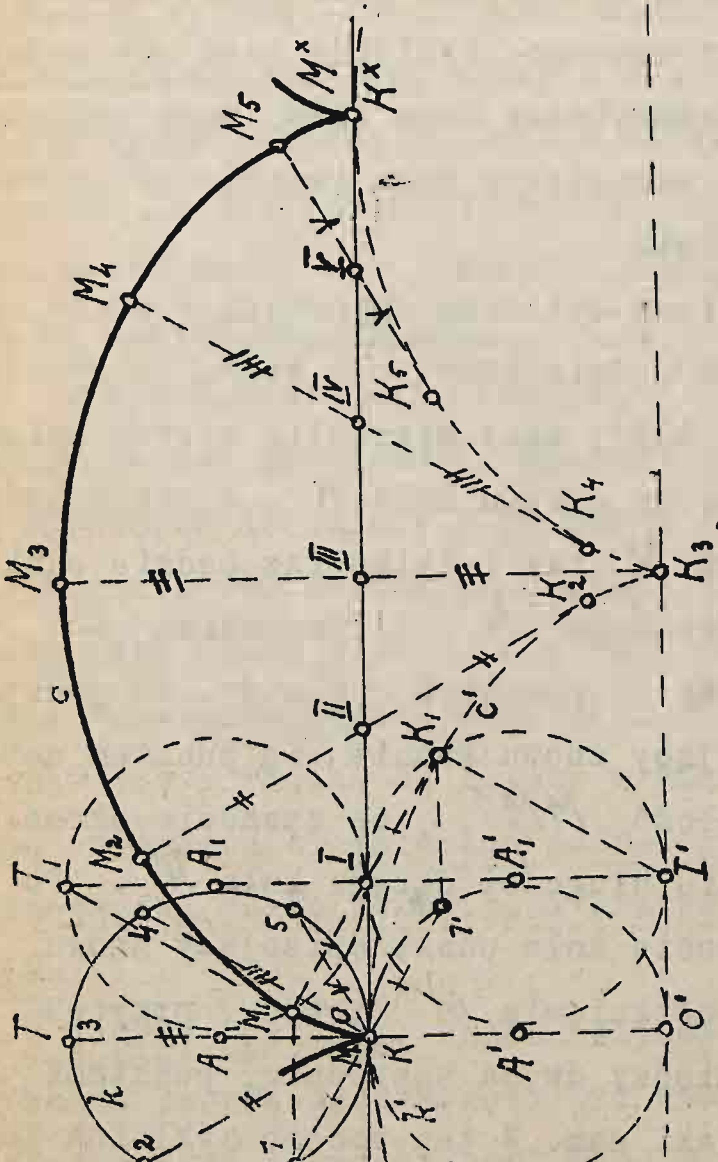
<u>§ 221. Cykloidy.</u> Wspomnieliśmy poprzednio /§ 208/ że każda krzywa płaska może być uważana za ruletę, dla której krzywą tworzącą jest prosta, a kierownicą - ewoluta danej krzywej. Często jednak dogodniej będzie za krzywą tworzącą wziąć inną krzywą, np. koło.

Szczególnie ważnemi są rulety, opisane przez punkt związany sztywno z kołem toczącym się po prostej. Krzywe w ten sposób powstałe nazywamy ogólnie <u>cykloidami</u>.

jeżeli przytem punktem opisującym jest punkt należący do okręgu koła tworzącego, cykloida jest zwyczajną, gdy jest nim punkt zewnętrzny tego koła, mamy cykloidę skurczoną; punkt wewnętrzny koła tworzącego opisuje cykloidę wyciągniętą.

Wykreślmy najpierw cykloidę zwyczajną i zbadajmy jej własności. Niech będzie koło k, które toczy się po prostej p /Rys. 409/; mamy wykreślić krzywą opisaną przez punkt należący do okręgu koła k. W ciągu jednego obrotu koła punkt M raz i tylko raz będzie punktem zetknięcia koła tworzącego k z kierownicą p. Ten punkt M obierzmy za początek cykloidy. Po jednym obrocie punkt opisujący znowu stanie się punktem zetknięcia M^x; odległość MM^x, na zasadzie określenia rulety, równa się długości okręgu koła k. Po drugim zupełnym obrocie koła punkt opisujący znowu stanie się punktem zetknięcia M^{xx} i t.d., przytem kształt krzywej pomiędzy dwoma sąsiednimi punktami zetknięcia będzie taki sam. W ten sposób cykloida jest krzywą perjodyczną, złożoną z nieskończonej ilości równych zwojów. Wystarczy zatem wykreślić i zbadać jeden taki zwój MM^x.

Wykreśliwszy koło A styczne w punkcie M do prostej p, odmierzmy odcinek MM^x równy długości



Rys. 409,

okręgu koła k. Podzielmy okrąg koła oraz jego wyprostowaną długość

MM^x

na jednakową ilość równych części, np. na 6, w punktach

0 , 1 ,
2 , 3 ,
4 i 5

względnie

0 , I
II , III
IV i V

Wyznaczmy punkty cykloidy, odpowiadające $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$ .... obrotu koła.

Zmianę położenia punktu M, gdy koło k toczy się po prostej p od punktu O do punktu I, zawdzięczamy dwom jednoczesnym ruchom: obrotowi punktu M dokoła środka A o kąt $\frac{\pi}{3}$ i przesunięciu całego koła a więc i punktu M o odcinek OI. Aby więc wyznaczyć położenie punktu M po $\frac{1}{6}$ całego obrotu, możemy najpierw obrócić punkt M dokoła nieruchomego środka A o kąt $\frac{\pi}{3}$, przez co punkt M dostanie się do punktu 1, potem zaś przesunąć punkt 1 równolegle do p o odcinek $1M_1 = OI = \frac{2\pi r}{6}$. Połączmy M_1 i IM_1, punkt M_1 jest wierzchołkiem równoległoboku, zbudowanego na odcinkach $O1$ i OI; wyznaczymy go więc najprościej, wyprowadzając z punktu I odcinek IM_1 równy i równoległy odcinkowi $O1$. Podobnież aby wyznaczyć punkt M_2, w którym punkt opisujący znajdzie się po $\frac{2}{6}$ obrotu, zbudujemy równoległobok na odcinkach $O2$ i OII, t.j. z punktu II wyprowadzimy odcinek równy i równoległy odcinkowi $O2$. Punkt M_3 znajdziemy, wyprowadzając z punktu III odcinek $III M_3 \#. 03$; i t.d.

Wykreślmy styczne w tak otrzymanych punktach M, M_1, M_2, M_3 ..... W tym celu zauważmy, że na zasadzie ogólnego, wszystkich rulet dotyczącego twierdzenia / § 210/ normalne do cykloidy w tych punktach przechodzić muszą przez każdorazowe punkty zetknięcia koła k z prostą p, będą to więc proste MO, $M_1\mathrm{I}$, $M_2\mathrm{II}$, $M_3\mathrm{III}$, ...; styczne zaś, jako proste do nich prostopadłe będą prostemi MT, M_1T_1, M_2T_2, M_3T_3, ...

Wykreślmy teraz koło k', równe kołu k i styczne do niego oraz do kierownicy p w tym samym punkcie O; równolegle do p poprowadźmy styczną p' do koła k' i załóżmy, że koło to toczy się po prostej p'; jeżeli punktem opisującym będzie punkt $K \equiv M$, to krzywa przezeń opisana będzie cykloidą c' równą cykloidzie c i przesuniętą o πr w kierunku prostej p i o $2r$ w kierunku do niej prostopadłym. Dowiedziemy, że cykloida c' jest ewolutą cykloidy c.

Gdy koło k' obróci się o $\frac{1}{6}$ całego okręgu, to punkt opisujący zakreśli łuk KK_1, cykloidy c', punkt K_1 otrzymamy, jak poprzednio, obracając najpierw punkt K dokoła nieruchomego środka A' o kąt $\frac{\pi}{3}$, przez co punkt K dostanie się do punktu $1'$, potem zaś przesuwając punkt $1'$ równolegle do p' i odcinek $1'K_1 = O'T' = O\mathrm{I} = \frac{2\pi r}{6}$. Prosta $K_1\mathrm{I}'$ jest normalną do cykloidy c' w punkcie K_1, prostopadła zaś do niej prosta $K_1\mathrm{I}$ jest styczną do tej krzywej.

Otóż $M_1\mathrm{I}$ i $\mathrm{I}K_1$ stanowią jedną prostą, której środkiem jest punkt I. A więc normalna $M_1\mathrm{I}$

do cykloidy c jest zarazem styczną do cykloidy c' ; ta ostatnia krzywa jest przeto obwiednią normalnych do pierwszej, czyli jej ewolutą.

Aby więc wyznaczyć środek krzywizny K_1 w punkcie M_1 cykloidy c , wystarczy na normalnej $M_1 I$ od punktu I odmierzyć $IK_1 = M_1 I$. Promień krzywizny cykloidy równa się podwojonej normalnej.

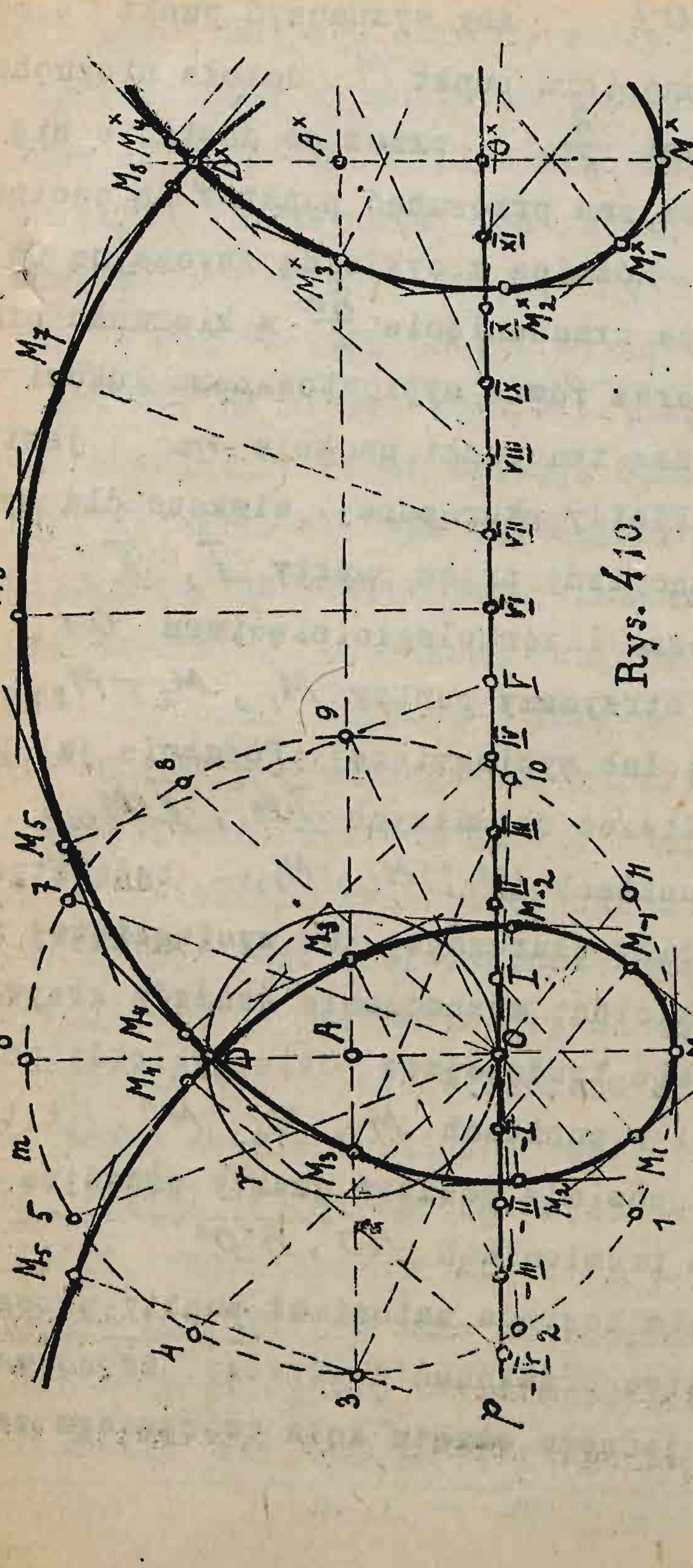
Dzięki tej własności cykloidy bardzo mała ilość punktów wystarcza do dokładnego jej wyznaczenia. Zauważmy, że punkt M jest punktem zwrotu cykloidy c , gdyż promień krzywizny w tym punkcie $= 0$, punkt M_2 jest wierzchołkiem cykloidy; w samej rzeczy koło krzywizny dla tego punktu leży z obu jego stron po tej samej stronie krzywej, gdyż prosta M_3K_3 jest osią symetrji cykloidy.

Na zasadzie dowiedzionego w § 208 twierdzenia, długość łuku ewoluty równa się różnicy promieni krzywizny ewolwenty w punktach, odpowiadających końcom tego łuku. Stąd wynika, że np. łuk $KK_1 =$ odcinkowi $M_1K_1 = 2K1'$; . Łuk cykloidy, mierzony od jej wierzchołka = podwójonej cięciwie odpowiadającego mu łuku koła tworzącego. W szczególności łuk $KK_3 = K_3M_3 = 4r$ stąd wniosek:

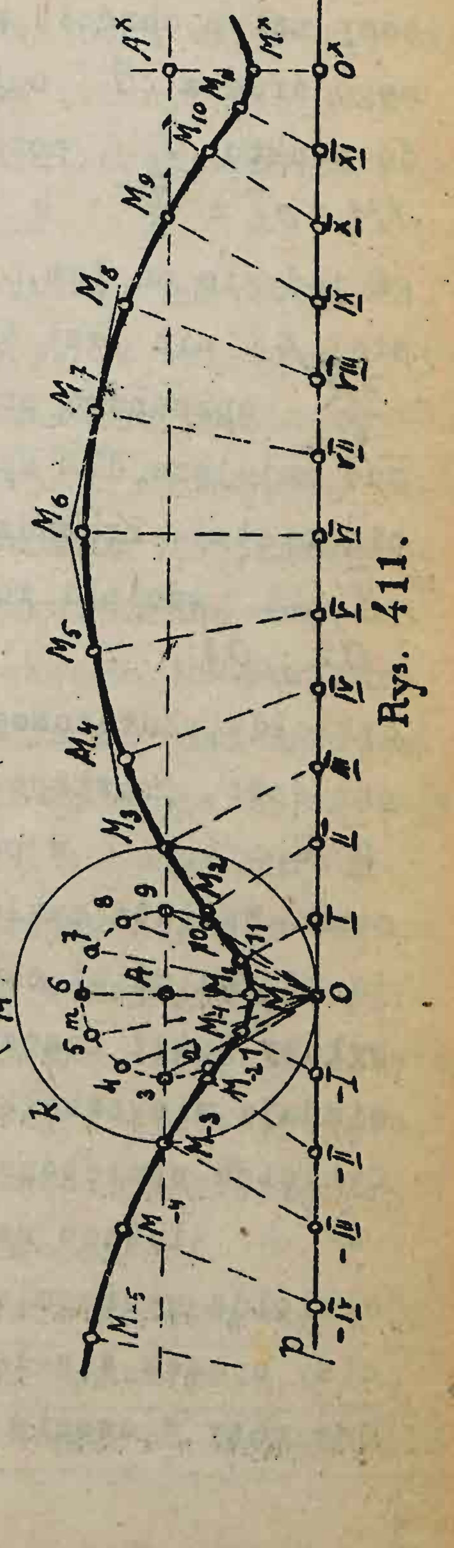
Długość jednego zwoju cykloidy zwyczajnej jest oztery razy większa od średnicy koła tworzącego.-

W taki sam sposób, jak dla cykloidy zwyczajnej, wyznaczamy punkty oraz styczne do cykloidy skurczonej lub wyciągniętej. Niech koło k toczy się po prostej p, a punktem opisującym krzywą niech będzie punkt M, sztywno z kołem tworzącym związany i względem niego zewnętrzny /cykloida skurczona, Rys.410/ lub wewnętrzny /cykloida wyciągnięta Rys.411/. Przypuśćmy, że w chwili rozpoczęcia ruchu punkt M leży na promieniu styczności AO. Gdy koło obróci się raz jeden, to jego środek przesunie się o wyprostowaną długość okręgu koła k; punkt opisujący znajdzie się wtedy znowu na promieniu styczności, przesunąwszy się równolegle do kierownicy p o odcinek $MM^x = OO^x = 2\pi r$. Krzywa będzie się zatem składać z nieskończenie wielu równych zwojów, z których jeden MM^x wykreślimy.

