Za czwartą płaszczyznę rzutów P_4 obierzmy płaszczyznę prostopadłą do a'''; nową osią x_{34} będzie jakakolwiek prostopadła do a'''. Najdogodniej poprowadzić ją przez ślad T_3 prostej b, gdyż wtedy w tym samym punkcie będzie leżał również czwarty ślad T_4 prostej b. Spuszczając z punktu T_1''' prostopadłą na nową oś x_{34} i odmierzając na niej od punktu przecięcia jej z tą osią odcinek równy co do wielkości i znaku odległości zbytecznego rzutu T_1 od dawnej osi x_{13} znajdziemy czwarty rzut T_1^{IV} śladu T_1. Prosta $T_4 T_1^{IV}$ jest czwartym rzutem b^{IV} prostej b.

Ponieważ prosta a leży w płaszczyźnie P_3 i jest prostopadła do P_4, więc jej czwarty rzut a^{IV} jest punktem, w którym a''' przecina oś x_{34}. Długość odcinka prostopadłej spuszczonej z punktu a^{IV} na prostą b^{IV} jest równa odległości prostych skośnych a i b.

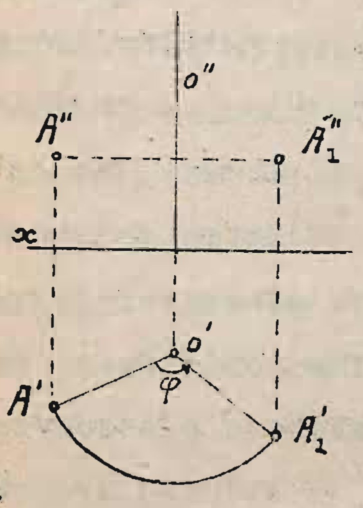
ROZDZIAŁ III.

OBROTY I KŁADY.

§ 28. Ruch obrotowy. Zmiana płaszczyzn rzutów miała na celu nadanie figurze przestrzennej innego położenia względem płaszczyzn rzutów. Cel ten może być wszakże osiągnięty inną jeszcze drogą. Zamiast zmieniać płaszczyzny rzutów, pozostawiając figurę nieruchomą w przestrzeni, możemy postąpić przeciwnie: pozostawiając bez zmiany płaszczyzny rzutów, możemy zmienić położenie figury w przestrzeni.

Wszelka zmiana położenia figury sztywnej może być dokonana zapomocą dwojakiego ruchu: przesunięcia równoległego lub obrotu dokoła osi. Przesunięciem równoległem nazywa się ruch, w którym wszystkie punkty figury zakreślają odcinki równe, równoległe i w jedną zwrócone stronę; oczywiście, rzuty wszystkich punktów figury zakreślają na płaszczyznach rzutów również odcinki równe, równoległe i w tę samą zwróconę stronę. Przez taki ruch rzuty figury nie ulegają zatem zmianie; zmienia się tylko położenie tych rzutów na płaszczyźnie rysunku. Inaczej mają się sprawy z ruchem obrotowym. Każdy punkt figury zakreśla łuk koła, którego płaszczyzna jest prostopadła do osi obrotu O i którego środek O leży na niej; promieniem koła, zakreślonego przez jakikolwiek punkt figury jest jego odległość od osi obrotu; wszystkie te promienie zakreślają równe kąty φ. Obrót figury jest przeto wyznaczony, gdy dana jest oś obrotu O oraz wielkość kąta obrotu φ.

§ 29. OBROT FIGURY DOKOŁA OSI PROSTOPADŁEJ DO JEDNEJ Z PŁASZCZYZN RZUTOW. Przedstawienie obrotu w rzutach prostokątnych staje się nader proste, jeżeli oś obrotu jest prostopadła do jednej z płaszczyzn rzutów, gdyż wtedy rzuty wszystkich punktów figury na tę płaszczyznę obracają się dokoła rzutu osi o kąt równy kątowi obrotu φ , tak że rzut całej figury obraca się dokoła rzutu osi o kąt φ . Niech będzie np. dany punkt $A'A''$ /Rys.93/ oraz oś $o'o''$ prostopadła do P_1 . Rzut poziomy o' osi jest punktem, odległość punktu A od osi o jest równa i równoległa do odcinka $A'o'$. Gdy punkt A obróci się dokoła osi O o kąt φ , to rzut A obróci się dokoła punktu o ten sam kąt φ i zajmie położenie punktu A_1' . Rzut pionowy A'' punktu A porusza się po prostej równoległej do x , bo odległość punktu A od P_1 nie ulega zmianie. Nowe położenie punktu A'' będzie tedy w punkcie A_1'' przecięcia prostopadłej do x z punktu A_1' z równoległą do x wyprowadzoną z punktu A'' .

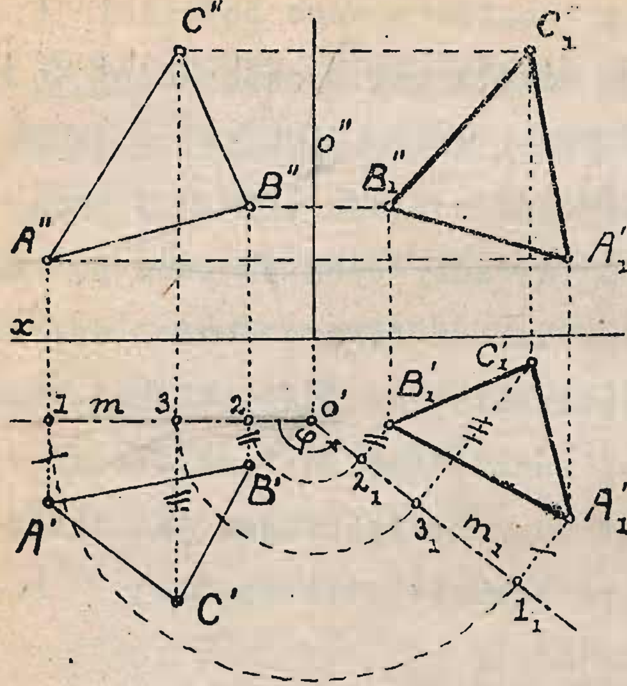


Rys. 93.

Dla znalezienia więc rzutów nowego położenia figury, obróconej o kąt φ dokoła osi prostopadłej do P_1 trzeba obrócić pierwsze rzuty wszystkich jej punktów o ten sam kąt dokoła pierwszego śladu osi O', przesuwając jednocześnie drugie rzuty tych punktów po równoległych do x. Gdy natomiast figura obraca się o kąt dany dokoła osi prostopadłej do P_2, trzeba drugie rzuty wszystkich jej punktów obrócić dokoła drugiego śladu osi O'' o kąt dany, przesuwając jednocześnie pierwsze ich rzuty po równoległych do x.

Rozwiążmy np. następujące

__ZADANIE. Trójkąt $A'B'C'$, $A''B''C''$ obrócić dokoła osi $O'O''$ prostopadłej do P_1 o kąt dany φ.__ /Rys.94/. Na mocy powyższej reguły należałoby przedewszystkiem obrócić punkty A', B' i C' o kąt φ dokoła punktu O'. Aby odrazu wykreślić nowe położenie trójkąta $A'B'C'$ po dokonanym obrocie jego wierzchołków, odniesiemy punkty A', B' i C' do odpowiednio obranej prostej m, znajdując rzuty tych punktów na nią oraz odległości tych rzutów od stałego punktu tej prostej. Za taką prostą najdogodniej jest obrać równoległą do x przez punkt O' poprowadzoną, a za stały punkt na niej obrany uważać sam punkt O'. Obróćmy teraz prostą m o kąt φ do położenia m'_1 wraz ze



Rys. 94.

znajdującymi się na niej punktami 1 , 2 i 3 , i z nowych położeń tych punktów 1_1 , 2_1 i 3_1 wyprowadzamy odcinki $1_1 A_1'$, $2_1 B_1'$ i $3_1 C_1'$ prostopadłe do m_1 i równe odpowiednio odcinkom $1A'$, $2B'$ i $3C'$.

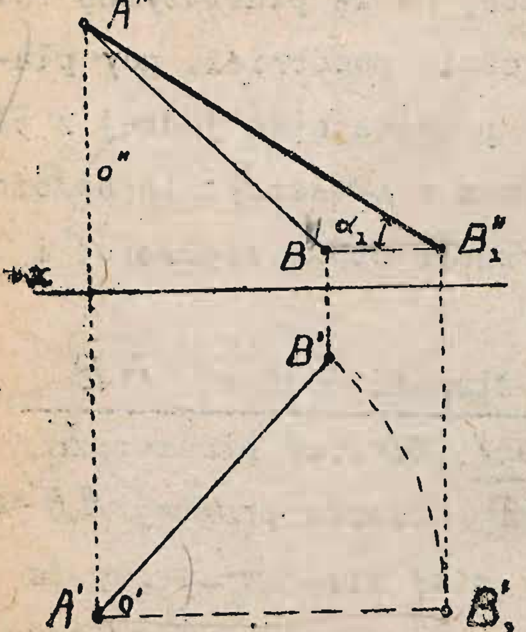
Drugie rzuty punktów A , B i C w nowym położeniu otrzymamy w przecięciu równoległych do x , wyprowadzonych z punktów A'' , B'' i C'' z prostopadłymi do niej spuszczonymi z punktów A_1' , B_1' i C_1' .

§ 30. Zastosowanie do zadań miarowych obrotu figur dokoła osi prostopadłej do P_1 lub do P_2 .

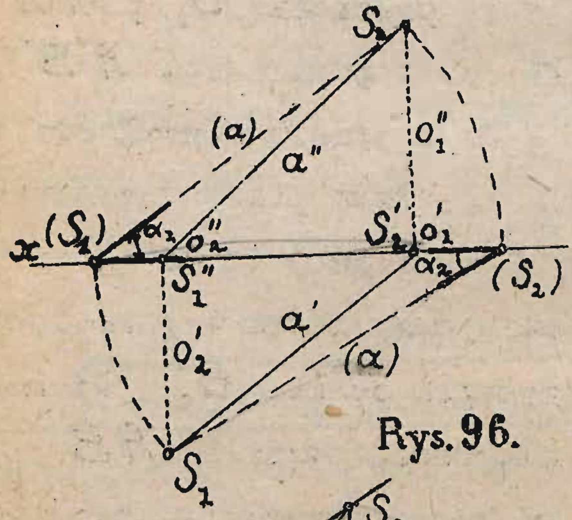
Najczęściej kąt obrotu φ nie jest dany, natomiast trzeba daną figurę obrócić dokoła danej osi o taki kąt, aby pewna prosta lub pewna płaszczyzna stała się równoległa lub przystała do jednej z płaszczyzn rzutów. Tym sposobem możemy znajdować prawdziwą wielkość i kształt wielu figur, gdy bowiem prosta jest równoległ do jednej z płaszczyzn rzutów lub do niej przystaje, to rzut każdego odcinka prostej na tę płaszczyznę równa się jego naturalnej wielkości; podobnież, gdy płaszczyzna jest równoległa lub przystaje do jednej z płaszczyzn rzutów, to każda figura w płaszczyźnie położona nie zmienia się w swoim rzucie co do wielkości i kształtu.

Znajdźmy np. prawdziwą długość odcinka AB, którego rzuty są dane /Rys.95/. Obróćmy płaszczyznę rzucającą poziomo prostą AB dokoła prostej $AA'=0$ o taki kąt, aby odcinek AB stał się równoległy do P_2. Wtedy rzut jego poziomy stanie się równoległy do x; aby więc otrzymać nowe położenie B_1' punktu B', zakreślmy z punktu A' koło promieniem $A'B'$ aż do przecięcia się tego koła z prostą równoległą x z punktu A' wyprowadzoną. Rzut pionowy punktu B będzie się posuwał po równoległej do x, nowe położenie B_1'' punktu B'' otrzymamy zatem w przecięciu tej równoległej z linją rzędnych punktu B_1'. Odcinek $A''B_1''$ będzie prawdziwą długością odcinka AB; jego zaś nachylenie do osi x będzie prawdziwą wielkością kąta α_1 prostej AB z płaszczyzną P_1.

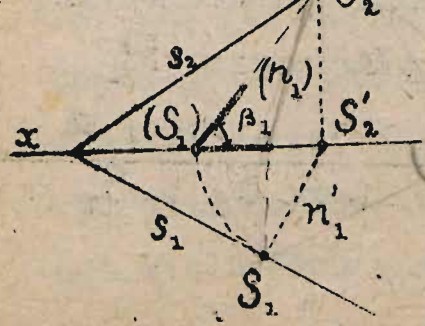
Znajdźmy jeszcze kąty α_1 i α_2 prostej a z płaszczyznami rzutów, gdy dane są ślady S_1 i S_2 prostej



Rys. 95.



Rys. 96.



Rys. 97.

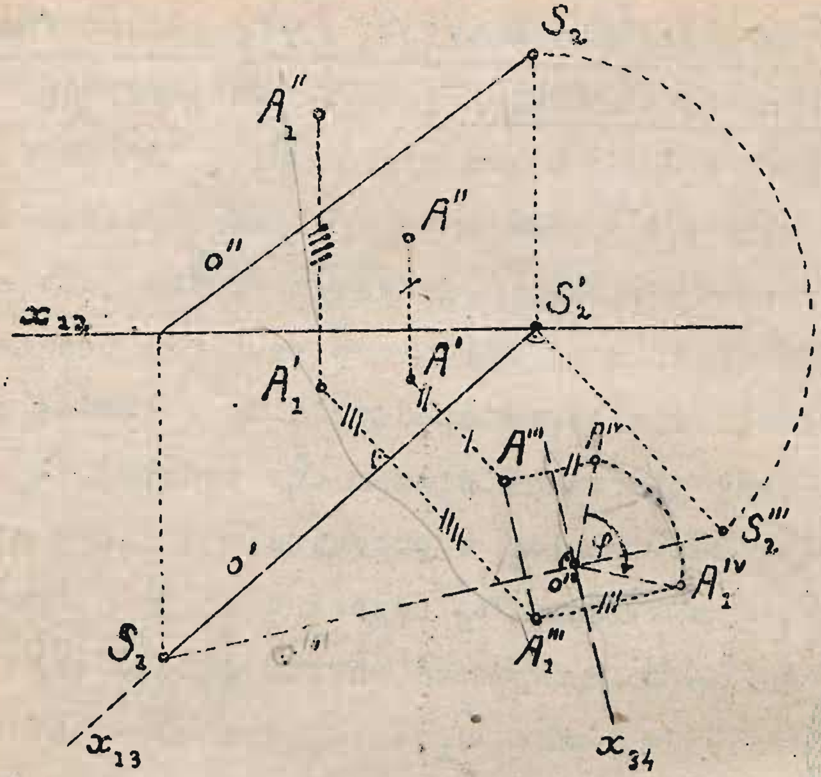
α /Rys. 96/. W tym celu obróćmy płaszczyznę rzucającą poziomo prostą α dokoła prostej S_2S_2' rzucającej poziomo ślad S_2, aż do przystania tej płaszczyzny do P_2. Punkt S_1 opisując łuk koła o środku S_2' przeniesie się na oś x do punktu (S_1); punkt S_2 jako punkt osi obrotu nie zmieni swego miejsca. Kąt α_1 prostej α z płaszczyzną P_1 jest to kąt tej prostej ze swym rzutem α'; po dokonanym obrocie kąt ten leży na P_2 - jest to kąt prostej (α) z osią x. W ten sam sposób znajdujemy kąt α_2 prostej α z płaszczyzną P_2.

Do zadania powyższego sprowadza się

ZADANIE. Znaleźć kąty β_1 i β_2 płaszczyzny $s_1 s_2$ z płaszczyznami rzutów. /Rys.97/. Znajdźmy np. kąt β_1 płaszczyzny $s_1 s_2$ z płaszczyzną $\mathbf{P}_1$. Poprowadźmy w płaszczyźnie $s_1 s_2$ prostą największego spadku n_1; kąt tej prostej ze swym pierwszym rzutem jest szukanym kątem dwuściennym. Pierwszy rzut tej prostej n_1' jest, jak wiadomo, prostopadły do s_1; spodek jego na s_1 jest tedy pierwszym śladem S_1 prostej n_1; drugi ślad S_2 leży na s_2 w przecieciu z linją rzędnych punktu S_2', w którym n_1' przecina oś x. Przenosząc ślad S_1 na oś x za pomocą obrotu dokoła S_2' i łącząc tak przeniesiony punkt S_1 ze śladem S_2, otrzymamy prawdziwą wielkość $S_2' / S_1 / S_2$ kąta β_1. W podobny sposób znaleźlibyśmy kąt β_2 płaszczyzny $s_1 s_2$ z $\mathbf{P}_2$.

§ 31. Obrót figury dokoła prostej jakiejkolwiek.

Przypuśćmy teraz, że mamy obrócić figurę daną o kąt dany φ dokoła prostej jakiejkolwiek $o'o''$. Wystarcza wskazać, jak znaleźć nowe położenie jednego jakiegokolwiek punktu figury, np. punktu A. Za pomocą podwójnej zmiany płaszczyzny rzutów możemy sprawić, że oś obrotu o będzie prostopadła do nowej pła-



Rys.98.

szczyzny rzutów P_4 , obróciwszy wtedy punkt A dokoła osi o o kąt φ , znajdziemy trzeci i czwarty rzut A_1''' i A_1^{IV} punktu A w nowym jego położeniu; powracając do pierwotnych płaszczyzn rzutów znajdziemy pierwszy i drugi rzuty tego punktu.

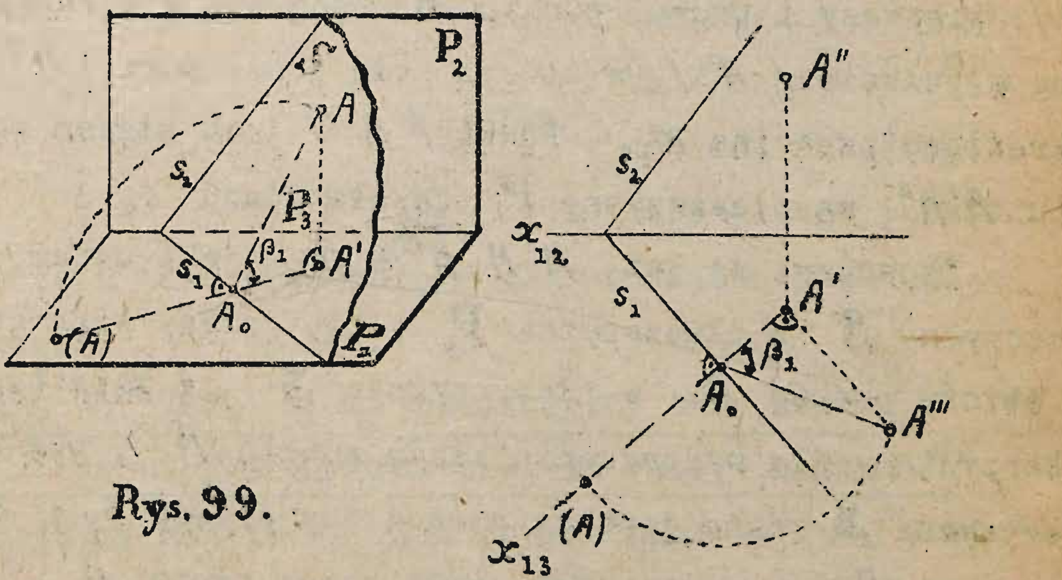
Niech więc będzie dany /Rys.98/ punkt $A'A''$ i prosta $o'o''$, której ślady oznaczmy przez S_1 i S_2 . Za trzecią płaszczyznę rzutów obierzmy płaszczyznę rzutującą prostą o poziomo, tak, że oś x_{13} przystaje do ... o' . Trzeci rzut o''' prostej o otrzymamy łącząc ślad S_1 z trzecim rzutem S_2''' drugiego śladu S_2, który znajdziemy, odmierzając na prostopadłej do o' w punkcie S_2' odległość drugiego śladu od zbytecznej osi x_{12}. Trzeci zaś rzut punktu A otrzymamy, odmierzając na prostopadłej spuszczonej z A' na x_{13} od punktu przecięcia jej z tą osią odległość zbytecznego rzutu A'' od dawnej osi x_{12}. Za czwartą płaszczyznę rzutów obierzmy jakąkolwiek płaszczyznę prostopadłą do o''', tak, że osią x_{34} będzie jakakolwiek prostopadła do o'''. Czwarty rzut o^{IV} prostej o będzie punktem, w którym ta nowa oś przecina o'''. Czwarty rzut A^{IV} punktu A znajdziemy odmierzając na prostopadłej do x_{34} spuszczonej z A''' odległość zbytecznego t.j. pierwszego rzutu A' tego punktu od dawnej osi, t.j. od x_{13}. Punkt A jest teraz odwzorowany zapomocą swych rzutów A''' i A^{IV}, (a prosta o prostopadła do P_4 zapom. swych rzut. o''' i o^{IV}). Jeżeli więc obrócimy A^{IV} dokoła o^{IV} o kąt φ, podczas gdy A''' przesunie się po równoległej do x_{34}, to otrzymamy rzuty A_1''' A_1^{IV} nowego położenia A_1 punktu A. Odrzućmy teraz płaszczyznę P_4, zastępując ją przez płaszczyznę P_1 prostopadłą do P_3, tak że nową osią będzie x_{13}, a dawną, t.j. zbyteczną x_{34}. Spuszczając z A_1''' prostopadłą na x_{13} i odmierzając na niej od punktu przecięcia z x_{13} odległość zbytecznego t.j. czwartego rzutu A_1^{IV} punktu A_1, znajdziemy A_1'. Zastąpmy teraz płaszczyznę P_3 przez płaszczyznę P_2 prostopadłą do P_1, t.j.

wprowadźmy nową oś x_{12}. Spuszczając z A_1' prostopadłą na x_{12} i odmierzając na niej od punktu przecięcia jej z x_{12} odległość zbytecznego t.j. trzeciego rzutu A_1''' od dawnej osi, t.j. od x_{13}, otrzymamy A_1''. Para rzutów A_1' i A_1'' odwzorowuje położenie punktu A po obrocie jego o kąt φ dokoła prostej O.

§ 32. Kłady płaszczyzn. Między obrotami figur dokoła osi jest jeden przypadek, zasługujący na szczegółowe omówienie. Jest to obrót płaszczyzny dokoła swego śladu, jeżeli kąt obrotu jest kątem nachylenia tej płaszczyzny do płaszczyzny rzutów lub jego spełnieniem. Po takim obrocie płaszczyzna oczywiście przystanie do jednej z płaszczyzn rzutów i figury w danej płaszczyźnie położone w naturalnym swym kształcie i wielkości ukażą się na tej płaszczyźnie rzutów. Taki obrót nazywa się kładem danej płaszczyzny na jedną z płaszczyzn rzutów.

W poprzednich przypadkach szczególnych dokonywaliśmy już kładów płaszczyzn. Takim kładem było np. znalezienie rzutu punktu $A'A''$ na trzecią płaszczyznę rzutów P_3 prostopadłą do P_1 lub P_2. Był to bowiem obrót płaszczyzny P_3 wraz z leżącym na niej punktem A''' o kąt prosty dokoła jej śladu x_{13} lub x_{23}. Pozostaje nam tutaj zbadać kład płaszczyzny nie prostopadłej do tej płaszczyzny rzutów, na którą, przez obrót dokoła odpowiedniego śladu, mamy kład wykonać.

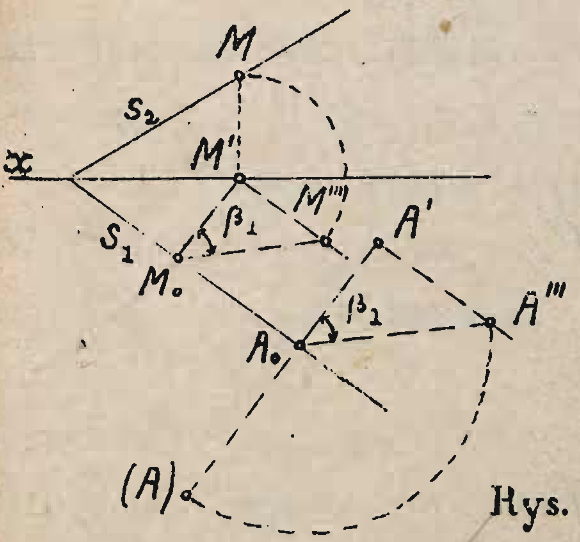
Niech płaszczyzna S będzie dana zapomocą pierwszego swego śladu s_1 oraz rzutów $A'A''$ punktu A w niej leżącego /Rys.99/. Mamy obrócić punkt A dokoła s_1 o jeden z kątów między płaszczyznami S i P_1,



Rys. 99.

tak żeby punkt A znalazł się w płaszczyźnie P_1. Za nową płaszczyznę rzutów P_3 weźmiemy płaszczyznę, w której dokonywa się obrót punktu A, tak że nową osią x_{13} będzie prostopadła spuszczona z punktu A' na s_1. Trzecim rzutem punktu A będzie punkt A''', otrzymany przez odmierzenie drugiej rzędnej punktu A od punktu A' na prostopadłej w nim wystawionej do x_{13}; trzecim rzutem prostej s_1 , t.j. osi obrotu będzie punkt A_0 , w którym x_{13} przecina s_1 . Punkt A''' będzie zarazem kładem punktu A leżącego na P_3 dokoła śladu x_{13} tej płaszczyzny na P_1 . Podczas gdy pierwszy rzut A' będzie się poruszał po x_{13} , trzeci rzut A''' , czyli sam punkt A, obracać się będzie dokoła A_0 dopóty, dopóki nie znajdzie się w płaszczyźnie P_1 , t.j. na osi x_{13} . Oba rzuty, pierwszy i trzeci punktu A będą zatem zjednoczone w punkcie / A /, w którym koło przez punkt A''' zakreślono przecina x_{13} . Punkt / A / jest kładem punktu $A'A''$ na płaszczyznę P_1 dokoła śladu s_1 .

