dziemy w wieloboku sznurowym bok zamykający 1 wzgl. 6. To nam pozwoli na przeprowadzenie promienia 1 wzgl. 6.

Promień ten przetnie prostą // do siły P_1' w punkcie a, który, jak wyżej zaznaczyliśmy, jest początkiem siły P_1' i końcem siły P_2'. Zatem odcinek ab wskazuje nam na wartość i lot siły P_1', zaś odcinek ea na wartość i lot siły P_2'. Ponieważ w zadaniu szukamy sił P_1 i P_2, więc znajdziemy je równe odpowiednio siłom P_1' i P_2' z lotami: dla siły P_1 od b do a i dla siły P_2 - od a do e. Na rysunku, przedstawiającym układ sił, prowadzimy przez punkt A prostą // do ae: będzie to linja działania siły P_2. Wreszcie, na linjach działania sił P_1 i P_2 zaznaczamy loty tych sił. W ten sposób zadanie mamy rozwiązane.

ROZDZIAŁ III

MOMENTY STATYCZNE SIŁ.

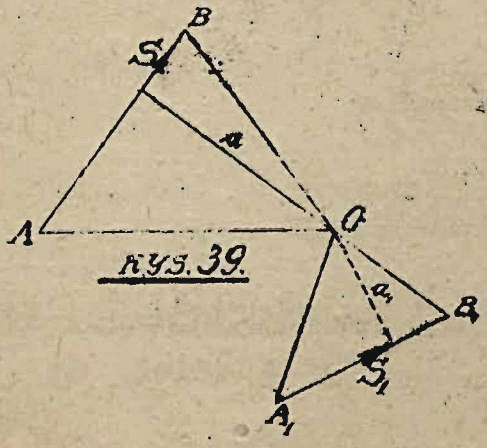
46 OKREŚLENIE MOMENTU STATYCZNEGO SIŁY. Przypuśćmy, że odcinek AB /rys. 39/ przedstawia co do wartości, kierunku i lotu siłę S

MOMENTEM STATYCZNYM TEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O NAZYWAĆ BĘDZIEMY ILOCZYN Z OWEJ SIŁY PRZEZ JEJ ODLEGŁOŚĆ OD O, CZYLI PRZEZ T.ZW. RAMIĘ. PRZYTEM ILOCZYNOWI TEMU PRZYPISUJEMY ZNAK $+$ LUB $-$, ZALEŻNIE OD TEGO, CZY SIŁA S DĄŻY DO OBROTU OKOŁO O W KIERUNKU RUCHU SKAZÓWEK ZEGAROWYCH, CZY TEŻ W KIERUNKU PRZECIWNYM.

Z określenia tego wynika, że w przypadku, przedstawionym na rys. 39 moment jest dodatni; oznaczając zatem ramię przez a, będziemy mogli napisać

$$M_o S = S.a$$

lewa strona tej równości jest symbolem wyrażenia: "moment (M) siły S względem punktu O".



rys. 39.

Natomiast moment siły S_1 względem tegoż punktu O jest ujemny, a więc

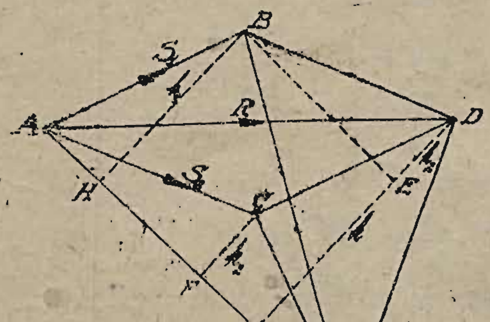
$$M_o S_1 = -S_1 . a_1$$

47. Łącząc punkty A i B lub A_1 i B_1

z O /rys.39/ otrzymamy trójkąty AOB i A_1OB_1, których podwójne pola wynoszą: $S.a$, odpowiednio S_1a_1, a więc są równe momentom siły S odpowiednio S_1 względem punktu O.

Tak więc widzimy, że MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU JEST RÓWNY PODWÓJNEMU POLU TRÓJKĄTA, ZBUDOWANEGO NA TEJ SILE, JAK NA PODSTAWIE, I POSIADAJĄCEGO WIERZCHOŁEK W OWYM PUNKCIE. Polu temu przypisujemy znak + lub − stosownie do powiedzianego w poprzednim §.

48. MOMENT SIŁY WYPADKOWEJ. Niech będą dwie siły S_1, S_2 /rys.40/, których linje działania przecinają się w punkcie A, oraz dowolny punkt O, położony w płaszczyźnie, wyznaczonej przez te siły. Po przesunięciu sił do punktu A



RYS.40.

znajdźmy zapomocą równoległoboku wypadkową R tych sił i w myśl ostatniego twierdzenia /§ 47/ wyznaczmy momenty statyczne danych sił składowych oraz moment tej wypadkowej, względem obranego punktu. Wysokości trójkątów ABO, ACO, ADO względem wspólnej podstawy AO niech będą h_1, h_2, h_3; poprowadźmy prostą BE // do AO, wówczas otrzymamy:

$$M_o R = 2\Delta AOD = \overline{AO}.h;$$

ponieważ

$$h = GE + ED = h_1 + h_2,$$

więc

$$M_o R = \overline{AO}.h = \overline{AO}(h_1 + h_2) = \overline{AO}.h_1 + \overline{AO}.h_2$$

A że

$$\overline{AO}.h_1 = M_o S_1$$

zaś

$$\overline{AO}.h_2 = M_o S_2$$

zatem

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2$$

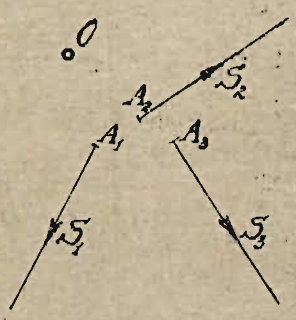
stąd mamy twierdzenie: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ R DWÓCH SIŁ S_1, S_2 WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O, OBRANEGO W PŁASZCZYŹNIE TYCH SIŁ, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW STATYCZNYCH SIŁ SKŁADOWYCH WZGLĘDEM TEGOŻ PUNKTU.

__49.__ Uogólnijmy powyższe twierdzenie dla ilukolwiek sił składowych /układu płaskiego/.

Nie zmniejszając ogólności dowodu, przypuśćmy, że mamy dane tylko trzy siły S_1, S_2, S_3 /rys.41/, znajdujące się w jednej płaszczyźnie; wyznaczmy moment statyczny wypadkowej tych sił względem punktu O, obranego w tejże płaszczyźnie.

Przedewszystkiem znajdujemy wypadkową R_{12} sił S_1, S_2; stosujemy do nich twierdzenie § 48, według którego:

$$M_o R_{12} = M_o S_1 + M_o S_2 \quad \ldots\ldots (1)$$



RYS. 41.

Postępując tak samo z siłami R_{12} i S_3, jako składowemi oraz z R jako ich wypadkową, otrzymamy:

$$M_o R = M_o R_{12} + M_o S_3$$

Jeżeli zamiast $M_o R_{12}$ podstawimy jego wartość z (1) znajdziemy:

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2 + M_o S_3 \quad ,$$

wyrażająca twierdzenie, o które nam chodzi.

Gdybyśmy mieli dane więcej, niż 3 siły składowe, to, oznaczając ich liczbę przez n i rozumując, jak poprzednio, otrzymalibyśmy:

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2 + \ldots\ldots\ldots + M_o S_n$$

lub krócej:

$$M_o R = \sum_{i=1}^{i=n} M_o S_i$$

Tak więc: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ ILUKOLWIEK SIŁ $S_1, S_2, S_3, \ldots S_n$, BĘDĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE, WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O, OBRANEGO W TEJŻE PŁASZCZYŹNIE, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW SIŁ SKŁADOWYCH WZGLĘDEM TEGOŻ PUNKTU.

50. ZASTOSOWANIE WIELOBOKU SZNUROWEGO DO WYZNACZANIA MOMENTU STATYCZNEGO. Przypuśćmy, że mamy znaleźć moment statyczny siły S względem punktu O, odległego od niej o a /rys.42/.

Wykreślmy dla tej siły "wielobok sił" oraz "wielobok sznurowy". Promienie i odpowiednie boki oznaczmy przez $1, 2$. Przez punkt O poprowadźmy prostą, równoległą do siły, którą nazwiemy PROSTĄ ODCINKÓW. Boki wieloboku sznurowego odetną na tej prostej odcinek $m_1 m_2$. W ten sposób utworzy się trójkąt $m_1 B m_2$, podobny do trójkąta $a\Omega b$ w wieloboku sił. Z podobieństwa trójkątów wynika:

$$\frac{ab}{m_1 m_2} = \frac{w}{a}$$

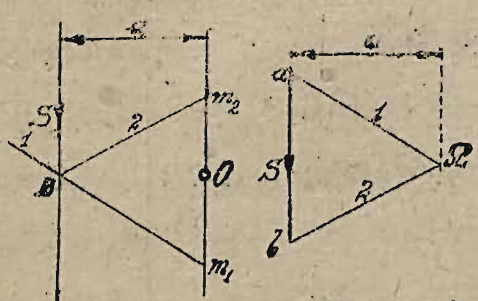
gdzie w oznacza w wieloboku sił odległość bieguna Ω od siły S, czyli t.zw. ODLEGŁOŚĆ

BIEGUNOWĄ. Ponieważ $ab = S$, zatem

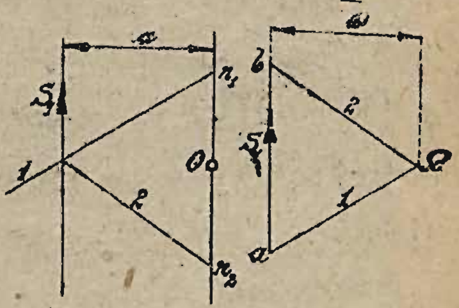
$$S.a = \overline{m_1 m_2}.\omega$$

Lecz $S.a$ jest to moment statyczny siły S względem punktu O ; zatem z równości tej wynika, że moment statyczny wyznaczyć możemy, gdy pomnożymy odcinek $m_1 m_2$ otrzymany na "prostej odcinków" przez "odległość biegunową".

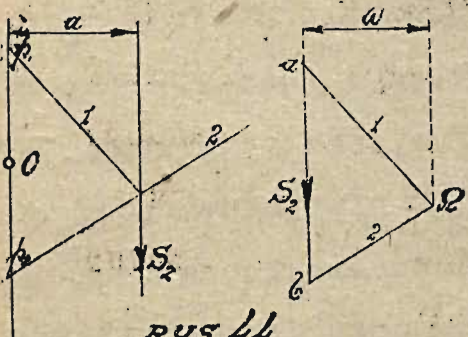
Stąd mamy następujące prawidło: ABY WYZNACZYĆ MOMENT STATYCZNY SIŁY S WZGLĘDEM DANEGO PUNKTU O, NALEŻY WYKREŚLIĆ DLA TEJ SIŁY JAKIKOLWIEK WIELOBOK SIŁ ORAZ ODPOWIEDNI WIELOBOK SZNUROWY, POPROWADZIĆ PRZEZ PUNKT O PROSTĄ ODCINKÓW I ZNALEŹĆ NA NIEJ ODCINEK, ZAWARTY MIĘDZY BOKAMI WIELOBOKU SZNUROWEGO; ILOCZYN Z TEGO ODCINKA PRZEZ ODLEGŁOŚĆ BIEGUNOWĄ JEST RÓWNY SZUKANEMU MOMENTOWI STATYCZNEMU.



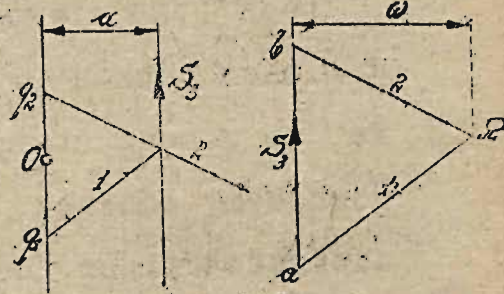
RYS. 42.



RYS. 43.



RYS. 44.



RYS. 45.

51. Trzeba jeszcze wskazać cechę, którą pozwoli wprost z naszego wykresu określić znak obliczonego tym sposobem momentu.

Rozpatrując rozmaite możliwe położenia siły S względem punktu O /rys.42 do 45/ przekonamy się, że, GDY MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM PEWNEGO PUNKTU JEST DODATNI, TO PUNKT PRZECIĘCIA SIĘ BOKU 1 WIELOBOKU SZNUROWEGO Z PROSTĄ ODCINKÓW LEŻY PONAD PUNKTEM PRZECIĘCIA SIĘ BOKU 2 Z TĄ PROSTĄ, ORAZ, ŻE W PRZYPADKU ODWROTNYM JEST WRĘCZ PRZECIWNIE. Bok 1 nazywać będziemy, zgodnie z poprzedniem, "bokiem przed siłą S", zaś bok 2 - "bokiem poza siłą S".

Istotnie: na rys.42 moment statyczny siły S względem punktu O jest ujemny /widać to bezpośrednio z kierunku, w którym ta siła stara się wykonać obrót około $O/$, jednocześnie widzimy, że punkt m_1 leży poniżej punktu m_2, t.j. zgodnie z tem, jak możnaby przewidzieć, stosując dopiero co wymienione prawidło; na rys. 43 mamy znów przypadek dodatniego momentu; odcinek $n_1 n_2$ biegnie z góry na dół, czyli znowu zgodnie z prawidłom. Tak samo potwierdzają to ostatnie pozostałe przypadki, rozpatrzone na rys.44 i 45.

Zwrócić należy uwagę, że powyższe prawidło będzie słuszne dotąd, dopóki biegun Ω obrany jest w wieloboku sił naprawo od linji sił. Gdybyśmy biegun obrali z lewej strony, prawidło powyższe należałoby sformułować, pod względem znaku momentów, wprost odwrotnie.

52. SKALE MOMENTÓW. Wypada jeszcze omówić sprawę skali, przy pomocy której należy w naszym wykresie mierzyć odpowiednie odcinki w celu wyznaczenia momentów statycznych sił.

Otrzymaliśmy poprzednio proporcję:

$$\frac{S}{m_1 m_2} = \frac{W}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

gdzie znaczenie liter wyjaśnia rys.42. Z proporcji wynika, że najlogiczniej będzie przyjąć, iż stosunki w każdej z obu stron zawierają wielkości jednorodne, że więc $\overline{m_1 m_2}$ jest wyrażone w takich samych jednostkach, jak S zaś ω w takich samych, jak a.

Z tego wnosimy, że $\overline{m_1 m_2}$ NALEŻY MIERZYĆ W SKALI SIŁ, A ω - W SKALI DŁUGOŚCI.

Proporcję (1) można napisać także w sposób następujący:

$$\frac{S}{\omega} = \frac{\overline{m_1 m_2}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

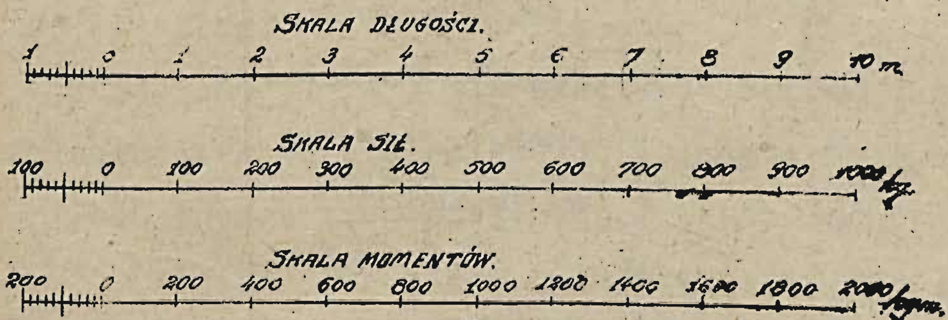
i rozumując, jak poprzednio, dojdziemy do wniosku, że MOŻNA ω MIERZYĆ W SKALI SIŁ, ZAŚ $\overline{m_1 m_2}$ W SKALI DŁUGOŚCI, przyczem otrzymamy, oczywiście, ten sam wynik, co poprzednio.

