Jan Rozalski

WYKŁAD

HYDRAULIKI

(część teoretyczna)

Ig. Radziszewskiego, inżyniera

w Szkole Mechaniczno-Technicznej

H. WAWELBERGA i S. ROTWANDA.

WARSZAWA.

Drukarnia i Litografja „Saturn“ Marszałkowska 91.

1908/9.

W s t ę p.

Ciała, w przyrodzie napotykane, wystawiamy sobie złożonymi z cząsteczek.

Jeśli cząsteczki, wchodzące w skład ciała, są tak ze sobą związane, że zmiana miejsca jednej cząsteczki względem innych w obrębie tegoż ciała jest niemożebną, wtedy ciało takie nazywamy sztywnym.

Jeśli powyższa zmiana miejsca jest możebną w nieznacznych tylko granicach i przy nakładzie pewnej pracy zewnętrznej, ciało takie nazwiemy niesztywnym. Ciała sztywne i niesztywne nazywamy ogólniej c i a ł a m i s t a ł y m i.

Wystawmy sobie ciało, którego cząsteczki są bardzo ruchliwe; ciało, z takich cząsteczek złożone, z łatwością może zmienić kształt zewnętrzny; niech jednak ciało to nie zmienia przytym swej objętości; ciała, złożone z takich cząsteczek, nazywamy c i e c z a m i. Zmiany kształtów cieczy z powodu znacznej ruchliwości cząsteczek mogą zachodzić prawie bez zużycia na to energji.

Jeśli mamy ciało, którego cząsteczki są bardzo ruchliwe, a kształt zewnętrzny i objętość zmienia z łatwością, ciało takie nazwiemy g a z e m. Zmiany objętości gazu, przy pozostałych jednakowych warunkach, jak wiemy, powodują zużycie lub stratę energji.

Ciecze i gazy nazywamy też ogólnie ciałami niestałymi.—Przedmiotem naszych zajęć będzie zaznajomienie się z cieczą w stanie spoczynku i w stanie ruchu. Naukę, rozpatrującą warunki równowagi i ruchu cieczy nazywamy h y d r a u l i k ą.

B l i ż s z e o k r e ś l e n i a w ł a s n o-ś c i c i e c z y.

Cechą cieczy, jak mówiliśmy, jest to, że cząsteczki jej posiadają znakomitą ruchliwość; następnie mówiliśmy, że ciecz prawie nie zmienia swej objętości, czyli że jest bardzo mało ściśliwą.

Ruchliwość cząsteczek sprawia, że ciecz łatwo swój kształt zewnętrzny zmienić może. Dwie cząsteczki cieczy, obok siebie będące, mogą być przesunięte względem siebie przy zużyciu bardzo małej ilości energji. Nie wszystkie jednak ciecze mają jednakowo ruchliwe cząsteczki; weźmy dla przykładu eter, wodę i smołę. Mniejszą lub większą ruchliwość cząsteczek objaśniamy tarciem międzycząsteczkowym; tarcie to znów wystawiamy sobie jako skutek lepkości cieczy rozmaitej dla różnych płynów.

Im większa lepkość, tym większe jest tarcie między cząsteczkami podczas ruchu i tem mniejsza ruchliwość cieczy. O stopniu lepkości sądzić możemy, badając wahania krążka, zawieszonego na skręconym drucie, i zanurzonego w danej cieczy.

Wahający się krążek tym prędzej się zatrzyma, im lepkość cieczy jest większa.

Przytaczamy poniżej lepkość niektórych cieczy, wyrażoną w odpowiednio obranych jednostkach :

Eter	przy	$20\,C^{o}$	-	0,0026 jednostek
Woda	"	$0\,C^{o}$	-	0,0181 "
"	"	$20\,C^{o}$	-	0,0102 "
"	"	$50\,C^{o}$	-	0,0057 "
alkohol	"	$0\,C^{o}$	-	0,0185 "
"	"	$50\,C^{o}$	-	0,0072 "
gliceryna	"	$3\,C^{o}$	-	42 "
"	"	$26\,C^{o}$	-	5 "
smoła	"	$6\,C^{o}$	-	$2200 \cdot 10^{6}$ "
"	"	$12\,C^{o}$	-	$250 \cdot 10^{6}$ "

Badania rachunkowe cieczy rzeczywistej o nieodłącznej od niej lepkości pełne są niepokonanych trudności i z tego powodu, chcąc zadanie ułatwić, wykonywamy badania nasze nad cieczą o nadzwyczaj małej lepkości, dokładniej mówiąc, o cieczy b e z l e p k o ś c i; ciecz taką nazywamy c i e c z ą d o s k o n a ł ą.

Ciecz doskonała zatym zezwala na zmianę swego kształtu zewnętrznego, przyczym wewnątrz jej zachodzi przesuwanie się cząsteczek bez żadnego na ten cel zużycia energji.

Ciecz, wogóle biorąc, jest ściśliwa, jednak bardzo nieznacznie, np. 1000 litrów wody, wzięte przy ciśnieniu zwykłym i poddane ciśnieniu

5 atmosfer, przyjmą objętość 999,8 litra
10 " " " 999,5 "
20 " " " 999,2 "
25 " " " 999,0 "
30 " " 998,6 " ;

dostrzegamy więc tylko bardzo nieznaczne zmniejszenie się objętości. 1000 litrów eteru, wzięte przy ciśnieniu zwykłym , przy 25 atmosferach przyjmą objętość 996 lit.

Dla ułatwienia badań, zakładamy w hydraulice, że c i e c z d o s k o n a ł a j e s t z u p e ł n i e n i e ś ć i ś l i w a, co zresztą nie bardzo, jak widzieliśmy ,różni się od rzeczywistości .

Temperatura ma też nieznaczny wpływ na ciecz; mianowicie ze zwiększeniem się temperatury lepkość maleje, ściśliwość prawie się nie zmienia; gdy temperatura cieczy zbliża się do temperatury wrzenia,-ściśliwość cieczy zwiększa się, w każdym razie bardzo nieznacznie; objętość się zwiększa, lecz również nie wiele, np. 1000 litrów wody przy 4^{o} C , nagrzane do 25^{o} C przyjmują objętość 1003 litrów; nagrzane do 50^{o} C przyjmują objętość 1012 litrów ; zaś przy 100^{o} C przybierają objętość 1043 litrów.

Badaną w hydraulice ciecz doskonałą wystawiamy sobie jako n i e w r a ż l i w ą n a z m i a n y t e m p e r a t u r y.

Ciecz doskonałą zatym wyobrażamy sobie b e z l e p k o ś c i , n i e ś ć i ś l i w ą i n i e z a l e ż n ą o d z m i a n t e m p e r a t u r y.

H y d r o s t a t y k a i h y d r o k i n e t y k a.

Dział hydrauliki , rozpatrujący ciecz w stanie spoczynku , nazywamy h y d r o s t a t y k ą; ten zaś dział, którego przedmiotem jest ciecz w ruchu, nazywamy h y d r o k i n e t y k ą.

Rezultaty , do jakich dochodzi hydrostatyka,badając ciecz doskonałą, są , można powiedzieć, zupełnie dokładne dla wszystkich cieczy bez względu na lepkość, jaką ta czy inna ciecz posiada, a to z powodu, że lepkość wpływ swój wywiera tylko podczas ruchu cząsteczek cieczy.

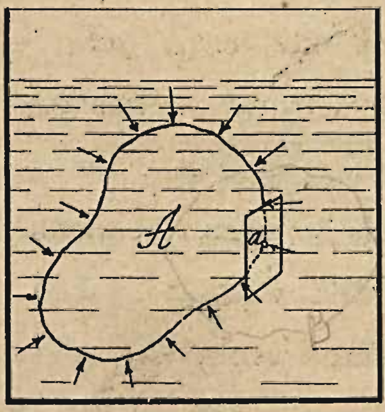
Twierdzenia hydrostatyki zatem są jednakowo dokładne dla mało lepkich cieczy (np. dla wody),jak i dla bardzo lepkich (dla smoły, gliceryny) .-Inaczéj rzecz się przedstawia z hydrokinetyką. Wyniki , do jakich dochodzi hydrokinetyka , badając ciecz doskonałą, w ruchu będącą, są dość ścisłe dla cieczy o małej lepkości, jak eter , woda i inne; dla cieczy zaś o znacznej lepkości, jak np. gliceryna, smoła itp.,twierdzenia i wzory hydrokinetyki w praktyce można stosować,lecz z wielką oględnością i ze znacznymi nieraz poprawkami. Przyczyną tej niezgodności teoryi z rzeczywistością jest tarcie , które w cieczach o znacznej lepkości podczas ich ruchu powoduje niekiedy znaczne straty energji , których dla cieczy doskonałej nie przypuszczamy.

Hydrostatyka.

Równowaga cieczy w spoczynku.

Ciecz w spoczynku będącą możemy sobie wyobrazić znajdującą się w naczyniu o ściankach sztywnych; siłami zewnętrznymi, utrzymującymi ciecz w równowadze, będzie szereg ciśnień , wywieranych przez ścianki na ciecz.

Można rozpatrywać ciecz w równowadze, jeśli sobie wyobrazimy naczynie napełnione cieczą, a wewnątrz tej cieczy pewną jej część , ograniczoną powierzchnią zamkniętą ; jeśli ciecz w naczyniu jest w równowadze , wtedy wydzielona jej część A będzie również w równowadze; rozpatrzmy jakie siły działają na wydzieloną część cieczy.

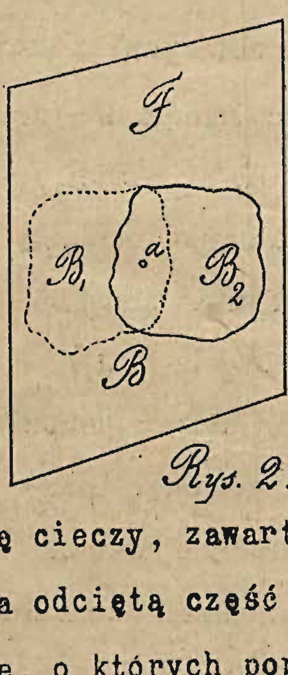


Rys. 1.

Działanie cieczy,otaczającej część A,możemy zastąpić grupą sił , działających na powierzchnię wydzielonej cieczy, przyczym punkty przyczepienia tych sił możemy przyjąć w środku każdego elementu tej powierzchni; siły te nazwiemy powierzchniowymi; co do ich kierunku, to wszystkie siły powinniśmy uważać za zwrócone do wnętrza wydzielonej części, ciecz bowiem nie opiera się żadnym siłom ciągnącym i cząsteczki cieczy pod wpływem takich sił zostają odrywane .

Spróbujmy określić bliżej kierunek wspomnianej siły powierzchniowej w jakimkolwiek punkcie a powierzchni, ograniczającej wydzieloną część cieczy A . Około tego punktu obierzmy element powierzchni o tyle mały, aby go można było przyjąć za płaski.

Aby zbadać kierunek siły, działającej na element powierzchni przy a , wyobraźmy sobie dowolną część cieczy B , wewnątrz której znajdzie się punkt a ; płaszczyzna F, w której znajduje się element powierzchni przy punkcie a, rozdzieli B na dwie części B_1 i B_2 .



Rys. 2.

Na każdą cząsteczkę wydzielonej części cieczy działają siły zewnętrzne, jak siła ciężkości, siły magnetyczne, mogą cząsteczki cieczy znajdować też się pod wpływem siły dośrodkowej i td. Siły tego rodzaju nazwiemy objętościowymi, gdyż działają one na każdą cząsteczkę cieczy, zawartą w danej objętości; oprócz podanych sił na odciętą część cieczy działają jeszcze siły powierzchniowe, o których poprzednio mówiliśmy.

Oznaczmy przez $[O_1]$ grupę sił objętościowych, działających na cząstki części B_1 i przez $[O_2]$ grupę sił objętościowych, działających na cząstki części B_2; grupę sił powierzchniowych, zastępujących działanie odrzuconych cząsteczek cieczy, otaczających wydzieloną część, i działających na B_1, oznaczmy przez $[P_1]$, zaś na część B_2 przez $[P_2]$.- Prócz tych sił na B_1 działać będą siły powierzchniowe, zastępujące działanie części B_2 i przyczepione do punktów w płaszczyźnie dzielącej B_1 i B_2, oznaczmy grupę tych sił przez $[+P_o]$; wtedy odwrotnie wpływ części B_1 na B_2 zaznaczy się grupą sił równych, lecz odwrotnie skierowanych w porownaniu z siłami grupy $[+P_o]$; niech to będzie grupa sił $[-P_o]$.

Znajdzmy teraz warunki równowagi sił, które wyobrażamy przyłożynymi do wydzielonej części cieczy. W tym celu stosujemy zasadę prac przygotowanych.-

Jedno z wielu możliwych przesunięć cząsteczek wydzielonej części B będzie takie: niech część B_1 przesunie się na bardzo małą odległość po płaszczyznie F, zaś B_2 niech pozostanie na miejscu. Przy tym przesunięciu odpowiednie grupy sił wykonałyby stosowne prace. Do B_1 mamy przyłożone siły następujące: grupę sił objętościowych $[O_1]$, grupę sił powierzchniowych $[P_1]$ i $[P_o]$. Podczas podanego powyżej przesunięcia - przyłożone siły wykonają pracę: niech sumę prac sił z grupy $[O_1]$ oznacza symbol $T[O_1]$, sumę prac sił $[P_1]$ i $[P_o]$ odpowiednio oznaczmy przez $T(P_1)$ i $T(P_0)$, wtedy dla równowagi sił potrzeba i wystarcza, aby

$$T(O_1) + T(P_1) + T(P_0) = 0 \ldots (I)$$

Rozpatrzmy teraz B_1 i B_2 razem, wtedy otrzymamy, że siły przyłożone do B (czyli do B_1 i B_2 razem) stanowić będą grupy (O_1), (O_2), (P_1) i (P_2), gdyż siły grup (P_0) i $(-P_0)$ wzajemnie się znoszą. Gdybyśmy przy poprzednim przesunięciu rozpatrywali ciecz B , wtedy warunki równowagi sił przyłożonych do B na zasadzie prac przygotowanych określić będziemy mogli z równania

$$T(O_1) + T(O_2) + T(P_1) + T(P_2) = 0 \ldots\ldots (II)$$

Ponieważ, dalej przesuwamy tylko część B_1, nie ruszając B_2, więc siły, na część B_2 działające, prac żadnych nie wykonają, czyli że

$$T(O_2) = 0, \text{ i } T(P_2) = 0 \ldots\ldots (III).$$

Zestawiając równania II i III, otrzymamy, że

$$T(O_1) + T(P_1) = 0.$$

Odejmując to ostatnie równanie od równania I, znajdziemy, że

$$T(P_0) = 0 .$$

Równanie to wskazuje nam, że siły przyłożone do cząsteczek B_1 w płaszczyźnie rozdziału F , a przedstawiające oddziaływania B_2 na B_1, są takie, że praca ich jest zawsze równą zeru, bez względu na to, jak wielkie jest pole płaszczyzny F i jaki kształt posiada, gdyż pod tym względem przy poprzednim rozumowaniu żadnych zastrzeżeń nie robiliśmy. Wynik otrzymany jest tylko wtedy możliwy, kiedy siły grupy (P_0) wszystkie są prostopadłe do przesunięcia, czyli do płaszczyzny F.

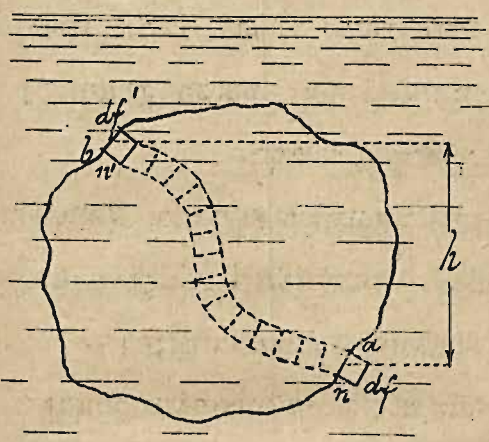
Ponieważ płaszczyzna rozdziału między B_1 i B_2 zawiera w sobie dowolnie obrany element powierzchni (rozpatrywanej na samym początku artykułu) wydzielonej cieczy A, otrzymujemy więc ważne twierdzenie, że s i ł y p o w i e r z c h n i o w e, d z i a ł a j ą c e n a j a k i k o l w i e k e l e m e n t p o w i e r z c h n i c i e c z y, b ę d ą c e j w r ó w n o w a d z e, s ą d o t e g o e l e m e n t u p r o s t o p a d ł e.

Możnaby dojść do tego samego wyniku drogą innego rozumowania: przypuśćmy, że kierunek siły powierzchniowej nie będzie prostopadły do elementu powierzchni cieczy, lecz pochyły, w takim razie siłę tę można rozłożyć na dwa kierunki: prostopadły do tego elementu i styczny. Siła prostopadła ma dążność do ściskania cieczy i wobec nieściśliwości jej żadnego skutku (ruchu) nie wywoła; siła zaś styczna przeciwnie cząsteczki cieczy mogłaby przesunąć bez zewnętrznej przyczyny. Tego jednak przy badaniu cieczy w równowadze nie dostrzegamy; zatym składowej stycznej siła powierzchniowa nie posiada, więc powinna być do odpowiedniego elementu prostopadła.

Gdy kierunek sił powierzchniowych, działających na wydzieloną część cieczy, w każdym miejscu powierzchni jest nam znany, pozostaje jeszcze określić ich wielkość.

Zwykle wielkość siły powierzchniowej odnosimy do jednostki pola ; tak określoną siłę powierzchniową nazywać będziemy c i ś n i e n i e m h y d r o s t a t y c z n y m.

Aby określić wielkość ciśnienia hydrostatycznego, obierzmy na powierzchni wydzielonej cieczy ciężkiej dwa elementy przy a i b ; pola tych elementów oznaczmy odpowiednio przez df i df'. Na ciecz wydzieloną działają prócz objętościowych sił ciężkości jeszcze siły powierzchniowe, zastępujące wpływ odrzuconej cieczy i



Rys. 3.

skierowane, jak wiemy, prostopadle do powierzchni w każdym jej punkcie. Oznaczmy przez p_b ciśnienie hydrostatyczne przy punkcie b, wtedy na pole elementu df' działa siła $df'.p_b$; oznaczmy dalej ciśnienie hydrostatyczne przy a przez p_a, wtedy na element df działa siła $p_a.df$.

Wyobraźmy sobie teraz, że cała powierzchnia, wydzielająca część cieczy, zesztywniała, za wyjątkiem elementów przy a i b ; równowaga rozpatrywanej części cieczy nic na tym nie ucierpi.

W celu zastosowania zasady prac przygotowanych przypuśćmy takie możliwe przesunięcie : niech element df' zostanie wsunięty do wnętrza cieczy; wielkość przesunięcia tego niech będzie = n' ; wobec tego, że cała powierzchnia zesztywniała, za wyjątkiem elementu przy a , więc element df powinien się wysunąć z cieczy przechodząc drogę n . Przebieg tego co zaszło możemy przedstawić sobie w ten sposób: element cieczy przy df' przesunął sąsiedni element cieczy, ten posunął następny i td. , aż wreszcie element cieczy przy df wysunął się po za granicę powierzchni , otaczającej rozpatrywaną ciecz.

Stosowanie zasady prac przygotowanych wymaga określenia pracy , którą by mogły wykonać wszystkie siły , działające na naszą ciecz podczas obranego przesunięcia.

Siły powierzchniowe wezmą udział w wykonaniu pracy przy przesunięciu przygotowanym tylko te , które działają na pola elementów przy punktach a i b; praca wykonana przez nie określi się :

$$+p_b \cdot df' \cdot n' - p_a \cdot df \cdot n$$

(znak minus przy drugim wyrazie wskazuje , że praca siły $p_a \cdot df$ jest ujemną, gdyż droga ma kierunek wprost przeciwny kierunkowi siły).

Z sił objętościowych w naszym przypadku działają tylko siły ciężkości. Przy obranym przesunięciu siły te mogły by wykonać pracę , ponieważ element cieczy przy punkcie b przesunie się na pewną odległość bardzo małą; następny element cieczy przesunie się dalej , i wówczas siła ciężkości , działająca na ten element cieczy, wykonać by mogła pewną pracę i td.; otrzymamy tą drogą w sumie pewną pracę,wykonaną przez siły ciężkości, przyłożono do różnych elementów cieczy. Łatwo dostrzedz, że tę samą ilość pracy otrzymamy, jeśli przypuścimy, że element cieczy z pod df' przenieśliśmy wprost pod element df, nie poruszając żadnej cząstki wewnątrz badanej cieczy. Kształt drogi, jaką element cieczy przenosiliśmy, w danym razie, na ilość pracy wykonanej wpływu nie ma, gdyż praca ta, jak wiadomo, zależy od wielkości rzutu drogi na stały kierunek siły ciężkości. Przyjmijmy zatym, że element cieczy o objętości $df'.n'$ przesunął się z b do a. Ciężar tego elementu cieczy będzie $df'.n'.\Delta$, gdzie przez Δ oznaczamy ciężar jednostki objętości cieczy; praca zaś, jaką wykona siła ciężkości przy przeniesieniu tego elementu z jednego miejsca do drugiego, określi się iloczynem z ciężaru tego elementu przez rzut drogi na kierunek siły, w danym razie przez h, to jest iloczynem $df'.n'.\Delta.h$. Ostatecznie suma prac przygotowanych przy obranym przesunięciu jest równa

$$p_b.df'.n' - p_a.df.n + df'.n'.\Delta.h.$$

Ponieważ wydzielona część cieczy jest w równowadze, więc określona suma prac przygotowanych $= 0$, zatym

$$p_b.df'.n' - p_a.df.n + df'.n'.\Delta.h = 0.$$

Ponieważ ciecz rozpatrywana jest nieściśliwą, więc $df'.n' = df.n$, skracając zatym nasze równanie, otrzymamy:

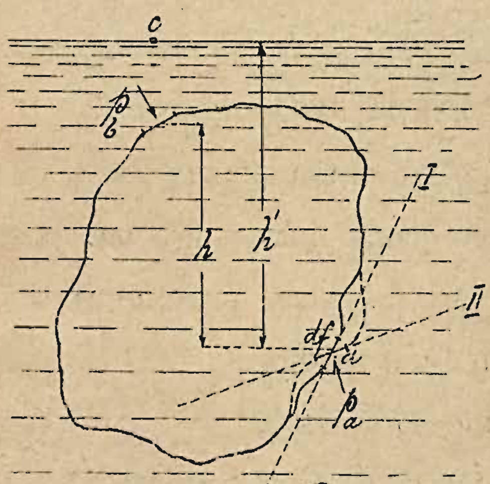
$$p_b - p_a + \Delta h = 0,$$

skąd $$p_a = p_b + \Delta h;$$

mamy więc, że <u>c i ś n i e n i e h y d r o s t a t y c z n e w j a k i m k o l w i e k p u n k c i e r ó w n a</u>

s i ę c i ś n i e n i u w i n n y m p u n k c i e, z w i ę k s z o n e m u o Δh , gdzie Δh można rozpatrywać, jako $\Delta . h . 1^2$, czyli jako c i ę ż a r s ł u p a c i e c z y, k t ó r y m a z a p o d s t a - w ę j e d n o s t k ę p o l a, a w y s o k o ś ć r ó w n ą r ó ż n i c y p o z i o m ó w o b y d w u p u n k t ó w. —

Wyobraźmy sobie, że przy punkcie a obraliśmy pewien element powierzchni df, który możemy uważać, jako znajdujący się na płaszczyźnie I ; ciśnienie hydrostatyczne jest w tym miejscu skierowane prostopadle do tego elementu. Obierzmy przy tym samym punkcie a element inny, obrócony względem poprzedniego o pewien kąt; niech płaszczyzna, w której znajduje się ten drugi element, będzie II; ciśnienie hydrostatyczne musi tu być znów prostopadłe do tego elementu. Co się zaś tyczy wartości ciśnień hydrostatycznych na elementy obrane przy a w płaszczyźnie I i II , to ciśnienia te będą zawsze sobie równe, n i e z a l e ż n i e o d t e g o, j a k j e s t p ł a s z c z y z n a e l e - m e n t u s k i e r o w a n a.



