

J. II. 420

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 9 • ZESZYT 1



WARSZAWA 1971

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

Pamięci Profesora Jarosława NALESZKIEWICZA	3
J. J. TELEGA, Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji (Przegląd prac) Применение линейного программирования для определения несущей способности конструкций (обзор статей) The application of linear programming to the determination of the limit load capacity of structures (survey of publications)	7
T. GAŁKIEWICZ, Zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu Проблема устойчивости ортотропной конической оболочки подвергнутой скручиванию Nonlinear stability problem of an orthotropic conical shell subjected to torsion	53
K. FIDELUS, A. MORESKI, Niektóre własności biomechanizmów o zmiennej strukturze Некоторые свойства переменной структуры биомеханизмов Some properties of variable structures of biomechanics	73
M. GALOS, Plastyczne skręcanie niejednorodnych prętów o zmiennej średnicy Пластическое кручение неоднородных стержней переменного диаметра Plastic torsion of non-homogeneous rods of variable thickness	89
J. HALAUNBRENNER, M. KMIĘCIK, Zjawisko rezonansu w kontakcie ciał sprężystych Явление резонанса в контакте упругих тел The resonance phenomenon for elastic bodies in contact	115
M. JOKIEL, Odpowiedniość modelowa dla cienkościennych prętów o bisymetrycznym otwartym przekroju pryzmicznym Критерии подобия тонкостенных стержней бисимметрического открытого сечения Model correspondence criteria for thin-walled rods of bi-symmetric open cross-section	125
J. BAUER, E. WŁODARCZYK, Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu ze zmienną granicą plastyczności. Część I. Sztywne odciążenie Динамика жесткой плиты находящейся на упруго-пластическом неоднородном основании. Часть I. Dynamics of a rigid plate resting on elastic-plastic nonhomogeneous medium. Part I.	139
K. TURSKI, Badanie wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metalu przy różnych drogach wtórnego obciążenia Исследование влияния пластической деформации на поведение металла при разных путях вторичного нагружения Investigation of the influence of plastic deformation on behaviour of metals under various ways of repeated loading	155
J. BARAN, K. MARCHELEK, Redukcja stopni swobody układów dyskretnych Приведение степеней свободы дискретных систем Reduction of the number of degrees of freedom in discrete systems	201
BIULETYN INFOMASYJNY	217

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK
--

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 9 • Z E S Z Y T 1



W A R S Z A W A 1 9 7 1
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIK — REDAKTOR,
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (589+111) egz. Arkuszy wydawn. 17,5. Arkuszy drukarskich 14,0. Papier druk. sat. III kl., 90 g. 70×100. Oddano do składania 24.X.1970 r. Druk ukończono w marcu 1971 r.
Zam. 1783 U-90 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

PAMIĘCI PROFESORA JAROSŁAWA NALESZKIEWICZA

W środę, 31 grudnia 1969 r. odbyła się na Cmentarzu Komunalnym w Warszawie smutna uroczystość poświęcona Temu, który w dniu 24 grudnia odszedł bezpowrotnie. Wśród licznie zgromadzonych znajdowała się rodzina oraz przyjaciele, koledzy — profesorowie, współpracownicy i słuchacze Człowieka, którego przyszli pożegać na ostatniej drodze.

Jarosław NALESZKIEWICZ urodził się 21 maja 1904 r. w Czarnominie na Podolu, jako syn Alfreda i Amelii z Pawlikowskich. Ojciec Jego był prawnikiem.

Maturę otrzymał w 1921 roku w Państwowym Gimnazjum w Poznaniu. W tym samym roku wstąpił na Politechnikę Warszawską, gdzie na Wydziale Mechanicznym studiował w Sekcji Lotniczej. Dyplom inżyniera-mechanika Sekcji Lotniczej uzyskał w czerwcu 1926 r. po czterech i pół latach studiów. Przed dyplomem przebywał również przez pół roku we Francji na praktyce w przemyśle lotniczym. Po złożeniu egzaminu dyplomowego udał się ponownie do Francji jako stypendysta Ligi Obrony Powietrznej Państwa i tam zapisał się na Uniwersytet Paryski (Sorbona, Faculté des Sciences), lecz później przeszedł ponownie na praktykę do przemysłu lotniczego w firmach Lorraine i Hispano-Suiza.

Po powrocie do kraju objął w lutym 1927 r. stanowisko w Podlaskiej Wytwórni Samolotów SA w Białej Podlaskiej, w której pracował w charakterze konstruktora do sierpnia 1930 r., kiedy to musiał odbyć opóźnioną już służbę wojskową. Po roku opuścił Szkołę Podchorążych Rezerwy Lotnictwa w Dęblinie, w której służył w Grupie Technicznej. Pozostał jednak w Dęblinie w charakterze cywilnego kierownika Warsztatów Parku Lotniczego CWOL. Tam zbudował kilka typów szybowców własnej konstrukcji, między innymi pierwszy w Polsce szybowiec bezogonowy.

W maju 1933 r. został przeniesiony do Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa w Warszawie, w którym pracował w stopniu radcy kontraktowego, jako kontroler konstrukcji prototypów samolotów, aż do marca 1936 r., kiedy to został zaangażowany do Lubelskiej Wytwórni Samolotów Sp. z o.o. w charakterze Kierownika Wydziału, a następnie prokurenta i III Zastępcy Dyrektora Naczelnego. Praca administracyjna nie odpowiadała jednak Jego zainteresowaniom, wobec czego przeniósł się do Państwowych Zakładów Lotniczych, Wytwórni Silników Nr 1 na Okęciu. Tam objął kierownictwo Grupy Obliczeniowej powołanej do rozwiązywania szczególnie trudnych zagadnień, nasuwających się podczas konstrukcji, prób i produkcji silników lotniczych.

Swoje równoczesne zainteresowania naukowe przejawiał w ten sposób, że już w 1935 r. uzyskał na Wydziale Mechanicznym Politechniki Warszawskiej stopień naukowy doktora nauk technicznych za pracę pt. *Wytrzymałość zginania dźwigarów sosnowych*. Promotorem Jego był prof. dr M. T. Huber. W sierpniu 1938 r. złożył na ręce prof. Hubera swą roz-

prawę habilitacyjną pt. *Działanie amortyzacji podwozia*. Przewód prowadzony na Wydziale Mechanicznym Politechniki Warszawskiej został przerwany przez wybuch wojny we wrześniu 1939 r.

Po ostatecznym zniszczeniu Wytwórni udał się na poszukiwanie Swego pułku, który odnalazł w Pińsku. Ponieważ lotnictwo w tym czasie było już zdeorganizowane i pozbawione samolotów postanowił wrócić do Warszawy, co Mu się udało w październiku 1939 r.

Po powrocie do Warszawy zataił przed Niemcami posiadane kwalifikacje zawodowe i naukowe nie chcąc pracować w niemieckim przemyśle wojennym. Zarabiał więc lekcjami będąc przez cały ten okres w nader ciężkich warunkach materialnych. Natychmiast też przystąpił do pracy w organizacjach warszawskiego podziemia.

Od lata 1940 był współorganizatorem batalionu AK «Dominik» w Zgrupowaniu «Stolica», dowodząc i szkoląc kolejno piątkę, drużynę i pluton tego baonu. Przeniesiony następnie do komendy Zgrupowania, pełnił obowiązki szefa Działu Uzbrojenia, organizując gromadzenie broni przechowywanej po wrześniu, skup broni od żołnierzy niemieckich i akcje zdobywania broni. Podlegała Mu także jednostka instruktorów nauki o broni, prowadzących szkolenie w szkole podchorążych i szkole podoficerskiej Zgrupowania. W okresie Powstania Warszawskiego był oficerem łącznikowym w komendzie odcinka, pełniąc dorywczo obowiązki dziennikarskie w prasie powstańczej, dla której prowadził obcojęzyczny nasłuch radiowy oraz obowiązki administracyjne w organach Delegatury Rządu na m. Warszawę.

W okresie: jesień 1941 — lato 1942 był przydzielony do grupy oficerów AK współpracujących z kpt. Arciszewskim (pseud. «Michał» i «Kola»), uczestnicząc m.in. w rozpracowaniu lotniska na Okęciu i ulokowanych tam podziemnych magazynów paliwa Luftwaffe, które na podstawie zdobytych informacji zostały zniszczone przez lotnictwo radzieckie. Przez cały okres okupacji pracował również w wywiadzie lotniczym Komendy Głównej AK oraz był wykładowcą w podziemnym szkolnictwie wyższym i średnim.

Po powstaniu poszedł do niewoli wraz ze Zgrupowaniem. W ostatnich tygodniach wojny udało Mu się zbiec w momencie, gdy Niemcy eskortowali jeńców w strefie frontowej na terenie Pomorza Zachodniego.

W kwietniu 1945 r. został zmobilizowany do Odrodzonego Wojska Polskiego, w którym służył w mieszanym Pułku Lotniczym Ćwiczebno-Szkolnym w Radomiu, pełniąc w stopniu kapitana obowiązki zastępcy Kierownika Wyszkożenia. Został Mu wówczas nadany «Dyplom Żołnierza Demokracji». Ostatecznie został zdemobilizowany w listopadzie 1945 r., co umożliwiło objęcie stanowiska na Politechnice Gdańskiej. Tam wznowił, otwarty w 1938 r. na Politechnice Warszawskiej, przewód habilitacyjny, który został zakończony uchwałą Rady Wydziału Mechanicznego Politechniki Gdańskiej ze stycznia 1946 r. — przyznającą Mu tytuł naukowy docenta habilitowanego w dziedzinie mechaniki. Na Politechnice Gdańskiej pracował do 1957 r. Równocześnie do roku 1948 pracował w charakterze doradcy technicznego w Zjednoczeniu Stoczni Polskich, a następnie w Gdańskim Urzędzie Morskim. W 1952 r. zaczął współpracować z Zakładem Mechaniki Ośrodków Ciągłych Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, jako Kierownik Pracowni Teorii Konstrukcji Cienkościennych. W 1958 r. przeniesiony został do Warszawy, obejmując w IPPT kierownictwo Pracowni Stateczności i opiekę naukową nad Pracownią Analizy

Napreżeń. Równocześnie, w tym samym dniu, objął kierownictwo Katedry Aerodynamiki i Budowy Samolotów w Wojskowej Akademii Technicznej.

W 1952 r. przyznano Mu Państwową Nagrodę Naukową III stopnia za prace w dziedzinie wytrzymałości drewna, a w połowie 1954 r. za prace naukowe został odznaczony Złotym Krzyżem Zasługi. W końcu tegoż roku otrzymał nagrodę naukową Ministra Szkolnictwa Wyższego. W 1955 r. Centralna Komisja Kwalifikacyjna przyznała Mu tytuł naukowy profesora zwyczajnego, a w rok później otrzymał Medal X-lecia Polskiej Rzeczypospolitej Ludowej. W roku 1957 za prace w dziedzinie kwantyzacji zjawisk niestateczności uzyskał nagrodę im. M. T. Hubera przyznaną przez PAN.

W latach 1926–1939 wyjeżdżał kilkanaście razy za granicę uczestnicząc w zjazdach naukowych i w zwiedzaniu wystaw przemysłu lotniczego, biorąc udział w międzynarodowych zawodach lotniczych, itp. We wrześniu 1951 r. został członkiem rzeczywistym Towarzystwa Naukowego Warszawskiego. Był również uczestnikiem I Kongresu Nauki Polskiej. W 1951 r., pracując w Komisji Mechaniki, został powołany na referenta naukowego Centralnej Komisji Kwalifikacyjnej dla pracowników nauki. W 1956 r. został wybrany na Członka Rady Głównej Szkolnictwa Wyższego na kadencję 1956–1959. W tym samym czasie został wybrany kandydatem na członka CKK, po czym otrzymał nominację na członka CKK, na którym to stanowisku pozostał aż do dnia likwidacji Komisji. W roku 1959 został członkiem Rady Naukowo-Ekonomicznej przy Ministrze Żeluzgi i Gospodarki Wodnej.

Profesor Naleszkiewicz opublikował wiele oryginalnych prac naukowych i monografii. Wykaz Jego publikacji obejmuje około czterdziestu pozycji, z czego cztery ogłoszono za granicą; poza tym ukazało się sześć tomów Jego prac dydaktycznych. Brał on aktywny udział w licznych kongresach, zjazdach, konferencjach i sympozjach naukowych w kraju i za granicą. Wygłosił m.in. szereg referatów w Wielkiej Brytanii, Szwecji, Związku Radzieckim, Belgii, Indiach i NRD.

Prof. dr Jarosław NALESZKIEWICZ był Członkiem Założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Od pierwszych lat istnienia Towarzystwa działał aktywnie w jego szeregach, bowiem już na pierwszym zebraniu Organizacyjnym Oddziału Warszawskiego wszedł w skład Zarządu pełniąc funkcję Wiceprzewodniczącego Oddziału. W następnych latach wszedł w skład Głównego Sądu Konkursowego. Był również Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego Sympozjum na temat elastooptyki i jej zastosowań organizowanego przez Oddział Warszawski.

Dużo czasu i sił poświęcał młodzieży, będąc jej nauczycielem i wychowawcą. Bardzo się o nią troszczył. Dla studentów, którzy przychodzili do Niego ze swymi sprawami, zawsze znajdował czas i dobrą radę. Odznaczał się nadzwyczajną punktualnością i słownością.

Jest rzeczą niemożliwą w krótkim wspomnieniu opisać w pełni głębokiego i żarliwego Patriotę oraz oddanego swej pracy Człowieka. Jakim On był naprawdę zrozumieli najlepiej ci, którzy wysłuchali wypowiedzianych nad Jego grobem prostych i szczerych słów kolegów z Akademii i z AK. Ten wybitny naukowiec był w życiu codziennym bardzo miłym i pogodnym człowiekiem o ujmującym sposobie bycia, którego będą długo i serdecznie wspominać wszyscy, którzy zetknęli się z Nim osobiście w toku swej pracy lub studiów.

ZASTOSOWANIE PROGRAMOWANIA LINIOWEGO DO WYZNACZANIA NOŚNOŚCI
GRANICZNEJ KONSTRUKCJI

(Przegląd prac)

JÓZEF JOACHIM TELEGA (GLIWICE)

1. Wstęp

W pracy omówiono dotychczasowe wyniki zastosowania programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej układów prętowych, płyt i powłok; zadanie dualne i jego interpretację; problem dostosowania oraz automatycznego obliczania konstrukcji ramowych.

Intensywność obciążenia granicznego można wyznaczyć albo metodą statyczną (np. KOOPMAN, LANCE [12], SVOBODA [19], GOCHFELD, CZERNIAWSKI [27], ČYRAS [38], MIRZABEKJAN, REITMAN [29], FRAINT [33], CERADINI, GAVARINI [3], WOLFENSBERGER [22]) albo kinematyczną (np. TANAKA [20], BRUSENCOW, RŽANICYN [25], ČYRAS [38], RŽANICYN [31], TERECHINA [32]).

W pierwszym przypadku — przy odpowiednim sformułowaniu zagadnienia — poszukujemy maximum mnożnika statycznie dopuszczalnego, w drugim natomiast — minimum mnożnika kinematycznie dopuszczalnego, przy czym takie sformułowanie ważne jest dla obciążeń proporcjonalnych, czyli prostych. Metoda statyczna wynika z twierdzenia o dolnej granicy obciążenia [21]: «Największy spośród statycznie dopuszczalnych mnożników obciążenia μ_s odpowiada rzeczywistej intensywności obciążenia granicznego μ_G , tzn. $\sup \mu_s = \mu_G$.» Z twierdzenia o górnej granicy obciążenia [21]: «Najmniejszy spośród kinematycznie dopuszczalnych mnożników obciążenia μ_k odpowiada rzeczywistej intensywności obciążenia granicznego, czyli $\inf \mu_k = \mu_G$.» otrzymujemy metodę kinematyczną (w obliczeniach praktycznych supremum przechodzi w maximum, zaś infimum w minimum).

W przypadku obciążeń zmiennych, celem sformułowania interesującego nas problemu nośności granicznej, będziemy korzystać z odpowiednich twierdzeń energetycznych o minimum energii dysypowanej (metoda kinematyczna) oraz maximum mocy obciążeń zewnętrznych (metoda statyczna) [38]. Należy podkreślić, iż pojęcie nośności granicznej dla obciążeń nieproporcjonalnych ma również sens, gdyż zarówno własności sprężyste, jak i historia obciążenia nie wpływają na wielkość nośności. W przypadku obciążeń nieproporcjonalnych może mieć miejsce nowy jakościowo efekt — niedostosowanie. Jak

wiadomo, zagadnienie dostosowywania ujmują twierdzenia Melana i Koitera (por. np. KACZANOW [28], KÖNIG [11]).

Okazuje się, że zadania nośności granicznej w ujęciu statycznym i kinematycznym stanowią parę zadań dualnych programowania liniowego i to zarówno dla obciążeń prostych, jak i zmiennych (BORKAUSKAS, ČYRAS [2], CERADINI, GAVARINI [4], CHARNES, LEMKE, ZIENKIEWICZ [6], ČYRAS [38], MAIER [14]).

Ścisłe rzecz biorąc, wyznaczanie współczynnika obciążenia granicznego, przy pomocy programowania liniowego, można uważać za automatyczne obliczenie, które ogólnie sprowadza się do podania algorytmu rozwiązującego. Takim algorytmem dla programowania liniowego jest np. metoda sympleksowa. Nieco inny algorytm dla automatycznego obliczania ram zaproponował LIVESLEY [13]. W następnym punkcie sformułujemy wygodną dla naszych celów problematykę programowania liniowego.

2. Programowanie liniowe

Ogólnie rzecz traktując, problematykę programowania można sformułować następująco [8]:

znaleźć minimum (maximum) funkcji

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = f(x)$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} a_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Jeśli zarówno funkcja f , nosząca nazwę *funkcji celu*, jak i funkcje g_i , $i = 1, \dots, m$ są liniowe, to wówczas mówimy o zadaniu programowania liniowego.

Stosowanie programowania (liniowego lub nieliniowego) do rozważanych problemów wymaga dyskretnego opisu konstrukcji. Opis taki jest naturalny w odniesieniu do konstrukcji prętowych, natomiast przed zastosowaniem programowania do płyt i powłok należy dokonać dyskretyzacji opisu. Jedną z nowszych metod opisu dyskretnego, tzw. metodę elementów skończonych, przedstawimy w rozdziale 6.

W dalszym ciągu interesować nas będzie tylko standardowe, kanoniczne oraz parametryczne programowanie liniowe, które w sposób monograficzny ujęte jest w pracach GASSA [7]; CZERNIKOWA [34] i JUDINA, GOLSZTEJNA [39].

Zadanie standardowe programowania liniowego formułuje się następująco [34]:
znaleźć minimum (maximum) funkcji liniowej n zmiennych

$$(2.1) \quad f(x) = \sum_{j=1}^n b_j x_j$$

przy warunkach ograniczających nałożonych na zmienne x_1, \dots, x_n postaci

$$(2.2) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq a_i; \quad x_j \geq 0; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Zadanie poszukiwania minimum (maximum) funkcji (2.1) poddanej ograniczeniom postaci

$$(2.3) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = a_i; \quad x_j \geq 0; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n,$$

nazywamy kanonicznym zadaniem programowania liniowego. Zadanie kanoniczne łatwo rozwiązać przy zastosowaniu algorytmu noszącego nazwę metody sympleksowej; stąd konieczność przeprowadzenia zadania standardowego do kanonicznego. W tym celu wystarczy w zadaniu standardowym zamienić każdą nierówność $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq a_i$ dwiema zależnościami:

$$(2.3') \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + z_i - a_i = 0, \quad z_i \geq 0.$$

Dla danego zadania programowania liniowego można ułożyć tzw. zadanie dualne, które dla zadania kanonicznego, polegającego na znalezieniu maximum formy (2.1) przy ograniczeniach (2.3), formułuje się następująco [39]:

zminimalizować formę m zmiennych

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^m a_i y_i$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Jak stąd wynika zmienne y_i nie muszą być nieujemne.

Rozpatrzmy teraz zadanie standardowe, w którym należy znaleźć maximum formy (2.1) przy ograniczeniach (2.2). Zadanie dualne do niego ma postać następującą:

zminimalizować formę

$$\tilde{f}(y) = \sum_{i=1}^m a_i y_i$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Najogólniejsze zadanie, w którym ograniczenia są mieszane, tzn. mają postać równości lub nierówności, a występujące zmienne niekoniecznie są nieujemne formułuje się następująco [39]:

znaleźć maximum formy

$$\sum_{j=1}^n b_j x_j$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq a_i, & i = 1, \dots, m_1 \leq m, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= a_i, & i = m_1 + 1, \dots, m, \\ x_j &\geq 0, & j = 1, \dots, n_1 \leq n. \end{aligned}$$

Zadanie dualne do powyższego polega na minimalizacji formy liniowej

$$\sum_{i=1}^m a_i y_i,$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq b_j, & j = 1, \dots, n_1 \leq n, \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &= b_j, & j = n_1 + 1, \dots, n, \\ y_i &\geq 0, & i = 1, \dots, m_1 \leq m. \end{aligned}$$

Przedstawione zadania programowania liniowego można rozwiązać na maszynach matematycznych, stosując algorytmy standardowe, jak metodę sympleksową, dualną metodę sympleksową. W tym kryje się główna przewaga, z praktycznego punktu widzenia, tego programowania nad programowaniem nieliniowym, które na ogół wymaga stosowania specjalnych algorytmów rozwiązujących (porównaj np. BIRON, HODGE [1]).

Czasami w zastosowaniach spotykamy się z zadaniami, w których albo współczynniki funkcji (2.1), albo elementy macierzy $A = \|a_{ij}\|$ $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$, lub też wyrazy wolne a_1, \dots, a_n zmieniają się w pewnym przedziale na osi rzeczywistej. Taką postać problemu nazywamy programowaniem parametrycznym [7].

3. Układy prętowe

Zastosowanie programowania liniowego do układów prętowych było przedmiotem rozważań TANAKI [20], SVOBODY [19], NICHOLLSA [15], RĂUTU, CHIROIU [16] i [17], CERADINIEGO, GAVARINIEGO [3], CHARNESA, LEMKEGO, ZIENKIEWICZA [6], ČYRASA [35], [36], [38], GYLYSA, ZAKAREVICIUSA, ČYRASA [26].

3.1. W pracy SVOBODY [19] problem rozwiązano metodą statyczną dla obciążeń prostych.

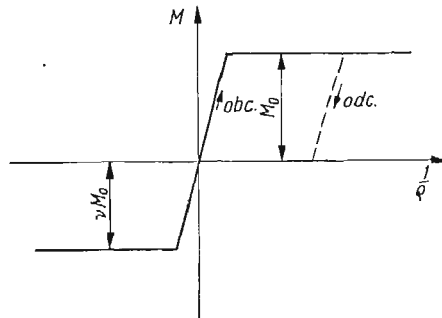
Autor czyni następujące założenia:

a) w każdym przekroju funkcja $M = f\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ jest zbudowana przy przyjęciu obrazu geometrycznego takiego, jak na rys. 1, gdzie przez $\bar{\varrho}$ i M oznaczono, odpowiednio, krzywiznę osi pręta oraz moment zginający w rozpatrywanym przekroju pręta. Z rys. 1 widać, iż

zależność moment–krzywizna dla ciała sprężysto-idealnie-plastycznego nie jest jedno-jednoznaczna. Trajektorie obciążania i odciążania mogą być różne, co zilustrowano odpowiednimi strzałkami;

- b) wpływ sił normalnych i poprzecznych na uplastycznienie można pominąć;
- c) liczba przegubów plastycznych jest dostateczna, tzn. może wytworzyć się zupełny lub częściowy mechanizm zniszczenia;
- d) odkształcenia są małe, co pozwala stosować takie same równania równowagi, jak dla stanu nieodkształconego;
- e) elementy mają idealne przekroje — można traktować przeguby plastyczne jako punkty;
- f) problem wyboczenia można pominąć.

Przeguby plastyczne powstają: w punktach obciążenia skupionego, w miejscach, gdzie siła poprzeczna zmienia znak (ekstremum momentu zginającego w tym punkcie) oraz w punktach utwierdzenia. W przypadku obciążeń ciągłych należy również zlokalizować położenie przegubu plastycznego wytworzonego przez to obciążenie, np. metodą kolejnych przybliżeń. Na ogół wygodniej jest zastąpić obciążenie ciągłe pewną liczbą możliwie gęsto rozmieszczonych obciążeń skupionych.



Rys. 1

Ponieważ z sił wewnętrznych uwzględniono tylko moment zginający, więc warunek dopuszczalności pola momentów ma postać

$$(3.1) \quad \nu M_{0,i} \leq M_i \leq M_{0,i},$$

gdzie symbolami $M_{0,i}$, $\nu M_{0,i}$ oznaczono momenty zginające graniczne w i -tym przekroju.

Równanie (3.1) łatwo sprowadzić do postaci

$$(3.2) \quad 0 \leq Y_i \leq D_i,$$

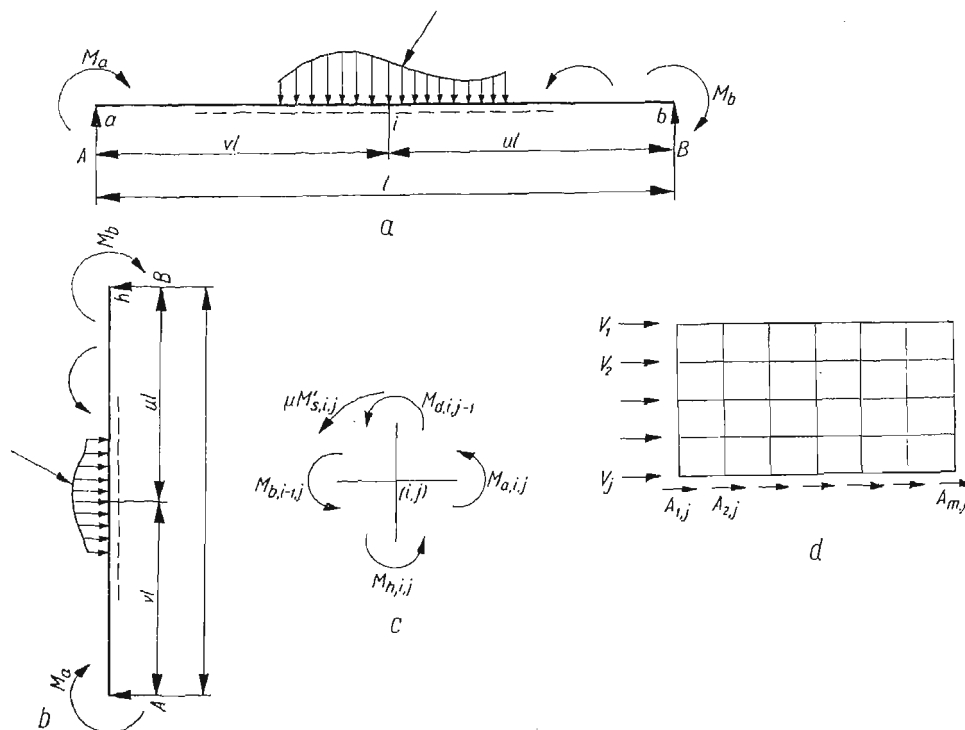
w której symbole Y_i oraz D_i oznaczają

$$(3.3) \quad Y_i = M_i - \nu M_{0,i}, \quad D_i = M_{0,i} - \nu M_{0,i}.$$

Warunek (3.2) wskazuje na nieujemność wielkości Y_i . Wystarczy więc rozważyć układ

$$(3.4) \quad Y_i \leq D_i.$$

Dla pełnego sformułowania problemu, oprócz nierówności typu (3.4) należy dołączyć jeszcze odpowiednie, niezależne równania równowagi wydzielonej części układu. Warunki te uzyskujemy korzystając z rys. 2.



Rys. 2

Dla pręta (poziomego lub pionowego, rys. 2a, b), otrzymujemy równanie

$$(3.5) \quad M_i = uM_a - vM_b + M'_i \mu,$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:

M'_i — wpływ od obciążenia międzyprzęstowego,

M_a, M_b — wpływy od obciążeń węzłowych,

μ — współczynnik intensywności obciążenia międzyprzęstowego. Po uwzględnieniu równości (3.3) i równania (3.5) uzyskamy

$$(3.6) \quad Y_i - uY_a + vY_b - M'_i \mu = -vM_{0,i} + uvM_{0,a} - vM_{0,b}.$$

Z rys. 2c wynikają równania równowagi węzła

$$(3.7) \quad M_{b,i-1,j} + M_{a,i,j} + M_{d,i,j-1} + M_{h,i,j} + M'_{s,i,j} \mu = 0.$$

W równaniu (3.7) $\mu M'_{s,i,j}$ jest danym obciążeniem momentowym węzła.

Z równań (3.3) (3.6) i (3.7) otrzymujemy

$$(3.8) \quad Y_{b,i-1,j} + Y_{a,i,j} + Y_{d,i,j-1} + Y_{h,i,j} + \mu M'_{s,i,j} = \\ = -vM_{0,b,i-1,j} - vM_{0,a,i,j} - vM_{0,d,i,j-1} - vM_{0,h,i,j}.$$

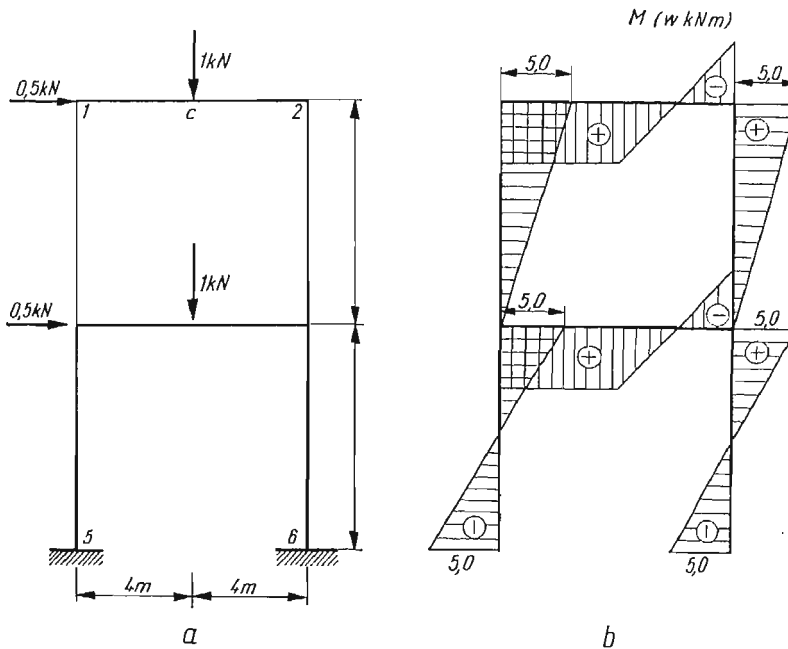
Równanie pięter uzyskamy z rys. 2d,

$$(3.9) \quad A_{1,j} + A_{2,j} + \dots + A_{m,j} + (V_1 + \dots + V_j)\mu = 0.$$

W przypadku, gdy wszystkie słupy j -tych pięter mają jednakową wysokość h , wtedy równanie (3.9) — po pomnożeniu go przez h i uwzględnieniu zależności (3.3) — przyjmie następującą postać:

$$(3.10) \quad Y_{d,1,j} + Y_{d,2,j} + \dots + Y_{d,m,j} + Y_{h,1,j} + \dots + Y_{h,m,j} + h(V_1 + \dots + V_j)\mu = \\ = -\nu M_{0,d,1,j} - \dots - \nu M_{0,d,m,j} - \nu M_{0,h,1,j} - \dots - \nu M_{0,h,m,j}.$$

Obecnie można już jednoznacznie sformułować problem w terminach programowania liniowego, korzystając z twierdzenia o dolnej granicy obciążenia. Należy znaleźć maximum



Rys. 3

funkcji $z = \mu$, przy jednoczesnym spełnieniu warunków (3.4), (3.6), (3.8), (3.9) lub (3.10). Przejdźmy teraz do omówienia wyników uzyskanych w pracy [19], a odnoszących się do ramy przedstawionej na rys. 3a. Układ ten został rozwiązany przy następujących danych: $M_0 = 5 \text{ kNm}$, $\nu M_0 = -5 \text{ kNm}$.

Odpowiednio z równań (3.6), (3.8) i (3.10) otrzymujemy:

$$Y_c - 0,5Y_{12} + 0,5Y_{21} - 2\mu = -(-5) + 0,5(-5) - 0,5(-5),$$

$$Y_d - 0,5Y_{34} + 0,5Y_{43} - 2\mu = 5,$$

$$Y_{12} + Y_{13} = -(-5) - (-5),$$

$$Y_{21} + Y_{24} = 10,$$

$$Y_{31} + Y_{34} + Y_{35} = 15,$$

$$Y_{42} + Y_{46} + Y_{43} = 15,$$

$$Y_{13} + Y_{24} + Y_{31} + Y_{42} + 8 \cdot 0,5 \mu = 20,$$

$$Y_{35} + Y_{46} + Y_{53} + Y_{64} + 8(0,5 + 0,5) \mu = 10.$$

Dla każdego rozważanego przegubu plastycznego, zgodnie z (3.4), mamy:

$$Y_i \leq 5 - (-5) = 10, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Tak sformułowany problem rozwiązano metodą sympleksową na maszynie matematycznej MIŃSK 1. Otrzymany współczynnik nośności granicznej wynosi $\mu_G = 2,5$.

Rysunek 3b przedstawia wykresy momentów zginających dla ramy obciążonej zgodnie ze schematem podanym na rys. 3a, lecz dla obciążenia granicznego; obciążenie to otrzymujemy zwiększając 2,5-krotnie wartości sił przedstawionych na rys. 3a.

3.2. Sposób sformułowania zagadnienia w ujęciu metody kinematycznej podano w pracy TANAKI [20] dla obciążeń prostych i nieproporcjonalnych. Przypadek, gdy układ poddany jest obciążeniom nieproporcjonalnym (zagadnienie dostosowania) omówimy w punkcie 3.4.

Założmy, że na ramę działa obciążenie skupione. Niech ponadto spełnione będą postulaty a-f omówione w punkcie 3.1. Postulat małych odkształceń pozwala zamiast zasady mocy przygotowanych stosować zasadę prac przygotowanych. Z definicji kinematycznie dopuszczalnego mnożnika obciążenia μ_k [21] mamy:

$$(3.11) \quad \mu_k = \frac{\sum_i M_{oi} |\theta_i|}{\sum_k P_k \delta_k} \quad \text{dla} \quad \sum_k P_k \delta_k > 0,$$

gdzie:

$M_{oi}(\theta_i)$ — moment graniczny (kąt obrotu przygotowany) w i ,

$P_k(\delta_k)$ — obciążenie zewnętrzne (przemieszczenie przygotowane) w k ; przez i — oznaczono przekroje, w których mogą powstać przeguby plastyczne, a przez k punkty przyłożenia obciążenia zewnętrznego.

Niech dalej

$$(3.11.1) \quad m = \frac{1}{M_0} \sum_k P_k \delta_k,$$

gdzie w (3.11.1) M_0 zdefiniowano następująco:

$$(3.11.2) \quad M_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i M_{oi} |\theta_i|.$$

Oznaczmy przez M_i dowolny moment zginający w przekroju i , przy czym otrzymane w ten sposób pole momentów równoważy obciążenie zewnętrzne. Zgodnie z zasadą prac przygotowanych mamy dla pola kinematycznie dopuszczalnego:

$$(3.11.3) \quad \sum_k P_k \delta_k = \sum_i M_i \theta_i.$$

Z (3.11.1) i (3.11.3) otrzymujemy:

$$(3.12) \quad m = \frac{1}{M_0} \sum_i M_i \theta_i = \frac{1}{\mu_k}.$$

Dla ramy n -krotnie statycznie niewyznaczalnej uzyskujemy n niezależnych rozkładów momentów resztkowych; istnieje więc n zależności między kątami obrotu θ_i . Oznaczając przez R_i^α α -ty moment resztkowy w i , na mocy zasady prac przygotowanych otrzymujemy:

$$(3.13) \quad \sum_i R_i^\alpha \theta_i = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n.$$

Z równań (3.11.2), (3.12) i (3.13) mamy:

$$(3.14) \quad \sum_i |\vartheta_i| = 1, \quad \sum_i r_i^\alpha \vartheta_i = 0$$

oraz

$$(3.15) \quad m = \sum_i n_i \vartheta_i.$$

W równaniach (3.14) i (3.15) wprowadzono następujące nowe wielkości

$$(3.15.1) \quad \vartheta_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_{0i}}{M_0} \theta_i, \quad r_i^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R_i^\alpha}{M_{0i}}, \quad n_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{M_i}{M_{0i}}.$$

W celu spełnienia warunku nieujemności (por. (2.3), rozdz. 2) wystarczy przyjąć $\vartheta_i = \vartheta_i^+ - \vartheta_i^-$, gdzie $\vartheta_i^+ \geq 0$, $\vartheta_i^- \geq 0$. Tym samym problem sprowadzony został do znalezienia maximum formy (3.15) przy ograniczeniach (3.14). Z równania bowiem (3.12) wynika, że $\max m = \frac{1}{\min \mu_k}$, skąd $\mu_G = \frac{1}{\max m}$, co jest zgodne z odpowiednimi twierdzeniami, por. [21], [28], teorii stanów granicznych. Maximum formy m można obliczyć przy pomocy dualnej metody sympleksowej.

Jako prosty przykład rozważmy ramę, przedstawioną na rys. 4a, dwukrotnie statycznie niewyznaczalną, o 4 krytycznych przekrojach; istnieją więc dwa zbiory rozkładów momentów resztkowych.

Dowolny rozkład momentów będących w równowadze z danym obciążeniem zewnętrznym oraz dwa zbiory momentów resztkowych można otrzymać zamieniając daną ramę na układ statycznie wyznaczalny. Możemy to uzyskać przez wstawienie dwu przegubów (rys. 4b-d). Rysunek 4b obrazuje rozkład momentów od danego obciążenia.

$$(3.16) \quad M_1 = -M_0, \quad M_2 = M_0, \quad M_3 = M_4 = 0.$$

Rozkłady momentów zginających pochodzących od momentów działających w przegubach α i β przedstawiają odpowiednio, rys. 4c i 4d. Stąd resztkowe momenty R_i^α oraz R_i^β , $i = 1, 2, 3, 4$ wynoszą:

$$(3.16.1) \quad R_1^\alpha = 3M_0, \quad R_2^\alpha = -\frac{5}{2}M_0, \quad R_3^\alpha = 2M_0, \quad R_4^\alpha = -M_0,$$

$$(3.16.2) \quad R_1^\beta = -3M_0, \quad R_2^\beta = 2M_0, \quad R_3^\beta = -M_0, \quad R_4^\beta = 2M_0.$$

Z rys. 4a widać, że momenty plastyczne w interesujących nas przekrojach krytycznych wynoszą:

$$(3.16.3) \quad M_{01} = M_{02} = 2M_0, \quad M_{03} = M_{04} = M_0.$$

Z równań (3.15.1), (3.16), (3.16.1), (3.16.2) i (3.16.3) otrzymujemy:

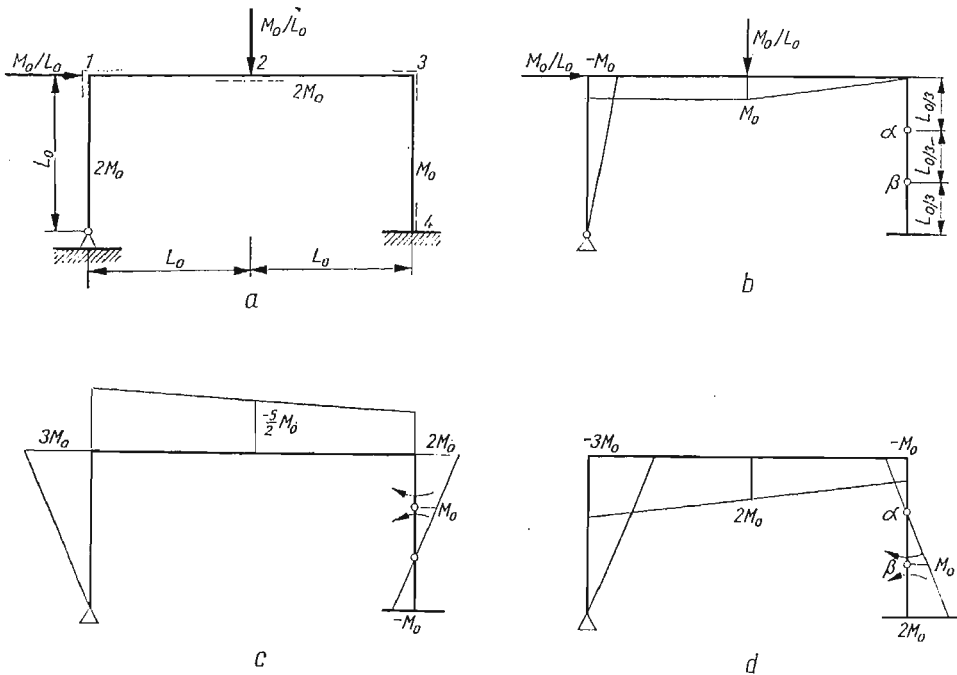
$$r_1^\alpha = \frac{3}{2}, \quad r_2^\alpha = -\frac{5}{2}, \quad r_3^\alpha = 2, \quad r_4^\alpha = -1,$$

$$r_1^\beta = -\frac{3}{2}, \quad r_2^\beta = 1, \quad r_3^\beta = -1, \quad r_4^\beta = 2,$$

$$n_1 = -\frac{1}{2}, \quad n_2 = \frac{1}{2}, \quad n_3 = n_4 = 0.$$

Dla tych wartości, stosując dualną metodę sympleksową, otrzymano $\max m = \frac{2}{7}$, czyli

$$\mu_G = \frac{7}{2}.$$



Rys. 4

3.3. CHARNES, LEMKE, ZIENKIEWICZ [6] po raz pierwszy udowodnili, iż sformułowania statyczne i kinematyczne dla układów prętowych stanowią parę zadań dualnych programowania liniowego.

Rozpatrzmy układ obciążony siłami skupionymi, które będziemy charakteryzować wektorem $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_p)^T$.

Z zasady prac przygotowanych mamy:

$$(3.17) \quad \mathbf{M}^T \boldsymbol{\theta} = \mu \mathbf{P}^T \boldsymbol{\delta},$$

gdzie lewa strona przedstawia pracę dysypowaną w przegubach plastycznych na kątach obrotu $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$, zaś prawa — pracę sił zewnętrznych na przemieszczeniach $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_p)^T$; $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)^T$ jest wektorem charakteryzującym momenty w układzie, μ jest mnożnikiem obciążenia, zaś symbol T oznacza transponowanie macierzy. Wzór (3.17) podany jest w zapisie macierzowym. Korzystając z reguły mnożenia macie-

rzowego otrzymujemy zależność: $\sum_{i=1}^n M_i \theta_i = \mu \sum_{k=1}^p P_k \delta_k$. Warunki zgodności można zapisać w postaci

$$(3.18) \quad \mathbf{C} \boldsymbol{\theta} = 0,$$

gdzie \mathbf{C} przedstawia macierz zgodności.

Z warunków geometrycznych wynika, że

$$(3.19) \quad \mathbf{P}^T \boldsymbol{\delta} = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}.$$

Z (3.19) i (3.17) otrzymujemy

$$(3.20) \quad (\mathbf{M}^T - \mu \mathbf{a}^T) \boldsymbol{\theta} = 0$$

[o ile zachodzi (3.18)].

Korzystając z lematu Farkasa (por. [34]) wnioskujemy, że istnieje wektor \mathbf{u} taki, iż

$$(3.21) \quad \mathbf{M}^T - \mu \mathbf{a}^T = \mathbf{u}^T \mathbf{C}.$$

Otrzymaliśmy więc najogólniejszą, parametryczną postać równań wyrażających statyczną równowagę układu (parametrem jest wektor \mathbf{u}). Jeśli obroty odpowiadają możliwemu (tzn. spełniającemu warunki kinematycznej zgodności) mechanizmowi zniszczenia, to:

$$\sum_j M_{0j} |\theta_j| = \mu \mathbf{P}^T \boldsymbol{\delta} = \mu \mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta},$$

gdzie M_{0j} oznacza moment graniczny w j -tym przegubie. Uwzględniając definicję kinematycznie dopuszczalnego mnożnika obciążenia otrzymujemy zadanie programowania nieliniowego:

znaleźć

$$\min \frac{\sum_j M_{0j} |\theta_j|}{\mathbf{a}^T \boldsymbol{\theta}},$$

przy ograniczeniach

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\theta} = 0.$$

Powyższe zadanie można sformułować jako zadanie programowania liniowego następująco:

znaleźć

$$(3.22) \quad \min \mathbf{M}_0^T (\boldsymbol{\theta}^+ + \boldsymbol{\theta}^-),$$

przy ograniczeniach

$$(3.22.1) \quad \mathbf{a}^T (\boldsymbol{\theta}^+ - \boldsymbol{\theta}^-) = 1,$$

$$(3.22.2) \quad \mathbf{C} (\boldsymbol{\theta}^+ - \boldsymbol{\theta}^-) = 0,$$

$$(3.22.3) \quad \boldsymbol{\theta}^+ \geq 0, \quad \boldsymbol{\theta}^- \geq 0.$$

Zadanie dualne ma postać:
znaleźć

$$(3.23) \quad \max \mu$$

przy ograniczeniach

$$(3.23.1) \quad \mu \mathbf{a}^T + \mathbf{u}^T \mathbf{C} \leq \mathbf{M}_0^T,$$

$$(3.23.2) \quad -\mu \mathbf{a}^T - \mathbf{u}^T \mathbf{C} \leq \mathbf{M}_0^T.$$

Jeśli uwzględnimy (3.21), to zależności (3.23)–(3.23.2) przybiorą postać:
znaleźć

$$(3.24) \quad \max \mu$$

przy ograniczeniach

$$(3.24.1) \quad -\mathbf{M}^T + \mu \mathbf{a}^T + \mathbf{u}^T \mathbf{C} = 0,$$

$$(3.24.2) \quad \mathbf{M}^T \leq \mathbf{M}_0^T,$$

$$(3.24.3) \quad -\mathbf{M}^T \leq \mathbf{M}_0^T.$$

Związki (3.24)–(3.24.3) są niczym innym, jak wypowiedzią, w terminach liniowego programowania, twierdzenia o dolnej granicy obciążenia.

ČYRAS w pracy [37] omówia również problem dualności, przy czym wychodzi on z dwi-istości twierdzeń o maksimum mocy obciążenia zewnętrznego przy odpowiednich ograniczeniach na momenty resztkowe i minimum prędkości dysypacji energii przy ograniczeniach na prędkości przemieszczeń. Zagadnienie to jest również przedstawione przez tegoż autora w [38].

3.4. Problem dostosowywania dla ram rozpatrzył TANAKA [20]. Twierdzenie o dostosowywaniu dla ram sformułujemy następująco: jeśli istnieją momenty resztkowe R_i spełniające nierówności

$$(3.25) \quad \begin{aligned} R_i + \mu M_{ispr}^+ &\leq M_{0i}, \\ -R_i - \mu M_{ispr}^- &\leq M_{0i}, \end{aligned}$$

to nastąpi dostosowanie ramy; R_i oznacza moment resztkowy w przekroju i , μ oznacza mnożnik obciążenia, natomiast M_{ispr}^+ i M_{ispr}^- oznaczają, odpowiednio, maksymalny i minimalny moment sprężysty w przekroju i dla każdej kombinacji danych obciążeń (stosujemy tutaj oznaczenia jak przy omawianiu metody kinematycznej w ujęciu TANAKI).

Twierdzenie powyższe jest oczywiście wnioskiem z uogólnionego twierdzenia Melana (por. [11]). Oznaczmy przez s taki mnożnik obciążenia, że dla $\mu \leq s$ układ dostosowuje się, natomiast dla $\mu > s$ nie. Autor podaje prosty sposób wyznaczania mnożnika s , który wynika z twierdzenia, będącego zarazem wygodnym sformułowaniem zadania programowania liniowego dla problemu dostosowywania:

jeśli należy znaleźć $\max m$, gdzie

$$(3.26) \quad m = \frac{1}{M_0} \left(\sum_i M_{ispr}^+ \theta_i^+ - \sum_i M_{ispr}^- \theta_i^- \right), \quad M_0 = \sum_i M_{0i} \theta_i^+ + \sum_i M_{0i} \theta_i^-,$$

przy ograniczeniach

$$(3.26.1) \quad \sum_i R_i^+ \theta_i^+ - \sum_i R_i^- \theta_i^- = 0, \quad \theta_i^+ \geq 0, \quad \theta_i^- \geq 0,$$

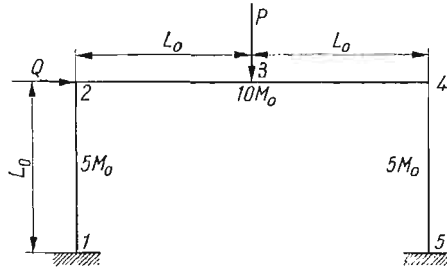
to

$$(3.26.2) \quad \max m = \frac{1}{s}.$$

Stąd otrzymujemy, że $s = \frac{1}{\max m}$.

Mnożnik s nosi nazwę mnożnika bezpiecznego (por. [14]). Celem ilustracji rozważań ogólnych TANAKA przedstawił rozwiązanie dla prostej ramy przedstawionej na rys. 5, w dwu przypadkach:

- 1) $0 \leq P \leq 12M_0/L_0, \quad 0 \leq Q \leq 7M_0/L_0,$
- 2) $0 \leq P \leq 12M_0/L_0, \quad -7M_0/L_0 \leq Q \leq 7M_0/L_0.$



Rys. 5

Otrzymano $s = 2$ dla obydwu przypadków. W pracy [20] sformułowano również problem projektowania ram o minimalnym ciężarze, przy czym projektowanie dotyczy nośności granicznej.

3.5. ČYRAS w swojej ciekawej książce [38], będącej niejako podsumowaniem dotychczasowych wyników w dziedzinie zastosowania programowania liniowego do obliczeń sprężysto-idealnie plastycznych, płaskich konstrukcji prętowych omówił również interesujące nas zagadnienie nośności granicznej. Wydaje się celowe przedstawienie w zwartej formie tego sformułowania, gdyż obejmuje ono — jako przypadki szczególne — nasze poprzednie rozważania.

3.5.1. Niech rozpatrywany układ ramowy będzie obciążony siłami skupionymi, które charakteryzować będziemy wektorem obciążenia $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_p)^T$, przy czym dla obciążeń zmiennych przyjmujemy następujące oznaczenia: $P_k \in [P_k^-, P_k^+]$ (przedział zmienności k -tej siły). Dla określoności autor zakłada, że $P_k^- \leq 0$, zaś $P_k^+ \geq 0$, $k = 1, \dots, p$. Oczywiście nie zawsze P_k^+ i P_k^- muszą być różnych znaków. Oznaczmy przez i , $i = 1, \dots, n$, numer przekroju, w którym może powstać przegub plastyczny. Wówczas momenty zginające w układzie charakteryzuje wektor $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_n)^T$.

Niech wektor $\mathbf{R} = (R_1, R_2, \dots, R_n)^T$ charakteryzuje momenty resztkowe. Momenty graniczne wygodnie jest przedstawić w postaci wektora $\mathbf{M}_0 = (M_{01}, \dots, M_{0n})^T$, a pole prędkości odkształceń plastycznych wektorem $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$; θ_i oznaczać będzie prędkość zmian kąta obrotu w i -tym przegubie plastycznym. Prędkość przemieszczeń scharakteryzujemy wektorem $\boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-l})^T$, gdzie l oznacza stopień statycznej

niewyznaczalności układu. Ponadto zakładamy, że spełnione są postulaty a-f przedstawione w punkcie 3.1.

Wiadomo, że warunki statycznej zgodności sił wewnętrznych i obciążeń zewnętrznych można zapisać w następującej, macierzowej postaci:

$$(3.27) \quad \mathbf{C}^T \mathbf{M} = \mathbf{P},$$

natomiast warunki zgodności kinematycznej prędkości przemieszczeń i prędkości odkształceń zależnością

$$(3.28) \quad \mathbf{C} \mathbf{\Phi} = \mathbf{\theta},$$

gdzie $\mathbf{C} = ||c_{ij}||$ oznacza macierz współczynników zgodności, \mathbf{C}^T jest macierzą transponowaną macierzy \mathbf{C} .

Pole momentów resztkowych będziemy nazywać:

a) dopuszczalnym, jeśli w sumie z maksymalnymi momentami sprężystymi nie przekracza momentów granicznych,

b) statycznie możliwym, jeśli spełnia warunki równowagi,

c) statycznie dopuszczalnym, jeśli spełnia warunki a) i b).

Korzystając z twierdzenia, które oznaczymy symbolem I: *Spośród statycznie dopuszczalnych pól momentów resztkowych w układzie, w stanie granicznym rzeczywistym jest to, przy którym moc cyklu obciążeń zewnętrznych jest maksymalna* (por. KACZANOW [28]), można sformułować następujące zadanie programowania liniowego:

znaleźć

$$(3.29) \quad \max \left(\sum_k P_k^+ \delta_k^+ - \sum_k P_k^- \delta_k^- \right),$$

przy ograniczeniach

$$(3.30) \quad \sum_k b_{ik}^+ P_k^+ + \sum_k b_{ik}^- P_k^- + R_i \leq M_{oi},$$

$$(3.30.1) \quad - \sum_k b_{ik}^- P_k^+ - \sum_k P_k^- b_{ik}^+ - R_i \leq M_{oi},$$

$$(3.30.2) \quad - \sum_i c_{ij} R_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-l,$$

$$(3.30.3) \quad P_k^+ \geq 0, \quad -P_k^- \geq 0, \quad k = 1, \dots, p,$$

gdzie δ_k^+ (δ_k^-) oznacza prędkość przemieszczeń w kierunku siły P_k^+ (P_k^-), natomiast b_{ik} są elementami macierzy wpływu. Przyjmujemy, że $\delta_k^+ \geq 0$, $\delta_k^- \geq 0$.

Wyrażenie $\sum_k P_k^+ \delta_k^+ - \sum_k P_k^- \delta_k^-$ oznacza moc sił zewnętrznych, warunek (3.30.2) wyraża zgodność statyczną. Trzeba jeszcze zinterpretować związki (3.30) i (3.30.1). Moment w przekroju i , w zakresie sprężystym, można wyrazić jako $M_{i\text{spr}} = \sum_k b_{ik} P_k$ (b_{ik} są elementami macierzy wpływu).

Jeśli oznaczymy przez

$$(3.31) \quad b_{ik}^+ = \begin{cases} b_{ik} & \text{dla } b_{ik} > 0, \\ 0 & \text{dla } b_{ik} \leq 0, \end{cases}$$

$$(3.31.1) \quad b_{ik}^- = \begin{cases} 0 & \text{dla } b_{ik} \geq 0, \\ b_{ik} & \text{dla } b_{ik} < 0, \end{cases}$$

to ekstremalne wartości momentów (zakładając pracę sprężystą układu) przyjmą postać

$$(3.32) \quad M_{ispr}^+ = \sum_k b_{ik}^+ P_k^+ + \sum_k b_{ik}^- P_k^-,$$

$$(3.32.1) \quad M_{ispr}^- = \sum_k b_{ik}^+ P_k^- + \sum_k b_{ik}^- P_k^+.$$

Dla dopuszczalnego pola momentów resztkowych powinny być spełnione zależności

$$(3.33) \quad -M_{0i} - M_{ispr}^- \leq R_i \leq M_{0i} - M_{ispr}^+, \quad i = 1, \dots, n.$$

Uwzględniając w (3.33) związki (3.32) i (3.32.1) otrzymujemy statyczne (w sensie twierdzenia I) sformułowanie problemu nośności granicznej w terminach programowania liniowego (3.29)–(3.30.3). Oczywiście poszukujemy przedziału zmienności każdej z sił P_k .

3.5.2. Dla przypadku obciążeń proporcjonalnych, tzn. gdy $P_k^+ = -P_k^- = \mu P_k^0$ (μ — mnożnik obciążenia, P_k^0 — stała wartość dla każdego k), przyjmując ponadto $\sum_k P_k^0 (\delta_k^+ - \delta_k^-) = 1$ [można tak przyjąć, gdyż δ_k^+ , δ_k^- nie wchodzą do związków (3.30)–(3.30.3)], otrzymujemy z (3.29) — (3.30.3) po prostych przekształceniach zadanie:

znaleźć

$$\max \mu,$$

przy ograniczeniach

$$M_i \leq M_{0i},$$

$$-M_i \leq M_{0i},$$

$$\mu d_j - \sum_i c_{ij} M_i = 0, \quad \mu \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n-l,$$

gdzie przyjęto $d_j = \sum_i c_{ij} \sum_k P_k^0 b_{ik}$, $M_i = R_i + \mu \sum_k P_k^0 b_{ik}$. Sformułowanie to jest oczywiście wypowiedzią twierdzenia o dolnej granicy obciążenia.

3.5.3. Udowodnimy, iż ze związków (3.29)–(3.30.3) można wyprowadzić omówione już twierdzenie o dostosowaniu ram [por. (3.25)]. Interesować nas będzie tylko pole dopuszczalne, więc warunku (3.30.2) nie będziemy brać pod uwagę.

Położmy $P_k^+ = \mu P_k^{0+}$, $P_k^- = \mu P_k^{0-}$, gdzie μ jest mnożnikiem obciążenia, zaś $P_k^{0+} \geq 0$, $P_k^{0-} \leq 0$ są ustalone. Wówczas kładąc $\sum_k P_k^{0+} \delta_k^+ - \sum_k P_k^{0-} \delta_k^- = 1$, z (3.29), (3.30), (3.30.1),

(3.30.3), otrzymujemy zadanie:

znaleźć

$$\max \mu$$

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} R_i + \mu M_{ispr}^+ &\leq M_{oi}, \\ -R_i - \mu M_{ispr}^- &\leq M_{oi}, \\ \mu &\geq 0, \end{aligned}$$

co właśnie jest twierdzeniem o dostosowaniu.

Wydaje się, iż ostatni wniosek nie został do tej pory nigdzie przedstawiony.

3.5.4. Przejdźmy obecnie do sformułowania kinematycznego (w sensie poniższego twierdzenia II) problemu nośności granicznej (ČYRAS [38]).

Pole prędkości przemieszczeń będziemy nazywać:

a) dopuszczalnym, jeśli składowe tego pola są ograniczone (indywidualnie lub w pewnych kombinacjach),

b) kinematycznie możliwym, jeśli spełnia warunki zgodności kinematycznej,

c) kinematycznie dopuszczalnym, jeśli spełnia a) i b).

Zadanie programowania liniowego zbudujemy, wykorzystując twierdzenie II: *Spośród kinematycznie dopuszczalnych pól prędkości przemieszczeń rzeczywistym jest pole, któremu odpowiada minimalna moc dysypowana.*

W sformułowaniu kinematycznym, niewiadomymi są prędkości odkształceń i przemieszczeń, związane warunkami zgodności kinematycznej. Zamiast macierzy zgodności można rozpatrywać macierz wpływu, gdyż wówczas również będą spełnione warunki zgodności. Tak więc prędkość przemieszczenia ϑ_k w kierunku działania k -tej siły można zapisać następująco:

$$(3.34.1) \quad \vartheta_k^+ = \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^+ - \sum_i b_{ik}^- \theta_i^-,$$

$$(3.34.2) \quad \vartheta_k^- = \sum_i b_{ik}^- \theta_i^+ - \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^-, \quad k = 1, \dots, p; \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $\theta_i = \theta_i^+ - \theta_i^-$, $\theta_i^+ \geq 0$, $\theta_i^- \geq 0$.

Zgodnie z określeniem dopuszczalnego pola prędkości przemieszczeń istnieją ograniczenia, które oznaczymy przez $\delta_k^+ \geq 0$, $\delta_k^- \geq 0$, czyli pole to będzie spełniać warunki

$$(3.35.1) \quad \vartheta_k^+ \geq \delta_k^+,$$

$$(3.35.2) \quad -\vartheta_k^- \geq \delta_k^-, \quad k = 1, \dots, p.$$

Tak więc na podstawie ostatniego twierdzenia, zależności (3.34.1)–(3.35.2) i określenia pola kinematycznie dopuszczalnego, otrzymujemy zadanie:

znaleźć

$$(3.36) \quad \min \left[\sum_i M_{oi} (\theta_i^+ + \theta_i^-) \right],$$

przy ograniczeniach

$$(3.37) \quad \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^+ - \sum_i b_{ik}^- \theta_i^- \geq \delta_k^+,$$

$$(3.37.1) \quad - \sum_i b_{ik}^- \theta_i^+ + \sum_i b_{ik}^+ \theta_i^- \geq \delta_k^-,$$

$$(3.37.2) \quad \theta_i^+ - \theta_i^- - \sum_j c_{ij} \vartheta_j = 0, \quad j = 1, \dots, n-l,$$

$$(3.37.3) \quad \theta_i^+ \geq 0, \quad \theta_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie $\sum_i M_{oi}(\theta_i^+ + \theta_i^-)$ oznacza moc dysypowaną, zaś związki (3.37.2) wyrażają warunki kinematycznej zgodności.

Modele (3.36)–(3.37.3) oraz (3.29)–(3.30.3) stanowią parę zadań dualnych.

W pracy [36] ČYRAS rozpatrywał związki między modelami projektowania optymalnego a modelami, w których poszukujemy obciążenia granicznego [te ostatnie, to zadania (3.29)–(3.30.3), (3.36)–(3.37.3)]. Okazuje się, iż tylko dla obciążeń proporcjonalnych modele te są równoważne, tzn. z modelu projektowania optymalnego otrzymujemy obciążenie graniczne i na odwrót (por. również [38]).

W książce [38] omówiono również zagadnienie optymalnego projektowania na minimum ciężaru i wyznaczania ciężaru oraz określania przemieszczeń poprzedzających zniszczenie.

3.6. Wykorzystanie danych eksperymentalnych dla sformułowania zadania nośności granicznej rozpatrzyli GYLYS, ZAKAREVIČIUS, ČYRAS [26].

W pracy przedstawiono modyfikację zadania programowania liniowego, w oparciu o znajomość rzeczywistego mechanizmu zniszczenia, dla przypadku obciążeń prostych. Zbadanie modelu danego układu prętowego daje nam informację co do przekrojów, w których tworzą się przeguby plastyczne; innymi słowy poznajemy rzeczywisty mechanizm zniszczenia. Znajomość tego mechanizmu pozwala zmodyfikować zarówno metodę statyczną, jak i kinematyczną. Modyfikacja polega na sprowadzeniu zadania programowania liniowego do układu równań liniowych, co upraszcza rozwiązanie.

Rozpatrzmy zastosowanie danych eksperymentalnych do metody statycznej, dla której model matematyczny przedstawiono w punkcie 3.5.2. Załóżmy, iż po eksperymencie okazało się, że utworzył się całkowity mechanizm zniszczenia, tzn. powstało $l+1$ przegubów plastycznych (l — stopień statycznej niewyznaczalności). Oznacza to, że $l+1$ nierówności przedstawiających warunki plastyczności — są to nierówności typu $M_{oi} \geq M_i$, $-M_i \leq M_{oi}$ — przechodzi w równości. Ponieważ mamy $n-l$ równań opisujących zgodność statyczną, więc w sumie otrzymujemy $l+1+n-l = n+1$ liniowo niezależnych równań. Liczba niewiadomych również wynosi $n+1$ (mnożnik obciążenia oraz n wartości momentów M_i , $i = 1, \dots, n$). Ale ponieważ mechanizm zniszczenia jest całkowity więc znamy $l+1$ momentów M_i . Są one oczywiście równe momentom granicznym M_{oi} . Łatwo udowodnić, że pozostałych $n-l$ niewiadomych wyznaczyć można z następującego układu równań:

$$(3.37.4) \quad \begin{pmatrix} \mu \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_1 \tilde{\mathbf{M}}_0,$$

gdzie $\tilde{\mathbf{D}} = \|\mathbf{D}, -\tilde{\mathbf{C}}\|$ jest macierzą stopnia $n-l$, $\mathbf{D} = (d_1, \dots, d_{n-l})^T$, macierz $\tilde{\mathbf{C}}$ otrzymujemy z macierzy \mathbf{C}^T przez wykreślenie kolumn odpowiadających momentom w $l+1$ przegubach plastycznych, macierz $\tilde{\mathbf{C}}_1$ powstaje z macierzy \mathbf{C}^T przez wykreślenie kolumn,

które odpowiadają momentom mniejszym od granicznych. Macierz $\tilde{\mathbf{C}}$ ma $(n-l)$ wierszy i $(n-l-1)$ kolumn, zaś macierz $\tilde{\mathbf{C}}_1$ jest macierzą o $(n-l)$ wierszach i $(l+1)$ kolumnach. Wektor $\tilde{\mathbf{M}}$ o $(n-l-1)$ składowych powstaje z wektora $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)^T$ przez wykreślenie momentów $M_i = M_{0i}$, natomiast wektor $\tilde{\mathbf{M}}_0$ składa się z tych elementów wektora \mathbf{M}_0 , które odpowiadają przegubom plastycznym (czyli wektor $\tilde{\mathbf{M}}_0$ ma $l+1$ składowych). Macierz $\tilde{\mathbf{D}}^{-1}$ jest macierzą odwrotną macierzy $\tilde{\mathbf{D}}$. Jak rozumieć słowo «odpowiadających»? Oto wyjaśnienie: jeśli np. w przekroju oznaczonym numerem 1 powstaje przegub plastyczny ($M_1 = M_{01}$), to w macierzy \mathbf{C}^T wykreślamy (lub pozostawiamy) kolumnę pierwszą itd.

Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla metody kinematycznej z tym, że układ równań zawiera $n+1$ niewiadomych ($n-l$ prędkości przemieszczeń i $l+1$ prędkości odkształceń).

Przypadek, gdy model ulega zniszczeniu częściowemu (tzn. powstaje mniej niż $l+1$ przegubów plastycznych) formalnie nie różni się od przypadku zniszczenia całkowitego tylko dla metody statycznej. Dla metody kinematycznej otrzymuje się wówczas więcej równań niż niewiadomych. Dla znalezienia tych niewiadomych należy zbudować macierz odwrotną do macierzy odpowiadającej niezerowym niewiadomym, z której wykreślono wiersze odpowiadające równaniom zgodności kinematycznej dla przekrojów znajdujących się w części statycznie nieokreślonej.

W pracy [26] powyższe rozważania zilustrowano na przykładzie ramy przedstawionej na rys. 5, przy czym $Q = P$, $L_0 = 2,5$, zaś momenty graniczne wszystkich elementów są równe i wynoszą $M_0 = 1,0$. Model wykonano z polichlorku winylu. Okazało się, iż w punkcie przyłożenia siły Q (tzn. w przekroju 2) nie powstaje przegub plastyczny. Mechanizm zniszczenia jest oczywiście całkowity, gdyż liczba przegubów plastycznych wynosi 4, zaś $l+1 = 3+1 = 4$. Wartości momentów w przekrojach 1, 3, 4, 5 są więc równe granicznym. Dla znalezienia pozostałych niewiadomych tzw. momentu M_2 , intensywności obciążenia granicznego, prędkości odkształceń i przemieszczeń, rozważono metody statyczną i kinematyczną, korzystając z poczynionych uprzednio uwag.

3.7. CERADINI, GAVARINI [3] rozpatrzyli belkę ciągłą i łuk paraboliczny. RÄUTU, CHIROIU [16], [17] omówili problem nośności granicznej i minimalnego ciężaru, natomiast w pracy NICHOLLSA [15] omówiono zagadnienie minimalnego ciężaru oraz kosztu konstrukcji przy założeniu liniowej zależności między momentem granicznym M_0 a jednostkowym ciężarem.

3.8. Automatyczne obliczanie ram poprzedziło szersze zastosowanie programowania liniowego w rozważanych przez nas zagadnieniach. Problemy automatycznego obliczania ram omówione zostały w pracach HEYMANA [9], HEYMANA, PRAGERA [10], LIVESLEYA [13]. W pracach [9] i [10] rozpatrzono automatyczne obliczanie ram na minimalny ciężar, natomiast LIVESLEY przedstawił problem minimalnego ciężaru i wyznaczenia współczynnika nośności. Omówimy więc pracę LIVESLEYA.

Przyjmujemy następujące założenia:

- 1) na układ o ustalonej geometrii działają tylko obciążenia skupione,
- 2) układ składa się z elementów o stałych przekrojach,
- 3) wpływ sił normalnych i poprzecznych jest pomijalny,

4) moment graniczny M_0 każdego elementu jest proporcjonalny do jego przekroju poprzecznego.

Z założenia 4) wynika, że całkowity ciężar układu jest liniową funkcją momentów granicznych. Problem minimalnego ciężaru sprowadza się do minimalizacji tej funkcji przy pewnych ograniczeniach. Oznaczmy przez M_i , $i = 1, \dots, n$, momenty w przekrojach, w których mogą powstać przeguby plastyczne. Zbiór tych momentów dzielimy na grupy, przy czym każda grupa odpowiada przekrojom, które są równe. Ponieważ geometria układu jest znana, więc z każdą grupą będzie związana pewna długość. Wprowadźmy wielkość pomocniczą M'_i , którą otrzymujemy przez pomnożenie każdego momentu M_i przez długość l_i związaną z grupą, do której ten moment należy.

Niech układ będzie r -krotnie statycznie niewyznaczalny. Równania równowagi zapiszemy następująco:

$$(3.38) \quad M_i = \sum_k a_{ik} m_k + \overset{\circ}{M}_i,$$

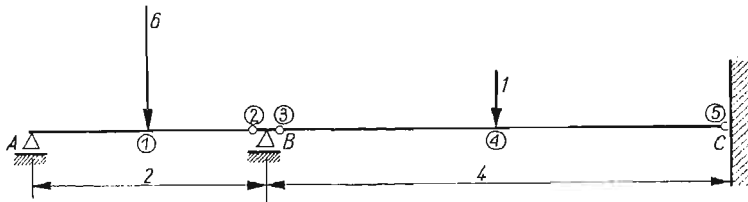
gdzie m_k , $k = 1, \dots, r$, to dowolne momenty.

Pomnóżmy (3.38) przez odpowiednie długości elementów. Wówczas otrzymujemy związek na momenty M'_i

$$(3.39) \quad M'_i = \sum_k A_{ik} m_k + \overset{\circ}{M}'_i.$$

Macierze $||a_{ik}||$, $||A_{ik}||$ zależą tylko od geometrii układu, natomiast wielkości $\overset{\circ}{M}_i$, $\overset{\circ}{M}'_i$ od obciążenia.

Rozważmy dla przykładu belkę przedstawioną na rys. 6,



Rys. 6

dla której przeguby plastyczne mogą powstać w punktach 1, 2, 3, 4, 5. Jeśli jako dowolne przyjmiemy momenty w punktach B i C wówczas z rozważań statycznych otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \\ M'_4 \\ M'_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_B \\ m_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczmy przez $M_{\bar{i}}$ maximum $|M_i|$, gdzie wskaźnik i przebiega daną grupę (tzn. grupę momentów odpowiadających określonemu przekrojowi). Wówczas $|M_{\bar{i}}| \geq |M'_i|$ (dla danej grupy).

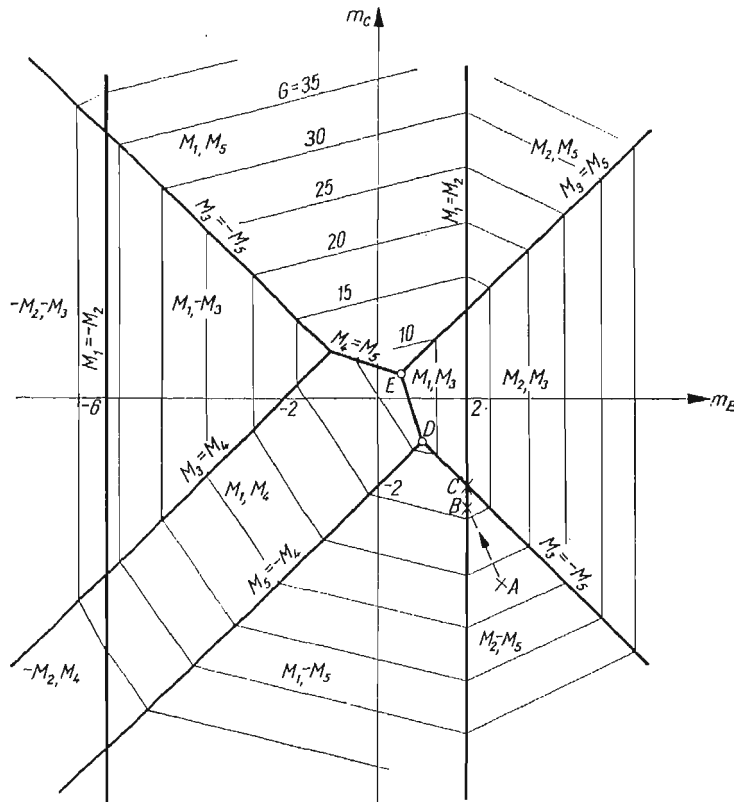
Oczywiście moment graniczny M_0 każdego pręta musi spełniać nierówność $M_0 \geq |M_{\bar{i}}|$. Układ będzie układem o minimalnym ciężarze, gdy $M_0 = |M_{\bar{i}}| (M_0 l_{\bar{i}} = |M_{\bar{i}}|)$. Taki układ będziemy nazywać projektem krytycznym. Będzie on posiadał w każdej grupie przynajmniej jeden przegub plastyczny.

Ciężar G układu — uwzględniając założenie 4) i zależności (3.39) — obliczymy ze wzoru

$$(3.40) \quad G = \sum_{\bar{i}} |M_{\bar{i}}'| = \sum_{\bar{i}} \left| \sum_k A_{\bar{i}k} m_k + \dot{M}_{\bar{i}}' \right| = \sum_{\bar{i}} \left(\sum_k A_{\bar{i}k} m_k + \dot{M}_{\bar{i}}' \right) \operatorname{sgn} M_{\bar{i}}'.$$

Jeśli można znaleźć zbiór momentów m_k , $k = 1, \dots, r$ minimalizujących funkcję $G(m_k)$, wówczas projekt krytyczny będzie układem o najmniejszym ciężarze.

Dla znalezienia minimum funkcji G , LIVESLEY proponuje dwie metody iteracyjne, podobne nieco do metody sympleksowej programowania liniowego. Nie będziemy ich tutaj przytaczać, natomiast omówimy ich sens geometryczny.



Rys. 7

Można założyć, iż momenty m , definiują r -wymiarową przestrzeń euklidesową. Równania (3.38) wiążą z każdym jej punktem układ momentów M_i , a tym samym pewną wartość funkcji G . Podzielmy przestrzeń na obszary, których brzegami są hiperpłaszc-

czyzny. Na każdej takiej hiperpłaszczyźnie albo dwa momenty z grupy mają równe moduły, albo moment o maksymalnym module zmienia znak. Minimum funkcja G osiąga w pewnym punkcie (wierzchołku), w którym przecina się r hiperpłaszczyzn. W celu znalezienia tego minimum wychodzimy z pewnego punktu początkowego, a następnie poruszamy się w sposób dyskretny aż do osiągnięcia minimum.

Powyższe rozważania dla przykładu z rys. 6 przedstawia rys. 7. W tym przypadku momenty m_k , $k = 1, 2$, tworzą przestrzeń dwuwymiarową. Na rys. 7 zaznaczono linie, na których $G = \text{const}$, a ponadto największe (co do modułu) wartości momentów w danym obszarze. Punktem początkowym metody iteracyjnej był punkt A . Minimum osiągnięte jest w punkcie E .

Przejdźmy do zagadnienia wyznaczania współczynnika obciążenia granicznego.

Niech $M_i'' = \frac{d^2 M_i}{M_{0i}}$, $i = 1, \dots, n$ gdzie M_{0i} jest momentem granicznym w i -tym przegubie.

Mamy teraz tylko jedną grupę, do której należą wskaźniki i . Niech \bar{i} oznacza taki wskaźnik spośród liczb $1, \dots, n$, dla którego $|M_i''|$ przyjmuje maximum. Dzieliąc równania (3.38) przez odpowiednie wartości M_{0i} otrzymujemy równanie

$$(3.39.1) \quad M_i'' = \sum_k B_{ik} m_k + \overset{\circ}{M}_i''.$$

Oznaczmy przez F funkcję postaci

$$(3.40.1) \quad F = |M_{\bar{i}}''| = \frac{|M_{\bar{i}}|}{M_{0\bar{i}}}, \quad \text{czyli} \quad \mu = \frac{M_{0\bar{i}}}{|M_{\bar{i}}|} = \frac{1}{F}.$$

Stąd wynika, że maximum μ jest osiągnięte, gdy $F = \text{min}$. Podobnie jak poprzednio, minimum to osiągnięte jest w wierzchołku, gdzie spełnionych jest r równości typu $|M_i''| = |M_{\bar{i}}''|$. W takim punkcie $r+1$ wartości M_i'' będzie mieć jednakowe moduły, odpowiada to $r+1$ przegubom plastycznym, potrzebnym do utworzenia mechanizmu. Gdy μ_{max} osiągnięte jest w większej liczbie punktów, wówczas mechanizm będzie miał mniej niż $r+1$ przegubów (zniszczenie częściowe).

4. Płyty

Problem nośności granicznej dla płyt z zastosowaniem programowania liniowego rozważono w pracach: KOOPMANA, LANCE'A [12], CERADINIEGO, GAVARINIEGO [3], [4], [5], BRUSIENCOWA, RZANICYNA [25], HOCHFELDA, CZERNIAWSKIEGO [27], TERECHINY [32], BORKAUSKASA, ČYRASA [2], [23], [24], [35], oraz WOLFENSBERGERA [22].

4.1. W pracy KOOPMANA, LANCE'A [12] sformułowano i rozwiązano zagadnienie nośności granicznej dla sztywnoplastycznych płyt kołowych i kwadratowych w przypadku swobodnego ich podparcia lub utwierdzenia.

W stanie osiowo-symetrycznym na element płyty kołowej działają obciążenia i wielkości wewnętrzne takie, jak przedstawiono na rys. 8; wówczas różniczkowe równowagi dla takich stanów ma postać

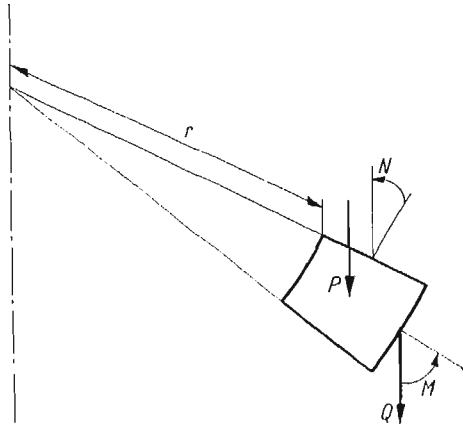
$$(4.1) \quad \frac{d}{dr} (rM) - N = -\frac{1}{2} Pr^2,$$

gdzie w (4.1) M , N — oznaczają, odpowiednio, promieniowy i obwodowy moment zginający; P oznacza równomierne obciążenie ciągłe, r — promień. Na rys. 8 Q oznacza siłę poprzeczną.

Równanie (4.1) można zapisać w formie bezwymiarowej

$$(4.1.1) \quad \frac{d}{dx} (xm) - n = -\frac{1}{2} \mu x^2.$$

W równaniu tym przyjęto oznaczenia: $\mu = \frac{PR^2}{M_0}$, $m = \frac{M}{M_0}$, $n = \frac{N}{N_0}$, $x = \frac{r}{R}$, $x \in [0,1]$; ponadto $M_0 = N_0 = (1/4)\sigma_0 h^2$, σ_0 — granica plastyczności, R jest zewnętrznym promieniem płyty, h jej grubością. W rozdziale drugim wspominaliśmy o tym, że dla zastosowania



Rys. 8

metody programowania konieczne jest opisanie konstrukcji w sposób dyskretny. W tym celu równanie (4.1.1) przedstawiamy w postaci różnicowej

$$(4.1.2) \quad s\delta \frac{m_{s+1} - m_{s-1}}{2\delta} + m_s - n_s = -\frac{1}{2} \mu (s\delta)^2,$$

przy czym $x_s = s\delta$, $m(x_s) = m_s$, $n(x_s) = n_s$, $s = 1, \dots, z$, $\delta = \frac{1}{z}$; tutaj z — oznacza liczbę podprzedziałów, na które podzielono przedział $[0,1]$.

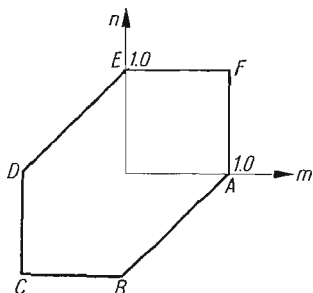
Zakładając, że płyta wykonana jest z materiału spełniającego warunek plastyczności Treski, otrzymujemy następujące wyrażenie analityczne (w terminach zmiennych dyskretnych m_s i n_s)

$$(4.1.3) \quad \begin{aligned} -1 &\leq m_s \leq 1, \\ -1 &\leq n_s \leq 1, \\ -1 &\leq m_s - n_s \leq 1, \quad s = 1, \dots, z. \end{aligned}$$

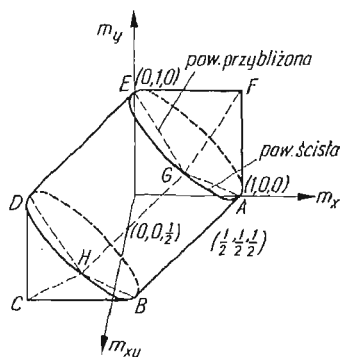
Równania (4.1.2) i nierówności (4.1.3) stanowią układ ograniczający. Przy tych ograniczeniach należy znaleźć maximum funkcji $f = \mu$. Przyjmując, że $z = 10$ ($\delta = 0,1$), a jako

warunek brzegowy $m_0 = n_0$ i dodatkowy warunek dla płyty swobodnie podpartej $m_{10} = 0$ otrzymano: $\mu_G = 5,97$ (wartość dokładna wynosi 6,00).

Dla płyty utwierdzonej uzyskano $\mu_G = 11,28$ (wartość dokładna 11,26). Jak widać z tego porównania, otrzymane przybliżone wartości nośności granicznej są praktycznie wystarczające. Dla płyty utwierdzonej, pola naprężeń odpowiadają punkty leżące na bokach DE , EF ; dla swobodnie podpartej — na boku EF sześcioboku Treski (rys. 9).



Rys. 9



Rys. 10

Rozważmy obecnie zagadnienie zginania płyty kwadratowej. Równanie różniczkowe równowagi elementu płyty ma postać

$$(4.2) \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial Y^2} + P = 0,$$

gdzie M_{xy} oznacza moment skręcający.

