Twierdzenie D. Bernoulliego w zastosowaniu do cieczy rzeczywistych.

Podczas przepływu przez naczynie rzeczywistej cieczy, posiadającej pewną lepkość , cząsteczki płynące w sąsiedztwie ścianek naczynia trą się o te ścianki, zmniejszając w ten sposób swą prędkość. Cząsteczki sąsiednie, dotykające poprzednich, zatrzymywane są przez nie z powodu lepkości i również zmniejszają prędkość, jakkolwiek w znacznie mniejszym stopniu w porównaniu z cząsteczkami,dotykającymi ścianek naczynia bezpośrednio. - Z tego powodu cząsteczki , najbliżej ścianek płynące, posiadają mniejszą prędkość , niż te , które są bliżej środka danego przekroju, założenie zatym, zrobione przez nas dla cieczy doskonałej, że wszystkie cząsteczki w danym przekroju płyną z jednakową prędkością tym dalej odbiega od rzeczywistości, im lepkość cieczy jest większa.

Aby pokonać tarcie, jakie powstaje przy ruchu cząsteczek, płynących w sąsiedztwie ścianek, a również aby pokonać tarcie, jakie powstaje między cząsteczkami sąsiednimi, każda z nich powinna część posiadanej energii na ten cel obrócić.

Oprócz przeszkód , napotykanych przez cząsteczki cieczy podczas przepływu ich , a spowodowanych przez tarcie o ścianki, zmuszeni jesteśmy zwrócić uwagę jeszcze na to, że założenie nasze,jakoby cząsteczki cieczy płynęły po torach równoległych,nie zupełnie jest zgodne z rzeczywistością. Niektóre dane wskazują nam, że tylko przy przepływie cieczy przez naczynia o przekrojach bardzo małych (naprzykład w rurkach włoskowatych) można przyjąć z dużą dokładnością powyższe założenie; prawidłowość ruchu w tym razie należy objaśnić możliwością dokładnego niemal zupełnie kierowania cienkiego strumienia blizko siebie będącymi ściankami naczynia; tu ścianki naczynia nie są w stanie wywrzeć wpływu na wszystkie cząsteczki strumienia, aby je zmusić do płynięcia równoległe: znajdziemy tu znaczną ilość cząsteczek, haotycznie płynących , które wywołują pewien mieład w ruchu, skutkiem tego zderzenia cząsteczek między sobą powinny być zjawiskiem zwykłym . Wobec powyżej powiedzianego należy spodziewać się przy przepływie cieczy przez naczynie szersze(niż włoskowate) dodatkowej straty energii , spowodowanej tymi właśnie uderzeniami.

Ile energii cząstki tracą na bezpośrednie tarcie o ścianki i o siebie, a ile energii tracą z powodu uderzeń poprzednio opisanych - ani doświadczenie,ani teorya dokładnie nie jest w stanie podać; wobec tego obie te straty łączymy w jedną i uważamy ją wprost jako stratę, spowodowaną przez tarcie o ścianki i tarcie wewnętrzne. i wartości tej straty określamy drogą wyłącznie doświadczalną . Łączenie tych strat tymbardziej jest dogodne , że zachodzą one w każdym miejscu jedno cześnie.- Co się tyczy kierunków prędkości , z jakimi oddzielne cząstki płyną , przyjmujemy kierunki te równoległymi .

Dla cieczy doskonałej żadnych strat energii przy zmianie kierunku ruchu nie braliśmy pod uwagę; w rzeczywistości zaś przy przejściu cieczy z przekroju szerokiego do węższego lub odwrotnie, gdy cząsteczka zmienia prędkość swego ruchu lub jego kierunek, powstają pewne zawikłania w ruchu cząsteczek , spotykania się jednych z drugimi; wszystkie te zjawiska, aby mogły zajść, pociągają za sobą przemianę części energii , posiadanej przez cząsteczki w postaci energii kinetycznej lub potencjalnej, na inne , które, jakkolwiek w cieczy mogą pozostać, jednak dla elementów ruchu, przez nas badanego, są , rzec można , stracone.

Wynika to stąd, że zarówno przy pokonywaniu tarcia, jak następnie przy uderzeniach, zużyta energja zamienia się prawie wyłącznie na energję cieplną, energję elektryczną, energję dźwięku i t.d., a tych postaci energji w takich razach nie udaje się zamienić z powrotem na energję kinetyczną ani na energję potencjalną, w naszych zadaniach rozważaną.

Najdogodniej te postaci straconej energji wyrazić w funkcji energji kinetycznej, jaką cząsteczka w danej chwili posiada. Jeżeli naprz. cząsteczka o ciężarze q w pewnym miejscu (2) ma prędkość v_2 , to energja kinetyczna cząsteczki $= \frac{q v_2^2}{2g}$.

Na pokonanie oporów, spowodowanych przez tarcie o ścianki i tarcie wewnętrzne niech pójdzie część tej energji naprz. $\zeta_t \frac{g}{2g} v_2^2$, gdzie ζ_t jest to spółczynnik stratności, spowodowanej przez tarcie; ζ_t jest, oczywiście, liczbą oderwaną.

Jeśli cząsteczka zmienia kierunek ruchu, wtedy energję, która zostaje zużyta na pokonanie tej przeszkody, wyrazimy znowu w funkcji energji kinetycznej, mianowicie $\zeta_k \cdot \frac{g}{2g} v_2^2$; straty energji, powstałe z powodu zmiany przekroju, oznaczymy przez $\zeta_p \cdot \frac{g}{2g} v_2^2$.

Moglibyśmy dopatrzeć się jeszcze kilku przyczyn, z powodu których ciecz ponosi straty; ponieważ jednak poprzednio podane straty są najważniejsze, więc na tych tylko się zatrzymamy. – Całkowitą stratę energji naszej cząsteczki określimy równą sumie strat, a więc =

$$\zeta_t \cdot \frac{g}{2g} v_2^2 + \zeta_k \cdot \frac{g}{2g} \cdot v_2^2 + \zeta_p \cdot \frac{g}{2g} \cdot v_2^2 = \frac{g}{2g} v_2^2 \Sigma \zeta .$$

Jeżeli zatym, rozpatrując ruch trwały cieczy rzeczywistej w pewnym naczyniu, obierzemy cząsteczkę na poziomie (I), a później tą samą cząsteczkę na poziomie (2), znajdziemy, że energja całkowita w pierwszym miejscu będzie = $g h_1 + \frac{g}{2g} v_1^2 + \frac{p_1}{\Delta} g$; w drugim miejscu energja cząsteczki = $g h_2 + \frac{g}{2g} v_2^2 + \frac{p_2}{\Delta} g$.

Te jednak ilości energji nie są sobie równe; wiemy, zgodnie z poprzednim, że energja cząsteczki w miejscu drugim jest <u>mniejsza</u> od energji w miejscu pierwszym <u>o wartość energji straconej na pokonanie</u> różnych <u>oporów</u> podczas drogi od I do 2 ; mamy zatym, że

$$q h_1 + \frac{q}{2g} v_1^2 + \frac{p_1}{\Delta} q > q h_2 + \frac{q}{2g} v_2^2 + \frac{p_2}{\Delta} q .$$

Oznaczmy energję straconą stosownie do poprzedniego przez $\frac{q}{2g} v_2^2 \sum_1^2 \zeta$, gdzie I i 2 pod i nad znakiem $\sum$ niech nam przypominają , że to są straty energji poniesione podczas drogi od [I] do [2] przekroju.

Aby energję w miejscu [I] zrównać z energją w miejscu [2] , należy tę ostatnią zwiększyć o $\frac{q}{2g} v_2^2 \sum_1^2 \zeta$; możemy więc napisać :

$$q h_1 + \frac{q}{2g} v_1^2 + \frac{p_1}{\Delta} q = q h_2 + \frac{q}{2g} v_2^2 + \frac{p_2}{\Delta} q + \frac{q}{2g} v_2^2 \sum_1^2 \zeta .$$

Skróćmy równanie to przez q , wtedy otrzymamy

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} + \frac{v_2^2}{2g} \sum_1^2 \zeta .$$

Gdybyśmy porównywali energję cząsteczki w miejscach [I] i [3] , powinnibyśmy napisać

$$q h_1 + \frac{q}{2g} v_1^2 + \frac{p_1}{\Delta} q = q h_3 + \frac{q}{2g} v_3^2 + \frac{p_3}{\Delta} q + \frac{q}{2g} v_3^2 \sum_1^3 \zeta ,$$

gdzie $\frac{q}{2g} v_3^2 \sum_1^3 \zeta$ oznacza energję straconą podczas drogi od miejsca I do 3 . Skracając równanie poprzednie przez q , otrzymamy $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} = h_3 + \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\Delta} + \frac{v_3^2}{2g} \sum_1^3 \zeta .$

Ponieważ $\frac{v_2^2}{2g}$ i $\frac{v_3^2}{2g}$ są to, jak widzieliśmy, wysokości , więc $\frac{v_2^2}{2g} \sum_1^2 \zeta$, $\frac{v_3^2}{2g} \sum_1^3 \zeta$ są też pewne w y s o k o ś c i, k t ó r e b ę d z i e m y n a z y w a l i w y s o k o ś c i a m i s t r a c o n y m i p r z e z c z ą s t e c z k ę n a p o k o n a n i e o p o r ó w podczas odpowiedniej drogi.

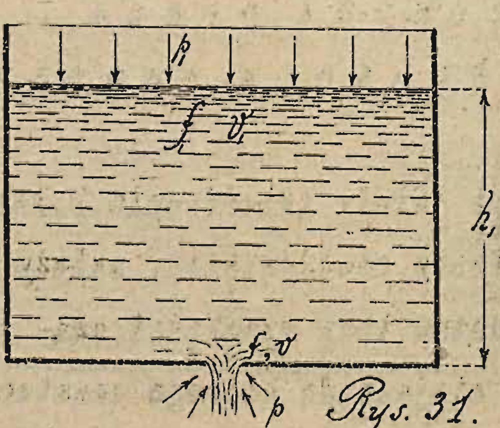
Stąd otrzymujemy wniosek: jeżeli twierdzenie D.Bernoulliego mamy stosować dla cieczy rzeczywistej, należy stronę równania, zawierającą znowu trzy wysokości cząsteczki cieczy, określone dla miejsca,do którego cząsteczka dochodzi *później*, *zwiększyć o wysokość, straconą na opory*.

Na swoim miejscu roztrząsaliśmy różnicę między ciśnieniem hydrodynamicznym, a hydrostatycznym, następnie rozpatrywaliśmy zależność między ciśnieniem hydrodynamicznym a zewnętrznym dla cieczy doskonałej. Oczywiście roztrząsanie podobne możemy zastosować również dla cieczy rzeczywistej, biorąc pod uwagę straty wysokości na opory. Sposób rozpatrzenia zasadniczo nie będzie się niczym od tamtego różnił i dla tego tutaj go pomijamy.

Zastosowania.

Wypływ cieczy przez otwór w dnie poziomym. Prędkość i ilość wypływu teoretyczna przy ciśnieniu stałym.

Niech będzie naczynie napełnione cieczą, której poziom swobodny o polu f_1 jest pod ciśnieniem zewnętrznym p_1. Na głębokości h_1 niech znajduje się w dnie poziomym otwór o polu f.



Rys. 31.

Znajdźmy prędkość v wypływu cieczy z tego otworu, przy założeniu, że ciśnienie na ciecz przy wypływie jest p i że wysokość h_1 pozostaje bez zmiany. Aby spełniony był ten warunek, należy do

Jan Łoziński

naczynia doprowadzać ciecz, która, wobec tego, niech ma na górnym poziomie prędkość v_1. Załóżmy, że wypływ cieczy stał s i ę t r w a ł y m ; wtedy, jeśli mamy do czynienia z cieczą doskonałą, obierając płaszczyznę otworu za poziom zasadniczy, zastosujemy twierdzenie D.Bernoulliego do cząsteczki, kiedy ta znajduje się na górnym poziomie, i kiedy po pewnym czasie przyjdzie do otworu w dnie; otrzymamy wtedy równanie :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} = 0 + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} \ldots\ldots (1);$$

stąd, o ile mamy zadane h_1, v_1, p_1 i p, znajdziemy v, mianowicie $\frac{v^2}{2g} = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1 - p}{\Delta}$, a stąd

$$v = \sqrt{2g\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1 - p}{\Delta}\right)}.$$

Ten wzór możemy otrzymać pod inną postacią.- Ponieważ mamy do czynienia z cieczą nieściśliwą, więc $f_1 v_1 = f \cdot v$, skąd $v_1 = \frac{f \cdot v}{f_1}$. Podstawiając tę wartość na v_1 w równanie (I), otrzymamy

$$h_1 + \frac{v^2}{2g}\left(\frac{f}{f_1}\right)^2 + \frac{p_1}{\Delta} = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta},$$

stąd

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{h_1 + \frac{p_1 - p}{\Delta}}{1 - \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}.$$

Gdy $p_1 = p$ (naprz. naczynie znajduje się w atmosferze), wtedy

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{h_1}{1 - \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}.$$

Przypuśćmy, że f w porównaniu z f_1 jest bardzo małe, wtedy ułamek $\left(\frac{f}{f_1}\right)^2$ można opuścić i otrzymamy, że

$$v = \sqrt{2gh_1}.$$

Zależność tę drogą doświadczalną znalazł Toricelli. Otrzymaną zależność możemy słowami wypowiedzieć tak: prędkość wypływu równa się tej prędkości, jaką uzyskałby punkt materyalny, spadający bez początkowej prędkości ze swobodnego poziomu do poziomu otworu.

Jeśli znaną jest v prędkość wypływu oraz przekrój otworu f , wtedy ilość cieczy Q , wypływającej w jednostce czasu , określić można z wzoru

$$Q = v.f.$$

Znaleść, jak się względem siebie mają prędkości wypływu dwóch cieczy doskonałych o różnych ciężarach właściwych Δ_a i Δ_b , kiedy ciśnienie p_1 nie jest równe p .

Niech wypływ cieczy Δ_a zachodzi przy następujących warunkach : ciśnienie zewnętrzne na swobodnej powierzchni $= p_1$, głębokość otworu , liczona od swobodnego poziomu $= h_1$, ciśnienie zewnętrzne przy wypływie $= p$. Dla cieczy Δ_b te same wielkości niech mają odpowiednie wartości p_1' , h_1' , p' , ; pole otworu i swobodnego poziomu niech dla obydwóch naczyń będą jednakowe. Na zasadzie otrzymanych poprzednio wzorów prędkość V_a cieczy Δ_a znajdziemy równą

$$V_a = \sqrt{2g \cdot \frac{h_1 + \frac{p_1 - p}{\Delta_a}}{1 - \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}.$$

Prędkość V_b dla cieczy Δ_b określimy z wzoru

$$V_b = \sqrt{2g \cdot \frac{h_1' + \frac{p_1' - p'}{\Delta_b}}{1 - \left(\frac{f}{f_1}\right)^2}},$$

a stąd $$\frac{V_a}{V_b} = \sqrt{\frac{\Delta_a \cdot h_1 + p_1 - p}{\Delta_b \cdot h_1' + p_1' - p'} \cdot \frac{\Delta_b}{\Delta_a}}$$

Z tego wzoru wynika przedewszystkiem:

1) gdyby nawet $p_1 = p_1'$, $h_1 = h_1'$ i $p = p'$, jeśli tylko $\Delta_a \gtrless \Delta_b$, wtedy $V_a \gtrless V_b$;

2) $V_a = V_b$ przy $\Delta_a \gtrless \Delta_b$, wtedy, kiedy

$p_1 = p$; $p_1' = p'$ i $h_1 = h_1'$.

$\Delta_a h_1 + p_1 - p$ jest wartość tego ciśnienia, które warunkuje wypływ cieczy z naczynia; oznaczmy to ciśnienie przez P ; również dla cieczy drugiej oznaczmy

$\Delta_b h_1' + p_1' - p' = P'$, wtedy $\frac{V_a}{V_b} = \sqrt{\frac{P}{P'} \cdot \frac{\Delta_b}{\Delta_a}}$;

z tego ostatniego równania otrzymujemy, że

3) kiedy ciśnienie $P = P'$, wtedy $\frac{V_a}{V_b} = \sqrt{\frac{\Delta_b}{\Delta_a}}$.

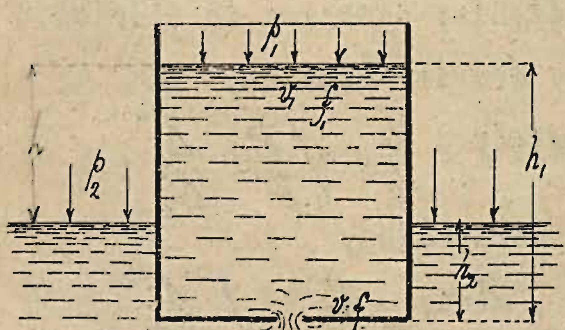
Z wzoru powyższego wynika, że przy jednakowym dla obydwóch cieczy h_1, p_1 i p – prędkości v_a i v_b są zależne od Δ_a i Δ_b, czyli jeśli dwie ciecze o różnych ciężarach właściwych postawimy w takie warunki by ciśnienia w naczyniach u wylotów były jednakowe, wtedy p r ę d k o ś c i w y p ł y w u t y c h c i e c z y b ę d ą o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n e w z g l ę d e m p i e r w i a s t k ó w k w a d r a t o w y c h z c i ę ż a r ó w w ł a ś c i w y c h,

wreszcie

4) z ostatniego wzoru znajdziemy, że kiedy $\Delta_a = \Delta_b$, wtedy $\frac{V_a}{V_b} = \sqrt{\frac{P}{P'}}$, to jest, jeśli $\Delta_a = \Delta_b$, wtedy prędkości wypływu są wprost proporcjonalne względem pierwiastków kwadratowych z ciśnień.

