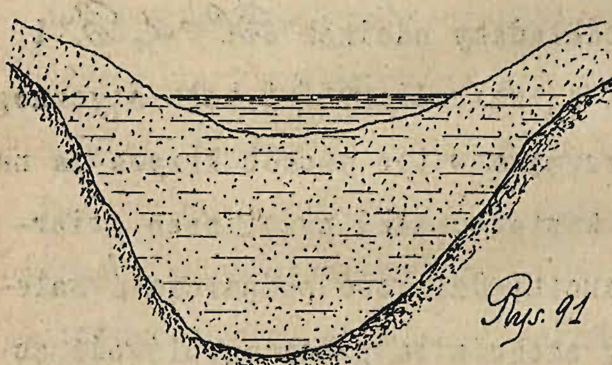
$l = CB + BD$; z rysunku mamy że $CB = Ba_n$, zaś $BD = \frac{Ba_n}{cs\omega}$; ponieważ kąt ω jest bardzo mały, więc $cs\omega = 1$ i $BD = Ba_n$, zatym $l = 2Ba_n$; dalej widzimy, że $h = BD . i = Ba_n . i$, a stąd $Ba_n = \frac{h}{i}$; ostatecznie mamy $l = \frac{2h}{i}$.

Z tego wzoru możemy łatwo otrzymać przybliżoną wartość dalekości podparcia.

Ruch wody gruntowej.

Wystawmy sobie kotlinę o podanym obok przekroju, ze wszystkich boków i z dołu zamkniętą. Spód tej kotliny niech będzie utworzony z pokładu nieprzepuszczalnego n.p. gliny; niech, dalej, kotlina ta wypełniona będzie piaskiem, żwirem, lub wogóle warstwami przepuszczalnymi. Jeśli na dolinę tak utworzoną upadnie

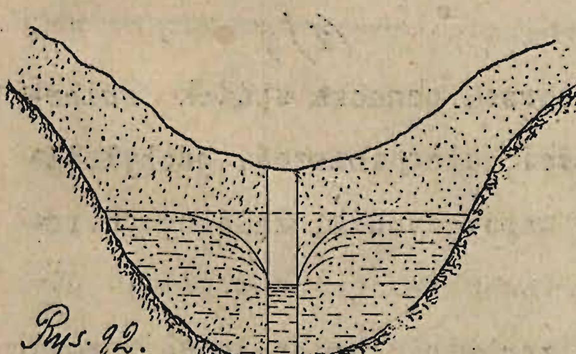


Rys. 91

deszcz, wtedy cząsteczki wody, przechodząc przez warstwy przepuszczalne, opadać będą coraz niżej i niżej, aż wreszcie dojdą do pokładu nieprzepuszczalnego; cząsteczki wody wtedy poczną układać się na tym pokładzie nieprzepuszczalnym warstwami poziomymi. W miarę przybywania wody poziom jej w gruncie przepuszczalnym podnosi się coraz wyżej, aż wreszcie przy sprzyjających warunkach wyjść może nad powierzchnię gruntu, tworząc jeziora lub moczary. Otrzymujemy w ten sposób obraz wody gruntowej w stanie spoczynku; zwierciadło jej będzie płaszczyzną poziomą.

Wystawmy sobie teraz że część ściany bocznej we wspomnianej kotlinie w którymkolwiek miejscu została usunięta; woda wtedy pocznie przez utworzony otwór wypływać na zewnątrz kotliny. Woda, zawarta w kotlinie, wyjdzie ze stanu spoczynku, dążąc ku otworowi. Otrzymujemy zjawisko ruchu wody gruntowej.

Wystawmy sobie teraz, że przez środek kotliny mamy przeprowadzony rów głęboki lub też mamy w środku kotliny wykopaną studnię dość głęboką. Jeśli po wykopaniu rowu czy też studni pewien czas poczekamy, woda zapełni rów lub studnię; przyczym zwierciadło wody w rowie czy studni stanie na tej samej płaszczyźnie poziomej, do jakiej dochodzi woda gruntowa. Jeśli następnie zaczniemy z rowu lub studni wodę wylewać, rozpocznie się ruch wody gruntowej z pokładów wodonośnych w stronę rowu czy studni. Ruch wody zachodzić tu będzie na skutek tego, że, obniżając poziom wody w rowie względem poziomu, jaki zajmuje woda w sąsiednim gruncie, stwarzamy różnicę ciśnień w ściance rowu: od środka rowu ciśnienie będzie mniejsze niż od strony gruntu. Wobec więc tego woda z zewnątrz rowu będzie wtłaczana do niego. Podczas ruchu wody gruntowej górne cząsteczki wodne ułożą się na pewnej powierzchni, tworząc zwierciadło. Zwierciadło takie w przekroju płaszczyzną pionową prostopadłą do osi rowu da dwie gałęzie krzywej. W przypadku, kiedy woda gruntowa dążyć będzie do pro-



Rys. 12.

stolinijnego rowu, wtedy otrzymane krzywe będą jednakowe dla wszystkich płaszczyzn prostopadłych do osi rowu.

Gdybyśmy mieli nie rów, lecz studnię, z której czerpalibyśmy wodę bez przerwy wtedy powierzchnia wody w kotlinie otrzyma się w podobieństwie leja, którego oś znajduje się pośrodku studni.

Po tych uwagach ogólnych zajmijmy się rozpatrzeniem prędkości, z jaką w powyższych warunkach odbywa się ruch wody gruntowej. Prędkości wody w gruncie na różnych głębokościach mogą być różne. Jednak w celu ułatwienia rozwiązywania zadań przypuszczać będziemy, że prędkość cząsteczek wody w gruncie, w przekrojach prostopadłych do kierunku ruchu jest jednakowa i równa pewnej średniej prędkości, której wartość poniżej określimy.

W kanałach i rzekach znaleźliśmy w swoim miejscu taką zależność pomiędzy prędkością v a spadkiem zwierciadła na jednostkę długości: $v = c\sqrt{iR}$.

Przy ruchu wody w gruncie doświadczenia wykazały znacznie prostrzą zależność, mianowicie

$$v = k . i \;\ldots\ldots\; (1),$$

gdzie i, jak w poprzednim wzorze, oznacza spadek zwierciadła na jednostkę długości, albo inaczej, pochyłość zwierciadła, zaś k oznacza współczynnik, zależny od rodzaju gruntu.

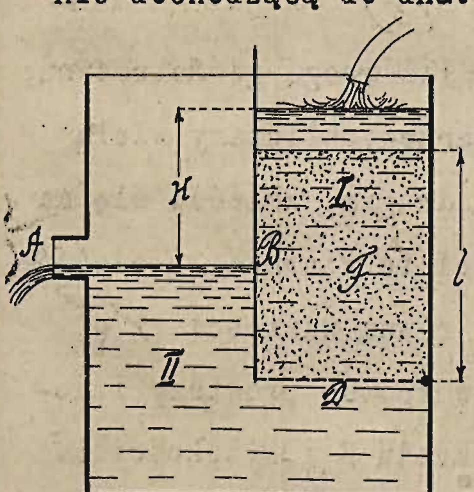
Z wzoru (1) znajdziemy pochyłość zwierciadła

$$i = \frac{v}{k} \;\ldots\ldots\; (2).$$

Parę słów należy poświęcić spółczynnikowi k z wzorów

(1) i (2). - Doświadczenia wykazały, że k jest pewną funkcją wymiarów ziarnek. W przybliżeniu zależność ta jest taka, że, jeśli średnicę δ ziarnek wyrazimy w metrach, wtedy liczba ta będzie zarazem przybliżoną wartością spółczynnika k. A więc, gdy $\delta = 0,1$ mm, czyli w metrach $\delta = 0,0001$ m, wtedy dla takiego gruntu możemy przyjąć, że $k = 0,0001$; kiedy $\delta = 0,6$ mm $= 0,0006$ m, wtedy $k = 0,0006$ i t.d.

Chcąc znaleźć dokładniejszą wartość k dla danego gruntu, należy uciec się do bezpośredniego doświadczenia. Użyć możemy w tym celu naczynia ze ścianką przedziałową B, nie dochodzącą do dna. W jednej części naczynia (I) mamy dno dziurkowane D; nasypujemy do (I) pewną ilość badanego gruntu, poczym lejemy na ten grunt wodę, która przechodzi przez niego do części (II) naczynia, a stąd wylewa się przez otwór A. Wody nalewamy tyle, aby poziomy jej w obu częściach naczynia w ciągu doświadczenia pozostawały bez zmiany, innymi słowy, aby różnica H tych poziomów wody w I i II naczyniu była stała.



Rys. 93.

Ilość Q przepływu przez grunt, którą można łatwo wymierzyć przy A, $Q = \varphi . F . v$; w tym równaniu F oznacza przekrój poprzeczny naczynia I, spółczynnik φ (spółczynnik użyteczności przekroju) wskazuje jaka część przekroju

F jest wolna dla przepływu, v oznacza średnią prędkość przepływu. Z ostatniego równania znajdujemy prędkość przepływu

$$v = \frac{Q}{\varphi F} \dots\dots (3).$$

Jeśli ruch wody podczas przepływu przez naczynie jest trwały i jednostajny, wtedy cała wysokość H zostaje obrócona na pokonanie tarcia na drodze l, gdzie l oznacza długość (wysokość) słupa gruntu badanego. Możemy więc napisać, że

$$H = i . l \dots\dots (4).$$

Z równania (2) mamy $i = \frac{v}{k}$ oraz z (3) $v = \frac{Q}{\varphi F}$; podstawiając zatym w (4), otrzymamy $H = \frac{Q l}{k \varphi F}$, stąd

$$k = \frac{Q l}{\varphi F H} \dots\dots (5).$$

Spółczynnik φ moglibyśmy określić drogą geometryczną; założywszy, naprzykład średnicę ziarnek, obliczamy wiele tych ziarnek, ułożonych jedno przy drugim, zmieści się na polu F; określamy pole, zajęte przez te ziarnka, i odejmując je od pola F otrzymamy resztę, równą wartości φF.

Można spółczynnik φ określić w sposób prostszy i dokładniejszy: weźmy naczynie o przekroju F i wysokości L. Objętość naczynia $= O = F.L$ Nasypmy teraz do naczynia do wierzchu badanego gruntu, a następnie zalejmy go wodą. Grunt i woda razem zajmują objętość O. Woda zajmuje nie całkowity przekrój , lecz φF i wobec tego objętość wody $= \varphi F L = \varphi O$. Wypuszczamy z naczynia wodę, mierząc jej objętość, znajdziemy $O_1 = \varphi O$; stąd określamy $\varphi = \frac{O_1}{O}$. W tym doświadczeniu uwzględniamy również tę nieużyteczną część przekroju, jaką zajmuje woda, zatrzymana w gruncie w kanalikach włoskowatych. Zrozumieć łatwo dlaczego mielibyśmy błędny wynik, gdybyśmy mierzyli ilość wody wlewanej do naczynia, nie zaś wylewanej z niego. - Wogóle φ waha się od 0,2 do 0,4.

Wracając do równania [5], widzimy, że wszystkie wielkości z prawej jego strony uważać należy jako znane; zatym stąd możemy znaleźć wartość spółczynnika k.

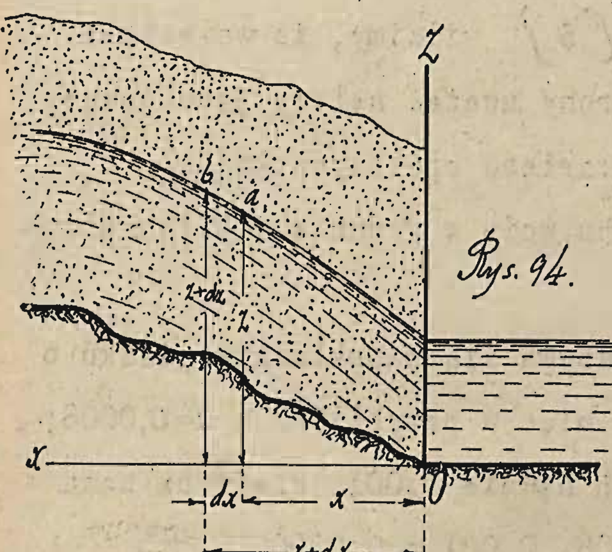
Znajdźmy prędkość ruchu wody w gruńcie w kilku przypadkach.

Przypuśćmy, że ruch odbywa się w pokładzie piasku o średnicy ziarnek 0,8 mm., a więc w przybliżeniu k=0,0008; pochyłość zwierciadła niech będzie 0,001, wtedy na zasadzie wzoru [1] $v = 0{,}0008 \cdot 0{,}001 = 0{,}0000008 \frac{m}{sek}$.
Widzimy zatym, że prędkość ta jest nadzwyczaj mała: aby z tą prędkością woda przeszła jeden metr potrzeba na to $\frac{1}{0{,}0000008 \cdot 3600} = \infty 350$ godzin $\cong$ 14 dni.

Gdyby pochyłość $i = 0{,}01$, co jest już znaczną pochyłością, to i wtedy drogę 1 metra woda przebywać będzie około półtorej doby, płynąc z prędkością $0{,}000008 \frac{m}{sek}$.

Przy pochyłości wreszcie $i = 0{,}1$ woda przepłynie metr w ciągi około 3,5 godziny z prędkością $0{,}00008 \frac{m}{sek}$.
Z powyższych przykładów widzimy, jak, wogóle, nadzwyczaj małe są prędkości, z którymi w tym rozdziale do czynienia mieć będziemy. Spróbujmy teraz ułożyć równanie, wiążące elementy ruchu wody gruntowej.

Wyobraźmy sobie warstwę nieprzepuszczalną, a na niej pokład wodonośny; niech woda, przesączająca się przez piasek wpływa do rowu, w którym poziom wody niech będzie utrzymywany na stałej wysokości. Obieramy osi spółrzędnych prostokątnych, przyjmując za oś odciętych poziom dna w rowie zaś za oś rzędnych ściankę pionową rowu. Obierzmy



Rys. 94.

dowolny punkt a w gruncie na zwierciadle wody na odległości x od osi OZ. Przez punkt ten prowadzimy płaszczyznę pionową, równoległą do osi rowu; płaszczyzną tą przecinamy strumień wody.

Prędkość średnią wody w tym przekroju oznaczmy przez v. W bardzo małej odległości dx od pierwszego przekroju wystawmy sobie drugi przekrój; prędkość wody w tym przekroju będzie inna, różna od v; niech będzie równa $v + dv$. Wysokość punktu a nad osią XX jest Z, wysokość punktu b niech będzie $Z + dz$. Dla pewnej cząsteczki w dwóch jej położeniach a i b napiszemy równanie Bernoulli'ego.

$$(z+dz) + \frac{(v+dv)^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} = z + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + W,$$

gdzie p znacza ciśnienie na powierzchni cieczy które przyjmujemy we wszystkich miejscach zwierciadła jako jednakowe, W — wysokość stracona na tarcie podczas drogi dx.

Skreślając jednakowe wyrazy i otwierając nawias, otrzymamy

$$dz + \frac{v^2}{2g} + \frac{v\,dv}{g} + \frac{dv^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + W;$$

Po odrzuceniu nieskończenie małej drugiego rzędu i redukcji poraz drugi, znajdziemy

$$dz + \frac{v\,dv}{g} = W.$$

Poprzednio widzieliśmy, że prędkość v nawet w najdogodniejszych warunkach jest bardzo mała, więc praktycznie rzec biorąc, można uważać v.dv, jako nieskończenie małą wobec dz, a wtedy, opuszczając v.dv, znajdziemy $dz = W$, czyli, że różnica poziomów, jaka w tym razie istnieje, idzie wyłącznie na pokonanie tarcia; albo inaczej powiemy, że ruch wody gruntowej możemy rozważać zawsze jako ruch jednostajny.

Oznaczmy przez F pole przekroju warstwy wodonośnej, zajętej przez wodę w danym miejscu; przekrój użyteczny dla przepływu będzie tylko φF, gdzie φ, jak o tym wspominaliśmy równa się 0,2 do 0,4. Ilość przepływu $Q = \varphi . F . v$. Ponieważ $v = ki$, zaś przy tym punkcie $i = \frac{dz}{dx}$, więc $v = k \cdot \frac{dz}{dx}$; zatym $Q = \varphi \cdot F \cdot k \cdot \frac{dz}{dx}$; stąd

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Q}{\varphi F k} \quad \ldots\ldots (6).$$

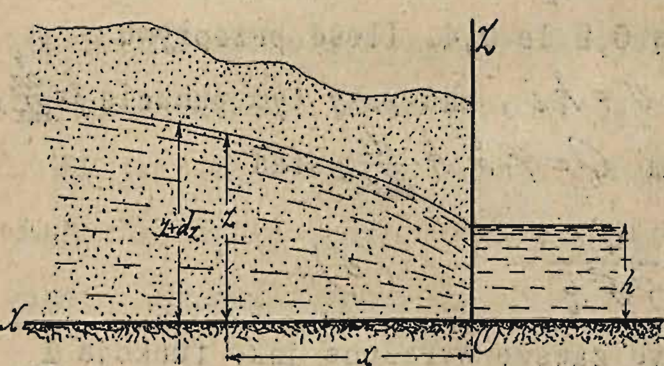
Ponieważ F może być zawsze wyrażone jako funkcja X i Z, widzimy zatym, że w równaniu powyższym mamy związane Z, X, – a więc kształt powierzchni zwierciadła – z ilością przepływu Q i własnościami fizycznymi warstwy wodonośnej (φ i k). – Na paru prostszych przykładach poznamy, jak należy równanie (6) rozwiązywać i jakie można z niego wnioski wysnuć.

Zastosowania.

Przykład I - Rowy zbiorcze.

Dajmy na to, że mamy nieprzepuszczalny pokład poziomy, pokryty warstwą jednorodną piasku; woda w warstwie piasku spływa do rowu, w którym zwierciadło utrzymywane jest na stałym poziomie; znaleźć krzywą powierzchnię zwierciadła wody w warstwie wodonośnej.

Przyjmijmy układ spółrzędnych taki sam, jaki obraliśmy poprzednio i weźmy dwa przekroje warstwy wodonośnej (płaszczyzną pionową) w odległości x i x + dx od osi OZ. Przypuśćmy, że warstwa wodonośna ciągnie się wzdłuż rowu, którego długość niech będzie b. Przekrój strumienia w dowolnym miejscu wtedy określi się, jako iloczyn b.z, gdzie z oznacza odległość zwierciadła wody w danym przekroju od osi X. Przekrój użyteczny znajdziemy:



Rys. 95.

$$\varphi F = \varphi . b . z .$$

W poprzednim równaniu (6) $\frac{dz}{dx} = \frac{Q}{\varphi . F . k}$, a zamiast φF możemy wstawić $\varphi b z$, i wtedy otrzymamy $\frac{dz}{dx} = \frac{Q}{\varphi . b . z . k}$, albo

$$dz . \varphi . b . z . k = dx . Q .$$

W ostatnim równaniu różniczkowym b i Q są wielkości stałe, φ i k zależą od rodzaju gruntu, a więc dla każdego poszczególnego przypadku mają wartości określone; całkując zatym ostatnie równanie, otrzymamy

$$\varphi \cdot b \cdot k \cdot \frac{z^2}{2} = Qx + C \ldots\ldots (7).$$

Pozostaje teraz wyrugować stałą całkowania C, korzystając z pewnych warunków zagadnienia. Warunek może być n.p. ten: woda utrzymywana jest w kanale na stałej głębokości h, liczonej od dna kanału; czyli przy x = 0, z = h. Stąd $C = \varphi b k \frac{h^2}{2}$ i równanie (7) przybierze postać

$$\varphi b k \cdot \frac{z^2}{2} = Qx + \varphi b k \frac{h^2}{2},$$

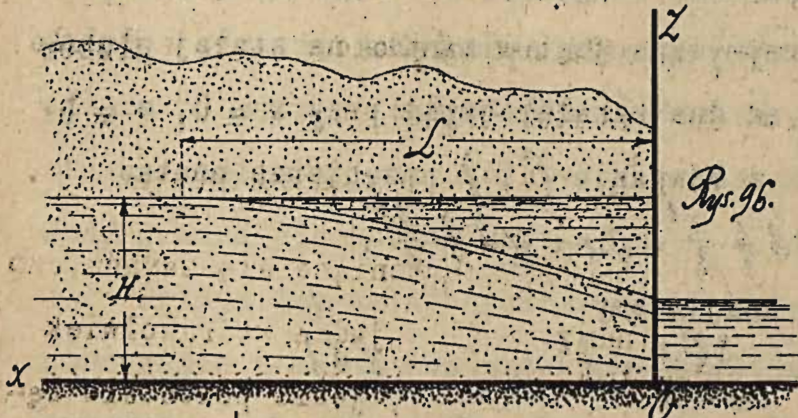
zatym ostatecznie znajdziemy

$$z^2 = \frac{2Qx}{\varphi b k} + h^2 \ldots\ldots (8).$$

Równanie to wskazuje nam, że, aby z danej warstwy wodonośnej (scharakteryzowanej spółczynnikami φ i k) przy szerokości strumienia b metrów otrzymać dopływ wody do kanału równy Q $\frac{m^3}{sek}$, przyczym głębokość wody w kanale ma wynieść h metrów, powinno istnieć w gruncie takie zbiorowisko wody, żeby poziom zwierciadła jej stale się podnosił w miarę oddalania się od kanału. Równanie (8) jest równaniem paraboli; otrzymujemy więc, że powierzchnia zwierciadła strumienia wody gruntowej, dążącej do rowu prostolinijnego po poziomej warstwie nieprzepuszczalnej, jest to powierzchnia krzywa, utworzona przez prostą, posuwającą się równolegle do osi rowu po paraboli, jak po kierownicy.