Przekształcając równanie (4.2) do postaci bezwymiarowej mamy

$$(4.2.1) \quad \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 6\mu = 0,$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$m_x = \frac{M_x}{M_0}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_0}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{M_0}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad y = \frac{Y}{L},$$

$\mu = \frac{PL^2}{6M_0}$; L — oznacza połowę długości płyty, M_0 — jak dla płyty kołowej (moment graniczny).

Zakładając, że płyta wykonana jest z idealnie plastycznego materiału, spełniającego warunek plastyczności Treski, otrzymujemy:

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} -1 &\leq \frac{m_x + m_y}{2} + \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1, \\ -1 &\leq \frac{m_x + m_y}{2} - \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1, \\ -1 &\leq 2 \left[\left(\frac{m_x - m_y}{2} \right)^2 + m_{xy}^2 \right]^{1/2} \leq 1. \end{aligned}$$

Rysunek 10 przedstawia interpretację geometryczną warunku plastyczności (4.2.2).

Dla sformułowania problemu w terminach programowania liniowego należy:

- 1) zamienić równanie (4.2.1) na równania różnicowe,
- 2) dokonać linearyzacji warunku plastyczności (4.2.2).

Przyjęto następującą zlinearyzowaną formę warunku plastyczności ($m_{xy} \geq 0$):

$$(4.2.3) \quad \begin{aligned} -1 &\leq m_x + m_{xy} \leq 1, \\ -1 &\leq m_y + m_{xy} \leq 1, \\ m_x - m_y + 2m_{xy} &\leq 1, \\ -m_x + m_y + 2m_{xy} &\leq 1. \end{aligned}$$

Ilustrację zlinearyzowanego warunku plastyczności (4.2.3) przedstawiono na rys. 10. Wzdłuż przekątnej płyty: $m_x = m_y$; na osiach $x = 0$, $y = 0$; $m_{xy} = 0$. Warunek brzegowy dla płyty swobodnie podpartej ma postać: $m_{xy} = 0$, dla $x = \pm 1$, $0 \leq y \leq 1$. W rezultacie, po dokonaniu dyskretyzacji, otrzymano $\mu_G = 0,969$ — dla płyty swobodnie podpartej, a $\mu_G = 1,596$ — dla płyty utwierdzonej.

Dla porównania warto przytoczyć maksymalną wartość statycznego mnożnika obciążenia podaną przez H. E. SHULLA i L. W. HU (1963): dla płyty swobodnie podpartej mnożnik ten równa się 0,826. Wartość minimalna kinematycznego współczynnika obciążenia (dla płyty swobodnie podpartej) wynosi 1. Tak więc błąd uzyskany drogą programowania liniowego jest bardzo mały.

4.2. CERADINI, GAVARINI [3] dla płyty uzbrojonej stosują warunki plastyczności Johansena. Wówczas dodatnie i ujemne momenty graniczne w funkcji kąta α zawartego między kierunkiem uzbrojenia x a danym kierunkiem wyrazimy następująco:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} M_0^+(\alpha) &= M_{0x}^+ \cos^2 \alpha + M_{0y}^+ \sin^2 \alpha, \\ M_0^-(\alpha) &= M_{0x}^- \cos^2 \alpha + M_{0y}^- \sin^2 \alpha, \end{aligned}$$

gdzie M_{0x}^+ , M_{0y}^+ , M_{0x}^- , M_{0y}^- przedstawiają momenty graniczne w dwu prostopadłych kierunkach uzbrojenia. Warunek plastyczności wyrazimy zależnościami:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha &= \begin{cases} M_0^+(\alpha) \\ -M_0^-(\alpha) \end{cases}, \\ \frac{d}{d\alpha} (M_x \cos^2 \alpha + M_y \sin^2 \alpha + M_{xy} \sin 2\alpha) &= \begin{cases} \frac{dM_0^+(\alpha)}{d\alpha} \\ -\frac{dM_0^-(\alpha)}{d\alpha} \end{cases}. \end{aligned}$$

Wprowadzając wielkości bezwymiarowe:

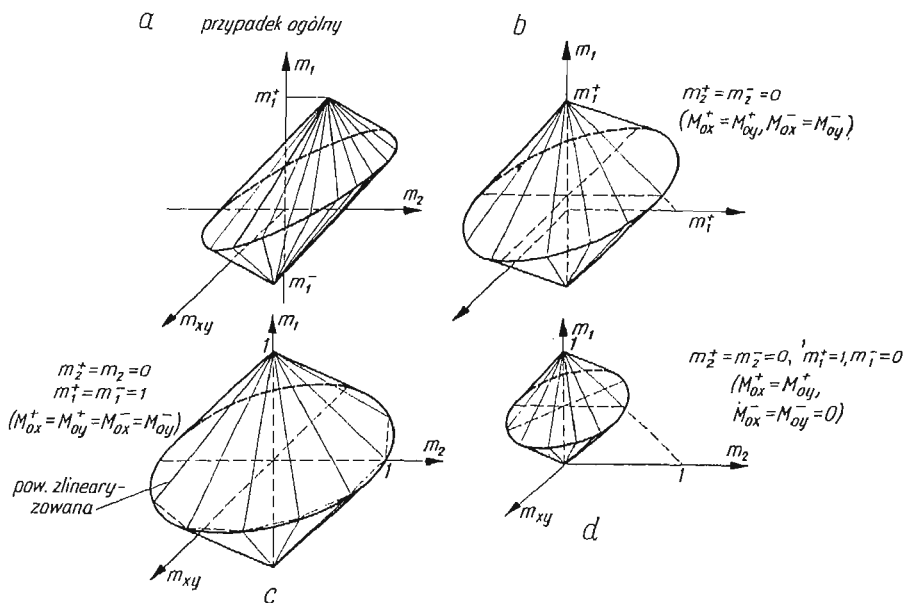
$$m_1 = \frac{M_x + M_y}{2M_p}, \quad m_1^\pm = \frac{M_{0x}^\pm + M_{0y}^\pm}{2M_p}, \quad m_2 = \frac{M_x - M_y}{2M_p}, \quad m_2^\pm = \frac{M_{0x}^\pm - M_{0y}^\pm}{2M_p}, \quad m_{xy} = \frac{M_{xy}}{2M_p}$$

(M_p oznacza moment graniczny), z (4.3.1) — po wyeliminowaniu α — otrzymujemy warunki plastyczności w postaci

$$(4.3.2) \quad \begin{aligned} (m_2 - m_2^+)^2 + m_{xy}^2 &= (m_1 - m_1^+)^2, \\ (m_2 + m_2^-)^2 + m_{xy}^2 &= (m_1 - m_1^-)^2. \end{aligned}$$

Związki (4.3.2) przedstawiają dwa stożki kołowe (rys. 11).

Z rys. 11 widać, w jaki sposób przeprowadzić linearyzację warunku plastyczności (np. przez wpisanie wielościanu o trójkątnych ścianach). W pracach [3] i [5] podano przykłady numeryczne dla płyt kwadratowych.



Rys. 11

4.3. Problem wyznaczenia dolnej granicy obciążenia płyt żelbetowych, dla prostych obciążeń i przy pominięciu wpływu sił normalnych i poprzecznych omówił WOLFENBERGER [22]. Omówił on również zagadnienie optymalnego uzbrojenia (czyli uzbrojenia o minimalnym ciężarze).

4.4. Zagadnienie nośności granicznej, z uwzględnieniem stacjonarnego pola temperatur, dla płyty okrągłej z otworem rozważono w pracy HOCHFELDA, CZERNIAWSKIEGO [27]. Rozpatrzmy taką płytę przedstawioną na rys. 12.

Równanie równowagi, ma postać

$$(4.4) \quad \frac{d}{dr}(rM) - N + \int_a^r p x dx - aT = 0.$$

Zgodnie z warunkiem plastyczności Treski mamy:

$$(4.4.1) \quad |M| \leq M_0, \quad |N| \leq M_0, \quad |M - N| \leq M_0, \quad M_0 = (1/4)\sigma_0 h^2.$$

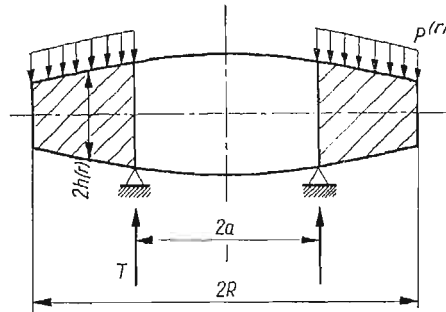
Równanie (4.4) przedstawiamy w postaci różnicowej

$$(4.4.2) \quad r_i M_i - \sum_{j=1}^i N_j d_j + \sum_{j=1}^i d_j \sum_{k=1}^j p_k r_k d_k - r_i a T + c = 0,$$

gdzie w (4.4.2) przyjęto oznaczenia: $d_i = \frac{1}{2}(\Delta r_{j-1} + \Delta r_j)$, $1 \neq j \neq i$, $d_1 = \frac{1}{2} \Delta r_1$, $d_i = \frac{1}{2} \Delta r_i$, c — jest stałą, którą wyznaczyć można z warunku brzegowego.

Przy warunkach (4.4.1) i (4.4.2) należy znaleźć maximum funkcji $z = p$ pamiętając o tym, że w warunku (4.4.1) zmienne M i N należy brać w postaci dyskretnej.

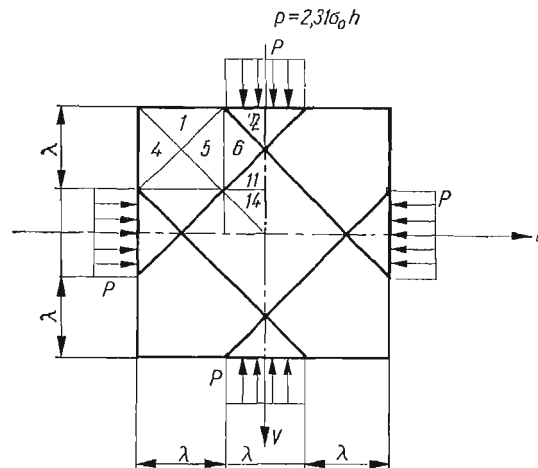
W pracy [27] omówiono również problem dostosowywania płyty kołowej, o utwierdzonym brzegu, poddanej działaniu cyklicznie zmiennego obciążenia i osiowo-symetrycznego



Rys. 12

poła temperatur. Podano wyniki dla przypadku, gdy obciążenie zewnętrzne jest stałe, a temperatura jest liniową funkcją zmiennej odnoszonej wzdłuż elementu normalnego do powierzchni środkowej płyty.

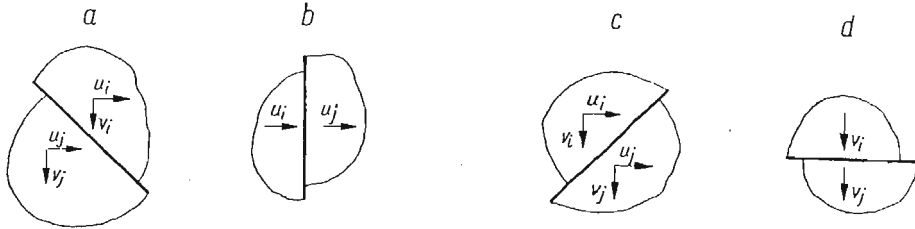
4.5. W pracy BRUSIENCOVA, RZANICYNA [25] przedstawiono możliwość zastosowania liniowego programowania parametrycznego do określenia nośności granicznej tarczy, w przypadku płaskiego stanu naprężenia.



Rys. 13

Niech w stanie równowagi granicznej linie załomu tworzą siatkę kwadratową z przekątnymi (rys. 13). Załóżmy dalej, że w stanie zniszczenia występują tylko skupione od-

kształcenia (wydłużenia lub skrócenia) po linii styku odpowiednich płyt 1, 2, ..., Skupionym wydłużeniem (skróceniem) ε nazywać będziemy wzajemne przemieszczenie punktów znajdujących się na cienkiej odkształcalnej warstwie w kierunku prostopadłym do warstwy. Poza warstwami płyty są sztywne.



Rys. 14

Przyjmijmy następujące oznaczenia: $u_i(v_i)$ — rzut przemieszczenia i -go płyta na oś poziomą (pionową). Dodatni kierunek dla u przyjmujemy w prawo, dla v — w dół. Wzajemne rozchodzenia się płyt uważamy za dodatnie, zbliżenie — ujemne. Wówczas skupione odkształcenie można zapisać w formie następującej (zgodnie z rys. 14a–d):

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= 0,5 \sqrt{2} (u_i - v_i - u_j + v_j), & \varepsilon_{ij} &= (-u_i + u_j), \\ \varepsilon_{ij} &= 0,5 \sqrt{2} (-u_i - v_i + u_j + v_j), & \varepsilon_{ij} &= (-v_i + v_j). \end{aligned}$$

Symetria i brak przesunięć po liniach styku płyt pozwalają wyrazić skupione odkształcenia przez 5 niezależnych przemieszczeń u i v płyt 1, 2, 5, 6, 11 i 14 (rys. 14). Prace sił wewnętrznych dla $\varepsilon_{ij} > 0$, $\varepsilon_{ij} < 0$ wyrażają kolejno zależności:

$$(4.6) \quad T = \sum_{i,j} \sigma'_0 \varepsilon_{ij} \frac{l_{ij}}{\lambda}, \quad T = - \sum_{i,j} \sigma'_0 \varepsilon_{ij} \frac{l_{ij}}{\lambda},$$

gdzie $\sigma'_0 = (2/\sqrt{3})h\lambda\sigma_0$, σ_0 — granica plastyczności (jednakowa dla rozciągania i ściskania), h — grubość tarczy, 3λ — szerokość tarczy kwadratowej, l_{ij} — długość linii załomu i -go oraz j -go płyta.

Niech

$$(4.6.1) \quad \varepsilon'_{ij} = \left| \varepsilon_{ij} \frac{l_{ij}}{\lambda} \right|,$$

wówczas zależności (4.6) można zapisać wzorem: $T = \sum_{i,j} \sigma'_0 \varepsilon'_{ij}$. Praca sił zewnętrznych wynosi $V = 0,5 \lambda p v$. Oznaczmy przez

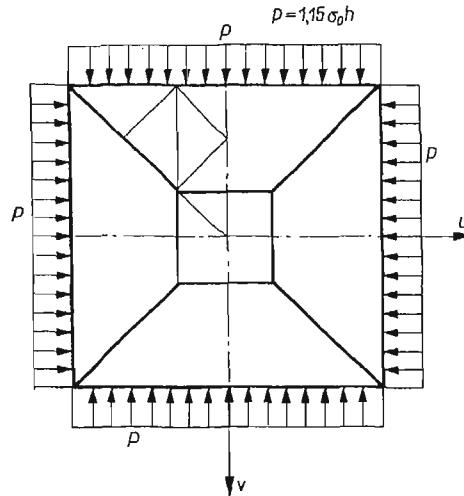
$$(4.6.2) \quad U = V - T$$

całkowitą stratę energii potencjalnej. Z wszystkich możliwych form zniszczenia konstrukcji rzeczywistą jest ta, której odpowiada minimum obciążenia, czyli maximum U . Ponadto w stanie równowagi granicznej $U = 0$. Tym samym otrzymujemy zadanie programowania parametrycznego, polegające na znalezieniu maximum formy U (4.6.2), przy ograniczeniach (4.6.1). Ponadto trzeba znaleźć taką wartość parametru obciążenia, przy którym max

$U = 0$. Dla szczególnego przypadku mechanizm zniszczenia i wartość obciążenia granicznego podano na rys. 13.

Wykorzystując powyższe sformułowanie można też rozwiązać zadanie, dla którego mechanizm zniszczenia oraz wartość p przedstawia rys. 15.

Formułując zagadnienie dla tarczy przedstawionej na rys. 16a jesteśmy w stanie rozwiązać zadania, dla których mechanizmy zniszczenia oraz wartość obciążenia podano na rys. 16b, c.



Rys. 15

4.6. Rozpatrzmy płytę kołową poddaną działaniu dowolnego niesymetrycznego obciążenia (TERECHINA [32]). W płytę kołową wpisujemy wieloboki, których liczba boków zależy będzie od wymaganej dokładności. Sieć możliwych linii załomów przyjmujemy w postaci niejednakowych trójkątów (rys. 17). Jako ograniczenie przyjmujemy następujące nierówności:

$$(4.7) \quad \varphi_i \geq \theta_i l_i, \quad \varphi_i \geq -(M'_0/M_0)\theta_i l_i,$$

gdzie

l_i — długość i -tej linii załomu,

θ_i — kąt obrotu tej linii załomu,

M_0, M'_0 — odpowiednio dodatni i ujemny moment graniczny,

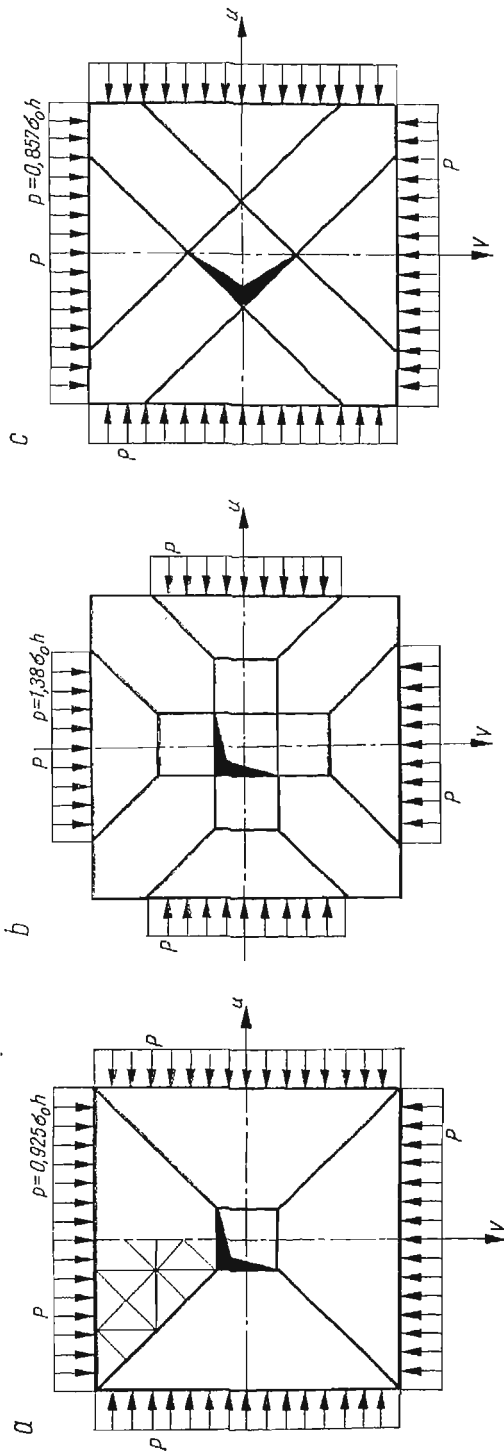
φ_i — pomocnicza wielkość nieujemna.

Strata energii potencjalnej układu wynosi

$$(4.8) \quad U = \sum_i P_i w_i - \sum_i M_0 \varphi_i,$$

gdzie w_i — ugięcie punktu; suma pierwsza oznacza pracę sił zewnętrznych, druga — wewnętrznych.

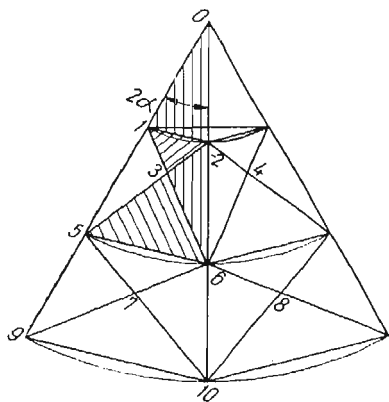
W przypadku obciążenia równomiernie rozłożonego q , siłę można przyłożyć w środku ciężkości zakresowanego trójkąta (rys. 17). Wówczas $P_i = qF_i$, gdzie F_i — pole trójkąta. Ugięcie środka ciężkości trójkąta można wyznaczyć jako średnią arytmetyczną ugięć



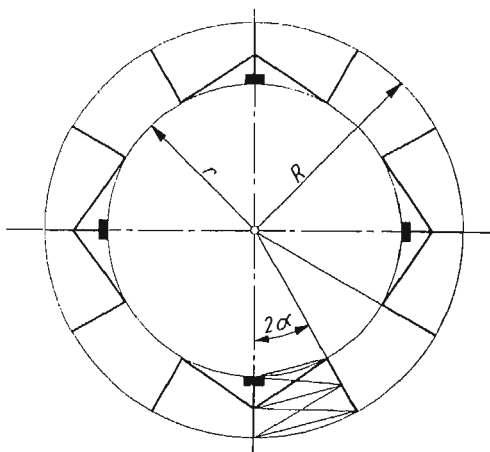
Rys. 16

jego wierzchołków, tj. $w_{si} = \frac{1}{3} \sum w_{ai}$. Oczywiście funkcja U powinna osiągnąć maximum, a w stanie równowagi granicznej winna być równa zero.

Jako przykład w [32] podano wyniki dla płyty żelbetowej pierścieniowej, o stałej grubości, swobodnie podpartej na konturze zewnętrznym i ponadto w 4 punktach na konturze wewnętrznym (rys. 18). Płytę zamieniono na dwunastobok ($R = 10$ m, $r = 1$ m). Zadanie programowania parametrycznego przeprowadzono na maszynie «Ural — IV». Otrzymano: $q/M_0 = 1,11$. Mechanizm zniszczenia przedstawia rys. 18.



Rys. 17



Rys. 18

4.7. BORKAUSKAS, ČYRAS w pracy [23] sformułowali — w języku programowania liniowego — zagadnienie projektowania i wyznaczania obciążenia granicznego dla cienkich płyt, uwzględniając tylko wpływ momentu zginającego. W pracy [24] ci sami autorzy omawiają zagadnienie minimalnego ciężaru, przy założeniu, że płyta składa się z obszarów o stałej grubości. W pracy [2] natomiast przedstawiono istotę problemu dualności dla cienkiej idealnie plastycznej płyty. Korzystając z pracy [2] omówimy zagadnienie dualności.

Chcąc sformułować rozważane zagadnienia w terminach programowania liniowego, musimy dysponować opisem dyskretnym. W tym celu dzielimy płytę na pewną liczbę obszarów (rys. 19), przy czym moment graniczny r -tego obszaru jest stały i wynosi M_{0r} . Rozkład momentów granicznych w całej płycie charakteryzuje wektor $\mathbf{M}_0 = (M_{0r})$, $r = 1, \dots, s$. Zakładamy, że pomiędzy jednym obszarem a drugim istnieje cienka *warstwa przejściowa* przenosząca momenty zginające. Obciążenie zewnętrzne występuje w punktach węzłowych, oznaczymy go przez p_j , a ponadto wzdłuż warstw przejściowych działają momenty zginające o intensywności m_j . W ten sposób wektor obciążenia ma składowe określone następująco:

$$p_j = \begin{cases} p_j, & j = 1, \dots, t_1 \leq t, \\ m_j, & j = t_1 + 1, \dots, t. \end{cases}$$

Zakładając, że rzeczywisty mechanizm zniszczenia należy do klasy mechanizmów utworzonych przez liniowe przeguby plastyczne (są to przeguby utworzone przez linie sieci,

por. rys. 19), wtedy prędkości odkształceń plastycznych opisuje wektor $\theta = (\theta_i)$, $i = 1, \dots, n$, gdzie $\theta_i = \varphi_i l_i$ przy czym φ_i , l_i oznaczają, odpowiednio, kąt obrotu w i -tym przegubie plastycznym, długość i -tego przegubu. Prędkość przemieszczeń charakteryzuje wektor $W = (W_j)$, gdzie

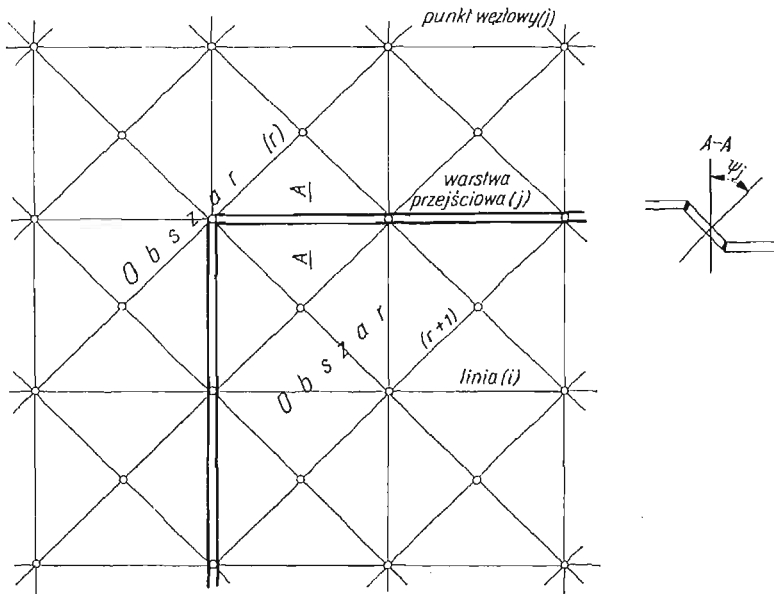
$$W_j = \begin{cases} w_j, & j = 1, \dots, t_1 \leq t, \\ \psi_j l_j, & j = t_1 + 1, \dots, t, \end{cases}$$

przy czym w_j , ψ_j oznaczają, odpowiednio, prędkość przemieszczeń w j -tym punkcie węzłowym, prędkość zmian kąta obrotu j -tej warstwy przejściowej. Tym samym łatwo podać wyrażenie na moc dysypowaną

$$(4.9) \quad U = \sum_{r,l} M_{0r} E_{ri} |\theta_i|,$$

gdzie $E = ||E_{ri}||$ jest macierzą konfiguracji określoną następująco:

$$E_{ri} = \begin{cases} 1, & \text{gdy linia } i \text{ należy do obszaru } r, \\ 0, & \text{gdy linia } i \text{ nie należy do obszaru } r. \end{cases}$$



Rys. 19

Wprowadzając tzw. zredukowaną prędkość odkształceń plastycznych w obszarze r , $\vartheta_r \stackrel{\text{def}}{=} \sum_l E_{ri} |\theta_l|$ na podstawie (4.9) otrzymujemy: $U = \sum_r M_{0r} \vartheta_r$.

Moc obciążeń zewnętrznych jest dana wzorem

$$(4.9.1) \quad V = \sum P_j W_j.$$

Warunki zgodności kinematycznej prędkości odkształceń i przemieszczeń podają związki

$$(4.9.2) \quad \theta_i = \sum_j c_{ij} W_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zgodnie z twierdzeniem energetycznym o minimum energii dysypacji dla rzeczywistego mechanizmu zniszczenia otrzymujemy następujące zadanie programowania liniowego:
znaleźć minimum formy

$$(4.10) \quad U = \sum_{r,t} M_{or} E_{ri} \theta_i,$$

przy ograniczeniach

$$(4.10.1) \quad W_j \geq \bar{W}_j,$$

$$(4.10.2) \quad \theta_i - \sum_j c_{ij} W_j = 0,$$

$$(4.10.3) \quad \theta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, t, \quad r = 1, \dots, s.$$

Wektor $\bar{\mathbf{W}} = (\bar{W}_j)$ można na ogół wybrać dowolnie.

Można teraz zbudować zadanie dualne:

znaleźć maximum formy

$$(4.11) \quad \sum_j \bar{W}_j Y_j$$

przy ograniczeniach postaci

$$(4.11.1) \quad Z_i \leq \sum_r E_{ri} M_{or},$$

$$(4.11.2) \quad Y_j - \sum_i c_{ij} Z_i = 0,$$

$$(4.11.3) \quad Y_i \geq 0.$$

Położmy $Y_j = P_j$, $Z_i = M_i$, gdzie $\mathbf{M} = (M_i)$ jest wektorem charakteryzującym siły wewnętrzne. Wówczas forma (4.11) określa moc obciążeń zewnętrznych. Z (4.11.1) mamy $M_i \leq \sum_r E_{ri} M_{or}$; jest to po prostu warunek plastyczności. Równości (4.11.2) zapisane w postaci $\sum_i c_{ij} M_i = P_j$ wyrażają równania równowagi. Tym samym zadanie dualne

(4.11)-(4.11.3) wyraża twierdzenie energetyczne o maximum mocy obciążeń zewnętrznych.

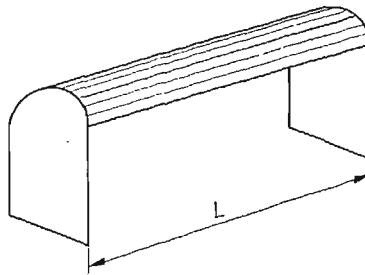
Problem dualności dla płyt i powłok w wielkościach uogólnionych omówiono w pracy CERADINIEGO, GAVARINIEGO [4].

5. Powłoki

Omówione zostały w pracach CERADINIEGO, GAVARINIEGO, [4], [5], MIRZABIEKJANA, REITMANA [29], NAGEVIČIUSA, ČYRASA [30], RŽANICYNA [31], FRAINTA [33], przy czym w pracy [31] omówiono możliwości zastosowania programowania liniowego do zadań

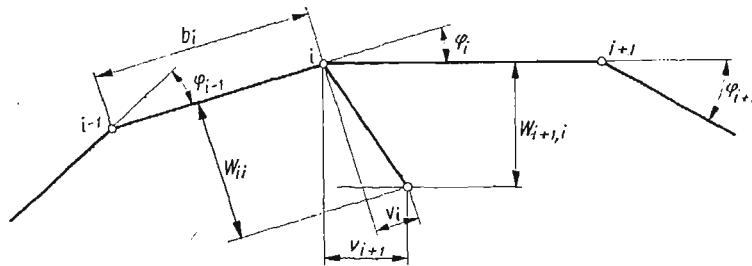
równowagi granicznej powłok przy wykorzystaniu metody kinematycznej, a w pracach [4], [5], [29], [30] i [33] — statycznej.

5.1. Omówimy najpierw pracę RZANICYNA [31]. Weźmy pod uwagę powłokę sklepieniową opartą na dwu czołowych przeponach. Krawędzie podłużne mogą być swobodne lub spoczywać na podporach. Zakładamy, że rozpiętość L powłoki jest znacznie większa niż szerokość jej rzutu na płaszczyznę poziomą. Dajemy klasę form zniszczenia z liniami przegubów plastycznych (na tyle gęsto, że wycinek powłoki między sąsiednimi przegubami można uważać za płaską płytkę — rys. 20) i skupionymi odkształceniami podłużnymi w środkowym przekroju poprzecznym. Obciążenie może być dowolne.



Rys. 20

Ze względu na małą grubość płyt pomijamy wpływ podłużnych momentów zginających i skręcających. Ponadto zakładamy, że powłoka jest nieściśliwa w kierunku poprzecznym — w przegubach plastycznych powstają jedynie kąty obrotu. Część płyty między przegubami plastycznymi a przekrojem poprzecznym odległym o $L/2$ od przepony uważamy za sztywną.



Rys. 21

Niech parametrami formy zniszczenia będą rzuty v_i przemieszczeń każdej płytki w poprzecznym przekroju środkowym na płaszczyznę płytki (rys. 21).

Przy oznaczeniach, jak na rys. 21, obrót płyty w przekroju środkowym wynosi

$$\psi_i = \frac{w_{ii} - w_{i,i-1}}{b_i},$$

przy czym b_i — szerokość płyty; natomiast kąt obrotu w i -tym przegubie

(5.1)

$$\theta_i = \psi_{i+1} - \psi_i.$$

Całkowita praca sił wewnętrznych wynosi

$$(5.2) \quad T = T_1 + T_2.$$

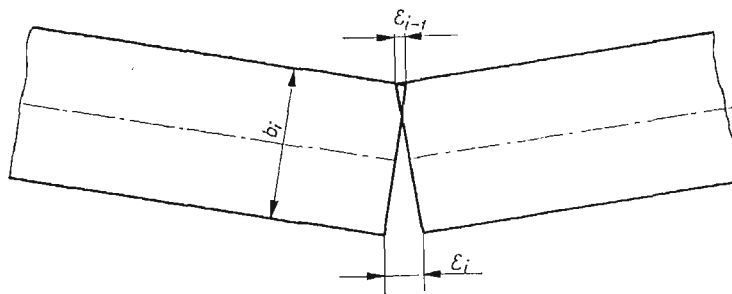
We wzorze tym T_1 oznacza pracę momentu M_0 (moment przypadający na jednostkę długości) na kątach obrotu θ_i . θ_i zmienia się liniowo na odcinku $L/2$; największą wartość przyjmuje w przekroju środkowym, a zero na przeponach. Tak więc

$$(5.2.1) \quad T_1 = \sum_i \Delta T_i = \frac{1}{2} L M_0 \sum_i |\theta_i|.$$

Po scałkowaniu metodą trapezów otrzymujemy następujące wyrażenie na pracę sił podłużnych na skupionych odkształceniach ε_i (rys. 22)

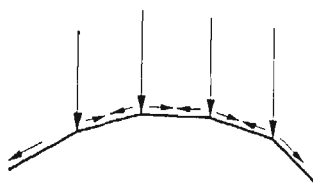
$$(5.2.2) \quad T_2 = h\sigma_0 \sum_+ |\varepsilon_i| \frac{b_{i+1} + b_i}{2} + h\nu\sigma_0 \sum_- |\varepsilon_i| \frac{b_{i+1} + b_i}{2},$$

gdzie przyjęto oznaczenia: h — grubość powłoki, σ_0 ($\nu\sigma_0$) — granica plastyczności na rozciąganie (ściskanie). W pierwszym członie sumujemy po przegubach rozciąganych, w drugim — ściskanych.



Rys. 22

Pracę sił zewnętrznych można obliczyć, po wyznaczeniu składowych obciążenia dla kierunków leżących w płaszczyznach płyt, przyjmując, że jest ono skupione wzdłuż linii załomów (rys. 23).



Rys. 23

Wówczas

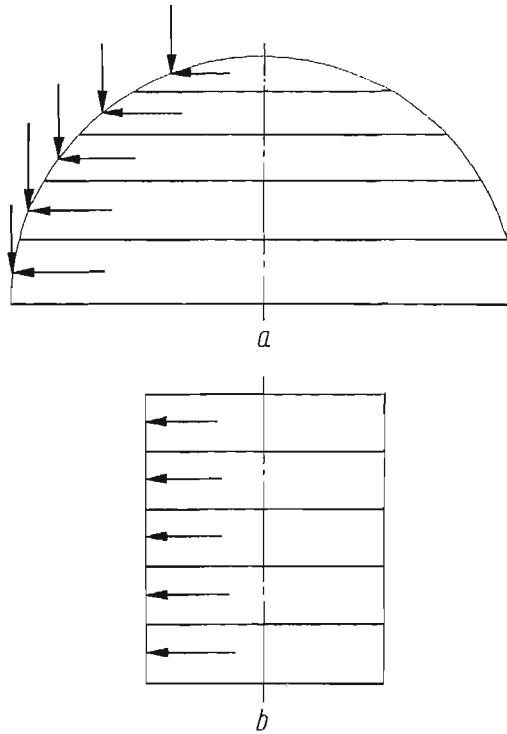
$$(5.2.3) \quad V = 2 \sum_i \int_0^{L/2} Q_i v_i \frac{2x}{L} dx = \sum_i P_i v_i,$$

przy czym $P_i = \frac{4}{L} \int_0^{L/2} Q_i x dx$, gdzie Q_i oznacza siłę działającą na i -ty przegub plastyczny.

Ze wzorów (5.2.1), (5.2.2), (5.2.3), po prostych przekształceniach, otrzymujemy wyrażenie na stratę energii potencjalnej układu:

$$(5.3) \quad U = V - T = \frac{L}{4} \sum_i \left(\frac{P_i}{b_i} - \frac{P_{i+1}}{b_{i+1}} \right) \varepsilon_i - \frac{L}{2} M_0 \sum_i |\theta_i| - \frac{h\sigma_0}{2} \sum_+ (b_{i+1} + b_i) |\varepsilon_i| - \frac{h\nu\sigma_0}{2} \sum_- (b_{i+1} + b_i) |\varepsilon_i|.$$

W (5.3) \sum_i oznacza sumowanie po wszystkich płytach (przegubach plastycznych).



Rys. 24

Przekształćmy wyrażenie (5.3) do następującej postaci:

$$(5.3.1) \quad U = \frac{L}{4} \sum_i \left(\frac{P_i}{b_i} - \frac{P_{i+1}}{b_{i+1}} \right) \varepsilon_i - \frac{LM_0}{2} \sum_i \theta_i^* - \frac{h\sigma_0}{2} \sum_i (b_{i+1} + b_i) \varepsilon_i^*,$$

gdzie

$$\theta_i^* = \max(\theta_i, -\theta_i),$$

$$\varepsilon_i^* = \max\left(\varepsilon_i, -\frac{\nu\sigma_0 \varepsilon_i}{\sigma_0}\right).$$

W ten sposób — w terminach programowania liniowego — zadanie sformułujemy następująco: znaleźć maximum formy U (5.3.1) przy ograniczeniach postaci

$$(5.4) \quad \begin{aligned} a_i &= \theta_i^* - \theta_i \geq 0, \\ b_i &= \theta_i^* + \theta_i \geq 0, \\ c_i &= \varepsilon_i^* - \varepsilon_i \geq 0, \\ d_i &= \varepsilon_i^* + z\varepsilon_i \geq 0, \quad z = \frac{\nu\sigma_0}{\sigma_0}. \end{aligned}$$

Ponadto w stanie granicznym, $\max U = 0$.

W pracy RZANICYNA [31] — wykorzystując sposób zbliżony do powyższego — sformułowano też zagadnienie dla osiowo-symetrycznej powłoki sferycznej i walcowej. Możliwe mechanizmy zniszczenia i sposób obciążenia przedstawiono na rys. 24a i 24b.

5.2. W pracy FRAINTA [33] — korzystając z prac KOOPMANA, LANCE'A [12] i RZANICYNA [31] — podano mnożnik obciążenia granicznego dla walcowej powłoki przy uwzględnieniu osiowo-symetrycznego stanu naprężenia; zagadnienie rozwiązano metodą statyczną. W tym przypadku równanie równowagi ma postać

$$(5.5) \quad \frac{d^2 M}{dz^2} + \frac{N}{R} - X = 0,$$

gdzie M — południkowy moment zginający; N — równoleżnikowa siła normalna, R — promień powierzchni środkowej powłoki, X — ciśnienie rozłożone.

Warunek plastyczności przyjęto w postaci

$$(5.6) \quad |m| \leq 1, \quad 0 \leq n \leq 1,$$

gdzie $m = \frac{M}{M_0}$, $n = \frac{N}{N_0}$; M_0 — moment graniczny, N_0 — wartość graniczna siły N .

Wprowadźmy funkcję $\mu = \frac{X}{xM_0}$, wówczas równanie (5.5) przybierze postać:

$$(5.7) \quad \frac{d^2 m'}{dz^2} - \frac{na}{R} + \mu x = 0,$$

przy czym $a = \frac{N_0}{M_0}$, $m' = 1 - m$, ($0 \leq m' \leq 2$).

Równanie (5.7) — po podzieleniu długości powłoki L na r równych części — zapiszemy w postaci

$$(5.7.1) \quad m'_i - 2m'_{i+1} + m'_{i+2} - (a\delta^2/R)n_{i+1} + \bar{\mu}x_{i+1} = 0,$$

gdzie w (5.7.1) przyjęto $\delta = \frac{L}{r}$, $\bar{\mu} = \delta^2\mu$. Oczywiście równania (5.7.1) przedstawiają dyskretny opis powłoki.

Zadanie programowania liniowego sformułujemy następująco:

znaleźć maximum funkcji $z = \bar{\mu}$ przy ograniczeniach

$$\begin{aligned} y_i &= -m'_i + 2 \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, r, \\ y_k &= -n_k + 1 \geq 0, \quad k = 1, \dots, r-1, \\ y_j &= n_j a \delta^2 / R = m'_{j-1} - 2m'_j + m'_{j+1} + \bar{\mu}x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r-1. \end{aligned}$$

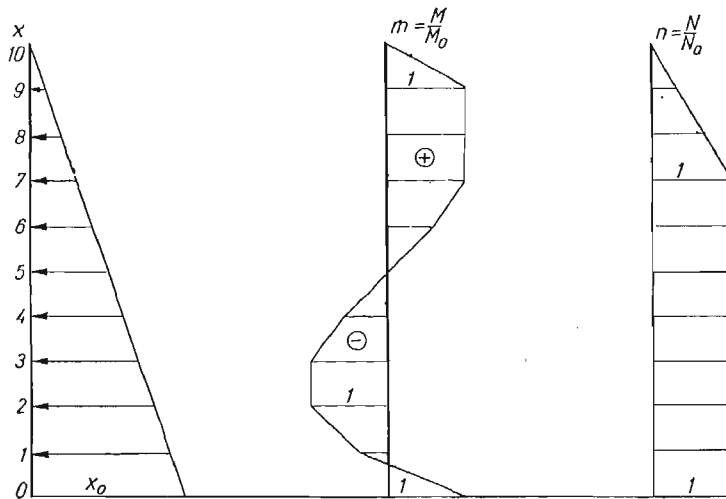
Jako przykład podano w pracy [33] rezultaty uzyskane dla zbiornika walcowego znajdującego się pod ciśnieniem hydrostatycznym. Przyjęto tam: $a\delta^2/R = 1$, $r = 10$, $x_0 = 1$ — parametr obciążenia.

Otrzymano:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} m_0 &= 1, & m_1 &= -0,4, & m_2 &= m_3 = -1, & m_4 &= -0,6, & m_5 &= 0, \\ m_6 &= 0,6, & m_7 &= m_8 = m_9 &= 1, \\ n_1 &= n_2 = \dots = n_7 = 1, & n_8 &= 0,4, & n_9 &= 0,2, \\ \mu &= \frac{200}{L^2}, & X_0 &= 200 M_0/L^2. \end{aligned}$$

W (5.8) przez X_0 oznaczono wartość graniczną obciążenia. Z (5.8) wynika, że w punktach 0, 2, 3, 7 powstają przeguby plastyczne.

Rysunek 25 przedstawia wykresy momentów zginających południkowych m i sił normalnych równoleżnikowych n .



Rys. 25

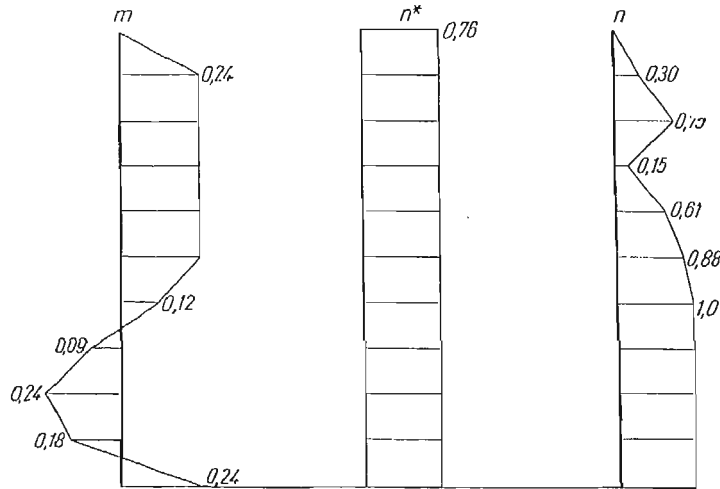
Jeżeli na całym obwodzie zbiornika wzdłuż tworzącej działa ponadto siła ściskająca βX , to wówczas warunek plastyczności można zapisać w następującej przybliżonej formie:

$$0 \leq n \leq 1, \quad \pm \gamma m - n^* \leq \gamma, \quad n^* \leq 0, \quad \left(n^* = \frac{N^*}{N_0^*} \right),$$

gdzie gwiazdka oznacza wielkości odnoszące się do siły normalnej działającej wzdłuż tworzącej. Przy założeniu, że $\gamma = 1$, $\beta = 0,5$ otrzymano $X_0 = 151,51 M_0/L^2$, gdy $\gamma = 1$, $\beta = 1$ wtedy $X_0 = 100 M_0/L^2$.

Rysunek 26 przedstawia wykresy wielkości wewnętrznych m, n, n^* dla $\beta = 0,5$. Mechanizm zniszczenia, który łatwo odtworzyć na podstawie wykresów na rys. 26, jest słuszny

dla $\beta < 1$; przy $\beta \geq 1$ zniszczenie następuje przy wielkości obciążenia pionowego równego obciążeniu granicznemu.



Rys. 26

5.3. Rozpatrzmy zagadnienie nośności granicznej dla sferycznej powłoki dwuwarstwowej, wykorzystując podejście statyczne, przy użyciu metody kolokacji (MIRZABIEKJAN, REITMAN [29]). Powłoka jest utwierdzona na konturze, poddana działaniu równomiernego ciśnienia wewnętrznego q i spełnia warunek plastyczności Treski. Równania równowagi mają postać:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} (n_\varphi \sin \varphi)' - n_\theta \cos \varphi - k[(m_\varphi \sin \varphi)' - m_\theta \cos \varphi] &= 0, \\ (n_\varphi + n_\theta) \sin \varphi + k[(m_\varphi \sin \varphi)'' - (m_\theta \cos \varphi)'] + p \sin \varphi &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$n_\theta = \frac{N_\theta}{N_0}, \quad n_\varphi = \frac{N_\varphi}{N_0}, \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{M_0}, \quad m_\varphi = \frac{M_\varphi}{M_0}, \quad k = \frac{M_0}{RN_0}, \quad p = \frac{Rq}{N_0},$$

przy czym $N_\varphi, N_\theta, M_\varphi, M_\theta$ oznaczają kolejno południkowe i równoleżnikowe siły normalne oraz analogiczne momenty zginające; natomiast $M_0(N_0)$ oznacza moment graniczny (siłę graniczną), a R — promień powłoki.

Warunek plastyczności natomiast zapiszemy w postaci

$$(5.10) \quad \begin{aligned} n_\theta - m_\theta &\leq 1, & n_\varphi - m_\varphi &\leq 1, & -n_\theta + n_\varphi + m_\theta - m_\varphi &\leq 1, \\ -n_\theta + m_\theta &\leq 1, & -n_\varphi + m_\varphi &\leq 1, & n_\theta - n_\varphi - m_\theta + m_\varphi &\leq 1, \\ n_\theta + m_\theta &\leq 1, & n_\varphi + m_\varphi &\leq 1, & -n_\theta + n_\varphi - m_\theta + m_\varphi &\leq 1, \\ -n_\theta - m_\theta &\leq 1, & -n_\varphi - m_\varphi &\leq 1, & n_\theta - n_\varphi + m_\theta - m_\varphi &\leq 1. \end{aligned}$$

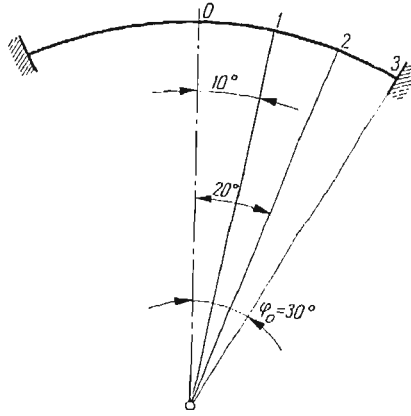
Przyjmijmy następujące pole naprężeń

$$(5.11) \quad \begin{aligned} n_\theta &= C_6 \cos \varphi + C_7 \sin \varphi + C_8 \cos 2\varphi + C_9 \sin 2\varphi + C_{10}, \\ n_\varphi &= C_{11} \cos \varphi + C_{12} \sin \varphi + C_{13} \cos 2\varphi + C_{14} \sin 2\varphi + C_{15}, \\ m_\theta &= C_{16} \cos \varphi + C_{17} \sin \varphi + C_{18} \cos 2\varphi + C_{19} \sin 2\varphi + C_{20}, \\ m_\varphi &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 2\varphi + C_4 \sin 2\varphi + C_5. \end{aligned}$$

Równania (5.11) — przez spełnienie zależności (5.9) — doprowadzamy do postaci

$$(5.12) \quad \begin{aligned} n_0 &= C_1 k \cos \varphi + 2C_3 k \cos 2\varphi + 2C_4 k \sin 2\varphi - 0,5p, \\ n_\varphi &= C_1 k \cos \varphi + C_3 k (\cos 2\varphi + 1) + C_4 k \sin 2\varphi - 0,5p, \\ m_0 &= C_1 \cos \varphi + 2C_2 \sin \varphi + C_3 (2 \cos 2\varphi - 1) + 2C_4 \sin 2\varphi + C_5, \\ m_\varphi &= C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 2\varphi + C_4 \sin \varphi + C_5. \end{aligned}$$

Jako punkty kolokacji przyjmijmy np. punkty o współrzędnych $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, \dots$. Problem sprowadza się więc do obliczenia maximum funkcji $z = p$ przy ograniczeniach (5.10), do których wstawiono uprzednio zależności (5.12). Jako przykład liczbowy roz-



Rys. 27

wiązano powłokę dla której $\varphi_0 = 30^\circ$ (rys. 27). Przy pomocy maszyny matematycznej MIŃSK-22 otrzymano: $C_1 = 1,41$; $C_2 = -1,47$; $C_3 = 1,21$; $C_4 = 1,83$; $C_5 = -15,18$; $\max z = 3,38$. Dla takiego samego przypadku P. G. HODGE otrzymał wartość współczynnika nośności granicznej równą 2.

5.4. NAGEVIČIUS, ČYRAS [30] zaproponowali prosty sposób dyskretyzacji i linearyzacji warunku plastyczności Hubera–Misesa dla powłoki małowyniołej $\left(\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}, \frac{f}{a} \leq \frac{1}{5}, \frac{a}{l} \leq \frac{1}{2}\right)$. Geometrię takiej powłoki, oznaczenia i wielkości wewnętrzne przedstawiono na rys. 28a÷c.

Zakładamy, że powłoka jest izotropowa, idealnie plastyczna i spełnia warunek plastyczności Hubera–Misesa. W takim przypadku warunek ten ma postać

$$(5.12) \quad n_s^2 - n_s n_x + n_x^2 + 3t^2 + m_s^2 = 1,$$

$$\text{gdzie } n_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{N_x}{h\sigma_0}, \quad n_s = \frac{N_s}{N_0} = \frac{N_s}{h\sigma_0}, \quad t = \frac{T}{h\sigma_0}; \quad m_s = \frac{M_s}{M_0} = \frac{4M_s}{h^2\sigma_0}.$$

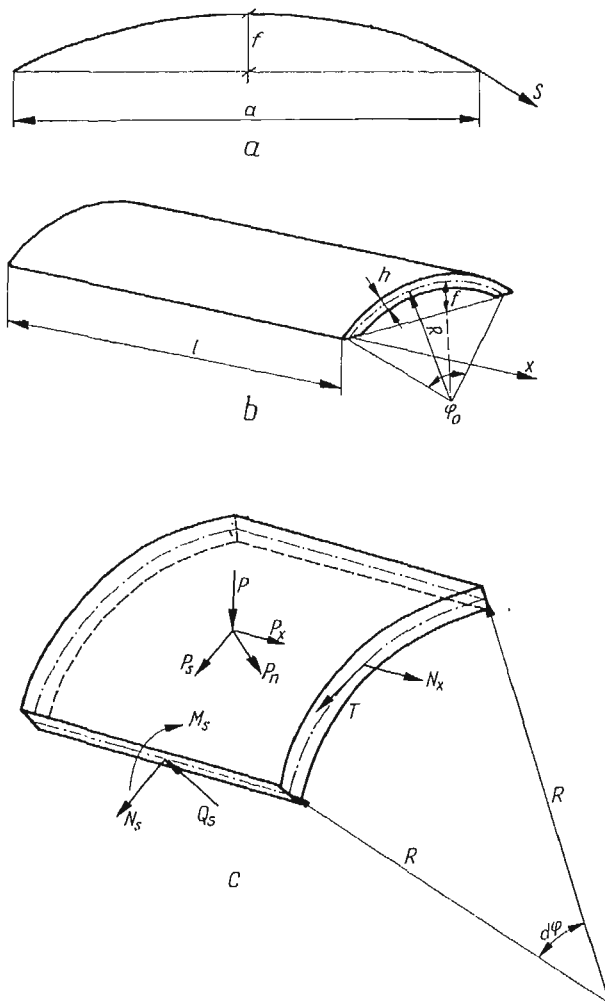
Przyjmując, że $n_s^2 - n_s n_x + n_x^2 \approx \eta^2$, $3t^2 + m_s^2 \approx \alpha^2$, przy czym

$$(5.12.1) \quad \eta = \max\{|n_s|, |n_x|, |n_s - n_x|\}, \quad \alpha = \max\{|\sqrt{3}t|, |m_s|\},$$

wtedy równanie (5.12) przybierze postać równania okręgu

$$(5.12.2) \quad \eta^2 + \alpha^2 = 1.$$

Należy teraz zlinearyzować warunek (5.12.2). Najprościej jest zastąpić okrąg opisanym (lub wpisanym) kwadratem (rys. 29), wówczas $|\alpha| = 1$, $|\eta| = 1$.

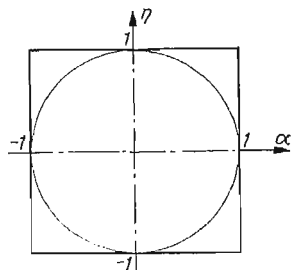


Rys. 28

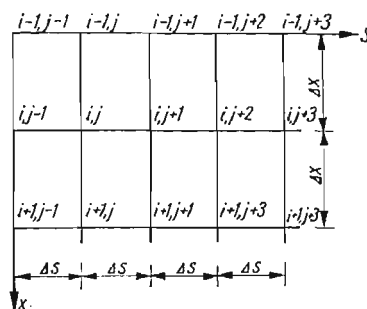
W rezultacie otrzymamy 12 równań na zlinearyzowany warunek plastyczności Hubera-Misesa:

$$\begin{aligned} \sqrt{3}t + m_s &\leq 1, & n_s &\leq 1, & n_s - n_x &\leq 1, \\ \sqrt{3}t - m_s &\leq 1, & -n_s &\leq 1, & n_s + n_x &\leq 1, \\ -\sqrt{3}t + m_s &\leq 1, & n_x &\leq 1, & -n_s + n_x &\leq 1, \\ -\sqrt{3}t - m_s &\leq 1, & -n_x &\leq 1, & -n_s - n_x &\leq 1. \end{aligned}$$

W celu przedstawienia różniczkowych równań równowagi w postaci różnicowej przyjęto siatkę utworzoną na poziomym rzucie powłoki (rys. 30). Ze względu na małą krzywiznę powłoki można przyjąć, iż siatka ta «przenosi» się na powierzchnię środkową.



Rys. 29



Rys. 30

6. Metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych jest jedną z metod dyskretnego opisu konstrukcji. Rozwinęła się ona specjalnie w związku z zastosowaniem maszyn liczących. Początkowo stosowano tę metodę w teorii sprężystości, w ostatnich latach także w rozważaniach przez nas zagadnieniach z teorii plastyczności.

MAIER [14], korzystając z metody elementów skończonych, dokonał pewnych uogólnień twierdzeń Melana i Koitera o dostosowaniu. Omówimy poruszone w pracy [14] zagadnienia.

Istota metody elementów skończonych polega na zamianie ośrodka ciągłego przez pewną liczbę elementów (tzw. elementów skończonych), oddziaływujących na siebie tylko w punktach węzłowych. Obciążenie zewnętrzne działa tylko w tych punktach. Ponadto MAIER zakłada, że układ może być poddany «dyslokacjom», które określa jako *niesprężyste odkształcenia narzucone na pewne elementy*. Mogą to być odkształcenia wywołane np. polami temperaturowymi. Obciążenia i *dyslokacje* będziemy charakteryzować wektorami, odpowiednio \mathbf{P} , $\mathbf{\Delta}$. Oznaczmy przez \mathbf{q}^i uogólnione odkształcenia i -tego elementu skończonego, określone przez wektor przemieszczeń węzłowych \mathbf{u}^i . Niech wektor \mathbf{Q}^i reprezentuje uogólnione naprężenia¹⁾ (por. [21], str. 251 i dalsze). Przyjmujemy, że ośrodek zastąpiono przez n elementów skończonych, tzn. $i = 1, \dots, n$.

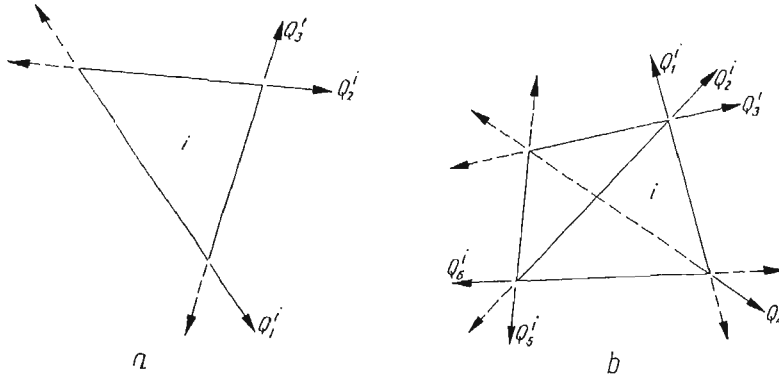
Przykładem zastosowania metody elementów skończonych do zagadnień płaskich może być zamiana ośrodka przez trójkątne elementy skończone, przy czym i -ty element skończony jest scharakteryzowany wektorami \mathbf{q}^i , \mathbf{Q}^i o trzech niezależnych składowych (rys. 31a).

Podobnie ośrodek trójwymiarowy może być zastąpiony przez czworościany scharakteryzowane wektorami \mathbf{q}^i , \mathbf{Q}^i o sześciu niezależnych składowych (rys. 31b).

¹⁾ Autor operuje tylko wielkościami uogólnionymi.

Założmy, że każdy element ma zlinearyzowany warunek plastyczności w przestrzeni sił uogólnionych. Niech będzie dany pewien program obciążenia i dyslokacji $\mathbf{P}(t), \Delta(t)$, co należy rozumieć w ten sposób, że «składowe» $P_h(t), \Delta_h(t), 0 \leq t \leq \infty$, jako funkcje czasu t zmieniają się w pewnych określonych przedziałach w sposób na ogół dowolny. Przykład takiego programu (bez dyslokacji) mieliśmy w punkcie 3.4, gdzie siła Q (czyli jedna ze «składowych») zmieniała się w przedziale $[0, 7 M_0/L_0]$; oczywiście $Q = Q(t)$.

Niech μ będzie wspólnym mnożnikiem obciążenia dla wszystkich przedziałów, które określają dany program obciążenia i dyslokacji. Podobnie jak w punkcie 3.4., zdefiniujemy mnożnik bezpieczny s następująco: dla $\mu \leq s$ układ dostosowuje się, natomiast dla $\mu > s$ nie. Autora głównie interesuje zagadnienie wyznaczenia mnożnika bezpiecznego s . Korzystając z rozszerzonego na przypadek dyslokacji twierdzenia Melana zbudujemy zadanie programowania liniowego, które pozwala wyznaczyć mnożnik s .



Rys. 31

Rozkład naprężeń uogólnionych w układzie scharakteryzujemy wektorem \mathbf{Q} , przy czym wektor ten przedstawiamy w postaci sumy części sprężystej \mathbf{Q}^E i plastycznej \mathbf{Q}^P

$$(6.1) \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^E + \mathbf{Q}^P.$$

Całkowite, sprężyste i plastyczne uogólnione odkształcenia scharakteryzujemy wektorami odpowiednio \mathbf{q} , \mathbf{e} , \mathbf{p} czyli

$$(6.1.1) \quad \mathbf{q} = \mathbf{e} + \mathbf{p} + \Delta = \mathbf{e}^E + \mathbf{e}^P + \mathbf{p} + \Delta.$$

Ponadto

$$(6.1.2) \quad \mathbf{Q}^E = \mathbf{S}\mathbf{e}^E, \quad \mathbf{Q}^P = \mathbf{S}\mathbf{e}^P,$$

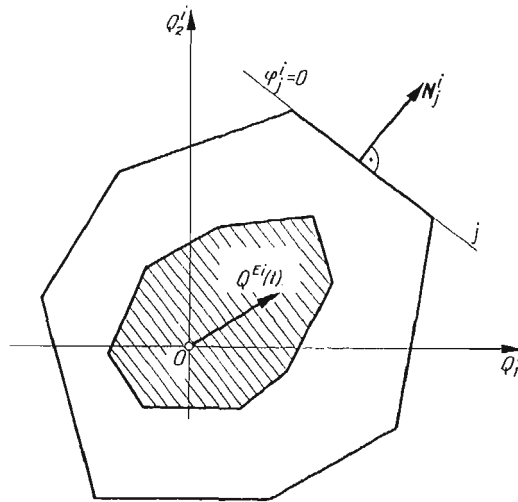
gdzie \mathbf{S} jest macierzą sztywności dla zakresu sprężystego. Zawiera ona na przekątnej głównej macierze sztywności $\mathbf{S}^i, i = 1, \dots, n$, elementów skończonych; co zapiszemy w ten sposób $\mathbf{S} = \text{diag} [\mathbf{S}^1, \dots, \mathbf{S}^n]$. Zwróćmy uwagę na to, iż elementami każdego z wprowadzonych wektorów są wektory charakteryzujące n -elementów skończonych, na które «podzielono» układ, np. $\mathbf{q}^T = (\mathbf{q}^1, \dots, \mathbf{q}^n)$ (symbol «T» oznacza transponowanie). Naprężenia resztkowe \mathbf{Q}_r^P można przedstawić w postaci

$$(6.2) \quad \mathbf{Q}_r^P = \mathbf{F}\mathbf{p},$$

gdzie ρ jest wektorem wielkości hiperstatycznych, a macierz F zależy tylko od geometrii układu. Możemy teraz wypowiedzieć twierdzenie Melana rozszerzone na przypadek *dyslokacji*. Zostało ono sformułowane i udowodnione przez W. PRAGERA. Przytoczymy je za MAIEREM [14].

a) Jeśli istnieje niezależny od czasu stan naprężeń resztkowych Q_r^p , takich, że ich suma z naprężeniami sprężystymi, wywołanymi przez dany program obciążenia i *dyslokacji* leży wewnątrz powierzchni plastyczności (dla każdego elementu skończonego oraz dla $0 \leq t \leq \infty$), to układ dostosowuje się.

b) Jeśli nie istnieje niezależny od czasu stan naprężeń resztkowych Q_r^p takich, żeby suma jak w a) nie wyprowadzała poza powierzchnię plastyczności dla każdego elementu skończonego, oraz dla $0 \leq t \leq \infty$, to dostosowanie nie nastąpi.



Rys. 32

Korzystając z tego twierdzenia i zależności (6.2) łatwo zbudować następujące zadanie programowania liniowego:

znaleźć

$$(6.3) \quad \max \mu = s$$

przy ograniczeniach

$$(6.3.1) \quad \mu \mathbf{M} + \mathbf{N}^T \rho \leq \mathbf{K},$$

$$(6.3.2) \quad \mu \geq 0.$$

Wyjaśnimy użyte w tym zadaniu symbole.

Weźmy pod uwagę zlinearyzowany warunek plastyczności i -go elementu skończonego (rys. 32),

$$(6.4) \quad \varphi_j^i = \mathbf{N}_j^T \mathbf{Q}^i - K_j^i \leq 0, \quad j = 1, \dots, k_i,$$

gdzie skalary $K_j^i > 0$ charakteryzują własności plastyczne materiału, \mathbf{N}_j^i jest wektorem jednostkowym prostopadłym do j -tej ściany zlinearyzowanego warunku plastyczności. Wektor \mathbf{K} ma postać: $\mathbf{K} = [K_1^1, K_2^1, \dots, K_{k_n}^n]$. Oznaczmy przez

$$(6.5) \quad M_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq t \leq \infty} \{ \mathbf{N}_j^i \mathbf{Q}^{Ei}(t) \},$$

(zakreskowany na rys. 32 wielobok, reprezentuje obszar jaki przebiega wektor $\mathbf{Q}^{Ei}(t)$, gdy t zmienia się w przedziale $[0, \infty]$). Występujący we wzorze (6.3.1) wektor \mathbf{M} ma postać $\mathbf{M} = [M_1^1, M_2^1, \dots, M_{k_n}^n]$, gdzie M_j^i jest określone wzorem (6.5). \mathbf{N} jest macierzą, której przekątna główna jest utworzona z macierzy $\mathbf{N}^i = [\mathbf{N}_1^i, \dots, \mathbf{N}_{k_i}^i]$. Zapiszemy więc $\mathbf{N} = \text{diag}[\mathbf{N}^1, \dots, \mathbf{N}^n]$.

Zwróćmy uwagę, na to, że zadanie programowania liniowego (6.3)–(6.3.2) jest operatywną wypowiedzią twierdzenia Melana.

W pracy [14] przedstawiono również, przy wykorzystaniu metody elementów skończonych i zadania dualnego do zadania (6.3)–(6.3.2), twierdzenie Koitera, rozszerzone na przypadek *dyslokacji*. Ponadto sformułowano twierdzenie Melana dla materiałów o niestowarzyszonym prawie płynięcia (por. [18]).

Kilka dalszych pozycji, omawiających zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień nośności granicznej i dostosowania podano w pracy [14].

Literatura cytowana w tekście

1. A. BIRON, P. G. HODGE, *Non linear programming method for limit analysis of rotationally symmetric shells*, Int. J. Non-Linear Mech. 2, 3 (1968), 201–213.
2. A. BORKAUSKAS, A. A. ČYRAS, *On duality in limit analysis and design of plates*, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. tech., 6, 16 (1968), 241–248.
3. G. CERADINI, C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare*, Giorn. Genio Civile, 1/2, 103 (1965), 48–64.
4. G. CERADINI, C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare, Continui bi-e tridimensionali (Nota I: Fondamenti teorici)* Giorn. Genio Civile, 2/3, 106 (1968), 125–137.
5. G. CERADINI, C. GAVARINI, *Calcolo a rottura e programmazione lineare bi-e tridimensionali (Nota II: Applicazioni a piastre e volte di rivoluzione)*, Giorn. Genio Civile, 4, 106 (1968), 163–180.
6. A. CHARNES, C. E. LEMKE, O. C. ZIENKIEWICZ, *Virtual work, linear programming and plastic limit analysis*, Proc. Royal Soc., London, 251 A, 1959, 110–116.
7. S. I. GASS, *Linear programming*, New York 1958.
8. G. HADLEY, *Nichtlineare und dynamische Programmierung*, Berlin 1969 (tłum. z jęz. ang.).
9. J. HEYMAN, *Minimum weight of frames under shakedown loading*, Proc. ASCE, J. Engin. Mech. Div., 4, 84 (1958).
10. J. HEYMAN, W. PRAGER, *Automatic minimum weight design of steel frames*, J. Frankl. Inst., 5, 266 (1958).
11. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., 2, 18 (1966), 227–238.
12. D. C. A. KOOPMAN, R. H. LANCE, *On linear programming and plastic limit analysis*, J. Mech. Phys. Sol., 13 (1965), 77–87.
13. R. K. LIVESLEY, *The automatic design of structural frames*, Quart. J. Mech. Appl. Math., 9, 9 (1956).
14. G. MAIER, *Shakedown theory in perfect elastoplasticity with associated and nonassociated flow-laws, a finite element, linear programming approach*, Meccanica, 3, 4 (1969), 250–260.
15. J. I. NICHOLLS, *Linear programming and optimal structural design*, Trend Eng. Univ. Wash, 3, 20 (1968), 21–24.
16. S. RĂUTU, V. CHIROIU, *Quelques problèmes du calcul des structures statiquement non-déterminées dans la domaine plastique*, Mec. appl., 1, 14 (1969), 115–129.

17. S. RÄUTU, V. CHIROIU, *Use of computers for the calculation of the statically indeterminate structures in elasto-plastic range*, Mec. appl., 4, 14 (1969).
18. G. SACCHI, M. SAVE, *A note on the limit loads of non-standard materials*, Meccanica, 1, 3 (1968), 43–45.
19. M. SVOBODA, *Řešení mezního stavu ramosých konstrukci jako úlohy lineárního programování*, Sb. Vys. Uč. Techn. v Brně. 3/4, 1967, 485–491.
20. H. TANAKA, *Automatic analysis and design of plastic frames*, Report of the Inst., of Ind. Sc. Tokyo, 3, 12 (1962).
21. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod redakcją W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA, PWN, Warszawa 1965.
22. R. WOLFENBERGER, *Traglast und optimale Bemessung von Platten*, Zürich 1964.
23. А. Э. БОРКАУСКАС, А. А. ЧИРАС, *Расчет пластинок в упруго-пластическом состоянии с применением линейного программирования*, Liet. Mech. Rinkiny, 1, (1967), 34–60.
24. А. Э. БОРКАУСКАС, А. А. ЧИРАС, *Расчет упруго-пластических пластинок минимального веса с применением линейного программирования*, Liet. Mech. Rinkiny, 1 (2), (1968), 136–150.
25. Г. Н. БРУСЕНЦОВ, А. Р. РЖАНИЦЫН, *Применение линейного программирования к задаче предельного равновесия при плоском напряженном состоянии*, Стр. Мех. Расч. Соор., 5 (1968), 5–6.
26. Г. К. ГИЛИС, В. А. ЗАКАРЯВИЧЮС, А. А. ЧИРАС, *Использование экспериментальных данных для решения задачи поверочного расчета упруго-пластических систем*, Liet. Mech. Rinkiny, 1 (2), (1968), 122–135.
27. Д. А. ГОХФЕЛЬД, О. Ф. ЧЕРНЯВСКИЙ, *Применение методов линейного программирования к некоторым двумерным задачам предельного равновесия и приспособляемости в статической формулировке*, Тепл. напр. в элем. констр., вып. 7, Киев 1967, 103–107.
28. Л. М. КЛЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Москва 1969.
29. Б. Ю. МИРЗАБЕКЯН, М. И. РЕЙТМАН, *Определение несущей способности оболочек при помощи линейного программирования*, Мех. Тв. Тела, 1 (1968), 122–124.
30. Ю. А. НАГЯВИЧЮС, А. А. ЧИРАС, *Определение предельной нагрузки для пологих цилиндрических оболочек с применением математического программирования*, Liet. Mech. Rinkiny, 2 (3) (1968), 68–78.
31. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчет оболочек методом предельного равновесия при помощи линейного программирования*, Тр. VI Всес. Кон. по Теории Оболочек и Пластинок, Москва 1966.
32. В. И. ТЕРЕКИНА, *Расчет круглых пластин кинематическим методом с применением линейного программирования*, Стр. Мех. Расч. Соор. 1 (1969), 30–32.
33. М. Я. ФРАЙНТ, *Определение несущей способности цилиндрической оболочки методом линейного программирования*, Стр. Мех. Расч. Соор. 1 (1969), 62–63.
34. С. Н. ЧЕРНИКОВ, *Линейные неравенства*, Москва 1968.
35. А. А. ЧИРАС, *Математические методы расчета упруго-пластических изгибаемых систем*, Стр. Мех. и Конст., Докл. 14 научно-тех. конф., Вильнюс 1964.
36. А. А. ЧИРАС, *Взаимосвязь основных математических моделей для прямого проектирования и поверочного расчета упруго-пластических систем*, Liet. Mech. Rinkiny, (12) (1968), 81–89.
37. А. А. ЧИРАС, *Двойственность в задачах строительной механики, теории, упругости и пластичности*, Liet. Mech. Rinkiny, 2 (3) (1968), 34–54.
38. А. А. ЧИРАС, *Методы линейного программирования при расчете упруго-пластических систем*, Ленинград 1969.
39. Д. Б. ЮДИН, Е. Г. ГОЛЬДИТЭЙН, *Линейное программирование*, Москва 1969.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ

В работе представлены ранее полученные результаты применения линейного программирования для определения несущей способности стержневых систем, плит и оболочек, а также двойственные задачи, вопросы приспособляемости и автоматического расчета рам. Рассмотрено также

использование экспериментальных данных для модифицирования задачи линейного программирования для стержневых систем. Кроме традиционных методов дискретного описания конструкций, представлено применение метода конечных элементов.

S u m m a r y

THE APPLICATION OF LINEAR PROGRAMMING TO THE DETERMINATION OF THE LIMIT LOAD CAPACITY OF STRUCTURES (Survey of publications)

The paper presents the results, obtained so far, of the application of linear programming to the determination of the limit load capacity of rod systems, plates and shells. It deals also with the dual problem, the shake-down problem and with the automatic analysis of frames. Moreover, the use of experimental data for the modification of the problem of linear programming for frames is discussed. Besides the traditional methods of discrete description, the paper presents the application of the method of finite elements

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1969 r.; po raz drugi dnia 8 maja 1970 r.

ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI ORTOTROPOWEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ PODDANEJ
SKRĘCANIU

TADEUSZ GAŁKIEWICZ (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Celem pracy jest rozwiązanie liniowego zagadnienia stateczności cienkich, ortotropowych powłok stożkowych podpartych swobodnie na krawędziach i poddanych skręcaniu. Zadanie rozwiązano za pomocą metody energetycznej. Założono ugięcie środkowej powierzchni powłoki w przybliżeniu w postaci funkcji $w = f_1 \sin Kz \sin n_s(\varphi - pz)$, znaleziono całkowitą energię odkształcenia powłoki i następnie zastosowano metodę Ritza. Zadanie rozwiązano dla powłok cienkich i o niezbyt dużym pochyleniu tworzących stożka do jego osi. Udało się określić moment krytyczny oraz liczbę fal powstających na obwodzie za pomocą wygodnych do korzystania wzorów.

Okazało się, że dla powłok stożkowych o małym pochyleniu tworzących do osi stożka — wzory tu wyprowadzone dają wyniki bliższe doświadczeń niż wzory MUSZTARI otrzymane dla powłok izotropowych.

Na rys. 1 podane zostały wymiary s_1, s_2, R_1, R_2 , grubość ścianki h oraz kąt między podstawą i tworzącą α . Dowlone punkty powierzchni środkowej posiadają współrzędne s i φ , zaś przemieszczenie tych punktów w kierunku tworzących oznaczono przez u , w kierunku stycznej do równoleżnika — przez v i w kierunku normalnej do powłoki przez w . Jak widać z rys. 1: $r = s \cos \alpha$, $R_1 = s_1 \cos \alpha$, $R_2 = s_2 \cos \alpha$.

Przyjęto następujące oznaczenia dla stałych materiałowych: E_1, ν_1 — moduł sprężystości i liczba Poissona w kierunku tworzącej, E_2, ν_2 — moduł sprężystości i liczba Poissona w kierunku równoleżnikowym, G — moduł sprężystości postaciowej.

Dla powłok ortotropowych obowiązuje związek

$$(1.1) \quad \frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2}.$$

W pracy KRÓLAKA [4] dotyczącej stateczności ściskanych powłok stożkowych równanie nierozdzielności dla powłok ortotropowych doprowadzone zostało do postaci

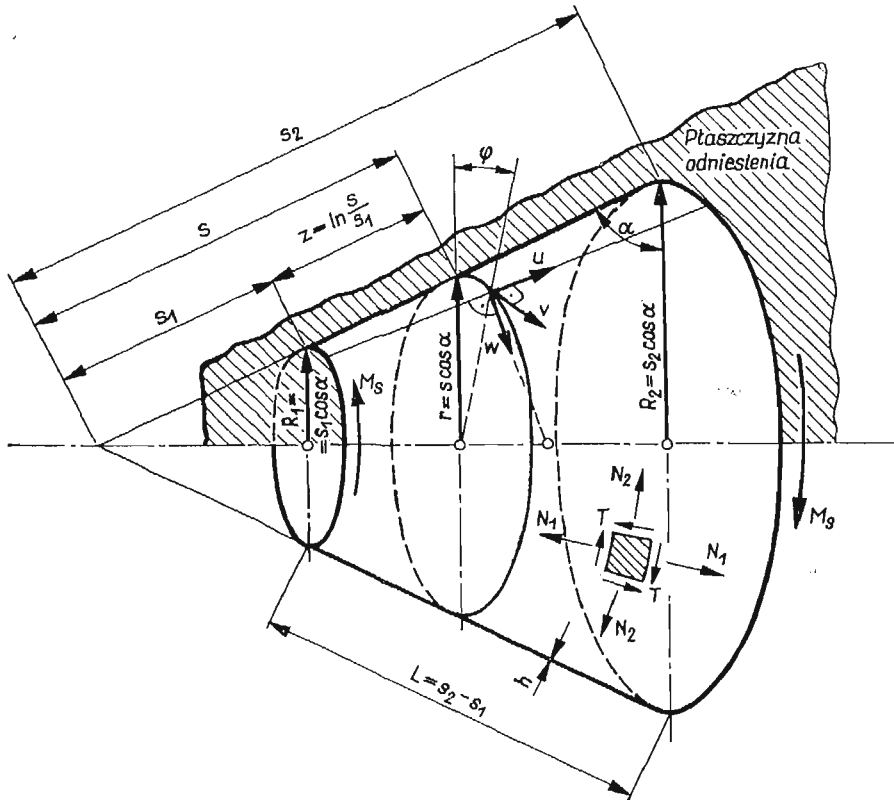
$$(1.2) \quad \delta_I \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} + 2\delta_{III} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^2 \partial \varphi_1^2} + \delta_{II} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \varphi_1^4} - 4\delta_I \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} - 4\delta_{III} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z \partial \varphi_1^2} + \\ + (5\delta_I - \delta_{II}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2(\delta_{II} + \delta_{III}) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_1^2} - 2(\delta_I - \delta_{II}) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = e^z \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

gdzie Φ jest funkcją naprężeń Airy'ego, zaś

$$(1.3) \quad z = \ln \frac{s}{s_1},$$

$$(1.4) \quad \varphi_1 = \varphi \cos \alpha,$$

$$(1.5) \quad \delta_I = \frac{1}{s_1 E_2 h \operatorname{tg} \alpha}, \quad \delta_{II} = \frac{1}{s_1 E_1 h \operatorname{tg} \alpha}, \quad \delta_{III} = \frac{1}{2s_1 \operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{Gh} - 2 \frac{\nu_1}{E_1 h} \right).$$



Rys. 1.

2. Energia całkowita ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu

Energia całkowita nagromadzona w obciążonej powłoce wynosi

$$(2.1) \quad U_0 = (V_s + V_\theta) + W.$$

W powyższym wzorze V_s jest energią sprężystą w stanie błonowym, V_θ — energią od

zginania, zaś W — energią od sił zewnętrznych. Energia sprężysta w stanie błonowym określona jest wzorem

$$(2.2) \quad V_s = \frac{1}{2} \int_F \int (N_1 \varepsilon_1 + N_2 \varepsilon_2 + T\gamma) r d\varphi ds,$$

tutaj $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma$ oznaczają składowe stanu odkształcenia powierzchni środkowej.

Siły przekrojowe wynoszą [3]

$$(2.3a) \quad N_1 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$

$$(2.3b) \quad N_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2},$$

$$(2.3c) \quad T = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

gdzie N_1, N_2, T są to siły przypadające na jednostkę długości środkowej powierzchni (rys. 1).

W powłoce występuje dwukierunkowy stan naprężenia, a więc:

$$(2.4a) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1 h} (N_1 - \nu_1 N_2) = \delta_2 (N_1 - \nu_1 N_2),$$

$$(2.4b) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2 h} (N_2 - \nu_2 N_1) = \delta_1 (N_2 - \nu_2 N_1),$$

$$(2.4c) \quad \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{Gh},$$

$$(2.5) \quad \delta_1 = \frac{1}{E_2 h}, \quad \delta_2 = \frac{1}{E_1 h}.$$

Po podstawieniu powyższych wzorów do wyrażenia (2.2) energia sprężysta w stanie błonowym wynosi

$$(2.6) \quad V_s = \frac{\cos \alpha}{2} \int_F \int s \left(\delta_2 N_1^2 + \delta_1 N_2^2 - 2\delta_2 \nu_1 N_1 N_2 + \frac{1}{Gh} T^2 \right) ds d\varphi.$$

Energia sprężysta od zginania

$$(2.7) \quad V_g = \frac{1}{2} \int_V \int \int (\sigma_{g_1} \varepsilon_{g_1} + \sigma_{g_2} \varepsilon_{g_2} + \tau_g \gamma_g) r d\varphi ds dz',$$

gdzie $\varepsilon_{g_1}, \varepsilon_{g_2}, \gamma_g$ są to odkształcenia względne od zginania, zaś $\sigma_{g_1}, \sigma_{g_2}, \tau_g$ — naprężenia od zginania.

Dla powłoki stożkowej przyrosty krzywizn określone są następującymi przybliżonymi związkami [3]:

$$(2.8a) \quad \Delta \kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

$$(2.8b) \quad \Delta \kappa_2 = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial w}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \sin \alpha \right) \approx \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2},$$

$$(2.8c) \quad \Delta \kappa_{1,2} = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial s} \sin \alpha - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cos \alpha - v \sin \alpha \cos \alpha \right) \approx \\ \approx \frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

Jeżeli przez z' oznaczymy odległość elementu objętości ścianki powłoki od powierzchni środkowej, to odkształcenia względne od zginania są następujące:

$$(2.9) \quad \varepsilon_{\theta_1} = -z' \Delta \kappa_1, \quad \varepsilon_{\theta_2} = -z' \Delta \kappa_2, \quad \gamma_{\theta} = -2z' \Delta \kappa_{1,2}.$$

Przyjmujemy, że w powłoce występuje dwukierunkowy stan napięcia, więc naprężenia od zginania wynoszą

$$(2.10a) \quad \sigma_{\theta_1} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_{\theta_1} + \nu_2 \varepsilon_{\theta_2}) = -\frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} z' (\Delta \kappa_1 + \nu_2 \Delta \kappa_2),$$

$$(2.10b) \quad \sigma_{\theta_2} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} (\varepsilon_{\theta_2} + \nu_1 \varepsilon_{\theta_1}) = -\frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} z' (\Delta \kappa_2 + \nu_1 \Delta \kappa_1),$$

$$(2.10c) \quad \tau_{\theta} = G \gamma_{\theta} = -2G z' \Delta \kappa_{1,2}.$$

Po podstawieniu związków (2.10) i (2.9) do wzoru na energię sprężystą od zginania (2.7)

i po scałkowaniu względem zmiennej z' od $-\frac{h}{2}$ do $+\frac{h}{2}$ otrzymujemy

$$(2.11) \quad V_{\theta} = \frac{\cos \alpha}{2} \int_F \int s [D_1 \Delta \kappa_1^2 + D_2 \Delta \kappa_2^2 + 2D_1 \nu_2 \Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2 + 2D_{1,2} \Delta \kappa_{1,2}^2] ds d\varphi,$$

przy czym D_1 , D_2 są to sztywności zginania, $D_{1,2}$ jest sztywnością skręcania, zatem

$$(2.12) \quad D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{1,2} = \frac{G h^3}{12}.$$

Energia sił zewnętrznych w przypadku skręcania powłoki stożkowej wynosi

$$(2.13) \quad W = -M_s \theta,$$

gdzie M_s — moment skręcający, θ — średni kąt skręcenia całej powłoki.

