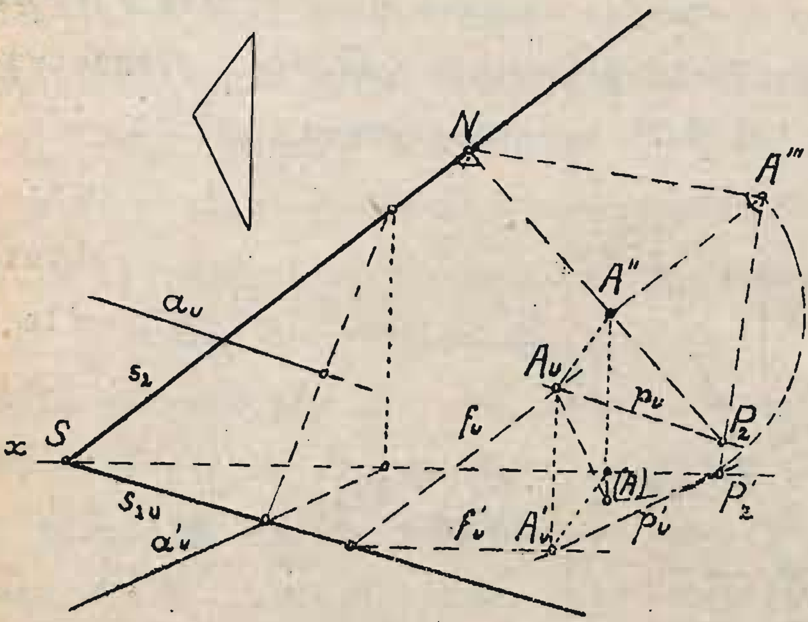
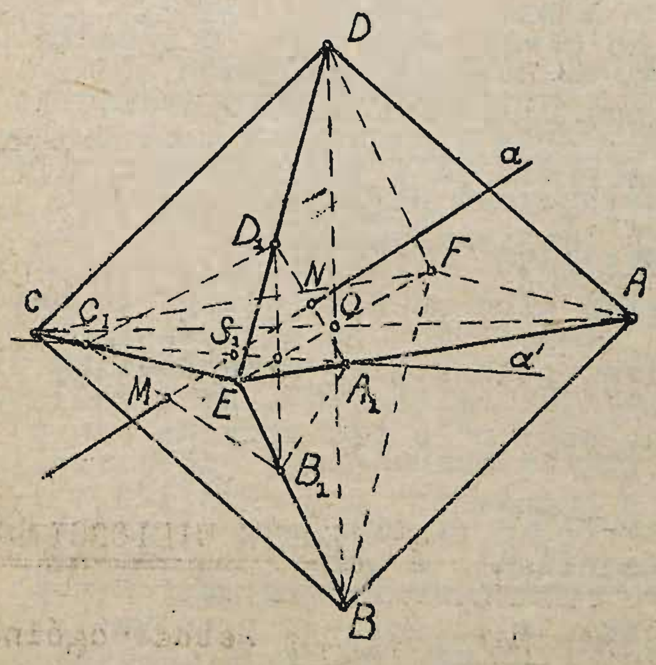


Rys. 172.

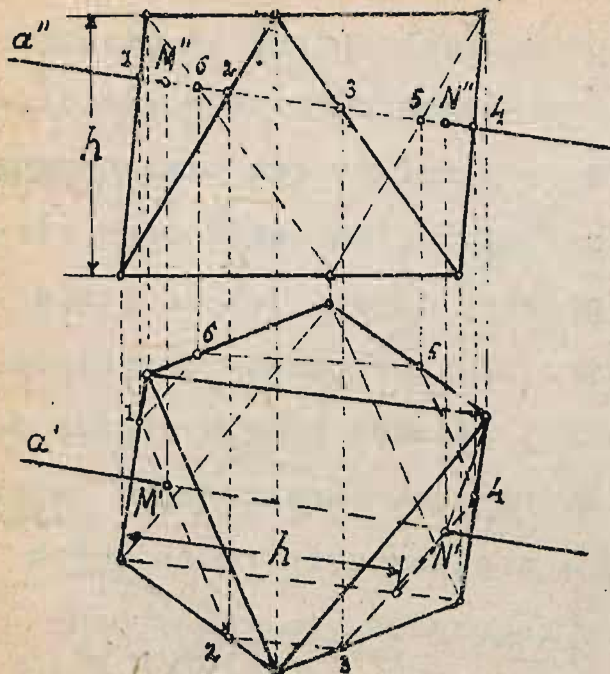
prostokątny $P_2A'''N$, w którym dana jest wysokość $A''A''' = A''(A)$ i jeden z odcinków przeciwprostokątnej, mianowicie $A''P_2$. Prosta s_2 prostopadła do $A''P_2$ w punkcie N jest drugim śladem szukanej płaszczyzny, pierwszy ślad s_1 znajdziemy np. za pomocą linji frontowej / $f_v f_v'$ / przechodzącej przez punkt / $A_v A_v'$ /.

ROZDZIAŁ VII. PRZECIĘCIA I PRZENIKANIE WIELOŚCIANÓW.

§ 71. Przebicie wielościanu prostą. Metoda ogólna według której wyznaczamy punkty przebicia wielościanu prostą daną, polega na poprowadzeniu przez tę prostą płaszczyzny pomocniczej i wyznaczeniem rzutów wielokąta, który jest przecięciem wielościanu ową płaszczyzną. Punkty, w których dana prosta przecina obwód tego wielokąta należą zarówno do prostej danej, jak do powierzchni wielościanu, są to więc szukane punkty przebicia. Obiór płaszczyzny pomocniczej zależeć będzie wogóle od wielościanu i od metody, którą jest odwzorowany. Najczęściej posługujemy się jedną z płaszczyzn rzucających daną prostą. Na Rys. 172 wyznaczyliśmy w ten sposób punkty przebicia 8-ścianu foremnego $ABCDEF$ danego 'rznoie ukośnym prostą $\alpha\alpha'$. Płaszczyzną pomocniczą jest tutaj płaszczyzna $\alpha\alpha'$ rzucająca prostą α poziomo, przecina ona 8-ścian według czworokąta $A_1 B_1 C_1 D_1$ punkty M i N w których α przecina obwód tego czworokąta są szukanemi punktami przebicia.



Rys. 173.



Rys. 174.

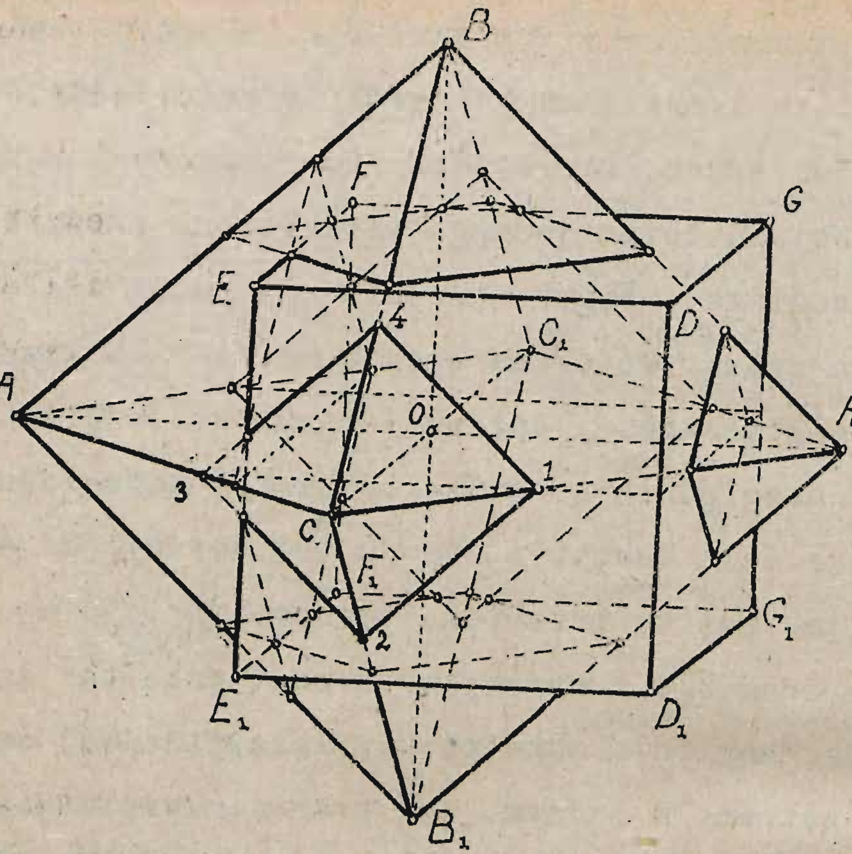
Podobnie jak dla wyznaczenia punktów, w których prosta $\alpha\alpha'$ przebija 6-ścian foremny dany w rzutach prostokątnych prowadzimy /Rys.174/ płaszczyznę rzucającą prostą α pionowo, wyznaczamy rzut poziomy 6-kąta przecięcia, a następnie punkty M' i N' w których α' przecina jego obwód. W pewnych przypadkach dogodniej jest obrać inną płaszczyznę pomocniczą, której przecięcie z wielościanem jest wielokątem możliwie najprostszym. Jeżeli np. szukamy punktów, w których prosta przebija ostrosłup albo graniastosłup, to najdogodniej będzie zastosować płaszczyznę przechodzącą przez wierzchołek ostrosłupa, względnie płaszczyznę równoległą do krawędzi bocznych graniastosłupa /Rys.176 i 177/.

§ 74. Wzajemne przenikanie dwuch wielościanów.

Do zagadnień o przebijaniu wielościanów prostymi sprowadzają się zagadnienia wzajemnego przenikania się wielościanów. Jeżeli dwa wielościany mają część objętości wspólną, mówimy, że się przenikają, istnieje wtedy jedna lub kilka linji łamanych zamkniętych, leżących na obu wielościanach, wierzchołki tych łamanych są punktami przebicia ścian jednego wielościanu przez krawędzie drugiego. Figurę przenikania dwuch wielościanów można wyznaczyć dwoma sposobami: 1/ albo wyznaczając przecięcie każdej ściany jednego wielościanu z drugim i uwzględniając tylko te części każdego przecięcia, które leżą wewnątrz obwodu tej ściany, 2/ albo wyznaczając punkty przebicia jednego wielościanu krawędziami drugiego i nawzajem, a następnie tak łącząc te punkty, aby połączone punkty leżały na tej samej ścianie zarówno w jednym, jak w drugim wielościanie.

§ 75. Przenikanie sześcianu i ośmiościanu foremnego o osiach wzajemnie równoległych. Niechaj będzie dany w rzutach ukośnych ośmiościan foremny o osiach AA_1, BB_1 i CC_1 oraz sześcian $DEFGD_1E_1F_1G_1$, którego krawędzie są odpowiednio równoległe do osi ośmiościanu /rys.175/. Wyznaczmy najpierw kwadrat 1234, według którego płaszczyzna ściany DD_1E_1E przecina ośmiościan i uwzględnijmy tę tylko część tego kwadratu, która leży wewnątrz ściany DD_1E_1E.

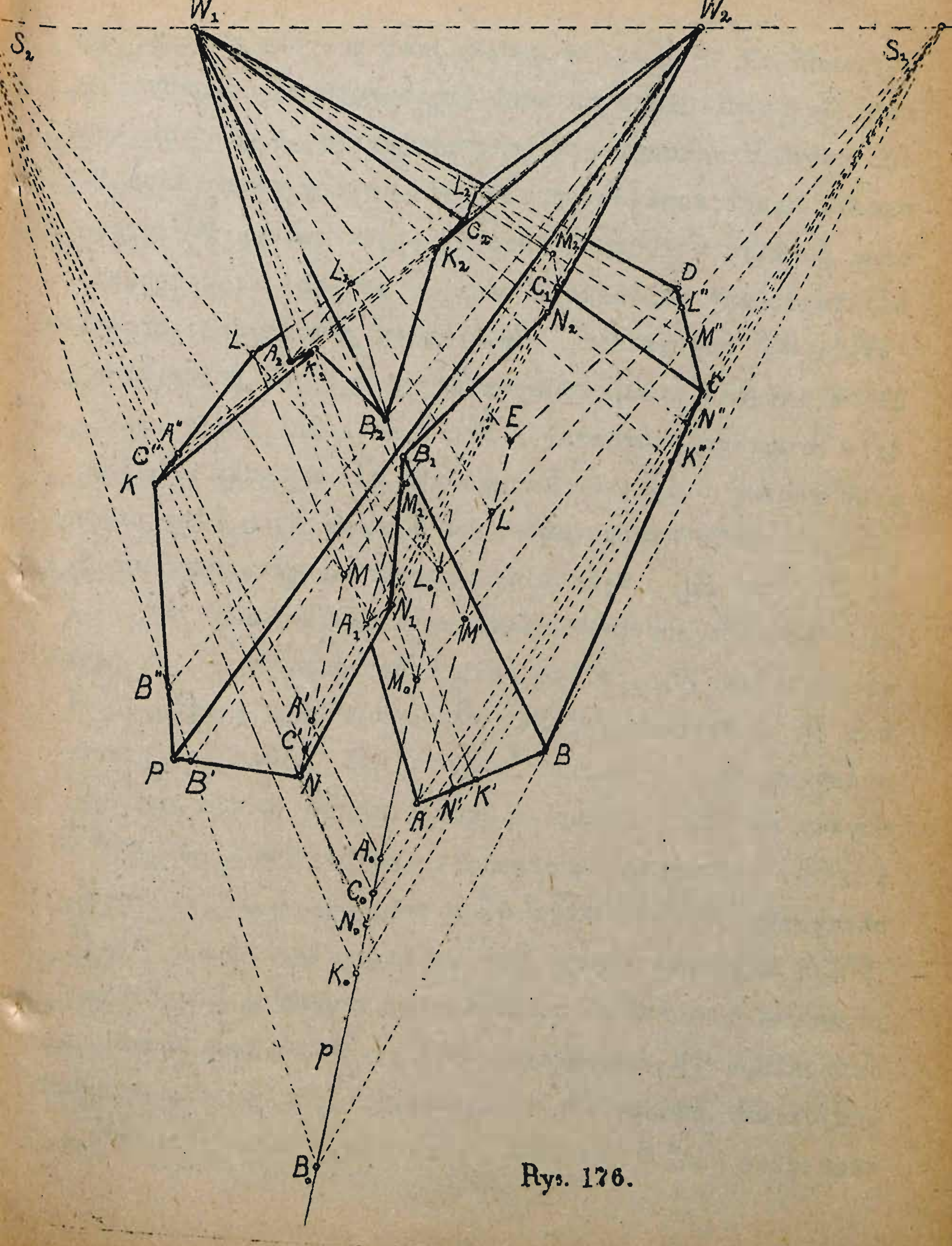
Postępując w ten sam sposób ze wszystkimi innymi ścianami sześciana otrzymamy figurę przenikania zło-



Rys. 175.

żoną z jednego 14 kąta skośnego, dwuch trójkątów i jednego kwadratu.

§ 76. Przenikanie dwuch strosłupów. Niech $W_2 KLMNP$ i $W_1 ABCDE$ /rys.176/ będą rzutami dwuch ostrosłupów, prosta p niech będzie rzutem prostej przecięcia płaszczyzn S_1 i S_2, w których leżą podstawy $ABCDE$ i $KLMNP$ tych ostrosłupów, a punkty S_1 i S_2 rzutami śladów prostej $W_1 W_2$ na płasz-


W₁
W₂
S₂
S₁
L₂
Cx
K₂
M₂
D
L₁
C₁
L"
N₂
M"
L
A₂
K₂
C"
B₂
E
A"
B₁
N"
C"
K
K"
M₂
L'
M
L₀
N₁
A₁
M'
M₀
B"
A'
C'
B
P
B'
N
A
N'
K'
A₀
C₀
N₀
K₀
p
B₀

Rys. 176.

czyznach S_1 i S_2 , obojętną jest przytem rzeczą, czy mamy do czynienia z rzutami prostokątnymi, ukośnymi lub nawet środkowymi. Wyznaczmy punkty, w których krawędzie ostrosłupa W_1 przebijają ściany ostrosłupa W_2 oraz punkty, w których krawędzie ostrosłupa W_2 przebijają ściany ostrosłupa W_1 . Przez oba wierzchołki W_1 i W_2 poprowadźmy płaszczyzny pomocnicze, przechodzące zarówno przez krawędzie jednego jak przez krawędzie drugiego ostrosłupa. Przecinają one każdy ostrosłup według trójkątów o wspólnym wierzchołku W_1 lub W_2 i o podstawach, które są śladami tych płaszczyzn na S_1 lub S_2 . Wykreślmy najpierw w płaszczyźnie S_1 ślad płaszczyzny przechodzącej przez krawędź W_1A i wierzchołek W_2 , w tym celu łączymy punkt S_1 z punktem A . Wyznaczmy punkt A_0 , w którym prosta S_1A przecina p , prosta A_0S_2 jest śladem tej płaszczyzny na S_2 , łącząc wierzchołek W_2 z punktami A' i A'' , w których ta prosta przecina obwód $KLMNP$ otrzymamy trójkąt $W_2A'A''$ przecięcia z ostrosłupem W_2 , a punkty A_1 i A_2 , w których krawędź W_1A przecina obwód tego trójkąta, są punktami przebicia ostrosłupa W_2 krawędzią W_1A . W ten sam sposób znajdziemy punkty B_1 i B_2 oraz C_1 i C_2 , w których krawędzie W_1B i W_1C przebijają ostrosłup W_2 .

krawędzie W_1D i W_1E nie przebijają go wcale, albowiem ślady płaszczyzn przez te krawędzie przechodzących nie przecinają obwodu jego podstawy. Znajdźmy teraz punkty, w których krawędzie ostrosłupa W_2 przebijają ostrosłup W_1. Łącząc punkt S_2 z punktem K i przedłużając tę prostą do przecięcia z p w punkcie K_o a później łącząc ten punkt z S_1, otrzymamy ślad płaszczyzny W_1W_2K na S_2, który przecina obwód pierwszej podstawy w punktach K' i K'', proste $W_1'K'$ i W_1K'' przecinają krawędź W_2K w punktach K_1 i K_2, które są punktami przebicia ostrosłupa W_1 krawędzią W_2K. Podobnież znajdziemy punkty L_1 i L_2, M_1 i M_2, N_1 i N_2, w których krawędzie W_2L, W_2M i W_2N przebijają ostrosłup W_1.

Tak więc mamy 14 punktów przebicia:

A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2, N_1 i N_2.

Ponieważ boki linji przenikania mają leżeć na ścianach obu ostrosłupów, więc łączyć należy tylko te punkty, które leżą na tej samej ścianie zarówno w pierwszym, jak i w drugim ostrosłupie. Każdy ze znalezionych 14 punktów leży na trzech ścianach, których jest przecięciem, jak to uwidoczniono w następującym wykazie:

A_1	W_1AB	W_1AE	W_2MN	K_2	W_2KL	W_2KP	W_1BC
A_2	W_1AB	W_1AE	W_2KL	L_1	W_2LM	W_2KL	W_1AE
B_1	W_1BC	W_1AB	W_2NP	L_2	W_2LM	W_2KL	W_1CD
B_2	W_1BC	W_1AB	W_2KP	M_1	W_2MN	W_2LM	W_1AE
C_1	W_1CD	W_1BC	W_2MN	M_2	W_2MN	W_2LM	W_1CD
C_2	W_1CD	W_1BC	W_2KL	N_1	W_2NP	W_2MN	W_1AB
K_1	W_2KL	W_2KP	W_1AB	N_2	W_2NP	W_2MN	W_1BC

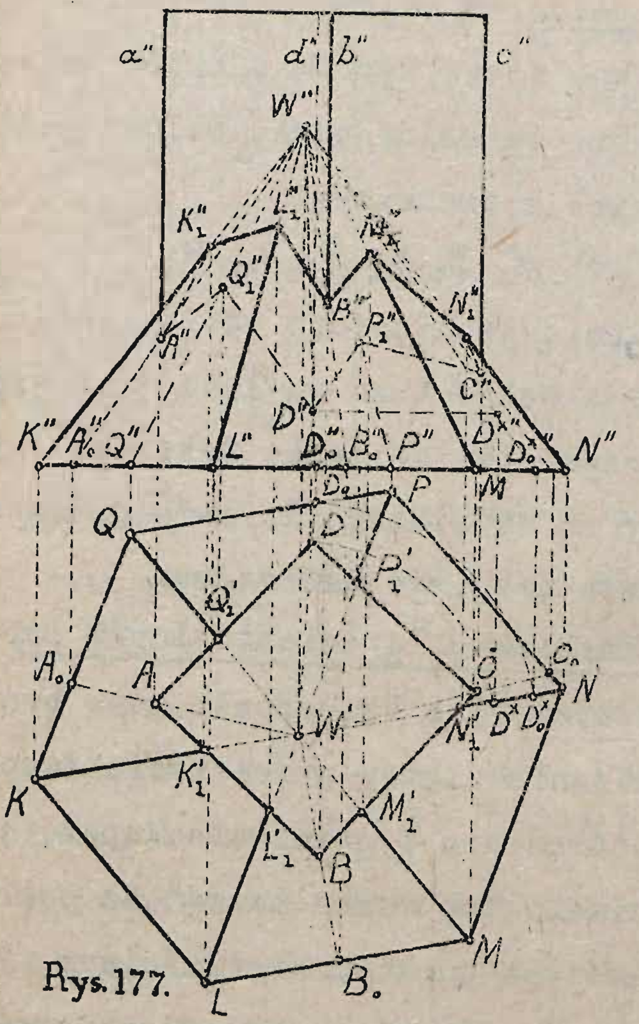
Aby znaleźć punkt, z którym należy połączyć A_1, weźmy dwie jego ściany do dwuch ostrosłupów należące, np. W_1AB i W_2NP, i szukajmy śród pozostałych punktów takiego, któryby leżał na tych samych ścianach: będzie to punkt N_1, ale punkt ten leży również na przecięciu ścian W_1AB i W_2NP, szukamy więc śród pozostałych punktów takiego, któryby leżał na obu tych ścianach: będzie to punkt B_1. Punkt ten leży również na przecięciu ścian W_1BC i W_2NP, drugim punktem na tych samych obu ścianach leżącym będzie N_2. Punkt N_2 leży prócz tego na ścianach W_1BC i W_2MN, na tych samych dwuch ścianach leży punkt C_1. W ten sposób możemy postępować dopóty, dopóki nie dojdziemy z powrotem do punktu A_1 co może nastąpić albo po wymienieniu wszystkich pozostałych punktów albo też może z pominięciem niektórych z pośród nich

W pierwszym przypadku mówimy, że przenikanie jest częściowe, w drugim zupełne. W naszym przykładzie mamy przenikanie częściowe: wszystkie 14 punktów dadzą się ustawić w taki sposób, że każdy punkt należy połączyć z następnym, a ostatni z pierwszym:

$A_1 N_1 B_1 N_2 C_2 M_2 L_2 C_1 K_2 B_2 K_1 A_2 L_1 M_1$

Figurą przenikania jest przeto 14-kąt skośny, dla zdecydowania, który z boków tego 14-kąta jest widzialny, służy zasada oczywista, że tylko taki bok jest widzialny, który leży na widzialnej ścianie pierwszego i na widzialnej ścianie drugiego ostrosłupa.