Wyrugować stałą całkowanie C z równania (7) można w innym przypadku, najczęściej spotykanym, na zasadzie poniższego rozumowania.

Przypuśćmy, że przed budową kanału zastajemy w przepuszczalnym gruncie wodę, która, będąc w stanie spoczynku zapełnia warstwę na głębokość H, przyczym przyjmujemy, że zwierciadło wody gruntowej jest poziome. Pokład nieprzepuszczalny, na którym zatrzymała się woda niech będzie poziomy.



Rys. 96.

Po utworzeniu ściany kanału OZ woda rozpocznie ruch ku kanałowi, i kiedy ten ruch się utrwali, zwierciadło wody przybierze kształt powierzchni, która w miarę zbliżania się ku kanałowi spada, zaś w miarę oddalania się od kanału podnosi się, coraz mniej różniąc się od zwierciadła, zauważonego w stanie spoczynku wody. Miejsce, gdzie zwierciadło wody będące w ruchu, dotknie się zwierciadła, jakie woda posiadała w stanie spoczynku, znajdziemy, dokładnie mówiąc, na odległości nieskończenie dalekiej od kanału. Praktycznie rzecz jednak biorąc, możemy przyjąć, że już na pewnej odległości L od osi Z nastąpi spotkanie się powierzchni zwierciadeł; to znaczy, możemy przyjąć, że przy $x = L$, $z = H$. Przy tym założeniu równanie [7] da nam:

$$\frac{\varphi b k \cdot H^2}{2} = QL + C,$$

stąd $C = \frac{\varphi b k H^2}{2} - QL$; i równanie [7] przybierze postać $\frac{\varphi b k}{2}(z^2 - H^2) = Q(x - L)$, albo ostatecznie

$$H^2 = z^2 - \frac{2Q}{\varphi b k}(x - L) \ldots\ldots (9).$$

Równanie (9), również równanie paraboli, oczywiście jest ważne tylko w granicach od x = 0 do x = L, a to z powodu wprowadzonego poprzednio założenia, że przy x = L, z = H. Równanie (9) określi nam głębokość wody w kanale h, mianowicie z = h, przy x = 0 - więc

$$H^2 = h^2 + \frac{2QL}{\varphi b k} \ldots\ldots (10).$$

Otrzymane (10) równanie, nie różniące się zasadniczo niczym od (8), pozwoli nam określić jedną którąkolwiek wielkość $(Q, H, h, L, \varphi, k, b)$, jeśli pozostałe będą nam znane.

Możemy mieć naprzykład zagadnienie takiej treści: Istnieje pokład wodonośny, w którym wysokość wody jest H metrów; φ i k są określone; mamy wybudować kanał na długości b metrów, do którego napływałaby stale woda w ilości Q $\frac{m^3}{sek}$, przyczym głębokość wody w kanale ma być h metrów. Znaleźć na jakiej odległości, liczonej od kanału, nie dostrzeżemy (praktycznie rzecz biorąc) zmian w zwierciadle, które woda posiadała, będąc w stanie spoczynku; należy zatym znaleźć L, rozwiązując względem niego równanie (10), z wzoru

$$L = \frac{\varphi . b . k}{2Q}(H^2 - h^2).$$

Innym razem może być zadanie, w którym należy określić, ile wody otrzymamy z kanału, jeżeli pokład wodonośny (pod względem φ i k) jest zbadany, długość kanału b oraz głębokość wody w gruncie H i w kanale h są zadane, lub też znane. Szukaną ilość wody Q określimy z wzoru

$$Q=\frac{(H^2-h^2)}{2L}\varphi.b.k$$

Ostatni wzór możnaby przedstawić w odmiennej nieco postaci, mianowicie
$$Q=\frac{(H+h)(H-h)}{2L}\varphi.b.k.$$

$(H-h)$ jest to różnica między poziomem wody w kanale i poziomem zwierciadła w punkcie odległym o L od kanału; wyraz $\frac{H-h}{L}$ możemy nazwać średnią pochyłością zwierciadła wody gruntowej; jeśli pochyłość tę oznaczymy przez α, wtedy równanie ostatnie napiszemy:
$$Q=\frac{\varphi.b.k}{2}\cdot\alpha(H+h).$$

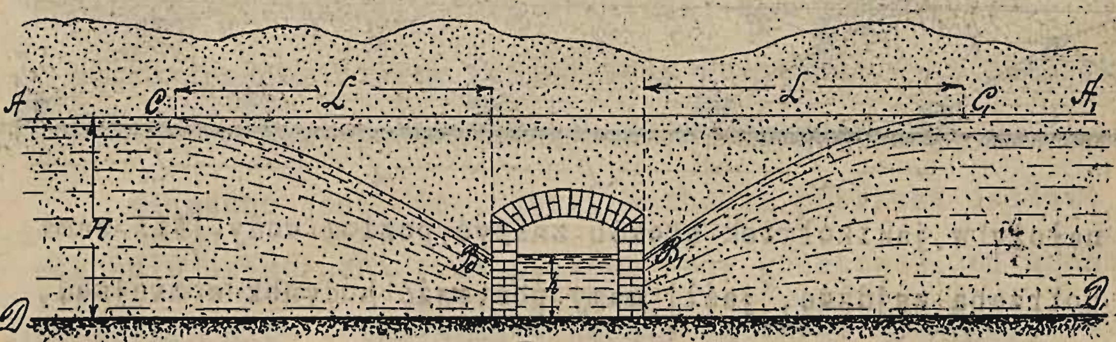
Oznaczmy przez f przekrój ściany kanału, przez którą woda wylewa się do niego, zaś przez F_L przekrój strumienia na odległości L od osi kanału, wtedy
$$\frac{b(H+h)}{2}=\frac{bH+bh}{2}=\frac{F_L+f}{2},$$
i ostatecznie $Q=\varphi.k.\alpha\frac{(F_L+f)}{2}.$

W tej postaci wzór zaznacza, że do kanału z gruntu dochodzi tyle wody, ile by jej mogło przepłynąć przez pewien średni przekrój $\left(\varphi\cdot\frac{F_L+f}{2}\right)$ z prędkością $k.\alpha$, to jest z prędkością odpowiednią średniej pochyłości zwierciadła α.

Wracając do równania [10], bez trudu dostrzeżemy, że zagadnień takich jak przytoczone powyżej, może być jeszcze kilka; treść ich łatwo może być ułożona i dlatego o nich szczegółowo mówić nie zamierzamy.

Równanie [10] znajdzie zastosowanie również i w tym przypadku, kiedy w pokładzie wodonośnym na warstwie nieprzepuszczalnej zbudujemy kanał o ściankach dla wody przenikliwych. Woda wtedy dążyć będzie do kanału z obydwóch stron.

Jeśli pierwotny poziom wody gruntowej oznaczymy A A,, poziom wody w kanale przez B B,, wtedy zwierciadło wody gruntowej utworzy dwie powierzchnie B C i B,C, jednakowe,



Rys. 97.

jeśli płaszczyzna D D, jest pozioma. Z poprzedniego wiemy, że krzywe B C i B,C, będą parabole, które, jeśli rozważamy rzecz praktycznie, schodzą się na odległości L od ścian kanału z płaszczyzną poziomą A A,. Ilość wody, jaką w powyższym przypadku może kanał odprowadzić, znajdziemy z wzoru $Q_0 = 2Q = \frac{H^2 - h^2}{L} \varphi \cdot b \cdot k$, gdzie Q oznacza ilość dopływu z jednej strony kanału, b - długość kanału H, h, L oznaczone są na rysunku.

Przykłady powyższe w dostatecznej mierze wyjaśnią sprawę tak zwanego o s u s z a n i a (przez drenowanie) miejscowości, o czym kilka słów niżej. -

Na pokładzie nieprzepuszczalnym DD,, znajduje się grunt do pewnej wysokości zalany wodą; poziom wody niech będzie AA,. Na powierzchni ziemi BB, mamy zasadzić lub posiać rośliny pewne, których korzenie sięgną poniżej poziomu AA,, wchodząc w wodę. Wobec braku dostępu powietrza w wodzie końce korzeni zaczną gnić i roślina wtedy ginie;

Rys. 98.

należy w jakikolwiek sposób zniżyć poziom wody. Taż sama potrzeba zajdzie, jeśli mamy postawić budynek w miejscu, gdzie poziom wody gruntowej jest dość wysoki; tym razem należy usunąć od fundamentu wodę, aby w ten sposób uniknąć wilgoci w ścianach, albo też, aby usunąć wodę z podziemi, jeśli te mają być zagłębione poniżej AA, .

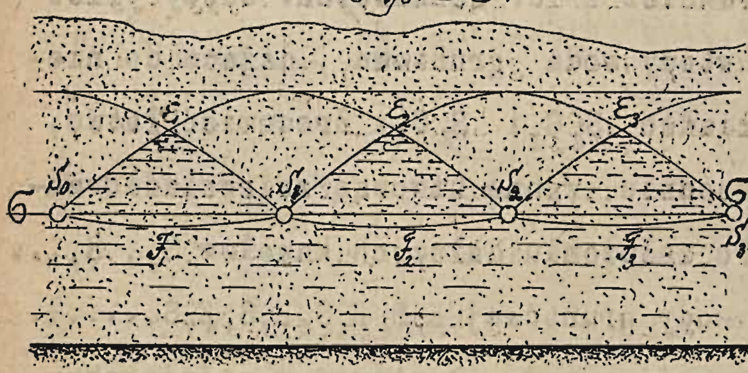
Zniżenie poziomu wody gruntowej w tym czy innym przypadku daje się uskutecznić, jeśli założymy na pewnej głębokości kanały odpowiednich wymiarów ze ściankami dla wody przenikliwymi, lub też rury kamionkowe dziurkowane, albo wreszcie, rury gliniane porowate tak zwane sączki (dreny) stosownej średnicy; wylot dla wody z powyższych kanałów powinien być całkiem wolny.

Wystawmy sobie naprzykład kanał sączkowy S, odpowiedniej średnicy ułożony w warstwie nieprzepuszczalnej; jeśli zapewnimy wodzie odpływ u wylotu kanału S, , zwierciadło wody gruntowej, dążącej do kanału, przybieże kształt z jednej jego strony S,C, i z drugiej S,C', . Na pewnej odległości L od S, niech będzie ułożony równolegle do kanału S_1 drugi kanał S_2 również z rur sączkowych. Gdyby tylko kanał S_2 był ułożony, wtedy woda gruntowa, dążąca do niego, otrzymałaby zwierciadło S_2C_2 i S_2C_2'. Zrozumieć łatwo, że kanały S_1 i S_2 jednocześnie czynne utworzą zwierciadło wody gruntowej $S_1E_2S_2$. Po założeniu dalszych kanałów S_3, S_4,.. otrzymamy zwierciadło wody gruntowej $E_1S_1E_2S_2E_3S_3E_4S_4$...... i w ten sposób zniżymy poziom wody gruntowej w najniekorzystniejszych miejscach przynajmniej o wysokość H_0.

Widoczne jest, że, jeśli zachodzi potrzeba jeszcze znaczniejszego zniżenia poziomu wody gruntowej, osiągnąć to możemy albo, zakładając kanały sączkowe S_1,S_2,S_3,S_4,..... głębiej, niż poprzednio, przy tej samej między nimi odległości, albo też, zakładając je na poprzedniej głębokości lecz bliżej siebie, lub wreszcie, stosując jeden i drugi sposób. Decydujące znaczenie w wyborze sposobu mieć będzie wysokość kosztu.

Bliżej rozpatrywać warunków, jak należy układać kanały osuszające nie będziemy ze względu na brak czasu i miejsca; zwrócimy tylko uwagę na jeden szczegół: mianowicie, nie zawsze można ułożyć kanały $S_1S_2S_3S_4$.... na pokładzie nieprzepuszczalnym, jak to poprzednio przyjęliśmy, gdyż pokład taki może znajdować się na znacznej głębokości. W tanim razie należy kanały S kłaść wprost w gruncie wodonośnym na potrzebnej głębokości na poziomie $\sigma\sigma$; wodę, znajdującą się w gruncie poniżej poziomu $\sigma\sigma$, uważamy (z pewnym przybliżeniem) za nie biorącą udziału w ruchu; wtedy wykreślenie zwierciadła $E_1S_1E_2S_2E_3S_3$... różnić się nie

Rys. 22.



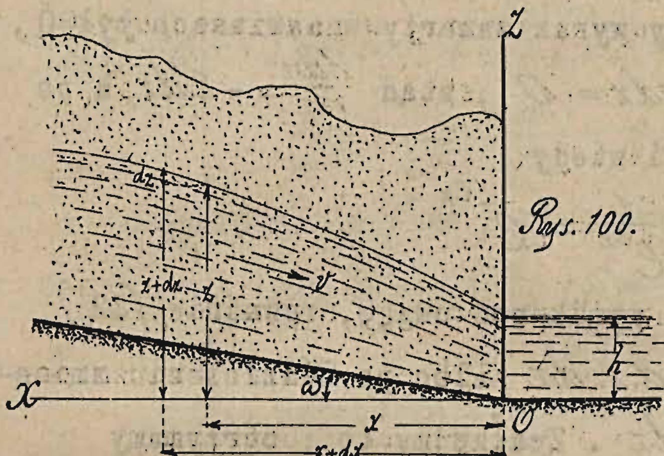
będzie od poprzedniego.

Powiedzieliśmy z przybliżeniem, gdyż pewne cząstki wody gruntowej, będące poniżej $\sigma\sigma$, mogą też być w ruchu, dążąc ku $S_1, S_2, S_3, \ldots$; granica między takimi cząstkami, a tymi, które pozostaną w spoczynku, utworzona będzie pewną krzywą $F_1 S_1 F_2 S_2 F_3 S_3 \ldots$, nie wiele różniącą się od linii prostej- poziomej. Dla tego też, upraszczając zadanie, przyjmujemy dolną powierzchnię $\sigma\sigma$ za płaszczyznę poziomą.-

Przy wykreślaniu poszczególnych gałęzi E_1S_1, S_2E_2, E_3S_3, ... i t.d. krzywej $E_1S_1E_2S_2E_3S_3\ldots$ w pryktyce można przyjmować je za proste pochyłe do poziomu pod pewnym kątem, zależnym, oczywiście, od rodzaju gruntu.

Wystawmy sobie na polu wykopany rów, który ma odprowadzać wodę z gruntu; zależnie od poziomu wody w takim rowie otrzymujemy odpowiednie zwierciadło wody w gruncie. Podczas roztopów, gdy rów, nie nadążając odprowadzić wszystkiej wody, jest zalany wyżej niż zwykle, zwierciadło wody gruntowej, co jest zrozumiałe, podnosi się; zdarzyć się też wtedy może, że, o ile w polu, powyżej rowu, znajduje się miejsce zagłębione, wytworzy się tu czasowe źródełko, lub stawek, przyczym poziom wody w źródełku lub stawku takim może być znacznie wyższy, niż poziom wody w rowie.

Rozwiążmy jeszcze jedno zadanie zasadniczo podobne do poprzedniego lecz o charakterze więcej ogólnym. Niech mianowicie ruch wody zachodzi w warstwie wodonośnej, przyczym pokład nieprzepuszczalny jest płaski pochylony pod kątem ω do poziomu.



Rys. 100.

Oznaczmy przez Q ilość wody, wlewającej się do kanału przez jego ścianę z gruntu. Obierzmy przekrój strumienia na odległości x od początku O; niech pole przekroju równa się F; b, k, φ niech oznaczają to samo, co i poprzednio.

Prędkość przepływu v w obranym przekroju, jak wiemy, $= k\frac{dz}{dx}$; prędkość tę możemy również określić jeszcze z innej zależności, mianowicie

$$Q = v.\varphi.F.cs\omega, \text{ stąd } v = \frac{Q}{\varphi.F cs\omega}, \text{zatym}$$

$$k\frac{dz}{dx} = \frac{Q}{\varphi.F.cs\omega}.$$

Z rysunku mamy, że $F = b(z - x\,tg\omega)$, więc

$$\frac{dz}{dx} = \frac{Q}{k.\varphi.b.(z - x\,tg\omega)cs\omega};$$

oznaczmy czasowo $\frac{k.\varphi.b.cs\omega}{Q} = a$, wtedy $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{a(z - x\,tg\omega)}$, albo $\frac{dx}{dz} = az - ax\,tg\omega$, inaczej

$$dx + ax.tg\omega.dz = az.dz \ldots\ldots (11).$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe, które należy zcałkować, aby otrzymać zależność pomiędzy z i x; -

będzie to równanie krzywej zwierciadła. Chcąc równanie (11) zcałkować, przyjmijmy, że $x = m\cdot n$, stąd $dx = m.dn + n.dm$; oznaczmy jeszcze $a.\operatorname{tg}\omega$ przez ε, wtedy $m.dn + n.dm + m.n.\varepsilon.dz = a.z.dz$, albo

$$m(dn + n.\varepsilon.dz) + n.dm = a.z.dz \ldots\ldots (12);$$

$\underline{n}$ możemy tak obrać, aby wyraz zawarty w nawiasach był=0, to jest aby $dn + n.\varepsilon.dz = 0$, stąd $\frac{dn}{n} = -\varepsilon dz$, a po zcałkowaniu $\lg n = -\varepsilon.z$, i wtedy

$$n = \frac{1}{e^{\varepsilon z}} = e^{-\varepsilon z}.$$

Przyjąwszy ostatni wynik pod uwagę, równanie (12) napiszemy: $e^{-\varepsilon z}\cdot dm = a.z.dz$, albo po oddzieleniu zmiennych $dm = a.z.e^{\varepsilon z}.dz$. Zcałkujmy to; otrzymamy

$$m = a\int z.e^{\varepsilon z} dz + C \ldots\ldots (13).$$

Znajdźmy teraz $\int z e^{\varepsilon z} dz$, całkując ją przez części; niech $e^{\varepsilon z} dz = d\beta$, wtedy $\beta = \frac{1}{\varepsilon} e^{\varepsilon z}$, a następnie

$$z e^{\varepsilon z} dz = z d\beta = z\beta - \beta.dz, \text{ zatym}$$

$$\int z e^{\varepsilon z} dz = z\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{\varepsilon z} - \frac{1}{\varepsilon}\int e^{\varepsilon z} dz = z\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{\varepsilon z} - \frac{1}{\varepsilon^2} e^{\varepsilon z} = \frac{e^{\varepsilon z}}{\varepsilon^2}(z\varepsilon - 1).$$

Wobec tego równanie (13) będzie

$$m = \frac{a.e^{\varepsilon z}}{\varepsilon^2}(z\varepsilon - 1) + C.$$

Ponieważ $x = m\cdot n$, więc

$$x = \frac{a}{\varepsilon^2}(z\varepsilon - 1) + C\cdot e^{-\varepsilon z} = \frac{az}{\varepsilon} - \frac{a}{\varepsilon^2} + C e^{-\varepsilon z}.$$

Podstawiając zamiast $a = \frac{k.\varphi.b.\cos\omega}{Q}$ i zamiast

$$\varepsilon = a\operatorname{tg}\omega = \frac{k.\varphi.b.\cos\omega.\operatorname{tg}\omega}{Q} = \frac{k.\varphi.b.\sin\omega}{Q},$$

otrzymamy

$$x=\frac{\cancel{\varphi}.\cancel{b}.\cancel{k}.cs\omega.z.\cancel{Q}}{\cancel{Q}.\cancel{k}.\cancel{\varphi}.\cancel{b}.sn\omega}-\frac{\cancel{k}.\cancel{\varphi}.\cancel{b}.cs\omega.Q^{\cancel{2}}}{\cancel{Q}.k^{\cancel{2}}.\varphi^{\cancel{2}}.b^{\cancel{2}}.sn^2\omega}+Ce^{-\frac{k\varphi b}{Q}sn\omega.z},$$

albo po skróceniu

$$x=z.ctg\omega-\frac{Qcs\omega}{k.\varphi.b\,sn^2\omega}+Ce^{-\frac{k.\varphi.b}{Q}sn\omega.z}\quad\ldots\ldots\ldots(14).$$

Aby wyrugować C , zauważmy, że, kiedy x = 0, z = h,

więc $0=h\,ctg\omega-\frac{Q.cs\omega}{k.\varphi.b.sn^2\omega}+Ce^{-\frac{k.\varphi.b}{Q}.sn\omega.h}$; stąd

$$C=\left(\frac{Q.cs\omega}{k.\varphi.b.sn^2\omega}-h\,ctg\omega\right)e^{\frac{k\varphi b}{Q}sn\omega.h},$$

a wtedy równanie (14) otrzymamy w postaci

$$x=ctg\omega\left[z-h\,e^{\frac{k\varphi b}{Q}sn\omega.(h-z)}\right]-\frac{Q.cs\omega}{k.\varphi.b.sn^2\omega}\left[1-e^{\frac{k\varphi b}{Q}.sn\omega(h-z)}\right]\ldots(15).$$

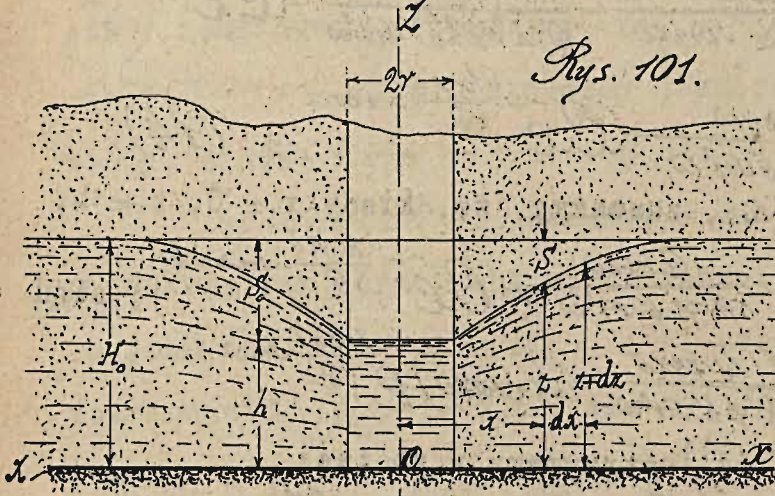
Takie ostatecznie równanie znajdujemy w ogólnym przypadku, kiedy warstwa nieprzepuszczalna jest pochylona do poziomu pod kątem ω.