Zauważmy, że kąt $A'A_0A''' \equiv \beta_1$ jest kątem płaszczyzny S z płaszczyzną P_1 , nie zależy więc on od obioru punktu A w płaszczyźnie S . Z kąta tego korzystamy dla wyznaczenia kładu punktu A , gdy płaszczyzna S dana jest za pomocą obu śladów s_1 i s_2 , a punkt A zapomocą pierwszego swego rzutu A' . /Rys.100/. Możnaby wprawdzie znaleźć najpierw drugi rzut A'' punktu A , lepiej jednak postępować jak następuje. Obrawszy jakikolwiek punkt płaszczyzny S , np. punkt M śladu s_2 , wyznaczmy kąt β_1 przez kład $M'M_0M'''$ trójkąta prostokątnego $M'M_0M$ poczyn na odcinku $A'A_0$ wykreślmy trójkąt podobny do trójkąta $M'M_0M'''$. W tym celu przez A_0 kreślimy równole-



Rys. 100.

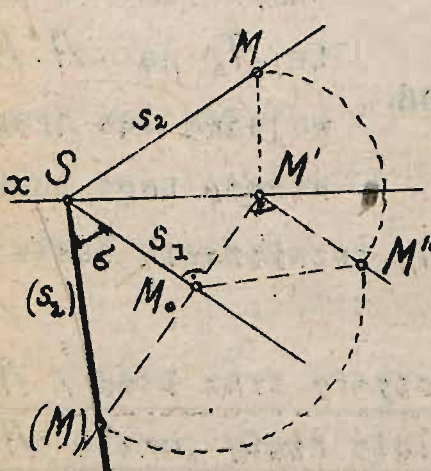
głą do $M_0 M'''$, a przez A' równoległą do s_1; przeciwprostokątną $A_0 A'''$ otrzymanego w ten sposób trójkąta $A' A_0 A'''$ odmierzamy od punktu A_0 na $A' A_0$ w jedną lub drugą stronę tego punktu.

Sposobu tego użyć możemy dla rozwiązania zadania odwrotnego.

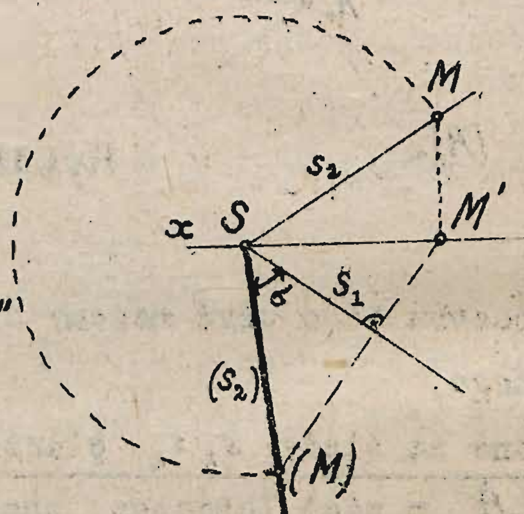
<u>Dane są ślady s_1 s_2 płaszczyzny oraz kład / A / punktu A w niej leżącego; znaleźć rzuty punktu A.</u>

Znajdźmy najpierw, jak poprzednio, kąt β_1, kreśląc trójkąt prostokątny $M' M_0 M'''$. /Rys. 100/. Z punktu / A / spuśćmy prostopadłą / A / A_0 na ślad s_1 i przez punkt A_0 poprowadźmy równoległą do $M_0 M'''$ i odmierzmy na niej od punktu A_0 odległość punktu A_0 od śladu s_1. Z otrzymanego tą drogą punktu A''' poprowadźmy równoległą do s_1, wtedy w przecięciu jej z prostą / A / A_0 otrzymamy rzut poziomy A'. Mając rzut poziomy znajdziemy natychmiast rzut pionowy, zweżywszy, że odcinek $A'A'''$ jest drugą rzędną punktu A /na rysunku nie wyznaczono punktu A'' /.

Zapomocą powyższego wykreślenia można znaleźć kład drugiego śladu s_2 płaszczyzny $s_1 s_2$ na P_1. W tym celu wystarcza znaleźć kład dowolnego punktu M tego śladu i połączyć punkt /M/ z punktem S, który, leżąc na osi obrotu s_1, nie ulega zmianie. /Rys.101/

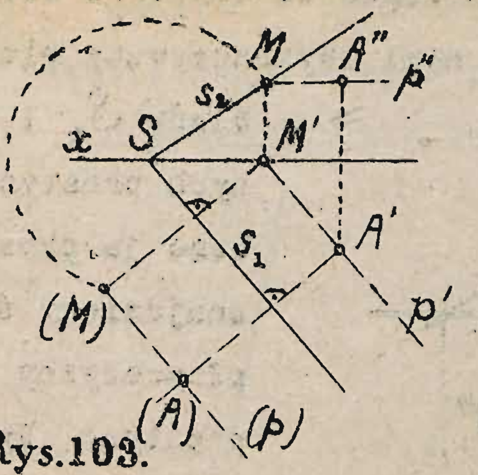


Rys. 101.



Rys. 102.

Lecz kład śladu s_2 można otrzymać jeszcze prościej /Rys. 102/. Zauważmy, że odcinek $MS = (M)S$; jeżeli tedy z punktu M' spuścimy prostopadłą na s_1, to w przecięciu tej prostopadłej z kołem zakreślonem z punktu S promieniem SM otrzymamy punkt /M/. Kąt między śladem s_1 i kładem śladu s_2 jest naturalną wielkością kąta $б$ między śladami.

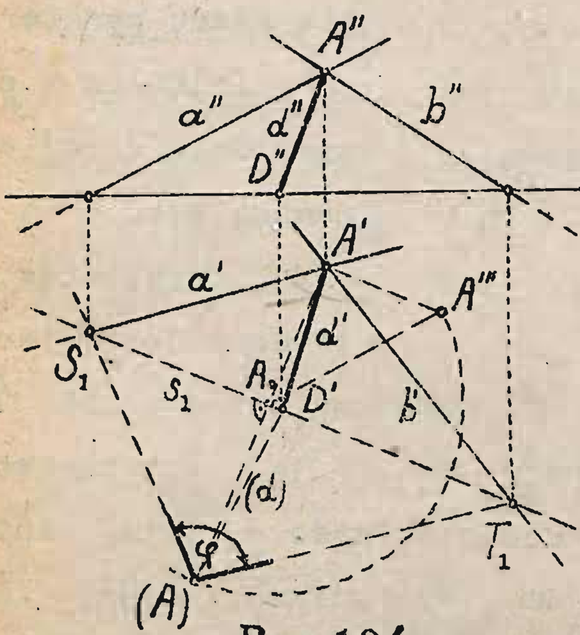


Rys.103.

Z powyższego wynika nowy sposób kreślenia kładu punktu A leżącego w płaszczyźnie danej zapomocą śladów s_1 i s_2. Przypuśćmy, że dany jest pierwszy rzut A' punktu A. Poprowadźmy przez punkt A' linję poziomą p płaszczyzny $s_1 s_2$; jej rzut pierwszy p' przechodzi przez A' równolegle do s_1; jej rzut drugi jest równoległy do x. Wyznaczywszy drugi ślad M tej prostej, znajdźmy jego kład $/M/$ na P_1. Prosta $/p/$ poprowadzona przez $/M/$ równolegle do s_1 jest kładem prostej poziomej p, na której leży punkt A. Jeżeli zatem z punktu A' spuścimy na s_1 prostopadłą, to w przecięciu jej z prostą $/p/$ otrzymamy szukany kład $/A/$.

§ 33. Zastosowanie kładów do zadań miarowych.

ZADANIE. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta między dwiema prostemi $a'a''$ i $b'b''$ /Rys.104/. Nie zmniejszając ogólności zagadnienia, możemy założyć, że dane proste się przecinają, gdyby bowiem było inaczej, wtedy obrawszy dowolny punkt przestrzeni A, poprowadzilibyśmy przezeń proste równoległe do danych i szukalibyśmy wielkości kąta między nimi. Wyznaczywszy pierwsze ślady S_1 i T_1 danych prostych i łącząc je prostą, znajdziemy ślad s_1 płaszczyzny tych prostych. Wykonawszy kład punktu A tej płaszczyzny na P_1 i łącząc $/A/$ z S_1 i T_1, otrzymamy kład szukanego kąta φ.

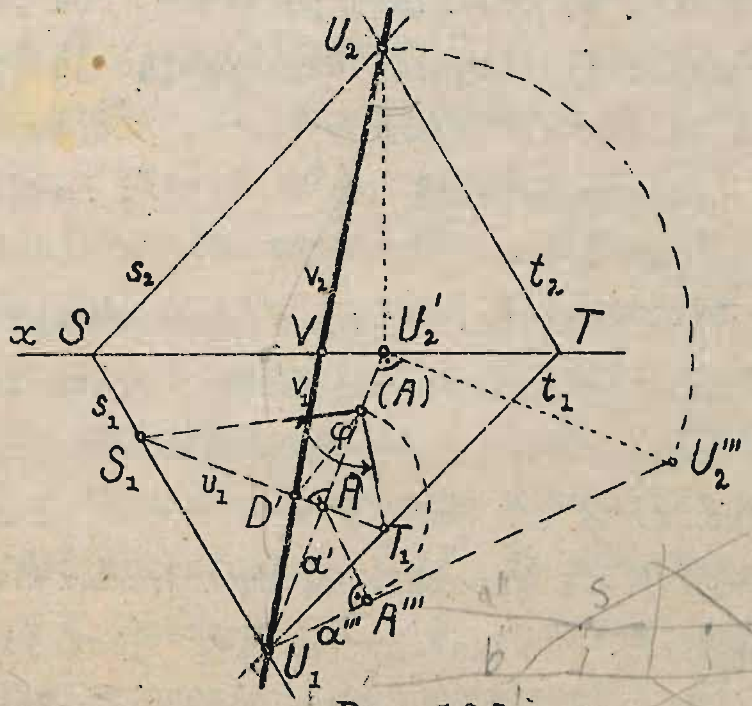


Rys. 104.

Wykreślmy przy tej sposobności rzuty dwusiecznej kąta między prostymi a i b. W tym celu dzielimy kąt φ na połowy i wyznaczamy punkt D', w którym dwusieczna $/d/$ przecina ślad s_1; następnie wyznaczamy drugi rzut D'' punktu D i łączymy $A'D'$ oraz $A''D''$.

ZADANIE. Wyznaczyć prawdziwą wielkość kąta dwuściennego między dwiema płaszczyznami $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$.

Zadanie to można by sprowadzić do poprzedniego, spuszczając z dowolnie obranego punktu prostopadłe na dane płaszczyzny i szukając prawdziwej wielkości kąta tych dwuc prostych. Będzie to kąt równy albo spełniający względem kąta dwuściennego danych płaszczyzn. Ale znajdźmy bezpośrednio prawdziwą wielkość kąta linjowego płaszczyzn danych.



Rys. 105.

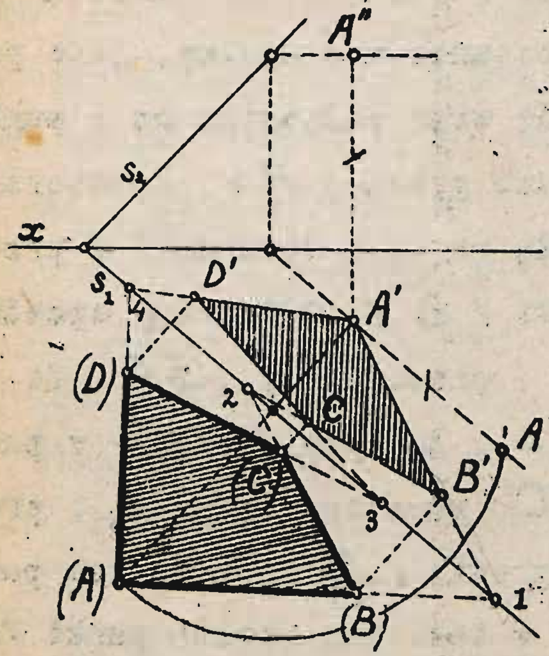
W tym celu należy przeciąć obie płaszczyzny S i T /Rys. 105/ dowolną płaszczyzną U prostopadłą do prostej przecięcia ST i wykonać kład otrzymanego w przecięciu kąta na P_1 lub P_2 dokoła odpowiedniego śladu u_1 lub u_2 płaszczyzny tego kąta. Pierwszy ślad u_1 tej płaszczyzny jest tedy jakąkolwiek prostą prostopadłą do rzutu α' prostej przecięcia płaszczyzn $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$. Niechaj ta prosta przecina ślady s_1 i t_1 w punktach S_1 i T_1. Punkt A, w którym płaszczyzna U przecina krawędź α kąta dwuściennego ST jest spodkiem prostopadłej spuszczonej z punktu $H \equiv \alpha' u_1$ na α, t.j. wysokością trójkąta $S_1 T_1 A$. Jeżeli tedy znajdziemy trzeci rzut a''' /a zarazem kład/ prostej a na płaszczyznę P_3 rzucającą poziomo tę prostą i obróconą dokoła swego śladu a', to odległość punktu H od prostej a''' będzie szukaną wysokością. Odmierzając ją od punktu H na a' i łącząc otrzymany w ten sposób punkt $/A/$ z S_1 i T_1 otrzymamy kład $S_1 /A/ T_1$ szukanego kąta linjowego φ.

Slady płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego ST otrzymamy dzieląc kąt φ na połowy, wyznaczając punkt D', w którym dwusieczna kąta φ przecina u_1, łącząc punkt D' z U_1 prostą v_1, która przecina oś x w punkcie V i wreszcie łącząc punkt V ze śladem U_2 prostą v_2. Płaszczyzna $v_1 v_2$ jest jedną z dwuch płaszczyzn dwusiecznych kąta dwuściennego płaszczyzn S i T.

§ 34. Kłady figur płaskich. Przypuśćmy teraz /Rys. 106/, że w płaszczyźnie $s_1 s_2$ dana jest figura prostokreślna jakakolwiek np. czworokąt $ABCD$ zapomocą jednego ze swych rzutów np. poziomego $A'B'C'D'$. Znaleźlibyśmy prawdziwy kształt i wielkość tego czworokąta wyznaczając kłady wszystkich jego wierzchołków na płaszczyznę P_1, ale jak się to teraz okaże, po wyznaczeniu kładu jednego z nich np. A, wyznaczenie pozostałych zostanie znakomicie uproszczone. Przedłużmy bok $A'B'$ do przecięcia ze śladem s_1 w punkcie 1. Punkt ten przy obrocie pozostanie nieruchomy, jako punkt leżący na osi obrotu; jeżeli więc połączymy go z punktem /A/, to otrzymamy kład prostej A1. Spuszczając z punktu B_1 prostopadłą na s_1, otrzymamy w przecięciu z prostą (A)1 punkt /B/. W podobny sposób znajdujemy kład punktu C: przedłużamy $B'C'$ do przecięcia z s_1 w punkcie 2, łączymy punkt 2 z punktem /B/ i spuszczamy z C' prostopadłą na s_1; przecięcie tej prostopadłej z prostą /B/ 2 da nam punkt /C/. Wyznaczamy jeszcze w taki sam sposób punkt /D/ to jest przedłużamy $C'D'$ do przecięcia z s_1 w punkcie 3, łączymy /C/3 i wyznaczamy przecięcie tej prostej z prostopadłą spuszczoną z D' na s_1. Jako sprawdzian dokładności wykreślenia służyć będą proste $A'D'$ i /A//D/, $A'C'$ i /A//C/, $B'D'$ i /B//D/ które parami winny się przecinać na osi obrotu s_1.

Na tej samej własności rzutów i kładów figur prostokreślnych oprzeć można rozwiązanie zadania odwrotnego. Weźmy przykład następujący:

Mając ślady s_1 s_2 płaszczyzny oraz $\bar{I}$ rzut boku 5-kąta foremnego w niej leżącego, wykreślić rzuty tego 5-kąta /Rys.107/.



Rys. 106.

Wyznaczmy naprzód kład /A/ /B/ danego boku AB na płaszczyznę P_1. W tym celu łączymy wyznaczony zwykłym sposobem /§32/ kład punktu A z punktem 1, w którym dany rzut A'B' przecina ślad s_1, i z punktu B' spuszczamy prostopadłą na s_1, która przetnie prostą /A/1 w punkcie /B/. Na odcinku /A//B/ kreślimy foremny 5-kąt /A//B//C//D//E/ i niechaj punkty 2, 3, 4 i 5 będą przecięciami boków /B//C/, /C//D/, /D//E/ i /E/ /A/ ze śladem s_1. Za pomocą tych punktów oraz prostopadłych spuszczonych z wierzchołków pięciokąta wyznaczymy wierzchołki /C/, /D/ i /E/ I rzutu tego 5-kąta. Dla sprawdzenia dokładności wykreślenia stwierdźmy, że przekątne kładu i rzutu 5-kąta winny się przecinać na śladzie s_1. Wyznaczenie $\overline{II}$ rzutu 5-kąta nie sprawia żadnych trudności, jeżeli korzystamy z $\overline{II}$ rzutów punktów $1, 2, 3, 4$ i 5.

§ 35. Powinowactwo geometryczne. Rzut i kład figury płaskiej na tę samą płaszczyznę są w pewnym szczególnym związku geometrycznym, który ma ważne teoretyczne i praktyczne znaczenie. Związek ten polega na następujących pięciu faktach:

1-o. Każdemu punktowi pierwszej figury jeden jedyny punkt drugiej figury i nawzajem,

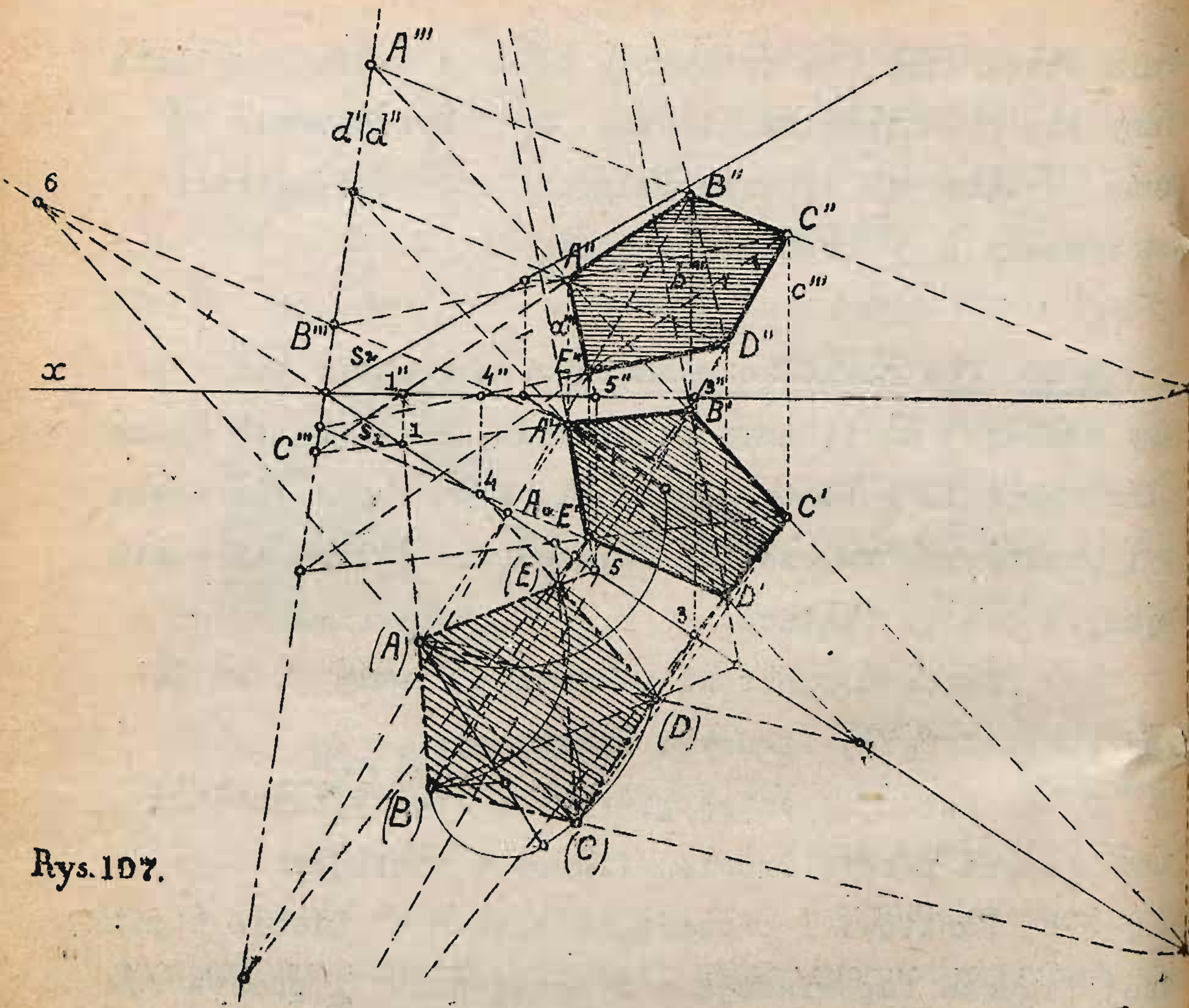
2-o. Każdej prostej pierwszej figury odpowiada jedna jedyna prosta drugiej figury i nawzajem,

3-o. Punktowi i prostej należącym do siebie w pierwszej figurze odpowiadają w drugiej punkt i prosta również do siebie należące,

4-o. Punkty odpowiednie leżą na prostych równoległych i

5-o. Proste odpowiednie przecinają się w punktach jednej prostej.

O dwóch figurach czyniących zadość tym pięciu warunkom mówimy że są w powinowactwie geometrycznem. Kierunek prostych, które łączą punkty odpowiednie na-



Rys.107.

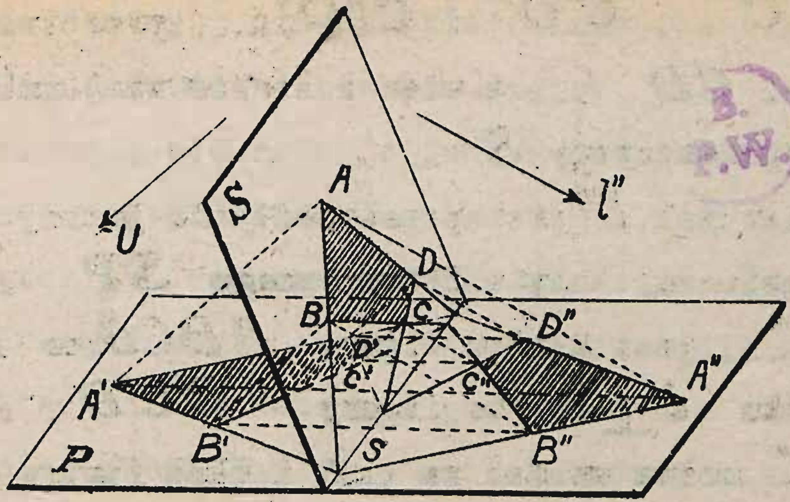
zywą się kierunkiem powinowactwa, prosta, na której przecinają się proste odpowiednie nazywa się osią powinowactwa.

W naszym przykładzie /Rys.107/ 5-kąty /A/ /B//C//D//E/ i A'B'C'D'E' są w powinowactwie, którego osią jest ślad S_1 a kierunkiem kierunek do tej osi prostopadły. Ale na tym samym rysunku mamy jeszcze inny przykład figur w powinowactwie mianowicie dwa rzuty $A'B'C'D'E'$ i $A''B''C''D''E''$ pięciokąta $ABCDE$. W samej rzeczy, jeżeli za punkty odpowiednie figur uważać będziemy dwa rzuty, np. A' i A'' tego samego punktu A, a za proste odpowiednie dwa rzuty np. $A'B'$ i $A''B''$ tej samej prostej AB leżącej w płaszczyźnie $s_1 s_2$, to punkty odpowiednie leżeć będą na prostych równoległych, mianowicie na linjach rzędnych, proste zaś odpowiednie przecinać się będą na zjednoczonych rzutach prostej d, według której płaszczyzna $s_1 s_2$ przecina drugą płaszczyznę dwusieczną /§ 19,8/.

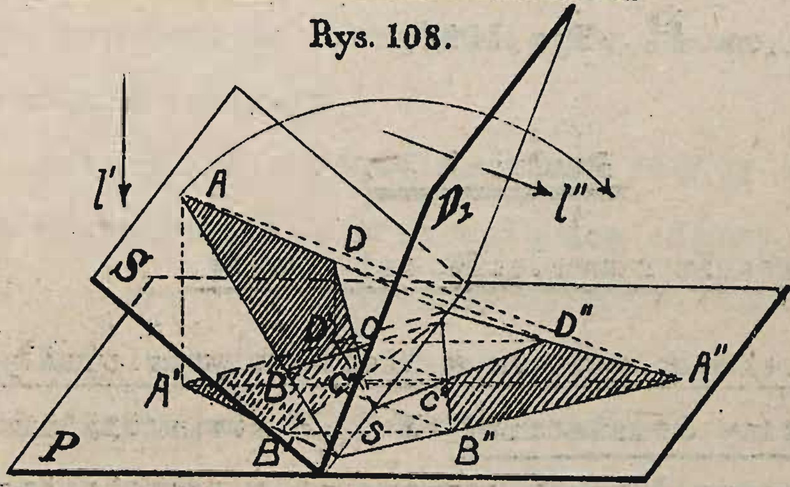
Prosta $d'=d''$ jest tedy osią powinowactwa, kierunek linji rzędnych kierunkiem powinowactwa; kierunek ten nie jest wogóle prostopadły do osi powinowactwa.

