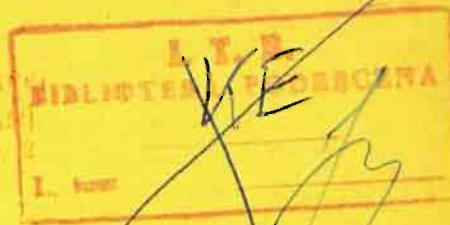


T. 11, 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

~~UNIWERSYTET TECHNICZNY  
BUDOWELNIANICZY  
WARSZAWA, ul. Nowelska~~



# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 9 • ZESZYT 5



*P<sup>a</sup>*

WARSZAWA 1971

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

A. SAWCZUK, Zagadnienia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok sztywno-plastycznych Вопросы теории умеренно больших прогибов жестко-пластических оболочек Moderately large deflections theory of rigid-plastic shells	335
K. DEMS, Zastosowanie wielomianów Hermite'a do wyznaczania macierzy sztywności elementu tarczy w metodzie elementów skończonych Применение полиномов Эрмита для определения матрицы жесткости элементов диска в методе конечных элементов Application of Hermite polynomials to the determination of the stiffness matrix of plate elements method	355
Sz. BORKOWSKI, Oszacowanie rozwiązań równań kanonicznych metody sił w przypadku przybliżonego wyznaczania liczb wpływowych Оценки решений канонических уравнений силового метода для случая приближенного определения параметров влияния Estimation of solution of the canonical equations of the method of forces under approximate determination of influence parameters	375
Z. MAZURKIEWICZ, Pewne uogólnienie problemu brachistochrony Некоторое обобщение задачи о брахистохроне A certain generalization of the brachistochrone problem	385
M. SOKOŁOWSKI, O pewnym modelu ciała przenoszącego naprężenia momentowe О некоторой модели тела с моментными напряжениями On a model of a body transmitting couple-stresses	391
A. ZIĄBICKI, Reologia molekularna układów polimerowych Молекулярная реология полимерных систем Molecular rheology of polymer systems	401
A. RACZEW, Wewnętrzna stateczność sprężystego walca kołowego przy odkształceniach skończonych Внутренняя устойчивость упругого кругового цилиндра при конечной деформации Internal stability of an elastic circular cylinder under finite deformations	421
Z. KŁOS, Charakterystyka stabilności przepływu, ze zmiennym profilem prędkości, płynu o skończonym przewodnictwie elektrycznym w polu magnetycznym Характеристика устойчивости течения, с переменным профилем скоростей, жидкости с конечной электропроводностью в магнитном поле Stability characteristics of flow with variable velocity profile for a fluid with finite electrical conductivity in a magnetic field	431
BIULETYN INFORMACYJNY	439

J. 11. 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

~~INSTITUT TECHNICZNY  
Katedra Inżynierii Mechanicznej  
Warszawa~~

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A



T O M 9 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1971

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Confernces and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,  
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,  
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,  
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,  
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 720 (606+114) egz. Arkuszy wydawn. 9,0. Arkuszy drukarskich 7,5. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 23.IV.1971 r. Druk ukończono we wrześniu 1971 r. Zam. 616/71 U-104 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

ZAGADNIENIA TEORII UMIARKOWANIE DUŻYCH UGIĘĆ  
POWŁOK SZTYWNO-PLASTYCZNYCH<sup>1)</sup>

ANTONI S A W C Z U K (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W teorii konstrukcji plastycznych wyodrębniają się ostatnio w oddzielną dyscyplinę studia dotyczące geometrycznej nieliniowości. Obejmują one badania wpływu, jaki na udźwig konstrukcji mają zmiany w jej geometrii, zachodzące w trakcie odkształcenia plastycznego. Wiązą się z tym ściśle badania dotyczące przeskoku i stateczności procesu deformacji.

Z punktu widzenia teorii konstrukcji sztywno-plastycznych jest rzeczą szczególnie interesującą wyjaśnienie zachowania się płyt i powłok bezpośrednio po osiągnięciu przez obciążenie intensywności towarzyszącej rozpoczęciu się procesu plastycznego płynięcia, tzn. po osiągnięciu obciążenia granicznego w sensie klasycznej teorii nośności granicznej. Chodzi o stwierdzenie, czy rozwiązanie takie jest stateczne, tzn., czy proces deformacji powoduje «geometryczne» wzmocnienie, czy osłabienie konstrukcji, i jaki jest przy tym ilościowy przebieg zjawiska. Skutki geometrycznej nieliniowości stają się — w przypadku konstrukcji sztywno-plastycznych — łatwe do wyodrębnienia i do interpretacji.

Właściwe opisanie geometryczne nieliniowego zachowania się konstrukcji wymaga rozróżniania jej pierwotnego kształtu oraz jej aktualnej konfiguracji. Proces może być rozpatrywany konsekwentnie przy zastosowaniu wielkości odniesionych bądź do stanu nieodkształconego, bądź do aktualnej konfiguracji w jaką układają się cząstki materialne konstrukcji w przestrzeni w trakcie jej odkształcania, a więc odpowiednio w opisie materialnym lub w opisie przestrzennym. Zwykle jednak inżynierskie teorie dotyczące geometrycznej nieliniowości nie rozróżniają wyraźnie tych dwóch opisów. I tak, pewne wielkości odniesione do stanu odkształconego (np. naprężenia) łączone są ze związkami kinematycznymi odniesionymi do konfiguracji początkowej, a równania równowagi prowadzone są do układu nieodkształconego w oparciu o dodatkowe założenia. Prowadzi to do nieuniknionych w tym stanie rzeczy paradoksów.

Wewnętrznie spójną teorię geometrycznie nieliniowych konstrukcji plastycznych uzyskać można wychodząc z układu równań opisujących duże odkształcenia ośrodka ciągłego. Szczególnie przydatny jest tu opis materialny, chociażby dlatego, że warunki brzegowe dane są zwykle dla pierwotnej geometrii konstrukcji. Wprowadzając określone założenia

<sup>1)</sup> Referat problemowy wygłoszony na 13 Konferencji Mechaniki w Jaszowcu, wrzesień 1970.

upraszczające właściwie przejściu od ośrodka trójwymiarowego do dwuwymiarowej zakrzywionej przestrzeni otrzymuje się, w sposób naturalny, układ równań geometrycznie nieliniowej teorii konstrukcji. Dodatkowe założenia dotyczące rzędu wielkości poszczególnych składowych tensorów naprężeń i odkształceń prowadzą w konsekwencji do określonych teorii przybliżonych. Tego typu podejście zastosował FUNG [21], uzyskując równania teorii Kármána dla płyt sprężystych.

Zalety materialnego opisu w mechanice konstrukcji omawiali BUDIANSKY [5] oraz LANCE i SOECHTING [28]. W pracy [44] zastosowano ten opis dla uzyskania związków typu Kármána dla powłok. Podobny problem podjęli PIETRASZKIEWICZ [40] oraz SHRIVASTAVA i GLOCKNER [47]. Szczegółową dyskusję związków nieliniowej teorii powłok przeprowadziła DUSZEK [17], wyjaśniając uproszczenia wprowadzane przez różne przybliżone teorie umiarkowanych ugięć. Materialnego opisu procesu płaskiego plastycznego płynięcia dotyczy praca ARCISZ i RYCHLEWSKIEGO [2], zawierająca analizę otrzymanego układu równań.

Niniejsza praca podaje zasady lagrange'owskiego przedstawienia teorii powłok plastycznych. Omówiono wielkości tensorowe występujące w takim opisie, podano odpowiedni układ równań równowagi oraz powierzchni plastyczności. Praca zawiera ponadto przegląd rozwiązań i wyników doświadczeń dotyczących efektów geometrycznego wzmocnienia i przeskoku w powłokach plastycznych. Stosowane oznaczenia zestawione są w końcowej części pracy.

## 2. Zależności podstawowe

Odniesiony do układu związanego z konfiguracją nieodkształconą stan naprężenia cząstki  $X$  w położeniu  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t)$  opisuje się symetrycznymi tensorami: odkształceń Greena  $E_{KL}$  i naprężeń Pioli–Kirchhoffa  $S_{KL}$ .

Tensor odkształcenia  $E_{KL}$  wyraża się poprzez gradient wektora przemieszczenia w następujący sposób

$$(2.1) \quad 2E_{KL} = U_{K;L} + U_{L;K} + G_{RM} U_{;K}^R U_{;L}^M.$$

Pomiędzy tensorem naprężeń Cauchy'ego  $\sigma_{ij}$  a tensorem Pioli–Kirchhoffa zachodzi zależność

$$(2.2) \quad \rho_0 \sigma^{ij} = \rho S^{KL} x_{;K}^i x_{;L}^j,$$

przy czym dla materiału nieściśliwego gęstość  $\rho = \rho_0$ .

Plastyczne płynięcie materiału scharakteryzowane jest przez funkcję dysypacji. Na jednostkę objętości nieściśliwego materiału dysypacja wynosi

$$(2.3) \quad D = \sigma^{ij} d_{ij} = S^{KL} \dot{E}_{KL}$$

odpowiednio w opisie przestrzennym i w opisie materialnym, przy czym  $\dot{E}_{KL} = dE_{KL}/dt$ . Zależność (2.3) wskazuje, że tensory  $S^{KL}$  i  $E_{KL}$  stanowią właściwy układ zmiennych dla opisanego procesu plastycznego płynięcia, jako że  $\dot{E}_{KL}$  znika tożsamościowo w ruchu sztywnym.

Równania opisujące równowagę elementu materialnego zajmującego, określoną pozycję w przestrzeni, przyjmują we współrzędnych Lagrange'a następującą postać

$$(2.4) \quad [(\delta_K^M + U_{;K}^M) S^{KR}]_{;R} = 0.$$

Stosując twierdzenie o zamianie całek objętościowych na powierzchniowe otrzymuje się z (2.4), że naprężeniowe warunki brzegowe w nieodkształconym układzie określone są zależnościami

$$(2.5) \quad (S^{KL} + S^{ML} U_{;M}^K) n_K = T^L.$$

Z (2.4) i (2.5) wynika, że pola naprężeń i przemieszczeń są sprzężone równaniami równowagi.

Warunek plastyczności w klasycznych teoriach formułowany jest w składowych przestrzennych tensora naprężenia. Tak więc warunek Hubera–Misesa

$$(2.6) \quad 3\sigma_i^j \sigma_i^j - \sigma_i^i \sigma_j^j = 2\sigma_0^2$$

przyjmuje w opisie materialnym, dla materiału nieściśliwego, następującą postać

$$(2.7) \quad 3S^{KL} S^{RS} C_{KR} C_{LS} - (S^{KL} C_{KL})^2 = 2\sigma_0^2,$$

gdzie

$$(2.8) \quad C_{KL} = x_{;K}^i x_{;L}^j g_{ij} = 2E_{KL} + G_{KL}$$

jest tensorem deformacji Cauchy'ego.

Forma zależności (2.7) wskazuje, że (2.6) nie stanowi właściwej postaci warunku plastyczności dla materialnego opisu skończonych odkształceń ośrodka idealnie plastycznego, jako że (2.7) zawiera również odkształcenia (por. [2]). Na podstawie jednak (2.3) wielkościami opisującymi proces odkształceń plastycznych są tensory  $S_{KL}$  i  $\dot{E}_{KL}$ . Tak więc, dla materiału izotropowego ogólna postać równania konstytutywnego powinna wyrażać się następującym związkiem tensorowym

$$(2.9) \quad S_L^K = \alpha \delta_L^K + \beta \dot{E}_L^K + \gamma \dot{E}_R^K \dot{E}_L^R,$$

gdzie  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są funkcjami niezmienników tensora prędkości odkształcenia. Dla materiału plastycznego związek konstytutywny (2.9) musi być jednorodną funkcją stopnia zerowego względem czasu. Wynika stąd, że niezmienniki tensora naprężenia związane są dodatkową zależnością, przedstawiającą warunek plastyczności

$$(2.10) \quad F(S_K^K, S_L^L S_K^L, S_L^K S_R^L S_K^R) = 0.$$

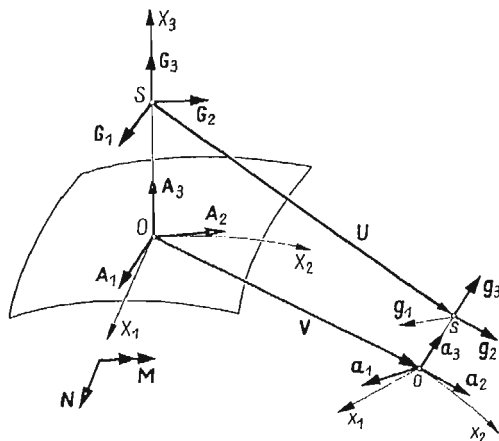
W przypadku warunku Hubera–Misesa w (2.7) należy więc zastąpić  $C_{KL}$  przez  $G_{KL}$ , nie zaś transformować do układu nieodkształconego warunek plastyczności sformułowany w wielkościach eulerowskich. Z fizycznego punktu widzenia warunki  $f(\sigma_i^i, \sigma_k^i \sigma_i^k, \sigma_j^i \sigma_k^j \sigma_i^k) = 0$  oraz (2.10) przedstawiają odmienne materiały.

Dla teorii posługujących się (2.10) stowarzyszone prawo płynięcia i postulat Druckera przyjmują odpowiednio postać, [22]

$$(2.11) \quad \dot{E}_{KL} = \lambda \frac{\partial F}{\partial S_{KL}}, \quad S^{KL} \dot{E}_{KL} \geq 0,$$

przy czym  $\lambda \geq 0$ .

Teorie powłok zakładają, że stan naprężenia i odkształcenia może być z dostateczną dokładnością opisany przez rozpatrzenie dwuwymiarowego zagadnienia dla pewnej (zakrzywionej) powierzchni odniesienia. Naprężenia i odkształcenia występujące w punkcie  $s$  powłoki (rys. 1) odniesione są do układu współrzędnych  $x_1, x_2$  związanych z powierzchnią środkową powłoki.



Rys. 1. Powierzchnia środkowa powłoki w konfiguracji początkowej i oznaczenia baz

Przy opisie materialnym wielkości stowarzyszone z cząstką w położeniu  $x$  przesuwane są przy zastosowaniu translatora  $g_k^k$  do pierwotnego położenia cząstki  $X$ . Wielkości te są następnie przesuwane do bazy określonej przez  $A_r, A_3$  na nieodkształconej powierzchni odniesienia  $X^3 = 0$ , przez wprowadzenie translatora

$$(2.12) \quad \mu_D^r = \delta_D^r - X^3 B_D^r$$

przy czym  $A_r \cdot A_3 = 0, \quad A_3 \cdot A_3 = 1$ .

### 3. Założenia

Równania teorii umiarkowanie dużych przemieszczeń powłok formułować będziemy w oparciu o szereg założeń, z których część stanowią klasyczne przyjęcia teorii cienkich powłok.

a) Rozpatrujemy powłoki cienkie, dla których stosunek grubości do mniejszego promienia krzywizny  $2H/R_{min} \ll 1$ , a więc

$$(3.1) \quad \mu_D^r \simeq \delta_D^r, \quad \mu = 1.$$

Oznacza to, że wpływ drugiego członu w (2.12) jest pomijalnie mały.

b) Odkształcenia styczne w kierunku poprzecznym do grubości powłoki mogą być pominięte

$$(3.2) \quad E_{A3} \simeq 0.$$

Niekonsekwencje wynikające z tego założenia oraz teoria odeń odchodząca przedyskutowane są w [17].



c) Naprężenia normalne w kierunku grubości powłoki są niewielkie w porównaniu z pozostałymi naprężeniami i mogą być pominięte w równaniach równowagi wewnętrznej i w wyrażeniu na dysypację energii, tzn.

$$(3.3) \quad \sigma_{33} \simeq 0,$$

z wyjątkiem powierzchni ograniczających.

d) Materiał jest izotropowy i idealnie sztywno-plastyczny w konfiguracji początkowej oraz nieściśliwy.

e) Przemieszczenia rozkładają się wzdłuż grubości liniowo. Odpowiednie składowe w bazie  $A_r, A_3$  są

$$(3.4) \quad U_r = V_r + \beta_r X^3, \quad U^3 = W, \quad \beta = 0,$$

gdzie  $V_r, W, \beta_r$  są funkcjami określonymi na powierzchni środkowej  $X^3 = 0$ . Bardziej ogólną teorię dla przypadku  $\beta_3 \neq 0$  opracowała DUSZEK [17] (por. też PIETRASZKIEWICZ [40]).

f) Długość  $L$  fali przemieszczenia jest dostatecznie duża w porównaniu z grubością powłoki, tak że

$$(3.5) \quad |V_{\Delta|r}| = 0\left(\frac{V_{\Delta}}{L}\right), \quad |W_{|r}| = 0\left(\frac{W}{L}\right).$$

Założenie to umożliwia oszacowanie członów zawierających pochodne kowariantne.

g) Przemieszczenia normalne  $W$  i styczne  $V_r$  są rzędu

$$(3.6) \quad \frac{W}{H} = 0(1), \quad \frac{V}{H} = 0(\varepsilon), \quad \varepsilon < 1.$$

#### 4. Miary odkształcenia

Przy ograniczeniu się do pola przemieszczeń (3.4) składowe tensora odkształceń (2.1) przyjmują postać

$$(4.1) \quad \begin{aligned} 2E_{\Delta r} &= 2\lambda_{\Delta r} + 2\kappa_{\Delta r} X^3 + (\beta_{\theta|\Delta} \beta_{|r}^{\theta} + B_{\Delta\phi} \beta^{\phi} B_{r\theta} \beta^{\theta}) (X^3)^2, \\ 2E_{\Delta 3} &= W_{|\Delta} + \beta_{\Delta} + B_{\Delta}^{\theta} V_{\theta} + \beta_{\theta} V_{|\Delta}^{\theta} - \beta_{\phi} B_{\Delta}^{\phi} W + (B_{\Delta}^{\phi} \beta_{\phi} + \beta_{\phi|\Delta} \beta^{\phi}) X^3 = 0, \\ 2E_{33} &= \beta_{\phi} \beta^{\phi}, \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda_{\Delta r}$  i  $\kappa_{\Delta r}$  oznaczają odpowiednio wydłużenie oraz zmianę krzywizny powierzchni odniesienia i określone są przez

$$(4.2) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{\Delta r} &= 2V_{(\Delta|r)} - 2B_{\Delta r} W + W_{|\Delta} W_{|r} + B_{\Delta\phi} B_{\Delta}^{\phi} W^2 + V_{|\Delta}^{\phi} V_{\phi|r} + \\ &\quad + B_{\Delta}^{\phi} V_{\phi} B_r^{\theta} V_{\theta} - B_{\Delta}^{\phi} V_{\phi|r} W - B_r^{\phi} V_{\theta\Delta} W + B_{\Delta\phi} V^{\phi} W_{|r} + B_{r\phi} V^{\phi} W_{|\Delta}, \\ 2\kappa_{\Delta r} &= 2\beta_{(\Delta|r)} + \beta_{\theta|\Delta} V_{|r}^{\theta} + \beta_{\phi|r} V_{|\Delta}^{\phi} - B_{\Delta}^{\phi} V_{\phi|r} - B_r^{\phi} V_{\phi|\Delta} - \beta_{\theta|\Delta} B_r^{\theta} W - \beta_{\phi|r} B_{\Delta}^{\phi} W + \\ &\quad + 2B_{\Delta}^{\phi} B_{\phi r} W + B_{|r}^{\phi} W_{|\Delta} V_{\phi} + B_{|\Delta}^{\phi} W_{|r} V_{\phi} + B_{\Delta}^{\theta} B_r^{\theta} V_{\theta} \beta_{\phi} + B_r^{\theta} B_{\Delta}^{\phi} V_{\theta} \beta_{\phi}. \end{aligned}$$

W ramach założeń (3.5) i (3.6) otrzymać można związki przybliżone, w zależności od rzędu wielkości zachowywanych w (4.1)–(4.2) członów wyrażonych przez  $L/R, H/R$

i  $V_d/R$  oraz wzajemnego stosunku tych parametrów,  $R = R_{\min}$ . Spośród szeregu zestawów wielkości kinematycznych zbadanych w [17] przytoczmy wyniki odnoszące się do dwóch teorii.

Przypadek 1,

$$\frac{L}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{H}{R} = 0(\varepsilon^3), \quad \frac{W}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{V}{R} = 0(\varepsilon^4), \quad \varepsilon^3 \ll 1.$$

Miary odkształcenia wynoszą wówczas

$$(4.3) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{d\Gamma} &= 2V_{(d|\Gamma)} - 2B_{d\Gamma}W + W_{|d}W_{|\Gamma}, \\ \varkappa_{d\Gamma} &= -W_{|d\Gamma} - B_{d|\Gamma}^{\phi}V_{\phi} - B_d^{\phi}V_{\phi|\Gamma}. \end{aligned}$$

Przypadek 2,

$$\frac{L}{R} = 0(1), \quad \frac{H}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{W}{R} = 0(\varepsilon), \quad \frac{V}{R} = 0(\varepsilon^2), \quad \varepsilon^2 \ll 1$$

odpowiadający teorii Donnella [9]

$$(4.4) \quad \begin{aligned} 2\lambda_{d\Gamma} &= 2V_{(d|\Gamma)} - 2B_{d\Gamma}W + W_{|d}W_{|\Gamma} + B_d^{\phi}B_{\phi\Gamma}W^2, \\ \varkappa_{d\Gamma} &= \beta_{(d|\Gamma)}, \end{aligned}$$

a do wyznaczenia składowych  $\beta_d$  jest do dyspozycji zależność

$$(4.5) \quad \beta_{\phi}(\delta_d^{\phi} - B_d^{\phi}W) = W_{|d} - B_d^{\phi}V_{\phi}.$$

W stosunku do miar odkształcenia liniowej teorii powłok [35], [26], [52], [19] zależności (4.3) różnią się jedynie ostatnim członem w wyrażeniu na  $\lambda_{d\Gamma}$ . Stanowią one związki inżynierskiej teorii, odpowiednika teorii Kármána dla płyt (MUSHTARI i GALIMOV [34], VOLMIR [51]). Zastosowany sposób ich otrzymania podkreśla zarówno lagrange'owski charakter teorii umiarkowanie dużych ugięć, jak i rząd wielkości pomijanych członów.

Przyrosty odkształceń, wchodzące do wyrażenia na dysypację energii wewnętrznej (2.3), w materialnym opisie są

$$(4.6) \quad \dot{\lambda}_{d\Gamma} = \frac{d}{dt} \lambda_{d\Gamma}, \quad \dot{\varkappa}_{d\Gamma} = \frac{d}{dt} \varkappa_{d\Gamma}.$$

## 5. Siły wewnętrzne

Z chwilą gdy wybrane są miary odkształcenia, odpowiadający zestaw sił wewnętrznych nie może być dobierany dowolnie. Do określenia właściwego zestawu powierzchniowych tensorów sił wykorzystuje się funkcję dysypacji (2.3). Przy wykorzystaniu założenia (3.1), dysypacja przypadająca na jednostkę nieodkształconej powierzchni środkowej powłoki wyraża się wzorem

$$(5.1) \quad D = \int_{-H}^H (S^{d\Gamma} \dot{E}_{d\Gamma} + 2S^{A3} \dot{E}_{A3} + S^{33} \dot{E}_{33}) dX^3.$$

Wyznaczając  $S^{33}$  z (2.2) przy wykorzystaniu (3.4) oraz pamiętając o założeniu (3.2) otrzymuje się

$$(5.2) \quad D = \int_{-H}^H (\dot{E}_{d\Gamma} - \dot{E}_{33} W_{|d} W_{|\Gamma}) S^{\Gamma A} dX^3.$$

Oszacowując drugi człon w porównaniu z pierwszym okazuje się, że w przypadku 1 jest on rzędu członów pomijanych w dotychczasowych rozważaniach, a więc ostatecznie

$$(5.3) \quad D = \int_{-H}^H S^{dI} \dot{E}_{dI} dX^3 = N^{dI} \dot{\lambda}_{dI} + M^{dI} \dot{\nu}_{dI},$$

gdzie  $\dot{\lambda}_{dI}$  i  $\dot{\nu}_{dI}$  zdefiniowane są w (4.6), podczas gdy

$$(5.4) \quad N^{dI} = \int_{-H}^H S^{dI} dX^3, \quad M^{dI} = \int_{-H}^H S^{dI} X^3 dX^3.$$

Stanowią one powierzchniowe tensory sił wewnętrznych w powłoce, odniesione do konfiguracji nieodkształconej. Przy ugięciach o rząd większych od grubości powłoki wpływ zmian geometrii nie jest pomijalny w (5.2). Odpowiednie uogólnione siły i uogólnione prędkości odkształcenia ulegną modyfikacji [17].

Dla inżynierskiej teorii rozpatrywanej w przypadku 1 łatwo stwierdzić, oszacowując poszczególne wyrazy w (4.1), że  $E_{dI} = 0 \left( \frac{H}{R} \right)$ . Tak więc  $G_{KL} \simeq C_{KL}$  i nie ma różnicy między warunkami plastyczności (2.6) i (2.7). Przy ustaleniu powierzchni plastyczności  $F(N^{dI}, M^{dI}) = 0$  nie ma więc potrzeby rozróżniania opisu materialnego i opisu przestrzennego.

W teoriach uwzględniających przemieszczenia normalne o rząd większe od grubości powłoki, tzn. gdy np.  $\frac{H}{W} = 0(\varepsilon)$ ,  $\frac{V_I}{H} = 0(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon^3 \ll 1$  wystąpią różnice w wyrażeniu na warunek plastyczności. Jeśli za obowiązujący dla materiału uznać warunek plastyczności określony w opisie przestrzennym, np. (2.6), wówczas (2.7) przyjmuje następującą postać

$$(5.5) \quad 3G_{d\phi}(G_{I0} - 4B_{I0}W)S^{dI}S^{0\phi} - [(G_{dI} - 2B_{dI}W)S^{dI}]^2 = 2\sigma_0^2.$$

W konsekwentnej teorii wykorzystującej opis materialny należałoby postugiwać się odpowiednią formą zależności (2.10).

## 6. Równania równowagi

Równania równowagi (2.4) sprowadzają się do następującego układu

$$(6.1) \quad (S^{i0} + U_{iI}^A S^{I0} + U_{i3}^I S^{30})_{;0} + (S^{j3} + U_{jI}^A S^{I3} + U_{j3}^I S^{33})_{;3} = 0.$$

$$(6.2) \quad (S^{d3} + U_{d3}^3 S^{3d} + U_{dI}^3 S^{dI})_{;0} + (S^{33} + S^{33} U_{i3}^I + U_{i3}^I S^{d3})_{;3} = 0.$$

Wykorzystując założenia (3.1) i (3.4) i sprowadzając powyższe związki do bazy nieodkształconej powierzchni środkowej, otrzymuje się równania przybliżonej teorii. Konsekwentnie pomijając w nich człony tego samego rzędu wielkości, co pominięte w związkach kinematycznych i w wyrażeniu na dysypację otrzymuje się dla przypadku 1

$$(6.3) \quad S_{dI}^{dI} - B_I^A S^{d3} + (\beta^d S^{I3})_{;I} + S_{i3}^{3d} = 0, \\ (W_{dI} S^{dI})_{;I} + S_{dI}^{3I} + B_{dI} S^{dI} + (W_{dI} S^{d3} + S^{33} + B_{dI}^d V_{\phi} S^{d3})_{;3} = 0.$$

Całkując te równania na grubości nieodkształconej powłoki w celu otrzymania związków równowagi wyrażonych w wielkościach (5.4), dochodzi się do zależności

$$(6.4) \quad N_{|r}^{\phi\Gamma} - B_r^\phi Q^r + (\beta^\phi Q^r)_{|r} + P^\phi = 0,$$

$$(6.5) \quad M_{|r}^{\phi\Gamma} - Q^\phi = 0,$$

$$(6.6) \quad Q_{|r}^\Gamma + B_{Ar} N^{A\Gamma} + (W_{|A} N^{A\Gamma})_{|r} + P = 0,$$

gdzie

$$(6.7) \quad P^A = [S^{3A}]_{-H}^H, \quad P = [S^{33} + W_{|A} S^{A3} + B_A^\phi V_\phi S^{A3}]_{-H}^H$$

oraz

$$(6.8) \quad \beta_\theta = -W_{|0} - B_\theta^A V_A.$$

Inny zestaw przybliżonych równań podano w [44].

Powyższe zależności stanowią układ przybliżonych równań równowagi rozpatrywanej teorii umiarkowane dużych ugięć. Równanie (6.5) ma postać znaną z liniowej teorii, podczas gdy w (6.4) i (6.6) pierwsze dwa człony odpowiadają liniowemu przybliżeniu, Równania liniowego przybliżenia opisują ściśle równowagę elementu powłoki w aktualnej konfiguracji, jeśli traktować przepisane różniczkowanie kowariantne jako różniczkowanie w bazie odkształconej powłoki i gdy tensor krzywizny dotyczy aktualnej (nieznanej) konfiguracji. Równania równowagi wyprowadzane w inżynierskich teoriach dla powłok wyniosłych zatrzymują z reguły tylko dwa pierwsze człony w lewej części (6.4) (por. [11], [34]), oraz omówienie nieliniowych teorii przez WOŹNIAKA [52]). Związki (6.4)–(6.6) stosują się również w przypadku uwzględniania zmian grubości przez przyjęcie  $\beta_3 \neq 0$  w (3.4). Odpowiedni układ równań równowagi i warunków brzegowych w opisie materialnym wyprowadziła DUSZEK [17]. Podane tam zostały również zestawy równań dla kilku przybliżonych teorii powłok walcowych i kulistych, zapisane w odpowiednich układach współrzędnych.

## 7. Powłoki walcowe

Istniejące rozwiązania dotyczące dużych ugięć powłok plastycznych uzyskane zostały przy uproszczonych równaniach równowagi i zlinearyzowanych powierzchniach plastyczności. Stosowano powierzchnie plastyczności właściwe przestrzennemu opisowi. Przytoczymy niektóre rozwiązania zarówno dla wskazania charakteru zmian wynikających z uwzględnienia «dużych» ugięć, jak i dla porównania stosowanych nieliniowych teorii ze związkami wynikającymi z konsekwentnego lagrange'owskiego przedstawienia teorii powłok. Przytoczone rozwiązania nie obejmują obszernego działu powłok wiotkich, tzn. rozpatrywanych jako membrany. Przegląd metod i rozwiązań z tego zakresu podał ORKISZ [38].

Walcową powłokę przegubowo zamocowaną na końcach i poddaną równomiernemu wewnętrznemu ciśnieniu rozpatrywała DUSZEK [13–15], korzystając z następującego układu równań (rys. 2)

$$(7.1) \quad n_x' = 0, \quad m_x' - 2Rn_x w'' + 2\alpha n_\phi - 2\alpha p = 0,$$

$$(7.2) \quad \dot{\lambda}_x = \dot{u}' + \left(\frac{A}{L}\right)^2 \dot{w}' w', \quad \dot{\lambda}_\phi = \dot{w}, \quad \dot{\lambda}_x = \frac{\dot{w}''}{2\alpha}, \quad \dot{\lambda}_\phi \simeq 0,$$

$$(7.3) \quad n_\phi = 1, \quad 0 \leq n_x \leq \sqrt{1 - m_x}, \quad ( )' = \frac{d}{dx},$$

gdzie

$$(7.4) \quad x = \frac{X}{L}, \quad u = \frac{U}{L}, \quad w = \frac{W}{A}, \quad \kappa_x = \frac{HK_x}{2},$$

$$\kappa_\varphi = \frac{HK_\varphi}{2}, \quad R = A/H, \quad p = \frac{PA}{N_0}, \quad \alpha = \frac{L^2}{AH},$$

$$n_x = \frac{N_x}{N_0}, \quad m_x = \frac{M_x}{M_0},$$

natomiast  $M_0 = \sigma_0 H^2$ ,  $N_0 = \sigma_0 H$ , a  $\sigma_0$  oznacza granicę plastyczności.

Stosowane równania równowagi i miary odkształcenia odnoszą się do przypadku 1. Równanie (7.1) odpowiada związkom (6.4)–(6.6) przy pominięciu członów pochodzących od rzutu siły poprzecznej na kierunek tworzącej, podczas gdy (7.2) otrzymuje się z (4.3) i (4.6). Warunek plastyczności stanowi fragment powierzchni granicznej opisanej na ścisłej powierzchni dla materiału Treski, a wprowadzonej w [12].

W powłoce pojawiają się dwa obszary, odpowiadające różnym fragmentom powierzchni plastyczności, w zależności od tego czy zachodzi nierówność (7.3) czy też  $n_x^2 = 1 - m_x$ . Położenie granicy między tymi dwoma obszarami określa parametr  $\xi$ . Wykorzystując stowarzyszone prawo płynięcia (por. [23], [37]) i spełniając wymagane warunki ciągłości na granicach stref znajdujących się w odmiennych stanach naprężenia otrzymuje się następujące równanie określające przyrost obciążenia, [18]

$$(7.5) \quad -\frac{1}{Y} \frac{dY}{d\xi} = \frac{6[1 - (1 - \xi)Y]^2 + 2Y^2(1 - \xi)\xi^3}{[2 - Y(1 - \xi)^2]\{3\xi[1 - Y(1 - \xi)] - Y\xi^3\}},$$

gdzie  $Y = \alpha(p - 1)$ , natomiast  $\xi$  określa umowny czas. Tak więc  $dY/d\xi = \alpha\dot{p}$ .

Równanie (7.5) wskazuje na przyrostowy charakter problemu dużych ugięć powłok: obciążenie zmienia się ze wzrostem parametru odmierzającego upływ czasu. Parametrem takim może być np. również ugięcie  $w_0$  w wybranym punkcie,  $w_0 = w_0(\xi)$ . Jednak, jak zauważył WASZCZYSZYN [50], wybór ugięcia jako umownego czasu nie zawsze jest wskazany, gdyż w przypadku występowania przeskoku ugięcia czasem cofają się. Problemy konstrukcji plastycznych w przyrostowym sformułowaniu rozpatrywał ONAT [37].

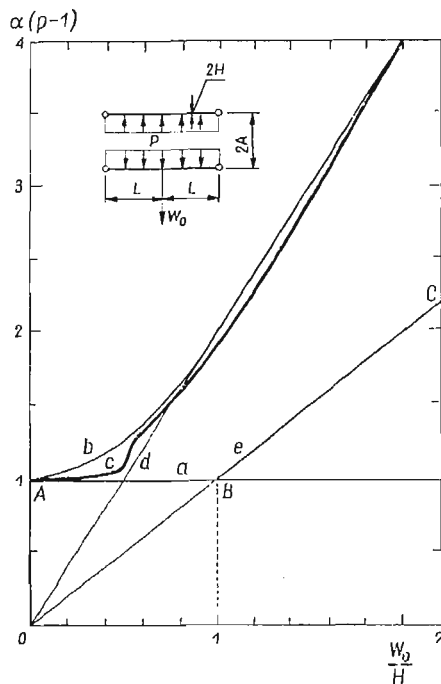
Zależność (7.5) pozwala na zbadanie stateczności procesu. Można stwierdzić, że  $\dot{p} = 0$  dla  $p = 1$  oraz że  $\dot{p} > 0$  dla  $0 < \xi \leq 1$ , a więc w rozpatrywanym przypadku następuje geometryczne wzmocnienie. Numeryczne rozwiązanie (7.5) podano w [18], gdzie znaleźć można również wyniki dotyczące powłoki zamocowanej.

Przybliżone rozwiązanie rozpatrywanego zagadnienia, polegające na wyznaczeniu górnej granicy zależności przyrostu obciążenia od przyrostu ugięcia podała DUSZEK [15]. Granica ta określona jest przez

$$(7.6) \quad Y = \alpha(p - 1) = 1 + w_0^2 R^2,$$

gdzie  $w_0 R = W_0/H$ . Wyniki (7.5) i (7.6) przedstawiono na rys. 2. Dla porównania podano tam również rozwiązanie błonowe i proste odpowiadające powłoce o ściance trójwarstwowej [14].

Rozwiązanie dla powłoki warstwowej wskazuje na niestateczność zależności obciążenie–ugięcie. Wniosek ten potwierdza analiza powłok trójwarstwowych przeprowadzona



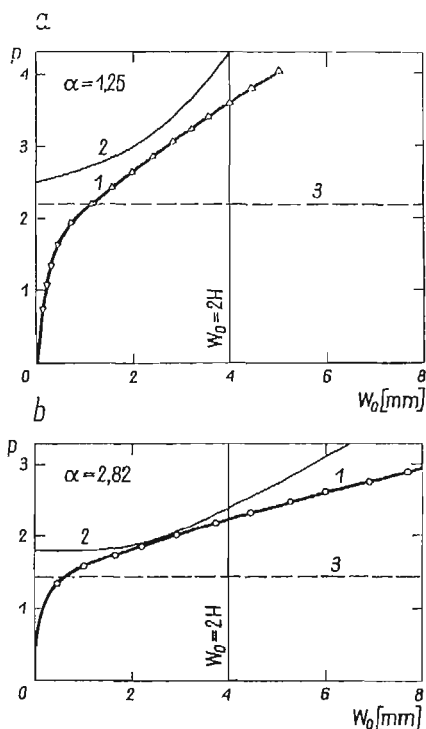
Rys. 2. Wzmocnienie geometryczne dla powłok walcowych: a) nośność graniczna, b) oszacowanie [13] dla ścianki pełnej, c) rozwiązanie przybliżone [18], d) rozwiązanie bezmomentowe, e) rozwiązanie bezmomentowe dla ścianki trójwarstwowej oraz  $ABC$  — oszacowanie [13]

przez LEPIKA [30–33] oraz przez KULLA [27]. Rozpatrując zagadnienie sprężysto-plastycznego zachowania się konstrukcji pod działaniem ciśnienia i siły podłużnej w przypadku przyjęcia warunku Treski wykazano, że proces szybkiego narastania ugięć rozpoczyna się znacznie poniżej obciążenia granicznego. Oznacza to, że nośności granicznej, wyznaczonej z klasycznej teorii, towarzyszą już ugięcia wykraczające poza zakres dopuszczalności liniowej teorii powłok. Dalszych przykładów tego typu dostarcza praca WASZCZYŻYNA [50], gdzie zagadnienia sprężysto-plastyczne rozpatrywane są konsekwentnie w nieliniowym sformułowaniu. Efektu geometrycznego wzmocnienia walcowych zbiorników ciśnieniowych dotyczy szereg prac GILLA i współpracowników [1], [8], [9], [10], [4i]. Cechą charakterystyczną tych prac jest rozpatrywanie wpływu zmian geometrii powłoki krok po kroku. Poszukuje się tam każdorazowo nośności granicznej dla powłoki o geometrii zmienionej wskutek odkształceń plastycznych wywołanych na poprzednim kroku obciążenia.

Rozwiązania wynikające z uproszczonej teorii dużych ugięć porównamy z dostępnymi wynikami doświadczeń na temat zachowania się zamocowanych powłok. Materiału dostarczają badania AUGUSTI'EGO i D'AGOSTINO [3], [4], SAVE'A i JANASA [42] oraz PERRONE'A [39]. Badania [4] dotyczą zakresu ugięć mieszczących się w założeniach teorii umiarkowanie dużych przemieszczeń. Spośród dziewięciu przedstawionych przypadków typowe wyniki dotyczące  $\alpha = 2,82$  i  $\alpha = 1,25$  porównano na rys. 3 z wynikiem typu (7.6) dla po-

włoki zamocowanej, [13]. Linią przerywaną oznaczono wynik podany przez teorię nośności granicznej dla dokładnej powierzchni granicznej Treski, [23].

Z rys. 3 widać, że wzmocnienie geometryczne jest istotne. Charakter przebiegu krzywej doświadczalnej w pewnym zakresie ugięć odpowiada rozwiązaniu teoretycznemu. Materiał badanych powłok wykazywał długą platformę plastyczności tak, że wzmocnienie materiału nie wносиło istotnego wpływu w rejestrowaną zależność obciążenie—największe ugięcie. Krzywa 2 odpowiadająca rozwiązaniu teoretycznemu rozpoczyna się powyżej linii 3, gdyż rozwiązanie dla dużych ugięć korzystało z powierzchni granicznej opisanej na dokładnym warunku plastyczności Treski dla powłok.



Rys. 3. Zależność: obciążenie — największe ugięcie dla walcowych powłok plastycznych, 1) doświadczenia [4], 2) oszacowanie [13], 3) nośność graniczna

Badania doświadczalne «efektu brzegowego» w zakresie plastycznych odkształceń przeprowadzali KLEPACZKO i KÖNIG [25]. Doświadczenia SCHROEDERA i RANGARAJANA [45] nad połączeniami powłok walcowych wykazują występowanie efektów, które mogą być wytłumaczone zmianami geometrii konstrukcji.

## 8. Powłoki kuliste

Na przykładzie powłok kulistych można zilustrować obydwa, charakterystyczne dla geometrycznie nieliniowych teorii zjawiska, mianowicie: wzmocnienie geometryczne oraz niestateczność procesu odkształcenia konstrukcji. Drugie z nich, tzn. zjawisko przeskoku, zwykliśmy dotychczas kojarzyć z konstrukcjami wykazującymi cechy sprężyste.

Istniejące studia dotyczące geometrycznego wzmocnienia ograniczają się do mało wyniosłych powłok, aczkolwiek CAPURSO [6] podał równania przyrostowe bez tego ograniczenia. Komplet związków geometrycznych i równań równowagi przybliżonej teorii bardzo słabo wyniosłych powłok kulistych podała DUSZEK [15, 16], korzystając przy wyprowadzeniu z zasady prac przygotowanych, a więc uzyskując wewnętrznie zgodny komplet zależności

$$(8.1) \quad (rn_\varphi)' - n_0 = 0, \quad h[(rm_\varphi)' - m_0]' + [rn_\varphi(r+w)']' + rp = 0,$$

$$(8.2) \quad \begin{aligned} \dot{\lambda}_\varphi &= \dot{u}' + \dot{w}'r + \dot{w}'w', & \kappa_\varphi &= -h\dot{w}'', \\ \dot{\lambda}_0 &= \dot{u}/r, & \kappa_0 &= -h\dot{w}'/r, \end{aligned}$$

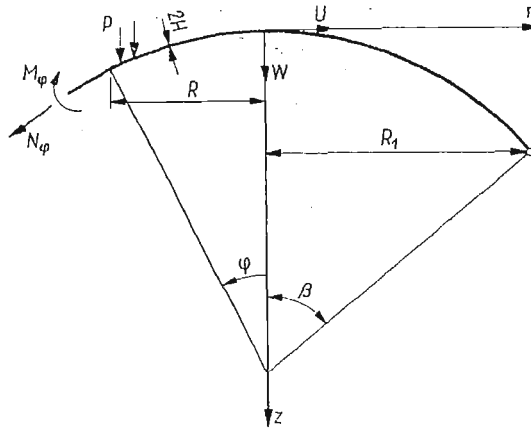
gdzie

$$(8.3) \quad w = \frac{W}{A}, \quad u = \frac{U}{A}, \quad h = \frac{H}{2A}, \quad r = \frac{R}{A}, \quad p = \frac{PA}{N_0},$$

$$(\quad)' = \frac{d}{dr},$$

a bezwymiarowe siły i krzywizny zdefiniowane są jak w (7.4). Wielkości geometryczne i konwencja znaków dla sił i obciążeń podane są na rys. 4.

Dla powłoki przegubowo zamocowanej na obwodzie i obciążonej równomiernym ciśnieniem od strony wklęsłej, kontynuacja procesu odkształcenia plastycznego jest możliwa przy narastającym ciśnieniu. Ma więc miejsce wzmocnienie geometryczne. W powłoce tworzą się dwa obszary. W przypadku stosowania warunku plastyczności Treski w części

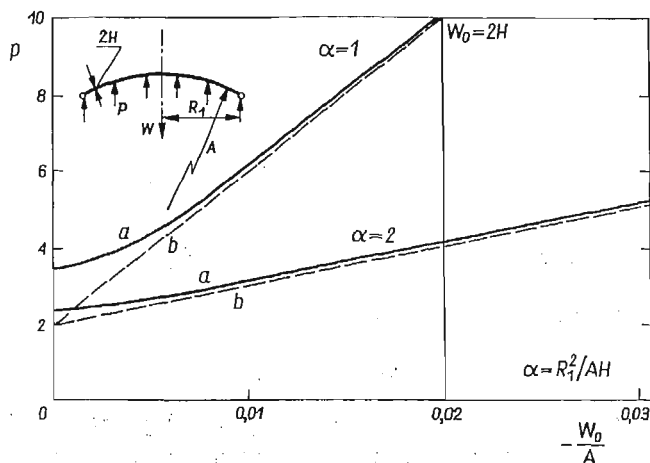


Rys. 4. Geometria mało wyniosłej powłoki kulistej

centralnej  $0 \leq r \leq \xi$  realizuje się stan błonowy  $m_\theta = m_\varphi = 0$ , podczas gdy w pobliżu podpory,  $\xi \leq r \leq c$ , występuje stan zgięciowy taki, że  $m_\theta = n_0^2 - 1$ , a pozostałe wielkości określone są równaniami równowagi. Ze wzrostem ciśnienia strefa błonowa powiększa się. Wyczerpanie nośności w sensie klasycznym, tzn. rozpoczęcie się ruchu sztywno-plastycznej powłoki odpowiada, w tym przypadku, mało wyniosłej konstrukcji i niewystępowaniu strefy błonowej,  $\xi = 0$ .



Wzrost ciśnienia potrzebny do utrzymania procesu odkształcenia plastycznego powłoki zilustrowany jest na rys. 5 dla dwóch przypadków powłok o pełnej ściance, wykonanych z materiału Treski [16]. Podobnie jak to miało miejsce dla powłok walcowych, ugięcia rzędu grubości ścianki zmieniają w sposób istotny udźwig konstrukcji. Zależność siła — największe ugięcie zdąża asymptotycznie do prostej odpowiadającej rozwiązaniu błonowemu otrzymanemu stosownie do przybliżonej teorii membran. Należy zaznaczyć, że przyrost wzmocnienia geometrycznego zależy w dużym stopniu od warunków brzegowych powłoki i przy określonej swobodzie przesuwu na podporze przyrost ten może nawet nie wystąpić. Zagadnienia tego typu badane były dla płyt [7], [24], [43], [49].



