obciążenia ruchomego - pomimo obciążenia stałego - będziemy mieli jednym razem siły rozciągające, innym razem, siły ściskające ten sam ukośny pręt wewnętrzny. Wówczas, rozumie się, należy w dźwigarze utrzymać obydwa pręty krzyżujące się.

## ROZDZIAŁ VIII.

### LINJE WPŁYWOWE.

152. W paru poprzednich paragrafach /§§ 14? - 147/ były podane uwagi, w jaki sposób można zbadać wpływ ciężarów ruchomych na powstanie takich czy innych sił w prętach kratownicy. Łatwo jednak zauważymy, że sposób ten, co prawda prostej, daje możność poznania tylko stosunków JAKOŚCIOWYCH, kiedy tymczasem, znajomość ILOŚCIOWYCH stosunków mogłaby nieraz wskazać na inny interesujący nas rozkład sił. Szczególniej będzie to ważne wówczas, kiedy na dane ciało - bez różnicy, czy to będzie belka pełna czy kratownica - działa ruchomy układ wielu

sił, które znajdują się w stałem względem siebie położeniu.

Nieraz bowiem można byłoby zdecydować się na takie ustawienie układu sił na badanej belce, aby niektóre siły wywierały na badany przekrój belki czy pręt kratownicy skutek odmiennego znaku, niż szukamy; może się to okazać wtedy, gdy od działania tych sił otrzymujemy skutek, powiedzmy, słaby, kiedy za to od sił pozostałych mamy skutek znacznie większy, niż gdybyśmy układ sił tak ustawili, iżby wszystkie dawały wynik jednoznaczny.

Znalezienie najwłaściwszego położenia układu sił przy wspomnianej poprzednio możliwości uda się przy pomocy t.zw. "linij wpływowych", o których w następnych §§ będzie mowa. Podane niżej wskazówki będą charakteru ogólnego; chodzi nam głównie o to, aby dać możność czytelnikowi, w razie potrzeby, dostosowania się do różnych zagadnień, które może praktyka nastręczyć.

153. Linje wpływowe znajdą zastosowanie zarówno przy badaniu belek zwykłych, wspartych

na dwóch podporach, jak i do belek konsolowych, do kratowych dźwigarów mostowych - wogóle tam, gdzie na daną konstrukcję może działać układ sił ruchomych.

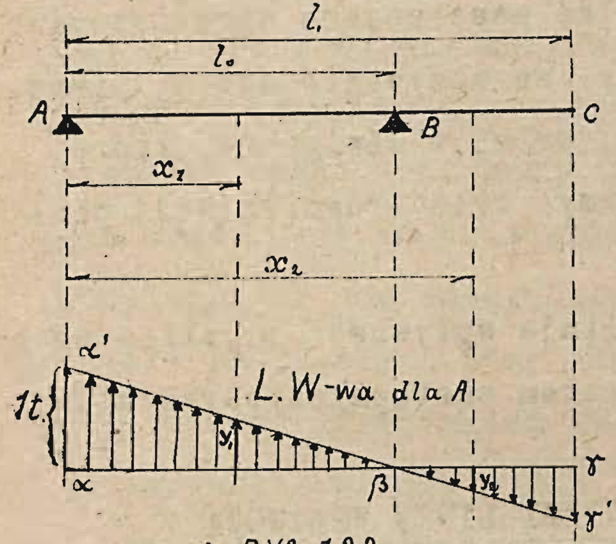
Wprowadzimy tylko następujące ograniczenia: co do sił układamy, że wszystkie one są pionowe; co do odporów, belek i dźwigarów, które niżej badać będziemy, niech również będą pionowe.

Jak budujemy "linje wpływowe" i jaki z nich użytek, będzie tematem następnych paragrafów.

## JAK BUDUJEMY LINJĘ WPŁYWOWĄ ?

154. Pokażemy to na razie na najprostszym przykładzie, który tu rozpatrzymy.

Przypuśćmy, że mamy wyznaczyć wartości odporu $A$ dla belki podpartej w punktach $A$ i $B$, kiedy na belkę działa układ sił ze sobą związanych $S_1$ $S_2$ $S_3$ $S_4$ mogących posuwać się wzdłuż belki, dajmy na to od $A$ na prawo ku $B$ i dalej do $C$ i stopniowo schodzących z belki. Niech odległość między podporami $A$ i $B$ /rys.123/ będzie $l_0$ ; długość całej belki $AC$ niech będzie $l_1$ .




RYS. 123.

W celu wykreślenia linji wpływowej /będziemy pisali przez skrócenie $L.W$-$Wa$/ dla podpory $A$, postępujemy tak:

. Obieramy jedną jedyną siłę $S$ równą JEDNOSTCE siły, naprzykład = 1 kg. lub = 1 tonnie. Przyjmiemy nadal, że $S$ = 1 tonnie. Tak obraną siłę $S$ stawiamy na belce w różnych miejscach i badamy, jaka będzie za każdym razem wartość odporu $A$ ; znalazłszy tę wartość będziemy odkładali ją od osi $\alpha\gamma$ jako rzędną w tem miejscu, gdzie siłę $S$ ustawiliśmy.

Ustawmy siłę $S$ dokładnie nad podporą $A$ ; wówczas odpór $A$ będzie się równać całkowitej siłę $S$. Odkładamy zatem odcinek $\alpha\alpha'$ od osi $\alpha\gamma$ równy 1 tonnie do góry - gdzie w tym kierunku działa odpór $A$; punkt $\alpha'$ należy do L. W-wej dla $A$. Przenieśmy siłę $S$ nad podporę $B$; wówczas podpora $A$ nie odczuje zupełnie istnienia siły $S$, czyli, że w tym razie odpór $A=0$. Zatem L. W-wa dla $A$ przejdzie przez punkt $\beta$. Mamy więc dwa punkty L. W-ej, mianowicie $\alpha'$ i $\beta$.

Gdzie się ułożą inne punkty tej L. W-ej? Aby to znaleźć, ustawmy siłę $S$ na belce w dowolnej odległości $x_1$, od podpory $A$, wtedy odpór $A$ znajdziemy z równania momentów, wziętych względem punktu $B$:

$$A l_0 - S(l_0 - x_1) = 0$$

a stąd

$$A = S \frac{l_0 - x_1}{l_0}$$

Jeżeli otrzymaną wartość $A$ odłożymy w postaci odcinka od osi $\alpha\gamma$, wówczas otrzymamy punkt, którego odcięta $= x_1$, zaś rzędna $y_1 = S \frac{l_0 - x_1}{l_0}$. Zmieniając położenie siły $S$, a więc zmieniając wartość $x_1$, otrzymamy szereg wartości $y_1$; końce rzędnych $y_1$, jak to widzimy z równania

$$y_1 = S\frac{l_0 - x_1}{l_0}$$

ułożą się wzdłuż prostej. Dwa punkty tej prostej $\alpha'$ i $\beta$ znaleźliśmy, zatem możemy poprowadzić samą prostą $\alpha'\beta$. Należy jeszcze zbadać, jak się przedstawi $L.W$-wa dla zwieszającej się części $BC$ belki. Przyłóżmy siłę $S$ w odległości $x_2$ od podpory $A$ /przyczem $l_0 \leqslant x_2 \leqslant l_1$ /; wtedy odpór $A$ znajdziemy z równania momentów, wziętych względem $B$:

$$A.l_0 + S(x_2 - l_0) = 0$$

a stąd

$$A = -S\frac{x_2 - l_0}{l_0}$$

Niech wartość otrzymanego odporu $A$ będzie przedstawiona jako rzędna $y_2$ $L.W$-wej, zatem równanie $L.W$-wej dla belki $BC$ będzie takie

$$y_0 = -S\cdot\frac{x_2 - l_0}{l_0}$$

Widzimy, że jest to równanie prostej, przechodzącej przez punkt $\beta$, gdyż, jeśli założymy $x_2 = l_0$, wówczas $y_2 = 0$. Z równania widzimy, że $y_2$ jest ujemne, czyli że prosta $L.W$-ej dla części $BC$ idzie pod osią $\alpha\gamma$ /odpór w $A$ będzie skierowany na dół/; na końcu belki wartość rzędnej otrzymamy, przyjmując na $x_2$ wartość $l_1$, a więc:

$$\overline{\gamma\gamma'} = -S\,\frac{l_1 - l_0}{l_0}$$

Następnie dostrzeżemy też, że prosta $\beta\gamma'$ jest dalszym ciągiem prostej $\alpha'\beta$, mianowicie z trójkąta $\alpha\alpha'\beta$ mamy: $\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\beta} = \frac{S}{l_0}$ zaś z trójkąta $\beta\gamma'\gamma$ mamy:

$$\frac{\gamma\gamma'}{\beta\gamma} = S\,\frac{l_1 - l_0}{l_0} : (l_1 - l_0) = \frac{S}{l_0}$$

czyli że

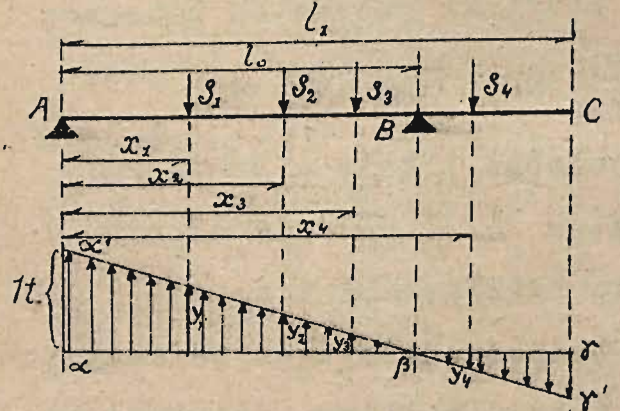
$$\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\beta} = \frac{\gamma\gamma'}{\beta\gamma},$$

t.j. trójkąty są podobne i kąty $\alpha'\beta\alpha$ i $\gamma'\beta\gamma$ są sobie równe. Zatem $L$-$W$-$wa$ dla odporu $A$ przedstawi się jako PROSTA $\alpha'\beta\gamma'$.

Z poprzedniego bezpośrednio wypływa następująca budowa tej prostej: na linji działania podpory $A$ wystawiamy rzędną $\alpha\alpha'$ = 1 tonnie, otrzymujemy punkt $\alpha'$; przez ten punkt i przez punkt $\beta$, leżący na linji działania podpory $B$, prowadzimy prostą aż do linji, przechodzącej równolegle do sił przez koniec belki $\gamma\gamma'$. Prosta $\alpha'\gamma'$ - jest szukaną $L$-$W$-$wą$ dla odporu $A$. Gdyby długość belki była tylko $l_0$ czyli, gdyby nie było zwieszającego się końca $BC$, wówczas $L.W$-wa byłaby prosta $\alpha'\beta$.—

## 155. JAK KORZYSTAĆ Z LINJI WPŁYWOWEJ ?

Dajmy na to, że już mamy wykreśloną $L.W$-wą dla odporu $A$ belki $ABC$, jak to widzimy na rys.124. $L.W$-wa ułatwi nam wyznaczenie odporu $A$ dla jakiejkolwiek siły $S_1$, przyłożonej w którejkolwiek miejscu belki $ABC$, np. w odległości $x_1$ od podpory $A$.




RYS.124.

Gdyby siła $S_1$ była równa 1 tonnie, wówczas, odpór $A$ otrzymalibyśmy, mierząc odcinek $y_1$ w takiej skali, w jakiej odłożono odcinek $\alpha\alpha'$ = 1 tonnie, t.j. w skali sił. Najdogodniej będzie, co też nadal będziemy robić, jeśli przyjmiemy, że jednostka siły i jednostka długości - mierzą się odcinkami jednakowej długości. Niech siła $S_1 = n_1$ tonn, wówczas odpór $A_1$ będzie $n_1$ razy większy, niż przy działaniu siły $S = 1$ tonnie. Należy więc odcinek $y_1$, zmierzony w skali sił, pomnożyć przez $n_1$, wówczas otrzymamy $y_1 n_1$ = wartości odporu $A_1$, powstającego od działania siły $S_1 = n_1$ tonn w miejscu odległości $x_1$ od podpory $A$. Gdybyśmy wzięli inną siłę $S_2 = n_2$ tonn, przyłożona w odległości $x_2$ od podpory $A$, wówczas wartość odporu w $A$ otrzymalibyśmy, zmierzywszy odcinek $y_2$ w skali sił i pomnożywszy jego wartość przez $n_2$; iloczyn $y_2 n_2$ da nam wartość odporu $A_2$ przy działaniu TYLKO siły $S_2$. W podobny sposób otrzymamy odpór $A_3$, kiedy na belkę działać będzie siła $S_3 = n_3$ tonny, przyłożona w odległości $x_3$ od podpory $A$. Odpór otrzymamy $= y_3 n_3$. Wreszcie, kiedy działać będzie tylko siła $S_4 = n_4$ tonny, odpór $A_4$ otrzymamy równy: $-y_4 n_4$; ta ostatnia wartość, jak wnioskujemy z L. W-wej, będzie UJEMNA.

156. Warto się teraz zapytać, czy takie postępowanie przy wyznaczaniu różnych wartości $A$, jest prawidłowe.

Odpowiedź na to damy twierdzącą, jeśli zważymy, że wartość odporu jest proporcjonalna do siły, przyłożonej do pewnego punktu belki. Widoczne to jest z równania, że odpór w $A$, pochodzący od działania siły $S_i$ w odległości $x_i$ od podpory $A$: $A_i = S_i \frac{(l_0 - x_i)}{l_0}$. Jeżeli $x_i$ pozostawimy bez zmiany, wówczas $A_i$ będzie proporcjonalne do $S_i$, to znaczy, że odpór $A_i$ przy sile $S_i$ będzie tyle razy większy od odporu przy sile $S$ = 1 tonnie, ile razy siła $S_i$ jest większa od 1 tonny.

