

JH 780  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 10 • ZESZYT 4



Pw

WARSZAWA 1972  
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## SPIS TREŚCI

A. ZIĄBICKI, Zachowanie się cieczy polimerowych w przepływach rozciągających Поведение полимерных жидкостей в растягивающих течениях Behaviour of polymer fluids in elongational flow	487
J. MURZEWSKI, Zagadnienia niezawodności i bezpieczeństwa w mechanice materiałów i konstrukcji Вопросы надёжности и безопасности в механике материалов и конструкций Reliability and safety problems in mechanics of materials and structures	509
R. S. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, S. OWCZAREK, Zastosowanie elastooptycznych badań modelowych do wyznaczania optymalnych kształtów konstrukcji płaskich Применение поляризационно-оптических модельных исследований для определения оптимальных очертаний плоских конструкций Application of photoelastic model investigations for determination of optimum shapes of two-dimensional structures	525
K. RYKAŁUK, Praktyczna postać ogólnego rozwiązania tarczy jednocspójnej Полезный вид общего решения задачи об односвязном диске Practical form of general solution of a simply-connected disk	545
Z. MALINOWSKI, J. KLEPACZKO, Szacowanie współczynnika tarcia na czołach ściskanej plastycznie próbki walcowej Оценка коэффициента трения на поверхностях контакта пластически сжатого цилиндрического образца Estimation of the coefficient of friction on the interfaces of the plastically deformed cylindrical specimen	561
Z. WASZCZYSZYŃ, Wyboczenie trójwarstwowej płyty kołowej poza zakresem sprężystym Устойчивость круглой трехслойной пластинки за пределом упругости Buckling of a sandwich circular plate beyond the elastic limit	577
A. LIŃEWSKA, Warunek podobieństwa współczynnika skurczu poprzecznego w fotoplastyczności Условие подобия коэффициента поперечной деформации в фотопластичности Similarity condition of the lateral contraction coefficient in photoplasticity	599
K. SZULBORSKI, Analiza wyników badań pełzania mechanicznego i optycznego materiału modelowego syntezowanego z krajowej żywicy epoksydowej Анализ результатов испытаний механической и оптической ползучестью модельного материала синтезированного из отечественной эпоксидной смолы Analysis of results of mechanical and optical creep investigations of a Polish resin used for photoelastic models	607
BIULETYN INFORMACYJNY	621

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 0 • Z E S Z Y T 4



W A R S Z A W A 1 9 7 2  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,  
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,  
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,  
ZBIGNIEW OLEŚIAK — REDAKTOR,  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,  
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,  
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 700 (587+113) egz. Ark. wydawn. 11,75. Ark. drukarskich 9,25. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 2.VIII.1972 r. Druk ukończono w grudniu 1972 r. Zam. 1107/72. A-84 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

## ZACHOWANIE SIĘ CIECZY POLIMEROWYCH W PRZEPŁYWACH ROZCIĄGAJĄCYCH\*

ANDRZEJ ZIABICKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Obszerna literatura teoretyczna i doświadczalna na temat mechanicznych własności cieczy polimerowych ogranicza się prawie wyłącznie do przepływów wiskozymetrycznych. Zachowanie się nieliniowych cieczy lepkością w przepływie Couette'a, Poiseuille'a, przepływach helikoidalnych i wielu innych można sprowadzić do zachowania się w warunkach ustalonego przepływu ścinającego, który charakteryzuje pole prędkości z tensorem gradientu

$$(1.1) \quad V_{i,j} = \begin{Bmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

gdzie  $q$  oznacza szybkość ścinania (poprzeczny gradient prędkości).

COLEMAN i NOLL [1] wykazali, że tensor naprężeń izotropowej prostej cieczy Nolla w takim polu prędkości przybiera postać

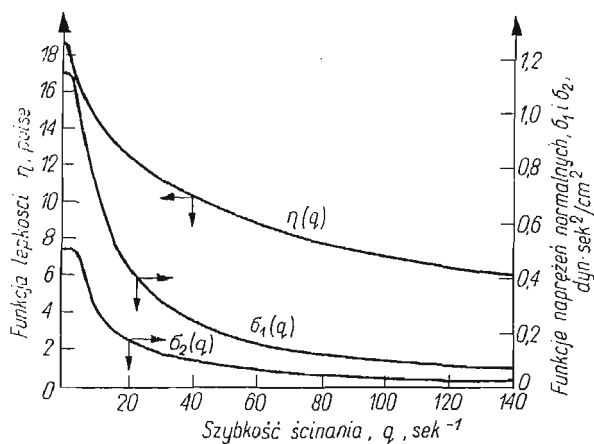
$$(1.2) \quad \mathbf{T} + p\mathbf{I} \equiv \mathbf{T}_E = \begin{Bmatrix} \sigma_1 q^2 & \eta q & 0 \\ \eta q & \sigma_2 q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

gdzie  $p$  oznacza ciśnienie hydrostatyczne. Własności mechaniczne cieczy charakteryzują trzy funkcje materiałowe  $\eta$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  (tzw. funkcje wiskozymetryczne) zależne od niezmienników tensora gradientu prędkości; pierwsza funkcja  $\eta(q)$  opisuje dysypację energii (funkcja lepkości), a pozostałe (funkcje naprężeń normalnych) związane są z efektami sprężystymi. Z warunków symetrii wynika przy tym, że  $\eta$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są parzystymi funkcjami szybkości ścinania  $q$ . Typowy przebieg funkcji  $\eta(q)$ ,  $\sigma_1(q)$  i  $\sigma_2(q)$  dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cetanie przedstawia rys. 1 [2].

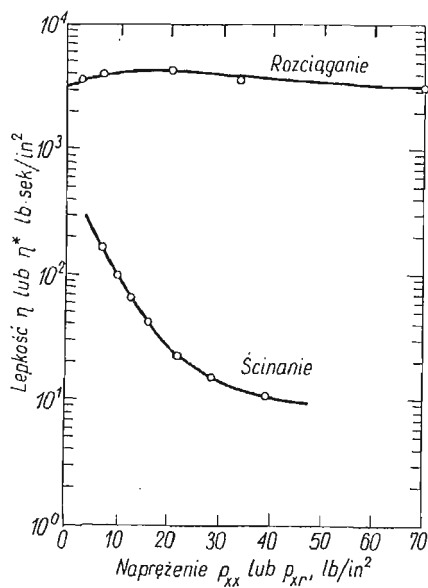
W technice przetwórstwa polimerów na tworzywa konstrukcyjne, włókna, folie itp. ważną rolę odgrywa inna klasa przepływów — zwana przepływami rozciągającymi. Pole prędkości w takich przepływach można opisać tensorem gradientu

$$(1.3) \quad V_{i,j} = \begin{Bmatrix} q_1^* & 0 & 0 \\ 0 & q_2^* & 0 \\ 0 & 0 & q_3^* \end{Bmatrix}.$$

\* Referat problemowy wygłoszony na XIV Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego w Krościenku, we wrześniu 1971 r.



Rys. 1. Funkcje wiskozymetryczne dla 5,4% roztworu poliizobutyleny w cetanie [2]



Rys. 2. Lepkość przy ścinaniu ( $\eta$ ) i lepkość przy rozciąganiu (lepkość podłużna  $\eta^*$ ) dla stopionego polistyrenu [4]

Najczęściej spotykanym przepływem tego typu jest izochoryczne, jednoosiowe rozciąganie

$$(1.4) \quad V_{i,j} = \begin{Bmatrix} q_1^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 q_1^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 q_1^*(t) \end{Bmatrix},$$

które w szczególnym wypadku stałej szybkości  $q_1^*$  redukuje się do ustalonego przepływu rozciągającego

$$(1.5) \quad V_{i,j} = q^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix},$$

gdzie  $q^*$  jest (stałą) szybkością rozciągania (podłużnym gradientem prędkości). Inne przykłady przepływów rozciągających obejmują trójosiowe rozciąganie prostopadłościanu, rozdmuchiwanie cylindrycznej rury lub sferycznego balonu i in. (por. [3]).

Kinematyka przepływów rozciągających różni się zasadniczo od przepływów wiskozymetrycznych i występujące przy rozciąganiu charakterystyki materiałowe nie dadzą się (na ogół) przewidzieć w oparciu o znajomość przepływów ścinających. Rysunek 2 przedstawia zmiany funkcji lepkości  $\eta$  w ustalonym przepływie ścinającym oraz funkcji tzw. *lepkości podłużnej*  $\eta^*$  [por. wzór (2.3)] w ustalonym przepływie rozciągającym dla stopionego polistyrenu [4]. Zasadnicze różnice w mechanicznym zachowaniu się polimerów w przepływach wiskozymetrycznych i rozciągających, jak również duże znaczenie techniczne tych ostatnich wywołało w ostatnich latach znaczne zainteresowanie tymi przepływami. Celem niniejszego przeglądu jest przedyskutowanie ważniejszych wyników uzyskanych w tej dziedzinie oraz wskazanie zagadnień wymagających dalszych badań teoretycznych i doświadczalnych. Ograniczymy się przy tym do omówienia jedynie izochorycznych przepływów jednoosiowych [wzór (1.4)].