Z równania (15) moglibyśmy otrzymać równanie (8), jakkolwiek ze znacznym nakładem pracy, przy założeniu, że $\omega=0$. —

Przykład 2.- Studnie.

Wystawmy sobie, że na pokładzie poziomym, nieprzepuszczalnym dla wody, jest grunt dla niej przenikliwy. Niech grunt ten będzie zalany wodą do pewnej wysokości. Wykopmy w tych warunkach studnię okrągłą o promieniu r , zagłębiając ją do warstwy nieprzepuszczalnej.

Niech dolna część studni, wykopanej w gruncie wodonośnym będzie tak zbudowana, że dopływ wody gruntowej do środka studni jest zupełnie swobodny. Przypuśćmy dalej, że wylewaniem lub wypompowywaniem wody utrzymujemy stały poziom jej w studni. Ponieważ ściana studni jest okrągła, a woda dopływa do niej ze wszystkich stron jednakowo, więc w jakimkolwiek przekroju, przechodzącym przez oś studni, zwierciadło wody gruntowej



przedstawi się nam dwiema krzywymi symetrycznymi względem osi studni. Zbadajmy te krzywe. - W tym celu obierzmy układ spółrzędnych prostokątny OX, OZ przyczym oś X obierzmy poziomą na powierzchni pokładu nieprzepuszczalnego, oś Z skierujemy wzdłuż osi studni.

Wystawmy sobie dwa współosiowe ze studnią walce: jeden o promieniu x , drugi o promieniu x + dx; wysokości nad osią x zwierciadła przeciętego tymi walcami niech będą odpowiednio z i z + dz. Przekrój, wzięty na odległości x od osi studni, przez który woda płynie, dążąc do studni, jest $2\pi x z$, zaś ilość przepływającej przez ten przekrój wody $Q = \varphi \cdot 2\pi x \cdot z \cdot V_x$, gdzie V_x jest średnia prędkość przepływu przez powierzchnię walca o promieniu x , zaś φ jest to spółczynnik użyteczności przekroju z poprzedniego już nam znany. Ponieważ prędkość $V_x = k \cdot i = k \cdot \frac{dz}{dx}$, więc podstawiając tę wartość na V_x , otrzymamy

$$Q = \varphi \cdot 2\pi \cdot x \cdot z \cdot k \cdot \frac{dz}{dx} \ldots \quad (16).$$

Jest to szukane równanie różniczkowe, które po zcałkowaniu da nam zależności pomiędzy Q, x, z, φ i k.
Aby równanie (16) scałkować, rozdzielamy zmienne:

$$z dz = \frac{Q}{2\pi\varphi k} \cdot \frac{dx}{x};$$

poczym całkując, otrzymamy

$$\frac{z^2}{2} = \frac{Q}{2\pi\varphi k} \lg x + C$$

Należy teraz wyrugować stałą całkowania C, korzystając z warunku, że przy samej studni zwierciadło wody gruntowej jest na tej samej wysokości h ponad osią x, co i poziom wody w studni, a więc gdy x = r, z = h; stąd stałą całkowania określimy, jak niżej:

$$\frac{h^2}{2} = \frac{Q}{2\pi\varphi k} \lg r + C \quad \text{i} \quad C = \frac{h^2}{2} - \frac{Q}{2\pi\varphi k} \lg r.$$

Równanie krzywej przyjmie wtedy postać

$$\frac{z^2}{2} = \frac{Q}{2\pi\varphi k}\left[\lg x - \lg r\right] + \frac{h^2}{2},$$

albo ostatecznie

$$z^2 = \frac{Q}{\pi\varphi k} \lg \frac{x}{r} + h^2 \ldots\ldots (17).$$

Dogodniej jest mierzyć głębokość zwierciadła wody w studni nie od dna, lecz od początkowego poziomu zwierciadła, który istniał, kiedy woda w studni była w spoczynku. Z rysunku widzimy, że $h = H_0 - S_0$, gdzie S_0 jest to właśnie ta głębokość, na którą podczas czerpania wody poziom w studni się zniżył. Równanie (17) wtedy przyjmie postać

$$z^2 = \frac{Q}{\pi\varphi k} \lg \frac{x}{r} + (H_0 - S_0)^2 \ldots\ldots (18).$$

Przypuśćmy, że mamy daną studnię i znamy jej średnicę , głębokość, oraz położenie początkowe (to jest przed pompowaniem) zwierciadła wody gruntowej. Wtedy dla każdego zniżonego poziomu wody w studni będziemy mogli odnaleść odpowiedni kształt zwierciadła wody gruntowej . Będzie to powierzchnia lejowata współosiowa ze studnią.

Z równania (18) łatwo określimy, ile zniżył się poziom wody gruntowej w dowolnym miejscu , wziętym na jakiejkolwiek odległości od osi studni - w porównaniu ze stanem pierwotnym zwierciadła. Jeśli badane miejsce jest na odległości x od osi studni, wtedy głębokość S , na jaką zniży się tu poziom wody, znajdziemy z równania (18). ponieważ $S = H_0 - z$, więc

$$S = H_0 - \sqrt{\frac{Q}{\pi \varphi k} \lg \frac{x}{r} + (H_0 - S_0)^2} \quad \ldots\ldots (19).$$

Im większe obierzemy <u>x</u> , tym <u>z</u> będzie większe (patrz równanie (18)) i tem mniejsze będzie S (patrz równanie (19)) , w żadnym jednak razie nie może być $z > H_0$,czyli $S < 0$, ponieważ niema przyczyny, dla której by zwierciadło wody w ruchu w pewnych punktach mogło się podnieść wyżej poziomu zwierciadła w spoczynku.

Dokładnie rzecz biorąc, to miejsce, gdzie $z = H_0$ a $S = 0$, powinniśmy znaleść na odległości nieskończenie dalekiej od osi studni, gdyż, przypuszczając, że już na pewnej s k o ń c z o n e j długości od osi równej R <u>z</u> jest dokładnie równe H_0 zaś S - zeru, zgadzamy się tym samym na to , że w punktach odległych więcej niż R od osi zwierciadło wody w ruchu jest ściśle poziome; zatym w tych miejscach ruch wody gruntowej nie powinien istnieć (prędkość = 0 , ponieważ $\frac{dz}{dx} = 0$) ; tymczasem ruch wody i w tym miejscu powinien zachodzić, w przeciwnym bowiem razie, skądby się dostawała woda do tych miejsc dla których $x < R$, a następnie i do samej studni.

Równania zaś nasze (18) i (19) pozwalają określić skończoną wartość na x , dla którego $z = H_0$ a $S = 0$ — wbrew poprzednim uwagom naszym. Wskazuje to , że te założenia, które były podstawą do zestawienia równań różniczkowych, mianowicie pojęcie o średniej prędkości, następnie założenie, że prędkość wody gruntowej jest proporcjonalna względem pierwszej potęgi pochyłości zwierciadła itp. , nie są dostatecznie ścisłe.

Pomimo jednak przewidywanych niedokładności otrzymanych równań, będziemy posiłkowali się nimi, gdyż wyniki, otrzymane z powyższych równań, z dostateczną dokładnością zgadzają się z doświadczeniem i dlatego też po poprzednich paru luźnych uwagach, które oczywiście są ważne również względem równań (9) i (10) , przejdziemy do dalszego ciągu wykładu. -

Równanie (18) daje nam , że z może być równe H_0, jeśli odejdziemy od studni na pewną odległość R, którą znajdziemy z równania

$$H_0^2 = \frac{Q}{\pi \varphi k} \lg \frac{R}{r} + (H_0 - S_0)^2 \dots\dots (20)$$

Równanie to , zawierające wielkości H_0, S_0, r, R, Q

oraz φ i k znajdzie zastosowanie w wielu zagadnieniach, jeśli jedna z tych wielkości jest szukana przy pozostałych wielkościach danych lub znanych: możemy naprzykład określić Q , kiedy dane są H_o, S_o, r, R, φ i k z wzoru

$$Q = \frac{(2H_o - S_o)S_o}{lg\frac{R}{r}}\pi\cdot\varphi\cdot k \ldots\ldots (21).$$

Wiele z otrzymanych wzorów nadają się do robienia wniosków ogólniejszej treści; rozpatrzmy naprzykład wzór (21) : przypuśćmy, mamy studnię wykopaną w warstwie wodonośnej, przyczym głębokość wody H_o jest bardzo znaczna w porównaniu z opadnięciem zwierciadła S_o. Wtedy bez znacznej omyłki napiszemy wzór (21) w takiej postaci:

$$Q = \frac{2H_o S_o}{lg\frac{R}{r}}\cdot\pi\cdot\varphi\cdot k \ldots\ldots (21^a).$$

Tak napisany wzór upoważnia nas do wniosku, że ilość wody Q , którą możemy czerpać ze studni, jest proporcjonalną względem opadnięcia poziomu wody. Jeśli przez Q' oznaczymy tę ilość wody , jaką wydostajemy ze studni przy opadnięciu poziomu S_o', zaś przez Q'' ilość wody odpowiednią opadnięciu S_o'', wtedy na zasadzie (21^a) otrzymamy, że

$$\frac{Q'}{Q''} = \frac{S_o'}{S_o''}.$$

Aby więc ze studni otrzymać dwa razy większą ilość wody, należy być przygotowanym na to, że poziom w studni zniży się dwa razy więcej. Trzeba pamiętać jednak, że proporcjonalność ta zachodzi tylko wtedy, gdy woda w stu-

Jan Kozłowski 19 09 r

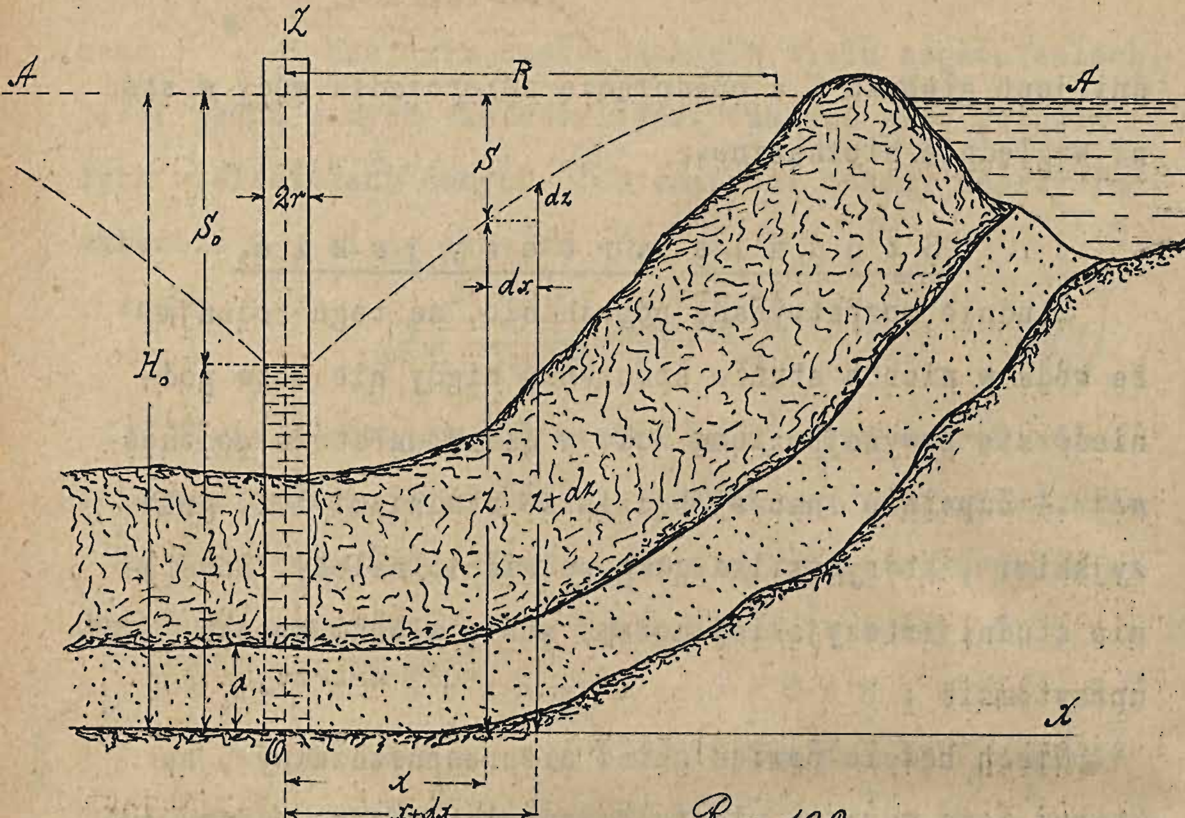
dni jest głęboka , a opadnięcie zwierciadła wody w studni względnie nieznaczne.

Studnie artezyjskie.

Studnie, rozpatrywane poprzednio, są tego rodzaju, że woda w nich w stanie spoczynku nigdy nie może podnieść się powyżej poziomu wody w samej warstwie wodonośnej .- Zupełnie inaczej będzie ze studniami t.z. artezyjskimi , którym kilka uwag poświęcić należy. Powstanie studni artezyjskiej możemy sobie w taki sposób uprzytomnić :

Niech będzie pewien ~~u~~pokład nieprzepuszczalny , na którym leży warstwa ~~nie~~przepuszczalna naprz. piasku lub żwiru; warstwa ta niech będzie pokryta znów warstwą nieprzepuszczalną.- Jeśli warstwa środkowa, zamknięta między dwiema nieprzepuszczalnymi podnosi się razem z nimi do góry i tam zasilana będzie wodą lub połączona będzie z jakimś zbiornikiem wody , wtedy woda w tej warstwie środkowej , wodonośnej , znajdować się będzie pod ciśnieniem hydrostatycznym .

Jeśli przy takich warunkach w pokładzie górnym nieprzepuszczalnym zrobimy otwór , sięgający warstwy wodonośnej , wtedy woda w nim podniesie się powyżej warstwy wodonośnej i nieraz przy sprzyjających okolicznościach wyjść może ponad powierzchnię ziemi , jak to naprz. widać na rysunku 102.



Rys. 102.

Takie wody nazywane są zwykle wodami artezyjskimi, gdyż studnie tego rodzaju po raz pierwszy w Europie (w wieku XII) urządzać zaczęto w prowincyi Artois we Francyi. W Chinach i w pustyni Libyjskiej znane były studnie takie od bardzo dawna.

Przypuśćmy, że jesteśmy w pewnej okolicy, posiadającej wodę artezyjską. W miejscowości tej budujemy studnię, która przecina grunt wodonośny, opierając się na dolnej warstwie nieprzepuszczalnej. Część studni, znajdująca się w pokładzie wodonośnym, niech posiada ściankę, przepuszczającą wodę. Woda w studni podniesie się.

Wystawmy sobie teraz, że dokoła studni na różnych od niej odległościach mamy założone rurki stosownej długości - aż do warstwy wodonośnej. Ponieważ woda w warstwie wodonośnej wszędzie jest pod ciśnieniem, więc i we wspomnianych rurkach wzniesie się woda . Jeśli woda gruntowa będzie w spoczynku , poziom jej zarówno w rurkach jak i w studni będzie wspólny A A .

Kiedy zaczniemy ze studni wodę wylewać , zniżając jej poziom , rozpocznie się ruch wody w warstwie wodonośnej w stronę studni ; poziomy w rurkach opadną : w bliższych względem studni więcej , w dalszych mniej .Jeśli wystawimy sobie w myśli powierzchnię , utworzoną przez poziomy w poszczególnych rurkach , otrzymamy powierzchnię którą nazywać będziemy zwierciadłem wody artezyjskiej . Znajdźmy kształt tej powierzchni .

Obierzmy układ prostokątny spółrzędnych , przyjmując za oś Z oś studni ; oś X obierzemy poziomą . Przez a oznaczmy grubość warstwy wodonośnej ; niech grubość ta będzie stałą . Promieniem x zakreślamy około studni pewną powierzchnię walcową ; wtedy przekrój, przez który woda przepływać będzie , dążąc ku studni , jest $2\pi x a$,zaś przekrój użyteczny $2\pi x a \varphi$. Mnożąc przekrój użyteczny przez średnią prędkość V_x w tym przekroju , otrzymamy ilość przepływającej wody, $Q = 2\pi x a \varphi . V_x$.-Prędkość V_x zależeć będzie , jak wiemy , od pochyłości zwierciadła w tym miejscu i od rodzaju gruntu , mianowicie $V_x = \frac{dz}{dx} . k$;

stąd $$Q = 2\pi x a . \varphi . k . \frac{dz}{dx} \quad \ldots\ldots (21).$$

Mamy zatym równanie różniczkowe , które teraz należy scałkować . Przeprowadzamy rozdział zmiennych , a następnie całkujemy otrzymane równanie :

$$dz = \frac{Q}{2\pi . a . \varphi . k} \cdot \frac{dx}{x}\,; \quad z = \frac{Q}{2\pi a \varphi k} \lg x + C \ldots.(22).$$

Stałą całkowania znajdziemy , zakładając że tam , gdzie krzywa dotyka ścian studni t.j. przy $x = r$, $z = h$.

A więc $\quad h = \dfrac{Q}{2\pi a \varphi k} \cdot \lg r + C$, a stąd

$$C = h - \frac{Q}{2\pi . a . \varphi . k} \lg r.$$

Podstawiając powyższą wartość C w równanie (22), otrzymamy

$$z = \frac{Q}{2\pi a \varphi k} \lg \frac{x}{r} + h \ldots.. (23).$$

Jeśli początkową wysokość poziomu wody gruntowej oznaczymy przez H_o , opadnięcie poziomu wody w studni przez S_o, wtedy $h = H_o - S_o$ i równanie (23) przyjmie postać

$$z = \frac{Q}{2\pi a \varphi k} \lg \frac{x}{r} + H_o - S_o \ldots (24).$$

Niech dla pewnego miejsca odległego od studni o $\underline{R}$, opadnięcie poziomu wody jest już tak nieznaczne, że możemy dla tego punktu przyjąć $z = H_o$. Podstawiając zatym w równanie (24) $\underline{x}$ zamiast $\underline{R}$, a $\underline{z}$ zamiast H_o , znajdujemy $\quad H_o = \dfrac{Q}{2\pi a \varphi k} \lg \dfrac{R}{r} + H_o - S_o$,

stąd
$$Q = \frac{2\pi \varphi a k S_o}{\lg \frac{R}{r}} \ldots\ldots\ldots (25).$$

Z równania tego widzimy, że ilość wody, jaką daj studnia artezyjska jest wprost proporcjonalną względem opadnięcia poziomu wody w studni , bez względu na wartość S_o .