Rys. 2.

Naprowadza nas na ten wniosek bardzo proste rozumowanie .- Dobieramy taką powierzchnię, ograniczającą

 Jan Rożelski

wydzieloną część cieczy, żeby na niej znalazł się ten nowy rozpatrywany przez nas element powierzchni . Wówczas na podstawie podobnych do poprzednich rozumowań dojdziemy do tego wyniku, że i teraz

$$p_a = p_b + \Delta h$$

Jest to zresztą oczywiste , gdyż w poprzednim rozumowaniu nie było potrzeby i nie robiliśmy żadnych założeń co do kierunku obieranego przy danym punkcie elementu. W a r t o ś ć zatym c i ś n i e n i a h y d r o s t a t y c z n e g o n i e z a l e ż y o d k i e r u n k u e l e m e n t u, n a k t ó r y s z u k a m y c i ś n i e n i e, l e c z t y l k o o d p o ł o ż e n i a.

Rozważając równanie $p_a = p_b + \Delta h$, znajdziemy,że w przypadku , kiedy h = 0 , ciśnienie w punkcie a wyrazi się jako $p_a = p_b$, to jest c i ś n i e n i a h y d r o s t a t y c z n e w e w s z y s t k i c h p u n k t a c h n a p ł a s z c z y z n i e p o z i o m e j s ą j e d n a k o w e.

Z powyższego wynika również wniosek, że w cieczy możemy sobie wyobrazić nieskończoną ilość płaszczyzn poziomych , z których każdą ma punkty,posiadające jedno i to samo ciśnienie hydrostatyczne, lecz różne dla różnych płyszczyzn.

Z poprzedniego też jest widocznym , że swobodna powierzchnia cieczy, ktorej cząstki są poddane działaniu tylko siły ciężkości, powinna być płaszczyzną poziomą.

Gdybyśmy obrali rozpatrywaną część cieczy w ten sposób, że punkt b znalazłby się na swobodnej powierzchni cieczy np. w punkcie c , gdzie ciśnienie niech będzie p_o , wtedy , stosując poprzednie wzory, znajdziemy, że

$$p_a = p_o + \Delta h',$$

gdzie h' - jest pionowa odległość punktu a od punktu c na swobodnej powierzchni cieczy.

Przypuśćmy teraz, że ciśnienie na powierzchni cieczy zaczyna się zmieniać i przybiera odpowiednio wartości p_o', p_o'' , p_o''', ... itd., wówczas otrzymamy następujący szereg odpowiednich ciśnień w punkcie a

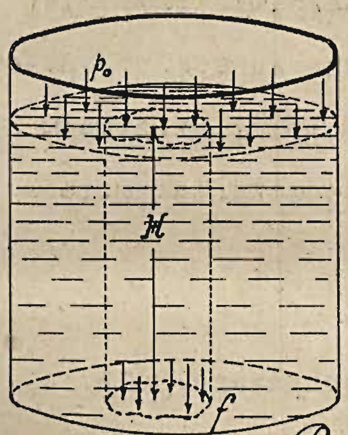
$$p_a' = p_o' + \Delta h'$$
$$p_a'' = p_o'' + \Delta h'$$
$$p_a''' = p_o''' + \Delta h'$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ldots\ldots \text{ itd.};$$

w równaniach tych, jak widzimy, drugi wyraz prawej strony jest ilością stałą . Rozpatrując powyższe zależności ciśnień , zauważymy , że z m i e n i a j ą c c i ś n i e n i a n a p o w i e r z c h n i c i e c z y, z m i e n i a m y o d p o w i e d n i o w s z y s t k i e c i ś n i e n i a w e w n ą t r z n i e j.

Jest to znane już skądinąd prawo Pascala , że ciecz przenosi ciśnienia we wszystkich kierunkach bez żadnej straty.

Określenie wielkości ciśnienia na pole płaszczyzny poziomej.

Dajmy na to , że mamy naczynie napełnione cieczą; obieramy na dnie poziomym tego naczynia pewne pole f ; znajdźmy siłę, z jaką ciecz na to pole ciśnie.



Rys. 5.

Wiemy, że w każdym punkcie dowolnego pola mamy ciśnienie hydrostatyczne odpowiednie do zanurzenia tego punktu pod swobodną powierzchnią cieczy. Na naszej płaszczyźnie poziomej f wszystkie punkty mają jednakowe ciśnienia hydrostatyczne; jeśli więc ciśnienie na powierzchnię cieczy oznaczymy przez p_o , wtedy ciśnienie w dowolnym punkcie powierzchni f będzie

$$p_1 = p_o + \Delta H ,$$

gdzie H jest zagłębieniem naszego pola pod swobodną powierzchnią cieczy . p_1 jest to ciśnienie na jednostkę pola , na całe więc pole f otrzymamy ciśnienie

$$P = p_1 . f = p_o f + \Delta H f , \quad \text{to jest}$$

Całkowite ciśnienie na płaskie poziome pole jest równe ciśnieniu zewnętrznemu na ciśnione pole $(p_o . f)$ zwiększonemu o c i ę ż a r s ł u p a c i e c z y $(\Delta H f)$, k t ó r y m a z a p o d s t a w ę p o l e c i ś n i o n e, a w y s o k o ś ć r ó w n ą g ł ę b o k o ś c i z a n u r z e n i a t e g o p o l a p o d s w o b o d n ą p o w i r z c h n i ą c i e c z y.

Oczywiście, mówiąc to, przypuszczamy, że z drugiej strony na ansze pole mamy ciśnienie równe zeru ; przypuszczając zaś, że istnieje tam ciśnienie p', otrzymamy dla wypadkowego ciśnienia P wartość odpowiednio zmniejszoną, a mianowicie

$$P = (p_o - p')f + \Delta H f .$$

Przypuszczając, że z drugiej strony naszego pola istnieje ciśnienie p_o równe ciśnieniu zewnętrznemu (np. mamy do czynienia z ciśnieniem atmosferycznym), otrzymamy całkowite ciśnienie

$$P = \Delta H f$$

to jest, że w tym wypadku całkowite ciśnienie będzie równe ciężarowi wspomnianego wyżej słupa cieczy.

Określiliśmy więc wartość ciśnienia całkowitego na płaszczyznę poziomą, inaczej - wypadkowe ciśnienie na pole poziome. Aby znaleść punkt, przez który ta wypadkowa powinna przejść, rozumujemy tak: ponieważ kierunki ciśnień elementarnych na pole elementarne są do wspólnej płaszczyzny prostopadłe, więc i wypadkowa powinna być do tej że płaszczyzny prostopadła, a ponieważ, dalej, ciśnienia elementarne są rozłożone na rozpatrywanym polu poziomym równomiernie, więc wypadkowa tych ciśnień przechodzić powinna przez środek ciężkości tego pola.

Punkt, znajdujący się na danym polu, przez który przechodzi wypadkowa ciśnień elementarnych nazywamy środkiem ciśnienia.

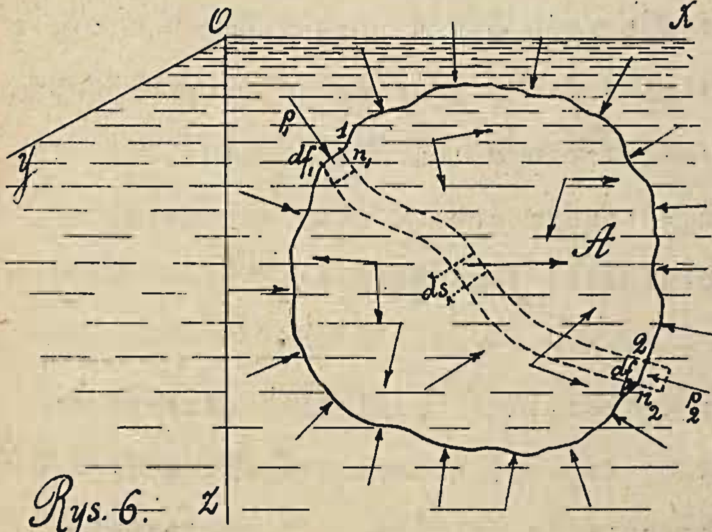
Dla pola poziomego zatym środek ciśnień znajdować się będzie w środku ciężkości tego pola.

Wszystko, cośmy dotąd mówili o ciśnieniu hydrostatycznym, dotyczy takiej cieczy, której cząsteczki poddane są działaniu tylko siły ciężkości. Rozpatrzmy teraz wypadek ogólniejszy, gdy na cząsteczki cieczy działają jakiekolwiek siły.

Ciśnienie hydrostatyczne oczywiście i w tym wypadku będzie skierowane do wnętrza cieczy i również będzie prostopadłe do powierzchni tego elementu, dla którego wartość ciśnienia hydrostatycznego określić zamierzamy.

Wyobraźmy sobie w tym celu ciecz, znajdującą się w równowadze; wydzielmy z tej cieczy pewną jej część A jakąkolwiek powierzchnią zamkniętą. Odrzućmy ciecz, będącą na zewnątrz wydzielającej powierzchni, i rozpatrzmy warunki równowagi wydzielonej części.- Dla równowagi części A trzeba przyłożyć do jej powierzchni szereg sił prostopadłych do elementów powierzchni i zastępujących działanie odrzuconej cieczy.

Na powierzchni wydzielonej części A obieramy dwa którekolwiek punkty , nap. punkty 1 i 2 ; przy punktach tych obieramy bardzo małe elementy płaszczyzn df_1 i df_2 ;



Rys. 6.

ciśnienia hydrostatyczne przy tych punktach oznaczmy odpowiednio przez p_1 i p_2. Niech na oddzielne cząsteczki cieczy A działają siły objętościowe dowolnie skierowane ; siły te niech będą takie, że jednostce masy mogłyby nadać (w razie możności poruszania się masy) przyśpieszenia k_1, k_2, k_3 i td.

Przypuśćmy teraz, że cała powierzchnia, ograniczająca naszą ciecz, zesztywniała za wyjątkiem elementów df_1 i df_2 ; dajmy na to , że element df_1 wciskamy do wnętrza cieczy na bardzo małą głębokość n_1 ; wówczas przesunięcie to udziela się sąsiednim cząsteczkom cieczy, i wreszcie przy punkcie 2 element df_2 wysunie się nazewnątrz zesztywniałej powierzchni o pewną odległość n_2 . Wobec założonej nieściśliwości cieczy, rzecz prosta, objętość

$$df_1 \cdot n_1 = df_2 \cdot n_2 .$$

Przyjmijmy podane przesunięcie za przygotowane i określmy pracę przygotowaną sił , działających na cząsteczki A podczas tego przesunięcia. - Przedewszystkiem co do sił powierzchniowych: pracę wykonać mogą tylko siły powierzchniowe, przyłożone do elementów przy punkach I i 2; wartości tych prac odpowiednio byłyby : w punckie 1 $df_1 \cdot n_1 \cdot p_1$, w punkcie 2 — $df_2 \cdot n_2 \cdot p_2$.– Znajdźmy teraz pracę, jaką mogłyby wykonać siły objętościowe , przyłożone do cząsteczek części A.

Przeniesienie się cząsteczek przy obranym przesunięciu można rozpatrywać tak, jak gdyby ciecz zawarta w elemencie objętości $df_1 \cdot n_1$ przesuneła się z położenia pierwszego do drugiego. Na cząsteczkę cieczy podczas jej przesunięcia działać powinny pewne siły; wartość każdej siły otrzymamy równą iloczynowi z masy , na którą siła działa, przez przyspieszenie , nadawane przez tę siłę jednostce masy.

Masę przesuwającego się elementu cieczy określimy, oznaczając przez Δ ciężar jednostki objętości i przez g – przyśpieszenie siły ciężkości, wzorem $\frac{\Delta\, df_1 \cdot n_1}{g}$; wtedy wartość siły , nadającej przyśpieszenie k_i równać się będzie

$$\frac{\Delta\, df_1 \cdot n_1}{g} \cdot k_i \, .$$

Na drodze, po której wystawiamy sobie , jakoby nasz element cieczy $df_1 \cdot n_1$ przesuwa się , obierzmy bardzo małą część tej drogi ds; praca , jaką wykona siła , działająca na element cieczy , podczas drogi ds określi się wzorem

$$\frac{\Delta\, df_1 n_1}{g} \cdot k_i \, ds . \cos(k_i , ds),$$

gdzie (k_i , ds) oznacza kąt, jaki tworzy kierunek k_i z ds. Gdybyśmy zgodnie z tym wzorem określili prace , jakie wykonają wszystkie siły objętościowe , działające na ten sam przesuwany element cieczy $df_1.n_1$, a następnie prace te zsumowali , otrzymalibyśmy

$$\sum \frac{\Delta . df_1 . n_1}{g} k_i \cdot ds . cs(k_i, ds).$$

Ponieważ iloczyn masy przez drogę jest wielkością niezmienną podczas sumowania sił, zatym wyraz ten wziąć należy za nawias, to jest przed znak $\sum$, w nawiasach zaś zostanie suma wyrazów $k_i . \cos(k_i, ds)$, wziętych dla siły pierwszej, drugiej - i t.d. aż do m-tej ; w rezultacie otrzymamy

$$\frac{df_1 . n_1 . \Delta ds}{g} \sum_{i=1}^{i=m} k_i cs(k_i, ds).$$

Wzór ten wyraża pracę wszystkich sił objętościowych, działających na przesuwaną cząsteczkę cieczy podczas drogi ds ; by otrzymać pracę na całej drodze, począwszy od punktu 1-go aż do 2-go, należy wyraz powyższy zcałkować w tych właśnie granicach .- Praca całkowita wszystkich sił podczas przygotowanego przesunięcia będzie zatym równa

$$\int_1^2 \frac{df_1 . n_1 . \Delta}{g} ds \sum_{i=1}^{i=m} k_i . cs(k_i, ds).$$

Wyrażenie powyższe przedstawimy w odmiennej postaci, o wiele bowiem jest dogodniej mieć do czynienia z rzutami przesunięć i sił na trzy osi spółrzędnych, niż rozpatrywać wartości sił i kierunki ich w każdym punkcie odrębnie.

Z geometryi analitycznej wiadomo, iż

$$k_i . ds . cs(k_i, ds) = X_i dx + Y_i dy + Z_i dz \ldots (1),$$

gdzie $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{Y}_i$, $\mathcal{Z}_i$ są to rzuty przyśpieszenia k_i na trzy osi rzutów, zaś dx, dy, dz - rzuty przesunięcia ds na też osi. Teraz wyrażenie dla całkowitej pracy przesunięcia od punktu I-go do punktu 2-go

$$\int_1^2 \frac{df_1\, n_1 . \Delta}{g} \sum_{i=1}^{i=m} k_i\, ds . cs(k_i, ds),$$

w którym ds wnieśliśmy pod znak sumowania, po uwzględnieniu równania (I) przyjmie postać

$$\int_1^2 \frac{df_1 . n_1 . \Delta}{g} \sum_{i=1}^{i=m} (\mathcal{X}_i dx + \mathcal{Y}_i dy + \mathcal{Z}_i dz) =$$

$$= \int_1^2 \frac{df_1 n_1 \Delta}{g} \left\{ dx \sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{X}_i + dy \sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{Y}_i + dz \sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{Z}_i \right\}$$

Wyrazy $\sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{X}_i$, $\sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{Y}_i$, $\sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{Z}_i$, przedstawiające sumę rzutów przyśpieszeń składowych na odpowiednią oś rzutów, można zastąpić odpowiednimi rzutami przyśpieszenia wypadkowego X, Y, Z, czyli że

$$\sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{X}_i = X; \quad \sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{Y}_i = Y; \quad \sum_{i=1}^{i=m} \mathcal{Z}_i = Z .$$

Wstawmy we wzór na pracę wyrazy X, Y i Z, a wielkości stałe wynieśmy przed znak całki, wtedy otrzymamy dla pracy przesunięcia wyrażenie

$$\frac{df_1 . n_1 . \Delta}{g} \left\{ \int_1^2 X dx + \int_1^2 Y dy + \int_1^2 Z dz \right\}, \text{ albo}$$

$$\frac{df_1 . n_1 . \Delta}{g} \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz);$$

taką jest praca sił objętościowych przy przesunięciu elementu cieczy $df_1 . n_1$ z punktu I-go do 2-go. Teraz możemy już napisać równanie równowagi sił na zasadzie prac przygotowanych dla rozpatrywanego przesunięcia

$$p_1 . df_1 . n_1 - p_2 . df_2 . n_2 + \frac{df_1 . n_1 \Delta}{g} \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) = 0.$$

Skracamy przez $df_1 . n_1 = df_2 . n_2$ i otrzymujemy ostateczne równanie równowagi cieczy, podległej siłom jakimkolwiek objętościowym:

$$p_1 - p_2 + \frac{\Delta}{g} \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz) = 0,$$

a stąd

$$p_2 = p_1 + \frac{\Delta}{g} \int_1^2 (X dx + Y dy + Z dz).$$

Równanie to dozwoli nam określić ciśnienie hydrostatyczne w punkcie 2-im, o ile wiadome jest nam ciśnienie w punkcie I-ym oraz wiadomą będzie praca, jaką wykonają siły objętościowe przy przesunięciu cząsteczki cieczy od punktu I-go do 2-go.

Otrzymany wzór sprawdzić możemy dla rozpatrzonego już poprzednio przypadku, gdy ciecz jest tylko ciężką. Wtedy jedyna siła objętościowa - siła ciężkości - daje w kierunku pionowym przyśpieszenie $g = Z$; przyśpieszenia w dwu kierunkach poziomych X i Y równe są zeru; równanie ostatnie przyjmie wtedy postać

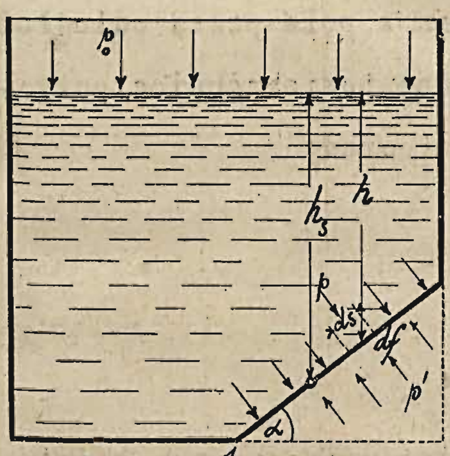
$$p_2 = p_1 + \frac{\Delta}{g} \int_1^2 g\, dz = p_1 + \frac{\Delta g}{g} \int_1^2 dz = p_1 + \Delta h,$$

gdzie h jest to odległość pionowa między punktami 1-ym i 2-im. Wzór, jak widzimy, jest ten sam, co poprzednio otrzymany.

Ciśnienie na pole płaszczyzny pochyłej.

Wyobraźmy sobie naczynie ze ścianą pochyłą; chodzi o określenie ciśnienia na pole tej ściany; kształt pola jest dla nas obojętny.

Wystawmy sobie, że cała ta płaszczyzna podzielona została na poziome paski o szerokości ds; ciśnienie w każdym punkcie takiego paska możemy uważać za stałe i równe np. p; ciśnienie pełne na cały pasek będzie $p.df$, gdzie df jest pole paska. By znaleść ciśnienie na całą rozpatrywaną płaszczyznę,



Rys. 7.

należałoby określić ciśnienia kolejno dla wszystkich elementarnych pasków, a następnie wszystkie te ciśnienia zsumować, inaczej mówiąc zcałkować wyraz $P = \int_1^2 p.df$ w granicach zadanego pola.

Wiemy że $p = p_0 + \Delta h$, gdzie p_0 jest to ciśnienie na swobodnej powierzchni cieczy, Δ ciężar jednostki objętości cieczy, $\underline{h}$ głębokość zanurzenia rozpatrywanego paska elementarnego pod powierzchnią swobodną cieczy.

Podstawiając wartość na p w równanie całkowe, otrzymamy

$$P=\int_1^2(p_0+\Delta h)df=\int_1^2 p_0 . df+\int_1^2\Delta h . df=$$

$$=p_0\int_1^2 df+\Delta\int_1^2 h . df=p_0 f+\Delta\int_1^2 h . df;$$

iloczyn h.df jest momentem elementu df względem swobodnej powierzchni cieczy; jak wiadomo ze statyki, suma takich momentów da nam moment całego pola rozpatrywanego względem tej samej swobodnej powierzchni cieczy; moment zaś całego pola mierzy się iloczynem z pola przez odległość jego środka ciężkości od swobodnej powierzchni cieczy. Odległość tę oznaczymy przez h_s, wtedy

$$\int_1^2 h . df=f . h_s,$$

a dalej otrzymamy

$$P=p_0 . f+\Delta . f . h_s .$$

Równanie to odczytamy tak: c i ś n i e n i e c a ł k o w i t e c i e c z y, b ę d ą c e j w s p o c z y n k u, n a p ł a s z c z y z n ę p o c h y ł ą r ó w n a s i ę c i ś n i e n i u z e w n ę t r z n e m u n a c i ś n i o n e p o l e, p o w i ę k s z o n e m u o c i ę ż a r s ł u p a c i e c z y, k t ó r e g o p o d s t a w ą j e s t c i ś n i o n e p o l e, a w y s o k o ś c i ą j e s t o d l e g ł o ś ć ś r o d k a c i ę ż k o ś c i c i ś n i o n e g o p o l a o d p o w i e r z c h n i c i e c z y.

Ciśnienie całkowite , które powyżej dla pola f otrzymaliśmy , jest prostopadłe do płaszczyzny pola, gdyż wszystkie składowe tego ciśnienia są prostopadłe do tej właśnie płaszczyzny. - Jeśli ciśnienie na drugą stronę rozpatrywanej płaszczyzny istnieje i oznaczymy je przez p′ , wtedy wypadkowe ciśnienie od strony cieczy będzie

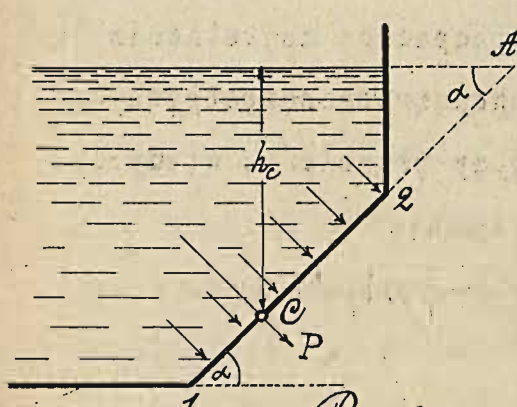
$$P' = p_0 f + \Delta f \cdot h_s - p' f = (p_0 - p') f + \Delta f h_s .$$

W tym wypadku , gdy $p_0 = p'$,

$$P' = \Delta f \cdot h_s .$$

Ś r o d e k c i ś n i e n i a.

Punkt na naszym polu f obrany, przez który przechodzi kierunek wypadkowej ciśnień n i e będzie w środku ciężkości pola , gdyż ciśnienia na paski ,będące głębiej, będą większe , niż na paski , położone wyżej; punkt ten zwany ś r o d k i e m c i ś n i e n i a r o z w a ż a n e g o p o l a znajdziemy drogą następującą: przedłużamy płaszczyznę 1-2 do przecięcia się z płaszczyzną swobodnej powierzchni cieczy (rys. 8); otrzymaną linię przecięcia , przechodzącą przez punkt A ,obieramy za oś, względem której określimy momenty elementarnych ciśnień na pola elementarne i moment wypadkowej tych ciśnień. Oznaczmy wypadkową siłę ciśnień na badane pole przez P , odległość jej punktu przyłożenia C od swobodnej powierzchni cieczy przez h_c , wtedy moment wypadkowej ciśnień P względem swobodnej powierzchni będzie równy $P.h_c$, względem zaś osi A, - równy $\frac{P.h_c}{\sin\alpha}$, gdyż $CA=\frac{h_c}{\sin\alpha}$, gdzie α oznacza kąt pochylenia płaszczyzny 1-2 względem poziomu.



Rys. 8.