Do podobnego wyniku dojdziemy też, jeśli zwrócimy się do WYKREŚLNEGO sposobu oznaczania odporów, mianowicie przy pomocy wieloboku sił i wieloboku sznurowego. Jakakolwiek będzie siła czy = 1 tonnie, czy też = $S_i$, możemy kształtu wieloboku sił i wieloboku sznurowego nie zmieniać; trzeba tylko odczytać wartość odporu $A$ w tej samej skali, w której siła $S_i$ będzie mogła być przedstawiona przy pomocy narysowanego w wieloboku sił odcinka.

Zatem, z powyższego rozumowania wynika, że postępowanie przy wyznaczaniu odporów, pochodzących od działania tej czy innej siły, tu czy tam przyłożonej, jest prawidłowe.

157. Poznaliśmy przed chwilą jeden użytek z $L$. $W$-wej dla odporu $A$. Postawmy teraz zapytanie takie, jaki będzie odpór $A$, kiedy wszystkie siły /w naszym przykładzie na rys. 124 - 4 siły/ JEDNOCZEŚNIE działają.

Z równania momentów, które dla tego momentu możemy ustawić, otrzymamy:

$$A l_0 - S_1(l_0 - x_1) - S_2(l_0 - x_2) - S_3(l_0 - x_3) + S_4(-l_0 + x_4) = 0$$

Stąd

$$A = S_1 \frac{(l_0 - x_1)}{l_0} + S_2 \frac{(l_0 - x_2)}{l_0} + S_3 \frac{l_0 - x_3}{l_0} - S_4 \frac{x_4 - l_0}{l_0}$$

Łatwo dostrzeżemy, że

$$S_1 \frac{l_0 - x_1}{l_0} = A_1 \qquad S_2 \frac{l_0 - x_2}{l_0} = A_2 \qquad \text{i t.d.}$$

czyli że $\quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

albo

$$A = y_1 n_1 + y_2 n_2 + y_3 n_3 - y_4 n_4$$

Stąd otrzymujemy wskazówkę taką:

Jeśli mamy znaleźć wartość odporu *A* przy jednoczesnem działaniu kilku sił, należy po ustawieniu tych sił na belce zmierzyć odpowiednie rzędne *L. W-wej*, pomnożyć wartość każdej rzędnej przez liczbę tonn, wyrażającą wartość stosownej siły i otrzymane iloczyny zesumować ALGEBRAICZNIE /t.j. z uwzględnieniem znaków, na które wskazuje *L. W-wa*/.

To jest drugi użytek *L. W-wej*.

158. Przypuśćmy dalej, że mamy znaleźć największą wartość odporu *A* , jaką ten może przybrać przy rozmaitych położeniach naszego układu sił na belce. Aby na to dać odpowiedź, najdogodniej będzie, jeśli dany układ sił narysujemy na pasku przezroczystego papieru i pasek ten z narysowanemi linjami sił ustawimy na osi belki w któremkolwiek położeniu. Odczytujemy następnie rzędne *L. W-wej*, przypadające na linjach działania poszczególnych sił. Mnożymy wartość tych rzędnych przez wartość sił w tonnach i iloczyny dodajemy. Mamy jedną wartość odporu *A* . Przesuwamy pasek z siłami w inne miejsce i tu znów

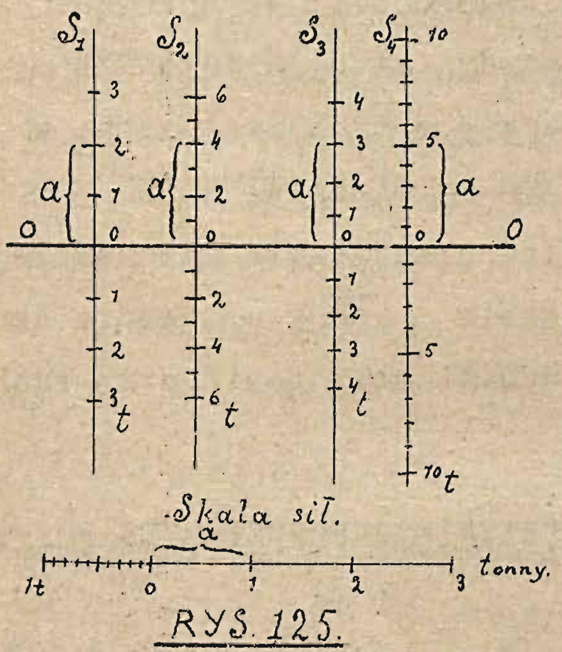
obliczamy wartość $A$ w sposób dopiero co podany. To samo robimy dla innego miejsca i t.d. Z tych danych łatwo wynajdziemy takie położenie układu sił na belce, dla którego wartość $A$ będzie maximum. Najprawdopodobniejsze położenie układu sił, warunkujące $max.A$, będzie wtedy, kiedy NAJWIĘKSZE siły z układu znajdą się w tych miejscach, w których rzędne $L.W$-wej SĄ NAJWIĘKSZE.

Powyższy przykład przedstawia najczęściej spotykane zastosowanie $L.W$-wej, które daje bardzo szybko wyniki obliczenia przy ruchomych układach sił.

## 159. PEWNE UŁATWIENIE W POPRZEDNIEM POSTĘPOWANIU.

Aby uniknąć mierzenia odcinków takich, jak $y_1, y_2 \ldots\ldots$ w skali sił i następnie mierzenia każdego z nich przez liczbę, wyrażającą wartość właściwej siły w tonnach, można inaczej postępować.

Wystawmy sobie, że na pasku papieru, o którym była mowa w poprzednim paragrafie, mamy wykreślony szereg sił $S_1\ S_2\ S_3\ S_4$ z zachowaniem między niemi odległości /p.rys.125/. Przypuśćmy dalej, dla przykładu, że $S_1 = 2t$; $S_2 = 4t$ ; $S_3 = 3t$ ; $S_4 = 5$ tonny; niech skala sił będzie, jak na rysunku podano. Na linji działania siły $S_1$ od osi $OO$ odkładamy ze skali sił odcinek = 1 tonnie = $a$ .




RYS. 125.

Gdybyśmy dla siły $S_1$ znaleźli rzędną $L.W$-wą równą $\underline{a}$ , wówczas otrzymalibyśmy, że wartość odporu $A_1$ , powstająca od działania tej siły, byłaby równa 1.2 tonny; zatem odcinek = $\underline{a}$ dla siły pierwszej będzie oznaczał wartość odporu $A_1$ = 2 tonny. Dzielimy ten odcinek na dwie części i takie same połówki odkładamy od $OO$ do góry i na dół, pisząc przy kreskach liczby 1,2,3 i t.d. Podziałka nad osią będzie potrzebną przy odczytywaniu rzędnych *L.W-wej*, o ile ta przebiega ponad osią; też samo powiemy o podziałkach popod osią $\alpha\gamma$.

W podobny sposób postępujemy przy wykreśleniu podziałki na linji siły $S_2$ : odcinek = $a$ dzielimy na 4 części i tworzymy stosowną podziałkę. Na linji działania siły $S_3$ odcinek $=a$ dzielimy na 3 części, zaś na linji działania siły $S_4$ - na 5 części.

Kiedy już przygotowaliśmy taką złożoną skalę na pasku przezroczystego papieru, przykładamy ją do wykresu *L.W-wej* tak, aby oś *OO* skali ułożyła się wzdłuż osi $\alpha\gamma$ wykresu *L.W*-wej. Teraz już łatwo będzie odrazu odczytywać dla każdej siły odpowiednią wartość odporów i odrazu, nawet w pamięci, sumować te wartości. Przesuwając pasek tak, aby oś *OO* paska pozostała na osi $\alpha\gamma$ wykresu, obliczymy sumę odporów dla innego położenia układu sił. W ten sposób po szeregu prób możemy odnaleźć *max.* wartości odporu *A* . Możliwem jest, że nieraz *max.* tej wartości otrzymamy wówczas, kiedy jedna, albo więcej sił zejdzie z belki, co przy próbach trzeba mieć na względzie. Następnie możliwe jest, że zadany układ sił będzie się posuwał po belce w odwróconym porządku, t.j. że siły będą szły kolejno za sobą tak: $S_4$ $S_3$ $S_2$ $S_1$ - z zachowaniem między sobą tych samych odległości, co i poprzednio. Aby zbadać, czy przy tem uszeregowaniu sił wartość odporu nie będzie większa, niż przy poprzedniem porządku, można skorzystać z tej samej skali /na pasku papieru/, obracając pasek górną połową na dół i odwrotnie. Dalsze postępowanie nie wymaga wyjaśnień.

160. Przykład budowy *L. W*-wej dla odporu *A*, jakkolwiek bardzo prosty, wyjaśnił nam w ogólnych zarysach, co nazywamy *L. W*-wą i jaki z niej może być użytek. Z tego też przykładu otrzymujemy wskazówki, w jakich razach można budować *L. W*-we. Przedewszystkiem stwierdzić możemy, że o *L. W*-wej dla pewnej wielkości /jak w naszym przykładzie dla odporu *A*/ wtedy może być mowa:

a/ kiedy wielkość, dla której mamy zbudować $L.W$-wą zależy od położenia siły ruchomej na belce,

b/ kiedy wielkość ta jest proporcjonalną do wartości siły, przyłożonej do belki, jak to wynika z § 156, oraz

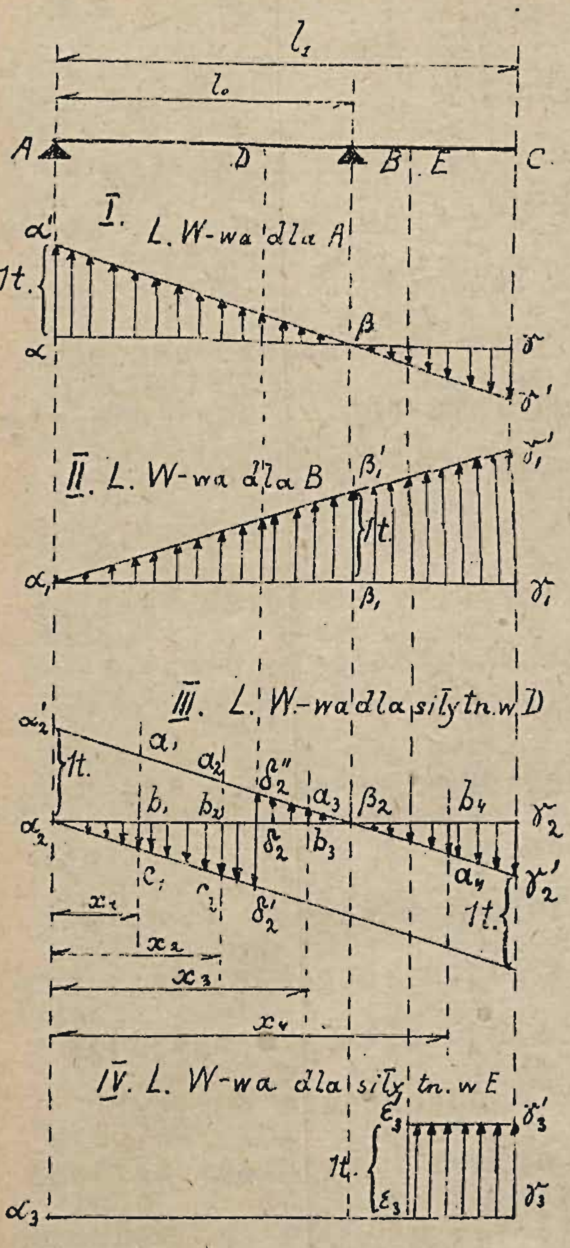
c/ kiedy wielkość ta może być otrzymana jako suma algebraiczna wyników działania poszczególnych sił, przyłożonych do belki, jak to wskazaliśmy w stosunku do naszego przykładu w § 157.

Ten ostatni warunek może być nazwany warunkiem NIEZALEŻNOŚCI DZIAŁANIA POSZCZEGÓLNYCH SIŁ, kiedy siły te DZIAŁAJĄ JEDNOCZEŚNIE.

161. Aby lepiej zapoznać się z $L.W$-wemi, wyznaczmy w przypadku belki, podanej na rys 123 i 124, $L.W$-we dla odporu $B$, następnie dla siły tnącej w przekroju obranym, wreszcie dla momentu gnącego względem przekroju obranego.

WYZNACZMY najpierw $L.W$-wą DLA ODPORU $B$. /Na rys.126-I powtórzona jest $L.W$-wa dla odporu $A$ , znaleziona na rys.123, wzgl. 124/. Aby wykreślić $L.W$-wą dla odporu $B$ , przykładamy siłę $S$ = 1 tonnie do belki nad podporą $A$ . Wówczas podpora $B$ nie odczuje działania siły $S$ ; zatem rzędna $L.W$-wej dla $B$ na podporze $A$ powinna być równa zeru. Poprowadźmy prostą $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ , jako oś, od której w górę będziemy odkładali rzędne szukanej $L.W$-wej /rys.126.II/. Z poprzedniego wnosimy, że $L.W$-wa dla $B$ przejdzie przez punkt $\alpha_1$ . Przenieśmy siłę $S$ nad podporę $B$ . Wówczas działanie tej podpory zaznaczy się odporem = całkowitej sile $S$ . Znaczy się, rzędna $L.W$-wej na podporze $B$ równa się sile $S$ = 1 tonnie. Odkładamy więc odcinek $\beta_1\beta_1'$ = 1 tonnie w skali sił i otrzymujemy punkt $\beta_1'$ , należący do $L.W$-wej.

Łatwo się przekonać w taki sam sposób, jak to zrobiliśmy w § 154, że $L.W$-wa dla odporu $B$ będzie prostą, łączącą punkty $\alpha_1$ z $\beta_1'$ . Przekonamy się również łatwo, że $L.W$-wa dla zwieszającej się części belki będzie dalszym ciągiem prostej $\alpha_1\beta_1'$ . Ostatecznie więc otrzy-




RYS. 126.

mamy, że $L.W$-wa dla odporu $B$ będzie prosta $\alpha, \beta', \gamma'$. Sposób budowy tej prostej z poprzedniego jest wyraźny. Gdyby nie było zwieszającej się części $BC$, wtedy $L.W$-wą byłaby prosta $\alpha, \beta'$. Co do tego, jak posiłkować się wykreśloną $L.W$-wą po tem co było powiedziane w § 155 - 159, niema potrzeby powtarzać.