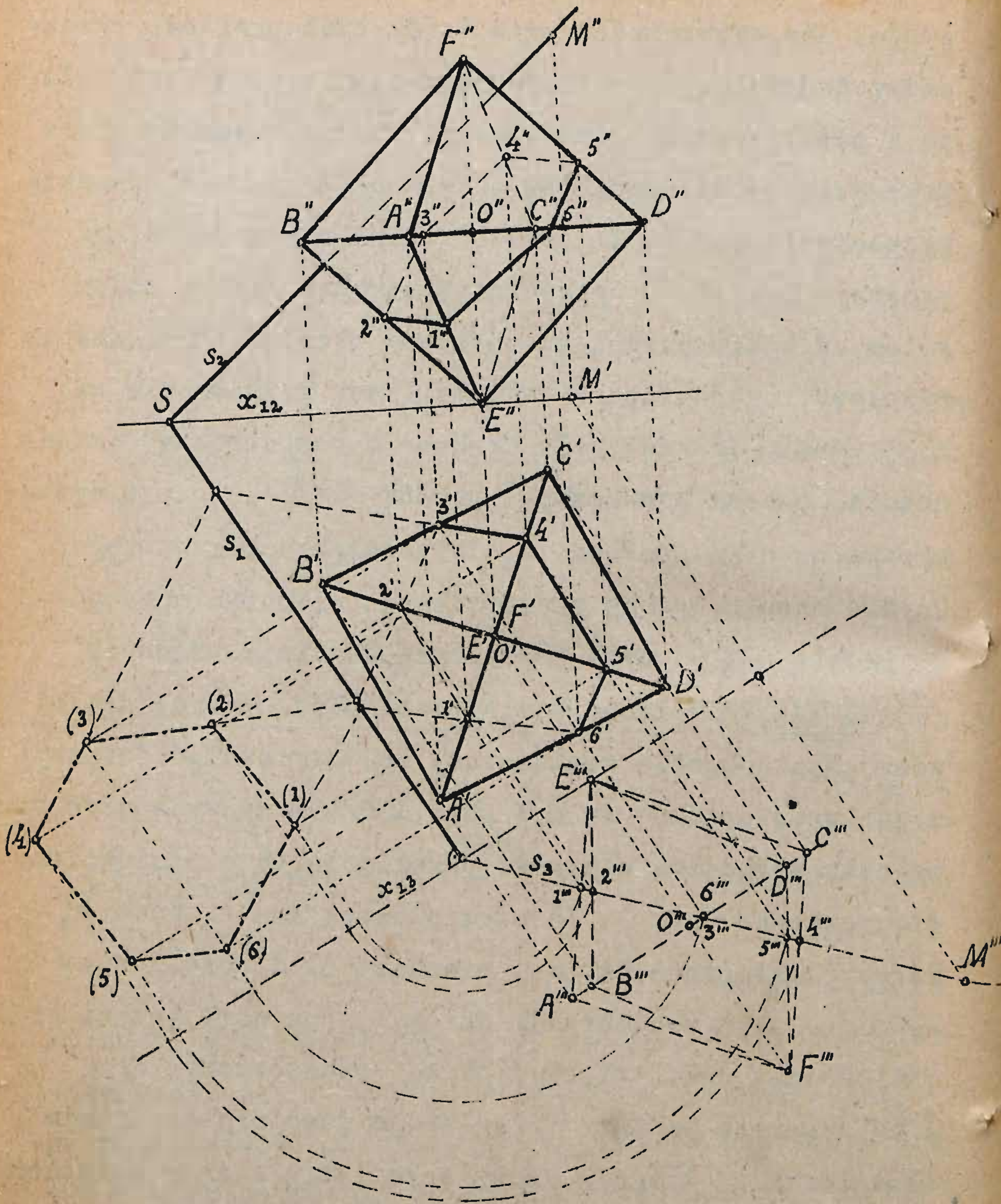
§ 77. Przenikanie dwuch graniastosłupów lub ostrosłupa z graniastosłupem. Ten sam sposób może być zastosowany do wyznaczenia figury przenikania dwuch graniastosłupów lub ostrosłupa z graniastosłupem, jeżeli zauważymy, że graniastosłup można uważać za ostrosłup którego wierzchołek jest punktem niewłaściwym. Płaszczyzny pomocnicze przez ten wierzchołek przechodzące stają się równoległe do krawędzi graniastosłupa. Przypuśćmy np. /Rys.177/, że mamy wyznaczyć figurę przenikania graniastosłupa foremnego o podstawie kwadratowej $ABCD$ leżącej w $\mathbf{P}_1$ z ostrosłupem foremnym sześciokątnym i wierzchołku $W'W''$ i podstawie $KLMNPQ$ leżącej również w $\mathbf{P}_1$. Płaszczyzny pomocnicze będą



Rys. 177.

to płaszczyzny przechodzące przez W i równoległe do krawędzi graniastosłupa, a więc prostopadłe do $\mathbf{P}_1$. Pierwsze ślady tych płaszczyzn będą to proste wyprowadzone z W' do wszystkich 10 wierzchołków obu podstaw. Pierwsze rzuty punktów przebicia krawędzi ostrosłupa ze ścianami graniastosłupa są to punkty, w których pierwsze rzuty tych krawędzi przecinają obwód podstawy graniastosłupa, pierwsze rzuty punktów przebicia krawędzi graniastosłupa ze ścianami ostrosłupa będą to oczywiście wierzchołki A, B, C, D podstawy graniastsłupa. Aby wyznaczyć drugie rzuty tych punktów, wyznaczamy drugie rzuty prostych przecięcia ścian ostrosłupa z płaszczyznami pomocniczemi, przechodzącemi przez krawędzie ostrosłupa, jak to wskazuje rysunek. Wszakże wyznaczenie punktu D_1'' byłoby nader niedokładne, gdyż proste d'' i $W''D_0'$ przecinają się pod bardzo małym kątem. W takim przypadku obracamy prostą WD_0 dokoła wysokości ostrosłupa o taki kąt, aby wyznaczenie na niej punktu D_1 dało się dokonać z dostateczną dokładnością, poczem powracamy z prostą WD_0 wraz z wyznaczonym na niej punktem D_1 do położenia pierwotnego. Użycie obrotu byłoby zresztą zgoła nieuniknione, gdyby prosta $W'D$ była równoległą do linji rzędnych.

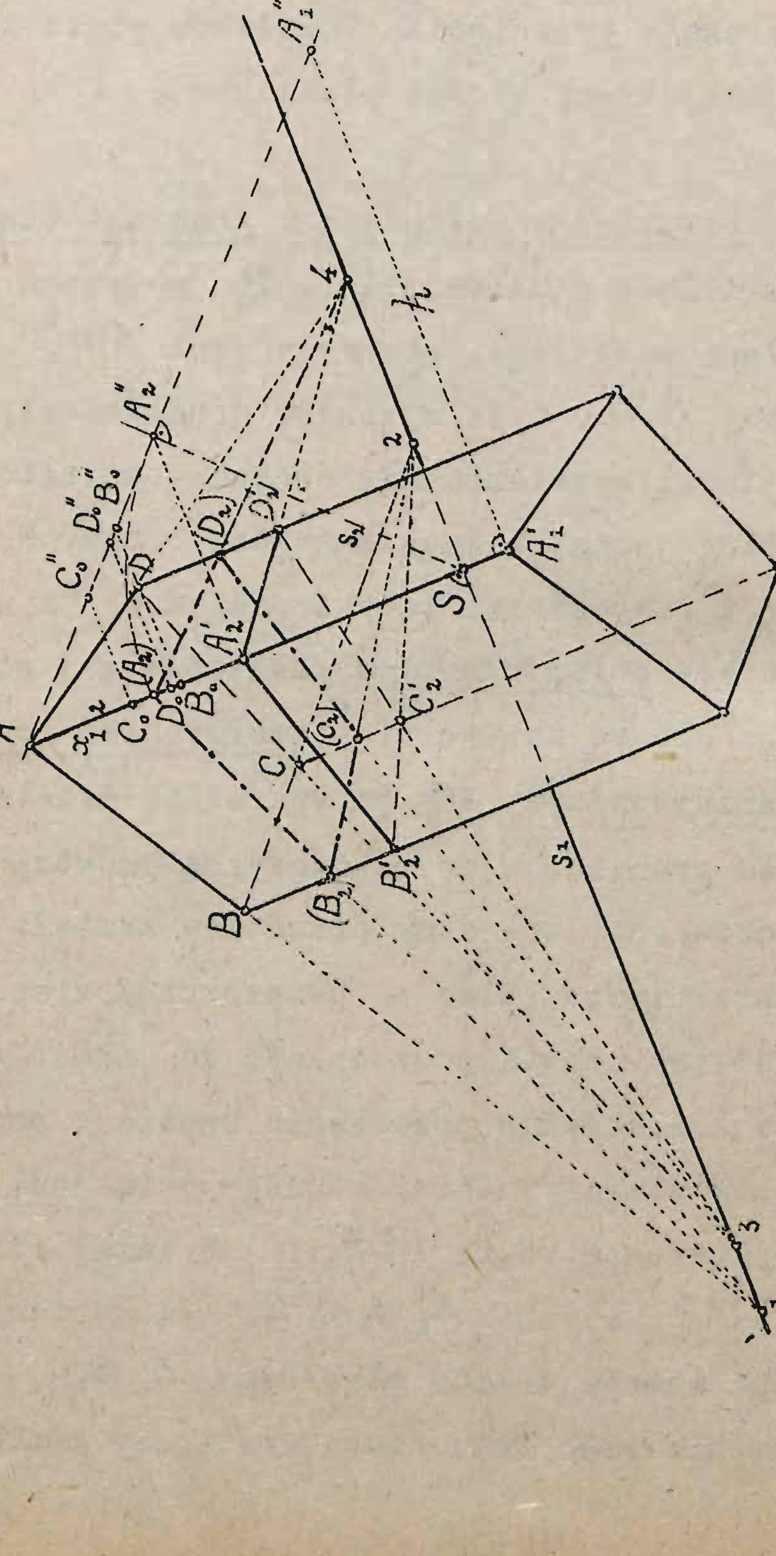
§ 78. Przecięcie wielościanu płaszczyzną jakąkolwiek. Niech będzie wielościan, np. ośmiościan foremny o osi prostopadłej do $\mathbf{P}_1$ /Rys.178/, mamy wyznaczyć rzuty oraz prawdziwą wielkość przecięcia tego ośmiościanu płaszczyzną $s_1 s_2$. Za nową płaszczyznę rzutów $\mathbf{P}_3$ weźmy płaszczyznę, której pierwszy ślad, czyli nowa oś x_{13}, jest prostopadły do s_1. Znajdźmy trzeci rzut ośmiościanu oraz trzeci ślad s_3 płaszczyzny $s_1 s_2$, a to zapomocą punktu M wziętego dowolnie na drugim śladzie s_2. Trzecie rzuty przecięcia leżą w punktach $1'''$, $2'''$, $3'''$, $4'''$, $5'''$ i $6'''$ na śladzie s_3;


F"
M"
4"
5"
B"
A"
3"
O"
C"
6"
D"
2"
1"
s_2
S
x_{12}
M'
E"
C'
3'
4'
s_1
B'
2'
F'
E'
O'
5'
D'
(3)
(2)
1'
6'
(1)
E'''
(4)
A'
C'''
s_3
2'''
1'''
D'''
x_{13}
6'''
O'''
3'''
4'''
5'''
(6)
(5)
M'''
B'''
A'''
F'''

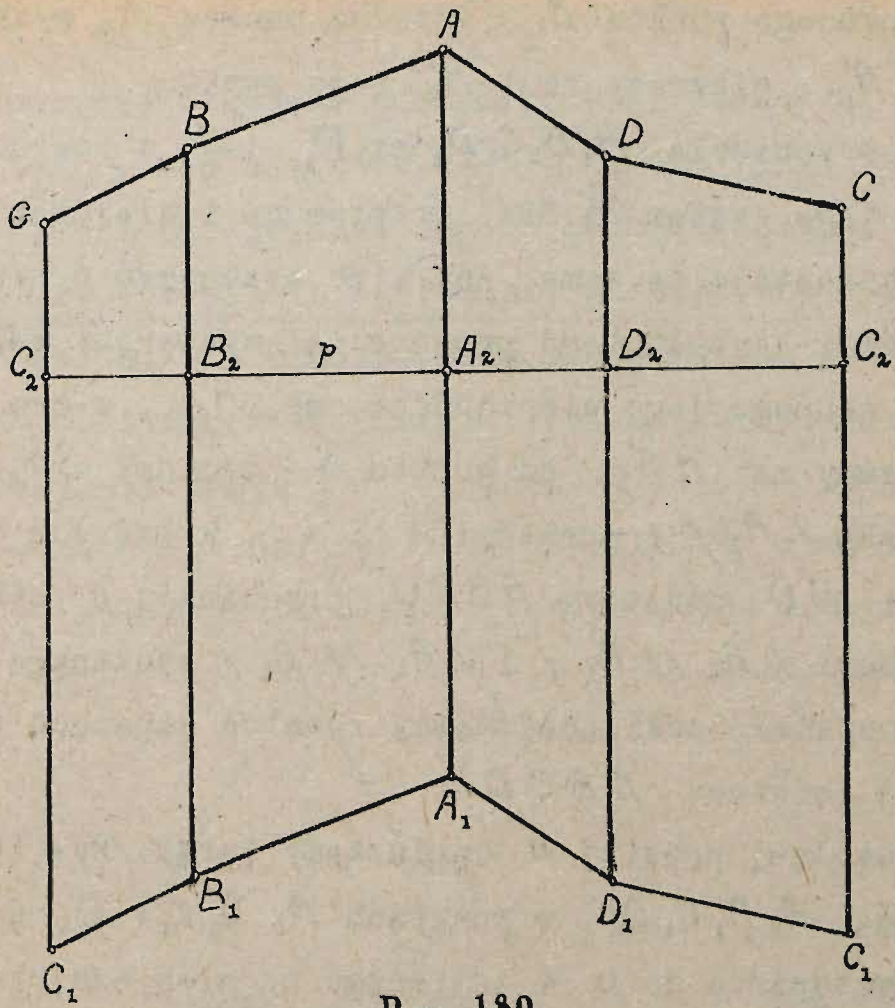
Rys. 178.

stąd znajdziemy pierwsze, a wreszcie drugie rzuty wierzchołków wielokąta przecięcia. Prawdziwą wielkość i kształt przecięcia znajdziemy kładąc płaszczyznę $s_1 s_2$ dokoła s_1 na P_1 .

§ 79. Rozwinięcie powierzchni graniastosłupa. Niech będzie dana leżąca w płaszczyźnie P_1 podstawa $ABCD$ graniastosłupa pochyłego, pierwszy rzut AA_1' jego krawędzi bocznej AA_1 oraz wysokość graniastosłupa h . /Rys.179/. Jeżeli powierzchnię boczną graniastosłupa rozciąć według jednej z jego krawędzi bocznych, np. według CC_1 i rozpostrzeć kąty dwuścienne, to ta powierzchnia staje się polem płaskiem, złożonem z 4-ech równoległoboków. Pole to nazywa się rozwinięciem powierzchni bocznej graniastosłupa. Aby je wykreślić przetnijmy przedewszystkiem graniastosłup płaszczyzną prostopadłą do krawędzi bocznych i znajdźmy prawdziwy kształt i wielkość tego przecięcia. Ślad s_1 płaszczyzny siecznej będzie jakąkolwiek prostą prostopadłą do AA_1' /§ 21/. Pierwszy rzut szukanego przecięcia będzie z podstawą $ABCD$ w powinowactwie, którego osią jest s_1 , a kierunkiem kierunek rzutu AA_1' . W samej rzeczy, podstawa $ABCD$ i rzut $A_2'B_2'C_2'D_2'$ są rzutami równoległymi tego samego 4-kąta płaskiego $A_2B_2C_2D_2$ /§ 39/ Dla wyznaczenia więc tego rzutu wystarczy znaleźć rzut



Rys. 179.



Rys. 180.

jednego wierzchołka tego **4-kąta**, np. A_1' . Obrawszy AA_1' za oś x_{12} znajdziemy A_1'' odmierzając $A_1' A_1'' = h$, AA_1'' jest drugim rzutem i zarazem rzeczywistą długością krawędzi AA_1 .

Spuszczając z punktu S prostopadłą na AA_1'' , znajdziemy drugi ślad s_2 płaszczyzny siecznej, a punkt A_2'' , w którym ten ślad przecina AA_1'' będzie drugim rzutem szukanego punktu A_2, rzędna punktu A_2'' wyznaczy na AA_1' pierwszy rzut A_2' tego punktu.

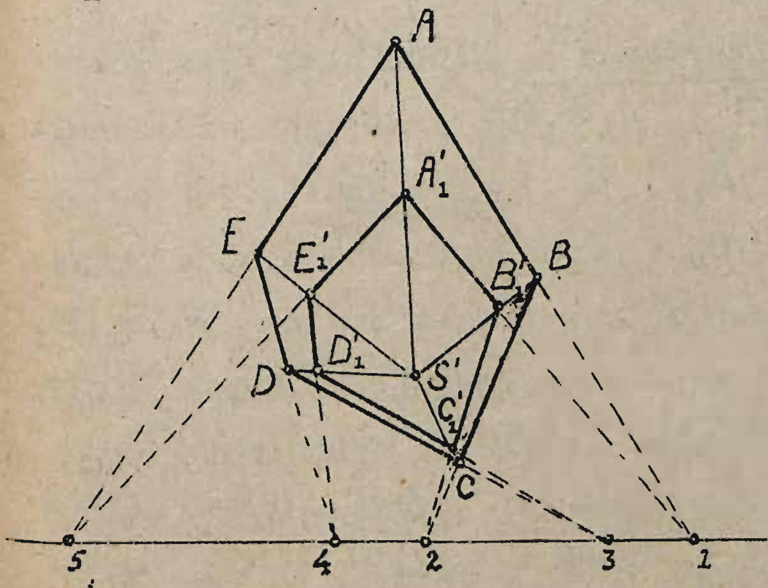
Kład przecięcia $A_2B_2C_2D_2$ na P_1 jest w powinowactwie z jego rzutem /§ 39/, przytem oś i kierunek powinowactwa zostają te same. Aby więc wyznaczyć prawdziwą wielkość i kształt tego przecięcia, wystarczy znaleźć kład jednego jego wierzchołka, np. A_2, w tym celu odmierzamy na AA_1' od punktu S odcinek $S(A_2) \equiv SA_2''$. Łącząc punkt /A_2/ z punktami 1 i 4, w których boki AB i AD podstawy $ABCD$ przecinają s otrzymamy dwa boki /A_2// B_2/ i /A_2// D_2/ szukanego kładu, dwa pozostałe boki znajdziemy również zapomocą powinowactwa z podstawą $ABCD$.

Na dowolnej prostej p odmierzamy teraz /Rys.180/ obwód 4kąta $A_2B_2C_2D_2$, w punktach A_2, B_2, C_2 i D_2 wystawmy prostopadłe do p i odmierzmy na nich odcinki A_2A, B_2B, C_2C i D_2D równe odpowiednio prawdziwym długościom odcinków tej samej nazwy na krawędziach graniastosłupa. Jeden z nich AA_2 równy jest odcinkowi AA_2'', inne znajdujemy w taki sam sposób na prostej AA_1'' zapomocą równoległych do $A_2'A_2''$ wykreślonych w końcach B_0, C_0 i D_0, odcinków $AB_0 \equiv BB_2'$, $AC_0 \equiv CC_2'$ i $AD_0 \equiv DD_2'$.

Odmierzmy teraz na prostych AA_2, BB_2, CC_2

i DD_1 odcinki AA_1, BB_1, CC_1 i DD_1 równe prawdziwej długości krawędzi, t.j. odcinkowi AA_1'' /Rys.179/., wielokąt $CBADCC_1D_1A_1B_1C_1$ jest rozwinięciem powierzchni bocznej danego graniastosłupa.

§ 80. Przecięcie ostrosłupa płaszczyzną. Niech będzie /Rys.181/. w płaszczyźnie **P** podstawa $ABCDE$ ostrosłupa i niech S' będzie rzutem jego wierzchołka S na płaszczyznę **P**, prosta s niechaj będzie na niej śladem płaszczyzny S, a punkt A_1' rzutem punktu A_1, w którym ta płaszczyzna przecina krawędź SA;

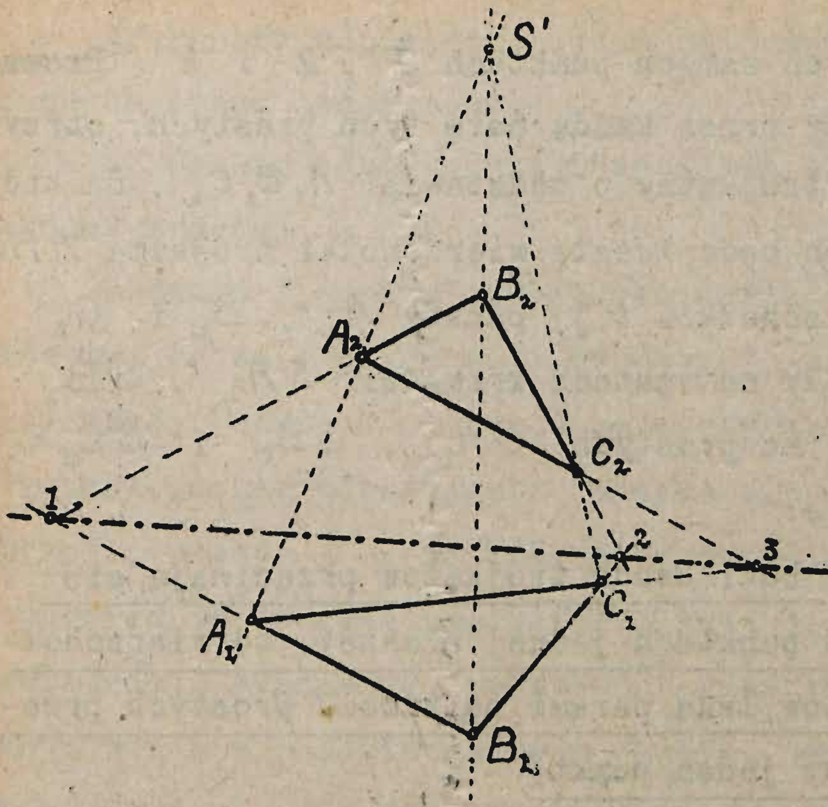


Rys. 181.

[m]amy znaleźć rzut przecięcia $A_1B_1C_1D_1E_1$ ostrosłupa płaszczyzną S. Trzy płaszczyzny **P**, S i SAB przecinają się po dwie według prostych przechodzących przez jeden punkt, który nazywamy punktem przecięcia tych 3 płaszczyzn. Dwie z tych prostych są to s i AB, trzecia A_1B_1 a więc i jej rzut.

$A_1'B_1'$ musi zatem przechodzić przez punkt 1 , w którym AB przecina s . Punkt B_1' znajdziemy przeto w sposób następujący: Przedłużamy AB do przecięcia z s w punkcie 1 , z którym łączymy punkt A_1' , prosta $1A_1'$ przecina $S'B$ w punkcie B_1' . Tak samo znajdziemy następny punkt C_1' , gdyż proste BC i $B_1'C_1'$ muszą się również przecinać na prostej s , i tak kolejno wszystkie inne D_1' , E_1' ; dla sprawdzenia dokładności rysunku stwierdzimy, że proste $E_1'A_1'$ i EA przetną się na prostej s .

§ 81. Trójkąty Desarguesa. Niech będą /Rys.182/ dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$, których wierzchołki A_1 i A_2 , B_1 i B_2 , C_1 i C_2 leżą parami na prostych A_1A_2 , B_1B_2 i C_1C_2 przechodzących przez jeden punkt S' . Jeden z tych trójkątów, np. $A_1B_1C_1$ możemy uważać za podstawę ostrosłupa trójkątnego /czworościanu/, punkt S' możemy uważać za rzut prostokątny wierzchołka tego ostrosłupa na płaszczyznę trójkąta $A_1B_1C_1$, wtedy trójkąt $A_2B_2C_2$ będzie rzutem prostokątnym trójkąta ABC , którego wierzchołki leżą na krawędziach ostrosłupa. Płaszczyzna trójkąta $A_2B_2C_2$ musi przeciąć płaszczyznę trójkąta $A_1B_1C_1$ według pewnej prostej s , na której spotkać się muszą boki A_1B_1 i A_2B_2 , B_1C_1 i B_2C_2 , C_1A_1 i C_2A_2 .