W podobny sposób rozumując, otrzymamy, iż moment ciśnienia, działającego na dowolny element df danego pola względem osi A będzie równy $p.df.\frac{h}{\sin\alpha}$. Ponieważ suma momentów sił składowych równa się momentowi siły wypadkowej, wziętej względem tej samej osi, przeto

$$\int_1^2 p.df.\frac{h}{\sin\alpha}=\frac{P.h_c}{\sin\alpha};$$

skracamy przez $\sin\alpha$ i wtedy

$$P.h_c=\int_1^2 p.df.h.$$

Pozostaje określić całkę w granicach pola rozpatrywanego. Zamiast p podstawiamy jego wartość $p=p_0+\Delta h$, całkę zaś sumy zamieniamy przez sumę całek

$$\int_1^2 p.df.h=\int_1^2 p_0.df.h+\int_1^2 \Delta h.h.df=$$

$$=p_0\int_1^2 df.h+\Delta\int_1^2 h^2 df=p_0.f.h_s+\Delta\int_1^2 h^2 df.$$

Ostatni wyraz będziemy nazywali momentem bezwładności pola względem swobodnego poziomu cieczy i oznaczymy go przez J ; wtedy mieć będziemy

$$\int_1^2 p \cdot df \cdot h = p_o \cdot f \cdot h_s + \Delta J .$$

Zatym równanie (I) napiszemy

$$P \cdot h_c = p_o \cdot f \cdot h_s + \Delta J ,$$

a stąd otrzymamy

$$h_c = \frac{p_o f \cdot h_s + \Delta J}{P} ;$$

ponieważ zaś $P = p_o f + \Delta h_s \cdot f$, więc ostatecznie

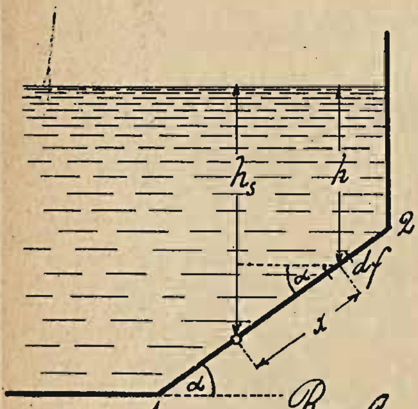
$$h_c = \frac{p_o f \cdot h_s + \Delta J}{p_o f + \Delta h_s f} .$$

W ten sposób położenie środka ciśnienia mamy określone.

Rozważmy teraz , czy miejsce środka ciśnienia będzie się zmieniało, jeśli płaszczyznę 1-2 pochylać będziemy pod różnymi kątami do poziomu, pozostawiając na miejscu poziomą oś , przesuniętą przez środek ciężkości danego pola. Z wyrażenia na h_c widzimy, że zmiana h_c zależeć będzie od zachowania się J przy różnych kątach α .

Odnajdźmy teraz jaka istnieje zależność między momentem bezwładności J płaszczyzny I-2 względem swobodnej powierzchni cieczy , a kątem α — pochylenia tej płaszczyzny do poziomu.

Obierzmy element df odległy od środka ciężkości płaszczyzny I-2 o x (rys. 9) ; głębokość zanurzenia tego elementu pod swobodnym poziomem cieczy w naczyniu niech będzie h , wtedy moment bezwładności elementu df względem tego poziomu wyrazi się iloczynem $df.h^2$. Z rysunku otrzy-



Rys. 9.

mamy, że $h = h_s - x.\mathrm{sn}\,\alpha$,
stąd zaś po podstawieniu

$$df.h^2 = df(h_s - x\,\mathrm{sn}\,\alpha)^2.$$

Aby otrzymać moment bezwładności J całego pola 1-2 względem swobodnego poziomu cieczy, należy wyliczyć w ten sposób momenty dla wszystkich elementów pola i następnie te momenty zsumować, innymi słowy

$$J = \int_1^2 df(h_s - x\,\mathrm{sn}\,\alpha)^2 = \int_1^2 h_s^2 df - \int_1^2 2x.h_s.\mathrm{sn}\,\alpha.df + \int_1^2 x^2 \mathrm{sn}^2\alpha.\,df.$$

W pierwszej całce h_s jest wielkością stałą, wychodzi więc przed znak całki, a pod całką pozostanie df; zaś

$$\int_1^2 df = f \quad, \text{ więc } \int_1^2 h_s^2 df = h_s^2.f.$$

W całce drugiej $\int_1^2 2x.h_s.\mathrm{sn}\,\alpha.\,df$ stałą wielkością jest $2h_s\,\mathrm{sn}\,\alpha$, wyrzucając ją przed znak całki, otrzymamy $2h_s\,\mathrm{sn}\,\alpha \int_1^2 x.df$; $\int_1^2 x.df$, jak wiemy ze statyki przedstawia nam moment statyczny płaszczyzny 1-2 względem jej środka ciężkości, a więc równa się zeru. Zatem wyraz drugi = 0.

W trzeciej całce $\int_1^2 \sin^2\alpha.\,x^2.\,df$ wynosimy $\mathrm{sn}^2\alpha$ przed znak całki, całka wtedy przedstawia nam moment bezwładności płaszczyzny 1-2 względem osi poziomej, poprowadzonej

 Zamkorzelski 19/III 09

przez środek ciężkości. Oznaczmy moment ten przez $\dot{I}$, wtedy

$$\int_1^2 \sin^2\alpha . x^2 . df = \sin^2\alpha \int_1^2 x^2 df = \sin^2\alpha . \dot{I} .$$

Ostateczny wzor dla J po podstawieniu otrzymanych wartości całek , przyjmie postać

$$J = h_s^2 f + \sin^2\alpha . \dot{I} .$$

Widzimy z tego wzoru, że wartość na J zależy od kąta α , a więc i wartość h_c, wyznaczająca nam położenie środka ciśnienia przy zmianie $\sphericalangle\alpha$, również się zmienia.

Jeśli $\alpha = 0$, $\sin\alpha = 0$, i wtedy $J = h_s^2 \cdot f$ i

$$h_c = \frac{p_0 . f . h_s + \Delta h_s^2 . f}{p_0 f + \Delta f . h_s} = \frac{h_s (p_0 f + \Delta f . h_s)}{p_0 f + \Delta f . h_s} = h_s ,$$

to jest g d y m a m y d o c z y n i e n i a z p ł a s z c z y z n ą p o z i o m ą, ś r o d e k c i ę ż k o ś c i b ę d z i e j e d n o c z e ś n i e ś r o d k i e m c i ś n i e n i a.

Jeśli płaszczyzna , na którą ciśnienia szukamy, jest pionową ,to jest gdy $\alpha = 90°$, $\sin\alpha = 1$, i wtedy

$$J_{90°} = h_s^2 f + \dot{I} ,$$

a dalej , otrzymamy odpowiednią wartość na h_c.

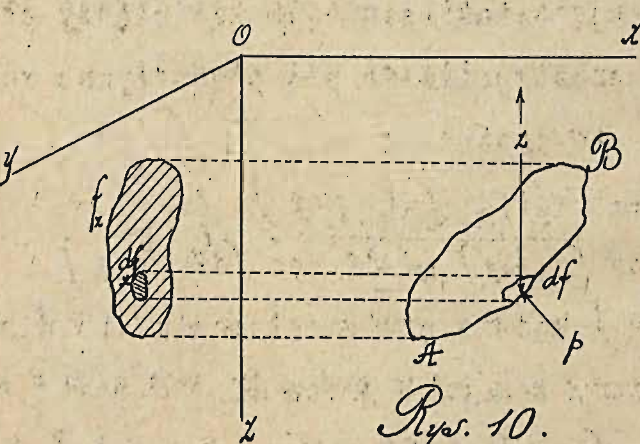
C i ś n i e n i e n a p o w i e r z c h n i ę d o w o l n ą.

Niech będzie naczynie jakiekolwiek napełnione cieczą; w naczyniu tym obieramy dowolną powierzchnię . Na rozpatrywanej powierzchni obieramy element df, ciśnienie hydro-

statyczne w tym punkcie jest, jak wiemy, zależne od ciśnienia zewnętrznego i od głębokości zanurzenia elementu df pod poziomem cieczy w naczyniu: $p = p_0 + \Delta z$.
Ciśnienie na element df równa się

$$p \cdot df = p_0 \cdot df + \Delta z \, df .$$

Dla otrzymania ciśnienia na całą rozpatrywaną powierzchnię, trzebaby w powyższy sposób obliczyć ciśnienia na wszystkie elementy tej powierzchni, a następnie je zsumować; sumowanie to jednak musimy uskutecznić geometrycznie, to jest



Rys. 10.

z uwzględnieniem nietylko wielkości składowych ciśnień, ale i ich kierunków. Sumowanie geometryczne oznaczymy symbolicznie, całkowite więc ciśnienie otrzymamy z wzoru

$$P = \int (p_0 \, df + z \Delta \, df) .$$

Postępowanie takie jednak byłoby zbyt kłopotliwe, obierzemy więc inną drogę. Odnieśmy powierzchnię zadaną do układu spółrzędnych prostokątnych. Układ ten obieramy tak, że płaszczyzna xoy jest pozioma i znajduje się na swobodnej powierzchni cieczy, zaś oś zetów jest pionowa i skierowana wdół. Do tego układu odnieśmy również i elementarne ciśnienie na pole df. Rzuty siły p.df na osi x, y, z znajdziemy odpowiednio

$$p.df\cos(p,x),$$
$$p.df\cos(p,y),$$
$$p.df\cos(p,z),$$

gdzie (p,x), (p,y), (p,z) są to kąty, jakie tworzy kierunek ciśnienia p z osiami x,y,z.

Kąt pomiędzy p i x jest taki sam, jak kąt między płaszczyzną elementu df, prostopadłą do p i płaszczyzną xoy prostopadłą do osi x; to jest

$$\text{Kąt } (p,x) = \text{kątowi } (df, zoy);$$

stąd wynika, że $df.\cos(p,x) = df.\cos(df, xoy)$, czyli, że $df.\cos(p,x)$ będzie rzutem elementu df na płaszczyznę xoy; oznaczmy ten rzut przez df_x to jest

$$df.\cos(p,x) = df_x;$$

w podobny sposób otrzymamy

$$df.\cos(p,y) = df_y,$$
$$df.\cos(p,z) = df_z.$$

Jeśli prócz powyższych zależności uwzględnimy, że $p = p_o + \Delta z$, wtedy znajdziemy, że składowe ciśnienia p.df, wzięte w kierunku trzech obranych osi, będą:

$$(p_o + \Delta z)\,df_x$$
$$(p_o + \Delta z)\,df_y$$
$$(p_o + \Delta z)\,df_z.$$

Sumując rzuty na oś x wszystkich sił, działających na elementy rozpatrywanej powierzchni, otrzymamy rzut wypadkowej siły na oś x $P_x = \int_A^B (p_o + \Delta z)\,df_x =$

$$= \int_A^B p_0 \, df_x + \int_A^B \Delta z . df_x = p_0 \int_A^B df_x + \Delta \int_A^B z . df_x .$$

Rozpatrzmy każdą całkę oddzielnie ; df_x przedstawia, jak mówiliśmy, rzut elementu df na płaszczyznę zoy ; jeśli zsumujemy rzuty wszystkich elementów, składających powierzchnię f , otrzymamy rzut powierzchni tej na płaszczyznę zoy ; oznaczmy ten rzut przez f_x i wtedy

$$\int_A^B df_x = f_x .$$

W drugiej całce iloczyn $z.df_x$ pod znakiem całki przedstawia moment rzutu df_x względem swobodnej powierzchni cieczy; suma tych momentów da nam moment statyczny pola rzutu f_x względem tegoż swobodnego poziomu cieczy

$$\int_A^B z . df_x = f_x . z' ,$$

gdzie z′ jest to odległość środka ciężkości pola f_x od swobodnej powierzchni cieczy w naczyniu.- Ostatecznie

$$P_x = p_0 f_x + \Delta f_x . z'$$

Rzut na oś x ciśnienia całkowitego składa się z dwóch składników : pierwszy ciśnienie zewnętrzne na rzut rozpatrywanej powierzchni na płaszczyznę zoy , drugi - ciężar słupa cieczy, którego podstawą jest rzut ciśnionej powierzchni na płaszczyznę zoy , a wysokością - odległość środka ciężkości rzutu tego od swobodnej powierzchni cieczy.

Zachodzi teraz pytanie, gdzie jest punkt przyłożenia tej siły, a właściwie punkt, przez który przechodzi kierunek siły. Rozumowanie nasze będzie zupełnie takie samo, jak przy określaniu środka ciśnienia na rzut f_x, będący w płaszczyźnie zoy ; głębokość, na jakiej znajdzie się środek ciśnienia, otrzymamy z wzoru

$$h_c = \frac{p_0 f_x \cdot z' + \Delta J}{p_0 f_x + \Delta f_x \cdot z'}.$$

Zupełnie w ten sam sposób postępując, co poprzednio, otrzymamy rzut całkowitego ciśnienia na rozpatrywaną powierzchnię w kierunku osi y, czyli P_y ; mianowicie

$$P_y = \int_A^B p_0 df_y + \int_A^B \Delta z \, df_y = p_0 \int_A^B df_y + \Delta \int_A^B z \, df_y$$

$$P_y = p_0 f_y + \Delta f_y \cdot z''.$$

Oznaczenia liter są podobne do poprzednich, mianowicie f_y jest to rzut powierzchni rozpatrywanej na płaszczyznę zox ; z'' — odległość środka ciężkości rzutu f_y od swobodnej powierzchni cieczy; p_0 — ciśnienie zewnętrzne.

Gdybyśmy mieli do określenia rzutu całkowitego ciśnienia na jakąkolwiek oś k, leżącą w płaszczyźnie (xoy) swobodnego poziomu cieczy, wtedy dla określenia rzutu tego otrzymalibyśmy wzór

$$P_k = p_0 f_k + \Delta f_k \cdot z''',$$

gdzie f_k oznacza rzut powierzchni f na płaszczyznę prostopadłą do kierunku k, zaś z''' oznacza odległość środka ciężkości tego rzutu f_k od swobodnej powierzchni cieczy.

Przejdźmy do określenia rzutu P_z ciśnienia na rozpatrywaną powierzchnię w kierunku pionowej osi z . Podobnie jak pierwej,

$$P_z = \int_A^B p_0 df_z + \int_A^B \Delta z df_z = p_0 f_z + \Delta \int_A^B z df_z .$$

Rys. 11.

Gdybyśmy linię , ograniczającą element df , wzięli za kierownicę , wzdłuż tej linii przesuwali linię stale równoległą do osi z , otrzymalibyśmy odpowiednią powierzchnię walcową, sięgającą swobodnej powierzchni cieczy. Znajdziemy wtedy,że iloczyn $df_z.z$ określa nam objętość słupa cieczy, ujętego z boków powyższą powierzchnią walcową , u dołu elementem pola df i u góry rzutem df_z. Wtedy suma podobnych wyrazów $df_z.z$,czyli $\int_A^B df_z.z$ da nam objętość cieczy, która jest od dołu ograniczona rozpatrywaną powierzchnią, z boków powierzchnią walcową , otaczającą powierzchnię zadaną, a z góry płaszczyzną xoy. Oznaczmy objętość tę przez V , wtedy po podstawieniu otrzymamy, że

$$P_z = p_0 f_z + \Delta V .$$

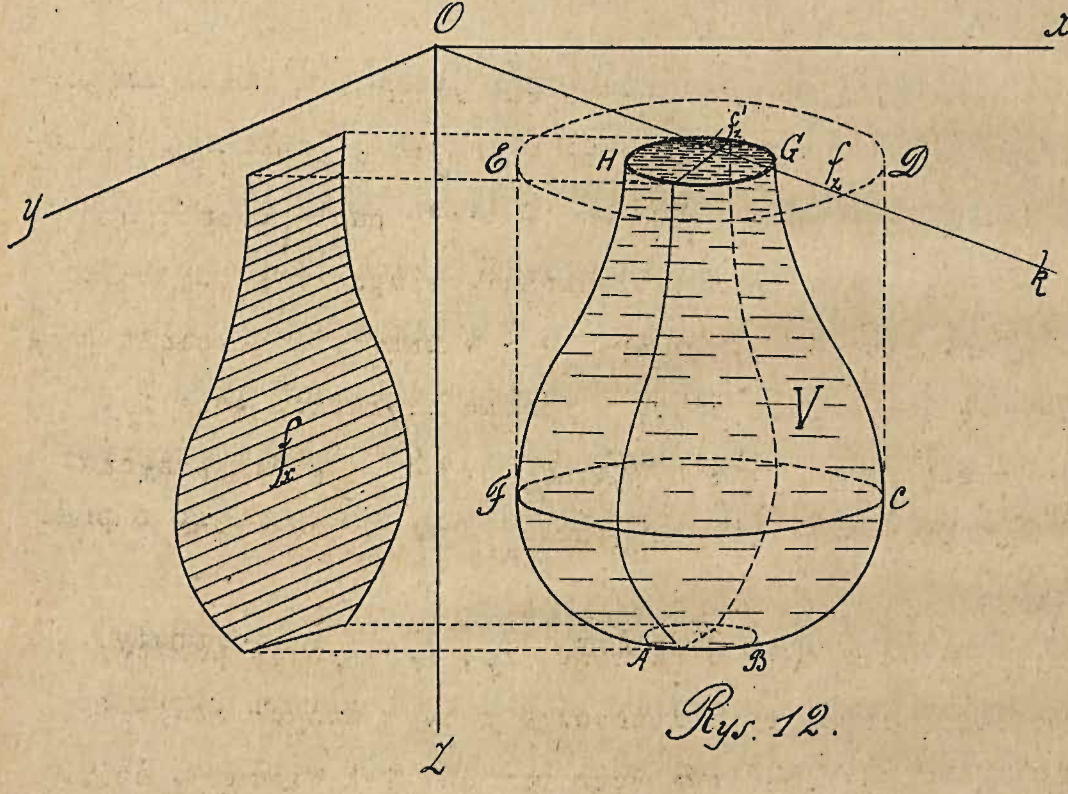
Słowami wypowiemy równanie powyższe tak: *rzut pionowy całkowitego ciśnienia na dowolną powierzchnię równa się ciśnieniu zewnętrznemu na rzut tej powierzchni na płaszczyznę poziomą, powiększonemu o ciężar* s ł u p a c i e c z y, k t ó r y o d d o ł u o g r a- n i c z o n y j e s t p o w i e r z c h n i ą z a d a- n ą, o d g ó r y p ł a s z c z y z n ą s w o b o d n ą c i e c z y, a z b o k ó w u j ę t y j e s t p o- w i e r z c h n i ą w a l c o w ą , o t a c z a j ą c ą p o w i e r z c h n i ę f .

Co się tyczy określenia środka pionowego rzutu ciśnienia, zauważymy, co następuje: gdy $p_o = 0$, wartość pionowego rzutu ciśnienia $P_z = \Delta V$ i wtedy punkt przyczepienia siły ΔV będzie w środku ciężkości słupa, którego objętość równa się V ; gdyby $V = 0$ w takim razie punkt przyczepienia siły $p_o \cdot f_z$ byłby w środku ciężkości pola f_z, a zatem gdy mamy siłę równą $p_o f_z + \Delta V$, punkt przyczepienia wypadkowej tych sił znajdziemy, korzystając z praw statyki.

W rezultacie mamy określone P_x , P_y , P_z oraz punkty, przez które rzuty te przechodzą. Z tych danych określić będziemy mogli wypadkową tych rzutów. Jak wiadomo, otrzymamy w ogólnym przypadku jedną wypadkową siłę i parę sił, której płaszczyzna jest prostopadła do wypadkowej, albo co na jedno wychodzi, dwiema siłami skośnymi.

Ciśnienie cieczy na ścianki naczynia.

Wyobraźmy sobie naczynie dowolnego kształtu napełnione cieczą , będącą w spoczynku. Ciecz ta, jak wiemy, wywiera ciśnienia na ściankę naczynia w kierunku prostopadłym do powierzchni w danym punkcie. Obierzmy układ spółrzędnych, przyjmując swobodny poziom cieczy w naczyniu za płaszczyznę xoy , pionową zaś, skierowaną na dół, za oś z.



Rys. 12.

Znajdźmy, jakie jest ciśnienie cieczy w tym naczyniu na ścianki jego w kierunku osi x . O ile takie ciśnienie istniałoby , moglibyśmy przy odpowiednich warunkach otrzymać ruch naczynia w kierunku x . W tym celu owińmy nasze naczynie powierzchnią walcową, której tworząca jest równoległa do x, a więc prostopadła do zoy i niech tworząca ta będzie stale styczną do powierzchni naczynia.

Powierzchnia walcowa dotknie naszego naczynia po pewnej krzywej, która dzieli powierzchnię naczynia na dwie części . Rzuty obu tych części na płaszczyznę yoz będą równe , a więc i ciśnienie na lewą część ścianki naczynia będzie takie samo jak i na prawą , kierunki jednak tych ciśnień będą wprost przeciwne, przy dodaniu ciśnienia te się zniosą i wypadkowa w kierunku osi x będzie zerem.

Ten sam wynik otrzymamy i dla ciśnienia w kierunku osi y ; to samo znajdziemy dla jakiegokolwiek kierunku Ok - obranego w płaszczyźnie poziomej. Zatym powiemy, że ciecz nie wywiera na naczynie żadnego ciśnienia w jakimkolwiek kierunku poziomym.

Rozpatrzmy teraz ciśnienie w kierunku pionowym. Powinniśmy tu odróżniać ciśnienie cieczy na całe naczynie od ciśnienia cieczy na samo tylko dno. Z poprzedniego wiemy, iż ciśnienie na dno w kierunku pionowym

$$P_z = p_0 f_z + \Delta V,$$

gdzie f_z - jest pole rzutu dna f na płaszczyznę xoy, a V- objętość znanego nam słupa cieczy. Gdyby dno o polu f było płaskie i poziome, wtedy

$$P_z = p_0 f + \Delta f . h ,$$

gdzie h —głębokość zanurzenia dna pod swobodną powierzchnią cieczy w naczyniu. Widzimy stąd , że wogóle ciśnienie na dno naczynia w kierunku pionowym zależy tylko od powierzchni dna i odległości jego od swobodnego poziomu cieczy, a nie zależy wcale od kształtów naczynia.

Jeśli mamy określić ciśnienie całkowite na nasze naczynie, będziemy musieli postępować w taki sposób.- Owińmy nasze naczynie powierzchnią walcową, której tworząca będzie równoległa do osi z i stale dotykać będzie ścianek naczynia. Linia , po której powierzchnia walcowa dotknie ścianek naczynia, rozdzieli jego powierzchnię na dwie części; nazwijmy je - górną i dolną.

Rzut części dolnej na płaszczyznę yox oznaczmy przez f_z ; rzut części górnej będzie $f_z - f_z'$, gdzie f_z' w naszym przypadku jest rzutem swobodnej powierzchni cieczy .(Jeślibyśmy mieli naczynie o kształtach więcej złożonych, łatwo jest znaleść drogę właściwą do określenia ciśnienia P_z).- Z poprzedniego wiemy, że całe ciśnienie P_z zależy od ciśnienia zewnętrznego p_o i od ciężaru cieczy odpowiedniej objętości. Wpływ ciśnienia zewnętrznego na część dolną ścianki naczynia wyrazi się ciśnieniem $p_o f_z$, skierowanym ku dołowi, na część górną ścianki naczynia - ciśnieniem $p_o(f_z - f_z')$, skierowanym ku górze. Wypadkowa tych ciśnień będzie

$$f_z p_o - (f_z - f_z')p_o = f_z' p_o .$$

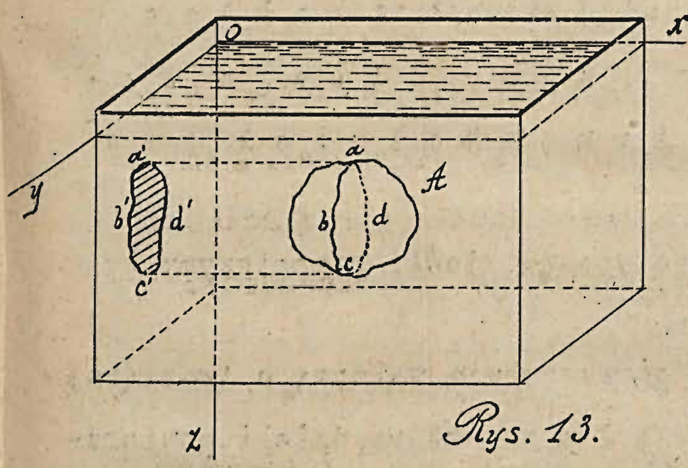
Znajdźmy teraz drugą część ciśnienia P_z, zależną od ciężaru cieczy. Na dolną część naczynia otrzymamy ciśnienie (w kierunku pionowym) równe ciężarowi cieczy ABCDEF; kierunek tego ciśnienia jest zwrócony na dół; na górną część naczynia mamy ciśnienie równe ciężarowi cieczy objętości pierścienia EFHGCD , ciśnienie to skierowane jest pionowo ku górze; w rezultacie całe ciśnienie P_z określimy, dodając a l g e b r a i c z n i e ciężary powyższych dwu objętości, przyczym pierwszą objętość uważać należy za dodatnią, drugą za ujemną; otrzymamy wtedy, ponieważ suma a l g e b r a i c z n a podanych (objętości) równa jest objętości V cieczy zawartej w naczyniu, że

$$P_z = f_z' p_o + \Delta V.$$

Zatym ciśnienie P_z zależne jest oprócz p_o i od objętości V, czyli od kształtów naczynia.