162. Wykreślmy teraz $L.W$-wą

DLA SIŁY TNĄCEJ , dajmy na to, w przekroju $D$ /rys.126.III/.

Przyłóżmy siłę $S$ = 1 tonnie do belki nad podporą $A$ . Wówczas siłą tnącą w przekroju $D''$ nazwiemy, zgodnie z § 69, sumę sił, które działają na belkę na lewo od $D$ . W przypadku, kiedy siła $S$ jest umieszczona nad podporą $A$ , wówczas na lewo od $D$ znajdują się siły: odpór $A$ i siła $S$ . Ponieważ odpór $A$ wyznacza się z wykresu I odcinkiem $\alpha\alpha' = S =$ $= 1$ tonnie i jest skierowany ku górze, zaś siła $S$ skierowana jest ku dołowi, przeto suma tych dwóch sił = 0 .

Sumowanie to możemy wskazać na rys.126.III, gdzie obraliśmy oś poziomą $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ . Na linji podpory $A$ mamy odłożony odcinek $\alpha_2 \alpha_2' = S$ ; odcinek ten, wzięty z lotem ku górze, daje nam wartość odporu $A$ , kiedy siła $S$ znajduje się nad podporą $A$ . Jednocześnie odcinek $\alpha_2' \alpha_2$ - z lotem ku dołowi - wyobraża wartość siły $S$ , znajdującej się właśnie nad podporą $A$ . Suma tych dwóch sił, inaczej siła tnąca w przekroju $D = \alpha_2 \alpha_2' + \alpha_2' \alpha_2 = 0$ . To znaczy, że $L.W$-wa dla siły tnącej w przekroju $D$ ma nad podporą $A$ rzędną = 0, przechodzi więc przez punkt $\alpha_2$.

Przyłóżmy siłę $S$ do punktu, znajdującego się w odległości $x_1$ od podpory $A$ /rys.126. III/. Wówczas odpór w $A$ wyznaczymy, jeśli wykreślimy $L.W$-wą dla odporu $A$, mianowicie prostą $\alpha_2'\beta_2\gamma_2'$ /równoległą do prostej $\alpha'\beta\gamma'$ z rys.126.I/ i zmierzymy odcinek $b_1a_1$ z letem ku górze. Siłę tnącą w $D$ znajdziemy zatem jako sumę odporu w $A$ i siły $S$, znajdującej się w odległości $x_1$ od podpory $A$. Chcąc tę sumę znaleźć na wykresie odkładamy od $a_1$ wartość siły $S = a_1c_1 = \alpha_2'\alpha_2$ w dół.

Wówczas suma $b_1a_1 + a_1c_1 = b_1c_1$ będzie to odcinek skierowany w dół. Więc punkt $c_1$ jest nowym punktem szukanej $L.W$-wej.

Przenosimy siłę $S$ do punktu, położonego w odległości $x_2$ od $A$; siłę tnącą w przekroju $D$ otrzymamy, sumując wartość odporu $A$, który wówczas powstanie, i siłę $S$. Suma ta będzie: $b_2a_2 + a_2c_2 = b_2c_2$. Punkt $c_2$ należy do szukanej $L.W$-wej. Jeżeli w podobny sposób będziemy dalej rozumowali, spostrzeżemy, że $L.W$-wa dla siły tnącej w przekroju $D$ rozpocznie się w punkcie $\alpha_2$ i pójdzie następnie równolegle do prostej $\alpha_2'\beta_2\gamma_2'$ i taką pozostanie tylko do przekroju $D$, to jest ta prosta $\alpha_2\delta_2'$ będzie częścią $L.W$-wej.

Skoro tylko siłę $S$ przeniesiemy na prawo od $D$, np. na odległość $x_3$, lub $x_4$ od $A$, wówczas na lewo od $D$ otrzymamy tylko odpór $A$. Zatem siła tnąca w $D$ będzie równać się każdorazowemu odporowi $A$; a więc, kiedy siła $S$ znajduje się w odległości $x_3$ od $A$, odpór wyznaczymy jako odcinek $b_3\alpha_3$, taka też będzie siła tnąca w $D$; kiedy siła $S$ znajdzie się w odległości $x_4$ od $A$, wówczas odpór w $A$ wyznaczymy jako odcinek $b_4\alpha_4$ i taką też będzie siła tnąca w przekroju $D$. Z powyższego widzimy, że od przekroju $D$ na prawo $L.W$-wa dla siły tnącej w przekroju będzie POWTÓRZENIEM $L.W$-wej dla odporu $A$ na części belki $DC$. Zatem szukana $L.W$-wa względem osi $\alpha_2\gamma_2$ będzie:

$\alpha_2\delta_2'\delta_2''\beta_2\gamma_2'$

Kierunki lotu siły tnącej są uwidocznione strzałkami. Gdy belka była bez zwieszającej się części $BC$, wówczas $L.W$-wa dla siły tnącej w przekroju $D$ byłaby linją łamaną $\alpha_2 \delta_2' \delta_2'' \beta_2$. Część $\beta_2 \gamma_2'$ byłaby zbędną.

163. Wykreślmy $L.W$-wą DLA SIŁY TNĄCEJ W PRZEKROJU $E$, OBRANYM W ZWIESZAJĄCEJ SIĘ CZĘŚCI BELKI /rys.126.IV/. Przyłóżmy siłę w którymkolwiek punkcie belki, obranym MIĘDZY $A$ i $E$. Siła $S$ wywoła odpowiednie odpory $A$ i $B$. Jaka siła tnąca względem przekroju $E$ wystąpi suma siły $S$, odporu $A$ i $B$, gdyż wszystkie trzy siły znajdują się po lewej stronie przekroju $E$. Ponieważ siła $S$ jest w równowadze z $A$ i $B$, zatem, suma $S+A+B$ powinna być = 0. Stąd wnioskujemy, że dla siły $S$, przyłożonej do któregokolwiek punktu belki między $A$ i $E$ siła tnąca w przekroju $E$ jest równa zeru. Zatem $L.W$-wa pobiegnie wzdłuż osi $\alpha_3 \gamma_3$ do punktu $\varepsilon_3$. Od tego punktu będzie inny charakter $L.W$-wej. Wykreślmy ją dla części

belki $EC$. Najprostsze będzie takie rozumowanie: znajdźmy siłę tnącą dla tegoż przekroju $E$, nie jako sumę sił leżących na lewo od $E$, lecz jako sumę sił, znajdujących się na prawo od tego przekroju. Ponieważ istnieje równowaga belki, przeto siła tnąca względem $E$, obliczona jako suma sił, leżących na lewo od $E$, czy też jako suma sił, leżących na prawo od $E$, powinny w sumie dać zero, stąd wnosimy, że będą one sobie równe, różniąc się tylko znakiem.

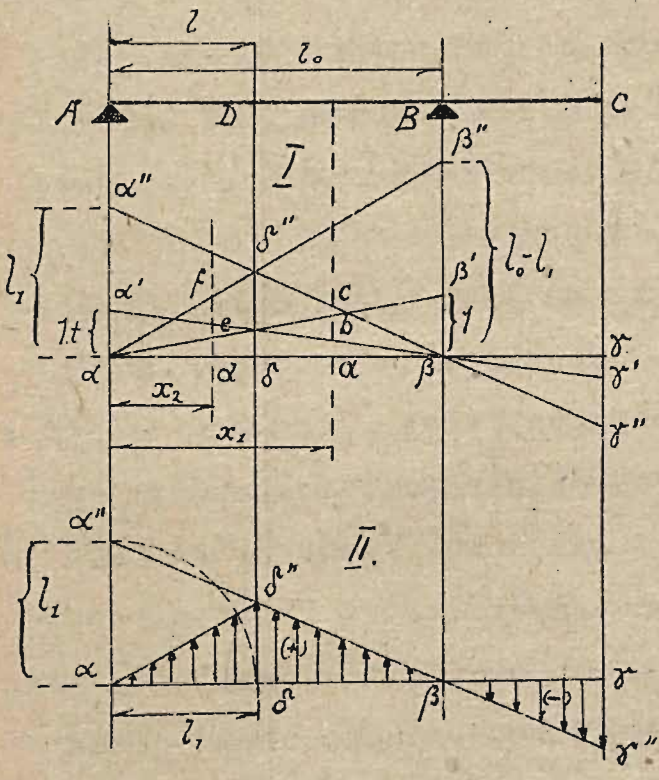
Przyłóżmy zatem siłę $S$ gdziekolwiek do belki MIĘDZY $E$ i $C$; na prawo od $E$ działa tylko jedna siła $S$, zatem siła tnąca względem $E$, rozumiana jako suma sił, leżących na prawo od $E$, równa się $S$ i jest skierowana NA DÓŁ, a więc siła tnąca pojmowana jako suma sił, leżących na lewo od $E$, równa się tej samej sile $S$, tylko jest zwrócona KU GÓRZE.

Teraz już możemy wykreślić $L.W$-wą dla siły tnącej w przekroju $E$, kiedy siła $S$ działa na którykolwiek punkt belki $EC$. $L.W$-wa będzie prostą, poprowadzoną równolegle do osi

$\alpha_3 \gamma_3$ w odległości $\delta = 1$ tonnie.

Szukana zatem L. W-wa będzie: $\alpha_3 \varepsilon_3 \varepsilon_3' \gamma_3'$.

164. Poznajemy teraz L. W-wą DLA MOMENTU GNĄCEGO w obranym przekroju $D$ danej belki.




RYS. 127.

Według przyjętego określenia, podanego w § 66, momentem gnącym w danym przekroju $D$ będziemy nazywali sumę momentów statycznych sił, przyłożonych do belki NA LEWO od obranego przekroju. Nieraz będzie dogodniej obliczać sumę momentów statycznych sił, przyłożonych do belki NA PRAWO od tego przekroju; wówczas właściwy moment gnący będzie się równał tej ostatniej sumie, różniąc się od niej tylko znakiem; wynika to stąd, że moment gnący plus suma momentów statycznych sił, przyłożonych na prawo, dają zero, gdyż cały układ sił jest w równowadze.

Po tych uwagach przystępujemy do wykreślenia $L.W$-wej dla momentu gnącego /rys.127.I/.

Przypuśćmy, że do belki przyłożyliśmy siłę $S = 1$ tonnie, w punkcie odległym $x_1$ od podpory $A$. Wówczas na lewą część belki /względem przekroju $D$/ działa tylko odpór $A$; wartość tego odporu moglibyśmy znaleźć w $L.W$-ej dla odporu $A$. Ta linja jest wykreślona jako prosta $\alpha'\beta$. Odcinek $ab$ wyznaczy wartość odporu $A$. Moment gnący, równy w danym razie momentowi statycznemu odporu $A$ względem przekroju $D$ = odcinkowi $ab$ pomnożonemu przez ramię $l_1 = ab.l_1$. Jeżeli na prostej, przechodzącej przez $A$, odłożymy odcinek nie $\alpha\alpha' = 1$, lecz $\alpha\alpha'' = 1.l_1 = l_1$, wówczas rzędna prostej $\alpha''\beta$ w odległości $x_1$ da nam odcinek $ac$, który będzie $l_1$ razy większy niż $ab$, zatem będzie to odcinek, wyznaczający moment gnący $D$, kiedy siła znajduje się w odległości $x_1$ od $A$.

Odcinek $\underline{ac}$ będziemy mierzyli w skali długości, albo w skali sił, co zgodnie z uwagą, zrobioną w § 155, na jedno wyjdzie.

Łatwo dostrzeżemy, że gdziekolwiek siła $S$ będzie przyłożona, byleby to było na prawo od $D$, wartość momentu gnącego wyznaczymy zawsze jako odpowiednią rzędną prostej $\alpha''\beta\gamma''$. Trzeba tylko dodać, że, póki siła $S$ znajduje się między $D$ i $B$ - wówczas momenty gnące będą dodatnie, na co wskazuje położenie prostej $\alpha''\beta$ ponad osią $\alpha\beta$; zaś, kiedy siła $S$ przejdzie na zwieszający się koniec belki $BC$, wówczas momenty będą ujemne, co widać z położenia prostej $\beta\gamma''$ pod osią $\alpha\gamma$. Dotychczasowe rozumowanie dotyczyło siły $S$, której punkty przyłożenia obierane były NA PRAWO od $D$, czyli dotyczyło $L.W$-wej dla momentu gnącego - $\delta''\beta\gamma''$. Zbadajmy, co będzie, kiedy siłę $S$ ustawimy gdziekolwiek na belce między $A$ i $D$ naprz. w odległości $x_2$ od $A$. Moment gnący w $D$ będzie sumą momentów statycznych odporu $A$, i siły $S$, /gdyż teraz obie te siły znajdują się na lewo od przekroju $D$ /. Dogodniej, jednak, będzie brać moment statyczny sił, działających na prawą część belki względem $D$ i znak tego momentu zmienić na odwrotny. Na prawo od $D$ działa tylko odpór $B$. Wartość tego odporu moglibyśmy znaleźć z $L.W$-wej dla odporu $B - \alpha\beta'$; będzie to wartość, wyznaczona na odcinkiem $de$. Moment statyczny tego odporu względem $D = -de(l_0 - l_1)$; zauważymy, że moment statyczny ujemny. Zatem moment gnący w $D = +de(l_0 - l_1)$. Powiększmy wszystkie rzędne prostej $\alpha\beta' - (l_0 - l_1)$ — razy, otrzymamy gotowe wartości momentu gnącego. Aby to otrzymać, na prostej, przechodzącej przez podporę $B$, odkładamy nie $\beta\beta' = 1$, lecz $\beta\beta'' = (l_0 - l_1)$, wówczas rzędne prostej $\alpha\beta'$ wskażą nam odrazu wartości momentu gnącego względem przekroju $D$. Prosta ta ma dla nas realną wartość tylko na części $\alpha\delta''$, kiedy siła $S$ posuwa się od $A$ do $D$. Zatem otrzymaliśmy $L.W$—wą dla momentu gnącego w przekroju $D$ w postaci linji łamanej:

$\alpha\delta''\beta\gamma''$ — z osią $\alpha\gamma$. Rzędne tej linji łamanej są w części dodatnie, w części -

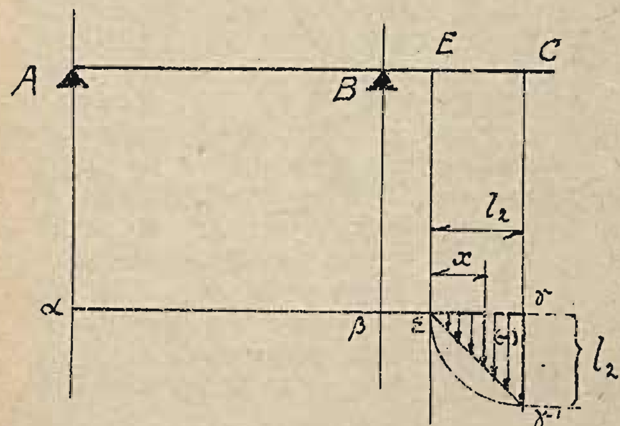
- ujemne.