Opierając się na tej własności rzutów prostokątnych figury płaskiej możemy z łatwością stwierdzić, czy dany za pomocą swych rzutów wielokąt jest płaski czy skośny. Jeżeli jest płaki, to boki i przekątnie odpowiednie jego obu rzutów muszą się spotykać na prostej, jeżeli jest inaczej, to jest on skośny. Wielokąt płaski będzie zupełnie wyznaczony, jeżeli dany będzie jeden jego rzut, np. pierwszy, oraz drugie rzuty trzech jego wierzchołków; drugie rzuty pozostałych wierzchołków mogą być wyznaczone bez pomocy śladów $s_1 s_2$ płaszczyzny tego wielokąta. Niech będzie np. dany /Rys. 112/ rzut $A'B'C'D'E'$ pięciokąta płaskiego $ABCDE$, oraz rzuty A'', B'' i C'' trzech jego wierzchołków. Znajdźmy punkty przecięcia A''', B''', C''' prostych $B'C'$ i $B''C''$, $C'A'$ i $C''A''$, $A'B'$ i $A''B''$ punkty te muszą leżeć na jednej prostej $d'd''$, która będzie osią powinowactwa dwuch figur. Otóż mając oś powinowactwa i jedną choćby parę punktów odpowiednich /a więc i kierunek powinowactwa/, możemy jak to wynika z rysunku, dla każdego punktu i dla każdej prostej jednej figury znaleźć odpowiadający punkt lub prostą w drugiej.

Przy tej sposobności odkryliśmy mimochodem następujące twierdzenie: Jeżeli wierzchołki A' i A'', B' i B'', C' i C'' trójkątów $A'B'C'$ i $A''B''C''$ leżą parami na trzech prostych równoległych a''', b''' i c''', to boki $B'C'$, $B''C''$, $C'A'$ i $C''A''$, $A'B'$ i $A''B''$ przecinają się parami w trzech punktach A''', B''', C''' jednej prostej. W samej rzeczy, jeżeli $A'B'C'$ i $A''B''C''$ uważać będziemy za rzuty prostokątne trójkąta ABC, to punkty A''', B''' i C''' muszą leżeć na wspólnym I i II rzucie prostej d, według której płaszczyzna ABC przecina II płaszczyznę dwusieczną. Do twierdzenia tego powrócimy jeszcze, otrzymując je jako wniosek z twierdzenia o trójkątach Desarguesa /§ 88/.



Rys. 108.



Rys. 109.

Figury w powinowactwie otrzymujemy zawsze, gdy tą samą figurę płaską $A\ B\ C\ D\ E$...... rzucamy równolegle na tę samą płaszczyznę rzutów P w dwuch różnych kierunkach l' i l'' /Rys.108/. W samej rzeczy rzuty $A'B'C'D'$..... i $A''B''C''D''$...... ..są wtedy w takim związku, że punkty odpowiednie A' i A'', B' i B''.... leżą parami na prostych równoległych, według których płaszczyzny równolegle do l' i do l'' , a przechodzące przez punkty A , B ....przecinają P ; proste

$B'C'$ i $B''C''$, $C'D'$ i $C''D''$,.....przecinają prostą BC , CD ,...a więc i siebie wzajemnie na śladzie s płaszczyzny S .

Jeżeli kierunek l'' jest prostopadły do jednej z płaszczyzn dwusiecznych kąta dwuściennego SP , to $A''B''C''D''$.....jest kładem figury $ABCD$.. na P; jeżeli w dodatku $l' \perp P$, to figury $A'B'C'D'$...i $A''B''C''D''$... można uważać za rzut i kład figury $ABCD$ ....na P /Rys.109/.

Rozdział IV.

Przesuwanie równoległe osi rzutów.

§ 36. Przesuwanie figur w kierunku prostopadłym do $\overline{I}$ płaszczyzny dwusiecznej. W § 28 stwierdziliśmy już, że gdy figura doznaje przesunięcia równoległego, to oba jej rzuty zostają przesunięte równolegle, przez co zmienia się jedynie położenie tych rzutów na płaszczyźnie rysunku.

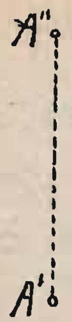
Przypuśćmy, że przesunięcie figury odbywa się w kierunku prostopadłym do $\overline{I}$ płaszczyzny dwusiecznej; jeżeli odległość jakiegokolwiek punktu od P_1 wzrasta o odcinek α , to o tenże sam odcinek maleje odległość tego punktu od P_2 , tak, że odległość obu rzutów na linji rzędnych nie doznaje zmiany. To samo dotyczy wszystkich innych punktów figury, tak, że oba rzuty przesuwają się wgórę o ten sam odcinek a , nie zmieniając nietylko własnego kształtu, ale i wzajemnego położenia. Jedynym wynikiem przesunięcia figury jest zmiana położenia osi rzutów; oczywiście zamiast pozostawiać oś nieruchomą i przesuwać oba rzuty w kierunku do niej prostopadłym prościej będzie pozostawić je bez ruchu przesuwając równolegle oś rzutów o odcinek a w kierunku przeciwnym.

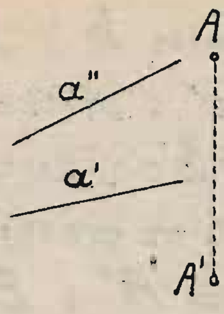
Przesunięcie równoległe osi rzutów o odcinek a jest równoznaczne z przesunięciem figury w kierunku prostopadłym do $\overline{I}$ płaszczyzny dwusiecznej o odcinek $a\sqrt{2}$. Przy takim przesunięciu rzuty punktów i prostych oczywiście nie ulegną zmianie, natomiast ślady prostych oraz ślady płaszczyzn wogóle zostaną zmienione, wszakże kierunek tych ostatnich zostanie zachwiany.

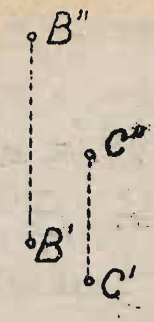
Ponieważ w zastosowaniach praktycznych związek danej figury z płaszczyznami rzutów nie ma znaczenia, przeto opuszczamy zazwyczaj oś rzutów, uważając za dany jedynie jej kierunek jako prostopadły do linji rzędnych. W takim przypadku wśród elementów, które wyznaczają daną figurę, nie może być oczywiście śladów prostych i płaszczyzn. W ciągu rozwiązywania danego zadania możemy jednak te elementy wprowadzać tyle razy ile nam się podoba, przytem przez przesunięcie równoległe osi wszystkie elementy śladowe ulegają zmianie. Na tym właśnie polega pożytek nieoznaczoności osi - możemy ją zawsze obrać tak, aby potrzebne elementy śladowe były w dogodnym dla nas położeniu; nic nie stoi przytem na przeszkodzie, aby w ciągu tego samego zadania oś kilkakrotnie bywała przesuwaną.

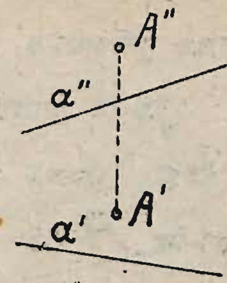
§ 37. Odwzorowanie elementów geometrycznych z pominięciem osi rzutów. Punkt przestrzeni odwzorowany będzie przez dwa punkty leżące na prostej równoległej do stałego kierunku /kierunku rzędnych/ /Rys.110/ Prosta przestrzeni odwzorowana będzie przez 2 proste jakiekolwiek oraz kierunek rzędnych /Rys.111/. Płaszczyzna może być dana albo przez 3 punkty nie leżące na jednej prostej /Rys.112/ albo przez punkt i prostą przezeń nieprzechodzącą /Rys.113/ albo przez dwie proste przecinające się /Rys.114/ lub równoległe /Rys.115/.

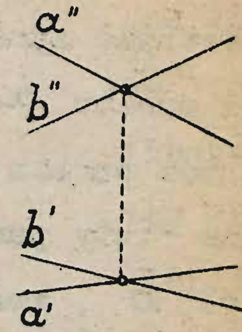
Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby punkt leżał na prostej jest ten, aby oba rzuty punktu leżały na odpowiednich rzutach prostej, warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby prosta leżała w płaszczyźnie jest ten, aby przecinała dwie proste tej płaszczyzny, nie przechodząc przez ich punkt wspólny, aby wreszcie punkt



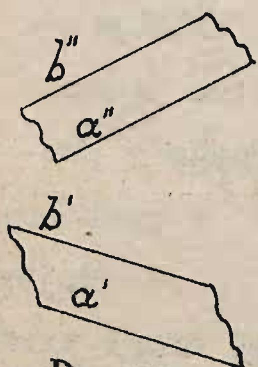








Rys. 110. Rys. 111. Rys. 112. Rys. 113. Rys. 114.

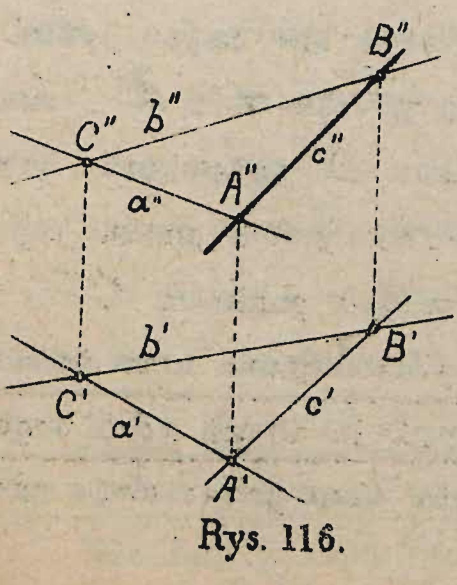


Rys. 115.

leżał w płaszczyźnie potrzeba i wystarcza, aby on leżał na jakiejkolwiek prostej tej płaszczyzny. Na tej zasadzie możemy rozwiązać kilka następujących zadań zasadniczych.

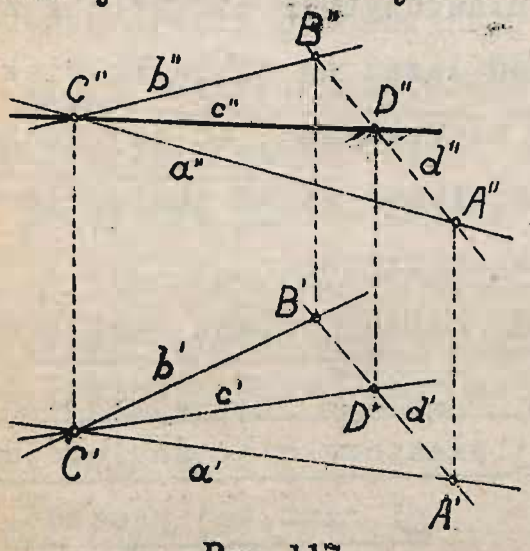
§ 38. ZADANIE. Dana jest płaszczyzna oraz jeden rzut prostej leżącej w tej płaszczyźnie, znaleźć drugi rzut tej prostej.

Niechaj /Rys.116/ płaszczyzna będzie dana przez rzuty dwóch prostych a i b, przecinających się w punkcie C i niech będzie prócz tego dany rzut c' prostej c leżącej w płaszczyźnie ab.



Rys. 116.

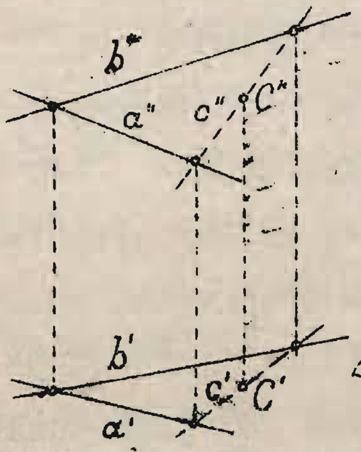
Skoro prosta c leży w płaszczyźnie ab, to musi przecinać zarówno prostą a jak i prostą b; I rzutem punktu ac jest punkt $A' \equiv a'c'$; podobnież II rzutem punktu bc jest punkt $B' \equiv b'c'$. Mając pierwsze rzuty punktów A i B leżących na prostych a wzgl. b, znajdziemy ich drugie rzuty A'' i B'', łącząc te punkty otrzymamy drugi rzut c'' prostej c. – Konstrukcja ta zawodzi jeżeli c' przechodzi przez C'.



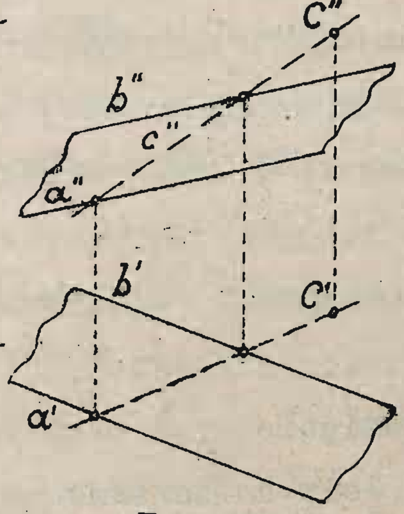
Rys. 117.

Wtedy /Rys. 117/ prowadzimy dowolną prostą d' przecinającą proste a' i b' w punktach A' i B', znajdujemy jak powyżej drugi rzut prostej d leżącej w płaszczyźnie ab; wreszcie mając jeden rzut prostej c, przecinającej proste a i d, znajdujemy drugi. W tym celu z punktu D' przecięcia prostych c' i d' prowadzimy linję rzędnych i punkt jej przecięcia D'' z prostą d'' łączymy z punktem C''.

<u>§ 39. ZADANIE. Dana jest płaszczyzna oraz jeden rzut punktu w niej leżącego; znaleźć drugi rzut tego punktu.</u> Niech płaszczyzna będzie dana przez dwie pro-



Rys. 118.



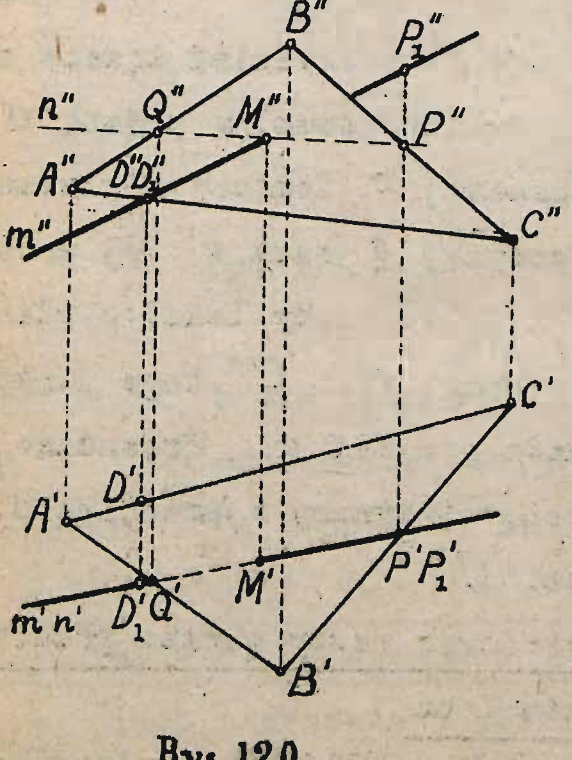
Rys. 119.

ste a i b przecinające się /Rys 118/ lub równoległe /Rys 119/, niech będzie nadto dany rzut C' punktu C leżącego w tej płaszczyźnie; trzeba znaleźć C''. Przez C' poprowadźmy dowolną prostą c' i uważajmy ją za $\underline{I}$ rzut prostej c leżącej w płaszczyźnie ab, znajdźmy jak powyżej $\underline{II}$ rzut c'' tej prostej; punkt C będzie wtedy i tylko wtedy leżał w płaszczyźnie ab, jeżeli drugi rzut C'' tego punktu będzie leżał na $\underline{II}$ rzucie prostej c. Prowadząc tedy przez C' linję rzędnych, otrzymamy w przecięciu jej z prostą c'' szukany rzut C''.

§ 40. ZADANIE. Wyznaczyć rzuty punktu przebicia danej płaszczyzny prostą daną.

Niechaj płaszczyzna /Rys.120/ będzie dana zapomocą wszech swoich punktów, to jest niech będą dane rzuty trójkąta ABC leżącego w tej płaszczyźnie, oprócz tego niech będą dane rzuty $m'm''$ prostej m. Uważajmy jeden z rzutów danej prostej np. m' jednocześnie za $\overline{I}$ rzut prostej n leżącej w płaszczyźnie ABC i znajdźmy drugi rzut n'' tej prostej /§ 38/. Proste m i n muszą się przecinać, albowiem leżą w tej samej pierwszej płaszczyźnie rzucającej.

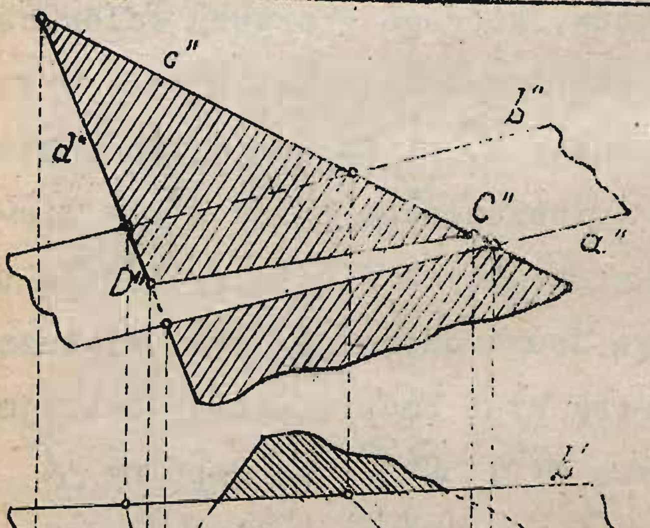
Punkt przecięcia tych prostych M jest punktem szukanym, gdyż leży on zarówno na prostej m, jak i w płaszczyźnie ABC /ponieważ leży na prostej n tej płaszczyzny/. Drugi rzut tego punktu jest punktem przecięcia prostych m'' i n''; pierwszy rzut znajdzie się w przecięciu linji rzędnych przechodzącej przez M'' ze wspólnym $\overline{I}$ rzutem prostych m i n.



Rys. 120.

Jeżeli przypuścimy, że płaszczyzna ABC jest nieprzezroczysta, to jedna strona prostej m będzie w każdym rzucie widzialna, druga zasłonięta, granicą części widzialnej od zasłoniętej będzie oczywiście punkt M' wzgl. M''. Dla zdecydowania, która część prostej m w każdym rzucie jest widzialna wystarczy zatem rozstrzygnąć sprawę widzialności lub niewidzialności dla jednego jakiegokolwiek punktu tej prostej. W tym celu zauważmy, że jeżeli dwa punkty P i P_1 mają ten sam rzut pierwszy, to dla oka umieszczonego nad P_1 w kierunku pierwszych prostopadłych rzucających widzialny będzie ten z dwuch punktów, którego pierwsza odległość jest większą t.j. ten, którego drugi rzut będzie wyżej. Podobnież, jeżeli dwa punkty D i D_1 mają ten sam drugi rzut, to dla oka umieszczonego przed P_2 w kierunku drugich prostych rzucających widzialny będzie ten z dwuch punktów, którego druga odległość jest większą, t.j. ten, którego pierwszy rzut będzie niżej. Uważajmy punkt przecięcia prostych m' i $B'C'$ za wspólny I rzut 2 punktów P_1 i P, z których pierwszy leży na m, a drugi na BC, a więc w płaszczyźnie ABC. Widzialny w rzucie poziomym będzie ten z nich, którego drugi rzut jest wyżej, a więc P_1; w ten sposób ta część prostej m na której leży punkt P_1 będzie widziałna w I rzucie, pozostała część prostej m będzie w tym rzucie niewidzialna. Uważajmy teraz punkt przecięcia prostych m'' i $A''C''$ za wspólny II rzut dwuch punktów D_1 i D, z których pierwszy leży na m, a drugi na AC, a więc w płaszczyźnie ABC. Widzialnym w rzucie pionowym będzie ten z nich, którego pierwszy rzut jest niżej a więc D_1; w ten sposób ta część prostej m, na której leży punkt D_1 będzie widzialna w II rzucie, pozostała część prostej m będzie w tym rzucie niewidzialna.

§ 41. ZADANIE. Wyznaczyć rzuty prostej przecięcia dwuch płaszczyzn.



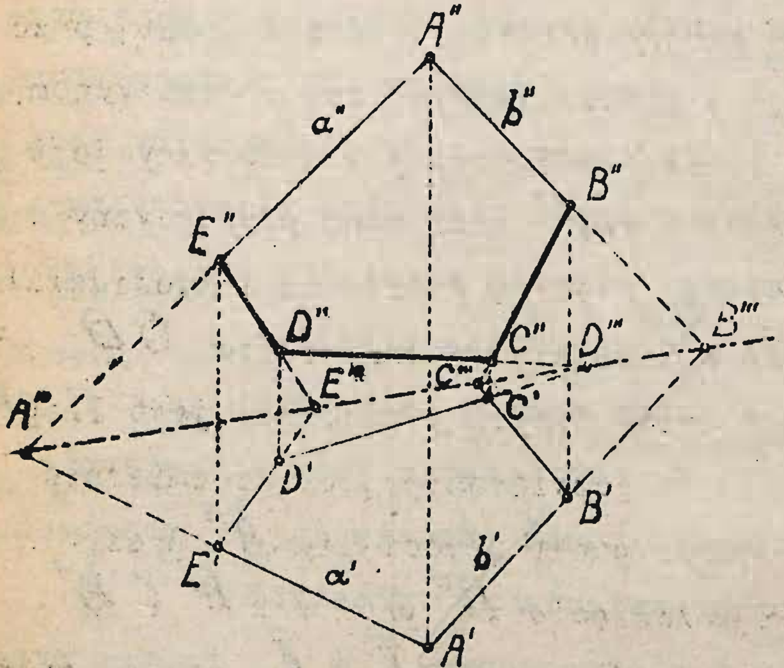
Rys. 121.

Niechaj jedna z płaszczyzn /Rys. 121/ będzie dana zapomocą dwuch prostych równoległych a i b a druga zapomocą dwuch prostych przecinających się c i d. Wyznaczmy najpierw punkt przebicia prostej c z płaszczyzną ab, następnie punkt przebicia prostej d z tą samą płaszczyzną ab; prosta która łączy te dwa punkty przebicia będzie prostą przecięcia, gdyż jest to prosta wspólna obu płaszczyznom. Dla unaocznienia, która część każdej płaszczyzny jest widzialną, pokreskowano część widzialną płaszczyzny cd; granicą między częścią widzialną i niewidzialną każdej płaszczyzny jest prosta przecięcia CD. -

Jeżeli jedną z dwóch danych płaszczyzn jest II płaszczyzna dwusieczna, to rozwiązanie jest niezmiernie proste: należy połączyć punkt przecięcia A''' prostych a' i a'' z punktem przecięcia B''' prostych b' i b''. Prosta $A'''B'''$ jest zjednoczonym $\overline{I}$ i $\overline{II}$ rzutem prostej przecięcia d.

<u>§ 42. ZADANIE. Dany jest $\overline{I}$ rzut wielokąta płaskiego oraz $\overline{II}$ rzuty dwóch jego boków, wyznaczyć $\overline{II}$ rzut tego wielokąta.</u>

Rzuty wielokąta są w powinowactwie, którego kierunkiem jest kierunek rzędnych, a osią jest zjednoczony $\overline{I}$ i $\overline{II}$ rzut prostej przecięcia płaszczyzny wielokąta z $\overline{II}$ płaszczyzną dwusieczną. /§ 35/. Na zasadzie poprzedniego zadania zjednoczony rzut tej prostej otrzymamy łącząc punkty przecięcia danych $\overline{II}$ rzutów boków a i b z odpowiednimi $\overline{I}$ rzutami tych samych bo-

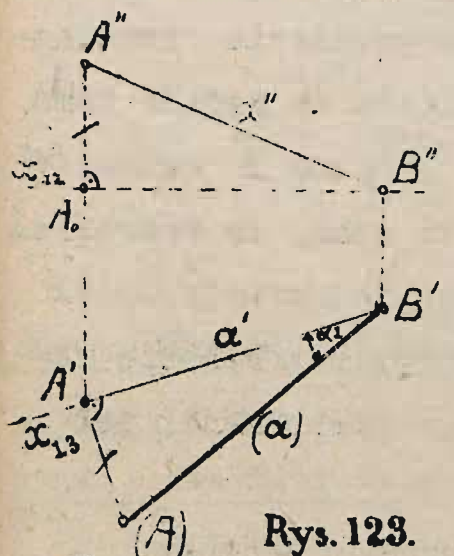


Rys. 122.

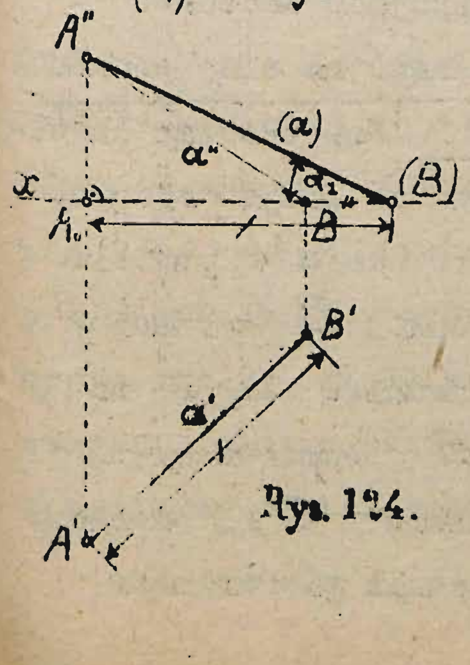
ków /Rys. 122/. Mając zaś oś i kierunek powinowactwa oraz dwa punkty odpowiednie $A' \equiv a'b'$ i $A'' \equiv a''b''$ wyznaczymy pozostałe drugie rzuty B'', C'', D'', E'' ....wierzchołków wielokąta.