Równanie powyższe (25) jest użytecznem przy

rozwiązywaniu wielu zagadnień, dotyczących studni artezyjskich, np.: - Znamy rodzaj gruntu, w którym budujemy studnię, a więc dane są φ, k ; niech również dana będzie grubość warstwy wodonośnej a ; niech będzie zadana odległość R oraz promień studni r , a trzeba określić , ile opadnie w studni woda, jeśli pompować będziemy jej Q $\frac{m^3}{sek}$.
Z równania (25) znajdziemy

$$S_o = \frac{Q \cdot \lg \frac{R}{r}}{2\pi \cdot \varphi \cdot a \cdot k}.$$

W innym przypadku możemy mieć dane φ, h, a, R, r, S_o, trzeba znaleść Q.

Lub też dane są φ, k, a, r, S_o, Q , a należy znaleść R, to jest odległość od osi studni tych punktów, gdzie się nie odczuwa opadnięcia poziomu wody gruntowej.

Może też być takie zadanie: dane mamy φ, k, a, R, Q i S_o, a trzeba określić jakiej średnicy (2 r) należy wybudować studnię , aby zadane warunki zostały zachowane.

Na powyższych wiadomościach zakończymy rozdział o prostszych rodzajach ruchu wody gruntowej; więcej szczegółowe wskazówki, dotyczące tego przedmiotu, czytelnik znajdzie w specjalnych dziełach.

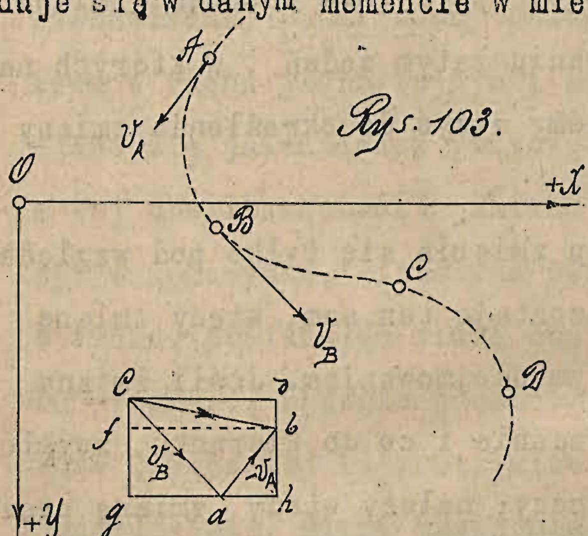
Wprzód nim przejdziemy do następującego rozdziału , traktującego o parciu płynącej cieczy na ciała stałe, przypomnijmy sobie z mechaniki jedno twierdzenie, które będziemy tu stale stosowali.-

Twierdzenie o ilości ruchu punktu materjalnego i układu takich punktów.

Z mechaniki punktu wiemy, że jeśli na punkt materjalny, będący w spoczynku, lub innym razem w ruchu, nie działa żadna siła, albo też działają nań siły wzajemnie się równoważące, punkt wtedy pozostaje w spoczynku, względnie trwa w ruchu jednostajnym i prostolinjowym. Skoro następnie zjawi się jakakolwiek przyczyna, inaczej siła zewnętrzna, w tej chwili zachodzi zmiana w stanie punktu: jeśli punkt był w spoczynku, - zaczyna się on poruszać; jeśli zaś był w ruchu, posiadając stałą pod względem wartości i kierunku prędkość, zacznie punkt zmieniać albo tylko jej wartość, albo jej kierunek, albo, wreszcie, jedno i drugie jednocześnie. Wiemy następnie, że zmiana prędkości zachodzi zawsze w kierunku działania siły i że zmiana ta odniesiona do jednostki czasu dla danego punktu jest wprost proporcjonalna do wartości siły i odwrotnie proporcjonalna do masy punktu. Zależności przed chwilą podane, mogą być odwrócone: mianowicie, jeśli, badając ruch punktu, dostrzeżemy, iż punkt ten pozostaje stale w spoczynku, albo, innym razem, trwa w ruchu jednostajnym i prostolinjowym, powiemy wtedy, że na punkt badany nie działa żadna siła, albo też, co na jedno wychodzi, że siły, działające na punkt badany, są w równowadze. Jeśli zauważymy, że punkt w pewnej chwili zmienia prędkość czy co do kierunku, czy też co do wartości, czy też pod jednym i drugim względem jednocześnie, twierdzimy wtedy, że na nasz punkt działa pewna siła (jedna tylko - lub wypadkowa z kilku); powiemy dalej, że zmiana prędkości wskazuje nam kierunek i względną wartość siły, która tę zmianę wywołała. Z poprzedniego wynika, że o działaniu na punkt materyalny siły pojedyńczej lub wypadkowej rozstrzygać można na podstawie tego, czy i jaka zachodzi zmiana prędkości. Przy rozwiązywaniu zatym zadań , w których należy określać siły, powinniśmy dążyć do określenia zmiany prędkości.

Jeśli prędkość punktu zmienia się tylko pod względem wartości, kierunek zaś pozostaje ten sam, wtedy zmianę prędkości określimy prostym odejmowaniem. Jeśli zmiana prędkości zachodzi jednocześnie i co do kierunku, zwykłe odejmowanie tu nie wystarczy; należy wtedy zmianę prędkości określić drogą gieometryczną , co nie zawsze jest dogodne i proste. Często korzystać będziemy z następującego sposobu: Obieramy dwie osi jeśli ruch punktu zachodzi na płyszczyźnie, albo trzy osi , o ile ruch punktu odbywa się na dowolnej powierzchni. Osi , najczęściej względem siebie prostopadłe, obieramy tak, żeby przynajmniej jedna z nich była równoległa do tego kierunku, wzdłuż którego mają działać siły szukane. Kiedy odpowiednio obraliśmy osi, znajdujemy zmiany prędkości wzdłuż tych osi; następnie przypisujemy zmianę prędkości wzdłuż każdej osi działaniu w tym kierunku pewnej siły .

Do rozkładania zmiany prędkości wzdłuż dwuch lub trzech osi upoważnieni jesteśmy na tej zasadzie, że dwie siły, przyłożone do jednego i tego samego punktu, tem sam skutek (to jest tę samą zmianę prędkości) wywierają, jaki może wywrzeć siła wypadkowa z nich. Aby powyższe uwagi wyraźniejszymi zrobić, wystawmy sobie, że pewien punkt materjalny, poruszając się po torze płaskim A B C D ...., znajduje się w danym momencie w miejscu A i posiada tu prędkość V_A; po pewnym czasie, kiedy ten sam punkt będzie w B, niech jego prędkość = V_B; kierunki i wartości V_A i V_B są przedstawione na rys. 103. Obieramy dodatnie kierunki osi O X i O Y.



Rys. 103.

Rzuty prędkości V_A na osi O X i O Y oznaczymy przez V_{AX} i V_{AY}; toż samo dla prędkości V_B niech będą rzuty V_{BX} i V_{BY}. Zmiana prędkości w kierunku osi O X wyniesie $(V_{BX} - V_{AX})$, w kierunku zaś osi O Y = $(V_{BY} - V_{AY})$. Całkowitą zmianę prędkości moglibyśmy znaleść gieometrycznie (patrz rys, 103) w ten sposób: od punktu C na prostej równoległej do V_B bierzemy odcinek C a; od punktu a prowadzimy linję ab równoległą do V_A i odkładamy odcinek ab w kierunku odwrotnym w porównaniu z V_A; w ten sposób odejmujemy gieometrycznie V_A od V_B. Połączywszy C z b otrzymamy odcinek C b; będzie to różnica prędkości V_B i V_A. Łatwo dowieść, że odcinek C b ma rzuty $(V_{Bx} - V_{Ax})$

oraz $(V_{By}-V_{Ay})$; rzeczywiście rzut C b na oś X jest C d a na oś Y jest C f . Następnie $Cd = ga + ah = V_{Bx} + (-V_{A})_x$, gdzie $(-V_A)_x$ oznacza rzut na oś O X odwróconej prędkości V_A ; łatwo dostrzedz, że $(-V_A)_x = -V_{Ax}$, zatym $Cd = V_{Bx} - V_{Ax}$. Tegoż samego łatwo dowieść względem C f , mianowicie $Cf = Cg + gf = V_{By} + (-V_A)_y = V_{By} - V_{Ay}$, c.b.d.d.

Możemy też napisać , że wartość zmiany prędkości , czyli długość odcinka C b, w stosownej skali równa się

$$\sqrt{(V_{Bx}-V_{Ax})^2+(V_{By}-V_{Ay})^2}.$$

Znaleźliśmy, że zmiana prędkości w kierunku osi O X jest $V_{Bx} - V_{Ax}$, a w kierunku osi O Y jest $V_{By} - V_{Ay}$. Oznaczmy czas, w ciągu którego zaszła przemiana prędkości V_A na V_B przez τ', wtedy zmiana prędkości w jednostce czasu w kierunku osi O X wyniesie $\frac{V_{Bx}-V_{Ax}}{\tau'}$, w kierunku zaś osi O Y $\frac{V_{By}-V_{Ay}}{\tau'}$.

Poprzednio mówiliśmy, że zmiana prędkości , określona dla jednostki czasu, jest wprost proporcjonalna do siły, która tę zmianę wywołała i odwrotnie proporcjonalna do masy punktu. Oznaczmy siłę , która działała na punkt nasz na drodze A B przez P', rzuty tej siły na osi przez P_x' i P_y' , zaś masę punktu przez m , wtedy otrzymamy

$$\frac{V_{Bx}-V_{Ax}}{\tau'} = \frac{P_x'}{m} \quad \text{oraz} \quad \frac{V_{By}-V_{Ay}}{\tau'} = \frac{P_y'}{m},$$

albo inaczej

$$m V_{Bx} - m . V_{Ax} = P_x' . \tau' \ldots\ldots (1^a);$$

$$m V_{By} - m V_{Ay} = P_y' . \tau' \ldots\ldots (1^b).$$

Równania ostatnie o tyle będą dokładne, o ile siła P', a więc i rzuty jej P'_x i P'_y w przeciągu czasu t' nie ulegają zmianie.

Gdyby jednak ten warunek nie zachodził, zawsze możemy wybrać punkt B w takiej odległości od A, aby czas t' potrzebny do przebycia drogi A B był o tyle mały, iżbyśmy siłę P' mogli przyjąć w przeciągu tego czasu za stałą. Równania ostatnie bez względu na długość czasu t' możemy wypowiedzieć w pewien sposób, wprowadzając przedewszystkiem następujące określenia: iloczyn z masy punktu i prędkości (nprz. iloczyn $m.V_{Ax}$) nazwiemy ilością ruchu danego punktu w kierunku osi O X w pewnym miejscu jego drogi; różnicę $mV_{Bx} - mV_{Ax}$ nazwiemy zmianą ilości ruchu punktu w kierunku osi O X w czasie t', kiedy punkt doszedł do punktu B, idąc od A. Następnie $P'_x . t'$ - iloczyn siły w kierunku osi przez czas, nazwiemy popędem siły, działającej na punkt w danym kierunku w ciągu czasu t'. Przy powyższych określeniach każde z ostatnich równań głosi:

Zmiana ilości ruchu punktu materjalnego w kierunku danej osi w przeciągu czasu t' jest równa popędowi siły w tym samym kierunku wziętej i działającej również w ciągu czasu t'.

Idźmy teraz dalej.

Niech punkt w ciągu czasu t'' przejdzie z B do C; prędkość w tym miejscu oznaczmy przez V_c, rzuty V_c na osi przez V_{cx} i V_{cy}. Niech na drodze B C działa na punkt siła P'', której rzuty oznaczmy przez P''_x i P''_y.

Niech dalej, po upływie czasu τ''' punkt dojdzie do D i niech tu posiada prędkość V_D, której rzuty niech będą V_{Dx} i V_{Dy}, przyczym siła działająca w tym czasie na punkt niech będzie P''', a rzuty jej P'''_x i P'''_y, itd.

Dajmy na to, że dostrzegamy po pewnym czasie punkt nasz w miejscu M jego toru; prędkości jaką tu punkt ma niech będzie V_M (rzuty jej V_{Mx}, V_{My}). - Następnie po czasie $\tau^{(n)}$ punkt przenosi się do N, gdzie niech ma prędkość V_N (rzuty jej V_{Nx} i V_{Ny}), a siła, jaka na punkt wzdłuż drogi MN działa, niech będzie $P^{(n)}$, zaś rzuty jej $P^{(n)}_x$ i $P^{(n)}_y$. Napiszmy dla każdej działki drogi równanie takie, jakie otrzymaliśmy dla działki A B, mianowicie w kierunku osi O X mieliśmy

dla działki A B .... $\cancel{mV_{Bx}} - mV_{Ax} = P'_x \cdot \tau'$

B C .... $mV_{Cx} - \cancel{mV_{Bx}} = P''_x \cdot \tau''$

C D .... $\cancel{mV_{Dx}} - mV_{Cx} = P'''_x \cdot \tau'''$

. . . .

. . . .

M N .... $mV_{Nx} - \cancel{mV_{Mx}} = P^{(n)}_x \cdot \tau^{(n)}$.

Po zsumowaniu tych równań odpowiednimi stronami, znajdziemy

$$mV_{Nx} - mV_{Ax} = P'_x\tau' + P''_x\tau'' + P'''_x\tau''' + \ldots + P^{(n)}_x\tau^{(n)} \quad \ldots (2^a).$$

Gdybyśmy napisali równania dla poszczególnych działek w kierunku osi O Y i, jak poprzednio, równania zsumowali otrzymalibyśmy

$$mV_{Ny} - mV_{Ay} = P'_y\tau' + P''_y\tau'' + P'''_y\tau''' + \ldots \pm P^{(n)}_y\tau^{(n)} \quad \ldots (2^b).$$

Uogólnijmy zadanie nasze,przyjmując, że tor punktu nie jest krzywą płaską lecz przestrzenną. W takim razie należałoby dobrać jeszcze trzecią oś O Z i w kierunku tej osi określać rzuty prędkości púnktu, ilości ruchu , zmiany ilości ruchu, rzuty sił i popędy ich dla różnych działek toru . Postępując w ten sam sposób jak czyniliśmy to względem osi O X i O Y , otrzymamy równanie tej postaci

$$mV_{Nz} - mV_{Az} = P_z'\tau' + P_z''\tau'' + P_z'''\tau''' + \ldots + P_z^{(n)}\tau^{(n)} \ldots\ldots (2^c).$$

Każde z tych równań (2) w lewej stronie zawiera zmianę ilości ruchu punktu w początkowym i końcowym miejscu jego drogi - w kierunku odpowiedniej osi ; drugie strony równania zawierają popędy siły zmiennej w kierunku tej samej osi za cały czas ,w ciągu którego trwał ruch od A do N ; przeciąg tego czasu

$$t = \tau' + \tau'' + \tau''' + \ldots\ldots + \tau^{(n)}.$$

Przypuśćmy , że siła działająca na punkt , poruszający się po torze od A do N , zmienia się w sposób ciągły; wtedy równania powyższe będą ścisłe , jeśli długośći czasów $\tau', \tau'', \tau''', \ldots\ldots \tau^{(n)}$ będziemy brali nieskończenia małe i wtedy prawe strony równań powyższych będziemy mogli napisać , korzystając ze znakowania , przyjętego w rachunku całkowym, mianowicie

$$mV_{Nx} - mV_{Ax} = \int_0^t P_x . dt \ldots\ldots (3^a).$$

$$mV_{Ny} - mV_{Ay} = \int_0^t P_y . dt \ldots\ldots (3^b).$$

$$mV_{Nz} - mV_{Az} = \int_0^t P_z \cdot dt \ldots\ldots (3^c).$$

Jeśli umowimy się , aby nazywać $\int_0^t P_x \cdot dt$ popędem zmiennej siły P w kierunku osi OX w ciągu czasu t ,wtedy każde z rownań (3) wypowiedzieć możemy tak :

Zmiana ilości ruchu danego punktu w kierunku obranej osi w czasie t jest rowna popędowi siły , wziętej w kierunku obranej osi , obliczonemu również dla czasu t.

Powróćmy jeszcze na chwilę do równań (I) i przyjmijmy,że siła P działająca na dany punkt materjalny podczas jego ruchu zmienia się w sposób ciągły; wtedy ,jak to już zaznaczaliśmy , czas τ' należy obrać o tyle mały , aby można było w ciągu tego czasu przyjąć siłę P za stałą ; oczywiście że i zmiana prędkości $V_{Bx} - V_{Ax}$, zatym i zmiana ilości ruchu $mV_{Bx} - mV_{Ax}$ będą bardzo małe; przy takich założeniach możemy wprowadzić w równania (I) znakowanie z rachunku różniczkowego , mianowicie zamiast τ' napisać dt , a zamiast $V_{Bx} - V_{Ax}$ i $mV_{Bx} - mV_{Ax}$ napisać $d(V_x)$ i $d(mV_x)$, w takim razie równania (I) przybiorą postać

$$d(mV_x) = P_x \cdot dt \ldots\ldots\ldots (4^a)$$

$$d(mV_y) = P_y \cdot dt \ldots\ldots (4^b)$$

i gdyby ruch punktu był odniesionym nie do dwuch, lecz do trzech osi , wtedy byłoby jeszcze

$$d(mV_z) = P_z \cdot dt \ldots\ldots\ldots (4^c).$$

Łatwo dostrzeżemy , że równania (3) możemy otrzymać po zcałkowaniu równań różniczkowych (4), zakładając, że punkt z miejsca A przenosi się do miejsca N po upływie czasu t; w miejscu A punkt posiada prędkość V_A, zaś w miejscu N - prędkość V_N.

Zwróćmy się teraz do napisania równań podobnych do (3) lub (4), a dotyczących nie jednego tylko punktu materyalnego, lecz układu punktów materyalnych.

Niech więc będzie szereg punktów materyalnych o masach $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$; na każdy z tych punktów niech działają zosobna siły zewnętrzne $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$, których rzuty na osi OX, OY OZ niech będą P_{1x}, P_{1y}, P_{1z}, P_{2x}, P_{2y}, $P_{2z}\ldots$ i t.d. Oznaczmy prędkości punktów naszego układu w pewnym momencie przez $V_1, V_2, V_3, \ldots\ldots$; rzuty tych prędkości na osi niech będą V_{1x}, V_{1y}, V_{1z}, V_{2x}, V_{2y}, V_{2z}, ... i t.d. Ponieważ punkty $m_1, m_2, m_3, \ldots$ stanowią układ, więc tym samym przyjmujemy, że pomiędzy tymi punktami są pewne połączenia, czy też wzajemne oddziaływania, które ogólnie nazywamy s i ł a m i w e - w n ę t r z n y m i danego układu.

Naprzykład na punkt m_1 działa punkt m_2 z siłą S_{12}; na ten sam punkt m_1 działa punkt m_3 z siłą S_{13} i t.d.; na punkt m_2 działają punkty m_1 z siłą S_{21}, m_3 z siłą S_{23} i t.d., przyczym przyjmujemy, że siły S_{12} i S_{21} co do wartości są sobie równe, działają wzdłuż jednej i tej samej prostej, lecz skierowane są sobie wprost przeciwnie.

Jeśli do każdego punktu naszego układu oprócz siły zewnętrznej P wystawimy sobie jeszcze przyłożone siły wewnętrzne, pochodzące od działania pozostałych punktów układu, wtedy każdy taki punkt możemy uważać jako swobodny; dla niego wtedy przydatne będą równania (3) lub (4). Rozpatrzmy punkt m_1; przyjmijmy, że na ten punkt, którego prędkość w pewnym momencie jest V_1, działają oprócz siły P_1 jeszcze S_{12}, S_{13}, S_{14}.... ; rzuty tych ostatnich sił oznaczmy odpowiednio przez S_{12x}, S_{12y}, S_{12z}, S_{13x}, S_{13y}, S_{13z}, i t.d.

Pod wpływem grupy sił $P_1 S_{12} S_{13}$...i t.d. punkt tak się porusza, jak gdyby był swobodnym i dla niego wtedy możemy zastosować równania (4), pisząc

$$d(m_1 v_{1x}) = (P_{1x} + S_{12x} + S_{13x} + S_{14x} + \dots)dt;$$

dla punktu m_2 takie samo rownanie przybrałoby postać

$$d(m_2 v_{2x}) = (P_{2x} + S_{21x} + S_{23x} + S_{24x} + \dots)dt;$$

dla punktu m_3 otrzymamy

$$d(m_3 v_{3x}) = (P_{3x} + S_{31x} + S_{32x} + S_{34x} + \dots)dt,$$

i t.d., dla ostatniego punktu

$$d(m_n v_{nx}) = (P_{nx} + S_{n1x} + S_{n2x} + S_{n3x} + \dots)dt.$$

Dodajmy do siebie wszystkie podobne równania, otrzymane dla punktów naszego układu; znajdziemy wtedy

$$d(m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \dots) = (P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots)dt;$$

w prawej stronie równania przepadają wszystkie siły wewnętrzne, gdyż przy dodawaniu dwumian $(S_{21x} + S_{12x})$, następnie $(S_{23x} + S_{32x})$ i t.d. każdy zosobna daje zero na zasaddzie poprzednio wskazanej.

