

2.11.1970
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 9 • ZESZYT 4



531
Pw³

WARSZAWA 1971

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

<p>N. J. CYGANOWA, Pewne problemy ewolucji różniczkowych zasad wariacyjnych mechaniki w XIX i XX wieku <i>Некоторые вопросы развития дифференциальных вариационных принципов в XIX–XX веках</i> <i>Certain problems of development of differential variational principles in the 19th and 20th century</i></p>	<p>453 479</p>
<p>J. KŁEPACZKO, Zmodyfikowany pręt Hopkinsona <i>Модифицированный стержень Гопкинсона</i> <i>The modified split Hopkinson pressure bar</i></p>	
<p>J. KRUSZEWSKI, Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych <i>Применение метода жестких конечных элементов к расчётам частот собственных колебаний судовых систем</i> <i>Application of the rigid finite elements method to calculation of natural vibration frequencies of ship structures</i></p>	<p>499</p>
<p>Z. HANDZEL, Hipoteza dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń <i>Гипотеза разрушения микрообъёма при действии переменных напряжений</i> <i>Hypothesis of decohesion of micro-volume under variable stress</i></p>	<p>517</p>
<p>B. WIENIASZ, Naprężenia zwilżające działające na pęcherzyk parowy w czasie wrzenia <i>Напряжения смачиваемости, действующие на пузырек пара во время кипения</i> <i>Wetting tensions acting on a vapor bubble in boiling process</i></p>	<p>529</p>
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	<p>541</p>

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 9 • Z E S Z Y T 4



W A R S Z A W A 1971
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW BIMBER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (594+106) egz. Arkuszy wydawn. 7,25. Arkuszy drukarskich 6,25. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 27.VII.1971 r. Druk ukończono w grudniu 1971 r. Zam. 1016/71 U-102 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

PEWNE PROBLEMY EWOLUCJI RÓŻNICZKOWYCH ZASAD WARIACYJNYCH MECHANIKI W XIX I XX WIEKU

N. J. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

Początek XIX wieku charakteryzował się w mechanice ponownym wzrostem zainteresowania problematyką różniczkowych zasad wariacyjnych. Sprzyjały temu zjawisku w zasadzie dwie okoliczności.

Po pierwsze, pod wpływem wymogów techniki rozszerzeniu uległo pojęcie więzów nałożonych na układ punktów materialnych. Poczęto rozważać nie tylko więzy dwustronne, stacjonarne i holonomiczne, ale również więzy jednostronne, niestacjonarne i nawet anholonomiczne.

To rozszerzenie pojęcia więzów wymagało też odpowiedniego uogólnienia systematu mechaniki analitycznej Lagrange'a, opracowanego w swoim czasie dla więzów dwustronnych i stacjonarnych, bazującego na zasadzie przemieszczeń wirtualnych wraz z zasadą D'Alemberta — ten zespół zasad będziemy dalej nazywali zasadą D'Alemberta–Lagrange'a.

W dziełach M. W. OSTROGRADZKIEGO i jego szkoły¹⁾ zostały wyczerpująco opracowane podstawy analitycznej teorii równowagi i ruchu układów mechanicznych, ograniczonych przez więzy o najogólniejszej postaci. Teoria ta została oparta o uogólnioną zasadę przemieszczeń wirtualnych i zasadę D'Alemberta.

Po drugie, rozwój fizyki doświadczalnej na przełomie XVIII i XIX wieku zaktualizował problemy matematycznego opracowania wyników obserwacji. Szerokie zastosowanie znalazła metoda najmniejszych kwadratów, stanowiąca nadzwyczaj skuteczne narzędzie matematycznej obróbki rezultatów eksperymentów. Cenny wkład w opracowanie tej metody wniósł C. F. GAUSS. Zasada najmniejszych kwadratów przywiodła GAUSSA w 1829 r. [26] do sformułowania nowej różniczkowej zasady wariacyjnej w mechanice, nazwanej przez niego zasadą najmniejszego przymusu. Zasada najmniejszego przymusu jest najogólniejszą zasadą mechaniki, słuszną zarówno dla układów holonomicznych, jak i dla układów anholonomicznych (liniowych i nielinowych). Nadzwyczaj wielka

¹⁾ Szczegółową analizę prac Ostrogradzkiego z dziedziny mechaniki analitycznej można znaleźć w następujących książkach: Гнеденко, Б. В., Погребыцкий, И. Б., *Михаил Васильевич Остроградский*, М., 1963; Геронимус, Я. Л., *Очерки о работах корифеев русской механики*, М., 1952; Григорьян, А. Т., *М. В. Остроградский*, М., 1961; Жуковский, Н. Е., *Ученые труды М. В. Остроградского по механике*, Сб. соч. т. VII, М-Л, 1950; Погребыцкий, И. Б., *О механике систем с идеальными неупругими связями*, Труды И.И.В. и Т., т. 34, М., 1960; Тюлдина, И. А., Казарян, А. А., *Трактовка принципа возможных перемещений в трудах М. В. Остроградского и его школы*, Очерки истории математики и механики, М., 1963.

wartość teoretyczna i praktyczna zasady najmniejszego przymusu uwarunkowana jest jej ogólnością, prostotą i klarownością idei. Zakres zastosowań zasady nie ogranicza się bynajmniej do problemów mechaniki teoretycznej; zasada Gaussa stosowana jest w fizyce teoretycznej i innych pokrewnych dziedzinach przyrodoznawstwa. W pracach badawczych XIX i XX wieku zasada Gaussa zajmuje poczesne miejsce. Wielu wybitnych matematyków, mechaników i fizyków zwróciło w swych pracach uwagę na tę zasadę ze względu na jej wielkie walory teoretyczne i praktyczne, nadając jej ogólniejszy i szerszy sens.

Koniec XIX wieku i pierwsza ćwierć XX wieku znamionowały się w dziedzinie zasad wariacyjnych mechaniki analitycznej wynikami o dużym uogólniającym znaczeniu. Dotyczy to zarówno zasad całkowych, jak i różniczkowych zasad mechaniki.

W 1896 r. O. HOELDER [30] sformułował ogólną zasadę całkową mechaniki, która w decydujący sposób wpłynęła na kierunki dalszych poszukiwań w dziedzinie zasad wariacyjnych. Zasada całkowa Hoeldera została uogólniona i rozwinięta w pracy A. VOSSA [45].

W 1897 r. L. KÖNIGSBERGER [32] wyprowadził uogólnione postacie różniczkowych zasad wariacyjnych, odpowiadające uogólnieniu pojęcia potencjału kinetycznego.

W początkach XX wieku P. JOURDAIN [31] sformułował nową różniczkową zasadę wariacyjną, stanowiącą pośrednie ogniwo między zasadami D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa. Dalszy rozwój tej zasady związany jest z pracami szkoły austriackiej [19].

Istotne miejsce w badaniach z pierwszej ćwierci XX wieku zajmuje zagadnienie zależności pomiędzy zasadami różniczkowymi i całkowymi w mechanice. W fundamentalnych traktatach HOELDERA i VOSSA wykazany został związek ogólnej zasady całkowej z zasadą D'Alemberta-Lagrange'a; w toku dalszych badań, w szczególności w pracach H. BRELLA [24] i C. SCHAEFFERA [42], związek ten został wyeksponowany jeszcze wyraźniej. W pracach H. BRELLA [25] i R. LEITINGERA [33] znaleziono relację pomiędzy zasadą Hoeldera-Vossa i zasadami Gaussa i Jourdaina. Ogólna transformacja zasady D'Alemberta-Lagrange'a do postaci całkowej nasuwała myśl o analogicznym przekształceniu innych zasad różniczkowych. Z tego punktu widzenia interesującą jest praca E. SCHENKLA [44], w której wprowadzona została postać całkowa zasady Gaussa.

Nowy etap w ewolucji różniczkowych zasad wariacyjnych rozpoczęty został w 30 latach XX wieku pracami A. P. PRZEBORSKIEGO [39] i N. G. CZETAJEWA [20], w których zasada D'Alemberta-Lagrange'a została rozszerzona na układy z nieliniowymi więzami anholonomicznymi pierwszego rzędu. Idee CZETAJEWA miały decydujący wpływ na dalsze badania w dziedzinie różniczkowych zasad mechaniki, prowadzone przez szkołę radziecką.

Zasada najmniejszego przymusu Gaussa w jej postaci klasycznej, uogólnienia zasady i zastosowanie jej do różnych problemów mechaniki, zagadnienie niesprzeczności zasad Gaussa i D'Alemberta-Lagrange'a, warianty drugiej z tych zasad, zastosowanie obydwu zasad różniczkowych do wyprowadzenia równań dynamicznych dla układów anholonomicznych, układów o zmiennych masach i układów z więzami nieidealnymi — oto krąg podstawowych problemów, które zostały rozwinięte w pracach mechaników radzieckich w okresie ostatnich 35 lat.

Omówimy teraz bardziej szczegółowo niektóre spośród wymienionych etapów ewolucji różniczkowych zasad wariacyjnych w mechanice.

1. Z historii ewolucji zasady Gaussa — zasady najmniejszego przymusu

1.1 Zasada najmniejszego przymusu w twórczości Gaussa. Związek zasady najmniejszego przymusu z metodą najmniejszych kwadratów. Zasada Gaussa stanowi analogię fizyczną dla metody najmniejszych kwadratów. GAUSS napomyka o tej analogii mimochodem, na zakończenie swego artykułu [26]:

«Nadzwyczaj charakterystyczne jest to, że jeżeli ruchy swobodne są sprzeczne z naturą układu, wówczas ulegają one zmianom, zupełnie tak samo, jak w toku obliczeń zmianom ulegają wnioski geometrów, uzyskane bezpośrednio, po zastosowaniu do nich metody najmniejszych kwadratów w tym celu, by uczynić te wnioski niesprzecznymi z warunkami koniecznymi, podyktowanymi przez istotę zagadnienia. Tę analogię można byłoby kontynuować, lecz wykracza to poza ramy sformułowanego obecnie przeze mnie zagadnienia».

Z historycznego i logicznego punktu widzenia kwestia ta zasługuje na bardziej wnikliwe rozważenie.

Zgodnie z zasadą najmniejszego przymusu, funkcja kwadratowa względem przyspieszeń

$$(1.1) \quad Z = \frac{dt^4}{4} \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2,$$

nazwana przez GAUSSA przymusem, osiąga minimalną wartość na rzeczywistym ruchu układu punktów materialnych.

We wzorze tym składnik

$$\frac{dt^4}{4} \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2$$

reprezentuje kwadrat odchylenia rzeczywistego ruchu punktu układu o masie m_i od ruchu swobodnego w nieskończenie małym przedziale czasu dt . W metodzie najmniejszych kwadratów wyraz ten odpowiada kwadratowi odchylenia rzeczywistej wartości od wartości obserwowanej. Czynniki m_i przy kwadracie odchylenia odpowiada czynnikowi «wagi» w metodzie najmniejszych kwadratów. Do zasady najmniejszego przymusu doszedł GAUSS niewątpliwie przez analogię z metodą najmniejszych kwadratów. Interesująca jest jednak kwestia, czy powracał on do tej analogii po 1829 r. i jeśli tak, to jak odzwierciedliły się w dalszej jego twórczości naukowej idee, sformułowane przezeń w owej jedynej pracy z mechaniki analitycznej [26].

Aby wyjaśnić tę kwestię, zwróćmy się do tez doktorskich A. RITTERA, ucznia GAUSSA, oraz do zachowanych notatek RITTERA z wykładów GAUSSA o metodzie najmniejszych kwadratów, sporządzonych w 1850–1851 r. RITTER studiował na Uniwersytecie w Göttingen od 1850 do 1853 r., w 1853 r. obronił pracę doktorską, której temat został zaproponowany przez GAUSSA. W wykładach zimowego semestru 1850–1851 r. GAUSS rozważał zagadnienie określenia najmniejszej wartości sumy kwadratów zmiennych, spełniających zadane nierówności liniowe. Z punktu widzenia zasady najmniejszego przymusu do tego zagadnienia matematycznego sprowadza się problem określenia rzeczywistego ruchu

układu punktów materialnych z więzami jednostronnymi. Rzeczywiście, wzór dla przymusu

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} m_i \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2,$$

w którym czynnik $\frac{dt^4}{4}$ można odrzucić, jako nie wpływający na ekstremum przymusu, za pomocą podstawienia liniowego

$$\sqrt{m_i} \ddot{x}_i - \frac{X_i}{\sqrt{m_i}} = \xi_i,$$

można przekształcić do postaci

$$Z = \sum_{i=1}^{3n} \xi_i^2.$$

Dwukrotnie różniczkując po czasie warunki dla jednostronnych więzów holonomicznych

$$f_k(x_i, t) \leq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

oraz jednokrotnie różniczkując warunki dla jednostronnych więzów anholonomicznych

$$\sum_{i=1}^{3n} a_{ri} \dot{x}_i + a_r \leq 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l)$$

uzyskujemy $m+l$ nierówności liniowych względem przyspieszeń \ddot{x}_i , które można przedstawić w postaci

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^{3n} \alpha_{\mu i} \xi_i + A_\mu \leq 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m+l).$$

Mechaniczny problem określenia rzeczywistego ruchu układu punktów materialnych na podstawie zasady Gaussa najmniejszego przymusu sprowadza się do poszukiwania minimum Z przy warunkach (1.2), a więc w pełni pokrywa się ze sformułowaniem przez GAUSSA matematycznym problemem określenia minimum sumy kwadratów przy warunkach wyrażających się przez nierówności liniowe. Według świadectwa RITTERA [41] GAUSS nie mówił, jakie zagadnienia naprowadziły go na myśl o tym problemie matematycznym. Naturalnie powstaje kwestia, czy sam GAUSS zdawał sobie sprawę ze związku tych dwu problemów? Czy matematyczny problem określenia minimum sumy kwadratów zmiennych, przy warunkach wyrażających się przez nierówności, został przezeń sformułowany w związku z zasadą najmniejszego przymusu? Wiele poszlak skłania ku pozytywnej odpowiedzi na to pytanie. Najbardziej przekonującą spośród nich jest wskazanie przez GAUSSA [26], [27] na istotne znaczenie warunków, wyrażonych przez nierówności. Dlatego właśnie centralne miejsce w pracy doktorskiej RITTERA zajmuje zastosowanie zasady najmniejszego przymusu do układów z więzami jednostronnymi.

Zapoznajmy się pokrótce z treścią wspomnianego wykładu GAUSSA o metodzie najmniejszych kwadratów [28].

Rozważany jest problem określenia najmniejszej wartości sumy kwadratów

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = R^2,$$

zmiennych x_1, x_2, \dots, x_n , spełniających zadane nierówności liniowe

$$u_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m, \quad m > n).$$

W celu rozwiązania tego problemu poszukiwany jest układ takich wartości zmiennych $x_i = k_i$, który n spośród nierówności przekształca w równania

$$(1.3) \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \dots, u_n = 0$$

oraz spełnia pozostałe $m-n$ nierówności

$$(1.4) \quad u_{n+1} > 0, \quad u_{n+2} > 0, \dots, u_m > 0.$$

Znaleziony układ wartości zmiennych k_1, k_2, \dots, k_n służy jako punkt wyjściowy poszukiwań kierunku najszybszego zmniejszania się sumy kwadratów, tzn. kierunku, w którym zadane zmniejszenie się sumy kwadratów zmiennych osiąga się przy najmniejszej zmianie układu ich wartości. Jako miarę zmiany układu wartości zmiennych GAUSS przyjmuje pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów wariacji wartości poszczególnych zmiennych

$$\sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \dots + (\delta x_n)^2}.$$

W ten sposób dochodzi GAUSS do następującego problemu: spośród wszystkich kombinacji wariacji zmiennych $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$, zmniejszających sumę kwadratów tych zmiennych o określoną wielkość

$$(1.5) \quad \delta(R^2) = -2\lambda,$$

znaleźć taką kombinację, dla której $\sqrt{(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \dots + (\delta x_n)^2}$, a tym samym również $(\delta x_1)^2 + (\delta x_2)^2 + \dots + (\delta x_n)^2$ przyjmuje najmniejszą wartość.

Problem ten jest podobny do wyjściowego, z tą różnicą jednak, że zmiennych δx_i jest o jedną mniej, niż zmiennych x_i , gdyż jedną z δx_i można wyrugować przy pomocy równania (1.5), zamiast zaś początkowych m nierówności mamy obecnie n nierówności, używanych przez wariowanie warunków (1.3)

$$(1.6) \quad \delta u_1 \geq 0, \quad \delta u_2 \geq 0, \dots, \delta u_n \geq 0.$$

Ta sama metoda stosowana jest do tego nowego problemu. Każdy następny krok podobnych rozważań zmniejsza liczbę zmiennych i nierówności o jedną (przy czym zmiennych pozostaje zawsze o jedną więcej, niż nierówności), co w wyniku doprowadza problem do zagadnienia z jedną zmienną (pozostałe można wyrugować przy pomocy równań) i dwiema nierównościami. Na ogół rozważany proces można również przerwać wcześniej.

W końcowym zagadnieniu z jedną zmienną odpada kwestia istotna we wszystkich poprzednich zagadnieniach, mianowicie problem odpowiedniego wyboru zmian układu wartości; zmiana wartości jednej zmiennej powoduje obecnie zmiany wartości pozostałych $n-1$ zmiennych i chodzi tylko o wielkość tej zmiany, niezbędną dla osiągnięcia minimum. Warunek ten określony jest równością

$$\delta(R_{n-2}^2) = 0,$$

gdzie R_{n-2}^2 to suma kwadratów zmiennych w ostatnim zagadnieniu. Po znalezieniu wartości zmiennych, spełniających ostatnie zagadnienie i przejściu wszystkich kolejnych kro-

ków do zagadnienia wyjściowego, dochodzi się do nowego układu wartości zmiennych, odpowiadającego kierunkowi najszybszego zmniejszania się sumy ich kwadratów. Zmiana tego nowego układu wartości w znalezionym kierunku doprowadza do układu wartości minimalizujących sumę kwadratów, względnie przekształcających nierówności (1.4) w równości. W ostatnim przypadku rozważony proces zostaje powtórzony względem tych nierówności, które przekształcają się w równości.

Pod pewnymi względami C. F. GAUSS nie w pełni rozważył zagadnienie minimum. Dotyczy to przede wszystkim założeń wyjściowych: nie zawsze można znaleźć układ wartości zmiennych, który przekształca w równości n spośród zadanych nierówności i spełnia pozostałe $m-n$ nierówności. GAUSS nie dowodzi też jednoznaczności rozwiązania problemu.

Pomimo to samo sformułowanie problemu minimum, przy warunkach wyrażających się przez nierówności, nadaje szczególną wartość jego pracy. Pozwala ono wnioskować, że GAUSS pragnął doprowadzić do końca problem matematyczny, wynikający z zastosowania zasady najmniejszego przymusu do ogólnego przypadku więzów jednostronnych.

Korzystając z metod geometrii wielowymiarowej GAUSS w swoich wykładach położył również podwaliny pod geometryczne traktowanie zagadnienia minimum z nierównościami. Jego idee stały się podstawą odpowiedniego rozdziału pracy doktorskiej RITTERA [41]. Tak więc, wypowiedziawszy w pracy z 1829 r. zasadę najmniejszego przymusu, GAUSS powrócił do niej w ostatnich latach swojego życia, mając na celu sformułowanie jej jako problemu matematycznego na ekstremum dla więzów jednostronnych, tzn. wyrażających się przez nierówności.

1.2. Podstawowe etapy ewolucji zasady Gaussa. Analiza materiałów źródłowych umożliwia wyróżnienie następujących etapów ewolucji zasady Gaussa.

Pierwszy etap zawiera się w okresie od pracy GAUSSA (1829) do pracy R. LIPSCHITZA (1876). W swojej pracy GAUSS podał jedynie słowne sformułowanie zasady.

W badaniach naukowców niemieckich: REUSCHLE'GO [40], SCHEFFLERA [43], MÖBIUSA [37], RITTERA [41], zakończonych na tym etapie pracą słynnego matematyka LIPSCHITZA [35], rozwijano matematyczne interpretacje słownego sformułowania zasady Gaussa, wyjaśniano charakter wariacji w tej zasadzie, opracowywano analityczne sformułowanie zasady we współrzędnych kartezjańskich i uogólnionych, ustalano związek pomiędzy zasadą najmniejszego przymusu a metodą najmniejszych kwadratów, stosowano zasadę najmniejszego przymusu do problemów statyki.

Analityczne wyrażenie zasady związane jest zazwyczaj z nazwiskiem H. SCHEFFLERA. Artykuł SCHEFFLERA (1858) zawiera dość systematyczne badanie zasady Gaussa, w toku którego uzyskuje się analityczne wyrażenie dla przymusu w prostokątnym układzie współrzędnych kartezjańskich (1.1).

Jednakże praca SCHEFFLERA nie jest pierwszym obszernym badaniem zasady Gaussa. Poprzedziła ją praca doktorska ucznia GAUSSA RITTERA (1853) oraz praca REUSCHLE'GO (1845).

W związku z zasadą Gaussa trzeba też wspomnieć o *Podręczniku statyki* MÖBIUSA (1837). MÖBIUS rozważa statyczną zasadę najmniejszych kwadratów nie jako szczególnie przypadek dynamicznej zasady Gaussa, lecz podaje dla niej samodzielne uzasadnienie, wychodząc z zasady przemieszczeń wirtualnych.

Słynny niemiecki matematyk R. LIPSCHITZ [35] jako pierwszy skorzystał z wyrażenia zasady Gaussa we współrzędnych uogólnionych, opierając się o wyniki swoich badań różniczkowych form kwadratowych i biliniowych. Praca LIPSCHITZA jest pogłębionym studium zasady Gaussa, zawierającym ostateczne rozwiązanie kwestii interpretacji słownego sformułowania tej zasady, sprecyzowaniem charakteru wariowania.

Wyrażenie dla przymusu we współrzędnych uogólnionych stało się początkiem całej serii prac, rozwijających sformułowania analityczne.

Dalsza ewolucja zasady jest istotnie związana z pracami najwybitniejszych przedstawicieli przyrodoznawstwa teoretycznego drugiej połowy XIX wieku: amerykańskiego matematyka i fizyka D. GIBBSA i austriackiego fizyka L. BOLTZMANNNA, których badania w dziedzinie fizyki statystycznej były ściśle związane z metodami mechaniki analitycznej.

Przede wszystkim należy tu wymienić artykuł GIBBSA [29]. Jako podstawowy wzór dynamiki traktuje GIBBS relację

$$\sum_{i=1}^{3n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i] \leq 0,$$

która wyraża w postaci wariacyjnej zasadę Gaussa. Przechodząc w tej relacji najpierw do współrzędnych uogólnionych, a następnie do quasi-współrzędnych, uzyskuje GIBBS równania ruchu w postaci wyprowadzonej znacznie później przez APPELA. Następnie GIBBS formułuje tezę, że zasada Gaussa dla układów z więzami jednostronnymi jest ogólniejsza od zasady przemieszczeń wirtualnych w połączeniu z zasadą D'Alemberta.

BOLTZMANN w *Wykładach zasad mechaniki* [23] szczegółowo analizuje tę tezę GIBBSA, nazywając ją twierdzeniem Gibbsa. Mimo to, tezy GIBBSA i BOLTZMANNNA nie można uważać za słuszne. Zasada wirtualnych przemieszczeń w połączeniu z zasadą D'Alemberta, w tej postaci, jaką nadał jej OSTROGRADZKI (GIBBS i BOLTZMANN prawdopodobnie nie znali prac OSTROGRADZKIEGO), umożliwia rozwiązanie zagadnień ruchu z więzami jednostronnymi, w tym samym stopniu co zasada Gaussa.

Pod wpływem prac GIBBSA i BOLTZMANNNA, poczynając od 90 lat XIX wieku, zasada Gaussa zajmuje znaczne miejsce w badaniach szkoły austriackiej (prace WASSMUTHA [47, 48, 49], LEITINGERA [34], SCHENKLA [44], BRELLA [25]). W pracach reprezentantów tej szkoły dalszemu uściśleniu ulega analityczne sformułowanie zasady i jej związek z innymi zasadami mechaniki.

Następny etap ewolucji zasady, sięgający do naszych dni, związany jest z badaniami uczonych rosyjskich i radzieckich, spośród których w pierwszej kolejności wymienić należy prace J. I. GRDINY, J. A. BOŁOTOWA oraz N. G. CZETAJEWA. J. I. GRDINA przeniósł zasadę Gaussa na układy anholonomiczne z więzami wolowymi (1910–1916). J. A. BOŁOTOW (1916) sformułował uogólnienie zasady Gaussa, odpowiadające nowemu spojrzeniu na wyzwalamie układów materialnych. O ile GAUSS rozważał pełne wyzwolenie układu materialnego od wszystkich więzów, o tyle BOŁOTOW analizował wyzwolenie częściowe, polegające na wyzwoleniu układu od wszystkich więzów jednostronnych i części więzów dwustronnych. BOŁOTOW sformułował dobitnie i wyraźnie podstawowe założenia, stanowiące podstawę dowodu uogólnionej zasady Gaussa. Postulaty te odegrały poważną rolę przy kolejnych uogólnieniach zasady Gaussa, dokonanych przez uczonych radzieckich. Uogólnioną zasadę Gaussa wykorzystał BOŁOTOW do rozwiązania złożonego zagadnienia

słabnięcia więzów jednostronnych. BOŁOTOW udowodnił również słuszność uogólnionej zasady Gaussa w teorii uderzenia, ograniczając się we wszystkich przypadkach do układów holonomicznych lub liniowych anholonomicznych. Nieliniowe układy anholonomiczne nie zostały rozważone w pracy BOŁOTOWA.

Kolejny etap uogólniania zasady Gaussa związany jest z pracami N. G. CZETAJEWA, dotyczącymi nieliniowych układów anholonomicznych²⁾.

2. Ewolucja zasady D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa w pracach A. P. Przeborskiego i N. G. Czetajewa

Z badaniami A. P. PRZEBORSKIEGO [39] i N. G. CZETAJEWA [20] związane jest przeniesienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z nieliniowymi więzami anholonomicznymi pierwszego rzędu, uzyskane dzięki odpowiedniemu uogólnieniu pojęcia przemieszczenia wirtualnego. Uogólnienie to zostało dokonane w początkach lat 30 XX wieku niezależnie przez obydwu uczonych. Poza tym w pracy [39] PRZEBORSKI podał definicję przemieszczenia wirtualnego dla układów z więzami anholonomicznymi drugiego rzędu, liniowymi względem przyspieszeń. Niestety, praca PRZEBORSKIEGO [39] nie została należycie oceniona ani w swoim czasie, ani we współczesnych badaniach z historii mechaniki.

Na przykład, w pracy B. N. FRADLINA [18, s. 24] błędnie przypisuje się uogólnienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z więzami anholonomicznymi drugiego rzędu HAMMELOWI (1938), podczas gdy uogólnienie to zawarte już było w pracy [39] PRZEBORSKIEGO, ukończonej w marcu 1931 roku i opublikowanej w 1933 roku.

2.1. Badania A. P. Przeborskiego [39]. W pracy [39] rozważa PRZEBORSKI zagadnienie formułowania równań ruchu układu z więzami anholonomicznymi. Rozpatrywane są więzy anholonomiczne pierwszego rzędu, liniowe lub nieliniowe względem pierwszych pochodnych współrzędnych oraz więzy anholonomiczne drugiego rzędu, liniowe względem drugich pochodnych od współrzędnych.

W wstępie do swej pracy PRZEBORSKI stwierdza: *«Zagadnienie formułowania równań ruchu nieswobodnego układu materialnego posiada dość obszerną literaturę. Wydaje mi się jednak, że sformułowanie i rozwiązanie tego zagadnienia nie jest jeszcze wystarczająco ogólne. Widzę przyczynę tego stanu rzeczy w tym, że zagadnienie to analizowane było prawie wyłącznie z czysto matematycznego punktu widzenia i mechaniczny punkt widzenia był przy tym całkowicie lub prawie całkowicie pomijany. Od 1912 roku wskazuje na to nieustannie Delassu w całym szeregu swoich znakomitych artykułów i w swoich „Wykładach dynamiki” (Paryż, 1913).*

W 1921 r. Begen w swojej bardzo interesującej pracy doktorskiej na temat „Teoretyczna analiza kompasów żyroskopowych Antschutza i Sperry'ego”, wychodząc z tego punktu widzenia, zbadał nowe więzy, nazwane przezeń serwowieżami. Jednakże Begen nie wyprowadził ogólnych wniosków.

Moim celem jest sformułowanie w ogólnej postaci zagadnienia budowania równań ruchu nieswobodnego układu ma-

²⁾ W pracy tej ograniczyliśmy się do krótkiego przeglądu podstawowych etapów ewolucji zasady Gaussa. Bardziej szczegółowy zarys historii tej zasady można znaleźć w książce: Н. Я. Цыганова, Евгений Александрович Болотов, М. Изд-во «Наука», 1969.

terialnego oraz podanie rozwiązania tego zagadnienia dla przypadków, najczęściej spotykanych w praktyce» [39, s. 184]³⁾.

Przeborski wyprowadza równania ruchu układu z anholonomicznymi więzami nieidealnymi, zakładając znajomość sumy prac elementarnych, wykonanych przez reakcje więzów R_i na wszelkich dopuszczalnych przemieszczeniach układu δx_i , tzn.

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^{3n} R_i \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} P_i \delta x_i,$$

gdzie P_i są danymi funkcjami $t, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$.

Jeżeli analityczne warunki więzów wyrażone są równaniami

$$(2.2) \quad f_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

to przemieszczenia wirtualne δx_i określa PRZEBORSKI jako takie przemieszczenia, które spełniają równania

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} \delta x_i = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

przy czym $\xi_i = x_i$, gdy odpowiednie więzy są holonomiczne; $\xi_i = \dot{x}_i$, gdy więzy są anholonomiczne pierwszego rzędu, liniowe lub nieliniowe; $\xi_i = \ddot{x}_i$ dla przypadku więzów anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem drugich pochodnych od współrzędnych. Do takiej definicji przemieszczeń wirtualnych dla rozważanych więzów anholonomicznych doprowadziło PRZEBORSKIEGO wyprowadzenie równań ruchu w postaci równań Lagrange'a pierwszego rodzaju. Zapisując na podstawie zasady wyzwalania od więzów równania ruchu układu n punktów materialnych w postaci

$$(2.4) \quad m_i \ddot{x}_i = X_i + R_i \quad (i = 1, 2, \dots, 3n),$$

gdzie X_i są składowymi sił czynnych, oraz zakładając, że przemieszczenia wirtualne układu spełniają relacje liniowe

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^{3n} A_{ji} \delta x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

gdzie A_{ji} są danymi funkcjami $t, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$, autor uzyskuje wzory na reakcje więzów

$$(2.6) \quad R_i = P_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j A_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, 3n).$$

Równania ruchu (2.4) są przedstawione w postaci

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + P_i + \sum_{j=1}^p \lambda_j A_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, 3n).$$

Mnożniki więzów λ_j określone są z równań liniowych

$$(2.7) \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} A_{ji} + \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} (X_i + P_i) + \omega_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

³⁾ Podkreślenie moje (N. C.).

gdzie $\xi_i = x_i$ dla więzów holonomicznych, $\xi_i = \dot{x}_i$ dla więzów anholonomicznych pierwszego rzędu (liniowych i nieliniowych), $\xi_i = \ddot{x}_i$ dla więzów anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem drugich pochodnych od współrzędnych; ω_k jest zadaną funkcją t, x_i, \dot{x}_i .

Wyznacznik Δ układu równań (2.7)

$$\Delta = |\alpha_{kj}| \quad (k, j = 1, 2, \dots, p),$$

gdzie

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_i} A_{ji},$$

ma następującą postać:

$$\Delta = \left| \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right| \quad (k, j = 1, 2, \dots, p),$$

w przypadku, gdy wszystkie więzy (2.2) układu są holonomiczne, zaś przemieszczenia wirtualne δx_i spełniają relacje

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p), \quad \text{tzn.} \quad A_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

Jeżeli więzy (2.2) są niezależne, to $\Delta \neq 0^4$, wobec czego z układu (2.7) można wyznaczyć mnożniki λ_j .

Na to, by mnożniki λ_j można było wyznaczyć w przypadku więzów anholonomicznych pierwszego rzędu, wystarczy przyjąć, że

$$A_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i},$$

co oznacza, że przemieszczenia wirtualne są zdefiniowane jako wielkości spełniające równania

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = 0 \quad (k, j = 1, 2, \dots, p),$$

Wówczas wyznacznik Δ przyjmie postać

$$\Delta = \left| \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \right| \quad (k, j = 1, 2, \dots, p)$$

i dla więzów niezależnych będzie oczywiście różnił się od zera. Zupełnie tak samo dla więzów anholonomicznych, liniowych względem drugich pochodnych od współrzędnych wystarczy założyć

$$A_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial \ddot{x}_i}.$$

⁴⁾ Г. К. Сулов, *Теоретическая механика*, М., 1946, 195–196.

Wyznacznik Δ układu (2.7), w tym przypadku, oblicza się ze wzoru

$$\Delta = \left| \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{m_i} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial f_j}{\partial \ddot{x}_i} \right|$$

i nie jest równy zeru, gdyż zakłada się, że więzy są niezależne. W przypadku, gdy na układ punktów materialnych nałożone są więzy wszystkich trzech rozważanych rodzajów, wyznacznik Δ w sposób oczywisty różni się od zera i z układu (2.7) można wyznaczyć mnożniki λ_j .

W omawianej pracy [39] PRZEBORSKI wyprowadza też równania ruchu układu z więzami nieidealnymi wszystkich trzech wspomnianych rodzajów, odpowiadające równaniom Lagrange'a drugiego rodzaju. Zakłada się, że dana jest praca sił reakcji na przemieszczeniach wirtualnych, spełniających równania liniowe (2.5).

Niech dane będą równania więzów holonomicznych:

$$(2.8) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \dots, \quad f_m = 0,$$

więzów anholonomicznych pierwszego rzędu:

$$(2.9) \quad f_{m+1} = 0, \quad f_{m+2} = 0, \quad \dots, \quad f_{m+h} = 0$$

oraz liniowych więzów anholonomicznych drugiego rzędu:

$$(2.10) \quad f_{m+h+1} = 0, \quad f_{m+h+2} = 0, \quad \dots, \quad f_{m+h+g} = 0,$$

przy czym $m+h+g = p$.

Uwzględniając równania (2.8) więzów holonomicznych, mamy

$$(2.11) \quad x_i = x_i(t, q_1, q_2, \dots, q_\mu) \quad (i = 1, 2, \dots, 3n),$$

gdzie q_1, q_2, \dots, q_μ — współrzędne uogólnione, $\mu = 3n - m$.

Uogólnione prędkości \dot{q}_k , spełniające równania (2.9), można wyrazić jako funkcje pewnych $\nu = \mu - h$ dowolnych parametrów r_α

$$(2.12) \quad \dot{q}_k = \psi_k(t, q_1, \dots, q_\mu; r_1, \dots, r_\nu) \quad (k = 1, 2, \dots, \mu).$$

Z równań (2.11) i (2.12) mamy wówczas

$$(2.13) \quad \dot{x}_i = f_i(t, q_1, \dots, q_\mu; r_1, \dots, r_\nu),$$

$$(2.14) \quad \ddot{x}_i = \omega_i(t, q_1, \dots, q_\mu; r_1, \dots, r_\nu; \dot{r}_1, \dots, \dot{r}_\nu).$$

Z równań (2.10) więzów, po podstawieniu do nich wzorów (2.11), (2.13) i (2.14) dla $x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$, można otrzymać wyrażenie dla \dot{r}_α w funkcji od $\varrho = \nu - g$ dowolnych parametrów s_β w postaci

$$(2.15) \quad \dot{r}_\alpha = \Pi_\alpha(t, q_1, \dots, q_\mu; r_1, \dots, r_\nu; s_1, \dots, s_\varrho) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \nu).$$

Tak więc określenie ruchu układu sprowadza się do wyznaczenia $\mu + \nu + \varrho$ funkcji q_k, r_α i s_β . Funkcje te spełniają $\mu + \nu$ równań różniczkowych pierwszego rzędu (2.12) i (2.15). Pozostałe ϱ brakujących równań otrzymuje się z zasady D'Alemberta-Lagrange'a dla

δx_i , spełniających równanie (2.5). Do p równań (2.5) dodaje się jeszcze $3n-p$ dowolnych relacji o postaci

$$(2.16) \quad \sum_{i=1}^{3n} A_{p+1,i} \delta x_i = \delta \sigma_l \quad (l = 1, 2, \dots, 3n-p),$$

gdzie $A_{p+1,i}$ są funkcjami $t, x_i, \dot{x}_i, \ddot{x}_i$, zaś $\delta \sigma_l$ są dowolnymi liczbami, takimi, że równania (2.5) i (2.16) tworzą układ niezależny, liniowy względem δx_i . Na podstawie (2.11), (2.13), (2.14) i (2.15) wszystkie A_{ji} ($i, j = 1, 2, \dots, 3n$) można rozpatrywać jako funkcje $t, q_k, r_\alpha, s_\beta$.