## 2. Teorie fenomenologiczne

Z równania konstytutywnego izotropowej prostej cieczy NOLLA [5]

$$(2.1) \quad \mathbf{T}_E = \mathcal{H} \left[ \mathbf{A}_t(t-s) \right],$$

gdzie  $\mathbf{A}_t(t-s)$  oznacza względny gradient deformacji odniesiony do chwili obecnej ( $t$ ), a  $\mathcal{H}$  — funkcjonal po całej historii odkształceń od  $-\infty$  do chwili bieżącej. COLEMAN i NOLL [6] wyprowadzili wyrażenie na tensor naprężeń w warunkach ustalonego przepływu rozciągającego [por. wzór (1.3) ze stałymi  $q^*$ ] w postaci

$$(2.2) \quad \mathbf{T}_E = \begin{pmatrix} (\gamma q_1^* + \zeta q_1^{*2}) & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma q_2^* + \zeta q_2^{*2}) & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma q_3^* + \zeta q_3^{*2}) \end{pmatrix},$$

gdzie  $\gamma$  i  $\zeta$  są funkcjami materiałowymi, których w ogólnym przypadku nie można wyrazić przez funkcje wiskozymetryczne  $\eta$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ . W doświadczeniach obejmujących jednoosiowy stan naprężenia wyznaczyć można jedynie jedną charakterystykę materiałową zwaną (przez analogię do funkcji wiskozymetrycznej  $\eta$ ) lepkością podłużną, lub lepkością przy rozciąganiu

$$(2.3) \quad \eta^* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T^{11} - T^{22}}{q^*}, \quad \text{gdy} \quad \partial T^{ij} / \partial t = \text{grad } T^{ij} = 0.$$

Należy zaznaczyć, że w odróżnieniu od lepkości przy ścinaniu,  $\eta^*(q^*)$  nie musi być parzystą funkcją szybkości rozciągania i dla ogólnej cieczy prostej można napisać

$$(2.4) \quad \eta^*(q^*) = 3\eta_0(1 + a_1 q^* + a_2 q^{*2} + \dots).$$

SLATTERY [7] próbował rozszerzyć rozważania Colemana i Nolla na nieustalone przepływy rozciągające. Rozważał on jednak tylko bardzo szczególny rodzaj ruchu, w którym gradient prędkości jest wykładniczą funkcją czasu

$$(2.5) \quad V_{i,j} = q_0^* \exp(kt) \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{Bmatrix}.$$

Wykazał on, że dla takiego przepływu funkcje materiałowe zależą od  $\exp(kt)$ , a dla  $k = 0$  redukują się do funkcji  $\gamma, \zeta$  z teorii Colemana i Nolla.

Model izotropowej cieczy prostej jest zbyt ogólny, aby można z niego było wyciągnąć bardziej szczegółowe wnioski odnośnie zachowania się cieczy lepkosprężystych w przepływach rozciągających. Ważnym wynikiem dla tego modelu jest niesprowadzalność funkcji materiałowych rozciągania do funkcji wiskozymetrycznych z czego wynika konieczność uzyskania osobnych rozwiązań dla różnych klas materiałów.

Omówimy trzy szczególne grupy równań konstytutywnych, stosowane do opisu zachowania się cieczy nieliniowo lepkosprężystych.

Dla materiałów wykazujących krótką pamięć przeszłych odkształceń wprowadza się równania konstytutywne typu różniczkowego

$$(2.6) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n),$$

gdzie  $\mathbf{A}_1$  oznaczają kinematyczne tensory Rivlina–Ericksena, a funkcję  $\mathbf{f}$  przedstawia się zwykle w postaci szeregu potęgowego. Należy zwrócić uwagę, że równania typu (2.6) dopuszczają przepływy o stałym lub zmiennym w czasie gradiencie prędkości, lecz nie opisują zjawiska relaksacji naprężeń.

Dla modelu cieczy nieelastycznej Reinera–Rivlina [8] o równaniu konstytutywnym

$$(2.7) \quad \mathbf{T}_E = \eta_1 \mathbf{A}_1 + \eta_2 \mathbf{A}_1^2,$$

gdzie  $\eta_1$  i  $\eta_2$  są funkcjami niezmienników tensorów  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_1^2$ , lepkość podłużną otrzymuje się w postaci takiej samej, jak dla cieczy prostej Nolla [wzór (2.4)]. Dla tzw. cieczy stopnia drugiego stanowiącej rozwinięcie wzoru (2.6) dla małych szybkości odkształceń

$$(2.8) \quad \mathbf{T}_E = a\mathbf{A}_1 + b\mathbf{A}_1^2 + c\mathbf{A}_2,$$

gdzie  $a, b$  i  $c$  oznaczają stałe materiałowe, lepkość podłużna jest liniową funkcją szybkości rozciągania

$$(2.9) \quad \eta^* = 3\eta_0(1 + a_1 q^*).$$

Identyczny wynik uzyskuje się dla cieczy prostej Nolla lub cieczy Reinera–Rivlina przy założeniu małych szybkości rozciągania  $q^*$ .

W podobny sposób można uzyskać wyrażenia na  $\eta^*$  dla większych szybkości rozpatrując model cieczy stopnia trzeciego, czwartego itd.

Równania typu różniczkowego nie przewidują żadnych osobliwości w zachowaniu się cieczy przy skończonych szybkościach odkształcenia.



Drugą grupę stanowią tzw. równania typu całkowego stanowiące rozwinięcie funkcjonału we wzorze (2.1) w szereg całek wielokrotnych.

$$(2.10) \quad \mathbf{T}_E = \int_0^{\infty} \alpha(s) \mathbf{G}_t(s) ds + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [\beta(s_1, s_2) \text{tr} \mathbf{G}_t(s_1) \mathbf{G}_t(s_2) + \\ + \varphi(s_1, s_2) \mathbf{G}_t(s_1) \mathbf{G}_t(s_2)] ds_1 ds_2 + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} [\dots] ds_1 ds_2 ds_3 + \dots$$

Rozwinięcie takie jest uzasadnione, jeżeli pamięć przeszłych odkształceń [scharakteryzowana w równaniu (2.10) funkcjami  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ...] dostatecznie szybko zanika w czasie. Tensory  $\mathbf{G}_t(s)$  w powyższym rozwinięciu opisują *nadmiarowe* odkształcenie materiału od chwili  $(t-s)$  do chwili  $t$ . Często wykorzystywaną miarą takiego odkształcenia jest tensor

$$(2.11) \quad \mathbf{G}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{A}_t^T - \mathbf{I},$$

którego składowe dla ustalonego przepływu rozciągającego są wykładniczymi funkcjami czasu

$$(2.12) \quad \mathbf{G}_t(s) = \begin{Bmatrix} e^{2q^*s} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-q^*s} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-q^*s} - 1 \end{Bmatrix}.$$

Podobny tensor dla ustalonego przepływu ścinającego [por. wzór (1.1)] zawierał jedynie wyrazy liniowe lub kwadratowe względem  $s$

$$(2.13) \quad \mathbf{G}_t(s) = \begin{Bmatrix} q^2 s^2 & qs & 0 \\ qs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Różnice w kinematyce przepływów ścinających i rozciągających warunkujące postać tensora  $\mathbf{G}_t(s)$  odbijają się wyraźnie na wyrażeniach konstytutywnych. O ile dla przepływów ścinających każda postać funkcji pamięci  $\alpha(s)$  całkowalna z kwadratem daje skończone wartości tensora naprężeń, to przepływ rozciągający nakłada znacznie silniejsze ograniczenia. Rozważmy np. najprostszy wypadek, gdy funkcja pamięci  $\alpha(s)$  ma postać wykładniczą

$$(2.14) \quad \alpha(s) = \exp(-s/\tau),$$

gdzie  $\tau$  oznacza charakterystyczną stałą czasową. Funkcję tę łatwo całkuje się z tensorem  $\mathbf{G}_t$  dla przepływu ścinającego przy dowolnych szybkościach ścinania  $q$ , całkowanie z tensorem  $\mathbf{G}_t$  dla przepływu rozciągającego natomiast [wzór (2.12)] daje wyniki rozbieżne, gdy  $q^* = \frac{1}{2\tau}$ . Podobne ograniczenia występują również w funkcjach  $\beta$ ,  $\varphi$ , ... całkowalnych z wyższymi potęgami  $\mathbf{G}_t$ . Przy założeniu wykładniczej funkcji  $\alpha(s)$  i pominięciu wyższych całek w równaniu (2.10) otrzymuje się równanie konstytutywne tzw. cieczy kauczukopodobnej (*rubberlike liquid*) [9], dla której lepkość podłużna wyraża się wzorem

$$(2.15) \quad \eta^*(q^*) = \frac{3\eta_0}{(1 + q^*\tau)(1 - 2q^*\tau)}.$$

Dla tego samego modelu lepkość przy ścinaniu nie zależy od szybkości deformacji

$$(2.16) \quad \eta(q) = \eta_0.$$

Łatwo zauważyć, że pojęcie lepkości podłużnej dla cieczy kauczukopodobnej [wzór (2.15)] traci sens fizyczny (dąży do nieskończoności, a następnie zmienia znak), gdy szybkość rozciągania osiąga krytyczną wartość  $q^* = 1/2\tau$ .

Z rozważań powyższych można wyciągnąć jeden z dwu alternatywnych wniosków:

— w cieczy kauczukopodobnej można zrealizować ustalony przepływ rozciągający jedynie w ograniczonym zakresie szybkości rozciągania  $q^* < 1/2\tau$ , lub

— modele całkowe stosowane do opisu przepływów rozciągających mają sens jedynie wówczas, gdy funkcje pamięci całkowalne są ze składowymi tensora  $\mathbf{G}_t$  [równ. (2.12)] dla dowolnych wartości  $q^*$ .

W ostatnich latach w literaturze reologicznej zarysowały się dwa stanowiska w tej sprawie. Jedni autorzy (przede wszystkim TANNER [10]) uważają, że wynik uzyskany przez LODGE'A [wzór (2.15)] dyskwalifikuje model cieczy kauczukopodobnej i podobne modele całkowe z niedostatecznie zbieżnymi funkcjami pamięci. W konsekwencji, TANNER i SIMMONS [10] zaproponowali model całkowy wykorzystujący pierwszą całkę z równania (2.10) z funkcją pamięci  $\alpha(s)$  w postaci

$$(2.17) \quad \alpha(s) = \begin{cases} \alpha_0 \exp(-s/\tau) & \text{gdy } \|\mathbf{G}\| < G_{cr}, \\ 0 & \text{gdy } \|\mathbf{G}\| \geq G_{cr}, \end{cases}$$

gdzie  $\|\mathbf{G}\|$  jest pewną skalarną miarą odkształcenia, a  $G_{cr}$  wartością krytyczną, powyżej której znika wszelki wpływ historii. Funkcja (2.17) jest całkowalna ze składowymi tensora  $\mathbf{G}_t$  przy dowolnych skończonych wartościach  $q^*$  i nie przewiduje żadnych osobliwości w funkcji lepkości podłużnej  $\eta^*(q^*)$ . Inne stanowisko reprezentują m.in. DENN i MARUCCI [11], PARLATO [12], ASTARITA i NICODEMO [13], którzy zwracają uwagę na fakt, że osobliwości w zachowaniu się liniowego materiału lepko-sprężystego przy szybkości deformacji porównywalnej z odwrotnością czasu relaksacji są zupełnie naturalne. DENN i MARUCCI [11] zauważyli, że w punkcie  $q^* = 1/2\tau$  naprężenie w przepływie rozciągającym materiału lepko-sprężystego nie wykazuje osobliwości, lecz zmienia się jedynie charakter jego zależności czasowej; poniżej tej granicy naprężenie dąży ze wzrostem czasu do pewnej skończonej granicy, a lepkość podłużna określona jako wartość asymptotyczna stosunku

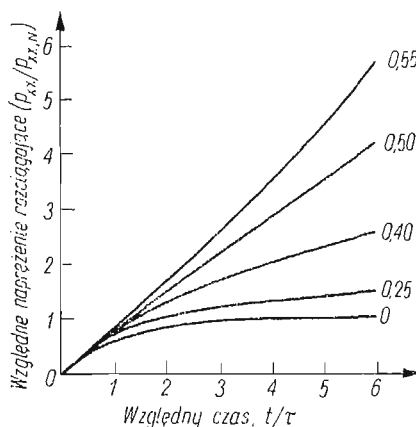
$$(2.18) \quad \eta^*(q^*) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{T^{11}(t) - T^{22}(t)}{q^*}$$

jest ograniczona. Począwszy od krytycznej wartości  $q^* = 1/2\tau$  naprężenie rośnie nieograniczenie w czasie i osiągnięcie stanu ustalonego jest niemożliwe. Widać to wyraźnie na rys. 3.

