kości i znaku trzy razy wziętemu odcinkowi $O_1 \frac{T_1}{3}$. W ten sposób wszystkie punkty w tym wykreśleniu użyte znalazły się wewnątrz koła wyraźnego widzenia.-

CZĘŚĆ IV. KRZYWE, STOŻKI I POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

ROZDZIAŁ XII. SZEREGI I PĘKI RZUTOWE.

§ 121. Określenie geometrji rzutowej. Istota wszystkich metod geometrji wykreślnej, jak to zauważyliśmy już w § 1, polega na przekształceniu danej figury przestrzennej na figurę płaską zapomocą kolejnych dwuch czynności: rzucania i przecinania. Zanim przystąpimy do dalszego rozwinięcia metod geometrji wykreślnej, trzeba bliżej poznać te własności figur, które zostają zachowane przez rzuty i przecięcia. Do takich należy przedewszystkiem wzajemna przynależność elementów geometrycznych /punktów i prostych, prostych i płaszczyzn/. Jeżeli punkt A leży na prostej b to prosta b rzucająca punkt A z dowolnego punktu C leży w płaszczyźnie B rzucającej z tego samego środka rzutów prostą b , jeżeli prostą a leżącą w płaszczyźnie B przetniemy płaszczyzną jakąkolwiek, to punkt A , w którym płaszczyzna sieczna przecina prostą a leży na prostej b, według której ta sama płaszczyzna przecina płaszczyznę **B**. Typowemi twierdzeniami, dotyczącemi własności, zachowujących się przez rzuty i przecięcia, są twierdzenia o trójkątach Desargues'a /§ 81, Rys.182/. Istota tych twierdzeń polega na istnieniu t.zw. konfiguracji Desargues'a, t.j. figury płaskiej, złożonej z 10 punktów i 10 prostych w ten sposób, że przez każdy punkt przechodzą 3 proste i na każdej prostej leżą 3 punkty. Jeżeli z jakiegokolwiek punktu P rzucimy wszystkie te 10 punktów i 10 prostych, to otrzymamy figurę złożoną z 10 prostych i 10 płaszczyzn wychodzących z punktu P w ten sposób, że przez każdą prostą przechodzić będą 3 płaszczyzny i w każdej płaszczyźnie leżeć będą 3 proste. Stąd przekonywamy się o prawdziwości twierdzeń.

III. Jeżeli krawędzie dwuch trójścianów o wspólnym wierzchołku leżą parami w 3 płaszczyznach przechodzących przez jedną prostą, to ich ściany przecinają się parami według 3 prostych jednej płaszczyzny.

IV. Jeżeli ściany dwuch trójścianów o wspólnym wierzchołku przecinają się parami według 3 prostych jednej płaszczyzny to ich krawędzie leżą parami w 3 płaszczyznach przechodzących przez jedną prostą.

Nawzajem, przecinając tę figurę, złożoną z 10 prostych i 10 płaszczyzn wychodzących z jednego punktu, płaszczyzną jakąkolwiek, otrzymalibyśmy figurę, z której wnioskowalibyśmy o prawdziwości twierdzeń I i II § 81. Twierdzenia o trójkątach Desargues'a wyrażają więc własność, zachowującą się przez rzuty i przecięcia.

Część geometrji, której przedmiotem jest badanie własności figur nie zmieniających się przez rzuty i przecięcia, nazywa się geometrją rzutową.

§ 122. Geometrja rzutowa płaska i geometrja rzutowa wiązki. Geometrja płaska bada własności figur złożonych z punktów i prostych jednej płaszczyzny; przedmiotem geometrji wiązki są własności figur złożonych z prostych i płaszczyzn przechodzących przez jeden punkt Twierdzenia o trójkątach Desargues'a /§ 85/ należą do geometrji płaskiej, twierdzenia o trójścianach Desargues'a /§ 121/ należą do geometrji wiązki.

Z każdego twierdzenia geometrji rzutowej płaskiej można bezpośrednio otrzymać odpowiednie twierdzenie geometrji rzutowej wiązki, zastępując wyrazy oznaczające punkty i proste odpowiedniemi wyrazami oznaczającemi rzucające je proste i płaszczyzny, i nawzajem. Niema więc potrzeby rozwijać niezależnie obu geometrji, wystarczy zająć się geometrją rzutową płaską, w której jest dana łatwość dokładnego ilustrowania myśli zapomocą rysunku.

§ 126. Dwoistość w geometrji przestrzeni. Istnieje inny jeszcze związek pomiędzy twierdzeniami geometrji rzutowej płaskiej a twierdzeniami geometrji rzutowej wiązki, pozwalający z każdego twierdzenia jednej z nich wyprowadzić bezpośrednio pewne twierdzenie drugiej. Związek ten nazywa się wzajemnością i oparty jest na następującej zasadzie, zwanej zasadą dwoistości geometrji przestrzeni:

Jeżeli prawdziwe jest pewne twierdzenie, dotyczące wzajemnej przynależności punktów, prostych i płaszczyzn, to będzie prawdziwe inne twierdzenie, dotyczące tej samej własności, w którym zamiast pojęcia "punkt" figurować będzie pojęcie "płaszczyzna" i nawzajem.

Tak np. twierdzenia Desargues'a I i IV, II i III są wzajemne, z twierdzenia I /§ 81/ otrzymalibyśmy IV /§ 121/ zastępując pojęcie:

wierzchołek	pojęciem	ściana
trójkąt	"	trójścian
prosta	"	prosta
bok	"	krawędź
punkt	"	płaszczyzna

§ 124. Dwoistość w geometrji płaskiej i w geometrji wiązki. Jeżeli prawdziwe jest pewne rzutowe twierdzenie geometrji płaskiej, to na zasadzie § 122 prawdziwe być musi twierdzenie geometrji wiązki, otrzymane przez zastąpienie pojęcia "punkt" pojęciem "prosta" i pojęcia "prosta" pojęciem "płaszczyzna". Ale wtedy na zasadzie § 123 prawdziwe być musi twierdzenie geometrji płaskiej, otrzymane przez zamianę w tym ostatnim twierdzeniu pojęcia "płaszczyzna" pojęciem "punkt", stąd wynika, że:

prawdziwe być musi twierdzenie geometrji płaskiej otrzymane przez zastąpienie w danym twierdzeniu geometrji płaskiej pojęcia "punkt" pojęciem "prosta" i pojęcia "prosta" pojęciem "punkt".

W geometrji płaskiej istnieje więc również zasada dwoistości polegająca na wzajemności pojęć "punkt" i "prosta" /np. twierdzenia I i II § 93 o trójkątach Desargues'a/.

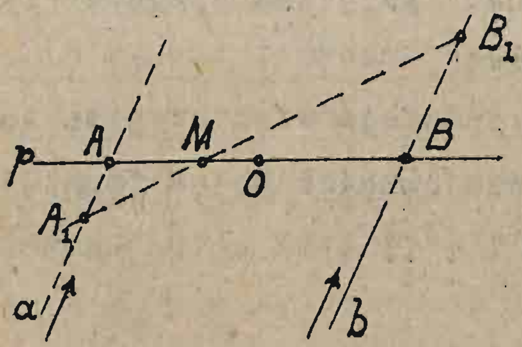
Tak samo dowodzimy, że w geometrji wiązki istnieje zasada dwoistości i polegająca na wzajemności pojęć "prosta" i "płaszczyzna /np. twierdzenia III i IV § 121 o trójścianach Desargues'a/

§ 125. Dwustosunek 4 punktów jednej prostej. Niech będą na prostej p /Rys. 240/ dwa stałe punkty

A i B zwane pierwszym i drugim punktem zasadniczym oraz punkt zmienny M zwany punktem podziału. Uważajmy zwrot od A do B za dodatni; zmierzmy dowolną jednostką odcinki AM i BM, uważając każdy z nich za dodatni, jeżeli posiada ten sam zwrot co w przeciwnym razie uważajmy go za ujemny. Stosunek

$$\mu = \frac{AM}{BM}$$

nazywamy stosunkiem podziału punktu M względem punktów A i B. Każdemu punktowi M prostej p odpowiada określona lista, mianowicie jego stosunek podziału, liczba ta jest zresztą niezależna od tego, czy zwrot AB czy BA uznaliśmy za dodatni.



Rys. 240.

Stosunek podziału jest ujemny dla wszystkich punktów leżących między A i B, gdyż wtedy AM i BM, niezależnie od umowy, mają przeciwne znaki - jest on dodatni dla wszystkich punktów leżących zewnątrz odcinka AB, gdyż wtedy AM i

BM mają zawsze ten sam znak. Zbadajmy, w jaki sposób zmienia się stosunek μ, gdy M przebiega prostą p.

W tym celu poprowadźmy przez punkty A i B równoległe a i b w dowolnym kierunku i obrawszy na obu tych prostych ten sam zwrot dodatni, odmierzmy na b odcinek $BB_1 = +1$ i połączmy B_1 z punktem M; odległość punktu A od punktu A_1, w którym B_1M przecina a, będzie co do wartości bezwzględnej i znaku równa μ, gdyż

$$\frac{AA_1}{BB_1} = AA_1 = \frac{AM}{BM} = \mu.$$

Gdy M znajduje się w A, $AA_1 = \mu = 0$; gdy M posuwa się od A ku środkowi O odcinka AB, μ pozostaje ujemne i osiąga w punkcie O wartość -1; pomiędzy O i B pozostając ujemne wzrasta nieograniczenie co do wartości bezwzględnej i w punkcie B staje się $\pm\infty$, gdyż prosta B_1M jest wtedy równoległa do a. Dla wszystkich punktów zewnętrznych względem odcinka AB μ jest, jak to już zaznaczyliśmy liczbą dodatnią, przytem dla punktów leżących po stronie punktu B μ jest zawarte pomiędzy $+\infty$ i $+1$, natomiast dla punktów leżących po stronie punktu A μ posiada wartości pomiędzy 0 i $+1$.

Gdy M oddala się nieograniczenie w jedną lub drugą stronę, B_1M staje się równoległa do p i $AA_1 = \mu = +1$. Tak więc:

Jeżeli na prostej p dane są dwa punkty A i B to każdemu punktowi M tej prostej odpowiada jedna jedyna liczba /dodatnia lub ujemna/, mianowicie stosunek podziału μ punktu M względem punktów A i B.

Nawzajem, każdej /dodatniej lub ujemnej/ liczbie μ odpowiada wtedy jeden jedyny punkt M prostej p ten mianowicie, którego stosunkiem podziału względem punktów A i B jest μ.

W samej rzeczy, poprowadźmy przez A i B równoległe a i b w dowolnym kierunku i obrawszy na obu jednakowy zwrot dodatni odmierzmy na nich odcinki AA_1 i BB_1, których stosunek co do wartości bezwzględnej i znaku równy jest μ, prosta A_1B_1 przecina p w punkcie szukanym M.

Niechaj będą teraz /Rys.241/ dwa punkty M i N których stosunki podziału względem punktów zasadniczych A i B niechaj będą μ i ν. Iloraz $\frac{\mu}{\nu}$ nazywamy **dwustosunkiem** /stosunkiem anharmonicznym/ 4-ech punktów $ABMN$. Jest on dodatni, gdy M i N albo leżą oba wewnątrz albo oba zewnątrz odcinka AB, t.j. gdy pary punktów AB i MN się nie przegradzają

Dwustosunek $\lambda = \frac{\mu}{\gamma} = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$ oznaczamy symbolem /$ABMN$/ przestrzegając ściśle określonego następstwa liter. W symbolu tym pierwsza i druga litera oznacza pierwszy i drugi punkt zasadniczy, trzecia i czwarta - pierwszy i drugi punkt podziału. Jeżeli więc na prostej p obierzemy 4 punkty A, B, M, N, to /$ABMN$/ oznacza dwustosunek $\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$, podczas gdy np. /$BMAN$/ oznaczałby: $\frac{BA}{MA} : \frac{BN}{MN}$.

Ponieważ z 4 liter można ułożyć 24 przestawień więc 4 punkty prostej p wyznaczają 24 dwustosunki, które jednak niewszystkie są różne. W samej rzeczy wartość dwustosunku

$$(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$$

nie zmieni się przez następujące przestawienia

$(ABMN) = (MNAB) = (NMBA) = (BANM)$, gdyż

$$\frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN} = \frac{MA}{NA} : \frac{MB}{NB} = \frac{NB}{MB} : \frac{NA}{MA} = \frac{BN}{AN} : \frac{BM}{AM},$$

stąd wynika:

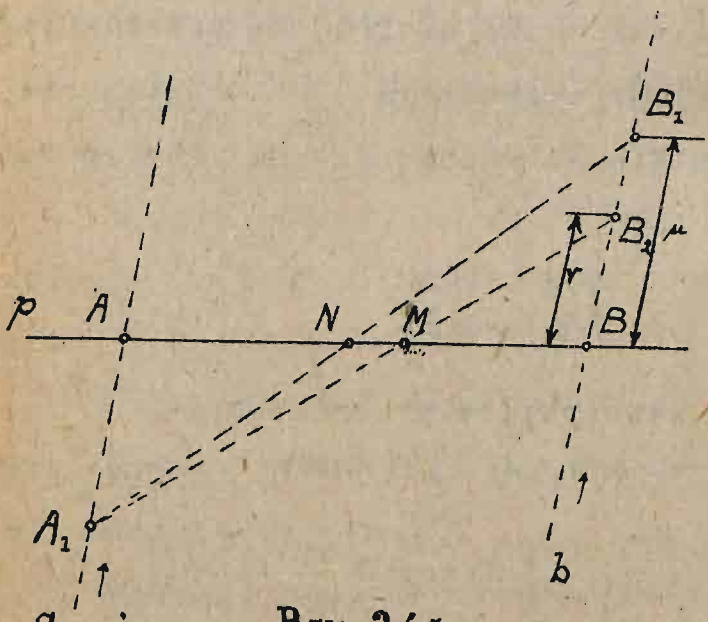
<u>Dwustosunek 4 punktów nie zmienia swej wartości gdy zmienimy jednocześnie porządek punktów zasadniczych i porządek punktów podziału, lub gdy punkty podziału uczynimy punktami zasadniczemi i nawzajem.</u>

Jeżeli z pośród 4 punktów A, B, M, N

prostej p trzy, np. A , B i N uważać będziemy za stałe, a czwarty M za zmienny, to gdy punkt M przebiegać będzie prostą p , dwustosunek $/ABMN/ = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN}$ posiądzie kolejno wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$. Gdy bowiem wartość drugiego stosunku $\gamma = \frac{AN}{BN}$ jest stała i różna od zera, wartość pierwszego $\mu = \frac{AM}{BM}$ zmienia się w sposób ciągły otrzymując kolejno wszystkie wartości liczebne. Iloraz

$$\lambda = \frac{\mu}{\gamma}$$

musi zatem również zmieniać swą wartość w granicach od $+\infty$ do $-\infty$.



Rys. 241.

Nawzajem, jeżeli dane są 3 punkty A , B i N prostej p , to każdej liczbie λ odpowiadać będzie jeden jedyny punkt M tej prostej, ten mianowicie, dla którego dwustosunek $/ABMN/ = \lambda$. W samej rzeczy, przez punkty A i B poprowadźmy równoległe a i b , odmierzmy na b takie dwa odcinki BB_1 i BB_2, aby $\frac{BB_1}{BB_2} = \lambda$, połączmy B_1N wyznaczmy punkt A_1, w którym B_1N przecina α, wreszcie połączmy A_1B_2, którą przetnie p w szukanym punkcie M. Gdyż

$$\frac{AM}{BM} = \frac{AA_1}{BB_2}; \quad \frac{AN}{BN} = \frac{AA_1}{BB_1} \quad \text{skąd}$$

$$(ABMN) = \frac{AM}{BM} : \frac{AN}{BN} = \frac{BB_1}{BB_2} = \lambda.$$

Dwustosunek / $ABMN$ / danych 4 punktów prostej p może być sprowadzony do stosunku podziału. W tym celu /Rys.241/ poprowadźmy przez A i B równoległe a i b i z obranego na a punktu A_1 rzućmy N i M na prostą b, otrzymując na niej odcinki B_1B i B_2B, których stosunek =/ $ABMN$ /.

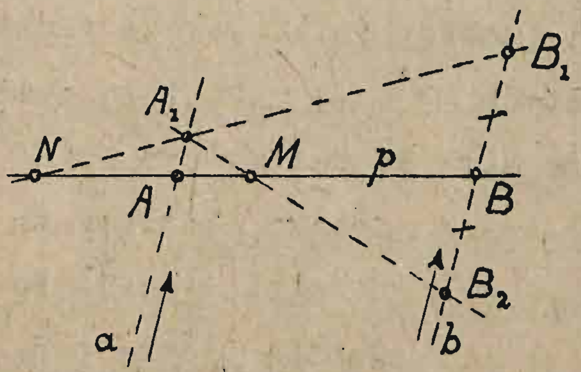
Gdy punkt N jest punktem niewłaściwym prostej p, to dwustosunek / $ABMN$ / staje się stosunkiem $\frac{AM}{BM}$, gdyż wtedy stosunek $\frac{AN}{BN} = +1$. -

§ 138. Grupy harmoniczne punktów. Szczególnie ważnym jest ten przypadek, gdy cztery punkty A, B, M, N leżą na prostej p w taki sposób, że dwustosunek / $ABMN$ / $= -1$.

Stosunki podziału, punktów M i N ; $\mu = \frac{AM}{BM}$ i $\nu = \frac{AN}{BN}$ są wtedy równe co do wartości bezwzględnej, lecz przeciwnie co do znaku / $\mu = -\nu$ / tak że jeden z punktów M i N dzieli zewnętrznei odcinek AB w tym samym stosunku, w którym drugi dzieli go wewnętrznie. O punktach A, B, M, N mówimy, że tworzą grupę harmoniczną, o punktach M i N mówimy, że dzielą harmonicznie odcinek AB, albo że są harmonicznie sprzężone względem punktów A i B. Przestawienie liter A i B w dwustosunku, $/ABMN/=-1$, zmieniając każdy ze stosunków μ i γ na jego odwrotność, nie zmieni ich ilorazu, podobnież przestawienie liter M i N, zmieniając μ na γ i γ na μ, nie zmieni również ilorazu $\frac{\mu}{\gamma}=-1$. Ponieważ wreszcie dwustosunek $/ABMN/$ nie zmieni się i wtedy, gdy litery M i N postawimy przed literami A i B, więc:

Jeżeli punkty M i N są harmonicznie sprzężone względem punktów A i B /dzielą harmonicznie odcinek AB /, to nawzajem punkty A i B są harmonicznie sprzężone względem punktów M i N /dzielą harmonicznie odcinek MN /, nie potrzeba przytem zwracać uwagi na to, który z punktów każdej pary AB i MN jest pierwszy. Ponieważ pary AB i MN wzajemnie się przegradzają, mówimy więc poprostu, że pary punktów AB i MN przegrądzają się harmonicznie.

Jeżeli jedna para punktów sprzężonych, np. AB jest dana, to każdemu trzeciemu punktowi N prostej AB odpowiada jeden jedyny z nim sprzężony czwarty harmonicznie punkt M. Aby go wyznaczyć stosujemy wykreślenie § 125, przez punkty A i B /Rys.242/ kreślimy w dowolnym kierunku równoległe a i b, na



Rys. 242.

prostej b odmierzamy w przeciwne strony równe odcinki BB_1 i BB_2 dowolnej długości /wtedy $\frac{BB_1}{BB_2} = -1$ / i punkt A_1 w którym B_1N przecina a, łączymy z B_2, prosta A_1B_2 przetnie p w czwartym harmonicznym punkcie M.

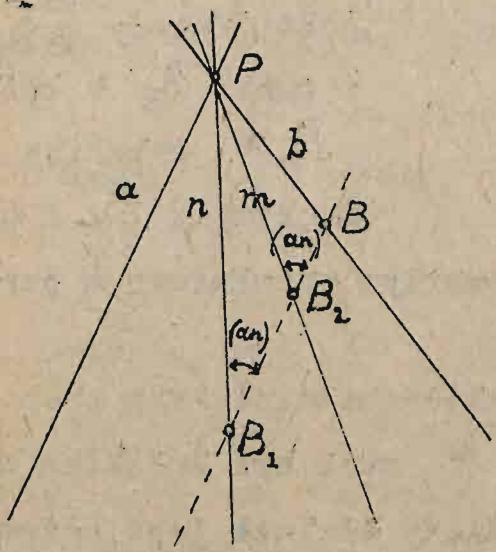
Gdy punkt N jest punktem niewłaściwym prostej p / $\mathsf{r} = +1$ /, to punkt M musi być środkiem odcinka AB / $\mu = -1$ /. Każdy odcinek jest przez swój środek i punkt niewłaściwy podzielony harmonicznie.

Gdy punkt N przystanie do punktu A / $\mu = 0$ / albo do punktu B / $\mu = \pm\infty$ / to i punkt M przystanie do punktu A / $\mathsf{r} = 0$ / wzgl. do punktu B / $\mathsf{r} = \mp\infty$ /.

Jeżeli dwa punkty grupy harmonicznej schodzą się w jednym punkcie, to jeszcze jeden punkt tej grupy upada w tym punkcie.

§ 127. Dwustosunek 4 promieni, wychodzących z jednego punktu.

Niechaj z punktu P wychodzą 4 proste a, b, m i n, leżące w jednej płaszczyźnie. Dokoła punktu P oraz na każdej z prostych a, b, m i n obierzmy zwroty dodatnie i umówmy się, że kąt $/ab/ < \pi$ uważać będziemy za dodatni, jeżeli dodatnią stronę prostej a trzeba obrócić o ten kąt w dodatnią stronę, aby ona przystała do dodatniej strony prostej b. Wartość wyrażenia:



Rys. 243.

$$\lambda = \frac{\sin(am)}{\sin(bm)} : \frac{\sin(an)}{\sin(bn)}$$

nazywany dwustosunkiem /stosunkiem nieharmonicznym/ 4 promieni a, b, m, n. Wartość ta jest zresztą niezależna od powyższej umowy, w samej rzeczy, zmiana zwrotu na którejkolwiek z prostych a, b, m, n powoduje zmianę znaku w dwuch wyrazach tego dwustosunku, a zmiana zwrotu dokoła punktu P powoduje zmianę znaku wszystkich czterech wyrazów.

Dwustosunek /$abmn$/ jest dodatni, gdy pary promieni ab i mn się nie przegradzają, - ujemny, gdy te pary się przegradzają. Podobnie jak w dwustosunkach 4 punktów mamy:

$$(abmn) = (mnab) = (nmba) = (banm).$$

Aby wyznaczyć dwustosunek /$abmn$/ poprowadźmy /Rys.243/ równoległą do prostej a, która niechaj przetnie proste b, m i n w punktach B, B_2 i B_1. Z trójkąta PBB_2 mamy:

$$\frac{\sin(am)}{\sin(bm)} = \frac{PB}{BB_2},$$

z trójkąta PBB_1:

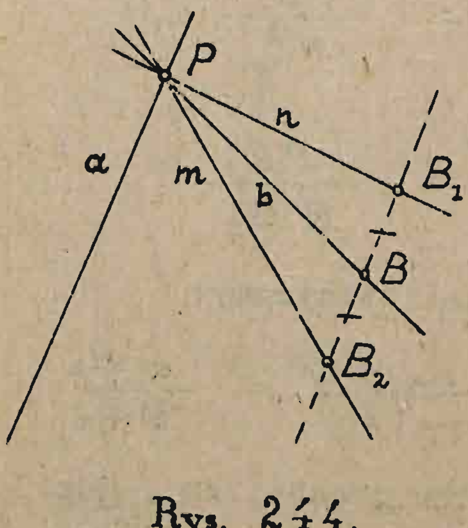
$$\frac{\sin(an)}{\sin(bn)} = \frac{PB}{BB_1},$$

dzieląc te proporcje stronami otrzymamy:

$$(abmn) = \frac{\sin(am)}{\sin(bm)} : \frac{\sin(an)}{\sin(bn)} = \frac{BB_1}{BB_2},$$

skąd łatwy sposób wykreślenia prostej m, gdy 3 proste a, b i n oraz dwustosunek /$abmn$/ są dane.