Poprowadźmy ze środka A koło m o promieniu $R = AM$ i podzielmy koło m oraz wyprostowany okrąg koła k, t.j. odcinek OO^x na jednakową ilość równych części, np. na 12 w punktach $M, 1, 2, 3, \ldots 11$ wzgl. $O, I, II, III, \ldots XI$. Punkt M dostaje się do jakiegokolwiek innego punktu cykloidy np. do M_1, dzięki dwom jednoczesnym swym ruchom: obrotowi na kole m o łuk $M1$ oraz przesunięciu te-



Rys. 410.

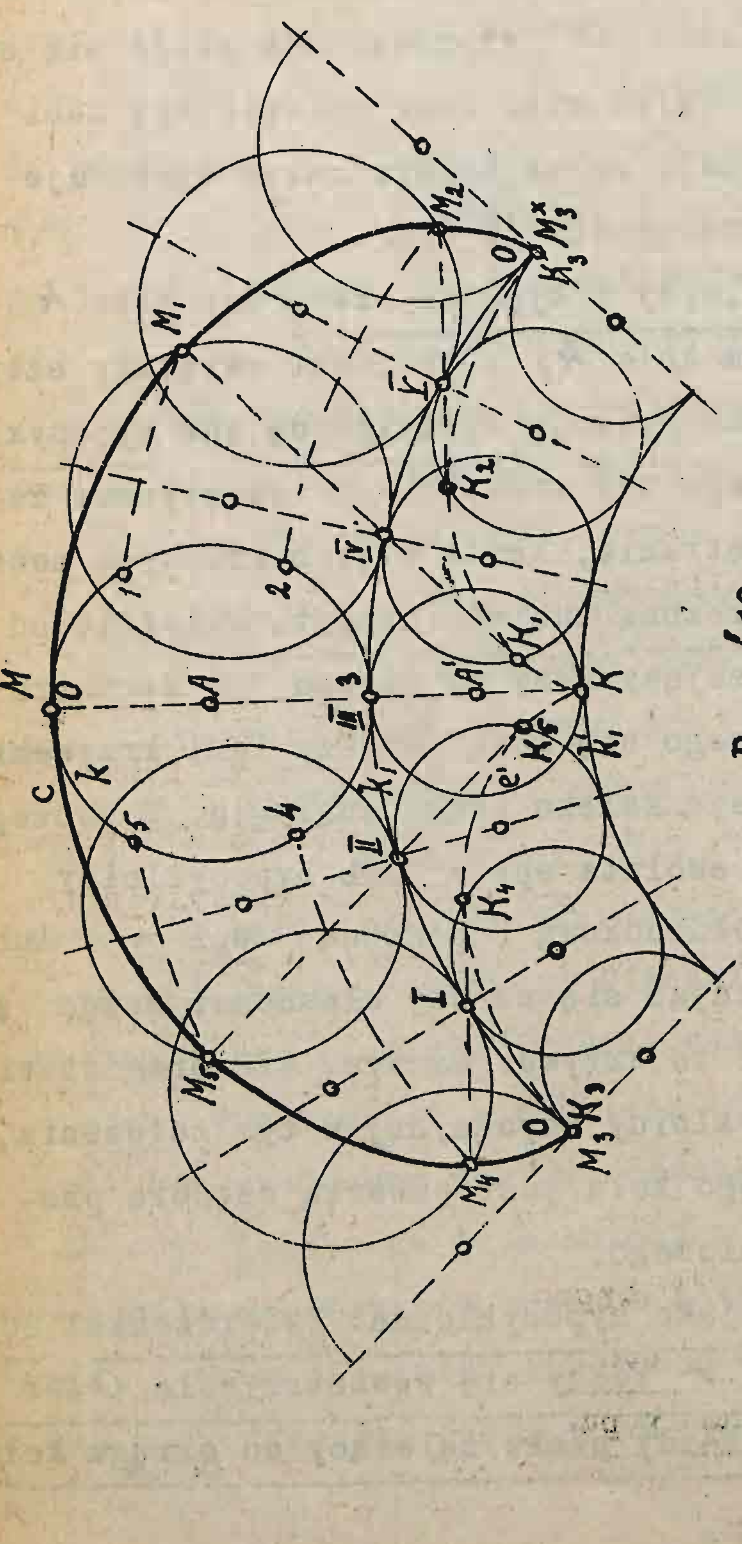


Rys. 411.

go koła o odcinek $O\overline{I}$. Aby wyznaczyć punkt M_1 możemy zatem obrócić najpierw punkt M dokoła nieruchomego środka A o kąt $\frac{\pi}{6}$, przez co dostanie się on do punktu 1, potem zaś przesunąć punkt 1 o odcinek $1M_1 = O\overline{I} = \frac{\pi r}{6}$. Różnica z cykloidą zwyczajną polega jedynie na tem, że przesunięcie $\frac{\pi r}{6}$ w kierunku prostej p nie jest teraz równe wyprostowanemu łukowi $\frac{\pi R}{6}$ opisanemu przez ten punkt na kole m; jest ono mniejsze dla cykloidy skurczonej, większe dla wyciągniętej. Prowadząc tedy przez punkty $\overline{I}$, $\overline{II}$, $\overline{III}$, ... odcinki równe i równoległe sięciwom $O1$, $O2$, $O3$, ... otrzymamy punkty M_1, M_2, M_3, ... cykloidy skurczonej lub wyciągniętej. Podobnie jak poprzednio, prostopadłe do normalnych $\overline{I}M_1$, $\overline{II}M_2$, $\overline{III}M_3$ .... w punktach M_1, M_2, M_3,.... będą stycznemi. Ewoluta cykloidy skurczonej lub wyciągniętej nie jest bynajmniej cykloidą; wyznaczenie środków krzywizny byłoby tutaj znacznie trudniejsze. Obie cykloidy posiadają wierzchołki w punktach M, M_6, M^x, i t.d. Cykloida skurczona posiada prócz tego punkty podwójne D, D^x.... leżące na promieniach AO, A^xO^x .....; cykloida wyciągnięta posiada natomiast punkty przegięcia, o czem się łatwo przekonać zważywszy, iż normalna dwa razy w czasie jednego obrotu koła tworzącego zmienia zwrot swojego obrotu, wtedy mianowicie, gdy równoległa do niej z punktu O wyprowadzona staje się styczną do koła m. Tyleż więc razy zmienić się musi zwrot obrotu stycznej, co za każdym razem spowoduje powstanie punktu przegięcia /§ 206/.

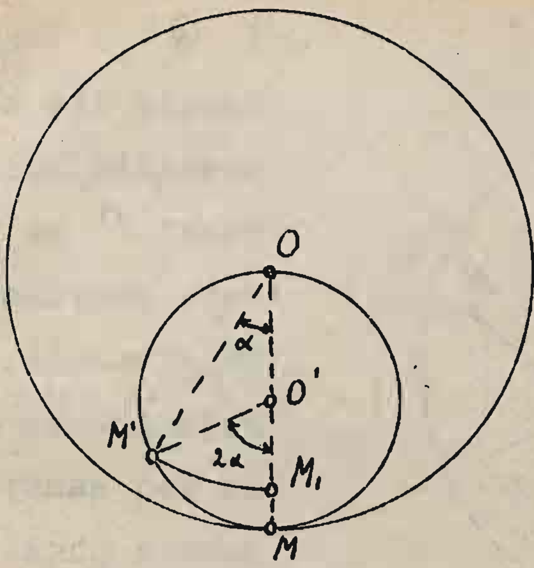
§ 212. Epicykloidy i hypocykloidy. Gdy koło k toczy się po stałym kole k_1, to punkt związany sztywno z kołem ruchomem opisuje epicykloidę lub hypocykloidę, zależnie od tego, czy koła k i k_1 są styczne zewnętrznie lub wewnętrznie; każda z tych krzywych może być zwyczajną, skurczoną lub wyciągniętą zależnie od tego czy punkt opisujący leży na okręgu, na zewnątrz lub wewnątrz toczącego się koła. Między temi krzywemi, a cykloidami istnieje daleko idąca analogja. W szczególności zauważmy, że ewoluta epi = lub hypocykloidy zwyczajnej jest spółśrodkową i podobną epi = lub hypocykloidą. Opierając się na tej własności można z łatwością wykreślić te krzywe. Na rys. 412 przedstawiono jeden zw-j epicykloidy zwyczajnej w tym założeniu, że promień tworzącego koła jest czwartą częścią promienia koła kierowniczego.

§ 213. Elipsa jako hypocykloida. Twierdzenie. Gdy koło O' o promieniu r toczy się wewnątrz koła O o promieniu $2r$, to każdy punkt należący do okręgu koła



Rys. 412.

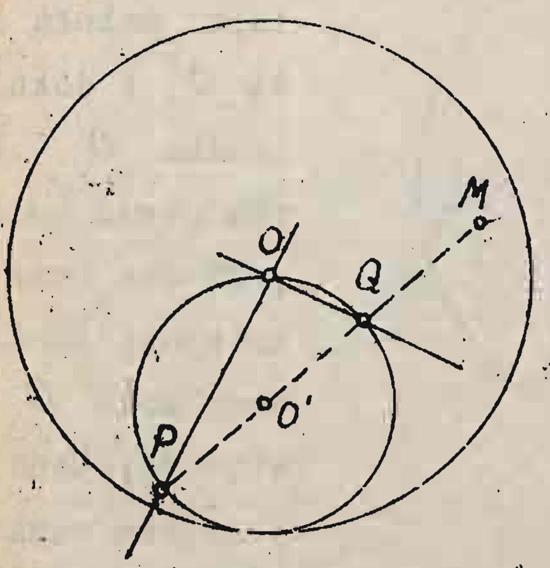
O' opisuje średnicę koła O. W czasie jednego zupełnego obrotu koła O' każdy punkt M jego okręgu raz i tylko raz jest punktem zetknięcia obu kół /Rys. 413/. Od tego położenia rozpoczniemy badanie krzywej, którą opisuje punkt M. Punkt ten jest obdarzony dwoma ruchami obrotowemi o



Rys. 413.

przeciwnych zwrotach: dokoła środka O' i dokoła środka O .Ponieważ obwód koła O' jest dwa razy mniejszy od obwodu koła O , więc szybkość obrotowa punktu M dokoła O' jest dwa razy większa niż jego szybkość obrotowa dokoła O . Nowe położenie jakiekolwiek M_1 punktu M może być przeto znalezione w taki sposób: Obróćmy punkt M dokoła O' o kąt jakikolwiek 2α ,poczem obróćmy go w przeciwną stronę dokoła O o kąt α ; jest oczywistem, że po wykonaniu tych dwóch obrotów punkt M pozostanie na średnicy OM .

Twierdzenie. Gdy koło O' o promieniu r toczy się wewnątrz koła O o promieniu $2r$, to każdy punkt sztywno związany z kołem O' opisuje elipsę spółśrodkową z kołem O . Punkt M sztywno związany z kołem O' /Rys.414/ połączmy ze środkiem tego koła i niechaj prosta $O'M$ przetnie koło O' w punktach P

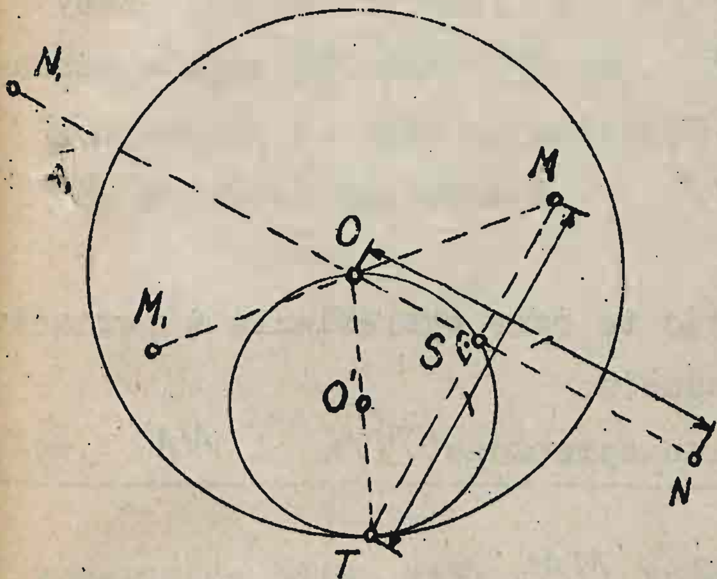


Rys. 414.

i Q . Przy toczeniu się koła O' wewnątrz koła O punkt P na zasadzie powyższego twierdzenia, opisuje prostą OP; na tej samej zasadzie punkt Q opisuje prostą OQ . Ponieważ prostę OP i OQ są wzajemnie prostopadłe, a punkt M , jako sztywno związany z kołem O' ,jest stałym punktem średnicy PQ więc ten punkt opisuje elipsę o osiach OP i OQ których długości są $2\overline{MP}$ i $2MQ$.

W samej rzeczy, punkt opisujący M jest stałym punktem prostej, której dwa inne stałe punkty P i Q ślizgają się po ramionach kąta prostego POQ.

§ 214. Wyznaczenie osi elipsy. Połączmy punkt M ze środkiem elipsy O i znajdźmy średnicę sprzężoną ze średnicą OM /Rys.415/. W tym celu zauważmy, że normalna do każdej rulety przechodzi przez chwilowy



Rys. 415.

punkt zetknięcia krzywej tworzącej z krzywą kierowniczą /§ 198/; normalna do elipsy w punkcie M przechodzi tedy przez punkt T zetknięcia kół O i O'. Otóż wiemy, że średnica sprzężona z daną średnicą OM jest równoległa do stycznej w punkcie M /§ 170/ a więc jest prostopadła do normalnej MT. Z punktu O spuszczamy tedy prostopadłą OS na MT; OS jest średnicą sprzę!oną z OM; aby wyznaczyć jej długość, zauważmy, że przy toczeniu koła O' wewnątrz koła O punkt S pozostaje na OS, punkt T na OT. a odległości MS i MT nie ulegają zmianie. Elipsa opisana przez punkt M powstaje więc również i w ten sposób, że prosta MST porusza się ślizgając się punktem S po prostej OS, a punktem T po prostej OT.