Z równań (2.5) i (2.16) otrzymujemy

$$(2.17) \quad \delta x_i = \sum_{l=1}^{3n-p} a_{il} \delta \sigma_l \quad (i = 1, 2, \dots, 3n).$$

Z równań (2.15) i (2.17) ze względu na dowolność $\delta \sigma_l$ mamy

$$(2.18) \quad \sum_{i=1}^{3n} A_{ji} a_{il} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p; l = 1, 2, \dots, 3n-p).$$

Podstawiając do równania D'Alemberta-Lagrange'a wzór (2.17) dla δx_i , uwzględniając równania (2.18) i wzór (2.6) dla reakcji oraz biorąc pod uwagę dowolność wielkości $\delta \sigma_l$, wyprowadził PRZEBORSKI równania ruchu układu w postaci

$$(2.19) \quad \sum_{i=1}^{3n} a_{il} (m_i \ddot{x}_i - X_i - P_i) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, q; q = 3n-p).$$

Ze względu na relacje (2.11), (2.13), (2.14) i (2.15) równania (2.19) są skończonymi równaniami względem wielkości q_k, r_α, s_β . Określając z nich q wielkości s_β i podstawiając uzyskane wyrażenia do równań (2.15) i (2.12), otrzymujemy $\mu + \nu$ równań różniczkowych pierwszego rzędu dla wyznaczenia $\mu + \nu$ funkcji r_α i q_k . W celu zupełnego wyznaczenia tych funkcji wystarczy zadać ich wartości w pewnej chwili czasu t_0 .

Jeżeli więzy nałożone na układ są idealne holonomiczne i liniowe anholonomiczne pierwszego rzędu, to z równań Przeborskiego (2.19) wynikają równania Maggi'ego⁵⁾, wprowadzone dla tego właśnie przypadku.

2.2 Zasady Gaussa i D'Alemberta-Lagrange'a w pracach N.G. Czetajewa. W dziedzinie zasad różniczkowych mechaniki analitycznej uczeni radzieccy uzyskali wyniki o wybitnym znaczeniu uogólniającym. Dotyczy to przede wszystkim badań różniczkowych zasad mechaniki w twórczości naukowej wybitnego uczonego radzieckiego N. G. CZETAJEWA. Niewątpliwie decydujący był wpływ idei CZETAJEWA na dalsze badania radzieckiej szkoły mechaniki w tej dziedzinie.

W pracy [20] CZETAJEW przeniósł zasadę D'Alemberta-Lagrange'a na nieliniowe więzy anholonomiczne pierwszego rzędu, uogólniając pojęcie przemieszczenia wirtualnego. CZETAJEW podał taką definicję przemieszczeń wirtualnych, która pokrywa się z definicją tych

⁵⁾ Maggi, O., *Di alcune nuove forme delle equazioni della dinamica, applicabili ai sistemi anolonomi*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, Roma, ser. 5, v. 10, 2-e sem. 1901, p. 287-292. Patrz również: Т. Леви-Чивита и У. Амальди, *Курс теоретической механики*, том II, часть I, М., 1951, 324-326.

przemieszczeń dla układów holonomicznych i liniowych anholonomicznych i dla której zasady D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa stają się niesprzeczne.

Niech na układ nałożone są w ogólnym przypadku nieliniowe anholonomiczne więzy rzędu pierwszego. Jeżeli układ posiada k stopni swobody, to składowe prędkości punktów układu w ruchu rzeczywistym w rozpatrywanej chwili można przedstawić jako funkcje niezależnych wielkości q_s i ich pochodnych po czasie

$$(2.20) \quad \dot{x}_i = a_i(t, q_s, \dot{q}_s) \quad (i = 1, 2, \dots, 3n; s = 1, 2, \dots, k).$$

Przemieszczenia wirtualne określone są według CZETAJEWA relacjami

$$(2.21) \quad \sigma x_i = \sum_{s=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial \dot{q}_s} \sigma q_s,$$

gdzie σq_s są dowolnymi wielkościami nieskończenie małymi⁶⁾.

Idealne więzy obustronne określone są aksjomatycznie jako takie, dla których przy zadanych siłach zewnętrznych słuszna jest zasada D'Alemberta-Lagrange'a

$$(2.22) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \sigma x_i = 0,$$

względem przemieszczeń wirtualnych (2.21). Z określenia (2.22) wyprowadzona jest zasada Gaussa w uogólnionej postaci, odpowiadająca nowemu spojrzeniu na wyzwolenie układu materialnego. O ile GAUSS rozważał pełne wyzwolenie układu materialnego (wyzwolenie od wszystkich więzów), zaś BOŁOTOW — wyzwolenie częściowe (wyzwolenie układu od części więzów), o tyle CZETAJEW nazywa wyzwoleniem układu materialnego wszelkie przekształcenie, rządzone przez określony algorytm matematyczny (wyzwolenie parametryczne); mianowicie, jeżeli w ruchu rzeczywistym układu składowe prędkości jego punktów zadane są wzorami (2.20), to w ruchu wyzwolonym zadane są wzorami

$$(2.23) \quad \dot{x}_i = a_i(t, q_s, \dot{q}_s) + \alpha_i(t, q_s, \eta_r, \dot{\eta}_r),$$

gdzie α_i są dowolnymi funkcjami zaznaczonych zmiennych, zaś liczba nowych parametrów η_r równa jest liczbie nowych swobód, uzyskanych przez układ. CZETAJEW przeniósł uogólnioną zasadę Gaussa w postaci BOŁOTOWA na nieliniowe układy anholonomiczne dowodząc, że dla nieliniowych układów anholonomicznych i przy zaproponowanych przez niego aksjomatycznych definicjach przemieszczeń wirtualnych i wyzwolenia, odchylenie rzeczywistego ruchu układu od ruchu wyzwolonego jest mniejsze od odchylenia dowolnego z ruchów wirtualnych od tegoż ruchu wyzwolonego.

Z równań więzów (2.20) i określenia (2.21) wynika, że istnieją przemieszczenia wirtualne, proporcjonalne do różnicy $d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i$, pomiędzy zmianą prędkości punktów układu w czasie dt dla ruchu rzeczywistego i takąż zmianą prędkości dla ruchu wariowanego według GAUSSA. W tym przypadku, równanie D'Alemberta-Lagrange'a (2.22) można zapisać w postaci

$$(2.24) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i d\dot{x}_i - X_i dt) (d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i) = 0.$$

⁶⁾ Zachowano oznaczenia N. G. Czetajewa (N. C.).

Z definicji wyzwolenia (2.23) układu w sposób oczywisty wynika, że przemieszczenia wirtualne danego układu znajdują się w zbiorze przemieszczeń wirtualnych układu wyzwolonego. Jeżeli założymy, że w chwili t punkty układu w ruchu wyzwolonym mają te same prędkości, co w ruchu rzeczywistym, zaś w odcinku czasu dt oddziałują na nie te same siły zewnętrzne X_i , to dla układu wyzwolonego równania D'Alemberta-Lagrange'a mają postać

$$(2.25) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i \partial \dot{x}_i - X_i dt)(d\dot{x}_i - \delta \dot{x}_i) = 0,$$

gdzie $\partial \dot{x}_i$ oznacza zmianę prędkości punktów układu w ruchu wyzwolonym w ciągu czasu dt .

Odejmując równanie (2.25) od równania (2.24) CZETAJEW otrzymuje związek w postaci:

$$(2.26) \quad A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\partial\delta} = 0,$$

gdzie wielkość

$$A_{d\delta} = \sum_{i=1}^{3n} m_i (d\dot{x}_i - \delta \dot{x}_i)^2,$$

oznacza odchylenie ruchu rzeczywistego (d) od ruchu wirtualnego (δ) w czasie dt . Analogicznie określone są wielkości $A_{d\partial}$ i $A_{\partial\delta}$. Ze związku (2.26) wynikają dwie nierówności

$$(2.27) \quad A_{d\delta} < A_{\partial\delta},$$

$$(2.28) \quad A_{d\partial} < A_{\delta\partial}.$$

Nierówność (2.28) wyraża uogólnioną zasadę Gaussa: odchylenie rzeczywistego ruchu układu (d) od rzeczywistego ruchu (∂) układu wyzwolonego w sensie CZETAJEWA jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od dowolnego ruchu (δ) wirtualnego (wariowanego według GAUSSA).

W szczególnym przypadku, jeżeli układ zostaje zupełnie wyzwolony z więzów, nierówność (2.28) wyraża zasadę Gaussa w postaci klasycznej.

Znaczenie ideowe omówionej pracy CZETAJEWA jest olbrzymie. Oznacza ona nowy etap w rozwoju mechaniki analitycznej. Poprzez wprowadzenie dla nieliniowych układów anholonomicznych pierwszego rzędu takiego pojęcia przemieszczenia wirtualnego, które nie wyprowadza poza ramy podstawowej zasady dynamicznej — zasady Gaussa, CZETAJEW znakomicie rozszerzył dziedzinę zastosowań mechaniki analitycznej, włączając do niej nieliniowe układy anholonomiczne pierwszego rzędu. Określenie przemieszczeń wirtualnych, podane przez CZETAJEWA, jest najbardziej ogólnym spośród przyjętych w obecnej chwili. Z określenia tego korzystano w wielu następujących badaniach. Dzięki podanej przez CZETAJEWA definicji parametrycznego wyzwolenia układu, stanowiącej uogólnienie pojęć wyzwolenia, proponowanych przez GAUSSA [26], MACHA [36] i BOŁOTOWA [2], ulega rozszerzeniu klasa ruchów porównywanych w zasadzie najmniejszego przymusu.

Z kolei, powyższa definicja wyzwolenia została dalej rozwinięta w pracach N. J. KOZINA i W. I. KIRCZETOWA. CZETAJEW jako pierwszy zwrócił uwagę na nierówność (2.27),

która wraz z nierównością (2.28) wynika z równania (2.26) i wyraża zasadę w sposób konieczny wypływającą z zasady D'Alemberta-Lagrange'a: odchylenie rzeczywistego ruchu (d) układu od ruchu wirtualnego (δ) jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od ruchu wyzwolonego (∂).

W pracy, opublikowanej w 1941 r. [20], CZETAJEW przypisuje zasadzie Gaussa i jej klasycznej postaci interpretację energetyczną. Rozpatrywany jest układ punktów materialnych z idealnymi holonomicznymi i liniowymi anholonomicznymi więzami. Dla rzeczywistego ruchu układu i ruchu wariowanego według GAUSSA w czasie dt konstruowany jest cykl elementarny, składający się z ruchu na wprost w polu sił oddziaływujących i ruchu powrotnego w polu sił, wystarczających dla spowodowania ruchu rzeczywistego, gdyby układ był swobodny. Zakładając, że działające siły są zależne od czasu, współrzędnych i prędkości (co oznacza, że ich wariacja według GAUSSA jest równa zero) CZETAJEW otrzymuje dla gaussowskiej wariacji pracy na cyklu elementarnym wielkość

$$\Delta A = -\frac{dt^2}{2} \Delta \sum_{i=1}^{3n} \frac{1}{2m_i} (X_i - m_i \ddot{x}_i)^2,$$

która zgodnie z zasadą Gaussa zeruje się. Wobec tego, że

$$\Delta^2 A < 0,$$

otrzymujemy, że praca A na cyklu elementarnym ruchu rzeczywistego jest maksymalna.

Z omówioną pracą CZETAJEWA bezpośrednio łączy się jego analiza ruchów wymuszonych [21].

Rozważany jest ruch układu mechanicznego, zależnego od pewnych parametrów θ_i , zmieniających się w sposób wymuszony, przy czym zmiany parametrów związane są ze współrzędnymi układu i nie dopuszczają hipotezy zmian bardzo powolnych lub adiabaticznych. Więzy nałożone na układ są z założenia idealne i ograniczają przemieszczenia wirtualne δx_i , δy_i , δz_i , $\delta \theta_i$ przy pomocy relacji liniowych.

Dla rozważanych układów formułuje się podstawową zasadę dynamiki, uogólniającą zasadę D'Alemberta-Lagrange'a w postaci

$$(2.29) \quad \sum_{i=1}^n [(\Phi_i - \mu_i \dot{\theta}_i) \delta \theta_i + (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0,$$

gdzie Φ_i oznacza wymuszenie parametru θ_i , odpowiadającego punktowi m_i . CZETAJEW podaje dalej wariant zasady (2.29), budując elementarny cykl dla rzeczywistego ruchu układu i ruchu wariowanego według GAUSSA (wyobraźlanego); cykl składa się z ruchu na wprost w polu sił oddziaływujących oraz wymuszeń i ruchu powrotnego w polu sił, wystarczających dla spowodowania ruchu rzeczywistego, gdyby układ był swobodny.

Wzór Czetajewa dla gaussowskiej wariacji pracy na cyklu elementarnym ma postać:

$$\Delta A = \frac{dt^2}{2} \sum_{i=1}^n [(\Phi_i - \mu_i \dot{\theta}_i) \Delta \theta_i + (X_i - m_i \ddot{x}_i) \Delta \ddot{x}_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \Delta \ddot{y}_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \Delta \ddot{z}_i].$$

Przy założeniu, że zadane siły X_i , Y_i , Z_i nie zależą od przyspieszeń, zaś wymuszenia Φ_i nie zależą od prędkości i przyspieszeń, CZETAJEW wyraża ΔA w postaci

$$\Delta A = -\frac{dt^2}{2} \Delta \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2\mu_i} \frac{d}{dt} (\Phi_i - \mu_i \dot{\theta}_i)^2 + \frac{1}{2m_i} \{(X_i - m_i \ddot{x}_i)^2 + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)^2 + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)^2\} \right].$$

Wobec tego, że z założenia przemieszczenia wirtualne związane są relacjami liniowymi, mamy

$$\frac{dt^2}{2} \Delta \ddot{\theta}_i = \delta \theta_i, \quad \frac{dt^2}{2} \Delta \ddot{x}_i = \delta x_i, \quad \frac{dt^2}{2} \Delta \ddot{y}_i = \delta y_i, \quad \frac{dt^2}{2} \Delta \ddot{z}_i = \delta z_i.$$

Oznacza to, że z zasady (2.29) wynika $\Delta A = 0$, zaś wobec $\Delta^2 A < 0$, praca na cyklu elementarnym dla ruchu rzeczywistego jest maksymalna. Zauważmy, że suma

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2\mu_i} \frac{d}{dt} (\Phi_i - \mu_i \dot{\theta}_i)^2 + \frac{1}{2m_i} \{(X_i - m_i \ddot{x}_i)^2 + (Y_i - m_i \ddot{y}_i)^2 + (Z_i - m_i \ddot{z}_i)^2\} \right]$$

może być rozpatrywana jako wyrażenie dla przymusu Z , zaś podstawowa zasada ruchu (2.29) może również być przedstawiona w postaci

$$\sum_{i=1}^n [(\Phi_i - \mu_i \dot{\theta}_i) \Delta \ddot{\theta}_i + (X_i - m_i \ddot{x}_i) \Delta \ddot{x}_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \Delta \ddot{y}_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \Delta \ddot{z}_i] = 0.$$

W pracy [22] CZETAJEW sformułował ogólną zasadę dynamiki dla układów z tarcie, nie zawierającą w jawnej postaci reakcji więzów na przemieszczenia wirtualne, ortogonalne względem rzeczywistych prędkości punktów układu, tzn. spełniające warunki

$$\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Zbiór takich przemieszczeń CZETAJEW nazwał (C) — przemieszczeniami. Dla najbardziej rozpowszechnionych więzów z tarcie, praca sił reakcji, oddziaływujących na materialne punkty układu w danej chwili, wykonana na (C) — przemieszczeniach, jest równa zeru

$$\sum_{i=1}^n (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0.$$

Przez wyrugowanie z tego warunku reakcji więzów R_{ix} , R_{iy} , R_{iz} przy pomocy równań ruchu, CZETAJEW wyprowadza związek

$$(2.30) \quad \sum_{i=1}^n [(m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i) \delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i) \delta z_i] = 0,$$

ślusny dla dowolnych (C) — przemieszczeń; związek ten można traktować jako uogólnienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z tarcie. Zasada (2.30) została dalej rozwinięta w pracach [13 i 14] W. W. RUMANCEWA.

3. Dalsza ewolucja różniczkowych zasad wariacyjnych w pracach uczonych radzieckich

Istotne miejsce w badaniach uczonych radzieckich zajmuje zasada najmniejszego przymusu Gaussa. Bodźcem do dalszego rozwijania tej zasady posłużyły prace N. G. CZETAJEWA, uogólniające zasadę najmniejszego przymusu. Rozpatrzmy przede wszystkim ewolucję pojęcia «wyzwolenia» układu materialnego.

3.1. Ewolucja pojęcia «wyzwolenia» układu w pracach N. J. Koczina i W. J. Kirgietowa. Przy parametrycznym wyzwoleniu według CZETAJEWA może zmieniać się sens geometryczny współrzędnych uogólnionych.

N. J. KOCZIN [8] przeanalizował wyzwolenie układu, przy którym sens geometryczny współrzędnych nie ulega zmianie, mianowicie wyzwolenie od wszystkich lub od części więzów anholonomicznych.

Niech konfiguracja układu materialnego n punktów będzie określona w każdej chwili czasu przez k współrzędnych uogólnionych q_s tak, że współrzędne kartezjańskie są związane z nimi relacjami

$$(3.1) \quad x_i = a_i(t, q_s) \quad (i = 1, 2, \dots, 3n; s = 1, 2, \dots, k).$$

Niech poza tym na układ nałożone są $k-l$ więzy anholonomiczne

$$(3.2) \quad f_r(t, q_s, \dot{q}_s) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, k-l; s = 1, 2, \dots, k),$$

równania których można zapisać w postaci — rozwiązanej względem $k-l$ prędkości uogólnionych

$$(3.3) \quad \dot{q}_v = F_v(t, q_s, \dot{q}_\mu) \quad (v = l+1, \dots, k; \mu = 1, 2, \dots, l).$$

Po różniczkowaniu relacji (3.1) i wykorzystaniu równań więzów anholonomicznych (3.3), otrzymujemy zależność

$$(3.4) \quad \dot{x}_i = a_i(t, q_s, \dot{q}_\mu) = \frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^l \frac{\partial a_i}{\partial q_\mu} \dot{q}_\mu + \sum_{v=l+1}^k \frac{\partial a_i}{\partial q_v} F_v(t, q_s, \dot{q}_\mu).$$

Przemieszczenia wirtualne określone są według CZETAJEWA przez równości

$$(3.5) \quad \delta x_i = \sum_{\mu=1}^l \frac{\partial a_i}{\partial \dot{q}_\mu} \delta q_\mu,$$

lub po uwzględnieniu (3.4) przez równości

$$(3.6) \quad \delta x_i = \sum_{\mu=1}^l \left\{ \frac{\partial a_i}{\partial q_\mu} + \sum_{v=l+1}^k \frac{\partial a_i}{\partial q_v} \frac{\partial F_v}{\partial \dot{q}_\mu} \right\} \delta q_\mu.$$

Koczin dowodzi, że przemieszczenia wirtualne $\overline{\delta x}_i$ układu wyzwolonego od wszystkich więzów anholonomicznych (3.2) zawierają przemieszczenia wirtualne układu rzeczywistego δx_i ,

$$(3.7) \quad \overline{\delta x}_i = \sum_{\mu=1}^k \frac{\partial a_i}{\partial q_\mu} \overline{\delta q}_\mu.$$

Rzeczywiście, równanie $\delta x_i = \overline{\delta x}_i$ można spełnić, zakładając

$$\overline{\delta q_\mu} = \delta q_\mu \quad (\mu = 1, 2, \dots, l), \quad \overline{\delta q_\nu} = \sum_{\mu=1}^l \frac{\partial F_\nu}{\partial \dot{q}_\mu} \delta q_\mu \quad (\nu = l+1, \dots, k).$$

Analogicznie dowodzi się, że jeżeli układ jest wyzwolony od części więzów anholonomicznych, to przemieszczenia wirtualne danego układu znajdują się wśród przemieszczeń wirtualnych układu wyzwolonego. Wyzwolenie układu z więzami holonomicznymi i linowymi więzami anholonomicznymi, rozważane w pracy BOŁOTOWA [2], staje się szczególnym przypadkiem rozpatrzonego sposobu wyzwolenia, jeżeli jako wyjściowe współrzędne uogólnione q_s rozważymy współrzędne kartezjańskie punktów x_i .

Problem wyzwolenia układów materialnych został zbadany od strony jakościowej w latach 60-tych przez W. I. KIRGETOWA [6]. Podana została wystarczająco ogólna definicja jakościowa wyzwolenia układu, po czym z definicji tej wyprowadzono algorytm matematyczny wyzwolenia.

Autor rozpatruje układy typu Czetajewa-Przeborskiego, tzn. układy z nieliniowymi więzami anholonomicznymi pierwszego rzędu. Jeżeli równania więzów wzięto w postaci

$$f_r(t, x_i, \dot{x}_i) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l),$$

to przemieszczenia wirtualne według CZETAJEWY-PRZEBORSKIEGO określone są związkami

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_r}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, l).$$

Układ uważany jest za bardziej swobodny w danym stanie, jeżeli zbiór przyspieszeń, którym może on ulegać w tym stanie, róższerza się w porównaniu z ruchem rzeczywistym.

Wyzwoleniem układu materialnego nazywane jest wszelkie jego przekształcenie, które nie zawężając zbioru dopuszczalnych stanów układu, czyni układ w każdym ze stanów bardziej swobodnym.

Wobec tego wszelkie stany i przyspieszenia, dopuszczalne w układzie podstawowym, uważane są za dopuszczalne w stanie wyzwolonym.

Wychodząc z tego jakościowego określenia wyzwolenia, formułuje KIRGETOW uogólnioną zasadę Gaussa dla rozważanych układów.

Niech A oznacza układ Czetajewa-Przeborskiego, zaś B — układ otrzymany z A poprzez wyzwolenie, przy czym zbiór jego przemieszczeń wirtualnych $\overline{\delta x}_i$ zawiera przemieszczenia wirtualne δx_i układu A ; u_i oraz v_i są przyspieszeniami punktów układu A , odpowiednio w ruchu rzeczywistym i dopuszczalnym, w_i — przyspieszenia punktów układu B w ruchu rzeczywistym, X_i — siły oddziaływujące na układ, jednakowe dla obydwu układów A i B .

Zasada D'Alemberta-Lagrange'a dla układów A oraz B ma odpowiednio postać

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i u_i - X_i) \delta x_i = 0,$$

$$(3.9) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i w_i - X_i) \overline{\delta x}_i = 0.$$

Wobec tego, że przemieszczenia wirtualne układu B zawierają przemieszczenia wirtualne układu A , równanie (3.9) można zapisać w innej postaci, mianowicie

$$(3.10) \quad \sum_{i=1}^{3n} (m_i w_i - X_i) \delta x_i = 0.$$

Odejmując od równania (3.8) równanie (3.10) otrzymujemy

$$(3.11) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i (u_i - w_i) \delta x_i = 0.$$

Dla układów Czetajewa–P.zeborskiego istnieją przemieszczenia wirtualne, proporcjonalne do różnicy przyspieszeń pomiędzy ruchem rzeczywistym i dopuszczalnym, można więc przyjąć

$$\delta x_i = u_i - v_i.$$

Podstawiając to wyrażenie dla przemieszczeń wirtualnych do równania (3.11) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i (u_i - w_i) (u_i - v_i) = 0.$$

Ostatnia relacja prowadzi do znanej tożsamości

$$(3.12) \quad A_{uv} - A_{vw} + A_{wu} = 0,$$

gdzie

$$A_{uv} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2} (u_i - v_i)^2,$$

zaś wyrażenia dla A_{vw} i A_{wu} są analogiczne.

Ze związku (3.12) wynikają dwie nierówności

$$A_{uv} \leq A_{vw}, \quad A_{wu} \leq A_{vw}.$$

Druga z tych nierówności jest wyrażeniem dla uogólnionej zasady Gaussa. Wychodząc z jakościowej definicji wyzwolenia, KIRGETOW wyprowadza dla niego algorytm matematyczny. Porównując algorytm uzyskany przez KIRGETOWA z algorytmem CZETAJEWA widzimy, że różnica pomiędzy nimi polega jedynie na różnym stopniu ogólności funkcji służących do ich wyrażenia.

3.2. Zasady różniczkowe dla układów materialnych z liniowymi więzami anholonomicznymi drugiego rzędu. W pracy [7] KIRGETOWA dokonane zostało dalsze uogólnienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z liniowymi więzami anholonomicznymi drugiego rzędu

$$(3.13) \quad \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i} \ddot{x}_i = a_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m),$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}$, a_{λ} zależą od t , x_i , \dot{x}_i . Przemieszczenia wirtualne takich układów spełniają według PRZEBORSKIEGO zależności liniowe

$$(3.14) \quad \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i} \delta x_i = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, m),$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}$ są identyczne ze współczynnikami równania (3.13).

KIRGETOW udowodnił, że w ramach takiej definicji przemieszczeń wirtualnych, zasady Gaussa i D'Alemberta-Lagrange'a stają się niesprzeczne, tzn. obydwie zasady prowadzą do tych samych równań ruchu. Rzeczywiście, z warunku minimum przymusu

$$\sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i}{2} \left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2,$$

dla ruchu rzeczywistego z uwzględnieniem równań więzów (3.13), otrzymuje się równania ruchu w postaci

$$(3.15) \quad m_i \ddot{x}_i - X_i + \sum_{\lambda=1}^m \sigma_{\lambda} a_{\lambda i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, 3n),$$

gdzie σ_{λ} są nieoznaczonymi mnożnikami Lagrange'a. Te same równania ruchu uzyskiwane są z zasady D'Alemberta-Lagrange'a. Dołączając do równań D'Alemberta-Lagrange'a równania (3.14) pomnożone przez nieoznaczone mnożniki, otrzymujemy równanie

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i + \sum_{\lambda=1}^m \sigma_{\lambda} \sum_{i=1}^{3n} a_{\lambda i} \delta x_i = 0,$$

z którego przy odpowiednim doborze mnożników σ_{λ} można uzyskać równania (3.15).

Dalej KIRGETOW dowodzi, że definicja (3.14) przemieszczeń wirtualnych ma własność jednoznaczności. Polega ona na tym, że wszystkie możliwe liniowe definicje przemieszczeń wirtualnych układu materialnego, w których przemieszczenia wirtualne nie zależą od sił oddziaływujących na układ (warunek ten spełniają wszystkie znane w mechanice analitycznej definicje przemieszczeń wirtualnych) i dla których zasady D'Alemberta-Lagrange'a i Gaussa okazują się niesprzeczne, są równoważne definicji (3.14), tzn. opisują ten sam zbiór przemieszczeń wirtualnych, co definicja (3.14).

3.3. Zastosowania zasady najmniejszego przymusu do układów [z więzami nieidealnymi. Analizę zastosowania zasady Gaussa' do układów z więzami nieidealnymi jako pierwszy zajął się uczeń CZETAJEWA — M. S. AMINOW [1]. Następnie ciekawe wyniki, dotyczące układów z tarciem, uzyskał w 1960–1961 roku inny uczeń CZETAJEWA, profesor Uniwersytetu Moskiewskiego W. W. RUMIANCEW [13], [14]. RUMIANCEW sformułował dwie postacie zasady Gaussa dla układów z tarciem. W pierwszym przypadku do wyrażenia dla przymusu wchodzi siły tarcia, w drugim siły te nie wchodzi. RUMIANCEW uogólnił zasadę Gaussa na ogólne układy z tarciem, wychodząc z definicji układów z tarciem, podanej przez PAINLEVÉ'EGO.

Omówimy szczegółowiej badania RUMIANCEWA. W jego pracach dalszej ewolucji uległa zasada, sformułowana przez CZETAJEWA dla (C) — przemieszczeń. Na podstawie tej zasady

RUMIANCEW wyprowadził zasadę Gaussa w postaci nie zawierającej w sposób jawny sił reakcji.

Ograniczenie zbioru przemieszczeń wirtualnych w zasadzie Czetajewa do (C) — przemieszczeń powoduje odpowiednie ograniczenie zbioru ruchów dopuszczalnych, z którymi porównywany jest w zasadzie Gaussa ruch rzeczywisty.

Rozpatrywane są jedynie takie ruchy dopuszczalne, w których przyspieszenia punktów układu γ_i spełniają warunek następujący: różnica między tymi przyspieszeniami, a przyspieszeniami punktów w ruchu rzeczywistym \bar{w}_i reprezentuje (C) — przemieszczenie. Tego rodzaju ruchy dopuszczalne nazywa RUMIANCEW (C) — ruchami, zaś przyspieszenia w nich oznacza jako $\bar{\gamma}_i^c$. W tym przypadku zasada Czetajewa dla (C) — ruchów rozpatrywanych układów ma postać

$$\sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right) (\ddot{x}_i - \gamma_{ix}^c) + \left(\ddot{y}_i - \frac{Y_i}{m_i} \right) (\ddot{y}_i - \gamma_{iy}^c) + \left(\ddot{z}_i - \frac{Z_i}{m_i} \right) (\ddot{z}_i - \gamma_{iz}^c) \right] = 0.$$

Ostatnie równanie można przedstawić w postaci

$$(3.16) \quad A_{wy^c} + A_{wv} - A_{vy^c} = 0,$$

gdzie wielkość

$$A_{wv} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\ddot{x}_i - \frac{X_i}{m_i} \right)^2 + \left(\ddot{y}_i - \frac{Y_i}{m_i} \right)^2 + \left(\ddot{z}_i - \frac{Z_i}{m_i} \right)^2 \right]$$

oznacza odchylenie rzeczywistego ruchu układu z tarcie od ruchu swobodnego. Analogicznie określone są wielkości A_{wy^c} i A_{vy^c} . Z równości (3.16) wynikają dwie nierówności:

$$A_{wy^c} < A_{vy^c}, \quad A_{wv} < A_{vy^c}.$$

Druga z nich wyraża zasadę Gaussa w zwyczajnej postaci: odchylenie rzeczywistego ruchu układu z tarcie od ruchu swobodnego jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od dopuszczalnego (C) — ruchu. W następnej pracy [14] RUMIANCEW uogólnia wyniki, uzyskane poprzednio dla układów z tarcie, na pewne układy z więzami nieidealnymi, szczególnymi przypadkami których są układy z tarcie, układy z serwosprężeniami itd.

Rozważany jest układ punktów materialnych z holonomicznymi i anholonomicznymi nieliniowymi więzami pierwszego rzędu. Zakłada się, że więzy nałożone na układ są tego rodzaju, że istnieją przemieszczenia wirtualne, na których siły reakcji nie wykonują pracy. Do tego rodzaju więzów należą na przykład więzy z tarcie i serwosprężeniami.

Rozumując podobnie, jak dla układów z tarcie, wyprowadza RUMIANCEW z zasady D'Alemberta-Lagrange'a zasadę Gaussa, wyrażenie dla której nie zawiera jawnie sił reakcji, zaś przemieszczenia wirtualne są ograniczone do dopuszczalnych (C) — ruchów.

3.4. Zastosowania zasady Gaussa w mechanice ośrodków ciągłych. W latach 60-tych zasada Gaussa przeniesiona została przez uczonych radzieckich na szeroką klasę ciał stałych. W. P. TAMUŻ [17] przeniósł zasadę Gaussa na ciała sztywno-idealnie plastyczne, zaś M. I. REITMAN [11], [12] — na dowolne odkształcalne ciała stałe. Przymus dla dowolnego ciała odkształcalnego wyraża się przez funkcjonal

$$(3.17) \quad I = \int_{(v)} \frac{\rho \ddot{u}_j}{2} dv - \int_{(v)} P_j \ddot{u}_j dv - \int_{(S_T)} T_j \ddot{u}_j dS_T + \int_{(v)} \sigma_{jk} \ddot{\epsilon}_{jk} dv,$$

gdzie ρ — gęstość, \ddot{u}_j — składowe przyspieszeń ruchu, $\ddot{\epsilon}_{jk}$ — przyspieszenie odkształceń, P_j i T_j — odpowiednio siły objętościowe i powierzchniowe, σ_{jk} — naprężenia. Tę postać funkcjonału otrzymuje się wychodząc od wyrażenia dla przymusu w układzie punktów materialnych w postaci

$$(3.18) \quad Z = \sum_{i=1}^{3n} \left(\frac{m_i \ddot{x}_i^2}{2} - X_i \dot{x}_i \right),$$

gdzie X_i są składowymi sił zewnętrznymi, oddziałyujących na punkty układy, \dot{x}_i — składowymi przyspieszeń tych punktów. Dla dowolnego ciała stałego jako masę punktu traktuje się masę elementarnej cząstki, wobec czego wielkość $\sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \ddot{x}_i^2}{2}$ ze wzoru (3.18)

zastępowana jest przez pierwszą z całek ze wzoru (3.17), zaś wielkość $\sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i$ prowadzi do pozostałych trzech całek, odpowiadających siłom objętościowym, powierzchniowym i wewnętrznemu stanowi naprężenia.

Różnica wartości funkcjonału przymusu na ruchu rzeczywistym i kinematycznie dopuszczalnym może być przedstawiona w postaci

$$I - I^* = - \int_{(v)} \frac{\rho(\ddot{u}_j - \ddot{u}_j^*)^2}{2} dv + \int_{(v)} \ddot{\epsilon}_{jk}(\sigma_{jk} - \sigma_{jk}^*) dv.$$

Otrzymuje stąd REITMAN warunek minimum funkcjonału wymuszenia w postaci równości naprężeń w rozpatrywanej chwili w ruchu rzeczywistym i wirtualnym. Warunek ten będzie spełniony dla ciała sprężystego i dla ciała sprężysto-plastycznego, opisywanego przez teorię deformacyjną (to znaczy przy wzajemnie-jednoznacznej zależności naprężeń i odkształceń), jeżeli w danej chwili czasu zadane są odkształcenia. Dla ciała sztywno-idealnie plastycznego, opisywanego przez teorię płynięcia, wystarczy zadać prędkości odkształceń, zaś dla ośrodka lepkiego, w którym naprężenia są jednoznacznie wyznaczone przez zadanie odkształceń i prędkości odkształceń, należy zadać te ostatnie.

Zasadę najmniejszego przymusu w postaci minimum funkcjonału stosuje Reitman do mającego zastosowania praktyczne przypadku obciążenia proporcjonalnego ciała sztywno-idealnie plastycznego. Wreszcie stosuje REITMAN zasadę Gaussa do powłok sztywno-idealnie plastycznych. Minimalizując funkcjonał przymusu uzyskuje REITMAN wzory obliczeniowe dla przypadku kopuły kulistej z materiału sztywno-idealnie plastycznego.

W pracy N. A. KILCZEWSKIEGO i N. N. SZEPIELEWSKIEJ [5] sformułowano dla cieczy filtracyjnej postać zasady najmniejszego przymusu, stanowiącą wniosek konieczny z równań ruchu tej cieczy. Przymus dla cieczy filtracyjnej przy założeniu, że ciecz jest nieściślna, zaś ośrodek filtrujący nie odkształca się, ma postać

$$Z = \frac{1}{2} \int_{(v)} [v_x^2 + v_y^2 + (v_z + k)^2] dv,$$

gdzie v_x , v_y , v_z są składowymi wektora prędkości ruchu cząstek cieczy w układzie współrzędnych, którego początek obrano na warstwie nieprzeziąkalnej, zaś k jest współczynniki

kiem filtracji. Dla pola prędkości rzeczywistego ruchu cieczy filtracyjnej przymus jest mniejszy, niż dla ruchu odpowiadającego innym rozkładom prędkości.

3.5. Zastosowanie zasady D'Alemberta-Lagrange'a do układów o zmiennej masie. Zasada D'Alemberta-Lagrange'a została przeniesiona na układy o zmiennej masie w pracach mechaników radzieckich W. F. KOTOWA [4], W. S. NOWOSIEŁOWA [9], [10] oraz W. A. SAPHY [15], [16].

Sapa sformułował zasadę D'Alemberta-Lagrange'a dla układów o zmiennej masie w przypadku, gdy siły reaktywne określone są odpowiednio przez absolutne lub względne prędkości cząstek, wypromieniowanych lub przyłączonych do punktów układu.

W pierwszym przypadku zasada D'Alemberta-Lagrange'a dla więzów idealnych obustronnych holonomicznych i anholonomicznych ma postać

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i^{(e)} + \bar{\Phi}_{a_{i1}} + \bar{\Phi}_{a_{i2}} - M_i \dot{\bar{v}}_i - \dot{M}_i \bar{v}_i) \delta \bar{r}_i = 0,$$

gdzie $\bar{F}_i^{(e)}$ jest wypadkową sił zewnętrznych, działających na i -ty punkt układu, $\bar{\Phi}_{a_{i1}}$ — siła reaktywna, spowodowana przez prędkość absolutną cząstek, wypromieniowywanych przez i -ty punkt układu, $\bar{\Phi}_{a_{i2}}$ — siła reaktywna, spowodowana przez prędkość absolutną cząstek, przyłączonych przez i -ty punkt układu.

W drugim przypadku mamy

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}_i^{(e)} + \bar{\Phi}_{r_{i1}} + \bar{\Phi}_{r_{i2}} - M_i \dot{\bar{v}}_i) \delta \bar{r}_i = 0,$$

gdzie $\bar{\Phi}_{r_{i1}}$ i $\bar{\Phi}_{r_{i2}}$ są siłami reaktywnymi, spowodowanymi przez względne prędkości cząstek wypromieniowywanych lub przyłączonych w i -tym punkcie układu.

NOWOSIEŁOW w pracy [10] zaproponował równanie D'Alemberta-Lagrange'a we współrzędnych uogólnionych dla układu o zmiennej masie z anholonomicznymi nieliniowymi więzami pierwszego rzędu, przy uwzględnieniu wewnętrznego ruchu cząstek.