§ 128. Grupy harmoniczne promieni. Szczególnie ważnym jest przypadek, gdy 4 proste a, b, m, n przechodzą przez punkt P w taki sposób, że dwustosunek $/abmn/ = -1$. Mówimy w tym przypadku, że te 4 proste tworzą grupę harmoniczną, lub że proste m i n harmonicznie dzielą kąt $/ab/$, albo że są sprzężone harmonicznie względem prostych a i b. Podobnie jak w grupach harmonicznych punktów łatwo okazać, że przestawienie liter a i b lub m i n lub obu liter ab z obu literami mn nie zmieni dwustosunku $/abmn/$, tak że można będzie o dwuch parach promieni ab i mn grupy harmonicznej poprostu powiedzieć, że się harmonicznie przegradzają.

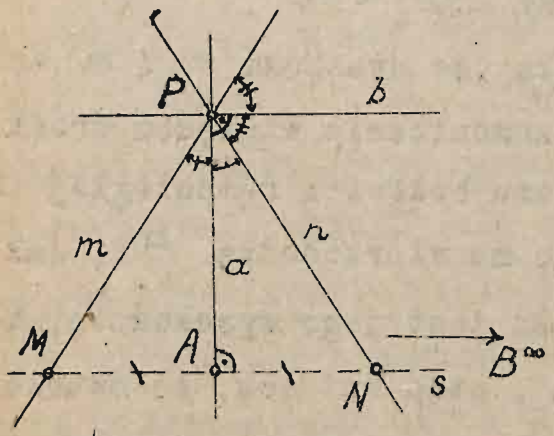


Rys. 244.

Jeżeli jedna para promieni sprzężonych jest dana, np. ab, to każdemu trzeciemu promieniowi n odpowiada jeden jedyny z nim sprzężony czwarty harmoniczny promień m. Aby go wyznaczyć /Rys. 244/ stosujemy wykreślenie § 127, prowadzimy równoległą do a , która przecina proste b i n w punktach B i B_1 poczem odmierzamy $BB_2 = BB_1$ /wtedy $\frac{BB_1}{BB_2} = -1$ / i łączymy $PB_2 \equiv m$.

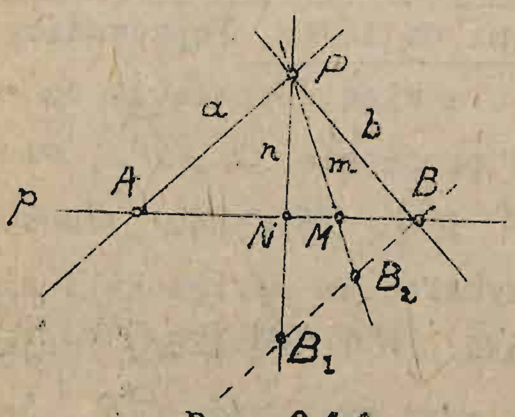
Z wykreślenia tego wynika ,że dwa boki m i n trójkąta PB_1B_2 są sprzężone harmonicznie względem środkowej b odpowiadającej trzeciemu bokowi i równoległej a do tego boku z przeciwległego mu wierzchołka P . Jak wiadomo, gdy środkowa trójkąta jest jego wysokością, to jest zarazem jego dwusieczną , stąd wniosek, że dwusieczne kątów, które tworzą dwie przecinające się proste, harmonicznie je przegradzają. Jak wiadomo, te dwusieczne są wzajemnie prostopadłe, można dowieść, że nawzajem, jeżeli dwa promienie sprzężone a i b grupy harmonicznej $abmn$ są wzajemnie prostopadłe, to są one dwusiecznemi kątów między prostemi m i n . Poprowadźmy sieczną s prostopadle do b , a więc równolegle do a, i niechaj ta sieczna przetnie promienie a , b , m i n w punktach A , B^∞, M i N /Rys.245/. Punkt B^∞ jest niewłaściwy, skąd wynika, że sprzężony z nim punkt A jest środkiem odcinka MN /§ 126/. Trójkąt PMN jest równoramienny, gdyż wysokość PA jest zarazem środkową, musi więc ona być również i dwusieczną kąta MPN . Prosta b do niej prostopadła jest wtedy dwusieczną kąta przyległego.

§ 129. TWIERDZENIE. Dwustosunek jest własnością rzutową to jest zachowuje się przez rzuty i przecięcia.



Rys. 245.

Niech będą 4 punkty A, B, M i N /Rys. 246/ leżące na prostej p oraz punkt P nie leżący na niej. Połączmy PA, PB, PM i PN prostemi a, b, m i n; trzeba okazać, że $/ABMN/ =$ $= /abmn/$.



Rys 246.

Przez B poprowadźmy równoległą do a przecinającą proste n i m w punktach B_1 i B_2. Na zasadzie § 125 /Rys. 241/ stosunek

$$\frac{BB_1}{BB_2} = (ABMN);$$

na zasadzie § 127 /Rys.243/ ten sam stosunek = $/ abmn /$ skąd wynika, że

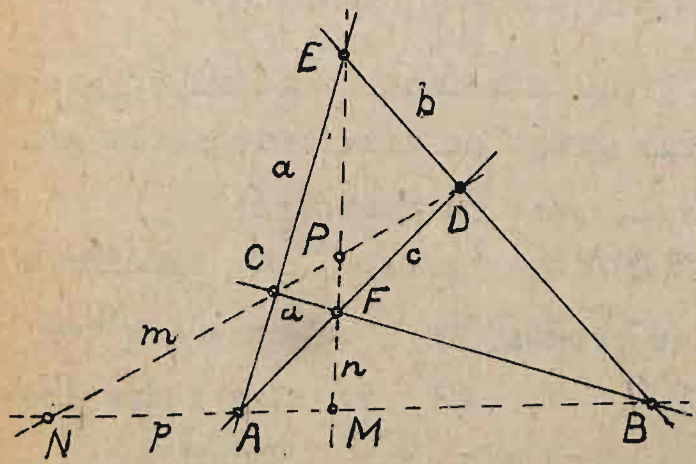
$$(ABMN) = (abmn), \quad \text{c.b.d.o.}$$

W szczególności, grupa prostych rzucających grupę harmoniczną punktów oraz grupa punktów przecięcia grupy harmonicznej prostych, jest harmoniczna.

Jeżeli 4 punkty $A, B, M, N,$ prostej p rzucimy z dowolnego punktu P na prostą p_1, otrzymane w ten sposób punkty A_1, B_1, M_1, N_1 rzucimy z dowolnego punktu P_1 na prostą p_2 i t.d. to $/ ABMN / = / A_1B_1M_1N_1 / = / A_2B_2M_2N_2 / \ldots\ldots$ Zastosujemy ten wniosek do grup harmonicznych.

§ 130. Własności harmoniczne czworoboku i czworokąta zupełnego.

Figura utworzona przez 4 proste a, b, c, d płaszczyzny, z których żadne 3 nie przechodzą przez jeden punkt, oraz przez 6 punktów przecięcia tych prostych po dwie, nazywa się czworobokiem zupełnym $abcd$. Proste a, b, c, d nazywają się bokami, punkty ich przecięcia A, B, C, D, E, F nazywają się wierzchołkami czworoboku zupełnego. Dwa wierzchołki nie leżące na wspólnym boku nazywają się przeciwległemi. Proste p, m i n, łączące wierzchołki przeciwległe A i B, C i D, E i F nazywają się przekątnemi /Rys.247/.



Rys. 247.

Rzućmy czwórkę punktów A, B, M, N, z punktu E na prostą m. Otrzymane w ten sposób punkty C, D, P, N stanowią czwórkę, której dwustosunek / $CDPN$ / musi być równy dwustosunkowi / $ABMN$ / /§ 129/. Punkty C, D, P, N rzućmy z punktu F z powrotem na prostą p. Otrzymamy punkty B, A, M, N, których dwustosunek / $BAMN$ / musi być równy / $CDPN$ / W ten sposób:

$$(ABMN) = (CDPN) = (BAMN);$$

ale tak że

$$(BAMN) = \frac{1}{(ABMN)},$$

$$(ABMN)^2 = 1;$$

ponieważ zaś / $ABMN$ / nie może być równy $+1$ gdyż wtedy punkty M i N musiałyby przystać do siebie, więc:

$(ABMN) = -1,$

to znaczy, czwórka $ABMN$ jest harmoniczna.

W czworoboku zupełnym punkty przecięcia jednej przekątnej z dwiema innemi są harmonicznie sprzężone względem wierzchołków na tej przekątnej leżących.

Na zasadzie tej własności czworoboku, można zapomocą samego tylko linjału znaleźć na prostej p punkt sprzężony harmonicznie z dawnym punktem N względem dwuch innych danych punktów A i B tej samej prostej. Przez punkt N /Rys.247/ prowadzimy dowolną prostą m i obieramy na niej dwa punkty C i D, które łączymy z punktami A i B, tworząc czworobok $abcd$ o przekątnych p i m, trzecia przekątna n przecina p w punkcie szukanym M.

W szczególności dany odcinek AB możemy podzielić na połowy zapomocą samego tylko linjału, jeżeli dana jest prosta m równoległa do AB, a więc jeżeli dany jest punkt niewłaściwy N^∞ prostej AB. Obrawszy na m dwa punkty C i D i połączywszy je, jak poprzednio z punktami A i B, otrzymamy środek odcinka AB zapomocą przekątnej n czworoboku zupełnego $abcd$. - Nawzajem, jeżeli dany jest na prostej p jakikolwiek odcinek podzielony na połowy, to można przez punkt jakikolwiek C poprowadzić równoległą do

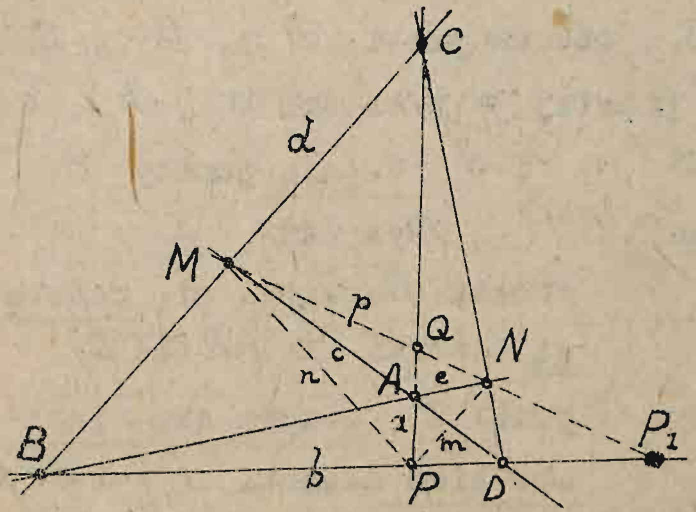
P zapomocą konstrukcji linjowej, t.j. zapomocą samego tylko linjału.

Figura utworzona przez 4 punkty A , B , C i , D płaszczyzny, z których żadne 3 nie leżą na jednej prostej, oraz przez 6 prostych, łączących te punkty po dwa, nazywa się <u>czworokątem zupełnym</u> $ABCD$. Punkty A , B , C , D nazywają się <u>wierzchołkami</u>, proste, je łączące a , b , c , d , e , f nazywają się <u>bokami</u> czworokąta zupełnego. Dwa boki nie przechodzące przez wspólny wierzchołek nazywają się <u>przeciwległemi</u>. Punkty P , M i N przecięcia boków przeciwległych ab , cd i ef nazywają się <u>punktami przekątnemi</u> /Rys.248/.

Czworokąt zupełny jest figurą płaską wzajemną względem czworoboku zupełnego, bokom, wierzchołkom i przekątnym pierwszego odpowiadają wierzchołki, boki i punkty przekątne drugiego i nawzajem. Na zasadzie dwoistości moglibyśmy przeto wnioskować o prawdziwości następującego twierdzenia:

<u>W czworokącie zupełnym proste łączące jeden punkt przekątny z dwoma innymi są harmonicznie sprzężone względem boków przez ten punkt przechodzących.</u>

Dowód tego twierdzenia mógłby być również na zasadzie dwoistości wywnioskowany z dowodu twierdzenia o

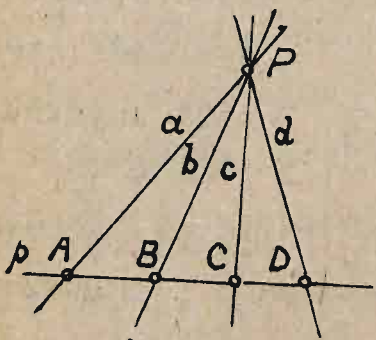


Rys. 248.

czworoboku zupełnym, prościej jednak można je okazać jak następuje: Niech będzie /Rys.248/ czworokąt zupełny $ABCD$ niechaj punkty P, M i N będą punktami przekątnemi tego czworokąta, dowiedziemy, że czwórka prostych $abmn$ jest harmoniczna. Zauważmy czworobok zupełny $cdef$, którego jedną z przekątnych jest p. Na zasadzie twierdzenia poprzedniego czwórka punktów $QRNM$ jest harmoniczna, stąd wynika, że czwórka prostych $abmn$, rzucających te punkty z punktu P jest harmoniczną /§ 141/.

§ 131. Czwórki perspektywiczne. Mówimy, że czwórka punktów $ABCD$, leżących na prostej $p[p(ABCD)]$ jest perspektywiczna z czwórką prostych $abcd$, wychodzących z punktu $P[P(abcd)]$, jeżeli proste

a, b, c i d przechodzą odpowiednio przez punkty A, B, C i D, tak że punkty A, B, C i D są przecięciami prostej p prostemi a, b, c i d, a proste a, b, c i d rzucają punkty A, B, C i D z punktu P. /Rys.249/.



Rys. 249.

Prosta p nazywa się podstawą czwórki $p(ABCD)$, punkt P nazywa się wierzchołkiem ~~czwórki~~ $P(abcd)$. Perspektywiczność czwórek $p(ABCD)$ i $P(abcd)$ oznaczamy symbolem

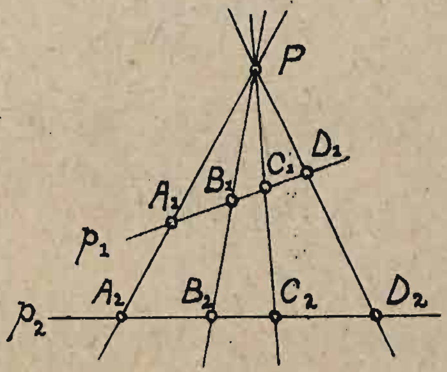
$$p(ABCD) \barwedge P(abcd).$$

Na zasadzie § 129 jeżeli te czwórki są perspektywiczne, to dwustosunki /$ABCD$/ i /$abcd$/ są równe.

Mówimy, że czwórki punktów $p_1(A_1B_1C_1D_1)$ i $p_2(A_2B_2C_2D_2)$ są perspektywiczne

$$p_1(A_1B_1C_1D_1) \barwedge p_2(A_2B_2C_2D_2).$$

jeżeli istnieje czwórka $P(abcd)$, której proste łączą odpowiednio punkty A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2, D_1 i D_2, tak, że obie czwórki punktów są przecięciami tej samej czwórki prostych. Punkt P nazywa się środkiem perspektywy czwórek $p_1(A_1B_1C_1D_1)$ i $p_2(A_2B_2C_2D_2)$ /Rys.250/. Mówimy, że czwórki prostych: $P_1(a_1 b_1 c_1 d_1)$ i $P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ są perspektywiczne $P_1(a_1 b_1 c_1 d_1) \barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$,



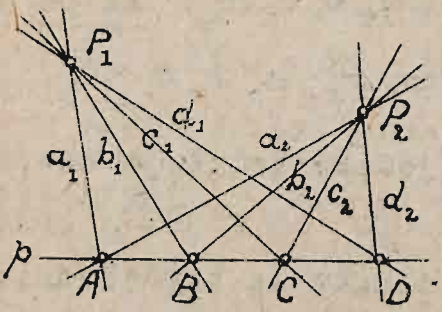
Rys. 250.

jeżeli istnieje czwórka $p(ABCD)$, której punkty są odpowiednio przecięciami prostych a_1, i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2, d_1 i d_2, tak, że obie czwórki prostych rzucają tę samą czwórkę punktów.

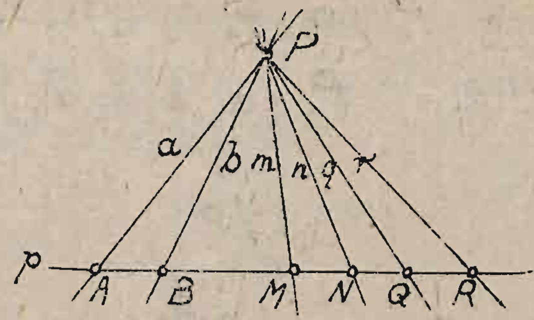
Prosta p nazywa się osią perspektywy czwórek $P_1(a_1 b_1 c_1 d_1)$ i $P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ ./Rys.251/.

Na zasadzie § 129, jeżeli $p_1(A_1 B_1 C_1 D_1) \barwedge p_2(A_2 B_2 C_2 D_2)$ to $/A_1 B_1 C_1 D/ = /A_2 B_2 C_2 D_2/$ jeżeli $P_1(a_1 b_1 c_1 d_1) \barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 d_2)$ to $(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2)$.

§ 132. Szeregi i pęki perspektywiczne. Niechaj będzie prosta p i punkt P na niej nie leżący /Rys. 252/ Między punktami prostej p i prostemi, wychodzącemi z punktu P można ustalić odpowiedniość doskonałą, t.j. taką, że każdemu punktowi A prostej p odpowiadać będzie jedna jedyna prosta a wychodząca z punktu P, ta mianowicie, która przez punkt A przechodzi, - a każdej prostej b, wychodzącej z punk-



Rys. 251.



Rys. 252.

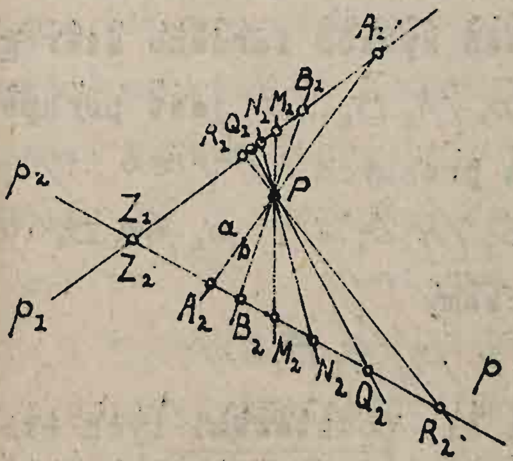
tu P odpowiadać będzie na prostej p jeden jedyny punkt B, ten mianowicie który leży na prostej b. Mówimy tedy, że szereg punktów $p(AB\ldots)$ jest perspektywiczny z pękiem prostych $P(ab\ldots)$, co oznaczamy

$$p(AB\ldots) \overline{\wedge} P(ab\ldots).$$

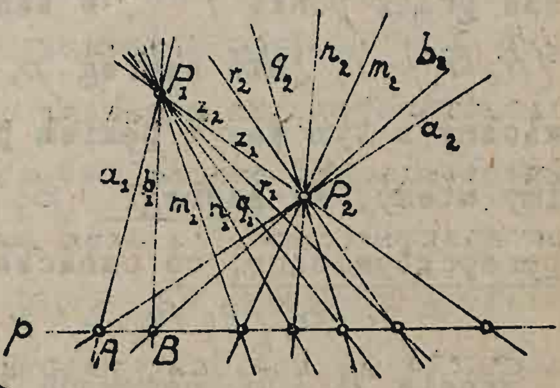
Prosta p nazywa się podstawą szeregu $p(AB\ldots)$; punkt P nazywa się wierzchołkiem pęku $P(ab\ldots)$. Jeżeli M, N, Q i R są jakiemikolwiek czterema punktami szeregu $p(AB\ldots)$, a proste m, n, q i r odpowiadają im w pęku $P(ab\ldots)$, to czwórki $p(MNQR)$ i $P(mnqr)$ są perspektywiczne tak, że

$$(MNQR) = (mnqr);$$

Niech będą teraz w płaszczyźnie rysunku dwie proste p_1 i p_2 /Rys.253/. Między punktami prostej p_1 i



Rys. 253.



Rys. 254.

punktami prostej p_2 można ustalić odpowiedniość doskonałą, t.j. taką, że każdemu punktowi A_1 prostej p_1, odpowiadać będzie jeden jedyny punkt A_2 prostej p_2 i nawzajem, każdemu punktowi B_2 prostej p_2 odpowiadać będzie jeden jedyny punkt B_1 prostej p_1. W tym celu obieramy w płaszczyźnie rysunku punkt jakikolwiek P, nie leżący na żadnej z prostych p_1 i p_2, i umawiamy się że każdemu punktowi prostej p_1, np. punktowi A_1, będzie odpowiadał ten punkt A_2 prostej p_2, który leży na prostej PA_1, a każdemu punktowi prostej p_2 np. punktowi B_2 odpowiadać będzie ten punkt B_1 prostej p_1, który leży na prostej PB_2, tak, że proste a, b, ..., łączące pary punktów odpowiednich A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ,......, przechodzić będą zawsze przez punkt P . W ten sposób zarówno szereg $p_1(A_1 B_1 \ldots)$ jako szereg $p_2(A_2 B_2 \ldots)$ jest perspektywiczny z tym samym pękiem prostych $P(ab\ldots)$. Mówimy wtedy, że szeregi $p_1(A_1B_1\ldots)$ i $p_2(A_2B_2\ldots)$ są perspektywiczne, co oznaczamy

$$p_1(A_1 B_1 \ldots) \barwedge p_2(A_2 B_2 \ldots).$$

Proste p_1 i p_2 nazywają się podstawami tych szeregów perspektywicznych, - punkt P nazywa się środkiem ich perspektywy. - Jeżeli M_1 , N_1 , Q_1 i R_1 są jakiemikolwiek czterema punktami prostej p_1, a punkty M_2 , N_2 , Q_2 i R_2 odpowiadają im na prostej p_2 w szeregach perspektywicznych $p_1(A_1 B_1 \ldots) \barwedge$ $\barwedge p_2(A_2B_2\ldots)$ to czwórki punktów $p_1(M_1 N_1 Q_1 R_1)$ i $p_2(M_2N_2Q_2R_2)$ są perspektywiczne, tak, że na zasadzie § 129 $(M_1 N_1 Q_1 R_1)=(M_2N_2Q_2R_2)$. Z określenia szeregów perspektywicznych $p_1(A_1B_1\ldots)$ i $p_2(A_2B_2\ldots)$ wynika, że punkt przecięcia podstaw p_1 i p_2 odpowiada samemu sobie; jeżeli więc punkt ten zaliczymy do szeregu $p_1(A_1B_1\ldots)$ i oznaczymy np. literą Z_1 , to gdy ten sam punkt zaliczymy do szeregu $p_2(A_2B_2\ldots)$ winniśmy go oznaczyć literą Z_2.