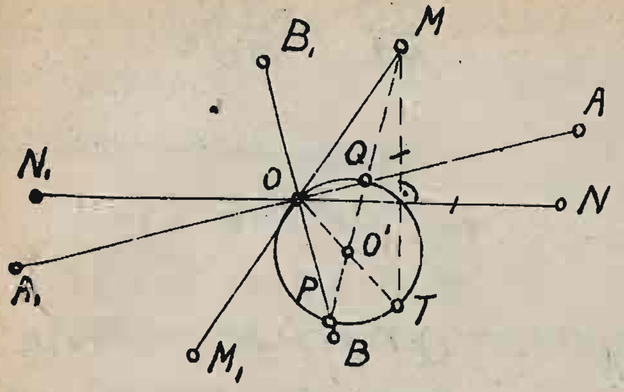
Aby więc znaleźć koniec N średnicy OS, trzeba wykreślić prostą MST w takim położeniu, żeby punkt T upadł na O, wtedy punkt M zajmie szukane położenie N. Odmierzając więc na prostej OS odcinki $ON = ON_1 = MT$ wyznaczymy średnicę NN_1 sprzężoną z MM_1.

Nawzajem, wykonując te same wykreślenie w porządku odwrotnym rozwiążemy zadanie:

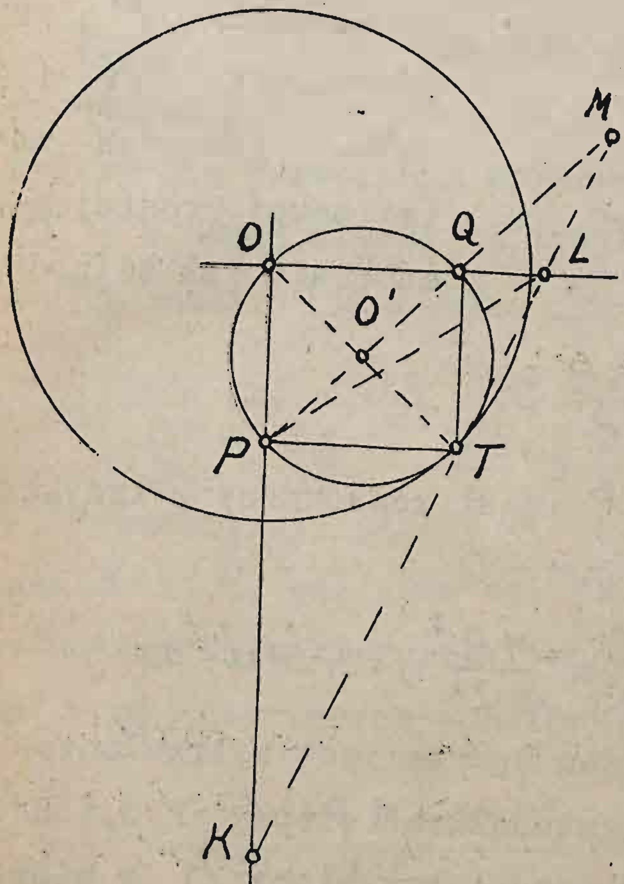
Mając dwie średnice sprzężone MM_1 i NN_1 wykreślić osie elipsy.

Z końca M średnicy MM_1 /Rys. 416/ spuszczamy prostopadłą na średnicę NN_1 i odmierzamy na tej prostopadłej od punktu M w jedną lub drugą stronę $MT = ON$; na OT zakreślamy koło jak na średnicy i środek tego koła O' łączymy z M. Niechaj prosta $O'M$ przecina koło O' w punktach P i Q; odmierzając na prostych OQ i OP odcinki $OA = OA_1 = MP$ i $OB = OB_1 = MQ$, otrzymamy osie elipsy AA_1 i BB_1.

§ 215. Srodki krzywizny elipsy w jej wierzchołkach. Twierdzenie. Normalna do elipsy w jej punkcie jakimkolwiek M przecina osie elipsy w takich punktach K i L, że: $\frac{MK}{ML} = \frac{a^2}{b^2}$;



Rys. 416.

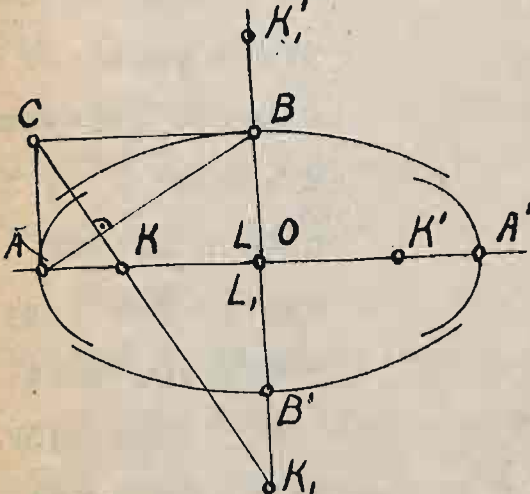


Rys. 417.

Niech elipsa będzie opisaną przez punkt M sztywno związany z kołem O', toczącym się wewnątrz dwa razy większego koła O. /Rys.415/

Wyznaczmy osie, łącząc $O'M$ i prowadząc OP i OQ. Prosta MT będzie normalną do elipsy w punkcie M. Oznaczmy literami K i L punkty, w których ta normalna przecina osie OP i OQ, Trzeba dowieść, że:

$$\frac{MK}{ML} = \frac{MP^2}{MQ^2};$$



Rys. 418.

Zauważmy, że czworokąt $OPTQ$ jest prostokątem, tak że $QT \parallel PK$. Pola trójkątów MKP i MLP o wspólnym wierzchołku P, i podstawach MK i ML leżących na tej samej prostej, mają się jak te podstawy:

$$\frac{MK}{ML} = \frac{\Delta MKP}{\Delta MLP};$$

Ale trójkąt MLP jest równoważny z trójkątem MTQ, tak że:

$$\frac{MK}{ML} = \frac{\Delta MKP}{\Delta MTQ} = \frac{MP^2}{MQ^2}; \text{ c.b.d.o.}$$

Na twierdzeniu tem oparte jest wykreślanie środków krzywizny w wierzchołkach elipsy /Rys.418/.

Znajdźmy najpierw środek krzywitny K w wierzchołku A. Jest to taki punkt osi AA', w którym ją przecina normalna elipsy w punkcie nieskończenie bliskim punktu A ; otóż ta normalna, jak każda inna, przecina osie AA' i BB' w takich punktach K i L, że: $\frac{AK}{AL} = \frac{b^2}{a^2}$; ale $AL = AO = a$;

skąd $AK = \frac{b^2}{a}$;

Szukając środka krzywizny K_1 w wierzchołku B, znajdziemy: $\frac{BK_1}{BL_1} = \frac{a^2}{b^2}$; ale $BL_1 = BO = b$; skąd

$$BK_1 = \frac{a^2}{b}.$$

Punkty K i K_1 znajdziemy w przecięciu obu osi z prostopadłą spuszczoną na cięciwę AB z punktu C w którym się przecinają styczne w wierzchołkach A i B ; w samej rzeczy, z trójkątów podobnych AOB i CAK mamy: $\frac{AK}{AC} = \frac{OB}{OA}$; $\frac{AK}{b} = \frac{b}{a}$; $AK = \frac{b^2}{a}$;

z trójkątów zaś AOB i CBK_1

$$\frac{BK_1}{BC} = \frac{OA}{OB}; \quad \frac{BK_1}{a} = \frac{a}{b}; \quad BK_1 = \frac{a^2}{b}.$$

Wyznaczywszy punkty K' i K_1' symetryczne z punktami K i K_1 względem osi AA' i BB' i wykreśliwszy cztery koła krzywizny, możemy w wielu razach obejść się bez innych punktów lub stycznych elipsy.

ROZDZIAŁ XVII

KRZYWE SKOŚNE.

§ 216. Krzywa skośna jako miejsce poruszającego się punktu. Nazywamy **krzywą skośną** albo **wichrowatą** miejsoe geometryczne poruszającego się według pewnego prawa punktu, o którym wtedy mówimy, że opisuje tę krzywą.

Styczną do krzywej skośnej k w danym jej punkcie A nazywamy granicą położenia prostej łączącej punkt A z innym punktem B krzywej, gdy B zbliża się nieograniczenie do A, punkt A nazywa się punktem zetknięcia stycznej t z krzywą k. Może się zdarzyć, że punkt T opisujący krzywą k przejdzie więcej niż raz jeden przez pewien punkt D; krzywa będzie miała wtedy więcej niż jedną styczną w tym punkcie; punkt taki nazywamy podwójnym, potrójnym - wogóle n-krotnym punktem krzywej skośnej k.

Rzut krzywej skośnej k z dowolnego punktu na dowolną płaszczyznę jest oczywiście krzywą płaską k'; rzut stycznej t w punkcie A krzywej k jest styczną t' w punkcie A' krzywej k'. Rzut punktu podwójnego krzywej skośnej k jest punktem podwójnym krzywej płaskiej k'; nie każdy jednak punkt podwójny krzywej k' jest rzutem punktu podwójnego krzywej k; punkt podwójny i wogóle - krotny powstanie na krzywej k' zawsze wtedy, jeżeli promień rzucający przecina dwa lub wogóle n razy krzywą k.

Każda płaszczyzna przechodząca przez styczną t nazywa się płaszczyzną styczną krzywej skośnej k. Płaszczyzna styczna ma zatem z krzywą k przynajmniej dwa nieskończenie bliskie punkty wspólne. Sród płaszczyzn stycznych w każdym punkcie krzywej jest jednak taka, która ma z krzywą k 3 punkty nieskończenie bliskie wspólne. Przez styczną t, i przez punkt C krzywej k poprowadźmy płaszczyznę; jeżeli punkt C będzie się zbliżał nieograniczenie do punktu A, w którym t jest styczna do k, to położenie płaszczyzny tC dążyć będzie do pewnej płaszczyzny T, zwanej płaszczyzną ściśle styczną, która z krzywą k będzie miała przynajmniej trzy punkty nieskończenie bliskie wspólne.

Płaszczyzną ściśle styczną w punkcie A krzywej skośnej k nazywamy granicę położenia płaszczyzny przechodzącej przez A i dwa inne punkty B i C krzywej; gdy oba te punkty nieograniczenie zbliżać się będą do punktu A.

Możemy teraz sobie wyobrazić powstanie krzywej k w sposób następujący. Punkt T porusza się po prostej t, podczas gdy ta prosta obraca się w płaszczyźnie T dokoła punktu T, a płaszczyzna T dokoła prostej t. Jeżeli w pewnym punkcie A, podczas gdy punkt T opisujący krzywą przezeń przechodzi, nie zmienia się żaden ze zwrotów tych trzech ruchów, to punkt A nazywamy punktem zwyczajnym krzywej. Jeżeli punkt T w pewnym punkcie R zmienia na prostej t zwrot swego ruchu, podczas gdy ani prosta t ani płaszczyzna T nie zmienia zwrotu swego obrotu, to punkt R nazywa się punktem zwrotu; jeżeli prosta t doszedłszy do pewnego położenia i zmienia zwrot swego obrotu dokoła punktu T, podczas gdy ani punkt T nie zmienia zwrotu swego ruchu na prostej t, ani płaszczyzna T zwrotu swego obrotu dokoła prostej t, to prosta i nazywą się styczną przegięcia, a jej punkt zetknięcia I z krzywą k punktem przegięcia. Gdy wreszcie w pewnym położeniu R płaszczyzna T doznaje zmiany zwrotu swego obrotu dokoła prostej t, podczas gdy zarówno punkt T, jak rposta t, zachowują zwrot dotychczasowego ruchu, to płaszczyzna R nazywa się płaszczyzną zwrotu.

§ 217 Krzywizna i skręcenie krzywych skośnych

Z powyższego wynika, że wszystkie własności krzywej k w pobliżu danego jej punktu A muszą zależeć od dwóch wielkości: od ilorazu szybkości obrotu prostej t przez szybkość punktu T, czyli krzywizny k i od ilorazu szybkości obrotu płaszczyzny T przez szybkość punktu T, czyli od skręcenia τ w tym punkcie krzywej. Ujmiemy te określenia nieco ściślej.

Podobnie jak dla krzywych płaskich /§ 207/ nazwiemy krzywizną średnią krzywej k między punktem czajnym A i punktem jakimkolwiek A_1, iloraz

$$k_1 = \frac{\varphi}{s};$$

gdzie s jest długością wyprostowanego łuku AA_1, a φ - kątem stycznych t i t_1 w tych punktach. Gdy punkt A_1 zbliżać się będzie nieograniczenie do punktu A, to łuk s będzie malał nieograniczenie; jednocześnie atoli maleć będzie nieograniczenie kąt φ, który jest funkcją łuku s.- Krzywizną rzeczywistą krzywej k w punkcie A nazywa się granica ilorazu $\frac{\varphi}{s}$, gdy s dąży do zera, czyli:

$$k = \lim_{s=0} \frac{\varphi}{s} = \frac{d\varphi}{ds};$$

Nieskończenie malejący łuk ds nazywamy elementem krzywej skośnej k; zależny od niego nieskończenie malejący kąt $d\varphi$ nazywamy kątem styczności. Podobnie jak dla krzywych płaskich, krzywizna w punkcie A krzywej skośnej k jest to iloraz kąta styczności przez odpowiadający mu element krzywej w punkcie A. W punkcie zwrotu R; $ds = 0$; $k = \infty$; w punkcie przegięcia I: $d\varphi = 0$; $\tau = 0$.

Skróceniem średniem krzywej skośnej k pomiędzy punktem zwyczajnym A i punktem jakimkolwiek A_1 nazywamy iloraz

$$\tau_1 = \frac{\theta}{s}$$

gdzie s, jak poprzednio, jest długością wyprostowanego łuku AA_1, a Θ jest kątem płaszczyzn ściśle stycznych w punktach A i A_1. Gdy łuk s maleć będzie nieograniczenie, to zależny od niego kąt Θ również maleć będzie nieograniczenie.- Skręceniem rzeczywistem w punkcie A nazywamy granicę ilorazu $\frac{\Theta}{s}$, gdy s dąży do zera, czyli

$$\tau = \lim_{s=0} \frac{\Theta(s)}{s} = \frac{d\Theta}{ds};$$

Nieskończenie malejący kąt $d\Theta$ nazywamy kątem skręcenia; możemy tedy określić skręcenie τ krzywej k w punkcie A jako iloraz kąta skręcenia przez element krzywej w punkcie A.

Przez trzy punkty A, B i C krzywej skośnej k wyznaczone jest koło, które leży w płaszczyźnie ABC; gdy punkty B i C dążyć będą nieograniczenie do punktu A, to płaszczyzna ABC dąży do płaszczyzny ściśle stycznej, koło zaś ABC dąży do koła k_1, którego krzywizna $k = \frac{1}{r}$ jest ta sama, co krzywizna w punkcie A krzywej k. Koło to nazywamy kołem krzywizny w punkcie A; jego środek - środkiem krzywizny, jego promień - promieniem krzywizny $r = \frac{1}{k}$.