W y p ł y w c i e c z y p r z e z o t w ó r z a t o p i o n y w d n i e p o z i o m y m.

Niech otwór, przez który ciecz wypływa, jest zatopionym; załóżmy, że górny i dolny poziomy cieczy są stałe; ciśnienia na ciecz na tych poziomach niech są p_1 i p_2. Wysokości tych poziomów nad płaszczyzną dna, którą przyjmiemy za poziom zasadniczy, niech będą h_1 i h_2. Prędkość przepływu cieczy przez



Rys. 32.

otwór zanurzony oznaczmy przez v, pole przekroju tego otworu - f, ciśnienie cieczy w naczyniu zewnętrznym przy tym otworze — p. Oznaczmy jeszcze przez f_1 pole swobodnego poziomu i przez Δ ciężar właściwy cieczy.

Stosując wzór znaleziony poprzednio, otrzymamy, że

$$v=\sqrt{2g\cdot\frac{h_1+\frac{p_1-p}{\Delta}}{1-\left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}\;\ldots\ldots\;(1);$$

dla tego wzoru należy bliżej określić wartość ciśnienia p .

Gdybyśmy chcieli dokładnie określić to ciśnienie, napotkalibyśmy nieprzezwyciężone trudności, gdyż cząsteczki cieczy, wypływające z naczynia, spotykają cząsteczki , znajdujące się w naczyniu zewnętrznym, a które poruszają się bardzo nieprawidłowo; w ten sposób wytwarzają się wiry , które właśnie rozwiązanie zadania wikłają. - Możemy jednak z pewną dokładnością przyjąć, że w naczyniu dolnym ciecz znajduje się w spoczynku; w takim razie , aby określić ciśnienie p , będziemy mogli zastosować twierdzenia hydrostatyki , przyjmując , że $p=p_2+\Delta h_2$. Podstawiając otrzymaną na p wartość we wzór (I) , znajdziemy

$$v=\sqrt{2g\cdot\frac{h_1+\frac{p_1-p_2}{\Delta}-h_2}{1-\left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}\;;$$

oznaczmy $h_1 - h_2$ to jest różnicę poziomów cieczy w obu naczyniach przez h , wtedy napiszemy

$$v=\sqrt{2g\cdot\frac{h+\frac{p_1-p_2}{\Delta}}{1-\left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}\;\ldots\ldots\ldots\;(2);$$

przedewszystkim z tego wzoru widzimy , że prędkość wypływu nie zależy od głębokości , na jakiej znajduje się otwór pod poziomem cieczy, lecz tylko od różnicy poziomów tej cieczy w obu naczyniach.

Gdyby $p_1=p_2$, wtedy $v=\sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{f}{f_1}\right)^2}}$;

wreszcie , jeśli $\frac{f}{f_1}$ jest ułamek bardzo mały, otrzymujemy znów wzór Toricelli'ego

$$v=\sqrt{2gh}\ ,$$

to jest prędkość , z jaką przy powyższych założeniach wypływa ciecz przez otwór zatopiony, - z a l e ż y tylko o d r ó ż n i c y s w o b o d n y c h p o z i o m ó w c i e c z y w o b u n a c z y n i a c h i równa się prędkości , jaką otrzymałby punkt ciężki , spadający bez początkowej prędkości z poziomu górnego na poziom dolny.

Ilość wypływu Q znajdziemy z wzoru

$$Q=f\cdot v.$$

P r ę d k o ś ć r z e c z y w i s t a w y p ł y w u c i e c z y p r z e z d a n y o t w ó r p o z i o m y.

Poprzednio otrzymane rezultaty dotyczą cieczy doskonałej. - W przypadku cieczy rzeczywistej należałoby otrzymane wzory odpowiednio poprawić. Możnaby tego dopiąć, określając straty wysokości, jakie cząsteczka ponosi, przepływając drogę od górnego poziomu do otworu. W rezultacie otrzymalibyśmy prędkość rzeczywistą v' mniejszą od teoretycznej v . Jednak poszukiwanie prędkości v' drogą powyższą połączone jest z wielkimi trudnościami, nie dającymi jednak praktycznych wyników; dlatego też postępujemy inaczej, mianowicie, obliczamy prędkość teoretyczną v , a następnie poprawiamy otrzymany rezultat, mnożąc go przez pewien spółczynnik φ, otrzymany z doświadczeń; φ nazywamy s p ó ł c z y n n i k i e m p r ę d k o ś c i w ypływu cieczy.

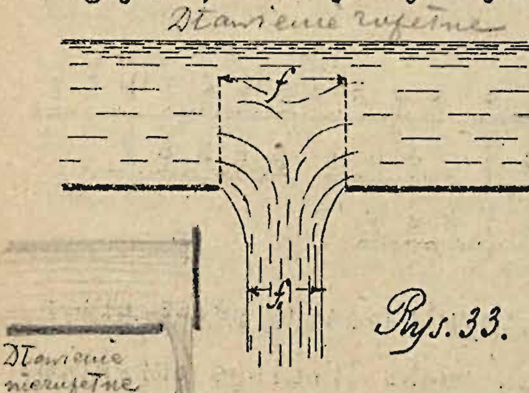
Tak więc $v' = \varphi v$, przyczym φ, otrzymane z wielu doświadczeń, najczęściej waha się od 0,96 do 0,98. Ze zwiększeniem wysokości h, spółczynnik φ nieco wzrasta.

Dławienie. Ilość rzeczywista cieczy, wypływającej przez otwór poziomy.

Teoretyczną ilość cieczy, wypływającej przez otwór poziomy w cienkim dnie, podczas ruchu trwałego określamy wzorem $Q = v.f$, gdzie v—prędkość wypływu, a f pole otworu.

Z doświadczenia jednak otrzymujemy zwykle dla Q wartoć mniejszą od teoretycznej. Bliżej badając przyczyny tej niezgodności,znajdujemy, że ciecz w rzeczywistości nie wypełnia całego przekroju otworu , dostrzegamy mianowicie, że poniżej otworu przekrój strumienia cieczy jest nieco zwężony; jeśli oznaczymy przekrój strumienia przez f' , a pole otworu przez f , wtedy $f' < f$. Wogóle można napisać że $f' = \alpha f$, gdzie α nazwiemy spółczynnikiem dławienia przekroju.

Przyczynę dławienia strumienia objaśniamy bezwładnością cząsteczek cieczy, które nie są w stanie nagle zmienić kierunku; wystawmy więc sobie dno poziome,które ma pośrodku otwór.Podczas wypływu ku otworowi dążą nie tylko te cząsteczki, które znajdują się nad otworem, lecz i te, które są blizko dna z boku otworu; te właśnie cząsteczki dążą do otworu z prędkościami - jedne równoległymi , inne pochylonymi do dna,- nie mogąc zaś w samym otworze odrazu zmienić kierunku prędkości, zmieniają ją stopniowo, odsuwając od brzegów otworu nawet te cząsteczki, które posuwają się w kierunku pionowym, . W ten sposób tłomaczymy sobie przyczynę dławienia strumienia.



Rys. 33.

Jeżeli do otworu ze wszystkich stron mogą dochodzić cząsteczki w kierunku prostopadłym do osi otworu, wtedy zachodzi dławienie strumienia ze wszystkich stron,- tak zwane d ł a w i e n i e z u p e ł n e. (rys. 33).

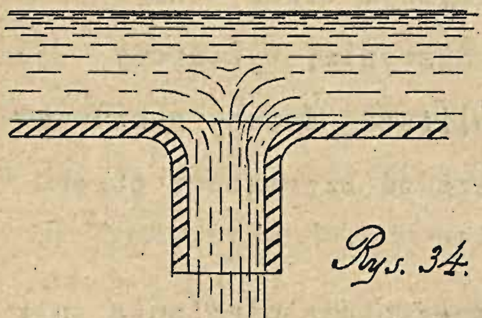
Jeśli otwór umieszczony jest w dnie przy jednej ze ścian naczynia prostopadłej do płaszczyzny otworu, wtedy z tej strony otworu popłyną tylko takie cząsteczki, które nie potrzebują zmieniać kierunku prędkości i z tego powodu odchylać innych cząsteczek od krawędzi otworu nie będą. Otrzymamy wtedy tak zwane d ł a w i e n i e n i e z u p e ł n e. Odróżniamy również d ł a w i e n i e d o s k o n a ł e i n i e d o s k o n a ł o.

Dławienie będzie d o s k o n a ł e, jeśli pole otworu jest małe w porównaniu z polem dna, w którym mamy otwór, jeśli otwór jest zrobiony w cienkim dnie i zaopatrzony w krawędzie ostre, przyczym otwór znajduje się dość daleko od ścian bocznych naczynia; wystarczy, jeśli odległość krawędzi otworu od bliższej ściany naczynia jest przynajmniej 3 razy większa od szerokości otworu w tym kierunku wziętej.

Warunki przeciwne podanym wywołują dławienie n i e d o s k o n a ł e, a więc: wypływ przez otwór dość duży w porównaniu z przekrojem naczynia; wypływ przez otwór w grubym dnie, zwłaszcza przy zaokrąglonych krawędziach otworu, albo też przez dostawione do otworu wyloty.

Powracając teraz do rzeczywistej ilości cieczy Q', wypływającej przez otwór poziomy, zauważymy, że gdy $f' = \alpha f$ i $v' = \varphi v$, to $Q' = v'f' = \varphi v . \alpha f$, oznaczając zaś $\alpha\varphi$ przez μ i biorąc na uwagę, że $vf = Q$, to jest teoretycznej ilości wypływającej cieczy, otrzymamy $Q' = \mu Q$. Spółczynnik μ nosi nazwę s p ó ł c z y n n i k a w y p ł y w u; jak poprzednio przyjęliśmy, spółczynnik wypływu równa się iloczynowi spółczynników dławienia i prędkości. Określenie drogą doświadczalną spółczynników α i μ jest dość łatwe; gdy zaś α i μ są wiadome, wtedy φ określić można ze wzoru $\varphi = \frac{\mu}{\alpha}$.

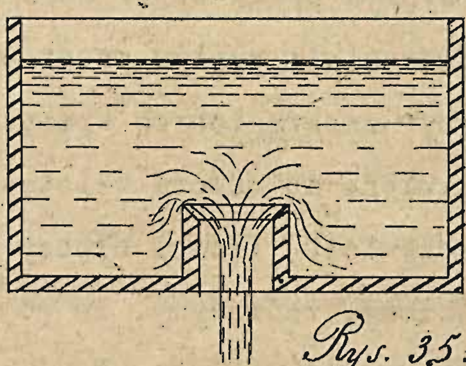
Największe wartości na μ otrzymujemy przy wylotach wydłużonych w kształcie walca z brzegami zaokrąglonymi, jak to na rysunku 34 pokazano. Dla takiego wylotu, zależnie od gładkości ścianek i od średnicy, μ przybiera wartość 0,96 do 0,998, to jest wtedy, praktycznie mówiąc, niema wcale.



Rys. 34.

Najmniejszą wartość na μ otrzymamy przy otworze, posiadającym ostre krawędzie, odgięte do wnętrza naczynia, jak to wskazuje rys. 35.

W tym razie $\mu = 0,54$.–We wszystkich innych przypadkach wypływu otrzymujemy na μ wartości pośrednie pomiędzy 0,54 a 1. W"Techniku" na str. 243,244,245,246 są podane wzory praktyczne oraz wartości na μ w ważniejszych przypadkach, które mogą się zdarzyć w praktyce.

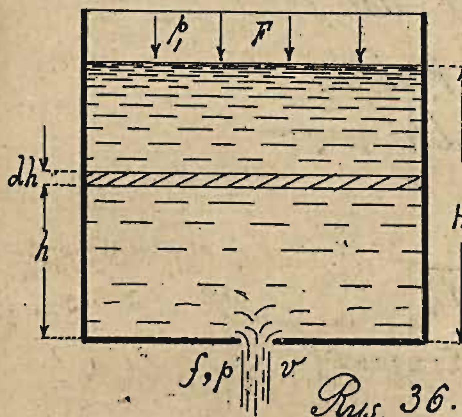


Rys. 35.

Wypływ cieczy z naczynia o zmiennym poziomie swobodnej powierzchni cieczy.

Przypuśćmy, że mamy naczynie o stałym przekroju F; w dnie tego naczynia niech będzie otwór, którego pole oznaczmy przez f. Niech przez ten otwór wylewa się ciecz; w pewnym momencie, od którego rozpoczynamy liczyć czas, niech wysokość swobodnej powierzchni cieczy nad otworem wynosi H ; o ile do naczynia wody dolewać nie będziemy, poziom w nim oczywiście stale obniżać się będzie.

Przyjmijmy, dla ogólniejszego przypadku , że będziemy dolewali stale wodę w ilości $Q\,\frac{m^3}{sek}$. Rozpatrzmy przy tym założeniu warunki wypływu.–Niech ciśnienie na swobodną powierzchnię cieczy będzie p_1, ciśnienie zewnętrzne przy otworze w dnie niech będzie p. Rozważmy warunki ruchu po



Rys. 36.

upływie pewnego czasu t, kiedy poziom swobodny cieczy w naczyniu znajduje się, dajmy na to, na wysokości h ponad poziomem dna; prędkość wypływu wtedy, niech się równa v.

Zobaczmy, co się stanie po upływie elementu czasu dt obranego tak małym, że prędkość v można uważać za stałą w ciągu elementu czasu dt.

W ciągu czasu dt do naczynia dopłynie ilość wody Q.dt, wypłynie zaś μ.v.f.dt, gdzie μ jest to spółczynnik wypływu. Gdyby dopływ był większy od wypływu, to w naczyniu pozostałaby ilość cieczy Q.dt–μf.v.dt i poziom cieczy podniósłby się o dh, przyczym

$$Q\,dt - \mu vfdt = Fdh \ldots\ldots\ldots (A).$$

Ponieważ obraliśmy element czasu dt o tyle mały, że wszystkie zjawiska można uważać w ciągu tego czasu za niezmienne, więc i prędkość wypływu v możemy określić w zależności od h, p_1 i p ze znanego wzoru

$$v=\sqrt{\frac{2g\left(h+\frac{p_1-p}{\Delta}\right)}{1-\left(\frac{f}{F}\right)^2}};$$

gdybyśmy tę wartość na v wprowadzili w równanie (A), otrzymalibyśmy równanie różniczkowe, wiążące wielkości h i t. Żeby jednak rozwiązania zadania tego zbytnio nie utrudnić, wprowadźmy pewne założenie, mianowicie przypuśćmy, że

$p_1 = p$ i że stosunek $\frac{f}{F}$ jest bardzo mały, wtedy $v = \sqrt{2gh}$. Podstawiamy teraz tę wartość na v w równanie (A) i otrzymamy

$$Qdt - \mu\sqrt{2gh}.f.dt = F.dh\,;$$

$$Qdt - \mu\sqrt{2g}.f.\sqrt{h}.dt = F.dh,$$

albo $(Q - \mu\sqrt{2g}.f.\sqrt{h})dt = Fdh$, — stąd po oddzieleniu zmiennych

$$dt = \frac{F.dh}{Q - \mu\sqrt{2g}.f.\sqrt{h}}.$$

Załóżmy, że $\mu\sqrt{2g}.f = k$, wtedy otrzymamy

$$dt = \frac{F.dh}{Q - k\sqrt{h}}.$$

Wyprowadźmy k przed ułamek; wówczas otrzymamy

$$dt = \frac{1}{k}\,\frac{F}{\frac{Q}{k} - \sqrt{h}}\,dh \,\ldots\ldots\ldots (1).$$

Załóżmy, że $\sqrt{h} = x$, skąd $h = x^2$, a $dh = 2x.dx$.

Podstawmy tę wartość dh w równanie (1), znajdziemy

$$dt = \frac{1}{k}\,\frac{F.2x.dx}{\frac{Q}{k} - x} \,\ldots\ldots\ldots (2).$$

Oznaczmy teraz mianownik $\frac{Q}{k} - x$ przez y, zatym $\frac{Q}{k} - x = y$, skąd $x = \frac{Q}{k} - y$, a różniczkując, $dx = -dy$.