Spostrzeżenie to wyjaśnia pozorne osobliwości zachowania się liniowych cieczy lepko-sprężystych (cieczy kauczukopodobnej Lodge'a) w przepływie rozciągającym i wskazuje na możliwość występowania ograniczeń w realizacji przepływu ustalonego. Tak więc modele całkowe z prostymi wykładniczymi funkcjami pamięci nie tracą sensu fizycznego w odniesieniu do przepływów rozciągających, jak to sugerował Tanner, co nie wyklucza

możliwości istnienia materiałów o szczególnych rodzajach «pamięci» [np. typu (2.17)], w których ustalony przepływ rozciągający jest możliwy przy dowolnych szybkościach odkształcenia.

Rys. 3. Zmiany naprężenia rozciągającego w czasie dla konwekcyjnej cieczy Maxwella poddanej rozciąganiu ze stałą szybkością  $q^*$ . Liczby przy krzywych oznaczają wartości iloczynu  $q^*\tau$  [11]



Trzecia grupa modeli fenomenologicznych obejmuje tzw. równania typu szybkościowego

$$(2.19) \quad \mathcal{F} \mathbf{T}_E = \mathcal{G} \mathbf{A}_1,$$

gdzie  $\mathcal{F}$  i  $\mathcal{G}$  są liniowymi kombinacjami operatorów różniczkowania (różnego rzędu) względem czasu. Przykładem takich materiałów mogą być np. lepkosprężyste materiały OLDROYDA [14], ciecz Maxwella, ciało Kelvina itp.

Dla najprostszego modelu tego typu — konwekcyjnej cieczy Maxwella–Oldroyda o równaniu konstytutywnym

$$(2.20) \quad T_E^{ij} + \tau \frac{d T_E^{ij}}{dt} = 2\eta A_1^{ij},$$

gdzie  $\frac{d}{dt}$  oznacza pochodną Oldroyda, jest całkowicie równoważny cieczy typu całkowego I rzędu [równ. (2.10)] z wykładniczą funkcją pamięci [równ. (2.14)], a lepkość podłużną przy założeniu stanu ustalonego otrzymuje się w postaci (2.15). Dla tzw. trójparametrowego modelu Oldroyda z lepkością  $\eta_0$  i dwoma czasami relaksacji  $\tau_1$  i  $\tau_2$  BIRD i SPRIGGS [15] otrzymali wyrażenie na ustaloną lepkość podłużną

$$(2.21) \quad \eta^*(q^*) = 3\eta_0 \frac{1 - q^*\tau_1}{1 - q^*\tau_2},$$

wykazujące, podobnie jak równ. (2.15), nieciągłość w punkcie  $q^* = 1/\tau_2$ .

Istnieje oczywiście nieograniczona liczba możliwości konstruowania takich lub innych modeli fenomenologicznych prowadzących do rozmaitych wyników dla przepływów rozciągających. Analiza trzech grup modeli omówionych wyżej oraz ogólniejszego równania prostej cieczy Nolla pozwala na wyciągnięcie dwóch wniosków ważnych dla dalszych badań:

1. Zachowanie się mechaniczne cieczy lepkosprężystych w przepływach rozciągających różni się w sposób zasadniczy od zachowania się tych materiałów w przepływach ścinających, wobec czego funkcje materiałowe dla rozciągania należy uzyskać z niezależnych pomiarów lub teorii molekularnych.

2. Dla materiałów lepkosprężystych wykazujących relaksację naprężeń (ciecze typu całkowego lub szybkościowego) mogą istnieć granice szybkości odkształcenia (zależne od charakterystycznego(ych) czasu(ów) relaksacji), powyżej których nie można zrealizować ustalonego przepływu rozciągającego.

Efekty relaksacyjne odgrywają w przepływach rozciągających bardzo ważną rolę. Lepkość podłużna w stanie ustalonym  $\eta^*(q^*)$  nie jest wystarczającą charakterystyką takich przepływów i konieczna jest znajomość charakterystyk relaksacyjnych dla określenia zakresu szybkości deformacji, w którym przepływ ustalony jest w ogóle możliwy oraz szybkości osiągnięcia takiego przepływu. Należy zwrócić uwagę, że przepływy rozciągające występujące w procesach przetwórstwa polimerów są z reguły nieustalone i charakterystyki relaksacyjne odgrywają poważną rolę w kształtowaniu się wielu zjawisk decydujących o takich procesach. Z tego też względu stosowanie równań typu całkowego lub szybkościowego wydaje się bardziej uzasadnione niż równań typu różniczkowego, pomijających efekty relaksacyjne.

Rozważania fenomenologiczne nie mogą oczywiście odpowiedzieć na pytanie, jakie modele są właściwe dla różnych rodzajów materiałów. Rozstrzygnięcie tego problemu pozostaje otwarte dla teorii molekularnych (opartych o modele strukturalne wykorzystujące istniejące informacje o molekularnej budowie układu) oraz bezpośrednich badań doświadczalnych. Zagadnieniom tym poświęcimy następne części artykułu.

Na zakończenie tej części chciałbym zwrócić uwagę na pewne mity związane w literaturze reologicznej z lepkością podłużną.

a) Niektórzy autorzy [16] w ślad za dawną koncepcją NITSCHMANNNA i SCHRADDEGO [17] utrzymują, że stateczność swobodnej strugi cieczy polimerowych wynika bezpośrednio z charakteru lepkości podłużnej, która na ogół rośnie z szybkością odkształcenia. Założenie takie jest nieuzasadnione, a w wielu wypadkach wręcz błędne. Przy dużych szybkościach odkształcenia (i dużych lepkościach podłużnych) występuje np. kruche, kohezyjne zerwanie strugi ograniczające jej maksymalną długość i szybkość przepływu [18].

b) Wzrost lepkości podłużnej z szybkością rozciągania  $q^*$  utożsamia się czasem z zestaleniem cieczy na skutek przepływu [16, 19]. W rzeczywistości każda ciecz lepkosprężysta zachowuje się jak ciało stałe, gdy przyłożą się dostatecznie szybkie odkształcenie: nawet struga wody poddana bardzo szybkim obciążeniom uderzeniowym rozpada się jak kruche ciało stałe [20]. Jest to jednak typowa reakcja materiału lepkosprężystego, a nie zmiana stanu jaką sugeruje termin «zestalenie». Źródłem tego nieporozumienia jest przypuszczalnie fakt, że lepkość Newtona, bardzo czuła na strukturę molekularną i temperaturę cieczy, zmienia się gwałtownie podczas zmian fazowych i często służy jako charakterystyka stanu materiału. Nie jest to jednak słuszne w odniesieniu do funkcji materiałowych zależnych od przepływu  $\eta(q)$  lub  $\eta^*(q^*)$ . Zmiana tych charakterystyk z szybkością deformacji niekoniecznie musi być wynikiem zmiany stanu, lecz zależy również od czynników czysto mechanicznych (np. sprężystości).

Należy wątpić, czy takie wielkości fizyczne, jak stałe dyfuzji, molekularne czasy relaksacji itp., ściśle zależne od lepkości Newtona, wykazują jakąkolwiek korelację z reologicznymi charakterystykami  $\eta(q)$  lub  $\eta^*(q^*)$  zmieniającymi się z szybkością odkształcenia.

### 3. Teorie molekularne

Celem rozważań molekularnych jest wyprowadzenie zależności konstytutywnych (nie tylko mechanicznych) dla różnych materiałów modelowych o założonej strukturze. Jeżeli założenia modelowe oparte są o rzeczywistą wiedzę o strukturze materiału, to uzyskane równania konstytutywne zawierają stałe materiałowe charakteryzujące budowę molekularną (np. energie oddziaływań międzycząsteczkowych, bariery potencjalne rotacji wiązań chemicznych itp.) i pozwalają na przewidywanie własności makroskopowych materiału w oparciu o znaną budowę mikroskopową. Podstawę rozważań molekularnych stanowi analiza oddziaływań międzycząsteczkowych w układzie i przekazywania sił zewnętrznych (przyłożonych do granicy układu) poszczególnym elementom strukturalnym. Makroskopowy tensor naprężeń (podobnie jak i inne wielkości fizyczne) uzyskuje się przez uśrednienie wielkości lokalnych (w przypadku naprężenia: diad naprężeń) po odpowiedniej funkcji rozkładu charakteryzującej układ w sposób statystyczny. Zasady konstruowania podobnych teorii w reologii polimerów omówiłem w innym artykule [21]. Tu przytoczę jedynie wyniki uzyskane dla różnych cieczy polimerowych.

Omówimy osobno dwie grupy takich cieczy:

i) rozcieńczone roztwory i zawiesiny, których zachowanie się warunkują oddziaływania wewnątrzcząsteczkowe oraz oddziaływania pomiędzy cząstkami lub makromolekułami polimeru i rozpuszczalnikiem, w którym są one zawieszane (rys. 4a ÷ c),

ii) układy skondensowane (polimery stopione, stężone roztwory), w których zasadniczą rolę odgrywają oddziaływania typu polimer-polimer (rys. 7a, b).