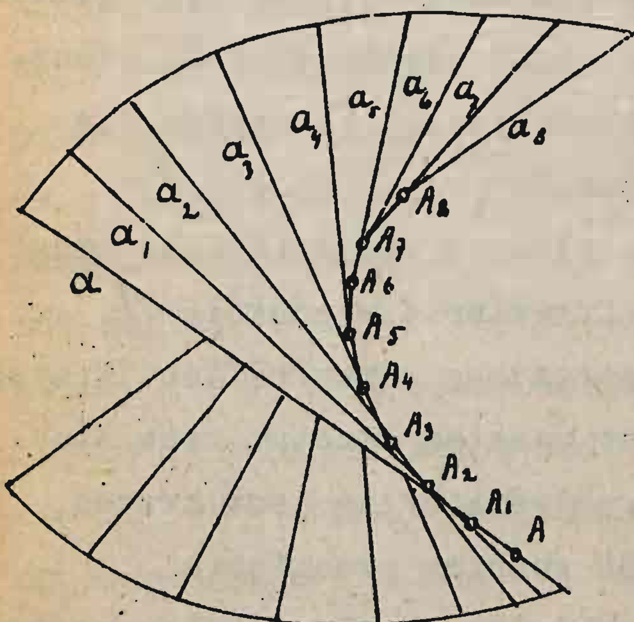
§ 218. Normalna główna i binormalna. Płaszczyzna prostopadła do stycznej t w punkcie A krzywej skośnej k nazywa się płaszczyzną normalną w tym punkcie

Każda prosta w tej płaszczyźnie przez punkt A przechodząca nazywa się normalną. Śród nich dwie są szczególnie ważne. Jedna n leżąca w płaszczyźnie ściśle stycznej nazywa się normalną główną; na niej to leży środek krzywizny; druga b , prostopadła do płaszczyzny ściśle stycznej nazywa się binormalną . Trzy proste: t, n i b są wzajemnie prostopadłe i tworzą układ prostokątny spółrzędnych, szczególnie dogodny do badania własności krzywej w pobliżu punktu A . Płaszczyzna tn jest ściśle styczną, płaszczyzna bn normalną, płaszczyzna bt nazywa się płaszczyzną rektyfikacyjną.

Rzut krzywej k na płaszczyznę ściśle styczną jest krzywą o tej samej krzywiźnie w punkcie A ; rzut krzywej k na płaszczyznę normalną jest krzywą dla której punkt A jest punktem zwrotu; rzut krzywej k na płaszczyznę rektyfikacyjną jest krzywą, dla której punkt A jest punktem przegięcia.

§ 219. Powierzchnie rozwijalne. Powierzchnią prostokreślną nazywamy miejsce geometryczne prostej t poruszającej się według pewnego prawa. Poszczególne położenia prostej t nazywają się tworzącemi powierzchni prostokreślnej.- Powierzchnie prostokreślne dzielimy na powierzchnie rozwijalne / np. stożki i walce/ i skośne, czyli wichrowate /np. hyperboloid jednopowłokowy i paraboloid hyperboliczny. § 204/.

Powierzchnia prostokreślna nazywa się rozwijalną jeżeli jej tworzące są styczne do krzywej skośnej k, która nazywa się krawędzią zwrotu powierzchni rozwijalnej. Weźmy na krzywej skośnej k / Rys. 419 / następstwo punktów $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ połączmy punkty A i A_1, A_1 i A_2, A_2 i A_3, ... prostemi a, a_1, a_2, ... ; każda z tych prostych przecina poprzednią i następną. Kąty $/aa_1/$, $/a_1a_2/$, $/a_2a_3/$ ... będą miały tę własność, że każdy z nich ma z poprzednim i z następnym jedno ramię wspólne.



Rys. 419.

Obróćmy płaszczyznę $/aa_1/$ dokoła a_1 tak, żeby ta płaszczyzna przystała do płaszczyzny kąta $/a_1a_2/$ w ten sposób trzy proste a, a_1 i a_2, leżeć będą w jednej płaszczyźnie; obróćmy następnie tę płaszczyznę dokoła a_2 tak, żeby przystała do płaszczyzny kąta /a_2a_3/, w ten sposób cztery proste: a, a_1, a_2 i a_3 będą leżały w jednej płaszczyźnie; obracając ją dokoła a_3 do przystania z płaszczyzną /$a_3 a_4$/ otrzymamy 5 prostych: a, a_1, a_2, a_3 i a_4 w jednej płaszczyźnie i tak postępujmy dalej, dopóki wszystkie proste nie będą leżały w jednej płaszczyźnie. O powierzchni wielościennej $a a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$ mówimy wtedy, że została rozwinięta. – Jeżeli liczba punktów A, A_1, $A_2 \ldots$ na krzywej k zwiększać się będzie nieograniczenie, podczas gdy ich odległości AA_1, A_1A_2, $A_2A_3 \ldots$ maleć będą nieograniczenie, to proste a, a_1, $a_2, \ldots$, zbliżać się będą do stycznych t, t_1, $t_2, \ldots$ a powierzchnia wielościenna $a\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ do powierzchni rozwijalnej, której krawędzią zwrotu będzie krzywa skośna k. Postępując w nieskończenie małemi kątami: /tt_1/, /t_1t_2/, /t_2t_3/, tak samo, jak postępowaliśmy z kątami /aa_1/, /a_1a_2/, /a_2a_3/, ... można będzie "rozwinąć" powierzchnię rozwijalną krzywej k.

Powierzchnia rozwijalna krzywej skośnej składa się z dwóch powłok, stycznych wzajemnie we wszystkich punktach krawędzi zwrotu. W samej rzeczy, przecięcie tej powierzchni jakąkolwiek płaszczyzną nie przechodzącą przez żadną z tworzących jest krzywą płaską, posiadającą w punkcie przecięcia z krzywą skośną punkt zwrotu I rodzaju. Stąd nazwa: krawędź zwrotu, którą dajemy krzywej skośnej.

Przez rozwinięcie powierzchni wielościennej $a\ a_1 a_2 a_3 \ldots$ żaden z odcinków AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... ani żaden z kątów $/aa_1/$, $/a_1a_2/$, $/a_2a_3/$, ... nie uległ oczywiście zmianie. Podobnież przez rozwinięcie powierzchni rozwijalnej żaden z elementów, ani żaden z kątów styczności krzywej skośnej nie doznał zmiany; krzywa skośna przez takie rozwinięcie przekształca się przeto na krzywą płaską o tej samej długości i tej samej krzywiźnie w każdym z jej punktów. Jedynie skręcenie stało się dla wszystkich jej punktów równem zeru.

Jako powierzchnie rozwijalne powszechnie znane przytoczyć możemy stożki i walce, krawędź zwrotu redukuje się w tych powierzchniach do punktu właściwego dla stożków, niewłaściwego dla walców.

Jeżeli z dowolnego punktu P wyprowadzimy równoległe do stycznych t , t_1 , t_2 , .. krzywej skośnej k , to to utworzymy powierzchnię, która się nazywa stożkiem kierunkowym krzywej k . Płaszczyzny styczne do tego stożka są równoległe do płaszczyzn ściśle stycznych krzywej skośnej. Stożek kierunkowy krzywych płaskich redukuje się do płaszczyzny.

Powstanie krzywej skośnej możemy w inny teraz rozumieć sposób. Niechaj płaszczyzna T porusza się według pewnego prawa; prosta przecięcia dwóch położeń A i B poruszającej się płaszczyzny dąży do pewnej granicy t , gdy położenie B zbliża się nieograniczenie do A ; granicą tą jest tworząca powierzchni rozwijalnej. Punkt przecięcia trzech położeń , B i C poruszającej się płaszczyzny dąży również do pewnej granicy T gdy położenia B i C zbliżają się nieograniczenie do A ; granicą tą jest punkt krawędzi zwrotu T .

Powierzchnie rozwijalne są figurami wzajemnemi względem krzywych skośnych. Podczas gdy krzywą skośną uważamy za miejsce poruszającego się punktu, powierzchnię rozwijalną uważamy za obwiednię poruszającej się płaszczyzny; stycznym krzywej skośnej odpowiadają tworzące powierzchni rozwijalnej; płaszczyznom ściśle stycznym krzywych skośnych odpowiadają punkty krawędzi zwrotu powierzchni rozwijalnej.

§ 220. Linja śrubowa. Najprostszym przykładem krzywej skośnej jest linja śrubowa.

Niech będzie walec obrotowej S o osi OO' kierownicy k i promieniu r /rys.431/. Wzdłuż tworzącej AB poprowadźmy płaszczyznę styczną S_o t.j. poprowadźmy płaszczyznę przez AB i przez styczną k_o do kierownicy k w punkcie A. Poprowadźmy przez punkt A w płaszczyźnie S_o prostą s_o nachyloną do k_o pod kątem α, poczem "nawińmy" płaszczyznę S_o na powierzchnię walca; podczas gdy k_o nawinie się na kierownicę k, prosta s_o nawinie się na powierzchnię walca, tworząc krzywą skośną, którą nazwiemy linją śrubową. Linja śrubowa jest to więc krzywa leżąca na powierzchni walca obrotowego, która po rozwinięciu powierzchni przekształca się na prostą.- Powstanie linji śrubowej można rozumieć jeszcze inaczej. Niechaj płaszczyzna S_o wraz z wykreśloną na niej prostą s_o toczy się po powierzchni walca bez poślizgu, wtedy s_o jest styczną do powierzchni walca w coraz to nowym punkcie: miejsce geometryczne tych punktów zetknięcia na powierzchni walca jest linją śrubową. Gdy S_o toczy się po S, k_o toczy się po k, a s_0 po s , przytem k_0 jest wciąż styczną do k a s_0 do s ; punkt A kreśli w płaszczyźnie kierownicy ewolwenty koła / § 209 /.

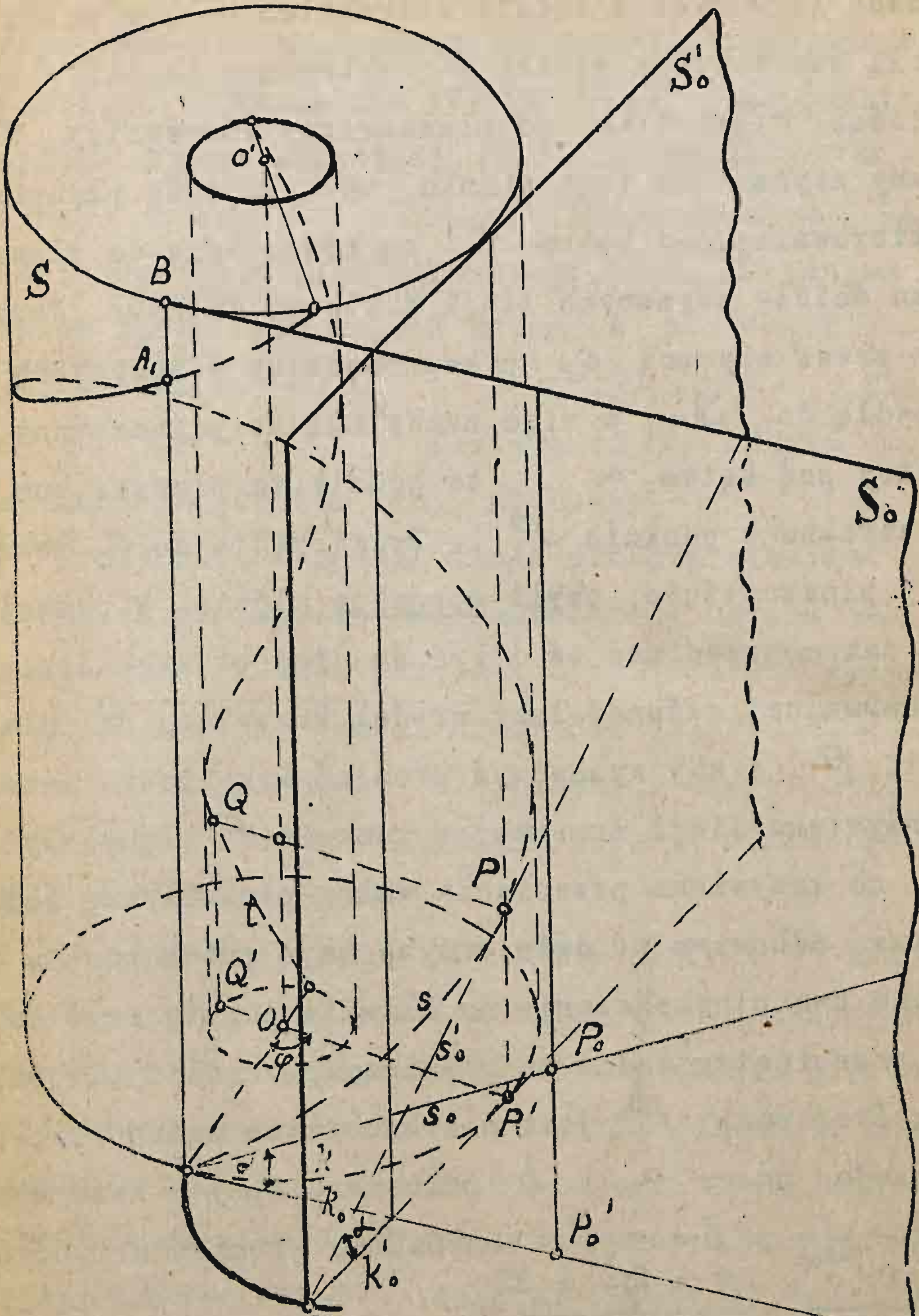
Weźmy na s_0 punkt jakikolwiek P_0 , którego rzutem na k_0 niechaj będzie punkt P_0' ; gdy S_0 tocząc się po powierzchni walca obróci się o kąt φ , którego wyprostowany łuk na kierownicy $= AP_0'$ to P_0' przystanie do P' a P_0 do P . W tem położeniu prosta s_0 będzie styczna do s w punkcie P ; długość jej między punktami P i A' będzie równa P_0A , rzut jej $A'P' = AP_0' = r.\varphi$. Nachylenie stycznej s_0' do płaszczyzny kierownicy pozostanie równem α ; kąt α nazywa się spadkiem linji śrubowej. Odcinek $P_0P_0' = PP' = z$. Z trójkąta $AP_0P_0' : z = AP_0'.tg\alpha = r\varphi tg\alpha = \varphi . r tg\alpha$; t.j. wzniesienie z jest proporcjonalne do kąta obrotu φ . Współczynnik proporcjonalności $h_0 = r tg\alpha$; nazywa się parametrem linji śrubowej, jest to wartość stałego stosunku $\frac{z}{\varphi}$. Na zasadzie powyższego możemy określić linję śrubową jako miejsce geometryczne punktu poruszającego się ruchem jednostajnym na prostej z podczas gdy z ruchem jednostajnym obraca się dokoła równoległej do niej prostej OO' . Parametr h_0

jest stosunkiem tych dwóch szybkości jednostajnych. Gdy kąt φ stanie się równym 2π, to punkt P znajdzie się na tworzącej AB w punkcie A_1. Odcinek $h = AA_1$ jest przesunięciem w kierunku osi odpowiadającym całemu obrotowi; h - nazywa się skokiem linji śrubowej. Z równania $z = h_0 \varphi$ mamy, kładąc $\varphi = 2\pi$: $h = h_0 \cdot 2\pi$; skąd $h_0 = h : 2\pi$ dlatego to h_0 nazywa się też zredukowanym skokiem linji śrubowej.

Przez skok i spadek linja śrubowa nie jest jeszcze całkowicie wyznaczona, odróżniamy bowiem linje śrubowe prawo i lewo skrętne. Linja śrubowa nazywa się prawoskrętną, jeżeli dla widza umieszczonego wzdłuż osi walca punkt P posuwając się ku dołowi obraca się w kierunku skazówki zegara; w przeciwnym razie jest lewoskrętna.