Podstawiając te wartości w równanie (2), otrzymamy

$$dt = \frac{-\frac{2F}{k}\left(\frac{Q}{k} - y\right)dy}{y} = -\frac{2F}{k}.\frac{Q}{k}\,\frac{dy}{y} + \frac{2F}{k}dy.$$

Całkując to równanie, znajdziemy

$$t = \frac{2F}{k}y - \frac{2F}{k}.\frac{Q}{k}\,lg.nat\,y + C,$$

ponieważ zaś $y = \frac{Q}{k} - x = \frac{Q}{k} - \sqrt{h}$, więc

$$t = \frac{2F}{k}\left[\frac{Q}{k} - \sqrt{h} - \frac{Q}{k}\,lg.nat\left(\frac{Q}{k} - \sqrt{h}\right)\right] + C \,\ldots\ldots (3).$$

Aby wyrugować stałą całkowania C, zwracamy się do warunków zadania; wiemy, że na początku, gdy było

$t = 0$, naczynie było napełnione wodą do wysokości H ; podstawmy w równanie [3] $t = 0$ i $h = H$, otrzymamy $0 = \frac{2F}{k}\left[\frac{Q}{k} - \sqrt{H} - \frac{Q}{k} \lg nat\left(\frac{Q}{k} - \sqrt{H}\right)\right] + C$; stąd określamy C i podstawiamy w [3]

$$t = \frac{2F}{k}\left[\sqrt{H} - \sqrt{h} + \frac{Q}{k} \lg nat \frac{\frac{Q}{k} - \sqrt{H}}{\frac{Q}{k} - \sqrt{h}}\right].$$

Zamiast k wstawić jeszcze należy jego wartość $\mu . f . \sqrt{2g}$ i ostateczna postać naszego równania będzie

$$t = \frac{2F}{\mu f \sqrt{2g}}\left[\sqrt{H} - \sqrt{h} + \frac{Q}{\mu f \sqrt{2g}} \lg nat \frac{\frac{Q}{\mu f \sqrt{2g}} - \sqrt{H}}{\frac{Q}{\mu f \sqrt{2g}} - \sqrt{h}}\right].$$

Z tego wyrażenia możemy wyciągnąć parę wniosków.— Z prawej strony mamy lg nat wartości , której licznik i mianownik mogą być dodatnie lub ujemne ; lecz ponieważ czas t musi być wartością rzeczywistą , więc ułamek pod znakiem lg nat musi być bezwarunkowo wielkością dodatnią.

Załóżmy przedewszystkiem , że $\frac{Q}{\mu f \sqrt{2g}} > \sqrt{H}$, zatym , że $Q > \mu f \sqrt{2gH}$; wówczas powinno też być , zgodnie z poprzednią uwagą ,

$$\frac{Q}{\mu f \sqrt{2g}} \geqslant \sqrt{h}, \text{ albo } Q \geqslant \mu f \sqrt{2gh}.$$

Rozpatrując nierówność $Q > \mu f \sqrt{2gH}$, zauważyć możemy , że $\sqrt{2gH}$ jest to początkowa prędkość , z jaką woda zaczyna wypływać z naczynia; więc $\mu f \sqrt{2gH}$ równa się ilości wody, jaka w pierwszym momencie w jednostce czasu wypływa z naczynia, wspomniana zaś nierówność mówi nam , że dolewamy wody więcej , niż w pierwszym momencie m o ż e wypłynąć ; pewna więc ilość wody w naczyniu zostanie, przyczym wysokość H się zwiększy . - Lecz wówczas prędkość wypływu wody zwiększać się będzie , coraz więcej wody zacznie wypływać , aż wreszcie przy pewnej wysokości $h' > H$ może się zdarzyć , że

$$Q = \mu f \sqrt{2gh'} \, ;$$

od tego momentu począwszy , poziom wody pozostanie bez zmiany.

Gdy Q dojdzie do tej granicy , otrzymamy wtedy wogóle , że

$$Q = \mu f \sqrt{2gh'} \, ;$$

wówczas w mianowniku pod znakiem lg nat otrzymamy 0; zatym ułamek , a więc i jego lg nat zamienią się na wielkości nieskończenie wielkie. - Oznacza to , że do chwili , w której poziom w naczyniu się ustali , zbliżać się będziemy asymptotycznie .

Teraz , dajmy na to , że przy początku

$$Q < \mu f \sqrt{2gH} \, ;$$

wówczas jednocześnie powinno być

$$Q \leq \mu f \sqrt{2gh} \, .$$

Pierwsza nierówność mówi nam , że dolewamy wody mniej , niż w pierwszym momencie w ciągu jednostki czasu wypłynąć może ; poziom wody w naczyniu zacznie się obniżać ; jednocześnie prędkość wypływu maleje i może dojść do tego, że będzie

$$Q = \mu f \sqrt{2gh'} \, ,$$

przyczym $h' < H$; wówczas poziom wody będzie znów stały.

Jednocześnie powinniśmy przyjąć , że od tego momentu wogóle

$$Q = \mu f \sqrt{2gh} \, ;$$

mianownik ułamka pod znakiem lg nat będzie zerem; czas wypadnie nieskończenie wielki ; zatym i obecnie do chwili ustalenia się poziomu wody w naczyniu zbliżać się będziemy asymptotycznie .

Gdy ilość dopływającej wody $Q = 0$, wtedy czas potrzebny na to , aby poziom wody w naczyniu obniżył się od H do h , znajdziemy

$$t = \frac{2F}{\mu f \sqrt{2g}} \left[\sqrt{H} - \sqrt{h} \right] .$$

Jeśli mamy oznaczyć czas , kiedy wszystka woda z naczynia wypłynie przy $Q = 0$, należy w ostatnim równaniu przyjąć $h = 0$; wówczas

$$t = \frac{2F}{\mu f \sqrt{2g}} \sqrt{H} .$$

Pomnóżmy licznik i mianownik przez $\sqrt{H}$, znajdziemy, że

$$t = \frac{2FH}{\mu f \sqrt{2gH}} .$$

W liczniku iloczyn F.H oznacza ilość wody zawartą w naczyniu , zaś $\mu f \sqrt{2gH}$ w mianowniku oznacza stałą prędkość wypływu wody przy stałym poziomie, zatym

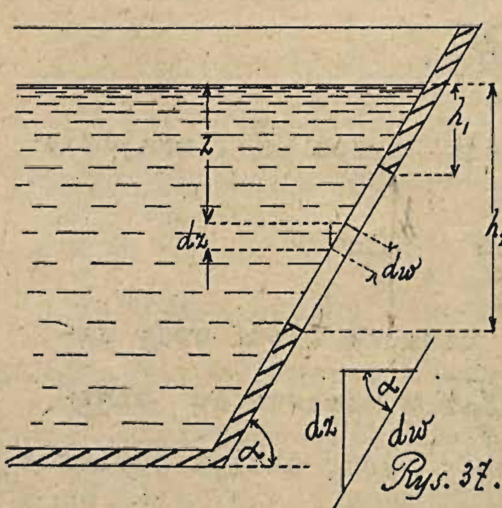
$$t' = \frac{F.H}{\mu . f \sqrt{2gH}}$$

oznaczać będzie czas potrzebny na to, aby woda objętości F.H wypłynęła z naczynia przy stałym poziomie; a więc $t = 2t'$; stąd mamy wniosek: - aby opróżnić naczynie, napełnione wodą do pewnego poziomu, należy stracić czasu dwa razy więcej, niż go potrzeba, aby taką samą ilość wody wylać z naczynia, w którym woda znajduje się na stałym poziomie.

Wypływ cieczy pod stałym ciśnieniem przez otwór boczny w naczyniu.

Wystawmy sobie naczynie, napełnione cieczą; w jednej z płaskich ścianek, pochylonej pod kątem α do poziomu jest otwór dowolnej figury.

Szeregiem linii poziomych dzielimy pole tego otworu na poziome paski o szerokości dw o tyle małej, aby prędkość wypływu cieczy we wszystkich punktach takiego paska można było uważać za stałą. Przyjmijmy, że ruch jest trwały; wtedy dla paska, zauważonego na głębokości z pod swobodnym poziomem, prędkość przepływu cieczy określi się z $v = \sqrt{2gz}$. Przyjmując długość paska



Rys. 37.

w tym miejscu równą y, otrzymamy, że ilość cieczy dQ, wypływającej w ciągu jednostki czasu przez pole paska elementarnego $dQ = y.dw.\sqrt{2gz}$.

Dla otrzymania całkowitej ilości wypływającej cieczy Q, należy powyższe równanie zcałkować. Znajdziemy wtedy

$$Q=\int_{h_1}^{h_2} y\cdot dw.\sqrt{2gz}.$$

Wyrugujmy z tego równania dw. Z rysunku widzimy, że $dz = dw.\sin\alpha$, stąd $dw=\frac{dz}{\sin\alpha}$; podstawiając to w poprzednie równanie, otrzymamy

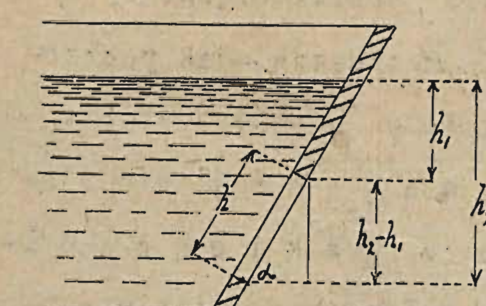
$$Q=\int_{h_1}^{h_2} y z^{1/2}\sqrt{2g}\cdot\frac{dz}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha}\int_{h_1}^{h_2} y z^{1/2} dz.$$

Gdybyśmy znali zależność między y i z to jest gdyby był nam wiadomy kształt otworu, równanie to można by doprowadzić do końca.- Dajmy na to, że otwór w naczyniu ma kształt prostokąta o szerokości b i wysokości h; wtedy

$$Q=\frac{b\sqrt{2g}}{\sin\alpha}\int_{h_1}^{h_2} z^{1/2}dz = \frac{2}{3}\cdot\frac{b\sqrt{2g}}{\sin\alpha}\Big| z^{3/2}\Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{2}{3}\frac{b\sqrt{2g}}{\sin\alpha}\left(h_2^{3/2}-h_1^{3/2}\right).$$

Z rysunku widac, że $h_2 - h_1 = h.\sin\alpha$. Po podstawieniu w równanie ostatnie zamiast $\sin\alpha$ jego wartości $\sin\alpha=\frac{h_2-h_1}{h}$, otrzymamy

$$Q=\frac{2}{3}\frac{b\sqrt{2g}.h}{h_2-h_1}\left[h_2^{3/2}-h_1^{3/2}\right].$$



Rys. 38. Oznaczając jeszcze b.h, jako pole otworu, przez f, znajdziemy ostatecznie

$$Q = \frac{2}{3} f \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{h_2 - h_1}.$$

Gdy kąt $\alpha = 90^\circ$, wtedy $h_2 - h_1 = h$ i

$$Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g} \left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2} \right).$$

W podobny sposób znaleść możemy ilość cieczy wypływającej w ciągu jednej sekundy przez otwór okrągły, trapezowy i t.d. (patrz „Technik" str. 242).

Prędkość średnią wypływu v_0 wyznaczymy ze wzoru

$$v_0 = \frac{Q}{f}.$$

Rzeczywista ilość wypływu Q będzie mniejszą od teoretycznej, mianowicie $Q' = \mu Q$, gdzie μ jest spółczynnik wypływu, odpowiednio dobrany dla każdego rodzaju otworów. – Zamiast poprzedniego wzoru na ilość wypływu

$$Q' = \mu \frac{\sqrt{2g}}{\sin\alpha} \int_{h_1}^{h_2} y . z^{1/2} dz,$$

można przyjąć ze znaczną dokładnością wzór praktyczny

$$Q' = \mu f \sqrt{2 g h_s},$$

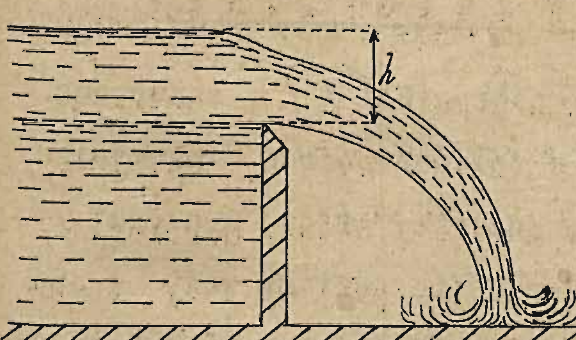
gdzie h_s jest głębokość zanurzenia środka ciężkości otworu pod powierzchnią cieczy. μ oznacza – jak poprzednio. – Wzór ten wypowiedzieć możemy w taki sposób: i l o ś ć c i e c z y, w y p ł y w a j ą c e j w c i ą g u j e d n o s t k i c z a s u z j a k i e g o k o l w i e k o t w o r u w p ł a s k i e j ś c i a n c e b o c z n e j n a c z y n i a, r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i z p o l a o t w o r u p r z e z p r ę d k o ś ć c z ą s t e c z k i, w y p ł y w a j ą c e j p r z e z ś r o d e k c i ę ż k o ś c i d a-n e g o o t w o r u . pomnożonego przez wsp. [illegible]

Niektórzy autorzy robią zastrzeżenie , by stosować ten wzór w przypadkach , kiedy $h_s \geq 2w$, gdzie w jest wysokość otworu . W każdym razie przy tym ostatnim zastrzeżeniu omyłka nie przewyższa 4 % .

Naprzykład niech będzie naczynie napełnione cieczą; w ściance tego naczynia zrobiony jest otwór okrągły o promieniu r ; wysokość , na jakiej znajduje się poziom wody w naczyniu nad środkiem otworu jest h_s. Ilość rzeczywistą cieczy wypływającej wciągu jednostki czasu otrzymać możemy , stosując wzór ostatnio podany, mianowicie

$$Q' = \mu \pi r^2 \sqrt{2gh_s}.$$

W szczególnym przypadku , gdy otwór jest w ściance tak wysoko , że górna krawędź jego sięga swobodnej powierzchni cieczy , a ciecz wypływa do przestrzeni wolnej, nosi otwór taki nazwę p r z e w a ł u d o s k o n a ł e g o.



Rys. 39.

Niech ściana , w której mamy taki otwór , jest piowa . Ilość rzeczywistą wypływu przez otwór prostokątny otrzymamy z wzoru teoretycznego $Q = \frac{2}{3} b \sqrt{2g}\left(h_2^{3/2} - h_1^{3/2}\right)$, zakładając $h_1 = 0$; wtedy $Q' = \frac{2}{3} \mu\, bh \sqrt{2gh}$.

We wzorze tym możemy średnio przyjąć spółczynnik $\frac{2}{3}\mu = 0{,}57$, jeśli dławienie strumienia jest zupełno i doskonałe . - Dławienie przy przewale będz..

zupełne wtedy , kiedy otwór w ścianie jest zrobiony z daleka od bocznych ścian i dna. Dławienie jest doskonałe , kiedy krawędzie otworu są ostre i ściana cienka.

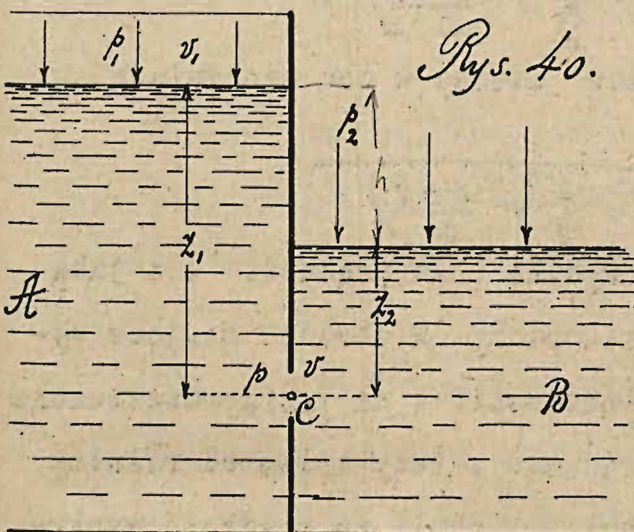
W ostatnim wzorze h jest to wysokość poziomu cieczy w naczyniu ponad krawędzią przewału ; wysokość tę trzeba mierzyć w tym miejscu , gdzie poziom cieczy w zbiorniku pozostaje bez zmiany. - Doświadczenie nam wskazuje, że miejsce to jest o trzy metry powyżej otworu.

Gdybyśmy mieli otwór przewałowy urządzony w ścianie pochyłej , moglibyśmy stosować ten sam co poprzednio, wzór , dobierając odpowiedni spółczynnik μ. (Wartości na μ można znaleść w „Techniku" str. 244 i 264).

Wypływ cieczy z naczynia przez otwór zatopiony.

Dajmy na to, że mamy naczynie (A) , zanurzone w cieczy naczynia (B) ; w ściance bocznej naczynia (A) zrobiony jest otwór . Znajdźmy ilość wypływu przez ten otwór w tym założeniu, że poziomy wody w obu naczyniach (A) i (B) są stałe. Oznaczmy przez p_1 ciśnienie na swobodną powierzchnię wody w naczyniu (A) i przez p_2 ciśnienie na powierzchnię wody w naczyniu (B) ; oznaczmy , dalej , przez v_1 prędkość , z jaką ciecz płynie na swobodnej powierzchni naczynia (A). Prędkość cieczy na powierzchni w (B) niech się równa zeru .