Rys. 5. Wzmocnienie geometryczne dla małowyniosłych powłok kulistych, a) rozwiązanie [16], b) rozwiązanie bezmomentowe

Aby umożliwić zilustrowanie zjawiska przeskoku, któremu towarzyszy zmniejszenie siły potrzebnej do utrzymania plastycznego płynięcia konstrukcji należy omówić metodę oszacowania zależności obciążenie–ugięcie w geometrycznie nieliniowej teorii. Ścisłe rozwiązanie zagadnienia przeskoku plastycznego dla powłok nie jest dotychczas znane. Dla sprężysto-plastycznego modelu odkształcenia badanie przeskoku jest również utrudnione z uwagi na konieczność uwzględnienia zjawisk odciążania: obszary pierwotnie plastyczne mogą znaleźć się w stanie sprężystym, przejściowo lub ostatecznie, [50].

Oszacowania niestateczności konstrukcji sztywno-plastycznej mogą być dokonywane przy wykorzystaniu zasady prac przygotowanych. W zastosowaniu do płyt podejście takie stosowane było w [43]. Ogólne sformułowanie metody w konsekwentnym opisie materialnym, tzn. stosując tensor naprężeń Pioli–Kirchhoffa (2.2) oraz tensor odkształceń Greena (2.1), podali LANCE i SOECHTING [28].

Zasada prac przygotowanych w teorii skończonych odkształceń ma postać

$$(8.4) \quad \int_V S^{KL} \dot{E}_{KL} dV = \int_S T^K \dot{U}_K dS.$$

Pola naprężeń i prędkości odkształceń wchodzące do (8.4) nie są teraz niezależne. Niezależne są tylko odpowiednie wielkości z opisu przestrzennego, natomiast  $S^{KL}$  i przemiesz-

czenia  $U_K$  związane są równaniami równowagi (2.4) oraz odpowiednimi zależnościami przedstawiającymi warunki brzegowe. Tak więc stosując (8.4) należy dobrać łącznie  $S^{KL}$  i  $U_K$  spełniające (2.4), a następnie dobrać niezależnie pole prędkości przemieszczeń  $\dot{U}_K$ , spełniające kinematyczne warunki brzegowe. Równoważność zapisu (8.4) i zapisu eulerowskiego zasady prac przygotowanych wynika z (2.3).

Przy założeniu słuszności postulatu Druckera w formie (2.11), zależność (8.4) pozwala sformułować następującą zasadę

$$(8.5) \quad \int_V D(\dot{E}_{KL}) dV \geq \lambda \int_S T^K \dot{U}_K dS.$$

gdzie  $\lambda$  jest mnożnikiem jednoparametrowego obciążenia. Jeśli  $\lambda > 1$  konstrukcja jest stateczna, natomiast  $\lambda < 1$  oznacza, że następuje przeskok plastyczny do stanu, w którym znowu  $\lambda > 1$ .

Jako przykład zastosowania zasady prac przygotowanych (8.4) do zbadania przeskoku rozpatrzmy powłokę o geometrii, jak na rys. 4. Na podporze dana jest swoboda przesuwu poziomego

$$(8.6) \quad \dot{u}(c) \neq 0, \quad w(c) = \dot{w}(c) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0.$$

Przyjmujemy warunek plastyczności w postaci

$$(8.7) \quad n_\theta^2 + m_\theta = 1,$$

tnz. rozpatrujemy stany naprężenia na jednym płacie hiperpowierzchni plastyczności Treski, [23]. Wykorzystując stowarzyszone prawo płynięcia (2.11) otrzymuje się, zgodnie z (8.7), że  $\dot{\lambda}_\varphi = \dot{\kappa}_\varphi = 0$ . Tak więc zgodnie z więzami (8.6) pola prędkości przemieszczeń i pole ugięć są

$$(8.8) \quad w = \delta \left(1 - \frac{r}{c}\right), \quad \dot{w} = \dot{\delta} \left(1 - \frac{r}{c}\right), \quad \dot{u} = \frac{\dot{\delta}}{c} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{\delta}{c} r\right).$$

Ponadto (2.11) daje  $n_\theta = -\dot{u}/(2h\dot{w}')$ ; znając natomiast  $n_\theta$ , można z (8.7) określić  $m_\theta$ , w zależności od wielkości geometrycznych i kinematycznych. Pozwala to na przedstawienie dysypacji wewnętrznej w postaci  $D = D(\dot{E}_{KL})$ , jak to jest wymagane przez (8.5).

Po dokonaniu całkowań w (8.5) otrzymujemy, w przypadku rozpatrywanej teorii przybliżonej określonej związkami (8.1) i (8.2),

$$(8.9) \quad \frac{pc^2}{h} \equiv \frac{PR_1^2}{M_0} = 6 + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{5} \alpha^2 - \delta \alpha + \frac{4}{3} \delta^2 \right),$$

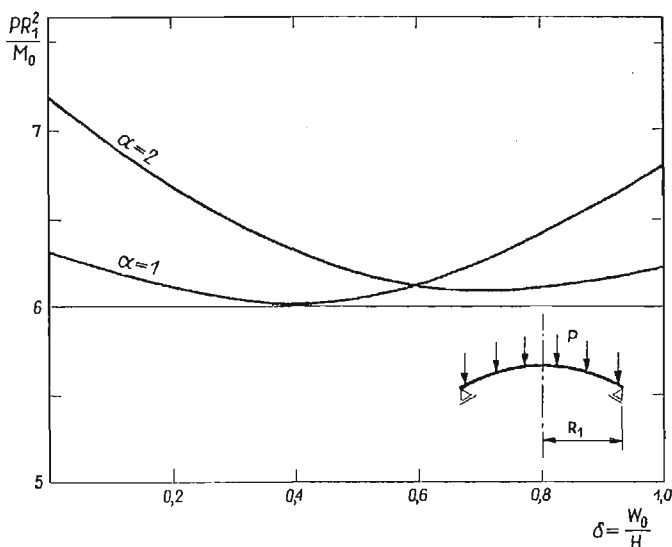
gdzie

$$(8.10) \quad \alpha = \frac{R_1^2}{AH} \equiv \frac{c^2}{2h}, \quad c = \frac{R_1}{A}, \quad \delta = \frac{-W_0}{H}.$$

Ponieważ  $dp/d\delta < 0$  dla  $0 \leq \delta < \frac{3}{8}\alpha$  obciążenie zmniejsza się przy narastających ugięciach, a więc następuje przeskok. Obciążenie wzrasta ponad wielkość początkowej noś-

ności granicznej dla  $\delta \geq \frac{3}{4}\alpha$ . Zależność (8.9) przedstawiona jest na rys. 6 dla dwóch wartości  $\alpha$  charakteryzujących wymiary powłoki.

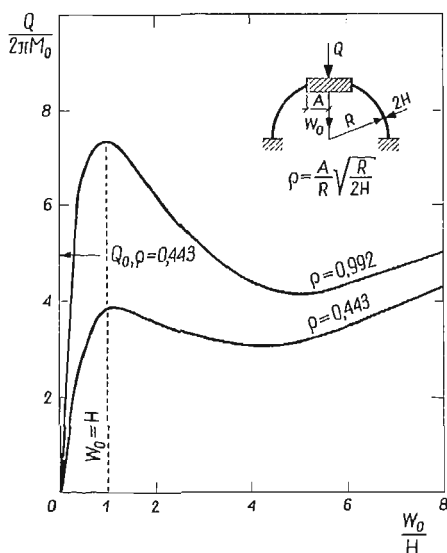
Z równań równowagi (8.1) należy jeszcze wyznaczyć  $n_\varphi$  i  $m_\varphi$  spełniające warunki brzegowe zadania i określić parametry geometryczne, dla których spełnione są wymagania



Rys. 6. Oszacowanie przeskoku plastycznego dla małowyniosłej powłoki kulistej

równowagi i ewentualne ograniczenia na zakres stosowalności profilu naprężeń znajdującego się na boku (8.7) hiperpowierzchni plastyczności. Z uwagi na ilustracyjny cel rozpatrywanego przykładu szczegółów tych nie analizujemy. Niestateczność procesu deformacji plastycznej powłok rozpatrywał SZABLIJ [48] dla nieco odmiennej teorii niż określona w (8.1) i (8.2), a której zależności podane są w [51].

Zjawisko przeskoku plastycznego wymaga pogłębionych studiów dla sprecyzowanych teorii powłok, gdyż ilościowe wyniki zależą od charakteru wprowadzanych uproszczeń. Dla wyniosłych powłok kulistych zjawiska geometrycznego osłabienia konstrukcji i przeskoku plastycznego badał doświadczalnie LECKIE [29]. Czasza półkulista o promieniu 3" i grubości 0,5" obciążona była siłą skupioną przyłożoną poprzez sztywną tarczę. W takich przypadkach obszar plastyczny może nie obejmować całej powłoki i przeskok dotyczy tylko fragmentu konstrukcji, podobnie jak to ma miejsce w powłokach sprężystych. Lokalność przeskoku dla powłok kulistych wykazują również badania SCHROEDERA i SHERBOURNE'A [46]. Krzywe doświadczalne zależności siła — największe ugięcie, uzyskane w omawianych badaniach [29] przytoczone są na rys. 7 dla kilku przypadków średnicy centralnej tarczy. Wyniki te wskazują, że odkształcenia sprężyste mają istotny wpływ na wielkość obciążenia, przy którym następuje przeskok. Dla płyt zjawisko to badał JANAS [24], proponując przybliżoną metodę ilościowej oceny wpływu odkształceń sprężystych na obciążenie.



Rys. 7. Doświadczalna zależność obciążenie-ugięcie dla sprężysto-plastycznej powłoki [29],  $Q_0$  — nośność graniczna

żenie przeskoku. Teoria i technika obliczeniowa rozwinięta przez WASZCZYŻYNA [50] dla sprężysto-plastycznych powłok umożliwią uzyskanie ilościowych wyników dotyczących przeskoku tego typu konstrukcji.

### 9. Zakończenie

Teoria powłok plastycznych rozwija się obecnie w kierunku uwzględnienia geometrycznej nieliniowości. Aczkolwiek w zakresie teorii nośności granicznej liczba rozwiązań zupełnych jest ciągle niewielka, to nie ma jednak zasadniczych trudności w rozwiązywaniu konkretnych zadań, gdyż równania problemu są znane i zasadnicze twierdzenia, stanowiące podstawę do rozwiązań przybliżonych, są ustalone. W dziedzinach innych niż nośność graniczna sytuacja jest znacznie mniej wyjaśniona.

Równania teorii umiarkowanie dużych ugięć są jednak, w zasadzie, ustalone. Należy oczekiwać, że badania przyniosą w przyszłości rozwiązania problemów początkowo-brzegowych dla różnych przybliżonych teorii i umożliwią ustalenie zakresu ich zastosowania.

Sz szczególnie interesujące, zarówno ze stanowiska teorii, jak i zastosowań w konstrukcjach, jest studium zjawiska przeskoku plastycznego i niestateczności procesu plastycznego płynięcia konstrukcji.

Jednym z problemów badawczych o podstawowym znaczeniu jest sformułowanie i uzasadnienie twierdzeń pozwalających oszacowywać jeśli nie rozwiązanie problemu przyrostowego, to odkształconą postać powłoki plastycznej lub inne elementy rozwiązania takiego przyrostowego problemu.

Wyjaśnienia wymaga różnica pomiędzy plastycznością w konfiguracji nieodkształconej a plastycznością w konfiguracji aktualnej, tzn. określenie w jakim stopniu należy w te-

orii konstrukcji uwzględniać «anizotropię» spowodowaną dużymi odkształceniami. Wiąże się z tym również konieczność rozwiązania zagadnień początkowo-brzegowych dla różnych warunków plastyczności, podobnie jak to miało miejsce w problemach brzegowych teorii nośności granicznej.

Odmienne zagadnienie stanowi analiza sprężysto-plastycznego zachowania się konstrukcji przy występowaniu dużych przemieszczeń i dużych odkształceń. Sformułowania i zbadania wymagają tu również związki podstawowe, gdyż addytywność odkształceń sprężystych i plastycznych w takich przypadkach nie zachodzi.

Nie można pominąć wśród problemów badawczych opracowywania metod i technik numerycznego rozwiązywania zagadnień.

Pominięte w tym artykule takie problemy, jak dynamika powłok plastycznych, mechanika powłok wiotkich, uwzględnienia wzmocnienia materiału stanowią inną grupę ważnych technologicznie i konstrukcyjnie zagadnień.

#### Oznaczenia

$X^L, L = 1, 2, 3$	współrzędne punktu materialnego w konfiguracji nieodkształconej,
$x^i, i = 1, 2, 3$	współrzędne położenia punktu w konfiguracji odkształconej,
$G_K, g_k$	wektory bazy, odpowiednio w konfiguracji nieodkształconej i odkształconej,
$G_{KL}, g_{kl}$	odpowiednie tensory metryczne,
$G_{\Delta\Gamma}$	tensor metryczny nieodkształconej powierzchni,
$g_k^K = G^K g_k$	translator z bazy $G_K$ do bazy $g_k$ ,
$A_\Delta, A_\Delta, \Delta = 1, 2$	wektory bazy na nieodkształconej powierzchni środkowej $X^3 = 0$ ,
$\mu_I^A$	translator z bazy $G_{KL}$ do bazy na powierzchni środkowej,
$\mu = \det \mu_I^A$	wyznacznik translatora,
$A_{\Delta\Gamma}$	tensor metryczny powierzchni środkowej nieodkształconej powłoki,
$B_{\Delta\Gamma}$	drugi tensor podstawowy nieodkształconej powierzchni środkowej powłoki,
$R_{\min}$	najmniejszy promień krzywizny nieodkształconej powłoki,
$n_K$	jednostkowy wektor normalny w konfiguracji nieodkształconej,
$( \ ) ;$	różniczkowanie kowariantne dwupunktowych tensorów,
$( \ )_I$	kowariantne różniczkowanie w bazie powierzchni środkowej,
$\sigma^{ij}$	składowe tensora naprężeń Cauchy'ego,
$S^{KL}$	składowe tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa,
$U = U^K G_K = U^\Delta A_\Delta + W A_3$	wektor przemieszczenia,
$\bar{U}^\Delta$	składowe przemieszczenia stycznego do powierzchni, odniesione do bazy na powierzchni środkowej,
$W$	przemieszczenie normalne do powierzchni środkowej,
$V^\Delta$	wektor powierzchniowy przemieszczeń stycznych do powierzchni środkowej,
$C_{KL}$	tensor deformacji Cauchy'ego (różnica metryk),
$E_{KL}$	tensor odkształceń Greena,

$\dot{E}_{KL}$	przyrost tensora odkształceń Greena,
$\lambda_{,1r}$	tensor wydłużeń powierzchni środkowej,
$\varkappa_{Ar}$	tensor zmian krzywizny powierzchni środkowej,
$M^{Ar}, N^{Ar}$	powierzchniowe tensory Pioli-Kirchhoffa wypadkowych sił i momentów w powłoce,
$Q^d$	wektor siły poprzecznej,
$D$	gęstość dysypacji (na jednostkę nieodkształconej powierzchni środkowej powłoki),
$2H$	grubość ścianki powłoki,
$d_{ij}$	tensor prędkości odkształceń (eulerowski).

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. J. ALLMAN, S. S. GILL, *The effects of changes of geometry on the limit pressure of a flush nozzle in a spherical pressure vessel*, Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, London 1968, 1–20.
2. M. ARCISZ, J. RYCHLEWSKI, *Plane plastic flow in material description*, Arch. Mech. Stos., **22** (1970), 233–249.
3. G. AUGUSTI, S. D'AGOSTINO, *Tests of cylindrical shells in the plastic range*, Proc. ASCE, **90**, J. M. Eng. Div., EMI, 1964, 69–82.
4. G. AUGUSTI, S. D'AGOSTINO, *Experiments on the plastic behaviour of short steel cylindrical shells subject to internal pressure*, Proc. 1st Int. Conf. Pressure Vessel Techn. (Delft 1969), ASME, New York 1970 **1**, 45–57.
5. B. BUDIANSKY, *Remarks on theories of solid and structural mechanics*, Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, Nauka, Moskwa 1969, 67–72.
6. M. CAPURSO, *Sul comportamento inelastico delle superfici di rivoluzione in regime di grandi spostamenti*, Universita di Napoli Istituto di Tecnica delle Costruzioni, No 272, Napoli 1969.
7. M. CAPURSO, R. RAMASCO, *Sul calcolo elasto-plastico delle piastre circolari e delle volte di rivoluzione ribassate in regime di grandi spostamenti*, Costruzioni metalliche, 1969, No 5, 3–20.
8. M. D. COON, S. S. GILL, *The effect of change of geometry on the rigid-plastic limit load of cylinders*, Int. J. Mech. Sci., **10** (1968), 355–368.
9. W. J. COTTAM, S. S. GILL, *Experimental investigation of the behaviour beyond the elastic limit of flush nozzles in cylindrical pressure vessels*, J. Mech. Eng. Sci., **8** (1966), 330–350.
10. K. S. DINNO, S. S. GILL, *An experimental investigation into the plastic behaviour of flush nozzles in spherical pressure vessels*, Int. J. Mech. Sci., **7** (1965), 817–839.
11. L. H. DONNELL, *General thin shell displacement-strain relations*, Proc. 4-th U. S. Nat. Cong. Appl. Mech., ASME, New York 1962, 529–536.
12. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Limit analysis of symmetrically loaded thin shells of revolution*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 61–69.
13. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflection*, Arch. Mech. Stos., **18** (1966), 599–614.
14. M. DUSZEK, *Analiza plastyczna dwuwarstwowych powłok walcowych uwzględniająca wpływ zmian kształtu*, Rozpr. Inż., **15** (1967), 653–663.
15. М. Душек, *Пластическое поведение толстых сферических оболочек при больших прогибах*, Бюлл. ПАН, серия тех. наук, **15** (1967), 565–575.
16. M. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, Theory of Thin Shells, 2nd IUTAM Symp. (Copenhagen 1967), Springer, Berlin 1969, 374–388.
17. M. DUSZEK, *Równania teorii dużych ugięć powłok plastycznych*, Prace IPPT 13/1971.
18. M. DUSZEK, A. SAWCZUK, *Load-deflection relations for rigid-plastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load*, Int. J. Mech. Sci., **12** (1970), 839–848.
19. M. DUSZEK, A. SAWCZUK, *O podstawowych związkach teorii powłok plastycznych*, Rozpr. Inż., **18** (1970), 717–733.

20. A. M. FREUDENTHAL, M. P. BIENIEK, *Tests of cylindrical shells in the plastic range*, Int. J. Mech. Sci., 2 (1960), 128-130.
21. Y. C. FUNG, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1965.
22. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal. 18 (1965), 251-281.
23. P. G. HODGE, *Plastic Analysis of Structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
24. M. JANAS, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne płyt zamocowanych*, Prace IPPT 36/1970.
25. J. KLEPACZKO, J. A. KÖNIG, *Ściskanie osiowe powłoki cylindrycznej z równoczesnym ciśnieniem wewnętrznym*, Rozpr. Inż., 14 (1966), 263-275.
26. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wett., B69 (1966) 1-64.
27. А. М. Кульп, *Расчет гибких жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии внутреннего давления и осевого растяжения*. Мат. лет. школы, Тарту 1966, 2, 59-72.
28. R. H. LANCE, J. F. SOECHTING, *A displacement bounding principle in finite plasticity*, Int. J. Solid Structures, 6 (1970), 1101-1118.
29. F. A. LECKIE, *Plastic instability of a spherical shell*, Theory of Thin Shells, 2nd IUTAM Symposium (Copenhagen 1967), Springer, Berlin 1969, 358-373.
30. Ü. LEPIK, *Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under tension and external pressure*, Nucl. Eng. Design, 4, 1966, 29-38.
31. Ю. Р. Лепик, *Большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего и внешнего давления*, (Баку 1966), Наука, Москва 1966, 534-541.
32. Ю. Р. Лепик, *Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек*, Инженерный журнал, 4 (1964), 601-610.
33. Ю. Лепик, *Большие прогибы жестко-пластических цилиндрических оболочек при совместном действии осевого растяжения и внешнего давления*, Tartu riikliku ülikooli toimetised 206 (1967), 146-159.
34. X. M. МУШТАРИ, К. З. ГАЛИМОВ, *Нелинейная теория упругих оболочек*, Таткнигоиздат, Казань 1957.
35. P. M. NAGHDI, *Foundations of elastic shell theory*, Progress in Solid Mechanics, 4, 1-90, North Holland, Amsterdam 1963.
36. W. OLSZAK, A. SAWCZUK, *Inelastic Shell Problems*, Noordhoff, Groningen 1967.
37. E. T. ONAT, *The influence of geometry changes on the load-deformation behaviour of plastic solids*, Plasticity, Proc. 2nd Naval Structural Mechanics, (Providence 1960), Pergamon Press, Oxford 1960, 225-238.
38. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia wiotkich obrotowo-symetrycznych powłok poddanych plastycznemu plynięciu*, Wyd. Polit. Krak., Kraków 1967.
39. N. PERRONE, *An experimental verification of limit analysis of short cylindrical shells*, J. Appl. Mech., 36 (1969), 362-364.
40. W. PIETRASZKIEWICZ, *Nieliniowe równania dynamiki powłok w nieinercyjnym układzie odniesienia*, Biuletyn Inst. Masz. Przepł. PAN, No 682, Gdańsk 1970.
41. M. ROBINSON, S. S. GILL, *The effect of finite changes of geometry on the rigid-plastic limit pressure of flush nozzles in spherical pressure vessels*, Int. J. Mech. Sci., 11 (1969), 253-267.
42. M. SAVE, M. JANAS, *Collapse and bursting pressures of cylindrical mild steel vessels*, Arch. Bud. Maszyn, 1971 (w druku).
43. A. SAWCZUK, *Large deflection theory of plates*, Proc. 10th Int. Congress Applied Mech. (Münich 1964), Springer, Berlin, 224-228.
44. A. SAWCZUK, *On formulation of large deflection theory for perfectly plastic shells*, Proc. Nat. Bulg. Congr. Appl. Mech. (Varna 1969), Sofia (w druku).
45. J. SCHROEDER, P. RANGARAJAN, *Upper bounds to limit pressure of branch-pipe Tee connections*, First Int. Conf. Press. Vessels Technol. (Delft 1969) ASME, New York 1970, 1, 277-291.
46. J. SCHROEDER, A. N. SHERBOURNE, *Unsymmetrical yield point loads of spherical domes*, Proc. ASCE, 94, J. Eng. Mech. Div., EM3, 1968, 823-839.

47. J. P. SHRIVASTAVA, P. G. GLOCKNER, *Lagrangian formulation of statics of shells*, Proc. ASCE, 96, J. Eng. Mech. Div., EM5, 1970, 547-563.
48. О. Н. Шавлий, *Большие прогибы жестко-пластической пологой сферической оболочки*, Материалы летней школы, Тарту 1966, 2, 140-147.
49. И. Г. Терегулов, *Большие прогибы жестко-пластической пологой сферической оболочки с жесткой заделкой кромок*, Труды VII Всесоюзн. Кнф. (Днепропетровск, 1969), Наука, Москва 1970, 578-581.
50. Z. WASZCZYŹYŹN, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo-symetrycznych*, Wyd. Polit. Krak., Kraków 1970.
51. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гиттли, Москва 1956.
52. Cz. WOŹŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.

## Р е з ю м е

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УМЕРЕННО БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ  
ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

В работе представлены принципы построения уравнений теории оболочек в лагранжевом описании. Рассмотрены тензорные величины характерные для этого описания, приводятся системы уравнений нескольких вариантов приближенных теорий умеренно больших прогибов жестко-пластических оболочек.

Дан обзор работ по проблемам геометрического упрочнения и прощелкивания пластических оболочек.

## S u m m a r y

MODERATELY LARGE DEFLECTIONS THEORY OF RIGID-PLASTIC SHELLS

Paper concerns the Lagrangian description of shell equations. Appropriate kinematic and dynamic tensors entering the field equations are defined and discussed. Specific approximate theories of moderately large deflections are presented. The second part gives a survey of existing solutions regarding geometrical strengthening and snap-through in perfectly plastic shells.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 listopada 1970 r.*

---



ZASTOSOWANIE WIELOMIANÓW HERMITE'A DO WYZNACZANIA MACIERZY SZTYWNOŚCI ELEMENTU TARCZY W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

KRZYSZTOF DEMS (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Metoda elementów skończonych jest jedną z nowszych metod przybliżonych stosowanych przy rozwiązywaniu zagadnień teorii sprężystości. Metoda ta pozwala przedstawić stan naprężeń i odkształceń w dowolnym punkcie ośrodka ciągłego w zależności od przemieszczeń pewnych punktów ciała, przyjętych za węzłowe. Istotną cechą metody jest wyznaczenie tzw. macierzy sztywności, za pomocą której wyrazić można wewnętrzne siły uogólnione w węzłach w funkcji przemieszczeń węzłowych, zgodnie ze wzorem

$$(1.1) \quad P^i = \sum_k C^{ik} u_k,$$

gdzie

$C^{ik}$  — współczynnik macierzy sztywności,

$P^i$  — siła uogólniona w węźle,

$u_k$  — uogólnione przemieszczenie węzłowe.

Praca niniejsza stanowi próbę wykorzystania wielomianów Hermite'a do wyznaczenia macierzy sztywności tarczy poddanej płaskiemu stanowi naprężenia.

2. Postać i własności wielomianów Hermite'a

Wielomiany Hermite'a są to algebraiczne wielomiany jednej zmiennej o następującej własności

$$(2.1) \quad \frac{d^j H^p(z_k)}{dz^j} = \delta_{ik} \delta_{jp},$$

gdzie

$j$  — rząd pochodnej względem zmiennej  $z$ ,

$p$  — rząd wielomianu Hermite'a,

$i$  — indeks węzła, dla którego napisany jest wielomian,

$k$  — indeks węzła, dla którego obliczana jest wartość wielomianu,

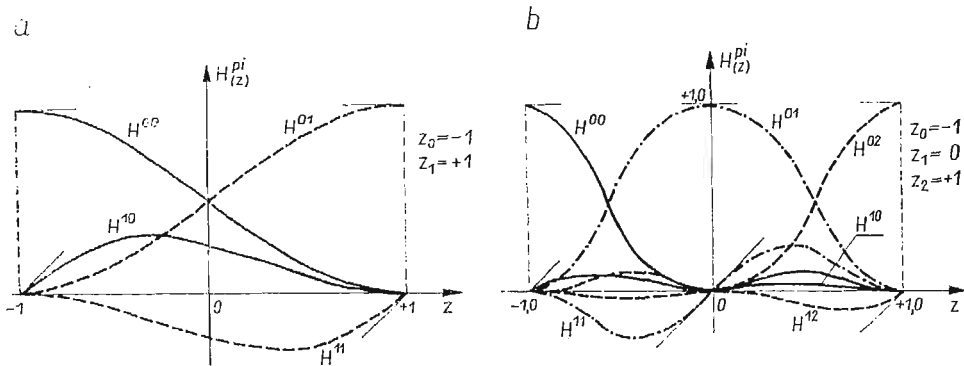
$\delta_{ik}$  — delta Kroneckera.

Jeżeli ograniczymy się do wielomianów rzędu zerowego i pierwszego, to postać ich będzie

następująca [2]:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} H^{0i} &= [L^i(z)]^2 \{1 - 2(z - z_i)[L^i(z_i)]'\}, \\ H^{1i} &= [L^i(z)]^2 (z - z_i), \end{aligned}$$

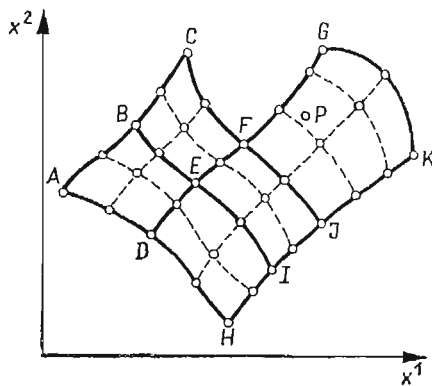
gdzie  $L^i(z) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \frac{z - z_j}{z_i - z_j}$  — wielomian Lagrange'a, posiadający własność  $L^i(z_k) = \delta_{ik} (m + 1 - \text{liczba węzłów})$ . Przykładowy przebieg zmienności wielomianów Hermite'a dla dwóch i trzech węzłów przedstawiony jest na rysunkach 1a i 1b.



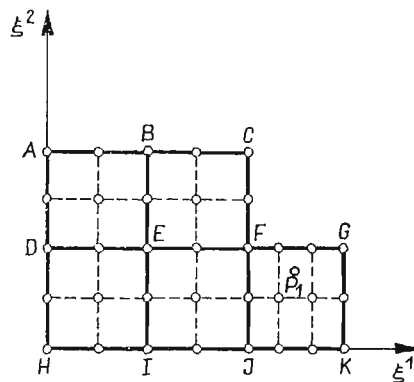
Rys. 1

### 3. Transformacja układu współrzędnych dla elementów tarczy o nieregularnych kształtach

Wyobraźmy sobie tarczę dowolnego kształtu, którą podzielono na krzywoliniowe czworokątne elementy dowolnych rozmiarów, zawierające węzły na brzegu i wewnątrz swego obszaru (rys. 2). Zastosujmy przekształcenie, które dowolnemu punktowi  $P(x^1, x^2)$



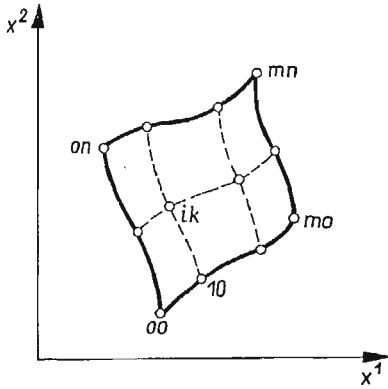
Rys. 2



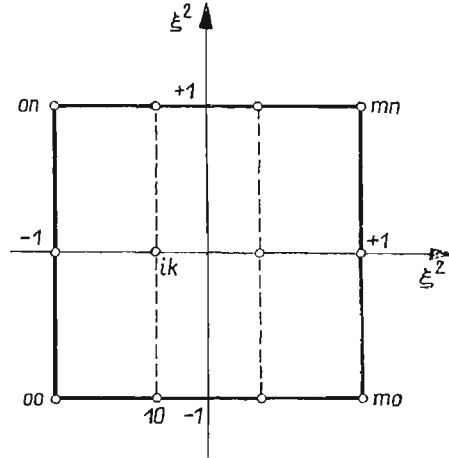
Rys. 3

na płaszczyźnie  $Ox^1x^2$  przyporządkowuje punkt  $P_1$  płaszczyzny  $O\xi^1\xi^2$  w ten sposób, aby obrazem przekształconego elementu z rys. 2 stał się regularny kwadrat o boku  $2 \times 2$ , w którym węzły rozmieszczone są równomiernie (rys. 3).

Rozpatrzmy jeden z elementów z rys. 2. Na rys. 4 i 5 element ten jest przedstawiony na płaszczyźnie  $Ox^1x^2$  oraz  $O\xi^1\xi^2$ . Liczbę węzłów dla elementu przyjmiemy jako równą  $(m+1)(n+1)$ , gdzie  $m+1$  oraz  $n+1$  są liczbami węzłów na liniach równoległych do bo-



Rys. 4



Rys. 5

ków elementu. Funkcje transformujące zapisać można symbolicznie wzorem

$$(3.1) \quad x^i = x^i(\xi^1, \xi^2), \quad i = 1, 2.$$

Zažadajmy, aby funkcje opisane wzorem (3.1) spełniały we wszystkich węzłach tarczy warunki:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} x^i(\xi_j^1, \xi_k^2) &= x_{jk}^i, \\ [x^i(\xi_j^1, \xi_k^2)],_{\xi^l} &= x_{jk, \xi^l}^i, \\ [x^i(\xi_j^1, \xi_k^2)],_{\xi^1 \xi^2} &= x_{jk, \xi^1 \xi^2}^i. \end{aligned}$$

Symbol po przecinku oznacza tu różniczkowanie względem odpowiedniej zmiennej.

Aby spełnić powyższe warunki, funkcje transformujące przyjęć należy w postaci

$$(3.3) \quad x^j(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2) x_{ikpq}^j,$$

$$i = 0, 1, \dots, m, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad p, q = 0, 1,$$

gdzie

$x_{ikpq}^j$  — uogólnione współrzędne węzłowe, czyli wartości współrzędnych oraz odpowiednich pochodnych względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  w danym węźle tarczy,

$H^{pi}(\xi^1)$  oraz  $H^{qk}(\xi^2)$  — wielomiany Hermite'a.

Występujące we wzorze (3.3) uogólnione współrzędne węzłowe wyznacza się według schematu opisanego poniżej.

1. Dzieląc tarczę na elementy wyznacza się współrzędne węzłów, leżących na bokach i wewnątrz obszaru elementów.

2. Dla każdego elementu wprowadza się funkcje transformujące w postaci

$$(3.4.1) \quad x^j(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,k} L^i(\xi^1) L^k(\xi^2) x_{ik}^j,$$

gdzie

$L$  — wielomiany Lagrange'a,

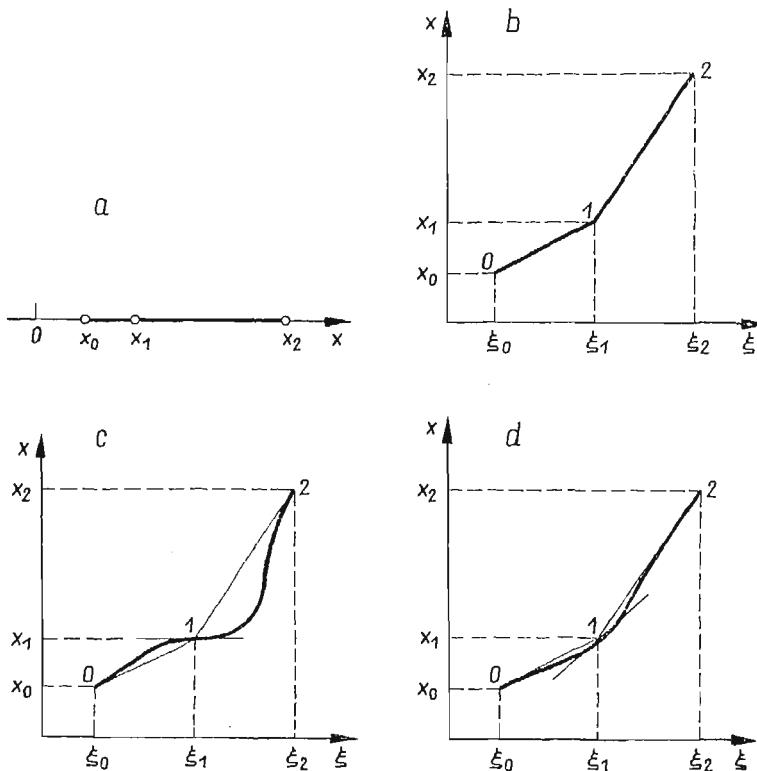
$x_{ik}^j$  — współrzędne węzłów.

Poprzez funkcje (3.4.1) każdy element oryginalny tarczy przekształca się również na regularny kwadrat o boku  $2 \times 2$  w układzie  $O\xi^1\xi^2$ .

3. Dla wszystkich węzłów każdego elementu oblicza się pochodne funkcji transformujących (3.4.1) względem  $\xi^1$  oraz  $\xi^2$ , zgodnie ze wzorem

$$(3.4.2) \quad \frac{\partial^{r+q} x_{sl}^j}{\partial \xi^{1r} \partial \xi^{2q}} = \sum_{i,k} \frac{\partial^r L^i(\xi_s^1)}{\partial \xi^{1r}} \frac{\partial^q L^k(\xi_l^2)}{\partial \xi^{2q}} x_{ik}^j,$$

$$r, q = 0, 1, \quad i, s = 0, 1, \dots, m, \quad k, l = 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, 2.$$



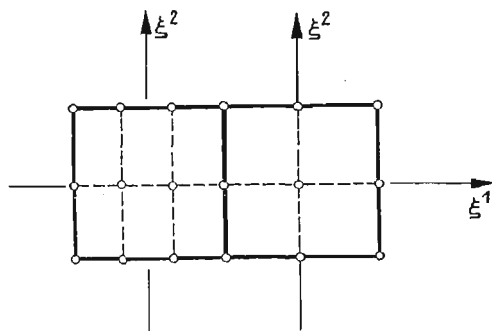
Rys. 6

4. Dla węzłów leżących na bokach elementów, jako należących równocześnie do kilku elementów, wartości odpowiednich pochodnych uśredniają się.

Dzięki takiemu postępowaniu w węzłach tarczy znane są współrzędne węzłowe oraz ich pochodne względem  $\xi^1$  oraz  $\xi^2$ . Tak więc określone są w zupełności funkcje transformujące (3.3).

Zaproponowany powyżej sposób wyznaczania pochodnych podyktowany jest dążeniem do uzyskania jak najmniejszej deformacji siatki narzuconej na tarczę przy transformacji układu współrzędnych.

Założmy, dla uproszczenia, że funkcje transformujące są funkcjami jednej zmiennej [postaci  $x = x(\xi)$ ] i rozpatrzmy dwa liniowe elementy położone wzdłuż osi  $x$ , które określone są poprzez współrzędne swoich końców (rys. 6a). Elementy te chcemy przekształcić na elementy jednakowej długości, położone wzdłuż osi  $\xi$ . Ustalając początkowo liniową zależność między  $x$  a  $\xi$ , przedstawioną na rys. 6b, widzimy, że w punkcie wspólnym dwóch sąsiednich elementów różne są pochodne  $x$  względem  $\xi$ . Tak więc, dla sąsiednich elementów przekształcenie takie nie zapewnia ciągłości pochodnej  $x_{,\xi}$ . Dążąc do zapewnienia tej ciągłości założymy w punkcie wspólnym elementów wartość tej pochodnej, na przykład zero. Funkcja transformująca musi mieć wtedy przebieg pokazany na rys. 6c. Przekształcenie takie znacznie różni się od poprzedniego przekształcenia liniowego. Można również założyć przekształcenie, w którym we wszystkich węzłach wspólnych pochodne  $x_{,\xi}$  równe będą średnim arytmetycznym pochodnych wynikających z liniowego przekształcenia każde-



Rys. 7

go elementu. Przebieg funkcji transformującej w tym przypadku pokazany jest na rys. 6d. Jak widać, to ostatnie przekształcenie zapewnia dla sąsiednich elementów ciągłość współrzędnej  $x$  oraz jej pochodnej  $x_{,\xi}$  przy stosunkowo małej deformacji w stosunku do przekształcenia z rys. 6b. Deformacja ta może mieć znaczenie w przypadku numerycznego całkowania funkcji  $f(x)$  metodą Gaussa. Gdy charakter przebiegu  $x$  w funkcji  $\xi$  różni się znacznie od przebiegu liniowego, wartość całki liczona metodą Gaussa (przy zamianie zmiennej  $x$  na  $\xi$  w wyrażeniu podcałkowym) może odbiegać od wartości dokładnej. Im bardziej funkcja transformująca zbliżona jest do funkcji liniowej, tym wartość całki jest dokładniejsza.

Rozpatrzmy teraz ciągłość funkcji transformujących (3.3) oraz ich pochodnych względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  dla dwóch sąsiednich elementów tarczy z rys. 3 wzdłuż ich wspólnego boku. Dla elementów przedstawionych na rys. 7, dla których na boku wspólnym zmienia się jedynie  $\xi^2$ , mamy

$$\begin{aligned}
 x^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2) x_{ikpq}^j, \\
 x_{,\xi^1}^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} \frac{\partial H^{pi}(\xi^1)}{\partial \xi^1} H^{qk}(\xi^2) x_{ikpq}^j, \\
 x_{,\xi^2}^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{ikpq}^j, \\
 x_{,\xi^1\xi^2}^j &= \sum_{i,p} \sum_{k,q} \frac{\partial H^{pi}(\xi^1)}{\partial \xi^1} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{ikpq}^j.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.1}$$

Dla elementu lewego na boku wspólnym współrzędna  $\xi^1 = 1$ . Tak więc dla tego boku wzory (3.5.1) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 x^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{mk0q}^j, \\
 x_{,\xi^1}^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{mk1q}^j, \\
 x_{,\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{mk0q}^j, \\
 x_{,\xi^1\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{mk1q}^j.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.2}$$

Dla elementu prawego na boku wspólnym jest  $\xi^1 = -1$  i wzory (3.5.1) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 x^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{0k0q}^j, \\
 x_{,\xi^1}^j &= \sum_{k,q} H^{qk}(\xi^2) x_{0k1q}^j, \\
 x_{,\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{0k0q}^j, \\
 x_{,\xi^1\xi^2}^j &= \sum_{k,q} \frac{\partial H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^2} x_{0k1q}^j.
 \end{aligned}
 \tag{3.5.3}$$

Wzdłuż wspólnego boku zachodzą oczywiste związki

$$\begin{aligned}
 [x_{mkpq}^j]_{\text{lewe}} &= [x_{0kpq}^j]_{\text{prawe}}, \\
 \left[ \frac{\partial^s H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^{2s}} \right]_{\text{lewe}} &= \left[ \frac{\partial^s H^{qk}(\xi^2)}{\partial \xi^{2s}} \right]_{\text{prawe}}, \quad s = 0, 1.
 \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższe widzimy, że wzory (3.5.2) i (3.5.3) mają identyczną postać. Tak więc przekształcenie określone wzorem (3.3) dla sąsiednich elementów zachowuje ciągłość współrzędnych oraz ich pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej względem

$\xi^1$  i  $\xi^2$ . Analogicznie można wykazać, że pozostałe pochodne rzędu drugiego zachowują ciągłość jedynie w kierunku wspólnego boku. Brak jest natomiast ciągłości tych pochodnych w kierunku prostopadłym do wspólnego boku dwóch elementów.

#### 4. Funkcje jednostkowe przemieszczeń elementu tarczy

Rozpatrzmy kwadratowy element tarczy w układzie  $\xi^1, \xi^2$  (rys. 5). Wprowadźmy jako uogólnione przemieszczenia w węźle tarczy wielkości:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_{ik00}^j &= u^j(\xi_i^1, \xi_k^2) \text{ — przemieszczenie węzła w kierunku osi } x^j, \\ u_{ik10}^j &= \frac{\partial u^j(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^1}, \\ u_{ik01}^j &= \frac{\partial u^j(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^2}, \\ u_{ik11}^j &= \frac{\partial^2 u^j(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^1 \partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu tarczy wyrazimy w postaci

$$(4.2) \quad u^j(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,k} \sum_{p,q} Q^{ikpq}(\xi^1, \xi^2) u_{ikpq}^j,$$

gdzie  $Q^{ikpq}$  są to wielomiany spełniające warunek

$$(4.3) \quad \frac{\partial^{r+s} Q^{ikpq}(\xi_i^1, \xi_k^2)}{\partial \xi^{1r} \partial \xi^{2s}} = \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{rp} \delta_{sq}.$$

Można więc funkcje te przyjąć w postaci

$$(4.4) \quad Q^{ikpq}(\xi^1, \xi^2) = H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2).$$

Uwzględniając (4.4) w (4.2), przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu tarczy określimy jako

$$(4.5) \quad u^i(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i,p} \sum_{k,q} H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2) u_{ikpq}^j.$$

Powyższy wzór wyraża przemieszczenia dowolnego punktu elementu tarczy we współrzędnych  $\xi^1, \xi^2$ . Znajdźmy związki, jakie będą zachodziły między przemieszczeniami i ich pochodnymi w tym układzie i w układzie  $x^1, x^2$ . Ponieważ z założenia przemieszczenie  $u^j$  w dowolnym punkcie tarczy jest to przemieszczenie w kierunku osi  $x^j$ , przeto przemieszczenia w obu układach będą takie same. Inaczej natomiast przedstawia się sprawa z pochodnymi przemieszczeń w obu układach. W oparciu o tożsamości

$$(4.6.1) \quad \begin{aligned} u_{,\xi^1}^j &= u_{,x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^2}^j &= u_{,x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^2}^2, \end{aligned}$$

otrzymamy związek między pierwszymi pochodnymi przemieszczeń w obu układach. Związek między pochodnymi mieszanymi w obu układach wyznaczmy z układu tożsamości

$$(4.6.2) \quad \begin{aligned} u_{,\xi^1\xi^1}^j &= u_{,\xi^1x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,\xi^1x^2}^j x_{,\xi^1}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^1\xi^1}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^1\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^1\xi^2}^j &= u_{,\xi^1x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,\xi^1x^2}^j x_{,\xi^2}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^1\xi^2}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^1\xi^2}^2, \\ u_{,\xi^2\xi^1}^j &= u_{,\xi^2x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,\xi^2x^2}^j x_{,\xi^1}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^2\xi^1}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^2\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^2\xi^2}^j &= u_{,\xi^2x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,\xi^2x^2}^j x_{,\xi^2}^2 + u_{,x^1}^j x_{,\xi^2\xi^2}^1 + u_{,x^2}^j x_{,\xi^2\xi^2}^2, \\ u_{,\xi^1x^1}^j &= u_{,x^1x^1}^j x_{,\xi^1}^1 + u_{,x^1x^2}^j x_{,\xi^1}^2, \\ u_{,\xi^2x^1}^j &= u_{,x^1x^1}^j x_{,\xi^2}^1 + u_{,x^1x^2}^j x_{,\xi^2}^2. \end{aligned}$$

Pochodne przemieszczeń względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  uzyskamy przez odpowiednie zróżniczkowanie wzoru (4.5). Następnie z dwóch pierwszych równań (4.6.2) wyznacza się pochodne  $u_{,\xi^1x^1}^j$  i  $u_{,\xi^1x^2}^j$ . Z równania trzeciego i czwartego wyznaczmy pochodne  $u_{,\xi^2x^1}^j$  i  $u_{,\xi^2x^2}^j$ , a z ostatnich dwóch równań (4.6.2) wyznaczyć będzie można wtedy pochodną  $u_{,x^1x^2}^j$ .

Wynika więc z powyższego, że w dowolnym punkcie krzywoliniowego elementu tarczy z rys. 4 wyznaczyć można przemieszczenie oraz jego pochodne względem  $x^1$  i  $x^2$ , jeżeli tylko znane są przemieszczenia węzłowe (4.1).

Zbadajmy z kolei ciągłość przemieszczeń i ich pochodnych wzdłuż boku sąsiadujących elementów. W układzie  $\xi^1, \xi^2$  dla elementów z rys. 7, różniczkując kolejno względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$  wzór (4.5) i uwzględniając, że dla elementu lewego  $\xi^1 = 1$ , a dla elementu prawego  $\xi^1 = -1$ , okaże się, że wzory określające przemieszczenia, ich pierwsze pochodne i pochodna mieszana dla boku wspólnego mają identyczną postać. Tak więc dla sąsiednich elementów zachowana jest wzdłuż wspólnego boku, ciągłość przemieszczeń, pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej względem  $\xi^1$  i  $\xi^2$ . Pozostałe pochodne rzędu drugiego zachowują ciągłość jedynie w kierunku wspólnego boku.