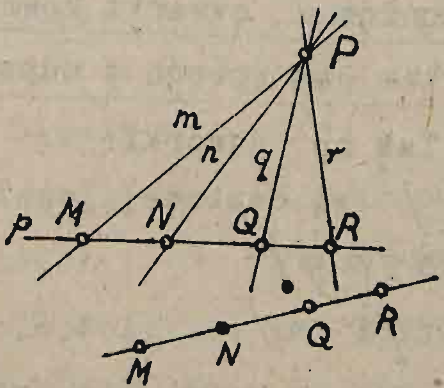
Niechaj będą wreszcie w płaszczyźnie rysunku dwa punkty P_1 i P_2 /Rys.266/. Między prostemi, wychodzącemi z punktu P_1 i prostemi, wychodzącemi z punktu P_2, można ustalić odpowiedniość doskonałą, t.j. taką, że każdej prostej a_1, wychodzącej z punktu P_1, odpowiadać będzie jedna jedyna prosta a_2, wychodząca z punktu P_2 i nawzajem, każdej prostej b_2, wychodzącej z punktu P_2, odpowiadać będzie jedna jedyna prosta b_1, wychodząca z punktu P_1. W tym celu kreślimy w płaszczyźnie rysunku prostą jakąkolwiek p, nie przechodzącą przez żaden z punktów P_1 i P_2, i umawiamy się, że każdej prostej, wychodzącej z punktu P_1, np. prostej a_1, będzie odpowiadała ta prosta a_2, wychodząca z punktu P_2, która przechodzi przez punkt pa_1, a każdej prostej, wychodzącej z punktu P_2, np. prostej b_2 odpowiadać będzie ta prosta b_1, wychodząca z punktu P_1, która przechodzi przez punkt pb_2, - tak, że punkty A, B .....przecięcia par prostych odpowiednich a_1 i a_2, b_1 i b_2,....leżeć będą zawsze na prostej p. W ten sposób, zarówno pęk $P_1(a_1 b_1 \ldots)$, jak pęk $P_2(a_2 b_2 \ldots)$, jest perspektywiczny z tym samym szeregiem punktów $p(A_1 B_1 \ldots)$. Mówimy wtedy, że pęki $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i $P_2(a_2 b_2 \ldots)$ są perspektywiczne, co oznaczamy

$$P_1(a_1 b_1 \ldots) \;\overline{\wedge}\; P_2(a_2 b_2 \ldots).$$

Punkty P_1 i P_2 nazywają się wierzchołkami pęków perspektywicznych, prosta p nazywa się osią ich perspektywy. Jeżeli m_1, n_1, q_1 i r_1 są jakiemikolwiek czterema prostemi, wychodzącemi z punktu P_1, a wychodzące z punktu P_2 proste m_2, n_2, q_2 i r_2 odpowiadają im w pękach perspektywicznych $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i $P_2(a_2 b_2 \ldots)$, to czwórki prostych $P_1(m_1 n_1 q_1 r_1)$ i $P_2(m_2 n_2 q_2 r_2)$ są perspektywiczne, tak że $(m_1 n_1 q_1 r_1) = (m_2 n_2 q_2 r_2)$. Z określenia pęków perspektywicznych $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i $P_2(a_2 b_2 \ldots)$ wynika, że prosta $P_1 P_2$ łącząca oba wierzchołki odpowiada samej sobie; jeżeli więc prostą tę zaliczymy do pęku $P_1(a_1 b_1 \ldots)$ i oznaczymy np. literą z_1, to gdy tę samą prostą zaliczymy do pęku $P_2(a_2 b_2 \ldots)$, winniśmy ją oznaczyć literą z_2.

§ 133. Czwórki i szeregi rzutowe. Niechaj czwórka punktów $p(MNQR)$ będzie perspektywiczna z czwórką prostych $P(mnqr)$ /Rys.255/, na zasadzie § 131 dwustosunki / $MNQR$ /i/ $mnqr$ / są równe. Wyobraźmy sobie teraz, że prosta p wraz z leżącemi na niej punktami M, N, Q i R zostanie w dowolny sposób ze swego miejsca przesunięta, ponieważ na skutek tego przesunięcia wzajemne odległości punktów M, N, Q i R nie zostaną zmienione, więc dwustosunki / $mnqr$ / i / $MNQR$ / wciąż jeszcze będą równe, choć czwórki te wogóle przestaną być perspektywicznemi. Tak samo stałoby się, gdybyśmy nie ruszając czwórki punktów $p(MNQR)$ poruszyli z miejsca czwórkę prostych $P(mnqr)$.

Podobnież jeżeli z dwuch perspektywicznych czwórek punktów $p_1(M_1N_1Q_1R_1)$ i $p_2(M_2N_2Q_2R_2)$ jedna przeniesioną zostanie w inne miejsce, to perspektywiczność tych czwórek wogóle zostanie zatraconą, choć dwustosunki $/M_1N_1Q_1R_1/$ i $/M_2N_2Q_2R_2/$ pozostaną równe. Mówimy, że dwie czwórki punktów:



Rys. 255.

$p_1(M_1N_1Q_1R_1)$ i $p_2(M_2N_2Q_2R_2)$ albo że dwie czwórki prostych $P_1(m_1n_1q_1r_1)$ i $P_2(m_2n_2q_2r_2)$ albo że czwórka punktów $p(MNQR)$ i czwórka prostych $P(mnqr)$ są <u>rzutowe</u>, jeżeli dwustosunki $/M_1N_1Q_1R_1/$ i $/M_2N_2Q_2R_2/$ są równe. Czwórki perspektywiczne są przeto zawsze rzutowe, ale czwórki rzutowe mogą nie być perspektywiczne. Rzutowość czwórek oznaczamy symbolem $\overline{\wedge}$, np. piszemy

$$P_1(m_1 n_1 q_1 r_1) \;\overline{\wedge}\; P_2(m_2 n_2 q_2 r_2).$$

Jeżeli w obu równych dwustosunkach wykonamy to samo przestawienie liter, to nowe dwustosunki pozostaną równe. W samej rzeczy, łatwo się przekonać, że jeżeli w dwustosunku $(MNQR) = \lambda$ wykonamy jakiekolwiek przestawienie liter, to wartość nowego dwustosunku albo pozostanie równą λ, albo będzie równa jednej z liczb:

$$\frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ 1-\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1};$$

Stąd wynika, że <u>dwie czwórki są rzutowe, jeżeli którykolwiek z 24 dwustosunków I czwórki równy jest dwustosunkowi utworzonemu w ten sam sposób z odpowiednich elementów II czwórki</u>. Tak np. czwórki:

$p(MNQR)$ i $P(mnqr)$ są rzutowe, jeżeli np.

$$(MRNQ) = (mrnq)$$

albo jeżeli $(NQRM) = (nqrm)$ i t.d.

Niechaj będą w płaszczyźnie rysunku dwie proste p_1 i p_2. Na prostej p_1 obierzemy trzy punkty A_1, B_1 i C_1 a na prostej p_2 trzy punkty A_2, B_2, i C_2. Między punktami prostej p_1 a punktami prostej p_2 ustalimy odpowiedniość doskonałą w ten sposób, że

1/ punktowi A_1 prost. p_1 odpowiada punkt A_2 prost. p_2 i naw[zajem]
2/ " B_1 " " " " B_2 " "
3/ " C_1 " " " " C_2 " "

4/ każdemu innemu punktowi M_1 prostej p_1 odpowiadać będzie taki punkt M_2 prostej p_2, że dwustosunki $(A_1 B_1 C_1 M_1)$ i $(A_2 B_2 C_2 M_2)$ są równe.

Tak ustalona odpowiedniość między punktami prostej p_1 a punktami prostej p_2 nazywa się rzutowością szeregów $p_1(A_1 B_1 C_1 \ldots)$ i $p_2(A_2 B_2 C_2 \ldots)$ co oznaczamy

$$p_1(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_2(A_2 B_2 C_2 \ldots)$$

i mówimy, że te szeregi są rzutowe.

W ten sam sposób określamy rzutowość dwuch pęków

$$P_1(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 \ldots)$$

i rzutowość pęku i szeregu

$$P(abc \ldots) \barwedge p(ABC \ldots)$$

Jeżeli M_1 i M_2, N_1 i N_2, Q_1 i Q_2, R_1 i R_2 są czterema parami punktów odpowiednich szeregów rzutowych $p_1(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_2(A_2 B_2 C_2 \ldots)$ to łatwo okazać, że dwustosunki $(M_1 N_1 Q_1 R_1)$ i $(M_2 N_2 Q_2 R_2)$ są równe.

W samej rzeczy, na mocy określenia rzutowości tych szeregów mamy równości

$$/1/ \quad (A_1 B_1 C_1 M_1) = (A_2 B_2 C_2 M_2)$$
$$/2/ \quad (A_1 B_1 C_1 N_1) = (A_2 B_2 C_2 N_2)$$
$$/3/ \quad (A_1 B_1 C_1 Q_1) = (A_2 B_2 C_2 Q_2)$$
$$/4/ \quad (A_1 B_1 C_1 R_1) = (A_2 B_2 C_2 R_2)$$

Rozwinąwszy te dwustosunki i podzieliwszy stronami /1/ przez/2/, /1/ przez /3/ i /1/ przez /4/ otrzymamy:

$$(A_1 B_1 N_1 M_1) = (A_2 B_2 N_2 M_2)$$
$$(A_1 B_1 Q_1 M_1) = (A_2 B_2 Q_2 M_2)$$
$$(A_1 B_1 R_1 M_1) = (A_2 B_2 R_2 M_2)$$

skąd, przestawiając po obu stronach litery w jednakowy sposób, otrzymamy:

$$/5/ \quad (A_1 M_1 B_1 N_1) = (A_2 M_2 B_2 N_2)$$
$$/6/ \quad (A_1 M_1 B_1 Q_1) = (A_2 M_2 B_2 Q_2)$$
$$/7/ \quad (A_1 M_1 B_1 R_1) = (A_2 M_2 B_2 R_2)$$

Rozwinąwszy znowu te dwustosunki i podzieliwszy stronami /5/ przez /6/ i /5/ przez /7/, otrzymamy równości:

$$(A_1 M_1 Q_1 N_1) = (A_2 M_2 Q_2 N_2)$$
$$(A_1 M_1 R_1 N_1) = (A_2 M_2 R_2 N_2)$$

a z nich przez przestawienie liter:

$$/8/ \quad (M_1 N_1 A_1 Q_1) = (M_2 N_2 A_2 Q_2)$$
$$/9/ \quad (M_1 N_1 A_1 R_1) = (M_2 N_2 A_2 R_2)$$

Rozwinąwszy jeszcze raz te dwustosunki i podzieliwszy stronami /8/ przez /9/ otrzymamy

$(M_1 N_1 R_1 Q_1) = (M_2 N_2 R_2 Q_2)$ skąd wynika wreszcie

$$(M_1 N_1 Q_1 R_1) = (M_2 N_2 Q_2 R_2)$$

Tak więc jeżeli M_1 i M_2, N_1 i N_2, Q_1 i Q_2

są trzema parami punktów odpowiednich dwuch szeregów rzutowych

$$p_1 (A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_2 (A_2 B_2 C_2 \ldots)$$

to ta rzutowość jest identyczna z rzutowością

$$p_1 (M_1 N_1 Q_1) \barwedge p_2 (M_2 N_2 Q_2),$$

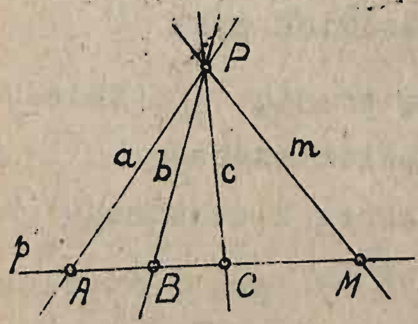
gdyż każdemu punktowi R_1 prostej p_1 odpowiada w obu rzutowościach ten sam punkt R_2 prostej p_2 i nawzajem.

Rzutowość dwuch szeregów /pęków, szeregu i pęku/ jest przeto określona przez 3 którekolwiek pary elementów odpowiednich.

Jeżeli wychodząc z jakiegokolwiek pęku $P_1 (a_1 b_1 c_1 \ldots)$ przetniemy go dowolną prostą p_1, to otrzymamy perspektywiczny z tym pękiem szereg $p_1 (A_1 B_1 C_1 \ldots)$ rzucając ten szereg z dowolnego punktu, otrzymamy pęk $P_2 (a_2 b_2 c_2 \ldots)$ perspektywiczny z szeregiem $p_2 (A_2 B_2 C_2 \ldots)$ i pękiem $P_1 (a_1 b_1 c_1 \ldots)$; przecinając pęk P_2 dowolną prostą p_2, otrzymamy szereg p_2 który będzie perspektywiczny z pękiem P_2 i szeregiem p_1, ale który wogóle nie będzie już perspektywiczny z pękiem P_1, choć będzie wciąż jeszcze z nim rzutowy; postępując w ten sam sposób dalej, otrzymywać będziemy na zmianę to pęk, to szereg, który będzie rzutowy z każdym poprzednim pękiem lub szeregiem, ale perspektywiczny będzie tylko z ostatnim pękiem i z ostatnim szeregiem. Wyrażamy to krótko, mówiąc:

Rzutowość zachowuje się przez rzuty i przecięcia, perspektywiczność wogóle zatraca się przez rzuty i przecięcia.

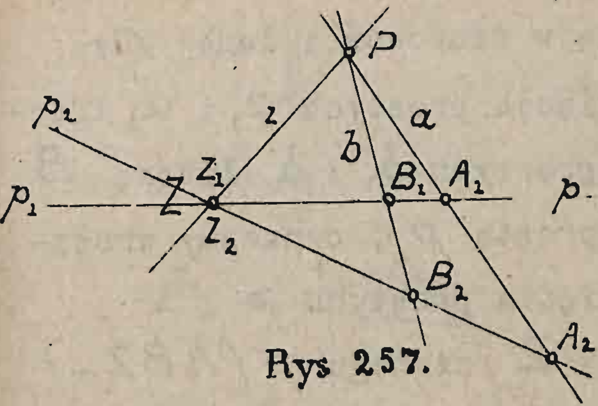
§ 134. TWIERDZENIA. I. Jeżeli 3 proste a, b i c pęku $P(abc...)$ przechodzą przez 3 odpowiadające im punkty A, B i C rzutowego z tym pękiem szeregu $p(ABC...)$, to ten pęk i szereg są perspektywiczne. W samej rzeczy każda czwarta prosta m wychodząca z punktu P /Rys.256/ musi przejść wtedy przez odpowiadający jej punkt M, na prostej p istnieje bowiem jeden jedyny punkt M, dla którego dwustosunek $/ABCM/$ byłby równy dwustosunkowi $/abcm/$ § 126.



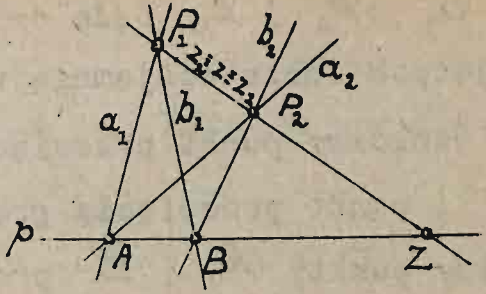
Rys. 256.

II. Jeżeli w dwuch szeregach rzutowych punkt przecięcia Z podstaw p_1 i p_2 odpowiada samemu sobie $Z \equiv Z_1 \equiv Z_2$ to te szeregi są perspektywiczne. Niechaj A_1 i A_2, B_1 i B_2 będą dwiema parami punktów, odpowiadających sobie wzajemnie w rzutowości danej /Rys.257/.

Połączmy punkty A_1 i A_2 prostą a, punkty



Rys 257.



Rys. 258.

B_1 i B_2 prostą b ; oznaczmy punkt przecięcia prostych a i b literą P ; połączmy wreszcie punkt P z punktem Z prostą z . Ponieważ proste a , b i z pęku $P(abz\ldots)$ przechodzą przez odpowiadające im punkty A , B i Z szeregu $p_1(A_1B_1Z_1\ldots)$, więc na zasadzie twierdzenia I pęk $P(abz\ldots)$ i szereg $p_1(A_1B_1Z_1\ldots)$ są perspektywiczne; ponieważ te same proste a , b i z przechodzą przez punkty A_2 , B_2 i Z_2 szeregu $p_2(A_2B_2Z_2\ldots)$ więc na mocy tego samego twierdzenia pęk $P(abz\ldots)$ i szereg $p_2(A_2B_2Z_2\ldots)$ są perspektywiczne, tak że szeregi $p_1(A_1B_1Z_1\ldots)$ i $p_2(A_2B_2Z_2\ldots)$ są perspektywiczne z tym samym pękiem $P(abz\ldots)$, a więc są perspektywiczne ze sobą.

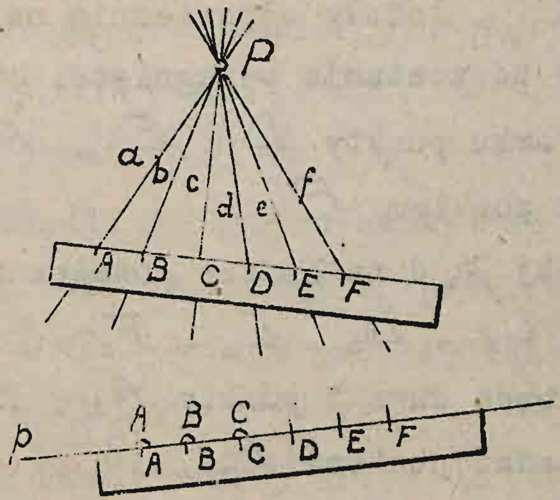
III. Jeżeli w dwuch pękach rzutowych prosta z_1, łącząca wierzchołki P_1 i P_2 odpowiada samej sobie $z\equiv z_1\equiv z_2$, to te pęki są perspektywiczne. Niechaj

a_1 i a_2, b_1 i b_2 będą dwiema parami prostych odpowiadających sobie wzajemnie w rzutowości danej /Rys. 258/. Oznaczmy punkt przecięcia prostych a_1 i a_2 literą A, punkt przecięcia prostych b_1 i b_2 literą B połączmy punkty A i B prostą p; oznaczmy wreszcie literą Z punkt przecięcia prostych p i z. Ponieważ punkty A, B i Z szeregu $p(ABZ...)$ leżą na odpowiadających im prostych a_1, b_1 i z_1 pęku $P_1(a_1 b_1 z_1)$, więc na zasadzie twierdzenia I szereg $p(ABZ...)$ i pęk $P_1(a_1 b_1 z_1 ...)$ są perspektywiczne, na tej samej zasadzie szereg $p(ABZ...)$ jest perspektywiczny z pękiem $P_2(a_2 b_2 z_2 ...)$, skąd wynika, że pęki $P_1(a_1 b_1 z_1 ...)$ i $P_2(a_2 b_2 z_2 ...)$ są perspektywiczne.

§ 135. Wyznaczenie elementów odpowiednich dwuch rzutowych szeregów, albo pęków, albo szeregu i pęku.

I sposób. a/ Niechaj będzie dowolna ilość prostych a, b, c, d, e, f .....wychodzących z punktu P, a na prostej p niechaj będą 3 punkty A, B i C, które mają odpowiadać prostym a, b i c w rzutowości $P(abc...) \barwedge p(ABC...)$ /Rys 259/.

Wziąwszy skrawek papieru, którego jedna krawędź jest prosta, i przyłożywszy go tą krawędzią do prostej



Rys. 259.

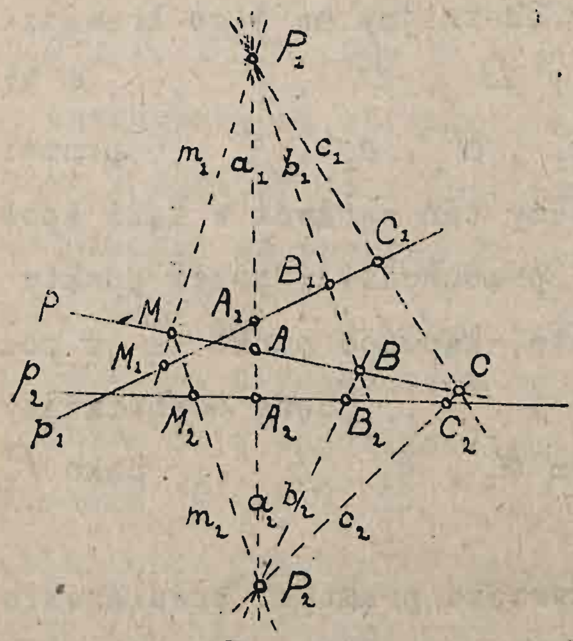
p, odetnijmy na skrawku punkty A, B i C, poczem odjąwszy go od prostej p, szukajmy takiego położenia tego skrawka, aby proste a, b i c przechodziły odpowiednio przez punkty A, B i C. Gdy to zostanie osiągnięte, odetnijmy na skrawku punkty D, E, F, ...w których proste d, e, f, przecinają jego krawędź, poczem przyłożywszy skrawek znowu do prostej p w ten sposób, aby punkty A, B i C przystały do zrobionych poprzednio znaków, przenieśmy odcięte na skrawku punkty D, E, F, ... na prostą p.

b/ W taki sam sposób postąpić możemy, gdy mamy wyznaczyć proste d, e, f, ... odpowiadające punktom D, E, F, ... w rzutowości $p(ABC...) \overline{\wedge} P(abc...)$ Przyłożywszy skrawek do prostej p odcinamy na nim punkty A, B, C, D, E, F, ...poczem szukamy takiego położenia skrawka, aby punkty A , B , C , leżały odpowiednio na prostych a , b i c . Gdy to zostanie osiągnięte, przenosimy zaznaczone na skrawku punkty D , E , F .. na papier i łączymy je z punktem P .

c/ Niechaj na prostej p_1 dana będzie dowolna ilość punktów A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 , F_1 ,... a na prostej p_2 niechaj będą dane 3 punkty A_2 , B_2 i C_2 , które mają odpowiadać punktom A_1 , B_1 ,i C_1 w rzutowości $p_1(A_1 B_1 C_1 ...) \barwedge p_2(A_2 B_2 C_2 ...)$ Obrawszy jakikolwiek punkt P_1 , nie leżący na prostej, połączmy go ze wszystkiemi punktami A_1, B_1 , C_1 , D_1, E_1 , F_1 ,... Weźmy znowu skrawek papieru, przyłóżmy jego krawędź do prostej p_2 , odetnijmy na krawędzi punkty A_2 , B_2 i C_2 i szukajmy takiego położenia skrawka, aby odcięte na jego krawędzi punkty leżały odpowiednio na prostych P_1A_1 , P_1B_1 i P_1C_1 wtedy proste P_1D_1 , P_1E_1 , P_1F_1 ...wyznaczą na tej krawędzi punkty D_2 , E_2 , F_2 ,...które pozostaje tylko przenieść na prostą p_2.

d/ Niechaj z punktu P_1 wychodzi dowolna ilość prostych a_1, b_1 , c_1 , d_1 , e_1 , f_1 ,... a z punktu P_2 niechaj wychodzą 3 proste a_2, b_2 i c_2 , które mają odpowiadać prostym a_1 , b_1 i c_1 w rzutowości: $P_1(a_1 b_1 c_1 ...) \barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 ...)$. Ułożywszy w dowolny sposób skrawek papieru, odetnijmy na jego krawędzi punkty A , B , C , D , E , F ,... w których proste a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 ,...przecinają tę krawędź, poczem umieśćmy ten skrawek w taki sposób, aby proste a_1, b_1, c_1 przechodziły przez punkty A B i C ; wtedy proste, łączące punkt P_1 z pozostałemi punktami D , E , F ,...będą odpowiadały w danej rzutowości prostym d_1, e_1, f_1 ,... pęku $P_1(a_1 b_1 c_1 ...)$

II sposób. Ze stanowiska praktyki kreślarskiej sposoby powyższe są bardzo użyteczne, gdyż przesuwając w tę lub ową stronę skrawek papieru z odciętemi na jego krawędzi punktami A , B i C , możemy po kilku próbach z dostatecznem przybliżeniem umieścić te punkty odpowiednio na prostych a_1, b_1 i c_1 . Ze stanowiska teorji rozwiązania te nie mają wartości, gdyż nie wskazują tutaj w jaki sposób można sprawić, aby 3 dowolne punkty danej prostej upadły dokładnie na 3 dane proste, wychodzące z jednego punktu. Wskażemy przeto inne wprawdzie mniej praktyczne, ale za to ścisłe sposoby rozwiązania tych samych zagadnień, przytem okaże się, że do ich zastosowania wystarczy użycie samego tylko linjału /konstrukcje linjowe, zagadnienia I stopnia/.