Po utracie stateczności kąt odkształcenia postaciowego dla powłoki stożkowej jest określony wzorem

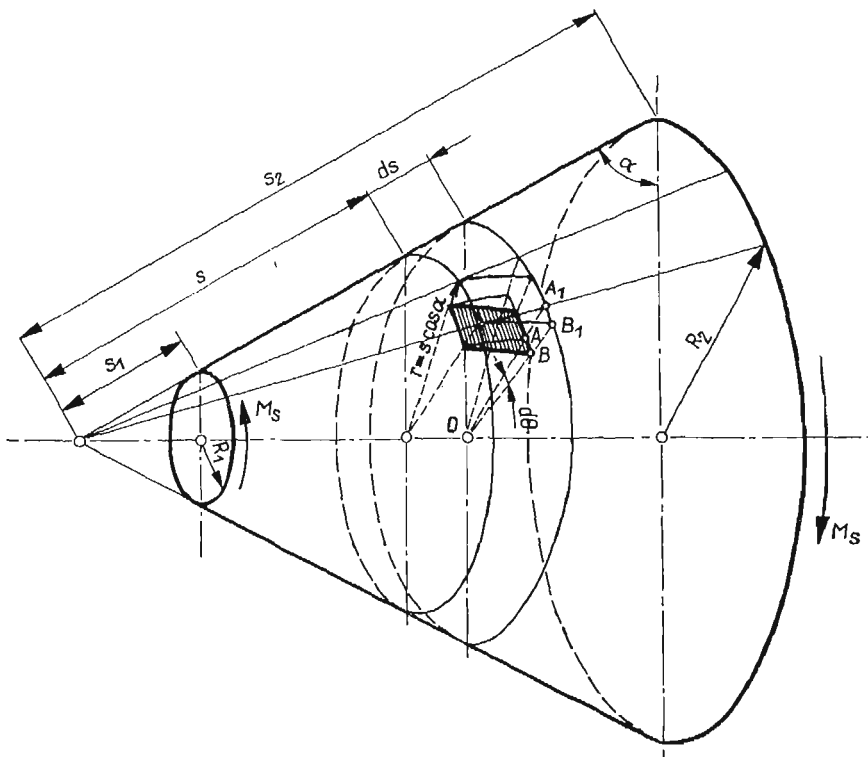
$$(2.14) \quad \gamma = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial s} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \sin \alpha \right) - v \cos \alpha \right] \approx \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi},$$

stąd

$$(2.15) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} = \gamma - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi}.$$

Za powierzchnię odniesienia przyjmijmy powierzchnię środkową stożka nieodkształconego. Dla pofalowanej powłoki długość odcinka $A_1 B_1$ (rys. 2) wynosi

$$(2.16) \quad A_1 B_1 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) ds.$$



Rys. 2

Obrót promienia OA_1 na skutek odkształcenia elementu siłami stycznymi oznaczamy przez $d\theta$, przy czym

$$(2.17) \quad \begin{aligned} d\theta &\approx \frac{A_1 B_1}{r} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} \right) ds = \\ &= \frac{1}{r} \left(\gamma - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) ds = \frac{1}{r} \left(\frac{T}{Gh} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) ds = \\ &= \frac{1}{s \cos \alpha} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s \cos \alpha} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds = \\ &= \frac{1}{s \cos^2 \alpha} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds. \end{aligned}$$

Średni kąt skręcenia elementarnego stożka, (którego długość tworzącej jest ds) wynosi

$$(2.18) \quad d\theta_{sr} = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta d\varphi}{2\pi} = \\ = \frac{ds}{2\pi s \cos^2 \alpha} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] d\varphi.$$

Średni kąt skręcenia całej powłoki stożkowej określono całkując $d\theta_{sr}$ od s_1 do s_2 , mianowicie

$$(2.19) \quad \theta = \int_{s_1}^{s_2} d\theta_{sr} = \frac{1}{2\pi \cos^2 \alpha} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{s} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{Gh} \left(-\frac{1}{s} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] d\varphi.$$

Ostateczny wzór określający energię sił zewnętrznych jest następujący:

$$(2.20) \quad W = -M_s \theta = \frac{M_s}{2\pi \cos^2 \alpha} \int_F \int \left[\frac{1}{Gh} \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds d\varphi.$$

Całkowita energia sprężysta ortotropowej powłoki stożkowej wynosi

$$(2.21) \quad U_0 = (V_s + V_\theta) + W = \\ = \frac{\cos \alpha}{2} \left\{ \int_F \int s \left(\delta_2 N_1^2 + \delta_1 N_2^2 - 2\delta_2 \nu_1 N_1 N_2 + \frac{1}{Gh} T^2 \right) ds d\varphi + \right. \\ \left. + \int_F \int s (D_1 \Delta \kappa_1^2 + D_2 \Delta \kappa_2^2 + 2D_1 \nu_1 \Delta \kappa_1 \Delta \kappa_2 + 2D_{1,2} \Delta \kappa_{1,2}^2) ds d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{M_s}{\pi \cos^3 \alpha} \int_F \int \left[\frac{1}{Gh} \left(\frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right] ds d\varphi. \right.$$

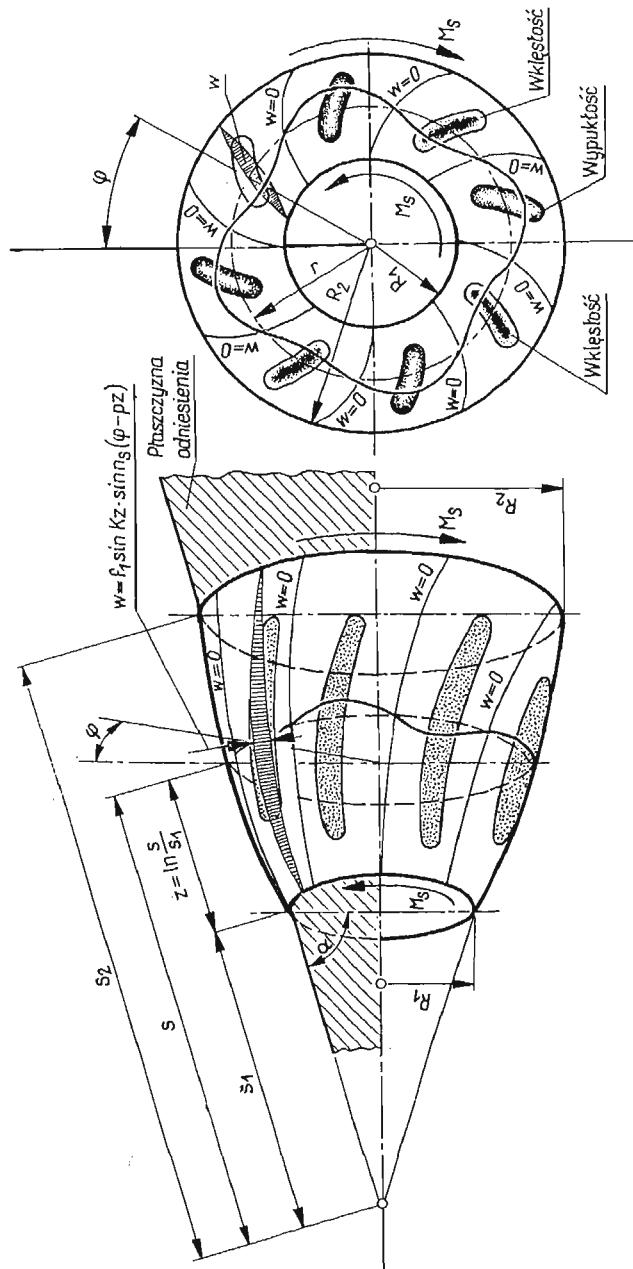
3. Liniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki stożkowej poddanej skręcaniu

Przeprowadzone doświadczenia na skręcanych powłokach stożkowych wykazują, że fale, które tworzą się po utracie stateczności układają się wzdłuż linii zbliżonych do śrubowych. Kształt powierzchni środkowej odkształconej powłoki opisać można w przybliżeniu za pomocą następującej funkcji

$$(3.1) \quad w = f_1 \sin Kz \sin n_s (\varphi - pz);$$

tutaj zmiennymi niezależnymi określającymi powierzchnię środkową są φ oraz z . Kąt φ odkładany jest stałe od pewnej płaszczyzny — bazy przechodzącej przez oś stożka w płaszczyznach prostopadłych do osi stożka (rys. 1, 3). Drugą zmienną z można wyrazić przez współrzędną s mierzoną od wierzchołka stożka wzdłuż jego tworzących

$$(3.2) \quad z = \ln \frac{s}{s_1},$$



Rys. 3.

gdzie f_1 oznacza maksymalną strzałkę fali,

$$(3.3) \quad K = \frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \quad \left(1 \leq \frac{s_2}{s_1} \leq 2 \right),$$

zaś s_1 i s_2 są to najmniejsza i największa tworząca stożka mierzona od jego wierzchołka, n_s określa liczbę fal tworzących się na obwodzie (n_s — liczba całkowita większa od jedności), p jest to pewien parametr.

Analizując warunki brzegowe jakie spełnia funkcja ugięcia okazuje się, że odpowiada ona w przybliżeniu podparciu swobodnemu na krawędziach. Funkcję tę łatwo jest przekształcić do następującej postaci

$$(3.4) \quad w = \frac{f_1}{2} [\cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) - \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)]$$

gdzie

$$(3.5) \quad \varphi_1 = \varphi \cos \alpha,$$

$$(3.6) \quad \bar{a}_1 = n_s p + K = n_s p + \frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}},$$

$$(3.7) \quad \bar{b}_1 = n_s p - K = n_s p - \frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}},$$

$$(3.8) \quad c = -\frac{n_s}{\cos \alpha}.$$

Wstawiono funkcję ugięcia (3.4) do prawej strony równania nierozdzielności (1.2) i otrzymano następujący związek:

$$(3.9) \quad \left. \begin{array}{l} \text{prawa strona} \\ \text{równania} \\ \text{nierozdzielności} \end{array} \right\} = \frac{f_1}{2} e^{\alpha} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)].$$

Przewidziano funkcję naprężeń w postaci

$$(3.10) \quad \Phi = \frac{f_1}{2} e^{\alpha} [\alpha \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \beta \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \gamma \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \delta \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + A_0 \varphi_1,$$

gdzie α , β , γ , δ i A_0 są to pewne stałe, które należy określić.

Wstawiono następnie funkcję Φ do równania nierozdzielności (1.2) i po przyrównaniu do siebie współczynników występujących przy tych samych funkcjach trygonometrycznych po obu stronach równania nierozdzielności otrzymano układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Współczynniki tych równań w sposób skomplikowany zależą od parametrów \bar{a}_1 , \bar{b}_1 , c i dalsze rozwiązanie zadania nastęrcza duże trudności rachunkowe.

Na podstawie porównania szeregu szczególnych przypadków powłok stożkowych z powłokami walcowymi o zbliżonych wymiarach [zakładano tu średnicę powłoki walcowej równą $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$ i długość powłoki $L = (s_2 - s_1)$] zauważono, że dla pewnej grupy powłok występujący w równaniach współczynnik c^4 jest wielkością znacznie większą od współczynników typu $c^2 \bar{a}_1^2$, $c^2 \bar{b}_1^2$, \bar{a}_1^4 , \bar{b}_1^4 itp. W omawianej dalej pracy zagadnienie rozwiązano w sposób przybliżony, gdyż pominięto wszystkie wyrażenia małe w stosunku do c^4 .

Jak wykazuje dokładniejsza analiza dobre wyniki uzyskuje się dla powłok stosunkowo cienkich i o małym kącie pochylenia tworzących do osi stożka.

Po wykonaniu powyższych uproszczeń i przyrównaniu do siebie współczynników występujących przy tych samych funkcjach trygonometrycznych z obu stron równania nierozdzielności otrzymujemy następujący układ czterech równań, z których wyliczamy stałe

$$(3.11a) \quad \alpha \delta_{II} c^4 = -\bar{a}_1 \quad \text{stąd} \quad \alpha = -\frac{\bar{a}_1}{\delta_{II} c^4},$$

$$(3.11b) \quad \beta \delta_{II} c^4 = \bar{a}_1^2 \quad \text{stąd} \quad \beta = \frac{\bar{a}_1^2}{\delta_{II} c^4},$$

$$(3.11c) \quad \gamma \delta_{II} c^4 = \bar{b}_1 \quad \text{stąd} \quad \gamma = \frac{\bar{b}_1}{\delta_{II} c^4},$$

$$(3.11d) \quad \delta \delta_{II} c^4 = -\bar{b}_1^2 \quad \text{stąd} \quad \delta = -\frac{\bar{b}_1^2}{\delta_{II} c^4}.$$

Wzór na funkcję naprężeń jest więc teraz następujący:

$$(3.12) \quad \Phi = \frac{f_1}{2} \frac{e^z}{\delta_{II} c^4} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + A_0 \varphi_1.$$

Stałą A_0 wyliczamy z warunku równowagi. Z sumy momentów względem osi stożka wynika równość

$$(3.13) \quad M_s = \int_0^{2\pi} [T(r d\varphi)] r,$$

przy czym siła styczna T przypadająca na jednostkę długości środkowej powierzchni określona jest wzorem (2.3c).

Po wyliczeniach

$$(3.14) \quad T = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [-c \bar{a}_1^2 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + c \bar{a}_1^3 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + c \bar{b}_1^2 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \\ - c \bar{b}_1^3 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + \frac{A_0}{s^2}.$$

Wstawiając siłę T do wzoru (3.13) i całkując, mamy

$$(3.15) \quad M_s = \int_0^{2\pi} A_0 \cos^2 \alpha d\varphi = A_0 2\pi \cos^2 \alpha,$$

a stała

$$(3.16) \quad A_0 = \frac{M_s}{2\pi \cos^2 \alpha}.$$

Końcowa więc postać wzoru na funkcję naprężeń jest następująca:

$$(3.17) \quad \Phi = \frac{f_1}{2} \frac{e^z}{\delta_{II} c^4} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + \frac{M_s}{2\pi \cos^2 \alpha} \varphi_1.$$

Ze związków (2.3a), (2.3b), (2.3c) wyliczyć można teraz siły wewnętrzne N_1 , N_2 i T , mianowicie

$$(3.18a) \quad N_1 = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [\bar{a}_1 (c^2 - \bar{a}_1^2 - 1) \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ - \bar{a}_1^2 c^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1 (c^2 - \bar{b}_1^2 - 1) \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1^2 c^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.18b) \quad N_2 = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [-\bar{a}_1^2 (\bar{a}_1^2 + 1) \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1^2 (\bar{b}_1^2 + 1) \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.18c) \quad T = \frac{f_1}{2} \frac{1}{\delta_{II} c^4 s_1} \frac{1}{s} [-c\bar{a}_1^2 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + c\bar{a}_1^3 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + c\bar{b}_1^2 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - c\bar{b}_1^3 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)] + \frac{M_s}{2\pi s^2 \cos^2 \alpha}.$$

Otrzymane wyżej siły N_1 , N_2 i T wstawiono do wyrażenia (2.6) i po scałkowaniu i pominięciu wielkości małych otrzymano ostateczną postać wzoru na energię sprężystą w stanie błonowym

$$(3.19) \quad V_s = \frac{f_1^2}{2} \frac{\pi \ln \frac{s_2}{s_1} \sin^2 \alpha}{4\delta_2 \cos \alpha} \left[\left(\frac{\bar{a}_1}{c} \right)^4 + \left(\frac{\bar{b}_1}{c} \right)^4 \right] + \frac{M_s^2}{8\pi Gh \cos^3 \alpha} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}.$$

Przystąpiono następnie do obliczenia energii sprężystej od zginania. Przyrosty krzywizn określono z wzorów (2.8a), (2.8b) i (2.8c), wynoszą one

$$(3.20a) \quad \Delta \kappa_1 = \frac{f_1}{2s^2} [\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{a}_1^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) - \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + \\ + \bar{b}_1^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.20b) \quad \Delta \kappa_2 = \frac{f_1}{2s^2} [-\bar{a}_1 \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1 \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) - c^2 \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ + c^2 \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)],$$

$$(3.20c) \quad \Delta \kappa_{1,2} = \frac{f_1}{2s^2} [-\bar{a}_1 c \cos(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \bar{b}_1 c \cos(\bar{b}_1 z + c\varphi_1) + c \sin(\bar{a}_1 z + c\varphi_1) + \\ - c \sin(\bar{b}_1 z + c\varphi_1)];$$

$\Delta \kappa_1, \Delta \kappa_2, \Delta \kappa_{1,2}$ wstawiono następnie do wzoru na energię od zginania (2.11) następnie po obliczeniach i uproszczeniach otrzymano

$$(3.21) \quad V_\theta = \frac{f_1^2}{2} \frac{D_2 \pi \cos \alpha}{4} \left(\frac{K^2}{K^2+1} \right) \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2} c^4 = \frac{f_1^2}{2} \frac{D_2 \pi \cos \alpha}{4} C c^4,$$

gdzie

$$(3.22) \quad C = \frac{K^2}{(K^2+1)} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2} = \frac{\left(\frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \right)^2}{\left[\left(\frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \right)^2 + 1 \right]} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}.$$

Gdy $\frac{\pi}{\ln \frac{s_2}{s_1}} \gg 1$, wówczas $C \approx \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}$.

Energia sił zewnętrznych wyliczona ze wzoru (2.19) wynosi

$$(3.23) \quad W = -\frac{f_1^2}{2} M_s \frac{n_s p}{4 \cos^2 \alpha} C - \frac{M_s^2}{4 \pi G h \cos^3 \alpha} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2}.$$

Ostatecznie wzór określający całkowitą energię odkształcenia powłoki został doprowadzony do następującej postaci:

$$(3.24) \quad U_0 = (V_s + V_\theta) + W = \frac{f_1^2 K^2}{8 \cos^2 \alpha} C \left\{ A[(p + \eta)^4 + (p - \eta)^4] + \frac{B}{\eta^4} - M_s \frac{p}{\eta^2} \right\} + \\ - \frac{M_s^2}{8 \pi G h \cos^3 \alpha} \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_1^2 s_2^2},$$

gdzie

$$(3.25) \quad \eta = \frac{\pi}{n_s \ln \frac{s_2}{s_1}} = \frac{K}{n_s},$$

$$(3.26) \quad A = \pi^2 E_1 h \frac{s_1^2 s_2^2}{s_2^2 - s_1^2} \left[\frac{K^2 + 1}{K^5} \right] \sin^2 \alpha \cos^5 \alpha$$

$$\left(\text{gdy } K^2 \gg 1 \text{ wówczas } \left[\frac{K^2 + 1}{K^5} \right] \approx \frac{1}{K^3} \right),$$

$$(3.27) \quad B = \frac{\pi E_2 h^3 K^2}{12(1 - \nu_1 \nu_2) \cos \alpha}.$$

Z warunku minimum energii $\frac{\partial U_0}{\partial f_1} = 0$, $\frac{\partial^2 U_0}{\partial f_1^2} > 0$ określony został moment skręcający

$$(3.28) \quad M_s = A \frac{\eta^2}{p} [(p + \eta)^4 + (p - \eta)^4] + B \frac{1}{p \eta^2}.$$

Wyznaczono następnie dla jakich wartości p i η moment M_s jest najmniejszy. Warunki minimum dają dwa związki

$$(3.29) \quad \frac{\partial M_s}{\partial p} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial M_s}{\partial \eta} = 0,$$

które prowadzą do następującego równania dwukwadratowego

$$(3.30) \quad \left(\frac{p}{\eta}\right)^4 - 3\left(\frac{p}{\eta}\right)^2 - 2 = 0.$$

Interesujący nas rzeczywisty dodatni pierwiastek tego równania wynosi

$$(3.31) \quad \frac{p}{\eta} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}} = 1,887.$$

Stąd określono związek między parametrami p i η , mianowicie

$$(3.32) \quad p = 1,887\eta.$$

Wstawiono teraz p do wzoru (3.28) i otrzymano M_s w funkcji tylko jednego parametru

$$(3.33) \quad M_s = 37,5A\eta^5 + \frac{B}{1,887\eta^3},$$

$$(3.34) \quad \frac{\partial M_s}{\partial \eta} = 5 \cdot 37,5 \cdot A\eta^4 - \frac{3B}{1,887\eta^4} = 0,$$

czyli

$$(3.35) \quad \eta = \frac{1}{1,81} \sqrt[8]{\frac{B}{A}}.$$

Mając η można określić liczbę fal powstających na obwodzie stożka

$$(3.36) \quad n_s = \frac{K}{\eta} = K1,81 \sqrt[8]{\frac{A}{B}}.$$

Gdy skorzystamy ze związków (3.26) i (3.27), to po wyliczeniach otrzymamy

$$(3.37) \quad n_s = 4,02 \left[\frac{s_1 s_2}{h} \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \frac{2 \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{\pi} \right)^2 \right]}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{1/4} \cos \alpha \approx$$

$$\approx 4,02 \left[\frac{s_1 s_2}{h} \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2 \frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2)}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{1/4} \cos \alpha.$$

Wstawiono następnie $\eta = \frac{1}{1,81} \sqrt[8]{\frac{B}{A}}$ do wyrażenia (3.33) i otrzymano wzór na krytyczny moment skręcający ortotropowej powłoki stożkowej. Moment ten wynosi

$$(3.38) \quad M_{k_0} = 5,05 A^{3/8} B^{5/8}.$$

Po uwzględnieniu, że A i B określone są odpowiednio wzorami (3.26) i (3.27) mamy

$$(3.39) \quad M_{k_0} = 4,6 \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2}(1-\nu_1\nu_2)\right]^{5/8}} \left[s_1 s_2 h^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2 \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{\pi} \right)^2 \right]}{\ln \frac{s_2}{s_1} (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{3/4} \cos^2 \alpha.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$(3.40) \quad \omega = \left[s_1 s_2 h^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2 \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{s_2}{s_1}}{\pi} \right)^2 \right]}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{1/4} \approx \left[s_1 s_2 h^3 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{2}{\left(\ln \frac{s_2}{s_1} \right)^3 (s_2^2 - s_1^2)}} \right]^{1/4},$$

to wzory (3.37) i (3.39) można zapisać prościej

$$(3.41) \quad n_s = 4,02 \left[\frac{E_1}{E_2} (1-\nu_1\nu_2) \right]^{1/8} \frac{\omega \cos \alpha}{h},$$

$$(3.42) \quad M_{k_0} = 4,6 \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2}(1-\nu_1\nu_2)\right]^{5/8}} \omega^3 \cos^2 \alpha.$$

Dla powłoki izotropowej $E_1 = E_2 = E$, zaś $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Gdy $\nu = 0,3$ wówczas mamy

$$(3.43) \quad n_s = 3,97 \frac{\omega \cos \alpha}{h},$$

$$(3.44) \quad M_{k_0} = 4,88 E \omega^3 \cos^2 \alpha.$$

Uwzględniając fakt, że $s_1 = \frac{R_1}{\cos \alpha}$, $s_2 = \frac{R_2}{\cos \alpha}$ i $L = s_2 - s_1$, wzory (3.37) i (3.39) można doprowadzić do następującej postaci:

$$(3.45) \quad n_s = 4,02 \sqrt{\frac{R_1}{L}} \sqrt[4]{\frac{R_1}{h}} \left[\frac{E_1}{E_2} (1-\nu_1\nu_2) \xi_1 \xi_2^3 \right]^{1/8} \sqrt[4]{\sin \alpha},$$

$$(3.46) \quad M_{k_0} = 4,6 \frac{R_1 h^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{R_1 h}}}} \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2}(1-\nu_1\nu_2)\right]^{5/8}} (\xi_1^3 \xi_2)^{1/8} \sqrt[4]{\sin^3 \alpha},$$

gdzie

$$(3.47) \quad \xi_1 = \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \right] \approx \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} = \frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2}{\frac{R_2}{R_1} + 1},$$

$$(3.48) \quad \xi_2 = \frac{\frac{R_2}{R_1} - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Zbadane zostanie teraz zachowanie się funkcji określających n_s oraz M_{k_0} w przypadku zbliżania się kształtu powłoki stożkowej do walcowej. Gdy $\alpha \rightarrow \pi/2$ wówczas:

$$(3.49) \quad \frac{R_2}{R_1} \rightarrow 1, \quad \sin \alpha \rightarrow 1.$$

Można wykazać, że

$$(3.50) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \xi_1 = 1, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \xi_2 = 1.$$

Wzory na liczbę fal oraz moment krytyczny dla powłoki walcowej otrzymane jako granice, do których dążą wyrażenia (3.45) i (3.46), gdy kąt α dąży do $\pi/2$, są więc następujące:

$$(3.51) \quad n = n_s = 4,02 \sqrt{\frac{R}{L}} \sqrt[4]{\frac{R}{h}} \left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{1/8},$$

$$(3.52) \quad M_{k_{r_0}} = M_{k_0} = 4,6 \frac{Rh^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{Rh}}}} \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{5/8}}.$$

Tutaj $R_1 = R_2 = R$ oznacza promień powierzchni środkowej powłoki walcowej, L — długość powłoki, h — grubość ścianki, zaś $E_1, E_2, \nu_1 \nu_2$ — stałe materiałowe. Liczbę fal dla powłoki walcowej oznaczono przez n , a moment krytyczny symbolem $M_{k_{r_0}}$. Wzory (3.51) i (3.52) są identyczne z wzorami uzyskanymi przez autora w pracy [1] dotyczącej stateczności ortotropowych powłok walcowych poddanych skręcaniu.

Wyniki otrzymane na podstawie wyżej wyprowadzonych wzorów dla powłok walcowych są bardzo bliskie wyników uzyskanych przez innych autorów np. DONNELLA [8], PARSZEWSKIEGO [7], DAREWSKIEGO [9], którzy rozwiązali podobne zagadnienia innymi metodami. Dla powłok izotropowych, gdy parametr $\frac{L}{\sqrt{Rh}} > 17$ maksymalna różnica w odniesieniu do wzoru (3.52) nie przekracza $\pm 4\%$.

W artykule [2] przeprowadzono porównanie wyników uzyskanych w niniejszej pracy z wynikami MUSZTARI [9], który rozwiązał liniowe zagadnienie stateczności skręcanych izotropowych powłok stożkowych. Wykazane zostało, że gdy $L \sqrt{\frac{\sin \alpha}{R_1 h}} \approx 20$ wyniki

uzyskiwane przy pomocy porównywanych wzorów są do siebie zbliżone. Okazuje się, że wraz ze wzrostem parametru $L \sqrt{\frac{\sin \alpha}{R_1 h}}$ moment krytyczny liczony według wzorów Musztari daje wartości większe o ΔM_M od wyników uzyskanych według wyprowadzonego tu wzoru (3.42) i (3.46), np. dla $L \sqrt{\frac{\sin \alpha}{R_1 h}}$ wynoszącego kolejno 40, 50 i 60 — względny przyrost momentu $\frac{\Delta M_M}{M_{k_0}}$ równy jest odpowiednio około +6%, +9% i +11%.

Jak wiadomo, wyniki doświadczeń dla powłok walcowych leżą kilkanaście procent poniżej wyników uzyskanych z rozwiązań zagadnień liniowych [1, 8, 7]. Oczywiście jest, że podobnie będzie się rzecz miała z powłokami stożkowymi o małym pochyleniu tworzących do osi stożka. Z przeprowadzonej analizy wynika, że wzory na moment krytyczny wyprowadzone w niniejszej pracy dają wyniki bliższe doświadczeń niż wzory Musztari.

W celu ułatwienia korzystania z wzorów (3.45) i (3.46) wprowadzono oznaczenia

$$(3.53) \quad \psi_0 = (\xi_1 \xi_2^3)^{1/8} = \left\{ \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \left[1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \right] \left(\frac{R_2 - 1}{R_1} \right)^3 \right\}^{1/8} \approx \sqrt[4]{\frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right)},$$

$$(3.54) \quad \xi_0 = (\xi_1^3 \xi_2)^{1/8} = \left\{ \frac{2 \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_1}{R_2}} \left(1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \right) \right\}^3 \frac{R_2 - 1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \right\}^{1/8} \approx \sqrt[4]{\frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^3}{\frac{R_2}{R_1} + 1}}.$$

Powyższe wzory są słuszne, gdy $\left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right) \ll 1$, co ma miejsce dla $1 \leq \frac{R_2}{R_1} \leq 2$ i wówczas

$$1 + \left(\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\pi} \right)^2 \approx 1 \quad \text{oraz} \quad \frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right)}{\left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \ln \frac{R_2}{R_1}} \approx 1.$$

Dzięki czemu wzory na n_s i M_{k_0} można zapisać krótko

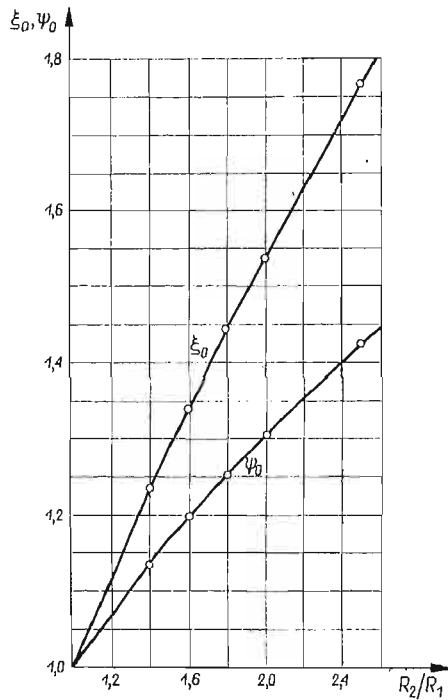
$$(3.55) \quad n_s = n \psi_0 \sqrt[4]{\sin \alpha} \approx n \sqrt[4]{\frac{1}{2} \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \sin \alpha},$$

$$(3.56) \quad M_{k_0} = M_{k_{r_0}} \xi_0 \sqrt[4]{\sin^3 \alpha} \approx M_{k_{r_0}} \sqrt[4]{\frac{2 \left(\frac{R_2}{R_1} \sin \alpha \right)^3}{\frac{R_2}{R_1} + 1}}.$$

Tutaj n i M_{kr_0} jest to liczba fal oraz górny moment krytyczny dla powłoki walcowej o grubości ścianki h , promieniu $R = R_1$, długości równej długości tworzącej stożka $L = s_2 - s_1$ i stałych materiałowych E_1, E_2, ν_1, ν_2 , czyli

$$(3.57) \quad n = 4,02 \sqrt{\frac{R_1}{L}} \sqrt[4]{\frac{R_1}{h}} \left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{1/8},$$

$$(3.58) \quad M_{kr_0} = 4,6 \frac{R_1 h^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{R_1 h}}}} \frac{E_1}{\left[\frac{E_1}{E_2} (1 - \nu_1 \nu_2) \right]^{5/8}}.$$



Rys. 4.

Dla powłoki izotropowej zakładamy $E_1 = E_2 = E$, oraz $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, a gdy dodatkowo przyjmemy $\nu = 0,3$, otrzymamy

$$(3.59) \quad n = 3,97 \sqrt{\frac{R_1}{L}} \sqrt[4]{\frac{R_1}{h}},$$

$$(3.60) \quad M_{kr_0} = 4,88E \frac{R_1 h^2}{\sqrt{\frac{L}{\sqrt{R_1 h}}}}.$$

Występujące we wzorach (3.55), (3.56) współczynniki ψ_0 i ξ_0 jak widać ze związków (3.53) i (3.54) są funkcjami stosunku $\frac{R_2}{R_1}$. Na rys. 4 sporządzono wykresy ψ_0 i ξ_0 w za-

leżności od $\frac{R_2}{R_1}$. Wykresy te ułatwiają praktyczne korzystanie z otrzymanych wzorów.

Zilustrowane zostanie to na przykładzie liczbowym.

Przykład liczbowy. Obliczyć n_s oraz M_{k_0} dla powłoki stożkowej poddanej skręcaniu wykonanej z folii mosiężnej. Dane:

$$h = 0,02 \text{ cm}, R_1 = 5,20 \text{ cm}, R_2 = 8,33 \text{ cm}, L = 18,0 \text{ cm},$$

$$E_1 = E_2 = E = 1,16 \cdot 10^6 \text{ kG cm}^2, \nu_1 = \nu_2 = \nu = 0,3.$$

Mamy

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{8,33}{5,20} = 1,6,$$

$$\cos \alpha = \frac{R_2 - R_1}{L} = \frac{8,33 - 5,20}{18} = \frac{3,13}{18} = 0,1737 \quad (\alpha = 80^\circ),$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,1737^2} = 0,985,$$

$$\sin^3 \alpha = 0,952, \quad \sqrt[4]{\sin \alpha} = \sqrt[4]{0,985} = 0,997, \quad \sqrt[4]{\sin^3 \alpha} = 0,988.$$

Z wykresów na rys. 4 znajdujemy, że dla $\frac{R_2}{R_1} = 1,6$

$$\psi_0 = 1,195; \quad \xi_0 = 1,338.$$

Liczba fal na obwodzie (3.55) oraz skręcający moment krytyczny dla (3.56) rozpatrywanej przez nas powłoki stożkowej wynosi

$$n_s = n \psi_0 \sqrt[4]{\sin \alpha} = \left(3,97 \sqrt{\frac{5,20}{18,0}} \sqrt[4]{\frac{5,20}{0,02}} \right) 1,195 \cdot 0,997 = (8,57)1,191 = 10,2 \approx 10 \text{ fal},$$

$$\begin{aligned} M_{k_0} &= M_{k_{r_0}} \xi_0 \sqrt[4]{\sin^3 \alpha} = \left(4,88 \cdot 1,16 \cdot 10^6 \frac{5,20 \cdot 0,02^2}{18,0} \sqrt{\frac{5,20 \cdot 0,02^2}{18,0}} \right) 1,338 \cdot 0,988 = \\ &= (1580)1,32 = 2085 \text{ kGcm} = 20,85 \text{ kGm}. \end{aligned}$$

W powyższych obliczeniach skorzystano z wzorów (3.59) i (3.60).

Naprężenie krytyczne występujące w dowolnym przekroju poprzecznym powłoki oznaczamy symbolem

$$(3.61) \quad \tau_{kr} = \frac{M_{k_0}}{2\pi r^2 h}.$$

Wstawiając $r = R_1$ i $r = R_2$ otrzymujemy naprężenia krytyczne odpowiadające naprężeniom na krótszej i dłuższej krawędzi skręcanej powłoki stożkowej.

Maksymalne naprężenia wystąpią na krawędzi o mniejszym obwodzie i wynoszą

$$(3.62) \quad \tau_{kr} = \frac{M_{k_0}}{2\pi R_1^2 h}.$$

Ponieważ rozpatrywane zagadnienie dotyczyło sprężystej utraty stateczności, więc oczywiście τ_{kr} musi być mniejsze od granicy proporcjonalności materiału powłoki.

Wzory wyprowadzone w tej pracy są pierwszym przybliżeniem omawianego zagadnienia. Rozwiązując zadanie pominięto wszystkie wyrażenia małe w porównaniu z c^4 . Ważną rzeczą jest ocena maksymalnego błędu otrzymanego rozwiązania, co pozwoliłoby na określenie dla jakich parametrów powłok stożkowych wyprowadzone tu wzory można stosować. Problem ten na obecnym etapie pracy jest niemożliwy do rozwiązania, gdyż nieznanne jest ściśle bądź dokładniejsze rozwiązanie omawianego zagadnienia. W artykule [2] rozważany był ten problem dla izotropowych powłok walcowych i zostało tam wykazane, że z dokładnością do $\pm 4\%$ wzory (3.51) i (3.52) można stosować wówczas, gdy $L/\sqrt{Rh} > 14$.

Ponieważ wzory tu wyprowadzone wraz ze zbliżeniem się kształtu powłoki stożkowej do walcowej dążą dokładnie do postaci (3.51), (3.52), więc można przypuszczać, że — dla powłok stożkowych o niezbyt dużym pochyleniu tworzących do osi stożka — granica stosowalności wzorów (3.55), (3.56) będzie niewiele różniła się od granicy dla powłok walcowych. Wydaje się, że otrzymane wzory będzie można stosować z dobrymi wynikami nawet w zakresie $60^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, wówczas gdy parametr

$$L\sqrt{\frac{\sin\alpha}{R_1 h}} > 18.$$

W celu dokładniejszej oceny omawianego zagadnienia przeprowadzane są obecnie w Instytucie Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej badania na skręcanych powłokach stożkowych. Wyniki tych badań zestawione zostaną w osobnej publikacji.

Rozpatrzone w pracy zadanie jest rozwiązaniem zagadnienia liniowego. Obecnie jest w trakcie rozwiązywania identyczny problem — tylko w ujęciu nieliniowym.

Literatura cytowana w tekście

1. T. GAŁKIEWICZ, *Nieliniowe zagadnienie stateczności ortotropowej powłoki walcowej poddanej skręcaniu* Arch. Bud. Masz., 4, 12 (1965).
2. T. GAŁKIEWICZ, *Analiza znanych wzorów dotyczących stateczności powłok walcowych i stożkowych poddanych skręcaniu*, Zeszyty PŁ (1970), (w druku).
3. Е. И. Григолюк, *Упругая устойчивость ортотропных и слоистых конических и цилиндрических оболочек*, Расчет пространственных конструкции III, Москва 1955.
4. M. KRÓLAK, *Stateczność ortotropowej powłoki stożkowej ściskanej osiowo — w ujęciu nieliniowym*, Arch. Bud. Masz., 3, 16 (1969).
5. J. LEYKO, *Stateczność ortotropowej powłoki o postaci wycinka stożkowego ściskanego wzdłuż tworzących*, Arch. Bud. Masz., 4, 8 (1961).
6. X. M. МУШТАРИ, *Приближенное решение некоторых задач устойчивости тонкостенной конической оболочки кругового сечения*, Прикл. Мат. Мех., 3, 7 (1943).
7. Z. PARZEWSKI, *Krytyczne obciążenie przy skręcaniu cylindrycznej powłoki ortotropowej o skończonej długości*, Arch. Mech. Stos., 3, 17 (1955).
8. S. P. ТИМОШЕНКО, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej* (Wzory L. H. Donnell), Arkady, Warszawa 1963.
9. А. Ц. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем* (Wzory W. M. Darewskiego i Ch. M. Muštari), Наука, Москва 1967.

Резюме

ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНОЙ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
ПОДВЕРГНУТОЙ СКРУЧИВАНИЮ

В работе приведено решение проблемы устойчивости конических ортотропных оболочек шарпирно опертых по торцам и подвергнутых кручению.

Задача решается с помощью приближенного энергетического метода Ритца, в рамках теории тонких оболочек с небольшим наклоном образующей конуса к его оси.

Показывается, что применяя полученные автором, довольно простые с точки зрения вычислений формулы, можно в данном случае определить критический момент, а также число образующихся по окружности волн.

Полученные результаты ближе к экспериментальным данным, чем получаемые по формулам Х. М. Муштари для изотропной оболочки.

Summary

NONLINEAR STABILITY PROBLEM OF AN ORTHOTROPIC CONICAL SHELL SUBJECTED
TO TENSION

This paper is devoted to the solution of the stability problem of an orthotropic shell with simply supported edges, subjected to torsion.

The problem is solved by the energy method. The obtained solution is valid for conical shells of moderate apex angle.

The critical torque is determined, and the number of waves arising on the circumference is expressed by very simple formulae.

It is shown that for the shells with a small apex angle the derived formulae give better results for practice than the formulae obtained by H. M. Mushtari for isotropic shells.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 marca 1970 r.

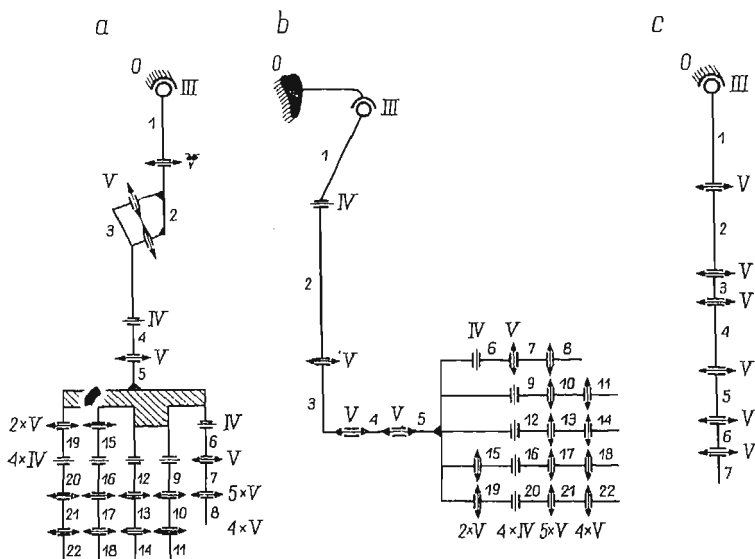
NIKTÓRE WŁASNOŚCI BIOMECHANIZMÓW O ZMIENNEJ STRUKTURZE

KAZIMIERZ FIDELUS, ADAM MORECKI (WARSZAWA)

Opisano niektóre zagadnienia związane ze strukturą i statyką napędów mięśniowych kończyn górnych i dolnych człowieka oraz konia. Zbadano kwestie zależności między klasą i funkcją mięśni a rodzajem i rozmieszczeniem stawów w kończynie. Wskazano na pewne prawidłowości ogólne, które należy uwzględnić przy syntezie biomechanizmów kończynopodobnych.

1. Wprowadzenie

Kończyna górna lub dolna człowieka rozpatrywana na gruncie mechanicznej teorii maszyn jest pewnym złożonym biomechanizmem. Traktując poszczególne kości jako człony sztywne, a stawy jako pary kinematyczne określonych klas otrzymujemy dla kończyny górnej i dolnej człowieka oraz przedniej konia schematy strukturalne przedsta-



Rys. 1. Schematy strukturalne kończyn: a) górnej człowieka, b) dolnej człowieka, c) przedniej konia

wione na rys. 1a, b i c. Stosując do tych schematów wzór strukturalny mechanizmów przestrzennych o postaci

$$(1) \quad w = 6n - \sum_3^5 ip_i,$$

gdzie n — liczba członów ruchomych, p_i — liczba par kinematycznych należących do odpowiednich pięciu klas ($i = 3, 4$ i 5), łatwo sprawdzić, że struktury pokazane na rys. 1a i 1b posiadają ruchliwość $w = 30$, a struktura na rys. 1c $w = 9$. Ruchliwość prawie wszystkich innych struktur kończyn kręgowców mieści się w tym przedziale.

Napędami omawianych biomechanizmów są mięśnie szkieletowe. Posiadają one tę własność iż mogą się wyłącznie skracać. Ich wydłużenie może nastąpić przez przyłożenie odpowiedniego obciążenia zewnętrznego do kończyny lub działanie mięśni antagonicznych.

Z teoretycznego punktu widzenia, do obsługi omawianych biomechanizmów należałoby zastosować w pierwszych dwóch przypadkach (rys. 1a i rys. 1b) 60 silników mięśniowych (po dwa na każdy stopień swobody), a w trzecim przypadku (rys. 1c) 18 takich silników. Bliższa analiza tego zagadnienia wskazuje, że rozkład napędów mięśniowych jest znacznie bardziej skomplikowany i działa według innych zasad niż zwykle przyjmuje się w mechanizmach technicznych.

W tej pracy zbadano bliżej zagadnienia doboru i rozmieszczenia napędów mięśniowych ograniczając się do zagadnień typu strukturalnego a częściowo statycznego.

Omawiane struktury są przykładami struktur o określonej liczbie członów, par kinematycznych i napędów mięśniowych. Jednak przy realizacji różnych aktów ruchowych biorą udział pewne kombinacje tych parametrów, co powoduje, że są realizowane różne struktury, a więc zagadnienie można rozpatrywać jako należące do klasy zmiennych struktur. Typowa zmienność struktury sprowadza się do realizacji ruchu o określonej liczbie stopni swobody spośród 30, np. $w = 1, 2, 3$ lub 15, co ma miejsce w przypadkach unieruchamiania chwytu lub jednoczesnego zginania, pronacji i ruchu chwytowego.

2. Parametry strukturalne napędów mięśniowych kończyn

Wprowadzimy następujące określenia:

— *aktonem mięśniowym* będziemy nazywali tę część mięśnia, jego głowę lub mięsień, którego włókna są tak usytuowane, że rozwijają siłę w określonym kierunku (moment siły względem osi stawu),

— *klasą mięśnia* będziemy nazywali liczbę równą liczbie stawów, w których rozwijają one określone momenty sił,

— *liczbą funkcji* mięśnia będziemy nazywali liczbę składowych momentów sił rozwijanych przez mięsień względem osi stawów, ponad którymi przebiega.

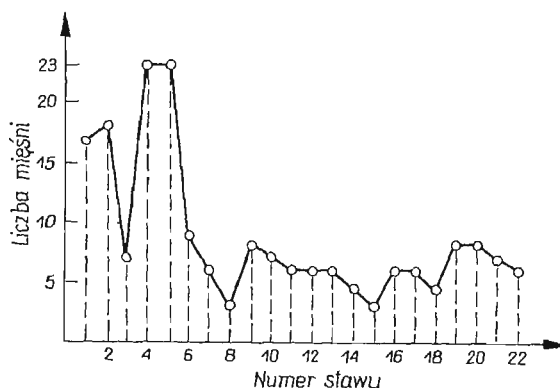
Oznaczenia innych parametrów podano w pracy [6]. Stosując te oznaczenia, na podstawie obszernych studiów anatomiczno-funkcjonalnych, sporządzono tablice 1, 2 i 3. W tych tablicach ujęto liczbowo podawane w anatomii werbalne opisy budowy i działania tych mięśni. W tablicy 1 podano strukturę i działanie 66 aktonów mięśni obsługi-

Tablica 3. Parametry mięśni i stawów kończyny przedniej konia

Lp.	Nazwa mięśni (aktonów)	1 2 3 4 5 6 7							k _m	s _m	f _m										
		Nazwa stawu																			
		Ramienny		łokc.	prom.	nadg.	śródr.	śródr.				między-									
		Nazwa funkcji																			
zgin. prost.	odwodz. przyw. prom. supin.	zgin. prost.	zgin. prost.	zgin. prost.	zgin. prost.	zgin. prost.	zgin. prost.	zgin. prost.	zgin. prost.												
1	Najszerszy grzbietu	+	++								1	3	3								
2	Obły większy	+	+								1	3	2								
3	Nadgrzebieniowy gł.przyśrodkowa		+	+							1	3	2								
4	Nadgrzebieniowy gł.boczna		+		+						1	3	2								
5	Poogrzebieniowy	+			+						1	3	2								
6	Obły mniejszy	+			+						1	3	2								
7	Podłopatkowy	+	++								1	3	3								
8	Naramienny	+									1	3	1								
9	Ramiennogłowy	+									1	3	1								
10	Piersiowy powierzchowny	+	++								1	3	3								
11	Piersiowy głęboki	+	+								1	3	2								
12	Kruczoramienny	+	+								1	3	2								
13	Dwugłowy ramienia	+			+						2	4	2								
14	Napinacz powięzi podramienia	+			+						2	4	2								
15	Napinacz gł.długa	+	+		+						2	4	3								
16	Napinacz gł.przyśrodkowa				+						1	1	1								
17	Napinacz gł.boczna				+						1	1	1								
18	Ramienny				+						1	1	1								
19	Nawracacz obły				+						1	1	1								
20	Zginacz nadgarśnika promien.				+	+	+				3	3	3								
21	Zginacz palcowy powierzchwn.				++	+	+	+			5	5	5								
22	Zginacz nadgarstka łokciowy				++						2	2	2								
23	Zginacz głęboki palcowy				++	+	+	+	+		6	6	6								
24	Prostownik nadgarstka promien.				+	+	+				3	3	3								
25	Prostownik palcowy wspólny				+	+	+	+	+	+	6	6	6								
26	Prostownik nadgarstka łokciowy				+	+	+				3	3	3								
27	Prostownik palcowy dodatkowy					+	+	+	+	+	5	5	5								
28	Odwodziciel palca I					+	+				2	2	2								
29	Międzykostny śródkowy							+			1	1	1								
Liczba mięśni wykonujących daną funkcję		5	8	2	7	4	3	7	7	6	3	5	3	2	2	2	1	2	k ₁ =17	s ₁ =7	f ₁ =7
Liczba funkcji obsługujących dany staw			29					14	9	8	5	4	3						k ₂ =5	s ₂ =2	f ₂ =11
Liczba funkcji obsług.dany stopień swob.		13	9	7				14	9	8	5	4	3						k ₃ =3	s ₃ =15	f ₃ =7
																			k ₄ =0	s ₄ =3	f ₄ =0
																			k ₅ =2	s ₅ =2	f ₅ =2
																			k ₆ =2	s ₆ =2	f ₆ =2
																			58	88	72

jących 22 stawy kończyny górnej człowieka; podano tam również klasy mięśni oraz rodzaj i liczbę funkcji rozwijanych przez nie w stawach. Takie ujęcie pozwala na bliższą analizę działania napędów mięśniowych oraz na wyciągnięcie pewnych wniosków o prawidłowości ich rozmieszczenia. W analogiczny sposób postępując w tablicach 2 i 3 ujęto parametry mięśni obsługujących kończynę dolną człowieka i przednią konia.

Na podstawie danych tablicy 1 sporządzono wykres pokazany na rys. 2, który ujmuje zależność pomiędzy liczbą mięśni a określonym stawem. Numerację stawów przyjęto, podobnie jak w anatomii, od stawu proksymalnego (ramiennego) aż do dystalnego stawu piątego palca, tzn. w kolejności zgodnej z numeracją podaną na rys. 1.



Rys. 2. Liczba mięśni obsługujących poszczególne stawy kończyny górnej człowieka

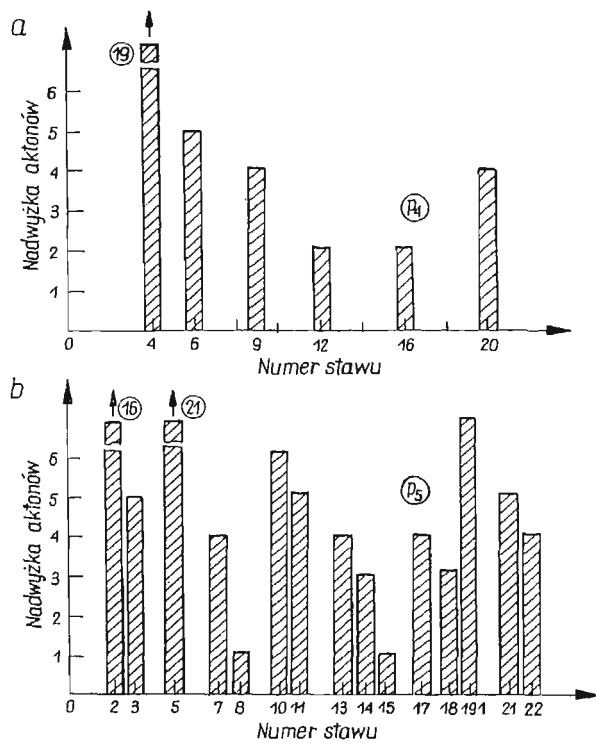
Biorąc pod uwagę, że w kończynach występują pary kinematyczne (stawy) o klasach piątej (p_5), czwartej (p_4) i trzeciej (p_3), liczba ich napędów mięśniowych, przez analogię do układów technicznych, powinna wynosić odpowiednio 2, 4 i 6 mięśni. W kończynach liczby napędów mięśniowych są jednak większe i mogą być potraktowane jako nadwyżka w porównaniu do rozwiązań technicznych. Na rys. 3a i 3b podano nadwyżki napędów mięśniowych występujące w stawach o klasie p_4 i p_5 . Jak wynika z tych przebiegów minimum nadwyżek mięśniowych (50%) ma miejsce w stawach o najmniejszej amplitudzie i niezależności ruchu oraz przenoszonych momentach sił. Maksimum nadwyżek mięśniowych występuje w stawach łokciowym i promieniowo-nadgarstkowym.

Na podstawie danych tablicy 1 sporządzono diagram przedstawiony na rys. 4.¹⁾ Na tym diagramie podano rozkład wskazujący na to jaka liczba mięśni różnych klas obsługuje dany staw. Np. staw nr 2 jest obsługiwany przez mięśnie wszystkich siedmiu klas (1 do 7).

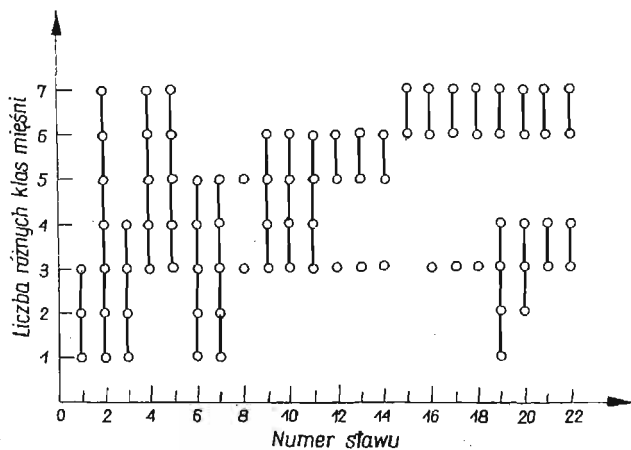
Korzystając z rys. 4 podano rozkład udziału liczbowego mięśni różnych klas przypadających na określoną liczbę stawów (rys. 5). Jak wynika z rys. 4 i 5 dominują wyraźnie stawy, ponad którymi przebiegają mięśnie należące do klas 3, 4 i 5 ($\sim 83\%$).

W celu zbadania wpływu liczby różnych funkcji poszczególnych mięśni w stawach sporządzono diagramy pokazane na rys. 6a, b i c, odpowiednio dla kończyny górnej i dolnej człowieka oraz przedniej konia. Na tej podstawie opracowano rozkłady podane

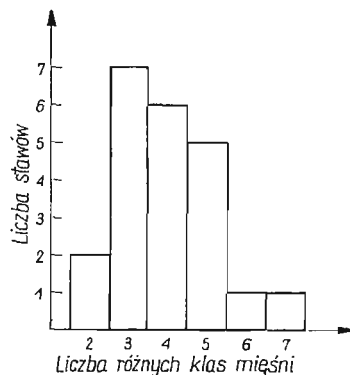
¹⁾ Autorzy wyrażają podziękowanie Pani Prof. dr ZOFII MORECKIEJ za pomoc przy opracowywaniu niektórych tablic i wykresów.



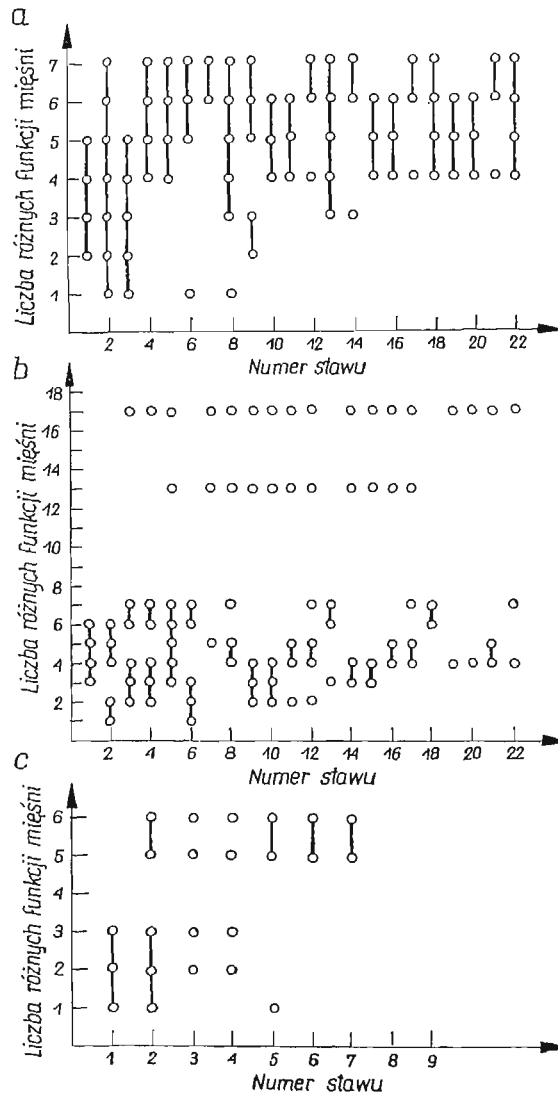
Rys. 3. Nadwyżka aktonów przypadająca na stawy: a) klasy czwartej p_4 , b) klasy piątej p_5



Rys. 4. Liczba różnych klas mięśni obsługujących dany staw kończyny górnej człowieka



Rys. 5. Rozkłady liczby różnych klas mięśni przypadających na liczbę stawów kończyny górnej człowieka

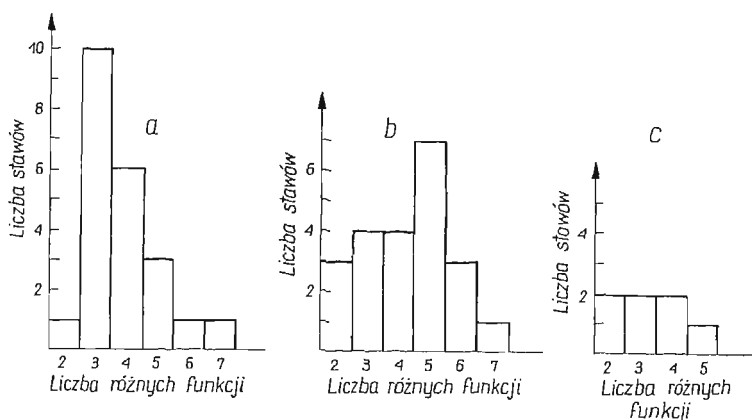


Rys. 6. Diagramy liczb różnych funkcji aktonów mięśni w zależności od numeru stawu: a) dla kończyny górnej człowieka, b) dla kończyny dolnej człowieka, c) dla kończyny przedniej konia

na rys. 7a, b i c. Wskazują one na pewną określoną kierunkowość zmian tych rozkładów wraz ze zmianą funkcji kończyny. W przypadku kończyny górnej człowieka, która jest przystosowana do wykonywania najbardziej wszechstronnych funkcji, jak np. roboczych, bytowych, obronnych itp. notuje się występowanie zespołów mięśni o wszystkich siedmiu funkcjach, z jedną dominantą, tj. mięśni o trzech różnych funkcjach, względem osi stawów, ponad którymi one przebiegają (rys. 7a).

W miarę postępującej specjalizacji kończyny, tzn. ograniczenia liczby wykonywanych przez nią aktów ruchowych, zauważa się wyraźną zmianę rozkładu funkcji mięśni (rys. 7b).

Kierunek zmian wykazuje tendencję bardziej równomiernego rozkładu liczby stawów obsługiwanych przez zespoły mięśni o różnych funkcjach. W kończynie dolnej dominują stawy, ponad którymi przebiegają mięśnie o pięciu różnych funkcjach. Dalej idącą tendencję notujemy w przypadku kończyny przedniej konia (rys. 7c). W konsekwencji po-



Rys. 7. Rozkłady liczb różnych funkcji mięśni przypadających na liczbę stawów: a) dla kończyny górnej, człowieka, b) dla kończyny dolnej człowieka, c) dla kończyny przedniej konia

woduje to występowanie bardziej sprzężonych ruchów między poszczególnymi stawami w kończynie dolnej człowieka i przedniej konia.

Inny rodzaj analizy napędów mięśniowych omawianych kończyn zaprezentowano w tablicach 4, 5 i 6. W tablicach 4a i 4b podano rozkład mięśni według klas i funkcji oraz klas obsługiwanych stawów kończyny górnej. Jak wynika z tablicy 4a dla stawów obsługiwanych przez mięśnie o wyższych klasach występują pewne prawidłowości, mianowicie ustala się określony związek między liczbą obsługiwanych stawów i ich klasą o postaci

$$(2) \quad k_m = p_4 + p_5,$$

gdzie $p_4 = 2$ i $p_5 = 1, 2, 3, 4, 5$. Wydaje się, że można stąd wyciągnąć pewne wnioski ogólne przy konstrukcji manipulatorów kończynopodobnych.

Podobne prawidłowości notuje się w tablicy 4b. Przeprowadzona analiza kończyny dolnej człowieka i przedniej konia wskazuje również na występowanie podobnych związków. Dla kończyny dolnej człowieka otrzymujemy

$$(3) \quad k_m = p_4 + p_5,$$

gdzie $p_4 = 1, 4, 5$ i $p_5 = 2, 3, 4, 5, 6$ i 13.

Przeprowadzona analiza kończyny przedniej konia prowadzi do następujących spostrzeżeń (tablice 6a i 6b)

$$(4) \quad k_m = p_5,$$

gdzie $p_5 = 1, 2, 3, 4, 5$ i 6.

Tablica 4a. Rozkład miesięni według klas liczby obsługiwanych stawów kończyny górnej człowieka

Klasa miesięnia	Liczba miesięni	Rozkład miesięni według klas i liczby obsługiwanych stawów													
		P ₃	P ₄	P ₅	2P ₅	P ₃ +P ₄	P ₅ +P ₃	P ₅ +2P ₄	2P ₅ +P ₄	2P ₅ +P ₃	2P ₅ +2P ₄	3P ₅ +P ₄	3P ₅ +2P ₄	4P ₅ +2P ₄	5P ₅ +2P ₄
1	21	14	1	6											
2	6				2	3	1								
3	19							2	15	2					
4	5										3	2			
5	6												6		
6	7													7	
7	2														2
	66	14	1	6	2	3	1	2	15	2	3	2	6	7	2

Tablica 4b. Rozkład miesięni według funkcji i liczby klas obsługiwanych stawów kończyny górnej człowieka

Funkcja miesięnia	Liczba miesięni	Rozkład miesięni według funkcji i liczby obsługiwanych stawów														
		P ₃	P ₄	P ₅	2P ₅	P ₃ +2P ₄	P ₃ +P ₅	P ₃ +2P ₅	P ₄ +P ₅	P ₄ +2P ₅	P ₄ +3P ₅	2P ₄ +P ₅	2P ₄ +2P ₅	2P ₄ +3P ₅	2P ₄ +4P ₅	2P ₄ +5P ₅
1	7		1	6												
2	3	1			1			1								
3	10	5			1			2	1							
4	24	7					1	2	13				1			
5	11	1				1				2	1	2	4			
6	7													7		
7	4													1	1	2
	66	14	1	6	2	1	1	1	5	14	2	1	3	5	8	2

Tablica 5a. Rozkład miesięni według klas i liczby klas obsługiwanych stawów kończyny dolnej człowieka

Klasa miesięnia	Liczba miesięni	Rozkład miesięni według klasy i liczby klas obsługiwanych stawów														
		P ₃	P ₄	P ₅	P ₃ +P ₄	P ₄ +P ₅	2P ₅	3P ₅	2P ₅ +P ₄	3P ₅ +P ₄	4P ₅ +P ₄	5P ₅ +P ₄	6P ₅ +P ₄	6P ₅ +5P ₄	13P ₅ +4P ₄	
1	36	20	16													
2	11				7	3	1									
3	13						3	10								
4	4								4							
5	1									1						
6	2										2					
7	1												1			
11	1													1		
17	2															2
	71															

Tablica 5b. Rozkład miesięni według funkcji i klasy liczb obsługiwanych stawów kończyny dolnej człowieka

Funkcja miesięnia	Liczba miesięni	Rozkład miesięni według funkcji i liczby klas obsługiwanych stawów														
		P ₃	P ₄	P ₅	2P ₅	3P ₅	P ₅ +P ₄	2P ₅ +P ₄	P ₃ +P ₄	3P ₅ +P ₄	5P ₅ +P ₄	6P ₅ +P ₄	7P ₅ +4P ₄	13P ₅ +4P ₄		
1	4		4						1							
2	13		12		1											
3	28	20				2	3	3								
4	13					1	7	3	2							
5	6							3	3							
6	2							1			1					
7	2										1		1			
13	1													1		
17	2															2
	71															

Tablica 6a. Rozkład mięśni według klas i liczby klas obsługiwanych stawów kończyny przedniej konia

Klasa mięśnia	Liczba mięśni	Rozkład mięśni według klas i liczby klas obsługiwanych stawów						
		p_3	p_3+p_5	p_5	$2p_5$	$3p_5$	$5p_5$	$6p_5$
1	17	12		5				
2	5		3		2			
3	3					3		
5	2						2	
6	2							2
	29							

Tablica 6b. Rozkład mięśni według funkcji i liczby klas obsługiwanych stawów kończyny przedniej konia

Funkcja mięśni	Liczba mięśni	Rozkład mięśni według funkcji i liczby klas obsługiwanych stawów						
		p_3	p_3+p_5	p_5	$2p_5$	$3p_5$	$5p_5$	$6p_5$
1	7	2		5				
2	11	7	2		2			
3	7	3	1			3		
5	2						2	
6	2							2
	29							

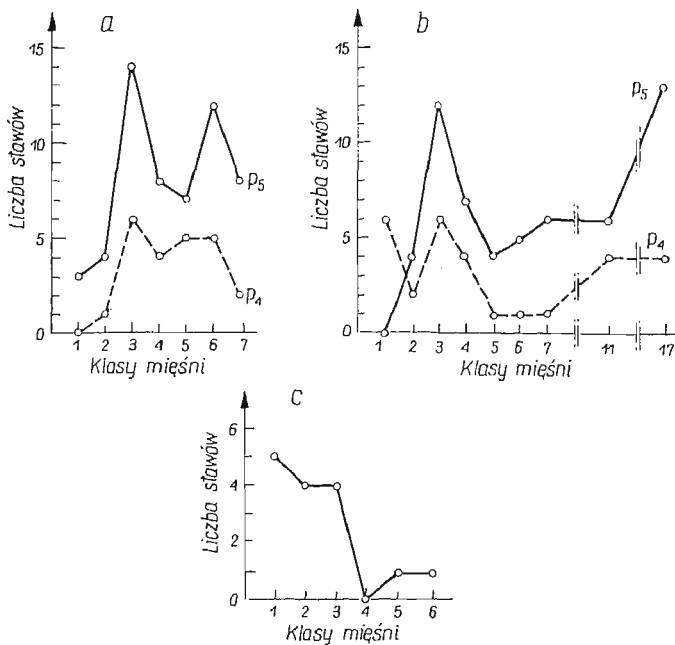
Tablica 7. Rozkład liczby mięśni różnych klas w obsłudze określonych stawów kończyny górnej człowieka

Klasa stawu	Liczba stawów	Liczba stawów w których występuje dana klasa mięśni						
		klasa mięśni						
		1	2	3	4	5	6	7
P_3	1	1	1	1				
P_4	6	0	1	6	4	5	5	2
P_5	15	3	4	14	8	7	12	8
	22							

Analizując rolę mięśni różnych klas przy obsłudze stawów kończyny górnej o różnej liczbie stopni swobody oraz stosując porządkowanie według rachunku klas otrzymujemy obraz podany w tablicy 7 oraz na rys. 8a.

W tablicach 8 i 9 oraz na rys. 8b i 8c zaprezentowano wyniki analizy przeprowadzonej dla kończyny dolnej człowieka (tablica 8 i rys. 8b) oraz przedniej konia (tablica 9 i rys. 8c).

Komentując otrzymane wyniki możemy stwierdzić, iż rozkład mięśni kończyny górnej i dolnej człowieka według ich klas, nie zależy od rodzaju obsługiwanego przez nie stawu jest bowiem bardzo podobny dla stawów czwartej i piątej klasy.



Rys. 8. Liczby stawów obsługiwanych przez mięśnie różnych klas dla stawów czwartej (p_4) i piątej klasy (p_5)

Tablica 8. Rozkład liczby mięśni różnych klas przy obsłudze stawów kończyny dolnej

Klasa stawu	Liczba stawów	Liczba stawów w których występuje dana klasa mięśni								
		klasa mięśni								
		1	2	3	4	5	6	7	11	17
P_3	1	1	1	—	—	—	—	—	—	—
P_4	6	6	2	6	4	1	1	1	4	4
P_5	15	—	4	12	7	4	5	6	6	13

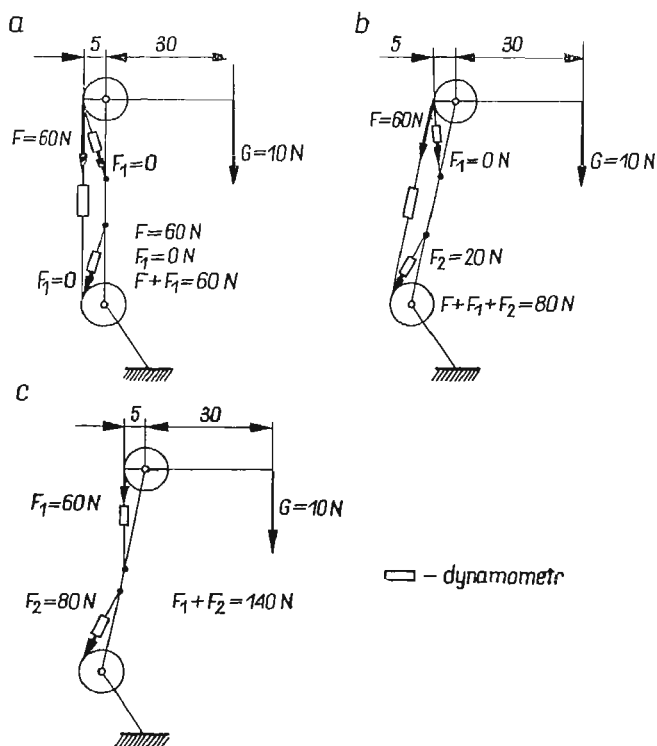
Tablica 9. Rozkład liczby mięśni różnych klas przy obsłudze stawów kończyny przedniej konia

Klasa stawu	Liczba stawów	Liczba stawów w których występuje dana klasa mięśni					
		klasa mięśni					
		1	2	3	4	5	6
P_3	1	1	1	1	—	—	—
P_5	6	5	4	4	0	2	2

3. Zagadnienia wyboru i rozmieszczenia napędów mięśniowych

Przeprowadzona w poprzednim rozdziale analiza parametrów strukturalnych napędów mięśniowych wskazuje na pewne prawidłowości. Niemniej nie stanowi ona wystarczającej podstawy przy syntezie manipulatorów kończynopodobnych. Do analizy strukturalnej należy dołączyć ponadto kwestię rozkładu sił i obciążeń przenoszonych przez poszczególne kości (człony) oraz zagadnienia ich kształtu i wytrzymałości. Dopiero łączna analiza tego zespołu czynników wraz z analizą układu sterowania może doprowadzić do ustalenia prawidłowości i zasad budowy tak złożonych biomechanizmów.

Ograniczmy naszą analizę w tym zakresie do przypadku płaskiego i stawów łokciowego i promieniowo-nadgarstkowego kończyny górnej człowieka. Pierwsze prace w tym zakresie były prowadzone już przez ELFTMANA i STORCKA w latach 1939 i 1951 [4], [5].

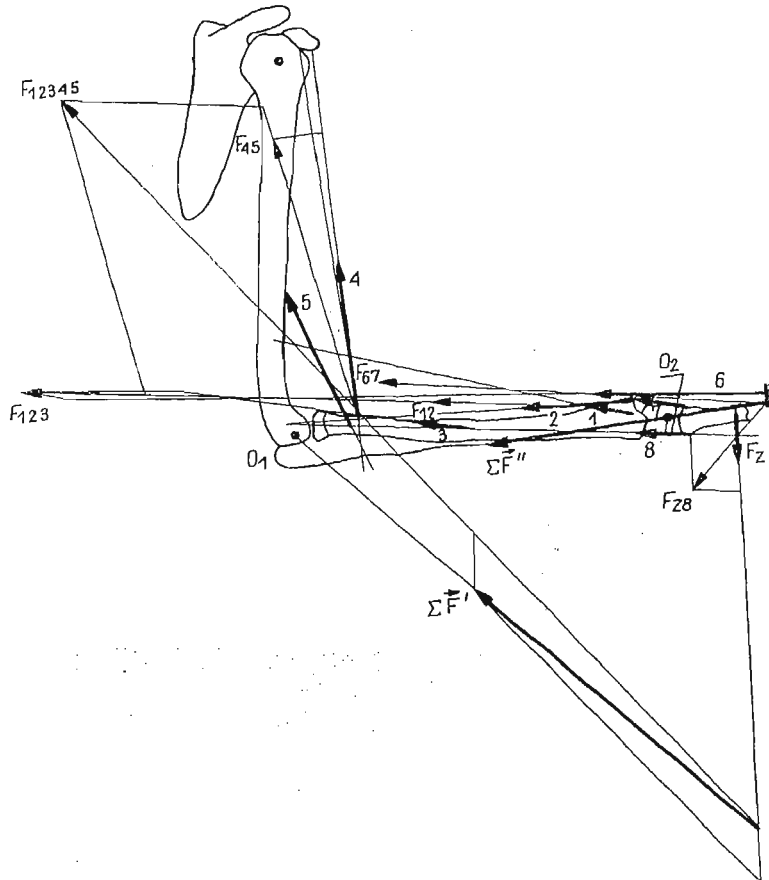


Rys. 9. Przykłady równoważenia momentu siły zewnętrznej (G) przez układ mięśni 1 i 2 stawowych: a) moment siły G równoważy mięsień dwustawowy, b) moment siły G równoważą mięśnie, 1 i 2 stawowy, c) moment siły G równoważą tylko mięśnie jednostawowe

Na rys. 9 podano przykład analizy wpływu napędów mięśniowych dwóch różnych klas pierwszej i drugiej (tzw. mięśnie jedno i dwustawowe) na rozkład momentów sił w stawach. Na rys. 9a, b i c podano kolejno wielkości sił i momentów sił rozwijanych przez odpowiednie mięśnie w zależności od położenia kończyny i rodzaju mięśni. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, łączna siła przenoszona przez układ jednocześnie

działających mięśni klasy 1 i 2 jest o około 40% mniejsza od siły rozwijanej przez mięśnie tylko 1 klasy. W statyce organizmów żywych możemy przyjąć, iż wielkość wydatkowanej energii jest proporcjonalna do wielkości rozwijanej siły przez poszczególne mięśnie.

Na rys. 10 pokazano rozmieszczenie mięśni w stawach łokciowym i promieniowo-nadgarstkowym w płaszczyźnie strzałkowej oraz rozkład sił uzyskany z równania udziału

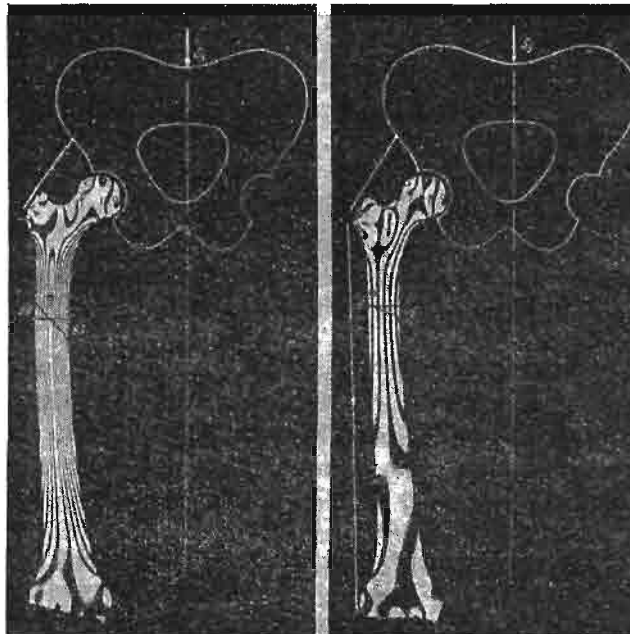
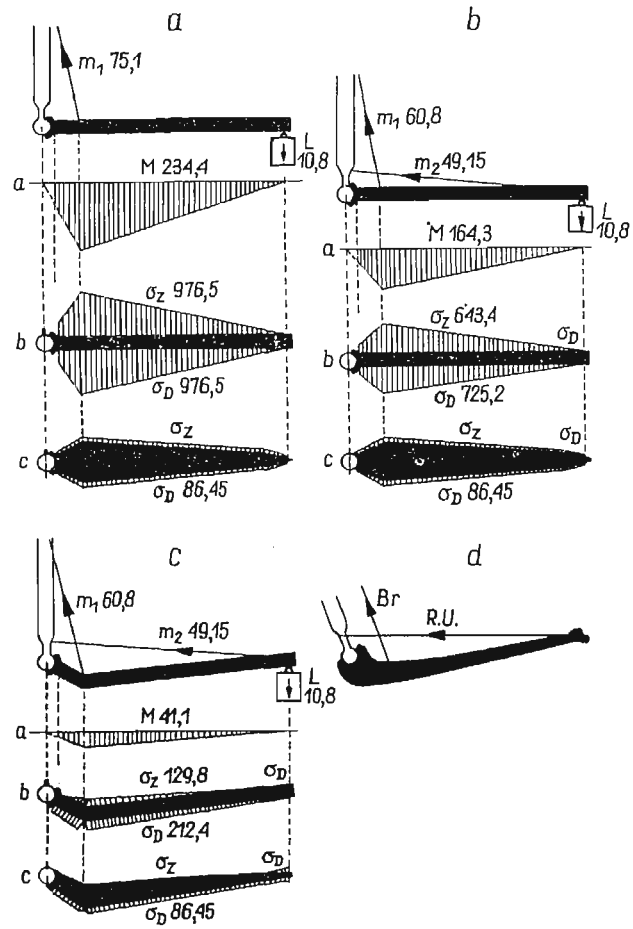


Rys. 10. Siły rozwijane przez mięśnie w stawach łokciowych i promieniowo-nadgarstkowym (płaszczyzna strzałkowa). Od 1-8 mięśnie lub ich aktyony

łów [6]. Przyjmując obciążenie zewnętrzne $F_z = 210 \text{ N}$ przyłożone do dłoni otrzymujemy momenty wypadkowe odpowiednio w stawie promieniowo-nadgarstkowym $M_1 = 1430 \text{ Ncm}$ i łokciowym $M_2 = 9240 \text{ Ncm}$. Siła wypadkowa wynosi tutaj 3280 N . Przyjmując umowne zastępcze mięśnie jednostawowe, które byłyby realne biologiczne, o promieniach wynoszących odpowiednio $r_1 = 20 \text{ mm}$ i $r_2 = 50 \text{ mm}$ otrzymujemy

$$(5) \quad F_{1z} = \frac{M_1}{r_1} = 715 \text{ N}, \quad F_{2z} = \frac{M_2}{r_2} = 1848 \text{ N}.$$

Przyjmując, że niektóre mięśnie rozwijają momenty w stawach sąsiednich (ramiennym — mięsień nr 4, oraz śródreżcza i palców — mięsień nr 6) otrzymujemy dwa dodatkowe



Rys. 11. Rozkład naprężeń w kości przy różnych klasach mięśni: a) kość łokciowa, b) kość udowa.

mięśnie zastępcze, które powinny zrównoważyć działanie mięśni naturalnych w stawach sąsiednich.

Stąd łączna siła zastępcza wynosi około $2563 + 1411$ N i jest o 694 N większa niż w układzie naturalnym. Ponadto większa liczba mięśni naturalnych powoduje znacznie mniejsze naprężenie punktowe w kościach i bardziej równomierne rozłożenie brzuśców wokół szkieletu. Analiza eleastoptyczna [7] wskazuje, że zastosowanie wyłącznie napędów mięśniowych 1 klasy (mięśni jednostawowych) powoduje znaczny wzrost naprężeń w kościach (rys. 11). Kwestie te związane są z optymalizacją wytrzymałości szkieletu oraz oszczędnością materiału zwiększającego obciążenie kończyny. Stąd wynika, że dobór mięśni odpowiednich klas oraz kształtu kości jest tym czynnikiem, który należy uwzględnić przy syntezie mechanizmów kończynopodobnych.

4. Zakończenie

Przeprowadzona analiza struktury i statyki napędów mięśniowych biomechanizmów oraz dane piśmiennictwa wskazują, iż trzy zasadnicze kwestie są tutaj dominujące, mianowicie

- możliwość funkcjonalnej zmiany struktury napędów mięśniowych,
- rozmieszczenie i klasa napędów, co wiąże się z wartością wydatkowanej energii,
- ukształtowanie kości i związane z tym zagadnienia wytrzymałości oraz oszczędności materiału.

Zespół tych warunków należy wziąć pod uwagę w przypadku syntezy manipulatorów kończynopodobnych. Wydaje się, że stosując te prawidłowości, szczególnie przy budowie manipulatorów typu «kończyna» o wielu stopniach swobody, można uzyskać znaczne zmniejszenie wymiarów członów, ciężaru, wartości wydatkowanej energii oraz wbrew pozorom uproszczenie układu sterowania takim obiektem.

Oczywiście przedstawione studia nie wyczerpują zagadnienia lecz wskazują jedynie na kierunek dalszych poszukiwań w tym zakresie.

Literatura cytowana w tekście

1. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Bionika ruchu*, PWN (w druku).
2. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, K. NAZARCZUK, K. TEMPIŃSKI, S. SKORUPSKI, *Some problems of bionic investigation*, II Inter. Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Proc., 2, Zakopane 1969.
3. К. Фиделос, *Функция некоторых двусуставных мышц бедра в спортивных упражнениях*, Москва 1959 (Канд. диссерт.).
4. H. ELFTMAN, *The function of muscles in locomotion*, Amer. J. of Physiol., (1939).
5. H. STORCK, *Die Anwendung der Statik auf der menschlichen Bewegungsapparat*, Beilageheft Zeitschrift für Orthopädie, B. 81. (1951).
6. K. FIDELUS, *Biomechaniczne parametry układu ruchu kończyn górnych człowieka*, Rozprawa habilitacyjna (w druku).
7. F. PAUWELS, *Gesammelte Abhandlungen zur funktionellen Anatomie des Bewegungsapparates*, Berlin 1965.

Р е з ю м е

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА БИОМЕХАНИЗМОВ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Проведен структурно-функциональный анализ верхней и нижней конечностей человека и передней конечности лошади. На основе структурных зависимостей установлена подвижность этих «механизмов» и исследованы некоторые вопросы мышечных приводов. На основании этого анализа даны некоторые замечания относительно размещения мышечных приводов и изменений их распределения, классов и функций с изменением специализации конечностей. К структурно-функциональному анализу присоединен также упрощенный статический анализ сустава обслуживаемого мышцами первого и второго классов, с указанием на некоторые преимущества таких систем. Приводится также пример поляризационно-оптического анализа указывающий на целесообразность применения мышц нескольких классов для привода соответствующих суставов. Результаты работы найдут применение для синтеза биоманипуляторов.

S u m m a r y

SOME PROPERTIES OF BIOMECHANICS WITH VARIABLE STRUCTURES

This paper deals with the structural and functional analysis of upper and lower extremities of a man and the anterior extremity of a horse. Basing on the structural relation, the mobility of these «mechanisms» was established and some problems of muscle drives were investigated. This analysis shows some regularities in collocation of muscle drives and some changes in relation to the specialisation of the extremity. In spite of structural-functional analysis, the simplified static analysis of the system equipped with muscles of first and second class was given and some advantages of these systems were shown. An example of photoelastic analysis is given, showing the advantages resulting from the application of muscles of various classes operating appropriate joints. The results of the present paper will be applied in the synthesis of biomanipulators similar to the extremities.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
AKADEMIA WYCHOWANIA FIZYCZNEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 kwietnia 1970 r.