Przechodząc do współrzędnych  $x^1, x^2$ , przemieszczenie dla dwóch sąsiednich elementów zachowa ciągłość wzdłuż wspólnego boku, gdyż jest ono identyczne w obu układach współrzędnych i zachowuje ciągłość w układzie  $\xi^1, \xi^2$ . Występujące we wzorze (4.6.1) pochodne  $u_{,\xi^1}^j, u_{,\xi^2}^j, x_{,\xi^1}^1, x_{,\xi^1}^2, x_{,\xi^2}^1, x_{,\xi^2}^2$  zachowują, jak wykazano, ciągłość wzdłuż wspólnego boku, a więc i pochodne  $u_{,x^1}^j$  i  $u_{,x^2}^j$  zachowują też ciągłość. Inaczej przedstawia się ciągłość pochodnej mieszanej  $u_{,x^1x^2}^j$ . Ponieważ brak jest ciągłości drugich pochodnych przemieszczeń i współrzędnych w kierunku prostopadłym do wspólnego boku (w układzie  $\xi^1, \xi^2$ ), brak więc będzie również ciągłości pochodnej  $u_{,x^1x^2}^j$  dla sąsiednich elementów. Wskutek tego model tarczy ulega pewnemu skażeniu.

Dla przemieszczeń jednorodnych

$$(4.7) \quad u^j = A_j x^1 + B_j x^2 + C_j$$

przemieszczenia węzłów elementu wynoszą

$$\begin{aligned} u_{ik00}^j &= A_j x_{ik00}^1 + B_j x_{ik00}^2 + C_j, \\ u_{ik10}^j &= A_j x_{ik10}^1 + B_j x_{ik10}^2, \\ u_{ik01}^j &= A_j x_{ik01}^1 + B_j x_{ik01}^2, \\ u_{ik11}^j &= A_j x_{ik11}^1 + B_j x_{ik11}^2. \end{aligned}$$



Wstawiając te wartości do wzoru (4.5) otrzymamy, że przemieszczenie wyraża się ponownie wzorem (4.7). Tak więc omawiane przekształcenie oddaje w sposób ścisły przemieszczenia jednorodne, co w pracy [1] uznano za kryterium przydatności proponowanych funkcji jednostkowych.

### 5. Macierz sztywności elementu tarczy

Energię sprężystą elementu tarczy przedstawić można w postaci

$$E_s = \frac{1}{2} \int \int \int (\sigma_{x_1} \varepsilon_{x_1} + \sigma_{x_2} \varepsilon_{x_2} + \sigma_{x_1 x_2} \varepsilon_{x_1 x_2}) dx^1 dx^2 dx^3.$$

Zakładając, że grubość elementu tarczy jest stała oraz uwzględniając związki

$$\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{E} (\sigma_{x_1} - \nu \sigma_{x_2}), \quad \varepsilon_{x_2} = \frac{1}{E} (\sigma_{x_2} - \nu \sigma_{x_1}), \quad \varepsilon_{x_1 x_2} = \frac{2}{E} (1 + \nu) \sigma_{x_1 x_2},$$

energię sprężystą elementu tarczy przedstawimy w postaci

$$(5.1) \quad E_s = \frac{1}{2} \int \int D \left[ \varepsilon_{x_1}^2 + \varepsilon_{x_2}^2 + 2\nu \varepsilon_{x_1} \varepsilon_{x_2} + \frac{1}{2} (1 - \nu) \varepsilon_{x_1 x_2}^2 \right] dx^1 dx^2,$$

(5.2) gdzie  $D = \frac{Eh}{1 - \nu^2}$  — sztywność tarczy.

W przypadku małych odkształceń słuszne są związki

$$\varepsilon_{x^j} = \frac{\partial u^j}{\partial x^j}, \quad j = 1, 2,$$

$$\varepsilon_{x_1 x_2} = \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial x^1}.$$

Uwzględniając, że przemieszczenia  $u^j$  wyrażone są wzorem (4.5), odkształcenia względne przedstawimy w postaci

$$(5.3) \quad \varepsilon_{x^j} = \sum_{i,p} \sum_{k,q} [H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2)]_{,x^j} u_{ikpq}^j, \quad j = 1, 2,$$

$$\varepsilon_{x_1 x_2} = \sum_{i,p} \sum_{k,q} \{ [H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2)]_{,x^2} u_{ikpq}^1 + [H^{pi}(\xi^1) H^{qk}(\xi^2)]_{,x^1} u_{ikpq}^2 \}.$$

Uwzględniając (5.3) w (5.1), energię sprężystą elementu tarczy przedstawić można w postaci

$$E_s = \frac{1}{2} \sum_{i,p} \sum_{k,q} \sum_{j,r} \sum_{l,s} \{ C_{11}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^1 u_{jlr}^1 +$$

$$+ C_{12}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^1 u_{jlr}^2 + C_{21}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^2 u_{jlr}^1 + C_{22}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^2 u_{jlr}^2 \}.$$

Zapisując powyższy wzór krócej otrzymamy

$$E_s = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 \sum_{i=0}^m \sum_{p=0}^1 \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^1 \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^1 \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^1 C_{\alpha\beta}^{ikpqjlr} u_{ikpq}^{\alpha} u_{jlr}^{\beta}.$$

Korzystając ze wzoru (4.4) oznaczmy

$$Q^{ikpq} = H^{pi}(\xi^1)H^{qk}(\xi^2).$$

Wtedy współczynniki  $C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs}$  określone są wzorami

$$(5.5) \quad \begin{aligned} C_{11}^{ikpqjtrs} &= \iint D \left\{ Q_{,x^1}^{ikpq} Q_{,x^1}^{jtrs} + \frac{1}{2} (1-\nu) Q_{,x^2}^{ikpq} Q_{,x^2}^{jtrs} \right\} J d\xi^1 d\xi^2, \\ C_{12}^{ikpqjtrs} &= \iint D \left\{ \nu Q_{,x^1}^{ikpq} Q_{,x^2}^{jtrs} + \frac{1}{2} (1-\nu) Q_{,x^2}^{ikpq} Q_{,x^1}^{jtrs} \right\} J d\xi^1 d\xi^2, \\ C_{21}^{ikpqjtrs} &= C_{12}^{jtrsikpq}, \\ C_{22}^{ikpqjtrs} &= \iint D \left\{ Q_{,x^2}^{ikpq} Q_{,x^2}^{jtrs} + \frac{1}{2} (1-\nu) Q_{,x^1}^{ikpq} Q_{,x^1}^{jtrs} \right\} J d\xi^1 d\xi^2, \end{aligned}$$

gdzie  $J$  jest jacobianem przekształcenia.

Występujące we wzorach (5.5) pochodne  $Q_{,x^j}^{ikpq}$  wyznaczyć można z układu równań

$$(5.6) \quad \begin{aligned} Q_{,\xi^1}^{ikpq} &= Q_{,x^1}^{ikpq} x_{,\xi^1}^1 + Q_{,x^2}^{ikpq} x_{,\xi^1}^2, \\ Q_{,\xi^2}^{ikpq} &= Q_{,x^1}^{ikpq} x_{,\xi^2}^1 + Q_{,x^2}^{ikpq} x_{,\xi^2}^2. \end{aligned}$$

Stosując zasadę prac przygotowanych do elementu tarczy będącego w stanie równowagi pod działaniem sił zewnętrznych (dla tego elementu) można wykazać, że jeżeli energia odkształcenia wyrażona jest jako funkcja przemieszczeń uogólnionych, odpowiadających tym siłom, to

$$(5.7) \quad \frac{\partial E_s}{\partial u_i} = P_i.$$

Zróżniczkujmy więc wyrażenie (5.4) względem uogólnionego przemieszczenia węzłowego

$$\frac{\partial E_s}{\partial u_{ikpq}^\alpha} = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^1 \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^1 C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs} u_{jtrs}^\beta.$$

Uwzględniając poprzednie i (5.7) można napisać

$$(5.8) \quad P_{ikpq}^\alpha = \sum_{\beta=1}^2 \sum_{j=0}^m \sum_{r=0}^1 \sum_{l=0}^n \sum_{s=0}^1 C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs} u_{jtrs}^\beta,$$

gdzie  $P_{ikpq}^\alpha$  — uogólniona siła węzłowa, odpowiadająca uogólnionemu przemieszczeniu węzłowemu  $u_{ikpq}^\alpha$ ,

Porównując (5.8) z (1.1) widzimy, że współczynniki  $C_{\alpha\beta}^{ikpqjtrs}$  określone wzorami (5.5) są poszukiwanymi współczynnikami macierzy sztywności elementu tarczy.

## 6. Sieć działań dla wyznaczenia macierzy sztywności

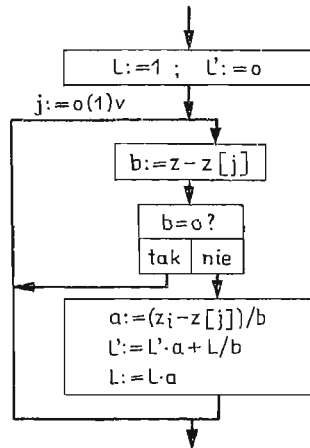
Obliczenie współczynników sztywności elementu tarczy wymaga wykonania bardzo dużej ilości rachunków. Dlatego też jedyną praktyczną drogą ich wyznaczenia jest wykorzystanie do obliczeń elektronicznej maszyny cyfrowej. Poniżej omówiona została sieć działań dla obliczenia tych współczynników.

Obliczenia współczynników macierzy sztywności podzielić można na dwa zasadnicze etapy. W etapie pierwszym, po wczytaniu danych dla całej tarczy, wyznacza się uogólnione współrzędne węzłowe dla wszystkich węzłów tarczy. W etapie drugim wyznacza się macierz sztywności dla danego elementu.

Jako dane wejściowe wprowadzamy współczynnik Poissona  $\nu$ , moduł sprężystości podłużnej  $E$ , grubość tarczy  $h$ , liczbę elementów, na które podzielono tarczę oraz współrzędne  $x^1, x^2$  węzłów tarczy. Wyznaczenie uogólnionych współrzędnych węzłowych przeprowadza się w oparciu o rozważania p. 3. Po pierwsze wyznaczyć należy pochodne współrzędnych węzłowych na podstawie wzoru (3.4.2). W tym celu wczytujemy numery węzłów należących do kolejnego elementu  $i$  na ich podstawie zapamiętuje się współrzędne węzłów w blokach  $x^1 [0:m, 0:n]$  i  $x^2 [0:m, 0:n]$ . W blokach  $\xi^1 [0:m]$  i  $\xi^2 [0:n]$  zapisujemy współrzędne węzłów w układzie  $\xi^1, \xi^2$ . Współrzędne te wyznacza się ze wzorów:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \xi^1 [i] &= -1 + \frac{2}{m} i, \quad i = 0, 1, \dots, m, \\ \xi^2 [j] &= -1 + \frac{2}{n} j, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Jak wynika ze wzoru (3.4.2), przy obliczaniu pochodnych zachodzi konieczność wielorotnego wyznaczania wartości wielomianu Lagrange'a  $L^i(z)$  i jego pierwszej pochodnej.



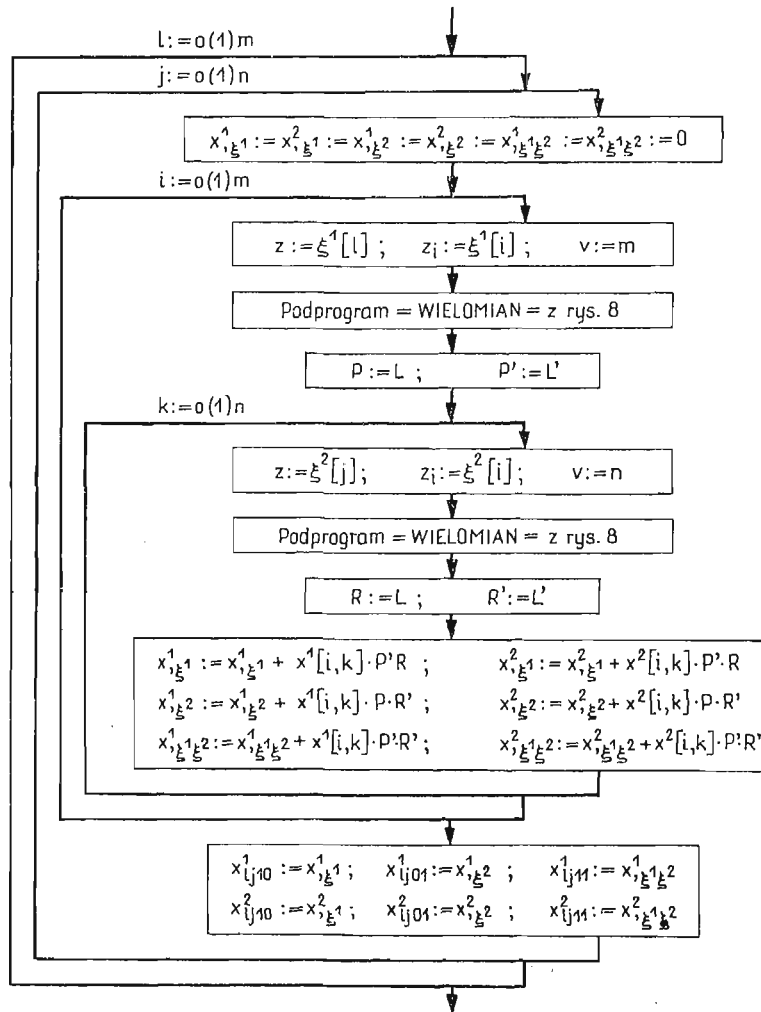
Rys. 8

Obliczenia te wykonywane są przez podprogram = WIELOMIAN = z rys. 8. Wartość wielomianu i jego pochodnej wyznacza się ze wzorów rekurencyjnych

$$(6.2) \quad \begin{aligned} L^{i*} &= L^i \frac{z - z_j}{z_i - z_j}, \\ L^{i*' } &= L^{i' } \frac{z - z_j}{z_i - z_j} + L^i \frac{1}{z_i - z_j}, \quad j = 0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, v. \end{aligned}$$

Obliczenia pochodnych w węzłach elementu przeprowadza się według schematu z rys. 9. W opisany sposób oblicza się pochodne współrzędnych w węzłach kolejnych elementów,

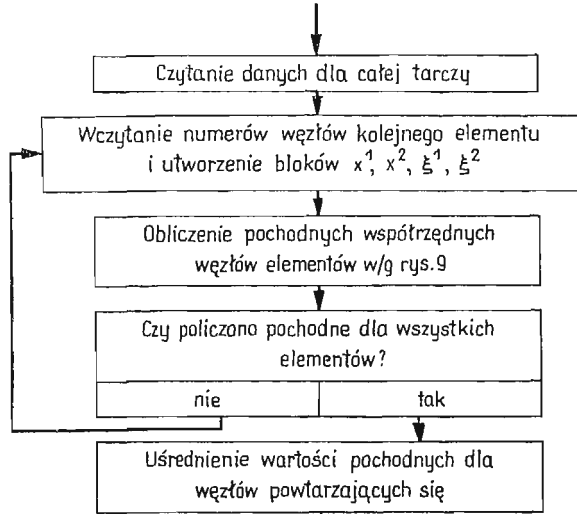
zapamiętując równocześnie ile razy powtórzył się dany węzeł. Po przeprowadzeniu obliczeń dla wszystkich elementów, w węzłach, które powtórzyły się więcej niż jeden raz oblicza się średnie arytmetyczne odpowiednich pochodnych. W wyniku tego postępowania mamy określony dla każdego węzła tarczy zespół uogólnionych współrzędnych  $x^1, x^2, x_{,\xi^1}^1, x_{,\xi^1}^2, x_{,\xi^2}^1, x_{,\xi^2}^2, x_{,\xi^1\xi^2}^1, x_{,\xi^1\xi^2}^2$ . Całość obliczeń uogólnionych współrzędnych węzłowych przebiegać będzie według programu z rys. 10.



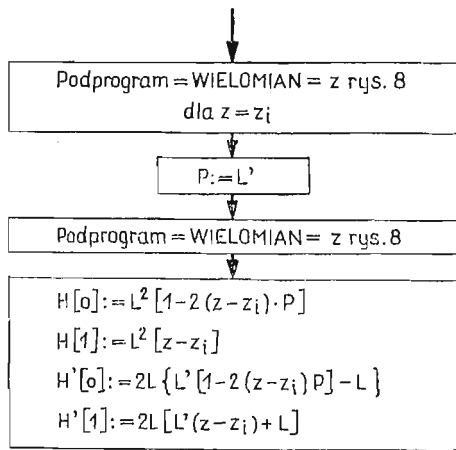
Rys. 9

Po zakończeniu etapu pierwszego przechodzi się do właściwego obliczenia współczynników macierzy sztywności. W etapie tym zachodzić będzie konieczność wielokrotnego wyznaczania wartości wielomianów Hermite'a i ich pierwszych pochodnych. Obliczenia te wykonuje podprogram = HERMIT = z rys. 11. Korzystając z podprogramu = WIELOMIAN = oblicza się  $L^i(z)$ ,  $[L^i(z)]'$  oraz  $[L^i(z_i)]'$ , a następnie korzystając z wzorów (2.2)

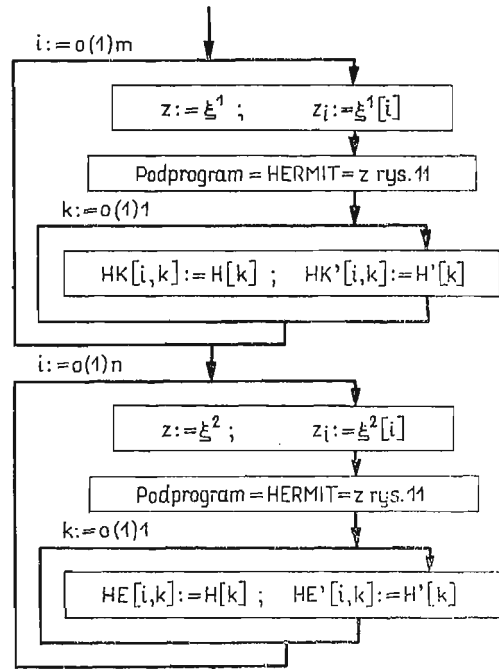
wyznaczamy wartość wielomianów Hermite'a rzędu zerowego i pierwszego oraz ich pochodnych. Wynik obliczeń zapamiętany jest w pomocniczych blokach  $H$  i  $H'$ . Obliczenia wartości wielomianów Hermite'a i ich pochodnych dla wszystkich węzłów elementu prze-



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Podprogram = WIELOMIAN = z rys. 8  
dla  $z = z_i$

$P := L'$

Podprogram = WIELOMIAN = z rys. 8

$H[0] := L^2 [1 - 2(z - z_i) \cdot P]$   
 $H[1] := L^2 [z - z_i]$   
 $H'[0] := 2L \{ L' [1 - 2(z - z_i) P] - L \}$   
 $H'[1] := 2L [L' (z - z_i) + L]$

$i := 0(1)m$

$z := \xi^1 ; z_i := \xi^1[i]$

Podprogram = HERMIT = z rys. 11

$k := 0(1)1$

$HK[i, k] := H[k] ; HK'[i, k] := H'[k]$

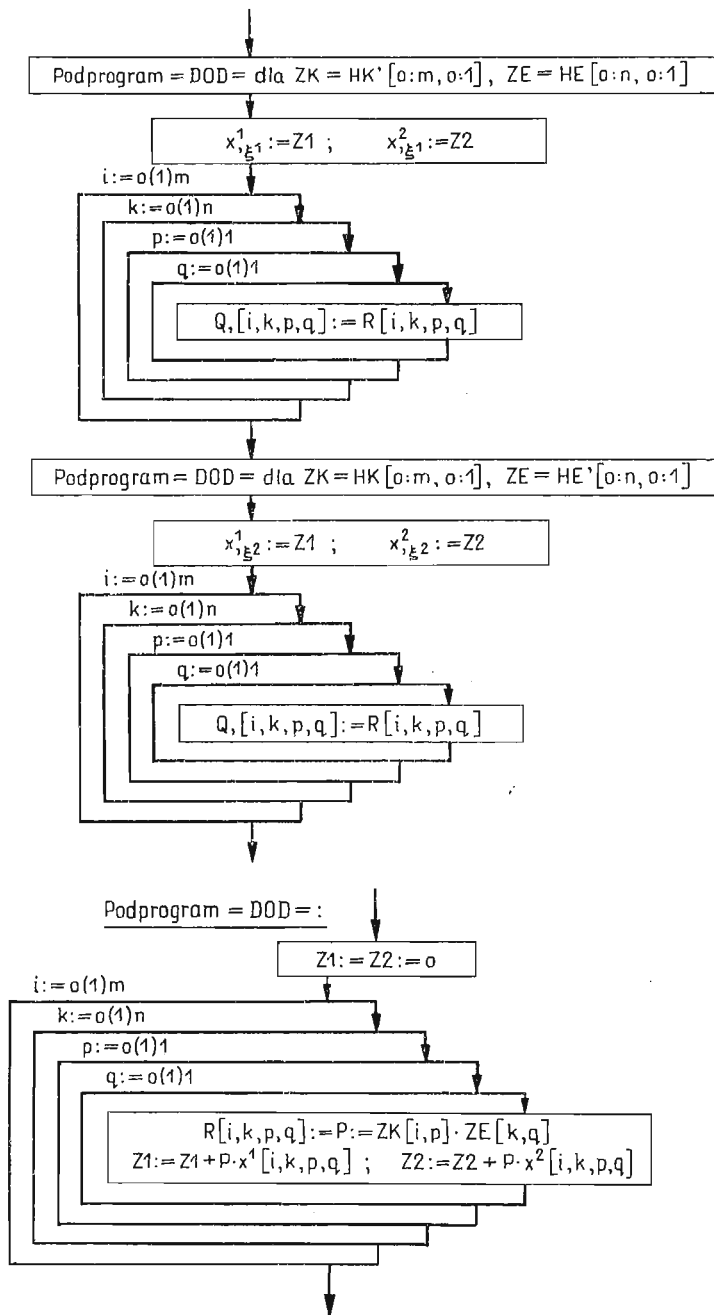
$i := 0(1)n$

$z := \xi^2 ; z_i := \xi^2[i]$

Podprogram = HERMIT = z rys. 11

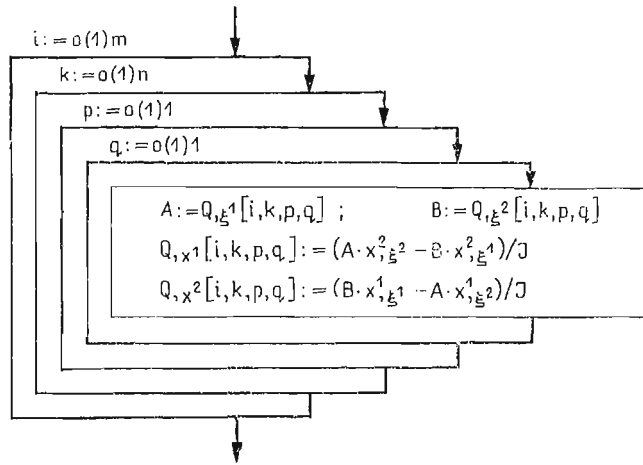
$k := 0(1)1$

$HE[i, k] := H[k] ; HE'[i, k] := H'[k]$



Rys. 13

proceeds according to Fig. 12. Results of calculations are stored in blocks  $HK, HK_{\xi^1}, HE, HE_{\xi^2}$ . Prior to the calculation, it is necessary to determine the coordinates of nodes in the system  $\xi^1, \xi^2$  according to formulas (6.1). The next step in the calculation is to determine the derivatives with respect to  $\xi^1$  and  $\xi^2$  of the transforming functions (3.3) and the functions  $Q^{ikpq}$  defined by formula (4.4). The calculation is carried out according to the program in Fig. 13. The subprogram appearing here = DOD = calculates the appropriate derivatives with respect to one of the variables  $\xi^1$  or  $\xi^2$ . In this subprogram the blocks  $x^1$  and  $x^2$  containing the generalized coordinates of the element nodes are used.



Rys. 14

The transformation of functions  $Q_{\xi^1}^{ikpq}$  and  $Q_{\xi^2}^{ikpq}$  into functions  $Q_{x^1}^{ikpq}$  and  $Q_{x^2}^{ikpq}$  is carried out according to Fig. 14 on the basis of the system of equations (5.6). The Jacobian of the transformation (6.3) was calculated in the previous step.

$$(6.3) \quad J = x_{\xi^1}^1 x_{\xi^2}^2 - x_{\xi^2}^1 x_{\xi^1}^2.$$

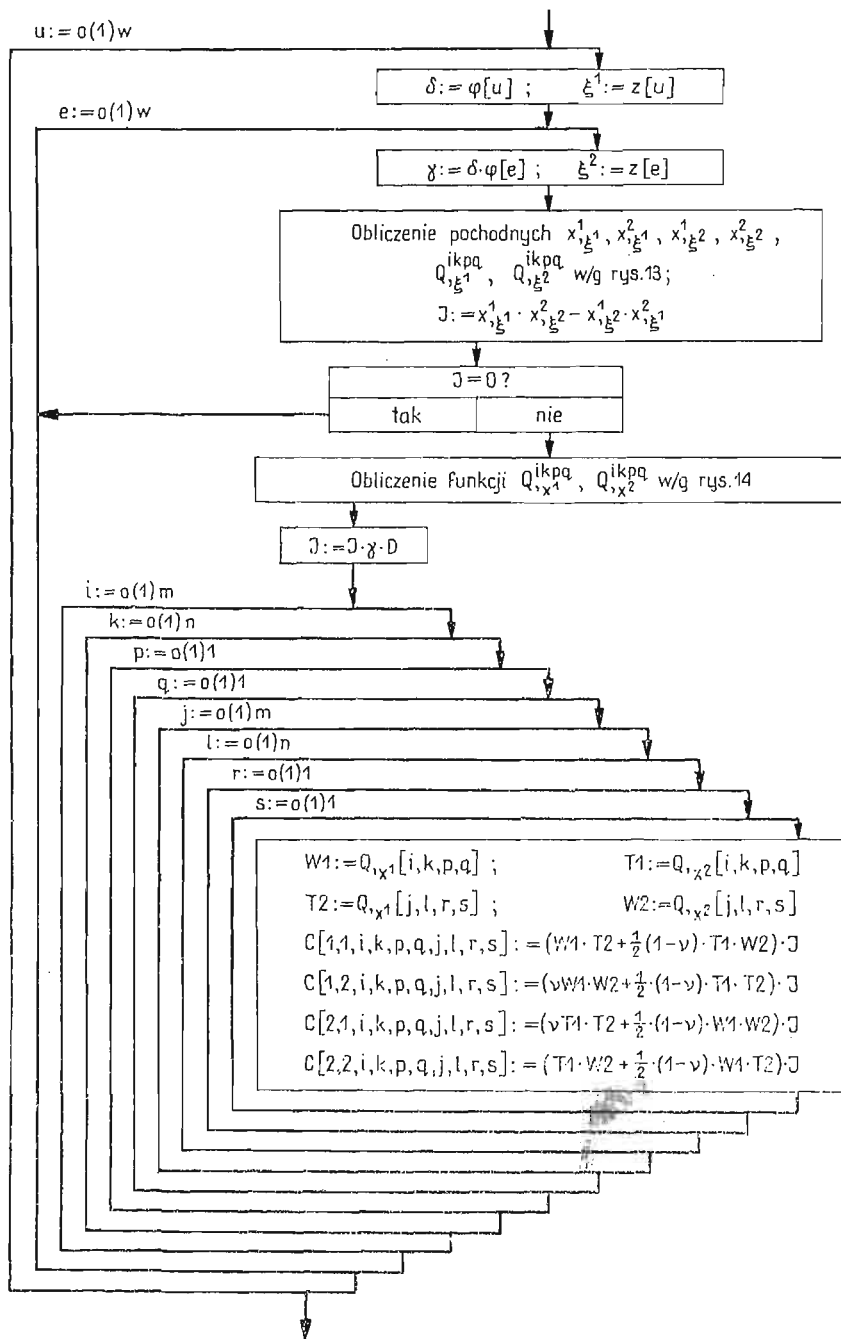
The integration of formulas (5.5) is carried out numerically according to the Gauss quadrature formula [2]

$$(6.4) \quad C_{\alpha\beta}^{ikpqjrs} = \iint F_{\alpha\beta}^{ikpqjrs}(\xi^1, \xi^2) d\xi^1 d\xi^2 = \sum_{u=0}^w \varphi_u \sum_{e=0}^w \varphi_e F_{\alpha\beta}^{ikpqjrs}(t_u, t_e),$$

where  $F_{\alpha\beta}^{ikpqjrs}$  are the integrand expressions of formulas (5.5),  $\varphi_j$  — coefficients of the Gauss quadrature formula,  $t_j$  — roots of the Legendre polynomial, called the nodes of the Gauss quadrature formula. The number of nodes should be chosen such that the numerical error of the integrand function (5.5), which is an algebraic polynomial, is equal to zero. For the integrand function of the type  $\xi^{1p} \xi^{2q}$  the number of nodes must be such that the condition is satisfied

$$(6.5) \quad p + q \leq 2w - 2.$$

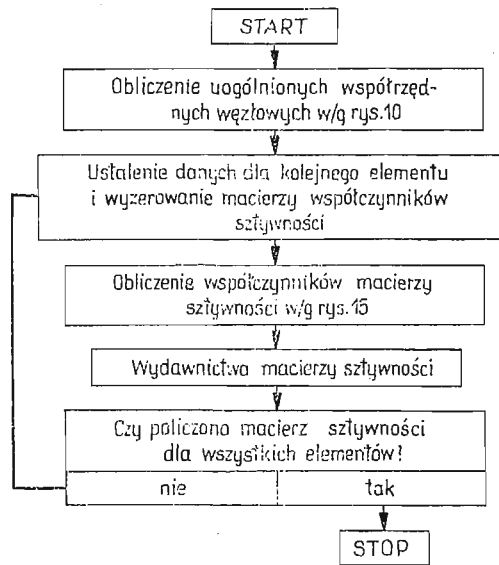
It should be noted that when the Jacobian of the transformation  $J = 0$ , the integrand expressions of formulas (5.5) become zero. We can therefore ignore the summation (6.4) and avoid



Rys. 15



działania, w którym występuje dzielenie przez zero. Obliczenie wartości powyższych całek przedstawia program z rys. 15. Oczywiście przed wykonaniem tego programu należy wstępnie wyzerować macierz  $C_{\alpha\beta}^{ijklrs}$ . Zatem ostatecznie obliczenie macierzy sztywności elementów tarczy przebiegać będzie według programu z rys. 16.



Rys. 16

Na podstawie omówionej powyżej sieci działań opracowano program obliczeń macierzy sztywności na elektronowej maszynie cyfrowej ZAM 2-beta.

## 7. Uwagi końcowe

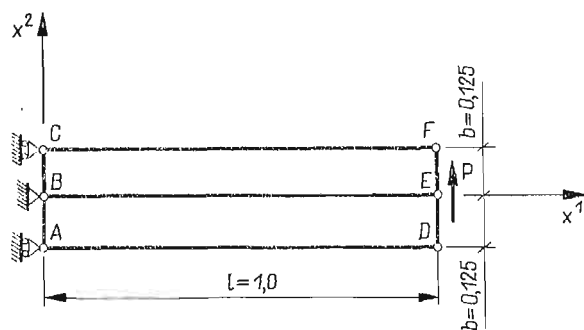
O dokładności metody elementów skończonych decyduje między innymi trafne przyjęcie postaci funkcji przedstawiającej przemieszczenia punktów tarczy. Zastosowanie w tych funkcjach, jak również w funkcjach transformujących układ  $Ox^1x^2$  na układ  $O\xi^1\xi^2$ , wielomianów Hermite'a ma tę zaletę, że zapewniamy w ten sposób w całym obszarze tarczy ciągłość przemieszczeń oraz ich pierwszych pochodnych względem  $x^1$  i  $x^2$ . Dzięki temu uzyskujemy w całym obszarze tarczy ciągłość odkształceń.

Korzystając z zaproponowanej metody wyznaczania macierzy sztywności przeprowadzono przykładowo obliczenia przemieszczeń prostokątnej tarczy obciążonej siłą styczną wzdłuż jednego boku (rys. 17). Tarczę podzielono na dwa elementy zawierające po 4 węzły każdy. Macierz sztywności dla każdego elementu obliczono według toku postępowania opisanego w p. 6.

Rozwiązanie ściśle dla omawianej tarczy, przy założeniu, że siła  $P$  jest rozłożona wzdłuż przekroju końcowego  $x^1 = l$  według paraboli, wynosi [5]:

$$u_D^1 = 48,0 \frac{P}{Eh}, \quad u_E^1 = 0, \quad u_F^1 = -48,0 \frac{P}{Eh},$$

$$u_D^2 = u_E^2 = u_F^2 = 267,0 \frac{P}{Eh}.$$



Rys. 17

Wartości przemieszczeń, uzyskane przy wykorzystaniu omawianej macierzy sztywność wynoszą:

$$u_D^1 = 52,78 \frac{P}{Eh}, \quad u_E^1 = -0,127 \frac{P}{Eh}, \quad u_F^1 = -52,78 \frac{P}{Eh},$$

$$u_D^2 = u_E^2 = u_F^2 = 300,30 \frac{P}{Eh}.$$

Błąd względny uzyskanych wyników nie przekracza 13%. Należy przypuszczać, że przy zwiększeniu liczby elementów, na które dzieli się tarczę, otrzymane wyniki będą jeszcze bliższe rozwiązaniu dokładnemu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. O. C. ZIENKIEWICZ, Y. K. CHEUNG, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, Mc Graw-Hill, London-New York-Toronto-Sydney 1967.
2. Z. KOPAL, *Numerical analysis*, Chapman and Hall Ltd, London 1961.
3. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty*, Biuletyn Wojskowej Akademii Technicznej, nr 4 (200) 1969.
4. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
5. K. GIRKMANN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.

## Резюме

## ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЭРМИТА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКА В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов состоит в замене сплошной среды дискретной моделью, состоящей из элементов, соединённых между собой конечным числом узлов. В методе определяется «матрица жесткости», с помощью которой можно представить внутренние обобщенные силы в узлах элемента как линейные функции перемещений узлов.

В работе представлен метод применения полиномов Эрмита для определения матрицы жесткости элемента диска, находящегося в плоском напряженном состоянии. Представлена также схема расчета матрицы жесткости на электронной вычислительной машине.

## Summary

## APPLICATION OF HERMITE POLYNOMIALS TO THE DETERMINATION OF THE STIFFNESS MATRIX OF PLATE ELEMENTS METHOD

The finite element method is based on replacing the continuum by a discrete model composed of elements connected in a finite number of nodes. The method consists in determining the so-called «stiffness matrix» which serves to express the generalized internal forces in nodes of the element as linear functions of the nodes displacement.

The present paper applies Hermite's polynomials for determining the stiffness matrix of the element subjected to plane stress. The flow diagram for preparing the computation programme of the stiffness matrix by means of a digital computer has also been given.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 sierpnia 1970 r.*

---



OSZACOWANIE ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY SIŁ  
W PRZYPADKU PRZYBLIŻONEGO WYZNACZANIA LICZB WPŁYWOWYCH

SZCZEPAN BORKOWSKI (GLIWICE)

1. Wstęp

Zagadnienie optymalizacyjne dla układów prętowych statycznie niewyznaczalnych sprowadza się do takiego doboru przekrojów pręta, aby spełnione były pewne kryteria optymalności (np. minimum objętości) oraz dane warunki ograniczające. Przy takim postawieniu zagadnienia napotykamy zasadnicze trudności: poszukiwane wskaźniki przekroju, będące funkcjami współrzędnych, a także wymiarów poprzecznych przekroju, są wyrażeniami podcałkowymi, które z kolei określają liczby wpływowe. Liczby te występują jako współczynniki równań kanonicznych metody sił. Wariacyjne postawienie problemu optymalności, a następnie jego rozwiązanie prowadzi do algorytmu trudnego do zaprogramowania. Przedstawiona w niniejszej pracy metoda wykorzystuje przybliżony sposób całkowania Simpsona; pozwala to na proste rozwiązanie postawionego zagadnienia oraz, co jest w zastosowaniach bardzo istotne, na oszacowanie uzyskanych przybliżonych rozwiązań. Sposób ten może być również wykorzystany przy rozwiązywaniu układów statycznie niewyznaczalnych posiadających pręty o zmiennym przekroju, poddanych wpływom pola temperatur i statycznego pola obciążeń. Analogiczny sposób rozwiązywania układów statycznych może być stosowany również i w metodzie przemieszczeń.

Praca stanowi kontynuację zadania sformułowanego w streszczeniu [1]. Rozpoczynając od opracowania sposobu przybliżonego rozwiązania równań kanonicznych metody sił mamy na względzie fakt, że sposób ten może mieć zastosowanie nie tylko w problemach optymalizacyjnych.

2. Sformułowanie zadania

Rozpatrywać będziemy rozwiązanie równań kanonicznych metody sił przy uwzględnieniu wpływów termicznych oraz statycznego pola obciążeń, dla układu prętów  $n$ -krotnie ( $n > 0$ ) statycznie niewyznaczalnych. Równania te mają znaną postać

$$(2.1) \quad \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP} + \Delta_{iT} = \Delta_i \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

w której występujące współczynniki mogą być obliczone ze wzorów

$$(2.2) \quad E\delta_{ij} = \int_L \left[ \frac{1}{I_y} \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yj} + \frac{2(1+\nu)}{I_s} \bar{K}_i \bar{K}_j + \frac{1}{I_z} \bar{M}_{zi} \bar{M}_{zj} \right] ds,$$

$$(2.2) \quad E\Delta_{iT} = \int_L \left[ \frac{1}{I_y} \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yT} + \frac{1}{I_z} \bar{M}_{zi} \bar{M}_{zT} \right] ds,$$

[c.d.]

$$E\Delta_{iP} = \int_L \left[ \frac{1}{I_y} \bar{M}_{yi} \bar{M}_{yP} + \frac{2(1+\nu)}{I_s} \bar{K}_i K_P + \frac{1}{I_z} \bar{M}_{zi} \bar{M}_{zP} \right] ds,$$

ważnych dla przestrzennego układu prętów albo ze wzorów

$$(2.2a) \quad E\delta_{ij} = \int_L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{I} ds, \quad E\Delta_{iT} = \int_L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_T}{I} ds,$$

$$E\Delta_{iP} = \int_L \frac{\bar{M}_i \bar{M}_P}{I} ds,$$

słusznych dla płaskich układów prętowych (o ile pominąć momenty skręcające).

W (2.2), przez  $\delta_{ij}$ ,  $\Delta_{iP}$ ,  $\Delta_{iT}$  oznaczono kolejno: liczby wpływowe, współczynnik uwzględniający wpływ pola obciążeń oraz temperatur; symbolami  $I_y$ ,  $I_z$ ,  $I_s$  oznaczono, w kolejności występowania — moment bezwładności względem osi  $y$ ,  $z$  oraz wskaźnik geometryczny skręcania. Występujący w każdym punkcie osi pręta ortogonalny, lokalny układ współrzędnych  $Oxyz$  zorientowany jest w ten sposób, że oś  $x$  jest styczna do osi pręta w punkcie  $O$ , natomiast osie  $y$ ,  $z$  są głównymi, centralnymi osiami bezwładności przekroju pręta. Symbolami  $M_{(\cdot)[\cdot]}$ ,  $K_{[\cdot]}$  oznaczono współrzędne wektora momentu, kolejno: zginającego względem osi  $(\cdot)$  i skręcającego. Indeks  $[\cdot]$  symbolizuje wpływ: obciążeń jednostkowych (wtedy zamiast  $[\cdot]$  wstawiamy  $i$  dodając nad literą rdzeniową — kreskę, gdzie  $i = 1, \dots, n$ ); pola obciążeń (zamiast  $[\cdot]$  wstawiamy  $P$ ) lub wreszcie — pola temperatur (wówczas zamiast  $[\cdot]$  wstawiamy  $T$ ). W równaniach (2.1), a także w pozostałych relacjach, stosujemy konwencję sumacyjną.

Występujące w wyrażeniach podcałkowych funkcje  $M_{(\cdot)[\cdot]}$ ,  $K_{[\cdot]}$  [układy (2.2)] są zależne od współrzędnej łuku  $s$  lub od zmiennych  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , określających początek lokalnego układu współrzędnych, będący zarazem środkiem geometrycznym przekroju.

O k r e ś l e n i e z a d a n i a. Należy wyznaczyć z układu (2.1) niewiadome  $X_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) zastępując prawe strony wzorów (2.2) wzorami Simpsona, a następnie przeprowadzić oszacowanie uzyskanych przybliżonych wartości niewiadomych.

### 3. Rozwiązanie zadania

Zanim przystąpimy do podstawowego twierdzenia, które ujmować będzie odpowiedź na postawione w poprzednim punkcie zadanie, sformułujemy wpierw następujący l e m a t. Jeżeli spełnione będą założenia:

a) oś pręta będzie łukiem gładkim, regularnym, którego równanie w postaci parametrycznej możemy przedstawić przy pomocy równań

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \text{jeśli} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

w tym przypadku element łuku określać będzie wzór

$$ds = f(t) dt, \quad \text{gdzie} \quad f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{x_t^2 + y_t^2 + z_t^2};$$

b) występujące w (2.2) funkcje podcałkowe, po uwzględnieniu założenia a) oznaczymy symbolicznie przez

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \Phi_{ij}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{1}{I_y(t)} \bar{M}_{yi}(t) \bar{M}_{yj}(t) + \frac{2(1+\nu)}{I_s(t)} \bar{K}_i(t) \bar{K}_j(t) + \frac{1}{I_z(t)} \bar{M}_{zi}(t) \bar{M}_{zj}(t) \right] f(t), \\ \Psi_{iT}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{1}{I_y(t)} \bar{M}_{yi}(t) M_{yT}(t) + \frac{1}{I_z(t)} \bar{M}_{zi}(t) M_{zT}(t) \right] f(t), \\ \Omega_{iP}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \left[ \frac{1}{I_y(t)} \bar{M}_{yi}(t) M_{yP}(t) + \frac{2(1+\nu)}{I_s(t)} \bar{K}_i(t) K_P(t) + \frac{1}{I_z(t)} \bar{M}_{zi}(t) M_{zP}(t) \right] f(t) \end{aligned}$$

i przyjmować będziemy, że posiadają one pochodne względem zmiennej  $t$  do rzędu czwartego przy uwzględnieniu, że wskaźniki przebiegają ciąg liczb skończony ( $i, j = 1, \dots, n$ );

c) przedział  $[\alpha, \beta]$  rozbijamy na  $2m$  równych części

$$[t_0 = \alpha, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{2m-1}, t_{2m} = \beta], \quad \alpha > \beta$$

budujemy z (3.1) pomocnicze funkcje

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \varphi_{ij}^{(m)} &= \Phi_{ij}(\alpha) - \Phi_{ij}(\beta) + 2 \sum_{p=1}^m [2\Phi_{ij}(t_{2p-1}) + \Phi_{ij}(t_{2p})], \\ \psi_{iT}^{(m)} &= \Psi_{iT}(\alpha) - \Psi_{iT}(\beta) + 2 \sum_{p=1}^m [2\Psi_{iT}(t_{2p-1}) + \Psi_{iT}(t_{2p})], \\ \omega_{iP}^{(m)} &= \Omega_{iP}(\alpha) - \Omega_{iP}(\beta) + 2 \sum_{p=1}^m [2\Omega_{iP}(t_{2p-1}) + \Omega_{iP}(t_{2p})], \end{aligned}$$

pod warunkiem, aby  $\det[\varphi_{ij}^{(m)}] \neq 0$ , to wówczas, po zastosowaniu metody Simpsona uzyskujemy zamiast wzorów (2.2) następujące wyrażenia

$$(3.3) \quad \begin{aligned} E\delta_{ij} &= \frac{\beta - \alpha}{6m} \varphi_{ij}^{(m)} - \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^5 \frac{1}{90m^4} \Phi_{ij}^{(IV)}(\alpha + \theta_1 t), \\ E\Delta_{iT} &= \frac{\beta - \alpha}{6m} \psi_{iT}^{(m)} - \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^5 \frac{1}{90m^4} \Psi_{iT}^{(IV)}(\alpha + \theta_2 t), \\ E\Delta_{iP} &= \frac{\beta - \alpha}{6m} \omega_{iP}^{(m)} - \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^5 \frac{1}{90m^4} \Omega_{iP}^{(IV)}(\alpha + \theta_3 t), \end{aligned}$$

gdzie występujące we wzorach (3.3) pochodne czwartego rzędu określone są w punktach  $\alpha + \theta_k t$ ,  $0 < \theta_k < 1$  ( $k = 1, 2, 3$ ).

Przy powyższych założeniach dowód lematu przebiega analogicznie, jak w [2] s. 252.

Mając na uwadze poprzednio przytoczony lemat, wykażemy, że słuszne jest następujące twierdzenie. Jeżeli spełnione są założenia:

a) konfiguracja pręta, przemieszczenia punktów jego osi środkowej, poie obciążeń i temperatur, materiał ośrodka oraz nałożone więzy są tego rodzaju, iż słuszne pozostają równania kanoniczne metody sił (2.1);

b) wszystkie występujące w (2.2) całki są obliczone metodą Simpsona (por. lemat)

c) pochodne rzędu czwartego funkcji  $\Phi_{ij}$ ,  $\Psi_{iT}$ ,  $\Omega_{iP}$  względem zmiennej  $t$  są ograniczone nierównościami

$$(3.4) \quad M_i = \max_{t \in [\alpha, \beta]} \{ |X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(t)|, |\Psi_{iT}^{(IV)}(t)|, |\Omega_{iP}^{(IV)}(t)| \} \leq \tilde{M}_i < \infty \quad (i = 1, \dots, n),$$

— to wówczas wielkości nadliczbowe  $X_j^{(m)}$  traktowane jako  $m$ -te przybliżenie niewiadomych  $X_j$  można wyznaczyć w sposób przybliżony z równania

$$(3.5) \quad \varphi_{ij}^{(m)} X_j^{(m)} + \omega_{iP}^{(m)} + \psi_{iT}^{(m)} = \frac{6m}{\beta - \alpha} E \Delta_i \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Niewiadome  $X_j^{(m)}$  szacujemy w stosunku do wartości dokładnych  $X_j$  za pomocą nierówności

$$(3.6) \quad \|[X_j - X_j^{(m)}]\| \leq \|\mathbf{F}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\|,$$

gdzie  $\mathbf{F}^{-1}$  jest macierzą odwrotną macierzy  $\mathbf{F} = [\varphi_{ij}^{(m)}]$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}(m)$  — resztą wynikającą ze wzoru Simpsona, a  $\|\cdot\|$  jest symbolem normy macierzy.