Rys. 182.

Stąd twierdzenie:

I. <u>Jeżeli wierzchołki dwuch trójkątów leżą parami na trzech prostych przechodzących przez jeden punkt, to boki tych trójkątów przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej.</u>

Nawzajem niech będą dwa trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ których boki A_1B_1 i A_2B_2, B_1C_1 i B_2C_2, C_1A_1 i C_2A_2 przecinają się parami w trzech punktach 1, 2 i 3 prostej s. Jeden z tych trójkątów, np. $A_2B_2C_2$ możemy uważać za rzut prostokątny trójkąta ABC leżącego w płaszczyźnie S przecinającej płaszczyznę trójkąta $A_1B_1C_1$ według prostej s, przytem boki A_1B_1 i AB, B_1C_1 i BC, C_1A_1 i CA przecinają się parami w tych samych punktach 1, 2 i 3. Prowadząc płaszczyzny przez każdą parę tych prostych, otrzymamy ostrosłup trójkątny o podstawie $A_1B_1C_1$, na którego krawędziach będą leżały wierzchołki trójkąta ABC; rzuty tych wierzchołków t.j. punkty A_2, B_2 i C_2 będą zatem leżały na rzutach krawędzi SA_1, SB_1 i SC_1, t.j. na prostych $S'A_1$, $S'B_1$ i $S'C_1$. Stąd twierdzenie:

II. Jeżeli boki dwuch trójkątów przecinają się parami w trzech punktach jednej prostej, to wierzchołki tych trójkątów leżą parami na trzech prostych przechodzących przez jeden punkt.

§ 82. Kolineacja środkowa. Figury $ABCDE$ i $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'$ rys.181 albo $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ rys.182 są w pewnym szczególnym związku geometrycznym, który zasługuje na bliższe zbadanie. Związek ten polega na następujących 5 faktach:

1/ Każdemu punktowi pierwszej figury odpowiada jeden jedyny punkt drugiej figury i nawzajem,

2/ Każdej prostej pierwszej figury odpowiada jedna jedyna prosta drugiej figury i nawzajem,

3/ Punktowi i prostym należącym do siebie w pierwszej figurze odpowiadają w drugiej punkt i prosta również do siebie należące.

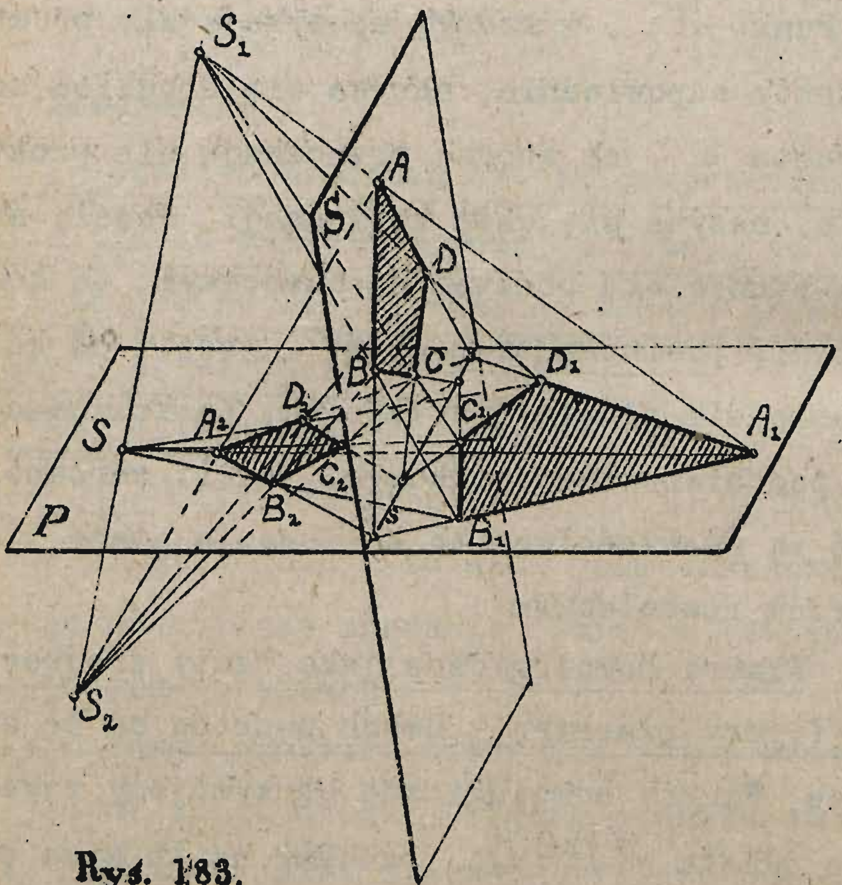
4/ Punkty odpowiednie leżą na prostych, przechodzących przez jeden punkt-

5/ Proste odpowiednie przecinają się w punktach jednej prostej.

O dwuch figurach czyniących zadość tym 5 warunkom mówimy, że są w <u>kolineacji środkowej</u>, albo że są <u>homologiczne</u>. Punkt S', w którym spotykają się proste, łączące punkty odpowiednie, nazywa się <u>środkiem kolineacji</u>, prosta s, na której przecinają się proste odpowiednie, nazywa się <u>osią kolineacji</u>. Jeżeli środek kolineacji stanie się punktem niewłaściwym, to kolineacja staje się <u>powinowactwem</u> /§ 39/, jeżeli oś kolineacji stanie się prostą niewłaściwą, to kolineacja staje się podobieństwem środkowym, jeżeli zarówno środek jak oś są niewłaściwe, to kolineacja staje się przesunięciem równoległem

<u>§ 83. Figury homologiczne jako rzuty środkowe tej samej figury płaskiej z dwuch punktów na tę samą płaszczyznę.</u> Figury homologiczne otrzymujemy zawsze, gdy figurę płaską $ABCD$... rzucamy na tę samą płaszczyznę P z dwuch różnych punktów S_1 i S_2 /Rys.183/ W samej rzeczy, rzuty $A_1B_1C_1D_1$..i $A_2B_2C_2D_2$..są wtedy w takim związku, że punkty odpowiednie A_1 i A_2, B_1 i B_2 ....leżą parami na prostych, według których

płaszczyzny przechodzące przez S_1 i S_2 oraz punkty A, B, ... przecinają płaszczyznę **P** ; proste te przechodzą oczywiście przez ślad S prostej S_1S_2 na płaszczyźnie **P**. Proste odpowiednie A_1B_1 i A_2B_2, B_1C_1 i B_2C_2, ... przecinają proste AB, BC, ..

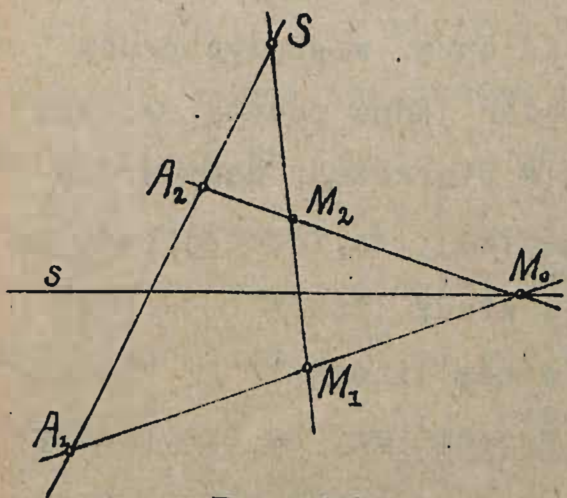


Rys. 183.

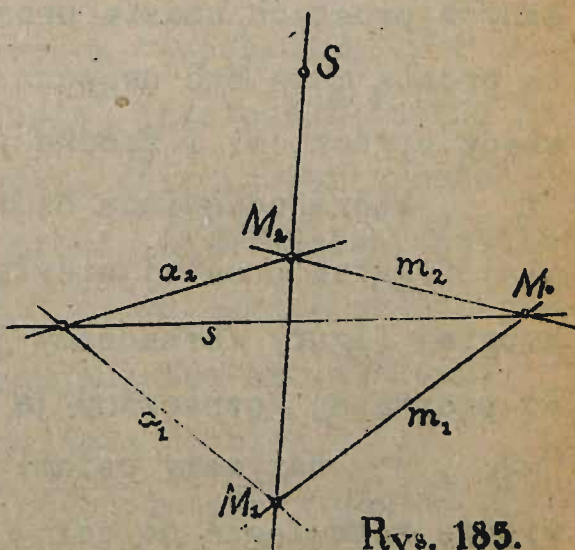
a więc i siebie wzajemnie na śladzie s płaszczyzny **S**.

§ 84. Wyznaczenie kolineacji. Figura homologiczna z daną figurą $A_1B_1C_1D_1$ ... jest wyznaczona, jeżeli dane są: środek kolineacji S, oś kolineacji s oraz jeden punkt A_2 lub jedna prosta α_2 drugiej figury, albo trzy punkty A_2, B_2 i C_2 lub trzy proste a_2, b_2 i c_2 drugiej figury co wychodzi zresztą na to samo, gdyż trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ względnie $a_1b_1c_1$ i $a_2b_2c_2$ są trójkątami Desargues'a, które wyznaczają oś i środek kolineacji.

Niechaj więc oprócz środka S i osi s będą dane na prostej wychodzącej z S dwa punkty odpowiednie A_1 i A_2, aby znaleźć punkt drugiej figury, odpowiadający jakiemukolwiek punktowi M_1 pierwszej figury /Rys.184/ łączymy A_1M_1 i wyznaczamy punkt M_0, w którym ta prosta przecina s; prostej A_1M_0 odpowiada prosta A_2M_0 przecinająca ją na osi s i przechodząca przez A_2, punkt M_2 musi leżeć na prostej A_2M_0 oraz na prostej SM_1, jest to więc punkt przecięcia tych dwuch prostych.



Rys. 184.



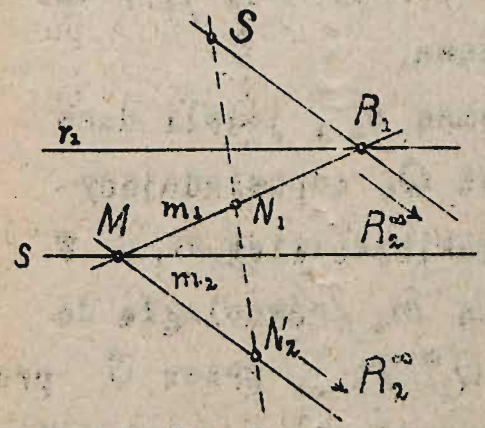
Rys. 185.

Jeżeli zamiast punktów A_1 i A_2 będą dane proste a_1 i a_2 przecinające się na osi s, to aby znaleźć prostą drugiej figury odpowiadającą jakiejkolwiek prostej m_1 pierwszej figury /Rys.185/, łączymy punkt $a_1 m_1 \equiv M_1$ ze środkiem S i wyznaczamy punkt przecięcia M_2 tej prostej z a_2; łącząc punkt M_2 z punktem M_0, w którym m_1 przecina s, otrzymamy prostą m_2.

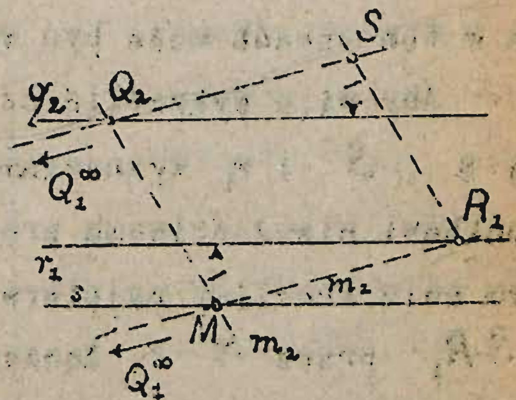
Punkt S oraz wszystkie punkty leżące na prostej s; prosta s oraz wszystkie proste wychodzące z punktu S, odpowiadają samym sobie.-

§ 85. Osie wzajemne. Wyznaczenie kolineacji zapomocą środka i osi oraz dwuch prostych odpowiednich a_1 i a_2 będzie szczególnie dogodne, jeżeli jedną z tych danych prostych będzie prosta niewłaściwa. Ponieważ ta prosta może być uważana za daną, więc wystarczy wtedy oprócz osi i środka podać jedną prostą q_2 lub r_1, która odpowiada bądź w pierwszej, bądź w drugiej figurze prostej niewłaściwej, zaliczonej bądź do drugiej figury /oznaczamy ją wtedy literą q_1^{∞}/ bądź do pierwszej /oznaczamy ją wtedy literą r_2^{∞}/. Proste q_2, r_1 nazywamy osiami wzajemnymi, są one rzeczywiście równoległe do osi s, gdyż każda z nich przecina s w punkcie niewłaściwym. Kolineacja jest przeto wyznaczona, gdy dane są: środek i oś kolineacji oraz jedna z osi wzajemnych.

Niech będą np. dane S , s i q_2 , mamy znaleźć prostą m_2 odpowiadającą danej prostej m_1 oraz punkt N_2 odpowiadający danemu punktowi N_1 .



Rys. 186.



Rys. 187.

Wyznaczmy /Rys.186/ jak poprzednio punkty $m_1 r_1 \equiv R_1$ i $m_1 s \equiv M$, w których prosta m_1 przecina r_1 i s , punkt M odpowiada samemu sobie, jako punkt leżący na osi kolineacji, punkt R_2 będzie przecięciem prostej SR_1 z prostą r_2^∞ t.j. z prostą niewłaściwą, będzie to więc kierunek prostej SR_1 , m_2 będzie przeto prostą wychodzącą z M i posiadającą ten sam kierunek, co prosta SR_1 , t.j. równoległą do niej.

Aby znaleźć punkt N_2 , odpowiadający danemu punktowi N_1 , prowadzimy przez N_1 dowolną prostą m_1 i znajdujemy jak poprzednio prostą jej odpowiadającą m_2, punkt N_2 będzie przecięciem prostych SN_1 i m_2.

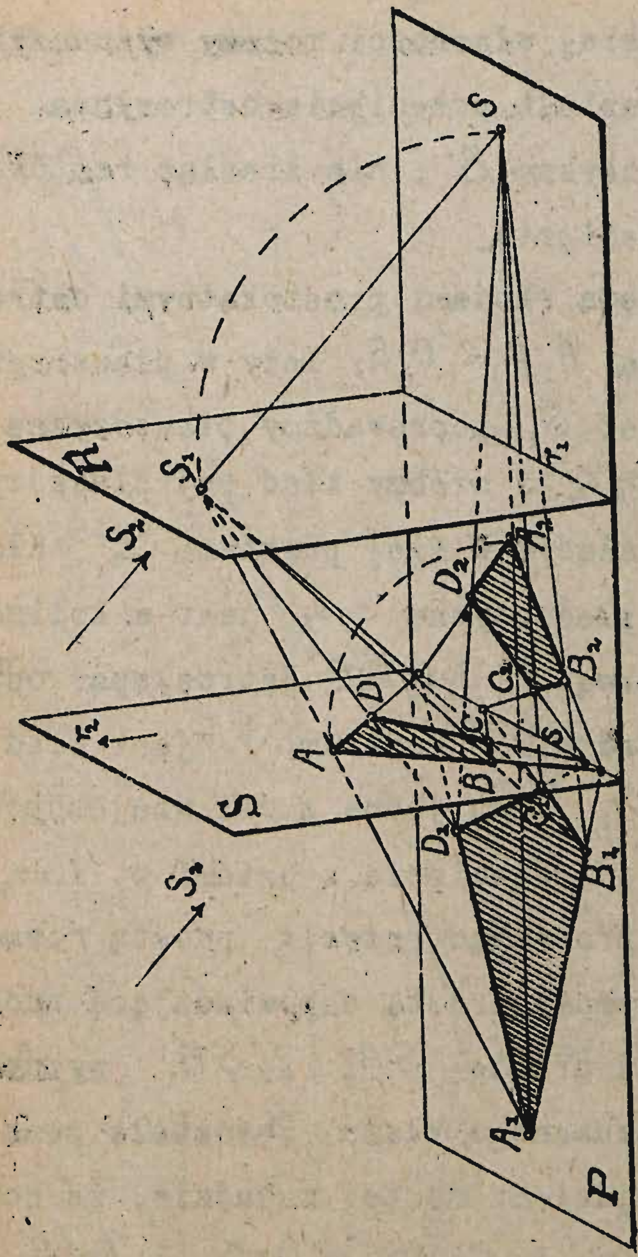
W szczególności jeżeli punkt Q_1 jest punktem niewłaściwym prostej m_1 /Rys.187/, to odpowiadający mu punkt Q_2 prostej m_2 należy do osi wzajemnej q_2, która w ten sposób może być wyznaczona.

Aby więc wykreślić oś wzajemną q_2, jeżeli dane są s, S i r_1 wyznaczamy punkt Q_2 odpowiadający punktowi niewłaściwemu prostej jakiejkolwiek m_1. W tym celu kreślimy najpierw prostą m_2 /równoległa do SR_1 przez M /, łączymy SQ_1^{∞} /t.j. przez S prowadzimy równoległą do m_1 / i w przecięciu z m_2 otrzymujemy punkt Q_2. Równoległa do s poprowadzona przez Q_2 jest osią wzajemną q_2.

Z równoległoboku SR_1MQ_2 wynika:

Odległość jednej z osi wzajemnych od środka kolineacji S i odległość drugiej od osi kolineacji s są odcinakmi równej długości lecz przeciwnego zwrotu.

§ 86. Rzut środkowy i kład figury płaskiej. Dwa rzuty figury płaskiej na tę samą płaszczyznę **P** będą w kolineacji środkowej, gdy jeden /ale tylko jeden/ z dwuch punktów S_1 i S_2 jest niewłaściwy. Przypadek ten jest szczególnie ważny, gdy punkt ten jest kierunkiem prostopadłym do jednej z płaszczyzn dwusiecznych kąta



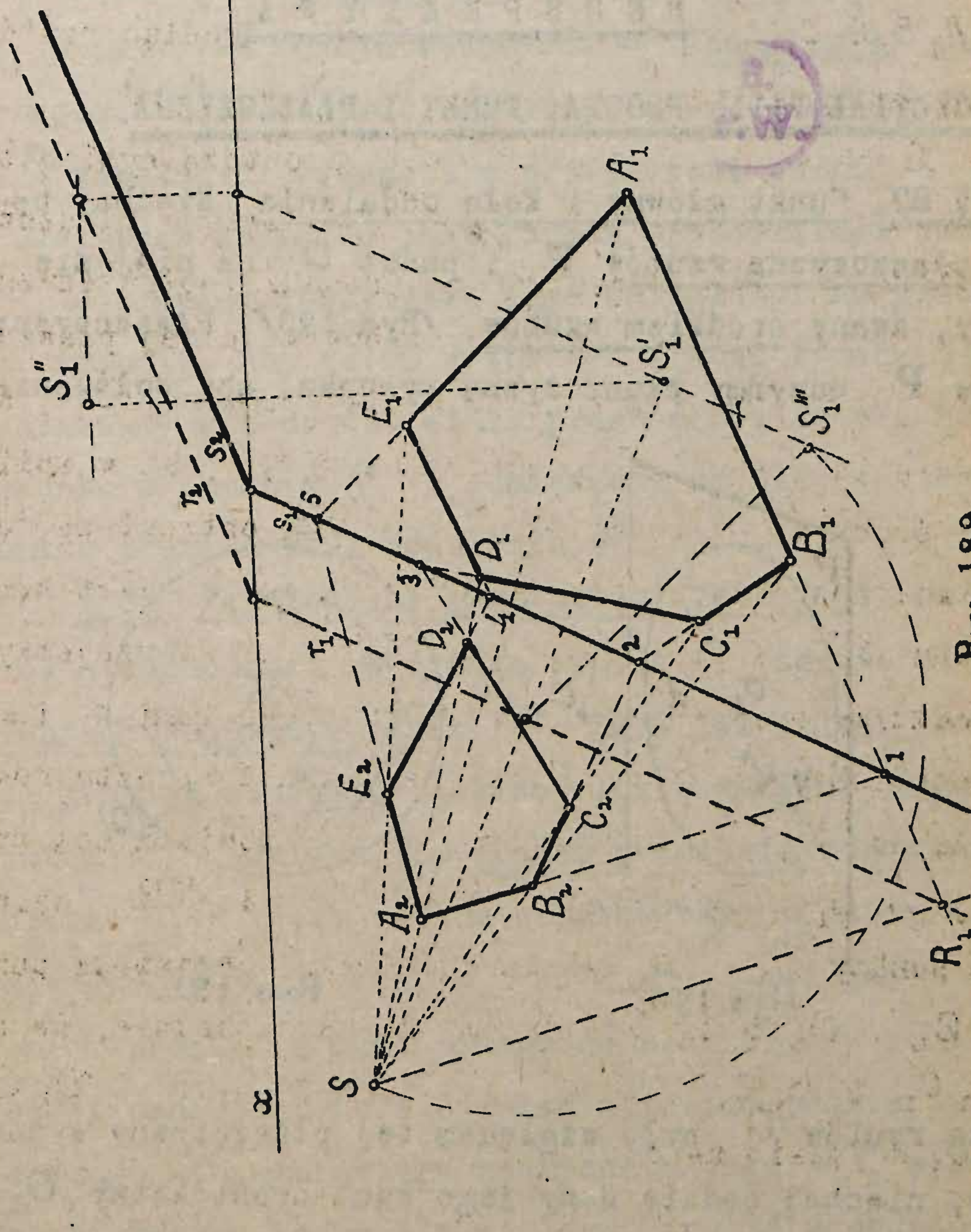
Rys. 188.

dwuściennego SP . Rzut figury $ABCD$... z tego punktu niewłaściwego jest poprostu kładem jej na płaszczyznę P przez obrót dokoła s /Rys. 188/. Stąd wniosek, że rzut środkowy figury płaskiej i jej kład na płaszczyznę rzutów są w kolineacji środkowej. Osią tej kolineacji jest ślad s płaszczyzny S , środkiem jest kład środka rzutów S_1 dokoła śladu r_1 płaszczyzny R poprowadzonej przez S_1 równolegle do S ; S , s i r_1 jak wiadomo /§83/ wyznaczają kolineację figur $A_1 B_1 C_1 D_1$..

i $A_2 B_2 C_2 D_2$ ...

Na zasadzie powyższej własności możemy wyznaczyć prawdziwą wielkość i kształt przecięcia ostrosłupa $S_1 A_1 B_1 C_1 D_1$ ...płaszczyzną S, nie kreśląc rzutów prostokątnych tego przecięcia.

Niech S_1' i S_1'' będą rzutami prostokątnymi ostrosłupa, którego podstawa $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ leży w płaszczyźnie P_1 /Rys.189/. Przez S_1 poprowadźmy płaszczyznę $r_1 r_2$ równoległą do $s_1 s_2$ i zróbmy kład tej płaszczyzny dokoła r_1 wraz z leżącym w niej punktem S_1. Kład przecięcia ostrosłupa płaszczyzną $s_1 s_2$ jest w kolineacji środkowej z podstawą $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ ostrosłupa, osią tej kolineacji jest ślad s_1, środkiem S jest kład punktu S_1, a prosta r_1 jest jedną z osi wzajemnych. Przedłużmy bok $A_1 B_1$ do przecięcia z osiami s i r_1 w punktach 1 i R_1, prowadząc przez 1 prostą równoległą do $R_1 S$, otrzymamy prostą odpowiadającą prostej $A_1 B_1$, na której proste SA_1 i SB_1 wyznaczą punkty A_2 i B_2 szukanego kładu. Pozostałe punkty C_2, D_2 i E_2 znajdziemy na tej zasadzie, że boki $B_1 C_1$ i $B_2 C_2$, $C_1 D_1$ i $C_2 D_2$, $D_1 E_1$ i $D_2 E_2$ przecinają się na osi s_1.