Jeżeli położenie układu określone jest przez s uogólnionych współrzędnych q_s , to równanie D'Alemberta-Lagrange'a przyjmuje postać

$$(3.19) \quad \sum_{i=1}^s \left(\frac{D}{Dt} \frac{\mathcal{D}T}{\mathcal{D}\dot{q}_i} - \frac{\mathcal{D}T}{\mathcal{D}q_i} - Q_i - \psi_i \right) \delta q_i = 0,$$

gdzie D/Dt jest pochodną po czasie przy zamocowanych masach, $\mathcal{D}T/\mathcal{D}\dot{q}_i$, $\mathcal{D}T/\mathcal{D}q_i$ są pochodnymi od T przy stałych masach, Q_i są siłami uogólnionymi, ψ_i — uogólnionymi siłami reaktywnymi, w skład których wchodzi siły impulsowe, siły Coriolisa oraz siły spowodowane przez przyspieszenia względne.

Z równania D'Alemberta-Lagrange'a (3.19), po uwzględnieniu więzów anholonomicznych

$$F_k(t, q_i, \dot{q}_i) = 0,$$

dla których zachodzi relacja

$$\sum_{i=1}^s \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = 0,$$

Nowosięłow wyprowadza równania ruchu rozważanego układu, zawierające mnożniki nieoznaczone.

Literatura cytowana w tekście

1. М. Ш. Аминов, *К принципу Гаусса*, Ученые записки казанского Авиационного института, № 4, 1935.
2. Е. А. Болотов, *О принципе Гаусса*, Известия физико-математического общества при Казанском университете, т. 21, № 3, 1916, с. 99–152.
3. Я. И. Грдина, *Заметки по динамике живых организмов*, Екатеринбург, 1916.
4. В. Ф. Котов, *Основы аналитической механики для систем переменной массы*, Ученые записки Горьковского университета, т. XXVIII, 1955.
5. Н. А. Кильчевский, Н. Н. Шепелевская, *Принцип наименьшего принуждения и некоторые его приложения в теории фильтрации*, Научные доклады высшей школы, Раздел «Строительство», № 4, 1958.
6. В. И. Киргетов, *Об освобождении материальных систем*, ПММ, т. 24, в. I, 1960.
7. В. И. Киргетов, *О «возможных перемещениях» материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка*, ПММ, т. 23, вып. 4, М., 1959.
8. Н. Е. Кочин, *Об освобождении механических систем*, ПММ, т. 10, в. 5–6, 1946.
9. В. С. Новоселов, *Уравнения движения нелинейных неголономных систем с переменными массами*, Вестник ЛГУ, № 7, 1959.
10. В. С. Новоселов, *Вопросы механики переменных масс с учетом внутреннего движения частиц*, Вестник ЛГУ, № 1, 1957.
11. М. И. Рейтман, *Общий вариационный принцип в механике сплошной среды и его применение*, Строительная механика и расчет сооружений, № 5, 1965.
12. М. И. Рейтман, *Об одном методе решения задачи динамики твердого тела и его приложения к неупругим оболочкам*, Известия АН СССР, Механика и машиностроение М, № 6, 1964.
13. В. В. Румянцев, *О системах с трением*, ПММ, т. 25, в. 6, 1961.
14. В. В. Румянцев, *О движении некоторых систем с неидеальными связями*, Вестник МГУ, 1961 г. № 5.
15. В. А. Слпа, *Вариационные принципы в механике переменной массы*, Известия АН Каз. ССР, серия мат. и мех., Вып. 5 (9), 1956.
16. В. А. Слпа, *К вопросу об основах аналитической механики переменной массы*, Ученые записки Казахского ун-та, т. 30, вып. 5, 1957.
17. В. П. Тамуж, *Об одном минимальном принципе в динамике жестко-пластического тела*, ПММ, т. 26, в. 4, 1962.
18. Б. Н. Фрадлин, *Неголономная механика и её приложения в естествознании и технике* (автореферат диссертации), Киев 1965.
19. Н. Я. Цыганова, *О принципе Журдена*, Научные труды ВПИ, Волгоград 1970.
20. Н. Г. Четаев, *О принципе Гаусса*, Изв. казанского физико-математического общества, сер. 3 т. 6, 1932–1933; *Одно видоизменение принципа Гаусса*, ПММ, т. У, вып. 1, М., 1941, 11–12.
21. Н. Г. Четаев, *О вынужденных движениях*, ПММ., т. 7, в. 1, 1943.
22. Н. Г. Четаев, *О некоторых связях с трением*, ПММ, т. 24, в. 1, 1960.
23. L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik*, I Th.-Leipzig 1897.
24. H. BRELL, *Über eine neue Fassung des Prinzips der kleinsten Aktion*, Wien. Ber. Bd. 122 (2-a), 1913, s. 1031–1036.
25. H. BRELL, *Nachweis der Äquivalenz des verallgemeinerten Prinzips der kleinsten Aktion mit dem Prinzip des kleinsten Zwanges*, Wien. Ber. Bd., 122 (2a), 1913.
26. C. F. GAUSS, *Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik*, Grelle's Journal, Bd. 4, 1829.
27. C. F. GAUSS, *Principia generalia theoriae fluidorum in statu aequilibrī*, Werke. Bd. 5, Göttingen 1917.

28. C. F. GAUSS, *Das Princip des kleinsten Quadrate*, Werke. Bd. 10 (I), Göttingen, 1917, s. 473–482.
29. D. W. GIBBS, *On the fundamental formulae of dynamics*, American Journal of Mathematics, vol. 2, 1879, p. 49–64.
30. O. HOELDER, *Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellschaft d. Wiss., Göttingen, H. 2, 1896, s. 122–157.
31. P. JOURDAIN, *Note on an analogue of Gauss principle of least constraint*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 40, London 1909.
32. L. KÖNIGSBERGER, *Über die Prinzipien der Mechanik*, Crelle's Journal Bd. 118, Berlin 1897.
33. R. LEITINGER, *Über Jourdain's Prinzip der Mechanik und dessen Zusammenhang mit dem verallgemeinerten Prinzip der kleinsten Aktion*, Wien. Ber. Bd. 116 (2a), 1907.
34. R. LEITINGER, *Über die Ableitung des Gausschen Prinzips des kleinsten Zwanges aus den allgemeinsten Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art*, Wien. Ber. Bd., 116 (2a), 1907.
35. R. LIPSCHITZ, *Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges*, Crelle's Journal, Bd. 82, Berlin 1876.
36. E. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, Wien 1883.
37. A. MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik*, Leipzig 1837.
38. L. NORDHEIM, *Die Prinzipie der Dynamik*, Handbuch der Physik, Bd. 5, Leipzig 1927.
39. A. PRZEBORSKI, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeitschrift, Bd. 36, Berlin 1933, s. 184–194.
40. C. REUSCHLE, *Über das Prinzip des kleinsten Zwanges und die damit zusammenhängenden mechanischen Prinzipie*, Archiv f. Math. Phys. Bd., 1845.
41. A. RITTER, *Über das Prinzip des kleinsten Zwanges*, Göttingen 1853.
42. S. SCHAEFER, *Die Prinzipie der Dynamik*, Berlin, Leipzig 1919.
43. H. SCHEFFLER, *Über das Gauss'sche Grundgesetz der Mechanik*, Zeitschrift f. Math. Phys. Bd. 3, Leipzig 1858.
44. E. SCHENKL, *Über eine dem Gausschen Prinzipie des kleinsten Zwanges entsprechende Integralform*, Wien. Ber. Bd. 122 (2a), 1913.
45. A. VOSS, *Über die Prinzipie von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellsch. d. Wiss., Göttingen, m.ph.kl. 1900, s. 322–327.
46. A. VOSS, *Die Prinzipien der Mechanik*, Encykl. d. m. Wiss., Bd. 4, HI, Leipzig 1901, s. 3–121.
47. A. WASSMUTH, *Über die Anwendung des Prinzipes des kleinsten Zwanges auf die Elektrodynamik*, Ber. München Akad. m. ph. kl. Bd. 24, 1894.
48. A. WASSMUTH, *Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten*, Wien, Ber. Bd. 104 (2a), 1895.
49. A. WASSMUTH, *Das Restglied bei der Transformation des Zwanges in allgemeine Coordinaten*, Wien. Ber. Bd. 110 (2a), 1901.

POLITECHNIKA — WOLGOGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 marca 1971 r.

ZMODYFIKOWANY PRĘT HOPKINSONA*

JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

1. Uwagi ogólne

Poznanie własności plastycznych metali deformowanych z dużymi prędkościami odkształcenia, rzędu $5 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ i większych stanowi poważny problem eksperymentalny. Zagadnienie to jest coraz częściej przedmiotem zainteresowania, gdyż wynika z jednej strony z konieczności dostarczenia informacji o zachowaniu się plastycznym metali w warunkach dynamicznych dla potrzeb technologii formowania z dużymi prędkościami. Z drugiej natomiast strony, badania tego rodzaju mogą znacznie rozszerzyć nasze horyzonty w zakresie plastycznego zachowania się metali.

Należy także dodać, że dla rozwiązania jakiegokolwiek problemu brzegowego w dynamicznych zagadnieniach teorii plastyczności niezbędna jest znajomość równania konstytutywnego wiążącego na drodze analitycznej naprężenie σ , odkształcenie ϵ , prędkość odkształcenia $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$ oraz temperaturę w skali absolutnej. O ile rozwiązywany problem ma dobrze opisywać rzeczywiste zachowanie się rozważanej konstrukcji odkształcającej się plastycznie w warunkach dynamicznych, należy w większości przypadków uwzględnić wrażliwość materiału konstrukcji na prędkość odkształcenia. Niekiedy uwzględni się również równoczesny wpływ temperatury.

Tak więc celem eksperymentu jest dostarczenie danych o plastycznym zachowaniu się metali w możliwie dużym przedziale prędkości odkształcenia i temperatury. Dane takie służą z kolei do prawidłowego konstruowania równań konstytutywnych w teorii lepkoplastyczności.

Jeżeli pominąć efekty historii temperatury [1] i historii prędkości odkształcenia [2], [3], to zagadnienie sprowadza się do doświadczalnego wyznaczenia pewnej hiperpowierzchni; dla jednoosiowego stanu naprężenia można opisać ją równaniem

$$(1.1) \quad (\sigma, \epsilon, \dot{\epsilon}, T) = 0,$$

Zagadnienie komplikuje się jeszcze bardziej dla przypadku złożonego stanu naprężenia; wówczas symbolicznie możemy napisać

$$(1.2) \quad (\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, T) = 0,$$

gdzie trzy wprowadzone wielkości są tensorami wymienionych uprzednio zmiennych.

*) II nagroda na Ogólnopolskim Konkursie na prace doświadczalne z mechaniki, zorganizowanym przez C. dział Gliwicki PTMTS w 1970 roku.

Gdy ograniczyć się do jednoosiowego stanu naprężenia z temperaturą T jako parametrem, to pozostaje do wyznaczenia trójwymiarowa powierzchnia

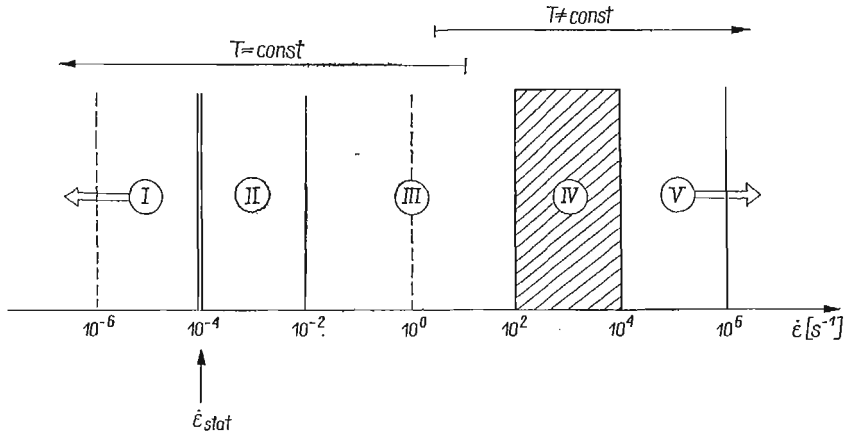
$$(1.3) \quad (\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon})_T = 0 \quad \text{lub} \quad \sigma = \sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})_T,$$

z odpowiednim zakresem prędkości odkształcenia $\dot{\varepsilon}$.

Uzyskanie maksymalnie szerokiego zakresu prędkości odkształcenia sprawia poważne trudności techniczne, gdyż zakres możliwych prędkości może zawierać się w wielu rzędach dziesiętnych, licząc w s^{-1} , gdzie

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{stąd} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{v}{l_0},$$

l_0 oznacza bazę pomiarową próbki, a v prędkość jej odkształcenia. Dla zilustrowania tego zagadnienia posłużono się widmem prędkości odkształcenia przedstawionym na rys. 1. Ponieważ wpływ prędkości odkształcenia na naprężenie plastycznego płynięcia przejawia się zwykle w postaci monotonicznie rosnącej funkcji prędkości odkształcenia, przeto nie jest obojętne na jakim poziomie prędkości odkształcenia założono istnienie



Rys. 1

krzywej «statycznej». Zwykle za taką wartość przyjmuje się $\dot{\varepsilon}_{stat} = 1 \cdot 10^{-4} s^{-1}$, zaznaczono ją podwójną linią na widmie. Mając tak zdefiniowany poziom odniesienia, można na przedstawionym widmie prędkości odkształcenia rozróżnić szereg zakresów, które wynikają ze stosowanej techniki eksperymentu. I tak:

- I — $\dot{\varepsilon} \leq 1 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ — zakres pełzania metali, zwykle eksperymenty przeprowadza się dla $\sigma = const$.
- II — $1 \cdot 10^{-4} s^{-1} \leq \dot{\varepsilon} \leq 1 \cdot 10^{-2} s^{-1}$ — zakres normalnych prób statycznych na standardowych maszynach (zrywarki) i standardowych próbkach (dziesięciokrotnych lub pięciokrotnych).
- III — $1 \cdot 10^{-2} s^{-1} \leq \dot{\varepsilon} \leq 1 \cdot 10^2 s^{-1}$ — zakres prób quasi-statycznych z użyciem takich urządzeń jak młoty spadowe, młoty Charpy'ego, młoty rotacyjne i innych. W zasadzie stosuje się tu próbki standardowe, lub nieco krótsze. Przy spełnieniu równych

warunków można jeszcze stosować schemat doświadczenia oparty na rozciąganiu próbki. Należy jednak już dysponować odpowiednią techniką pomiarową dla rejestracji szybkozmiennych procesów.

IV — $1 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1} \leq \dot{\epsilon} \leq 1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ — jest to zakres dużych prędkości odkształcenia, możliwy jedynie do realizacji w przypadku prób ściskania, a to ze względu na istnienie zjawiska krytycznej prędkości wg KÁRMÁNA [4] dla przypadku rozciągania. Muszą tu być stosowane specjalne techniki eksperymentalne z uwzględnieniem elektronicznych urządzeń wzmacniania i rejestracji sygnału o szerokim paśmie przenoszenia. Należy również uwzględnić wiele dodatkowych efektów.

Techniki eksperymentalne omawiane w niniejszej pracy dotyczą tego przedziału prędkości i dlatego został on na rys. 1 zakreskowany.

V — $\dot{\epsilon} \geq 1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ — tak duże prędkości odkształcenia, nazywane superwysokimi, można uzyskiwać jedynie poprzez generację płaskich fal uderzeniowych. Należy dodać, że na czole płaskiej fali uderzeniowej ma miejsce jednoosiowy stan odkształcenia, a stosunkowo niewielkie odkształcenia plastyczne wynikają ze ściśliwości materiału i małej składowej dewiatorowej tensora odkształcenia. Istotnym zagadnieniem są tu również sprzężone procesy termiczne.

Technika pomiaru kształtu czoła fali uderzeniowej jest niezwykle skomplikowana i kosztowna, a dokładność obecnie używanych metod jest niewystarczająca.

Przedstawione zakresy na widmie prędkości stanowią niezwykle szeroki przedział, bo dwanaście rzędów dziesiętnych. Wyznaczenie powierzchni (1.3) w takim przedziale stanowi poważny problem eksperymentalny.

2. Założenia podstawowe metody

Od chwili gdy w roku 1914 HOPKINSON [5] zaproponował użycie pojedynczego pręta stalowego o wysokiej granicy plastyczności wraz z wahadłem balistycznym do pomiaru maksymalnych wartości ciśnienia, minęło z górą pół wieku. Zaproponowany schemat okazał się bardzo przydatny do pomiaru ciśnień dynamicznych. Korzystając w tym przypadku z najprostszego równania falowego (2.1) dla sprężystego pręta [6] oraz z równania ilości ruchu można wyznaczyć maksymalne ciśnienie p_{\max} i długość impulsu t_i .

Równanie falowe przedstawia się w postaci

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2};$$

rozwiązanie równania (2.1) metodą charakterystyk przyjmuje postać

$$(2.2) \quad C_0 = \pm \frac{dx}{dt}; \quad C_0 = \pm \sqrt{\frac{E}{\rho_0}},$$

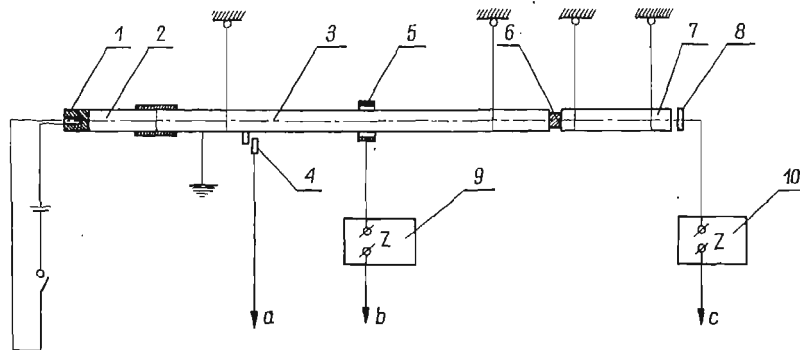
$$(2.3) \quad \sigma = \pm \rho_0 C_0 v,$$

gdzie U oznacza przemieszczenie, x współrzędną Lagrange'a wzdłuż długości pręta, t czas, C_0 prędkość sprężystej fali podłużnej w pręcie, ρ_0 gęstość materiału pręta, wreszcie E oraz v oznacza odpowiednio moduł Younga i prędkość masową.

Rozwój elektroniki umożliwił DAVIESOWI w roku 1948 wykorzystanie metod pomiarowych tego rodzaju dla pręta HOPKINSONA [7]. Zastosowano tu pojemnościową metodę pomiaru przemieszczeń na czole fali w pręcie Hopkinsona, stąd można było zmierzyć całkowity przebieg ciśnienia $p(t)$ na czynnym końcu pręta.

Kolejnym etapem była propozycja KOLSKY'EGO [8] z roku 1949, aby mierzyć w ten sposób, po wprowadzeniu pewnych modyfikacji, dynamiczne krzywe umocnienia metali. Zmodyfikowany układ zastosowany przez Kolsky'ego przedstawiono schematycznie na rys. 2. Zasada tego układu jest stosowana dotychczas.

Ładunek eksplodujący 1 ze spłonką jest umieszczony na końcu wymiennego, miękkiego pręta 2, zwanego kowadłem. Odpalenie ładunku powoduje propagację fali sprężystej we



Rys. 2

właściwym pręcie Hopkinsona 3, wykonanym ze stali o wysokiej granicy plastyczności. Na pręcie zamocowany jest styk 4, włączający podstawę czasu oscyloskopu oraz czujnik pojemnościowy 5, zasilany ze źródła 9. Kształt impulsu wymuszającego $\sigma_I(t)$, który dochodzi do krótkiej cylindrycznej próbki 6, jest rejestrowany czujnikiem 5. Ponieważ próbka 6 jest znacznie miększa od materiału pręta, część impulsu $\sigma_I(t)$ zostaje odbita od czoła pręta 3 i jest ponownie rejestrowana przez czujnik 5 jako $-\sigma_R(t)$. Część impulsu wymuszającego $\sigma_I(t)$ przechodzi przez próbkę i dalej przez pręt 7 będąc rejestrowana jako $\sigma_T(t)$ przez czujnik pojemnościowy 8, zasilany źródłem 10. Wszystkie sygnały elektryczne z wyjść a , b i c są podawane na oscyloskop.

Tak więc należy zarejestrować kształty trzech fal w funkcji czasu: impuls wymuszający $\sigma_I(t)$, impuls odbity $\sigma_R(t)$ oraz impuls przechodzący $\sigma_T(t)$. Odpowiednia analiza tych impulsów umożliwia znalezienie dynamicznej krzywej umocnienia. Zagadnienie to zostanie rozważone dalej.

Na wszystkie metody z wykorzystaniem pomiarowego pręta Hopkinsona narzucone są pewne ograniczenia lub warunki; oto one:

a. Zakłada się, że pręty pomiarowe znajdują się zawsze w stanie sprężystym, a wymuszone i mierzone fale są falami sprężystymi. Dla materiału z którego wykonane są pręty istnieje graniczna wartość naprężenia σ_{\max} , która jest jeszcze dopuszczalna, $\sigma_{\max} < \sigma_e$, gdzie σ_e jest granicą sprężystości.

b. Zakłada się, że izotermiczny moduł Younga E_T jest równy adyabatycznemu E_A , co dla metali z dużą dokładnością zachodzi; różnice modułów wynoszą od 0,1% do 0,5%. Fakt ten nie wpływa zasadniczo na wartość mierzonych naprężeń.

c. Następne założenie sprowadza się do tego, że impuls propaguje się wzdłuż pręta bez jakiegokolwiek tłumienia. Założenie to jest słuszne jedynie wtedy, gdy długość impulsu jest duża w porównaniu do średnicy pręta [7]. Jeżeli założenie to nie jest spełnione, to zachodzi silna dyspersja geometryczna impulsu.

d. Zakłada się również, że naprężenia poosiowe są rozłożone równomiernie na przekroju pręta, a zatem nie istnieje zależność naprężenia od promienia. Doświadczenia wykazują, że nawet przy wymuszeniu prawie punktowym na czynnym końcu pręta Hopkinsona założenie to jest spełnione już na długości równej czterem średnicom pręta pomiarowego (reguła Saint-Vénanta).

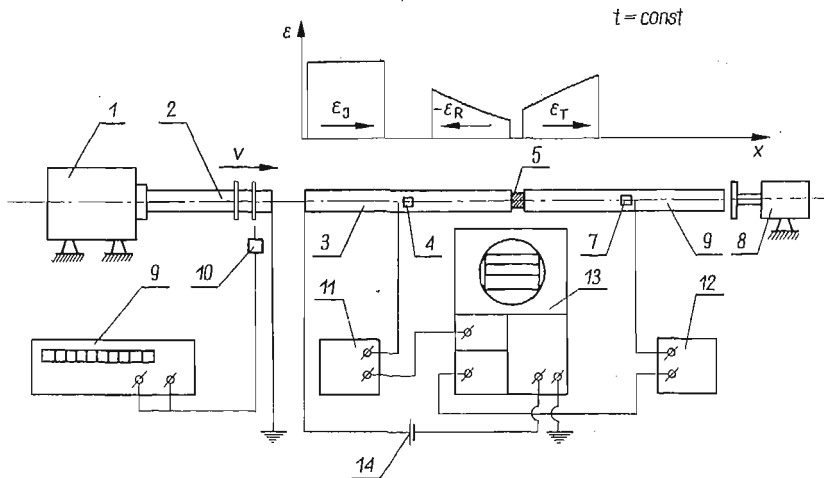
Reguła ta pozwala na stosowanie ściskanych próbek o odpowiednio mniejszej średnicy od średnicy pręta pomiarowego.

Dyskutowane założenia są natury mechanicznej, związanej z mechaniką propagacji impulsu. Należy zdawać sobie także sprawę, że urządzenie wymaga stosunkowo skomplikowanych pomiarów elektronicznych gdzie stosuje się również pewne założenia.

W sumie jednak urządzenie oparte na tej zasadzie jest uważane obecnie za najlepsze i jak dotychczas za najnowocześniejsze narzędzie do badania dynamicznych charakterystyk materiałów w stanie plastycznym.

3. Konstrukcje używane obecnie

Schematy eksperymentalne używane obecnie uległy pewnym zmianom w porównaniu ze schematem pierwotnie zaproponowanym przez KOLSKY'EGO i przedstawionym na rys. 2.

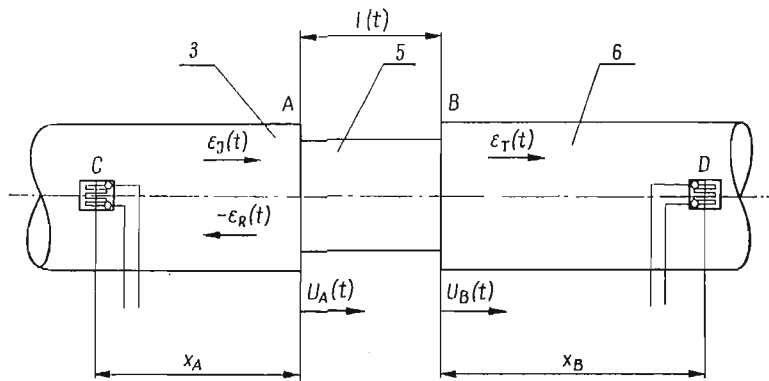


Rys. 3

I tak zaniechano użycia materiału wybuchowego dla generacji impulsu, a pojemnościową technikę pomiaru przemieszczeń zastąpiono zastosowaniem czujników elektrooporowych o krótkich bazach pomiarowych. Taki nowoczesny układ przedstawiono na rys. 3.

Odpowiednia wyrzutnia 1 pozwala na nadanie wymaganej prędkości v prętowi wymuszającemu 2. Prędkość ta jest mierzona za pomocą czujnika pomiaru prędkości, na przykład czujnika magnetycznego oraz czasomierza liczącego 9. Z kolei pręt wymuszający 2 uderza w pręt transmitujący 3 generując w nim falę prostokątną o amplitudzie ε_I . Fala ε_I dochodząc do czoła pręta 3 odbija się częściowo w postaci fali rozciągania $-\varepsilon_R$, druga część fali natomiast oznaczona przez ε_T przechodzi przez próbkę 5 i jest przyjmowana przez pręt odbierający 6. Cały układ prętów jest hamowany przez opornik 8.

Pomiar kształtu wszystkich trzech impulsów jest dokonywany za pomocą odpowiednich tensometrów elektrooporowych 4 i 7 o krótkiej bazie, rzędu od 1 do 3 mm, z wykorzystaniem zasilaczy 11 i 12 oraz dwustrumieniowego oscyloskopu 13 z jednorazowo wyzwalaną podstawą czasu. Podstawę czasu wyzwała się zewnętrznie za pomocą baterii 14, a cały proces jest fotografowany. Kształty oraz kierunki poszczególnych impulsów



Rys. 4

również przedstawiono w funkcji czasu na rys. 3. Należy dodać, że kształty impulsów $\varepsilon_I(t)$ oraz $\varepsilon_R(t)$ są mierzone czujnikiem 4, natomiast kształt impulsu $\varepsilon_T(t)$ jest mierzony czujnikiem 7.

Jeżeli rozważyć przemieszczenia w danej chwili na czołach prętów pozostających w kontakcie z próbką, to otrzymuje się sytuację przedstawioną na rys. 4.

Średnią wartość odkształcenia $\bar{\varepsilon}_s$ dla próbki 5 oraz średnią wartość prędkości odkształcenia $\bar{\dot{\varepsilon}}_s$ można wyrazić przy pomocy przemieszczeń czoł prętów 3 i 6 następująco:

$$(3.1) \quad \bar{\varepsilon}_s(t) = \frac{U_A(t) - U_B(t)}{l_0},$$

$$(3.2) \quad \bar{\dot{\varepsilon}}_s(t) = \frac{1}{l_0} \left[-\frac{dU_A(t)}{dt} - \frac{dU_B(t)}{dt} \right],$$

l_0 oznacza długość początkową próbki.

Po wykorzystaniu zależności na charakterystykach dla równania (2.1) można obliczyć U_A oraz U_B ; stąd

$$(3.3) \quad U_A(t) = C_{0E} \int_0^t \varepsilon_I(t') dt' + (-C_{0E}) \int_0^t \varepsilon_R(t') dt',$$

lub

$$(3.4) \quad U_A(t) = C_{0E} \int_0^t [\varepsilon_I(t') - \varepsilon_R(t')] dt',$$

gdzie C_{0E} oznacza prędkość fali sprężystej w prętach. Równocześnie

$$(3.5) \quad U_B(t) = C_{0E} \int_0^t \varepsilon_T(t') dt'.$$

Podstawiając (3.4) i (3.5) do (3.1) otrzymuje się

$$(3.6) \quad \bar{\varepsilon}_s = \frac{C_{0E}}{l_0} \int_0^t [\varepsilon_I(t') - \varepsilon_R(t') - \varepsilon_T(t')] dt',$$

a ponadto

$$(3.7) \quad \dot{\bar{\varepsilon}}_s = \frac{C_{0E}}{l_0} [\varepsilon_I(t) - \varepsilon_R(t) - \varepsilon_T(t)].$$

Średnie naprężenie w próbce $\bar{\sigma}_s$ można obliczyć z zależności

$$(3.8) \quad \bar{\sigma}_s = \frac{P_A(t) + P_B(t)}{2F_s};$$

$P_A(t)$ i $P_B(t)$ oznaczają tu odpowiednie siły działające na próbkę, F_s jest aktualnym polem przekroju próbki. Korzystając z prawa Hooke'a można wyznaczyć $P_A(t)$ i $P_B(t)$ na podstawie zarejestrowanych impulsów

$$(3.9) \quad P_A(t) = EF_E[\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t)]$$

oraz

$$(3.10) \quad P_B(t) = EF_E \varepsilon_T(t),$$

gdzie E jest modułem Younga materiału prętów, a F_E polem przekroju prętów.

Po podstawieniu (3.9) i (3.10) do (3.8) otrzymuje się

$$(3.11) \quad \bar{\sigma}_s = \frac{1}{2} E \left(\frac{F_E}{F_s} \right) [\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t) + \varepsilon_T(t)].$$

Tak więc na podstawie znajomości ε_I , ε_R i ε_T można określić trójkę średnich ($\bar{\sigma}_s$, $\bar{\varepsilon}_s$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_s$), określających punkt na powierzchni $(\sigma, \varepsilon, \dot{\varepsilon})_T = 0$, a ściślej, dane dla jednej próbki wyznaczają pewną linię na tej powierzchni.

Na uwagę zasługuje możliwość dynamicznego cechowania układu poprzez dokładny pomiar prędkości uderzenia v i wykorzystania zależności (2.3). Mierzac v można natychmiast wyznaczyć maksymalną wartość odkształcenia ε_I dla fali

$$(3.12) \quad (\varepsilon_I)_{\max} = \frac{v}{2C_{0E}}.$$

Przedstawiona na rys. 3 konstrukcja z trzema prętami uchodzi obecnie za optymalną i bywa najczęściej stosowana. Jednak poszczególne laboratoria zależnie od potrzeb ba-

dawczych stosują pewne modyfikacje zarówno w części mechanicznej układu jak i w metodyce pomiarów.

I tak w pracy [9] zamiast prętów zastosowano rury ze stopu aluminium o wysokiej granicy plastyczności, ściskając miękkie pierścieniowe próbki z technicznie czystego aluminium. Taki schemat eksperymentalny jest o tyle korzystny, że zmniejsza efekty bezwładności poprzecznej próbki.

W pracy [10] badano zachowanie się aluminium w podwyższonych temperaturach (do 550°C) tą samą techniką, jednak z użyciem prętów i próbek cylindrycznych. Przerzeń pomiędzy czołami prętów (gdzie umieszczono próbkę) podgrzewano piecem, a powstający w ten sposób gradient temperatury w prętach uwzględniono w analizie numerycznej.

Na uwagę zasługuje praca [11], gdzie w układzie tensometru elektrooporowego na przecie transmitującym zastosowano wzmacniacz całkujący, którego wyjście podłączono na wejście x oscyloskopu. Sygnał z pręta odbierającego podaje się na wejście y oscyloskopu.

Zastosowanie wzmacniacza całkującego wraz z założeniem, że naprężenie w danym momencie jest w próbce stałe (nie ma gradientu naprężenia po długości próbki), pozwala automatycznie scałkować wyrażenie (3.6), które sprowadza się wówczas do postaci

$$(3.13) \quad \varepsilon_s = -\frac{2C_{0F}}{l_0} \int_0^t \varepsilon_R(t') dt' \quad \text{ponieważ} \quad \varepsilon_R(t) = \varepsilon_T(t) - \varepsilon_I(t).$$

W ten sposób eliminuje się skomplikowaną procedurę numeryczną oraz wymagany dokładny i żmudny pomiar oscylogramów, otrzymując od razu dynamiczną krzywą umocnienia.

We wspomnianej pracy [11] uzyskano wiele danych dla aluminium, ołowiu i miedzi.

Również wiele danych otrzymano w pracy [12], gdzie zbadano nieczuły na prędkość odkształcenia stop aluminium oraz pewien stop tytanu.

W pracy [13] zmodyfikowany pręt Hopkinsona umieszczono w komorze ciśnieniowej, badając lepkoplastyczne własności miedzi pod ciśnieniem hydrostatycznym. Uzyskano wyraźny wpływ ciśnienia hydrostatycznego na te własności.

Praca [14] zawiera pewną modyfikację, mianowicie zastosowano na końcu układu trzech prętów czwarty pręt jako pułapkę energii. W ten sposób pręt transmitujący wraz z prętem odbierającym pozostają w spoczynku po zakończeniu procesu deformacji próbki. Układ ten zastosowano w badaniu niskowęglowej stali 0,03%C. Również układ tego rodzaju zastosowano w pracach [15], [16] i [17] przy badaniu polikrystalicznych i monokrystalicznych próbek aluminium.

Wreszcie na uwagę zasługują próby zastosowania układu prętów Hopkinsona do przeprowadzania prób rozciągania krótkich próbek. W pracy [12] zastosowano krótkie próbki rurkowe, a zamiast pręta odbierającego użyto rury. Natomiast w pracy [19] dla przeprowadzenia prób rozciągania zastosowano krótkie próbki cylindryczne łączone z prętami transmitującym i odbierającym za pomocą gwintu. Zamiast pręta wymuszającego zastosowano rurę, która uderzając w pierścień oporowy na przecie transmitującym od strony układu prętów, wywołuje w nich impuls rozciągający.

Całkowitej zmiany systemu pomiarowego dla zmodyfikowanego pręta Hopkinsona dokonano w pracy [20]. Mianowicie pomiędzy czołami prętów a ścisną próbką umieszczono piezoelektryczne czujniki kwarcowe. W ten sposób można bezpośrednio mierzyć siły działające w danym momencie na czoła próbki.

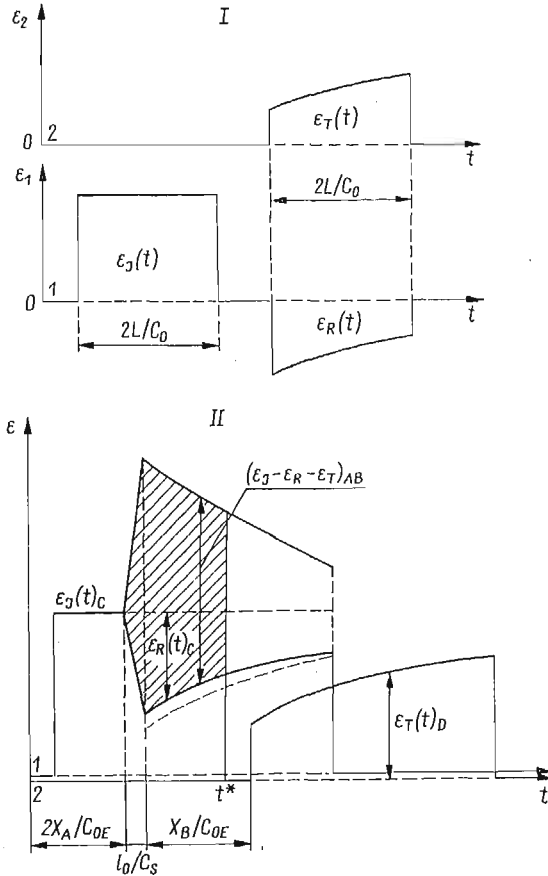
Niezależnie od poszczególnych odmian, technika pomiarów na zmodyfikowanym pręcie Hopkinsona dopuszcza dwa możliwe położenia tensometrów w stosunku do próbki. Pierwsze, które musi być stosowane przy wykorzystaniu układu całkowitego, polega na umieszczeniu tensometrów na odpowiednio dużej odległości od próbki. Wynika to stąd, że poszczególne impulsy muszą być rozdzielone w czasie przed operacją całkowania. Jeżeli pręty transmitujące i odbierające mają taką samą długość L , a czujniki naklejono na połowie ich długości, to długość pręta wymuszającego jest ograniczona i wynosi $L/2$.