Tak więc ODLEGŁOŚCI BIEGUNOWE I ODCINKI PROSTEJ ODCINKÓW NALEŻY MIERZYĆ W RÓŻNYCH SKALACH: JEŚLI PIERWSZĄ Z TYCH WIELKOŚCI MIERZYMY W SKALI DŁUGOŚCI, TO DRUGĄ TRZEBA MIERZYĆ W SKALI SIŁ, LUB ODWROTNIE.

Najczęściej stosować będziemy: dla odległości biegunowych - skalę długości, zaś dla odcinków - skalę sił.

53. Aby uniknąć wykonywania działań arytmetycznych przy wyznaczaniu momentów statycznych,

kreślimy, zazwyczaj, obok skali długości i skali sił, specjalną "skalę momentów" /rys 46 Każdą działkę tej skali, obieramy równą, co do wielkości, działce skali sił; działka skali momentów wskazać powinna iloczyn z liczby kg, przez odległość biegunową, zmierzoną w skali długości. Ponieważ odległość biegunowa jest wielkością stałą, zatem liczby, umieszczone nad skalą momentów, są liczbami krotnemi odpowiednich wartości na skali sił.

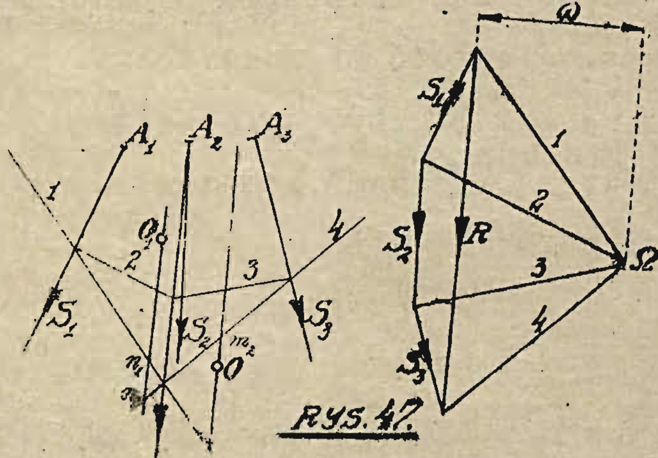


RYS. 46.

Na rys.46 są wykreślone skale do zadania, w którym odległość biegunowa odczytana w skali długości, wynosi 2 m. lub odczytana w skali sił, wynosi 200 kg.

54. Wyznaczanie MOMENTU STATYCZNEGO ILUKOLWIEK SIŁ PRZY POMOCY WIELOBOKU SZNUROWEGO.

Przypuśćmy, że mamy dane np. trzy siły S_1, S_2, S_3; chodzi nam o znalezienie ich momentu statycznego względem dowolnego punktu O /rys. 47/.



RYS. 47.

W tym celu zastępujemy dany układ sił ich wypadkową R, znajdując ją przy pomocy wieloboku sił i wieloboku sznurowego; następnie, opierając się na twierdzeniu, dowiedzionem w § 49, wyznaczamy moment statyczny tej wypadkowej względem O.

Należy zatem przez O poprowadzić prostą odcinków równolegle do R i znaleźć punkty przecięcia się jej z bokami "przed" i "za siłą R" /t.j. z bokami 1 i 4/; otrzymawszy odcinek $\overline{m_1 m_2}$, obliczamy moment statyczny sił, jako iloczyn $\overline{m_1 m_2} . \omega$; możemy również znaleźć wartość szukanego momentu statycznego, zmierzywszy odcinek $\overline{m_1 m_2}$ w skali momentów.

Zauważmy tu, że można się obejść bez wykreślania wypadkowej w wieloboku sznurowym, wyznaczając wprost przecięcia się boków skrajnych z prostą odcinków.

Znak znalezionego tym sposobem momentu określamy zapomocą prawidła, przytoczonego w § 51. Stosując je, dojdziemy łatwo do wniosku, że w rozważanym przypadku /rys.47/ moment jest ujemny /odcinek $m_1 m_2$ biegnie z dołu do góry/.

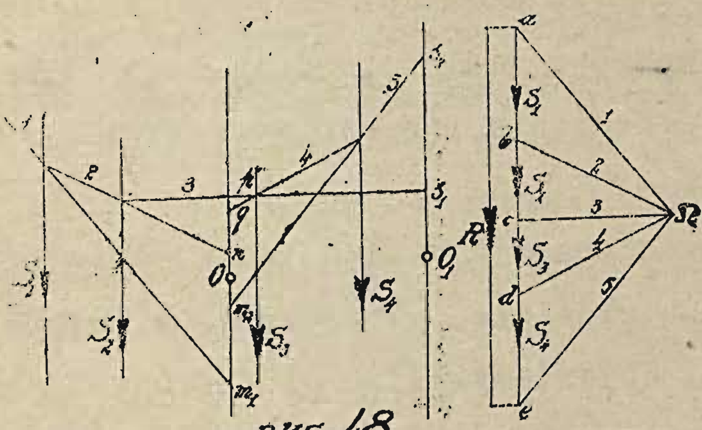
Podobnie otrzymamy, że moment statyczny tego samego układu sił względem punktu O_1 wynosi $n_1 n_2 \cdot \omega$ i ma znak dodatni.

55. Na rys.48 widzimy zastosowanie powyższej metody do wyznaczania MOMENTU STATYCZNEGO KILKU /czterech/ SIŁ RÓWNOLEGŁYCH S_1, S_2, S_3, S_4 względem punktu O.

W tym razie rzecz się upraszcza, gdyż wypadkowa tych sił, a więc i prosta odcinków, jest równoległa do sił składowych.

Oznaczając punkty przecięcia się prostej odcinków z bokami skrajnemi wieloboku sznurowego przez m_1 i m_2, napiszemy:

$$\sum_{i=1}^{i=4} M_o S_i = -\overline{m_1 m_2} \cdot \omega \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$



RYS. 48.

Wynik ten łat sprawdzić bezpośrednio, wyznaczając moment statyczny każdej siły z osobna i następnie dodając te momenty algebraicznie.

Istotnie: $M_o S_1 = -\overline{m_1 n} . \omega$

$$M_o S_2 = -\overline{np} . \omega$$

$$M_o S_3 = +\overline{pq} . \omega$$

$$M_o S_4 = +\overline{q m_2} . \omega$$

Dodając te równości i biorąc pod uwagę, że $-\overline{m_1 n} - \overline{np} + \overline{pq} + \overline{q m_2} = -\overline{m_1 m_2}$ otrzymamy wzór (1.)

Za pomocą wykreślonego już wieloboku sznurowego można wyznaczać również momenty statyczne grupy pewnych sił z danego układu, byleby siły tej grupy następowały w wieloboku sił bezpośrednio po sobie.

Tak więc np. łatwo znajdziemy, że:

$$M_o (S_1, S_2) = -\overline{m_1 p} . \omega \quad ,$$

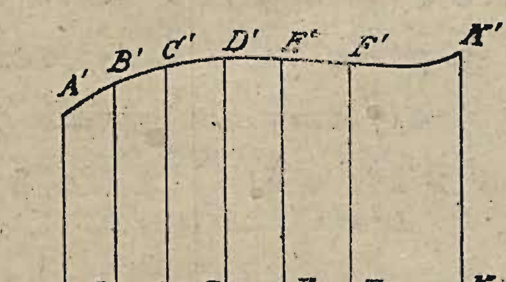
gdzie $\overline{m_1 p}$ oznacza odcinek, znajdujący się na prostej odcinków pomiędzy punktami jej przecięcia się z bokami: przed siłą S_1 /bok 1 / i za siłą S_2 /bok 3 /.

Zupełnie tak samo otrzymamy względem punktu O_1, naprz.:

$$M_{01}(S_3, S_4) = -\overline{S_1S_2} \cdot \omega \quad \text{i t.d.}$$

56. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE. Dotychczas mieliśmy do czynienia jedynie z SIŁAMI SKUPIONEMI, to jest takiemi, które mają pewną skończoną wartość i są przyłożone do danego ciała w określonych punktach. Rozważymy teraz przypadek, gdy na ciało działają SIŁY CIĄGŁE, zmieniające się od punktu do punktu. Będzie to np. obciążenie warstwą kamieni lub piasku, nasypanego w sposób dowolny lub obciążenie tłumem ludzi, stojących na podłodze, spoczywającej na belce i t.p.

Przypuśćmy więc, że mamy belkę AK /rys.49/, obciążoną w sposób CIĄGŁY. Na dowolnie obraną część belki obciążonej przypadnie odpowiednia część ciężaru całkowitego.



RYS. 49.

Weźmy, dajmy na to, część belki CD o długości Δl ; przypuśćmy, że na tę długość przypada ciężar ΔP ; wtedy stosunek

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = p_o$$

wskaże nam ŚREDNIE OBCIĄŻENIE BELKI na jej części między C i D, przypadające na JEDNOSTKĘ długości belki.

Wartość tego ŚREDNIEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTKOwego dla obranego miejsca na belce zależeć będzie i od miejsca na belce i od długości Δl. Aby uniezależnić wartość p_o od długości Δl przyjmijmy, że długość Δl, mierzona od punktu C, maleje, dążąc do zera; wówczas otrzymamy:

$$\lim_{(\Delta l \to 0)} \frac{\Delta P}{\Delta l} = \frac{dP}{dl} = p$$

będzie to OBCIĄŻENIE JEDNOSTKOWE W DANYM PUNKCIE C ; oznaczmy je przez p . Przypuśćmy, że w sposób podobny obliczyliśmy obciążenia jednostkowe we w s z y s t k i c h p u n k t a c h obciążonej belki.

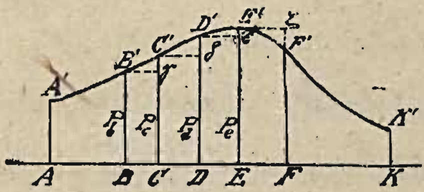
Obieramy obecnie odpowiednią SKALĘ OBCIĄŻEŃ JEDNOSTKOWYCH. W punktach $A, B, C, \dots$ belki wystawiamy prostopadłe do niej i na tych prostopadłych odkładamy w skali obciążeń jednostkowych odcinki $AA', BB', CC', \dots$ i t.d. ró[wno] obciążeniem jednostkowym, znalezionym dla każdego punktu belki.

Jeżeli końce tych odcinków połączymy linją ciągłą, otrzymamy poglądowe przedstawienie rozkładu obciążeń jednostkowych wzdłuż belki. Linję $A'B'C'$......, która w ogólnym przypadku będzie linją krzywą, nazywać będziemy KRZYWĄ OBCIĄŻEŃ.

Obciążenie jednostkowe mierzyć będziemy najczęściej w kilogramach na metr bieżący belki /kg/m./.

57. Niech będzie dana krzywa obciążeń $A'B'C'$..... K'/rys.50/. Według tej krzywej łatwo będzie znaleźć siłę, przypadającą na taką czy inną część belki, względnie na całą belkę.

Przypuśćmy, że mamy znaleźć siłę, działającą na część BF belki. Podzielmy długość BF na dość małe cząstki: BC, CD, DE i EF. Z pewnem przybliżeniem będziemy mogli przyjąć, że na całej długości cząstki BC przypada jednakowe OBCIĄŻENIE JEDNOSTKOWE, przedstawione odcinkiem $BB'=p_b$; tak samo na cząstce CD - odcinkiem $CC'=p_c$; na cząstce DE - odcinkiem $DD'=p_d$ i t.d.



RYS. 50.

Wówczas na cząstkę belki:

BC działać będzie siła /ciężar/ $= p_b \cdot BC$

CD działać będzie siła /ciężar/ $= p_c \cdot CD$

DE działać będzie siła /ciężar/ $= p_d \cdot DE$ i t.d.

Iloczyn $p_b \cdot BC$ jest to pole prostokąta $BB'\gamma C$

" p_c CD " " " " $CC'\delta D$

" p_d DE " " " " $DD'\varepsilon E$

" p_e EF " " " " $EE'\xi F$

Zatem siłę, działającą na część belki BF obliczymy /w przybliżeniu/ z pola, zawartego między rzędnemi krzywej obciążeń w punktach B i F, osią belki i linją schodkową:

$$B'\gamma C'\delta D'\varepsilon E'\xi .$$

Jeślibyśmy podział części belki BF dokonali na bardzo wiele cząstek o bardzo małej długości, wówczas pole nasze ograniczone będzie od góry linją schodkową, która bardziej, niż poprzednia, zbliżać się będzie do krzywej obciążeń $B'C'D'E'F'$. Wyobraźmy sobie, że podział części belki BF uskuteczniliśmy na nieskończenie wiele drobniutkich cząstek; wtedy linja sohodkowa zamieni się w krzywą $B'C' \ldots F'$, a siłę, działającą na część belki BF, obliczymy z pola, zawartego między osią belki, rzędnemi w punktach, ograniczających badaną część belki, i krzywą obciążeń.

W podobny sposób znaleźlibyśmy siłę, działającą na część belki AB, obliczywszy pole $AA'BB'$; toż samo dla całej belki AK należałoby obliczyć pole $AA'B'C'D'E'F'KK'$.-

Dla tego też pole, zawarte pomiędzy osią belki, krzywą obciążeń jednostkowych i dwiema rzędnemi, ograniczającemi rozpatrywaną część belki, nazywamy POLEM OBCIĄŻEŃ.

Wartość "pola obciążeń", w zastosowaniach praktycznych, znajdziemy z dostatecznem przybliżeniem, dzieląc pole to na takie figury, aby pole każdej z nich można było łatwo obliczyć; wówczas pole obciążeń rozbite będzie na pola trójkątów, prostokątów, odcinków koła i t.p.