Rozpatrzmy jakąkolwiek cząsteczkę cieczy , wypływającą przez otwór i wziętą na dowolnej głębokości z_1



Rys. 40.

pod poziomem górnym a z_2 pod poziomem dolnym cieczy , naprzykład w punkcie C . Prędkość v , jaką cząsteczka posiada w obranym miejscu w otworze, określimy na zasadzie twierdzenia D.Bernoulli'ego , stosując je do cząsteczki, kiedy ta znajduje się na swobodnej powierzchni naczynia (A) i kiedy następnie ta sama cząsteczka znajdzie się w otworze na obranej głębokości w miejscu C . Poziom zasadniczy przesuńmy przez punkt C ; wtedy

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} = 0 + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta}$$

gdzie p jest ciśnienie w punkcie C . - Cząsteczka badana , posiadając prędkość v , wpada z punktu C do cieczy , która ruchu prawie nie posiada : cząsteczka traci prędkość v z powodu uderzenia o cząsteczki stojącej cieczy, wywołując wiry i ruchy nieregularne , które wzajemnie się znoszą . - Z pewnym przybliżeniem przyjmujemy, że ciśnienia w naczyniu B układają się według zasad hydrostatyki i dla tego możemy napisać , że

$$p = p_2 + \Delta z_2 .$$

Podstawiając tę wartość na p w równanie powyższe i rozwiązując je względem v , otrzymamy

$$v=\sqrt{2g\left[z_1-z_2+\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1-p_2}{\Delta}\right]}\,.$$

Oznaczmy różnicę poziomów cieczy w obu naczyniach $z_1 - z_2$ przez h , wtedy

$$v=\sqrt{2g\left(h+\frac{v_1^2}{2g}+\frac{p_1-p_2}{\Delta}\right)}\,.$$

Z powyższego wzoru wynika , że prędkość , z jaką cząsteczka przez otwór zatopiony w obranym miejscu wypływa , nie zależy od głębokości , na jakiej cząsteczka przez otwór wypływa; prędkość zależy tylko od różnicy poziomów górnego i dolnego , czyli że prędkość wypływu wszystkich cząsteczek cieczy przez otwór zatopiony jest jednakowa .

W szczególnym przypadku , kiedy v_1 będzie bardzo małe , tak że wyraz $\left(\frac{v_1^2}{2g}\right)$ wobec pozostałych można odrzucić i kiedy następnie $p_1 = p_2$, wtedy otrzymamy wzór prostszy

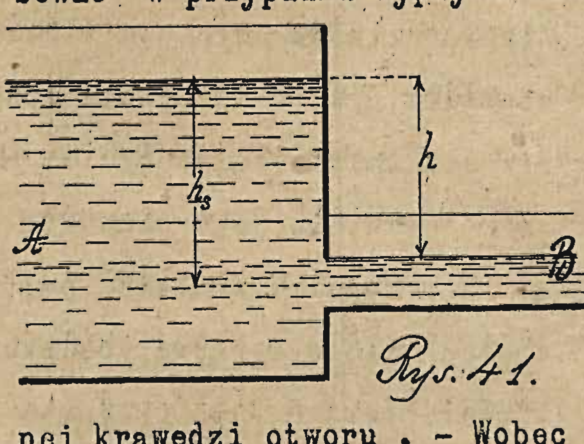
$$v=\sqrt{2gh}\,. -$$

Prędkość więc wypływu przez otwór zatopiony jest taka , z jaką swobodna cząsteczka upadłaby z poziomu górnego na dolny. - Teoretyczna ilość wypływu w tym ostatnim przypadku znajdzie się z wzoru $Q=f.\sqrt{2gh}$; zaś rzeczywista $Q'=\mu f\sqrt{2gh}$, gdzie f jest pole otworu. Słowami można wyrazić to tak: r z e c z y w i s t a i l o ś ś c i e c z y , w y p ł y w a j ą c e j p r z e z o t w ó r z a t o p i o n y , r ó w n a s i ę i l o c z y n o w i z p o l a o t w o r u p r z e z p r ę d k o ś ć , j a k ą p o s i ą d z i e c z ą s t e c z k a, s p ą d a j ą c a z g ó r n e g o d o d o l n e g o p o z i o m u c i e c z y , p o - m n o ż o n e m u p r z e z s p ó ł c z y n n i k w y - p ł y w u .

Wartość μ zależna jest od odległości otworu od dna: jeśli dolna krawędź otworu leży wysoko ponad dnem strumienia, wtedy można przyjąć $\mu = 0,6$; w miarę jak krawędź otworu jest do dna bliższa, μ - wzrasta, aż do 0,65 ÷ 0,7 , gdy spód otworu leży na dnie .

Wystawmy sobie w poprzednim przypadku , że poziom cieczy w dolnym naczyniu sięga górnej krawędzi otworu; wtedy teoretyczna ilość wypływu $Q = f \cdot \sqrt{2gh}$, rzeczywista zaś $Q' = \mu Q = \mu f \cdot \sqrt{2gh}$, gdzie μ w tym razie przybiera wartość 0,6 ÷ 0,65 do 0,70, zależnie od wysokości , na jakiej znajduje się dolna krawędź otworu ponad dnem.

Powyższy wzór można z pewnym zastrzeżeniem stosować w przypadku wypływu cieczy przez otwór , do którego jest przystawiony żłób, gdyż w tym razie możemy poniekąd uważać , że wypływ z (A) zachodzi do naczynia (B) , w którym poziom sięga górnej krawędzi otworu . - Wobec jednak tego , że ciecz w naczyniu (żłobie) (B) zachowuje się inaczej , niż to przyjmowaliśmy w zadaniu typowym , możemy z otrzy-



Rys. 41.

manych wzorów korzystać, wprowadzając do nich odpowiednie, z doświadczeń otrzymane, spółczynniki. Możemy zatym przyjąć, że rzeczywista ilość wypływu przez przystawiony żłób

$$Q' = \mu f \cdot \sqrt{2gh},$$

a spółczynnikowi μ nadać, zgodnie z doświadcezniem, wartość 0,80÷0,85÷0,90, zależnie od odległości dolnej krawędzi otworu od dna.

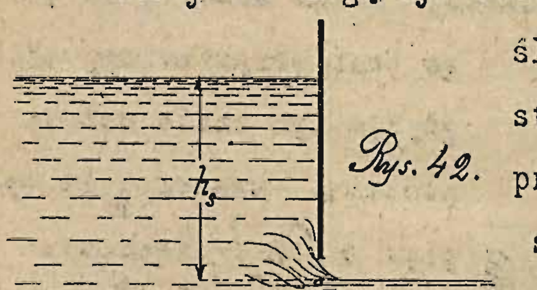
Można w tym samym przypadku używać wzoru następującego, mianowicie

$$Q' = \mu' f \cdot \sqrt{2g \cdot h_s},$$

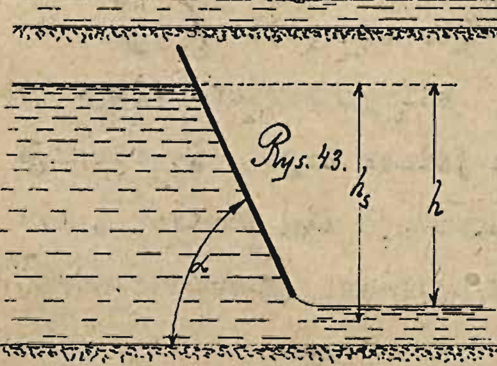
gdzie h_s jest zagłębieniem ś r o d k a c i ę ż k o ś c i o t w o r u pod górnym poziomem; przy stosowaniu tego wzoru na μ' przyjąć należy wartości od 0,50 do 0,55, a nawet 0,65, zależnie od wartości h_s i wymiarów otworu (patrz „Technik" str. 246).

Wzory te mogą być stosowane z pożytkiem przy określaniu ilości wypływu z pod stawidła, gdzie dno żłobu jest przedłużeniem dna naczynia, a samo stawidło jest pionowe.

W przypadku stawideł pochyłych ilość wypływu będzie wogóle większa, niż przy stawidłach pionowych, wskutek mniejszego dławienia.



Rys. 42.



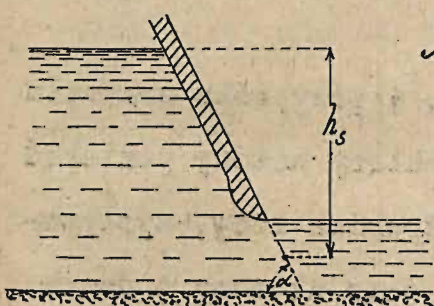
Rys. 43.

Rzeczywista ilość wypływającej cieczy da się zatym określić ze wzoru

$$Q' = \mu f \sqrt{2gh} \, ,$$

albo też ze wzoru $Q' = \mu' f \sqrt{2gh_s}$

Spółczynniki μ, μ' zależą od kąta pochylenia ścianki: im kąt α jest mniejszy, tym mniejsze będzie dławienie i tym większe wartości przybiera μ lub μ'. – W przypadku kąta $\alpha = 60^\circ$ można przyjąć we wzorze drugim $\mu' = 0{,}75$. Wartości na μ' dla innych kątów można obrać zgodnie z danymi w „Techniku" na str. 246 , – Górną krawędź otworu należy zaokrąglić w celu zmniejszenia dławienia.

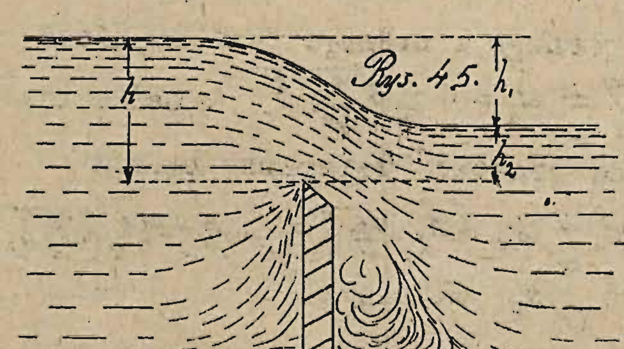


Rys. 44.

P r z e w a ł   z a t o p i o n y.

Od przewału doskonałego należy odróżnić przewał zatopiony; woda , wypływająca przez taki przewał , wpada do przestrzeni zatopionej, czyli inaczej mówiąc, poziom wody poza otworem jest wyżej niż grzbiet przewału.

Określenie teoretyczne ilości cieczy, wypływającej przez przewał zatopiony, jest bardzo złożone i do rezultatów praktycznych nie doprowadza. Wobec tego korzystamy z praktycznych wzorów.



Rys. 45.

Jeśli oznaczymy przez h_1 różnicę poziomów przed i za przewałem, zaś przez h głębokość, na jakiej znajduje się grzbiet przewału pod górnym poziomem cieczy, a przez b szerokość przewału, znajdziemy, że pole przekroju $=b.h$; prędkość wypływu zależy od h_1, więc możemy przyjąć, że rzeczywista ilość wypływu

$$Q' = \mu b h \sqrt{2gh_1},$$

gdzie dla μ odnajdujemy z doświadczeń wartości $= 0{,}43 \div 0{,}50 \div 0{,}55$; obranie tej czy innej wartości zależy od h i h_1; im większe h_1 w porównaniu z h, tym mniejszą wartość przybiera μ.

Częściej niż poprzedni wzór, w przypadku przewału zatopionego, stosujemy inny wzór, który możemy poniekąd uzasadnić w następujący sposób.—Strumień wody, wypływający przez przewał, możemy uważać, jako złożony z dwóch części: górna część strumienia o wysokości h_1 wypływa jakby przez przewał doskonały, którego grzbiet jest o h_1 niżej od górnego poziomu; ilość wypływu tej części możemy określić zgodnie z tym, co mówiliśmy o przewale doskonałym $Q_1 = \frac{2}{3}\mu b h_1 \sqrt{2gh_1}$, — lub oznaczając $\frac{2}{3}\mu'$ przez μ_1, otrzymamy

$$Q_1 = \mu_1 b h_1 \sqrt{2gh_1}.$$

Drugą dolną część strumienia możemy rozpatrywać, jako wypływającą przez otwór zatopiony o wysokości h_2, przyczym różnica poziomów górnego i dolnego jest h_1; ilość wypływu tej części $= Q_2 = \mu_2 b h_2 \sqrt{2gh_1}$. Całkowita więc ilość wypływu przez przewał zatopiony będzie

$$Q = Q_1 + Q_2 = (\mu_1 b h_1 + \mu_2 b h_2)\sqrt{2gh_1} = (\mu_1 h_1 + \mu_2 h_2) b\sqrt{2gh_1}.$$

Spółczynniki μ_1 i μ_2 zależą od tego, jakie wymiary ma przewał ; według Redtenbachera $\mu_1=0,57$, a $\mu_2=0,62$ do 0,83 (patrz „Technik" str. 264 i 265) .

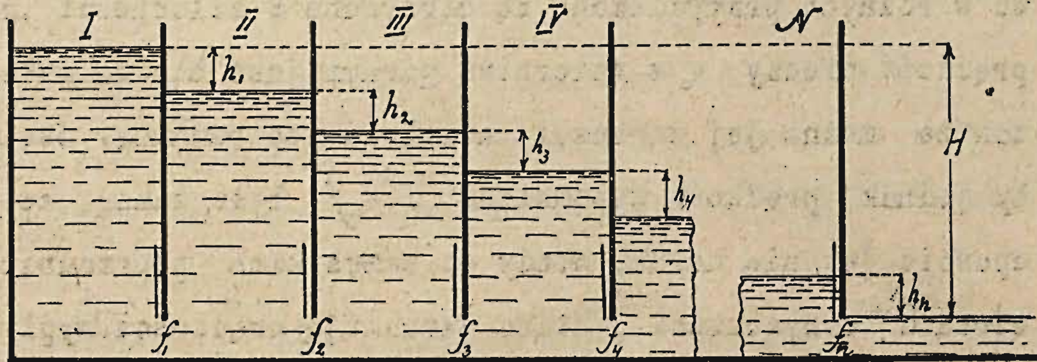
Wszystkie wzory poprzednie , dotyczące ilości wypływu w różnych przypadkach są otrzymane w zależności ,że prędkość cieczy v_0 w zbiorniku górnym jest bardzo mała, tak że można jej wartości nie brać pod rachubę. Jeśli by jednak prędkość wspomniana (v_0) była taką , że opuścić jej nie można, wtedy we wszystkich poprzednich wzorach te wysokości , które warunkują prędkości wypływu, należy powiększyć o wysokość k odpowiednią prędkości v_0 ; a więc naprzykład w przypadku przewału zatopionego w ostatnim wzorze zamiast h_1 należy wstawić $h_1+k=h_1+\frac{v_0^2}{2g}$, co jest prostym wnioskiem z twierdzenia D.Bernoulli'ego.

Przykład:

Mamy naczynie podzielone przegrodami w taki sposób, że otrzymujemy <u>n</u> naczyń połączonych z sobą otworami; otwory zaopatrzone są w stawidła , przy pomocy których można zmniejszać lub zwiększać pola poszczególnych otworów; niech pola te będą odpowiednio $f_1, f_2, f_3 \ldots f_n$.

Niech przez te naczynia przepływa ciecz, dążąc do ostatniego otworu , a stąd przez przystawiony żłobek niech wylewa się nazewnątrz . - Całkowita różnica poziomów cieczy w pierwszym naczyniu i na wypływie niech będzie H ; różnice poziomów w dwóch sąsiednich naczyniach niech będą odpowiednio równe $h_1, h_2, h_3, \ldots h_n$.

Jeśli przypuśćmy, że ruch jest trwały, kiedy więc poziom w każdym naczyniu pozostaje bez zmiany, wtedy ilości wypływu z któregokolwiek naczynia do sąsiedniego są jednakowe $= Q$. Ilość wypływającej cieczy z naczynia



Rys. 46.

pierwszego do drugiego $Q = \mu_1 f_1 v_1 = \mu_1 f_1 \sqrt{2gh_1}$;
z drugiego do trzeciego — $Q = \mu_2 f_2 \sqrt{2gh_2}$ i t.d.
wreszcie ilość wypływu z ostatniego naczynia N do przystawionego żłobka $Q = \mu_n f_n \sqrt{2gh_n}$.

Z tych równań otrzymamy

$$h_1 = \frac{Q^2}{2gf_1^2\mu_1^2}\ ;\quad h_2 = \frac{Q^2}{2gf_2^2\mu_2^2}$$ i t.d., wreszcie

$$h_n = \frac{Q^2}{2g\mu_n f_n^2}.$$

Sumując te wysokości, otrzymamy całkowitą różnicę poziomów cieczy w krańcowych naczyniach, przyczym dla ułatwienia zadania, przyjmujemy, że $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n$, wtedy

$$H = h_1 + h_2 + \dots + h_n = \frac{Q^2}{2g.\mu^2}\left(\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} + \dots + \frac{1}{f_n^2}\right).$$

Stąd rzeczywista ilość wypływu do żłobka

$$Q = \mu\sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} + \dots + \frac{1}{f_n^2}}} \dots\dots (1).$$

Zatym gdy dane są pola otworów f_1, f_2 i t.d., gdy wiadoma jest całkowita różnica poziomów H i znana jest wartość spółczynnika μ, wtedy ilość rzeczywistą cieczy wypływającej przez żłobek można wyznaczyć z powyższego wzoru (1).

Z drugiej strony wiemy, że rzeczywista ilość wypływu do żłobka $Q = \alpha f_n \cdot \varphi v_0$, gdzie α jest to spółczynnik dławienia, v_0 – teoretyczna prędkość wypływu, φ spółczynnik prędkości. – Stąd rzeczywista prędkość wypływu do żłobka $v = \varphi v_0 = \frac{Q}{\alpha f_n}$.