Otrzymane rownanie możemy w skróceniu napisać

$$d(\Sigma m v_x) = (\Sigma P_x)dt \ldots\ldots (5^a).$$

W podobny zupełnie sposób otrzymamy równania względem osi OY i OZ, mianowicie

$$d(\Sigma m v_y) = (\Sigma P_y)dt \ldots\ldots (5^b)$$

$$d(\Sigma m v_z) = (\Sigma P_z)dt \ldots\ldots (5^c).$$

W równaniach tych $\Sigma m v_x$ jest to suma ilości ruchu w kierunku osi OX, obliczona dla wszystkich punktów układu; wobec tego nazwać możemy $\Sigma m v_x$ — ilością ruchu całego układu w kierunku osi OX; również tak samo nazwiemy $\Sigma m v_y$ oraz $\Sigma m v_z$.

Przy takim określeniu możemy którekolwiek równanie [5] wypowiedzieć:

Zmiana ilości ruchu danego układu punktów materyalnych w kierunku osi obranej w ciągu czasu dt równa się popędowi sił zewnętrznych w tym samym kierunku, określonemu za przeciąg tego samego czasu.

Zwrócić należy tu uwagę, że równania [5] nie zawierają wcale sił wewnętrznych; jest to bardzo ważna zaleta tych równań, dzięki której w wielu przypadkach stosowanie równań [5] jest nadzwyczaj proste i łatwe.

Równania [5] są tylko dla bardzo małego przeciągu czasu; możemy jednak otrzymać równania i dla dowolnego okresu t; w tym celu należy równania [5] zcałkować, poczym otrzymamy

$$\Sigma m v_x'' - \Sigma m v_x' = \int_0^t (\Sigma P_x)dt \ldots\ldots (6^a).$$

Jankowski

$$\Sigma m v_y'' - \Sigma m v_y' = \int_0^t (\Sigma P_y) dt \ldots\ldots (6^b)$$

$$\Sigma m v_z'' - \Sigma m v_z' = \int_0^t (\Sigma P_z) dt \ldots\ldots (6^c).$$

W równaniach tych prędkości z kreską u góry (') oznaczają prędkości, jakie punkty układu posiadają na początku czasu, zaś prędkości z dwiema kreskami u góry (") oznaczają prędkości , jakie punkty posiadają w końcu czasu t .

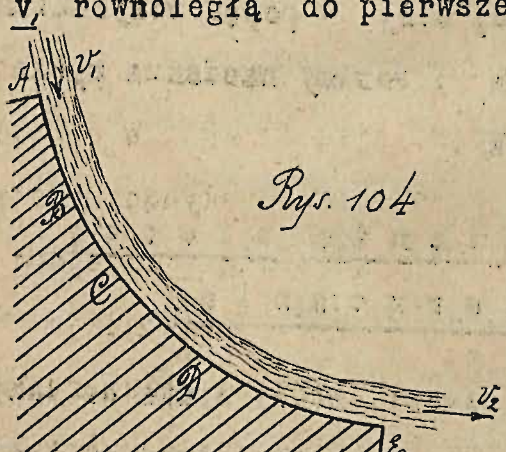
Sposób wypowiedzenia twierdzenia zawartego w równaniach (6) niczym zasadniczo nie różni się od tego , w jaki wypowiedzieliśmy równania (3) : zamiast tylko ilości ruchu punktu - będziemy mieli ilość ruchu układu i zamiast popędu jednej siły - popęd wszystkich sił z e w n ę t r z n y c h ; robimy nacisk : tylko sił z e w n ę t r z n y c h .

P a r c i e s t r u m i e n i a c i e c z y n a p o w i e r z c h n i ę

Niech będzie strumień cieczy, który spada na daną powierzchnię i następnie po niej spływa. Strumień taki przy odpowiednich warunkach wywierać może pewne parcie na wspomnianą powierzchnię.

Wystawmy sobie w szczególnym przypadku , że strumień pada na powierzchnię płaską z pewną prędkością równoległą do niej ; przekonamy się wtedy , że jeśli nie będziemy uwzględniali ciężaru cieczy ani też tarcia strumienia o płaszczyznę, oddzielne cząsteczki strumienia przepłyną po płaszczyznie z pierwotną prędkością; ponieważ prędkość cząsteczek co do wartości i co do kierunku pozostała jednakową przy wejściu ich na płaszczyznę i po zejściu ich z niej, więc wnioskujemy, że w tym przypadku niema żadnego oddziaływania płaszczyzny na strumień ; zatym odwrotnie nie powinno też być parcia strumienia na płaszczyznę.

Inaczej rzecz się przedstawi, jeżeli strumień wpadac będzie na jakąkolwiek powierzchnię ABCDE z prędkością v_1 równoległą do pierwszego elementu powierzchni AB.



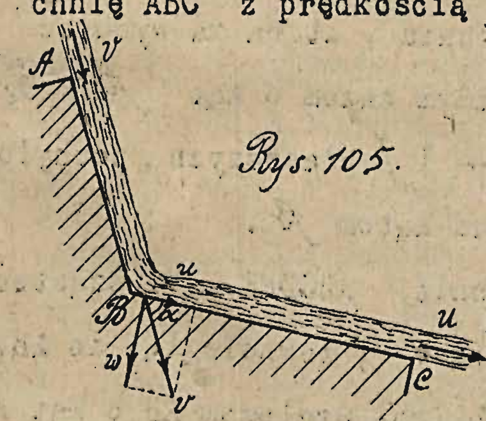
Rys. 104

Cząsteczki strumienia, płynąc po powierzchni, stopniowo zmieniają prędkość, aż wreszcie przy E, opuszczają powierzchnię z prędkością v_2 odmienną od v_1 i co do wartości i co do kierunku. ~~Ponieważ~~ Wiemy , że każda zmiana prędkości cząsteczki, czy to pod względem kierunku, czy też pod względem wartości jej, powstać musi na skutek działania siły jednej lub kilku . Jeżeli w naszym przykładzie nie będziemy uwzględniali działania siły ciężkości , ani siły tarcia, pozostanie przyjąć oddziaływanie (parcie) elementów powierzchni ABCDE na odpowiednie cząsteczki strumienia. Oczywiście , cząsteczki cieczy wywierają takie same parcia co do wartości, tylko odwrócone, na elementy powierzchni. Całkowite oddziaływanie strumienia na powierzchnię oznaczymy jako wypadkową poszczególnych elementarnych parć i nazwiemy tę wypadkową p a r c i e m s t r u m i e n i a na powierzchnię.

Określenie tego parcia w różnych przypadkach stanowić będzie treść poniższego rozdziału.

Pierwej jednak, nim przystąpimy do właściwego zadania, rozpatrzmy warunki przepływu strumienia po powierzchni, utworzonej z dwóch, przecinających się pod kątem α, płaszczyzn ; prędkość końcowa strumienia zostaje pochylona względem początkowej o kąt α.

Niech bardzo cienki strumień cieczy wpada na powierzchnię ABC z prędkością v, równoległą do AB. W chwili,



Rys. 105.

kiedy cząsteczka, płynąca w strumieniu z prędkością v, dojdzie do płaszczyzny BC, następuje uderzenie cząsteczki o płaszczyznę. Rozłóżmy prędkość v na dwie składowe: w prostopadłą do BC i u równoległą do BC.

Ponieważ, jak doświadczenie nas uczy, cząsteczki cieczy przy uderzeniu o ciała twarde zachowują się tak, jak ciała niesprężyste, powinniśmy przyjąć, że składowa prędkość w będzie stracona, a cząsteczki popłyną po BC z prędkością u.

Z rysunku mamy, że $u = v.\cos\alpha$ i $w = v.\sin\alpha$. Możemy zatym powiedzieć, że z powodu uderzenia się cząsteczek o płaszczyznę BC każda z nich traci prędkość $w = v.\sin\alpha$; czyli, inaczej, początkowa energja strumienia na skutek tego zmniejsza się. Niech ilość cieczy, jaką niesie strumień wynosi $Q\,m^3$ na sek.; wtedy w ciągu każdej sekundy strumień traci energji z powodu uderzenia:

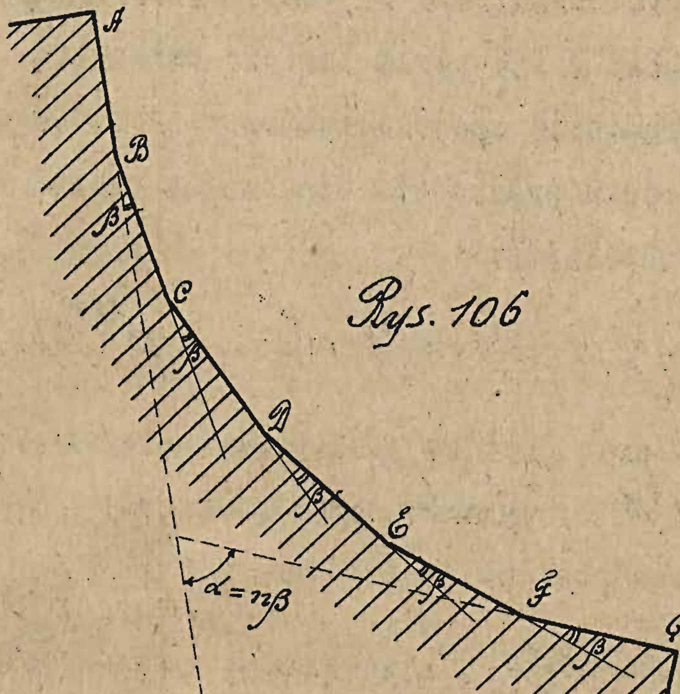
$$E_s = \frac{\Delta Q}{g}\cdot\frac{w^2}{2} = \frac{\Delta Q}{2g}v^2\sin^2\alpha \ldots\ldots (7),$$

gdzie Δ jest ciężar I met^3. cieczy.

Rozpatrzmy teraz, jaka będzie strata energji tej samej ilości wody Q met^3. na sek., jeżeli zmianę kierunku prędkości danego strumienia dokonamy przez kilkakrotne, każdorazowo jednakowe, odchylanie strumienia, w takiej jednak mierze, aby ostateczne odchylenie strumienia wyniosło kąt α. Niech powierzchnia, ktora ma wywołać szereg małych odchyleń za każdym razem o kąt $\beta = \frac{\alpha}{n}$, będzie złożona z szeregu $(n + I)$ płaszczyzn, pochylonych jedna względem drugiej pod kątem β.

Niech to będzie powierzchnia ABCDEF... . Cząsteczki, płynące po AB z prędkością v, równoległą do AB, uderzają o płaszczyznę BC pochyloną względem AB o kąt β. Przy tym uderzeniu każda cząsteczka, zgodnie z powyższym, traci prędkość $v\sin\beta$ i płynie dalej wzdłuż BC z prędkością $v.\cos\beta$. Możemy więc powiedzieć, że ilość cieczy Q, płynąca w ciągu sekundy po powierzchni straci przy B energję w ilości $\frac{\Delta Q}{2g}v^2\sin^2\beta$.

Kiedy cząsteczki, płynące dalej wzdłuż BC z prędkością $V cs\beta$, dojdą do płaszczyzny CD, nastąpi znów z powodu uderzenia o CD strata prędkości $= (V cs\beta) . sn\beta$, i cząsteczki popłyną dalej wzdłuż CD z prędkością równoległą do CD i równą $(V. cs\beta) . cs\beta = V. cs^2\beta$. W tym więc miejscu strumień na każdą sekundę traci energję w ilości $\frac{\Delta Q}{2g} . V^2 cs^2\beta . sn^2\beta$.



Rys. 106

Po dopłynięciu cząsteczek do DE z powodu uderzenia ich o DE, strumień straci znów energję w ilości

$$\frac{\Delta Q}{2g} V^2 cs^4\beta . sn^2\beta,$$

płynąc dalej z prędkością $(V. cs^2\beta) . cs\beta = V cs^3\beta$.

Rozumując w ten sam sposób dalej, otrzymamy, że, kiedy cząsteczki dopłyną do ostatniej $(n + 1)$ płyszczyzny, strata energji strumienia z powodu uderzenia o tę płaszczyznę wyniesie $\frac{\Delta Q}{2g} V^2 cs^{2(n-1)}\beta \, sn^2\beta$, cząsteczki zaś strumienia popłyną dalej po ostatniej płyszczyźnie z prędkością $V. cs^n\beta$.

Określiliśmy wartości poszczególnych strat energji przy przejściu strumienia z jednej płaszczyzny na drugą; możemy stąd z łatwością znaleść całkowitą stratę energji strumienia spowodowaną szeregiem uderzeń przy zmianach kierunku prędkości. Oznaczając ogólną stratę przez E_s, napiszemy:

$$E_s = \frac{\Delta Q}{2g} \cdot v^2 \sin^2\beta \left(1 + \cos^2\beta + \cos^4\beta + \cos^6\beta + \ldots + \cos^{2(n-1)}\beta\right).$$

Szereg w nawiasie jest to postęp gieometryczny z wykładnikiem $\cos^2\beta$; wyrazów wszystkich jest n . Suma n wyrazow tego postępu jest rowna $\frac{\cos^{2n}\beta - 1}{\cos^2\beta - 1}$; ponieważ $\cos^2\beta - 1 = -\sin^2\beta$, więc suma n wyrazow postępu $= \frac{1-\cos^{2n}\beta}{\sin^2\beta}$, a zatym

$$E_s = \frac{\Delta Q}{2g} v^2 \sin^2\beta \frac{1-\cos^{2n}\beta}{\sin^2\beta} = \frac{\Delta Q}{2g} v^2 (1 - \cos^{2n}\beta).$$

Poprzednio założyliśmy, że $\beta = \frac{\alpha}{n}$, więc ostatecznie

$$E_s = \frac{\Delta Q}{2g} v^2 \left(1 - \cos^{2n}\frac{\alpha}{n}\right) \ldots\ldots (8).$$

Z wzoru tego znajdziemy parę szczególnych przypadków: kiedy n = I , wtedy

$$E_s = \frac{\Delta Q}{2g} v^2 \sin^2\alpha ,$$

zatym to samo, co daje nam (7), — co jest słuszne, gdyż założenie, że n = I odpowiada powierzchni złożonej tylko z dwóch płaszczyzn, nachylonych do siebie pod kątem α .

Jeżeli będziemy w (8) podstawiali na n wartości

2,3,4,..itd. znajdziemy, że E_s ciągle maleć będzie, dążąc do zera, ponieważ wyraz $cs^{2n}\frac{\alpha}{n}$ przy rosnącym n rosnąć będzie, aż wreszcie przy n $= \infty$ stanie się 1^{∞},*) które w tym razie = 1.

Wobec tego znajdziemy, że

$$\left(E_s\right)_{n=\infty} = 0.$$

Stąd otrzymujemy wniosek następujący: jeżeli zmianę kierunku prędkości płynącego strumienia dokonywać będziemy przy pomocy powierzchni, złożonej z bardzo znacznej ilości elementów płaskich, bardzo mało do siebie nachylonych, albo jeszcze lepiej przy pomocy powierzchni krzywej ciągłej, zwolna zmieniającej kierunek, wtedy przepływ strumienia po takiej powierzchni nie pociąga za so-

---

*) Niech $cs^{2n}\frac{\alpha}{n} = k$; przelogarytmujmy obie strony:

$$2n \lg cs\frac{\alpha}{n} = \lg k$$, albo, inaczej

$$\lg k = \frac{\lg cs\frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{2n}}$$, kiedy $n = \infty$,

$$\lg k = \frac{0}{0};$$

otrzymaliśmy zwykłą postać wartości nieoznaczonej. Korzystając z usług rachunku różniczkowego, znajdziemy, że

$$\lg k = \frac{\frac{d\left(\lg cs\frac{\alpha}{n}\right)}{dn}}{\frac{d\left(\frac{1}{2n}\right)}{dn}} = \frac{\frac{1}{cs\frac{\alpha}{n}}\cdot sn\frac{\alpha}{n}\cdot\frac{\alpha}{n^2}}{-\frac{1}{2n^2}} = -2\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{n},$$

a teraz otrzymamy: kiedy n $= \infty$, czyli

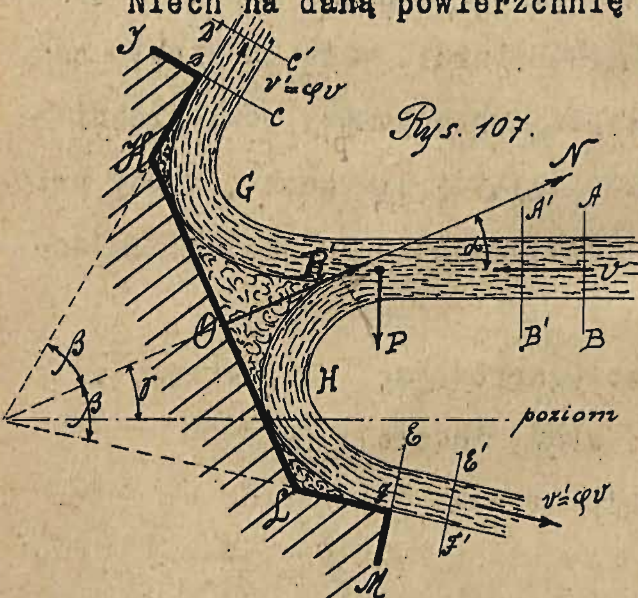
$$\left(\lg k\right)_{n=\infty} = -2\alpha \operatorname{tg} 0 = 0,$$ zatym $\left(k\right)_{n=\infty} = 1$

albo $$\left(cs^{2n}\frac{\alpha}{n}\right)_{n=\infty} = 1.$$

bą żadnych strat energji na uderzenie; możemy zatym powiedzieć, że prędkość przepływającego w takich warunkach strumienia wartości swej nie zmienia, a zachodzi tu tylko zmiana kierunku prędkości.

Zwróćmy się teraz do właściwego tematu niniejszego rozdziału, i określmy w ogólniejszym przypadku wartość parcia, wywieranego przez strumień na zadaną powierzchnię.

Niech na daną powierzchnię obrotową o przekroju JKLM, będącą w spoczynku, spada strumień cieczy. Kiedy strumień cieczy dojdzie do powierzchni JKLM, nastąpi uderzenie pierwszych cząsteczek o nią; z cząsteczek tych niektóre wstrzymane, inne zmuszone z powodu uderzenia do wykonywania ruchów nieregularnych utworzą przy O rodzaj klina stożkowatego, ktory następne cząstki strumienia rozsuwa; wobec tego cząsteczki strumienia, dochodzące do powierzchni później, rozsuwają się po niej. Przy punktach K i L otrzymamy również podobne przestrzenie, wypełnione cząsteczkami cieczy o nieregularnych ruchach. Następnie strumień spływa z powierzchni JKLM. Wreszcie po pewnym czasie zauważymy, że ruch strumienia cieczy po naszej powierzchni stanie się trwałym.



Rys. 107.

W rezultacie otrzymujemy, że strumień cieczy, spadając na powierzchnię, zostaje przez nią odkształcony i opuszcza ją przy brzegach JM z prędkością inną niż ta, z jaką strumien do powierzchni dochodził. Mamy więc tu przykład zmiany prędkości strumienia na skutek oddziaływania, powiedzmy inaczej, parcia na strumień oddzielnych elementów powierzchni JKLM. Jakie działanie na strumień wywiera ten czy inny element powierzchni, nie umiemy tego określić; uda się nam jednak wyznaczyć wypadkową R' wszystkich elementarnych parć na strumień, ze strony powierzchni ; zatym R' będzie to całkowite parcie powierzchni na strumień. Oczywiście, jeżeli znajdziemy R', będziemy tym samym mieli określone parcie R strumienia cieczy na daną powierzchnię, gdyż wartość liczebna R będzie taka sama jak R', - kierunek tylko R będzie wprost przeciwny kierunkowi R', czyli $R = - R'$.

Chcąc znaleść R', względnie R, weźmy pod rozpatrzenie układ cząsteczek cieczy, zawarty pomiędzy przekrojem AB, obranym w tym miejscu, gdzie podczas ruchu trwałego strumienia, nie dostrzegamy w nim jeszcze oddziaływania powierzchni JKLM, następnie drugim przekrojem utworzonym przez powierzchnię stożkową CDEF w tym miejscu, gdzie oddziaływanie powierzchni na strumień zostało już zakończone.

Oznaczmy prędkość strumienia : w przekroju AB przez $\underline{v}$ i w przekroju CDEF przez $\underline{v}'$; załóżmy, że $v' = \varphi v$.

Przyjmijmy dalej, że brzegi JK i LM nachylone są do normalnej ON do powierzchni JKLM pod kątem β ; normalna zaś ta niech z poziomem tworzy kąt γ ; następnie, niech prędkość v w przekroju AB z normalną ON tworzy kąt α . Określmy przy tych założeniach parcie R' powierzchni JKLM na strumień w kierunku ON.