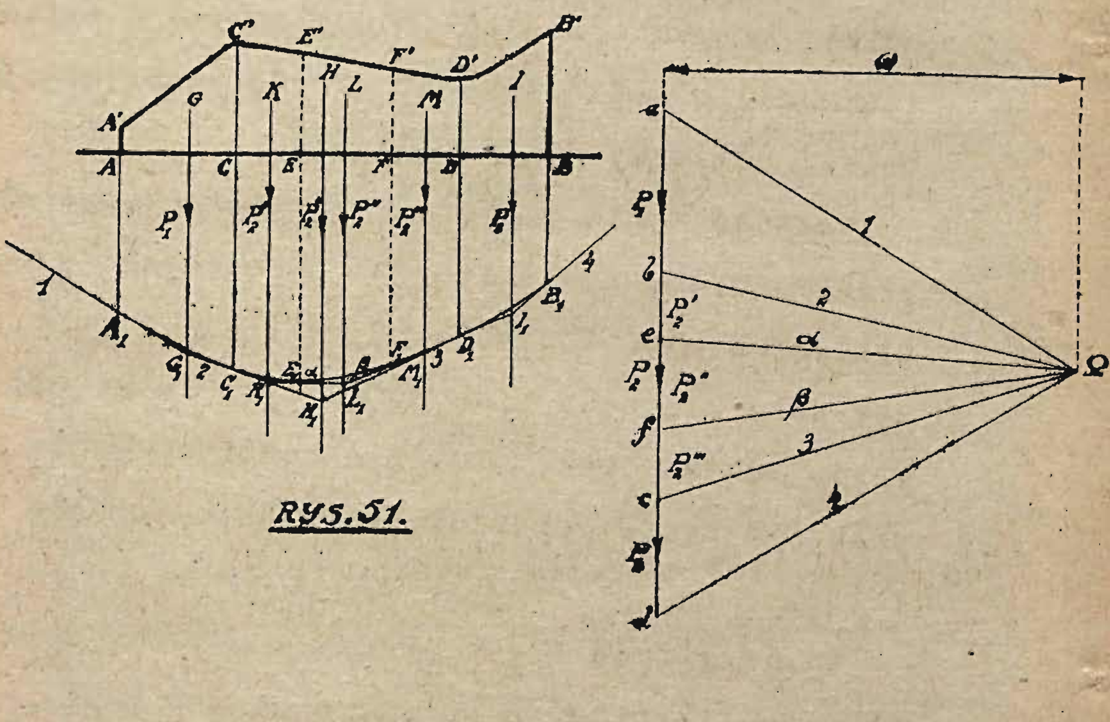
Wymiary tych figur otrzymać należy, mierząc je, - w kierunku równoległym do osi belki - w skali długości, w kierunku prostopadłym do osi - w skali obciążeń jednostkowych. Wówczas pole da nam wielkość o wymiarze:

$$m \times \frac{kg}{m} = kg.$$

58. WIELOBOK SZNUROWY DLA OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.

Przypuśćmy, że mamy belkę, obciążoną w sposób ciągły; pole obciążeń niech będzie $AA'C'E'F'D'B'B$ (patrz rys. 51) —. Należy wykreślić wielobok sznurowy dla tego obciążenia.

Podzielmy pole obciążeń na kilka, - w naszym przykładzie na trzy części $AA'C'C$, $CC'D'D$ i



RYS. 51.

$DD'B'B$, z których każda łatwo da się obliczyć. Wartości tych pól niech będą P_1, P_2, P_3. Wielkości te wyznaczają nam siły, z któremi obciążenie ciągłe działa na poszczególne części belki AC, CD i DB. Uważamy siły P_1, P_2, P_3 jako siły skupione, które działają na poszczególne części belki i są przyłożone do środków ciężkości G, H, I poszczególnych pól wspomnianych. Dalej postępujemy tak, jak z siłami skupionemi: kreślimy wielobok sił $abcd$; obrawszy dowolny biegun Ω, prowadzimy promienie $1, 2, 3, 4$; następnie wykreślamy wielobok sznurowy $1\ 2\ 3\ 4$ z wierzchołkami w A_1, G_1, H_1, I_1, B_1. W danym przypadku wielobok sznurowy posiada tylko 4 boki, gdyż obciążenie ciągłe zastąpiliśmy trzema siłami skupionemi. Gdybyśmy chcieli otrzymać wielobok sznurowy bardziej dokładny, należałoby pole obciążeń podzielić na większą liczbę części. Dajmy na to, że, dążąc w tym kierunku, jedno z pól, naprz. $CC'D'D$ podzielimy jeszcze na kilka /trzy/ dowolnych części. W ten sposób zamiast jednej siły skupionej P_2 mieć ich będziemy trzy: P_2', P_2'', P_2''', przyłożonych w środkach ciężkości K, L, M tych mniejszych pól.

Wykreślmy teraz dla układu sił skupionych

$$P_1, \underbrace{P_2' P_2'' P_2'''}\ \text{i}\ P_3$$

wielobok sił, zauważymy wówczas, że siły P_2', P_2'', P_2''' w wieloboku tym zajmą dokładnie miejsce między b i c, ponieważ $P_2'+P_2''+P_2'''=P_2= bc$, oraz, że nowe promienie α i β, poprowadzone do końców $P_2' P_2''$ znajdą się między promieniami 2 i 3; promień "przed siłą" P_2'' pokrywa promień 2, zaś promień "za siłą" P_2''' pokrywa promień 3.

Wykreślamy następnie wielobok sznurowy, pozostawiając bok 1 pierwotny; bok 2 - za siłą P_1 i przed siłą P_2' - zostanie ten sam, co i pierwej; lecz tylko dojdzie do siły P_2', t.j. do punktu K_1, stąd pójdzie bok α do siły P_2'' - do punktu L_1 - dalej poprowadzimy bok β do siły P_2''' - do punktu M_1, zaś poza siłą P_2''' i przed siłą P_3 powinniśmy otrzymać bok 3 - pierwotny - i dalej za P_3 - bok 4 - też pierwotny.

Może tu powstać w czytelniku wątpliwość dlaczego bok poza siłą P_2''' ma pójść koniecznie wzdłuż pierwotnego boku 3, a nie wyżej lub niżej, jakkolwiek równolegle do niego. Że tak powinno być, zrozumiemy, zakładając na chwilę, że "nowy" bok 3 przechodzi cokolwiek p o n a d bokiem 3 pierwotnym. W takim razie wypadkowa sił P_2', P_2'' i P_2''', mianowicie siła P_2, przeszłaby przez punkt przecięcia się boku 2 z "nowym" bokiem 3, otrzymując linję działania przesuniętą względem poprzedniej linji działania tej siły cokolwiek nalewo. Taki jednak wynik jest niemożliwy, gdyż położenie wypadkowej nie może zależeć od tego, z jakich sił składowych tę wypadkową otrzymano. Przypuszczając znów na chwilę, że "nowy" bok 3 przejdzie cokolwiek p o p o d pierwotnym bokiem 3, dojdziemy do wniosku, że to jest niemożliwe, gdyż byłoby to równoznaczne z przesunięciem się linji działania wypadkowej P_2 cokolwiek naprawo od właściwego położenia. Stąd wnioskujemy, że "nowy" bok 3 winien pójść dokładnie wzdłuż pierwotnego boku 3.

Stąd widzimy, że po zastąpieniu obciążenia ciągłego trzema siłami - wielobok sznurowy otrzymuje 4 boki; jeśli którąkolwiek część obciążenia, zastąpioną poprzednio przez jedną siłę, podzielimy na kilka sił, otrzymamy wielobok sznurowy o zwiększonej liczbie boków; NOWO PRZYBYŁE BOKI ZOSTANĄ WPISANE W PIERWOTNY WIELOBOK sznurowy. Niech podział wspomnianego pola $CC'D'D$ będzie dokonany na znaczną liczbę części, co oznaczać będzie, że obciążenie tej części belki CD zastąpione zostanie przez znaczną liczbę mniejszych sił.

Wszystkie te siły w wieloboku sił ułożą się między punktami b i c ; promienie $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ znajdą się między promieniami 2 i 3, w wieloboku sznurowym bok 1 pozostanie bez zmiany, bok 2 pozostanie ten sam, lecz pójdzie do pierwszej siły z grupy sił, zastępujących P_2 - a to będzie w bliskości punktu C_1, odpowiadającego punktowi C ; od tego miejsca pójdzie szereg boków $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, wpisanych w wielobok pierwotny - aż dopiero ostatni bok poza siłą ostatnią z grupy sił, zastępujących P_2 - w bliskości punktu D_1 - przejdzie wzdłuż boku 3 pierwotnego, i wreszcie, otrzymamy bok 4 na poprzedniem miejscu.

Jeśli sił, zastępujących P_2 wyobrazimy sobie nieskończenie wiele, wielobok sznurowy na części między C_1 i D_1 zamieni się w KRZYWĄ SZNUROWĄ. Krzywa ta, jak wynika to z poprzedniego rozumowania, posiada pierwszy element w punkcie C_1 /jako bok przed siłami grupy P_2 wspólny z bokiem 2, zaś ostatni element - jako bok poza siłami grupy P_2 - wspólny z bokiem 3. Innemi słowy, krzywa sznurowa jest wpisaną w pierwotny wielobok sznurowy, przytem w punktach C_1 i D_1 - w punktach, odpowiadających początkowi i końcowi badanego obciążenia ciągłego, - krzywa ta jest styczną do odpowiednich boków pierwotnego wieloboku sznurowego.

W analogiczny sposób przekonamy się, że krzywa sznurowa dla części belki CD będzie styczna do boków α i β w punktach E_1, F_1, odpowiadających podziałowi obciążeń.

Jeżeli poprzednie rozumowanie zastosujemy do pierwszego pola $AA'C'C$, to dla obciążenia ciągłego części belki AC wielobok sznurowy otrzyma się jako krzywa wpisana w wielobok $1, 2,$ krzywa ta będzie styczna do boków 1 i 2.

w punktach A_1 i C_1 .

Tak samo dla trzeciej części belki DB , obciążonej w sposób ciągły, otrzymamy krzywą sznurową, wpisaną w wielobok $3, 4$, przyczem krzywa ta w punktach D_1 i B_1 będzie styczną do boków 3 i 4

59. Z powyższego rozważania wypływa następujące prawidło do wykreślenia krzywej sznurowej dla dowolnego obciążenia ciągłego:

a/ pole obciążeń dzielimy na kilka części dogodnych do obliczenia; w środkach ciężkości każdej z części przykładamy skupione siły zastępcze, równe odpowiednim ciężarom;

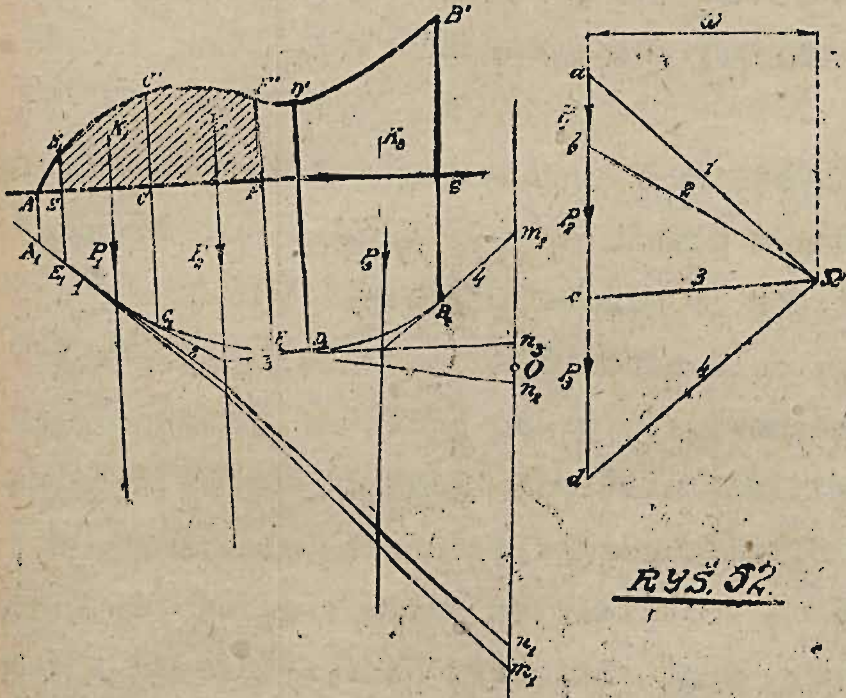
b/ wykreślamy wielobok sił dla zastępczych sił skupionych;

c/ wykreślamy dla tych sił wielobok sznurowy;

d/ wykreślamy krzywą sznurową, wpisując ją w otrzymany wielobok sznurowy, przytem korzystamy z właściwości, że krzywa szukana powinna być styczną do boków wieloboku sznurowego w tych punktach, które odpowiadają linjom podziału pola obciążeń.

Jeśli zachodzi obawa, że przy zadanem dowolnem polu obciążeń niektóre części krzywej sznurowej mogą nie dać się dostatecznie dokładnie wykreślić, należy odpowiednie części pola obciążeń podzielić na większą liczbę drobniejszych pól.

60. MOMENT STATYCZNY W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.



RYS. 52

Niech belka AB będzie obciążona w sposób ciągły. Pole obciążeń niech będzie dane $AC'D'B'B$ /rys. 52/. - Mamy znaleźć moment statyczny dowolnej części obciążenia belki względem jakiegokolwiek punktu O.

Przypuśćmy, że w sposobie, wskazanym w § 59 po podzieleniu obciążenia na 3 części / $AC'C$,

$CC'D'D$, $DD'B'B$ / znaleźliśmy wielobok sznurowy $1, 2, 3, 4$, następnie w ten wielobok wpisaliśmy krzywą, która, zgodnie z poprzedniem, jest styczną w punktach A_1, C_1, D_1, B_1 do boków $1, 2, 3, 4$ wieloboku sznurowego.

Z poprzednich rozumowań wynika, że wykreślona krzywa sznurowa powinna być uważana jako wielobok sznurowy o nieskończenie wielkiej liczbie boków.

Niech będzie wymagane znaleźć moment statyczny względem punktu O obciążenia, działającego na belkę na długości od E do F. Postępujemy w tym celu zgodnie z prawidłem, podanem w § 55, mianowicie: przez punkt O prowadzimy PROSTĄ ODCINKÓW; następnie odnajdujemy boki "przed" i "za" siłami, działającemi na belkę EF. W punkcie E_1 - spotykamy na krzywej sznurowej element jej, który jest właściwym bokiem "przed" i w punkcie F_1 - element, który jest bokiem "za" siłami. Przedłużamy boki "przed" i "za" siłami do spotkania się z prostą odcinków. Przedłużenia tych elementów - boków - będą to, właściwie, styczne do krzywej sznurowej w punktach E_1 i F_1.

Styczna w E_1 spotyka prostą odcinków w p. n_1

zaś styczna w F_1 przecina prostą odcinków w p. n_2.

Stąd: moment statyczny obciążenia na dł. EF względem $O = -\overline{n_1 n_2} \cdot \omega$, gdzie ω = odległości biegunowej, a znak $(-)$ wskazuje, że moment będzie ujemnym, gdyż odcinek $n_1 n_2$ idzie z dołu do góry. Jeśli mamy wykreśloną skalę momentów, to, mierząc w tej skali odcinek $n_1 n_2$, znajdziemy odrazu wartość momentu.

W podobny sposób należy postępować przy szukaniu momentu statycznego względem zadanego punktu dla tej czy innej części obciążenia, znajdującego się na belce.

61. Gdyby, przypadkowo, chodziło o znalezienie momentu statycznego dla tej części obciążenia, która przy pierwotnym podziale, przyjęta była za odrębną część, wówczas niema potrzeby nawet wykreślania krzywej sznurowej: wystarczy zadowolić się pierwotnym wielobokiem sznurowym.

Naprz., niech będzie potrzeba znalezienia momentu statycznego względem p. O dla części obciążenia belki od A do D. Wówczas "przed" siłami okaże się bok 1, zaś "za" siłami bok 2 i szukany moment statyczny $= -\overline{m_1 n_3} \cdot \omega$.