Podstawiając zamiast Q otrzymaną poprzednio wartość i biorąc na uwagę, że $\mu = \alpha\varphi$, znajdziemy

$$v = \frac{\mu}{\alpha f_n}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}+\dots+\frac{1}{f_n^2}}} = \frac{\alpha\varphi}{\alpha f_n}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2}+\dots+\frac{1}{f_n^2}}} \quad (2).$$

W poszczególnym przypadku, kiedy $f_1 = f_2 = \dots = f_n$ ilość rzeczywista wypływu, określona z (1)

$$Q = \mu\sqrt{\frac{2gH}{\frac{n}{f_n^2}}} = \mu f_n\sqrt{\frac{2gH}{n}} = \mu f_n\sqrt{2gH}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} \cdots (3).$$

Taką jest rzeczywista ilość wypływu z ostatniego naczynia, gdy mamy kilka naczyń połączonych ze sobą jednakowymi otworami i gdy całkowita różnica poziomów cieczy w krańcowych naczyniach wynosi H. – Zakładając n=1, otrzymamy znany nam wzór

$$Q = \mu f\sqrt{2gH}.$$

Ze wzoru (3) widzimy, że i l o ś ć w y p ł y w u j e s t o d w r o t n i e p r o p o r c j o –

nalną względem pierwiastku kwadratowego z ilości otworów; naprzykład gdyby otworów było dziewięć, ilość wypływu byłaby trzy razy mniejszą, niż ilość wypływu przez jeden tylko otwór przy tej samej oczywiście różnicy poziomów H .

Gdy $f_1 = f_2 = \ldots\ldots = f_n$, wtedy we wzorze (2) otrzymamy , że prędkość rzeczywista wypływu do żłobka

$$v = \frac{\varphi}{f_n}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{n}{f_n^2}}} = \varphi\sqrt{2gH}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}} \quad \ldots (4).$$

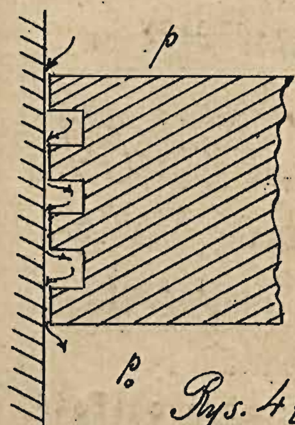
Ze wzorów (3) i (4) widzimy, iż zarówno ilość wypływu , jak i prędkość wypływu w przypadku n otworów otrzymują wartości , nie odpowiadające całej różnicy poziomów H , lecz tej różnicy poziomów n razy zmniejszonej, mianowicie $\frac{H}{n}$.- Łatwo też jest oznaczyć prędkość i ilość wypływu cieczy z któregokolwiek naczynia do sąsiedniego przy założeniach poprzednich, kiedy $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots\ldots = f_n$.

Zastosowanie tego , cośmy powyżej powiedzieli , widzimy w jednym ze sposobów uszczelniania tłoku w cylindrze. Gdyby tłok nie był odpowiednio uszczelniony, wtedy ciecz (albo gaz) przepływałaby przez szczelinę między tłokiem a ściankami cylindra z przestrzeni o wyższej prężności (p) do przestrzeni , gdzie prężność jest niższą (p_o) . - Ilość przepływu cieczy w tym przypadku mogłaby być określona z wzoru

$$Q = \mu f\sqrt{2g\,\frac{p - p_o}{\Delta}} \,,$$

gdzie f jest przekrój szczeliny między tłokiem a cylindrem .

W celu uszczelnienia tłoku wytaczamy na nim szereg rowków, które wspólnie ze szczelinami odgrywają tu rolę naczyń połączonych otworami . - Przepływ cieczy z jednej strony tłoku na drugą będzie tu znacznie mniejszy ; mianowicie taki , jaki odpowiada wysokości $\frac{p-p_0}{\Delta . n}$, jeśli n jest liczba wyciętych rowków . A więc w tym przypadku

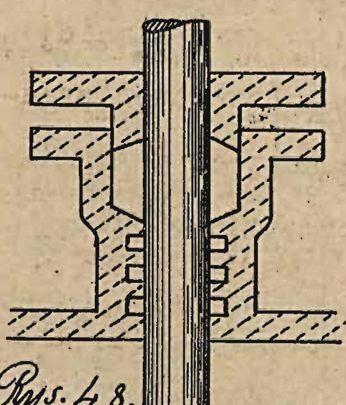


Rys. 47.

$$Q = \mu f\sqrt{2g\,\frac{p-p_0}{\Delta n}} .$$

Porównywując wartości wypływu cieczy przed i po uszczelnieniu przy pomocy rpwków , znajdziemy , że będą się one względem siebie miały jak $1 : \sqrt{\frac{1}{n}}$.

Tego rodzaju uszczelnienie można zastosować do dławic , jak to przedstawia rysunek 48 . —


Rys. 48.

Powróćmy teraz do dalszego rozpatrzenia otrzymanych wzorów (1) i (2) . - Przypuśćmy teraz , że f_n jest bardzo małe w porownaniu z f_1 , f_2, i t.d. , wtedy ułamki $\frac{1}{f_1}$, $\frac{1}{f_2}$, $\frac{1}{f_3}$,... i t.d. będą bardzo małe w porównaniu z ułamkiem $\frac{1}{f_n}$, wobec czego można je odrzucić . W takim razie z wzoru (1) znajdziemy

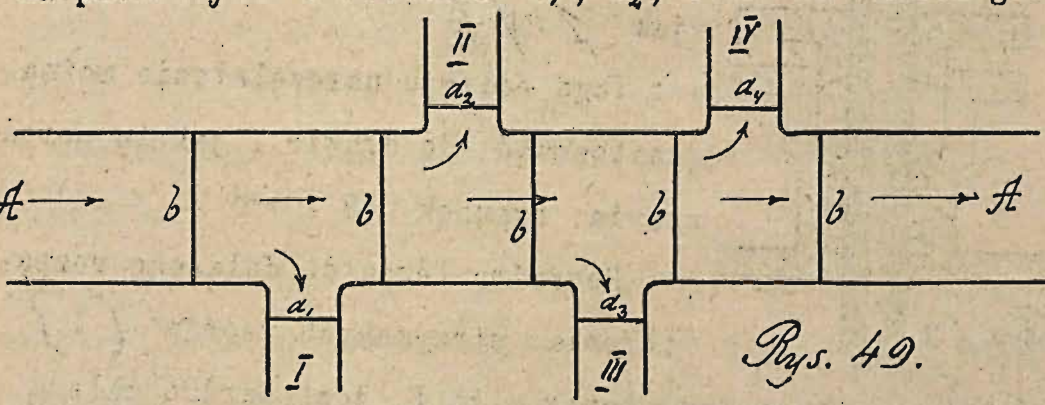
$$Q = \mu\sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{f_n^2}}} = \mu f_n\sqrt{2gH} ;$$

prędkość wypływu - z wzoru (2)

$$v = \frac{\varphi}{f_n}\sqrt{\frac{2gH}{\frac{1}{f_n^2}}} = \varphi\sqrt{2gH}$$

Stąd wniosek , że , jeśli mamy szereg naczyń połączonych, przez które przepływa ciecz w ruchu trwałym, a otwory między naczyniami wszystkie za wyjątkiem ostatniego są bardzo duże, wtedy ilość i prędkość wypływu otrzymują wartości prawie takie same, jak wtedy, gdyby ścianek i przeszkód nie było wcale , a ciecz wypływałaby tylko przez ostatni otwór przy całej różnicy poziomów H

Rezultat ten ma zastosowania praktyczne . - Przypuśćmy , że mamy kanał , doprowadzający wodę do kilku silników , naprzykład turbin lub kół wodnych ; wtedy od głównego kanału odchodzi kilka przykanalików , zaopatrzonych w stawidła a_1, a_2, ... Na kanale głów-



Rys. 49.

nym też mogą być ustawione stawidła b , b , b ..... potrzebne ze względu na reparację kanału.

Przypuśćmy , że chcemy zmniejszyć dopływ wody do kanału III . Gdyby w tym celu przymknąć stawidła b,b,b,, przez które idzie woda do kanału III , oraz stawidło a_3, - byłoby to niepraktyczne , gdyż woda

Jan Łozałolki

mogłaby stracić znaczną ilość energji , która dla silników jest potrzebną. - Należałoby w podobnym przypadku przymknąć tylko stawidło a_3, pozostawiając stawidła b otwartymi .

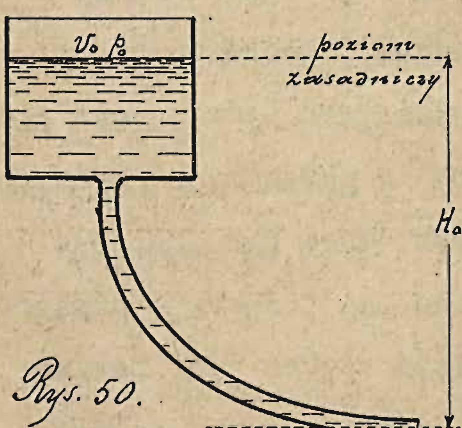
Ruch cieczy w przewodach rurowych.

Gdy zachodzi potrzeba dostarczenia wody z jednego miejsca do drugiego , używają do tego celu albo kanałów, przez które płynie woda , częściowo je zapełniając, lub toż—tak zwanych przewodów rurowych , które woda , płynąc , całkowicie zapełnia. - O kanałach będzie mowa później . - Obecnie mówić będziemy o przewodach rurowych.

Przekroje przewodów rurowych mogą być różnego kształtu; najchętniej stosowane są przekroje okrągłe. Materyał stosowany do przewodów rurowych jest bardzo rozmaity ; najczęściej używane jest na rury żeliwo, żelazo walcowane lub kute . Pozatym używane są rury miedziane, ołowiane , gliniane wypalane z polewą wewnętrzną i zewnętrzną lub bez niej , a nawet drewniane , które dawniej były częściej stosowane niż obecnie.- Każdy z tych rodzajów rur jest właściwy w odpowiednich przypadkach, zależnie od ciśnienia wewnętrznego , rodzaju cieczy , która ma być rurami dostarczana, oraz warunków , w jakich znajdować się będzie przewód .

Z cieczy najczęściej spotykana jest woda, w rzadszych wypadkach inna ciecz, naprzykład nafta, spirytus, i t.d.– Zadaniem niniejszego rozdziału jest rozpatrzyć zastosowanie przewodów rurowych dla wody. Otrzymane tutaj wyniki dadzą się zastosować do każdego rodzaju cieczy ze zmianą tylko spółczynników, których dostarczy nam doświadczenie.

Przypuśćmy, że mamy zbiornik, napełniony do pewnego poziomu wodą. Z dna tego zbiornika niech wychodzi rura, przez którą woda ze zbiornika może wypływać. Przypuśćmy dalej, że ruch wody w przewodzie jest trwały i że poziom w zbiorniku pozostaje bez zmiany. Zastosujmy twierdzenie D.Bernoulli'ego dla cząsteczki, która z początku znajduje się w zbiorniku na powierzchni swobodnej, a następnie u wylotu na końcu rury. Płaszczyznę poziomą, w której znajduje się swobodna powierzchnia zbiornika przyjmiemy za poziom zasadniczy. Oznaczmy prędkość na powierzchni w zbiorniku przez v_0;– ciśnienie w tym miejscu przez p_0, średnią prędkość wypływu wody z końca rury przez v, ciśnienie u wylotu przez p; oś odworu, którym wypływa woda, niech znajduje się pod poziomem zasadniczym na wysokości H_0. Twierdzenie D.Bernoulli'ego zastosowane do wspomnianej cząsteczki, należącej do cieczy rzeczywistej, – wody –, da nam równanie następujące:



Rys. 50.

$$0+\frac{V_0^2}{2g}+\frac{p_0}{\Delta}=-H_0+\frac{v^2}{2g}+\frac{p}{\Delta}+\Sigma W.$$

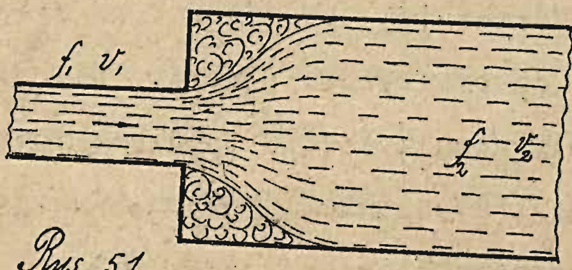
W równaniu tym ΣW oznacza nam sumę wysokości, straconych przez cząsteczkę podczas jej przejścia ze swobodnego poziomu zbiornika do osi wylotu. Straty te, jak wiemy, powstają z powodu istnienia tarcia pomiędzy poruszającymi się cząsteczkami, a ściankami przewodu, a następnie z powodu tarcia się cząsteczek między sobą. Dalej, strata wysokości zachodzić może wskutek nagłej zmiany przekroju, lub też wskutek prędkiej zmiany kierunku. Straty wysokości, które powstać mogą wskutek każdej z wymienionych przyczyn, rozpatrzymy i określimy oddzielnie.

Wysokość stracona z powodu nagłej zmiany przzkroju przewodu.

Dajmy na to, mamy pewien przewód rurowy, przez który płynie woda; niech przekrój f_1 tego przewodu w pewnym miejscu raptownie się powiększa, a pole rozszerzonego przekroju niech będzie f_2; v_1 i v_2 niech to będą odpowiednie średnie prędkości cząsteczek cieczy w obu przekrojach, przyczym przyjmujemy, że przekrój f_2 jest cieczą wypełniony. - Wobec tego, iż woda jest nieściśliwa, a ruch jej przyjmujemy jako trwały, więc

$$f_1 v_1 = f_2 v_2 .$$

Ponieważ $f_1 < f_2$, zatym $v_1 > v_2$, to jest cząsteczki w wązkim przewodzie płyną z prędkością większą, niż w szerokim. Tam więc, gdzie cząsteczki cieczy z wąskiego przekroju wpadają do szerokiego, następują zderzenia się, skutkiem których cząsteczka traci część swej prędkości v_1 przybierając prędkość v_2.



Rys. 51.

Strata prędkości wynosi $v_1 - v_2$, a wysokość odpowiednia tej stracie $= \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$. Oznaczmy tę straconą wysokość przez W_p, wtedy $W_p = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}$; biorąc v_2 przed nawias, otrzymamy $W_p = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2$; ponieważ zaś ilość przepływu jest stałą to jest $v_1 f_1 = v_2 f_2$, więc $\frac{v_1}{v_2} = \frac{f_2}{f_1}$, zatym otrzymamy

$$W_p = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{f_2}{f_1} - 1\right)^2 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Umówiliśmy się poprzednio wszystkie straty wysokości, jakie zachodzą przy ruchu cieczy rzeczywistej, wyrażać w częściach energji kinetycznej, a więc możemy przyjąć, że

$$W_p = \zeta_1 \frac{v_2^2}{2g} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Porównajmy wzór (2) z (I), zobaczymy, że

$$\zeta_1 = \left(\frac{f_2}{f_1} - 1\right)^2.$$

Im większe jest f_2 w porównaniu z f_1, tym większe jest ζ_1 i tym większa stracona wysokość W_p; gdy stosunek $\frac{f_2}{f_1}$ jest liczbą bardzo dużą, wtedy wysokość stracona W_p może wynosić całą wysokość odpowiednią prędkości v_1. Dostrzeżemy to prędzej, jeśli przedstawimy wzór na W_p cokolwiek odmiennie. Mianowicie

$$W_p = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{f_1}{f_2}\right)^2.$$

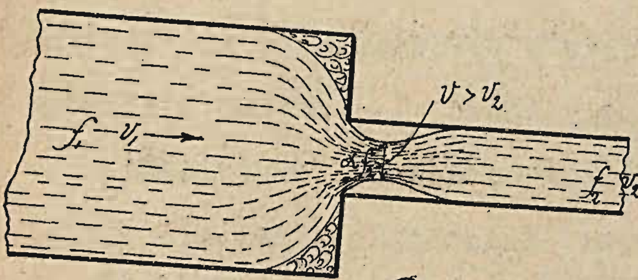
Jeśli f_2 jest bardzo duże w porównaniu z f_1, wtedy ułamek $\frac{f_1}{f_2}$, jako bardzo mały wobec 1, możemy opuścić, a wtedy $W_p = \frac{v_1^2}{2g}$, to jest cała wysokość odpowiednia prędkości v_1, posiadanej przez cząsteczkę, została stracona.

Taki przypadek zachodzi, kiedy cienką rurką wprowadzamy ciecz do pełnej beczki; wtedy cała prędkość, jaką ciecz w rurce posiada, przy wejściu do beczki zostaje stracona.

Rozpatrzmy teraz, j a k i e s t r a t y z a c h o d z ą, g d y c i e c z z p r z e k r o j u s z e r o k i e g o p r z e p ł y w a d o w ą z k i e g o.

Niech ciecz płynie rurą o przekroju f_1 z prędkością v_1 i w pewnym miejscu spotyka rurę o przekroju f_2, mniejszym niż f_1. Wkrótce po wejściu strumienia do węższej rury wskutek dławienia następuje zwężenie strumienia, którego przekrój wyniesie w tym miejscu już nie f_2, lecz αf_2, przyczym, oczywiście, $\alpha f_2 < f_2$; z tego powodu prędkość cieczy v w zdławionym przekroju będzie większą niż prędkość v_2, którą posiada ciecz po za zwężeniem, wypełniając cały przekrój f_2.