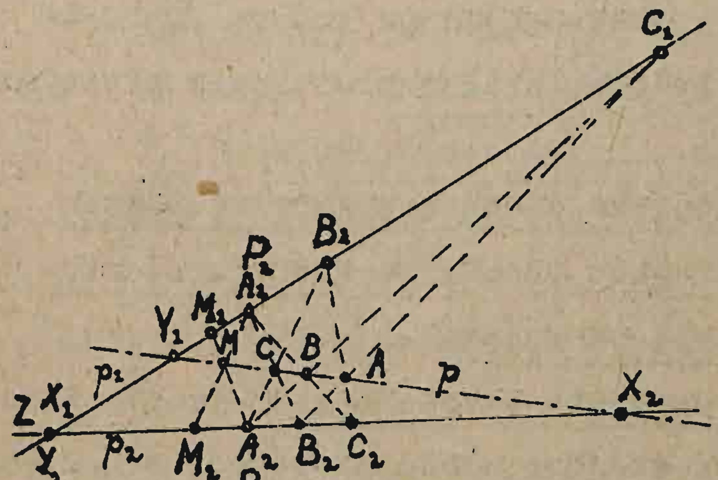


Rys. 260.

a/ Niechaj będą /Rys.260/ dwa szeregi o podstawach p_1 i p_2, których rzutowość jest dana zapomocą 3 par punktów odpowiednich A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2. Połączmy którekolwiek dwa punkty odpowiednie np. A_1 i A_2 i na prostej $A_1 A_2$ obierzmy dowolnie dwa punkty P_1 i P_2. Z punktu P_1 rzućmy szereg $p_1 (A_1 B_1 C_1 \dots)$, a z punktu P_2 szereg $p_2 (A_2 B_2 C_2 \dots)$ i uważajmy w pękach o wierzchołkach P_1 i P_2 za odpowiednie te proste, które rzucają odpowiednie punkty szeregów p_1 i p_2. Pęki P_1 i P_2 są rzutowe, gdyż są one perspektywiczne z rzutowemi szeregami $p_1 (A_1 B_1 C_1 \dots) \barwedge p_2 (A_2 B_2 C_2 \dots)$ są one nadto perspektywiczne, gdyż prosta łącząca wierzchołki $P_1 P_2$ odpowiada samej sobie $(a_1 \equiv a_2)$. Odpowiednio proste pęków P_1 i P_2 muszą się więc przecinać na prostej /osi perspektywy tych pęków/; będzie ona wyznaczona przez dwa jakiekolwiek swoje punkty np. przez

$B \equiv b_1 b_2$ i $C \equiv c_1 c_2$. Proste każdej innej pary przecinać się muszą na prostej $BC \equiv p$. Aby więc wyznaczyć punkt M_2, odpowiadający punktowi M_1, łączymy $P_1 M_1 \equiv m_1$, wyznaczamy punkt $p m_1 \equiv M$, łączymy $P_2 M \equiv m_2$ i wyznaczamy punkt $p_2 m_2 \equiv M_2$.

Ponieważ punkty P_1 i P_2 są dowolnemi punktami prostej $A_1 A_2$, przeto dogodnie będzie wziąć punkt P_1 w punkcie A_2, a punkt P_2 w punkcie A_1 /Rys. 261/, osią perspektywy pęków P_1 i P_2 będzie prosta p /zwana osią rzutową szeregów p_1 i p_2/, łącząca punkt C przecięcia prostych $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$ z punktem B przecięcia prostych $A_1 C_2$ i $A_2 C_1$; dwa punkty M_1 i M_2 są odpowiednie w szeregach $p_1 (A_1 B_1 C_1 \dots) \barwedge p_2 (A_2 B_2 C_2 \dots)$ jeżeli proste $A_1 M_2$ i $A_2 M_1$ przecinają się w punkcie którymkolwiek M osi rzutowej p.



Rys. 261.

Jeżeli szeregi rzutowe p_1 i p_2 nie są perspektywiczne, to punkt przecięcia Z podstaw p_1 i p_2 nie odpowiada samemu sobie. Jeżeli ten punkt zaliczymy do szeregu p_1, oznaczając go literą X_1, to punkt odpowiedni X_2 znajdziemy stosując regułę ogólną: trzeba na prostej p_2 wyznaczyć taki punkt X_2, aby proste A_2X_1 i A_1X_2 przecinały się na prostej p_2. Ale $A_2X_1 \equiv p_2$; X_2 musi być przeto takim punktem prostej p_2, aby prosta A_1X_2 przecinała prostą p_2 na prostej p, t.j. $X_2 \equiv pp_2$. Jeżeli punkt Z zaliczymy do szeregu p_2, oznaczając go literą Y_2, to punkt odpowiedni Y_1 będzie leżał w przecięciu prostych p i p_1, tak że

<u>punktowi przecięcia podstaw dwuch szeregów rzutowych odpowiadają w obu szeregach punkty, w których oś rzutowa przecina podstawy, i nawzajem:</u>

<u>oś rzutowa dwuch szeregów rzutowych p_1 i p_2 łączy punkty X_2 i X_1 odpowiadające w obu szeregach punktowi $X_1 \equiv Y_2$ przecięcia podstaw $p_1 p_2$.</u>

Ponieważ każdemu punktowi jednego z dwuch szeregów rzutowych, np. X_1 albo Y_2 odpowiada w drugim jeden jedyny punkt X_2 względnie Y_1, więc oś rzutowa nie zależy od tego czy wierzchołki pęków P_1 i P_2 obierzemy w punktach A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2,

M_1 i M_2 ,...Stąd wynika:

Jeżeli wierzchołki pierwszy trzeci i piąty sześciokąta $A_1 B_2 C_1 A_2 B_1 C_2$ leżą na prostej p_1, a wierzchołki drugi czwarty szósty na prostej p_2, to punkty A, B i C przecięcia boków "przeciwległych" $B_1 C_2$ i $B_2 C_1$, $A_1 C_2$ i $A_2 C_1$, $A_1 B_2$ i $A_2 B_1$ leżą na prostej p.

Jest to zresztą przypadek szczególny twierdzenia Pascala o sześciokącie wpisanym w stożkową, o którym będzie mowa w Rozdziale XIV.

Rzutowość dwuch szeregów na danych podstawach p_1 i p_2 jest wyznaczona przez oś rzutową p oraz jedną parę A_1 i A_2 punktów odpowiednich, gdyż oś rzutowa jest równoznaczna z dwiema parami punktów odpowiednich: X_1 i X_2, Y_1 i Y_2.

Jeżeli punkty niewłaściwe prostych p_1 i p_2 nie odpowiadają sobie wzajemnie, to oznaczmy literą R_1 punkt odpowiadający w szeregu p_1 punktowi niewłaściwemu R_2^∞ szeregu p_2, a literą Q_2 punkt odpowiadający w szeregu p_2 punktowi niewłaściwemu Q_1^∞ szeregu p_1. Punkty R_1 i Q_2 nazywaja sie punktami wzajemnemi szeregów p_1 i p_2. Ponieważ dwustosunki / $A_1 B_1 Q_1^\infty R_1$ / i / $A_2 B_2 Q_2 R_2^\infty$ / są równe, więc $\frac{B_1 R_1}{A_1 R_1} = \frac{A_2 Q_2}{B_2 Q_2}$ /§ 125/, stąd wynika $A_1 R_1 \cdot A_2 Q_2 = B_1 R_1 \cdot B_2 Q_2$;

czyli:

Iloczyn odległości dwuch punktów odpowiednich A_1 i A_2 od punktów wzajemnych R_1 i Q_2 jest liczbą stałą.

Jeżeli punkty niewłaściwe obu szeregów rzutowych odpowiadają sobie wzajemnie, to gdy oznaczymy literą Q_1^∞ punkt niewłaściwy prostej p_1, wypadnie oznaczyć literą Q_2^∞ punkt niewłaściwy prostej p_2. Niechaj A_1 i A_2, B_1 i B_2, C_1 i C_2 będą trzema parami punktów odpowiednich tych szeregów; dołączając czwartą parę punktów odpowiednich Q_1^∞ i Q_2^∞, możemy napisać

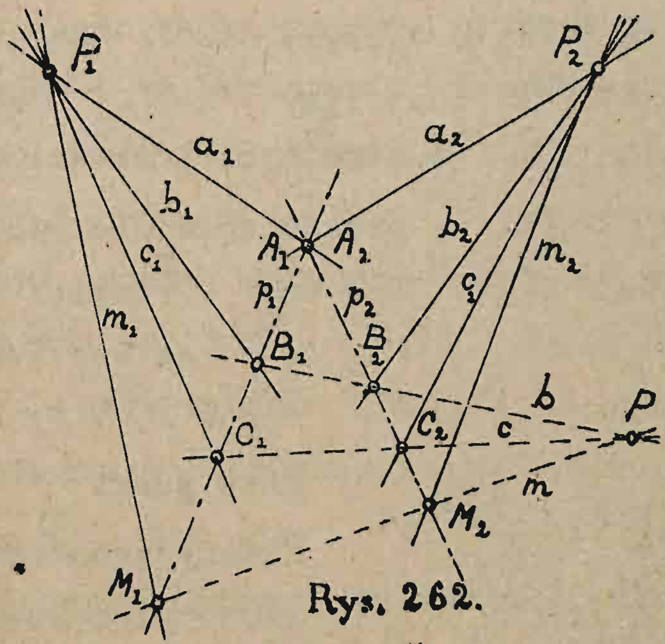
$$(A_1 B_1 C_1 Q_1^\infty) = (A_2 B_2 C_2 Q_2^\infty), \quad \text{skąd}$$

$$\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} = \frac{A_2 C_2}{B_2 C_2} \qquad (\S\ 125.)$$

Mamy tedy wniosek:

Jeżeli punkty niewłaściwe dwuch szeregów rzutowych odpowiadają sobie wzajemnie, to te szeregi są "podobne", to jest stosunek odległości dwuch którychkolwiek punktów jednego szeregu do odległości odpowiadających im punktów drugiego szeregu jest liczbą stałą

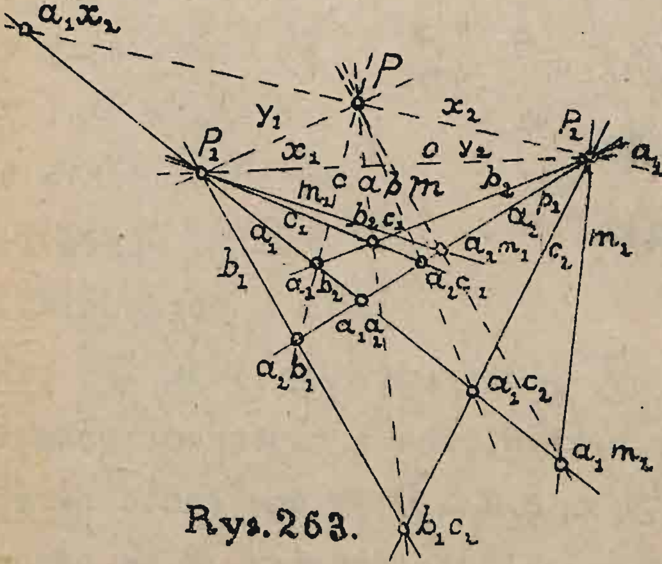
b/ Niech będą dwa pęki o wierzchołkach P_1 i P_2 których rzutowość jest dana zapomocą 3 par prostych odpowiednich a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2 /Rys.262/.



Rys. 262.

Przez punkt przecięcia którychkolwiek dwuch promieni odpowiednich, np. a_1 i a, poprowadźmy dowolnie dwie proste p_1 i p_2 i uważajmy w szeregach p_1 i p_2 za odpowiednie te punkty, które leżą na odpowiednich prostych pęków P_1 i P_2. Szeregi p_1 i p_2 są <u>rzutowe</u>, gdyż są one perspektywiczne z rzutowemi pękami $P_1(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge P_2(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ są one nadto <u>perspektywiczne</u>, gdyż punkt przecięcia podstaw $p_1 p_2$ odpowiada samemu sobie / $A_1 \equiv A_2$ /. Odpowiednie punkty szeregów p_1 i p_2 muszą przeto leżeć na prostych przecinających się w jednym punkcie /środku perspektywy tych szeregów/; będzie on wyznaczony przez dwie którekolwiek proste przezeń przechodzące, np. przez $b \equiv B_1 B_2$ i $c \equiv C_1 C_2$ Punkty odpowiednie każdej innej pary leżeć muszą na prostej, wychodzącej z punktu $bc \equiv P$. Aby więc wyznaczyć prostą m_2, odpowiadającą prostej m_1, wyznaczamy punkt $p_1 m_1 \equiv M_1$, łączymy $PM_1 \equiv m$, wyznaczamy punkt $p_2 m \equiv M_2$ i łączymy $P_2 M_2 \equiv m_2$.

Ponieważ proste p_1 i p_2 są dowolnemi prostemi wyprowadzonemi z punktu $a_1 a_2'$, przeto dogodnie będzie uczynić $p_1 \equiv a_2$ i $p_2 \equiv a_1$ /Rys.263/. Środkiem perspektywy szeregów p_1 i p_2 będzie punkt P /zwany środkiem rzutowym pęków P_1 i P_2 /, który jest przecięciem prostej c, łączącej punkty $a_1 b_2$ i $a_2 b_1$ prostą b, łączącą punkty $a_1 c_2$ i $a_2 c_1$, dwie proste m_1 i m_2 są odpowiednie w pękach $P_1(a_1 b_1 c_1 \dots) \,\overline{\wedge}\, P_2(a_2 b_2 c_2 \dots)$, jeżeli prostą m łącząca punkty $a_1 m_2$ i $a_2 m_1$ przechodzi przez środek rzutowy P.



Rys.263.

Jeżeli pęki rzutowe P_1 i P_2 nie są perspektywiczne, to prosta z, łącząca wierzchołki P_1 i P_2, nie odpowiada samej sobie. Jeżeli tę prostą zaliczymy do pęku P_1, oznaczając ją literą x_1, to prostą odpowiednią znajdziemy, prowadząc z punktu P_2 taką prostą x_2, aby prosta, łącząca punkty $a_2 x_2$ i $a_1 x_2$ przechodziła przez punkt P. Ale $a_2 x_1 \equiv P_2$; x_2 musi być przeto taką prostą, wychodzącą z punktu P_2, aby prosta, łącząca punkty $a_2 x_2$ i P_2 przechodziła przez punkt P, t.j. $x_2 \equiv PP_2$. Jeżeli prostą z zaliczymy do pęku P_2, oznaczając ją literą y_2, to prosta odpowiednia y_1 będzie łączyła punkty P i P_1, tak, że:

prostej łączącej wierzchołki dwuch pęków rzutowych odpowiadają w obu pękach proste, które łączą środek rzutowy z wierzchołkami i nawzajem

środek rzutowy pęków rzutowych P_1 i P_2 jest przecięciem prostych x_2 i y_1, odpowiadających w obu pękach prostej $x_1 \equiv y_2$, łączącej wierzchołki P_1 i P_2.

Ponieważ każdej prostej jednego z dwuch pęków rzutowych, np. x_1 lub y_2, odpowiada w drugim jedna jedyna prosta x_2 wzgl. y_1, więc środek rzutowy nie zależy od tego, czy za podstawy szeregów p_1 i p_2 obraliśmy proste a_1 i a_2, b_1 i b_2, c_1 i c_2, m_1 i m_2,... Stąd wniosek:

Jeżeli boki: pierwszy, trzeci i piąty sześcioboku $a_1 b_2 c_1 a_2 b_1 c_2$ przechodzą przez punkt P_1, a boki: drugi, czwarty i szósty przez punkt P_2, to proste a, b i c, łączące wierzchołki "przeciwległe" b_1c_2, b_2c_1, a_1c_2 i a_2c_1, a_1b_2 i a_2b_1 przechodzą przez jeden punkt P.

Jest to zresztą przypadek szczególny twierdzenia Brianchona o sześcioboku opisanym na stożkowej, o którym będzie mowa w Rozdziale XIV.

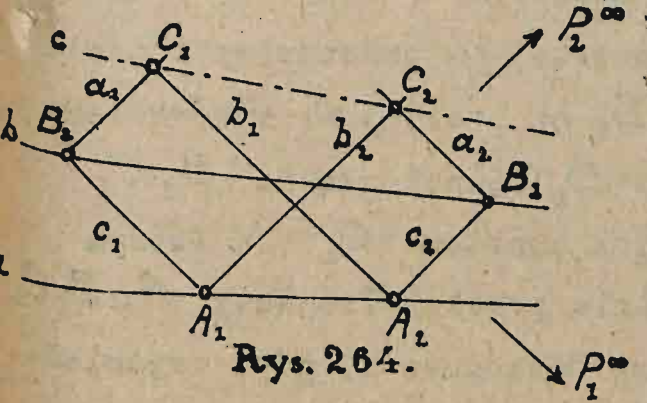
Rzutowość dwuch pęków o danych wierzchołkach P_1 i P_2 jest wyznaczona przez środek rzutowy P oraz jedną parę a_1 i a_2 prostych odpowiednich, gdyż środek rzutowy jest równoznaczny z dwiema parami prostych odpowiednich x_1 i x_2, y_1 i y_2.

Dwa pozornie różne wzajemne twierdzenia: o sześciokącie, którego wierzchołki leżą na dwuch prostych p_1 i p_2 i o sześcioboku, którego boki przechodzą przez dwa punkty P_1 i P_2, są w rzeczy samej tem samem twierdzeniem, którego istota polega na istnieniu t.zw. konfiguracji Pascala, złożonej z 9 punktów i 9 prostych w ten sposób, że przez każdy punkt przechodzą 3 proste i na każdej prostej leżą 3 punkty. Hilbert dowiódł, że konfiguracja Pascala jest niezależna od konfiguracji Desargues'a /§ 121/.

§ 136. Zastosowania a/ Zastosujmy twierdzenie o sześcioboku $a_1b_1c_1a_2b_2c_2$ którego boki a_1, b_1 i c_1 przechodzą przez punkt P_1, a boki a_2, b_2 i

C_2 przez punkt P_2, do rozwiązania zagadnienia:

Połączyć punkt C_1 z niedostępnym punktem przecięcia prostych a i b /Rys.264/. Z punktu C_1 wyprowadźmy dwie proste: pierwszą w kierunku dowolnym P_1^{∞} do punktu A_2 na prostej a, drugą w kierunku dowolnym P_2^{∞} do punktu B_2 na prostej b. Z punktu A_2 wyprowadźmy równoległą do C_1B_2 do punktu B_1 na prostej b, a z punktu B_2 równoległą do C_1A_2 do punktu A_1 na prostej a. Z punktu B_1 wyprowadźmy znowu równoległą do C_1A_2 i z punktu A_1 równoległą do C_1B_2; połączmy wreszcie punkt C_1 z punktem C_2, w którym przecinają się ostatnie dwie proste. Powiadam, że prosta C_1C_2 przejdzie przez punkt ab. W samej rzeczy, w sześcioboku $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ boki pierwszy trzeci i piąty przechodzą przez punkt P_1^{∞}, a boki drugi, czwarty i szósty przez punkt P_2^{∞}, skąd wynika, że proste, łączące przeciwległe wierzchołki tego sześcioboku A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 przechodzą przez jeden punkt.



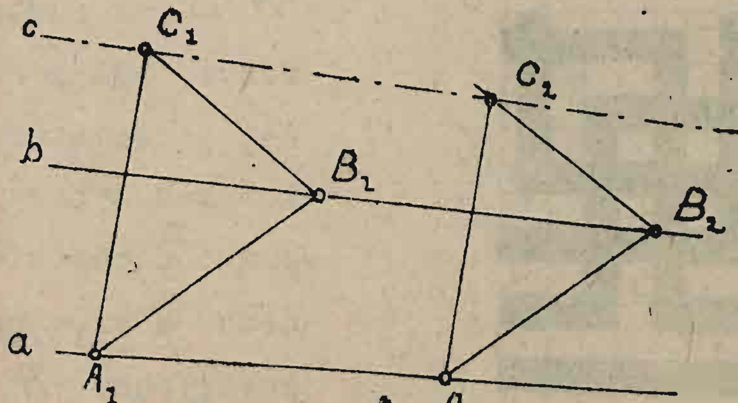
Rys. 264.