D o w ó d. Z założeń a) i b) wynika, że możemy napisać następującą równość

$$(3.5a) \quad \varphi_{ij}^{(m)} X_j + \omega_{iP}^{(m)} + \psi_{iT}^{(m)} = \varepsilon_i(m) + \frac{6m}{\beta - \alpha} E \Delta_i$$

wynikającą z podstawienia (3.3) do (2.1); w (3.5a) przez  $\varepsilon_i(m)$  oznaczono

$$(3.7) \quad \varepsilon_i(m) = \left( \frac{\beta - \alpha}{2} \right)^4 \frac{1}{30m^3} [X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(\alpha + \theta_1 t) + \Psi_{iT}^{(IV)}(\alpha + \theta_2 t) + \Omega_{iP}^{(IV)}(\alpha + \theta_3 t)].$$

Pomijając w (3.5)  $\varepsilon_i(m)$  zmieniamy zbiór poszukiwanych niewiadomych, które oznaczmy teraz przez  $X_j^{(m)}$ ; tym samym z (3.5a) uzyskujemy równanie (3.5). Równanie to posłuży nam do przybliżonego wyznaczenia poszukiwanych wielkości nadliczbowych  $X_j^{(m)}$  ( $m$ -te przybliżenie). Odejmując równanie (3.5) od (3.5a) uzyskujemy  $\varphi_{ij}^{(m)} [X_j - X_j^{(m)}] = \varepsilon_i(m)$ , a dalej  $[\varphi_{ij}^{(m)}] [X_j - X_j^{(m)}] = [\varepsilon_i(m)]$ , skąd już ostatecznie

$$(3.8) \quad [X_j - X_j^{(m)}] = [\varphi_{ij}^{(m)}]^{-1} [\varepsilon_i(m)].$$

Jeżeli wprowadzimy normy macierzy  $\mathbf{F}^{-1} = [\varphi_{ij}^{(m)}]^{-1} = [\tilde{\varphi}_{ij}^{(m)}]$  podporządkowane normie oktaedrycznej wektorów  $\mathbf{X} = [X_j - X_j^{(m)}]$ ,  $[\varepsilon_i(m)] = \boldsymbol{\epsilon}(m)$ , które określone są w sposób następujący (por. [3])

$$(3.9) \quad \|\mathbf{F}^{-1}\| = \max_j \sum_{i=1}^n |\tilde{\varphi}_{ij}^{(m)}|, \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\| = \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i(m)|, \|\mathbf{X}\| = \sum_{i=1}^n |X_j - X_j^{(m)}|,$$

to wówczas z (3.8) uzyskujemy oszacowanie

$$\|[X_j - X_j^{(m)}]\| = \|\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\epsilon}(m)\| \leq \|\mathbf{F}^{-1}\| \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\|,$$

zgodnie z (3.6). Uwzględniając w (3.7) oszacowanie (3.4), uzyskujemy

$$(3.10) \quad |\varepsilon_i(m)| = |[(\beta - \alpha)^4 / 480m^3] \cdot [X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(\alpha + \theta_1 t) + \Psi_{iT}^{(IV)}(\alpha + \theta_2 t) + \Omega_{iP}^{(IV)}(\alpha + \theta_3 t)]| \leq \\ \leq [(\beta - \alpha)^4 / 60(2m)^3] [2 + 1] M_i = B_i / (2m)^3,$$

gdzie  $B_i = [(\beta - \alpha)^4 / 60] [2 + n] M_i$ .

Podstawiając ostatnie wyniki do (3.9) otrzymamy

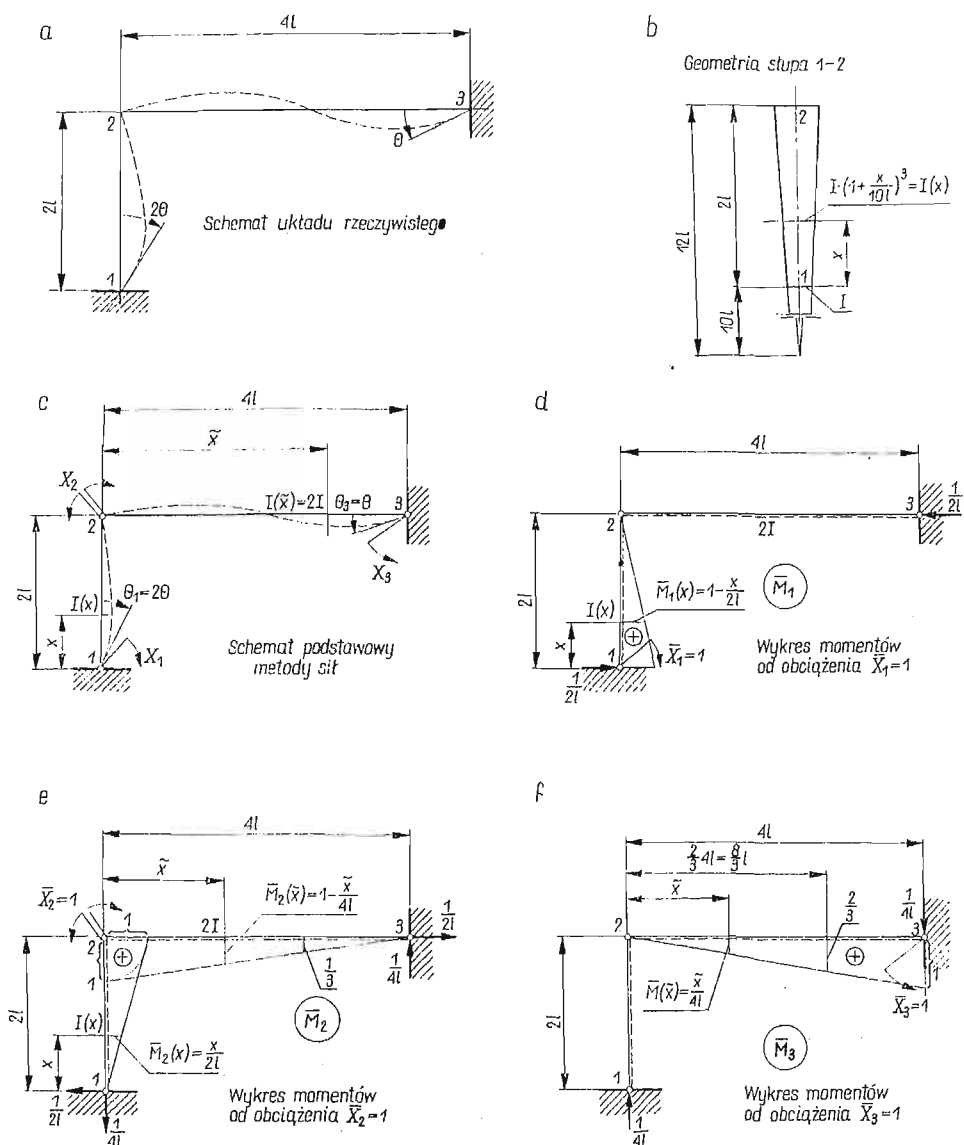
$$(3.10a) \quad \|\boldsymbol{\epsilon}(m)\| \leq \frac{1}{(2m)^3} \sum_{i=1}^n B_i.$$

W ten sposób zakończyliśmy dowód twierdzenia.



## 4. Przykład liczbowy

Dla schematu układu rzeczywistego, który przedstawiony jest na rys. 1a, należy wyznaczyć w sposób przybliżony wielkości hiperstatyczne pokazane na schemacie podstawowym metody sił (por. rys. 1c). Moment bezwładności przekroju słupa 1-2 jest zmienny zgodnie z funkcją podaną na rys. 1b. Po wyznaczeniu wielkości hiperstatycznych, przybliżonych należy przeprowadzić ich oszacowanie, a następnie porównać otrzymane wyniki z rozwiązaniem dokładnym podanym w pracy [4], s. 338. Ponieważ w rozpatrywanym przypadku



Rys. 1

nie ma wpływów termicznych ani międzyprzęstłowego pola sił zewnętrznych [ $A_{iP} = A_{iT} = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ )], przeto z wzoru (3.1) otrzymujemy

$$(4.1) \quad [\Phi_{ij}] = [\bar{\Phi}_{ij}] + [\check{\Phi}_{ij}],$$

gdzie

$$[\bar{\Phi}_{ij}] = \left[ \frac{1}{I(x)} \bar{M}_i(x) \bar{M}_j(x) \right], \quad [\check{\Phi}_{ij}] = \left[ \frac{1}{2I} \bar{M}_i(\tilde{x}) \bar{M}_j(\tilde{x}) \right].$$

Podstawiając do (4.1)<sub>2</sub> odpowiednie wielkości za  $\bar{M}_i(x)$ ,  $\bar{M}_i(\tilde{x})$  ( $i = 1, 2, 3$ ), które podane są na rys. 1, uzyskamy

$$(4.1a) \quad [\bar{\Phi}_{ij}] = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} (1-x/2l)^2(1+x/10l)^{-3} & (1-x/2l)(x/2l)(1+x/10l)^{-3} & 0 \\ \cdot & (x/2l)^2(1+x/10l)^{-3} & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix},$$

$$[\check{\Phi}_{ij}] = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \frac{1}{2}(1-\tilde{x}/4l) & \frac{1}{2}(1-x/4l)(\tilde{x}/4l) \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(\tilde{x}/4l)^2 \end{bmatrix},$$

gdzie w macierzy (4.1a) oznaczono kropkami elementy, które są równe elementom macierzy symetrycznym względem przekątnej głównej. Dla odcinka 1-2 «ramy 1-2-3» przyjmujemy podział na dwie części  $2m = 2$ ; z równania (3.2)<sub>1</sub> uzyskamy wówczas

$$\hat{\varphi}_{ij}^{(1)} = \Phi_{ij}(0) + 4\Phi_{ij}(l) + \Phi_{ij}(2l)$$

lub w zapisie macierzowym, po uwzględnieniu (4.1a)

$$(4.2) \quad [\hat{\varphi}_{ij}^{(1)}] = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} 1,75131 & 0,75131 & 0 \\ \cdot & 1,33001 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}.$$

Analogiczną macierz możemy podać i dla współczynników (4.1a)<sub>2</sub>, lecz z uwagi na prostą budowę funkcji momentów oraz stały moment bezwładności przekroju pręta 2-3, wygodniej uczynić to przez «przemnożenie» wykresów momentów; po wykonaniu tej ostatniej operacji otrzymamy

$$(4.3) \quad \left[ \frac{l}{3E} \tilde{\varphi}_{ij} \right] = \frac{l}{3EI} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 2 & 1 \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}.$$

Współczynniki  $\varphi_{ij}$  należy pomnożyć przez  $(\beta - \alpha)/6m = (2l - 0)/6 \cdot 1 = l/3$ , oraz podzielić przez  $E$ , zgodnie z równaniem (3.3)<sub>1</sub>. Dodając do siebie macierze (4.2) i (4.3) uzyskamy

$$(4.3a) \quad [\varphi_{ij}^{(1)}] = [\hat{\varphi}_{ij}^{(1)} + \tilde{\varphi}_{ij}] = \mathbf{F} = \frac{1}{I} \begin{bmatrix} 1,75131 & 0,75131 & 0,00000 \\ \cdot & 3,33001 & 1,00000 \\ \cdot & \cdot & 2,00000 \end{bmatrix}.$$

Przybliżony układ równań kanonicznych metody sił, zgodnie z równaniem (3.5), ma postać

$$\varphi_{ij}^{(1)} X_j^{(1)} = \frac{3E}{I} \theta_i, \quad \text{gdzie} \quad \theta_1 = 2\theta, \quad \theta_2 = 0, \quad \theta_3 = \theta.$$

W równaniu (3.5) przyjęto  $6m/(\beta-\alpha) = 3/l$ , a  $\Delta_i = \theta_i$ .  
Wykonując odwracanie macierzy (4.3) uzyskamy

$$(4.4) \quad \mathbf{F}^{-1} = I \begin{bmatrix} 0,64439 & -0,17107 & 0,08554 \\ \cdot & 0,39878 & -0,19939 \\ \cdot & \cdot & 0,59969 \end{bmatrix} = [\tilde{\varphi}_{ij}^{(1)}],$$

skąd przybliżone wartości poszukiwanych wielkości hiperstatycznych ( $X_j^{(1)} = \tilde{\varphi}_{ij}^{(1)} 3E\theta_i/l$ ) wynosić będą

$$(4.5) \quad X_1^{(1)} = 4,1230 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_2^{(1)} = -1,6246 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_3^{(1)} = 2,3123 \frac{EI}{l} \theta.$$

Przystąpimy do oszacowania wyników (4.5). Z równania (4.1a)<sub>1</sub> wyznaczmy pochodne czwartego rzędu funkcji  $\Phi_{ij}(z)$ , gdzie  $z = 10/l + x$

$$(4.6) \quad \Phi_{ij}^{(IV)}\left(\frac{z}{l}\right) = \frac{6000}{l^4} \left(\frac{z}{l}\right)^{-5} \begin{bmatrix} 2160(z/l)^{-2} - 120(z/l)^{-1} + 1 & 1800(z/l)^{-2} - 110(z/l)^{-1} + 1 & 0 \\ \cdot & 1500(z/l)^{-2} - 100(z/l)^{-1} + 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z równań (3.4), (4.5) otrzymamy

$$M_i = |X_j \Phi_{ij}^{(IV)}(z/l)|_{z/l=10}, \quad \text{czyli} \quad M_1 = 3,4020 \frac{E\theta}{l}, \quad M_2 = 2,0390 \frac{E\theta}{l}, \quad M_3 = 0,$$

dalej, zgodnie z (3.10):

$$(4.7) \quad |\varepsilon_i(m)| \leq \frac{(\beta-\alpha)^4}{60(2m)^3} (0+1) M_i, \quad \text{czyli} \quad |\varepsilon_1(m)| \leq 0,1134 \frac{E\theta}{l}, \quad |\varepsilon_2(m)| \leq 0,0680 \frac{E\theta}{l}, \\ \varepsilon_3(m) = 0.$$

Norma macierzy  $[\varepsilon_j(m)]$  określona jest wzorem (3.9)<sub>2</sub>. Podstawiając równania (4.7) do (3.9)<sub>2</sub>, uzyskujemy

$$\|[\varepsilon_j(m)]\| \leq 0,1814 \frac{E\theta}{l}.$$

Przystąpimy do wyznaczania normy macierzy odwrotnej (4.4). Z określenia (3.9)<sub>1</sub> oraz wzoru (4.4) otrzymujemy

$$\|\mathbf{F}^{-1}\| = \max_j (|\tilde{\varphi}_{1j}^{(1)}|, |\tilde{\varphi}_{2j}^{(1)}|, |\tilde{\varphi}_{3j}^{(1)}|) = 0,9020l.$$

Na podstawie równania (3.6) uzyskujemy oszacowanie

$$(4.8) \quad \|X_j - X_j^{(1)}\| \leq \|\mathbf{F}^{-1}\| \|[\varepsilon_j(m)]\| \leq 0,1636 \frac{EI}{l} \theta.$$

Podamy następnie oszacowanie błędu bezwzględnego wielkości nadliczbowych. Posługując się równaniami (3.5), (3.5a) uzyskamy

$$|X_j - X_j^{(1)}| \leq \sum_{i=1}^3 |\tilde{\varphi}_{ij}^{(1)}| |\varepsilon_i(m)|;$$

wykonując naznaczone działania, a następnie uwzględniając równania (4.4), (4.7) otrzymamy

$$|X_1 - X_1^{(1)}| \leq 0,085 \frac{EI}{l} \theta, \quad |X_2 - X_2^{(1)}| \leq 0,047 \frac{EI}{l} \theta, \quad |X_3 - X_3^{(1)}| \leq 0,024 \frac{EI}{l} \theta$$

lub

$$4,038 < \frac{X_1 l}{EI \theta} < 4,208, \quad -1,672 < \frac{X_2 l}{EI \theta} < -1,578, \quad 2,288 < \frac{X_3 l}{EI \theta} < 2,337.$$

Ostatnio podane oszacowanie daje błędy względne wahające się w granicach 1–3%, co jest w zastosowaniach w zupełności wystarczające; tym bardziej, że oszacowanie to jest z dużym nadmiarem w stosunku do błędów rzeczywistych.

W zakończeniu porównamy otrzymane wyniki z danymi dokładnymi, podanymi w pracy [4]. Dokładne wartości (do czterech miejsc po przecinku) wielkości hiperstatycznych wynoszą

$$X_1 = 4,1618 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_2 = -1,6447 \frac{EI}{l} \theta, \quad X_3 = 2,3224 \frac{EI}{l} \theta,$$

a zatem błąd względny wielkości przybliżonych (4.5) waha się, dla  $m = 1$ , w granicach  $0,4 \div 1,2\%$ ; natomiast  $||[X_j - X_j^{(1)}]|| = 0,075 EI \theta / l$ . Ostatnie wyniki określają rzeczywiste błędy oraz rzeczywistą normę, a nie wielkości szacunkowe, które przytoczyliśmy poprzednio.

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. BORKOWSKI, *Niektóre problemy optymalizacji konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu wpływu pola temperatur*, IV Konf. Nauk. Tech., Konst. Met., Warszawa 1970, t. 1, 539–541.
2. И. С. БЕРЕЗИН, Н. П. ЖИДКОВ, *Методы вычислений*, т. I, Москва 1962.
3. Д. К. ФАДДЕЕВ, В. И. ФАДДЕЕВА, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Москва 1963.
4. Н. В. ВЛИШВИЛИ, *Формулы для расчета рам со стойками переменного сечения*, Москва 1965.

#### Резюме

#### ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СИЛОВОГО МЕТОДА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРИБЛИЖЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВЛИЯНИЯ

Рассмотрена задача об оптимизации стержневых систем, подверженных статическим и тепловым воздействиям. Формулировка задачи приводит к уравнениям, в которых переменные характеристики сечений стержней находятся в подинтегральных выражениях. В системе канонических уравнений для силового метода эти выражения определяют параметры влияния.

В работе дан способ оценки приближенных значений гиперстатических величин, получаемых из этих уравнений, что дает возможность приспособить оптимизационные процессы к требованиям математического программирования, а также воспользоваться методом Симпсона.

## S u m m a r y

ESTIMATION OF SOLUTION OF THE CANONICAL EQUATIONS OF THE METHOD OF FORCES  
UNDER APPROXIMATE DETERMINATION OF INFLUENCE PARAMETERS

In the case of the optimization problem of rod structures subject to static and temperature loadings, the variable rod characteristics appear in the integrands. These expressions determine the influence parameters of the canonical system of equations of the method of forces. In order to adapt the optimization processes to mathematical programming and to apply the Simpson method, the paper presents the method of estimation of the approximate values of the hyperstatic quantities obtained from these equations.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 października 1970 r.; po raz drugi — dnia 13 grudnia 1970 r.*

---

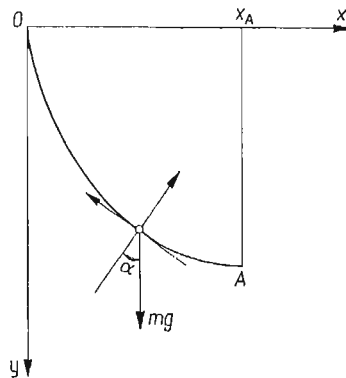


PEWNE UOGÓLNIENIE PROBLEMU BRACHISTOCHRONY

ZBIGNIEW MAZURKIEWICZ (WARSZAWA)

Problem brachistochny był pierwszym zagadnieniem rachunku wariacyjnego postawionym w czerwcu 1696 r. przez Jana BERNOULLIEGO.

Jak wiadomo, problem ten polegał na wyznaczeniu w płaszczyźnie pionowej takiej krzywej łączącej dwa punkty  $O, A$  (rys. 1), po której punkt materialny ślizgający się bez



Rys. 1

tarcia pod wpływem siły ciężkości (mający w punkcie  $O$  prędkość początkową równą zero) osiągnie w najkrótszym czasie punkt  $A$ .

W pracy tej uwzględniono tarcie ślizgowe. Oczywiście w takim przypadku rozwiązanie bardzo się komplikuje. Rozwiązanie problemu doprowadzono do układu trzech nieliniowych zwyczajnych równań różniczkowych. W toku rozwiązania otrzymano wzór umożliwiający wyznaczenie czasu spadania punktu materialnego po dowolnej krzywej w płaszczyźnie pionowej z uwzględnieniem tarcia ślizgowego. Poza tym otrzymano równanie krzywej, po której punkt materialny przesuwa się ze stałą prędkością.

Wprowadzono następujące oznaczenia:  $y = y(x)$  — równanie poszukiwanego toru,  $g$  — przyspieszenie ziemskie,  $\rho$  — promień krzywizny toru,  $v$  — prędkość punktu materialnego,  $m$  — masa punktu materialnego,  $\mu$  — współczynnik tarcia ślizgowego,  $\alpha$  — kąt nachylenia stycznej do krzywej w dowolnym punkcie.

Różniczkę przyrostu energii kinetycznej wyrażamy następująco:

$$(1) \quad d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mg \sin \alpha ds - \mu mg \cos \alpha ds - \mu \frac{mv^2}{\rho} ds.$$

Wykonując różniczkowanie oraz uwzględniając znane związki

$$(2) \quad \sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$(3) \quad ds = (1+y_x^2)^{1/2} dx, \quad \frac{1}{\rho} = y_{xx}(1+y_x^2)^{-3/2},$$

doprowadzamy równanie (1) do postaci

$$(4) \quad v dv = g dy - \mu g dx - \mu v^2 y_{xx} (1+y_x^2)^{-1/2} dx.$$

Na podstawie (3)<sub>1</sub> znajdujemy

$$(5) \quad v = \dot{s} = \dot{x}(1+y_x^2)^{1/2},$$

czyli

$$(6) \quad dv = \frac{dv}{dt} dt = [y_{xx} y_x \dot{x}^2 + (1+y_x^2) \ddot{x}] (1+y_x^2)^{-1/2} dt,$$

a więc z (5) i (6) jest

$$(7) \quad v dv = [y_{xx} y_x \dot{x}^2 + (1+y_x^2) \ddot{x}] \dot{x} dt.$$

Z przyrównania prawych stron wzorów (4) i (7) otrzymujemy

$$(8) \quad y_{xx} y_x \dot{x}^3 + (1+y_x^2) \ddot{x} \dot{x} = g \dot{y} - \mu g \dot{x} - \mu y_{xx} \dot{x}^3,$$

lub

$$(9) \quad y_{xx} y_x \dot{x}^2 + (1+y_x^2) \ddot{x} = g y_x - \mu g - \mu y_{xx} \dot{x}^2.$$

Następnie przyjmujemy podstawienie

$$(10) \quad B(x) = \dot{x}^2.$$

Po zróżniczkowaniu znajdujemy

$$(11) \quad \frac{dB(x)}{dt} = 2\dot{x}\ddot{x}, \quad \frac{dB(x)}{dx} = 2\ddot{x}.$$

Uwzględniając wzory (10), (11) doprowadzamy równanie (9) do postaci

$$(12) \quad K(y) \frac{dB(x)}{dx} + L(y) B(x) = M(y),$$

gdzie

$$(13) \quad K(y) = \frac{1}{2}(1+y_x^2), \quad L(y) = y_{xx}(y_x + \mu), \quad M(y) = g(y_x - \mu).$$

Rozwiązanie równania (12) jest następujące:

$$(14) \quad B(x) = e^{-\int \frac{L(y)}{K(y)} dx} \left\{ C_1 + \int \left[ \frac{M(y)}{K(y)} e^{\int \frac{L(y)}{K(y)} dx} \right] dx \right\}.$$



Następnie wykonujemy całkowanie

$$(15) \quad \int \frac{L(y)}{K(y)} dx = 2 \int \frac{y_{xx} y_x}{1+y_x^2} dx + 2\mu \int \frac{y_{xx}}{1+y_x^2} dx = \ln(1+y_x^2) + 2\mu \operatorname{arctg} y_x + C_2.$$

Uwzględniając wyrażenia (13), (15) doprowadzamy wzór (14) do następującej postaci:

$$(16) \quad \dot{x}^2 = (1+y_x^2)^{-1} e^{-2\mu \operatorname{arctg} y_x} \left[ C + 2g \int (y_x - \mu) e^{2\mu \operatorname{arctg} y_x} dx \right].$$

Z warunku  $v(0) = 0$  znajdujemy  $C = 0$  oraz po wykonaniu prostego przekształcenia otrzymujemy wzór na czas  $T$  ześliznięcia się punktu materialnego po torze płaskim  $y = y(x)$  z uwzględnieniem tarcia ślizgowego

$$(17) \quad T = \int_0^{x_A} (1+y_x^2)^{1/2} z^{-1/2} e^{\mu \operatorname{arctg} y_x} dx,$$

gdzie

$$(18) \quad z_x = 2g(y_x - \mu) e^{2\mu \operatorname{arctg} y_x}.$$

Łatwo zauważyć, że przy  $\mu = 0$  wzór (17) upraszcza się do znanej postaci

$$(19) \quad T = \int_0^{x_A} \left( \frac{1+y_x^2}{2gy} \right)^{1/2} dx.$$

Rozwiązanie problemu doprowadzono do zadania rachunku wariacyjnego na ekstremum warunkowe dla funkcjonału

$$(20) \quad J = \int_0^{x_A} H(y_x, z, z_x) dx,$$

gdzie

$$(21) \quad H = (1+y_x^2)^{1/2} z^{-1/2} e^{\mu \operatorname{arctg} y_x} + \lambda(x) [z_x - 2g(y_x - \mu) e^{2\mu \operatorname{arctg} y_x}].$$

Jak wiadomo, muszą być w tym przypadku spełnione następujące równania Eulera:

$$(22) \quad \frac{\partial H}{\partial y_x} = C,$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial H}{\partial z_x} \right) = 0.$$

Po wykonaniu różniczkowania otrzymujemy następujący układ trzech sprzężonych nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(23) \quad C = (y_x + \mu) [z(1+y_x^2)]^{-1/2} e^{\mu \operatorname{arctg} y_x} - 2g \lambda(x) e^{2\mu \operatorname{arctg} y_x} [1 + 2\mu(y_x - \mu)(1+y_x^2)^{-1}],$$

$$\lambda_x(x) = -e^{\mu \operatorname{arctg} y_x} (1+y_x^2)^{1/2} (4z^3)^{-1/2},$$

$$z_x = 2g(y_x - \mu) e^{2\mu \operatorname{arctg} y_x}.$$

Ścisłe rozwiązanie układu równań (23) jest niemożliwe. Rozwiązanie tego układu można otrzymać w sposób przybliżony, np. za pomocą metody iteracji. Układ (23) można przed-

stawić w postaci jednego równania różniczkowo - całkowego. Natomiast sprowadzenie go do jednego równania różniczkowego powoduje duże trudności.

Łatwo zauważyć, że przy  $\mu = 0$  jest

$$(24) \quad z = 2gy.$$

Wtedy na podstawie (23)<sub>1</sub> i (23)<sub>2</sub> znajdujemy równanie różniczkowe

$$(25) \quad 2yy_{xx} + y_x^2 + 1 = 0,$$

którego rozwiązanie umożliwia otrzymanie znanych parametrycznych równań cykloidy.

Na podstawie wzoru (16) można łatwo otrzymać równanie krzywej, po której punkt materialny przesuwa się ze stałą prędkością  $v_c$ .

Wykorzystując przekształcenie

$$(26) \quad \dot{x}^2 = \left( \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} \right)^2 = (1 + y_x^2)^{-1} v_c^2$$

doprowadzamy wzór (16) do postaci

$$(27) \quad v_c^2 e^{2\mu \operatorname{arctg} y_x} = 2g \int_0^x (y_x - \mu) e^{2\mu \operatorname{arctg} y_x} dx.$$

Po wykonaniu różniczkowania względem zmiennej  $x$  otrzymujemy

$$(28) \quad v_c^2 \mu y_{xx} = g(y_x - \mu)(1 + y_x^2).$$

Podstawiając  $y_x = p$ ,  $y_{xx} = p_x$ , znajdujemy

$$(29) \quad \int dx = \frac{\mu v_c^2}{g} \int \frac{dp}{(1+p^2)(p-\mu)}.$$

Zatem

$$(30) \quad x + C = A \left( \int \frac{dp}{p-\mu} - \int \frac{p+\mu}{1+p^2} dp \right),$$

gdzie

$$(31) \quad A = \frac{v_c^2}{g} \frac{\mu}{1+\mu^2}.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(32) \quad x + C = A [\ln(y_x - \mu)(1 + y_x^2)^{-1/2} - \mu \operatorname{arctg} y_x].$$

#### Резюме

#### НЕКОТОРОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О БРАХИСТОХРОНЕ

В работе дано некоторое обобщение задачи о брахистохроне, состоящее в учете трения скольжения.

Решение задачи приведено к решению системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (23), точное нахождение которого не возможно. Осуществимо, однако, построение приближенного решения, например по методу итераций.

В ходе решения получена формула (17), по которой рассчитывается время падения материальной точки вдоль произвольной кривой, расположенной в вертикальной плоскости; при этом учитывается линия скольжения.

Выведено также дифференциальное уравнение (32) кривой, по которой материальная точка перемещается с постоянной скоростью.

#### S u m m a r y

#### A CERTAIN GENERALIZATION OF THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM

In this paper a certain generalization is given of the brachistochrone problem by introducing the slide friction.

The problem is reduced to the system (23) of three non-linear, ordinary differential equations. The exact solution of these equations is not possible but an approximate solution may be obtained, for example by means of the iteration method.

In the paper also the formula (17) is given for the determination of the time of fall of the material point along an arbitrary curve lying in the vertical plane, the slide friction being taken into account.

The differential equation (32) describing the curve on which the velocity of the material point is constant has been additionally obtained.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 października 1970 r.*

---

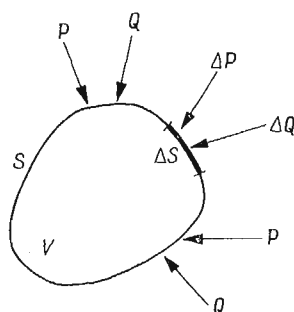


## O PEWNYM MODELU CIAŁA PRZENOSZĄCEGO NAPRĘŻENIA MOMENTOWE

MAREK SOKOŁOWSKI (WARSZAWA)

### 1. Naprężenia momentowe

W ostatnim dziesięcioleciu zanotować można w światowej literaturze naukowej z dziedziny mechaniki ogromny wzrost zainteresowania tematyką teorii ośrodków typu Cosseratów względnie ciał stanowiących ich uogólnienia lub modyfikacje. Wszystkie te teorie, których nie będziemy tu szczegółowo wyliczać i klasyfikować, posiadają jedną wspólną cechę: zakładają one mianowicie, że wzajemne oddziaływania poszczególnych części ośrodka — oddziaływania kontaktowe — nie dają się sprowadzić do prostego wektora naprężeń siłowych i wymagają wprowadzenia sił kontaktowych wyższego rzędu, między innymi naprężeń momentowych. Innymi słowy, układ sił równoważący oddziaływanie



Rys. 1

odrzuconej części ośrodka otaczającego element  $V$  o powierzchni  $S$  (rys. 1) składa się z wektorów sił  $\mathbf{P}$  i momentów  $\mathbf{Q}$ ; zakłada się zarazem, że granice

$$\lim \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S}, \quad \lim \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta S}$$

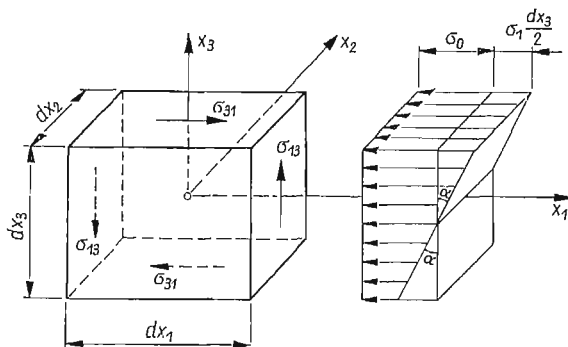
przy  $\Delta S$  zmierzającym do zera istnieją i nie są tożsamościowo równe zero przy dowolnym wyborze dostatecznie gładkiej powierzchni  $\Delta S$ . Granice te oznaczamy odpowiednio

$$(1.1) \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta S} = {}^n \mathbf{p}, \quad \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{Q}}{\Delta S} = {}^n \mathbf{q},$$

przy czym  ${}^n \mathbf{p}$  jest klasycznym wektorem naprężenia (naprężenie siłowe), a  ${}^n \mathbf{q}$  — wektorem naprężenia momentowego. Indeks  $n$  wskazuje, że wektory te są zależne od wyboru po-

wierzchni  $S$  scharakteryzowanej lokalnie przez jednostkowy wektor normalny  $\mathbf{n}$  do tej powierzchni.

W klasycznej teorii ośrodka ciągłego przyjmuje się, że granica drugiego stosunku  $\Delta Q/\Delta S$  tożsamościowo znika; założenie to można uzasadnić prostym rozumowaniem, nie pretendującym do ścisłości choć niewątpliwie przejrzystym ([1]): wyobraźmy sobie element prostopadłościenny  $dx_1 dx_2 dx_3$  w prostokątnym układzie współrzędnych  $\{x_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (rys. 2) i rozważmy, dla prostoty, jedną ścianę tego elementu  $dx_2 dx_3$  obciążoną



Rys. 2

zoną naprężeniami normalnymi  $\sigma_{11}(x_2, x_3)$ . Omawiając warunki równowagi takiego elementu zakładamy zazwyczaj, że naprężenia te rozłożone są równomiernie na infinytymalnym elemencie powierzchni  $dx_2 dx_3$ . Gdyby bowiem przyjąć, jak na rys. 2, że naprężenia te są na przykład liniową funkcją zmiennej  $x_3$ ,

$$(1.2) \quad \sigma_{11}(x_2, x_3) = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{x_3}{2},$$

to wielkość momentu wypadkowego rozważanych sił działających na ścianę  $dx_2 dx_3$  względem osi  $x_2$  przechodzącej przez środek prostopadłościanu wyniesie

$$\frac{1}{2} \sigma_1 \frac{dx_3}{2} dx_2 \frac{dx_3}{2} \frac{2}{3} dx_3 = \frac{1}{12} \sigma_1 dx_2 (dx_3)^3.$$

Uwzględniając ponadto analogiczny wpływ obciążeń siłami  $\sigma_{11} dx_2 dx_3$  przeciwległej ściany prostopadłościanu oraz wpływ naprężeń  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{31}$ , których rozkład przyjmiemy dla prostoty równomierny, otrzymamy równanie bilansu momentów w postaci

$$(1.3) \quad \left[ (\sigma_{13} - \sigma_{31}) + \frac{1}{12} \frac{(dx_3)^2}{dx_1} (\sigma_1 - \sigma'_1) \right] dx_1 dx_2 dx_3 = M_{x_2}.$$

$\sigma'_1$  oznacza tu odpowiedni współczynnik członu liniowego w wyrażeniu na  $\sigma_{11}(x_2, x_3)$  na ujemnej ścianie prostopadłościanu elementarnego, proporcjonalny do tangensa kąta  $\alpha$  nachylenia wykresu  $\sigma_{11}(x_3)$  do osi  $x_3$ . Wyrażenie  $\sigma_1 - \sigma'_1$  we wzorze (1.3) można, w przypadku różniczkowalności  $\sigma(x_1)$ , zastąpić różniczką

$$(1.4) \quad \frac{\partial \sigma(x_1)}{\partial x_1} dx_1.$$

Stwierdzamy teraz, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym wzoru (1.3) zawiera człony różnego rzędu względem infinitezymalnej wielkości  $dx_i$ . Wpływ nierównomierności rozkładu naprężeń jest o jeden rząd (lub przy uwzględnieniu (1.4) — o dwa rzędy) niższy od wpływu różnicy  $\sigma_{13} - \sigma_{31}$ , w związku z czym drugi człon w nawiasach kwadratowych (1.3) zazwyczaj jest pomijany. Prowadzi to do klasycznego stwierdzenia symetryczności tensora naprężenia  $\sigma_{ij} = \sigma_{(ij)}$ .

Można natomiast wyobrazić sobie przypadki, w których konieczność zaniedbania członu zawierającego różnicę  $\sigma - \sigma'$  i przyjęcia symetrycznego tensora naprężenia nie jest ak oczywista.

(a) Jeżeli z wymiarami  $dx_i$  nie można zmierzać do zera wobec skończonych wymiarów cząstek lub ziaren ciała rzeczywistego, wtedy rozumowanie dotyczące «rzędu małości» składników sumy (1.3) traci wszelki sens; mamy tu do czynienia z ciałami o pewnej mikrostrukturze, w których posługiwanie się symetrycznym tensorem naprężenia jest niemożliwe.

(b) Jeżeli współczynnik  $\sigma - \sigma'$  jest bardzo wielki, a w szczególności gdy  $\sigma = \text{const} \times \text{tg} \alpha \rightarrow \infty$  i gradient naprężenia w otoczeniu rozważanego punktu jest nieograniczony, wpływ odpowiedniego członu nie może być automatycznie pominięty. Sytuacja taka powstaje w przypadku, gdy mamy do czynienia z osobliwymi punktami pola naprężeń, a więc z nieskończonymi koncentracjami naprężeń. Należy zwrócić uwagę na fakt, że szereg autorów takich jak KOITER [2], STERNBERG [3] sugeruje możliwość wpływu naprężeń momentowych na zjawiska związane z koncentracją naprężeń.

W obu omówionych tu przypadkach w równaniu bilansu momentu (1.3) występuje poza antysymetryczną składową tensora naprężeń siłowych, człon typu (1.4) o charakterze gradientu tensora naprężenia, a więc naprężenie momentowe.

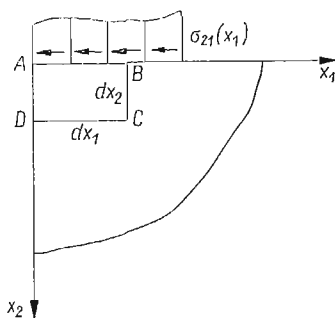
(c) Wyobrazić sobie można ponadto przypadek, gdy w ogóle sporządzenie rysunku typu rys. 2 nie jest możliwe; jeżeli oddziaływanie sąsiednich elementów ciała ma charakterze istotnie momentowy — podobnie jak w ciałach magnetycznych, w których występują jedynie dipole magnetyczne, a odosobnione bieguny magnetyczne nie mają racji bytu — to wykres przedstawiony na rys. 2 traci sens. Ciała tego typu byłyby ośrodkami istotnie mikropolarnymi i utrzymanie do ich opisu symetrycznego tensora naprężeń siłowych byłoby także niemożliwe.

Krótkie i — dla zachowania przejrzystości — bardzo uproszczone rozumowanie przedstawione powyżej stanowi próbę odpowiedzi na pytanie, czy zajmowanie się teorią naprężeń momentowych jest fizycznie lub zwłaszcza technicznie uzasadnione. Równoległe bowiem z intensywnym rozwojem tej teorii, której wyniki w wielu przypadkach przerażają techniczne możliwości ich doświadczalnej weryfikacji, budzą się wątpliwości dotyczące praktycznej użyteczności tego rodzaju badań.

W przypadku sił o określonej strukturze wewnętrznej oraz ciał sprężyste mikropolarnych użyteczność takich teorii nie ulega wątpliwości. Dowodzą tego liczne prace z zakresu teorii ciał z mikrostrukturą, że wymienimy tu dla przykładu pracę KALISKIEGO [9], szereg prac WOŹNIAKA dotyczących ośrodków włóknistych, prace GUTKOWSKIEGO i FRĄCKIEWICZA z zakresu teorii dźwigarów siatkowych i wiele innych. Niemniej, nawet w przypadku rozważania ośrodków ciągłych w zwykłym znaczeniu tego słowa, natrafiamy

na zagadnienia, w których zwykle założenia o symetrii tensora naprężeń siłowych nie dają się utrzymać. Z klasycznej teorii sprężystości znamy rozwiązanie dotyczące obciążenia nieograniczonej płaszczyzny  $(x_1, x_2)$  momentem skupionym o wektorze prostopadłym do tej płaszczyzny. Jest oczywiste, że rozważenie warunku równowagi infinitezimalnego elementu  $dx_1 dx_2$  ciała zawierającego punkt przyłożenia momentu jest nie do pogodzenia z warunkiem symetrii naprężeń  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ , gdyż w przeciwnym przypadku moment ten nie mógłby być niczym zrównoważony.

Jeszcze bardziej przekonującym dowodu dostarcza rozwiązanie zadania przedstawionego przez BOGY i STERNBERGA [5]. Dotyczy ono dwuwymiarowego zagadnienia klina, prostokątnego obciążonego na jednej krawędzi siłami stycznymi rozłożonymi w sposób ciągły (rys. 3). Autorzy wymienionej pracy pokazują, że rozwiązanie tego zadania w ra-



Rys. 3

mach klasycznej teorii sprężystości prowadzi w ogólnym przypadku do pola obrotów i naprężeń zawierających osobliwości w wierzchołku klina. Osobliwości te trudno uzasadnić fizycznie. Z drugiej strony jednak, rozważając infinitezimalny element prostokątny  $ABCD$  o bokach  $dx_1$  i  $dx_2$ , widzimy, że ścisłe spełnienie warunków brzegowych na krawędziach  $AB$  i  $AD$  musi być sprzeczne z założeniem o równości naprężeń  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ . Dopiero wprowadzenie do rozważań naprężeń momentowych usuwa te osobliwości i prowadzi do całkowicie regularnych rozwiązań.

Przykłady te wskazują, że nawet przypadki tradycyjnych w zasadzie zadań teorii sprężystości prowadzić mogą do rozwiązań, w których dopiero wprowadzenie naprężeń momentowych pozwala uniknąć sprzeczności z rzeczywistym charakterem zjawiska fizycznego

## 2. Dobór modelu ciała

Praca COSSERATÓW [6] stała się punktem wyjścia do powstania szeregu teorii dotyczących mechaniki i fizyki ośrodków wyższego rzędu, dla których wyrażenie na energię sprężystą zawiera człony zależne nie tylko od pierwszego gradientu przemieszczenia  $\mathbf{u}$ , lecz także od wyższych pochodnych  $u_i$ . Problem doboru odpowiedniego modelu ciała, który prowadziłby do wyników optymalnie zbliżonych do rzeczywistości nie jest prosty; przeciw wprowadzeniu bardziej złożonych modeli przemawia względ na możliwą prostotę obliczeń. Uwzględnienie bardziej złożonych praw fizycznych dla modeli ciał tego rodzaju stawia



rakże pod znakiem zapytania możliwość doświadczalnej weryfikacji otrzymanych wyników. Model rozważony np. przez MINDLINA [7] wprowadza 903 niezależne od siebie współczynniki sprężystości dla ciała o pewnych własnościach sieci krystalicznej.

Niewątpliwie najprostszym modelem ciała zdolnego do przenoszenia naprężeń momentowych jest model ciała drugiego rzędu omówiony przez MINDLINA [8] i KOITERA [2], nazywany także modelem ciała o związanych obrotach. Każdy punkt materialny ośrodka wyposażony jest jedynie w trzy niezależne stopnie swobody, trzy przemieszczenia  $u_i$  — w odróżnieniu od ośrodka omawianego obszernie w pracach NOWACKIEGO (np. [10]), w którym punkty materialne mają po sześć stopni swobody: trzy przemieszczenia i trzy niezależne obroty.

Energię sprężystą dla ośrodka o związanych obrotach, a więc obrotach określonych wzorami

$$(2.1) \quad \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ipq} u_{q,p}$$

(gdzie  $\varepsilon_{ipq}$  jest symbolem permutacyjnym), piszemy w postaci

$$(2.2) \quad W(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + B_{ijkl} \varepsilon_{ij} \kappa_{kl} + C_{ijkl} \kappa_{ij} \kappa_{kl}.$$

Tutaj **A**, **B**, **C** są tensorami modułów sprężystości,  $\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)}$  jest zwykłym, symetrycznym tensorem odkształcenia, zaś  $\kappa_{ij} = \omega_{i,j}$  nazywamy tensorem odkształcenia giętno-skrętnego. W ośrodku brak naprężeń wstępnych.

Naprężenia wyraża się przez odkształcenia za pomocą wzorów

$$(2.3) \quad \sigma_{(ij)} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad m_{ij} = \mu_{ij} - \mu \delta_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \kappa_{ji}},$$

przy czym  $\sigma_{ij}$  jest tensorem naprężenia siłowego, a  $\mu_{ij}$  — tensorem naprężenia momentowego, niesymetrycznym i zawierającym niewyznaczalną część kulistą  $\mu = \frac{1}{k} \mu_{k3}$ . Tensory te związane są z wektorami określonymi wzorem (1.1) zależnościami  $p_i = \sigma_{ji} n_j$ ,  $q_i = \mu_{ji} n_j$ .

Rozważenie warunków równowagi elementu ośrodka poddanego działaniu sił masowych **X** i momentów masowych **Y** prowadzi do równań

$$(2.4) \quad \sigma_{ji,j} + \rho X_i = 0, \quad \mu_{ji,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \rho Y_i = 0.$$

Z drugiej grupy równań (2.4) wynika, że tensor  $\sigma_{jk}$  nie musi być w ogólności symetryczny, gdyż na ogół  $\mu_{ji,j} + \rho Y_i \neq 0$ .

Warunki brzegowe dla powyższego układu równań stwierdzają, że wektory naprężeń siłowych i momentowych winny być na powierzchni ciała równe przyłożonym obciążeniom **p** i **q**,

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \quad \mu_{ji} n_j = q_i.$$

Podobnie w przypadku warunków brzegowych wyrażonych w przemieszczeniach należy przyjąć, że wszystkie składowe uogólnionych przemieszczeń **u** oraz  $\omega$  są dane na całej powierzchni *S* ciała. Jednak już ze wzoru (2.1) widać, że nie można na powierzchni *S*

dać niezależnie wszystkich sześciu składowych  $u_i$  i  $\omega_i$ , gdyż składowa wektora  $\omega$  normalna do  $S$  wyraża się przez składowe  $u_i$  styczne do  $S$ . Podobnie i składowa normalna obciążenia momentowego  $\mathbf{q}$  wyraża się przez składowe styczne obciążenia siłowego  $\mathbf{p}$ . W związku z tym liczba niezależnych warunków brzegowych wynosi tu pięć, w odróżnieniu od przypadku modelu ciała o niezwiązanych obrotach [10], gdzie warunków brzegowych jest sześć.