Z a s a d a A r c h i m e d e s a.

Niech będzie zanurzone w cieczy ciało A o jakiejkolwiek powierzchni zewnętrznej.



Rys. 13.

Znajdźmy jakie ciśnienie wywiera ciecz na to ciało w kierunku osi x, y, z, przedewszystkiem w kierunku osi x . W tym celu owińmy nasze ciało powierzchnią walcową , której tworząca jest równoległa do x, a więc prostopadła do płaszczyzny yoz . Powierzchnia walcowa dotknie naszego ciała po krzywej abcd. Krzywa ta dzieli powierzchnię ciała A na dwie części : nazwijmy je prawą i lewą ; każda z tych powierzchni ma jednakowy rzut a'b'c'd' na płaszczyznę zoy.

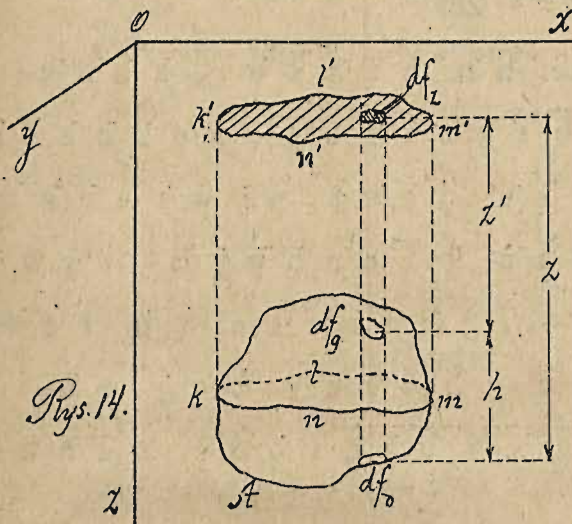
Dla jakiegokolwiek elementu df obranego na powierzchni prawej, znajdujemy na powierzchni lewej odpowiedni element, którego rzut równa się rzutowi pierwszego; głębokość, na jakiej znajdują się same elementy i rzuty ich-$\underline{z}$ jest jedna i ta sama, ciśnienia zatym hydrostatyczne $(p_0 + \Delta z)$ są jednakowe; co się jednak tyczy kierunku, to łatwo zauważyć, że ciśnienie na rzut lewego elementu jest w kierunku osi x, prawego zaś-w odwrotnym kierunku. Dodane razem, te dwa ciśnienia znoszą się. Sumując parami podobnymi ciśnienia na rzuty elementów prawych i lewych, znajdziemy, że wszystkie elementarne ciśnienia się znoszą i że wypadkowa w kierunku osi x wzięta równa się zeru. Toż samo otrzymamy względem osi y. Stąd wniosek: c i a ł o z a n u r z o n e w c i e c z y n i e p o d l e g a ż a d n e m u p a r c i u w j a k i m k o l w i e k k i e r u n k u p o z i o m y m.

Inaczej przedstawia się sprawa, jeśli rozpatrzymy wypadkową w kierunku pionowym.

Owińmy nasze ciało A powierzchnią walcową o tworzącej pionowej; otrzymamy linję k l m n, która dzieli powierzchnię ciała A na dwie części - dolną i górną; każda z nich ma rzut k'l'm'n' na płaszczyznę yox.

Dla jakiegokolwiek elementu df_d obranego na dolnej części powierzchni, znajdziemy na górnej części powierzchni element odpowiedni df_g', będący na tym samym pionie i mający taki sam rzut df_z na płaszczyznę xoy.

Znajdźmy wypadkową ciśnień na te dwa elementy, rzuconych na oś z. Rzut ciśnienia na element df_d, jak wiemy, równa się



Rys. 14.

$$(p_0 df_z + df_z \cdot z \cdot \Delta)$$

i jest skierowany ku górze. Rzut ciśnienia na element df_g równa się

$$(p_0 df_z + df_z \cdot z' \cdot \Delta),$$

i skierowany jest ku dołowi. W powyższych równaniach z i z' są to głębokości zanurzenia elementów df_d i df_g pod swobodną powierzchnią cieczy. W rezultacie oba te ciśnienia dają

$$dP_z = p_0 df_z + df_z \cdot z' \Delta - p_0 df_z - df_z \cdot z \cdot \Delta = -\Delta (z - z') df_z = -\Delta df_z \cdot h,$$

gdzie h jest rożnica poziomów elementu df_d i df_g.

Aby otrzymać wypadkowe ciśnienie w kierunku osi z na całe ciało pogrążone w cieczy, należy zsumować wszystkie ciśnienia elementarne parami, podobnymi do poprzednich, innymi słowy należy przecałkować równanie

$dP_z = -\Delta df_z \cdot h$; otrzymamy $P_z = -\Delta \int df_z \cdot h$.

Całkowanie należy rozciągnąć do całej powierzchni. Iloczyn $df_z \cdot h$ jest to objętość elementarnego walca, wziętego wewnątrz ciała A, odpowiadającego elementowi df_d lub df_g; czyli że $df_z \cdot h = dV$, jeśli przez V oznaczymy objętość ciała A. Sumując wszystkie takie elementarne walce, otrzymamy objętość całego ciała, zatym

$$P_z = -\Delta \int dV = -\Delta V.$$

Rezultat ten przeczytamy tak: na ciało, zanurzone w cieczy ciężkiej, pozostającej w spoczynku jest wywierane parcie w kierunku pionowym w górę (wskazuje na to znak —); parcie to równa się ciężarowi cieczy tej samej objętości, co objętość zanurzonego ciała. -

Punktem przyłożenia parcia jest środek masy zanurzonego ciała, wypełnionego jednorodną masą.

Że tak jest, można przekonać się takim rozumowaniem. Działanie cieczy w kierunku pionowym na dwa pola elementarne, obrane na wspólnej linii pionowej otrzymaliśmy równe ciężarowi cieczy w objętości walca elementarnego, którego podstawy są właśnie te pola, czyli możemy przyjąć, że jest to siła co do wartości równa ciężarowi cieczy tej właśnie objętości, — tylko skierowana przez środek ciężkości walca elementarnego ku górze. Przy dodawaniu ciśnień na pozostałe pola elementarne postępujemy tak, jak gdybyśmy dodawali ciężary tych elementarnych walców, napełnionych cieczą; otrzymamy w rezultacie siłę, co do wartości równą ciężarowi cieczy w objętości zanurzonego ciała, co do kierunku - zwróconą z dołu ku górze; wypadkowa zaś ciężarów wszystkich elementarnych walców, a więc i parcie cieczy na ciało zanurzone powinno być skierowane wzdłuż linii , poprowadzonej pionowo przez środek masy ciała.

Ponieważ równowaga ciała nie zmieni się , jeśli ciało w cieczy dowolnie obrócimy , więc parcie całkowite wciąż skierowane będzie wzdłuż linii pionowej,poprowadzonej przez środek masy ; na podstawie tego możemy środek jednorodnej masy,w objętości zanurzonego ciała , uważać za punkt przyłożenia parcia. Jeśli ciało nie jest zanurzone w wodzie całkowicie,lecz tylko częściowo, wtedy twierdzenie powyższe stosuje się do części zanurzonej w cieczy i w takim razie powiemy:

P a r c i e c i e c z y n a c i a ł o z a n u r z o n e t y l k o c z ę ś c i ą w c i e c z y c o d o k i e r u n k u j e s t p i o n o w e, s k i e r o w a n e k u g ó r z e,- c o d o w a r t o ś c i j e s t r ó w n e c i ę ż a r o w i c i e c z y w o b j ę t o ś c i z a n u r z o n e j c z ę ś c i c i a ł a; p u n k t e m p r z y c z e p i e n i a t e g o p a r c i a j e s t ś r o d e k j e d n o r o d n e j m a s y w o b j ę t o ś c i z a n u r z o n e j c z ę ś c i c i a ł a.

Twierdzenia, dotyczące parcia cieczy na ciało w niej zanurzone, znane jest pod nazwą z a s a d y A r c h i m e d e s a .

Równowaga ciała zanurzonego w cieczy.

Wyobraźmy sobie jednorodne ciało , zanurzone w cieczy . Niech ciężar ciała będzie Q ; objętość niech będzie V . Zgodnie z poprzednim, ciało jest wypierane ku górze siłą ΔV , gdzie Δ jest ciężar właściwy cieczy. Ciężar ciała Q możemy uważać jako siłę Q , przyłożoną do środka ciężkości ciała - do punktu S , i skierowaną pionowo nadół . Parcie cieczy, równe ΔV i skierowane pionowo ku górze , możemy wystawić sobie jako przyłożone do tego samego punktu S , gdyż środek ciężkości jednorodnego ciała jest środkiem masy jednorodnej .

Jeśli powyższe ciało jest takie, że $Q = \Delta V$, wtedy nie tylko w każdym miejscu , ale i w każdym położeniu w cieczy ciało jest w równowadze. Ciężar właściwy ciała jest wtedy ten sam, co cieczy.

Niech w innym przypadku będzie $Q > \Delta V$; wtedy parcie z dołu nie wystarcza do utrzymania ciała w cieczy na miejscu; aby ciało nie opadło w cieczy, należy je podtrzymać z siłą $= (Q - \Delta V)$, skierowaną z dołu ku górze; z taką siłą byłaby naprzykład naciągnięta nić, podtrzymująca rozpatrywane ciało w cieczy - Jeślibyśmy pozwolili ciału spadać w cieczy, siłą przyśpieszającą w pierwszym momencie byłaby siła $= Q - \Delta V$. (Podczas spadania ciała w cieczy ruch zależny będzie od tarcia ciała o ciecz).

 Jan Rozalski 19 10/3 09.

Jeśli rozpatrywane ciało jest takie, że $Q < \Delta V$, wtedy ciecz wypiera ciało z siłą ΔV ku górze. Chcąc ciało w cieczy utrzymać, należy je przyciskać lub przywiązać; siła dodatkowo w tym razie na ciało wywierana jest $(\Delta V - Q)$. Jeśli przy warunku, że $Q < \Delta V$ ciało jest swobodne, wtedy podnosi się ono w cieczy, przecina swobodną powierzchnię cieczy, wynurza się z niej; w miarę wynurzania się ciała z cieczy - parcie maleje; ruch ciała ku górze zachodzi dotąd, dopóki ciężar ciała nie zrówna się z ciężarem cieczy tej objętości, co zanurzona część ciała. Wtedy nastąpi równowaga.

Dotychczas mówiliśmy o ciele jednorodnym. - Niech zanurzone ciało n i e będzie jednorodnym; wtedy środek ciężkości ciała S nie będzie już środkiem masy ciała C. Ciężar ciała Q wystawmy sobie, jako siłę, przyłożoną do S i skierowaną pionowo na dół; parcie cieczy przyłożone jest do C i skierowane do góry. Niech $Q = \Delta V$; jeśli S jest niżej od C, równowaga ciała będzie wtedy, kiedy linia SC jest pionową; albowiem jeśli linię SC odchylimy od pionu, wytworzy się para sił, dążąca do ustawienia S i C na wspólnej linii pionowej. Ciało zatym samo dążyć będzie do utrzymania położenia pierwotnego.

Jeśli $Q > \Delta V$ przy pozostałych warunkach poprzed-

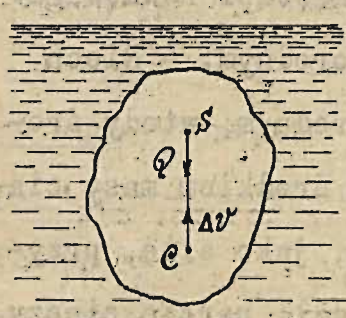
---

nich , ciało w cieczy spadać będzie, obracając się dotąd , dopóki S nie stanie pod C , poczym nastąpi ruch przyśpieszony na dół.-

Rys. 15.

Na podstawie powyższego łatwo przewidzieć, co zajdzie, jeśli w powyższym przypadku założymy, że $Q < \Delta V$.

Niech ciało niejednorodne o ciężarze Q i objętości V ma środek ciężkości S i środek masy C . Zanurzmy to ciało w ten sposób, że C jest pod S . Równowaga ciała w tym wypadku jest możliwa tylko, kiedy SC jest linią pionową. Przy najmniejszym jednak odchyleniu linii SC od pionu powstaje para, która powoduje utratę równowagi ciała; ciało obraca się , dążąc do stanu poprzednio opisanego.



Rys. 16.

Na podstawie powyższego zrozumiałym będzie odróżnianie trzech stanów równowagi ciała z a n u r z o n e g o w cieczy:

1) kiedy punkty S i C się schodzą, - taki s t a n r ó w n o w a g i nazywamy o b o j ę t n y m ;

2) kiedy S jest poniżej C , - jest to s t a n r ó w n o w a g i s t a ł e j ;

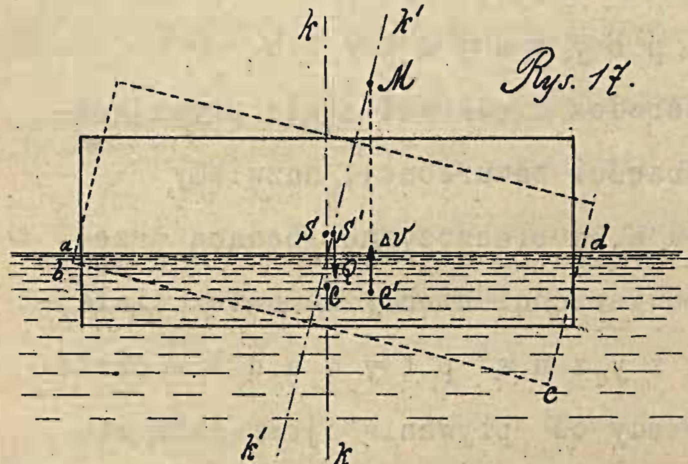
3) kiedy S jest powyżej C ,-wtedy mamy s t a n r ó w n o w a g i n i e s t a ł e j.

Zatrzymajmy się chwilę nad rozpatrzeniem r ó w n o w a g i c i a ł p ł y w a j ą c y c h.

Prostą , łączącą środek ciężkości ciała pływającego ze środkiem masy części zanurzonej, nazwiemy o s i ą p ł y w a n i a, a płaszczyznę, będącą przedłużeniem swobodnej powierzchni cieczy wewnątrz ciała, - nazwiemy p ł a s z c z y z n ą p ł y w a n i a ciała. Jeżeli ciało pływa, wtedy oś pływania jest pionowa. Niech środek ciężkości S ciała pływającego znajduje się poniżej środka C masy jego zanurzonej części. Wtedy , łatwo zrozumieć, że równowaga będzie stała.

Wymieniony powyżej warunek istnienia równowagi stałej nie jest jedynym. - Wyobraźmy sobie, że mamy naprzykład kadłub okrętu , pływającego w wodzie; dla ułatwienia zadania przypuśćmy, że ciało to ma kształt prostopadłościanu. Objętość wody , wyparta przez zanurzoną część kadłuba,niech będzie V ; ciężar właściwy wody oznaczmy przez Δ , wtedy parcie wody na pływające ciało jest równe $\Delta.V$; punktem przyłożenia parcia jest środek masy zanurzonej części ciała. Środek ciężkości, do którego możemy uważać przyłożony ciężar kadłuba równy Q ,oznaczmy przez S . Niech S znajduje się powyżej C ; pomimo jednak tego założenia równowaga kadłuba może być stała.

Przypuśćmy, że pionową oś pływania kk odchyliliśmy na niewielki kąt ; niech oś ciała wtedy zajmie położenie k'k'; kadłub zajmie położenie, zaznaczone na



rysunku liniami przerywanymi. Aby ciało mogło pływać i w tym nowym położeniu, objętość zanurzonej części ciała powinna być taka sama V , jak poprzednio. Po przesunięciu ciała do nowego położenia punkt S' przyłożenia siły Q pozostanie na osi ciała k'k'.

Punkt C' przyłożenia siły ΔV wobec tego, że ciało ma kształt prostopadłościanu, będzie zarazem środkiem ciężkości figury a b c d . Siły Q i ΔV są pionowe.

Widocznem jest teraz, że siły Q i równa jej ΔV tworzą parę sił, dążącą do przywrócenia ciała do pierwotnego położenia równowagi.

Przedłużmy kierunek siły ΔV do przecięcia się z pochyloną osią k'k', w punkcie M ; punkt ten nazywamy m e t a c e n t r u m. Łatwo z rysunku dostrzedz, że o ile punkt M znajdować się będzie powyżej środka ciężkości ciała S, wtedy siły Q i ΔV wytworzą parę, która dążyć będzie do przywrócenia ciała do pierwotnego położenia równowagi; będzie to stan równowagi stałej; jeśli M znajduje się poniżej S - wtedy równowaga jest nie-stała; jeśli M i S schodzą się, wtedy równowaga jest obojętna. Wyznaczenie punktu M ma duże znaczenie w okrętownictwie.

Powierzchnie stałego ciśnienia.

Wiemy że, ogólnie mówiąc, różne punkty cieczy mają różne ciśnienia hydrostatyczne. Z całej masy punktów cieczy, znajdującej się w spoczynku bezwzględnym albo względnym, możemy znaleść szereg punktów takich, w których ciśnienie hydrostatyczne jest jednakowe. Szereg takich punktów tworzy powierzchnię, którą nazywamy p o w i e r z c h n i ą s t a ł e g o c i ś n i e n i a, albo inaczej p o w i e r z c h n i ą p o z i o m u. Punkty, znajdujące się na P.S.C. mają jedno i to samo ciśnienie, oczywiście tylko pod względem wartości, gdyż kierunek ciśnienia powinien być w każdym miejscu powierzchni prostopadły do jej elementu.

Jeśli mamy ciecz, poddaną działaniu tylko sił ciężkości, wtedy powierzchnie stałego ciśnienia będą płaszczyznami poziomymi.

Innym razem kształt powierzchni stałego ciśnienia określi się układem sił, do cząsteczek cieczy przyłożonych.

Z powyższego wnioskujemy o następujących własnościach powierzchni stałych ciśnień:

1) każdemu punktowi obranemu w cieczy odpowiada stosowna powierzchnia stałego ciśnienia, przesunięta przez ten punkt.

2) Dwie jakiekolwiek powierzchnie stałego ciśnienia, odpowiadające dwum różnym ciśnieniom hydrostatycznym, n i e m o g ą s i ę w z a j e m n i e p r z e c i n a ć, a n i s i ę d o t y k a ć c h o ć b y w j e d n y m p u n k c i e, gdyż w takim wypadku w jakimkolwiek punkcie, znajdującym się na linji przecięcia, albo w miejscu dotknięcia się tych powierzchni, otrzymalibyśmy dwa r ó ż n e ciśnienia hydrostatyczne, co jest niemożliwym.

3) Wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych, działających na ciecz w każdym punkcie, jest prostopadła do odpowiedniej powierzchni stałego ciśnienia.

W rzeczy samej: w najogólniejszym wypadku zależność między wartościami ciśnienia w dwuch punktach I i 2 cieczy wyraża się równaniem:

$$p_2 = p_1 + \frac{\Delta}{g}\int_1^2 (\mathcal{X}dx + \mathcal{Y}dy + \mathcal{Z}dz),$$

gdzie $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ są to rzuty pewnego wypadkowego przyśpieszenia, które może otrzymać cząsteczka cieczy, gdy na nią działają siły objętościowe. Gdy obydwa rozpatrywane punkty znajdować się będą na wspólnej powierzchni stałego ciśnienia, t.j. gdy $p_1 = p_2$, wtedy po odpowiednim uproszczeniu równanie przyjmie postać:

$$\int_1^2 (\mathcal{X}dx + \mathcal{Y}dy + \mathcal{Z}dz) = 0 \, .$$

Taka jest zależność pomiędzy rzutami przyśpieszenia wypadkowego $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ a różniczkami spółrzędnych punktów, znajdujących się na powierzchni stałego ciśnienia. Ponieważ równanie to jest słuszne dla jakichkolwiek punktów na tej powierzchni, zatym powinno ono zachodzić dla dwuch punktów, obranych bardzo blisko jeden od drugiego, na powierzchni stałego ciśnienia, dla których w równaniu powyższym nie potrzebne już będzie całkowanie.

Widzimy stąd, że dla takich dwuch punktów, oddalonych o odległość bardzo małą ds (rzuty jej niech będą dx, dy, dz), powinno być słuszne równanie różniczkowe.

$$\mathcal{X} dx + \mathcal{Y} dy + \mathcal{Z} dz = 0$$

Ostatnie równanie nazwiemy równaniem różniczkowym powierzchni stałego ciśnienia.

Z równania tego otrzymamy wspomnianą trzecią własność powierzchni stałego ciśnienia. Niech będą $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ rzutami przyśpieszenia wypadkowego R ; dx , dy, dz zaś rzutami jakiegokolwiek elementu linijnego ds na powierzchni stałego ciśnienia obranego.- Oznaczmy dalej (R, x), (R, y) (R , z) wartości kątów, jakie tworzy kierunek przyśpieszenia R odpowiednio z osiami x,y,z ; niech dalej (ds, x), (ds, y), (ds, z) oznaczają wartości kątów, jakie tworzy kierunek elementu ds z tymi osiami x,y,z, wtedy możemy napisać, że

$$\mathcal{X} dx = R \cos(R, x) . ds . \cos(ds, x),$$

$$Ydy = R.\mathrm{cs}(R,y).ds.\mathrm{cs}(ds,y)$$

$$Zdz = R.\mathrm{cs}(R,z).ds.\mathrm{cs}(ds,z).$$

Równanie różniczkowe powierzchni stałego ciśnienia napiszemy zatym :

$$R.\mathrm{cs}(R,x)ds.\mathrm{cs}(ds,x)+R.\mathrm{cs}(R,y)ds+$$
$$+R.\mathrm{cs}(R,z)ds.\mathrm{cs}(ds,z)=0.$$

Lewa strona równania przedstawia w rozwinięciu, jak wiadomo z geometryi analitycznej, wyrażenie

$$R.ds.\cos(R,ds),$$

gdzie (R,ds) jest wartość kąta, zawartego pomiędzy kierunkami R i ds . W rezultacie więc możemy napisać nasze równanie różniczkowe w postaci:

$$R.ds.\cos(R,ds) = 0$$

Ponieważ R i ds są różne od zera, zatym $\cos(R,ds)=0$, czyli, że kąt $(R,ds) = 90^{\circ}$.

Pamiętając , że kierunek przyśpieszenia wypadkowego jest jednocześnie kierunkiem siły wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych, działających na ciecz, otrzymamy twierdzenie, że s i ł a w y p a d k o w a j e s t p r o s t o p a d ł a d o j a k i e g o k o l w i e k e l e m e n t u l i n i j n e g o o b r a n e g o p r z y d a n y m p u n k c i e n a p o w i e r z c h n i s t a ł e g o c i ś n i e n i a ,

albo inaczej : s i ł a w y p a d k o w a j e s t w k a ż d y m m i e j s c u p r o s t o p a d ł a do elementu powierzchni stałego ciśnienia.