§ 43. ZADANIA MIAROWE. Zadania dotyczące prawdziwej wielkości odcinków i kątów płaskich i dwusiecznych nie mogą być rozwiązane bez wprowadzenia osi rzutów. Osią może być jakakolwiek prosta prostopadła do linji rzędnych, oczywiście staramy się obrać ją w taki sposób by rozwiązanie zadania było możliwie najprostsze. Jeżeli zadanie jest złożone z kilku zadań prostszych to możemy dla każdego z zadań składowych obrać oś inną czej nie może to wpłynąć na wynik rozwiązania żadnego z tych zadań, jeżeli pomiędzy elementami danemi i wyznaczonemi w każdym z nich nie będzie elementów śladowych, t. j. śladów prostych i śladów płaszczyzn.

§ 44. ZADANIE. Wyznaczyć prawdziwą długość odcinka, którego rzuty są dane.



Rys. 123.



Rys. 124.

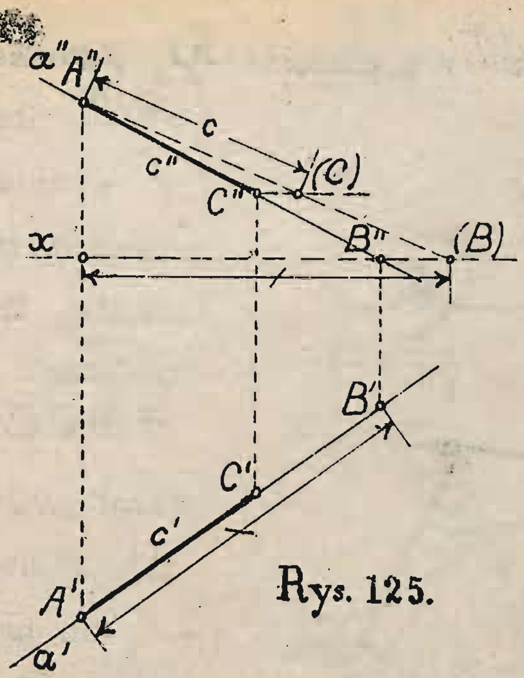
Niech będą dane /Rys 123/ rzuty $A'B'$, $A''B''$ odcinka AB. Poprowadźmy oś x_{12} przez jeden z końców II rzutu odcinka, np. przez B''. Wykonajmy kład płaszczyzny rzucającej poziomo odcinek a, (t. j. wprowadźmy nową oś $a' \equiv x_{13}$), odcinek ten jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym w którym jedną przyprostokątną jest rzut poziomy a' odcinka, a drugą przyprostokątną jest pierwsza odległość punktu A, t. j. odległość rzutu A'' od x_{12}. Kąt α_1 między kładem /a/

odcinka i jego rzutem poziomym a' jest oczywiście kątem prostej a z płaszczyzną P_1. Kładąc odcinek a na P_2, otrzymalibyśmy kąt α_2, t.j. kąt prostej z płaszczyzną P_2.

Nieco prościej można rozwiązać tó zadanie, obracając płaszczyznę rzucającą poziomo odcinek a dokoła prostej rzucającej AA', aż do położenia równoległego do P_2. Wtedy $\overline{\underline{II}}$ rzut odcinka a będzie temu odcinkowi równy, jednocześnie zaś $\overline{\underline{II}}$ rzut $\overline{\underline{I}}$ rzutu a' będzie równy a'. Wychodzi to na to samo, co wykreślać trójkąt /A/$A'B$ t.zn., aby jego kąt prosty upadł na kąt A_0, przez co oszczędzamy sobie kreślenia kąta prostego A' /Rys.124/. Przytej sposobności, jak poprzednio, znajdujemy kąt α_1.

Możemy rozwiązać teraz następujące zadanie:

<u>Na danej prostej $a'a''$ od danego na niej punktu $A'A''$ odmierzyć dany odcinek c</u>. Poprowadźmy dowolnie oś x w kierunku prostopadłym do linji rzędnych punktu A /Rys.125/ Niech oś przetnie a'' w punkcie B''; znalazłszy $\overline{\underline{I}}$ rzut B' punktu B wyznaczmy zapomocą obrotu dokoła AA' prawdziwą długość odcinka AB. Na prostej A''/B/ odmierzamy od punktu A'' dany odcinek c do punktu /C/, poczem powróćmy z prostą AB do położenia pierwotnego.



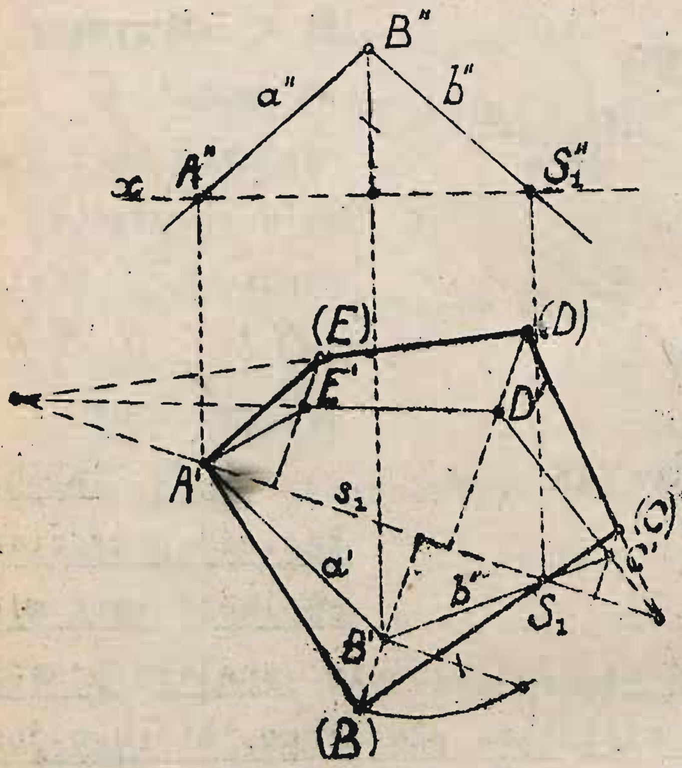
Rys. 125.

Prowadząc z punktu / C / równoległą do x otrzymamy na α'' punkt C''; linja rzędnych tego punktu daje na prostej α' punkt C'. Odcinek $A'C'$, $A''C''$ jest szukany.

§ 45. ZADANIE.

Znaleźć prawdziwą wielkość kąta między dwiema danemi prostemi, lub ogólnie: znaleźć prawdziwy kształt i wielkość wielokąta płaskiego, którego jeden rzut i dwa boki drugiego rzutu są dane.

Niech będą dane /Rys.126/ dwie przecinające się proste $a'a''$ i $b'b''$ lub ogólnie $\overline{I}$ rzut wielokąta $ABCDE$ ....i $\overline{II}$ rzuty a' i b'' dwóch jego boków wychodzących z wierzchołka B. Poprowadźmy oś x przez $\overline{II}$ rzut wierzchołka A, który znajdziemy w przecięciu linji rzędnych punktu A' z prostą a''; i wyznaczmy $\overline{I}$ ślady prostych a i b. $\overline{I}$ śladem prostej a będzie punkt $A'A''$; $\overline{I}$ ślad prostej b wyznaczymy wystawiając w punkcie $S_1'' \equiv b''x$ linję rzędnych do przecięcia z b' w punkcie S_1 : Prosta $A'S_1$ będzie I śladem s_1 płaszczyzny wielokąta. Obróćmy wielokąt $ABCDE$..... /względnie kąt B / dokoła s_1 do przystania z P_1 ; w tym celu wyznaczymy kład punktu B /§ 32/ i zapomocą powinowactwa wyznaczymy pozostałe wierzchołki /§ 34/.

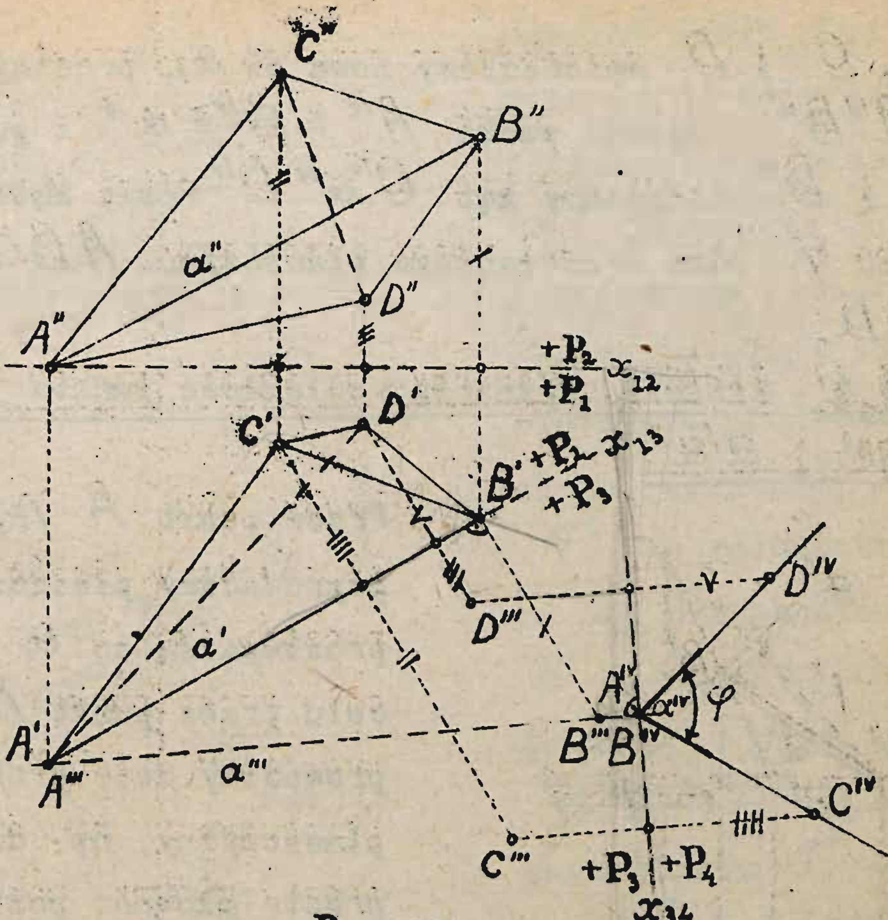


Rys. 126.

§ 46. Kąt dwuścienny dwuch płaszczyzn danych.

Przypuszczamy, jak to bywa najczęściej, że dwie płaszczyzny, których kąt mamy wyznaczyć, dane są zapomocą dwu prostej spólnej i jednego punktu na niej nie leżącego. Możemy wtedy zadanie sformułować jak następuje.

ZADANIE ... czworościanu $ABCD$; wyznaczyć ... /Rys. 127/ Wystarczy

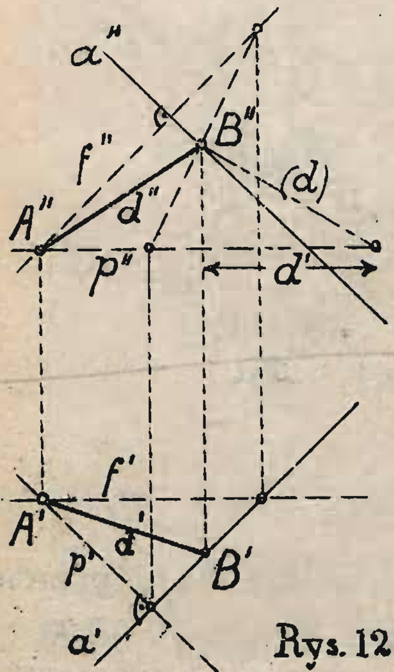


Rys. 127.

znaleźć kąt φ o krawędzi AB, w tym celu przetniemy czworościan płaszczyzną P_4 prostopadłą do AB, proste przecięcia ścian ABC i ABD płaszczyzną P_4 utworzą kąt szukany φ. Aby te proste otrzymać, poprowadźmy oś x_{12} przez A'' i następnie zmieńmy dwukrotnie płaszczyzny rzutów. Za nową oś x_{13} weźmy najpierw $\underline{I}$ rzut krawędzi AB; wyznaczywszy $\underline{III}$ rzuty punktów

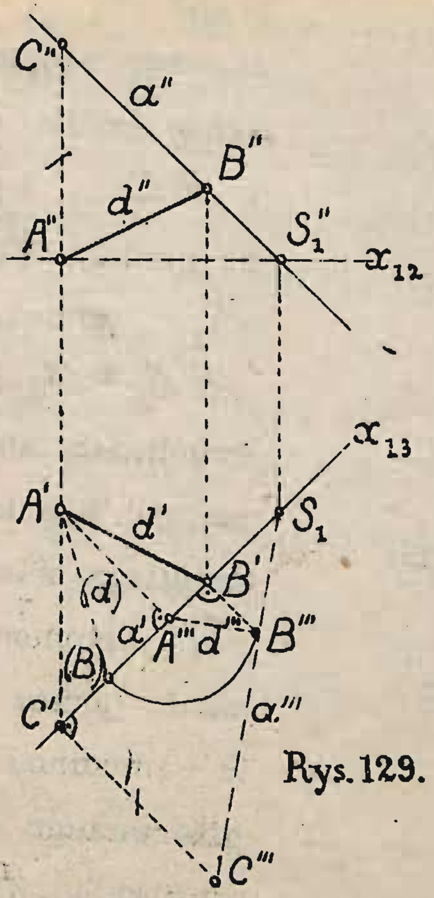
B, C i D wprowadzimy nową oś x_{34} prostopadłą do $A'''B'''$; łącząc punkt $A^{IV} \equiv B^{IV} \equiv a^{IV}$ z punktami C^{IV}, i D^{IV} otrzymamy kąt $C^{IV}a^{IV}D^{IV}$ równy kątowi linjowemu φ kąta dwuściennego płaszczyzn ABC i ABD.

§ 47. ZADANIE. Wyznaczyć odległość punktu $A'A''$ od prostej $a'a''$.



Rys. 128.

Przez punkt A /Rys.128/ poprowadźmy płaszczyznę prostopadłą do a. W tym celu przez punkt A poprowadźmy dwie proste tej płaszczyzny, np. dwie proste główne: poziomą p i frontową f. Linja pozioma $p'p''$ ma $\overline{\underline{II}}$ rzut prostopadły do linji rzędnych, a $\overline{\underline{I}}$ rzut prostopadły do a'; linja frontowa $f'f''$ ma $\overline{\underline{I}}$ rzut prostopadły do linji rzędnych, a $\overline{\underline{II}}$ rzut prostopadły do a''. Wyznaczywszy punkt B przebicia płaszczyzny pf prostą a /§ 40/ i połączywszy go z A, pozostaje tylko wyznaczyć prawdziwą długość odcinka $AB = /d/$ /§ 44/.

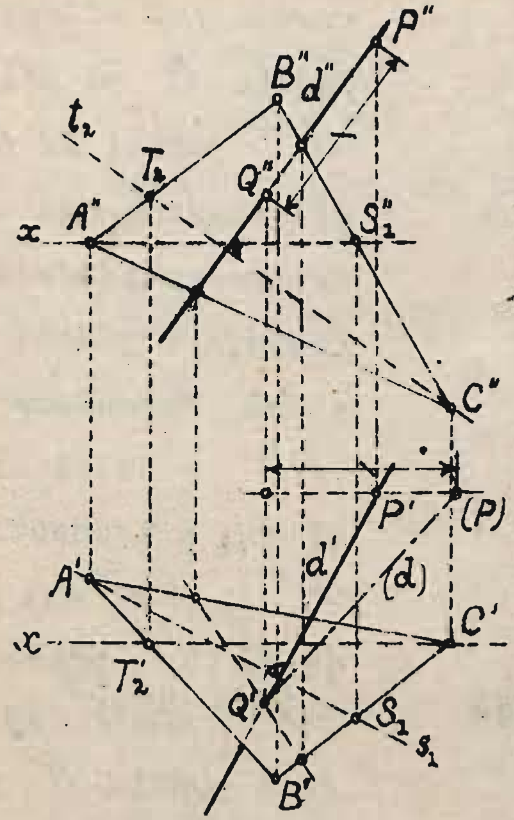


Rys. 129.

Również łatwo /Rys. 129/ wyznaczymy odległość punktu A od prostej a, jeżeli za nową płaszczyznę rzutów P_3 obierzemy płaszczyznę rzucającą prostą a poziomo. Wyznaczmy a''' i A''' w założeniu, że oś x_{12} przechodzi przez A'', a oś x_{13} przystaje do a'; prostopadła $d''' \equiv A'''B'''$ spuszczona z punktu A''' na a''' jest III rzutem odległości Aa. Mając d''' znajdziemy d', d'' i /d/.

§ 48. ZADANIE. Z danego punktu P spuścić prostopadłą na płaszczyznę ABC i wyznaczyć jej długość. /Rys. 130/.

Rzuty szukanej prostopadłej są prostopadłe do śladów płaszczyzny ABC, trzeba więc najpierw wyznaczyć kierunki tych śladów. Aby wyznaczyć kierunek pierwszego śladu s_1, poprowadźmy oś x przez jeden z wierzchołków drugiego rzutu trójkąta ABC np

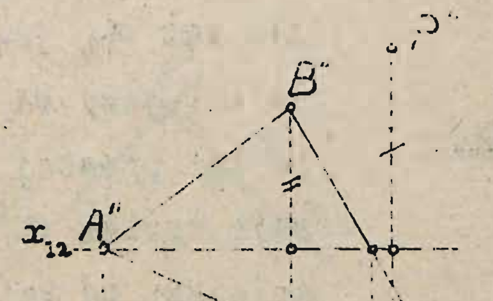


Rys. 130.

przez A'', i wyznaczmy pierwsze ślady boków AB i BC, będą to punkty A' i S_1, prosta $A'S_1 \equiv s_1$. Podobnież aby wyznaczyć kierunek drugiego śladu t_2, poprowadźmy oś x przez jeden z wierzchołków pierwszego rzutu trójkąta ABC, np. przez C' i wyznaczmy drugie ślady boków AB i BC, będą to punkty T_2 i C''; prosta $T_2C'' \equiv t_2$. Prosta d' spuszczona z P' prostopadle na s_1 i prosta d'' spuszczona z P'' prostopadle na t_2 są rzutami szukanej prostopadłej d. Pozostaje wyznaczyć punkt $Q'Q''$ przebicia płaszczyzny ABC prostą d /§ 40/ i znaleźć prawdziwą długość odcinka PQ /§ 11/.

Jeżeli nam nie zależy na rzutach prostopadłej d a jedynie potrzebna jest odległość punktu P od płaszczyzny ABC, to dojdziemy prędzej do celu przez zmianę płaszczyzny rzutów.

Zważmy mianowicie, że gdy płaszczyzna $s_1 s_3$ jest prostopadła do P_3, to odległość punktu P od płaszczyzny $s_1 s_3$ równa się odległości rzutu P''' od śladu s_3. Poprowadzimy tedy /Rys. 131/ jak poprzednio oś x przez A'' i znalazłszy pierwszy ślad s_1 płaszczyzny ABC, uważajmy za trzecią płaszczyznę rzutów $P_3 \perp s_1$, t.j. za nową oś x_{13} obierzmy jakąkolwiek prostą prostopadłą do s_1; wyznaczmy P''' i s_3 /zapomocą trzeciego rzutu jakiegokolwiek punktu płaszczyzny ABC np. B'''/; prostopadła z P''' na s_3

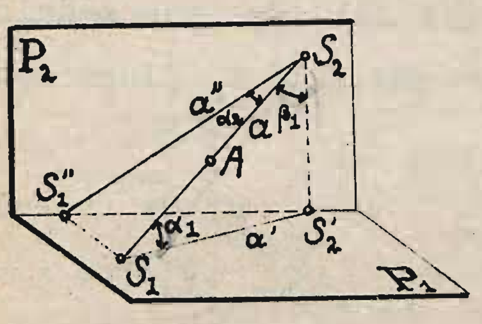


Rys. 131.

jest szukaną odległością $P'''Q''' = PQ$.

§ 49. ZADANIE. Z punktu danego $A'A''$ wyprowadzić prostą tworzącą z płaszczyznami rzutów kąty dane α_1 i α_2.

Zauważmy przedewszystkiem, że aby zadanie było możliwem, trzeba żeby $\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$. W samej rzeczy /Rys.132/ niech prosta a będzie prostą szukaną.



Rys. 132.

Z trójkąta prostokątnego $S_1 S_2' S_2$ mamy

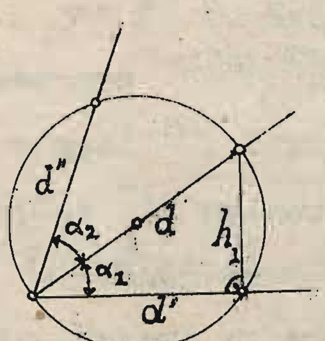
$$\alpha_1 + \beta_1 = \frac{\pi}{2}$$

Ale kąt α_2 jest wogóle mniejszy od β_1, bo kąt prostej a ze swym rzutem a'' jest mniejszy od kąta tej prostej z jakąkolwiek inną prostą płaszczyzny P_2. Kładąc więc α_2 zamiast β_1 zamieniamy powyższą równość na nierówność $\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$, która pozostanie równością jedynie wtedy, gdy $\alpha_2 = \beta_1$, t.j. gdy $a'' \perp x$, co pociąga za sobą $a' \perp x$.

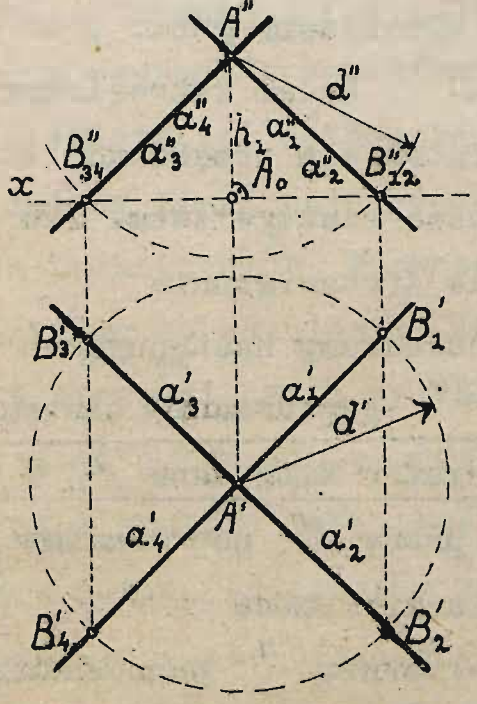
Prosta a będzie wyznaczona, jeżeli znajdziemy rzuty jakiegokolwiek punktu B tej prostej. Oznaczywszy długość odcinka AB przez d, mamy:

$$A'B' \equiv d' = d\cos\alpha_1$$

$$A''B'' \equiv d'' = d\cos\alpha_2$$



Rys. 133.



Rys. 134.

Różnicę pierwszych odległości punktów A i B, czyli wzniesienie punktu A ponad B oznaczmy przez h_1. Wtedy $h_1 = d \sin\alpha_1$. Wykreślmy /Rys. 133/ kąty α_1 i α_2 tak, aby miały jedno ramię i wierzchołek wspólne; na wspólnym ramieniu odmierzmy od wspólnego wierzchołka dowolny odcinek d i znajdźmy jego rzuty d' i d'' na pozostałe ramiona oraz odcinek $h_1 = d \sin\alpha_1$. Odmierzmy teraz /Rys.134/ na prostej $A'A''$ od punktu A'' odcinek $A''A_0 = h_1$ i przez A_0 prostopadle do linji rzędnych $A'A''$ poprowadzimy oś x. Tym samym zakładamy, że punkt B leży w płaszczyźnie P_1. Z punktu A'' promieniem d'' zakreślimy koło, w przecięciu jego z osią x leży punkt B''. Zauważmy że przecięcie to będzie zawsze rzeczywiste, albowiem z nierówności $\alpha_2 \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ wynika $\cos\alpha_2 \geqslant \sin\alpha_1$: mnożąc obie strony przez d, mamy $d'' \geqslant h_1$. Aby otrzymać pierwszy rzut punktu B, t.j. pierwszy ślad prostej a wyznaczamy punkt przecięcia linji rzędnych punktu B'' z kołem zakreślonym z punktu A' promieniem d'. Łatwo się przekonać, że przecięcie to jest również zawsze rzeczywistem. Jak widać z rysunku istnieją wogóle 4 rozwiązania.

Do powyższego zadania sprowadzamy następujące:

<u>ZADANIE. Przez punkt $A'A''$ poprowadzić płaszczyznę tworzącą z płaszczyznami rzutów kąty dane β_1 i β_2.</u>

Przez punkt dowolny, np. przez A poprowadźmy prostą a tworzącą z płaszczyznami rzutów kąty $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \beta_1$ i $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \beta_2$, poczem przez punkt A poprowadźmy płaszczyznę pf prostopadłą do $pr.a$. /§ 47/

C Z Ę Ś Ć II.

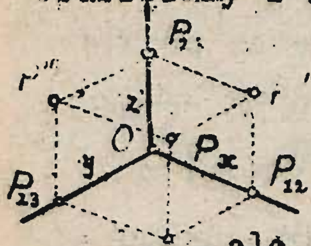
A K S O N O M E T R J A.

ROZDZIAŁ V. AKSONOMETRJA PROSTOKĄTNA.