Zagadnienie to można też rozwiązać na zasadzie twierdzeń o trójkątach Desargues'a /§ 81/. Z punktu

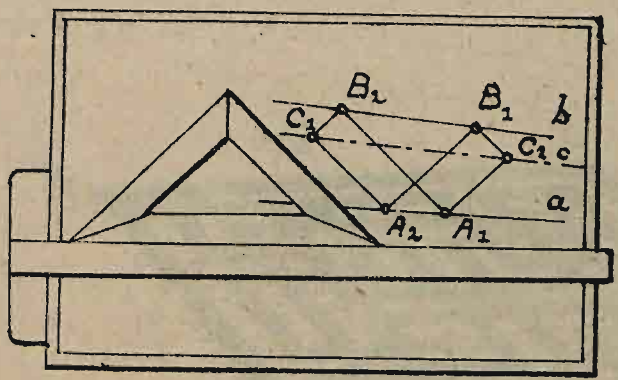
C_1 /Rys.265/ wyprowadzamy znowu jakiekolwiek dwie proste, pierwszą do punktu A_1 na prostej a, drugą do punktu B_1 na prostej b i łączymy punkty A_1 i B_1. Przez dowolny punkt A_2 prostej a prowadzimy równoległą do $A_1 B_1$ do punktu B_2 na prostej b i równoległą do $A_1 C_1$, a z punktu B_2 równoległą do $B_1 C_1$; wreszcie łączymy punkt C_1 z punktem C_2, w którym się przecinają dwie ostatnie proste. Trójkąty $A_1 B_1 C_1$ i $A_2 B_2 C_2$ są trójkątami Desargues'a, gdyż odpowiednie ich boki przecinają się w trzech punktach niewłaściwych, które, jak wiadomo, leżą na jednej prostej /mianowicie na prostej niewłaściwej § 2/.

Z tych dwuch rozwiązań pierwsze jest bardziej praktyczne, zwłaszcza, jeżeli się posługujemy rajszyną i po niej ślizgającą się ekierką, jak to wskazuje rys.266.

b/ W § 109 wskazaliśmy, w jaki sposób można wyznaczyć rzuty punktów podziału odcinka na n części równych lub proporcjonalnych do n danych liczb lub odcinków. Sposób ten jest praktyczny, gdy n jest liczbą niewielką, ale gdy n jest duże, sposób ten wymagałby prowadzenia wielu prostych pomocniczych które gmatwają rysunek. Niechaj np. mamy narysować perspektywę sadzki, ułożonej w kwadracie, którego ćwiartkę przed-

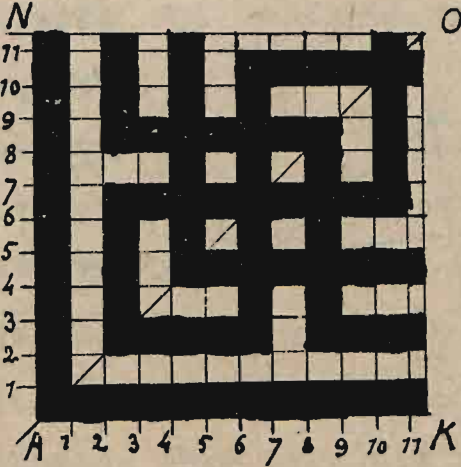


Rys. 265.



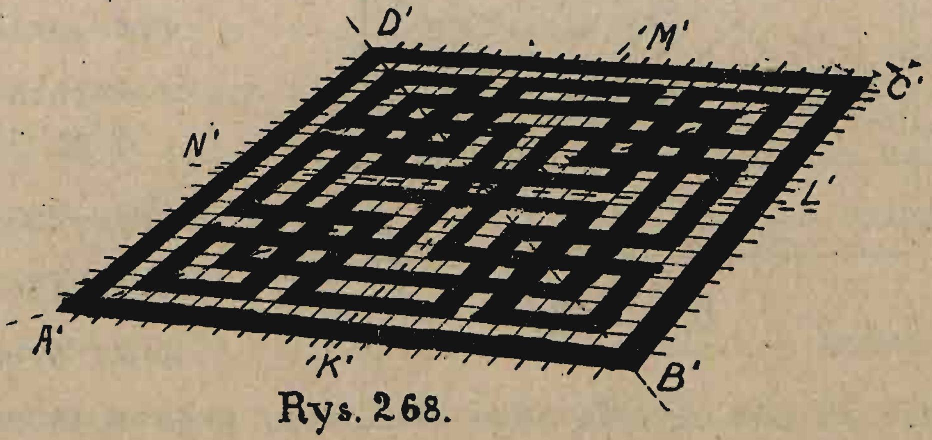
Rys. 266.

stawia rys. 267. Przypuśćmy, że wykreśliliśmy już rzut tego kwadratu i wyznaczyliśmy w nim już rzuty środków wszystkich jego boków. Na zasadzie § 108 może to być jakikolwiek czworokąt: $A'B'C'D'$ /Rys. 268/ punkt przecięcia jego przekątnych O' będzie rzutem środka tego kwadratu, proste łączące punkt O' z punktami zbiegu boków podzielą te boki w punktach, które są rzutami środków tych boków. /Jeżeli punkty zbiegu boków są niedostępne, to radzimy sobie, jak wskazano pod a / /. Zważmy teraz, że punkty podziału każdego z boków kwadratu na 23 równe części, np. punkty podziału boku AB, odpowiadają rzutom tych punk-



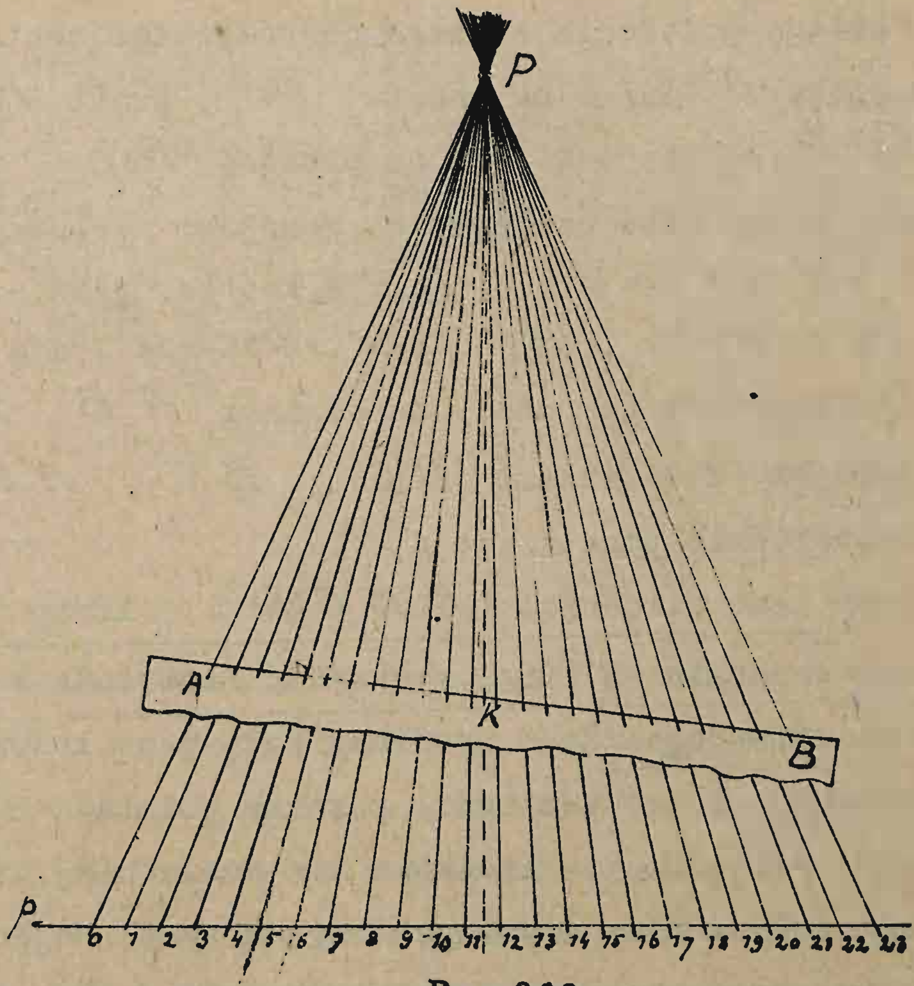
Rys. 267.

tów na odcinku $A'B'$ w rzutowości, wyznaczonej przez którekolwiek 3 pary punktów odpowiednich, a więc np. przez pary A i A', K i K', B i B'. Aby wyznaczyć wszyst-



Rys. 268.

kie punkty podziału odcinka $A'B'$, kreślimy sobie raz na zawsze t. zw. podziałkę rzutową /najlepiej na osobnym kawałku papieru/. Na prostej p /Rys. 280/ odmierzamy jeden na drugim dowolną ilość /dla naszego



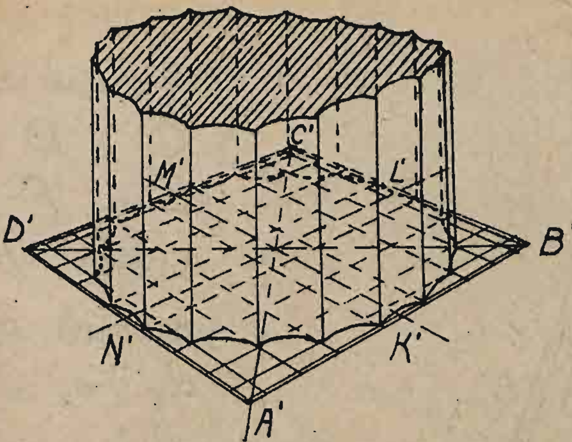
Rys. 269.

celu potrzeba przynajmniej 23/ równych odcinków. Wszystkie tak otrzymane punkty 0 , 1 , 2 ,... łączymy z dowolnie obranym punktem P , który powinien być o ile można jak najdalej od prostej p . Bierzemy następnie skrawek papieru, którego przynajmniej jedna krawędź jest prostą i przyłożywszy go tą krawędzią do prostej $A'B'$ odcinamy punkty A', K' i B', poczem szukamy takiego położenia skrawka na podziałce rzutowej, aby punkt A' leżał na prostej P_0, punkt K' na prostej P_{11}, a punkt B' na prostej P_{23}. Gdy to zostanie osiągnięte odcinamy na krawędzi skrawka punkty $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, ... $22'$, w których proste P_1 P_2, P_3, ... P_{22} tę krawędź przecinają i przenosimy wszystkie te punkty na odcinek $A'B'$. Tak samo postępujemy z odcinkami $D'C'$, $B'C'$ i $A'D'$, łączymy odpowiednie punkty i t.d.

c/ Dany jest czworokąt $A'B'C'D'$, który jest rzutem kwadratu /§ 108/, wykreślić rzut koła w ten kwadrat wpisanego. Rzut środkowy koła jest krzywą zwaną stożkową, której własności poznamy później. Będziemy mogli wykreślić tę stożkową tem dokładniej, im więcej jej punktów /lub stycznych/ wyznaczymy. Najdogodniej w tym celu obrać rzuty wierzchołków wpisanego w koło wielokąta foremnego /lub rzuty boków opisanego na kole wielokąta foremnego/.

Przypuśćmy np., że chcemy wykreślić rzut środkowy podstawy kolumny żłobkowanej o 20 żłobkach. Niechaj czworokąt $A'B'C'D'$ /Rys.270/ będzie rzutem kwadratu opisanego na kole żłobkowanem /Rys.271/.

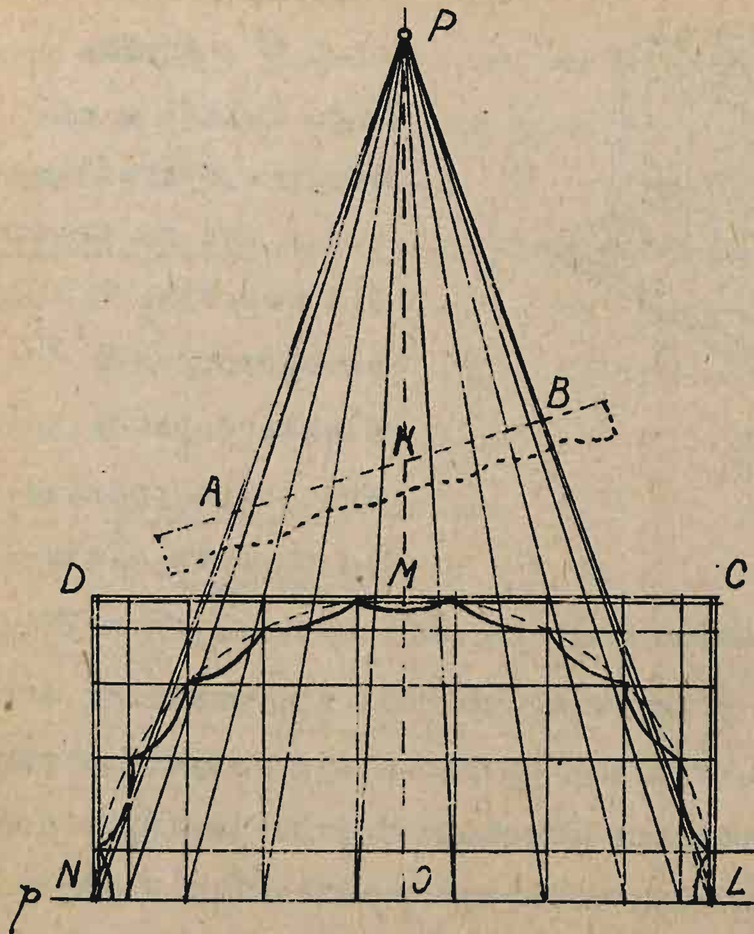
Prowadzimy przekątne $A'C'$ i $B'D'$. /w ich



Rys. 270.

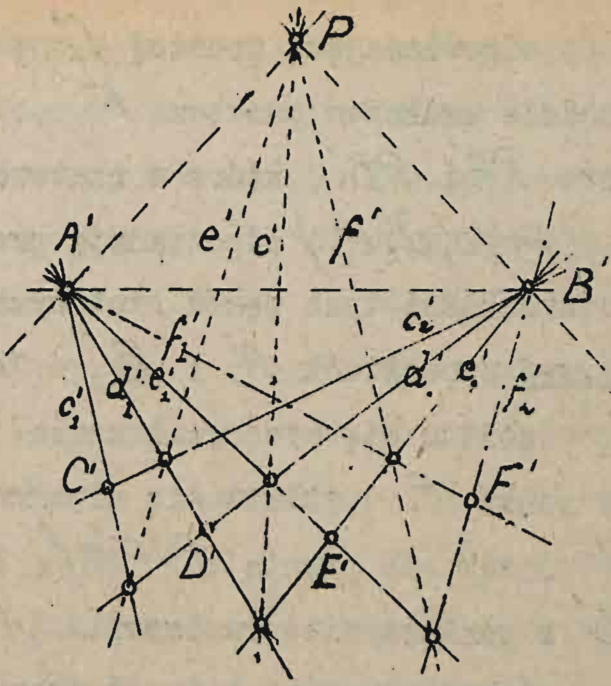
przecięciu leży rzut O' środka tego koła/, a następnie wykreślamy sobie raz na zawsze dla wszystkich kół żłobkowanych o 20 żłobkach pewną specjalną podziałkę rzutową. Dzielimy mianowicie dowolne koło na 20 części /Rys.271/ Przez środki dwuch przeciwległych boków prowadzimy średnicę p , na którą rzucamy prostokątnie wszystkie punkty podziału. Na średnicy prostopadłej do tamtej w dość dużej od niej odległości obieramy punkt P i łączymy go ze wszystkiemi rzutami punktów podziału na średnicy p . Dalej postępujemy taj jak w poprzednim zadaniu.

d/ Przypuśćmy, że znaleźliśmy 5 punktów A' , B', C' , D' i E' . leżących na rzucie koła, t.j. na stożkowej. /Rys.272/. Powiadam, że można teraz wykreślić dowolną ilość punktów tej stożkowej. W samej rzeczy jeżeli punkt F jest jakimkolwiek szóstym punktem koła na którem leżą punkty A , B , C , D i E i



Rys. 271.

jeżeli połączymy punkty C, D, E i F z punktem A prostemi c_1, d_1, e_1 i f_1 a z punktem B prostemi c_2, d_2, e_2 i f_2 to kąty $(c_1 d_1)$ i $(c_2 d_2)$, $(d_1 e_1)$ i $(d_2 e_2)$, $(e_1 f_1)$ i $(e_2 f_2)$ są parami równe jako wpisane w koło i oparte na tych samych łukach CD, DE i EF. Stąd wynika, że dwustosunki $(c_1 d_1 e_1 f_1)$ i $(c_2 d_2 e_2 f_2)$ czwórek $A(c_1 d_1 e_1 f_1)$ i $B(c_2 d_2 e_2 f_2)$ są równe, awięc będą równe także dwustosunki rzutów tych czwórek $A'(c_1' d_1' e_1' f_1')$ i $B_2'(c_2' d_2' e_2' f_2')$ tak, że każdy nowy punkt stoż-



Rys .272 .

kowej F' jest przecięciem jakiejkolwiek prostej f_1' wychodzącej z punktu A' z prostą f_2' wychodzącą z punktu B' i odpowiadającą prostej f_1' w rzutowości

$$A'(c_1' d_1' e_1' \dots) \barwedge B'(c_2' d_2' e_2' \dots)$$

Stąd wynika następujące wykreślenie /§ 136 ; IIb/ : łączymy punkty C' ; D' i E' z punktem A' prostemi c_1' ; d_1' i e_1' , a z punktem B' prostemi c_2' ; d_2' i e_2' . łączymy punkty $c_1 d_2'$ i $c_2' d_1'$ prostą e' , a punkty $d_1' e_2'$ i $d_2' e_1'$ prostą c' ; punkt przecięcia prostych e' i c' jest środkiem rzutowym P. Z punktu A' prowadzimy dowolną prostą f_1' i punkt $e_2' f_1'$ łączymy z punktem P prostą f' , a punkt, w którym prosta f' przecina prostą e_1 , łączymy z punktem B' .

Będzie to prosta f_2', odpowiadająca prostej f_1'; a przecięcie $f_1'f_2'$ będzie szukanym punktem F.

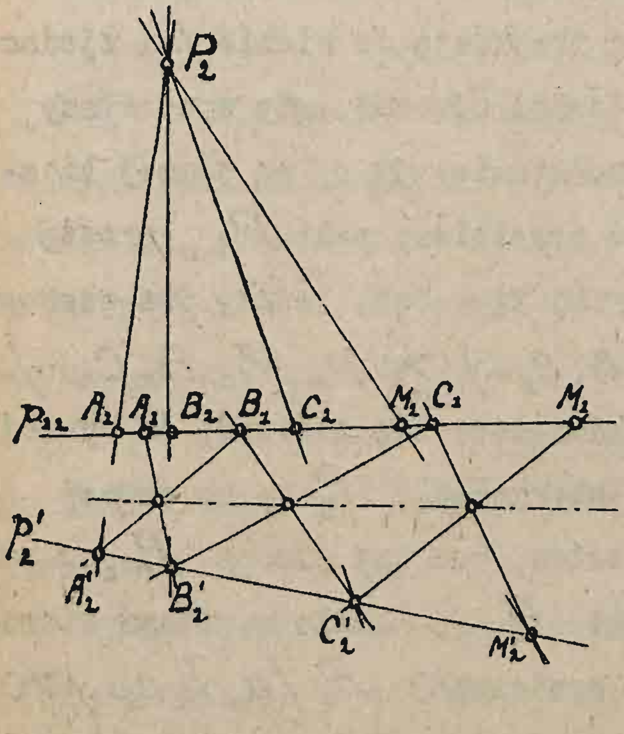
Zauważmy, że proste PA' i PB', które w rzutowości $A'(c_1'd_1'e_1'\ldots) \barwedge B'(c_2'd_2'e_2'\ldots)$ odpowiadają prostej $A'B'$, łączącej wierzchołki tych pęków rzutowych, są stycznemi do stożkowej w punktach A' i B'. Jeżeli bowiem np. prosta f_1' zbliża się nieograniczenie do prostej $A'B'$, to punkt F' zbliża się nieograniczenie do punktu B', tak, że prosta $B'F' \equiv f_2'$ łączy wówczas punkt B' z punktem nieograniczenie do niego się zbliżającym, a więc jest styczną do stożkowej w punkcie B'.

Stąd wynika że możemy wykreślić dowolną ilość punktów stożkowej, jeżeli mamy trzy jej punkty A', B' i C' oraz styczne do niej w punktach A' i B', mamy bowiem wówczas środek rzutowy P jako przecięcie tych stycznych i jedną parę odpowiednich prostych pęków rzutowych o wierzchołkach A' i B', mianowicie $A'C'$ i $B'C'$.

§ 137. SZEREGI RZUTOWE NA WSPÓLNEJ PODSTAWIE I PĘKI RZUTOWE O WSPÓLNYM WIERZCHOŁKU. Ponieważ dwustosunek czterech elementów szeregu lub pęku zachowuje się przez rzuty i przecięcia, więc przez dowolną ilość rzutów i przecięć dochodzimy zawsze do szeregu lub pęku rzutowogó z pierwszym szeregiem lub pękiem . Przypadkiem szczególnie ważnym rzutowości dwóch szeregów lub dwóch pęków będzie ten, gdy podstawy szeregów lub gdy wierzchołki pęków przystają do siebie /są zjednoczone/ . Zdarzy się to np. wówczas, gdy wyszedłszy z pewnego szeregu o podstawie p_1 , po pewnej liczbie rzutów i przecięć przetniemy pęk P_{n-1} prostą p_1 ; wtedy na prostej p_1 będą leżały dwa szeregi rzutowe $p_1(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_1(A_n B_n C_n \ldots)$. I podobnież co do pęków: może się zdarzyć, że wyszedłszy z pewnego pęku o wierzchołku P_1 , po pewnej liczbie przecięć i rzutów, rzucimy szereg p_{n-1} z punktu P_1 ; wtedy punkt P_1 , będzie wspólnym wierzchołkiem dwóch pęków rzutowych $P_1(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge$ $\barwedge P_1(a_n b_n c_n \ldots)$. Takie dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie lub pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku, jak każde wogóle rzutowe szeregi lub pęki, są wyznaczone przez 3 pary elementów odpowiednich , ale wykreślenia podane w poprzednim artykule , służące do wyznaczania elementów odpowiednich w tym przypadku zawodzą .

Niechaj będą na prostej p_{12} /Rys.273/ 3 pary A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 punktów, które wyznaczają dwa szeregi rzutowe $p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge$

$\overline{\wedge}\ p_{12}(A_2 B_2 C_2 \dots)$; aby wyznaczyć dla punktu M_1 pierwszego szeregu odpowiadający mu punkt M_2 drugiego, rzućmy z dowolnego punktu P_2 punkty A_2, B_2 i C_2 na dowolną prostą p_2' i znajdźmy na tej prostej taki punkt M_2', że punkty M_1 i M_2'



Rys.273.

odpowiadają sobie rzutowo w szeregach $p_{12}(A_1 B_1 C_1 \dots) \overline{\wedge}$ $\overline{\wedge}\ p_2'(A_2' B_2' C_2' \dots)$, poczem rzućmy punkt M_2' z punktu P_2 na p_{12}; otrzymany w ten sposób punkt M_2 jest szukanym, gdyż /§ 144/

$$(A_1 B_1 M_1 C_1) = (A_2' B_2' M_2' C_2');$$

a na mocy § 129

$$(A_2' B_2' M_2' C_2') = (A_2 B_2 M_2 C_2);$$

skąd wynika :

$$(A_1 B_1 M_1 C_1) = (A_2 B_2 M_2 C_2).$$

Opierając się na zasadzie dwoistości znaleźlibyśmy analogiczne wykreślenie linjowe, pozwalające odnaleźć prostą m_2, odpowiadającą danej prostej m_1 w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku P.

