

71-720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 9 • ZESZYT 2



Pw^a

WARSZAWA 1971

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

W. BOGUSZ, Zastosowanie równania Hamiltona-Jacobiego do stabilizacji układów mechanicznych Применение уравнения Гамильтона-Якоби для стабилизации механических систем Application of Hamilton-Jacobi equation for stabilization of mechanical systems	231
A. DRESCHER, B. MICHAŁSKI, Reologiczne mechaniczne i optyczne własności polimetakrylanu metylu w warunkach złożonej historii obciążenia Реологические механические и оптические свойства полиметил-метакрилата в условиях сложной истории нагружения Rheological mechanical and optical properties of a polymethyl-metacrylate under conditions of complex loading history	241
R. GRYBÓŚ, Zależność maksymalnej siły uderzenia od współczynnika restytucji Зависимость максимальной силы удара от коэффициента восстановления Dependence of the maximum impact force on the restitution coefficient	263
A. WŁOCHOWICZ, Z. KUBACKI, przyczynek do mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego żyłek poliamidowych О механизме усталостного разрушения полиамидных лесок A contribution to the mechanism of the fatigue fracture of Polyamide 6 fibres	285
E. ZŁATANOWA, Stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego przy skręcaniu Устойчивость предварительно напряженного кругового цилиндра при кручении Stability of prestressed circular cylinder under torsion	299
E. ZŁATANOWA, Wpływ skończonego wstępnego sprężenia na sztywność rury Влияние предварительной конечной деформации на жесткость трубы Influence of finite initial strains on the rigidity of tube	309
J. BIAŁKIEWICZ, W. SZCZEPIŃSKI, О mechanice kucia w matrycy О механикековки в матрице On the mechanics of the forging process in dies	321
BIULETYN INFORMACYJNY	329

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK
--

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 9 • Z E S Z Y T 2



W A R S Z A W A 1971
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

W a r s z a w a, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (595+105) egz. Arkuszy wydawn. 8,5. Arkuszy drukarskich 6,75. Papier druk. sat. III kl., 90 g. 70×100. Oddano do składania 21.I.1971 r. Druk ukończono w maju 1971 r. Zam. 121/71 U-90 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

WŁODZIMIERZ BURZYŃSKI — WSPOMNIENIE POŚMIERTNE*

Profesor zwyczajny mechaniki technicznej, docent habilitowany mechaniki kontynuów, doktor nauk technicznych, inżynier dróg i mostów Włodzimierz BURZYŃSKI — urodził się w Przemyślu dnia 29 kwietnia 1900 r. Do szkoły średniej uczęszczał w Przemyślu, gdzie w 1918 r. złożył egzamin dojrzałości. Studia wyższe odbył na Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej Politechniki Lwowskiej; dyplom inżyniera dróg i mostów uzyskał w 1925 r. Odbył ponadto dodatkowe studia w latach 1928/29 na Uniwersytecie w Getyndze i Politechnice w Zurichu, jako stypendysta ówczesnego Funduszu Kultury Narodowej.

Prof. dr inż. Włodzimierz BURZYŃSKI od roku 1922 do roku 1939 pracował bez przerwy na Politechnice Lwowskiej przechodząc kolejne stopnie naukowe w Katedrze Mechaniki. Samodzielne wykłady rozpoczął prof. BURZYŃSKI w 1927 r. prowadząc je w zakresie różnych gałęzi mechaniki na Wydziale Mechanicznym oraz Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej Politechniki Lwowskiej.

Prof. BURZYŃSKI posiadał wszystkie stopnie akademickie przewidziane w polskim szkolnictwie wyższym. Na doktora nauk technicznych promował się w Politechnice Lwowskiej 5 maja 1928 r., na docenta mechaniki kontynuów habilitował się również w tej uczelni 8 listopada 1933 r. Na profesora nadzwyczajnego Katedry Mechaniki Technicznej na Wydziale Mechanicznym Politechniki Lwowskiej powołany został 29 września 1934 r.

Okres wojenny i początek okresu powojennego, tj. czas od września 1939 r. do lipca 1946 r. spędził prof. BURZYŃSKI we Lwowie sprawując obowiązki profesora Katedry Mechaniki Technicznej, ponadto dziekana Wydziału Mechanicznego, a także dyrektora względnie zastępcy dyrektora Lwowskiego Instytutu Politechnicznego, na który zamieniona została Politechnika Lwowska po objęciu jej przez władzę radziecką.

W połowie lipca 1946 r. przybył prof. BURZYŃSKI do Gliwic, gdzie objął stanowisko profesora zwyczajnego i kierownika Katedry Mechaniki Technicznej na Wydziale Mechanicznym Politechniki Śląskiej, którą to katedrę zorganizował, stawiając ją na nader wysokim poziomie naukowym i dydaktycznym, łącznie z nowoczesnym laboratorium wytrzymałościowym. Przygotował tutaj do pracy naukowej i dydaktycznej w zakresie mechaniki technicznej cały zastęp pracowników, a między nimi wielu dzisiejszych docentów i dwóch profesorów. Był również dyrektorem Zakładu Badania Materiałów Politechniki Śląskiej, ponadto współorganizatorem Poradni Racjonalizatorskiej przy tym zakładzie.

Od roku 1936 był prof. BURZYŃSKI stałym członkiem Polskiego Komitetu Normalizacyjnego i przewodniczył jednej z Podkomisji Komitetu. W 1928 r. został zaproszony do

* Wygłoszone na posiedzeniu Oddziału PTMTS dn. 5.X.1970 r. przez prof. dr inż. M. Janusza.

współpracy z wydawnictwem «Zentralblatt für Mechanik». W 1938 r. został mianowany członkiem korespondentem ówczesnej Akademii Nauk Technicznych oraz współpracownikiem Komisji Technicznej Polskiej Akademii Umiejętności. Był członkiem czynnym Śląsko-Dąbrowskiego Towarzystwa Naukowego i członkiem założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. W dniu 28 maja 1966 r. na wniosek Oddziału Gliwickiego tego Towarzystwa prof. dr inż. Włodzimierz BURZYŃSKI został obrany członkiem honorowym Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

Prof. BURZYŃSKI wydał drukiem ponad 30 oryginalnych prac naukowych w zakresie mechaniki ośrodków ciągłych. Rezultatami swoich prac przyczynił się bardzo poważnie do rozwoju nauki polskiej w danej dziedzinie, rozstawił jej imię w skali ogólnokrajowej oraz poza granicami kraju.

Jako badacz naukowy najwyższego stylu ujawnia się Włodzimierz BURZYŃSKI przede wszystkim w swoich pracach traktujących o wyężeniu. Prace te kwalifikują ich autora do grona najpoważniejszych znawców tej gałęzi wiedzy i zapewniają mu najbardziej poczesne miejsce w literaturze przedmiotu. Można z całą pewnością twierdzić, że w pracach swoich nad wyężeniem podążał BURZYŃSKI po linii wytyczonej przez swojego mistrza Maksymiliana Tytusa Hubera, a prowadzącej do ustalenia hipotezy wyężenia możliwie najbardziej zgodnej z wynikami doświadczalnymi. Ideę hipotez wyężenia usiłował BURZYŃSKI skutecznie rozszerzyć w kierunku postawienia hipotezy uniwersalnej, nadającej się równocześnie do materiałów plastycznych i kruchych. Ukoronowaniem tych prac było *Studium nad hipotezami wyężenia*, Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1929. W ślad za tą pracą poszły dalsze o tematyce podobnej, jak *Teoretyczne podstawy hipotez wyężenia*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1929 oraz *Über die Anstrengungshypothesen*, Schweizerische Bauzeitung, 1930 r.

Drugą grupę prac naukowo-badawczych prof. BURZYŃSKIEGO stanowią prace z zakresu teorii sprężystości. Są to prace pionierskie, jak na czasy, w jakich powstały, nie zatracają jednak swojej wartości i obecnie. Odnaczają się one szczególnie precyzyjną analizą matematyczną, wynikającą z głębokiego merytorycznego ujęcia treści rozwiązywanych zagadnień. Interesuje się BURZYŃSKI w tej grupie swoich prac specjalnie metodami energetycznymi, a wśród nich dwoma twierdzeniami minimalnymi teorii sprężystości i zastosowaniem ich do rozwiązań przybliżonych. Można tu wyróżnić następujące pozycje: *O ograniczeniach twierdzenia Castigliano*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1931; *O rozwinięciu potencjału sprężystości*, Akademia Nauk Technicznych, Lwów 1932; *O dwóch twierdzeniach minimalnych teorii sprężystości i zastosowaniu ich do rozwiązań przybliżonych*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1933; *Przybliżone metody teorii sprężystości*, Życie Techniczne, Lwów 1934. Po wojnie pojawiła się jedna z poważniejszych prac prof. BURZYŃSKIEGO pt. *O niektórych niedomaganiach i koniecznych uzupełnieniach de Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych*, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1951.

Niezależnie od prac ostatnio wymienionych, pojawił się cały szereg innych prac teoretycznych i praktycznych. Niezależnie bowiem od pracy czysto naukowej i dydaktycznej prof. BURZYŃSKI miał rozległą praktykę zawodową w dziedzinie budownictwa lądowego i wodnego, jak budowy dróg, tuneli, mostów, przegród dolin itp. Był autorem kilkunastu poważnych projektów budowlanych, między innymi był posiadaczem rekordu rozpiętości w budownictwie żelbetowym w Polsce z tytułu wykonania projektu mostu łukowego na

Sole w Tresnej-Czernichowie i kierownictwa budowy tego mostu. Występował często jako rzeczoznawca przy budowie wielkich obiektów, np. przegród dolin w Porąbce i Rożnowie.

W powiązaniu z działalnością inżyniersko-konstrukcyjną prof. BURZYŃSKIEGO można wymienić dla przykładu następujące jego publikacje: *Z teorii luków bezprzegubowych*, *Księga pamiątkowa ku uczczeniu prof. dra inż. M. Thulliego*, Lwów 1931; *Nowa metoda obliczania i wykonania łuku betonowego i żelbetowego*, Referat na II Zjazd Inżynierów Budowlanych w Katowicach, 1935 r.; *W sprawie naprężeń w przegrodach*, *Czasopismo Techniczne*, Lwów 1931.

Wśród publikacji naukowych prof. BURZYŃSKIEGO znajdują się ponadto pozycje z zakresu wybożenia, także posprężystego, z dziedziny zagadnień płytowych, teorii powłok cienkościennych i inne.

Prof. BURZYŃSKI był świetnym wykładowcą i wychowawcą wielu pokoleń studenckich oraz inżynierskich. Był autorem dwóch skryptów z *Mechaniki Ogólnej* i z *Wytrzymałości Materiałów*.

Należy jeszcze na zakończenie zauważyć, że po przybyciu w 1946 r. do Gliwic i objęciu stanowiska profesora zwyczajnego i kierownika Katedry Mechaniki Technicznej na dawnym Wydziale Mechanicznym Politechniki Śląskiej, prof. BURZYŃSKI był bardzo aktywny naukowo, dydaktycznie i zawodowo aż do unieruchomienia go przez obłożną i nieuleczalną niestety chorobę w 1949 r. Opublikował w tym czasie 5 prac naukowych, w tym jedną nader poważną na temat de Saint-Venantowskiej teorii prętów prostych. Równoległe do swoich zajęć naukowo-dydaktycznych współpracował prof. BURZYŃSKI bardzo intensywnie z odbudowującym się powojennym przemysłem polskim wydając dużo orzeczeń naukowych i ekspertyz, przeprowadzając wiele obliczeń, jak dźwigów portowych dla Gdyni i Szczecina, fundamentów pod maszyny, kominów itp.

Z powodu trwałego i ciężkiego schorzenia przestał prof. BURZYŃSKI pracować pod koniec 1949 r. i 17 lipca 1970 r. zmarł ku wielkiemu żalowi nas wszystkich, Jego dawnych studentów, uczniów i współpracowników, ku wielkiej stracie nauki polskiej. Jednakowoż dawni studenci i współpracownicy prof. BURZYŃSKIEGO są dzisiaj w niemałej ilości doktorami nauk technicznych oraz samodzielnymi pracownikami nauki i kształcą dalsze pokolenia studenckie oraz dalsze pokolenia pracowników naukowo-badawczych, W ten sposób powstała szkoła BURZYŃSKIEGO jako kontynuacja szkoły Hubera, którego BURZYŃSKI był uczniem.

Prof. zw. dr inż. Włodzimierz BURZYŃSKI dobrze przysłużył się nauce polskiej w zakresie mechaniki stosowanej, chociaż odszedł od nas na zawsze, żyć będzie zawsze wśród nas. Cześć Jego pamięci.

ZASTOSOWANIE RÓWNIANIA HAMILTONA-JACOBIEGO DO STABILIZACJI UKŁADÓW MECHANICZNYCH

WŁADYSŁAW BOGUSZ (KRAKÓW)

1. Wstęp

Zagadnienie stabilizacji układów mechanicznych wchodzi w zakres optymalnej syntezy układów mechanicznych dyskretnych. W założeniach do przeprowadzenia syntezy przyjmuje się siły działające zgodnie z rzeczywistymi warunkami pracy układu i bada się asymptotyczną stateczność położenia równowagi. W przypadku, gdy nie jest zapewniona asymptotyczna stateczność, poszukuje się dodatkowych sił stabilizujących nie zmieniając pozostałych parametrów układu. Na dodatkowe siły narzuca się warunek optymalizujący, wynikający z procesu, jaki ma realizować układ mechaniczny. Rozwiązanie warunku optymalizującego napotyka trudności i w literaturze spotyka się efektywne rozwiązania otrzymane przy zastosowaniu równań Lapunowa–Bellmana [1]. W metodzie tej przyjmuje się szczególnie warunek optymalizujący wynikający z odpowiednio dobranej funkcji Lapunowa.

W pracy przedstawiona jest metoda wykorzystująca własności równania Hamiltona–Jacobiego do rozwiązania warunku sformułowanego ogólnie jako minimalizacja danego funkcjonau. W zastosowaniu tej metody przyjęto jeden z możliwych warunków zapewniających stabilizację układu mechanicznego. Warunek ten sformułowano w taki sposób, aby otrzymać możliwie duży ubytek energii kinetycznej w czasie ruchu. Otrzymane warunki są wystarczające do stabilizacji, ale istnieje możliwość sformułowania innych warunków, ale tak, aby nie były sprzeczne z założeniami przyjętymi w opisanej metodzie. Podstawowym założeniem w metodzie, które zapewnia istnienie rozwiązania stabilizacji, jest aby minimalizacja funkcjonau poprzez równania Eulera–Lagrange’a prowadziła do równań ruchu rozważanego układu mechanicznego.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy układ holonomiczny, którego ruch jest opisany równaniami:

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i(t, q_1, q_n, \varphi), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie E jest energią kinetyczną, Q_i przedstawia siły uogólnione zaś φ jest funkcją określającą dodatkowe siły, które należy wyznaczyć z narzuconego warunku na ruch układu.

Zakładamy, że układ (2.1) posiada rozwiązanie zerowe niestateczne dla $\varphi = 0$ lub stateczne, ale nie asymptotycznie stateczne.

Zagadnienie stabilizacji układu (2.1) polega na wyznaczeniu funkcji φ takiej, aby rozwiązanie zerowe było asymptotycznie stateczne i dany funkcjonal J

$$(2.2) \quad J = \int_0^{\infty} L(t, q_1, q_2, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) dt$$

przyjmował wzdłuż rozwiązań układu (2.1) wartość minimum.

Ograniczając się do lokalnej asymptotycznej stateczności można powyższe zagadnienie rozwiązać, rozważając równania w perturbacjach i linearyzując funkcję φ .

Rozwiążemy powyższe zagadnienie wykorzystując równanie Hamiltona–Jacobiego¹⁾.

3. Metoda stabilizacji

Podamy metodę doboru sił stabilizujących w oparciu o równanie Hamiltona–Jacobiego. Weźmy pod uwagę funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ określoną w pewnym obszarze $G \subset R_{2n+1}$, posiadającą ciągle pochodne cząstkowe rzędu drugiego względem wszystkich argumentów. Funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ nazywamy lagrangianem. Funkcję $H(t, x^i, p_i)$ odpowiadającą funkcji L według równania:

$$(3.1) \quad H(t, x^i, p_i) = -L(t, x^i, \dot{x}^i) + p_i \dot{x}^i$$

nazywamy hamiltonianem.

W funkcji (3.1) p_i są określone wzorami

$$(3.2) \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}.$$

Zakładamy, że równania (3.2) dadzą się rozwiązać względem \dot{x}^i

$$(3.3) \quad \dot{x}^i = \Phi_i(t, x^i, p_i).$$

Po podstawieniu (3.3) do (3.1) otrzymamy funkcję H zmiennych (t, x^i, p_i)

Weźmy pod uwagę rodzinę trajektorii w przestrzeni R_{n+1} , przechodzących przez dwa bliskie punkty $P_1(t, x^i)$, $P_2(t + \Delta t, x^i + \Delta x^i)$. Wzdłuż tych trajektorii możemy zdefiniować lagrangian L i utworzyć funkcjonal:

$$(3.4) \quad J = \int_{P_1}^{P_2} L(t, x^i, \dot{x}^i) dt.$$

Niech w przestrzeni R_{n+1} będzie dana rodzina powierzchni klasy C^2

$$(3.5) \quad S(t, x^i) = c,$$

taka, że pokrywa pewien obszar $G_0 \subset R_{n+1}$ i przez każdy punkt obszaru przechodzi tylko jedna powierzchnia. Na trajektorie przechodzące przez punkty P_1, P_2 leżące w obszarze G_0

¹⁾ W dalszej pracy przyjmujemy następującą umowę. Wielkości wektorowe oznaczamy wskaźnikiem u góry np. x^i , zaś wielkości skalarowe wskaźnikiem u dołu np. a_l . Wskaźnik u góry i u dołu oznacza sumowanie np. $a_i x^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ lub $a_{ij} x^j$ sumowanie po $j = 1, 2, \dots, n$, $a_{ij} x^i x^j$ sumowanie po i i po j .

narzucimy warunek, aby przecinały powierzchnie (3.5) i nie były do żadnej z nich styczne oraz aby przy przejściu od punktu P_1 leżącego na jednej powierzchni do punktu P_2 leżącego na drugiej, przyrost funkcjonału (3.4) był minimum. Warunkiem koniecznym i wystarczającym, aby ten warunek był spełniony jest, aby funkcja $S(t, x^i)$ była rozwiązaniem równania

$$(3.6) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, x^i, \frac{\partial S}{\partial x^i}\right) = 0$$

oraz

$$(3.7) \quad \frac{\partial S}{\partial x^i} = p_i,$$

gdzie H jest hamiltonianem odpowiadającym lagrangianowi zdefiniowanemu wzdłuż trajektorii przechodzących przez punkty P_1, P_2 .

Własności powierzchni (3.5) i równania (3.6) wykorzystamy do wyznaczania sił stabilizujących ruch niestabilny układu dyskretnego.

Rozważmy zagadnienie przedstawione w punkcie 2.

Ogólna metoda rozwiązania tego zagadnienia jest następująca. Funkcję pod całką (2.2) rozpatrujemy jako lagrangian równania (2.1). Warunkiem koniecznym minimalizacji funkcjonału (2.2) jest, aby spełnione były równania Eulera-Lagrange'a

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

Dla funkcji L wyznaczamy hamiltonian i piszemy równanie Hamiltona-Jacobiego (3.6). Do równania (3.6) podstawimy funkcję $S(t, x^i)$ takiej postaci, aby trajektorie przecinające powierzchnie $S(t, x^i) = c$ dążyły do punktu $(0, 0)$, gdy t dąży do nieskończoności. Na szukaną funkcję φ otrzymujemy następujące warunki.

Rozwiązania równań (3.8) i (2.1) przy tych samych warunkach początkowych muszą być identyczne oraz muszą spełniać równanie (3.6) przy odpowiednio dobranej funkcji $S(t, x^i)$. Spełnienie równania (3.6) zapewnia asymptotyczną stateczność tych rozwiązań.

Ograniczając się do lokalnej stateczności położenia równowagi rozważać będziemy układy, których energia kinetyczna wyraża się wzorem: $E = a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$, a funkcje Q_i są w otoczeniu położenia równowagi zlinearyzowane i nie zależą od czasu. Równania (2.2) w tym przypadku mają postać

$$(3.9) \quad (a_{ij} + a_{ji}) \ddot{x}^j = k_{ij} x^j + b_{ij} \dot{x}^j + c_{ij} \dot{x}^j.$$

Macierz $(a_{ij} + a_{ji})$ jest określona dodatnio, macierz (k_{ij}) jest znana, zaś macierze (b_{ij}) i (c_{ij}) należy tak wyznaczyć, aby położenie równowagi było asymptotycznie stateczne.

Funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ funkcjonału (2.2) przyjmijmy w takiej postaci, aby spełnione były następujące warunki:

$$1) \text{ dla dowolnych } t_1 < t_2, \quad \left[\frac{dE}{dt} \right]_{t=t_1} \leq \left[\frac{dE}{dt} \right]_{t=t_2} \leq 0.$$

$$2) \left[\ln \left| \frac{dE}{dt} \right|_{t=t_1} - \ln \left| \frac{dE}{dt} \right|_{t=t_2} \right] \leq \lambda t_2; \quad \lambda \text{ dodatnia stała.}$$

Warunek 1) zapewnia zanikanie ruchu, zaś warunek 2) zanikanie energii kinetycznej w sposób wykładniczy. Chodzi więc o stabilizację układu mechanicznego bez oscylacji energii kinetycznej.

Z warunku 2) otrzymamy

$$\left| \left[\frac{dE}{dt} \right]_{t=t_1} \right| \leq \left| \left[\frac{dE}{dt} \right]_{t=t_2} \right| e^{\lambda t_2}$$

i funkcję $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ przyjmujemy w postaci $L = \frac{dE}{dt} e^{\lambda t}$.

Dla układu (3.9) funkcja $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ ma postać

$$(3.10) \quad L(t, x^i, \dot{x}^i) = e^{\lambda t} \left[B_{ij} x^j + \frac{1}{2} c_{ij} \dot{x}^j \right] \dot{x}^i,$$

gdzie: $B_{ij} = k_{ij} + b_{ij}$, zaś λ jest parametrem, który należy wyznaczyć. Siły tłumienia przyjmujemy w postaci funkcji dysypacji energii Rayleigha; macierz $(-c_{ij})$ jest określona dodatnia.

Podstawimy funkcję (3.10) do równań (3.8)

$$(3.11) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = e^{\lambda t} \left[B_{ij} x^j + \frac{1}{2} (c_{ij} + c_{ji}) \dot{x}^j \right],$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = e^{\lambda t} B_{ij} \dot{x}^j.$$

Równania (3.8) otrzymamy w postaci

$$(3.12) \quad \frac{1}{2} (c_{ij} + c_{ji}) \ddot{x}^j = -\lambda B_{ij} x^j - \frac{\lambda}{2} [c_{ij} + c_{ji}] \dot{x}^j - (B_{ij} - B_{ji}) \dot{x}^j.$$

Porównując współczynniki równań (3.12) i (3.9) otrzymamy:

$$(3.13) \quad \begin{aligned} c_{ij} + c_{ji} &= -2\lambda(a_{ij} + a_{ji}), \\ \lambda(c_{ij} - c_{ji}) &= 2(B_{ij} - B_{ji}). \end{aligned}$$

Z otrzymanych wzorów (3.13) wynika, że funkcja dysypacji energii jest proporcjonalna do energii kinetycznej układu.

$$(3.14) \quad \frac{1}{2} c_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = -\lambda a_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Równania algebraiczne konieczne do wyznaczenia macierzy otrzymamy z równania Hamiltona–Jacobiego.

Chcąc otrzymać hamiltonian należy rozwiązać równania:

$$(3.15) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = p_i.$$

Korzystając z (3.11) i (3.13) można równania (3.15) napisać w postaci

$$(3.16) \quad -\lambda(a_{ij} + a_{ji}) \dot{x}^j + B_{ij} x^j = p_i e^{-\lambda t}.$$

Funkcję $S(t, x^i)$, która ma być rozwiązaniem równania (3.6) przyjmujemy w takiej postaci, aby odległości punktów na powierzchniach (3.5) od początku układu dążyły do zera, gdy czas dąży do nieskończoności

$$(3.17) \quad S(t, x^i) = \frac{1}{2} e^{\lambda t} D_{ij} x^i x^j,$$

gdzie macierz (D_{ij}) przyjmujemy proporcjonalną do macierzy (B_{ij}) . Przy takim przyjęciu funkcji $S(t, x^i)$ powierzchnie (3.5) są określone równaniem

$$(3.18) \quad D_{ij} x^i x^j = 2ce^{-\lambda t},$$

gdzie c jest dowolną stałą.

Ze wzoru (3.18) wynika, że odległości punktów na tych powierzchniach dążą do zera, gdy parametr λ jest dodatni. Z (3.7) i (3.17) otrzymamy

$$(3.19) \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} = \frac{1}{2} e^{\lambda t} (D_{ij} + D_{ji}) x^j.$$

Po podstawieniu (3.19) do (3.16) otrzymamy układ równań

$$(3.20) \quad (a_{ij} + a_{ji}) \dot{x}^j = \frac{1}{\lambda} \left[B_{ij} - \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji}) \right] x^j.$$

Przy przyjętym założeniu odnośnie macierzy $(a_{ij} + a_{ji})$ układ równań (3.20) można rozwiązać. Rozwiązanie przedstawimy wzorem

$$(3.21) \quad \dot{x}^j = A_j^i x^i.$$

Hamiltonian (3.1) obliczymy z (3.10) i (3.16)

$$(3.22) \quad H(t, x^i, p_i) = -\lambda e^{\lambda t} D_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j,$$

gdzie za \dot{x}^i , \dot{x}^j należy podstawić (3.21).

Równanie Hamiltona-Jacobiego (3.6) przy podstawieniu (3.17) i (3.22) napiszemy w postaci

$$(3.23) \quad D_{ij} x^i x^j - 2\lambda a_{ij} A_\alpha^i x^\alpha A_\beta^j x^\beta = 0.$$

Przyrównując współczynniki przy x^i , x^j do zera otrzymamy układ równań algebraicznych

$$(3.24) \quad \frac{1}{2} (D_{ij} + D_{ji}) - (a_{\alpha\beta} + a_{\beta\alpha}) A_\alpha^i A_\beta^j = 0.$$

Układ (3.24) przedstawia $\frac{n^2+n}{2}$ równań algebraicznych, w którym występuje $2n^2$ niewiadomych A_α^i i D_{ij} .

Dodatkowe równania otrzymamy z (3.20) po podstawieniu (3.21) i porównaniu współczynników przy x^i

$$(3.25) \quad \lambda(a_{ja} + a_{aj}) A_j^i = B_{ji} - \frac{1}{2} (D_{ji} + D_{ij}).$$

Jest to układ n^2 równań. W ten sposób z układów (3.24) i (3.25) otrzymujemy $\frac{3n^2+n}{2}$ równań algebraicznych o niewiadomych A_α^i , D_{ij} , B_{ij} , λ , których liczba wynosi: $(3n^2+1)$.

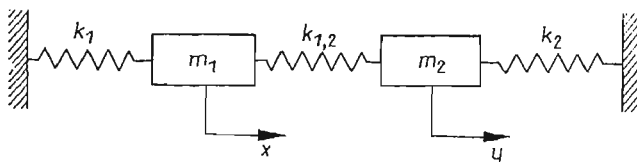
Ponieważ macierz (D_{ij}) musi być określona dodatnia otrzymujemy dodatkowo n warunków do wyznaczenia niewiadomych. Również macierz sprężystości $(-B_{ij})$ musi być określona dodatnia i razem z układami (3.24) i (3.25) otrzymujemy $\frac{3n^2+5n}{2}$ warunków do wyznaczenia $(3n^2+1)$ niewiadomych. Jeżeli macierz sprężystości przyjmiemy symetryczną, otrzymamy $B_{ij} = B_{ji}$ i liczba niewiadomych będzie wynosiła $3n^2+1 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{5n^2+n+2}{2}$.

Oznaczmy liczbę niewiadomych przez N , a liczbę warunków do wyznaczenia niewiadomych przez R . Z przeprowadzonych obliczeń otrzymamy

$$(3.26) \quad N - R = \frac{5n^2+n+2}{2} - \frac{3n^2+5n}{2} = (n-1)^2.$$

Z (3.26) wynika, że tylko dla $n = 1$ liczba niewiadomych jest równa liczbie warunków, zaś dla $n > 1$ liczba niewiadomych jest większa od liczby warunków i zależnie od rozważanego układu można przyjąć dodatkowo pewne niewiadome jako znane. Celowe jest w tych przypadkach przyjmowanie macierzy (D_{ij}) proporcjonalnej do macierzy $(-B_{ij})$, gdyż przy takim przyjęciu powierzchnie (3.5) będą styczne do powierzchni ekwipotencjalnych i trajektorie układu (3.9) będą je przecinać i nie będą styczne, czyli na powierzchniach (3.5) nie będzie punktów poślizgu.

Sposób postępowania objaśnimy na przykładzie. Weźmy pod uwagę układ przedstawiony na rys. 1. Położenie równowagi układu jest stateczne, ale nie asymptotycznie sta-



Rys. 1

teczne i należy wyznaczyć siły tłumienia wiskotycznego tak, aby ustabilizować asymptotycznie układ przy minimalizacji funkcjonału (2.2) z funkcją podcałkową (3.10). Współczynniki tłumienia wiskotycznego oznaczmy odpowiednio przez $2h_1$, $2h_{1,2}$, $2h_2$.

Równania ruchu mają postać:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} m_1 \ddot{x} &= -(k_1 + k_{1,2})x + k_{1,2}y - 2(h_1 + h_{1,2})\dot{x} + 2h_{1,2}\dot{y}, \\ m_2 \ddot{y} &= k_{1,2}x - (k_2 + k_{1,2})y + 2h_{1,2}\dot{x} - 2(h_2 + h_{1,2})\dot{y}. \end{aligned}$$

Na podstawie (3.13) otrzymamy

$$(3.28) \quad \begin{aligned} 2(h_1 + h_{1,2}) &= \lambda m_1, \\ 2(h_2 + h_{1,2}) &= \lambda m_2, \\ 2h_{1,2} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ $h_{1,2} = 0$, więc do stabilizacji układu wystarczą dwa tłumiki działające na masy m_1 i m_2 i nie potrzeba tłumika między masami m_1 i m_2 . Współczynnik λ obliczymy rozwiązując układ (3.24) i (3.25).

Przyjmijmy $D_{1,2} = D_{2,1}$. Układ równań (3.25) ma postać

$$(3.29) \quad \begin{aligned} 2\lambda m_1 A_1^1 &= B_{11} - D_{11}, \\ 2\lambda m_2 A_1^2 &= B_{21} - D_{21}, \\ 2\lambda m_1 A_2^1 &= B_{21} - D_{21}, \\ 2\lambda m_2 A_2^2 &= B_{22} - D_{22}. \end{aligned}$$

Po obliczeniu A_i^j i podstawieniu do (3.24) lub do (3.27) otrzymamy układ równań:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} D_{11} &= \frac{(B_{11} - D_{11})^2}{2\lambda^2 m_1} + \frac{(B_{21} - D_{21})^2}{2\lambda^2 m_2}, \\ D_{12} &= \frac{B_{21} - D_{21}}{2\lambda^2} \left[\frac{B_{11} - D_{11}}{m_1} + \frac{B_{22} - D_{22}}{m_2} \right], \\ D_{22} &= \frac{(B_{21} - D_{21})^2}{2\lambda^2 m_1} + \frac{(B_{22} - D_{22})^2}{2\lambda^2 m_2}. \end{aligned}$$

Celem uproszczenia zapisu wprowadzimy oznaczenia:

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \frac{B_{11}}{m_1} &= b_1, & \frac{B_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} &= b_{1,2}, & \frac{B_{22}}{m_2} &= b_2, & \frac{D_{11}}{m_1} &= d_1, & \frac{D_{12}}{\sqrt{m_1 m_2}} &= d_{1,2} \\ \frac{D_{22}}{m_2} &= d_2. \end{aligned}$$

Układ równań (3.30) przy tych oznaczeniach ma postać:

$$(3.32) \quad \begin{aligned} 2\lambda^2 d_1 &= (b_1 - d_1)^2 + (b_{2,1} - d_{2,1})^2, \\ 2\lambda^2 d_{1,2} &= (b_{2,1} - d_{1,2})[b_1 - d_1 + b_2 - d_2], \\ 2\lambda^2 d_2 &= (b_2 - d_2)^2 + (b_{2,1} - d_{1,2})^2. \end{aligned}$$

W równaniach (3.32) występują cztery niewiadome: d_1 , d_2 , $d_{1,2}$, λ^2 , jeżeli przyjmujemy b_1 , b_2 i $b_{1,2}$ jako ustalone. Można również sformułować zagadnienie w ten sposób, że przyjmujemy d_1 , d_2 , $d_{1,2}$, określające powierzchnię, którą rozwiązania mają przecinać bez poślizgu i wyznaczyć b_1 , b_2 , $b_{1,2}$ i λ^2 .

Przytoczymy tok obliczeń w przypadku, gdy nie zmieniamy sił sprężystych, tj. b_1 , b_2 , $b_{1,2}$, a dobieramy tylko tłumienie, tj. należy obliczyć λ^2 . Przyjmijmy jedną niewiadomą $d_{1,2}$ równą $-b_{1,2}$. Przy takim przyjęciu z drugiego równania (3.32) otrzymamy

$$(3.33) \quad \lambda^2 = d_1 - b_1 + d_2 - b_2.$$

Jeżeli odejmiemy równania pierwsze i trzecie (3.32) otrzymamy

$$(3.34) \quad 2\lambda^2 (d_1 - d_2) = [b_2 + b_1 - d_1 - d_2][b_1 - b_2 + d_2 - d_1].$$

Po podstawieniu (3.33) do (3.34) i uproszczeniu otrzymamy

$$(3.35) \quad d_1 - d_2 = b_2 - b_1.$$

Rozwiązując (3.33) i (3.35) obliczymy d_1 i d_2

$$(3.36) \quad d_1 = b_2 + \frac{1}{2} \lambda^2, \quad d_2 = b_1 + \frac{1}{2} \lambda^2.$$

Po podstawieniu (3.36) do pierwszego lub trzeciego równania (3.32) otrzymamy takie same równanie na λ^2

$$(3.37) \quad \frac{3}{4} \lambda^4 + \lambda^2(b_1 + b_2) - (b_1 - b_2)^2 - 4b_{12}^2 = 0.$$

Równanie (3.37) posiada dwa pierwiastki, z których jeden dodatni jest rozwiązaniem postawionego zagadnienia

$$(3.38) \quad \lambda^2 = \frac{2}{3} [-(b_1 + b_2) + 2\sqrt{b_1^2 + b_2^2 - b_1 b_2 + 3b_{12}^2}].$$

Łatwo sprawdzić, że po podstawieniu (3.38) do (3.36) otrzymamy: $d_1 > 0$, $d_2 > 0$ i $d_1 d_2 - d_{12}^2 > 0$, co oznacza, że powierzchnia określona przez d_1, d_2, d_{12} jest formą kwadratową jednorodną dodatnią.

Powracając do oznaczeń (3.36) otrzymamy na λ wyrażenie:

$$(3.39) \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\sqrt{\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} + \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}} + \sqrt{\left(\frac{k_1 + k_{12}}{m_1} - \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}\right)^2 + \frac{(k_1 + k_{12})(k_1 + k_{12})}{m_1 m_2} + \frac{3k_{12}^2}{m_1 m_2}} \right].$$

Po podstawieniu (3.39) do (3.28) otrzymamy współczynniki h_1 i h_2 .

Jakiego rodzaju jest tłumienie określone wzorami (3.28) można zbadać podstawiając współczynniki tłumienia do równań (3.27). Jeżeli przyjmiemy dla przykładu $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k_{12} = k$ z (3.38) otrzymamy: $\lambda^2 = \frac{4k}{3m}(2 + \sqrt{7})$ i tłumienie obliczone według wzorów (3.28) jest nadkrytyczne. Ruch układu jest bezoscylacyjny.

Literatura cytowana w tekście

1. М. С. ГАБРИЕЛИАН, Н. Н. КРАСОВСКИЙ, *К задаче о стабилизации механической системы*, Прик. Мат. Мех., т. 28, в. 5, 1964.
2. М. С. ГАБРИЕЛИАН, *О стабилизации неустойчивых движений механических систем*, Прик. Мат. Мех., т. 28, в. 3, 1964.
3. Н. Н. КРАСОВСКИЙ, *О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи*, Прик. Мат. Мех., т. 27, в. 4, 1963.
4. Е. Г. АЛЬБРЕХТ, *Об оптимальной стабилизации нелинейных систем*, Прик. Мат. Мех., т. 25, в. 5, 1961.
5. Е. А. ГАЛЬПЕРИН, Н. Н. КРАСОВСКИЙ, *О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем*, Прик. Мат. Мех., т. 27, в. 6, 1963.
6. Л. С. ПОНТЯГИН, В. Г. БОЛТЯНСКИЙ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Е. Ф. МИЩЕНКО, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, 1961.
7. H. RUND, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations*, New York 1966.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ
МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе дан метод стабилизации механических систем. Метод основан на использовании уравнения Гамильтона-Якоби для определения сил, приложение которых к системе обеспечивает асимптотическую стабильность состояния равновесия. Подбор этих сил обусловлен минимализацией заданного функционала. Условия минимализации получены из уравнений Эйлера-Лагранжа. Описанный метод применен в случае, когда условием оптимализации является производная кинетической энергии системы. Способ вычислений иллюстрирован примером.

Summary

APPLICATION OF HAMILTON-JACOBI EQUATION FOR STABILIZATION OF MECHANICAL
SYSTEMS

The method of stabilization of mechanical systems is presented in the paper. The method consists in using the Hamilton-Jacobi equation for the proper selection of such forces which, when applied to the system, ensure the asymptotic stability of the equilibrium position. This selection follows from the minimalization condition of the given functional. The minimalization conditions are obtained from the Euler-Lagrange equations. The method described is applied to the case when the optimization condition is the derivative of the kinetic energy of the system. This procedure is explained in an example.

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lutego 1970 r. — powtórnice dnia 25 listopada 1970 r.

REOLOGICZNE, MECHANICZNE I OPTYCZNE WŁASNOŚCI POLIMETAKRYLANU METYLU
W WARUNKACH ZŁOŻONEJ HISTORII OBCIĄŻENIA¹⁾

ANDRZEJ DRESCHER, BOGDAN MICHAŁSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Materiały modelowe czułe optycznie, stosowane w badaniach analizy naprężeń, należą do różnych grup stałych polimerów wielkocząsteczkowych. Cechą charakterystyczną polimerów jest zależność ich własności mechanicznych od czasu. Przejawia się to we wzroście odkształceń przy stałym naprężeniu w próbie pełzania, spadku naprężeń w próbie relaksacji, jak również zależności charakterystyki $\sigma = \sigma(\epsilon)$ od prędkości odkształcenia. Podobnie badania w warunkach zmian cyklicznych czy dynamicznych wykazują efekty opóźnienia fazowego i lepkiego tłumienia. Efekty te zależą od wartości naprężeń lub odkształceń, jak i temperatury.

W zakresie małych naprężeń czy odkształceń, kiedy zachowanie się polimerów jest liniowe, istnieje bogaty materiał doświadczalny i dobrze opracowane teoretyczne podstawy opisu. Znacznie mniej są poznane efekty fizykalnie i geometrycznie nieliniowe. Tym ostatnim efektom poświęca się obecnie coraz więcej uwagi.

Lepkosprężystym, mechanicznym własnościom polimerów towarzyszy zazwyczaj zależność ich cech optycznych od czasu. Ten ujemny efekt w badaniach modelowych stanu naprężenia ciał sprężystych jest zwykle omijany przez realizację niewielkich wartości naprężeń w badanych modelach, kiedy wpływ czasu może być pominięty. Wzrost zainteresowania możliwością wykorzystania materiałów czułych optycznie do badania rzeczywistych materiałów poza zakresem sprężystym — przez wykonanie czułych optycznie pokryw — jak i rozwój badań na modelach ciał sprężysto-plastycznych (fotoplastyczność), czy lepkosprężystych, spowodował konieczność dokładniejszego poznania ich cech z uwzględnieniem wpływu czasu. Spośród wielu prac można tu wymienić [1, 2, 3, 7, 11, 15, 17, 18, 21]. Przewagę stanowią prace operujące podejściem fenomenologicznym. Fizyczna interpretacja zjawisk obserwowanych poza zakresem sprężystym nie jest dotychczas całkowicie wyjaśniona. W analizie fenomenologicznej dają się wyróżnić dwie grupy opisu:

a) opis empiryczny,

b) opis oparty na pewnym modelu ciała, ważnym dla dowolnego stanu odkształcenia czy naprężenia.