165. Z powyższego wynika prosty sposób wykreślenia $L.W$-wej dla momentu gnącego w przekroju $D$. Niech $D$ znajduje się w odległości $l_1$ od $A$ /rys.127.II/. Wówczas promieniem $l_1$ z punktu $\alpha$ odcinamy na prostej $A\alpha$ odcinek $\alpha\alpha'' = l_1$. Przez punkty $\alpha''$ i $\beta$ prowadzimy prostą $\alpha''\beta\gamma''$; prosta ta przecina linję przekroju $D$ w punkcie $\delta''$. Łączymy $\delta''$ z $\alpha$ prostą $\delta''\alpha$ i mamy gotową $L.W$-wą dla momentu gnącego: $\alpha\delta''\beta\gamma''$.

Gdyby nie było zwieszającej się części belki $BC$, $L.W$-wą byłaby linja: $\alpha\delta''\beta$. Należy, właściwie, jeszcze przekonać się, że punkt $\delta''$ znajduje się na przecięciu prostych $\alpha\beta''$ i $\beta\alpha''$. Rozpatrując podobne trójkąty /rys.127.I/ $\alpha\delta\delta''$ i $\alpha\beta\beta''$ oraz $\beta\delta\delta''$ i $\beta\alpha\alpha''$, otrzymamy właśnie potwierdzenie tego.

166. Jaka będzie $L.W$-wa DLA MOMENTU GNĄCEGO W PRZEKROJU $E$, obranego NA ZWIESZAJĄCEJ SIĘ CZĘŚCI BELKI ?

Niech punkt $E$ znajduje się w odległości $l_2$ od końca belki $C$ /rys.128/. Póki siłę $S$ będziemy przykładali do różnych punktów belki między $A$ i $E$, zawsze na lewo od $E$ znajdą się trzy siły: odpór $A$, siła $S$ i odpór $B$. Ponieważ te trzy siły są w równowadze, zatem suma



RYS. 128.

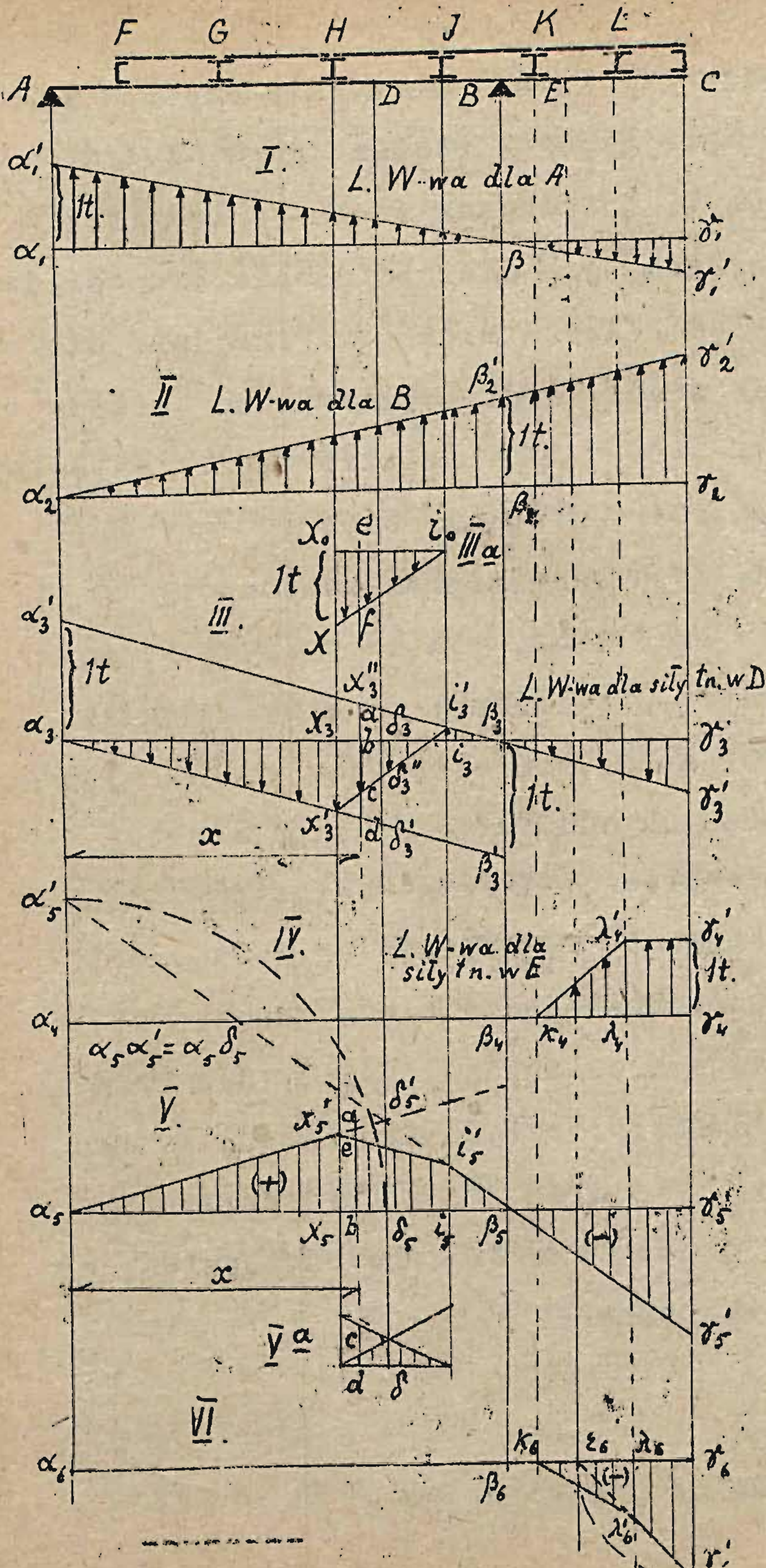
momentów statycznych tych sił względem jakiegokolwiek punktu, a więc i względem $E$ musi być równa zeru. Stąd widzimy, że $L.W$-wa dla momentu gnącego względem przekroju $E$ dla belki od $A$ do $E$ ma wszędzie rzędne = 0. Przenieśmy siłę $S$ na prawo od $E$. Po lewej stronie od $E$ zostaną odpory $A$ i $B$, których suma momentów statycznych względem $E$ - już nie będzie zerem. Aby prędzej i prościej znaleźć moment gnący względem $E$, obliczmy moment statyczny siły $S$, leżącej obecnie na prawo od $E$. Kiedy siła $S$ jest przyłożona do punktu $C$, wówczas moment statyczny wzgl. $E = +Sl_2 = +1 . l_2 = l_2$. Zatem moment GNĄCY w $E = -l_2$. Od osi $\alpha\gamma$, zataczając promieniem $l_2$ łuk koła, odłóżmy w dół odcinek $l_2$, otrzymamy punkt $L.W$-wej $\gamma'$. Drugi punkt $L.W$-wej otrzymamy, kiedy siła $S$ znajdzie się w p. $E$. Wówczas moment gnący = 0. Stąd wnioskujemy, że $L.W$-wa przejdzie przez p. $\varepsilon$ Aby się przekonać, jaki kształt otrzyma $L.W$-wa, ustawmy siłę $S$ w odległości $x$ od punktu $E$. Moment statyczny względem $E = +S . x$. Moment gnący: $= - S . x = -1 . x = -x$. Zatem będzie to prosta, przechodząca przez punkt $\varepsilon$ i $\gamma'$. Mamy więc, że $L.W$-wą dla momentu gnącego w przekroju $E$ /w zwieszającej się części belki/, będzie linja łamana: $\alpha\beta\varepsilon\gamma'$ z osią $\alpha\gamma$. Wszystkie rzędne są ujemne.

<u>167</u>. Jeżeli będzie dany ruchomy układ sił pionowych w postaci szeregu sił, znajdujących się w stałych względem siebie odległościach,

i trzeba będzie znaleźć największy moment gnący względem zadanego przekroju, możemy tak postępować, jak to podaliśmy w § 159. Budujemy we wskazany tam sposób na pasku papieru przezroczystego skale na linjach działania poszczególnych sił i ustawiając pasek z wyrysowanemi na niem skalami, w dowolnym miejscu, odczytujemy przy tem położeniu paska odpowiednie wartości momentów gnących i sumujemy ALGEBRAICZNIE otrzymane wyniki. Przesuwając pasek w inne miejsce, postępujemy w podobny sposób, aby otrzymać wartość momentu gnącego w tem miejscu. Po kilku próbach łatwo ustalimy położenie układu sił, kiedy w danym przekroju moment gnący będzie maximum i jednocześnie określić wartość maximum momentu gnącego.

168. LINJE WPŁYWOWE PRZY OBCIĄŻENIU POŚREDNIEM.

Niech będzie dana belka $ABC$, podparta w 2-ch punktach $A$ i $B$ /rys.129/; obciążenie na tę belkę może być oddawane za pośrednictwem drugorzędnych beleczek, podpartych w węzłach i . Zbadajmy, jak będą wyglądały




L. W-we dla różnych wielkości, a więc przedewszystkiem dla odporów A i B.

---

Załóżmy, że siła $S$ = = 1 tonnie znajduje się nad podporą $A$. Odpór wtedy = $S$. Jeżeli siłę przeniesiemy do punktu między $A$ i $F$ otrzymamy odpór w taki sam sposób, jakgdyby węzłów $F, G$ i t.d. nie było. Czyli dotychczas $L.W$-wa będzie zupełnie taka sama, jak dla obciążenia bezpośredniego /p.§ 154/. Niech siła $S$ znajdzie się gdziekolwiek między dwoma węzłami, np. między $G$ i $H$. Siła $S$ działać będzie na belkę $ABC$ za pośrednictwem podpórek $G$ i $H$, mimo to suma tych oddziaływań na podpory $A$ i $B$ będzie taka sama, jak od całkowitej siły $S$, jakgdyby przyłożonej do głównej belki $AB$ bezpośrednio, boć siła $S$ będzie wypadkową wspomnianych oddziaływań. Stąd widzimy, że obecność węzłów $F, G, H, J$ i t.d. żadnej roli na wartość $A$ i $B$ nie odgrywa, czyli że odpory $A$ i $B$ dadzą się wyznaczyć z $L.W$-wych, wykreślonych jakgdyby dla belki $ABC$ BEZPOŚREDNIO obciążonej. Zatem, krótko mówiąc, $L.W$-we dla $A$ i $B$ otrzymamy według § 154 i 161, bez żadnego odstępstwa, co też zostało wykonane na rys.129.I i II.

## 169. LINJE WPŁYWOWE DLA SIŁY TNĄCEJ PRZY OBCIĄŻENIU POŚREDNIEM.

Znajdźmy kształt $L.W$ -wej dla siły tnącej w przekroju $D$, obranym pomiędzy węzłami $H$ i $J$ na głównej belce $ABC$ /rys.129/.

Póki siła $S$ będzie przyłożona do któregokolwiek punktu beleczek drugorzędnych między $A$ i $H$, wpływ jej na wartość siły tnącej w przekroju $D$ pozostanie taki sam, jakiby był, gdyby $S$ była przyłożona bezpośrednio do belki $ABC$. Dopiero, kiedy siła $S$ wejdzie na beleczkę $HJ$, wtedy ta siła na główną belkę działa na pośrednictwem węzłów $H$ i $J$. Działania te istnieją mimo, iż siła $S$ może być w inne miejsce przeniesiona nawet na prawo od $D$; z przeniesieniem siły $S$ zmieniają się wartości sił w $H$ i $J$, ale zawsze obecność siły w $H$ wpłynie na wartość siły tnącej w przekroju $D$.

Jeśli siła $S$ przejdzie poza $J$ - na prawo, znów obecność podpórek $K, L, C$ nie będzie mieć żadnego wpływu na $A$ i $B$, i na siłę tnącą w $D$. Z powyższego wnioskujemy, że dla części belki od $A$ do $H$ i od $J$ do końca belki $L. W$ -wa dla siły tnącej pozostanie taką samą, jaką ją otrzymaliśmy dla obciążenia bezpośredniego /p.§ 162/. Wspomniane dopiero co części $L. W.$ -wej są wykreślone na rys.129.III mianowicie $\alpha_3 x_3'$ i $i_3' \gamma_3'$ z osią $\alpha_3 \gamma_3$. Pozostaje jeszcze rozpatrzyć, jaki będzie kształt $L. W$ -wej dla belki między $H$ i $J$ t.j. między punktem $x_3'$ i $i_3'$.