TAKSERMAN-KROZER i ZIABICKI [22] analizowali zawiesinę sztywnych elipsoid zawieszonych w newtonowskiej cieczy (rys. 4a). Podczas, gdy lepkość przy ścinaniu dla takiego układu była malejącą funkcją  $q$ , lepkość podłużna  $\eta^*$  rosła ze wzrostem szybkości rozciągania  $q^*$  dążąc do pewnej skończonej granicy zależnej od kształtu cząstek przy  $q^* = \infty$ . Wyniki te pokazano na rys. 5 dla elipsoid o stosunku osiowym  $p = 8$  (elipsoidy wydłużone, pałeczki) oraz  $p = 1/8$  (elipsoidy spłaszczone, dyski). Zawiesina kul ( $p = 1$ ) zachowuje się jak ciecz Newtona ( $\eta^* = 3\eta_0$ ).

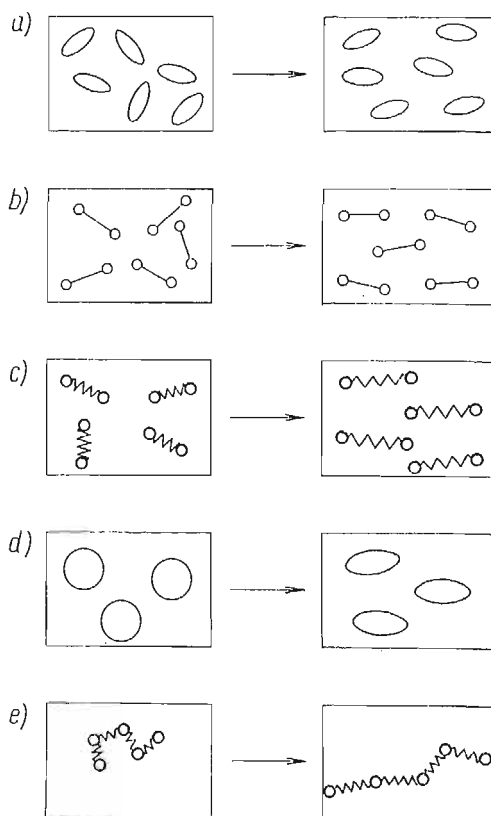
PRAGER [23] badał podobny model — zawiesinę sztywnych hantli (rys. 4b) uzyskując charakterystyki materiałowe w postaci szeregu, a BIRD i wsp. [24] podają zamknięte wyrażenie na lepkość podłużną dla układu hantli o stężeniu  $c$  w postaci

$$(3.1) \quad \eta^* - 3\eta_0 = 3ckT\tau \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{6q^*\tau} + \frac{\exp(X)}{\frac{4}{3}X^{1/2} \int_0^X \exp(u^2) du} \right],$$

$$X = 9q^*\tau/2,$$

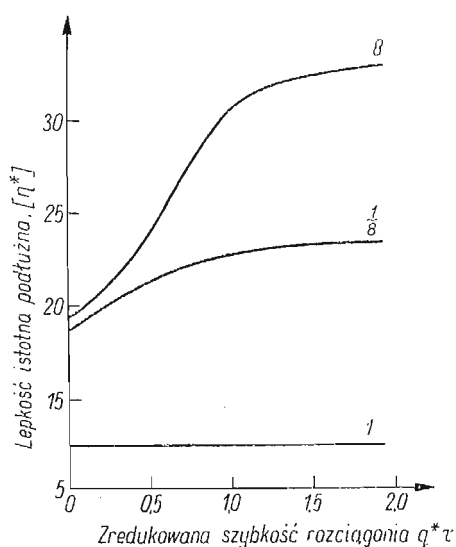
$\eta_0$  oznacza tu lepkość newtonowską rozpuszczalnika, a  $\tau$  — stałą czasową (czas relaksacji związany z dyfuzją obrotową cząstek).

Również w tym wypadku lepkość podłużna monotonicznie rośnie z szybkością rozciągania dążąc do stałej granicy, gdy  $q^* \rightarrow \infty$ . Molekularny sens takiego zachowania się jest zupełnie jasny: zmiany charakterystyk mechanicznych w układzie sztywnych cząstek mogą wynikać jedynie ze zmian orientacji cząstek w przepływie. Orientacji takiej



Rys. 4. Modele molekularne rozcieńczonych zawiesin i roztworów polimerów

a) sztywne elipsoidy, b) sztywne hantle, c) sprężyste hantle, d) sprężyste lub lepko-sprężyste kule, e) «sznur pereł» (model sub-łańcuchów)



Rys. 5. Zmiany podłużnej lepkości z szybkością rozciągania dla rozcieńczonych zawiesin sztywnych elipsoid [22]. Liczby obok krzywych oznaczają stosunek osiowy elipsoid

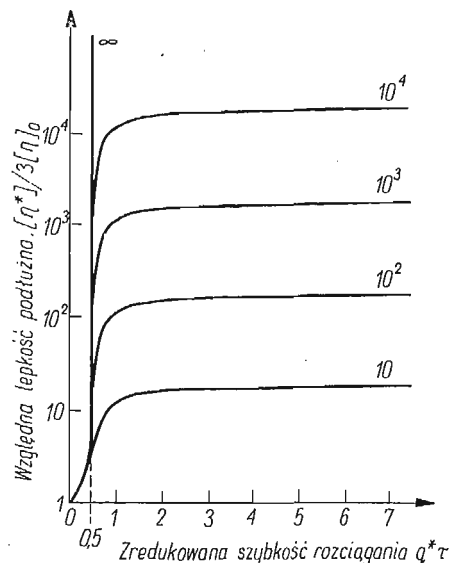
ulegają oczywiście jedynie cząstki asymetryczne (stąd brak zmian dla zawiesiny kul), a idealna orientacja wszystkich cząstek wzdłuż linii pola prędkości odpowiada granicznej (skończonej) lepkości  $\eta^*(q^* \rightarrow \infty)$ .

Rozszerzenie analizy strukturalnej na zawiesiny i roztwory zawierające cząstki odkształcalne dało nieco zaskakujące wyniki. Giętką, łańcuchową makrocząsteczkę polimeru liniowego modeluje się zazwyczaj za pomocą sprężystej hantli (rys. 4c) lub «sznura pereł» połączonych sprężystymi elementami (rys. 4e, tzw. model sub-łańcuchów). Pierwsze prace dotyczące tych modeli (TAKSERMAN-KROZER [25], BIRD, JOHNSON i STEVENSON [26]) oparte były na założeniu gaussowskiej statystyki konformacji makrocząsteczek, założeniu równoważnemu liniowej sprężystości hantli lub sznura pereł. Lepkość podłużną w ustalonym przepływie ścinającym dla modelu sub-łańcuchów otrzymuje się wów-

czas w postaci [25]

$$(3.2) \quad \eta^* - 3\eta_0 = 3ckT \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i \tau_i}{(1 - 2q^* \tau_i)(1 + q^* \tau_i)},$$

gdzie  $\lambda_i$  oznaczają wartości własne zagadnienia,  $\tau_i$  — czasy relaksacji, a  $N$  jest liczbą sub-łańcuchów w makrocząsteczce. Gdy  $N = 1$  model redukuje się do zwykłej hantli (por. rys. 4c, e), a lepkość podłużna przybiera postać (2.15) wyprowadzoną przez LODGE'Ą na drodze czysto fenomenologicznej dla modelu cieczy kauczukopodobnej. Łatwo zauważyć, że zarówno wyrażenie dla modelu sub-łańcuchów [wzór (3.2)] jak i pojedynczej hantli [wzór (2.15)] przewidują nieciągłość lepkości podłużnej przy skończonych wartościach szybkości rozciągania ( $q^* = 1/2\tau_i$  lub  $q^* = 1/2\tau$ ). Takie zachowanie się rozcieńczonych roztworów polimeru jest fizycznie nieuzasadnione lecz wynika bezpośrednio z uproszczonych założeń modelowych. Statystykę gaussowską stosować można jedynie w obszarze niewielkich odkształceń makrocząsteczki, podczas gdy odkształcenia w przepływie rozciągającym są z reguły bardzo duże. Zastąpienie statystyki gaussowskiej bardziej ogólną funkcją Langevina (uwzględniającą skończoną odkształcalność makrocząsteczki) prowadzi do wyników fizycznie sensownych. PETERLIN [27], a następnie TANNER i STEHRENBARGER [28] oraz MARUCCI i HERMANS [29] wykazali, że lepkość podłużna roztworów hantli z potencjałem langewinowskim nie wykazuje osobliwości, lecz rośnie monotonicznie z szybkością rozciągania do wartości asymptotycznych zależnych od długości (ciężaru cząsteczkowego) makrocząsteczek. Charakterystyki  $\eta^*(q^*\tau)$  obliczone przybliżoną metodą Peterlina przedstawia rys. 6. W granicznym przypadku, gdy  $M \rightarrow \infty$  (co odpowiada



Rys. 6. Zmiany podłużnej lepkości z szybkością rozciągania dla rozcieńczonych roztworów giętkich, łańcuchowych makrocząsteczek o skończonej odkształcalności (statystyka Langevina) [27]. Liczby obok krzywych oznaczają liczbę segmentów statystycznych (maksymalną długość) makrocząsteczek

przejściu statystyki Langevina w statystykę Gaussa) obserwuje się nieskończoną lepkość podłużną przy  $q^* = 1/2\tau$ , jak we wzorze (2.15). W języku fenomenologicznym, założenie statystyki konformacji opartej na odwrotnej funkcji Langevina odpowiada sprężystej

hantli z modułem Younga monotonicznie rosnącym wraz z odkształceniem do nieskończoności przy pewnym odkształceniu granicznym (pełne wyprostowanie makrocząsteczki).

Podobne wyniki uzyskał również ROSCOE [30] dla rozcieńczonych zawieszin odkształcalnych kul (rys. 4d). Gdy kule takie traktowano jako liniowo lepko-sprężyste lepkość podłużna wykazywała nieciągłość przy skończonej wartości  $q^*$ , jak we wzorach (2.15) i (3.2).