W niniejszej pracy podjęto próbę fenomenologicznego opisu efektów mechanicznych i optycznych polimetakrylanu metylu (metaplex) poddanego działaniu wysokich naprężeń.

¹⁾ II nagroda na ogólnopolskim konkursie na prace doświadczalne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Gliwicki PTMTS w 1970 r.

Rozważania przeprowadzono w oparciu o badania doświadczalne jednoosiowego rozciągania przy zadanej historii naprężenia — pełzaniu.

Badaniom cech mechanicznych polimetakrylanu metylu poświęcone są m.in. prace [2, 8], a cech optycznych [2]. Prace te dotyczą jednakże albo opisu empirycznego, albo prostych programów obciążeń, czy też niewielkich wartości naprężeń. Odnosi się to także do większości badań przeprowadzonych na innych materiałach czułych optycznie.

W niniejszej pracy zwrócono szczególną uwagę na zbadanie wpływu złożonej historii obciążenia i możliwość opisanie zaobserwowanych efektów w ramach ogólnej koncepcji związków fizycznych ciał z pamięcią.

W pracy ograniczono się do zagadnienia jednowymiarowego. Zaproponowane podejście może być jednak rozszerzone w dalszych pracach na stany złożone.

Użyty materiał — polimetakrylan metylu — nie jest stosowany na czułe optycznie pokrycia i modele pracujące w zakresie plastycznym. Wydaje się jednak, że przeprowadzone w pracy badania i sposób ich analizy mogą być pomocne w badaniach takich materiałów jak celuloid i żywice epoksydowe, pracujących poza zakresem czysto sprężystym.

2. Opis doświadczeń

Badania przeprowadzono na wyciętych z jednej płyty próbkach o kształcie «wiosełka», przy zachowaniu stałego kierunku wycinania próbek. Długość części prostokątnej próbki wynosiła 120 mm, a jej przekrój 10×5 mm.

Badane próbki zostały umieszczone w przestrzeni pomiarowej polaryskopu o rozproszonym źródle monochromatycznego światła sodowego. Żądany program jednoosiowego rozciągania realizowano za pośrednictwem układu dźwigniowego zapewniającego płynne przykładanie i zdejmowanie obciążenia. Badania przeprowadzono w temperaturze pokojowej.

Efekty mechaniczne — osiowe wydłużenie próbek — mierzono za pośrednictwem ekstensometru zegarowego Schoppera o bazie pomiarowej 50 mm i działce elementarnej $1/100$ mm. Efekty optyczne — dwójłomność wymuszoną — mierzono prostopadle do szerszego boku przekroju próbki metodą kompensacji goniometrycznej Sénarmonta. Dokładność tej metody szacować można na około 0,02 rzędu izochromy. Pierwszy pomiar efektu optycznego i wydłużenia próbki wykonywano po upływie jednej minuty od zmiany obciążenia, a następne pomiary po upływie 2, 5, 15 i 30 minut oraz 1, 2 i ewentualnie 4 godzin. Wszystkie badane próbki wykazywały nieznaczny, wstępny efekt optyczny około 0,2 rzędu izochromy. Stwierdzono, że kierunek odkształceń wstępnych był stały i równoległy do podłużnej osi próbek. Efekt ten uwzględniono w pomiarach.

Doświadczenia wykonano dla złożonych programów obciążeń obejmujących pełzanie aktywne przy stałym naprężeniu, pełzanie odwrotne po zdjęciu obciążenia i pełzanie dodatkowe po ponownym przyłożeniu obciążenia. Wartości zastosowanych naprężeń oraz czas ich trwania przedstawia rys. 1a i b. Maksymalny czas trwania doświadczeń przy stałym obciążeniu wynosił 240 min. Odciążenie wykonywano dla czasów $t_1 = 30, 90$ i 180 min., a ponowne obciążenie dla jednego czasu $t_2 = 180$ min.

Zastosowane programy obciążenia można podzielić na trzy grupy opisane zależnościami:

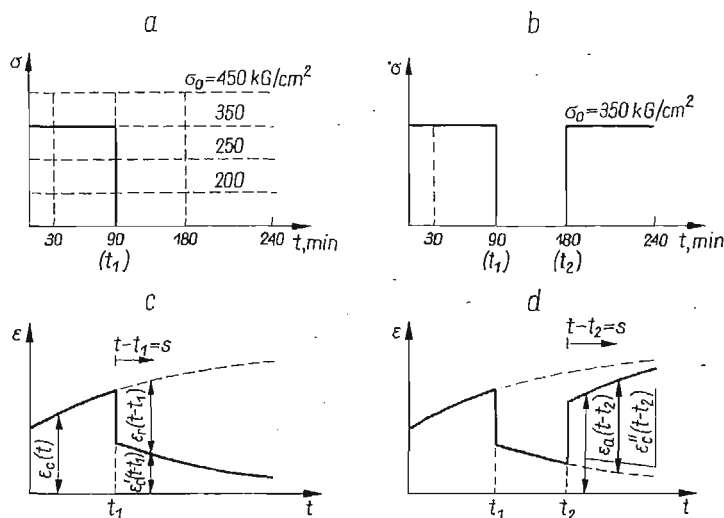
$$(2.1a) \text{ I. } \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad \tau > 0, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0,$$

$$(2.1b) \text{ II. } \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad 0 < \tau \leq t_1, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0; \quad \tau > t_1, \quad \sigma(\tau) = 0,$$

$$(2.1c) \text{ III. } \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad 0 < \tau \leq t_1, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0; \quad t_1 < \tau \leq t_2, \\ \sigma(\tau) = 0, \quad \tau > t_2, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0.$$

Dla każdej wartości naprężenia i jego historii zbadano 3 próbki.

Na rys. 1c i d przedstawiono schematycznie kształt spodziewanych krzywych pełzania



Rys. 1

mechanicznego oraz przyjęte oznaczenia. Z rys. 1c i d wynikają następujące zależności:

$$(2.2a) \quad \epsilon_r(t-t_1) = \epsilon_c(t) - \epsilon_c'(t-t_1),$$

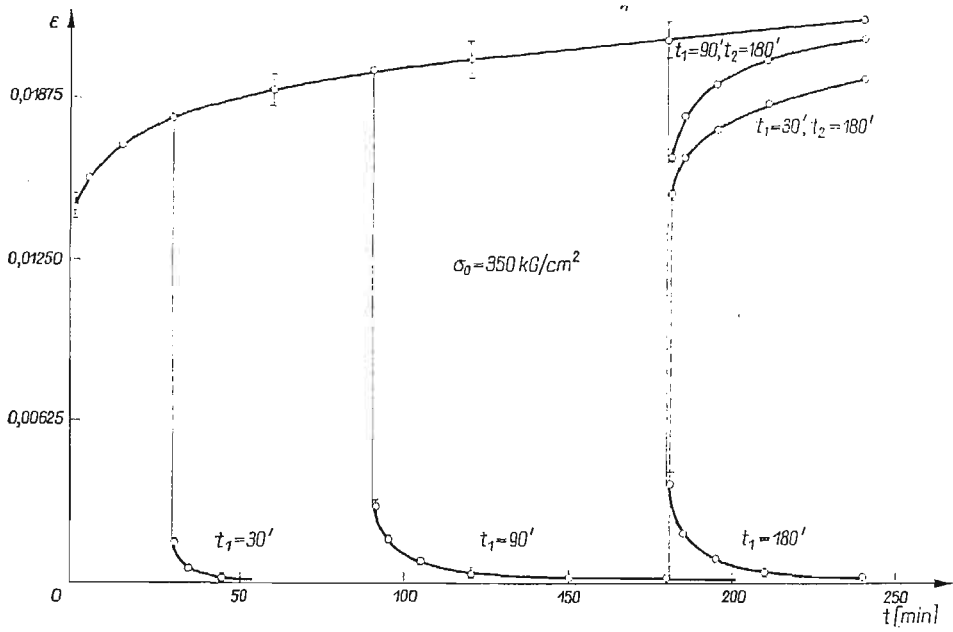
$$(2.2b) \quad \epsilon_a(t-t_2) = \epsilon_c''(t-t_2) - \epsilon_r(t-t_1).$$

Identyczne związki zachodzą dla efektu optycznego — rzędu izochromy — przy przyjęciu oznaczeń n_c , n_r i n_a .

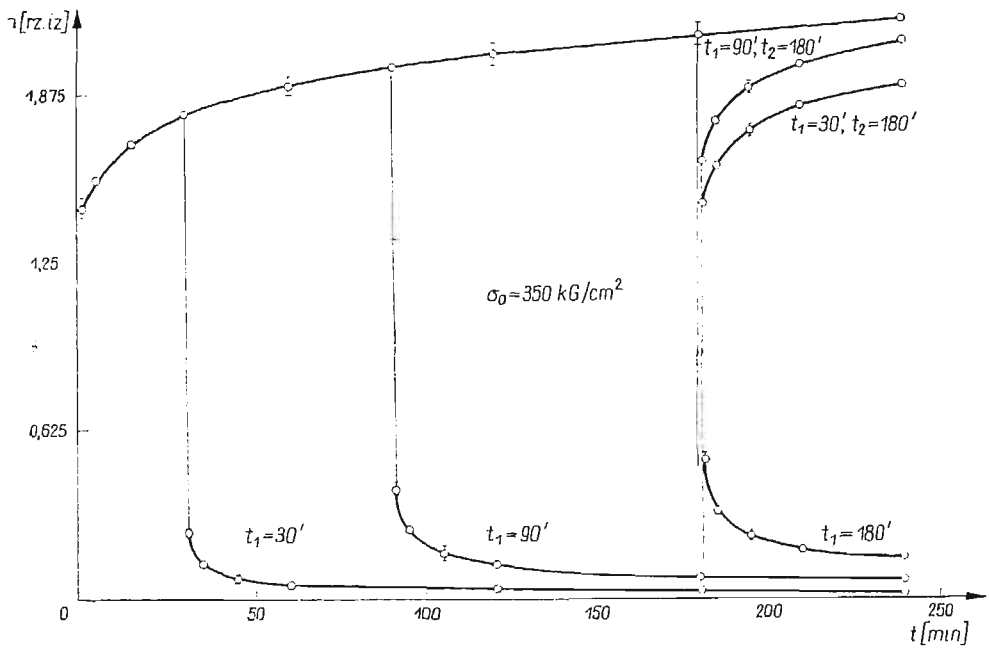
3. Wyniki badań i ich analiza

Zarejestrowane w trakcie doświadczeń wartości wydłużeń osiowych i rzędu izochromy pozwoliły skonstruować odpowiednie krzywe pełzania mechanicznego i optycznego.

Na rys. 2 przedstawiono przykładowo krzywe mechanicznego pełzania aktywnego, odwrotnego i dodatkowego w funkcji czasu dla wartości naprężenia $\sigma_0 = 350 \text{ kg/cm}^2$. Przedstawione na tym rysunku odkształcenia obliczone jako nieskończenie małe, co jest uzasadnione niewielką ich wartością. Podobną postać krzywych uzyskano dla pozostałych



Rys. 2



Rys. 3

wartości naprężenia. Z rys. 2 wynika, że badany materiał wykazuje wyraźne efekty reologiczne zarówno podczas działania, jak i po zdjęciu obciążenia. Istnienie wyraźnych własności lepkich różnych gatunków PMM wykazano m.in. w [2], [8]. Wartości odkształceń dla czasów $t = s = 1$ min. można traktować jako natychmiastowe. Porównując odkształcenia odwracalne dla różnych czasów odciążenia można stwierdzić ich wzrost ze wzrostem czasu t_1 . Podobnie odkształcenia dodatkowe są tym większe, im dłuższy jest czas odciążenia t_1 .

Analogiczne krzywe pełzania optycznego dla $\sigma_0 = 350$ kG/cm² przedstawia rys. 3. Rysunek ten dowodzi, że efekty optyczne — dwójtomność wymuszona — mają również charakter reologiczny. Jakościowo są one zupełnie podobne do efektów mechanicznych.

Wyraźny reologiczny charakter cech mechanicznych i optycznych badanego polimetakrylanu metylu nasuwa podstawowe pytanie, czy efekty te mieszczą się w ramach związków fizycznych liniowych względem naprężenia. W odniesieniu do efektów mechanicznych jest to równoznaczne z pytaniem, czy mogą być one opisane związkami liniowej lepkośćprężystości. W przypadku pozytywnej odpowiedzi dobrane właściwej postaci prawa fizycznego nie następuje trudności.

Zbadanie, czy zachowanie danego materiału odpowiada zachowaniu liniowego materiału lepkośćprężystego najwygodniej jest przeprowadzić w oparciu o zasadę superpozycji Boltzmanna, która dla przypadku jednowymiarowego pełzania wyraża się następującym wzorem:

$$(3.1) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau.$$

Związek (3.1) jest zarazem jedną z równoważnych postaci prawa fizycznego liniowego materiału lepkośćprężystego. Występująca pod całką funkcja J jest zwana funkcją pełzania i ma następującą postać

$$(3.2) \quad J(t, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon(t, \sigma_0)}{\sigma_0}.$$

Dla liniowego materiału lepkośćprężystego funkcja pełzania jest zależna jedynie od czasu i reprezentuje własności mechaniczne materiału. Funkcję pełzania można definiować dla dowolnego programu odcinkowo stałego naprężenia, tzn. dla odkształceń aktywnych, odwrotnych i dodatkowych. W efekcie otrzymuje się

$$(3.3) \quad J_c(t, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_c(t, \sigma_0)}{\sigma_0}, \quad J_r(t-t_1, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_r(t-t_1, \sigma_0)}{\sigma_0},$$

$$J_a(t-t_2, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon_a(t-t_2, \sigma_0)}{\sigma_0},$$

przy czym dla materiału liniowego wszystkie te funkcje muszą być sobie równe dla odpowiednich czasów $t = s$ gdzie $s = t-t_1$ lub $s = t-t_2$. Z powyższego wynika, że dla sprawdzenia liniowości wystarczające jest obliczenie odpowiednich funkcji pełzania i ich wzajemne porównanie oraz stwierdzenie czy są one niezależne od naprężenia.

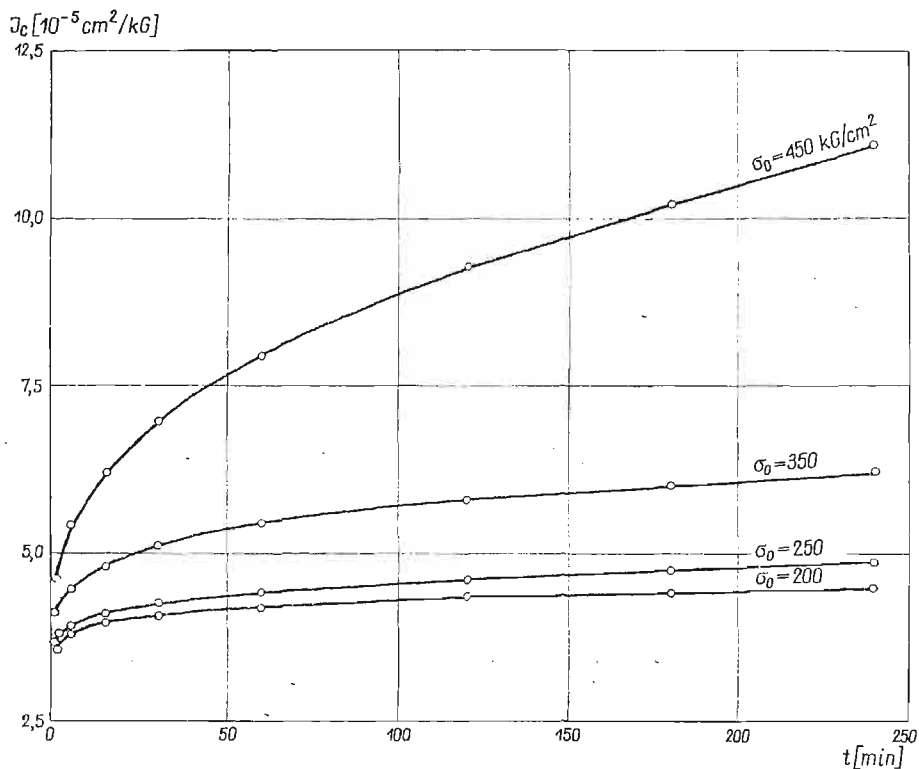
W przypadku analizy efektów optycznych można zdefiniować analogiczne funkcje pełzania optycznego

$$(3.4) \quad K_c(t, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_c(t, \sigma_0)}{\sigma_0}, \quad K_r(t-t_1, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_r(t-t_1, \sigma_0)}{\sigma_0}$$

$$K_a(t-t_2, \sigma_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n_a(t-t_2, \sigma_0)}{\sigma_0}$$

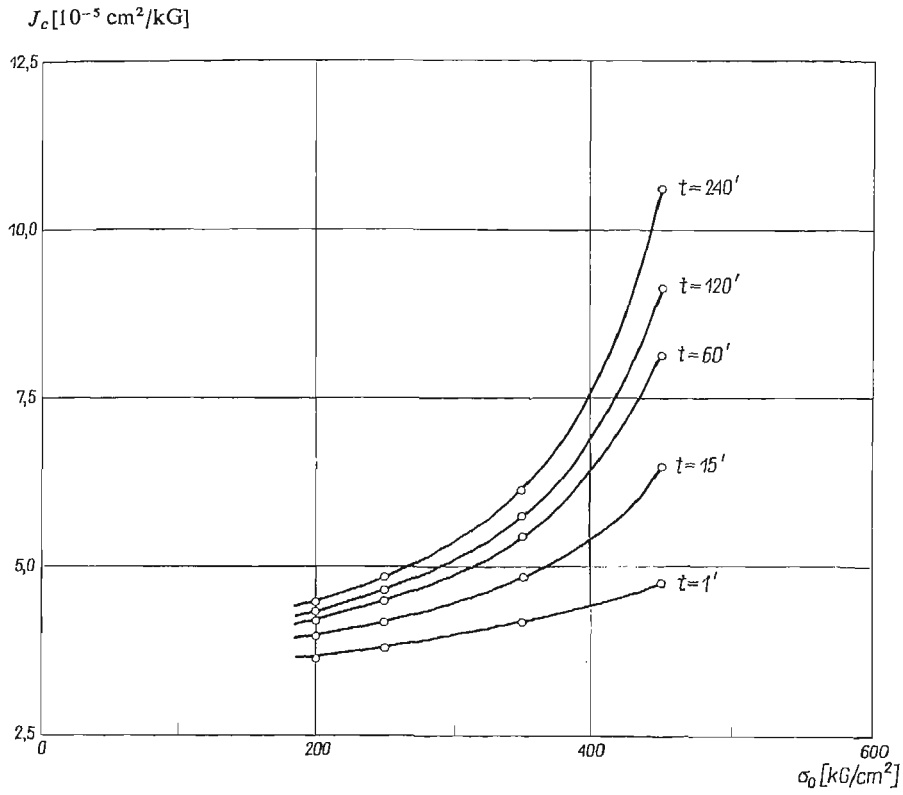
które dla liniowego zachowania się winny być sobie równe i niezależne od naprężenia.

Na rys. 4 przedstawiono funkcję mechanicznego pełzania aktywnego w zależności od czasu. Dla każdego z przyłożonych naprężeń otrzymano inną wartość J_c , co świadczy

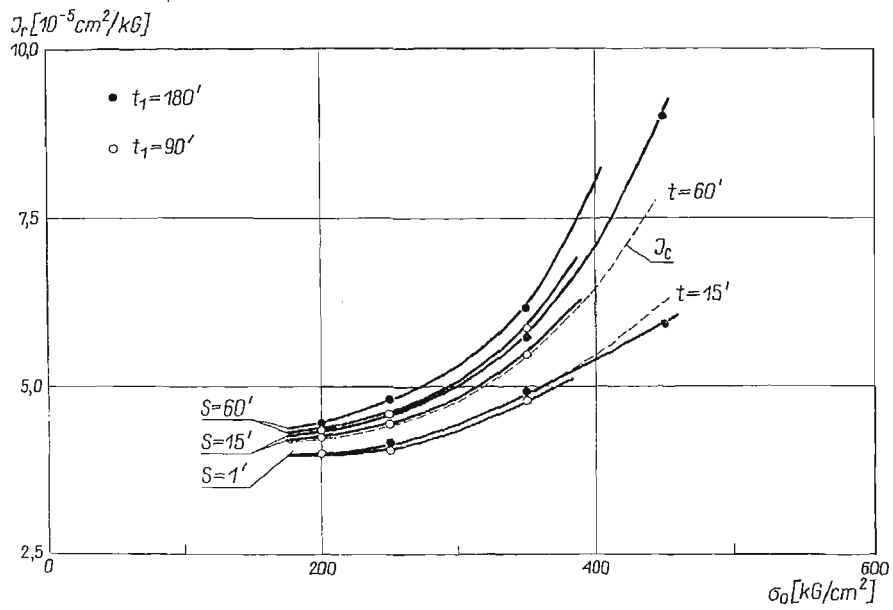


Rys. 4

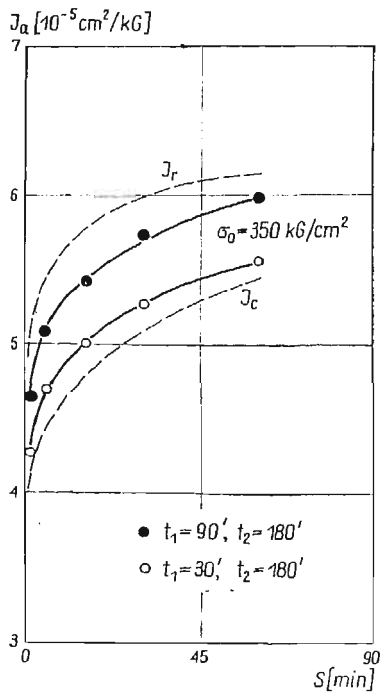
o nieliniowości cech mechanicznych materiału w próbie aktywnego pełzania. Charakter nieliniowości przedstawia rys. 5, na którym wykreślono zależność $J_c = J_c(\sigma_0)$ dla kilku czasów t . Dla materiału liniowego przebieg zależności powinien mieć postać prostych równoległych do osi σ_0 . Nachylenie krzywych $J_c = J_c(\sigma_0)$ może być miarą nieliniowości. Zależność funkcji odwrotnego pełzania J_r od naprężeń, dla dwóch czasów odciążenia $t_1 = 90 \text{ min.}$ i 180 min. przedstawia rys. 6, na którym wykreślono dla porównania funkcje J_c . Z rys. 6 widać zależność funkcji J_r od naprężenia jak i jego historii — im dłuższy



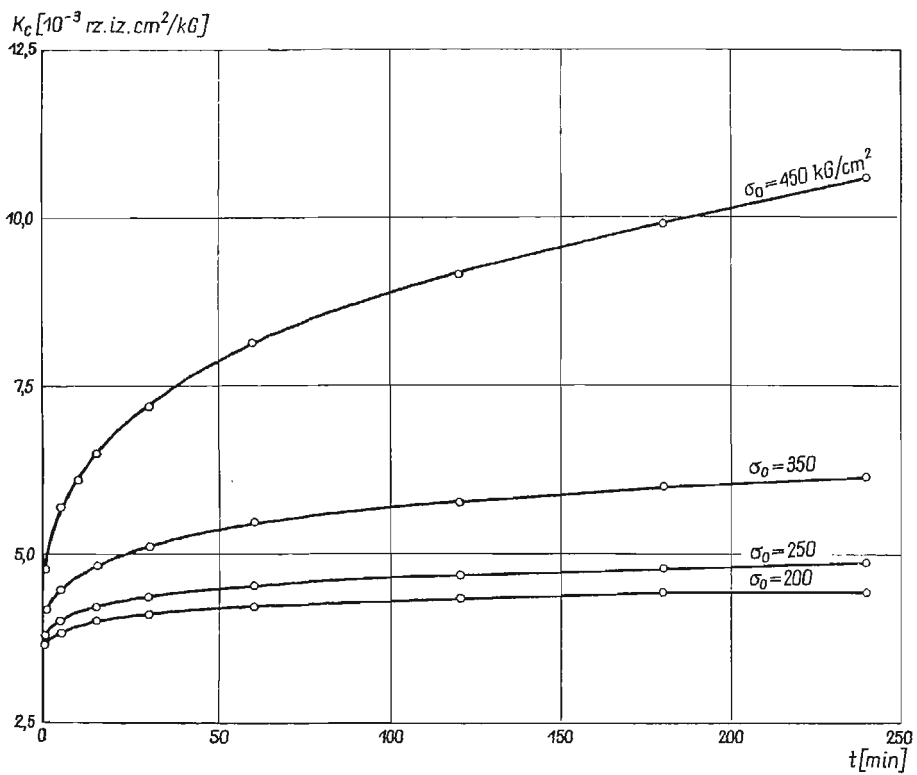
Rys. 5

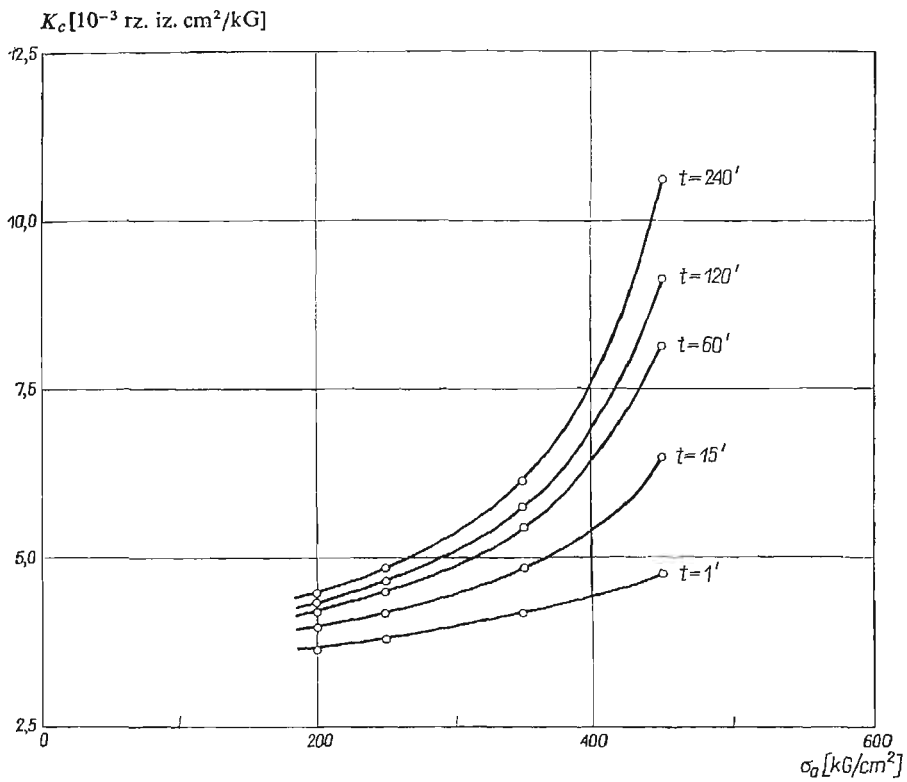


Rys. 6

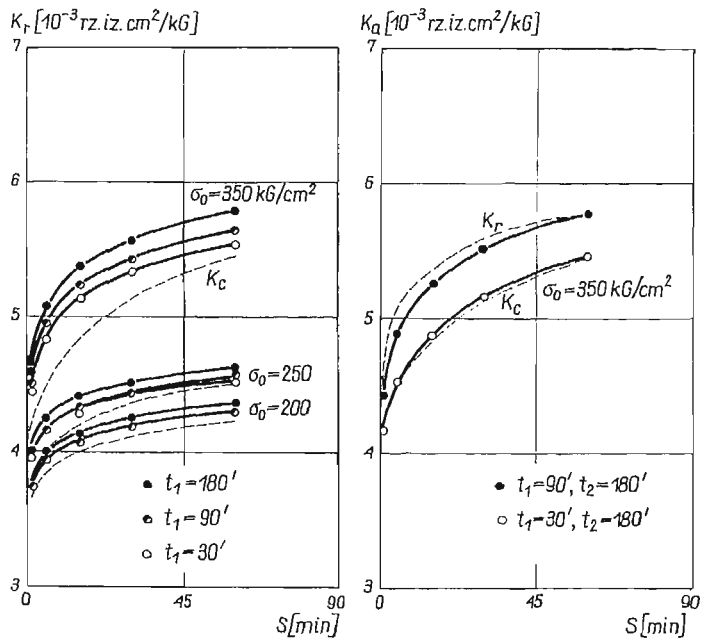


Rys. 7





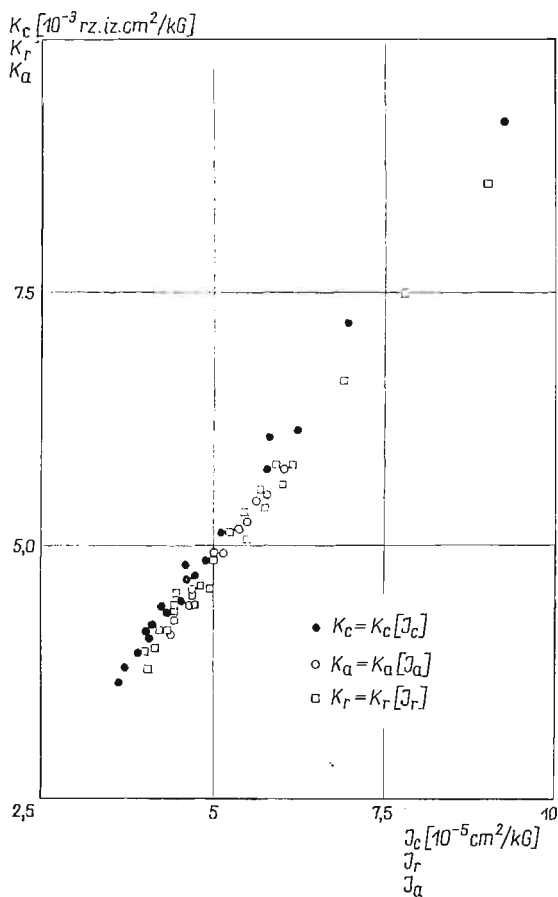
Rys. 9



Rys. 10

jest czas trwania obciążenia tym funkcja J_r osiąga wyższe wartości. Wartości funkcji J_r są także większe od wartości funkcji J_c .

Dla programu dodatkowego obciążenia funkcję dodatkowego pełzania J_a w zależności od czasu $s = t - t_2$ przedstawia rys. 7. Na rys. 7 widać, że funkcja J_a osiąga różne wartości dla różnych czasów odciążenia t_1 i tego samego czasu dociążenia t_2 . Różni się ona także od funkcji J_c i J_r .



Rys. 11

Powyższe fakty prowadzą do wniosku, że własności mechaniczne badanego polimetyakrylanu metylu są w zakresie zrealizowanych obciążeń wyraźnie nieliniowe. Nieliniowość jest zależna od wartości naprężenia i jego historii.

Analogiczne wnioski można wyciągnąć rozpatrując dwójłomność wymuszoną materiału w oparciu o przedstawioną na rys. 8 funkcję optycznego pełzania w zależności od czasu, zależność $K_c = K_c(\sigma_0)$ (rys. 9) i $K_r = K_r(s)$, $K_a = K_a(s)$ (rys. 10).

Porównując efekty mechaniczne i optyczne dla różnych programów obciążeń łatwo zauważyć całkowitą jakościową ich zgodność. Na przykład odkształcenia odwracalne i odwrotny efekt optyczny są tym większe, im dłuższy jest czas trwania obciążenia. Nasu-

wa to przypuszczenie, że istnieje bezpośrednie sprzężenie pomiędzy tymi efektami. Dla zbadania tego przypuszczenia przedstawiono na rys. 11 zależność odpowiednich funkcji pełzania mechanicznego i optycznego. Punkty na rys. 11, odpowiadające parze funkcji, uzyskano dla różnych naprężeń i różnych czasów nie zaznaczając wartości σ_0 i t na rysunku. Pomijając pewien rozrzut wszystkie punkty układają się wzdłuż jednej prostej przechodzącej przez początek układu. Przyjmując, że rozrzut wyników spowodowany jest jedynie niedokładnością pomiarów, lub pewnymi różnicami poszczególnych próbek, można stwierdzić, że pomiędzy odkształceniami osiowymi a dwójłomnością wymuszoną istnieje wprost proporcjonalna zależność. Identyczny wynik dla polimetakrylanu H 222 otrzymał ABAUD [2], w zakresie odkształceń aktywnych do $\varepsilon_1 \approx 0,03$. Należy zaznaczyć, że wpływ zmiany grubości próbki na wartość rzędu izochromy mieści się w granicach dokładności pomiarów.

Jeżeli pomiędzy ε_1 i n istnieje proporcjonalność dla dowolnej historii naprężenia to o zmianie dwójłomności powinna decydować jedynie deformacja ciała, tzn. w próbie relaksacji nie może mieć miejsca zmiana rzędu izochromy. Dla sprawdzenia tego wniosku wykonano proste badanie relaksacji zatrzymując odkształcenia w próbie pełzania zaraz po przyłożeniu obciążenia ($t = 1$ min.), wywołującego naprężenie $\sigma_0 = 400$ kG/cm². Zaobserwowano minimalną zmianę rzędu izochromy, wynoszącą 2% dla odkształceń około 0,017. Wynik ten, aczkolwiek w badaniu nie rejestrowano naprężeń, a więc relaksacji mechanicznej, wydaje się potwierdzać wniosek uzyskany z badań pełzania.

Należy ponadto zaznaczyć, że powyższa analiza dotyczyła przypadku jednoosiowego rozciągania pryzmatycznego pręta, gdzie porównano efekt optyczny jedynie z odkształceniami osiowymi. Nie zbadano wpływu odkształceń poprzecznych, czy też ogólnie pełnego stanu deformacji ciała. Dla przypadku stałej wartości współczynnika Poissona odkształcenia poprzeczne nie ingerują jednakże jakościowo w przedstawioną na rys. 11 zależność.

4. Matematyczny opis zaobserwowanych efektów

Z przedstawionej w p. 3 analizy rezultatów badań wynika niemożliwość opisanie obserwowanych efektów przez prawa fizyczne liniowe względem naprężenia. Odnosi się to zarówno do cech mechanicznych, jak i optycznych. Zaobserwowana proporcjonalność odkształceń i rzędu izochromy pozwala jednakże na rozpatrzenie postaci prawa nieliniowego jedynie dla jednej z tych wielkości; będzie ono takie same i dla drugiej z dokładnością do współczynnika proporcjonalności. Poniżej ograniczymy się do opisu cech mechanicznych.

Złożone, nieliniowe własności mechaniczne stałych polimerów w badaniach pełzania stanowiły przedmiot szeregu prac doświadczalnych i teoretycznych [4, 6, 9, 13, 22]. Zasadniczym ich celem było poznanie charakteru nieliniowości oraz podanie związku fizycznego opisującego zaobserwowane efekty. Opierając się na tych pracach, za najogólniejsze prawo fizyczne prostego materiału lepkosprężystego z pamięcią¹⁾ można uznać, dla przy-

¹⁾ Materiał prosty zdefiniowany jest jako materiał, dla którego tensor naprężenia F_{ij} w danej chwili t zależy jedynie od historii gradientu deformacji $F_{ij} = \frac{\partial x_i(X, \tau)}{\partial X_j}$ (por. np. [16]).

padku jednowymiarowego, następujący związek:

$$(4.1) \quad \varepsilon(t) = G \left[\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} \right]_0^t,$$

gdzie G jest funkcjonałem, a $\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}$ prędkością zmiany naprężenia. Jeżeli funkcjonał G jest ciągły i liniowy otrzymujemy całkową reprezentację Boltzmanna liniowego materiału lepkosprężystego (3.1). Dla funkcjonału ciągłego i nieliniowego GREEN i RIVLIN [5] zaproponowali następującą aproksymację funkcjonału G , będącą nieskończonym szeregiem całek wielokrotnych

$$(4.2) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau_1) \dot{\sigma}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t J_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \dot{\sigma}(\tau_1) \dot{\sigma}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t J_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_i) \dot{\sigma}(\tau_1) \dots \dot{\sigma}(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i + \dots$$

Sens fizyczny wyrażenia (4.2) można wyrazić następująco: kolejna przyczyna P_i , występująca w chwili t_i , zmienia efekt wywołany następną przyczyną P_{i+1} występującą w chwili t_{i+1} . Pierwsza całka określa liniowy efekt działania przyrostów naprężenia $d\sigma(\tau_i)$, druga całka złożony efekt działania przyrostów $d\sigma(\tau_i)$ i $d\sigma(\tau_{i+1})$, itd. Jądra całkowe J_1, \dots, J_i są funkcjami materiałowymi odpowiedniej liczby argumentów $t-\tau_i$, nie posiadają jednakże w przeciwieństwie do reprezentacji liniowej żadnej interpretacji fizycznej.

Związek (4.2) znalazł szerokie zastosowanie w opisie nieliniowych cech lepkosprężystych polimerów, zarówno dla przypadku jednowymiarowego, jak i złożonego stanu naprężenia, kiedy postać (4.2) jest znacznie bardziej skomplikowana (np. [10, 13]). Zainteresowanie tym opisem spowodowane jest możliwością ujęcia dowolnie złożonych (ciągłych) efektów nieliniowych względem wartości naprężenia i jego historii. Poprzez odpowiedni dobór liczby i rzędu wyrazów można teoretycznie zawsze dostatecznie dobrze opisać wyniki doświadczeń. Z drugiej jednakże strony przyjęcie znacznej liczby wyrazów, zwłaszcza wyższych rzędów, prowadzi do konieczności przeprowadzenia ogromnej liczby złożonych doświadczeń potrzebnych do wyznaczenia jąder całkowych, liczby doświadczeń praktycznie niewykonalnej. LOCKETT [10] wykazał, że dla przypadku przyjęcia trzech pierwszych wyrazów (4.2) niezbędna jest liczba doświadczeń $3+3n+1/2n^2$, gdzie n oznacza liczbę chwil τ_i , na którą podzielony jest interesujący nas przedział czasu t , dla którego poszukiwany jest opis zachowania się badanego materiału. W efekcie nie zostały dotychczas w pełni wyznaczone funkcje materiałowe dla żadnego z badanych polimerów. Badania ograniczały się do jakościowej analizy możliwości zastosowania prawa (4.2) dla różnych materiałów, lub wyznaczenia pewnych, szczególnych przekrojów hiperpowierzchni J_i .

Sytuacja ta spowodowała wzrost zainteresowania pewnymi aproksymacjami (4.2), które ograniczyłyby liczbę niezbędnych badań. Propozycje takie podali m.in. ONAT [14], PIPKIN i ROGERS [19], STAFFORD [20], DRESCHER i KWASZCZYŃSKA [4]. Istotą tych aproksymacji jest albo rozdzielenie cech nieliniowych na pewne kombinacje cech liniowych, albo

dobranie takiej postaci jąder całkowych, by można je było całkowicie wyznaczyć z kilku podstawowych badań.

Poniżej rozpatrzmy możliwość opisu zaobserwowanych mechanicznych efektów w ramach ostatniego sposobu aproksymacji reprezentacji (4.2).

Rozważmy najprostszy program doświadczalny określony związkami (2.1a). Całkując (4.2) przez części otrzymuje się następujące wyrażenie na odkształcenie aktywne

$$(4.3) \quad \varepsilon_c(t, \sigma_0) = J_1(t)\sigma_0 + J_2(t, t)\sigma_0^2 + \dots + J_i(t, \dots, t)\sigma_0^i + \dots,$$

skąd dzieląc przez σ_0 otrzymujemy

$$(4.4) \quad \frac{\varepsilon_c(t, \sigma_0)}{\sigma_0} \equiv J_c(t, \sigma_0) = J_1(t) + J_2(t, t)\sigma_0 + \dots + J_i(t, \dots, t)\sigma_0^{i-1} + \dots.$$

Lewa strona (4.4) określa funkcję pełzania aktywnego zdefiniowaną w p. 3. Z (4.4) wynika, że przy przyjęciu określonej liczby wyrazów (4.2), funkcja pełzania aktywnego wynikająca z reprezentacji (4.2) ma względem naprężenia postać paraboli n -tego stopnia. Z zależności (4.4) można ponadto wyznaczyć postać funkcji materiałowych J_i dla równych argumentów $t - \tau_i$; funkcja J_1 jest wyznaczona całkowicie. Określenie funkcji materiałowych dla nierównych argumentów $t - \tau_i$ wymaga, jak wspomniano, innych badań o złożonym programie obciążenia.