Drugi przypadek rozmieszczenia tensometrów, który został zastosowany na przykład w pracach [9], [12], [14] i [15] polega na umieszczeniu czujników na prętach w pobliżu próbki. W takim przypadku czujnik umieszczony na pręcie transmitującym rejestruje najpierw początek impulsu wymuszającego $\varepsilon_I(t)$, a następnie różnicę impulsów wymuszającego $\varepsilon_I(t)$ i odbitego $\varepsilon_R(t)$, zgodnie z zależnością (3.13). Schematyczne przedstawienie kolejności rejestrowanych fal przy rejestracji dwustrumieniowej dla obydwu przypadków oraz graficzne rozwiązanie równania (3.6) dla przypadku drugiego zawiera rys. 5. W przypadku pierwszym uwidoczniła się synchronizacja impulsów. W przypadku drugim impuls $\varepsilon_T(t)$ został przesunięty równolegle w lewo celem przygotowania procedury numerycznej. Zakreskowane pole stanowi całość w równaniu (3.13) i jest proporcjonalne do średniego odkształcenia próbki $\bar{\varepsilon}_s$. Impuls transmitowany $\varepsilon_T(t)$ jest odpowiednio opóźniony po przesunięciu, mianowicie o l_0/C_{0s} , gdzie C_{0s} oznacza prędkość fali sprężystej dla materiału próbki.

Porównując obydwa przypadki można stwierdzić, że rejestracja w przypadku pierwszym musi odbywać się z mniejszą prędkością, gdyż impulsy są rozdzielone, a muszą się zmieścić na ekranie oscyloskopu. W przypadku drugim rejestracja impulsów może być bardziej dokładna w funkcji czasu. Ponadto dla przypadku drugiego obserwuje się mniejszą dyspersję geometryczną impulsu.

Przy stosowaniu tensometrii elektrooporowej do pomiaru fal sprężystych w prętach należy zdawać sobie sprawę, że pomiary tego rodzaju są uważane za trudne i nastęcające wiele problemów. Z jednej strony czasy narastania czoła fali są stosunkowo krótkie, rzędu kilku do kilkudziesięciu mikrosekund ($1\mu s = 10^{-6}s$), z drugiej strony, prędkości propagacji fal są odpowiednio wysokie. W rezultacie czasy rejestracji przebiegów są bardzo krótkie, jak na badania typu mechanicznego, a prędkości rejestracji na ekranie oscyloskopu wynoszą zwykle od $20\mu s/cm$ do $200\mu s/cm$. Układ pomiarowy i rejestrujący odkształcenia powinien posiadać liniowe pasmo przenoszenia od 0 do ~ 10 MHz. Postępy w tensometrii elektrooporowej sprawiły, że obecnie zaczęto stosować do tych celów specjalne tensometry elektrooporowe o krótkich bazach pomiarowych, rzędu od 1 do 3 mm. Pomiary tensometryczne oparte są na jednej z dwóch zasad, mianowicie stosuje się zasadę zasilania tensometru stałym prądem lub zasadę zasilania tensometrów w układzie mostkowym stałym napięciem. Obydwie zasady pomiaru wykazują pewne wady i zalety, jednak ich omówienie wykracza poza ramy niniejszego opracowania. Stosowanie tensometru

elektrooporowego pociąga za sobą pewne ograniczenia wynikające z jego konstrukcji. Po pierwsze, ponieważ tensometr jest klejony do odkształcającego się podłoża (pręta), a jego odkształcenie wymaga pewnej siły, klej musi wykazywać odpowiednią wytrzymałość



Rys. 5

na ścinanie i pomijalne własności reologiczne. Obserwuje się również pewien efekt magnetostrykcji, gdy czujnik jest naklejony na materiale typu ferromagnetycznego.

Po drugie, skończona baza pomiarowa tensometru pociąga za sobą efekt pozornego «rozmycia» czoła rejestrowanej fali, lub efekt pozornej dyspersji. Tensometr działa jak pewnego rodzaju filtr obcinający wyższe harmoniczne impulsu. Na przykład rzeczywisty impuls o kształcie prostokątnym zostanie zarejestrowany jako impuls trapezowy o czasie narastania zależnym od długości bazy tensometru l_0 . Jeżeli oznaczyć odkształcenie rzeczywiste elementu przez ε , a odkształcenie mierzone tensometrem przez ε^* , to w każdym momencie t będzie spełnione równanie

$$(3.14) \quad \varepsilon^* = \frac{1}{l_0} \int_0^l \varepsilon(x) dx \quad \text{lub} \quad \varepsilon^*(t) = \frac{1}{t_0} \int_0^t \varepsilon(t) dt^* .$$

$$0 \leq l \leq l_0 \quad \quad \quad 0 \leq t \leq t_0$$

Tutaj t_0 oznacza czas przejścia impulsu przez tensometr i jeżeli C_0 jest prędkością propagacji impulsu to $l_0 = C_0 t_0$. Zgodnie z równaniem (3.14) rejestrowany impuls prostokątny o odkształceniu maksymalnym ε_m będzie posiadać dwa odcinki

$$\text{dla} \quad 0 \leq t \leq t_0 \quad \varepsilon^*(t) = \varepsilon_m \frac{t}{t_0},$$

$$\text{dla} \quad t \geq t_0 \quad \varepsilon^*(t) = \varepsilon_m.$$

Dla różnych funkcji podcałkowych $\varepsilon(t)$ można otrzymać odpowiednie rozwiązania na $\varepsilon^*(t)$. Na przykład DAVIES [21] przeprowadził analizę dla ciągu fal sinusoidalnych $\varepsilon_m \sin \omega t$ oraz dla funkcji typu $\varepsilon_m e^{-t}$.

Z przeprowadzonej dyskusji wypływa fundamentalny warunek przy stosowaniu czujników o skończonej bazie do pomiaru fali, mianowicie długość mierzonego impulsu $\lambda = C_0 t$ musi być wielokrotnie większa od bazy stosowanego czujnika. Następnym wnioskiem jest stwierdzenie, że wyższe harmoniczne impulsu można rejestrować czujnikami o odpowiednio małej bazie. Stąd tak istotne znaczenie długości bazy czujnika. Ponadto równanie (3.14) wskazuje, że czujnik może być zupełnie nieczuły na impulsy typu szpilkowego lub typu delta Diraca. Wówczas rejestrowana maksymalna wartość impulsu może być wielokrotnie niższa od rzeczywistej. Jednak ten ostatni przypadek w technice pręta Hopkinsona nigdy nie zachodzi, długość impulsu podstawowego nie bywa mniejsza niż 100 mm.

4. Skrętny pręt Hopkinsona

Trudności związane z istotą dynamicznego ściskania krótkich próbek, takie jak tarcie na czołach prętów i próbki oraz prawdopodobieństwo pojawiania się efektów bezwładności poprzecznej, a tym samym wystąpienia złożonego stanu naprężeń w próbce, skłaniają do zaproponowania idei skrętnego pręta Hopkinsona.

Jeżeli zamiast prętów zastosować cienkościennie rury o dużej wytrzymałości, a próbkę wykonać w formie pierścienia, to można wyprowadzić analogiczne zależności dla takiej konstrukcji jak podane poprzednio dla ściskania. Rozwiązanie równania falowego dla fali ścinania można napisać w postaci

$$(4.1) \quad \alpha = \frac{C_{0G}}{r} \int_0^l \gamma(t') dt'; \quad C_{0G} = \sqrt{\frac{G_0}{\rho_0}}$$

oraz

$$(4.2) \quad \omega = \frac{C_{0G}}{r} \gamma, \quad \text{gdzie } \omega = \frac{d\alpha}{dt},$$

G oznacza moduł sprężystości postaciowej, γ odkształcenie postaciowe, α kąt skręcania, r jest średnim promieniem, wreszcie ω — prędkością kątową. Schematyczne przedstawienie pierścieniowej próbki 2 wraz z końcami rury transmitującej 1 i odbierającej 3

przedstawiono na rys. 6. Na podstawie rys. 6 można napisać wzór na średnie odkształcenie postaciowe próbki $\bar{\gamma}_s$ i średnią prędkość odkształcenia postaciowego $\bar{\dot{\gamma}}_s$

$$(4.3) \quad \bar{\alpha}_s = \alpha_A - \alpha_B \quad \text{stąd} \quad \bar{\gamma}_s = \frac{r_s}{l_0} (\alpha_A - \alpha_B),$$

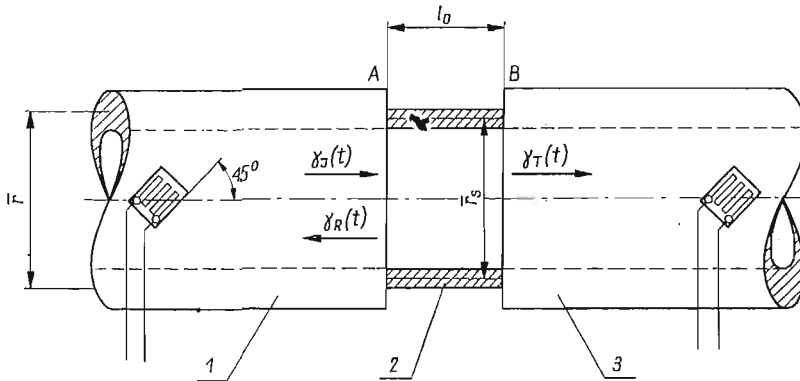
$$(4.4) \quad \bar{\omega}_s = \omega_A - \omega_B \quad \text{stąd} \quad \bar{\dot{\gamma}}_s = \frac{r_s}{l_0} (\omega_A - \omega_B).$$

Uwzględniając zależności (4.1) i (4.2) można, jak poprzednio, znaleźć średnie wartości odkształcenia i prędkość odkształcenia przy ścinaniu próbki

$$(4.5) \quad \bar{\gamma}_s = \frac{C_{0G}}{l_0} \left(\frac{r_s}{r} \right) \int_0^t \{ \gamma_s(t') - [\gamma_R(t') + \gamma_T(t')] \} dt',$$

$$(4.6) \quad \bar{\dot{\gamma}}_s = \frac{C_{0G}}{l_0} \left(\frac{r_s}{r} \right) \{ \dot{\gamma}_s(t) - [\dot{\gamma}_R(t) + \dot{\gamma}_T(t)] \}.$$

Należy zwrócić uwagę, że $\bar{\gamma}_s$ jak i $\bar{\dot{\gamma}}_s$ zależą również liniowo od stosunku średnich promieni próbki i rur. Impulsy należałoby rejestrować za pomocą elektrooporowych czuj-



Rys. 6

ników naklejonych na zewnętrznych powierzchniach rur pod kątem 45° do ich osi. Przez podobne rozumowanie jak poprzednio, można otrzymać zależności na średni moment skracający próbkę \bar{M}_s i średnie naprężenie ścinania $\bar{\tau}_s$

$$(4.7) \quad \bar{M} = \frac{M_A + M_B}{2} \quad \text{oraz} \quad \bar{\tau}_s = \frac{M_A + M_B}{4\pi r_s^2 g_s},$$

gdzie g_s oznacza grubość ścianki próbki rurkowej. Znajomość impulsów $\gamma_1(t)$ i $\gamma_R(t)$ pozwala na wyznaczenie M_A i M_B :

$$(4.8) \quad M_A = 2\pi G r^2 g [\gamma_1(t) + \gamma_R(t)],$$

$$(4.9) \quad M_B = 2\pi G r^2 g \gamma_T(t),$$

gdzie g oznacza grubość ścianki rur sprężystych. Po podstawieniu (4.8) i (4.9) do (4.7) otrzymuje się

$$(4.10) \quad \bar{\tau}_s = \frac{Gg}{2g_s} \left(\frac{r}{r_s} \right)^2 [\gamma_I(t) + \gamma_R(t) + \gamma_T(t)].$$

Na uwagę zasługuje rezultat, że naprężenie ścinania w próbce jest proporcjonalne do kwadratu stosunku r/r_s . Pozwala to na badanie próbek o odpowiedniej geometrii wykonanych z materiałów równie wytrzymałych co materiał prętów pomiarowych. Problem ten jest niemożliwy do rozwiązania w przypadku ściskania.

Porównując obydwa schematy doświadczalne dochodzi się do wniosku, że schemat ze skręcaniem wyróżnia się szeregiem cech dodatnich, mianowicie:

- a) brakiem tłumienia geometrycznego impulsu w rurach w przeciwieństwie do prętów;
- b) brakiem tarcia na czołach próbki;
- c) niemożnością powstania złożonego stanu naprężeń w ścinanej próbce, co jest wynikiem braku istnienia składowej promieniowej prędkości materiału próbki;
- d) prędkość sprężystych fal ścinania jest mniejsza od prędkości sprężystych fal podłużnych w stosunku $\sqrt{G/E}$, co polepsza nieco warunki pomiaru i rejestracji szybkozmennych procesów falowych.

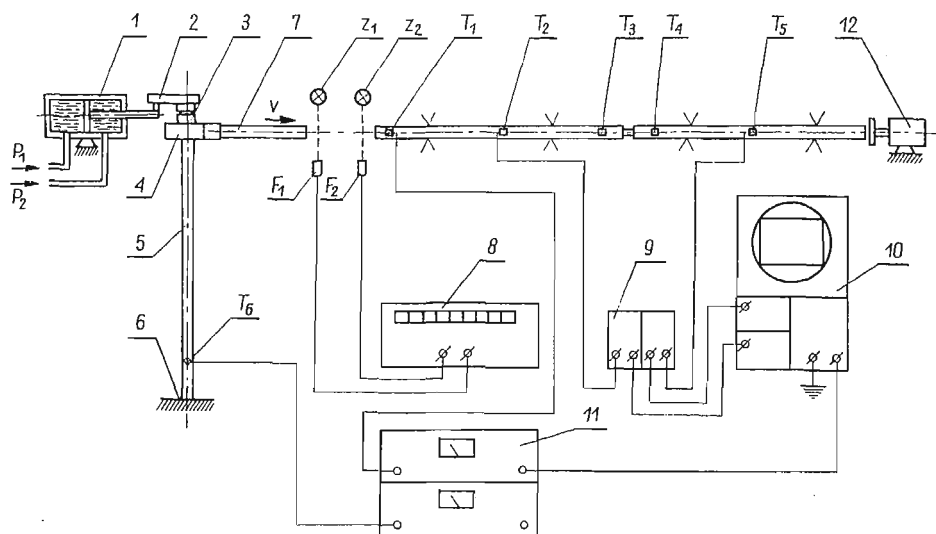
Pomimo oczywistej wyższości skrętnego pręta Hopkinsona, nie udało się dotychczas uzyskać zadowalających rezultatów w realizacji takiej konstrukcji. Jest to spowodowane głównie trudnościami w generacji fal ścinania z równoczesnym wyeliminowaniem fal giętnych oraz trudnościami z odpowiednim mocowaniem próbki. W dziedzinie zastosowania skrętnego pręta Hopkinsona można wymienić zaledwie dwie próby przedstawione w pracach [22] i [23], gdzie badano odpowiednio stop aluminiowy i technicznie czyste żelazo.

5. Konstrukcja Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych Instytutu Podstawowych Problemów Techniki

W Pracowni Doświadczalnych Badań Reologii IPPT skonstruowano, wykonano oraz uruchomiono urządzenie oparte na przedstawionej zasadzie i pracujące na ściskanie z możliwością szybkiego przystosowania do pracy na skręcanie. Zmodyfikowany pręt Hopkinsona składa się jak zwykle z części mechanicznej i z elektronicznej części pomiarowej. Na część mechaniczną składa się wyrzutnia prętów oraz system podwieszenia prętów wraz z opornikiem. Schemat mechanicznej części stanowiska wraz ze schematem blokowym układu pomiarowego przedstawiono na rys. 7. Pręt wymuszający 7 jest przyspieszany przez układ z wałkiem skrętnym 5 i krzywką 4. Wałek skrętny jest zamocowany z jednej strony do ramy 6, z drugiej natomiast jest skręcany przy pomocy hydraulicznego siłownika dwustronnego działania 1, dźwigni 2 zamieniającej ruch posuwisto-zwrotny siłownika na ruch obrotowy łącznika 3. Podczas skręcania pręta magazynowana jest w nim energia sprężysta, a moment skręcający rośnie. W pewnym momencie specjalnie hartowany łącznik 3 pęka, a energia sprężysta zamienia się na energię kinetyczną obrotu krzywki i ruchu pręta wymuszającego, który jest w ten sposób wyrzucany z odpowiednio

dużą prędkością. Siłownik jest sterowany przy pomocy urządzenia hydraulicznego z pompą, która nie jest uwidoczniiona na schemacie. Układ prętów jest podwieszony na regulowanych linkach stalowych, a całość traci nagromadzoną energię kinetyczną na oporniku tarciovym 12.

Prędkość pręta wymuszającego v jest mierzona przy pomocy oświetlaczy Z_1 i Z_2 i umieszczonych naprzeciw fotodiod F_1 i F_2 . Cały układ mierzący prędkość jest zamontowany w obudowie ze szczelinami o szerokości $\sim 0,5$ mm, a odległość pomiarowa wynosi 80 mm. Użyto fotodiody germanowe Tewa typ FG-2 o średnicy wejścia optycznego



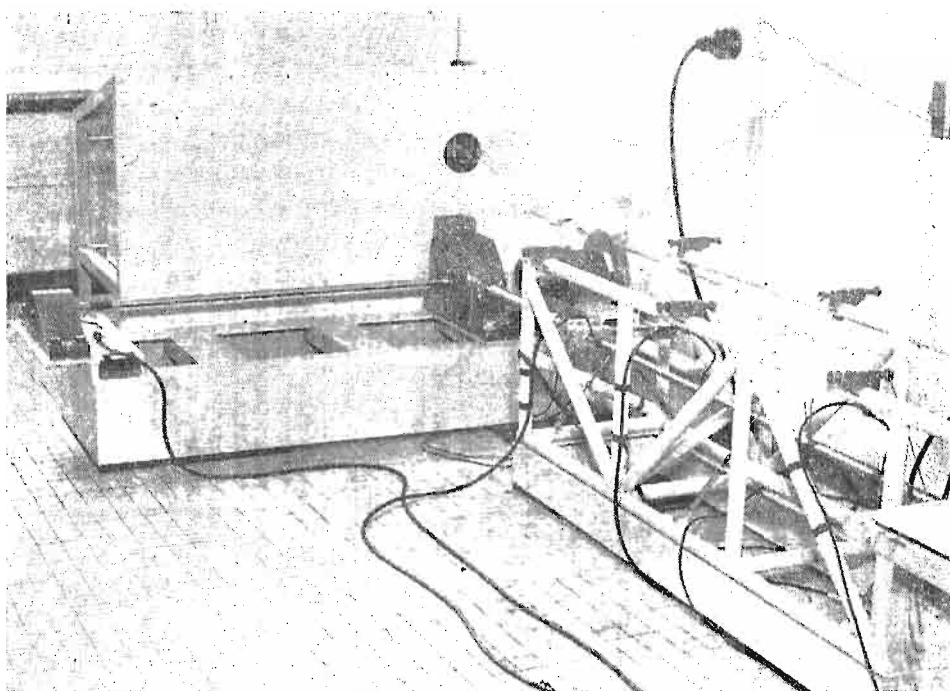
Rys. 7

~ 2 mm. Impulsy napięciowe z fotodiod podawane są na wejścia «start» i «stop» czasomierza liczącego Elpo typ C-552, oznaczonego przez 8. Ponieważ impulsy mogą być mierzone z dokładnością $\pm 1 \mu\text{s}$, a prędkości mierzone są rzędu do 30 ms^{-1} to błąd względny pomiaru prędkości wyniesie

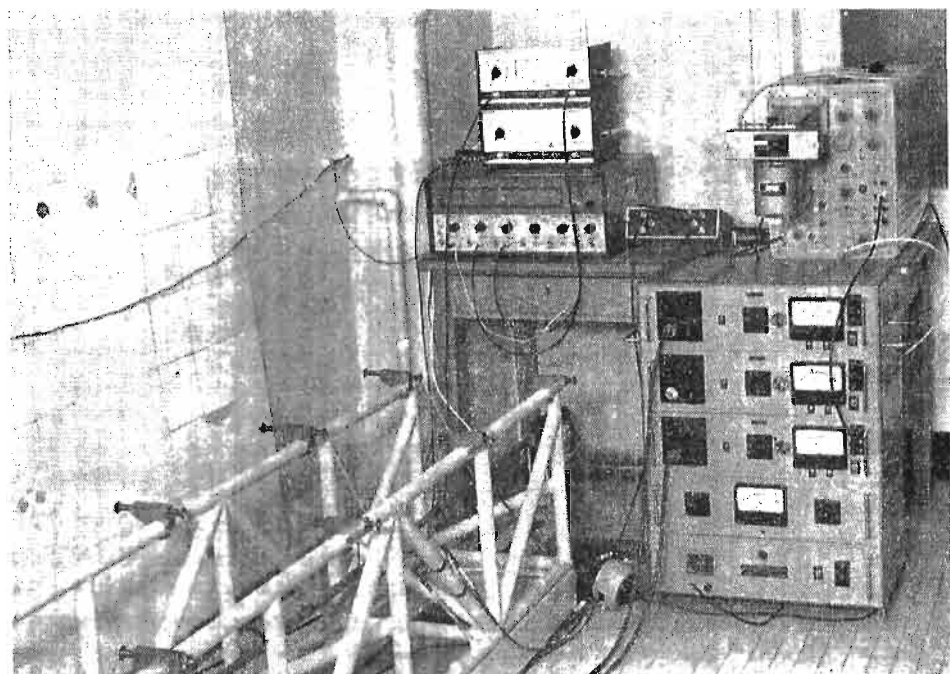
$$(5.1) \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{a} (\Delta a + v \Delta t),$$

gdzie a oznacza odległość pomiędzy fotodiodami; $\Delta a = \pm 0,25$ mm. Po podstawieniu podanych wartości otrzymuje się $\frac{\Delta v}{v} \approx 0,00325$. W pomiarach zastosowano szeroko

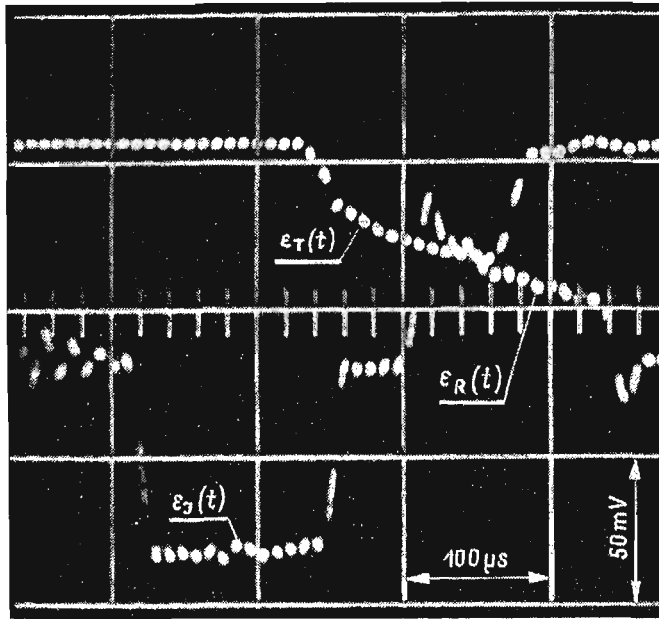
technikę tensometrii elektrooporowej. Kontrolę stopnia skręcania pręta 5 przeprowadza się przy pomocy tensometrów elektrooporowych T_6 , naklejonych pod kątem 45° do osi pręta. Tensometry T_6 są zasilane prądem zmiennym 6 V, 5 kHz z trzykanałowego mostka tensometrycznego 11, Chemiter typ ZPT-147/II. Drugi kanał mostka 11 jest wykorzystany do wyzwolenia podstawy czasu oscyloskopu 10. Gdy czoło impulsu fali sprężystej zaczyna propagować się wzdłuż pręta transmitującego, napotyka na czujnik T_1 , a następnie sygnał ten po wzmacnieniu w mostku 11 pojawia się na odpowiednim wejściu wyzwa-



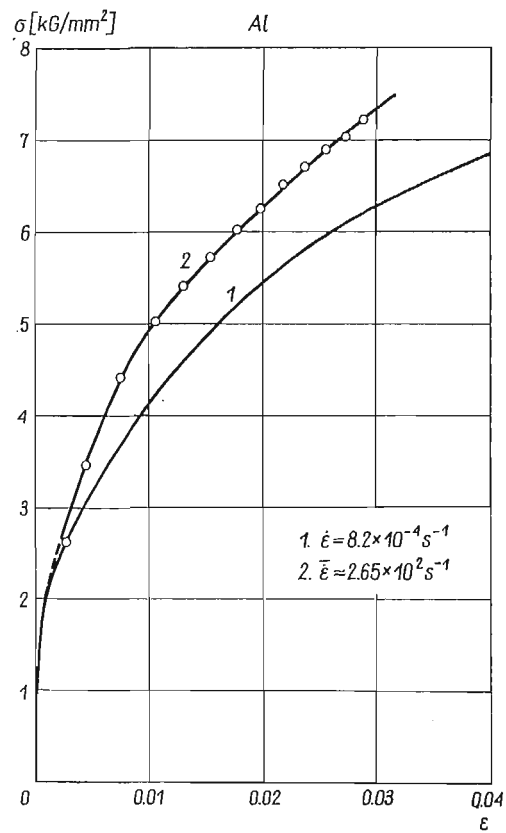
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

lania podstawy czasu oscyloskopu. Wreszcie tensometry T_2 , T_3 , T_4 i T_5 naklejone są w ten sposób, aby można było przeprowadzać próby dla diskutowanych poprzednio dwóch schematów ich rozmieszczenia. Użyto tu specjalnych tensometrów ITWL typu FK-1,5 o bazie pomiarowej zaledwie 1,5 mm, zasilanych wzmacniaczem 9 o pasmie przenoszenia od 20 Hz do około powyżej 1 MHz, zbudowanych w IPPT. Jest to wzmacniacz — zasilacz pracujący w oparciu o zasadę zasilania tensometrów stałym prądem. Sygnały ze wzmacniacza 9 są rejestrowane za pomocą oscyloskopu Orion typ TR-4401 z wkładką dwukanałową i przystawki fotograficznej Cossor. Częstotliwość zmiany kanałów wynosi około 0,1 MHz. Ogólny widok urządzenia przedstawiono na rys. 8, natomiast elektroniczną część pomiarową pokazano na rys. 9. Wreszcie zarejestrowany oscylogram trzech impulsów dla próbki aluminiowej przedstawia rys. 10.

Po odpowiednim pomiarze oscylogramu na mikroskopie pomiarowym i scałkowaniu równania (3.6) oraz przeliczeniu równań (3.7) i (3.11) uzyskano dynamiczną krzywą umocnienia przedstawioną na rys. 11 wraz ze statyczną krzywą umocnienia. Statyczną krzywą umocnienia uzyskano na specjalnie skonstruowanym przyrządzie do przeprowadzania dokładnych prób ściskania krótkich próbek wraz z odpowiednim układem rejestracji z wykorzystaniem rejestratora X-Y. Dokładny opis tego urządzenia wykracza jednak poza zakres niniejszego opracowania.

Również poza zakres obecnej pracy wykracza analiza deformacji krótkiej próbki ściskanej dynamicznie. Problem nie jest trywialny, a niektóre jego aspekty omówiono w pracy [24], w sumie to zagadnienie wymaga dalszych studiów.

Omówiona konstrukcja, która została wykonana w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN stwarza możliwości badania plastycznego zachowania się materiałów podczas krótkotrwałego obciążenia. Dokładniejsze poznanie tych własności może stanowić podstawę do bardziej racjonalnego projektowania niektórych procesów technologicznych. Z drugiej natomiast strony, jak wspomniano na wstępie, badania tego rodzaju mogą znacznie rozszerzyć horyzonty badawcze.

Literatura cytowana w tekście

1. J. E. DORN, A. GOLDBERG, T. E. TIETZ, *The Effect of Thermal-mechanical History on the Strain Hardening of Metals*, AIMEE Technical Publications, No. 2445 (Sept. 1948).
2. J. KLEPACZKO, *Effects of Strain Rate History on the Strain Hardening Curve of Aluminium*, Arch. Mech. Stos., 2, 19 (1967), 211.
3. J. KLEPACZKO, *Strain Rate History Effects for Polycrystalline Aluminium and Theory of Intersections*, Journ. Mech. Phys. of Solids, 5, 16 (1968), 255.
4. J. KLEPACZKO, *Generalized Conditions for Stability in the Tension Tests*, Int. Journal. Mech. Sciences, 4, 10 (1968), 297.
5. B. HOPKINSON, *A Method of Measuring the Pressure Produced in the Detonation of High Explosives or by the Impact of Bullets*, Phil. Trans., A213 (1914), 437.
6. H. KOLSKY, *Stress Waves in Solids*, Dover Publ., (1963).
7. R. M. DAVIES, *A Critical Study of the Hopkinson Pressure Bar*, Phil. Trans., A240 (1948), 375.
8. H. KOLSKY, *An Investigation of the Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading*, Proc. Phys. Soc., B62 (1949), 676.
9. T. E. HAUSER, J. A. SIMMONS, J. E. DORN, *Strain Rate Effects in Plastic Wave Propagation, Response of Metals to High Velocity Deformation*, Interscience (1960).

10. J. L. CHIDDISTER, L. E. MALVERN, *Compression-impact Testing of Aluminium at Elevated Temperatures*, Exp. Mech., 4, 3 (1963), 81.
11. U. S. LINDHOLM, *Some Experiments with the Split Hopkinson Pressure Bar*, J. Mech. Phys. of Solids, 6, 12 (1964), 317.
12. C. J. MAIDEN, S. J. GREEN, *Compression Strain-Rate Tests on Six Selected Materials at Strain Rates From 10^{-3} to 10^4 in/in/sec*, J. Appl. Mech., 3, 33 (1966), 496.
13. J. D. CHALUPNIK, E. A. RIPPERGER, *Dynamic Deformation of Metals under High Hydrostatic Pressure* Exp. Mech., 1, 6 (1966), 547.
14. K. TANAKA, T. MATSUO, M. KINOSHITA, T. MAEDE, *Strength of Mild Steel at High Strain Rate*, Trans. JSME, 33, 9 (1966), 21.
15. S. YOSHIDA, N. NAGATA, *Deformation of Polycrystalline Aluminium at High Strain Rates*, Trans. Japan Inst. of Metals, 4, 7 (1966) 273.
16. S. YOSHIDA, N. NAGATA, *Deformation of Aluminium Single Crystals at High Strain Rates*, Trans. Japan Inst. of Metals, 3, 9 (1967), 108.
17. S. YOSHIDA, N. NAGATA, *Deformation of Polycrystalline Aluminium at High Strain Rates*, Trans. Japan Inst. of Metals, 1, 9 (1967), 20.
18. U. S. LINDHOLM, L. M. YEAKLEY, *High Strain-rate Testing: Tension and Compression*, Exp. Mech. 1, 8 (1968), 1.
19. K. TANAKA, T. NOJIMA, M. KINOSHITA, *The Effect of Temperature and Strain Rate on the Strength of Aluminium*, Proc. 13th Japan Congr. on Materials Res., (1970), 101.
20. H. WATSON, *Experimental Determination of the Dynamic Stress-Strain Characteristics of Pure Iron*, SESA Fall Meeting, Houston, Tex. (1969).
21. R. M. DAVIES, *Stress Waves in Solids*, G. J. Taylor 70-th Aniv. Vol., Cambridge (1956).
22. J. DUFFY, J. D. CAMPBELL, R. H. HAWLEY, *On the Use of a Torsional Split Hopkinson Bar to Study Rate Effect in 1100-0 Aluminium*, Brown Univ. Rep., NSF-GK-4242/1, (1970).
23. J. D. CAMPBELL, J. L. LEWIS, *The Development and Use of a Torsional Split Hopkinson Bar for Testing Materials at Shear Strain Rates up to 15000 sec^{-1}* , Univ. of Oxford Rep. 1080, 69, (1969).
24. J. KŁEPACZKO, *Lateral Inertia Corrections in Impact Experiments*, Prace IPPT, 17 (1969).

Резюме

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СТЕРЖЕНЬ ГОПКИНСОНА

В работе даны и обсуждены результаты экспериментальных исследований пластических свойств металлов при высоких скоростях деформирования. Во вводной части статьи рассматривается весь диапазон скоростей деформации, встречающихся в экспериментальных исследованиях. Излагаются также экспериментальные методы, применяемые для отдельных диапазонов скоростей. Полный спектр скоростей деформаций содержит двенадцать десятичных порядков, от 10^{-6} сек^{-1} до 10^6 сек^{-1} .

Далее дается обзор метода модифицированного стержня Гопкинсона, состоящего в исследовании распространения волн в тонком цилиндрическом образце из мягкого материала, помещаемом между двумя заколенными стержнями. На одном конце системы двух стержней возбуждается продольная упругая волна, которая при переходе через образец, вызывает его деформацию. Анализ осциллограмм позволяет вычислить динамическую кривую упрочнения исследуемого образца.

Обсуждаются некоторые разновидности этого метода, как для случая сжатия образца, так и для его сдвига.

В заключение статьи описана конструкция, созданная в Отделе Механики Сплошных Сред Института Основных Проблем Техники ПАН. Приводятся предварительные результаты для мягкого алюминия.

S u m m a r y

THE MODIFIED SPLIT HOPKINSON PRESSURE BAR

The aim of this paper is to discuss some possibilities as well as experimental results which are connected with the behaviour of metals at high rates of strain. The complete spectrum of strain rates has been discussed having in mind a variety of experimental techniques in the particular ranges of spectrum. The strain rate spectrum takes into account twelve decimal orders, from 10^{-6} s^{-1} to 10^6 s^{-1} .

In the next part of the paper a more detailed description of the split Hopkinson pressure bar technique is given. In this technique the soft wafer specimen is inserted between two hard bars of the proper length. At the one end of this system the longitudinal elastic wave is developed (incident wave). When the incident wave passes the wafer specimen, the reflected and transmitted waves appear, and the specimen undergoes the plastic deformation. The proper analysis of the oscillographic record enables us to obtain a dynamic strain hardening curve.

Some further developments of the technique have been discussed, the torsional method in particular.

Finally, the split Hopkinson pressure bar, which was designed and made in the Institute of Fundamental Technical Research, has been shown. The preliminary experimental results for soft aluminium have also been shown.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 stycznia 1971 r.

ZASTOSOWANIE METODY SZTYWNYCH ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO OBLICZEŃ CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH USTROJÓW OKRĘTOWYCH*

JAN KRUSZEWSKI (GDAŃSK)

1. Wstęp

Do podstawowych problemów przy projektowaniu nowoczesnych ustrojów okrętowych należy zaliczyć zmniejszanie drgań kadłuba oraz zmniejszanie hałasu w pomieszczeniach, w których przebywają pasażerowie i załoga. Stały wzrost wymagań armatorów dotyczących komfortowych warunków odbywania podróży statkami sprawia, że wspomniane problemy nabierają coraz większego znaczenia.

Głównymi źródłami drgań i hałasów na statku są takie urządzenia, jak zespoły prądotwórcze, sprężarki, pompy itp. oraz śruba napędowa. W ostatnich latach pojawiło się wiele rozwiązań konstrukcyjnych mających na celu zmniejszenie drgań i hałasów pochodzących od wspomnianych źródeł. Do ciekawszych rozwiązań wprowadzanych ostatnio można zaliczyć tak zwane platformy «pływające» i wał śrubowy typu Grima.

Platforma «pływająca» umieszczana jest na podkładkach gumowych najczęściej w maszynie. Do tej platformy mocowane są urządzenia okrętowe, również za pomocą podkładek gumowych. Uzyskuje się w ten sposób dwustopniowe mocowanie sprężyste, co w rozwiązaniach rzeczywistych może powodować zmniejszenie nawet o 40 dB drgań akustycznych rozprzestrzeniających się drogą strukturalną na kadłub.

Wał śrubowy typu Grima należy do tak zwanych wałów elastycznych. Jego parametry dobiera się tak, aby poza pierwszą postacią drgań giętnych, kilka następnych posiadało amplitudy drgań własnych w miejscu zamocowania śruby napędowej w przybliżeniu równe zero. Pierwsza postać giętnych drgań własnych ma częstość znacznie mniejszą od istniejących częstości wymuszeń, natomiast pozostałe nie mogą być wzbudzone, ponieważ amplituda drgań własnych w miejscu przyłożenia siły wymuszającej jest prawie równa zero. Tego rodzaju rozwiązanie całkowicie eliminuje w praktyce najgroźniejsze źródło wymuszeń na statku, jakim jest śruba napędowa.

Oba rozwiązania wymagają podczas konstruowania wielokrotnego obliczania kilku, a niekiedy nawet kilkunastu częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań. Są to układy złożone, w związku z czym tradycyjne metody obliczeń są dla potrzeb biur projektowych zbyt pracochłonne i trudne.

* III nagroda na Ogólnopolskim Konkursie na prace teoretyczne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Warszawski PTMTS w 1970 r.

Celem niniejszej pracy jest opracowanie takiej metody, za pomocą której obliczenia częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań, nawet dla bardzo złożonych układów o wielu stopniach swobody, mogłyby być przeprowadzane szybko, a proces obliczeń był możliwie najprostszy. Pomyślano również o tym, aby opracowany algorytm nadawał się do łatwego zaprogramowania na elektroniczne maszyny cyfrowe.