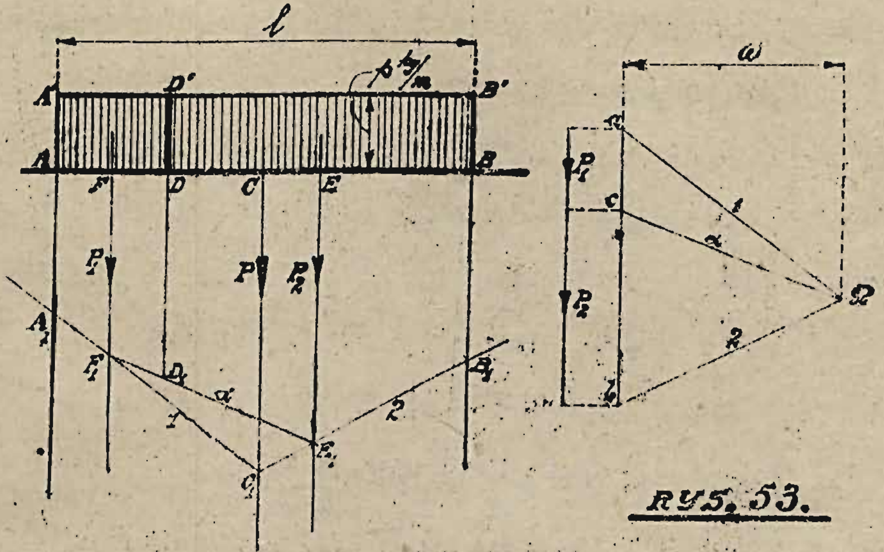
Tak samo postąpilibyśmy, gdyby trzeba było znaleźć moment statyczny względem poprzedniego punktu dla całego obciążenia belki od A do B. Moment wtedy będzie $= -\overline{m_1 m_2} \cdot \omega$

62. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE JEDNOSTAJNE. Zbadajmy teraz szczególny przypadek obciążenia ciągłego, gdy obciążenie to jest jednostajne.

Krzywa obciążeń $A'B'$ staje się wtedy prostą równoległą do osi belki /rys.53/.

Aby wyznaczyć kształt linji sznurowej, odpowiadającej temu przypadkowi, przypuśćmy naprzód, że całkowite obciążenie P jest zastąpione siłą skupioną, przyłożoną do środka ciężkości pola obciążeń, czyli prostokąta $AA'B'B$. Linja działania siły P przechodzić będzie w połowie długości obciążonej belki.

Oczywiście, $P = p.l$, gdzie p oznacza stałe obciążenie jednostkowe, a l - długość obciążonej części belki. Wykreślmy dla owej skupionej siły P wielobok sił oraz odpowiedni wielobok sznurowy. Promienie pierwszego, a boki drugiego oznaczmy odpowiednio przez 1 i 2.



RYS. 53.

Podzielmy, następnie, obciążenie całkowite na dwie części linją podziału DD' i rozważajmy obciążenia każdej z tych części, które mogą być uważane jako siły skupione, przyłożone do odpowiednich środków ciężkości.

Budujemy nowy wielobok sznurowy dla tych sił zastępczych, które oznaczymy przez P_1 i P_2.

Wielobok teraz utworzony będzie z trzech boków, z których dwa skrajne /przed siłą P_1 i za siłą P_2 / będą temi samemi bokami 1 i 2, co poprzednio, zaś bok środkowy α połączy punkty przecięcia się linij działania sił P_1 i P_2 z owemi bokami skrajnemi.

Z rozważań § 58 wiemy, że krzywa sznurowa, której szukamy, posiada tę własność, że jest styczna do nowego wieloboku sznurowego w punktach, znajdujących się na jego bokach pod linjami podziałowemi AA', BB' i DD'. Oznaczmy te punkty styczności odpowiednio przez A_1, B_1, D_1.

Przypuśćmy, że linja DD_1 dzieli obciążenie całkowite w stosunku $1 : n$. Zatem $AD = \frac{l}{n}$ i $DB = l - \frac{l}{n} = \frac{n-1}{n} l$. Dalej mamy:

$$AF = \frac{AD}{2} = \frac{l}{2n}; \; DE = \frac{1}{2} DB = \frac{n-1}{2n} \cdot l. -$$

Rozpatrzmy teraz odcinki, utworzone przez proste równoległe AA_1, FF_1, CC_1 na prostych AC i A_1C_1: między niemi zachodzi zależność następująca:

$$\frac{A_1F_1}{A_1C_1} = \frac{AF}{AC} = \frac{l}{2n} : \frac{l}{2} = \frac{1}{n},$$

stąd $A_1F_1 = \frac{A_1C_1}{n}$. Widzimy stąd, że punkt F_1 dzieli odcinek A_1C_1 na dwie części w stosunku $\frac{1}{n}$, t.j. w takim samym, w jakim linja DD' dzieli pole $AA'B'B$. -

Analogicznie znajdziemy:

$$\frac{C_1E_1}{C_1B_1} = \frac{CE}{CB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{n} \; ^{*)}$$

---

*) Ponieważ: $AD = AB - DB$

i następnie; $\frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{DB}{2}$ $AF = BC - EB = CE$.

skąd $C_1E_1 = \frac{C_1B_1}{n}$. Zatem również i punkt E_1 dzieli odcinek C_1B_1 boku 2 na dwie części w tym samym stosunku: $\frac{1}{n}$.—

Wreszcie otrzymamy z łatwością, że

$$\frac{F_1D_1}{F_1E_1} = \frac{FD}{FE} = \frac{AF}{AC} = \frac{l}{2n} : \frac{l}{2} = \frac{1}{n},$$

czyli że punkt styczności D_1 boku α z krzywą sznurową dzieli ten bok również w stosunku $\frac{1}{n}$.

Reasumujęc wszystkie wyprowadzone tu wnioski, powiemy, że:

DOWOLNA STYCZNA α DO KRZYWEJ SZNUROWEJ, ODPOWIADAJĄCEJ OBCIĄŻENIU CIĄGŁEMU I JEDNOSTAJNEMU, DZIELI KAŻDĄ Z DWÓCH INNYCH STYCZNYCH W JEDNAKOWYM STOSUNKU.

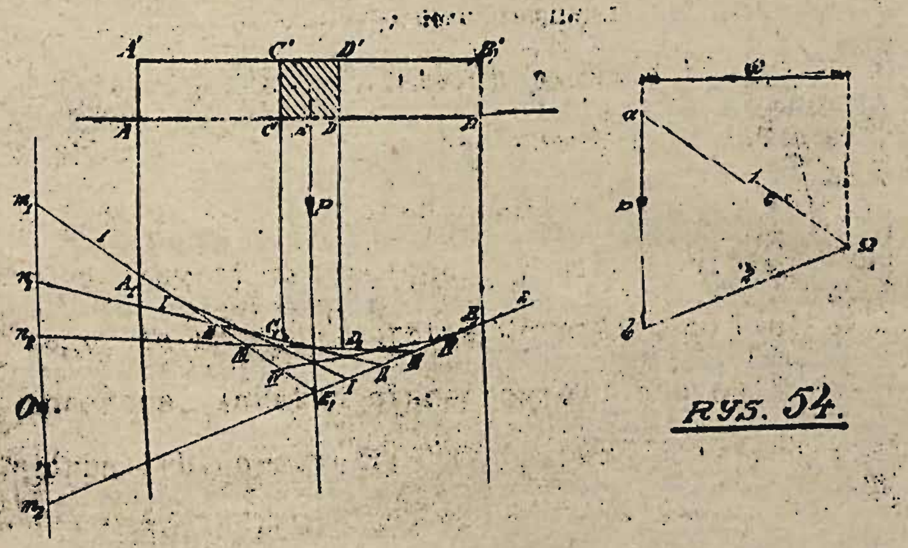
W TAKIM SAMYM STOSUNKU NOWA STYCZNA DZIELI SIĘ W JEJ PUNKCIE STYCZNOŚCI Z KRZYWĄ SZNUROWĄ.

Z geometrji analitycznej wiadomo, że takie własności posiada jedynie krzywa, zwana PARABOLĄ. Z tego więc wynika, że KRZYWĄ SZNUROWĄ W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO I JEDNOSTAJNEGO JEST PARABOLA.

63. Otrzymane poprzednio własności krzywej sznurowej - paraboli - pozwalają jednocześnie

wykreślać ją w sposób zupełnie prosty /rys.54/.

Wystarczy w tym celu wykreślić wielobok sznurowy dla siły skupionej P, zastępującej całkowite obciążenie $AA'B'B$; następnie każdy z dwóch boków tego wieloboku, A_1E_1 i E_1B_1 podzielić na jednakową liczbę części. Punkty po-



RYS. 54.

działu na stycznej A_1E_1 i oddzielnie na E_1B_1 numerujemy kolejno, poczynając od A_1 i E_1. Następnie łączymy ze sobą punkty, zaopatrzone w jednakowe numery, i w ten sposób otrzymamy szereg prostych, których obwiednią jest właśnie szukana parabola *)

*) UWAGA PRAKTYCZNA. Mając dostateczną liczbę

64. Gdy już mamy wykreśloną parabolę, jako krzywą sznurową dla jednostajnego obciążenia ciągłego, z łatwością możemy wyznaczyć momenty statyczne danego obciążenia lub jego części względem dowolnych punktów.

Tak więc np. /rys.54/ moment statyczny obciążenia belki na dług. AB względem punktu O,
$M_o(\Sigma P)_{AB} = \overline{m_1 m_2} \cdot \omega$, podobnież: $M_o(\Sigma P)_{CD} = \overline{n_1 n_2} \cdot \omega$;
odcinki $m_1 m_2$ i $n_1 n_2$ są wyznaczone na prostej odcinków przez styczne do paraboli w punktach, odpowiadających linjom podziału pola $AA'B'B$. Obydwa momenty w danym przypadku są dodatnie.

ROZDZIAŁ IV.

BELKA PROSTA NA DWÓCH PODPORACH.

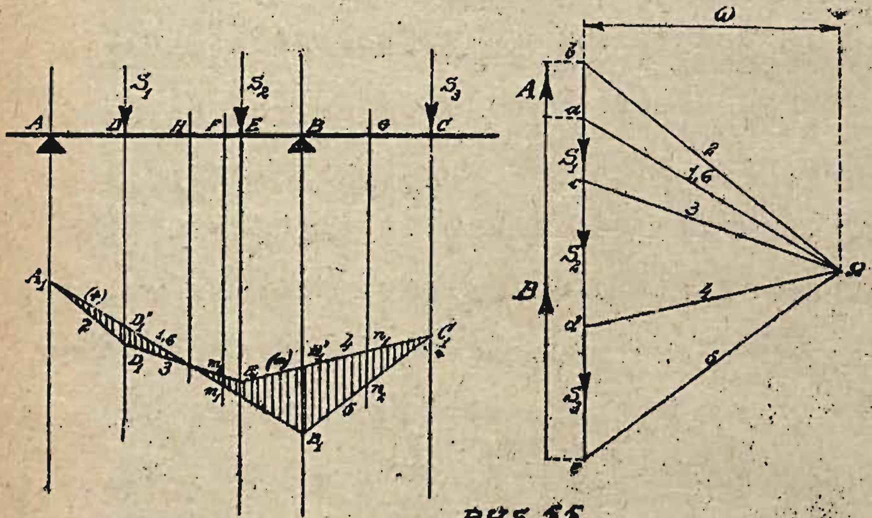
A. OBCIĄŻENIE BEZPOŚREDNIE.

65. OKREŚLENIE ODPORÓW.

Wyobraźmy sobie belkę prostą, opartą na dwóch podporach A i B i obciążoną pionowemi siłami

stycznych do paraboli, niema już potrzeby jej wykreślać, bo styczne te zarysują parabolę dość dokładnie. Wykreślanie paraboli jest nawet niepożądane, bo poza tem, że zabiera dużo czasu, prawdopodobieństwo niedokładności będzie większe, niż wtedy, gdy poprzestajemy tylko na stycznych.

skupionemi S_1, S_2, S_3 – /rys.55/.



RYS. 55.

Podpory A i B wywołują odpory, których kierunki mogą być, wogóle, różnorodne. Jeśli jednak przypuścimy, że jedna z odpór, dajmy na to A, stanowi, jak gdyby ostrze, mogące wywierać działanie jedynie w pewnym kierunku naprz. pionowym, to również i oddziaływanie drugiej podpory będzie określone, mianowicie będzie też pionowe.

Wynika to stąd, że belka jest w danem zadaniu pod wpływem sił pionowych S_1, S_2, S_3 albo ich wypadkowej R, równoległej do nich /a więc siły pionowej/ i odporów A i B. Pod działaniem tego układu sił belka znajduje się w równowadze; zatem siła R odpory A i B, będąc w równowadze, powinny przeciąć się w jednym punkcie. Punkt ten znajduje się w nieskończoności, gdy siły R i A są siłami równoległemi. Odpór B, wobec tego, musi być do nich równoległym.

Gdyby budowa podpory A była taka, że oddziaływanie jej było skierowane pod pewnym kątem do pionu, to i oddziaływanie podpory B byłoby odchylone od pionu. Wypływa to z powiedzianego wyżej warunku, że siły A, B i R powinny przeciąć się w jednym punkcie.

Mając już kierunki oddziaływań A i B określone, możemy wyznaczyć ich wartości, budując wielobok sił /o dowolnym biegunie Ω / oraz odpowiedni wielobok sznurowy. Pamiętać przytem należy, że zarówno wielobok sił jak i sznurowy powinny być zamknięte, a to ze względu na warunek równowagi sił. Sposób rozwiązania tego zagadnienia, właściwie, podany już został w § 45 szczegółowo. Tu podany jest tylko główny przebieg tego rozwiązania.

Przedewszystkiem układamy siły w szereg tak, aby NIEZNANE ODPORY A i B stały jeden na początku i drugi na końcu szeregu sił:

$$A, S_1, S_2, S_3, B. -$$

Przystępujemy do wykreślenia wieloboku sił:

zaczynamy od siły A, której początek niech będzie w nieznanym narazie p. a, koniec zaś w p. b; obieramy punkt b, JAKO KONIEC SIŁY A; od punktu b odkładamy: odcinek bc, przedstawiający siłę S_1, za nim odcinek cd - siłę S_2, odcinek de - siłę S_3; w p. e jako na końcu siły ostatniej znajdzie się POCZĄTEK SIŁY B, koniec tej siły upadnie na punkt a, gdyż wielobok sił ma być zamknięty.

Obieramy, dalej, dowolny biegun Ω i kreślimy promienie: do punktu a - narazie nieznanego - niech pójdzie promień 1 /nie wykreślamy go/;

do p. b - prowadzimy promień 2,
" " c " " 3,
" " d " " 4,
" " e " " 5,

promień ostatni 6 powinien być poprowadzony do punktu a, t.j. powinien się ułożyć wzdłuż promienia 1

Promienie 1 i 6 będziemy mogli dopiero później wyznaczyć.

Przystępujemy teraz do budowy wieloboku sznurowego. Bok 1 powinien przejść przez dowolny punkt A_1, obrany na linji działania siły A, równolegle do promienia 1 Tego promienia nie znamy, i, wobec tego, narazie boku 1 nie wykreślamy.

Wykreślamy dalsze boki wieloboku sznurowego: przez p. A_1 bok 2 /równolegle do prom. 2/ do p. D_1 na sile S_1,

" " D_1 " 3 / " do prom. 3/ do p. E_1 na sile S_2,

" " E_1 " 4 / " do prom. 4/ do p. C_1 na sile S_3,

" " C_1 " 5 / " do prom. 5/ do p. B_1 na sile B

" " B_1 powinien przejść bok 6, równolegle do promienia 6.

Ze względu na równowagę układu sił wielobok sznurowy ma być zamknięty, zatem boki 1 i 6 powinny się pokrywać, czyli, że jedyne ich położenie jest wzdłuż prostej, łączącej punkty A_1 i B_1. Znaleźliśmy więc boki 1 i 6, tem samem mamy możność wykreślenia promieni 1, 6, prowadząc z bieguna Ω prostą równoległą do boku 1, 6. Tą drogą znajdujemy punkt a, w którym przypadają POCZĄTEK SIŁY A I KONIEC SIŁY B. Zatem odcinek ab przedstawia nam odpór A, zaś odcinek ea - odpór B.