PLASTYCZNE SKRĘCANIE NIEJEDNORODNYCH PRĘTÓW O ZMIENNEJ ŚREDNICY

MARIAN GALOS (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

Problemowi sprężystego skręcania prętów o zmiennej średnicy poświęcono bardzo wiele prac. Rozwiązanie problemu sprowadza się do znalezienia dwu składowych stanu naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$, jeżeli problem rozwiązywany jest w układzie walcowym (r, θ, z) . Rozwiązano szereg przypadków sprężystego skręcania takich prętów, głównie metodą odwrotną oraz metodami przybliżonymi. Podstawowymi pracami w tej dziedzinie są prace MICHELLA [4], FÖPPLA [2], NEUBERA [5].

Znalezieniem rozkładu naprężeń w strefie plastycznej przy sprężysto-plastycznym skręcaniu takich prętów wykonanych z materiałów sprężyste i plastycznie jednorodnych zajmował się głównie SOKOŁOWSKI [6], [8], który rozwiązał szereg przypadków, jednak w postaci dość trudnej do bezpośredniego zastosowania (np. do rozwiązywania zadania o sprężysto-plastycznym skręcaniu), ponieważ autor znalazł uwikłane równanie charakterystyk.

Problemem rozkładu naprężeń w strefie plastycznej przy skręcaniu prętów plastycznie niejednorodnych dotychczas nie zajmowano się.

Bardzo trudne do rozwiązania jest zadanie o sprężysto-plastycznym skręcaniu prętów o zmiennej średnicy i dowolnym kształcie powierzchni bocznej. Istotną trudność tego zadania polega na tym, że jednocześnie szukamy rozwiązania w strefie sprężystej oraz granicy między strefą sprężystą i plastyczną. Wobec tego dla znalezienia rozwiązania w zakresie sprężystym nie znamy bezpośrednio granicy tej strefy (co za tym idzie i warunków brzegowych). Jakkolwiek w tej dziedzinie rozwiązano szereg przypadków (EDDY, SHAW [1]), to do rozwiązania wykorzystano metody przybliżone (wykreślno-analityczne, energetyczne), których zastosowanie jest bardzo uciążliwe. W rozpatrywanych przez powyższych autorów przykładach przyjęto, że pręty wykonane są z materiałów jednorodnych.

W obecnej pracy zajęto się głównie rozwiązaniem problemu plastycznego skręcania prętów o zmiennej średnicy, wykonanych z materiałów o dowolnej niejednorodności plastycznej (zależnej od zmiennych r, z w układzie walcowym r, θ, z). Stwierdzono mianowicie analogię matematyczną, jaka zachodzi pomiędzy tym problemem a problemem plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych wykonanych z materiałów o dowolnej niejednorodności poprzecznej, który to problem był rozpatrywany w pracy GALOSA [3].

Jeżeli mianowicie do rozważań wprowadzimy funkcję naprężeń Φ spełniającą tożsamościowo warunki równowagi, to rozwiązanie obydwu problemów można sprowadzić do identycznego równania

$$(1.1) \quad |\text{grad } \Phi| = k(x_1, x_2),$$

gdzie przez x_1, x_2 oznaczono w sposób ogólny zmienne w przekroju poprzecznym niejednorodnego pręta pryzmatycznego o dowolnym przekroju lub w przekroju podłużnym pręta o zmiennej średnicy. Podobnie, jak w pracy [3], zajęto się szczegółowo określeniem linii największego spadku funkcji naprężeń (tak w dalszym ciągu nazywać będziemy rzuty tych linii na płaszczyznę r, z przekroju pręta). Warto podkreślić, że linie największego spadku funkcji naprężeń są identyczne z charakterystykami problemu, a zarazem z liniami poślizgu. Na podstawie znalezionych linii największego spadku można określić samą funkcję naprężeń Φ , a następnie rozkład naprężeń.

W pracy podano również metodę projektowania prętów rurowych, które wykazują całkowite uplastycznienie oraz metodę odwrotną rozwiązywania problemu sprężysto-plastycznego skręcania prętów o zmiennej średnicy, która to metoda jest podobna do zastosowanej przez SOKOŁOWSKIEGO [7] przy rozwiązywaniu zagadnienia sprężysto-plastycznego skręcania prętów pryzmatycznych.

W niniejszej pracy zajęto się również określeniem deformacji strefy plastycznej skręcanego pręta oraz przedstawiono szereg przykładów ilustrujących metody przedstawione w pracy.

2. Podstawowe równania problemu

Problem znalezienia rozkładu naprężeń w strefie plastycznej skręcanego pręta o zmiennej średnicy jest problemem wewnątrznie statycznie wyznaczalnym, zatem rozkład naprężeń nie jest zależny od tego, czy przyjmujemy do rozwiązywania teorię małych odkształceń sprężysto-plastycznych, czy też teorię płynięcia plastycznego.

Jeżeli oś z jest osią pręta (rys. 1), to różne od zera składowe stanu naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ są określone równaniem równowagi wewnętrznej

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} = 0$$

oraz warunkiem plastyczności

$$(2.2) \quad \tau_{\theta z}^2 + \tau_{\theta r}^2 = k^2(r, z),$$

(gdzie $k(r, z)$ jest granicą plastyczności na ścinanie będącą pewną funkcją zmiennych r i z), przy odpowiednim warunku brzegowym.

Układ równań (2.1) i (2.2) można sprowadzić do jednego równania przez wprowadzenie funkcji naprężeń $\Phi(r, z)$, spełniającej tożsamościowo warunek równowagi (2.1), mianowicie

$$(2.3) \quad \tau_{\theta r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{\theta z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Podstawiając zależności (2.3) do równania (2.2), otrzymujemy

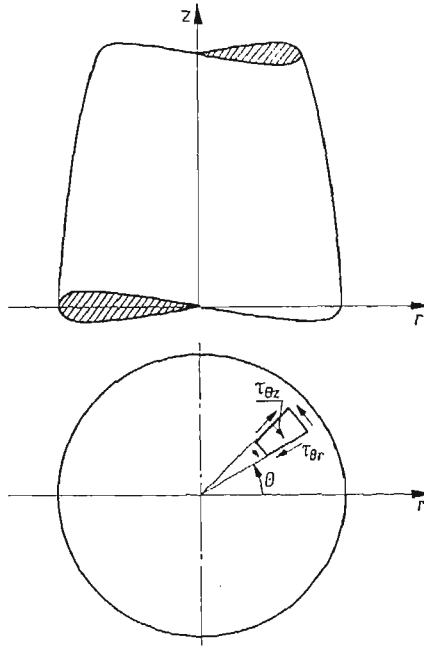
$$(2.4) \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 = r^4 k^2(r, z) = \tilde{k}^2(r, z)$$

lub zapisane w innej postaci

$$(2.5) \quad |\text{grad}\Phi| = \tilde{k}(r, z),$$

gdzie $\tilde{k}(r, z) = r^2 k(r, z)$.

Rozpatrywany problem, jak łatwo zauważyć, daje się zapisać analogicznym równaniem różniczkowym, do problemu plastycznego skręcania prętów przyzmatycznych o dowolnej niejednorodności poprzecznej [3]. Wobec tego, podobnie jak w pracy [3], zajmiemy się określeniem linii największego spadku funkcji Φ (linii poślizgu), a dopiero na tej podstawie określeniem samej funkcji Φ oraz rozkładu naprężeń.



Rys. 1

Równanie różniczkowe linii największego spadku $z = z(r)$ funkcji Φ można w oparciu o wyniki pracy [3] napisać w postaci

$$(2.6) \quad z' \frac{\partial \tilde{k}}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{k}}{\partial z} = - \frac{z' \tilde{k}(r, z)}{1 + z'^2}.$$

Jeżeli funkcja niejednorodności $\tilde{k}(r, z)$ jest zależna tylko od zmiennej r lub stała, to równanie (2.6) ulega znacznemu uproszczeniu do postaci

$$(2.7) \quad z' \frac{d\tilde{k}}{dr} = - \frac{z' \tilde{k}}{1 + z'^2}.$$

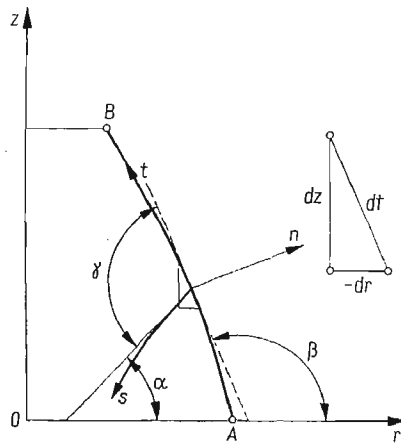
Znalezienie rozwiązania równania (2.7) w kwadraturach jest stosunkowo proste, mianowicie

$$(2.8) \quad z - z_0 = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{Ck^2 - 1}},$$

gdzie r_0, z_0 są współrzędnymi znanego punktu, przez który przechodzi linia największego spadku, zaś C — stała całkowania wynikła z warunku brzegowego.

3. Analiza warunków brzegowych

Przy prętach wykonanych z materiałów jednorodnych uplastycznienie pręta zaczyna się na powierzchni zewnętrznej, a następnie propaguje do wnętrza pręta. Zakładamy dalej, że rozpatrywać będziemy pręty wykonane z materiałów o takiej niejednorodności, która nie zmieni kolejności uplastyczniania. Wobec tego, jeżeli moment skręcający pręt przekroczy wartość nośności sprężystej na całej długości pręta, to będziemy mieć do czynienia z dwiema strefami w przecię: zewnętrzną — plastyczną i wewnętrzną — sprężystą.



Rys. 2

Do wyznaczenia rozkładu naprężeń w strefie plastycznej wystarczająca jest znajomość sposobu obciążenia powierzchni bocznej. Najczęściej powierzchnia ta jest nieobciążona. Zakładamy dalej, że denka pręta są obciążone w taki sposób, jak to wynika z warunków brzegowych danych na powierzchni bocznej pręta oraz rozwiązania uzyskanego przy posuwaniu się wzdłuż linii największego spadku.

Jak już poprzednio zaznaczono, najczęściej spotykanym przypadkiem jest skręcanie prętów o nieobciążonej powierzchni bocznej. Dla tych przypadków można wykazać, że funkcja naprężeń Φ na konturze AB (rys. 2) jest wielkością stałą. Z warunków brzegowych wynika

$$(3.1) \quad p_{n0} = \tau_{\theta r} a_{nr} + \tau_{\theta z} a_{nz} = 0,$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} a_{nr} &= \cos(n, r) = \frac{dz}{dt}, \\ a_{nz} &= \cos(n, z) = -\frac{dr}{dt}, \end{aligned}$$

(dt — elementarna długość łuku konturu).

Po podstawieniu (3.2) i (2.3) do (3.1) oraz po przekształceniach otrzymujemy

$$(3.3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = 0,$$

co dowodzi twierdzenia.

Mogą zachodzić także i przypadki, gdy funkcja naprężeń Φ nie jest stała wzdłuż pewnego odcinka, mianowicie wtedy, gdy powierzchnia boczna pręta jest obciążona lub w przypadku analizy warunków ciągłości na granicy pomiędzy strefą sprężystą i plastyczną, przy rozwiązywaniu problemu metodą odwrotną (która to metoda zostanie przedstawiona w następnych rozdziałach niniejszej pracy).

Dlatego w dalszym ciągu rozpatrywać będziemy przypadek ogólny, gdy funkcja naprężeń Φ na pewnym odcinku AB jest zmienna. Zakładamy, że dla danej funkcji niejednorodności znane jest rozwiązanie równania różniczkowego linii największego spadku w postaci ogólnej (całka ogólna równania różniczkowego (2.6), zawierająca dwie stałe całkowania). Niechaj dalej na pewnym odcinku AB o równaniu $z = z_1(t)$, $r = r_1(t)$ jest dana wartość funkcji naprężeń $\Phi(t)$. Dla każdego punktu M leżącego na odcinku AB i określonego parametrem $t = t_M$, można określić pochodną kierunkową $\frac{d\Phi}{dt}$ (o ile oczywiście funkcja $\Phi(t)$ jest różniczkowalna). Musi być przy tym spełniony warunek

$$(3.4) \quad \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \leq |\text{grad } \Phi|.$$

Z analizy wektorowej wynika, że

$$(3.5) \quad \cos \gamma_M = \frac{\frac{d\Phi}{dt} \Big|_M}{|\text{grad } \Phi|_M},$$

gdzie kąt γ_M jest kątem zawartym pomiędzy styczną do konturu w punkcie M , a styczną do linii największego spadku funkcji naprężeń Φ w tym punkcie.

Ponieważ współczynnik kierunkowy stycznej do linii największego spadku przechodzącej przez punkt M jest (jak to wynika z rys. 2) równy

$$(3.6) \quad z'_M = \text{tg}(\gamma + \zeta) = \frac{\text{tg} \gamma + \text{tg} \zeta}{1 - \text{tg} \gamma \text{tg} \zeta},$$

więc po uwzględnieniu (2.5) oraz

$$(3.7) \quad \text{tg} \zeta = \frac{dz_1}{dt} \Big/ \frac{dr_1}{dt}$$

i wykonaniu prostych przekształceń, otrzymujemy ostatecznie

$$(3.8) \quad \operatorname{tg} \alpha_M = z'_M = \frac{\frac{d\Phi}{dt} \frac{dz_1}{dt} + \frac{dr_1}{dt} \sqrt{\tilde{k}^2(r, z) - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2}}{\frac{d\Phi}{dt} \frac{dr_1}{dt} - \frac{dz_1}{dt} \sqrt{\tilde{k}^2(r, z) - \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2}} \Bigg|_M.$$

Z powyższych rozważań wynika, że warunki brzegowe dla linii największego spadku przechodzącej przez punkt M będą następujące:

$$(3.9) \quad \text{dla } t = t_M: \quad r = r_M; \quad z = z_M; \quad z' = z'_M.$$

Warunki te pozwalają na określenie obydwu stałych całkowania.

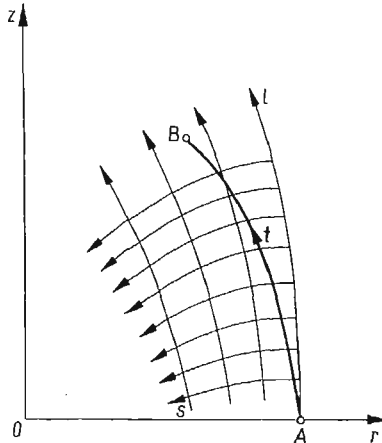
Jeżeli rozpatrywać będziemy kontur nieobciążony, dla którego $t = \text{const}$, to warunki brzegowe ulegną uproszczeniu do postaci

$$(3.10) \quad \text{dla } t = t_M: \quad r = r_M; \quad z = z_M; \quad z' = z'_M = - \frac{dr_1}{dt} \Bigg|_M \frac{dz_1}{dt} \Bigg|_M,$$

co jest równoznaczne z warunkiem prostokątowości linii największego spadku do rozpatrywanego konturu AB .

4. Określanie funkcji naprężeń

W dalszych rozważaniach korzystać będziemy z krzywoliniowego układu współrzędnych s, l . Układ jest tak dobrany, że jedna rodzina krzywych współrzędnych s jest rodziną linii największego spadku, zaś druga rodzina współrzędnych l — pewną rodziną krzywych



Rys. 3

przecinających krzywe s . Współrzędna l zmienia się wraz ze zmianą punktu M leżącego na rozpatrywanym odcinku konturu AB (rys. 3). Układ współrzędnych s, l może być na ogół dowolnym, ukośnokątnym układem współrzędnych krzywoliniowych określających jednak w sposób jednoznaczny cały rozpatrywany podobszar przekroju pręta. Układ

s, l jest dobierany dla każdego zadania w ten sposób, aby obliczenia były możliwie najprostsze.

Funkcję naprężeń Φ określimy znając linie największego spadku w postaci całek ogólnych (określonych dla danej niejednorodności materiału) oraz warunki brzegowe.

Przedstawimy linie największego spadku w postaci parametrycznej (już po uwzględnieniu warunków brzegowych), jako rodzinę krzywych

$$(4.1) \quad r = r(s, l), \quad z = z(s, l),$$

gdzie s jest parametrem wyznaczającym punkt krzywej, natomiast l — parametrem wyznaczającym krzywą (stałym dla danej krzywej).

W dalszym ciągu szukać będziemy funkcji naprężeń Φ zależnej od parametrów s i l . Dla określenia funkcji Φ wykorzystana zostanie zależność (2.5) w nieco zmienionej postaci

$$|\text{grad } \Phi| = \left| \frac{d\Phi}{dm} \right| = \tilde{k}(r, z),$$

która stwierdza, że przyrost funkcji naprężeń na linii największego spadku jest proporcjonalny do $|\text{grad } \Phi| = \tilde{k}(r, z)$ oraz do przyrostu długości linii największego spadku dm ,

$$(4.2) \quad d\Phi = \tilde{k}(r, z) dm.$$

Po przedstawieniu niejednorodności w postaci $\tilde{k} = \tilde{k}(s, l)$, wyrażenie na przyrost funkcji Φ wzdłuż linii największego spadku można zapisać następująco

$$(4.3) \quad \Phi(s_P, l_M) - \Phi(s_M, l_M) = \int_M^P \tilde{k}(s, l_M) dm.$$

Dla przypadku konturu nieobciążonego przyjmujemy, że na konturze $\Phi_K = C = \text{const}$ i otrzymujemy

$$(4.4) \quad \Phi(s_P, l_M) - C = \int_M^P \tilde{k}(s, l_M) dm.$$

5. Określenie rozkładu naprężeń

W rozdziale poprzednim określiliśmy funkcję naprężeń Φ . Obecnie wykorzystując wyniki poprzedniego rozdziału określimy rozkład naprężeń z zależności (2.3)

$$\tau_{\theta r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{\theta z} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Ponieważ poprzednio szukaliśmy Φ jako funkcji współrzędnych krzywoliniowych s, l , dlatego także i naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ łatwiej będzie określić jako funkcję współrzędnych s, l . W tym celu należy wykonać transformację zależności (2.3) ze współrzędnych r, z na współrzędne s, l .

Równanie rodziny linii największego spadku przedstawione było wzorami (4.1)

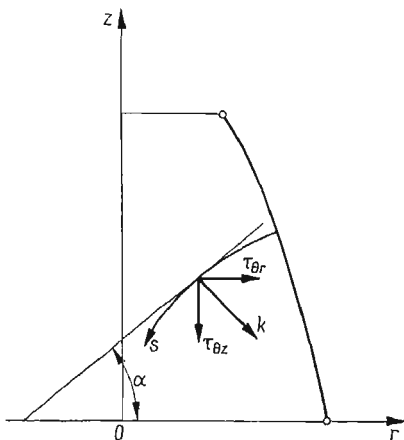
$$r = r(s; l), \quad z = z(s; l),$$

zatem pochodne funkcji naprężeń $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial l}$ można zapisać

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial s} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial l} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}. \end{aligned}$$

Ponieważ w naszym przypadku dana jest funkcja $\Phi = \Phi(s, l)$ oraz wzory (4.1), więc w równaniach (5.1) niewiadomymi są $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$. Wartości tych pochodnych można określić rozwiązując układ równań (5.1). Po wstawieniu obliczonych wartości $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ i $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ oraz $r(s, l)$ do (2.3) otrzymujemy

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \tau_{0r}(s, l) &= \frac{1}{r^2(s, l)} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial l} \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial l}}{\frac{\partial s}{\partial s} \frac{\partial l}{\partial l} - \frac{\partial s}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial s}}, \\ \tau_{0z}(s, l) &= \frac{1}{r^2(s, l)} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial l} - \frac{\partial \Phi}{\partial l} \frac{\partial z}{\partial s}}{\frac{\partial s}{\partial s} \frac{\partial l}{\partial l} - \frac{\partial s}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial s}}. \end{aligned}$$



Rys. 4

Analogiczne wyniki dla naprężeń τ_{0r} i τ_{0z} możemy otrzymać na innej drodze, mianowicie, jeżeli z rys. 4 określimy zależność

$$(5.3) \quad \tau_{0r} = k(s, l) \sin \alpha, \quad \tau_{0z} = -k(s, l) \cos \alpha,$$

gdzie kąt α jest kątem zawartym pomiędzy osią r a styczną do linii największego spadku w danym punkcie.

Jeżeli udałoby się znaleźć zależność odwrotną do (4.1)

$$(5.4) \quad s = s(r; z), \quad l = l(r; z),$$

to można byłoby określić funkcję naprężeń jako $\Phi(r, z)$, a dalej, korzystając z (2.3), określić naprężenia $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ w funkcji współrzędnych r, z , co jest bardziej korzystne od (5.2), ze względu na często spotykane ograniczenia prętów powierzchniami $z = \text{const}$; łatwo jest wtedy, dla powierzchni $z = \text{const}$ określić interesujący nas rozkład naprężeń.

6. Deformacja prętów

Przy rozpatrywaniu zadania skręcania prętów o zmiennej średnicy korzysta się z metody półodwrotnej, która zakłada, że przemieszczenia u i w w kierunkach osi r i z są równe zeru, natomiast przemieszczenie v w kierunku θ jest różne od zera. Przy takim założeniu, różne od zera składowe stanu odkształcenia można przedstawić wzorami

$$(6.1) \quad \gamma_{\theta r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right); \quad \gamma_{\theta z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right).$$

Jeżeli dalej przyjmować będziemy, że pręt wykonany jest z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, to z prawa zmiany postaci Prandtla–Reussa oraz z warunków ciągłości pomiędzy strefą sprężystą i plastyczną wynika, że dla strefy plastycznej zachodzi zależność

$$(6.2) \quad \frac{\tau_{\theta r}}{\tau_{\theta z}} = \frac{\gamma_{\theta r}}{\gamma_{\theta z}} = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right)}{\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right)}.$$

Jeżeli dalej uwzględnimy, że z rys. 4 wynikają związki (5.3)

$$\tau_{\theta r} = k(s, l) \sin \alpha, \quad \tau_{\theta z} = -k(s, l) \cos \alpha,$$

to otrzymamy zależność, określającą funkcję $\frac{v}{r}$ na linii największego spadku, mianowicie

$$(6.3) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) dz + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) dr = 0;$$

funkcja $\left(\frac{v}{r} \right)$ jest więc stała na linii największego spadku.

Dla strefy sprężystej obowiązuje

$$(6.4) \quad \gamma_{\theta r} = \frac{1}{G} \tau_{\theta r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{G} \tau_{\theta z}.$$

Jeżeli rozpatruje się zmianę funkcji $\frac{v}{r}$ na granicy Γ między strefą sprężystą, a plastyczną, to przy oznaczeniu elementu długości tej granicy przez $d\kappa$, można napisać

$$(6.5) \quad \frac{d \left(\frac{v}{r} \right)}{d\kappa} = \frac{\partial \left(\frac{v}{r} \right)}{\partial r} \frac{dr}{d\kappa} + \frac{\partial \left(\frac{v}{r} \right)}{\partial z} \frac{dz}{d\kappa},$$

a po uwzględnieniu (6.4)

$$(6.6) \quad \frac{d\left(\frac{v}{r}\right)}{d\kappa} = \frac{1}{Gr} \left(\tau_{\theta r} \frac{dr}{d\kappa} + \tau_{\theta z} \frac{dz}{d\kappa} \right).$$

Gdy dana jest wartość funkcji $\frac{v}{r}$ w pewnym punkcie R_0 na linii granicznej Γ , to wartość $\frac{v}{r}$ dla punktu R leżącego na tej samej linii granicznej możemy obliczyć całkując wyrażenie (6.6) wzdłuż linii Γ

$$(6.7) \quad \left(\frac{v}{r}\right)_R - \left(\frac{v}{r}\right)_{R_0} = \frac{1}{G} \int_{R_0}^R \frac{1}{r} (\tau_{\theta r} dr + \tau_{\theta z} dz).$$

Wzór powyższy wykorzystany zostanie w dalszej części pracy przy rozwiązywaniu konkretnych przykładów.

7. Przykład plastycznego skręcania niejednorodnego pręta o zmiennej średnicy

Rozpatrzmy obecnie przykład skręcania pręta wykonanego z materiału niejednorodnego o niejednorodności liniowej

$$(7.1) \quad k(r, z) = k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z}{z_0} - \frac{1}{2} \frac{r}{r_0} \right),$$

gdzie k_0, z_0, r_0 są pewnymi wielkościami stałymi.

Niejednorodność zastępczą dla tego materiału można wyrazić wzorem

$$(7.2) \quad \tilde{k}(r, z) = k_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{z}{z_0} - \frac{1}{2} \frac{r}{r_0} \right) r^2.$$

Rozwiązywanie problemu określania naprężeń w strefie plastycznej rozpoczniemy od określania linii największego spadku funkcji naprężeń Φ . Po wstawieniu do równania (2.6) funkcji niejednorodności (7.2), równanie różniczkowe linii największego spadku ma postać

$$(7.3) \quad (1+z'^2) \left[z' \left(4 - 2 \frac{z}{z_0} - 3 \frac{r}{r_0} \right) + \frac{r}{r_0} \right] r = -z'' \left(2 - \frac{z}{z_0} - \frac{r}{r_0} \right) r^2.$$

Równanie rodziny linii największego spadku funkcji naprężeń określone w postaci $z = z(s; l)$ przedstawimy w postaci szeregu potęgowego. Z uwagi na osobliwość równania dla $r = 0$ oraz z uwagi na to, że warunki brzegowe dane są na konturze, wygodnie jest wprowadzić zmienną s

$$(7.4) \quad s = r(l) - \varrho(l),$$

gdzie $\varrho = \varrho(l)$ jest promieniem konturu pręta. Parametr l będzie określał położenie punktu na konturze.

Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci szeregu

$$(7.5) \quad z = a_0(l) + a_1(l)s + a_2(l)s^2 + \dots$$

Po podstawieniu (7.4) i (7.5) do (7.3), wykonaniu działań i porównaniu współczynników przy jednakowych potęgach s po obu stronach równania otrzymujemy układ równań liniowych, z których można wyrazić współczynniki a_2, a_3, a_4, \dots , przez a_0 i a_1 (które wynikają z warunków brzegowych).

W dalszych rozważaniach ograniczymy się do określenia współczynników a_2 i a_3 ,

$$(7.6) \quad a_2 = - \frac{(1+a_1^2) \left[a_1 \left(4 - 2 \frac{a_0}{z_0} - 3 \frac{\rho}{r_0} \right) + \frac{\rho}{z_0} \right]}{2\rho \left(2 - \frac{a_0}{z_0} - \frac{\rho}{r_0} \right)},$$

$$a_3 = a_2 \frac{-6 + 5 \frac{\rho}{r_0} + 3 \frac{a_0}{z_0} - a_1 \frac{\rho}{z_0} + a_1^2 \left(-12 + 6 \frac{a_0}{z_0} + 9 \frac{\rho}{r_0} \right)}{3\rho \left(2 - \frac{a_0}{z_0} - \frac{\rho}{r_0} \right)}$$

$$- \frac{(1+a_1^2) \left[a_1 \left(-2 \frac{a_1}{z_0} - 3 \frac{1}{r_0} \right) + \frac{1}{z_0} \right]}{6\rho \left(2 - \frac{a_0}{z_0} - \frac{\rho}{r_0} \right)}.$$

Załóżmy, że powierzchnia boczna pręta (rys. 4) dana jest równaniem

$$(7.7) \quad z = l(\rho);$$

wobec tego warunki brzegowe dla tej nieobciążonej powierzchni możemy zapisać w postaci

$$(7.8) \quad \text{dla } s = 0: \quad z = l, \quad z' = \frac{1}{l'(\rho)}.$$

Jeżeli wstawimy powyższe warunki do szeregu (7.5), to natychmiast określimy współczynniki szeregu a_0 i a_1

$$(7.9) \quad a_0 = 1, \quad a_1 = - \frac{1}{l'(\rho)},$$

a przy znajomości tych współczynników można z (7.6) określić dalsze współczynniki szeregu a_2 i a_3 .

Przykładowo przyjęto, że kształt powierzchni bocznej jest stożkiem o równaniu

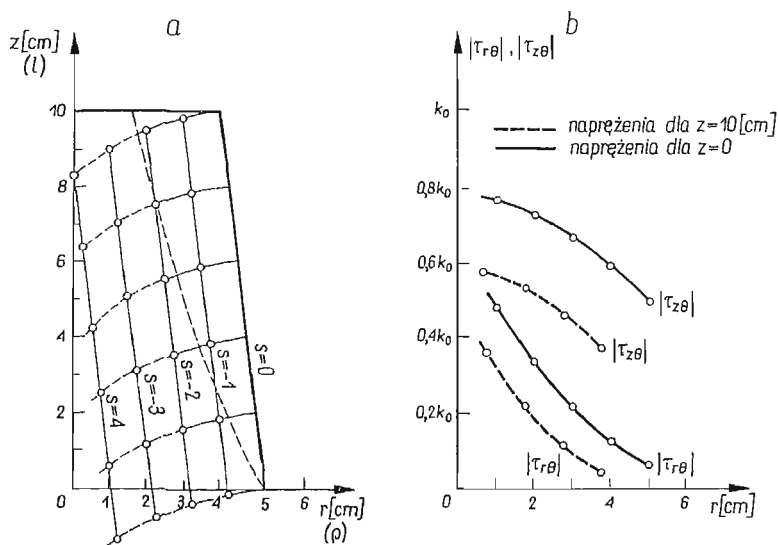
$$(7.10) \quad l = 2z_0 \left(1 - \frac{\rho}{r_0} \right);$$

wtedy

$$(7.11) \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{r_0}{z_0} = \text{const.}$$

Przeprowadzono numeryczne obliczenia dla $r_0 = 5$ [cm], $z_0 = 20$ [cm], przy czym pręt ograniczono płaszczyznami $z = 0$, $z = 10$ [cm]. W tabelcy 1 podano wartości obliczonych współczynników a_2 i a_3 dla szeregu wartości parametru l . Na rys. 5 przedstawiono orientacyjny przebieg linii największego spadku funkcji naprężeń Φ (ograniczono się do wyrazów przy trzeciej potęgze s).

Z analizy wzoru (7.5) i obliczonych współczynników wynika, że zadowalająca zbieżność przy przyjętej ilości wyrazów szeregu istnieje w rozważanym przykładzie w zakresie $0,7 \leq \frac{r}{\rho} \leq 1$, natomiast przy mniejszym stosunku $\frac{\rho}{r}$ zbieżność szeregu pogarsza się i od pewnej wartości jest on rozbieżny. Wynika to z faktu, że linie największego spadku w pew-



Rys. 5

nym miejscu ulegają zagięciu i istnieje punkt na linii największego spadku, w którym wartość $z \rightarrow \infty$. Dla prętów wykonanych z materiałów jednorodnych, zostało to przedstawione przez SOKOŁOWSKIEGO [8]. W naszym przypadku, gdy znajdujemy rozwiązanie równania (7.3) w postaci szeregu potęgowego, uchwycenie tego zjawiska wydaje się utrudnione; jednakże w warunkach rzeczywistych strefa plastyczna znajduje się w dość dużym oddaleniu od punktów zagięcia linii największego spadku, wobec czego rozwiązanie równania (7.3) przedstawione w postaci szeregu (7.5) jest wystarczająco dokładne i dogodnie przy rozpatrywaniu problemu sprężysto-plastycznego skręcania prętów niejednorodnych.

W wyniku przeprowadzonych obliczeń numerycznych przedstawiono na rys. 5 rozkłady naprężeń $\tau_{\theta r}$ i $\tau_{\theta z}$ w strefie plastycznej na denkach pręta. Granicę między strefą sprężystą i plastyczną (orientacyjnie przedstawioną linią przerywaną na rys. 5a) oraz rozkład naprężeń w strefie sprężystej moglibyśmy określić rozwiązując problem sprężysto-plastycznego skręcania pręta — co jest jednak zadaniem bardzo trudnym.

Tablica 1

/ [cm]	ρ [cm]	a_1	$a_2 \left[\frac{1}{\text{cm}} \right]$	$a_3 \left[\frac{1}{\text{cm}^2} \right]$	$z(s, l)$ [cm]				
					$s = 0$	$s = -1$ [cm]	$s = -2$ [cm]	$s = -3$ [cm]	$s = -4$ [cm]
0	5,000	0,125	-0,038085	0,0036366	0,000	-0,167	-0,431	-0,816	-1,342
1	4,875	0,125	-0,039063	0,0038256	1,000	0,832	0,563	0,170	-0,370
2	4,750	0,125	-0,040089	0,0040295	2,000	1,831	1,557	1,155	0,000
3	4,625	0,125	-0,041175	0,0042503	3,000	2,791	2,551	2,140	1,570
4	4,500	0,125	-0,042318	0,0044814	4,000	3,828	3,545	3,123	2,536
5	4,375	0,125	-0,043527	0,004750	5,000	4,827	4,538	4,105	3,500
6	4,250	0,125	-0,044808	0,0050334	6,000	5,825	5,530	5,086	4,361
7	4,125	0,125	-0,046164	0,0053431	7,000	6,823	6,525	6,065	5,419
8	4,000	0,125	-0,047607	0,0056773	8,000	7,822	7,514	7,043	6,375
9	3,875	0,125	-0,049143	0,0060548	9,000	8,820	8,505	8,019	7,326
10	3,750	0,125	-0,05078	0,0064652	10,000	9,818	9,495	8,993	8,274
11	3,625	0,125	-0,05253	0,0069187	11,000	10,816	10,485	9,965	9,217

8. Projektowanie prętów rurowych o zmiennej średnicy, wykazujących całkowite uplastycznienie

W rozdziale obecnym zajmiemy się projektowaniem prętów rurowych o zmiennej średnicy, wykonanych z materiału niejednorodnego, z uwagi na stałą na całej długości nośność graniczną przekroju (całkowite uplastycznienie przekroju).

Założmy, że z materiału o dowolnej niejednorodności typu $k(r, z)$, wykonany jest pręt o przekroju rurowym i danej powierzchni wewnętrznej (np. ze względów konstrukcyjnych), którą można przedstawić wzorem

$$(8.1) \quad z = l(\varrho),$$

gdzie l jest parametrem konturu.

Należy tak dobrać kształt powierzchni zewnętrznej, aby przy danym momencie skręcającym nastąpiło całkowite uplastycznienie pręta. Pręt taki jest zaprojektowany najbardziej ekonomicznie, bowiem cały jego materiał jest wykorzystany.

Jeżeli wprowadzimy do rozważań funkcję naprężeń $\bar{\Phi}$ (2.3), to związek między funkcją naprężeń a momentem granicznym skręcającym pręt $\bar{\bar{M}}$ można zapisać jako

$$(8.1) \quad \bar{\bar{M}} = 2\pi(\bar{\Phi}_z - \bar{\Phi}_w),$$

gdzie $\bar{\Phi}_z$ jest wartością funkcji naprężeń, odpowiadającą powierzchni zewnętrznej pręta, a $\bar{\Phi}_w$ jest wartością funkcji naprężeń, odpowiadającą powierzchni wewnętrznej pręta.

Jeżeli powierzchnia zewnętrzna i wewnętrzna są nieobciążone, to zgodnie z (3.3) $\bar{\Phi}_z$ i $\bar{\Phi}_w$ są stałe na odpowiednich konturach. Ponieważ pręt jest optymalnie zaprojektowany z uwagi na nośność graniczną, więc po obciążeniu pręta momentem granicznym $\bar{\bar{M}}$, cały materiał ulegnie uplastycznieniu. Wychodząc wobec tego od danej np. powierzchni wewnętrznej możemy, wykorzystując równanie linii największego spadku funkcji $\bar{\Phi}$, znaleźć rozkład naprężeń oraz funkcję $\bar{\Phi}$ w przecie. Jeżeli mamy do czynienia z nieobciążoną powierzchnią wewnętrzną, to możemy przyjąć $\bar{\Phi}_w = 0$. Wobec takiego przyjęcia, funkcja naprężeń $\bar{\Phi}$ będzie określona zgodnie z (4.4) wzorem

$$\bar{\Phi} = \int_M^P \tilde{k} dm,$$

gdzie dm jest elementarnym przyrostem linii największego spadku

$$(8.2) \quad dm = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} ds.$$

Gdy powierzchnia zewnętrzna jest nieobciążona, to $\bar{\Phi}_z = C = \text{const}$, wobec czego możemy dla danej powierzchni wewnętrznej oraz dla danej funkcji niejednorodności $k = k(r, z)$ określić rodzinę poszukiwanych nieobciążonych powierzchni zewnętrznych rozwiązując równanie

$$(8.3) \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}(s, l) = C,$$

a równanie powierzchni zewnętrznej można wyrazić w postaci parametrycznej

$$(8.4) \quad r = r(l, C), \quad z = z(l, C).$$

Analogicznie możemy postąpić, gdy problem zostanie postawiony odwrotnie, czyli przy danym kształcie powierzchni zewnętrznej poszukuje się kształtu powierzchni wewnętrznej. Jednakże w tym przypadku problem może okazać się nie do rozwiązania: gdy założony moment skręcający \bar{M} będzie za duży, to linie największego spadku funkcji naprężeń dojdą do punktu w którym występuje osobliwość, mianowicie linie największego spadku zaginają się (patrz rozdział poprzedni). Gdy mamy do czynienia z prętem o obciążonej powierzchni bocznej, to ulegną zmianie jedynie warunki brzegowe na tej powierzchni.

P r z y k ł a d. Rozpatrzono najprostszy fizycznie przypadek, gdy pręt jest wykonany z materiału jednorodnego. Jeżeli będziemy mieli do czynienia z materiałem o innej, dowolnej niejednorodności plastycznej, to może to jedynie komplikować obliczenia, a sama zasada projektowania nie ulegnie zmianie.

Dla naszego materiału niejednorodność zastępcza ma postać

$$(8.5) \quad \tilde{k} = k_0 r^2.$$

Równanie różniczkowe linii największego spadku (2.6) przybierze postać

$$(8.6) \quad (1+z'^2)z' \frac{d\tilde{k}}{dr} = -z''\tilde{k},$$

a po obniżeniu rzędu równania

$$(8.7) \quad z' = \pm \sqrt{\frac{1}{Cr^4 - 1}},$$

gdzie C jest stałą całkowania.

Rozwiązanie równania (8.7) można wyrazić przez całki eliptyczne. Jednakże wygodniej szukać jest rozwiązania w postaci szeregu potęgowego, rozwijając rozwiązanie wokół punktów położonych na danym konturze np. wewnętrznym. Wprowadźmy w tym celu nową zmienną (7.4)

$$s = r(l) - \varrho(l),$$

gdzie ϱ jest promieniem danego konturu pręta.

Rozwiązania równania (8.7) szukać będziemy w postaci

$$(8.8) \quad z = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots$$

Jeżeli szereg (8.8) podstawimy do równania (8.7), to przez przyrównanie wyrazów przy jednakowych potęgach s , możemy określić współczynniki

$$(8.9) \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{C\varrho^2 - 1}}, \quad a_2 = -\frac{a_1}{\varrho}(1+a_1^2),$$

$$a_3 = \frac{a_1}{\varrho^2}(1+a_1^2)(1+2a_1^2), \quad a_4 = \dots$$

Dla rozważanego przypadku, warunki brzegowe można ogólnie przedstawić w postaci (7.8)

$$\text{dla } s=0 \quad [\varrho = \varrho(l)]: \quad z = l, \quad z' = -\frac{1}{r'(\varrho)}.$$

Dla takich warunków, współczynniki a_0 i a_1 szeregu (8.8) są odpowiednio równe

$$(8.10) \quad a_0 = l, \quad a_1 = -\frac{1}{l'(\varrho)}.$$

Współczynniki powyższe określają pozostałe współczynniki: a_2, a_3, \dots , które ponadto są na ogół zależne od parametru konturu l .

Jeżeli w dalszych rozważaniach ograniczymy się do przypadku, gdy dana powierzchnia wewnętrzna pręta jest powierzchnią stożkową o równaniu

$$(8.11) \quad z - z_0 = l - z_0 = -\frac{\varrho}{n},$$

(gdzie z_0 i n są wielkościami stałymi), to współczynniki szeregu (8.8) wyniosą

$$a_0 = l, \quad a_1 = n, \quad a_2 = -\frac{n(1+n^2)}{\varrho}, \quad a_3 = \frac{n(1+n^2)(1+2n^2)}{\varrho^2}, \quad a_4 = \dots$$

Tablica 2

l [cm]	ϱ [cm]	$z(l, s)/\Phi(l, s)$ [cm/kGcm]				
		$s = 0$ [cm]	$s = 0,5$ [cm]	$s = 1$ [cm]	$s = 1,5$ [cm]	$s = 2,0$ [cm]
0	5,00	0,00 0,0 k_0	-0,22 15,5 k_0	-0,41 34,0 k_0	-0,60 55,4 k_0	-0,60 80,0 k_0
3	6,50	3,00 0,0 k_0	2,77 25,4 k_0	2,57 54,5 k_0	2,39 87,2 k_0	2,21 123,5 k_0
6	8,00	6,00 0,0 k_0	5,77 37,9 k_0	5,56 80,1 k_0	5,38 126,5 k_0	5,20 177,2 k_0
9	9,50	9,00 0,00 k_0	8,75 52,9 k_0	8,56 110,7 k_0	8,36 173,4 k_0	8,18 240,9 k_0
12	11,00	12,0 0,0 k_0	11,76 70,4 k_0	11,55 146,3 k_0	11,35 227,8 k_0	11,17 314,7 k_0
15	12,50	15,00 0,0 k_0	14,76 90,4 k_0	14,54 187,0 k_0	14,34 289,7 k_0	14,15 398,6 k_0
18	14,00	18,00 0,0 k_0	17,76 113,0 k_0	17,54 232,7 k_0	17,33 359,2 k_0	17,14 492,5 k_0

Funkcję naprężeń Φ określimy wykorzystując zależności (4.4) i (8.2). Po wykonaniu przekształceń, otrzymujemy wzór określający funkcję naprężeń Φ w postaci szeregu potęgowego, mianowicie

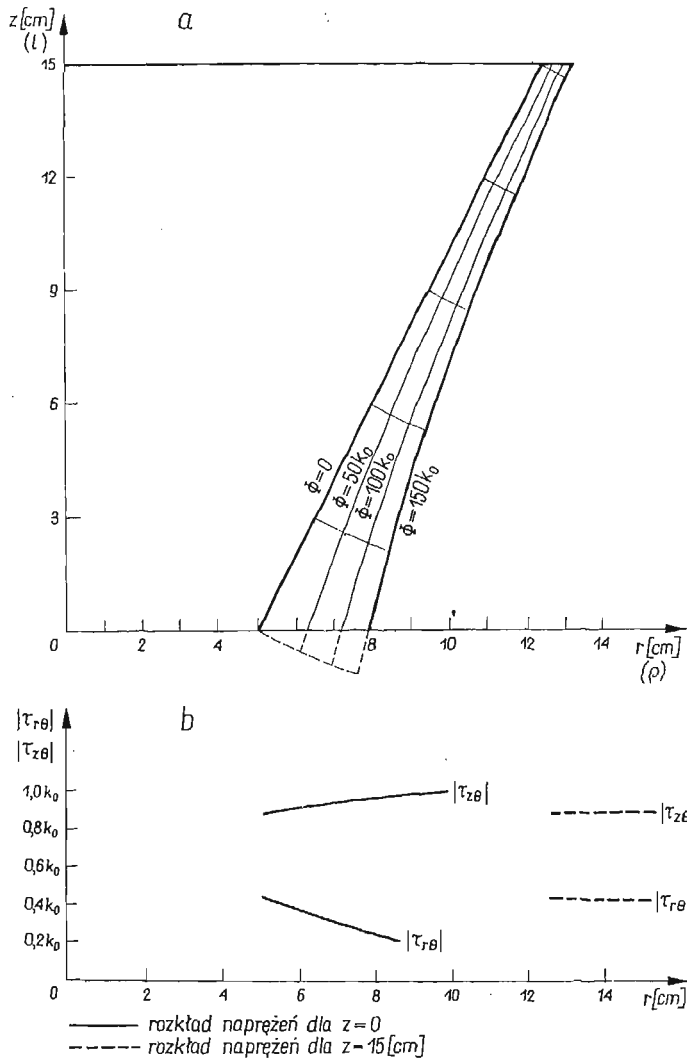
$$\Phi = k_0 \sqrt{1+n^2} \left[\varrho^2 s + \varrho(1+n^2)s^2 + \frac{1+2n^2+7n^4+6n^6}{1+n^2} s^3 + \dots \right].$$

Ponieważ szukamy nieobciążonej powierzchni zewnętrznej pręta przenoszącego moment \bar{M} , więc z zależności (8.1) można określić wartość funkcji naprężeń Φ_z , a dalej z zależności

$$\Phi_z = \Phi_z(s, l), \quad z = z(s, l),$$

szukaną powierzchnię nieobciążoną w postaci $s = s(l)$.

Wykonano obliczenia numeryczne dla pręta o powierzchni wewnętrznej określonej wzorem (8.11), przy czym $n = \frac{1}{2}$, $z_0 = -20$ [cm], ograniczonego płaszczyznami $z = 0$, $z = 15$ [cm]. Wyniki obliczeń $z = z(s, l)$, $\Phi = \Phi(s, l)$ dla szeregu wartości s i l przed-



Rys. 6

stawiono w tabl. 2. Na rys. 6 przedstawiono linie największego spadku funkcji Φ oraz rodzinę nieobciążonych powierzchni zewnętrznych (które są oczywiście powierzchniami $\Phi = \text{const}$).

D e f o r m a c j a p r ę t a. Uplastycznienie pręta rozpocznie się od powierzchni zewnętrznej, a następnie będzie posuwać się do wnętrza pręta. W chwili wyczerpania nośności plastycznej pręta, ulega uplastycznieniu warstwa przy powierzchni wewnętrznej. W tym

momencie na powierzchni wewnętrznej pręta obowiązywać będzie wzór (6.7), na podstawie którego zostanie określona deformacja $\left(\frac{v}{r}\right)$ pręta.

Jeżeli powierzchnia wewnętrzna jest dana wzorem

$$\varrho = \varrho(l)$$

[odwrócona zależność (7.7)], to równanie (6.7) przyjmie postać,

$$\left(\frac{v}{r}\right)_R - \left(\frac{v}{r}\right)_{R_0} = \frac{1}{G} \int_{R_0}^R \frac{1}{\varrho} (\tau_{\theta r} d\varrho + \tau_{\theta z} dl),$$

przy czym na powierzchni wewnętrznej przekroju (rys. 6) obowiązują zależności

$$\tau_{\theta r} = k(l) \sin \alpha(l), \quad \tau_{\theta z} = -k(l) \cos \alpha(l), \quad d\varrho = -dl \operatorname{tg} \alpha(l).$$

Po uwzględnieniu tych zależności otrzymujemy

$$\left(\frac{v}{r}\right)_R - \left(\frac{v}{r}\right)_{R_0} = -\frac{1}{G} \int_{R_0}^R \frac{k(l) dl}{\varrho(l) \cos \alpha(l)}.$$

W rozpatrywanym przykładzie interesujące nas dane były następujące:

$$k(l) = k_0 = \text{const}, \quad \operatorname{tg} \alpha(l) = n = -\frac{1}{2}, \quad z_0 = -20 \text{ [cm]}.$$

Jeżeli przyjmiemy dalej, że punkt powierzchni wewnętrznej określony parametrem $l = 0$ jest ustalony, to deformacja powierzchni wewnętrznej pręta jest równa

$$\frac{v}{\varrho(l)} = \frac{k_0}{G} \ln \left(1 - \frac{l}{z_0}\right).$$

Ponieważ, jak to wynika ze wzoru (6.3), linie największego spadku funkcji naprężeń Φ są zarazem poziomiami funkcji $\left(\frac{v}{r}\right)$, więc deformację całego pręta (w chwili wyczerpania nośności plastycznej) można już łatwo obliczyć wychodząc ze znanych deformacji na powierzchni wewnętrznej.

9. Metoda odwrotna rozwiązywania zagadnienia sprężysto-plastycznego

Ponieważ ściśle rozwiązanie problemu sprężysto-plastycznego skręcania niejednorodnych plastycznie prętów o zmiennej średnicy metodą wprost jest bardzo trudne, w obecnym rozdziale pracy przedstawiono metodę odwrotną rozwiązania tego problemu.

Przyjmijmy mianowicie, że znany jest nam rozkład naprężeń w strefie sprężystej, na przykład przez funkcję naprężeń

$$(9.1) \quad \Phi^e = \Phi^e(r, z),$$

która w przypadku ciał sprężystości jednorodnych spełnia równanie

$$(9.2) \quad \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi^e}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^e}{\partial z^2} = 0,$$

czyli tak warunki równowagi, jak i warunki nierozdzielności.

Jeżeli dla danego ciała określona jest funkcja niejednorodności plastycznej $k = k(r, z)$, to można określić granicę między strefą sprężystą i plastyczną równaniem

$$(9.3) \quad r_g = r_g(z),$$

które znajdziemy, wykorzystując w tym celu warunek plastyczności słuszny dla zakresu sprężystego na granicy międzystrefowej

$$(9.4) \quad \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial r}\right)^2 = k^2(r, z)r^4 = \tilde{k}^2(r, z).$$

Na granicy międzystrefowej muszą być spełnione również warunki ciągłości naprężeń

$$(9.5) \quad \text{dla } r = r_g: \quad \tau_{\theta z}^e = \tau_{\theta z}^p, \quad \tau_{\theta r}^e = \tau_{\theta r}^p,$$

co jest równoważne związkom

$$(9.6) \quad \frac{\partial \Phi^e}{\partial r} = \frac{\partial \Phi^p}{\partial r}, \quad \frac{\partial \Phi^e}{\partial z} = \frac{\partial \Phi^p}{\partial z}.$$

Przyjmijmy dalej, że na granicy międzystrefowej funkcja naprężeń Φ jest ciągła

$$(9.7) \quad \Phi^e = \Phi^p \quad \text{dla } r = r_g.$$

Przy znajomości granicy międzystrefowej oraz wartości funkcji naprężeń na tej granicy, można określić warunki brzegowe dla rodziny linii największego spadku funkcji naprężeń w obszarze plastycznym Φ^p , a dalej — przy znajomości linii największego spadku funkcji naprężeń — rozkład naprężeń w strefie plastycznej. Dalszym zadaniem przedstawionej metody będzie określenie kształtu nieobciążonej powierzchni zewnętrznej pręta (przy danym momencie skręcającym) lub też znalezienie obciążenia powierzchni zewnętrznej (przy danym jej kształcie). Należy jednak zaznaczyć, że jeżeli pręt o określonej w ten sposób powierzchni zewnętrznej obciążać będziemy danym momentem skręcającym, to rozkład naprężeń w strefie sprężystej oraz granica międzystrefowa mogą się różnić od obliczonych powyższą metodą. Obydwa rozwiązania będą identyczne wtedy, gdy na denkach pręta będą spełnione odpowiednie warunki brzegowe mianowicie, jeśli rozkład naprężeń będzie taki, jak to wynika z rozwiązania problemu metodą odwrotną, oraz gdy sposób obciążenia będzie prosty lub też zbliżony do prostego.

P r z y k ł a d. Rozpatrzmy przykładowo pręt wykonany z materiału jednorodnego (przyjęcie materiału niejednorodnego w niczym nie zmieni metody rozwiązywania, a jedynie może utrudnić obliczenia). Załóżmy dalej, że funkcja naprężeń obowiązująca w zakresie sprężystym dana jest wzorem

$$(9.8) \quad \Phi^e = Cr^4(1 + \varepsilon z).$$

Funkcja ta oczywiście spełnia równanie (9.2).

Zadanie nasze polegać będzie na «obudowaniu» strefy sprężystej, określonej wzorem (9.8), strefą plastyczną oraz znalezienie — przy danym momencie skręcającym — kształtu nieobciążonej powierzchni zewnętrznej ograniczającej strefę plastyczną. W dalszych rozważaniach posługiwać się będziemy metodą małego parametru przyjmując, że małym

parametrem będzie ε . Ze znajomości funkcji naprężeń w strefie sprężystej możemy określić rozkład naprężeń

$$(9.9) \quad \begin{aligned} \tau_{\theta z}^e &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^e}{\partial r} = -4Cr(1 + \varepsilon z), \\ \tau_{\theta r}^e &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^e}{\partial z} = Cr^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Granicę międzystrefową określimy z warunku plastyczności, który obowiązuje dla strefy sprężystej na tej granicy

$$(9.10) \quad (\tau_{\theta z}^e)^2 + (\tau_{\theta r}^e)^2 = k_0^2.$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\frac{k_0}{C} = K$, to stosując metodę małego parametru można określić granicę międzystrefową w postaci parametrycznej

$$(9.11) \quad \begin{aligned} z_g &= l, \\ r_g &= \frac{K}{4} \left[1 - l\varepsilon + \left(l^2 - \frac{K^2}{2 \cdot 4^4} \right) \varepsilon^2 + \left(-l^2 + \frac{5K^2 l}{2 \cdot 4^4} \right) \varepsilon^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Na granicy międzystrefowej można dalej określić

$$(9.12) \quad \begin{aligned} \Phi(l) &= C \frac{K^4}{4^4} \left[1 - 3l\varepsilon + \left(6l^2 - \frac{K^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^2 + \left(-10l^3 + \frac{7K^2 l}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^3 + \dots \right], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= C \frac{K^4}{4^4} \left[1 - 3l\varepsilon + \left(10l^2 - \frac{K^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^2 + \dots \right] \varepsilon, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r} &= C \frac{K^3}{4^2} \left[1 - 2l\varepsilon + \left(3l^2 - \frac{3K^2}{2 \cdot 4^4} \right) \varepsilon^2 + \left(-4l + \frac{9K^2 l}{4^4} \right) \varepsilon^3 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Znając te wartości, możemy określić warunki brzegowe dla linii największego spadku na granicy międzystrefowej, mianowicie warunki (3.9). Wartość z'_M określona zostanie ze wzoru (3.10)

$$(9.13) \quad z'_M = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_M}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_M},$$

gdzie M jest dowolnym punktem leżącym na znalezionej granicy.

Równanie różniczkowe linii największego spadku funkcji naprężeń Φ^p dla materiału jednorodnego można sprowadzić do postaci

$$(9.14) \quad z' = \pm \sqrt{\frac{D}{r^4 - D}},$$

a po scałkowaniu

$$(9.15) \quad z = z_0 \pm \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{r^4 - D}} dr.$$

Stałą całkowania D określimy z warunku brzegowego, wyznaczającego kierunek linii największego spadku na granicy międzystrefowej

$$(9.16) \quad D = \frac{z_M'^2 r_g^4}{1 + z_M'^2}.$$

Po rozwinięciu w szereg i wykonaniu całkowania, równanie linii największego spadku można przedstawić następująco:

$$(9.17) \quad z = l - \frac{K^2}{4^3} \left[\left(\frac{K}{4r} - 1 \right) \varepsilon + l \left(3 - \frac{K}{r} \right) \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + \left(-6l^2 + \frac{5}{2} \frac{Kl^2}{r} - \frac{1}{2 \cdot 4^4} \frac{K^3}{r} + \frac{7K^2}{5 \cdot 4^5} + \frac{K^7}{10 \cdot 4^9 \cdot r^5} \right) \varepsilon^3 + \dots \right].$$

Funkcję naprężeń w zakresie plastycznym Φ^p określimy, wykorzystując w tym celu wzór (4.3), z którego po przekształceniach otrzymujemy

$$(9.18) \quad \Phi^p = \Phi(l) + CK \left\{ \frac{1}{3} \left[r^3 - \left(\frac{K}{4} \right)^3 \right] + \left(\frac{K}{4} \right)^3 l \varepsilon + \left[- \left(\frac{K}{4} \right)^6 \frac{1}{2 \cdot 4^2 r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{K}{4} \right)^5 \frac{1}{4^2} - \frac{K^3 l^2}{2 \cdot 4^2} \right] \varepsilon^2 + \left[- \left(\frac{K}{4} \right)^6 \frac{l}{4r} - \frac{7}{4^2} \left(\frac{K}{4} \right)^5 l + \frac{5K^3 l^3}{3 \cdot 6 \cdot 4^2} \right] \varepsilon^3 + \dots \right\}.$$

W powyżej przedstawionym wzorze funkcja naprężeń Φ^p zależna jest od promienia r oraz parametru l . Dla naszych celów (określenia naprężeń i kształtu powierzchni nieobciążonej) potrzebna jest znajomość $\Phi = \Phi(r, z)$. Aby uzyskać tę zależność, musimy odwrócić szereg $z = z(l, \varepsilon)$ na $l = l(z, \varepsilon)$; po przekształceniach otrzymujemy

$$(9.19) \quad l = z + \frac{K^2}{64} \left(\frac{K}{4r} - 1 \right) \varepsilon - \frac{K}{64} z \left(3 - \frac{K}{r} \right) \varepsilon^2 + \dots$$

Wprowadzając tę zależność do wzoru (9.18) określającego $\Phi = \Phi(r, l)$ otrzymujemy po wykonaniu przekształceń,

$$(9.20) \quad \Phi^p(r, z) = k_0 \left[\frac{1}{3} \left(r^3 - \frac{K^3}{4^3} \right) + \frac{K^3}{4^4} z \varepsilon + \left(\frac{K^6}{2 \cdot 4^8} \frac{1}{r} - \frac{K^5}{2 \cdot 4^6} - \frac{K^3 z^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + \left(- \frac{K^6 z}{4^7 r} - \frac{5K^5 z}{4^7} + \frac{5K^3 z^3}{6 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^3 + \dots \right].$$

Jeżeli znana jest już funkcja naprężeń Φ^p w powyższej postaci, to z zależności (2.3) można dla zakresu plastycznego określić rozkład naprężeń

$$(9.21) \quad \tau_{\theta r}^p = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^p}{\partial z} = k_0 \left[\frac{K^3}{4^4} \frac{1}{r^2} \varepsilon - \frac{K^3}{4^3} \frac{z}{r^2} \varepsilon^2 + \left(- \frac{5K^5}{4^7 r^2} + \frac{5K^3 z^2}{2 \cdot 4^3} \right) \varepsilon^3 + \dots \right], \\ \tau_{\theta z}^p = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^p}{\partial r} = -k_0 \left[1 - \frac{K^6}{2 \cdot 4^8} \frac{1}{r^4} \varepsilon^2 + \frac{K^6}{4^7} \frac{z}{r^4} \varepsilon^3 + \dots \right].$$

Kształtu powierzchni zewnętrznej poszukiwać będziemy w postaci

$$(9.22) \quad r = r_0 + r_1 \varepsilon + r_2 \varepsilon^2 + r_3 \varepsilon^3 + \dots$$

Szukana powierzchnia jest powierzchnią nieobciążoną, wobec czego na tej powierzchni $\Phi^p(r, z) = \Phi_0 = \text{const}$. Jeżeli wprowadzimy do tego warunku szereg określający kształt szukanej powierzchni, to porównując współczynniki przy jednakowych potęgach parametru ε , możemy określić współczynniki r_1, r_2, r_3 itd. Ostatecznie, po wykonaniu tych przekształceń, kształt powierzchni zewnętrznej można zapisać następująco:

$$(9.23) \quad r = r_0 - \frac{K^3 z}{4^4} \frac{1}{r_0^2} \varepsilon + \left(-\frac{K^6 z^2}{4^8 r_0^5} - \frac{K^6}{24^8 r_0^3} + \frac{K^5}{2 \cdot 4^6 r_0^2} + \frac{K^3 z^2}{2 \cdot 4^3 r_0^2} \right) \varepsilon^2 + \\ + \left(-\frac{3K^9 z^3}{4^{12} r_0^8} - \frac{3K^9 z}{24^{12} r_0^6} + \frac{K^8 z}{4^{10} r_0^5} + \frac{K^6 z^3}{47 r_0^5} + \frac{K^6 z}{47 r_0^3} + \frac{5K^5 z}{47 r_0^2} - \frac{5K^3 z^3}{6 \cdot 4^3 r_0^2} \right) \varepsilon^3 + \dots,$$

gdzie $r_0 = \sqrt[3]{\frac{K^3}{4^4} + 3 \frac{\Phi_0}{k_0}}$.

Zaletą tego rozwiązania jest ogólna postać zapisu kształtu powierzchni zewnętrznej w zależności od trzech parametrów $\varepsilon, \frac{k_0}{C}, \Phi_0$. Jeżeli zadanie polegało będzie na rozwiązaniu przypadku skręcania sprężysto-plastycznego pręta o zmiennej średnicy metodą wprost, to możemy wykonać to w sposób przybliżony, dobierając współczynniki $\varepsilon, \frac{k_0}{C}, \Phi_0$ tak, aby powierzchnia określona wzorem $r = r\left(z, \varepsilon, \frac{k_0}{C}, \Phi_0\right)$ jak najmniej różniła się od danej powierzchni rzeczywistej pręta.

Dokładniejsza analiza wyprowadzonych zależności wykazuje, że szereg określający promień graniczny r_g jest stosunkowo słabo zbieżny dla większych parametrów l i ε .

Tablica 3

l [cm]	r_g [cm]	Φ_g [kGcm]	D [cm ⁴]	$b = \sqrt[4]{D}$ [cm]	$z = \text{cm}/\Phi$ [kGcm]			
					$r = 3$ [cm]	$r = 4$ [cm]	$r = 5$ [cm]	$r = 6$ [cm]
0	3,000	6,73 k_0	0,4531	0,820	0,0000 6,73 k_0	0,0517 19,10 k_0	0,0756 39,43 k_0	0,0985 69,77 k_0
3	2,6342	5,20 k_0	0,1605	0,633	0,0019 8,11 k_0	0,0519 20,46 k_0	0,0720 40,79 k_0	0,0856 71,13 k_0
6	2,3757	4,24 k_0	0,0701	0,514	0,0232 8,77 k_0	0,0452 21,11 k_0	0,0584 41,45 k_0	0,0673 71,78 k_0
9	2,1808	3,57 k_0	0,0354	0,434	0,0235 9,12 k_0	0,0407 21,45 k_0	0,0487 41,78 k_0	0,0548 72,11 k_0
12	2,0271	3,09 k_0	0,0196	0,374	0,0224 9,32 k_0	0,0341 21,65 k_0	0,0410 41,98 k_0	0,0457 72,32 k_0
15	1,9018	2,72 k_0	0,0118	0,330	0,0209 9,43 k_0	0,0291 21,76 k_0	0,0354 42,10 k_0	0,0337 72,43 k_0
18	1,7972	2,43 k_0	0,0075	0,294	0,0192 9,50 k_0	0,0266 21,81 k_0	0,0308 42,16 k_0	0,0337 72,50 k_0

Słaba zbieżność tego szeregu pociąga za sobą słabą zbieżność pozostałych szeregów. Dlatego w dalszym ciągu rozwiązano przykład numerycznie, bez stosowania metody małego parametru; w tym przypadku l i ε mogą być dowolnie duże.

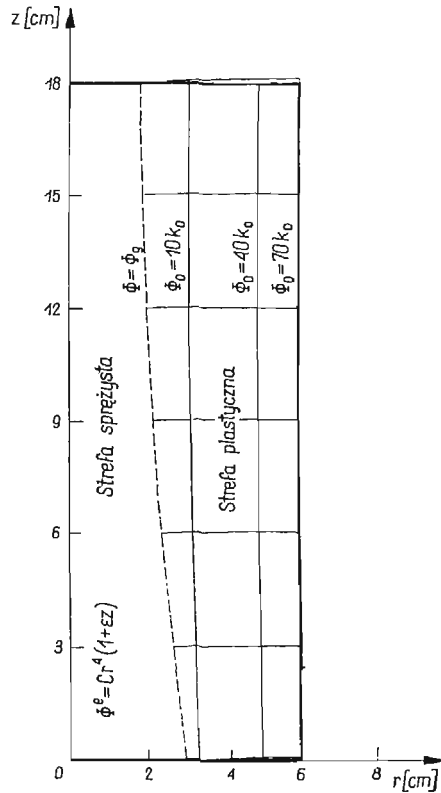
Rozwiązano przykład, gdy zakres sprężysty jest określony funkcją naprężeń wyrażoną wzorem (9.8), przy czym

$$\varepsilon = 0,1 \left[\frac{1}{\text{cm}} \right], \quad K = \frac{k_0}{C} = 12,03 \text{ [cm]}.$$

Dla tych wartości granicę międzystrefową można przedstawić wzorem

$$(9.24) \quad r_g = 50 \left[-16 \left(1 + \frac{l}{10} \right) + \sqrt{256 \left(1 + \frac{l}{10} \right)^2 + 5,79} \right].$$

Określono dalej dla szeregu wartości l promień graniczny r_g , wartości funkcji naprężeń $\Phi^e = \Phi_g^e(l)$ na granicy międzystrefowej, wartości stałej D oraz $b = \sqrt[4]{D} = b(l)$. Równanie



Rys. 7

linii największego spadku funkcji naprężeń Φ można, w zakresie plastycznym, dla przypadku materiału jednorodnego przedstawić jako

$$(9.25) \quad z = l + b \frac{\sqrt{2}}{2} [F(\varepsilon_1, p) - F(\varepsilon_2, p)],$$

gdzie $F(\varepsilon, p)$ jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju, natomiast odpowiednie argumenty są równe

$$\varepsilon_1 = \arccos \frac{b}{r}, \quad \varepsilon_2 = \arccos \frac{b}{r(l)}, \quad p = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wzór na funkcję naprężeń Φ^p dla zakresu plastycznego można natomiast przedstawić w postaci

$$(9.26) \quad \Phi^p = \Phi_0^p(l) + K \left\{ \frac{b^3}{3\sqrt{2}} [F(\varepsilon_1, p) - F(\varepsilon_2, p)] + \frac{r}{3} \sqrt{r^4 - D} - \frac{r(l)}{3} \sqrt{r^4(l) - D} \right\}.$$

Wyniki numerycznie obliczonych wartości $\Delta z = (z-l)$, Φ^p dla szeregu wartości l podano w tablicy 3. Na rys. 7 przedstawiono rodziny nieobciążonych powierzchni zewnętrznych ograniczające strefę plastyczną znalezione numerycznie. Z przedstawionego rysunku wynika, że w miarę narastania warstwy plastycznej (przy ustalonym obszarze sprężystym), powierzchnia boczna zbliża się coraz bardziej do powierzchni walcowej. Z przeprowadzonych badań wynika, że małe zmiany średnicy zewnętrznej pręta skręcanego pociągają za sobą duże zmiany promienia granicznego między strefą sprężystą a plastyczną — tym większe, im bardziej materiał jest uplastyczniony.

Literatura cytowana w tekście

1. R. P. EDDY, F. S. SHAW, *Numerical solution of elasto-plastic torsion of a shaft of rotational symmetry*, J. Appl. Mech., **16** (1949), 139–148.
2. A. FÖPPL, *Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss., Monachium*, **35** (1905), 249–504.
3. M. GALOS, *Obliczanie nośności granicznej skręcanych prętów o dowolnej niejednorodności poprzecznej*, Rozpr. Inżyn., **2**, **16** (1968), 233–260.
4. J. H. MICHELL, *Proc. London Math. Soc.*, **31** (1899), 141.
5. H. NEUBER, *Kerbspannunglehre*, Berlin 1937.
6. В. В. Соколовский, *Некоторые задачи теории пластичности со степенным упрочнением материалов*, Прикл. Мат. Мех., т. XII, вып. 6 (1949).
7. В. В. Соколовский, *О одной задаче упруго-пластического кручения*, Прикл. Мат. и Мех., **2**, **6** (1942), 241–246.
8. В. В. Соколовский, *Пластическое кручение круглых стержней переменной диаметра*, Прикл. Мат. и Мех., **4**, **9** (1945), 343–346.

Резюме

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СТЕЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

Темой работы является пластическое кручение стержней переменной диаметра из материала с произвольной пластической неоднородностью (зависимой от координат r, z в применяемой здесь цилиндрической системе координат r, θ, z). Здесь используется математическая аналогия между

рассматриваемой задачей и задачей о пластическом кручении призматических стержней из материала с произвольной поперечной неоднородностью (Гальос [3]).

Решение задачи получено путем введения функции напряжений, благодаря чему задача свелась к решению уравнения $|\text{grad } \Phi| = \tilde{k}(r, z)$. Из этого уравнения можно определить линии наибольшего наклона функции напряжений Φ а в последствии также функцию Φ и напряжения $\tau_{\theta r}$ и $\tau_{\theta z}$.

Приведен метод проектирования трубчатых стержней полностью переходящих в пластическое состояние и обратный метод решения задачи об упруго-пластическом кручении стержней переменного сечения из пластически неоднородного материала.

Рассмотрен также вопрос деформации пластической зоны рассматриваемых стержней.

Приводятся ряд примеров иллюстрирующих рассуждения.

S u m m a r y

PLASTIC TORSION OF NON-HOMOGENEOUS RODS OF VARIABLE THICKNESS

The problem of plastic torsion of rods of variable thickness made of materials characterized by arbitrary plastic nonhomogeneity (depending on coordinates r, z of the cylindrical system r, θ, z) has been considered in the paper. The mathematical analogy between the problem under consideration and the problem of torsion of prismatic transversally nonhomogeneous rods (Galos [3]) has been used.

The solution is obtained by introducing the stress function Φ what reduces the problem to the solution of the equation

$$|\text{grad } \Phi| = \tilde{k}(r, z).$$

This equation enables us to determine the lines of maximum slope of the stress function Φ and, next, the function Φ itself and the stresses $\tau_{\theta r}$ and $\tau_{\theta z}$.

The method of designing the fully plasticized pipe rods is presented as well as the inverse method of solution of the problem of elastic-plastic torsion of variable diameter rods made of plastic non-homogeneous materials. The question of deformation of the plastic zone in the rods under consideration has been also presented. A number of numerical examples is given.

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA
KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1970 r.

ZJAWISKO REZONANSU W KONTAKCIE CIAŁ SPRĘŻYSTYCH

JADWIGA HALAUNBRENNER, MIECZYSLAW KMIĘCIK (KRAKÓW)

1. Wstęp

W szeregu prac teoretycznych i doświadczalnych badano właściwości mechaniczne kontaktu ciał sprężystych. Pokazano, że ciała sprężyste, stykające się z innymi (jak np. kulki w łożyskach tocznych, kamyki w warstwach żwiru) poddane działaniu sił stycznych lub normalnych do powierzchni styku, a także działaniu momentów sił, posiadają określoną podatność na przesunięcie i skręcenie. Wytrącone z położenia równowagi wykonują drgania tłumione o częstotliwości, która jest funkcją modułów sprężystości, bezwładności i nacisku normalnego. Należało zatem oczekiwać, że ciała takie poddane działaniu sił lub momentów okresowo zmiennych w czasie okażą zjawisko rezonansu.

Przedstawiona praca zajmuje się tym zjawiskiem w przypadku kuli przyciśniętej siłą normalną do podstawy i poddanej działaniu momentu $M = M_0 \sin \omega t$ wymuszającego drgania obrotowe wokół normalnej do powierzchni kontaktu.

2. Opis eksperymentu

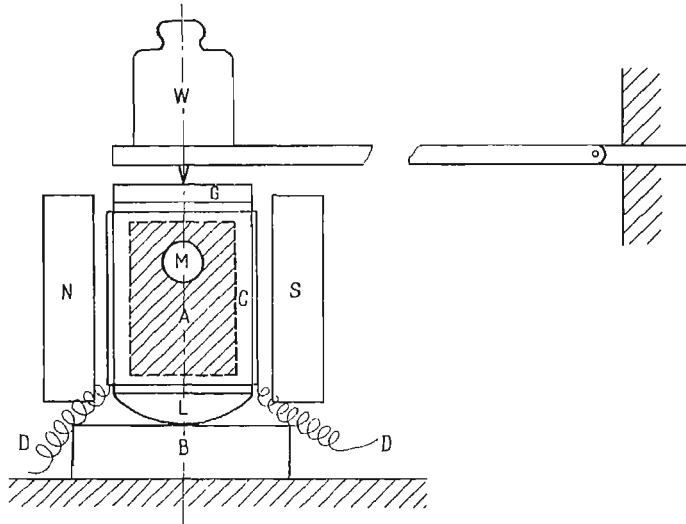
Zbudowano przyrząd przedstawiony na rys. 1. Składa się on z lekkiego, pustego walca C z materiału niemagnetycznego, do którego dolnej podstawy przyklejono soczewkę płasko-wypukłą L , do górnej — szklaną płytkę G .

Soczewka jest przyciskana za pośrednictwem stalowej igły do mosiężnej podstawy B ciężarem W , spoczywającym na końcu ramienia dźwigni. Na walcu nawinięto cewkę izolowanego drutu. Aby wywierać na ten układ (zwany dalej wibratorem) moment obrotowy proporcjonalny do natężenia prądu płynącego przez cewkę, całość — jak w galvanometrze o ruchomej cewce — umieszczono między biegunami magnesu stałego N-S. Dla nadania połu magnetycznemu struktury radialnej, wewnątrz pustego walca z cewką umieszczono walec pełny z miękkiego żelaza. Prąd do cewki doprowadzono za pomocą dwóch bardzo wiotkich mosiężnych pasków D , wywierających znikomy moment kierujący. Obroty wibratora rejestrowano metodą optyczną przy pomocy zwierciadełka M i papieru światłoczułego na obracającym się walcu. Cewkę zasilano prądem zmiennym z generatora drgań akustycznych.

Wykonano kolejno następujące pomiary:

1. Wyznaczono moment bezwładności J wibratora względem głównej, centralnej osi bezwładności metodą wahadła torsyjnego, znajdując $J = 3,57 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2$.

2. Zarejestrowano drgania własne «kontaktowe» układu. Udzielano w tym celu wibratorowi słabego impulsu mechanicznego, skręcając w ten sposób materiał obu ciał w obszarze styku i jego otoczeniu. Rys. 2a przedstawia oscylogram tych drgań. Częstość ich odczytana z oscylogramu $f_0 = 55,2 \text{ Hz}$.



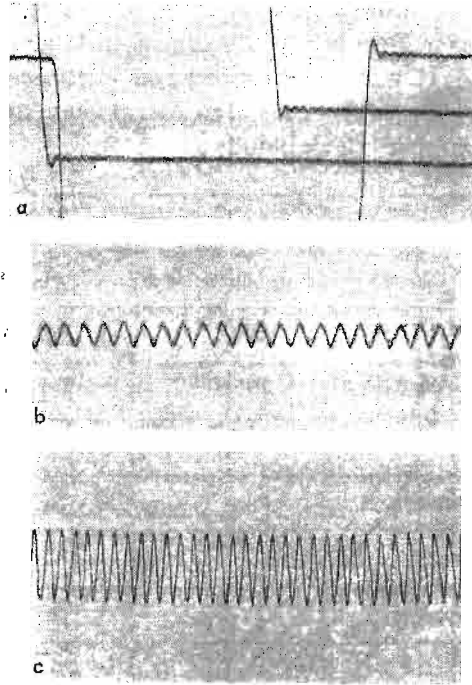
Rys. 1. Schemat układu do wymuszania drgań obrotowych

3. Sporządzono statyczne pętle histerezy. Doprowadzono w tym celu do cewki prądu stałego o powoli, monotonicznie narastającym napięciu i od zera do pewnej wartości maksymalnej i_0 , przechodząc następnie powoli do napięcia $-i_0$ i wracając do zera. Odpowiadające obrotowi przesunięcia wskaźnika świetlnego odczytywano na mikroskali odległej od zwierciadła o 4 m. Wykreślono statyczne pętle histerezy dla szeregu amplitud prądowych i_0 aż do wartości amplitudy, przy której zachodził poślizg na całej powierzchni styku, tzn. obserwowano powolny, jednostajny obrót cewki. Rys. 3 przedstawia otrzymane pętle histerezy w układzie współrzędnych M, φ , gdzie φ oznacza kąt obrotu cewki liczony od położenia początkowego, zaś $M = ki$ moment obrotowy wywierany przez pole magnetyczne na cewkę przewodzącą prąd. Pola powierzchni pętli rosną szybko z rosnącymi amplitudami M_0 .

4. Wyznaczono doświadczalnie współczynnik proporcjonalności k między napięciem prądu i w cewce a momentem $M = ki$ wywieranym na nią przez pole magnetyczne. Usuwano w tym celu podstawę B oraz igłę przenoszącą nacisk normalny i zawieszano wibrator na pionowym, sprężystym druciku z fosforobrazu. Mierzono metodą optyczną kąt obrotu cewki φ pod wpływem prądu o napięciu i ; moment wywierany przez skręcany drucik obliczono ze wzoru $M = \pi Gr^4 \varphi / 2L$. Otrzymana stąd wartość k wynosi

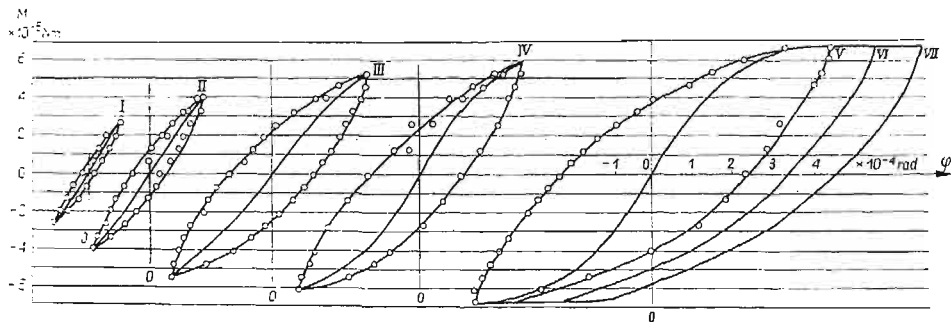
$$k = \frac{M}{i} = 6,86 \cdot 10^{-4} \text{ Nm/A.}$$

5. Zdjęto szereg amplitudowych krzywych rezonansu zasilając cewkę prądem o natężeniu sinusoidalnie zmiennym o stałej amplitudzie i_0 zmieniając jego pulsację ω . Dla każdej wartości amplitudy prądowej wykonywano dwie serie obserwacji: pierwszą — dla



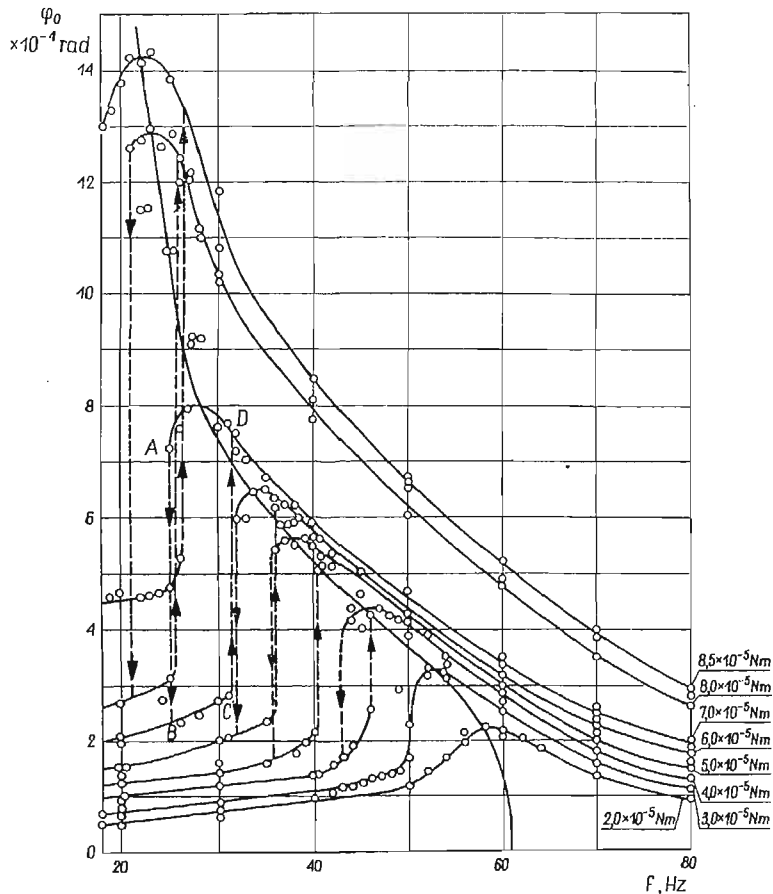
Rys. 2. Oscylogramy: *a* — swobodnych drgań układu, *b* — drgań wymuszonych przez moment o częstotliwości 20 Hz i amplitudzie $M_0 = 9,5 \cdot 10^{-5}$ Nm, *c* — drgań wymuszonych przez moment o częstotliwości 33 Hz o tej samej amplitudzie

częstotliwości rosnących (przy nacisku normalnym $N = 7,5$ N, od 20 Hz do 80 Hz), drugą — dla częstotliwości malejących, w tych samych granicach. Ustaloną amplitudę drgań wymuszonych odczytywano na mikroskali lub rejestrowano na papierze światłoczułym (rys. 2b i 2c).



Rys. 3. Pętle histerezy statycznej: zależności przyłożonego momentu obrotowego M od kąta obrotu układu ruchomego

Krzywe rezonansu amplitudy przedstawia rys. 4. Na osi poziomej odcinano częstotści f momentu wymuszającego, na osi pionowej — ustaloną amplitudę drgań wymuszonych. Wartość amplitudy momentu wymuszającego $M_0 = ki_{\text{eff}}/\sqrt{2}$ zaznaczono jako parametr dla każdej krzywej. Począwszy od pewnej wartości amplitudy prądowej obserwowano «skoki» amplitudy drgań wymuszonych: AB — przy częstotściach malejących, CD — przy częstotściach rosnących, charakterystyczne dla drgań nieliniowych. Przesunięcie wierzchołka krzywej rezonansowej w kierunku mniejszych częstotści świadczy o «miękkiej» charakterystyce sił sprężystych w kontakcie. Ten rodzaj charakterystyki pociąga za sobą wzrost okresu drgań ze wzrostem ich amplitudy.



Rys. 4. Krzywa rezonansu: zależność amplitudy kątowej φ_0 drgań wymuszonych od częstotści f momentu wymuszającego $M = M_0 \sin 2\pi ft$ dla różnych wartości amplitudy M_0 . Na rysunku wykreślono krzywą «szkieletową» poprzez maksima krzywych rezonansu

Przez maksima krzywych rezonansu przeprowadzono krzywą «szkieletową» i ekstrapolowano ją do przecięcia z osią częstotści. Punkt ten ma odciętą $f = 61,2$ Hz bliską częstotści drgań swobodnych 55,2 Hz zarejestrowanych na oscylogramie na rys. 2a.

6. Zmierzono współczynnik tarcia ślizgowego szkła po mosiądzu przyrządem wahadłowym; otrzymano $\mu = 0,33$.

3. Sporządzenie charakterystyk momentów sił sprężystych i momentów sił tarcia

Przedstawimy sporządzenie charakterystyk momentów sił sprężystych i momentów sił tarcia w kontakcie kuli z płytą w tarcu suchym, wiertnym na podstawie uzyskanych eksperymentalnie krzywych rezonansu amplitudy względem statycznych pętli histerezy.