Założmy za [20], że jądra wyższych rzędów można przedstawić w postaci iloczynu funkcji jednej zmiennej

$$(4.5) \quad J_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) = L_1(t - \tau_1)L_2(t - \tau_2) \dots L_i(t - \tau_i).$$

Z warunku symetrii I_i względem argumentów wynika, że

$$(4.6) \quad J_i(t - \tau_1, \dots, t - \tau_i) = L(t - \tau)^i,$$

co oznacza, że każde jądro całkowe J_i jest funkcją tylko jednej zmiennej. Po uwzględnieniu (4.6) reprezentacja (4.2) będzie miała następującą postać:

$$(4.7) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau + \left[\int_0^t L_2(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau \right]^2 + \dots + \left[\int_0^t L_i(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau \right]^i + \dots.$$

W efekcie założenia (4.5) do wyznaczenia funkcji materiałowych L_i wystarcza program doświadczalny (2.1a), dla którego z (4.7) otrzymuje się

$$(4.8) \quad J_c(t, \sigma_0) = J_1(t) + L_2(t)^2\sigma_0 + \dots + L_i(t)^i\sigma_0^{i-1} + \dots.$$

Opierając się na doświadczalnej zależności $J_c = J_c(\sigma_0)$ można określić właściwą liczbę i rząd wyrazów (4.7) dających żądane przybliżenie wyników badań.

Z powyższego wynika, że przy założeniu do opisu dowolnego materiału prawa fizycznego (4.7) jego własności dla dowolnego programu obciążenia są z góry całkowicie określone związkiem (4.7) i wartościami funkcji materiałowych L_i wyznaczonych z podstawowego programu badań. Założenie (4.5) nie pozwala zatem na uwzględnienie efektów pojawiających się w coraz to bardziej złożonych programach badań. Jest to podstawowe ograniczenie powyższej aproksymacji ogólnego prawa fizycznego (4.2). Związek (4.7) jest jednakże związkiem nieliniowym zarówno względem wartości naprężenia, jak i jego historii. Można zatem przypuszczać, że opisuje on, przynajmniej jakościowo, szereg efektów obserwowanych

nych doświadczalnie. Zagadnienie to rozpatrzmy poniżej po uprzedniej ilościowej analizie (4.7) dla zrealizowanego programu badań (2.1a).

Opierając się na wynikach badań przedstawiających zależność $J_c = J_c(\sigma_0)$, (rys. 5), można zauważyć, że nieliniowość wzrasta gwałtownie dla większych wartości naprężeń. Dla naprężeń niższych od zrealizowanych ($\sigma_0 < 200$ kG/cm²) należy spodziewać się zachowania materiału prawie liniowego. Dla takiego przebiegu zależności $J_c = J_c(\sigma_0)$ wielomian (4.8) będzie musiał zawierać szereg wyrazów bardzo wysokiego rzędu. Celem obniżenia rzędu wyrazów wprowadzimy dodatkową aproksymację opisu, zaproponowaną w pracy [4]. Aproksymacja ta zakłada możliwość rozdzielenia zachowania się materiału na obszar liniowy i nieliniowy. Granicą obu obszarów jest pewna wartość naprężenia $\sigma(\tau) = \sigma^*$ niezależna od historii naprężenia i spełniająca rolę stałej materiałowej. Na wykresie $J_c = J_c(\sigma_0)$ odpowiada to poziomemu przebiegowi krzywych J_c od $\sigma_0 = 0$ do $\sigma_0 = \sigma^*$.

Zachowanie się materiału w obszarze liniowym $\sigma(\tau) < \sigma^*$, określone jest liniową reprezentacją Boltzmanna (3.1). W obszarze nieliniowym zakłada się superpozycję odkształceń liniowych wynikających z historii całkowitego naprężenia $\sigma(\tau)$ i odkształceń nieliniowych określonych związkiem typu (4.2) dla historii nadwyżki naprężenia $\sigma(\tau)' = \sigma(\tau) - \sigma^*$. Prowadzi to do związku

$$(4.9) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^t K_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \dot{\sigma}'(\tau_1) \dot{\sigma}'(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \dots + \int_0^t \dots \int_0^t K_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_i) \dot{\sigma}'(\tau_1) \dots \dot{\sigma}'(\tau_i) d\tau_1 \dots d\tau_i + \dots$$

Uwzględniając oba założenia upraszczające (4.5) i (4.9), otrzymamy następujący proponowany związek fizyczny ważny dla obszaru nieliniowego:

$$(4.10) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \left[\int_0^t L_2(t-\tau) \dot{\sigma}'(\tau) d\tau \right]^2 + \dots \\ \dots + \left[\int_0^t L_i(t-\tau) \dot{\sigma}'(\tau) d\tau \right]^i + \dots,$$

gdzie funkcje L_i mają inne wartości od występujących w wyrażeniu (4.7).

Liczbę i rząd wyrazów (4.10) określono w oparciu o przedstawione na rys. 5 wyniki badań programu (2.1a), dla którego odkształcenia aktywne i funkcja pełzania aktywnego wynikające z (4.10) mają następującą postać:

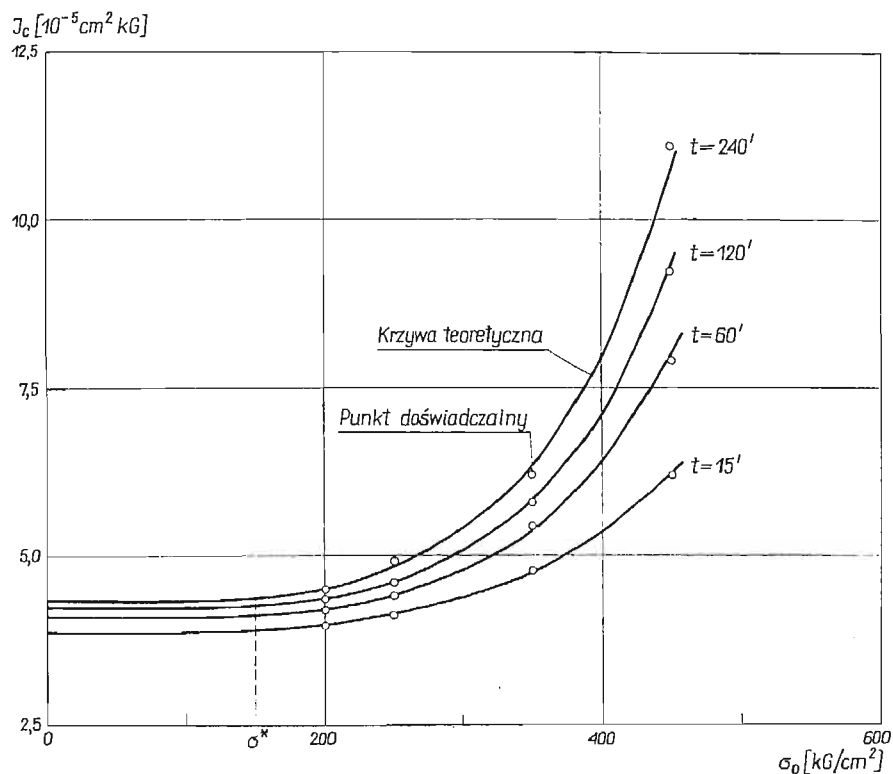
$$(4.11) \quad \varepsilon_c(t, \sigma_0) = J_1(t) \sigma_0 + L_2(t)^2 \sigma_0'^2 + \dots + L_N(t)^i \sigma_0'^i + \dots$$

$$(4.12) \quad J_c(t, \sigma_0) = J_1(t) + L_2(t)^2 \frac{\sigma_0'^2}{\sigma_0} + \dots + L_N(t)^i \frac{\sigma_0'^i}{\sigma_0} + \dots$$

Przyjęto, że wystarczające przybliżenie krzywych doświadczalnych daje następująca postać (4.10):

$$(4.13) \quad \varepsilon(t) = \int_0^t J_1(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau + \left[\int_0^t L_2(t-\tau) \dot{\sigma}'(\tau) d\tau \right]^2 + \left[\int_0^t L_5(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \right]^5,$$

przy założeniu $\sigma^* = 150 \text{ kG/cm}^2$. W tabelicy 1 przedstawiono liczbowe wartości funkcji materiałowych, a na rys. 12 porównanie punktów doświadczalnych z przebiegiem teoretycznym.



Rys. 12

Tablica 1

t_{min}	$J_1 \cdot 10^5 \text{ cm}^2/\text{kG}$	$L_2 \cdot 10^4 \text{ cm}^2/\text{kG}$	$L_3 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{kG}$
1	3,55	2,0	0,78
15	3,88	2,53	1,15
60	4,10	2,73	1,35
90	4,19	2,91	1,40
120	4,25	3,03	1,43
150	4,27	3,08	1,45
240	4,35	3,42	1,49

Przed ilościowym porównaniem wartości odkształceń wynikających z (4.13) z wynikami doświadczeń dla złożonych programów (2.1b) i (2.1c) zbadamy jakościowe cechy proponowanego opisu. Jako pierwsze zagadnienie przeanalizujemy wzajemny stosunek odkształceń aktywnych i odwracalnych. Z (4.13) dla (2.1b), po wykorzystaniu (4.11) w myśl

(2.2a), odkształcenia odwracalne wyrażą się następującym związkiem:

$$(4.14) \quad \varepsilon_r(t, t_1, \sigma_0) = J_1(t-t_1)\sigma_0 + L_2(t)^2\sigma_0'^2 + L_5(t)^5\sigma_0'^5 + \\ - [L_2(t) - L_2(t-t_1)]^2\sigma_0'^2 - [L_5(t) - L_5(t-t_1)]^5\sigma_0'^5.$$

Wyrażenie (4.14) można zapisać, oznaczając $t-t_1 = s$, w postaci

$$(4.15) \quad \varepsilon_r(s, t_1, \sigma_0) = J_1(s)\sigma_0 + L_2(s)^2\sigma_0'^2 + L_5(s)^5\sigma_0'^5 + 2L_2(s) \times \\ \times [L_2(s+t_1) - L_2(s)]\sigma_0'^2 + 5L_5(s+t_1)L_5(s)\{[L_5(s+t_1) - L_5(s)]^3 + \\ + L_5(s+t_1)L_5(s)[L_5(s+t_1) - L_5(s)]\}\sigma_0'^5.$$

Wykorzystując (4.11) otrzymamy

$$(4.16) \quad \varepsilon_r(s, t_1, \sigma_0) - \varepsilon_c(s, \sigma_0) = 2L_2(s)[L_2(s+t_1) - L_2(s)]\sigma_0'^2 + \\ + 5L_5(s+t_1)L_5(s)\{[L_5(s+t_1) - L_5(s)]^3 + \\ + L_5(s+t_1)L_5(s)[L_5(s+t_1) - L_5(s)]\}\sigma_0'^5.$$

Równanie (4.16) określa różnicę pomiędzy odkształceniami odwracalnymi dla czasu $s = t-t_1$, i odkształceniami aktywnymi dla czasu $t = s$. Jeżeli funkcje $L_2(t)$ i $L_5(t)$ są dodatnio monotonicznie rosnące, co jest spełnione dla analizowanych wyników doświadczalnych, to prawa strona (4.16) jest zawsze dodatnia. Oznacza to, że przewidziane przez (4.13) odkształcenia odwracalne są większe od odkształceń aktywnych dla $t = s$. Ponadto dla $s = \text{const}$ różnica $\varepsilon_r - \varepsilon_c$ rośnie ze wzrostem t_1 . Wynika stąd, że związek (4.13) opisuje jakościowo obserwowane doświadczalnie efekty. Można wykazać, że identyczne jakościowo wnioski otrzymuje się dla dowolnej liczby i rzędu wyrazów (4.10).

W podobny sposób można porównać odkształcenia dodatkowe i aktywne dla programu (2.1c). Z (4.13) wykorzystując (2.2b), (4.11) i oznaczając $t-t_2 = s$ otrzymuje się

$$(4.17) \quad \varepsilon_a(s, t_1, t_2, \sigma_0) - \varepsilon_c(s, \sigma_0) = 2L_2(s)[L_2(s+t_2) - L_2(s+t_2-t_1)]\sigma_0'^2 + \\ + 5L_5(s)[L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)]\{[L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)]^3 + \\ + 2L_5(s)[L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)]^2 + 2L_5(s)^2 \times \\ \times [L_5(s+t_2) - L_5(s+t_2-t_1)] + L_5(s)^3\}\sigma_0'^5$$

Przy tych samych warunkach na funkcje $L_2(t)$ i $L_5(t)$ jak powyżej odkształcenia dodatkowe są większe od aktywnych. Dla $t_2 = \text{const}$ i $s = \text{const}$ różnica $\varepsilon_a - \varepsilon_c$ rośnie ze wzrostem t_1 . Odpowiada to własnościom badanego materiału.

Jako ostatnie zagadnienie rozpatrzmy program dodatkowego obciążenia opisany związkami

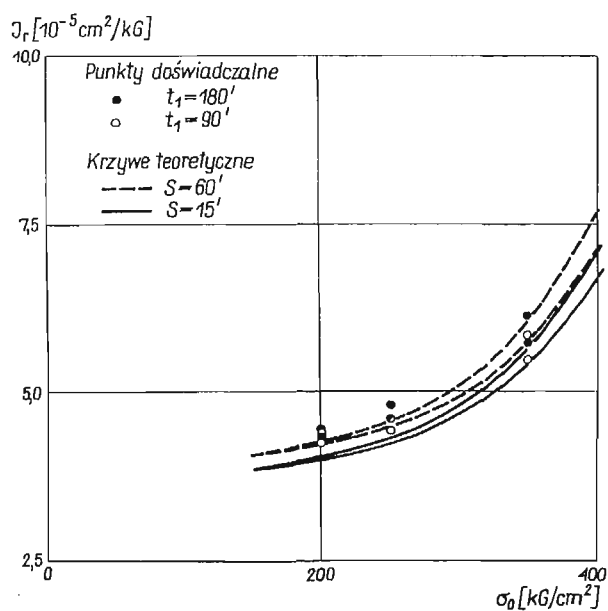
$$(4.18) \quad \tau \leq 0, \quad \sigma(\tau) = 0; \quad 0 < \tau \leq t_1, \quad \sigma(\tau) = \sigma_0; \quad \tau > t_1, \quad \sigma(\tau) = a\sigma_0.$$

Program ten, choć nie zrealizowany w omawianych doświadczeniach, jest często stosowany w badaniach cech lepkosprężystych polimerów (np. [4, 9, 22]). Z (4.13) dla (4.18) po wykorzystaniu (4.11) i oznaczeniu $t-t_1 = s$ otrzymuje się następujące wyrażenie na różnicę odkształceń dodatkowych i aktywnych:

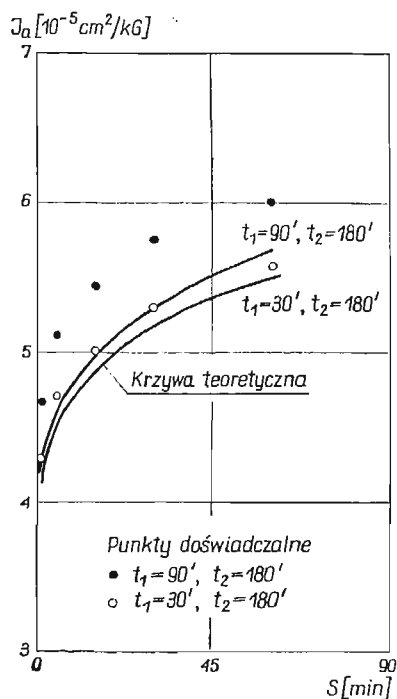
$$(4.19) \quad \varepsilon_a(s, t_1, \sigma_0) - \varepsilon_c(s, \sigma_0) = (a-2)J_1(s)\sigma_0 + L_2(s)\sigma_0[2(a-1)L_2(s+t_1)\sigma_0' + \\ + a(a-2)L_2(s)\sigma_0] + 5(a-1)L_5(s)L_5(s+t_1)\sigma_0\sigma_0'[L_5(s+t_1)]^3\sigma_0'^3 + \\ + 2(a-1)L_5(s)L_5(s+t_1)^2\sigma_0'^2\sigma_0 + 2(a-1)^2L_5(s)^2L_5(s+t_1)\sigma_0'\sigma_0'^2 + \\ + (a-1)^3L_5(s)^3\sigma_0'^3] + [(a-1)^5 - 1]L_5(s)^5\sigma_0'^5.$$

Z (4.19) wynika, że znak różnicy $\varepsilon_a - \varepsilon_c$ jest zależny od wartości a . Można jednakże ocenić, jak dla dowolnego $a = \text{const}$ i $s = \text{const}$ zmienia się $\varepsilon_a - \varepsilon_c$ wraz ze wzrostem t_1 . Z (4.19) widać, że dla wzrastającego t_1 wzrasta również $\varepsilon_a - \varepsilon_c$, tzn. odkształcenia dodatkowe zwiększają się. Wniosek ten jest tym istotny, że dla szeregu materiałów obserwuje się dla programu (4.18) malenie odkształceń dodatkowych, («umocnienie» materiału) ze wzrostem czasu dociążenia, przy równoczesnym zwiększaniu się odkształceń odwracalnych dla programu (2.1b) ze wzrostem czasu odciążenia (4.9). Związek (4.13) lub ogólnie (4.10), nie może zatem opisać efektów obserwowanych przy dociążeniu takich materiałów, jeżeli funkcje $L_i(t)$ są dodatnie i monotonicznie rosnące.

Ilościowe porównanie odkształceń odwrrotnych dla programu (2.1b) i odkształceń dodatkowych dla programu (2.1c) wynikających ze związku (4.13) z wynikami doświadczeń przedstawiają rysunki 13 i 14. Na rys. 13 porównano funkcję odwrotnego pełzania $J_r =$



Rys. 13



Rys. 14

$= J_r(\sigma_0)$, a na rys. 14 funkcję $J_a = J_a(s)$. Z rysunków tych widać, że dla procesu odwrrotnego pełzania istnieje bardzo dobra zgodność. W przypadku pełzania dodatkowego obserwuje się pewną niezgodność. Wyniki doświadczeń leżą powyżej wartości przewidywanych przez (4.13); różnice są tym większe im dłuższy jest czas odciążenia, nie przekraczają jednakże 15%.

5. Uwagi końcowe

Opierając się na porównaniu zaproponowanego w p. 4 opisu fenomenologicznego cech mechanicznych polimetakrylanu metylu z wynikami doświadczeń można przyjąć zada-

wałającą jego zgodność w zakresie zrealizowanych programów. Dla innych, bardziej złożonych programów obciążenia, mogą jednakże pojawić się efekty jakościowo lub ilościowo niezgodne ze związkami (4.13), [por. uwagę o programie (4.18)].

Należy tu podkreślić, że przyjęta aproksymacja (4.5) ogólnego prawa (4.2) jest jedynie jedną z możliwych aproksymacji. W pracy [20] pokazano inne możliwości, również pozwalające na wyznaczenie funkcji materiałowych z najprostszego programu badań (2.1a); różnice pojawiają się przy programach złożonych. Przyjęta aproksymacja jest z nich jednakże najogólniejszą — własności materiału zależą nieliniowo od wartości i historii naprężenia. Wybór właściwego opisu, jak i ilości jego wyrazów (efekty wyższych rzędów), zależy od żądanej dokładności, przedziału czasu, wartości i historii naprężenia.

Zakładając słuszność szczególnej, wprost proporcjonalnej, zależności dwójłomności od odkształceń osiowych bez względu na historię i wartość naprężenia prawo fizyczne wiążące cechy optyczne i mechaniczne będzie miało identyczną postać z (4.13), po zastąpieniu w nim odkształcenia przez rząd izochromy. W miejsce mechanicznych funkcji materiałowych J i L wchodzić będą funkcje optyczne, liczbowo identyczne z dokładnością do współczynnika proporcjonalności $a = \frac{n(t)}{\varepsilon(t)}$. Otwarte pozostaje jednak zagadnienie postaci prawa dla złożonego stanu deformacji; wymagane są tu dodatkowe badania.

Podobne jakościowo wyniki — liniowa proporcjonalność dwójłomności i odkształceń osiowych przy pełzaniu — uzyskał także AMBA-RAO [1] dla Catalinu 800 i CR-39.

Rozpatrując otrzymane wyniki z punktu widzenia zastosowania ich w badaniach modeli ciał sprężystych jako pierwszy wniosek należy stwierdzić, że polimetakrylan metylu dla naprężeń powyżej około 150 kG/cm^2 wykazuje wyraźne nieliniowe cechy mechaniczne i optyczne. Dla mniejszych naprężeń jego zachowanie jest, jak zbadano w pracach [2, 8], liniowe, jednakże również zależne od czasu. Wobec łagodnego przejścia z zakresu liniowego do nieliniowego dokładne ustalenie granicy obszarów jest praktycznie niemożliwe. Powstaje także pytanie, czy polimetakrylan metylu posiada obszar zachowania czysto sprężystego. Oznacza to, że stosowanie tego materiału w badaniach modelowych wymaga uwzględnienia efektów czasowych, co nie zawsze jest brane pod uwagę. W badaniach elastooptycznych występuje tendencja stosowania stosunkowo dużych naprężeń w modelach wykonanych z materiałów posiadających na ogół cechy reologiczne. Odnosi się to także do zastosowania polimetakrylanu metylu na modele badane tensometrycznie lub metodą siatek w zastępstwie rzeczywistych materiałów sprężystych jak np. stali.

Przeniesienie wyników pomiarów odkształceń z modeli lepkosprężystych na sprężyste, jak i wyników pomiaru dwójłomności, wymaga spełnienia szeregu postulatów odnośnie cech materiału modelowego i warunków brzegowych zadania. Opierając się na pracach [11, 21] można w skrócie podać, że dla materiałów liniowo lepkosprężystych [mechanicznie i optycznie] ściśle przeniesienie wyników jest możliwe, jeżeli materiał lepkosprężysty i sprężysty są nieściśliwe. Przy spełnieniu tego warunku odkształcenia czy dwójłomność są w każdej chwili proporcjonalne do wartości dla ciała sprężystego, jeżeli warunki brzegowe można przedstawić w postaci iloczynowej: $u_i(x, t) = U_i(x)g(t)$, $t_i(x, t) = T_i(x)f(t)$ tzn. w postaci iloczynu funkcji miejsca i funkcji czasu (por. analogię sprężysto-lepkosprężystą Alfrey'a (np. [12])). Dla warunków brzegowych w innej postaci, ale dla materiału nie wykazującego nieustalonego płynięcia lepkiego (brak trwałych odkształceń zależnych

od czasu) można wykorzystać wartości asymptotyczne (dla $t \rightarrow \infty$), które są niezależne od wcześniejszych historii naprężenia czy odkształcenia.

W przypadku materiałów nieliniowo lepkosprężystych zagadnienie to jest znacznie bardziej złożone i nadal otwarte. Wydaje się jednak, że dla pewnych materiałów, dla których wartości asymptotyczne są skończone i niezależne od historii naprężenia istnieje możliwość ich wykorzystania do modelowania ciał nieliniowo sprężystych. Należy tu zaznaczyć, że takie zachowanie przewiduje związek (4.13), jeżeli funkcje J i L mają poziome asymptoty. Cechę tę posiada także ogólne prawo (4.2), jeżeli każde z jąder całkowych ma dla każdego argumentu skończoną granicę dla $t \rightarrow \infty$.

Zaobserwowana proporcjonalność dwójłomności i odkształceń osiowych w polimetaakrylanie metylu sugeruje możliwość wykorzystania pomiarów względnego opóźnienia do określenia odkształceń modelu np. w zastępstwie metody siatek. Konieczne jest tu jednakże wyjaśnienie wpływu odkształceń poprzecznych. Interesujące jest także zbadanie postaci zależności $n = n(\epsilon)$ dla różnych długości światła.

Literatura cytowana w tekście

1. C. L. AMBA-RAO, *Stress-strain-time-birefringence relations in photoelastic plastics with creep*, J. Pol. Sci., Part C., Pol. Symp., No 5, 75–86, 1964.
2. J. AUBAUD, *Recherches sur la relation contrainte — birefringence dans le plexiglas M 222* — Rech. Aero., 26, 31–39, 1952.
3. E. H. DILL, *On phenomenological rheo-optic constitutive relations*, — J. Pol. Sci., Part C., Pol. Symp., No 5, 67–74, 1964.
4. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA, *An approximate description of non-linear viscoelastic material*, — Int. J. Non-Linear Mech., 5, 11–22, 1970.
5. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, — Arch. Rat. Mech. Anal., 1, 1–21, 1957.
6. D. W. HADLEY, I. M. WARD, *Non-linear creep and recovery behaviour of polypropylene fibres*, — J. Mech. Phys. Solids, 13, 397–411, 1965.
7. B. Z. JARKOWSKI, *Badanie mechanicznych i optycznych własności pewnych materiałów modelowych do analizy naprężeń w elementach konstrukcyjnych*, — (rozpr. doktorska), Warszawa 1967.
8. J. KAPUŚCIŃSKI, *Własności lepkosprężyste szkła organicznego w zakresie temperatur jego kształtowania*, — (rozpr. doktorska), Warszawa 1969.
9. J. H. LIFSHITZ, H. KOLSKY, *Non-linear viscoelastic behavior of polyethylene*, — Int. J. Solids Struct., 3, 383–397, 1967.
10. F. J. LOCKETT, *Creep and stress-relaxation experiments for non-linear materials*, — Int. J. Engng. Sci., 3, 59–75, 1965.
11. R. D. MINDLIN, *A mathematical theory of photo-viscoelasticity*, J. Appl. Phys., 20, 206–216, 1949.
12. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Arkady, Warszawa 1963.
13. K. ONARAN, W. N. FINDLEY, *Combined stress-creep experiments on a nonlinear viscoelastic material to determine the kernel functions for a multiple integral representation of creep*, Trans. Soc. Rheol., 9, 299–327, 1965.
14. E. T. ONAT, *Description of mechanical behavior of inelastic solids*, Proc. 5-th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 421–434, 1966.
15. Z. ORŁOŚ, K. SZULBORSKI, *Własności reologiczne pewnej żywicy epoksydowej*, ref. IV Symp. Dośw. Bad. Mech. Ciała Stał. PTMTiS, Warszawa 1979.
16. P. PERZYNA, *Koncepcje opisu zanikania pamięci materialu*, Rozpr. Inż., 15, 361–399, 1967.

17. J. T. PINDERA, *Badania fizycznych reologicznych własności elastooptycznych kilku żywic poliestrowych*, Cz. II i III, Rozpr. Inż. T. VII, z. 4, 481–540, 1959.
18. J. T. PINDERA, *Reologiczne zagadnienia we współczesnych metodach elastooptyki i badań modelowych*, Pr. ITB, Nr 19, 1961.
19. A. C. PIPKIN, T. G. ROGERS, *A non-linear integral representation for viscoelastic behaviour*, J. Mech. Phys. Solids., 16, 59–72, 1968.
20. R. O. STAFFORD, *On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 17, 339–358, 1969.
21. P. S. THEOCARIS, C. MYLONAS, *Viscoelastic effects in birefringent coatings*, J. Appl. Mech., 28, 601–607, 1961.
22. I. H. WARD, E. T. ONAT, *Non-linear mechanical behaviour of oriented polypropylene*, J. Mech. Phys. Solids, 11, 217–229, 1963.

Р е з ю м е

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛИМЕТИЛ-МЕТАКРИЛЛАТА В УСЛОВИЯХ СЛОЖНОЙ ИСТОРИИ НАГРУЖЕНИЯ

В работе представлены исследования влияния истории нагрузки на оптические и механические свойства полиметилметакрилата. Исследования были проведены при различных программах нагружения при комнатной температуре и состояли в определении активной ползучести материала под влиянием постоянной нагрузки различной величины, обратной ползучести после разгрузки и добавочной ползучести. Результаты обсуждены с точки зрения линейности обнаруженных эффектов, в смысле удовлетворения принципу суперпозиции Больцманна. Проверка осуществлялась через функцию ползучести.

Анализ результатов исследований показал, что материал имеет сильно нелинейную характеристику, так с точки зрения оптических, как и механических свойств. Нелинейность характеристики материала увеличивается с ростом нагрузок и увеличением продолжительности времени действия нагрузки. Результаты испытаний показывают, что с удовлетворительной точностью можно принять существование однозначной прямо пропорциональной зависимости между функциями оптической и механической ползучести. Это означает, что оптические эффекты зависят только от деформаций.

Вторая часть работы посвящена математическому описанию свойств материала, основанному на применении интегрального представления Грина-Ривлина. В работе предложена аппроксимация описания, заключающаяся в подборе такой формы интегральных ядер, которая обеспечивает их определенность из небольшого числа основных опытов. Вторая аппроксимация, предложенная авторами, заключается в разделении поведения материала на линейную и нелинейную область. Определены численные значения функций материалов.

S u m m a r y

RHEOLOGICAL MECHANICAL AND OPTICAL PROPERTIES OF A POLYMETHYL-METACRYLATE UNDER CONDITIONS OF COMPLEX LOADING HISTORY

The paper deals with the experimental investigations of the influence of the history of loading on the mechanical and optical properties of poly-methylmetacrylate under uni-axial tension. The investigations were carried out for various loading programmes at room temperature and embraced active creep at various load levels, recovery creep after unloading and additional creep. Test results have been analyzed from the point of view of linearity of observed effects in the sense of fulfilment of the Boltzmann superposition principle.

Analysis of the test results proves that the material under consideration is strongly non-linear both with respect to the optical and the mechanical properties, the degree of non-linearity being greater for higher load values and longer duration of the load application. Comparison of the functions of optical and mechanical creep seems to indicate that a proportional relationship exists between the function of

optical creep and the function of mechanical creep. This means that the optical effects depend on the deformation only.

The second part of the paper includes the mathematical description of the non-linear properties of material based on the application of the Green-Rivlin integral representation. An approximate description has been suggested consisting in the selection of such form of the integral kernels that they could be completely determined from several basic investigations. An additional approximation has also been used consisting in the separation of the behaviour of material into linear and non-linear region. Numerical values of the material functions have been calculated.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1970 r.

ZALĘŻNOŚĆ MAKSYMALNEJ SIŁY UDERZENIA OD WSPÓŁCZYNNIKA RESTYTUCJI

RYSZARD GRYBÓŚ (GLIWICE)

1. Wstęp

Podczas zderzenia dwóch ciał stałych powstaje siła wzajemnego oddziaływania, zwana siłą uderzenia. Jest ona wypadkową lokalnych naprężeń normalnych, jakie powstają na powierzchni styku ciał. Obszary otaczające te powierzchnie stają się źródłem intensywnej fali naprężeń, która rozprzestrzenia się po całej objętości ciał. Gdy fala ta dotrze do powierzchni granicznych ulega wielokrotnym odbiciom. Procesom tym towarzyszy dysypacja energii i «rozmywanie» czoła fali naprężeń.

Dlatego w teoretycznym ujęciu procesu zderzenia wyodrębniamy odkształcenia lokalne, które powstają w obszarze bliskim miejsca styku, oraz odkształcenia ogólne, które są związane z drganiami własnymi ciał sprężystych.

W klasycznej teorii uderzenia nie operuje się zasadniczo pojęciem siły uderzenia, a jedynie jej impulsem. Wykorzystując zasady zmienności oraz zachowania pędu, uzupełnione dodatkowo hipotezą odnośnie restytucji impulsu w fazie odciążania, możemy tą drogą określić jedynie prędkości ciał po zderzeniu oraz wartość impulsu uderzenia.

Jednakże klasyczna teoria uderzenia nie daje żadnej informacji odnośnie siły uderzenia. Tymczasem ta właśnie wielkość z oczywistych powodów stanowi punkt wyjścia we wszelkich obliczeniach wytrzymałościowych elementów, które poddane są obciążeniom udarowym.

Wprowadzony przez Newtona do teorii uderzenia współczynnik restytucji R ($0 \leq R \leq 1$) charakteryzuje stopień sprężystości zderzenia; gdy $R = 0$ mówimy, że uderzenie jest plastyczne, dla $R = 1$ — sprężyste, zaś przy wartościach pośrednich występuje uderzenie sprężysto-plastyczne lub niesprężyste. Należy jednak stwierdzić, iż są to określenia tylko umowne.

Aby wyjaśnić tę kwestię zauważymy, że zgodnie z twierdzeniem Carnota, współczynnik restytucji jest miarą straty energii kinetycznej (ΔT) ciał biorących udział w zderzeniu. Mianowicie, jeżeli dwa ciała o masach m_1 , m_2 zderzają się z prędkością względną $v_r = v_1 - v_2$, to wówczas

$$(1.1) \quad \Delta T = T - T' = \frac{1}{2}(1 - R^2)m_r v_r^2,$$

gdzie

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

T , T' — energia kinetyczna ciał przed i po zderzeniu.

Ale energia ΔT zostaje zamieniona w sposób nieodwracalny zarówno na pracę lokalnych odkształceń plastycznych (L_p), jak i w energię drgań sprężystych (E_d), czyli energię odkształceń ogólnych.

W zależności od ukształtowania powierzchni ciał w miejscu zderzenia, jak i w zależności od ogólnej konfiguracji ciał (pręt, belka, płyta, ciało kuliste itd.), wielkości L_p i E_d mogą mieć rozmaity udział w ubytku energii ΔT . Wiadomo np., że przy zderzeniu ciał o budowie zwartej znikomo mała część energii zderzenia zostaje związana w postaci energii drgań. W tym przypadku wartość $R \approx 0$ będzie świadczyć o tym, że prawie cała energia ΔT została zamieniona na pracę odkształceń plastycznych, a więc określenie «uderzenie plastyczne» odzwierciedla tu faktyczny stan rzeczy.

Nieco odmienna sytuacja występuje przy kolinearnym zderzeniu dwóch prętów prostych. W tym przypadku stosunek energii $E_d/\Delta T$ może przyjmować dowolne wartości z przedziału (0; 1) i to samo można powiedzieć o współczynniku restytucji. W szczególności oznacza to, iż może być $R \ll 1$ mimo iż żaden pręt nie doznał w ogóle odkształceń plastycznych.

Współczynnik restytucji, jako wielkość wyznaczona doświadczalnie, ujmuje łącznie obie wspomniane straty. Wyznaczanie tego współczynnika nie nastęcza na ogół trudności pomiarowych, dzięki czemu dysponujemy dziś w tym zakresie dość bogatym materiałem doświadczalnym. Jednakże wspomniany brak klasycznej teorii uderzenia, polegający na niemożności obliczenia siły uderzenia sprawia, iż znajomość współczynnika restytucji nie zaspokaja jeszcze w pełni potrzeb projektanta w przedmiocie danych wyjściowych, niezbędnych do obliczeń wytrzymałościowych. Bezpośredni zaś pomiar siły uderzenia jest wprawdzie możliwy, jednakże wiąże się z koniecznością użycia specjalnych czujników i skomplikowanej aparatury elektronicznej, a poza tym możliwy jest do przeprowadzenia na już istniejącym obiekcie lub modelu.

Z tych względów niewątpliwie celowa wydaje się próba powiązania współczynnika restytucji z maksymalną siłą uderzenia P_m . Ustalenie takiego związku dałoby projektantom wygodne narzędzie do obliczenia tak ważnej wielkości wyjściowej, jaką jest siła P_m .

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie wzorów umożliwiających obliczenie maksymalnej siły uderzenia, gdy znany jest współczynnik restytucji oraz niektóre inne wielkości dające się łatwo zmierzyć, jak prędkości odbicia i trwałe odkształcenie lokalne.

Wyprowadzimy także wzór na długość uderzenia sprężysto-plastycznego. Cel ten osiągniemy na drodze elementarnych rozważań matematycznych w oparciu o niektóre wyniki lokalnej teorii uderzenia sprężysto-plastycznego [1, 2].

W toku dalszych rozważań będziemy posługiwać się m.in. modelem tzw. ciała *quasi-sztynnego*. Jest to ciało, które pod działaniem zewnętrznych sił skupionych doznaje wyłącznie odkształceń lokalnych. Poza tym określenie to nie precyzuje charakteru tych odkształceń, które mogą być wyłącznie sprężyste lub sprężysto-plastyczne. Modelem ciała quasi-sztynnego posługiwał się Hertz proponując teorię zderzenia, w której wykorzystał wyniki swej statycznej teorii zagadnień stykowych. Wiadomo bowiem, że w quasi-statycznej, lokalnej teorii uderzenia (zwanej dalej krótko teorią Hertza) nie bierze się pod uwagę odkształceń ogólnych ciał biorących udział w zderzeniu, a jedynie ich odkształcenia lokalne. Takie podejście pozwala jednak określić zarówno maksymalną siłę (P_m),

jak i długość (τ) uderzenia sprężystego. Rzecz w tym, iż uderzenie sprężyste jest tylko wyidealizowanym przypadkiem, zaś każde zderzenie ciał rzeczywistych jest niesprężyste, w sensie nierówności $R < 1$.

2. Charakterystyka metody postępowania

Przyjmujemy następujący schemat rozumowania, które doprowadzi do ustawienia zależności $P_m = f(R)$.

Całkowita strata energii kinetycznej przy zderzeniu dwóch ciał rzeczywistych o dowolnej konfiguracji związana jest z pojawieniem się odkształceń plastycznych oraz ze wzbudzeniem drgań sprężystych. Zatem

$$(2.1) \quad \Delta T = L_p + E_d.$$

Weźmy najpierw pod uwagę zderzenie niesprężyste ciał quasi-sztywnych. W tym wyidealizowanym przypadku cała strata energii uderzenia związana jest wyłącznie z pracą lokalnych odkształceń plastycznych. Jeżeli stopień sprężystości takiego zderzenia scharakteryzujemy za pomocą współczynnika restytucji R_p ($0 < R_p < 1$), to zgodnie z twierdzeniem Carnota

$$(2.2) \quad L_p = \frac{1}{2}(1 - R_p^2)m_r v_r^2.$$

Z kolei weźmy pod uwagę drugi przypadek, mianowicie zderzenie ciał Hooke'a. Strata energii kinetycznej związana jest wówczas wyłącznie ze wzbudzeniem drgań sprężystych. Można przeto mówić tutaj o niesprężystym zderzeniu ciał idealnie sprężystych. Charakteryzując stopień sprężystości takiego zderzenia za pomocą współczynnika R_d ($0 < R_d < 1$) napiszemy podobnie, jak poprzednio

$$(2.3) \quad E_d = \frac{1}{2}(1 - R_d^2)m_r v_r^2.$$

Podstawienie wzorów (1.1), (2.2) i (2.3) do równości (2.1) daje

$$1 - R^2 = (1 - R_p^2) + (1 - R_d^2),$$

skąd

$$(2.4) \quad R^2 = R_p^2 + R_d^2 - 1.$$

Jeżeli potrafimy współczynniki restytucji R_p i R_d powiązać z maksymalną siłą uderzenia, to ze wzoru (2.4) znajdziemy poszukiwany związek $P_m = f(R)$. Zagadnienie to rozwiążemy w następnych paragrafach. W tym celu musimy rozpatrzyć oddzielnie oba wspomniane przypadki, tzn. zderzenie ciał quasi-sztywnych, a następnie zderzenie ciał Hooke'a.

Przedtem jednak celowe będzie przypomnieć niektóre wyniki teorii Hertza.

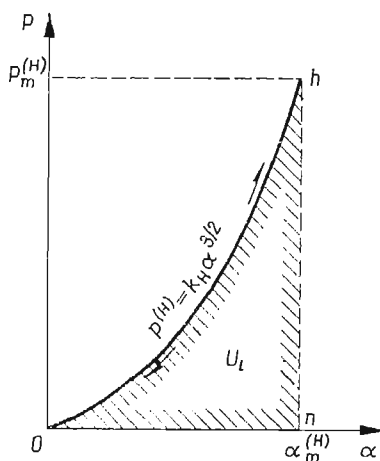
3. Sprężyste zderzenie ciał quasi-sztywnych

U podstaw teorii Hertza leży założenie, iż przy zderzeniu ciał quasi-sztywnych rozkład (lecz nie wartość!) naprężeń stykowych jest identyczny, jak przy statycznym nacisku wza-

jemnym ciał. Konsekwencją tego założenia jest przyjęcie zależności pomiędzy siłą stykową $P^{(H)}$ i zbliżeniem α w postaci znanego wzoru

$$(3.1) \quad P^{(H)} = k_H \alpha^{3/2},$$

który wyprowadza się w oparciu o założenia statycznej teorii zagadnień stykowych. Stała k_H zależy od geometrii powierzchni w otoczeniu punktu (linii) styku i od stałych sprężystości materiału.