Znaleśliśmy więc oba odpory belki, podpartej w dwóch punktach, oraz wykreśliliśmy wielobok sznurowy dla sił, działających na belkę.

Zaznaczyć należy, że powyższy sposób daje się zastosować bez żadnej zmiany zasadniczej do każdego najbardziej zawiłego przypadku belki, podpartej w dwóch punktach; przytem ani kierunki sił nie będą sprawiały żadnej trudności, ani też taki czy inny kierunek oddziaływania jednej z podpór.

66. MOMENTY GNĄCE BELKI. Do wyznaczenia wymiarów belki, poddanej działaniu jakiegokolwiek układu sił *), potrzebna jest znajomość t.zw. "momentu gnącego" i t.zw. "sił tnących". Przystąpimy do zaznajomienia się z "momentem gnącym", który określimy w sposób następujący:

MOMENTEM GNĄCYM BELKI, WZGLĘDEM DANEGO PRZEKROJU, NAZYWAMY SUMĘ MOMENTÓW STATYCZNYCH WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NALEWO OD TEGO PRZEKROJU WZGLĘDEM ŚRODKA CIĘŻKOŚCI TEGO PRZEKROJU.

Warunek, aby brać pod uwagę siły, leżące NALEWO od rozważanego przekroju /nie zaś naprawo/

*) Jest to zagadnienie, rozpatrywane w "Wytrzymałości materjałów".

nie jest istotny, a ma jedynie na celu ujednostajnienie postępowania. W istocie: zważmy, że wszystkie siły, działające na belkę, są w równowadze; zatem suma momentów statycznych w s z y s t k i c h sił, leżących NALEWO i NAPRAWO od danego przekroju względem tegoż przekroju /właściwiej - względem środka ciężkości tego przekroju/ - jest = zeru; stąd mamy, że suma mom stat. wszystkich sił, wziętych NALEWO od danego przekroju, i suma wszystkich sił, wziętych NAPRAWO od niego, muszą być sobie równe, różniąc się tylko znakiem.

67. Posiadając wielobok sznurowy, możemy znajdować wprost momenty gnące względem któregokolwiek przekroju belki, a to na zasadzie § 55. Tak więc np. aby wyznaczyć względem przekroju F moment gnący, który będziemy oznaczali symbolem "M_F" w przypadku zadania na rys. 55, prowadzimy przez środek ciężkości przekroju prostą odcinków i szukamy przecięcia jej bokami "przed" i "za" siłami, znajdującemi się na lewo od F.

Aby znaleźć te boki zważmy, że na lewą część

Droga

belki od zadanego przekroju działają siły A i S, które w wieloboku sił mają początek w punkcie a i kończą się w punkcie c; do tych punktów idą promienie 1 i 3; zatem "przed" siłami mamy bok 1, zaś "za" siłami bok 3.

Boki 1 i 3 przecinają linję odcinków w punktach m_1, m_2; wobec tego:

$$(M_g)_F = -\overline{m_1 m_2} \cdot \omega$$

przyczem ω oznacza, jak poprzednio, odległość biegunową.

Jeżeli będziemy obierali przekroje na prawo od poprzedniego przekroju F, to znajdować będziemy dla nich coraz większe wartości momentów gnących, przyczem będą one wciąż ujemne. - W przekroju nad podporą B, panuje, jak widzimy, moment gnący największy $=(M_g)_B = -\overline{B_1 B_1'} \cdot \omega$, poczem momenty zaczynają się zmniejszać; w przekroju G, $(M_g)_G = -\overline{n_1 n_2} \cdot \omega$ i dla dalszych przekrojów maleje, stając się zerem dla przekroju, w którym działa siła S_3. Łatwo dostrzeżemy, że w przekrojach na lewo od F moment gnący maleje, w przekroju H jest równy zeru, następnie zmienia znak /staje się więc dodatni/ i wzrasta aż do punktu D, przyłożenia siły S_1 gdzie

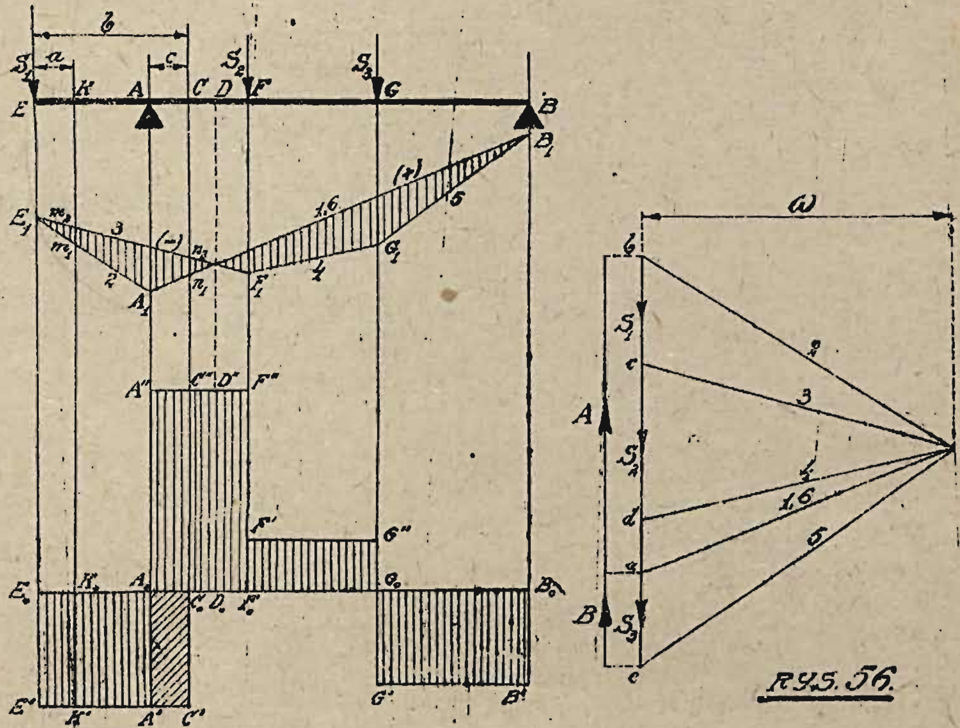
$(M_g)_D = + D_1 D_1'' . \omega$, poczem maleje i nad podporą A jest równy zeru.

Widzimy, że wielobok sznurowy daje nam bezpośrednio możność wyznaczania momentów gnących dla dowolnego przekroju belki i wskazania, gdzie i jakie są momenty gnące maximum. Wielobok ten obejmuje pewne pole, które możemy nazwać POLEM MOMENTÓW GNĄCYCH.

<u>68. INNY PRZYKŁAD.</u> Na rys.56 mamy wykreślone pole momentów, dla przykładu, stanowiącego nieznaczną odmianę przykładu, rozwiązanego w paragrafie poprzednim. Można do niego bez zmiany zastosować te rozumowania, które przytaczaliśmy tam; nie chcąc się więc powtarzać poprzestaniemy na samym wykresie, sądząc, że czytelnik sam da sobie radę.

<u>69. SIŁY TNĄCE.</u> Wyżej wyznaczyliśmy, że znajomość "sił tnących" jest potrzebna do obliczenia wymiarów belek, jak tego wymaga teorja "wytrzymałości materjałów". Przedewszystkiem należy określić, co nazywać będziemy "siłą tnącą"?

Otóż SIŁĄ TNĄCĄ /ALBO SIŁĄ POPRZECZNĄ/ DLA DANEGO PRZEKROJU BELKI NAZYWAMY ALGEBRAICZNĄ SUMĘ WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NALEWO OD TEGO PRZEKROJU.



RYS. 56.

Naprz. dla przekroju K /rys. 56/ "siłą tnącą" będzie siła S_1 ; dla przekroju C - "siłą tnącą" będzie suma algebraiczna $S_1 + A$, i t.d.

Wartości sił tnących dla różnych miejsc /przekrojów/ belki możemy przedstawić przy pomocy wykresu, który na rys. 56 został pomieszczony pod polem momentów gnących. Zaczynamy od lewego końca belki E . Dostrzegamy łatwo, że dla wszystkich przekrojów belki od E do A siła tnąca ma wartość stałą i równą S_1 . Chcąc przedstawić ten wynik na wykresie, odmierzamy od dowolnie obranej osi poziomej E_0B_0 odcinek E_0E' równy S_1, i skierowany tak, jak siła S_1, czyli od obranej osi w dół. Przez E' prowadzimy prostą $E'A'$ równoległą do E_0B_0. Otrzymamy w ten sposób linję prostą, której rzędne będą oznaczały wartość siły tnącej w odpowiedniem miejscu belki.

Gdy przejdziemy wzdłuż belki, tuż poza przekrój A w prawo, to po lewej stronie dostrzeżemy już dwie siły, mianowicie S_1 i odpór A. Te dwie siły dają wypadkową —— /z wieloboku sił/: $\overline{ab}+\overline{bc}$, albo $A'A''+A_0A_1=A_0A''$ i skierowaną do góry, a więc taki odcinek należy odłożyć od osi E_0B_0 ku górze. Pomiędzy przekrojami A i F siła tnąca ma znowu wartość stałą, a więc wykresem jej jest prosta $A''F''\parallel$ do E_0B_0. W dalszym ciągu dla punktów, leżących na prawo od F, przybywa jeszcze siła $S_2=F''F'$, skierowana w dół, a więc jako siłę tnącą dla przekrojów między F i G będziemy uważali wypadkową sił S_1, A i S_2 czyli /z wieloboku sił/ $=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}$, albo $F_0F''+F''F'=F_0F'$ i t.d. Postępując w dalszym ciągu w taki sam sposób, dojdziemy wreszcie do punktu B', od którego w górę powinniśmy odłożyć odpór B . O ile wykres był wykonany prawidłowo, wtedy odcinek $B'B_o$ powinien być właśnie równy temu odporowi. Wynika to stąd, że w przekroju B siła tnąca jest równa zeru /belka bowiem jest w równowadze, a więc suma wszystkich sił zewnętrznych musi być równą 0/.

Figura $E_oE'A'A''F''F'G''G'B'B_o$ nosi nazwę WYKRESU SIŁ TNĄCYCH lub SIŁ POPRZECZNYCH.

70. ZWIĄZEK POMIĘDZY WYKRESEM MOMENTÓW GNĄCYCH I WYKRESEM SIŁ POPRZECZNYCH.

Weźmy pod uwagę przekrój belki K /rys.56/, odległy o a od przekroju E . Moment gnący dla tego przekroju możemy wyznaczyć:

$$(M_g)_K = -S_1 . a$$

Ponieważ, z drugiej strony na wykresie sił tnących mamy, że $E_oE' = S_1$ a $E_oK = a$, zatem wynika, że pole prostokąta $E_oE'K'K_o$ jest liczbowo równe momentowi gnącemu względem przekroju K .

Gdy przekrój K obierać będziemy coraz bliżej podpory A , moment gnący względem tego przekroju będzie wzrastał, gdyż ramię a będzie coraz większe; jednocześnie pole $E_oE'K'K_o$ też wzrastać będzie.

O wzrastaniu momentów gnących ku podporze A wnioskujemy też z pola momentów gnących.

Gdy rozważany przekrój przesuniemy naprawo od podpory, wówczas do wyznaczenia momentu gnącego będzie trzeba wziąć pod uwagę już dwie siły, mianowicie S_1 i odpór A. Będzie zatem:

$$(M_g)_c = -S_1 \cdot b + A \cdot c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots /1/$$

gdzie b i c oznaczają odpowiednie odległości przekroju C od sił S_1 i A.

Pierwszy składnik tej sumy wyraża pole $E_0E'C'C_0$ drugi zaś - pole $AA''C''C'$, zatem otrzymujemy:

$$(M_g)_c = -E_0E'C'C_0 + AA''C''C' = -E_0E'A'A_0 - A_0A'C'C_0 + A_0A'C'C_0 - A_0A''C''C_0 =$$
$$= -E_0E'A'A_0 + A_0A''C''C_0 . -$$

Umówmy się pola POD osią E_0B_0 uważać za ujemne, zaś NAD osią E_0B_0 za dodatnie, wówczas $(M_g)_c$ obliczymy jako sumę pól, zawartych między osią E_0B_0, linją sił tnących oraz dwiema rzędnemi, z których jedna należy do lewego końca belki, druga poprowadzona jest przez dany przekrój.

Z powyższego rozumowania spostrzegamy: w miarę tego, jak posuwamy się od E do podpory A pole $E_0E'K'K_0$ wzrasta, na podporze A otrzymujemy pole $E_0E'A'A$. Zaledwie przekroczymy podporę A idąc na prawo otrzymujemy zaraz pole PONAD osią

. E_oB_o , naprz. pole $A_oA''C''C_o$, które, zgodnie z umową, dopiero co wypowiedzianą, jest innego znaku, niż poprzednie pole, które się znajduje POD osią. Stąd wynika, że suma pól popod osią i ponad osią, mająca wyznaczyć moment gnący dla przekroju C , będzie mniejsza, niż była dla przekroju A . Ten rezultat daje się odrazu dostrzedz jeśli zwrócimy uwagę, że na podporze A linja sił tnących przecina oś E_oB_o.

W przekroju D moment gnący jest zerem, co wskazuje, że pole $E_oE'A'A_o$ musi być równe polu $A_oA''D''D_o$. Poza przekrojem D będą już momenty dodatnie, rosnące w miarę zbliżania się do przekroju F . Za tym przekrojem mamy momenty, wprawdzie wciąż dodatnie, ale już wolniej rosnące, bo przybywa tu działanie siły S_2, dającej momenty ujemne. To samo wynika z rozpatrywania wykresu sił tnących, gdzie, jak widzimy, przy przesuwaniu się od przekroju D do przekroju przybywają pola prostokątów o większych wysokościach, niż poza tym przekrojem. Dla przekroju G mamy znowu moment "maximum" i jednocześnie widzimy, że linja sił tnących w tem miejscu przecina oś E_oB_o.—

Dla punktu B moment gnący otrzymujemy równy zeru; jednocześnie dostrzegamy, że linja sił tnących tworzy ponad osią pola dodatnie i pod osią pola ujemne, przyczem wartości pól dodatnich i ujemnych są równe - w sumie dają zero.

Z powyższego można wyprowadzić następujący wniosek ogólny: MAXIMUM MOMENTU GNĄCEGO ZNAJDZIEMY DLA TYCH PRZEKROJÓW BELKI, W KTÓRYCH WYKRES SIŁ TNĄCYCH PRZECINA OŚ BELKI.*)

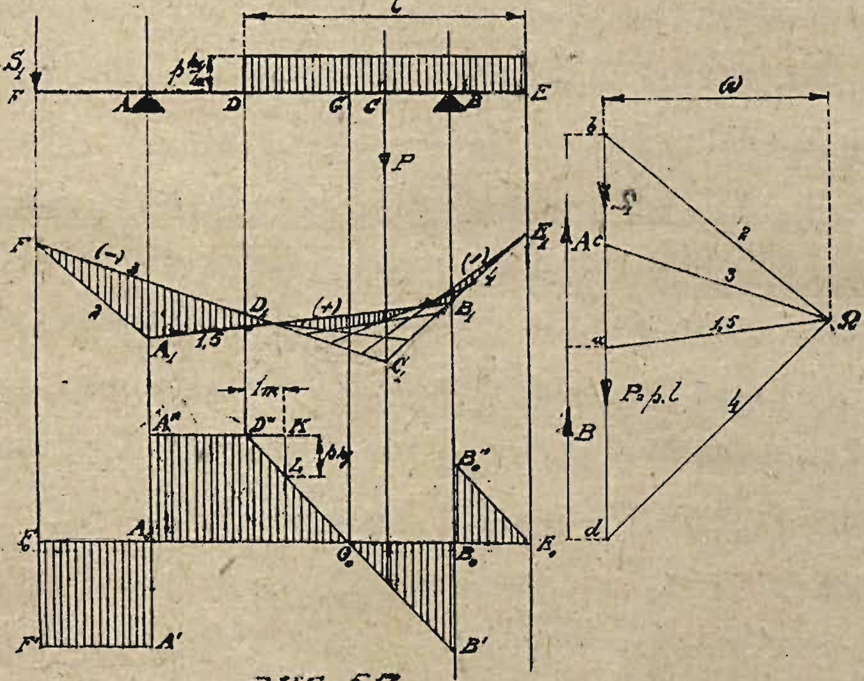
71. WYKRES SIŁ TNĄCYCH DLA CIĄGŁEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTAJNEGO. Na rys.57 mamy wielobok sznurowy, wyznaczający pole momentów i następnie wykres sił tnących dla belki, obciążonej jedną siłą skupioną S_1 oraz na długości l siłą ciągłą, wynoszącą p kg/m.