Płaszczyzna ściśle styczna w punkcie P linji śrubowej jest nachylona pod kątem α do płaszczyzny kierownicy. W samej rzeczy utwórzmy stożek kierunkowy linji śrubowej; w tym celu z dowolnego punktu przestrzeni należy wyprowadzić równoległe do jej stycznych; ponieważ zaś wszystkie styczne są nachylone pod tym samym kątem α do płaszczyzny kierownicy walca, więc te równoległe utworzą stożek obrotowy. Kierównicą tego stożka będzie kierownica samego walca jeżeli wierzchołek stożka H obieramy na osi w odległości $r\,tg\alpha = h_o$ od płaszczyzny kierownicy. Płaszczyzny styczne do tego stożka, nachylone do płaszczyzny kierownicy pod kątem α są równoległe do płaszczyzn ściśle stycznych linji śrubowej /§ 219/. Jeżeli tedy przez styczną S_o przeprowadzimy płaszczyznę prostopadłą do S'_o a więc nachyloną do płaszczyzny kierownicy pod kątem α , to będzie to płaszczyzna ściśle styczna w punkcie P . Prostopadła do S'_o leżąca w tej płaszczyźnie, czyli <u>normalna główna</u> w punkcie P musi zatem przecinać oś i być do niej prostopadłą. Na tej normalnej głównej leży środek krzywizny Q dla punktu P ; aby wyznaczyć promień krzywizny, zauważmy że krzywizna linji śrubowej w punkcie P , musi być ta sama, co krzywizna przecięcia walca płaszczyzną ściśle styczną, albowiem te dwie krzywe mają prócz punktu P jeszcze dwa nieskończenie mu bliskie punkty wspólne. Otóż przecięciem walca tą płaszczyzną będzie elipsa, dla której punkt P jest wierzchołkiem małej osi; oznaczając przez a i b półosie elipsy i zważywszy, że $a = \frac{r}{\cos\alpha}$; $b = r$, znajdziemy promień krzywizny

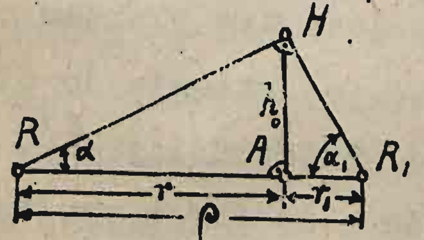
$$\rho = \frac{a^2}{b} = \frac{r}{\cos^2\alpha} ;$$



Rys. 420.

linji śrubowej jest przeto wielkością stałą. Własność tę dzieli linja śrubowa z kołem i prostą, które zresztą mogą być uważane za przypadki szczególne linji śrubowej gdy $\alpha = 0$ wzgl. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Srodki krzywizny linji śrubowej leżą na innej linji śrubowej t zwanej wzajemną, o tym samym skoku, krzywiźnie i skręcie, ale o różnym promieniu i spadku. Aby wyznaczyć promień krzywizny ς linji śrubowej s w jej punkcie P kreślimy trójkąt prostokątny AHR /Rys.421/, którego przyprostokątna $AR = r$ a kąt do niej przyległy $ARH = \alpha$;



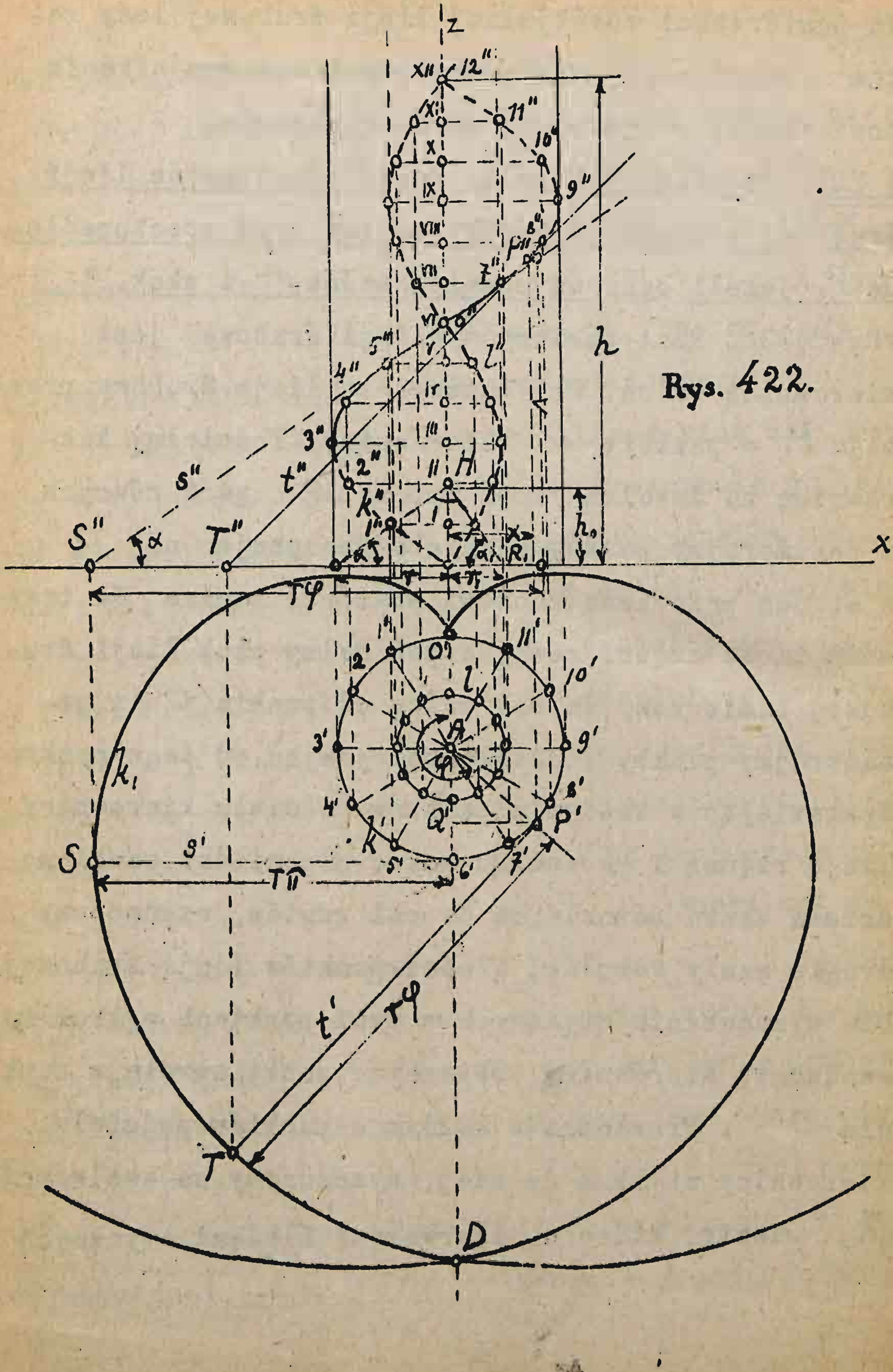
Rys.421.

wtedy $HR = \frac{r}{\cos\alpha}$; budując na HR trójkąt prostokątny z tym samym kątem przyległym α otrzymamy $RR_1 = HR : \cos\alpha = \frac{r}{\cos^2\alpha} = \varsigma$. Odcinek $AR_1 = r_1$; jest promieniem walca, na którym leży linja śrubowa wzajemna t, a kąt $AR_1H = \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$; jest jej spadkiem; wyznaczając w ten sam sposób promień krzywizny $\frac{r_1}{\cos^2\alpha}$ tej drugiej linji śrubowej znajdziemy ten sam co poprzednio odcinek $RR_1 = \varrho$. Gdy $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $r_1 = r$: linje śrubowe wzajemne są wtedy równe i symetryczne względem wspólnej osi.

Styczne s_0 do linji śrubowej s tworzą <u>powierzchnię rozwijalną</u>, której krawędzią zwrotu jest s. Przecięcie tej powierzchni płaszczyzną kierownicy t.j. jakąkolwiek płaszczyzną prostopadłą do osi jest <u>ewolwentą koła</u>. Punkt A jest tym punktem ewolwenty, z którego wychodzą dwie jej gałęzie do siebie styczne: jest to punkt zwrotu. Na średnicy AO leży nieskończenie wiele punktów podwójnych ewolwenty /§ 209/. Gdy przetniemy powierzchnię rozwijalną prostopadle do osi na wysokości z od płaszczyzny kierownicy, to otrzymamy w przecięciu tę samą ewolwentę koła, ale obróconą o kąt $\varphi = \frac{z}{h_0}$. Punkt zwrotu A oraz punkty podwójne $D_1, D_2, \ldots$ zakreślają więcej linje śrubowe o tym samym skoku h. Miejsce geometryczne punktu zwrotu stanowi linję śrubową daną; ponieważ w każdym punkcie podwójnym ewolwenty koła, przecinają się dwie tworzące powierzchni rozwijalnej, więc miejsce geometryczne każdego punktu podwójnego jest <u>linją samoprzenikania</u> tej powierzchni.

Na powierzchni rozwijalnej linji śrubowej leży zatem nieskończenie wiele śrubowych samoprzenikania powierzchni o tym samym skoku i skręcie.

§ 221. Zadanie. Wykreślić rzuty prostokątne linji śrubowej prawoskrętnej, której oś jest prostopadłą do P_1 jeżeli dane są promień walca r i skok h. /Rys.433/. Rzut poziomy k' linji śrubowej jest kierownicą walca. Przypuśćmy, że linja śrubowa przebija P_1 w punkcie O' kierownicy. Podzielmy kierownicę na dowolną ilość np. na 12 części równych i ponumerujmy punkty podziału poczynając od O' w stronę przeciwną ruchowi skazówki zegara. Na taką samą ilość części równych podzielmy skok linji śrubowej odmierzony na osi walca od punktu O'' i ponumerujmy punkty podziału poczynając od tego punktu. Wystawiając w każdym z punktów podziału kierownicy linję rzędną i prowadząc przez odpowiedni punkt podziału skoku równoległą do osi rzutów, wyznaczymy drugie rzuty dowolnej ilości punktów linji śrubowej. Dla wyznaczenia stycznych w tych punktach wykreślmy ewolwentę kierownicy, obierając punkt zwrotu w punkcie O'. Prowadząc w każdym z punktów podziału kierownicy styczną do niej, wyznaczymy na ewolwencie k_1 punkty, które są pierwszymi śladami stycznych


z
XII
12"
11"
X
10"
IX
9"
VIII
8"
VII
7"
VI
5"
4"
l"
3"
2"
II
H
s"
t"
k"
1"
h
h₀
S"
T"
x
R₁
rφ
O'
1'
11'
2'
10'
l
3'
A
9'
φ
k₁
4'
8'
Q'
P'
k
S
s'
5'
6'
7'
Tπ
t'
rφ
T'
D

Rys. 422.

do śrubowych w tych jej punktach, które odpowiadają punktom podziału kierownicy; łącząc drugie rzuty punktów linji śrubowej z drugiemi rzutami odpowiednich pierwszych śladów wyznaczymy drugie rzuty szukanych stycznych.

Styczna do śrubowych w punkcie 6 jest równoległa do P_2 ; kąt jej drugiego rzutu z osią rzutów jest przeto spadkiem α linji śrubowej. Prowadząc przez R równoległą do s'' , wyznaczymy na osi parametr AH linji śrubowej; w samej rzeczy: $AH = r\,tg\,\alpha = h_0$. Prostopadła do RH w punkcie H wyznacza odcinek $A''R_1 = r_1$; jest to promień walca, na którym leży linja śrubowa wzajemna l o tym samym skoku, promieniu krzywizny i skręcie. Odcinek RR_1 jest promieniem krzywizny obu tych linji śrubowych.

§ 222. Zadanie. Wykreślić rzuty punktu P linji śrubowej prawoskrętnej o osi prostopadłej do P_1 , oraz rzuty stycznej w tym punkcie, jeżeli dane są r, h i φ . /Rys 421/. Przypuśćmy znowu, że punkt, w którym linja śrubowa przebija P_1 jest punktem kierownicy najbliższym osi x . Odmierzmy w stronę przeciwną ruchowi skazówki zegara kąt φ , którego jednym ramieniem jest $A'O'$; punkt P' , w którym drugie ramię tego kąta przecina kierownicę, będzie pierwszym rzutem punktu P . W punkcie P' poprowadźmy styczną do kierownicy; odmierzmy na niej $P'T = r\varphi$; punkt T jest pierwszym śladem stycznej do śrubowej w punkcie P. Aby wyznaczyć wysokość z punktu P odmierzmy na osi x od punktu S'' odcinek $r\varphi$; druga przyprostokątna trójkąta prostokątnego, którego jedna przyprostokątna $= r\varphi$ a kąt do niej przyległy jest α, będzie równa szukanej wysokości. Łącząc punkt P'' z T'', otrzymamy drugi rzut t'' stycznej t.

Na mocy powyższego wykreślenia znajdziemy łatwo równanie drugiego rzutu k'' linji śrubowej k. Obrawszy za osie spółrzędnych proste z i x, mamy dla punktu $P''/z, x/$: $x = P'Q' = r.\sin\varphi$; ; z trójkątów zaś podobnych: $z : h_0 = r\varphi : r$ skąd $z = h_0\varphi$;

Rugując φ, otrzymamy: $\frac{x}{r} = \sin\frac{z}{h_0}$; jest to równanie sinusoidy. Rzutem prostokątnym linji śrubowej na płaszczyznę równoległą do osi jest sinusoida.