Podsumowując tę grupę modeli, można stwierdzić, że układy rozcieńczone nie wykazujące silnych oddziaływań międzycząsteczkowych dają lepkość podłużną rosnącą z szybkością rozciągania do pewnej skończonej wartości granicznej odpowiadającej maksymalnemu odkształceniu lub/i idealnej orientacji elementów strukturalnych w polu prędkości. Pozorne osobliwości wynikające z założenia liniowej sprężystości elementów odkształcalnych znikają, jeżeli uwzględni się fizycznie uzasadnione granice odkształcalności. Zachowanie się takie (w odniesieniu do przepływów ustalonych) opisują dobrze modele różniczkowe [wzór (2.6)], a efekty relaksacyjne nie są zbyt silne. Stosowanie do takich układów modeli typu całkowego [wzór (2.10)] wymagałoby natomiast wprowadzania szybko zbieżnych funkcji pamięci całkowalnych z funkcją wykładniczą.

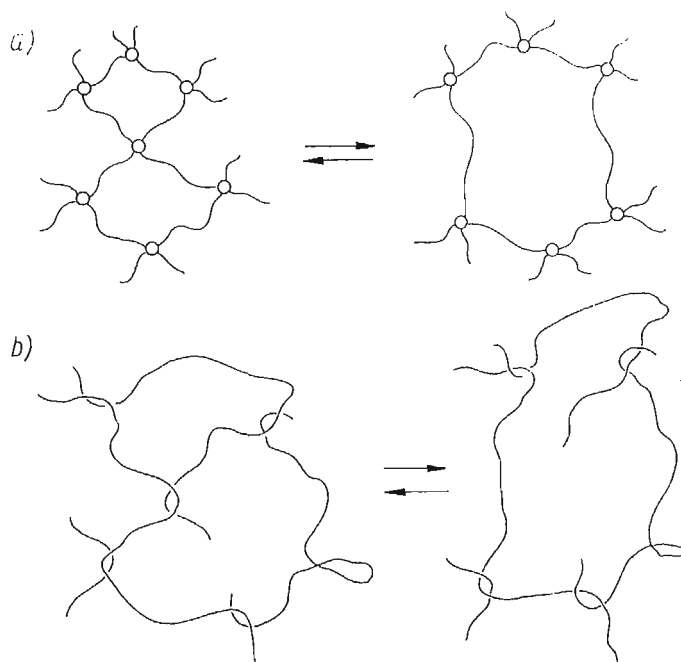
Molekularne informacje o skondensowanych układach polimerowych: stopach i roztworach stężonych są znacznie bardziej skąpe. Praktycznie jedyną fizycznie sensowną teorią takich układów pozbawioną dowolnych założeń zawartych w wielu innych pracach (np. [31–35]) jest teoria «czasowych» sieci molekularnych ze zlokalizowanymi węzłami ulegającymi dysocjacji i odtwarzaniu w czasie (rys. 7a). Zachowanie się takich układów warunkują dwa czynniki molekularne: sprężystość łańcuchów sieci, tzn. odcinków makrocząsteczek zawartych pomiędzy sąsiednimi węzłami, oraz kinetyka procesów rozpadu i odtwarzania się węzłów. W najprostszym przypadku rozważanym przez LODGE'A [36] dla łańcuchów gaussowskich i stałej częstości dysocjacji, otrzymuje się równanie konstytutywne w postaci analogicznej do równania rozcieńczonych roztworów makrocząsteczek gaussowskich. Jedyna różnica pomiędzy tymi dwoma modelami polega na molekularnym sensie czasu relaksacji: w rozcieńczonych roztworach czas ten określony jest przez tarcie pomiędzy łańcuchami polimeru i rozpuszczalnikiem, podczas gdy w sieciach zależy on od szybkości dysocjacji węzłów. W tym przybliżeniu lepkość podłużna określona jest równaniem (2.15), podobnie jak lepkość rozcieńczonych roztworów liniowych hantli, i wykazuje tę samą osobliwość przy  $q^* = 1/2\tau$ . Ogólniejsze przypadki rozważane były przez YAMAMOTO [37]. Osobliwość przy  $q^* = 1/2\tau$  można wyeliminować podobnie, jak w przypadku rozcieńczonych roztworów zakładając nieliniową sprężystość łańcuchów sieciowych. Opierając się na zaobserwowanej przez LODGE'A [38] formalnej analogii pomiędzy czasowymi sieciami o stałej częstości dysocjacji i rozcieńczonymi roztworami można oczekiwać, że wprowadzenie skończonej rozciągliwości łańcuchów doprowadzi do nasycenia lepkości podłużnej, tak jak to przedstawiono na rys. 6. Z drugiej strony, założenie szybkości dysocjacji rosnącej wraz z odkształceniem łańcuchów [37] prowadzi również do ciągłych funkcji lepkości podłużnej. YAMAMOTO rozważał funkcję częstości dysocjacji  $\beta$  w postaci

$$(3.3) \quad \beta = \begin{cases} \beta_0 = \text{const} & \text{dla } ||\mathbf{e}|| < e_{cr}, \\ \infty & \text{dla } ||\mathbf{e}|| \geq e_{cr}, \end{cases}$$



gdzie  $\|e\|$  jest miarą rozciągnięcia łańcucha sieci, a  $e_{cr}$  jest pewną wartością krytyczną. Równanie (3.3) przewiduje, że wszystkie łańcuchy osiągnące krytyczne wydłużenie  $e_{cr}$  zrywają się natychmiast; jest to dokładnie równoważne założeniu (2.17) jakie dokonali w teorii makroskopowej TANNER i SIMMONS [10]. Zgodnie z takim modelem lepkość podłużna rośnie wraz z gradientem prędkości  $q^*$ , osiąga maksimum, a następnie spada do zera. Maksymalna lepkość rośnie wraz z krytycznym wydłużeniem  $e_{cr}$  i przechodzi w funkcję nieciągłą ( $\eta^* = \infty$  przy  $q^* = 1/2\tau$ ) gdy  $e_{cr} \rightarrow \infty$ .

Teoria sieci ze zlokalizowanymi węzłami nie uwzględnia wielu istotnych elementów budowy stężonych roztworów i stopów polimerów. Modelem, który, jak wydaje się, lepiej opisuje układy rzeczywiste jest sieć splątań (rys. 7b) dopuszczająca możliwość



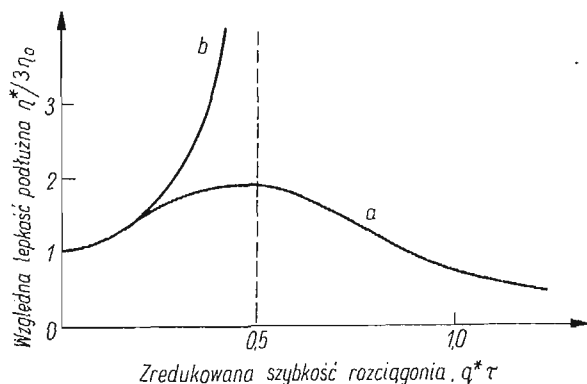
Rys. 7. Modele molekularne stężonych roztworów i stopów polimerów

a) — sieć ze zlokalizowanymi węzłami ulegającymi dysocjacji i odtwarzaniu, b) — sieć splątań z łańcuchami ślizgającymi się w węzłach

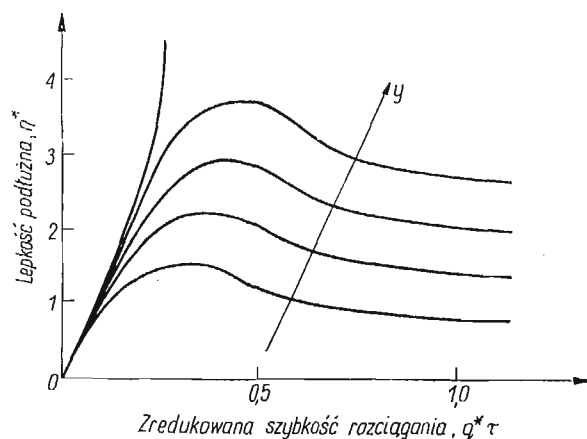
ślizgania się chwilowych węzłów wzdłuż łańcuchów polimeru. Teoria takich układów jest obecnie przedmiotem badań [21, 39]. Czynniki molekularnymi odpowiedzialnymi za własności mechaniczne sieci splątań są: lepkość sprężystości łańcuchów (związana ze zmianami konformacji i barierą potencjału rotacji wewnętrznej, por. [21]) oraz współczynniki kontaktowych oddziaływań (tarcia w węzłach) pomiędzy łańcuchami.

Ogólnie rzecz biorąc wydaje się, że zmiany lepkości podłużnej w skondensowanych układach polimerów powinny wykazywać przebieg pokazany schematycznie na rys. 9, a różniący się od rys. 8 skończonymi wartościami lepkości granicznej  $\eta^*(q^*\tau \rightarrow \infty)$ . Dla układów o dużej trwałości węzłów lub dużym współczynnikiem tarcia kontaktowego maksima lepkości mogą przekraczać wartości krytyczne odpowiadające zniszczeniu ko-

hezyjnemu. Dla takich układów, o długich czasach relaksacji, proste równania całkowe lub szybkościowe (np. konwekcyjna ciecz Maxwella) wydają się fizycznie uzasadnione bez konieczności wprowadzania «obciętych» funkcji pamięci. Pogląd ten potwierdzają



Rys. 8. Zmiany podłużnej lepkości z szybkością rozciągania dla sieci o zlokalizowanych węzłach, dla której prawdopodobieństwo rozpadu zmienia się z odkształceniem (wzór 3.3) [37]  
*a* — skończone odkształcenie krytyczne  $e_{cr}$ , *b* — nieskończone odkształcenie krytyczne (stałe prawdopodobieństwo rozpadu)



Rys. 9. Hipotetyczny przebieg zmian lepkości podłużnej z szybkością rozciągania dla skondensowanych układów polimerowych. Parametr  $y$  rośnie wraz z trwałością wiązań międzycząsteczkowych (węzłów sieci) lub współczynnikiem tarcia kontaktowego pomiędzy makrocząsteczkami

wyniki eksperymentalne uzyskane na stopionych stopach poliolefin o długich czasach relaksacji (por. rys. 12–13 w następnej części). Z drugiej strony układy o słabszych węzłach dopuszczające wysokie szybkości rozciągania należy opisywać za pomocą bardziej złożonych modeli konstytutywnych przewidujących maksimum lepkości; warunek taki spełnia m.in. model Tannera–Simmonsa z obciętą pamięcią [wzór (2.17)]. Podobny przebieg lepkości podłużnej obserwował BALLMAN na stopionym polistyrenie (rys. 2). W każdym przypadku dla układów skondensowanych, w których efekty relaksacyjne odgrywają

zasadniczą rolę, równania typu całkowego lub szybkościowego wydają się bardziej właściwe niż równania typu różniczkowego nie uwzględniające relaksacji naprężeń. Molekularne teorie skondensowanych układów polimerowych wymagają dalszego rozwinięcia.