W tym celu przedstawimy sobie, jak się będzie zmieniać siła w $H$ w miarę przesuwania siły $S$ od $H$ do $J$; najlepiej sobie to uprzytomnimy, wykreśliwszy dla beleczki $L. W$ -wą dla siły w $H$. Jest to prosta $x i_0$ względem osi $x_0 i_0$ /rys.129 III^a/.

Gdyby siła $S$, znajdując się między $H$ i $J$ w odległości $x$ od $A$, działała bezpośrednio na belkę $ABC$, wówczas siłę tnącą otrzymalibyśmy jako sumę algebraiczną odporu $A$, którego wartość znajdujemy jako odpowiednią rzędną $ba$, /skierowaną ku górze/ prostej $\alpha_3' \beta_3$ względem osi $\alpha_3 \beta_3$ i siły $S = 1t.$, czyli otrzymalibyśmy rzędne prostej $\alpha_3 \delta_3$ względem osi $\alpha_3 \beta_3$ w naszym przypadku $ba - ad = bd$

/skierow. w dół/. Obecnie zaś, kiedy siła $S$ działa na belkę $ABC$ ZA POŚREDNICTWEM podpórki $H$, należy brać sumę algebraiczną odporu $A$, którego wartość znajdujemy, jak poprzednio, w postaci rzędnej prostej $\alpha_3'\beta_3$ w danym przypadku $= ba$ i siły w $H$, której wartość otrzymujemy jako rzędną $ef$ prostej $x i_0$ względem osi $x_0 i_0$ /rys.129.III[a]/.
Suma ta daje w poszczególnym przypadku:
$ba - ef$ ; jeśli odłożymy $ac = ef$, wówczas $ba - ef = ba - ac = bc$ czyli punkt $c$ należy do $L.W$-wej między $x_3'$ i $i_3'$.
W ten sposób rozumując o innych punktach przyłożenia siły $S$ do beleczki $HJ$, spostrzeżemy, że punkty analogiczne do $c$ ułożą się wzdłuż prostej, łączącej punkty $x_3'$ i $i_3'$.
Że to będzie prosta wynika zresztą stąd, że odcinki pionowe w trójkącie $x x_0 i_0$ i w trójkącie $x_3' x_3'' i_3'$, wzięte na wspólnej prostej pionowej są sobie równe, a więc punkty $c$ znajdą się na prostej. Zatem mamy już wyznaczoną $L.W$-wą dla siły tnącej w przekroju $D$ : będzie to linja łamana:
$\alpha_3 x_3' i_3' \beta_3 \gamma_3'$ względem osi $\alpha_3 \gamma_3'$.

Rzędne tej linji ponad osią wskazują na siłę tnącą, skierowaną ku górze, zaś rzędne pod osią - wskazują na siłę tnącą, skierowaną ku dołowi. Rysunek III^a^ jest tylko pomocniczym, którego przy wyznaczaniu *L. W* -wej właściwej wykreślać niema potrzeby.

170. Wyznaczmy teraz *L. W* -wą DLA SIŁY TNĄCEJ W PRZEKROJU *E* , obranym NA CZĘŚCI ZWIESZAJĄCEJ SIĘ między węzłami *K* i *L* Zupełnie tak samo, jak to mieliśmy dla belki *ABC* obciążonej bezpośrednio /p. § 163/, póki siła *S* znajduje się w jakiemkolwiek miejscu na lewo od *E* , siła tnąca równa się zeru, ale pod warunkiem, że siła *S* nie przekroczy węzła *K* . Z chwilą, kiedy siła *S* przesunie się od *E* cokolwiek naprawo, już część siły *S* , działając na beleczkę *KL* , oddziaływa na belkę *ABC* przez podpórkę *L* , Chcąc zatem zbadać, co się stanie z siłą tnącą w tym przypadku, kiedy siła *S* przekroczy węzeł *K* , posuwając się ku końcowi *C* , należy zwrócić uwagę na prawą część belki od *E* .

Jeśli siła *S* przesuwa się od *C* do *L* /na prawo od przekroju $E$ /, mamy tylko tę siłę, skierowaną w dół. Zatem siła tnąca - w umówionem znaczeniu - w przekroju $E$ równa się tej samej sile, lecz jest zwrócona do góry. Wykreślamy więc oś $\alpha_v \gamma_v$ /rys.129.IV/ id od niej do góry odkładamy odcinek $\gamma_v \gamma_v' = S = 1$ tonnie; następnie przez punkt $\gamma_v'$ prowadzimy prostą $\lambda_v' \gamma_v'$ równoległą do osi $\alpha_v \gamma_v$. Prosta $\lambda_v' \gamma_v'$ należy do szukanej $L.W$-wej. Co będzie dalej, kiedy siła $S$, przesuwając się od $C$ na lewo wejdzie na beleczkę $KL$? Wówczas siła $S$ rozłoży się na dwie, z nich jedna działa na belkę $ABC$ przez podpórkę $K$, druga przez podpórkę $L$. Na prawo od $E$ zatem działać będzie ta składowa siły $S$, która przypada na podpórkę $L$. Stąd wnioskujemy, że siła tnąca w przekroju $E$ równa się wspomnianej składowej w $L$, ma tylko znak odwrotny. Co się zaś tyczy samej wartości siły w $L$, zmieniającej się zależnie od położenia siły $S$ na beleczce $KL$, to znajdziemy ją przy pomocy $L.W$-wej dla odporu w $L$ beleczki $KL$. Będzie to prosta $k_v \lambda_v'$, wykreślona na rys.129.IV. Zatem mamy już całkowitą $L. W$-wą dla siły tnącej w przekroju $E$, mianowicie: $\alpha_v \beta_v k_v \lambda'_v \gamma'_v$; wszystkie rzędne tej linji są skierowane ku górze; sposób wykreślenia tej $L.W$-wej jest z powyższego zupełnie wyraźny.

171. Wykreślimy teraz $L. W$-wą MOMENTU GNĄCEGO w przekroju $D$ w przypadku OBCIĄŻENIA POŚREDNIEGO.

Po tych rozważaniach, które poprzednio przytoczyliśmy, zrozumiałem będzie, że jeśli siła $S$ przesuwa się od podpory $A$ na prawo aż do węzła $H$ /rys.129/, $L. W$-wa momentu gnącego będzie jednakową, czy mamy obciążenie bezpośrednie czy też pośrednie. Toż samo będzie i wówczas, kiedy siła $S$ będzie się przenosić od węzła $J$ dalej na prawo aż do końca $C$. Zatem możemy dla tych części belki głównej: $AH$ i $JC$ wykreślić $L. W$-wą dla momentu gnącego w przekroju $D$, sposobem, podanym w § 165. Na rys.129.V zostało to wykonane; niezaprzeczonemi częściami $L. W$-wej będą proste $\alpha_5 x'_5$ i $i'_5 \gamma'_5$. Zachodzi teraz pytanie, czy prosta, łącząca punkty $x'_5$ i $i'_5$, będzie brakującą częścią $L.W$ -wej na części $HJ$ . Co do słuszności tego przypuszczenia przekonamy się, rozumując tak: gdyby siła $S$ , będąc między $H$ i $D$ , działała na belkę $ABC$ bezpośrednio, wówczas moment gnący w $D$ byłby określony rzędną $ab$ /rys.129.V/. Ponieważ w rzeczywistości siła $S$ działa na beleczkę $HJ$ , więc na belkę główną działanie siły $S$ przejawia się jej siłą składową przez podpórkę $H$ . Zatem moment gnący w przekroju $D$ znajdziemy jako sumę algebraiczną momentów statycznych: odporu $A$ i siła składowej w $H$ . Moment statyczny odporu $A$ względem $D$ kiedy siła znajduje się w odległości $x$ od $A$ znajdziemy, jako rzędną $ab$ prostej $a_5 b'_5$ ; znak tego momentu dodatni. Siła składowa w $H$ daje moment statyczny względem $D$ ze znakiem ujemnym; wartość tego momentu znajdziemy wykreślając na pomocniczym rysunku V^a^ $L.W$ -wą momentu gnącego w punkcie $D$ dla beleczki $HJ$ . Moment statyczny siły składowej w $H$ względem $D$ otrzymamy jako rzędną $cd$ na rys.V^a^. Zatem suma algebraicz na momentów wspomnianych $= ab - dc$ ; jeśli odłożymy odcinek $ae = cd$ , otrzymamy, że szukany moment gnący, który się równa wspomnianej sumie momentów $= ab - dc = ab - ae = eb$. Przy przesuwaniu się siły $S$ wzdłuż beleczki $HJ$ otrzymamy szereg punktów analogicznych do $e$ . Punkty te, jak łatwo wnioskujemy ze sposobu otrzymywania ich, znajdują się na prostej $x_5' i_5'$ .

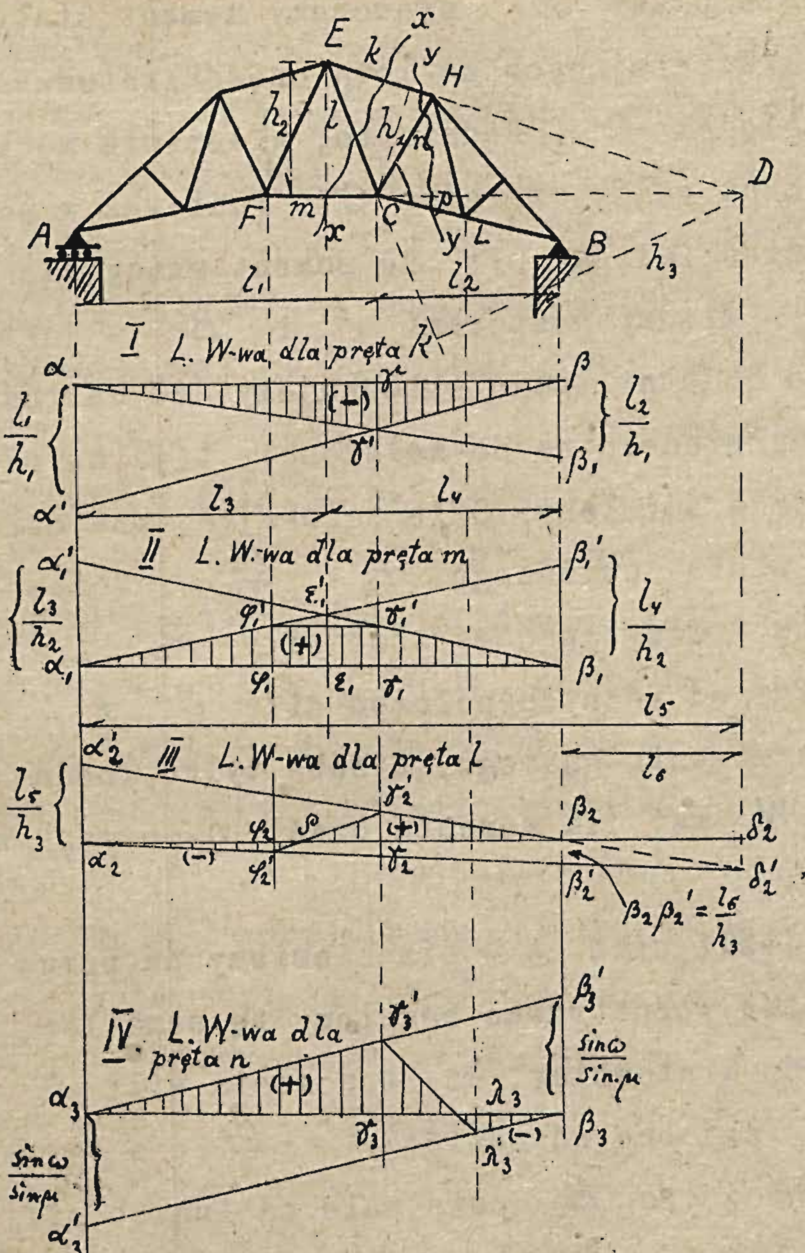
Zatem poszukiwana $L.W$-wa otrzymuje kształt linji łamanej $\alpha_5 x_5' i_5' \beta_5 \gamma_5'$ z osią $\alpha_5 \gamma_5$ . Rzędne nad osią wskazują na wartości dodatnie, zaś pod osią - na wartości ujemne.

172. Aby zakończyć z belką, dotychczas rozpatrywaną, znajdźmy jeszcze kształt $L.W$-wej dla momentu gnącego w przekroju $E$ , obranym na zwieszającej się części $BC$ . Najprostsza będzie sprawa, jeśli znajdziemy moment statyczny sił, leżących na prawo od przekroju $E$ , wówczas zmieniając tylko znak otrzymamy moment gnący w zwykłem rozumieniu względem przekroju $E$ .
W § 166 już znaleźliśmy odpowiednią $L.W$-wą i na rys.129.VI tę budowę powtarzamy. Prosta $\varepsilon_6 \gamma_6'$ byłaby $L.W$-wą dla momentu gnącego w przypadku

działania siły $S$ na belkę bezpośrednio. Ponieważ w danym razie mamy obciążenie pośrednie, przeto wykreślona $L.W$-wa będzie miała wartość tylko dla części belki od $C$ do węzła $L$, mianowicie część $\lambda'_6 \gamma'_6$. Dla części belki między węzłami $K$ i $L$ szukana $L.W$-wa przebiegnie inaczej. Niech siła $S$ znajdzie się w węźle $L$, wtedy działanie jej na belkę główną przeniesie się przez podpórkę w całości i moment gnący określimy z wartości rzędnej $\lambda_6 \lambda'_6$ jak dla obciążenia bezpośredniego. W miarę przesuwania się siły $S$ od $L$ do $K$ w węźle $L$ będziemy otrzymywali coraz to mniejszą składową, to znaczy, że rzędne szukanej $L.W$-wej będą stopniowo maleć; wreszcie, kiedy siła $S$ znajdzie się w węźle $K$, w $L$ nie otrzymamy już żadnej składowej, czyli, że moment tej składowej względem $E$ będzie równy zeru. Stąd wnioskujemy, że $L.W$-wa dla momentu gnącego względem $E$ na części belki $KL$ w węźle $K$ ma rzędną = 0, zatem że przejdzie przez punkt $\kappa_6$ i przyjmie kształt prostej $\kappa_6 \lambda'_6$. Że na tym odcinku $L.W$-wa będzie prostą, tego już nie dowodzimy, gdyż poprzednio już parę razy podobną sprawę omówiono dość szczegółowo. Zatem szukana $L.W$-wa dla całej belki $ABC$ będzie: $\alpha_6\,\beta_6\,k_6\,\lambda_6'\,\gamma_6'$ względem osi $\alpha_6\,\gamma_6$. Rzędne są ujemne.