Poznajmy na kilku przykładach kształty powierzchni stałego ciśnienia.

Przykład 1) :

Niech na cząstki cieczy działa tylko siła ciężkości; z poprzedniego już wiemy, że wszystkie punkty w jednej i tej samej płaszczyznie poziomej mają jednakowe ciśnienie; stąd wniosek: w danym przypadku powierzchnie stałego ciśnienia są to płaszczyzny poziome. To samo rozwiązanie da nam równanie różniczkowe:

$$X dx + Y dy + Z . dz = 0 .$$

Obierając osi spółrzędnych jak zwykle, otrzymamy ; $X = 0, \; Y = 0, \; Z = g,$ wtedy równanie zmieni się na $g dz = 0$, a po zcałkowaniu, otrzymamy

$$g . z = C$$

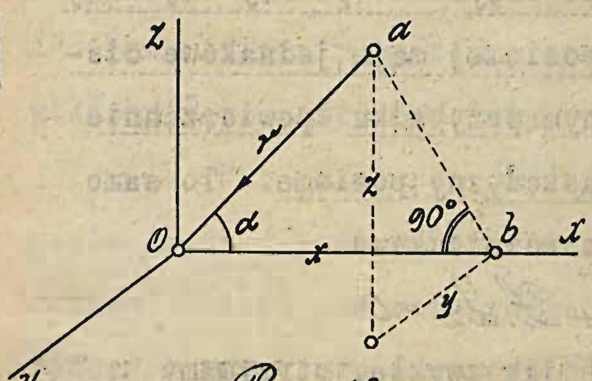
gdzie C jest wielkość niezależna. Ostatnie równanie w układzie spółrzędnych x,y,z, daje nam płaszczyzny równoległe do płaszczyzny x o y, a więc płaszczyzny poziome.

Przykład 2) :

Niech na cząsteczki cieczy działają siły skierowane ku wspólnemu środkowi ; wartość przyśpieszenia niech będzie funkcją odległości cząsteczki od owego środka, na przykład niech $\mathcal{R} = \frac{1}{f(r)}$. Znaleść powierzchnię stałego ciśnienia.

Niech O będzie owym środkiem, ku któremu są skierowane siły, działające na wszystkie cząsteczki cieczy; punkt O przyjmujemy jako początek układu prostokątnego x,y,z. Jeśli punkt a odległy od punktu O o odległość r ma się znajdować na powierzchni stałego ciśnienia, spółrzędne tego punktu powinny czynić zadość równaniu

$$\mathcal{X}dx + \mathcal{Y}dy + \mathcal{Z}dz = 0,$$



Rys. 18.

gdzie $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ są to rzuty przyśpieszenia $\mathcal{R}$, — R, dx,dy, dz, są to różniczki spółrzędnych punktu a. $\mathcal{X} = \mathcal{R}.\cos\alpha$; z trójkąta Oab, gdzie $\measuredangle b = 90°$, mamy $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, stąd $\mathcal{X} = \frac{\mathcal{R}.x}{r} = \frac{x}{rf(r)}$;

w sposób podobny znajdziemy $\mathcal{Y} = + \frac{y}{rf(r)}$, $\mathcal{Z} = \pm \frac{z}{rf(r)}$.

Podstawiamy teraz otrzymane wartości na $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Z}$ w równanie powierzchni stałego ciśnienia

$$\frac{x\,dx}{rf(r)} + \frac{y\,dy}{rf(r)} + \frac{z.dz}{rf(r)} = 0$$

skąd $x.dx + y.dy + z.dz = 0$.

Całkując to ostatnie równanie, otrzymamy

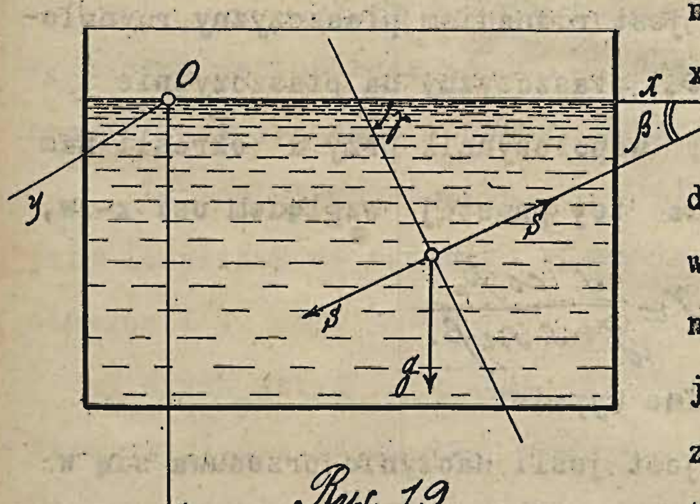
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = C$$ i ostatecznie $x^2 + y^2 + z^2 = C'$.

Równanie to, jak wiemy, jest równaniem powierzchni kulistej, zatym *powierzchniami stałego ciśnienia w rozpatrywanych warunkach będą powierzchnie kuliste, opisane ze środka O, ku któremu są skierowane siły, działające na cząsteczki cieczy.*

Przykład 3/:

Mamy naczynie napełnione cieczą, na którą działają siły ciężkości; prócz tego niech naczynie całe przesuwa się ruchem prostoliniowym ze stałym przyśpieszeniem s.

Przyjmujemy układ spółrzędnych prostokątnych taki: płaszczyznę xoy obieramy poziomą, oś z pionowo na dół; przypuśćmy, że naczynie przesuwa się wzdłuż linii, znajdującej się w płaszczyznie xoz, przyczym kierunek ruchu niech tworzy z osią x-ów kąt β.



Rys. 19.

Ciecz w naczyniu znajduje się w równowadze względnej. Stan ten równowagi możemy uważać jako bezwzględny, jeśli, zgodnie z odpowiednim twierdzeniem mechaniki, przyłożymy do cząsteczek cieczy oprócz sił zewnętrznych jeszcze siły równe , ale odwrotnie skierowane, niż tak zwane siły unoszenia; przyśpieszenie, jakie siły te nadać by mogły cząsteczkom cieczy, jest równe s i tworzy kąt $(180°+\beta)$ z osią x .

Równanie powierzchni stałego ciśnienia jest

$$\mathfrak{X}dx+\mathfrak{Y}dy+\mathfrak{Z}dz=0,$$

gdzie $\mathfrak{X}=-s.\cos\beta$, $\mathfrak{Y}=0$, $\mathfrak{Z}=g+s.\sin\beta$.

Podstawiając wartości te w równanie poprzednie, otrzymamy $-s.\cos\beta.dx+(g+s.\sin\beta)dz=0$. Po zcałkowaniu znajdziemy $-s.\cos\beta.x+(g+s.\sin\beta)z=C$, stąd

$$z=\frac{C}{g+s.\sin\beta}+\frac{s.\cos\beta.x}{g+s.\sin\beta}.$$

Oznaczmy $\frac{C}{g+s.\sin\beta}$ przez C', wtedy

$$z=\frac{s.\cos\beta}{g+s.\sin\beta}.x+C'.$$

Równanie to , jak wiadomo z geometryi analitycznej, odniesione do układu x,y,z, jest równaniem płaszczyzny równoległej do osi y ; ślad tej płaszczyzny na płaszczyznie xoz jest linia prosta; współczynnik przy x określi nam tg kąta γ pochylenia tej prostej względem osi x-ów, czyli że

$$tg\,\gamma=\frac{s.\cos\beta}{g+s.\sin\beta}.$$

Rozpatrzmy szczególne wypadki.

Jeśli $\beta=0$, to jest jeśli naczynie przesuwa się w kierunku osi x z przyśpieszeniem s , wtedy powierzchnia stałego ciśnienia będzie również płaszczyzną równoległą do osi y, do osi x pochyloną pod kątem γ, przyczym $tg\,\gamma = \frac{s}{g}$. Im przyśpieszenie s będzie znaczniejsze w porównaniu z przyśpieszeniem ziemskim g, tym $\sphericalangle \gamma$ będzie większym.

Gdy $\sphericalangle \beta = 90^\circ$, to jest gdy ruch naczynia jest przyśpieszony w kierunku pionowym ku górze, wtedy $\cos\beta = 0$, $tg\,\gamma = 0$, i kąt $\gamma = 0$, a więc powierzchnia stałego ciśnienia jest płaszczyzną pionową.

Przykład 4):

Niech naczynie, w którym znajduje się ciężka ciecz, jest obracane około osi pionowej ze stałą prędkością kątową ω. Znaleść kształt powierzchni stałego ciśnienia w tym przypadku.

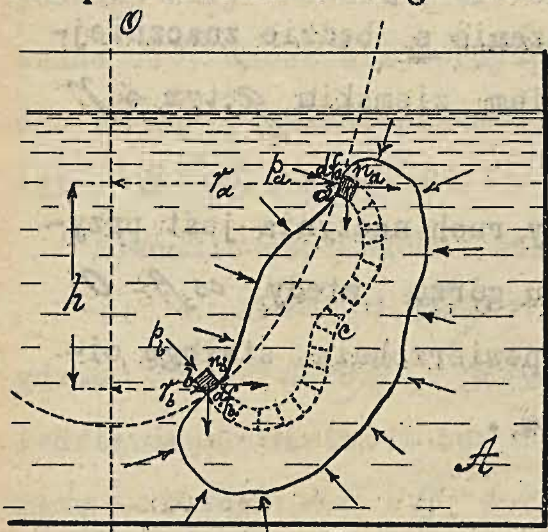
Sposób rozwiązania zadania mógłby być podobny do sposobu w poprzednich przykładach, to jest należałoby, przyjąwszy równanie powierzchni stałego ciśnienia

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

wyznaczyć wartości na X, Y, Z dla danego przypadku, podstawić je w równanie i wtedy równanie zcałkować.

Zamiast tego sposobu rozwiążemy zadanie tą drogą, jaką doszliśmy do ogólnego równania powierzchni stałego ciśnienia.

Niech zatym A będzie naczyniem, obracającym się razem z cieczą około osi O O z prędkością kątową ω. Ciecz znajduje się w spoczynku względnym. Obierzmy w cieczy punkty a i b, znajdujące się, dajmy na to, na przecię ciu powierzchni stałego ciśnienia z płaszczyzną rysunku.



Rys. 20.

Niech w tych punktach ciśnienia są p_a i p_b (na podstawie tylko co wypowiedzianego założenia $p_a = p_b$) i df_a i df_b odpowiednie elementy powierzchni stałego ciśnienia przy tych punktach; p_a jest prostopadłe do df_a, p_b — do df_b.

Wydzielmy z cieczy część jej powierzchnią zamkniętą taką, aby elementy df_a i df_b na niej się znajdowały. Rozpatrując równowagę cieczy, zawartej wewnątrz tej powierzchni, przypuśćmy, że cała ta powierzchnia zesztywniała za wyjątkiem elementów df_a i df_b. Przyjmijmy, że element df_a przesuwamy prostopadle do df_a (równolegle do p_a) na odległość n_a do wnętrza wydzielonej cieczy; ponieważ powierzchnia, ograniczająca ciecz, zesztywniała za wyjątkiem elementów df_a i df_b, to, wobec nieściśliwości cieczy po przesunięciu elementu df_a, element df_b wysunie się na zewnątrz na odległość n_b.

Ciśnienie $p_a \cdot df_a$ na element df_a podczas przyjętego przesunięcia wykonałoby pracę $p_a \cdot df_a \cdot n_a$, ciśnienie zaś $p_b \cdot df_b$ wykonałoby pracę $- p_b \cdot df_b \cdot n_b$.

Podczas przypuszczalnego przesunięcia się df_a i df_b

ciecz o objętości $df_a \cdot n_a$ jak gdyby przeszła do $df_b \cdot n_b$ i podczas tego przesunięcia mogła być wykonana praca przez siły, przyłożone do cząsteczek, zawartych w objętości $df_a \cdot n_a$ lub też $df_b \cdot n_b$ (gdyż $df_a \cdot n_a = df_b \cdot n_b$).

Jeśli w naszym przypadku chcemy rozpatrywać ciecz w spoczynku bezwzględnym, powinniśmy przyjąć, że na cząsteczki cieczy działa obok siły ciężkości - jeszcze siła co do wartości równa, zaś co do kierunku przeciwna sile unoszenia (tym razem siła unoszenia jest siłą dośrodkową). Zatym powinniśmy rozpatrzyć pracę, którą wykonałyby siła ciężkości i siła odśrodkowa. Przy przejściu cieczy o objętości $df_a \cdot n_a$ z punktu a do punktu b, siła ciężkości wykonałaby pracę równą iloczynowi siły przez rzut drogi na kierunek siły. Wartość siły jest równa $\Delta df_a \cdot n_a$, jeśli Δ oznacza ciężar jednostki objętości cieczy; rzut jakiejkolwiek drogi acb elementu $df_a \cdot n_a$ od punktu a do b na kierunek siły $= h$, to znaczy, równy jest pionowej odległości punktów a i b. Więc praca siły ciężkości $= \Delta df_a \cdot n_a \cdot h$.

Teraz co do siły odśrodkowej.- Wartość jej w punkcie a jest

$$\frac{\Delta df_a \cdot n_a}{g} \omega^2 \cdot r_a ;$$

w punkcie b wartość jej wynosi $\dfrac{\Delta df_a \cdot n_a}{g} \omega^2 r_b$,

jeśli przez r_a i r_b nazwiemy odległości punktów a i b od osi obrotu O O.

Ponieważ, jak widać, wartość siły odśrodkowej jest liniową funkcją odpowiedniego promienia, możemy powiedzieć, że podczas przesunięcia elementu $df_a \cdot n_a$ z punktu a do b zmienna siła odśrodkowa wykonałaby taką samą pracę,co pewna średnia siła,równa co do wartości średniej arytmetycznej powyższych krańcowych wartości, to jest siła ta jest równa

$$\frac{\Delta \cdot df_a \cdot n_a}{g}\left(\frac{r_a + r_b}{2}\right).$$

Kierunek siły odśrodkowej zawsze jest prostopadły do osi obrotu i zwrócony od osi. - Rzut drogi acb na kierunek siły $= r_a - r_b$. Praca siły odśrodkowej równać się będzie

$$-df_a \cdot n_a \cdot \frac{\Delta}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{r_a^2 - r_b^2}{2};$$

piszemy znak $(-)$, gdyż kierunek siły jest odwrotny niż kierunek rzutu wykonywanej drogi. -

Ponieważ wydzielona część cieczy jest w równowadze, więc suma prac przygotowanych wszystkich sił powinna być zerem, zatym :

$$df_a \cdot n_a \cdot p_a - df_b \cdot n_b \cdot p_b + df_a \cdot n_a \cdot \Delta h -$$
$$- df_a \cdot n_a \cdot \frac{\Delta}{g}\,\omega^2 \cdot \frac{r_a^2 - r_b^2}{2} = 0.$$

Ponieważ $df_a \cdot n_a = df_b \cdot n_b$ i $p_a = p_b$, więc po odpowiednim skróceniu, otrzymamy

$$h = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_a^2 - r_b^2\right).$$

Jeśli punkt b przyjmiemy na osi obrotu, wtedy $r_b = 0$ i zależność między h i r_a znajdziemy

$$h = \frac{\omega^2}{2g}\,r_a^2, \quad \text{albo} \quad r_a^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,h.$$

Z tego równania czytamy, że spółrzędne h i r_a punktu a , Jan Kozielski 19 30/3 01

należącego do powierzchni stałego ciśnienia i będącego na płaszczyznie rysunku, zadość czynią równaniu parabo.- li; stąd mamy wniosek, że powierzchnia stałego ciśnienia w przecięciu z płaszczyzną rysunku daje parabolę, której osią jest oś O O obrotu naczynia; parametr paraboli jest równy $\frac{2g}{\omega^2}$.

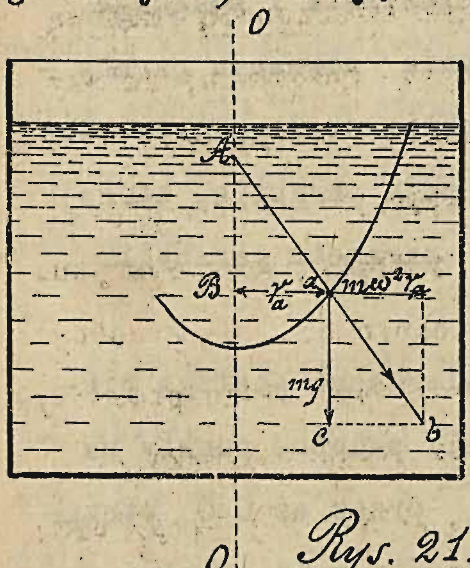
Jeślibyśmy, zamiast punktów powierzchni stałego ciśnienia na płaszczyznie rysunku, obrali podobne punkty na innej płaszczyźnie P, przesuniętej przez oś O O, otrzymalibyśmy i wtedy, że punkty te, jeśli mają należeć do powierzchni stałego ciśnienia, powinny znajdować się na takiej samej paraboli.

Stąd wnioskujemy, że, **jeśli ciecz razem z naczyniem obraca się około osi pionowej ze stałą prędkością kątową, powierzchnie stałego ciśninia są powierzchniami paraboloidów obrotowych, których osią jest oś obrotu naczynia.**

Do tegoż rezultatu dojść można jeszcze inną drogą. Mianowicie, chcąc rozpatrywać spoczynek bezwzględny cząsteczki o masie m, powinniśmy przyjąć, że na cząsteczkę tę, będącą naprzykład przy punkcie a (rys. 21) nasze-

---

go naczynia, działają dwie siły: siła ciężkości mg i siła odśrodkowa $m\omega^2 r_a$; składając te dwie siły, otrzymamy wartość i kierunek wypadkowej.



Rys. 21.

Powierzchnia stałego ciśnienia w każdym punkcie powinna być prostopadłą do kierunku wypadkowej siły w tym punkcie; jeśli więc powierzchnia stałego ciśnienia w przecięciu z płaszczyzną rysunku da jakąć krzywą , to prosta Aa będzie dla tej krzywej w punkcie a normalną.

Z podobieństwa trójkątów ABa i cab otrzymamy

$$\frac{AB}{Ba} = \frac{ac}{cb} = \frac{mg}{m\omega^2 r_a};$$

ponieważ $Ba = r_a$, więc $AB = \frac{g}{\omega^2}$. Odcinek Ba jest podnormalną naszej krzywej, a ponieważ wartość podnormalnej jest stałą, więc krzywa ta przedstawia sobą parabolę. Ponieważ podnormalna paraboli równą się połowie parametru , więc cały parametr $= 2Ba = \frac{2g}{\omega^2}$ i równanie paraboli , którą otrzymujemy w przecięciu powierzchni stałego ciśnienia z płaszczyzną rysunku, będzie

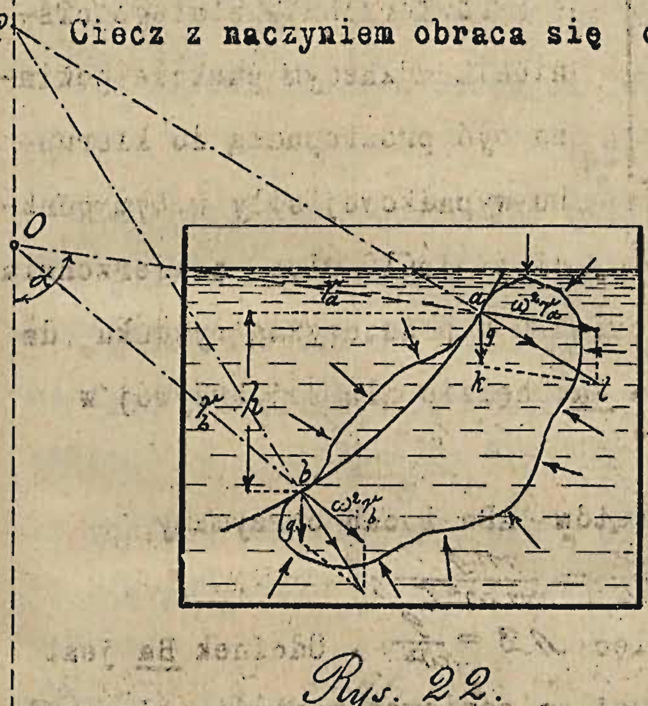
$$r_a^2 = \frac{2g}{\omega^2} \cdot h,$$

czyli to samo równanie, co i poprzednio.

Przykład 5):

Mamy napełnione ciężką cieczą naczynie, które jest obracane około osi poziomej ze stałą prędkością kątową ω. Niech będzie ciecz we względnym spoczynku; należy określić kształt powierzchni stałego ciśnienia.

Obierzmy punkty a i b wewnątrz cieczy na przecięciu powierzchni stałego ciśnienia z płaszczyzną rysunku. Ciecz z naczyniem obraca się około osi O, prostopadłej do płaszczyzny rysunku.



Rys. 22.

Niech p_a i p_b będą ciśnieniami; r_a i r_b odległościami a i b od osi obrotu; df_a i df_b bardzo małe elementy powierzchni stałego ciśnienia, wzięte przy punktach a i b.

Wydzielmy pewną część cieczy tak, jak to robiliśmy w przykładzie 4-ym. - Wystawmy sobie, że df_a wsunie się na odległość n_a w kierunku ciśnienia p_a. Wtedy przy założeniach, jak w przykładzie 4-ym, w punkcie b wysunie się element df_b na odległość n_b wbrew wywieranemu ciśnieniu p_b.

Podczas takiego wyobrażalnego przesunięcia, byłyby wykonane następujące prace przygotowane: ciśnienie $p_a \cdot df_a$ w punkcie a wykonałoby pracę $+ p_a \cdot df_a \cdot n_a$, ciśnienie $p_b \cdot df_b$ w punkcie b -pracę $- p_b \cdot df_b' \cdot n_b$; podczas tego przesunięcia siła ciężkości wykonałaby pracę równą $df_a \cdot n_a \cdot \Delta h$, gdzie h jest to różnica poziomów w punktach a i b .

Wartość siły odśrodkowej przy a jest $df_a \cdot n_a \cdot \frac{\Delta}{g} \cdot \omega^2 r_a$; zaś przy b ,— $df_b \cdot n_b \cdot \frac{\Delta}{g} \omega^2 r_b$, przyczym należy zauważyć, że wobec nieściśliwości cieczy $df_a \cdot n_a = df_b \cdot n_b$

Zamiast działania siły odśrodkowej zmiennej możemy przyjąć siłę stałą o wartości średniej i równej $df_a \cdot n_a \cdot \frac{\Delta}{g} \omega^2 \frac{r_a + r_b}{2}$; rzut drogi na kierunek siły odśrodkowej $= r_a - r_b$, i wtedy otrzymalibyśmy pracę równą $- df_a \cdot n_a \cdot \frac{\Delta}{g} \cdot \omega^2 \cdot \frac{r_a^2 - r_b^2}{2}$.

W sumie wszystkie te prace przygotowane powinny być zerem, ponieważ siły, przyłożone do cieczy, są w równowadze. Zatym

$$p_a \cdot df_a \cdot n_a - p_b \cdot df_b \cdot n_b + f_a \cdot n_a \cdot \Delta h - df_a \cdot n_a \frac{\Delta}{2g} \omega^2 (r_a^2 - r_b^2) = 0,$$

stąd, ponieważ $p_a = p_b$ i $df_a \cdot n_a = df_b \cdot n_b$, otrzymamy

$$h = \frac{\omega^2}{2g} (r_a^2 - r_b^2).$$

To równanie pozwoli nam określić szereg punktów podobnych do a i b , będących na powierzchni stałego ciśnienia, jeśli ktorykolwiek punkt w cieczy obierzemy, jako początkowy. Możemy też dowieść , że punkty powierzchni stałego ciśnienia znajdują się na obwodzie koła, opisanego z punktu C , wziętego na linii pionowej , poprowadzonej przez O , przyczym $CO = \frac{g}{\omega^2}$.