§ 138. ELEMENTY PODWÓJNE. Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych na wspólnej podstawie ,- albo w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku ,- 3 pary elementów odpowiednich są zjednoczone, to wszystkie pary elementów odpowiednich są zjednoczone, t.j. te szeregi , wzgl. pęki, są identyczne. W samej rzeczy, niech będą np. dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p_{12} i niech punkty A_1 i A_2 będą zjednoczone w punkcie A tej prostej, punkty B_1 i B_2 w punkcie B, a punkty C_1 i C_2 w punkcie C. Jeżeli punkty M_1 i M_2 stanowią jakąkolwiek inną parę punktów odpowiednich , to na zasadzie § 133

$$(A_1 B_1 M_1 C_1) = (A_2 B_2 M_2 C_2) \quad \text{t.j.}$$
$$(A B M_1 C) = (A B M_2 C);$$

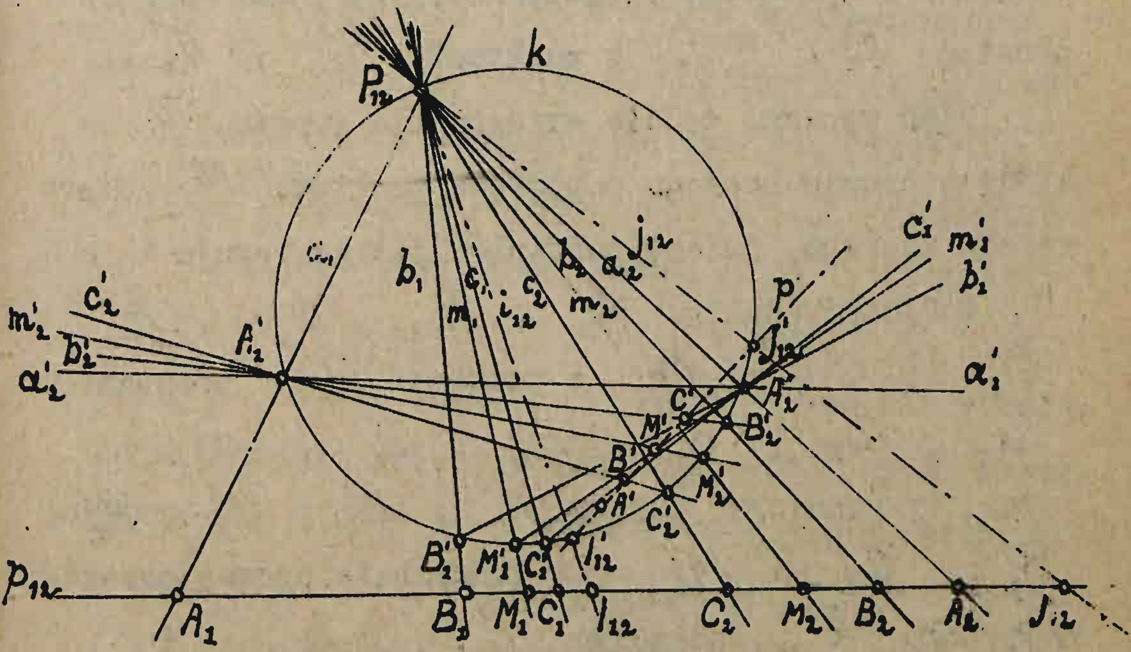
skąd wynika, że punkty M_1 i M_2 są identyczne.

Jeżeli więc dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie /albo dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku/ nie są identyczne, to mogą mieć najwyżej dwie pary elementów odpowiednich zjednoczonych, t.j. na wspólnej podstawie p_{12} istnieją najwyżej dwa punkty I_{12} i J_{12} /ze wspólnego wierzchołka P_{12} wychodzą najwyżej dwie proste i_{12} i j_{12} /, które odpowiadają samym sobie . Punkty I_{12} i J_{12} nazywamy punktami podwójnemi szeregów rzutowych $p_{12}(A_1B_1C_1...) \overline{\wedge} p_{12}(A_2B_2C_2...)$ proste i_{12} i j_{12} nazywamy prostemi podwójnemi pęków rzutowych

$$P_{12}(a_1b_1c_1...) \overline{\wedge} P_{12}(a_2b_2c_2...).$$

Wykreślenie podane w artykule poprzednim dla wyznaczenia pary punktów odpowiednich dwóch szeregów rzutowych na wspólnej podstawie nie da się zastosować do wyznaczenia punktów podwójnych tych szeregów . Do tego celu służy t.zw. wykreślenie Steinera .

Niech będą na wspólnej podstawie p_{12} /Rys.274/ dwa szeregi, których rzutowość jest określona zapomocą trzech par punktów odpowiednich A_1 i A_2 ; B_1 i B_2 , C_1 i C_2 . Wykreślmy dowolne koło k i obrawszy na jego obwodzie punkt P_{12} , rzućmy z niego wszystkie te punkty ; proste rzucające a_1 i a_2 b_1 i b_2 , c_1 i c_2 wyznaczają dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku P_{12} . Z punktu A_1', w którym prosta a_1 przecina koło , rzućmy punkty A_2' , B_2' i C_2' ; proste rzucające a_2' , b_2' i c_2' , na zasadzie znanego twierdzenia o kątach wpisanych w koło , opartych na tym samym łuku, tworzą ze sobą te same kąty , co proste a_2 , b_2 i c_2 tak, że pęki $P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ i $A_1'(a_2' b_2' c_2' \ldots)$ są równe, a więc tembardziej rzutowe. Podobnież z punktu A_2' w którym prosta a_2 przecina koło, rzućmy punkty A_1' , B_1' i C_1' ; proste rzucające: a_1' , b_1' i c_1' tworzą ze sobą te same kąty, co proste a_1 , b_1 i c_1 , tak że pęki $P_{12}(a_1 b_1 c_1 \ldots)$ i $A_2'(a_1' b_1' c_1' \ldots)$ są równe, a więc tembardziej rzutowe .



Rys. 374.

Ponieważ $P_{12}(a_1 b_1 c_1 \ldots) \barwedge P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots)$ więc
$$A_2'(a_1' b_1' c_1' \ldots) \barwedge A_1'(a_2' b_2' c_2' \ldots)$$
pęki te jednak nietylko są rzutowe, ale i perspektywiczne, albowiem prosta, łącząca wierzchołki A_1' i A_2' odpowiada samej sobie w tych pękach $(a_1' \equiv a_2')$. Stąd wynika, że punkty przecięcia promieni odpowiednich $b_1' b_2'$, $c_1' c_2'$, $m_1' m_2' \ldots$ leżą na jednej prostej p, która jest zatem wyznaczoną przez dwa którekolwiek z tych punktów, np. przez $C' \equiv b_1' b_2'$ i $B' \equiv c_1' c_2'$.
Aby wyznaczyć jakąkolwiek inną parę prostych odpowiednich, wystarczy połączyć dowolny punkt M' prostej $B'C' \equiv p$ z punktami A_1' i A_2'.

Stąd wynika, że dla wyznaczenia punktu M, który w drugim szeregu odpowiada punktowi M_1 pierwszego szeregu, należy postąpić, jak następuje :

Połączyć punkty A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 i M_1 z punktem P_{12} prostemi a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 i m_1; wyznaczyć punkty A_1', B_1', C_1', A_2', B_2', C_2' i M_1', w których te proste przecinają koło k; połączyć $A_1' B_2' \equiv b_2'$ i $A_2' B_1' \equiv b_1'$; wyznaczyć punkt $b_2' b_1' \equiv B'$; połączyć $A_1' C_2' \equiv c_2'$ i $A_2' C_1' \equiv c_1$; wyznaczyć punkt $c_2'c_2' \equiv C'$ połączyć $B'C' \equiv p$; wyznaczyć punkt $m'p \equiv M'$; połączyć $M'A_1' \equiv m_2$; wreszcie wyznaczyć punkt $m_2 p \equiv M_2$.

Trojakie może być położenie prostej p względem koła k ; albo może to być prosta zewnętrzna względem tego koła, albo styczna do niego , albo wreszcie jego sieczna . Przypuśćmy , że prosta p przecina koło k w dwóch punktach I_{12}' i J_{12}'. Każdy z tych punktów wyznacza z punktem P_{12} prostą, która odpowiada samej sobie w pękach rzutowych

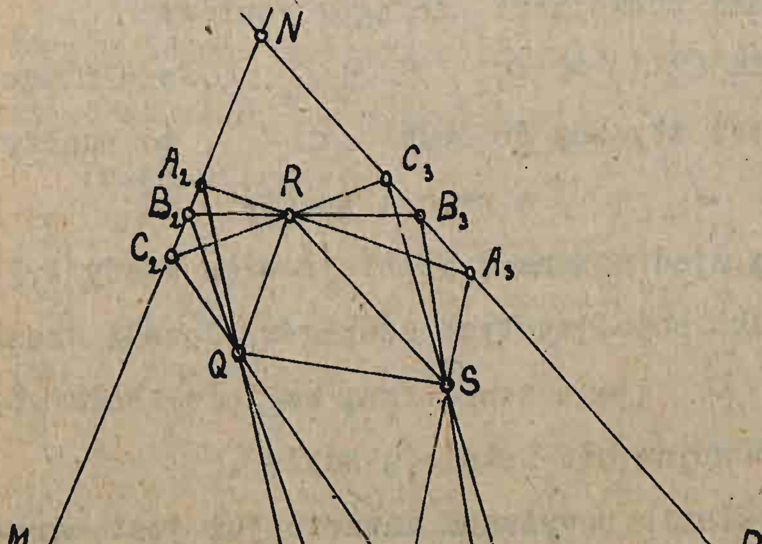
$$P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots) \barwedge P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots).$$

Punkty I_{12} i J_{12} , w których tak wyznaczone proste i_{12} i j_{12} przecinają prostą p_{12} , są zatem punktami podwójnemi szeregów rzutowych $p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \barwedge p_{12}(A_2 B_2 C_2 \ldots)$. Jeżeli prosta p jest styczną do koła k , to punkty I_{12}' i J_{12}' ; a więc i punkty I_{12} i J_{12} są zjednoczone ; istnieje więc wtedy tylko jeden punkt podwójny tych szeregów. Jeżeli wreszcie prosta p jest zewnętrzną względem koła k to punkty podwójne nie istnieją wcale .

W wykreśleniu powyższem zawarte już jest oczywiście wyznaczenie par prostych odpowiednich oraz prostych podwójnych i_{12} i j_{12} dwóch pęków rzutowych o wspólnym wierzchołku P_{12} :

$$P_{12}(a_1 b_1 c_1 \ldots) \,\overline{\wedge}\, P_{12}(a_2 b_2 c_2 \ldots).$$

Wyznaczenie punktów podwójnych dwóch szeregów rzutowych na jakiejkolwiek podstawie p_{12} oraz wyznaczenie prostych podwójnych dwóch pęków rzutowych o jakimkolwiek wierzchołku P_{12} da się uskutecznić zapomocą jednego jedynego koła k , leżącego w płaszczyźnie tych podstaw i wierzchołków . Wykreślenie to nie wymaga zatem użycia cyrkla , jeżeli tylko w płaszczyźnie rysunku raz na zawsze wykreślone jest jakiekolwiek koło /zwane kołem Steinera/ .



Rys.275.

§139. ZASTOSOWANIA. a/ wykreślić trójkąt , wpisany w trójkąt MNP i opisany na trójkącie QRS.

Na boku MP /Rys.275/ obierzmy trzy dowolne punkty A_1, B_1 i C_1 ; rzućmy je z punktu Q na bok MN ; otrzymane punkty A_2, B_2 i C_2 rzućmy z punktu R na bok NP , wreszcie tak otrzymane punkty A_3, B_3 i C_3 rzućmy jeszcze raz z punktu S na bok MP ; ponieważ szeregi

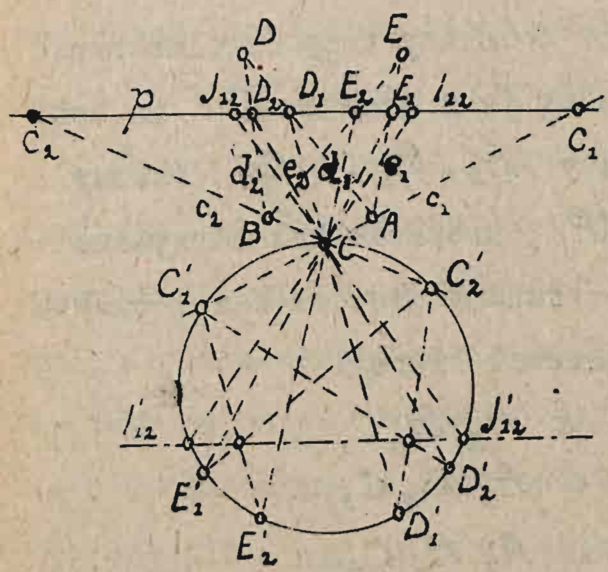
$$A_1 B_1 C_1 \ldots \quad i \quad A_2 B_2 C_2 \ldots$$
$$A_2 B_2 C_2 \ldots \quad i \quad A_3 B_3 C_3 \ldots$$
$$A_3 B_3 C_3 \ldots \quad i \quad A_4 B_4 C_4 \ldots$$

są perspektywicznie /środkami perspektywy są kolejne punkty Q , R i S , więc szeregi

$$A_1 B_1 C_1 \ldots \quad i \quad A_4 B_4 C_4$$

są rzutowe na wspólnej podstawie MP ; zadanie sprowadza się więc do wyznaczenia punktów podwójnych I_{12} i J_{12} tych szeregów i ma 2 , 1 lub 0 rozwiązań /Zagadnienie II stopnia/ .

b/ Niechaj będzie 5 punktów stożkowej A , B , C i D; E oraz prosta p przez żaden z tych punktów nie przechodząca /Rys.276/. Wyznaczmy na tej prostej punkty przecięcia jej ze stożkową. Połączmy punkty C , D i E z punktem A prostemi c_1 , d_1 i e_1 , a z punktem B prostemi c_2, d_2 i e_2 i niechaj te proste przetną prostą p w punktach C_1 , D_1 , E_1 ; C_2 , D_2 i E_2 .



Rys.276.

Jeżeli szeregi rzutowe $p(C_1 D_1 E_1 ..) \barwedge p(C_2 D_2 E_2 ...)$ mają punkty podwójne, to każdy z tych punktów , np. I_{12} musi leżeć na stożkowej , będzie to bowiem przecięcie prostych AI_{12} i BI_{12} które sobie odpowiadają wzajemnie w rzutowości $p(C_1 D_1 E_1 ...) \barwedge p(C_2 D_2 E_2 ...)$
Prosta p może przeto przecinać stożkową najwyżej w dwóch punktach /Zag.II stopnia/ . Zresztą określimy później na drodze czysto geometrycznej pojęcie punktów i prostych urojonych i przekonamy się wówczas, że prosta przecina stożkową zawsze w dwóch punktach : rzeczywistych odrębnych, rzeczywistych zjednoczonych, lub urojonych sprzężonych .

140. SZEREGI I PĘKI INWOLUCYJNE . Niechaj będą dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p_{12}. Każdy punkt M prostej p_{12} może być zaliczony bądź do pierwszego, bądź do drugiego szeregu . Je-

żeli punkt M zaliczymy do pierwszego szeregu i oznaczymy go literą A_1 ; to w drugim szeregu będzie mu odpowiadał pewien punkt, który oznaczymy literą A_2 . Jeżeli ten sam punkt zaliczymy do drugiego szeregu i oznaczymy go literą B_2 ; to w pierwszym szeregu będzie mu odpowiadał pewien punkt B_1 ; który wogóle będzie różny od punktu A_2 . Może się wszakże zdarzyć, że punkty A_2 i B_1 przystaną do siebie w pewnym punkcie N prostej p_{12} ; wówczas mówimy, że punkty M i N <u>odpowiadają sobie podwójnie</u> ; co oznacza, że punktowi M odpowiada zawsze ten sam punkt N niezależnie od tego, do którego z dwóch szeregów zaliczymy punkt M .

Podobnież dla pęków. Może się zdarzyć , że w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku P_{12} dwie proste m i n ; wychodzące z punktu P_{12} odpowiadają sobie podwójnie ; t.j. że prostej m odpowiada zawsze ta sama prosta n ; niezależnie od tego, do którego z dwóch pęków prostą m zaliczymy. Dowiedziemy teraz twierdzenia :

<u>Jeżeli w dwóch szeregach rzutowych na wspólnej podstawie, albo w dwóch pękach rzutowych o wspólnym wierzchołku dwa elementy odpowiednie odpowiadają sobie podwójnie, to każde dwa elementy odpowiednie odpowiada-</u>

ja sobie podwójnie .

Niech będą np. dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie i niech istnieje jedna para punktów odpowiednich A_1 i A_2 , które odpowiadają sobie podwójnie, tak że jeżeli

$$A_1 \equiv B_2 \quad \text{to} \quad A_2 \equiv B_1$$

Trzeba okazać, że wtedy każda para punktów odpowiednich , np. C_1 i C_2 odpowiada sobie podwójnie, t j. że jeżeli

$$D_1 \equiv C_2 \quad \text{to} \quad D_2 \equiv C_1 \,.$$

Otóż na zasadzie § 133

$$(A_1 B_1 C_1 D_1) = (A_2 B_2 C_2 D_2)$$

kładąc na mocy założenia $A_2 \equiv B_1$, $B_2 \equiv A_1$, $C_2 \equiv D_1$ otrzymamy $(A_1 B_1 C_1 D_1) = (B_1 A_1 D_1 D_2)$;

czyli $\dfrac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \dfrac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \dfrac{B_1 D_1}{A_1 D_1} : \dfrac{B_1 D_2}{A_1 D_2}$, t.j.

$$\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} = \frac{A_1 D_2}{B_1 D_2}$$

co oznacza, że stosunki podziału punktów C_1 i D_2 względem punktów A_1 i B_1 są równe, skąd wynika że $C_1 \equiv D_2$ c. b. d. o.

Dwa szeregi rzutowe na wspólnej podstawie p_{12} , w których jedna, a więc wszystkie pary punktów odpowiednich odpowiadają sobie podwójnie, nazywają się inwolucją na prostej p_{12} . Każdemu punktowi prostej p_{12} , odpowiada jeden jedyny punkt tej samej prostej, o którym mówimy, że jest z tamtym <u>inwolucyjnie sprzężony</u> .

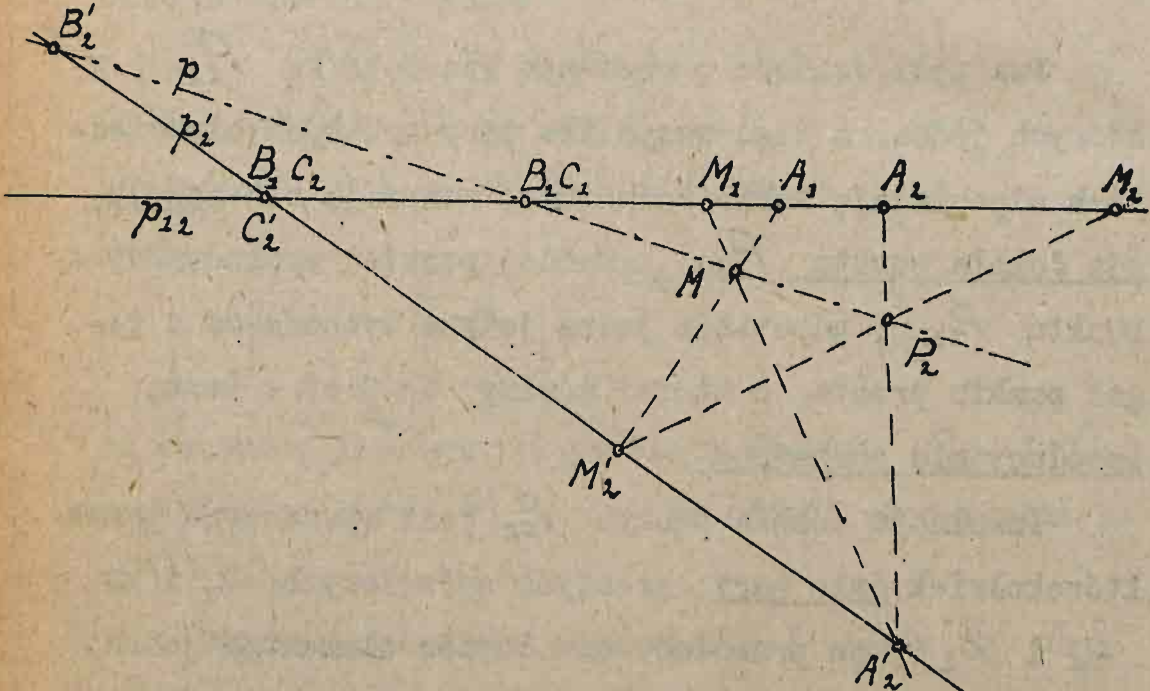
Ponieważ rzutowość dwóch szeregów jest wyznaczona przez <u>3 którekolwiek</u> pary punktów odpowiednich, więc inwolucja na prostej p_{12} będzie wyznaczona przez <u>dwie</u> którekolwiek pary punktów sprzężonych A_1 i A_2 ; B_1 i B_2 ; każda z tych dwóch par bowiem po przedstawieniu jej elementów utworzy nową parę punktów odpowiednich tych dwóch szeregów rzutowych , które stanowią inwolucję :

$$p_{12}(A_1 B_1 A_2 B_2 ..) \barwedge p_{12}(A_2 B_2 A_1 B_1 ...).$$

Dwa pęki rzutowe o wspólnym wierzchołku P_{12} , w których jedna, a więc wszystkie pary prostych odpowiednich odpowiadają sobie podwójnie, nazywają się <u>inwolucja dokoła punktu P_{12}</u> . Każdej prostej wychodzącej z punktu P_{12} , odpowiada jedna jedyna wychodząca z tegoż punktu prosta, o której mówimy, że jest z tamtą <u>inwolucyjnie sprzężona</u> .