Przejście cząsteczki cieczy z przekroju f_2 z prędkością v_2 do przekroju αf_2, gdzie prędkość cząsteczki powiększy się do v, odbędzie się stopniowo bez przeszkody, kosztem zmniejszenia się ciśnienia hydrodynamicznego w przekroju αf_2, w porównaniu z tym ciśnieniem, jakiemu ciecz podlega w miejscu o przekroju f_2. Dopiero, kiedy cząsteczka, opuściwszy przekrój αf_2 z prędkością v, przejdzie do



Rys. 52.

przekroju f_2, gdzie poprzednie cząsteczki płyną z prędkością $v_2 < v$, nastąpi uderzenie, skutkiem którego prędkość v cząsteczki zmniejszy się do v_2. Straciе prędkości $(v - v_2)$ odpowiada strata wysokości, którą oznaczymy przez W_p, przyczym

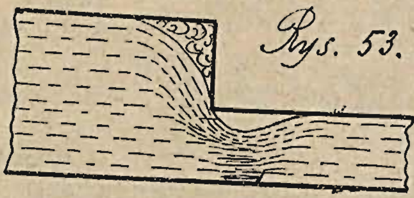
$$W_p = \frac{(v-v_2)^2}{2g} = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{v}{v_2}-1\right)^2.$$

Ponieważ ilość przepływu jest stała, więc $\alpha f_2 v = f_2 \cdot v_2$, stąd $\frac{v}{v_2} = \frac{1}{\alpha}$; wstawiając tę wartość na $\frac{v}{v_2}$ do otrzymanego wzoru, znajdziemy ostatecznie

$$W_p = \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g}$$

Spółczynnik $\frac{1}{\alpha}$ zależy od stosunku $\frac{f_2}{f_1}$; wartości jego podane są w „Techniku" str. 252.

Rzecz prosta, że spółczynniki ζ_1 i ζ_2 określone w części drogą teoretyczną należy uzgodnić z wynikami otrzymanymi z doświadczeń, uwzględniających własności zarówno cieczy jak i kształtu otworów. Wartości tych spółczynników zależyć powinny naprzykład od tego, czy oś szerokiego przekroju jest przedłużoną osią wązkiego, czy też równoległą; naprzykład w przypadku



Rys. 53.

pokazanym na rysunku 53 społczynnik dławienia α jest większy, niż kiedy oś przekrojów jest wspólna, gdyż dławienie w pokazanym przykładzie nie zachodzi ze wszystkich stron,- jest niedoskonałe.

Jeśli przejście z jednego przekroju rury do innego dokonamy przy pomocy przewodu z lekka zwężającego się lub rozszerzającego się, wtedy otrzymać możemy tak małe straty wysokości na opory, że niekiedy niema potrzeby strat tych brać pod rachubę.

Strata wysokości spowodowana przez przepływ wody przez otwór w błonie, wewnątrz rury umieszczonej.

Niech przekrój przewodu jest f, otwór w przegrodzie niech ma pole f_o. Strumień cieczy, przepływając przez f_o, zostaje poza nim zdławiony do przekroju αf_o. Oznaczmy prędkość w rurze przez v_1, w przekroju zdławionym przez v; ponieważ $v > v_1$, znajdziemy, że kiedy cząstki przepływają z przekroju αf_o do f_1, ponoszą stratę energji z powodu uderzenia.

Rys. 54.

Wysokość stracona z tego powodu $h_p = \frac{(v-v_1)^2}{2g}$, albo $W_p = \frac{v_1^2}{2g}\left[\frac{v}{v_1} - 1\right]^2$; a że $\alpha f_0 \cdot v = f_1 \cdot v_1$, więc $\frac{v}{v_1} = \frac{f_1}{\alpha f_0}$, zatym $W_p = \frac{v_1^2}{2g}\left[\frac{f_1}{\alpha f_0} - 1\right]^2 = \zeta_3 \frac{v_1^2}{2g}$.

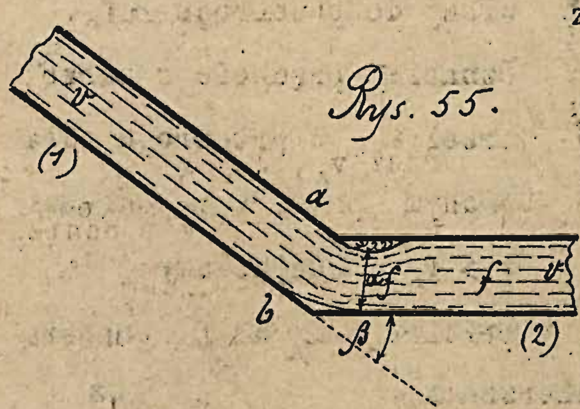
Podany wzór może być użyteczny przy określaniu straconych wysokości przy szluzach , zasuwach, wentylach lub błonach z otworami , umieszczanych w przewodach dla regulowania przepływu .

We wzorze podanym α zależy od stosunku $\frac{f_1}{f_0}$. Wartości społczynników α , a następnie ζ_3 są podane dla niektórych przypadków w „Techniku" str. 253 .

Straty wysokości wskutek zmiany kierunku przewodu.

Wytłomaczmy sobie przedewszystkiem przyczynę straty wysokości , jaką zachodzi przy zmianie kierunku przewodu rurowego.

Niech ciecz płynie przewodem , który w pewnym miejscu jest załamany tak, że pierwotny jego kierunek tworzy kąt β z następnym. Przekrój przewodu niech pozostanie na całej jej długości bez zmiany; prędkość przepływu niech będzie v . Cząsteczki cieczy płyną przez część (I) przewodu z prędkością v równoległą do osi : W miejscu zagięcia przewodu cząsteczki płynące



Rys. 55.

bliżej b, zmuszone są zmienić kierunek pod naciskiem sąsiedniej ścianki, zaś cząsteczki , przy ściance a będące , nie mogąc wobec swej bezwładności zmienić raptem kierunku prędkości, wywierają nacisk na cząsteczki , płynące bliżej osi rury, odsuwając je ku osi. Stąd w miejscu załamania rury znajdujemy pewne zwężenie przekroju strumienia cieczy; wynikiem tego będzie, że prędkość v' cieczy w tym miejscu będzie większa, niż prędkość cząsteczek płynących wzdłuż (2) części przewodu ; zatym powinno tu zajść zderzenie się cząsteczek, wskutek czego cząsteczki tracą część swej energji. - Prędkość stracona przy przejściu ze zwężonego przekroju do normalnego jest $v' - v$. Oznaczmy przez W_k stratę wysokości , spowodowaną przez zmianę kierunku, wtedy możemy napisać , że

$$W_k = \frac{(v'-v)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{v'}{v}-1\right)^2.$$

Jeśli przekrój rury oznaczymy przez f , przekrój zwężony wskutek dławienia będzie αf ; wobec stałej ilości przepływu $f.v = \alpha f.v'$, skąd $\frac{v'}{v} = \frac{1}{\alpha}$; otrzymamy zatym , że

$$W_k = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2 \ldots\ldots (1).$$

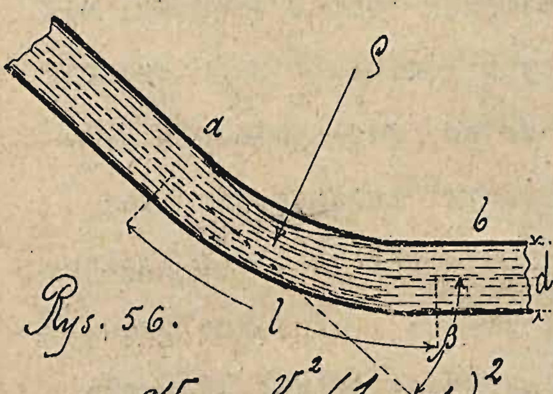
Oznaczając stratę wysokości, spowodowaną zmianą kierunku, w częściach energji kinetycznej , mielibyśmy

$$W_k = \zeta_4 \cdot \frac{v^2}{2g} \ldots\ldots\ldots (2).$$

Z równań /1/i/2/ otrzymamy , że $\zeta_4 = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2$

Wartość spółczynnika α zależna jest od kąta β i odnajduje się drogą doświadczalną [patrz „Technik" str. 257].

Zmiana kierunku może być dokonana nie tylko raptownym załamaniem osi rury przy pomocy tak zwanego kolana, lecz stopniowo, przy pomocy łuku. – I w tym przypadku, ogólnie mówiąc, zachodzi to samo, co poprzednio, lecz w znacznie słabszym stopniu; mianowicie, cząsteczki bliższe do ścianki ab odchylają się od niej, zwężając przekrój strumienia cieczy. Tu również, w ten sam sposób rozumując, otrzymamy



Rys. 56.

$$W_{k_l} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2, \quad \text{albo} \quad W_{k_l} = \zeta_5 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

a stąd $\zeta_5 = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^2$.

W tych wzorach α zależy nie tylko od wartości kąta β, lecz, jak wykazało doświadczenie, również od stosunku promienia krzywizny ρ do średnicy przewodu d. Zależności te znamy z doświadczeń. Wartości spółczynników ζ_4 i ζ_5 można określić z wzorów lub tabliczek podanych w „Techniku" na str. 251 i 252. – Poniżej parę liczb wskazują wartości ζ_4 dla kolana i ζ_5 dla łuku przy różnych kątach β, przyczym dla łuku $\frac{\rho}{d} = 5$.

	β	20°	40°	90°	140°
ζ_4	kolano	0,05	0,14	0,98	2,43.
ζ_5	łuk	0,03	0,06	0,13	0,2.

Z powyższych liczb należy brać naukę, że w celu możliwego zmniejszenia strat wysokości, wywoływanych zmianą kierunku, należy zmiany te uskuteczniać przy pomocy lekko zakrzywionych łuków; przyczym pamiętać należy, że im promień krzywizny łuku jest większy w porównaniu ze średnicą rury, tym strata wysokości przy zmianie kierunku jest mniejsza.

Wysokość stracona na pokonanie tarcia.

Niech prędkość cieczy w pewnej części przewodu jest v, wtedy wysokość, odpowiednia tej prędkości, jest $\frac{v^2}{2g}$. Możemy przyjąć, że na tarcie cieczy podczas przepływu jej została stracona pewna wysokość, której wartość możemy wyznaczyć w funkcji $\frac{v^2}{2g}$. Niech zatym wysokość h_t stracona na tarcie równa się

$$\zeta_t \cdot \frac{v^2}{2g},$$

gdzie ζ_t jest pewna liczba, zależna od wymiarów przewodu rurowego i jego właściwości. Rodzaj zależności podaje nam doświadczenie, które wskazuje, co też łatwo jest wyrozumieć, że strata na tarcie tym będzie większa, im przewód będzie dłuższy i im większa ilość cząsteczek strumienia dotykać będzie obwodu rury; ilość zaś takich cząsteczek tym będzie w i ę k s z a, i m o b w ó d r u r y b ę d z i e d ł u ż s z y, a p o l e p r z e k r o j u m n i e j- s z e.

Niech l będzie długość rozpatrywanego przewodu; obwód przewodu niech będzie u, a pole przekroju f; wtedy na zasadzie powyższego możemy napisać, że

$$\mathfrak{Z}_t = \rho \frac{l.u}{f},$$

gdzie ρ jest pewien spółczynnik, uwzględniający wpływ pozostałych warunków ruchu, opuszczonych w powyższym rozumowaniu. Stąd

$$W_t = \frac{\rho l u}{f} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

We wzorze tym znajduje się i l o r a z z p o- l a p r z e k r o j u p r z e z o b w ó d j e g o; iloraz ten n a z y w a m y p r o m i e n i e m h y- d r a u l i c z n y m; oznaczmy go przez R; zatym

$$R = \frac{f}{u}$$

i wtedy

$$W_t = \frac{\rho}{2g} \cdot \frac{l v^2}{R}$$

W tablicach zwykle straty wysokości na tarcie podawane są na jednostkę długości przewodów, gdyż znalezienie straty na długości dowolnej nie przedstawia wtedy żadnej trudności. Oznaczając stratę wysokości na tarcie na jednostce długości przez i, z ostatniego wzoru otrzymamy

$$i = \frac{W_t}{l} = \frac{\rho}{2g} \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Możemy $\frac{\rho}{2g}$ oznaczyć jedną literą k; spółczynnik ten k wypadnie już odnajdywać z doświadczenia.

Otrzymujemy zatym wzór

$$i = k \cdot \frac{v^2}{R} \ldots\ldots (A),$$

który ma bardzo ważne znaczenie przy badaniu ruchu cieczy w przewodach rurowych .

Dla poszczególnych przypadków można wzór (A) odpowiednio przekształcić . - Dajmy na to , mamy przewód rudowy okrągły o średnicy d ; niech ilość przepływu w przeciągu jednostki czasu wynosi Q $\frac{m^3}{sek}$. Promień hadrauliczny znajdziemy $R = \frac{\pi d^2}{4 \pi d} = \frac{d}{4}$; — ilość przepływu $Q = \frac{\pi d^2 v}{4}$, skąd $v = \frac{4Q}{\pi d^2}$.

Podstawiając we wzór (A) znalezione wartości na R i v , otrzymamy , że strata wysokości na tarcie na jednostkę długości

$$i = k \frac{v^2}{R} = k \cdot \frac{16 Q^2 \cdot 4}{\pi^2 d^4 d} = \frac{k \cdot 64}{\pi^2} \cdot \frac{Q^2}{d^5},$$

a oznaczając $\frac{k \cdot 64}{\pi^2}$ przez λ, znajdziemy ostatecznie

$$i = \lambda \frac{Q^2}{d^5} \ldots\ldots (B).$$

Wzory (A) i (B) będą prawie wyłącznie stosowane , kiedy będzie mowa o ruchu cieczy w przewodach.- Z wzoru (B) wyciągniemy zaraz pewne wnioski :

1) Jeśli chcemy przez jedną i tę samą rurę otrzymać n razy większą ilość cieczy w porównaniu z poprzednią , narażeni będziemy na stratę w wysokości wskutek tarcia n^2 razy większą niż poprzednio ; jeśli naprzykład n będzie = 2 , wtedy strata na tarcie będzie 4 razy większa , niż poprzednio .

2) Chcąc dostarczyć tę samą ilość cieczy przez rurę o poprzedniej długości, lecz o średnicy n razy mniejszej, otrzymamy wysokość straconą na tarcie (n^5) razy większą niż poprzednio; jeśli naprz. średnicę zmniejszymy dwa razy, wtedy strata na tarcie zwiększy się $2^5 = 32$ razy w porównaniu z poprzednią stratą.

We wzorach (A) i (B) mamy spółczynniki k i λ, które, jak to było wzmiankowane, możemy określić tylko drogą doświadczalną. Zależność między k i λ na zasadzie poprzedniego istnieje taka:

$$\lambda = k \cdot \frac{64}{\pi^2}.$$

Wystarczy zatym określić z doświadczenia k albo λ, aby i drugi spółczynnik był znany.

Pierwsi badacze przyjmowali, że k jest jednakowe we wszystkich przypadkach; to samo dotyczyło λ; późniejsze jednak badania wykazały, że k, zarówno λ zależą od wymiarów rury, od stanu w jakim znajduje się rura, od prędkości, z jaką przepływa ciecz przez rurę, od własności samej cieczy, temperatury i t.d. Wogóle, zależność ta zdaje się być bardzo złożoną, i do dziś nie jest bynajmniej ustaloną. Istnieje wiele wzorów, uwzględniających tę czy inną zależność, żaden jednak z nich nie cieszy się bezwzględnym uznaniem; stosowanie tego czy innego wzoru pozostaje sprawą niemal osobistego gustu, obliczającego przewód.– W naszym zaś wykładzie zatrzymamy się na wzorach podanych przez Dupuit'a oraz Kuttera i Ganguillet'a.

Wzór Dupuit daje przybliżoną liczbę jedną dla wszystkich przypadków, zaś wzór Kuttera i Ganguillet'a pozwala dość dokładnie przystosowywać się do różnych warunków rzeczywistych.

Według Dupuit'a przyjmować będziemy dla wzoru (A) $k=\left(\frac{1}{50}\right)^2$, dla wzoru (B): $\lambda=\left(\frac{1}{20}\right)^2$.- Te liczby jako pierwsze przybliżenie są bardzo dobre, gdyż łatwo jest je zapamiętać i w zastosowaniu są dogodne.

Według Kuttera i Ganguillet'a mamy dla wzoru (A)

$$k=\left(\frac{m+\sqrt{R}}{100\sqrt{R}}\right)^2,$$

dla wzoru (B)

$$\lambda=\left(2,55\,\frac{m+\sqrt{R}}{100\sqrt{R}}\right)^2.$$

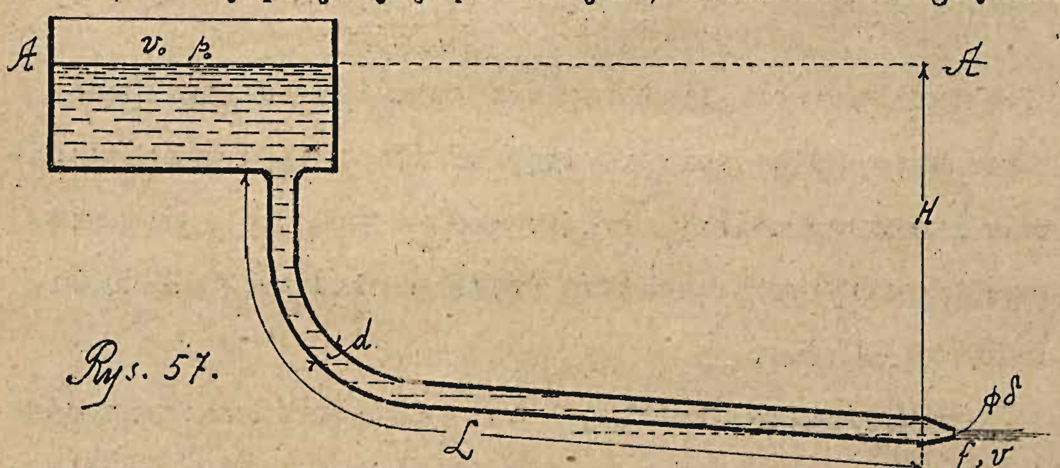
W tych wzorach spółczynnik m zależy od materyału i stanu rury; dla wody czystej i dla rur lanych asfaltowanych nowych należy przyjmować m = 0,15, dla rur starych, pokrytych wewnątrz rdzą i osadami m = 0,25, średnio m = 0,20.