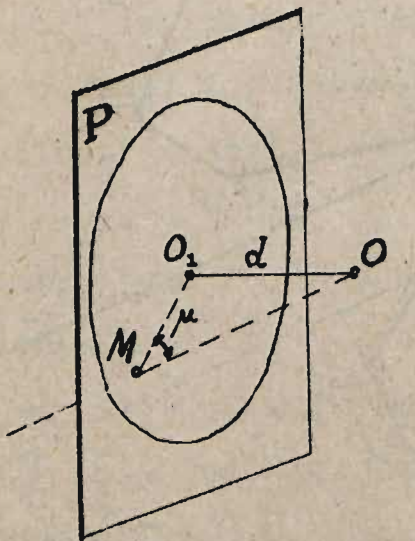
Rys. 189.

CZĘŚĆ III.

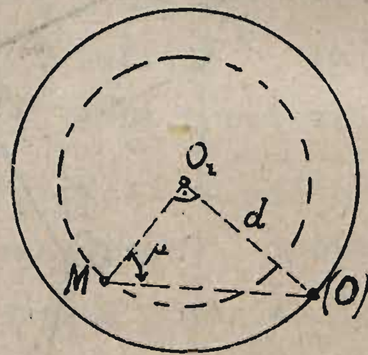
PERSPEKTYWA.

ROZDZIAŁ VIII. PROSTA, PUNKT I PŁASZCZYZNA.

§ 87. Punkt główny i koło oddalenia. Niechaj będzie płaszczyzna rzutów P i punkt O na niej nie leżący, zwany środkiem rzutów. /Rys.190/. Płaszczyznę rzutów P uczyńmy płaszczyzną rysunku, aby położenie



Rys. 190.



Rys. 191.

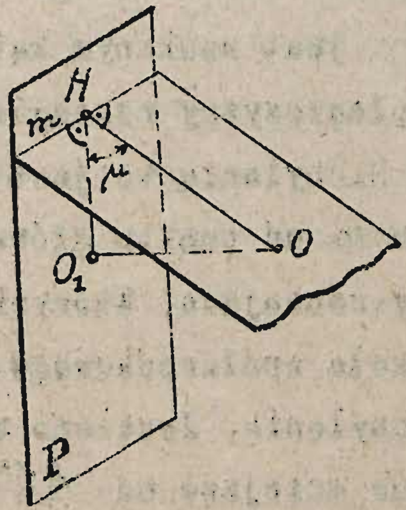
środka rzutów O było względem tej płaszczyzny wyznaczone, niechaj będzie dany jego rzut prostokątny O_1 na tę płaszczyznę oraz odległość d punktu O od niej.

Obierzmy zatem /Rys.191/na płaszczyźnie rysunku punkt O_1 zwany **punktem głównym** i z tego punktu jako środka, promieniem równym odcinkowi d /**oddalenie**/ zakreślmy koło, które nazywać będziemy **kołem oddalenia**. Koło to w zupełności wyznacza w przestrzeni punkt O, środek tego koła O_1 jest rzutem prostokątnym punktu O, a promień równy jest jego odległości od płaszczyzny rysunku. Aby zatem wyznaczyć środek rzutów O, wystawiamy w kierunku widza prostopadłą do płaszczyzny rysunku w punkcie O_1 i odmierzamy na niej od tego punktu promień koła oddalenia d.

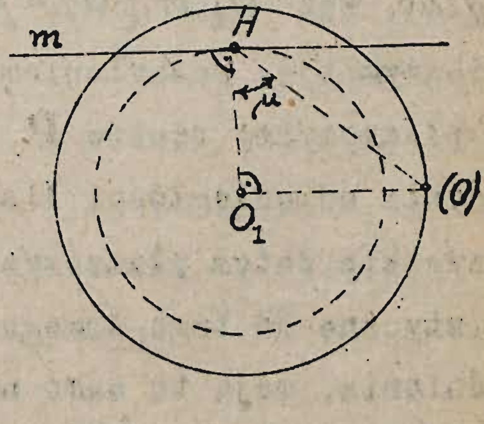
§ 88. Promienie i płaszczyzny rzucające. Każda prosta wychodząca ze środka rzutów O nazywa się **promieniem rzucającym**. Punkt M /Rys.190/i 191/, w którym promień rzucający jakikolwiek przebija płaszczyznę rzutów P, nazywa się **śladem promienia rzucającego**. Prosta O_1M jest rzutem prostokątnym promienia rzucającego OM, kąt $O_1MO = \mu$ jest zatem nachyleniem promienia rzucającego do płaszczyzny rzutów. Jeżeli dane jest koło oddalenia i ślad promienia rzucającego, to wyznaczymy nachylenie jego μ, wykreślając prawdziwy kształt i wielkość trójkąta prostokątnego O_1MO. Możemy sobie przytem wyobrazić, że trójkąt ten przez obrót dokoła O_1M przewrócony zostanie na płaszczyznę rzutów. Aby go wykreślić w tym położeniu wystawiamy w punkcie O_1 promień koła oddalenia prostopadły do O_1M i łączymy jego koniec / O / z punktem M, kąt O_1M / O /jest nachyleniem μ promienia OM do płaszczyzny rzutów P. Wszystkie promienie rzucające, których ślady M znajdują się na okręgu koła spółśrodkowego z kołem oddalenia, mają to samo nachylenie μ do płaszczyzny rzutów, nachylenie to zależy bowiem, jak to wynika z powyższego wykreślenia jedynie od odległości punktu M od punktu głównego O_1. Jest ono większe od $45°$ gdy punkt M znajduje się wewnątrz kołą oddalenia, równe $45°$, gdy ten punkt znajduje się na okręgu koła oddalenia, mniejsze od $45°$, gdy punkt M leży nazewnątrz koła oddalenia.

Każda płaszczyzna przechodząca przez środek rzutów O nazywa się <u>płaszczyzną rzucającą.</u> Prosta m, według której płaszczyzna rzucająca jakąkolwiek przecina płaszczyznę rzutów P, nazywa się <u>śladem płaszczyzny rzucającej</u> /Rys.192 i 193/. Z punktu głównego O_1 spuśćmy prostopadłą O_1H na m i połączmy spodek jej H ze środkiem rzutów O, na zasadzie twierdzenia o trzech prostopadłych prosta OH jest prostopadłą do śladu m, jest to zatem linja największego spadku płaszczyzny rzucającej, a kąt $O_1HO=\mu$

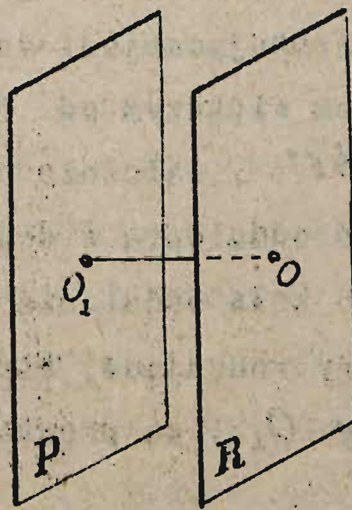
jest kątem linjowym kąta dwusiecznego między płaszczy-



Rys. 192.



Rys. 193.



Rys. 194.

zną rzutów i płaszczyzną rzucającą. Kąt ten wykreślimy z łatwością kreśląc prawdziwy kształt i wielkość trójkąta prostokątnego O_1HO. Możemy sobie przytem wyobrazić, że trójkąt ten, obracając się dokoła O_1H, przewrócony zostanie na płaszczyznę rzutów. Przez punkt główny O_1 prowadzimy zatem dwie proste: jedna O_1H prostopadła, druga $O_1(O)$

równoległa do śladu m , poczem łączymy spodek prostopadłej H z końcem / O / promienia leżącego na równoległej, kąt $O_1 H (O) = \mu$ jest szukanym kątem dwuściennym t.j. nachyleniem płaszczyzny rzucającej Om do płaszczyzny rzutów $\mathbf{P}$. Nachylenie to jest zależne jedynie od odległości śladu m od punktu głównego O_1 ; wszystkie zatem płaszczyzny rzucające, których ślady są styczne do tego samego koła spółśrodkowego z kołem oddalenia, mają to samo nachylenie. Jest ono większe od $45°$, równe $45°$, lub mniejsze od $45°$, zależnie od tego, czy to koło jest mniejsze od koła oddalenia, przystaje do niego lub też jest od niego większe. Inaczej mówiąc: płaszczyzna rzucająca jest do płaszczyzny rzutów nachylona pod kątem większym od $45°$, równym $45°$ lub mniejszym od $45°$, zależnie od tego, czy jej ślad przecina koło oddalenia w dwuch punktach różnych, jest styczny do koła oddalenia lub tego koła nie przecina. Płaszczyzny rzucające, których ślady przechodzą przez punkt główny O_1 , są prostopadłe do płaszczyzny rzutów $\mathbf{P}$.

Z pośród płaszczyzn rzucających na szczególną uwagę zasługuje płaszczyzna $\mathbf{R}$ /Rys.194/ równoległa do płaszczyzny rzutów $\mathbf{P}$: jest to (tak) zwana <u>płaszczyzna znikania</u>, jej ślad r jest prostą niewłaściwą płaszczyzny P .

§ 89. Rzut środkowy punktu i prostej. Niech będzie jakikolwiek punkt przestrzeni A, różny od punktu O. Ślad A' promienia rzucającego OA nazywa się rzutem środkowym punktu A. Stąd wynika, że każdy punkt przestrzeni A /z wyjątkiem środka rzutów O/ wyznacza swój rzut środkowy A'; natomiast rzut środkowy A' punktu A nie wyznacza tego punktu, wszystkie bowiem punkty promienia rzucającego OA' mają ten sam rzut środkowy A'.

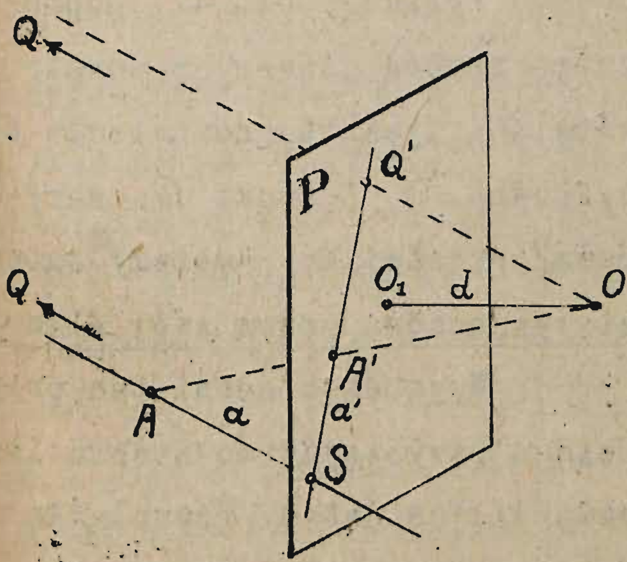
Niech będzie jakakolwiek prosta przestrzeni α, nie przechodząca przez środek rzutów O. Ślad α' płaszczyzny rzucającej $O\alpha$ nazywa się rzutem środkowym prostej α. Jeżeli prosta przechodzi przez środek rzutów, t.j. jeżeli jest prostą rzucającą, to rzutem jej jest punkt, a mianowicie ślad tej prostej rzucającej. W każdym przypadku prosta wyznacza swój rzut środkowy, natomiast rzut środkowy α' prostej α nie wyznacza wogóle tej prostej, wszystkie bowiem proste płaszczyzny rzucającej $O\alpha'$ mają ten sam rzut środkowy α'. Wyjątek stanowią jedynie proste, których rzut jest punktem, taki rzut wyznacza bowiem prostą rzucającą, której jest śladem.

Jeżeli punkt A leży na prostej α, to rzut A'

tego punktu leży na rzucie a' tej prostej. Ale nie nawzajem, bo jeżeli rzut punktu A leży na rzucie prostej a, to można stąd wnosić tylko, że punkt A leży w płaszczyźnie rzucającej prostą a.

Rzutem każdej prostej, leżącej w płaszczyźnie znikania R, jest prosta niewłaściwa r płaszczyzny rzutów P; rzutem każdego punktu leżącego w płaszczyźnie znikania, jest punkt leżący na prostej r, ta okoliczność tłomaczy nazwę "płaszczyzny znikania", gdyż rzuty wszystkich figur leżących w tej płaszczyźnie leżą na prostej niewłaściwej płaszczyzny rzutów, t.j. jak się często mówi, "znikają" w nieskończoności.

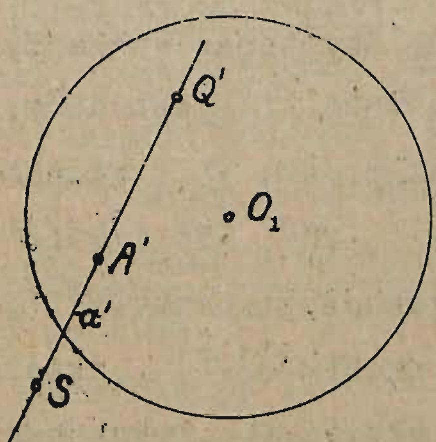
§ 90. Odwzorowanie prostej zapomocą jej śladu i punktu zbiegu. Widzieliśmy, że rzut środkowy punktu nie wyznacza tego punktu; aby więc punkt wyznaczyć, trzeba by o nim posiadać inną jeszcze wiadomość, np. znać odległość jego od swego rzutu. W szczególności wyznaczone będą przez swoje rzuty te punkty, których odległość od swoich rzutów będzie równa zeru lub nieskończoności. Pierwsze, które oznaczać będziemy literą S, opatrzoną ewentualnie wskaźnikiem, przystają do swoich rzutów, drugie, które oznaczac będziemy literą Q leżą w płaszczyźnie niewłaściwej, którą winniśmy uważać za daną. Otóż każda prosta ma jeden punkt pierwszej kategorji



Rys. 195.

S , zwany śladem, oraz jeden punkt drugiej kategorji Q , zwany kierunkiem.

Ślad i kierunek, jak wogóle każde inne dwa punkty, wyznaczają prostą. Widzimy zatem, że każda prosta będzie wyznaczona przez rzuty S i Q' tych dwuch swoich punktów. Punkty S i Q' jako rzuty punktów prostej α , muszą leżeć na jej rzucie α', który zatem jest przez te dwa punkty wyznaczony. Punkt S jest punktem przebicia płaszczyzny rzutów P prostą daną α /Rys.195/, punkt Q',

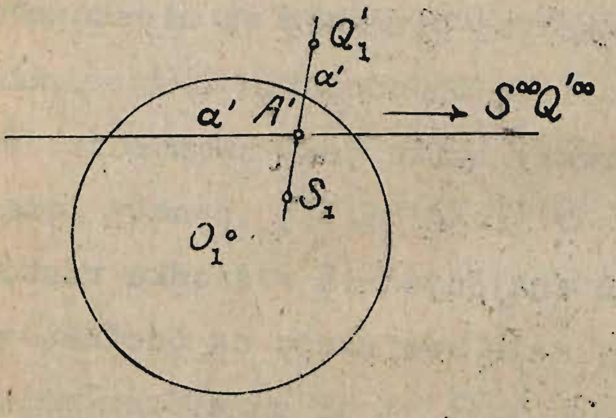


Rys. 196.

jako rzut punktu niewłaściwego prostej a , jest punktem w którym równoległa do a , przez punkt O poprowadzona, przebija płaszczyznę rzutów. Nawzajem punkty S i Q' wyznaczają prostą a : jest to równoległa do OQ' poprowadzona przez punkt S . Punkt Q' nazywamy punktem zbiegu /krańcem/ prostej a , możemy zatem powiedzieć, że prosta jest wyznaczona przez swój ślad S i swój punkt zbiegu Q' . Wyjątek stanowi ten przypadek, gdy ślad i punkt zbiegu przystając do siebie leżą w nieskończoności, prosta a jest wtedy równoległą do P i przez swój rzut a' nie jest dostatecznie wyznaczoną /§ 89/. Gdy punkty S i Q' przystają do siebie, ale nie leżą w nieskończoności, prosta a jest rzucającą.

§ 91. Odwzorowanie punktu. Aby teraz wyznaczyć położenie punktu A , którego rzut A' jest dany, poprowadźmy przez A jakąkolwiek prostą a i wyznaczmy jej ślad S i punkt zbiegu Q' . /Rys.195 i 196/ . Trzy punkty S , Q' i A' wyznaczają punkt A , albowiem wyznaczają prostą a i prostą OA' , które leżąc w płaszczyźnie rzucającej prostą a , wyznaczają punkt przecięcia A tych dwuch prostych. Tak więc punkt przestrzeni A będzie wyznaczony przez swój rzut A' oraz ślad S i punkt zbiegu Q' prostej, na której leży.

Trzy płaszczyzny: płaszczyzna rzutów P, płaszczyzna niewłaściwa Q i płaszczyzna znikania R wyznaczają na każdej prostej trzy punkty S, Q i R, które są zjednoczone tylko na prostych równoległych do P. Z wyjątkiem tedy tych prostych każda prosta zostanie podzieloną przez płaszczyzny P, Q i R na trzy części SQ; QR i RS, z których ostatnia jest skończoną, dwie zaś pierwsze są nieskończone. Rzuty tych trzech części są to odcinki SQ', $Q'R'$ i $R'S$; z tych pierwszy tylko jest skończony. Punkty, które leżą między S i Q, t.j. punkty leżące dla widza, którego oko znajduje się w środku rzutów, za płaszczyzną rzutów, mają swe rzuty na odcinku SQ'; punkty leżące między Q i R t.j. za widzem mają swe rzuty między punktami Q' i R' t.j. poza punktem zbiegu Q', wreszcie punkty leżące między R i S, t.j. między widzem i płaszczyzną rzutów, mają swe rzuty między punktami R' i S, t.j. przed śladem S. Teoretycznie rzeczy biorąc, punkty wszystkich tych trzech kategorji równie dobrze są wyznaczone przez swoje rzuty na prostej SQ'; jeżeli jednak dbać chcemy o to, aby rzuty punktów i prostych czyniły na widzu, którego oko jest umieszczone w środku rzutów, wrażenie punktów i prostych, od których pochodzą, to jedynie punkty, których rzuty znajdują się na odcinku SQ' uczynią zadość temu wymaganiu. Płaszczyznę rzutów obieramy bowiem na odległości najwyraźniejszego widzenia od środka rzutów /około 25 cm./, niektóre zatem punkty leżące między okiem a płaszczyzną rzutów będą leżały zbyt blisko oka, aby mogły być wyraźnie widziane; punkty zaś znajdujące się za okiem zgoła widziane być nie mogą. Tak



Rys. 197.

więc będzie wskazanem obierać w taki sposób płaszczyznę i środek rzutów, aby figura przestrzenną, którą odwzorować pragniemy znajdowała się za płaszczyzną rzutów.

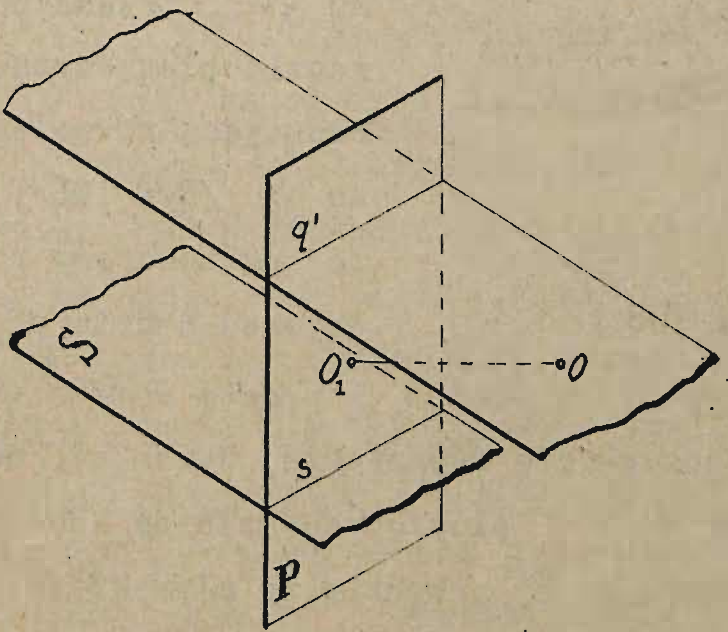
Oczywiście nie da się często uniknąć, aby pewne pomocnicze punkty wypadły w jednym z dwuch innych obszarów, na które przestrzeń została podzieloną przez płaszczyzny P , Q i R .

Co się tyczy prostych równoległych do płaszczyzny rzutów, to ponieważ ślad i punkt zbiegu takiej prostej są zjednoczone w nieskończoności /§ 90/, więc dla jej wyznaczenia potrzeba innego jej punktu A . /Rys 197/

Oprócz rzutu a' takiej prostej trzeba podać ślad S_1 i punkt zbiegu Q_1' prostej jakiejkolwiek a_1, która ją przecina.

§ 92. Odwzorowanie płaszczyzny zapomocą jej śladu i prostej zbiegu.

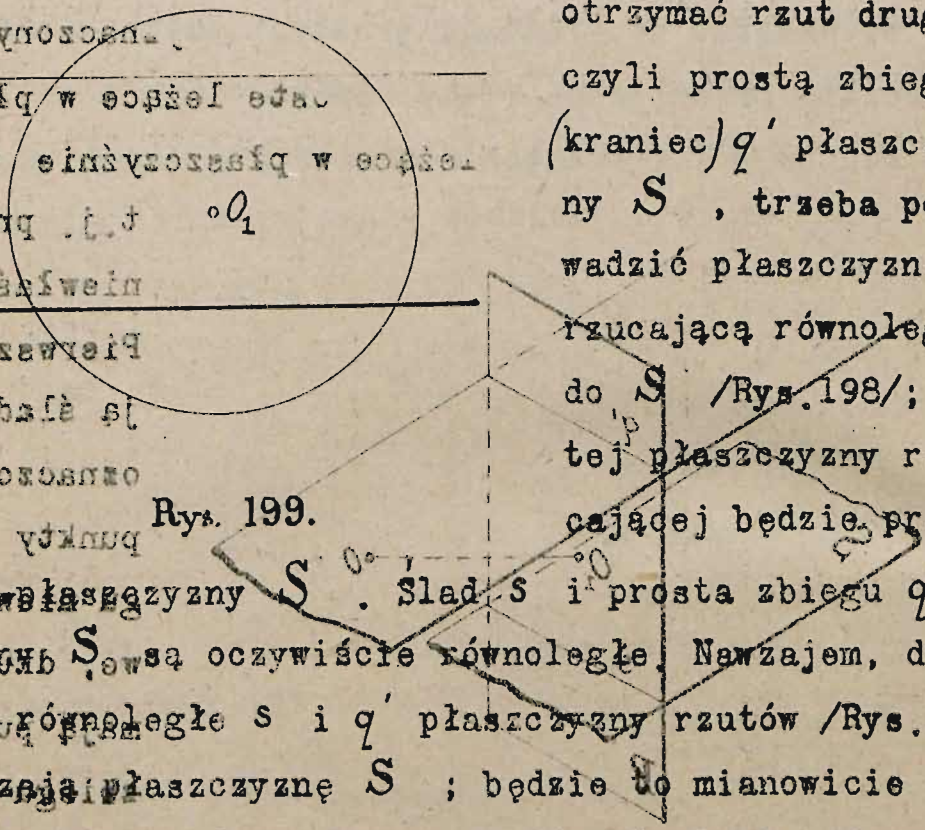
Są wszakże dwa rodzaje prostych, wyznaczonych dostatecznie przez swoje rzuty: proste leżące w płaszczyźnie rzutów P i proste leżące w płaszczyźnie Q, t.j. proste niewłaściwe. Pierwsze mają ślady nieoznaczone, punkty zbiegu niewłaściwe, drugie mają punkty zbiegu nieoznaczone, a ślady niewłaściwe. Z prostych tych obu rodzajów korzystamy dla odwzorowania płaszczyzn.



Rys. 198.

Na każdej płaszczyźnie S istnieje prosta s przecięcia z płaszczyzną rzutów, czyli ślad, oraz prosta niewłaściwa q , czyli ustawienie tej płaszczyzny.