Wspomniane na wstępie rozwiązania konstrukcyjne stanowią przykłady zastosowania metody przedstawionej w niniejszej pracy. Metoda ta polega na zastąpieniu rzeczywistego ustroju ustrojem złożonym z nieodkształcalnych brył, nazwanych sztywnymi elementami skończonymi (SES), połączonych ze sobą i z ostoją nieważkimi elementami sprężystymi o charakterystykach liniowych. Ustroje, w których masa rozłożona jest w sposób ciągły, zastępuje się pomyślanymi elementami sztywnymi i pomyślanymi elementami sprężystymi. Współczynniki sztywności takich elementów obliczane są z prostych zależności wytrzymałości materiałów. Metodę tę nazwano metodą sztywnych elementów skończonych. Umożliwia ona, co zostanie przedstawione w dalszych rozważaniach, opracowanie sposobu układania macierzy równań ruchu bez potrzeby każdorazowego wyprowadzania tych równań.

Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych nie ogranicza się jedynie do wymienionych na wstępie układów; można bowiem za jej pomocą obliczać drgania giętne i giętno-skrętne kadłubów, drgania lokalne nadbudówek, drgania giętne wałów na wielu podporach sprężystych, jak również drgania skrętne rozwidlonych układów napędowych. Omawiana metoda nadaje się również do obliczania częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań ram i rusztów złożonych z prętów prostych i zakrzywionych o zmiennym przekroju poprzecznym, dowolnie rozłożonej masie i dowolnie podpartych. Przy obliczaniu drgań giętnych uwzględniany jest wpływ sił stycznych, a także wpływ masowych momentów bezwładności.

W oparciu o przedstawioną metodę autor ułożył kilka programów na elektroniczną maszynę cyfrową Elliott 803 [4, 5, 6]. Programy te znalazły szerokie zastosowanie w pracach biur konstrukcyjnych przemysłu okrętowego umożliwiając wprowadzanie nowych rozwiązań i przynosząc gospodarce narodowej poważne oszczędności.

2. Oznaczenia

Oznaczenia w niniejszej pracy stanowią trudny problem. Skomplikowane postacie wzorów zawierających liczne sumy, obejmujące różne obszary parametrów, a ponadto macierze utworzone z bloków złożonych z mniejszych bloków prowadzą do skomplikowanych układów wskaźników. Zagadnienie to wymaga przeto już na wstępie dokładnego omówienia, co pozwoli uniknąć niejasności w trakcie czytania pracy. Zastosowany sposób oznaczeń może się wydawać w pierwszej chwili nieco skomplikowany, uzasadniony jest jednak względami łatwego programowania obliczeń na elektroniczne maszyny cyfrowe. Należy bowiem pamiętać, że metody elementów skończonych są ściśle powiązane z techniką nowoczesnych obliczeń numerycznych i muszą być opracowywane pod tym kątem widzenia.

2.1. Uwagi ogólne. Macierze kwadratowe i składowe bloki tych macierzy oznaczane są dużymi literami umieszczonymi w nawiasach kwadratowych, np. [A].

Macierze kolumnowe (wektory) oznaczane są również dużymi literami, lecz umieszczonymi w nawiasach sześciennych, np. $\{Q\}$. W przypadku składania wektorów z wyrazów innych wektorów stosuje się następujące oznaczenia:

$$\text{jeżeli} \quad \{Q\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \text{to} \quad \{Q\}_{i-j} = \begin{pmatrix} q_i \\ q_{i+1} \\ \vdots \\ q_j \end{pmatrix}.$$

Te same zasady stosuje się również w odniesieniu do macierzy diagonalnych o wyrazach z pojedynczymi wskaźnikami.

Wyrazy macierzy, bloków i wektorów oznaczane są małymi literami.

Wskaźniki określające położenie wyrazu w macierzy, bloku lub wektorze umieszczone są na dole, z wyjątkiem wskaźników określających położenie bloku w r -tym pasmie poziomym i p -tym pasmie pionowym macierzy n -tego stopnia (patrz np. wzór 4.11). Wskaźniki mogą być pojedyncze w przypadku wektorów i macierzy diagonalnych lub podwójne w przypadku macierzy i bloków kwadratowych.

Wskaźniki podwójne rozdzielone są przecinkiem. Pierwszy z nich oznacza numer wiersza lub pasma poziomego, drugi — numer kolumny lub pasma pionowego.

Wskaźnik określający ukierunkowanie danego parametru wzdłuż lub wokół osi układu odniesienia umieszczany jest na dole.

Wskaźnik określający przynależność parametru do sztywnego elementu skończonego umieszczany jest u góry i oznacza numer tego elementu.

Wskaźnik określający przynależność parametru do elementu sprężystego umieszczany jest również u góry. Składa się on z dwóch a niekiedy nawet trzech liter. Pierwsze dwie, rozdzielone myślnikiem, oznaczają numery sztywnych elementów skończonych, złączonych rozpatrywanym elementem sprężystym. Jeżeli parametr odnosi się również do sztywnego elementu skończonego, to z dwóch omawianych wyżej liter pierwsza jest numerem tego elementu skończonego. Trzecia litera, oddzielona od poprzednich przecinkiem, oznacza numer elementu sprężystego w rozpatrywanym połączeniu. Tak więc np. $z_s^{r-p,l}$ jest współrzędną punktu zamocowania l -tego elementu sprężystego, należącego do połączenia między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym, do r -tego sztywnego elementu skończonego, mierzoną wzdłuż osi x_s^r .

Wskaźnik parametru należącego do elementu sprężystego wchodzącego w skład połączenia między sztywnym elementem skończonym a ostoją oznacza się podwójną literą, będącą numerem tego elementu skończonego, np. $z_s^{r-r,l}$.

Macierz transponowaną oznacza się literą T umieszczoną u góry, np. $[Z]^T$.

W celu uniknięcia możliwości pomyłki przy podnoszeniu do potęgi wyrazów ze wskaźnikami umieszczonymi u góry wyrazy te umieszcza się w nawiasach (patrz np. wzór 4.6).

2.2. Wskaźniki.

- i — numer wyrazu wektora, wyrazu macierzy diagonalnej lub wiersza macierzy kwadratowej (tylko dla macierzy n -tego stopnia), ($i = 1, 2, \dots, n$);
- j — numer kolumny macierzy kwadratowej n -tego stopnia, ($j = 1, 2, \dots, n$);
- l — numer elementu sprężystego w połączeniu między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym, ($l = 1, 2, \dots, e^{r-p}$);

- p — numer sztywnego elementu skończonego z jednej strony połączenia;
 r — numer sztywnego elementu skończonego z drugiej strony połączenia;
 s — wskaźnik określający ukierunkowanie oznaczanego parametru w stosunku do osi układu odniesienia ($s = 1, 2, 3$ — określa, że parametr odnosi się do kierunku wzdłuż osi x_1^r, x_2^r, x_3^r , natomiast $s = 4, 5, 6$ — wokół tych osi);
 t — wskaźnik występujący obok wskaźnika s , oznacza on numer kolumny, tak jak wskaźnik s numer wiersza bloku $[A^{r,p}]$ lub $[B^{r,p}]$, (patrz np. wzór 4.10);
 α — numer pasma poziomego bloku $[B^{r,p}]$, w którym znajduje się blok $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$;
 β — numer pasma pionowego bloku $[B^{r,p}]$, w którym znajduje się blok $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$.

2.3. Oznaczenia szczegółowe wielkości podstawowych.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ — przekształcona macierz stałych składników równań ruchu;}$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [A^{1,1}] & [A^{1,2}] & \dots & [A^{1,u}] \\ [A^{1,2}]^T & [A^{2,2}] & \dots & [A^{2,u}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [A^{1,u}]^T & [A^{2,u}]^T & \dots & [A^{u,u}] \end{bmatrix} \text{ — przekształcona macierz stałych składników równań ruchu utworzona z bloków } [A^{r,p}];$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{1,2} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{1,n} & b_{2,n} & \dots & b_{n,n} \end{bmatrix} \text{ — macierz stałych składników równań ruchu (macierz ta może być również podzielona na bloki } [B^{r,p}] \text{ podobnie jak macierz } [A] \text{ na bloki } [A^{r,p}]);$$

$[C^{r-p,l}]$ — macierz kosinusów kierunkowych między układem osi $y_1^{r-p,l}, y_2^{r-p,l}, y_3^{r-p,l}$ a układem x_1^r, x_2^r, x_3^r ;

$[D]$ — macierz równań ruchu;

$[D^*]$ — przekształcona macierz równań ruchu;

e^{r-p} — liczba elementów sprężystych w połączeniu między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym;

$[G]$ — macierz diagonalna współczynników przekształcających;

$g_i = 1/\sqrt{m_i}$ — współczynnik przekształcający;

$[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$ — składowy blok bloku $[B^{r,p}]$;

$[I]$ — macierz jednostkowa;

$[K^{r-p,l}]$ — macierz diagonalna współczynników sztywności elementu sprężystego;

$k_s^{r-p,l}$ — współczynniki sztywności ($s = 1, 2, 3$ — liniowej, $s = 4, 5, 6$ — obrotowej);

$[M]$ — diagonalna macierz mas uogólnionych;

$[M^r]$ — diagonalny blok mas uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego;

m_s^r — masa uogólniona (dla $s = 1, 2, 3$ — masy biorące udział w ruchu w kierunku osi x_1^r, x_2^r, x_3^r , natomiast dla $s = 4, 5, 6$ — masowe momenty bezwładności wokół tych osi);

n — stopień macierzy równań ruchu;

$[0]$ — macierz zerowa;

$$\{Q\} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{Q^1\} \\ \{Q^2\} \\ \vdots \\ \{Q^n\} \end{pmatrix} \text{ — wektor współrzędnych uogólnionych;}$$

$\{Q^r\}$ — wektor — blok współrzędnych uogólnionych;

q_s^r — współrzędna uogólniona będąca przemieszczeniem środka masy (gdy $s = 1, 2, 3$) albo obrotem sztywnego elementu skończonego (gdy $s = 4, 5, 6$);

T — energia kinetyczna;

U — energia potencjalna;

u — liczba sztywnych elementów skończonych rozpatrywanego układu;

$\{V^{r-p,l}\}$ — wektor przemieszczeń punktu zamocowania elementu sprężystego w układzie $y_1^{r-p,l}, y_2^{r-p,l}, y_3^{r-p,l}$,

$\Delta v_s^{r-p,l}$ — odkształcenie elementu sprężystego;

x_s^r — oś nieruchomego układu odniesienia przynależnego do środka masy r -tego sztywnego elementu skończonego;

$y^{r-p,l}$ — oś nieruchomego układu odniesienia przynależnego do elementu sprężystego;

$[Z^{r-p,l}]$ — macierz współrzędnych zamocowania elementu sprężystego

δ — błąd w % metody sztywnych elementów skończonych względem innej metody;

ζ — liczba stopni swobody sztywnego elementu skończonego;

$\{\Xi\}$ — wektor postaci drgań, który jest zarazem wektorem względnych amplitud współrzędnych uogólnionych;

τ — czas;

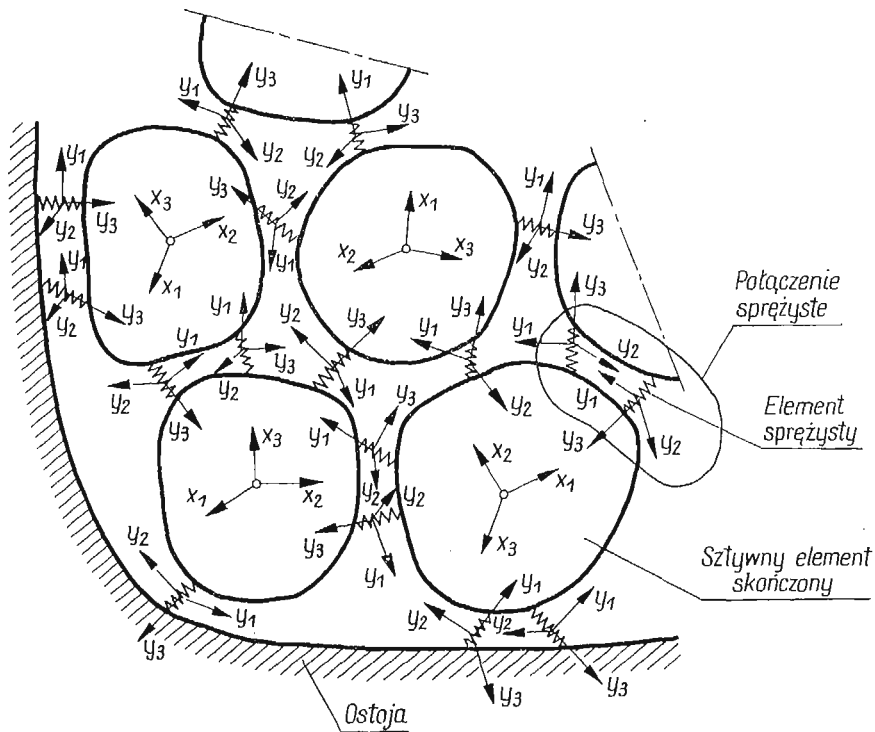
$\{\Psi\}$ — wektor własny macierzy $[A]$;

ω — częstość kołowa drgań własnych.

3. Model obliczeniowy

Założony w niniejszej pracy model obliczeniowy zastępujący rzeczywistą konstrukcję składa się (patrz rys. 1) z u elementów skończonych będących bryłami nieodkształcalnymi, z których każda ma sześć stopni swobody. Własności dynamiczne sztywnego elementu

skończonego określone są sześcioma masami uogólnionymi m_s^r , z których pierwsze trzy ($s = 1, 2, 3$) są masami biorącymi udział w ruchu w kierunku głównych centralnych osi bezwładności x_1^r, x_2^r, x_3^r , natomiast pozostałe ($s = 4, 5, 6$) masowymi momentami bezwładności wokół tych osi. W większości zagadnień technicznych można założyć, że masy biorące udział w ruchu we wszystkich trzech kierunkach są jednakowe. Istnieją jednak takie przypadki, w których należy przyjmować różne ich wartości. Z przy-



Rys. 1. Model obliczeniowy

padkami takimi można się spotkać w okrętownictwie przy obliczaniu drgań elementów kadłuba. Inny jest bowiem wpływ masy wody towarzyszącej na drgania pionowe, a inny na drgania poziome. W pracy zachowano zatem we wszystkich rozważaniach możliwość występowania różnych wartości mas w zależności od kierunku ich ruchu.

Szttywne elementy skończone połączone są dowolnie ze sobą lub z ostoją. Połączenia te składają się z dowolnej liczby elementów sprężystych przenoszących siły w kierunku ich głównych osi sztywności i momenty wokół tych osi. Główne osie sztywności posiadają takie własności, że siły działające w ich kierunku powodują odkształcenia elementu sprężystego tylko w kierunku działania tych sił. Założono ponadto, że elementy sprężyste są nieważkie, mają małe wymiary w stosunku do wymiarów sztywnych elementów skończonych i posiadają charakterystyki liniowe. Założenie charakterystyk liniowych jest możliwe do przyjęcia z uwagi na niewielkie odkształcenia elementów sprężystych występujące w praktyce. Każdy element sprężysty określony jest sześcioma współczynnikami sztyw-

ności $k_s^{r-p,l}$, przy czym pierwsze trzy ($s = 1, 2, 3$) są współczynnikami sztywności liniowych (rozciąganie i ścinanie), natomiast pozostałe ($s = 4, 5, 6$) współczynnikami sztywności obrotowych (zginanie i skręcanie). Współczynniki sztywności definiuje się jako stosunek siły uogólnionej do uogólnionego odkształcenia.

W celu zorientowania w przestrzeni poszczególnych układów odniesienia (każdy sztywny element skończony i każdy element sprężysty ma swój niezależny układ) należy znać dziewięć kosinusów kierunkowych kątów między osiami sąsiednich układów.

Rzeczywiste ustroje obliczane metodą sztywnych elementów skończonych można podzielić na trzy zasadnicze typy.

Pierwszy typ — to ustroje złożone ze sztywnych urządzeń, mocowanych na podkładkach sprężystych. Typowym przykładem takiej konstrukcji jest sztywna platforma umieszczona w maszynowni okrętu na podkładkach gumowych (platforma «pływająca») z urządzeniami ustawionymi na niej również na podkładkach gumowych. W ustrojach tego typu za sztywne elementy skończone przyjmuje się całe urządzenia traktowane jako bryły nieodkształcalne, natomiast za elementy sprężyste — wszelkiego rodzaju sprężyny, podkładki gumowe, resory, wałki skrętne itp.

Drugi typ — to ustroje o charakterze ciągłym, w których podział na sztywne elementy skończone dokonuje się w sposób pomyślany. Do tego typu ustrojów zalicza się wszelkiego rodzaju układy belkowe i płytowe o masie rozłożonej w sposób ciągły.

Trzeci typ — to ustroje składające się z obu poprzednio omówionych układów. Ustrojem takim będzie np. wspomniana wyżej platforma z urządzeniami okrętowymi, traktowana jednak jako odkształcalna i podzielona, w pomyślany sposób, na szereg sztywnych elementów skończonych.

Współczynniki sztywności elementów sprężystych w przypadku pierwszego typu ustroju wyznaczane są na ogół doświadczalnie i podawane przez producentów w katalogach. W przypadku drugiego typu ustroju elementami sprężystymi są elementy pomyślane. Tego rodzaju elementy sprężyste zastępują sztywności pewnych odcinków rzeczywistych układów ciągłych. Zastosowany model obliczeniowy można więc nazwać modelem o dyskretnie rozłożonej sztywności. Wartości współczynników sztywności takich elementów wyznacza się z prostych zależności wytrzymałości materiałów przy założeniu stałego rozkładu naprężeń w zastępowanym odcinku. Tak więc np. współczynnik sztywności zginania odcinka belki o długości Δl , momencie bezwładności przekroju poprzecznego I i module Younga E wynosi

$$(3.1) \quad k = \frac{EI}{\Delta l}.$$

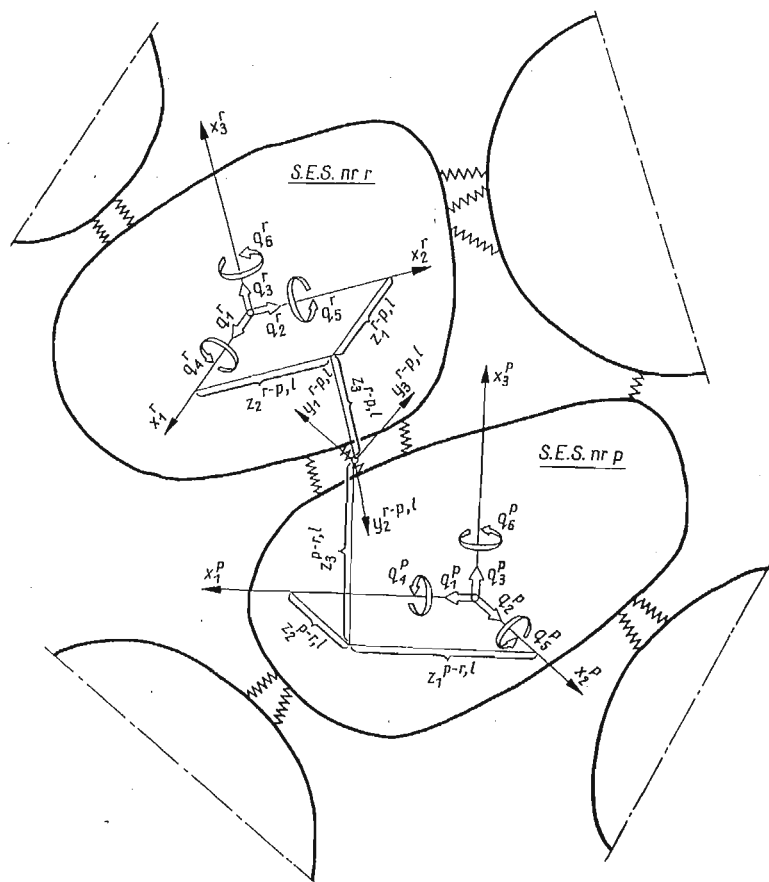
4. Macierz równań ruchu

Równania ruchu wyprowadzono w oparciu o równania Lagrange'a. Dla małych przemieszczeń w przypadku braku wymuszeń i przy pominięciu tłumienia mają one następującą postać:

$$(4.1) \quad \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s^r} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_s^r} = 0.$$

Dla każdego sztywnego elementu skończonego można ułożyć sześć takich równań, a więc $n = 6u$ dla całego układu. Pominięcie tłumienia jest uzasadnione, ponieważ jego wpływ na wartości częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań w większości rozwiązań konstrukcyjnych jest bardzo mały.

Jako współrzędne uogólnione przyjęto przemieszczenia liniowe środków mas sztywnych elementów skończonych w kierunkach ich głównych centralnych osi bezwładności i przemieszczenia obrotowe wokół tych osi (patrz rys. 2).



Rys. 2. Schemat oznaczenia współrzędnych uogólnionych

Energię kinetyczną układu przy takim założeniu współrzędnych oblicza się z następującej zależności:

$$(4.2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^u \sum_{s=1}^6 m_s^r (\dot{q}_s^r)^2.$$

Pochodne cząstkowe energii kinetycznej względem prędkości uogólnionych są równe

$$(4.3) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s^r} = m_s^r \dot{q}_s^r.$$

Energię potencjalną odkształcenia elementów sprężystych całego układu rozdzielono na dwie części. Pierwsza część obejmuje energię potencjalną zależną od współrzędnych uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego, druga — energię potencjalną niezależną od tych współrzędnych. Oznaczając pierwszą z nich przez U^r , a drugą przez U^* uzyskuje się następującą zależność:

$$(4.4) \quad U = U^r + U^*.$$

Ponieważ U^* nie zależy od współrzędnych uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego, pochodna cząstkowa całkowitej energii potencjalnej układu względem współrzędnych uogólnionych tego elementu jest równa

$$(4.5) \quad \frac{\partial U}{\partial q_s^r} = \frac{\partial U^r}{\partial q_s^r}.$$

W dalszych rozważaniach wystarczy więc obliczać energię potencjalną U^r , którą wyznacza się z zależności

$$(4.6) \quad U^r = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} \sum_{s=1}^6 k^{r-p,l} (\Delta v_s^{r-p,l})^2.$$

We wzorze (4.6) sumy obejmują energię potencjalną wszystkich elementów sprężystych doczepionych do r -tego sztywnego elementu skończonego. Jeżeli między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym nie ma połączenia, to oczywiście $k_s^{r-p,l} = 0$.

Odształcenia elementów sprężystych w układzie osi związanych z nimi są równe

$$(4.7) \quad \Delta v_s^{r-p,l} = v_s^{r-p,l} - v_s^{p-r,l}.$$

W celu uzależnienia energii potencjalnej U^r od współrzędnych uogólnionych należy się posłużyć następującymi zależnościami:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \{V^{r-p,l}\}_{1-3} &= [C^{r-p,l}] \cdot (\{Q^T\}_{1-3} - [Z^{r-p,l}] \cdot \{Q^T\}_{4-6}), \\ \{V^{r-p,l}\}_{4-6} &= [C^{r-p,l}] \cdot \{Q^T\}_{4-6}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.9) \quad [Z^{r-p,l}] = \begin{bmatrix} 0 & z_3^{r-p,l} & -z_2^{r-p,l} \\ -z_3^{r-p,l} & 0 & z_1^{r-p,l} \\ z_2^{r-p,l} & -z_1^{r-p,l} & 0 \end{bmatrix}.$$

Po prostych, lecz pracochłonnych przekształceniach pochodne cząstkowe energii potencjalnej względem współrzędnych uogólnionych r -tego sztywnego elementu skończonego przyjmują postać:

$$(4.10) \quad \frac{\partial U}{\partial q_s^r} = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^6 b_{s,l}^{r,p} q_s^p,$$

gdzie $b_{s,l}^{r,p}$ są wyrazami bloków $[B^{r,p}]$ macierzy $[B]$. Bloki te składają się z czterech mniejszych bloków $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$

$$(4.11) \quad [B^{r,p}] = \begin{bmatrix} b_{1,1}^{r,p} & b_{1,2}^{r,p} & \dots & b_{1,6}^{r,p} \\ b_{2,1}^{r,p} & b_{2,2}^{r,p} & \dots & b_{2,6}^{r,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{6,1}^{r,p} & b_{6,2}^{r,p} & \dots & b_{6,6}^{r,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{1,1}^{r,p}] & [H_{1,2}^{r,p}] \\ [H_{2,1}^{r,p}] & [H_{2,2}^{r,p}] \end{bmatrix}.$$

Bloki $[H_{\alpha,\beta}^{r,r}]$ należące do bloków $[B^{r,r}]$, które leżą na przekątnej macierzy $[B]$ ($p = r$), oblicza się z następujących zależności:

$$(4.12) \quad [H_{1,1}^{r,r}] = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{r-p,l}],$$

$$(4.13) \quad [H_{1,2}^{r,r}] = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{r-p,l}] \cdot [Z^{r-p,l}],$$

$$(4.14) \quad [H_{2,1}^{r,r}] = [H_{1,2}^{r,r}]^T,$$

$$(4.15) \quad [H_{2,2}^{r,r}] = \sum_{p=1}^u \sum_{l=1}^{e^{r-p}} ([C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{4-6} \cdot [C^{r-p,l}] + \\ + [Z^{r-p,l}]^T \cdot [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{r-p,l}] \cdot [Z^{r-p,l}]).$$

Bloki $[B^{r,r}]$ są symetryczne względem swoich przekątnych. Zawierają one wyrazy złożone z parametrów r -tego sztywnego elementu skończonego i parametrów doczepionych do niego elementów sprężystych. Każdy ze sztywnych elementów skończonych ma więc jakby swój odpowiednik w postaci bloku $[B^{r,r}]$.

Bloki $[H_{\alpha,\beta}^{r,p}]$ należące do bloków $[B^{r,p}]$, które leżą nad główną przekątną macierzy $[B]$ ($p > r$), oblicza się z zależności

$$(4.16) \quad [H_{1,1}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}],$$

$$(4.17) \quad [H_{1,2}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}] \cdot [Z^{p-r,l}],$$

$$(4.18) \quad [H_{2,1}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} [Z^{r-p,l}]^T \cdot [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}],$$

$$(4.19) \quad [H_{2,2}^{r,p}] = - \sum_{l=1}^{e^{r-p}} ([C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{4-6} \cdot [C^{p-r,l}] + \\ + [Z^{r-p,l}]^T \cdot [C^{r-p,l}]^T \cdot [K^{r-p,l}]_{1-3} \cdot [C^{p-r,l}] \cdot [Z^{p-r,l}]).$$

Bloki te zawierają wyrazy złożone z parametrów elementów sprężystych połączenia między r -tym i p -tym sztywnym elementem skończonym oraz z parametrów sztywnych elementów skończonych, złączonych za pomocą tego połączenia. Każde z połączeń łączących dwa sztywne elementy skończone ma zatem jakby swój odpowiednik w postaci bloku $[B^{r,p}]$. Bloki $[B^{p,r}] = [B^{r,p}]^T$, a więc macierz $[B]$ jest symetryczna względem głównej przekątnej.

Wstawiając zależności (4.3) i (4.10) do równań Lagrange'a (4.1) uzyskuje się dla każdego sztywnego elementu skończonego układ sześciu jednorodnych równań różniczkowych. Układ ten ma następującą postać:

$$(4.20) \quad [M^r] \cdot \{\ddot{Q}^r\} + \sum_{p=1}^u [B^{r,p}] \cdot \{Q^p\} = 0.$$

Układów takich jest oczywiście tyle, z ilu sztywnych elementów skończonych składa się rozpatrywany ustrój. Dla całego ustroju można więc ułożyć $n = 6u$ jednorodnych równań różniczkowych, które należy zapisać w następujący sposób:

$$(4.21) \quad [M] \cdot \{\ddot{Q}\} + [B] \cdot \{Q\} = 0.$$

Rozwiązanie takiego układu równań różniczkowych zakłada się w postaci harmonicznej

$$(4.22) \quad \{Q\} = \{E\} \sin \omega \tau.$$

Po wstawieniu zależności (4.22) do układu równań (4.21) uzyskuje się, po uproszczeniu przez wspólny czynnik $\sin \omega \tau$, układ n jednorodnych równań algebraicznych o następującej postaci:

$$(4.23) \quad ([B] - [M]\omega^2) \cdot \{E\} = 0.$$

Są to równania ruchu, a macierz charakteryzująca je przybiera postać

$$(4.24) \quad [D] = [B] - [M]\omega^2.$$

Jak wiadomo, układ jednorodnych równań algebraicznych ma tylko wtedy rozwiązania nietrywialne, jeżeli wyznacznik macierzy $[D]$ jest równy zeru. Własność tę wykorzystuje się w obliczeniach częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań w oparciu o rachunek macierzowy. W tym celu macierz $[D]$ przekształca się w ten sposób, aby współczynniki przy ω^2 były równe jedności, a wyznacznik tak przekształconej macierzy pozostał równy zeru. Dokonuje się tego mnożąc lewostronnie i prawostronnie macierz $[D]$ przez macierz współczynników przekształcających $[G]$. Tak przekształcona macierz równań ruchu jest równa

$$(4.25) \quad [D^*] = [G] \cdot [B] \cdot [G] - [G] \cdot [M] \cdot [G] \omega^2.$$

Wyrażenie $[G] \cdot [M] \cdot [G]$ jest macierzą jednostkową. Wprowadzając oznaczenie

$$(4.26) \quad [A] = [G] \cdot [B] \cdot [G],$$

przekształconą macierz równań ruchu można przedstawić w postaci

$$(4.27) \quad [D^*] = [A] - [I]\omega^2.$$

Ponieważ wyznacznik macierzy $[D^*]$ jest nadal równy zeru, obliczenie częstości drgań własnych rozpatrywanego ustroju sprowadza się do znalezienia wartości własnych macierzy $[A]$, zwanej dalej przekształconą macierzą stałych składników równań ruchu.

Ze wzoru (4.26) wynika, że wyraz macierzy $[A]$, leżący w i -tym wierszu i j -tej kolumnie oblicza się dzieląc analogiczny wyraz macierzy $[B]$ przez iloczyn pierwiastków kwadratowych z mas uogólnionych o wskaźnikach i i j

$$(4.28) \quad a_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{\sqrt{m_i m_j}}.$$

W praktyce tylko niektóre ustroje wymagają tak ogólnego modelu obliczeniowego. Rzeczywisty ustrój można najczęściej zastąpić układem, w którym centralne główne osie bezwładności wszystkich sztywnych elementów skończonych i główne osie sztywności

wszystkich elementów sprężystych są odpowiednio względem siebie równoległe. Proces obliczeń wyrazów macierzy $[A]$ znacznie się wtedy upraszcza, ponieważ macierze kosinusów kierunkowych stają się macierzami jednostkowymi. Dla niektórych układów można ponadto stosować sztywne elementy skończone o trzech, dwóch lub o jednym stopniu swobody.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o trzech stopniach swobody (q_1^r, q_2^r, q_6^r) stosowano przy obliczaniu drgań kadłuba w płaszczyźnie pionowej, z uwzględnieniem drgań wzdłużnych nadbudówek, symetrycznej platformy «pływającej» z urządzeniami oraz płaskiej ramy na podporach sprężystych.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o trzech stopniach swobody (q_3^r, q_4^r, q_5^r) stosowano przy obliczaniu drgań rusztów i płyt.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o dwóch stopniach swobody (q_2^r, q_6^r) stosowano przy obliczaniu drgań pionowych kadłuba, drgań giętnych wału śrubowego typu Grima i wałów na wielu podporach.

Układy złożone ze sztywnych elementów skończonych o jednym stopniu swobody (q_4^r) stosowano przy obliczaniu drgań skrętnych rozwidlonych układów napędowych.

Stosowanie sztywnych elementów skończonych o zmniejszonej liczbie stopni swobody pozwala zmniejszyć wymiar macierzy $[A]$ lub zwiększyć gęstość podziału elementów ciągłych przy zachowaniu niezmiennych wymiarów tej macierzy. Zmniejszenie wymiarów macierzy $[A]$ znacznie skraca czas obliczeń na elektronicznej maszynie cyfrowej, ponieważ jest on proporcjonalny do drugiej, a niekiedy nawet do trzeciej potęgi stopnia macierzy. Natomiast zwiększenie gęstości podziału zwiększa dokładność obliczeń.

Macierze równań ruchu układów złożonych ze sztywnych elementów skończonych o zmniejszonej liczbie stopni swobody uzyskuje się z macierzy układów przestrzennych przez skreślenie wierszy i kolumn odpowiadających pominiętym współrzędnym uogólnionym.

Jak już wspomniano, macierz $[A]$ nawet bardzo złożonych ustrojów można ułożyć w sposób automatyczny bez wyprowadzania równań ruchu. W tym celu należy:

1. Wykonać szkic układu obliczeniowego numerując kolejno sztywne elementy skończone od 1 do u (patrz przykład na rys. 4).

2. Przygotować tablicę (patrz rys. 3) do wpisywania wyrazów macierzy $[A]$ składającą się z u pasm poziomych i u pionowych (pasma te zaznaczono na rys. 3 grubymi liniami).

3. Podzielić każde pasmo poziome i pionowe na ζ części, uzyskując tablicę o $n = \zeta u$ wierszach i n kolumnach.

4. Ponumerować pasma poziome i pionowe od 1 do u .

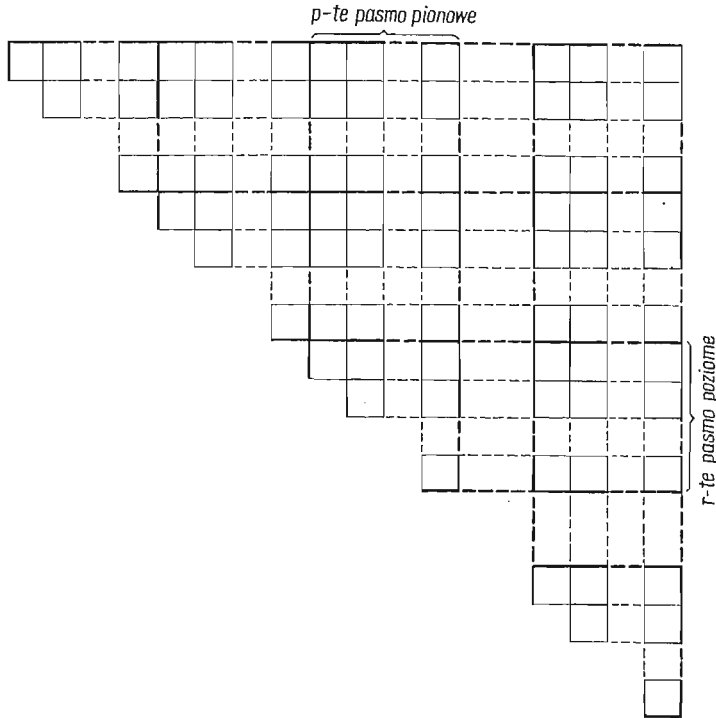
5. Ponumerować wiersze i kolumny każdego pasma zgodnie z wskaźnikami (s, t) współrzędnych uogólnionych sztywnych elementów skończonych (dla układów przestrzennych $s = t = 1, 2, \dots, 6$, a np. dla układów złożonych ze sztywnych elementów skończonych o dwóch stopniach swobody — $s = t = 2, 6$).

6. Obliczyć i wpisać do tablicy wyrazy bloków $[A^{r,p}]$ utworzonych przez przecięcie się r -tego pasma poziomego z p -tym pasmem pionowym według zależności

$$(4.29) \quad a_{s,t}^{r,p} = \frac{b_{s,t}^{r,p}}{\sqrt{m_s^r m_t^p}}.$$

Dla ułatwienia procesu układania macierzy $[A]$ podano niżej kilka wskazówek:

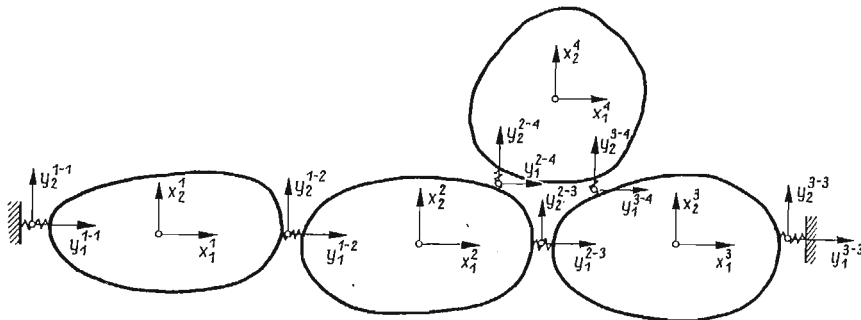
1. Ze względu na symetrię macierzy $[A]$ wykonuje się tylko część tablicy zawierająca wyrazy leżące na głównej przekątnej i nad nią. Przy obliczeniach na elektronicznych maszynach cyfrowych tylko te wyrazy wczytywane są do pamięci.



Rys. 3. Schemat tablicy do układania macierzy równań ruchu

2. Blok $[A^{r,r}]$ leżący na głównej przekątnej macierzy $[A]$ jest odpowiednikiem r -tego sztywnego elementu skończonego. Bloków takich jest tyle, z ilu sztywnych elementów skończonych składa się rozpatrywany ustrój.

3. Blok $[A^{r,p}]$ leżący nad główną przekątną macierzy $[A]$ jest odpowiednikiem połączenia między r -tym a p -tym sztywnym elementem skończonym. Bloków takich jest tyle,



Rys. 4. Układ złożony z czterech sztywnych elementów skończonych

ile połączeń między sztywnymi elementami skończonymi posiada rozpatrywany układ. Blok ten leży w r -tym pasmie poziomym i p -tym pasmie pionowym macierzy $[A]$.