Tę niedogodność zapisu usuwa KOITER wprowadzając zredukowane siły powierzchniowe

$$(2.5.1) \quad \bar{p}_i = p_i - \frac{1}{2} \epsilon_{jli} q_j n_l$$

oraz zredukowane momenty powierzchniowe

$$(2.5.2) \quad \bar{q}_i = q_i - q n_i,$$

przy oznaczeniu  $q = q_j n_j$  dla składowej wektora  $\mathbf{q}$  normalnej do powierzchni ciała. Wektor  $\bar{\mathbf{q}}$  leży, jak widać, zawsze w płaszczyźnie stycznej do powierzchni i w ten sposób otrzymujemy bezpośrednio układ pięciu niezależnych warunków brzegowych.

Energia sprężysta o postaci (2.2) odnosi się do ogólnego przypadku ciała o minimalnych własnościach symetrii sprężystej. Liczba niezależnych składowych tensorów  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  wynosi tu jeszcze 105. Dopiero założenie pełnej symetrii sprężystej (izotropii) oraz centrosymetrii (w ciele poddanym równomiernemu odkształceniemu  $\epsilon_{ij} = \text{const}$  nie pojawiają się naprężenia momentowe) prowadzi do zasadniczego uproszczenia wyrażenia (2.2), [9],

$$(2.6) \quad W(\epsilon_{ij}, \kappa_{ij}) = G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{ii})^2 + \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + 2l^2 (\kappa_{ij} \kappa_{ij} + \eta \kappa_{ij} \kappa_{ji}) \right].$$

Tutaj  $G$  i  $\nu$  są klasycznymi stałymi sprężystości (moduł odkształcenia postaciowego i liczba Poissona), a  $l$  i  $\eta$  — nowymi, dodatkowymi stałymi charakterystycznymi dla rozważanego modelu. Nawiasem wspomnieć można, że bezwymiarowa stała  $\eta$  nie pojawia się w rozwiązaniach szeregu konkretnych zagadnień teorii sprężystości, a w szczególności w zagadnieniach dwuwymiarowych.

Tak więc ze wzoru (2.6) widać, że omawiany model ciała wymaga wprowadzenia — a więc i eksperymentalnego wyznaczenia — dodatkowych dwóch względnie nawet tylko jednej stałej sprężystej  $l$ . Z punktu widzenia konieczności doświadczalnego określenia tych stałych jest to niewątpliwą zaletą modelu; z punktu widzenia ogólności otrzymanych wyników oraz możliwości ich dopasowania do rzeczywistych własności materiałów nieprostych, stanowi to poważne ograniczenie. Tutaj pokażemy jednak, że przyjęcie nawet tak prostego modelu prowadzi do istotnych zmian w pewnych rozwiązaniach podstawowych teorii sprężystości.

Prosta analiza wzoru (2.6) prowadzi do znanego wniosku, że dodatkowa stała sprężystości  $l$  ma wymiar długości:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \text{Dim}[l^2 \kappa_{ij} \kappa_{ij}] &= \text{Dim}[\epsilon_{ij} \epsilon_{ij}] = 1, \\ \text{Dim}[l^2] &= m^2. \end{aligned}$$

Podkreślić tu należy, że istotą omawianego tu modelu, co stwierdził KUNIN [11], jest właśnie istnienie tej dodatkowej stałej sprężystej  $l$ , a nie asymetria tensora naprężenia. Już w pracy KOITERA [2] eliminuje się niesymetryczną część tensora naprężenia  $\sigma_{ij}$  wyrażając ją za pomocą drugiej grupy równań równowagi (2.4) przez

$$\sigma_{[mn]} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{imn} (\mu_{ji,j} + \rho Y_i)$$

oraz wstawiając to wyrażenie do pierwszej grupy równań. Prowadzi to do trzech równań równowagi

$$\sigma_{(ji),j} - \frac{1}{2} \varepsilon_{kji} [m_{ik,lj} + (\rho Y_k)_{,j}] + \rho X_i = 0,$$

gdzie  $m_{ij} = \mu_{ij} - 1/3 \mu_{kk} \delta_{ij}$  oznacza dewiatorową część tensora  $\mu_{ij}$ .

Równania te, wraz ze zredukowanymi warunkami brzegowymi

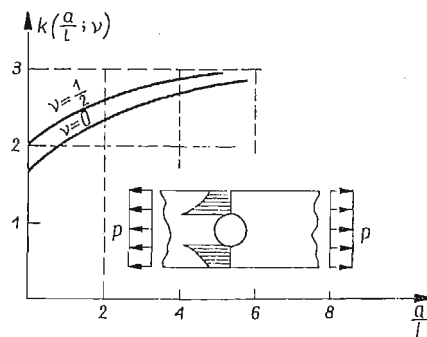
$$\bar{p}_i = \left[ \sigma_{(ji)} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jli} (m_{pl,p} - \overset{n}{m}_{,l} + \rho Y_l) \right] n_j,$$

$$\bar{q}_i = m_{ji} n_j - \overset{n}{m} n_i,$$

gdzie  $\overset{n}{m} = m_{ij} n_i n_j$  nie zawierają więc, jak widać, antysymetrycznej części tensora  $\sigma_{ij}$  nie tracąc przy tym nic na ogólności.

ROGULA [12] uogólniając rozważania KUNINA dowodzi (i to w przypadku skończonych odkształceń), że można jeszcze inaczej przeprowadzić symetryzację zagadnienia eliminując z rozważań nie tylko antysymetryczną część  $\sigma_{ij}$ , ale i naprężenia momentowe  $\mu_{ij}$  w całości. Posłużył się w tym celu pojęciem zredukowanego tensora naprężeń  $\bar{\sigma}_{ij}$ , różnego od  $\sigma_{(ij)}$ , ale także symetrycznego. Nie zmienia to jednak oczywiście faktu, że w rozwiązaniach pozostają dodatkowe stałe sprężystości  $l$  i  $\eta$  wpływające na istotną modyfikację szeregu podstawowych rozwiązań teorii sprężystości.

Klasyczny problem dwuwymiarowej teorii sprężystości dotyczy rozciągania nieograniczonej tarczy sprężystej zawierającej otwór kołowy (zagadnienie KIRSCHA, por. np. [4]). Na brzegu otworu występuje (rys. 4) w przypadku jednoosiowego rozciągania obciążeniem  $p$  koncentracja naprężeń scharakteryzowana stosunkiem  $k$  maksymalnego naprę-



Rys. 4

żenia  $\sigma_{\theta\theta}$  do naprężenia  $p$ . Stosunek ten dla otworu kołowego o dowolnym promieniu  $a$  wynosi  $k = 3$  i nie zależy od  $a$ . Niezależność  $k$  od  $a$  jest prostą konsekwencją faktu, że w ramach klasycznej teorii sprężystości rozwiązanie dowolnego problemu statycznego może mieć postać

$$\sigma_{ij}(x_k) = f(p; d^k; E, \nu),$$

gdzie  $p$  oznaczają parametry obciążenia,  $d^k$  — parametry charakteryzujące wymiary ciała,  $E, \nu$  — stałe sprężystości. W omawianym przypadku jedynym parametrem obciążenia jest naprężenie  $p$ , jedynym parametrem geometrycznym — promień  $a$  otworu. Współczynnik koncentracji  $k$  może więc mieć jedynie postać

$$k = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\max}}{p} = f(a; E, \nu)$$

i musi być bezwymiarowy. Ponieważ jednak moduł  $E$  ma wymiar  $\text{Nm}^{-2}$ , a  $\nu$  jest bezwymiarowe, zatem  $a$  (o wymiarze  $\text{m}$ ) nie może pojawić się w powyższym wzorze, gdyż żadna kombinacja  $a, E$  nie może być bezwymiarowa. Współczynnik  $k$  mógłby być jedynie funkcją liczby Poissona  $\nu$ .

Można natomiast przypuszczać, że — w pewnych przynajmniej przypadkach — rozmiar otworu nie jest obojętny dla współczynnika koncentracji. Na przykład w materiałach o strukturze gruboziarnistej efekt małych otworów może być odpowiednio mniejszy.

Model ciała scharakteryzowany dodatkową stałą sprężystości  $l$  o wymiarze  $[l] = \text{m}$  daje taką możliwość, gdyż współczynnik koncentracji mógłby być funkcją dodatkowego parametru bezwymiarowego  $l/a$ . Rozwiązanie MINDLINA [8] ma istotnie postać

$$k = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{\max}}{p} = 3 \frac{1 + \frac{1}{3}F}{1 + F},$$

gdzie  $F$  jest funkcją  $\nu$  oraz stosunku  $a/l$ ,

$$F = \frac{8(1-\nu)}{4 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{2a}{l} \frac{K_0(a/l)}{K_1(a/l)}},$$

$K_0, K_1$  są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela. Dla małych wartości  $a/l$  współczynnik koncentracji obniża się wydatnie, co widać z wykresu na rys. 4. W tym sensie stwierdzić można, że model ciała z dodatkową stałą  $l$  stwarza możliwość uczynienia kroku w kierunku uwzględnienia wpływu rozmiarów otworu na koncentrację naprężenia w materiałach rzeczywistych.

Rozwiązania niesymetrycznej teorii sprężystości dotyczące nieskończonych koncentracji naprężeń prowadzą także do wyników różnych od klasycznych. Naprężenia w półpłaszczyźnie sprężystej  $x_1 > 0$  obciążonej w początku układu współrzędnych siłą skupioną  $P$  normalną do brzegu wyrażają się znanym wzorem [4]

$$\sigma_{11} = \frac{2P}{\pi} \frac{x_1^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Rozwiązanie MUKI i STERNBERGA [3] ma postać nieporównanie bardziej skomplikowaną, jednak w otoczeniu punktu przyłożenia siły daje się ono wyrazić wzorem asymptotycznym

$$\sigma_{11} \approx \frac{2P}{\pi} \frac{x_1^3 + 2(1-\nu)x_1x_2^2}{(3-2\nu)(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Z porównania obu wzorów widać, że współczynniki intensywności nieskończonej koncentracji naprężeń są różne oraz, co więcej — rozwiązanie niesymetrycznej teorii sprężystości nie przechodzi w rozwiązanie klasyczne przy  $l \rightarrow 0$ . Ta ostatnia uwaga dotyczy jedynie wzoru na współczynnik intensywności naprężeń, a nie pełnego rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Fakt ten, będący często podstawą krytyki modelu ciała nieprostego, jest jednak znów prostą konsekwencją faktu, że stała  $l$  o wymiarze długości nie może pojawić się, w braku innych parametrów geometrycznych, w bezwymiarowym współczynniku intensywności. Współczynnik ten może być jedynie funkcją liczby Poissona.

Zagadnienie skręcania pręta pryzmatycznego przy uwzględnieniu wpływu naprężeń momentowych było rozważone w pracy [13]. Wzór na sztywność skręcania pręta pryzmatycznego o przekroju  $F$  (przy założeniu, że dodatkowa stała  $\eta = 0$ ) ma postać

$$J_s = G \iint_F \left[ x \frac{\partial(\varphi + l^2 \Delta \varphi)}{\partial y} - y \frac{\partial(\varphi + l^2 \Delta \varphi)}{\partial x} + x^2 + y^2 + 6l^2 \right] dx dy,$$

gdzie  $\varphi = \varphi(x, y)$  jest funkcją spaczenia spełniającą równanie

$$\Delta \varphi - l^2 \Delta \Delta \varphi = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

oraz odpowiedni układ warunków brzegowych. Przy  $l \rightarrow 0$  wzory powyższe przechodzą w znane wzory klasycznej teorii skręcania Saint-Venanta.

Uwzględnienie naprężeń momentowych prowadzi do zwiększenia sztywności skręcania prętów sprężystych. Widać to wyraźnie ze wzoru na sztywność  $J$  skręcania pręta o przekroju kołowym i średnicy  $d$ , wyprowadzonego przez KOITERA [2],

$$J = \frac{\pi}{32} G d^4 [1 + 48(l/d)^2(1 + \eta)],$$

względnie

$$J = J_0 \left[ 1 + 48 \left( \frac{l}{d} \right)^2 (1 + \eta) \right].$$

Tutaj  $J_0$  oznacza sztywność wyznaczoną zgodnie z teorią Saint-Venanta. Dla prętów o bardzo małej średnicy porównywalnej z  $l$ , wzrost sztywności staje się znaczny. Wynik ten, pod względem jakościowym, jest w zasadzie zgodny ze znanym stwierdzeniem o podwyższonej wytrzymałości cienkich drutów ze względu na zwiększony wpływ energii powierzchniowej.

Uwzględnienie dodatkowej stałej sprężystości w zagadnieniach propagacji fal sprężystych prowadzi do zjawiska dyspersji. Na przykład RYMARZ rozważył w pracy [14] problem propagacji fal powierzchniowych z uwzględnieniem naprężeń momentowych.

Prędkość propagacji  $v$  fal Rayleigha wyznacza się, jak wiadomo, z równania algebraicznego [15]

$$(2 - \eta^2)^4 = 16(1 - \gamma\eta^2)(1 - \eta^2),$$

gdzie  $\eta = v/c_T$  jest stosunkiem tej prędkości do prędkości propagacji fal poprzecznych, a  $\gamma = c_T/c_L = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$  – stosunkiem prędkości propagacji fal poprzecznych do podłużnych. Widać stąd, że  $v$  zależy wyłącznie od charakterystyki sprężystej ciała, a nie zależy od parametrów (długości) fali.

W przypadku rozważonym w pracy [14] odpowiednie równanie charakterystyczne ma postać

$$(2 - \eta^2)^4 [1 + 2\eta^2\xi^4 + \xi^2 + 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^2\sqrt{\xi^2 + 1 - \eta^2}] = 16(1 + 4\xi^2\eta^2)(1 - \gamma\eta^2)(1 + \xi^2 - \eta^2),$$

gdzie  $\xi = 2\pi l/\lambda$ , a  $\lambda$  jest długością fali. Prędkość propagacji fal powierzchniowych jest dla  $l > 0$  większa od prędkości fal Rayleigha i wzrasta przy malejącej długości fali. Drgania są więc dyspersyjne, czego można oczekiwać w przypadku ośrodka o strukturze komórkowej lub ziarnistej (dyspersja na granicach ziaren).

### 3. Wnioski

Przytoczone przykłady wskazują, że zastosowanie najprostszego modelu ciała sprężystego zdolnego do przenoszenia naprężeń momentowych modyfikuje szereg rozwiązań teorii sprężystości wprowadzając do nich zmiany o charakterze jakościowym. Kierunek tych zmian pozwala przypuszczać, że zbliżamy się w ten sposób do fizycznie umotywowanych rozwiązań dla ciał rzeczywistych. Brak co prawda dowodów na to, na ile omawiany model pozwala zbliżyć się do rzeczywistości. Jednak prostota opisu matematycznego stwarza tu możliwości względnie łatwej doświadczalnej weryfikacji wyników analizy teoretycznej. Z tego też względu wydaje się, że nie zaniedbując rozwijania teorii opartych na modelach bardziej złożonych, nie należy zapominać o możliwościach tkwiących w omówionym tu modelu ośrodka drugiego rzędu o związanych obrotach.

### Literatura cytowana w tekście

1. C. B. BANKS, M. SOKOŁOWSKI, *On Certain Two-Dimensional Applications of Couple-Stress Theory*, Int. J. Solids Structures, **4** (1968) 15–29.
2. W. T. KOITER, *Couple Stresses in the Theory of Elasticity*, I–II, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet., Seria B, **67**, 17–44.
3. R. MUKI, E. STERNBERG, *The Influence of Couple-Stresses on Singular Stress Concentrations in Elastic Solids*, Z.A.M.P., **16** (1965), 611–648.
4. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria Sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.
5. D. B. BOGY, E. STERNBERG, *The Effect of Couple-Stresses on the Corner Singularity due to an Asymmetric Shear Loading*, Int. J. Solids Structures, **4** (1968), 159–174.

6. E. COSSERAT, F. COSSERAT, *Théorie des corps déformables*, Hermann, Paryż 1909.
7. R. D. MINDLIN, *Microstructure in Linear Elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **16** (1964), 51–78.
8. R. D. MINDLIN, *Influence of Couple Stresses on Stress Concentrations*, Experimental Mechanics, **1** (1963)
9. S. KALISKI, *O pewnym modelu ośrodka ciągłego z istotnie niesymetrycznym tensorem napięć mechanicznych*, Biul. WAT, **11**, 4 (1962).
10. W. NOWACKI, *Teoria mikropolarnej sprężystości*, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1970.
11. И. А. КУНИН, *Модель упругой среды с пространственной дисперсией*, Прикл. Мат. Мех., **30** (1966), 542.
12. D. ROGULA, *Moment Stresses and the Symmetry of Stress Tensor in Bodies with no Local Structure* Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **18** (1970), 159.
13. M. SOKOŁOWSKI, *Couple-Stresses in Problems of Torsion of Prismatic Bars*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., **13** (1965), 419–424.
14. C. RYMARZ, *Fale powierzchniowe w ośrodku z naprężeniami momentowymi*. Mech. Teoret. Stos. **5**, (1967), 337–346.
15. W. M. EWING, W. S. JARDETZKY, F. PRESS, *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill, New York–Toronto–London 1957.

## Р з з ю м е

## О НЕКОТОРОЙ МОДЕЛИ ТЕЛА С МОМЕНТНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В статье рассмотрены некоторые вопросы, связанные с приложениями теории моментных напряжений к моделям сред второго порядка со связанными вращениями. На основе ряда известных решений из данной области отмечается, что рассматриваемая модель, несмотря на её простоту, приводит к существенным качественным изменениям во многих задачах теории упругости и даёт возможность ближе подойти в теоретическом анализе к описанию явлений, происходящих в действительности в материалах.

## S u m m a r y

## ON A MODEL OF BODY TRANSMITTING COUPLE-STRESSES

The subject of the paper are certain properties of the model of a body with constrained rotations applied in the couple-stress theory. On the basis of a number of solutions known from the literature the conclusion can be drawn that the model-in spite of its simplicity-introduces substantial modifications to many fundamental problems of the theory of elasticity and brings the corresponding solutions closer to the physical reality of phenomena occurring in real bodies.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 25 listopada 1970 r.*





## REOLOGIA MOLEKULARNA UKŁADÓW POLIMEROWYCH

ANDRZEJ ZIABICKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Znaczenie rozważań molekularnych w reologii polimerów wydaje się oczywiste i nie budzące wątpliwości. Teoria mechanicznych (jak również innych makroskopowych fizycznych) własności polimerów sformułowana w kategoriach struktury molekularnej prowadzi do głębszego zrozumienia mechanizmów odpowiedzialnych za obserwowane zjawiska, umożliwia przewidywanie zachowania się różnych materiałów w różnych warunkach oraz projektowanie nowych materiałów o zmienionych własnościach i strukturze. Teorie molekularne stanowią również najlepszą podstawę dla fizycznie sensownych założeń przy wyprowadzaniu równań konstytutywnych z rozważań mechaniki continuum.

Termin *teoria molekularna* jednakże jest daleki od jednoznaczności. W literaturze naukowej spotyka się wiele prac, które nazywane się, i co gorsza traktowane przez wielu czytelników jako «teorie molekularne», a równocześnie oparte na zupełnie dowolnych lub niedostatecznie uzasadnionych założeniach modelowych. Tak na przykład, w dążeniu do «teoretycznego odtworzenia» empirycznego prawa «potęgi 3, 4» (lepkość przy ścinaniu proporcjonalna do 3,4 potęgi ciężaru cząsteczkowego polimeru) BUECHE [1] zakładał istnienie «sztywnych rotacji» makrocząsteczek w układach ze splątaniem; w tym samym celu GRAESSLEY [2] postulował rodzaj «slalomu» makrocząsteczek przez pętle innych łańcuchów, a HAYASHI [3] i POKROWSKI [4] przyjmowali szczególne formy współczynników tarcia. Żadna z tych koncepcji nie była oparta na systematycznych rozważaniach molekularnych i nie miała wyraźnego sensu fizycznego.

Porównanie różnych teorii można przeprowadzać w oparciu o rozmaite kryteria. Przedyskutujmy trzy cechy: fundamentalność, ogólność i operatywność.

Pierwsze kryterium wymaga, aby teoria zawierała minimalną liczbę założeń i to założeń opartych na fundamentalnych prawach fizyki. Najlepszą podstawę teoretyczną dla reologii molekularnej stanowi mechanika statystyczna, chociaż, jak pokażemy niżej, w przypadku układów polimerowych konieczne jest wprowadzenie do niej dodatkowych uproszczeń i założeń.

*Ogólność* teorii molekularnych powinna dotyczyć przede wszystkim warunków brzegowych (geometria i czasowy przebieg deformacji, pola zewnętrzne, zmiany parametrów zewnętrznych itp.) tak, aby można było nimi objąć możliwie szeroki zakres zjawisk. Z drugiej strony teorie takie nie mogą być zbyt ogólne w odniesieniu do rozpatrywanych struktur.

Teorie molekularne są z reguły specyficzne i dotyczą wąskich klas modeli molekularnych opisujących różne struktury układów rzeczywistych.

*Operatywność* teorii (*tractability*) oznacza, że wyniki można przedstawić w prostej i przejrzystej formie pozwalającej na łatwą interpretację obserwowanych zjawisk doświadczalnych i ilościowy opis skomplikowanych procesów. Osobiście jestem zdania, że prawdziwie fundamentalna teoria molekularna nie może dać wyników wystarczająco operatywnych do zastosowania w standardowych metodach badawczych lub procesach technicznych. Oczywiście każda teoria musi być dostatecznie operatywna, aby można było z niej wyciągnąć wnioski mające sens fizyczny, lecz poprawa operatywności kosztem fundamentalności lub ogólności teorii wydaje się w tym przypadku niecelowa.

Celem niniejszego artykułu jest omówienie pewnych ogólnych zasad konstruowania molekularnych teorii układów polimerowych i określenie miejsca takich teorii w stosunku do mechaniki statystycznej i mechaniki continuum. Niektóre z poglądów występujących w tym artykule sformułowane były w bardziej prymitywnej i surowej formie na V Międzynarodowym Kongresie Reologicznym w Kyoto [5]. Artykuł niniejszy stanowi zmodyfikowaną wersję referatu wygłoszonego przez autora na Międzynarodowym Sympozjum na temat Makrocząsteczek IUPAC w Leiden, w sierpniu 1970 roku.

## 2. Mechanika statystyczna i uproszczone teorie molekularne

Mechanika statystyczna rozważająca układ  $N$  prostych jednostek kinematycznych (atomy lub proste cząsteczki) stanowi najbardziej fundamentalną podstawę wszelkich teorii molekularnych. Położenia  $\mathbf{q}$  i pędy  $\mathbf{p}$  wszystkich rozważanych jednostek tworzą wówczas  $6N$ -wymiarową przestrzeń zmiennych konfiguracyjnych. W przestrzeni tej zdefiniować można tzw.  $N$ -cząsteczkową funkcję rozkładu

$$(2.1) \quad dn = \text{const} e^{(N)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{q}_1 d\mathbf{p}_1, \dots, d\mathbf{q}_N d\mathbf{p}_N.$$

Rozważa się również zredukowane,  $n$ -cząsteczkowe funkcje rozkładu ( $n < N$ ) w przestrzeniach  $6n$ -wymiarowych

$$(2.2) \quad e^{(n)} = \int \dots \int e^{(N)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{q}_n, \mathbf{p}_n, \mathbf{q}_{n+1}, \mathbf{p}_{n+1}, \dots, \mathbf{q}_N, \mathbf{p}_N; t) d\mathbf{q}_{n+1} d\mathbf{p}_{n+1}, \dots, d\mathbf{q}_N, d\mathbf{p}_N.$$

Znajomość takich funkcji (wyznaczonych z odpowiednich równań kinetycznych) pozwala na uśrednienie lokalnych charakterystyk jednej cząsteczki lub zespołu cząsteczek i uzyskanie makroskopowych charakterystyk fizycznych całego układu. Tak np. dla każdej pary cząstek  $(i, j)$  oddziałującej z potencjałem  $U^{(ij)}$  i rozdzielonej wektorem  $\mathbf{R}^{(ij)}$  można określić siłę oddziaływania  $\mathbf{f}^{(ij)}$  i odpowiednią lokalną diadę naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}^{(ij)}$

$$(2.3) \quad \mathbf{f}^{(ij)} = \text{grad } U^{(ij)} [1 + \dots],$$

$$(2.4) \quad \boldsymbol{\sigma}^{(ij)} = c \mathbf{f}^{(ij)} \mathbf{R}^{(ij)T} \approx c \text{grad } U^{(ij)} \mathbf{R}^{(ij)T}.$$

Makroskopowy tensor naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}$  składa się z dwóch części

$$(2.5) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(K)} + \boldsymbol{\sigma}^{(U)}.$$

Część kinetyczna (decydująca o zachowaniu się gazów, mniej istotna w układach skondensowanych) zależy od rozkładu pędów poszczególnych cząstek

$$(2.6) \quad \sigma^{(K)} = (c/m)[\langle \mathbf{p}\mathbf{p}^T \rangle - \langle \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} \rangle^T].$$

Część zależna od oddziaływań, dla niezbyt gęstych układów i niezbyt wielkich potencjałów, określona jest przez oddziaływania cząstek parami

$$(2.7) \quad \sigma^{(U)} = c \langle \mathbf{f}\mathbf{R}^T \rangle \approx c \langle \text{grad} U \mathbf{R}^T \rangle;$$

$c$  oznacza liczbę cząstek w jednostce objętości układu,  $m$  — masę cząstki, a  $\langle \rangle$  uśrednienie po całym układzie. Uśrednienie takie jest równoważne całkowaniu z unormowaną funkcją rozkładu  $\varrho^{(N)}$  lub funkcjami zredukowanymi  $\varrho^{(n)}$ . Tak np., uśrednienie wyrazu kinetycznego (2.6) przeprowadzać można przez całkowanie z jednocząsteczkową funkcją rozkładu  $\varrho^{(1)}$ , a wyrazu oddziaływań (2.7) z funkcją dwucząsteczkową  $\varrho^{(2)}$  (funkcją rozkładu par).

Ujęcie tego rodzaju stosowane było z powodzeniem w molekularnej teorii gazów i cieczy jednoatomowych [6, 7]. W przypadku układów bardziej skomplikowanych napotyka się jednak na poważne trudności. DAHLER i SCRIVEN [8] dyskutowali przypadek cząsteczek wieloatomowych traktując je jako pojedyncze jednostki kinetyczne oddziałujące z niecentralnym potencjałem, co prowadziło do ogólnie niesymetrycznego tensora naprężeń. Sens fizyczny takiego potencjału nie jest jednak jasny, tym bardziej, że autorzy nie precyzowali bliżej jego formy.

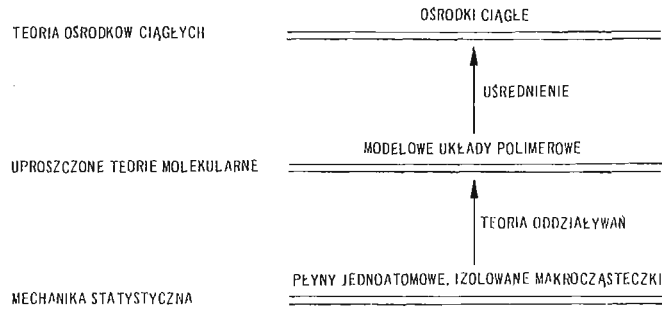
Jeszcze poważniejsze trudności pojawiają się, gdy w grę wchodzi układy makrocząsteczkowe. Długie cząsteczki łańcuchowe o wielu tysiącach ogniw i odpowiednio wielkiej liczbie wewnętrznych stopni swobody nie mogą być traktowane jako proste jednostki kinetyczne z pojedynczym potencjałem oddziaływań. Gdybyśmy, z drugiej strony, wybrali jako jednostki kinetyczne poszczególne atomy tworzące makrocząsteczki (i cząsteczki rozpuszczalnika, jeśli taki występuje w układzie), to spotkalibyśmy się z pewną liczbą nierównoważnych oddziałujących par atomów, jak na przykład dwa atomy sąsiadujące w jednej makrocząsteczce (połączone wiązaniem chemicznym), dwa odległe atomy w tym samym łańcuchu, atomy należące do dwóch różnych makrocząsteczek itp. Tak złożony charakter oddziaływań w układzie wyklucza możliwość zbudowania teorii molekularnej na podstawie «czystej», niezmięnionej mechaniki statystycznej, bez wprowadzenia dodatkowych upraszczających koncepcji.

Teorie zawierające dodatkowe założenia modelowe i uproszczenia będą z konieczności mniej fundamentalne niż teorie oparte na «czystej» mechanice statystycznej i będą zajmowały pozycję pośrednią pomiędzy mechaniką statystyczną i fenomenologiczną mechaniką continuum (rys. 1). Jeżeli taką pośrednią teorię mamy traktować jako «molekularną», uproszczony model strukturalny musi być fizycznie uzasadniony, tzn. zgodny z faktyczną strukturą odpowiadającego mu układu rzeczywistego, a uproszczone oddziaływania muszą posiadać jasny sens fizyczny, w miarę możliwości wyprowadzony z bardziej fundamentalnych rozważań mechaniki statystycznej. Niestety wiele opublikowanych teorii układów polimerowych nie spełnia tych warunków zawierając dowolne i niesprawdzalne założenia o strukturze układu i występujących w nim oddziaływaniach.

W uproszczonych teoriach molekularnych wybiera się pewne jednostki strukturalne, specyficzne dla danego układu, które zastępują atomy w ujęciu mechaniki statystycznej.

Rolę takich jednostek mogą odgrywać poszczególne makrocząsteczki, segmenty łańcuchów, agregaty molekularne itp. Konfigurację każdej takiej jednostki opisuje się za pomocą  $N$  zmiennych  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ , które zastępują zmienne  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{p}$  w mechanice statystycznej. Zależna od czasu funkcja rozkładu dla pojedynczej jednostki strukturalnej określona jest przez równanie ciągłości w  $N$ -wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej

$$(2.8) \quad \partial\Psi/\partial t + (\partial^T/\partial\mathbf{u})(\Psi\dot{\mathbf{u}}) = \dot{\Psi}_{\text{kin}},$$



Rys. 1

Można zauważyć, że w równaniu (2.8) pojawia się obok zwykłego wyrazu dywergencji i zmian czasowych — czynnik kinetyczny  $\dot{\Psi}_{\text{kin}}$  równy szybkości powstawania nowych jednostek strukturalnych w układzie. Podstawowe równania teorii obejmują również równania kinematyczne

$$(2.9) \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \Psi, t)$$

i równanie opisujące kinetykę powstawania i rozpadu jednostek strukturalnych

$$(2.10) \quad \dot{\Psi}_{\text{kin}} = \dot{\Psi}_{\text{kin}}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \Psi).$$

Równania te muszą być sformułowane w oparciu o niezależne rozważania kinematyczne i kinetyczne. Uwzględnienie oddziaływań pomiędzy określonymi «centrami oddziaływań» jednostek strukturalnych prowadzi do siły oddziaływań

$$(2.11) \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \Psi),$$

która po pomnożeniu przez odpowiedni wektor  $\mathbf{R}$  i stężenie  $c$  daje lokalną diadę naprężeń

$$(2.12) \quad \alpha_{\text{loc}} = c\mathbf{f}\mathbf{R}^T.$$

Makroskopowy tensor naprężeń (podobnie jak każdą inną wielkość makroskopową  $\alpha$  zależną do konfiguracji układu) otrzymuje się przez uśrednienie charakterystyk lokalnych zgodnie z funkcją rozkładu  $\Psi$

$$(2.13) \quad \alpha_{\text{macro}} = \langle \alpha_{\text{loc}} \rangle = \int \dots \int \alpha_{\text{loc}} \Psi(\mathbf{u}, t) d^N \mathbf{u}.$$

Równanie ciągłości, równania kinematyczne, kinetyczne i dynamiczne (2.11) tworzą podstawowy układ równań teorii molekularnej i muszą być rozwiązane wraz z właściwymi warunkami początkowymi i brzegowymi. Omówiony wyżej schemat pozwala na uwzględnienie rozmaitych warunków zewnętrznych (wchodzących do równań jako para-

metry zależne od czasu) łącznie z odkształceniami niejednorodnymi, niestacjonarnymi itp. [5]. W ostatnim rozdziale tej pracy sformułujemy i przedyskutujemy podstawowe równania teorii rozcieńczonych roztworów polimerów i układów sieciowych.

### 3. Uproszczony opis niektórych oddziaływań w układach makrocząsteczkowych

Aby zbudować molekularną teorię układów wielkocząsteczkowych należy uprościć złożone oddziaływania molekularne tak, aby uzyskać wystarczająco proste zależności do wstawienia do równań dynamicznych (2.11) i kinematycznych. Szczegółowy przegląd możliwych oddziaływań wykraczałby poza zakres niniejszego artykułu; ograniczymy się tu tylko do kilku przykładów, które będą zastosowane następnie przy budowie teorii rozcieńczonych roztworów i sieci.

**3.1. Oddziaływania wewnątrzcząsteczkowe w łańcuchach polimerów.** Rozważania statystyczne pozwalają na wprowadzenie dokładnych rozkładów konformacji dla liniowych makrocząsteczek o określonych długościach wiązań  $z$ , kątach wartościowości  $\alpha$  i potencjałach rotacji  $U(\varphi)$ . Odpowiednie metody obliczeniowe i przegląd wyników znaleźć można w monografiach [9–11]. Analizowano również zagadnienia konformacji makrocząsteczek obdarzonych ładunkami elektrycznymi (por. [12] i literaturę tam cytowaną).

W celu zbudowania teorii układów polimerowych, a nie izolowanych makrocząsteczek, dokładne lecz bardziej skomplikowane rozkłady konformacji należy zastąpić uproszczonymi modelami. Jednym z najbardziej popularnych modeli tego rodzaju jest tzw. «łańcuch swobodnie połączonych segmentów statystycznych» [9–11].

Rzeczywistą makrocząsteczkę łańcuchową składającą się z  $M$  ogniw o długości  $z$ , o stałych kątach wartościowości  $\alpha$  i potencjale rotacji dokoła wiązania w łańcuchu  $U(\varphi)$ , rys. 2, zastępuje się układem swobodnie połączonych  $M'$  segmentów statystycznych o długości  $a$  ( $a > z$ ;  $M' < M$ ) mogących przybierać z równym prawdopodobieństwem dowolne orientacje w przestrzeni (rys. 3). Do takiego układu stosuje się teorię przypadkowego błędzenia, która przewiduje średni kwadrat odległości między końcami łańcucha

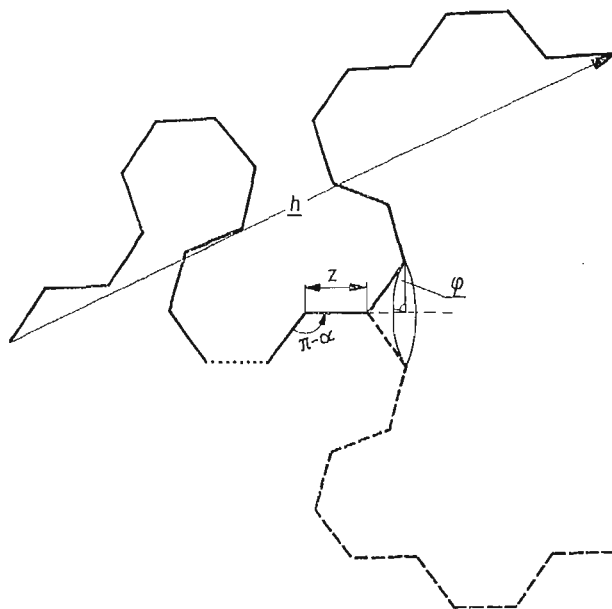
$$(3.1a) \quad \langle h^2 \rangle = M' a^2.$$

Odpowiednią wartość  $\langle h^2 \rangle$  dla rzeczywistej makrocząsteczki można wyliczyć z dokładnego modelu molekularnego uwzględniającego ograniczenia rotacji i kąty wartościowości. Obliczenia takie stanowią przedmiot statystycznej teorii polimerów [9–11] i przeprowadzone zostały dla znacznej liczby różnych makrocząsteczek. Tak np. dla dostatecznie długich łańcuchów o symetrycznych i niezbyt wielkich barierach potencjału rotacji  $U(\varphi)$  otrzymuje się tzw. wzór TAYLORA [13]

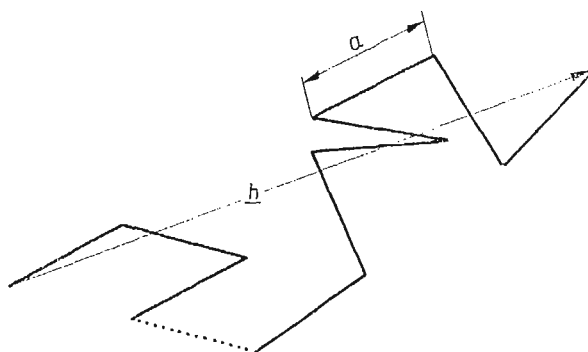
$$(3.1b) \quad \langle h^2 \rangle = Mz^2 \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \frac{1 + \langle \cos \varphi \rangle}{1 - \langle \cos \varphi \rangle},$$

gdzie średni cosinus kąta rotacji  $\varphi$  związany jest z funkcją potencjału rotacji  $U(\varphi)$  zależnością

$$(3.2) \quad \langle \cos \varphi \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \cos \varphi \exp[-U(\varphi)/kT] d\varphi}{\int_0^{2\pi} \exp[-U(\varphi)/kT] d\varphi}.$$



Rys. 2. Makrocząsteczka łańcuchowa  
 $z$  — długość wiązania w łańcuchu,  $\alpha$  — kąt wartościowości,  $\varphi$  — kąt rotacji



Rys. 3. Model swobodnie połączonych segmentów statystycznych

Podobnie można obliczyć tzw. «długość konturową» (lub hydrodynamiczną) makrocząsteczki  $l$ , jako sumę długości wszystkich ogniw (dla rzeczywistej cząsteczki)

$$(3.3a) \quad l = Mz$$

lub jako sumę długości segmentów statystycznych (model swobodnie połączonych segmentów)

$$(3.3b) \quad l = M'a.$$

Przyrównując odpowiednio  $\langle h^2 \rangle$  i  $l$  dla rzeczywistej makrocząsteczki i równoważnego jej modelu, otrzymuje się parametry  $M'$  i  $a$  w postaci:

$$(3.4) \quad M' = M \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \frac{1 - \langle \cos \varphi \rangle}{1 + \langle \cos \varphi \rangle},$$

$$(3.5) \quad a = z \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \frac{1 + \langle \cos \varphi \rangle}{\langle 1 - \cos \varphi \rangle}.$$

Dalsze rozważania statystyczne prowadzi się już w oparciu o model przedstawiony na rys. 3. Istotną charakterystyką statystyczną takiego modelu jest rozkład gęstości prawdopodobieństwa dla wektora  $\mathbf{h}$  łączącego końce łańcucha. Dokładną funkcję rozkładu dla łańcucha o dowolnej liczbie segmentów  $M'$  można przedstawić w postaci [11]

$$(3.6) \quad \Psi_0(\mathbf{h}) = (2\pi h)^{-1} \int_0^\infty \sin(hs) [\sin(as)/as]^{M'} s ds.$$

Dla dostatecznie dużej liczby ogniw  $M' \gg 1$  (a z takimi układami mamy najczęściej do czynienia w przypadku polimerów) można uzyskać przybliżony rozkład [9, 11, 14]

$$(3.6a) \quad \Psi_0(\mathbf{h}) \approx C \exp\left[-(l/a) \int_0^{h/l} L^*(x) dx\right],$$

gdzie  $L^*(x) = 3x + \frac{9}{5}x^3 + \dots$  oznacza odwrotną funkcję Langevina, a  $C$  jest stałą normalizacyjną.

Funkcja rozkładu (3.6a) opisuje w stosunkowo prosty sposób zachowanie się giętkiej łańcuchowej makrocząsteczki i uwzględnia (za pośrednictwem parametrów  $l$  i  $a$ ) wpływ rzeczywistych stałych molekularnych, takich jak długość wiązań  $z$ , kąty wartościowości  $\alpha$  i ograniczenia rotacji wiązań  $U(\varphi)$ .

Wewnętrzna funkcja rozkładu  $\Psi_0$  charakteryzuje równocześnie stan termodynamiczny makrocząsteczki w równowadze przy różnej odległości jej końców. Naturalną konsekwencją tego jest więc istnienie pewnej *równowagowej siły sprężystej*, która pojawia się w łańcuchu odkształconym

$$(3.7) \quad \mathbf{f}_{el} = -kT \text{grad}(\ln \Psi_0) = \frac{kTL^*(h/l)}{ah} \mathbf{h} = \frac{3kT}{la} \left(1 + \frac{3}{5} \frac{h^2}{l^2} + \dots\right) \mathbf{h}.$$

Powyższy model nie przewiduje jednak siły sprężystej związanej z różnicami energii pomiędzy różnymi izomerami rotacyjnymi.

Istnienie pewnych barier energetycznych, które należy pokonać w procesie deformacji łańcucha (tzn.  $dU/d\varphi \neq 0$ ) powoduje również istnienie pewnej siły nierównowagowej  $\mathbf{f}_v$  gdy łańcuch jest poddany pewnej szybkości deformacji ( $dh/dt \neq 0$ )

$$(3.8) \quad \mathbf{f}_v = \text{const} [d|\mathbf{h}|/dt + a_1(d|\mathbf{h}|/dt)^2 + \dots] \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}.$$

Zjawisko to zostało opisane przez W. KUHNĄ i H. KUHNĄ [15], którzy nazwali je *lepkością wewnętrzną łańcucha*. Biorąc pod uwagę, że stała w równaniu (3.8) jest odwrotnie proporcjonalna do liczby segmentów łańcucha zdolnych do rotacji (a więc odwrotnie proporcjonalna do długości konturowej  $l$ ) ograniczając się do rozważania małych szybkości

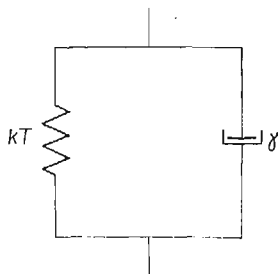
deformacji [liniowy wyraz w równaniu (3.8)] i przedstawiając szybkość deformacji w postaci wektorowej otrzymamy z równania (3.8)

$$(3.8a) \quad \mathbf{f}_v \approx \gamma \frac{\mathbf{h}^T \dot{\mathbf{h}}}{lh^2} \mathbf{h}.$$

Stała  $\gamma$  w (3.8a) określona jest jedynie przez chemiczną strukturę makrocząsteczki i jest praktycznie niezależna od ciężaru cząsteczkowego. W zasadzie  $\gamma$  można wyznaczyć (lub przynajmniej oszacować porównawczo dla szeregu polimerów) stosując metody dwój-łomności strumieniowej [16]. Dotychczas brak dokładnej teorii wiążącej fenomenologiczne pojęcie lepkości wewnętrznej z pierwotnymi charakterystykami molekularnymi. W przybli-żeniu teorii absolutnych szybkości reakcji [17] można spodziewać się, że współczynnik  $\gamma$  będzie związany z różnicą maksimum i minimum energii potencjalnej rotacji  $\Delta U = U_{\max} - U_{\min}$ , spełniającą rolę «energii aktywacji» dla procesów molekularnych (obroty segmentów dokoła wiązań) i deformacji całej cząsteczki

$$(3.9) \quad \gamma \approx \text{const} \exp[-\Delta U/kT].$$

Tak więc, zachowanie się mechaniczne giętkiej makrocząsteczki łańcuchowej z «lepkością wewnętrzną» (tzn. ograniczeniami rotacji) można traktować jak zachowanie się (niekoniecznie liniowego) elementu lepkosprężystego (rys. 4). Mechanizm sprężystości



Rys. 4. Model mechaniczny łańcuchowej makrocząsteczki z «lepkością wewnętrzną»

związany jest z entropią konfiguracyjną łańcucha zbudowanego z dużej liczby segmentów i zmianami tej entropii przy deformacji (3.6a), (3.7). Załumienie odpowiedzialne są procesy kinetyczne związane z przeskakiwaniem barier potencjalnych rotacji łańcucha («lepkość wewnętrzna», (por. (3.8)). Należy jednak podkreślić, że model mechaniczny na rys. 4 nie stanowi z a ł o ż e n i a w teorii molekularnej, lecz w y n i k a z bardziej fundamentalnych rozważań molekularnych omówionych wyżej. Należy to podkreślić tym bardziej, że istnieją również fenomenologiczne teorie lepkosprężystości polimerów oparte na postu-lowanym połączeniu określonej liczby elementów modelowych (sprężyn i tłumików). Teorie takie nie mają oczywiście charakteru teorii molekularnych jakkolwiek niektórzy autorzy [55] przypisują poszczególnym elementom modelu w sposób mniej lub bardziej dowolny pewien «sens molekularny».

**3.2. Oddziaływania międzycząsteczkowe w układach polimerowych.** W układach zawierających za-równo cząsteczki polimeru, jak i substancje niskocząsteczkowe, rozpuszczalnik mający cząsteczki o wiele rzędów wielkości mniejsze od makrocząsteczek polimeru można trak-



tować jako lepkie continuum. W takim przybliżeniu dyskretne w istocie oddziaływania polimer-rozpuszczalnik można opisać kontynualizowanym pojęciem *tarcia polimer-rozpuszczalnik*. Sumaryczna siła tarcia makrocząsteczki o długości konturowej  $l$  wynosi wówczas

$$(3.10) \quad \mathbf{f}_{ps} = \zeta l \Delta \mathbf{v} [1 + \alpha_1 |\Delta \mathbf{v}| + \alpha_2 |\Delta \mathbf{v}|^2 + \dots],$$

gdzie  $\Delta \mathbf{v}$  oznacza rzeczywistą różnicę prędkości pomiędzy makrocząsteczką i rozpuszczalnikiem, a  $\zeta$  jest molekularnym współczynnikiem tarcia na jednostkę długości konturowej makrocząsteczki otoczonej rozpuszczalnikiem.  $\zeta$  zależy od struktury molekularnej polimeru i rozpuszczalnika i od temperatury. Pojęcie tarcia polimer-rozpuszczalnik zostało wprowadzone przez W. KUHNĄ i H. KUHNĄ [18] i od tego czasu było szeroko stosowane w teorii rozcieńczonych roztworów polimerów. W zasadzie współczynniki  $\zeta$  można wyznaczyć eksperymentalnie dla dowolnej kombinacji polimeru i rozpuszczalnika z pomiarów lepkości lub stałych dyfuzji.