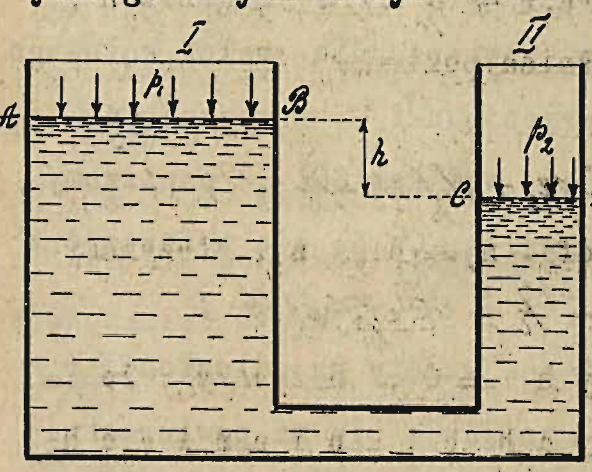
Obierzmy punkt a ; na cząsteczkę cieczy o masie m przy tym punkcie działa siła ciężkości $= mg$ i siła odśrodkowa $= m\omega^2 r_a$; wypadkowa tych dwuch sił powinna być normalną do powierzchni stałego ciśnienia w miejscu a ; normalna ta przecina linię pionową OC w punkcie C . Z podobieństwa trójkątów OCa i alk znajdziemy, że $\frac{OC}{ak} = \frac{Oa}{kl}$, albo $\frac{OC}{mg} = \frac{r_a}{m\omega^2 r_a}$, a stąd $OC = \frac{g}{\omega^2}$; widzimy zatym, że miejsce , w którym normalna spotka linię pionową OC niezależy od położenia punktu a ; powiemy więc, że wszystkie normalne względem danej powierzchni stałego ciśnienia spotykają się w jednym punkcie. Powierzchnia ta jest zatym powierzchnią walca kołowego, którego oś jest pozioma przez punkt C przesunięta.

Jednocześnie rozpatrując trójkąt COa , napiszemy , że promień odnalezionego walca Ca da się wyznaczyć z równania : $\overline{Ca}^2 = \overline{Co}^2 + r_a^2 + 2.Co.r_a.\cos\alpha$; dalej zauważymy, że punkt a , wzięty na odległości r_a od osi obrotu naczynia ,- znajduje się na powierzchni stałego ciśnienia, dla której promień jest Ca ; wtedy $\measuredangle COa = 180 - \alpha$. Za chwilę , kiedy naczynie się obróci o bardzo mały kąt ,dla tego samego punktu kąt COa będzie już inny,niż poprzednio, zatym i promień walca , jak to widać z poprzedniego równania, zmieni się , czyli , że punkt a wtedy będzie na innej powierzchni stałego ciśnienia.

Zatym co chwila jedna i ta sama cząsteczka cieczy będzie się znajdowała n a c o r a z i n n e j p o w i e r z c h n i s t a ł e g o c i ś n i e n i a, która w każdym momencie będzie powierzchnią walca. Z tego wynika, że wewnątrz naczynia w cieczy otrzymamy pewien ruch względny, co poprzednio otrzymany rezultat cokolwiek zmienia.

N i e k t ó r e z a s t o s o w a n i a.

Niech będą dwa naczynia połączone. Nalejmy do jednego z tych naczyń ciecz jednorodną. Zachodzi pytanie, jak się ułożą poziomy cieczy w obydwuch naczyniach, jeśli na ciecz działa tylko siła ciężkości.



Rys. 23.

Niech w naczyniu pierwszym poziom będzie AB, a w naczyniu drugim poziom CD. Różnica poziomów niech będzie <u>h</u>. Załóżmy, że na powierzchnię swobodną naczynia I-go działa ciśnienie $p_1 \frac{kg}{m^2}$; na swobodną powierzchnię naczynia II-go — ciśnienie $p_2 \frac{kg}{m^2}$.

Pod wpływem sił, przyłożonych do cząsteczek cieczy w naczyniu I-ym i II-im, ciecz ta jest w równowadze.

Obierzmy na AB bardzo mały element powierzchni o polu df_1, na CD element o polu df_2. Wyobraźmy sobie, że powierzchnie cieczy w obu naczyniach zesztywniały za wyjątkiem elementów df_1 i df_2. Przesuńmy df_1 wewnątrz cieczy na niewielką odległość n_1, wtedy element df_2 wysunie się z cieczy na odległość n_2 taką, że

$$df_1 \cdot n_1 = df_2 \cdot n_2$$

Suma prac wykonanych przez poszczególne siły przy takim wyobrażalnym przesunięciu musi równać się zeru. Ciśnienie $p_1 df_1$ wykona pracę $+ p_1 df_1 . n_1$; ciśnienie $p_2 . df_2$ wykona pracę $- p_2 . df_2 . n_2$; siła ciężkości równa $df_1 . n_1 . \Delta$ wykona pracę $+ df_1 . n_1 \Delta h$, gdzie h jest, jak mówiliśmy, różnica poziomów AB i CD.

Suma tych prac

$$p_1 df_1 n_1 - p_2 \cdot df_2 n_2 + df_1 n_1 \Delta h = 0,$$

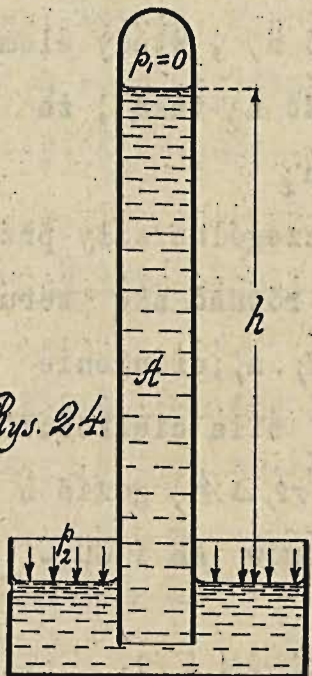
stąd, skracając przez $df_1 . n_1 = df_2 . n_2$, otrzymamy

$$p_1 - p_2 + \Delta h = 0, \text{ albo } h = \frac{p_2 - p_1}{\Delta}.$$

Jeżeli $p_1 = p_2$, wtedy $h = 0$, to znaczy, że p r z y j e d n a k o w y c h c i ś n i e n i a c h n a s w o b o d n e p o w i e r z c h n i e c i e c z y w n a c z y ń i a c h p o ł ą c z o n y c h — p o z i o m c i e c z y w o b u n a c z y n i a c h j e s t j e d e n i t e n s a m.

Wyobraźmy sobie, że ciśnienie p_1 jest zerem, wtedy $h = \frac{p_2}{\Delta}$. Weźmy przykład taki:

Niech dość szeroka rurka A będzie zwrócona zamkniętym końcem ku górze, dolnym otwartym zatopiona w naczyniu B z wodą. W górnej części tej rurki niech będzie próżnia, czyli że ciśnienie $=0$. Na poziom cieczy w naczyniu B niech działa, powiedzmy, ciśnienie atmosfery $\left(p_2 = 1\frac{kg}{cm^2} = 10000\frac{kg}{m^2}\right)$.



Rys. 24.

B

Wtedy otrzymamy, że wysokość h, na jakiej stanie poziom wody w A, ponad poziomem w B, określi się zgodnie z poprzednim, ponieważ

Δ dla wody $= 1000\frac{kg}{m^3}$;

$$h = \frac{p}{\Delta} = \frac{10000}{1000} = 10\,m.$$

Wynik nie zależy, jak widzimy, od wielkości przekrojów A i B.

Na zasadzie tego możemy powiedzieć, że ciśnienie 1-ej atmosfery równoważy się słupem wody o wysokości 10 metrów bez względu na przekrój tego słupa wody.

Wystawmy sobie, że w poprzednim przykładzie naczynia A i B napełnione są rtęcią $\left(\Delta \text{ dla rtęci } = 13596\frac{kg}{m^3}\right)$, a ciśnienie na poziom cieczy w B niech będzie jak poprzednio $p_2 = 1$ atm. $= 10000\frac{kg}{m^2}$, wtedy

$$h = \frac{10000}{13596} = 0{,}7355\,m = 735{,}5\,m/m.$$

Zatym powiedzieć możemy, że ciśnienie jednej atmosfery równoważy się s ł u p e m r t ę c i o w y s o k o ś c i 0,7355 m., a l b o 735,5 mm .

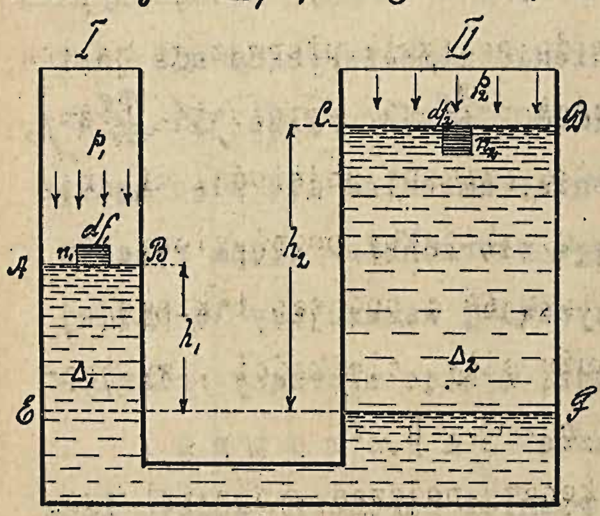
W rzeczywistości ciśnienie atmosferyczne nie jest jednakowe i stale równe 10000 $\frac{kg}{m^2}$ (albo 1 $\frac{kg}{cm^2}$), lecz ustawicznie się zmienia; zmieniać się więc będzie wysokość h , której dosięga wierzchołek słupa rtęci w rurce odpowiedniej. - Przyrząd , wskazujący w każdej chwili wysokość słupa rtęci, a więc mierzący ciśnienia atmosferyczne, nosi nazwę b a r o m e t r u .

Moglibyśmy zbudować również barometr wodny, lecz będzie to przyrząd z wielu względów niedogodny , pomiędzy innymi, ze względu na znaczną wysokość rurki barometrycznej.

Ciśnienie atmosferyczne wystawiamy sobie, jako wynik ciężaru słupa powietrza, znajdującego się nad miejscem , gdzie mierzymy ciśnienie. W miarę, jak będziemy się wznosili , czy to balonem, czy też wchodząc na wysoką górę, ponad nami będzie coraz mniejszy cisnący słup powietrza. Barometr też powinien nam wykazywać coraz mniejszą wysokość słupa rtęciowego.

Zależność między wysokością słupa tego i wysokością miejsca ponad określonym poziomem (najczęściej poziomem morza), daje się ująć we wzór , przy pomocy którego możemy korzystać z barometru , jako p r z y r z ą d u n i w e l a c y j n e g o .—

Napełnijmy dwa połączone naczynia dwiema cieczami niejednorodnymi ; jedna z nich niech będzie o ciężarze właściwym Δ_1 , druga o ciężarze — Δ_2 ; ciśnienia na powierzchnie cieczy niech będą p_1 i p_2 ; wysokości poziomów AB i CD , liczone od płaszczyzny podziału EF, niech będą h_1 i h_2. Obieramy na powierzchniach AB i CD elementy df_1 i df_2. Przyjmując



Rys. 25.

założenia podobne do tych , jakie robiliśmy w poprzednim przykładzie , wystawmy sobie , że element df_2 zostanie wsunięty do wnętrza cieczy na n_2 ; element df_1 wyjdzie wtedy z cieczy na odległość n_1 ; wobec nieściśliwości obu cieczy , ma miejsce równanie

$$df_2 . n_2 = df_1 . n_1 .$$

Przy takim przesunięciu wyobrażalnym praca ciśnienia $p_2 . df_2$ będzie $+ p_2 . df_2 . n_2$; praca ciśnienia $p_1 . df_1$ będzie $- p_1 . df_1 . n_1$; praca siły ciężkości zostanie wykonaną ,jakby podczas przesunięcia elementu objętości $df_2 . n_2$ z poziomu CD do AB . -

Przesunięcie to możemy sobie wystawić dokonanym w ten sposób : element objętości $df_2 . n_2$ o ciężarze $df_2 . n_2 . \Delta_2$ opuszcza się z CD do poziomu EF ; praca wykonana równa się $df_2 . n_2 . \Delta_2 . h_2$. Ten sam element objętości $df_2 . n_2$, ale już wypełniony inną cieczą, więc o ciężarze $df_2 . n_2 . \Delta_2$ jakby przeniesiony zostaje z poziomu EF w naczyniu drugim do naczynia pierwszego na ten sam poziom EF. Siła ciężkości przy tym przesunięciu żadnej pracy nie wykona; w końcu element objętości $df_2 . n_2$ lub $df_1 . n_1$ o ciężarze $df_1 . n_1 . \Delta_1$ jakby podniesiony zostaje z poziomu EF do poziomu AB; podczas takiego przeniesienia wbrew działaniu siły ciężkości, wykonaną będzie praca $= - df_1 . n_1 . \Delta_1 . h_1$.

Wszystkie te prace, wykonane podczas wyobrażalnego przesunięcia, powinny dać w sumie zero, więc

$$p_2 df_2 n_2 - p_1 df_1 n_1 + df_2 n_2 \Delta_2 h_2 - df_1 n_1 \Delta_1 h_1 = 0;$$

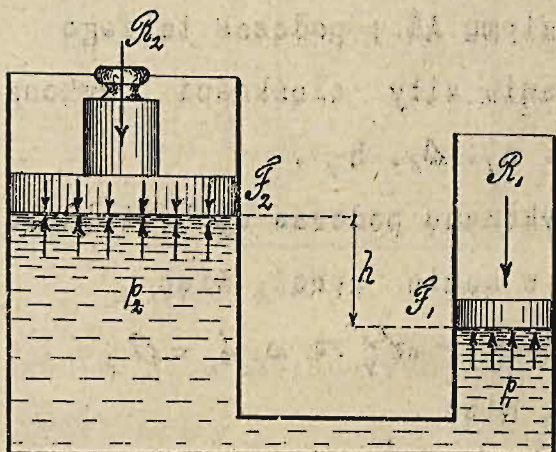
ponieważ $df_1 . n_1 = df_2 . n_2$, więc

$$p_2 - p_1 + \Delta_2 h_2 - \Delta_1 h_1 = 0.$$

Gdyby $p_1 = p_2$, wtedy $\Delta_2 h_2 = \Delta_1 h_1$, czyli $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$, to znaczy, że w y s o k o ś c i, d o j a k i c h d o c h o d z ą p o z i o m y c i e c z y n i e j e d n o r o d n y c h w n a c z y n i a c h p o ł ą c z o n y c h, l i c z o n e o d p ł a s z c z y z n y d z i e l ą c e j o b i e c i e c z e, s ą o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n e d o c i ę ż a r ó w w ł a ś c i w y c h (g ę s t o ś c i) t y c h c i e c z y, w z a ł o ż e n i u, ż e c i ś n i e n i e n a s w o b o d n ą p o w i r z c h n i ę w o b y d w u c h n a c z y n i a c h j e s t j e d n a k o w e.

Zasada ta jest stosowaną do określenia gęstości jednej cieczy względem drugiej, nie mieszającej się z pierwszą.

Niech naczynia połączone będą zamknięte dwoma dobrze dopasowanymi tłokami; przypuśćmy, że tłoki mogą poruszać się bez tarcia. Pola tłoków niech będą F_1 i F_2; napełnijmy naczynia cieczą pod same tłoki. Niech na tłoki działają z zewnątrz siły R_1 i R_2; na każdy tłok od strony cieczy działa ciśnienie hydrostatyczne p_1 i p_2. Jeżeli tłoki są w równowadze, to powinno być



Rys. 26.

$$R_1 = p_1 . F_1 \quad i \quad R_2 = p_2 . F_2 .$$

Ponieważ ciecz, zamknięta w naczyniu, jest też w równowadze, więc i siły, przyłożone do cieczy, są w równowadze. Zastosujmy zasadę prac przygotowanych. W tym celu wyobraźmy sobie najprostsze, jakie może zajść, przesunięcie: niech tłok F_1 wciśnie się do wnętrza naczynia na odległość n_1, wtedy tłok F_2 musi wyjść z naczynia na taką odległość n_2, aby

$$F_1 . n_1 = F_2 . n_2 .$$

Pracę sił, wykonanych przy takim przesunięciu znajdziemy:

ciśnienie $p_1 \cdot F_1$ wykona pracę $p_1 \cdot F_1 \cdot n_1$;
" $p_2 \cdot F_2$ " " $- p_2 \cdot F_2 \cdot n_2$;
siła ciężkości " " $- F_2 \cdot n_2 \cdot \Delta h$,
gdzie h jest różnicą poziomów powierzchni cieczy , dotykającej tłoków. Ponieważ siły $p_1 \cdot F_1$, $p_2 \cdot F_2$ i $F_2 \cdot n_2 \cdot \Delta$ są w równowadze, więc napiszemy :

$$p_1 F_1 n_1 - p_2 F_2 n_2 - F_2 n_2 \Delta h = 0 .$$

Jeżeli przyjmiemy pod uwagę , że $p_1 \cdot F_1 = R_1$ i $p_2 \cdot F_2 \cdot = R_2$ i że następnie $n_1 \cdot F_1 = n_2 \cdot F_2$, czyli $n_1 = n_2 \frac{F_2}{F_1}$, otrzymujemy :

$$R_1 n_1 \cdot \frac{F_2}{F_1} - R_2 n_2 - F_2 n_2 \Delta h = 0,$$

stąd $R_1 F_2 - R_2 F_1 - F_2 \cdot F_1 \cdot \Delta h = 0 \cdot$

Stosując to równanie do przypadku , kiedy wartość h jest bardzo mała w porównaniu z wartościami sił R_1 i R_2, jak to ma miejsce w zwykłej prasie hydraulicznej , możemy wyraz z Δh opuścić, a wtedy otrzymamy

$$R_1 F_2 = R_2 F_1 , \text{ albo } \frac{R_1}{R_2} = \frac{F_1}{F_2} ,$$

to znaczy , że c i ś n i e n i a c a ł k o w i t e , w y w i e r a n e p r z e z c i e c z n a t ł o k i o r ó ż n y c h p o l a c h, s ą p r o p o r c j o n a l n e d o w a r t o ś c i p ó l t y c h t ł o k ó w.

Stąd wynika , że małym ciśnieniem , wywieranym na tłok mniejszy , można wywrzeć bardzo znaczne ciśnienie przy pomocy dużego tłoka , obierając odpowiednie wartości pól F_1 i F_2 .

Na tej zasadzie są budowane prasy hydrauliczne .

N i e k t ó r e z a s t o s o w a n i a w i a d o - n o ś c i z h y d r o s t a t y k i d o g a z ó w.

Wzory na określenie ciśnienia hydrostatycznego oraz twierdzenia , dotyczące tego ciśnienia, otrzymane dla cieczy , dają się w zupełności zastosować do określania ciśnienia gazu , będącego w spoczynku, jeżeli tylko nie zachodzi zmiana temperatury i ciśnienia, mianowicie możemy twierdzić, że c i ś n i e n i e w g a z i e j e s t p r o s t o p a d ł e d o e l e m e n t u p o w i e r z c h n i , n a k t ó r y o w o c i ś n i e n i e r o z p a t r u j e m y .

Następnie:
c i ś n i e n i e g a z u n a e l e m e n t p o w i e r z c h n i , o b r a n y p r z y d a n y m p u n k c i e j e s t j e d n o i t o s a m o c o d o w a r t o ś c i - b e z w z g l ę d u n a k i e r u n e k t e g o e l e m e n t u .

Gazy, jak wiemy , w porównaniu z cieczami mają ciężar właściwy bardzo mały . Stąd możemy otrzymać pewne praktyczne ułatwienie przy określaniu ciśnienia gazu.

Rozpatrując gaz , uwięziony w przestrzeni zamkniętej, obierzmy jakikolwiek element powierzchni w najwyższym punkcie tej przestrzeni ; niech ciśnienie w tym miejscu będzie p_1 ; obierzmy inny element płaszczyzny przy jednym z najniższych punktów przestrzeni, napełnionej gazem, niech ciśnienie w tym miejscu będzie p_2; jeżeli odległość pionowa pomiędzy punktami tymi wynosi h metrów, wtedy, zgodnie z twierdzeniami o ciśnieniu hydrostatycznym, napiszemy

$$p_2 = p_1 + \Delta h,$$

gdzie Δ oznacza ciężar 1 metra^3 rozpatrywanego gazu. Weźmy dla przykładu powietrze; przy jednej atmosferze ciśnienia i $0°C$ $\Delta = 1{,}3 \frac{kg}{m^3}$; przyjmując h = 20 met., otrzymamy $p_2 = p_1 + 1{,}3 . 20 = p_1 + 26$.

Jeżeli p_1 jest jedna atmosfera, to jest $10000 \frac{kg}{m^2}$, to $p_2 = 10026 \frac{kg}{m^2}$, czyli bardzo mało się różni od p_1; widzimy, że, praktycznie biorąc, $p_2 = p_1$. Możemy więc w podobnych przypadkach powiedzieć, że wartość ciśnienia gazu w różnych miejscach przestrzeni jest (z pewnym przybliżeniem) stała.

Weźmy drugi przykład.-

Niech będzie para wodna, zamknięta w kotle przy ciśnieniu 10 atmosfer; wtedy ciężar 1 m.^{3} pary $\Delta = 5 \frac{kg}{m^3}$.

Znajdźmy, jaka będzie różnica w ciśnieniu pary, wziętej w górnych częściach kotła i tuż nad samą wodą, w założeniu, że odległość pionowa tych dwuch punktów wynosi, naprzykład, dwa metry; otrzymamy

$$p_2 = p_1 + \Delta h;$$

$$p_2 - p_1 = 5 . 2 = 10 \frac{kg}{m^2},$$

co stanowi bardzo nieznaczną część całego ciśnienia, wynoszącego 10 atmosfer, czyli 100000 $\frac{kg}{m^2}$.

Możemy zatym bez obawy popełnienia znaczniejszej omyłki twierdzić, że w a r t o ś ć c i ś n i e n i a w g a z a c h w e w s z y s t k i c h m i e j s c a c h j e s t j e d n a k o w a.

Zasada Archimedesa, otrzymana dla cieczy, w zupełności znajduje zastosowanie i dla gazów. Należy tylko mieć na uwadze, że Δ dla wody jest 1000 $\frac{kg}{m^3}$, zaś dla powietrza przy zwykłym ciśnieniu $\Delta = 1,3\ \frac{kg}{m^3}$.

O ile byśmy mieli do czynienia z powietrzem przy mniejszym ciśnieniu (naprzykład w górnych warstwach atmosfery), Δ należy odpowiednio zmniejszyć.

Jan Kozłowski 19 3/5 01 roku

HYDROKINETYKA.

Dotychczas mówiliśmy o cieczy , będącej w spoczynku; obecnie rozpatrzymy zachowanie się cieczy, znajdującej się w ruchu . Przedewszystkiem przypomnijmy sobie niektóre wiadomości o e n e r g i i .

Pojęcie o energji należy do rzędu pojęć elementarnych; określić dokładnie to pojęcie jest tak trudno,jak powiedzieć , co to jest materya; pojmujemy tylko, że w tym lub innym zjawisku mamy do czynienia z objawami energji. Naprzykład kamień , podniesiony na pewną wysokość i zatrzymany w tym miejscu; sprężyna,odkształcona do pewnej granicy; pocisk wraz z nabojem, umieszczony w lufie armatniej; woda , wstrzymana w korycie rzeki; gaz ściśniony i zamknięty w naczyniu; jakiekolwiek ciało,nagrzane powyżej temperatury otoczenia, i t.d. - wszystko to są ciała, w których jest jakby zawarta uśpiona energja , która może przybrać inną postać , o ile odpowiednie zajdą warunki.

Naprzykład,wspomniany kamień, kiedy go puścimy , zacznie spadać; po pewnym czasie wreszcie upadnie na ziemię, wywołując stuk, wstrząśnienie ziemi, podniesienie temperatury kamienia i ziemi. W każdym z tych zjawisk upatrujemy energję , lecz pod coraz to inną postacią. Toż samo przedstawić sobie możemy i z innymi przykładami,powyżej przytoczonymi .