Aby ułożyć równanie, z którego moglibyśmy określić R', zastosujmy do części cieczy ABCDEF twierdzenie o zmianie ilości ruchu w ciągu określonego czasu, przyjmując normalną ON za oś , względem której określać będziemy zarówno ilości ruchu jak i popędy sił . Przeciąg czasu, o którym mówiliśmy, może być dowolny, gdyż rozważamy ruch strumienia cieczy trwały; niech więc to będzie bardzo mały przeciąg czasu - element czasu dt .

Na początku elementu czasu dt obrana ciecz zajmowała objętość ABCDEF ; w końcu tego elementu czasu ciecz zajmie miejsce $A'B'C'D'E'F'$. Ilość ruchu cieczy $A'B'C'D'E'F'$ (końcowa) względem ON może być uważana, jako suma ilości ruchu względem tejże osi - cieczy $A'B'C\ D\ E\ F$ i ilości ruchu cieczy $C\ D\ E\ F\ C'D'E'F'$. W podobny sposób możemy powiedzieć, że ilość ruchu cieczy ABCDEF (początkowa) może być uważana jako suma ilości ruchu cieczy $A\ B\ A'B'$ oraz cieczy $A'B'C\ D\ E\ F$ - wszystko względem jednej i tej samej osi ON . Stąd łatwo otrzymamy, że zmiana ilości ruchu obranego układu w czasie dt wyniesie :

ilość ruchu $A'B'C\ D\ E\ F$ + il. r. $C\ D\ E\ F\ C'D'E'F'$ — il. r. $A\ B\ A'B'$ — il. r. $A'B'C\ D\ E\ F$. Ponieważ rozpatrujemy ruch trwały, więc ilość ruchu części cieczy $A'B'C\,D\,E\,F$ jest jednakowa na początku i w końcu czasu dt ; zatym szukana ilość ruchu cieczy $ABCDEF$ w czasie dt, = il. r. $C\,D\,E\,F\,C'D'E'F'$ — ilość ruchu $A\,B\,A'B'$.

Z powyższego przedewszystkim dostrzegamy, że do określenia zmiany ilości ruchu obranego układu cząsteczek możnaby przyjąć, że część cieczy $A\,B\,A'B'$ w elemencie czasu dt przeszła na miejsce $C\,D\,E\,F\,C'D'E'F'$, reszta zaś układu pozostała jakby bez ruchu. Zwróćmy się zatym do określenia ilości ruchu $C\,D\,E\,F\,C'D'E'F'$. Przyjmijmy, że ilość cieczy, wpadająca strumieniem na powierzchnię $JKLM$, wynosi $Q\frac{m^3}{sek}$, zatym w ciągu czasu dt przepłynie ciecz w objętości Qdt ; taką właśnie objętość stanowi ciecz $C\,D\,E\,F\,C'D'E'F'$; masa tej cieczy jest $\frac{\Delta Q dt}{g}$. Rzut prędkości $\underline{v'}$ na oś ON jest $v'cs\beta = \varphi v cs\beta$.
Ilość więc ruchu cieczy $C\,D\,E\,F\,C'D'E'F'$ względem osi ON wyniesie $\frac{\Delta Q dt}{g} \cdot \varphi . v . cs\beta$.

Określmy teraz ilość ruchu cieczy $A\,B\,A'B'$. Masa tej cieczy jest taka sama, jak poprzednio i równa się $\frac{\Delta . Q . dt}{g}$; rzut prędkości $\underline{v}$ na oś ON jest $= - v . cs\alpha$; zatym ilość ruchu cieczy $A\,B\,A'B'$ względem osi ON jest =

$$= - \frac{\Delta Q dt}{g} v . cs\alpha ;$$

stąd znajdziemy zmianę ilości ruchu $A\,B\,C\,D\,E\,F$ w ciągu czasu dt względem osi ON :

$$\frac{\Delta Q dt}{g}\left[\varphi . v . cs\beta - (- v cs\alpha)\right] = \frac{\Delta Q v dt}{g}(\varphi . cs\beta + cs\alpha).$$

Z twierdzenia o ilości ruchu układu wiemy, że zmiana jej równa jest popędowi w kierunku tej samej osi ON wszystkich sił z e w n ę t r z n y c h , przyłożonych do cząsteczek cieczy w ABCDEF w ciągu czasu dt . Sił wewnętrznych, t.j. oddziaływań jednych cząstek układu na sąsiednie, brać tu pod uwagę niema najmniejszej potrzeby, o czym poprzednio była mowa.

Siły zewnętrzne i popędy ich w kierunku osi ON w naszym przypadku są następujące:

a) ciężar cieczy objętości ABCDEF ; oznaczmy go przez P ; kąt między P i normalną ON jest równy $(\frac{\pi}{2}-\gamma)$; więc rzut siły P na ON jest $-P\cdot\sin\gamma$; popęd w czasie dt jest rowny $-P\cdot\sin\gamma\cdot dt$.

b) Parcie R' powierzchni IKLM na strumień ; rzut R' na ON jest R' ; popęd w czasie dt, $= R'.dt$.

c) Ciśnienie atmosfery na powierzchnię boczną AGCBHE oraz ciśnienia w przekrojach AB i CDEF . Ponieważ strumień płynie swobodnie w przekroju AB , przeto tu ciśnienie powinno być takie samo , jak i zewnętrzne; toż samo możemy przyjąć ze znacznym przybliżeniem dla przekroju CDEF. Mamy więc, że na całą powierzchnię, otaczającą część strumienia ABCDEF (prócz powierzchni JKLM) działa ciśnienie armosferyczne, w każdym miejscu prostopadłe do odpowiedniego elementu powierzchni i równe $p_o \left(= 10000 \frac{kg}{m^2}\right)$. Rzut na ON całkowitego ciśnienia na wspomnianą powierzchnię, (zgodnie z wyłożonym na str.33 i nast.) równa się iloczynowi z $\underline{p_o}$ przez rzut powierzchni DCGABHEF na płaszczyznę prostopadłą do ON, albo, co na to samo wychodzi, przez rzut na tę samą płaszczyznę powierzchni DKLF. Oznaczmy pole tego rzutu przez f_o; wtedy rzut omawianego ciśnienia na oś ON, = $= -p_o f_o$, a popęd jego w czasie dt, $= -p_o f_o \cdot dt$.

Więcej sił zewnętrznych, przyłożonych do cząstek cieczy ABCDEF [tarcia nie uwzględniamy], niema; wobec tego układamy równanie następujące:

$$\frac{\Delta Q}{g} v\,dt\,(\varphi \cos\beta + \cos\alpha) = -P\sin\gamma \cdot dt + R' dt - p_o f_o \cdot dt.$$

Po skróceniu przez dt znajdziemy:

$$R' = P\sin\gamma + p_o f_o + \frac{\Delta Q}{g} v(\varphi\cos\beta + \cos\alpha) \ldots\ldots (9).$$

Teraz łatwo już określimy parcie strumienia na powierzchnię R na podstawie zależności: $R = -R'$. Wartość R', względnie R otrzymaliśmy, przypuszczając, że ciśnienie zewnętrzne [atmosferyczne] działa tylko od strony strumienia; tymczasem najczęściej spotykać będziemy takie warunki, kiedy takie samo ciśnienie zewnętrzne [atmosferyczne] czynne będzie również z przeciwnej strony powierzchni JKLM. Jeśli w takich warunkach zechcemy określić rzeczywiste ciśnienie R'_o wywołane tylko przez powierzchnię na strumień, należy poprzednią wartość R' zmniejszyć o $p_o f_o$, czyli że $R'_o = R' - p_o f_o$ i wtedy

$$R'_o = P\sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g} v(\varphi\cos\beta + \cos\alpha) \ldots\ldots (10).$$

Następnie znajdziemy parcie strumienia R_o na powierzchnię, właściwiej mówiąc, nadmiar ciśnienia strumienia ponad ciśnienie atmosferyczne

$$R_o = -\left[P \sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g} v (\varphi \cos\beta + \cos\alpha)\right] \cdots (11).$$

Znak $(-)$ przed nawiasem wskazuje, że R_o jest skierowanw wzdłuż normalnej od N ku O.

Tę część parcia R', R, R'_o, R_o, która zależy od prędkości strumienia v, nazywamy parciem „dynamicznym," albo „żywym", pozostałą część parcia nazywamy parciem „statycznym", albo „martwym". Naprz. w równaniu ostatnim (II) wielkość określoną wyrazem $P \sin\gamma$ — nazwiemy parciem martwym albo statycznym, zaś wielkość : $\frac{\Delta Q}{g} v (\varphi \cos\beta + \cos\alpha)$ — — parciem żywym albo dynamicznym. Oznaczając pole przekroju AB strumienia przez f, możemy w poprzednie równanie zamiast Q podstawić f.v ; wtedy zauważymy, że p a r c i e ż y w e strumienia równać się będzie

$$\frac{\Delta f v^2}{g} (\varphi \cos\beta + \cos\alpha),$$

czyli, że parcie to jest proporcjonalne do pola przekroju strumienia, uderzającego o powierzchnię, i do kwadratu prędkości, z jaką strumień biegnie, dążąc do powierzchni.

Parcia R'_o, R_o, otrzymane z poprzednich równań (10) i (II), zależne są, jak widzimy, od wartości P, v, φ, α, a te znów zależne są od tego, w których miejscach obrane zostały przekroje AB i CDEF. Przypuśćmy, że mogliśmy obrać przekroje A_1B_1 i $C_1D_1E_1F_1$; wtedy mielibyśmy inne wartości poprzednich wielkości - naprz.

P_1, v_1, φ_1, α_1, $(\beta$ i γ nie zmienią się$)$, pomimo tego jednak wartości parć powinny, oczywiście, pozostać takie same, jak poprzednio znaleziono, czyli możemy napisać:

$$P\sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g} v(\varphi\cos\beta + \cos\alpha) = P_1 \cdot \sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g} v_1(\varphi_1\cos\beta + \cos\alpha_1)$$

albo inaczej

$$(P-P_1)\sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g}\left[(v_1\varphi_1 - v\varphi)\cos\beta + v_1\cos\alpha_1 - v\cos\alpha\right] = 0 \ldots\ldots (12).$$

Co się tyczy wartości parcia R′ względnie R przy innych przekrojach AB i CDEF, co łatwo dostrzedz, rozpatrując rownanie (9), rożnić się będą o wartość

$$p_0(f_0 - f_1).$$

Przypuśćmy, że strumień spadający na powierzchnię jest dostatecznych wymiarów, aby przy zagięciach ostrych mogły utworzyć się pewne przestrzenie, zapełnione cieczą bez ruchu; wtedy, zgodnie z wyjaśnieniami, podanymi na początku rozdziału i przy założeniu, że strumień cieczy o powierzchnię się nie trze, możemy przyjąć, że $V = \varphi v$, czyli że $\varphi = 1$. W takim razie poprzednie równania przepiszemy w postaci

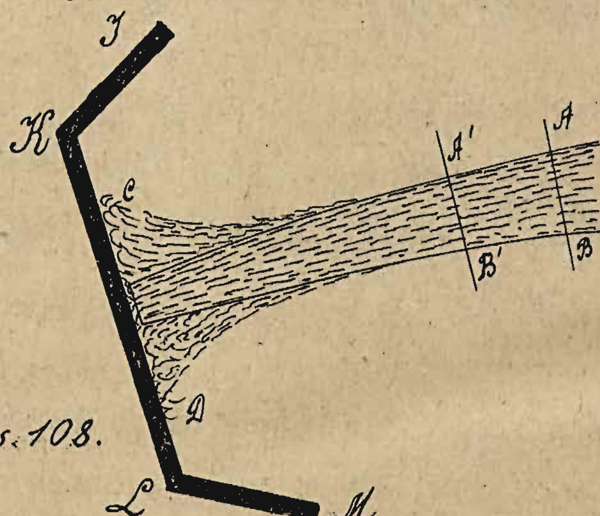
$$R' = P\sin\gamma + p_0 f_0 + \frac{\Delta Q}{g} v(\cos\beta + \cos\alpha) \ldots\ldots (13)$$

$$R_0' = P\sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g} v(\cos\beta + \cos\alpha) \ldots\ldots (14)$$

$$R_0 = -\left[P\sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g} v(\cos\beta + \cos\alpha)\right] \ldots\ldots (15).$$

$$(P-P_1)\sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g}\left[(v_1 - v)\cos\beta + v_1\cos\alpha_1 - v\cos\alpha\right] = 0 \ldots (16).$$

Otrzymane poprzednio wartości parć znaleźliśmy przy założeniu, że ruch strumienia jest trwały. Zachodzi pytanie, jaka też będzie wartość parcia p r z e d utrwaleniem się ruchu ? Chcąc znaleść na to odpowiedź, rozumujmy tak: na chwilę przed dotknięciem powierzchni JKLM strumień (fig. 108), zawarty między przekrojem AB a powierzchnią JKLM, posiada określoną ilość ruchu.



Rys. 108.

Po pewnym, bardzo zresztą, krótkim czasie, kiedy strumień już dopadł powierzchni, przekrój AB przesunie się do A'B'; obrana poprzednio objętość cieczy przyjmie kształt A'B'CD, gdyż w tej porze już rozpoczyna się odkształcanie strumienia przez powierzchnię J K L M. Prędkości cząsteczek cieczy całej tej objętości zmniejszą się w porównaniu z poprzednimi prędkościami.

Oczywiste teraz jest, że w obecnym przypadku zmiana ilości ruchu w przyjętym okresie czasu powinna być większa, niż ta, którą otrzymaliśmy kiedy był rozważany ruch trwały.

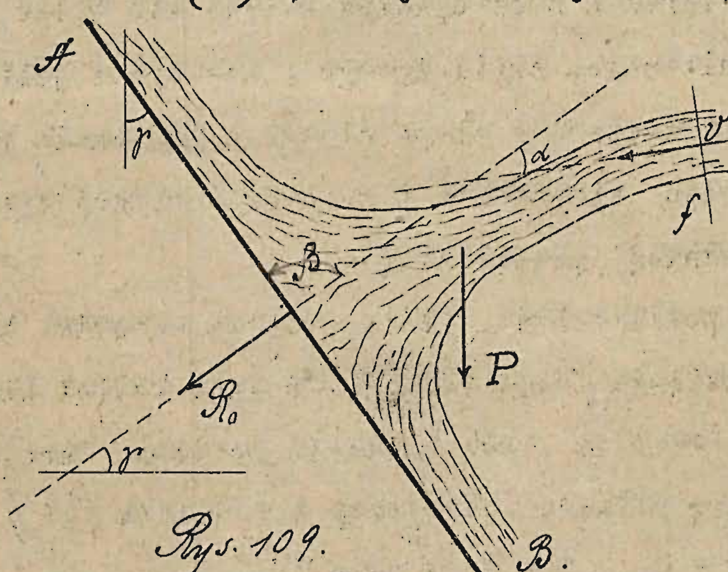
Ponieważ zmiana ilości ruchu obecnie jest większa, niż podczas ruchu trwałego, więc stąd wniosek, że parcie powierzchni na strumień (zatym i odwrotnie strumienia na powierzchnię) w pierwszym czasie po wejściu na powierzchnię powinno być większe, niż później, kiedy wreszcie ruch się utrwali.

Zastosujmy obecnie otrzymane powyżej wzory do kilku ważniejszych przypadków poszczególnych.

I/ Powierzchnią jest płaszczyzna AB, nachylona do pionu pod kątem γ (fig. 109). Wartość parcia R_o znajdziemy z równania (15), zakładając $\beta = \frac{\pi}{2}$.

$$R_o = P\sin\gamma + \frac{\Delta Q}{g} v \cos\alpha \;\ldots\ldots\; (16)$$

Znak (—), który mieliśmy w równaniu (15), opuszczony został rozmyślnie, gdyż mówi tylko o kierunku parcia, który znamy, tu nam ~~zatym~~ zaś chodzi głównie o znalezienie w a r t o ś c i parcia.



Rys. 109.

Następnie moglibyśmy łatwo znaleść wartości R, R′, R_o', stosując odpowiednie równania. Jeżeli ilość cieczy dopływającej w strumieniu do powierzchni oznaczymy przez f.v, wtedy

$$R_o = P\sin\gamma + \frac{\Delta f}{g} v^2 \cos\alpha \;\ldots\ldots\ldots\; (17)$$

2/ Płaszczyzna AB jest pionowa, zaś strumień niech wpada na nią z prędkością v prostopadle do AB. Parcie otrzymamy z równania (16) lub (17), przyjmując, że $\gamma = 0$ i $\alpha = 0$: $R_o = \frac{\Delta Q}{g} v$, albo też

$$R_o = \frac{\Delta f v^2}{g} \ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

Oznaczmy $\frac{v^2}{2g}$ przez H, wtedy

$$R_o = \frac{2 \Delta f v^2}{2g} = 2 \Delta f H \ldots\ldots (19),$$

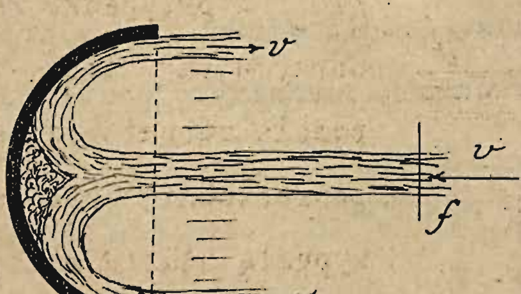
to znaczy, że parcie strumienia uderzającego o płaszczyznę pionową w kierunku prostopadłym składa się tylko z parcia dynamicznego, czyli żywego; następnie jest równe podwójnemu ciężarowi słupa cieczy o podstawie równej polu przekroju strumienia i wysokości równej wysokości odpowiedniej prędkości v.

3) Niech powierzchnia, którą uderza strumień będzie półkulą wklęsłą (fig. 110). Oś jej, wzdłuż której też płynie strumień, niech będzie pozioma. Parcie strumienia na tę półkulę otrzymamy z równania (15), zakładając $\alpha = 0$, $\beta = 0$ i $\gamma = 0$

$$R_o = 2 \frac{\Delta Q}{g} \cdot v$$,albo,

ponieważ $Q = f.v$, więc

$$R_o = 2 \frac{\Delta f v^2}{g} \ldots (20)$$



Rys. 110

Jeżeli przyjmiemy, że $\frac{v^2}{2g} = H$, wtedy

$$R_0 = 4\frac{\Delta f v^2}{2g} = 4\Delta f H \dots (21).$$

Wzory ostatnie wskazują, że parcie strumienia na półkulę wklęsłą , jest dwa razy większe, niż na płaszczyznę , w założeniu, że strumień spada w kierunku poziomym na powie rzchnię, wzdłuż jej osi.

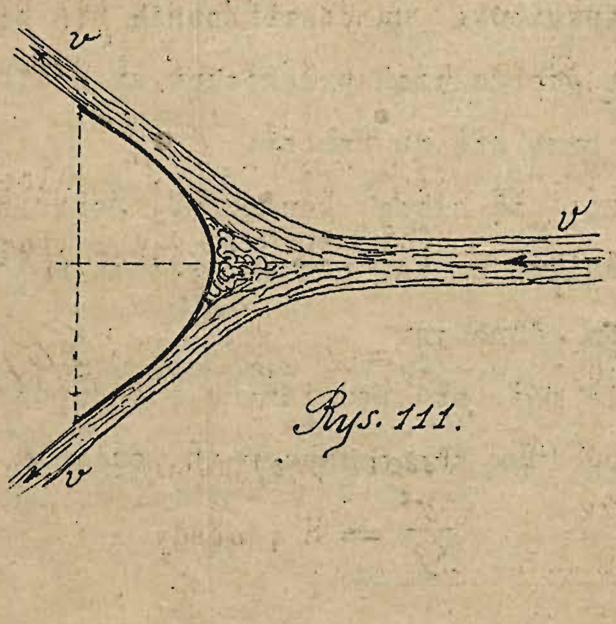
4) Rozpatrzmy teraz jeszcze szczególny przypadek, kiedy strumień spada w kierunku poziomym na wypukłą powierzchnię obrotową (fig. III) wzdłuż jej osi. Parcie w tym razie znajdziemy z równania (15) , przyjmując , że $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, kąt zaś β jest $> \frac{\pi}{2}$ i $< \pi$. Wtedy

$$R_0 = \frac{\Delta Q}{g} v(cs\beta + 1)$$

ponieważ $\pi > \beta > \frac{\pi}{2}$, więc $cs\beta$ jest wielkością ujemną , zatym

$$\frac{\Delta Q v}{g}(cs\beta + 1) < \frac{\Delta Q}{g} v.$$

Prawa strona nierówności przedstawia parcie strumienia na płaszczyznę pionową [patrz równanie (18) w przypadku 2-im] Otrzymujemy więc , że parcie strumienia na powierzchnię obrotową wypukłą będzie mniejsze niż na płaszczyznę ;



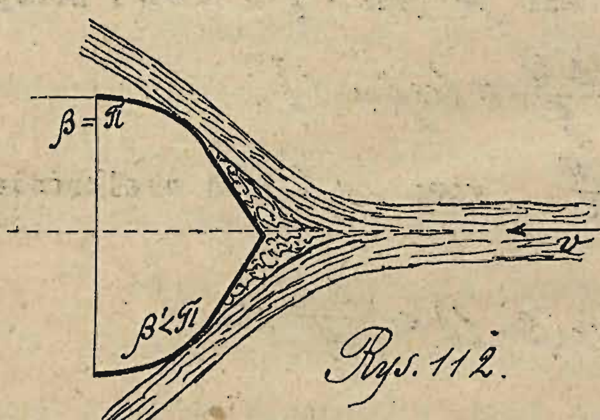
Rys. 111.

parcie to zmniejszać się będzie w miarę zwiększania się kąta β. A co będzie, kiedy β stanie się równym π ?