Zgodnie z założeniem ciągłości rozpuszczalnika, *oddziaływania pomiędzy jego cząsteczkami* traktuje się zazwyczaj jak lepkość zwykłej cieczy newtonowskiej.

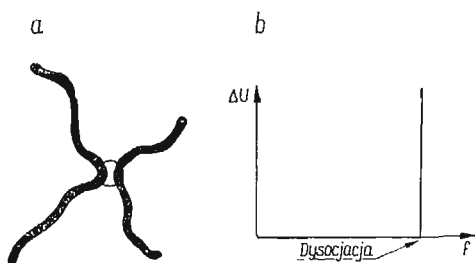
*Oddziaływania odległych części tej samej makrocząsteczki* w rozcieńczonym roztworze można traktować jako pewne zaburzenia pola prędkości w rozpuszczalniku. Zgodnie ze znaną teorią Oseena [19] zaburzenie prędkości  $\Delta \mathbf{v}_p$  w jakimś punkcie  $p$  określone jest przez siły tarcia we wszystkich pozostałych punktach  $q$  (centrach tarcia) w układzie. Taki typ oddziaływań międzymolekularnych zwany «oddziaływaniami hydrodynamicznymi» dyskutowano szeroko w teoriach rozcieńczonych roztworów polimerów; w układach stężonych jednak wydaje się, że efekt ten można pominąć w porównaniu z *tarciami typu polimer-polimer*. Dla dwu cząsteczek polimeru (lub różnych części tej samej makrocząsteczki) spotykających się w punkcie kontaktu można napisać przez analogię do wzoru (3.10)

$$(3.11) \quad \mathbf{f}_{pp} = \xi \Delta \mathbf{v} [1 + \beta_1 |\Delta \mathbf{v}| + \beta_2 |\Delta \mathbf{v}|^2 + \dots],$$

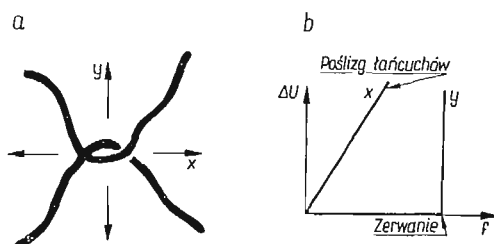
gdzie  $\xi$  — molekularny współczynnik tarcia na jeden kontakt polimer-polimer. Taki mechanizm odpowiedzialny jest za zachowanie się bardzo stężonych roztworów sztywnych asymetrycznych cząstek i wnosi przypuszczalnie istotny wkład w zachowanie się wszystkich stężonych układów polimerowych.

Zupełnie inny rodzaj oddziaływań polimer-polimer przejawia się w postaci *zlokalizowanego węzła energetycznego*, tzn. wiązania chemicznego lub quasi-chemicznego (rys. 5). Jeżeli pominiemy małe wahania w obrębie takiego wiązania, węzeł energetyczny można traktować jako ściśle zlokalizowany w określonym położeniu względem obu uczestniczących w nim makrocząsteczek, których względna prędkość  $\Delta \mathbf{v}$  jest zawsze równa zeru (rys. 5b). Przyjmuje się, że węzeł taki ma skończoną energię dysocjacji; po osiągnięciu krytycznego poziomu energii, na przykład przez dostarczenie z zewnątrz energii termicznej, mechanicznej itp., węzeł ulega natychmiastowemu zerwaniu i  $\Delta \mathbf{v} \rightarrow \infty$ .

Inne zachowanie się wykazuje układ przenikających się pętli, które tworzą tzw. *węzeł splątania* (rys. 6). Taki rodzaj oddziaływań, specyficzny dla długich, giętkich łańcuchów prowadzi do wiązań, które nie są zlokalizowane lecz wykazują zdolność do ślizgania się (z pewnym tarcielem kontaktowym) wzdłuż łańcuchów. Dynamiczne zachowanie się węzłów splątania jest anizotropowe: w kierunku odpowiadającym zacieśnieniu się pętli ( $\mathbf{y}$ ) węzeł



Rys. 5. Węzeł zlokalizowany (energetyczny):  
a) schemat, b) szybkość delokalizacji w funkcji przyłożonej energii (lub naprężenia)



Rys. 6. Węzeł niezlokalizowany (splątanie):  
a) schemat, b) szybkość delokalizacji w funkcji przyłożonego naprężenia

jest praktycznie zlokalizowany i zachowuje się jak węzeł energetyczny z energią dysocjacji określoną przez zerwanie łańcuchów. Wzdłuż łańcucha (kierunek  $x$ ) obserwuje się ślizganie się łańcuchów z tarcieniem kontaktowym [por. (3.11)]. Sytuację taką przedstawiono schematycznie na rys. 6b.

#### 4. Przykłady zastosowań do różnych układów polimerowych

Przedstawiony powyżej schemat postępowania pozwala na skonstruowanie teorii dla różnych układów polimerowych. Oczywiście nie jest to jedyny możliwy schemat postępowania w tej dziedzinie, lecz wydaje się, że daje on racjonalną i dogodną podstawę dla uproszczonych rozważań molekularnych.

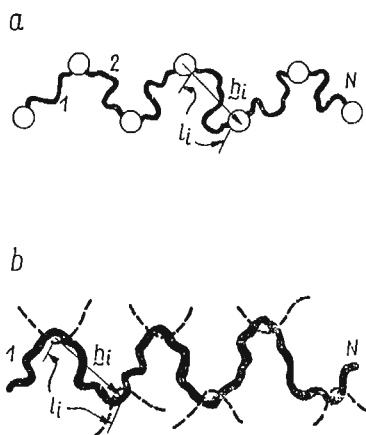
Liczba układów strukturalnych badanych w oparciu o powyższe lub podobne schematy postępowania jest niewielka. Można tu wymienić *rozcieńczone zawiesziny* cząstek sztywnych [20–28] i lepkosprężystych [56] oraz *rozcieńczone roztwory* polimerów o różnych typach oddziaływań wewnątrzcząsteczkowych z pominięciem oddziaływań międzycząsteczkowych [29–40]. Drugim skrajnym przypadkiem jest *trwała sieć* makromolekularna, którą analizowało wielu autorów poczynając od lat trzydziestych (por. [41] i literaturę tam cytowaną). *Sieci typu «koczugi»* (tzn. układy utworzone z zamkniętych, przenikających się wzajemnie pętli) dyskutowali ostatnio FRISCH i PRAGER [42] oraz EDWARDS [43]. Oba te modele stwarzają podstawę do molekularnej interpretacji sprężystości kauczuków. Teoria *czasowych sieci* ze zlokalizowanymi wiązaniami opracowana przez GREENA i TOBOLSKY'EGO [44], SCOTTA i STEINA [45], YAMAMOTO [46] i LODGE'A [47] wydaje się właściwa dla układów silnie polarnych (polarne żele, wulkanizowane kauczuki z rozpadającymi się łańcuchami, itp.).

Brak dotychczas teorii stężonych roztworów i stopionych polimerów, w których splątania i ślizganie się łańcuchów odgrywają zasadniczą rolę. Prac opublikowanych przez BUECHE [1], GRAESSLEYA [2], HAYASHI [3], HOFFMANN [48] nie można tu brać pod uwagę, ponieważ zawierają one dowolne założenia [1, 2] lub błędy formalne [3, 58]. Rozszerzenie teorii rozcieńczonych roztworów ROUSE'A [33] na stężone układy ze splątaniem łańcuchów [49–51] jest fizycznie nieprawidłowe. Krytykę tego ujęcia podamy w następnym rozdziale. Ostatnio systematyczne badania nad teorią *sieci splątań* podjęto w Pracowni Fizyki Polimerów IPPT PAN. Niektóre wyniki tej teorii zostały już opublikowane [52–54]

i zostaną przedyskutowane w następnym rozdziale pracy; dalsze badania nad teorią są obecnie w toku.

**4.1. Teoria rozcieńczonych roztworów i sieci splątań.** Postępując zgodnie ze schematem narysowanym w poprzednich rozdziałach dokonamy obecnie porównawczej analizy dwu teorii molekularnych: *rozcieńczonych roztworów* zawierających giętkie makrocząsteczki w lepkim rozpuszczalniku, oraz *sieci splątań* tworzących się z podobnych makrocząsteczek w układzie stężonym. Porównanie tych dwóch układów wydaje się szczególnie interesujące. Teoria rozcieńczonych roztworów jest dobrze rozwinięta i powszechnie uznana, a więc stanowi dobry przykład do ilustracji ogólniejszych rozważań. Pomimo pewnych formalnych podobieństw pomiędzy modelami molekularnymi rozważanymi w obu teoriach (por. rys. 7) makrocząsteczki w układach sieciowych zachowują się zupełnie inaczej niż w roztworach rozcieńczonych; niemniej w literaturze ukazało się ostatnio kilka prac, w których teorię rozcieńczonych roztworów po wprowadzeniu poprawek na «ograniczoną ruchliwość» lub «efektywny współczynnik tarcia» stosowano do opisu układów sieciowych [49–51].

Pierwsza różnica pomiędzy obydwooma układami molekularnymi polega na sposobie, w jaki siły zewnętrzne przyłożone do brzegów próbki przekazywane są poszczególnym makrocząsteczkom. W układach o rozdzielonych makrocząsteczkach (rozcieńczone roztwory) siły przekazywane są poprzez lepkie continuum (rozpuszczalnik) jako siły tarcia.



Rys. 7. Modele molekularne łańcuchowej makrocząsteczki: a) w rozcieńczonych roztworach; N sub-łańcuchów z centrami tarcia, b) w roztworach stężonych lub w stopach; N łańcuchów sieci z węzłami splątań

W koherentnej sieci utworzonej z makrocząsteczek połączonych węzłami, siła przekazywana jest poprzez węzły, a siły tarcia, jeśli występują, wnoszą jedynie pewien wkład do dynamicznej reakcji poszczególnych makrocząsteczek lub ich części.

W odróżnieniu od rozcieńczonych roztworów, gdzie wszystkie *sub-łańcuchy* (patrz rys. 7a) mają *ex definitione* ten sam ciężar cząsteczkowy (*i* długości konturowe  $l$ ), *łańcuchy sieci*, tzn. odcinki makrocząsteczek zawarte pomiędzy sąsiednimi węzłami mają różne i zmieniające się w czasie długości  $l$ . Dlatego też molekularna teoria takich układów powinna brać pod uwagę rozkład długości konturowych  $l$  jako niezależnych zmiennych

i uwzględniać szybkości ślizgania się  $\dot{l}$  jako zmienne kinematyczne oprócz zwykle rozważanych wektorów łączących sąsiednie węzły  $\mathbf{h}$  i prędkości węzłów  $\dot{\mathbf{h}}$ .

Wreszcie, «czasowe» układy sieciowe dopuszczają istnienie procesów kinetycznych rozpadu i odtwarzania się węzłów, co nie ma miejsca w rozcieńczonych roztworach z rozdzielonymi makrocząsteczkami.

Dokonajmy teraz systematycznego przeglądu obu teorii. Będziemy rozważać rozkłady konfiguracji pierwotnej makrocząsteczki składającej się z  $N$  sub-łańcuchów (rozcieńczony roztwór, rys. 7a) lub  $N$  łańcuchów sieciowych (sieć splątań, rys. 7b). W ten sposób zespół niezależnych zmiennych konfiguracyjnych dla rozcieńczonego roztworu obejmuje  $3N$  składowych wektorów  $\mathbf{h}_i$  poszczególnych sub-łańcuchów, podczas gdy długości konturowe wszystkich elementów są równe  $l_i = L/N$  ( $L =$  długość konturowa całej makrocząsteczki). W układzie sieciowym mamy  $4N-1$  niezależnych zmiennych:  $3N$  składowych wektorów  $\mathbf{h}_i$  i  $N$  długości konturowych,  $l_i$  wraz z warunkiem normalizacji

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^N l_i = L.$$

Funkcja rozkładu dla rozcieńczonych roztworów zdefiniowana jest jako gęstość prawdopodobieństwa w  $3N$ -wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej

$$(4.2) \quad \Psi(\mathbf{h}, t) d^{3N}\mathbf{h} = dn/n_0,$$

podczas gdy dla sieci splątań

$$(4.3) \quad \Psi^*(\mathbf{h}, \mathbf{l}, t) d^{3N}\mathbf{h} d^N\mathbf{l} = dn^*/n_0^*,$$

przy czym gwiazdka oznacza charakterystyki odnoszące się do układu sieciowego, a  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{l}$  są wektorami

$$\mathbf{h} = (x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, z_N),$$

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_N).$$

Naprężenie w  $i$ -tym sub-łańcuchu makrocząsteczki w rozcieńczonym roztworze  $\mathbf{f}_i$  obejmuje składniki sprężystości i lepkości wewnętrznej

$$(4.4) \quad \mathbf{f}_i = kT \left[ \frac{3}{la} \left( 1 + \frac{3}{5} \frac{h_i^2}{l^2} + \dots \right) \mathbf{h}_i + \frac{\partial \ln \Psi}{\partial \mathbf{h}_i} \right] + \gamma \frac{\mathbf{h}_i^T \dot{\mathbf{h}}_i}{lh_i^2} \mathbf{h}_i.$$

Ze względu na prostotę, oddziaływania hydrodynamiczne zwykle uwzględniane w teorii rozcieńczonych roztworów pominiemy w niniejszej dyskusji.

Podobne naprężenie w  $i$ -tym łańcuchu sieci splątań obejmuje oprócz wyrazów występujących w równaniu (4.4) również efekty tarcia przy ślizganiu się łańcuchów:

$$(4.5) \quad \mathbf{f}_i^* = \mathbf{f}_i - \frac{1}{2} K(\zeta, \xi) \mathbf{h}_i \mathbf{B}_{ij} \dot{l}_j + \xi \mathbf{C}_{ij} \dot{l}_j,$$

gdzie  $K$  oznacza całkowity współczynnik tarcia kontaktowego (polimer-rozpuszczalnik i polimer-polimer), a macierze związane są z tarciem kontaktowym samego łańcucha ( $\mathbf{B}$ ) i tarciem węzła splątań ( $\mathbf{C}$ ) [53].

Równania kinematyczne dla rozcieńczonych roztworów otrzymuje się bezpośrednio z bilansu sił dla  $i$ -tego centrum tarcia (perełki) łączącego sub-łańcuchy  $i$  i  $i+1$ . W przyjętej notacji warunek bilansu sił przybiera postać (przyspieszenia pominięto)

$$(4.6) \quad \mathbf{f}_{\text{ext}}^i = -\mathbf{f}_{f_r}^i = \mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_i$$

lub

$$(4.6a) \quad \mathbf{f}_{f_r}^i + \mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_i = 0,$$

gdzie  $\mathbf{f}_{\text{ext}}^i$  oznacza siłę zewnętrzną, a  $\mathbf{f}_{f_r}^i$  — siłę tarcia działającą na  $i$ -te centrum tarcia [por. (3.10)].  $\mathbf{f}_i$ ,  $\mathbf{f}_{i+1}$  oznaczają naprężenia łańcuchów  $i$  oraz  $i+1$  określone równaniem (4.4). Stosując liniowe (stokesowskie) przybliżenie na siłę tarcia i wyrażając efektywną różnicę prędkości dla  $i$ -tego centrum tarcia poprzez prędkości  $\mathbf{h}_i$  otrzymuje się dobrze znany wynik

$$(4.7) \quad \mathbf{h}_i = \dot{\epsilon}_0 \mathbf{h}_i - (\zeta l)^{-1} A_{ij} \mathbf{f}_j$$

i z definicji modelu

$$(4.8) \quad \dot{l}_i \equiv 0.$$

$\dot{\epsilon}_0$  jest makroskopowym względnym gradientem prędkości, a  $\mathbf{A}$  oznacza macierz

$$(4.9) \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \dots & \dots & \\ 0 & & -1 & 2 & - \\ & & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dla układu sieciowego, w którym siły zewnętrzne przekazywane są nie przez rozpuszczalnik, lecz przez same łańcuchy sieci, równanie bilansu sił dla  $i$ -tego węzła ma postać [53]

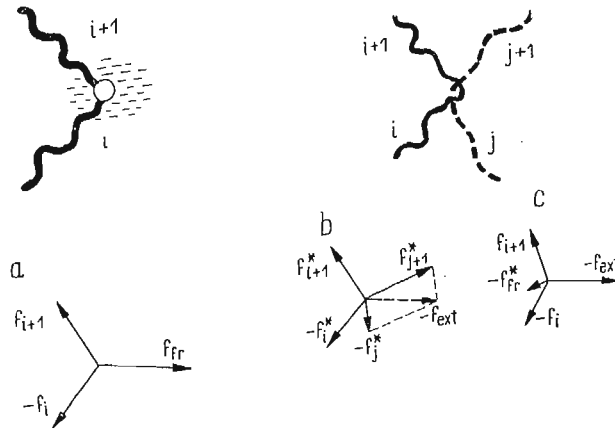
$$(4.10) \quad \mathbf{f}_{\text{ext}}^i = \mathbf{f}_{i+1}^* - \mathbf{f}_i^* = \mathbf{f}_j^* - \mathbf{f}_{j+1}^*,$$

gdzie  $\mathbf{f}_i^*$ ,  $\mathbf{f}_{i+1}^*$  są pełnymi naprężeniami łańcuchów sieci  $i$ ,  $i+1$  [por. (4.5)] należących do rozpatrywanej makrocząsteczki, a  $\mathbf{f}_j^*$ ,  $\mathbf{f}_{j+1}^*$  — są podobnymi naprężeniami pozostałych łańcuchów należących do innej makrocząsteczki biorącej udział w tworzeniu węzła (rys. 8b). Należy zauważyć, że w odróżnieniu od  $\mathbf{f}_i$ , naprężenia łańcuchów sieci  $\mathbf{f}_i^*$  obejmują również efekty tarcia. Przez analogię do równania (4.6a) można napisać

$$(4.10a) \quad \mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_i - \mathbf{f}_{f_r}^{*i} = \mathbf{f}_{\text{ext}}^i,$$

gdzie  $\mathbf{f}_{f_r}^{*i}$  jest całkowitą siłą tarcia w węźle  $i$ . Jak widać, w roztworach rozcieńczonych siła tarcia działa jako siła zewnętrzna przekazując siły z powierzchni układu do poszczególnych elementów strukturalnych; w układzie sieciowym  $\mathbf{f}_{f_r}^{*i}$  stanowi natomiast część reakcji łańcucha na siłę zewnętrzną przyłożoną poprzez inne łańcuchy sieciowe do rozpatrywanego węzła. Obie te sytuacje zilustrowano schematycznie na rys. 8.

Różnice pomiędzy równaniami bilansu sił prowadzą do odmiennego kinematycznego zachowania się makrocząsteczek w rozcieńczonych roztworach i układach sieciowych. Prędkości węzłów  $\mathbf{h}_i$  dla sieci nie są jednoznacznie określone przez równanie bilansu sił (4.10) i (4.10a) ponieważ  $\mathbf{f}_{\text{ext}}^i$  nie jest określone, a równanie zawiera dwie niewiadome,



Rys. 8. Bilans sił dla  $i$ -tego centrum oddziaływań: a) w rozcieńczonym roztworze z izolowanymi makrocząsteczkami, b), c) w sieci splątania;  $f_{ext}$  = siła zewnętrzna,  $f_{fr}$  = siła tarcia,  $f_i, f_{i+1}, (f_i^*, f_{i+1}^*)$  = naprężenia odpowiednich sub-łańcuchów (łańcuchów sieci)

$\mathbf{h}$  i  $\mathbf{l}$ . Zauważmy jednak, że na skutek spójności sieci lokalne gradienty prędkości  $\dot{\mathbf{e}}_i$  muszą być średnio równe makroskopowemu gradientowi prędkości  $\dot{\mathbf{e}}_0$ . Załóżmy w pierwszym przybliżeniu, że wszystkie  $\dot{\mathbf{e}}_i$  są identyczne

$$(4.11) \quad \dot{\mathbf{e}}_i = \dot{\mathbf{e}}_0,$$

a zatem

$$(4.12) \quad \dot{\mathbf{h}}_i = \dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{h}_i.$$

Drugą zmienną kinematyczną,  $\dot{\mathbf{l}}$  można uzyskać z uproszczonego równania bilansu sił wstawiając  $\dot{\mathbf{h}}$  z (4.12) i uwzględniając uśrednione oddziaływania z innymi makrocząsteczkami [54]. Szybkości ślizgania otrzymuje się wówczas w następującej postaci

$$(4.13) \quad \dot{\mathbf{l}}_i = \mathbf{D}_{ij} |\mathbf{f}_j|$$

gdzie  $\mathbf{D} = \mathbf{D}(K, \xi, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  oznacza macierz zależną od tarcia w kontaktach i w splątaniach, a  $\mathbf{f}_j$  są naprężeniami łańcuchów nie uwzględniającymi tarcia [por. (4.4)]. W przypadku skrajnym, gdy tarcie w splątaniu można pominąć w porównaniu z tarcie w kontaktach ( $\xi \ll Kh$ ) otrzymuje się

$$(4.14a) \quad \mathbf{D} = K^{-1} \mathbf{E} |\mathbf{h}_i|^{-1};$$

w drugim przypadku skrajnym (znikome tarcie w kontaktach ( $\xi \gg Kh$ ))

$$(4.14b) \quad \mathbf{D} = \xi^{-1} \mathbf{A},$$

gdzie

$$(4.15) \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ -4 & 2 & & \\ 4 & -4 & 2 & \\ 12 & 4 & -4 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Równania kinematyczne dla sieci (4.12) i (4.13) są zupełnie różne od równań dla rozcieńczonych roztworów (4.7) i (4.8) nawet wówczas gdy pojawia się w nich macierz  $\mathbf{A}$  znana z teorii rozcieńczonych roztworów. Można więc oczekiwać, że również fizyczne własności obu układów będą różne.

Dalszym elementem teorii jest kinetyka powstawania i dysocjacji elementów strukturalnych. Proces taki nie występuje w rozcieńczonych roztworach, dla których można napisać

$$(4.16) \quad \dot{\Psi}_{\text{kin}} \equiv 0.$$

Z drugiej strony, w sieciach splątań istnienie swobodnych końców makrocząsteczek umożliwia wślizgiwanie się i wyslizgiwanie się łańcuchów z pętli stwarzając w ten sposób podstawę do kinetycznych zmian funkcji rozkładu (rys. 9). Wyraz kinetyczny obejmuje zmianę



Rys. 9. Mechanizm molekularny rozpadu (powstawania) węzłów w sieci splątań na skutek wyslizgiwania się (wślizgiwania się) swobodnych końców łańcuchów

netto funkcji rozkładu,  $\dot{\Psi}_{\text{kin}}^*$  oraz szybkość zmiany liczby węzłów przypadających na makrocząsteczkę  $\dot{N}$ . Teoria tych procesów nie została jeszcze całkowicie opracowana, lecz można przewidywać, że  $\dot{\Psi}_{\text{kin}}^*$  będzie miało postać sumy kilku wyrażań całkowych

$$(4.17) \quad \dot{\Psi}_{\text{kin}}^*(\mathbf{h}, \mathbf{l}, \dot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{l}}, \Psi) = \sum_k \int \dots \int F^k(\mathbf{h}, \tilde{\mathbf{h}}, \mathbf{l}, \tilde{\mathbf{l}}, \dot{\mathbf{h}}, \tilde{\dot{\mathbf{h}}}, \dot{\mathbf{l}}, \tilde{\dot{\mathbf{l}}}) \Psi^*(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{l}}) \times \\ \times \Psi^*(\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{h}}, \mathbf{l} + \tilde{\mathbf{l}}) d^3N \tilde{\mathbf{h}} d^3N \tilde{\mathbf{l}},$$

gdzie  $F^k(\mathbf{h} \dots)$  oznacza czynnik częstości dla  $k$ -tego procesu molekularnego dysocjacji lub tworzenia się węzła sieci. Procesy takie mają charakter kooperatywny i obejmują kilka łańcuchów sieci należących do dwóch różnych makrocząsteczek. Stąd pojawiają się sploty całkowe w równaniu (4.17). Warto zauważyć, że podobne wyrażenia kinetyczne dla sieci energetycznych uzyskali SCOTT i STEIN [45].

Obecnie możemy napisać równanie ciągłości dla obu rozpatrywanych modeli molekularnych

$$(4.18) \quad \partial \Psi / \partial t + \frac{\partial^r}{\partial \mathbf{h}} (\Psi \dot{\mathbf{h}}) = 0$$

dla rozcieńczonych roztworów, oraz

$$(4.19) \quad \partial \Psi^* / \partial t + \frac{\partial^r}{\partial \mathbf{h}} (\Psi^* \dot{\mathbf{h}}) + \frac{\partial^r}{\partial \mathbf{l}} (\Psi^* \dot{\mathbf{l}}) = \dot{\Psi}_{\text{kin}}^* - \dot{N} (\partial \Psi^* / \partial N)$$

dla układów sieciowych.

Uwzględniając charakterystyki kinematyczne z równań (4.7), (4.12), (4.13), możemy przepisać te równania w postaci

$$(4.18a) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{h}} \left[ \Psi \dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{h} + \frac{kT}{\zeta l} \mathbf{A} \left( \frac{3\Psi}{la} \mathbf{h} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{h}} \right) \right] = 0$$

oraz

$$(4.19a) \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} + \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{h}} [\Psi \dot{\mathbf{e}}_0 \mathbf{h}] + kT \frac{\partial^T}{\partial l} \mathbf{D} \left[ \frac{3\Psi^*}{la} |\mathbf{h}| + |\partial \Psi^* / \partial \mathbf{h}| \right] = \dot{\Psi}_{kin}^* - \dot{N}(\partial \Psi^* / \partial N).$$

Aby znaleźć lokalne i makroskopowe tensory naprężeń będziemy rozważać oddziaływania pomiędzy poszczególnymi perełkami (model sub-łańcuchów) lub węzłami sieci (sieć splątań) traktowanymi jako «centra oddziaływań». Wówczas naprężenia  $\mathbf{f}_i$  i  $\mathbf{f}_i^*$  opisane równaniami (4.4) i (4.5) można utożsamić z siłami oddziaływań par centrów  $i$  oraz  $i-1$ . Oddziaływania dalekiego zasięgu uwzględnione są w siłach  $\mathbf{f}^*$  poprzez tarcie kontaktowe. Równocześnie wektory  $\mathbf{h}_i$  łączące sąsiednie węzły sieci lub końce sub-łańcuchów odpowiadają wektorom  $\mathbf{R}$  z równania (2.12). Tak więc lokalną diadę naprężeń dla obu rozpatrywanych modeli można napisać w postaci

$$(4.20) \quad \boldsymbol{\sigma}_{loc} = c \mathbf{f}_i \mathbf{h}_i^T$$

dla rozcieńczonych roztworów, oraz

$$(4.21) \quad \boldsymbol{\sigma}_{loc}^* = \nu(t) \mathbf{f}_i^* \mathbf{h}_i^T$$

dla układów sieciowych;  $c$  oznacza stężenie sub-łańcuchów, a  $\nu(t)$  — zależne od czasu stężenie łańcuchów w sieci w rozpatrywanym układzie. Uśrednienie po odpowiednich funkcjach rozkładu daje makroskopowy tensor naprężeń. Dla rozcieńczonych roztworów

$$(4.22) \quad c^{-1} [\boldsymbol{\sigma} + ckT\mathbf{I}] = (3kT/la) \langle \mathbf{h}\mathbf{h}^T (1 + \dots) \rangle + (\gamma/l) \langle (\mathbf{h}^T \dot{\mathbf{h}}) \mathbf{h}\mathbf{h}^T / \mathbf{h}^2 \rangle,$$

a dla sieci z węzłami niezlokalizowanymi

$$(4.23) \quad \nu^{-1} [\boldsymbol{\sigma}^* + \nu kT\mathbf{I}] = (3kT/a) \langle \mathbf{h}\mathbf{h}^T (1 + \dots) / l \rangle + \\ + \gamma \langle (\mathbf{h}^T \dot{\mathbf{h}}) \mathbf{h}\mathbf{h}^T / l\mathbf{h}^2 \rangle - \frac{1}{2} K \langle \mathbf{B} \dot{\mathbf{h}} \mathbf{h}^T \rangle + \xi \langle \mathbf{C} \dot{\mathbf{h}} \mathbf{h}^T \rangle,$$

gdzie pojawiają się dodatkowe wyrazy związane z poślizgiem łańcuchów  $\dot{\mathbf{h}}$ . Różnice w zachowaniu się tensorów  $\boldsymbol{\sigma}$  i  $\boldsymbol{\sigma}^*$  dotyczą również sposobu uśrednienia, który w przypadku rozcieńczonych roztworów obejmuje tylko zmienne  $\mathbf{h}$ , a dla sieci  $\mathbf{h}$  i  $\dot{\mathbf{h}}$ .

### 5. Uwagi dotyczące teorii rozcieńczonych roztworów i sieci

Ponieważ ostateczne rozwiązania na funkcję rozkładu konfiguracji sieci splątań nie zostały dotychczas uzyskane, średnich w równaniu (4.23) nie można podać w pełnej postaci, co uniemożliwia szczegółową dyskusję zachowania się takich układów. Jednakże porównanie podstawowych równań teorii sieci z teorią rozcieńczonych roztworów umożliwi wyciągnięcie pewnych ogólnych wniosków.

1. Model sieci z niezlokalizowanymi węzłami splątań dopuszcza nieliniowe lepko-sprężyste zachowanie się układu, zjawiska relaksacji naprężeń i stacjonarnego płynięcia zależne od ciężaru cząsteczkowego pierwotnych makrocząsteczek i stężenia polimeru.



2. Równanie ciągłości dla rozcieńczonych roztworów (4.18), (4.18a) jest liniowe i daje się rozdzielić na część czasową i przestrzenną. Z tego względu zależność czasową funkcji rozkładu  $\Psi$  (i wszystkich zależnych od konfiguracji wielkości fizycznych) można dyskutować w kategoriach liniowej teorii lepkosprężystości. Nie jest to słuszne dla układów sieciowych, gdzie występują wyrazy nieliniowe związane z procesami kinetycznymi. W ogólnym przypadku teoria liniowej lepkosprężystości nie stosuje się więc do takich układów.

3. W zakresie gaussowskiej statystyki łańcucha i przy pominięciu lepkości wewnętrznej tensor naprężeń w rozcieńczonych roztworach  $\sigma$  jest jednoznacznie związany z tensorami polaryzowalności optycznej lub elektrycznej, które są wszystkie liniowymi funkcjami diady  $\mathbf{h}\mathbf{h}^T$ . W układach sieciowych w tym samym przybliżeniu pojawiają się inne efekty naprężeń związane z poślizgiem łańcuchów i związek pomiędzy naprężeniem i polaryzowalnością nie jest jednoznaczny.

4. W zakresie statystyki gaussowskiej przy pominięciu lepkości wewnętrznej równanie ciągłości dla rozcieńczonych roztworów można łatwo znormalizować przez liniowe przekształcenie niezależnej zmiennej  $\mathbf{h}$ . Rozpatrzmy przekształcenie ortogonalne

$$(5.1) \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I},$$

takie, że

$$(5.2) \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{M}_{\text{diag}}.$$

Zastosowanie tego przekształcenia do zmiennej  $\mathbf{h}$  w równaniu (4.18a) daje równanie ciągłości we współrzędnych normalnych (macierz  $\mathbf{M}$  jest diagonalna)

$$(4.18b) \quad \partial\Psi/\partial t + \frac{\partial^T}{\partial\boldsymbol{\eta}} \left[ \Psi\mathbf{e}_0\boldsymbol{\eta} + \frac{kT}{\xi l} \mathbf{M} \left( \frac{3\Psi}{la} \boldsymbol{\eta} + \partial\Psi/\partial\boldsymbol{\eta} \right) \right] = 0.$$

Zbadajmy możliwość dokonania podobnego przekształcenia w teorii sieci. Załóżmy na chwilę, że wyrazy kinetyczne stojące po prawej stronie równania (4.19) są liniowe i że macierz  $\mathbf{D}$  w równaniach kinematycznych może być diagonalizowana za pomocą ortogonalnego przekształcenia  $\mathbf{P}$

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}^T\mathbf{P} &= \mathbf{I}, \\ \mathbf{P}^T\mathbf{D}\mathbf{P} &= \mathbf{S}_{\text{diag}}. \end{aligned}$$

Obecnie o b i e zmienne konfiguracyjne  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{l}$  należy przekształcić równocześnie macierzą  $\mathbf{P}$ , mianowicie

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{h} &\rightarrow \mathbf{P}\boldsymbol{\eta}, \\ \mathbf{l} &\rightarrow \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}. \end{aligned}$$

Po dokonaniu tych przekształceń równanie (4.19a) przybiera postać

$$(4.19b) \quad \begin{aligned} \partial\Psi^*/\partial t + \frac{\partial^T}{\partial\boldsymbol{\eta}} (\Psi^*\mathbf{e}_0\boldsymbol{\eta}) + kT \frac{\partial^T}{\partial\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{P}^T\mathbf{D} \left[ \frac{[3\Psi^*\mathbf{P}|\boldsymbol{\eta}|]}{a\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}} + \right. \\ \left. + \mathbf{P}|\partial\Psi^*/\partial\boldsymbol{\eta}| \right] = \dot{\Psi}_{\text{kin}}^*(\mathbf{P}\boldsymbol{\eta}, \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}) - \dot{N}(\partial\Psi^*/\partial N). \end{aligned}$$

Nawet jeśli pominąć trudności związane z wyrazami kinetycznymi, które na ogół są nieliniowe, to zakładając że  $\mathbf{D}$  można zdiagonalizować [co nie zawsze jest słuszne, gdyż  $\mathbf{D}$

może być macierzą niesymetryczną, por. (4.15)] normalizacja równania ciągłości przy zastosowaniu przekształcenia zmiennych  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{I}$  nie jest możliwa ze względu na występowanie nieliniowych wyrazów typu

$$\mathbf{P}^T \mathbf{D} \frac{\mathbf{P}\eta}{\mathbf{P}\lambda},$$

będących wynikiem równoczesnego przekształcenia obu zmiennych niezależnych. Tak więc metoda współrzędnych normalnych, bardzo owocna w liniowej teorii rozcieńczonych roztworów okazuje się bezskuteczna w przypadku bardziej złożonej teorii układów sieciowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. F. BUECHE, J. Chem. Phys., **25** (1956), 599; *ibid.* **20** (1952), 1959.
2. W. W. GRAESSLEY, *ibid.* **43** (1963), 2696; **47** (1967), 1942.
3. S. HAYASHI, J. Phys. Soc. Japan, **18** (1963), 131, 249.
4. В. Н. ПОКРОВСКИЙ, Коллоидный Журнал, (w druku).
5. A. ZIABICKI, Proc. 5th Intern. Congress of Rheology, Kyoto 1968, vol. III, p. 235, Kyoto Univ. Press, 1970.
6. H. GREEN; *Molecular Theory of Fluids*, North Holland 1954.
7. J. G. KIRKWOOD, J. Chem. Phys., **14** (1946), 180.
8. J. S. DAHLER, L. E. SCRIVEN; Proc. Roy. Soc., **A275** (1963), 504.
9. М. ВОЛКЕНШТЕЙН, Конфигурационная Статистика Полимерных Цепей, Москва 1959.
10. Т. М. БИРШТЕЙН, О. Б. ПТИЦИН, Конформации Макромолекул, Москва 1964.
11. P. J. FLORY, *Statistical Mechanics of Chain Molecules*, Interscience, New York 1969.
12. H. MORAWETZ, *Macromolecules in Solution*, Interscience, New York 1965; tłumaczenie polskie, PWN, Warszawa, 1970.
13. W. TAYLOR, J. Chem. Phys. **15** (1947), 412.
14. W. KUHN, F. GRÜN, Kolloid Z., **101** (1942) 248.
15. W. KUHN, H. KUHN, Helv. Chim. Acta, **26** (1943), 1394; **28** (1945) 1533.
16. V. N. TSVETKOV, in, *Newer Methods of Polymer Characterization*, B. Ke, Editor, Interscience, 1964.; W. N. CWIETKOW i in., *Struktura makrocząsteczek w roztworach*, WNT, Warszawa 1968.
17. S. GLASSTONE, K. J. LAIDLER, H. EYRING, *The Theory of Rate Processes*, McGraw Hill, New York 1941.
18. W. KUHN, H. KUHN, Helv. Chim. Acta, **26** (1943), 1394.
19. J. M. BURGERS, Second Report on Viscosity and Plasticity, Amsterdam Academy of Sciences, 1938.
20. W. KUHN, H. KUHN; Helv. Chim. Acta, **28** (1945), 97.
21. A. PETERLIN; Z. Physik, **111** (1938), 232.
22. J. G. KIRKWOOD, P. J. PLOCK, J. Chem. Phys., **24** (1956) 665.
23. Т. КОТАКА, *ibid.* **30** (1959), 1566.
24. S. PRAGER, Trans. Soc. Rheol., **1** (1957), 53.
25. H. GIESEKUS, Kolloid Z., **147** (1956), 29.
6. H. GIESEKUS, Rheol. Acta, **1** (1962), 50.
27. В. Н. ПОКРОВСКИЙ, Коллоидный Журнал, **29** (1967), 576.
28. R. TAKSERMAN-KROZER, A. ZIABICKI, J. Polymer Sci., **A1** (1963), 507.
29. W. KUHN, H. KUHN, Helv. Chim. Acta **26** (1943), 1394.
30. J. J. HERMANS, Physica, **10** (1943), 777.
31. H. A. KRAMERS, J. Chem. Phys., **14** (1946), 415.
32. В. Н. ЗИММ, *ibid.* **24** (1956), 269.
33. P. E. ROUSE, *ibid.* **21** (1953), 1272.
34. J. G. KIRKWOOD, J. RISEMAN, *ibid.* **16** (1948), 565.

35. R. CERF, J. Phys. Rad., **19** (1958), 122.
36. A. PETERLIN, J. Polymer Sci., **B4** (1966), 287.
37. R. TAKSERMAN-KROZER, J. Polymer Sci., **A1** (1963), 2487.
38. A. PETERLIN, M. ČOPIČ, J. Appl. Phys., **27** (1956), 434.
39. Y. IKEDA, J. Phys. Soc. Japan, **12** (1957), 378.
40. R. B. BIRD, M. W. JOHNSON, Jr, C. F. CURTISS, J. Chem. Phys., **51** (1969), 3093.
41. K. DUŠEK, W. PRINS, Adv. Polymer Sci., **6** (1969), 1.
42. S. PRAGER, H. L. FRISCH, J. Chem. Phys., **46** (1967), 1475.
43. S. F. EDWARDS, Proc. Phys. Soc., **91**, (1967), 513; **92** (1967), 9.
44. M. S. GREEN, A. V. TOBOLSKY, J. Chem. Phys., **14** (1946), 80.
45. K. W. SCOTT, R. S. STEIN, *ibid.* **21** (1953), 1281.
46. M. YAMAMOTO, J. Phys. Soc. Japan, **11** (1956), 413; **12** (1957), 1148; **13** (1958), 1200.
47. A. S. LODGE, Trans. Faraday Soc., **52** (1956), 120; Rheol. Acta, **7** (1968), 379.
48. M. HOFFMANN, Rheol. Acta, **6** (1967), 92.
49. J. A. DUISER, Thesis, Leiden 1965; J. A. DUISER and A. J. STAVERMAN in: *Physics of Non-Crystalline Solids*, North Holland, Amsterdam 1965, 376.
50. A. J. CHÖMPFF, Thesis, Delft 1965; A. J. CHÖMPFF, J. A. DUISER, J. Chem. Phys., **45** (1966) 1505.
51. H. C. BOOIJ, Thesis, Leiden 1970; H. C. BOOIJ and A. J. STAVERMAN, IUPAC Symposium on Macromolecules, Leiden 1970, Preprint, 255.
52. A. ZIABICKI, R. TAKSERMAN-KROZER, J. Polymer Sci., A-2, **7** (1969), 2005.
53. R. TAKSERMAN-KROZER, A. ZIABICKI, *ibid.* **8** (1970), 321.
54. A. ZIABICKI, Prace IPPT PAN, No 13/1970.
55. R. S. MARVIN, H. OSER, J. Res. Natl. Bureau of Standards, **66B** (1962), 171.
56. R. ROSCOE, J. Fluid Mech., **28** (1967), 273.

## Р е з ю м е

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ РЕОЛОГИЯ ПОЛИМЕРНЫХ СИСТЕМ

Обсуждаются возможности построения молекулярных теорий полимерных систем, исходя из принципов статистической механики и упрощенных структурных моделей. Основная система уравнений в такой теории состоит из уравнений неразрывности в  $N$ -мерном пространстве обобщенных переменных, кинематических уравнений, описывающих движение отдельных структурных элементов, динамических уравнений, связывающих локальные силы воздействий с обобщенными переменными, и кинетического уравнения, определяющего скорость изменения функции распределения в результате возникновения или распада структурных элементов.

Описаны типичные внутри- и межмолекулярные взаимодействия в полимерных системах. Представлен анализ двух структурных моделей: разбавленных растворов гибких цепных макромолекул и сеток перепутанных цепей, характерных для концентрированных растворов или полимерных сплавов.

## S u m m a r y

## MOLECULAR RHEOLOGY OF POLYMER SYSTEMS

The general principles of construction of molecular theories of polymer systems are discussed. The theories, based on statistical mechanics combined with simplified concepts in molecular structure comprise the following fundamental equations: equation of continuity in an  $N$ -dimensional configuration space, kinematic equations describing the motion of the structural units involved, dynamic equations, i.e. relations between the local tension and configuration characteristics and the kinetic equation describing the rate of formation (or dissociation) of structural elements in the system.

Some simplified concepts in intra- and intermolecular interactions in polymer systems are given. Two example model systems are systematically analyzed: a dilute solution of flexible chain-macromolecules and an entangled network system typical for concentrated polymer solutions and melts.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 listopada 1970 r.*

---

## WEWNĘTRZNA STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTEGO WALCA KOŁOWEGO PRZY ODKSZTAŁCENIACH SKOŃCZONYCH

ALEKSANDER R A C Z E W (SOFIA)

Utratę stateczności nieograniczonego lub ograniczonego nieodkształcalnymi powierzchniami ośrodka jednorodnego i nieliniowego omówiono po raz pierwszy w pracy [1] oraz nazwano wewnętrzną niestatecznością. Zjawisko to różni się od utraty stateczności elementów posiadających swobodne granice, niejednorodności lub nieciągłości. W [1] BIOT rozważył zagadnienie płaskie stosując zlinearyzowaną teorię ciał wstępnie zdeformowanych — zaproponowaną w [2]. Następnie WESOŁOWSKI, korzystając z teorii małych odkształceń nałożonych na duże odkształcenia, zbadał wewnętrzną stateczność pełnej sprężystej kuli obciążonej równomiernie na powierzchni [3], zaś DUSZCZYK przedyskutował niektóre płaskie przypadki stateczności pełnego walca poddanego działaniu ciśnienia hydrostatycznego [4].

W niniejszej pracy rozważono osiowo-symetryczne zagadnienie utraty wewnętrznej stateczności pełnego walca kołowego wykonanego z materiału nieliniowo hipersprężystego w założeniu, że punkty powierzchni tworzącej walca nie przemieszczają się w kierunku promieniowym, zaś na powierzchniach kołowych działa obciążenie normalne wywołujące deformację skończoną. Warunek utraty stateczności wyprowadzono postulując istnienie rozwiązania niezerowego dla małego odkształcenia nałożonego na początkowe odkształcenie skończone i jednorodne.

### 1. Skończone odkształcenie wstępne

Rozważa się pełny walec kołowy, który w stanie nieodkształconym  $B^0$  posiada promień  $R$  i wysokość  $2h_0$ . Materiał walca jest jednorodny i hipersprężysty. Przemieszczenie w kierunku promieniowym jest kinematycznie ograniczone (powierzchnia tworząca walca ograniczona jest nieodkształcalną powłoką), tak że pod działaniem obciążenia normalnego na czoło walca wszystkie punkty doznają skończonych przemieszczeń tylko w kierunku osiowym. W stanie odkształconym  $B$  walec posiada promień  $R$  i wysokość  $2h$ .

Jeśli w stanie odkształconym jako ruchome (konwekcyjne) współrzędne wybrać współrzędne  $r, \theta, z$ , to współrzędne kartezjańskie  $x_i$  oraz  $y_i$  dowolnego punktu przed oraz po odkształceniu określone są zależnościami

$$(1.1) \quad x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = \frac{z}{\lambda},$$

$$(1.2) \quad y_1 = r \cos \theta, \quad y_2 = r \sin \theta, \quad y_3 = z,$$

gdzie  $\lambda = h/h_0 < 1$  oznacza parametr odkształcenia.

W dalszym ciągu wykorzystamy oznaczenia i niektóre wyniki zamieszczone w [5].

Tensory metryczne  $\mathbf{g}$  i  $\mathbf{G}$  odpowiednio dla stanu nieodkształconego i odkształconego mają następujące składowe kowariantne i kontrawariantne:

$$(1.3) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad g^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$(1.4) \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niezmienniki odkształcenia są następujące:

$$(1.5) \quad I_1 = 2 + \lambda^2, \quad I_2 = 1 + 2\lambda^2, \quad I_3 = \lambda^2,$$

niezerowe zaś symbole Christoffela drugiego rodzaju

$$(1.6) \quad \Gamma_{22}^1 = -r, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}.$$

Stan naprężenia walca opisany jest tensorem naprężenia ze składowymi kontrawariantnymi

$$(1.7) \quad \tau^{11} = \Phi + \Psi(1 + \lambda^2) + p = -H, \quad \tau^{22} = \frac{1}{r^2} [\Phi + \Psi(1 + \lambda^2) + p] = -\frac{H}{r^2},$$

$$\tau^{33} = \Phi \lambda^2 + 2\Psi \lambda^2 + p = -P, \quad \tau^{12} = \tau^{23} = \tau^{31} = 0,$$

gdzie

$$(1.8) \quad \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2}, \quad p = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3},$$

zaś  $W(I_1, I_2, I_3)$  oznacza funkcję energii odkształcenia materiału hipersprężystego, która określa całkowicie jego mechaniczne zachowanie się.

Jak wynika z (1.7), naprężenia styczne na powierzchni tworzącej  $r = R$  równają się zeru. A zatem, jeśli walec ograniczony jest ciałem sztywnym, to dla zrealizowania założonego odkształcenia konieczne jest, żeby między tym ciałem i walcem nie istniało tarcie.