Ciała, poprzednio wymienione mają, jakby w sobie zawartą energję, która tylko dzięki wyłącznym warunkom, w jakich te ciała się znajdują, nie wychodzi na jaw. Energję pod tą postacią nazywamy e n e r g j ą p o ł o- ż e n i a, inaczej e n e r g j ą p o t e n c y a l n ą.

Swiadomość o istnieniu energji mamy jeszcze z innych objawów: naprzykład kamień, spadający z wysokości, może podnosić pewien ciężar, albo też może, kiedy wpadnie na przedmiot stały, rozbić go lub nagrzać go; woda, płynąca z pewną prędkością, wprowadza w ruch koła młyńskie; pocisk lecący wywraca napotkane przeszkody; gaz, wydostający się z pod ciśnienia, popycha tłok maszyny gazowej lub parowej i t.p., są to takie ciała, którym przypisujemy energję, ponieważ są w ruchu. - Ten rodzaj energji nazwiemy e n e r g j ą r u c h u, inaczej e n e r - g j ą k i n e t y c z n ą.

W przyrodzie napotykamy inne jeszcze postaci energii, naprzykład w zjawiskach słuchowych, cieplnych, elektrycznych, magnetycznych, chemicznych i t.d. Należy dodać, że te wszystkie zjawiska, zdaje się, niczym innym nie są, jak tylko objawami energji potencjalnej lub energji kinetycznej, albo, jak niektórzy chcą, tylko energji kinetycznej, odpowiednio pojmowanej.

Ostatnio podane postaci energji (dzwięk, ciepło, elektryczność i t.p.) nie znajdą zastosowania w naszym przedmiocie. Będziemy mieli do czynienia głównie z energją pod postacią energji potencjalnej i kinetycznej.

Zasada zachowania energji.

Doświadczenie nas uczy, że energja z jednej postaci może w jakąkolwiek inną się przemieniać.

Wystawmy sobie jakikolwiek układ ciał, wyodrębniony od innych ciał; znajdźmy w jakikolwiek sposób sumę całej energji, jaką w danej chwili ten układ posiada. Niech teraz zajdą takie warunki, że w tym układzie rozpocznie się przemiana energji z jednych postaci w inne i po pewnym czasie spróbujmy znów obliczyć sumę wszystkiej energji, w danym układzie zawartej,- wtedy zawsze znajdziemy, że suma energji, otrzymana później, równać się powinna sumie pierwotnie znalezionej, czyli że układ nasz zachowuje całą swą energję.*)

Taka jest treść twierdzenia, które nazywamy z a s a d ą z a c h o w a n i a e n e r g j i. Sprawdzoną w całej rozciągłości ta zasada nie jest, jednak nie znamy dotychczas żadnego zjawiska, któreby jej bezwzględnie przeczyło. Zachodzi tu to samo, co mamy z zasadą niezniszczalności

---

*) Mechanika teoretyczna stawia dodatkowy warunek: jeśli powyższe zachowanie energji w układzie ma zachodzić, trzeba, aby siły działające między oddzielnymi ciałami i częściami ich, należącymi do jednego i tego samego, przez nas rozważanego, układu, były funkcjami tylko odległości. Przyjąć możemy, że niemal wszystkie siły, w przyrodzie spotykane, żądanemu warunkowi odpowiadają.

energji: energja, również jak i materya, jest niezniszczalną.

Aby dokładnie zrozumieć, jak należy pojmować powyższą zasadę zachowania energji, rozpatrzymy taki przykład. Wyobraźmy sobie układ, złożony z ziemi, człowieka i kamienia. Przypuśćmy, że na ten układ ciała sąsiednie żadnego wpływu nie wywierają. Niech człowiek podniesie kamień na pewną wysokość; energja kamienia zmieniła się, zmiana ta zaszła kosztem zmniejszenia się energji człowieka: człowiek stracił pewną ilość energji cieplnej. Gdybyśmy dokładnie obliczyli zmianę energji potencjalnej kamienia i stratę energji cieplnej człowieka i wyrazili obie te wielkości w jednakowych jednostkach, znaleźlibyśmy, że zmiana energji potencjalnej, która w tym razie jest przyrostem, równa się stracie; czyli, że energja całego układu pozostała bez zmiany.

Skorzystajmy z tego przykładu i rozpatrzmy jeszcze następującą zależność:

Człowiek, o którym była mowa, podnosząc kamień, pokonywał pewien opór, którego źródło tkwi w przyciąganiu kamienia przez ziemię. Jeśli kamień został podniesiony na wysokość $\underline{h}$, a ciężar kamienia jest $\underline{P}$, wtedy mówimy, że człowiek wykonał pracę równą $\underline{P.h}$. Widzimy zatym, że podczas przemiany energji (energji cieplnej człowieka na potencjalną kamienia) w naszym układzie została wykonana praca = P.h. Ponieważ praca i energja są wielkościami jednorodnymi, więc możemy przyrost energji kamienia mierzyć ilością pracy, wykonanej przez odpowiednie siły, działające wewnątrz układu podczas tej przemiany energji. Taką samą też co do wartości energję, zatym równą P.h, powinien stracić człowiek ze swej energji cieplnej.

Weźmy inny przykład. — Niech to będzie układ z poprzedniego przykładu; przypuśćmy, że kamień o ciężarze P jest podniesiony na wysokość h; przez to kamień zyskał przyrost energji potencjalnej = P.h. Wyobraźmy sobie teraz, że człowiek puszcza kamień; kamień pod działaniem przyciągania ziemi, dąży ku niej, czyli, jak mówimy, spada na nią. Dajmy na to, że rozpatrujemy kamień w tej chwili, kiedy, spadając, przebiegł drogę h_1; w tym momencie niech prędkość kamienia będzie v_1. Dzięki temu, że kamień jest w ruchu, posiada on energję kinetyczną; wartość tej energji, jak wiemy, równa jest połowie iloczynu z masy kamienia przez kwadrat prędkości w rozpatrywanym momencie, czyli $= \frac{1}{2}\frac{P}{g}\cdot v_1^2$, gdzie g jest przyśpieszeniem siły ciężkości. Ponieważ kamień znajduje się nad ziemią jeszcze na wysokości $(h-h_1)$, więc posiada jeszcze energję potencjalną $= P.(h-h_1)$. Ogólna suma energji w rozpatrywanym momencie $= \frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1^2 + P(h-h_1)$, a na mocy zasady zachowania energji suma ta powinna się równać początkowej energji potencjalnej P.h; czyli $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1^2 + P(h-h_1) = Ph$, a stąd $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v_1^2 = Ph_1$, albo $v_1 = \sqrt{2gh_1}$.

Niech kamień spada dalej; zauważmy chwilę przed dotknięciem ziemi, kiedy zatym nabytego przyrostu energji poten-

cjalnej kamień posiadać już nie będzie; niech w tym momencie prędkość kamienia wynosi v . Energja kinetyczna $= \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2$; ponieważ innego rodzaju energji w naszym układzie nie-ma, więc ta ostatnia energja powinna się równać pierwotnej P.h, czyli $\frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = Ph$, a stąd $v = \sqrt{2gh}$.
Otrzymujemy znane skądinąd wzory.

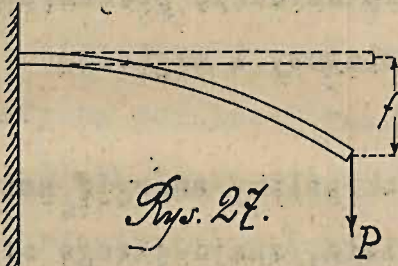
Kiedy następnie kamień spadnie na ziemię, prędkość jego zniknie. Energja kinetyczna, którą przed chwilą kamień posiadał, przemieni się w energję o innych postaciach: kamień i głównie ziemia zostaną odkształcone, zauważymy drgnięcie ziemi i da się słyszeć stuk, wreszcie kamień i ziemia cokolwiek się nagrzeją.

Gdyby człowiek, należący do rozpatrywanego układu,uchwycił kamień, kiedy tén znajduje się w którymkolwiek miejscu jego drogi , kamień zwolniłby swój bieg ; prędkość i ,oczywiście , energja kinetyczna kamienia zmniejszyłaby się , natomiast w układzie naszym energja kamienia przeniosłaby się do człowieka, odsuwając jego rękę , nagrzewając ją, nawet kalecząc , i t.d. - suma jednak energji, jaką układ posiadałby w tej chwili, pozostanie taka sama, jaka była początkowo.

Wartość zmiany energji potencjalnej danego ciała,jak to poprzednio zaznaczyliśmy, najdogodniej da się określić ilością pracy, którą pewne siły wewnątrz układu wykonają, aby ciało ze stanu poprzedniego sprowadzić do stanu,kiedy ono posiada odmienną energję potencjalną. -

Naprzykład kamień o ciężarze P kg. do podniesienia na wysokość h m. wymagać będzie wykonania wbrew przyciąganiu ziemi pracy równej P.h kg. m. Tę właśnie wartość pracy przyjmujemy , jako wartość przyrostu energji podniesionego kamienia i zatrzymanego w danym miejscu.

Jeżeli sprężynę odkształcimy w ten sposób, że obciążać ją poczniemy stopniowo i zwolna wzrastającym ciężarem aż wreszcie ugięcie sprężyny będzie f m. przy obciążeniu końcowym P kg. , wtedy praca zużyta na odkształcenie sprężyny równać się będzie ½P.f kg.m.; taką też energję potencjalną przypisujemy odkształconej sprężynie.-



Rys. 27.

Zmianę energji potencjalnej ściśnionego gazu określimy, wiedząc , ile pracy potrzeba zużyć , aby gaz ze stanu danego odpowiednio ścisnąć .—Energję potencjalną pocisku określić możemy najdogodniej, mierząc odpowiednimi przyrządami skutek , jaki pocisk wywiera na napotkaną przeszkodę .

Jeszcze parę wyjaśnień , dotyczących energji potencjalnej. - W naszym układzie, gdzie człowiek podnosi kamień o ciężarze P na wysokość h , kamień nabył energję potencjalną = P.h . —Gdyby to podnoszenie było rozpoczęte z niższego miejsca , wtedy kamień , podniesiony do tego samego, co poprzednio , miejsca, na wysokość $h' > h$, miał by energję potencjalną = P.h' większą niż poprzednio.

Widzimy zatym , że dla dokładnej oceny wartości przyrostu energji potencjalnej powinniśmy znać pierwotny , początkowy stan układu.- Ponieważ jednak we wszystkich zagadnieniach na ruch badać będziemy zwykle tylko r ó ż n i c ę energji potencjalnej ciała w odpowiednich stanach, przeto obojętnym jest , który stan przyjmiemy za początkowy, byleby tylko w jednym zadaniu uważać stale jeden i ten sam stan za taki. Zatym w poprzednim układzie powinniśmy którykolwiek poziom obrać jako podstawowy i względem niego oceniać energję potencjalną.

Na zakończenie tego rozdziału określimy energję potencjalną cząsteczki jakiegokolwiek ciała, znajdującego się pod danym ciśnieniem $= p_1 \frac{kg}{m^2}$. - W tym celu wyobraźmy sobie układ, złożony z cząsteczki o ciężarze q kg., umieszczonej w przestrzeni, gdzie niema ciśnienia; przyjmijmy, że cząsteczka w tym miejscu nie posiada energji. Następnie do układu niech należy człowiek i przestrzeń zamknięta, gdzie panuje ciśnienie $p_1 \frac{kg}{m^2}$; niech na taki układ żadne siły z zewnątrz nie działają . Znajdźmy ,jaką pracę wykona człowiek , który przeniesie cząstkę q do zamkniętej przestrzeni o ciśnieniu p_1 , jeśli wewnątrz danego układu działają tylko ciśnienia p_1 . Wartość tej pracy będzie zarazem wartością energji, jaką rozpatrywana cząsteczka posiędzie. Załóżmy dalej , że cząsteczka ma kształt bardzo małego walca o podstawie f m.^{2} i wysokości n metrów ; w takim razie ciężar tej cząsteczki możemy określić : $q = f.n.\Delta$, gdzie Δ jest to odpowiedni ciężar właściwy ciała. Niech człowiek, należący do układu, przesunie w przestrzeni o ciśnieniu 0 tak cząstkę, aby podstawa jej f dotknęła powierzchni, zamykającej przestrzeń z ciśnieniem $p_{/}$. Przy tym przesunięciu cząsteczki, żadnych przeszkód człowiek nie napotka; żadnej więc pracy nie wykona. Mamy zatym cząstkę w tym położeniu, kiedy podstawa walca stanowi część powierzchni, oddzielającej przestrzeń z ciśnieniem $p_{/}$ od przestrzeni, gdzie ciśnienie = 0. Wtedy na podstawę walca mamy ciśnienie $f.\,p_{/}$ kg..

Niech teraz człowiek wsunie naszą cząsteczkę zupełnie do przestrzeni z ciśnieniem $p_{/}$, czyli wypadnie walec nasz przesunąć na długość n metrów. Przy tym przesunięciu człowiek wykona pracę $f.p_{/}.n$ kg. m., pokonywując ciśnienie $f.p_{/}$; a więc i energja cząsteczki, którą ta nabyła $= f.p_{/}.n$. Ponieważ f.n jest objętość cząsteczki, więc wynik można w ten sposób słowami wyrazić : energja potencjalna cząstki, uwarunkowana zmianą ciśnienia na tę cząstkę, mierzy się iloczynem z ciśnienia przez objętość cząstki. Zamiast poprzedniej wartości energji, określonej wyrazem $f.p_{/}.n$, możemy stosować inny wyraz : ponieważ $f.n.\Delta = q$, więc $fn = \frac{q}{\Delta}$ i wtedy wartość energji cząstki $= \frac{p_{/}}{\Delta}.q$.

Zasada zachowania energji zastosowana do cieczy ciężkiej, będącej w ruchu trwałym. Twierdzenie Bernoulli'ego.

Niech przez naczynie przepływa ciecz o ciężarze właściwym Δ. Podczas ruchu każda cząsteczka cieczy posiadać będzie odpowiednią prędkość; cząsteczki sąsiednie wywierać będą na daną cząsteczkę pewne ciśnienie, które nazwiemy h y d r o d y n a m i c z n y m.-

Załóżmy, że ciecz jest doskonała, to znaczy nieściśliwa i bez lepkości, a wobec tego tarcia wewnętrznego i tarcia o ścianki naczynia nie potrzebujemy uwzględniać. Dalej, przyjmijmy, że ruch cieczy ma następującą własność: jeśli wewnątrz naczynia obierzemy pewien punkt i będziemy badali cząsteczki, które przez ten punkt jedna za drugą przepływać będą, wtedy znajdziemy, że kierunek i wartość prędkości a również i ciśnienie hydrodynamiczne dla wszystkich cząstek z biegiem czasu pozostają bez zmiany; ruch taki nazywać będziemy ruchem t r w a ł y m.

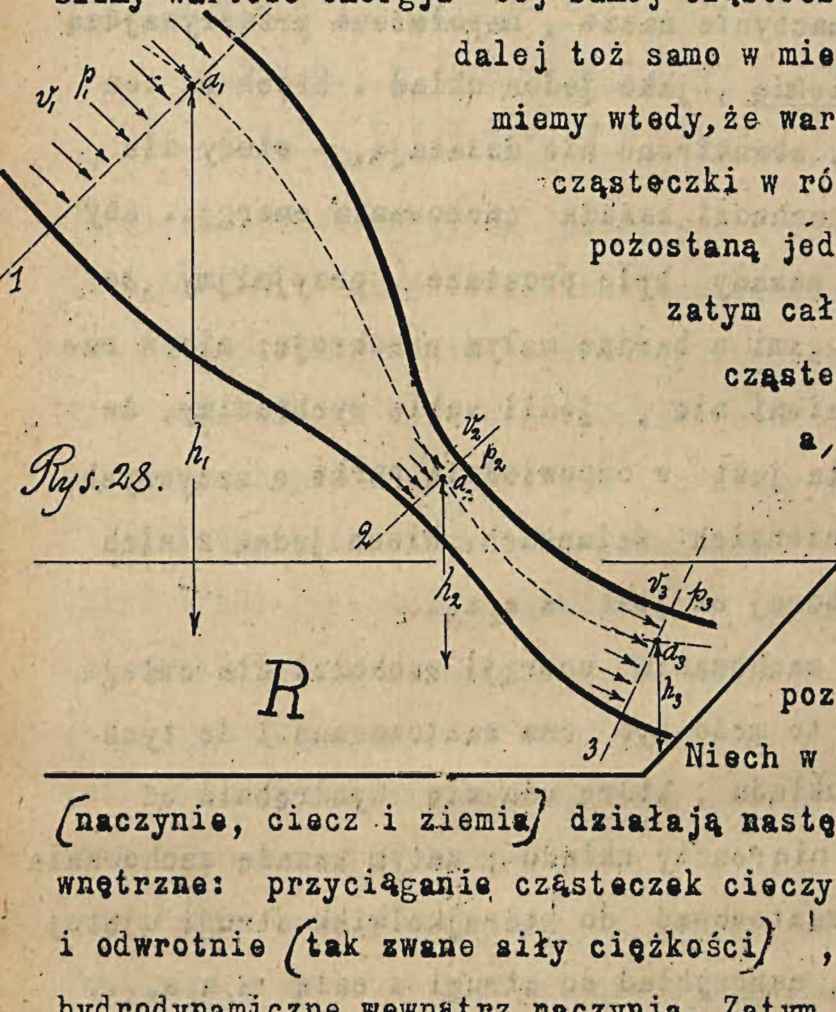
Przyjmijmy następnie, że wszystkie cząsteczki, znajdujące się w danym przekroju, prostopadłym do kierunku ruchu, mają jedną i tę samą prędkość: w przekroju I-ym o polu f_1 niech będzie prędkość cząsteczek v_1, w przekroju 2-im o polu f_2 —prędkość v_2 i t.d. Jeśli ruch cieczy odbywa się równoległymi prawie strugami i jeśli założymy, że w nyczyniu miejsc wolnych od cieczy niema , możemy napisać , że $f_1 v_1 = f_2 v_2 = f_3 v_3 = \ldots\ldots$

Rozważajmy naczynie nasze , napełnione przepływającą cieczą wraz z ziemią , jako jeden układ . Niech na ten układ żadne siły zewnętrzne nie działają, - wtedy dla układu takiego zachodzi zasada zachowania energji. Aby zastosowanie tej zasady było prostsze , przyjmijmy ,że ciecz płynie strugami o bardzo małym przekroju; nic w ruchu cieczy nie zmieni się , jeśli sobie wyobrazimy, że każda struga ujęta jest w odpowiednią rurkę o sztywnych, jednak bardzo cienkich ściankach. Niech jedną z nich będzie rurka , której oś jest $a_1 a_2 a_3 \ldots$

Jeśli zasada zachowania energji zachodzi dla całego naszego układu , to może być ona zastosowana i do tych części naszego układu , które uda się wyodrębnić od oddziaływania na nią reszty układu-; zatym zasadę zachowania energji możemy zastosować do którejkolwiek strugi ujętej w rurkę sztywną , naprzykład do strugi z osią $a_1 a_2 a_3 \ldots$

Niech w strudze $a_1 a_2 a_3 \ldots$ znajduje się , pomiędzy innymi, cząstka o ciężarze q kg. , która kolejno przechodzi miejsca $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Ponieważ ruch cieczy w rurce , zarówno jak w naczyniu jest trwałym, więc to , co możemy powiedzieć o jednej cząstce ze względu na zasadę zachowania energji , to samo dotyczyń będzie i pozostałych cząstek , składających ciecz rozpatrywaną i odwrotnie.

Zatym, jeśli wystawimy sobie cząstkę cieczy o ciężarze q kg. w miejscu a_1 i znajdziemy wartość energji ,jaką cząstka q w tym miejscu posiada; jeśli następnie określimy wartość energji tej samej cząsteczki w miejscu a_2, dalej toż samo w miejscu a_3 , przyjmiemy wtedy,że wartości energji tej cząsteczki w różnych miejscach pozostaną jednakowe. Odnajdźmy zatym całkowitą energję cząsteczki q w miejscu a_1, które niech znajduje się na wysokości h_1 nad obraną płaszczyzną poziomą R .



Rys. 28.

Niech w przyjętym układzie (naczynie, ciecz i ziemia) działają następujące siły wewnętrzne: przyciąganie cząsteczek cieczy przez ziemię i odwrotnie (tak zwane siły ciężkości) , oraz ciśnienie hydrodynamiczne wewnątrz naczynia. Zatym , ponieważ rozpatrywana ciecz jest ciężka , cząstka o ciężarze q kg. posiada, zgodnie z podanymi powyżej uwagami , energję potencjalną względem płaszczyzny R równą $q.h_1$. Niech na cząstkę q w miejscu a_1 zostaje wywierane ciśnienie hydrodynamiczne p_1 ; wobec tego cząstka ta , również na podstawie poprzednio wyłożonej,posiadać powinna energję potencjalną równą $\frac{q}{\Delta} p_1$ określoną względem przestrzeni, gdzie ciśnienie jest zero . Dalej cząstka ta przez miejsce a_1 płynie z prędkością v_1 , posiada zatym energję kinetyczną równą $\frac{1}{2}\frac{q}{g}\cdot v_1^2$, gdzie g jest to przyśpieszenie siły ciężkości.

Całkowita energja cząsteczki w miejscu a_1 równa się sumie znalezionych energji , a więc równa się

$$qh_1 + \frac{q}{\Delta}p_1 + \frac{1}{2}\frac{q}{g}v_1^2.$$

Jeśli cząsteczka badana przejdzie do miejsca a_2, które niech znajduje się na wysokości h_2 ponad R , zauważymy, że w tym miejscu cząsteczka jest pod ciśnieniem p_2 i porusza się z prędkością v_2.

Całkowita energja cząsteczki w tym miejscu, określona w sposób taki sam , jak wyżej, wyniesie

$$qh_2 + \frac{q}{\Delta}p_2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{g}\cdot v_2^2.$$

W miejscu a_3 cząsteczka mieć będzie energję

$$qh_3 + \frac{q}{\Delta}p_3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{g}\cdot v_3^2 \quad \text{i t.d..}$$

Na zasadzie zachowania energji napiszemy, że energja całkowita cząsteczki w miejscach a_1, a_2, a_3 pozostała bez zmiany, czyli

$$qh_1 + \frac{1}{2}\frac{q}{g}v_1^2 + \frac{q}{\Delta}p_1 = qh_2 + \frac{1}{2}\frac{q}{g}v_2^2 + \frac{q}{\Delta}p_2 =$$
$$= qh_3 + \frac{1}{2}\frac{q}{g}v_3^2 + \frac{q}{\Delta}p_3 \quad \text{i t . d.,}$$

albo po skróceniu przez q znajdziemy, że

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\Delta} = h_3 + \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\Delta} = Const.$$

Dowodzenie powyższe i rezultat tego dowodzenia będą słuszne dla dowolnej cząsteczki cieczy podczas ruchu ,pod warunkiem jednak, że ruch ten jest trwały.

Równanie powyższe łatwo ujmiemy w słowa , wprowadzając niektóre określenia , mianowicie $\underline{h_1}$ będziemy nazywali wysokością położenia cząsteczki nad obraną zasadniczą pła - szczyzną poziomą ; $\frac{v_1^2}{2g}$ jest to wysokość , z której ciało powinno spaść , aby uzyskać prędkość końcową v_1 , dlatego będziemy nazywali $\frac{v_1^2}{2g}$ w y s o k o ś c i ą o d p o w i e d n i ą p r ę d k o ś c i v_1.