4. Połączenia między sztywnymi elementami skończonymi a ostoją nie posiadają swoich odpowiedników w postaci niezerowych bloków $[A^{r,p}]$.

5. Pozostałe klatki są blokami zerowymi. Leżą one na przecięciu się pasm o numerach równych numerom sztywnych elementów skończonych, nie połączonych ze sobą.

Dla zilustrowania metody układania macierzy $[A]$ przedstawiono na rys. 4 ustrój złożony z czterech sztywnych elementów skończonych. Macierz $[A]$ tego ustroju ma następującą postać:

$$(4.30) \quad [A] = \begin{bmatrix} [A^{1,1}] & [A^{1,2}] & [0] & [0] \\ & [A^{2,2}] & [A^{2,3}] & [A^{2,4}] \\ & & [A^{3,3}] & [A^{3,4}] \\ & & & [A^{4,4}] \end{bmatrix}.$$

5. Częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań

Znając przekształconą macierz stałych składników równań ruchu, obliczenie częstości drgań własnych sprowadza się do wyznaczenia wartości własnych tej macierzy. Wartości własne są bowiem kwadratami częstości kołowych drgań własnych [patrz wzór (4.27)].

Jedną z najlepszych metod wyznaczania wartości własnych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań jest metoda Householdera. Autor stosował ją z niewielkimi zmianami we wszystkich programach wykorzystujących metodę sztywnych elementów skończonych. Polega ona na przekształceniu macierzy $[A]$ do postaci trójprzekątniowej (kodiagonalnej). Dokonuje się tego na drodze szeregu przekształceń ortogonalnych [3, 7, 8]. Wartości własne tak uzyskanej macierzy trójprzekątniowej są równe wartościom własnym macierzy wyjściowej. Oblicza się je w prosty sposób metodą tak zwaną bisekcji. Główną zaletą metody Householdera w połączeniu z metodą bisekcji jest jej duża stabilność i niezawodność, a ponadto możliwość obliczania tylko wybranych wartości własnych.

Wektory formy drgań oblicza się mnożąc lewostronnie wektory własne macierzy $[A]$ przez macierz przekształcającą $[G]$

$$(5.1) \quad \{\Xi\} = [G] \cdot \{\Psi\}.$$

Tak więc w celu obliczenia i -tej składowej postaci drgań należy i -tą składową wektora własnego macierzy $[A]$ podzielić przez pierwiastek kwadratowy z odpowiadającej masy uogólnionej

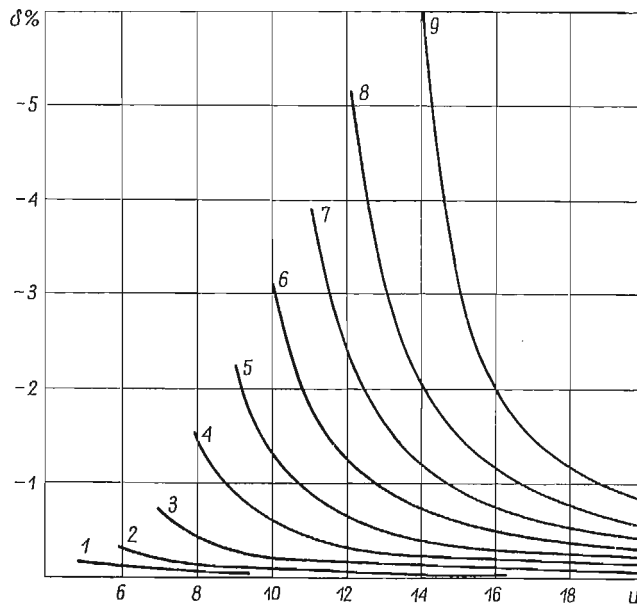
$$(5.2) \quad \xi_i = \frac{\psi_i}{\sqrt{m_i}}.$$

Wektory postaci drgań normuje się jeszcze przeważnie w ten sposób, aby maksymalne moduły ich składowych były równe jedności.

Przy obliczaniu wektorów własnych macierzy $[A]$ autor we wszystkich opracowywanych przez siebie programach stosował metodę WILKINSONA [9].

6. Dokładność metody

Dokładność metody sztywnych elementów skończonych, pomijając błędy wynikające z działań numerycznych, uzależniona jest od gęstości podziału układów ciągłych. Dla stwierdzenia dokładności metody wykonano obliczenia dziewięciu częstości drgań własnych belki swobodnej, dzieląc ją na różne liczby sztywnych elementów skończonych. Wyniki obliczeń porównano (patrz rys. 5) z wynikami uzyskanymi ze wzoru CSUPORA [2]. Wzór ten można uznać za bardzo dokładny, ponieważ uwzględniono w nim wpływ sił stycznych i wpływ masowych momentów bezwładności. Z rys. 5 wynika, że metoda



Rys. 5. Błąd obliczeń częstości drgań własnych swobodnej belki przyzmatycznej w zależności od gęstości jej podziału

sztywnych elementów skończonych daje dobre rezultaty nawet przy niezbyt gęstym podziale belki. Tak więc np. przy podziale na 10 sztywnych elementów skończonych błąd obliczeń pierwszych czterech częstości drgań własnych jest mniejszy od 1%. Wykonano również obliczenia drgań własnych prostokątnej płyty podpartej swobodnie na krawędziach, dzieląc ją na 25 sztywnych elementów skończonych. Błąd pierwszej częstości drgań własnych w stosunku do metody tradycyjnej wynosi poniżej 3%.

W Zakładzie Dynamiki Centralnego Ośrodka Konstrukcyjno-Badawczego Przemysłu Okrętowego w Gdańsku wykonano badania modelowe drgań platformy «pływającej» z jednym i z dwoma urządzeniami. W tablicy 1 zestawiono błędy obliczeń częstości drgań własnych, wykonanych metodą sztywnych elementów skończonych z wynikami uzyskanymi z wspomnianych pomiarów modelowych. Stwierdzono również bardzo dobrą zgodność obliczonych postaci drgań platformy z postaciami uzyskanymi z pomiarów.

Ponadto obliczono częstości pionowych drgań własnych kadłuba zbiornikowca o nośności 53000 DWT, dzieląc go na 21 sztywnych elementów skończonych. Dane dotyczące

Tablica 1. Zestawienie błędów obliczeń częstości drgań własnych, wykonanych metodą sztywnych elementów skończonych z wynikami uzyskanymi z pomiarów modelowych platformy «pływającej»

Stopień drgań		1	2	3	4	5	6	7	8	9
δ %	jedno urządzenie	1,9	2,2	-2,1	-0,2	0,7	1,4	—	—	—
	dwa urządzenia	-0,4	0,0	0,2	-2,6	4,7	4,1	0,3	-0,5	1,7

wszystkich parametrów statku potrzebnych do obliczeń oraz wyniki pomiarów zaczerpnięto z pracy [1]. Wartości błędów δ umieszczono w tablicy 2.

Tablica 2. Zestawienie błędów obliczeń częstości drgań własnych, wykonanych metodą sztywnych elementów skończonych z wynikami pomiarów kadłuba zbiornikowca

Stopień drgań	1	2	3	4	5	6	7	8
δ %	0,5	0,2	2,1	2,9	—	3,1	5,1	8,0

7. Wnioski

1. Metoda sztywnych elementów skończonych pozwala ująć w jeden algorytm obliczenia częstości drgań własnych i odpowiadających im postaci drgań dowolnych układów o charakterystykach liniowych.

2. Przy obliczaniu macierzy równań ruchu nie ma potrzeby wyprowadzania tych równań, opracowano bowiem zasady umożliwiające budowanie tych macierzy w sposób automatyczny.

3. Dokładność metody, nawet przy niezbyt gęstym podziale rzeczywistego ustroju na sztywne elementy skończone, jest dla celów praktycznych bardzo dobra.

4. Stosując metodę sztywnych elementów skończonych można przeprowadzać obliczenia układów złożonych, dla których metody tradycyjne są zbyt pracochłonne lub niekiedy nawet niemożliwe do zastosowania.

5. Metoda jest przeznaczona do wykonywania obliczeń za pomocą elektronicznych maszyn cefrowych. Przygotowanie danych jest proste, a proces obliczeń zautomatyzowany, w związku z czym wiele skomplikowanych obliczeń mogą wykonywać pracownicy techniczni nie posiadający większego przygotowania teoretycznego.

6. Czas potrzebny do przeprowadzenia obliczeń jest w porównaniu do innych metod bardzo krótki.

7. Omówiona metoda znalazła szerokie zastosowanie w polskim przemyśle okrętowym, szczególnie przy projektowaniu najnowszych rozwiązań konstrukcyjnych.

8. Metodą sztywnych elementów skończonych można również obliczać częstości drgań własnych i odpowiadające im postacie drgań wszelkiego rodzaju ram, rusztów i płyt o zmiennych przekrojach poprzecznych i nierównomiernie rozłożonej masie, z uwzględnieniem wpływu sił stycznych i masowych momentów bezwładności.

Literatura cytowana w tekście

1. G. ANDERSON, K. NORRAND, *A method for the calculation of vertical vibration with several nodes and some other aspects of ship vibration*, RINA, (1969).
2. D. CSUPOR, *Methoden zur Berechnung der freien Schwingungen des Schiffskörpers*, Jahrbuch der STG, 50 Band, (1956).
3. A. S. HOUSEHOLDER, F. L. BAUER, *On certain methods for expanding the characteristic polynomial*, Numerische Meth., Nr 1 (1959).
4. J. KRUSZEWSKI, *Obliczenia drgań skrętnych okrętowych układów napędowych. Opis programu Nr 27-TWD na EMC Elliott 803*, Wyd. wewn. COKB Gdańsk (1964).
5. J. KRUSZEWSKI, *Obliczenia drgań skrętnych rozwidlonych układów napędowych. Opis programu Nr 29-TWD na EMC Elliott 803*, Wyd. wewn. COKB Gdańsk (1964).
6. J. KRUSZEWSKI, *Obliczenia drgań konstrukcji okrętowych za pomocą sztywnych elementów skończonych o pięciu podstawowych kombinacjach stopni swobody*. Wyd. wewn. Zakł. Mech. i Wytr. Mat. PG, (1969).
7. J. KRUSZEWSKI, Z. POWIERZA, *Optymalizacja macierzy dynamicznych równań ruchu układów napędowych ze względu na czas potrzebny do wyznaczenia częstości skrętnych drgań własnych*, Zbiór Prac WSMW, Nr 21 (1968).
8. J. H. WILKINSON, *Householder's method for the solution of the algebraic eigenproblem*, Computer J., Nr 3 (1960).
9. J. H. WILKINSON, *The calculation of the eigenvectors of cödiagonal matrices*, Computer J., Nr 7 (1958).

Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЖЕСТКИХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
К РАСЧЁТАМ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СУДОВЫХ СИСТЕМ

Метод жестких конечных элементов состоит в замене действительной конструкции расчетной системой недеформируемых тел (жестких конечных элементов), соединенных между собой или с основанием невесомыми упругими элементами с линейными характеристиками. Разработаны алгоритмы расчетов матричных уравнений движения. Метод приспособлен к проведению расчетов с помощью ЭВЦМ. На примере свободной призматической балки показана точность метода в зависимости от шага деления (рис. 5). Рассматриваемый метод нашёл широкое применение в судостроении, особенно при расчетах колебаний корпусов, изгибных колебаний валов на многих упругих опорах и винтовых валов Грима, колебаний т. н. плавающих платформ с устройствами на резиновых подкладках, крутильных колебаний разветвленных приводных систем. Метод жестких конечных элементов весьма полезен также при расчетах частот собственных колебаний рам, колосниковых решеток и плит с переменными сечениями и с неравномерно распределенной массой. При этих расчетах учитывается влияние касательных сил и массовых моментов инерции.

S u m m a r y

APPLICATION OF THE RIGID FINITE ELEMENTS METHOD TO CALCULATION
OF NATURAL VIBRATION FREQUENCIES OF SHIP STRUCTURES

The method of calculation consists in replacing the actual system by a system of rigid finite elements interconnected and attached to the foundation by elastic elements with linear characteristics. The matrix of the equations of motion is constructed directly without their explicit derivation. The accuracy of the

computerized method depending upon the number of finite elements (see fig. 5) is shown on the example of a simply supported prismatic beam. The method described is widely applied in shipbuilding industry, especially for calculations of ship hull vibrations, bending vibrations of the shafting fitted on many elastic supports, bending vibrations of elastic Grim-type propeller shafts, vibrations of the «raft» with flexibly fitted equipment and torsional vibrations of branch propulsion systems. The method of rigid finite elements is most useful in calculation of natural vibration frequencies of the frames and grillages with varying cross-sections. The influence of shearing and inertia forces are taken into account.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 stycznia 1971 r.

HIPOTEZA DEKOHEZJI MIKROOBJĘTOŚCI
PODDANEJ DZIAŁANIU ZMIENNYCH NAPRĘŻEŃ*

ZOFIA H A N D Z E L (WARSZAWA)

Nie jest bynajmniej ujmą błędzenie w teoriach i hipotezach. Nasze hipotezy są raczej dla teraźniejszości niż dla przyszłości. Są one niezbędne dla wytłumaczenia poznanych faktów, ożywienia ich i zmobilizowania, a nade wszystko dla utorowania drogi nowym odkryciom.

Richard Willstaetter (1872–1942)

1. Wprowadzenie

Zjawisko zmęczenia metali, zachodzące pod wpływem zmiennych obciążeń, znane jest już od przeszło stu lat; nie ma jednak dotąd teorii, która tłumaczyłaby w wyczerpujący sposób związane z tym zjawiskiem procesy. Wynika to stąd, że zjawisko jest bardzo skomplikowane, zależne od całego zespołu czynników. Wielu z autorów [10, 16], podejmujących próbę teoretycznego wyjaśnienia procesu zmęczenia, sprowadziło swoje rozważania do ustalenia praw rozprzestrzeniania się mikropęknięć zmęczeniowych. Podejście takie obrazowo przedstawia omawiany problem, ale prowadzi jednocześnie do zbytniego uproszczenia zjawiska, zwłaszcza gdy rozpatruje się je z punktu widzenia fizyki i budowy metali.

Wśród autorów hipotez zmęczeniowych [1, 3, 4, 6, 14, 17, 21, 24, 27, 28] dominuje pogląd, że powstanie złomu zmęczeniowego determinowane jest procesami zachodzącymi w mikroobjętościach metali. Rozpowszechniony jest również pogląd [8, 22, 25, 27], że zjawisko zmęczenia metali wiąże się z defektami sieci krystalicznej.

W świetle tych poglądów, dla wyjaśnienia zjawiska zmęczenia metali, postawiono w niniejszej pracy hipotezę dekohezji mikroobjętości, uwzględniającą defekty sieci krystalicznej.

2. Prawdopodobieństwo wystąpienia dekohezji mikroobjętości

W celu opisu zjawisk zachodzących w metalu pod wpływem zmiennych obciążeń zakładamy, że metal ma taką mikrostrukturę jaką przyjęli MURZEWSKI [18] i VOLKOV [26].

*^o III nagroda na Ogólnopolskim Konkursie na prace teoretyczne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Warszawski PTMTS w 1970 roku.

Dzielią oni ośrodek na elementy objętościowe makroskopowe Ω (I rzędu) i mikroskopowe ω (II rzędu), czyli na tzw. punkty fizyczne pierwszego i drugiego rodzaju.

Wymiary elementów makroskopowych Ω szacują autorzy na 10^{-2} cm, tak że elementy te mogą podlegać badaniom laboratoryjnym, wymiary zaś elementów mikroskopowych ω na 10^{-5} cm, tak żeby zachowały one jeszcze własności materii ciągłej. Przy tak pomysłanym geometrycznym podziale ośrodka, liczba elementów ω w Ω równa

$$(2.1) \quad M = \left(\frac{10^{-2}}{10^{-5}} \right)^3 = 10^9.$$

jest tego samego rzędu, co liczba makroelementów Ω w objętości części konstrukcyjnych o wymiarach liniowych 10 cm tzn.

$$(2.2) \quad K = \left(\frac{10}{10^{-2}} \right)^3 = 10^9.$$

Rozważania ograniczamy do ośrodków quasi-jednorodnych, sprężysto-kruchych, początkowo doskonale izotropowych. Przez quasi-jednorodność rozumiemy jednorodność w skali makroskopowej przy jednoczesnej niejednorodności w skali mikroskopowej. Sprężysto-krucha własność mikroelementu polega na tym, że po odkształceniu sprężystym i osiągnięciu przez mikronapężenie s odpowiedniej mikrowytrzymałości P następuje natychmiastowy spadek mikronapężenia do zera.

Sprężysto-krucha własność makroelementu polega na tym, że aż do granicy sprężystości materiał podlega prawu Hooke'a, następnie mogą zachodzić w nim nieliniowe odkształcenia na skutek spękania, czyli tzw. plastyczność destrukcyjna. W związku z tak przyjętym modelem ośrodka rozróżniamy zniszczenie mikroskopowe, czyli drugiego rodzaju i makroskopowe, czyli pierwszego rodzaju.

Zakładamy, że w objętości V ciała działa niejednorodne pole mikronaprzeżeń s , gdzie s_k ($k = 1, 2, \dots, M$) oznacza napężenie działające na mikroelement ω_k . Jeżeli granica mikrowytrzymałości elementu ω_k wynosi P_k , to warunek naruszenia spójności tego mikroelementu zapisujemy w postaci

$$(2.3) \quad s_k \geq P_k.$$

Zarówno mikrowytrzymałość P , jak też mikronapężenie s są zmiennymi losowymi. Autorzy statystycznych kryteriów dekohezji [18, 19, 26] dla uproszczenia obliczeń tylko jedną z tych wielkości uważają za zmienną losową, a drugą — ustalają.

W niniejszej pracy zarówno mikrowytrzymałość P , jak i mikronapężenie s rozpatruje się jako zmienne losowe, co znacznie komplikuje wyznaczenie prawdopodobieństwa dekohezji mikroobjętości. W dalszej części pracy zostanie podjęty ten problem w odniesieniu do pewnego szczególnego przypadku.

3. Wpływ zmiennych naprzeżeń na wzrost gęstości dyslokacji w mikroobjętości

Obecnie uznaje się, że powstawanie złomów zmęczeniowych odbywa się z udziałem defektów sieci krystalicznej. Postawiona w niniejszej pracy hipoteza uwzględnia wpływ gęstości dyslokacji na dekohezję mikroobjętości, natomiast pomija wpływ defektów punk-

towych. Wiąże się to z tym, że defekt punktowy powoduje zakłócenia stateczności sieci krystalicznej jedynie w otoczeniu danego punktu, natomiast dyslokacja powoduje zakłócenia wzdłuż całej linii dyslokacji i tym samym ma większy udział w tym procesie.

Liczba dyslokacji w mikroobjętości, na którą działają zmienne naprężenia, według teorii dyslokacji [7, 9, 15], zależy od liczby cykli N oraz od wartości maksymalnego i minimalnego naprężenia w cyklu.

Zmiana gęstości dyslokacji w mikroobjętości wywołana działaniem N cykli zmian naprężeń σ będzie wyznaczona zależnością

$$(3.1) \quad f(\sigma, N) = \frac{\partial^2 \varrho}{\partial N \partial \sigma},$$

gdzie: ϱ — gęstość dyslokacji.

O zmianie gęstości dyslokacji, jaka zachodzi w mikroobjętości wraz ze wzrostem liczby cykli, można sądzić na podstawie eksperymentu przeprowadzonego przez GURJEWĄ i STOLAROWĄ [11]. Doświadczenie to polegało na tym, że próbki poddano działaniu zmiennych obciążeń, po uprzednim trawieniu ich powierzchni. W wyniku obserwacji i pomiarów nierówności pojawiających się na powierzchni badanych próbek ustalono, że szybkość wzrostu tych nierówności jest odwrotnie proporcjonalna do liczby cykli obciążeń. Zdaniem autorów cytowanego doświadczenia, wychodzące na powierzchnię próbki nierówności są związane z lokalnym «puchnięciem» metalu, co można tłumaczyć miejscowym wzrostem gęstości dyslokacji.

W związku z powyższym zakładamy, że przyrost gęstości dyslokacji w mikroobjętości jest odwrotnie proporcjonalny do liczby cykli N i wprost proporcjonalny do współczynnika κ

$$(3.2) \quad f(\sigma, N) = \frac{\kappa}{N}.$$

Współczynnik κ w ogólnym przypadku wyrażony jest przez zależność:

$$(3.3) \quad \kappa = \kappa(\sigma_2, \sigma_1, \varrho_0, R_r, \dots),$$

gdzie: σ_2 — maksymalne naprężenie w cyklu,

σ_1 — minimalne naprężenie w cyklu,

ϱ_0 — początkowa gęstość dyslokacji,

R_r — wytrzymałość na rozrywanie,

a kropki oznaczają inne parametry wpływające na zmianę gęstości dyslokacji, jak np. kształt cyklu, częstotliwość zmian obciążeń, temperatura.

W niniejszej pracy pomija się wpływ częstotliwości, kształtu cyklu itp. na zmianę gęstości dyslokacji. Gęstość dyslokacji będzie zależeć również od historii obciążenia.

W celu wyznaczenia współczynnika κ rozpatrujemy zmianę gęstości dyslokacji w poszczególnych ćwiartkach cyklu zmian naprężeń. Zmianę gęstości dyslokacji zachodzącą w czasie trwania jednego cyklu rozważał już ODING [22].

ODING analizował zmianę gęstości dyslokacji, zachodzącą podczas symetrycznego cyklu zmian obciążeń. Uważał on, że w pierwszej ćwiartce cyklu, tj. podczas obciążenia, ruch dyslokacji prowadzi do takich zmian w sieci krystalicznej, które przeszkadzają

powrotowi części dyslokacji do ich źródeł podczas drugiej ćwiartki cyklu, tzn. podczas odciążania próbki. W trzeciej ćwiartce cyklu obciążanie ma znak odwrotny aniżeli w ćwiartce pierwszej. Dla tej części cyklu jest właściwy mniejszy opór odkształcenia (efekt Bauschingera). ODING tłumaczy to częściowym powrotem tych dyslokacji, które przemieszczały się w czasie pierwszej ćwiartki i nie zdążyły powrócić do swych wyjściowych pozycji podczas drugiej ćwiartki cyklu. Czwarta ćwiartka cyklu, w której następuje ponowne odciążenie próbki, nie różni się w zasadzie od drugiej ćwiartki. Następne cykle są podobne do cyklu pierwszego, zmienia się tylko liczba dyslokacji.

Zmianę gęstości dyslokacji, zachodzącą na przestrzeni jednego cyklu, eksperymentalnie wykazał GOŁASKI [9]. Zastosował on ultradźwiękową metodę obserwacji procesu zmęczenia, która polega na pomiarze zmian tłumienia zachodzących podczas jednego cyklu. Badania objęły próby zmęczeniowe stali niskowęglowej wyższej jakości, obciążonej cyklami wahadłowymi przy rozciąganiu-ściskaniu. Wykazał on, że tłumienie fal ultradźwiękowych zmienia się w czasie trwania jednego cyklu w zależności od wartości siły działającej na próbkę. GOŁASKI w oparciu o przeprowadzone doświadczenia wyciągnął następujące wnioski:

1) W próbce obciążonej zmiennym naprężeniem o określonej amplitudzie tłumienie fal ultradźwiękowych w czasie trwania jednego cyklu zmienia się wraz ze zmianą siły działającej na próbkę.

2) Wartość zmian tłumienia w czasie trwania jednego cyklu zależy od amplitudy naprężenia oraz od liczby przebytych cykli.

3) Ze zmianą liczby cykli obciążeń, zmienia się liczba dyslokacji.

4) Zaobserwowane zmiany tłumienia pozwalają sądzić, że intensywność narastania uszkodzeń zmęczeniowych jest znacznie większa w czasie, gdy próbka obciążona jest naprężeniami rozciągającymi, niż w czasie, gdy próbka jest ściskana.

W oparciu o wnioski GOŁASKIEGO założymy, że współczynnik κ charakteryzujący zmianę gęstości dyslokacji w cyklu zależy od σ i $\text{sign } \dot{\sigma}$.

Współczynnik κ będzie również zależał od początkowej gęstości dyslokacji ρ_0 oraz od wartości wytrzymałości na rozrywanie R_r . Zakładamy więc:

$$(3.4) \quad \kappa = \kappa(\sigma, \text{sign } \dot{\sigma}, R_r, \rho_0).$$

Wzrost gęstości dyslokacji, zgodnie z rozważaniami ODINGA [22], będzie zachodzić, gdy $\dot{\sigma} > 0$, $\sigma > 0$ oraz gdy $\dot{\sigma} < 0$, $\sigma < 0$. W czasie trwania pozostałych części cyklu zmiana gęstości dyslokacji jest nieznaczna i pomijamy ją. Ilustruje to rys. 1.

Porównując wzory (3.1) i (3.2) otrzymujemy

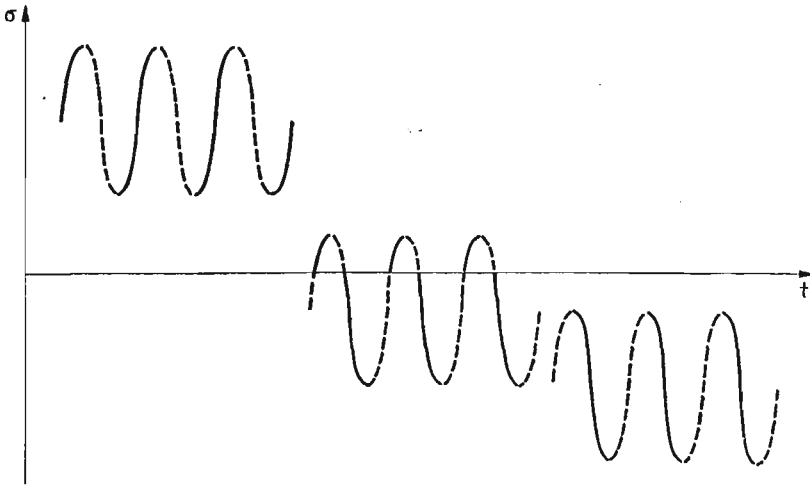
$$(3.5) \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial N \partial \sigma} = \frac{\kappa}{N}.$$

Całkując równanie (3.5) przy założeniu, że dla $N = 1$, $\rho = \rho_0$ otrzymujemy wyrażenie na przyrost gęstości dyslokacji jaki nastąpił w mikroobjętości na skutek działania N cykli zmian naprężeń:

$$(3.6) \quad \rho - \rho_0 = \int_1^N \int_{\sigma} \frac{\kappa}{N} d\sigma dN = \ln N \int_{\sigma} \kappa d\sigma,$$

gdzie: $\int \kappa d\sigma = \bar{\kappa}$ oznacza wartość współczynnika charakteryzującego zmianę gęstości dyslokacji w cyklu.

Aby obliczyć wartość współczynnika $\bar{\kappa}$ w zależności od znaku działającego naprężenia i znaku pochodnej naprężenia, wprowadzamy do granicy całki we wzorze (3.6) funkcję skokową Heaviside'a.



Rys. 1. Różne przypadki zmiennego obciążenia. (W pracy uwzględniono zmianę gęstości dyslokacji w tych częściach cyklu, które są zarysowane linią ciągłą)

Przyrost gęstości dyslokacji podczas rozciągającej części cyklu ($\dot{\sigma} > 0$, $\sigma > 0$) wynosi

$$(3.7) \quad \bar{\kappa}_r = \frac{\varrho_0}{R_r} (\text{sign } \dot{\sigma}) \int_{\sigma_1 \theta(\sigma_1)}^{\sigma_2 \theta(\sigma_2)} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma,$$

gdzie: ϱ_0 — początkowa gęstość dyslokacji,
 R_r — wytrzymałość na rozrywanie,
 σ_2 — maksymalne naprężenie w cyklu,
 σ_1 — minimalne naprężenie w cyklu,
 $\theta(\sigma)$ — funkcja skokowa Heaviside'a.

Przyrost gęstości dyslokacji podczas ściskającej części cyklu ($\dot{\sigma} < 0$, $\sigma < 0$) wynosi

$$(3.8) \quad \bar{\kappa}_s = \frac{\varrho_0}{R_r} (\text{sign } \dot{\sigma}) \int_{\sigma_2 \theta(-\sigma_2)}^{\sigma_1 \theta(-\sigma_1)} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma.$$

Współczynnik $\bar{\kappa}$ charakteryzujący zmianę gęstości dyslokacji w cyklu wynosi

$$(3.9) \quad \bar{\kappa} = \bar{\kappa}_r + \bar{\kappa}_s.$$

Po wstawieniu wzoru (3.7) i (3.8) do (3.9) otrzymamy ostateczny wzór na wartość współczynnika $\bar{\kappa}$ dla cyklu, w którym obciążenie zmienia się w granicach od σ_2 do σ_1

$$(3.10) \quad \bar{\kappa} = \frac{\rho_0}{R_r} \left(\int_{\sigma_1 \theta(\sigma_1)}^{\sigma_2 \theta(\sigma_2)} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma - \int_{\sigma_2 \theta(-\sigma_2)}^{\sigma_1 \theta(-\sigma_1)} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma \right).$$

Współczynnik charakteryzujący zmianę gęstości dyslokacji w cyklu zgodnie z wzorem (3.10) wynosi:

a) gdy $\sigma_2 > 0$ i $\sigma_1 > 0$

$$(3.11) \quad \bar{\kappa} = \frac{\rho_0}{R_r} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma = \rho_0 \left(e^{\frac{\sigma_2}{R_r}} - e^{\frac{\sigma_1}{R_r}} \right),$$

b) gdy $\sigma_2 > 0$ i $\sigma_1 < 0$

$$(3.12) \quad \bar{\kappa} = \frac{\rho_0}{R_r} \int_0^{\sigma_2} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma - \frac{\rho_0}{R_r} \int_0^{\sigma_1} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma = \rho_0 \left(e^{\frac{\sigma_2}{R_r}} - e^{\frac{\sigma_1}{R_r}} \right),$$

c) gdy $\sigma_2 = 0$ i $\sigma_1 < 0$

$$(3.13) \quad \bar{\kappa} = -\frac{\rho_0}{R_r} \int_0^{\sigma_1} e^{\frac{\sigma}{R_r}} d\sigma = \rho_0 \left(1 - e^{\frac{\sigma_1}{R_r}} \right).$$

Ogólnie, współczynnik charakteryzujący zmianę gęstości dyslokacji w cyklu wynosi

$$(3.14) \quad \bar{\kappa} = \rho_0 \left(e^{\frac{\sigma_2}{R_r}} - e^{\frac{\sigma_1}{R_r}} \right).$$

Gęstość dyslokacji w mikroobjętości ω_i metalu, na którą działało N cykli zmian obciążeń (σ_2, σ_1) zgodnie z wzorem (3.14) i (3.6), wynosi

$$(3.15) \quad \rho = \rho_0 \left[\left(e^{\frac{\sigma_2}{R_r}} - e^{\frac{\sigma_1}{R_r}} \right) \ln N + 1 \right].$$

Gęstość dyslokacji w mikroobjętościach jest nieco mniejsza lub większa od wartości średniej gęstości dyslokacji w makroobjętości. W mikroobjętościach, w których występuje większe zagęszczenie dyslokacji, proces tworzenia się nowych dyslokacji przebiega znacznie intensywniej, niż w pozostałych mikroobjętościach. Prowadzi to do powstawania znacznie odkształconych mikroobjętości, zwanych pasmami poślizgu.

4. Hipoteza dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń

Na dekohezję mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych obciążeń, zdaniem autorki niniejszej pracy, mają wpływ dwa procesy:

a) proces obniżania wytrzymałości mikroobjętości na skutek wzrostu w niej gęstości dyslokacji, przebiegający zgodnie z zależnością podaną przez ZAKRZEWSKIEGO i GOŁASKIEGO [28];

b) proces obniżania wartości lokalnych naprężeń działających na mikroobjętość, który przebiega zgodnie z zależnością podaną przez NEUBERA [20].

Ad a). Rozbudowane pasma poślizgu, charakterystyczne dla obciążeń zmiennych, skupiają znaczne liczby dyslokacji. Nagromadzone w tych pasmach dyslokacje wpływają w zasadniczy sposób na wytrzymałość rozdzielczą metalu. Utrata stateczności sieci, prowadząca do dekohezji materiału, może nastąpić na skutek działania pola sił albo dylatacji termicznej, jak również na skutek lokalnego nagromadzenia się dyslokacji lub też w wyniku łącznego działania tych czynników. W konkretnej makroobjętości Ω_i najbardziej podatne na dekohezję będą mikroobjętości ω_j, \dots, k obarczone dodatkowo skażeniami sieci. Osiągnięcie krytycznego odkształcenia, odpowiadającego temperaturze topnienia w danej mikroobjętości, zapoczątkowuje lokalną utratę stateczności sieci i przejście w stan quasi-cieczy. Wartości naprężeń powodujących dekohezję mikroobjętości z dyslokacjami, podali ZAKRZEWSKI i GOŁASKI [28]

$$(4.1) \quad P = \frac{GE}{3G-E} \left(\int_T^{T_{top}} \alpha dt - \rho b^2 \right),$$

gdzie: P — trójosiowe równomierne naprężenie rozciągające powodujące dekohezję mikroobjętości z dyslokacjami,

G — moduł sprężystości poprzecznej,

E — moduł sprężystości podłużnej,

T_{top} — temperatura topnienia,

T — temperatura otoczenia,

α — współczynnik cieplnej rozszerzalności liniowej,

ρ — gęstość dyslokacji,

b — wektor Burgersa.

Pomijając spójność quasi-cieczy jako znikomą w stosunku do spójności ciała stałego możemy uważać, że P przedstawia wartość krytyczną wytrzymałości przy trójosiowym równomiernym rozciąganiu. Przyjmując, że quasi-ciecz działa jak karb, można założyć, że przyłożone jednoosiowe naprężenie w mikroobjętości z dużą ilością dyslokacji powoduje trójosiowy stan naprężeń.

Ad b). Lokalny wzrost gęstości dyslokacji w mikroobjętości powoduje wzrost naprężenia pola sił pochodzących od dyslokacji. Naprężenia lokalne działające na mikroobjętość są różnicą między naprężeniem zewnętrznym (tzn. naprężeniem wywołanym przez obciążenia zewnętrzne) i naprężeniem wewnętrznym związanym z istnieniem pola naprężeń wytworzonych przez dyslokacje. Naprężenia lokalne s dla obciążenia statycznego można wyrazić wzorem zaproponowanym przez NEUBERA [20]

$$(4.2) \quad s = \sigma - m\rho^n$$

gdzie: m, n — stałe, przez Neubera nie wyznaczone,

ρ — gęstość dyslokacji.

Dekohezja mikroobjętości z dyslokacjami nastąpi wtedy, gdy lokalne naprężenie s_k będzie większe lub równe mikrowytrzymałości P_k [wzór (2.3)]. Na podstawie wzoru

(4.1) i wzoru (4.2), w którym zakładamy $n = 1$, otrzymujemy warunek dekohezji k -tej mikroobjętości, w postaci

$$(4.3) \quad \sigma_2 \geq \frac{GE}{3G-E} \int_T^{T_{\text{top}}} \alpha dt + \left(m - \frac{GE}{3G-E} \cdot b^2 \right) \rho_k,$$

gdzie: ρ_k — gęstość dyslokacji w k -tej mikroobjętości.

Prawdopodobieństwo dekohezji mikroobjętości można wyznaczyć, gdy znane będą parametry rozkładu gęstości dyslokacji poszczególnych mikroobjętości.

Na podstawie:

- warunku dekohezji mikroobjętości, wzór (2.3),
- wartości wytrzymałości mikroobjętości z dyslokacjami, wzór (4.1),
- wartości naprężeń lokalnych działających w mikroobjętości z dyslokacjami, wzór (4.2),
- wartości gęstości dyslokacji w mikroobjętości, wzór (3.15),

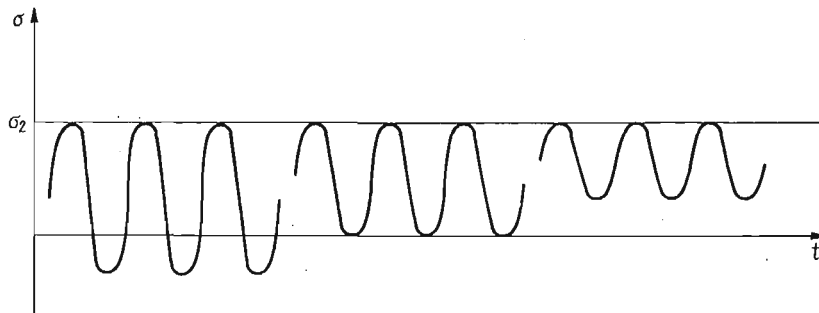
można ostatecznie wyrazić warunek dekohezji mikroobjętości z dyslokacjami

$$(4.4) \quad \sigma_2 = \frac{GE}{3G-E} \int_T^{T_{\text{top}}} \alpha dt + \left[m - \left(\frac{GE}{3G-E} b^2 \right) \right] \cdot \left[\left(e^{\frac{\sigma_2}{Rr}} - e^{\frac{\sigma_1}{Rr}} \right) \ln N + 1 \right] \rho_0.$$

Wzór powyższy jest analitycznym zapisem postawionej w pracy hipotezy.