Różniczkowe równania równowagi przy braku sił masowych

$$(1.9) \quad \tau_{,i}^i + \Gamma_{ir}^j \tau^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau^{ij} = 0$$

spełnione są tożsamościowo. W ten sposób dla założonego materiału stan naprężenia i odkształcenia określone są parametrem  $\lambda$  lub odpowiednio obciążeniem  $P$ . Bada się stateczność takiego stanu.

2. Małe odkształcenie dodatkowe

Po rozważonej dotychczas deformacji skończonej, walec został poddany dodatkowemu małemu odkształceniu określone mu polem wektora przemieszczenia  $\varepsilon w$ . Parametr  $\varepsilon$  przyjmuje się na tyle mały, żeby można było pominąć  $\varepsilon^2$  i wyższe potęgi w porównaniu z  $\varepsilon$ .

Jako wynik dodatkowego małego przemieszczenia ciało przechodzi w nowy stan  $B'$  i wszystkie wielkości związane ze stanem odkształcenia lub naprężenia doznają odpowiednich przyrostów. Ich główne liniowe części oznaczono primami. Teoria małych odkształceń nałożonych na odkształcenia skończone zamieszczona jest w [5] i [6].

Oznaczmy fizyczne składowe wektora  $w$  w bazie konwekcyjnego układu współrzędnych przez  $u, v$  i  $w$ . Rozważmy przypadek osiowosymetrycznej dodatkowej deformacji, dla którego  $v = 0, u = u(r, z), w = w(r, z)$ . Stosując teorię rozwiniętą w [5], [6], otrzymamy dla przyrostów interesujących nas wielkości

$$(2.1) \quad G'_{ij} = \begin{bmatrix} 2u_{,r} & 0 & u_{,z} + w_{,r} \\ 0 & 2ru & 0 \\ u_{,z} + w_{,r} & 0 & 2w_{,z} \end{bmatrix}, \quad G'^{ij} = \begin{bmatrix} -2u_{,r} & 0 & -(u_{,z} + w_{,r}) \\ 0 & -\frac{2}{r^3}u & 0 \\ -(u_{,z} + w_{,r}) & 0 & -2w_{,z} \end{bmatrix},$$

$$(2.2) \quad I'_1 = 2\left(u_{,r} + \frac{u}{r} + \lambda^2 w_{,z}\right), \quad I'_2 = 2(1 + \lambda^2)\left(u_{,r} + \frac{u}{r}\right) + 4\lambda^2 w_{,z},$$

$$I'_3 = 2\lambda^2\left(u_{,r} + \frac{u}{r} + w_{,z}\right),$$

$$(2.3) \quad \tau'^{11} = c_{11}u_{,r} + c_{12}\frac{u}{r} + c_{13}w_{,z}, \quad \tau'^{22} = \frac{1}{r^2}\left(c_{12}u_{,r} + c_{11}\frac{u}{r} + c_{13}w_{,z}\right),$$

$$\tau'^{33} = c_{31}\left(u_{,r} + \frac{u}{r}\right) + c_{33}w_{,z}, \quad \tau'^{13} = c_{44}(u_{,z} + w_{,r}), \quad \tau'^{12} = \tau'^{23} = 0,$$

gdzie argument, po którym się różniczkuje, występuje po przecinku, zaś

$$(2.4) \quad c_{11} = 2A_{11} + 2(1 + \lambda^2)^2 A_{22} + 2\lambda^4 A_{33} + 4(1 + \lambda^2)A_{12} + 4\lambda^2 A_{13} + 4\lambda^2(1 + \lambda^2)A_{23} - \Phi - (1 + \lambda^2)\Psi - p,$$

$$c_{13} = 2\lambda^2 A_{11} + 4\lambda^2(1 + \lambda^2)A_{22} + 2\lambda^4 A_{33} + 2\lambda^2(3 + \lambda^2)A_{12} + 2\lambda^2(1 + \lambda^2)A_{13} + 2\lambda^2(1 + 3\lambda^2)A_{23} - \Phi - (1 - \lambda^2)\Psi + p,$$

$$c_{33} = 2\lambda^4(A_{11} + 4A_{22} + A_{33} + 4A_{12} + 2A_{13} + 4A_{23}) - \lambda^2(\Phi + 2\Psi) - p,$$

$$c_{12} = c_{11} + 2(\Psi + p), \quad c_{31} = c_{13} + (1 - \lambda^2)(\Phi + \Psi), \quad c_{44} = -2(\lambda^2\Psi + p),$$

$$A_{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial^2 W}{\partial I_i \partial I_j}.$$

Składowe dodatkowego tensora naprężenia  $\tau'^{ij}$  muszą spełniać następujące równania różniczkowe:

$$(2.5) \quad \tau'_{,i}{}^{ij} + \Gamma_{ir}^j \tau'^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau'^{ij} + \Gamma_{,r}^j \tau'^{ir} + \Gamma_{ir}^r \tau'^{ij} = 0,$$

gdzie  $\Gamma'_{ij}$  są liniowymi częściami przyrostów symboli Christoffela. W naszym przypadku różne od zera są tylko następujące przyrosty:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \Gamma'_{11}{}^1 &= u_{,rr}, & \Gamma'_{21}{}^1 &= ru_{,r}-u, & \Gamma'_{33}{}^1 &= u_{,zz}, \\ \Gamma'_{13}{}^1 &= u_{,rz}, & \Gamma'_{23}{}^2 &= \frac{u_{,z}}{r}, & \Gamma'_{12}{}^2 &= \frac{1}{r} \left( u_{,r} - \frac{u}{r} \right), \\ \Gamma'_{11}{}^3 &= w_{,rr}, & \Gamma'_{22}{}^3 &= rw_{,r}, & \Gamma'_{33}{}^3 &= w_{,zz}, & \Gamma'_{13}{}^3 &= w_{,rz}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu (1.7) i (2.3) do (2.5) oraz wykorzystaniu (1.6) i (2.6) stwierdzamy, że równanie równowagi dla  $j = 2$  spełnione jest tożsamościowo, a pozostałe przyjmują postać

$$(2.7) \quad \begin{aligned} 2(c_{11}-2H) \left[ \frac{1}{r}(ru)_{,r} \right]_{,r} + (c_{44}-2P)u_{,zz} + (c_{44}-2c_{13}-2H)w_{,rz} &= 0, \\ (c_{44}+2c_{31}-2P) \left[ \frac{1}{r}(ru)_{,r} \right]_{,z} + 2(c_{33}-2P)w_{,zz} + (c_{44}-2H) \frac{1}{r}(rw_{,r})_{,r} &= 0. \end{aligned}$$

Nałożone małe odkształcenie jest dopuszczalne wówczas, gdy spełnia warunki brzegowe dla rozważanego walca.

Na powierzchni tworzącej walca  $r = R$  znika przemieszczenie  $u$ , działa zaś tylko obciążenie normalne. A zatem spełnione są warunki

$$(2.8) \quad u = 0, \quad \tau'^{13} = 0, \quad \text{przy } r = R.$$

Wykorzystując (2.3), wyrażenia (2.8) prowadzą do

$$(2.9) \quad u = 0, \quad u_{,z} + w_{,r} = 0, \quad \text{przy } r = R.$$

Rozważmy obecnie dwa sposoby realizacji obciążenia zewnętrznego na powierzchniach czołowych  $z = \pm h$ .

**I Przypadek. Warunki brzegowe w przemieszczeniach.** Niech obciążenie zewnętrzne działa za pośrednictwem nieskończenie sztywnych płyt ograniczających dodatkowe przemieszczenie punktów powierzchni czołowej w kierunku stycznym i normalnym. W tym przypadku składowe przemieszczenia  $w$  muszą spełniać następujące warunki brzegowe:

$$(2.10) \quad u = 0, \quad w = 0, \quad \text{przy } z = \pm h.$$

**II Przypadek. «Mieszane» warunki brzegowe.** Niech obciążenie działa na powierzchnie czołowe walca za pośrednictwem sztywnych płyt i niech nie istnieje tarcie między tymi powierzchniami i płytami. Płyty uniemożliwiają dodatkowy ruch punktów płaszczyzn czołowych tylko w kierunku normalnym. Wówczas dodatkowe odkształcenie musi spełniać warunki

$$(2.11) \quad w = 0, \quad \tau'^{13} = 0, \quad \text{przy } z = \pm h$$

lub o wykorzystaniu (2.3)

$$(2.12) \quad w = 0, \quad u_{,z} + w_{,r} = 0, \quad \text{przy } z = \pm h.$$



## 3. Badanie stateczności odkształconego walca

Ażeby zbadać stateczność odkształconego walca posłużymy się metodą statyczną. Zgodnie z tym podejściem, ciało znajduje się w równowadze trwałej póki nie istnieje niezerowe rozwiązanie dla dodatkowego małego odkształcenia spełniającego różniczkowe równanie równowagi (2.7) oraz jednorodne warunki brzegowe (2.9) i (2.10) lub odpowiednio (2.9) i (2.12).

Rozwiązania postawionych zagadnień brzegowych dla układu liniowych równań różniczkowych (2.7) poszukuje się w postaci

$$(3.1) \quad u = f_{1n}(z)J_1(\alpha_n r), \quad w = f_{2n}(z)J_0(\alpha_n r),$$

gdzie  $J_0(\alpha_n r)$  i  $J_1(\alpha_n r)$  oznaczają funkcje Bessela pierwszego rodzaju, odpowiednio zerowego i pierwszego rzędu, zaś  $\alpha_n$  — parametr wyznaczony z warunków brzegowych.

Po podstawieniu (3.1) do (2.7), dla wyznaczenia funkcji  $f_{1n}(z)$  i  $f_{2n}(z)$  otrzymujemy układ równań

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (c_{44}-2P)f''_{1n}-2\alpha_n^2(c_{11}-2H)f_{1n}-\alpha_n(c_{44}+2c_{13}-2H)f'_{2n} &= 0, \\ 2(c_{33}-2P)f''_{2n}-\alpha_n^2(c_{44}-2H)f_{2n}+\alpha_n(c_{44}+2c_{31}-2P)f'_{1n} &= 0. \end{aligned}$$

Z (3.2) wynika, że

$$(3.3) \quad f_{2n}(z) = \frac{1}{\alpha_n^3} a_1 f'''_{1n}(z) + \frac{1}{\alpha_n} a_2 f'_{1n}(z),$$

gdzie

$$(3.4) \quad \begin{aligned} a_1 &= \frac{2(c_{33}-2P)(c_{44}-2P)}{(c_{44}-2H)(c_{44}+2c_{13}-2H)}, \\ a_2 &= \frac{(c_{44}+2c_{13}-2H)(c_{44}+2c_{31}-2P)-4(c_{11}-2H)(c_{33}-2P)}{(c_{44}-2H)(c_{44}+2c_{13}-2H)}. \end{aligned}$$

Po wyeliminowaniu  $f_{2n}(z)$  z (3.2), otrzymujemy następujące zwyczajne równanie różniczkowe na funkcję  $f_{1n}(z)$

$$(3.5) \quad f_{1n}^{IV} - 2b\alpha_n^2 f'_{1n} + c\alpha_n^4 f_{1n} = 0,$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} b &= \frac{4(c_{11}-2H)(c_{33}-2P) + (c_{44}-2H)(c_{44}-2P) - (c_{44}+2c_{13}-2H)(c_{44}+2c_{31}-2P)}{4(c_{33}-2P)(c_{44}-2P)}, \\ c &= \frac{(c_{11}-2H)(c_{44}-2H)}{(c_{33}-2P)(c_{44}-2P)}. \end{aligned}$$

Dla przypadku  $b^2 \neq c$ , ogólne rozwiązanie równania (3.5) jest następujące:

$$(3.7) \quad f_{1n}(z) = A_{1n} e^{\alpha_n r_1 z} + A_{2n} e^{-\alpha_n r_1 z} + A_{3n} e^{\alpha_n r_2 z} + A_{4n} e^{-\alpha_n r_2 z},$$

gdzie  $A_{in}$  oznaczają stałe całkowania, zaś

$$(3.8) \quad r_1 = \sqrt{b + \sqrt{b^2 - c}}, \quad r_2 = \sqrt{b - \sqrt{b^2 - c}}.$$

Jeśli  $b^2 = c$ , równanie (3.5) posiada całkę ogólną w postaci

$$(3.9) \quad f_{1n}(z) = (B_{1n} + zB_{2n})e^{\alpha_n r z} + (B_{3n} + zB_{4n})e^{-\alpha_n r z},$$

gdzie  $B_{in}$  są stałymi całkowania, a  $r = \sqrt{b}$ .

Podstawienie (3.1) do warunków brzegowych (2.9) daje następujące równanie przesłane dla wyznaczenia parametru  $\alpha_n$ :

$$(3.10) \quad J_1(\alpha_n R) = 0,$$

skąd

$$(3.11) \quad \alpha_n = \frac{\omega_n}{R},$$

przy czym  $\omega_n$  oznacza  $n$ -te miejsce zerowe funkcji Bessela  $J_1(x)$ .

Rozważmy kolejno dwa przypadki zamocowania powierzchni czołowych walca.

**I Przypadek. Warunki brzegowe w przemieszczeniach.** Podstawienie (3.1) do (2.10) oraz wykorzystanie (3.3) daje następujące warunki brzegowe dla funkcji  $f_{1n}(z)$ .<sup>1)</sup>

$$(3.12) \quad \begin{aligned} f_1(\pm h) &= 0, \\ a_1 f_1''(\pm h) + a^2 a_2 f_1'(\pm h) &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli podstawić całkę ogólną (3.7) lub (3.9) do warunków brzegowych (3.12), otrzymuje się jednorodny liniowy układ równań algebraicznych dla wyznaczenia stałych całkowania. Warunek istnienia niezerowego rozwiązania dla założonej małej deformacji wymaga, aby stałe całkowania  $A_i$  (lub odpowiednio  $B_i$ ) nie były jednocześnie równe zero. Wynika stąd znikanie wyznacznika  $\Delta$  utworzonego z wyrazów stojących przy  $A_i$  (lub odpowiednio  $B_i$ ).

Można pokazać, że warunek  $\Delta = 0$  rozkłada się na dwa warunki:  $\Delta_1 = 0$  i  $\Delta_2 = 0$ , z których pierwszy odpowiada utracie stateczności, gdy  $f_1(z)$  jest funkcją parzystą argumentu  $z$ ; wówczas na podstawie (3.3)  $f_2(z)$  jest funkcją nieparzystą (por. rys. 1a). Warunek  $\Delta_2 = 0$  odpowiada nieparzystej funkcji  $f_1(z)$  i parzystej funkcji  $f_2(z)$  (por. rys. 1b).

W przypadku, gdy  $b^2 \neq c$  mamy

$$(3.13) \quad \Delta_1 \cdot \Delta_2 = \left[ \frac{r_1}{r_2} \frac{a_1 r_1^2 + a_2}{a_1 r_2^2 + a_2} \frac{\text{th } \lambda r_1 \kappa \omega}{\text{th } \lambda r_2 \kappa \omega} - 1 \right] \left[ \frac{r_1}{r_2} \frac{a_1 r_1^2 + a_2}{a_1 r_2^2 + a_2} \frac{\text{th } \lambda r_2 \kappa \omega}{\text{th } \lambda r_1 \kappa \omega} - 1 \right] = 0,$$

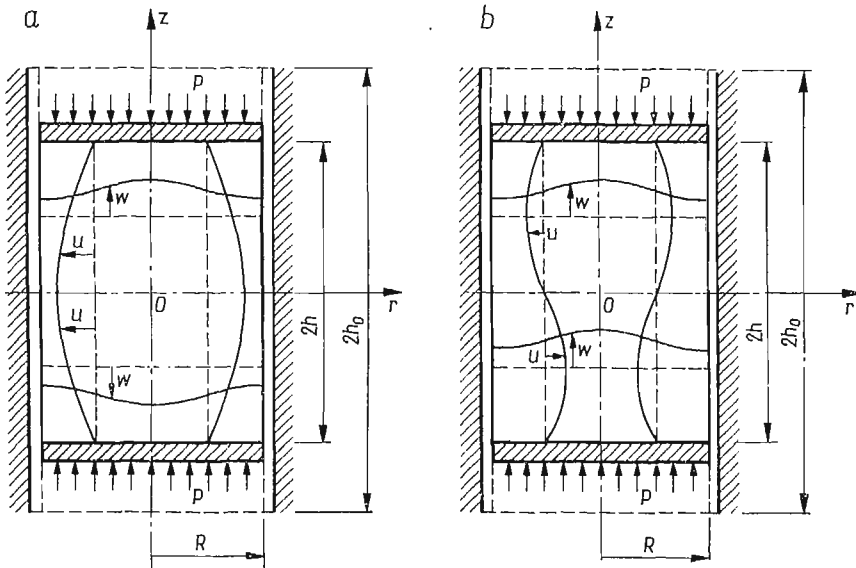
gdzie oznaczono  $\kappa = h_0/R$ .

Dla danego parametru geometrycznego  $\kappa$  i potencjału odkształceń  $W$ , mniejszy pierwiastek równania (3.13) (przy różnych  $n$ ) przedstawia poszukiwany krytyczny parametr deformacji  $\lambda_{kr}$ .

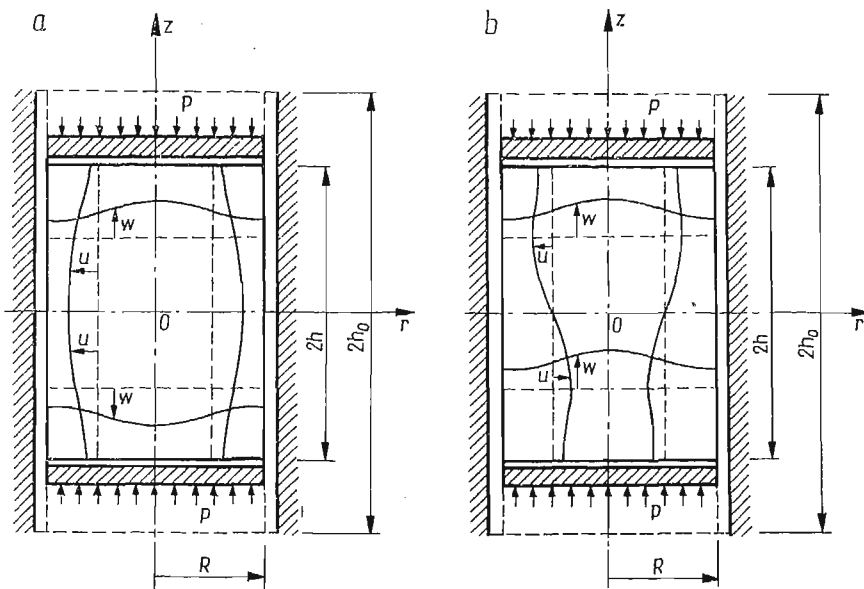
W szczególnym przypadku, gdy  $b^2 = c$ , po podstawieniu ogólnego rozwiązania (3.9) do warunków brzegowych (3.12), otrzymamy

$$(3.14) \quad \Delta_1 \cdot \Delta_2 = \left[ \frac{3a_1 r + a_2}{a_1 r^2 + a_2} \frac{\text{sh } 2\lambda r \kappa \omega}{2\lambda r \kappa \omega} + 1 \right] \left[ \frac{3a_1 r + a_2}{a_1 r^2 + a_2} \frac{\text{sh } 2\lambda r \kappa \omega}{2\lambda r \kappa \omega} - 1 \right] = 0.$$

<sup>1)</sup> W dalszym ciągu pominiemy wskaźnik  $n$ .



Rys. 1



Rys. 2

Warunek  $b^2 = c$  może być spełniony tylko dla szczególnych wartości parametru  $\lambda$ , dla których należy sprawdzić czy prawdziwe jest (3.14). W dalszym ciągu rozpatrujemy tylko ogólniejszy przypadek, gdy  $b^2 \neq c$ .

**II Przypadek.** «Mieszane» warunki brzegowe. W przypadku «mieszanych» warunków brzegowych (2.13) spełnionych na czołach walca, po podstawieniu (3.1) do (2.13), otrzymujemy zależności

$$(3.15) \quad \begin{aligned} f_2(\pm h) &= 0, \\ f_1'(\pm h) - \alpha f_2(\pm h) &= 0, \end{aligned}$$

które przy pomocy (3.3) sprowadzają się do postaci

$$(3.16) \quad f_1'(\pm h) = 0, \quad f_1''(\pm h) = 0.$$

Jeśli  $b^2 \neq c$ , warunek stateczności przy symetrycznej (rys. 2a) i antysymetrycznej postaci równowagi obojętnej (rys. 2b) jest następujący:

$$(3.17) \quad \Delta_1 \cdot \Delta_2 = [\operatorname{ch} \lambda r_1 \kappa \omega \cdot \operatorname{ch} \lambda r_2 \kappa \omega] \cdot [\operatorname{sh} \lambda r_1 \kappa \omega \cdot \operatorname{sh} \lambda r_2 \kappa \omega] = 0.$$

Widać, że dla rzeczywistych  $r_1$  i  $r_2$  warunek (3.17) nie może być spełniony. A zatem dla materiałów hipersprężystych, dla których mają miejsce zależności:  $b^2 - c > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , dla dowolnego  $\lambda$ , nie istnieje osiowosymetryczna postać utraty wewnętrznej stateczności przy rozważonych warunkach na powierzchniach czołowych walca.

Otrzymane równania przestępne (3.13) i (3.17), z których należy wyznaczyć krytyczny parametr  $\lambda_{kr}$  lub odpowiednio krytyczne obciążenie  $P_{kr}$ , można sprowadzić do bardziej wygodnej postaci w zależności od tego, czy pierwiastki  $r_1$  i  $r_2$  są rzeczywiste, urojone lub zespolone. Oprócz tego z (3.13) i (3.17) można uzyskać przypadki graniczne: bardzo długiego walca (gdy  $\kappa \rightarrow \infty$ ) i bardzo krótkiego walca (gdy  $\kappa \rightarrow 0$ ). Wówczas warunki stateczności znacznie się upraszczają.

#### 4. Samosprężoność zagadnienia brzegowego

Zgodnie z najogólniejszym kryterium kinematycznym, ciało znajduje się w stanie równowagi trwałej, jeśli amplitudy dodatkowych dopuszczalnych przemieszczeń, wywołane oddziaływaniem zewnętrznym, pozostają małe, gdy same oddziaływania są wystarczająco małe. Definicja ta jest równoważna wykorzystanemu w p. 3 statycznemu kryterium stateczności, jeśli odpowiednie zagadnienie brzegowe jest samosprężone. Jak pokazano w [7], samosprężoność zagadnienia brzegowego wymaga spełnienia następującego warunku:

$$(4.1) \quad \int_S n_r [\overset{1}{w}_s (\overset{1}{\tau}{}^{rs} + \tau^{rs} \nabla_p \overset{1}{w}_p + \tau^{rp} \nabla_p \overset{1}{w}^s) - \overset{1}{w}_s (\overset{2}{\tau}{}^{rs} + \tau^{rs} \nabla_p \overset{2}{w}_p + \tau^{rp} \nabla_p \overset{2}{w}^s)] dS = 0,$$

gdzie  $S$  oznacza powierzchnię ograniczającą ciało;  $n_r$  — kowariantne składowe jednostkowego wektora normalnego do  $S$ ;  $\overset{1}{w}_s$ ,  $\overset{2}{w}_s$  oraz  $\overset{1}{w}^s$ ,  $\overset{2}{w}^s$  — odpowiednio kowariantne oraz kontrawariantne składowe dwóch pól wektorowych, które spełniają warunki brzegowe.  $\overset{1}{\tau}{}^{ij}$ ,  $\overset{2}{\tau}{}^{ij}$  są kontrawariantnymi składowymi tensorów naprężeń — odpowiadających przemieszczeniom  $\overset{1}{w}$ ,  $\overset{2}{w}$ .

Ażeby sprawdzić spełnienie warunku (4.1), rozważmy kolejno całą powierzchnię po powierzchni tworzącej  $S_1$  oraz po powierzchni czołowej  $S_2$ .

Na powierzchni  $S_1 (r = R)$  z jednostkowym wektorem normalnym  $\mathbf{n}(1, 0, 0)$  spełnione są warunki

$$(4.2) \quad w_1 = u = 0, \quad w_2 = 0, \quad \tau^{12} = \tau^{13} = 0, \quad \tau^{11} = \text{const}, \quad \tau'^{12} = \tau'^{23} = 0.$$

Warunek (4.1) dla powierzchni  $S_1$  sprowadza się do

$$(4.3) \quad \int_{S_1} (w^2 w_{,r} - w^1 w_{,r}) dS_1 = 0.$$

Ponieważ  $u_{,z} + w_{,r} = 0$  i  $u = 0$  na  $S_1$ , mamy także  $w_{,r} = 0$  na  $S_1$ , a zatem warunek (4.3) spełniony jest tożsamościowo.

Rozważmy teraz, przy różnych warunkach brzegowych, warunek samosprężoności (4.1) na powierzchniach czołowych walca  $S_2^\pm (z = \pm h)$  z jednostkowymi wektorami normalnymi  $\mathbf{n}(0, 0, \pm 1)$ .

**Przypadek I.** Gdy warunki brzegowe dane są w przemieszczeniach [(por. (2.10)), wyrażenie podcałkowe w (4.1) znika i warunek samosprężoności spełniony jest tożsamościowo.

**Przypadek II.** Gdy warunki brzegowe są «mieszane» [por. (2.11)], po wykorzystaniu

$$(4.4) \quad \tau^{13} = \tau^{23} = 0, \quad \tau^{33} = \text{const} \quad \text{na} \quad S_2^\pm,$$

zależność (4.1) przybiera postać

$$(4.5) \quad \int_{S_2^+} (u^2 u_{,z} - u^1 u_{,z}) dS_2^+ - \int_{S_2^-} (u^2 u_{,z} - u^1 u_{,z}) dS_2^- = 0.$$

Z faktu, że  $u_{,z} + w_{,r} = 0$  i  $w = 0$  na  $S_2^\pm$  wynika, że również  $u_{,z} = 0$  na  $S_2^\pm$ , a zatem (4.5) spełnione jest tożsamościowo.

Pokazaliśmy, że sformułowane zagadnienia brzegowe na wartości własne są samosprężone oraz, że wyprowadzone przestępne równania stateczności są poprawne. Dalsze odkształcanie walca po osiągnięciu wyznaczonych krytycznych wartości parametru  $\lambda$ , chociaż nie prowadzi do zewnętrznej zmiany ciała, wywołuje zmiany charakteru stanu naprężenia i odkształcenia. Jednorodny stan naprężenia nie jest dalej stanem statecznym i przy nowym powstałym rozkładzie naprężeń materiał może utracić swoje jakościowe własności wcześniej niż tego oczekujemy bez uwzględnienia zjawiska wewnętrznej utraty stateczności.

#### Literatura cytowana w tekście

1. M. A. BIOT, *Internal buckling under initial stress in finite elasticity*, Proc. Roy. Soc., 1354, A 273 (1963).
2. M. A. BIOT, *Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress*, Phil. Mag., 27 (1939).
3. Z. WESOŁOWSKI, *Stability of a full elastic sphere uniformly loaded on the surface*, Arch. Mech. Stos., 5, 16 (1964).
4. B. DUSZCZYK, *Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym*, Mech. Teoret. Stos. 4, 5 (1967).
5. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.

6. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., A **211** (1952).
7. GUO ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations*, Arch. Mech. Stos., **2**, **15** (1963).

## Р е з ю м е

ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА  
ПРИ КОНЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассматривается устойчивость полного кругового цилиндра из гиперупругого однородного материала с наиболее общей физической характеристикой. На торцах цилиндра приложена нормальная нагрузка, вызывающая конечную деформацию. Стенки боковой поверхности не могут перемещаться в радиальном направлении. Условие потери устойчивости выводится из требования существования ненулевого решения для малой возможной деформации, наложенной на начальную конечную деформацию. Рассмотрены два случая граничных условий на основаниях цилиндра: условия в перемещениях и смешанные граничные условия. Показано, что в каждом из них граничные задачи на собственные значения самосопряженные и, следовательно, полученные уравнения устойчивости являются корректными с точки зрения самого общего кинематического критерия устойчивости.

## S u m m a r y

INTERNAL STABILITY OF AN ELASTIC CIRCULAR CYLINDER UNDER  
FINITE DEFORMATIONS

The problem of stability of a full circular cylinder made of a hyperelastic homogeneous material with the most general physical characteristics is discussed. The finite deformations are produced by normal loading on the frontal surfaces of the cylinder. The points of lateral surface of the cylinder cannot be freely displaced in the radial direction. The condition of stability loss results from the assumption of existence of non-zero solutions for small admissible deformations superposed on initial finite deformations. Two cases of the boundary conditions determined on the frontal surfaces of the cylinder are discussed: the boundary conditions given in displacements and those of the «mixed» type. It is shown that for the both cases the boundary eigenvalue problems are self-adjoint and thus the obtained stability conditions are correct when the most general kinematic criterion of stability is applied.

INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ  
BUŁGARSKIEJ AKADEMII NAUK  
SOFIA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 grudnia 1970 r.*

CHARAKTERYSTYKA STABILNOŚCI PRZEPŁYWU, ZE ZMIENNYM  
PROFILEM PRĘDKOŚCI, PŁYNU O SKOŃCZONYM PRZEWODNICTWIE  
ELEKTRYCZNYM W POLU MAGNETYCZNYM

ZBIGNIEW K Ł O S (WARSZAWA)

Badaniu zagadnienia stabilności przepływu równoległego ze zmiennym profilem prędkości (przepływ ścinający) poświęconych było wiele prac analizujących tak bezdysypatywne [1, 2, 3], jak i dysypatywne [4] układy hydrodynamiczne. Zagadnienie to było także badane dla układów magnetohydrodynamicznych. Dla hydrodynamicznego, bezdysypatywnego, warstwowego przepływu nieściśliwego dostatecznym warunkiem stabilności jest spełnienie w całym obszarze przepływu nierówności  $J(z) > 1/4$  (gdzie  $J(z) =$  = liczba Richardsona dla danego przepływu). Okazało się przy tym (porównaj [2]), że moduły urojonych prędkości fazowych dowolnych modów niestabilnych zawarte są w półkolu, którego promień określony jest przez granice zmian wartości prędkości przepływu  $U(z)$ .

W ramach magnetohydrodynamiki zagadnienia stabilności przepływu warstwowego były rozważane przede wszystkim dla układów bezdysypatywnych w jednorodnym [5, 6, 7], jak i niejednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym. Szczególnie rozlegle badano niestabilność przepływu ze schodkową funkcją profilu prędkości, tzw. niestabilność Kelvina-Helmholtza [5, 7].

AGRAVAL [8], dla bezdysypatywnego przepływu z ciągłym profilem prędkości  $U(z)$  i gęstości  $\rho(z)$  znalazł, że prędkości zespolone modów niestabilnych również leżą w pewnym półkolu, analogicznie jak dla przepływu hydrodynamicznego, przy czym promień tego półkola zredukowany jest przez wpływ zewnętrznego pola magnetycznego. Przy polu magnetycznym spełniającym w całym obszarze przepływu warunek:  $A > (U_{\max} - U_{\min})/2$  (gdzie  $A$  — liczba Alfvena dla przepływu), przepływ pozostaje stabilny dla dowolnych liczb Richardsona.

Pewną charakterystykę przepływu typu ścinającego podał WIELICHOW [9], rozważając asymptotyczne rozwiązania równań przepływu z uwzględnieniem lepkości i skończonej przewodności elektrycznej (dla dużej magnetycznej i hydrodynamicznej liczby Reynoldsa). Analizę modów niestabilnych przeprowadził WIELICHOW dla nieskończonej przewodności elektrycznej.

W przypadku przepływu płynu o skończonym przewodnictwie elektrycznym w zewnętrznym polu magnetycznym — płyn dyfunduje poprzez linie sił pola burząc tym samym

stabilizujący wpływ tego pola, z jakim mamy do czynienia przy nieskończonej przewodności elektrycznej.

Interesujące jest jakie własności posiadają mody niestabilne dla przepływu ze skończonym przewodnictwem elektrycznym i jak pole magnetyczne zmienia kryterium stabilności takiego przepływu.

Poniżej rozpatrzmy przepływ ze zmiennym profilem prędkości płynu nielepkiego i nieściśliwego o skończonym przewodnictwie elektrycznym w zewnętrznym jednorodnym polu magnetycznym. Założymy przy tym, że przepływ jest ograniczony dwiema równoległymi, sztywnymi płaszczyznami o doskonałym przewodnictwie elektrycznym.

Magnetohydrodynamiczne równania przepływu płynu nieściśliwego, nielepkiego o skończonym przewodnictwie elektrycznym mają postać

$$\varrho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \varrho (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{\mu}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{H}) \times \mathbf{H} - g\varrho \boldsymbol{\lambda}; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \varrho = 0; \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0; \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{H} = \mathbf{H} \times \nabla \mathbf{u} - \nabla \times \left[ \frac{1}{4\pi\sigma} \nabla \times \mathbf{H} \right],$$

gdzie  $\mathbf{u}$  — wektor prędkości przepływu;  $\mathbf{H}$  — wektor pola magnetycznego;  $p$  — ciśnienie,  $\boldsymbol{\lambda}$  — wersor siły grawitacyjnej;  $g$  — przyspieszenie grawitacyjne;  $\sigma$  — przewodnictwo elektryczne,  $\mu$  — przenikalność magnetyczna.

Do rozważań ustalimy kartezjański układ współrzędnych  $x, y, z$ , kierując oś  $x$  zgodnie z zewnętrznym jednorodnym polem magnetycznym  $\mathbf{H}_0$ . Przyjmijmy również, że kierunek prędkości przepływu niezaburzonego jest zgodny z  $\mathbf{H}_0$ , a jej wartość zmienna w kierunku prostopadłym do przepływu, tzn.  $\mathbf{U} = [U_0(z), 0, 0]$ . Ponadto zakładamy, że gęstość, ciśnienie, jak i przewodnictwo elektryczne przepływu niezaburzonego, są zmienne wzdłuż osi  $z$ , tzn.  $\varrho_0 = \varrho_0(z)$ ,  $p_0 = p_0(z)$  i  $\sigma = \sigma(z)$ .

W celu zbadania stabilności tak określonego przepływu posłużymy się teorią liniową. Założymy, że w wyniku zaburzeń wartości parametrów przepływu ustalonego doznały małych przyrostów, mianowicie

$$(2) \quad \mathbf{u} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}', \quad p = p_0 + p', \quad \varrho = \varrho_0 + \varrho',$$

przy czym, ponieważ parametry przepływu niezaburzonego są jedynie funkcją  $z$ , zaburzenie  $f'$  dowolnego parametru w rozłożeniu na mody normalne ma postać

$$(3) \quad f' = f(z) \exp[i(k_x x + k_y y - k_x c t)],$$

gdzie  $k_x, k_y$  — składowe wektora falowego (rzeczywiste), zaś  $c$  jest prędkością fazową zaburzenia (w ogólności zespoloną). W ramach analizy liniowej znak części urojonej prędkości określa nam narastanie ( $\text{Im}c > 0$ ) lub tłumienie ( $\text{Im}c < 0$ ) zaburzenia.

Podstawiając do układu równań (1) wyrażenia (2) i linearyzując, otrzymujemy układ równań na wielkości zaburzeń parametrów przepływu, przy czym poszukujemy rozwiązań w postaci (3). Po przekształceniach i wyeliminowaniu różnych niewiadomych otrzymujemy (por. [4, 9]) dla składowej  $u'_z$  zaburzenia prędkości przepływu i  $h'_z$  — pola magnetycznego następujący układ równań:



$$(4) \quad \frac{\mu H_0}{4\pi} (D^2 - k^2) h'_z = D \left[ \varrho_0 (U_0 - c)^2 D \left( \frac{u'_z}{U_0 - c} \right) \right] - \\ - \varrho_0 (U_0 - c)^2 k^2 \frac{u'_z}{U_0 - c} - g \frac{k^2}{k_x^2} (D \varrho_0) \frac{u'_z}{U_0 - c}, \\ h'_z = H_0 \frac{u'_z}{U_0 - c} - \frac{i\eta}{(U_0 - c)k_x} (D^2 - k^2) h'_z,$$

gdzie

$$D = \frac{d}{dz}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad \eta = \frac{1}{4\pi\mu\sigma}.$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej  $w = u'_z / \tilde{W}$ ,  $\tilde{W} = U_0 - c$  i przejściu do wielkości bezwymiarowych

$$h^* = \frac{h'_z}{H_0}, \quad W^* = \frac{\tilde{W}}{U_c}, \quad c^* = \frac{c}{U_c}, \quad \varrho^* = \frac{\varrho_0}{\varrho_c}, \\ k^*, k_x^*, k_y^*, D^* = d(k, k_x, k_y, D),$$

gdzie  $U_c$ ,  $\varrho_c$ ,  $d$  — odpowiednie wielkości charakterystyczne dla prędkości przepływu, gęstości i długości (w dalszym ciągu opuszczając będziemy gwiazdki przy wielkościach bezwymiarowych), równania (4) przybiorą postać

$$(5) \quad \varrho A^2 (D^2 - k^2) h = D [\varrho W^2 D w] - \varrho W^2 k^2 w - G \frac{k^2}{k_x^2} (D \varrho) w, \\ h = w - \frac{1}{R_m} \frac{i}{k_x W} (D^2 - k^2) h,$$

gdzie:

$$A = \left( \frac{u H_0^2}{4\pi \varrho U_c^2} \right)^{1/2} \quad \text{— charakterystyczna liczba Alfvena,} \\ R_m = \frac{U_c d}{\eta} \quad \text{— magnetyczna liczba Reynoldsa,} \\ G = \frac{g d}{U_c^2} \quad \text{— liczba grawitacyjna.}$$

Stabilność układu opisanego równaniami badać będziemy przy konkretnych warunkach brzegowych. Przyjmujemy, że przepływ ograniczony jest dwiema sztywnymi, wzajemnie równoległymi płaszczyznami o doskonałym przewodnictwie elektrycznym, położonymi symetrycznie względem płaszczyzny  $xy$  (tzn.  $z = \pm d$ ) przyjętego układu kartezjańskiego. Tak więc, na granicy znikać muszą składowe normalne zaburzeń prędkości i pola magnetycznego. Otrzymujemy stąd, że na granicy (w jednostkach bezwymiarowych przy  $z = \pm 1$ )

$$(6) \quad w = 0; \quad h = 0.$$

Jak wspomniano wyżej dla modów niestabilnych urojona część  $c_i$  zespolonej prędkości fazowej zaburzenia jest dodatnia. Aby scharakteryzować pewne właściwości tych modów, pomnożmy równanie (5)<sub>1</sub> przez  $\bar{w}$  ( $\bar{w}$  — sprzężona wartość do  $w$ ) i scałkujemy stronami

w przedziale zmian  $z$  ( $-1 \leq z \leq +1$ ). W wyniku całkowania przez części, przy wykorzystaniu warunków brzegowych (6), otrzymamy zależność

$$(7) \quad - \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho \bar{w} (D^2 - k^2) h dz = \int_{-1}^{+1} \varrho W^2 [|Dw|^2 + k^2 |w|^2] dz + \int_{-1}^{+1} G(D\varrho) |w|^2 dz,$$

gdzie  $|\cdot|$  oznacza moduł danej wartości.

Wykorzystując równanie (5)<sub>2</sub> jak i warunki (6), całkę z lewej strony równania (7) przekształcimy następująco:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho w (D^2 - k^2) h dz &= - \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho [|Dw|^2 + k^2 |w|^2] dz - \\ &- \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho [iS - k^2 |S|^2] |(D^2 - k^2) h|^2 dz + \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho |D[S(D^2 - k^2) h]|^2 dz, \end{aligned}$$

gdzie  $S = \bar{W} / (R_m k_x |W|^2)$ .

Równanie (7) przyjmuje więc ostateczną postać

$$(8) \quad \begin{aligned} - \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho [iS - k^2 |S|^2] |(D^2 - k^2) h|^2 dz + \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho |D[S(D^2 - k^2) h]|^2 dz = \\ = \int_{-1}^{+1} \varrho [A^2 - W^2] [|Dw|^2 + k^2 |w|^2] dz - \int_{-1}^{+1} G \frac{k^2 (D\varrho)}{k_x^2} |w|^2 dz. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że  $W = U - c = (U - c_r) - ic_i$ , z równania (8) po przyrównaniu jego części urojonych otrzymamy zależność

$$(9) \quad \int_{-1}^{+1} [U - c_r] \left\{ \frac{A^2 \varrho}{R_m k_x |W|^2} |(D^2 - k^2) h|^2 + 2c_i \varrho [|Dw|^2 + k^2 |w|^2] \right\} dz = 0.$$

Dla modów niestabilnych  $c_i > 0$ , a więc wyrażenie w nawiasie klamrowym, równania (9) jest dodatnie w całym obszarze przepływu; a zatem dla tych modów część rzeczywista prędkości fazowej winna być ograniczona warunkiem

$$U_{\min} < c_r < U_{\max},$$

gdzie  $U_{\min}$  — minimalna, zaś  $U_{\max}$  — maksymalna wartość prędkości przepływu w przedziale ograniczającym przepływ  $-1 \leq z \leq +1$ . Powyższe ograniczenie na  $c_r$  jest identyczne, jak w przypadku przepływu płynu o nieskończonym przewodnictwie elektrycznym [8, 9], jak i w przypadku przepływu hydrodynamicznego [2].

Porównując części rzeczywiste równania (8) otrzymujemy z kolei związek

$$(10) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho \left[ \frac{c_i k_x R_m + k^2}{k_x^2 R_m^2 |W|^2} \right] |(D^2 - k^2) h|^2 dz + \int_{-1}^{+1} A^2 \varrho |D[S(D^2 - k^2) h]|^2 dz = \\ = \int_{-1}^{+1} \varrho [A^2 - (U - c_r)^2 + c_i^2] [|Dw|^2 + k^2 |w|^2] dz + \int_{-1}^{+1} G \frac{k^2}{k_x^2} (D\varrho) |w|^2 dz. \end{aligned}$$

Dla modów niestabilnych ( $c_i > 0$ ) lewa strona równości (10) jest dodatnia. W przypadku przepływu gdzie  $D\varrho < 0$  (wzrost gęstości zgodnie ze zwrotem siły grawitacyjnej) drugi

człon po prawej stronie równości (10) jest również dodatni. Znak pierwszego członu prawej strony, przy ustalonym profilu prędkości  $U(z)$ , zależy od wartości liczby Alfvena, jak i od prędkości fazowej modów niestabilnych. Człon ten będzie dodatni dla modów o dużych prędkościach narastania  $c_i > (U_{\max} - U_{\min})$ , a więc równość (10) dopuszcza istnienie tych modów przy dowolnej wartości liczby Alfvena. Wynika stąd, że w przypadku skończonej przewodności elektrycznej, zewnętrzne pole magnetyczne nie może w pełni zabezpieczyć przepływu przed wystąpieniem niestabilności. Przy doskonałym przewodnictwie elektrycznym równanie (10) sprowadza się do równania dyskutowanego przez Agrawala [8] (lewa strona staje się równa zero) i wtedy wyraźnie widać, że pole magnetyczne może stabilizować przepływ.

Pełna charakterystyka modów niestabilnych sprowadza się do dokładnego zbadania równań (5), co jest równoznaczne z badaniem problemu własnego dla operatora liniowego czwartego rzędu o zmiennych współczynnikach. Wiadomo, że jest to problem bardzo trudny.

Zbadamy więc powyższe równania w pewnym granicznym przypadku, mianowicie dla słabego pola magnetycznego  $A \ll 1$  i dobrej przewodności elektrycznej  $R_m \gg 1$  przy zaburzeniach o dużej liczbie falowej  $k \gg 1$ .

W tym granicznym przypadku równania (5) upraszczają się w wyniku dopuszczalnego przyjęcia, że  $A^2 D^2 h \ll A^2 k^2 h$  oraz  $D^2 h / R_m \ll k^2 h / R_m$  (przyjmujemy bowiem dla małych zaburzeń małość ich pochodnych), do postaci

$$(11) \quad \begin{aligned} -A^2 \varrho k^2 h &= D[\varrho W^2 D w] - \varrho W^2 k^2 w - G(D\varrho) \frac{k^2}{k_x^2} w, \\ h &= w + i \frac{k^2}{R_m k_x W} h. \end{aligned}$$

Z równania (11)<sub>2</sub> otrzymujemy

$$h = \frac{W}{W - \frac{ik^2}{k_x R_m}} w = \frac{W \left[ (U - c_r) + i \left( c_i + \frac{k^2}{R_m k_x} \right) \right]}{\left[ (U - c_r)^2 + \left( c_i + \frac{k^2}{R_m k_x} \right)^2 \right]} w = G(z) w,$$

a następnie podstawiamy to wyrażenie do pierwszego z równań (11), przy czym wprowadzamy nową zmienną zdefiniowaną jako

$$F = W^{1/2} w,$$

spełniającą identyczne warunki brzegowe, tzn.  $F(-1) = F(+1) = 0$ . Tak uzyskane równanie mnożymy stronami przez  $\bar{F}$  i całkujemy w przedziale ograniczonej przepływu  $(-1, +1)$ . W rezultacie otrzymujemy zależność

$$(12) \quad \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \varrho W [ |DF|^2 + k^2 |F|^2 ] dz + \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} D(\varrho DU) |F|^2 dz + \\ + \int_{-1}^{+1} \frac{\varrho (DU)^2 \bar{W}}{|W|^2} \left[ \frac{1}{4} - \frac{A^2 k^2 G}{(DU)^2} - J \right] |F|^2 dz = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $J(z) = -\frac{g(D\varrho)}{\varrho (DU)^2}$  — liczba Richardsona.