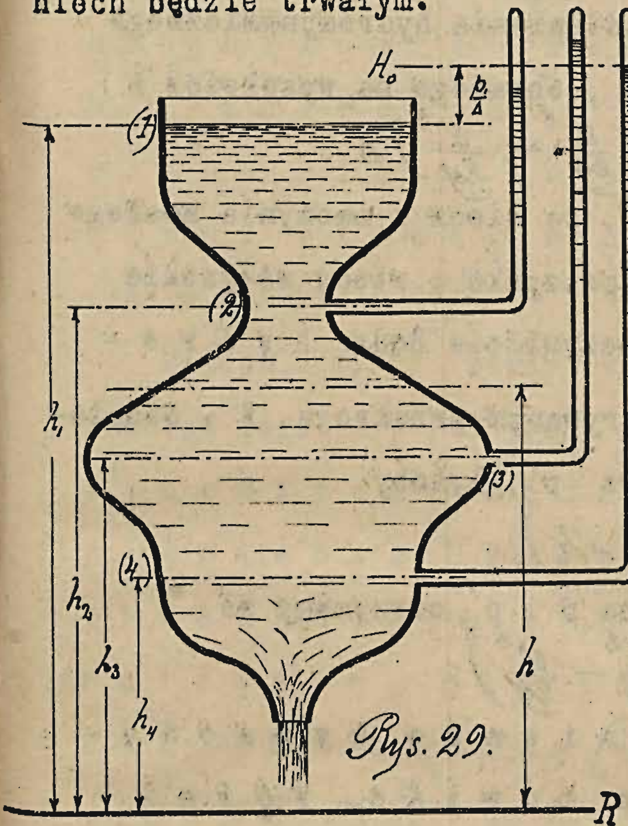
Wielkość $\frac{p_1}{\Delta}$, jak wiemy z hydrostatyki, oznacza wysokość słupa cieczy, której ciężar właściwy jest Δ ; podstawą zaś tego słupa jest jednostka powierzchni , a ciężar równa się p_1 ; wobec tego $\frac{p_1}{\Delta}$ nazwiemy wysokością odpowiednią ciśnieniu p_1 , krócej , - wysokością ciśnienia p_1.

Przyjmując takie określenia, wypowiemy twierdzenie , które nosi nazwę twierdzenia D. B e r n o u l l i'e g o: S u m a t r z e c h w y s o k o ś c i , m i a n o w i c i e : w y s o k o ś c i p o ł o ż e n i a n a d p e w n y m p o z i o m e m , w y s o k o ś c i o d p o w i e d n i e j p r ę d k o ś c i i w y s o k o ś c i c i ś n i e n i a - d l a j e d n e j i t e j s a m e j c z ą s t e c z k i , o k r e ś l o n y c h d l a r ó ż n y c h m i e j s c j e j d r o g i p o d c z a s r u c h u t r w a ł e g o - j e s t w i e l k o ś c i ą s t a ł ą.

C i ś n i e n i e h y d r o s t a t y c z n e a h y d r o d y n a m i c z n e .

Rozpatrzmy zależność , jaka istnieje między ciśnieniem hydrostatycznym a hydrodynamicznym w danym punkcie.

Wyobraźmy sobie naczynie , przez które płynie ciecz doskonała o ciężarze właściwym Δ , przyczym ruch cieczy niech będzie trwałym.



Rys. 29.

W danym przykładzie możemy sobie otrzymanie ruchu trwałego wyobrazić w ten sposób, że do naczynia naszego cieczy dolewamy stale tyleż , ile wypływa jej przez dolny otwór naczynia. Niech pole swobodnego poziomu cieczy będzie f_1 , ciśnienie zewnętrzne p_1 , prędkość przepływu cieczy w tym miejscu v_1 ; pole przekroju (2) niech będzie f_2, ciśnienie hydrodynamiczne w tym przekroju p_2 , prędkość przepływu cieczy v_2 i t.d.

Ponieważ ruch cieczy jest trwałym , więc ilość cieczy, która przepływa w jednostkę czasu przez każdy przekrój jest dla wszystkich przekrojów jednakowa t.j.

$$v_1 f_1 = v_2 f_2 = v_3 f_3 = v_4 f_4 = \ldots\ldots = v \cdot f .$$

Stosujemy do naszego przypadku twierdzenie D.Bernoulli'ego , obierając cząstkę z początku w przekroju I ,który jest na wysokości h_1 ponad zasadniczą płaszczyzną poziomą R , a następnie w jakimkolwiek przekroju na wysokości h ponad R . Równanie napisane na zasadzie powyższego twierdzenia , ma postać :

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} = h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta}.$$

Stąd znajdziemy wartość ciśnienia hydrodynamicznego p dla dowolnego przekroju f , obranego na wysokości h :

$$p = p_1 + \Delta(h_1 - h) + \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right)\Delta.$$

Wystawmy sobie na chwilę , że ciecz z naczynia naszego nie wypływa, lecz że jest w spoczynku ; wtedy wszystkie ciśnienia wewnątrz cieczy oczywiście będą h y d r o s t a t y c z n e ; w rozpatrywanym przekroju f , ciśnienie to , które oznaczymy przez p', byłoby

$$p' = p_1 + \Delta(h_1 - h).$$

Porównywując wartości na p i p', otrzymamy że

$$p = p' + \Delta\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right).$$

Widzimy stąd , że c i ś n i e n i e h y d r o d y n a m i c z n e, w o g ó l e m ó w i ą c, r ó ż n i s i ę o d c i ś n i e n i a h y d r o s t a t y c z n e g o , o k r e ś l o n e g o d l a t e g o s a m e g o m i e j s c a .

Różnica ta zależy od stosunku , w jakim się znajdują prędkości przepływu cieczy w różnych przekrojach naczynia; prędkości zaś, jak wynika z równania $f_1 v_1 = f \cdot v$, zależne są od przekrojów.

1) Jeśli $f_1 = f$, wtedy $v_1 = v$, wyraz $\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} = 0$ i $p = p'$. - Widzimy stąd , że c i ś n i e n i e h y d r o d y n a m i c z n e r ó w n a s i ę c i ś n i e n i u h y d r o s t a t y c z n e m u w t a k i c h p r z e k r o j a c h , w k t ó r y c h p r ę d k o ś ć

przepływu równa się prędkości na poziomie swobodnym, a więc w przekrojach, których pole równa się polu swobodnego poziomu cieczy w naczyniu (naprzykład w przekroju 4).

2) Jeśli $f_1 > f$, wtedy $v_1 < v$ i $\Delta\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) < 0$, wskutek tego $p < p'$, to jest ciśnienie hydrodynamiczne będzie mniejsze niż ciśnienie hydrostatyczne w tych przekrojach, których pole jest mniejsze, niż pole swobodnego poziomu cieczy (naprzykład w przekroju 2).

a) Gdyby $\Delta\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) = -p'$, mielibyśmy, że $p = 0$, to jest każda cząsteczka cieczy przepływałaby przez ten przekrój tak, jak gdyby sąsiednich cząsteczek wcale nie było; żadnej przeszkody do oddzielania się cząsteczek jednych od drugich niema; cząsteczki więc mogłyby przy sprzyjających warunkach dążyć do rozpryśnięcia się.

b) Gdyby $\Delta\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right)$, co do znaku będąc ujemne, miało wartość bezwzględną większą niż p', wtedy $p < 0$, to jest p byłoby ujemne. Nie znaczy to jednak, że ciśnienie p przeszło w przyciąganie, lecz tylko że cząsteczki cieczy z większą swobodą, niż poprzednio, mogłyby dążyć do rozejścia się. Najmniejsza wartość p może być tylko = 0 , nigdy < 0 .

3) Jeśli $f_1 < f$, wtedy $v_1 > v$, $\Delta\left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}\right) > 0$ i $p > p'$, czyli c i ś n i e n i e h y d r o d y n a m i c z n e b ę d z i e w i ę k s z e n i ż h y d r o s t a t y c z n e w t a k i c h p r z e k r o j a c h, k t ó r y c h p o l e j e s t w i ę k s z e, n i ż p o l e s w o b o d n e g o p o z i o m u c i e c z y (naprz. w przekroju 3).

Różnicę między ciśnieniem hydrodynamicznym a hydrostatycznym w powyższym naczyniu możemy sobie uprzytomnić, dodając do tego naczynia na różnych poziomach rurki zagięte. Jeden koniec każdej rurki - otwarty — niech będzie wprawiony w ściankę naczynia na poziomie tego przekroju, w którym badać chcemy ciśnienie; drugi koniec rurki, z a m k n i ę t y, — niech wystaje dostatecznie ponad swobodny poziom cieczy. Przypuśćmy, że w rurkach przy zamkniętym końcu niema ż a d n e g o c i ś n i e n i a.

Jeśli ciecz w naczyniu będzie w s p o c z y n k u , wtedy w rurkach ciecz stanie na jednym poziomie $H_0 H_0$, który znajdzie się o $\frac{p}{\Delta}$ wyżej, niż swobodny poziom cieczy w naczyniu. Wysokość słupa cieczy w rurce, liczona od dolnego końca rurki do poziomu $H_0 H_0$ będzie miarą ciśnienia hydrostatycznego w tym miejscu , co łatwe jest do zrozumienia.

Jeśli ciecz zacznie z naczynia wypływać i ruch ten się utrwali , wtedy ciśnienia w odpowiednich przekrojach zmienią się ; zobaczymy wtedy, że poziomy cieczy w rurkach zmienią się i różnić się będą od poprzedniego poziomu. Zauważona obecnie wysokość słupa cieczy w każdej rurce n a d j e j d o l n y m k o ń c e m. będzie m i a r ą c i ś n i e n i a h y d r o d y n a m i c z n e g o.

Jeśli pole przekroju naczynia w miejscu 2 jest mniejsze niż pole w miejscu I, wtedy, zgodnie z poprzednim, ciecz w rurce 2 będzie n i ż e j od poziomu $H_o H_o$.

Jeśli pole przekroju naczynia w miejscu 3 jest większe, niż w miejscu I, wtedy ciecz w rurce 3 będzie wyżej $H_o H_o$. Wreszcie, jeśli pole przekroju naczynia w miejscu 4 jest takie samo, jak w miejscu I, ciecz w rurce 4 pozostanie na tej samej wysokości co i podczas spoczynku.

Rurki , o których mowa, nazywamy r u r k a m i p i e z o m e t r y c z n y m i. Rurki piezometryczne mogą być również z górnymi końcami otwartymi. — Jeśli przyjmiemy, że na powierzchnię cieczy w otwartych rurkach działa ciśnienie zewnętrzne takie samo, jak na poziomie I, łatwo jest oznaczyć i w tym przypadku wysokości, do jakich podniesie się ciecz w rurkach podczas spoczynku i podczas ruchu trwałego cieczy.

Możnaby jeszcze w inny, bardziej może widoczny, sposób wykazać różnicę między ciśnieniem hydrostatycznym i hydrodynamicznym. Wyobraźmy sobie, że mamy balonik gumowy bardzo elastyczny. Do balonika uwiążmy ciężarek i zanurzmy w ciecz. Jeśli ciecz jest w spoczynku, wtedy w miarę zagłębiania balonika objętość jego zmniejszać się będzie. Niech teraz ciecz zacznie przez naczynie płynąć; doczekajmy się aż ruch stanie się trwałym; zanurzmy wtedy balonik w ciecz: zobaczymy, że w przekroju 2 objętość balonika powiększy się w porównaniu z tym, co było podczas spoczynku, dla tego, że $p_2 < p_2'$; w przekroju 3 objętość balonika się zmniejszy, gdyż $p_3 > p_3'$; w przekroju 4 objętość pozostanie taką, jak była podczas spoczynku cieczy, ponieważ $p_4 = p_4'$.

Pojmując różnicę między ciśnieniem hydrostatycznym a hydrodynamicznym, zrozumiemy następujący fakt: niech będzie wartka rzeka, wypływająca z dużego jeziora; niech z jeziora płynie łódź na rzekę. W jeziorze prędkość wody jest bardzo mała, prawie równa zeru, a więc ciśnienie, jakie wywiera woda w jeziorze na łódź, może być uważane jako ciśnienie hydrostatyczne. W rzece woda posiada pewną prędkość, ponieważ przekrój poprzeczny rzeki jest mniejszy niż jeziora; wobec tego ciśnienie, wywierane na łódź przez wodę w rzece jest mniejsze, niż było w jeziorze; dlatego też łódź w rzece więcej się zagłębi, niż w jeziorze.—Weźmy inny przypadek: niech na rzece znajduje się most, którego filary zmniejszają w danym miejscu pole przekroju rzeki; wskutek tego zwiększa się prędkość przepływu, a co zatym idzie, zmniejsza się ciśnienie hydrodynamiczne, wypierające łódź z wody; łódź zanurzy się głębiej, płynąc między filarami, niż kiedy była na rzece. Przeładowana łódź może w takim miejscu zatonąć.-

Stosunek ciśnienia hydrodynamicznego do zewnętrznego.

Rozpatrzmy pewną cząsteczkę cieczy doskonałej na poziomie swobodnym, znajdującym się na wysokości h_1 ponad poziomem zasadniczym; prędkość cząsteczki niech w tym miejscu będzie v_1 i ciśnienie p_1. Zwróćmy następnie uwagę na cząsteczkę tę, kiedy ona dopłynie do przekroju, znajdującego się na wysokości h ponad poziomem zasadniczym; niech prędkość cząsteczki w tym miejscu jest v a ciśnienie p; niech ruch cieczy w naczyniu będzie trwały; możemy zatym w danym przypadku zastosować twierdzenie D.Bernoulliego

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\Delta} = h + \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\Delta} .$$

Z równania tego znajdziemy

$$p = p_1 + \Delta(h_1 - h) + \frac{\Delta}{2g}(v_1^2 - v^2),$$

stąd $$p = p_1 + \Delta\left\{h_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \left(h + \frac{v^2}{2g}\right)\right\}.$$

Część równania, zawartą w nawiasach $\{\ \}$, oznaczmy przez A, wtedy równanie ostatnie przyjmie postać

$$p = p_1 + \Delta A$$

Wyobraźmy sobie teraz, że w ścianie naczynia w pewnym miejscu zrobiliśmy bardzo mały otwór; na cząsteczki cieczy, przepływające tuż koło otworka, z jednej strony działa ciśnienie hydrodynamiczne z wnętrza naczynia, wytłaczające cząsteczkę na zewnątrz, z drugiej strony sprzeciwia się temu ciśnienie zewnętrzne, działające przez pole otworka; ciśnienie to stara się cząsteczkę dalej, wgłąb cieczy w naczyniu wcisnąć. Załóżmy, że ciśnienie zewnętrzne we wszystkich punktach zewnętrznej powierzchni naczynia jest jednakowe i równe $p_{/}$; ciśnienie hydrodynamiczne w danym miejscu wewnątrz cieczy jest p. Jeśli $p_{/} < p$, wtedy cząsteczki cieczy wychodzić będą nazewnątrz; gdy $p = p_{/}$, ciecz będzie płynęła koło otworka tak, jak gdyby go wcale nie było; wreszcie, gdy $p_{/} > p$, wtedy ciśnienie zewnętrzne przeważa i cząsteczki, przepływające obok otworka, będą odsuwane od niego do wnętrza naczynia; niedość tego, przez ten otwór mogłyby do naczynia wpadać cząsteczki cieczy zzewnątrz, gdybyśmy je do otworu doprowadzali.

Trzy te przypadki warunkują się tym, jaka jest wartość A. Zbadajmy bliżej te przypadki

1) $p_{/} < p$, czyli cząsteczka cieczy, znajdująca się w tej chwili przed otworkiem, zostanie wyrzucona na zewnątrz, za nią druga, trzecia i t.d., wtedy gdy A > 0 (wynika to z równania $p = p_{/} + \Delta A$).
Ponieważ $A = \left(h_{/} + \frac{v_{/}^{2}}{2g}\right) - \left(h + \frac{v^{2}}{2g}\right)$, więc A będzie dodatnie wtedy, gdy $h_{/} + \frac{v_{/}^{2}}{2g} > h + \frac{v^{2}}{2g}$, albo $h_{/} - h > \frac{v^{2}}{2g} - \frac{v_{/}^{2}}{2g}$; biorąc z drugiej strony nierówności $\frac{v_{/}^{2}}{2g}$ za nawias, otrzymamy $h_{/} - h > \frac{v_{/}^{2}}{2g}\left\{\left(\frac{v}{v_{/}}\right)^{2} - 1\right\}$.

Ponieważ przy ruchu cieczy doskonałej istnieje związek $v_1 f_1 = v \cdot f$, więc $\frac{v}{v_1} = \frac{f_1}{f}$; podstawmy w otrzymaną poprzednio nierówność na miejsce stosunku $\frac{v}{v_1}$ równy mu $\frac{f_1}{f}$, otrzymamy

$$h_1 - h > \left[\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1\right]\frac{v_1^2}{2g} \dots\dots (a).$$

Ponieważ dla naszego naczynia $h_1 > h$, więc strona lewa nierówności zawsze jest dodatnią. Wielkość dodatnia zawsze jest wieksza od ujemnej, a więc nierówność (a) zachodzić będzie z a w s z e , gdy $\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1 \leq 0$. Gdyby $\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1 > 0$, wtedy istnienie nierówności (a) zależałoby od wartości liczbowych v_1, f_1 i f z jednej strony i h_1 i h z drugiej strony.

Widzimy zatym, że $A > 0$ z a w s z e , gdy $\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1 \leq 0$, stąd $\frac{f_1}{f} \leq 1$ i $f_1 \leq f$. Znaczy to, że jeśli dla danego przekroju $f \geqq f_1$, ciecz w k a ż d y m r a z i e będzie wyrzucaną w tym przekroju przez otworek z naczynia.

Jeśli $f < f_1$ m o ż e zajść to zjawisko lecz muszą być odpowiednio dobrane wartości h_1, h, v_1, f_1, f. Dla każdego danego przypadku mamy wartości liczbowe tych elementów dane, możemy więc zgóry powiedzieć, czy ciecz przez otworek będzie się wylewała , albo , w innym przypadku znając wartości h_1, h , f_1 i f , możemy powiedzieć, jaka powinna być prędkość v_1 , aby wylewanie się cieczy przez otworek zajść mogło.

II) Jeżeli $A = 0$, wtedy $p = p_1$, to jest ciśnienie hydrodynamiczne równe jest ciśnieniu zewnętrznemu; cząsteczka, która jest przed otworkiem, płynąć będzie dalej tak, jak gdyby otworka nie było. - $A = 0$ wtedy, gdy $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h + \frac{v^2}{2g}$, albo $h_1 - h = \frac{v^2}{2g} - \frac{v_1^2}{2g}$, podstawiając, jak poprzednio, $v = \frac{v_1 f_1}{f}$, otrzymamy

$$h_1 - h = \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1\right].$$

Ponieważ $h_1 - h$ jest dodatnie, więc i druga strona rownania powinna być dodatnią, stąd $\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1 > 0$, lub $\frac{f_1}{f} > 1$ i $f_1 > f$. Widzimy stąd, że A m o ż e się równać zeru wtedy tylko, gdy $f_1 > f$, czy jednak w tym razie $A = 0$, musimy sprawdzić, podstawiając w równanie $h_1 - h = \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1\right]$ odpowiednie wartości liczbowe.

Gdy $f_1 < f$, wtedy powiedzieć możemy zgóry, że A n i e m o ż e być zerem, a więc i p n i e m o ż e się równać p_1.

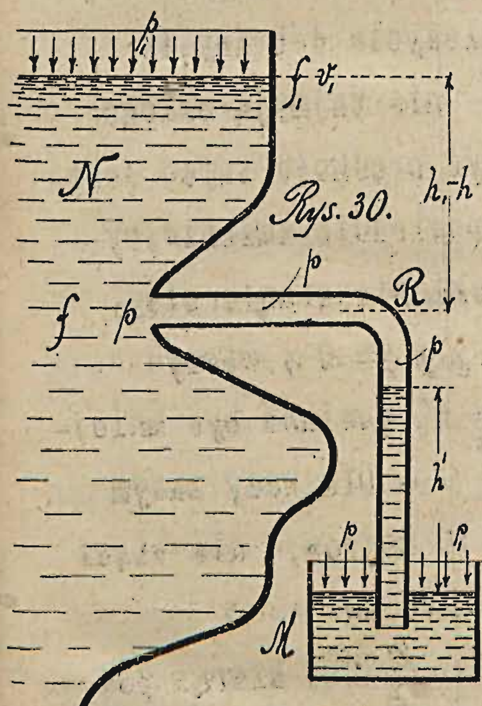
III) Jeśli $A < 0$, wtedy $p < p_1$, czyli że cząsteczka, znajdująca się wprost otworka, byłaby przez ciśnienie zewnętrzne wciśnięta głębiej w masę cieczy.

Gdybyśmy do otworka podsuwali cząsteczki cieczy, wtedy te byłyby wciskane do wnętrza naczynia.-Aby $p < p_1$ i $A < 0$, musi mieć miejsce nierówność $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} < h + \frac{v^2}{2g}$, stąd $h_1 - h < \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1\right]$.

Znów $h_1 - h$ jest wielkością dodatnią, a więc powinno być $\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1 > 0$, stąd $\frac{f_1}{f} > 1$, albo $f_1 > f$; gdy nierówność ta zachodzi, wtedy A m o ż e być mniejsze od zera , ale trzeba to jeszcze sprawdzić, podstawiając w nierówność odpowiednie wartości liczbowe.

W każdym jednak razie możemy powiedzieć , że gdy $f_1 \leq f$, wtedy $A < 0$ być n i e m o ż e . Rozpatrzmy bliżej warunki , przy których cząsteczki cieczy mogą być porywane z/zewnątrz i unoszone płynącą przez naczynie cieczą.

Przypuśćmy , że otwór jest zrobiony na wysokości tego przekroju , dla którego $A < 0$; niech będzie do otworka wprawiona rurka R ,zagięta nadoł i zanurzona otwartym końcem w naczyniu M z cieczą taką samą, jaka przepływa przez naczynie N . - Ponieważ $A < 0$, więc $p < p_1$, ciecz zatym w rurce R podniesie się na wysokość $h' = \frac{p_1 - p}{\Delta}$. Wiemy przytym dobrze, że wysokość h' pozostanie jedna i ta sama na jakiejkolwiek wysokości umieścimy naczynie M pod otworkiem, byleby tylko koniec rurki był w naczyniu tym zanurzony. Podnieśmy naczynie M tak, aby poziom cieczy w nim był h'' niżej od otworka, przyczym $h'' < h'$; wtedy cząsteczki cieczy z naczynia M po rurce będą wpadały do naczynia N . Zajdzie zjawisko wsysania cieczy z naczynia M przez ciecz płynącą w naczyniu N , przyczym



Rys. 30.

cząsteczki cieczy będą podnoszone na wysokość h'', która powinna być $< \frac{p_1-p}{\Delta}$. Z tego wzoru otrzymujemy, że wysokość h'' przy zadanym ciśnieniu zewnętrznym p_1 wzrastać będzie w miarę zmniejszania się p. Z drugiej strony wiemy, że to ciśnienie hydrodynamiczne (p) nie może być ujemnym; przeciwnie powinno zawsze mieć wartość dodatnią, a w ostatecznym razie może być $p = 0$.

Gdyby ze wzoru $p = p_1 + \Delta A$ w przypadku, kiedy $A < 0$, ciśnienie p wypadło ujemne, znaczyłoby to, że przekrój naczynia w tym miejscu nie jest należycie dobrany, to jest że cząsteczki przy przepływie nie zajmują całego przekroju w omawianym miejscu, gdyż prędkość tutaj jest zaduża. Wtedy należy przekrój odpowiednio zmienić, by otrzymać prędkość mniejszą, aż dopóki nie stanie się $p = 0$. Maximum h' otrzymamy, gdy $p = 0$; wtedy $h' = \frac{p_1 - p}{\Delta} = \frac{p_1}{\Delta}$; h'' zaś, które od h' powinno być mniejsze, będzie również mniejsze od $\frac{p_1}{\Delta}$. -- Dla wody zatym przy ciśnieniu atmosferycznym, $h'' < 10$ metrów; dla rtęci przy ciśnieniu atmosferycznym, $h'' < 73$ cm.

Z nierówności $h'' < h'$, lub $h'' < \frac{p_1 - p}{\Delta}$, biorąc pod uwagę poprzednio otrzymane równanie, znajdziemy, że

$$h'' < \left(h + \frac{v^2}{2g}\right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right), \text{ albo } h'' < \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{f_1}{f}\right)^2 - 1\right] - (h_1 - h).$$

Stąd określimy wartość $\underline{h''}$ w każdym poszczególnym przypadku.