Inwolucja dokoła punktu P_{12} jest wyznaczona przez którekolwiek <u>dwie pary</u> prostych sprzężonych a_1 i a_2 , b_1 i b_2 ; po przestawieniu bowiem elementów jednej z tych par otrzymamy nową parę prostych odpowiednich tych dwóch pęków rzutowych, które stanowią inwolucję :

§ 141. Własności inwolucyjne czworokąta i czworoboku zupełnego. Niechaj będzie dana inwolucja, t.j. takie dwa rzutowe szeregi na wspólnej podstawie p_{12}, że dwa punkty tej prostej odpowiadają sobie podwójnie, tak że jeśli w jednym z nich przystaną do siebie punkt B_1 pierwszego szeregu z punktem C_2 drugiego szeregu, to w drugim przystaną do siebie punkt B_2 drugiego szeregu z punktem C_1 pierwszego. Rzutowość tych dwóch szeregów jest wyznaczona przez 3 pary punktów A_1 i A_2; B_1 i B_2; C_1 i C_2; przytem druga i trzecia para są



Rys. 277.

zjednoczone w dwóch punktach $B_1 \equiv C_2$ i $B_2 \equiv C_1$ /Rys.277/. Wyznaczmy na prostej p_{12} punkt M_2 sprzężony inwolucyjnie z jakimkolwiek danym punktem M_1 tej samej prostej . Stosując wykreślenie § 139 /Rys. 273 / trzeba najpierw, jak wiemy, z dowolnego punktu P_2 rzucić punkty A_2 , B_2 i C_2 na dowolną prostą p_2'. Poprowadźmy tę prostą przez punkt $B_1 \equiv C_2$ i obrawszy gdziekolwiek punkt P_2 , rzućmy z niego punkty A_2 B_2 i C_2 na prostą p_2' , otrzymawszy punkty A_2' B_2' i $C_2' \equiv B_1 \equiv C_2$. Znajdźmy teraz punkt M_2' odpowiadający rzutowo punktowi M w szeregach

$$p_{12}(A_1 B_1 C_1 \ldots) \;\overline{\wedge}\; p_2'(A_2' B_2' C_2' \ldots)$$

W tym celu znajdźmy oś rzutową tych szeregów . Łączy ona, jak wiadomo /§135, II a/ punkty odpowiadające w obu szeregach punktowi przecięcia podstaw $B_1 \equiv C_2'$; otóż punktowi B_1 odpowiada B_2' , punktowi C_2' odpowiada C_1 , osią rzutową będzie zatem prosta $B_2' C_1 \equiv p$. Aby otrzymać punkt M_2' , odpowiadający rzutowo punktowi M_1 , łączymy ten ostatni z którymkolwiek punktem szeregu p_2' , np. z punktem A_2' ; punkt przecięcia M prostej $M_1 A_2'$ z osią rzutową p łączymy z punktem A_1 ; prosta MA_1 przecina p_2' w punkcie M_2' . Pozostaje rzucić punkt M_2' z punktu P_2 na p_{12} , aby otrzymać szukany punkt M_2 .

Zauważmy czworokąt zupełny $MP_2A_2'M_2'$ którego dwa przeciwległe boki p i p_2' przechodzą przez punkty $B_2 \equiv C_1$ i $B_1 \equiv C_2$; dwa inne MM_2' i P_2A_2' - przez punkty A_1 i A_2 ; jeden z pozostałych przez M_1 ; a drugi przez M_2 . Stąd twierdzenie :

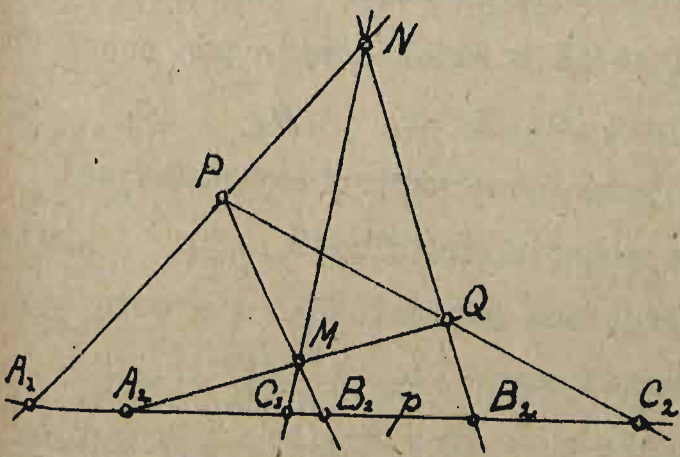
Boki przeciwległe czworokąta zupełnego przecinają dowolną prostą w trzech parach punktów inwolucji .

Na zasadzie dwoistości wnioskujemy o słuszności twierdzenia wzajemnego .

Proste, rzucające z dowolnego punktu wierzchołki przeciwległe czworoboku zupełnego stanowią trzy pary prostych inwolucji .

Własności harmoniczne czworoboku i czworokąta zupełnego /§ 130/ są tylko przypadkiem szczególnym własności inwolucyjnych tych figur. Tak np. 3 pary punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2 ; B_1 i B_2 ; M_1 i N_1 stają się dwiema parami punktów sprzężonych harmonicznie A i B ; M i N , gdy punkty pierwszej pary A_1 i A_2 zostaną zjednoczone w punkcie A ; a punkty drugiej pary B_1 i B_2 w punkcie B ; prosta p przecinająca czworokąt $CFDE$ przechodzi wówczas przez dwa jego punkty przekątne A i B /Rys.277/. Punkty te są punktami podwójnemi inwolucji, którą czworokąt $CFDE$ wyznacza na prostej p; przegradzają one harmonicznie każdą parę punktów M i N, sprzężonych inwolucyjnie.

Opierając się na własnościach inwolucyjnych czworokąta zupełnego można za pomocą konstrukcji linjowej wyznaczyć punkt C_2 sprzężony z jakimkolwiek danym punktem C_1 w inwolucji, wyznaczonej przez dwie pary punktów sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2. Przypuśćmy, że na prostej p /Rys.278/ dane są dwie pary punktów inwolucyjnie sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2 oraz punkt C_1. Aby znaleźć punkt C_2 z nim sprzężony, poprowadźmy przez C_1 prostą jakąkolwiek i weźmy na niej dowolne dwa punkty M i N. Połączmy punkt M z punktami należącemi do par różnych, np. z A_2 i B_1, a punkt N z pozostałemi punktami tych par A_1 i B_2; w utworzonym w ten sposób czworokącie $MNPQ$ poprowadźmy szósty bok PQ; w przecięciu jego z prostą

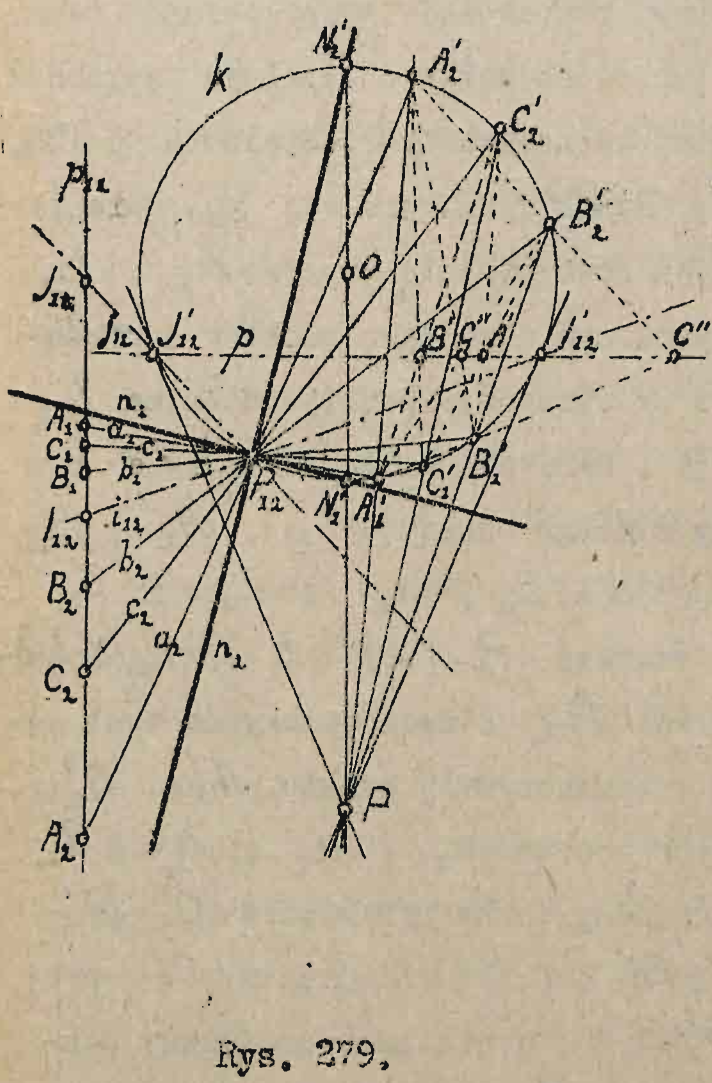


Rys.278.

p otrzymamy szukany punkt C_2 .- Jeżeli jedna z dwóch danych par punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ; np. A_1 i A_2 jest zjednoczona w punkcie podwójnym I_{12} , to drugi punkt podwójny inwolucji J_{12} , znajdziemy jako punkt sprzężony harmonicznie z punktem I_{12} względem punktów drugiej pary B_1 i B_2 .

Podobnież, opierając się na własnościach inwolucyjnych czworoboku zupełnego można podać konstrukcję linjową prostej c_2 sprzężonej z daną jakąkolwiek prostą c_1 w inwolucji wyznaczonej przez dwie pary prostych sprzężonych a_1 i a_2 , b_1 i b_2 . Możemy zresztą to zagadnienie sprowadzić do poprzedniego, opierając się na tej zasadzie, że inwolucja zachowuje się przez rzuty i przecięcia.- Jeżeli jedna z dwóch danych par prostych sprzężonych inwolucyjnie a_1 i a_2 , b_1 i b_2 , np. a_1 i a_2 , jest zjednoczona na prostej podwójnej i_{12} to drugą prostą podwójną inwolucji, j_{12} , znajdziemy jako prostą sprzężoną harmonicznie z prostą i_{12} względem prostych drugiej pary b_1 i b_2 .

§ 142. Zastosowanie koła Steinera do wyznaczenia elementów sprzężonych i podwójnych danej inwolucji .Konstrukcja elementów sprzężonych inwolucji za pomocą czworokątu i czworoboku zupełnego /Rys.273/ nie zawsze jest praktyczna, a już wcale nie da się zastosować do wyznaczania elementów podwójnych. Ponieważ inwolucja jest przypadkiem szczególnym rzutowości dwóch szeregów na wspólnej podstawie lub dwóch pęków o wspólnym wierzchołku, można więc do niej zastosować koło Steinera /§ 138, Rys.274/. Niech będą /Rys.279/ na prostej p_{12} dwie pary punktów sprzężonych inwolucyjnie A_1 i A_2, B_1 i B_2; mamy 1/ wyznaczyć nową parę punktów sprzężonych C_1 i C_2 i 2/ wyznaczyć punkty podwójne I_{12} i J_{12} tej inwolucji. Obrawszy na dowolnem kole k punkt P_{12}, rzućmy z niego punkty A_1, A_2, B_1 i B_2. Proste rzucające a_1, a_2, b_1 i b_2 wyznaczają dwa pęki rzutowe $P_{12}(a_1 b_1 b_2 \ldots) \barwedge P_{12}(a_2 b_2 b_1 \ldots)$ o wspólnym wierzchołku P_{12}. Zastosujemy do tych pęków wykreślne § 133. Wyznaczywszy punkty A_1', A_2', B_1' i B_2' w których proste a_1, a_2, b_1 i b_2 przecinają koło, znajdźmy punkt przecięcia C'' prostych $A_1'B_2'$ i $A_2'B_1'$ i punkt przecięcia C' prostych $A_2'B_1'$ i $A_1'B_2'$, a następnie połączmy punkty C' i C'' prostą p. Aby wyznaczyć nową jakąkolwiek parę punktów sprzężonych C_1 i C_2, łączymy dowolny punkt B_2 prostej p z punktami A_1' i A_2'; punkty C_1' i C_2', w których proste $A_2'B'$ i $A_1'B'$ przecinają koło, rzucamy z punktu P_{12} na



Rys. 279.

prostą p_{12}. Punkt A' przecięcia prostych $B_1'C_2'$ i $B_2'C_1'$ leży również na prostej p punkt B' przecięcia prostych. Z samej rzeczy, ponieważ pęki $B_1'(B_2'A_1'A_2'C_1'C_2' \ldots)$ i $B_2'(B_1'A_2'A_1'C_2'C_1' \ldots)$ są perspektywiczne, więc proste $B_1'A_1'$ i $B_2'A_2'$, $B_1'A_2'$ i $B_2'A_1'$, $B_1'C_2'$ i $B_2'C_1'$ przecinają się parami w punktach C'', C' i A' leżących na jednej prostej /osi perspektywy tych pęków/. Zauważmy teraz dwa trójkąty $A_1'B_1'C_2'$ i $A_2'B_2'C_1'$; są to trójkąty Desarguesa /§ 81/, gdyż boki ich przecinają się parami w punktach A', B', C', leżących na prostej p; stąd wynika, że wierzchołki tych trójkątów A_2'

i A_2' , B_1' i B_2' , C_1' i C_2' leżą parami na prostych przechodzących przez jeden punkt P .

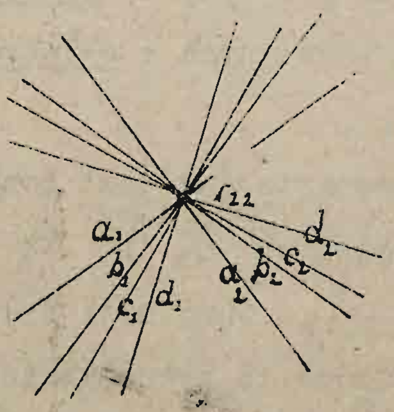
Aby więc znaleźć nową parę punktów sprzężonych C_1 i C_2 , wystarczy 1/ wyznaczyć punkt P jako przecięcie prostych $A_1'A_2'$ i $B_1'B_2'$; 2/ z punktu P wyprowadzić jakąkolwiek sieczną do koła k i 3/ punkty przecięcia tej siecznej z kołem C_1' i C_2' rzucić z punktu P_{12} na prostą p . Jeżeli punkt P jest zewnętrznym względem koła k , to rzuty punktów zetknięcia I_{12}' i J_{12}' stycznych, wyprowadzonych z punktu P do koła, są punktami podwójnemi I_{12} i J_{12}. Punkty takie nie istnieją, gdy P jest punktem wewnętrznym koła i są zjednoczone, gdy P leży na okręgu. Należy więc odróżnić 3 rodzaje inwolucji: hyperboliczna o dwóch odrębnych elementach podwójnych, paraboliczna o zjednoczonych elementach podwójnych i eliptyczną - bez tych elementów .

W wykreśleniu powyższem zawarte już jest oczywiście wyznaczenie par prostych sprzężonych c_1 i c_2 oraz prostych podwójnych i_{12} i j_{12} inwolucji dokoła punktu P_{12} . Zastosujmy jeszcze to wykreślenie do wyznaczenia prostokątnej pary prostych sprzężonych danej inwolucji . W tym celu wystarczy wyprowadzić z P średnicę koła; proste n_1 i n_2 , rzucające z punktu P_{12}

końce N_1' i N_2' tej średnicy będą wzajemnie prostopadłemi prostemi sprzężonemi. Jeżeli punkt P leży w środku O koła k, to oczywiście każda sieczna z niego wychodząca jest średnicą, wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne.

W inwolucji dokoła punktu albo wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, albo tylko jedna.

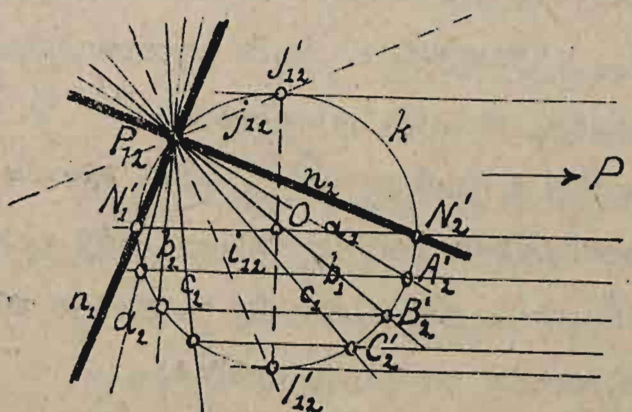
Jeżeli inwolucja dokoła punktu P_{12} jest hyperboliczna, /Rys.279/, to prostokątna para prostych sprzężonych n_1 i n_2 dzieli na połowy kąty między prostemi podwójnemi i_{12} i j_{12}. Wynika to z równości łuków $N_2'I_{12}'$ i $N_1'J_{12}'$ $(ON_2' \perp I_{12}'J_{12}')$. Inwolucja, której wszystkie pary prostych sprzężonych są prostokątne, nazywa się prostokątną. Eliptyczną tę inwolucję zakreślają ramiona kąta prostego, gdy ten obraca się dokoła swego wierzchołka; są to więc dwa pęki równe o wspólnym wierzchołku i zwrocie, w których proste odpowiednie są wzajemnie prostopadłe /Rys.280/.



Rys. 280.

Jeżeli punkt P jest niewłaściwy, to łuki odcięte na okręgu przez sieczczne z tego punktu wychodzące są równe. Hyperboliczna inwolucja, która temu położeniu punktu P odpowiada, nazywa się symetryczną; proste podwójne są wzajemnie prostopadłe ; są one dwusiecznemi kątów między każdemi dwiema prostemi sprzężonemi ./Rys.281/. Inwolucja ta jest więc utworzona przez wa pęki równe o wspólnym wierzchołku i zwrotach przeciwnych . Dwusieczne kątów między prostemi podwójnemi stanowią parę sprzężonych prostych prostokątnych tej inwolucji .

Zagadnienie wyznaczenia pary prostokątnych prostych sprzężonych inwolucji jest przypadkiem szczególnym zadania ,



Rys.281.

<u>Dane są dwie inwolucje na wspólnej podstawie albo o wspólnym wierzchołku; znaleźć parę sprzonych elementów zarówno w jednej, jak i w drugiej inwolucji.</u>

Niech będą np. dwie inwolucje prostych o wspólnym wierzchołku ;

$S(a_1a_2 . b_1b_2)$ i $S(cc' . dd')$. Na dowolnym kole k przechodzącym przez S wyznaczmy punkty A_1; A_2, B_1, B_2, C; C', D i D' w których proste a_1, a_2, b_1, b_2, c, c', d, i d' przecinają to koło. Wyznaczmy punkt P jako przecięcie prostych A_1A_2 i B_1B_2 oraz punkt Q jako przecięcie prostych CC' i DD'. Jeżeli prosta PQ przecina koło k w punktach M_1 i M_2, to proste $SM_1 \equiv m_1$ i $SM_2 \equiv m_2$ są sprzężone zarówno w pierwszej, jak w drugiej inwolucji. Zagadnienie nie ma więc rozwiązania tylko wtedy, gdy prosta PQ jest zewnętrzną względem koła. Łatwo się przekonać, że wówczas punkty zetknięcia I_{12} i J_{12} stycznych do koła wyprowadzonych z punktu P przegradzają punkty zetknięcia H i K stycznych, wyprowadzonych z punktu Q; skąd wynika, że zagadnienie nie ma rozwiązania jedynie wtedy, gdy obie inwolucje są hyperboliczne i gdy elementy podwójne jednej z nich przegradzają elementy podwójne drugiej.

§ 143. Inwolucja hyperboliczna, paraboliczna i eliptyczna. W artykule poprzednim nazwaliśmy inwolucję hyperboliczną, paraboliczną lub eliptyczną, zależnie od tego czy ma dwa, jeden, lub czy nie ma żadnego elementu podwójnego. Okażemy teraz, jak nie wyznaczając elementów podwójnych możemy jednym rzutem oka rozpoznać, którą z tych trzech inwolucji wyznaczają dwie pary elementów w niej sprzężonych .

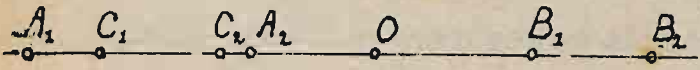
Niechaj będzie na prostej p_{12} inwolucja $A_1A_2B_1B_2$ /t.j. inwolucja wyznaczona przez pary punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 /. Inwolucja ta jest utworzona przez dwa szeregi rzutowe $p_{12}(A_1A_2B_1B_2)\barwedge$ $\barwedge p_{12}(A_2A_1B_2B_1)$ w ten sposób, że każdemu punktowi prostej p_{12} odpowiada w obu szeregach ten sam punkt. Punkty wzajemne R_1 i Q_2 tych szeregów /§ 135,II a/ są przeto zjednoczone w pewnym punkcie O , który nazwiemy <u>środkiem inwolucji</u> $A_1A_2.B_1B_2$. Ponieważ iloczyn odległości dwóch punktów odpowiednich A_1 i A_2 lub B_1 i B_2 , lub C_1 i C_2 od punktów wzajemnych R_1 i Q_2 jest liczbą stałą więc

<u>Iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest liczbą stałą</u>

$$OA_1\cdot OA_2=OB_1\cdot OB_2=OC_1\cdot OC_2=\dots$$

Przypuśćmy najpierw, że ta liczba jest dodatnia $+k^2$. Punkty sprzężone np. A_1 i A_2 , muszą leżeć po tej samej stronie środka inwolucji O , a więc albo obydwa po prawej , albo obydwa po lewej jego stronie. Prócz tego łatwo dowieść, że każde dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, t.j. że oba punkty jednej pary leżą wewnątrz, lub oba zewnątrz punktów drugiej pary . Jest to oczywiste, gdy pary A_1 i A_2 oraz B_1 i

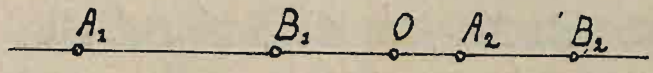
B_2 leżą po przeciwnych stronach środka inwolucji O /Rys.282/. Przypuśćmy więc, że pary A_1 i A_2 oraz C_1 i C_2 leżą po tej samej stronie środka inwolucji O.



Rys. 282.

Ponieważ $OA_1 \cdot OA_2 = OC_1 \cdot OC_2$, więc jeżeli C_1 leży bliżej punktu O niż A_1, to C_2 musi leżeć dalej niż A_2 od punktu O i naodwrót, gdyby C_1 leżał dalej niż A_1 od punktu O, to C_2 leżałby bliżej niż A_2, tak że jedna z tych par punktów obejmie zawsze drugą. Z powyższego wynika, że gdy punkt pewien M_1 porusza się w jedną stronę prostej p_{12}, to sprzężony z nim punkt M_2 porusza się zawsze w stronę przeciwną.

Zupełnie inaczej rzeczy się mają, gdy iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest liczbą ujemną $-k$. Punkty sprzężone muszą oczywiście leżeć po przeciwnych stronach środka inwolucji O. Łatwo dowieść, że każde dwie pary punktów sprzężonych się przegradzają. W samej rzeczy, jeżeli punkt B_1 leży bliżej od środka inwolucji O, niż punkt A_1, to punkt B_2 musi leżeć dalej od O, niż A_2, tak że, gdy B_1 leży między A_1 i A_2, to B_2 musi leżeć na-zewnątrz odcinka $A_1 A_2$ /Rys.283/ . Gdy zatem pewien punkt M_1 porusza się w jedną stronę prostej p_{12} to sprzężony z nim punkt M_2 porusza się w tę samą stronę .



Rys.283.

Przypuśćmy wreszcie, że iloczyn odległości każdych dwóch punktów sprzężonych od środka inwolucji równy jest zeru. Ponieważ iloczyn dwóch liczb tylko wtedy jest zerem, gdy przynajmniej jedna z tych liczb jest zerem, więc wszystkie punkty prostej p_{12} są sprzężone ze środkiem inwolucji O . Punkt ten jest więc także sprzężony sam ze sobą i może uchodzić za punkt podwójny tej inwolucji, zresztą jedyny .