173. Rozpatrzymy teraz przykład $L.W$-wej, zbudowanej do wyznaczenia siły, działającej w obranym PRĘCIE KRATOWNICY. Przypuśćmy, że zechcemy zbadać działanie, które wywiera na pręt $k$ siła $S = 1t.$, przy przesuwaniu się od podpory $B$ ku podporze $A$ lub odwrotnie /rys.130/. Badanie oprzemy na metodzie Rittera, opisanej w § 128 i stosowanej już w sprawie pokrewnej w §§ od 142 do 147 wł. Aby znaleźć siłę w pręcie $k$ górnego pasa /oznaczmy tę siłę przez $P_k$ /, przykładamy siłę ruchomą $S$ = 1 tonnie z lewej strony pręta $k$ i przecinamy kratownicę wzdłuż $xx$. Piszemy równanie momentów dla lewej części kratownicy względem punktu $C$, czasowo przyjmując, że pręt $k$ jest rozciągany: $P_k \cdot h_1 + M_c = 0$

Stąd $P_k = -\dfrac{M_c}{h_1}$


E
x
k
y
H
h₂
l
h₁
n
D
p
F
m
x
C
y
L
A
B
h₃
l₁
l₂
k
I L. W-wa dla pręta k
α
β
γ
(−)
γ'
l₁/h₁
l₂/h₁
β₁
α'
l₃
l₄
II L. W-wa dla pręta m
α₁'
β₁'
ε₁'
φ₁'
γ₁'
l₃/h₂
l₄/h₂
(+)
α₁
β₁
φ₁
ε₁
γ₁
l₅
α₂'
III L. W-wa dla pręta l
l₆
l₅/h₃
γ₂'
β₂
φ₂
ρ
(+)
δ₂
α₂
(−)
φ₂'
γ₂
β₂'
δ₂'
β₂β₂' = l₆/h₃
β₃'
γ₃'
IV. L. W-wa dla pręta n
sin ω / sin μ
(+)
λ₃
α₃
β₃
γ₃
λ₃'
(−)
sin ω / sin μ
α₃'

RYS. 130.

gdzie przez $M_c$ oznaczamy moment statyczny sił działających na lewą część kratownicy względem $C$. Będzie to, właściwie mówiąc, moment gnący względem $C$. Ponieważ w § 164 dowiedzieliśmy się, że moment gnący dla belki - między podporami $A$ i $B$ - jest zawsze dodatni, stąd wnioskujemy, że wartość $P_k$ będzie odwrotna do założonej, t.j. że pręt $k$ będzie ściskany. Siłę ściskającą znajdziemy ze wzoru powyższego: $P_k = -\frac{M_c}{h_1}$. Możemy więc łatwo odczytywać wartość siły $P_k$, w zależności od różnych położeń siły $S$ z $L.W$-wej dla momentu gnącego, trzeba tylko rzędną $L.W$-wej dla momentu brać $h_1$ razy mniejszą.

Jeśli siłę $S$ przeniesiemy na prawo od $C$ i znów rozpatrywać będziemy tę samą lewą część kratownicy, do oznaczenia siły $P_k$ otrzymamy podobne równanie: $P_k = -\frac{M_c}{h_1}$ z tą tylko różnicą, że $M_c$ powstanie od innych sił. Zatem będziemy mogli wykreślić $L.W$-wą dla siły $P_k$, podobnie jak $L.W$-wą dla momentu gnącego, zmieniając tylko odpowiednio wartości rzędnych na linjach $A$ i $B$.

Następnie, ponieważ siła $P_k$ będzie ściskała pręt, zatem w celu pewnego zaznaczenia, że to są siły ściskające, wykreślamy $L.W$-wą POD osią $\alpha\beta$ /rys.130.I/. Samą budowę $L.W$-wej uskuteczniamy w ten sposób na linji podpory że odkładamy w dół odcinek $\alpha\alpha'$ równy $\frac{l_1}{h_1}$, prowadzimy prostą $\alpha'\beta$; na linji podpory $B$ odkładamy w dół odcinek $\beta\beta'$ równy $\frac{l_2}{h_1}$ i łączący punkt $\beta'$ z $\alpha$ /przy budowie $L.W$-wej dla mom. gnącego odkładaliśmy odcinki $l_1$ i $l_2$ /; otrzymujemy zatem $L.W$-wą dla siły ściskającej pręt $k$ : $\alpha\gamma'\beta$ z osią $\alpha\beta$. Prostą $\alpha\beta'$ możemy inaczej wykreślić, a mianowicie kiedy prosta $\alpha'\beta$ jest już poprowadzona, odnajdujemy punkt $\gamma'$ przecięcia się tej prostej z linją pionową, przesuniętą przez węzeł $C$. Przez punkt $\gamma'$ prowadzimy odrazu prostą $\alpha\gamma'$ i tem samem będziemy mieli wykreśloną $L.W$-wą-$\alpha\gamma'\beta$.

174. Wykreślmy teraz $L.W$-wą DLA SIŁY W PRĘCIE $m$ DOLNEGO PASA. Zasadniczo postępowanie będzie podobne do poprzedniego. Przykładamy siłę $S$ do prawej, czy do lewej części kratow-

nicy i rozpatrujemy równowagę lewej części kratownicy, pisząc równanie momentów wzgl. punktu $E$ ; równanie to będzie:

$$-P_m h_2 + M_e = 0$$

skąd

$$P_m = \frac{M_e}{h_2}$$

Ponieważ moment gnący względem $E$ /patrz § 164/ jest wielkością dodatnią, zatem $P_m$ będzie siłą rozciągającą pręt. Aby wykreślić $L.W$ -wą dla siły $P_m$ postępujemy tak /rys.130.II/: na linji podpory $A$ odkładamy odcinek $\alpha_1 \alpha_1' = l_3/h_2$ i na linji podpory $B$ odkładamy odcinek $\beta_1 \beta_1' = \frac{l_1}{h_2}$ ; prowadzimy proste $\alpha_1 \beta_1'$ i $\alpha_1' \beta_1$ . W przecięciu otrzymuje się punkt $\varepsilon_1'$ . $L.W$ -wa jest wykreślona: $\alpha_1 \varepsilon_1' \beta_1$ . Taki byłby kształt $L.W$ -wej, gdyby siła $P_m$ mogła być przykładaną do punktów pasa górnego, t.j. do tego pasa, do którego należy punkt E . Zwykle jednak do kratownicy, wskazanej na rys.130, siła będzie przykładana do punktów, związanych z dolnym pasem. W naszym przykładzie punkt , względem którego szukamy momentów gnących, jest jak gdyby w przęśle $FC$ dolnego pasa; zatem siła $\omega$ przy przesuwaniu jej wzdłuż przęsła $FC$ działa na całość kratownicy - przez węzły $F$ i $C$, więc pośrednio. Należy wobec tego budowę $L$-$W$-wej dokończyć tak, jak mieliśmy to dla obciążenia pośredniego /p.§ 171/. Zatem przez węzły $F$ i $C$ prowadzimy proste $F\varphi_1$ i $C\gamma_1$; proste te przecinają wykreśloną już $L$-$W$p$I$.-wą w punktach $\varphi_1'$ i $\gamma_1'$; łączymy te punkty prostą i wtedy ostateczny kształt $L.W$-wej dla pręta $m$ pasa dolnego będzie taki: $\alpha_1\varphi_1'\gamma_1'\beta_1$ z osią $\alpha_1\beta_1$. Wszystkie rzędne są, jak to się przekonaliśmy wyżej dodatnie, co na rys.130.II jest uwidocznione przez umieszczenie całej $L.W$-wej ponad osią.

## 175. LINJA WPŁYWOWA DLA SIŁY W PRĘCIE WEWNĘTRZNYM $l$.

Przedewszystkiem przypomnijmy sobie /p. § 144/, jaki wpływ na pręt wewnętrzny, w ogólnym zarysie, wywiera siła, przyłożona bądź z prawej, bądź z lewej strony przekroju

$xx$ , przecinającego badany pręt. Ponieważ "punkt momentów" $D$ znajduje się poza linjami podpór, więc siła, przyłożona do prawej części kratownicy /względem $xx$ /, będzie pręt $l$ rozciągać, zaś przyłożona do lewej części kratownicy, będzie go ściskać. Mając to w pamięci, przystępujemy do wykreślenia $L.W$-wej w sposób podobny do poprzedniego. Aby znaleźć wartość siły w pręcie $l$ , oznaczamy ją przez $P_l$ , ułożymy równanie momentów względem punktu $D$ . Przypuśćmy, na początek, że siła $S$ = 1 tonnie działa na prawą część kratownicy. Wtedy na lewą część działa tylko odpór $A$ . Zatem równanie momentów dla części lewej będzie:

$$A . l_5 - P_l . h_3 = 0$$

stąd

$$P_l = A \frac{l_5}{h_3} .$$

Jak z tego równania wynika, wartość siły $P_l$ jest dodatnia; wartość tę możemy znaleźć z $L. W$-wej dla odporu $A$ , jeżeli każdą rzędną tej linji pomnożymy przez $\frac{l_5}{h_3}$ . Lepiej jednak odrazu otrzymać te rzędne, prowadząc $L.W$-wą tak, aby odcinek $\alpha_2\alpha'_2$ /rys. 130 III/ był równy: $1 \cdot \frac{l_5}{h_3}$. Otrzymujemy prostą $\beta_2\alpha'_2$, której prawa część mieć będzie dla nas wartość. Prostą tę prowadzimy PONAD osią z tego względu, że w tych warunkach siła $P_l$ rozciąga pręt.

Przenieśmy siłę $S$ na lewo od $xx$. Wówczas siła $P_l$ będzie siłą ŚCISKAJĄCĄ pręt. Wartość tej siły znajdziemy z równania momentów wzgl. $D$.

Równanie to dla PRAWEJ części kratownicy, na którą działa tylko odpór $B$ będzie:

$$B l_6 + P_l h_3 = 0$$

stąd

$$P_l = -B \frac{l_6}{h_3},$$

Z równania tego wnioskujemy, że siła $S$, przyłożona z lewej strony od $xx$ - pręt $P_l$ ściska. Wartość siły $P_l$ otrzymamy z wartości odpora $B$, mnożąc każdorazową jego wartość przez $\frac{l_6}{h_3}$. Aby odrazu otrzymać potrzebną wartość siły $P_l$, - na linji podpory

$B$ odkładamy odcinek $\beta_2 \beta_2' = 1 . \frac{l_6}{h_3}$ w dół i prowadzimy prostą $\alpha_2 \beta_2'$. Rzędne tej prostej /oczywiście są one ważne tylko dla lewej części belki/ wskażą nam odrazu wartość $R_l$.

Jeżeli siła $S$ przesuwając się od $A$ na prawo przejdzie przez punkt $F$ i wówczas jedna składowa siły $S$ będzie przyłożona w $F$, a druga w $C$. W ten sposób siła $S$ będzie CZĘŚCIOWO w pręcie $l$ wywoływać siłę rozciągającą, częściowo siłę ściskającą.

Zatem $L. W$-wa dolna ma wartość dla nas tylko na długości $\alpha_2 \varphi_2'$; $L. W$-wa górna - na długości $\beta_2 \gamma_2'$. Między temi dwoma końcami - na długości $\varphi_2' \gamma_2'$ - $L. W$-wa będzie szła wzdłuż prostej $\varphi_2' \gamma_2'$, co powinno być zrozumiałe na zasadzie tego, co już mówiliśmy w podobnych przypadkach. Stąd wynika, że $L. W$-wą dla pręta wewnętrznego jest linja łamana $\alpha_2 \varphi_2' \gamma_2' \beta_2$ z osią $\alpha_2 \beta_2$.

Dodać tu można, co będzie pożyteczne w znaczeniu ułatwienia budowy $L. W$-wej, że prosta $\alpha_2 \beta_2'$ i $\alpha_2' \beta_2$ przecinają się w punkcie $\delta_2'$, znajdującym się na prostej przechodzącej przez $D$ równolegle do linji podpór $A$ i $B$ . Że tak jest łatwo jest przekonać się z podobieństwa trójkątów $\alpha_2 \alpha_2' \delta_2'$ i $\beta_2 \beta_2' \delta_2'$ .

Punkt $\varrho$ , w którym prosta $\varphi_2' \gamma_2'$ przecina oś $\alpha_2 \beta_2$ , wskazuje, na jakiej części kratownica ma być obciążona, aby pręt $l$ był tylko rozciągany, albo tylko ściskany. Nie jest, oczywiście, wykluczone, w przypadku, kiedy np. szukamy sił ściskających pręt $l$ , że pewne obciążenia mogą przejść na prawo od $\varrho$ ; będzie to wtedy, kiedy NIEWIELKIE siły znajdują się na prawym końcu poruszającego się układu sił, natomiast zaraz za temi małemi siłami mamy duże siły, które przypadać wtedy winny wyłącznie na część ujemnych rzędnych, t.j. na lewo od $\varrho$ i im większe będą siły, tem bliżej węzła $F$ powinny się znaleźć. Gdybyśmy mieli znaleźć największą siłę rozciągającą pręt $l$ - należałoby postępować z rozkładem sił odwrotnie.