#### 4. Badania doświadczalne

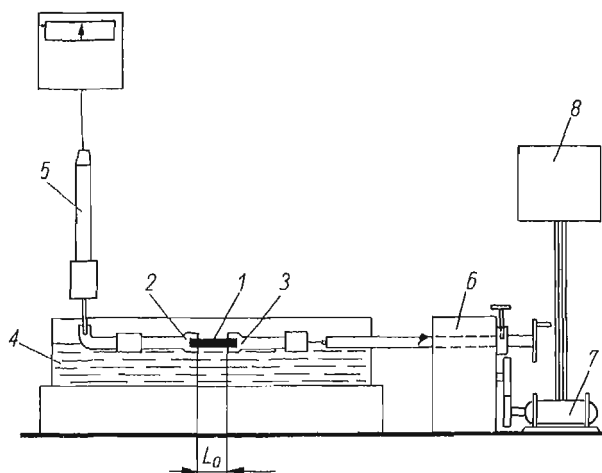
Można by sądzić, że zagadnienie właściwego wyboru modeli konstytutywnych do opisu rozciągania cieczy polimerowych da się łatwo i bezpośrednio rozstrzygnąć na drodze doświadczalnej. Jednakże doświadczalne badanie przepływów rozciągających następuje z wieloma trudnościami, a reometria takich przepływów (ściślej: wszelkich przepływów niewiskozymetrycznych) znajduje się dopiero w powojakach. Równocześnie jednak, specyficzny charakter funkcji materiałowych w takich przepływach nadaje badaniom doświadczalnym szczególne znaczenie.

Aby uzyskać wiarygodne informacje eksperymentalne o lepkości podłużnej należy spełnić następujące warunki:

- a) pole prędkości (naprężeń) powinno być jednorodne, stałe w całej objętości próbki,
- b) warunki przepływu powinny być niezależne od czasu (ustalone),
- c) proces deformacji powinien być izotermiczny.

Trudności w zrealizowaniu powyższych warunków związane są ze swobodną powierzchnią próbki (tarcie w ośrodku, napięcie powierzchniowe) oraz siłami ciężkości i bezwładności, które można pominąć jedynie dla materiałów o dużej lepkości przy małych szybkościach odkształcenia.

Pierwszą grupą instrumentów używanych do badania rozciągania polimerów są ekstensometry zaciskowe zwykle używane do badania ciał stałych. Przyrządy takie stosowali BALLMAN [4], WINOGRADOW i wsp. [19, 40–42] oraz COGSWELL [43]. Schemat takiego



Rys. 10. Aparat do badania rozciągania stopionych polimerów według Winogradowa [19]

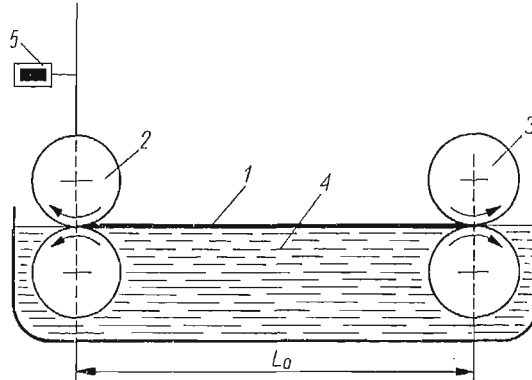
przyrządu pokazano na rys. 10. Zanurzenie próbki w ciekłej kąpieli gwarantuje regulację temperatury i redukuje wpływ sił ciężkości i napięcia powierzchniowego. BALLMAN [4] i WINOGRADOW [41] badali rozciąganie stopów polimerów o dużej lepkości stosując pro-

gramowane prędkości ruchomego zacisku. Należy zauważyć, że w przyrządzie tego typu stały w czasie gradient prędkości  $q^*$  można uzyskać tylko wówczas, gdy względna prędkość zacisków rośnie wykładniczo w czasie

$$(4.1) \quad V(t) = V_0 \exp(q^* t).$$

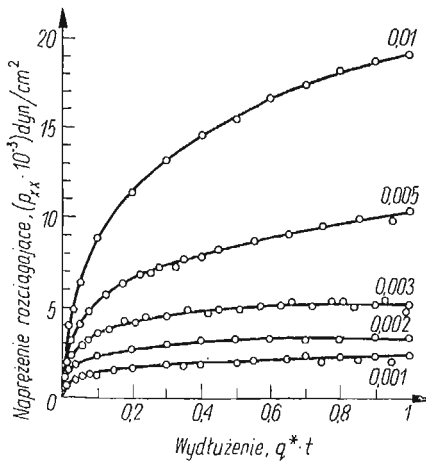
COGSWELL [43] stosował natomiast stałe naprężenie, a KARAM i BELLINGER [44] stałą siłą rozciągającą jako warunki brzegowe procesu rozciągania.

Konieczność stosowania elektronicznie lub mechanicznie programowanych prędkości posuwu zacisków wyeliminował MEISSNER [45], zastępując układ zacisków parą walców



Rys. 11. Aparat do badania rozciągania stopionych polimerów według Meissnera [45]

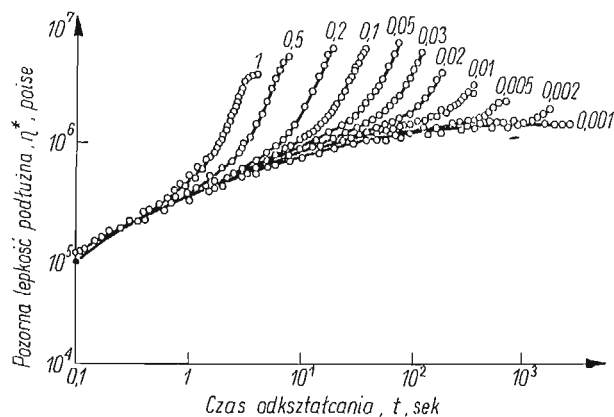
(rys. 11). Dla takiego układu, stałą szybkość rozciągania osiąga się przy stałej prędkości walców, co znacznie upraszcza konstrukcję instrumentu. Oba typy przyrządów — ekstensometry zaciskowe i walcowe dają wiarygodne krzywe naprężenie—czas lub wydłużenie—czas, lepkości podłużne i odwracalne odkształcenia dla materiałów o lepkościach nie



Rys. 12. Krzywe pełzania polietylenu [45]. Liczby obok krzywych oznaczają stałą w czasie szybkość rozciągania  $q^*$  w  $\text{sek}^{-1}$

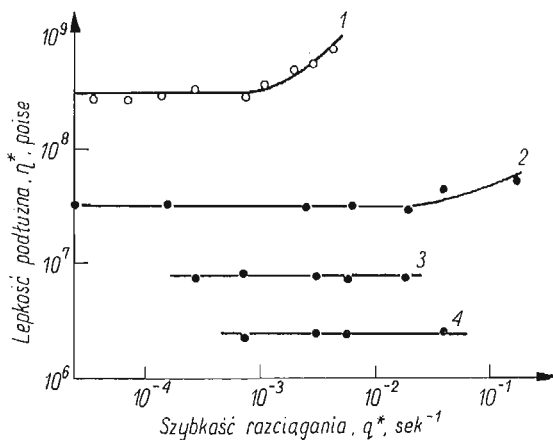
mniejszych niż  $10^5$  poisów przy maksymalnych szybkościach rozciągania rzędu  $1 \text{ sek}^{-1}$ . Typowe wyniki dla polietylenu pokazano na rys. 12 i 13. Wyniki te przypominają teoretyczne przewidywania dla konwekcyjnej cieczy Maxwella (rys. 3). Przy najniższej szyb-

kości rozciągania ( $q^* = 10^{-3} \text{ sek}^{-1}$ ) naprężenie dąży do wartości stałej i przepływ staje się ustalony. Przy wyższych szybkościach naprężenie wzrasta coraz szybciej i nie widać tendencji do osiągnięcia stanu ustalonego.



Rys. 13. Zmiany pozornej lepkości podłużnej polietylenu w czasie [46]. Liczby obok krzywych oznaczają szybkość rozciągania  $q^*$  w  $\text{sek}^{-1}$

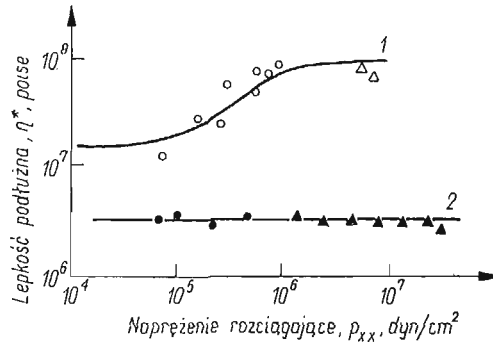
Rys. 14 i 15 przedstawiają krzywe lepkości podłużnej po osiągnięciu stanu ustalonego dla różnych polimerów. Ogólnie, lepkość podłużna stopionych polimerów wzrasta z szybkością rozciągania  $q^*$  [19, 40–43] lub wykazuje słabe maksimum [4].