§ 50. Zalety i wady rzutów prostokątnych. Cechą wybitną metody rzutów prostokątnych jest łatwość zmiany płaszczyzn rzutów i wykonywania obrotów i kładów. Dzięki temu wszelkie zadania miarowe dają się rozwiązywać w rzutach prostokątnych ze szczególną prostotą. Drugą zaletą tej metody jest względna łatwość wykreślenia rzutów figur najczęściej spotykanych w zastosowaniach technicznych. Większość przedmiotów, z któremi technik ma do czynienia, ma pewne uprzywiljowane kierunki krawędzi czyli wymiary i pewne ustawienia ścian, najczęściej wzajemnie prostopadłe. Otóż jeżeli jeden z tych kierunków jest prostopadły do jednej z płaszczyzn rzutów, to jeden z wymiarów przedmiotu znika, podczas gdy inne zachowują w rzucie na tę płaszczyznę niezmienione długości, o wielkości znikającego wymiaru wnosimy zresztą z drugiego rzutu. Jeżeli wnioskowanie o prawdziwych wymiarach przedmiotu odbywa się wtedy z niezwykłą prostotą, to tym trudniejsza jest zatem praca wyobraźni, która musi skojarzyć oba rzuty przedmiotu w jeden obraz przestrzenny. Wprawdzie zapomocą obrotu figury dokoła odpowiednio obranej osi lub zapomocą zmiany płaszczyzn rzutów możemy otrzymać obrazy żywo do wyobraźni naszej przemawiające, ale ta poglądowość osiąga się zapomocą często zbyt długich i mozolnych wykreśleń.

§ 51. Istota aksonometrji. W celu uniknięcia złych a zachowania dobrych stron metody rzutów prostokątnych obmyślono sposoby, które dają na jednej płaszczyźnie rzutów obrazy wywołujące wrażenie zbliżone do tego, które sprawiłby przedmiot rzeczywisty, a jednocześnie pozwalające wnosić o prawdziwych tego przedmiotu wymiarach. Wymaganiom tym czyni zadość metoda wykreślna, zwana aksonometrją.

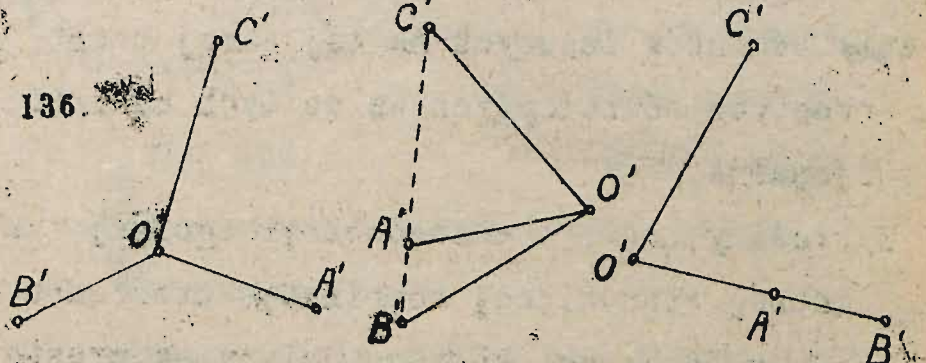
Polega ona przedewszystkiem na określeniu wzajemnego położenia punktów figury zapomocą odniesienia ich do t.zw. układu spółrzędnych prostokątnych. Układ taki składa się, jak wiadomo, z trzech wzajemnie prostopadłych przecinających się prostych x, y i z, zwanych osiami spółrzędnych, z trzech utworzonych przez nie wzajemnie prostopadłych płaszczyzn spółrzędnych xy, yz i zx i wspólnego ich punktu O, zwanego początkiem spółrzędnych. Aby określić położenie dowolnego punktu P przestrzeni /ryc. 135/ spuszczamy z niego trzy prostopadłe na płaszczyznę (spółrzędnych); długości tych prostopadłych PP_1, PP_2, PP_3 nazywają się spółrzędnymi punktu P. Odcinki te będą wyznaczone nie tylko co do (długości), ale i co do znaku, jeżeli obierzemy na każdej płaszczyźnie spółrzędnych stronę dodatnią i jeżeli będziemy prostopadłą w jakimkolwiek punkcie tej płaszczyzny wystawioną uważali za dodatnią, jeżeli znajduje się z dodatniej strony płaszczyzny, w przeciwnym razie będziemy ją uważali za ujemną. Początek spółrzędnych O oraz dany punkt P są przeciwległymi wierzchołkami prostopadłościanu, którego krawędziami są odcinki $OP_{12} = x$, $OP_{13} = y$, $OP_{23} = z$, co do długości i znaku równe spółrzędnym punktu P. W ten sposób każdemu punktowi przestrzeni P odpowiada układ trzech co do długości i znaku określonych odcinków i naodwrót, każdemu układowi trzech takich odcinków odpowiada jeden i tylko jeden punkt przestrzeni P.


Rys. 135

Obrawszy teraz dowolnie płaszczyznę rzutów, zwaną płaszczyzną aksonometrji oraz kierunek promieni rzucających, rzućmy nasz przedmiot wraz z układem spółrzędnych w tym kierunku na obraną płaszczyznę. Rzuty osi x, y i z będą trzema prostymi x', y' i z' wychodzącymi z punktu O', który jest rzutem początku spółrzędnych O. Ponieważ proste równoległe w przestrzeni pozostaną w rzucie równoległe, a stosunki odcinków leżących na każdej z osi nie ulegną zmianie, więc rzut P' każdego punktu P, którego dane są spółrzędne, będzie wyznaczony, gdy znajdziemy rzuty osiowe x', y' i z' i na każdym z nich rzut leżący na odpowiedniej osi jednostki długości lub jej wielokrotności. W ten sposób trzy odcinki $O'A'$, $O'B'$ i $O'C'$ /Rys.136/ wychodzące z punktu O' i leżące w płaszczyźnie aksonometrji, które uważamy za rzut równoległy figury złożonej z trzech równych i wzajemnie prostopadłych odcinków, pozwolą wyznaczyć rzut każdego punktu figury, którego spółrzędne są wiadome.

§ 52. Twierdzenie Pohlke'go. Tutaj nastręcza się pytanie, czy każde trzy odcinki $O'A'$, $O'B'$ i $O'C'$ płaszczyzny rysunku, wychodzące z dowolnego punktu O' mogą być uważane za rzuty równoległe trzech wzajemnie prostopadłych i równych OA, OB i OC. Pohlke pierwszy odpowiedział na to pytanie twierdząco /1853/ z tym jedynym zastrzeżeniem, żeby wszystkie cztery punkty O', A', B', C' nie leżały na jednej prostej /Rys. 136/. Jeżeli połączymy punkty A, B i C to figura ABC staje się czworościanem, którego podstawa ABC jest trójkątem równobocznym, a ściany boczne OAB, OBC i OCA są równymi trójkątami prostokątnymi i równo-

Rys. 136.



ramiennymi. Otóż twierdzenie Pohlke'go jest wnioskiem z twierdzenia bardziej ogólnego:

Każde cztery punkty O', A', B', C' płaszczyzny nie leżące na jednej prostej mogą być uważane na rzuty równoległe wierzchołków czworościanu $OABC$, podobnego do danego jakiegokolwiek czworościanu $O_1A_1B_1C_1$. Dowód tego twierdzenia musimy tutaj pominąć.

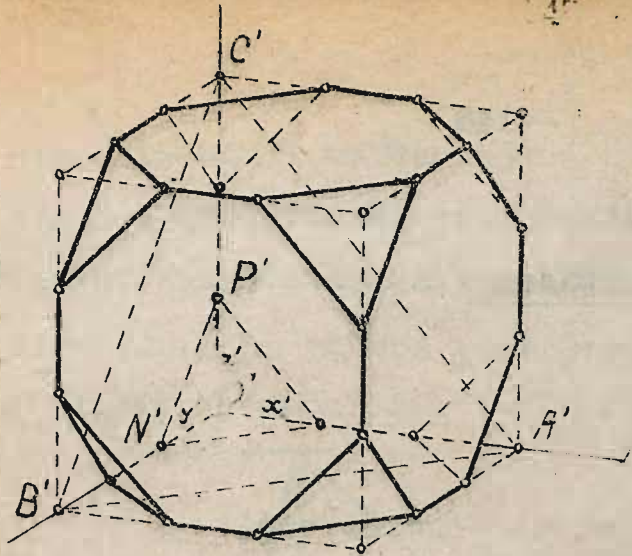
§ 53. Aksonometrja ukośna ogólna. Na zasadzie twierdzenia Pohlkego trzy jakiekolwiek odcinki $O'A'$, $O'B'$ i $O'C'$, wychodzące z punktu O' mogą być uważane za rzuty równych odcinków OA, OB

OC ...rzutach na trzech wzajemnie prostopadłych ... współrzędnych. Wykreślenie rzutu aksonometrycznego ... danego przedmiotu polega na dwóch zasadach;

... rzuty aksonometryczne prostych równoległych są równoległe.

... rzuty odcinków leżących na tej samej prostej lub ... prostych równoległych są do tych odcinków proporcjonalne.

Wykreślmy, naprz. w aksonometrji ogólnej rzut formy ... stanowiącej kombinację sześcianu z ośmiościanem foremnym, którego ściany są prostopadłe ... przekątnych sześcianu (rys. 133). Obrawszy za osie ... trzy krawędzie sześcianu wychodzące z jednego ... punktu O wykreślmy najpierw rzut sześcianu. ... równoległych do y' i z' poprowadzonych przez A' ... równoległych do z' i x' poprowadzonych przez B' ... równoległych do x' i y' poprowadzone przez C' ... na jednej z krawędzi sześcianu punkt M, w ... ośmiościan tę krawędź przecina, wyznaczamy ... sąsiednich krawędziach punkty N i P, prowadząc przez M' równolegle do $A'B'$, $A'C'$; odmierzając ... krawędzi równoległych do OA' odcinek $O'M'$ od obu ich końców i postępując tak samo z krawędziami równoległymi do OB i OC, wyznaczymy



Rys. 137.

wszystkie wierzchołki kryształu. Do tego samego celu doszliśmy również znając jakiekolwiek odcinki $O'A'$, $O'B'$ i $O'C'$ za rzuty aksonometryczne trzech półosi ośmiościanu foremnego.

§ 54. Aksonometrje specjalne. Aksonometrja ogólna jest użyteczną wtedy, gdy wykreślenie danego przedmiotu nie wymaga znajomości kierunku rzutów, którego wyznaczenie nastręczyłoby tutaj dużo trudności.

Zazwyczaj stosujemy aksonometrję, w której zarówno położenie płaszczyzny rzutów względem układu spółrzędnych jak i kierunek rzutów, a gdy jest określony lub łatwo może być wyznaczony.

Odróżniamy w szczególności:

1. Aksonometrję prostkątną, którą charakteryzuje:

a/ dowolne położenie płaszczyzny rzutów względem układu spółrzędnych /nie równoległej do żadnej z osi/

b/ rzuty prostkątne na tę płaszczyznę.

2. Aksonometrję ukośną /rzut ukośny/, którą charakteryzuje:

a/ płaszczyzna rzutów prostopadła do jednej z osi spółrzędnych;

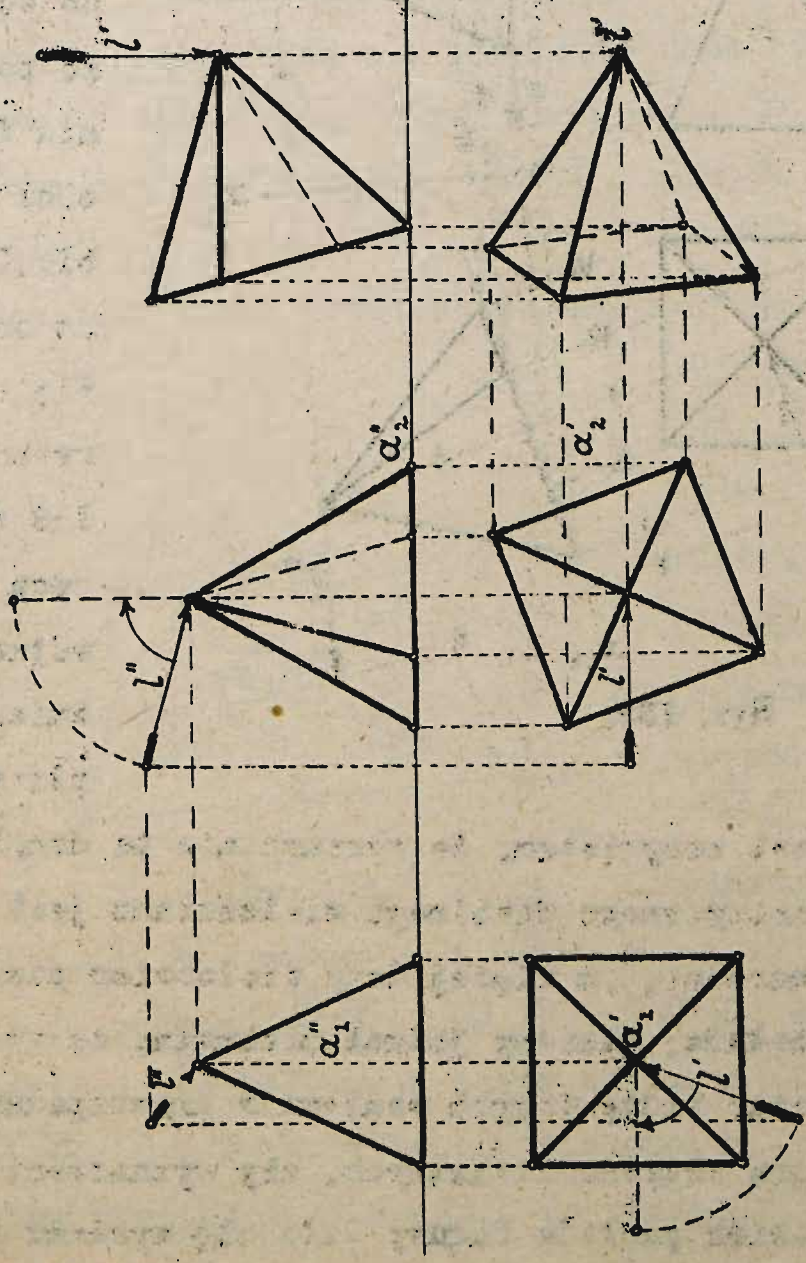
b/ rzuty ukośne na tę płaszczyznę;

§ 53. Związek aksonometrji prostokątnej z metodą rzutów prostokątnych. Jeżeli figura jest dana za pomocą rzutów prostokątnych na dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny oraz dane są rzuty $l'l''$ kierunku rzutów aksonometrycznych, to moglibyśmy otrzymać rzut aksonometryczny tej figury jednym z dwóch sposobów:

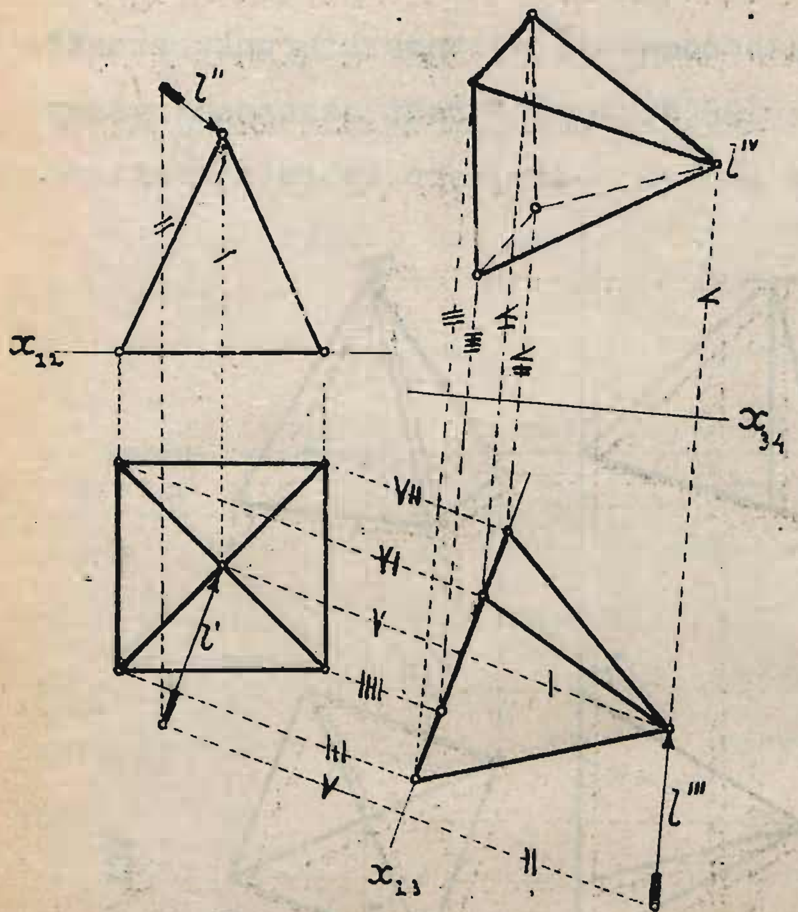
1/ albo za pomocą podwójnego obrotu figury, najpierw dokoła prostej a_1 prostopadłej do P_1, a następnie dokoła prostej a_2 prostopadłej do P_2, tak żeby kierunek l stał się prostopadły do P_1, która w ten sposób stanie się płaszczyzną aksonometrji.

2/ albo za pomocą podwójnej zmiany płaszczyzn rzutów, tak aby nowa płaszczyzna rzutów P_4 stała się prostopadła do kierunku l, a więc aby została płaszczyzną aksonometrji.

Niech będzie naprzykład dany ostrosłup 4 katny w rzutach prostokątnych oraz prosta $l'l''$ sztywno z nim związany i wyznaczający kierunek rzutu na płaszczyznę aksonometrji do tego kierunku prostopadłą. Na rys.138 otrzymano rzut aksonometryczny ostrosłupa za pomocą podwójnego obrotu, przytem



Rys. 138.

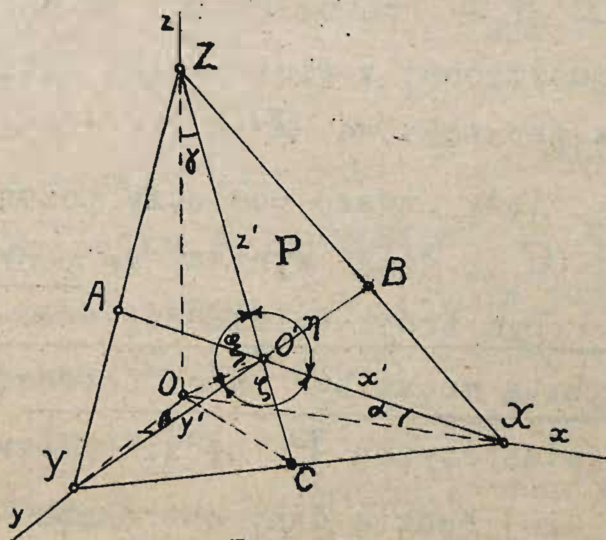


Rys. 139.

dla większej przejrzystości wykreślono kolejno położenia figury obok siebie. To samo osiągnięto na rysunku 139 za pomocą podwójnej zmiany płaszczyzn rzutów. Jest oczywistem, że wyznaczenie tą drogą rzutu aksonometrycznego dowolnego wielościanu jest tym bardziej mozolne, im więcej dany wielościan posiada wierzchołków. Okażemy jednak niebawem, że wystarczy wyznaczać rzuty trzych wzajemnie prostopadłych osi z figurą sztywno związanych, aby wyznaczenie rzutów wszystkich punktów figury dało się wykonać [illegible] pośrednio.

§ 66. Trójkąt śladów i rzuty osi. Niech będzie układ spółrzędnych $Oxyz$ do którego jest odniesiona dana figura. Przetnijmy trójścian $Oxyz$ płaszczyzną aksonometrji P w ten sposób, aby zostały przez nią przecięte dodatnie półosie Ox, Oy i Oz w punktach x, y i z /rysunek 140/. Trójkąt xyz nazywa się **trójkątem śladów**.

Znajdźmy rzuty prostokątne osi spółrzędnych na płaszczyznę P. W tym celu z początku układu O spuśćmy prostopadłą OO' na płaszczyznę

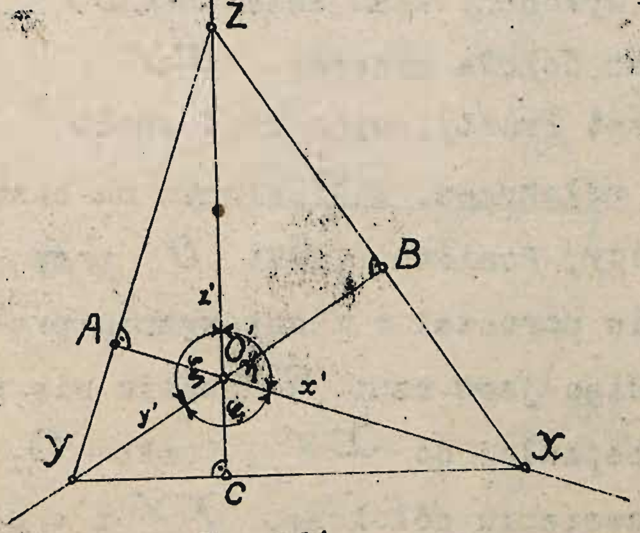


Rys. 140.

P i punkt O' połączmy z x, y i z. Łatwo okazać że proste $O'x$, $O'y$ i $O'z$ są prostopadłe do odpowiednich boków trójkąta śladów xyz. W samej rzeczy wiadomo, że rzut prostokątny prostej prostopadłej do płaszczyzny jest

prostopadły do śladu tej płaszczyzny. Rzut prostej OZ na P, to jest $O'Z$, jest prostopadły do xy, albowiem xy jest śladem płaszczyzny xOy na P. Podobnież można okazać prostopadłość prostych $O'x$ i $O'y$ do boków yz wzgl. zx. Innymi słowy, punkt O' jest punktem przecięcia trzech wysokości trójkąta śladów xyz.
Punkt O' na każdej wysokości leży pomiędzy wierzchołkiem a przeciwległym mu bokiem trójkąta śladów: np. pomiędzy punktami Z i C na wysokości ZC, gdyż spadek wysokości spuszczonej z wierzchołka kąta prostego O naprzeciw prostokątnej ZC trójkąta prostokątnego ZOC leży zawsze pomiędzy pozostałymi wierzchołkami Z i C. Stąd wynika, że punkt O' jest punktem wewnętrznym trójkąta śladów; wszystkie trzy kąty tego trójkąta muszą być zatem ostre.

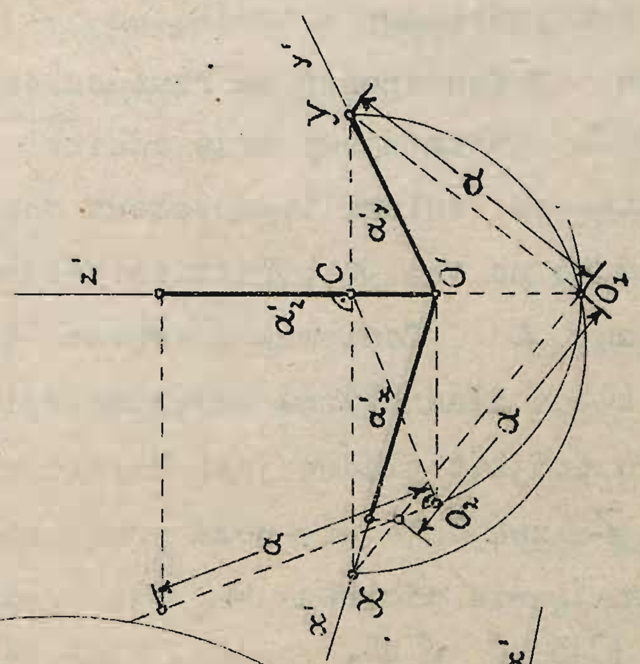
Niechaj teraz płaszczyzna P będzie płaszczyzną rysunku i niech na niej będzie dany ostrokątny trójkąt śladów xyz /rys.141/. Prowadząc w tym trójkącie trzy wysokości xA, yB i ZC, otrzymamy trzy rzuty osiowe $O'x$, $O'y$ i $O'Z$. Kąty między nimi ξ, η i ζ muszą być rozwarte albowiem są to spełnienia odpowiednich kątów trójkąta xyz. Nawzajem trzy półproste $O'x$, $O'y$ i $O'z$, wyprowadzone z jednego punktu O' i tworzące ze sobą jakiekolwiek kąty rozwarte, mogą być uważane za rzuty prostokątne trzych osi wzajemnie prostopadłych na płaszczyznę rysunku. Mając bowiem rzuty osiowe z łatwością wykreślamy jakikolwiek trójkąt śladów.