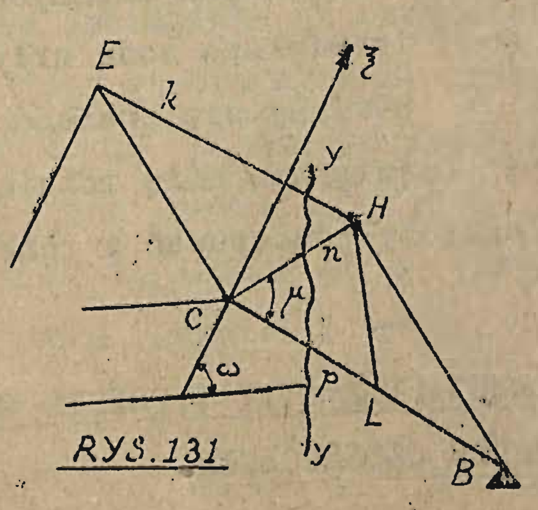
## 176. LINJA WPŁYWOWA DLA SIŁY W PRĘCIE WEWNĘTRZNYM W PRZYPADKU SZCZEGÓLNYM.

Takim właśnie prętem będzie pręt $n$ /rys

130/. Pragnąc, bowiem, znaleźć siłę $P_n$ , działającą w pręcie, przecinamy kratownicę wzdłuż $yy$ . Do wyznaczenia siły $P_n$ należy wziąć moment sił, przyłożonych do lewej /lub prawej/ części kratownicy, względem punktu przecięcia się prętów $k$ i $p$ . Otóż niech te pręty będą RÓWNOLEGŁE do siebie. Punktu przecięcia, w praktycznem rozumieniu, nie możemy wtedy wskazać, a więc równanie momentów nie znajdzie tu zastosowania.

Zwracamy się do RÓWNANIA RZUTÓW SIŁ na oś PROSTOPADŁĄ do prętów $\underline{k}$ i $\underline{p}$ /porówn. § 129/.

Obieramy więc oś prostopadłą do $k$ i $p$ i przyjmujemy kierunek jej do góry, jako dodatni /rys.131/. Niech pręt $n$ tworzy z prętem $p$ kąt $=\mu$ zaś oś $\xi$ niech będzie pochylona do poziomu pod kątem $\omega$ . Przypuśćmy, że



RYS.131

siła $S$ = 1 tonnie działa na prawą część kratownicy względem $yy$. Wówczas na lewą część kratownicy działają: odpór $A$ i siły $P_k$, $P_n$ i $P_p$ /przyjmujemy chwilowo, że siły te są skierowane od lewej części kratownicy. Równanie rzutów na oś $\xi$ będzie

$$P_n \sin\mu + A \sin\omega = 0$$

stąd

$$P_n = -A \frac{\sin\omega}{\sin\mu}$$

Z tego równania widzimy, że pręt $n$ pod działaniem siły $S$ z prawej strony jest ściskany. Zatem $L. W$-wą dla tego obciążenia wykreślimy POD osią $\alpha_3\ \beta_3$ /rys.130.IV/.

Samą $L. W$-wą wykreślimy w ten sposób: na linji podpory $A$ odkładamy odcinek $\alpha_3\alpha_3' = -1.\frac{\sin\omega}{\sin\mu}$ i punkt $\alpha_3'$ łączymy z $\beta_3$. Prawa część tej prostej ma wartość jako $L. W$-wa dla siły w pręcie $n$, kiedy siła $S$ znajduje się z prawej strony przekroju $yy$.

Przenieśmy siłę $S$ na lewą stronę kratownicy i rozważamy równowagę prawej części kratownicy; na tę część działa tylko odpór $B$ i siły w prętach $P_k$, $P_n$ i $P_p$ /przyjmujemy chwilowo, że siły $P_k\ P_n\ P_p$ są skierowane KU prawej części kratownicy. Równanie rzutów otrzymamy:

$$P_n \sin\mu + B \sin\omega = 0$$

stąd

$$P_n = -B \frac{\sin\omega}{\sin\mu}$$

Założyliśmy, że $P_n$ jest skierowane KU węzłowi $K$; ponieważ równanie ostatnie daje nam wskazówkę, że $P_n$ ma kierunek odwrotny do założonego, stąd wnioskujemy, że siła $S$ przyłożona z lewej strony, rozciąga pręt. Zatem ta część $L. W$-wej, którą mamy wykreślić, winna być PONAD osią $\alpha_3 \beta_3$.

Samą $L. W$-wą wykreślamy w sposób taki: na linji podpory $B$ odkładamy odcinek $\beta_3\beta_3' = 1. \frac{\sin\omega}{\sin\mu}$; punkt $\beta_3'$ łączymy z $\alpha_3$. Lewa część tej prostej ma wartość jako $L. W$-wa dla pręta $n$ kiedy siła $S$ działa na lewą część kratownicy względem przekroju $yy$. Prosta $\alpha_3\beta_3'$ ma wartość jako $L. W$-wa tak długo, dopóki siła $S$ nie przekroczy - przy posuwaniu się na lewo - węzła $C$. Po przejściu przez ten węzeł siła $S$ rozkłada się na dwie siły, z nich jedna działać będzie w węźle $L$, druga w węźle $C$. Charakter działania tych sił jest różny. Na zasadzie parokrotnie już omawianych podobnych wyników powiemy, że $L.W$-wą między węzłami $C$ i $L$ będzie prosta, łącząca punkty $\gamma_3'$ i $\lambda_3'$.

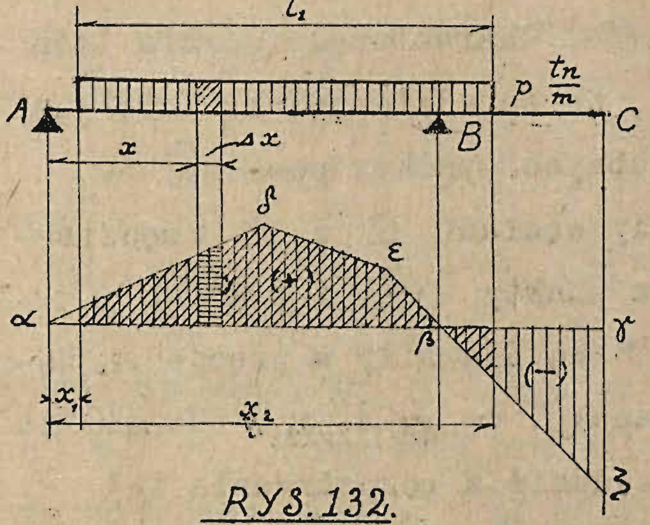
Zatem $L.W$-wą dla siły w pręcie $n$ będzie linja łamana: $\alpha_3\gamma_3'\lambda_3'\beta_3$. Uwagi, które możemy wyprowadzić z rozpatrzenia tej $L.W$-wej są te same, co i przy poprzednich podobnych $L.W$-wych.

Zwróćmy uwagę, że proste $\alpha_3\beta_3'$ i $\alpha_3'\beta_3$ są równoległe, gdyż odcinki $\alpha_3\alpha_3'$ i $\beta_3\beta_3'$ są sobie równe.

177. Linja wpływowa w przypadku OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO I JEDNOSTAJNEGO.

W § 157, 158 i 159 wskazany był sposób korzystania z $L.W$-wej w przypadku, kiedy układ ruchomy składa się z sił skupionych.

Biorąc pod uwagę treść tych paragrafów, rozszerzymy łatwo zastosowanie $L.W$-wej na przypadek obciążenia ciągłego. Na razie weźmy obciążenie JEDNOSTAJNE.




RYS.132.

Niech będzie dana belka $ABC$, ustawiona na dwóch podporach $A, B$, /rys.132/. Przypuśćmy, że mamy już wykreśloną $L.\ W$-wą $\alpha\delta\varepsilon\beta\zeta$ względem osi $\alpha\gamma$ dla tej czy innej wielkości $\mathfrak{X}$. Rzędne $L.\ W$-wej ponad osią są dodatnie, zaś pod osią - są ujemne.

Dajmy na to, że układ ruchomy na długości $l_1$ składa się z obciążenia jednostajnego, wynoszącego $p\ {}^{kg}/_{m}$ albo $p\ {}^{tonn}/_{m}$.

Weźmy element tego obciążenia na długości $\Delta x$. Wartość obciążenia będzie $=p\Delta x$. Część wielkości szukanej $\mathfrak{X}$ /oznaczmy ją $\Delta\mathfrak{X}$ / z wykreślonej $L.\ W$-wej znajdziemy, mnożąc odpowiednią rzędną $y$ $L.\ W$-wej przez obciążenie $=p\,\Delta x$. Wielkość ta $=\Delta\mathfrak{X}=p\Delta x.y=$

$$=p.y.\Delta x.$$

Zróbmy to samo ze wszystkiemi częściami obciążenia, przypadającemi na podobne części $\Delta x$ .

Wówczas wartość całej wielkości $\mathfrak{X} = \sum_{x_1}^{x_2} \Delta \mathfrak{X}$ otrzymamy:

$$\mathfrak{X} = \sum_{x_1}^{x_2} p \cdot y \cdot \Delta x = p \sum_{x_1}^{x_2} y \cdot \Delta x .$$

/ponieważ z założenia $p = const.$ /.

Znak $\sum$ oznaczać winien sumę algebraiczną. Z rysunku widzimy, że iloczyn $y \cdot \Delta x$ przedstawia wartość pola o wysokości $y$ i szerokości $\Delta x$ .

Podzielmy długość $l$, na bardzo małe cząstki $\Delta x$ , wówczas

$\sum_{x_1}^{x_2} y \cdot \Delta x$ przedstawi się

jako pole, zawarte między osią $\alpha \beta \gamma$ i $L.\ W$-wą $\alpha \delta \varepsilon \beta \xi$ , poczynając od wartości $x = x_1$ do $x = x_2$ .

Stąd wnioskujemy: aby znaleźć wartość wielkości $\mathfrak{X}$ należy obliczyć pole, zawarte między osią i $L.\ W$-wą i znajdujące się pod obciążoną częścią belki, a następnie wartość tego pola pomnożyć przez obciążenie jednostkowe $p$.

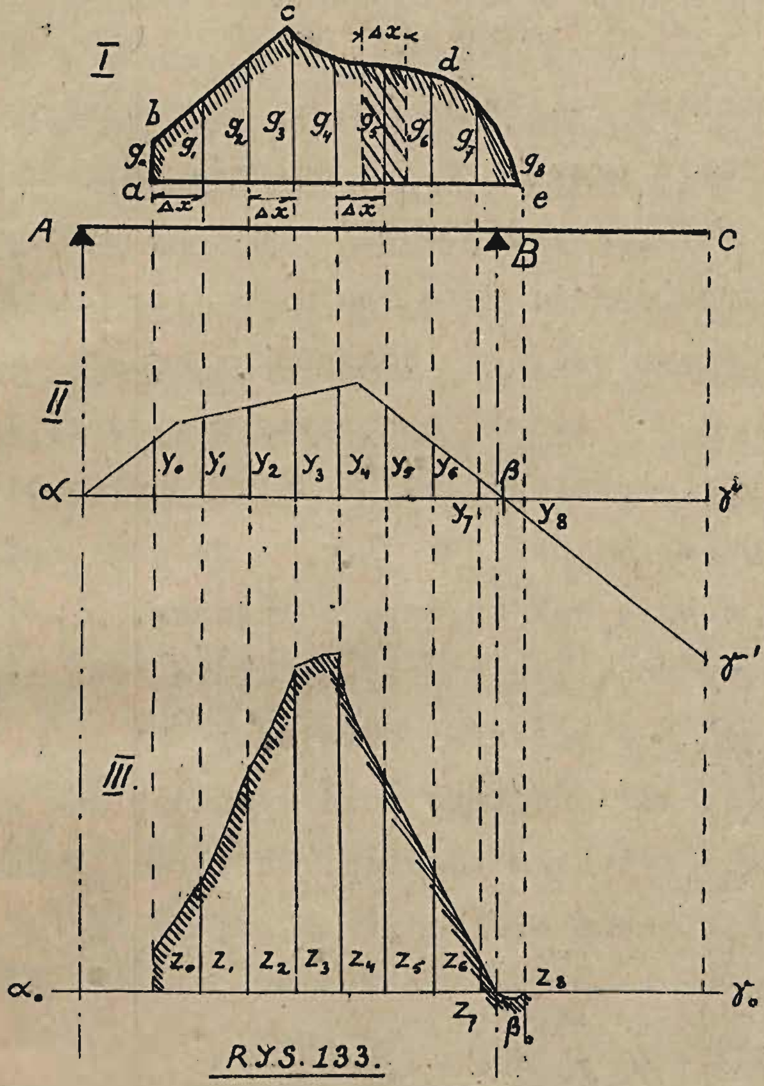
W ten sposób zagadnienie dało się prosto załatwić.

## 178. PRZYPADEK OBCIĄŻENIA NIEJEDNOSTAJNEGO.

Niech będzie dane ruchome obciążenie belki, którego charakter jest przedstawiony na rys. 133. I krzywą $a, b, c, d, e$. Poszczególne rzędne $g_0, g_1, g_2 \ldots g_s$ tej krzywej przedstawiają w obranej skali obciążenie jednostkowe w odpowiednich punktach. Odległości między wybranemi rzędnemi niech będą wszystkie jednakowe i = $= \Delta x$.

Przypuśćmy dalej, że mamy już zbudowaną $L. W$-wą dla pewnej wielkości $X$ /rys. 133. II./. Ustawmy zadane obciążenie, wykreślone na pasku papieru, nad wspomnianą $L. W$-wą. Wówczas będziemy mogli odczytać wartości rzędnych $L. W$-wej $y_0, y_1, y_2 \ldots y_s$, odpowiadających powyższym rzędnym krzywej obciążeń $g_0, g_1, \ldots g_s$.