Z wzoru

$$R_o = \frac{\Delta Q}{g} v(\cos\beta + 1)$$

należałoby spodziewać się, że przy $\beta = \pi$ powinno być $R_o = 0$. Doświadczenie jednak nie stwierdza tego wyniku ; objaśniamy to tym zjawiskiem, że strumień, spadający na wypukłą powierzchnię obrotową o kącie $\beta = \pi$, pierwej nim dopłynie do końca powierzchni, już się od niej odsunie ; nastąpi to rzy punktach powierzchni, gdzie kąt $\beta' < \pi$. Miejsca tych punktów zależne są zarówno od kształtu powierzchni, jak i od prędkości v, z jaką strumień dopada powierzchni.



Rys. 112.

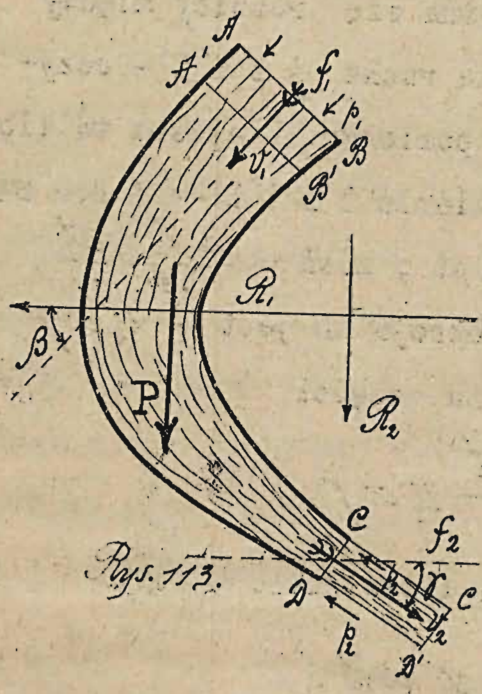
Zatrzymywać się dalej nad szczególnymi przypadkami parcia strumienia na powierzchnię nie będziemy, gdyż, sądzimy, z poprzednich przykładów aż nadto powinno być jasne, jak brać się do rzeczy.

Nadmienimy tylko, że niema koniecznej potrzeby w poszczególnych zadaniach szukać punktu wyjścia w jednym lub drugim zasadniczym równaniu.

Każde zagadnienie może być rozwiązane, i odpowiedź znaleziona sposobem ogólnym zastosowanym do zadania zasadniczego.

Nie zawadzi zapoznać się z parciem, jakie wywiera strumień, przepływający przez kanał wygięty.

Niech, naprz. dany będzie kanał ABCD /fig. 113/



Rys. 113.

zapełniony przepływającą cieczą. Przez przekrój AB, którego pole niech będzie f_1 wlewa się woda z prędkością v_1; niech ciśnienie hydrauliczne w tym miejscu będzie p_1.-

Prędkość v_1, /prostopadła do f_1/ niech tworzy z kierunkiem poziomym kąt β.

Przy wypływie wody niech będzie: f_2 pole przekroju DC, v_2 - prędkość strumienia; ciśnienie hydrauliczne, tu panujące, niech będzie p_2. Przyjmijmy jeszcze, że kierunek prędkości v_2 tworzy z kierunkiem poziomym kąt γ.

Zakładając że ruch strumienia w kanale jest trwały, znajdźmy w tych warunkach wartość parcia, wywieranego przez strumień na ścianki kanału w kierunku poziomym, czyli parcie R_1.

Zastosujmy i tym razem twierdzenie o zmianie ilości ruchu w kierunku poziomym, w ciągu, dajmy na to, bardzo krótkiego czasu dt, kiedy, zatym objętość wody ABCD przesunie się do A'B'C'D'.

Rozumując tak samo , jak przy wyznaczaniu parcia strumienia na powierzchnię, otrzymamy , że zmiana ilości ruchu części strumienia ABCD równa się różnicy między ilością ruchu $CDC'D'$, a ilością ruchu $ABA'B'$ - oczywiście w tym samym kierunku - poziomym. Znajdźmy te ilości ruchu. Objętość części strumienia $CDC'D' = ABA'B' = f_1 v_1 dt$; ciężar jej $= \Delta f_1 v_1 dt$; masa $= \frac{\Delta f_1 v_1 dt}{g}$; rzut prędkości cząsteczek w przekroju CD jest $-v_2 \cos\gamma$, wtedy znajdziemy, że ilość ruchu części

$$\overset{ABA'B'}{\cancel{CDC'D'}} = -\frac{\Delta f_1 v_1 dt}{g} \cdot v_2 \cos\gamma .$$

dobrze

W podobny sposób określimy ilość ruchu

$$\overset{ABA'B'}{\cancel{CDC'D'}} = \frac{\Delta f_1 v_1 dt}{g} \cdot v_1 \cos\beta .$$

Zmiana ilości ruchu jest równa

$$-\frac{\Delta f_1 \cdot v_1 \cdot dt}{g}(v_2 \cos\gamma + v_1 \cos\beta).$$

Ta zmiana ilości ruchu mogła powstać w ciągu czasu dt na skutek działania sił zewnętrznych, przyłożonych do ABCD , wciągu tego samego czasu .

Siły te i popędy ich , wzięte w kierunku osi poziomej są :

a) Ciśnienie w przekroju AB jest równe $f_1 p_1$; rzut tego ciśnienia na oś poziomą $= f_1 \cdot p_1 \cdot \cos\beta$; popęd w czasie dt , $= f_1 p_1 \cos\beta \cdot dt$.

b) Ciśnienie w przekroju CD , $= p_2 f_2$; rzut jego na obraną oś , $= p_2 f_2 \cos\gamma$; popęd w czasie dt, $= p_2 f_2 \cos\gamma \, dt$.

c) Ciężar cieczy ABCD, który niech będzie P ; rzut i popęd tej siły w kierunku osi poziomej są zera.

d) Parcie ścian kanału na strumień, wzięte w kierunku poziomym. Jeżeli przez R_1 oznaczymy parcie strumienia na kanał w obranym kierunku, wtedy rzut parcia kanału na strumień w tym samym kierunku powinien być $-R_1$; popęd zaś jego będzie $-R_1.dt$. Więcej sił zewnętrznych przyłożonych do części strumienia ABCD - niema ; wtedy, przyrównywując zmianę ilości ruchu do sumy popędów wszystkich sił, otrzymamy równanie, które, po skróceniu go przez dt, będzie

$$-\frac{\Delta f_1 v_1}{g}(v_2 \cos\gamma + v_1 \cos\beta) = p_1 f_1 \cos\beta + p_2 f_2 \cos\gamma - R_1$$

a stąd

$$R_1 = + p_1 f_1 \cos\beta + p_2 f_2 \cos\gamma + \frac{\Delta f_1 v_1}{g}(v_2 \cos\gamma + v_1 \cos\beta) \ldots (22).$$

Część parcia, utworzona z dwúch pierwszych wyrazów, stanowi parcie martwe, albo statyczne ; druga część, zawierająca v_1 i v_2 stanowi parcie żywe, inaczej dynamiczne. Z równania ostatniego dostrzegamy, że w miarę zwiększania kątów β i γ otrzymamy zmniejszanie się parcia strumienia R_1 i odwrotnie w miarę zmniejszania kątów β i γ - parcie strumienia R_1 wzrastać będzie.

W ten sam zupełnie sposób możemy znaleść parcie strumienia w kierunku pionowym na ścianki kanału, - czyli parcie R_2. Otrzymamy, mianowicie równanie takie:

$$R_2 = P + p_1 f_1 \sin\beta - p_2 f_2 \sin\gamma + \frac{\Delta f_1 v_1}{g}\left[v_1 \sin\beta - v_2 \sin\gamma\right] \ldots . (23)$$

W tym wzorze pierwsze trzy wyrazy dają nam tak zwane parcie martwe albo statyczne; ostatni wyraz przedstawia parcie żywe, inaczej, dynamiczne.

Skoro mamy R_1 i R_2 – składowe parcia strumienia na ścianki kanału w kierunku poziomym i pi~~erwszym~~ nowym, możemy znaleść całkowite parcie R_o, jako wypadkowe tamtych, mianowicie

$$R_o = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$$

Wzory, z których otrzymać możemy parcia strumienia na kanał, pomocne być mogą przy określaniu ~~tych~~ sił, działających naprz. na rurę, która sprowadza wodę

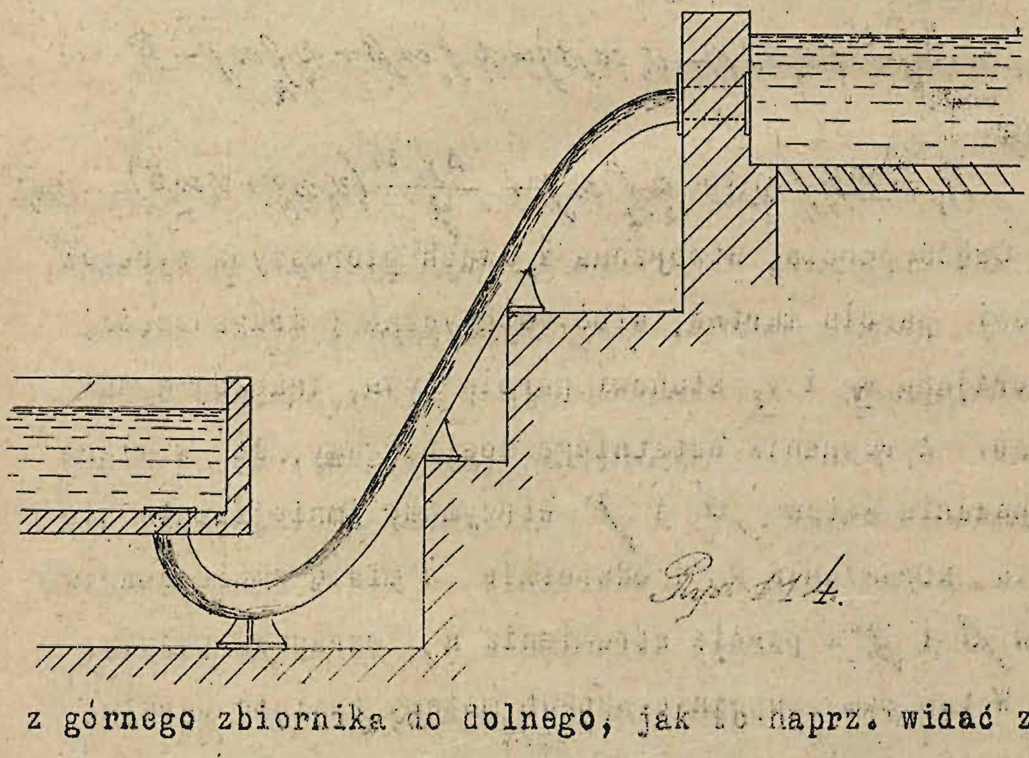
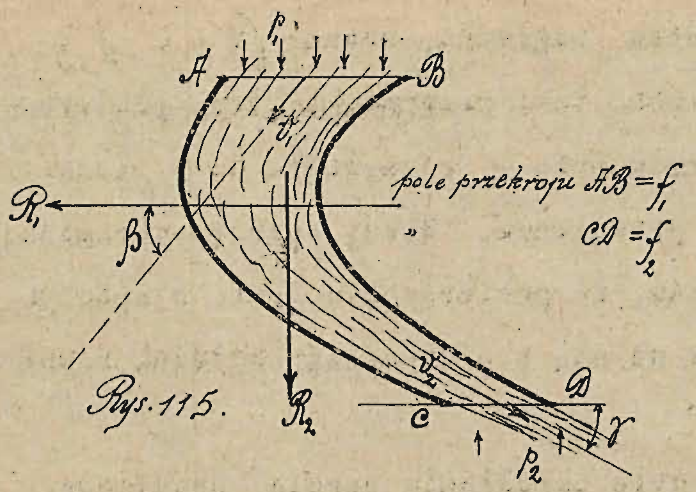


Fig. 114.

z górnego zbiornika do dolnego, jak to naprz. widać z rysunku fig. 114.

Nie bez pożytku będzie jeżeli czytelnik określi parcie strumienia w kierunku poziomym i pionowym na kanał, pokazany na rysunku fig. 115.



Rys. 115.

Pożądane jest określenie R_1 i R_2 drogą bezpośrednią, a następnie porównanie znalezionych parć z wzorami (22) i (23).

Wszystkie poprzednio rozpatrzone przykłady dotyczyły parcia strumienia wody na powierzchnię, będącą w spoczynku. Obecnie zajmiemy się tymi przypadkami, gdzie powierzchnia, na którą prze strumień wody, porusza się w danym kierunku z pewną prędkością. Jednocześnie określać będziemy pracę, jaką wykonywa strumień, cisnąc posuwającą się powierzchnię.

Przedewszystkiem rozpatrzmy te przypadki, kiedy powierzchnia ciśniona przez strumień, posuwa się w tym samym, co i strumień, kierunku, lecz z prędkością C.

Jeżeli strumień w tym razie ma naciskać powierzchnię, należy, aby $C < v$, gdzie v jest prędkość strumienia; w przeciwnym razie, kiedy $C \geq v$ – parcia strumienia na powierzchnię niema.

Przy uczynionych powyżej założeniach, wartość parcia będzie taka sama, jaką otrzymalibyśmy, uważając, że powierzchnia jest nieruchoma, a strumień spada na powierzchnię z prędkością względną równą $(v - C)$.

Może zachodzić też taki przypadek, kiedy powierzchnia porusza się z prędkością $\underline{C}$ równoległą do $\underline{v}$, lecz w kierunku wprost przeciwnym. Wtedy parcie strumienia znajdziemy, przyjmując, że powierzchnia jest w spoczynku, a strumień spada na nią z prędkością względną równą $(v + C)$.

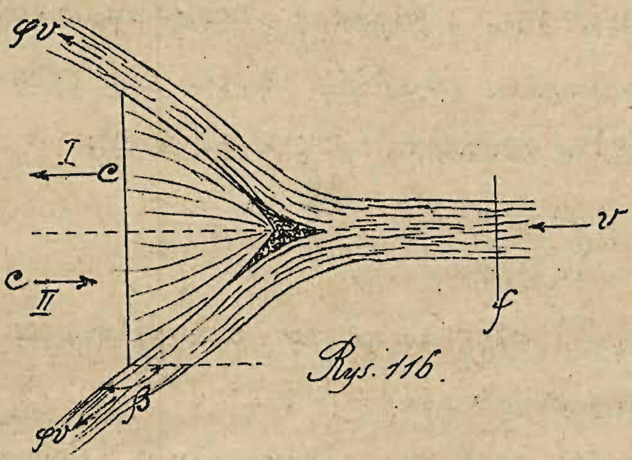
Wogóle zatym w celu określenia parcia przyjmować będziemy, że powierzchnia jest nieruchoma, a strumień porusza się z prędkością $(v \mp C)$; znak $(-)$ dotyczy przypadku, kiedy powierzchnia posuwa się w tę samą stronę, co i strumień, zaś znak $(+)$, kiedy powierzchnia posuwa się w stronę przeciwną kierunkowi strumienia. Pracę strumienia w ciągu jednostki czasu (zatym tak zwaną moc strumienia) znajdziemy, mnożąc znalezione całkowite parcie przez prędkość posuwającej się powierzchni.

Po tych paru ogólniejszych uwagach przystąpmy do przykładów:

Dajmy na to, że mamy powierzchnię obrotową z osią poziomą (rys. 110); niech w kierunku tej osi wpada na powierzchnię strumień z prędkością $\underline{v}$; powierzchnia zaś niech porusza się z prędkością $\underline{C}$, równoległą do v, zatym poziomą.

Parcie strumienia w tym przypadku skierowane będzie wzdłuż osi powierzchni. Wartość parcia znajdziemy z równania (11), przyjmując $\alpha = 0$, $\beta \gtrless 0$ i $\gamma = 0$;

zamiast prędkości strumienia v należy przyjąć w tym równaniu prędkość jego względną, równą $(v - C)$ w razie ruchu powierzchni w kierunku (I), albo równą $(v + c)$ w razie ruchu powierzchni w kierunku (II); załóżmy, dalej, że $\varphi = 1$. Kierunek parcia strumienia na powierzchnię będzie ten sam, co kierunek prędkości v, wartość zaś parcia R_o znajdziemy:



Rys. 116.

$$R_o = \frac{\Delta Q}{g}(v \mp c)(\cos\beta + 1) \ldots \ldots (24)$$

Znak $(-)$, który mieliśmy w równaniu (II) tu opuszczamy, jako zbyteczny w danym razie, i nic szczególnego nie mówiący. Moc strumienia E znajdziemy:

$$E = \frac{\Delta Q}{g}(v \mp c) . c . (1 + \cos\beta) \ldots (25).$$

Ilość dopływu Q możemy określić, mnożąc przekrój f strumienia przez odpowiednią prędkość; mogą tu być dwa różne przypadki:

a) kiedy strumień wpada na jedną i tę samą powierzchnię, dopędzając ją; wtedy $Q = f(v \mp c)$,

b) kiedy strumień wpada na szereg jednakowych powierzchni związanych ze sobą w jedną całość (naprz. łopatki koła wodnego); w tym razie $Q = f.v$.

W przypadku a) parcie

$$\mathcal{R}_o = \frac{\Delta f(v \mp c)^2}{g}(1+\cos\beta) \dots\dots\dots (26)$$

i $$E = \frac{\Delta f(v \mp c)^2}{g} \cdot c \cdot (1+\cos\beta) \dots\dots\dots (27).$$

Pożytecznym będzie znaleść przy jakim stosunku c do v otrzymamy $max\,E$. Pierwej jednak zauważmy, że właściwe będzie szukanie $max\,E$ tylko dla przypadku ruchu powierzchni w kierunku I, t.j. kiedy

$$E = \frac{\Delta f(v-c)^2 c}{g}(1+\cos\beta),$$

gdyż w tym tylko przypadku możemy mówić o mocy strumienia, to jest o energji strumienia.

W razie, jeśli powierzchnia posuwa się w kierunku II będzie tu wykonana praca

$$E = \frac{\Delta f(v+c)^2 c}{g} \cdot (1+\cos\beta),$$

tylko nie przez strumień, lecz, że tak powiemy, przez powierzchnię wbrew działaniu strumienia; praca ta będzie tym większa, im c będzie większe, co widać wprost z ostatniego wzoru.

Wróćmy więc do ruchu powierzchni w kierunku I; $max\,E$ znajdziemy, określając pochodną zmiennego wyrazu $(v-c)\cdot c$ względem c i przyrównywując ją do zera; z tego równania znajdziemy c, przy którym moc E jest największa.

Po dokonaniu wskazanych czynności znajdziemy, że $c = \frac{v}{3}$ i wtedy

$$R_o = \frac{4}{9}\frac{\Delta f v^2}{g}(1+\cos\beta) \ldots\ldots (28)$$

$$\max E = \frac{4}{27}\frac{\Delta f v^3}{g}(1+\cos\beta) \ldots\ldots (29).$$

W przypadku b) , kiedy strumień uderza o szereg powierzchni mamy

$$R_o = \frac{\Delta f(v \mp c)v}{g}(1+\cos\beta) \ldots\ldots (30)$$

oraz

$$E = \frac{\Delta f(v \mp c)v.c}{g}(1+\cos\beta) \ldots (31).$$

Znajdźmy i teraz wartość c , przy którym będzie moc strumienia E największą ; zwróćmy tylko uwagę na przypadek, kiedy ruch powierzchni zachodzi w kierunku (I) , co odpowiada górnemu znakowi (–) w równaniu (31). – Znajdźmy w tym celu pochodną wyrazu (v–c).v.c względem c i przyrównajmy ją do zera, ; c określone z tego równania będzie to szukana wartość prędkości powierzchni, przy której E jest maximum .