5. Weryfikacja hipotezy dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń w oparciu o dane eksperymentalne

Badania zmęczeniowe podają liczby cykli, które przy ustalonych naprężeniach $\sigma_2 = \sigma_{\text{max}}$ i $\sigma_1 = \sigma_{\text{min}}$ powodują złom, czyli dekohezję mikroobjętości będących w płaszczyźnie złomu. Jeśli nie uwzględni się etapu łączenia się mikroszczelin w makroszczeliny, co przypada na końcowe cykle zmian obciążeń (kilka procent ogólnej liczby cykli), to można w oparciu o badania zmęczeniowe weryfikować hipotezę dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń (szczegóły weryfikacji i obliczenia w pracy [12]).

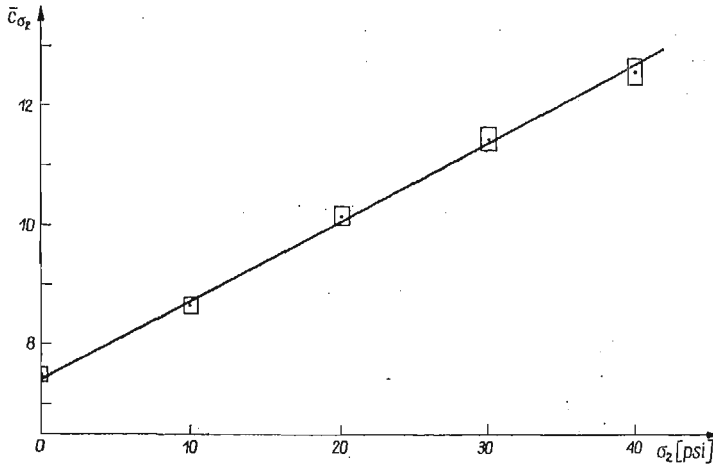


Rys. 2. Różne przypadki zmiennego obciążenia, w których $\sigma_2 = \text{const}$

Weryfikację postawionej hipotezy dokonamy w oparciu o wyniki badań zmęczeniowych stopu 2024-T4 przeprowadzonych w Aluminium Research Laboratories w New Kensington [13].

Jeżeli badania zmęczeniowe będą przeprowadzone w stałej temperaturze ($T = \text{const}$ tzn. $\int_T^{T_{\text{top}}} \alpha dt = \text{const}$), a badany metal poddany będzie zmiennym naprężeniom, z których maksymalne naprężenie jest stałe ($\sigma_2 = \text{const}$; rys. 2), to na podstawie postawionej hipotezy dekohezji mikroobjętości [wzór (4.4)], zachodzi równość

$$(4.5) \quad \left(e^{\frac{\sigma_2}{R_r}} - e^{\frac{\sigma_1}{R_r}} \right) \ln N = c_{\sigma_2} = \text{const.}$$



Rys. 3. Liniowa zależność c_{σ_2} od σ_2 dla stopu 2024-T4

Jeżeli stałą c_{σ_2} , określoną wzorem (4.5) wstawimy do wzoru (4.4), to otrzymamy liniową zależność σ_2 od c_{σ_2}

$$(4.6) \quad \sigma_2 = \frac{GE}{3G-E} \int_T^{T_{\text{top}}} \alpha dt + \left[m - \frac{GE}{3G-E} b^2 \right] \varrho_0 (c_{\sigma_2} + 1).$$

Obliczone wartości c_{σ_2} i ich błędy $S_{c_{\sigma_2}}$ [12] naniesiono na rys. 3, z którego wynika liniowa zależność c_{σ_2} od σ_2 , co potwierdza postawioną hipotezę.

6. Zastosowanie wniosków wynikających z hipotezy dekohezji mikroobjętości w praktyce inżynierskiej

Z hipotezy dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń wynikają wnioski, które można uogólnić na wyniki badań zmęczeniowych elementów maszyn:

a) Naprężenia σ_{max} , σ_{min} , liczba cykli zmian obciążeń N i temperatura T wpływają w ściśle określony sposób [wzór (4.4)] na dekohezję mikroobjętości. Daje to możliwość analizowania wpływu maksymalnych i minimalnych naprężeń oraz temperatury na wyniki badań zmęczeniowych.

b) Skłonność do kruchego pęknięcia elementów poddanych działaniu zmiennych obciążeń tłumaczy postawiona hipoteza. Mianowicie dyslokacje gromadzące się w mikroobjętościach blokują poślizgi i tym samym stwarzają korzystne warunki dla powstania złomu kruchego.

c) Przyrost gęstości dyslokacji przypadający na cykl następuje nie tylko na skutek zmian obciążeń, ale również na skutek zmian temperatury. Uwzględnienie zmiany gęstości dyslokacji jaka zachodzi pod wpływem zmiany temperatury, pozwoli wyjaśnić i opisać zmęczenie cieplne, jak również zmęczenie mechaniczno-cieplne.

d) Współczynnik charakteryzujący zmianę gęstości dyslokacji w cyklu pozwala uwzględnić nie tylko wpływ zmian obciążeń na dekohezję mikroobjętości, ale również wpływ takich wielkości, jak częstość zmian obciążeń, kształt cyklu, historia obciążeń.

e) Zależność między naprężeniami i ilością cykli można uogólnić na obciążenia, których wartości zmieniają się losowo. Wiąże się to z niezawodnością urządzeń mechanicznych poddanych działaniu losowo zmiennych obciążeń oraz z eksploatacyjną wytrzymałością elementów maszyn.

Literatura cytowana w tekście

1. Н. Н. АФАНАСЬЕВ, *Статистическая теория усталостной прочности*, ЖТФ, т. 10, вып. 19, 1940 г.
2. А. А. АСАТУРОВ, В. А. КОМОРОВА, *О моментных функциях пластических микродеформаций*, Физ. мет. № 17, 1964 г.
3. А. ВУСН, *Zagadnienie wytrzymałości zmęczeniowej*, PWN, Warszawa 1964.
4. U. DEHLINGER, *Zur Theorie der Wechselfestigkeit*, Zeitschrift für Physik, t. 115, Nr. 11-12, 1940.
5. А. ЕСИН, W. J. D. JONES, *A statistical approach to micro-plastic strain in metals*, Journal of Strain Analysis, nr. 1, 1966.
6. А. М. ФРЕУДЕНТАЛ, J. H. ВЕЙНЕР, *On the thermal aspects of fatigue*, J. Appl. Phys., nr. 11, 1954.
7. J. FRIEDEL, *Dislocations*, Pergamon Press, 1964.
8. F. E. FUJITA, *Dislocation theory of the fatigue fracture of ductile metals*, Science Reports of the Research Institutes Tohoku University, vol. 6, 1954.
9. L. GOLASKI, *Badania nad określeniem stopnia zmęczenia stali*, Dysertacja doktorska, Wrocław 1964.
10. А. А. ГРИФТИН, *1-st International Conference of Applied Mechanics*, Delft 1924.
11. А. В. ГУРЬЕВ, Г. Ю. СТОЛЯРОВ, *Микроскопические исследование развития полос скольжения и закономерностей накопления поврежденных мест стали при усталостных испытаниях*. Материалы IV совещания по усталости металлов, Издательство «Наука», Москва 1967.
12. Z. HANDZEL, *Hipoteza dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń*, Praca doktorska IPPT PAN, Warszawa 1971.
13. F. M. HOWELL, J. L. MILLER, *Axial-stress fatigue strengths of several structural aluminium alloys*, ASTM, V. 55, 1955.
14. В. С. ИВАНОВА, *Структурно энергетическая теория усталости металлов*, Циклическая прочность металлов., Изд. АН СССР, Москва 1962.
15. А. Н. КОТТРЕЛЛ, *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*, Oxford 1953.
16. R. W. LARDNER, *Crack propagation under random loading*, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 14, 1966.
17. N. F. МОТТ, *Creep and Fracture of Metals*, NPL, 21, Phil. Library Inc., New York 1957.
18. J. MURZEWSKI, *O statystycznej teorii prawie jednorodnego ośrodka kruchego*, Czas. Techn., Nr. 5, 1958.
19. J. MURZEWSKI, *Plastyczność i wytrzymałość mikroskopowa niejednorodnych ośrodków stałych*, Arch. Bud., Politechniki Krakowskiej, Zeszyt specjalny nr. 1, PWN, Kraków 1966.
20. D. NEUBER, *Zur Kinetik der Versetzungsmultiplikation bei statischer verformung von halbleitern*, Acta Metall., Vol. 15, 1967.
21. И. А. ОДИНГ, *Бездиффузионный механизм образования и разрастания усталостных трещин*, Циклическая прочность металлов., Изд. АН СССР, Москва 1962.

22. I. A. ODING, *Teoria dyslokacji w metalach i jej zastosowanie*, PWN, Warszawa 1961 (tłum. z ros.).
23. S. PIŁECKI, *Wstęp do dyfuzyjnej teorii zmęczenia metali*, Prace IPPT, Warszawa 1970.
24. С. И. РАТНЕР, *Разрушение при повторных нагрузках*, Докл. АН СССР, т. 106, 1956.
25. Г. В. УЖИК, *Сопротивления отрыву и прочность металлов*, Изд. АН СССР, Москва 1950.
26. С. Д. ВОЛКОВ, *Статистическая теория прочности*, Машгиз, Москва 1960.
27. M. ZAKRZEWSKI, *W sprawie teorii dekohezji*, Przegląd Spawalnictwa, nr. 4, 1959.
28. M. ZAKRZEWSKI, L. GOŁASKI, *O niektórych aspektach dekohezji zmęczeniowej*, Arch. Hutn., t. XII, zeszyt 2, 1967.

Р е з ю м е

ГИПОТЕЗА РАЗРУШЕНИЯ МИКРООБЪЕМА ПРИ ДЕЙСТВИИ
ПЕРЕМЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе использована модель среды с микроструктурой, описанная в работах Е. Мужевского [18] и С. Д. Волкова [26]. Принято, что среда состоит из макроэлементов Ω , которые, в свою очередь, состоят из микроэлементов ω . Сформулирована гипотеза, связывающая увеличение плотности дислокации в микрообъеме с величиной переменного напряжения, числом циклов и начальной плотностью дислокаций. Определено условие разрушения микрообъема при действии переменного напряжения.

S u m m a r y

HYPOTHESIS OF DECOHESION OF MICRO-VOLUME UNDER VARIABLE STRESS

The model assumed of the medium with microstructure is similar to that introduced in the papers by J. Murzewski [18] and S. D. Volkov [26] and consists in dividing the body into macro-elements Ω , and subdividing them into micro-elements ω . The hypothesis concerning the increase of dislocation density in the micro-volume depending on the variable stress, the quantity of cycles and the initial dislocation density has been formulated. The condition of decohesion of metal micro-volume under variable stress has been defined.

INSTYTUT MECHANIZACJI I ELEKTRYFIKACJI ROLNICTWA
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1971 r.

NAPRĘŻENIE ZWILŻAJĄCE DZIAŁAJĄCE NA PĘCHERZYK PAROWY
W CZASIE WRZENIA

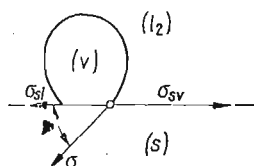
BOGUMIŁ BIENIASZ (RZESZÓW)

1. Oznaczenia

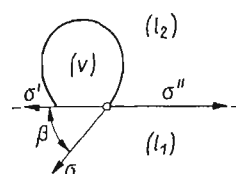
- a stała w równaniu van der Waalsa,
 b jw,
 B współczynnik wirialny w termicznym równaniu stanu gazu van der Waalsa,
 D pozioma średnica elipsoidy,
 D_0 zastępcza średnica pęcherzyka,
 D_p średnica przylegania pęcherzyka,
 g przyspieszenie ziemskie,
 h pionowa średnica elipsoidy,
 l wymiar charakterystyczny; $l = [\sigma/g(\rho' - \rho'')]^{1/2}$,
 M masa cząsteczkowa,
 M_z zastępcza masa cząsteczkowa,
 p ciśnienie,
 q strumień cieplny,
 R uniwersalna stała gazowa,
 T temperatura,
 T_k temperatura krytyczna,
 T_s temperatura nasycenia,
 \tilde{V}_k molowa objętość krytyczna,
 y_{H_2O} udział molowy nasyconej pary wodnej w mieszaninie z powietrzem i nasyconą parą cieczy (I_2),
 y_{I_2} udział molowy nasyconej pary cieczy (I_2) w mieszaninie z powietrzem i nasyconą parą wilgoci,
 y_p udział molowy powietrza w mieszaninie z nasyconą parą wilgoci i cieczy (I_2),
 β średni kąt przylegania,
 ρ gęstość,
 ρ_g gęstość powietrza nasyconego parą cieczy niżej wrzącej (I_2) i parą wilgoci w temperaturze 20°C,
 ρ_{I_1} gęstość fazy (I_1),
 ρ_{I_2} gęstość fazy (I_2),
 σ napięcie powierzchniowe na granicy fazy ciekłej (I_2) i gazowej (v) w temperaturze 20°C,
 σ_s jw, w temperaturze nasycenia,
 σ_{sl} napięcie powierzchniowe na granicy fazy stałej (s) i ciekłej (I_2),
 σ_{sv} napięcie powierzchniowe na granicy fazy stałej (s) i gazowej (v),
 σ' napięcie powierzchniowe na granicy fazy ciekłej (I_1) i (I_2) w temperaturze 20°C,
 σ'' napięcie powierzchniowe na granicy fazy ciekłej (I_1) i gazowej (v) w temperaturze 20°C,
 z naprężenie zwilżające.

2. Sformułowanie problemu

W czasie wrzenia pęcherzykowego działają na pęcherzyk następujące siły: wyporu, oporu, bezwładności i siły powierzchniowe. Przy obniżonym ciśnieniu można, ze względu na duże średnice zastępcze pęcherzy, pomijać siły powierzchniowe. Natomiast przy ciśnieniach rzędu ciśnienia barometrycznego i wyższych, siły powierzchniowe odgrywają decydującą rolę. Mówiąc o siłach powierzchniowych mamy na myśli siły od napięć powierzchniowych i siły przylegania cząsteczek. Te ostatnie z reguły zaniedbywano, co prowadziło do układu sił na granicy trzech faz, pochodzących wyłącznie od napięć po-



Rys. 1



Rys. 2

wierzchniowych, co dla stałej powierzchni grzejnej przedstawiono na rys. 1. Z warunku równowagi otrzymuje się:

$$(2.1) \quad \sigma \cos \beta + \sigma_{sl} = \sigma_{sv}.$$

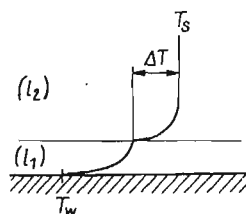
Doświadczalne potwierdzenie tej zależności jest bardzo trudne do uzyskania ze względu na występujące w niej napięcia powierzchniowe σ_{sv} oraz σ_{sl} . Jeśli natomiast zastąpi się fazę stałą (s) przez fazę ciekłą (l_1), co przedstawiono na rys. 2, to

$$(2.2) \quad \cos \beta = \frac{\sigma'' - \sigma'}{\sigma}.$$

Autor sprawdził powyższą zależność doświadczalnie.

Przy doborze cieczy kierowano się następującymi wymaganiami:

- a) temperatura nasycenia fazy ciekłej (l_1) musiała być znacznie wyższa (ciecz wyżej wrząca) niż dla fazy (l_2) (ciecz niżej wrząca),



Rys. 3

- b) gęstość fazy (l_1) musiała być większa niż gęstość fazy (l_2),
- c) użyte ciecze nie mogły mieszać się wzajemnie,
- d) ciecze musiały być trwałe.

Pomiary przeprowadzono dla pięciu przypadków, których zestawienie zawiera tablica 1.

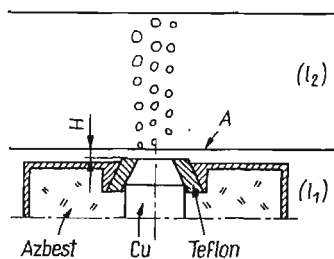
Tablica 1

Przy- padek	Faza (l_1)	Faza (l_2)				
		Nazwa cieczy	T_s [°C]	ρ_{20} [kg/m ³]	T_k [°C]	V_k [m ³ /kmol]
1	Wodny roztwór CaCl ₂	Cykloheksan	81	779		
2	j.w.	<i>n</i> -Heksan	69	659		
3	j.w.	1-Chlorek butylu	78	884	265	0,289
4	j.w.	cis-2-Penten	37	655	201	0,253
5	Woda destylowana	<i>n</i> -Pentan	36	627		

Wymaganie dotyczące temperatury nasycenia wynika z rysunku 3. Otóż temperatura nasycenia fazy (l_1) musiała być większa od temperatury nasycenia fazy (l_2) o co najmniej $T_w - T_s$. W przeciwnym razie bąble, odrywające się od stałej powierzchni grzejnej, spowodowałyby zaburzenia deformujące założony poprzednio model układu sił. Możliwość użycia wody była zatem ograniczona. W zasadzie stosowano wodny roztwór CaCl₂, którego temperatura nasycenia wynosiła około 130°C ($\rho_{20} = 1390$ kg/m³).

3. Przebieg i wyniki pomiarów kątów przylegania

Kąty przylegania zmierzono stosując filmowanie. W tym celu zbudowano stanowisko, umożliwiające realizację stacjonarnego, nasyconego wrzenia pęcherzykowego w zbiorniku, przy ciśnieniu barometrycznym. Zastosowano zbiornik prostopadłościenny o wy-



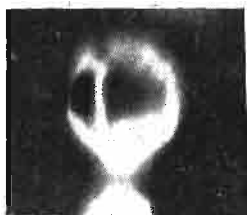
Rys. 4

miarach podstawy 135 mm × 135 mm i o wysokości 165 mm. Ciepło dostarczano do powierzchni grzejnej za pomocą miedzianego pręta (rys. 4) poprzez warstwę cieczy wyżej wrzącej [faza (l_1)] o grubości H . Zastosowano wymiary pręta: $\varnothing 16 \times 155$ mm (średnica stałej powierzchni grzejnej: $\varnothing 10$ mm). Pręt był ogrzewany w swej dolnej części przy pomocy spirali grzejnej włączonej w obwód elektryczny o zmiennej oporności, zasilany prądem stałym o napięciu 24 V. Pomiary wykonano przy $H = 3$ i 6 mm i przy grubości

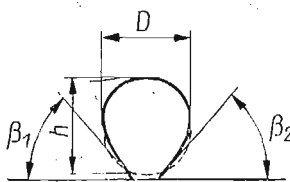
fazy (l_2) rzędu kilku centymetrów. Zakres stosowanych strumieni ciepłych był ograniczony przez temperaturę nasycenia cieczy wyżej wrzących i wynosił $(5 \div 20) \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$.

Strumienie ciepłe wyznaczano przez pomiar, w dwóch punktach, temperatur powierzchni walcowej pręta miedzianego, za pomocą termopar złożonych z materiału pręta oraz drucików konstantanowych $\varnothing 0,2 \text{ mm}$, przymocowanych do pręta elektrolitycznie. Punkty pomiarowe były umieszczone w odległości 50 mm od siebie licząc wzdłuż osi pręta, przy czym punkt położony bliżej stałej powierzchni grzejnej był od niej w odległości 20 mm. Dla zwiększenia dokładności pomiarów temperatur, druciki prowadzono w pierw wokół pręta. Termopary cechowano przez zanurzenie w ultratermostacie. Temperaturą odniesienia był punkt topnienia lodu, siłę zaś termoelektryczną mierzono za pomocą kompensatora technicznego KPT-1. Na podstawie dokładności odczytu temperatury w ultratermostacie oraz siły termoelektrycznej na zaciskach X/5 kompensatora, można ocenić, że błąd bezwzględny pomiaru temperatur powierzchni pręta wynosił $\pm 0,15^\circ\text{C}$. Przy wrzeniu *n*-pentanu na wodzie destylowanej, przy $q = 19,0 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$, temperatury walcowej powierzchni pręta wynosiły $105,0^\circ\text{C}$ oraz $114,8^\circ\text{C}$, przy temperaturze płaskiej powierzchni grzejnej $97,3^\circ\text{C}$.

Nukleacja odbywała się w obszarze ponad stałą powierzchnią grzejną pręta, na powierzchni *A* (rys. 4), będącej granicą ciekłych faz (l_1) i (l_2). Zdjęcia pęcherzyków wykonano kamerą filmową Pentaflex 16, przy szybkości 96 klatek na sekundę. Użyto przy



Rys. 5



Rys. 6

tym teleobiektywem o ogniskowej 135 mm oraz kilku pierścieni dystansowych. Dla każdego przypadku (tablica 1) wykonywano zdjęcia dla obu wartości *H* oraz dla różnych wartości strumieni ciepłych. Celem uzyskania wrzenia stacjonarnego obserwowano, czy ustaliły się temperatury mierzone na powierzchni pręta. Stosowano przesłonę segmentową 120° , co dało czas ekspozycji $1/250$ sekundy. Zdjęcia wykonywano przez szklaną ściankę zbiornika na tle ekranu, ustawionego pod kątem 45 stopni do osi optycznej obiektywu, oświetlonego równoległą wiązką światła z lampy paraboloidalnej. Jako materiału filmowego użyto czarnobiałej taśmy kinematograficznej UP-21. Wszystkie zdjęcia filmowe były wykonywane przy liniowym powiększeniu wymiarów rzeczywistych 8,13. Interesowano się obrazami, przedstawiającymi pęcherzyki na chwilę przed oderwaniem od ciekłej powierzchni grzejnej. Rys. 5 przedstawia zdjęcie (o odwróconym zaczernieniu), a rys. 6 kopię takiego pęcherzyka.

Pomiary kątów przylegania były możliwe jedynie przy niewielkich wartościach strumieni ciepłych, tzn. dla ustroju pojedynczych pęcherzyków. Dla każdego przypadku wybierano losowo po siedem pęcherzyków i sporządzono kartotekę zawierającą wyniki

pomiarów: β_1 , β_2 , D , D_p , h oraz wyniki obliczeń β , D_0 , a także średniej bezwymiarowej średnicy zastępczej D_0/l oraz średniej bezwymiarowej średnicy przylegania D_p/l . Ponieważ nie stwierdzono zależności kątów przylegania od strumieni cieplnych, pomiary przeprowadzono w każdym przypadku dla jednej tylko wartości strumienia cieplnego. Dla każdego pęcherzyka obliczano $\beta' = (\beta_1 + \beta_2)/2$, a następnie β jako średnią arytmetyczną z siedmiu wartości β' . Wartości D_p/D_0 obliczano dla uchwycenia momentów pomiarów kątów przylegania, gdyż kąt ten jest funkcją czasu w okresie wzrostu bąbla na powierzchni grzejnej, a tym samym i stosunku D_p/D_0 . Średnicę zastępczą pęcherzyka w stanie tuż przed oderwaniem obliczano jako średnicę kuli o objętości równej objętości elipsoidy, równej objętości pęcherzyka. W związku z tym traktowano pęcherzyk jako elipsoide o pionowej osi symetrii i mierzono dwie średnice D oraz h .

Kąt przylegania (kąt jaki tworzy styczna do powierzchni pęcherzyka, w punkcie leżącym na powierzchni grzejnej, z płaszczyzną tej powierzchni) mierzono kątomierzem o wartości najmniejszej działki 0,5 stopnia (ok. 0,0067 rd). Błąd pomiaru kąta przylegania oceniono, na podstawie serii pomiarów kąta przylegania dla jednego pęcherzyka, na ok. $\pm 1,5$ stopnia ($\pm 0,0262$ rd). Wykonując pomiary kątów założono, czemu nie można

Tablica 2

Przypadek nr	l	D_0	D_0/l	D_p	D_p/l	β	D_p/D_0
	mm	mm	—	mm	—	stopni	—
1	1,64	2,1	1,3	1,0	0,6	50	0,48
2	1,52	2,0	1,3	1,1	0,7	48	0,55
3	1,49	2,2	1,5	1,7	1,1	51	0,77
4	1,54	2,4	1,6	1,5	1,0	50	0,63
5	1,54	2,2	1,4	1,2	0,8	53	0,55

zaprzeczyć na podstawie wykonanych zdjęć, że nie ma deformacji ciekłej powierzchni grzejnej przy podstawie pęcherzyka. Wyniki pomiarów zawiera tablica 2. Jest rzeczą interesującą, że średni kąt przylegania jest prawie taki sam dla wszystkich przypadków.

4. Przebieg i wyniki pomiarów napięć powierzchniowych

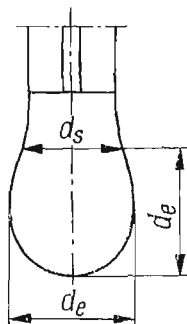
Pomiaru napięć powierzchniowych σ' i σ'' dokonano dla temperatury 20°C metodą zwisającej kropli (rys. 7). Wartość napięcia powierzchniowego oblicza się w tej metodzie ze wzoru

$$(4.1) \quad \sigma = g\Delta\rho d_e^2 \frac{1}{H},$$

w którym $1/H$ jest poprawką, zależną od wartości d_s/d_e , odczytywaną z tablicy sporządzonej przez NIEDERHAUSENA i BARTELA (por. [1], s. 42). Przy wyznaczaniu σ' , $\Delta\rho$ było

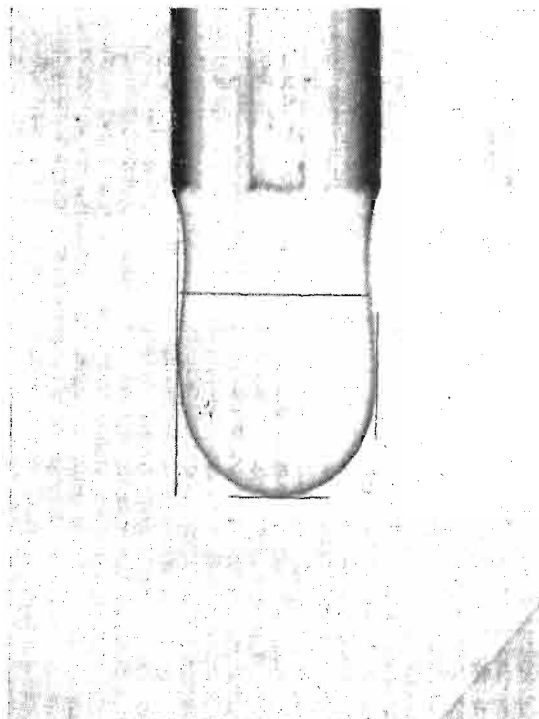
różnicą gęstości fazy (l_1) (kropla) i fazy (l_2) (otoczenie kropli), zaś przy wyznaczaniu σ'' , $\Delta\rho$ było różnicą gęstości fazy (l_1) (kropla) i mieszaniny powietrza z nasyconą parą cieczy (l_2) i wilgoci.

Celem wyznaczenia wartości wielkości wchodzących do wzoru (4.1), wykonywano zdjęcia fotograficzne kropli, wiszących u końca pionowej rurki kapilarnej o średnicy

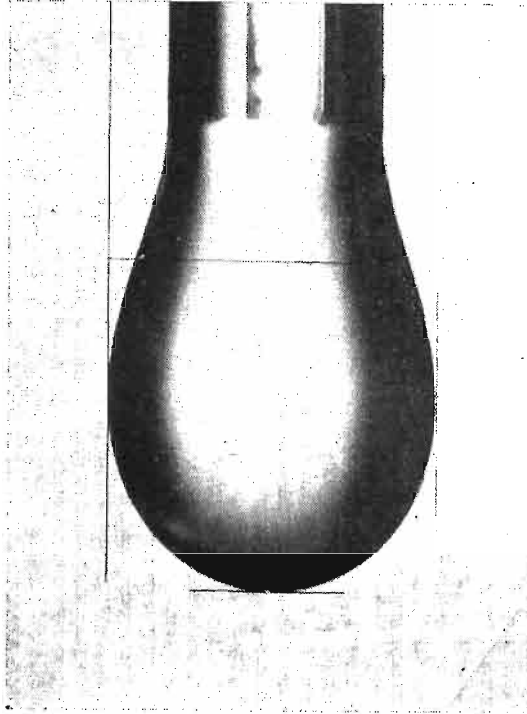


Rys. 7

zewnętrznej \varnothing 2,32 mm. Rurka miała czołową płaszczyznę szlifowaną pod kątem prostym do osi rurki i była umieszczona w naczynku prostokątnym na tle ekranu z matowej szyby, oświetlonego od tyłu równoległą wiązką światła. Używano aparatu fotograficznego Zenith 3M z pierścieniami dystansowymi.

Rys. 8. Wodny roztwór CaCl_2 cis-2-penten

W tabelicy 3 podano wyniki pomiarów i obliczeń wielkości σ' i σ'' . Potrzebne do obliczeń wartości ρ_{l_1} wzięto dla wody z tablic cieplnych, zaś dla stosowanego wodnego roztworu CaCl_2 z bezpośredniego pomiaru densymetrem uniwersalnym. Błąd bezwzględny tego pomiaru wynosił $\pm 0,5 \text{ kg/m}^3$. Wartości ρ_g obliczano orientacyjnie stosując w teorii mieszanin termiczne równanie stanu gazów doskonałych (tabl. 4), przy czym wartości ciśnień nasycenia par ciecchy (l_2) w temperaturze 20°C obliczono według wzoru Riedela (por. [2], tabl. 3.2, 3.3). Można przyjąć, że błąd bezwzględny wartości ρ_g równał się \pm po-



Rys. 9. Woda destylowana, powietrze nasycone parą *n*-pentanu i parą wodną

łowie wyliczonej wartości tej wielkości. Wielkości d_e oraz d_s zmierzono na wykonanych zdjęciach fotograficznych z błędem bezwzględnym $\pm 0,2 \text{ mm}$, co stwierdzono na podstawie serii pomiarów tej samej wartości wielkości d_e . Po uwzględnieniu powiększenia, z jakim uzyskano obraz kropli na papierze fotograficznym, odpowiada to błędowi bezwzględnemu tych wielkości wynoszącemu $\pm 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. (Wartości d_e i d_s podane w tabelicy 3 są wartościami średnimi. Uzyskano je na podstawie trzech pomiarów dla każdego przypadku). Wartości ρ_{l_2} wzięto z tablic cieplnych. Można przyjąć, że zostały one wyznaczone z takim samym błędem jak ρ_{l_1} . Błąd wartości $1/H$ wynosił $\pm 0,001$. Wartości średnich kwadratowych błędów bezwzględnych obliczono na podstawie powyższych uwag metodą dokładną. Rys. 8 oraz rys. 9 są ilustracją do przeprowadzonych pomiarów napięć powierzchniowych.

Tablica 3

Przy- padek nr	Pomiar σ'						Pomiar σ''						
	ϱ_{t1}	ϱ_{t2}	$10^3 \cdot d_e$	$10^3 \cdot d_s$	$1/H$	$10^3 \cdot \sigma'$	$\pm \frac{\Delta\sigma'}{\sigma'} \cdot 100$	ϱ_g	$10^3 \cdot d_e$	$10^3 \cdot d_s$	$1/H$	$10^3 \cdot \sigma''$	$\pm \frac{\Delta\sigma''}{\sigma''} \cdot 100$
	kg/m ³	kg/m ³	m	m	—	kg/s ²	%	kg/m ³	m	m	—	kg/s ²	%
1	1390	779	3,99	3,28	0,530	50,7	0,9	1	3,43	2,88	0,496	79,5	1,0
2	1390	659	3,43	2,92	0,481	40,7	1,0	2	3,10	2,70	0,450	59,0	1,1
3	1390	884	3,31	2,86	0,464	25,5	1,0	1	3,30	2,80	0,485	69,4	0,9
4	1390	655	2,31	2,16	0,371	14,4	1,6	2	2,96	2,61	0,437	52,1	1,2
5	998	627	4,39	3,52	0,561	39,6	0,9	2	3,55	2,98	0,496	61,2	1,0

Tablica 4

Przypadek nr	y_{t2}	y_{H20}	y_p	$M_z = \sum_i y_i \cdot M_i$	$\varrho_g = \frac{pM_z}{RT}$
1	0,102	—	0,875	34,4	1,4
2	0,155	—	0,822	37,6	1,5
3	0,112	0,023	0,865	35,8	1,4
4	0,512	—	0,465	49,8	2,0
5	0,560	—	0,417	52,9	2,2

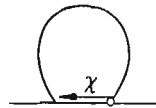
5. Obliczenie naprężeń zwilżających

W tablicy 5 zamieszczono wyniki obliczeń prawej strony równania (2.2) na podstawie zmierzonych, przy temperaturze 20°C, wartości σ' i σ'' oraz wartości σ wziętych z tablic również dla tej temperatury. Dla porównania zamieszczono obok wartości σ_s obliczone

Tablica 5

Przypadek nr	$10^3 \cdot \sigma_s$	$10^3 \cdot \sigma$	$\frac{\sigma'' - \sigma'}{\sigma}$	$\%$
	kg/s ²	kg/s ²	—	kg/s ²
1	18,8	25,5	1,13	12,4
2	13,7	18,4	1,00	6,1
3	17,6	23,9	1,84	28,8
4	14,7	16,5	2,29	27,1
5	15,0	16,6	1,30	11,7

ze wzoru W. Ramsaya i J. Shieldsa (z powodu braku danych tablicowych, σ i σ_s obliczono dla przypadku 4 na podstawie reguły R. Eötvösa). Na podstawie otrzymanych wyników dochodzi się do wniosku, że w układzie sił działających na pęcherzyk u jego podstawy należy koniecznie uwzględnić siły międzycząsteczkowe przez wprowadzenie



Rys. 10

naprężenia zwilżającego [3]. Zakładając kierunek jego działania i zwrot jak na rys. 10 oraz stosując superpozycję (patrz rys. 2), otrzymuje się z warunku równowagi

$$(5.1) \quad \chi = \sigma'' - \sigma' - \sigma \cos \beta.$$

Obliczone stąd wartości zamieszczono w tablicy 5.

Otrzymane wyniki należy traktować jako orientacyjne z tej przyczyny, że o ile kąt β został zmierzony dla temperatury nasycenia, to napięcia powierzchniowe σ' i σ'' zmierzono jedynie dla temperatury 20°C. Zakładając jednak, że procentowy spadek wartości napięć powierzchniowych σ' i σ'' w zakresie od temperatury 20°C do temperatury T_s jest taki sam dla tych napięć jak dla napięcia powierzchniowego σ , otrzymuje się

$$(5.2) \quad \frac{\sigma_s'' - \sigma_s'}{\sigma_s} = \frac{\sigma'' - \sigma'}{\sigma}.$$

Założenie to przyjęto z konieczności, gdyż brak jest danych na temat zmian wartości napięć powierzchniowych σ' i σ'' ze zmianą temperatury.

6. Napężenie zwilżające a stałe w równaniu van der Waalsa

Napężenie zwilżające pozostaje w związku z siłami międzycząsteczkowymi. Miarą zaś oddziaływania tych sił są wartości współczynników wirialnych w termicznych równaniach stanu. Z tego powodu dokonano próby porównania obliczając, dla poszczególnych cieczy, wartości współczynnika wirialnego z równania stanu van der Waalsa

$$(6.1) \quad p\tilde{V} = RT \left(1 + \frac{B_1(T)}{\tilde{V}} \right),$$

gdzie

$$(6.2) \quad B_1(T) = b - \frac{a}{RT_s}.$$

Dla cykloheksanu, *n*-heksanu, *n*-pentanu i wody znaleziono wartości *a* i *b* w tablicach (por. [4], str. 409, tabl. 2.2.1.2.2). Dla 1-chloroku butylu i *cis*-2-pentenu wykorzystano empiryczną zależność

$$(6.3) \quad b = 0,75 \cdot \tilde{V}_k.$$

Stałą *a* obliczono z zależności

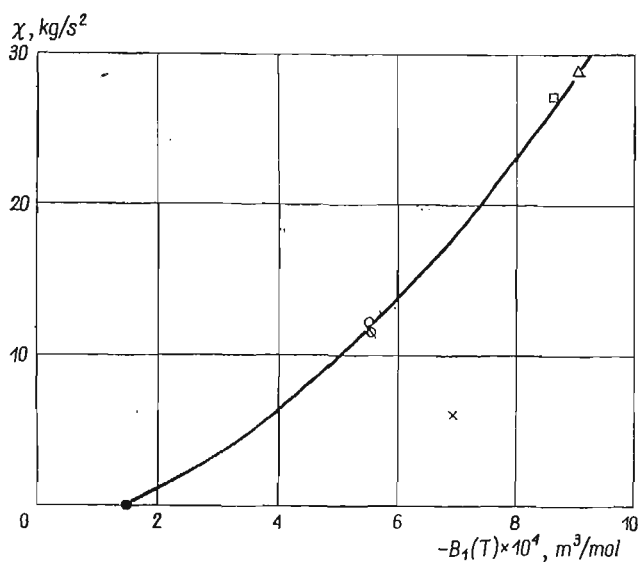
$$(6.4) \quad a = \frac{27}{8} T_k R b.$$

Wartości \tilde{V}_k oraz T_k wzięto z tablicy 1. Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 6 i naniesiono na wykres na rys. 11, po przyjęciu dla wody $\chi = 0$. Na podstawie otrzymanych

Tablica 6

L.p.	Ciecz	Oznaczenie punktu na rys. 11	$10^4 \cdot b$	<i>a</i>	$\frac{a}{RT_s} \cdot 10^4$	$-10^4 \cdot B_1$
			m ³ /mol	$\frac{N \cdot m^4}{mol^2}$	m ³ /mol	m ³ /mol
1	Cykloheksan	○	2,28	2,31	7,86	5,58
2	<i>n</i> -Heksan	×	1,74	2,46	8,67	6,94
3	1-Chlorek butylu	△	2,17	3,28	11,25	9,08
4	<i>cis</i> -2-Penten	□	2,08	2,77	10,75	8,67
5	<i>n</i> -Pentan	⊗	1,90	1,92	7,48	5,58
6	Woda	●	0,31	0,55	1,78	1,48

punktów można stwierdzić korelację przedstawioną linią ciągłą, od której odbiega jednak punkt dla *n*-heksanu.