Celem znalezienia charakterystyki sprężystej kontaktu, tzn. zależności momentu sił sprężystych M_s od amplitudy φ_0 kąta obrotu wibratora na podstawie krzywych rezonansowych, napiszemy równanie drgań wymuszonych wibratora w postaci:

$$(3.1) \quad J\ddot{\varphi} = -M_s(\varphi) - k\dot{\varphi} + M_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

W równaniu tym J oznacza moment bezwładności wibratora względem osi obrotu, M_0 — amplitudę momentu wymuszającego o pulsacji ω ; tarcie suche zastąpiono tarcie wiskotycznym (przy czym współczynnik k jest funkcją amplitudy) tak, by praca rzeczywistego momentu sił tarcia w czasie okresu $T = 2\pi/\omega$ była równa pracy momentu $k\dot{\varphi}$ w tym samym czasie.

Jako przybliżone rozwiązanie tego równania można przyjąć funkcję

$$(3.2) \quad \varphi = \varphi_0 \sin \omega t.$$

Z żądania, aby to rozwiązanie było słuszne przynajmniej dla maksymalnych wychyleń ($\omega t = \pi/2$) i dla przejść przez położenie równowagi ($\omega t = 0$), otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} -J\varphi_0 \omega^2 + M_s(\varphi_0) &= M_0 \cos \alpha, \\ k\varphi_0 \omega &= M_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Z tego układu równań obliczamy

$$(3.3) \quad M_s(\varphi_0) = \pm \sqrt{M_0^2 - k^2 \varphi_0^2 \omega^2} + J\varphi_0 \omega^2$$

i

$$(3.4) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{k\varphi_0 \omega}{M_s(\varphi_0) - J\varphi_0 \omega^2}.$$

Pamiętając, że moment sił tarcia równa się $M_t = k\dot{\varphi} = k\varphi_0 \omega \cos \omega t$ i jego wartość maksymalna wynosi $M_{t0} = k\varphi_0 \omega$, możemy przepisać równania (3.3) i (3.4) w postaci

$$(3.5) \quad M_s(\varphi_0) = \pm \sqrt{M_0^2 - M_{t0}^2} + J\varphi_0 \omega^2,$$

$$(3.6) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_{t0}}{M_s(\varphi_0) - J\varphi_0 \omega^2}.$$

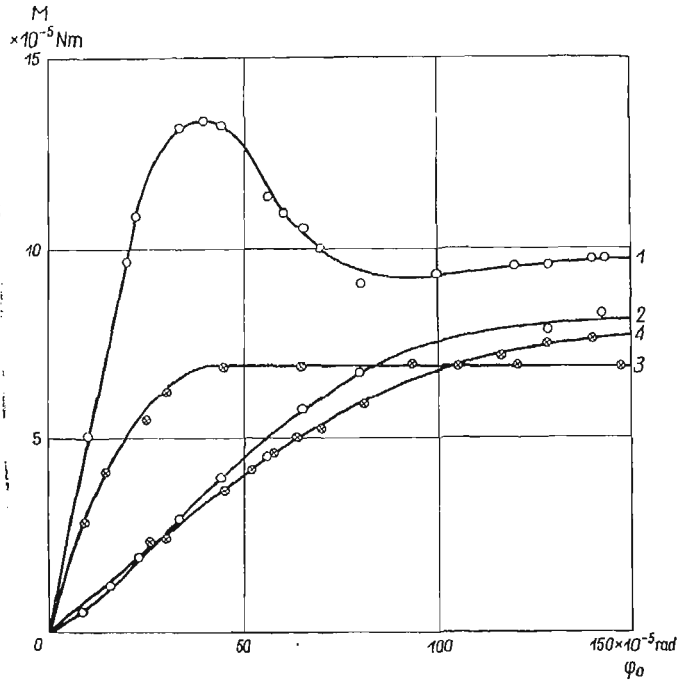
Wzór (3.5) jest równaniem krzywej rezonansowej. Przy danej pulsacji momentu wymuszającego, maksymalną amplitudę drgań wymuszonych otrzymamy dla $M_0^2 = M_{t0}^2$. Zatem równanie

$$(3.7) \quad M_s(\varphi_0) = J\varphi_0 \omega^2$$

jest równaniem krzywej «szkieletowej» dla układu krzywych rezonansu amplitudy. Odczytując z krzywej «szkieletowej», poprowadzonej przez maksima krzywych rezonansowych wartości φ_0 i ω , otrzymujemy przebieg funkcji $M_s = M_s(\varphi_0)$. Krzywa ta przedstawiona

jest na rys. 5 i oznaczona cyfrą 1. Posiada ona jedno wyraźne maksimum. Zależność amplitudy momentu sił tarcia M_{t0} od amplitudy wychylenia otrzymujemy również z krzywej szkieletowej, ponieważ dla wszystkich jej punktów zachodzi $M_{t0} = M_0$. Przebieg M_{t0} przedstawia krzywa 2 na rys. 5.

Przedstawimy charakterystyki: sprężystą i tarciovą kontaktu uzyskane na podstawie statycznej pętli histerezy.



Rys. 5. Przybliżone charakterystyki sprężyste i tarciove kontaktu uzyskane w oparciu o krzywe rezonansu (krzywe 1 i 2) i oparte na statycznej pętli histerezy (krzywe 3 i 4)

Dla sporządzenia przybliżonej charakterystyki kontaktu, przy pominięciu wyższych harmonicznych, wystarczy odczytać współrzędne wierzchołków pętli histerezy. Przy dowolnym ($\omega \approx 0$) obiegu pętli z przystankami dla odczytu M_s i φ , moment zewnętrzny przyłożony do wibratora równoważy moment sił sprężystych w kontakcie. Wykres amplitudy M_{s0} w funkcji φ_0 przedstawia krzywa 3 na rys. 5. Począwszy od pewnej wartości amplitudy wychylenia przebiega ona równoległe do osi φ_0 . Charakterystykę tarciovą kontaktu otrzymamy, pamiętając, że powierzchnia pętli histerezy przedstawia pracę L_t momentu sił tarcia zamienioną podczas obiegu pętli na ciepło i zużycie cierne obu powierzchni. Przy założeniu tarcia wiskotycznego i przybliżonego rozwiązania (3.2), mamy

$$(3.8) \quad L_t = \int_0^{2\pi} M_t d\varphi = \int_0^{2\pi} k\dot{\varphi} d\varphi = \int_0^T k\dot{\varphi}^2 dt = k\varphi_0^2 \omega^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt =$$

$$= \pi k \varphi_0^2 \omega = M_{t0} \pi \varphi_0, \quad \text{stąd} \quad M_{t0} = \frac{L_t}{\pi \varphi_0}.$$

Wykres amplitudy momentu sił tarcia w funkcji amplitudy kąta obrotu przedstawia krzywa 4 na rys. 5. Przebiegi M_{t0} na podstawie krzywej rezonansowej i na podstawie statycznej pętli histerezy nie różnią się wiele od siebie, natomiast przebiegi amplitudy sił sprężystych różnią się bardzo znacznie.

W przypadku przebiegów quasi-statycznych moment sił sprężystych osiąga «nasylenie», w przypadku drgań wymuszonych to nie zachodzi.

Próby uzyskania krzywych rezonansu przy założeniu ważności statycznej pętli histerezy w warunkach dynamicznych nie doprowadziły do krzywych rezonansu otrzymanych doświadczalnie.

4. Przegląd ważniejszych prac teoretycznych dotyczących charakterystyki sprężystej kontaktu dwóch kul z uwzględnieniem tarcia

Zagadnienie kontaktu dwóch ciał sprężystych stosujących się do prawa Hooke'a i przyciskanych do siebie siłą N normalną do ich wspólnej powierzchni styku rozwiązał H. HERTZ. Jednym z ważnych jego założeń jest pominięcie naprężeń stycznych na powierzchni kontaktu.

W przypadku kuli przyciskanej do półprzestrzeni sprężystej obszar kontaktu jest kołem o promieniu a danym wzorem

$$(4.1) \quad a = \left[\frac{3N}{8} \left(\frac{1-\nu_1}{G_1} + \frac{1-\nu_2}{G_2} \right) R \right]^{1/3},$$

gdzie G_1 i G_2 oznaczają współczynniki sprężystości na skręcanie, ν_1 i ν_2 — współczynniki Poissona materiału kuli i podstawy, R — promień kuli.

Rozkład naprężeń normalnych na powierzchni kontaktu wyraża się wzorem

$$(4.2) \quad \sigma_n = \frac{3N}{2\pi a^3} (a^2 - \rho^2)^{1/2},$$

gdzie ρ jest odległością punktu od środka koła styku.

MINDLIN [1] rozpatruje kontakt dwu sprężystych, jednorodnych kul przyciskanych do siebie siłą normalną i poddanych działaniu momentu pary sił obracającego układ wokół linii środków obu kul. Wykazuje on, że przyjmując szczenie kul w obszarze kontaktu otrzymujemy wynik, że naprężenia styczne na obwodzie koła styku rosną do nieskończoności przy dowolnie małym kącie skręcenia φ .

LUBKIN [2] zakładając tarcie, dopuszcza poślizgi; skręcenie układu o kąt φ powoduje podział obszaru styku na dwie części: część środkową, kołową, obracającą się jak ciało sztywne (obszar szczenia) i pierścień poślizgu, na powierzchni którego naprężenia styczne mają wartość wyznaczoną prawem tarcia Coulomba: $\tau = \mu\sigma_n$, gdzie μ jest współczynnikiem tarcia między obu ciałami, niezależnym od nacisku i prędkości. Relację między kątem skręcenia φ i wewnętrznym promieniem c pierścienia poślizgu podaje wzór

$$(4.3) \quad \varphi = \frac{3\mu N}{4\pi G a^2} k^2 D,$$

gdzie $k^2 = 1 - c^2/a^2$, zaś D jest kompletną całką eliptyczną modulo k . Przy wzroście kąta φ , szerokość pierścienia poślizgu rośnie. Gdy poślizg obejmuje całą powierzchnię styku ($c = 0$), moment sił tarcia osiąga wartość maksymalną M_1

$$(4.4) \quad M_1 = \frac{3\pi}{16} \mu Na.$$

Dla momentu sił zewnętrznych $M = M_1$, kąt φ rośnie nieograniczenie. Związek między wartością momentu sił zewnętrznych a promieniem pierścienia poślizgu c wyraża się bardzo skomplikowaną funkcją uwikłaną, nie pozwalającą na zapis momentu M w formie $M = M(\varphi)$.

DERESIEWICZ [3] rozpatruje dwie jednakowe sprężyste kule przyciskane do siebie siłą normalną, działającą wzdłuż ich linii środków i poddane działaniu momentu M oscylującego powoli między wartościami $-M_0 \leq M \leq M_0$, ograniczając się do momentów $M \ll M_1$. Otrzymuje on pętle histerezy o powierzchni proporcjonalnej do M^3 , przedstawiające straty energii na ciepło podczas jednego cyklu.

W pracy doświadczalnej HALAUNBRENNER i SUKIENNIK [4] obserwowano drgania kuli ściśniętej między dwiema równoległymi płytami, obróconej o mały kąt i puszczonej swobodnie. Na podstawie wzoru Lubkina na podatność C jednego z ciał kontaktujących dla bardzo małych kątów skręcenia

$$(4.5) \quad C = \frac{d\varphi}{dM} = \frac{3}{16Ga^3}$$

obliczono okres tych drgań

$$(4.6) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{3}{16} \cdot \frac{J}{a^3} \left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \right)},$$

gdzie J oznacza moment bezwładności kuli względem średnicy. Wzór ten doświadczenie potwierdziło.

W drugiej pracy tych samych autorów [5] obserwowano zanik amplitudy drgań kuli przy tej samej geometrii doświadczenia, wymuszonych przez skręconą i puszczonej swobodnie sprężynę płaską. Przebieg zjawiska tłumienia wyjaśniono poślizgami na całej powierzchni styku, następnie przy mniejszych amplitudach na pierścieniach zewnętrznych koła styku, w końcu przy bardzo małych — tarcie wewnętrzne w materiale kuli i podstawy.

SIEMIENOWA [6, 7] obserwuje zjawisko rezonansu przy drganiach obrotowych wymuszonych walca przyciskanego siłą normalną do podstawy i wykorzystuje krzywe rezonansu dla określenia zależności sił wzajemnego oddziaływania obu ciał od nacisku normalnego, czasu trwania kontaktu, rodzaju ciał, obróbki powierzchni i smaru. Próbuje ona opisać zjawisko równaniem Duffinga bez wnikania w strukturę kontaktu.

5. Wyniki eksperymentu w świetle prac teoretycznych

Rozpatrzono pętle histerezy statycznej (rys. 3). Na każdej z nich zaznaczona jest krzywa «dziewicza» wychodząca z położenia zerowego. Ze wzrostem kąta φ , $\frac{dM}{d\varphi}$ maleje

i począwszy od pewnej wartości amplitudy kątowej φ krzywa osiąga «nasylenie». Krzywa teoretyczna, podająca zależność kąta obrotu cewki φ od wartości przyłożonego momentu M , dana jest graficznie w pracy [3]. Przebieg krzywej eksperymentalnej ma ten sam charakter. Wartość momentu zewnętrznego, od której począwszy następuje poślizg na całej powierzchni styku według wzoru (4.4) wynosi teoretycznie $2,74 \cdot 10^{-4}$ Nm, podczas gdy wartość ta odczytana z pętli histerezy równa się $6,86 \cdot 10^{-4}$ Nm. Ta znaczna rozbieżność obu wartości da się częściowo wyjaśnić działaniem kolca przenoszącego nacisk normalny. Zarówno kolec, jak i sprężynki doprowadzające prąd wywierają pewien moment zwrotny. Prawo tarcia Coulomba też nie jest ściśle: współczynnik tarcia jest funkcją nacisku i prędkości, a także zależy od wilgotności i zanieczyszczeń atmosfery. Należałoby doświadczenie powtórzyć zastępując kolec drugą soczewką, indentyką z dolną i przeprowadzić eksperyment w próżni.

Podatność układu soczewka–płyta na skrócenie dla bardzo małych kątów skręcania obliczona na podstawie (4.5) wynosi przy $N = 7,5$ N, $R = 5,0$ cm i tablicowych wartościach G dla szkła i mosiądzu: $C = 1,90$ rad/Nm. Podatność otrzymana z krzywej «dziewiczej» pętli o najmniejszej amplitudzie na rys. 3 ma wartość $3,29$ rad/Nm. Należy zauważyć, że w położeniu zerowym struktura kontaktu nie jest znana; nie udaje się bowiem zetknąć soczewki z podstawą i obciążyć jej tak, by nie było na powierzchni styku małych poślizgów i obrotów. Można się o tym przekonać na dużych modelach przy użyciu metody elastoptycznej.

Zajmiemy się teraz częstością drgań własnych wibratora o tak małej amplitudzie, że nie popełniając dużego błędu można przyjąć, że zachodzi szczipienie na całej powierzchni styku. Częstość ta odczytana z oscylogramu na rys. 3a wynosi $f_0 = 55,2$ Hz, częstość obliczona na podstawie wartości C otrzymanej z pętli histerezy $46,5$ Hz. Krzywa «szkieletowa» amplitudowych krzywych rezonansu (rys. 4) przecina oś częstości w punkcie o częstości 61 Hz. Fakt ten jest trudny do interpretacji, skoro częstość słabo tłumionych drgań własnych wynosi około 55 Hz.

Z rys. 2b i 2c widać, że przebieg drgań wymuszonych nie wykazuje dużych odstępstw od przebiegu drgań harmonicznymi prostymi: zawartość wyższych harmonicznymi zależy od amplitudy i pulsacji momentu wymuszającego.

Opisane zjawisko odgrywa rolę w badaniu procesów zachodzących w parach kinematycznych. Biorąc pod uwagę, że podobne zjawiska występują w kontakcie przy drganiach wymuszonych przez okresowo zmienne siły styczne do powierzchni kontaktu, a także i siły normalne, można przewidzieć obszary częstości fal mechanicznych tłumionych selektywnie przez warstwy materiałów ziarnistych, jak np. piasek i żwir.

Literatura cytowana w tekście

1. R. D. MINDLIN, *Compliance of elastic bodies in contact*, Jour. of Appl. Mech. Trans., ASME, 71 (1949), 259–268.
2. J. L. LUBKIN, *The torsion of elastic spheres in contact*, Jour. of Appl. Mech. Trans., ASME, 73 (1951) 183–187.
3. H. DERESIEWICZ, *Contact of elastic spheres under an oscillating torsional couple*, Jour. of Appl. Mech., March, 1954, 52–56.

4. J. HALAUNBRENNER, P. SUKIENNIK, *On the end of the motion of solids on an elastic base*, Acta Phys. Polon., XXI (1962), Fasc. 3.
5. J. HALAUNBRENNER, P. SUKIENNIK, *On the role of contact stresses in frictional damping of mechanical oscillation*, Jour. of Lubrication Technology Trans., ASME, Series F., N., 2, 89 (1967), 109.
6. В. А. СЕМЕНОВА, *Исследование процессов внешнего трения металлов методом анализа вынужденных микроколебаний ползуна*, Изв. Выс. Уч. Зав. СССР, Машиностр., № 10, 1961.
7. В. А. СЕМЕНОВА, *О физической природе внешнего трения в условиях гармонических колебаний ползуна в пределах предварительного смещения*, Изв. Выс. Школы, Машиностр., № 2, 1962.

Резюме

ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА В КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ

Представленная работа состоит из 3 частей: часть I содержит описание эксперимента. Сферическая, стеклянная линза была прижата нормальной силой к горизонтальному, упругому основанию и подвергнута моменту сил вращающих её вокруг вертикальной оси. При изменяющейся пульсации ω вынуждающего момента $M = M_0 \sin \omega t$ при постоянной амплитуде M_0 получены амплитудные кривые резонанса для разных величин M_0 . Ход кривых указывает на сильно нелинейную и «мягкую» упругую характеристики контакта.

Затем сняты статические петли гистерезиса для различных амплитуд M_0 и зарегистрирована оптически методом осциллограмма свободных и вынужденных колебаний линзы.

В части II на основе результатов эксперимента определены упругая и frictionальная характеристика контакта.

В части III представлены результаты более знаменательных теоретических работ в области контакта упругих тел. Результаты эксперимента сравнены с теорией.

Summary

THE RESONANCE PHENOMENON FOR ELASTIC BODIES IN CONTACT

The paper is divided into three parts. In part I the experimental investigations are described. A spherical glass lens has been presented to a horizontal elastic plate and then loaded by a twisting moment $M = M_0 \sin \omega t$ turning it around the vertical axis. Varying the frequency ω of the torque and keeping the amplitude M_0 constant, the resonance curves for various values of M_0 have been recorded. These curves show that the elastic characteristics of the contact is strongly non-linear and «soft». For various amplitudes M_0 of the moment, the hysteresis loops have been measured and, using optical methods, the oscillograms of the free and forced vibrations of the lens have been recorded. Part II of the paper contains the analysis of the approximate elastic and frictional characteristics of the contact based upon the experimental results. In part III the results of certain important theoretical works dealing with the contact phenomena of elastic bodies are presented. Theoretical results are then compared with those obtained experimentally.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 maja 1970 r.

ODPOWIEDNIOŚĆ MODELOWA DLA CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW O BISYMETRYCZNYM
OTWARTYM PRZEKROJU POPRZECZNYM

MIECZYSLAW JOKIEL (WROCLAW)

1. Wstęp

Przedmiotem niniejszej pracy są warunki odpowiedniości modelowej dla cienkościennego, prostego pręta pryzmatycznego o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym. Rozważany pręt jest obciążony statycznie dowolnym układem uogólnionych sił zewnętrznych wywołujących w nim określony stan napięcia i odkształcenia, charakteryzujący się występowaniem samozrównoważonego układu naprężeń normalnych, zwanego bimomentem i deplanacją płaskiego przed odkształceniem przekroju pręta. Odnośnie do samego pręta zakłada się, że spełnia on warunki układu Clapeyrona. Zakłada się ponadto, że jego przemieszczenia są bardzo małe, a odkształcenia ściśle odpowiadają hipotezom przyjętym w teorii prętów cienkościennych WŁASOWA [6].

W pracy sformułowano warunki odpowiedniości modelowej dla dowolnego, pryzmatycznego i prostego, pręta cienkościennego oraz wykazano możliwość ich spełnienia w małym modelu w przypadku pręta o bisymetrycznym otwartym przekroju poprzecznym. Rozważania przeprowadzono przy założeniu, że nie występuje pełne geometryczne i mechaniczne podobieństwo obiektu rzeczywistego i modelu.

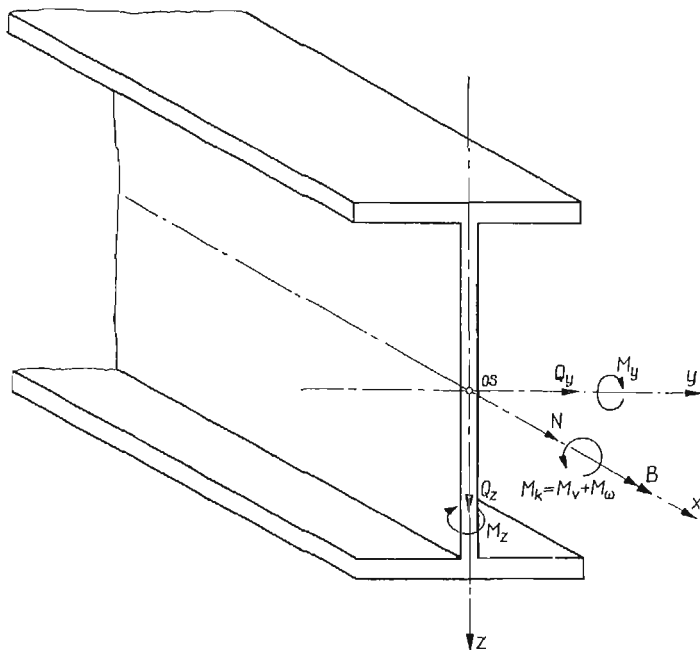
2. Kryterium podobieństwa modelowego

Wielkość energii odkształcenia sprężystego dla pręta cienkościennego będącego obiektem rozważań i nazywanego dalej krótko obiektem określa znany ze statyki wzór [5]

$$(2.1) \quad U_0 = U_N + U_{Q_{y0}} + U_{Q_{z0}} + U_{M_{y0}} + U_{M_{z0}} + U_{M_{v0}} + U_{B_0} = \\ = \frac{1}{2} \int \left(\frac{N_0^2}{E_0 A_0} + k_{z0} \frac{Q_{y0}^2}{G_0 A_0} + k_{y0} \frac{Q_{z0}^2}{G_0 A_0} + \frac{M_{y0}^2}{E_0 I_{y0}} + \frac{M_{z0}^2}{E_0 I_{z0}} + \frac{M_{v0}^2}{G_0 I_{v0}} + \frac{B_0^2}{E_0 I_{\omega 0}} \right) ds_0.$$

Przyjęte oznaczenia sił wewnętrznych wyjaśnia rys. 1, na którym zaznaczono ponadto środek O masy przekroju, środek ścinania S oraz przyjęty układ współrzędnych xyz ($ds = dx$). Indeks «0» stosuje się do wielkości przynależnych do obiektu. Dwa ostatnie

wyrazy wzoru wyrażają wielkość energii związanej z nieswobodnym skręcaniem cienkościennego pręta, zależnej od momentu swobodnego skręcania M_v i bimomentu B , którego wektor zaznaczono na rys. 1 podwójną strzałką. We wzorze nie uwidacznia się wpływ momentu giętno-skrętnego M_ω . Konsekwencją bowiem przyjętej hipotezy braku odkształceń postaciowych w powierzchni środkowej pręta cienkościennego jest to, że równomiernie rozłożone na grubości elementów przekroju naprężenia styczne, wywołane giętno-skrętnym momentem M_ω , nie powodują przyrostu energii potencjalnej odkształcenia.



Rys. 1.

We wzorze (2.1) oznaczają ponadto: E, G — stałe sprężystości materiału; $A, I_y, I_z, I_v, I_\omega$ — geometryczne i wycinkowe charakterystyki przekroju; k_y, k_z — współczynniki liczbowe zależne tylko od kształtu przekroju pręta.

Analogiczną wartość energii odkształcenia sprężystego pręta, będącego modelem pręta rozważanego (indeks m), określa wzór

$$(2.2) \quad U_m = U_{Nm} + U_{Q_{y,m}} + U_{Q_{z,m}} + U_{M_{y,m}} + U_{M_{z,m}} + U_{M_{v,m}} + U_{B_m} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{N_m^2}{E_m A_m} + k_{zm} \frac{Q_{ym}^2}{G_m A_m} + k_{ym} \frac{Q_{zm}^2}{G_m A_m} + \frac{M_{ym}^2}{E_m I_{ym}} + \frac{M_{zm}^2}{E_m I_{zm}} + \frac{M_{v,m}^2}{E_m I_{vm}} + \frac{B_m^2}{E_m I_{\omega m}} \right) ds_m.$$

Kryterium odpowiedniości modelowej obiektu rzeczywistego i modelu, konieczne i wystarczające dla podobieństwa energii odkształcenia sprężystego, można sformułować w oparciu o wzory (2.1) i (2.2) w następujący sposób: podobieństwo energii odkształcenia

sprężystego obiektu i modelu jest spełnione, jeżeli stosunek odpowiedniej części energii sprężystej pochodzącej w modelu i obiekcie od przyczyny tego samego rodzaju, jest taki sam dla każdej przyczyny. Winno być zatem

$$(2.3) \quad \frac{U_0}{U_m} = \frac{U_{N0}}{U_{Nm}} = \frac{U_{Q_y0}}{U_{Q_y m}} = \frac{U_{Q_z0}}{U_{Q_z m}} = \frac{U_{M_y0}}{U_{M_y m}} = \frac{U_{M_\varphi0}}{U_{M_\varphi m}} = \frac{U_{B0}}{U_{Bm}}.$$

Podane kryterium odpowiedniości modelowej energii sprężystej obiektu i modelu zawiera warunki podobieństwa przesunięć, kątów obrotu i deplanacji [3].

3. Związki wyrażające przyjęte kryterium podobieństwa modelu i obiektu

W celu szczegółowego przedstawienia związków wyrażających warunki podobieństwa wprowadzono następujące oznaczenia skal wielkości występujących w modelu i obiekcie:

$$\begin{aligned} \frac{s_0}{s_m} &= n && \text{podziałka długości prętów,} \\ \frac{P_0}{P_m} &= f && \text{podziałka sił,} \\ \frac{M_0}{M_m} &= \frac{P_0 s_0}{P_m s_m} = fn && \text{podziałka momentów,} \\ \frac{B_0}{B_m} &= \frac{P_0 s_0^2}{P_m s_m^2} = fn^2 && \text{podziałka bimomentów,} \\ \frac{E_0}{E_m} &= e; \quad \frac{G_0}{G_m} = g && \text{podziałki stałej sprężystości podłużnej i postaciowej,} \\ \frac{A_0}{A_m} &= a && \text{podziałka pól,} \\ \frac{I_{y0}}{I_{ym}} &= i_y; \quad \frac{I_{z0}}{I_{zm}} = i_z && \text{podziałki momentów bezwładności względem osi} \\ &&& \text{y i z,} \\ \frac{I_{\varphi0}}{I_{\varphi m}} &= i_\varphi && \text{podziałka momentu bezwładności czystego skrę-} \\ &&& \text{cania,} \\ \frac{I_{\omega0}}{I_{\omega m}} &= i_\omega && \text{podziałka wycinkowego momentu bezwładności} \\ &&& \text{względem środka ścinania przekroju,} \\ \frac{p_0}{p_m} &= \frac{u_0}{u_m} = \frac{v_0}{v_m} = \frac{w_0}{w_m} && \text{podziałka przesunięć,} \\ \frac{\varphi_0}{\varphi_m} &= \frac{j}{n}; \quad \frac{\varkappa_0}{\varkappa_m} = \frac{j}{n^2} && \text{podziałki kątów obrotu i deplanacji,} \\ \frac{U_0}{U_m} &= \frac{P_0 p_0}{P_m p_m} = fj = u && \text{podziałka energii sprężystej i pracy.} \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu przyjętych podziałek kryterium (2.3) przyjmuje postać

$$(3.1) \quad fj = \frac{f^2 n}{ea} = \frac{f^2 n^3}{ei_y} = \frac{f^2 n^3}{ei_z} = \frac{k_{z0}}{k_{zm}} \frac{f^2 n}{ga} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} \frac{f^2 n}{ga} = \frac{f^2 n^3}{gi_v} = \frac{f^2 n^5}{ei_\omega},$$

a po skróceniu stronami przez $f^2 n$

$$(3.2) \quad \frac{1}{ea} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z} = \frac{k_{z0}}{k_{zm}} \frac{1}{ga} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} \frac{1}{ga} = \frac{n^2}{gi_v} = \frac{n^4}{ei_\omega}.$$

Stosownie do podanych wyżej wniosków równości (3.2) przedstawiają komplet warunków, koniecznych i wystarczających, odpowiedniości modelowej obiektu rzeczywistego i modelu dla prostego, pryzmatycznego pręta cienkościennego o dowolnym przekroju otwartym w przypadku, gdy pomiarom na modelu podlegają przemieszczenia wywołane statycznie działającym układem uogólnionych sił zewnętrznych.

Gdy obiekt rzeczywisty i model spełniają równości (3.2), przemieszczenia obiektu mogą być wyznaczone za pomocą uprzednio zmierzonych przemieszczeń modelu z relacji

$$(3.3) \quad \begin{array}{ll} \text{przesunięcia} & p_0 = j p_m, \\ \text{kąty obrotu} & \varphi_0 = \frac{j}{n} \varphi_m, \\ \text{deplanacje} & \alpha_0 = \frac{j}{n^2} \alpha_m, \end{array}$$

w których podziałka j podlega wyznaczeniu z równości (3.1), zaś n jest skalą długości prętów.

4. Sposób zastępczych przekrojów modelu

4.1. Uwagi wstępne. Analizując warunki (3.2) nietrudno zauważyć, że są one tożsamiściowo spełnione w przypadku, gdy występujące w nich skale geometrycznych i wycinkowych charakterystyk przekrojów obiektu i modelu zależą od skali długości prętów, czyli gdy

$$(4.1) \quad a = n^2; \quad i_y = i_z = i_v = n^4; \quad i_\omega = n^6; \quad \frac{k_{z0}}{k_{zm}} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} = 1$$

oraz gdy

$$(4.2) \quad e = g,$$

a zatem, gdy zachodzi geometryczne i mechaniczne podobieństwo modelu i obiektu.

Przy rozwiązywaniu na małych modelach praktycznych problemów technicznych rzadko występuje możliwość zapewnienia pełnego podobieństwa geometrycznego i spełnienia przez to równości (4.1). Nawet najczęściej występujące w budownictwie profile walcowane, dwuteowniki, ceowniki, kątowniki posiadają wyokrąglenia i zbieżności trudne do zrealizowania w małym modelu. Podobne cechy posiadają cienkościennie profile gięte, kształtowane na zimno. Niekiedy zaś spotyka się bardzo skomplikowane przekroje, np.

złożone z kilku profili walcowanych. Wykonanie małych modeli takich prętów jest zwykle w warunkach laboratoryjnych niemożliwe, dokładność wykonawstwa musi ponadto budzić wątpliwości.

Tym bardziej rzadko wystąpi możliwość zapewnienia równoczesnego podobieństwa geometrycznego i mechanicznego, wymagających spełnienia oprócz warunków (4.1) także warunku (4.2) w postaci

$$\frac{e}{g} = 1 = \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_m}, \quad \text{czyli} \quad \nu_0 = \nu_m.$$

Ostatni warunek jest wręcz niemożliwy do spełnienia w modelach małych przy obecnie stosowanych materiałach konstrukcyjnych.

Przedstawione trudności skłaniają przy wymiarowaniu małych modeli do rezygnacji z pełnego podobieństwa geometrycznego i mechanicznego modelu i obiektu oraz powodują konieczność ujęcia zagadnienia odpowiedniości modelowej w oparciu o inne zasady.

4.2. Idea przekroju zastępczego. Możliwe jest ukształtowanie przekroju modelu z pominięciem pełnego podobieństwa geometrycznego i mechanicznego [1], [2], [3], [4]. W przedstawionej pracy zakłada się, że badany cienkościenny układ prętowy składa się z jednowymiarowych elementów, będących osiami ścinania prętów. Kształt i wymiary przekroju prętów reprezentują jego geometryczne i wycinkowe charakterystyki: A , k_z , k_y , I_y , I_z , I_ρ , I_ω . Warunki podobieństwa geometrycznego obejmują zatem tylko osiowy zarys konstrukcji. Podobieństwo wymienionych charakterystyk przekroju winny zapewnić warunki podobieństwa kinematycznego i dynamicznego, a więc podobieństwa przesunięć, kątów obrotu, deplanacji, sił, momentów sił pracy i energii. Dla cienkościennego układu prętowego obciążonego statycznie, w którym pomiarom podlegają wyłącznie przemieszczenia i to układu już odkształconego pod ciężarem własnym, konieczne i wystarczające warunki podobieństwa modelu i obiektu przedstawia układ równań (3.2). Dalsze rozważania dotyczą bisymetrycznego przekroju otwartego, w którym środek masy przekroju pokrywa się ze środkiem ścinania.

Wskutek takiego ujęcia zagadnienia odpowiedniości modelowej nie zachodzi konieczność wiernego modelowania złożonego kształtu poprzecznego przekroju obiektu. Przekroje prętów modelu mogą być ukształtowane dowolnie, zgodnie z praktycznymi możliwościami i poziomem wykonawstwa laboratoryjnego. Dowolność kształtu przekroju zastępczego jest jednak ograniczona w tym sensie, że musi to być przekrój cienkościenny, gdyż związki matematyczne będące podstawą niniejszej pracy opisują zjawiska zachodzące w prętach cienkościennych. Dalszą zaletą proponowanego sposobu jest możliwość wyrównania błędu wynikającego z niespełnienia warunku podobieństwa mechanicznego (4.2).

Podane założenia stanowią podstawę sposobu *przekrojów zastępczych* wymiarowania modeli. Przed przystąpieniem do wymiarowania przyjmuje się podziałkę długości prętów n , kształt przekroju poprzecznego oraz materiał konstrukcyjny, z którego model ma być wykonany. Podziałkę n przyjmuje się w zależności od żądanego gabarytu modelu. Kształt przekroju zastępczego winien spełniać postulat «prostoty», polegający na wprowadzeniu możliwie najmniejszej liczby elementów składowych przekroju zastępczego. Postulat prostoty ułatwia wykonawstwo modelu, umożliwia uzyskanie niezbędnej dokładności

i żądanej tolerancji oraz — w przypadku przeprowadzania badań metodą przemieszczeń wymuszonych [3] — stosowanie uniwersalnych deformatorów.

W dalszym ciągu należy określić funkcje $A_m, k_{zm}, k_{ym}, I_{ym}, I_{zm}, I_{vm}, I_{\omega m}$ zależne od parametrów przyjętego przekroju zastępczego. Przy wyznaczaniu funkcji I_{ym} i I_{zm} dla przekroju cienkościennego jest dopuszczalne pominięcie, jako małych wyższego rzędu — składników $\frac{b\delta^3}{12}$, w których b jest szerokością, a δ grubością elementów składowych. Moment bezwładności I_{vm} dla przekrojów złożonych z wąskich prostokątów należy obliczać z wzoru

$$I_{vm} = \frac{1}{3} \sum b_i \delta_i^3.$$

Z układu równań (3.2) podlegają wyznaczeniu parametry wybranego zastępczego przekroju modelu, których funkcjami są podziałki $a, i_y, i_z, i_v, i_\omega$ oraz wskaźniki przekroju k_{zm} i k_{ym} . W ogólnym przypadku obciążenia pręta i równoczesnym wystąpieniu w dowolnym przekroju wszystkich uogólnionych sił wewnętrznych, podanych na rys. 1, możliwe jest wyznaczenie co najwyżej sześciu parametrów przekroju, które winny spełniać siedem funkcji. Zadanie to może nie mieć rozwiązania lub też uzyskane rozwiązanie może nie mieć praktycznego zastosowania.

Co więcej dwie z nich, związane z wpływem wewnętrznych sił poprzecznych, można sprowadzić do postaci

$$(4.3) \quad \frac{k_{z0}}{k_{zm}} = \frac{k_{y0}}{k_{ym}} = \frac{g}{e} = \frac{1 + \nu_0}{1 + \nu_m}$$

wykluczającej w ogólnym przypadku obciążenia pręta i wprowadzeniu przekroju zastępczego możliwość ścisłego modelowania wpływu sił poprzecznych.

Wpływ sił poprzecznych jest jednak bardzo mały w porównaniu z wpływami pozostałych sił wewnętrznych. W rachunkowej analizie cienkościennych układów prętowych wpływ ten jest z reguły pomijany. Zagadnienie modelowania wpływu sił poprzecznych w układach prętowych o przekroju zwartym rozważał obszernie DĄBROWSKI [1] i KOLENDOWICZ [4]. Wnioski ich prac pozostają słuszne także dla prętów cienkościennych, gdyż i w tym przypadku odkształcenia związane ze zginaniem podlegają prawu płaskich przekrojów. Pominięcie wpływu sił poprzecznych powoduje redukcję liczby warunków podobieństwa modelu i obiektu i umożliwia wymiarowanie przekroju modelu w oparciu o układ równań

$$(4.4) \quad \frac{1}{ea} = \frac{n^2}{ei_y} = \frac{n^2}{ei_z} = \frac{n^2}{gi_v} = \frac{n^4}{ei_\omega}.$$

Ograniczenie liczby parametrów przekroju do czterech zezwala na przyjęcie nieskomplikowanego przekroju zastępczego składającego się z trzech elementów. Fakt ten ma praktyczne znaczenie w technologii budowy modeli.

Gdy układ prętowy jest obciążony zewnętrznymi siłami skupionymi lub momentami działającymi mimoosiowo względem osi ścinania pręta, należy warunkiem podobieństwa geometrycznego objąć także współrzędne punktów zaczepienia tych uogólnionych sił

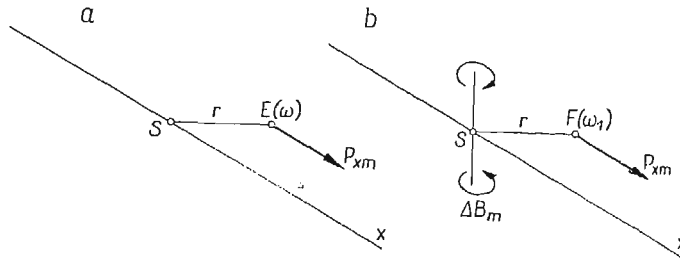
skupionych. Realizacja tego postulatu nie następuje trudności w przypadku obciążenia pręta zewnętrznymi siłami poprzecznymi. Wystarczy gdy ramię r uogólnionej siły zewnętrznej spełni warunek

$$(4.5) \quad r_0 = nr_m.$$

Inaczej jest gdy obiekt jest obciążony zewnętrzną siłą podłużną P_{x_0} działającą w odległości r_0 od osi ścinania pręta — na punkt o współrzędnej wycinkowej $\omega_0 \neq 0$ (rys. 2a). Powoduje ona ściskanie (lub rozciąganie) pręta, zginanie momentem $M_0 = P_{x_0}r_0$ oraz skręcanie bimomentem $B_0 = P_{x_0}\omega_0$ (rys. 2b). W tym przypadku oprócz warunku (4.5) należy także spełnić warunek podobieństwa współrzędnych wycinkowych w postaci

$$(4.6) \quad \omega_0 = n^2\omega_m,$$

czyli w modelu przyłożyć siłę P_{x_m} w punkcie o współrzędnych r_m i ω_m , spełniających wymienione dwa warunki.



Rys. 2.

4.3. Bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy. Postulat «prostoty» spełnia w optymalny sposób bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy przedstawiony na rys. 3. Wskaźniki przekroju zależne od jego parametrów są następujące

$$(4.7) \quad \begin{aligned} A_m &= h\delta + 2b\delta_1, \\ I_{ym} &= \frac{\delta h^3}{12} + \frac{\delta_1 b H^2}{2}, \\ I_{zm} &= \frac{\delta_1 b^3}{6}, \\ I_{\omega m} &= \frac{1}{3}(\delta^3 h + 2\delta_1^3 b), \\ I_{\omega m} &= \frac{\delta_1 b^3 H^2}{24}. \end{aligned}$$

Układ równań (3.2), przy pominięciu wpływu sił poprzecznych (4.4), przyjmuje postać

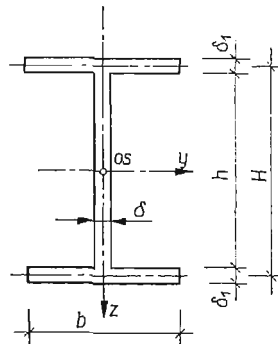
$$(4.8) \quad \frac{1}{A_0} \left(\frac{h}{b} \frac{\delta}{\delta_1} + 2 \right) = \frac{n^2}{12I_{y_0}} H^2 \left(\frac{\delta}{\delta_1} \frac{h}{b} \frac{h^2}{H^2} + 6 \right) = \\ = \frac{n^2}{6I_{z_0}} b^2 = \frac{n^4}{24I_{\omega_0}} b^2 H^2 = \frac{e}{g} \frac{n^2}{3I_{\nu_0}} \delta_1^2 \left(\frac{\delta^3}{\delta_1^3} \frac{h}{b} + 2 \right),$$

skąd podlegają wyznaczeniu nieznanne parametry przekroju zastępczego. Po wprowadzeniu bezwymiarowych parametrów $m = H/b$, $t = \delta/\delta_1$, $q = \delta_1/b$ i przyjęciu dla przekroju cienkościennego w pierwszym przybliżeniu $H = h$ układ równań (4.8) przyjmuje postać

$$(4.9) \quad \frac{1}{A_0} (tm+2) = \frac{n^2}{12I_{y0}} H^2 (tm+6) = \frac{n^2}{6I_{z0}} b^2 = \\ = \frac{n^4}{24I_{\omega 0}} b^2 H^2 = \frac{e}{g} \frac{n^2}{3I_{y0}} q^2 b^2 (t^3 m + 2),$$

skąd

$$H = \frac{2}{n} \sqrt{\frac{I_{\omega 0}}{I_{z0}}}, \\ m = \frac{H}{b} = \sqrt{\frac{I_{y0}}{2I_{z0}} - \frac{A_0 I_{\omega 0}}{6I_{z0}^2}}, \\ t = \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{2I_{y0}}{I_{z0} m^3} - \frac{6}{m}, \\ q = \frac{\delta_1}{b} = \sqrt{\frac{g}{e} \frac{I_{y0}}{2I_{z0}} \frac{1}{t^3 m + 2}}.$$



Rys. 3.

Wynika stąd, że w najbardziej ogólnym przypadku obciążenia obiektu istnieje rozwiązanie rzeczywiste, gdy wskaźniki przekroju obiektu spełniają nierówność

$$(4.10) \quad 1 < \frac{A_0 I_0}{I_{y0} I_{z0}} < 3.$$

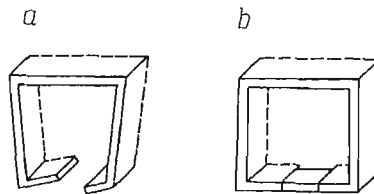
5. Podobieństwo węzłów modelu i obiektu rzeczywistego

Zagadnienie podobieństwa węzłów obiektu i modelu jako oddzielny problem występuje w przypadku modelowania cienkościennych przekrojów pręta w oparciu o warunki (3.2), przy pominięciu warunków podobieństwa cech geometrycznych i sprężystych modelu i obiektu. Zakłócenia stanu naprężenia i stanu odkształcenia spowodowane w węzle

uogólnionymi siłami wewnętrznymi N , Q_y , Q_z , M_y , M_z , i M_v obejmują w myśl zasady Saint Venanta o lokalności skutków lokalnych przyczyn, wyłącznie węzeł i niewielkie obszary zbiegających się w nim prętów, nie mają natomiast wpływu na pracę prętów i konstrukcji z nich wykonanych. Mogą więc nie być brane pod uwagę przy wymiarowaniu modelu.

Inaczej jest w przypadku działania na węzeł cienkościenny bimomentów, powodujących jego deplanację. Bimoment jest bowiem samorzównoważonym układem naprężeń, którego wielkość w dużym stopniu zależy od cech geometrycznych i sprężystych ciała. W węźle ulega on częściowemu stłumieniu, zasada Saint Venanta przyjmuje dla wpływów bimomentu inny ilościowy i jakościowy charakter. Efekt brzegowy przedstawiony zrównoważonym bimomentem zanika powoli i przenika daleko w głąb pręta. Zagadnienie podobieństwa węzłów ma w takim razie istotny udział w formułowaniu warunków podobieństwa obiektu i modelu.

W praktyce ukształtowanie węzła może być bardzo różnorodne, w zależności od liczby i rodzaju prętów łączonych w danym węźle oraz od ich wzajemnego usytuowania. Często stosuje się różnego rodzaju blachy węzłowe, zebra usztywniające, przewiązki i nakładki w różny sposób w węźle rozmieszczone. Niekiedy także nie są spełnione wymogi statyczne stawiane węzłom w mechanice budowli układów cienkościennych. Osie ścinania prętów



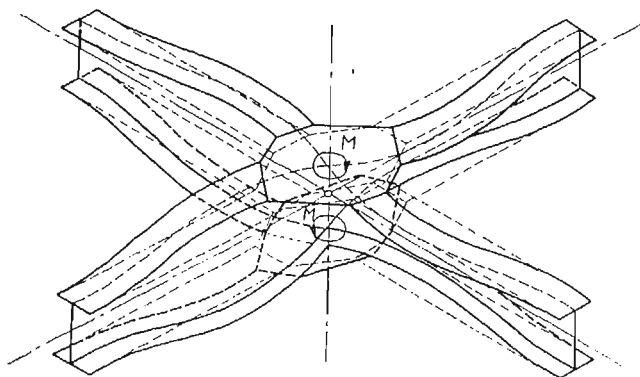
Rys. 4.

zbiegających się w danym węźle na przykład nie przecinają się w jednym punkcie, także osie ciężkości prętów mogą nie przechodzić przez jeden punkt. Przykładem takiej konstrukcji jest stalowy ruszt mostowy, w którym podłużnice i poprzecznice wykonane z profili o różnej wysokości umieszczone są w ten sposób, że górne stopki dźwigarów znajdują się w jednej płaszczyźnie, natomiast osie ścinania i osie ciężkości w płaszczyznach równoległych tak, że nie przecinają się w węzłach.

Zazwyczaj jednak węzły obiektu spełniają pewne wymogi konstrukcyjne, umożliwiające sformułowanie warunków brzegowych [7]. W ramach przestrzennych z prętów cienkościennych o otwartych, symetrycznych profilach dąży się do uniemożliwienia paczenia się węzłów. W tym celu stosuje się odpowiednie usztywnienie przekroju przy użyciu zebra (rys. 4). Warunek ten może być także w modelu z łatwością spełniony.

Dla węzłów płaskich, w których zbiegają się pręty cienkościenne o przekroju zbliżonym do dwuteowego lub ceowego, połączone wzajemnie półkami, przyjmuje się w mechanice cienkościennych układów prętowych założenie jednakowej deplanacji końców wszystkich prętów w tym węźle. Założenie to realizuje się przez umieszczenie w płaszczyznach górnych i dolnych półek s z t y w n y c h nakładek, przekazujących obrót każdej

półki na półki pozostałych prętów (rys. 5). Węzeł stanowią wówczas dwie sztywne nakładki, które przy deplanacji węzła ulegają w swych płaszczyznach obrotom w kierunkach wzajemnie przeciwnych. Środkiem węzła jest punkt przecięcia się osi ścinania prętów. Przypadek ten może być łatwo zrealizowany na modelu przez wbudowanie analogicznych nakładek węzłowych.



Rys. 5.

W węźle sprężystym część bimomentu jest przejmowana przez węzeł. Może on być traktowany jako krótki pręt o długości H (rys. 6a) skręcany momentami $M = B/H$ przyłożonymi do blach węzłowych. Uważając za RUTECKIM [7] ten przypadek za przypadek czystego skręcania kąt skręcenia blach węzłowych może być obliczony z wzoru

$$(5.1) \quad \varphi = \frac{MH}{GI_v},$$

w którym występujący moment bezwładności czystego skręcania może być obliczony z wzorów:

$$(5.2) \quad I_v = \frac{1}{3} \sum s \delta^3$$

— gdy przekrój węzła składa się z wąskich i długich prostokątów (rys. 6b);

$$(5.3) \quad I_v = \frac{\Omega^2 \delta_1}{s_1}$$

— gdy ścianki i przepony prętów schodzących się w węźle przedstawiają kontur zamknięty (rys. 6c);

$$(5.4) \quad I_v = \frac{\Omega^2 \delta_1}{s_1} + \frac{1}{3} \sum s \delta^3$$

— gdy ścianki i przepony schodzących się w węźle prętów przedstawiają zamknięty profil z występami (rys. 6d). W powyższych wzorach oznaczają: s szerokość (w zarysie blach węzłowych), δ i δ_1 grubości oddzielnych przekrojów odpowiednio konturu otwartego i zamkniętego; Ω — podwójne pole konturu zamkniętego; $s_1 = s \delta_1 / \delta$.

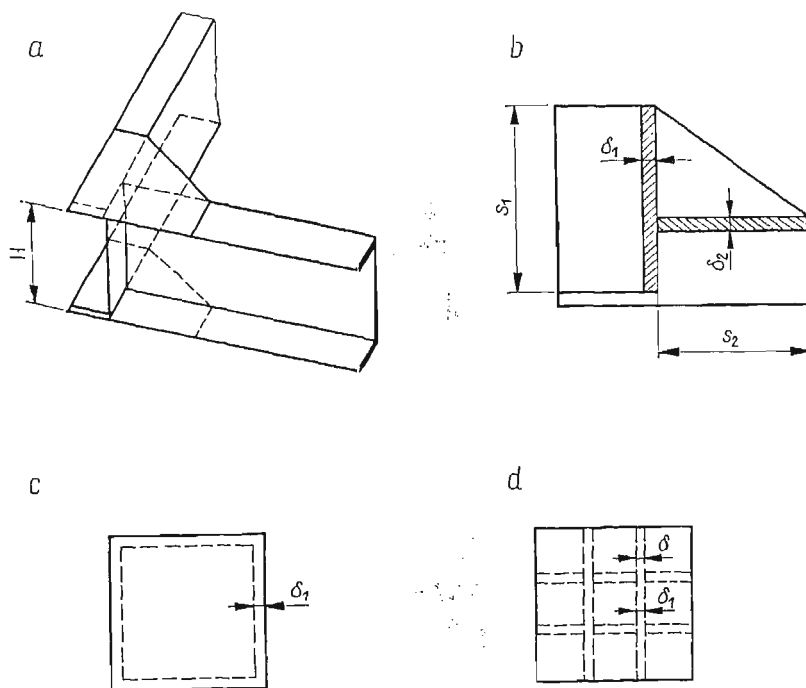
Skalę kątów obrotu przekrojów obiektu i modelu określa zależność (3.1)

$$\frac{j}{n} = \frac{fn^2}{gi_v}$$

Stosunek kątów skręcenia węzła obiektu i modelu zgodnie z (5.1) i przyjętymi oznaczeniami wynosi

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_m} = \frac{M_0}{M_m} \frac{H_0}{H_m} \frac{G_m}{G_0} \frac{I_{vmw}}{I_{vow}} = \frac{fn}{gi_{vw}} \frac{H_0}{H_m}$$

Indeksem w oznaczono momenty bezwładności przekroju węzła.



Rys. 6.

Podziałki kątów skręcenia węzłów i prętów winny być identyczne, zatem

$$\frac{fn^2}{gi_v} = \frac{fn}{gi_{vw}} \frac{H_0}{H_m}$$

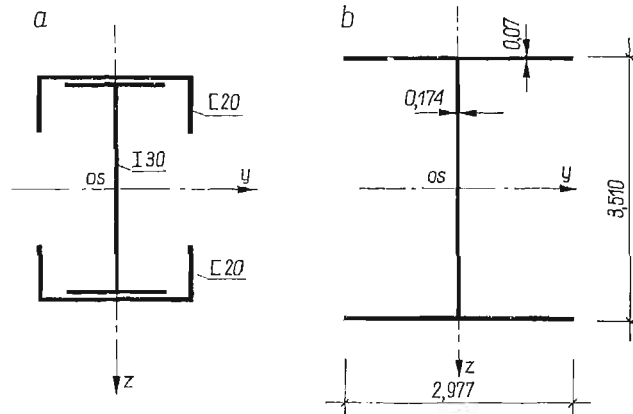
oraz

$$(5.5) \quad i_{vw} = \frac{H_0}{nH_m} i_v$$

Zależność (5.5) określa warunek podobieństwa płaskich węzłów sprężystych.

6. Przykłady

6.1. **Przykład 1.** Przekrój pręta obiektu, złożony z profili walcowanych, podano na rys. 7a. Obiekt jest wykonany ze stali, dla której współczynnik zwięźnienia poprzecznego wynosi 0,3. Przekrój posiada następującą geometryczną i wycinkową charakterystykę: $A_0 = 103,5 \text{ cm}^2$; $I_{z_0} = 4271 \text{ cm}^4$; $I_{y_0} = 22456 \text{ cm}^4$; $I_{v_0} = 86 \text{ cm}^4$; $I_{w_0} = 1318600 \text{ cm}^6$.



Rys. 7.

Model ma być sporządzony w skali 1:10 z celuloиду o współczynniku zwięźnienia poprzecznego $\nu_m = 0,42$. Zatem

$$\frac{g}{e} = \frac{1 + \nu_m}{1 + \nu_0} = \frac{1,42}{1,30} = 1,0923.$$

Dla modelu przyjęto bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy, podany na rys. 3. Ponieważ

$$\frac{A_0 I_{w_0}}{I_{y_0} I_{z_0}} = \frac{103,5 \cdot 1318600}{22456 \cdot 4271} = 1,495 > 1,$$

to przyjęcie wybranego przekroju zastępczego jest możliwe. Jego wymiary obliczono z wzorów (4.9)

$$H = \frac{2}{10} \sqrt{\frac{1318600}{4271}} = 3,51 \text{ cm},$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{22456}{2} - \frac{103,5 \cdot 1318600}{6 \cdot 4271} \right) \frac{1}{4271}} = 1,179,$$

$$b = \frac{3,51}{1,179} = 2,977 \text{ cm},$$

$$t = \frac{2 \cdot 22456}{4271 \cdot 1,179^3} - \frac{6}{1,179} = 2,44,$$

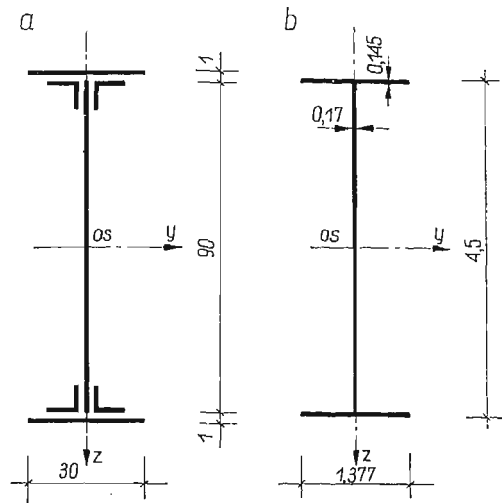
$$q = \sqrt{\frac{86}{2 \cdot 4271} \cdot 1,0923 \cdot \frac{1}{2,44^3 \cdot 1,179 + 2}} = 0,02395,$$

$$\delta_1 = 0,02395 \cdot 2,977 = 0,0713 \text{ cm},$$

$$\delta = 2,44 \cdot 0,0713 = 0,174 \text{ cm}.$$

Zaprojektowany przekrój zastępczy modelu podano na rys. 7b.

6.2. Przykład 2. Obiekt jest nitowaną belką blaszaną o przekroju podanym na rys. 8a. Wymiary w mm elementów przekroju są następujące: środnik 900×10 ; pasy 300×10 ; kątowniki równoramienne $100 \times 100 \times 10$ ($\nu_0 = 0,3$). Dla przekroju obiektu obliczono: $A_0 = 229,8 \text{ cm}^2$; $I_{y_0} = 322\,271 \text{ cm}^4$; $I_{z_0} = 6\,125 \text{ cm}^4$; $I_{y_0 z_0} = 910 \text{ cm}^4$; $I_{\omega_0} = 12\,410\,000 \text{ cm}^6$.



Rys. 8.

Model należy sporządzić z celuloиду ($\nu_0 = 0,42$) w skali $1 : 20$. Przyjęto bisymetryczny dwuteowy przekrój zastępczy (rys. 3), sprawdzono warunek (4.10)

$$\frac{2298 \cdot 12410000}{322271 \cdot 6125} = 1,413 > 1$$

oraz za pomocą wzorów (4.9) obliczono wymiary przekroju zastępczego

$$H = \frac{2}{20} \sqrt{\frac{12\,410\,000}{6\,125}} = 4,5 \text{ cm},$$

$$m = \sqrt{\left(\frac{322\,271}{2} - \frac{226,8 \cdot 12\,410\,000}{6 \cdot 6125} \right) \frac{1}{6125}} = 3,27,$$

$$b = \frac{4,5}{3,27} = 1,377 \text{ cm},$$

$$t = \frac{2 \cdot 322\,271}{6125 \cdot 3,27^3} - \frac{6}{3,27} = 1,175,$$

$$q = \sqrt{\frac{910 \cdot 1,0923}{2 \cdot 6125 \cdot (1,175^3 \cdot 3,27 + 2)}} = 0,1053,$$

$$\delta = 0,1053 \cdot 1,377 = 0,145 \text{ cm},$$

$$\delta_1 = 1,175 \cdot 0,145 = 0,1704 \text{ cm}.$$

Zaprojektowany przekrój zastępczy przedstawiono na rys. 8b.

Literatura cytowana w tekście

1. O. DĄBROWSKI, *Odpowiedniość modelowa dla ram przestrzennych*, Referaty I Sesji Naukowej Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1958.
2. M. JANUSZ, *Teoria badań modelowych ustrojów statycznie niewyznaczalnych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, nr 43, Wrocław 1952.
3. M. JOKIEL, *Statyka modelowa cienkościennych układów prętowych* (praca doktorska), Wrocław 1965.
4. T. KOLENDOWICZ, *Statyka modelowa układów prętowych przestrzennych*, Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego, Seria B, nr 115, Wrocław 1964.
5. И. В. УРБАН, *Теория расчёта стержневых тонкостенных конструкций*, Трансжелдориздат, Москва 1955.
6. В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Физматгиз, 1959.
7. J. RUTECKI, *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*, PWN, Warszawa 1957.

Резюме

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ БИСИММЕТРИЧЕСКОГО ОТКРЫТОГО СЕЧЕНИЯ

В работе даются условия подобия для простого призматического тонкостенного стержня произвольного открытого сечения, и принципы подбора размеров для небольших моделей построенных из такого рода стержней. Предполагается, что тонкостенные стержни подвержены несвободному кручению и что их сечения депланируются. Учитывается влияние биомоментов и изгибающе-крутящих моментов.

Критерий подобия выводится из подобия энергий уругой деформации [уравнения (2.3), (4.2)]. В главе 4 предложен метод сечений-заменителей не обладающих геометрическим подобием по отношению сечениям объекта. Упругие характеристики модели и объекта могут также различаться для тех случаев, когда влияние поперечных сил не учитывается. Вопрос подобия узлов рассмотрен в главе 5. Предложенный метод иллюстрируется с помощью числовых примеров (гл 6).

Summary

MODEL CORRESPONDENCE CRITERIA FOR THIN-WALLED RODS OF BI-SYMMETRIC OPEN CROSS-SECTION

In the paper the conditions of model correspondence for a straight prismatic thin-walled bar of arbitrary open cross-section are given, as well as the rules of designing the smallscale models for systems consisting of such bars. The thin-walled bars are subject to constrained torsion, their cross-sections undergoing deplanation. The influence of bimoments and torsionflexure couples (Fig. 1) is taken into consideration.

The model correspondence criterion is derived from the similarity of the elastic strain energy expressions, Eqs. (2.3), (4.2). In Sec. 4 the method of «reduced cross-sections», geometrically different from the original, is proposed. Elastic characteristics of the object and the model can also be different provided the influence of transversal forces is neglected. The problem of similarity of joints is discussed in Sec. 5. Numerical examples (Sec. 6) illustrate the method proposed in the paper.

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 maja 1970 r.

DYNAMIKA SZTYWNEJ PŁYTY SPOCZYWAJĄCEJ NA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM
PODŁOŻU ZE ZMIENNĄ GRANICĄ PLASTYCZNOŚCI. CZĘŚĆ I. SZTYWNE ODCIĄŻENIE

JERZY BAUER, EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Problem propagacji jednowymiarowych fal naprężenia w stałych ośrodkach niejednorodnych był przedmiotem badań wielu autorów. Dość obszerny przegląd literatury z tej dziedziny podany jest w [1]. W pracach tych rozwiązywano zagadnienia graniczne dla warunków brzegowych danych w naprężeniach (odkształceniach) i prędkościach (przemieszczeniach). Brak jest jednak rozwiązań podobnych problemów dla mieszanych warunków brzegowych wyrażonych za pomocą równań różniczkowych (np. obciążenie zewnętrzne przyłożone na masę skupioną leżąca na niejednorodnym ośrodku), generujących fale słabej nieciągłości. Ten rodzaj warunków brzegowych jest często spotykany w praktyce inżynierskiej, szczególnie w problemach fortyfikacyjnych.

W niniejszej pracy zbadamy dynamikę nieodkształcalnej płyty, spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu (gruncie) ze zmienną granicą plastyczności.

Praca ta jest kontynuacją publikacji [2], [3], w których zbadano analogiczny problem dla ośrodka jednorodnego. Uzyskane tam wyniki stanowią tło porównawcze dla zbadania wpływu niejednorodności ośrodka (zmiennej granicy plastyczności) na dynamikę płyty.

Praca składa się z dwóch części. W pierwszej części rozwiązujemy problem dla ośrodka ze sztywnym odcieżeniem, natomiast w drugiej skonstruujemy rozwiązanie dla ośrodka z liniowo-sprężystym odcieżeniem i zbadamy jego wpływ na dynamikę płyty.

2. Sformułowanie problemu

Zbadamy ruch następującego układu. Na sprężysto-plastycznym niejednorodnym gruncie wypełniającym dolną półprzestrzeń, spoczywa nieodkształcalna, nieograniczona płyta o jednostkowej masie m (masa odniesiona do jednostki powierzchni). Płyta obciążona jest równomiernie rozłożonym ciśnieniem nagle przyłożonym i następnie malejącym do zera. Tego typu schemat obciążenia może być modelowym przedstawieniem obiektu znajdującego się pod działaniem powietrznej fali uderzeniowej w bliskim otoczeniu epicentrum wybuchu ładunku jądowego.

Fizyko-mechaniczne własności gruntu aproksymujemy modelem Prandtla ze zmienną (monotonicznie rosnącą) wraz z głębokością granicą plastyczności. Przyjmujemy, że na

gałęzi odciążenia odkształcenie nie ulega zmianie — sztywne odciążenie. Do matematycznego opisu użyjemy współrzędnej Lagrange'a, przy czym dodatnią półoś Ox kierujemy w głąb ośrodka.

Sformułowany wyżej problem wraz z przyjętymi założeniami w języku matematycznym przyjmuje następującą postać:

równanie równowagi

$$(2.1) \quad \rho_0 v_{,t} = \sigma_{,x};$$

związki geometryczne

$$(2.2) \quad v = u_{,t}; \quad \varepsilon = u_{,x};$$

związki fizyczne

a) w strefie obciążenia

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma(\varepsilon) &= E_0 \varepsilon, & \text{dla } |\sigma(\varepsilon)| &\leq \sigma_s^0 + f(x), \\ \sigma(\varepsilon, x) &= E_1 \varepsilon + [\sigma_s^0 + f(x)] \frac{E_1 - E_0}{E_0}, & \text{dla } |\sigma(\varepsilon, x)| &> \sigma_s^0 + f(x); \end{aligned}$$

b) w strefie odciążenia

$$(2.4) \quad \varepsilon(x, t) = \varepsilon(x);$$

warunki początkowe

$$(2.5) \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0;$$

warunek brzegowy

$$(2.6) \quad \sigma(0, t) = m v_{,t}(0, t) - p(t),$$

gdzie $p(t)$ jest ciśnieniem zewnętrznym obciążającym płytę, natomiast funkcja $f(x)$ charakteryzuje zmianę granicy plastyczności gruntu. O funkcji tej zakładamy, że:

$$(2.7) \quad f(0) = 0, \quad f'_{(x)} \geq 0, \quad \sigma_s(x) = -\sigma_s^0 - f(x).$$

Wymienione wyżej równanie, związki geometryczne i fizyczne oraz warunki graniczne jednoznacznie określają dany problem.

3. Konstrukcja rozwiązania problemu

Przy założeniach sformułowanych w poprzednim paragrafie obraz falowy rozwiązania przyjmuje jedną z postaci pokazanych na rys. 1. Analityczne rozwiązanie problemu kształtuje się następująco.

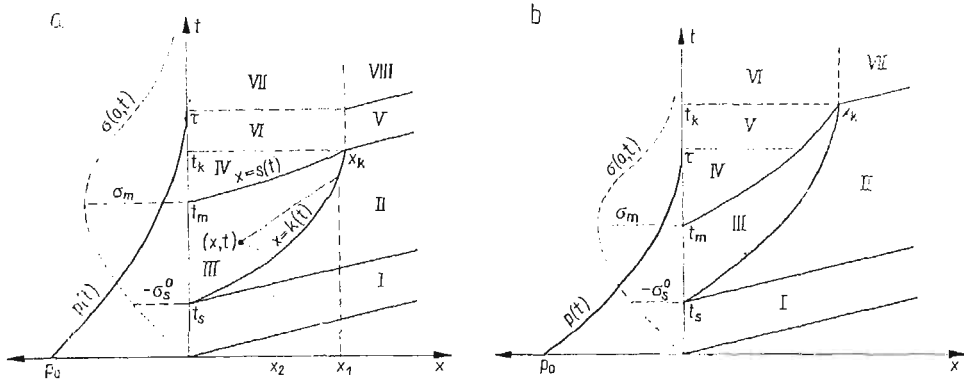
Strefa obciążenia (obszary I, II i III). W strefie obciążenia zgodnie z (2.1), (2.2) i (2.3) ruchem ośrodka rządzą następujące równania:

$$(3.1) \quad u_{,tt} - a_0^2 u_{,xx} = 0 \quad (\text{obszary I i II}),$$

$$(3.2) \quad u_{,tt} - a_1^2 u_{,xx} = \frac{E_1 - E_0}{\rho_0 E_0} f'(x) \quad (\text{obszar III}),$$

gdzie $a_0 = \sqrt{E_0/\rho_0}$, $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_0}$.

W dalszym ciągu rozważań parametry należące do danego obszaru będziemy oznaczać dolnym indeksem liczbowym zgodnym z numerem danego obszaru.



Rys. 1

Ogólne rozwiązania równań (3.1) i (3.2) mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \Phi_1 \left(t - \frac{x}{a_0} \right) + \Psi_1 \left(t + \frac{x}{a_0} \right), \\
 u_2 &= \Phi_2 \left(t - \frac{x}{a_0} \right) + \Psi_2 \left(t + \frac{x}{a_0} \right), \\
 u_3 &= \Phi_3 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \Psi_3 \left(t + \frac{x}{a_1} \right) - \frac{E_1 - E_0}{E_0 E_1} \int_0^x f(\xi) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Z jednorodnych warunków początkowych (2.5) wynika, że

$$\Psi_1 \left(t + \frac{x}{a_0} \right) = \Psi_2 \left(t + \frac{x}{a_0} \right) \equiv 0.
 \tag{3.4}$$

Fizycznie oznacza to, że w obszarach I i II brak jest zaburzeń wędrujących w ujemnym kierunku osi x .

Na podstawie (2.2), (2.3) i (3.3) oraz (3.4) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -\frac{E_0}{a_0} \Phi_1' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \quad \sigma_2 = -\frac{E_0}{a_0} \Phi_2' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \\
 \sigma_3 &= -\frac{E_1}{a_1} \Phi_3' \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \frac{E_1}{a_1} \Psi_3' \left(t + \frac{x}{a_1} \right) + \sigma_s^0 \frac{E_1 - E_0}{E_0}, \\
 v_1 &= \Phi_1' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \quad v_2 = \Phi_2' \left(t - \frac{x}{a_0} \right), \\
 v_3 &= \Phi_3' \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + \Psi_3' \left(t + \frac{x}{a_1} \right),
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

gdzie Φ' i Ψ' oznaczają pochodne funkcji Φ i Ψ względem argumentów.

Pozostałe parametry ruchu ośrodka, tj. przyspieszenie w i przemieszczenie u otrzymujemy dokonując odpowiednio operacji różniczkowania i całkowania pola prędkości względem czasu. Mając to na uwadze w dalszym ciągu będziemy podawać tylko wzory na naprężenia i prędkości.

Podstawiając (3.5)₁ i (3.5)₄ do (2.6) oraz całkując otrzymane równanie różniczkowe dostajemy jawną postać funkcji Φ_1 , a stąd wyrażenia na pole naprężeń i prędkości

$$(3.6) \quad \sigma_1(x, t) = -h_0 e^{-h_0 \left(t - \frac{x}{a_0}\right)} \int_0^{t - \frac{x}{a_0}} p(\xi) e^{h_0 \xi} d\xi,$$

$$v_1(x, t) = -\frac{1}{\rho_0 a_0} \sigma_1(x, t), \quad h_0 = \frac{E_0}{m a_0} = \frac{\rho_0 a_0}{m}.$$

Obszary II i III są rozdzielone frontem plastycznej fali obciążenia $x = k(t)$ (rys. 1). Na froncie tym następuje odbicie i załamanie plastycznych fal naprężenia wywołane niejednorodnością ośrodka. Aby rozwiązać problem w obszarach II i III należy określić następujące funkcje: Φ'_2 , Φ'_3 i Ψ'_3 oraz front fali plastycznej $x = k(t)$.

Wykorzystując warunki ciągłości pola naprężeń i prędkości na granicy obszarów II i III, wartość naprężenia równą granicy plastyczności na krzywej $x = k(t)$ oraz warunek brzegowy (2.6), otrzymujemy następujący układ równań na wymienione wyżej funkcje:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \Phi'_2 \left[t - \frac{k(t)}{a_0} \right] &= \Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_1} \right] + \Psi' \left[t + \frac{k(t)}{a_1} \right], \\ -\frac{E_0}{a_0} \Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_0} \right] &= -\sigma_s^0 - f[k(t)], \\ -\frac{E_1}{a_1} \Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_1} \right] + \frac{E_1}{a_1} \Psi'_3 \left[t + \frac{k(t)}{a_1} \right] + \sigma_s^0 \frac{E_1 - E_0}{E_0} &= -\sigma_s^0 - f[k(t)], \\ -\frac{E_1}{a_1} \Phi'_3(t) + \frac{E_1}{a_1} \Psi'_3(t) + \sigma_s^0 \frac{E_1 - E_0}{E_0} &= m[\Phi''_3(t) + \Psi''_3(t)] - p(t). \end{aligned}$$

Z pierwszego i trzeciego równania po rozwikłaniu otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} -\Phi'_3 \left[t - \frac{k(t)}{a_1} \right] &= -\sigma_s^0 \frac{a_1 + a_0}{2E_0} + Lf[k(t)], \\ \Psi'_3 \left[t + \frac{k(t)}{a_1} \right] &= \sigma_s^0 \frac{a_0 - a_1}{2E_0} + Nf[k(t)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.9) \quad L = -\frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{E_0} + \frac{a_1}{E_1} \right), \quad N = \frac{1}{2} \left(\frac{a_0}{E_0} - \frac{a_1}{E_1} \right).$$

Załóżmy chwilowo, że znamy funkcję $x = k(t)$. Wówczas wartości funkcji Φ'_3 i Ψ'_3 w dowolnym punkcie (x, t) obszaru III wyrażą się następującymi wzorami:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} -\Phi'_3 \left(t - \frac{x}{a_1} \right) &= -\sigma_s^0 \frac{a_1 + a_0}{2E_0} + Lf(x_1), \\ \Psi'_3 \left(t + \frac{x}{a_1} \right) &= \sigma_s^0 \frac{a_0 - a_1}{2E_0} + Nf(x_2), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.11) \quad x_1 = k \left(t + \frac{x_1 - x}{a_1} \right), \quad x_2 = k \left(t - \frac{x_2 - x}{a_1} \right).$$

Wielkości x_1 i x_2 są odcięzami punktów przecięcia się charakterystyk odpowiednio dodatniej i ujemnej z frontem fali $x = k(t)$, przechodzących przez wspólny punkt (x, t) , położony wewnątrz obszaru III (rys. 1a). Stosowane w dalszym ciągu rozważań oznaczenia $x_1(x, t)$ i $x_2(x, t)$ należy rozumieć jako rozwiązania równań (3.11).

Analityczne rozwiązanie problemu wewnątrz obszarów II i III po wykorzystaniu (3.10), (3.7)₂ i (3.5) kształtuje się następująco:

$$(3.12) \quad \sigma_2(x, t) = -\sigma_s^0 - f[k(t_1)], \quad v_2(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 + \frac{a_0}{E_0} f[k(t_1)]$$

oraz

$$(3.13) \quad \sigma_3(x, t) = -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2), \quad v_3(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2),$$

gdzie

$$(3.14) \quad t_1 = t - \frac{x - k(t_1)}{a_0}.$$

Wróćmy obecnie do określenia frontu plastycznej fali obciążenia $x = k(t)$. Żądając spełnienia przez wyrażenia (3.13) warunku brzegowego (2.6) na granicy obszaru III, otrzymamy

$$(3.15) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) = \\ = m \left[-L \frac{a_1 k'(t + x_1/a_1)}{a_1 - k'(t + x_1/a_1)} f'(x_1) + N \frac{a_1 k'(t - x_2/a_1)}{a_1 + k'(t - x_2/a_1)} f'(x_2) \right] - p(t),$$

gdzie obecnie

$$(3.16) \quad x_1 = k \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right), \quad x_2 = k \left(t - \frac{x_2}{a_1} \right).$$

Równanie powyższe obowiązuje dla czasów $t_s \leq t \leq t_m$ (patrz rys. 1a). Jest to nieliniowe równanie różniczkowe z przesuniętym argumentem. Analizę tego równania i konstrukcją rozwiązania zajmijemy się w rozdziale 4. Obecnie przejdziemy do strefy odciążenia.

Strefa odciążenia. W strefie sztywnego odciążenia mamy $v(x, t) \approx v(t)$ i wobec tego z równania równowagi (2.1) po scałkowaniu względem x i wykorzystaniu warunku brzegowego (2.6) otrzymujemy

$$(3.17) \quad \sigma(x, t) = (\rho_0 x + m)v'(t) - p(t).$$

Front fali odciążenia $x = s(t)$ w rozpatrywanych warunkach granicznych jest frontem słabej nieciągłości. Mając to na uwadze wprowadzamy do (3.17), przy $x = s(t)$, pole

naprężeń i prędkości z obszaru III wyrażone wzorami (3.13). W konsekwencji otrzymujemy następujące równanie na front fali odciążenia $x = s(t)$

$$(3.18) \quad -\sigma_s^0 + f(x_1) \frac{E_1}{a_1} L + f(x_2) \frac{E_1}{a_1} N = [\varrho_0 s(t) + m] \left\{ -Lf'(x_1) \frac{k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right] [a_1 - s'(t)]}{a_1 - k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]} + \right. \\ \left. + Nf'(x_2) \frac{k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right] [a_1 + s'(t)]}{a_1 + k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]} \right\} - p(t),$$

gdzie

$$(3.19) \quad x_1 = k \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right], \quad x_2 = k \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right].$$

Równanie powyższe całkujemy numerycznie w przykładzie liczbowym za pomocą metody Runge-Kutta.

Przejdziemy obecnie do określenia pól naprężeń i prędkości w poszczególnych obszarach strefy odciążenia. Rozpatrzmy dwa możliwe układy obszarów na płaszczyźnie fazowej x, t (patrz rys. 1a, b).

Przypadek I — $t_K < \tau$ (rys. 1a).

O b s z a r I V:

Na podstawie (3.17) i (3.13) otrzymujemy

$$(3.20) \quad \sigma_4(x, t) = (\varrho_0 x + m) [-Lf'(x_1) \dot{x}_1 + Nf'(x_2) \dot{x}_2] - p(t), \\ v_4(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2),$$

gdzie x_1 i x_2 określają wzory (3.19), natomiast ich pochodne przyjmują postać

$$(3.21) \quad \dot{x}_1 = \frac{k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]}{a_1 - k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]} [a_1 - s'(t)], \\ \dot{x}_2 = \frac{k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]}{a_1 + k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]} [a_1 + s'(t)].$$

O b s z a r V:

$$(3.22) \quad \sigma_5(x, t) = -[\sigma_s^0 + f(x_K)] e^{-h_1 \left(t - t_K - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} - h_1 e^{-h_1 \left(t - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} \int_{t_K}^{t - \frac{x - x_K}{a_0}} p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi,$$

$$v_5(x, t) = -\frac{a_0}{E_0} \sigma_5(x, t), \quad h_1 = \frac{E_0}{a_0(m + \varrho_0 x_K)},$$

gdzie x_K i t_K są współrzędnymi końca fali odciążenia (rys. 1). Określamy je z przecięcia się frontu plastycznej fali obciążenia z falą odciążenia.

Obszar VI:

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \sigma_6(x, t) &= \frac{m + \varrho_0 x}{m + \varrho_0 x_K} [\sigma_s(x_K, t) + p(t)] - p(t), \\ v_6(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_s(x, t). \end{aligned}$$

Obszar VII:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \sigma_7(x, t) &= \frac{m + \varrho_0 x}{m + \varrho_0 x_K} \left\{ -[\sigma_s^0 + f(x_K)] e^{-h_1(t-t_K)} - h_1 e^{-h_1 t} \int_{t_K}^t p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi \right\}, \\ v_7(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_7(x_K, t). \end{aligned}$$

Obszar VIII:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \sigma_8(x, t) &= -[\sigma_s^0 + f(x_K)] e^{-h_1 \left(t - t_K - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} - h_1 e^{-h_1 \left(t - \frac{x - x_K}{a_0} \right)} \int_{t_K}^t p(\xi) e^{h_1 \xi} d\xi, \\ v_8(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_8(x, t). \end{aligned}$$

Przypadek II — $t_K > \tau$ (rys. 1b). W tym wariancie rozwiązanie w obszarze IV pokrywa się z rozwiązaniem w obszarze IV poprzedniego przypadku. W pozostałych obszarach otrzymujemy

Obszar V:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \sigma_5(x, t) &= (\varrho_0 x + m) [-Lf'(x_1) \dot{x}_1 + Nf'(x_2) \dot{x}_2], \\ v_5(x, t) &= \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2). \end{aligned}$$

Obszar VI:

$$(3.27) \quad \begin{aligned} \sigma_6(x, t) &= \frac{m + \varrho_0 x}{m + \varrho_0 x_K} [-\sigma_s^0 - f(x_K)] e^{-h_1(t-t_K)}, \\ v_6(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_6(x, t). \end{aligned}$$

Obszar VII:

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \sigma_7(x, t) &= [-\sigma_s^0 - f(x_K)] e^{-h_1 \left(t - t_K - \frac{x - x_K}{a_0} \right)}, \\ v_7(x, t) &= -\frac{a_0}{E_0} \sigma_7(x, t). \end{aligned}$$

4. Analiza frontów fal obciążenia i odciążenia

W pierwszej kolejności zbadamy front plastycznej fali obciążenia. Front tej fali zaczyna propagować się od płyty w głąb osrodka w chwili $t = t_s$, dla której naprężenie pod płytą osiąga wartość $\sigma = -\sigma_s^0$.

Równanie (3.15), po uwzględnieniu faktu, że dla $t = t_s$ zachodzi $x_1 = x_2 = 0$ i $f(0) = 0$, redukuje się do równania kwadratowego, po rozwiązaniu którego otrzymujemy zamknięty wzór na początkową prędkość fali o postaci

$$(4.1) \quad c_s = k'(t_s) = a_1 \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \left(\frac{a_0}{a_1} + A \right) A}}{2 \left(\frac{a_0}{a_1} + A \right)},$$

gdzie

$$A = \frac{[p(t_s) - \sigma_s^0] E_0}{m f''(0) a_0 a_1}.$$

Warunkiem istnienia frontu plastycznej fali obciążenia w badanym przypadku niejednorodności jest $k'(t_s) > 0$. Ze wzoru (4.1) wynika, że warunek ten będzie spełniony gdy

$$(4.2) \quad p(t_s) - \sigma_s^0 > 0.$$

Dla $p(t_s) - \sigma_s^0 < 0$ w ośrodku pod płytą wytwarza się tylko sprężysty stan odkształcenia.

Poza tym z (4.1) wynika, że początkowa prędkość propagacji plastycznej fali obciążenia może zmieniać się w przedziale $0 \leq c_s \leq a_1$.

Przejdziemy obecnie do konstrukcji rozwiązania równania frontu fali (3.15). Jest to nieliniowe równanie różniczkowe z przesuniętym argumentem typu neutralnego. Dla skonstruowania rozwiązania tego równania, początkowy (dostatecznie mały) odcinek frontu fali aproksymujemy odcinkiem stycznej do tegoż frontu o współczynniku kierunkowym wyliczonym z wzoru (4.1). Odcinek ten ma postać

$$(4.3) \quad k(t) = c_s(t - t_s), \quad t_s \leq t \leq t_s + \Delta t.$$

Dalej na podstawie (3.11) i (4.3) otrzymujemy

$$(4.4) \quad x_2 = \frac{c_s a_1}{a_1 + c_s} (t - t_s).$$

Podstawiając z kolei (4.3) i (4.4) do równania frontu fali (3.15), otrzymamy

$$\frac{d}{dt} f(x_1) + l f(x_1) = Q(t),$$

a stąd

$$(4.5) \quad f(x_1) = e^{-l(t-t_s)} \int_{t_s}^t Q(\xi) e^{l(\xi-t_s)} d\xi,$$

gdzie

$$(4.6) \quad Q(t) = \frac{\sigma_s^0 - p(t)}{mL} - \frac{E_1 N}{m a_1 L} f \left[\frac{a_1 c_s}{a_1 + c_s} (t - t_s) \right] + \frac{N}{L} \frac{d}{dt} f \left[\frac{a_1 c_s}{a_1 + c_s} (t - t_s) \right],$$

$$l = \frac{E_1}{a_1 m}.$$

Mając znaną postać funkcji $f(x_1)$ z równania (4.5) możemy określić dla poszczególnych chwil czasu wartość nieznanego argumentu $x_1(t)$, który zgodnie z (3.16) w przedziale $t_s \leq t \leq t_s + \Delta t - x_1/a_1$ poprawia założony początkowo liniowy odcinek frontu fali, natomiast dla $t > t_s + \Delta t - x_1/a_1$ określa kolejny odcinek frontu fali potrzebny do realizowania następnego kroku obliczeń. Dalej proces obliczeń powtarza się.