Rzut pierwszej prostej przystaje do niej, aby otrzymać rzut drugiej czyli prostą zbiegu (kraniec) q' płaszczyzny S , trzeba poprowadzić płaszczyznę rzucającą równoległą do S /Rys.198/; ślad tej płaszczyzny rzucającej będzie prostą zbiegu płaszczyzny S . Ślad s i prosta zbiegu q' płaszczyzny S są oczywiście równoległe. Nawzajem, dwie proste równoległe s i q' płaszczyzny rzutów /Rys.199/ wyznaczają płaszczyznę S ; będzie to mianowicie płaszczyzna poprowadzona przez s równolegle do płaszczyzny Oq'.



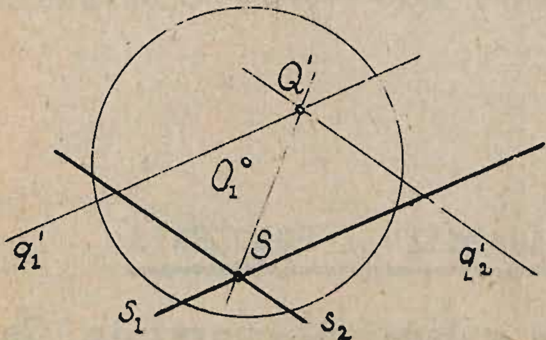
Rys. 199.

Jeżeli proste s i q' są zjednoczone, to płaszczyzna jest rzucająca, t.j. przechodzi przez środek rzutów O, wyjątek stanowią jednak płaszczyzny, których ślad i proste zbiegu są zjednoczone w nieskończoności, są to płaszczyzny równoległe do płaszczyzny rzutów. Dla ich wyznaczenia potrzeba podać jeden ich punkt jakikolwiek, leżący na prostej przebijającej płaszczyznę daną / S , Q' , A' /. –

ROZDZIAŁ IX. ZAGADNIENIA POŁOŻENIA.

§ 93. Prosta leżąca w danej płaszczyźnie. Jeżeli prosta SQ leży w płaszczyźnie sq' , to jej ślad S leży na śladzie s , a punkt zbiegu Q' na prostej zbiegu q' płaszczyzny. Aby więc w danej płaszczyźnie sq' poprowadzić prostą jakąkolwiek, wystarczy obrać na śladzie s dowolny punkt S , a na prostej zbiegu q' dowolny punkt Q' ; prosta SQ' będzie leżała w płaszczyźnie sq' . Aby przez prostą SQ' poprowadzić płaszczyznę jakąkolwiek, wystarczy przez S poprowadzić dowolną prostą s , a przez Q' prostą do niej równoległą q' , płaszczyzna sq' będzie przechodziła przez prostą SQ' .

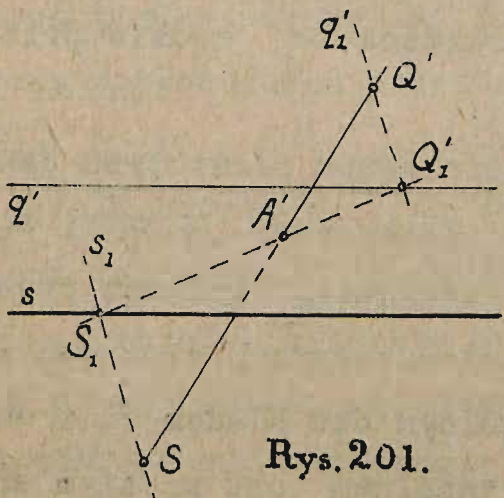
§ 94. Prosta przecięcia dwuch płaszczyzn danych. Niech będą /Rys. 200/ dwie płaszczyzny $s_1q'_1$ i $s_2q'_2$; mamy znaleźć ich prostą przecięcia. Ponieważ prosta szukana jest wspólna obu płaszczyznom, więc jej ślad S musi być punktem wspólnym obu śladom s_1 i s_2 , a punkt zbiegu Q' punktem wspólnym obu prostym zbiegu



Rys.200.

q_1' i q_2'. Zauważmy, że dla rozwiązania tego zadania nie korzystamy z koła oddalenia. W zadaniach tej kategorji, zwanych zadaniami położenia będziemy odtąd opuszczali koło oddalenia, stwiedzając przez to, że rozwiązanie tych zadań wyda się poprawnym dla oka umieszczonego gdziekolwiek w przestrzeni.

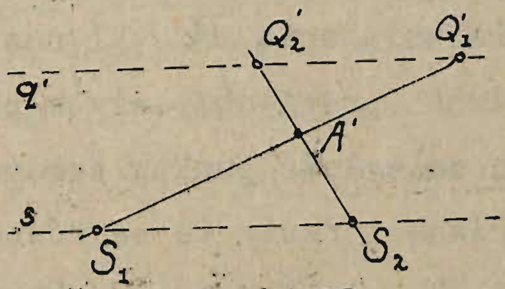
§ 95. Punkt przebicia płaszczyzny prostą. Niech będzie /Rys.201/ płaszczyzna sq' i prosta na niej nie leżąca SQ'. Aby wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny sq' prostą SQ', poprowadźmy przez tę ostatnią płaszczyznę jakąkolwiek $s_1 q_1'$. W tym celu prowadzimy przez S prostą dowolną s_1, a



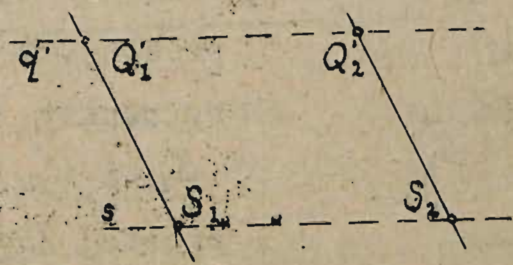
Rys.201.

przez Q' prostą do niej równoległą q_1'. Wyznaczmy prostą S_1Q_1', według której płaszczyzny sq' i s_1q_1' się przecinają; punkt przecięcia tej prostej z daną prostą SQ' będzie rzutem szukanego punktu A.

§ 95. Proste przecinające się. Jeżeli dwie proste się przecinają, to wyznaczają wspólną płaszczyznę, jej ślad łączy ślady danych prostych, a prosta zbiegu ich punkty zbiegu, wiemy już, że ślad i prosta zbiegu płaszczyzny muszą być równoległe. Tak więc warunkiem koniecznym i dostatecznym przecinania się dwuch prostych S_1Q_1' i S_2Q_2' /Rys.202/ jest ten aby prosta q', która łączy punkty zbiegu Q_1' i Q_2' była równoległa do prostej s, która łączy ślady S_1 i S_2 tych prostych.



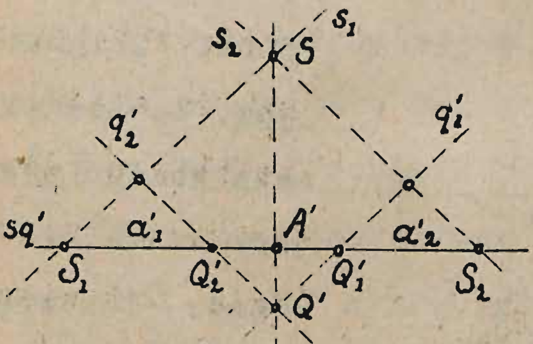
Rys. 202.



Rys. 203.

Rozważmy jeszcze dwa przypadki szczególne:

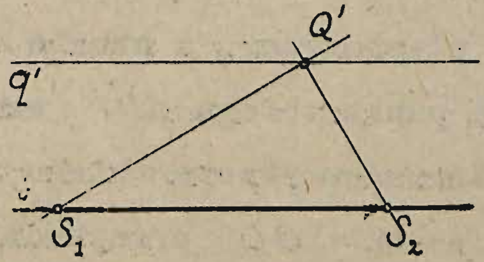
1/ Odcinki $S_1 Q_1'$ i $S_2 Q_2'$ są równe, równoległe i w te same zwrócone strony /Rys.203/. Ponieważ wtedy proste $s \equiv S_1 S_2$ i $q' \equiv Q_1' Q_2'$ będą równoległe, więc proste $S_1 Q_1'$ i $S_2 Q_2'$ się przecinają. Rzut punktu ich przecięcia jest punktem niewłaściwym, zatem punkt przecięcia leży w płaszczyźnie zniakania R. I nawzajem, jeżeli punkt przecięcia dwuch prostych leży w płaszczyźnie znikania R, to odległość punktu zbiegu od śladu na obu rzutach są równe i rzuty te są równoległe.



Rys. 204.

2/ Rzuty a_1' i a_2' obu prostych leżą na tej samej prostej, t.j. cztery punkty S_1, Q_1', S_2 i Q_2' leżą na prostej /Rys.204/. Proste się przecinają albowiem leżą w tej samej płaszczyźnie rzucającej, wyznaczenie rzutu punktu przecięcia jednak zawodzi, albowiem punkt przecięcia rzutów a_1' i a_2' jest nieoznaczony. Poprowadźmy przez prostą $S_1 Q_1'$ płaszczyznę jakąkolwiek $s_1 q_1'$, a przez prostą $S_2 Q_2'$ płaszczyznę jakąkolwiek $s_1 q_2'$. Trzy płaszczyzny: $s_1 q_1'$, $s_2 q_2'$ i płaszczyzna rzucająca sq', przecinają się po dwie według trzech prostych przechodzących przez jeden punkt który jest punktem szukanym, albowiem dwie z tych prostych są to S_1Q_1' i S_2Q_2'. Jego rzut A' leży w przecięciu prostej $s \equiv q'$ z prostą SQ', według której przecinają się płaszczyzny pomocnicze s_1q_1' i s_2q_2'.

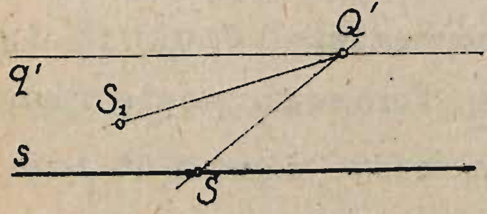
§ 97. Proste równoległe. Ponieważ proste równoległe mają wspólny punkt niewłaściwy, więc rzut tego punktu czyli ich punkt zbiegu jest wspólnym punktem ich rzutów. Proste równoległe mają zatem punkt zbiegu wspólny. Nawzajem dwie proste, mające punkt zbiegu wspólny Q' są równoległe gdyż każda z nich jest równoległa do prostej rzucającej OQ'. W szczególności, proste, mające punkt zbiegu w punkcie głównym O_1 są prostopadłe do płaszczyzny rzutów.



Rys. 205.

Aby przez dwie proste równoległe S_1Q_1' i S_2Q_2' /Rys.205/ poprowadzić płaszczyznę, łączymy ślady S_1 i S_2 prostą s, która będzie śladem i przez wspólny punkt zbiegu Q' równolegle do s prowadzimy prostą q', która będzie prostą zbiegu szukanej płaszczyzny.

§ 98. Proste i płaszczyzny równoległe. Prosta równoległa do płaszczyzny ma swój punkt zbiegu na prostą zbiegu płaszczyzny. W samej rzeczy, prostą równoległą do danej płaszczyzny nazywamy prostą równoległą do jakiejkolwiek prostej tej płaszczyzny. Otóż prosta jakakolwiek

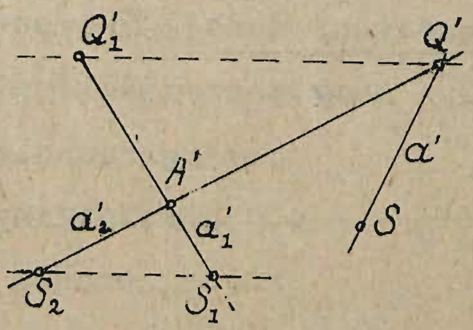


Rys. 206.

SQ' /Rys.206/ płaszczyzny sq' ma swój punkt zbiegu Q' na prostej zbiegu q' płaszczyzny, a prosta S_1Q_1 równoległa do SQ' ma z nią punkt zbiegu Q' wspólny, który zatem leży na q'. Nawzajem prosta zbiegu q' płaszczyzny równoległej do prostej SQ' przechodzi przez jej punkt zbiegu Q'. W szczególności płaszczyzny równoległe do OO_1, t.j. prostopadłe do płaszczyzny rzutów mają proste zbiegu przechodzące przez punkt główny O_1.

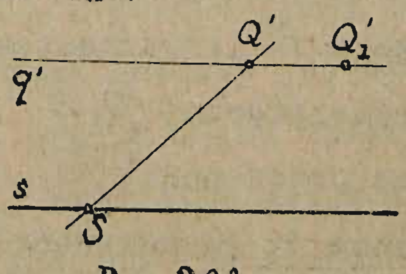
§ 99. Płaszczyzny równoległe. Ponieważ płaszczyzny równoległe mają wspólną prostą niewłaściwą, więc rzut tej prostej, czyli ich prosta zbiegu, jest obu tym płaszczyznom wspólna. Płaszczyzny równoległe mają prostą zbiegu wspólną.

§ 100. ZADANIE. Przez dany punkt poprowadzić prostą równoległą do prostej danej. Niech będzie prosta SQ' oraz punkt A, dany przez swój rzut A' leżący na rzucie α_1' prostej S_1Q_1' /Rys.207/; rzut α_2' szukanej prostej otrzymamy przez połączenie punktu A' z punktem Q'; pozostaje wyznaczyć jedynie ślad s_2 tej prostej. Ponieważ prosta szukana leży z prostą S_1Q_1' w jednej płaszczyźnie, więc jej ślad otrzymamy, prowadząc przez S_1 równoległą do $Q'Q_1'$ do przecięcia z rzutem α_2'. Zauważmy, że w zadaniu tym punkt S nie był potrzebny, do wyznaczenia bowiem prostej α_2 wystarcza znać kierunek prostej danej, który jest całkowicie wyznaczony przez jej punkt zbiegu Q'. Uwaga ta w równej mierze dotyczy i następnego zadania.



Rys. 207.

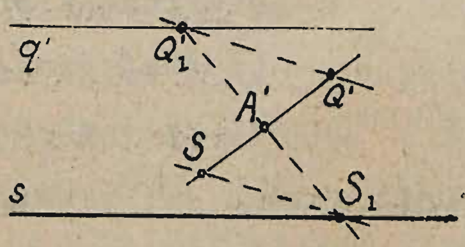
§ 101. ZADANIE. Przez prostą daną poprowadzić płaszczyznę równoległą do innej prostęj danej. Przypuśćmy że przez prostą SQ' mamy przeprowadzić płaszczyznę równoległą do prostych, których kierunek jest



Rys. 208.

wyznaczony przez dany ich punkt zbiegu Q_1' /Rys.208/. Prosta zbiegu q' szukanej płaszczyzny musi przechodzić przez Q' gdyż prosta SQ' ma leżeć w tej płaszczyźnie, musi on jednak przechodzić również i przez Q_1' gdyż proste, których ten punkt jest punktem zbiegu są równoległe do tej płaszczyzny; prosta zbiegu q' będzie to zatem prosta $Q'Q_1'$. Ślad s szukanej płaszczyzny otrzymamy prowadząc przez S równoległą do q'.

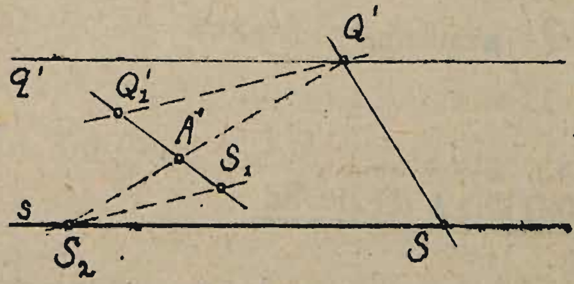
§ 102. ZADANIE. Przez punkt dany poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny danej. Przypuśćmy, że przez punkt A /A', SQ'/ mamy poprowadzić płaszczyznę równoległą do płaszczyzny, której prosta zbiegu q' jest dana /Rys.209/. Poprowadźmy najpierw przez punkt A jakąkolwiek prostą równoległą do tej płaszczyzny. W tym celu obieramy na q' dowolny punkt Q_1', łączymy go z A' i wyznaczamy ślad S_1 tej prostej jako przecięcie prostej $Q_1'A'$ z równoległą do $Q'Q_1'$ poprowadzoną przez punkt S. Punkt S_1 jest jednym z punktów śladu s płaszczyzny szuka-



Rys. 209.

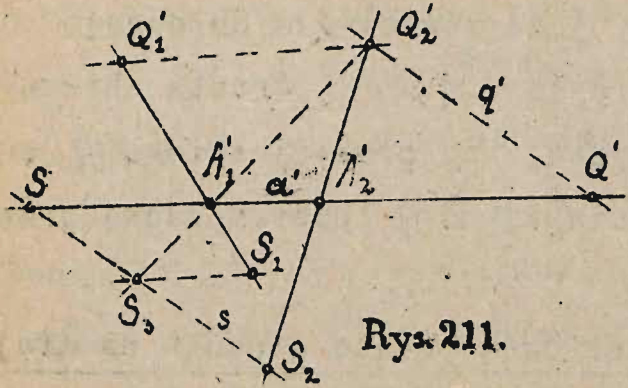
nej, gdyż płaszczyzny ta, jako równoległa do danej, przechodzić musi przez prostą S_1Q_1'. Prosta zbiegu szukanej płaszczyzny przystaje do prostej zbiegu q', ślad zaś s będzie równoległą do q' poprowadzoną przez S_1.

<u>§ 103. ZADANIE. Przez daną prostą i punkt na niej nie leżący poprowadzić płaszczyznę.</u> Niech będzie prosta SQ' /rys.210/ oraz punkt/ A', S_1Q_1'/ poprowadźmy przezeń prostą S_2Q' równoległą do SQ' /§ 100/, poczem przez proste równoległe SQ' i S_2Q' poprowadźmy płaszczyznę sq' /§ 97/.



Rys. 210.

<u>§ 104. ZADANIE. Poprowadzić prostą przez dwa punkty dane.</u> Niech będą dwa punkty / A_1', S_1Q_1' / i / A_2', S_2Q_2'/ /rys.211/, prosta $A_1'A_2'$ będzie rzutem a' szukanej prostej, mamy znaleźć jej ślad, i punkt zbiegu. Przez punkt A_1 i prostą S_2Q_2' poprowadźmy płaszczyznę; prosta A_1A_2 będzie leżała w tej płaszczyźnie, t.j. będzie miała ślad S na śladzie s, a punkt zbiegu Q' na prostej zbiegu q' tej płaszczyzny. Prowadzimy zatem



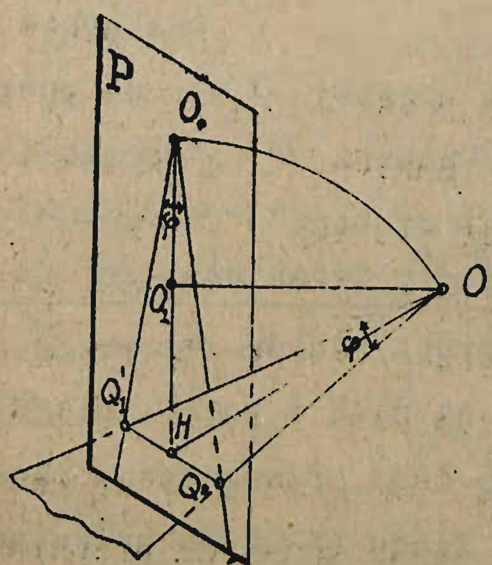
Rys. 211.

przez A_1 równoległą do S_2Q_2' i przez proste równoległe S_2Q_2' i S_3Q_2' płaszczyznę sq', której ślad s wyznaczy na rzucie α' ślad S, a prosta zbiegu q' punkt zbiegu Q' szukanej prostej.

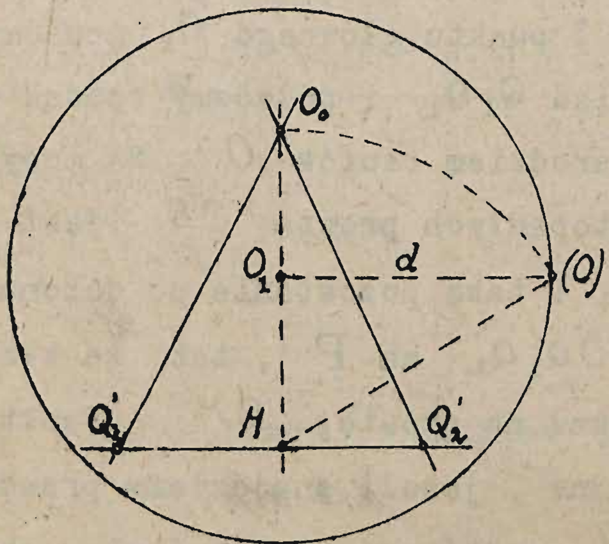
ROZDZIAŁ X. ZAGADNIENIA MIAROWE.

§ 105. Kłady figur, leżących w płaszczyźnie rzucającej. Zagadnienia dotyczące prawdziwej wielkości i kształtu figur dają się łatwo rozwiązać, jeżeli te figury leżą w płaszczyźnie rzucającej. Należą tu przedewszystkiem dwa zadania.

1/ Wyznaczyć kąt między dwiema danemi prostemi. Przez środek rzutów O poprowadźmy do danych prostych /przecinających się lub skośnych/ proste równoległe OQ_1' i OQ_2' /Rys.212/, trzeba znaleźć wielkość kąta między temi prostemi. W tym celu obróćmy płaszczyznę rzucającą $OQ_1'Q_2'$ dokoła jej śladu $Q_1'Q_2'$ aż do przystania z płaszczyzną rzutów P . Ponieważ punkty Q_1' i Q_2' przy tym obrocie nie zmienią swego położenia, wystarczy zatem wyznaczyć kład środka rzutów O na płaszczyznę P . Z punktu głównego O_1 spuśćmy prostopadłą O_1H na ślad $Q_1'Q_2'$ i połączmy spodek tej prostopadłej H ze środkiem rzutów O . Na mocy twierdzenia o trzech prostopadłych prosta OH jest również prostopadła do $Q_1'Q_2'$ i taką pozostanie po dokonanym kładzie płaszczyzny $OQ_1'Q_2'$ na P , tak, że kład O_o punktu O będzie leżał na prostej OH . Punkt ten będzie zatem wyznaczony , jeżeli znajdziemy prawdziwą długość odcinka OH , który jest promieniem obrotu punktu O . Odcinek ten jest atoli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego OO_1H , którego obie prostopadłe są dane, jedna O_1H , jest odległością punktu głównego O_1 od śladu $Q_1'Q_2'$, druga O_1O jest oddaleniem,



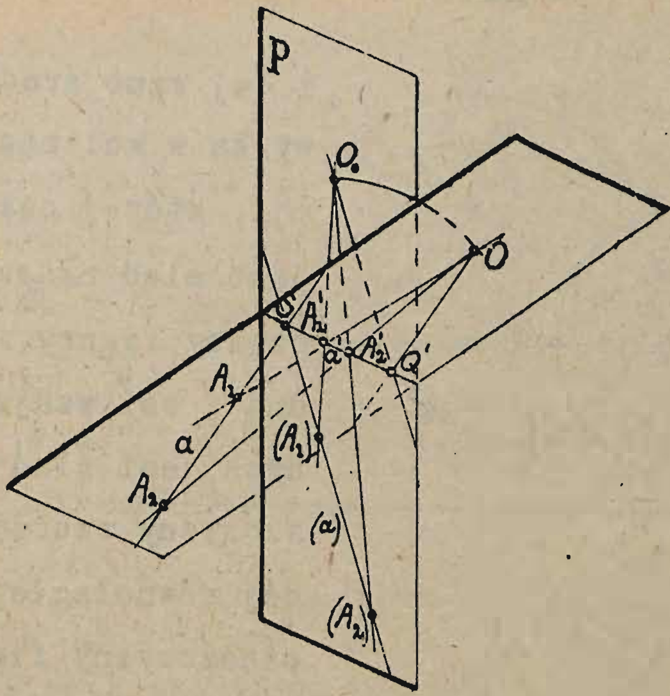
Rys. 212.