---

*) Wartość momentu gnącego nad podporą A w naszym przykładzie jest właściwie ujemna; wobec tego należałoby uważać ją jako "minimum". Ponieważ, jednak, z punktu widzenia "wytrzymałości materjałów" jest wszystko jedno, czy mamy do czynienia z momentem gnącym ujemnym, czy dodatnim, więc największe wartości tych momentów będziemy zawsze notowali jako "maximum".

O sposobie wykreślania wieloboku sznurowego była mowa wcześniej /§ 63/.

Tak samo nie znajdziemy trudności przy wykreśleniu linji sił tnących, aż do punktu D, gdzie zaczyna się obciążenie ciągłe.



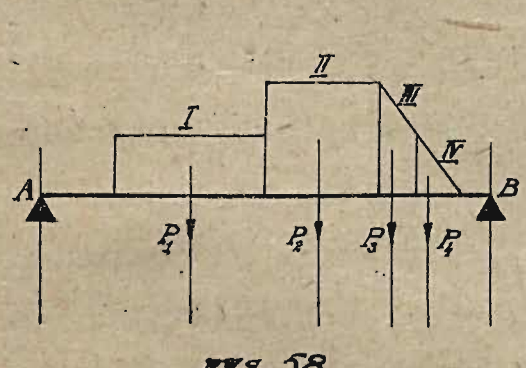
RYS. 57.

Od tego punktu siła tnąca stale maleje, a ponieważ obciążenie jest jednostajne, więc ubytek jej będzie proporcjonalny do odległości od przekroju D, czyli wyrazi się zapomocą prostej po- wykreślimy tę prostą, korzystając z tego warunku, że w odległości 1 m. = $D''K$ od D'' siła tnąca jest o p kg. $= KL$ /nie p kg/m./ mniejszą, niż w przekroju D.

W przekroju na podporze B zachodzi skok w wartości siły tnącej o wartość odporu $B = B'B''$, a następnie mamy znowu spadek według prostej $B''E_0$, równoległej do $D''B'$; prosta $B''E_0$ powinna przeciąć oś F_0E_0 w punkcie E_0, gdyż tu siła tnąca = 0.

Linja sił tnących $F_0F'A'A''D''B'B''E_0$ przecina oś F_0E_0 w trzech punktach: A_0, G_0 i B_0. Łatwo przekonać się, rozumując na podobieństwo tego, jak to było w poprzednim § zrobione, że w przekrojach, odpowiadających punktom A, G i B mom. gnące otrzymają wartość maximum.

72. OBCIĄŻENIE NIEJEDNOSTAJNE. Aby wyznaczyć wykresy momentów i sił tnących dla przypadku obciążenia ciągłego niejednostajnego, postępujemy na zasadzie § 58 /rys 58/ Dzielimy więc pole



rys. 58.

obciążeń na części, wyznaczamy środki ciężkości każdej z nich; przyjmując, następnie, że w tych środkach są skupione odpowiednie ciężary, budujemy dla nich wykresy: wielobok sznurowy i linję sił tnących.

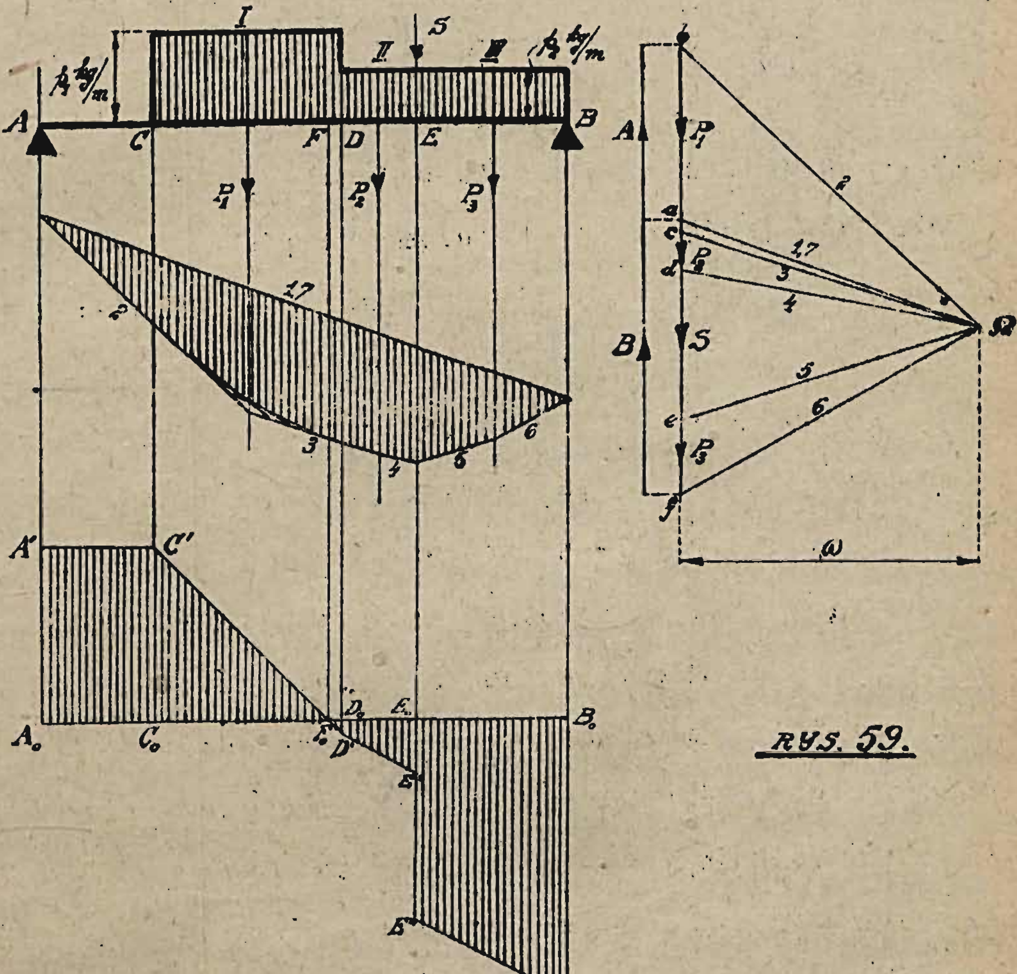
O ile owe części pola obciążeń są prostokątami, wykres momentów otrzymany dla sił skupionych, możemy uzupełnić odpowiedniemi parabolami; w przeciwnym razie zadawalamy się przybliżeniem, poprzestając na siłach skupionych, otrzymanych przez podział pola obciążeń na możliwie znaczną liczbę pól cząstkowych. Analogicznie postępujemy przy wykreślaniu sił tnących.

73. PRZYKŁAD. Na rys. 59 mamy przykład obciążenia ciągłego niejednostajnego wespół z działaniem siły skupionej S. Pole obciążeń dzielimy w punktach D /gdzie zachodzi zmiana obciążenia/ i E /gdzie jest przyłożona siła skupiona S/, a dalej postępujemy w sposób, wskazany w § poprzednim.

Wykres siły tnącej, otrzymany od obciążenia I tworzy prosta $C'D'$, której pochyłość wyznacza obciążenie jednostkowe p_1 kg/m. Pochyłość prostych $D'E'$ i $E''B'$, odpowiadających obciążeniom

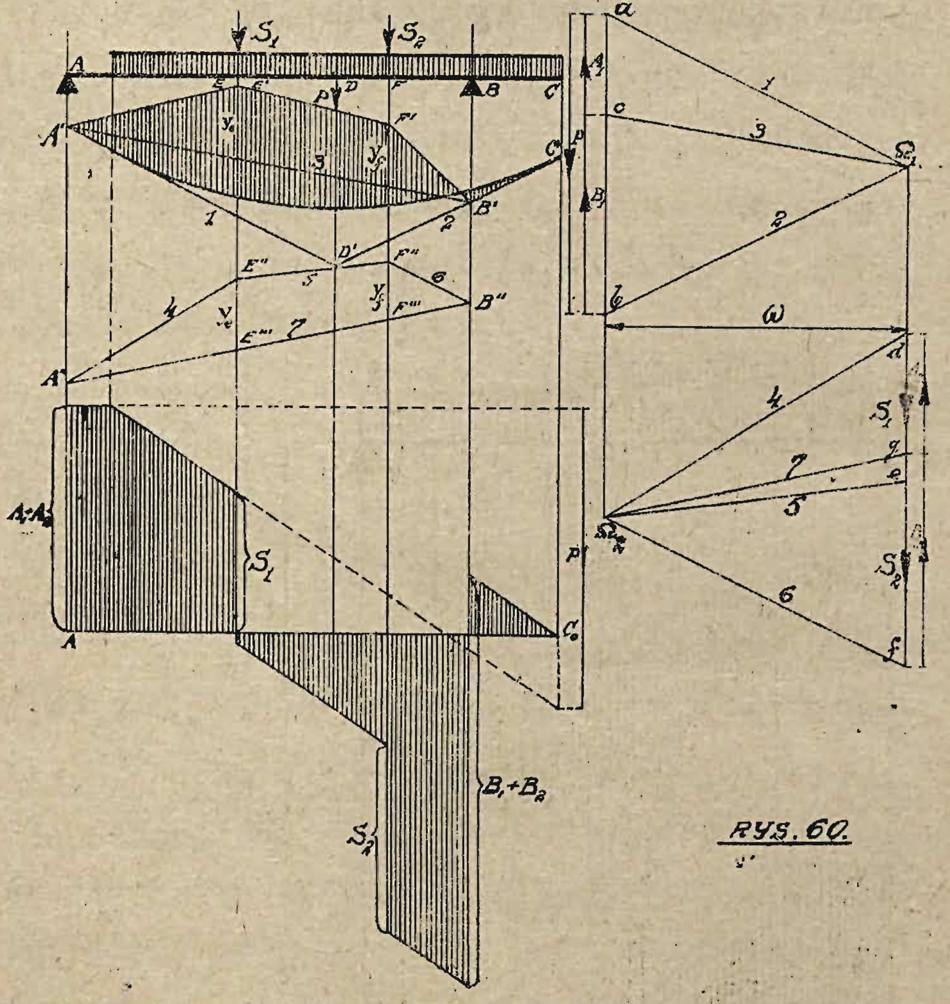
II i III jest inna; wyznaczamy ją z obciążenia jednostkowego p_2 kg/m. tak, jak to było wskazane w § 71.

Odcinek $E'E''$ jest równy sile S ; o ile wykres był wykonany prawidłowo, powinno być $B''B_0 = B = f \cdot a$ /w wieloboku sił/.



RYS. 59.

74. INNY SPOSÓB ROZWIĄZANIA PODOBNEGO PRZYKŁADU.



RYS. 60.

Niech będzie belka AB pod działaniem obciążenia ciągłego i dwóch sił skupionych $S_1 S_2$ /rys. 60/ Wykreślamy wielobok sił ab dla obciążenia ciągłego w sposób zwykły. Obieramy biegun Ω_1, prowadzimy promienie 1 i 2, i wykreślamy I wielobok sznurowy $A'D'C'$. Bok zamykający „3" określ.

promień „3" który podzieli obciążenie P na dwie części: $A_1 = \overline{ca}$; $B_1 = \overline{bc}$. W wieloboku sznurowym $A'D'C'$ wykreślamy parabolę znanym sposobem. Budujemy następnie wielobok sił def dla sił skupionych S_1 i S_2. Obieramy nowy biegun Ω_2 tak jednak, aby odległość biegunowa ω została bez zmiany. Wykreślamy promienie $4, 5, 6$ i według nich II wielobok sznurowy $A''E''D''B''$ Z wieloboku sznurowego otrzymujemy bok zamykający „7"; wykreślamy promień „7", który dzieli wypadkową $S_1 + S_2$ na dwa odpory: $\overline{gd} = A_2$ i $\overline{fg} = B_2$, otrzymujące się od działania sił S_1 i S_2. Obecnie łączymy obydwa wieloboki sznurowe I i II w jeden tak, aby bok 3 był bokiem zamykającym wspólnym. Postępowanie będzie takie: na linji działania S_1 w II wieloboku sznurowym mierzymy odcinek $E''E''' = y_e$ i odkładamy go w I wieloboku sznurowym od boku „3" do góry; otrzymujemy punkt E'. W podobny sposób zmierzywszy w II wieloboku odcinek $F''F''' = y_f$, odkładamy go od boku 3 w wieloboku I do góry; otrzymamy punkt F'. Jeżeli punkty A', E', F', B' połączymy prostemi otrzymamy w ten sposób wielobok III, przeniesi...

ny na wielobok I. Wszystkie odcinki, które w wieloboku II wyznaczały momenty gnące, zostały przeniesione bez zmiany ich wielkości do I wieloboku sznurowego. Zatem możemy powiedzieć, że odcinki nowego pola momentów: ($A'E'F'B'C'$ PARABOLA A') —— będą się równały sumie odpowiednich odcinków I i II wieloboku sznurowego. O to nam właśnie chodziło

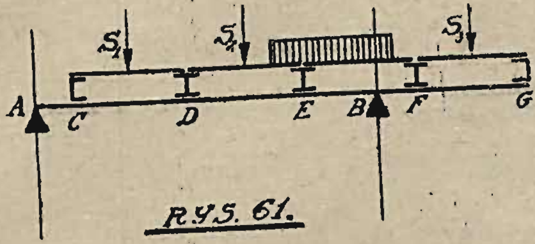
Wykreślenie linji sił tnących dokonywa się w sposób zwykły, którego też niema potrzeby powtarzać. Należy tylko pamiętać, że oddziaływanie podpory A jest sumą $A_1 + A_2$, zaś podpory B — jest sumą $B_1 + B_2$

Zrozumiałem też będzie, dlaczego obrano jeden biegun Ω_1 po prawej stronie, zaś Ω_2 po lewej stronie wieloboku sił

B. OBCIĄŻENIE POŚREDNIE.

75. Dotychczas rozważaliśmy takie przypadki, w których na belkę, podpartą w dwóch punktach, działają siły, przyłożone bezpośrednio do belki.

Teraz zbadamy przypadek, gdy obciążenie działa na belkę rozważaną za pośrednictwem beleczek drugorzędnych CD, DE, EF, FG , opierających się na belkę główną AB w punktach $C, D, E, F, G, \ldots$, jak to zresztą wyjaśnia dostatecznie rys.61.