Rys. 1

Wykresem funkcji (3.1) jest krzywa Oh na rys. 1. Pole Ohn pod tą krzywą obrazuje energię sprężystości U_t odkształceń lokalnych, która równa się energii kinetycznej straconej w pierwszej fazie uderzenia.

Wykorzystując ten fakt oblicza się maksymalną siłę zderzenia

$$(3.2) \quad P_m^{(H)} = k_H^{2/5} \left(\frac{5}{4} m_r v_r^2 \right)^{3/5}$$

oraz maksymalne zbliżenie

$$(3.3) \quad \alpha_m^{(H)} = \left(\frac{5}{4} \frac{m_r v_r^2}{k_H} \right)^{2/5}$$

W drugiej fazie uderzenia następuje sprężyste odciążenie, a więc obowiązuje nadal zależność (3.1), zaś krzywa hO jest zarazem krzywą odciążenia. Jak z tego wynika teoria Hertza opisuje zderzenie sprężyste ($R = 1$) ciał quasi-sztywnych, jako że odkształcenia ogólne są tu pomijane.

4. Niesprężyste zderzenie ciał quasi-sztywnych

W tym przypadku strata energii uderzenia związana jest wyłącznie z wystąpieniem trwałych odkształceń lokalnych, czyli

$$(4.1) \quad L_p = \frac{1}{2} (1 - R_p^2) m_r v_r^2.$$

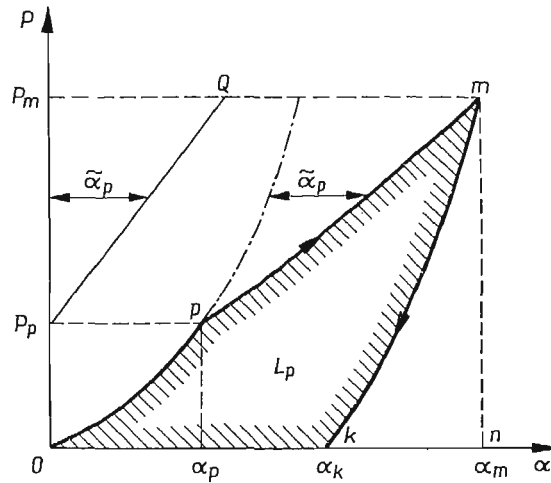
Proces uderzenia ma następujący przebieg. Początkowo odkształcenia są wyłącznie sprężyste, a więc związek pomiędzy siłą stykową i zbliżeniem ma postać (3.1). W miarę jak siła ta zwiększa się, wzrasta wyężenie materiału, aż przy wartości $P = P_p$ osiąga ono wartość graniczną. Gdy $P > P_p$, zaczynają się rozwijać lokalne odkształcenia plastyczne.

Doświadczenia polegające na dynamicznym wgniataniu kulki w próbkę stalową, a także teoretyczne rozwiązanie pewnego pokrewnego zagadnienia statycznego wykazują, że istnieje liniowa zależność pomiędzy siłą stykową a lokalnym odkształceniem plastycznym. Wobec tego w zakresie posprężystym będzie

$$(4.2) \quad \alpha = \left(\frac{P}{k_H} \right)^{2/3} + \frac{P - P_p}{k_p} \quad \text{dla } P \geq P_p,$$

k_p — stała. Obrazem tej zależności na rys. 2 jest odcinek krzywoliniowy pm , który otrzymuje się przez dodanie do krzywej Hertza odciętych wykresu P_pQ . Wykres ten obrazuje zależność między siłą stykową i plastyczną składową zbliżenia ciał.

Po osiągnięciu przez siłę stykową wartości maksymalnej ($P = P_m$) następuje faza sprężystego odciążania, podczas której siła maleje do zera. Jednakże dzięki odkształceniom plastycznym rozwiniętym w fazie obciążania pozostaje trwałe zbliżenie $\alpha = \alpha_k$.



Rys. 2

Na skutek tych odkształceń zmienia się także w sposób istotny geometria powierzchni styku, którą charakteryzuje się za pomocą *stopnia szczelności przylegania* powierzchni (por. [1] p. 19). W związku z tym proces zaniku lokalnych odkształceń sprężystych w fazie odciążania przebiega odmiennie, niż ich wzrost w fazie obciążania. Uwzględnimy to pisząc

$$(4.3) \quad P_{II} = k_{II}(\alpha - \alpha_k)^q \quad \text{dla} \quad \alpha_k \leq \alpha \leq \alpha_m,$$

gdzie k_{II} , q — stałe dodatnie różne odpowiednio od k_H i $3/2$; P_{II} — siła stykowa w fazie odciążania.

Pole $Opmk$ reprezentuje stratę energii kinetycznej przy niesprężystym zderzeniu ciał quasi-sztywnych, a zarazem pracę formowania odkształceń plastycznych. Zatem

$$(4.4) \quad L_p = \int_0^{\alpha_p} P^{(H)}(\alpha) d\alpha + \int_{\alpha_p}^{\alpha_m} P(\alpha) d\alpha - \int_{\alpha_k}^{\alpha_m} P_{II}(\alpha) d\alpha.$$

Podstawiamy tu wzory (3.1), (4.2), (4.3) i całkujemy. Po przekształceniach

$$(4.5) \quad L_p = \frac{1}{2k_p} (P_m^2 - P_p^2) + \frac{2}{5k_H^{2/3}} P_m^{5/3} - \frac{1}{(1+q)k_{II}^{1/q}} P_m^{\frac{1+q}{q}}.$$

Skojarzenie wzorów (4.1) i (4.5) daje poszukiwaną zależność $P_m = f(R_p)$ w postaci uwikłanej

$$(4.6) \quad R_p^2 = 1 - \frac{P_m^2 - P_p^2}{k_p m_r v_r^2} - \frac{2}{m_r v_r^2} \left[\frac{2}{5k_H^{2/3}} P_m^{3/5} - \frac{1}{(1+q)k_{II}^{1/q}} P_m^{\frac{1+q}{q}} \right].$$

Gdyby odciążanie przebiegało zgodnie z teorią Hertza, to ze wzoru (4.5) dla $q = 3/2$, $k_{II} = k_H$ otrzymalibyśmy

$$L_p = \frac{1}{2k_p} (P_m^2 - P_p^2)$$

i odpowiednio uproszczony wzór (4.6).

Jednakże pojawienie się lokalnych odkształceń plastycznych powoduje wzrost stopnia szczelności przylegania powierzchni, tak że wykładnik potęgowy q ma wartość $< 3/2$ i raczej staje się bliski 1. Zagadnieniem tym zajmiemy się szerzej w p. 9 i 10.

Tymczasem poświęcimy nieco uwagi wielkościom k_p i P_p . Stała k_p , zwana sztywnością przy odkształceniach plastycznych, zależy od konfiguracji powierzchni styku oraz od plastycznych własności materiałów. Jeśli np. ciało mające kuliste zaokrągloną powierzchnię (promień zaokrąglenia wynosi r) styka się z ciałem o powierzchni płaskiej, to wówczas przyjmuje się

$$k_p = 2\pi r \kappa_p.$$

Współczynnik κ_p zależy tylko od twardości Brinella (HB), przy czym zależność tę wyznacza się doświadczalnie. Jeśli materiałem obu stykających się ciał jest stal, to można korzystać ze wzoru

$$\kappa_p = 2 \cdot 10^4 + 0,45(HB)^2 \quad \text{dla} \quad 80 \leq HB \leq 300.$$

Siła P_p na granicy plastyczności zależy zarówno od konfiguracji powierzchni styku, jak i od mechanicznych własności materiału. Gdy powierzchnie styku są regularnie zakrzywione (kula, walec), można tę siłę obliczyć przy pomocy wzorów Hertza (por. przykład I w p. 10).

Jednakże w przypadku dowolnie, nieregularnie uformowanych powierzchni styku, lub przy podwyższonej temperaturze ciał (np. podczas kucia) określenie stałych k_p i P_p napotyka trudności wynikające bądź to z braku dokładnych, teoretycznie uzasadnionych wzorów, bądź też z braku odpowiednich danych pomiarowych. W równej mierze uwagi

te dotyczą stałych k_I i q . Stąd wynikają ograniczone możliwości efektywnego korzystania ze wzoru (4.6).

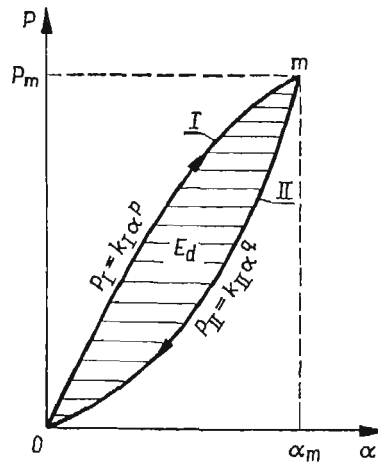
W dalszej części pracy (p. 7 i następne) zaproponowano uproszczoną metodę obliczania maksymalnej siły uderzenia, w której to metodzie omija się wspomniane trudności za pomocą pomiaru pewnych łatwo uchwytnych wielkości kinematycznych i geometrycznych.

5. Niesprężyste zderzenie ciał Hooke'a

Niesprężysty charakter zderzenia (w sensie nierówności $R_d < 1$) wynika w tym przypadku z faktu, iż część energii zderzenia zostaje nieodwracalnie zużyta na wzbudzenie drgań sprężystych obu zderzających się ciał. Jeżeli stopień sprężystości takiego zderzenia scharakteryzujemy za pomocą współczynnika R_d ($0 < R_d < 1$), to można napisać

$$(5.1) \quad E_d = (1 - R_d^2) \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

Przebieg procesu uderzenia w układzie współrzędnych P, α przedstawiony jest na rys. 3. Krzywa obciążania OIm opisana jest przez funkcję



Rys. 3

$$(5.2) \quad P_I = k_I \alpha^p,$$

gdzie: k_I, p — stałe dodatnie.

Z pomocą tego wzoru wyrazimy maksymalną siłę uderzenia P_m oraz maksymalne zbliżenie α_m , przez energię kinetyczną $m_r v_r^2 / 2$. W tym celu należy scałkować różniczkowe równanie ruchu środka masy układu z uwzględnieniem warunków początkowych $\alpha(0) = 0, \dot{\alpha}(0) = v_r$. Pomijając łatwe rachunki (które można znaleźć np. w [1] p. 20 i 22) otrzymujemy

$$(5.3) \quad P_m = k_I^{1+p} \left[(1+p) \frac{m_r v_r^2}{2} \right]^{\frac{p}{1+p}},$$

$$(5.4) \quad \alpha_m = \left(\frac{1+p}{k_I} \frac{m_r v_r^2}{2} \right)^{\frac{p}{1+p}}.$$

Oczywiście wzory (3.2) i (3.3) są szczególnym przypadkiem wzorów powyższych dla $p = 3/2$.

Krzywa odciążania $mIIO$ kończy się przy $\alpha = 0$ (wg założenia odkształceń plastycznych nie ma), więc równaniem tej krzywej będzie

$$(5.5) \quad P_{II} = k_{II} \alpha^q,$$

k_{II}, q — stałe dodatnie różne od k_I, p . Z równości

$$(5.6) \quad P_m = k_I \alpha_m^p = k_{II} \alpha_m^q$$

wynika następujący związek między sztywnościami lokalnymi w obu fazach uderzenia

$$(5.7) \quad k_I = k_{II} \alpha_m^{q-p}.$$

Pole $OImIIO$, ograniczone krzywymi obciążania i odciążania, reprezentuje energię drgań wzbudzonych uderzeniem. W takim razie

$$(5.8) \quad E_d = \int_0^{\alpha_m} k_I \alpha^p d\alpha - \int_0^{\alpha_m} k_{II} \alpha^q d\alpha = \frac{k_I}{1+p} \alpha_m^{1+p} - \frac{k_{II}}{1+q} \alpha_m^{1+q}$$

lub po wyeliminowaniu k_{II} z pomocą wzoru (5.7)

$$(5.9) \quad E_d = k_I \alpha_m^{1+p} \frac{q-p}{(1+p)(1+q)}.$$

Oczywiście musi być $E_d > 0$, skąd wynika że $p < q$. Wykorzystując jeszcze (5.4) otrzymujemy następujący wzór na energię drgań

$$(5.10) \quad E_d = \frac{q-p}{1+q} \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

Porównując prawe strony wzorów (5.1) i (5.10) otrzymujemy ważny związek między współczynnikiem restytucji oraz parametrami p i q

$$(5.11) \quad 1 - R_d^2 = \frac{q-p}{1+q} \quad \text{lub} \quad R_d = \sqrt{\frac{1+p}{1+q}}.$$

W poszukiwaniu dalszych równań, wiążących niewiadome p, q, k_I i k_{II} przeanalizujemy ruch układu podczas odciążania. W tej fazie uderzenia, czyli dla $t \geq \tau_I$ (τ_I — długość pierwszej fazy) obowiązuje następujące równanie ruchu

$$(5.12) \quad m_r \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = k_{II} \alpha^q$$

oraz warunki początkowe

$$(5.13) \quad P_{II} = P_m, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \text{dla} \quad t = \tau_I.$$

Po pierwszym całkowaniu otrzymujemy wzór na prędkość zaniku zbliżenia

$$(5.14) \quad \frac{d\alpha}{dt} = - \left[\frac{2k_{II}^{-1/q}}{(1+q)m_r} \left(P_m^{1+q} - P_{II}^{1+q} \right) \right]^{1/2}.$$

Stąd obliczymy względną prędkość v'_r odbicia ciał. Mianowicie dla $t = \tau$ ($\tau = \tau_I + \tau_{II}$ — długostrwość uderzenia) jest $P_{II} = 0$ oraz $dx/dt = v'_r$. Zatem

$$(5.15) \quad v'_r = - \left[\frac{2k_{II}^{-1/q}}{(1+q)m_r} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1+q}{2q}}.$$

Ponieważ zaś współczynnik restytucji $R_d = |v'_r/v_r|$, przeto

$$(5.16) \quad R_d = \left[\frac{2k_{II}^{-1/q}}{(1+q)m_r v_r^2} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1+q}{q}}.$$

Stąd

$$(5.17) \quad P_m = k_{II}^{\frac{1}{1+q}} \left[(1+q) R_d^2 \frac{m_r v_r^2}{2} \right]^{-\frac{q}{1+q}}.$$

Jeżeli wyliminujemy w tym wzorze R_d z pomocą równości (5.11) i wynik ten porównamy z prawą stroną wzoru (5.3), to otrzymamy następujący związek między niewiadomymi

$$(5.18) \quad \frac{k_I^{1+q}}{k_{II}^{1+p}} = \left[(1+p) \frac{m_r v_r^2}{2} \right]^{q-p}.$$

6. Długostrwość uderzenia i jej związek ze współczynnikiem restytucji

Całkowanie równania typu (5.12), jednakże napisanego dla pierwszej fazy uderzenia, prowadzi do następującego wzoru na długostrwość tej fazy

$$(6.1) \quad \tau_I = \frac{\sqrt{\pi} m_r v_r}{2P_m} \gamma(p),$$

gdzie

$$(6.2) \quad \gamma(p) \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{1}{1+p}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+p}{2+2p}\right)},$$

Γ — funkcja gamma. W przedziale $0 < p \leq 2$ funkcja $\gamma(p)$ jest prawie liniowa i można ją aproksymować wzorem

$$(6.3) \quad \gamma(p) \approx 1,150 + 0,622p.$$

Błąd tego przybliżenia nie przekracza +1%.

Chcąc wyznaczyć długostrwość τ_{II} drugiej fazy uderzenia skorzystamy z równania (5.14). Całkując je względem t otrzymujemy całkowity związek między czasem i aktualną wartością siły uderzenia P_{II} w fazie odciążania

$$t - \tau_I = \left(\frac{1+q}{2q^2} \frac{m_r}{k_{II}^{1/q}} \right)^{1/2} \int_{P_{II}}^{P_m} P^{\frac{1-q}{q}} \left(P_m^{\frac{1+q}{q}} - P^{\frac{1+q}{q}} \right)^{-1/2} dP.$$

Jeżeli jako dolną granicę całkowania przyjmiemy $P_{II} = 0$, co ma miejsce w chwili końcowej uderzenia ($t = \tau$), to otrzymamy wzór na τ_{II}

$$(6.4) \quad \tau_{II} = \tau - \tau_I = \left[\frac{\pi m_r}{2(1+q)k_I^{1/q}} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1-q}{2q}} \gamma(q).$$

Wzór ten przekształcamy do postaci

$$\tau_{II} = \left[\frac{2}{(1+q)k_I^{1/q} m_r v_r^2} \right]^{1/2} P_m^{\frac{1+q}{2q}} \frac{\sqrt{\pi m_r v_n}}{2P_m} \gamma(q),$$

a gdy podstawić tu formuły (5.16) i (6.1) to okazuje się, że

$$(6.5) \quad \tau_{II} = R_d \tau_I \frac{\gamma(q)}{\gamma(p)}.$$

Ten nowy, interesujący związek między długością obu faz uderzenia niesprężystego jest uogólnieniem wcześniej wyprowadzonego wzoru $\tau_{II} = R_d \tau_I$ (por. [1] p. 25), który jest słuszny w przypadku liniowej charakterystyki podatności lokalnej [wówczas $p = q = 1$, czyli $\gamma(p) = \gamma(q)$]. Wzór (6.5) wykorzystamy w toku dalszych rozważań.

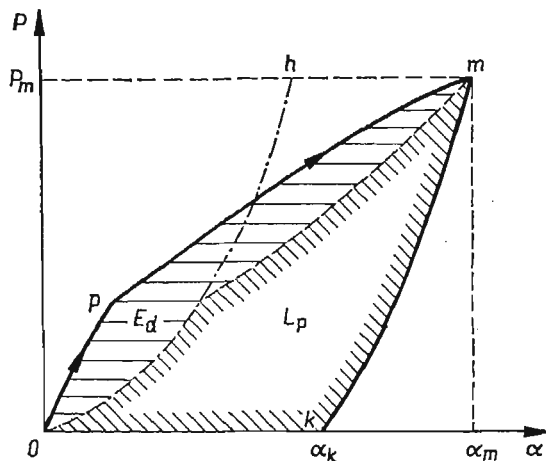
Tymczasem napiszemy jeszcze wzór na długość uderzenia niesprężystego

$$(6.6) \quad \tau = \tau_I + \tau_{II} = \frac{\sqrt{\pi m_r v_r}}{2P_m} [\gamma(p) + R_d \gamma(q)].$$

Występującą tu wielkość P_m obliczamy ze wzoru (5.3).

7. Uproszczona teoria niesprężystego zderzenia ciał elasto-plastycznych

Dotychczas rozpatrywaliśmy jedynie wyidealizowane przypadki zderzenia ciał stałych pomijając bądź to drgania wzbudzone uderzeniem, bądź też odkształcenia plastyczne. Odpowiednio do tego proces uderzenia przedstawiony w płaszczyźnie miał przebieg,



Rys. 4

jak na rys. 2 lub rys. 3. Tymczasem proces niesprężystego zderzenia ciał rzeczywistych, a więc elasto-plastycznych, ma przebieg jak na rys. 4. Jest to niejako «superpozycja» wykresów z rys. 2 i 3.

Pole $Opmk$ reprezentuje stratę energii kinetycznej, na którą składa się zarówno praca odkształceń plastycznych, jak i energia drgań sprężystych. Stopień sprężystości takiego zderzenia charakteryzujemy za pomocą współczynnika restytucji R . Daje się on stosunkowo łatwo wyznaczyć za pomocą pomiaru względnej prędkości odbicia ciał. W literaturze (np. [1] [2]) znajdujemy wiele danych empirycznych dotyczących współczynnika restytucji, zarejestrowanych przy rozmaitych warunkach uderzenia.

W oparciu o wzory wyprowadzone w poprzednich paragrafach możemy ustalić związki między współczynnikiem R i siłą P_m . Mianowicie na podstawie wzorów (2.4), (4.6) i (5.11) znajdujemy po przekształceniach

$$(7.1) \quad R^2 = \frac{1+p}{1+q} - \frac{2}{m_r v_r^2} \left[\frac{P_m^2 - p_p^2}{2k_p} + \frac{2}{5k_H^2/3} P_m^{3/5} - \frac{1}{(1+q)k_{II}^{1/q}} P_m^{1+q} \right].$$

Wyraz pierwszy z prawej strony tego wzoru związany jest z energią drgań (E_d) wzbudzonych uderzeniem, pozostałe wyrazy określają wpływ pracy odkształceń plastycznych (L_p) na wartość współczynnika restytucji. Udział tych składników w całkowitej stracie energii kinetycznej (ΔT) układu jest rozmaity w zależności od dwóch czynników, które będziemy dalej zwali krótko warunkami uderzenia. Chodzi tu o geometrię powierzchni zetknięcia, określaną za pomocą stopnia szczelności przylegania oraz energię uderzenia, rozumianą jako energia kinetyczna ciał bezpośrednio przed zderzeniem.

Tak np., gdy ciała o budowie zwartej uderzają się powierzchniami płaskimi, przy czym energia uderzenia jest stosunkowo niewielka, to odkształcenia plastyczne na ogół nie wystąpią ($L_p = 0$), a wtedy $\Delta T = E_d$. Zresztą w tym przypadku energia drgań stanowi w ogóle bardzo małą część energii uderzenia, w związku z czym współczynnik restytucji osiąga wartości bliskie jedności. Do wniosku tego prowadzą zarówno obliczenia teoretyczne [4], jak i bezpośrednie pomiary wykonane przy zderzaniu dwóch kul z umiarkowanymi prędkościami [5].

Natomiast gdy dwa pręty proste zderzają się współosiowo płaskimi powierzchniami czołowymi, przy czym również nie ma odkształceń plastycznych, to jednak energia drgań podłużnych może zaabsorbować dowolnie dużą część energii uderzenia, wskutek czego współczynnik restytucji przyjmie dowolną wartość z przedziału (0; 1).

Odmierna sytuacja występuje przy kuciu metali. Tutaj dominująca część energii uderzenia zostaje zużyta na pracę plastycznego formowania odkuwki ($\Delta T \approx L_p$), choć pewna jej część przekształca się również w energię drgań kowadła, szaboty i fundamentu.

Jak wspomniano poprzednio praktyczne wykorzystanie skądinąd prostego wzoru (7.1) jest utrudnione z uwagi na trudność określenia parametrów k_p , P_p , k_{II} i q . Z tego powodu w dalszym ciągu artykułu podamy pewną uproszczoną metodę opisu zderzenia ciał elasto-plastycznych, które doprowadzi do wykrycia prostych zależności między współczynnikiem restytucji i parametrami charakteryzującymi proces uderzenia, co w konsekwencji umożliwi nam obliczenie maksymalnej siły zderzenia.

Weźmy najpierw pod uwagę pierwszą fazę uderzenia, czyli obciążanie. Zaniedbując szczegóły przejścia od stanu sprężystego do sprężysto-plastycznego przyjmiemy, iż w tej fazie obowiązuje zależność (5.2), czyli

$$(7.2) \quad P_I = k_I \alpha^p \quad \text{dla } 0 \leq \alpha \leq \alpha_m.$$

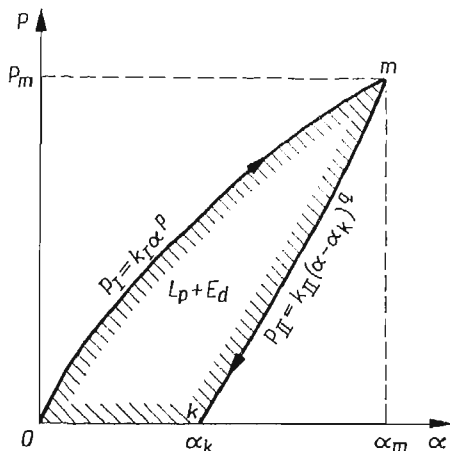
Tym samym wzory (5.3) i (5.4) zachowują ważność.

Co się tyczy fazy drugiej, w której następuje sprężyste odciążenie, to siła stykowa maleje tu wraz ze sprężystą składową zbliżenia od wartości maksymalnej do zera według równania

$$(7.3) \quad P_{II} = k_{II}(\alpha - \alpha_k)^q \quad \text{dla } \alpha_k \leq \alpha \leq \alpha_m,$$

albowiem zbliżenie sprężyste stanowi różnicę zbliżenia całkowitego (α) i plastycznego (α_k).

A zatem w proponowanym tu ujęciu przybliżonym wykres przebiegu uderzenia na



Rys. 5

płaszczyźnie układu P, α aproksymujemy dwoma łukami krzywych, jak na rys. 5. Strata energii uderzenia wynosi

$$(7.4) \quad \Delta T = k_I \int_0^{\alpha_m} \alpha^p d\alpha - k_{II} \int_{\alpha_k}^{\alpha_m} (\alpha - \alpha_k)^q d\alpha = \frac{k_I}{1+p} \alpha_m^{1+p} - \frac{k_{II}}{1+q} (\alpha_m - \alpha_k)^{1+q}.$$

Po wyeliminowaniu k_{II} z pomocą równości

$$(7.5) \quad P_m = k_I \alpha_m^p = k_{II} (\alpha_m - \alpha_k)^q$$

otrzymujemy

$$\Delta T = \frac{k_I \alpha_m^{1+p}}{1+q} \left(\frac{q-p}{1+p} + \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \right).$$

Podstawienie do tej formuły wzorów (1.1) i (5.4) prowadzi do następującej zależności

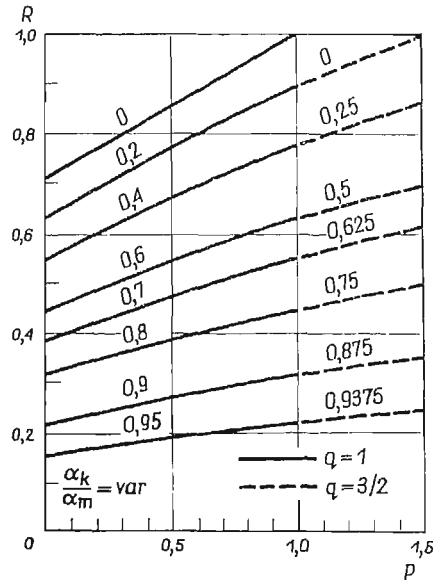
$$1 - R^2 = \frac{1+p}{1+q} \left(\frac{q-p}{1+p} + \frac{\alpha_k}{\alpha_m} \right),$$

która jest uogólnieniem wzoru (5.11) na przypadek zderzenia wywołującego odkształcenia plastyczne. Stąd wynika

$$(7.6) \quad \frac{\alpha_k}{\alpha_m} = 1 - \frac{1+q}{1+p} R^2.$$

Obrazem tej zależności są krzywe na rys. 6, gdzie linie ciągłe odnoszą się do $q = 1$, zaś przerywane do $q = 3/2$ (te ostatnie pokrywają się z liniami ciągłymi w przedziale $[0,1]$). Liczby nad liniami oznaczają wartość stosunku zbliżenia trwałego do maksymalnego (α_k/α_m). Wykres na rys. 6 jest pomocny przy wyznaczaniu niewiadomej p lub q .

W dalszym ciągu ze wzoru (7.6) obliczamy α_m i porównujemy z prawą stroną równości (5.4). Po wykonaniu łatwych przekształceń otrzymujemy wzór na współczynnik



sztywności w fazie obciążania

$$(7.7) \quad k_T = (1+p) \left[\frac{1}{\alpha_k} \left(1 - \frac{1+q}{1+p} R^2 \right) \right]^{1+p} \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

Wreszcie podstawienie (7.7) do wzoru (5.3) daje po przekształceniach

$$(7.8) \quad P_m = \frac{1+p - (1+q)R^2}{\alpha_k} \frac{m_r v_r^2}{2}.$$

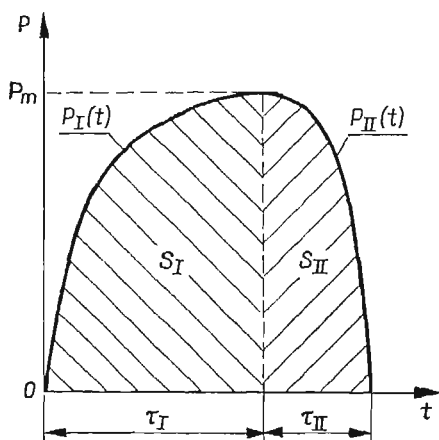
Ta stosunkowo prosta formuła umożliwia obliczenie maksymalnej siły uderzenia sprężysto-plastycznego, gdy znane są: współczynnik restytucji, stałe p i q , trwałe zbliżenie oraz energia uderzenia.

W dalszym ciągu można analizować fazę odciążenia biorąc za punkt wyjścia równanie różniczkowe (5.12), w którym jedynie zamiast α trzeba podstawić $(\alpha - \alpha_k)$. Ale całkowanie tego równania prowadzi do wzorów (5.16) i (5.17), które w takim razie są słuszne również w przypadku zderzenia sprężysto-plastycznego. To samo można powiedzieć o wzorach na długość uderzenia; w szczególności będziemy dalej korzystać ze wzoru (6.5).

Tym niemniej ilość wyprowadzonych dotychczas równań okazuje się jeszcze niewystarczająca do określenia wszystkich niewiadomych, w szczególności wykładników potęgowych p i q .

8. Aproksymacja czasowego przebiegu siły stykowej i równanie zasady pędu

W dążeniu do wyprowadzenia nowych, niezależnych związków pomiędzy p , q , k_I i k_{II} zanalizujemy proces uderzenia w aspekcie czasowego przebiegu siły stykowej $P(t)$. Rozważania ograniczymy do przypadku, kiedy funkcja $P(t)$ posiada jedno maksimum w przedziale $[0, \tau]$ (rys. 7). Pola zakreśkowane pod krzywymi $P_I(t)$ i $P_{II}(t)$ obrazują impulsy odpowiednio pierwszej i drugiej fazy uderzenia.



Rys. 7

Analiza wykresów tego typu, uzyskanych przy zderzeniu ciał z rozmaitych metali i stopów, nasunęła autorom pracy [2] myśl aproksymowania tej zależności za pomocą funkcji

$$P_I(t) = P_m \left(\sin \frac{\pi t}{2\tau_I} \right)^{9/(10-p)} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \tau_I,$$

gdzie p jest tą samą stałą, która występuje we wzorze (7.2). W oparciu o tę zależność możemy określić impuls pierwszej fazy uderzenia

$$S_I = P_m \int_0^{\tau_I} \left(\sin \frac{\pi t}{2\tau_I} \right)^{9/(10-p)} dt.$$

Wprowadzamy nową zmienną całkowania $\pi t/2\tau_I = x$ oraz stałą $b = \frac{p-1}{2(10-p)}$. Wobec tego $\frac{9}{10-p} = 2b+1$ oraz

$$S_I = \frac{2}{\pi} P_m \tau_I \int_0^{\pi/2} \sin^{2b+1} x dx.$$

Ponieważ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2b+1} x dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(b+1)}{2\Gamma\left(b+\frac{3}{2}\right)} \equiv \bar{\sigma}[b(p)] = \sigma(p),$$

przeto ostatecznie piszemy

$$(8.1) \quad S_I = \frac{2}{\pi} P_m \tau_I \sigma(p).$$

Wiadomo ([1] p. 24), że przy liniowej charakterystyce podatności lokalnej (tzn. dla $p = 1$) występuje sinusoidalny impuls uderzenia, który ma wartość $(2/\pi)P_m\tau_I$. Mnożnik $\sigma(p)$ we wzorze (8.1) stanowi przeto «poprawkę» uwzględniającą nieliniowość zagadnienia; oczywiście $\sigma(1) = 1$.

Funkcja $\sigma(p)$, podobnie jak $\gamma(p)$, jest prawie liniowa, mianowicie

$$(8.2) \quad \sigma(p) \approx 1,03 - 0,03p \quad \text{dla } 0 < p \leq 2.$$

W dalszym ciągu, podobnie jak przy wyprowadzaniu wzoru (8.1), postępujemy w odniesieniu do fazy odciążania. Przyjmując

$$P_{II}(t) = P_m \left(\cos \frac{\pi t}{2\tau_{II}} \right)^{9/(10-q)} \quad \text{dla } 0 \leq t \leq \tau_{II}$$

otrzymujemy wzór na impuls drugiej fazy

$$(8.3) \quad S_{II} = \frac{2}{\pi} P_m \tau_{II} \sigma(q).$$

Dysponując wzorami na S_I i S_{II} możemy obliczyć całkowity impuls uderzenia $S = S_I + S_{II}$, który niezależnie od tego, równa się $m_1(v_1 - v'_1)$ lub $m_2(v'_2 - v_2)$, zgodnie z zasadą zmienności pędu; tutaj v'_1 , v'_2 oznaczają prędkości ciał bezpośrednio po uderzeniu.

Tak więc otrzymujemy równanie

$$(8.4) \quad \frac{2}{\pi} P_m [\tau_I \sigma(p) + \tau_{II} \sigma(q)] = m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2)$$

lub po wykorzystaniu (6.1), (6.5) i po przekształceniach

$$(8.5) \quad m_r v_r [\varphi(p) + R\varphi(q)] = m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v'_2 - v_2),$$

gdzie

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma(x) \sigma(x).$$

Gdy zastosujemy tu aproksymacje (6.3) i (8.2) oraz pominiemy mały wyraz zawierający x^2 , to otrzymamy wyrażenie liniowe

$$(8.6) \quad \varphi(x) \approx 0,668 + 0,332x.$$

Wzór (8.5) jest nowym, niezależnym od (5.11) lub (7.6), związkiem między parametrami p i q . Należy jednak pamiętać o tym, że zakres jego ważności jest ograniczony do klasy funkcji $P(t)$ posiadających jedno maksimum w przedziale $[0, \tau]$.

9. Uwagi końcowe

Zastanówmy się pokrótce nad kwestią rozwiązalności zagadnienia polegającego na wyznaczeniu maksymalnej siły uderzenia. Wyprowadziliśmy bowiem dla tej wielkości cztery wzory, mianowicie (5.3), (5.17), (7.1) i (7.8), wobec czego powstaje pytanie, który z nich zastosować w konkretnym przypadku?

Sposób postępowania zależy w pewnej mierze od warunków uderzenia oraz od tego, jakimi danymi dysponujemy. W każdym przypadku muszą być znane masy i prędkości ciał przed i po zderzeniu (a tym samym i współczynnik restytucji) oraz geometria powierzchni styku. Najogólniejszy spośród wymienionych jest niewątpliwie wzór (7.1), ponieważ można go stosować zarówno wówczas, gdy występują odkształcenia plastyczne, jak i przy ich braku. Jednak wspomniane już trudności w określeniu niektórych parametrów zmniejszają nieco przydatność tego wzoru.

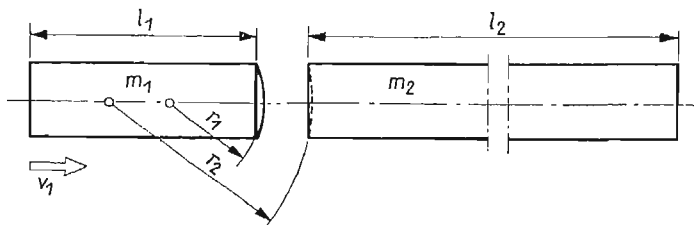
Gdy warunki uderzenia są tego rodzaju, że odkształcenia trwałe nie wystąpią, to obowiązują wzory (5.3) i (5.17), przy czym pierwszy wymaga uprzedniego określenia parametrów k_I i p , drugi — k_{II} i q . W tym względzie mamy do dyspozycji wzory (5.11) i (5.18) i ewentualnie (8.5). Poza tym gdy wykładnik potęgowy q okaże się bliski $3/2$, to współczynnik sztywności k_{II} można w przybliżeniu obliczyć z odpowiedniego wzoru Hertza.

Wreszcie gdy warunki uderzenia sprzyjają wystąpieniu odkształceń plastycznych, to zadowalając się teorią przybliżoną można również korzystać ze wzorów (5.11) i (5.18). Natomiast gdy znamy wartość trwałego zbliżenia α_k , to można skorzystać ze wzoru (7.8) i wówczas odpada konieczność obliczania sztywności k_I lub k_{II} . Poza tym wyniki pomiarów przeprowadzonych przy kuciu metali sugerują, że w przypadku silnie rozwiniętych odkształceń plastycznych można przyjmować $q = 1$, lub wartość nieco mniejszą.

10. Przykłady obliczeń

Dla ilustracji toku postępowania i sposobu wykorzystania wyprowadzonych wzorów rozpatrzmy szczegółowo dwa przypadki uderzenia, różniące się między sobą skrajnie warunkami zderzenia. Mianowicie obliczymy najpierw graniczną prędkość kolinearnego zderzenia dwóch prętów prostych, przy której pojawią się pierwsze odkształcenia plastyczne, a w przykładzie drugim wyznaczmy maksymalną wartość siły kucia pewnego elementu stalowego i następnie porównamy ją z danymi pomiarowymi.

Przykład pierwszy. Dwa pręty proste, stalowe o przekroju kołowym i jednakowych średnicach doprowadzamy do zderzenia kolinearnego. Uderzający koniec jednego pręta



kys. 8

zaokrąglony jest półkuliście (promieniem $r_1 = 5$ cm), zaś koniec drugiego ma wydrążenie półkuliste o promieniu $r_2 = 10$ cm (rys. 8). Masa pierwszego pręta $m_1 = 0,3$ kg, zaś drugiego $m_2 = 3 m_1$. Masa zredukowana $m_r = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) = 0,225$ kg. Należy obliczyć graniczną prędkość zderzenia (v_p), po przekroczeniu której w prętach pojawiają się lokalne odkształcenia plastyczne.

Będziemy korzystać ze wzorów p. 5, albowiem przedmiotem rozważań jest zasadniczo zderzenie nie powodujące odkształceń plastycznych ($L_p = 0$).

Przechodząc do wyznaczenia współczynnika restytucji skorzystamy w tym przedmiocie z wyników badań [6], przeprowadzonych w warunkach uderzenia analogicznych do tych, jakie sformułowaliśmy w temacie. Otóż okazało się, że zależność R od stosunku mas $m_2/m_1 \equiv M$ jest w tym przypadku prawie liniowa i niezależna od prędkości zderzenia¹⁾.

Autorzy pracy [6] proponują wzór $R = 0,905 - 0,040M$, który dla $M = 3$ daje $R = 0,78$. Oprócz tego w czasie badań mierzono współczynnik przekazywania energii

$$\xi = \frac{T'_2}{T_1} = M \left(\frac{v'_2}{v_1} \right)^2,$$

który jest stosunkiem energii kinetycznej ciała uderzonego (spoczywającego przed uderzeniem nieruchomo) do energii kinetycznej ciała uderzającego. Dla $M = 3$ zmierzono $\xi = 0,60$, zatem

$$\frac{v'_2}{v_1} = \sqrt{\frac{\xi}{M}} = \sqrt{\frac{0,60}{3}} = 0,447.$$

Ze wzoru definicyjnego dla współczynnika restytucji

$$R = -\frac{v'_r}{v_r} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1}$$

wynika

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{v'_2}{v_1} - R = 0,447 - 0,780 = -0,333.$$

Z kolei obliczamy stałe p i q .

Przypuśćmy, że przebieg czasowy siły uderzenia upoważnia do stosowania wzoru

$$(8.5) \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) [\varphi(p) + R\varphi(q)] = m_1 (v_1 - v'_1),$$

który dla $v_2 \equiv 0$ oraz po uwzględnieniu (8.6) przyjmuje postać

$$\frac{M}{1+M} [(0,668 + 0,332p) + R(0,668 + 0,332q)] = 1 - \frac{v'_1}{v_1}.$$

Stąd wynika równanie

$$(10.1) \quad p + 0,780q \approx 1,718.$$

Drugie równanie otrzymamy z przekształcenia wzoru (5.11)

$$p - R^{2q} = R^2 - 1$$

lub

$$(10.2) \quad p - 0,608q = -0,392.$$

Rozwiązanie układu równań (10.1) i (10.2) daje

$$p = 0,417, \quad q = 1,330.$$

¹⁾ Ten ostatni wniosek jest tylko potwierdzeniem wyników rozważań teoretycznych (por. np. [1] p. 30).