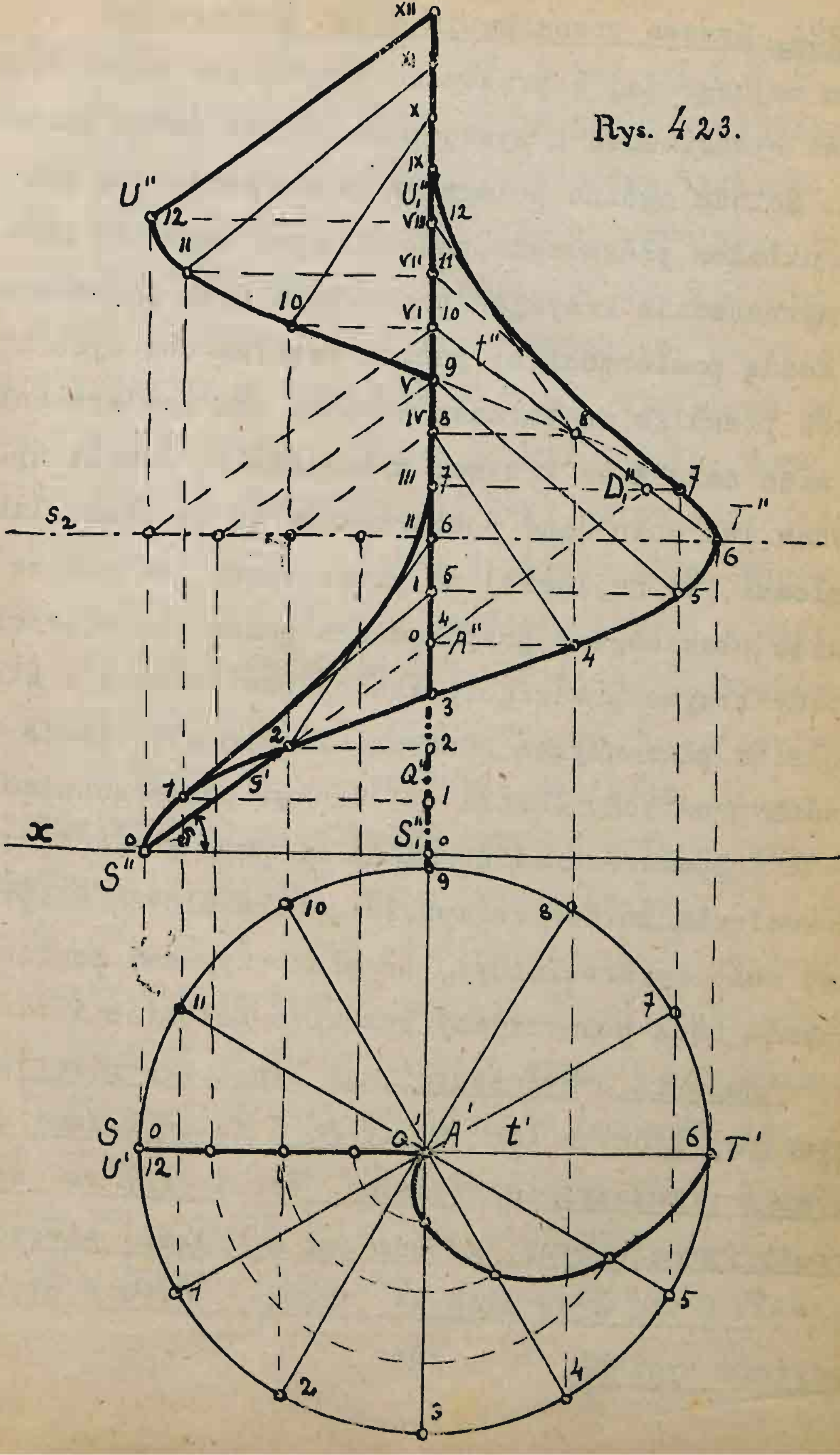
Można stwierdzić łatwo, że rzutem równoległym ukośnym linji śrubowej na płaszczyznę kierownicy, tj. na płaszczyznę protsopadłą do osi walca jest cykloida. W samej rzeczy, tworzenie linji śrubowej możemy rozumieć w ten sposób, że punkt P porusza się z szybkością stałą, na okręgu koła k, podczas gdy płaszczyzna tego koła przesuwa się również z szybkością stałą w kierunku do tej płaszczyzny prostopadłym. Jeżeli rzucimy ukośnie punkt ruchomy P na płaszczyznę $\mathbf{P}_1$, to jego rzut P_v' będzie w płaszczyźnie $\mathbf{P}_1$ wykonywał jednocześnie dwa ruchy jednostajne: 1/ ruch na obwodzie koła k_v' które jest rzutem ukośnym koła k z szybkością równą szybkości punktu P na tym kole, i 2/ ruch postępowy wraz z kołem k_v' z szybkością, która jest rzutem szybkości płaszczyzny koła k. Jeżeli tak zakreślony przez punkt P_v' na kole k_v' jest w danym odstępie czasu równy odcinkowi, który w tym samym czasie przebiega środek koła, to krzywa opisana przez punkt P_v' jest cykloidą zwyczajną, nastąpi to wtedy, gdy promienie rzucające punkt P są nachylone do $\mathbf{P}_1$, pod kątem α. Jeżeli nachylenie promieni rzucających jest $>\alpha$, to cykloida jest skurczona, jeżeli to nachylenie jest $<\alpha$, to cykloida jest wyciągniętą.

Wyniki tego rozważania można wyrazić w następujący sposób: Cieniem linji śrubowej na płaszczyczyźnie kierownicy, rzuconym przez promienie równoległe, jest cykloida zwyczajna, skurczona lub wyciągnięta, zależnie od tego, czy nachylenie promieni świetlnych do płaszczyzny kierownicy jest równe, większe lub mniejsze od spadku linji śrubowej.

§ 223. Konoida śruby i powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie. Powierzchnia rozwijalna linji śrubowej jest przypadkiem szczególnym powierzchni śrubowych prostokreślnych, powstałych przez ruch śrubowy prostej jakiejkolwiek. Ważne znaczenie praktyczne mają przedewszystkiem te powierzchnie prostokreślne skośne, w których tworząca przecina oś /powierzchnie śrubowe zamknięte/. Jeżeli tworzące są przytem prostopadłe do osi, to powierzchnia nazywa się konoidą śruby. Jest to powierzchnia utworzona przez normalną główną linji śrubowej; proste $1\overline{I}$, $2\overline{II}$, $3\overline{III}$.... /Rys.423/ są tworzącemi tej powierzchni. Ma ona zastosowanie w śrubach o płaskim gwincie, powstającym przez ruch śrubowy prostokąta, którego płaszczyzna przechodzi przez oś, a jeden z boków jest do niej równoległy i równa się wysokości skoku.- Jeżeli tworząca przecina oś pod kątem ostrym, to utworzona przez ruch śrubowy tej prostej powierzchnia nazywa się powierzchnią śrubową o ostrym gwincie, nazwanej tak dlatego, że ma ona zastosowanie w śrubach o ostrym gwincie. Nazywamy tak figury powstałe przez ruch śrubowy trójkąta, którego płaszczyzna przechodzi przez oś, a podstawa jest do niej równoległa i równa się wysokości skoku.

<u>Zadanie.</u> <u>Wykreślić rzuty prostokątne powierzchni śrubowej o ostrym gwincie i wyznaczyć przecięcie jej płaszczyzną prostopadłą do osi.</u> Oś dzieli powierzchnie na dwie powłoki: górną i dolną; jeżeli oś jest pionową. Wykreślimy jednak skok dolnej powłoki powierzchni śrubowej o ostrym gwincie. - Niechaj oś $a'a''$ (Rys.423) będzie prostopadła do P_1 a prosta $s's''$ niech będzie tworzącą powierzchni równoległą do P_2 ; o nachyleniu σ do P_1 . Tworząca ta przecina oś a w punkcie $A'A''$ a P , przebija w punkcie SS'' . STU niechaj będzie jednym skokiem leżącej na powierzchni linji śrubowej; skok ten podzieliliśmy na 12 równych części w punktach: 1 , 2, 3 , ... 11 , przez które prowadzimy tworzące powierzchni; tworzące te wyznacza na osi a odcinki $\overline{oI}$, $\overline{I\,II}$, $\overline{II\,III}$, ... $\overline{XI\,XII}$, równe $\frac{1}{12}$ wysokości skoku S_1U_1 . Dla prostoty wykreślenia obraliśmy punkt A w jednym z punktów podziału wysokości skoku.

Każda płaszczyzna przechodząca przez oś a przecina powierzchnię według dwóch układów prostych równoległych; w tej płaszczyźnie, która jest równoległa do P_2, proste jednego układu są równoległe do s proste drugiego układu do t. Punkty przecięcia D_1, D_2 ..... prostych jednego układu z prostymi drugiego leżą na linjach śrubowych zwanych <u>krawędziami samoprzenikania</u> powierzchni; wzdłuż tych linji powłoka górna przecina powłokę dolną powierzchni.- Przetnijmy powierzchnię płaszczyzną S prostopadłą do osi a. Krzywa przecięcia będzie miejscem geometrycznym punktów, w których tworzące przebijają płaszczyznę S. Otóż odległość punktu przecicia płaszczyzny S którąkolwiek tworzącą od osi jest proporcjonalna do odległości tej płaszczyzny od punktu, w którym ta tworząca przecina oś, ta zaś jest proporcjonalna do kąta φ, który odpowiada łukowi śrubowej STU pomiędzy płaszczyzną S i tworzącą. Krzywa płaska posiadająca tę własność, że odległość dowolnego jej punktu od pewnego stałego punktu jej płaszczyzny jest proporcjonalna do kąta, zakreślonego przez promień wodzący tego dowolnego punktu, nazywa się <u>spiralną Archimedesa</u>. Tak więc: <u>przecięcie powierzchni śrubowej o ostrym gwincie, płaszczyzną prostopadłą do osi jest spiralną Archimedesa.</u>



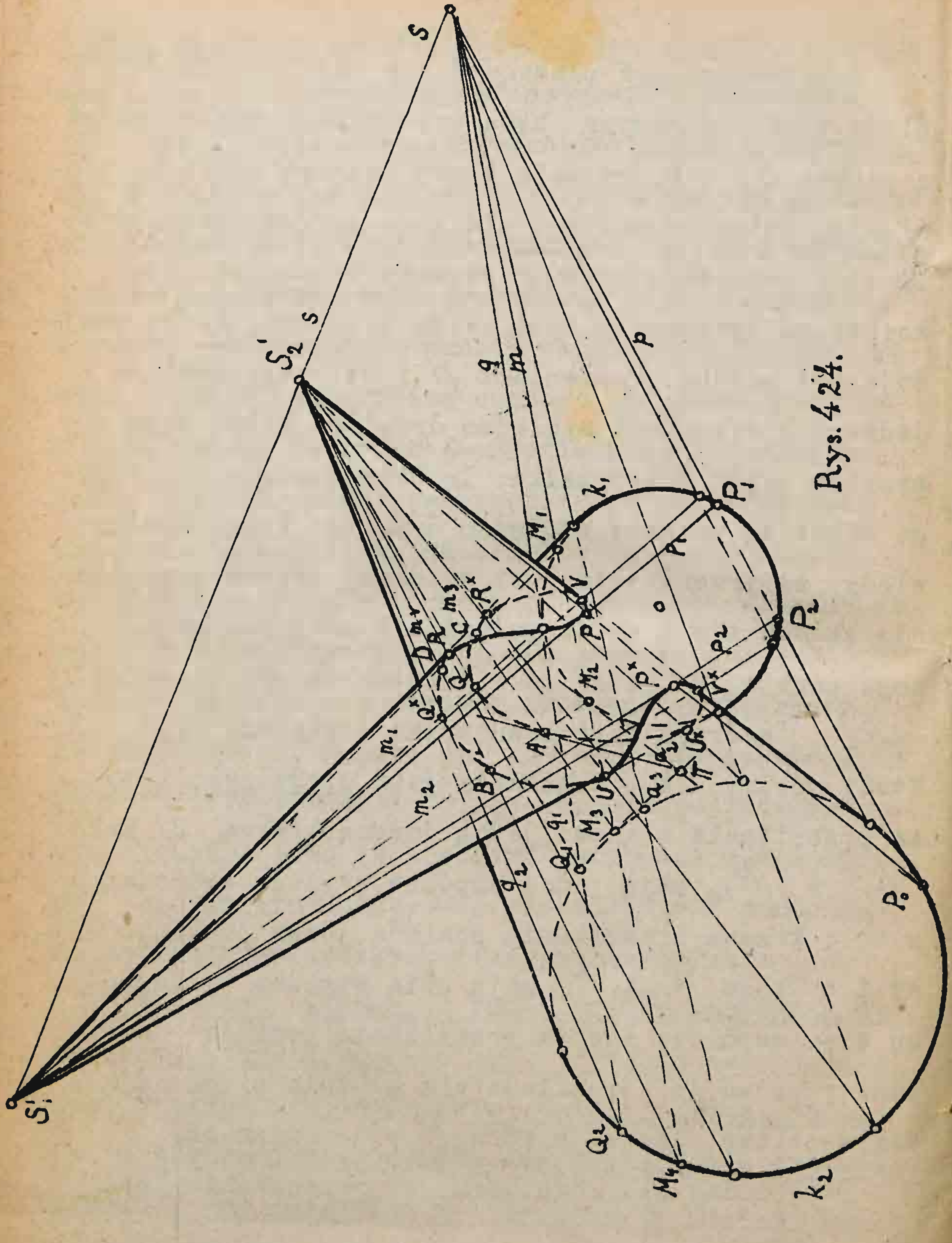
Rys. 423.

§ 224. Krzywa przenikania dwóch powierzchni. Jednem najczęściej w praktyce spotykanych zagadnień jest wyznaczenie krzywej przenikania dwóch powierzchni. Metoda ogólna polega na przecinaniu obu powierzchni układem płaszczyzn pomocniczych dogodnie obranych i wyznaczaniu krzywych przecięcia tych płaszczyzn z każdą powierzchnią; punkty wspólne obu tych krzywych płaskich są zarazem wspólne obu powierzchniom, a więc należą do krzywej przenikania. Jeżeli np. jedna lub obie dane powierzchnie są stożkami lub walcami, to najlepiej za płaszczyzny pomocnicze wziąć płaszczyzny przechodzące przez oba wierzchołki; wtedy krzywe przecięcia każdej powierzchni z którąkolwiek płaszczyzną sieczną składać się będzie z dwóch prostych. Jeżeli np. danemi powierzchniami są kula i powierzchnia drugiego stopnia posiadająca przecięcia kołowe (elipsoida, paraboloida eliptyczna, obie hyperboloidy), to płaszczyznami pomocniczymi- będą płaszczyzny przecięć kołowych i t.d.

Zadanie. Wyznaczyć rzut linji przenikania dwóch stożków, których kierownice k_1 i k_2 są kołami leżącymi w płaszczyźnie rysunku, jeżeli dane są nadto rzuty (prostokątne, ukośne lub środkowe) wierzchołków S_1 i S_2 oraz ślad S prostej S_1S_2 w płaszczyźnie rysunku. (Rys.424).

Poprowadźmy pęk płaszczyzn o osi $S \equiv S_1 S_2$ ślady tych płaszczyzn będą promieniami wychodzącemi z punktu S. Oczywiście w grę wchodzą tylko te promienie, które przecinają oba koła kierownicze; jeżeli tedy poprowadzimy z S styczne do obu kół, to korzystać będziemy z tych tylko promieni, które znajdują się między promieniami p i q stycznymi do jednego z siecznemi względem drugiego koła. Mogą przytem zajść 4 przypadki: 1/.Obie styczne do jednego z kół są sieczne względem drugiego koła. Mówimy wtedy, że przenikanie jest zupełne; krzywa przenikania składa się z dwóch gałęzi nie mających wspólnego punktu, 2/ Jedna ze stycznych do k_1 przecina k_2 a druga jest zewnętrzną względem k_2, Wtedy mówimy, że przenikanie jest <u>częściowe</u>; krzywa przenikania stanowi jedną jedyną krzywą, 3/ Koła k_1 i k_2 mają jedną wspólną styczną wychodzącą z S; krzywa przenikania posiada jeden punkt podwójny i 4/ koła k_1 i k_2 mają obie styczne wychodzące z S wspólne; krzywa przenikania posiada dwa punkty podwójne i rozkłada się na dwie przecinające się stożkowe, leżące w różnych płaszczyznach.