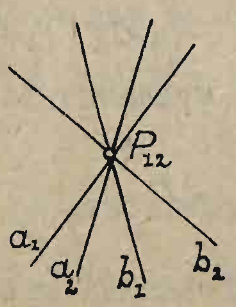
Jeżeli punkt podwójny inwolucji $A_1 A_2 B_1 B_2$ oznaczymy literą I_{12} , to dla jego wyznaczenia mamy równanie :

$$OI_{12} \cdot OI_{12} = OI_{12}^2 = stałej;$$

Równanie to będzie miało dwa pierwiastki rzeczywiste i odrębne tylko wtedy, gdy ta stała będzie liczbą dodatnią $+k^2$; $OI_{12} = \pm k$. Jeżeli stała jest liczbą ujemną, to punkty podwójne nie istnieją; gdy stała jest zerem punkt podwójny jest jeden tylko, mianowiecie środek inwolucji . A zatem

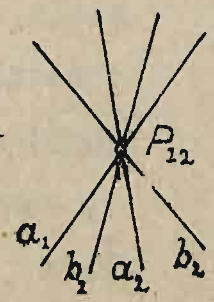
Inwolucja punktów jest hyperboliczna, gdy którekolwiek dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, eliptyczna zaś, gdy te pary się przegradzają .

Inwolucja prostych jest hyperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna zależnie od tego, czy inwolucja punktów, wyznaczona przez nią na dowolnej prostej jest hyperboliczna, paraboliczna lub eliptyczna. Stąd wynika, że w inwolucji hyperbolicznej prostych pary prostych sprzężonych się nie przegradzają /Rys.284/ w inwolucji eliptycznej te pary się przegradzają /Rys.285/ w inwolucji parabolicznej wszystkie proste są sprzężone z jedną jedyną prostą, która jest zatem również sprzężona sama ze sobą i może uchodzić za prostą podwójną, zresztą jedyną .



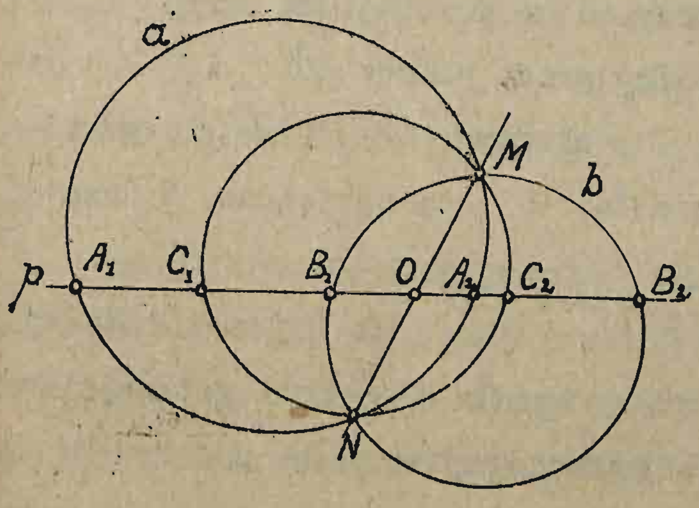
Rys.284.

§ 144. Inny sposób wyznaczenia elementów sprzężonych i podwójnych inwolucji. Na tej własności każdej inwolucji punktów, że iloczyn odległości punktów sprzężonych od środka inwolucji jest stały, można oprzeć

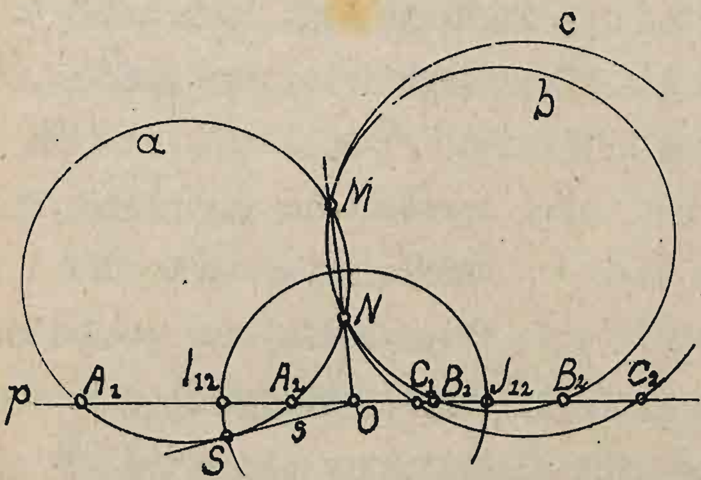


Rys.285.

wykreślenie par punktów sprzężonych i podwójnych. Niech będą na prostej p dane dwie pary punktów A_1 i A_2, B_1 i B_2 przegradzających się /Rys. 286/ lub nie /Rys.287 i 288 Poprowadźmy dwa przecinające się wzajemnie koła a i b dowolnego promienia, jedno przez punkty A_1 i A_2, drugie przez B_1 i B_2. Połączmy punkty M i N przecięcia się tych kół; powiadam, że prosta MN wyznacza na prostej p środek inwolucji O. W samej rzeczy, z punktu O do każdego z tych kół wychodzą dwie sieczne p i MN; iloczyn odległości punktu O od punktów przecięcia każdej siecznej



Rys.236.



Rys.287.

kołem ma być stały, przytem dodatni, gdy punkt O leży zewnątrz koła, ujemny, gdy O leży wewnątrz niego. Mamy zatem w każdym przypadku :

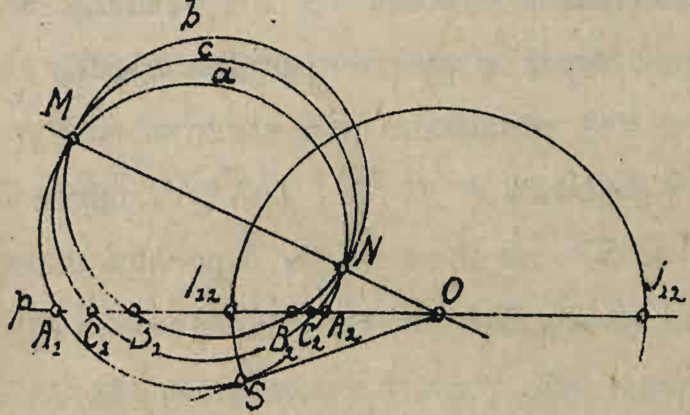
$$OA_1 \cdot OA_2 = OM \cdot ON = OB_1 \cdot OB_2;$$

co możliwe tylko wówczas, gdy punkt O jest środkiem inwolucji. Chcąc otrzymać na prostej p parę punktów sprzężonych, prowadzimy przez punkty M i N jakiekolwiek koło c ; punkty C_1 i C_2 , w których ono przecina prostą p są sprzężone. W samej rzeczy:

$$OC_1 \cdot OC_2 = OM \cdot ON \leftarrow \!\!-\!\!-\!\!= \rightarrow \text{stałej.}$$

Z wykreślenia powyższego wynika, że punkt zetknięcia prostej p z kołem przechodzącem przez punkty M i N i stycznem do p jest punktem podwójnym inwolucji.

Jeżeli pominiemy przypadek paraboliczny, jako już wyczerpany, to zagadnienie wyznaczenia punktów podwójnych inwolucji albo ma dwa rozwiązania, albo nie ma żadnego. Jeżeli mianowicie punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej p, to mamy dwa rozwiązania,



Rys.288.

jeżeli zaś leżą one po przeciwnych stronach prostej p to nie istnieje żadne. Ale punkty M i N leżą wtedy i tylko wtedy po jednej stronie p, gdy pary A_1 i A_2; B_1 i B_2 się nie przegradzają; po przeciwnych zaś tylko wtedy, gdy te pary się przegradzają.

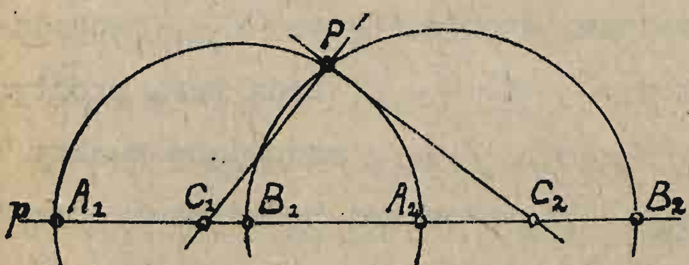
Jeżeli inwolucja na prostej p jest hyperboliczna t.j. jeżeli każde dwie pary punktów sprzężonych się nie przegradzają, a iloczyn odległości punktów każdej takiej pary od środka inwolucji jest liczbą dodatnią $+k^2$, to znajdziemy punkty podwójne, odmierzając od środka inwolucji po obu jego stronach odcinek $OI_{12} = OJ_{12} = \pm k$. Odcinek ten znajdziemy jako styczną do jednego z kół, przechodzących przez punkty M i N /Rys.287 i 288/. W samoj rzeczy, wiadomo, że jeżeli z punktu zewnętrznego O do koła poprowadzić styczną S i sieczną p, to styczna OS jest średnią proporcjonalną między całą sieczną OA_1 i jej odcinkiem zewnętrznym OA_2; czyli : $OS^2 = OA_1 \cdot OA_2 = +k^2;\ OS = |k|$ Odmierzając tedy styczną OS na prostej p po obu stronach punktu O otrzymamy dwa punkty podwójne J_{12} i J_{12}. Będą to oczywiście punkty zetknięcia kół przechodzących przez punkty M i N i stycznych do prostej p. Punkty te, jak już wiemy, przegradzają harmonicznie każdą parę punktów sprzężonych A_1 i A_2, B_1 i B_2; C_1 i C_2 ....

Szczególnie łatwem jest wykreślanie par punktów sprzężonych w inwolucji symetrycznej t.j. takiej inwolucji hyperbolicznej, której jeden punkt podwójny jest niewłaściwy. Punkty sprzężone A_1 i A_2 są symetryczne względem drugiego punktu podwójnego, który wraz z pierwszym t.j. z punktem niewłaściwym, przegradza je harmonicznie. Są to więc dwa szeregi "równe" na wspólnej podstawie i o zwrotach przeciwnych.

Dla wyznaczenia par prostych sprzężonych inwolucji dokoła punktu P oraz dla wyznaczenia prostych podwójnych, gdy one istnieją t.j. w przypadku inwolucji hyperbolicznej, zaleca się przecięcie dwóch danych par prostych sprzężonych a_1 i a_2; b_1 i b_2 prostą jakąkolwiek p i sprowadzenie zadania do wyznaczenia par punktów sprzężonych, wzgl. punktów podwójnych, inwolucji na prostej p, wyznaczonej przez pary punktów A_1 i A_2; B_1 i B_2, w których prosta p przecina proste a_1 i a_2; b_1 i b_2. Jeżeli w dodatku sieczna p będzie równoległa do jednej z czterech danych prostych np. do b_2, to prosta b_1 z nią sprzężona wyznaczy na siecznej p odrazu środek inwolucji O, przez co znalezienie nowych par punktów znacznie zostanie przyspieszone. Proste c_1 i c_2, rzucające z punktu P punkty C_1 i C_2, będą parą prostych sprzężonych; proste i_{12} i j_{12}, rzucające punkty podwójne I_{12} i J_{12} będą prostemi podwójnemi. Proste te przegradzają harmonicznie każdą parę a_1 i a_2; b_1 i b_2, c_1 i c_2 prostych sprzężonych.

Istnieje wszakże jeden przypadek inwolucji eliptycznej dokoła punktu, w którym nietylko pary prostych sprzężonych mogą być bezpośrednio łatwo wyznaczone, ale który nawet nadaje się do tego, aby wykreślanie par punktów sprzężonych każdej inwolucji eliptycznej na prostej było do niego sprowadzane. Mam na myśli <u>inwolucję prostokątną</u> w której proste sprzężone są do siebie prostopadłe /§142

Rys. 280/. Jeżeli na prostej p /Rys.289/ dane są dwie pary przegradzających się punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 ; to łatwo znaleźć jeden z dwóch punktów P lub Q ; z których odcinek A_1A_2 oraz B_1B_2 widać pod kątem prostym . W tym celu na A_1A_2 oraz na B_1B_2 zakreślamy koła jak na średnicach i niech P będzie jednym z dwóch punktów przecięcia się tych kół . Proste PA_1 i PA_2 oraz PB_1 i PB_2 są prostopadłe, wyznaczona przez te dwie pary prostopadłych prostych inwolucja nie może zatem różnić się od inwolucji prostokątnej perspektywicznej z daną inwolucją punktów. Jeżeli chcemy znaleźć punkt C_2



Rys.289.

sprzężonym z dowolnym punktem C_1 , łączymy PC_1 i w punkcie P wystawiamy do PC_1 prostopadłą, która przetnie prostą p w szukanym punkcie C_2 .Łatwo spostrzegamy, że wykreślenie to nie różni się zasadniczo od wykreślenia , podanego na Rys. 286 .

<u>§ 145. Punkty i proste urojone</u> . W przypadku inwolucji eliptycznej równanie dla wyznaczenia odległości

punktów podwójnych od środka inwolucji .

$$OI_{12}^2 = -k^2$$

ma dwa pierwiastki urojone $OI_{12} = \pm ki$; możemy wtedy powiedzieć, że same te punkty podwójne są urojone .

W przypadku hyperbolicznym, t.j. gdy pary punktów sprzężonych, wyznaczające inwolucję, się nie przegradzają, te dwie pary, jak to widzieliśmy, pozwalają istotnie wyznaczyć punkty podwójne , które nawzajem wyznaczają inwolucję . W wielu zadaniach możnaby zatem niewątpliwie zastąpić te dwa punkty przez dwie pary punktów sprzężonych inwolucji hyperbolicznej, przez owe punkty podwójne wyznaczonej. Naturalnie, takie zastępstwo nie miałoby żadnego praktycznego znaczenia, gdyż nie upraszczałoby, a raczej utrudniałoby każde zadanie . Atoli inaczej rzeczy się mają w przypadku inwolucji eliptycznej ; tutaj punkty podwójne są urojone , t.j. jako punkty w dotychczasowem rozumieniu nie istnieją . To, co byłoby dziwactwem w przypadku hyperbolicznym, stać się może, jak zobaczymy, pożytecznem uogólnieniem w przypadku eliptycznym . Zastępując bowiem termin : "inwolucja eliptyczna na prostej" przez termin: "punkty urojone" osiągnąć możemy, dzięki daleko idącej analogji między punktami rzeczywistemi i urojonemi, pożądaną jednolitość i prostotę w brzmieniu wielu twierdzeń i nieocenione wskazówki przy rozwiązaniu licznych zadań . Jeżeli zatem na prostej p dana jest inwolucja eliptyczna np. przez dwie pary przegradzających się punktów sprzężonych A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , to powiemy, że dane są na tej prostej dwa punkty urojone, mianowicie punkty podwójne tej inwolucji . Napotykamy jednak odrazu na poważną trudność w rozstrzygnięciu pytania: jak odróżnić ~~od siebie~~ te dwa punkty urojone, t.j. jak określić geometrycznie każdy z tych punktów zosobna ?

Idąc śladem Staudta nazywamy **punktem urojonym** inwolucję eliptyczną na danej prostej wraz z określonym zwrotem tej prostej . Przypuśćmy, że punkty A_1 , B_1 A_2 i B_2 następują po sobie kolejno na prostej p ; wtedy grupa tych czterech punktów, wziętych w kolei sąsiedztwa z określonym zwrotem, np. $A_1 B_1 A_2 B_2$ określa punkt urojony, jeżeli punkty A_1 i A_2 oraz B_1 i B_2 są parami punktów inwolucyjnie sprzężonych . Dwa punkty urojone, różniące się tylko zwrotem, nazywamy **punktami urojonemi sprzężonemi** ; takiemi będą np. punkty urojone $p(A_1 B_1 A_2 B_2)$ i $p(B_1 A_2 B_2 A_1)$
Z określenia punktu urojonego wynika oczywiście, że czwórki $A_1 B_1 A_2 B_2$ i $M_1 N_1 M_2 N_2$ oznaczają ten sam punkt urojony, jeżeli pary $M_1 M_2$ i $N_1 N_2$ są sprzę-

żone w inwolucji wyznaczonej przez pary $A_1 A_2$ i $B_1 B_2$ i jeżeli zwrot $M_1 N_1 M_2 N_2$ jest ten sam, co zwrot $A_1 B_1 A_2 B_2$. Punkt urojony $p(A_1 B_2 A_2 B_2)$ jest zatem identyczny z punktem urojonym $p(A_2 B_2 A_1 B_1)$ gdyż wyznaczone są przez tę samą inwolucję i te same zwroty; słusznie zatem uważamy punkt urojony $p(A_1 B_1 A_2 B_2)$ za punkt podwójny inwolucji wyznaczonej przez pary punktów $A_1 A_2$ i $B_1 B_2$, albowiem jest on identyczny z punktem urojonym $p(A_2 B_2 A_1 B_1)$, który mu w tej inwolucji odpowiada .

Prosta urojona nazywamy inwolucję eliptyczną dokoła danego punktu wraz z określonym dokoła niego zwrotem. Przypuśćmy, że proste a_1 , b_1 , a_2 , b_2 następują po sobie kolejno dokoła punktu P , wtedy grupa tych czterech prostych wziętych w kolei sąsiedztwa z określonym zwrotem np. $a_1 b_1 a_2 b_2$ określa prostą urojoną, jeżeli proste a_1 i a_2 oraz b_1 i b_2 są parami prostych sprzężonych inwolucji . Dwie proste urojone, różniące się tylko zwrotem nazywamy prostemi urojonemi sprzężonemi ; takiemi będą np. proste urojone $P(a_1 b_1 a_2 b_2)$ i $P(b_2 a_2 b_1 a_1)$. Z określenia prostej urojonej wynika oczywiście, że czwórki $a_1 b_1 a_2 b_2$ i $m_1 n_1 m_2 n_2$ oznaczają tę samą prostą urojoną, jeżeli pary $m_1 m_2$ i $n_1 n_2$ są sprzężone w inwolucji, wyznaczonej przez pary $a_1 a_2$ i $b_1 b_2$ i jeżeli zwrot $m_1 n_1 m_2 n_2$ jest ten sam, co zwrot $m_1 b_2 m_2 b_2$. Prosta urojona $P(a_1 b_1 a_2 b_2)$ jest zatem identyczna z prostą urojoną $P(a_2 b_2 a_1 b_1)$ gdyż wyznaczone są one przez tę samą inwolucję i te same zwroty ; słusznie zatem uważamy prostą urojoną $P(a_1 b_1 a_2 b_2)$ za prostą podwójną inwolucji $P(a_1 a_2 b_1 b_2)$ albowiem jest ona identyczną z prostą urojoną $P(a_2 b_2 a_1 b_1)$, która jej w tej inwolucji odpowiada .

Jeżeli inwolucja dokoła punktu P jest w perspektywie z inwolucją na prostej p, to mówimy, że prosta urojona, określona przez inwolucję i zwrot dokoła punktu P, oraz punkt urojony, określony przez inwolucję i zwrot na prostej p, należą do siebie /albo: prosta urojona "przechodzi" przez punkt urojony albo: punkt urojony "leży" na prostej urojonej/ . Innymi słowy: prosta $P(m_1 n_1 m_2 n_2)$ "przechodzi" przez punkt $P(A_1 B_1 A_2 B_2)$ jeżeli proste m_1, n_1, m_2 i n_2 przechodzą odpowiednio przez takie punkty M_1, N_1, M_2 i N_2 prostej p, że pary $M_1 M_2$ i $N_1 N_2$ są sprzężone w inwolucji $A_1 A_2 B_1 B_2$ i zwrot $M_1 N_1 M_2 N_2$ jest ten sam, co zwrot $A_1 B_1 A_2 B_2$. W ten sposób, przez każdy punkt urojony przechodzi jedna prosta rzeczywista /mianowicie podstawa inwolucji, która go określa/ i nieskończenie wiele prostych urojonych ; nawzajem , na każdej prostej urojonej leży jeden punkt rzeczywisty /mianowicie wierzchołek inwolucji, która tą prostą określa/ i nieskończenie wiele punktów urojonych . Każdy punkt rzeczywisty można "połączyć" z każdym punktem urojonym, rzucając z pierwszego inwolucję określającą drugi; prosta, łącząca te dwa punkty będzie rzeczywistą tylko wtedy, gdy punkt rzeczywisty leży na podstawie inwolucji, określającej punkt urojony . Nawzajem każda prosta rzeczywista "przecina" każdą prostą urojoną w punkcie, który będzie rzeczywistym tylko wtedy, gdy prosta rzeczywista przechodzi przez wierzchołek inwolucji, określającej prostą urojoną. Można dowieść, że każde dwa punkty urojone wyznaczają prostą, która wogóle będzie urojoną; rzeczywistą zaś tylko wtedy , gdy inwolucje , określające dane punkty urojone mają wspólną podstawę ; w szczególności, punkty urojone sprzężone wyznaczają prostą rzeczywistą. Można dowieść, że każde dwie proste urojone wyznaczają punkt, który wogóle będzie urojonym ; rzeczywistym zaś tylko wtedy, gdy inwolucje, określające dane proste urojone, mają wspólny wierzchołek; w szczególności proste urojone sprzężone wyznaczają punkt rzeczywisty.

Na zasadzie przytoczonych wyżej własności mogłoby się zdawać, że punkty i proste urojone mają wogóle wszystkie te same własności, co punkty i proste rzeczywiste. Przed tak daleko posuniętą identyfikacją należy jednak przestrzedz: analogja między utworami rzeczwistemi, a urojonemi nie dotyczy wszystkich tych własności, które zależą od <u>uporzadkowania</u> elementów ; dzięki temu np. pojęcie odcinka i kąta urojonego nie może być geometrycznie określone. Wiele natomiast własności punktów i prostych rzeczywistych, a mianowicie te , które dotyczą wzajemnego <u>należenia</u> punktów i prostych zachodzą również dla punktów i prostych urojonych, dzięki czemu wyniki, dotyczące elementów rzeczywistych dadzą się niejeraz uogólnić dla elementów urojonych .

<u>§ 146</u>. <u>Proste jednorodne i punkty kołowe</u> . Na szczególną uwagę zasługują proste urojone sprzężone , określone przez inwolucję prostokątną dokoła jakiegokolwiek właściwego punktu . Są to tak zwane <u>proste jednorodne</u> . Wszystkie one przechodzą przez dwa urojone sprzężone punkty niewłaściwe, które nazywamy <u>punktami kołowemi</u> i które są określone przez t.zw. inwolucję absolutną na prostej niewłaściwej, t.j. przez inwolucję kierunków wzajemnie prostopadłych . Jak zobaczymy później, przez te punkty urojone przechodzą również wszystkie koła leżące w płaszczyźnie uważanej, zarówno rze-

czywiste, jak urojone .-

ROZDZIAŁ XIII.

Kolineacja i biegunowość .

§ 147. Perspektywiczność dwóch układów płaskich .
Rzucając figurę F , leżącą w płaszczyźnie S na płaszczyznę P z punktu O , nieleżącego na żadnej z tych płaszczyzn , otrzymujemy figurę F_1 , która z figurą F znajduje się w pewnym związku geometrycznym, polegającym na tem, że

1/ Każdemu punktowi figury F odpowiada jeden jedyny punkt figury F_1 i nawzajem, każdemu punktowi figury F_1 odpowiada jeden jedyny punkt figury F.

2/ Każdej prostej figury F odpowiada jedna jedyna prosta figury F_1 i nawzajem , każdej prostej figury F_1 odpowiada jedna jedyna prosta figury F .

3/ Punktowi i prostej należącym do siebie w jednej z tych figur odpowiadają punkt i prosta drugiej figury, które również do siebie należą .

4/ Punkty odpowiednie leżą parami na prostych , przechodzących przez jeden punkt /mianowicie przez punkt O / i