Przejdziemy obecnie do analizy frontu fali sztywnego odciążenia. W pierwszej kolejności zbadamy zachowanie się frontu fali w otoczeniu punktu «startowego» $(0, t_m)$. Czas t_m jest chwilą, w której naprężenie pod płytą osiąga maksymalną wartość (w sensie wartości bezwzględnej). Określamy go z równania

$$(4.7) \quad \sigma_{3,t}(0, t_m) = 0.$$

Równość ta, po wykorzystaniu (3.13)₁ przyjmuje postać

$$(4.8) \quad Lf'_{(x_1)}\dot{x}_1 + Nf'_{(x_2)}\dot{x}_2 = 0.$$

Różniczkując z kolei równanie frontu fali $x = k(t)$ i uwzględniając (4.8) dla $t = t_m$ otrzymamy

$$(4.9) \quad m[-Lf''_{(x_1)}(\dot{x}_1)^2 - Lf'_{(x_1)}\ddot{x}_1 + Nf''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + Nf'_{(x_2)}\ddot{x}_2] - p'(t_m) = 0.$$

Poza tym równanie (3.15) można zapisać w następującej skróconej formie

$$(4.10) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) + mLf'_{(x_1)}\dot{x}_1 - mNf'_{(x_2)}\dot{x}_2 + p(t_m) = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned} x_1 &= k\left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right), & x_2 &= k\left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right), \\ \dot{x}_1 &= \frac{a_1 k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}{a_1 - k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}, & \dot{x}_2 &= \frac{a_1 k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}{a_1 + k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy trzy tożsamości, które wykorzystamy przy badaniu frontu fali odciążenia.

Z równania (3.18), po rozwikłaniu względem $s'(t)$, otrzymujemy

$$(4.11) \quad s'(t) = a_1 \frac{W(s, t)}{G(s, t)},$$

gdzie

$$\begin{aligned} W(s, t) &= \frac{1}{\rho_0 s(t) + m} \left[-\sigma_s^0 + f(x_1) \frac{E_1}{a_1} L + f(x_2) \frac{E_1}{a_1} N + p(t) \right] + \\ &\quad + Lf'_{(x_1)}\dot{x}_1 - Nf'_{(x_2)}\dot{x}_2, \\ G(s, t) &= Lf'_{(x_1)}\dot{x}_1 + Nf'_{(x_2)}\dot{x}_2, \\ (4.12) \quad x_1 &= k \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right], & x_2 &= k \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right], \\ \dot{x}_1 &= \frac{a_1 k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]}{a_1 - k' \left[t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right]}, & \dot{x}_2 &= \frac{a_1 k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]}{a_1 + k' \left[t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right]}. \end{aligned}$$

Na podstawie tożsamości (4.8) i (4.10) wynika, że $W(0, t_m) = G(0, t_m) = 0$. Oznacza to, że równanie (4.11) posiada w punkcie $(0, t_m)$ izolowany punkt osobliwy. Zbadamy zachowanie się frontu fali w otoczeniu punktu osobliwego.

Zgodnie z metodą Frommera [4] równanie (4.11) zapiszemy w postaci

$$(4.13) \quad s'(t_m) = a_1 \frac{W_{,t} dt + W_{,s} ds}{G_{,t} dt + G_{,s} ds} = a_1 \frac{a + b \frac{ds}{dt}}{c + d \frac{ds}{dt}},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \begin{aligned} a &= W_{,t}|_{t=t_m, s=0} = 0, \\ b &= W_{,s}|_{t=t_m, s=0} = -2T_1, \\ c &= G_{,t}|_{t=t_m, s=0} = 2T_1, \\ d &= G_{,s}|_{t=t_m, s=0} = 2T_2, \\ T_1 &= \frac{m}{2a_1} [Lf''_{(x_1)}(\dot{x}_1)^2 + Lf'_{(x_1)}\ddot{x}_1 + Nf''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + Nf'_{(x_2)}\ddot{x}_2], \\ T_2 &= \frac{m}{2a_1} [-Lf''_{(x_1)}(\dot{x}_1)^2 - Lf'_{(x_1)}\ddot{x}_1 + Nf''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + Nf'_{(x_2)}\ddot{x}_2]. \end{aligned}$$

Kładąc w (4.13) $ds/dt = s'(t_m)$ otrzymamy wzór na początkową prędkość frontu fali odciążenia

$$(4.15) \quad c_0 = s'(t_m) = 2a_1 \left[1 - 2mN \frac{f''_{(x_2)}(\dot{x}_2)^2 + f'_{(x_2)}\ddot{x}_2}{p'(t_m)} \right].$$

W szczególnym przypadku dla ośrodka jednorodnego mamy

$$(4.16) \quad c_0 = 2a_1.$$

W ten sposób określiliśmy współczynnik stycznej do krzywej całkowej w punkcie osobliwym $(0, t_m)$. Powstaje pytanie, czy tylko jedna krzywa całkowa przechodzi przez ten punkt, czy też pęk krzywych o wspólnej stycznej, wyżej określonej. Na to pytanie znajdziemy odpowiedź badając rodzaj punktu osobliwego. Zgodnie z metodą Frommera [4], o rodzaju punktu osobliwego decydują pierwiastki λ_1 i λ_2 równania charakterystycznego

$$(4.17) \quad \lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0.$$

Dla wartości współczynników a, b, c i d określonych wzorami (4.14), równanie (4.17) ma dwa pierwiastki rzeczywiste o następujących wartościach:

$$(4.18) \quad \lambda_1 = 2T_1, \quad \lambda_2 = -2T_1.$$

Zatem punkt osobliwy jest punktem siodłowym i przechodzą przez niego dwie krzywe całkowe. Krzywa całkowa o stycznej $s'_0(t_m) = 0$ nie spełnia warunków ciągłości w otoczeniu punktu $(0, t_m)$ i została wyłączona z rozważań. W ten sposób udowodniliśmy jednoznaczność badanego problemu. Krzywą $s(t)$ określamy z równania (4.11) rozwiązując go metodą Runge-Kutta.

5. Przykład liczbowy

Na podstawie wyprowadzonych w poprzednich paragrafach wzorów przeprowadzono ilościową analizę ruchu płyty nagle obciążonej przyłożonym ciśnieniem zmieniającym się w czasie wg prawa

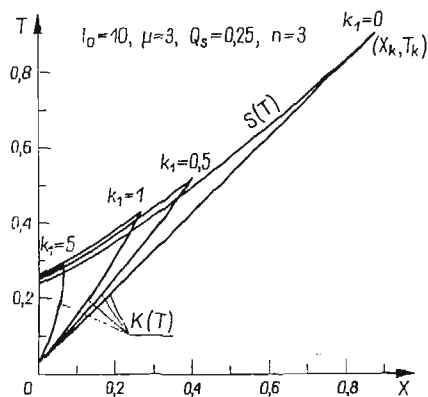
$$(5.1) \quad p(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n,$$

przy liniowej zmianie granicy plastyczności ośrodka

$$(5.2) \quad f(x) = Ax.$$

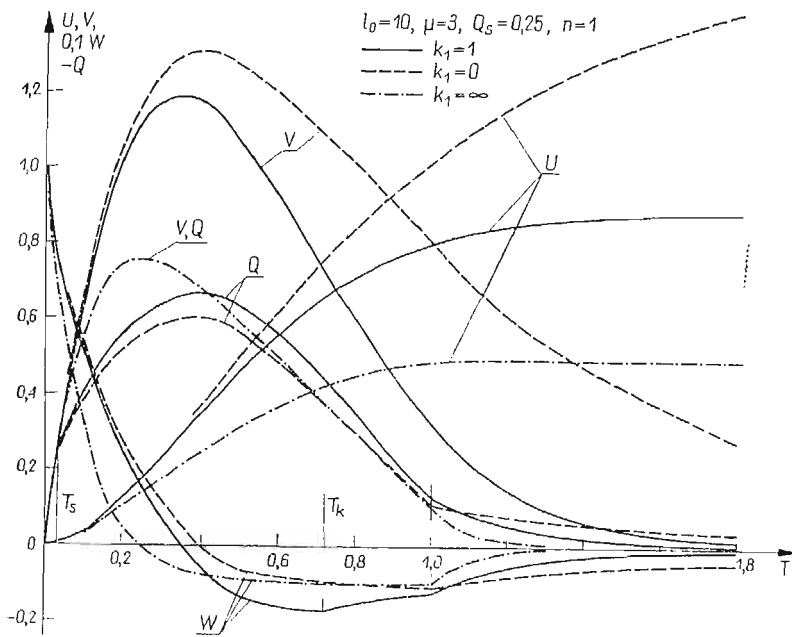
Dla wykonania obliczeń numerycznych wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} T &= \frac{t}{\tau}, & X &= \frac{x}{a_1 \tau}, & P(T) &= \frac{p(t)}{p_0}, & Q &= \frac{\sigma}{p_0}, \\ U &= \frac{\rho_0 a_0}{p_0 \tau} u, & V &= \frac{\rho_0 a_0}{p_0} v, & W &= \frac{\rho_0 a_0 \tau}{p_0} w, \\ K(T) &= \frac{k(t)}{a_1 \tau}, & S(T) &= \frac{s(t)}{a_1 \tau}, & F(X) &= \frac{f(x)}{p_0}, \\ K'(T) &= \frac{k'(t)}{a_1}, & S'(T) &= \frac{s'(t)}{a_1}, & F'(X) &= \frac{f'(x)}{p_0} a_1 \tau, \\ \mu &= \frac{a_0}{a_1}, & k_1 &= \frac{A a_1 \tau}{p_0}, & k_0 &= \frac{\rho_0 a_1 \tau}{m}, \\ k_2 &= \frac{mA}{\rho_0 p_0}, & L_0 &= \frac{\rho_0 a_0 \tau}{m}, & L_1 &= \frac{\mu l_0}{\mu + l_0 X_k}. \end{aligned}$$

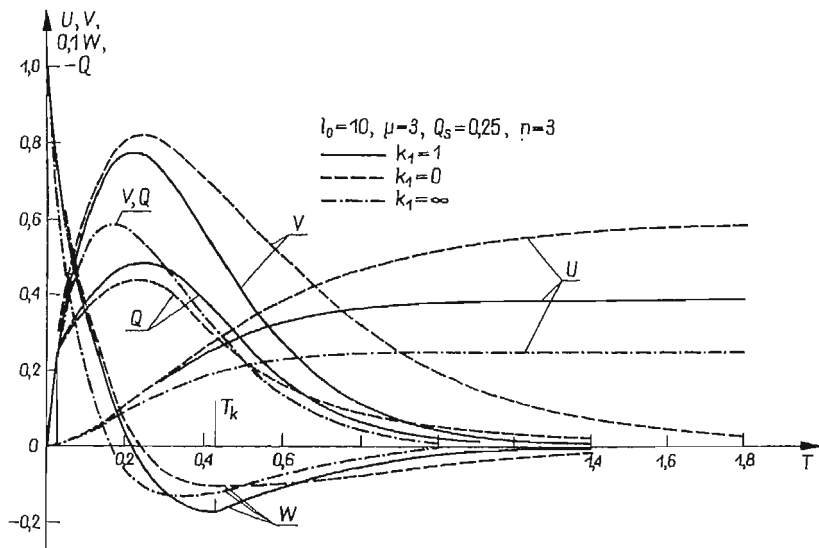


Rys. 2.

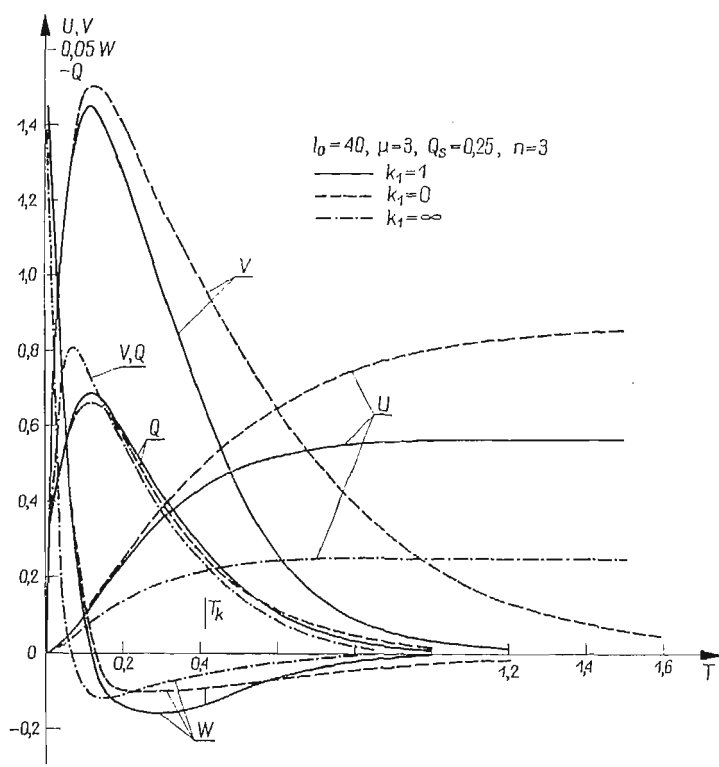
Wyniki obliczeń liczbowych wykonanych na EMC zamieszczamy w postaci graficznej na rys. 2-4.



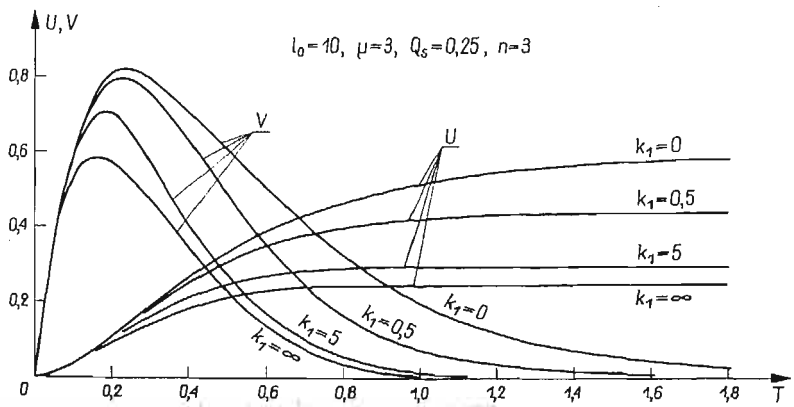
Rys. 3a



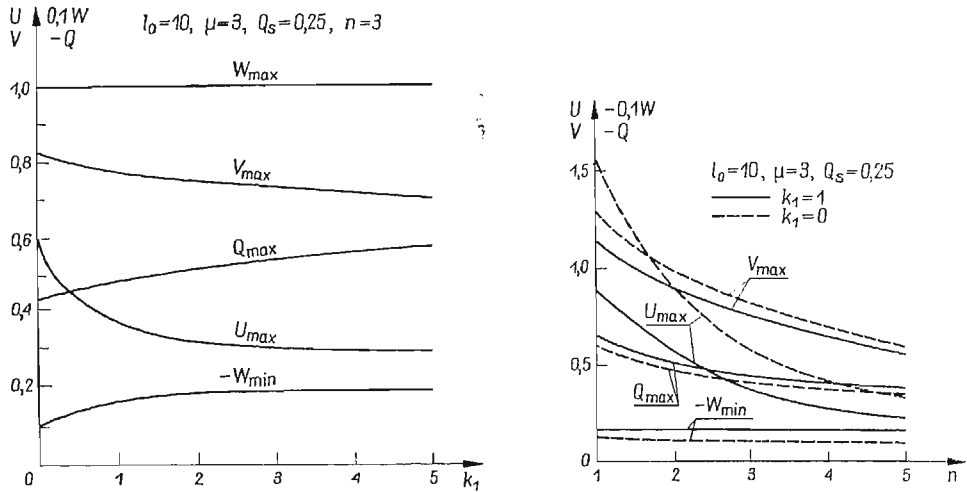
Rys. 3b



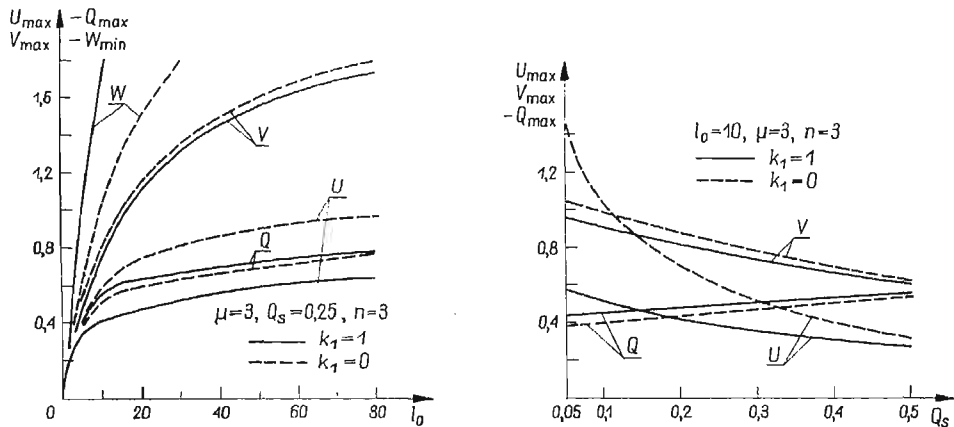
Rys. 3c



Rys. 3d



Rys. 4a, b



Rys. 4c, d

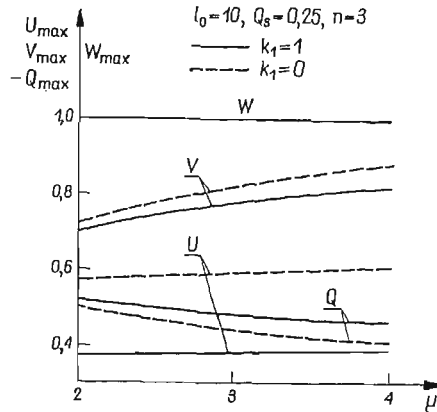
Dla obciążenia przyjętego w postaci (5.1) ruch płyty i stan naprężenia w ośrodku pod płytą zależy od pięciu parametrów: l_0 , μ , Q_s , n i k_1 . Charakter wpływu tych parametrów obrazują zamieszczone wykresy.

Na rys. 2 pokazujemy fronty fal plastycznych $K(T)$ i fronty fal sztywnego odciążenia $S(T)$ dla kilku wartości współczynnika k_1 , który jest odpowiedzialny za zmianę granicy plastyczności ośrodka.

Jak należało oczekiwać, ze wzrostem gradientu wzrostu granicy plastyczności (k_1) intensywnie maleje głębokość przenikania strefy odkształceń plastycznych. Proces ten przebiega nieliniowo. Taki rodzaj przebiegu zjawiska wynika z okoliczności, że wraz z powiększeniem gradientu wzrostu granicy plastyczności maleją nadwyżki ciśnienia

powodujące uplastycznienie ośrodka. W konsekwencji maleje strefa odkształceń plastycznych.

Na rysunkach 3a–d zamieszczone są przebiegi zmian w czasie bezwymiarowych współczynników przemieszczenia płyty U , prędkości V , przyspieszenia W i naprężenia pod płytą Q dla kilku wielkości współczynnika k_1 . Charakter zmian w czasie wymienionych parametrów jest podobny, jak dla ośrodka jednorodnego $k_1 = 0$ [2], z tym, że wielkości U i V wraz ze wzrostem k_1 — maleją, a wartość Q_{\max} rośnie. Dla realnych wielkości współczynnika k_1 (np. $k_1 = 5$) różnice dochodzą do kilkudziesięciu procent. Fakt ten ma



Rys. 4c

istotne znaczenie w praktyce inżynierskiej. Malenie wielkości U i V oraz wzrost Q_{\max} jest wynikiem oddziaływania fal odbitych od niejednorodności, które działają hamująco na ruch płyty i spiętrzają naprężenia pod nią.

Na rysunkach 4a–e pokazano zmiany maksymalnych wartości poszczególnych współczynników w funkcji parametrów l_0 , μ , Q_s , n i k_1 . Jako tło porównawcze zamieszczono również wyniki dla ośrodka jednorodnego. Z zamieszczonych wykresów wynika, że szczególnie wrażliwe na niejednorodność ośrodka jest przemieszczenie płyty. Różnice dochodzą tutaj nawet do 100%.

Reasumując należy stwierdzić, że zaniedbywanie w dynamicznych obliczeniach obiektów fortyfikacyjnych (często spotykane w literaturze technicznej) wpływu niejednorodności ośrodka może prowadzić w niektórych przypadkach do poważnych błędów.

Literatura cytowana w tekście

1. E. WŁODARCZYK, *Rozprzestrzenianie się i odbicie jedno i dwuwymiarowych fal naprężenia w ośrodkach plastycznych*, Dodatek do Biul. WAT, 2 (198) (1969). (Rozprawa habilitacyjna).
2. E. WŁODARCZYK, *Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu*, Biul. WAT, 4 (188), (1968).
3. E. WŁODARCZYK, *Wpływ liniowo-sprężystego odciążenia na parametry ruchu sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie*, Biul. WAT, 7 (203) (1969).
4. W. W. СТЕПАНОВ, *Równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1956.

Р е з ю м е

ДИНАМИКА ЖЕСТКОЙ ПЛИТЫ НАХОДЯЩЕЙСЯ НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ. ЧАСТЬ I.

В работе исследованы параметры движения жесткой плиты находящейся на упруго-пластическом основании с переменным пределом пластичности. Исследования проведены для жесткой разгрузки. Плита нагружена равномерно распределенным давлением, приложенным внезапно, а затем монотонно убывающем к нулю. При таких условиях, при соответственно подобранной нагрузке, плита генерирует в основании пластические волны нагрузки, за которыми следует процесс разгрузки. Для фронтов пластической волны нагрузки и волны разгрузки получены нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения со сдвинутыми аргументами содержащими искомые функции (фронты волн). Эти уравнения решены на электронной вычислительной математической машине. Выведены замкнутые формулы для начальных скоростей распространения пластической волны и волны разгрузки. Численно исследована зависимость параметров движения плиты и реакции передаваемой ею на основание от неоднородности предела пластичности основания.

S u m m a r y

DYNAMICS OF A RIGID PLATE RESTING ON ELASTIC-PLASTIC NONHOMOGENEOUS MEDIUM. PART I.

In the paper the parameters of motion of a rigid plate resting on elastic-plastic medium with varying plastic yield limit was investigated. The investigations were carried out for rigid unloading. The plate was loaded with uniformly distributed pressure which at first was suddenly applied and next was allowed to decrease monotonically up to the zero value. Under these conditions and for the respectively chosen load the plate generates in the medium the plastic loading waves, which are followed by unloading process. For the fronts of plastic loading and unloading waves the usual nonlinear differential equations with shifted arguments containing the sought functions (wave fronts) were obtained. The equations were solved with the help of a digital computer. The closed formulae for initial velocities of propagation of plastic loading and unloading wave were derived. The motion parameters of the plate and its reaction transmitted to the medium depending on the nonhomogeneity of the plastic yield limit were numerically investigated.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 maja 1970 r.

BADANIE WPŁYWU ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO NA ZACHOWANIE SIĘ METALU PRZY RÓŻNYCH DROGACH WTÓRNEGO OBCIĄŻENIA

KAROL T U R S K I (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Badania własności plastycznych materiałów w złożonym stanie naprężenia stanowią obszerną grupę zagadnień. Ogólnym ich celem jest analiza wpływu rozmaitych czynników na powierzchnię plastyczności. Jednakże większość prac z tej dziedziny poświęcona jest określeniu zmian powierzchni plastyczności na skutek danej historii obciążenia lub wielkości odkształcenia. W wyniku takich doświadczeń ustalono, że powierzchnia plastyczności w stosunku do formy początkowej może doznawać przesunięcia, obrotu, zmiany średnicy oraz zmiany kształtu. Zauważono również, że wielkość zmian zależy nie tylko od historii obciążenia i wielkości odkształcenia, ale także od przyjętej definicji granicy plastyczności. Szczegółowo było to dyskutowane w pracach [6, 12, 18, 24, 25, 28]. Z przeprowadzonej dyskusji oraz z opublikowanych tam danych doświadczalnych wynika, że im mniejsze odkształcenie trwałe dopuszcza definicja uplastycznienia, tym silniej zaznacza się skrócenie i przesunięcie powierzchni plastyczności. Może także pojawić się na niej naroże. Ze wzrostem odkształcenia plastycznego związanego z definicją uplastycznienia efekty te słabną, natomiast ogólny kształt krzywej plastyczności odbiega dość znacznie od elipsy.

Niezależnie od historii obciążenia, podstawowymi mechanizmami zmiany powierzchni plastyczności jest jej przesunięcie i zmiana średnicy [1, 4, 5, 6, 8, 10, 14, 15].

Czasami obserwowano tylko jedno z tych zjawisk [2], [17], jednakże w większości przypadków stwierdzono, że występują one jednocześnie. Jeżeli badania przeprowadza się przy proporcjonalnych drogach obciążenia i odciążenia, to powierzchnia plastyczności obejmuje początek układu lub, co najwyżej, może przezeń przechodzić. Natomiast przy nieproporcjonalnym obciążaniu stwierdzono [1, 25, 26, 28], że może ona wychodzić w kierunku obciążenia poza punkt zerowy.

W opisanych badaniach stosowano parę sposobów wyznaczenia powierzchni plastyczności. Jedna z typowych metod postępowania polega na tym, że odkształca się szereg próbek zgodnie z założonym programem obciążenia i następnie całkowicie odciąża. Poddając potem każdą z nich obciążeniom o różnej (ale stałej dla każdej próbki) proporcji naprężeń, określamy współrzędne punktów powierzchni plastyczności.

Badania własności plastycznych przeprowadzone w pracy [16] wykonane są w sposób odmienny od tradycyjnej procedury. Zasadę postępowania wyjaśnia rys. 1. Przyjmijmy, że szereg próbek obciążamy w różnych kierunkach α_1 do α_6 aż do naprężeń, których wielkość określona jest przez powierzchnię obciążeń wstępnych i następnie całkowicie odciążamy. Wskutek tego procesu materiał nabywa pewnej anizotropii, jeżeli więc obciążymy obecnie wszystkie próbki w jednym kierunku, np. σ_2 , to z wykresów $\sigma(\epsilon)$ otrzymamy szereg wartości granicy plastyczności, które zaznaczono punktami a, b, c, d, e, f . Odkładając wektory naprężenia, wyznaczone przez te punkty, na odpowiednich kierunkach wstępnych odkształceń i łącząc ich końce, otrzymujemy wykres, dla którego przyjęto nazwę *linia wpływu odkształcenia plastycznego*.

Z takiej reprezentacji własności plastycznych uzyskuje się inne informacje, niż z analizy powierzchni plastyczności. Powierzchnia plastyczności materiału odkształconego pokazuje wpływ odkształcenia wstępnego, przy jednym programie obciążenia, na granicę plastyczności przy różnych kombinacjach naprężeń. Natomiast linia wpływu odwrotnie, pokazuje wpływ odkształcenia wstępnego, przy różnych kombinacjach naprężeń, na granicę plastyczności w jednym ustalonym kierunku obciążenia.

Koncepcja budowy linii wpływu jest pomysłem nowym, inna praca na ten temat nie jest autorowi znana.

Jeden szczególny przypadek teoretycznej linii wpływu, otrzymany na gruncie hipotezy wzmocnienia kinematycznego, został zbadany doświadczalnie w pierwszej ćwiartce płaszczyzny naprężeń w pracy [16]. W pracy niniejszej dokonano uogólnienia linii wpływu na dziewięciowymiarową przestrzeń naprężeń i wprowadzono pojęcie powierzchni wpływu odkształcenia plastycznego.

W szczególnym przypadku płaskiego stanu naprężenia, powierzchnie wpływu wyznaczono dla trzech wariantów obciążenia:

1) proste rozciąganie,

2) obciążenie zbiornika ciśnieniowego $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2\right)$,

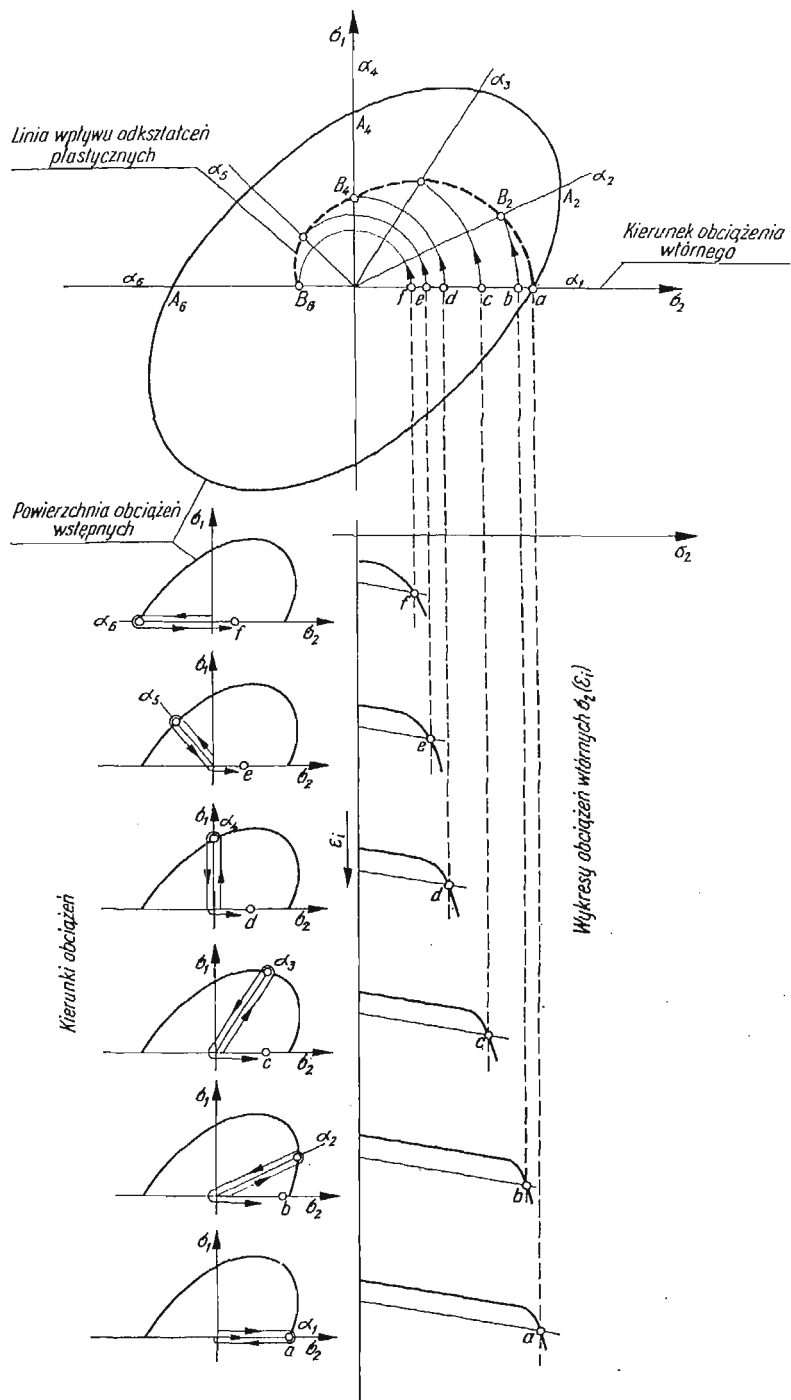
3) rozciąganie połączone ze ściskaniem ($\sigma_1 = -\sigma_2$).

Powierzchnie te wyznaczono w przypadku wzmocnienia kinematycznego, kinematyczno-izotropowego i izotropowego. Drugą z hipotez ograniczono do koncepcji podanej w pracach [23], [24] rozpatrując ją w odniesieniu do różnych wartości definicji granicy plastyczności.

Opisane na wstępie badania wykazały, że historia obciążenia może zmienić w istotny sposób powierzchnię plastyczności. Pamiętając o całej złożoności zjawiska, przy wyznaczaniu teoretycznych powierzchni wpływu uwzględniono tylko przemieszczanie i rozszerzanie powierzchni plastyczności, zaniedbując wszystkie inne efekty.

Aby zweryfikować doświadczalnie i teoretyczne powierzchnie wpływu, zbudowano przyrząd umożliwiający obciążanie próbek rurkowych w pierwszej i drugiej ćwiartce płaszczyzny naprężeń głównych. Można więc prowadzić badania przy kombinacji dwu naprężeń rozciągających oraz przy kombinacji naprężenia rozciągającego i ściskającego.

Weryfikację doświadczalną przeprowadzono dla trzech różnych wielkości obciążeń wstępnych, dobranych w sposób krytyczny z punktu widzenia rozpatrywanych hipotez wzmocnienia.



Rys. 1. Schemat budowy linii wpływu odkształcenia plastycznego

Już w pracy [16] podkreślano, że obok cech poznawczych, proponowany sposób przedstawienia własności materiału posiada też aspekt praktyczny, wskazując na możliwość ustalenia zakresu typu obróbki plastycznej na zimno dla uzyskania pożądanych własności tłoczonego detalu. Niniejsza praca potwierdza tę tezę w szerszym zakresie.

2. Powierzchnia wpływu odkształcenia plastycznego

2.1. Wstęp. Załóżmy, że mamy do czynienia z materiałem wykazującym dowolne wzmocnienie. Tensor naprężenia elementu tego materiału określony jest przez macierz $[\sigma_{ij}]$. Rodzina powierzchni plastyczności materiału wstępnie nieodkształconego opisywana jest w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń przez równanie

$$(2.1) \quad F(\sigma_{ij}) = k_0.$$

Jeżeli materiał dozna pewnego odkształcenia trwałego, jego powierzchnia plastyczności będzie opisywana bardziej złożonym związkiem

$$(2.2) \quad H(\sigma_{ij}, \lambda) = k(\lambda),$$

gdzie λ oznacza parametr charakteryzujący historię obciążenia.

Przyjmijmy obecnie dwa ograniczenia odnośnie obciążania:

a) zakładamy, że rozpatrujemy tylko proporcjonalne drogi obciążenia i odciążenia materiału,

b) materiał wstępnie nieodkształcony podlega obciążeniu w przestrzeni naprężeń, niezależnie od kierunku, do pewnej wartości naprężeń, która jest określona przez powierzchnię wypukłą i obejmującą początek układu współrzędnych. Powierzchnię tę nazywano dalej *powierzchnią obciążeń wstępnych*.

Oznaczmy przez A_k (rys. 1) punkt przecięcia drogi obciążenia z powierzchnią obciążeń wstępnych oraz przez $\nu_{ij}(A_k)$ kosinusy kierunkowe drogi obciążenia. Jeżeli poprowadzimy obciążenie wstępne do szeregu punktów A_k , to w przestrzeni naprężeń każdej z tych dróg obciążenia odpowiadać będzie inne położenie powierzchni plastyczności. Wynika stąd, że danej powierzchni obciążenia odpowiada określona rodzina powierzchni plastyczności.

Wyraźmy obecnie stan naprężenia każdego z punktów powierzchni plastyczności przez moduł naprężenia całkowitego oraz macierz kosinusów kierunkowych $[\nu_{ij}]$. Moduł r naprężenia całkowitego można obliczyć z iloczynu skalarnego tensora naprężenia:

$$(2.3) \quad r = (\sigma_{ij}\sigma_{ij})^{1/2}.$$

Przyjmijmy jako wielkość odniesienia jedno z naprężeń, które oznaczmy np. σ_a . Wprowadzając współczynniki

$$(2.4) \quad m_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_a},$$

równanie (2.3) przedstawić można jako

$$(2.5) \quad r = \sigma_a(m_{ij}m_{ij})^{1/2}.$$

W celu zmierzenia wartości r , materiał trzeba poddać powtórnie obciążeniu proporcjonalnemu. W takim przypadku współczynniki m_{ij} są oczywiście stałe wzdłuż drogi obciążenia i moduł naprężenia całkowitego r zależy tylko od wielkości naprężenia odniesienia σ_a . Jeżeli przyjmiemy jeden kierunek obciążenia wtórnego dla całej rodziny powierzchni plastyczności, to można oznaczyć

$$(2.6) \quad (m_{ij}m_{ij})^{1/2} = C.$$

Wobec tego moduł naprężenia całkowitego r dla danej powierzchni plastyczności będzie funkcją naprężenia σ_a , które zależy, w ramach danego prawa wzmocnienia, tylko od położenia punktu A_k , a więc na podstawie równania (2.5) oraz (2.6) można napisać

$$(2.7) \quad r = C\sigma_a(A_k).$$

Utwórzmy obecnie funkcję $r(A_k)$ w ten sposób, że odcinki równe r odkładamy na odpowiednich kierunkach obciążeń wstępnych $0-A_k$, oznaczając otrzymane w ten sposób punkty przez B_k (rys. 1). Zbiór punktów B_k wyznacza pewną powierzchnię, z której konstrukcji wynika, że opisuje ona wpływ zmiennego kierunku wstępnego odkształcenia plastycznego na granicę plastyczności przy danej kombinacji naprężeń. Przyjęto dla tej powierzchni nazwę *powierzchnia wpływu odkształcenia plastycznego*.

Z punktu widzenia doświadczalnej weryfikacji teorii plastyczności, szczególnie interesującym przypadkiem obciążenia jest płaski stan naprężenia. Przyjmijmy, że element materiału obciążony jest naprężeniami σ_{11} ; σ_{22} ; $\tau_{12} = \tau_{21}$; $\sigma_{33} = 0$; $\tau_{13} = \tau_{31} = \tau_{23} = \tau_{32} = 0$. Z równania (2.3) otrzymujemy moduł promienia r

$$(2.8) \quad r = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\tau_{12}^2)^{1/2}.$$

Z równania tego wynika, że współrzędnymi przestrzeni naprężeń muszą być σ_{11} ; σ_{22} ; $\sqrt{2}\epsilon_{12}$. Przy innym wyborze współrzędnych, np. σ_{11} ; τ_{12} [18], [22] lub σ_{11} ; $\sqrt{3}\tau_{12}$ [21], [25], [26], nie można wykonywać operacji wyznaczenia powierzchni wpływu na drodze geometrycznej, ponieważ wartość r nie będzie równa modułowi naprężenia całkowitego.

Dla danego programu obciążenia można określić powierzchnię wpływu na drodze teoretycznej o ile znane jest prawo wzmocnienia materiału. Zastosowano tu następujące trzy hipotezy:

1. Hipoteza wzmocnienia kinematycznego [11], [19], oparta na pojęciu idealnego efektu Bauschingera.
2. Hipoteza wzmocnienia izotropowego [17].
3. Hipoteza wzmocnienia kinematyczno-izotropowego [23], [24] uwzględniająca efekt Bauschingera zmierzony przy próbie prostego obciążenia.

W pracy niniejszej wyznaczono powierzchnie wpływu dla przypadku obciążenia przez dwa naprężenia $\sigma_{11} = \sigma_1$; $\sigma_{22} = \sigma_2$, ponieważ przy takim układzie przeprowadzana była weryfikacja doświadczalna. Wyrażenie (2.8) sprowadza się do

$$(2.9) \quad r = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2},$$

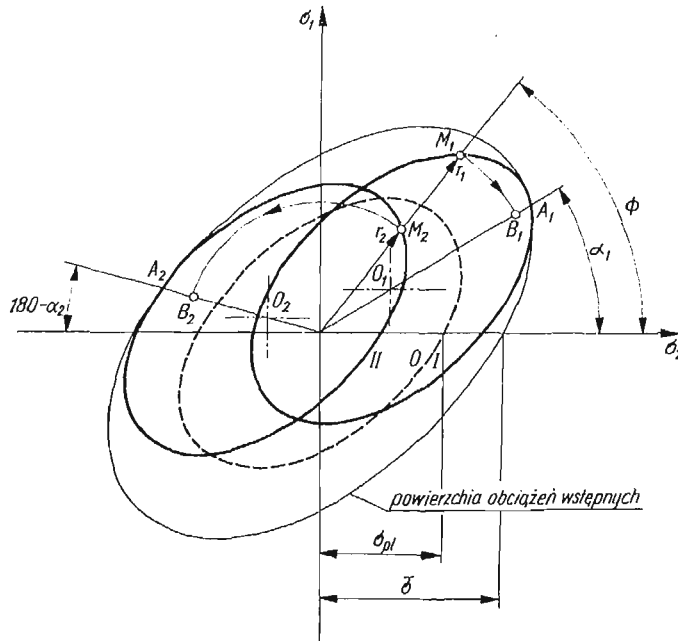
a więc powierzchnia wpływu redukuje się do linii na płaszczyźnie naprężeń głównych σ_1 ; σ_2 .

2.2. Wyznaczenie linii wpływu przy założeniu hipotezy wzmocnienia kinematycznego. Teoretyczne zasady budowy linii wpływu odkształcenia plastycznego, dla materiału izotropowego wykazującego idealny efekt Bauschingera, zostały podane w pracy [16]. Przyjmując regułę wzmocnienia kinematycznego Shielda i Zieglera [11] uzyskano równanie linii wpływu dla szczególnego przypadku prostego rozciągania.

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem równania linii wpływu przy tych samych założeniach, ale w przypadku badania granicy plastyczności w złożonym stanie naprężenia. Powierzchnia plastyczności materiału izotropowego określona jest przez równanie

$$(2.10) \quad \sigma_{pl}^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Przyjmijmy, że materiał ten podlega wstępnemu proporcjonalnemu obciążeniu aż do osiągnięcia stałej, niezależnej od kierunku obciążenia, wartości intensywności naprężeń



Rys. 2. Wyznaczenie linii wpływu odkształcenia plastycznego przy założeniu hipotezy wzmocnienia kinematycznego

O — wstępna powierzchnia plastyczności; I, II — powierzchnia plastyczności po obciążeniu do punktu A_1 oraz A_2 ; B_1, B_2 — punkty linii wpływu odkształcenia plastycznego

stycznych. Warunek ten określa powierzchnię obciążeń wstępnych, która na płaszczyźnie naprężeń głównych $\sigma_1; \sigma_2$ (rys. 2) jest elipsą o równaniu

$$(2.11) \quad \bar{\sigma}^2 = 3\sigma_i^2 = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2.$$

Zgodnie z regułą Shielda i Zieglera, początkowa powierzchnia plastyczności oznaczona O na rys. 2, przy proporcjonalnym obciążaniu np. w kierunku α_1 , doznaje przesunięcia wzdłuż tej drogi aż do zetknięcia z powierzchnią obciążeń. Położenie elipsy I określa nabyte własności plastyczne materiału. Badając następnie materiał w kierunku Φ otrzymujemy wartość granicy plastyczności oznaczoną r_1 . Odkładamy ją, jak pokazuje strzałka,

na kierunku α_1 otrzymując punkt B_1 . Powtarzając opisane czynności dla różnych kierunków α przy zachowaniu stałego kąta Φ , otrzymujemy kolejno dla kierunku α_2 punkt B_2 itp. Jak wynika z ogólnej definicji, zbiór punktów B_i wyznacza linię wpływu odkształcenia plastycznego.

Równanie elipsy przesuniętej wzdłuż dowolnej drogi obciążenia może być zapisane w postaci

$$(2.12) \quad (\sigma_1 - a) - (\sigma_1 - a)(\sigma_2 - b) + (\sigma_2 - b)^2 = \sigma_{pl}^2,$$

gdzie a, b są współrzędnymi środka elipsy.

Wprowadźmy analogicznie, jak w pracy [16], oznaczenia p, n, m . Jako współczynnik materiałowy przyjmujemy następującą wielkość

$$(2.13) \quad p = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{pl}}.$$

Przyjmujemy jako zmienną niezależną na płaszczyźnie $\sigma_1; \sigma_2$ wartość

$$(2.14) \quad n = \frac{\sigma_1^A}{\sigma_2^A} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha,$$

a więc związaną z kierunkiem obciążenia wstępnego. Stały parametr dla danej linii wpływu, określający kierunek obciążenia wtórnego, oznaczmy przez

$$(2.15) \quad m = \frac{\sigma_1^M}{\sigma_2^M} = \operatorname{tg} \Phi.$$

Rozwiązując równania (2.11) oraz (2.12) przy wykorzystaniu (2.13), (2.14), (2.15) otrzymuje się współrzędne środka elipsy [16]

$$(2.16) \quad a = \frac{n(p-1)}{\sqrt{1-n+n^2}} \sigma_{pl}; \quad b = \frac{p-1}{\sqrt{1-n+n^2}} \sigma_{pl}.$$

Moduł promienia linii wpływu określony jest przez stan naprężenia w punkcie $\sigma_1^M; \sigma_2^M$

$$(2.17) \quad r = \sqrt{(\sigma_1^M)^2 + (\sigma_2^M)^2}.$$

Z definicji linii wpływu wynika, że współrzędne $\sigma_1^M; \sigma_2^M$ spełniają równanie (2.12). Wobec tego, po wykorzystaniu zależności (2.12) oraz (2.16) otrzymuje się następujące równanie

$$(2.18) \quad \frac{r}{\bar{\sigma}} = B \pm \sqrt{B^2 - \frac{1+m^2}{1-m+m^2} \left(1 - \frac{2}{p}\right)},$$

gdzie

$$B = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{(2-n-m+2nm)}{\sqrt{1-n+n^2}} \frac{\sqrt{1+m^2}}{2(1-m+m^2)}.$$

Jest to poszukiwane równanie promienia linii wpływu odkształcenia plastycznego przy obciążeniu do naprężenia równoważnego $\bar{\sigma}$. Zmienną niezależną w tym równaniu jest wartość n . Dla ustalonej wartości m otrzymuje się rodzinę linii wpływu określonych przez parametr p .

Linie wpływu wyznaczono dla trzech przypadków szczególnych, które są istotne z praktycznego punktu widzenia:

- a) $m = 0$ przypadek prostego rozciągania,
- b) $m = 2$ obciążenie walcowego zbiornika ciśnieniem wewnętrznym,
- c) $m = -1$ rozciąganie połączone ze ściskaniem ($\sigma_1 = -\sigma_2$).

W poszczególnych przypadkach, równanie (2.18) upraszcza się do postaci

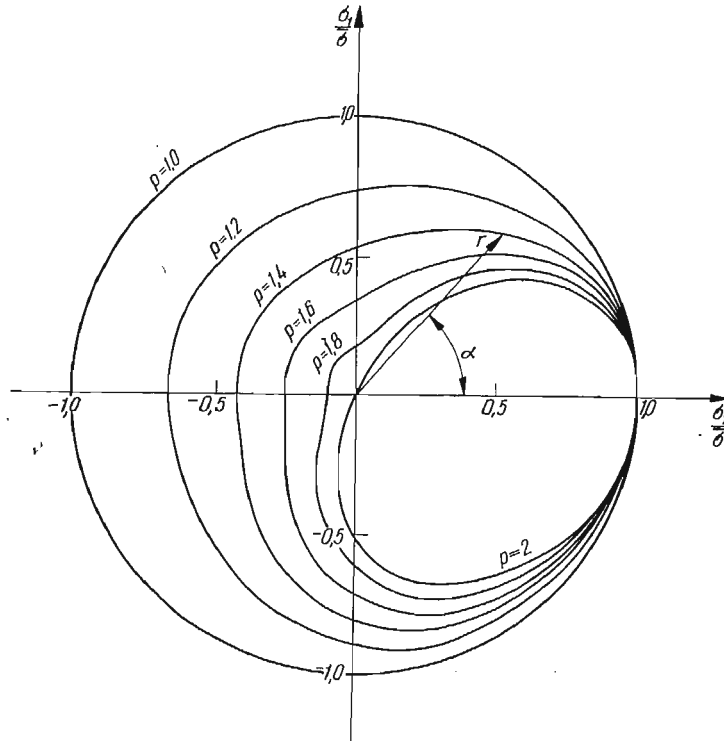
$$(2.19) \quad m = 0 \quad \frac{r}{\bar{\sigma}} = B \pm \sqrt{B^2 - \left(1 - \frac{2}{p}\right)}; \quad B = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{2-n}{\sqrt{1-n+n^2}},$$

$$(2.20) \quad m = 2 \quad \frac{r}{\bar{\sigma}} = B \pm \sqrt{B^2 - \frac{5}{3} \left(1 - \frac{2}{p}\right)}; \quad B = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{n}{\sqrt{1-n+n^2}},$$

$$(2.21) \quad m = -1 \quad \frac{r}{\bar{\sigma}} = B \pm \sqrt{B^2 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2}{p}\right)}; \quad B = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1-n}{\sqrt{1-n+n^2}}.$$

Na podstawie równań (2.19), (2.20), (2.21) obliczono linie wpływu dla różnych wartości p . Linie te pokazane są we współrzędnych bezwymiarowych $\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}}$ oraz $\frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}}$ na rys. 3, 4, 5.

Na wykresach oznaczono linie odpowiadające danej wielkości $p = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{pl}}$. Parametr p nie jest oczywiście dowolny, ale zależy od rodzaju materiału i programu obciążenia. Mi-



Rys. 3. Rodzina linii wpływu odkształcenia plastycznego w przypadku rozciągania w kierunku σ_2 .

nimalna wartość $p = 1$ odpowiada wstępnemu obciążeniu materiału tylko do granicy plastyczności. Skrajna wartość $p = 2$ osiągana jest dla teoretycznego materiału wykazującego idealny efekt Bauschingera. Szczegółowo omówiono ten przypadek w pracy [16].

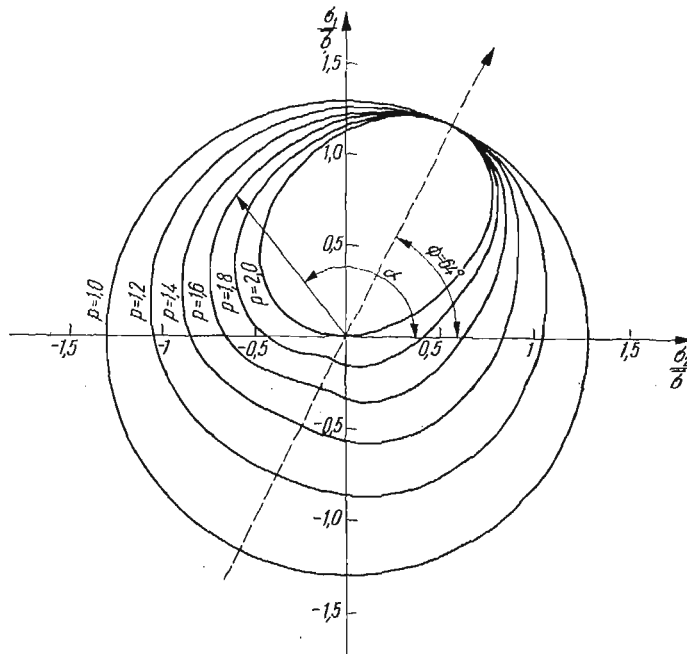
Z powyższego wynika, że wartość $\bar{\sigma}$ ma ograniczenie

$$(2.22) \quad \sigma_{pl} \leq \bar{\sigma} \leq 2\sigma_{pl}.$$

W przedziale tym, wartość $\bar{\sigma}$ równa jest maksymalnemu naprężeniu przy prostym rozciąganiu, a więc

$$(2.23) \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{max}.$$

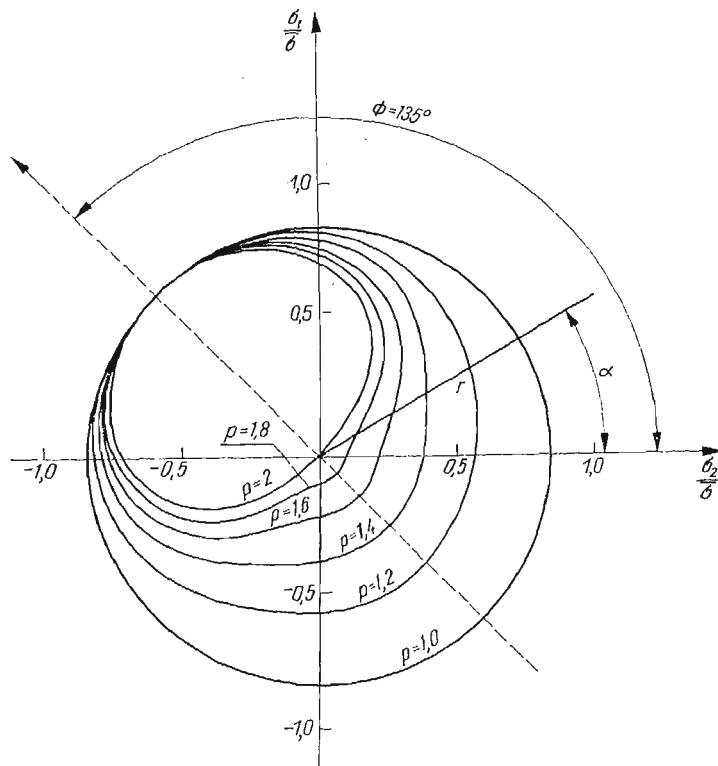
Przy stosowaniu hipotezy wzmocnienia kinematycznego do realnego materiału istnieje pewna dowolność związana z metodą aproksymacji rzeczywistego wykresu $\sigma(\epsilon)$ do wy-



Rys. 4. Rodzina linii wpływu odkształcenia plastycznego w przypadku złożonego rozciągania ($\sigma_1/\sigma_2 = 2$)
 - - - kierunek obciążenia wtórnego

kresu teoretycznego, a zatem i dowolność wyznaczenia σ_{pl} . Można np. aproksymować krzywą $\sigma(\epsilon)$ za pomocą dwóch prostych będących przedłużeniem zakresu sprężystego i zakresu ustalonego wzmocnienia [8], ewentualnie za pomocą siecznej odpowiadającej przyjętemu kryterium uplastycznienia $\epsilon_p^l = const$ [27]. Ponieważ obie metody, dla materiału takiego jak mosiądz, nie dają jakościowych różnic, przyjęto sposób drugi. W praktyce więc, wartość p może zmieniać się w zależności od przyjętej definicji uplastycznienia ϵ_p^l . W przypadkach tych równanie (2.13) można zapisać w postaci

$$(2.24) \quad p = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{pl}(\epsilon_p^l)}.$$



Rys. 5. Rodzina linii wpływu odkształcenia plastycznego w przypadku rozciągania połączonego ze ścisaniem ($\sigma_1 = -\sigma_2$)
 --- kierunek obciążenia wtórnego

2.3. Wyznaczenie linii wpływu przy założeniu hipotezy wzmocnienia izotropowego. Zgodnie z hipotezą wzmocnienia izotropowego, powierzchnia plastyczności rozszerzając się równomiernie w trakcie obciążania, pozostaje podobna do początkowego kształtu. Ponieważ rozpatrujemy materiał wstępnie izotropowy, jest ona opisywana w każdym momencie przez równanie (2.10). Ponadto, że względu na jednakową postać równań (2.10) oraz (2.11), powierzchnia plastyczności pokrywa się z powierzchnią obciążeń wstępnych. Wobec tego promień linii wpływu przy dowolnym kierunku obciążenia wstępnego jest stały, a więc linia ta jest okręgiem.

Równanie (2.18) wyprowadzone dla przypadku wzmocnienia kinematycznego opisuje również wzmocnienie izotropowe. Jak wynika z rys. 2, w przypadku tym parametr $p = 1$. Wstawiając tę wartość do równania (2.18) otrzymujemy wzór wyrażający promień linii wpływu

$$(2.25) \quad \frac{r}{\bar{\sigma}} = \sqrt{\frac{1+m^2}{1-m+m^2}}$$

Zależy on tylko od wielkości obciążenia wstępnego $\bar{\sigma}$ i od współczynnika m określającego kierunek, w którym badamy granicę plastyczności.

2.4. Wyznaczenie linii wpływu przy założeniu hipotezy wzmocnienia kinematyczno-izotropowego. Poprzednio wyprowadzono równanie linii wpływu w przypadku hipotez wzmocnienia uwzględniających tylko przesunięcie, albo rozszerzenie powierzchni plastyczności. Aby uwzględnić oba te efekty jednocześnie, wykorzystamy równanie zaproponowane w pracy [23, 24]

$$(2.26) \quad (s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) = \left\{ \frac{1}{2} (s'_{ij} s''_{ij})^{1/2} [1 + F(\mu, \varepsilon_i)] \right\}^2,$$

gdzie $a_{ij} = \frac{1}{2} s'_{ij} [1 - F(\mu, \varepsilon_i)],$

s'_{ij} — oznacza składową dewiatora naprężenia, w punkcie obciążenia.

$$F(\mu, \varepsilon_i) = \frac{\sigma''(\mu, \varepsilon_i)}{\sigma'(\mu, \varepsilon_i)} \text{ — efekt Bauschingera.}$$

Wartości σ' oraz σ'' określa się doświadczalnie w sposób następujący. Jeżeli materiał obciążymy wstępnie do wartości σ_{\max} i odciążymy do zera, to podczas wtórnego obciążenia w tym samym kierunku, przy $\sigma' \leq \sigma_{\max}$ wykazuje on odkształcenie ε^p . Podczas wtórnego obciążenia w kierunku przeciwnym do wstępnego, przy tej samej wartości ε^p , materiał wykazuje granicę plastyczności σ'' . Stwierdzono również, że efekt Bauschingera wyznaczony w ten sposób zależy od kombinacji naprężeń, co uwzględniono przez wprowadzenie parametru Lodego μ . Równanie (2.26) było badane w pracach [20, 22, 23, 24, 25]. Przyjmowano tam, że przy technicznej granicy plastyczności $\sigma' = \sigma_{\max}$.

Rozpatrzmy obecnie efekt Bauschingera przy dowolnej definicji uplastycznienia $\varepsilon^p = \text{const}$ w przypadku materiału, którego własności nie zależą od parametru Lodego. Wobec tego efekt Bauschingera jest funkcją tylko obciążenia maksymalnego $\bar{\sigma}_{\max}$ oraz definicji uplastycznienia ε^p , a więc może być mierzony przy dowolnej kombinacji naprężeń. Przyjmijmy, że granice plastyczności σ' oraz σ'' odpowiadają prostemu obciążeniu

$$(2.27) \quad F(\bar{\sigma}_{\max}; \varepsilon^p) = \frac{\sigma''(\sigma_{\max}; \varepsilon^p)}{\sigma'(\sigma_{\max}; \varepsilon^p)} = \frac{\sigma''}{\sigma'}.$$

Dla uproszczenia, odpowiednie granice plastyczności oznaczone są dalej tylko σ' oraz σ'' . Przy tych założeniach, prawą stronę równania (2.26) można przekształcić następująco:

$$(2.28) \quad \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{s'_{ij} s''_{ij}} [1 + F(\mu \varepsilon_i)] \right\}^2 = \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2)'} \left[1 + \frac{\sigma''}{\sigma'} \right] \right\}^2 = \\ = \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma' \left[1 + \frac{\sigma''}{\sigma'} \right] \right\}^2 = \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma' + \sigma''}{2} \right\}^2.$$

Jak widać, jest to wielkość stała dla danego $\bar{\sigma}_{\max}$ oraz ε^p .

Analogicznie przekształcić można wyrażenie dla a_{ij} . Na przykład, dla $i = j = 1$ otrzymujemy

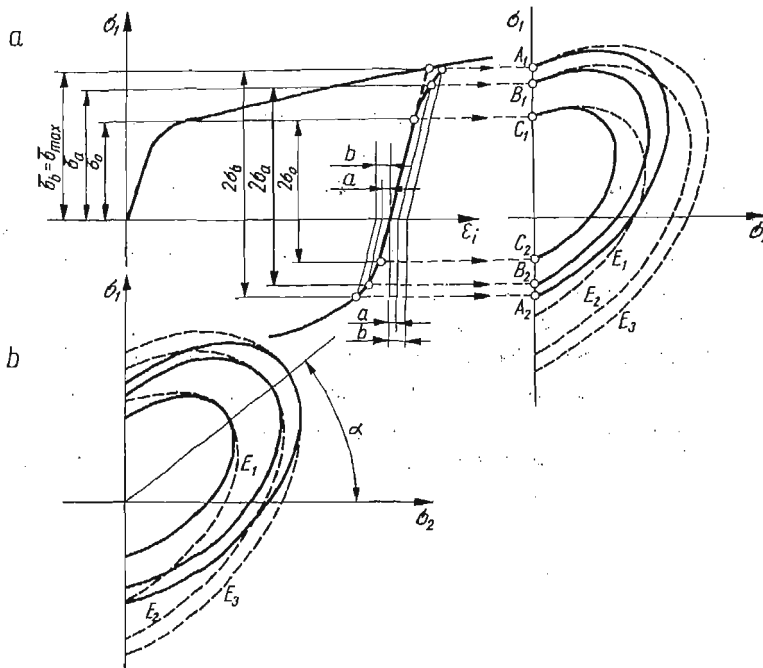
$$(2.29) \quad a_{11} = \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} b,$$

gdzie $a = \frac{1}{2} \sigma_1 (1 - F); \quad b = \frac{1}{2} \sigma_2 (1 - F).$

Przy tych oznaczeniach, równanie (2.26) sprowadza się do równania elipsy (2.12). Połowa średnicy tej elipsy wynosi

$$(2.30) \quad \sigma_{pl} = \frac{1}{2}(\sigma' + \sigma'').$$

Na rys. 6a pokazano szereg elips odpowiadających różnym definicjom uplastycznienia dla przypadku prostego obciążenia wstępnego w kierunku σ_1 . Jeżeli przyjmiemy, że ograniczymy badanie zachowania się materiału tylko do wartości naprężeń nieprzekraczających obciążenia wstępnego $\bar{\sigma}_{max}$, to zewnętrzna powierzchnia plastyczności będzie styczna do powierzchni obciążeń wstępnych.



Rys. 6. Wyznaczenie powierzchni plastyczności w przypadku hipotezy wzmocnienia kinematyczno-izotropowego

a) Wyznaczenie średnicy powierzchni plastyczności; b) Przemieszczenie powierzchni plastyczności przy obciążeniu w dowolnym kierunku α

Rozpatrzmy obecnie złożone obciążenie wstępne i wtórne w tym samym kierunku, dla dowolnej kombinacji naprężeń. Załóżmy, że obciążamy materiał w dowolnym kierunku α , odciążamy do zera i obciążamy powtórnie po tej samej drodze. Ponieważ mamy do czynienia z materiałem izotropowym, punkty odpowiadające stałym kryteriom uplastycznienia $\varepsilon^p = \text{const}$ leżą na elipsach E_1, E_2 itd. (rys. 6a). Mając na uwadze założenie, że rozpatrujemy tylko obciążenie wtórne po odciążeniu do zera, można do tych elips odnieść nazwę *pośrednie powierzchnie obciążenia*. Określenie to w ogólnym przypadku wprowadzono w pracy [9] i [13]. Ze sposobu wyznaczenia powierzchni plastyczności wynika, że jej środek leży na prostej oznaczającej drogę obciążenia. A więc każda z po-

wierzchni określonych równaniem (2.12), przy obciążeniu proporcjonalnym, zajmie położenie styczne do powierzchni obciążenia (rys. 6b), przy czym punkt styczności wyznaczony jest przez przecięcie prostej o nachyleniu α z odpowiednią elipsą E . Ponieważ założono, że efekt Bauschingera nie zależy od kierunku obciążenia, wymiary powierzchni plastyczności stycznej do danej powierzchni obciążenia są stałe. Problem ten można przedstawić w postaci oddzielnych zadań dla różnych definicji uplastycznienia $\varepsilon_i^p = \text{const}$. Wynika stąd, że istnieje geometryczna analogia pomiędzy elipsami oznaczającymi powierzchnię plastyczności i obciążenia w przypadku wzmocnienia kinematycznego i kinematyczno-izotropowego. Zagadnienie wyznaczenia linii wpływu, odpowiadającej dowolnej definicji uplastycznienia $\varepsilon_i^p = \text{const}$, sprowadza się wobec tego do szeregu zadań typu przedstawionego na rys. 2, a więc linie te będą także opisane przez równanie (2.18) pod warunkiem, że wielkościom $\bar{\sigma}$ oraz p nadaje się odpowiednią interpretację fizyczną. Z porównania rys. 6b oraz rys. 2 wynika, że $\bar{\sigma}$ i p mają następujące znaczenia

$$(2.31) \quad \bar{\sigma} = \sigma'(\bar{\sigma}_{\max}; \varepsilon_i^p) = \sigma',$$

$$(2.32) \quad p = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{pl}} = \frac{\sigma'}{\frac{1}{2}(\sigma' + \sigma'')}.$$

Należy podkreślić, że wartości $\bar{\sigma}$ oraz p wyznaczone są z jednej próby rozciąganie-ściskanie, raz dla danej wielkości obciążenia wstępnego, niezależnie od kierunku obciążenia wtórnego.

Jak wynika z równania (2.18), promień r linii wpływu jest proporcjonalny do wielkości $\bar{\sigma}$, która jest połową średnicy powierzchni obciążenia. Jest on również funkcją parametru p , a więc nie zależy w ogóle od wielkości powierzchni plastyczności, a tylko od wzajemnej proporcji pomiędzy wymiarami powierzchni obciążenia i plastyczności. Obie te wielkości $\bar{\sigma}$ oraz p zależą bezpośrednio od przyjętej hipotezy wzmocnienia.

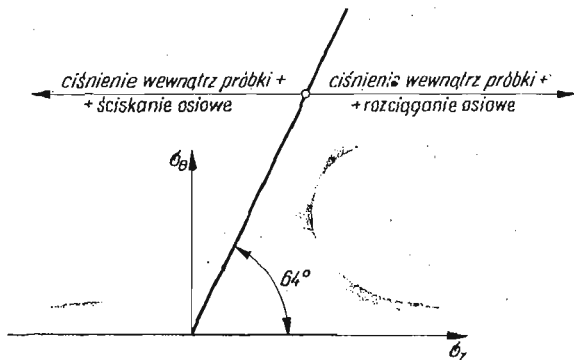
Reasumując można stwierdzić, że ogólna postać równania (2.18) przy poczynionych założeniach jest taka sama dla rozpatrywanych trzech hipotez wzmocnienia materiału.

3. Technika doświadczalna

3.1. Stanowisko badawcze. Zrealizowanie założonego programu badań wymagało specjalnej aparatury. Zbudowano w tym celu przyrząd umożliwiający obciążanie próbek rurkowych kombinacją ciśnienia wewnętrznego i siły rozciągającej lub ściskającej skierowanej wzdłuż osi próbki. Obciążenia te wywołują w próbce naprężenia σ_x , σ_θ , σ_r w trzech prostokątnych kierunkach. Wymiary próbki są tak dobrane, że naprężenie σ_r jest małe w porównaniu z σ_θ , a więc realizuje się w przybliżeniu płaski stan naprężenia.

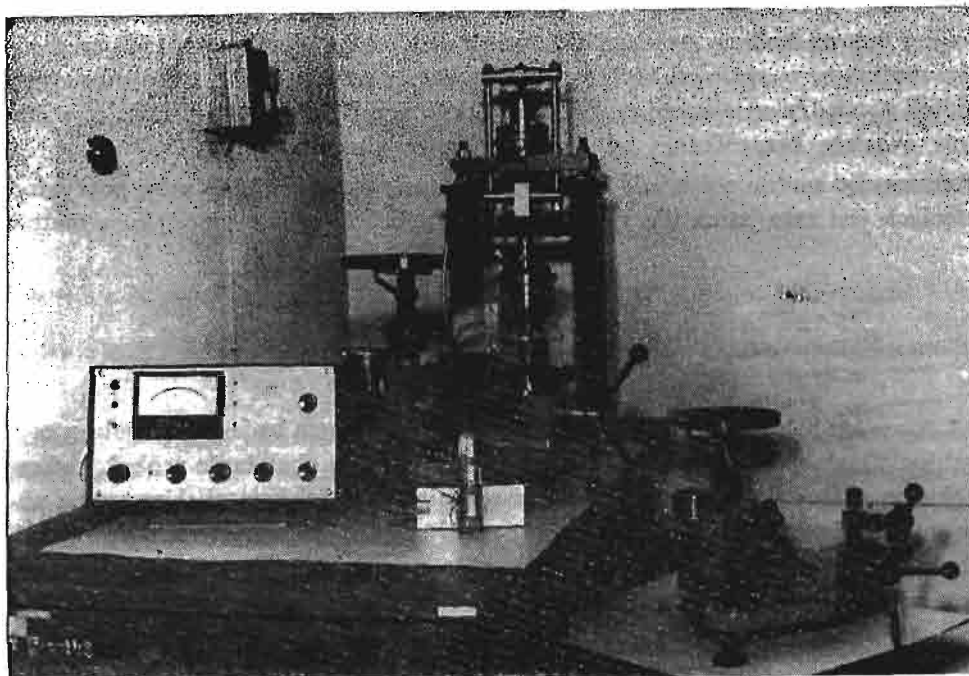
Sposób realizacji różnych kombinacji naprężeń podano na rys. 7. Analogiczny układ do obciążania w pierwszej ćwiartce płaszczyzny naprężeń zastosowano w pracy [3], za wyjątkiem realizacji obciążenia w kierunku σ_θ .

W kierunku $\alpha = 64^\circ$ obciążenie realizowane jest tylko za pomocą ciśnienia wewnątrz próbki. Obciążenie w kierunkach $0 < \alpha < 64^\circ$ składa się z obciążenia wzdłuż kierunku $\alpha = 64^\circ$ uzupełnionego siłą rozciągającą osiową. Analogicznie, przy udziale siły ściskającej otrzymuje się wypadkowe obciążenie w kierunkach $64^\circ < \alpha < 180^\circ$.

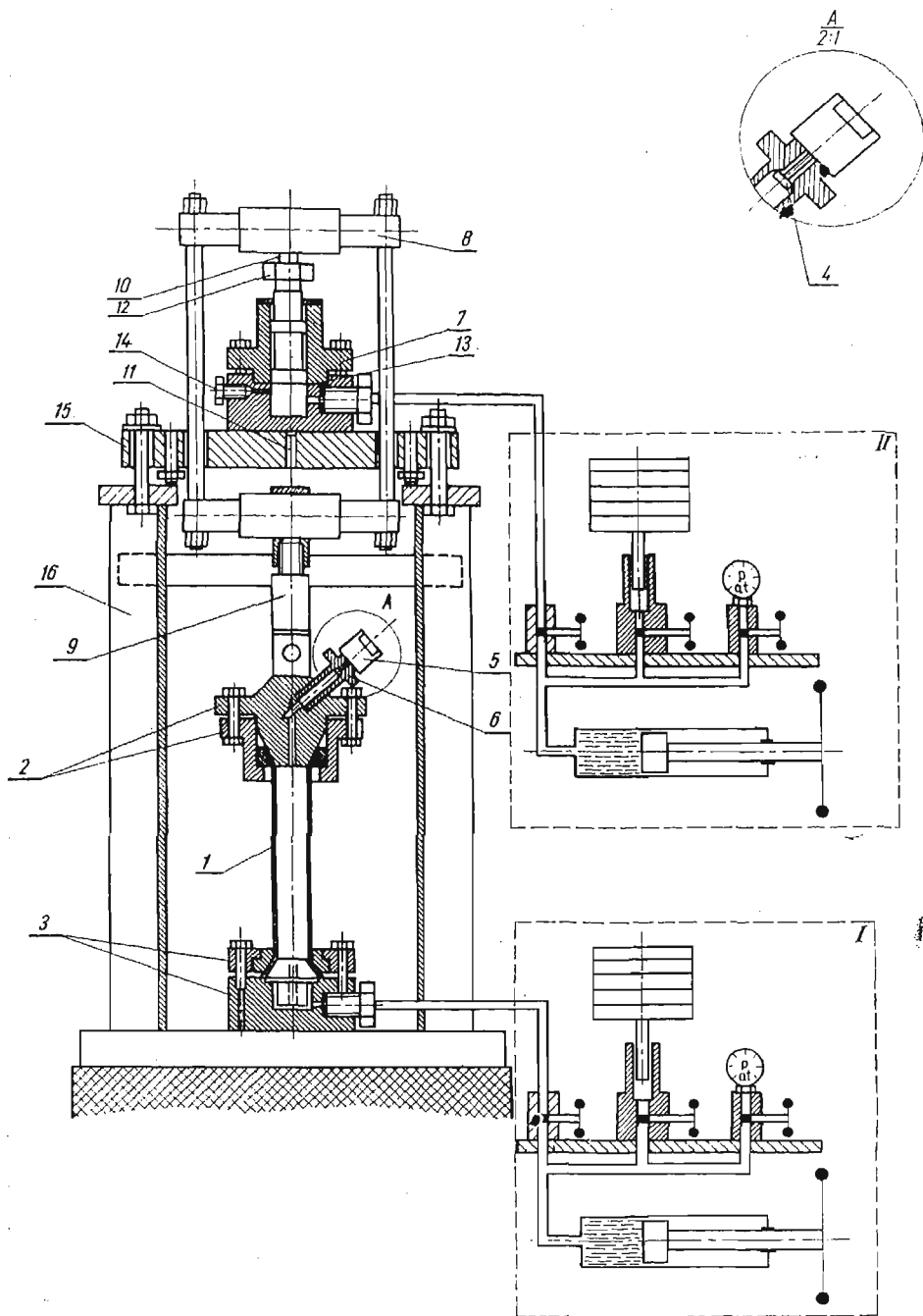


Rys. 7. Obciążenie próbki rurkowej przy realizacji różnych kombinacji naprężeń σ_θ ; σ_z

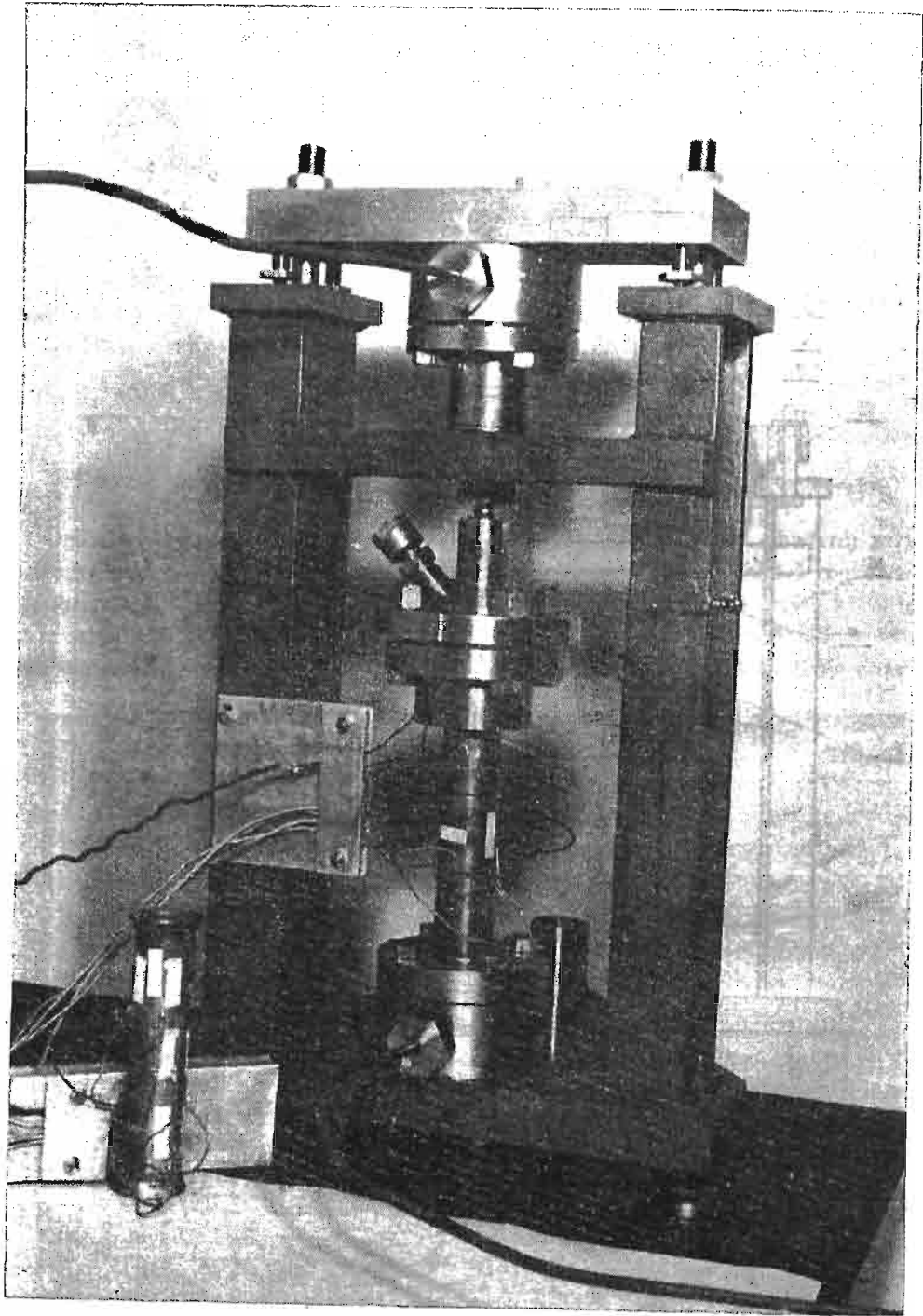
Ogólny widok stanowiska badawczego pokazany jest na rys. 8. Przekrój przyrządu w wersji obciążenia próbki siłą rozciągającą podano na rys. 9. Próbkę 1 mocowaną jest w uchwycie górnym 2 i dolnym 3. Każdy uchwyt składa się z dwóch części, które łączone są znormalizowanymi śrubami. W górnym uchwycie znajduje się otwór odpowietrzający wewnątrz próbki. Stożek zaworu dociskany jest do gniazda przez odkręcenie nakrętki 5.



Rys. 8. Stanowisko badawcze



Rys. 9. Schemat przyrządu do obciążania próbek rurkowych



Rys. 10. Sciskanie próbki rurkowej

Ciśnienie wewnątrz próbki dodatkowo zwiększa siłę dociskającą zaworek, więc do wstępnego uszczelnienia potrzebna jest niewielka siła.

Ciśnienie wewnątrz próbki wywoływane jest za pomocą oleju przez manometr obciążnikowy. W manometrze tym 1 kp obciążnika wywołuje ciśnienie 5 kpmm^{-2} . Drugi taki manometr, ale o przełożeniu dwukrotnie większym, dostarcza ciśnienie do cylindra 7 obciążającego próbkę siłą osiową. Aby zmniejszyć ewentualną mimośrodowość obciążenia, układ trawersy 8 zawiera przegub Cardana 9 oraz przegub kulowy 10.

Aby realizować siłę ściskającą, odsuwa się trawersę ruchomą i obraca się cylinder do dołu (rys. 10). W położeniu górnym i dolnym cylinder jest centrowany na jednym otworze 11. Przy obciążaniu siłą ściskającą osiowość obciążenia zapewniona jest w ten sposób, że próbka zamocowana w uchwycie górnym 2, bazowana jest na tłoku obciążającym 12 i dopiero wtedy dokręca się uchwyt dolny 3. Ustawienie próbki do prób rozciągania siłą osiową odbywa się w tej samej kolejności, tylko zamiast cylindra, pomiędzy próbkę i trawersę 15 wstawiany jest specjalny szablon.

3.2. Próbki. Badania przeprowadzono na próbkach ciętych z ciągnionej rury o średnicy wewnętrznej 30 mm i grubości ścianki 1 mm. Jako materiał stosowano mosiądz M63 w stanie półtwardym.

Odchyłki od średniej wartości grubości ścianki wynosiły od $\pm 2\%$ do $\pm 3\%$. Zmiany średnicy były znacznie mniejsze, zawierały się w granicach $\pm 0,3\%$.

Wykonywano próbki o długości 180 mm, a więc stosunek długości do średnicy wynosił $L/D = 6$. W pracy [3] w trakcie pomiarów na próbkach, dla których parametr ten był równy 4, zaobserwowano zmianę odkształceń obwodowych i osiowych wzdłuż długości. Jednak słusznie stwierdzono, że stosowanie próbek dłuższych, np. o $L/D = 10$, spowodowałoby znaczne trudności techniczne. Szczególnie ważne jest to w niniejszej pracy ze względu na niebezpieczeństwo wyboczenia próbek w przypadku ściskania.

Roztłaczanie końców próbek w celu otrzymania kołnierzy służących do mocowania, wykonywano w przyrządzie przedstawionym w pracy [6]. Dzięki takiemu przyrządowi; przy roztłaczaniu kołnierza, środkowa część próbki zabezpieczona jest przed odkształceniem.

Ze względu na nieznaną historię odkształcenia w toku produkcji, próbki wyżarzono w temperaturze 650°C w czasie 2 godzin i następnie studzono wraz z piecem do temperatury 200°C . Dalsze studzenie odbywało się na powietrzu.

3.3. Pomiar obciążeń. Zastosowany schemat przyrządu pozwala mierzyć siłę osiową wywołaną przez cylinder. Do pomiaru siły stosowano dynamometr pałkowy. Ponieważ znana jest również wielkość ciśnienia wytwarzanego przez manometr, obliczyć można czynną powierzchnię tłoka, która jest mniejsza od nominalnej ze względu na obecność gumowej membrany uszczelniającej (nr 13 na rys. 9).

W celu dokładnego poznania charakterystyki cylindra, pierwsza seria prób przeprowadzana była z dynamometrem włączonym w szereg pomiędzy cylinder i próbkę. Pomiaru te pozwoliły stwierdzić, że siła wytwarzana przez cylinder jest liniową funkcją ciśnienia w całym zakresie obciążeń. Znając ciśnienie dawane przez układy hydrauliczne oraz powierzchnię tłoka, na podstawie elementarnych wzorów oblicza się naprężenia panujące w próbce w kierunku osiowym i obwodowym.

Ponieważ ciśnienie w układach hydraulicznych wywoływane jest przez ciężarki, z przyczyn technicznych pożądane jest przyjęcie takiego kierunku obciążenia n , aby przyrosty $\frac{\Delta G_0}{0,1 \text{ kp}}$ oraz $\frac{\Delta G_z}{0,1 \text{ kp}}$ były liczbami całkowitymi. Ustalenie odpowiednich kierunków można dokonywać metodą kolejnych prób na podstawie wzoru:

$$(3.1) \quad n = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z} = 2 \left(1 + \frac{\delta}{D_w} \right) \frac{1}{1 + z \frac{4F_t}{\pi D_w^2} \frac{\Delta G_z}{\Delta G_0}},$$

gdzie $z = \frac{\Delta p_z}{\Delta p_\theta}$ jest stałą układów hydraulicznych.

Jeżeli materiał doznaje dużych odkształceń, wymiary geometryczne próbki we wzorze (3.1) należy dobrać tak, aby odpowiadały wartościom naprężeń $\sigma_\theta; \sigma_z$. Ponieważ doświadczalnie ustalono zależność $\sigma_i(\epsilon_i)$, wymiary te można było wyznaczyć, posługując się twierdzeniami odkształceniowej teorii plastyczności. W praktyce okazało się to całkowicie wystarczające.

3.4. Pomiar odkształceń. Odkształcenia próbek mierzono za pomocą kratowych tensometrów oporowych o bazie pomiarowej 15 mm i oporze nominalnym 120 Ω . Czujniki te dają liniowe wskazania w zakresie odkształceń do 0,6%. Tensometry naklejano na powierzchni zewnętrznej, po dwa w kierunku obwodowym i osiowym, po przeciwnych stronach próbki. Ze względu na zmienną grubość ścianki wzdłuż obwodu rurki, tensometry naklejano na tworzących odpowiadających grubości średniej. Aby wyeliminować możliwość odchyłek wynikających z niesymetrii układu, odkształcenia obliczano jako średnią ze wskazań dwóch tensometrów skierowanych w ten sam sposób.