Rys. 11

Literatura cytowana w tekście

1. A. W. ADAMSON, *Chemia fizyczna powierzchni*, Warszawa 1963.
2. S. BRETSZNAJDER, *Własności gazów i cieczy*, WNT, Warszawa 1962.
3. E. RUCKENSTEIN, *Remarks on nucleate boiling heat transfer from a horizontal surface*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 3, 9 (1966) 229-237.
4. Praca zbiorowa, *Poradnik Fizykochemiczny*, WNT, Warszawa 1962.

Резюме

НАПРЯЖЕНИЯ СМАЧИВАЕМОСТИ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ПУЗЫРЕК ПАРА
ВО ВРЕМЯ КИПЕНИЯ

Отмечается, что применяемая модель сил, действующих на пузырек, возникающий при атмосферном давлении в стационарном насыщенном кипении пузырькового типа, основанная на понятии жидкого подогревательного слоя и не учитывающая молекулярных сил адгезии, является неудовлетворительной. Опытным путем определены впервые значения так называемого напряжения смачиваемости, понятие о котором было недавно введено в теорию кипения [3]. Установлены и определены приближенные соотношения между напряжением смачиваемости и вириальным коэффициентом из уравнения Ван-дер-Ваальса.

Summary

WETTING TENSIONS ACTING ON A VAPOR BUBBLE IN BOILING PROCESS

A liquid surface used as heating surface for the stationary, saturated, bubble type boiling under barometric pressure leads to the conclusion that the previous model of forces acting on a bubble (without

molecular forces of adhesion) is inadequate for further investigations. For the first time the so-called «wetting tensions», recently introduced to the theory of boiling [3], are determined experimentally. The dependence of wetting tension on the virial coefficient in the Van der Waals equation is established and approximately calculated.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, RZESZÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 stycznia 1971 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W PIERWSZYM KWARTALE 1971

W okresie tym zorganizowano 15 zebrań naukowych, na których wygłoszono 25 referatów, mianowicie

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Bydgoszczy					
1.	14.03.71	T. Kabat	Belki na sprężystym podłożu z wiązaniami jednostronnymi	18	6
2.	14.03.71	A. Jazdon	Wprowadzenie do problematyki badań niezawodności i trwałości motorowerów i rowerów		
3.	14.03.71	J. Szala	Badania termometryczne w warunkach eksploatacji motorowerów i rowerów		
Oddział w Częstochowie					
4.	20.01.71	K. Kleja	Zagadnienia dzisiejszego miernictwa	25	3
Oddział w Gdańsku					
5.	12.01.71	J. Kołodko	O możliwości bezwskaźnikowego ujęcia analizy tensorowej. Cz. II.	12	4
6.	15.03.71	P. Zimny	Próba analizy teoretycznej drgań magneto-sprężystych w przewodach o przekroju kołowym	15	5
Oddział w Krakowie					
7.	05.02.71	E. Karaśkiewicz (Poznań)	Metody badania szumów powstających w czasie pracy maszyn	41	6
8.	06.02.71	W. Bogusz, Z. Engel, St. Kasprzyk	Niektóre zagadnienia mechaniki układów uderzeniowych	54	14
9.	06.02.71	R. Gryboś	Stateczność udarowa pręta		
10.	06.02.71	Cz. Cempél	Okresowe drgania z uderzeniami w dyskretnych układach mechanicznych		
11.	06.02.71	J. Kolenda	Niektóre zagadnienia analizy i syntezy wibromiędów		
12.	06.02.71	St. Czareński	Analiza dynamiczna ruchu przejściowego układu o jednym stopniu swobody przy wymuszeniu harmonicznym połączonym z uderzeniami		
13.	06.02.71	A. Bęben, J. Adamczyk	Dotychczasowe badania wiertarek udarowych		

Zebrań zorganizowane było wspólnie z IPPT PAN w Warszawie, Zakładami Teorii Maszyn i Automatycznej Regulacji oraz Mechaniki Technicznej Instytutu Podstaw Budowy Maszyn AGH w Krakowie.

- | | | | | | |
|-----|----------|----------------------------|---|----|----|
| 14. | 17.03.71 | G. Szefer,
B. Lechowicz | Problemy brzegowe współczesnej teorii konsolidacji | 17 | 10 |
| 15. | 17.03.71 | W. Lenkiewicz | Prace w dziedzinie tarcia i smarowania prowadzone w Wielkiej Brytanii | | |

Oddział w Łodzi

- | | | | | | |
|-----|----------|---------|---|----|---|
| 16. | 14.01.71 | K. Dems | Zastosowanie wielomianów Hermite'a do wyznaczania macierzy sztywności elementów tarczy w metodzie elementów skończonych | 19 | 6 |
|-----|----------|---------|---|----|---|

Oddział w Poznaniu

- | | | | | | |
|-----|--|----------------|--|--|--|
| 17. | | St. Wiśniewski | Dynamiczne zagadnienia rozruchu układu napędowego za pośrednictwem sprzęgła ze wspomaganiami siłami odśrodkowymi | | |
|-----|--|----------------|--|--|--|

Oddział w Szczecinie

- | | | | | | |
|-----|----------|----------------|---|----|---|
| 18. | 20.01.71 | J. K. Szmidt | Metoda parametrów brzegowych w zastosowaniu do obliczania prętów mimośrodowo ściskanych | 15 | 3 |
| 19. | 04.03.71 | Cz. Mickiewicz | Stateczność powłoki kulistej z materiału lepko-sprężystego | 12 | 3 |

Oddział w Warszawie

- | | | | | | |
|-----|----------|----------------------------|---|----|---|
| 20. | 11.01.71 | M. Janas | Obliczanie płyt podpartych nieprzesuwnie z uwzględnieniem efektu tarczowego | 16 | 3 |
| 21. | 11.01.71 | J. Kruszewski
(Gdańsk) | Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własności ustrojów okrętowych | 16 | 5 |
| 22. | 18.01.71 | Z. Handzel | Hipoteza dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń | 15 | 7 |
| 23. | 18.01.71 | M. Chrzanowski
(Kraków) | O możliwości opisu pewnego procesu pełzania metali | 15 | 5 |
| 24. | 22.02.71 | B. Krajewski | Zastosowanie metod pseudowariacyjnych do efektywnego rozwiązywania równań typu parabolicznego | 10 | 9 |

Oddział we Wrocławiu

- | | | | | | |
|-----|----------|------------|--|--|--|
| 25. | 22.02.71 | A. Ciaston | Reologiczny model analogmatematyczny kinetyki rozruchu przenośnika taśmowego | | |
|-----|----------|------------|--|--|--|

Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach 18–24 lutego 1971 r. II Sympozjum pt. «Metody statystyczne w mechanice» oraz wydał drukiem referaty i streszczenia zgłoszonych referatów.

Seminaria prowadzone były przez:

Oddział w Gdańsku: na temat «Ogólna mechanika ośrodka ciągłego» oraz na temat «Zadania stabilności w układach dyskretnych».

Oddział w Gliwicach: od 5.03.1971 r. prowadzone jest przez doc. dr hab. R. Grybosia seminarium na temat «Dynamika nieliniowych układów dynamicznych» z udziałem 20 osób.

Oddział w Poznaniu: cotygodniowe seminarium na temat «Dynamiczne zagadnienia teorii plastyczności»; cotygodniowe seminarium z teorii termodynamiki.

Ponadto Oddział w Gliwicach zakończył w I kwartale br. dwuletni cykl wykładów na temat «Podstawy mechaniki ośrodków odkształcalnych». W okresie 2 lat odbyło się ogółem 51 wykładów. Również Oddział w Gliwicach przeprowadził dwuletni cykl seminariów z matematyki stosowanej rozpoczęty 15.04.69 r. W sumie odbyły się w ramach tej akcji 34 seminaria.

XIII ZJAZD DELEGATÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

W dniu 12 czerwca 1971 r. odbył się w Warszawie XIII Zjazd Delegatów PTMTS. W zjeździe uczestniczyło 51 osób, delegatów i działaczy reprezentujących 10 Oddziałów Towarzystwa.

Obrady otworzył wiceprzewodniczący Zarządu Głównego PTMTS prof. dr B. STANISZEWSKI.

Następnie powołano Prezydium Zjazdu w składzie: prof. dr J. KOŁAKOWSKI (Częstochowa) — przewodniczący; prof. J. WYSOCKI (Gdańsk) i doc. dr Zb. ENGEL (Kraków) — zastępcy przewodniczącego oraz doc. dr J. FOLWARCZNY (Gliwice) i dr W. WALCZAK (Łódź) — sekretarze.

Przed rozpoczęciem obrad uczczono minutową ciszą pamięć zmarłych — prof. dr. Włodzimierza BURZYŃSKIEGO i prof. dr. Henryka RADWAŃSKIEGO (członków Oddziału PTMTS w Gliwicach).

Przyjęto następujący porządek obrad

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarzy Zjazdu.
2. Przyjęcie protokołu z XII Zjazdu Delegatów PTMTS.
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej.
4. Sprawozdanie z działalności Towarzystwa.
5. Sprawozdanie finansowe.
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
8. Wybory: a) przewodniczącego; b) uzupełniające członków Zarządu Głównego; c) uzupełniające Głównej Komisji Rewizyjnej.
9. Sprawa nadawania członkostw honorowych i zagranicznych PTMTS.
10. Uchwalenie generalnych wytycznych kierunkowych działalności na następny okres.
11. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

Protokół z XII Zjazdu Delegatów PTMTS odbytego dnia 20 czerwca 1970 r. przyjęto, po uwzględnieniu poprawki wniesionej przez prof. dr. J. MUTERMILCHA. Mianowicie na s. 9, drugi ustęp od dołu w wypowiedzi prof. Mutermilcha powinno być «godność jest zbyt wysoka na jego skromne zasługi, niemniej bardzo miła». Powołano Komisję Matkę i Skrutacyjną w składzie: dr K. WERNEROWSKI — przewodniczący, prof. dr Zb. OLESIĄK, doc. dr hab. B. SKALMIERSKI — członkowie.

Sekretarz Generalny — prof. dr Zb. OSIŃSKI złożył sprawozdanie z działalności Towarzystwa za rok 1970 oraz za I kwartał 1971 r.

Skarbnik — dr K. BORSUK złożył sprawozdanie z działalności finansowej PTMTS w roku 1970 oraz za I kwartał 1971 r.

Dr K. Borsuk podał również zebrany do wiadomości, że w roku bieżącym Polska Akademia Nauk potrącała z dotacji kwotę zaległych składek członkowskich. W związku z tym zwrócił się z apelem do Oddziałów o zlikwidowanie tych zaległości. Sprawa dotyczy głównie Oddziałów w Krakowie i w Warszawie.

Ponadto poważnie zostały obniżone w zatwierdzonym przez PAN preliminarzu budżetowym kwoty przeznaczone na podróże służbowe.

Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej przewodniczący — prof. dr Zb. KĄCZKOWSKI.

Wniosek o udzielenie ustępującemu Zarządowi Głównemu absolutorium, z podziękowaniem za owocną pracę, zebrani przyjęli jednogłośnie.

W imieniu Komisji Matki i Komisji Skrutacyjnej zabrał głos dr K. WERNEROWSKI stwierdzając, że upłynęła dwuletnia kadencja: przewodniczącego — prof. dr Zb. BRZOSKI; członków Zarządu Głównego: prof. dr. B. STANISZEWSKIEGO, prof. dr. M. ŻYCKOWSKIEGO, dr. K. BORSUKA, dr. J. STUPNICKIEGO; przewodniczącego Głównej Komisji Rewizyjnej — prof. dr. Zb. KĄCZKOWSKIEGO; członków: doc. dr. E. BIELEWICZA, doc. dr. J. SUŁOCKIEGO.

Na przewodniczącego PTMTS Komisja Matka wysunęła kandydaturę prof. dr. Zb. KĄCZKOWSKIEGO. Na kandydaturę tę padło 48 głosów na 49 obecnych delegatów.

Następnie Komisja Matka wysunęła kandydatury na członków Zarządu Głównego. Wybrano następujących kolegów:

prof. dr J. MURZEWSKI (Kraków) — 47 głosów; prof. dr Zb. WESOŁOWSKI — 49 głosów; prof. dr G. RAKOWSKI — 47 głosów; dr K. BORSUK — 47 głosów.

Wyniki głosowania na członków Głównej Komisji Rewizyjnej były następujące:

doc. dr E. BIELEWICZ (Gdańsk) — 47 głosów; dr J. STUPNICKI — 49 głosów; doc. dr J. SUŁOCKI (Łódź) — 46 głosów; doc. dr Z. WASZCZYŹYŹN (Kraków) — 46 głosów.

Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI podziękował za wybór i zaszczyt jaki go spotkał. Podkreślił, że zdaje sobie sprawę z poważnych obowiązków i dużej odpowiedzialności. Poprzednio funkcję tę piastowali profesorowie — W. WIERZBICKI, J. MUTERMILCH i Z. BRZOSKA. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI wyraził obawy, że będzie mu trudno im dorównać.

Życzeniem nowo wybranego przewodniczącego jest, aby Towarzystwo zajęło się sprawami upowszechniania nauki, pomagało osobom pracującym twórczo i miało głos w sprawach programów nauczania. Ażeby to osiągnąć, organizacja nasza musi być silna liczebnie i dbać, żeby jej reprezentacja na zewnątrz składała się z ludzi mających odpowiedni autorytet.

Prof. dr B. STANISZEWSKI w imieniu prof. dr Z. BRZOSKI, swoim i całego Zarządu wyraził zadowolenie z dokonanego wyboru i życzył Przewodniczącemu jak najlepszych wyników w trudnej pracy.

Prof. dr J. KOŁAKOWSKI w imieniu XIII Zjazdu Delegatów złożył podziękowanie ustępującemu przewodniczącemu, oraz ustępującym członkom Zarządu Głównego. Zjazd zobowiązał Zarząd Główny do wyrażenia podziękowań ustępującym działaczom Towarzystwa na piśmie. Następnie prof. dr J. Kołakowski złożył gratulacje nowo wybranemu przewodniczącemu i członkom Zarządu Głównego.

Prof. dr Z. OSIŃSKI przedstawił zebranim wytyczne postępowania przy przyjmowaniu do PTMTS członków zagranicznych zwyczajnych i honorowych. Wytyczne te stanowią omówienie odpowiednich punktów statutu i opracowane zostały przez Komisję w składzie: prof. dr B. STANISZEWSKI, prof. dr Z. KĄCZKOWSKI i doc. dr M. KWIECIŃSKI.

W dyskusji zabierali głos profesorowie J. MUTERMILCH i Z. KĄCZKOWSKI oraz docenci R. JANICZEK i M. KWIECIŃSKI. Proponowane wytyczne Zjazd zatwierdził.

Następnie prof. dr Z. OSIŃSKI przedstawił w imieniu Zarządu Głównego uchwalony przez ostatnie Plenum wniosek o nadanie godności członka honorowego PTMTS — prof. dr. Witoldowi NOWACKIEMU.

Ponieważ wniosek ten złożony został przez Oddział Warszawski, uzasadnienie jego zreferował przewodniczący tego Oddziału — prof. dr Zb. OLESIAK. Wniosek zebrani przyjęli jednomyślnie.

Wytyczne kierunkowe działalności na najbliższy okres zreferował prof. dr B. STANISZEWSKI.

Przewiduje się kontynuowanie działalności dotychczasowej polegającej na organizowaniu zebrań naukowych, sympozjów, konkursów naukowych, prowadzeniu działalności wydawniczej i pewnej współpracy z zagranicą. Zreferowane wytyczne zebrani przyjęli.

W dyskusji nad sprawozdaniami, wytycznymi i w ramach wolnych wniosków zabierali głos profesorowie: Z. BUDZIANOWSKI, R. CIEŚIELSKI, Z. KĄCZKOWSKI, J. KOŁAKOWSKI, J. MUTERMILCH, Z. OLESIAK, Z. OSIŃSKI, Z. PARZEWski, B. STANISZEWSKI, dr hab. R. DOROSZKIEWICZ, doc. A. JAKOWLUK, doc. R. JANICZEK, doc. B. SKALMIERSKI, dr W. PIETRASZKIEWICZ, dr R. ŻUCHOWSKI.

Poruszane sprawy dotyczyły: terminowego nadsyłania sprawozdań, materiałów informacyjnych do Biuletynu MECHANIKI TEORETYCZNEJ i STOSOWANEJ, popularyzacji wiedzy w szczególności mechaniki, konkursów naukowych, programów studiów na wydziałach mechanicznych i lądowych, popularyzacji osiągnięć członków PTMTS, ograniczenia funduszy na delegacje, kontaktów z zagranicą i konkursów problemowych.

W wyniku dyskusji Zjazd Delegatów uchwalił dwa wnioski dotyczące: 1) wystąpienia do Władz w sprawie ograniczenia kwot na delegacje służbowe oraz 2) memoriału w sprawie nauczania mechaniki i programów.

Na zakończenie prof. dr J. KOŁAKOWSKI podziękował obecnym za przybycie, a prof. dr Z. KĄCZKOWSKI podziękował przewodniczącemu i prezydium Zjazdu Delegatów za sprawne przeprowadzenie obrad.

Zbigniew Olesiak (Warszawa)

SKŁAD ZARZĄDU GŁÓWNEGO POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W KADENCJI 1971/1972

Prof. dr Zb. KĄCZKOWSKI — przewodniczący; prof. dr J. MURZEWSKI, prof. dr Zb. OSIŃSKI — wiceprzewodniczący; prof. dr J. SZMELTER — sekretarz generalny; dr inż. K. BORSUK — skarbnik; prof. dr G. RAKOWSKI — zca sekretarza generalnego; prof. dr Zb. WESOŁOWSKI — zca skarbnika; prof. dr W. OLSZAK — członek ZG; prof. dr Zb. BUDZIANOWSKI (Gliwice), doc. dr M. SUCHAR (Łódź) — zastępcy członków ZG.

Główna Komisja Rewizyjna

Prof. dr St. KOCAŃDA — przewodniczący; doc. dr E. BIELEWICZ, doc. dr H. MIKOŁAJCZAK, dr J. STUPNICKI, doc. dr J. SUŁOCKI, doc. dr Z. WASZCZYŻYŃ — członkowie.

SKŁAD ZARZĄDÓW ODDZIAŁÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W KADENCJI 1971/1972

B y d g o s z c z: dr K. WERNEROWSKI — przewodniczący; dr T. KABAT — wiceprzewodniczący; mgr inż. B. SIÓLKOWSKI — sekretarz; mgr inż. J. CABAŃSKI — skarbnik.

C z ę s t o c h o w a: prof. dr J. KOŁAKOWSKI — przewodniczący; prof. dr T. OPOLSKI — wiceprzewodniczący; doc. dr J. ELSNER — sekretarz; doc. dr A. SŁUŻALEC — skarbnik; doc. dr hab. R. JANICZEK — członek Zarządu.

G d a Ń s k: doc. dr hab. P. WILDE — przewodniczący; dr W. PIETRASZKIEWICZ — sekretarz.

G l i w i c e: doc. dr hab. J. ANTONIAK — przewodniczący; doc. dr hab. J. BURSA — wiceprzewodniczący; doc. dr hab. J. FOLWARCZNY — sekretarz; dr A. TYLIKOWSKI — skarbnik; doc. dr hab. S. BORKOWSKI, doc. dr J. WOJNAROWSKI, dr hab. T. BES — członkowie Zarządu.

K r a k ó w: doc. dr Z. ENGEL — przewodniczący; doc. dr Z. BYCHAWSKI — wiceprzewodniczący; dr S. KASPRZYK — sekretarz; doc. dr W. KRZYŚ — skarbnik; prof. dr W. BOGUSZ, prof. dr J. MURZEWSKI, doc. dr Z. WASZCZYŻYŃ, dr B. OLSZOWSKI — członkowie Zarządu.

Ł ó d ź: prof. dr Z. PARSZEWSKI — przewodniczący; doc. dr hab. M. SUCHAR — wiceprzewodniczący; dr W. WALCZAK — sekretarz; doc. dr hab. J. GLUZA — skarbnik.

Poznań: prof. dr E. KARAŚKIEWICZ — przewodniczący; doc. dr hab. S. WIŚNIEWSKI — wiceprzewodniczący; dr Z. MAGIERA-ULLRICH — sekretarz; doc. dr hab. H. MIKOŁAJCZAK — członek Zarządu.

Szczecin: doc. dr J. MIERZEJEWSKI — przewodniczący; dr C. MICKIEWICZ — wiceprzewodniczący; dr K. GRUZIŃSKI — sekretarz; dr H. KARPIŃSKA — skarbnik; dr B. TĘCZYŃSKA — członek Zarządu.

Warszawa: prof. dr Z. OLESIAK — przewodniczący; doc. dr B. KRAJEWSKI — wiceprzewodniczący; doc. dr hab. P. JASTRZĘBSKI — skarbnik; dr A. JAWORSKI — zca sekretarza; dr Z. REIPERT — zca skarbnika; dr K. BORSUK — członek Zarządu.

Wrocław: doc. dr A. BORCZ — przewodniczący; doc. dr Z. GABRYSZEWSKI — wiceprzewodniczący; doc. dr M. KWIECIŃSKI — sekretarz; doc. dr J. STANDA — skarbnik; dr W. MIRONOWICZ — sekretarz; dr S. DMITRUK, dr L. JARMOLKOWICZ, dr B. OKOŁÓW — członkowie Zarządu.

XIII MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Komunikat końcowy

Kongres odbędzie się w Uniwersytecie Moskiewskim w dniach 21 sierpnia (poniedziałek) do 26 sierpnia (sobota) 1972 r. Organizatorem jest Komitet IUTAM oraz Narodowy Komitet IUTAM ZSRR.

Naukowy program Kongresu obejmuje całą dziedzinę mechaniki włącznie z metodami analitycznymi, mechaniką ciała stałego i mechaniką cieczy i gazów, wraz z zastosowaniami. Wygłoszone zostaną następujące referaty generalne:

A. E. BRYSON (USA): Teoria sterowania układów stochastycznych,

B. FRAEJUS DE VEUBEKE (Belgia): Analiza numeryczna konstrukcji,

M. J. LIGHTHILL (W. Brytania): Ruch zwierząt wodnych,

K. WIEGHARDT (NRF): Hydrodynamika okrętu,

oraz referaty generalne w sekcjach:

G. CARRIER (USA): Huragany i tornada,

A. A. DERIBAS (ZSRR): O pewnych zjawiskach przy zderzeniach o dużej prędkości ciał stałych,

H. GOLDSMITH (Kanada): Ruch krwi,

S. S. GRIGORIAN (ZSRR): Pewne współczesne zagadnienia mechaniki w przemyśle naftowym,

J. P. GUIRAUD (Francja): Dynamika gazu z punktu widzenia teorii kinetycznej,

N. J. HOFF (USA): Zasady ekstremalne dla konstrukcji metalowych w stanie pełzania,

A. JU. ISZLIŃSKI (ZSRR): Dynamika połączonych układów ciał sztywnych,

W. T. KOITER (Holandia): Podstawy teorii powłok,

M. LANDAHL (Szwecja): Zmniejszenie oporu przez dodatek polimeru,

H. W. LIEPMANN (USA): Doświadczalna mechanika płynów,

M. S. LONGUET-HIGGINS (W. Brytania): Fale w wirujących płynach,

E. H. MANSFIELD (W. Brytania): Odwrotne metody w mechanice budowlanej,

J. R. MELCHER (USA): Elektro-hydrodynamika,

F. NIORDSON (Dania): Procesy optymalizacyjne dla układów mechanicznych,

J. R. PHILIP (Australia): Przepływy w ośrodkach porowatych,

J. ROTTA (NRF): Turbulentne warstwy przyścienne,

L. E. SCRIVEN (USA): Molekularne uzasadnienie modeli reologicznych z wewnętrznymi zmiennymi strukturalnymi,

L. I. SIEDOW (ZSRR): Ruch o dużych prędkościach w wodzie,

I. N. WEKUA (ZSRR): Metody rozwiązywania zagadnień brzegowych w momentowej teorii powłok,

I. I. WOROWICZ (ZSRR): O zagadnieniach niejednoznaczności i stabilności w nieliniowej mechanice kontinuum.

Przewidziane są również dyskusje «okrągłego stołu» o następującej tematyce:

Zniszczenie — przewodniczy Ju. N. RABOTNOW (ZSRR),

Przemysłowa mechanika cieczy i gazów — przewodniczy P. R. OWEN (W. Brytania),

Procesy optymalizacyjne dla układów mechanicznych — przewodniczy N. N. KRASSOWSKI (ZSRR).

Oprócz tego zostanie wygłoszonych 230 referatów w sześciu równoległych sekcjach. Na referaty przewiduje się po 20 minut oraz 10 minut na dyskusję po każdym referacie. Uczestnicy Kongresu, którzy chcieliby wygłosić referaty proszeni są o przesłanie streszczenia o objętości 400—500 słów w pięciu egzemplarzach do Sekretarza Polskiego Komitetu IUTAM doc. dr Stefana ZAHORSKIEGO, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, IV p. w nieprzekraczalnym terminie do 1 lutego 1972 r. Streszczenie powinno być napisane w języku angielskim, francuskim, niemieckim lub rosyjskim. U góry streszczenia należy podać dokładny adres autora. Oprócz powyższego streszczenia należy sporządzić streszczenie o objętości nie przekraczającej 100 słów, które w przypadku dopuszczenia referatu do wygłoszenia zostanie opublikowane w programach Kongresu. Streszczenie to należy przygotować w formacie A5 (21 × 14,8 cm), z podwójnym marginesem i podwójnym odstępem. Tytuł i nazwisko autora powinny znajdować się na stronie tytułowej, np:

THE COLLAPSE AND REBOUND OF CAVITATION BUBBLES

A.B. Kowalski, Warszawa, Poland

Prace przedstawione na Kongresie nie mogą być przed tym przedstawione na żadnym międzynarodowym lub dużym narodowym sympozjum ani opublikowane przed końcem Kongresu.

Istnieje możliwość częściowego pokrycia kosztów uczestnictwa i przejazdu do Moskwy i z powrotem dla pewnej liczby młodych uczestników (nie przekraczających 30 lat). Podania w tej sprawie można kierować do Sekretarza Komitetu Kongresu wraz z poparciem starszego pracownika nauki w terminie do 15 marca 1972. Adres: Professor E. Becker, Secretary of the IUTAM Congress Committee, Institut für Mechanik der Technischen Hochschule, Hochschulstrasse 1, 61 Darmstadt, F.R. Germany.

Rezerwacji hotelu należy dokonać przez INTOURIST, możliwie nie później niż w marcu 1972 r. Oplata za uczestnictwo w Kongresie wynosi 22,50 rb. za uczestnika i 11,25 rb. za osobę towarzyszącą. Cena za dobę hotelową, w zależności od klasy hotelu, wynosi od 6,30 do 21,00 rb.

SPIS TREŚCI TOMU IX/1971

Zeszyt 1

Pamięci Profesora JAROSŁAWA NALESZKIEWICZA	3
J. J. TELEGA, Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji	7
Применение линейного программирования для определения несущей способности конструкций (обзор статей)	
The application of linear programming to the determination of the limit load capacity of structures (survey of publications)	
T. GAŁKIEWICZ, Zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu	53
Проблема устойчивости ортотропной конической оболочки подвергнутой скручиванию	
Nonlinear stability problem of an orthotropic conical shell subjected to torsion	
K. FIDELUS, A. MORECKI, Niektóre własności biomechanizmów o zmiennej strukturze	73
Некоторые свойства переменной структуры биомеханизмов	
Some properties of variable structures of biomechanics	
M. GALOS, Plastyczne skręcanie niejednorodnych prętów o zmiennej średnicy	89
Пластическое кручение неоднородных стержней переменного диаметра	
Plastic torsion of non-homogeneous rods of variable thickness	

J. HALAUNBRENNER, M. КМИЕСІК, Zjawisko rezonansu w kontakcie ciał sprężystych Явление резонанса в контакте упругих тел The resonance phenomenon for elastic bodies in contact	115
M. JOKIEL, Odpowiedniość modelowa dla cienkościennych prętów o bisymetrycznym otwartym przekroju poprzecznym Критерии подобия тонкостенных стержней бисимметрического открытого сечения Model correspondence criteria for thin-walled rods of bi-symmetric open cross-section	125
J. BAUER, E. WŁODARCZYK, Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu ze zmienną granicą plastyczności. Część I. Sztywne obciążenie Динамика жесткой плиты находящейся на упруго-пластическом неоднородном основании. Часть I Dynamics of a rigid plate resting on elastic-plastic non-homogeneous medium. Part I.	139
K. TURSKI, Badanie wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metalu przy różnych drogach wtórnego obciążenia Исследование влияния пластической деформации на поведение металла при разных путях вторичного нагружения Investigation of the influence of plastic deformation on behaviour of metals under various ways of repeated loading	155
J. BARAN, K. MARCHELEK, Redukcja stopni swobody układów dyskretnych Приведение степеней свободы дискретных систем Reduction of the number of degrees of freedom in discrete systems	201
BIULETYN INFORMACYJNY	217
Zeszyt 2	
WŁODZIMIERZ BURZYŃSKI — Wspomnienie pośmiertne	227
W. BOGUSZ, Zastosowanie równania Hamiltona-Jacobiego do stabilizacji układów mechanicznych Применение уравнения Гамильтона-Якоби для стабилизации механических систем Application of Hamilton-Jacobi equation for stabilization of mechanical systems	231
A. DRESCHER, B. MICHAŁSKI, Reologiczne, mechaniczne i optyczne własności polimetakrylanu metylu w warunkach złożonej historii obciążenia Реологические, механические и оптические свойства полиметил-метакрилата в условиях сложной истории нагружения Rheological, mechanical and optical properties of a polymethyl-methacrylate under conditions of complex loading history	241
R. GRYBÓŚ, Zależność maksymalnej siły uderzenia od współczynnika restytucji Зависимость максимальной силы удара от коэффициента восстановления Dependence of the maximum impact force on the restitution coefficient	263
Å. WŁOSNOWICZ, Z. KUBACKI, przyczynek do mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego żyłek poliamidowych О механизме усталостного разрушения полиамидных лесок A contribution to the mechanism of the fatigue of Polyamide 6 fibres	285
E. ZŁATANOWA, Stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego przy skręcaniu Устойчивость предварительно напряженного кругового цилиндра при кручении Stability of prestressed circular cylinder under torsion	299
E. ZŁATANOWA, Wpływ skończonego wstępnego sprężenia na sztywność rury Влияние предварительной конечной деформации на жесткость трубы Influence of finite initial strains on the rigidity of tube	309
J. BIAŁKIEWICZ, W. SZCZEPIŃSKI, O mechanice kucia w matrycy О механикековки в матрице On the mechanics of the forging process in dies	321
BIULETYN INFORMACYJNY	329

Zeszyt 3

- A. SAWCZUK, Zagadnienia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok sztywno-plastycznych 335
 Вопросы теории умеренно больших прогибов жестко-пластических оболочек
 Moderately large deflections theory of rigid-plastic shells
- K. DEMS, Zastosowanie wielomianów Hermite'a do wyznaczania macierzy sztywności elementu tarczy w metodzie elementów skończonych 355
 Применение полиномов Эрмита для определения матрицы жесткости элементов диска в методе конечных элементов
 Application of Hermite polynomials to the determination of the stiffness matrix of plate elements in the finite elements method
- S. BORKOWSKI, Oszacowanie rozwiązań równań kanonicznych metody sił w przypadku przybliżonego wyznaczania liczb wpływowych 375
 Оценки решений канонических уравнений силового метода для случая приближенного определения параметров влияния
 Estimation of solution of the canonical equations of the method of forces under approximate determination of influence parameters
- Z. MAZURKIEWICZ, Pewne uogólnienie problemu brachistochrony 385
 Некоторое обобщение задачи о брахистохроне
 A certain generalization of the brachistochrone problem
- M. SOKOŁOWSKI, O pewnym modelu ciała przenoszącego naprężenia momentowe 391
 О некоторой модели тела с моментными напряжениями
 On a model of a body transmitting couple-stresses
- A. ZIĄBICKI, Reologia molekularna układów polimerowych 401
 Молекулярная реология полимерных систем
 Molecular rheology of polymer systems
- A. RACZEWSKI, Wewnętrzna stateczność sprężystego walca kołowego przy odkształceniach skończonych 421
 Внутренняя устойчивость упругого кругового цилиндра при конечной деформации
 Internal stability of an elastic circular cylinder under finite deformation
- Z. KŁOS, Charakterystyka stabilności przepływu, ze zmiennym profilem prędkości, płynu o skończonym przewodnictwie elektrycznym w polu magnetycznym 431
 Характеристика устойчивости течения, с переменным профилем скоростей, жидкости с конечной электропроводностью в магнитном поле
 Stability characteristic of flow with variable velocity profile of a fluid with finite electrical conductivity in a magnetic field
- BIULETYN INFORMACYJNY 439

Zeszyt 4

- N. J. CYGANOWA, Pewne problemy ewolucji różniczkowych zasad wariacyjnych w XIX i XX wieku 453
 Некоторые вопросы развития дифференциальных вариационных принципов в XIX—XX веках
 Certain problems of development of differential variational principles in the 19th and 20th century
- J. KŁERACZKO, Zmodyfikowany pręt Hopkinsona 479
 Модифицированный стержень Гопкинсона
 The modified split Hopkinson pressure bar
- J. KRUSZEWSKI, Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych 499

Применение метода жестких конечных элементов к расчётам частот колебаний судовых систем Application of the rigid finite elements method to calculation of natural vibration frequencies of ship structures	
Z. HANDZEL, Hipoteza dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń Гипотеза разрушения микрообъёма при действии переменных напряжений Hypothesis of decohesion of micro-volume under variable stress	517
B. WIENIASZ, Naprężenie zwilżające na pęcherzyk parowy w czasie wrzenia Напряжения смачиваемости, действующие на пузырек пара во время кипения Wetting tensions acting on a vapor bubble in boiling process	529
BIULETYN INFORMACYJNY	541

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- L. DIETRICH, K. TURSKI, Badania zmęczenia w złożonym stanie naprężenia
Исследования усталостной прочности при сложном напряженном состоянии
Investigations of fatigue under combined stresses
- S. ZANORSKI, Pewne niewiskozymetryczne przepływy cieczy lepko-sprężystych
Некоторые невискозиметрические течения вязкоупругих жидкостей
Certain non-viscometric flows of viscoelastic fluids
- Z. WIŚNIEWSKI, Analiza ruchu pewnego układu wibro-uderzeniowego o dwóch stopniach swobody
Анализ некоторой виброударной системы с двумя степенями свободы
On certain vibratory-impact system with two degrees of freedom
- R. KRZYWIŚC, Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego stopnia
Механико-стереомеханическая аналогия в классе многоиндексных уравнений Лагранжа 2-ой степени
The mechanical-stereomechanical analogy in the class of multi-indicial Lagrange equations of second kind
- W. RUDNICKI, J. KIZYMA, Płyta o zmiennym module odkształcenia postaciowego skręcona kołowym stemplem
Кручение круговой плиты с переменным модулем сдвига с помощью жесткого кругового штампа
A plate with variable modulus of shear twisted by a circular stamp
- J. BAUER, E. WŁODARCZYK, Dynamika sztywnej kuli spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu ze zmienną granicą plastyczności. Część II. Sprężyste odciążenie
Динамика жесткой плиты, расположенной на упруго-пластическом основании с переменным пределом текучести. Часть II. Упругая разгрузка
Dynamics of a rigid plate resting on elastic-plastic foundation with variable plasticity limit. Part II. Elastic unloading
- K. RYKALUK, Koncentracja naprężeń w tarczy nieograniczonej z otworem kołowym przy obciążeniu wewnętrznym
Концентрация напряжений в неограниченной плите с круглым отверстием, находящимся под действием внутренней нагрузки
Stress concentration under internal loading in an infinite disk with a circular hole
- J. B. OBRĘBSKI, Zastosowanie maszyn cyfrowych do rozwiązywania rusztów o regularnej sześciokątnej siatce prętów
Применение вычислительных машин для решения рустверков с регулярной шестиугольной стержневой сеткой
Application of digital computers to the solution of regular hexagonal gridworks
- A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych
Совместное влияние неоднородного внешнего и внутреннего трения на устойчивость неконсервативных систем
Influence of simultaneous non-homogeneous external and internal friction upon the stability of non-conservative systems
- M. CHRZANOWSKI, O możliwości opisu pełnego procesu pełzania metali
О возможности описания всего процесса ползучести металлов
On a possibility of description of full creep processes for metals
- J. STUPNICKI, Naprężenia kontaktowe w elementach maszyn w świetle badań zagadnienia elastohydrodynamicznego smarowania
Контактные напряжения в деталях машин с точки зрения исследований эластогидродинамической смазки
Contact stresses in machine elements on the basis of elastic-hydrodynamic lubrication investigations

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 9, z. 4, s. 451—550, Warszawa 1971, Indeks 36712