Jak widać wykładnik potęgowy we wzorze $P_{II} = k_{II} \alpha^q$ ma wartość bliską 3/2, dzięki czemu współczynnik sztywności k_{II} możemy w przybliżeniu obliczyć za pomocą zmodyfikowanej formuły Hertza. W przypadku zetknięcia kuli z wydrążeniem kulistym przy jednakowych stałych sprężystości E , ν oraz dla $q = 3/2$ wspomniany wzór Hertza ma postać

$$k_H = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)^{1/2}.$$

W naszym przypadku dla uzyskania zgodności wymiarów zamiast wykładnika potęgowego $1/2 = 2 - 3/2$ przyjmiemy $2 - q = 0,67$. Zatem

$$k_{II} = \frac{2E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)^{0,67} = 6,86 \cdot 10^6 \quad \text{kG cm}^{-1,33},$$

gdzie przyjęto $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,3$.

W dalszym ciągu korzystamy z niektórych wzorów teorii zagadnień kontaktowych. Teoria ta prowadzi do wniosku, że największe ciśnienie powstające w środku koła styku równa się

$$\sigma_{max} = \beta \left[P_m E^2 \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)^2 \right]^{1/3}, \quad (\beta = 0,388).$$

Ale największe wyężenie materiału na powierzchni styku określone jest przez napężenie zredukowane $\sigma_r \approx 0,22 \sigma_{max}$. Wobec tego siłę uderzenia $P_m = P_p$, wywołującą graniczne wyężenie materiału prętów na powierzchni styku obliczymy z warunku $0,22 \sigma_{max} = \sigma_p$ (σ_p — dynamiczna granica plastyczności), czyli

$$P_p = \left(\frac{\sigma_p}{0,22\beta} \right)^3 \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \frac{1}{E} \right)^2.$$

Np. dla stali o zawartości 0,24% C, odpuszczonej w temperaturze 900°C przyjmując $\sigma_p = 7,3 \cdot 10^3$ kG/cm² otrzymujemy $P_p = 15\,800$ kG. Ostatecznie z przekształconego wzoru (5.17) znajdujemy graniczną prędkość zderzenia prętów

$$v_p = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{(1+q)m_r} k_{II}^{-1/2q} P_p^{1+q/2q}} = 10,1 \text{ m/s}.$$

Jednakże pierwsze odkształcenia plastyczne pojawiają się nie na powierzchni styku, lecz nieco głębiej (w tzw. punktach Bielajewa) i to już przy prędkości około 12 razy mniejszej.

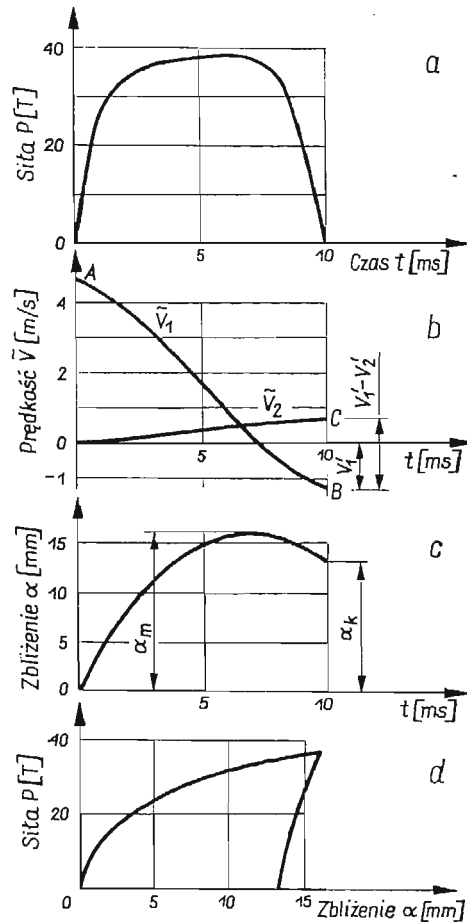
Dla porównania zauważmy jeszcze, że zgodnie z teorią de Saint-Venanta w przypadku zderzenia stalowych prętów idealnie płaskimi i równoległymi powierzchniami czołowymi prędkość graniczna wynosiłaby $\sigma_p / \sqrt{\rho E} = 18,3$ m/s (ρ — gęstość).

Przykład drugi. Obliczymy maksymalną wartość siły kucia elementu stalowego i porównamy wynik z danymi pomiarowymi. Znajomość tej siły jest niezbędna w obliczeniach wytrzymałościowych najbardziej obciążonych elementów młota kuzniczego.

Podczas badań, których wyniki opublikowano w pracy [7], rejestrowane były m.in. przebiegi czasowe siły kucia. Jeden z typowych oscylogramów przedstawiony jest na rys. 9a.

Ponieważ okres drgań własnych uderzających części młota w rozważanym przypadku był wielokrotnie większy od długości uderzenia, przeto krzywa $P(t)$ jest proporcjo-

nalna do krzywej przyspieszeń bijaka («baby»). Wobec tego całkowanie krzywej $P(t)$ daje wykres prędkości $\tilde{v}_1(t)$ bijaka (rys. 9b). Jeśli od rzędnych tej krzywej odejmiemy rzędne wykresu prędkości szaboty $\tilde{v}_2(t)$, to otrzymamy krzywą prędkości odkształcenia odkuwki (linia przerywana). Całkując następnie krzywą $\tilde{v}_1(t) - \tilde{v}_2(t)$ otrzymujemy przebieg czasowy skrócenia $\alpha(t)$ próbki (krzywa c). Na wykresie tym widoczne jest zarówno największe zbliżenie bijaka i szaboty (α_m), jak i trwałe skrócenie (α_k) próbki, czyli przekucie.



Rys. 9

Wreszcie kojarząc wykresy $P(t)$ i $\alpha(t)$ otrzymujemy wykres zależności $P(\alpha)$ (krzywa d). Z wykresu tego widać wyraźnie fazę plastycznego płynięcia podczas obciążania, przy końcu której występuje nieznaczne wzmocnienie, tzn. wzrostowi odkształceń towarzyszy wzrost siły uderzenia. Natomiast w fazie odciążania widać prawie liniowy charakter zależności $P(\alpha)$, co upoważnia do przyjęcia w obliczeniach $q = 1$.

Do badań użyto gorącej próbki ze stali 45, uformowanej w postaci walca o średnicy 50 mm, wysokości 86 mm. Uderzenie następowało w kierunku poosiowym. Ciężar bijaka

$m_1 g = 450$ kG. Przy prędkości uderzenia $v_1 = 4,7$ m/s zmierzono bezpośrednio lub odczytano z wykresów: trwałe skrócenie próbki $\alpha_k = 13$ mm, prędkość odskoku bijaka $v'_1 = -1,2$ m/s, współczynnik restytucji (rys. 9b)

$$R = \frac{|v'_1 - v'_2|}{v_1} = \frac{\overline{BC}}{OA} = \frac{2,1}{4,7} = 0,45.$$

Ponieważ w użytym do badań ciężkim młocie kuźniczym masa szaboty wraz z kowadłem jest wielokrotnie większa od masy bijaka, przeto można przyjąć $m_1/m_2 \approx 0$, czyli $m_r \approx m_1$. Wobec tego energia uderzenia

$$m_r v_r^2/2 \approx m_1 v_1^2/2 = 5,06 \cdot 10^4 \text{ kGcm.}$$

Aby wyznaczyć niewiadomą p posłużymy się równaniem (8.5)²⁾.

Dla $m_r = m_1$, $v_2 = 0$, $q = 1$, $\varphi(q) = 1$, równanie to przyjmuje postać

$$v_1 [\varphi(p) + R] = v_1 - v'_1,$$

skąd

$$\varphi(p) = 1 - R - v'_1/v_1 = 1 - 0,45 + 1,2/4,7 = 0,805.$$

Z drugiej strony na podstawie (8.6) $\varphi(p) = 0,668 + 0,332p$. Zatem

$$p = \frac{0,805 - 0,668}{0,332} = 0,412.$$

Znając p , q , R , α_k oraz energię uderzenia możemy ostatecznie obliczyć maksymalną siłę kucia przy pomocy wzoru (7.8)

$$P_m = \frac{1,412 - 2 \cdot 0,45^2}{1,3} \cdot 5,06 \cdot 10^4 = 3,9 \cdot 10^4 \text{ kG.}$$

Jest to wartość dostatecznie zgodna z zarejestrowaną na oscylogramie (por. rys. 9a).

Literatura cytowana w tekście

1. R. GRYBÓŚ, *Teoria uderzenia w dyskretnych układach mechanicznych*, PWN, Warszawa 1969.
2. Г. С. БАТУЕВ, А. А. ФЕДОСОВ, А. К. ЕФРЕМОВ, *Соударение массивных тел при упруго-пластических деформациях в зоне контакта*, Сб. Расчеты на прочность, **10** (1964), 363–390.
3. W. GOLDSMITH, *Impact. The theory and physical behavior of colliding solids*, E. Arnold. London 1960 (tłum. ros. Moskwa 1965).
4. S. C. HUNTER, *Energy absorbed by elastic waves during impact*, J. Mech. and Phys. Solids, **3**, **5** (1957), 162–171.
5. В. В. БАГРЕЕВ, *Упруго-пластический удар массивных тел*, Сб. Вопросы механики, Тр. Моск. института инж. ж.-д. трансп. **193** (1964), 53–70.

²⁾ Kształt impulsu siły kucia, widoczny na rys. 9a, uzasadnia dopuszczalność tego przyjęcia. Natomiast wzór (5.11) w danym przypadku nie obowiązuje z uwagi na silnie rozwinięte odkształcenia plastyczne

6. П. М. Алабужев, Б. Н. Стихановский, Ю. В. Сидоренко, *К вопросу о передаче энергии ударом*, Тр. Моск. института нефтохим. и газ. пром. **60** (1966), 181–187.
7. Ю. В. Беляев, А. К. Попов, *Экспериментальное исследование нагрузок соударяющихся деталей молотов во время удара*, Кузн. штамп. произв. **1** (1962), 30–34.

Р е з ю м е

ЗАВИСИМОСТЬ МАКСИМАЛЬНОЙ СИЛЫ УДАРА ОТ КОЭФФИЦИЕНТА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Определение максимальной величины контактного усилия при столкновении возможно в общем случае лишь опытным путем; при этом необходимо иметь достаточно сложный датчик и аппаратуру, регистрирующую зависимость измеряемого усилия от времени.

В предлагаемой статье, на основе теоретического анализа процесса упруго-пластического удара, выведены алгебраические зависимости максимальной силы удара от величин, легко поддающихся измерению в ходе процесса, таких как: скорость отскока тел, коэффициент восстановления и остаточное сближение. Способ использования выведенных формул иллюстрируется двумя численными примерами.

S u m m a r y

DEPENDENCE OF THE MAXIMUM IMPACT FORCE ON THE RESTITUTION COEFFICIENT

The determination of the maximum contact force during an inelastic impact can be done only experimentally and a complicated gauge as well as a device registering the variation of the force in time is needed. The theoretical analysis presented in this paper leads to algebraic relations between the impact force and the magnitudes which can easily be measured during the impact, such as the after-impact velocity, the restitution coefficient and the impact duration. The application of the derived formulae is shown on two numerical examples.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lipca 1970 r.

PRZYCZYNEK DO MECHANIZMU ZNISZCZENIA ZMĘCZENIOWEGO ŻYŁEK POLIAMIDOWYCH

ANDRZEJ WŁOCHOWICZ, ZYGMUNT KUBACKI (ŁÓDŹ)

1. Wprowadzenie

Poszukiwanie związków, jakie istnieją pomiędzy fizyczną mikrostrukturą polimeru a własnościami wytrzymałościowymi jest jednym z bardziej istotnych problemów w badaniach związków wielkocząsteczkowych. Przykładem tych poszukiwań może być współzależność między zmianami struktury cząsteczkowej i nadcząsteczkowej włókna poliamidowego w miejscu zerwania, wywołanymi dekohezją zmęczeniową [1], czy ogólnie reotermokinetyczne aspekty wyęteżenia i zmęczenia tworzyw sztucznych [2-4].

Zjawiska pęknięć zmęczeniowych włókien i polimerów pod działaniem wielokrotnie powtarzających się obciążeń są przedmiotem coraz większego zainteresowania technológów i konstruktorów [5]. Z punktu widzenia przeznaczenia prowadzone są dwa rodzaje badań:

- badania, których celem jest dokładniejsze poznanie warunków i mechanizmu zmęczenia;
- badania materiałów na próbkach w celu oceny i porównania właściwości zmęczeniowych różnych rodzajów tworzyw, wpływu składu chemicznego, wpływu obróbki termicznej itp.

W niniejszym opracowaniu pragnie się zwrócić uwagę na niektóre zjawiska zachodzące w strukturze monofilamentu poliamidowego przy jego zmęczeniu.

Zagadnienie reoefektów rozwoju dekohezji zmęczeniowej oraz analiza fizycznej mikrostruktury obszarów szczelin i pęknięć zmęczeniowych znajduje się w kręgu zainteresowań szeregu badaczy. Rozwój badań mających na celu wyjaśnienie mechanizmu procesu zmęczenia opierał się głównie na metodach rentgenograficznych. Chodziło przede wszystkim o poznanie zmian mikrostruktury fizycznej tworzywa w procesie zmęczenia. W pracy niniejszej główny nacisk będzie położony na badania elektronomikroskopowe, a zwłaszcza analizę złomów zmęczeniowych żyłki.

2. Przegląd literatury

Punktem wyjścia rozważań dotyczących zjawiska zmęczenia jest niejednorodność struktury ciał polikrystalicznych, jakimi są polimery. Problem sprowadza się w pierwszym rzędzie do zagadnienia dwufazowej czy też jednofazowej struktury polimerów. W pierw-

szym przypadku przyjmuje się, zgodnie ze stwierdzeniami MEYERA i MARKA [6], HEARLE'A [7], STATTONA [8], KITAJGORODSKIEGO, KARGINA i SŁONIMSKIEGO [9] i innych [10], że polimery są utworzone z dwóch częściowo niezależnych od siebie faz: krystalicznej i amorficznej. W drugim zaś, według koncepcji BENARTA [11] i HOSEMANN [12], polimer jest utworzony z makrocząsteczek tworzących lokalne stany skupienia o różnym stopniu doskonałości uporządkowania, które z punktu widzenia termodynamicznego są układem jednofazowym. Rozpatrując zatem zjawisko zmęczenia włókna, a zwłaszcza zmian jego mikrostruktury fizycznej w strefie zerwania, z tych różnych koncepcji budowy fizycznej należy zdawać sobie sprawę. W każdej z przytoczonych koncepcji budowy polimerów zakłada się występowanie obszarów krystalicznych bądź parakrystalicznych o dużej doskonałości uporządkowania (lamel), które są oddzielone wzajemnie obszarami nieuporządkowanymi bądź parakrystalicznymi o niskiej doskonałości, różnego rodzaju wtrąceniami i szczelinami. Mają one różną sprężystość, plastyczność oraz wytrzymałość i dlatego pod obciążeniem powstaje niejednorodny stan naprężenia. W związku z efektami reotermokinetycznymi wytwarzają się w nich różnice potencjałów pól siłowych, których relaksacja powoduje nieodwracalną przemianę energii obciążeń. W niektórych obszarach uporządkowanych mogą zachodzić odkształcenia plastyczne już wówczas, kiedy naprężenia nominalne są mniejsze od granicy sprężystości. Przy dostatecznie dużej liczbie zmian obciążeń może nastąpić przekroczenie granicy plastyczności i umocnienie niektórych obszarów uporządkowanych, co prowadzi do utworzenia się pojedynczych mikropęknięć wewnątrz nich. Pojedyncze powstałe mikropęknięcia są niejednorodnościami tego samego rzędu, co niejednorodności mikrostruktury tworzywa polimeru. Rozwój czy też przerwanie wzrostu mikropęknięć zależy od sprężystego otoczenia obszarów uporządkowanych, w których te mikropęknięcia powstały, czyli od rozkładu naprężeń.

Badania rentgenograficzne zdają się wskazywać [13], że mechanizmy odkształcenia plastycznego i pęknięcia przy obciążeniach statycznych i dynamicznych mają jednakową naturę. Badania za pomocą mikroskopu elektronowego zaczynają wносить bardziej wnikliwie informacje. Stwierdza się między innymi występowanie dyslokacji i poślizgów w obszarach uporządkowanych [14] oraz odkształcenia siatki krystalicznej [15]. Po przyłożeniu naprężenia gęstość dyslokacji zwiększa się [16], wzrasta zatem energia swobodna układu. Nie jest wykluczone, że dyslokacje mogą się skupiać na przypadkowej powierzchni rozdziału faz i obniżyć energię odkształcenia, związaną z pojedynczymi dyslokacjami [17], co z kolei może prowadzić do zmniejszenia energii swobodnej układu.

Powstawanie poślizgów przy obciążeniach zmiennych może być tylko wynikiem działania naprężeń stycznych, są one przyczyną zmiennego plastycznego mikroodkształcenia przy zmęczeniu. Działanie ich sprowadza się do umacniania najsłabszych krystalitów, dopóki pod wpływem coraz większego obciążenia nie zaczną pękać. Osłabienie wskutek pęknięcia najsłabszych krystalitów może być kompensowane umacnianiem krystalitów bardziej wytrzymałych. Dalszy wzrost mikropęknięć i powstawanie nowych zostaje wówczas zahamowane. Jest możliwe jednak i zjawisko odwrotne — postępujący rozwój mikropęknięć i ich łączenie się w jedną wspólną szczelinę. Od tego momentu zostaje przerwane powstawanie innych szczelin.

Wzrost postępującej makroszczeliny przez stopniowe łączenie się mikroszczelin ma zwykle kierunek prostopadły do kierunku działania głównych naprężeń rozciągających.

Proces powstawania, rozwoju i łączenia się mikroszczelin stanowi drugie stadium zmęczenia. Pęknięcia zmęczeniowe rozprzestrzeniają się nie w całej objętości monofilamentu poddawane obciążeniom zmiennym, lecz tylko w jednym z przekrojów, w których łącząc się przechodzą przez najłabsze składniki niejednorodnej struktury.

Przy pewnym stanie odkształcenia i naprężenia materiału następuje kres jego nasycenia energetycznego i dalsze działanie sił zewnętrznych prowadzić może tylko do dekohezji. Badania prowadzone przez ODINGA [18], PETERLINA [19], ZEUKELIESA [14], KUOKAWA [20], YOKOBORI [21], OROWANA [22], AFANASIEWA [23], NISHIHARE i KOBAYASHI [24], FREUDENTHALA [25] i innych [26] dowodzą złożoności zniszczenia zmęczeniowego ciał polikrystalicznych. Brak jest zupełnie opracowań opisujących zmiany strukturalne zachodzące w miejscu zerwania ciała poddawane wielokrotnemu rozciąganiu. Wydaje się, że w oparciu o dokonaną analizę mikrofraktograficzną złomów zmęczeniowych będzie możliwe lepsze zrozumienie mechanizmu zniszczenia monofilamentów i włókien.

3. Charakterystyka materiału pomiarowego

Analizę mikrofraktograficzną i badania elektronimikroskopowe prowadzono na żyłce poliamidowej z poliamidu 6. Charakterystykę wskaźników fizyko-mechanicznych monofilamentu podano w tablicy 1. Badania zmęczeniowe żyłek realizowano na pulsa-

Tablica 1. Charakterystyka wskaźników fizyko-chemicznych włókna wyjściowego

Wielkość mierzona	Wartość liczbowa
Stopień krystaliczności [%]	$54,9 \pm 3,2$
Orientacja ogólna (dwójłomność)	$0,0516 \pm 0,0004$
Kąt orientacji osi krystalitów [stopnie]	$15^{\circ}10'$
Wielkość krystalitów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny w [Å]:	
— (200)	35,0
— (020) + (220)	49,0
Gęstość [Mg/m ³]	1,1423
Stopień polimeryzacji	128,1
Wytrzymałość na rozciąganie [G]	$495,0 \pm 5,3$
Wydłużenie przy zerwaniu w [%]	$20,2 \pm 1,3$
Średnica włókna [μm]	82,0

torze PK-3 produkcji radzieckiej [27], pracującym przy stałej amplitudzie wydłużeń w każdym cyklu $\Delta l = \text{const}$. Badania wykonano przy odległości między zaciskami 500 mm i stałym wstępnym obciążeniu próbki równym 40 G. Pomiary prowadzono w warunkach klimatycznych: temperatura $20 \pm 2^{\circ}\text{C}$; wilgotność względna powietrza $65 \pm 3\%$.

Znużenie żyłek prowadzono w dwóch wariantach, stosując:

- stałą częstość zmiany naprężenia, a zmienną amplitudę wydłużenia,
- stałą amplitudę wydłużenia, a różną częstość zmiany naprężenia.

W wariacie pierwszym częstość wynosiła 625 cykli/min, amplituda natomiast $0,8 + 1,8\%$, w drugim zaś amplituda była równa $1,2\%$, natomiast częstość zmiany naprężenia 225, 425, 525, 625 cykli/min.

4. Metodyka badań

4.1. Obserwacje w mikroskopie elektronowym. Bezpośrednią obserwację struktury powierzchni zerwanych odcinków żyłek w miejscu złomu oraz w pewnej odległości od złomu, jak i żyłek nie poddanych znużeniu prowadzono na mikroskopie elektronowym typ BS 242 D czechosłowackiej firmy Tesla. Obserwacje prowadzono na replikach platynowo-węglowych uzyskiwanych metodą BRADLEYA [28].

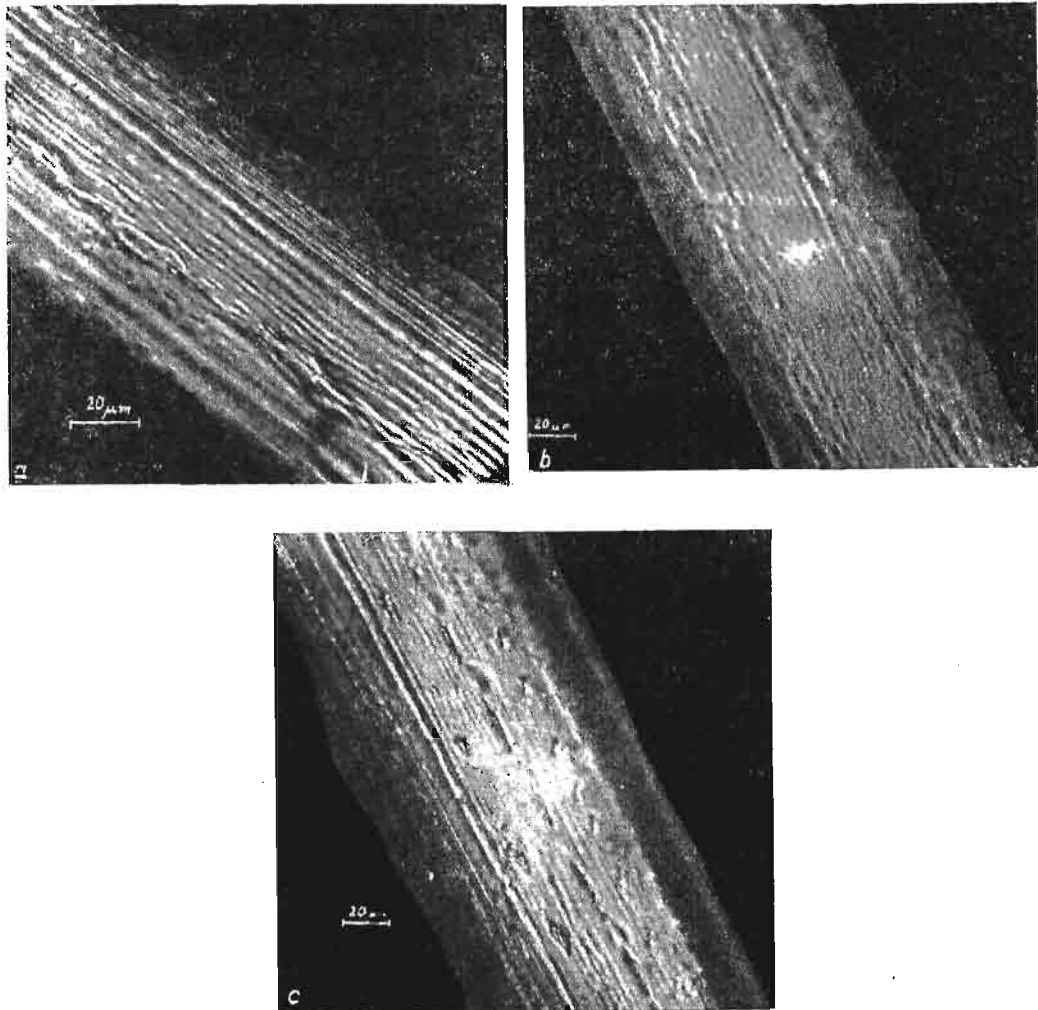
4.2. Obserwacje w mikroskopie świetlnym. Prowadzenie bezpośrednich obserwacji powierzchni żyłek o dużej średnicy, rzędu kilkudziesięciu mikrometrów, z uwagi na małą głębokość ostrości mikroskopu świetlnego jest bardzo utrudnione, a dla powiększeń rzędu setek razy prawie niemożliwe. Trudność ta występuje zarówno przy obserwacji żyłki w świetle przechodzącym, jak i odbitym (przy górnym skośnym oświetleniu) [29]. Radykalną poprawę uzyskano prowadząc obserwację odcinków żyłek w polistyrenie, wykonanych w sposób analogiczny jak do celów mikroskopii elektronowej. Obserwację odcinków w świetle przechodzącym prowadzono na radzieckim mikroskopie MIN-8 stosując polską nasadkę fotograficzną MNF firmy PZO.

5. Wyniki obserwacji

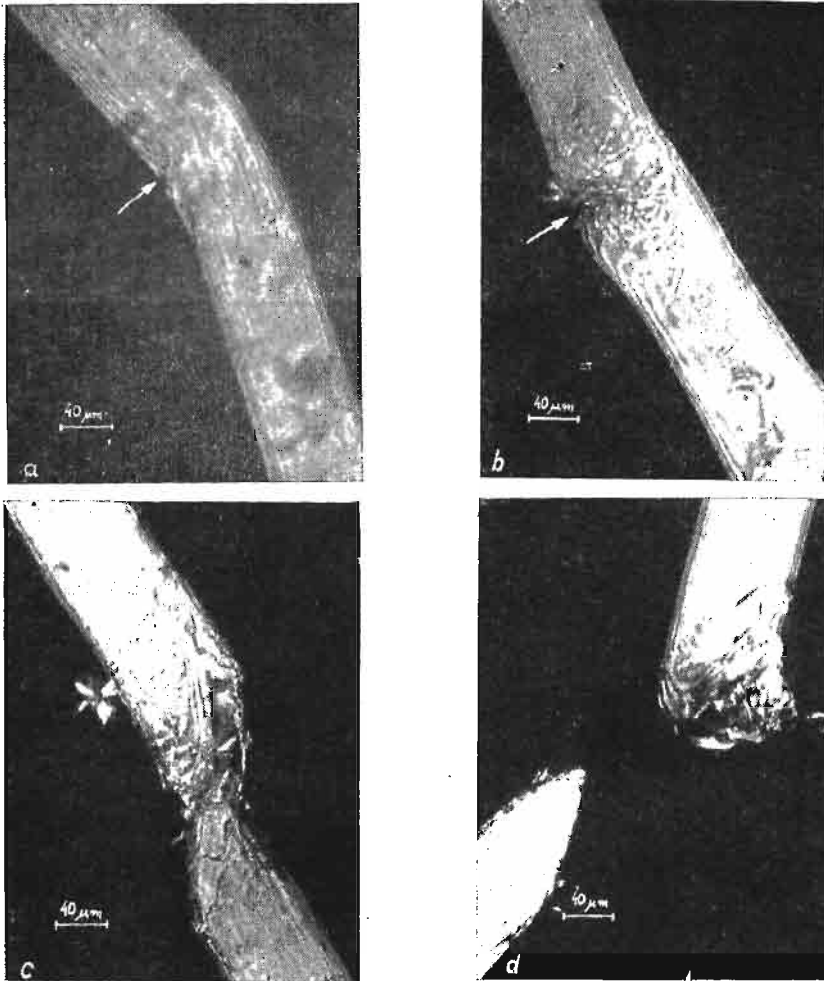
Bezpośrednich informacji o niszczeniu badanych żyłek poliamidowych w procesie znużenia dostarczyła analiza zdjęć wykonanych na mikroskopach świetlnym i elektronowym.

Mikrofotografie replik powierzchni wykonanych dla żyłki nie poddanej znużeniu i znużonej (rys. 1) wykazują istotne różnice w ich strukturze morfologicznej. Monofilament nie nużony charakteryzuje się podłużnym sfalowaniem elementów strukturalnych powierzchni z jednoczesnym występowaniem szczelin wzdłużnych. Dla żyłek znużonych powierzchnia staje się bardziej gładka, a nierówności powierzchniowe ulegają wyrównaniu i zmniejszeniu (rys. 1b, c). Kolejne fazy rozrywania w procesie zmęczenia z uwypukleniem momentu tuż przed rozerwaniem i po rozerwaniu zamieszczono na rys. 2 i 3. Z charakteru uzyskanych złomów można wnioskować o przebiegu niszczenia w zależności od wielkości amplitudy obciążenia [1], co tutaj nie będzie analizowane.

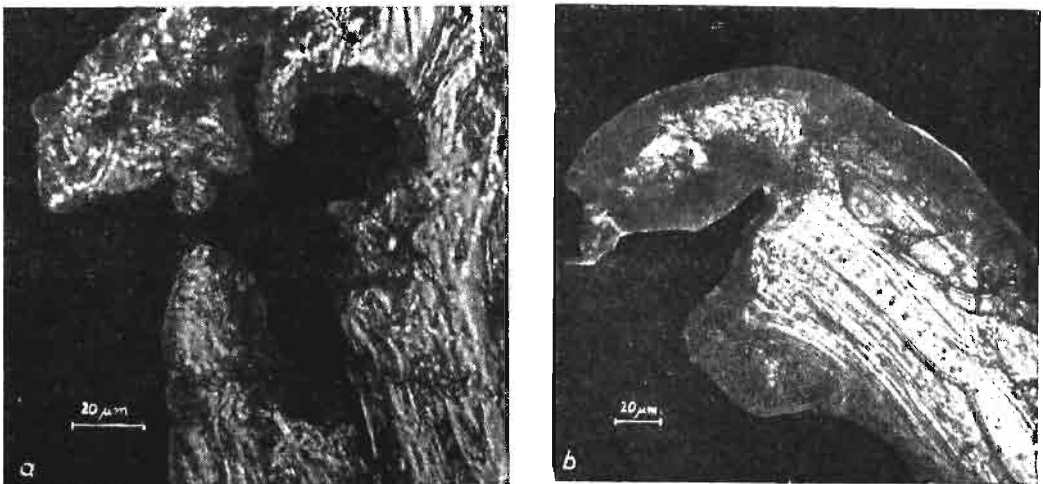
Ze zdjęć wykonanych na mikroskopie elektronowym, dla fragmentów monofilamentów nie poddanych znużeniu i nużonych, widać wyraźnie różnice w mikrostrukturze morfologicznej (rys. 4). W wyniku procesu zmęczeniowego następuje znaczne wygładzenie mikrorzeźby powierzchni żyłki, co jest już zauważalne pod zwykłym mikroskopem (rys. 1b, c) dla dużych powiększeń. Repliki powierzchni zerwanych fragmentów znużonych monofilamentów (rys. 5) pokazują wyraźne różnice morfologiczne żyłki znużonej i nużonej aż do zerwania. Całkowicie zniknęły nierówności. Na ich miejscu pojawiły się odgraniczone prostymi liniami gładkie pasma poślizgu o krawędziach wzdłużnych prawie równoległych do osi żyłki, to jest prawie równoległe do kierunku deformacji. Pasma te odgraniczone są krawędziami uskoku w przybliżeniu do siebie równoległymi, a prostopadłymi do osi monofilamentu. Są one mikroskopowym odbiciem pęknięcia zmęczeniowego. Na niektórych mikrofotografiach widać zanieczyszczenia środkiem matującym — dwutlenkiem tytanu. Czarne, bezkształtne plamy zauważalne na niektórych zdjęciach są artefaktami powstałymi podczas napyłania węglem matrycy polistyrenowej w procesie przygotowywania preparatów. Oś żyłki zaznaczona jest strzałką ciągłą.



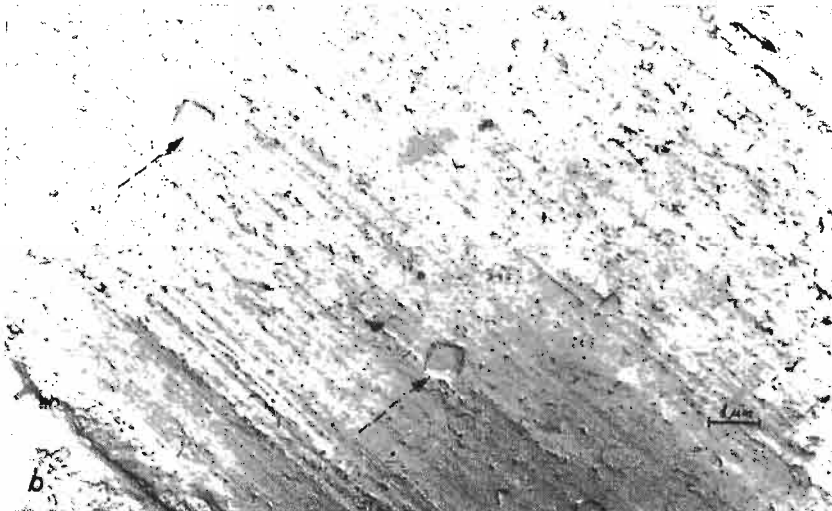
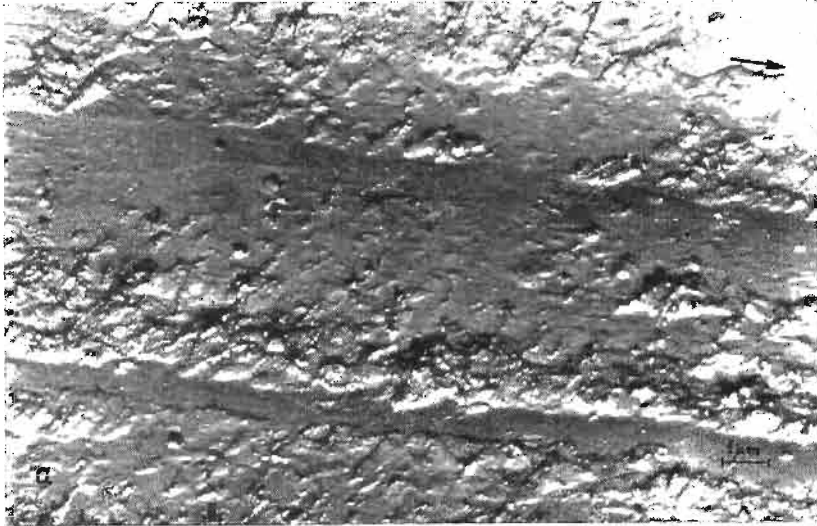
Rys. 1. Mikrofotografie replik powierzchni monofilamentu: a — nie poddanego zużeniu zmęczeniowemu, b, c — zużonego



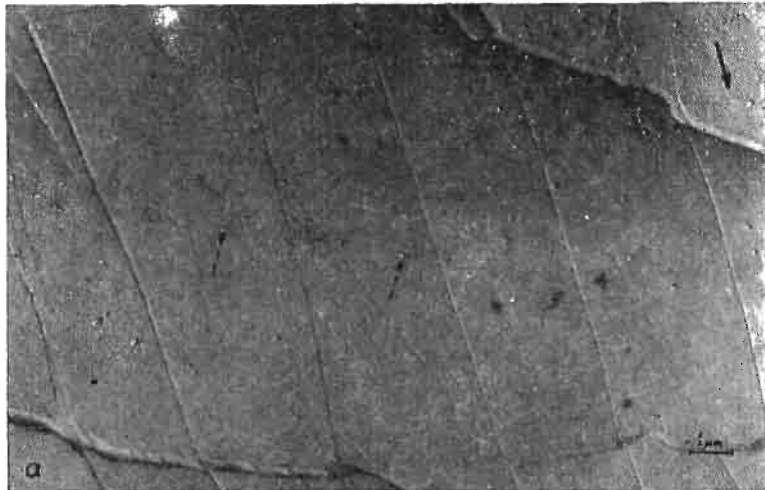
Rys. 2. Mikrofotografie kolejnych faz rozrywania monofilamentu: a — faza początkowa, b — powstanie klinowego wgłębienia, c — następna faza, d — rozerwane fragmenty włókna



Rys. 3. Mikrofotografie replik powierzchni monofilamentu: a — tuż przed zerwaniem, b — rozerwanego



Rys. 4. Mikrofotografie replik powierzchni monofilamentu: a — nie poddanego zużeniu zmęczeniowemu, b — zużonego, na którym widoczne są zanieczyszczenia siarczanem baru, zaznaczone strzałką przerywaną

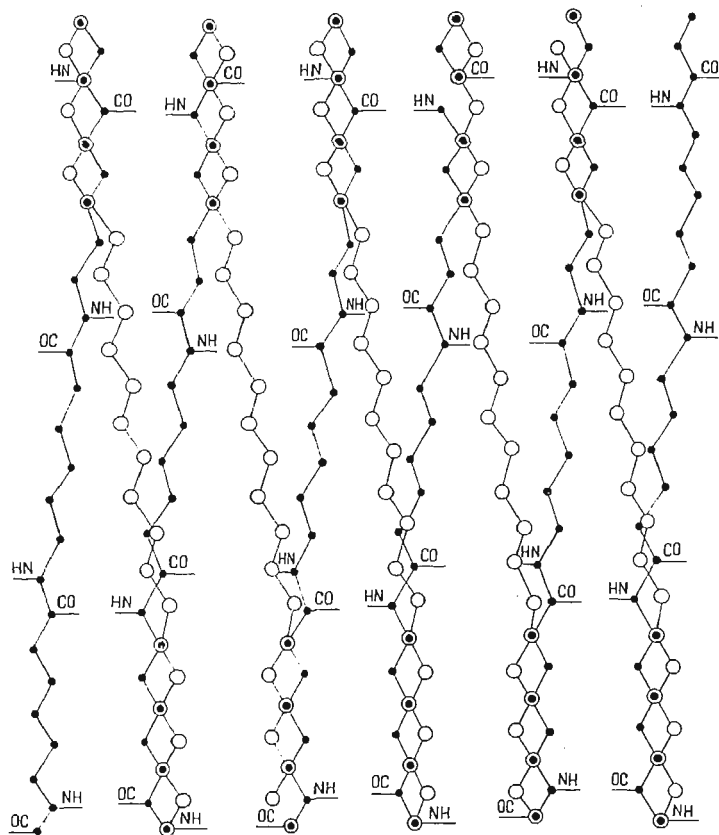




Rys. 5. Mikrofotografie replik powierzchni zerwanych fragmentów zużonego monofilamentu. Na niektórych mikrofotografiach strzałką przerywaną zaznaczono liczne zanieczyszczenia dwutlenkiem tytanu

6. Dyskusja wyników

Analiza replik z mikroskopu elektronowego dla zużonych, a zwłaszcza dla zużonych i zerwanych fragmentów żyłek zdaje się wskazywać na dyslokacyjny charakter pęknięcia. Świadczy o tym w szczególności wyraźnie schodkowy charakter złomu rys. (5b,e). Obszar krystaliczny (bądź parakrystaliczny) poliamidu, utworzony przez zespół atomów leżących w określonych wskaźnikami Millera płaszczyznach krystalograficznych, może być nieuporządkowany, gdy krystality tworzą różne kąty z osią żyłki, lub zorientowany —



Rys. 6. Schemat tworzenia się dyslokacji w poliamidzie

gdy tworzą określone kąty. Jeżeli żyłka zostanie obciążona, wówczas w płaszczyznach (200) czy (020)+(220), jako najgęściej obsadzonych i o maksymalnym liniowym zagęszczeniu atomami, może zająć poślizg [1]. Płaszczyzny poślizgu powstają, gdy tworzą się dyslokacje typu krawędziowego bądź śrubowego.