Rys. 213.

Jeżeli zatem /Rys. 213/ poprowadzimy promień koła oddalenia równoległy do $Q_1'Q_2'$ i koniec tego promienia / O / połączymy z punktem H, a następnie odmierzymy odcinek / O /H na prostej O_1H od punktu H, to otrzymamy kład O_o punktu O. Łącząc ten punkt z Q_1' i Q_2' otrzymamy kąt szukany $\varphi = Q_1' O_o Q_2'$.

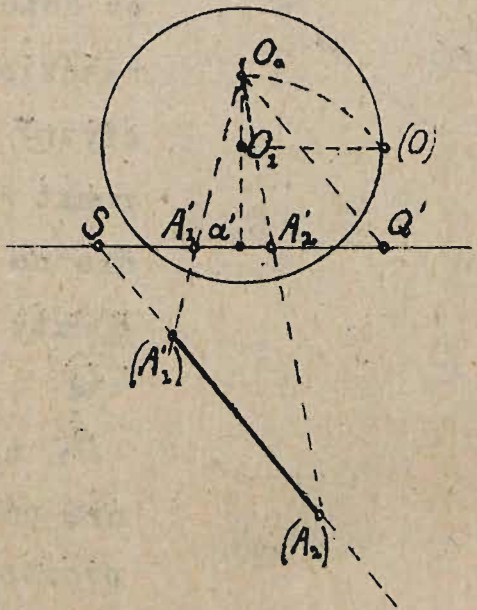
2/ <u>Wyznaczyć odległość między dwoma punktami danemi</u>. Możemy przypuścić, że oprócz rzutów A_1' i A_2' danych punktów A_1 i A_2 dane są ślad i punkt zbiegu prostej α, która je łączy /§ 104/. Płaszczyznę rzucającą $O\alpha$ obróćmy dokoła jej śladu α aż do przystania z płaszczyzną rzutów P /Rys. 214 i 215/. Sposoben przed chwilą wskazanym znajdźmy kład O_o punktu O. W płaszczyźnie $O\alpha$ leżą dwie proste równoległe: OQ_1' i α,



Rys. 214.

oraz proste rzucające OA_1 i OA_2 ; po dokonanym kładzie płaszczyzny $O\alpha$ punkt O upadnie na O_0 , punkty S , Q' , A_1' i A_2' nie zmienią położenia, proste O_0Q' i /α/jako kłady prostych równoległych OQ' i α pozostaną równoległe. Jeżeli tedy połączymy O_0Q' , to prosta /α/ poprowadzona przez S równolegle do O_0Q' będzie kładem prostej α ; proste zaś O_0A_1' i O_0A_2' wyznaczą na tym kładzie punkty /A_1/ i /A_2/, których odległość jest szukaną.

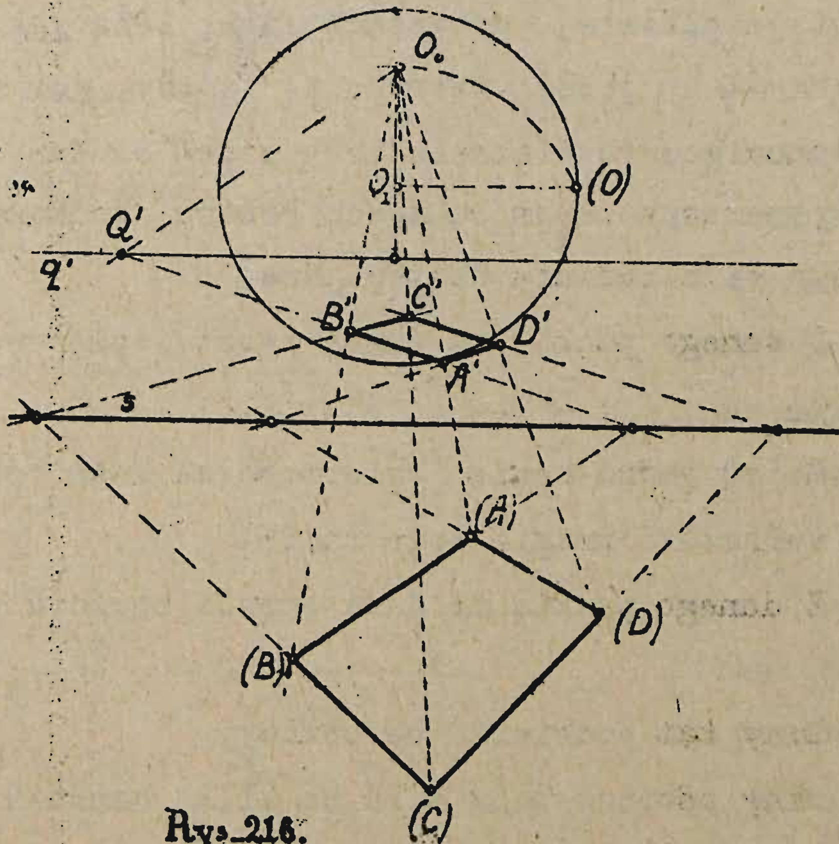
<u>§ 106</u>. <u>Kłady figur leżących w płaszczyźnie jakiejkolwiek</u>. Na zasadzie § 86 Rys.198 kład figury płaskiej



Rys. 215.

i jej rzut środkowy są w kolineacji, której osią jest ślad płaszczyzny figury, jedną z osi wzajemnych jest ślad płaszczyzny rzucającej równoległej do płaszczyzny figury, a środkiem jest kład środka rzutów dokoła tego śladu. Mając więc rzut $A'B'C'D'$ figury płaskiej $ABCD$ /Rys.216/ oraz ślad S i prostą zbiegu q' jej płaszczyzny, wyznaczamy kład /A//B//C//D/ tej figury na zasadzie kolineacji, której osią jest S, jedną z osi wzajemnych jest q', a kład O_o środka rzutów O jest środkiem.

§ 107. Zadania miarowe dotyczące figur leżących w danej płaszczyźnie sq'. Jeżeli zadanie dotyczy figury leżącej w danej płaszczyźnie sq', to możnaby je rozwiązać zapomocą trzech kolejnych czynności:



Rys. 216.

1/ kładu danej figury płaskiej na płaszczyznę rzutów, 2/ rozwiązania zadania w tej płaszczyźnie i 3/ powrotu uzupełnionej przez rozwiązanie zadania figury do pierwotnego jej położenia. Metoda taka byłaby jednak zawiłą i wymagającą dużo miejsca, które niezawsze mamy do dyspozycji. Byłoby pożądanem umieć bezpośrednio rozwiązywać zadania dotyczące figur leżących w danej płaszczyźnie, t.j. kreślić w płaszczyźnie Sq' tak jak kreślimy w płaszczyźnie rysunku. W tym celu potrzeba i wystarcza umieć rozwiązać zasadnicze zadanie wykreślne geometrji płaskiej, dotyczące figur leżących w płaszczyźnie sq', jeżeli zarówno te figury, jak i elementy stanowiące rozwiązanie tych zadań są dane lub mają być wyznaczone zapomocą swych rzutów środkowych. Rozwiążemy więc zadania następujące:

1/ Z danego punktu do danej prostej poprowadzić równoległą,

2/ Mając jedno ramię i wierzchołek kąta równego danemu, wykreślić drugie jego ramię,

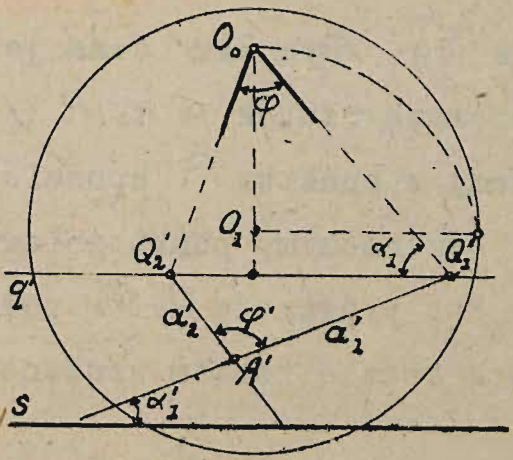
3/ Z danego punktu na daną prostą spuścić prostopadłą,

4/ Dany kąt podzielić na połowy,

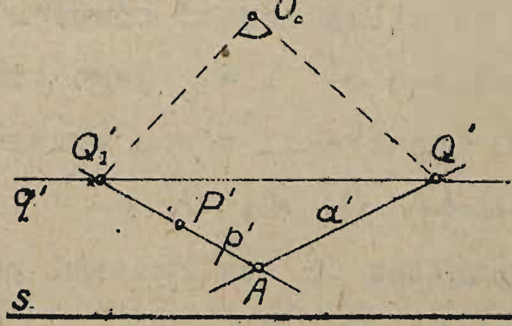
5/ Dany odcinek podzielić na kilka części równych,

6/ Na danej prostej od danego jej punktu odmierzyć odcinek równy danemu. Wszystkie te zadania mamy rozwiązać nie kładąc płaszczyzny sq' na płaszczyznę rzutów.

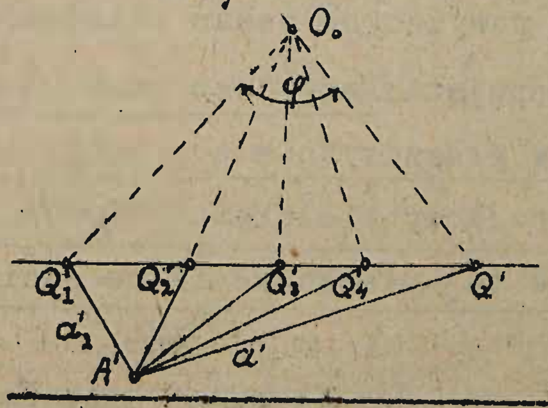
§ 168. Zadania płaskie zasadnicze dotyczące kątów. Pierwsze z powyższych zadań zasadniczych rozwiązaliśmy już w § 97 Rys.205. Aby rozwiązać zadania 2, 3, i 4 dotyczące kątów, zauważmy, że dwie proste a_1 i a_2 przecinające się w punkcie A tworzą kąt, którego prawdziwa wielkość równa jest kątowi $Q_1'O_o Q_2'$ /Rys.217/.



Rys. 217.



Rys. 218.



Rys. 219.

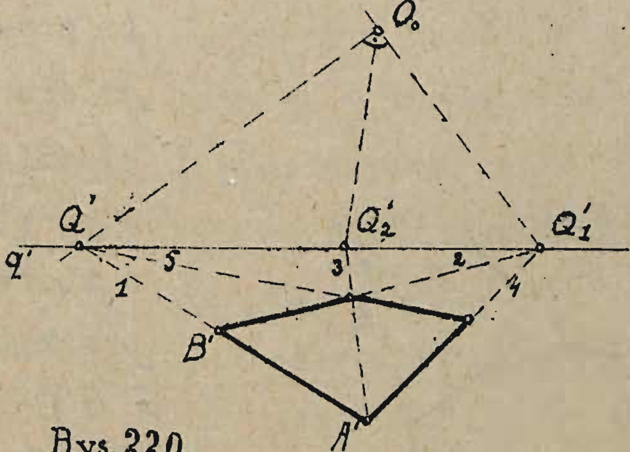
Przypuśćmy teraz, że zapomocą rzutów a_1' i A' dane są w płaszczyźnie sq' jedno ramię a_1 i wierzchołek A kąta równego danemu kątowi φ; mamy wykreślić drugie ramię tego kąta /Rys. 217/. Przedłużmy a_1' do przecięcia z q' w punkcie Q_1', połączmy $Q_1' O_\circ$ i odmierzmy kąt $Q' O_\circ Q_2' = \varphi$, wreszcie połączmy $Q_2' A' \equiv a_2'$. Prawdziwa wielkość kąta między prostymi a_1 i a_2 będzie równa φ.

Jeżeli w płaszczyźnie sq' /Rys.218/ dana jest prosta a i punkt P /zapomocą rzutów a' i P' / to na tej samej zasadzie możemy z punktu P spuścić prostopadłą p na prostą a. Wyznaczymy punkt zbiegu Q' prostej a i wykreśliwszy kąt prosty $Q'O_o Q_1'$ połączymy $Q_1'P$ prostą p', która będzie rzutem szukanej prostopadłej.

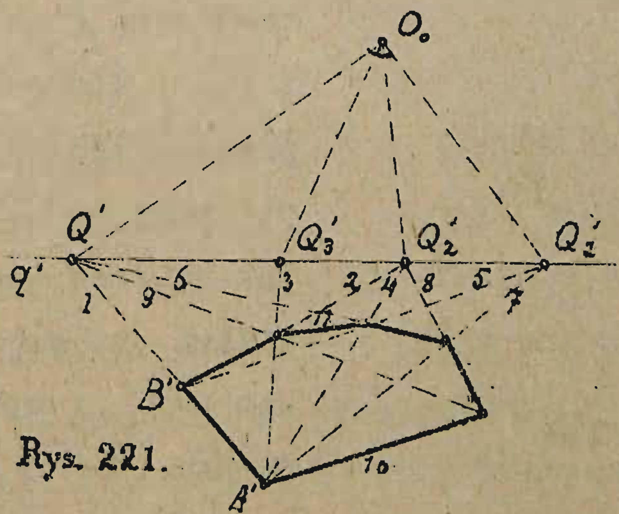
Gdy chcemy kąt A /dany zapomocą rzutów swych ramion a' i a_1' / podzielić na kilka części równych /Rys. 219/, znajdujemy punkty zbiegu Q' i Q_1' jego ramion i podzieliwszy kąt $Q'O_o Q_1'$ na części równe wyznaczamy na prostej zbiegu q' punkty Q_2', Q_3', Q_4' ..... Proste, które łączą te punkty z punktem A' są rzutami prostych dzielących kąt / a a' / na części równe.

Jako zastosowanie powyższych zadań zasadniczych rozwiążmy zadanie następujące: Dany jest rzut $A'B'$ odcinka AB leżącego w płaszczyźnie o prostej zbiegu q'; wykreślić rzut środkowy wielokąta / $n=4$, 6, 8 / foremnego zbudowanego w tej płaszczyźnie na odcinku AB jak na boku.

Ślad płaszczyzny może nie być dany, gdyż nie jest on potrzebny w żadnym z wykreśleń Rys. 205, 217, 218, i 219. Punkty zbiegu Q' boku AB /Rys.220, 221, 222/ połączmy z kładem O_o środka rzutów, odmierzmy kąt pro-



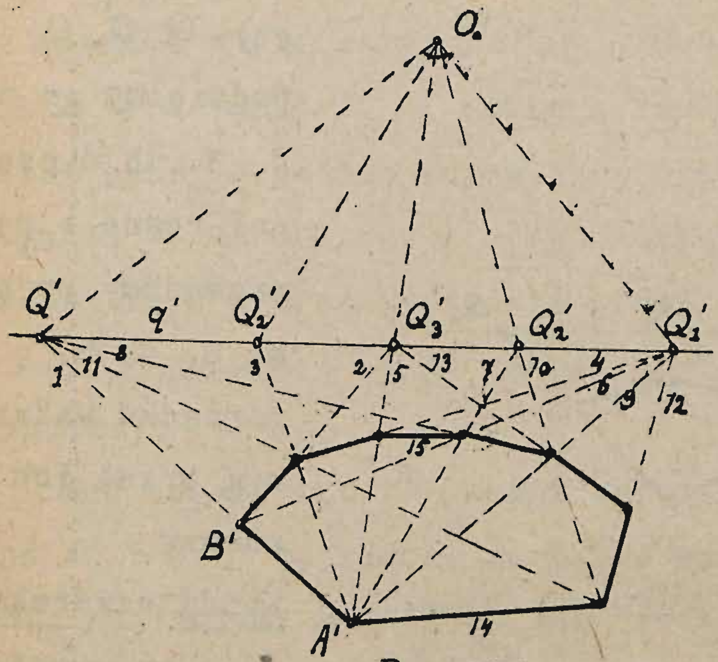
Rys. 220.



Rys. 221.

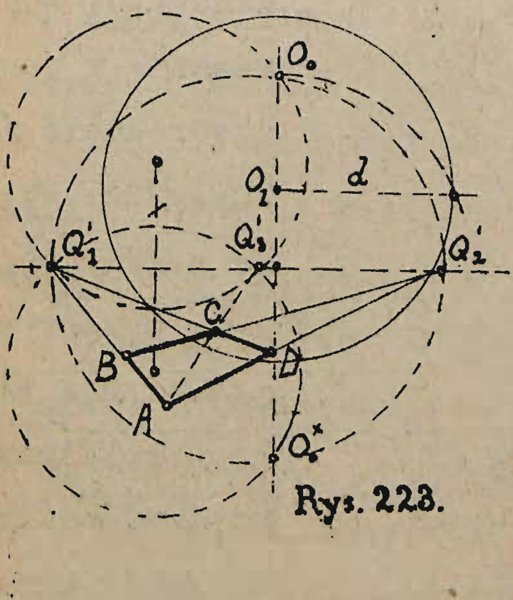
sty $Q' O_o Q'_1$ podzielmy go na 2, 3 lub 4 części równe i poprowadźmy proste 2, 3, 4, 5... w porządku wskazanym przez ich numery.

Każdy czworokąt może być uważany za rzut środkowy kwadratu. W samej rzeczy, w danym czworokącie $A'B'C'D'$ /Rys. 222/ wyznaczmy punkty Q'_1 i Q'_2 w których przecinają się jego boki przeciwległe i uważajmy te punkty za punkty zbiegu boków



Rys. 222.

kwadratu, prostą $q' \equiv Q_1'Q_2'$ za prostą zbiegu jego płaszczyzny a punkt Q_3' w którym przekątna $A'C'$ przecina q', za punkt zbiegu przekątnej tego kwadratu. Punkty O_o i O_o^x, które są przecięciem koła opisanego na $Q_1'Q_2'$ jak na średnicy z kołami obejmującemi kąt $45°$ i opisanemi na nim $Q_1'Q_3'$, - są kładami środka

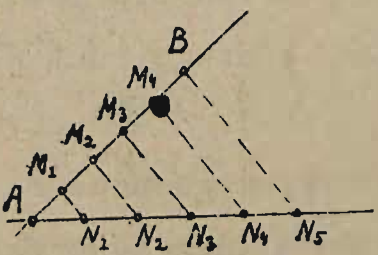


Rys. 223.

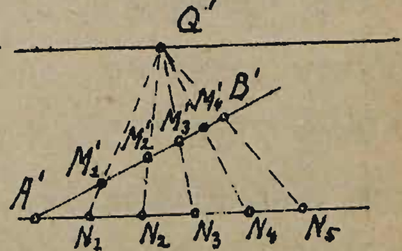
rzutów O dokoła q'. Punkt główny O_1 może być jakimkolwiek punktem obranym wewnątrz $O_0 O_0^x$; jeżeli w szczególności O_1 leży na q' to płaszczyzna kwadratu jest prostopadłą do płaszczyzny rzutów.

§ 109. Zadania płaskie zasadnicze dotyczące odcinków. Punkty miarowe.

1/ Leżący w płaszczyźnie sq' odcinek AB, którego rzut $A'B'$ jest dany, podzielić na części równe, t.j. wyznaczyć rzuty M_1', M_2', M_3' ... punktów M_1, M_2, M_3, ... dzielących ten odcinek na części równe, nie kładąc odcinka na płaszczyznę rzutów.



Rys. 224.



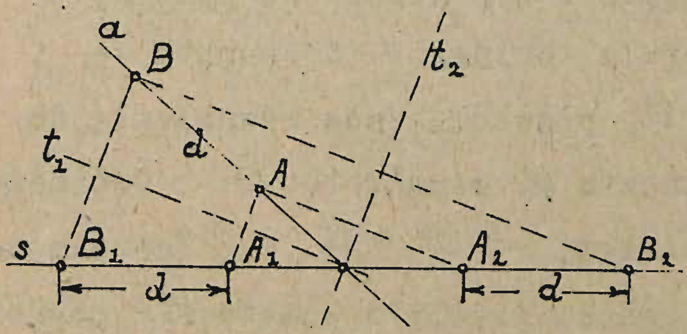
Rys. 225.

W tych warunkach użycie cyrkla jest wykluczone, bowiem rzuty równych odcinków wogóle nie są równe. Tylko na śladzie s płaszczyzny sq' oraz na prostych do niego równoległych rzuty równych odcinków są równe i podział odcinka leżącego na jednej z tych prostych mógłby być dokonany zapomocą cyrkla. Otóż wiadomo, iż podział jakiegokolwiek odcinka na części równe może być zapomocą równoległych sprowadzony do podziału innego odcinka leżącego na prostej o dowolnym kierunku. Przypuśćmy np. że mamy podzielić odcinek AB na 5 części równych /Rys.224/, ale warunki od nas niezależne nie pozwalają na użycie cyrkla na prostej o kierunku a, natomiast użycie jego na prostej o kierunku s nie podlega żadnym ograniczeniom. Przez jeden z końców A odcinka AB prowadzimy prostą o kierunku s, na której odmierzamy cyrklem 5 dowolnych równych odcinków AN_1, N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4 i N_4N_5, poczem przez punkty N_1, N_2, N_3 i N_4 prowadzimy równoległe do prostej BN_5, które wyznaczą na odcinku AB punkty podziału M_1, M_2, M_3 i M_4.

Ten sam sposób zastosujemy do podzielenia leżącego w płaszczyźnie sq' odcinka AB, którego rzut $A'B'$ jest dany /Rys.225/. Ponieważ na prostej AB użycie cyrkla jest niemożliwe, natomiast możemy go użyć na każdej prostej równoległej do $s \parallel q'$, przeto przez A' prowadzimy równoległą do q' i odmierzamy na niej od punktu A' pięć jakichkolwiek równych odcinków $A'N_1$ N_1N_2, N_2N_3, N_3N_4 i N_4N_5, wyznaczamy punkty zbiegu Q' prostej BM_5 i łączymy z nim punkty N_1, N_2, N_3 i N_4, proste te wyznaczą na $A'B'$ rzuty M_1', M_2', M_3' i M_4' punktów podziału M_1, M_2,

M_3 i M_4 .