Po wskazanych czynnościach znajdziemy $c = \frac{v}{2}$ i wtedy

$$R_o = \frac{1}{2}\frac{\Delta f v^2}{g}(1+\cos\beta) \ldots\ldots (32) \quad \text{oraz}$$

$$\max E = \frac{1}{4}\frac{\Delta f v^3}{g}(1+\cos\beta) \ldots (33)$$

Otrzymane poprzednio wzory (24) do (33) możemy stosować w wielu poszczególnych przykładach, a więc:

1) Strumień wpada w kierunku poziomym z prędko

ścią v na płaszczyznę prostopadłą do v, posuwającą się z prędkością c równoległą do v. Parcie w tym razie określimy z równań poprzednich, zakładając, że $\beta = \frac{\pi}{2}$

a) kiedy strumień wpada na jedną płaszczyznę

$$R_o = \frac{\Delta f}{g}(v \mp c)^2 \ldots\ldots (34)$$

$$E = \frac{\Delta f}{g}(v \mp c)^2 \cdot c \text{ i kiedy } c = \frac{v}{3}$$

$$max\, E = \frac{4}{27}\,\frac{\Delta f v^3}{g} \ldots\ldots\ldots (35).$$

b) kiedy strumień uderza o szereg płaszczyzn, ze sobą połączonych:

$$R_o = \frac{\Delta f}{g}(v \mp c)v \ldots\ldots (36)$$

$$E = \frac{\Delta f}{g}(v \mp c) \cdot v \cdot c \text{ i kiedy } c = \frac{v}{2}$$

$$max\, E = \frac{1}{4}\,\frac{\Delta f v^3}{g} \ldots\ldots\ldots (37).$$

2) Strumień wpada w kierunku poziomym z prędkością v do wnętrza półkuli, której oś jest pozioma; półkula posuwa się w kierunku swej osi z prędkością c. Tym razem należy w ogólnych równaniach przyjąć $\beta = 0$. Wartość parcia znajdziemy:

a) kiedy strumień wpada do jednej i tej samej półkuli

$$R_o = 2\,\frac{\Delta f}{g}(v \mp c)^2 \ldots\ldots (38)$$

$$E = 2\,\frac{\Delta f}{g}(v \mp c)^2 \cdot c \text{ i kiedy } c = \frac{v}{3}$$

$$max\, E = \frac{8}{27}\,\frac{\Delta f v^3}{g} \ldots\ldots\ldots (39);$$

b) kiedy strumień uderza o szereg półkuli, związanych ze sobą

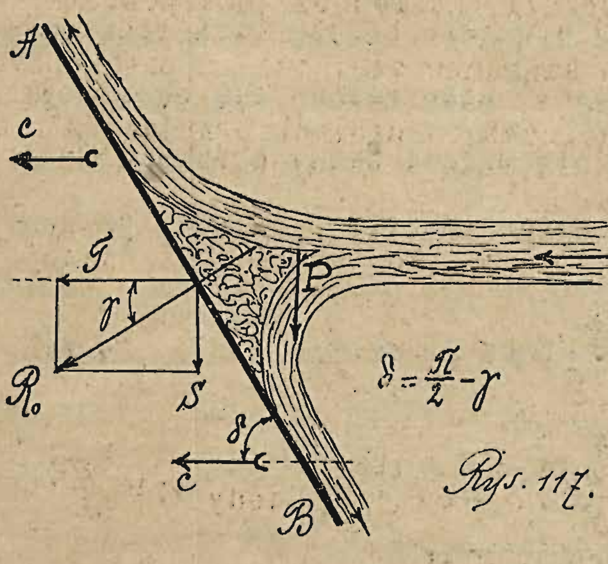
$$R_o = \frac{2\Delta f}{g}(v \mp c)v \ldots\ldots (40)$$

$$E = \frac{2\Delta f}{g}(v \mp c)v.c \text{ i kiedy } c = \frac{v}{2}$$

$$max\, E = \frac{1}{2}\frac{\Delta f v^3}{g} \ldots\ldots\ldots (41).$$

Porównywując wartości R_o, E i $max\, E$ dla półkuli z takimiż wartościami dla płaszczyzny, znajdujemy, że przy uderzaniu strumienia o półkulę i parcie i moc są d w a razy większe, niż podczas uderzania o płaszczyznę.

Rozpatrzmy teraz przykład, w którym oś ciśnionej powierzchni (obrotowej lub płaszczyzny) jest nachylona do osi strumienia. Przykłady, powyżej rozważane, uwzględniały tylko takie powierzchnie, których osi były jednocześnie osią strumienia.



Rys. 117.

Niech więc będzie dana płaszczyzna AB nachylona pod kątem $\delta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ do poziomu (rys. 117). Niech płaszczyzna ta posuwa się w kierunku poziomym z prędkością c. Strumień cieczy wpada na AB z prędkością v równoległą do c. Chcąc przy tych danych znaleść moc strumienia, należy przedewszystkim określić całkowite parcie R_o strumienia na płaszczyznę AB. Jeżeli założymy, że tarcia cieczy o płaszczyznę niema, parcie R_o może być tylko normalne do AB. Określając zatym z wzoru (11) parcie przy prędkości strumienia względnej $= (v - c)$, znajdziemy całkowite parcie strumienia na posuwającą się płaszczyznę, należy tu uwzględnić, że $\alpha = \pi$, $\beta = 0$ i że przyjmujemy, jak zwykle $\varphi = 1$; wtedy, nie zważając na znak

$$R_o = P.\mathrm{sn}\,\gamma + \frac{\Delta Q}{g}(v-c).\mathrm{cs}\,\gamma$$

albo, ponieważ $\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$, więc

$$R_o = P.\mathrm{cs}\,\delta + \frac{\Delta Q}{g}(v-c).\mathrm{sn}\,\delta \ldots\ldots (42);$$

moc znajdziemy

$$E = R_o.c.\mathrm{cs}\,\gamma = R_o.c.\mathrm{sn}\,\delta,$$

zatym

$$E = P.c.\mathrm{cs}\,\delta.\mathrm{sn}\,\delta + \frac{\Delta Q}{g}(v-c)c\cdot\mathrm{sn}^2\delta \ldots (43).$$

Jeżeli płaszczyzna AB niewiele będzie odchylona od położenia pionowego, wtedy δ mało różnić się będzie od $\frac{\pi}{2}$; $\mathrm{cs}\,\delta$ będzie wielkością małą i wtedy w równanie na R_o i E możemy pierwszy wyraz opuścić, pisząc z pewnym przybliżeniem:

$$R_o = \frac{\Delta Q}{g}(v-c).\mathrm{sn}\,\delta \ldots\ldots (44)$$

$$E = \frac{\Delta Q}{g}(v-c).c.\mathrm{sn}^2\delta \ldots\ldots (45).$$

Jan Kozłowski 19 5/II 09

Moc E w poprzednim zadaniu możemy wyznaczyć jeszcze inną drogą: rozłóżmy parcie R_o na dwa składowe parcia - jedno równoległe do c , a więc i v i drugie prodtopadłe do pierwszego. Oznaczmy pierwsze parcie przez T , a drugie przez S . Pracę w kierunku ruchu wykona siła T, mianowicie

$$E = T.c\,.$$

Parcie zaś S w danym razie żadnej pracy wykonać nie może . Parcie T dąży do posuwania płaszczyzny AB, zaś parcie S dąży do odtrącania jej na bok . - Ponieważ

$$T = R_o . \cos\gamma,$$

więc

$$E = R_o \cdot \cos\gamma . c\,;$$

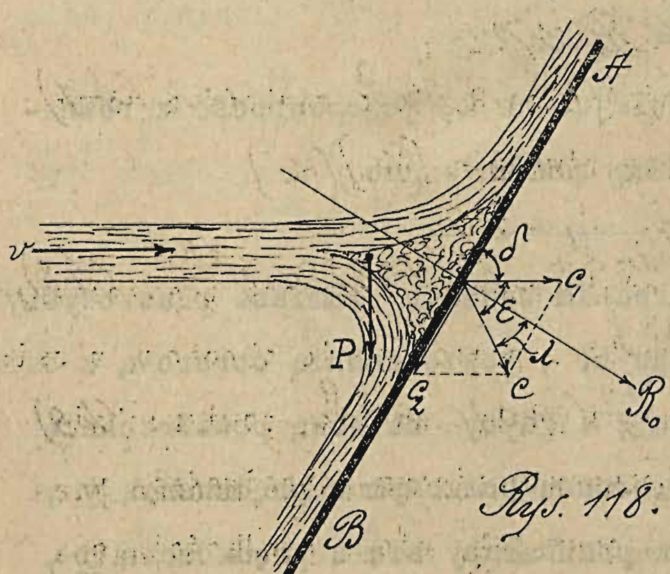
a następnie , podstawiając na R_o jego wartość z równania (42) , znajdziemy równanie (45) .

Gdybyśmy w poprzednim zadaniu zamiast płaszczyzny AB , mieli , dajmy na to , powierzchnię obrotową z osią do poziomu nachyloną , i gdyby na taką powierzchnię spadał strumień w kierunku poziomym z prędkością v , sama zaś powierzchnia posuwałaby się z prędkością c , równoległą do v , otrzymalibyśmy zadanie do rozwiązania więcej zawiłe, niż to się na pierwszy rzut oka wydaje. Ponieważ jednak zagadnień tego rodzaju w praktyce nie napotkamy, przeto pozostawimy je bez bliższego rozwiązania .

Zwróćmy się natomiast do określenia wartości parcia i mocy strumienia , wpadającego w kierunku poziomym z prędkością v na powierzchnię , która posuwa się z prędkością c nachyloną do v .

Tu również zatrzymamy się na rozpatrzeniu jednego tylko rodzaju powierzchni - mianowicie płaszczyzny o nieograniczonych wymiarach , a to dlatego, że każda inna powierzchnia , posuwająca się z prędkością c , pochyloną do prędkości strumienia, w krótkim czasie wyjść musi z pod działania strumienia.

Przypuśćmy więc , że mamy płaszczyznę AB , która się posuwa z prędkością c . Niech na tę płaszczyznę wpada strumień w kierunku poziomym z prędkością v. Parcie strumienia na AB określimy w ten sposób:



Rys. 118.

rozłóżmy prędkość c na dwie składowe ; z nich jedna c_1 niech będzie równoległa do v , a druga składowa c_2 niech będzie równoległa do AB.

Ta okoliczność, że w naszym zadaniu istnieje składowa prędkość c_2 , wpływa tylko na to , że coraz to inna część płaszczyzny AB znajduje się pod działaniem strumienia ;

a że nie uwzględniamy tarcia strumienia o płaszczyznę, więc prędkość c_2 żadnego wpływu nie ma na parcie strumienia na płaszczyznę. Możemy więc, wobec powyższego, przyjmować, że parcie strumienia na płaszczyznę będzie takie samo, jakie by było, gdyby płaszczyzna powuwała się z prędkością c_1, równoległą do v; wtedy, jeżli $v > c_1$, zachodzi spotkanie się strumienia z płaszczyzną.

Wartość parcia znajdziemy zupełnie w ten sam sposób, jak i poprzednio, mianowicie podług wzoru (42)

$$R_o = P \cos\delta + \frac{\Delta Q}{g}(v - c_1)\sin\delta \ldots\ldots (46),$$

lub przybliżonego (44)

$$R_o = \frac{\Delta Q}{g}(v - c_1)\sin\delta \ldots\ldots\ldots (47);$$

następnie moc określimy podług wzoru (43)

$$E = P c_1 \cos\delta \sin\delta + \frac{\Delta Q}{g}(v - c_1) c_1 \sin^2\delta \ldots (48),$$

lub przybliżonego (45)

$$E = \frac{\Delta Q}{g}(v - c_1) c_1 \sin^2\delta \ldots\ldots\ldots (49).$$

Moc E moglibyśmy również określić, mnożąc parcie R_o przez rzut prędkości c na kierunek R_o, albo też, mnożąc prękość c, z jaką posuwa się płaszczyzna przez rzut parcia R_o na kierunek prędkości c, więc napiszemy, że

$$E = R_o \cdot c \cdot \cos\lambda .$$

Kąt $\lambda = \delta + \varepsilon - \frac{\pi}{2}$; $\cos\lambda = \cos\left(\delta + \varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) =$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta - \varepsilon\right) = \sin(\delta + \varepsilon),$$

zatym

$$E = R_0 \cdot c \cdot \sin(\delta + \varepsilon),$$

albo podstawiając na R_0 jego wartość z [46] napiszemy

$$E = P \cdot \cos\delta \cdot c \cdot \sin(\delta+\varepsilon) + \frac{\Delta Q}{g}(v - c_1)\sin\delta \cdot c \cdot \sin(\delta+\varepsilon) \ldots (50).$$

Jeśli porównamy moc E, określoną równaniem [48] i równaniem [50], zobaczymy, że równania te są równoznaczne, albowiem, jak widać z rysunku

$$c_1 \cdot \sin\delta = c \cdot \sin(\delta+\varepsilon).$$

Zalecamy, jako ćwiczenie, znalezienie mocy strumienia cisnącego na kanał o kształcie, jaki jest podany na rys. 113 i na rys. 115 w przypuszczeniu, że kanał posuwa się z pewną prędkością $\underline{v}$ w kierunku poziomym. Pouczające następnie będzie znalezienie tej że mocy strumienia na zasadzie zachowania energji [twierdz. Bernoulli'ego], jeśli porównamy energję strumienia wody przed wejściem do kanału i energję strumienia po wyjściu z kanału.

Zaznaczymy tylko, że przed wejściem do kanału strumień powinien posiadać prędkość $\underline{c_1}$ wypadkową z prędkości $\underline{v_1}$ i $\underline{v}$; również po wyjściu z kanału strumień posiadać będzie prędkość $\underline{c_2}$, która będzie wypadkową prędkości $\underline{v_2}$ i $\underline{v}$.

Oczywiście, że moc strumienia, określona pierwszym i drugim sposobem, powinna być jednakowa.

Parcie wody, w masie nieograniczonej, płynącej z prędkością $\underline{v}$ - na powierzchnię, posuwającą się z prędkością c , równoległą do v i zwróconą w tę samą, co i v stronę .

W tym wypadku teorya nie ma dostatecznych danych do określenia odpowiedniego parcia . Stosujemy przeto wzór, podobny do tego , który określa nam parcie strumienia o małym przekroju względem pola powierzchni , poprawiając ten wzór odpowiednim spółczynnikiem, z doświadczenia otrzymanym ; napiszemy zatym , że parcie w tym razie

$$R = \varphi \Delta f \frac{(v-c)^2}{2g} \quad \text{.................} (51),$$

gdzie φ jest to spółczynnik zależny od kształtu i wielkości powierzchni , zaś f - pole przekroju danej powierzchni (ciała) , prostopadłego do kierunku ruchu .- Jeśli pole f jest małe, zaś ciało jest w postaci płytki , wtedy (podług Dubois) φ=1,86; jeżeli to będzie sześcian , którego boki są równe bokom płytki, φ=1,46 ; w przypadku prostopadłościanu , którego długość jest trzy razy większa niż bok podstawy , φ= 1,34 .

Parcie , jakiemu podlegać będzie powierzchnia nieruchoma pod wpływem cieczy , płynącej z prędkością v , znajdziemy też na podstawie wzoru , ułożonego na sposób wzoru (51) , zakładając c = 0 , przyczym spółczynnik powinien być już inny ; napiszemy w tym razie

$$R = \psi \Delta f \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \text{.................} (52)$$

Różne wartości spółczynnika ψ można znaleźć w „Techniku" na str . 271.—

Ważniejsze omyłki dostrzeżone.

Str.:	Wiersz:	Zamiast:	powinno być:
8.	10 z góry	można...	można też.....
9.	3 "	i	, gdyż
25.	9 "	$dz\sum_{i=1}^{i=m} X_i$	$dx\sum_{i=1}^{i=m} X_i$
30.	13 "	wziętej	wziętemu
35.	8,11,13 "	xoy	zoy
36.	2 z góry	df	df_x
39.	8 "	p	p_o
43.	4 "	podanych...	podanych objętości.....
56	5 "	$R.\cos(R,y)ds\cancel{+}..$	$R\cos(R,y)ds.\cos(ds,y)$
57	7 z dołu	nam...	nam równanie...
57	6 "	równoległe	równoległej
57	5 "	poziome	poziomej
58	9 z góry	$Xdx+Ydy+Zdz$	$Xdx+Ydy+Zdz=0.$
58	8 z dołu	$\frac{x}{rf(r)}$	$-\frac{x}{rf(r)}$
22	rys. 6	swobodna powierzchnia jest narysowana jako płaszczyzna pozioma	narysowaną płaszczyznę poziomą nie uważać za swobodną powierzchnię, gdyż ta poziomą tu nie będzie.
59	rys. 19		
62	rys. 20		
66	rys. 21		
67	rys. 22		
77.	11 z dołu	$R_1 F_1 = R_2 F_2$	$R_1 F_2 = R_2 F_1$
84.	1 z góry	energji:energja	materyi: energja

Str.:	Wiersz:	Zamiast:	powinno być:
89.	II z dołu	ściśmieniem	ciśnieniem
89.	4 "	ściśnienia	ciśnienia
106.	10 "	h''	h'
108.	13 z góry	haotycznie	chaotycznie
110.	9 z dołu	tą	tę
111.	13 "	$\frac{\gamma}{2g} v_3^2 \sum_1^2 \zeta$	$\frac{\gamma}{2g} v_3^2 \sum_1^3 \zeta$
111.	2 "	znowu	znane
115.	6 "	h,, p, i p	P i P'
115.	2,1 "	ciśnienia w naczyniach u wylotów były	ciśnienia ,warunkujące wypływ z naczyń, były
116.	9 z góry	z ciśnień..	z ciśnień,warunkujących wypływ.
117.	6 z dołu	$\sqrt{2g\frac{h-\frac{p_1-p_2}{\Delta}}{1-\left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}$	$\sqrt{2g\frac{h+\frac{p_1-p_2}{\Delta}}{1-\left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}$.
121.	13 z góry	$v' - \varphi v$	$v' = \varphi v$
122.	1 "	wcale.	wcale dławienia
125.	5	na końcu wzoru powinien być]	
132.	9 "	jest o ..	jest mniej więcej
138.	4 z dołu	$Q_2=\mu_2=bh_2\sqrt{\ldots}$	$Q_2=\mu_2 \cdot b \cdot h_2\sqrt{}$
139.	5 z góry	zależności	założeniu
146.	5 z dołu	odworu	otworu
158.	3 "	gustu obliczającego	upodobania tego, kto oblicza...
169.	5 "	ciśnienia	ciśnień

Str.:	Wiersz:	Zamiast:	powinno być:
170.	8 z góry	ciśnienia	ciśnień
179.	5 "	E F....E D	E'F'..... E'D'
185.	3 "	q	$q_{/}$
187.	12 z dołu	średnicę	średnice
194.	4 "	końcu	końca
197.	9 "	wykonane.	dotrzymane.
198.	rys.64.	litera C powinna być postawiona niżej, tuż nad krzywą osią rury.	
200.	4 z dołu	wtedy pomimo pewnych odchyleń,przekonalibyśmy się,iż	wtedy przekonalibyśmy się, iż pomimo pewnych odchyleń.....
215.	8 z gory	jaka	jaką
217.	7,6 z dołu	i_α	i_d
226.	8 z góry	$b = \frac{F}{2h} + \frac{b}{2} ctg\,\delta$	$b = \frac{F}{2h} + \frac{i'}{2} ctg\,\delta$.
230.	4 "	$\ldots - F h^3 \sin^3\delta = 0$	$\ldots - F h^3 \sin^2\delta = 0$
231.	rys.80	kąty φ, φ	.... ψ, ψ
240.	6 z dołu	strzałkowym	całkowym
241.	4 z góry	rozwiązujemy	rozwiązujemy przybliżenie,co uwidocznimy graficznie
244.	9 "	sięga	sięgnie
247.	rys. 90	Wymiar „h" powinien oznaczać różnicę poziomów punktów a_n i D.	
247	" "	punkty B i a_n połączyć prostą poziomą.	

Str.:	Wiersz:	Zamiast:	powinno być:
258.	10 z dołu	dotchnie	dotknie
273.	11 z góry	układ	pokład
273.	12 "	nieprzepuszczalna	przepuszczalna
276.	8 "	x zamiast R,a z...	R zamiast x,a H_o
276.	7 "	....H_o, ...	..... z, ...
280.	6 z góry	torze....	torze płaskim...
280.	9 z dołu	$Oy-(v_{By}-v_{Ay})$	$Oy=(v_{By}-v_{Ay})$
282.	1 "	działa na...	działa na punkt...
284.	9 z góry	$+P_z'''l''+$	$+P_z''l'''+$
290.	8 z dołu	Ponieważ wiemy...	Wiemy,...,
302.	9 z dołu	powierzchnię do..	powierzchnię,i do...
305	15 z góry	zatym...	zaś
307.	7 z dołu	patrz...	[patrz....
307.	6 z dołu	2-im .	2-im].
309.	12 "	strumienia,...	strumienia ;...
310.	12 z gory	C D C'D'	A B A'B'
310.	5 z dołu	kjest	jest
312	5 z góry	pierwszym	pionowym
312	10 "	tych sił,	sił,
314.	10 "	$(v\mp c)$	$(v\mp c)$;
320	4 "	parcia	tarcia.