W celu ułatwienia pracy przy obliczeniach przewodów rurowych stosowane są prawie wyłącznie tablice liczbowe lub wykreślne, ułożone na zasadzie tego czy innego wzoru. Tablice te są umieszczone w dziełach i podręcznikach specjalnych, kalendarzach i t.d. W „Techniku" na str. 248, 249 umieszczona jest taka tablica, ułożona na zasadzie wzoru H. Lang'a. - Sposób użycia podobnych tablic jest widoczny po krótkim rozpatrzeniu się w ich układzie.

Ilość wypływu i prędkość wypływu wody z rury.

Kiedy poznaliśmy opory, jakie ciecz spotyka podczas ruchu w rurze, przystąpić możemy do określenia ilości i prędkości wypływu cieczy z rury przez końcowy jej otwór.

Załóżmy, że na całej długości L przewód jest okrągły o średnicę d; niech zmiany kierunku przewodu będą wykonane przy pomocy łuków, tak iż strat wysokości, z tej przyczyny powstałych, można nie uwzględniać.



Rys. 57.

Aby znaleść ilość i prędkość wypływu, ułóżmy równanie na zasadzie twierdzenia D.Bernoulli'ego, dotyczące pewnej cząsteczki wody na górnym poziomie zbiornika, a następnie tej samej cząsteczki, kiedy ta się znajdzie po przepłynięciu rury u jej wylotu; średnica otworu przy wylocie niech będzie δ, zaś pole otworu $= f$. Uwzględniać będziemy, stosownie do powiedzianego poprzednio, tylko stratę wysokości, spowodowaną przez tarcie w rurze; wartość tej straty na całej długości prze-

Jan Rozalski

wodu wyniesie w tym razie $\lambda \frac{Q^2}{d^5} \cdot L$, gdzie Q oznacza rzeczywistą ilość wody, przepływającej przez nasz przewód. Przyjmując za poziom zasadniczy swobodną powierzchnię AA wody w zbiorniku, napiszemy równanie D.Bernoulli'ego w takiej postaci

$$0 + \frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\Delta} = -H + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + \frac{L.\lambda.Q^2}{d^5},$$

gdzie v_o , p_o — prędkość i ciśnienie na górnym poziomie wody w zbiorniku, v i p — prędkość i ciśnienie wody przy wylocie z rury, H — wysokość poziomu swobodnego w zbiorniku ponad środkiem ciężkości wylotu.

Załóżmy , że ciśnienie $p_o = p$ i że prędkość v_o w zbiorniku jest mała , wobec czego wyraz $\frac{v_o^2}{2g}$ można opuścić ; wtedy równanie poprzednie przyjmie postać

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{\lambda Q^2}{d^5} L = H \ldots\ldots (1).$$

Z tego równania znajdziemy , że p r ę d k o ś ć w y p ł y w u

$$v = \sqrt{2g\left(H - \lambda \frac{Q^2}{d^5} L\right)} \ldots\ldots (2),$$

to jest r ó w n a s i ę p r ę d k o ś c i , j a k ą p o s i a d a ć b ę d z i e c i a ł o, s w o b o d n i e s p a d a j ą c e z w y s o k o ś c i r ó w n e j p i o n o w e j o d l e g ł o ś c i ś r o d k a o t w o r u o d s w o b o d n e g o p o z i o m u w z b i o r n i k u , z m n i e j s z o n e j

---

o w y s o k o ś ć s t r a c o n ą n a p o k o n a n i e o p o r ó w w z d ł u ż p r z e b y t e j d r o g i.

Otrzymany jednak wzór (2) nie daje nam ostatecznej wartości na v, gdyż pod pierwiastkiem znajduje się wielkość Q, która jest funkcją v. Aby znaleść ostateczną wartość v, a następnie Q, albo też odwrotnie, zwróćmy się do równania (I), z którego, dajmy na to, wyrugujemy v i określimy Q.

Pomiędzy ilością wypływu Q a polem f otworu wylotowego i prędkością wypływu istnieje związek

$$Q = \mu v f \ldots\ldots\ldots (3),$$

stąd $v = \frac{Q}{\mu f}$; podstawiając tę wartość v w równanie (I), otrzymamy

$$\frac{Q^2}{\mu^2 f^2 2g} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L = H,$$

Stąd $$Q = \sqrt{\frac{H}{\frac{1}{\mu^2 f^2 2g} + \frac{\lambda L}{d^5}}}.$$

Z wzoru tego określić możemy ilość wypływu. Jeśli chcemy otrzymać śrdnią prędkość wypływu v, dostateczne będzie otrzymaną na Q wartość wstawić w równanie (3) i wtedy otrzymamy

$$v = \sqrt{\frac{H}{\frac{1}{2g} + \frac{\mu^2 f^2 \lambda L}{d^5}}} = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \frac{2g\mu^2 f^2 \lambda L}{d^5}}}.$$

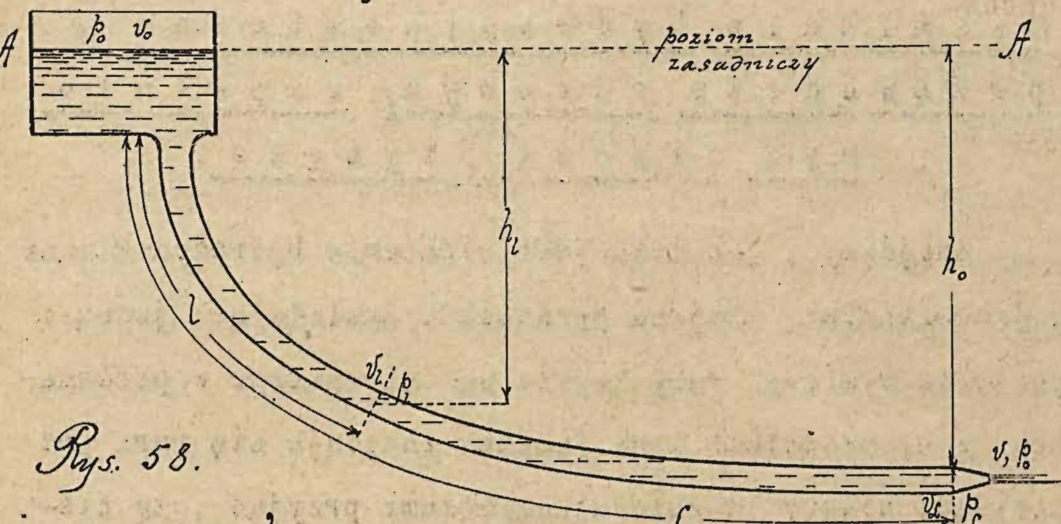
Rozwiązanie równania (I) możnaby wykonać w odmienny sposób: wyrugować z niego Q i określić v, a następnie, posiłkując się równaniem (3), znaleźć Q. Wynik powinien być ten sam.

Ciśnienie hydrodynamiczne w przewodzie rurowym, zapełnionym cieczą płynącą.

Znajdźmy, jak duże jest ciśnienie hydrodynamiczne w jakimkolwiek miejscu przewodu, zakładając jedną: ponieważ wymiary rury zwykle są nieznaczne w porównaniu z wysokościami, na jakich znajduje się rura pod poziomem cieczy w zbiorniku, możemy przyjąć, że ciśnienie w pewnym przekroju poprzecznym rury we wszystkich miejscach tego przekroju jest jednakowe.

Dokładniej mówiąc, ciśnienie w dolnych punktach przekroju rury będzie nieco większe, niż w górnych; różnica jednak przy powyższych warunkach jest bardzo nieznaczna. Jeżeli zatym mamy określić ciśnienie hydrodynamiczne w danym przekroju rury, będziemy rozumieli pod nim ciśnienie w środku ciężkości danego przekroju.

Znajdźmy zatym przy uwzględnieniu powyższych uwag ciśnienie hydrodynamiczne w przekroju poprzecznym, wziętym od zbiornika na odległości l, liczonej wzdłuż osi rury. Niech w tym miejscu oś rury (środek ciężkości przekroju) znajduje się na wysokości h_l pod poziomem AA cieczy w zbiorniku; oznaczmy szukane ciśnienie przez p_l , a średnią prędkość cieczy w tym przekroju przez v_l , wtedy , stosując twierdzenie



Rys. 58.

D. Bernoulli'ego do cząsteczki , kiedy ta jest na górnym poziomie zbiornika, i kiedy następnie w ruchu trwałym ta sama cząsteczka przejdzie do środka ciężkości badanego przekroju, napiszemy

$$\frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} = -h_l + \frac{V_l^2}{2g} + \frac{p_l}{\Delta} + \Sigma W,$$

gdzie ΣW jest to suma wysokości , straconych na opory podczas drogi od poziomu AA do przekroju badanego, v_0 i p_0—prędkość i ciśnienie na poziomie cieczy w zbiorniku . - Z równania tego otrzymamy

$$p_l = p_0 + \Delta\left(h_l + \frac{V_0^2 - V_l^2}{2g} - \Sigma W\right) \ldots\ldots (1).$$

Jeżeli rura ma być w tym przekroju zapełniona wodą, ciśnienie p_l powinno być większe od zera ; gdyby p_l było równe zeru, wtedy cząsteczki cieczy poruszać się będą swobodnie , w próżni.

Jeśliby $p_l < 0$, byłoby to oznaką, że ciecz przepływająca nie może badanego przekroju zapełnić. Wartość p_l, możemy zmierzyć przy pomocy rurki piezometrycznej, końcem otwartym wprawionej w przewód na wysokości osi rury; jeżeli drugi koniec rurki będzie zamknięty, a wewnątrz rurki wytworzymy ciśnienie $=0$, wtedy ciecz podniesie się w piezometrze do wysokości $\frac{p_l}{\Delta}$, przyczym, jak wynika z poprzedniego równania

$$\frac{p_l}{\Delta} = \frac{p_0}{\Delta} + h_l + \frac{v_0^2 - v_l^2}{2g} - \Sigma W.$$

Jeśli $p_l > 0$, wtedy woda w piezometrze stanie powyżej osi rury; jeśli $p_l = 0$ lub $p_l < 0$, wtedy woda w piezometrze nie pokaże się wcale.

Otrzymane poprzednio równanie (I) może w poszczególnych przypadkach przybrać prostszy kształt, mianowicie: prędkość v_0 w zbiorniku może być bardzo mała, wtedy wyraz $\frac{v_0^2}{2g}$ można opuścić, a równanie (I) otrzyma kształt

$$p_l = p_0 + \Delta\left(h_l - \frac{v_l^2}{2g} - \Sigma W\right) \ldots \quad (2)$$

Może też zajść taki przypadek, kiedy wyraz z prędkością v_l jest mały wobec pozostałych wielkości; zajdzie ten warunek wtedy, kiedy przewód rurowy jest długi i wysokości stracone na tarcie są bardzo znaczne (szczególnie dotyczyć to będzie dalszych od zbiornika miejsc w rurze); wtedy $\frac{v_l^2}{2g}$ będziemy mogli opuścić, i w takim razie ostatnie równanie przybierze kształt jeszcze prostszy

$$p_l = p_o + \Delta (h_l - \Sigma W) \ldots (3).$$

Określmy ciśnienie w przekroju, obranym przy końcu przewodu rurowego przed samym otworem wypływowym; środek ciężkości tego przekroju niech będzie h_o poniżej poziomu AA. Długość rury do tego przekroju liczona jest L; ciśnienie w tym miejscu niech będzie p_L. Korzystając z równania (2), napisać możemy

$$p_L = p_o + \Delta \left(h_o - \frac{v_L^2}{2g} - \Sigma W\right) \ldots\ldots (4),$$

przyczym jeśli przewód rurowy na całej długości L jest jednej i tej samej średnicy, prędkość przepływu na całej długości rury jest jednakowa, czyli $v_l = v_L$.

Porównajmy ciśnienie hydrodynamiczne przy końcu przewodu rurowego p r z e d o t w o r e m — z ciśnieniem zewnętrznym, jakie ciecz napotyka zaraz p o w y j ś c u z o t w o r u wypływowego; niech to ciśnienie wynosi p_o, wtedy widzimy, że na bardzo małej długości (podczas przejścia przez otwór) ciśnienie p_L zmienia się na p_o, czyli na nieznacznej długości otrzymujemy stratę ciśnienia $(p_L - p_o)$, którą znajdziemy z (4)

$$p_L - p_o = \Delta \left(h_o - \frac{v_L^2}{2g} - \Sigma W\right).$$

v_L^2

Przypuśćmy, że otwór wypływowy jest tak wykonany, że ciecz nie traci nic energji przy przejściu z rury do otworu ; wtedy wysokość odpowiednia zmianie ciśnienia $\frac{p_L - p_0}{\Delta}$ powinna pójść na zwiększenie prędkości wypływu . Jeżeli więc ciecz przed końcem przewodu posiadała prędkość v_L , albo odpowiednią jej wysokość $\frac{v_L^2}{2g}$, a po wyjściu z otworu posiada prędkość v , albo wysokość odpowiednią tej prędkości $\frac{v^2}{2g}$, otrzymalibyśmy przyrost wysokości $= \frac{v^2}{2g} - \frac{v_L^2}{2g}$ kosztem, jak mówiliśmy , zmiany wysokości ciśnienia $\frac{p_L - p_0}{2g}$? , możemy więc napisać

$$\frac{v^2}{2g} - \frac{v_L^2}{2g} = \frac{p_L - p_0}{\Delta} = h_0 - \frac{v_L^2}{2g} - \Sigma W ,$$

albo
$$\frac{v^2}{2g} = h_0 - \Sigma W .$$

Że ostatnie równanie jest słuszne, wynika to z twierdzenia D.Bernoulli'ego zastosowanego do pewnej cząsteczki , która z początku była na poziomie AA , a po niejakim czasie wypłynęła z otworu na końcu przewodu. - Stąd wynika, że zmiana ciśnień w przewodzie przed i za otworem przy założeniach poprzednio zrobionych zachodzi całkowicie na rachunek zmiany energji kinetycznej cieczy przed i za otworem.

Ciśnienie hydrostatyczne, a hydrodynamiczne w rurze podczas przepływu wody.

Poprzednio rozpatrywaliśmy ciśnienie hydrodynamiczne w jakimkolwiek miejscu rury, obranym na odległości l od jej początku i otrzymaliśmy , że wartość tego ciśnienia

$$p_l = p_o + \Delta\left(h_l + \frac{v_o^2 - v_l^2}{2g} - \Sigma W\right).$$

Wyobraźmy sobie na chwilę, że na końcu rury otwór wypływowy jest zamknięty; wtedy ruchu niema, ciśnienie zaś w każdym miejscu rury staje się ciśnieniem h y d r o s t a t y c z n y m. Wartość ciśnienia hydrostatycznego w tym miejscu, dla którego poprzednio znaleźliśmy ciśnienie hydrodynamiczne, określi równanie $p_l' = p_o + \Delta h_l$, gdzie przez p_l' oznaczamy ciśnienie hydrostatyczne.

Mając na uwadze poprzednie równania, możemy napisać

$$p_l = p_l' + \Delta\left(\frac{v_o^2 - v_l^2}{2g} - \Sigma W\right).$$

Przypuśćmy, że prędkość v_o jest bardzo mała, wtedy opuszczając wyraz z v_o i dzieląc przez Δ obie strony równania, otrzymamy

$$\frac{p_l}{\Delta} = \frac{p_l'}{\Delta} - \frac{v_l^2}{2g} - \Sigma W.$$

Pierwsza strona równania zawiera tak zwaną w y s o k o ś ć c i ś n i e n i a h y d r o d y n a m i c z n e g o; po drugiej stronie równania znajdujemy wyraz $\frac{p_l'}{\Delta}$, który można nazwać w y s o k o ś c i ą c i ś n i e n i a h y d r o s t a t y c z n e g o, następnie wyrazy $\frac{v_l^2}{2g}$ i ΣW są to, jak wiemy w y s o k o ś ć o d p o w i e d n i a p r ę d k o ś c i v_l i w y s o k o ś ć s t r a c o n a n a o p o r y.

Przyjmując takie określenia, równanie powyższe wypowiemy w sposób następujący :

Wysokość ciśnienia hydrodynamicznego w którymkolwiek miejscu przewodu rurowego jest równa wysokości ciśnienia hydrostatycznego , mniej wysokość odpowiednia prędkości cieczy w przewodzie, mniej wysokość stracona na opory.

Przestawiając odpowiednie wyrazy w powyższym równaniu , możemy powiedzieć dalej :

Wysokość ciśnienia hydrostatycznego jest równa wysokości ciśnienia hydrodynamicznego więcej wysokość odpowiednia prędkości, więcej wysokość stracona na opory.

W sposób podobny możemy wygłosić twierdzenia, dotyczące wysokości odpowiedniej prędkości i wysokości straconej na opory .

Linia ciśnienia.