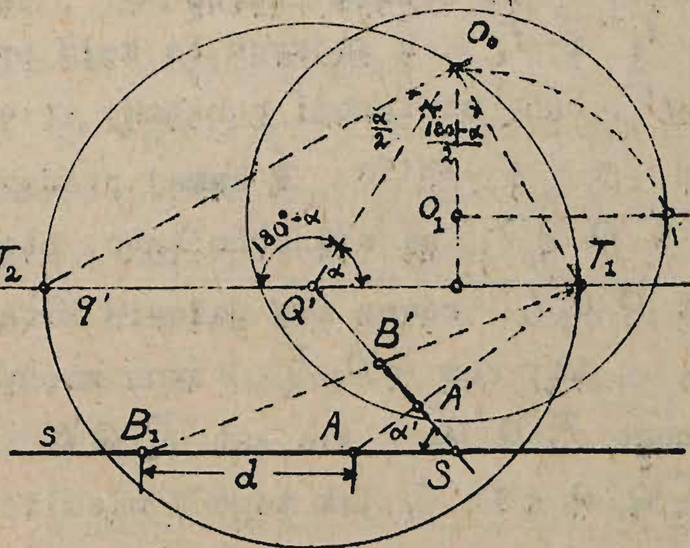
2/ Dany jest rzut prostej i punktu na niej leżącego, wyznaczyć rzut odcinka danej długości odmierzonego na prostej od danego na niej punktu. Możemy przypuścić, że dana jest płaszczyzna, w której prosta leży, gdyby bowiem były dane tylko ślad i punkt zbiegu prostej, to dwie równoległe w dowolnym kierunku przez te punkty poprowadzone wyznaczyłyby taką płaszczyznę sq'. Oczywiście, zadanie to nie może być rozwiązane zapomocą odmierzenia danego odcinka cyrklem, gdyż w perspektywie długości odcinków ulegają wogóle zmianie. Istnieje wszakże jedna prosta płaszczyzny sq', mianowicie ślad s, na której powyższe zadanie mogłoby być rozwiązane bezpośrednio, a więc zapomocą cyrkla. Otóż powiadam, że odmierzenie odcinka danej długości na jednej prostej może być zapomocą prowadzenia równoległych sprowadzone do odmierzenia tego samego odcinka na innej prostej. Przypuść-



Rys. 226.

my, że mamy odmierzyć odcinek danej długości d na prostej a od punktu A, ale dla pewnych względów użycie cyrkla na tej prostej nie jest możliwe, natomiast możliwe jest ono na innej prostej s. /Rys.226/. Prowadzę dwusieczne t_1 i t_2 kątów wyznaczonych przez proste a i s i przez punkt A prowadzę prostopadłą do jednej dwusiecznej t_1, a więc równoległą do drugiej t_2; od punktu A_1 otrzymanego w ten sposób na prostej s odmierzam zapomocą cyrkla odcinek d do punktu B_1, wreszcie przez punkt B_1 prowadzę znów równoległą do t_2 do przecięcia z prostą a w punkcie B. Odcinek AB równa się odcinkowi $A_1B_1 = d$. Ten sam cel możemy oczywiście osiągnąć, jeżeli z punktu A poprowadzimy równoległą do dwusiecznej t, a otrzymawszy na prostej s punkt A_2, odmierzymy na niej odcinek d do punktu B_2 i przez ten punkt poprowadzimy jeszcze raz równoległą do dwusiecznej t_1. Do rozwiązania tego zadania wystarcza posiadać kierunek jednej lub drugiej dwusiecznej kąta / as /.

Przeprowadźmy to samo wykreślenie w perspektywie /Rys.227/. Niech S będzie śladem a Q' punktem zbiegu prostej a, a A' rzutem punktu A na niej leżącego, od tego punktu na prostej a odmierzono odcinek danej długości d; trzeba znaleźć rzut B' końca tego



Rys. 227.

odcinka. Poprowadźmy przez prostą $S Q'$ dowolną płaszczyznę sq'; bezpośrednie odmierzenie odcinka d zapomocą cyrkla możliwe jest jedynie na prostej s płaszczyzny sq', albowiem ta prosta znajduje się w płaszczyźnie rzutów, t.j. w płaszczyźnie rysunku. Jak to stwierdziliśmy powyżej, dla rozwiązania zadania wystarcza znać kierunek jednej z dwusiecznych t_1 i t_2 kątów α i $180°-\alpha$, które tworzą ze sobą proste a i s. Kierunek ten w perspektywie jest wyznaczony przez punkt zbiegu T_1 lub T_2 tych dwusiecznych; aby te punkty na prostej zbiegu q' otrzymać, trzeba, jak wiadomo, odnaleźć najpierw kład O_0 środka rzutów, a następnie kąty $\frac{\alpha}{2}$ i $\frac{180°-\alpha}{2}$ odmierzyć po obu stronach wspólnego ramienia $O_0 Q'$. Aby tego dokonać, z punktu Q'

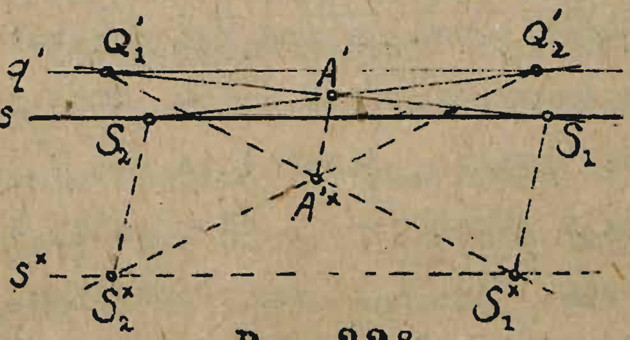
jako środka promieniem równym $O_o Q'$, t.j. odległości punktu zbiegu prostej a od środka rzutów O, zakreślamy koło; punkty T_1 i T_2, w których to koło przecina prostą zbiegu q', będą szukanemi punktowi zbiegu dwusiecznych kątów, α i $180°-\alpha$. W samej rzeczy, trójkąty $O_o Q'T_1$ i $O_o Q'T_2$ są równoramienne, stąd zaś wynika, że kąt $Q'O_o T_1$ równa się połowie kąta zewnętrznego $T_2 Q'O_o$, kąt zaś $Q'O_o T_2$ równa się połowic kąta zewnętrznego $T_1 Q'O_o$. Ale kąt $T_2 Q'O_o = 180°-\alpha$, a kąt $T_1 Q'O_o = \alpha$, jak tego dowiedliśmy w § 120.

Punkty T_1 i T_2, przy których pomocy można odmierzać dowolne odcinki na prostej a oraz na prostych do niej równoległych, nazywają się <u>punktami miarowemi</u> prostej a /lub mniej trafnie: <u>punktami dzielenia</u>/. Koło o środku Q' i promieniu $O_o Q'$, zwane <u>kołem miarowem</u> prostej a na prostych zbiegu wszystkich płaszczyzn przechodzących przez tę prostą, leżą na okręgu tego koła. Zauważmy, że koło oddalenia jest kołem miarowem prostych prostopadłych do płaszczyzny rzutów.

Znalazłszy punkty miarowe /zazwyczaj jeden z nich tylko bywa dostępny, jeden zresztą tylko jest wogóle potrzebny/, łączymy jeden z nich, np. T_1, z punktem A' i otrzymujemy w przecięciu z S punkt A_1; odmierzamy od tego punktu na prostej s odcinek $A_1B_1 \equiv d$ i punkt B_1 łączymy z T_1, otrzymując w przecięciu z a' szukamy punkt B'.

To samo wykreślenie posłużyć może do rozwiązania zadania odwrotnego: Znaleźć prawdziwą długość odcinka, którego rzut na danej prostej SQ' jest dany. Będzie ono miało przewagę prostoty i oszczędności miejsca nad rozwiązaniem podanym w § 117, a opartymi na metodzie kładów.

§ 110. Zastosowanie powinowactwa do wyznaczenia punktu przecięcia prostych, których rzuty przecinają się pod małym kątem. Wyznaczenie punktu , w którym przecinyją się proste S_1Q_1' i S_2Q_2' leżące w płaszczyźnie sq' staje się tym mniej dokładne, im odległość prostych s i q' jest mniejsza. Dla podniesienia dokładności wyznaczenia tego punktu, kreślimy prostą $s^x \parallel s$ w dostatecznie wielkiej odległości od q' /Rys. 228/ i obrawszy na s^x punkt S_1^x, łączymy go z S_1, poczem przez S_2



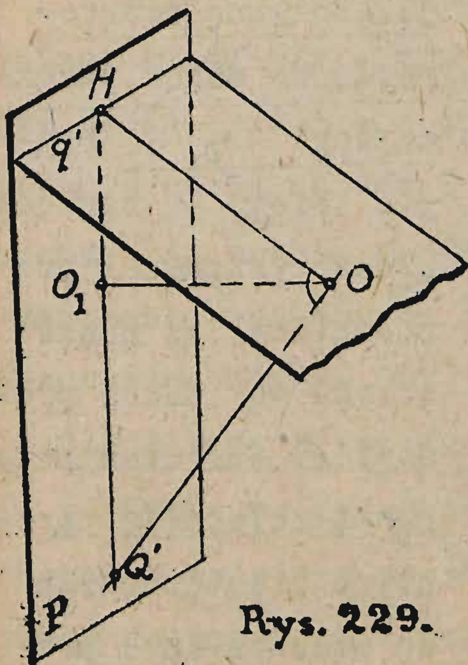
Rys. 228.

prowadzimy równoległą do $S_1 S_1^x$, która przetnie s^x w punkcie S_2^x. Połączywszy $S_1^x Q_1'$ i $S_2^x Q_2'$, wyznaczymy punkt A'^x przecięcia tych prostych. Punkty A'^x i A' są odpowiednie w powinowactwie wyznaczonym przez oś q' oraz parę punktów odpowiednich S_1 i S_1^x. Prosta poprowadzona przez A'^x równoległe do $S_1 S_1^x$ musi tedy przejść przez punkt A', który w ten sposób zostanie wyznaczony jako punkt przecięcia tej prostej z którąkolwiek z dwóch prostych $S_1 Q_1'$ lub $S_2 Q_2'$.

§ 111. Proste i płaszczyzny prostopadłe.

ZADANIE 1. Dana jest płaszczyzna rzucająca Oq'; wyznaczyć prostą rzucającą do niej prostopadłą, czyli: Wyznaczyć punkt zbiegu Q' prostych prostopadłych do płaszczyzn o danej prostej zbiegu q'.

Trzy proste /Rys. 229 i 230/: prosta największego spadku OH płaszczyzny Oq', oddalenie OO_1 i prostopadła OQ' leżą w jednej płaszczyźnie prostopadłej do q'. W ten sposób powstaje trójkąt prostokątny HOQ', którego znamy wysokość OO_1 oraz jeden z odcinków przeciwprostokątnej, mianowicie O_1H; jest to odległość punktu głównego O_1 od prostej zbiegu q'. Przewróćmy trójkąt HOQ' na płaszczyznę rzutów dokoła prostej O_1H i wykreślmy go w tym położeniu; punkty H, O_1 i Q' jako należące do osi obrotu



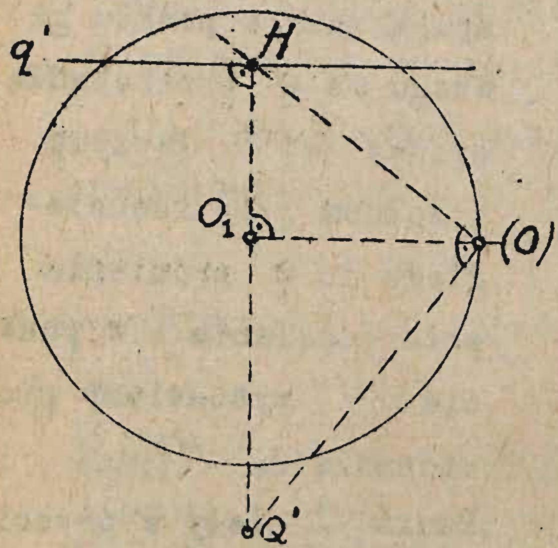
Rys. 229.

nie zmienią przytem swego położenia. Aby wyznaczyć punkt szukamy Q', spuszczamy z punktu głównego na q' prostopadłą, spadek jej H łączymy z końcem (O) równoległego do q' promienia koła oddalenia i w punkcie (O) wystawiamy prostopadłą do $H(O)$. Punkt Q' leży w przecięciu tej prostopadłej z prostą O_1H.

ZADANIE 2. Dana jest prosta rzucająca OQ'; wyznaczyć płaszczyznę rzucającą do niej prostopadłą, czyli: Wyznaczyć prostą zbiegu q' płaszczyzn prostopadłych do prostych o danym punkcie zbiegu Q'.

Rozwiązanie polega oczywiście na wykreśleniu kładu tego samego trójkąta prostokątnego HOQ', z tą jedynie różnicą, że nie punkt Q', ale punkt H jest szukany /Rys.220 i 230/. Prosta zbiegu q' jest prostopadłą do O_1Q' poprowadzoną przez H. punkt

ZADANIE 3. Przez daną prostą S_1Q_1' poprowadzić



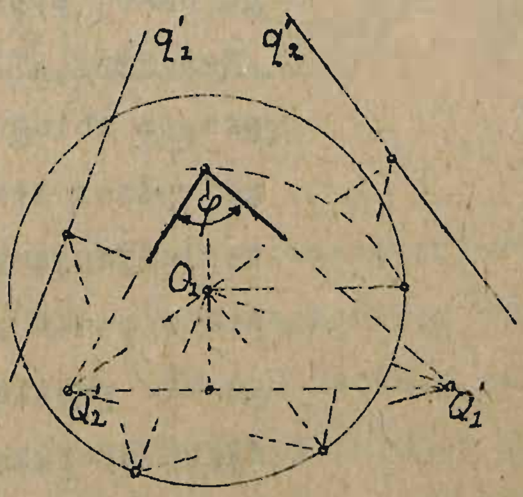
Rys. 230.

płaszczyznę prostopadłą do danej płaszczyzny sq'. Prosta zbiegu q_1' szukanej płaszczyzny musi przechodzić przez punkt zbiegu Q_1' danej prostej /§ 93/ oraz przez punkt zbiegu Q' prostych prostopadłych do płaszczyzn o prostej zbiegu q'; będzie to zatem prosta łącząca oba te punkty; ślad zaś s_1 będzie prostą poprowadzoną przez S_1 równoległe do q_1'.

ZADANIE 4. W danej płaszczyźnie $s_1 q_1'$ poprowadzić prostą, która przecina daną prostą SQ' i jest do niej prostopadła. Punkt zbiegu Q_1' szukanej prostej musi leżeć na prostej zbiegu q_1' danej płaszczyzny /§ 93/ oraz na prostej zbiegu q' płaszczyzn prostopadłych do prostych o punkcie zbiegu Q'; będzie to zatem punkt przecięcia obu tych prostych; ślad S_1 będzie punktem, w którym równoległa do $Q'Q_1'$ poprowadzona przez S przecina s_1.

ZADANIE 5. Przez dany punkt $(A', S_1 Q_1')$ poprowadzić prostopadłą do płaszczyzny danej sq'. Wyznaczymy najpierw punkt zbiegu Q' prostych prostopadłych do płaszczyzn o prostej zbiegu q' poczem przez punkt $/A', S_1 Q_1'/$ poprowadzimy prostą o punkcie zbiegu Q' /§ 100/ i jeżeli potrzeba, wyznaczymy punkt przebicia tej prostej z płaszczyzną sq' /§ 95/.

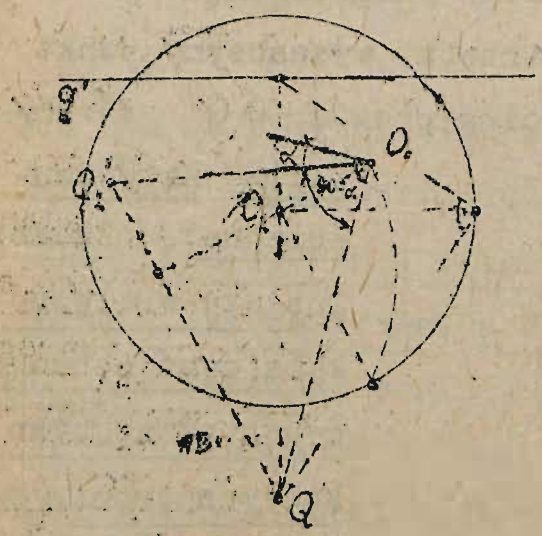
ZADANIE 6. Przez dany punkt $/A', S_1 Q_1'/$ poprowadzić płaszczyznę prostopadłą do danej prostej SQ'. Wyznaczymy najpierw prostą zbiegu q' płaszczyzn prostopadłych do prostych o punkcie zbiegu Q' poczem przez punkt $/A', S_1 Q_1'/$ poprowadzimy płaszczyznę o prostej zbiegu q' /§102/ i jeżeli potrzeba, wyznaczymy punkt w którym ta płaszczyzna przecina prostą SQ' /§ 95/.



Rys. 231.

§-112. Kąty dwuścienne. Zadanie. Znaleźć wielkość kąta dwuściennego dwuch płaszczyzn, których proste zbiegu q_1' i q_2' są dane. Jeżeli z jakiegokolwiek punktu np. ze środka rzutów spuścimy prostopadłe OQ_1' i OQ_2' na obie płaszczyzny, to kąt między tymi prostopadłymi równy jest kątowi dwuściennemu tych płaszczyzn, lub z nim spełniający. Znajdźmy przeto /Rys.231/ ślady Q_1' i Q_2' promieni rzucających prostopadłych do tych płaszczyzn. /§ 111/, zad.1./, poczem wyznaczmy kąt $Q_1'OQ_2'$ przez kład trójkąta $Q_1'OQ_2'$ dokoła $Q_1'Q_2'$ /§ 105/.

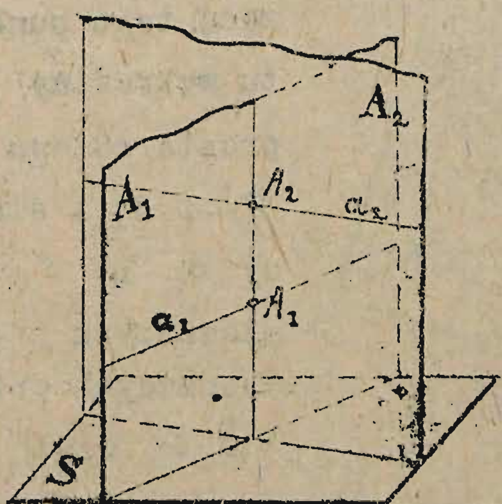
§ 113. Kąt prostej z płaszczyzną. Zadanie. Znaleźć wielkość kąta prostej z płaszczyzną, jeżeli ich punkt zbiegu Q_1' i prosta zbiegu q' są dane. Kąt prostej z płaszczyzną jest dopełnieniem kąta prostej z prostopadłą do płaszczyzny. Jeżeli Q_1' jest punktem zbiegu danej prostej /Rys.232/, a q' prosta zbiegu danej płaszczyzny, to znajdujemy najpierw punkt zbiegu Q' prostopadłych do płaszczyzn o prostej zbiegu q', a następnie wyznaczamy kąt między prostemi, których punkty zbiegu są Q_1' i Q';



Rys. 232.

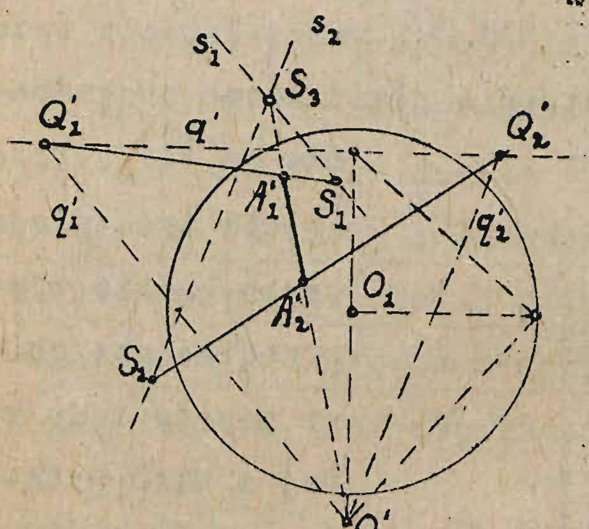
kąt dopełniający będzie szukanym kątem α .

§ 114. Odległość prostych skośnych. Jest to długość wspólnej prostopadłej przecinającej obie proste. Aby ją otrzymać, poprowadźmy płaszczyznę S do obu prostych równoległą /Rys. 233./ i przez każdą z tych prostych poprowadźmy następnie płaszczyznę prostopadłą do S . Przecięcie tych płaszczyzn będzie prostą przecinającą obie dane proste i do każdej z nich prostopadłą. Aby się przekonać, że istotnie odległość $A_1 A_2$ jest najkrótszą między prostemi a_1 i a_2 , poprowadźmy przez te proste płaszczyzny równoległe do S ; odcinek A_1A_2 jest najkrótszą odległością tych płaszczyzn; każdy inny odcinek łączący jakikolwiek punkt prostej a_2 z jakimkolwiek punktem prostej a_1 byłby pochyły do obu tych płaszczyzn, a zatem dłuższy od odcinka A_1A_2 .



Rys. 233.

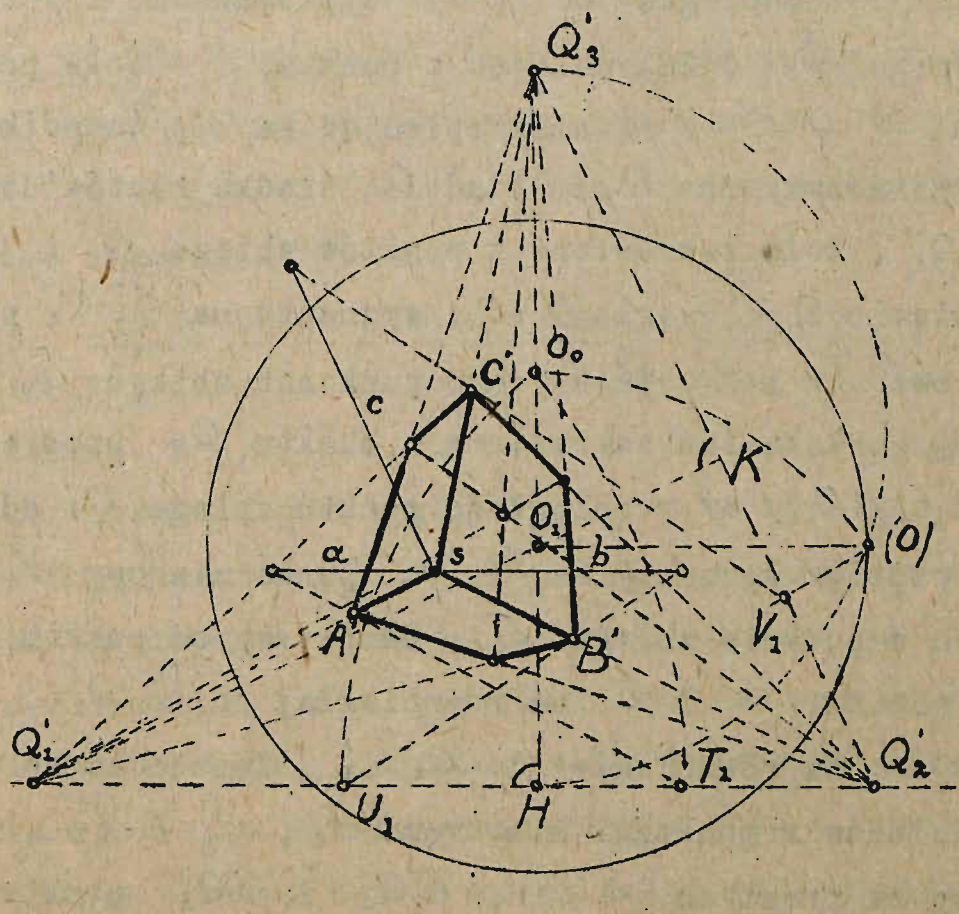
Niech będą /Rys.234/ dwie proste S_1Q_1' i S_2Q_2'; prosta $q' \equiv Q_1'Q_2'$ jest prostą zbiegu płaszczyzn do obu tych prostych równoległych. Wyznaczmy punkt zbiegu Q' prostych do płaszczyzn tych prostopadłych /§ 111 zad. 1./i zapomocą tego punktu wykreślmy proste zbiegu q_1' i q_2' i ślady s_1 i s_2 płaszczyzn przechodzących przez S_1Q_1' wzgl.



Rys. 234.

S_2Q_2' i prostopadłych do płaszczyzn o prostej zbiegu q'. Prosta S_3Q' przecięcia tych płaszczyzn przecina obie proste w punktach A_1 i A_2, których odległość może być znaleziona np. zapomocą jednego z punktów miarowych prostej S_3Q'.

§ 115. Zastosowanie. Zadanie. Wykreślić rzut środkowy prostopadłościan-u jeżeli dane są punkty zbiegu Q_1', Q_2' i Q_3' oraz długości a, b i c krawędzi wychodzących z wierzchołka leżącego w danym punkcie S płaszczyzny rzutów.



Rys. 235.