Odkształcenia odczytywano z dokładnością do $5 \cdot 10^{-5}$ za pomocą wysokoczułego kompensatora tensometrycznego typu BO-1 produkcji ZMOC-IPPT (rys. 8). Zastosowany układ elektryczny zapewniał stałe warunki cieplne pomiaru ponieważ wszystkie tensometry były utrzymywane cały czas pod napięciem.

3.5. Technika obciążania i pomiaru odkształceń. Z powodu zastosowania manometrów obciążnikowych, jako układów wytwarzających ciśnienie, zmiana obciążenia próbki musi przebiegać skokowo. Po osiągnięciu ustalonego przyrostu obciążenia mierzono odkształcenia.

Powyższa procedura jest normalnie stosowana przy badaniach w płaskim stanie naprężenia [1, 6, 8, 12]. W pracy [12] stwierdzono, że przy schodkowej zmianie naprężeń nie zauważa się odpowiednio zmian kierunku przyrostu odkształcenia plastycznego w przypadku materiału wstępnie izotropowego. Zmiany takie są widoczne przy obciążeniu wtórnym, gdy materiał posiada anizotropię.

W przypadku nieciągłej rejestracji odkształceń, próbka wytrzymywana jest przez pewien określony czas pod stałym obciążeniem aż do ustalenia się odkształcenia. Czas przystanku jest różny i wynosi np. 1 min [12], 3 min [1] lub 5 min [6]. W pracy [8] dokonywano odczytów co 3 min dotąd, aż dwa kolejne wskazania były takie same. Autorzy podkreślają, że procedura ta ma na celu zmniejszenie wpływu pelzania na wyniki doświadczeń.

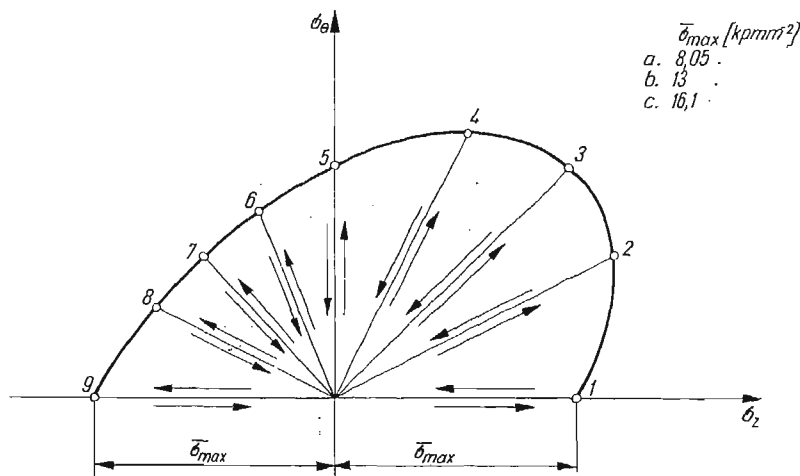
W tej pracy stosowano przyrosty naprężeń około $0,0375 \text{ kpm}^{-2}$ oraz $0,075 \text{ kpm}^{-2}$ wynikające z ciężaru najmniejszych obciążników do manometrów (0,05 kp oraz 0,1 kp). Przy takich przyrostach naprężeń, szczególnie w zakresie sprężystym, przyrządy pomiarowe praktycznie nie wykazują zmian odkształcenia. Dlatego przystanki obciążenia w celu rejestracji odkształceń odpowiadały większym skokom naprężeń, które uzyskiwano posługując się elementarnymi przyrostami. Sumaryczne zmiany naprężeń obwodowych i osiowych w próbce nie przekraczały jednak $0,4 \text{ kpm}^{-2}$.

Aby zmniejszyć zakłócenia kierunku przyrostu odkształcenia wynikające ze skokowej zmiany naprężeń, przystanki obciążenia znajdowały się na linii odpowiadającej teoretycznej drodze obciążenia. Przy utrzymywaniu stałego obciążenia, wskazania tensometrów ustalały się w czasie przeciętnie od kilku sekund do pięciu minut. Wobec tego rejestrowano je po czasie nie większym niż pięć minut.

Próbki po obciążeniu wstępnym oklejano tensometrami, pozostawiając je do wyschnięcia na 40 godzin, po czym przeprowadzano badania granicy plastyczności. Okres ten przy wszystkich próbkach był jednakowy ze względu na wyeliminowanie wpływu starzenia się materiału.

4. Program prób

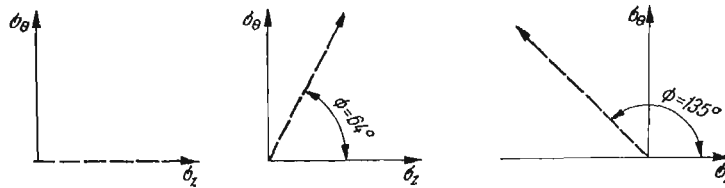
4.1. Badanie linii wpływu. Program prób mających na celu zbadanie linii wpływu obejmował 81 próbek podzielonych na 9 serii. Poszczególne próbki z serii obciążano wzdłuż odpowiedniej prostoliniowej drogi, aż do osiągnięcia wartości naprężeń, które określała po-



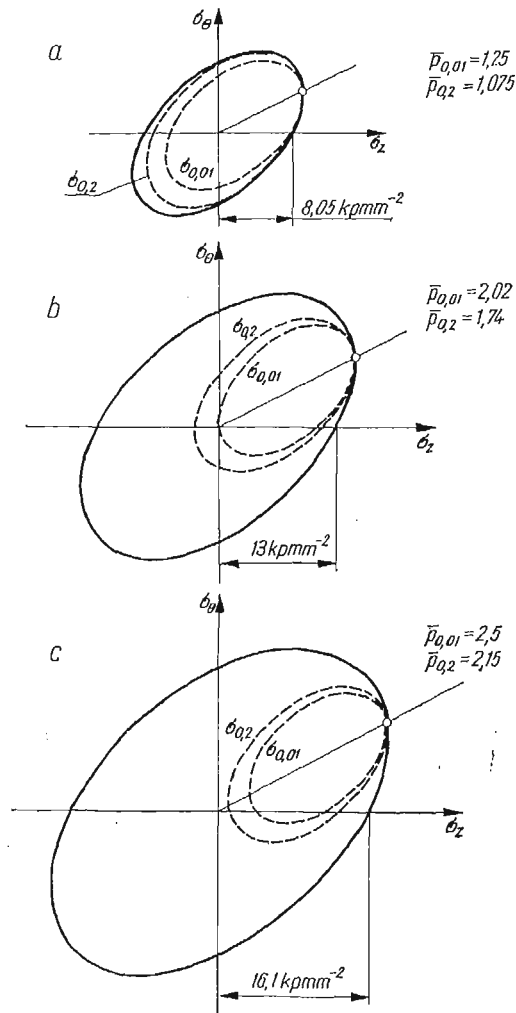
Rys. 11. Program obciążeń wstępnych; 1 do 9 — kierunki obciążeń wstępnych

wierzchnia obciążeń wstępnych i następnie odciążano do zera. Kierunki obciążeń wstępnych oznaczone są na rys. 11 numerami od 1 do 9. Ponowne obciążenie każdej z trzech serii próbek, różniących się wielkością obciążeń wstępnych, odbywało się w jednym z kierunków obciążenia wtórnego (rys. 12).

Każda z serii obciążenia wstępnego charakteryzowała się pewną krytyczną wielkością maksymalnego naprężenia równoważnego $\bar{\sigma}_{\max}$. Przekroczenie granicy sprężystości i pla-



Rys. 12. Program obciążeń wtórnych



Rys. 13. Przeciążenie materiału powyżej granicy plastyczności $\sigma_{0,01}$ oraz $\sigma_{0,02}$ podczas obciążania wstępnego
 - - - powierzchnia obciążeń wstępnych

styczności materiału nieodkształconego przy poszczególnych seriach obciążeń pokazane jest na rys. 13 w ten sposób, że w elipsę obciążenia wrysowano wstępne powierzchnie

plastyczności dla jednego z kierunków obciążenia. Powierzchnie te, oznaczone $\sigma_{0,01}$ oraz $\sigma_{0,02}$, odpowiadają definicjom uplastycznienia $\varepsilon^p = 0,01\%$ oraz $0,2\%$. Obok rysunków podano wartości $\bar{p}_{0,01} = \frac{\bar{\sigma}_{\max}}{\sigma_{0,01}}$ oraz $\bar{p}_{0,02} = \frac{\bar{\sigma}_{\max}}{\sigma_{0,2}}$, które oznaczają stopień przekroczenia granicy sprężystości i plastyczności.

Przy pierwszej serii próbek, obciążenie wstępne było większe od granicy sprężystości o 25%, a od granicy plastyczności tylko o 7,5%. Tak niskie obciążenie zastosowano w tym celu, aby zbadać linie wpływu w warunkach, gdzie efekt Bauschingera może być bliski idealnemu.

Wielkość obciążeń wstępnych przy drugiej serii próbek została dobrana w ten sposób, że były one dwa razy większe od granicy sprężystości $\sigma_{0,01}$. Obciążenie wstępne trzeciej serii próbek było ponad dwa razy większe zarówno od granicy sprężystości, jak i plastyczności. Te serie próbek służyły do zbadania zachowania się materiału w takim zakresie, w którym według hipotezy wzmocnienia kinematycznego wzrost obciążeń wstępnych nie ma wpływu na wielkość granicy plastyczności.

4.2. Badanie własności materiału. Jedna seria dziewięciu próbek służyła do wyznaczenia powierzchni plastyczności materiału wstępnie nieodkształconego.

Oddzielna seria sześciu próbek, po dwie próbki dla trzech wielkości obciążeń wstępnych (rys. 11), przeznaczona była do zmierzenia wielkości $\bar{\sigma}$ oraz p (równanie (2.31), (2.32)). Obie próbki rozciągano do danej wartości $\bar{\sigma}_{\max}$ w kierunku osiowym, następnie odciążano do zera. Przy obciążeniu wtórnym, jedna próbka była rozciągana w kierunku obciążenia wstępnego dla zmierzenia wartości $\bar{\sigma} = \sigma'$, drugą zaś ściskano dla zmierzenia σ'' . Wyniki uzyskane z tych pomiarów służyły do wyznaczenia linii wpływu dla wzmocnienia kinematyczno-izotropowego.

5. Wyniki doświadczeń

5.1. Metoda opracowania wyników doświadczeń. W czasie pomiarów rejestruje się wartości ciśnień w dwu niezależnych układach obciążania oraz dwa odkształcenia główne ε_θ ; ε_z . Nieznany przyrost trzeciego odkształcenia obliczano z równania nieściśliwości. Analogicznie, znając wartości ciśnień, można obliczyć naprężenia σ_θ ; σ_z z elementarnych wzorów. Natomiast o trzecim naprężeniu σ_r wiadomo, że zmienia się wzdłuż grubości ścianki od wartości równej ciśnieniu p do zera na powierzchni zewnętrznej. Do obliczeń przyjęto w przybliżeniu $\sigma_r = -\frac{1}{2}p_\theta$.

Dane te pozwalają obliczyć intensywności naprężeń i odkształceń według wzorów:

$$(5.1) \quad \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2},$$

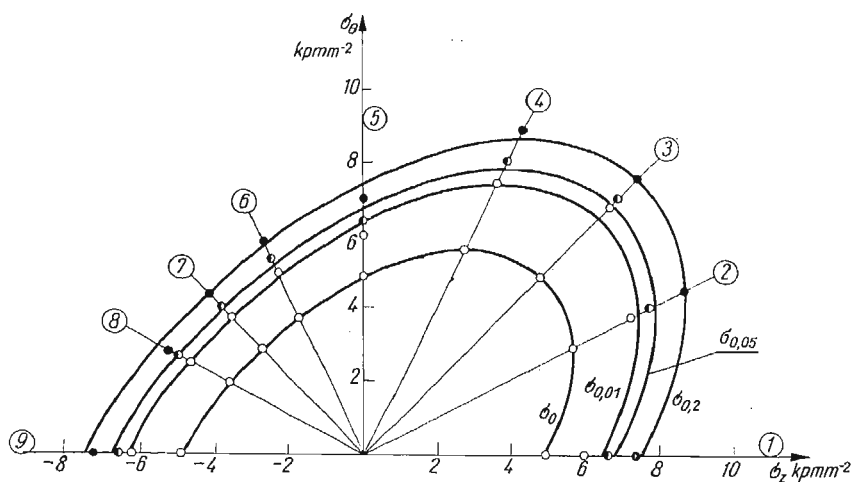
$$(5.2) \quad \Delta \varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\Delta \varepsilon_\theta - \Delta \varepsilon_z)^2 + (\Delta \varepsilon_z - \Delta \varepsilon_r)^2 + (\Delta \varepsilon_r - \Delta \varepsilon_\theta)^2},$$

$$(5.3) \quad \varepsilon_i = \sum \Delta \varepsilon_i.$$

Korzystając z tych przeliczeń, wykonywano wykresy σ_i w funkcji ε_i . Aby określić wartości σ odpowiadające definicji uplastycznienia ε_i^p , z odpowiedniego punktu na osi ε_i prowadzono prostą równoległą do początkowego liniowego zakresu krzywej $\sigma_i(\varepsilon_i)$, aż do przecięcia z nią. Punkty doświadczalne wyznaczono dla definicji uplastycznienia $\varepsilon_i^p = 0; 0,01\%; 0,05\%; 0,2\%$. Trzy spośród podanych wartości są często używane w praktyce. Natomiast $\varepsilon_i^p = 0,05\%$ rozpatrywano dlatego, że była to graniczna wielkość odkształcenia, przy której materiał obciążany wtórnie w kierunku pierwotnej drogi obciążenia, wchodzi w zakres ustalonego wzmocnienia.

Wartość σ_0 , w odróżnieniu od innych, odczytywano jako początek zakrzywienia się wykresu $\sigma_i(\varepsilon_i)$. Mimo zrozumiałego wpływu dokładności wykresu na ten odczyt, granica proporcjonalności stosowana jest czasami jako jedyne kryterium przy dyskusji wyników [1], [13]. Dokładność wyznaczenia σ_0 jest różna i zależy od kąta $\alpha - \Phi$ zawartego pomiędzy kierunkiem obciążenia wstępnego i wtórnego. Dla kątów $\alpha - \Phi > 90^\circ$ następuje silne odchylenie wykresu od początkowej prostej, wobec czego dokładność odczytu jest większa niż w zakresie $0 < \alpha - \Phi < 90^\circ$.

5.2. Wyniki badania własności materiału Wyniki badania wstępnej powierzchni plastyczności podano na rys. 14. Krzywe teoretyczne wyznaczono z warunku, że intensywność naprężeń stycznych σ_i jest równa średniej arytmetycznej ze wszystkich dziewięciu pomiarów. Jak widać, przy tych obciążeniach materiał posiada własności izotropowe.



Rys. 14. Wstępna powierzchnia plastyczności mosiądzu M-63

Do obliczenia teoretycznych linii wpływu za pomocą równania (2.18) konieczna jest znajomość $\bar{\sigma}$ oraz p . Zestawienie wartości $\bar{\sigma}$ oraz p obliczone na podstawie wyników pomiarów podano w tablicach 1 oraz 2. Dla przypadku wzmocnienia kinematycznego obliczono je według wzorów (2.22), (2.23), (2.24), a dla wzmocnienia kinematyczno-izotropowego według wzorów (2.31) oraz (2.32).

Tablica 1. Wartość $\bar{\sigma}$ oraz p dla wzmocnienia kinematycznego

ϵ_i^p	a		b		c	
	8,05 kpmm ⁻²		13 kpmm ⁻²		16,1 kpmm ⁻²	
	$\bar{\sigma}$ kpmm ⁻²	p	$\bar{\sigma}$ kpmm ⁻²	p	$\bar{\sigma}$ kpmm ⁻²	p
0	8,05	1,65	9,76	2,0	9,76	2,0
0,01	8,05	1,25	12,85	2,0	12,85	2,0
0,05	8,05	1,19	13,00	1,92	13,55	2,0
0,2	8,05	1,075	13,00	1,74	14,95	2,0

Tablica 2. Wartość $\bar{\sigma}$ oraz p dla wzmocnienia kinematyczno-izotropowego

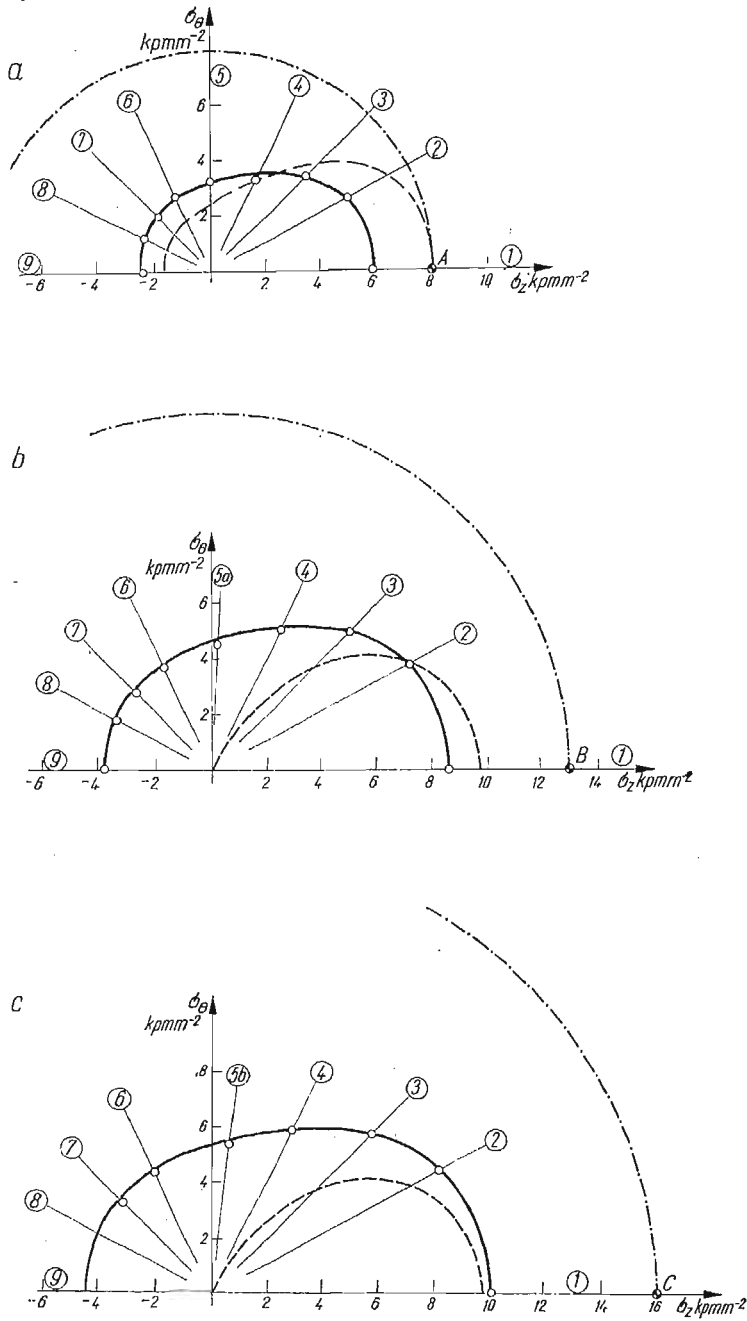
ϵ_i^p	a		b		c	
	0,85 kpmm ⁻²		13 kpmm ⁻²		16,1 kpmm ⁻²	
	$\bar{\sigma}$ kpmm ⁻²	p	$\bar{\sigma}$ kpmm ⁻²	p	$\bar{\sigma}$ kpmm ⁻²	p
0	5,89	1,39	8,65	1,38	10,05	1,40
0,01	7,80	1,31	11,35	1,32	14,05	1,37
0,05	8,15	1,20	12,75	1,27	15,95	1,33
0,2	8,65	1,02	13,00	1,11	16,10	1,20

5.3. Porównanie teoretycznych linii wpływu z wynikami doświadczeń. Linie wpływu wyznaczone dla trzech omówionych teorii wzmocnienia, przedstawione są na rys. 15 do 26. Rysunki 15, 16, 17, 18 zawierają wyniki dla kierunku obciążenia wtórnego $m = 0$ (rozciąganie osiowe), rysunki 19–22 dla $m = 2,06$ (obciążenie walcowego zbiornika ciśnieniowego), rysunki 23–26 dla $m = -1$ (rozciąganie równe ściskaniu). Każdy z rysunków zawiera linie wpływu wyznaczone dla jednej definicji uplastycznienia ale przy trzech różnych wielkościach obciążeń wstępnych, określonych maksymalną wartością naprężenia zredukowanego: wykres a): $\bar{\sigma}_{max} = 8,05$ kpmm⁻²; wykres b): $\bar{\sigma}_{max} = 13$ kpmm⁻²; wykres c): $\bar{\sigma}_{max} = 16,1$ kpmm⁻².

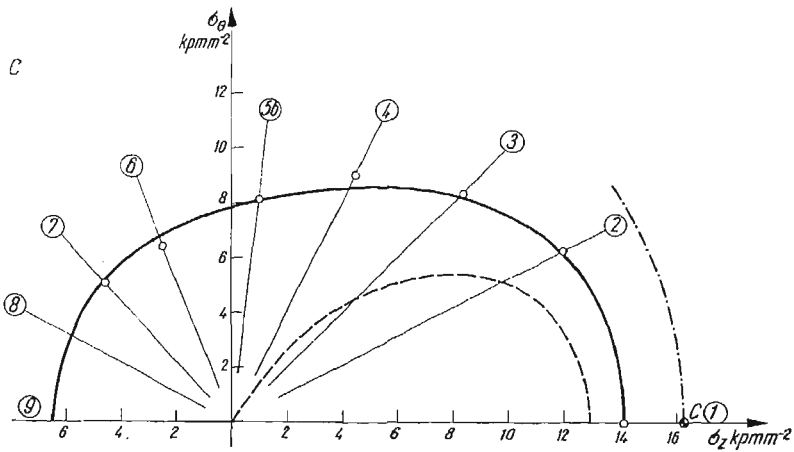
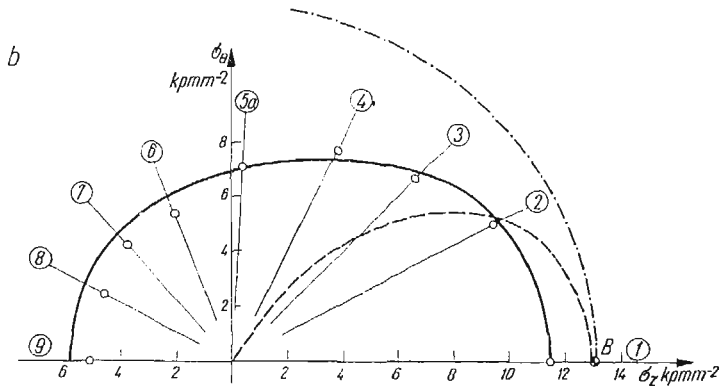
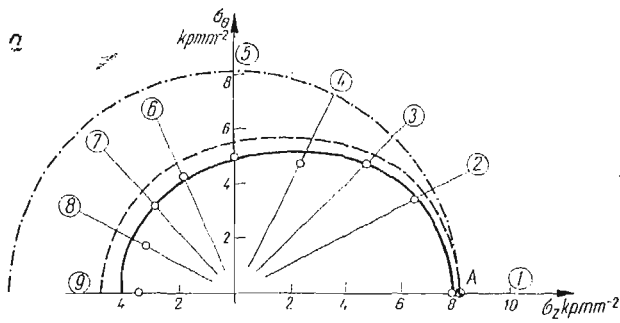
Wszystkie kierunki obciążeń wstępnych oznaczone są na wykresach numerami od 1 do 9. Aby pokazać proporcję pomiędzy wielkością obciążenia wstępnego i wtórnego, na każdym z wykresów oznaczony jest punkt położony na kierunku obciążenia wtórnego, przez który powinna przechodzić powierzchnia obciążenia wstępnego. Punkty te oznaczono literami *A*, *B*, *C* na każdym z wykresów.

Punkty otrzymane z doświadczeń oznaczone są małymi kółkami. W trzech przypadkach obciążeń wstępnych nie udało się uzyskać wyniku z powodu wybożenia próbki. Miało to miejsce dla kierunków obciążeń 8 i 9 przy $\bar{\sigma}_{max} = 16,1$ kpmm⁻² dla każdego z kierunków obciążeń wtórnych (rys. 15c do 26c) oraz dla kierunku nr 9 przy $\bar{\sigma}_{max} = 13$ kpmm⁻² w przypadku obciążenia wtórnego $m = -1$ (rys. 23b do 26b).

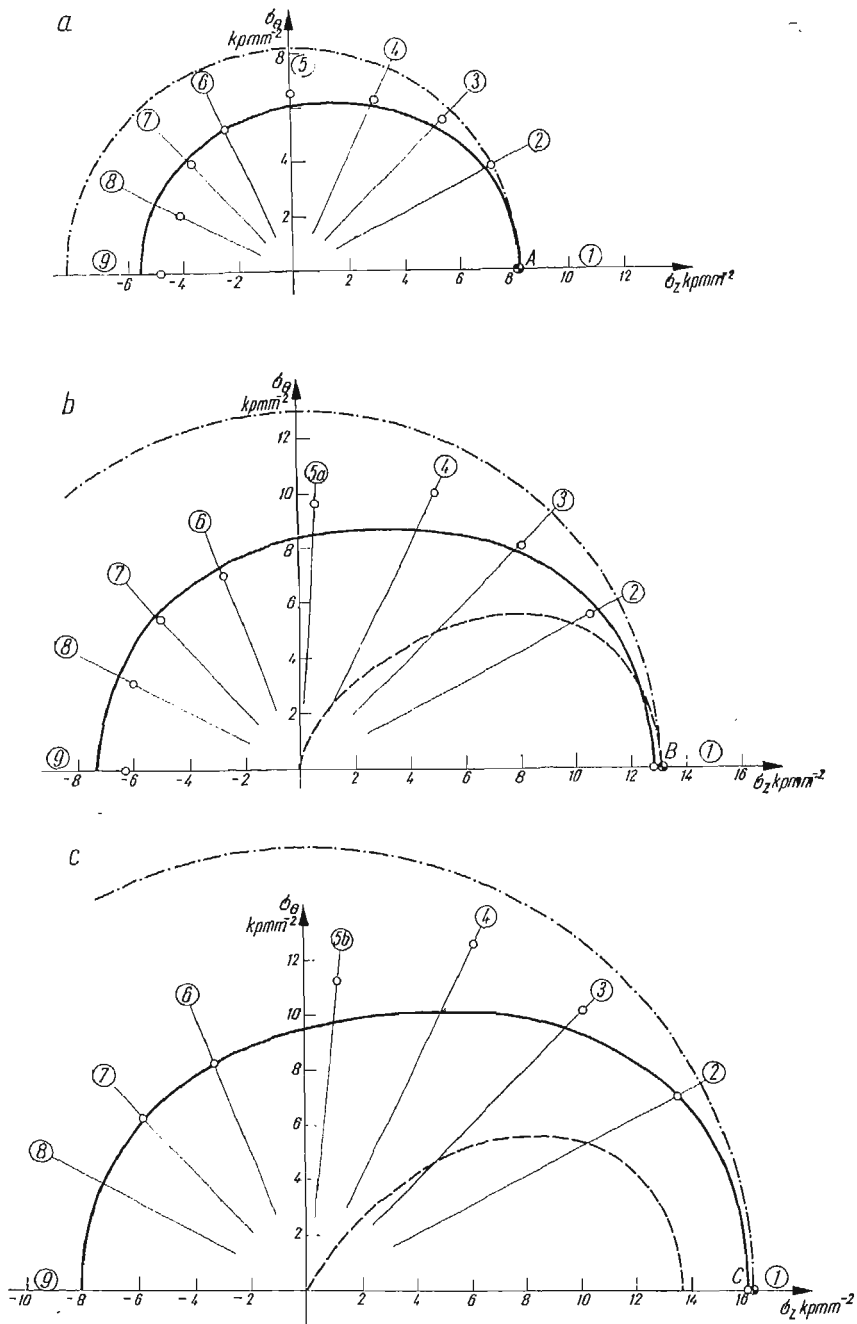
Na każdym wykresie naniesiono linie wyznaczone na podstawie trzech omówionych modeli wzmocnienia materiału. Linia wpływu odpowiadająca teorii wzmocnienia kine-



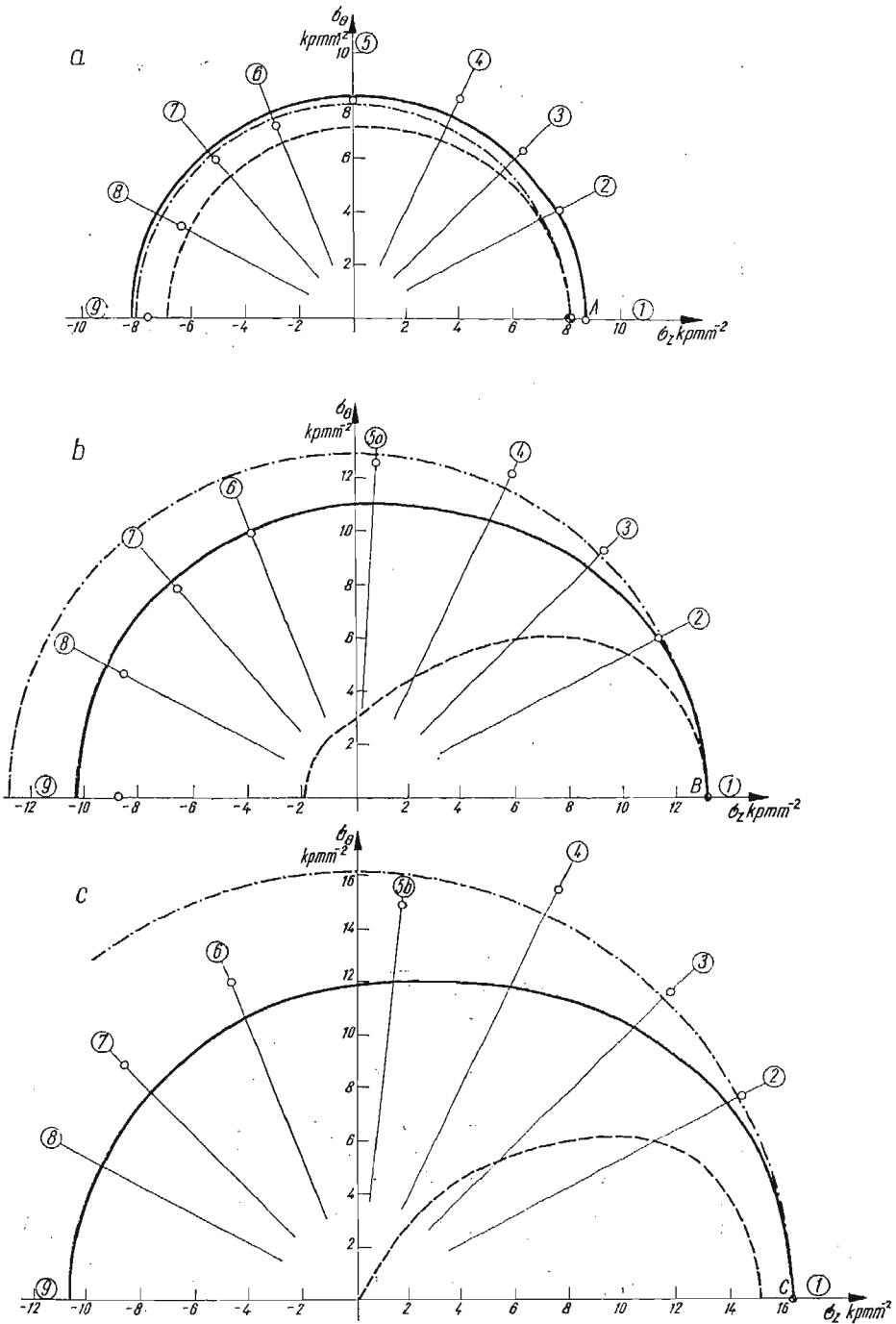
Rys. 15. Linie wpływu odkształceń plastycznych dla $\epsilon_i^p = 0$ przy rozciąganiu w kierunku σ_z
 -.-.-.-.- wzmacnienie izotropowe, - - - - - wzmacnienie kinematyczne, ————— wzmacnienie kinematyczno-izotropowe,
 O punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



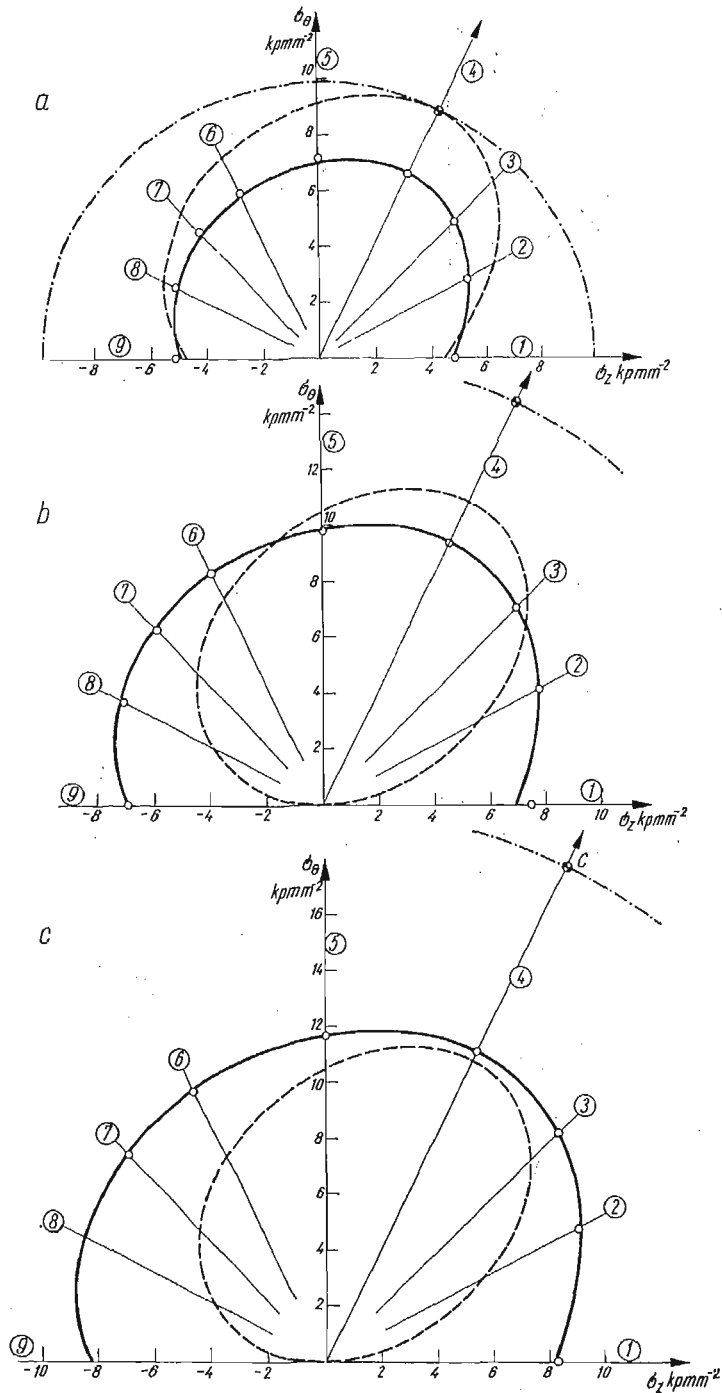
Rys. 16. Linie wpływu odkształceń plastycznych dla $\epsilon_p^p = 0,01\%$ przy rozciąganiu w kierunku σ_z
 - - - - - wzmocnienie izotropowe, - - - - - wzmocnienie kinematyczne, ——— wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



Rys. 17. Linie wpływu odkształceń plastycznych dla $\epsilon_i^p = 0,05\%$ przy rozciąganiu w kierunku σ_z .
 - - - - - wzmocnienie izotropowe, - - - - - wzmocnienie kinematyczne, ——— wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych

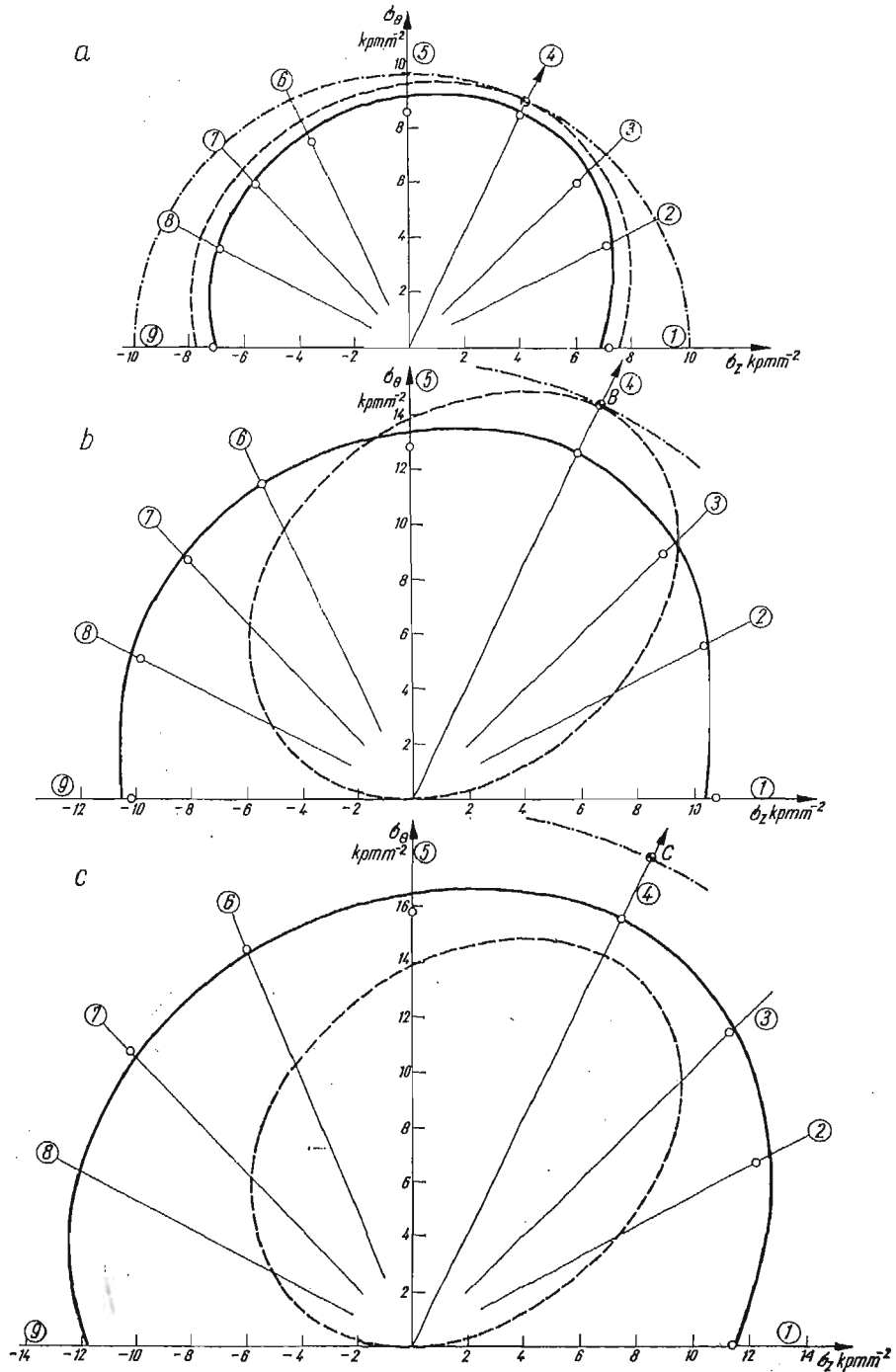


Rys. 18. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_i^p = 0,2\%$ przy rozciąganiu w kierunku σ_z
 - · - · - · - wzmacnienie izotropowe, - - - - wzmacnienie kinematyczne, — — — — wzmacnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



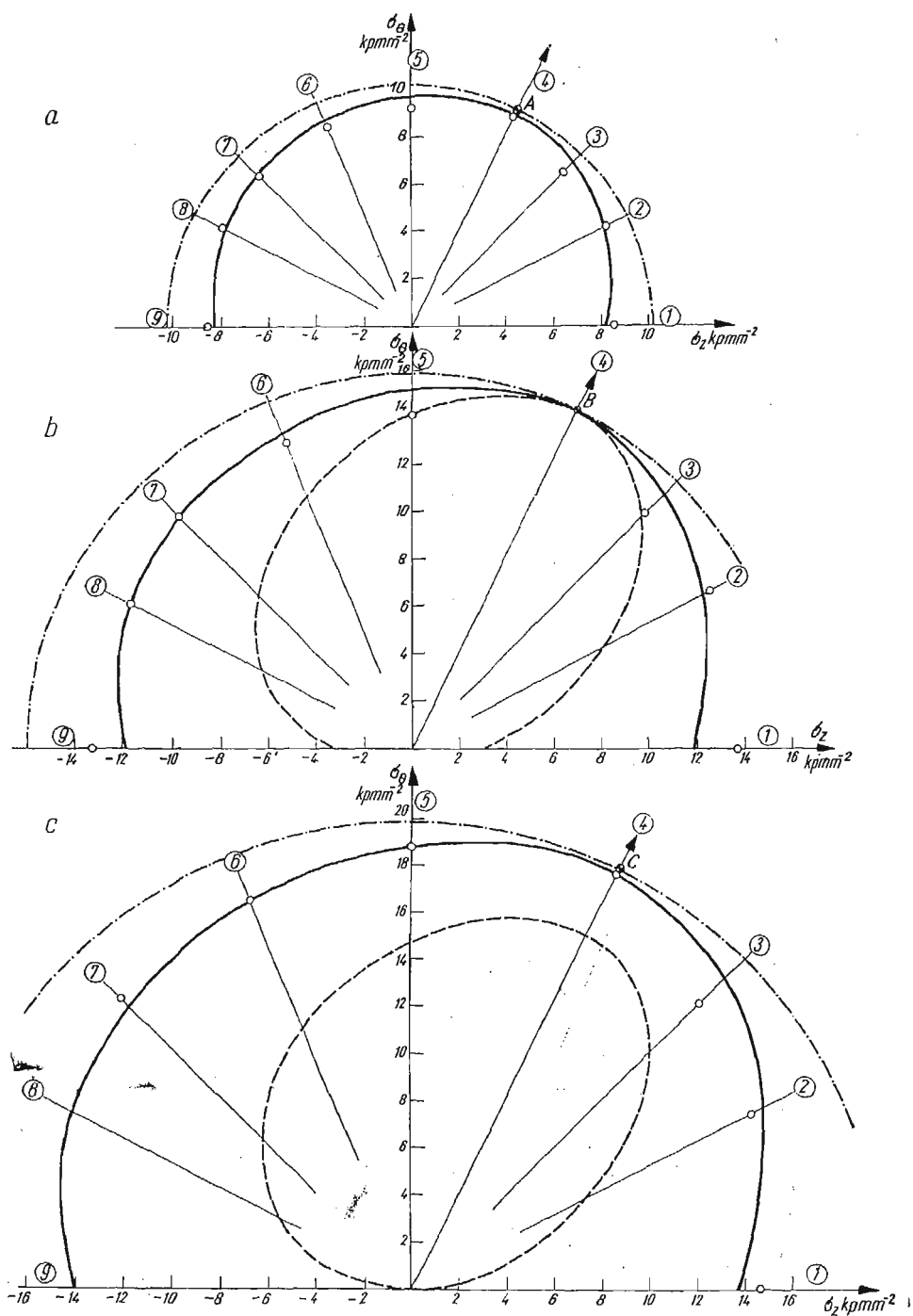
Rys. 19. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\varepsilon_0^p = 0$ przy złożonym rozciąganiu w kierunku 4 ($\sigma_0/\sigma_z = 2,06$)

--- wzmacnienie izotropowe, -.-.- wzmacnienie kinematyczne, — wzmacnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



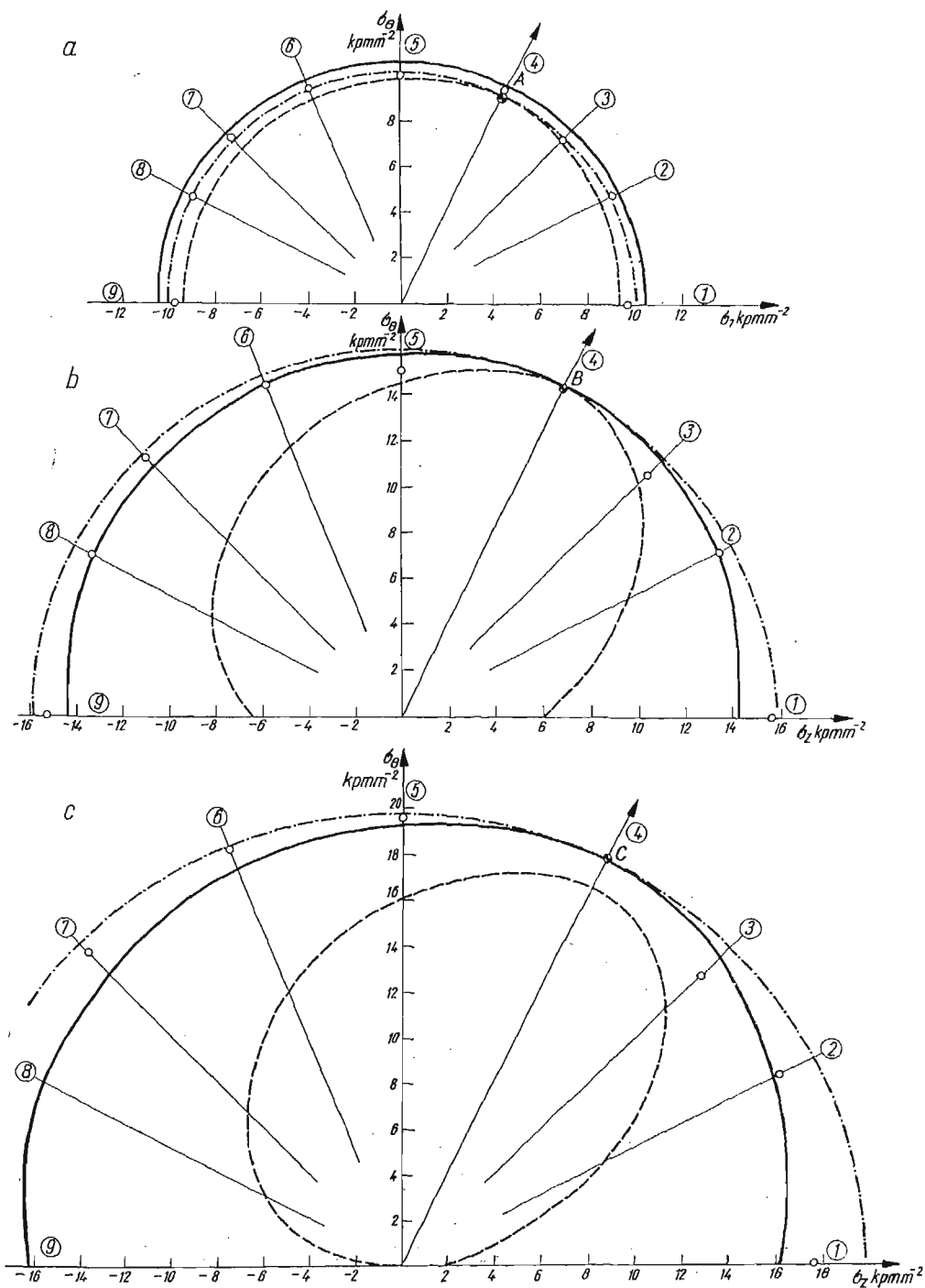
Rys. 20. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_i^p = 0,01\%$ przy złożonym rozciąganiu w kierunku 4 ($\sigma_\theta/\sigma_z = 2,06$)

--- wzmocnienie izotropowe, — wzmocnienie kinematyczne, —·— wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych

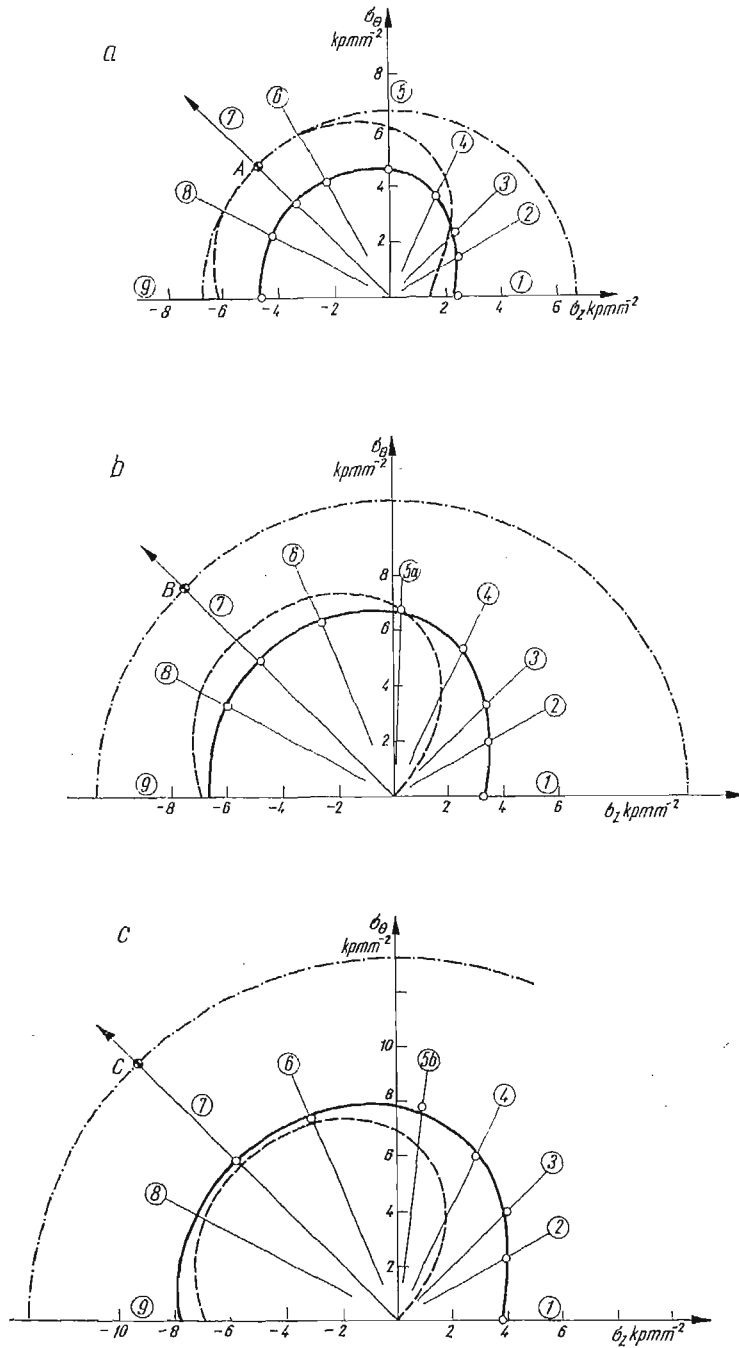


Rys. 21. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_p^p = 0,05\%$ przy złożonym rozciąganiu w kierunku 4 ($\sigma_0/\sigma_z = 2,06$)

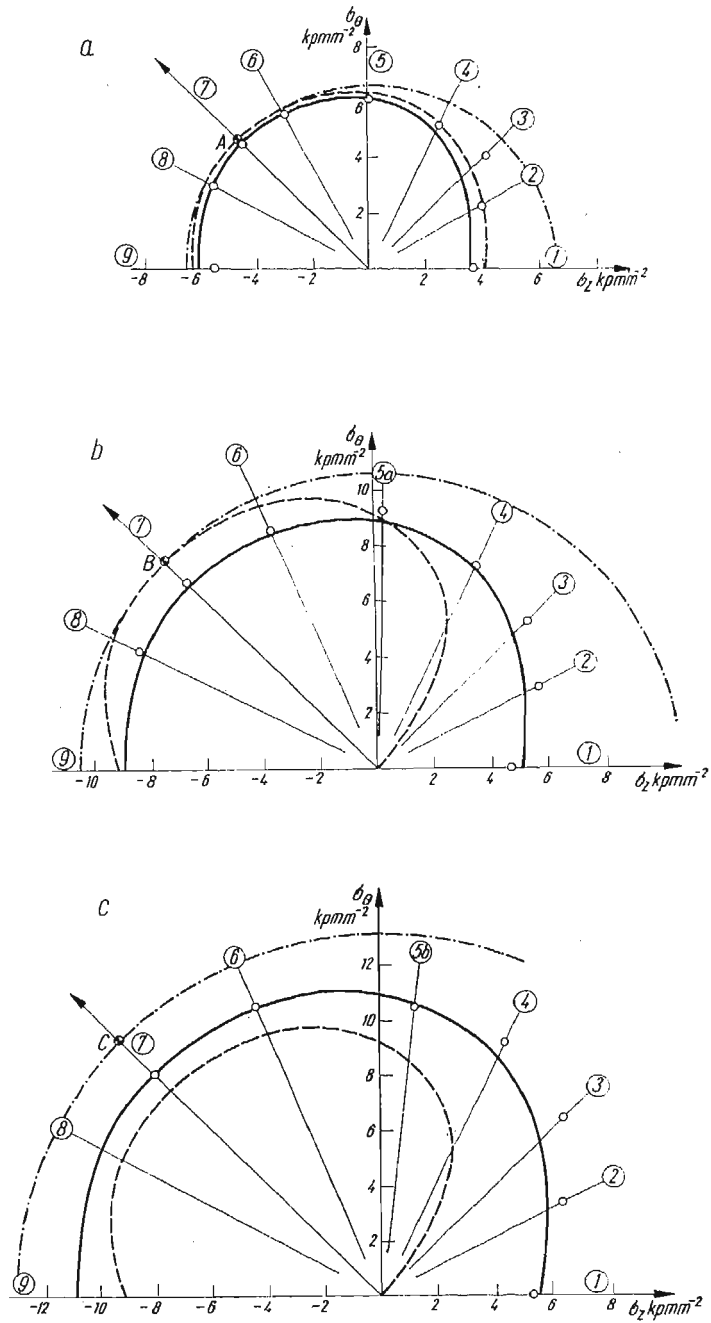
— · — · — wzmacnienie izotropowe, — · — — wzmacnienie kinematyczne, — — — wzmacnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



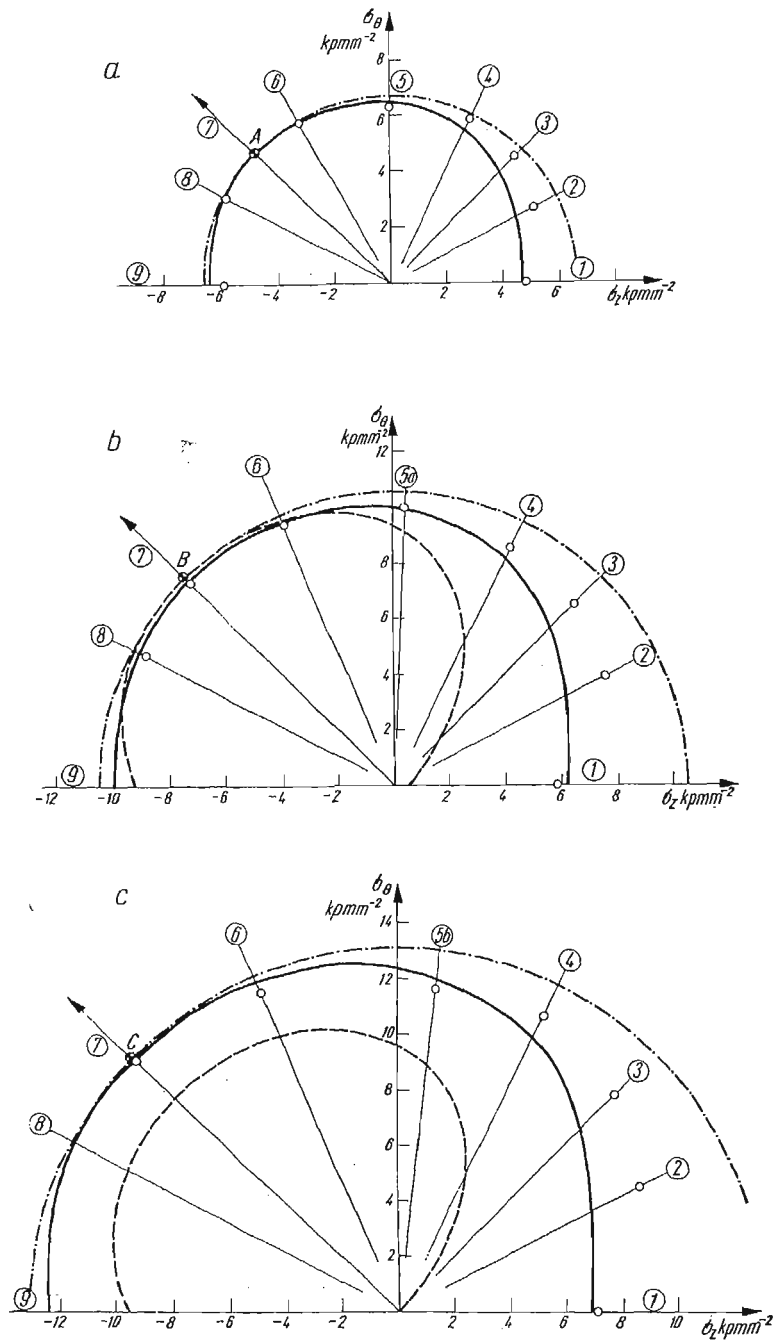
Rys. 22. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_p^I = 0,2\%$ przy złożonym rozciąganiu w kierunku 4 ($\sigma_\theta/\sigma_z = 2,06$)
 - - - - - wzmocnienie izotropowe, - · - - - - wzmocnienie kinematyczne, ————— wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ - punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



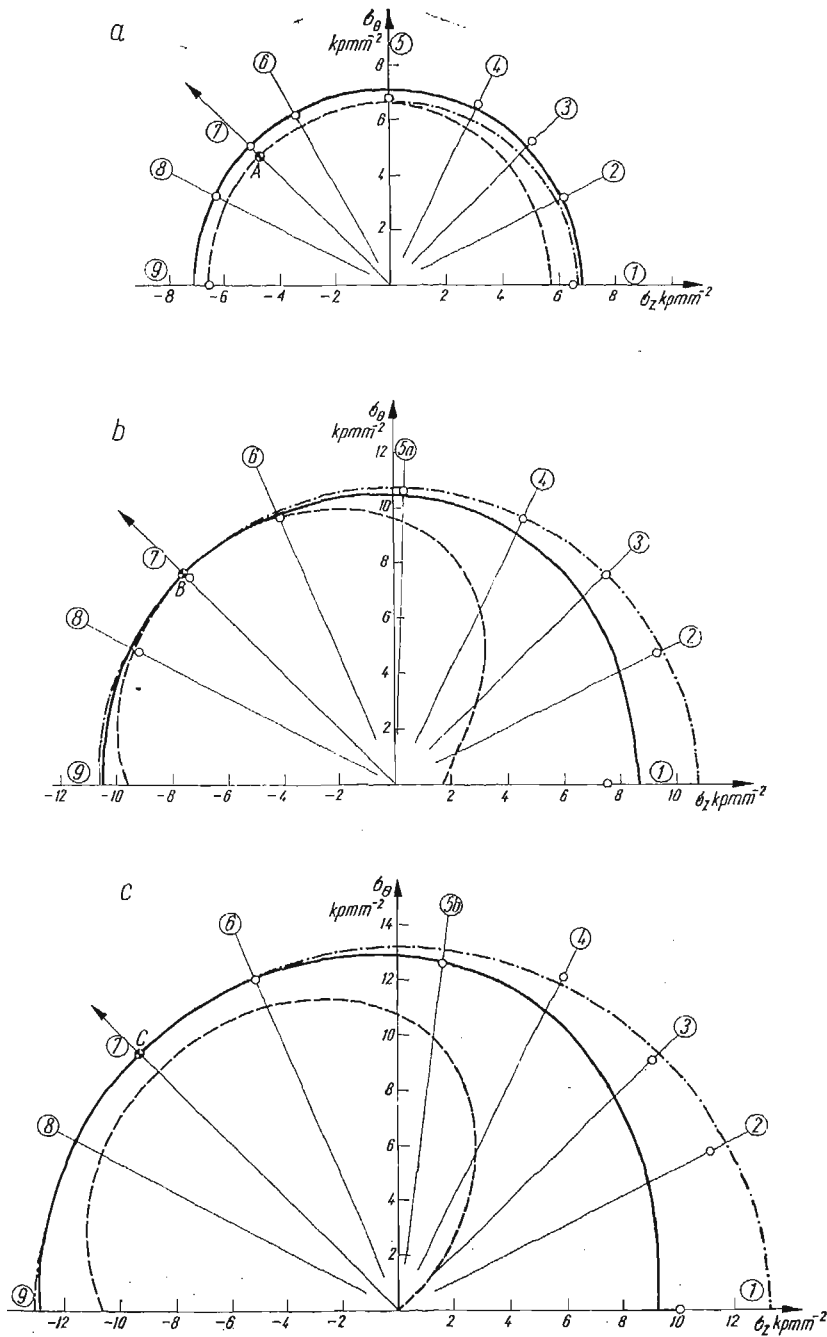
Rys. 23. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_i^p = 0$ przy obciążeniu w kierunku 7 ($\sigma_\theta = -\sigma_z$)
 - - - - - wzmocnienie izotropowe, - · - · - wzmocnienie kinematyczne, — — — wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



Rys. 24. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_p^0 = 0,01\%$ przy obciążeniu w kierunku 7 ($\sigma_\theta = -\sigma_z$)
 - - - - - wzmocnienie izotropowe, - · - · - wzmocnienie kinematyczne, — wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



Rys. 25. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_p^0 = 0,05\%$ przy obciążeniu w kierunku 7 ($\sigma_\theta = -\sigma_z$)
 - - - - - wzmocnienie izotropowe, - · - · - wzmocnienie kinematyczne, — wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych



Rys. 26. Linie wpływu odkształcenia plastycznego dla $\epsilon_i^p = 0,2\%$ przy obciążeniu w kierunku 7 ($\sigma_\theta = -\sigma_z$)
 - - - - - wzmocnienie izotropowe, - · - · - wzmocnienie kinematyczne, ——— wzmocnienie kinematyczno-izotropowe,
 ○ punkty doświadczalne, A, B, C punkty powierzchni obciążeń wstępnych

matycznego oznaczona jest kreską przerywaną. Linia oparta na koncepcji wzmocnienia kinematyczno-izotropowego narysowana jest kreską ciągłą. Łuki koła wyprowadzone z punktów A , B , C oznaczają wzmocnienie izotropowe.

Na wykresach 17a, 21a, 25a, które odpowiadają definicji uplastycznienia $\varepsilon_p^e = 0,05\%$ dla najniższego z zastosowanych tu obciążeń wstępnych, punkty doświadczalne układają się dookoła linii odpowiadającej hipotezie wzmocnienia kinematycznego i kinematyczno-izotropowego. Dla definicji uplastycznienia $\varepsilon_p^e < 0,05\%$ (rys. 15a, 16a, 19a, 20a, 23a, 24a) punkty doświadczalne leżą poniżej linii wpływu otrzymanej przy założeniu hipotezy wzmocnienia kinematycznego. Natomiast przy $\varepsilon_p^e > 0,05\%$ (rys. 18a, 22a, 26a) punkty te znajdują się powyżej tej linii. A więc przy zastosowanym tu obciążeniu wstępnym można dobrać taką definicję uplastycznienia $\varepsilon_p^e = \text{const}$, że hipoteza wzmocnienia kinematycznego będzie opisywać jakościowo i ilościowo rezultaty doświadczeń. W rozpatrywanym przypadku była to wartość $\varepsilon_p^e = 0,05\%$.

W przypadku wzmocnienia kinematycznego, wartości $\bar{\sigma}$ oraz p dla definicji uplastycznienia $\varepsilon_p^e = 0$ (tablica 1), są takie same w przypadku b oraz c. Wobec tego linia wpływu jest w obu przypadkach jednakowa w obrębie tej samej rodziny (rys. 3, 4, 5). Identyczne zjawisko występuje dla $\varepsilon_p^e = 0,01\%$. Dla $\varepsilon_p^e = 0,05\%$ w przypadku b oraz c wartości $\bar{\sigma}$; p różnią się o 4,5%, a więc teoretyczna linia wpływu jest praktycznie również jednakowa przy obu wielkościach obciążeń wstępnych. Natomiast wyniki doświadczeń nie pozostawiają najmniejszej wątpliwości, że jest to wniosek błędny. Na wszystkich wykresach promienie linii wpływu otrzymane doświadczalnie, systematycznie powiększają się wraz ze wzrostem obciążenia wstępnego, wykazując w granicznym przypadku dla $p = 2$ różnice jakościowe i ilościowe w stosunku do teoretycznej linii wpływu dla materiału ze wzmocnieniem kinematycznym.

Linia wpływu otrzymana przy założeniu hipotezy wzmocnienia izotropowego jest górną granicą wyników teoretycznych w każdym przypadku obciążenia. Przy definicjach uplastycznienia dopuszczających małe odkształcenia plastyczne, wartości naprężeń otrzymane z doświadczeń są znacznie mniejsze od przewidzianych przez tę teorię (rys. 15, 16, 19, 20, 23, 24). W miarę wzrostu odkształcenia trwałego związanego z definicją uplastycznienia (rys. 17, 18, 21, 22, 25, 26), punkty doświadczalne zbliżają się do wyników teoretycznych, szczególnie w zakresie, gdzie kierunki odkształceń wstępnych i wtórnych są bliskie sobie. Gdy kierunki te oddalają się od siebie, anizotropia powiększa się i występuje nawet przy definicji uplastycznienia $\varepsilon_p^e = 0,2\%$. Zasadniczy wniosek wynikający z hipotezy wzmocnienia izotropowego, że granica plastyczności rośnie proporcjonalnie do obciążenia wstępnego, można uważać za słuszny przy technicznej granicy plastyczności w zakresie kierunków obciążeń odległych o kąt $\alpha - \varphi < 90^\circ$ od kierunku obciążenia wtórnego.

Linie wpływu wykreślone na podstawie teorii uwzględniającej zmianę wymiarów i przemieszczanie powierzchni plastyczności opisują wyniki doświadczeń lepiej niż w poprzednich wypadkach, zarówno pod względem jakościowym, jak i ilościowym w całym zakresie zastosowanych obciążeń wstępnych. Tym niemniej występują systematyczne rozbieżności punktów doświadczalnych z liniami teoretycznymi.

Dla $\varepsilon_p^e = 0,05\%$ oraz $0,2\%$ (rys. 17, 18, 21, 22, 25, 26), szczególnie przy obciążeniu wstępnym do $\bar{\sigma}_{\text{max}} = 13 \text{ kpm}^{-2}$ oraz $16,1 \text{ kpm}^{-2}$ (przypadek b oraz c) widać, że nie-

które punkty doświadczalne odbiegają wyraźnie od linii teoretycznej. Przy obciążeniu wtórnym w kierunku $\Phi = 0^\circ$ (rys. 17, 18) występuje to dla kierunków obciążeń wstępnych α około 60° . Analogiczna rozbieżność w przypadku obciążenia wtórnego w kierunku $\Phi = 135^\circ$ zdarza się dla kątów $\Phi - \alpha$ około $90-105^\circ$ (rys. 25, 26). W przypadku obciążenia wtórnego w kierunku $\Phi = 64^\circ$ różnice te pojawiają się przy podobnych odległościach kątowych, ale nie są tak wyraźne (rys. 21, 22). Zjawisko to, pod nazwą efektu poprzecznego, było już niejednokrotnie stwierdzone doświadczalnie. Szczegółowo literatura na ten temat przeanalizowana jest w pracach [6], [21]. Tutaj należy tylko stwierdzić, że źródłem opisanych rozbieżności linii teoretycznych z wynikami doświadczeń może być założenie, że powierzchnia plastyczności materiału odkształconego jest elipsą. Tymczasem doświadczalnie stwierdzono [4], [5], [6], że przy większych wartościach definicji uplastycznienia odbiega ona dość znacznie od elipsy Hubera–Misesa. Zniekształcenie powierzchni plastyczności jest również w stanie wyjaśnić przyczynę, dla której punkty doświadczalne w kierunkach 3 oraz 5 (rys. 20, 21, 22) znajdują się poniżej linii teoretycznej.

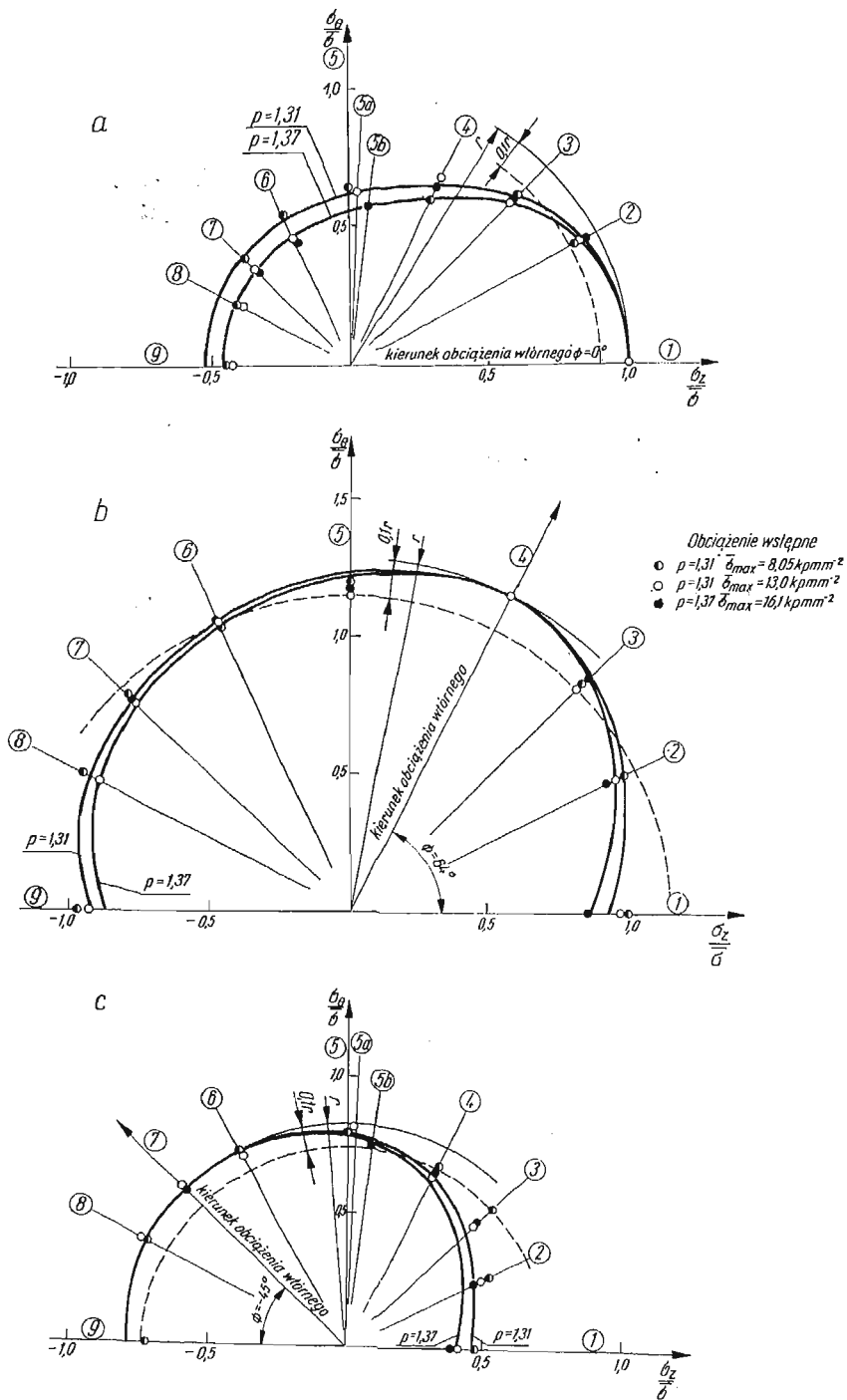
Innego rodzaju różnicę pomiędzy wynikami i teorią widać na rys. 16, 17. Dla kierunków 8 i 9 wyniki doświadczalne leżą wyraźnie poniżej ciągłej krzywej teoretycznej pomimo, że na rys. 15 dla niższej definicji uplastycznienia widać zgodność wyników. Przyczyną tego jest silna anizotropia własności, pojawiająca się na tych kierunkach po przekroczeniu granicy proporcjonalności, w porównaniu do próby ściskania po rozciąganiu, z której wyznaczano σ'' (wartość σ'' jest przy tym kierunku obciążenia wtórnego równa promieniowi linii wpływu w kierunku 9).

Z powyższej dyskusji wynika, że niezależnie od kierunku obciążenia wtórnego obserwuje się podobne zjawiska związane z kierunkiem obciążenia wstępnego i intensywnością odkształceń postaciowych. Linie wpływu wyznaczone dla ustalonej wartości parametru p opisują z podobną dokładnością wyniki doświadczalne dla stosowanych tu trzech kierunków obciążeń wtórnych. Zatem koncepcja polegająca na zmierzeniu tego parametru podczas próby w jednym kierunku obciążenia (w tym wypadku było to obciążenie proste) i ekstrapolowania wyniku na płaszczyznę naprężeń okazała się słuszna.

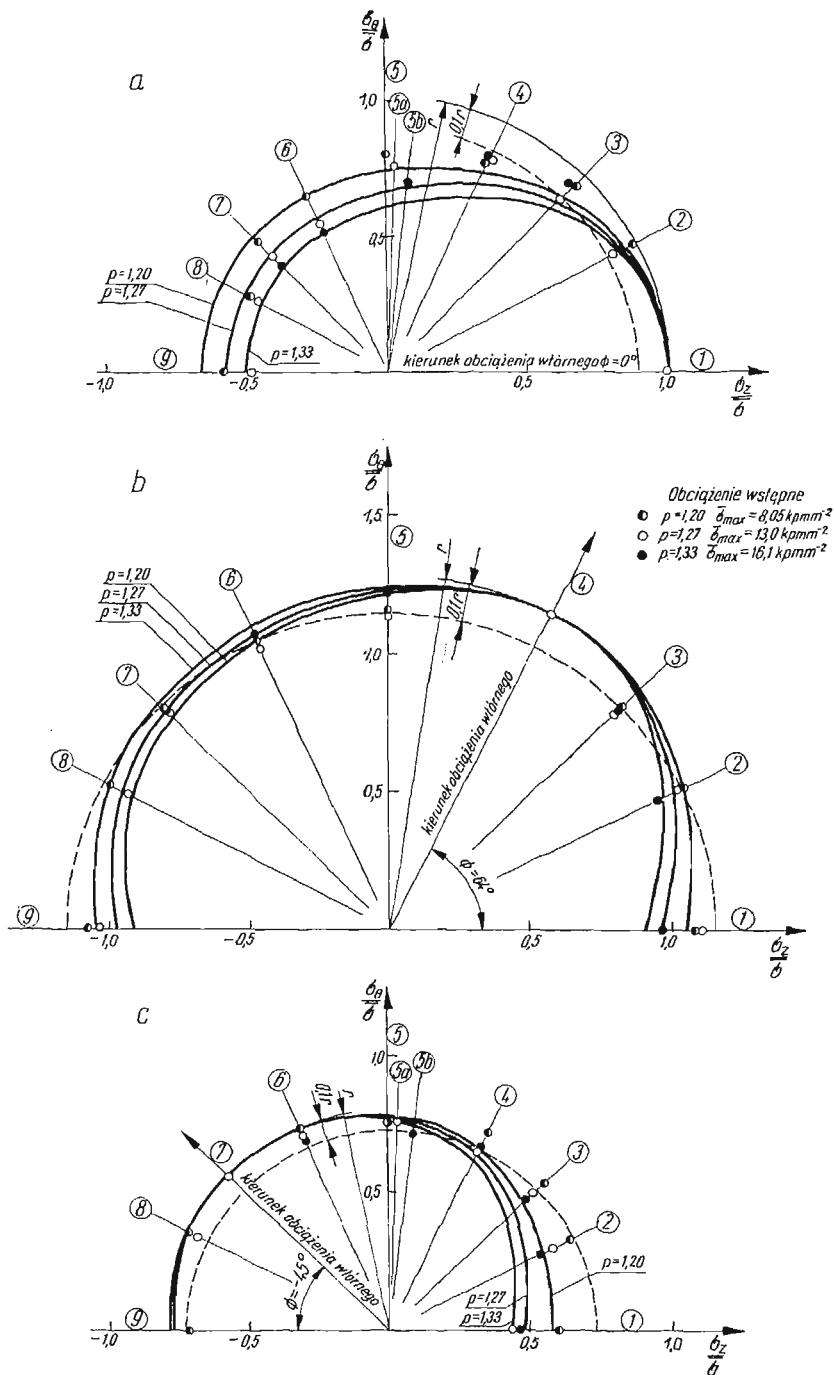
Porównajmy obecnie na wykresie we współrzędnych bezwymiarowych $\frac{\sigma_\theta}{\bar{\sigma}}$; $\frac{\sigma_z}{\bar{\sigma}}$ wyniki badania linii wpływu odpowiadające jednej wartości $\bar{\sigma}$ przy trzech różnych wielkościach obciążenia wstępnego. Na wykresach tych umieszczono tylko linie wpływu otrzymane przy założeniu hipotezy wzmocnienia kinematyczno-izotropowego. Wartości $\bar{\sigma}$, użyte jako wielkości odniesienia, umieszczono w tablicy 2. Dla danej wielkości obciążenia wstępnego oraz definicji uplastycznienia jest to wielkość stała, niezależna od kierunku obciążenia wtórnego, dla którego zbudowana jest linia wpływu.

Porównanie przeprowadzono dla definicji uplastycznienia $\epsilon_p^0 = 0,01\%$ (rys. 27) oraz $\epsilon_p^0 = 0,05\%$ (rys. 28). Na rys. 27 umieszczono wyniki przeliczone z rys. 16, 20, 24. Rysunek 28 zawiera dane z rys. 17, 21, 25. Punkty doświadczalne odpowiadające różnym wielkościom obciążenia wstępnego, oznaczone są odmiennie. Na wykresach podano oznaczenie punktów oraz parametr p , odpowiadający danej linii.

Łuk koła narysowany promieniem $r - 0,1r$ oznacza zmniejszenie granicy plastyczności o 10% w stosunku do wartości maksymalnej, której odpowiada łuk o promieniu r . Jak widać, w każdym przypadku obciążenia wtórnego istnieje taki kierunek obciążenia



Rys. 27. Porównanie wyników doświadczeń wykonanych przy różnych wielkościach obciążeń wstępnych $\epsilon_1^p = 0,01\%$



Rys. 28. Porównanie wyników doświadczeń wykonanych przy różnych wielkościach obciążeń wstępnych $\epsilon_p^0 = 0,05\%$

wstępnego, że po jego przekroczeniu spadek granicy plastyczności zmierzony doświadczalnie, jest większy niż 10%. Ponieważ łuk koła narysowany promieniem r na rys. 28 jest jednocześnie linią wpływu otrzymaną przy założeniu hipotezy wzmocnienia izotropowego, to wynika stąd, że hipoteza ta ma ograniczony zakres zastosowania.

Punkty doświadczalne odpowiadające różnym wielkościom obciążenia wstępnego tworzą pasmo rozrzutu dookoła linii teoretycznych, które stanowią pewną wartość średnią wyników eksperymentalnych. Pozwala to na wyciągnięcie praktycznego wniosku, że w dużym zakresie zmiany obciążenia wstępnego, można uważać parametr p za stały. Tak np. w rozpatrywanych przypadkach, dla $\varepsilon_i^p = 0,01\%$ można przyjąć $p = 1,32$, a dla $\varepsilon_i^p = 0,05\%$ odpowiednio $p = 1,27$. Dla granicy proporcjonalności $\varepsilon_i^p = 0$ postulat ten jest spełniony całkowicie, gdyż w rozpatrywanych trzech przypadkach obciążeń, wartość p zmienia się circa 1%.

Dla $\varepsilon_i^p = 0,05\%$ mamy $\bar{\sigma}_{\max} \cong \bar{\sigma}$ (tablica 2), a więc jest to wielkość dana. Przyjęcie $p = \text{const}$ oznacza tu, że powierzchnia plastyczności rozszerza się wprost proporcjonalnie do obciążenia wstępnego $\bar{\sigma}_{\max}$. Założenie takie może znacznie uprościć stosowanie proponowanej metody w celu oszacowania granicy plastyczności, gdyż w takim przypadku również i linia wpływu rozszerza się proporcjonalnie do obciążenia wstępnego. Oczywiście jest, że w przypadku materiału izotropowego, dla $\varepsilon_i = 0$ mamy $p = 1$, a więc założenie powyższe dla $p \neq 1$ możliwe jest tylko w zakresie odkształceń $\varepsilon_i - \varepsilon_i^0$, gdy $\varepsilon_i^0 > 0$.