Schemat tworzenia się dyslokacji krawędziowej podano na rys. 6. Prawopodobieństwo powstawania tego rodzaju dyslokacji jest duże z uwagi na możliwość występowania defektów w łańcuchu makrocząsteczki [17]. Powstawaniu defektów w makrocząsteczkach sprzyjają fluktuacje cieplne atomów oraz oscylacje deformacyjno-rotacyjne. Ruch dyslo-

kacji w normalnych warunkach nie zachodzi. Jest do tego zawsze potrzebne pewne naprężenie zewnętrzne. Ruchowi dyslokacji, która na swojej drodze napotyka przeszkody, towarzyszą — oprócz przyłożonego naprężenia wywołującego ruch — drgania termiczne sieci krystalicznej. Drgania te dostarczają dodatkowej energii niezbędnej na pokonanie przez dyslokację przeszkody i jej dalszy ruch. Prawdopodobieństwo ruchów dyslokacyjnych wzrasta, gdy pod wpływem cyklicznego obciążenia zewnętrznego, które wytwarza naprężenia styczne w płaszczyźnie poślizgu, ulegają zmniejszeniu różnice energii potencjalnej, konieczne do wywołania zmiany położenia dyslokacji. Ruchy te powodują tworzenie się pierwszego mikropęknięcia w obszarze uporządkowanym. W początkowym stadium niszczenia pęknięcia te są luźno związane z płaszczyzną poślizgu. Fakt, że poruszające się dyslokacje są dwuwymiarowymi twórcami geometrycznymi, przemieszczającymi się wzdłuż płaszczyzn poślizgu w trójwymiarowej sieci krystalicznej powoduje, że napotykana przeszkoda oddziałuje z dyslokacjami w zależności od ich charakterystyk geometrycznych.

Zatem, gdy mikroskopowe pęknięcia rozprzestrzeniają się w objętości tworzywa włókna, następuje ich wzajemne przemieszczanie się lub łączenie w zespoły. Powstaje wtedy pęknięcie mikroskopowe. To ostatnie pod wpływem stosunkowo niewielkiej siły zewnętrznej prowadzi do pęknięcia makroskopowego i zerwania żyłki.

Procesowi odkształcenia zmęczeniowego żyłek poliamidowych towarzyszy nieodłącznie stan naprężenia. Stan ten jest uwarunkowany między innymi naprężeniami w obszarach uporządkowanych, a zwłaszcza w obszarze defektów. W tym obszarze jest zakłócona prawidłowa struktura sieci przez występowanie atomów własnych lub atomów wtrąceń w niewłaściwych pozycjach międzywęzłowych lub węzłowych. We wszystkich przypadkach energia potencjalna sieci w obszarze defektu jest wyższa od minimalnej wartości, odpowiadającej położeniu równowagi, co objawia się występowaniem pola naprężeń wokół defektu. Wskutek małego promienia działania sił atomowych zasięg takich pól naprężeń wynosi do kilku parametrów sieci.

Wydaje się, że poza powyższymi przyczynami w procesie niszczenia zmęczeniowego żyłek poliamidowych dużą rolę odgrywają mikronaprężenia orientacyjne spowodowane defektami, a zwłaszcza ich spiętrzenie na granicy obszarów uporządkowanych i nieuporządkowanych. Mają one określony kierunek, zgodny z kierunkiem odkształcenia.

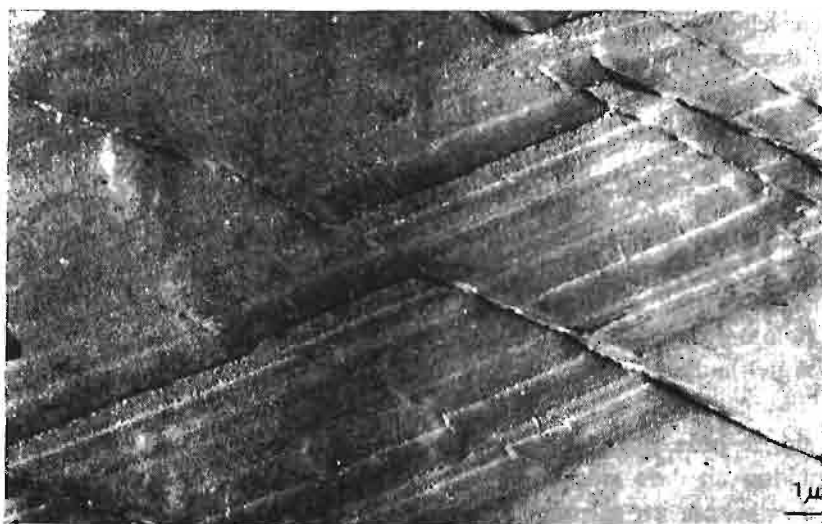
Gdy odkształcenia są zgodne co do kierunku i zwrotu ich działania, wówczas mikronaprężenia się sumują i szybko rosną. W innych przypadkach ma miejsce ich odejmowanie. Mikronaprężenia te określają moment powstania mikropęknięcia.

W przypadku odkształcenia jednokierunkowego, z jakim mamy do czynienia w naszych badaniach mechanizmu niszczenia zmęczeniowego poliamidowych żyłek przy wielokrotnym rozciąganiu, zapoczątkowane trwale mikropęknięcia rozprzestrzeniają się wzdłuż krawędzi coraz to większych zespołów uporządkowanych: krystalitów, lamel, mikrofibryl, i fibryl. Prowadzą one do dyslokacji typu krawędziowego w wyniku różnic energetycznych, istniejących pomiędzy fazami krystaliczną i amorficzną.

Przyłożone makronaprężenia działające, jak już powiedziano wyżej, stycznie w płaszczyźnie poślizgu, powodują łączenie się mikropęknięć w jedną całość, prowadząc do pęknięcia mikroskopowego. Tworzy się znaczny skok potencjału naprężeń w miejscu

pęknięcia, w wyniku czego powstają — z punktu widzenia energetycznego — dogodne warunki do przesunięcia się całego uporządkowanego pakietu wzdłuż kierunku działania naprężeń deformujących, w przybliżeniu o długość równą wielokrotnym wymiarom krystalitów próbek zużonych.

Przeprowadzone obliczenia porównawcze wielkości uskoków z wymiarami krystalitów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny (200) — (rys. 5c, d) wykazały, że dla monofilamentu zużonego przy amplitudzie 1,6 mm odległości pomiędzy krawędziami uskoków są 1600 razy, a dla 1,2 mm — 2200 razy większe niż wielkości krystalitu określone na drodze rentgenowskiej. Natomiast dla bardzo małej amplitudy 0,8 mm — (rys. 5a) dochodzą do wielokrotności 3200 razy. Z powyższego wynika, że żyłki zużone przy małej amplitudzie wykazują większe odległości pomiędzy krawędziami uskoków niż zużone przy dużych amplitudach. Odległości te ulegają zmniejszeniu w miarę wzrostu amplitudy, będąc odbiciem zmniejszenia się wymiarów krystalitów [1].



Rys. 7. Mikrofotografia repliki przekroju poprzecznego zorientowanego monofilamentu poliamidowego, ściskanego prostopadle do osi włókna i następnie walcowanego (wg [20])

Opisane powierzchniowe zmiany żyłki zrywanej są odbiciem strukturalnych zmian zachodzących w całym przekroju monofilamentu w wyniku zużenia zmęczeniowego lub innych czynników fizycznych deformujących strukturę o dość znacznej charakterystyce naprężeniowej.

Potwierdzeniem tego jest reprodukcja japońskiej mikrofotografii [20] przekroju poprzecznego zorientowanego monofilamentu poliamidowego, ściskanego około 30% prostopadle do kierunku osi żyłki, a następnie walcowanego wzdłuż płaszczyzny (010) — rys. 7. Strzałką zaznaczono kierunek zgniatania. Przekrój ten dobrze odpowiada omawiane mikrorzeźbie powierzchni.

7. Wnioski

1. Pęknięcie zmęczeniowe w żyłkach poliamidowych w skali makroskopowej i mikroskopowej zachodzi, w przybliżeniu, prostopadle do kierunku naprężenia, natomiast w skali submikroskopowej przebiega zgodnie z zasadą «najmniejszego oporu».

2. Uskokki i sfaldowania obserwowane na replikach zerwanych fragmentów żyłek wynikają z mechanizmu propagacji pęknięć zmęczeniowych. Pęknięcia te powstają w pasmach poślizgu i między nimi wytyczają drogę pęknięcia głównego.

3. Odległości między krawędziami uskoków zmieniają się ze sposobem zużycia i są funkcją amplitudy.

Literatura cytowana w tekście

1. A. WŁOCHOWICZ, *Zmiany fizycznej mikrostruktury włókna poliamidowego wywołane dekohezją zmęczeniową w miejscu zerwania*, Zeszyty Naukowe Pł. Włókiennictwo, **19/122**, 5 (1969).
2. J. ZAWADZKI, *Reotermiczne aspekty wyteżenia i zużycia tworzyw sztucznych*, IMP PAN, Warszawa 1968, 1021.
3. J. ZAWADZKI, *Ciśnienie zredukowane jako jeden z parametrów wyteżenia*, Rozpr. Inż., **73**, 357 (1957).
4. J. ZAWADZKI, M. NOWAK, *Badania zmęczeniowe tworzyw sztucznych*, Przegląd Mech., **25**, 382 (1966); *Wytrzymałość zmęczeniowa poliamidu*, Przegląd Mech., **26**, 424 (1967).
5. T. KOSIEWICZ, *Materiały i półwyroby w budowie samochodów*, WNT, Warszawa 1962; W. SUROWIAK, S. CHUDZYŃSKI, *Tworzywa sztuczne w budowie maszyn*, PWT, Warszawa 1960.
6. K. H. MEYER, H. MARK, *Die Aufbau der Hochpolymeren organischen Naturstoffe*, Springer, Leipzig 1930.
7. J. W. HEARLE, *The fine structure of fibers and crystalline polymers*, J. Appl. Polym. Sci., **7**, 1175, 1193, 1207 (1963).
8. W. O. STATTON, *The meaning of crystallinity when judged by X-rays*, J. Polymer Sci., Part C, **18**, 33 (1967).
9. Г. Л. СЛОНИМСКИЙ, В. А. КАРГИН, А. КИТАЙГОРОДСКИЙ, Коллоид. Жур. **19**, 131 (1957).
10. K. HESS, H. KIESSING, *Über Langperioden-Interferenzen bei synthetischen Fasern*, Kolloid Z. **130**, 10 (1953); K. HESS, H. MAHL, E. GÜTTER, *Electronenmikroskopische Darstellung grosser Längsperioden in Zellulosefasern und ihr Vergleich mit den Perioden anderer Faserarten*, Kolloid Z. **155**, 1 (1957).
11. R. BONART, R. HOSEMANN, *Modellversuche zur Deutung der Röntgen Langperiodeninterferenzen*, Makromol. Chem., **39**, 105 (1960).
12. R. HOSEMANN, *Crystallinity in high polymers especially fibers*, Polymer, **3**, 349 (1962).
13. A. PETERLIN, *Plastic deformation of polyethylene by rolling and drawing*, Kolloid, Z. **233**, 857 (1969); *Band rupture in highly oriented crystalline polymers*, J. Polymer Sci., **A2**, 1151 (1969); M. L. WILLIAMS, *The mechanical properties of crystalline polymers interpreted in terms of dislocations*, Ann. New York Acad. Sci., **155**, 539 (1969).
14. D. A. ZAUKELES, *Observation of slip in nylon 66 and 610 and its interpretation in terms of a new model*, J. Appl. Phys., **33**, 2797 (1962); YOSHIKO TAJIMA, TSUNEO SETO, *Studies of kind bands in oriented polyethylene*, Progress in Polymer Phys., **12**, 193 (1969).
15. H. O. KEITH, E. PASSAGLIA, *Dislocations in polymer crystals*, J. Res. Nat. Bur. Stand., **68A**, 513 (1964); R. F. BOYER, *Dependence of mechanical properties on molecular motion in polymers*, Polymer Engng. Sci., **8**, 161 (1968).
16. P. PRADECKI, W. O. STATTON, *The role of dislocations in drawing*, Appl. Polymer Symposia No 6, 165 (1967); P. PRADECKI, W. O. STATTON, *A dislocation mechanism for deformation in polyethylene.*, J. Appl. Phys., **38**, 4140 (1967).
17. P. E. McMACHON, R. L. McCULLOUGH, A. A. SCHLEGER, *Molecular mechanics of point defects in polyethylene*, J. Appl. Phys., **38**, 4123 (1967); W. O. STATTON, *Coherence and deformation of lamellar crystals after annealing*, J. Appl. Phys., **38**, 4149 (1967).

18. Н. А. ОДИНГ, *Теория дислокаций в металлах и её применение*, Изд. АН СССР, Москва 1959.
19. P. INGRAM, H. KINO, A. PETERLIN, *The morphology of fibers from deformed polymer crystals* J. Polymer Sci., Part C, **16**, 1857 (1967); A. PETERLIN, *Man-Made Fiber Science and Technology*, Inter. Pub., New York 1967, vol. 1, 283; A. PETERLIN, J. Polymer Sci., **B1**, 279 (1963).
20. M. KUROKAWA, *Compressed biaxially oriented 6.10 nylon filaments*, The World through the Electron Microscope, Chem., **4**, 99 (1969); M. KUROKAWA, T. BAN, *Slip deformation in drawn polyethylene films*, J. Appl. Polymer Sci., **8**, 971 (1964).
21. Т. УОКОВОРИ, *The strength, fracture and fatigue of materials*, Noordhoff 1965, Netherlands; J. Phys. Soc. Japan, **10**, 368 (1955).
22. E. OROWAN, Proc. Roy. Soc. London A **171**, 79 (1939); *Dislocations in metals*, АИММЕ, 69 (1954).
23. Н. Н. АФАНАСИЕВ, ЖТФ, **10**, 1553 (1940), *бул.* **11**, 349 (1941).
24. Т. NISHIHARA, Т. KOBAYASHI, Trans. Mech. Soc. Japan, **12**, 52, 65 (1946).
25. A. M. FREUDENTHAL, Proc. Roy. Soc. London, A **187**, 416 (1946).
26. M. NINONI, K. ABE, H. TAKAYANAGI, *Mechanism of formation of the interlamella dislocation network in polyethylene single crystals*, J. Macromol. Sci., Part B, **2**, 649 (1965); E. T. WHITE, B. H. MURPHY, R. N. HAWARD, *The effect of orientation on the internal crazing of polystyrene*, J. Polymer Sci., Part B, **7**, 157 (1969); P. H. LINDENMEYER, *Imperfection in polymer crystals*, Kolloid Z., **231**, 593 (1967).
27. Г. Н. КУКИН, М. П. НОСОВ, *Приборы для испытания текстильных материалов на усталость*, Москва 1959.
28. D. E. BRADLEY, *Simultaneous evaporation of platinum a carbon for possible in high-resolution shadow-casting for the electron microscope*, Nature, **181**, 875 (1958).
29. E. F. WAGNER, K. NETTELSTRATH, *Quecksiberporosimetrie und Elektronenmikroskopische an Viskosefasern*, Chemiefasern, **12**, 995 (1967); F. M. SCHIMMEL, *Die Aenderung von Faseroberflächen durch Waschehandlungen*, Textilveredlung, **5**, 293 (1969).

Резюме

О МЕХАНИЗМЕ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПОЛИАМИДНЫХ ЛЕСОК

В работе обсуждены результаты наблюдений усталостного разрушения полиамидных лесок. Иницирование и развитие разрушения исследовано при помощи светового и электронного микроскопов. Указаны источники и причины усталостных повреждений, среди которых на первом месте находятся дефекты и дислокации кристаллической решётки.

На основании полученных результатов, предложен вероятный механизм усталостного разрушения лесок из полиамида 6.

Summary

A CONTRIBUTION TO THE MECHANISM OF THE FATIGUE FRACTURE OF POLYAMIDE 6 FIBRES

The paper presents some observations concerning the fatigue fracture of the Polyamide 6 fibres. The process of initiation and development of fracture were investigated by means of the optical and electron microscopy. Various reasons for the fatigue fracture are considered and the role of dislocations and defects of crystal lattices is discussed at the first plane. On the basis of the obtained results a probable mechanism responsible for the observed fatigue fracture of the Polyamide 6 fibres is proposed.

ZAKŁAD WŁÓKNOZNAWSTWA POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1970 r.

STATECZNOŚĆ WSTĘPNIE SPRĘŻONEGO WALCA KOŁOWEGO PRZY SKRĘCANIU

ELENA ZŁATANOWA (SOFIA)

Autorzy prac [1]–[4] rozważają różne zagadnienia stateczności pełnego walca kołowego poddanego skończonym odkształceniom. W pracy [5] zbadana została stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego bez obciążenia zewnętrznego. Niniejsza praca bada walec jak w pracy [5], nie posiadający stanu naturalnego, przy dużym skręcaniu. Obliczenia opierają się na teorii opracowanej przez Greena, Rivlina i Shielda w [6]. Stosuje się oznaczenia wprowadzone w [7].

1. Duże skręcanie walca z dyslokacją Volterry

Prosty walec kołowy o długości h i promieniu a , wykonany z nieściśliwego materiału sprężystego, poddany jest następującym odkształceniom:

- usunięciu lub dodaniu klina o dowolnym kącie rozwarcia φ , przez przecinanie walca płaszczyzną przechodzącą przez oś (por. [5]),
- dużemu rozciąganiu lub ściskaniu,
- skręcaniu o kąt ψz , przy czym z oznacza odległość od końca walca.

Ciało po takiej wstępnej deformacji oznaczamy przez B , a jego rozmiary przez h i a . Zagadnienie zawiera oprócz parametru ψ , następujące parametry deformacji, zdefiniowane przez:

$$(1.1) \quad \mu = a/\hat{a}, \quad \kappa = 2\pi/(2\pi - \varphi), \quad \lambda = h/\hat{h},$$

które ze względu na nieściśliwość materiału związane są zależnościami

$$(1.2) \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\kappa\lambda}}.$$

Za pomocą tej zależności rugować będziemy parametr μ . Dalsze związki będą zawierały tylko trzy niezależne parametry κ , ψ , λ .

Wprowadzamy w ciele B walcowy układ współrzędnych $\{\vartheta^i\} = \{r, \vartheta, z\}$, który uważać będziemy za układ konwencyjny. Kartezjańskie współrzędne typowego punktu po odkształceniu i przed odkształceniem są

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x_1 &= r \cos \vartheta, & x_2 &= r \sin \vartheta, & x_3 &= z, \\ \hat{x}_1 &= \frac{r}{u} \cos \left(\frac{\vartheta}{\kappa} - \psi z \right), & \hat{x}_2 &= \frac{r}{\mu} \sin \left(\frac{\vartheta}{\kappa} - \psi z \right), & \hat{x}_3 &= \frac{z}{\lambda}. \end{aligned}$$

Wyznaczamy tensory metryczne g_{ij} ciała odkształconego oraz \hat{g}_{ij} i \hat{g}^{ij} ciała nieodkształconego, stosując (1.2)

$$(1.4) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \det(g_{ij}) = r^2,$$

$$(1.5) \quad \hat{g}_{ij} = \begin{bmatrix} \kappa\lambda & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \frac{\lambda}{\kappa} & -r^2\psi\lambda \\ 0 & -r^2\psi\lambda & r^2\psi^2\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}, \quad \hat{g}^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\kappa\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \psi^2\kappa\lambda^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\kappa}{\lambda} & \psi\kappa\lambda^2 \\ 0 & \psi\kappa\lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{g} = \det(\hat{g}_{ij}) = r^2.$$

Tensory metryczne (1.4) i (1.5) określają stan odkształcenia i pozwalają, w oparciu o wzory z [7], obliczyć niezmienniki stanu odkształcenia I_k , a także tensor naprężenia

$$(1.6) \quad I_1 = \hat{g}^{ij}g_{ij} = \frac{1}{\lambda} \left(\kappa + \frac{1}{\kappa} \right) + \lambda^2 (r^2\psi^2\kappa^2 + 1),$$

$$I_2 = \hat{g}_{rs}g^{rs}I_3 = \lambda \left(\kappa + \frac{1}{\kappa} \right) + \frac{1}{\lambda^2} (r^2\psi^2\kappa\lambda^3 + 1),$$

$$I_3 = g|\hat{g} = 1.$$

$$\tau^{ij} = \Phi_1 \hat{g}^{ij} + \Phi_2 b^{ij} + p g^{ij};$$

$$\tau^{11} = \Phi_1 \frac{1}{\kappa\lambda} + \Phi_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\kappa} + \psi^2\kappa\lambda r^2 \right) + p,$$

$$(1.7) \quad r^2\tau^{22} = \Phi_1 \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2 r^2 \right) + \Phi_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \kappa\lambda + \psi^2\kappa\lambda r^2 \right) + p,$$

$$\tau^{33} = \Phi_1 \lambda^2 + \Phi_2 \left(\frac{\lambda}{\kappa} + \kappa\lambda \right) + p,$$

$$\tau^{23} = \Phi_1 \psi\kappa\lambda^2 + \Phi_2 \psi\lambda,$$

$$\tau^{12} = \tau^{13} = 0,$$

gdzie

$$\Phi_1 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1}, \quad \Phi_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_2}.$$

Funkcja $W(I_1, I_2)$ jest potencjałem sprężystości określonym na jednostkę objętości ciała nieodkształconego. Z (1.6) wynika, że Φ_k podobnie jak I_k są funkcjami zmiennej r . Funkcję skalarową p wyznaczamy z warunku brzegowego

$$(1.8) \quad \tau^{11} = 0, \quad \text{dla} \quad r = a$$

i równań równowagi

$$(1.9) \quad \nabla_i \tau^{ij} = 0.$$

Symbol ∇_i oznacza kowariantne różniczkowanie w układzie $\{\vartheta^i\}$. Z (1.9) dla $j = 2$ i $j = 3$

wynika, że p jest funkcją tylko zmiennej r . Z równania dla $j = 1$ wyznaczamy

$$(1.10) \quad p = - \left[\Phi_1 \frac{1}{\kappa \lambda} + \Phi_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{\lambda}{\kappa} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right) \right] + \\ - \left(\frac{1}{\kappa \lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} \right) \int_a^r (\Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2) \frac{dr}{r} + \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 \int_a^r \Phi_1 r dr$$

i ostatecznie

$$\tau_{11} = \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 \int_a^r \Phi_1 r dr - \left(\frac{1}{\kappa \lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} \right) \int_a^r (\Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2) \frac{dr}{r}, \\ r^2 \tau^{22} = \tau^{11} + \left(\frac{\kappa}{\lambda} - \frac{1}{\kappa \lambda} \right) (\Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2) + \Phi_1 \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 r^2, \\ (1.11) \quad \tau^{33} = \tau^{11} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\kappa \lambda} \right) \left(\Phi_1 + \frac{\kappa}{\lambda} \Phi_2 \right) - \Phi_2 \psi^2 \kappa \lambda r^2, \\ \tau^{23} = \psi \lambda (\Phi_1 \kappa \lambda + \Phi_2).$$

Oznaczamy przez P^i siłę na jednostkę powierzchni na brzegu $z = h$ z normalną $n_i(0, 0, 1)$

$$P = \tau^{ij} n_j g_j,$$

gdzie g_j jest wektorem bazy, oraz wyznaczamy całkowitą siłę osiową N oraz moment M przenoszone przez walec

$$(1.12) \quad N = 2\pi \int_0^a P^3 r dr = 2\pi \int_0^a r dr \left\{ \tau^{11} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{\kappa \lambda} \right) \left(\Phi_1 + \frac{\kappa}{\lambda} \Phi_2 \right) - \psi^2 \kappa \lambda r^2 \Phi_2 \right\},$$

$$(1.13) \quad M = 2\pi \int_0^a P^2 r^3 dr = 2\pi \psi \lambda \int_0^a r^3 (\Phi_1 \kappa \lambda + \Phi_2) dr.$$

2. Dodatkowe małe odkształcenia. Warunki utraty stateczności

Nałożymy na ciało B pole małych przemieszczeń εw . Przechodzi ono w stan $\overset{*}{B}$. Linio- we części przyrostów naprężenia i odkształcenia oznaczone primami wyznaczamy na podstawie wzorów z [6] i [7]. Przytoczymy tutaj ostateczne rezultaty. Oznaczając kowa- riantne współrzędne wektora małych przemieszczeń przez $w_1 = u$, $w_2 = v$, $w_3 = w$, a ich cząstkowe pochodne przez $w_{1,1} = u_r$, $w_{1,2} = u_s$, ... itd, otrzymujemy kolejno

$$(2.1) \quad I'_1 = 2 \left[\frac{1}{\kappa \lambda} u_r + \left(\frac{\kappa}{\lambda} r^2 + \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 \right) (v_s + ru) + \lambda^2 w_z + \psi \kappa \lambda^2 (v_z + w_s) \right], \\ I'_2 = -2 \left[\kappa \lambda u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\lambda}{\kappa} (v_s + ru) + \left(r^2 \psi^2 \kappa \lambda + \frac{1}{\lambda^2} \right) w_z - \psi \lambda (v_z + w_s) \right], \\ I'_3 = 2 \left(u_r + \frac{1}{r^2} v_s + \frac{1}{r} u + w_z \right) = 0;$$

$$\begin{aligned}
\tau'^{11} &= 2u_r \left[A \frac{1}{\kappa^2 \lambda^2} - B \left(\lambda^2 + \frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 r^2 \right) + F \left(\frac{1}{\kappa \lambda^3} + \frac{1}{\kappa^2} - 1 + \psi^2 r^2 \right) - p \right] + \\
&\quad + 2 \frac{1}{r^2} (v_9 + ru) \left[A \left(\frac{1}{\lambda^2} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right) - B \left(\frac{1}{\kappa \lambda} + \frac{\lambda^2}{\kappa^2} + \psi^2 \lambda^2 r^2 \right) + \right. \\
&\quad + F \left(\frac{\kappa}{\lambda^3} + 1 - \frac{1}{\kappa^2} + 2\psi^2 \kappa^2 r^2 + \psi^4 \kappa^3 \lambda^3 r^4 + \psi^2 \kappa \lambda^3 r^2 \right) + \Phi_2 \left(\psi^2 \kappa \lambda r^2 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \left. + \right. \\
&\quad + w_z \left\{ A \frac{\lambda}{\kappa} - B \left[\left(\frac{1}{\lambda^2} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right)^2 + \psi^2 \lambda^2 r^2 + \frac{1}{\kappa \lambda} \right] + \right. \\
&\quad + F \left(\psi^2 \kappa \lambda^3 r^2 + 1 + \frac{\lambda^3}{\kappa} - \psi^2 r^2 - \frac{1}{\kappa \lambda^3} \right) + \Phi_2 \frac{\lambda}{\kappa} \left. \right\} + \\
&\quad + 2\psi (v_z + w_9) \left[A \lambda + B \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{\kappa} + \psi^2 \lambda^2 \kappa r^2 \right) + \right. \\
&\quad + F \left(\kappa + \lambda^3 + \frac{1}{\kappa} + \psi^2 \kappa^2 \lambda^3 r^2 \right) + \Phi_2 \lambda \left. \right] + p'; \\
(2.2) \quad r^2 \tau'^{22} &= 2u_r \left\{ A \left(\frac{1}{\lambda^2} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right) - B \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \kappa^2 \lambda^2 + \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 r^2 \right) + \right. \\
&\quad + F \left[\frac{1}{\kappa \lambda^3} + 1 - \kappa^3 + r^2 \psi^2 (1 - \kappa^2 \lambda^3) \right] + \Phi_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right) \left. \right\} + \\
&\quad + 2 \frac{1}{r^2} (v_9 + ru) \left\{ A \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 r^2 \right)^2 - B \left(\frac{1}{\kappa \lambda} + \lambda^2 + \psi^2 \lambda^2 r^2 \right) + \right. \\
&\quad + F \left[\frac{\kappa}{\lambda^3} + \kappa^2 - 1 + r^2 \psi^2 \kappa^2 \left(2 + \kappa \lambda - \frac{\lambda}{\kappa} + r^2 \psi^2 \kappa \lambda \right) \right] - p \left. \right\} + \\
&\quad + 2w_z \left\{ A (\kappa \lambda + \psi^2 \kappa^2 \lambda^4 r^2) - B \left[\left(\frac{1}{\lambda^2} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right)^2 + \frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 r^2 \right] + \right. \\
&\quad + F \left[1 + \kappa \lambda^3 - \kappa \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right)^2 + \psi^2 \kappa \lambda^3 r^2 \right] + \Phi_2 \kappa \lambda \left. \right\} + \\
&\quad + 2\psi (v_z + w_9) \left[A (\kappa^2 \lambda + \psi^2 \kappa^3 \lambda^4 r^2) + B \left(\frac{1}{\lambda} + \kappa \lambda^3 + \psi^2 \kappa \lambda^2 r^2 \right) + \right. \\
&\quad + F (2\kappa + \kappa^2 \lambda^3 + 2\psi^2 \kappa^2 \lambda^3 r^2) \left. \right] + p', \\
\tau'^{33} &= 2u_r \left[A \frac{\lambda}{\kappa} - B (1 + \kappa^2) \lambda^2 + F \left(\frac{1}{\kappa^2} + 1 - \kappa \lambda^3 \right) + \Phi_2 \frac{\lambda}{\kappa} \right] + \\
&\quad + 2 \frac{1}{r^2} (v_9 + ru) \left\{ A (\kappa \lambda + \psi^2 \kappa^2 \lambda^4 r^2) + B \left(\frac{1}{\kappa^2} + 1 \right) \lambda^2 + \right. \\
&\quad + F \left[1 - \kappa^2 - \frac{\lambda^3}{\kappa} + (1 + \kappa^2) \psi^2 \kappa \lambda^3 r^2 \right] + \Phi_2 \kappa \lambda \left. \right\} + \\
&\quad + 2w_z \left\{ A \lambda^4 - B \left(\frac{1}{\kappa \lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} + (1 + \kappa^2) \psi^2 \lambda^2 r^2 + F \left(\frac{\lambda^3}{\kappa} - \kappa \lambda^3 - 1 - \psi^2 \kappa \lambda^3 \right) - p \right) \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c.d. (2.2)} \quad & + 2\psi(v_z + w_\vartheta) \left[A\kappa\lambda^4 + B \left(\frac{1}{\kappa} + \kappa \right) \lambda^3 + F(2 + \kappa^2) \lambda^3 \right] + p'; \\
 \tau'^{13} = & - \left(p + \frac{\lambda}{\kappa} \Phi_2 \right) (u_z + w_r) - \Phi_2 \left(v_r + u_\vartheta - 2 \frac{1}{r} v \right) \psi \lambda, \\
 r^2 \tau'^{21} = & - \left[p + \Phi_2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \psi^2 \kappa \lambda r^2 \right) \right] \left(v_r + u_\vartheta - 2 \frac{1}{r} v \right) + \Phi_2 (u_z + w_r) \psi \lambda r^2, \\
 r^2 \tau'^{32} = & 2u_r \left[A\lambda - B\kappa\lambda^2 + F \left(\frac{1}{\kappa} - \kappa^2 \lambda^3 \right) + \Phi_2 \lambda \right] \psi r^2 + \\
 & + 2(v_\vartheta + ru) \psi \left[A(\kappa^2 \lambda + \psi^2 \kappa^3 \lambda^4 r^2) - B \frac{\lambda^2}{\kappa} + F(\kappa - \lambda^3 + \psi^2 \kappa^2 \lambda^3 r^2) \right] + \\
 & + 2w_z \left[A\kappa\lambda^3 - B \left(\frac{1}{\lambda} + \psi^2 \kappa \lambda^2 r^2 \right) + F(\lambda^3 + \kappa - \psi^2 \kappa^2 \lambda^3 r^2) \right] \psi r^2 + \\
 & + 2(v_z + w_\vartheta) \left[2A\psi^2 \kappa^2 \lambda^4 - 2B\psi^2 \kappa \lambda^3 + 4F\psi^2 \kappa \lambda^3 - \frac{1}{r^2} (\kappa \lambda \Phi_2 + p) \right] r^2.
 \end{aligned}$$

Równanie (2.1)₃ jest równaniem nieściśliwości, gdyż $I_3 = 1$ pociąga za sobą warunek, $I_3 = 0$.

Tensor naprężenia całkowitego $\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}$ spełnia warunki równowagi, gdy są spełnione równania

$$(2.3) \quad \nabla \tau'^{ij} + \Gamma_{ir}^i \tau'^{jr} + \Gamma_{ir}^r \tau'^{ij} = 0,$$

gdzie

$$A = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2}, \quad B = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}, \quad F = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2}.$$

Przyrosty symboli Christoffela Γ_{ij}^k podane zostały w pracy [5]. Równania (2.3) oraz (2.1)₃ tworzą układ czterech równań różniczkowych na funkcje u, v, w, p' . Ponieważ A, B, F oraz Φ_k są funkcjami niezmienników, które z kolei są funkcjami zmiennej r , obliczenia dla dowolnego materiału są niezmiernie skomplikowane. W związku z tym dalsze rozważania ograniczamy do z góry zadanego materiału, a mianowicie do tzw. neo-hookeanu, dla którego

$$(2.4) \quad W(I_k) = C(I_1 - 3),$$

gdzie C jest dodatnią stałą. Wynika stąd

$$\Phi_1 = 2C, \quad \Phi_2 = A = B = F = 0;$$

Uwzględniając (2.4), równania (1.10), (1.11), (2.2) przyjmują postać

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad & \tau^{11} = 2C \frac{1}{\kappa \lambda} + p, \\
 & r^2 \tau^{22} = \tau^{11} + 2C \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \frac{1}{\kappa \lambda} \right) + 2C \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 r^2, \\
 & \tau^{33} = \tau^{11} + 2C \left(\lambda^2 - \frac{1}{\kappa \lambda} \right), \\
 & \tau^{23} = 2C \psi \kappa \lambda^3;
 \end{aligned}$$

$$(2.6) \quad dp/dr = -2C \left(\frac{1}{\kappa\lambda} - \frac{\kappa}{\lambda} \right) \frac{1}{r} + 2C\psi^2\kappa^2\lambda^2r;$$

$$\tau'^{11} = -2pu_r + p', \quad \tau'^{31} = -p(u_z + w_r),$$

$$(2.7) \quad r^2\tau'^{22} = -2p \left(\frac{1}{r^2}v_\vartheta + \frac{1}{r}v \right) + p', \quad r^2\tau'^{21} = -p \left(v_r + u_\vartheta - 2\frac{1}{r}v \right),$$

$$\tau'^{33} = -2pw_z + p', \quad \tau'^{32} = -p(v_z + w_\vartheta).$$

Podstawiamy teraz (2.5)-(2.7) oraz Γ'_{ij} do (2.3) i otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych na funkcje u , v , w oraz p' :

$$(2.8) \quad 4C \frac{1}{\kappa\lambda} u_{rr} + 2C \left(3 \frac{1}{\kappa\lambda} - \frac{\kappa}{\lambda} - \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) \frac{1}{r} u_r +$$

$$- 2C \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} + \psi\kappa^2\lambda^2r^2 \right) \frac{1}{r^2} u + 2C\lambda^2 u_{zz} +$$

$$+ 2C \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2 \right) \frac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} + 2C \frac{1}{\kappa\lambda} \frac{1}{r^2} v_{r\vartheta} - 4C \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) \frac{1}{r^3} v_\vartheta +$$

$$+ 4C\psi\kappa\lambda^2 \left(u_{\vartheta z} - \frac{1}{r} v_z \right) + 2C \frac{1}{\kappa\lambda} w_{rz} + p'_r = 0,$$

$$2C \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) u_{r\vartheta} + 2C \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + 2\frac{\kappa}{\lambda} + 2\psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) \frac{1}{r} u_\vartheta +$$

$$+ 2C \frac{1}{\kappa\lambda} \left(v_{rr} - \frac{1}{r} v_r \right) + 4C \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) \frac{1}{r^2} v_{\vartheta\vartheta} +$$

$$+ 2C\lambda^2 v_{zz} + 2C \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) w_{\vartheta z} +$$

$$+ 2C\psi\kappa\lambda^2r^2 \left(u_{rz} + 3\frac{1}{r^2} v_{\vartheta z} + 3\frac{1}{r} u_z + w_{zz} \right) + p'_\vartheta = 0,$$

$$2C\lambda^2 \left(u_{rz} + \frac{1}{r^2} v_{\vartheta z} + 2w_{zz} \right) + 2C \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \lambda^2 - \frac{\kappa}{\lambda} - \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) \frac{1}{r} u_z +$$

$$+ 2C \frac{1}{\kappa\lambda} \left(w_{rr} + \frac{1}{r} w_r \right) + 2C \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) \frac{1}{r^2} w_{\vartheta\vartheta} + 4C\psi\kappa\lambda^2 w_{z\vartheta} + p'_z = 0,$$

$$u_r + \frac{1}{r} u + \frac{1}{r^2} v_\vartheta + w_z = 0.$$

Ograniczamy się do przypadku płaskiego odkształcenia, niezależnego od zmiennej z , przyjmując $w = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Układ (2.8) doprowadzamy do jednego równania różniczkowego na funkcję $u(r, \vartheta)$. Równanie (2.8)₃ przy powyższych założeniach spełnione jest tożsamościowo. Otrzymujemy więc

$$(2.9) \quad \frac{1}{\kappa\lambda} \left(r^2 \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} + 6r \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} u \right) +$$

$$+ \frac{\partial^4 u}{\partial r^2 \partial \vartheta^2} \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \vartheta^2} \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} + 3\psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{1}{\kappa\lambda} + \frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} \left(\frac{\kappa}{\lambda} + \psi^2\kappa^2\lambda^2r^2 \right) = 0,$$

poprzednio wyrażając funkcje v i p' przez $u(r, \vartheta)$,

$$(2.10) \quad \frac{\partial v}{\partial \vartheta} = -r^2 \frac{\partial u}{\partial r} - ru,$$

$$(2.11) \quad \frac{\kappa \lambda}{2C} \frac{\partial^2 p'}{\partial \vartheta^2} = r^2 \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + 4r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} u + \frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \vartheta^2} (\kappa^2 + \psi^2 \kappa^2 \lambda^2 r^2) - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2},$$

z jednym warunkiem brzegowym

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \tau'^{1s} &= 0, \quad \text{dla } r = a, \\ -2pu_r + p' &= 0, \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad \begin{aligned} v_r + u_\vartheta - 2 \frac{1}{r} v &= 0, \quad \text{dla } r = a, \\ u_z + w_r &= 0, \end{aligned}$$

który odpowiada zerowaniu się obciążenia na brzegu (na powierzchni bocznej). Trzeci warunek jest spełniony tożsamościowo.

Równanie (2.9) z warunkami (2.13) tworzą jednorodną zagadnienie brzegowe. Można pokazać, że zagadnienie to jest samosprężone. Wtedy istnienie nietrywialnych rozwiązań (2.9) przy powyższych warunkach brzegowych będzie równoważne z warunkiem utraty stateczności [8].

Poszukujemy rozwiązania metodą Fouriera [9] w postaci iloczynu dwóch funkcji $\alpha(r)$ i funkcji własnej równania (2.9) $Q(\vartheta)$. Funkcją taką jest $\sin n\vartheta$ lub $\cos n\vartheta$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Podstawiamy więc $u(r, \vartheta) = \alpha(r)Q(\vartheta)$ do (2.9) i otrzymujemy, niezależnie od tego czy wzięto funkcję $\sin n\vartheta$ czy $\cos n\vartheta$, równanie różniczkowe zwyczajne czwartego rzędu

$$(2.14) \quad r^2 \frac{d^4 \alpha}{dr^4} + 6r \frac{d^3 \alpha}{dr^3} + \frac{d^2 \alpha}{dr^2} \{r^2 [5 - n^2(1 + \kappa^2)] - r^4 n^2 H\} + \\ + \frac{d\alpha}{dr} \{-r[1 + n^2(1 + \kappa^2)] - 3r^2 n^2 H\} + \alpha \{1 - (1 + \kappa^2)n^2 + n^4 \kappa^2 + r^2 n^2 (n^2 - 1) H\} = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(2.15) \quad H = \psi^2 \kappa^3 \lambda^3.$$

Podstawiając najpierw (2.10) i (2.11), a następnie $u(r, \vartheta) = \alpha(r)Q(\vartheta)$ do (2.13) otrzymujemy ostateczną postać warunków brzegowych zagadnienia

$$(2.16) \quad \begin{aligned} r^2 \frac{d^3 \alpha}{dr^3} + 4r \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + \frac{d\alpha}{dr} [1 - n^2(\kappa^2 - 2 + Hr^3)] + \frac{1}{r} (n^2 - 1)\alpha &= 0, \quad \text{na } r = a, \\ \frac{d^2 \alpha}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha}{dr} + (n^2 - 1) \frac{1}{r^2} \alpha &= 0, \quad \text{na } r = a. \end{aligned}$$

Równania (2.14) i (2.16) są prawdziwe dla dowolnych ψ, κ, λ . Ich rozwiązanie analityczne można znaleźć w przypadku, gdy kąt dodatkowego rozwarcia dodatkowego (usuniętego) klina φ jest mały. W celu znalezienia takiego rozwiązania ograniczamy dalsze rozważania do wartości κ bliskich jedności. Oznaczamy

$$(2.17) \quad \kappa = 1 + \xi,$$

gdzie ξ jest małym parametrem; ξ^2 można pominąć w porównaniu z ξ . Będziemy tak samo pomijać wielkość ξH . Oznacza to, że ψ^2 jest tego samego rzędu co ξ , więc $\xi\psi^2 \sim 0$. Przy tych założeniach równanie (2.14) da się przedstawić w dwu równoważnych postaciach

$$(2.18) \quad [r^2 D^2 - rD - (1 - n^2 - \xi n^2)][r^2 D^2 + 3rD + (1 - n^2 - \xi n^2) - n^2 H r^2] \alpha = 0.$$

lub

$$(2.19) \quad r^2 [r^2 D^2 + 3rD + (1 - n^2 - \xi n^2) - n^2 H r^2] \left[D^2 + 3 \frac{1}{r} D + (1 - n^2 + \xi n^2) \frac{1}{r} \right] \alpha = 0,$$

gdzie $D = \frac{d}{dr}$.