Rozpatrzmy którąkolwiek część obciążenia: dajmy na to tę, która jest zakreskowana. Możemy przyjąć, że obciążenie to na długości $\Delta x$ /przy dostatecznie małem $\Delta x$ / jest jednostajne i równe $g_5 \Delta x$ / $kg$ lub $t$. /. Korzystając




RYS. 133.

z wykresu L. W -wej, która w miejscu obciążenia $g_5 \Delta x$ ma rzędną $= y_5$, możemy wyznaczyć odpowiednią część $\Delta x$ tej wielkości, dla której mamy zbudowaną $L.W$-wą. Część ta

$\Delta\mathcal{X} = g_5\,\Delta x \cdot y_5$ albo

$$\Delta\mathcal{X} = g_5 \cdot y_5 \cdot \Delta x$$

Wykonajmy działanie $g_5 \cdot y_5$, oznaczmy ten iloczyn przez $z_5$ i odłóżmy wartość $z_5$ od osi $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ /rys.133.III/. To samo zróbmy i dla innych części pola obciążeń $abcde$; otrzymamy wówczas szereg iloczynów: $g_0y_0$, $g_1y_1$, $g_2y_2$ ... ..... $g_8y_8$. Jeżeli oznaczymy powyższe iloczyny odpowiednio przez $z_0, z_1, z_2 \ldots z_8$ i odcinki te odłożymy od osi $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ do góry lub na dół, podobnie jak to mamy z rzędnemi $L.W$-wej, otrzymamy nową linję krzywą, która wraz z osią $\alpha_0\beta_0\gamma_0$ i rzędnemi skrajnemi $z_0$ i $z_8$ tworzy pole; wartość tego pola wyznaczy nam wielkość $\mathcal{X}$. Wynika to stąd: Obliczamy jedną jakąkolwiek część wielkości $\mathcal{X}$, naprz. $\Delta\mathcal{X}$ z wzoru:

$$\Delta\mathcal{X} = g_i\, y_i\, \Delta x = z_i\, \Delta x$$

obliczmy w podobny sposób wszystkie części i zesumujmy. Wówczas otrzymamy:

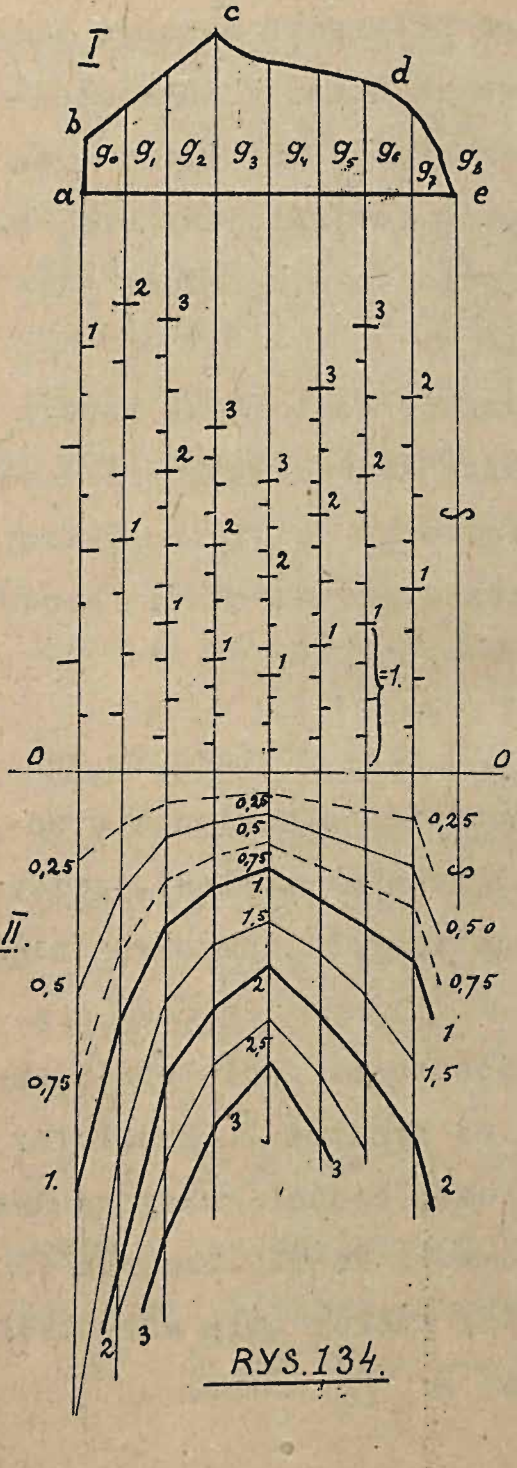
$$\mathcal{X} = \sum_{x_1}^{x_2} \Delta\mathcal{X} = \sum_{z_0}^{z_8} z_i\, \Delta x.$$

W sposób powyżej opisany znajdziemy wielkości $x$ dla jednego położenia naszego układu ruchomego. Przesuwając układ w inne miejsce, znajdziemy nową wartość $x$ i t.d., aż wreszcie po szeregu prób zorjentujemy się, kiedy, t.j. przy jakiem położeniu układu i jaka będzie max. wartość $x$.

Łatwo jednak zrozumieć, że to jest robota żmudna, gdyż trzeba przy każdem stanowisku obciążenia wyznaczać rzędne $\underline{z}$ nowej linji krzywej i następnie wyznaczać wartość każdorazowo otrzymanego pola.

179. PEWNE UŁATWIENIE przy obliczaniu wartości $x$ można wprowadzić, stosując mierzenie rzędnych $L.W$-wej różnemi skalami, zależnemi od obciążeń jednostkowych; o tem właśnie będzie mowa niżej.

Niech będzie dane poprzednie pole obciążeń $abcde$ powtórzone na rys.134.I. Podzielmy to pole na PARZYSTĄ liczbę części /mamy na uwadze - późniejsze stosowanie wzoru Simpsona/, oraz tak, aby szerokości pasków były wszystkie jednakowo równe, naprz. $\underline{b}$.



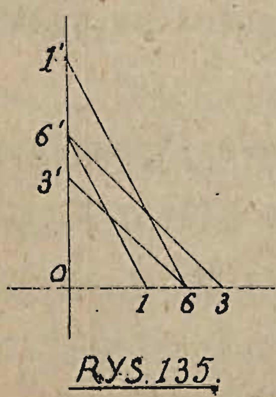

RYS. 134.

Przystąpmy teraz do wykonania skal dla różnych obciążeń jednostkowych. Przyjmijmy jedno z tych obciążeń, np. $g_6$ jako zasadnicze. Wykreślmy dla niego skalę na prostej pionowej, przechodzącej przez rzędną $g_6$ pola obciążeń, licząc początek skali od prostej 00: jedną skalę wykreślimy dla dodatnich wartości - ponad osią, drugą dla ujemnych - pod osią. Obieramy odcinek $h_6$ , jako jednostkę, obciążenie = jednostce długości. Nazwiemy ten odcinek zasadniczym odcinkiem jednostkowym.

Do wykreślenia skali dla innego obciążenia jednostkowego przyjmiemy taki odcinek $h_i$ , jako jednostkę, aby jego długość i długość zasadniczego odcinka jednostkowego były odwrotnie proporcjonalne do obciążeń jednostkowych w tych miejscach, t.j. aby $h_i : h_6 = g_6 : g_i$ , stąd

$$h_i = h_6 \frac{g_6}{g_i}$$

Najłatwiej znaleźć długość odcinka $h_i$ drogą wykreślną w ten sposób: na osi poziomej odkładamy odcinek $0-6$ /rys.135/, przedstawiający "zasadnicze" obciążenie jednostkowe=$g_6$. Na osi pionowej odkładamy odcinek $0-6'$ równy długości odcinka "zasadniczego" $= h_6 = 1$ . Przypuśćmy, że chcemy znaleźć długość odcinka, wyrażającego jednostkę obciążenia dla prostej, gdzie




RYS.135.

------

rzędna obciążeń jest $g_1$. W tym celu na osi poziomej odkładamy odcinek $0-1$, wyznaczający obciążenie jednostkowe $g$; łączymy punkt $1$ z $6'$ prostą $1-6'$ i z punktu $6$ prowadzimy prostą $6-1'$ równoległą do $1-6'$. Wówczas odcinek $0-1'$ wyznaczy nam długość odcinka, który przyjmiemy jako jednostkę dla tej skali. Dla miejsca, gdzie rzędna obciążeń jest np. $g_3$, odkładamy odcinek $0-3$ równy $g_3$, przez punkt $3$ i $6'$ prowadzimy prostą $3-6'$, wreszcie przez punkt $6$ prowadzimy prostą $6-3'$, równoległą do $3-6'$. Otrzymujemy punkt $3'$; odcinek $0-3'$ wyznaczy nam właściwą długość odcinka jednostkowego dla nowej skali. Że powyższa konstrukcja daje właściwy wynik, łatwo zauważymy z podobieństwa trójkątów. W opisany sposób łatwo wyznaczymy długości wszystkich odcinków jednostkowych.

Odłóżmy następnie długości poszczególnych odcinków jednostkowych na prostych, przeprowadzonych przez rzędne $g_0, g_1, g_2 \ldots\ldots g_8$ /rys.134/.

Jeżeli obecnie każdy odcinek podzielimy

na równe części: naprz. na połówki, ćwiartki, ósme części, albo lepiej wprost na dziesiąte części, otrzymamy skale dogodne do odczytywania wartości rzędnych $L.W$-wej.

Skale można pozostawić w tej postaci, jak to widzimy w górnej części ponad osią 00, albo też można punkty jednakowych podziałek połączyć linjami łamanemi, jak to jest pokazane na rys. pod osią, przez co otrzymuje się ułatwienie przy odczytywaniu wyników pomiaru.

Mając tak przygotowaną na papierze przezroczystym skalę, ustawiamy ją w dowolnem miejscu na $L.W$-wej w taki sposób, aby oś skali 00 znalazła się dokładnie na osi $L.W$-wej $\alpha\beta\gamma$.

Następnie odczytujemy wartości rzędnych $L.W$-wej według tej skali, jaka daną rzędną przykrywa. Otrzymamy szereg wartości $r_0, r_1, r_2, \ldots\ldots r_8$. Będą to rzędne pewnej krzywej, podobnej do krzywej, otrzymanej w § 178 na rys.133.III; rzędne tej krzywej odpowiadają teraz jednostajnemu obciążeniu jednostkowemu = $g_6$.

Że to twierdzenie jest słuszne, przekonamy się, rozumując w taki sposób:

Zgodnie z tem, co powiedzieliśmy w § 178 o postępowaniu w przypadku obciążenia niejednostajnego, należy do wyznaczenia wielkości $x$ obliczyć szereg iloczynów typu $g_i y_i$. W tych iloczynach zarówno $g_i$, jak $y_i$, są różne dla różnych miejsc pola obciążeń przy pewnem ustawieniu go względem $L.W$-wej.

Jeżeli zechcemy obciążenie jednostkowe $g_i$ zastąpić innem obciążeniem $n$ razy większem /lub mniejszem/, możemy otrzymać tę samą, co poprzednio, wartość iloczynu $g_i y_i$, jeśli przyjmiemy, że $y_i$ jest liczbowo $n$ razy mniejszem /większem/. Otóż otrzymanie $y_i$ $n$ razy mniejszem /większem/ uskuteczniamy odrazu, mierząc długość odcinka $y_i$ /jako rzędnej $L.W$-wej/ w skali, której jednostka będzie $n$ razy większa /mniejsza/ od jednostki, przyjętej do wykreślenia $L.W$-wej.

Stosowanie skali, zbudowanej na rys.134, właśnie daje takie wyniki dla $y_i$, które uprawniają nas do przyjęcia, że całe obciążenie jest, jakgdyby obciążeniem jednostajnem /w naszym przykładzie = $g_6$ /.

Jak wyżej objaśniono, można przyjąć, że

wielkości $r_0, r_1, r_2, \ldots r_8$ w przygotowanych skalach są to rzędne pewnej krzywej, odpowiadającej jednostajnemu obciążeniu $= g_6$. Możemy zastosować zatem wzór, jaki mieliśmy przy obciążeniu jednostajnem /§ 177/.

Należy więc obliczyć pole, zawarte między tą nową krzywą, jej osią i dwiema skrajnemi rzędnemi i następnie pole to pomnożyć przez $g_6$; otrzymamy wówczas wartość szukanej wielkości $x$ przy pewnem położeniu obciążenia względem belki.

Aby znaleźć wartości pola powyższego, możemy stosować wzór Simpsona, który tak się przedstawia:

Dzielimy pole na PARZYSTĄ liczbę pasków rzędnemi pionowemi i oznaczamy kolejne rzędne, poczynając od skrajnej, przez $r_0, r_1, r_2, \ldots r_8$; szerokość każdego paska /wzdłuż osi/ niech będzie wszędzie jednakowa i równa , wówczas wartość pola znajdziemy ze wzoru Simpsona:

$$\text{Pole} = \frac{\Delta x}{3}\left(r_0 + 4r_1 + 2r_2 + 4r_3 + 2r_4 + 4r_5 + 2r_6 + 4r_7 + r_8\right) =$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left[r_0 + 4(r_1 + r_3 + r_5 + r_7) + 2(r_2 + r_4 + r_6) + r_8\right].$$

Zaś wartość szukanej wielkości $\mathcal{X}$ otrzymamy:

$$\mathcal{X} = \frac{\Delta x}{3} \cdot g_6 \left[ r_0 + 4(r_1 + r_3 + r_5 + r_7) + 2(r_2 + r_4 + r_6) + r_8 \right]$$

Na tem sprawę obciążeń niejednostajnych w stosunku do $L.W$-wych i sprawę $L.W$-wych kończymy.

Przypuszczamy, że przykłady i objaśnienia, podane w niniejszym rozdziale, może pozornie zbyt drobiazgowe, winny ośmielić czytelnika do samodzielnych kroków, w razie potrzeby wyznaczenia $L.W$-wej i korzystania z niej, w przypadkach tu nie rozpatrzonych, a których jest wiele.

## R O Z D Z I A Ł IX.

## ŚCIANY OPOROWE.

180. PRZEDMIOT ROZDZIAŁU. Każdy materjał sypki, pozostawiony sam sobie, przybiera kształt pewnej, właściwej sobie powierzchni, która nie może tworzyć z poziomem kąta, mniejszego od t.zw. KĄTA ZESYPU $\varphi$ . Kąt ten jest