Przypuśćmy np. /Rys.434/, że przenikanie jest



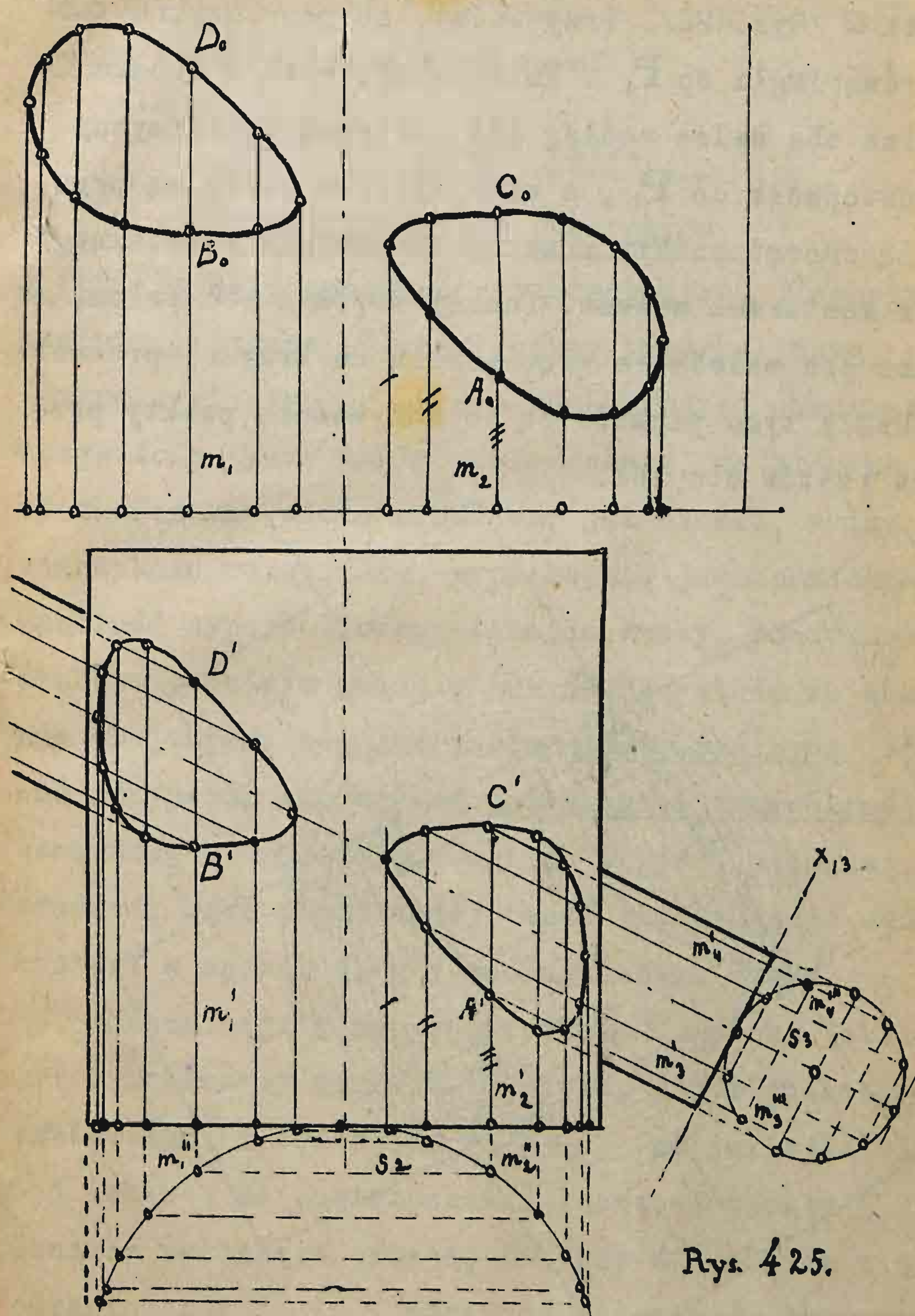
Rys. 424.

częściowe, t.j. że styczna p do k_2 przecina k_1 w punktach P_1 i P_2, a styczna q do k_1 przenika k_2 w punktach Q_1 i Q_2. Aby wyznaczyć 4 punkty krzywej przenikania, leżące w jednej płaszczyźnie pomocniczej, prowadzimy z S promień jakikolwiek m, który niechaj będzie śladem tej płaszczyzny; oznaczmy literami M_1, M_2, M_3 i M_4 punkty, w których m przecina koła k_1 i k_2. Łącząc M_1 i M_2 z S_1' otrzymamy rzuty dwóch tworzących m_1 i m_2, według których płaszczyzna sm przecina stożek S_1; łącząc M_3 i M_4 z S_2', otrzymamy podobnież rzuty tworzących m_3 i m_4, według których ta sama płaszczyzna przecina stożek S_2; punkty A, B, C i D, według których m_1 i m_2 przecinają m_3 i m_4, są punktami linji przenikania. Aby w którymkolwiek z tak otrzymanych punktów np. w A poprowadzić styczną do krzywej, zauważmy, że owa styczna musi leżeć w każdej z obu płaszczyzn stycznych, które można poprowadzić do stożków S_1 i S_2 w ich punkcie wspólnym A. Śladami tych płaszczyzn na styczne a_2 i a_3 do kierownic k_1 i k_2 w punktach M_2 i M_3; punkt $T \equiv a_2 a_3$ jest śladem szukanej stycznej: prosta AT jest więc jej rzutem. Dla szybkiego i dokładnego wykreślenia krzywej przenikania zaleca się przedewszystkiem wyznaczenie 1/ punktów P, P^x, Q i Q^x, w których krzywa jest styczna do tworzących p_1, p_2, q_1 i q_2, 2/ punktów R, R^x, U, U^x, V i V^x, w których krzywa jest styczna do konturu rzeczywistego obu stożków.

<u>Zadanie. Wyznaczyć rzut krzywej przenikania dwóch walców, których osie są równoległe do P_1.</u> /Rys.425/. Zadanie to różni się od poprzedniego tylko tem, że wierzchołki obu stożków są niewłaściwe. Za płaszczyzny pomocnicze obieramy płaszczyzny równoległe do osi obu walców, t.j. do P_1. Wykreśliwszy rzuty walców na płaszczyzny P_2 i P_3 prostopadłe do P_1, wyznaczymy pierwsze rzuty tworzących m_1, m_2, m_3 i m_4, według których jakakolwiek płaszczyzna S równoległa do P_1 przecina jeden i drugi walec. Punkty A, B, C i D, w których tworzące m_1 i m_2 przecinają tworzące m_3 i m_4 należą do krzywej przenikania.- Rozwinąwszy powierzchnię boczną jednego z walców wyznaczamy na niej z łatwością punkty A_0, B_0, C_0 i D_0 należące do rozwinięcia krzywej przenikania.

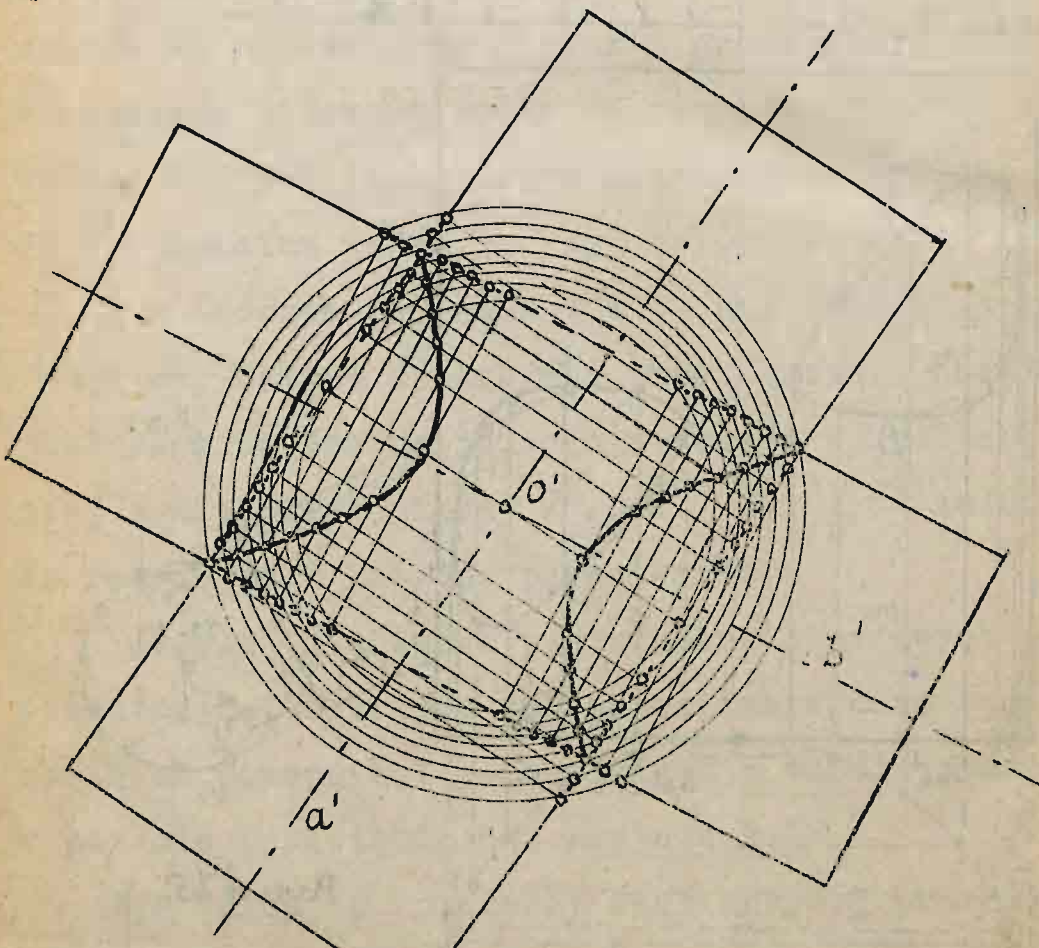
Jeżeli osie dwóch powierzchni obrotowych się przecinają, to krzywa ich przenikania może być wyznaczona za pomocą kul pomocniczych o wspólnym środku w punkcie przecięcia osi /<u>metoda kul</u>/.

Wykreślmy np. pierwszy rzut krzywej przenikania dwóch walców o osiach a i b, przecinających się w



Rys. 425.

punkcie O /Rys.426/. Przypuśćmy, że płaszczyzna ab jest równoległa do P_1. Kula jakakolwiek o środku O przecina oba walce według kół, których płaszczyzny są prostopadłe do P_1, a więc których rzuty są prostemi łączącemi punkty przecięcia konturu widzialnego kuli z konturami walców. Punkty wspólne obu kołom, są wspólne obu walcom, a więc należą do krzywej przenikania. Rzuty tych punktów są to oczywiście punkty przecięcia rzutów obu kół.



Rys. 426.

Można łatwo okazać, że rzutem krzywej przenikania w tym przypadku jest hyperbola, dla której rzuty osi walców są średnicami sprężonemi.

ROZDZIAŁ XVIII.

O POWIERZCHNIACH OBROTOWYCH.

§ 225. Pojęcie ogólne o powierzchniach. Płaszczyzny styczne, styczne główne. Punkty hyperboliczne, paraboliczne i eliptyczne. Przez ruch prostej utworzyć można oczywiście tylko takie powierzchnie, na których leży nieskończenie wiele prostych, jak stożki, walce, powierzchnie rozwijalne, hyperboloid jednopowłokowy, paraboloid hyperboliczny, kanoida śruby, powierzchnia śrubowa o ostrym gwincie i t.d. Wszystkie te powierzchnie obejmujemy wspólną nazwą prostokreślnych. Stanowią one przypadek szczególny powierzchni krzywokreślnych, utworzonych ogólnie przez ruch krzywej płaskiej lub skośnej, bądź niezmiennej, bądź zmieniającej swój kształt w sposób ciągły według danego prawa.

Niech będzie na powierzchni Π punkt jakikolwiek P. Połączymy go z jakimkolwiek innym punktem P_1 tej powierzchni i zbliżajmy P_1 do P na jakiejkolwiek krzywej leżącej na powierzchni i łączącej punkty P i P_1. Granicę położenia prostej PP_1 gdy P_1 zbliża się nieograniczenie do P, nazwiemy styczną t do powierzchni w punkcie P . Jest to więc prosta, mająca z powierzchnią dwa punkty zjednoczone wspólne. Każda płaszczyzna przechodząca przez styczną t przetnie powierzchnię według krzywej płaskiej stycznej do t w punkcie zetknięcia P .

W każdym punkcie P powierzchni Π istnieje nieskończenie wiele stycznych $t_1, t_2, t_3 \ldots$ albowiem w punkcie P przecina się nieskończenie wiele krzywych leżących na Π . Dowiedziemy, że wszystkie te styczne leżą w jednej płaszczyźnie. W samej rzeczy obierzmy dwie jakiekolwiek styczne w punkcie P ; t_1, t_2 i poprowadźmy płaszczyznę $T \equiv t_1 t_2$. Przecina ona Π według krzywej stycznej zarówno do t_1 , jak do t_2 w tym samym punkcie P . Punkt ten jest przeto punktem podwójnym /wzgl. punktem odosobnionym/ krzywej przecięcia i każda prosta $t_3, t_4, t_5 \ldots$ leżąca w płaszczyźnie T i przechodząca przez punkt P ma z tą krzywą, a więc i z powierzchnią dwa punkty zjednoczone wspólne; jest to więc styczna do powierzchni Π w punkcie P .

Płaszczyzna T , w której leżą wszystkie styczne do powierzchni Π w punkcie P , nazywa się <u>płaszczyzną styczną</u> do Π w tym punkcie. Prosta prostopadła do T w punkcie P nazywa się <u>normalną</u> do powierzchni w punkcie P .

Z pośród stycznych do powierzchni Π w punkcie P

wyróżniamy dwie, zwanemi stycznemi głównemi, które mają już nie dwa, ale trzy zjednoczone punkty wspólne z krzywą przecięcia, a więc i z powierzchnią Π. Każda z nich jest granicą położenia siecznej, która łączy punkt podwójny P z punktem P_2 lub P_3 jednej z gałęzi krzywej przecięcia, gdy te punkty zbliżają się nieograniczenie do P. Każda płaszczyzna przechodząca przez jedną z tych stycznych przecina powierzchnię według krzywej, która w punkcie P ma punkt przegięcia.

Styczne główne mogą być albo rzeczywiste i różne /punkt P jest wtedy punktem podwójnym krzywej przecięcia/, albo rzeczywiste i zjednoczone /punkt P jest wtedy punktem zwrotu/, albo urojone sprzężone /punkt P jest wtedy punktem odosobnionym krzywej przecięcia/. W pierwszym przypadku punkt P nazywa się punktem hyperbolicznym powierzchni, w drugim - parabolicznym, w trzecim - punktem eliptycznym.

§ 226. Pojęcie ogólne o powierzchniach obrotowych. Równoleżniki i południki. Jeżeli krzywa płaska lub skośna k, sztywno związana z prostą a, obraca się dokoła niej, to powierzchnia przez ruch krzywej k utworzona nazywa się obrotowa. Prosta a nazywa się osią powierzchni. Każdy punkt P krzywej tworzącej k opisuje koło, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi a i którego środek na niej leży. Koła te nazywamy równoleżnikami.

Powierzchnie obrotowe są najpospolitsze z powierzchni spotykanych w technice i w życiu codziennym, że wspomnimy tylko niezliczone ciała otrzymane na tokarni i kole garncarskiem.

Ze sposobu w jaki powstaje powierzchnia obrotowa, wynika, że przez obrót dokoła osi α przesuwać się ona będzie sama w sobie, że zatem może ona powstać przez ruch obrotowy każdej wykreślonej na niej krzywej, która przecina wszystkie równoleżniki. W szczególności powstanie ona przez obrót krzywej przecięcia powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez oś. Krzywa taka nazywa się południkiem powierzchni. Ponieważ przez obrót o 180° płaszczyzna południka powraca do swego położenia pierwotnego, przechodząc przez położenia wszystkich innych południków, więc: wszystkie południki są równe i każdy z nich jest symetryczny względem osi.

Przez swoją oś i południk powierzchnia obrotowa jest wyznaczona. Przez każdy punkt powierzchni przechodzi jeden równoleżnik i jeden południk; przecinają się one pod kątem prostym, gdyż płaszczyzna każdego południka przecina każdy równoleżnik prostokątnie.

Płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej w danym jej punkcie P jest jak zawsze, wyznaczona przez dwie jakiekolwiek styczne do powierzchni w tym punkcie, a więc przez styczną do równoleżnika i styczną do południka przechodzącego przez punkt P .

Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach jednego południka są prostopadłe do płaszczyzny tego południka, albowiem przechodzą przez prostopadłe do niej styczne do równoleżnika. Płaszczyzny te powłóczą walec, rzucający powierzchnię obrotową w kierunku prostopadłym do płaszczyzny południka.