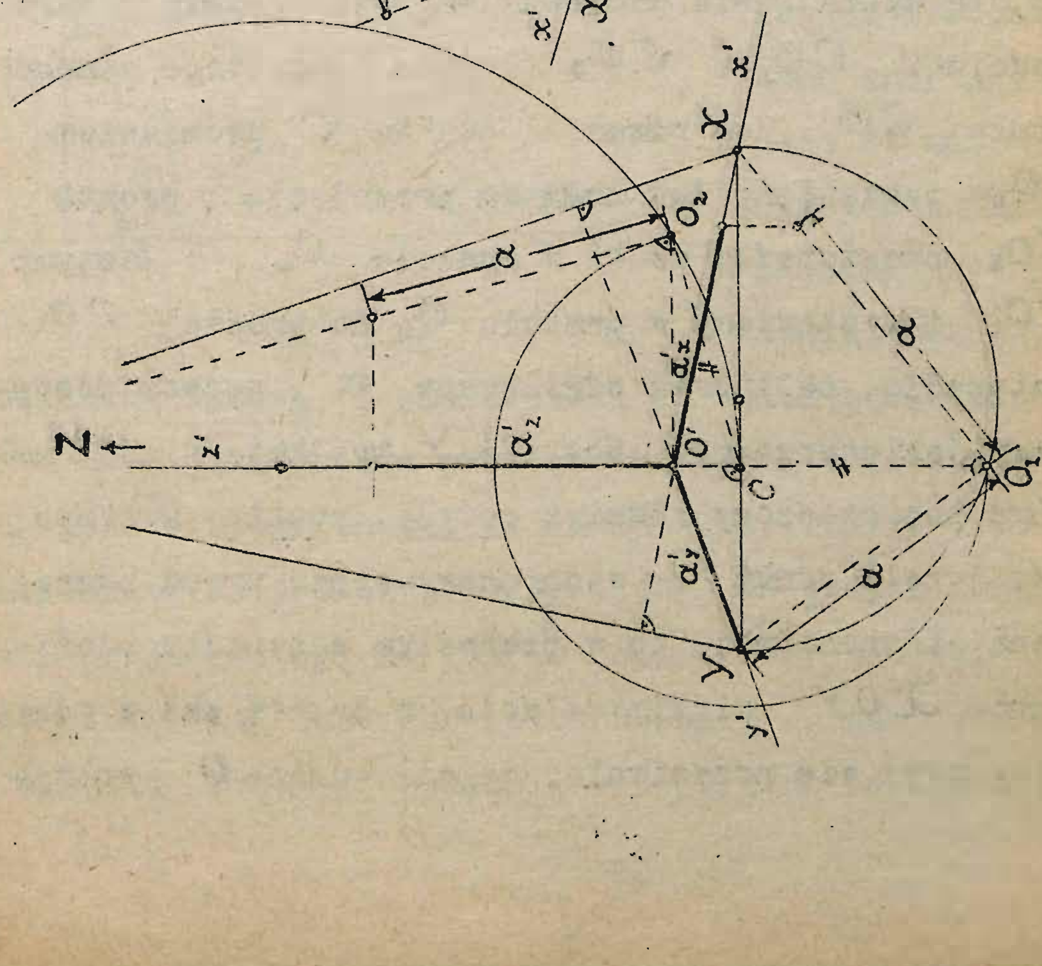
Rys. 141.

W tym celu przez dowolnie na prostej z' obrany punkt C prowadzimy do z' prostopadłą, która przecina proste x' i y' w punktach X oraz Y; z punktu X spuszczamy prostopadłą na y'; punkt przecięcia tej prostopadłej z prostą z' łączymy z punktem Y. Ta ostatnia prosta YZ musi być z resztą prostopadła do x'.

§ 57. Rzuty odcinka danych długości, leżącego na osiach spółrzędnych. Dla wykreślenia rzutu aksonometrycznego jakiegokolwiek punktu, którego współrzędne są dane, trzeba znać rzuty tych spółrzędnych, t.j. trzeba wiedzieć, jakiemu skróceniu ulegają odcinki odmierzone na osiach lub na prostych do nich równ egłych, lub inaczej - jakim odcinkom na rzutach osiowych równają się rzuty jednostki długości lub wogóle odcinka danej długości leżącego na osiach. W tym celu /rys.142/ wykonany kład kąta XOY na płaszczyznę rysunku dokoła prostej XY. Ponieważ kąt XOY jest prosty, więc kład punktu O będzie leżał na półokręgu, zakreślonym na boku XY jak na średnicy. Ponieważ punkt O przy tym obrocie będzie się poruszał w płaszczyźnie prostopadłej do XY, więc jego rzut O' będzie się poruszał po linii prostopadłej do XY. Punkt O_1 znajdziemy więc w przecięciu półokręgu XY z prostopadłą spuszczoną z O' na XY. Jeżeli na ramionach O_1X i O_1Y kąta prostego O_1 odmierzymy odcinek danej długości a równy np. O_1Y i obrucimy trójkąt XOY dokoła XY spowrotem na dawne miejsce, to dostaniemy na rzutach osiowych rzuty odcinka a: $a'x$ i $a'y$. Aby otrzymać rzut tego samego odcinka na rzucie osiowym z', można wykonać kład trójkąta ZOC dokoła ZC lub lepiej kład trójkąta ZOX dokoła ZX. Ponieważ kąt ZOC jest prosty, przeto kład punktu O /oznaczony przez O_2/ znajdziemy w przecięciu półokręgu zakreślonego na ZC jak na średnicy z prosto-



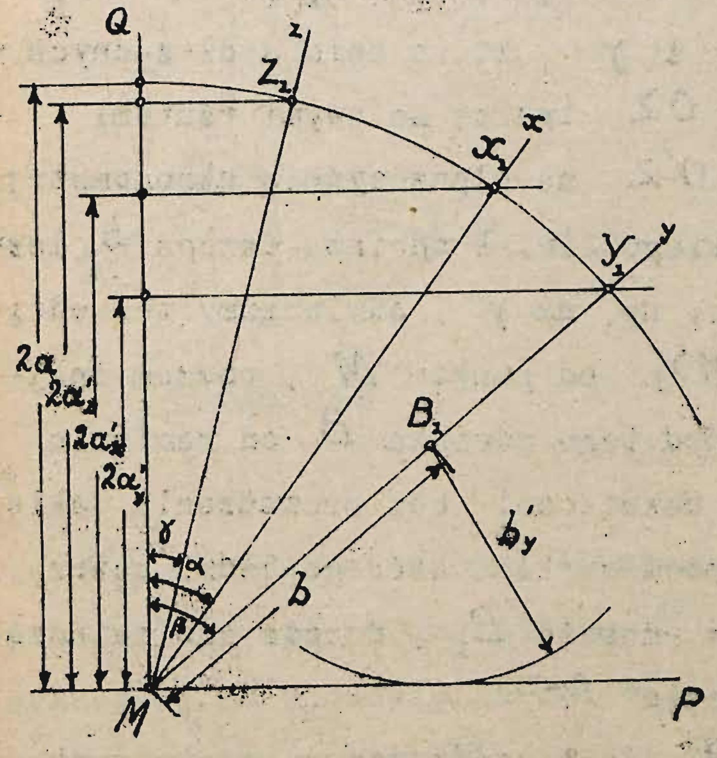
Rys. 143.



Rys. 142.

padłą do ZC wystawioną w punkcie O'. Na kładzie osi OZ, t.j. na prostej O_2Z odmierzamy odcinek a, poczem powracamy z trójkątem ZOC na dawne miejsce. W ten sposób na rzutach osiowych $O'X$, $O'Y$ i $O'Z$ otrzymujemy trzy odcinki a'_x, a'_y i a'_z, które są rzutami tego samego odcinka a położonego bądź to na osi x, bądź na osi y, bądź wreszcie na osi z. Ponieważ zazwyczaj oś z tworzy bardzo mały kąt z płaszczyzną aksonometrji $/\gamma \leq 20°/$, wskutek czego trójkąt śladów jest bardzo wydłużony i wierzchołek Z znajduje się poza granicami rysunku, więc dla wykreślenia odcinka a'_z korzystamy z tego że odcinki CO_1 i CO_2, jako kłady tego samego odcinka CO, są równe. Z punktu C promieniem CO_1 zakreślamy łuk koła do przecięcia z prostą $O'O_2$ prostopadłą do z' w punkcie O_2; łączymy CO_2 i wystawiamy w punkcie O_2 do prostej CO_2 prostopadłą, na której odmierzamy a, poczem postępujemy jak poprzednio. Bok XY trójkata śladów może być poprowadzony również powyżej punktu O' /Rys. 143/; jeżeli punkt O wyobrażamy sobie przed płaszczyzną aksonometrji, to w pierwszym przypadku płaszczyznę XOY widzimy z dołu, w drugim zaś z góry; rzeczy mają się przeciwnie, jeżeli punkt O wyobrażamy sobie za płaszczyznę aksonometrji.

§ 58. Podziałka kątów. Mając odcinki a'_x, a'_y i a'_z wraz z odcinkiem a, moglibyśmy wykreślić trzy podziałki osiowe obok podziałki oryginalnej i z ich pomocą moglibyśmy odmierzyć na odpowiednim rzucie osiowym rzut odcinka danej długości. Aby uniknąć mozolnego i zawsze niedokładnego kreślenia podziałek możemy korzystać z następującego wykreślenia, zwanego podziałką kątową. Z wierzchołka M kąta prostego PMQ jako środka promieniem równym odcinkowi a lub jego wielokrotności /w naszym przykładzie $2a$ / zakreślamy ćwierć okręgu /rys.144/. Na jednym z ramion kąta prostego, np. na MQ odmierzamy odcinki a'_x a'_y i a'_z lub ich wielokrotności /u nas $2a'_x$, $2a'_y$ i $2a'_z$ /, poczem z końców tych odcinków pro-



Rys. 144.

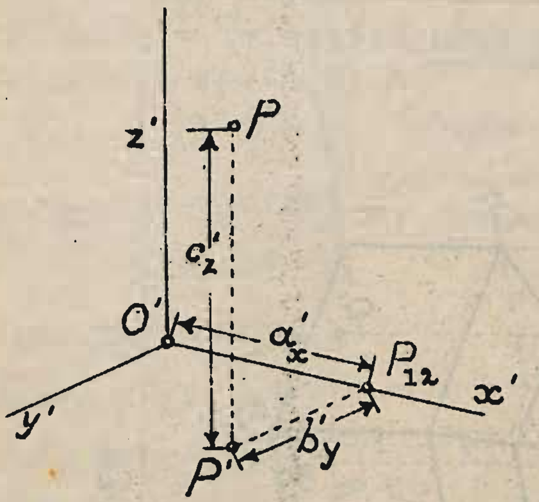
wadzimy równoległą do drugiego ramienia kąta prostego otrzymując w przeciągu z okręgiem punkty x_1, y_1, i z_1. wreszcie łączymy te punkty z wierzchołkiem kąta prostego, kąty QMx_1, QMy_1 i QMz_1 są to kąty α, β i γ, które osie spółrzędnych

Ox, Oy i Oz tworzą ze swymi rzutami

$O'x$, $O'y$ i $O'z$ na płaszczyźnie aksonometrji.

Aby znaleźć rzut jakiegokolwiek odcinka danego b, leżącego na jednej z osi, np. na y, odmierzamy ten odcinek na promieniu My_1 od punktu M, poczem znajdujemy odległość końca tego odcinka B_1 od ramienia MP, co da się uskutecznić bez prowadzenia jakiej kolwiek linji, zapomocą cyrkla, którego jedno ostrze pozostaje utkwione w punkcie B_1, drugie zaś zatacza łuk styczny do ramienia MP.

§ 59. Wykreślenie aksonometrycznego rzutu punktu, którego spółrzędne są dane. Aby znaleźć rzut aksonometryczny punktu P, którego spółrzędne a, b i c są dane, znajdujemy w powyżej wskazany sposób ich rzuty a'_x, b'_y i c'_z, poczem na rzucie osiowym x' odmierzamy od punktu O' odcinek $O'P_{12} = a'_x$, na równoległej do y' od punktu P_{12} odmierzamy $P_{12}P = b'_y$, wreszcie na równoległej do z' z punktu P' wyprowadzonej odmierzamy odcinek $P'P = c'_z$ /rys. 31/

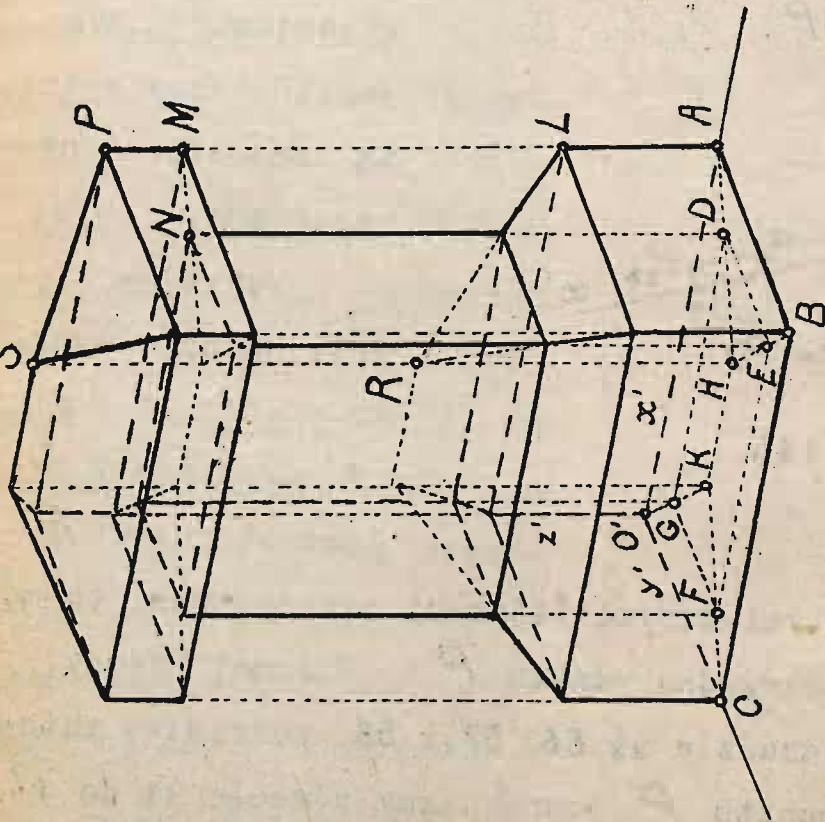


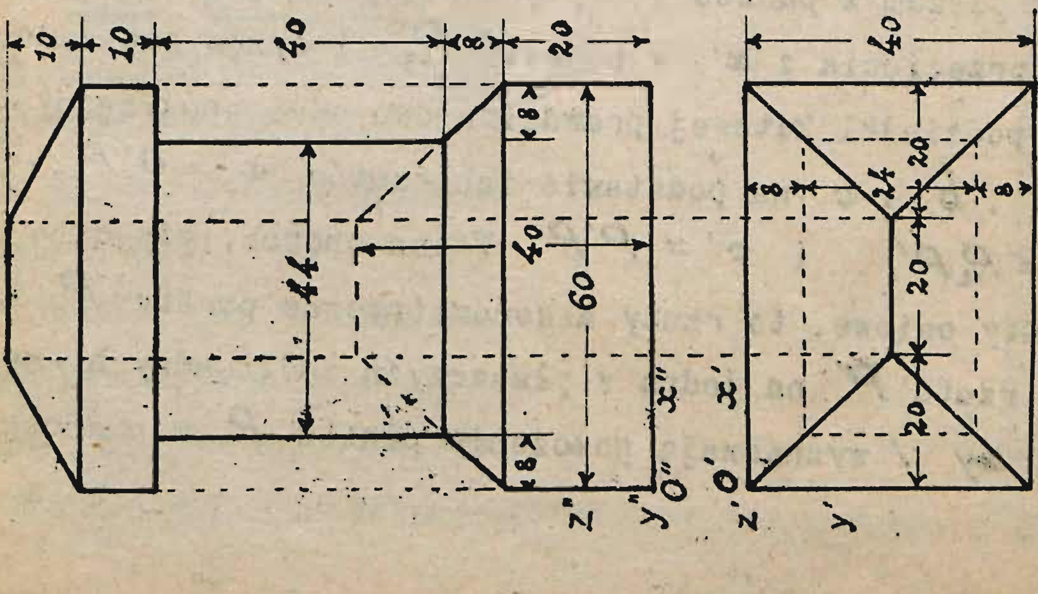
Rys. 145.

W ten sposób otrzymujemy punkt P, który jest rzutem aksonometrycznym punktu przestrzeni tą samą literą oznaczonego.

Nawzajem, jeżeli są dane punkty osiowe x', y' i z' oraz rzuty aksonometryczne P i P' punktów tymi samymi literami oznaczonych, to można znaleźć spółrzędne punktu P. W samej rzeczy, wykreślmy na zasadzie §§ 56, 57, i 58 podziałkę kątową, poczem z punktu P' poprowadźmy równoległą do y' do przecięcia z x' w punkcie P_{12} i wyznaczmy zapomocą podziałki kątowej prawdziwe długości spółrzędnych a, b i c na podstawie ich rzutów $a' = O'P_{12}$, $b' = P_{12}P'$ i $c' = P'P$. W ten sposób, gdy dane są rzuty osiowe, to rzuty aksonometryczne punktu P i jego rzutu P' na jedną z płaszczyzn spółrzędnych /np. na xy/ wyznaczają położenie punktu P w przestrzeni.

§ 60. Wykreślenie rzutu aksonometrycznego figury, której rzuty prostokątne są dane. Wykreślimy w podziałce

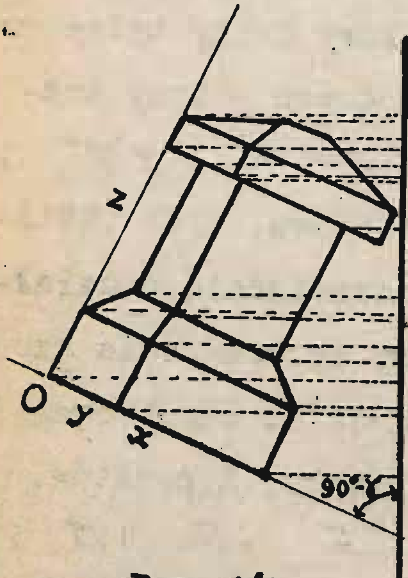




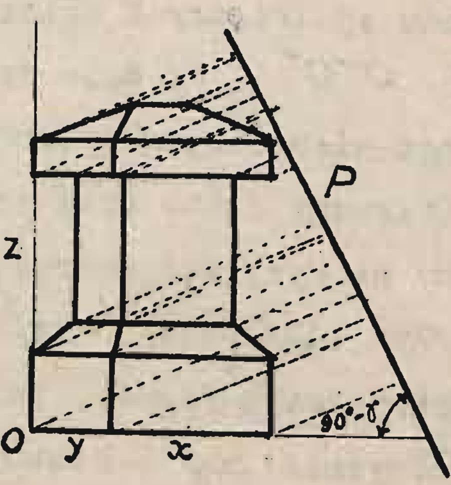
Rys. 146.

10 rzut aksonometryczny słupa kamiennego, którego rzuty prostokątne i wymiary są dane /Rys.146/. Za początek układu spółrzędnych obierzmy lewy dolny tylny wierzchołek $O'O''$, za osie spółrzędnych - trzy krawędzie z tego wierzchołka wychodzące: $x'x''$, $y'y''$, $z'z''$. Obierzmy nadto trzy rzuty osiowe, np. te, któreśmy wzięliśmy na Rys. 142 wykreślmy odpowiednią podziałkę kątową /Rys.144/ poczem przystąpmy do kreślenia rzutu aksonometrycznego figury, zaczynając od odwzorowania w płaszczyźnie xy rzutu poziomego. Z punktów O', A, B, C, D, E, F, G, H i K wystawiamy równoległe do z' i odmierzamy na nich zapomocą podziałki kątowej zredukowane wysokości punktów L, M, N, P, R i S, a następnie uzupełniamy rysunek na tej zasadzie, że odcinki równe i równoległe pozostają w rzucie aksonometrycznym równe i równoległe.

§ 61. Warunki korzystnego wrażenia rysunku aksonometrycznego. Przyglądając się rysunkowi § 60 spostrzegamy pewien paradoks. Płaszczyzna aksonometrji jest płaszczyzną rysunku, którą wyobrażamy sobie pionową, oś z i wszystkie linje do niej równoległe są do tej płaszczyzny nachylone pod kątem γ /Rys.144/. Należałoby więc oczekiwać, że słup ten wydawać się będzie nachylonym

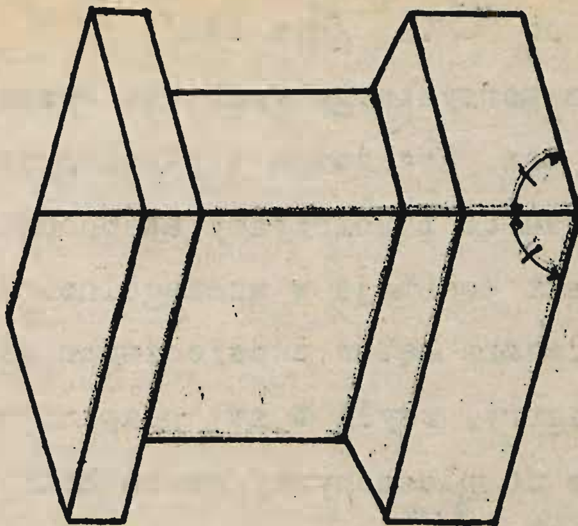


Rys. 147.

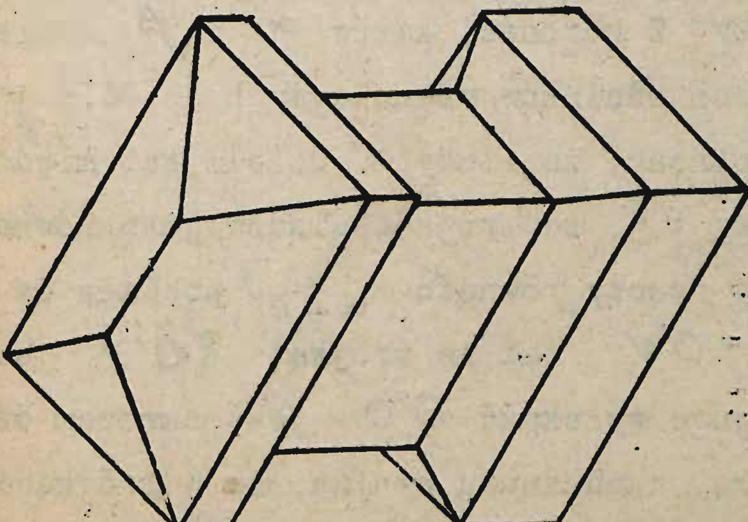


Rys. 148.

ku widzowi tymczasem robi on wrażenie słupa pionowego /Rys. 147/ przedstawia w rzucie na płaszczyznę prostopadłą do **P** ten sam słup rzucony aksonometrycznie na płaszczyznę **P** w przypuszczeniu, że płaszczyzna ta jest pionową; rys. 148 przedstawia ten sam słup w przypuszczeniu, że oś **z** jest pionową. Ponieważ rys. 148 różni się od rys. 147 tylko swem położeniem, wnosimy stąd, że ze stanowiska geometrycznego obydwie interpretacje są równouprawnione. Jeżeli z tych dwuch interpretacji wybieramy instynktownie drugą, to przyczyna musi być psychologicznej natury, przyzwyczailiśmy się bowiem przedmioty takie, jak słupy kamienne widzieć najczęściej w położeniu pionowym. Gdyby wszakże kąt γ był dość duży, to



Rys. 150.



Rys. 149.

rysunek aksonometryczny tego samego słupa wywołałby wrażenie przechylenia ku widzowi, jak to widzimy na rysunku 149, gdzie $\gamma = 48^\circ$; tłomaczy się to tem, że przedmioty tego rodzaju rzadko obserwujemy ze znacznej wysokości. Aby wykreślony aksonometrycznie przedmiot nie sprawiał wrażenia przechylonego, należy tak obrać rzuty osiowe, aby kąt γ nie był większy od 20°, a więc $\sin\gamma$ nie większy od $\frac{1}{3}$, t.j. CO_1 przyjmujmniej 3 razy większe od CO' /Rys. 142/.

Drugim warunkiem korzystnego wrażenia rysunku aksonometrycznego jest ten, aby żadna z płaszczyzn figury nie była prostopadła do płaszczyzny aksonometrji. Taki niekorzystny efekt powstaje w szczególności wtedy gdy płaszczyzny dwusieczne kątów dwusiecznych między pionowemi ścianami figury, czyli t.zw. płaszczyzny uciosu, są prostopadłe do płaszczyzny aksonometrji, t.j gdy kąty α i β, które tworzą osie x i y z płaszczyzną aksonometrji /t.j. z rzutami osiowemi x' i y'/ są równe /Rys. 140/. Z równości kątów α i β wynika, że stosunki skróceń odcinków równoległych do x i y są równe. Łatwo okazać, że wtedy z' dzieli kąt między x' i y na połowy t.j. że trójkąt śladów jest równoramienny. W samej rzeczy równość $\alpha = \beta$ pociąga za sobą równość $O'X = O'Y$ tak że trójkąt $XO'Y$ jest równoramienny i jego wysokość $O'C$ jest zarazem dwusieczną i środkową, skąd znowu wynika, że w trójkącie śladów XYZ wysokość ZC jest środkową, tak, że ten trójkąt jest równoramienny. Na rys. 150 wykreślono słup kamienny w rzucie t.zw. dimetrycznym / $\alpha = \beta$ / ponieważ płaszczyzna uciosu jest prostopadła do P, więc mają swoje rzuty aksonometryczne na śladzie tej płaszczyzny, co utrudnia należyte zrozumienie rysunku

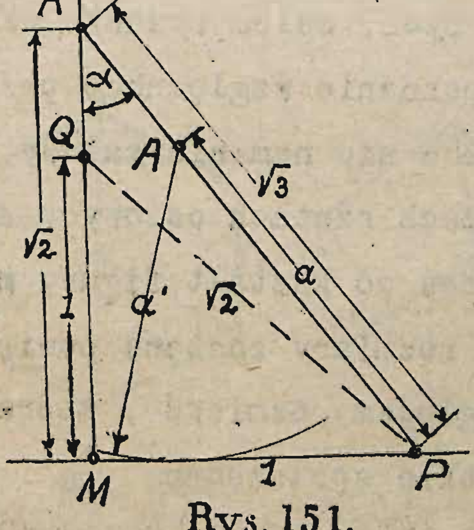
§ 62. Rzut izometryczny. Obydwie wyżej przytoczone wady: zbytnie nachylenie figury do płaszczyzny aksonometrji / $\alpha = \beta = \gamma = 35^\circ$ / i prostopadłość płaszczyzn rzutu do płaszczyzny aksonometrji posiada rzut izometryczny. Wady te są jednak okupione tak ważnemi zaletami, że pomimo to rzut izometryczny ma ważne w praktyce znaczenie.