Ponieważ operatory w drugich nawiasach kwadratowych są liniowo niezależne, liniowo niezależnymi rozwiązaniami równań (2.14) są rozwiązania dwu równań różniczkowych drugiego rzędu

$$(2.20) \quad \begin{aligned} [r^2 D^2 + 3rD + (1 - n^2 - \xi n^2) - n^2 H r^2] \alpha &= 0, \\ [r^2 D^2 - rD + (1 - n^2 - \xi n^2)] \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Pierwsze z tych równań doprowadzone do postaci równania Bessela ma rozwiązanie

$$(2.21) \quad \alpha_1 = C_1 \frac{1}{r} I_\nu(kr) + C_2 \frac{1}{r} K_\nu(kr),$$

a drugie jest równaniem Eulera z rozwiązaniem

$$(2.22) \quad \alpha_2 = C_3 r^{21} + C_4 r^{22}.$$

Zatem ogólne rozwiązanie równania (2.14) przedstawia się następująco

$$(2.23) \quad \alpha = C_1 \frac{1}{r} I_\nu(kr) + C_2 \frac{1}{r} K(kr) + C_3 r^{21} + C_4 r^{22},$$

gdzie C_i są stałymi całkowania, I_ν , K_ν są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju rzędu ν , dla urojonego argumentu, przy czym

$$(2.24) \quad \nu = n(1 + \xi)^{1/2},$$

$$(2.25) \quad k = nH^{1/2},$$

a ϱ_i są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$(2.26) \quad \varrho^2 - 2\varrho + 1 - n^2 - \xi n^2 = 0.$$

Ponieważ dla $r = 0$ $K_\nu \rightarrow \infty$ oraz $r^{22} \rightarrow \infty$, ze względu na fizyczny sens zagadnienia konieczne jest przyjęcie $C_3 = C_4 = 0$. Ostateczna postać rozwiązania (2.23) jest

$$(2.27) \quad \alpha = A \frac{1}{kr} I_\nu(kr) + Br^\varrho.$$

Podstawiając (2.27) do warunków brzegowych (2.16) otrzymujemy jednorodny układ

równań algebraicznych na stałe A i B :

$$(2.28) \quad A \left\{ \frac{I_\nu(ka)}{(ka)^2} [1 + \nu(2 - n^2 - k^2 a^2)] - \frac{1}{ka} I_{\nu-1}(ka) [2 - n^2 - (ka)^2] \right\} + \\ - Ba^{2-1} [(1 - n^2 - k^2 a^2)(\varrho + 1) + \varrho] = 0, \\ A \left[\frac{I_\nu(ka)}{ka} \left(2 - n^2 - \frac{1}{2} \xi n^2 + \nu \right) - I_{\nu-1}(ka) \right] - Ba^\nu \left(\varrho - 1 - n^2 - \frac{1}{2} \xi n^2 \right) = 0.$$

Układ ten posiada rozwiązania nietrywialne, gdy jego wyznacznik charakterystyczny równa się zeru. Przekształcając ten wyznacznik, możemy ostatecznie poszukiwany warunek utraty stateczności zapisać w postaci

$$(2.29) \quad \left[\varrho - \left(1 - n^2 - \frac{1}{2} \xi n^2 \right) \right] \left\{ \frac{I_\nu(ka)}{ka} [1 + \nu(2 - n^2 - k^2 a^2)] - I_{\nu-1}(ka) [2 - n^2 - (ka)^2] \right\} + \\ - \{ \varrho + [1 - n^2 - (ka)^2](\varrho + 1) \} \left[\frac{I_\nu(ka)}{ka} \left(\nu + 2 - n^2 - \frac{1}{2} \xi n^2 \right) - I_{\nu-1}(ka) \right] = 0.$$

Warunek ten określa dla danego n krytyczną wartość ka . Z reguły w zagadnieniach stateczności krytyczny stan najbliższy stanu naturalnego otrzymuje się przez przyjęcie najmniejszej możliwej liczby falowej odpowiadającej nietrywialnemu polu odkształceń. W rozważanym przypadku $n = 0$ odpowiada brakowi odkształceń dodatkowych, a $n = 1$ ruchowi sztywnemu. Pierwszą nietrywialną wartością liczby falowej jest więc $n = 2$. Dla tej wartości liczby falowej i kilku szczególnych wartości parametru wstępnego sprężenia \approx warunek utraty stateczności (2.29) sprowadza się do

\approx	ξ	ϱ	ν	warunek utraty stateczności
1,2	0,2	3,19	2,19	$kaI_{1,19}(ka) - 6,35I_{2,19}(ka) = 0$
1,0	0,0	3,00	2,00	$kaI_1(ka) - 6I_2(ka) = 0$
0,8	-0,2	2,8	1,80	$kaI_{0,8}(ka) - 5,6I_{1,8}(ka) = 0$

Warunek ten jest bardzo prosty i znalezienie krytycznego ka w oparciu o tablice funkcji Bessela rzędów ułamkowych nie następuje trudności.

Literatura cytowana w tekście

1. E. W. WILKES, *On the stability of a circular tube under end thrust*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 8 (1955), 88-100.
2. A. E. GREEN, A. J. M. SPENCER, *The stability of a circular cylinder under finite extension and torsion*, J. Math. Phys., 4, 37, (1959). 316-338.
3. Z. WESOŁOWSKI, *The axially symmetric problem of stability loss of an elastic bar subject to tension*, Arch. Mech. Stos., 3, 15 (1963), 383-395.
4. B. DUSZCZYK, *Stateczność pełnego walca obciążonego ciśnieniem hydrostatycznym*, Mech. Teor. i Stos., 4 5 (1967).
5. E. ZŁATANOWA, Z. WESOŁOWSKI, *Stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego*, Rozpr. Inżyn. 2, 18 (1970).
6. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformation*, Proc. Roy. Soc., A 211 (1952).

7. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
8. GUO ZHONG-HENG, W. URBANOWSKI, *Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformation*, Arch Mech Stos., 2, 15 (1963), 309-321.
9. Г. П. Толстов, *Ряды Фурье*, Москва 1951.

Р е з ю м е

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассматривается прямой круговой цилиндр, подверженный конечной деформации путем добавления или вырезания клина с произвольным углом раствора и последующего восстановления связности материала. Полученный таким образом цилиндр подвергается конечному кручению и растяжению. Устойчивость цилиндра исследуется по методу малых виртуальных деформаций, наложенных на конечные деформации, причем добавочные деформации являются плоскими. Дается условие потери устойчивости для малых углов раствора клина.

S u m m a r y

STABILITY OF A PRESTRESSED CIRCULAR CYLINDER UNDER TORSION

A simple circular cylinder is subject to finite deformation by cutting out (or inserting) of a segment with an arbitrary vertex angle; the edges of the cut are welded together. Such a prestressed cylinder is then subject to finite torsion and extension. The stability of the cylinder is investigated by means of superposition of a small two-dimensional state of strain upon the finite strains. The stability conditions at small values of the vertex radius of the inclusion are presented.

WYŻSZY INSTYTUT MASZYNOWO-ELEKTRYCZNO-TECHNICZNY
SOFIA, BULGARIA

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1970 r.

WPLYW SKOŃCZONEGO WSTĘPNEGO SPRĘŻENIA NA SZTYWNOŚĆ RURY

ELENA ZŁATANOWA (SOFIA)

Przedmiotem niniejszej pracy jest obliczenie grubościennej rury wstępnie sprężonej, poddanej działaniu małego ciśnienia. W szczególności chodzi o zbadanie wpływu wstępnego sprężenia na własności sprężyste rury przy tym obciążeniu. O materiale zakładamy, że jest izotropowy, sprężysty i nieściśliwy.

Rozważania opierają się na ogólnej teorii małych dodatkowych odkształceń [1], korzystając będziemy w zasadzie z oznaczeń w pracy [2].

1. Wstępny skończony stan odkształcenia

Rozważmy rurę o długości \hat{h} , promieniach zewnętrznym i wewnętrznym \hat{a} i \hat{b} , przy czym $a = \delta \hat{b}$. Rura ta jest poddana wstępnemu dużemu odkształceniu w sposób następujący: rozcina się półpłaszczyzną przechodzącą przez oś, dodaje się (lub usuwa) klin o pewnym kącie rozwarcia φ , po czym przywraca się spójność materiału (por. [3]). Dla otrzymania związków ogólniejszych przyjmujemy, że poza tym na powierzchni powstałej rury działa w kierunku osiowym ciśnienie q , jednakowe w każdym punkcie. Ciało odkształcone oznaczamy przez B , jego wysokość i promienie przez h , a , b . Opisaną dużą deformację charakteryzują następujące parametry:

$$(1.1) \quad \mu = a/\hat{a}, \quad \nu = b/\hat{b}, \quad \kappa = 2\pi/(2\pi - \varphi), \quad \lambda = h/\hat{h}, \quad \delta = a/b.$$

Przyjęliśmy, że rura jest wykonana z nieściśliwego materiału sprężystego, a więc ma miejsce zależność

$$(1.2) \quad r^2 - \kappa \lambda r^2 = \hat{a}^2 - \kappa \lambda \hat{a}^2 = \hat{b}^2 - \kappa \lambda \hat{b}^2,$$

gdzie przez \hat{r} i r oznaczyliśmy promień typowego punktu przed i po odkształceniu. Zależności (1.1) i (1.2) pozwalają obliczyć

$$(1.3) \quad Q(r) = \frac{\hat{r}}{r} = \left[\kappa \lambda + (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\hat{a}^2}{r^2} \right]^{1/2},$$

$$(1.4) \quad \frac{dQ}{dr} = \frac{1}{r} \left(\frac{\kappa \lambda}{Q} - Q \right),$$

$$(1.5) \quad \delta = \delta \frac{\mu}{\nu}, \quad \nu = \sqrt{[1 - (1 - \kappa \lambda \mu^2) \delta^2] / \kappa \lambda}.$$

W oparciu o (1.5) w dalszym ciągu rugować będziemy ν , δ a parametry κ , λ , μ uważać będziemy za wzajemnie niezależne.

Wprowadzamy walcowy układ współrzędnych $\{r, \vartheta, z\}$, który w ciele B pokrywa się z układem konwekcyjnym $\{\vartheta^i\}$ i oznaczamy współrzędne typowego punktu przed odkształceniem w układzie kartezjańskim przez \hat{x}_i , a po odkształceniu przez x_i . Mamy

$$(1.6) \quad \hat{x}_1 = rQ(r)\cos\frac{\vartheta}{\kappa}, \quad \hat{x}_2 = rQ(r)\sin\frac{\vartheta}{\kappa}, \quad \hat{x}_3 = \frac{z}{\lambda}.$$

Tensorzy metryczne dla ciała odkształconego g_{ij} i ciała nieodkształconego \hat{g}_{ij} są

$$(1.7) \quad g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{g}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \frac{Q^2}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix},$$

$$g = \det g_{ij} = r^2, \quad \hat{g} = \det \hat{g}_{ij} = r^2.$$

Tensorzy (1.7) określają całkowicie stan odkształcenia ciała B . Niezmienniki odkształcenia I_k równe są odpowiednio:

$$(1.8) \quad \begin{aligned} I_1 &= \hat{g}^{ij}g_{ij} = \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} + \frac{\kappa^2}{Q^2} + \lambda^2, \\ I_2 &= \hat{g}_{rs}\hat{g}^{rs}I_3 = \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} + \frac{Q^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2}, \\ I_3 &= g/\hat{g} = 1. \end{aligned}$$

Za pomocą wzoru

$$(1.9) \quad \tau^{ij} = \Phi_1 \hat{g}^{ij} + \Phi_2 b^{ij} + p g^{ij},$$

w oparciu o (1.7), wyznaczamy tensor naprężenia

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \tau^{11} &= \Phi_1 \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} + \Phi_2 \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + p, \\ r^2 \tau^{22} &= \Phi_1 \frac{\kappa^2}{Q^2} + \Phi_2 \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + p, \\ \tau^{33} &= \Phi_1 \lambda^2 + \Phi_2 \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} \right) + p, \\ \tau^{12} &= \tau^{23} = \tau^{31} = 0, \end{aligned}$$

gdzie p jest dowolną funkcją skalarową, a Φ_k pomnożonymi przez dwa pochodnymi potencjału sprężystości względem niezmienników stanu odkształcenia.

Określimy funkcję p z warunków brzegowych i równań równowagi

$$(1.11) \quad \nabla_i \tau^{ij} = 0,$$

gdzie symbol ∇_i oznacza kowariantne różniczkowanie w układzie $\{\theta^i\}$. Rozpisując (1.11) stwierdzamy z równań dla $j = 2$ i $j = 3$, że zachodzi związek $\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$; p jest więc funkcją tylko zmiennej r . Z (1.11) dla $j = 1$ funkcję tę można przedstawić następująco:

$$(1.12) \quad p = -\Phi_1 \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} - \Phi_2 \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + D + L(r),$$

gdzie D jest stałą całkowania, a przez $L(r)$ oznaczyliśmy

$$(1.13) \quad L(r) = - \int_r^a (\Phi_1 - \lambda^2 \Phi_2) \left(\frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} - \frac{\kappa^2}{Q^2} \right) \frac{dr}{r}.$$

Jeśli q jest ciśnieniem zewnętrznym na powierzchni $r = a$, a powierzchnia $r = b$ jest nie obciążona, to warunki brzegowe są

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \tau^{11} &= -q, & \text{dla } r &= a, \\ \tau^{11} &= 0, & \text{dla } r &= b; \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$(1.15) \quad D = -q, \quad L(b) = -D,$$

i ostatecznie

$$(1.16) \quad p = -\Phi_1 \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} - \Phi_2 \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + (L(r) - q),$$

$$(1.17) \quad \frac{dp}{dr} = (\Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2) \left(\frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} - \frac{2}{\kappa \lambda} + \frac{\kappa^2}{Q^2} \right) \frac{1}{r},$$

$$\tau^{11} = L(r) - q,$$

$$(1.18) \quad r^2 \tau^{22} = \tau^{11} + \left(\frac{\kappa^2}{Q^2} - \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} \right) (\Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2),$$

$$\tau^{33} = \tau^{11} + \left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} \right) \left(\Phi_1 + \frac{\kappa^2}{Q^2} \Phi_2 \right).$$

Z (1.18) wynika, że badane ciało nie posiada stanu naturalnego, nawet gdy $q = 0$. Naprężenia znikają tylko wtedy, gdy $\kappa = 1$ i jednocześnie $\lambda = 1$.

Całkowita siła osiowa N , którą przenosi rura oraz ciśnienie q są

$$(1.19) \quad N = 2\pi \int_b^a \tau^{33} r dr,$$

$$(1.20) \quad q = L(b) = - \int_b^a (\Phi_1 + \lambda^2 \Phi_2) \left(\frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} - \frac{\kappa^2}{Q^2} \right) \frac{dr}{r}.$$

2. Dodatkowe małe odkształcenia

Poddajemy ciało wstępnie odkształcone małemu dodatkowemu odkształceniu. Przechodzi ono w stan $\overset{*}{B}$. Pole małych dodatkowych przemieszczeń $\varepsilon_{\underline{w}}$ wywołuje dodatkowe naprężenia i odkształcenia. Przytoczymy liniowe części przyrostów wszystkich wielkości w oparciu o wzory podane w pracach [1] i [2], oznaczając je primami. Wprowadzamy dla kowariantnych współrzędnych wektora $\varepsilon_{\underline{w}}$ oznaczenia: $w_1 = u$, $w_2 = v$, $w_3 = w$, a dla ich pochodnych: $w_{1,1} = u_r$, $w_{1,2} = u_{\vartheta}$, ... itd. Otrzymamy

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g'_{11} &= -g'^{11} = 2u_r, & g'_{12} &= -r^2 g'^{12} = u_{\vartheta} + v_r - 2\frac{1}{r}v, \\ g'_{22} &= -r^4 g'^{22} = 2(v_{\vartheta} + ru), & g'_{13} &= -g'^{13} = u_z + w_r, \\ g'_{33} &= -g'^{33} = 2w_z, & g'_{23} &= -r^2 g'^{23} = v_z + w_{\vartheta}; \end{aligned}$$

$$(2.2) \quad \begin{aligned} I'_1 &= 2 \left[\frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} u_r + \frac{1}{r^2} \frac{\kappa^2}{Q^2} (v_{\vartheta} + ru) + \lambda^2 w_z \right], \\ I'_2 &= 2 \left[\frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} u_r + \frac{1}{r^2} \frac{Q^2}{\kappa^2} (v_{\vartheta} + ru) + \frac{1}{\lambda^2} w_z \right], \\ I'_3 &= -2 \left[u_r + \frac{1}{r^2} (v_{\vartheta} + ru) + w_z \right] = 0; \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \tau'^{11} &= 2u_r \left[A \frac{Q^4}{\kappa^2 \lambda^2} - B \left(\lambda^2 + \frac{\kappa^2}{Q^2} \right) + F \left(\frac{Q^4}{\kappa^2 \lambda^2} + \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^4} - 1 \right) - p \right] + \\ &+ 2\frac{1}{r^2} (v_{\vartheta} + ru) \left[A \frac{1}{\lambda^2} - B \left(\frac{Q^4}{\kappa^2} + \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} \right) + F \left(1 + \frac{\kappa^2}{\lambda^2 Q^2} - \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} \right) + \Phi_2 \frac{1}{\lambda^2} \right] + \\ &+ 2w_z \left[A \frac{Q^2}{\kappa^2} - B \left(\frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} + \frac{1}{\lambda^4} \right) + F \left(\frac{\lambda^2 Q^2}{\kappa^2} + 1 - \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} \right) + \Phi_2 \frac{Q^2}{\kappa^2} \right] + p', \\ r^2 \tau'^{22} &= 2u_r \left[A \frac{1}{\lambda^2} - B \left(\frac{\kappa^4 \lambda^4}{Q^4} + \frac{\kappa^2}{Q^2} \right) + F \left(1 + \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^4} - \frac{\kappa^4 \lambda^2}{Q^4} \right) + \Phi_2 \frac{1}{\lambda^2} \right] + \\ &+ 2\frac{1}{r^2} (v_{\vartheta} + ru) \left[A \frac{\kappa^4}{Q^4} - B \left(\lambda^2 + \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} \right) + F \left(\frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^4} + \frac{\kappa^2}{\lambda^2 Q^2} - 1 \right) - p \right] + \\ &+ 2w_z \left[A \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} - B \left(\frac{\kappa^2}{Q^2} + \frac{1}{\lambda^4} \right) + F \left(\frac{\kappa^2 \lambda^4}{Q^2} + 1 - \frac{\kappa^2}{\lambda^2 Q^2} \right) + \Phi_2 \frac{\lambda^2 \kappa^2}{Q^2} \right] + p', \\ \tau'^{33} &= 2u_r \left[A \frac{Q^2}{\kappa^2} - B \left(\lambda^2 + \frac{\kappa^4 \lambda^4}{Q^4} \right) + F \left(\frac{Q^4}{\kappa^4 \lambda^4} + 1 - \frac{\kappa^2 \lambda^4}{Q^2} \right) + \Phi_2 \frac{Q^2}{\kappa^2} \right] + \\ &+ 2\frac{1}{r^2} (v_{\vartheta} + ru) \left[A \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} - B \left(\lambda^2 + \frac{Q^4}{\kappa^4} \right) + F \left(1 + \frac{\kappa^4 \lambda^2}{Q^4} - \frac{Q^4 \lambda^2}{\kappa^2} \right) + \Phi_2 \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} \right] + \\ &+ 2w_z \left[A \lambda^4 - B \left(\frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} + \frac{\kappa^2}{Q^2} \right) + F \left(\frac{\lambda^2 Q^2}{\kappa^2} + \frac{\kappa^2 \lambda^4}{Q^2} \right) - p \right] + p', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r^2 \tau'^{12} &= - \left(\Phi_1 \frac{1}{\lambda^2} + p \right) \left(u_\vartheta + v_r - 2 \frac{1}{r} v \right), \\ \tau'^{13} &= - \left(\Phi_2 \frac{Q^2}{\kappa^2} + p \right) (u_z + w_r), \\ r^2 \tau'^{22} &= - \left(\Phi_2 \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} + p \right) (v_z + w_\vartheta), \end{aligned}$$

gdzie

$$A = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1^2}, \quad B = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_2^2}, \quad F = 2 \frac{\partial^2 W}{\partial I_1 \partial I_2},$$

przy czym W jest potencjałem sprężystości na jednostkę objętości ciała nieodkształconego.

Ponieważ niezmienniki odkształcenia I_k [por. (1.8)] są funkcjami zmiennej r , więc A, B, F, Φ_k są również funkcjami tylko zmiennej r . Obliczenia dla dowolnego materiału są skomplikowane. Przyjmujemy konkretną funkcję na potencjał sprężystości $W(I_k)$, co nam pozwoli uzyskać zamknięte rozwiązania. Ograniczamy zatem dalsze rozważania do tzw. materiału Mooneya, dla którego

$$(2.4) \quad W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3).$$

Wtedy $\Phi_1 = 2C_1$, $\Phi_2 = 2C_2$, $A = B = F = 0$, a związki (2.3) przechodzą w

$$\begin{aligned} \tau'^{11} &= -2pu_r + 4C_2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} (v_\vartheta + ru) + 4C_2 \frac{Q^2}{\kappa^2} w_z + p', \\ r^2 \tau'^{22} &= 4C_2 \frac{1}{\lambda^2} u_r - 2p \frac{1}{r^2} (v_\vartheta + ru) + 4C_2 \frac{\lambda^2 \kappa^2}{Q^2} w_z + p', \\ (2.5) \quad \tau'^{33} &= 4C_2 \frac{1}{\lambda^2} u_r + 4C_2 \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} \frac{1}{r^2} (v_\vartheta + ru) - 2pw_z + p', \\ r^2 \tau'^{12} &= - \left(2C_2 \frac{1}{\lambda^2} + p \right) \left(u_\vartheta + v_r - 2 \frac{1}{r} v \right), \\ \tau'^{13} &= - \left(2C_2 \frac{Q^2}{\kappa^2} + p \right) (u_z + w_r), \\ r^2 \tau'^{23} &= - \left(2C_2 \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} + p \right) (v_z + w_\vartheta). \end{aligned}$$

Tensor naprężenia całkowitego $\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}$ spełnia warunki równowagi

$$\nabla_i \tau'^{ij} + \Gamma_{rs}^j \tau'^{rs} + \Gamma_{rs}^s \tau'^{rj} = 0,$$

gdzie Γ_{ij}^s są przyrostami symboli Christoffela obliczonymi w pracy [3].

Podstawiamy (2.5), (1.17) oraz przyrosty Γ_{ij}^s do równań równowagi i otrzymujemy

$$4u_{rr} \left[C_1 \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} + C_2 \left(\frac{Q^2}{\kappa^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right] +$$

$$\begin{aligned}
(2.6) \quad & +2\frac{1}{r}u_r\left[C_1\left(\frac{4}{\kappa\lambda}-\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}-\frac{\kappa^2}{Q^2}\right)+C_2\left(2\frac{1}{\lambda^2}+4\frac{\lambda}{\kappa}-\frac{Q^2}{\kappa^2}-\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}\right)\right]- \\
& -2\frac{1}{r^2}u\left[C_1\left(\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}+\frac{\kappa^2}{Q^2}\right)+C_2\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}+2\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}\right)\right]+ \\
& +2\frac{1}{r^2}u_{\vartheta\vartheta}\frac{\kappa^2}{Q^2}(C_1+\lambda^2C_2)+2u_{zz}\lambda^2\left(C_1+\frac{\kappa^2}{Q^2}C_2\right)+ \\
& +2\frac{1}{r^2}v_{r\vartheta}\left[C_1\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}+C_2\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}+2\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]- \\
& -4\frac{1}{r^3}v_{\vartheta}\left[C_1\left(\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}+\frac{\kappa^2}{Q^2}\right)+C_2\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}+\frac{2}{\lambda^2}+\frac{\lambda^2\kappa^2}{Q^2}\right)\right]+ \\
& +2w_{rz}\left[C_1\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}+C_2\left(2\frac{Q^2}{\kappa^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]+ \\
& +4\frac{1}{r}w_zC_2\left(2\frac{\lambda}{\kappa}-\frac{Q^2}{\kappa^2}-\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}\right)+p'_r=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad & 2u_{r\vartheta}\left[C_1\frac{\kappa^2}{Q^2}+C_2\left(\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}+2\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]+ \\
& +2\frac{1}{r}u_{\vartheta}\left[C_1\left(2\frac{\kappa^2}{Q^2}+\frac{2}{\kappa\lambda}-\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}\right)+C_2\left(2\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}+2\frac{\lambda}{\kappa}+\frac{2}{\lambda^2}-\frac{Q^2}{\kappa^2}\right)\right]+ \\
& +2(C_1+\lambda^2C_2)\left[v_{rr}\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}-\frac{1}{r}v_r\left(3\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}-2\frac{1}{\kappa\lambda}\right)+4\frac{1}{r^2}v\left(\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}-\frac{1}{\kappa\lambda}\right)\right]+ \\
& +4\frac{1}{r^2}v_{\vartheta\vartheta}\left[C_1\frac{\kappa^2}{Q^2}+C_2\left(\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]+2v_{zz}\left(C_1\lambda^2+C_2\frac{Q^2}{\kappa^2}\right)+ \\
& +2w_{\vartheta z}\left[C_1\frac{\kappa^2}{Q^2}+C_2\left(2\frac{\lambda^2\kappa^2}{Q^2}+\frac{1}{\lambda^2}\right)\right]+p'_{\vartheta}=0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.8) \quad & 2u_{rz}\left[C_1\lambda^2+C_2\left(2\frac{Q^2}{\kappa^2}+\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}\right)\right]+ \\
& +2\frac{1}{r}u_z\left[C_1\left(\lambda^2+\frac{2}{\kappa\lambda}-\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}-\frac{\kappa^2}{Q^2}\right)+C_2\left(2\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}+2\frac{\lambda}{\kappa}-\frac{Q^2}{\kappa^2}\right)\right]+ \\
& +2\frac{1}{r}v_{z\vartheta}\left[C_1\lambda^2+C_2\left(2\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}+\frac{Q^2}{\kappa^2}\right)\right]+ \\
& +2w_{rr}\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}\left(C_1+\frac{\kappa^2}{Q^2}C_2\right)-2\frac{1}{r}w_r\left[C_1\left(\frac{Q^2}{\kappa^2\lambda^2}+\frac{2}{\kappa\lambda}\right)+2C_2\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}-\frac{\lambda}{\kappa}\right)\right]+ \\
& +2\frac{1}{r^2}w_{\vartheta\vartheta}\left(C_1\frac{\kappa^2}{Q^2}+C_2\frac{1}{\lambda^2}\right)+w_{zz}\left[C_1\lambda^2+C_2\left(\frac{Q^2}{\kappa^2}+\frac{\kappa^2\lambda^2}{Q^2}\right)\right]+p'_z=0
\end{aligned}$$

Równania (2.6)–(2.8) razem z (2.2)₃ tworzą układ czterech równań różniczkowych na funkcje u , v , w , p' stanowiąc podstawę naszych dalszych rozważań.

3. Sztywność rury wstępnie sprężonej. Dodatkowe małe ciśnienie

Naturalnym jest przypuszczenie, że wstępne sprężenie wpływa na własności sprężyste rury i zmienia jej sztywność. W celu zbadania tego zjawiska należy wyprowadzić wzory na siły N^i , które przenosi ciało (pole małych przemieszczeń εw) i porównać je z odpowiednimi siłami dla rury niesprężonej, ($\kappa = 1$). Podejście takie jednak prowadziłoby do zbędnych skomplikowanych obliczeń nie dając ilościowej oceny przy najważniejszych technicznych obciążeniach. Badamy zatem wpływ wstępnego sprężenia na sztywność rury przy konkretnym obciążeniu — małym ciśnieniu.

Nałożymy na opisaną wstępnie sprężoną rurę B pole małych dodatkowych przemieszczeń, które odpowiadać będzie równomiernemu ciśnieniu zewnętrznemu. Kowariantne współrzędne wektora dodatkowego przemieszczenia są

$$(3.1) \quad u = ku(r), \quad v = w = 0,$$

gdzie k jest stałą, a funkcję $u(r)$ wyznaczamy z równania (2.2)₃. Mamy

$$(3.2) \quad u(r) = \frac{k}{r}.$$

Podstawiamy (3.2) do (2.3) i otrzymujemy

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \tau'^{11} &= 2kp \frac{1}{r^2} + 4kC_2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} + p', \\ r^2 \tau'^{22} &= -4kC_2 \frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} - 2kp \frac{1}{r^2} + p', \\ \tau'^{33} &= -4kC_1 \frac{Q^2}{\kappa^2} \frac{1}{r^2} + 4kC_2 \frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} \frac{1}{r^2} + p', \\ \tau'^{12} &= \tau'^{23} = \tau'^{32} = 0. \end{aligned}$$

Funkcję p' określimy z równań równowagi. Podstawiamy (3.2) do (2.6)–(2.8). Ostatnie dwa równania spełnione są tożsamościowo. Z pierwszego równania otrzymujemy

$$p' = -8k(C_1 + \lambda^2 C_2) \left(\frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} - \frac{1}{\kappa \lambda} \right),$$

a po scałkowaniu, korzystając z (1.3)

$$(3.4) \quad p' = 2k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{\kappa^2 \lambda^2} (1 - \kappa \lambda \mu^2) \dot{a}^2 \frac{1}{r^4} + C,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Stałą tę określimy z warunku brzegowego

$$\tau'^{11} = 0, \quad \text{dla} \quad r = b;$$

skąd wynika

$$(3.6) \quad \begin{aligned} C &= 2k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{\kappa^2 \lambda^2} \left[2 \frac{1}{\nu^2 b^2} - (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{b^2} \right], \\ p' &= 2k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{\kappa^2 \lambda^2} \left[(1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{r^2} - (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{b^4} + 2 \frac{1}{b^2 \nu^2} \right]. \end{aligned}$$

Stan naprężenia rury jest określony przez $\tau^{ij} + \varepsilon \tau'^{ij}$. Podstawiając (3.6) do (3.3) otrzymujemy ostatecznie dla przyrostów naprężenia

$$\begin{aligned} \tau'^{11} &= 2k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{\kappa^2 \lambda^2} \left[2 \frac{1}{b^2 \nu^2} - 2 \frac{1}{r^2} Q^2 + (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{r^4} - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{b^4} \right] + \frac{1}{r^2} L(r), \\ (3.7) \quad r^2 \tau'^{22} &= 2k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{\kappa^2 \lambda^2} \left[2 \frac{1}{b^2 \nu^2} - 2 \frac{1}{r^2} Q^2 + (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{r^4} - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{b^4} \right] + \frac{1}{r^2} L(r), \\ \tau'^{33} &= 2k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{\kappa^2 \lambda^2} \left[2 \frac{1}{b^2 \nu^2} + (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{r^4} - (1 - \kappa \lambda \mu^2) \frac{\dot{a}^2}{b^4} \right] + \\ &\quad + 4kC_2 \left(\frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} - \frac{Q^2}{\kappa^2} \right). \end{aligned}$$

Najistotniejsze znaczenie dla dalszych rozważań ma składowa τ'^{11} na brzegu $r = a$. Podstawiając $r = a$ do (3.7)₁ i uwzględniając, że $L(a) = 0$, otrzymujemy

$$(3.8) \quad \tau'^{11} = 2k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{\lambda^2 \kappa^2 \mu^2 a^2} \left\{ \delta \left(\frac{\mu}{\nu} \right)^4 [2 + (\kappa \mu^2 \lambda - 1) \delta^2] - \right. \\ \left. - (1 + \kappa \lambda \mu^2) \right\}, \quad \text{dla } r = a.$$

Zależność (3.8) zawiera wszystkie parametry wstępnej deformacji, dla których, oprócz związków (1.5), mamy zależności

$$(3.9) \quad 2(C_1 + \lambda^2 C_2) \left\{ \frac{1}{2\kappa^2 \lambda^2 \mu^2} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\nu} \right)^2 \right] + \frac{1}{\kappa \lambda} \ln \delta - \frac{\kappa}{\lambda} \ln \delta \right\} = 0,$$

którą wyprowadziliśmy z (1.20) po scałkowaniu, przekształceniu i podstawieniu $q = 0$.

Podstawiamy do (1.19) $N = 0$ oraz (1.18) i otrzymujemy

$$(3.10) \quad 2\pi \int_b^a L(r) r dr + 4\pi C_1 \int_b^a \left(\lambda^2 - \frac{Q^2}{\kappa^2 \lambda^2} \right) r dr + 2\pi C_2 \int_b^a \left(\frac{\kappa^2 \lambda^2}{Q^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right) r dr = 0.$$

W oparciu o (1.5), (3.9) i (3.10) zadając jeden z parametrów deformacji oraz względną grubość δ można wyznaczyć pozostałe.

Wprowadzamy teraz pojęcie względnej sztywności rury wstępnie sprężonej na ściskanie promieniowe η_c . Jest nią stosunek naprężenia τ'^{11} (3.8) do tego samego naprężenia $\tau'_{\kappa=1}^{11}$ dla rury naturalnej o wymiarach a i b ($\lambda = 1$, $\mu = 1$). Mamy

$$(3.11) \quad \tau'_{\kappa=1}^{11} = 4k(C_1 + \lambda^2 C_2) \frac{1}{a^2} (\delta^2 - 1),$$

a z (3.8) i (3.11), stosując (1.5) zgodnie z definicją, otrzymujemy

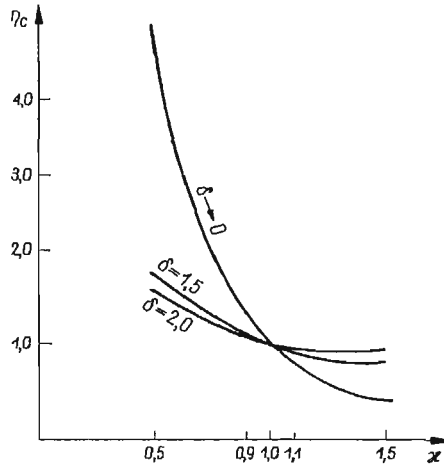
$$(3.12) \quad \eta_c = \frac{1}{2\kappa^2\mu^2\lambda^2} \left\{ \delta \frac{\kappa^2\lambda^2\mu^4}{[1-(1-\kappa\lambda\mu^2)\delta^2]^2} [2-(1-\kappa\lambda\mu^2)\delta^2] - (1+\kappa\lambda\mu^2) \right\} / \left[\delta^2 \frac{\kappa\lambda\mu^2}{1-(1-\kappa\lambda\mu^2)\delta^2} - 1 \right].$$

Nie zważając ogólności rozważań przyjmujemy $\lambda = 1$. Dla różnych κ i δ określamy μ z równania (3.9), które po podstawieniu λ i wykorzystaniu (1.5) przyjmuje postać

$$(3.13) \quad \frac{1}{\mu^2} - \frac{\kappa}{1-(1-\kappa\mu^2)\delta^2} - \kappa \ln \left[\delta^2 \frac{\kappa\mu^2}{1-(1-\kappa\mu^2)\delta^2} \right] + \kappa^3 \ln \delta^2 = 0;$$

wynika stąd nierówność

$$(3.14) \quad \mu^2 > \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\delta^2} \right).$$



Rys. 1

Parametr deformacji κ jest jedynym niezależnym parametrem. Rezultaty obliczeń są podane w tabl. 1 i na rys. 1, przy czym w granicznym przypadku $\delta \rightarrow 1$ sztywność wynosi

$$(3.15) \quad \lim_{\delta \rightarrow 1} \eta_c = \mu^2 / \kappa.$$

Tablica 1

κ	μ^2	η_c	δ	η_c	δ	η_c
		$\delta = 1,5$		$\delta = 2$		$\delta \rightarrow 1$
0,5	2,2	1,77	1,470	1,59	1,772	4,4
0,9	1,2	1,152	1,476	1,055	1,807	1,33
1,0	1,0	1,000	1,500	1,000	2,000	1,00
1,1	0,9	0,926	1,507	0,935	2,030	0,82
1,5	0,6	0,796	1,619	0,925	2,449	0,40

Funkcja (3.12) jest funkcją malejącą. Rura wstępnie sprężona jest sztywniejsza dla $\kappa < 1$, co odpowiada $\varphi < 0$ (dodanie materiału), natomiast dla $\kappa > 1$, $\varphi > 0$ (usunięcie materiału), sztywność względna jest mniejsza od jedności.

Jeśli zadana jest nie masa rury, a rozmiary rury wyjściowej \mathring{B} , to możemy podobnie jak w (3.12), zdefiniować względną sztywność $\mathring{\eta}_c$ w stosunku do rury niesprężonej o grubości $\mathring{\delta}$. Sztywność taka wynosi

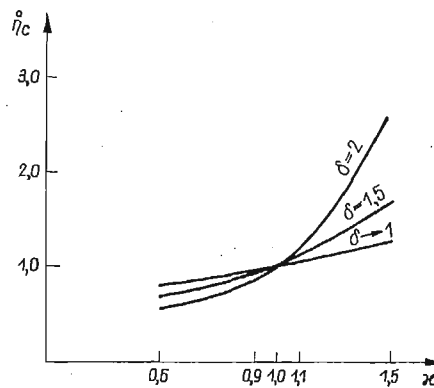
$$(3.16) \quad \mathring{\eta}_c = \frac{1}{2\kappa^2\mu^4} \frac{1}{\mathring{\delta}-1} \left\{ \mathring{\delta} \kappa^2 \lambda^2 \mu^4 \frac{2-(1-\kappa\mu^2)\mathring{\delta}^2}{[1-(1-\kappa\mu^2)\mathring{\delta}^2]^2} - (1+\kappa\mu^2) \right\},$$

i w granicznym przypadku

$$(3.17) \quad \mathring{\eta}_c \Big|_{\mathring{\delta} \rightarrow 1} = \frac{1}{\kappa^3 \mu^6}$$

Tablica 2

μ^2			$\mathring{\eta}_c$		
	κ	$\mathring{\delta}$	1,0	1,5	2,0
2,2	0,5		0,750	0,764	0,560
1,2	0,9		0,794	0,730	0,600
1,0	1,0		1,000	1,000	1,000
0,9	1,1		1,030	1,048	1,070
0,6	1,5		1,240	1,680	2,580



Rys. 2

Rezultaty obliczeń dla $\lambda = 1$, otrzymane na podstawie (3.13), (3.16) i (3.17), podane są w tabl. 2 i na rys. 2. Wnioskujemy, że każda rura wstępnie sprężona, powstała z rury o względnej grubości $\mathring{\delta}$ jest sztywniejsza na małe ciśnienie dla $\kappa > 1$ i mniej sztywna dla $\kappa < 1$.

Literatura cytowana w tekście

1. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, R. T. SHIELD, *General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations*, Proc. Roy. Soc., A 211 (1952).
2. A. E. GREEN, W. ZERNA, *Theoretical Elasticity*, Oxford 1954.
3. E. ZŁATANOWA, Z. WESOŁOWSKI, *Stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego*, Rozpr. Inżyn., 2, 18 (1970).

Резюме

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЙ КОНЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ЖЕСТКОСТЬ ТРУБЫ

Толстостенная труба подвергается предварительной деформации путем добавления или вырезания клина с произвольным углом раствора и последующего восстановления связности материала. При таком состоянии труба подвергается малому равномерному давлению. Исследуется влияние предварительной деформации на упругие свойства трубы. Для труб с различными толщинами стенок даются формулы и графики зависимости жесткости от параметров предварительной деформации.