Niech będzie zbiornik wody,z którego wychodzi przewód rurowy; przez ten przewód niech przepływa ciecz naprz. woda ; w dowolnej ilości miejsc do naszego przewodu niech będą powstawiane rurki piezometryczne u góry otwarte ; na otwarte końce tych rurek , dajmy na to, działa ciśnienie p_o — takie samo , jakie działa na poziom swobodny cieczy w zbiorniku . W każdej z rurek piezometrycznych woda stanie na pewnym poziomie w zależności od ciśnienia hydrodynamicznego w tym właśnie miejscu rury . Połączmy poziomy , do jakich dochodzi woda w poszczególnych rurkach piezometrycznych , linią , a otrzymamy tak zwaną l i n i ę c i ś n i e n i a.

Znajomość jej jest bardzo ważną : przy jej pomocy jesteśmy w stanie dokładnie uprzytomnić sobie , w jaki sposób ciśnienia hydrodynamiczne wzdłuż rury są rozłożone , a dalej , mamy dokładne wskazówki , jak wysoko w tym czy innym miejscu rury woda jest w stanie podnieść się pod działaniem ciśnienia wewnętrznego wbrew ciśnieniu zewnętrznemu .

Wyznaczenie linii ciśnień najdogodniej jest uskutecznić w ten sposób : obieramy szereg przekrojów poprzecznych badanej rury i znajdujemy w każdym przekroju wysokość , do jakiej woda podnieść się może , w wyobrażalnej rurce piezometrycznej . Określamy w tym celu odległość x poziomu wody w piezometrze od poziomu swobodnego w zbiorniku dla każdego z obranych przekrojów rury. Jeśli na liniach pionowych , wystawionych w środkach ciężkości obranych przekrojów poprzecznych, od poziomu swobodnego wody w zbiorniku odetniemy znalezione wysokości x , otrzymamy szereg punktów , należących do linii ciśnień . Punkty te , połączone linją ciągłą, wyznaczają linię ciśnień.

Niech x_l jest ta właśnie szukana wysokość dla przekroju rury, który znajduje się na odległości l od jej początku (rys. 59). - Jeśli ciśnienie hydrodynamiczne w tym miejscu oznaczymy przez p, wtedy wysokość, do jakiej woda podniesie się w rurce piezometrycznej, jak wiemy, jest równa $\frac{p-p_o}{\Delta}$. - Ponieważ oś rury w rozpatrywanym miejscu znajduje się na odległości h pod poziomem swobodnym w zbiorniku, więc

$$x_l = h - \frac{p-p_o}{\Delta};$$

taką więc wartość x_l należy określić, stosując twierdzenie D.Bernoulli ego.

Niech prędkość na swobodnym poziomie cieczy, przyjętym za poziom zasadniczy będzie v_o, ciśnienie zaś p_o. Rura na całej długości niech będzie jednej i tej samej średnicy d, i dopiero przy końcu przewodu niech średnica się zmniejsza do δ, przyczym przejście z szerokiego przekroju jest tak wykonane, że niema żadnej straty wysokości z tego powodu.

Stosujemy twierdzenie D.Bernoulli'ego do cząsteczki cieczy obranej początkowo na swobodnej powierzchni cieczy, a następnie znajdującej się w przekroju B, odległym od zbiornika o l.

$$\frac{v_o^2}{2g} + \frac{p_o}{\Delta} = -h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + \Sigma H \ldots\ldots (1).$$

Wyraz ostatni przedstawia, jak wiemy, sumę wysokości, straconych przez ciecz z powodu różnych przeszkód , napotkanych podczas drogi od poziomu AA do obranego miejsca B w przewodzie.

Ta suma składa się z wysokości, straconej na tarcie wewnątrz zbiornika; wobec jednak bardzo powolnego ruchu cieczy w samym zbiorniku , wysokość stracona z tego powodu jest bardzo mała i można jej pod rachubę nie brać . Następna strata wysokości , która powinna wejść w skład wyrazu ΣW, może powstać w miejscu , gdzie ciecz ze zbiornika przepływa do rury : zachodzi tu zmiana przekrojów; wiemy , że można zmianę przekrojów wykonać w ten sposób , aby strat znaczniejszych nie było ; przypuśćmy, że w naszym przykładzie ten warunek jest dopełniony; wobec tego omawianej straty możemy nie uwzględniać .

W dalszym ciągu ciecz , płynąc przez przewód , może ponosić straty wynikłe z powodu jednej lub kilku zmian kierunku przewodu ; lecz wiemy, że , nadając przewodowi rurowemu w miejscach zmiany kierunku odpowiednią budowę , możemy tej straty zupełnie prawie uniknąć .

Wreszcie pozostaje jeszcze jedna strata - wskutek tarcia cieczy o ścianki przewodu wzdłuż całej jego długości; ta strata wogóle przybiera wartości dość znaczne, nieraz nawet bardzo znaczne i dlatego tej straty pominąć nie możemy. - W jednym z poprzednich rozdziałów określiliśmy wartość straty na tarcie na jednostce długości przewodu wzorem $i = \lambda \frac{Q^2}{d^5}$., gdzie i —

ik

jest właśnie owa strata , λ — spółczynn. . tarcia , poprzednio podany , Q - ilość przepływu w ciągu jednej sekundy , d — średnica przewodu okrągłego ; strata na tarcie na długości l przewodu wyniesie wtedy

$$i.l = \lambda \cdot \frac{Q^2}{d^5} l$$

Wobec powyższego możemy przyjąć , że

$$\Sigma W = \lambda \frac{Q^2}{d^5} l ,$$

a równanie (I) możemy napisać w następującej postaci

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} = -h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} l \ldots\ldots (2).$$

Ułóżmy w ten sam sposób równania dla punktów C i D ; punkt C wzięty jest przed samym zwężeniem rury koło wylotu ; punkt D—w końcu wylotu.

Równanie dla punktu C będzie

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} = -H + \frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L \ldots (3)$$

a dla punktu D

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} = -H + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L \ldots\ldots (4).$$

Wobec tego , że punkty C i D są bardzo blizkie w równaniach powyższych przyjmujemy , że odległości punktów C i D od zbiornika są równe L i że obydwa punkty C i D znajdują się na jednakowej głębokości pod swobodnym poziomem zbiornika — H ; v i p_1 oznaczają tu prędkość i ciśnienie w punkcie C , zaś v_1 i p_0 — te same wielkości w punkcie D .

Jeśli przyjmiemy , że prędkość cieczy w zbiorniku jest bardzo mała , wtedy wyrazy , zawierające v_0, będzie można odrzucić ; wówczas równania (2) , (3) i (4) przyjmą prostszą formę

$$\frac{p_0}{\Delta} = -h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} l \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\frac{p_0}{\Delta} = -H + \frac{v^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L \ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{p_0}{\Delta} = -H + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0}{\Delta} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L \ldots\ldots\ldots (7).$$

Teraz możemy przystąpić do określenia wysokości, na jakiej staną poziomy cieczy w rurkach piezometrycznych , umieszczonych w punktach B ,C i D .

Dla któregokolwiek punktu B w przewodzie z równania (5) otrzymamy

$$x_l = h - \frac{p - p_0}{\Delta} = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} l \ldots\ldots (8);$$

dla punktu C z równania (6)

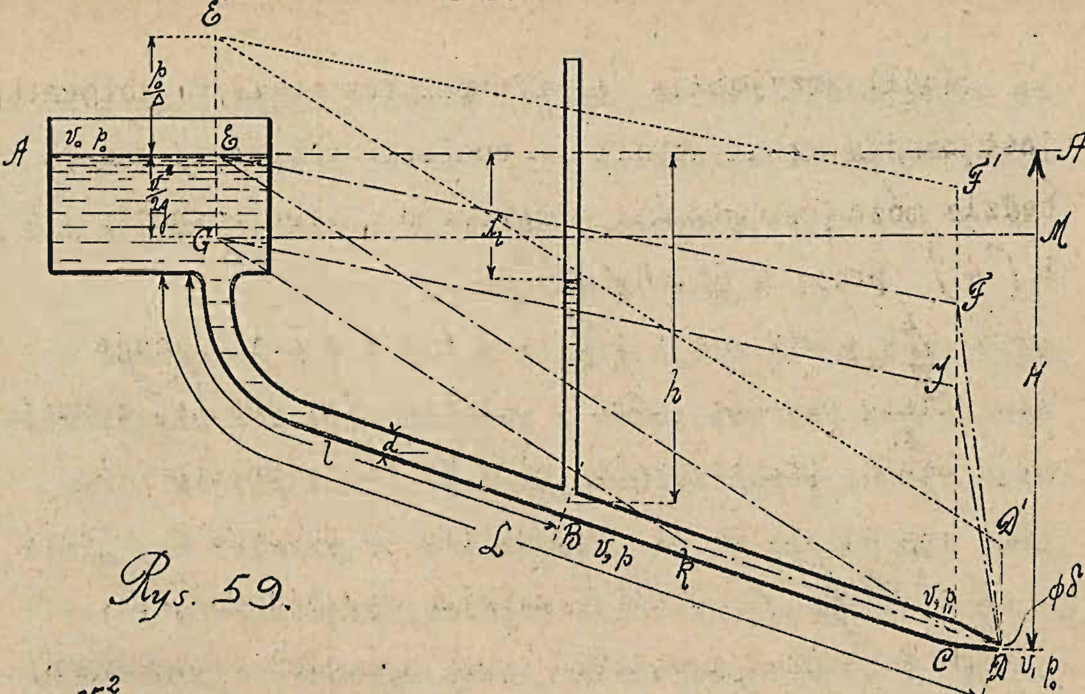
$$x_L = H - \frac{p_1 - p_0}{\Delta} = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L \ldots\ldots (9);$$

wreszcie dla punktu D przy wylocie , z równania (7)

$$x_L' = H - \frac{p_0 - p_0}{\Delta} = H = \frac{v_1^2}{2g} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L \ldots\ldots (10)$$

Kiedy już mamy określone wysokości x_l, x_L, x_L', możemy łatwo znaleść linję ciśnień . Poznajmy w kilku szczególnych przypadkach krztałt linii ciśnień .

I) Niech prędkość przepływu v będzie nieznaczna, naprz. , jak to często bywa , równa $\backsim 1 \frac{m}{sek}$, wtedy



Rys. 59.

$\frac{v^2}{2g} = \infty 5\,cm$; przy dłuższym przewodzie wobec straty wysokości na tarcie niech można będzie wyraz ten odrzucić, wtedy

$$x_l = \lambda \frac{Q^2}{d^5} l \ldots\ldots (11), \quad x_L = \lambda \frac{Q^2}{d^5} L \ldots\ldots (12)$$

i wreszcie $x_L' = H$ .... (13)

Widzimy przedewszystkiem, że wartość x_l zależy od odległości rozpatrywanego przekroju rury od zbiornika. Gdybyśmy punkt B obrali przy samym zbiorniku, na początku przewodu, to jest gdy $l = 0$, wtedy z równania (II) otrzymamy $x = 0$, a więc linia ciśnień w tym przypadku przy zbiorniku schodzi się z poziomem swobodnym AA.

W miarę zwiększania się l, x_l wzrasta proporcjonalnie względem l. Przyjmijmy, że wogóle długości przewodu l są znaczne wobec wysokości h, wtedy możemy długości l przyjmować bez większej pomyłki za odległości rzutów takich punktów jak B na płaszczyznę AA od zbiornika. Ponieważ zależność między x i l jest stopnia pierwszego, więc równanie

$$x = \lambda \frac{Q^2}{d^5} l$$

przy poprzednim założeniu daje nam linię prostą; jeden z punktów tej prostej E znajduje się na płaszczyznie AA. Ta linia prosta ciągnąć się będzie aż do piezometru w punkcie C, gdzie $x_L = \lambda \frac{Q^2}{d^5} L$: linja ciśnień przejdzie przez punkt F.– Dla piezometru przy wylocie w punkcie D $x'_L = H$, zatym na odległości od punktu C do D następuje spadek ciśnienia według prostej F D. Całkowita więc linia ciśnień w tym przypadku jest linia E F D.

2) Rozpatrzmy teraz inny przypadek, kiedy prędkość przepływu v w rurze jest dość znaczna; wtedy, jak wiemy z równania [8], $x_l = \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{Q^2}{d^5} l$. Dla przekroju obranego przy samym zbiorniku to jest dla $l = 0$, $x = \frac{v^2}{2g}$; otrzymujemy, że w tym razie linia ciśnień przy zbiorniku przejdzie przez punkt położony o $\frac{v^2}{2g}$ niżej od poziomu swobodnego. W każdym piezometrze, ustawionym w następnych przekrojach, poziom wody obniży się, względnie do wypadku pierwszego, o tę też samą wysokość $\frac{v^2}{2g}$, co jest widoczne z równań [8] i [9]; zatym linia ciśnień będzie równoległą do linii ciśnień, jaką otrzyma-

l i ś m y w p r z y p a d k u p i e r w s z y m, p r z e p r o w a d z o n ą n i ż e j o d t a m - t e j o w y s o k o ś ć o d p o w i e d n i ą p r ę d k o ś c i v t o j e s t o $\frac{v^2}{2g}$. W ten sposób określimy linię ciśnień na tej części przewodu, gdzie średnica d pozostaje bez zmiany, to jest do punktu C. Na długości od punktu C do D następuje znów spadek ciśnienia aż do punktu D i zupełny obraz rozkładu ciśnień wskaże nam linia G J D.

3) Przypuśćmy teraz, że przewód przy końcu n i e z w ę ż a s i ę, to jest że średnica otworu jest d; następnie załóżmy, że prędkość v jest tak mała, iż można wyraz $\frac{v^2}{2g}$ odrzucić. Wtedy dla przekroju obranego przy zbiorniku, kiedy więc $l = 0$, $x = 0$; dla innych przekrojów x będzie proporcjonalne względem odległości przekroju od zbiornika, linia ciśnień zatym będzie linią prostą. W punkcie D przy wylocie, gdzie $v_l = v$, $x_l = H$, więc linia ciśnienia powinna w tym przypadku przejść przez punkt D; otrzymujemy linię ciśnień w postaci linii prostej E D.

4) Gdyby w przypadku trzecim należało uwzględnić prędkość v przepływu wody w przewodzie, wtedy linia ciśnień, otrzymana przy tym założeniu, będzie do znalezionej poprzednio linii E D równoległą, przeprowadzoną względem niej o $\frac{v^2}{2g}$ niżej, - linią G K D.

Wyjaśnić należy , że w części przewodu K D ciśnienie wewnątrz rury będzie jednakowe i równe p_o i dla-tego też część K D linii ciśnień jest skierowana wzdłuż osi przewodu .

5) Załóżmy jeszcze , że prędkość przepływu w przewodzie jest bardzo znaczna , zaś straty na tarcie są tak małe , że możemy ich nie brać na uwagę. Wtedy dla któregokolwiek punktu w przewodzie $x = \frac{v^2}{2g}$; linia ciśnień zatym będzie linią poziomą , przeprowadzoną poniżej swobodnego poziomu AA cieczy w zbiorniku o odległość $\frac{v^2}{2g}$ to jest o wysokość odpowiednią prędkości v ; będzie to linia G M .

6) Wreszcie , gdy $v = 0$, więc i $Q = 0$, linia ciśnień znajdzie się w płaszczyznie swobodnego poziomu cieczy w zbiorniku; będzie to linja E A — wskazująca rozkład ciśnień h y d r o s t a t y c z n y c h wewnątrz przewodu .

Rozpatrywane dotychczas linie ciśnień wskazują nam wartości ciśnień rzeczywistych , działających na ścianki przewodu , to jest wartości ciśnień wewnętrznych mniej ciśnienia zewnętrzne . Dla tego też powyżej znalezione linie możemy nazwać l i n i a m i c i ś n i e ń r z e c z y w i s t y c h .

Moglibyśmy również rozważać tylko wartości ciśnień wewnętrznych ; wtedy linie ciśnień byłyby takie same, jak linie ciśnień zewnętrznych , lecz wszystkie byłyby podniesione względem nich o wysokość $\frac{p_0}{\Delta}$, co łatwo zresztą można otrzymać, rozpatrując równania (8), (9) i (10). Takie linie nosić będą nazwę l i n i i   c i ś n i e ń   w e w n ę t r z n y c h.

Jedna z takich linii byłaby naprz. E'F' ; inna-E'D'.

Linia ciśnień w przykładzie pierwszym i drugim otrzyma inne pochylenie względem poziomu, jeśli zmienimy Q lub d przy pozostałych jednakowych warunkach.

Jeśli naprz. przez rurę o średnicy d i o długości L przepływać będzie dwa razy większa ilość wody, niż poprzednio, wtedy linia ciśnień otrzyma większe pochylenie, mianowicie takie, że przy końcu przewodu $X_L = \lambda \frac{4Q^2}{d^5} L$, to jest przy końcu rury linia ciśnień przejdzie przez punkt, który znajduje się cztery razy niżej od poziomu swobodnego, niż był poprzedni.

Jeżeli zostawimy tę samą ilość przepływu Q i długość L, a powiększymy średnicę przewodu dwa razy, to jest zamiast rury o średnicy d weźmiemy rurę o średnicy 2d, wtedy $X_l = \lambda \frac{Q^2}{32 d^5} \cdot L$, czyli że linia ciśnień otrzyma tym razem odchylenie względem poziomu mniejsze, przyczym punkt, przez który przechodzić będzie linia ciśnień przy końcu przewodu, znajdzie się pod poziomem swobodnym na odległości równej $\frac{1}{32}$ poprzedniej odległości.