Aksonometrja nazywa się rzutem izometrycznym, gdy płaszczyzna aksonometrji P jest nachylona do wszystkich trzech osi pod tym samym kątem $\alpha = \beta = \gamma$. /Rys.140/. Trójkąt śladów jest równobocznym, kąty między rzutami osiowemi są równe $\xi = \eta = \zeta = 120$ Kąty $\alpha = \beta = \gamma$ mogą być łatwo obliczone. Przyjąwszy za jednostkę długości bok $XY = YZ = ZX$ trójkąta śladów mamy z trójkąta XYZ; /Rys.140/

$$O'X = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

a z trójkąta OXY;

$$OX = \frac{1}{\sqrt{2}},$$ więc



Rys. 151.

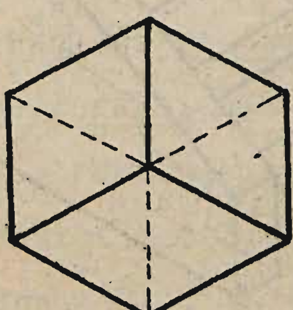
$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{O'X}{OX} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Podziałka kątowa redukuje się do jednego tylko kąta α, który wykreślamy w sposób następujący /Rys. 156/. Na ramionach kąta prostego PMQ odmierzamy dowolny odcinek $MP = MQ$, który możemy np. uważać za bok trójkąta śladów, t.j. za jednostkę długości. Wtedy prostokątna $PQ = \sqrt{2}$; odmierzając $MR = PQ = \sqrt{2}$ na MQ od punktu M znajdziemy: $PR = \sqrt{3}$, kąt $MRP = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \alpha$. Chcąc znaleźć rzut izometryczny a' odcinka a leżącego na którejkolwiek z osi, odmierzamy go od punktu P na PR i znajdujemy odległość jego końca A od MP. Jeżeli jak to najczęściej bywa, celem rysunku aksonometrycznego jest jedynie poznanie względnego położenia części figury i na podziałce nic nam nie zależy, to odmierzamy na wszystkich trzech rzutach osiowych spółrzędne niezredukowane, przez co kształt figury nie ulegnie zmianie, a tylko jej rozmiary zostaną powiększone w stosunku $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ względem rozmiarów, którebyśmy otrzymali redukując wszystkie spółrzędne.

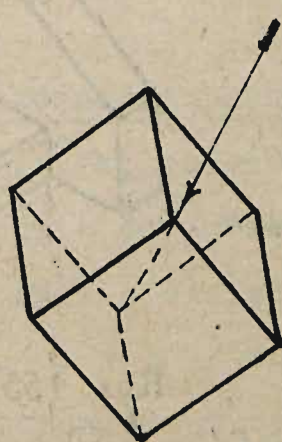
Wykreślenie odbywa się szczególnie łatwo, jeżeli nie kreśląc zgoła rzutów osiowych, posługujemy się rajszyną i ekierką o kątach $90°$, $60°$ i $30°$.

sposób, że większa przyprostokątna ekierki ślizga się po brzegu rajszyny, druga przyprostokątna i przeciwprostokątna ekierki obracanej na obie swe strony dają kierunki spółrzędnych, na których odmierzamy niezredukowane ich długości.

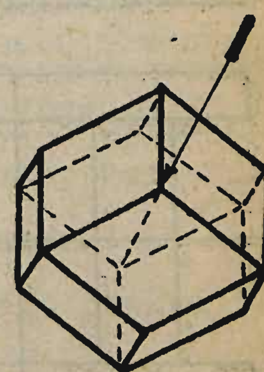
Z tego, co powiedziano w § 61 wynika, że należy unikać rzutów izometrycznych takich wielościanów, których ściany lub płaszczyzny przekątne stałyby się w tym rzucie prostopadłe do płaszczyzny aksonometrji. Następujący przykład jest w tym względzie bardzo pouczający. Rys.152 jest rzutem izometrycznym dwuch zgoła różnych figur: sześcianu i dwunastościanu rombowego, których rzuty trimetryczne wykreślone są obok na rys.153 i 154.



Rys. 152.



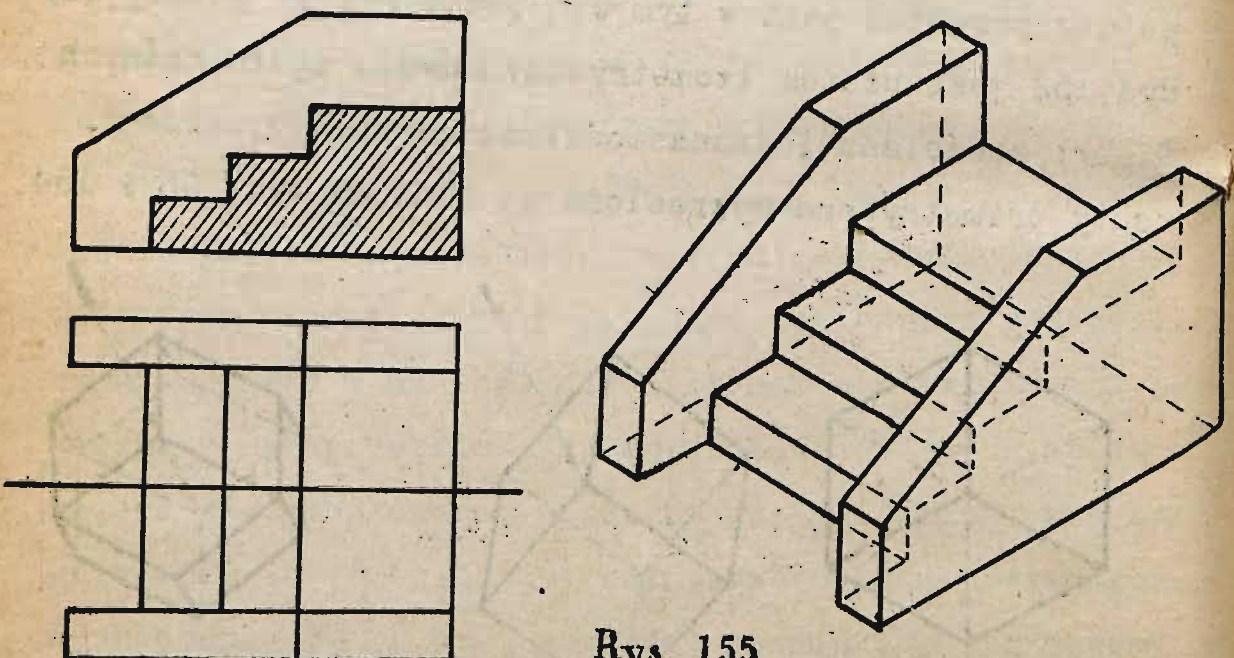
Rys. 153.



Rys. 154.

Rzut izometryczny w podobnych przypadkach jest oczywiście nie wskazany.

Gdy jednak figura nie posiada takich ścian lub ważnych płaszczyzn ciosu, które w rzucie izometrycznym stałyby się prostopadłe do płaszczyzny aksonometrji, a przedmiot, który rysujemy, nie należy do tych, które rzadko oglądamy z góry, to rzut izometryczny może sprawić niezłe wrażenie. Na rys. 155 wykreślono np. w rzucie izometrycznym schodki złożone z trzech stopni, do których z obu stron przylegają dwie ściany.



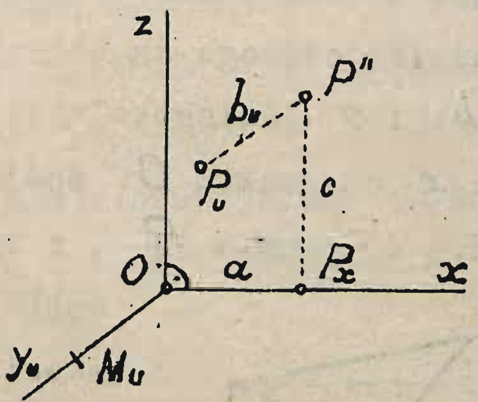
Rys. 155.

Podziałka 1:5

Podziałka $\sqrt{3} : 5\sqrt{2} = 1 : 4{,}08.$

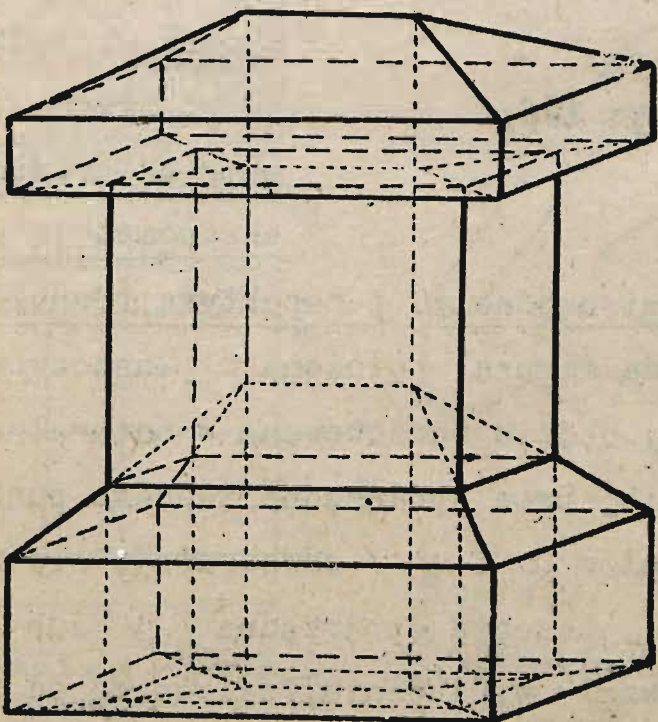
ROZDZIAŁ VI. RZUTY UKOŚNE.

§ 63. Odwzorowanie punktu. Przypuśćmy teraz, że płaszczyzna rzutów **P** jest równoległa lub nawet przystaje do jednej z płaszczyzn spółrzędnych, np. do zx lub xy, kierunek zaś rzutów jest ukośny względem tej płaszczyzny. Wtedy mamy do czynienia z aksonometrją ukośną,



Rys. 156.

zwaną też rzutami ukośnemi, perspektywą równoległą lub kawalerską. Każda figura, położona w płaszczyźnie do niej równoległej będzie odwzorowana w naturalnej wielkości i kształcie. Dwie spółrzędne każdego punktu figury / x i z albo x i y / odwzorowują się w naturalnej wielkości, trzecia spółrzędna / y lub z / ulega skróceniu wzgl. wydłużeniu, zależnemu od kąta α, pod którym padają promienie rzucające na płaszczyznę **P**. Aby zatem wykreślić rzuty osiowe, trzeba w płaszczyźnie rysunku wziąć dwie osie prostopadłe x i z albo x i y przecinające się w punkcie O /Rys. 156/ i z tego punktu wyprowadzić w dowolnym kierunku prostą, która będzie rzutem ukośnym trzeciej osi y albo z. Na tym rzucie osiowym weźmiemy dowolny odcinek OM_v uważając go za rzut ukośny odcinka znanej długości /np. jednostki długości/ leżącego na trzeciej osi. Mając spółrzędne a, b i c jakiegokolwiek punktu P, odmierzamy na osi x od punktu O spółrzędną a w naturalnej wielkości do punktu P_x, w tym punkcie wystawiamy prostopadłą do osi x /a więc równoległą do osi z/ i od punktu P_x odmierzamy na niej również w naturalnej wielko-



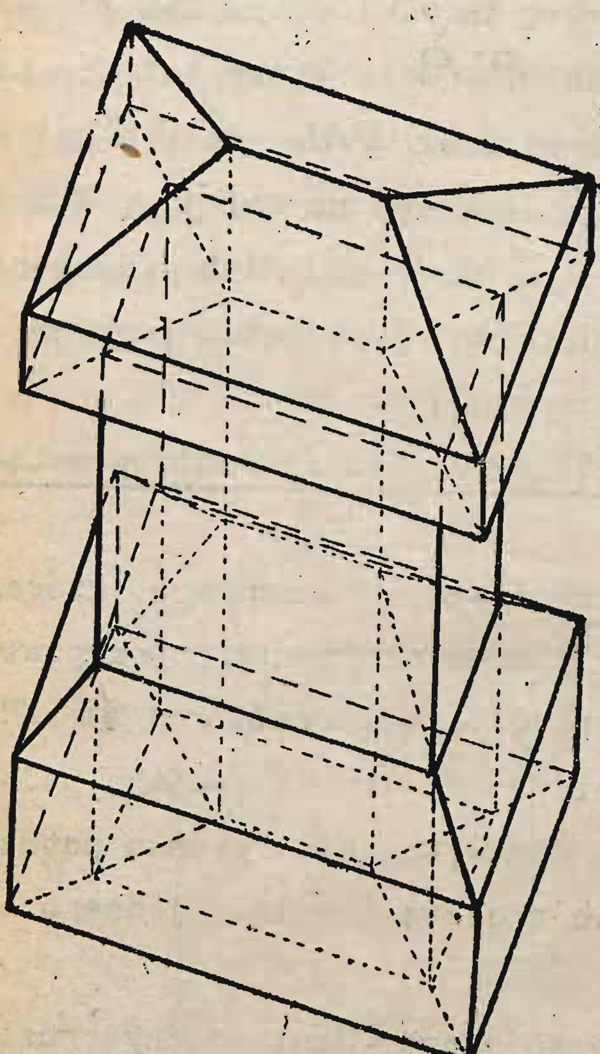
Rys. 157.

ści spółrzędną c do punktu P'', wreszcie z punktu P'' prowadzimy równoległą do y'' i od punktu P'' odmierzamy na niej odcinek $P''P_u$, który tak się ma do spółrzędnej b, jak odcinek OM_u do prawdziwej wielkości odcinka OM leżącego na osi y. W ten sposób spółrzędna b ulega skróceniu /lub wydłużeniu w stosunku $\cot g\alpha$, gdzie α jest kątem promieni rzucających z płaszczyzną rysunku.

§ 64. Rzut ukośny figury, której rzuty prostokątne są dane.

Wykreślmy rzut ukośny słupa kamiennego, którego rzuty prostokątne były podane na rys. 146, przypuszczając, że skrócenie na osi y, t.j. $\cot g\alpha = \frac{1}{2}$ /Rys. 162/. Sposób wykreślenia różni się od sposobu podanego w § 60 tym jedynie, że dla wykonania rysunku potrzebna jest redukcja, zupełnie zresztą dowolna, jednego tylko wymiaru.

§ 65. Perspektywa wojskowa. Rzut ukośny będzie szczególnie dogodny, gdy $\cot g\alpha = 1$ t.j. gdy $\alpha = 45°$; jeżeli płaszczyzną rzutów jest płaszczyzna xy, to rzut nazywa się perspektywą wojskową. Rzut ten otrzymujemy bezpośrednio z rzutu poziomego t.j. z planu figury, wyprowadzając ze wszystkich jego punktów linje w dowolnym kierunku i odmierzając na nich wysokość tych

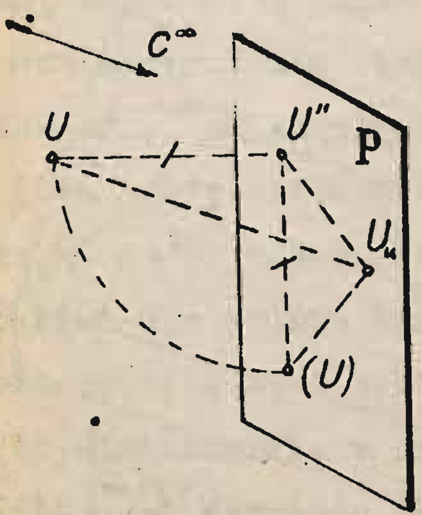


Rys. 158.

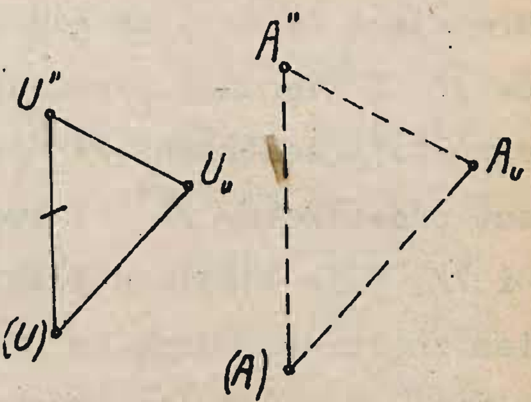
/Rys. 158/. Perspektywa wojskowa jest jedną z najprostszych metod odwzorowania figur danych w rzutach prostokątnych podobnie jak w rzucie izometrycznym /§ 62/ możemy z rysunku bezpośrednio wybierać prawdziwe wymiary współrzędnych każdego punktu, z drugiej strony obrazy otrzymano są w znacznym stopniu zniekształcone.

§ 66. Trójkąt rzutowy. W § 4 określiliśmy rzut ukośny, jako metodę odwzorowania figur przestrzennych polegającą na tem, że gdy daną jest płaszczyzna rzutów P i kierunek promieni rzucających C^{∞}, to każdy punkt przestrzeni A jest wyznaczony przez swój rzut prostokątny A'' i swój rzut ukośny A_u /Rys. 6 i 7/. Osie leżące w płaszczyźnie rzutów nie mają bowiem znaczenia, mogą to być dowolne dwie prostopadłe leżące w płaszczyźnie rysunku lub w płaszczyźnie do niej równoległej. Kierunek rzutów ukośnych C^{∞} mógłby być dany zapomocą swego rzutu prostokątnego na płaszczyznę rysunku oraz jego kąta α z tą płaszczyzną, dogodniej wszakże będzie go wyznaczyć zapomocą prostokątnego i ukośnego rzutu punktu U, którego odległość od P jest dana. Kierunek rzutu będzie wtedy dany zapomocą dwuch odcinków $U''U_u$ i $U''(U)$ /Rys. 159 i 160/, z których pierwszy jest rzutem ukośnym odcinka równego drugiemu i prostopadłego do P.

Punkt /U/ możemy uważać za kład punktu U po dokonanym jego obrocie dokoła osi leżącej w P i przechodzącej przez U''. Trójkąt $U''/U/U_u$ nazywa się trójkątem rzutowym, stosunek $U''U_u : U''(U) = \operatorname{ctg}\alpha$; przez podanie takiego trójkąta kąt α, a więc i kierunek rzutu ukośnego ~~jest~~ wyznaczony. Trój-



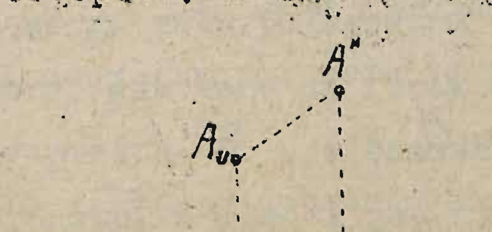
Rys. 159.



Rys. 160.

kątów rzutowych jest oczywiście nieskończenie wiele, ten sam rzut ukośny może być określony przez trójkąty rzutowe różne co do położenia, wielkości i kształtu. Aby trójkąt był rzutowym wystarcza, by jeden jego bok był równoległy do stałego kierunku oraz by stosunek tego boku do jednego z pozostałych równał się $\operatorname{cotg}\alpha$. Przez podanie któregokolwiek trójkąta rzutowego odległości wszystkich punktów od płaszczyzny rysunku są wyznaczone, jeżeli dane są ich rzuty: prostokątny i ukośny. Niech będą np. dane rzuty A'', i A_v pewnego punktu A, /Rys.160/, kreśląc na odcinku $A''A_v$ trójkąt jednokładowy z trójkątem rzutowym, t.j. trójkąt o bokach odpowiednio równoległymi do boków trójkąta rzutowego wyznaczymy odcinek $A'' / A /$, który jest prawdziwą odległością punktu A od płaszczyzny rysunku, t.j. od punktu A''.

§ 67. Pierwsza i druga płaszczyzna rzutów. Wprowadźmy teraz nową płaszczyznę rzutów prostopadłą do P, którą nazwiemy pierwszą płaszczyzną rzutów i oznaczymy przez P_1. Będzie ona wyznaczona przez swój ślad x na dotychczasowej płaszczyźnie rzutów P, którą od tej chwili nazywać będziemy drugą płaszczyzną rzutów i oznaczymy przez P; mając rzut ukośny A_u i rzut prostokątny A'' na drugą płaszczyznę rzutów można z łatwością znaleźć rzut ukośny A'_u rzutu prostokątnego na pierwszą płaszczyznę rzutów. Z punktu A'' spuśćmy prostopadłą na oś x /Rys. 161/ i na odcinkach $A''A_u$ i $A''A_x$ zbudujemy równoległobok; czwarty wierzchołek A'_u tego równoległoboku będzie szukanym punktem. Nawzajem, mając rzut ukośny A_u i rzut ukośny A'_u pierwszego rzutu A',

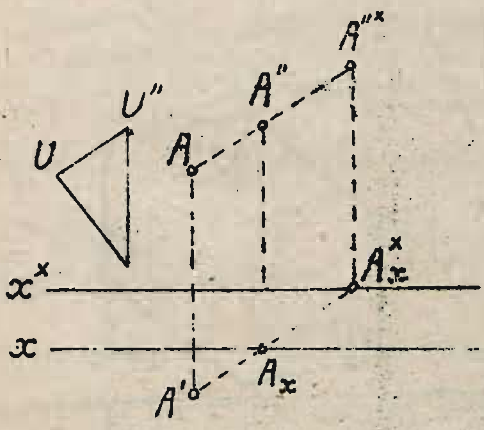


Rys. 161.

możemy znaleźć rzut drugi A''. W tym celu z punktu A'_v prowadzimy równoległą do boku $U_v U''$ trójkąta rzutowego, z punktu przecięcia A_x tej równoległej z osią x wystawiamy do niej prostopadłą na której odmierzamy $A_x A'' = A'_v A_v$. Prosta AA' jest równoległa do płaszczyzny rysunku P_2, zatem jej rzut ukośny $A_v A'_v$ jest jej równy i do niej równoległy. Gdy nie będzie zachodziła obawa pomieszania pojęcia punktu przestrzeni A z jego rzutem ukośnym A_v oraz pierwszego rzutu A' z rzutem ukośnym pierwszego rzutu A'_v, będziemy opuszczali wskaźnik „v". Widzimy zatem, że zamiast odwzorowywać punkt A zapomocą pary punktów A_v, A'', leżących na prostej o stałym kierunku vv'', możemy go odwzorować zapomocą pary punktów A_v A'_v leżących na prostej o stałym kierunku prostopadłym do osi x. Odcinek $A'_v A_v$ jest przytem równy i równoległy pierwszej odległości punktu A.

Tak pojęta metoda rzutów ukośnych nie jest dla nas nową; stosowaliśmy ją wielokrotnie dla objaśnienia wykreśleń metody rzutów prostokątnych.

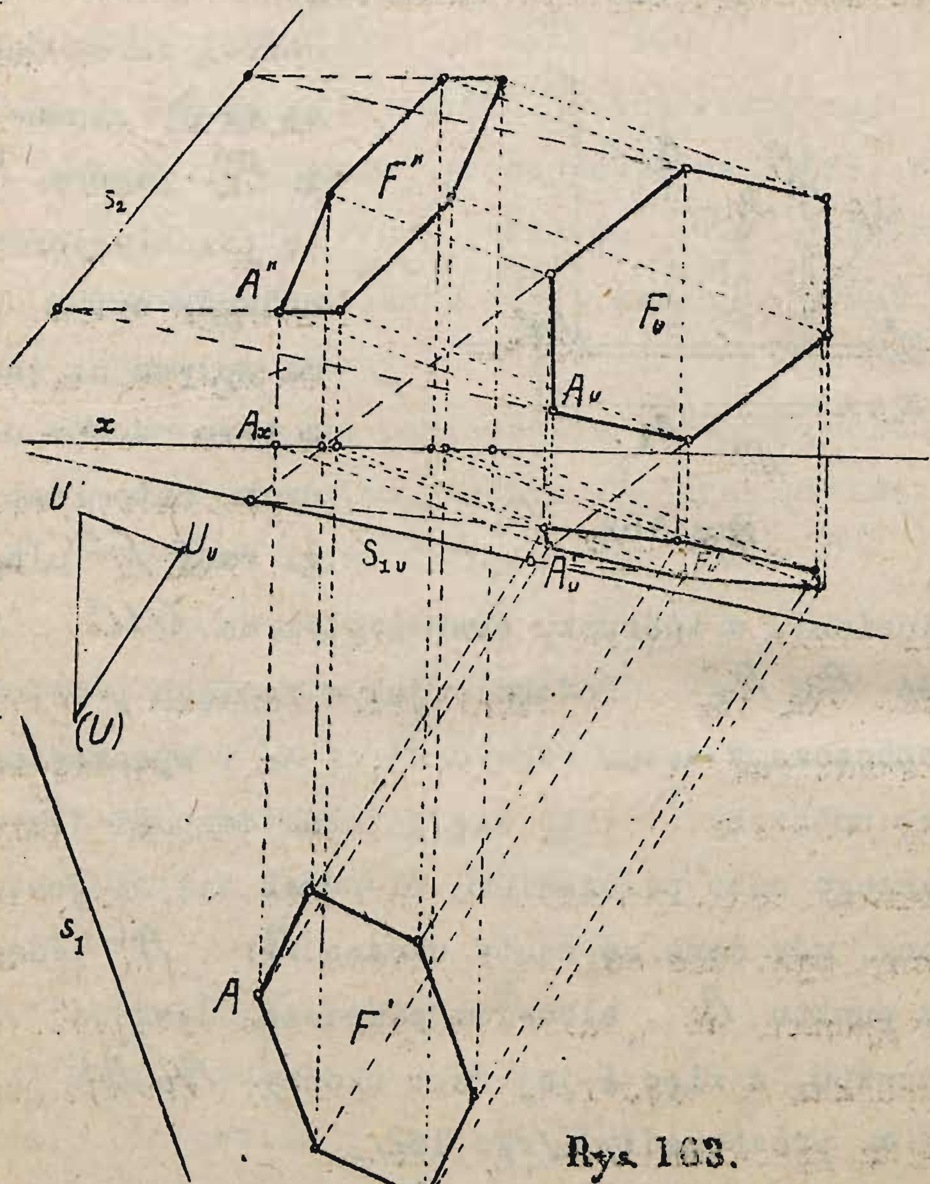
§ 68. Przeniesienie równoległe osi. Z wykreślenia podanego w § poprzednim dla znalezienia rzutu A'_v wynika, że przez przeniesienie równoległe osi x drugie odległości punktów odwzorowanej w rzutach ukośnych figury powiększają się lub zmniejszają o ten sam odcinek.