Summary

INFLUENCE OF FINITE INITIAL STRAINS ON THE RIGIDITY OF TUBE

A thick-walled tube is initially stressed by cutting out (or inserting) of a wedge-shaped inclusion with an arbitrary vertex angle: the edges of the cut are welded together. The tube is then subject to a small uniform compression. The influence of the initial stresses on the elastic properties of the tube is investigated; the corresponding formulae and graphs are given.

WYŻSZY INSTYTUT MASZYNOWO-ELEKTRYCZNO-TECHNICZNY
SOFIA, BULGARIA

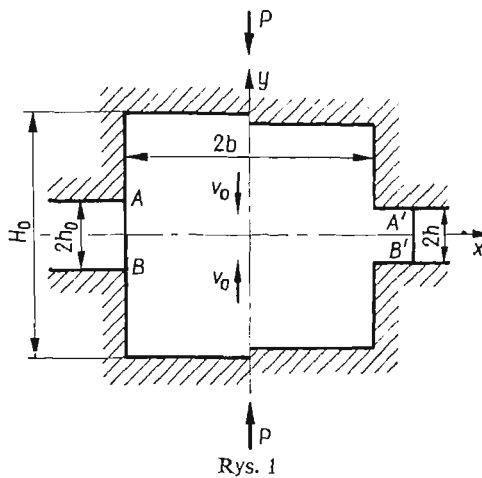
Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lipca 1970 r.

O MECHANICE PROCESU KUCIA W MATRYCY

JERZY BIAŁKIEWICZ (KRAKÓW), WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Teoretycznej analizie mechaniki odkształcenia metalu, poddanego kuciu w zamkniętej matrycy, poświęcono szereg prac. Mimo to problem ten nie jest w pełni opracowany. Istniejące publikacje dotyczą przeważnie najprostszego przypadku przedstawionego schematycznie na rys. 1. Po jego lewej stronie pokazano początek procesu, gdy blok materiału



Rys. 1

umieszczony jest między dwiema częściami matrycy, których powierzchnie tworzą szczelinę o początkowej szerokości $2h_0$. Proces kucia następuje, gdy obie połowki matrycy zbliżają się do siebie z prędkościami v_0 . Po prawej stronie rysunku przedstawiono sytuację w wybranej chwili procesu. Szczelina uległa zmniejszeniu do szerokości $2h$ i została częściowo wypełniona wytłoczonym z matrycy materiałem, którego krawędź tworzy obecnie odcinek $A'B'$.

Większe znaczenie praktyczne ma przypadek osiowej symetrii, kiedy wycięcia w obu połówkach matrycy tworzą powierzchnie obrotowe. Znacznie lepiej jest jednak opracowany teoretycznie przypadek płaskiego stanu odkształcenia. Stan taki realizuje się w przybliżeniu, jeżeli wycięcia w matrycy mają kształt wąskich prostokątów. Wszystkie cytowane rozwiązania teoretyczne oraz przedstawione dalej rozwiązania własne utrzymano przy założeniu materiału sztywno-plastycznego bez wzmocnienia.

Pewien typ rozwiązania dla płaskiego stanu odkształcenia podano w pracy [1]. Jednakże wprowadzone tam założenia powodują, że otrzymana kinematyka znacznie odbiega od rzeczywistości. Pierwszym założeniem było przyjęcie, że swobodna krawędź $A'B'$ materiału w szczelinie jest prostoliniowa, co jest niezgodne z obserwacjami eksperymentalnymi. Drugie, bardziej drastyczne założenie, dotyczyło obrazu deformacji wewnątrz bloku. Założono mianowicie, że deformacja jest taka, jak w przypadku ściskania materiału między dwiema płaskimi szorstkimi płytami, a więc zgodna z klasycznym rozwiązaniem PRANDTLA [5]. Można wykazać, że taki schemat jest kinematycznie dopuszczalny również w przypadku kucia, a więc siła wynikająca z rozwiązania PRANDTLA może być przyjęta jako górna ocena siły oporu przy kuciu w matrycy. Siatki linii poślizgu dla różnych przypadków kucia pokazał SZOFMAN [4] również wprowadzając założenie o prostoliniowości krawędzi materiału wtłoczonego w szczelinę. Analizę ograniczono do wyznaczenia sił; pola prędkości nie wyznaczono. Budowę planu prędkości opisano w książce [3], przy tym samym założeniu prostoliniowości krawędzi $A'B'$ w ciągu całego procesu. Nieco odmienny proces, w którym wytłoczony z matrycy materiał nie jest ściskany w szczelinie dzięki odpowiedniemu nachyleniu jej ścian, zbadano w pracy [2].

Poniżej omówiono szczegółowo rozwiązanie bez żadnych założeń upraszczających dotyczących kinematyki. Prześlędzono proces kucia od chwili początkowej do pewnego stopnia zaawansowania wykazując, że swobodna krawędź $A'B'$ ulega zakrzywieniu.

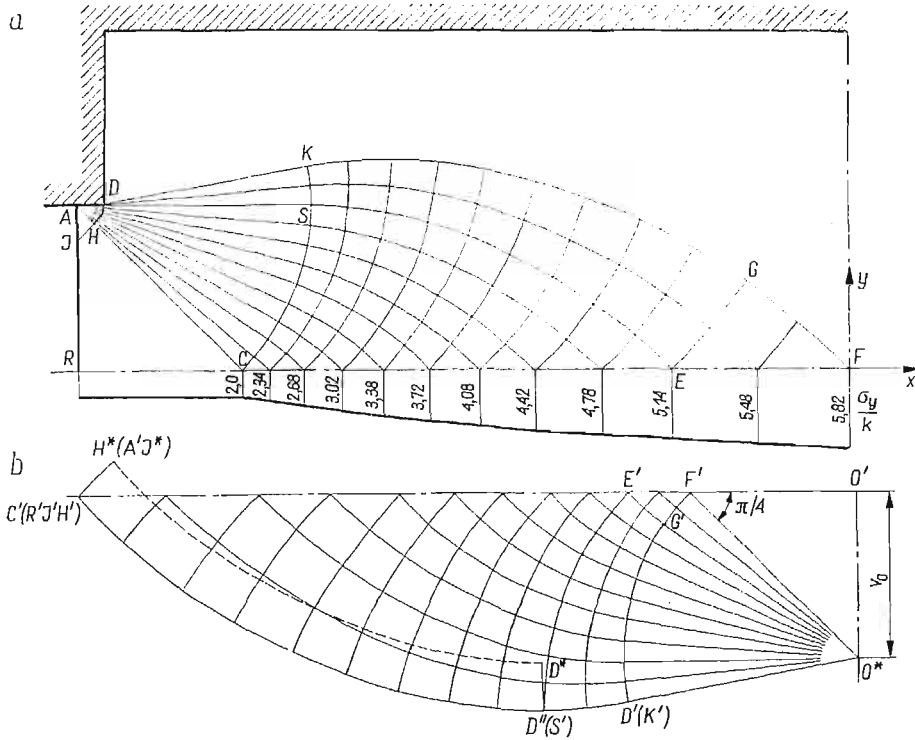
2. Płaski stan odkształcenia

Przyjmujemy, że między ściankami tworzącymi szczelinę a znajdującym się w niej materiałem powstaje maksymalna teoretycznie możliwa siła tarcia, równa granicy plastyczności materiału na ścinanie k . Zbadamy szczególny przypadek, kiedy na początku procesu $b/h_0 = 4,2$, doprowadzając analizę do chwili, gdy $b/h = 5,4$.

Proces jest niestacjonarny, wobec czego analizę odkształcenia przeprowadzimy dzieląc drogę każdej z połówek matrycy równą $h_0 - h$ na pięć równych skoków $\Delta h = 0,046 h_0$ i dla każdej z kolejnych pozycji matrycy wykonamy siatkę linii poślizgu oraz hodograf. Z hodografu odczytujemy chwilowe prędkości płynięcia materiału, a następnie zakładamy, że w czasie każdego skoku prędkości są stałe i równe prędkościom na początku skoku. Mnożąc te prędkości przez czas $\Delta t = \Delta h/v_0$ trwania skoku możemy wyznaczyć przemieszczenia dowolnego punktu, a w szczególności przemieszczenie i nową pozycję swobodnej krawędzi AB . Nowa pozycja krawędzi stanowi punkt wyjścia dla zbudowania siatki linii poślizgu i hodografu dla następnego skoku. Tę procedurę można powtarzać, aż do uzyskaniażądanego położenia matrycy. Ze względu na symetrię ograniczamy się do rozpatrzenia jednej ćwiartki całego układu.

Nie podajemy siatki linii poślizgu i hodografu dla położenia początkowego pokazanego po lewej stronie rys. 1, gdy szczelina ma wymiar h_0 . Rozwiązanie takie można znaleźć w pracy [3]. Wynika z niego, że w czasie pierwszego skoku prędkości punktów krawędzi AB są jednakowe, a zatem należy przyjąć, że pod koniec skoku jest ona prostoliniowa. Sytuację na początku drugiego skoku pokazuje rys. 2a. W ciągu pierwszego skoku swobodna krawędź przebyła drogę równą odcinkowi DA zajmując położenie końcowe AR :

Siatkę linii poślizgu dla tego chwilowego położenia zaznaczono na rysunku. W trójkącie ACR panuje stan zwykłego ściskania naprężeniami $\sigma_y = 2k$. Z punktu osobliwego A wychodzą prostoliniowe linie poślizgu tworzące wachlarz ACS . Skrajna linia wachlarza AS jest na odcinku AD styczna do ściany matrycy, co jest zgodne z założeniem maksymalnego tarcia na linii kontaktu. W obszarze SCE mamy elementarną siatkę linii poślizgu otrzymaną na podstawie danych na łuku SC i warunku, aby linie poślizgu przecinały oś

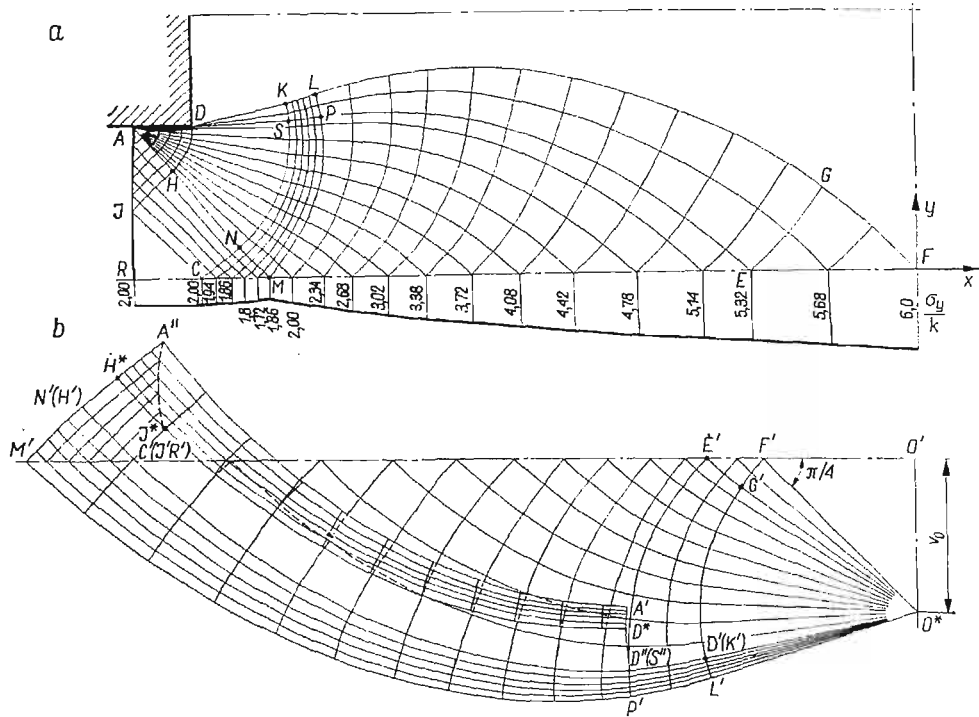


Rys. 2

symetrii FR pod kątami $\pm\pi/4$. Z osobliwego punktu D wychodzą prostoliniowe linie poślizgu tworzące wachlarz SDK , przy czym położenie skrajnej linii DK wynika z warunku, aby jej przedłużenie KGF przechodziło przez geometryczny środek układu F .

Plan prędkości (rys. 2b) budujemy odkładając najpierw z bieguna O' wektor prędkości ruchu matrycy v_0 . Z warunku ciągłości przemieszczeń w geometrycznym środku układu otrzymujemy prędkość płynięcia w obszarze plastycznym w punkcie F , reprezentowaną przez wektor $\vec{O'F'}$. Prędkości w polu $FGKC$ znajdujemy przez zbudowanie na hodografie siatki $F'G'K'C'$ ortogonalnej do siatki linii poślizgu. Prędkości w punkcie osobliwym D przedstawione są przez wektory łączące biegun O' z punktami odcinka $D'D''$. Wynika stąd, że linia poślizgu DHJ jest linią nieciągłości prędkości, ponieważ prędkość na odcinku AD musi mieć składową pionową równą prędkości ruchu matrycy v_0 . Prędkość po lewej stronie punktu D jest na hodografie reprezentowana przez punkt D^* . Odcinek $D'D^*$ przedstawia skok prędkości wzdłuż DHJ . Skok ten musi zachować stałą wielkość.

Prędkości punktów leżących po lewej stronie linii nieciągłości DHJ będą więc reprezentowane przez linię D^*H^* odległą o odcinek równy $D''D^*$ od linii $D''C'$. Obszar $CRJH$ przesuwa się w lewo jako sztywna całość z prędkością równą prędkości punktu C , a trójkąt AHJ porusza się również jak sztywna całość z prędkością odwzorowaną na hodografie przez punkt H^* . Po upływie przyrostu czasu Δt , odpowiadającego przejściu do nowego etapu procesu, tworzy się uskok w swobodnej krawędzi AR . Pojawienie się uskoku wynika z wprowadzonego podziału procesu na skończone skoki. Gdybyśmy rozpatrywali nieskończenie małe skoki, to otrzymalibyśmy regularne zakrzywienie kra-



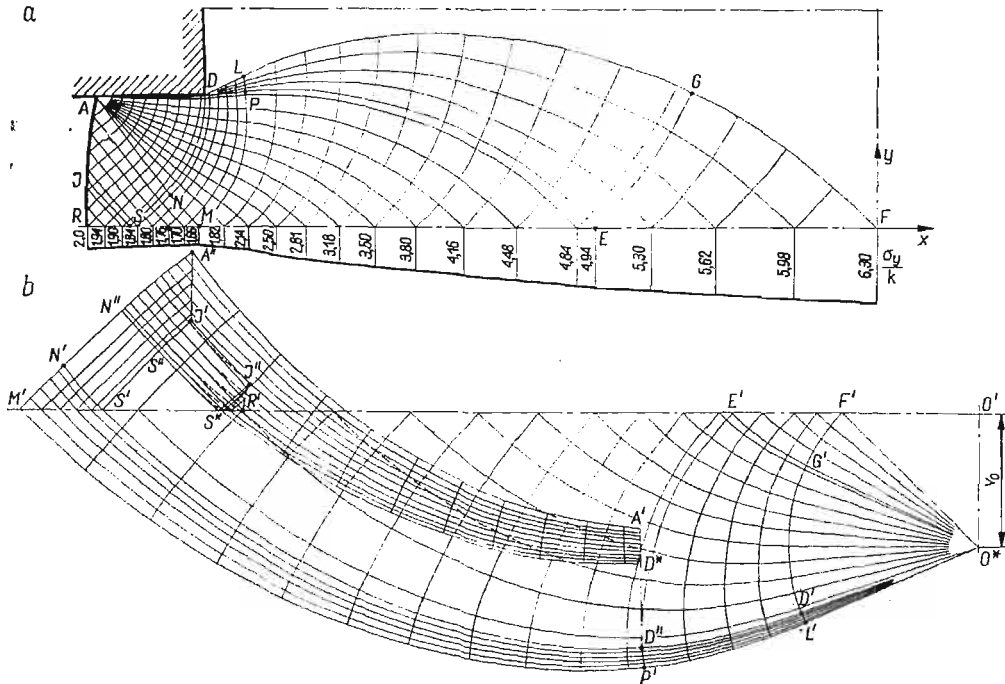
Rys. 3

wędzi w jej górnej części. Z tego względu, przed wyznaczeniem siatki linii poślizgu dla następnego etapu zastąpiono uskok w krawędzi regularnym zakrzywieniem utworzonym przez łuk koła, przechodzący przez nowe położenie punktu A i styczne do prostoliniowego dolnego odcinka krawędzi w jej nowym położeniu. Punkt styczności obrano w taki sposób, aby zachować warunek stałej objętości materiału.

Rysunek 3 przedstawia rozwiązanie dla następnego etapu. Budowę siatki linii poślizgu (rys. 3a) rozpoczynamy od swobodnej krawędzi AJR . Odcinek AJ jest łukiem koła, a JR jest odcinkiem prostej. Linie poślizgu w trójkącie krzywoliniowym AJH są zatem spiralami logarytmicznymi. Z punktu A wychodzą linie tworzące wachlarz ADH , przy czym w odróżnieniu od siatki z rys. 2a promienie wachlarza są teraz krzywoliniowe. Ponad skrajnym promieniem AD pozostaje obszar materiału przylegającego sztywno do matrycy.

Warunki na liniach poślizgu JC i JHD oraz warunek na osi symetrii RF określają jednoznacznie siatkę linii poślizgu w obszarze $DSE CJ$. Z punktu D wychodzą prostoliniowe linie poślizgu, tworzące wachlarz SDK , przy czym położenie skrajnego promienia wachlarza DK określa warunek, aby jego przedłużenie KLF przechodziło przez geometryczny środek układu F .

Plan prędkości przedstawia rys. 3b. Podobnie jak poprzednio, prędkości na linii nieciągłości $FGLKD$ odwzorowane są przez punkty łuku koła $F'L'D'$. Każdy punkt odcinka $L'D'$ przedstawia prędkości dwóch różnych punktów linii nieciągłości mających taki sam kierunek stycznej. Wynika to ze zmiany znaku krzywizny linii poślizgu na odcinku LK . Podobnie, każdy punkt obszaru $D'L'M'C'$ na hodografie odwzorowuje prędkości dwóch różnych punktów, jednego leżącego w obszarze FLM i drugiego położonego w obszarze $KLMN$ na płaszczyźnie fizycznej. Również obszar $M'N'C'$ na hodografie odwzorowuje jednocześnie prędkości punktów należących do obszaru MNC i części obszaru $KLMN$. Linia DHJ jest linią nieciągłości prędkości. Wynika to stąd, że prędkość płynięcia w punkcie D po lewej stronie linii poślizgu DH musi być zgodna z ruchem matrycy. Prędkość w punkcie D po prawej stronie linii DH jest odwzorowana na hodografie przez punkt $D''(S'')$, a prędkość po jego lewej stronie odwzorowuje punkt D^* otrzymany przez przecięcie prostej $D''D^*$ poprowadzonej prostopadłe do linii poślizgu DS i prostej O^*D^*



Rys. 4

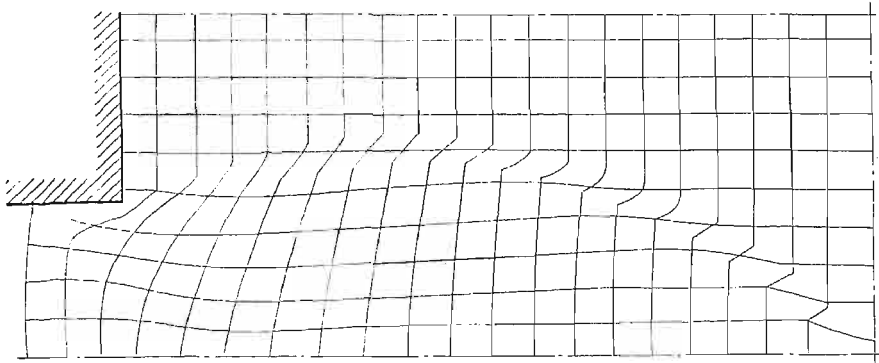
poprowadzonej równoległe do DS . Tak wyznaczony odcinek $D''D^*$ jest skokiem prędkości. Prędkości po lewej stronie linii nieciągłości DHJ odwzorowuje łuk $D^*H^*J^*$. Zakrzywiona linia poślizgu DA jest również linią nieciągłości prędkości. Obszar powyżej

niej przesuwa się jak sztywna całość połączona z matrycą. Prędkości punktów po drugiej stronie AD odwzorowuje odcinek łuku koła $A'D^*$ zatoczony z punktu O^* . Obszarowi $ADHJ$ odpowiada na hodografie obszar $A'D^*H^*A''J^*$, a prędkości punktów swobodnego brzegu AJ reprezentuje odcinek $A''J^*$. W krawędzi AJR tworzy się zatem znowu skok w punkcie J , który wyrównujemy łukiem koła, jak w poprzednim etapie.

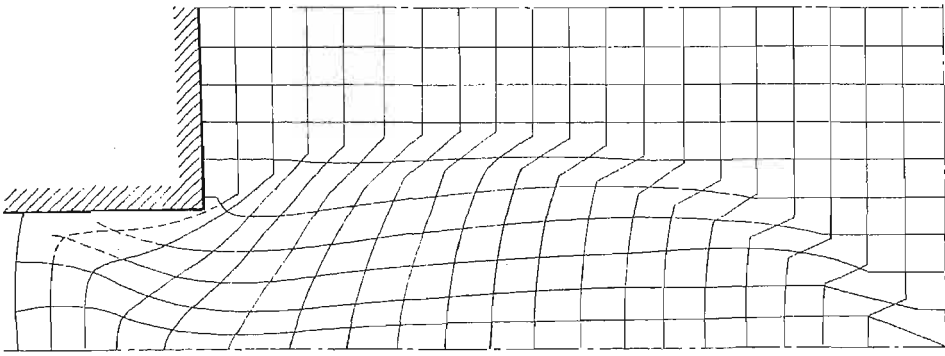
Nie podajemy siatki linii poślizgu i hodografu dla początku następnego czwartego etapu, ponieważ są one bardzo zbliżone do siatek z rys. 3. Linia nieciągłości DHJ również teraz nie przechodzi na drugą stronę osi symetrii, pozostawiając prostoliniowy odcinek JR swobodnej krawędzi. Jest on jednak teraz znacznie krótszy, niż na rys. 3.

Na rys. 4 przedstawiono sytuację na początku piątego etapu. Siatka linii poślizgu jest nieco odmienna od siatki z rys. 3. Linia nieciągłości prędkości DNS przechodzi na drugą stronę osi symetrii. Odcinek SJ jest przedłużeniem symetrycznie położonej linii nieciągłości w dowolnej części materiału. Prędkości punktów swobodnej krawędzi są odwzorowane na hodografie przez dwa odcinki $A''J'$ i $J''R'$. Odcinek $J'J''$ przedstawia nieciągłości prędkości w punkcie J .

Posługując się wyżej omówionymi hodografami wyznaczono teoretyczną deformację początkowo kwadratowej siatki w materiale. Deformację wyznaczono kolejno skokami. Rysunek 5 przedstawia obraz odkształconej siatki pod koniec trzeciego, a rys. 6 pod koniec piątego etapu.



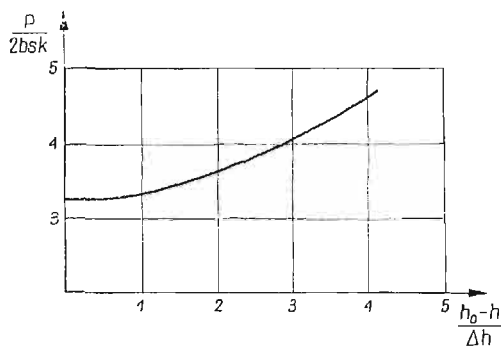
Rys. 5



Rys. 6

Na rysunkach 2, 3 i 4 pokazano rozkład naprężeń wzdłuż poziomej osi symetrii. Całkując te naprężenia można obliczyć wielkość koniecznej siły nacisku w poszczególnych stadiach procesu kucia. Tak obliczoną zależność siły od położenia matrycy przedstawiono na rys. 7. Na osi pionowej odłożono bezwymiarową wielkość siły $P/2bsk$, gdzie s oznacza długość matrycy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku.

Pozostaje jeszcze do wyjaśnienia sprawa możliwości zbudowania przedłużenia pola naprężeń w obszary sztywne na zewnątrz obszaru odkształceń plastycznych. Jeżeli ścianki wewnątrz matrycy są dostatecznie szorstkie, to przedłużenie takie można bez trudu zbu-



Rys. 7

dować przez założenie stanu plastycznego w obszarze sztywnym i rozwiązanie zagadnienia charakterystycznego, wychodząc z danych na skrajnych charakterystykach obszaru płynięcia, oraz stosując procedurę ALEXANDRA [6], podaną przez niego w zastosowaniu do procesu wyciskania.

Dodatności dysypacji mocy w pracy nie sprawdzano, ale sądząc z charakteru rozkładu prędkości i formy odkształconej siatki można oczekiwać, że warunek ten jest wszędzie spełniony.

3. Uwagi końcowe

Przedstawiony przykład pokazuje, że na podstawie teorii płaskiego płynięcia ośrodka idealnie plastycznego można zbudować również wiele innych praktycznych przypadków kucia w głębokich i płytkich matrycach. W tym ostatnim przypadku część konturu dna matrycy może być obwiednią linii poślizgu, jeżeli przyjąć, że dno jest doskonale szorstkie. Omówione w punkcie 1 znane rozwiązania dotyczą niemal wyłącznie szacowania sił potrzebnych do kucia, co ma istotne znaczenie dla technologa. Jednakże z punktu widzenia użytkownika odkutego elementu podstawowe znaczenie mają informacje o wewnętrznej strukturze elementu, a więc niejednorodności odkształcenia plastycznego. Takie informacje można uzyskać przez zbadanie kinematyki ruchu cząstek materiału podczas kucia. Jest to, jak widać z przykładu, związane z dużym nakładem pracy, ale może przyczynić się do lepszego zrozumienia przebiegu kucia i odpowiedniego planowania operacji kuźniczych.

Literatura cytowana w tekście

1. S. KOBAYASHI and E. G. THOMSEN, *Approximate solutions to a problem of press forging*, Trans. ASME, series B, J. Eng. Ind., 81 (1959), 217-227.
2. W. SZCZEPIŃSKI, *Doświadczalna weryfikacja niestacjonarnych procesów plastycznego płynięcia*, Mech. Teoret. Stos., 5, (1967), 309-323.
3. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967, Rozdział VII „Niektóre procesy niestacjonarne w płaskim stanie odkształcenia”.
4. Л. А. ШОФМАН, *Применение жестко-пластической схемы для расчета формоизменения и сопротивления деформируемого тела*, Глава 7 в книге: „Основы теории обработки металлов давлением”, Машгиз, Москва 1959.
5. L. PRANDTL, *Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht*, Zeits. Angew. Math. Mech., 3 (1923).
6. J. M. ALEXANDER, *On complete solutions for frictionless extrusion in plane strain*, Q, Appl. Math., 19 (1961), 31-37.

Резюме

О МЕХАНИКЕ КОВКИ В МАТРИЦЕ

В работе изложено решение задачи о типичном нестационарном процессе ковки с истечением материала через щели в условиях плоского деформированного состояния. Решение охватывает пять последовательных этапов деформирования. Для каждого из них построено поле линий скольжения и годограф. Представлена также модель теоретической деформации первоначально квадратной сетки.

Summary

ON THE MECHANICS OF THE FORGING PROCESS IN DIES

Solution of a typical forging process with unsteady outflow of the material through a slot is presented under plane strain conditions. Five consecutive stages of the deformation process are considered. For each stage the slip-line field and the hodograph have been constructed. The theoretical deformation pattern of an initially square grid is also presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lipca 1970 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA III KWARTAŁ 1970 R.

W omawianym okresie odbyły się dwa zebrania naukowe:

Lp.	Data, prelegent	Temat	Liczba	
			uczestników	dyskutan- tów
1.	Oddział w Gliwicach 24.09.70 Prof. dr Z. Osiński	Problematyka drgań nie- liniowych	43	10
2.	Oddział w Łodzi 24.09.70 Prof. dr B. Konorski	Perspektywy rozwoju dy- daktyki	26	12

Działalność organizacyjna sprowadziła się do zebrań Zarządów Oddziałów w: Bydgoszczy, Gliwicach i Wrocławiu.

W okresie sprawozdawczym odbyły się uroczystości związane z wręczeniem dyplomów Członków Honorowych PTMTS: prof. drowi Wacławowi OLSZAKOWI z Warszawy, prof. drowi Edmundowi KARAŚKIEWICZOWI z Poznania, prof. drowi Jerzemu MUTERMILCHOWI z Warszawy.

V OGÓLNOPOLSKA KONFERENCJA MECHANIKI NIELINIOWEJ

W dniach od 22–24 października 1970 r. odbyła się w Poznaniu V Ogólnopolska Konferencja Mechaniki Nieliniowej. Na konferencji wygłoszono 50 referatów na 55 zgłoszonych, a liczba uczestników wynosiła 80 osób.

Problematyka konferencji dotyczyła:

1. Drgań nieliniowych układów dyskretnych i ciągłych
2. Stateczności ruchu
3. Metod optymalizacji
4. Układów stochastycznych
5. Modelowania maszyn i procesów dynamicznych układami dyskretnymi

Konferencję można scharakteryzować następująco:

— nastąpił wzrost prac doświadczalnych. Jest to objaw pożądany, gdyż w ten sposób uzyskuje się potwierdzenie wyników teoretycznych względnie ich korekcje;

— pewne zagadnienia z dynamiki maszyn, urządzeń i konstrukcji zostały kompleksowo ujęte, co dało pewniejszy obraz zachodzących zjawisk;

— wiele prac dotyczyło losowego ujęcia przebiegów dynamicznych, jednego z nowszych zagadnień mechaniki;

— inną grupę stanowiły zagadnienia układów wibrouderzeniowych, których wyniki mają znaczenie dla techniki;

— daje się zauważyć także postęp w zastosowaniu maszyn analogowych i cyfrowych;

— z dyskusji wynikało, że należałoby rozwijać modelowanie procesów mechanicznych i programowanie pomiarów w oparciu o modele diagnostyczne.

W ogólności można stwierdzić, że wykłady stały na wysokim poziomie. Zagadnienia rozwiązywano nowoczesnymi metodami matematycznymi, między innymi metodami teorii dystrybucji.

Należy podkreślić, że po referatach wywiązała się żywa dyskusja, co świadczy o tym, że w różnych ośrodkach naukowych rozważa się podobne problemy, a konferencja dała sposobność do wymiany doświadczeń i wyników.

Następna konferencja odbędzie się za 3 lata.

Spis wygłoszonych referatów

1. J. ADAMCZYK, A. BĘBEN, S. KASPRZYK, Stateczność pewnego układu wibrouderzeniowego,
2. J. ADAMCZYK, Stateczność ruchu pewnego układu mechanicznego o zmiennej masie,
3. W. BAJON, Z. OSIŃSKI, Drgania układu z nieliniową charakterystyką sprężystą typu $\sqrt{|x|}$ przy wymuszeniu stochastycznym,
4. S. BEDNARZ, Drgania układu o 2 stopniach swobody pod działaniem dowolnie zmiennych sił wymuszających,
5. W. BOGUSZ, J. GIERGIEL, Analiza dynamiczna układu napędowego koła czerpakowego koparki wielonaczyniowej,
6. W. BOGUSZ, Związek między funkcją Lapunowa a gęstością prawdopodobieństwa,
7. W. BOGUSZ, J. GIERGIEL, A. ŁOPATA, Drgania samowzbudne koła czerpakowego koparki wielonaczyniowej,
8. C. CEMPEL, Drgania uderzeniowe dwu niezależnych układów,
9. J. CZAJKA, J. KISIŁOWSKI, Analiza drgań układu z nieliniową siłą sprężystą o postaci $\sqrt{|x|}$,
10. S. DUBIEL, Zastosowanie kwadratowej metody wyznaczania trajektorii fazowych do badania obszarów samowzbudności wahań podłużnych aparatów latających,
11. S. DUBIEL, Metody optymalizacji w dynamice lotu (referat przeglądowy),
12. Z. DŻYGADŁO, Nieautonomiczne drgania giętne wirującego wału,
13. Z. DŻYGADŁO, L. SOLARZ, O nieautonomicznych drganiach samowzbudnych układów z siłą śledzącą
14. Z. ENGEL, J. WAPIENNIK, Stateczność układu z tłumieniem dynamicznym,
15. M. FOLTYN, Kinematyka pojazdu dwukołowego,
16. Andrzej FORYŚ, Anna FORYŚ, Wymuszone drgania skrętne pręta z materiału lepkosprężystego,
17. W. GAWROŃSKI, Analiza układu wibrouderzeniowego przy wymuszeniu stochastycznym,
18. Z. GĘBICKI, Modelowanie mechanizmu ładującego górniczej ładowarki zasięrzutnej,
19. L. GŁUCH, A. ŁOPATA, J. WAPIENNIK, Drgania układu nieliniowego o 1,5 stopnia swobody,
20. M. HERING, R. KRZYWIEC, O wykorzystaniu podobieństwa matematycznego drgań podłużnych mechanicznych i drgań w sieciach elektrycznych,
21. E. KARAŚKIEWICZ, Okresowe drgania uderzeniowe układu głównego z układem półokreślonym,
22. S. KASPRZYK, Asymptotyczne zachowanie się rozwiązań układu o 2 stopniach swobody,
23. T. KASPRZYK, Pewne problemy dynamiki drganiowej pojazdu mechanicznego na tle modelowania matematycznego,
24. T. KOŁACIN, Wyznaczenie charakterystyk tarcia z pomiarów parametrów drgań,
25. J. KRUSZEWSKI, Zastosowanie sztywnych elementów skończonych w obliczeniach drgań konstrukcji okrętowych,

26. R. KRZYWIEC, O modelowaniu wału wielopodporowego z wieloma tarczami za pomocą wielkiego systemu bioscylatorów,
27. R. KRZYWIEC, O stabilności ruchu (przez analogię) wielkiego systemu prętów poddanych wyboczeniu sprężystemu,
28. R. KRZYWIEC, O stabilności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych wielociągowych liniowych ze stałymi współczynnikami,
29. H. ŁOPATA, J. GIERGIEL, Drgania wymuszone sprężysto-tarciowego układu mechanicznego,
30. Z. MAGIERA-ULLRICH, Badanie przebiegu krzywych granicznych układu nieliniowego o dwóch stopniach swobody,
31. J. MICHALKIEWICZ, Z. OSIŃSKI, D. SADO, Analiza przenoszenia impulsów o różnej postaci przez sprzęgło sprężyste,
32. J. MURZEWSKI, A. WINIARZ, Obciążenie losowe konstrukcji jako proces stochastyczny z niezależnymi przyrostami,
33. A. MUSZYŃSKA, O ruchu poziomego wału o nieliniowych własnościach sprężystych i tłumienia,
34. W. NADOLSKI, Badanie zjawiska rezonansu parametrycznego w przekładni zębatej jednostopniowej o osiach równoległych,
35. W. NADOLSKI, Podłużne drganie swobodne przekładni jednostopniowej z zębami śrubowymi,
36. W. NADOLSKI, Równania ruchu przekładni zębatej jednostopniowej o osiach równoległych,
37. J. NIZIOŁ, Wpływ przypadkowej prędkości kątowej na drgania girotachometru,
38. M. OFIERZYŃSKI, Drgania boczne dwustopniowego układu zawieszenia belek bujakowych pewnego typu wagonów osobowych,
39. J. OSIECKI, Drgania nieliniowe wałów przegubowych ze sprzęgłami typu Cardana,
40. Z. OSIŃSKI, M. GRZELKA, M. PIETRASZEWSKI, Dobór sztywności szprzęgła podatnego w układzie poddanym impulsom o charakterze przypadkowym,
41. Z. OSIŃSKI, D. SADO, Badanie tłumienia drgań przy tłumieniu subwiskotycznym,
42. K. PISZCZEK, Wpływ nieliniowości na niektóre charakterystyki drgań przypadkowych,
43. L. POWIERZA, Budowa dyskretnego modelu zastępczego kosiarki ciągnikowej,
44. T. PUCHAŁKA, M. KACZMAREK, Synteza pewnej klasy układów impulsowych z modulacją dwóch parametrów,
45. J. RATAJSZCZAK, Drganie własne żurawi budowlanych w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez oś wysięgnika i oś wieży,
46. M. SARNA, Dynamika cienkościennej pręta o profilu otwartym i jednej płaszczyźnie symetrii,
47. B. SKALMIERSKI, Niektóre problemy probabilistyczne w dynamice,
48. K. WERNEROWSKI, Stateczność ruchu łożysk powietrznych,
49. J. WIĘCKOWSKI, Wybrane zagadnienia dynamiki kadłuba wieloczłonowego na fali,
50. M. ZABAWA, O syntezie pewnego układu przy wymuszeniu przypadkowym.

Edmund Karaszkiewicz (Poznań)

OGÓLNOKRAJOWY KONKURS
NA PRACE DOŚWIADCZALNE Z MECHANIKI TECHNICZNEJ

Częstochowski Oddział PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS w Warszawie organizuje w 1971 r. Ogólnokrajowy Konkurs na prace z zakresu badań doświadczalnych z mechaniki technicznej. Prace konkursowe zawierające elementy nowości w stosunku do obecnego stanu wiedzy należy przesłać do Sekretariatu Oddziału Częstochowskiego PTMTS w Częstochowie ul. Zawadzkiego 21, Instytut Obróbki Plastycznej i Spawalnictwa, w terminie do dnia 31 października 1971 r.

Objętość pracy nie powinna przekraczać w zasadzie 20 stron maszynopisu i powinna być złożona w 3 egzemplarzach, w formie nadającej się do druku, podpisana imieniem i nazwiskiem, z podaniem adresu.

Prace nie mogą być przed tym terminem opublikowane, ani złożone do druku, lub być przedmiotem pracy doktorskiej.

Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału. Konkurs prowadzony będzie zgodnie z Regulaminem Konkursów Naukowych PTMTS.

Łączna wysokość nagród wynosi 20.000.— zł w tym I nagroda — 7.000.— zł., I — 5.000.— zł., III — 4.000.— zł, oraz dwa wyróżnienia po 2.000.— zł.

Konkurs jest ograniczony, dostępny tylko dla członków PTMTS.

Nagrodzone prace zostaną opublikowane w czasopiśmie MECHANIKA TEORETYCZNA i STOSOWANA.

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- A. SAWCZUK, Zagadnienia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok sztywnoplastycznych.
Вопросы теории умеренно больших прогибов жестко-пластических оболочек
Moderately large deflections theory of rigid-plastic shells
- K. DEMS, Zastosowanie wielomianów Hermite'a do wyznaczania macierzy sztywności elementu tarczy w metodzie elementów skończonych
Применение полиномов Эрмита для определения матрицы жесткости элементов диска в методе конечных элементов
Application of Hermite polynomials to the determination of the stiffness matrix of plate elements method
- Sz. BORKOWSKI, Oszacowanie rozwiązań równań kanonicznych metody sił w przypadku przybliżonego wyznaczania liczb wpływowych
Оценки решений канонических уравнений силового метода для случая приближенного определения параметров влияния
Estimation of solution of the canonical equations of the method of forces under approximate determination of influence parameters
- Z. MAZURKIEWICZ, Pewne uogólnienie problemu brachistochrony
Некоторое обобщение задачи о брахистохроне
A certain generalization of the brachistochrone problem
- M. SOKOŁOWSKI, O pewnym modelu ciała przynoszącego napięcia momentowe
О некоторой модели тела с моментными напряжениями
On a model of a body transmitting couple-stresses
- A. ZIĄBICKI, Reologia molekularna układów polimerowych
Молекулярная реология полимерных систем
Molecular rheology of polymer systems
- A. RĄCZEW, Wewnętrzna stateczność sprężystego walca kołowego przy odkształceniach skończonych
Внутренняя устойчивость упругого кругового цилиндра при конечной деформации
Internal stability of an elastic circular cylinder under finite deformations
- Z. KŁOS, Charakterystyka stabilności przepływu ze zmiennym profilem prędkości płynu o skończonym przewodnictwie elektrycznym w polu magnetycznym
Характеристика устойчивости течения с переменным профилем скоростей жидкости с конечной электропроводностью в магнитном поле
Stability characteristics of flow with variable velocity profile for a fluid with finite electrical conductivity in a magnetic field
- BIULETYN INFORMACYJNY

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