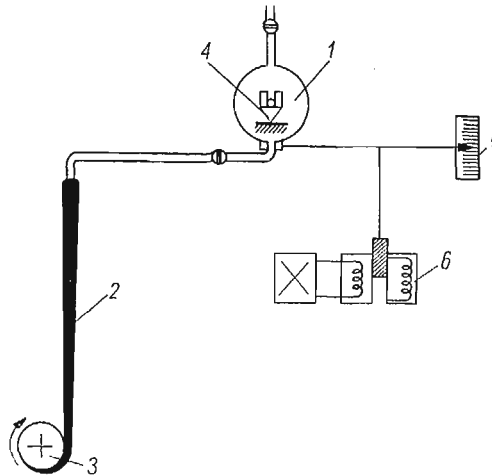
Rys. 14. Lepkość podłużna stopionych polimerów w ustalonym przepływie rozciągającym [19]  
1 — polistyren  $T = 130^\circ\text{C}$ , 2 — poliizobutylen  $T = 22^\circ\text{C}$ , 3 — poliizobutylen  $T = 40^\circ\text{C}$ , 4 — poliizobutylen  $T = 60^\circ\text{C}$

Trzecia grupa przyrządów proponowana do badań umiarkowanie lepkich cieczy oparta jest na zasadzie ustalonej strugi cieczy wypływającej z dyszy i odbieranej w sposób ciągły z regulowaną prędkością (rys. 16). Istnieje szereg trudności w zastosowaniu tego typu przepływu do badań reologicznych: trudno zrealizować w nim warunki termodynamiczne, a efekty napięcia powierzchniowego, tarcia w ośrodku, ciężkości i bezwładności mogą stanowić istotne, jeśli nie decydujące składniki mierzonego naprężenia. Niektórzy autorzy proponowali ten typ urządzenia do umownych, nieizotermicznych badań stopów

polimerów [46-48]. Uzyskane w takich warunkach umowne zależności szybkości odbioru od naprężenia rozciągającego można by przypuszczalnie skorelować z parametrami przetwórstwa polimerów. Inni autorzy [49, 50] proponują ten układ do obiektywnych



Rys. 15. Lepkość podłużna stopionych polimerów w ustalonym przepływie rozciągającym [43]  
1 — polimetakrylan metylu, 2 — polietylen

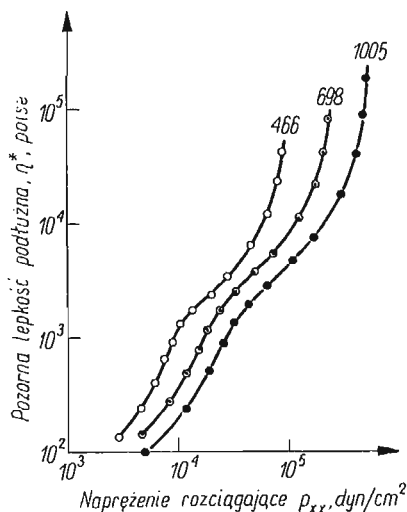


Rys. 16. Aparat do badania przepływów rozciągających oparty na zasadzie «wagi przędzalniczej» (Spinmwaage) [17]

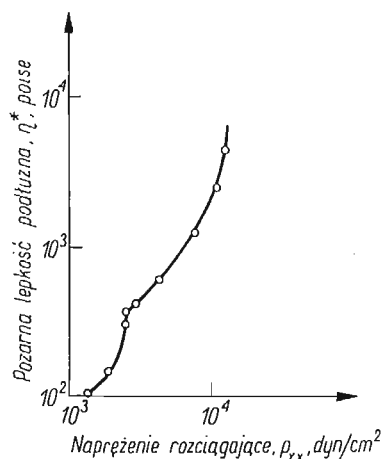
bań reologicznych (pomiar podłużnej lepkości). Trzeba tu jednak podkreślić, że nawet jeśli zrealizuje się warunki idealnie termodynamiczne, poprawnie uwzględni udziały jakie wnoszą do mierzonego naprężenia efekty grawitacji, inercji, napięcia powierzchniowego itp., interpretacja tych doświadczeń w kategoriach obiektywnych charakterystyk materiałowych nie jest łatwa. Pole prędkości występujące w swobodnej strudze cieczy jest ustalone lecz nie jednorodne: gradient prędkości zmienia się wzdłuż strugi. Dla cieczy lepko-sprężystej z pamięcią stosunek: (naprężenie rozciągające)/(szybkość rozciągania) wyznaczony w różnych punktach strugi nie charakteryzuje wcale lepkości podłużnej zdefiniowanej wzorem (2.3) lub (2.18)

$$(4.2) \quad \frac{T^{11}(x) - T^{22}(x)}{q^*(x)} \neq \eta^*[q^*(x)].$$

Jednoznaczna interpretacja stosunku lokalnego naprężenia do lokalnego gradientu prędkości możliwa jest jedynie dla cieczy niesprężystej (cieczy Reintera–Rivlina); ciecze polimerowe wykazują z reguły własności lepkosprężyste. Dane doświadczalne uzyskane metodą strugi dla roztworów poliakryloamidu i wiskozy przez ZIDANA [50] wykazują wyraźny wpływ warunków doświadczalnych na pozorne lepkości podłużne obliczone z nieprawidłowego wzoru (4.2). Widać to wyraźnie na rys. 17. Sam kształt krzywych lepkości



Rys. 17. Krzywe pozornej lepkości podłużnej wyliczone ze wzoru (4.2) dla swobodnej strugi roztworu poliakryloamidu [50]. Liczby obok krzywych oznaczają liniową prędkość odbioru strugi w cm/sec



Rys. 18. Krzywa pozornej lepkości podłużnej wyliczona ze wzoru (4.2) dla swobodnej strugi wiskozy [50]

(rys. 17–18) wykazujących załamania i ostry wzrost z szybkością rozciągania budzi również poważne wątpliwości.

Prawidłowa interpretacja doświadczeń z rozciąganiem swobodnej strugi cieczy powinna uwzględniać aktualne zmiany pola prędkości wzdłuż osi strugi. Próbę takiej interpretacji podjęli ACIERNO, DALTON, RODRIGUEZ i WHITE [51] stosując model całkowity I rzędu i szukając w ten sposób funkcji pamięci  $\alpha(s)$ . Postępowanie takie wymaga jednak założenia z góry określonego modelu konstytutywnego i może służyć jedynie do sprawdzenia dopuszczalności przyjętych założeń.

Realizacja doświadczalna ustalonej strugi cieczy i możliwości przeprowadzenia dostatecznie dokładnych pomiarów dotyczą cieczy o lepkości Newtona nie niższej niż  $10^3$  poisów. W cieczach o małej lepkości kształt strugi jest praktycznie niezależny od własności reologicznych [52].

Inne układy proponowane do badania charakterystyk materiałowych rozciągania (przede wszystkim do oceny lepkości podłużnej) obejmują m.in. strugi wstępujące (*ascending jets*) [13, 53] oraz przepływy zbieżne (*convergent flows*) [43, 54]. Przepływy takie łatwo zrealizować doświadczalnie dla cieczy o dowolnie małych lepkościach. Wchodzące tu w grę pola prędkości nie są jednak ani jednorodne, ani czysto rozciągające i brak jakich-

kolwiek podstaw teoretycznych do interpretacji wyników w kategoriach charakterystyk materiałowych.

Przed reologią doświadczalną stoją obecnie dwa zadania:

— nagromadzenie danych empirycznych na temat rozciągania stopionych polimerów (funkcje lepkości podłużnej w przepływach ustalonych, funkcje pamięci charakteryzujące własności relaksacyjne),

— opracowanie metod doświadczalnych pozwalających na badanie cieczy o średniej i małej lepkości. Proponowane obecnie metody (metoda strugi, przepływy zbieżne itp.) nie zapewniają możliwości wyznaczenia obiektywnych charakterystyk materiałowych rozciągania dla cieczy o lepkości mniejszej niż  $10^5$  poisów.

#### Literatura cytowana w tekście

1. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
2. Dane H. MARKOVITZA wg książki: C. TRUESDELL i W. NOLL, *Nonlinear Field Theories of Mechanics*, Berlin-Heidelberg-New York 1965, s. 468.
3. R. T. BALMER, G. ASTARITA, *Ing. Chim. Ital.*, **5**, 101 (1969).
4. R. L. BALLMAN *Rheol. Acta*, **4**, 137 (1965).
5. B. D. COLEMAN i W. NOLL, *Ann. N.Y. Acad. Sci.*, **89**, 672 (1961).
6. B. D. COLEMAN i W. NOLL, *Phys. Fluids*, **5**, 840 (1962).
7. J. C. SLATTERY, *Phys. Fluids*, **7**, 1913 (1964).
8. R. S. RIVLIN, *Proc. Roy. Soc.*, (London), **A193**, 260 (1948).
9. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, New York 1964.
10. R. I. TANNER, J. M. SIMMONS, *Chem. Eng. Sci.*, **22**, 1803 (1967).
11. M. M. DENN, G. MARUCCI, *Am. Inst. Chem. Eng. J.* (w druku).
12. P. PARLATO, Dysertacja, University of Delaware, Newark, Del. 1969.
13. G. ASTARITA, L. NICODEMO, *Chem. Eng. J.*, **1**, 57 (1970).
14. J. G. OLDROYD, *Proc. Roy. Soc.*, **A200**, 523 (1950).
15. R. B. BIRD, T. W. SPRIGGS, *Phys. Fluids*, **8**, 1390 (1965).
16. A. B. METZNER, A. P. METZNER, *Rheol. Acta*, **9**, 174 (1970).
17. H. NITSCHMANN, J. SCHRADER, *Helv. Chim. Acta*, **31**, 297 (1948).
18. A. ZIABICKI, R. TAKSERMAN-KROZER, *Roczn. Chemii*, **37**, 1511 (1963).
19. G. V. VINOGRADOV, B. V. RADUSHKEVITCH, W. D. FIKHMAN, *J. Polymer Sci.*, A-2, **8**, 1, 567 (1970).
20. М. О. КОРНФЕЛЬД, М. М. РЫБКИН, *Журн. Эксп. Теорет. Физ.*, **9**, 595 (1939).
21. A. ZIABICKI, *Mech. Teoret. Stos.*, **9**, 3, 401 (1971).
22. R. TAKSERMAN-KROZER, A. ZIABICKI, *J. Polymer Sci. A*, **1**, 507 (1963).
23. S. PRAGER, *Trans. Soc. Rheol.*, **1**, 53 (1957).
24. R. B. BIRD, H. EVANS, M. W. JOHNSON, *Adv. Polymer Sci.*, **8**, 1 (1971).
25. R. TAKSERMAN-KROZER, *J. Polymer Sci.*, **A 1**, 2487 (1963).
26. R. B. BIRD, M. W. JOHNSON, J. F. STEVENSON, *Proc. 5-th. Int. Congress on Rheology, Kyoto 1968*, vol. IV, s. 159 (1970).
27. A. PETERLIN, *Polymer Letters*, **4**, 287 (1966).
28. R. I. TANNER, W. STEHRENBARGER, (w druku); W. STEHRENBARGER, Dysertacja, Brown University, 1970.
29. G. MARUCCI, J. J. HERMANS (praca nie opublikowana).
30. R. ROSCOE, *J. Fluid Mech.*, **28**, 273 (1967).
31. F. BUECHE, *J. Chem. Phys.*, **20**, 1959 (1952); **25**, 599 (1965).
32. W. W. GRAESSLEY, *J. Chem. Phys.*, **43**, 2696 (1963); **47**, 1942 (1967).
33. S. MIDDLEMAN, *J. Appl. Polymer Sci.*, **11**, 417 (1967).