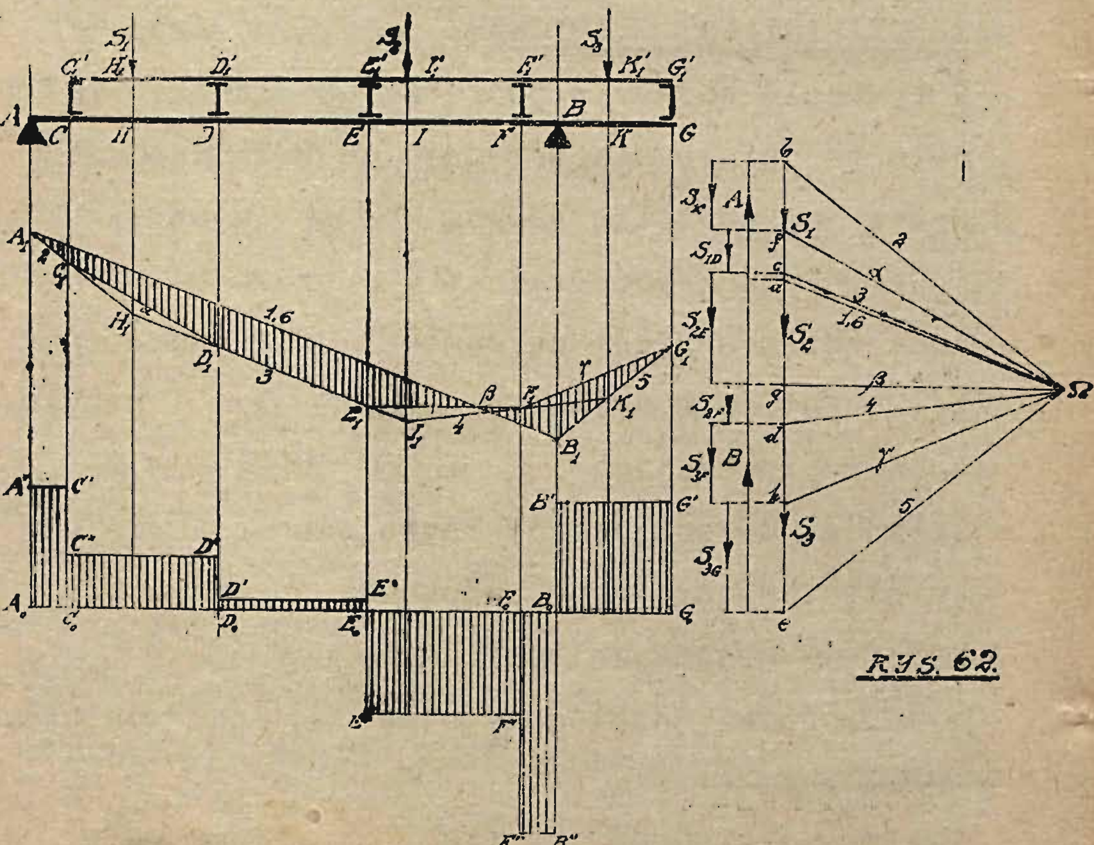
RYS. 61.

76. Rozpatrzmy dla przykładu OBCIĄŻENIE POŚREDNIE SIŁAMI SKUPIONEMI S_1, S_2, S_3 /rys.67/ W tym celu badamy z początku działanie siły S_1 Siła ta działa bezpośrednio na beleczkę $C'D'$ wpływ jej na belkę główną AB ujawnia się jedynie przez podpórki CC' oraz DD' . Możemy zatem uważać, że zamiast siły S_1 mamy tylko jej dwie składowe S_{1C} i S_{1D} , przyłożone w przekrojach C i D belki AB . Składowe te znajdziemy łatwo zapomocą wieloboku sił i sznurowego, o bokach $2, 3, \alpha$, przyczem α oznacza bok zamykający.

Podobnież rozkładamy siłę S_2 na dwie skła

dowe, działające w punktach E i F. Po-
siłkujemy się przytem rozpoczętemi poprzednio wielobokami; tak więc za bok przed siłą S_2 uważamy bok 3, kreślimy promień 4 oraz odpowiadający mu bok 4, a wreszcie budujemy bok zamykający β. Promień β podzieli nam S_2 na szukane dwie składowe S_{2E} i S_{2F}.

Zupełnie tak samo postępujemy z siłą S_3, rozkładając je na składowe S_{3F} i S_{3G}. Przy-



RYS. 62.

tem bokiem przed siłą S_3 jest bok 4, bokiem za siłą - bok 5, zaś bokiem zamykającym - bok γ

Kiedy we wskazany sposób rozłożyliśmy siły S_1, S_2, S_3 możemy zagadnienie nasze tak przedstawić: należy wykreślić pole momentów gnących oraz linję sił tnących dla belki AB obciążonej BEZPOŚREDNIO siłami 1/ S_{1C} w przekroju C, 2/ S_{1D} - w D, 3/ S_{2E} - w E, 4/ S_{2F} i S_{3F} - w F, oraz 5/ S_{3G} w G.

Widzimy więc, że zadanie nasze sprowadziliśmy do rozwiązanego w § 65. Należy tylko skorzystać z wykonanej dotychczas budowy.

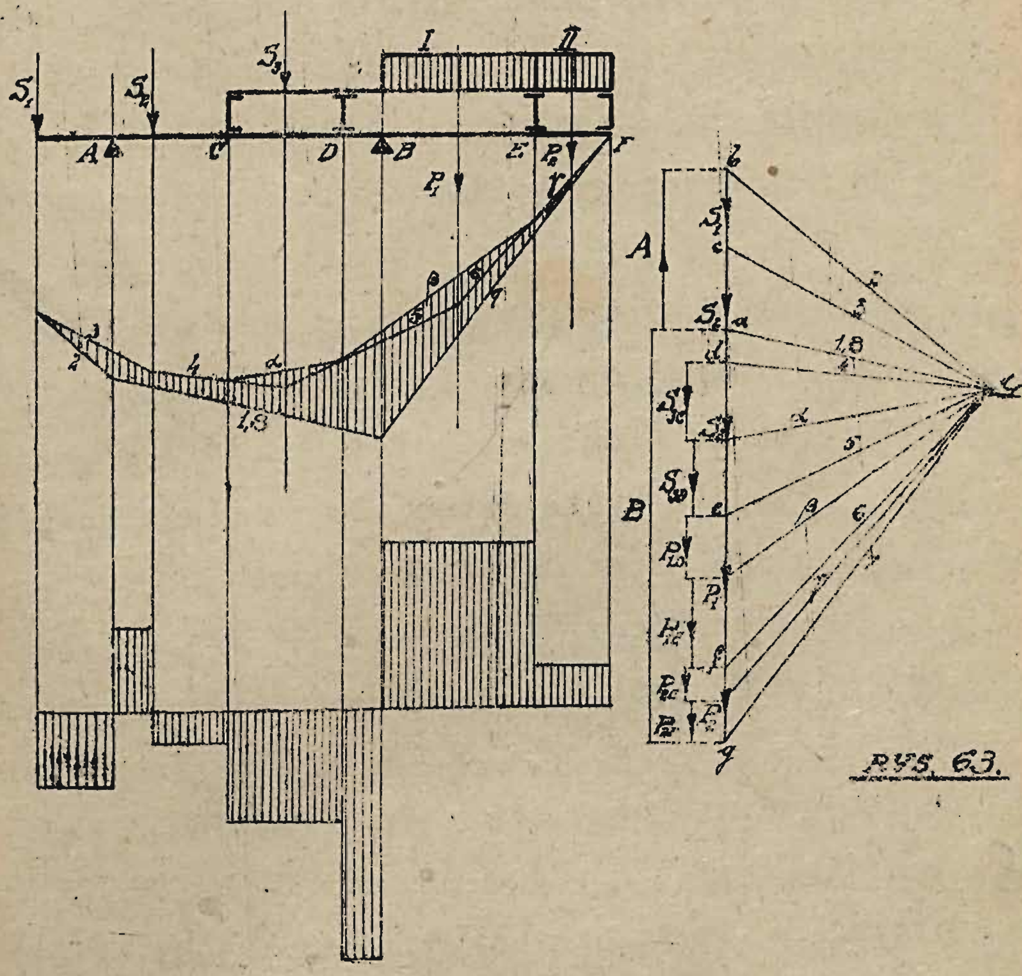
Rzut oka na rys. 62 pozwala nam stwierdzić, że za wielobok sznurowy dla wymienionego układu sił przy biegunie Ω /tym samym, co poprzednio/, można uważać wielobok $A_3 C_1 D_1 E_1 F_1 G_1, B_1, A_1$, złożony z gotowych już boków $2, \alpha, 3, \beta, \gamma, 5$. Łącząc punkty A_1 z B_1 otrzymamy bok zamykający $1,6$ owego wieloboku, a wtedy, poprowadziwszy promień $1,6$, znajdziemy odpory A i B: $A = \overline{ab}$, $B = \overline{ea}$. Pole, ograniczone tym wielobokiem /zakreskowane na rys 62/ przedstawia szukane pole momentów.

Z powyższych rozważań widzimy, że dla otrzymania pola momentów w przypadku obciążenia pośredniego, należy tak postępować, jak gdyby siły S_1, S_2, S_3 działały bezpośrednio na belkę AB ; w tem założeniu - wykreślić odpowiedni wielobok sznurowy i połączyć prostemi α, β, γ punkty przecięcia się boków wieloboku sznurowego z pionowemi, przechodzącemi przez węzły $C, D, E, \ldots$

77. Wykres sił tnących otrzymamy tak samo, jak w § 69. pamiętając wciąż o tem, że nie mają dla nas znaczenia istotnie działające siły S_1, S_2, S_3, a tylko ich składowe w punktach oparcia beleczek $CC_1', DD_1', \ldots$

78. SIŁY CIĄGŁE. Postępowanie w przypadku pośredniego obciążenia siłą ciągłą będzie zupełnie podobne do przytoczonych w § 76 i 77. Wyjaśnia to przykład, rozwiązany na rys. 63. Mamy tu jednocześnie do czynienia z siłami skupionemi S_1, S_2, S_3 oraz z siłą ciągłą P. Z tych dwie pierwsze działają na belkę AB bezpośrednio, dwie pozostałe - pośrednio

Wykreślamy naprzód wieloboki sił i sznurowy dla sił S_1, S_2 przy dowolnym biegunie Ω; odpowiednie promienie i boki są: 2, 3, 4. Na-



RYS. 63.

stępnie rozkładamy siłę S_3 na dwie składowe S_{3C} i S_{3D}, o linjach działania, przechodzących przez C i D. Robimy to zapomocą sposobu, wyłożonego w § 76, korzystając przytem z tego samego bieguna Ω i z boku 4 jako boku przed siłą S_3 Bok zamykający oznaczony jest na rys. 63 przez α.

Dalej dzielimy obciążenie ciągłe P na dwie części, prowadząc linję podziału przez podpórkę E zastępcze siły skupione są P_1 i P_2; rozłóżmy każdą z nich na składowe P_{1D}, P_{1E} i P_{2E}, P_{2F}, przyczem postępujemy tak samo jak w przypadku obciążenia skupionego. Rozkład ten wykonywamy za pomocą dalszego ciągu wieloboku sznurowego, rozpoczętego poprzednie. Wypadnie tylko dobudować do niego nowe boki $5, 6, 7$ oraz boki zamykające β, γ.

Tak więc możemy w danym razie uważać, że belka AB jest obciążoną bezpośrednio siłami $S_1, S_2, S_{3C}, S_{3D}, P_{1D}, P_{1E}, P_{2E}, P_{2F}$; dla nich trzeba wyznaczyć wielobok sznurowy. Oczywiście jest nim wielobok $1, 2, 3, 4, \alpha, \beta, \gamma, 7, 8$ przyczem $1, 8$ oznacza bok zamykający, który pozwoli określić odpory A i B. Pole, ograniczone powyższym wielobokiem, jest szukanem polem momentów; na rysunku pole momentów dla belki ABF jest zakreskowane.

Sposób otrzymania wykresu sił tnących nie wymaga bliższego omówienia.

79. BELKI KONSOLOWE, znane również pod różnemi nazwami, jako belki o podporach wiszących, belki rozcięte, belki Gerbera, belki wielopodporowe /podpór $\geq$ 2/.

Mówić tu będziemy tylko o belkach statycznie wyznaczalnych, poddanych działaniu sił, które znajdują się we wspólnej z osią belki płaszczyźnie.

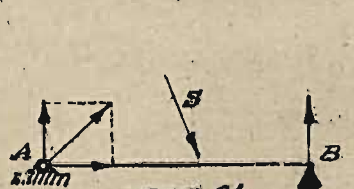
Aby lepiej zrozumieć cel i treść belek konsolowych, rozważmy zwykłą belkę podpartą na dwóch podporach; niech siły będą dowolnie skierowane, byleby znajdowały się w jednej płaszczyźnie. Oddziaływanie tych podpór wyznaczymy dokładnie wtedy, kiedy jedna z nich jest tego rodzaju, że może okazać odpór o ŚCIŚLE WYZNACZONYM KIERUNKU /naprz. przy podparciu belki na wałku, na wózku, lub na ostrzu/, druga zaś podpora powinna być wykonana na sposób przegubu, który może okazać odpór w DOWOLNYM KIERUNKU.

Dla ułatwienia dalszego wykładu nazwijmy podpory o ściśle wyznaczonym kierunku działania - PODPORAMI I-go RODZAJU, zaś podpory, oddziaływujące w dowolnym kierunku, PODPORA-

MI 2-go RODZAJU.

Wykreślnie już wiemy, jak wyznaczać w poprzednim przykładzie odpory; wiemy również, że odpowiedź będzie tylko jedna /porównaj § 65/.

Analitycznie sprawa powyższa da się przedstawić w sposób następujący. Podpora 1-go rodzaju daje się zastąpić jedną siłą o określonej linji działania /rys. 64 - podpora *B* /; podpora 2-go rodzaju może być zastąpiona dwiema siłami z o b r a n e m i linjami działania /rys 64 - podpora *A* /. Na belkę, o której poprzednio mówiliśmy, działają prócz danego układu sił zewnętrznych jeszcze 3 siły odporowe; siły te co do wartości są nam



RYS. 64

niezmane. Mamy więc 3 niewiadome. Do wyznaczenia tych niewiadomych potrzeba trzech równań, które otrzymamy z 3 warunków równowagi belki, poddanej działaniu sił zadanych i odporów.
Z tych właśnie równań znajdziemy niewiadome odpory.

Gdyby powyższą belkę oprzeć na dwóch podporach - drugiego rodzaju, wówczas mielibyśmy razem cztery niewiadome z obranemi linjami działania. Ponieważ równań równowagi zawsze będzie trzy, zatem będziemy mieli możność otrzymania odpowiedzi - bez liku.

80. Niech belka, o której poprzednio była mowa, będzie podparta nie w dwóch, lecz w trzech punktach, albo w większej ich liczbie, lub niech się oprze na dwóch podporach lecz, jak to dopiero mówiliśmy, na obydwóch drugiego rodzaju, wówczas ścisłe określenie odporów drogą statyki będzie niemożliwe. Belka taka będzie statycznie niewyznaczalna, gdyż więcej mamy niewiadomych niż równań. Aby nieokreśloność odporów usunąć, przecinamy belkę taką na pewną liczbę części i w odpowiedni sposób opieramy jedne części na zadanych podporach, STAŁYCH, inne zaś części belki opieramy na zwieszających się końcach tamtych części; te ostatnie podpory nazwiemy WISZĄCEMI. Podpory wiszące mogą być wykonane zarówno jako podpory 1-go lub 2-go rodzaju.