Jeżeli oś jest prostopadła do P_1 ,to południk, którego płaszczyzna jest równoległa do P_2 ,nazywa się <u>południkiem głównym</u>. Jest on konturem rzeczywistym pionowym powierzchni obrotowej; konturem widzialnym pionowym jest równy mu rzut pionowy tego południka.

Ponieważ przez obrót dokoła osi płaszczyzna styczna do powierzchni obrotowej przystanie do innej płaszczyzny stycznej, a punkt zetknięcia pozostanie na tym samym równoleżniku, więc:

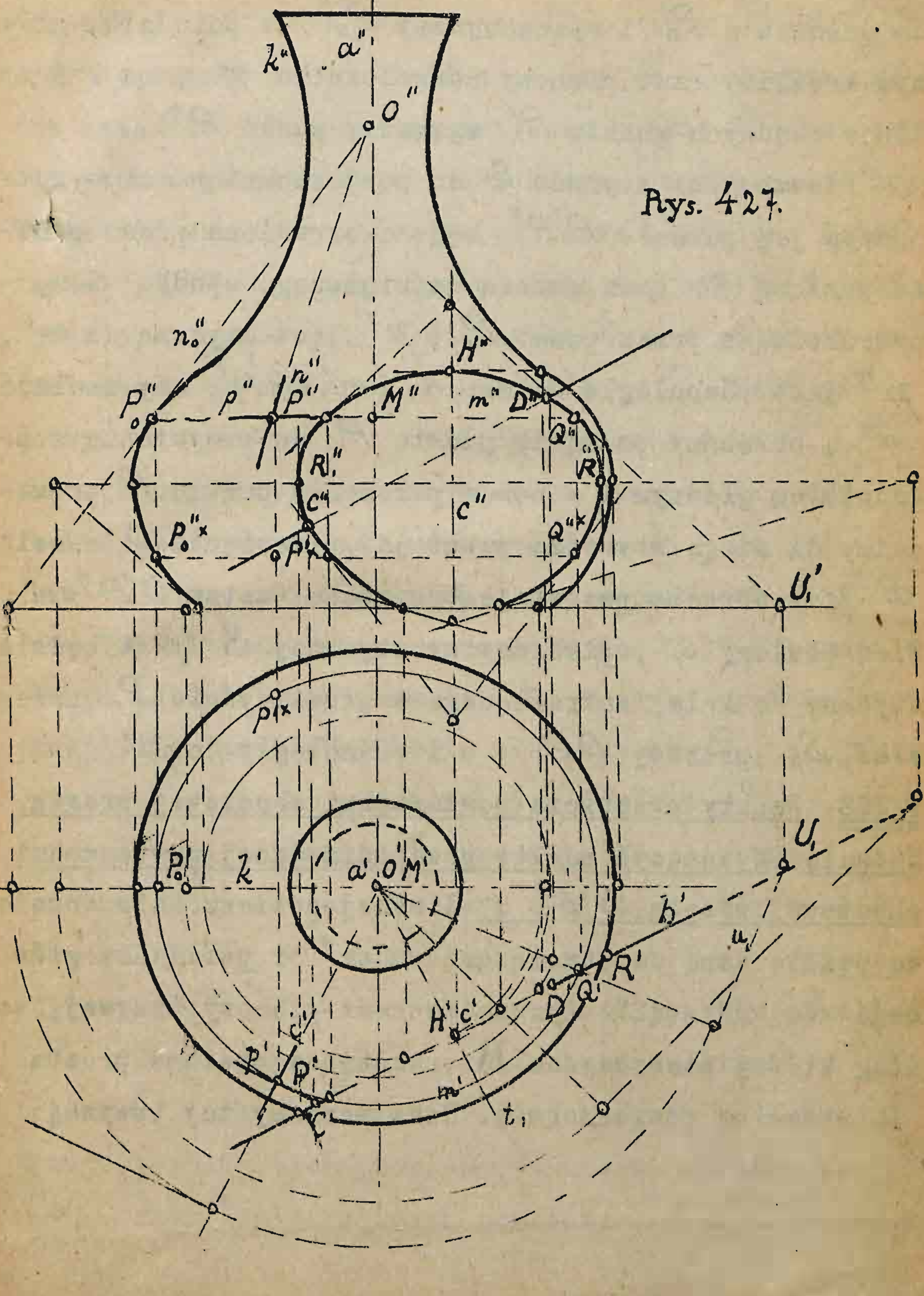
<u>Płaszczyzny styczne do powierzchni obrotowej w punktach jednego równoleżnika powłóczą wogóle stożek obrotowy, którego osią jest α , a tworzącemi są styczne do południków w punktach przecięcia ich z tym równoleżnikiem.</u>

W dwóch wypadkach atoli stożek ten wyrodnieje:

1/gdy styczna do południka jest równoległa do osi; wtedy płaszczyzny styczne powłóczą walec a punkty zetknięcia leżą na równoleżniku maximum /równik/ lub minimum /koło szyjne/; są to kontury rzeczywiste poziome równe zresztą konturom widzialnym poziomym; 2/gdy styczna do południka jest prostopadła do osi, wtedy płaszczyzny są zjednoczone w płaszczyźnie prostopadłej do osi.

§ 227. Rzuty punktu leżącego na powierzchni obrotowej.

Zadanie. Powierzchnia obrotowa jest dana przez rzut poziomy osi prostopadłej do P_1, oraz przez rzut pionowy południka głównego /kontur pionowy/. Mając jeden rzut punktu leżącego na powierzchni wyznaczyć rzut drugi. Niech k'' /Rys.427/ będzie rzutem pionowym południka głównego, $a'a''$ rzutami osi obrotu; prócz tego dany jest jeden rzut, np. P'' punktu P, leżącego na powierzchni. Przez P'' poprowadźmy równoległą do x; będzie to rzut pionowy równoleżnika m przechodzącego przez P. Odcinek $P_0''M''$ jest promieniem tego równoleżnika; jeżeli przeto z punktu a' zakreślimy tym promieniem koło, to otrzymamy rzut poziomy równoleżnika m. Linja rzędnych punktu P'' wyznacza na m' dwa punkty P' i P'^x, które są poziomemi rzutami punktów powierzchni mających P'' za rzut pionowy. Gdyby dany był rzut poziomy P' punktu powierzchni, a należało



Rys. 427.

znaleść rzut pionowy P'', to obróciwszy P' dokoła a' do położenia P_0' i wyznaczywszy P_0'' na południku głównym kreślimy rzut pionowy równoleżnika m, na którym linja rzędnych punktu P' wyznaczy punkt P''.

Płaszczyzna styczna S do powierzchni w tak wyznaczonym jej punkcie $P'P''$ będzie określona przez prostą poziomą p oraz prostą największego spadku n, przechodzące przez punkt P; p' jest styczną do m', p'' jest równoległą do osi x; $n' \equiv P'M'$; aby znaleść n'', obracamy południk punktu P do przystania z południkiem głównym i w nowem położeniu punktu P prowadzimy do niego styczną; punkt jej przecięcia O z osią a przy obrocie pozostaje bez ruchu, zatem $O''P'' \equiv n''$. Ślad poziomy s_1, płaszczyzny stycznej $S \equiv pn$ będzie styczny do koła, zakreślonego w płaszczyźnie P_1 przez ślad S_1 prostej OP i równoległy do p'.

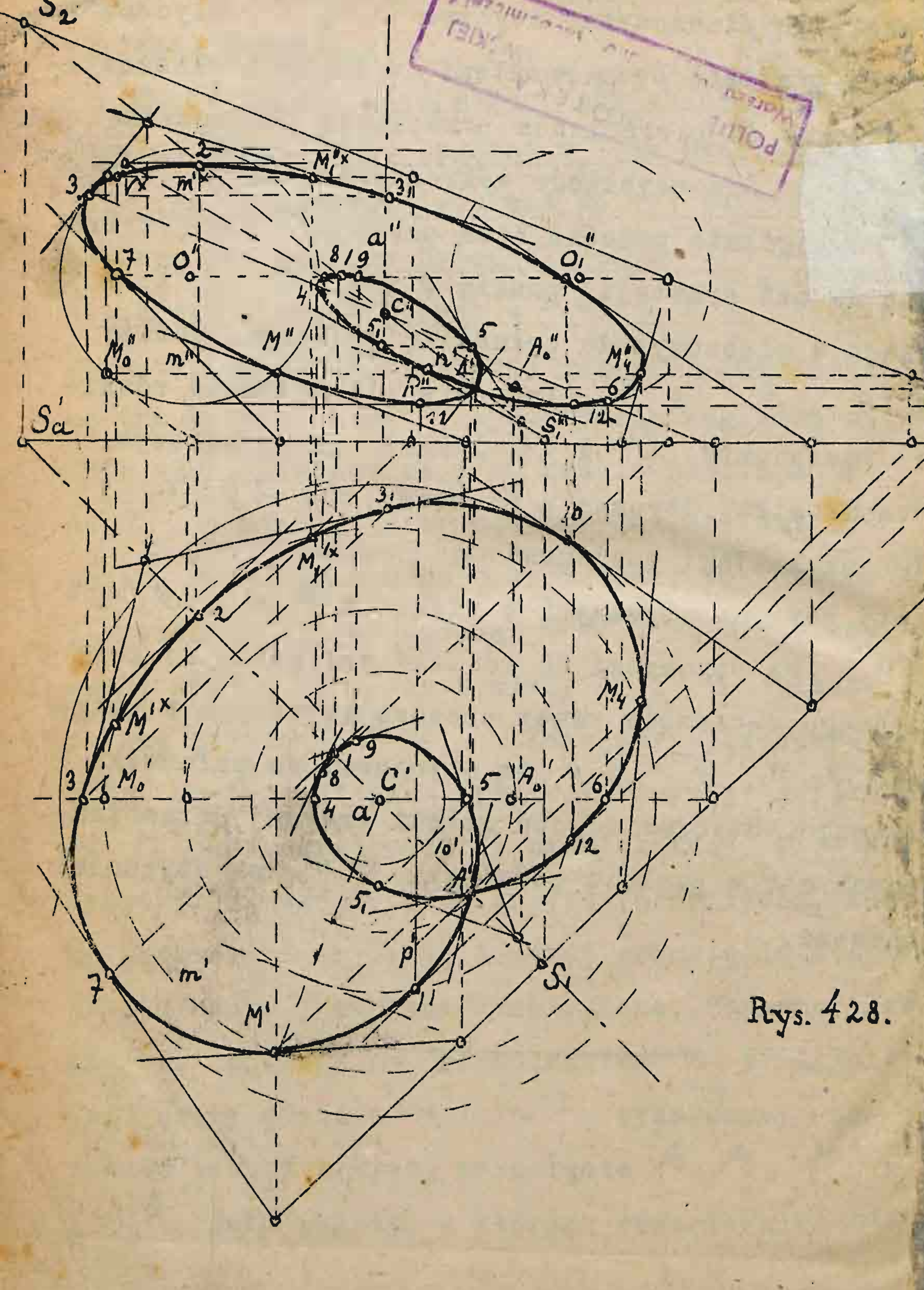
§ 228. **Punkty przebicia powierzchni obrotowej prostą.**

Zadanie. Wyznaczyć punkty przebicia danej powierzchni obrotowej prostą $b'b''$. Niechaj powierzchnia obrotowa będzie dana za pomocą osi $a'a''$ i południka głównego k'' /Rys.427/ Wyznaczmy rzut pionowy krzywej, według której płaszczyzna B rzucająca poziomo prostą b przecina powierzchnię. Rzut poziomy tej krzywej przystaje do śladu poziomego płaszczyzny B t.j. do b' ; biorąc na b' różne punkty Q' , znajdziemy na zasadzie poprzedniego artykułu punkty Q'' należące do szukanego pionowego rzutu krzywej przecięcia. Rozwiązanie zadania znacznie zostanie ułatwione dzięki symetrji krzywej przecięcia; osią tej symetrji jest prosta c przecięcia płaszczyzny B_1 , z płaszczyzną T_1 przechodzącą przez oś prostopadle do B_1 .Rzut pionowy H'' punktu H , którego poziomy rzut $H' \equiv b'\bar{t}_1$ będzie najwyższym lub najniższym punktem krzywej, w którym styczna jest równoległa do P_1 , a jej rzut pionowy równoległy do x ; w punktach R i R' równika styczne będą prostopadłe do x . Styczne w innym jakimkolwiek punkcie Q krzywej przecięcia znajdziemy jako przecięcie płaszczyzny B_1, z płaszczyzną styczną do powierzchni w punkcie Q ; rzut pionowy tej stycznej otrzymamy przez połączenie punktu Q'' z rzutem pionowym punktu, w którym b' przecina ślad u_1 płaszczyzny stycznej do powierzchni w punkcie Q .- Rzuty pionowe punktów przebicia C i D powierzchni prostą b będą punktami, w których b'' przecina rzut pionowy krzywej przecięcia; rzuty poziome tych punktów wyznaczone zostaną na b' przez linję rzędnych punktów: C'' i D''.

§ 229. Przecięcie powierzchni obrotowej płaszczyzną styczną. Zadanie.

Powierzchnię utworzoną przez obrót koła dokoła prostej zewnętrznej leżącej w jego płaszczyźnie, przeciąć płaszczyzną styczną do tej powierzchni w danym jej punkcie hyperbolicznym $A'A''$. Wyznaczyć styczne główne w punkcie A. Południkiem tej powierzchni zwanej pierścieniem kołowym są dwa koła O i O_1, symetryczne względem osi $a_1 a_{11}$ /Rys.428/. Niechaj oś $a'a''$ będzie prostopadła do P_1 i niechaj dany będzie rzut poziomy A' punktu A leżącego na powierzchni, znajdziemy A'' i wyznaczmy linję poziomą $p'p''$ i linję największego spadku $n'n''$ oraz ślady s_1 i s_2 płaszczyzny stycznej pn. Zauważmy przedewszystkiem, że n jest osią symetrji krzywej; dzięki czemu n' jest osią symetrji prostokątnej, a n'' osią symetrji ukośnej rzutów krzywej przecięcia. Każdemu punktowi i stycznej krzywej przecięcia odpowie przeto punkt i styczna symetryczna. Obrawszy dowolnie rzut poziomy m' równoleżnika m i znalazłszy jego rzuty pionowe m'' i m''^{x}, wyznaczymy odrazu 4 punkty krzywej przecięcia M, M_1, M^x, i M_1^x, jako punkty, w których równoleżniki m i m^x

przecinają płaszczyznę styczną S_1S_2. Styczne w tych punktach będą prostemi, w których płaszczyzny styczne do pierścienia przecinają płaszczyznę S_1S_2. Dla szybkiego wykreślenia rzutów krzywej szczególnie pomocne będą punkty 1 i 2, które leżą na osi symetrji, punkty 3, 4, 5 i 6, leżące w płaszczyźnie południka głównego, punkty 7, 8, 9 i 10, leżące w płaszczyźnie równika oraz punkty 11 i 12 leżące na najniższym równoleżniku. Styczne w punktach 1, 2, 11 i 12 są linjami poziomemi płaszczyzny S_1S_2; rzuty poziome stycznych w punktach 7, 8, 9 i 10 są stycznemi do równika względnie do koła szyjnego; wreszcie rzuty pionowe stycznych w punktach 3, 4, 5 i 6 są stycznemi do południka głównego. Styczne do obu gałęzi krzywej, przecinających się w punkcie podwójnym $A'A''$ są stycznemi głównemi. -


S2
Sa'
S1
O''
O1''
C''
a''
M''
M0''
m''
M4''
A0''
C'
a
M'
M0'
M'x
M4'
A0'
m'
p'
Rys. 428.