Rys. 162.

Jeżeli zatem dane są rzuty ukośne F_u i F_u' figury F to przeniesienie równoległe osi x nie ma wpływu na żaden z tych rzutów ukośnych, natomiast drugi rzut F'' ulega przeniesieniu w kierunku równoległym do UU'' na odległość $A_x A_x^x$ Podobnie jak w rzutach prostokątnych opuszczamy zatem zazwyczaj oś x i wprowadzamy ją w miarę potrzeby, licząc się z jaknajdogodniejszym jej dla naszego celu położeniem. Kierunek osi x jest wyznaczony, gdy dane są rzuty ukośne A, A' jednego choćby punktu A, albowiem pierwsza odległość AA' tego punktu, a więc i jej rzut ukośny $A_u A_u'$, jest do osi x prostopadły. /rys.162/.

§ 59. Związek rzutów ukośnych danej figury z jej rzutami prostokątnymi. Jeżeli dane są rzuty ukośne F_u i F_u' figury F, oraz trójkąt rzutowy $U''U(U')$, to można znaleźć jej rzuty prostokątne F'' i F' i to w sposób znacznie prostszy, niż to miało miejsce w ok-



Rys. 163.

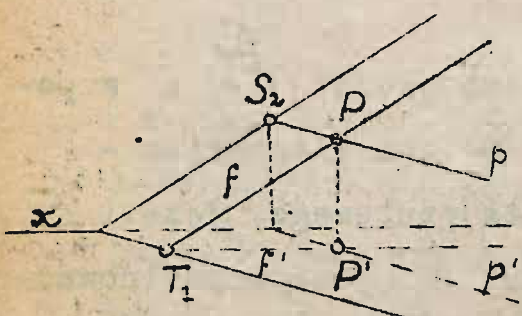
sometrji prostokątnej. Poprowadzimy dowolną prostą podłą do prostej łączącej rzuty ukośne jakiegokolwiek punktu A i obrawszy ją za oś x, wyznaczymy drugie rzuty A'', B'' .... punktów A, B, ... /§ 67/.

poczem zapomocą trójkąta rzutowego znajdziemy pierwsze rzuty tych punktów, jak to widać na rys.163.

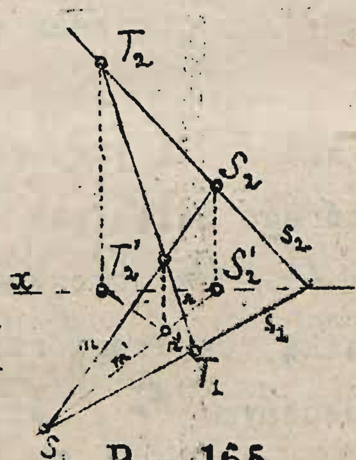
Nawzajem, gdy dane są rzuty prostokątne $F'F''$ figury F, to otrzymamy jej rzuty ukośne w sposób następujący: Obrawszy trójkąt rzutowy $U''U/U/$ i oś x, z pierwszego rzutu A' każdego punktu A prowadzę równoległą do $/U/U''$, a z punktu A_x, w którym rzędna $A'A''$ przecina x równoległą do $U''U_v$; w przecięciu tych dwuch równoległych otrzymam rzut ukośny A'_v pierwszego rzutu A'. Wystawiając w tym punkcie prostą równą i równoległą do pierwszej odległości A_xA'' punktu A, otrzymam rzut ukośny A_v punktu A.

Pierwszy rzut F' i jego rzut ukośny F'_v są w powinowactwie, którego osią jest x, a kierunkiem - kierunek boku $/U/U_v$ trójkąta rzutowego, jeżeli F jest figurą płaską, to drugi rzut F'' jest w powinowactwie z rzutem ukośnym F_v, którego osią jest drugi ślad s_2 płaszczyzny figury F, a kierunkiem - kierunek boku $U''U_v$ trójkąta rzutowego. Wreszcie, podobnie jak w aksonometrji prostokątnej tak i w rzutach ukośnych, F_v i F'_v są w powinowactwie, którego osią jest ślad s_{1v}, a kierunkiem kierunek prostopadły do osi x.

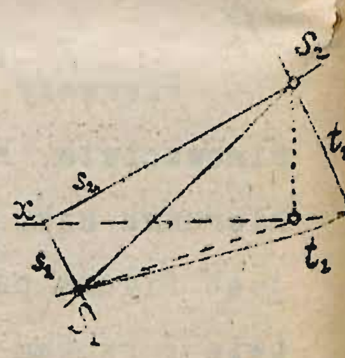
§ 70. Zadania położenia. Podobnie jak w rzutach prostokątnych, prosta może być odwzorowana przez dwa jakiekolwiek swoje punkty, a płaszczyzna przez dwie jakiekolwiek swoje proste, przecinające się lub równoległe. Wiele zadań da się rozwiązać szczególnie łatwo, jeżeli punktami, wyznaczającemi prostą p, i prostemi wyznaczającemi płaszczyznę S będą ślady S_1 i S_2 wzgl. s_1 i s_2. Rys. 164 przedstawia płaszczyznę $s_1 s_2$ wraz z leżącym na niej punktem P, którego rzut ukośny P' jest dany, a rzut ukośny P' jego pierwszego rzutu jest wyznaczony pomocą jednej z dwuch prostych



Rys. 164.



Rys. 165.

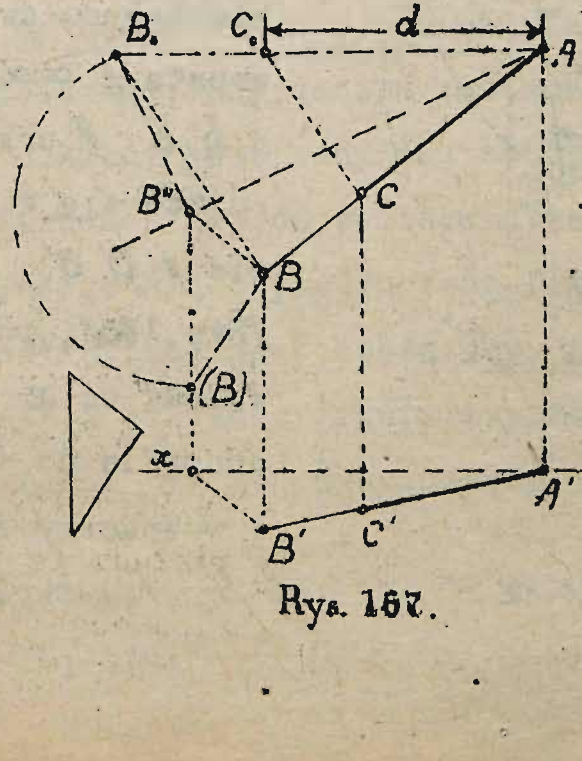


Rys. 166.

głównych p lub f. /Rys. 165/ przedstawia wyznaczenie śladów płaszczyzny, której dwie proste m i n są dane $/ m, m'; n, n' /$. Rys. 166 przedstawia przecięcie dwuch płaszczyzn $s_1 s_2$ i $t_1 t_2$. Przykłady te wskazują, że rozwiązanie zadań położenia za pomocą śladów jest w rzucie ukośnym nieco prostsze nawet, niż w rzutach prostokątnych /Por. Rys. 48, 50, 52/.

§ 71. Zadania miarowe. Jakkolwiek możnaby wszystkie zadania miarowe sprowadzić do rzutów prostokątnych /§ 69/, będzie wogóle prościej rozwiązywać te zadania bezpośrednio, jak to okażą następujące przykłady.

1/ Wyznaczyć prawdziwą długość odcinka, którego rzuty ukośne AB, $A'B'$ są dane. Poprowadźmy /Rys 164/ oś x prostopadle do AA' przez A' i zapomocą trójkąta rzutowego wyznaczmy B_x, B'' oraz prawdziwą długość $/B'/B''$ odcinka BB'', poczem wykonajmy kład trójkąta prostokątnego ABB'' dokoła AB'' na P_1 w tym celu na prostopadłej wystawionej w B'' do AB'' odmierzamy $B''B_o = B''(B)$; odcinek AB_o jest prawdziwą długością odcinka / AB, $A'B'$ /

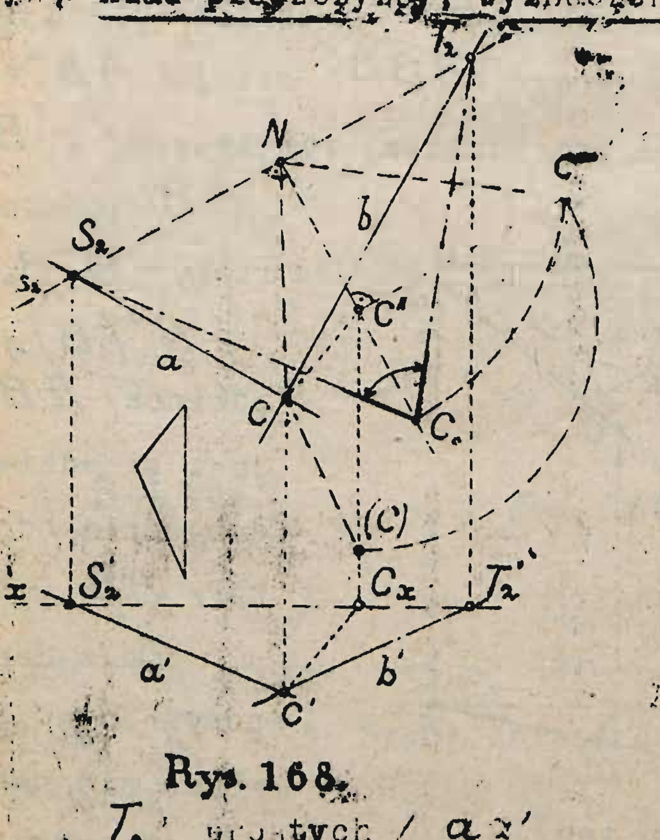


Rys. 167.

Do zadania powyższego sprowadza się następujące zadanie:

2/ Na prostej / aa' / od danego na niej punktu / AA' / odmierzyć dany odcinek d. Poprowadźmy /Rys.167/ oś x przez A' prostopadle do AA' i obrawszy na / aa' / dowolny punkt / BB' / wyznaczmy jak poprzednio kład AB_o odcinka / AB, $A'B'$ /. Odmierzywszy na AB_o od punktu A odcinek $AC_o = d$, poprowadźmy z punktu C_o równoległą do B_oB, która przetnie AB w punkcie C, odcinek / AC, $A'C'$ / jest szukanym.

3/ Kład płaszczyzny, wyznaczonej przez dwie przecinające się proste /Wyznaczenie kąta dwóch prostych/

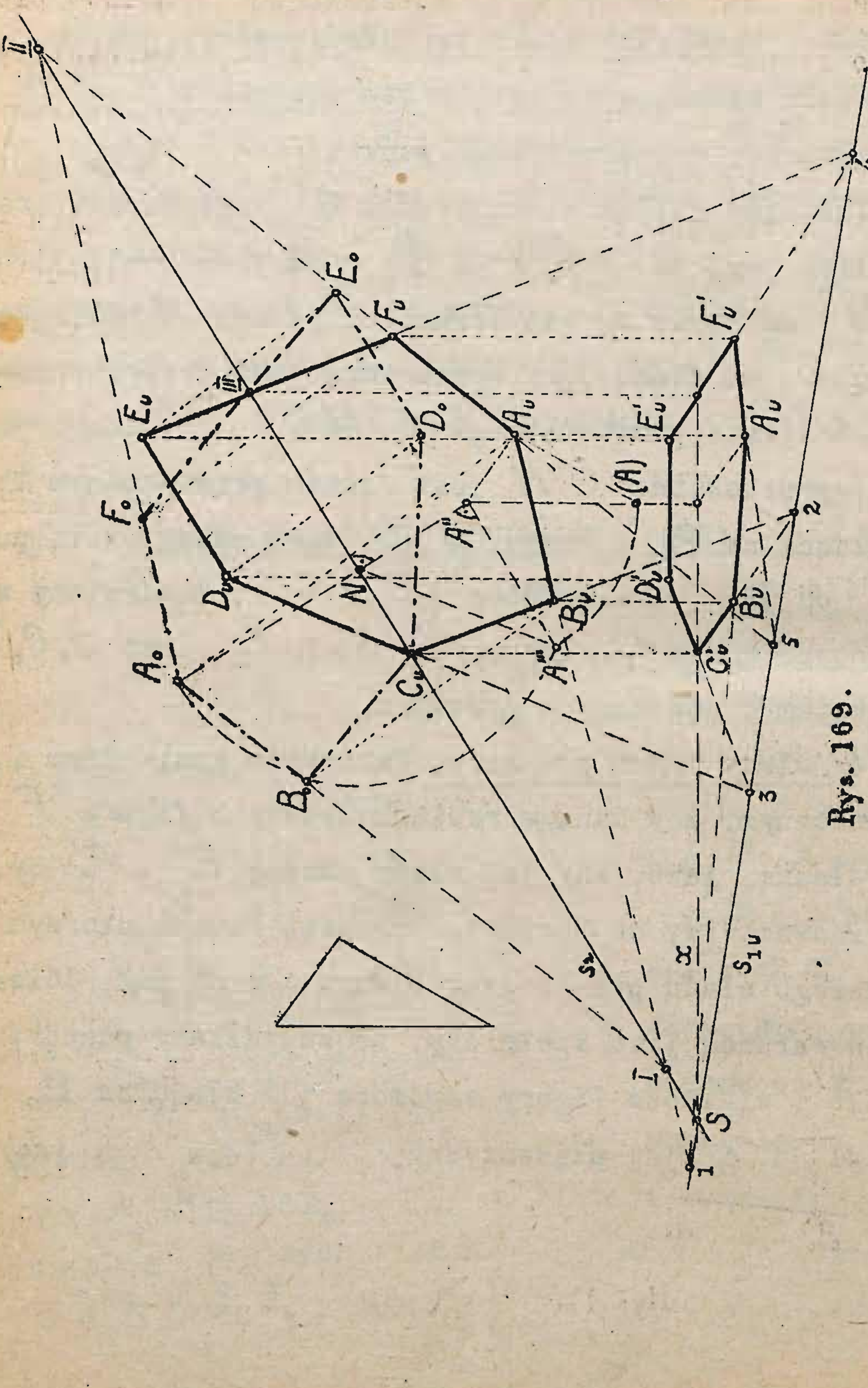


Rys. 168.

Niech będą dwie proste / aa' / i / bb' / przecinające się w punkcie / C C' / /Rys.168/, poprowadźmy oś x prostopadle do CC' i wyznaczmy ślady T_2' prostych / aa' bb' /. Dokoła $s_2 \equiv S_2T_2$, któr[illegible] zny ab , dokonajmy kładu tej płaszczyzny, punkty S_2 i T_2 jako należące do osi obrotu pozostaną nieruchome, wystarczy wyznaczyć kład punktu / C C' /...

Znajdźmy najpierw drugi rzut C'' tego punktu oraz odległość jego C'' / C / od P_2 . Na prostopadłej $C''N$ do śladu s_2 odmierzamy od punktu N odległość punktu C od śladu s_2 , wyznaczoną jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego $C''NC'''$, którego jedna przyprostokątna $C''N$ jest rzutem prostokątnym tej odległości na P_2, a druga $C''C'''$ jest odległością punktu C od P_2 , a więc równa C'' / C /. Znaleziony w ten sposób punkt C_0 łączymy z S_2 i T_2 , kąt $S_2C_0T_2$ jest kątem dwuch danych prostych.

4/ Kłady figur płaskich. Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby daną w rzutach ukośnych figura F była płaska, jest, aby jej rzuty ukośne F_0 i F_0' były w powinowactwie, oś powinowactwa jest rzutem ukośnym pierwszego śladu płaszczyzny figury s_2 /§ 69/. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to znajdziemy prawdziwy kształt i wielkość figury zapomocą jej kładu na P_2 dokoła śladu s_2 jej płaszczyzny. W tym celu /Rys. 169/

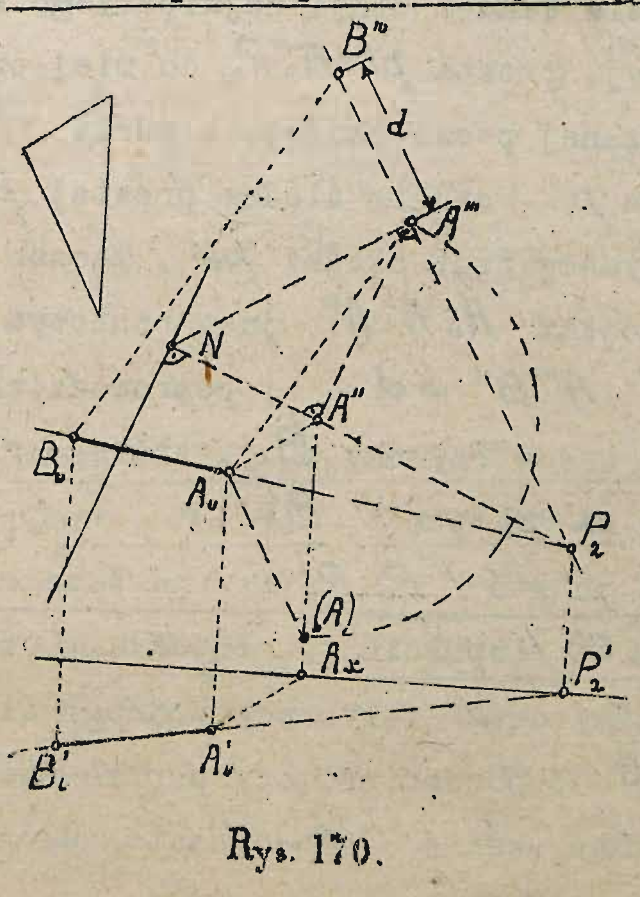


Rys. 169.

..., przez rzut ukośny C'_u jednego z wierzchołków pierwszego rzutu F'_u figury prowadzimy oś x, wyznaczamy drugi ślad s_2 płaszczyzny figury i sposobem wskazanym w artykule poprzednim znajdujemy kład A_o innego któregokolwiek wierzchołka figury. Zapomocą powinowactwa figur F_u i F_o, którego osią jest s_2, a kierunkiem kierunek prostej $A_u A_o$, wyznaczamy pozostałe punkty i proste kładu F_o.

§ 72. Proste i płaszczyzny prostopadłe.

Zadanie I. Do danej płaszczyzny w danym jej punkcie wystawić prostopadłą danej długości. Możemy przypuścić, że płaszczyzna jest daną zapomocą swego drugiego śladu s_2, osi x i rzutów ukośnych A_u, A'_u jej punktu A; jeżeli bowiem płaszczyzna byłaby daną w inny sposób, np. zapomocą

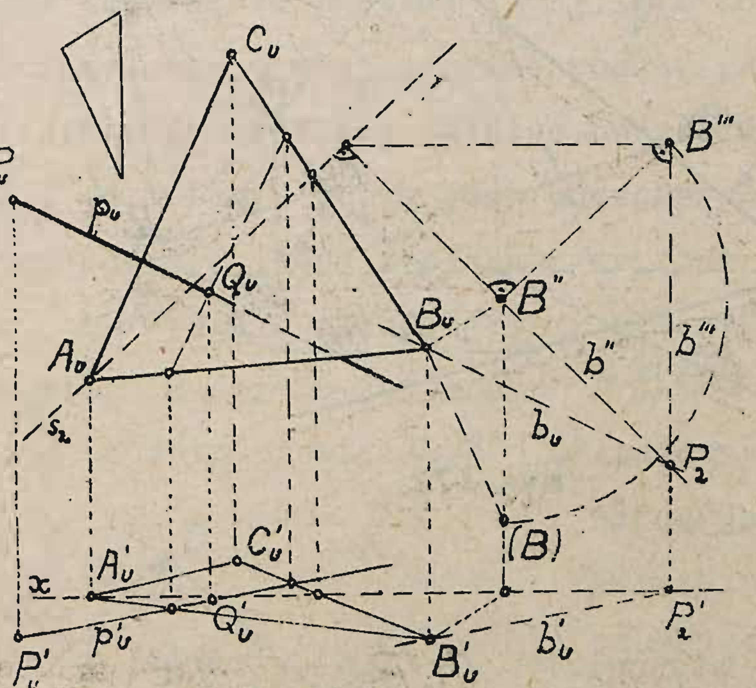


Rys. 170.

dwuch swoich prostych, a punkt A tej płaszczyzny zapomocą jednego ze swych rzutów ukośnych np. A_v , to obrawszy dowolnie oś x , moglibyśmy wyznaczyć ślad s_2 i drugi rzut ukośny A'_v punktu A . Przez punkt A poprowadźmy płaszczyznę P_3 prostopadłą do s_2 /rys. 170/, w tej płaszczyźnie leżyć musi szukana prostopadła p , której drugi ślad P_2 musi leżeć na drugim śladzie płaszczyzny P ; t.j. na prostopadłej p'' spuszczonej z punktu A'' na s_2 . Obróćmy płaszczyznę P_3 dokoła s_2 na P_2 i wyznaczmy kład A''' punktu A; prosta $A'''N$ będzie kładem linji największego spadku płaszczyzny danej, prosta $p'''=A'''P_2$ do niej prostopadła - kładem szukanej prostopadłej, a punkt P_2 , w którym p''' przecina p'' - drugim śladem prostej p . Łącząc P_2A_v otrzymamy rzut ukośny p_v , łącząc $P'_2A'_v$ otrzymamy p'_v . Trójkąt $A_vA''A'''$ jest rzutowym, odmierzywszy na p''' $A'''B'''=d$ i poprowadziwszy $B'''B_v \parallel A'''A_v$ otrzymamy B_v , którego rzędna $B_vB'_v$ wyznacza na p'_v punkt B'_v .

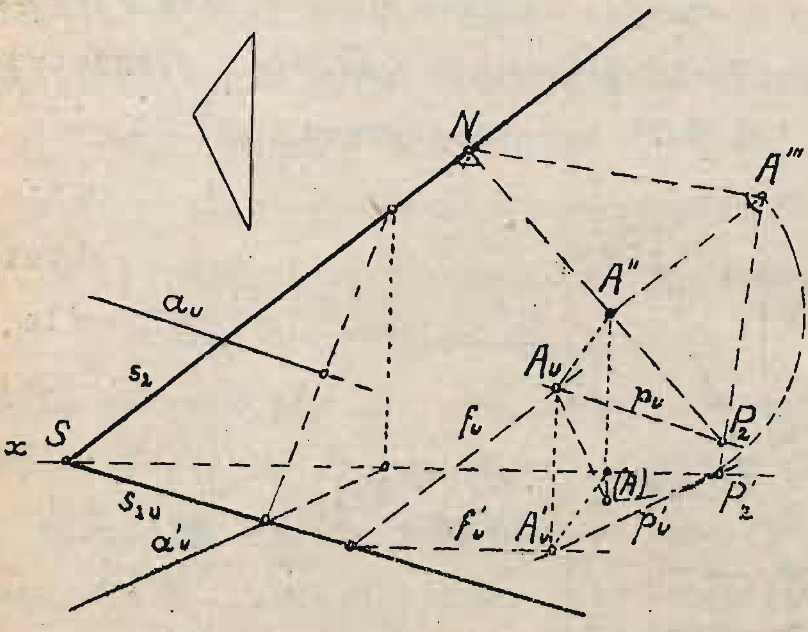
<u>Zadanie II. Z punktu / $P_v P'_v$ / na płaszczyznę / $A_vB_vC_v$, $A'_vB'_vC'_v$ / spuścić prostopadłą.</u> Przez punkt A'_v poprowadźmy oś x i wyznaczmy drugi ślad s_2 płaszczyzny ABC , poczem na mocy poprzedniego zadania wykreślmy rzuty ukośne $b_vb'_v$ prostopadłej b

wystawionej w punkcie B do płaszczyzny ABC /Rys. 171/. Z punktu /$P_v P'_v$/ poprowadźmy prostą /$p_v p'_v$/ $\parallel$ /$b_v b'_v$/. Punkt przebicia /$Q_v Q'_v$/ prostej p z płaszczyzną ABC wyznaczymy według § 70.



Rys. 171.

Zadanie III. Do danej prostej /$a_v a'_v$/ przez dany punkt /$A_v A'_v$/ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą. Przez punkt /$A_v A'_v$/ /Rys.172/ poprowadźmy prostą /$p_v p'_v$/ równoległą do /$a_v a'_v$/ i, obrawszy oś x wyznaczmy drugi ślad /$P_2 P'_2$/ tej prostej. Wyznaczywszy drugi rzut A'' oraz odległość 7" /A/ punktu A od P_2, wykreślmy trójkąt



Rys. 172.

prostokątny $P_2A'''N$, w którym dana jest wysokość $A''A''' = A''(A)$ i jeden z odcinków przeciwprostokątnej, mianowicie $A''P_2$. Prosta s_2 prostopadła do $A''P_2$ w punkcie N jest drugim śladem szukanej płaszczyzny, pierwszy ślad s_1 znajdziemy np. za pomocą linji frontowej / $f_v f_v'$ / przechodzącej przez punkt / $A_v A_v'$ /.

ROZDZIAŁ VII. PRZECIĘCIA I PRZENIKANIE WIELOŚCIANÓW.

§ 72. Przebicie wielościanu prostą. Metoda ogólna według której wyznaczamy punkty przebicia wielościanu