Przyrównując część urojoną równania (12) do zera oraz uwzględniając postać  $G(z)$ , otrzymujemy

$$(13) \quad c_i \left\{ \int_{-1}^{+1} \varrho [|DF|^2 + k^2 |F|^2] dz + \int_{-1}^{+1} \frac{\varrho (DU)^2}{|W|^2} \left[ J - \frac{1}{4} + \frac{A^2 k^2 M}{(DU)^2} \right] dz \right\} = 0,$$

gdzie

$$(14) \quad M = \frac{[(U - c_r)^2 + c_i^2] \left[ 1 + \frac{k^2}{c_i k_x R_m} \right]}{\left[ (U - c_r)^2 + c_i^2 \left( 1 + \frac{k^2}{c_i k_x R_m} \right)^2 \right]}.$$

Ponieważ dla modów niestabilnych  $c_i > 0$ , pierwszy składnik w nawiasie klamrowym równania (13) jest dodatni, to (przyjmując, że  $DU \neq 0$  w całym obszarze przepływu) przy spełnieniu warunku

$$(15) \quad J + \frac{A^2 k^2 M}{(DU)^2} > \frac{1}{4}$$

w całym obszarze przepływu, mody niestabilne występować nie mogą. Oczywiście tak jest w granicznym przypadku  $A \ll 1$ ,  $R_m \gg 1$ ,  $k \gg 1$ . Warunek (15) łatwo przechodzi w warunki stabilności przepływu uzyskane poprzednio. Przy  $A = 0$  warunek (15) redukuje się do kryterium stabilności w przepływie hydrodynamicznym [1, 2, 5]. Natomiast przy założeniu  $R_m \rightarrow \infty$  warunek (15) sprowadza się do uzyskanego przez Agravala kryterium przy słabym polu magnetycznym.

Analizując (15) widzimy, że wpływ słabego pola magnetycznego jest stabilizujący, tzn. stabilność przepływu może być oczekiwana przy liczbach Richardsona mniejszych niż  $1/4$ . Na stabilność wpływa także wielkość  $M$ , która zależy również od prędkości narastania zaburzenia  $c_i$ .

Dla modów niestabilnych o bardzo dużych prędkościach narastania  $c_i \gg \frac{k^2}{k_x R_m}$  warunek (15) przybiera postać identyczną, jak w przypadku nieskończonego przewodnictwa elektrycznego.

Z postaci zależności  $M(z)$  określonej przez (14) wynika, że dla danego modu niestabilnego charakteryzowanego przez  $k$ ,  $c_r$ ,  $c_i$  (przy założeniu  $DU \neq 0$ ;  $R_m = \text{const}$  w całym obszarze przepływu),  $\partial M / \partial z = 0$  w punkcie rezonansowym  $z_0$  ( $-1 < z_0 < +1$ ) — określonym przez warunek  $U(z_0) = c_r$  (prędkość fazowa modu równa się prędkości przepływu w tym punkcie). W punkcie tym  $M(z)$  przybiera wartość minimalną ( $\partial^2 M / \partial z^2 > 0$ ) w obszarze przepływu równą  $M_{\min} = \left( 1 + \frac{k^2}{c_i k_x R_m} \right)^{-1}$ . Widać, że dla dowolnych modów niestabilnych  $M_{\min}(c_i) < 1$ , przy czym  $M_{\min}$  osiąga wartości większe dla modów o dużych prędkościach narastania  $c_i \gg k^2 / k_x R_m$ , natomiast mniejsze dla modów o małych prędkościach narastania. Aby mody niestabilne wystąpić nie mogły, nierówność (15) winna być spełniona w całym obszarze przepływu (również w punkcie  $z_0$ ); widać wobec tego, że skończone przewodnictwo ogranicza stabilizujący wpływ pola magnetycznego ( $M_{\min} < 1$ ) na mody o dużej liczbie falowej  $k$  do przepływów z większymi liczbami Richardsona.

Reasumując powyższe stwierdzamy, że skończona wartość przewodnictwa elektrycznego w przepływie równoległym modyfikuje warunki stabilności tego przepływu.

Dla modów niestabilnych, których propagacja jest dopuszczalna, część rzeczywista prędkości fazowej winna być ograniczona warunkiem  $U_{\min} < c_r < U_{\max}$ . Warunek ten jest identyczny, jak w przypadku przepływu z doskonałym przewodnictwem elektrycznym czy też przepływu hydrodynamicznego.

Zewnętrzne pole magnetyczne nie może zabezpieczyć w pełni przepływu z dowolnym profilem prędkości  $U(z)$  przed wystąpieniem niestabilności, gdyż przy dowolnej wartości liczby Alfvena dopuszczalna jest propagacja modów niestabilnych o dostatecznie dużej prędkości narastania  $c_i > (U_{\max} - U_{\min})$ .

Przeprowadzona analiza przypadku ze słabym zewnętrznym polem magnetycznym  $A \ll 1$  i dobrą przewodnością elektryczną  $R_m \gg 1$ , pokazała, że dla modów o dużej liczbie falowej  $k \gg 1$  pole magnetyczne wykazuje efekt stabilizujący przepływ typu ścinającego. Uzyskane bowiem kryterium (15) pokazuje, że przepływ może być stabilny przy liczbie Richardsona mniejszej niż  $1/4$ .

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. W. MILES, J. Fluid Mech., **10** (1961), 496.
2. L. N. HOWARD, J. Fluid Mech., **10** (1961), 509.
3. P. G. DRAZIN, L. N. HOWARD, *Hydrodynamic stability of parallel flow of inviscid fluid*, Advances in Applied Mechanics, **9**, (1966).
4. R. BETCHOV, W. O. CRIMINALE, *Stability of Parallel Flows*, New York-London 1967.
5. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford 1961.
6. A. KENT, *Stability of laminar magnétofluid flow along a parallel magnetic field*, J. Plasma Physics, **4** (1968), 543.
7. R. A. GERWIN, Rev. and Phys., **40** (1968), 652.
8. S. C. AGRAVAL, C. S. AGRAVAL, *Hydromagnetic stability of heterogenous shear flow*, J. Phys. Soc. Japan, **1**, **27**, (1969).
9. Е. П. ВЕЛИХОВ, *Устойчивость плоского паузейлева течения идеально проводящей жидкости в продольном магнитном поле*, Ж.Э.Т.Ф., **4**, **36** (1959).

#### Резюме

#### ХАРАКТЕРИСТИКА УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРОФИЛЕМ СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ С КОНЕЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе изучается устойчивость течения со сдвигом проводящей жидкости во внешнем однородном магнитном поле. Из уравнений магнитной гидродинамики получено условие для действительной части фазовой скорости неустойчивых возмущения. Рассмотрен случай со слабым магнитным полем и хорошей проводимостью, для которого получено достаточно условие устойчивости течений по отношению к возмущениям с большим волновым числом.

## S u m m a r y

STABILITY CHARACTERISTICS OF FLOW WITH VARIABLE VELOCITY PROFILE FOR  
A FLUID WITH FINITE ELECTRICAL CONDUCTIVITY IN A MAGNETIC FIELD

The problem of stability of dissipative shear-flow of a fluid with finite electrical conductivity is investigated in the presence of applied uniform magnetic field. Starting from the magneto hydrodynamic equations, the condition for the real part of the complex phase velocity of instability modes is obtained. The analysis is also carried for the case of weak magnetic field and very high electrical conductivity. In such a case the sufficient condition for stability has been formulated.

ZAKŁAD GEOFIZYKI PAN  
WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1970 r.*

---

# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE

### Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA IV KWARTAŁ 1970 R.

W omawianym okresie odbyły się następujące zebrania naukowe:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczestników	dyskutantów
Oddział w Bydgoszczy					
1	09.11.70	T. Bogumił	Elementy analizy równań różniczkowych. Cz. II. Przyczynek do syntezy silnie nieliniowych układów drgających	13	7
2	09.11.70	Siołkowski	Wpływ sił tnących, bezwładności przekroju i zjawiska żyroskopowego na częstość drgań własnych wirujących wałów		
Oddział w Częstochowie					
3	28.10.70	J. Elsner	Metody termooanemometryczne w badaniach przepływów burzliwych	10	3
Oddział w Gdańsku					
4	08.12.70	J. Kołodko	O możliwym bezwskaźnikowym ujęciu analizy tensorowej. Cz. I.	12	3
Oddział w Gliwicach					
5	15.10.70	K. Kutarba	Turbiny parowe w elektrowniach jądrowych	27	8
6	05.11.70	J. Bursa	Niektóre reologiczne badania uplastycznionych tworzyw sztucznych	32	6
7	01.12.70	J. Kubik J. Telega	Problemy nielokalnej teorii sprężystości	16	5
8	01.12.70	J. Kubik J. Telega	O pewnych własnościach geometrycznych tensora naprężeń i odkształceń		
9	01.12.70	J. Kubik J. Telega	Naprężenie momentowe w teorii plastyczności		
Oddział w Krakowie					
10	11.11.70	M. Życzkowski	Sprawozdanie z konferencji na temat pelzania konstrukcji (Goeteborg)		
11	11.11.70	J. Murzewski	Sprawozdanie z konferencji na temat konstrukcji metalowych (Warszawa)		

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
12	11.11.70	Z. Engel	Sprawozdanie z konferencji	14	4
13	19.11.70	U. Nigul (Tallin)	Plane stress waves caused in elastic membranes by an arbitrary convex pressure wave	16	5
14	10.12.70	K. Tomaszewski	Przekładnie o ciągłej zmianie przełożenia	26	10
Oddział w Łodzi					
15	17.12.70	R. Godlewski	Hallotronowy układ pomiarowy wyważarki dynamicznej	17	6
16	17.12.70	L. Waško	Piezoelektryczny czujnik do pomiaru sił dy- namicznych	17	5
Oddział w Szczecinie					
17	23.10.70	J. Baran	Optymalizacja charakterystyki dynamicznej napędu głównego obrabiarki	19	6
18	19.11.70	R. Puzyrewski (Gdańsk)	Kondensacja pary wodnej w dyszach	10	2
19	07.12.70	W. Gutowski (Warszawa)	Regularne konstrukcje prętowe	24	4
Oddział w Warszawie					
20	16.11.70	Uno Nigul (z Instytutu Cy- bernetyki Estoń- skiej) SRR	Falowe procesy w płytach i powłokach	9	4
Oddział we Wrocławiu					
21	26.10.70	E. Milcarzewicz	Zagadnienie zmian przepływności przewo- dów wodociągowych w czasie eksploatacji	8	3
22	16.11.70	W. Nowacki	Naprężenia momentowe w termosprężystości	42	5
23	10.12.70	M. Kłapoc	Możliwości prognozowania odkształceń peł- niania na podstawie odkształceń doraźnych	11	3

### Sesje naukowe

W Oddziale Warszawskim odbyła się 9.XI.1970 r. sesja naukowa, na której wygłoszono następujące referaty:

St. Dobrociński, J. Szmelter: *Przykłady rozwiązania zadań mechaniki metodą elementów skończonych*; M. Wieczorek, J. Szmelter: *Wykresy warstwowe funkcji uzyskiwane na maszynie cyfrowej*; M. Dacko, J. Szmelter: *Macierz sztywności elementu ramy przestrzennej*.

Obecnych było 67 osób, 7 osób zabrało głos w dyskusji.

Oddział Gliwicki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zakończył w dniu 26.01.1971 dwuletni cykl wykładów, poświęconych podstawom mechaniki ośrodka odkształcalnego (por. MECH. TEOR. STOS. 3, 7 (1969), 372). Kurs wykładowy obejmował; podstawy algebry i analizy pojedynczych i podwójnych pól tensorowych; kinematykę ośrodka odkształcalnego; dynamikę ośrodka odkształcalnego; stan naprężenia; termodynamikę ośrodka odkształcalnego; teorię sprężystości; termosprężystość; hydromechanikę cieczy lepkiej; lepkość i teorię plastyczności.

Na seminariach z matematyki stosowanej referowana była problematyka niezbędna dla zrozumienia treści matematycznej wykładów. Łącznie odbyło się 51 wykładów i 34 seminaria. Inicjatorem seminarium i głównym wykładowcą był doc. dr hab. Sz. Borkowski.



## XIII POLSKA KONFERENCJA MECHANIKI CIAŁA STAŁEGO

W dniach 2–11 września 1970 r. w Jaszowcu k. Ustronia Śl. odbyła się XIII doroczna Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego zorganizowana przez Zakłady Teorii Ośrodków Ciągłych i Mechaniki Ośrodków Ciągłych IPPT PAN. Zgodnie z ustaloną tradycją, Konferencja dała okazję do przeglądu ostatnich osiągnięć mechaniki polskiej i porównania ich z wynikami uzyskanymi przez niektórych naukowców zagranicznych. Wśród ponad 150 uczestników konferencji, którzy wygłosili 125 referatów i komunikatów, byli reprezentanci placówek naukowych i uczelni Warszawy, Krakowa, Łodzi, Poznania, Wrocławia, Gdańska, oraz naukowcy z NRD (7 osób), Włoch i ZSRR (po 5 osób), Bułgarii, NRF i USA (po 3 osoby), Anglii, Czechosłowacji, Francji, Kanady i Rumunii (po 2 osoby) oraz Belgii, Szwecji i Berlina Zach. (po 1 osobie). Goście zagraniczni wygłosili ponad 1/3 zgłoszonych prac, dzięki czemu forum dyskusyjne konferencji uzyskało rangę międzynarodową. Warty jest podkreślenia atmosfera tego spotkania, sprzyjająca nawiązywaniu kontaktów naukowych i osobistych, wymianie myśli i dyskusjom.

Komitet Organizacyjny pod przewodnictwem prof. H. ZORSKIEGO zlecił przygotowanie szeregu referatów przeglądowych z różnych dziedzin mechaniki ciała stałego wybitnym znawcom zagadnień; wydaje się jednak, że nie zostało w tych referatach spełnione naturalne chyba żądanie, by podsumowywały dotychczasowy dorobek w omawianej dziedzinie, przynajmniej w skali krajowej, oraz by wytyczały kierunki dalszych badań. Na ogół referenci ograniczyli się do referowania wyników prac własnych i współpracowników.

Ponad 120 nadesłanych prac podzielono na 16 sekcji tematycznych, tworzących z grubsza dwie grupy: podstawową i zastosowań. Podział ten, istotny dla osób nie mogących uczestniczyć we wszystkich posiedzeniach konferencji, nie zawsze odpowiadał treści komunikatów; dobrze byłoby, gdyby w przyszłości organizatorzy dali referentom możliwość wyboru sekcji zgodnie z istotą zgłoszonej pracy. Zapewni to lepszą frekwencję i zaktywizuje dyskusje nad pracami, tłumione często zbytnią różnorodnością sąsiadujących ze sobą komunikatów. Istotnej zmiany wymaga też harmonogram obrad konferencji: niezwykle ograniczony czas na dyskusję prac nie sprzyja aktywności uczestników. Wykroić więcej czasu można by przez selekcję zgłaszanych prac lub przez ograniczenie tematyki, choć mogłoby to doprowadzić do utraty dotychczasowego charakteru konferencji.

Obrady rozpoczęły się od posiedzenia sekcji podstaw mechaniki kontinuum, zagajonej referatem przeglądowym J. ZAWADZKIEGO (Wrocław) na temat badań wyteżenia polimerów; A. J. M. SPENCER (Anglia) zaprezentował koncepcję kontynualnego opisu materiałów plastycznych zbrojonych włóknami nierozciągliwymi; w komunikatach Cz. WOŹNIAKA (Warszawa) i jego łódzkich współpracowników rozważono niektóre aspekty sformułowań aksjomatyki mechaniki ośrodków ciągłych.

W sekcji metod matematycznych J. RYCHLEWSKI (Warszawa) sformułował twierdzenie o ogólnej postaci izotropowych funkcji tensorowych o dowolnej walencji od argumentu o tej samej walencji; swoje poglądy na temat związku niezmienniczości relatywistycznej i przyczynowości w mechanice zreferował J. KURLANDZKI i D. ROGULA (Warszawa), wskazując na ograniczenia nakładane przez zasadę przyczynowości na ogólną postać funkcji Lagrange'a; W. PRĘCHOCKI (Warszawa) przeanalizował zagadnienie jednoznaczności rozwiązań w nieliniowych problemach teorii powłok sprężystych; zastosowania metody elementów skończonych do numerycznego modelowania płaskich zagadnień teorii sprężystości przedstawił J. SZMELTER (Warszawa).

Referatem przeglądowym z zakresu badań doświadczalnych plastyczności metalu izainauguował obrady sekcji teorii plastyczności W. SZCZEPIŃSKI (Warszawa) koncentrując się na wynikach, uzyskanych przy sprawdzaniu praw wzmocnienia metali dla złożonych stanów i złożonej historii obciążania oraz przy badaniu nośności elementów z karbami; A. DRESCHER (Warszawa) zreferował wyniki badań elastooptycznych płynięcia ośrodka sypkiego, a także przedstawił własności reo-optyczne polimetakrylanu metylu; G. MAIER (Włochy) opowiedział o zastosowaniu metody elementów skończonych do obliczeń płynięcia plastycznego materiału fizycznie niestatecznego o niestowarzyszonym prawie płynięcia oraz do budowania szacowań podatności konstrukcji i kryteriów jednoznaczności rozwiązania; T. LEHMANN (NRF) zbadał możliwości uwzględnienia efektów drugiego rzędu w procesach sprężysto-plastycznych poprzez modyfikację funkcji płynięcia i prawa odkształcenia; J. ZARKA (Francja) przedstawił próbę sformułowania prawa lepkoplastyczności, opartego o charakterystyki strukturalne siatki krystalicz-

nej metalu; M. ROMANO (Włochy) zaproponował równania konstytutywne dla skończonych odkształceń w ośrodkach sypkich; M. SAVE (Belgia) porównał rozwiązania numeryczne dla problemów nośności granicznej płyt, spełniających warunek plastyczności Hubera–Misesa, z wynikami doświadczeń; M. COMO (Włochy) przeanalizował możliwości teorii plastyczności, opartej o hipotezę Batdorf–Budiańskiego, z uwzględnieniem efektu Bauschingera. Inne komunikaty w tej sekcji dotyczyły: oceny dysypacji w procesach sprężysto-plastycznego dostosowania się konstrukcji (J. A. KÖNIG, Warszawa), sprężysto-plastycznego skręcania z rozciąganiem prętów pryzmatycznych (A. Mioduchowski, Warszawa), złożonych modeli wzmocnienia, zachodzącego przy obciążeniach cyklicznych (Cz. Goss, Z. Mróz, Warszawa), przestrzennych rozwiązań w teorii idealnej plastyczności, będących uogólnieniem prostoliniowych wachlarzy linii poślizgu w płaskich stanach odkształcenia (W. Gambin, J. Rychlewski, Warszawa), konstrukcji przedłużeń w obszary sztywne dla rozwiązań płaskich problemów tej teorii (L. Dietrich, W. Szczepiński, Warszawa), obliczeń tarcz z otworami, wykonanych ze wzmocniającego się materiału plastycznego (J. Ryś, Kraków).

W sekcji dynamiki falowej G. S. Szapiro (ZSRR) zreferował wyniki quasi-statycznych badań stopów tytanu, rozważywszy możliwości ich opisu w ramach lepkoplastyczności; w komunikatach E. Włodarczyka (Warszawa) i jego współpracowników rozpatrzono: tłumienie fal uderzeniowych w ośrodku sypkim w otoczeniu warstwy sprężystej, obciążonej cylindrycznym wybuchem, dynamikę płyty na niejednorodnym podłożu sprężysto-plastycznym, oddziaływanie kulistej fali uderzeniowej, rozprzestrzeniającej się ze zmienną prędkością w atmosferze, na półprzestrzeń sprężysto-lepkoplastyczną; w ostatniej z tych prac wykryto interesujący efekt «pompowania» naprężeń na czole fali przy zrównaniu prędkości fali atmosferycznej z prędkością fal sprężystych w półprzestrzeni; podobnym zjawiskiem, wykrytym przy rozpatrywaniu ruchomego skupionego oddziaływania kinematycznego na półprzestrzeń, zaproponowano uzasadnić powstawanie zaburzeń powierzchni płyt przy spawaniu wybuchowym, zgodnie z jakościowym modelem wysuniętym przez W. Babulę (Warszawa). Pozostałe prace, przedstawione w tej sekcji, dotyczyły: analizy zagadnień istnienia i jednoznaczności dynamicznych rozwiązań w lepkoplastyczności (J. Benda, Warszawa), opisu wyników doświadczeń dynamicznych w prętach z pozycji teorii Taylora–Kármána–Rachmatulina (J. Klepaczek, Warszawa); Z. Dźygadło (Warszawa) podsumował cykl prac własnych na temat nieliniowych wymuszonych drgań ciągłych ograniczonych układów samowzbudnych oraz przedstawił analizę nieautonomicznych drgań układu samowzbudnego z siłą styczną; H. Nowak (Warszawa) opowiedział o rezultatach pomiarów superszybkiego przebijania masywnych tarcz, proponując poprawki do wzorów opartych o teorię strumienia kumulacyjnego. Problemy dynamiczne były też częściowo przedmiotem zainteresowania sekcji teorii sprężystości i lepkosprężystości: Z. Wesołowski (Warszawa) rozważył nałożenie małych drgań na quasi-statyczny, liniowy w czasie przyrost odkształceń skończonych w ciele sprężystym Greena; C. Iwanow (Bułgaria) zbadał rozprzestrzenianie się fal sprężystych w poprzecznie izotropowym nieskończonym walcu eliptycznym; A. Blinowski (Warszawa) przedstawił koncepcję mechanicznego modelu napięcia powierzchniowego w ciele stałym, którego sprężysta energia powierzchniowa zależy od odkształcenia powierzchniowego, względnie od lokalnej krzywizny powierzchni, co powoduje dyspersję fal powierzchniowych Rayleigha; metodą małego parametru J. Michałek (Warszawa) rozwiązał problem propagacji fali uderzeniowej w dobrym przewodniku umieszczonym w jednorodnym polu magnetycznym. W innych komunikatach tej sekcji analizowano stabilność płaskiego przepływu cieczy o zmiennych własnościach lepkosprężystych, zależnych od dyfuzji charakterystyk materiałowych (S. Zahorski, Warszawa), zbadano naprężenia i odkształcenia w pasmie sprężystości niejednorodnym (B. Stachowicz, Kraków), wyprowadzono wzory na naprężenia w otoczeniu brzegu ciała sprężystego (S. Owczarek, Warszawa), obliczono naprężenia skurczowe w walcach betonowych, spowodowane wysychaniem betonu (J. Kasperkiewicz, Warszawa), zaproponowano postać lepkosprężystego opisu właściwości górotworu (D. Krzysztוף, Kraków).

W sekcji dynamiki i stateczności konstrukcji obrady rozpoczęły się referatem przeglądowym M. Życzkowskiego (Kraków) na temat stateczności i optymalnego kształtowania ze względu na stateczność prętów i słupów. W komunikatach G. Augusti (Włochy) i jego współpracowników zreferowane zostały wyniki badań dynamicznej stateczności prętów smukłych, poddanych oddziaływaniu promieniowania cieplnego, stateczności ram sztywno-plastycznych przy obciążeniach powtarzalnych oraz podstaw probabilistycznej teorii stateczności smukłych słupów przy ściskaniu. B. Storkers

(Szwecja) przeanalizował kinematykę utraty stateczności cienkościennych walcowych rur sztywno-plastycznych pod ciśnieniem; A. RACZEW (Bulgaria) rozważył stateczność skończonych odkształceń tarcz masywnych z materiału Mooneya; J. SAMBORSKI (Warszawa) zbadał stateczność odkształceń skończonych walca sprężystości skokowo niejednorodnego; W. WOJEWÓDZKI (Warszawa) przedyskutował dynamiczne wyboczenie powłok sztywno-lepkoplastycznych pod działaniem impulsu ciśnienia.

W referacie przeglądowym sekcji płyt i powłok A. SAWCZUK (Warszawa) przedstawił ostatnie osiągnięcia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok sztywno-plastycznych; A. L. GOLDENWEJZER (ZSRR) omówił własności stanu naprężenia w cienkich ciałach sprężystych, wskazując przypadki obciążeń i warunków brzegowych, dla których nie zachodzi asymptotyka kirchhoffowska; J. W. NIEMIROWSKI (ZSRR) wygłosił prace o równaniach konstytutywnych dla odkształceń sprężysto-plastycznych zbrojonych płyt i powłok oraz o nośności granicznej żelbetowych osiowo-symetrycznych płyt i powłok; A. CALLEGARI (USA) przebadał w ramach teorii Föppla nieliniowe wyboczenia membran kołowych przy złożonych obciążeniach. Szeroko poruszane były zastosowania metod numerycznych: dla zagadnień termosprężystej stateczności powłok i konstrukcji (D. HARTIG, NRF), przy rozwiązywaniu płyt o zmiennej grubości (A. JAWORSKI, Warszawa), w problemach odkształcenia sprężysto-plastycznej powłoki przy skończonych ugięciach (Z. WASZCZYŹYŃ, Kraków) lub przy skończonych odkształceniach z uwzględnieniem efektu Bauschingera (J. WILK, Kraków), w zagadnieniach dynamiki wirujących powłok obrotowych (R. WAGNER, NRF) oraz przy obliczaniu napięć wewnętrznych w powłokach, wywołanych przez odkształcenia wstępne (R. CZARNOTA-BOJARSKI, Warszawa); J. KRZEMIŃSKI (Warszawa) określił prędkości krytyczne obciążeń skupionych, poruszających się wzdłuż sprężystej powłoki walcowej ze stałą prędkością; Z. KURLANDZKA (Warszawa) podała rozwiązanie dla sprężystej powłoki toroidalnej.

Zagadnienia nośności granicznej i optymalnego projektowania konstrukcji były omawiane na posiedzeniach, zainaugurowanych referatem przeglądowym M. SAVE'A (Belgia), w którym omówiono projektowanie konstrukcji plastycznych, obciążonych siłami ruchomymi, według kryterium minimalnego ciężaru. A. BORKOWSKI (ZSRR) zastosował metody programowania matematycznego do optymalnego projektowania płyt w stanie granicznym; G. SZEFER (Kraków) sformułował w terminach matematycznej teorii sterowania ogólny problem optymalizacyjny w mechanice ciał odkształcalnych; Z. MRÓZ (Warszawa) omówił problemy optymalizacji konstrukcji wielofazowych; analizę płyt w stanie zarysowania przedstawił A. BRANDT (Warszawa). W szeregu komunikatów podano rozwiązania poszczególnych problemów: statyczne pola momentów dla płyt zbudowali W. SZCZEPIŃSKI i W. GUTKOWSKI (Warszawa); rozkład cięgien sprężających płaskie ciało sprężyste obliczył W. MARKS (Warszawa); optymalizację ustrojów prętowych wstępnie napiętych rozważył A. NIEMIERKO (Warszawa); J. MISAŁ (Warszawa) zreferował wyniki badań doświadczalnych nośności granicznej i mechanizmów zniszczenia zbiorników; S. ŁUKASIEWICZ (Warszawa) porównał wyniki doświadczeń z obliczeniami elementów wprowadzających obciążenia skupione w konstrukcje cienkościenne; optymalny przekrój rury pod działaniem ciśnienia i zginania określiła D. ALBIŃSKA (Kraków), zaś nośność graniczną rury przy złożonym obciążeniu obliczył w sposób przybliżony J. SKRZYPEK (Kraków); problem optymalnego usytuowania lokalnych umocnień powłoki ze względu na jej stateczność rozważył S. BUĆKO (Kraków); optymalne kształty ściskanych prętów sprężystych i sprężysto-plastycznych znalazł A. GAJEWSKI (Kraków); zagadnienie optymalizacji belek spoczywających na podłożu odkształcalnym rozważył M. MAKOWSKI (Kraków).

Znaczny wzrost zainteresowania problematyką struktur siatkowych, w porównaniu z poprzednimi konferencjami, spowodował utworzenie specjalnej sekcji dla tych zagadnień. H. FRĄCKIEWICZ, W. GUTKOWSKI i Cz. WOŹNIAK (Warszawa) rozważyli w referacie przeglądowym z tej dziedziny powierzchniowe konstrukcje prętowe z materiału sprężystego, w szczególności geometrię w opisie dyskretnym; zagadnienia stateczności siatek powierzchniowych omówili w swych komunikatach H. FRĄCKIEWICZ oraz S. KONIECZNY (Łódź); problemy optymalizacyjne tej teorii sformułował W. DZIENISZEWSKI (Warszawa); M. KLEIBER (Warszawa) wyprowadził równania równowagi sprężystych powłok siatkowych o małej wyniosłości, wspólnie zaś z M. KWIECIŃSKIM (Warszawa) rozważył niesprężyste zachowanie siatkowych ustrojów nośnych; J. BAUER i W. GUTKOWSKI (Warszawa) rozwiązyli problem biegunowej płyty prętowej, obciążonej siłami prostopadłymi; P. KLEMM (Łódź) wyprowadził równania podstawowe dla sprężystych włóknistych płyt siatkowych o sztywnych węzłach, zaś A. WACHECKA (Warszawa) przeanalizowała liniowy wariant teorii ciał sprężystych z inkluzjami siatkowymi oraz omówiła niektóre zagadnienia brzegowe dla tych ciał.

W sekcji teorii pełzania N. N. MALININ (ZSRR) przedstawił wariant teorii pełzania ze wzmocnieniem anizotropowym; D. R. AXELRAD (Kanada) zreferował probabilistyczną teorię ośrodków reologicznych z mikrostrukturą; M. CHRZANOWSKI (Kraków) ujął we wspólnym opisie wszystkie stadia pełzania, wychodząc z hipotezy jednoczesności procesów wzmocnienia i zniszczenia; w pozostałych pracach zreferowano rozwiązania problemów teorii pełzania i konsolidacji przy pełzaniu (B. LECHOWICZ i G. SZEFER, Kraków), zagadnienia Boussinesque'a dla konsolidującej się półprzestrzeni (Z. KOŃCZAK i Z. SOBECZYŃSKA, Poznań), zaś W. DERSKI (Poznań) dokonał przeglądu teorii konsolidacji ciał porowatych, opartej o model Biota.

W sekcji termosprężystości H. ZORSKI (Warszawa) zaproponował równania, wiążące małe, chaotyczne drgania sprężyste, nałożone na skończone przemieszczenia w ciele sprężystym, z temperaturą, rozumianą jako ich energia średnia, co prowadzi do uogólnienia prawa przepływu ciepła oraz interesujących przypadków asymptotycznych; A. GAŁKA (Warszawa) omówił termosprężystość ciał o złożonej strukturze.

Referat przeglądowy sekcji mikrostruktury, przygotowany przez W. NOWACKIEGO (Warszawa), dotyczył dynamicznych zagadnień mikropolarnej sprężystości. Znaczna część prac dotyczyła problemów teorii ośrodka Cosseratów: M. HLAVAČEK (Czechosłowacja) rozważył jednoznaczność rozwiązań problemów początkowo-brzegowych w tej teorii; podobne zagadnienie przeanalizował J. IGNACZAK (Warszawa) dla problemów dynamicznych z siłowymi i momentowymi warunkami brzegowymi oraz dystrybucyjnymi rozkładami pól w chwili początkowej; Z. OLESIAK (Warszawa) uogólnił równania Beltramięgo-Mitchella na przypadek mikropolarnej sprężystości; J. STEFANIAK (Poznań) wyprowadził warunki na funkcje rozwiązujące dla zagadnień osiowo-symetrycznych teorii Cosseratów, zaś wspólnie z T. HOFFMANNEM i J. SKIBIŃSKIM (Poznań) zbadał ukośne odbicie podłużnej fali płaskiej od powierzchni o swobodnych obrotach; w pozostałych pracach proponowano podejście probabilistyczne do teorii ciał ze strukturą wewnętrzną (J. W. PROVAN, Kanada), zastosowanie metody pseudokontinuum do opisu modeli krystalicznych (Cz. RYMARZ, Warszawa); V. KAFKA (Czechosłowacja) porównał wyniki doświadczeń z modelem odkształceń sprężysto-plastycznych ciała z mikrostrukturą.

Teorii defektów i dyslokacji poświęcone były referaty T. MURA (USA) i P. T. HEALDA (Anglia); problemy dynamiki dyslokacji i defektów strukturalnych omówili J. KOSSECKI (Warszawa) i A. SZCZEPAŃSKI (Warszawa); A. GOŁĘBIEWSKA (Warszawa) wyprowadziła wzory na energię własną i energię wzajemnego oddziaływania kink-dyslokacji w modelu pseudokontinuum; E. KOSSECKA (Warszawa) rozpatrzyła powierzchniowe układy sił podwójnych, osobliwości przez nie generowane i postać nieciągłości przemieszczeń w warstwie, jako źródła generujące dyslokację.

Na badaniu ośrodków wielofazowych skupił swą uwagę Cz. EIMER (Warszawa), który określił wpływ dystorsji cieplnych poszczególnych faz na makroskopowe zmiany objętości; K. HERRMANN (NRD) przeanalizował naprężenia własne w dwuskładnikowych ośrodkach włóknistych; B. ORŁOWSKA (Warszawa) zaproponowała makroskopową teorię ośrodków o strukturze okresowej, zaś A. TRZĘSOWSKI (Warszawa) rozpatrzył wpływ losowości geometrii oraz rozmiarów ciała na moduły sprężystości ciała wielofazowego.

Ogólnym rysem prac podstawowych przedstawionych na konferencji jest wzajemne przenikanie przeciwnie dotąd traktowanych tendencji w mechanice: metod fenomenologicznych — do teorii ośrodków złożonych oraz metod fizykalnych — do podbudowy teorii ciał prostych. Prace z dziedziny zastosowań, mimo znacznego postępu w tej dziedzinie, wciąż jeszcze charakteryzują się zbyt małym wykorzystaniem metod numerycznych i maszyn cyfrowych; te ostatnie częstokroć spełniają jedynie rolę «dużych arytmometrów», gdyż nadal panuje przestarzała tendencja do wyprowadzania za wszelką cenę rozwiązań w postaci zamkniętej, co siłą rzeczy istotnie ogranicza możliwości teorii. Przykładem tej tendencji są liczne próby zbudowania rozwiązań metodą małego parametru, prowadzące do tasiemcowych wzorów, czasami bezużytecznych rachunkowo i merytorycznie ze względu na wolną zbieżność szeregów i ewentualność niestateczności w otoczeniu zerowego przybliżenia.

Warto zasygnalizować pocieszący objaw wzrostu liczby prac doświadczalnych, popartych rzetelną analizą teoretyczną wyników pomiarów, jak też prac teoretycznych, szerzej sięgających do danych eksperymentalnych dla uzasadnienia wniosków; wiele prac teoretycznych zostało zainspirowanych przez konkretne problemy techniczne i technologiczne i ta tendencja powinna w przyszłości ulec dalszemu wzmocnieniu.

*Jerzy Najar (Warszawa)*

**POLSKO-UKRAIŃSKA KONFERENCJA**  
**«NIEKLASYCZNE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI»**

Konferencja ta odbyła się w Warszawie, w Pałacu Staszica, w dniach 26–29 października 1970 r. i została zorganizowana przez Komitet Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN. Na Konferencję, której tematem były zagadnienia: termosprężystości i konsolidacji, koncentracji naprężeń oraz niesymetrycznej teorii sprężystości, przybyło 10 uczonych reprezentujących ośrodki naukowe Kijowa i Lwowa. Z naszej strony uczestniczyło w niej około 40 pracowników nauki, prawie wyłącznie z Warszawy. Wygłoszono 21 referatów:

- A. D. KOWALENKO (Kijów, w zastępstwie nieobecnego Autora referat wygłosił A. F. ULITKO): Rozwój badań w dziedzinie termomechaniki ciała stałego odkształcalnego w Ak. Nauk USRR,  
 W. NOWACKI (Warszawa): Zagadnienia termosprężystości ośrodka mikropolarnego,  
 W. T. HRINCZENKO i A. F. ULITKO (Kijów): Metoda funkcji własnych (wektorowych) w przestrzennych zagadnieniach termosprężystości i sprzężonej elektrosprężystości,  
 W. DERSKI (Poznań): Zagadnienia teorii konsolidacji,  
 Z. OLESIAK (Warszawa): Zagadnienie ograniczonego stempla,  
 H. KIT (Lwów): Koncentracja naprężeń cieplnych w otoczeniu makrodefektów,  
 A. GAŁKA (Warszawa): Termosprężystość ośrodków o złożonej strukturze,  
 G. N. SAWIN (Kijów, w zastępstwie nieobecnego Autora referat wygłosił A. N. HUŻ): Badania w dziedzinie koncentracji naprężeń wokół otworów, prowadzone na Ukrainie,  
 J. PODSTRYHACZ (Lwów): Fizyczno mechaniczny stan ciała odkształcalnego z uwzględnieniem procesów termodyfuzji,  
 A. N. HUŻ, W. T. GOŁOWCZAN (Kijów): Dynamiczne zagadnienia koncentracji naprężeń w ośrodkach wielospójnych,  
 A. N. HUŻ, K. I. SZNERENKO (Kijów): Koncentracja naprężeń wokół otworów w powłokach, wykonanych z materiałów złożonych,  
 Z. OLESIAK (Warszawa): Szczelina w warstwie sprężysto plastycznej,  
 M. MATCZYŃSKI (Warszawa): Zagadnienie dwóch szczelin w ośrodku sprężystym,  
 Z. WESOŁOWSKI (Warszawa): Małe drgania ciała sprężystego odkształcającego się w czasie,  
 G. A. WAN FO FY (Kijów): O podstawach kontynualnej teorii materiałów złożonych,  
 H. FRĄCKIEWICZ, W. GUTKOWSKI, Cz. WOŹNIAK (Warszawa): Powierzchniowe układy prętowe,  
 J. IGNACZAK (Warszawa): Równania tensorowe ruchu dla ośrodków sprężystych z mikrostrukturą,  
 W. PANASIUK (Lwów): Zagadnienia teorii nośności granicznej ciał kruchych ze szczelinami,  
 M. SOKOŁOWSKI (Warszawa): Przegląd prac polskich dotyczących naprężeń momentowych ze związanymi obrotami,  
 Cz. RYMARZ (Warszawa): Dyspersyjny ciągły model kryształu jonowego.

Po referatach na ogół wywiązywała się rzeczowa dyskusja. Wydano, w małym nakładzie, streszczenia zgłoszonych prac, w języku polskim i rosyjskim. Niestety, z powodu zmiany składu delegacji radzieckiej, 3 streszczenia nie zostały uwzględnione.

Uczestnicy Konferencji uznali organizowanie takich dwustronnych sympozjów za pożyteczne również w przyszłości.

*Z. Olesiak (Warszawa)*

**ROZSTRZYGNIECIE KONKURSU ODDZIAŁU GLIWICKIEGO PTMTS**

Na ogłoszony w 1970 r. konkurs Oddziału Gliwickiego na najlepszą pracę doświadczalną z mechaniki wpłynęło 14 prac.

Sąd konkursowy w składzie: profesorowie T. KOCHMAŃSKI, Z. BUDZIANOWSKI, L. MÜLLER oraz docenci J. ANTONIAK, Sz. BORKOWSKI, J. BURSA i J. FOLWARCZNY postanowił nie przyznawać pierwszej nagrody,

przyznać dwie równorzędne drugie nagrody w wysokości po 6500 zł każda, cztery równorzędne trzecie nagrody w wysokości 3500 zł każda oraz pięć wyróżnień honorowych.

Nagrody drugie przyznano: A. DRESZEROWI i B. MICHALSKIEMU za pracę *Reologiczne, mechaniczne i optyczne własności polimetakrylanu metylu w warunkach złożonej historii obciążenia*, oraz J. KLEPACZCE za pracę *Zmodyfikowany pręt Hopkinsona*.

Nagrody trzecie otrzymali następujący autorzy prac: M. BIJAK-ŻOCHOWSKI *Statystyka sił dynamicznych w przekładniach zębatych*, J. STUPNICKI *Badanie smarowania elastohydrodynamicznego metodą elastooptyczną*, A. WILK *Określenie nadwyżek dynamicznych w kołach zębatych przy szybkościach rezonansowych*, J. WRANIK *Wyznaczanie zmian stałych sprężystości materiału występujących na grubości modelu gipsowego*.

Wyróżnienia otrzymali autorzy prac: W. BŁAŻEWICZ *Wpływ naprężeń własnych na prędkość propagacji pęknięcia zmęczeniowego w blachach duralowych*, J. HALAUNBRENNER, M. KMIECIK *Zjawisko rezonansu w kontakcie ciał sprężystych*, E. KAJRUNAJTYS *Badania modeli układów prętowych metodą eliminacji*, J. KAPUŚCIŃSKI *Modelowanie własności lepkosprężystych polimerów*, Z. TERESZKOWSKI *Doświadczalna metoda wyznaczania obciążeń krytycznych w płytach*.

## OGŁOSZENIE

Komitet Inżynierii PAN przy współpracy Komitetu Nauki PZITB organizuje dwu lub trzydniowe sympozjum krajowe na temat mechaniki konstrukcji ciągnowych w pierwszej połowie czerwca 1972 roku, przypuszczalnie w Jadwisinie k. Warszawy w Ośrodku PZITB.

Celem sympozjum jest przedstawienie zasadniczych problemów dotyczących mechaniki konstrukcji ciągnowych, a także projektowania i wykonawstwa tych konstrukcji. Uczestnikami sympozjum będą pracownicy instytutów naukowych, wyższych uczelni, biur projektowych i przedsiębiorstw wykonawczych.

Prosimy o zgłaszanie referatów i komunikatów obejmujących oryginalne prace w zakresie ustrojów ciągnowych i dotyczące:

- metod analizy statycznej i dynamicznej (w zakresie sprężystym, plastycznym, itp.),
  - projektowania (zagadnień wyboru i optymalizacji kształtu, metod obliczeniowych, badań eksperymentalnych, weryfikacji modelowych pod obciążeniem statycznym i dynamicznym),
  - wykonawstwa (zagadnień montażowych, realizacji wstępnego napinania cięgien itp.).
- Proponujemy następujące terminy zgłaszania uczestnictwa, referatów i komunikatów:
- zgłoszenie uczestnictwa oraz przesłanie krótkiego streszczenia pracy (około 1 strony maszynopisu) do dnia 1 lutego 1972 r.,
  - nadesłanie pełnych tekstów referatów i komunikatów (objętości do 15 stron maszynopisu) do dnia 15 kwietnia 1972 r.

Korespondencję prosimy adresować:

*Dr inż. Stefan Jendo*  
*Sekretarz naukowo-organizacyjny sympozjum,*  
*Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN,*  
*Warszawa I, ul. Świętokrzyska 21, pokój 408.*

## SYMPOZJON POŚWIĘCONY REOLOGII

### K o m u n i k a t

Oddział Wrocławski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej zaprasza do wzięcia udziału w V Sympozjone poświęconym reologii, przewidywanym w październiku 1972 r. we Wrocławiu.

Planuje się przedstawienie referatów w następujących działach:

1. Reologia metali i polimerów.
2. Reologia konstrukcji.
3. Reologia betonu.
4. Reologia gruntów.

Termin zgłaszania referatów (tytuł i kilkunastokrotny opis) upłynął 31 maja 1971 r.

Przewidywana objętość referatów 10 stron, w tym rysunki (fotografie wykluczone). Do osób, które zgłosiły referaty Komitet Organizacyjny Sympozjonu prześle w terminie do dnia 30.X.71 r. szczegółowe wymagania co do sposobu przygotowania tych referatów (celem ułatwienia późniejszych prac redakcyjnych).

Termin nadsyłania referatów na adres Komitetu Organizacyjnego najpóźniej do dnia 31 marca 1972 r.

Decyzje o przyjęciu referatów zostaną podjęte w kwietniu 1972 r. Referaty będą wydane na prawach rękopisu i rozesłane uczestnikom przed rozpoczęciem Sympozjonu. Technika i sposób wydania będą ustalone po zebraniu materiałów.

Zgłoszenia i wszelką korespondencję prosimy kierować na adres: Komitet Organizacyjny Sympozjonu poświęconego Reologii, Wrocław, ul. Smoluchowskiego nr 25, Gmach Hutniczy pok. 204.

*Przewodniczący*  
*Komitetu Organizacyjnego*  
(—)Prof. dr inż. Adam Mitzel

*Przewodniczący*  
*Wrocławskiego Oddziału PTMTS*  
(—)Prof. dr inż. Otton Dąbrowski

#### PLANOWANE SYMPOZJA MIĘDZYNARODOWEJ UNII MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (IUTAM)

##### 1972

1. Symposium on Flow-Induced Structural Vibrations,  
Niemiecka Republika Federalna, Przewodniczący Komitetu Naukowego Sympozjonu: prof. E. Nadschauer; termin: bezpośrednio przed lub po XIII Kongresie w Moskwie (21–26 sierpnia 1972).
2. Stability of Mechanical Stochastic Systems,  
Warwick University, Coventry (Wielka Brytania), czerwiec 1972.

##### 1973

1. Turbulent Diffusion and Environmental Pollution,  
Przewodniczący: Dr F. N. Frenkiel, U.S.A., kwiecień lub maj 1973.
2. Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies,  
przybliżony termin jesień 1973. Miejsce i organizator sympozjonu jeszcze nie ustalone.
3. Optimization in Structural Design,  
Warszawa, sierpień lub wrzesień 1973.
4. Photoelastic Effect and its Applications,  
przewodniczący: prof. J. Kestens, Belgia, kwiecień lub maj 1973.
5. Problems in Relation to Contact Problem,  
decyzja będzie podjęta w terminie późniejszym.

Sympozja w roku 1973 zostaną dokładniej sprecyzowane podczas obrad Zgromadzenia Ogólnego IUTAM, które odbędzie się w Moskwie w terminie Kongresu Mechaniki Stosowanej (21–26 sierpnia 1972). Informację o Sympozjach IUTAM w roku 1971 i pozostałych w roku 1972 podaliśmy w numerze 1, 8 (1970), 97-98 MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ.





## INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronice z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana. Objętość prac oryginalnych nie powinna w zasadzie przekraczać 1 ark. wyd. (20 stron masz.), zaś prac przeglądowych — 2 ark. wyd. (40 stron masz.).

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imiom, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2, itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.



**W następnym zeszycie ukażą się prace:**

- N. J. CYGANOWA, Pewne problemy ewolucji różniczkowych zasad wariacyjnych w XIX i XX wieku  
Некоторые вопросы развития дифференциальных вариационных принципов в XIX-XX веках  
Certain problems of development of differential variational principles in the 19th and 20th century
- J. KŁEPACZKO, Zmodyfikowany pręt Hopkinsona  
Модифицированный стержень Гопкинсона  
The modified split Hopkinson pressure bar
- J. KRUSZEWSKI, Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych  
Применение метода жестких конечных элементов к расчётам частот колебаний судовых систем  
Application of the rigid finite elements method to calculation of natural vibration frequencies of ship structures
- Z. HANDZEL, Hipoteza dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń  
Гипотеза разрушения микрообъёма при действии переменных напряжений  
Hypothesis of decohesion of micro-volume under variable stress
- B. WIENIASZ, Naprężenie zwilżające działające na pęcherzyk parowy w czasie wrzenia  
Напряжения смачиваемости, действующие на пузырек пара во время кипения  
Wetting tensions acting on a vapor bubble in boiling process

Cena zł 30.—

KE-3/71

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

---

Mech. Teor., T. 9, z. 3, s. 333—446, Warszawa 1971, Indeks 36712