Ponieważ Q_1', Q_2' i Q_3' /Rys.235/ są punktami zbiegu trzech prostych wzajemnie prostopadłych, więc punkt główny O_1 będzie leżał na prostopadłej $Q_3'H$ spuszczonej z Q_3' na $Q_1'Q_2'$ oraz na prostopadłej $Q_1'K$

spuszczonej z Q_1' na $Q_2'Q_3'$; jest to więc punkt przecięcia tych dwuch prostopadłych. Promień koła oddalenia O_1 / O / znajdziemy w przecięciu półkola opisanego na $Q_3'H$ z równoległą do $Q_1'Q_2'$ wyprowadzoną z punktu głównego O_1 . Zakreślając z punktu H koła promieniem H / O / / albo opisując na $Q_1'Q_2'$ półkole / wyznaczymy na $Q_3'H$ kład O_o środka rzutów doko ła $Q_1'Q_2'$; koła zakreślone z punktów zbiegu Q_1' i Q_2' promieniami $Q_1'O_o$ wzgl. $Q_2'O_o$ wyznaczą na $Q_1'Q_2'$ punkty miarowe T_1 i U_1 prostych o punktach zbiegu Q_1' wzgl. Q_2' , koło zaś zakreślone z punktu Q_3' promieniem Q_3' / O / / = odległość punktu zbiegu Q_3' od środka rzutów/ wyznaczy na $Q_2'Q_3'$ punkt miarowy V_1 prostych o punkcie zbiegu Q_3' . Odmierzmy od punktu S odcinki a i b na równoległej do $Q_1'Q_2'$, a odcinek c na równoległej do $Q_2'Q_3'$, łącząc końce tycg odcinków z punktami miarowemi T_1 , U_1 i V_1 , otrzymamy na prostych SQ_1' , SQ_2' i SQ_3' punkty A' , B' i C' , które są rzutami wierzchołków prostopadłościanu leżącemi na krawędziach wychodzących z wierzchołka S , pozostałe wierzchołki wyznaczymy bez trudności zapomocą punktów zbiegu Q_1' , Q_2' i Q_3' krawędzi prostopadłościanu. —

ROZDZIAŁ XI. PERSPEKTYWA STOSOWANA.

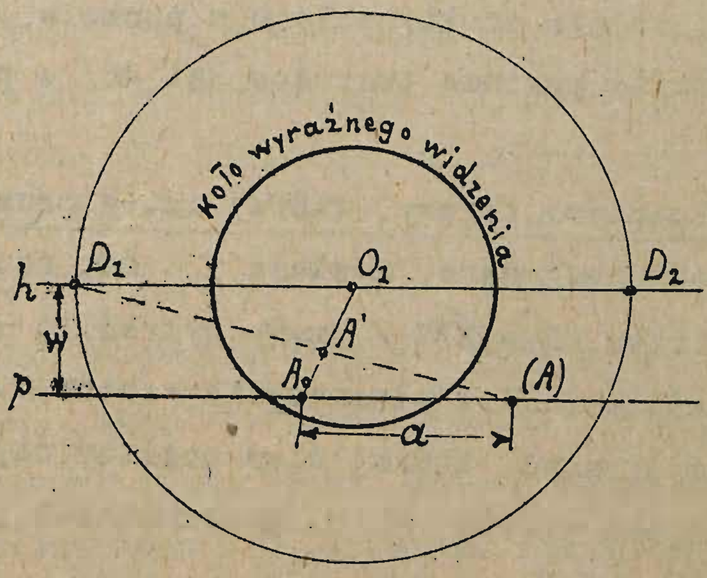
Przedmiotem perspektywy stosowanej jest wykreślenie rzutów środkowych figur, których rzuty prostokątne są dane, z uwzględnieniem anatomicznych i fizjologicznych właściwości ludzkiego oka oraz warunków praktycznego wykonania rysunku.

§ 116. Stożek i koło wyraźniego wydzenia. Jeżeli, jak to zwykle mieć chcemy, płaszczyzna rzutów P jest pionową, a oko, w środku rzutów O umieszczone, jest skierowane na punkt główny O_1, to wyraźnie widziane mogą być te tyko figury, które znajdują się wewnątrz stożka obrotowego, mającego za oś prostą OO_1, a którego tworzące są od tej osi odchylone pod kątem nie większym od $30°$. Podstawą tego stożka wyraźnego widzenia będzie na płaszczyźnie rzutów koło o środku O_1, którego promień będzie równy mniej więcej połowie promienia koła oddalenia /co odpowiada odchyleniu tworzącej stożka od osi $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 26°30'$ /. Jeżeli perspektywa figury ma wywołać złudzenie rzeczywistości to rzut figury musi być zawarty wewnątrz tego koła, zwanego kołem wyraźniego wydzenia. Brzegi obrazu perspektywicznego, mającego zwykle kształt prostokąta, nie powinny w żadnym razie być prostymi zewnętrznemi względem koła wyraźnego widzenia.

§ 117. Wybór koła oddalenia. Punkt główny O_1 obieramy zazwyczaj w pobliżu środka prostokąta przeznaczonego na obraz perspektywiczny. Jeżeli przypuścimy, że normalne oko ludzkie widzi wyraźnie tylko takie przedmioty, które znajdują się od niego w odległości nie mniejszej od 25 cm. to stąd wynikałoby, że promień koła oddalenia nie powinien być mniejszy od 25 cm. Wniosek taki byłby zbyt pospieszny. Bez wątpienia należy uznać zasadę, że obraz perspektywiczny najlepsze wywrze wrażenie, gdy oko będzie umieszczone w środku rzutów. Nie jest to wszakże bezwzględnie konieczne, wiemy z doświadczenia, że przy oglądaniu obrazu możemy zmieniać w dość znacznych granicach punkt widzenia, nie dostrzegając powstającej z tego powodu niepoprawności obrazu. Przyczyna tego jest oczywiście psychologicznej natury.

Pobudki psychologicznej natury sprawiają również, że uważamy za poprawne każdy obraz, który jest figurą podobną do obrazu perspektywicznego i to nawet wtedy, gdy z powodu znacznego zmniejszenia obrazu /a więc i oddalenia/, oko nie mogłoby znajdować się w środku rzutów, leżącego wtedy na zbyt małej odległości od płaszczyzny obrazu, aby z tego punktu mogły być wyraźnie wydziane figury w niej wykreślone. Koło oddalenia może więc być dowolnie małym pod warunkiem, aby zmniejszeniu normalnego oddalenia odpowiadało proporcjonalne zmniejszenie wymiarów figury, która ma być odzworowana.

§ 118. Linja przyziemna, horyzont, punkty oddalenia. Jedną z płaszczyzn poziomych zwiemy płaszczyzną przyziemną jej ślad nazywamy linją przyziemną, jej prostą zbiegu h - horyzontem /Rys. 236/. Odległość tych dwuch prostych w nazywamy wysokością horyzontu, jest ona równa wysokości środka rzutów, t.j. oka nad płaszczyzną przyziemną. Wysokość horyzontu obieramy więc zazwyczaj w granicach 150-200 cm. w tej skali - w jakiej wyobrażamy sobie zmniejszoną figurę, którą odzworować pragniemy, skala ta nie może być większą od tej, która odpowiada zmniejszeniu normalnego



Rys. 236.

promienia koła oddalenia / 25 cm./ Horyzont h przechodzi przez punkt główny O_1, albowiem płaszczyzna przyziemna ph jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Punkty przecięcia D_1 i D_2 koła oddalenia z horyzontem nazywają się punktami oddalenia; są to punkty miarowe prostych prostopadłych do płaszczyzny rysunku, a więc mających punkty zbiegu w punkcie głównym O_1. Proste, mające punkty zbiegu w punkcie D_1 lub D_2, są proste poziome tworzące kąt 45° z płaszczyzną rysunku.

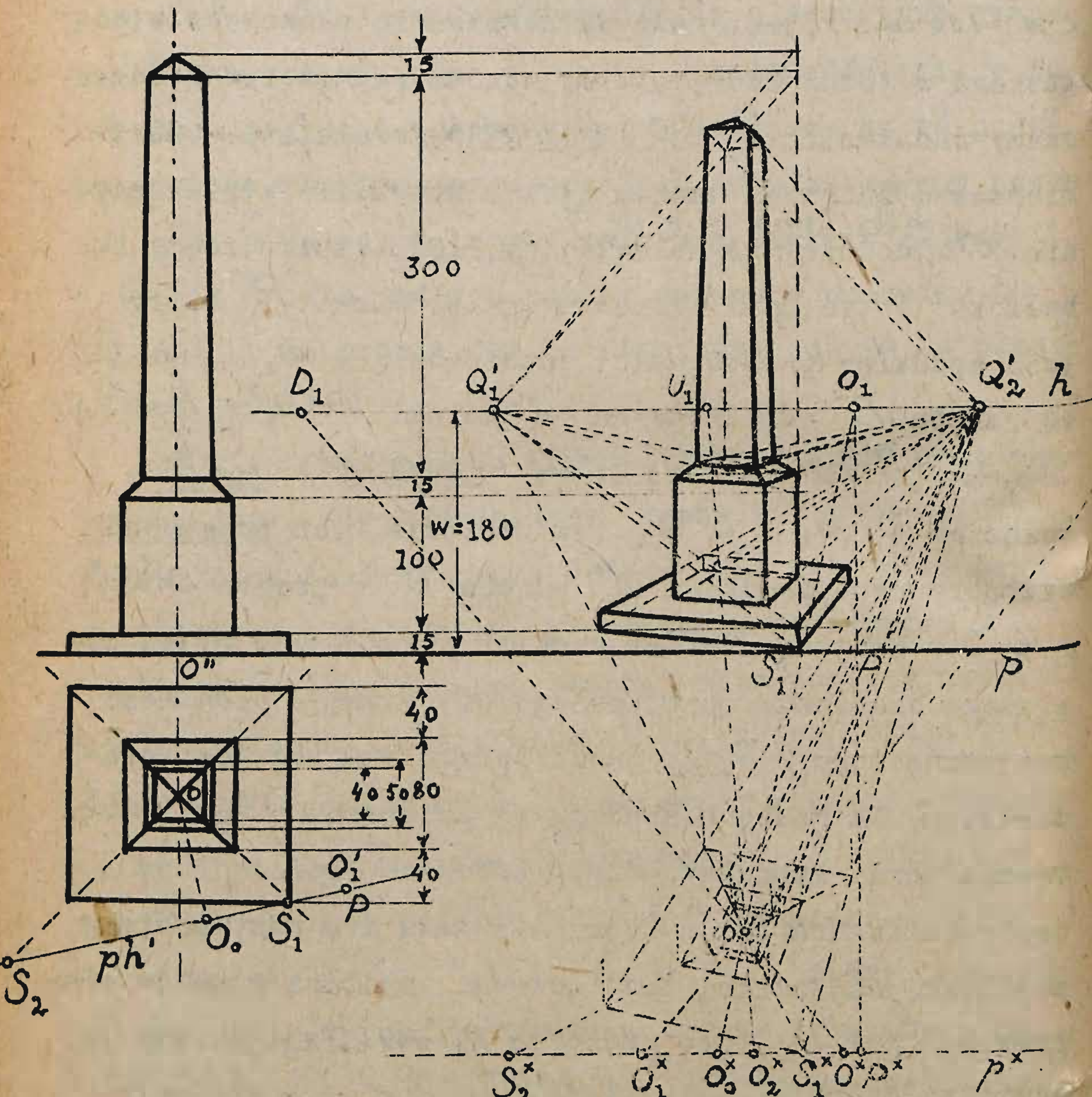
§ 119. Perspektywa figury, której rzuty prostokątne są dane. Niech będą dane, w skali 1 : 50, rzuty prostokątne obelisku /Rys.237./, mamy wykreślić jego perspektywę w założeniu, że płaszczyzna rzutów P jest płaszczyzną pionową, której ślad poziomy czyli linja przyziemna, jest prostą p, przechodzącą przez jeden z wierzchołków S_1 podstawy obelisku; - będzie to zarazem rzut poziomy h' horyzontu h, którego wysokość niechaj będzie $W = 180$ cm. /w skali 1 : 50/. Obierzmy na $p \equiv h'$ punkt $O_1' \equiv P$, który uważajmy za rzut poziomy punktu głównego O_1, leżącego na horyzoncie h. Ze środka O podstawy obelisku spuśćmy prostopadłą na ph', wyznaczmy jej spodek O_o oraz punkty S_1 i S_2, w których przekątne rzutu poziomego obelisku przecinają prostą p.

Wykreśliwszy linję przyziemną p i horyzont h / $W = 180$ cm. /, obieramy na horyzoncie punkt O_1, od którego w jedną którąkolwiek stronę /np. w lewo/ odmierzamy oddalenie $d = O_1 D_1 = 400$ cm /w skali 1 : 50/. Pierwszem zadaniem naszem będzie wykreślić w płaszczyźnie ph, albo lepiej w pł. $p^x h$, ~~do niej równoległej~~ /§ 110/, rzut poziomy obelisku. W tym celu wyznaczmy na p^x punkt P^x który jest spodkiem prostopadłej spuszczonej z O_1 na p^x i od punktu P^x odmierzmy na p^x odcinki $P^x O_o^x = P O_o$, $P^x S_1^x = P S_1$, $P^x S_2^x = P S_2$ i $O_o^x O^x = O_o O$.

Połączmy $O_o^x O_1$ i $O^x D_1$, przecięcie tych prostych wyznaczy rzut środkowy O' punktu O; proste $O'S_1^x$ i $O'S_2^x$ będą środkowemi rzutami przekątnych rzutu poziomego obelisku, punkt zbiegu pierwszej z nich może być wyznaczony / Q_1' /, punkt zbiegu drugiej jest niedostępny. Na rzutach środkowych prostych OS_1 i OS_2 trzeba teraz wyznaczyć rzuty środkowe wierzchołków czterech kwadratów, z których składa się rzut poziomy obelisku. Najłatwiej tego dokonać zapomocą punktów miarowych T_1'' i U_1 tych prostych /§ 109/, znajdziemy je, odmierzając na p^x odcinki $S^x O_1^x = S_1 O$ i $S_2^x O_2^x = S_2 O$ i łącząc $O_1^x O'$ i $O_2^x O'$.

Wyznaczywszy rzuty środkowe wierzchołków 4 kwa-

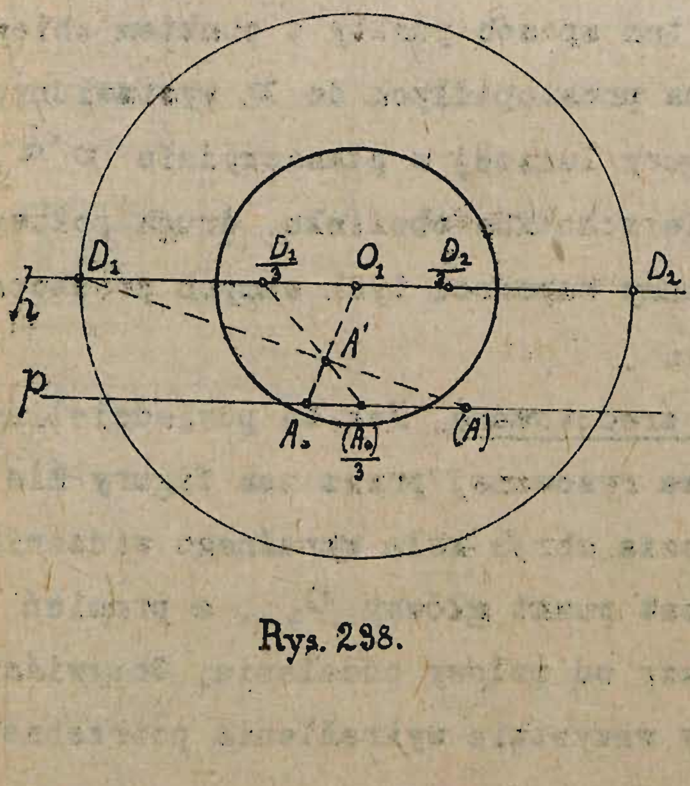
Skala 1:50.



Rys. 237.

dratów, sprawdzimy dokładność wykreślenia, wyznaczając na horyzoncie punkt Q_2', w którym powinny się przeciąć rzuty ośmiu równoległych boków tych kwadratów, punkt Q_3', w którym powinny się przeciąć rzuty pozostałych boków, jest niedostępny. Wykreślmy teraz perspektywę kwadratu leżącego w płaszczyźnie przyziemnej ph zapomocą punktów Q_1' i Q_2' oraz równoległych do OP^x, wychodzących z wierzchołków rzutu takiego samego kwadratu leżącego w płaszczyźnie p^xh. Następnie w punkcie S_1 wystawmy prostopadłą do p, ponieważ leży ona w płaszczyźnie rysunku, odmierzamy na niej od punktu S_1 wysokości wszystkich wierzchołków obelisku. Łącząc otrzymane w ten sposób punkty z punktem zbiegu Q_1', otrzymamy na prostopadłych do p, wystawionych w wierzchołkach figury leżącej w płaszczyźnie p^xh, połowę pozostałych wierzchołków obelisku, drugą połowę wierzchołków otrzymamy zapomocą tych samych prostopadłych oraz punktu Q_2'.

§ 120. Punkty zredukowane. Jak to powiedzieliśmy w § 116, prespektywa rysowanej przez nas figury nie powinna wykraczać poza obręb koła wyraźnego widzenia, którego środkiem jest punkt główny O_1, a promień jest niewiele większy od połowy oddalenia. Oczywiście jest pożądanem, aby wszystkie wykreślenia potrzebne do wykonania tej perspektywy mogły być uskutecznione w obrębie płaszczyzny rysunku, dla tej perspektywy przeznaczonym. Otóż punkty oddalenia D_1 i D_2 oraz punkty zbiegu, ślady różnych prostych leżą poza tym obrębem, wskażemy przeto wykreślenia, które pozwolą nam obyć się bez tych punktów, - innemi słowy zastąpimy punkty D_1 i D_2 oraz niedostępne punkty zbiegu i ślady punktami zredukowanemi. Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć rzut środkowy punktu A leżącego w płaszczyźnie ph na danej odległości a od punktu A_0 linji przyziemnej p. W tym celu należałoby postąpić tak jak w § poprzednim.



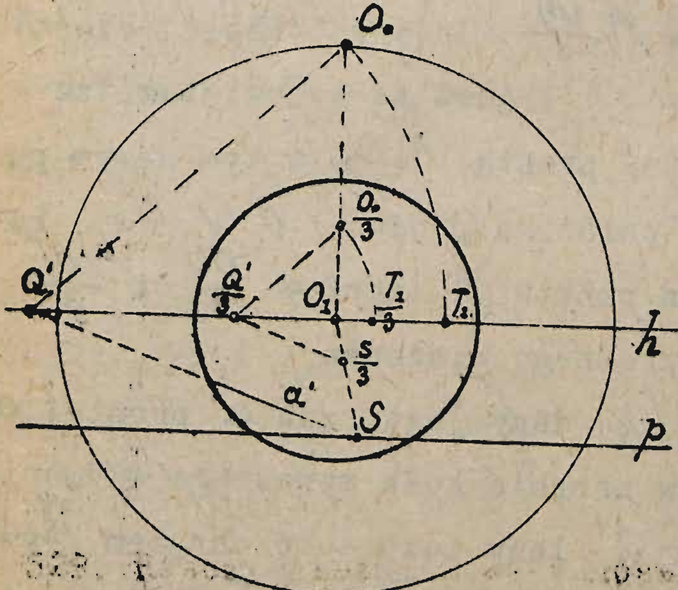
Rys. 238.

postąpiliśmy dla wyznaczenia punktu O : połączyć $A_0 O_1$, odmierzyć od punktu A_0 w jedną lub drugą stronę prostej p odcinek $A_0(A) = a$,

połączyć punkt

/ A / z tym z dwuch punktów D_1 lub D_2, który leży po przeciwnej stronie prostej $A_o O_1$ niż punkt / A /; punkt przecięcia prostych $A_o O_1$ i / A / D_1 jest rzutem punktu A. /Rys.238/. Wykreślenie to zawodzi, gdy jeden choćby z dwuch punktów D_1 i / A / lub D_2 i / A / jest niedostępny; postąpimy wtedy jak następuje: Odmierzmy na horyzoncie h od punktu głównego O_1 w jedną lub drugą stronę odcinki $O_1 \frac{D_1}{3}$ i $O_1 \frac{D_2}{3}$ równe np. trzeciej części oddalenia $O_1 D_1$; od punktu A_o odmierzmy odcinek $A_o \frac{(A)}{3}$ równy trzeciej części odcinka $A_o(A) = \frac{a}{3}$; jest to oczywistem, że prosta $\frac{(A)}{3} \frac{D_1}{3}$ przecina prostą $A_o O_1$ w tym samym punkcie A', w którym ją przecina prosta / A / D_1. Potrzebne do wyznaczenia punktu A' punkty $\frac{D_1}{3}$ i $\frac{(A)}{3}$ leżą w obrębie koła wyraźnego widzenia.

Przypuśćmy teraz, że dany jest rzut a' prostej a której ślad S leży w obrębie koła wyraźnego widzenia, a której punkt zbiegu Q' leży poza jego obrębem /Rys. 239/ mamy znaleźć punkt miarowy T_1 lub T_2 tej prostej nie korzystając w tym celu z żadnego punktu leżącego nazewnątrz koła wyraźnego widzenia. Gdyby to ograniczenie nie było nam narzucone, znaleźlibyśmy punkt T_1 na horyzoncie w przecięciu z okręgiem koła zakreślonego z punktu zbiegu Q' promieniem $Q'O_o$, przytem punkt O_o, t.j. kład środka rzutów O' leży teraz na kole oddalenia. Aby uniknąć punktów Q' i O_o, które leżą poza obrębem koła wyraźnego widzenia, dzielimy $O_1 S$ na kilka, np. na trzy części równe i z punktu $\frac{S}{3}$ prowadzimy równoległą do a' otrzymując na horyzoncie punkt $\frac{Q'}{3}$, którego odległość od O_1 jest trzecią częścią odległości punktu Q' od O_1. Punkt $\frac{Q'}{3}$ łączymy z punktem $\frac{O_o}{3}$, którego odległość od O_1 jest trzecią częścią oddalenia, poczem promieniem $\frac{Q'}{3}\frac{O_o}{3}$ z punktu $\frac{Q'}{3}$ zakreślamy koło przecinające horyzont w punkcie $\frac{T_1}{3}$. Punkt ten będzie od O_1 trzy razy bliżej niż T_1, co wynika stąd, że figury $SQ'O_oT_1$ i $\frac{S}{3}\frac{Q'}{3}\frac{O_o}{3}\frac{T_1}{3}$ są podobne; środkiem podobieństwa tych figur jest O_1 a stosunek podobieństwa równa się 3. Aby więc znaleźć punkt T_1 odmierzamy na horyzoncie odcinek O_1T_1 równy co do wiel-



Rys. 239.

kości i znaku trzy razy wziętemu odcinkowi $O_1 \frac{T_1}{3}$. W ten sposób wszystkie punkty w tym wykreśleniu użyte znalazły się wewnątrz koła wyraźnego widzenia.-

CZĘŚĆ IV. KRZYWE, STOŻKI I POWIERZCHNIE DRUGIEGO STOPNIA.

ROZDZIAŁ XII. SZEREGI I PĘKI RZUTOWE.

§ 121. Określenie geometrji rzutowej. Istota wszystkich metod geometrji wykreślnej, jak to zauważyliśmy już w § 1, polega na przekształceniu danej figury przestrzennej na figurę płaską zapomocą kolejnych dwuch czynności: rzucania i przecinania. Zanim przystąpimy do dalszego rozwinięcia metod geometrji wykreślnej, trzeba bliżej poznać te własności figur, które zostają zachowane przez rzuty i przecięcia. Do takich należy przedewszystkiem wzajemna przynależność elementów geometrycznych /punktów i prostych, prostych i płaszczyzn/. Jeżeli punkt A leży na prostej b to prosta b rzucająca punkt A z dowolnego punktu C leży w płaszczyźnie B rzucającej z tego samego środka rzutów prostą b, jeżeli prostą a leżącą w płaszczyźnie B przetniemy płaszczyzną jakąkolwiek, to punkt A, w którym płaszczy-