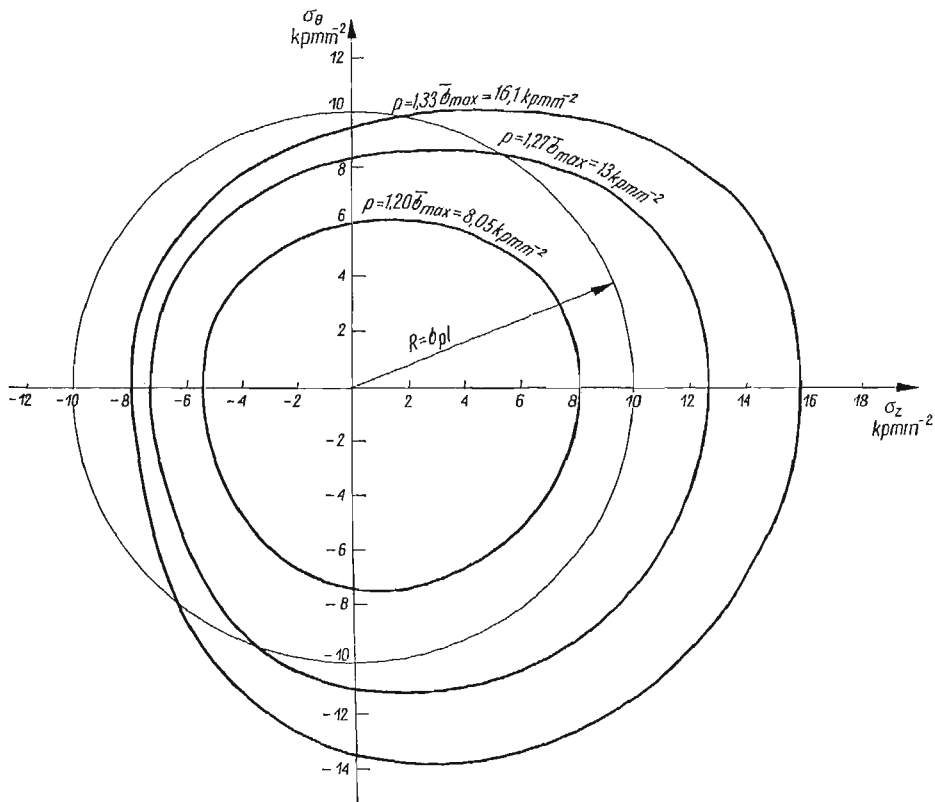
5.4. Praktyczne zastosowanie wykresów opisujących wpływ odkształcenia na granicę plastyczności. Analiza przeprowadzona w poprzednich rozdziałach wykazała, że można za pomocą metod półempirycznych opisać zmiany granicy plastyczności spowodowane przez różne kierunki odkształceń. Metoda przedstawienia granicy plastyczności w funkcji kierunku obciążenia pozwoliła zbadać zachowanie się materiału i ocenić prawidłowość zjawisk będących wynikiem nabycia przez materiał pewnego odkształcenia trwałego, a więc reprezentuje ona wartości poznawcze. Obecnie zajmiemy się praktycznym wykorzystaniem niektórych wniosków wynikających z takiego potraktowania tematu. Rozpatrywać będziemy tylko linie wpływu otrzymane przy założeniu hipotezy wzmocnienia kinematyczno-izotropowego, gdyż dwie inne przeanalizowane hipotezy dawały mniej dokładną ocenę wyników doświadczeń.

Potraktujmy obciążenie wstępne, jako obróbkę plastyczną, natomiast obciążenie wtórne, jako obciążenie eksploatacyjne. Z definicji wynika, że każda z rodzin linii wpływu określona stałym kierunkiem obciążenia wtórnego wykonana jest dla innego przypadku obciążeń eksploatacyjnych. Jak widać z rys. 3, 4, 5, optymalnym kierunkiem obciążenia ze względu na wykorzystanie maksymalnej wartości granicy plastyczności jest kierunek obróbki plastycznej. Reguła ta wynika z przyjętych założeń (rozdz. 2).

Jeżeli obciążenie eksploatacyjne różni się od kombinacji naprężeń $\sigma_\theta; \sigma_z$ przy obróbce plastycznej, to promień skierowany pod kątem $\alpha = \arctg \frac{\sigma_\theta}{\sigma_z}$ określa w tym przypadku zmniejszoną granicę plastyczności.

Innego typu zadanie powstaje w przypadku, gdy poszukujemy obróbki plastycznej, która zapewni osiągnięcie założonej granicy plastyczności. Wyjaśnia to wykres (rys. 29), na którym naniesione są linie wpływu otrzymane przy trzech wartościach wyłączenia ma-

teriału. Przykładowo wykres wykonano w przypadku, gdy obciążeniem eksploatacyjnym jest proste rozciąganie. Rysując koło, którego promień równy jest danej granicy plastyczności, dzielimy obszar na dwie części: na zewnątrz koła znajdują się warianty obróbki, w wyniku których granica plastyczności jest większa od wartości minimalnej, określonej przez obwód koła. Warianty obróbki wewnątrz koła są niedopuszczalne. Przecięcie koła z linią wpływu określa kombinację naprężeń σ_θ ; σ_z przy obróbce oraz niezbędną wielkość wyężenia $\bar{\sigma}_{max}$.



Rys. 29. Wyznaczenie parametrów obróbki plastycznej, zapewniającej uzyskanie granicy plastyczności σ_{pl}

Szczególnym przypadkiem tego zadania jest określenia zakresu programów obróbki plastycznej dających spadek granicy plastyczności nie większy niż np. 10% jej wartości maksymalnej. Przypadek ten przedstawiony jest na wykresach wykonanych we współrzędnych bezwymiarowych (rys. 27, 28), gdzie narysowano koła o odpowiednim promieniu. Jak widać z tych wykresów, zakres możliwych kierunków obróbki zmienia się w zależności od wielkości obciążenia wstępnego. W miarę wzrostu wyężenia zakres ten maleje. Wynika stąd prosty wniosek odnośnie wyznaczania współczynnika p . Mianowicie, współczynniki te, obliczone przy maksymalnych obciążeniach dla rozpatrywanego zakresu, wyznaczają linię wpływu dającą przy mniejszych obciążeniach wstępnych wartości granicy plastyczności niższe od rzeczywistych.

6. Podsumowanie i wnioski.

Opisane wyżej badania przeprowadzono na mosiądzu M-63. Należy on do materiałów, które przy pierwszym obciążeniu spełniają kryterium plastyczności Hubera–Misesa. W niniejszej pracy doświadczenia przeprowadzono przy złożonym rozciąganiu oraz przy kombinacjach naprężeń rozciągających i ściskających. Stwierdzono izotropowe własności mosiądzu w całym zakresie zrealizowanych obciążeń.

Zmiany granicy plastyczności pod wpływem różnych kierunków odkształceń przeanalizowano za pomocą wykresów nowego typu, nazywanych powierzchniami wpływu odkształceń plastycznych. Szczegółową analizę teoretyczną i doświadczalną przeprowadzono przy obciążeniu materiału przez dwa naprężenia normalne. W takim przypadku powierzchnia wpływu redukuje się do linii. Analiza konstrukcji linii wpływu, przy założeniu trzech hipotez wzmocnienia: kinematycznej, izotropowej i pewnego przypadku hipotezy kinematyczno-izotropowej dowiodła, że postać równania linii wpływu przy tych trzech rodzajach wzmocnienia materiału jest taka sama. Różna jest natomiast interpretacja fizyczna wielkości stałych, wyznaczonych za pomocą doświadczeń.

Doświadczenia wykazały, że hipoteza wzmocnienia kinematycznego opisuje zachowanie się materiału najlepiej przy małych odkształceniach. Natomiast przy obciążeniu wstępnym przekraczającym granicę plastyczności rzędu 100% i więcej, widoczne są różnice ilościowe i jakościowe między hipotezą wzmocnienia kinematycznego i doświadczeniem. Sugeruje ona istnienie granicznej linii wpływu, podczas gdy wyniki eksperymentalne wskazują na stałe powiększanie się granicy plastyczności wraz ze wzrostem obciążenia wstępnego.

Zgodność hipotezy wzmocnienia izotropowego z doświadczeniem poprawia się w miarę wzrostu odkształcenia trwałego dopuszczanego przez definicję uplastycznienia, jednakże nawet przy definicji $\varepsilon_p^r = 0,2\%$ pozostaje wyraźna anizotropia przy kierunku odkształcenia przeciwnym do wstępnego.

Oczywiste jest, że hipoteza wzmocnienia kinematyczno-izotropowego, uwzględniając przesunięcie i rozszerzenie powierzchni plastyczności, daje lepsze rezultaty niż dwie poprzednie hipotezy. Zastosowano tu opis wzmocnienia oparty na pomiarze efektu Bauschingera [23], [24] i na założeniu o izotropowym rozszerzaniu przemieszczającej się powierzchni plastyczności. Okazało się, że jest to wystarczające dla uchwycenia zasadniczych ilościowych i jakościowych zmian granicy plastyczności, niezależnie od definicji uplastycznienia i wielkości wstępnych obciążeń. Najlepszą zgodność teorii z wynikami eksperymentalnymi uzyskano dla granicy proporcjonalności i sprężystości. Przy definicjach uplastycznienia rzędu technicznej granicy plastyczności, pojawiają się rozbieżności teorii i doświadczenia, których przyczyną może być nieuwzględnienie wpływu kierunku obciążenia na kształt powierzchni plastyczności.

Z przeprowadzonych badań wynika, że dla materiału wstępnie izotropowego można przyjąć założenie o izotropowych zmianach powierzchni plastyczności w połączeniu z przemieszczeniem jej środka. Wobec tego, jeśli materiał poddamy obróbce plastycznej, to optymalnym kierunkiem obciążenia ze względu na uzyskanie maksymalnej granicy plastyczności jest kierunek obróbki plastycznej. Gdy z przyczyn technicznych, przy obciążeniu eksploatacyjnym występuje inna kombinacja naprężeń niż podczas obróbki, to

wówczas granicę plastyczności określa promień linii wpływu. Możliwe jest również rozwiązanie zagadnienia odwrotnego: zakładając dopuszczalną minimalną wartość granicy plastyczności, wyznaczamy zakres wariantów obróbki o różnych kombinacjach naprężeń rysując koło o odpowiednim promieniu do przecięcia z linią wpływu.

Z pracy tej wynikają następujące zasadnicze wnioski:

1. Linie wpływu odkształcenia plastycznego na granicę plastyczności, wyznaczone w podany sposób, opisują wyniki doświadczalne, a więc mogą stanowić podstawę praktycznych wniosków konstrukcyjno-technologicznych.

2. Aby można było przejść geometrycznie od powierzchni plastyczności do powierzchni wpływu, współrzędne przestrzeni naprężeń powinny być dobrane w ten sposób, aby iloczyn skalarny punktu był równy modułowi naprężenia całkowitego.

3. Hipotezy wzmocnienia kinematycznego i wzmocnienia izotropowego nie ujmują zmian granicy plastyczności rzeczywistego materiału. Stosowanie ich jest możliwe tylko w ściśle określonym zakresie.

4. Hipoteza wzmocnienia kinematyczno-izotropowego oparta na pomiarze efektu Bauschingera, opisuje ilościowe i jakościowe zmiany granicy plastyczności niezależnie od wielkości definicji uplastycznienia. Jest ona jednocześnie wystarczająco prosta dla celów praktycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. H. J. IVEY, *Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys*, J. Mech. Eng. Sc., 3, 1961, 15–31.
2. D. R. JENKINS, *Kinematic-hardening in zinc-alloy tubes*, J. Appl. Mech., 4, 32, 1965, 849–858.
3. B. H. JONES, *Assessing instability of thin-walled tubes under biaxial stresses in the plastic range*, Exp. Mech., 1, 8, 1968, 10–18.
4. J. MIASTKOWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, *Doświadczalne badanie powierzchni plastyczności wstępnie odkształconego miedzi*, Mech. Teor. Stos., 2, 3, 1965, 55–66.
5. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności*, Mech. Teor. Stos., 2, 4, 1966, 5–16.
6. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności (część druga)*, Mech. Teor. Stos., 1, 6, 1968, 3–31.
7. J. MIASTKOWSKI, *Analysis of the memory effect of plastically prestrained material*, Arch. Mech. Stos., 3, 20, 1968, 261–277.
8. J. PARKER, M. B. BASSETT, *Plastic stress-strain relationships — some experiments to derive a subsequent yield surface*, J. Appl. Mech., 4, 31, 1964, 676–682.
9. A. PHILLIPS, R. L. SIERAKOWSKI, *On the concept of the yield surface*, Acta Mechanica, 1, 1, 1965, 29–35.
10. W. PRAGER, *The theory of plasticity — a survey of recent achievements*, James Clayton Lecture, Proc. Inst. Mech. Engrs., 169, 1955, 41–57.
11. R. T. SHIELD, H. ZIEGLER, *On Prager's hardening rule*, Zeits. Angew. Math. Phys., 9, 1958, 260–276.
12. E. SHIRATORI, K. Ikegami, *Experimental study of the subsequent yield surface by using cross-shaped specimens*, J. Mech. Phys. Solids, 6, 16, 1968, 373–394.
13. R. L. SIERAKOWSKI, H. PHILLIPS, *The effect of repeated loading on the yield surface*, Acta Mechanica, 2–3, 6, 1968, 217–231.

14. W. SZCZEPIŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos., 2, 15, 1963, 275–296.
15. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *An experimental study of the effect of the prestraining history on the yield surfaces of an aluminium alloy*, J. Mech. Phys. Solids, 16, 1968, 153–162.
16. W. SZCZEPIŃSKI, K. TURSKI, *On the lines of influence of plastic deformation*, Arch. Mech. Stos., 1, 21, 1969, 49–57.
17. G. J. TAYLOR, H. QUINNEY, *The plastic distortion of metals*, Phil. Trans. Roy. Soc., A 230, 1931, 323–362.
18. *Teoria plastyczności*, Praca zbiorowa pod red. W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA, PWN 1965.
19. H. ZIEGLER, *A modification of Prager's hardening rule*, Quart. Appl. Math., 17, 1959, 55–65.
20. З. П. КАМЕНЦЕВА, *Исследование эффекта Баушингера при малых пластических деформациях*, Исслед. по Упругости и Пластичности, сб. 6, Изд. ЛГУ, 1967, 150–155.
21. Н. Г. СВЕРДЛОВА, *Об изменении формы границы текучести в случае произвольного направления нагружения*, Исслед. по Упруг. и Пласт., сб. 7, Изд. ЛГУ, 1968, 144–147.
22. Н. Г. СУТУРИНА, *О форме последующей границы текучести стали*, Исслед. по Упруг. и Пласт., сб. 6, Изд. ЛГУ, 1967, 156–160.
23. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *Исследование эффекта Баушингера*, Изв. АН СССР, Мех. и Машиностр., 6, 1964, 131–137.
24. Г. Б. ТАЛЫПОВ, *К теории пластичности учитывающей эффект Баушингера*, Мех. Тв. Тела, 6, 1966, 81–88.
25. О. А. ШИШМАРЕВ, *Влияние вида деватора напряжений на пластическое деформирование стали*, Мех. Тв. Тела, 5, 1966, 112–117.
26. О. А. ШИШМАРЕВ, *Экспериментальное исследование границ текучести стали при простом и сложном нагружении*, Мех. Тв. Тела, 2, 1968, 187–190.
27. В. ЩЕПИНСКИЙ, *Экспериментальные исследования поведения поверхности текучести металлов при сложном нагружении*, Сб. материалов международной конференции по механике сплошных сред, Варна, сентябрь, 1966, 169–179.
28. Ю. И. ЯГН, О. А. ШИШМАРЕВ, *Некоторые результаты исследования границ упругого состояния пластически растянутых образцов никеля*, ДАН СССР, Т. 119, 1, 1958, 46–48.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ПОВЕДЕНИЕ МЕТАЛЛА ПРИ РАЗНЫХ ПУТЯХ ВТОРИЧНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Темой работы является экспериментальное исследование изменения предела текучести металла после пластической деформации и сравнение опытных данных с теоретическими результатами, полученными на основе трех гипотез упрочнения. Работа имеет основной характер, связана однако с приложениями, обращая внимание на возможность определения пределов допустимости определенных видов холодной обработки, нужных для получения оптимальных свойств материала. Исследования выполнены согласно новой концепции поверхностей влияния типа предварительной пластической деформации на поведение металла во время вторичного нагружения по заданной программе. С этой целью спроектирован испытательный стенд для пластического деформирования трубчатых образцов в условиях двусного растяжения или совместного растяжения и сжатия. Образцы выполнены из латуни. Испытания показали, что гипотезы кинематического и изотропного упрочнений не пригодны для вычисления изменений предела текучести латуни после разных путей предварительной деформации. Качественные и количественные изменения предсказывает лишь гипотеза кинематически-изотропного упрочнения, независимо от определения предела текучести и величины предварительной нагрузки. Эта гипотеза достаточно проста для практических задач.

S u m m a r y

INVESTIGATION OF THE INFLUENCE OF PLASTIC DEFORMATION ON BEHAVIOUR OF METALS UNDER VARIOUS WAYS OF REPEATED LOADING

The present study is concerned with the experimental investigation of the yield strength of material undergoing previous plastic deformation and is comparing the results with the theoretical analysis based upon various hardening rules. In general, this study is of a basic character though it has a practical aspect too showing a possibility of finding the range of prestressing programmes which give an optimum material property. The research as a whole is carried out according to the new scientific idea of the surfaces describing the influence of various prestressing programmes on the behaviour of metal under repeated loading following the fixed loading path. To this end an apparatus was designed for plastic deforming of the tubular specimens under the condition of complex state of stresses. It gives the possibility of investigations under biaxial tension-tension and biaxial tension-compression. The tests were carried out on the specimens made of brass. It was found that the changes of yield strength of this material caused by various ways of primary loading do not obey the kinematic or isotropic hardening rules. However, one of the kinematic-isotropic hardening rules adapted here describes the qualitative and quantitative changes of the yield strength independently of the assumed yield criterion (per cent offset) for various values of primary loadings. This hardening rule is simple enough for practical use.

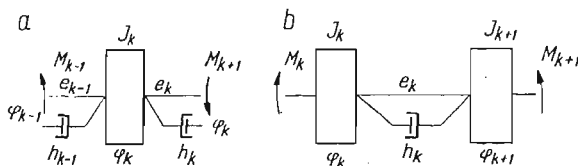
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1970 r.

REDUKCJA STOPNI SWOBODY UKŁADÓW DYSKRETNÝCH

JANUSZ BARAN, KRZYSZTOF MARCHELEK (SZCZECIN)

Przy modelowaniu maszyn za pomocą układów dyskretnych bardzo ważną rolę odgrywa dobór liczby stopni swobody modelu. Zwykle model charakteryzuje się znaczną liczbą stopni swobody, co utrudnia analizę i obliczenia, a także może wpływać na dokładność obliczeń. Stąd dążność do modelowania maszyn za pomocą układów dyskretnych o możliwie małej liczbie stopni swobody. Należy jednakże pamiętać o tym, aby model opisywał zasadnicze cechy układu rzeczywistego. Redukcja stopni swobody musi być naukowo uzasadniona, nie można jej dokonywać w sposób dowolny.



Rys. 1. Typowe układy częściowe

Jedną z metod redukcji stopni swobody układów dyskretnych opracował i przedstawił RIWIN w pracy [1]. Metoda Riwina polega na redukcji układów częściowych, charakteryzujących się dużymi częstotliwościami drgań własnych. W większości praktycznych przypadków, zakres częstotliwości sił wymuszających jest taki, że nie wymaga się znajomości wyższych częstotliwości własnych układu. RIWIN wyznaczył wzory redukcyjne dla dwóch podstawowych parametrów układu, mianowicie masy i współczynnika sztywności. Przy obliczeniach charakterystyk dynamicznych modelu na maszynie matematycznej konieczna jest znajomość wartości współczynników tłumienia, aby współrzędne tych charakterystyk przyjmowały wartości skończone. W pracy przedstawiono modyfikację metody Riwina, dającą możliwość wyznaczania wzorów redukcyjnych dla współczynników tłumienia.

Każdy układ dyskretny można rozbić na dwa typowe układy częściowe (rys. 1). Jeśli wprowadzić pojęcie zespolonego współczynnika sztywności

$$(1) \quad K_j = k_j + i\omega h_j = \frac{1}{e_j} + i\omega h_j,$$

gdzie: k_j — współczynnik sztywności,
 e_j — współczynnik podatności,
 h_j — współczynnik tłumienia,

wówczas równania równowagi układu częściowego pokazanego na rys. 1a przyjmą postać

$$(2) \quad \begin{aligned} -K_{k-1}(\varphi_{k-1} - \varphi_k) &= M_{k-1}, \\ J_k \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} + K_{k-1}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) + K_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}) &= 0, \\ K_k(\varphi_k - \varphi_{k+1}) &= -M_{k+1}. \end{aligned}$$

Dla drgań harmoniczných moment wymuszający i kąt skręcenia wyrazić można w postaci

$$(3) \quad M_j = M_{0j} e^{i\omega t}, \quad \varphi_j = \varphi_{0j} e^{i\omega t}.$$

Podstawiając wyrażenia (3) do równań (2), po dokonaniu prostych przekształceń otrzymuje się

$$(4) \quad \begin{aligned} \varphi_{0_{k+1}} &= \left(\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k} - \frac{1}{K_{k-1}K_k} J_k \omega^2 \right) M_{0_{k-1}} + \left(1 - \frac{1}{K_k} J_k \omega^2 \right) \varphi_{0_{k-1}}, \\ M_{0_{k+1}} &= \left(1 - \frac{1}{K_{k-1}} J_k \omega^2 \right) M_{0_{k-1}} - J_k \omega^2 \varphi_{0_{k-1}}, \end{aligned}$$

lub

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi_{0_{k+1}} &= \left(\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} M_{0_{k-1}} + 1 - \frac{\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k}}{1} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \varphi_{0_{k-1}}, \\ M_{0_{k+1}} &= \left(1 - \frac{\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k}}{\frac{1}{K_k}} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) M_{0_{k-1}} - J_k \omega^2 \varphi_{0_{k-1}}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(6) \quad \omega_{0a}^2 = \frac{K_{k-1} + K_k}{J_k},$$

gdzie: ω_{0a} — częstotliwość drgań własnych układu częściowego typu a .

Po podstawieniu do wzoru (6) wyrażenia (1) uzyskuje się

$$(7) \quad \omega_{0a}^2 = \frac{1}{J_k \frac{e_{k-1} e_k}{e_{k-1} + e_k}} + i \frac{\omega(h_{k-1} + h_k)}{J_k}.$$

Bezwzględna wartość częstotliwości drgań własnych wyrazić można zależnością

$$(8) \quad |\omega_{0a}^2| = \sqrt{\left(\frac{1}{J_k \frac{e_{k-1} e_k}{e_{k-1} + e_k}} \right)^2 + \left[\frac{\omega}{J_k} (h_{k-1} + h_k) \right]^2}.$$

Rząd wartości poszczególnych składników wzoru (8) po podstawieniu parametrów z tabelicy 1 jest następujący:

$$(9) \quad \omega_{1a}^2 \approx \sqrt{10^{12} + \omega^2 10^6}.$$

Z zależności (9) wynika, iż dla $\omega < 10$ rad/sek drugi składnik można pominąć bez szkody dla dokładności wyniku. Wówczas częstotliwość drgań własnych układu a wyznaczyć można z wzoru

$$(10) \quad \omega_{0a}^2 = \frac{e_{k-1} + e_k}{J_k e_{k-1} e_k}.$$

Postępując analogicznie w przypadku układu typu b , równania równowagi tego układu napisać można w postaci

$$(11) \quad \begin{aligned} J_k \ddot{\varphi}_k + K_k(\varphi_k - \varphi_{k-1}) &= M_k, \\ J_k \ddot{\varphi}_{k+1} + K_k(\varphi_{k+1} - \varphi_k) &= -M_{k-1}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu związków (3) i uporządkowaniu wyrażeń, układ równań (11) przyjmie postać

$$(12) \quad \begin{aligned} \varphi_{0_{k+1}} &= \frac{1}{K_k} M_{0_k} + \left(1 - \frac{J_k + J_{k+1}}{J_{k+1}} \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right) \varphi_{0_k}, \\ M_{0_{k+1}} &= \left(1 - \frac{J_k + J_{k+1}}{J_k} \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right) M_{0_k} - (J_k + J_{k+1}) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right) \omega^2 \varphi_{0_k}, \end{aligned}$$

przy czym

$$(13) \quad \omega_{0b}^2 = \frac{K_k(J_k + J_{k+1})}{J_k J_{k+1}},$$

gdzie: ω_{0b}^2 — częstotliwość drgań własnych układu częściowego typu b .

Uwzględniając wyrażenia (1) we wzorze (13) uzyskuje się

$$(14) \quad \omega_{0b}^2 = \frac{J_k + J_{k+1}}{e_k J_k J_{k+1}} + i \frac{\omega h_k (J_k + J_{k+1})}{J_k J_{k+1}}.$$

Bezwzględna wartość wyrażenia (14) wyznaczyć można ze wzoru

$$(15) \quad |\omega_{0b}^2| = \sqrt{\left(\frac{J_k + J_{k+1}}{e_k J_k J_{k+1}} \right)^2 + \left[\frac{\omega h_k (J_k + J_{k+1})}{J_k J_{k+1}} \right]^2}.$$

Rząd wielkości poszczególnych składników we wzorze (15) po podstawieniu parametrów z tabelicy 1 jest następujący

$$(16) \quad |\omega_{0b}^2| \approx \sqrt{10^{12} + \omega^2 10^6}.$$

Z oszacowania (16) wynika, że dla $\omega < 10^3$ rad/sek drugi składnik we wzorze (15) można bez szkody dla dokładności wyniku pominąć. Wówczas częstotliwość drgań własnych układu b będzie można wyznaczyć ze wzoru

$$(17) \quad \omega_{0b}^2 = \frac{J_k + J_{k+1}}{e_k J_k J_{k+1}}.$$

Układy częściowe a i b będą sobie wówczas równoważne, gdy $\omega_{0a} = \omega_{0b}$. Aby układ typu a mógł być zastąpiony układem typu b parametry układu b muszą spełniać równania:

$$(18) \quad J_k^b = \frac{\frac{1}{K_k^a}}{\frac{1}{K_{k-1}^a} + \frac{1}{K_k^a}} J_k^a,$$

$$(19) \quad J_{k+1}^b = \frac{\frac{1}{K_{k-1}^a}}{\frac{1}{K_{k-1}^a} + \frac{1}{K_k^a}} J_k^a,$$

$$(20) \quad \frac{1}{K_k^b} = \frac{1}{K_{k-1}^a} + \frac{1}{K_k^a}.$$

Po podstawieniu związków (18), (19), (20) do układu równań (12) uzyska się równania ruchu układu zamienionego

$$(21) \quad \begin{aligned} \varphi'_{0_{k-1}} &= \left(\frac{1}{K_{k-1}} + \frac{1}{K_k} \right) M_{0_k} + \left(1 - \frac{K_k + K_{k-1}}{K_k} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \varphi_{0_k}, \\ M'_{0_{k-1}} &= \left(1 - \frac{K_{k-1} + K_k}{K_{k-1}} \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) M_{0_k} - J_k \omega^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \varphi_{0_k}. \end{aligned}$$

Porównując układ równań (21) z układem równań (5) łatwo zauważyć iż różnią się one między sobą o składnik $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right)$. Jeżeli spełniona jest nierówność $\omega^2 \ll \omega_{0a}^2$ wówczas można przyjąć $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0a}^2} \right) \approx 1$ i uznać, że układy równań (5) i (21) są sobie równoważne.

Można postąpić odwrotnie, zastępując układ typu b układem typu a , wówczas parametry układu a muszą spełniać zależności

$$(22) \quad J_k^a = J_k^b + J_{k+1}^b,$$

$$(23) \quad \frac{1}{K_{k-1}^a} = \frac{J_{k+1}^b}{K_k^b (J_k^b + J_{k+1}^b)}.$$

$$(24) \quad \frac{1}{K_k^a} = \frac{J_k^b}{K_k^b (J_k^b + J_{k-1}^b)}.$$

W wyniku podstawienia związków (22), (23) i (24) do układu równań (5) otrzyma się równania ruchu układu zamienionego różniące się od układu równań (12) o składnik $\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0b}^2} \right)$. Jeśli spełniona jest nierówność $\omega^2 \ll \omega_{0b}^2$, wówczas można uznać, że oba układy równań są sobie równoważne.

Ogólnie można napisać, że

$$(25) \quad \omega_0^2 = \frac{1}{J_e},$$

przy czym dla układu typu a

$$(26) \quad J = J_k; \quad e = \frac{e_{k-1}e_k}{e_{k-1} + e_k},$$

zaś dla układu typu b

$$(27) \quad J = \frac{J_k J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}; \quad e = e_k.$$

Przy redukowaniu liczby stopni swobody należy w pierwszej kolejności zredukować układy częściowe charakteryzujące się małym iloczynem Je .

W równaniach zamiany (18)–(20) i (22)–(24) występuje zespolony współczynnik sztywności K . Podstawiając wyrażenie (1) do kolejnych równań zamiany, można ustalić w jakim zakresie częstotliwości składnik zawierający współczynnik tłumienia może być pominięty.

Podstawiając do wzoru (18) zależność (1) i dokonując prostych przekształceń uzyskuje się

$$(28) \quad J_k^b = \frac{e_k^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} J_k^a + i\omega \frac{e_{k-1}^a e_k^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} \left[1 - \frac{e_k^a (h_{k-1}^a + h_k^a)}{e_{k-1}^a + e_k^a} \right] J_k.$$

Dla $\omega < 10^3$ rad/sek część urojoną wyrażenia (28) można pominąć; uzyskuje się wówczas

$$(29) \quad J_k^b = \frac{e_k^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} J_k^a.$$

Po podstawieniu wyrażenia (1) do wzoru (20) i dokonaniu prostych przekształceń uzyskuje się

$$(30) \quad \frac{e_k^b - i\omega h_k^b e_k^{b2}}{1 + (\omega h_k^b e_k^b)^2} = \frac{e_{k-1} - i\omega h_{k-1}^a e_{k-1}^{a2}}{1 + (\omega h_{k-1}^a e_{k-1}^a)^2} + \frac{e_k^a - i\omega h_k^a e_k^{a2}}{1 + (\omega h_k^a e_{k-1}^a)^2}.$$

Dla $\omega \ll 10^6$ rad/sek wyrażenie $1 + (\omega h_j e_j)^2 \approx 1$ i wówczas zależność (30) można napisać w postaci

$$(31) \quad e_k^b - i\omega h_k^b e_k^{b2} = (e_{k-1}^a + e_k^a) - i\omega (h_{k-1}^a e_{k-1}^{a2} + h_k^a e_k^{a2}).$$

Postępując analogicznie wyznaczyć można równanie zamiany dla masy $k+1$

$$(32) \quad J_{k+1}^b = \frac{e_{k-1}^a}{e_{k-1}^a + e_k^a} J_k^a.$$

Z porównania części rzeczywistej i urojonej lewej i prawej strony równania (31) wynikają związki

$$(33) \quad e_k^b = e_{k-1}^a + e_k^a,$$

$$(34) \quad h_k^b = \frac{h_{k-1}^a (e_{k-1}^a)^2 + h_k (e_k^a)^2}{(e_k^b)^2}.$$

W przypadku zamiany układu b układem a równania zmiany, po dokonaniu podstawienia związku (1) do wyrażeń (23)–(24) uzyska się odpowiednio dla $\omega < 10^3$ rad/sek.

$$(35) \quad e_{k-1}^a = \frac{J_{k+1}^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} e_k^b,$$

$$(36) \quad e_k^a = \frac{J_k^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} e_k^b,$$

$$(37) \quad h_{k-1}^a = \frac{J_{k+1}^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} \left(\frac{e_k^b}{e_{k-1}^a} \right)^2 h_k^b,$$

$$(38) \quad h_k^a = \frac{J_k^b}{J_k^b + J_{k+1}^b} \left(\frac{e_k^b}{e_k^a} \right)^2 h_k^b.$$

Przykład: Przedstawioną metodę redukcji stopni swobody zastosowano przy obliczeniach charakterystyk amplitudowo-fazowych napędu głównego obrabiarki.

Napęd główny frezarki Fu1a można zastąpić modelem o ośmiu stopniach swobody [2]. Postać analityczna charakterystyki amplitudowo-fazowej dla kąta skręcenia mierzzonego na wrzecionie jest skomplikowana. Złożoność charakterystyki amplitudowo-fazowej pogłębia się ze wzrostem liczby stopni swobody. Dlatego też przy obliczeniach praktycznych (projektowych) dąży się do zastosowania możliwie najmniej skomplikowanego modelu, a więc o możliwie najmniejszej liczbie stopni swobody.

Dokonano redukcji układu o ośmiu stopniach swobody do układu o pięciu stopniach swobody. Parametry układu wyjściowego podano w tabelicy 1.

Tablica 1. Wartości parametrów określających właściwości dynamiczne napędu frezarki Fu1a

Lp.	n = 180 obr/min		
	J_i kGmsek ²	h_i kGmsek	k_i kGm/rad.
1.	$25,7 \cdot 10^{-3}$	0,18	$7,53 \cdot 10^3$
2.	$1,25 \cdot 10^{-3}$	0,042	$3,79 \cdot 10^3$
3.	$0,284 \cdot 10^{-3}$	0,019	$0,839 \cdot 10^3$
4.	$0,769 \cdot 10^{-3}$	0,037	$1,372 \cdot 10^3$
5.	$1,45 \cdot 10^{-3}$	0,0975	$4,01 \cdot 10^3$
6.	$6,50 \cdot 10^{-3}$	0,187	$2,80 \cdot 10^3$
7.	$96,00 \cdot 10^{-3}$	0,72	$5,25 \cdot 10^3$
8.	$99,44 \cdot 10^{-3}$	13,00	$1,192 \cdot 10^3$

W rozpatrywanym przykładzie zastępować się będzie układy typu a układami typu b . W tym celu najwygodniej jest posługiwać się metodą tablicową. W tabelicy 2 podano schemat modelu dyskretnego opisany wartościami parametrów J_j , h_j , e_j oraz obliczone wartości parametrów układów częściowych według wzorów (26) i (27). Z tabelicy 2 wynika, że najmniejszą wartość iloczynu $J_j e_j$ ma układ częściowy typu a o masie J_3 . Układ ten zamieniono układem typu b o parametrach J_3^* , J_3^{**} , e_3^* i h_3^* (rys. 2).

Tablica 2

	$25,7 \cdot 10^{-3}$	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$0,284 \cdot 10^{-3}$	$0,769 \cdot 10^{-3}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$6,50 \cdot 10^{-3}$	$96,00 \cdot 10^{-3}$	$99,40 \cdot 10^{-3}$
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8
	$0,133 \cdot 10^{-3}$	$0,264 \cdot 10^{-3}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$0,728 \cdot 10^{-3}$	$0,25 \cdot 10^{-3}$	$0,358 \cdot 10^{-3}$	$0,19 \cdot 10^{-3}$	$0,84 \cdot 10^{-3}$
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7	h_8
	0,18	0,042	0,019	0,037	0,0975	0,187	0,72	13,00
$J = \frac{J_k \cdot J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$0,231 \cdot 10^{-3}$	$0,208 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$1,18 \cdot 10^{-3}$	$6,07 \cdot 10^{-3}$	$50,2 \cdot 10^{-3}$	
$J \cdot e_k$	$0,16 \cdot 10^{-6}$	$0,061 \cdot 10^{-6}$	$0,248 \cdot 10^{-6}$	$0,363 \cdot 10^{-6}$	$0,295 \cdot 10^{-6}$	$2,17 \cdot 10^{-6}$	$9,55 \cdot 10^{-6}$	
$e = \frac{e_k \cdot e_{k+1}}{e_k + e_{k+1}}$	$0,0885 \cdot 10^{-3}$	$0,215 \cdot 10^{-3}$	$0,45 \cdot 10^{-3}$	$0,186 \cdot 10^{-3}$	$0,148 \cdot 10^{-3}$	$0,124 \cdot 10^{-3}$	$0,16 \cdot 10^{-3}$	
$J_k \cdot e$	$0,11 \cdot 10^{-6}$	$0,061 \cdot 10^{-6}$	$0,345 \cdot 10^{-6}$	$0,27 \cdot 10^{-6}$	$0,96 \cdot 10^{-6}$	$11,9 \cdot 10^{-6}$	$15,9 \cdot 10^{-6}$	

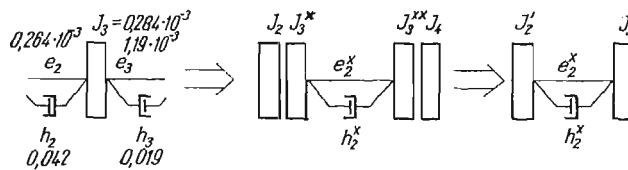
Parametry układu obliczono na podstawie wzorów (29), (30), (33) i (34).

$$J_3^* = \frac{e_3}{e_2 + e_3} J_3 = 0,233 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]},$$

$$J_3^{**} = \frac{e_2}{e_2 + e_3} J_3 = 0,051 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]},$$

$$e_3^* = e_2 + e_3 = 1,454 \cdot 10^{-3} \text{ [rad/kGm]},$$

$$h_3^* = \frac{h_2 e_2^2 + h_3 e_3^2}{e_3^{*2}} = \frac{0,042 \cdot 0,264^2 + 0,019 \cdot 1,19^2}{1,454^2} = 0,014 \text{ [kGmsek]}.$$



Rys. 2. Schemat zamiany układu typu a układem typu b przy redukcji układu o ośmiu stopniach swobody

Momenty bezwładności J_2 i J_3^* oraz J_3^{**} i J_4 sumuje się, uzyskując układ częściowy o momentach bezwładności J_2' i J_3' (rys. 2)

$$J_2' = J_2 + J_3^* = 1,483 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]},$$

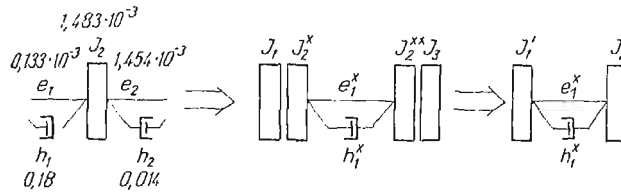
$$J_3' = J_3^{**} + J_4 = 0,820 \cdot 10^{-3} \text{ [kGmsek}^2\text{]}.$$

W wyniku zamiany układu częściowego typu a układem typu b zredukowano liczbę stopni swobody modelu napędu głównego frezarki Fula o jeden, uzyskując model o siedmiu stopniach swobody.

Przy dalszej redukcji stopni swobody postępuje się podobnie. W tablicy 3 podano schemat modelu o siedmiu stopniach swobody, jego parametry oraz parametry układów częściowych. Najmniejszą wartość iloczynu $J_i e_i$ ma układ częściowy typu *a* o masie J_2 .

Tablica 3

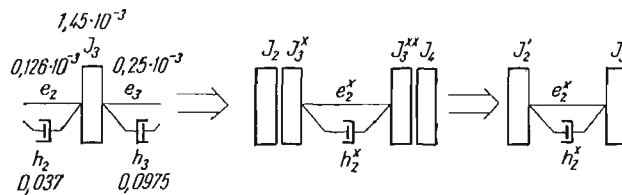
	$25,9 \cdot 10^3$	$1,483 \cdot 10^3$	$0,82 \cdot 10^3$	$1,45 \cdot 10^3$	$6,50 \cdot 10^3$	$96,00 \cdot 10^3$	$99,40 \cdot 10^3$
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7
	$0,133 \cdot 10^3$	$1,454 \cdot 10^3$	$0,726 \cdot 10^3$	$0,25 \cdot 10^3$	$0,358 \cdot 10^3$	$0,19 \cdot 10^3$	$0,84 \cdot 10^3$
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	h_7
	0,18	0,014	0,037	0,0975	0,187	0,72	13,00
$J = \frac{J_k \cdot J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}$		$1,4 \cdot 10^3$	$0,53 \cdot 10^3$	$0,52 \cdot 10^3$	$1,18 \cdot 10^3$	$6,07 \cdot 10^3$	$50,2 \cdot 10^3$
$J \cdot e_k$		$0,186 \cdot 10^6$	$0,77 \cdot 10^6$	$0,378 \cdot 10^6$	$0,295 \cdot 10^6$	$2,17 \cdot 10^6$	$9,55 \cdot 10^6$
$e = \frac{e_k \cdot e_{k+1}}{e_k + e_{k+1}}$		$0,122 \cdot 10^3$	$0,485 \cdot 10^3$	$0,186 \cdot 10^3$	$0,148 \cdot 10^3$	$0,124 \cdot 10^3$	$0,16 \cdot 10^3$
$J_k \cdot e$		$0,181 \cdot 10^6$	$0,40 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$	$0,96 \cdot 10^6$	$11,9 \cdot 10^6$	$15,9 \cdot 10^6$

Rys. 3. Schemat zamiany układu typu *a* układem typu *b* przy redukcji układu o siedmiu stopniach swobody

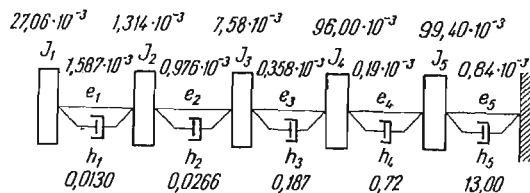
Tablica 4

	$27,06 \cdot 10^3$	$0,943 \cdot 10^3$	$1,45 \cdot 10^3$	$6,50 \cdot 10^3$	$96,00 \cdot 10^3$	$99,40 \cdot 10^3$
	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6
	$1,582 \cdot 10^3$	$0,726 \cdot 10^3$	$0,25 \cdot 10^3$	$0,358 \cdot 10^3$	$0,19 \cdot 10^3$	$0,84 \cdot 10^3$
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
	0,013	0,037	0,0975	0,187	0,72	13,00
$J = \frac{J_k \cdot J_{k+1}}{J_k + J_{k+1}}$		$0,915 \cdot 10^3$	$0,57 \cdot 10^3$	$1,18 \cdot 10^3$	$6,07 \cdot 10^3$	$50,2 \cdot 10^3$
$J \cdot e_k$		$1,45 \cdot 10^6$	$0,42 \cdot 10^6$	$0,295 \cdot 10^6$	$2,17 \cdot 10^6$	$9,55 \cdot 10^6$
$e = \frac{e_k \cdot e_{k+1}}{e_k + e_{k+1}}$		$0,5 \cdot 10^3$	$0,186 \cdot 10^3$	$0,148 \cdot 10^3$	$0,124 \cdot 10^3$	$0,16 \cdot 10^3$
$J_k \cdot e$		$0,47 \cdot 10^6$	$0,27 \cdot 10^6$	$0,96 \cdot 10^6$	$11,9 \cdot 10^6$	$15,9 \cdot 10^6$

Układ ten zamieniono układem typu *b*. Schemat zamiany pokazano na rys. 3. Uzyskano model o sześciu stopniach swobody. W tablicy 4 podano schemat modelu o sześciu stopniach swobody, jego parametry oraz parametry układów częściowych. Najmniejszą wartość iloczynu $J_i e_i$ ma układ częściowy typu *a* o masie J_3 . Układ ten zamieniono układem



Rys. 4. Schemat zamiany układu typu *a* układem typu *b* przy redukcji układu o sześciu stopniach swobody



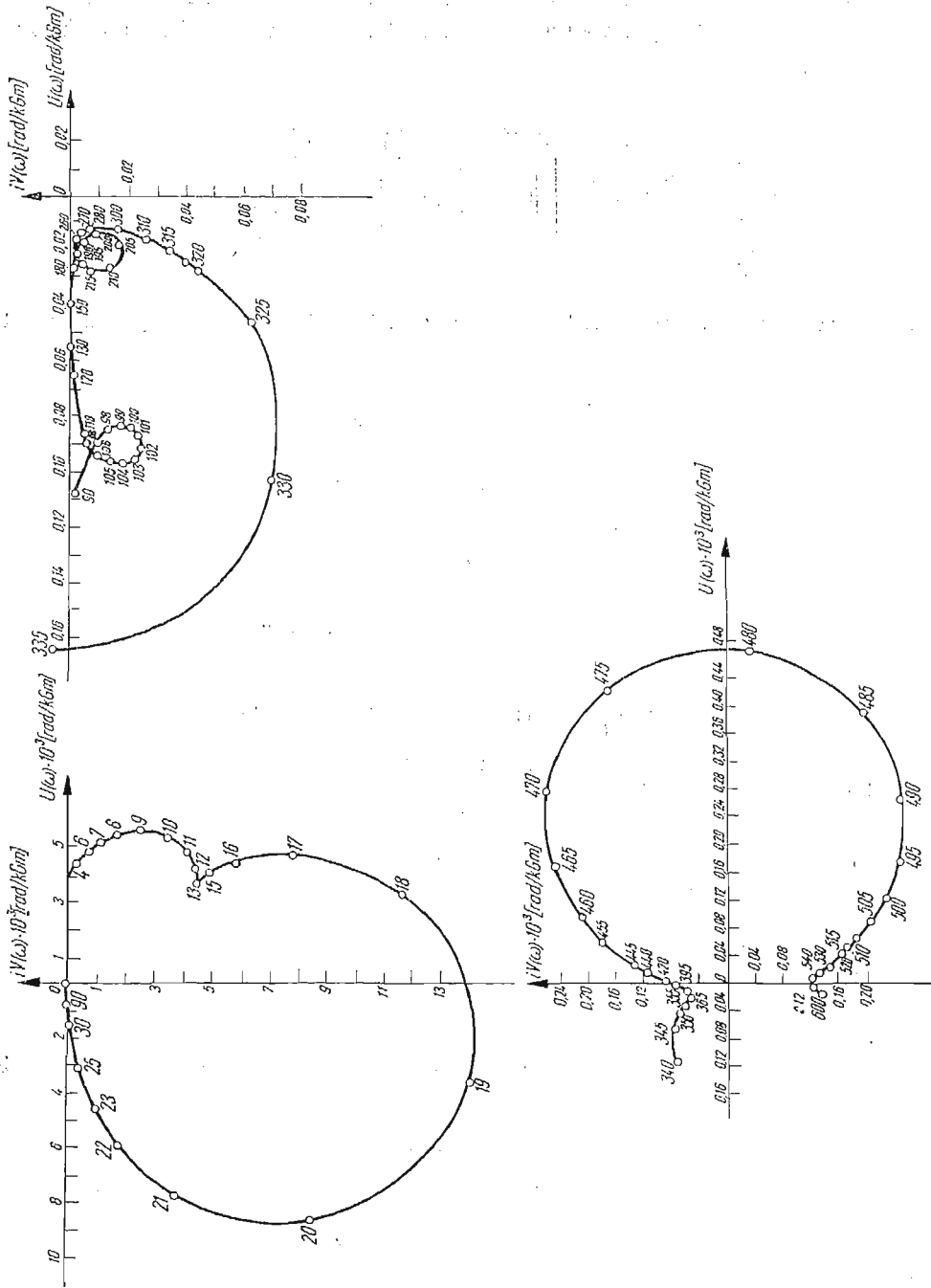
Rys. 5. Model układu o pięciu stopniach swobody

Tablica 5. Parametry modelu o 5 stopniach swobody

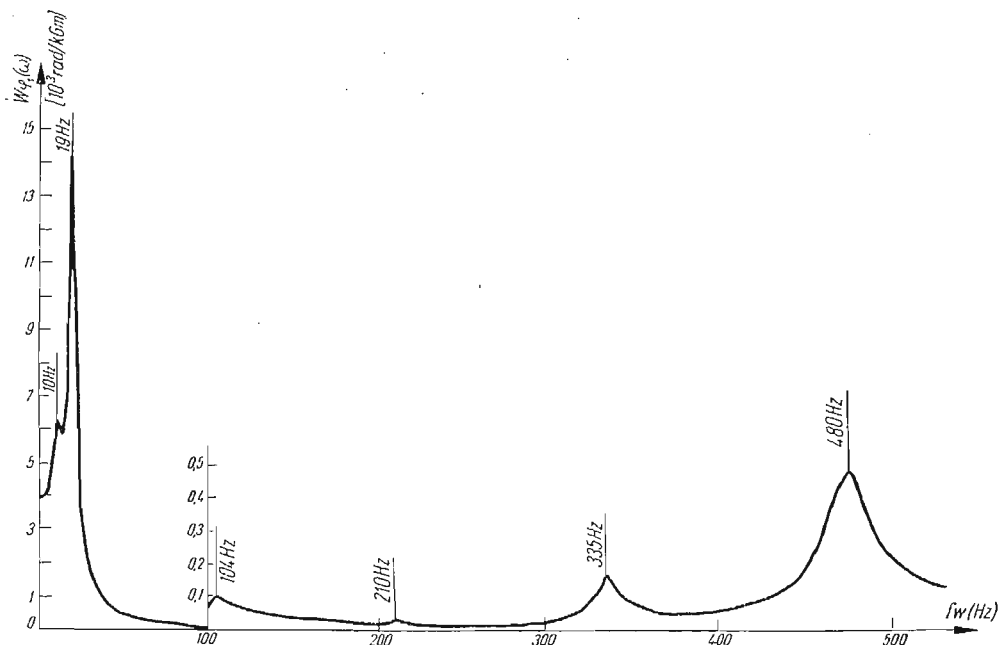
Lp.	n = 180 obr/min		
	J_i kGmsek ²	h_i kGmsek	k_i kGm/rad
1.	$27,06 \cdot 10^{-3}$	0,013	$0,63 \cdot 10^3$
2.	$1,314 \cdot 10^{-3}$	0,0266	$1,020 \cdot 10^3$
3.	$7,58 \cdot 10^{-3}$	0,187	$2,80 \cdot 10^3$
4.	$96,00 \cdot 10^{-3}$	0,720	$5,25 \cdot 10^3$
5.	$99,40 \cdot 10^{-3}$	13,00	$1,192 \cdot 10^3$

Tablica 6. Częstotliwości drgań własnych napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej n = 180 obr/min

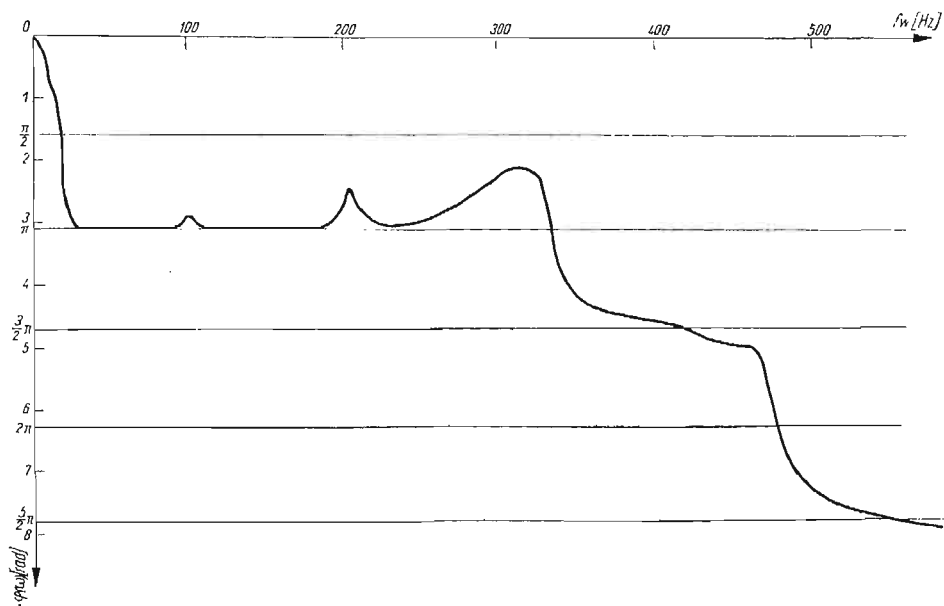
MODEL	Częstotliwości drgań własnych w Hz						
	f_{01}	f_{02}	f_{03}	f_{04}	f_{05}	f_{06}	f_{07}
8 masowy	10,6	19,8	53,2	102,6	227,2	346,6	387,6
5 masowy	10,6	19,7	53,2	102,6	187,2	—	—



Rys. 6. Charakterystyka amplitudowo-fazowa modelu o ośmiu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min



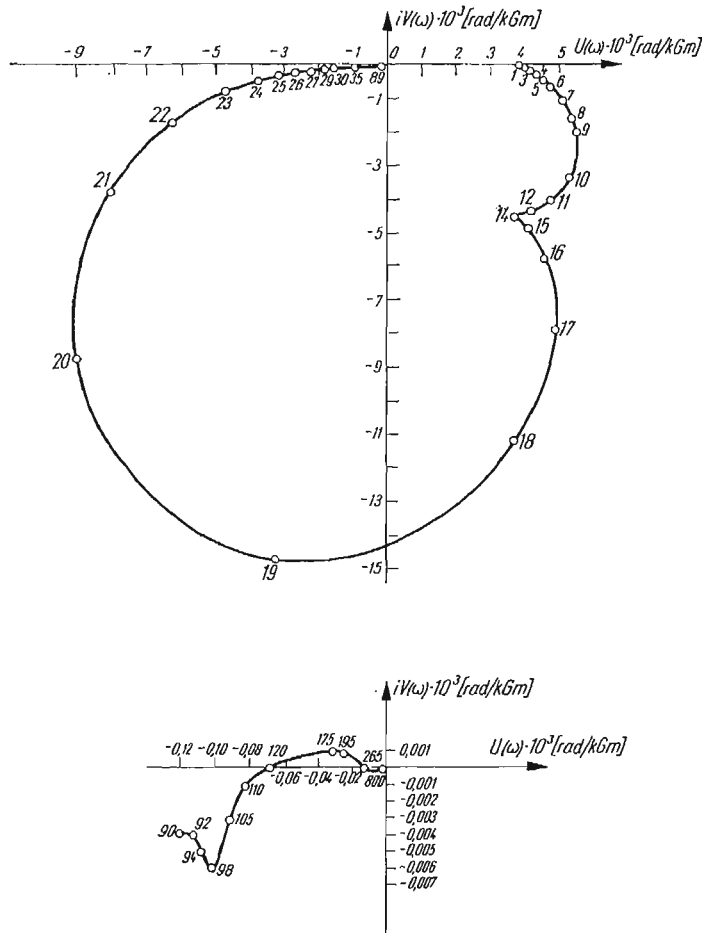
Rys. 7. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa modelu o ośmiu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min



Rys. 8. Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa modelu o ośmiu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min

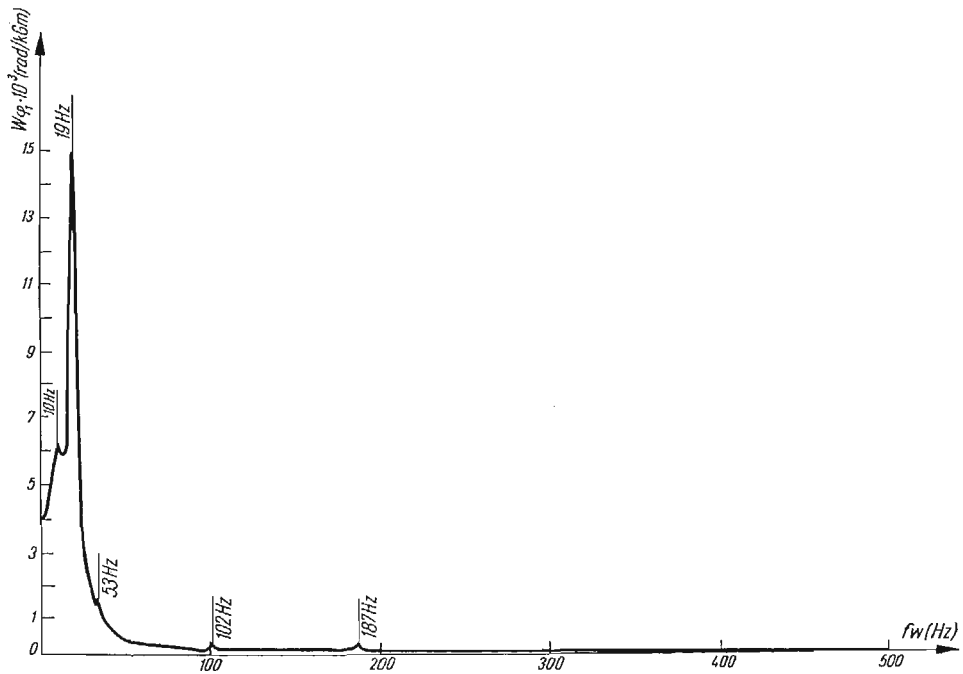
typu *b*. Schemat zamiany pokazano na rys. 4. Uzyskano w ten sposób model o pięciu stopniach swobody (rys. 5), którego parametry podano w tablicy 5.

W tablicy 6 podano wartości częstotliwości drgań własnych modelu o ośmiu oraz modelu o pięciu stopniach swobody, obliczone metodą HOLZERA [3] na maszynie matematycznej.

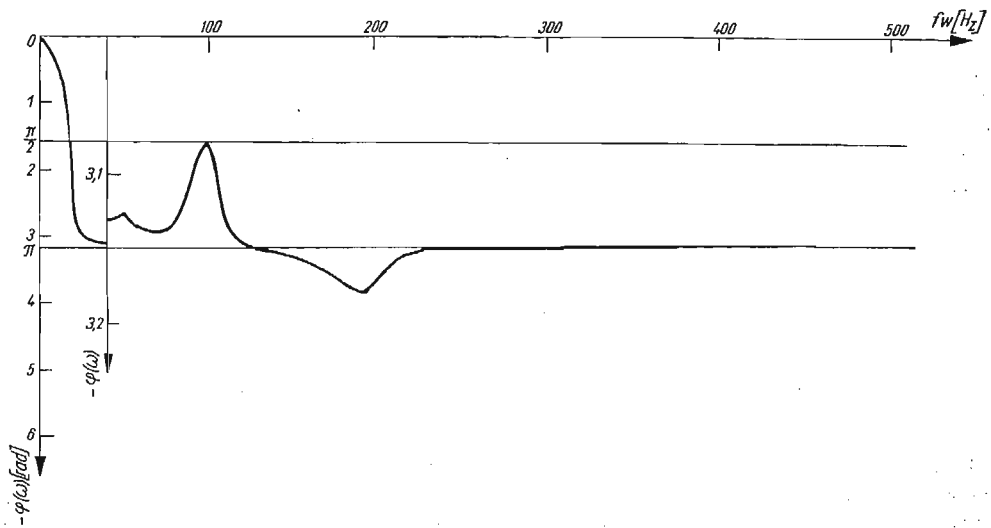


Rys. 9. Charakterystyka amplitudowo-fazowa modelu o pięciu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min

Na rys. 6, 7 i 8 pokazano wykresy charakterystyki amplitudowo-fazowej, charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej i charakterystyki fazowo-częstotliwościowej modelu o ośmiu stopniach swobody, natomiast na rys. 9, 10 i 11 pokazano te same charakterystyki dla modelu o pięciu stopniach swobody. Charakterystyki obliczono na maszynie matematycznej.



Rys. 10. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa modelu o pięciu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min



Rys. 11. Charakterystyka fazowo-częstotliwościowa modelu o pięciu stopniach swobody napędu głównego frezarki Fu-1a przy prędkości obrotowej $n = 180$ obr/min

Wnioski

1. Z porównania uzyskanych wyników dla redukcji układu o ośmiu stopniach swobody (tablica 6 oraz rys. 6–11) wynika, że proponowana metoda daje dobre wyniki dla celów praktycznych w zakresie częstotliwości $\omega < 10^3$ rad/sek. W zakresie częstotliwości $\omega > 10^3$ rad/sek występują rozbieżności zarówno w przypadku częstotliwości drgań własnych (tablica 6), jak w przypadku charakterystyk fazowo-częstotliwościowych. Wynika stąd, że dla częstotliwości $\omega > 10^3$ rad/sek nie można pomijać członów urojonych we wzorach redukcyjnych.

2. Różnice w wartościach rzędnych charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych (rys. 7 i 10) rosną ze wzrostem częstotliwości f . Wynika to z powodu malejącej dokładności obliczeń na maszynie matematycznej. Zastosowanie dokładniejszej maszyny matematycznej powinno dać wyniki praktycznie zgodne, szczególnie w zakresie $\omega < 10^3$ rad/sek.

3. Przyjęcie w proponowanej metodzie idei kolejnej redukcji układów częściowych o najwyższych częstotliwościach drgań własnych jest uzasadnione, ponieważ amplitudy drgań w rezonansach o dużych częstotliwościach są wielokrotnie (nawet kilkaset razy) mniejsze od amplitud drgań w rezonansie podstawowym, który występuje zwykle przy jednej z niższych częstotliwości drgań własnych.

4. Wyznaczenie wzorów opisujących współczynniki tłumienia zastępczego układu częściowego ma duże znaczenie praktyczne, ponieważ umożliwia zastosowanie maszyn matematycznych do obliczeń charakterystyk dynamicznych.

Literatura cytowana w tekście

1. Е. И. Ривин, *Метод уменьшения степеней свободы в расчетных схемах цепных и разветвленных системах*, Машиностроение № 5, 1966.
2. K. MARCHELEK, *Teoretyczne podstawy dynamicznych obliczeń napędów głównych frezarek*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej nr 103, Prace Monograficzne nr 49, Szczecin 1968.
3. J. P. DEN HARTOG, *Mechanical Vibrations*, New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Company, 1956.

Резюме

ПРИВЕДЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В работе содержится видоизмененный метод Э. И. Ривина приведения степеней свободы дискретных систем. При введении понятия комплексного коэффициента жесткости получены формулы для приведения коэффициентов затухания. Представленный метод приведения степеней свободы применен для расчета амплитудно-фазовых характеристик главного привода станка Fu-1a. На основе полученных результатов найдено, что предлагаемый метод дает хорошие для практических целей результаты в диапазоне $\omega < 10^3$ рад/сек.

S u m m a r y

REDUCTION OF THE NUMBER OF DEGREES OF FREEDOM IN DISCRETE SYSTEMS

The paper presents a modification of Rivin's method of reduction of the number of degrees of freedom of discrete systems. By introducing the notion of a complex rigidity coefficient the reduction formulae for the damping coefficients are obtained. The method is then applied to the calculation of the amplitude-phase characteristics of the main drive of the Fu-1a milling machine. The results of these calculations indicate that the proposed method is practically accurate and applicable in the frequency range of $\omega < 10^3 \text{ sec}^{-1}$.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 kwietnia 1970 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA II KWARTAŁ 1970 R.

I. ROZWIJANIE DZIAŁALNOŚCI NAUKOWEJ W DZIEDZINIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Organizowanie regularnych zebrań naukowych w Oddziałach ilustruje poniżej zamieszczona tabela:

Lp.	Oddział	Liczba			
		zebrań	referatów	uczestników	dyskutantów
1.	Bydgoszcz	1	2	12	7
2.	Częstochowa	3	3	54	5
3.	Gdańsk	3	3	57	15
4.	Gliwice	2	3	46	30
5.	Kraków	2	2	41	12
6.	Łódź	2	2	24	11
7.	Poznań	2	2	27	11
8.	Szczecin	3	3	72	13
9.	Warszawa	1*)	1	38	5
10.	Wrocław	2	3	32	15
Razem		21	24	403	124

*) W Oddziale Warszawskim odbyło się tylko jedno zebranie naukowe (w okresie sprawozdawczym), ponieważ Oddział zorganizował również w tym czasie rozszerzone zebranie w formie sesji naukowej, o której będzie mowa w dalszej części sprawozdania.

Tematyka referatów wygłoszonych na zebraniach naukowych była następująca:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Bydgoszczy					
1.	14.05.70	T. Jędryka	Elementy analizy nieliniowych równań różniczkowych	12	7
2.	„ „ „	K. Wernerowski	Wybrane zagadnienia obliczeń łożysk powietrznych na podstawie zasadniczych nieliniowych równań różniczkowych		
Oddział w Częstochowie					
3.	29.04.70	St. Ziemba	Smarowanie części trących	28	2
4.	27.05.70	A. Służalec	Stosunek Lenina do nauki	8	—
5.	22.06.70	R. Świtka	Pewne zagadnienia półprzestrzeni sprężystej	18	3

Oddział w Gdańsku

6.	16.06.70	V. D. Kupradze T. Burczuladze (Tbilisi)	Zastosowania matematyki w teorii sprężystości	22	5
7.	18.06.70	R. Dąbrowski	Obliczanie powłok metodą elementów skończonych	20	6
8.	29.06.70	E. Bielewicz	O metodach numerycznych w teorii powłok	15	4

Oddział w Gliwicach

9.	09.04.70	T. Chmielniak, E. Czogała	Rozkład temperatury w przecie przy przypadkowych położeniach źródeł ciepła	27	19
10.	27.05.70	J. Kubik	Ekstremalne obciążenia w liniowych układach odkształcalnych	19	6
11.	„ „ „	A. Tylikowski T. Chmielniak	Przypadkowy rozkład temperatury w płycie o niejednorodnych stałych materiałowych	„	5

Oddział w Krakowie

12.	10.06.70	St. Kasprzyk	Globalna asymptotyczna stateczność układów nieliniowych	23	4
13.	26.06.70	W. Tonojan (Erewań ZSRR)	Pewne typy dualnych równań całkowych i ich zastosowanie w kontaktowych zagadnieniach teorii sprężystości	18	8

Oddział w Łodzi

14.	23.04.70	M. Łukowiak	Macierzowa metoda obliczeń statycznych dwupasowych układów liniowych	10	6
15.	21.05.70	K. Grossman	Drgania własne belki z masą skupioną w połowie długości opartej na sprężystych podporach	14	5

Oddział w Poznaniu

16.	21.05.70	A. Kabała	Wyznaczanie ugięć płyty w kształcie wycinka kołowego metodą różnic skończonych	15	6
17.	12.06.70	R. Świtka	Transformacje dyskretne	12	5

Oddział w Szczecinie

18.	11.04.70	A. Lisowski	Zastosowanie analogowej i cyfrowej techniki obliczeniowej do zagadnień mechaniki	20	4
19.	20.05.70	K. Grudziński	Problemy nośności połączeń wciskanych obciążonymi siłami lokalnymi	36	6
20.	09.05.70	A. Drescher (Warszawa)	Zastosowanie elastooptyki w badaniach cech mechanicznych ośrodków sypkich	16	3

Oddział w Warszawie

21.	06.4.70	J. M. Alexander (Londyn)	Plastyczne odkształcenia metali przy wysokich ciśnieniach	38	5
-----	---------	-----------------------------	---	----	---

Oddział we Wrocławiu

22.	13.04.70	J. Wojciechowski	Stan naprężeń u podnóża skarpy	11	5
23.	18.05.70	M. Zakrzewski	Historia rozwoju wytrzymałości materiałów w środowisku mechaników wrocławskich w minionym 25-leciu	21	4

24. 18.05.70 W. Kasprzyk, B. Lysik Zastosowanie analizy wymiarowej do
i R. Pomirski opisu obiektów na podstawie badań eks-
perymentalnych

6

2. Sesje naukowe

W dniu 6 kwietnia 1970 r. Oddział Warszawski PTMTS zorganizował sesję naukową, podczas której wygłoszono następujące referaty:

- 1) J. Oderfeld — zagajenie wprowadzające do tematu sesji,
- 2) J. Oderfeld — Optymalizacja konstrukcji,
- 3) A. Morecki — Mechanika manipulatorów,
- 4) M. Dietrych — Miernictwo dynamiczne kół zębanych.

W sesji wzięło udział 21 osób, a w dyskusji zabrano głos 11 razy.

II. ROZPOWSZECHNIANIE MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

1. Kontynuowanie i rozwijanie akcji wydawniczej

Organ PTMTS — MECHANIKA TEORETYCZNA i STOSOWANA ukazuje się nadal jako kwartalnik. W II kwartale 1970 r. ukazał się Tom 8, Zeszyt 2 o objętości 6,5 arkusza wydawniczego. Tom 8, Zeszyt 3 został złożony do druku, a zeszyt 4 znajdował się w opracowaniu technicznym.

2. Popularyzacja wiedzy w postaci organizowania kursokonferencji, kursów, wykładów popularyzujących oraz seminariów

a) *Kursy*

Oddział w Gliwicach kontynuował prowadzenie kursu na temat «Podstawy mechaniki ośrodków odkształcalnych».

Liczba uczestników kursu wynosiła 15 do 25 osób.

b) *Seminaria*

Oddział w Gdańsku prowadził seminarium na temat «Metody statystyczne w mechanice». Dwugodzinne wykłady odbywały się raz w tygodniu.

III. RÓŻNE

Kontrole

Oddział w Krakowie. W dniu 12 czerwca 1970 r. przeprowadzona została przez Wydział Spraw Wewnętrznych Prezydium Dzielnicowej Rady Narodowej w Krakowie kontrola działalności statutowej Oddziału.

W toku kontroli nie stwierdzono żadnych nieprawidłowości.

XII ZJAZD DELEGATÓW PTMTS

W dniu 20 czerwca 1970 r. odbył się w Warszawie XII Zjazd Delegatów PTMTS. W zjeździe uczestniczyło 46 delegatów reprezentujących 10 Oddziałów Towarzystwa.

Obrady otworzył i zebranych powitał przewodniczący PTMTS — prof. dr Zbigniew BRZOSKA.

Zebrani uczcili minutową ciszą pamięć zmarłych, w okresie kadencji, członków Towarzystwa: z Oddziału w Gliwicach — prof. dr Zygmunta WUSATOWSKIEGO i prof. dr Stanisława OCHĘDUSZKO, z Oddziału w Krakowie — doc. dr Franciszka KOTOWSKIEGO i prof. Jana KRAKOWSKIEGO oraz z Oddziału w Warszawie — prof. dr Jarosława NALESZKIEWICZA i gen. bryg. prof. dr Ryszarda SZYMANIKA.

Przyjęto następujący porządek obrad:

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarzy Zjazdu.
2. Przyjęcie protokołu z XI Zjazdu Delegatów PTMTS.
3. Powołanie Komisji Matki i Komisji Skrutacyjnej.
4. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa.
5. Złożenie sprawozdania finansowego.
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
8. Wybory: a) uzupełniające członków Zarządu Głównego, b) uzupełniające Głównej Komisji Rewizyjnej.
9. Sprawa nadania członkostw honorowych.
10. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności na następny okres.
11. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

Na przewodniczącego obrad powołano prof. dr Ottona DĄBROWSKIEGO z Wrocławia, na zastępcę przewodniczącego — doc. dr Mariana SUCHARA z Łodzi oraz na sekretarza — dr Krzysztofa WERNEROWSKIEGO z Bydgoszczy.

Protokół z XI Zjazdu Delegatów PTMTS, odbytego w dniu 17 maja 1969 r., przyjęto bez zmian.

Komisję Matkę i Komisję Skrutacyjną powołano w składzie — prof. dr Zbigniew OLESIAK — przewodniczący oraz prof. dr Stanisław KOCANDA i dr Władysław WALCZAK — członkowie.

Sprawozdanie z działalności Towarzystwa za rok 1969 oraz I kwartał 1970 r. złożył Sekretarz Generalny — prof. dr Zbigniew OSIŃSKI.

Sprawozdanie finansowe złożył skarbnik — prof. dr Czesław EIMER.

W imieniu Głównej Komisji Rewizyjnej sprawozdanie złożył jej członek — prof. dr Jan SZMELTER.

W dyskusji zabierali głos, w kolejności, profesorowie: J. MUTERMILCH, K. KUTARBA, Cz. EIMER, O. DĄBROWSKI, Z. OSIŃSKI, J. SZMELTER, dr K. WERNEROWSKI, doc. Z. ENGEL, doc. J. ANTONIAK, dr Z. WASZCZYSZYN.

Dyskusja dotyczyła budżetu, wpływów i wydatków, konkursów naukowych, składek członkowskich, prenumeraty i rozpowszechniania MECHANIKI TEORETYCZNEJ i STOSOWANEJ, nowych Oddziałów Towarzystwa oraz nauczania mechaniki w uczelniach technicznych.

Po przeprowadzonej dyskusji złożone sprawozdanie przyjęto.

Wniosek Głównej Komisji Rewizyjnej o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium z podziękowaniem przyjęto jednogłośnie. W imieniu Komisji Matki zabrał głos prof. dr Z. OLESIAK.

Upływa kadencja członków Zarządu Głównego profesorów: Czesława EIMERA, Wacława OLSZAKA i Zbigniewa OSIŃSKIEGO, zastępców członków Zarządu Głównego profesorów: Adama CYBULSKIEGO z Wrocławia i Władysława BOGUSZA (z Krakowa) oraz członka i zastępcy członka Głównej Komisji Rewizyjnej docentów: Henryka MIKOŁAJCZAKA (z Poznania) i Mieczysława WIZMURA (z Gdańska).

Komisja Matka wysunęła następujące propozycje:

na członków Zarządu Głównego profesorów: Wacława OLSZAKA — (ponownie), Zbigniewa OSIŃSKIEGO — (ponownie), Jana SZMELTERA, na zastępców członków Zarządu Głównego: prof. dr Zbigniewa BUDZIANOWSKIEGO (z Gliwic) i doc. dr Mariana SUCHARA (z Łodzi).

Prof. dr Z. OSIŃSKI wysunął kandydaturę prof. dr Czesława EIMERA — dotychczasowego skarbnika.

Prof. Cz. EMER zabrał głos prosząc o niezgłaszanie jego kandydatury do Zarządu Głównego, ze względu na liczne obowiązki zawodowe.

Następnie prof. Z. OLESIAK zgłosił kandydatury do Głównej Komisji Rewizyjnej: na członka — doc. dr Henryka MIKOŁAJCZAKA (z Poznania, ponownie), na zastępcę członka — prof. dr Janusza MURZEWSKIEGO (z Krakowa).

Wobec propozycji, aby prof. dr J. SZMELTER, będący dotychczas członkiem Komisji Rewizyjnej, wszedł do Zarządu Głównego, wysunięto na jego miejsce do Komisji Rewizyjnej kandydaturę prof. dr Stanisława KOCĄNDY.

W wyniku przeprowadzonego tajnego głosowania, powyżej zgłoszone osoby zostały wybrane do władz Towarzystwa.

Sprawę nadawania godności Członków Honorowych PTMTS zreferował prof. dr Z. OSIŃSKI, wysuwając kandydatury proponowane przez Zarząd Główny: prof. dr Edmunda KARAŚKIEWICZA, prof. dr Jerzego MUTERMILCHA i prof. dr Wacława OLSZAKA, a następnie uzasadnił poszczególne wnioski danymi dotyczącymi działalności naukowej i społecznej poszczególnych kandydatów, ze specjalnym podkreśleniem zasług położonych dla Towarzystwa.

Doc. dr Z. ENGEL w imieniu Oddziału PTMTS w Krakowie poparł wysunięte kandydatury.

Dr K. WERNEROWSKI poparł kandydaturę prof. dr E. KARAŚKIEWICZA.

W wyniku przeprowadzonego głosowania profesorowie: Edmund KARAŚKIEWICZ, Jerzy MUTERMILCH i Wacław OLSZAK zostali wybrani Członkami Honorowymi PTMTS.

Profesorowie J. MUTERMILCH i E. KARAŚKIEWICZ, w krótkich przemówieniach, podziękowali za przyznane im wyróżnienie i dowód uznania.

Przewodniczący PTMTS — prof. dr Z. BRZOSKA przedstawił generalne wytyczne kierunkowe działalności Towarzystwa. Jako zasadę przyjęto, że należy kontynuować te formy działalności, które sprawdziły się w latach ubiegłych. Prof. Z. BRZOSKA omówił szczegółowo następujące formy działalności:

1. Organizowanie regularnych zebrań naukowych poświęconych oryginalnym pracom naukowym, bądź tematom leżącym na styku z pokrewnymi naukami lub też na styku nauki z zagadnieniami przemysłu.

2. Organizowanie sympozjów również musi być nadal kontynuowane. Jeśli w niektórych Oddziałach wykształciła się pewna tradycja, należy ją utrzymać i rozwijać, jak np. planowane na rok 1971 kolejne Sympozjum Oddziału Warszawskiego z zakresu badań doświadczalnych w mechanice ciała stałego, sympozja na temat reologii organizowane przez Oddział we Wrocławiu, sympozja na temat drgań liniowych i nieliniowych przeprowadzane przez Oddział w Poznaniu. Takie tradycje należy kultywować i wykształcać w innych ośrodkach. Nie należy jednak zasklebiać się w tematach tradycyjnych i stałych dziedzinach, akcja bowiem nie wyklucza możliwości sięgania po nowe tematy i zagadnienia.

Pożyteczne również byłoby dążenie do stałego podnoszenia poziomu materiałów wydawanych na sympozja.

3. Konkursy. Proponuje się organizowanie trzech konkursów ogólnokrajowych. Dwóch jak, dotychczas, tzn. jeden na najlepszą pracę teoretyczną i jeden na najlepszą pracę doświadczalną (z tym, że przyjęto mniej konkursów, ale z wyższymi nagrodami). Trzeci konkurs, stanowiący pewnego rodzaju nową formę należałoby ogłosić na temat specjalny. Jest bowiem wiele tematów, które popchnęłyby naprzód wiedzę i należałoby taki temat potrzebny, a dotychczas nierozwiązany, umiejętnie wybrać.

4. Wydawnictwo MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA. Zgodnie z zatwierdzonym, planem będą nadal ukazywały się 4 zeszyty rocznie o objętości 40 arkuszy wydawniczych.

Prof. dr Z. BRZOSKA stwierdził, że nie odpowiada mu nastawienie dyskusji proponującej obniżanie ceny wydawnictwa lub kładzenie nacisku, aby członkowie byli obowiązkowo stałymi prenumeratorami. Dyskusja powinna potoczyć się w kierunku znalezienia sposobów, aby pismo wydawać tak, żeby jego treść zachęcała do nabywania (jak np. «Przekrój» spod lady).

Pismo MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA powinno zawierać artykuły naukowe, przeglądowe, choćby dlatego, że nie robią tego inne czasopisma. U nas zamieszcza się takie artykuły, ale trzeba na dobór tego rodzaju materiału położyć jeszcze większy nacisk. Należy również kontynuować rubrykę z «Życia Towarzystwa» oraz podawać zawiadomienia o kongresach zagranicznych. Dalej prof. BRZOSKA proponuje wprowadzenie rubryki problemów niewyjaśnionych, podając co w danej dziedzinie

i jej zakresie należy jeszcze zrobić. Byłaby to rubryka, prowadzona na wzór istniejącej w wydawnictwie ASTM.

Po dyskusji, w której zabrali głos profesorowie O. DĄBROWSKI i Z. BUDZIANOWSKI wytyczne kierunkowe zostały jednomyślnie przyjęte.

Prof., dr O. DĄBROWSKI złożył na ręce Przewodniczącego PTMTS podziękowanie dla Zarządu Głównego za całoroczną owocną pracę, następnie podziękował Komisji Matce i Komisji Skrutacyjnej oraz Delegatom i zaproszonym osobom za przybycie.

Doc. dr P. JASTRZĘBSKI złożył podziękowanie Ob. H. ROŚKIŃSKIEJ i personelowi administracyjnemu za całoroczną pracę oraz przygotowanie Zjazdu.

Prof. dr Z. BRZOSKA podziękował Przewodniczącemu Zjazdu — prof. dr O. DĄBROWSKIEMU oraz Prezydium Zjazdu, Komisji Matce, Członkom Zarządu Głównego, Przewodniczącym Oddziałów, Delegatom i wszystkim przybyłym osobom.

Zbigniew Olesiak (Warszawa)

WŁADZE POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W KADENCJI 1970/1971

1. **Zarząd Główny:** przewodniczący — prof. dr Z. BRZOSKA, zastępcy przewodniczącego: prof. dr B. STANISZEWSKI, prof. dr M. ŻYCKOWSKI, sekretarz generalny — prof. dr Z. OSIŃSKI, skarbnik — dr K. BORSUK, zastępca sekretarza generalnego — dr J. STUPNICKI, zastępca skarbnika — prof. dr J. SZMELTER, członek ZG — prof. dr W. OLSZAK, zastępcy członków ZG — prof. dr Z. BUDZIANOWSKI, doc. dr M. SUCHAR.

2. **Główna Komisja Rewizyjna:** przewodniczący — prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, członkowie: doc. dr E. BIELEWICZ, prof. dr S. KOCĄŃDA, doc. dr H. MIKOŁAJCZAK, doc. dr J. SUŁOCKI, zastępca członka — prof. dr J. MURZEWSKI.

3. **Oddziały Towarzystwa i ich przewodniczący:** B y d g o s z c z — dr inż. K. WERNEROWSKI; C z ę s t o c h o w a — prof. dr J. KOŁAKOWSKI; G d a ń s k — prof. dr J. WIĘCKOWSKI; G l i w i c e — doc. dr J. ANTONIAK; K r a k ó w — doc. dr Z. ENGEL; Ł ó d ź — prof. dr Z. PARZEWSKI; P o z n a ń — prof. dr E. KARAKIEWICZ; S z c z e c i n — dr inż. J. MIERZEJEWSKI; W a r s z a w a — prof. dr Z. OLESIAK; W r o c ł a w — prof. dr O. DĄBROWSKI.

WYNIKI KONKURSU ODDZIAŁU WARSZAWSKIEGO PTMTS NA NAJLEPSZĄ PRACĘ TEORETYCZNĄ Z MECHANIKI W ZAKRESIE ZASTOSOWAŃ INŻYNIERSKICH

Na konkurs wpłynęło 16 prac z różnych ośrodków naukowych Polski. Sąd Konkursowy w składzie: prof. dr Jan SZMELTER — przewodniczący oraz członkowie: doc. dr Przemysław JASTRZĘBSKI, prof. dr Zbigniew KĄCZKOWSKI, doc. dr Marek KWIECIŃSKI, prof. dr Zenon Mróz na podstawie nadesłanych recenzji oraz po zreferowaniu poszczególnych prac i przeprowadzeniu szczegółowej dyskusji, postanowił co następuje:

Pierwszej nagrody nie przyznawać.

II nagrodę w wysokości 8.000,— zł przyznać dr Markowi JANASOWI (Warszawa) za pracę pt. *Obliczanie płyt podpartych nieprzesuwnie z uwzględnieniem efektu tarczowego*.

Trzy równorzędne nagrody III, po 5.000,— zł każda przyznać: 1) dr Marcinowi CHRZANOWSKIEMU (Kraków) za pracę pt. *O możliwości opisu pełnego procesu pelzania metali*; 2) mgr Zofii HANDZEL (Warszawa) za pracę pt. *Hipoteza dekohezji mikroobjętości poddanej działaniu zmiennych naprężeń*; 3) dr Janowi KRUSZEWSKIEMU (Gdańsk) za pracę pt. *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych*.

INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronice z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. Wraz z niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikając zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2, itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- W. BOGUSZ, Zastosowanie równania Hamiltona-Jacobiego do stabilizacji układów mechanicznych
Применение уравнения Гамильтона-Якоби для стабилизации механических систем
Application of Hamilton-Jacobi equation for stabilization of mechanical systems
- A. DRESCHER, B. MICHAŁSKI, Reologiczne, mechaniczne i optyczne własności polimetakrylanu metylu w warunkach złożonej historii obciążenia
Реологические, механические и оптические свойства полиметил-метакрилата в условиях сложной истории нагружения
Rheological, mechanical and optical properties of a polymethyl-methacrylate under conditions of complex loading history
- R. GRUŁOŚ, Zależność maksymalnej siły uderzenia od współczynnika restytucji
Зависимость максимальной силы удара от коэффициента восстановления
Dependence of the maximum impact force on the restitution coefficients
- A. WŁOCHOWICZ, Z. KUBACKI, przyczynek do mechanizmu zniszczenia zmęczeniowego żyłek poliamidowych
О механизме усталостного разрушения полиамидных лесок
A contribution to the mechanism of the fatigue fracture of Polyamide 6 fibres
- E. ŻŁATANOWA, Stateczność wstępnie sprężonego walca kołowego przy skręcaniu
Устойчивость предварительно напряженного кругового цилиндра при кручении
Stability of prestressed circular cylinder under torsion
- E. ŻŁATANOWA, Wpływ skończonego wstępnego sprężenia na sztywność rury
Влияние предварительной конечной деформации на жесткость трубы
Influence of finite initial strains on the rigidity of tube
- J. BIAŁKIEWICZ, W. SZCZEPIŃSKI, O mechanice kucia w matrycy
О механикековки в матрице
On the mechanics of the forging process in dies

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 9, z. 1, s. 1—223, Warszawa 1971, Indeks 36712