Poznajmy zależność pomiędzy liczbą podpór stałych i liczbą podpór wiszących, jeśli belka ma być statycznie wyznaczalną. Niech, dajmy na to, będzie s podpór stałych, w tem s_1 podpór 1-go rodzaju i s_2 - 2-go rodzaju, oraz w podpór wiszących, w tem w_1 pierwszego rodzaju i w_2 - drugiego rodzaju. Jeśli jest w podpór wiszących, zatem cała belka jest w w miejscach przecięta na $(w+1)$ części.

Niewiadomych sił /zastępujących działania podpór/ będzie, zgodnie z poprzedniem, s_1+2s_2 dla podpór stałych i w_1+2w_2 dla podpór wiszących, a razem

$$s_1+2s_2+w_1+2w_2 .-$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych należy skorzystać z warunków równowagi poszczególnych części belki.

Ponieważ tych części jest $w+1$, a dla każdej z nich możemy napisać 3 warunki równania /suma rzutów na jedną oś, - na drugą oś i suma momentów statycznych/, więc razem ustawimy $3(w+1)$ równań.

Jeśli zadanie ma być określone, powinien istnieć związek:

$$s_1+2s_2+w_1+2w_2=3(w+1)$$

albo, ponieważ $w=w_1+w_2$

więc

$$S_1 + 2S_2 - 2W_1 - W_2 = 3$$

Tak sprawa się przedstawia, jeśli na belkę działają siły, znajdujące się w jednej płaszczyźnie, lecz dowolnie skierowane.

51. Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy wszystkie siły są pionowe, jak to zazwyczaj mieć będziemy przy mostach; również niech podpory 1 go rodzaju okazują oddziaływania w kierunku pionowym. Wówczas podpory 2-go rodzaju okażą odpory pionowe.

W takim razie każdy z odporów, niezależnie od rodzaju podpory, możemy zastąpić jedną tylko siłą pionową. Niewiadomych zatem będzie:

$$S_1 + S_2 + W_1 + W_2 = S + W$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych możemy utworzyć po dwa równania dla każdej części belki /suma rzutów na oś pionową i suma momentów statycznych/. Ponieważ podpór wiszących jest W, zatem części będzie $W+1$ i równań niezależnych utworzymy $2(W+1)$. Jeśli więc belka ma być statycznie wyznaczalna, powinno być

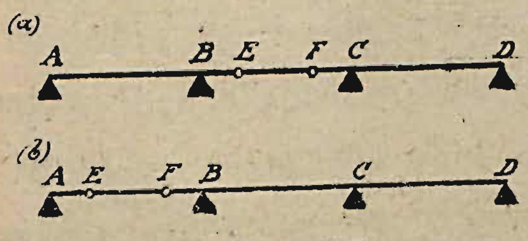
$$S + W = 2(W+1) ,$$

albo

$$S - W = 2 \ ,$$

t. j. PODPÓR STAŁYCH POWINNO BYĆ O DWIE WIĘCEJ, NIŻ WISZĄCYCH. Zaznaczyć tu trzeba, że warunek powyższy powinien być zachowany nie tylko dla całej belki, lecz dla każdej części, która opiera się na podporach stałych; przyczem w miejscu podpór wiszących należy przyłożyć odpowiednio siły zewnętrzne.

82. Wyjaśnimy powyższe na przykładach:
Rozpatrzmy belki, przedstawione na rys. 65.
Dla pierwszej z nich $S = 4$, (A, B, C, D), $W = 2$, (E, F), więc $S - W = 2$; dla części AB mamy $S = 2$ $(A$ i $B)$; $W = 0$, więc $S - W = 2$ i t. d.
Z tego wynika, że belka (a) jest statycznie wyznaczalna.



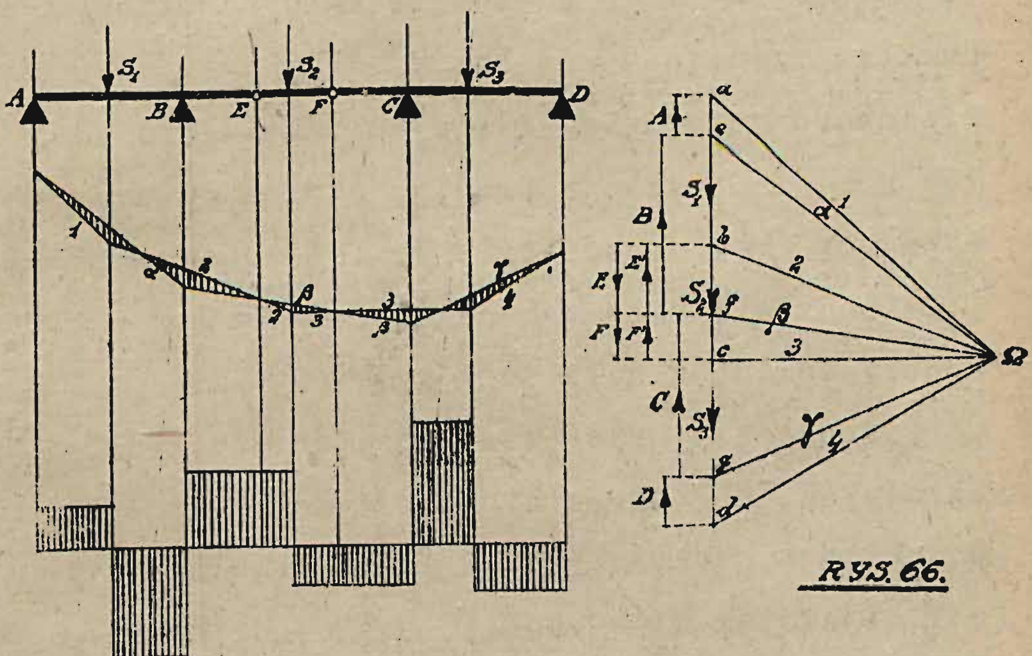
RYS. 65.

Dla belki drugiej (b) mamy $S = 4$, $W = 2$, $S - W = 2$; lecz dla części AF $S = 1$, $W = 1$, $S - W = 0$; tak samo dla części FD: $S = 3$, $W = 0$; $S - W = 3$.–

Belka (b) jest więc statycznie niewyznaczalna.

83. POLE MOMENTÓW GNĄCYCH BELKI KONSOLOWEJ.

Dla przykładu rozpatrzymy belkę, przedstawioną na rys. 66, obciążoną siłami pionowemi S_1, S_2, S_3. Belka składa się z trzech części



RYS. 66.

spoczywających na czterech podporach stałych: A, B, C i D; mamy tu dwie podpory wiszące: E i F.

Rozpatrzmy część belki EF, wspartą na wiszących podporach. Jeśli jedna z tych podpór jest 1-go rodzaju /§ 79/, a oddziaływanie jej będzie pionowe, wówczas obydwa podpory będą pionowe, gdyż siły zewnętrzne, obciążające daną belkę, mają kierunek pionowy. Aby odnaleźć odpory należy wykreślić dla siły S_2 wielobok sił oraz odpowiedni wielobok sznurowy /z bokami $2, 3$ /; następnie należy połączyć punkty przecięcia się boków skrajnych / 2 i 3/ wieloboku sznurowego z linjami działania odporów E i F linją prostą, otrzymamy bok zamykający β. Równoległy do tego boku promień β podzieli siłę S_2 na dwie: $\overline{fb}=E'$ i $\overline{cf}=F'$. Odpory te idą z dołu do góry.

Przechodzimy następnie do jednej z belek skrajnych, np. do belki lewej. Na belkę tę, podpartą w punktach A i B, działają siły S_1 i nacisk końca belki EF; nacisk ten równa się poprzednio znalezionemu odporowi E', skierowany jest z góry na dół i w wieloboku sił może być przedstawiony odcinkiem $\overline{bf}=E$.-

Zatem na belkę AE działają siły S_1, E oraz odpory nieznane A i B. Aby znaleźć odpory, postępujemy w sposób, we właściwem miejscu wyjaśniony. Ustawiamy siły w szereg, w których niewiadome staną po brzegach szeregu: A, Zupełnie w taki sam sposób postąpimy z belką prawą FD : na nią działają siły: S_3 w końcu F siła $F=\overline{fc}$ /w wieloboku sił/ oraz odpory C i D. Skorzystamy z gotowych już promieni i boków i po dopełnieniu promieniami i bokami $4, \gamma$ otrzymamy: odpór $C=\overline{gf}$, odpór $D=\overline{dg}$, wielobok sił $fcdgf$, oraz wielobok sznurowy, utworzony z boków $\beta, 3, 4, \gamma$; γ jest tu bokiem zamykającym.

Ostatecznie więc otrzymujemy, że pole momentów dla całej belki AD jest ograniczone wielobokiem sznurowym o bokach $1, 2, 3, 4, \gamma, \beta, \alpha$.-

84 Budowa WYKRESU SIŁ TNĄCYCH dla belki konsolowej nie nastręcza żadnych trudności. Należy wykonać wykres w sposób zwykły, pamiętając, że odpory działające w podporach wiszących, jako równe i odwrotnie skierowane, nie wpływają wcale na zmianę siły tnącej. /Nie znaczy to jednak, że siły tnące nie zależą od owych podpór; tak nie jest, można dostrzedz bowiem łatwo, że wartości odporów A, B, C, D, są zależne od rozstawienia podpór

S_1, E, B. Siły S_1 i E w wieloboku sił już są wykreślone. Prowadzimy promienie w wieloboku sił i boki wieloboku sznurowego w takim porządku: za siłą A i przed siłą S_1 /do punktu a/ - promień i bok 1; za siłą S_1 i przed siłą E /do punktu b/ - promień i bok 2; za siłą E i przed siłą B /do punktu f/ - promień i bok β. Zauważyć tu należy, że zarówno w wieloboku sił jak i w wieloboku sznurowym - podczas rozpatrywania belki EF - były już wykreślone promienie i boki 2 i β; teraz dodaliśmy tylko promień i bok 1.

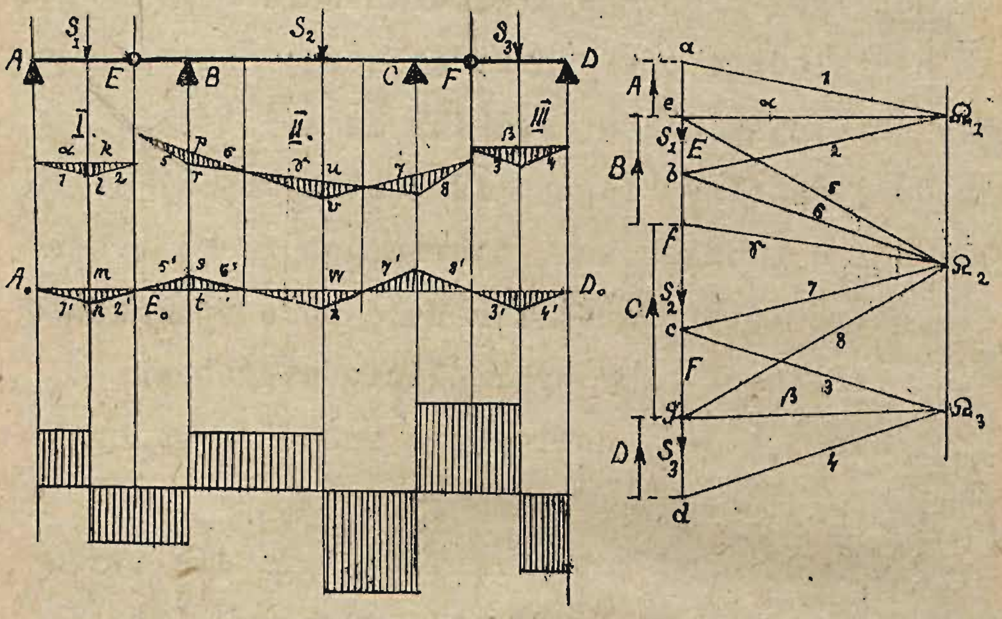
Następnie przez punkt przecięcia się boku 1 z linją działania odporu A i przez punkt przecięcia się boku β z linją działania odporu B prowadzimy bok α, który będzie bokiem zamykającym. Promień α, równoległy do boku α, w wieloboku sił daje nam punkt e, który będzie początkiem siły A i końcem B. Stąd znajdziemy: odpór $A = \overline{ea}$, odpór $B = \overline{fe}$. Jednocześnie widzimy, że wielobok sił jest $abfea$ oraz, że wielobok sznurowy tworzą boki $1, 2, \beta, \alpha$.-

wiszących, a od oddziaływań tych podpór zależą znowu siły tnące/.

85. INNY SPOSÓB wykreślenia pola momentów na przykładzie par.poprzedzającego dostrzegamy, że, obierając dla wszystkich części belki przegubowej wspólny biegun Ω , otrzymujemy wielobok sił o promieniach, tworzących ze sobą bardzo ostre kąty; ta okoliczność może spowodować niedokładności przy wykreślaniu wieloboku sznurowego i przy obliczaniu momentów gnących z tego wieloboku.

Niedogodności tej unikniemy, gdy dla każdej części belki konsolowej obierzemy inny biegun korzystając zresztą wciąż z tego samego wieloboku sił. Otrzymamy wtedy dla każdej części belki wielobok sznurowy, niezależny od innych wieloboków. Aby jednak każdy z tych wieloboków dawał wartości momentów gnących w jednej i tej samej skali, należy obrać bieguny na jednej prostej, równoległej do linji sił /odległość biegunowa jest wtedy jednakowa dla wszystkich wieloboków/.

Na rys. 67 mamy przykład rozwiązany w sposób powyższy. Rozważania zaczynamy od belek skrajnych AE i FD, gdyż mamy w nich tylko po



RYS. 67.

dwie niewiadome, mianowicie po jednym oddziaływaniu stałej podpory i po jednem - wiszącej podpory.

Dla belki AE obieramy biegun Ω_1 i znanym sposobem znajdujemy odpory $A = \overline{ea}$ i $E = \overline{be}$ Potem przechodzimy do belki FD, odmierzamy na linji sił odcinek $bc = S_2$, a dalej $cd = S_3$ następnie obieramy biegun Ω_3 i znowu sposobem znanym wyznaczamy siły $D = \overline{dg}$ i $F = \overline{gc}$

Wreszcie rozpatrujemy belkę środkową EF. Robimy to, obrawszy biegun $\mathcal{R}_2$, pomiędzy $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_3$. Podobnie, jak poprzednio, znajdziemy jedyne dwa niewiadome - odpory B i C. Pola momentów dla poszczególnych części belek są: dla belki AE - pole I, dla belki EF - pole II, dla belki FD - pole III. Aby dogodniej było korzystać z pól momentów, sprowadzamy je często do jednej osi. Wówczas postępujemy tak:

Prowadzimy prostą $A_0 D_0$, równoległą do osi belki, i od punktów przecięcia się jej z linjami działania sił i linjami podpór odmierzamy odpowiednie wartości momentów, odczytane z pól: I, II, III: np. w przekroju, na który działa siła S_1 mamy moment gnący $= kl$, odkładamy więc od osi $A_0 D_0$ odcinek $mn = kl$. Tak samo $st = pr$, $wz = uv$ i t.d. Łącząc końce odcinków prostemi otrzymamy wielobok $A_0, n, E_0, s, z, \ldots$ który ogranicza pole momentów, sprowadzone do osi $A_0 D_0$.

Wykres sił tnących budujemy tak samo, jak w § 84.