34. S. HAYASHI, J. Phys. Soc. Japan, **18**, 131, 249 (1963).
35. M. HOFFMANN, Rheol. Acta, **6**, 92 (1967).
36. A. S. LODGE, Trans. Faraday Soc., **52**, 120 (1956).
37. M. YAMAMOTO, J. Phys. Soc. Japan, **11**, 413 (1956); **12**, 1148 (1957); **13**, 1200 (1958).
38. A. S. LODGE, Proc. 5-th Int. Congress on Rheology, Kyoto 1968, Vol. IV, (1970).
39. A. ZIABICKI, R. TAKSERMAN-KROZER, J. Polymer Sci., **A2**, 7, 2005 (1969); R. TAKSERMAN-KROZER, A. ZIABICKI, *ibid.*, **A2**, 8, 321 (1970).
40. G. W. WINOGRADOW, A. JA, MALKIN, B. W. JARLYKOW, B. W. RADUSCHKEWITSCH, W. D. FICHMAN, Plaste und Kautschuk, **17**, 241 (1970).
41. G. V. VINOGRADOV, A. I. LEONOV, A. N. PROKUNIN, Rheol. Acta, **8**, 482 (1969).
42. Б. В. РАДУШКЕВИЧ, В. Д. ФИХМАН, Г. В. Виноградов, Механика Полим., 343 (1968).
43. F. N. COGSWELL, Trans. J. Plast. Inst., **36**, 109 (1968); Rheol. Acta, **8**, 187 (1969).
44. H. J. KARAM, J. C. BELLINGER, Trans. Soc. Rheol., **8**, 61 (1964).
45. J. MEISSNER, Rheol. Acta, **8**, 78 (1969).
46. J. MEISSNER, Rheol. Acta, **10**, 230 (1971).
47. E. J. KALTENBACHER i wspólr., TAPPI, **50**, 20 (1967).
48. A. BERGONZONI, A. J. DICRESCE, SPE Tech. Papers, **11**, VI-1, VI-2 (1965).
49. G. M. FEHN, J. Polymer Sci., **6**, 247 (1968).
50. M. ZIDAN, Rheol. Acta, **8**, 89 (1969).
51. D. ACIERNO, I. N. DALTON, J. M. RODRIGUEZ, I. L. WHITE, J. Appl. Polymer Sci. (w druku).
52. A. KAYE, D. G. VALE, Rheol. Acta, **8**, 1 (1969).
53. S. YA. FRENKEL i wspólr., IUPAC Symposium on Macromolecules, Prague 1965.
54. F. N. COGSWELL, Trans. Soc. Rheol. (w druku).

#### Р е з ю м е

#### ПОВЕДЕНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В РАСТЯГИВАЮЩИХ ТЕЧЕНИЯХ

Дан обзор феноменологических и молекулярных теорий механического поведения полимерных жидкостей в растягивающих течениях. Обсуждена применимость разных макроскопических моделей для описания свойств разбавленных и концентрированных полимерных систем. Описаны экспериментальные методы изучения растягивающих течений и показаны некоторые результаты, полученные для полимерных расплавов и растворов.

#### S u m m a r y

#### BEHAVIOUR OF POLYMER FLUIDS IN ELONGATIONAL FLOW

Phenomenological and molecular theories of mechanical behaviour of polymer fluids in elongational flow have been reviewed. The applicability of various macroscopic mechanical models for dilute and concentrated polymer systems has been discussed. Some experimental techniques used for the investigation of elongational flow and available data concerning elongational viscosity of polymer melts and solutions have been described.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 października 1971 r.*

---



ZAGADNIENIA NIEZAWODNOŚCI I BEZPIECZEŃSTWA W MECHANICE MATERIAŁÓW  
I KONSTRUKCJI\*

JANUSZ MURZEWSKI (KRAKÓW)

W zagadnieniach niezawodności i bezpieczeństwa układów mechanicznych stosuje się rachunek prawdopodobieństwa [3], [8], [9], [14]. Metody probabilistyczne stosuje się w tych zagadnieniach w zakresie *makroskopowym* — najbardziej ogólnym, odniesionym do obiektów takich, jak budowle, maszyny, urządzenia itp. które mają być użyteczne dla człowieka jako całość, a które oceniamy z punktu widzenia spełnienia swych zadań. Można rozważyć także prawdopodobieństwa niezawodności i bezpieczeństwa podzespołów lub elementów konstrukcji, a nawet większych lub mniejszych elementów materiału, ale trzeba pamiętać, że to ograniczenie ma na celu tylko skoncentrowanie uwagi na pewnym poziomie analizy strukturalnej. Przyszłą, konsekwentnie probabilistyczną teorię niezawodności i bezpieczeństwa wyobrażamy sobie jako spójny kompleks zastosowań rachunku prawdopodobieństwa na różnych poziomach. Próbę klasyfikacji modeli probabilistycznych przedstawia tabl. 1. Jest to wstępna propozycja. Potrzeba takiej klasy-

Tablica 1. Modele probabilistyczne

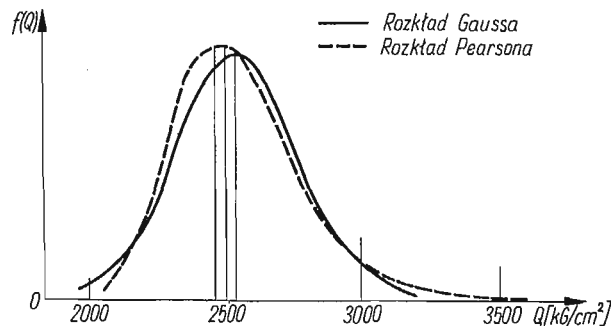
Poziom	Problemy
makro- submakro-	niezawodność urządzeń bezpieczeństwo konstrukcji wytężenie materiału efekt skali
mezzo-	struktury { wielofazowe technologiczne quasi-jednorodne infinitesimalne quasi-izotropowe
mikro- submikro-	dyslokacje fizyka statystyczna mechanika falowa

fikacji niewątpliwie istnieje, gdyż coraz częściej stosuje się podejścia probabilistyczne do mechaniki systemów materialnych, analizowanych w różnych skalach, z mniejszego lub większego dystansu.

\*) Referat problemowy wygłoszony na XIV Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego w Krośnicy, we wrześniu 1971 r.

Drugą cechą charakterystyczną tych zastosowań rachunku prawdopodobieństwa, które są przedmiotem referatu, jest to, że probabilistykę stosuje się «wszechstronnie», to znaczy zarówno w odniesieniu do wewnętrznych, jak również zewnętrznych czynników, warunkujących zachowanie się obiektu. A więc np. w przypadku oceny bezpieczeństwa budowli, jako losowe traktujemy zarówno obciążenia, jak też — nośność konstrukcji. Ostatnio dają się zauważyć tendencje autonomicznego rozwijania stochastycznej teorii obciążeń [5], [13], a także stochastycznej mechaniki [4], [6], względnie jej działów — dynamiki układów losowych, statystycznej teorii stateczności itp. Te dyscypliny można by uznać za działy probabilistycznej teorii niezawodności i bezpieczeństwa, gdyż synteza tych dyscyplin prowadzi właśnie do oceny niezawodności lub bezpieczeństwa obiektu. Ale z drugiej strony należy się zgodzić, że nie zawsze taka synteza musi być celem rozwijania tych dyscyplin.

Nowy sposób matematycznego opisu rzeczywistości, jakim jest podejście probabilistyczne, różni się od tradycyjnego, deterministycznego podejścia przede wszystkim tym, że wielkości charakteryzujące stan i zachowanie się obiektu określa się nie liczbami, lecz funkcjami *rozkładu prawdopodobieństw*. Mając to na uwadze, w pierwszym etapie rozwoju teorii bezpieczeństwa zajmowano się elementarnymi z punktu widzenia materiału przypadkami — pręta rozciąganego, belki prostej itp. i skierowano wysiłki w kierunku probabilistycznej charakterystyki zmiennych losowych. Rysunek 1 przedsta-

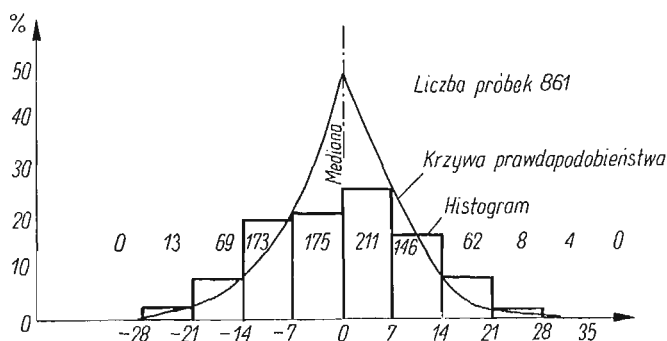
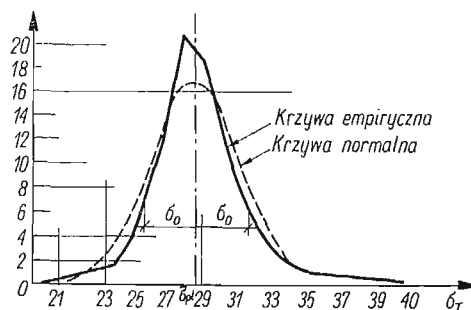


Rys. 1. Krzywa rozkładu granicy plastyczności polskiej stali konstrukcyjnej zwykłej jakości według badań W. Wierzbickiego

wia krzywe rozkładu prawdopodobieństw granicy plastyczności stali konstrukcyjnej, zestawione przez W. WIERZBICKIEGO na podstawie opracowania danych statystycznych dotyczących produkcji hut polskich [21]. Rysunek 2 przedstawia krzywą rozkładu prawdopodobieństw wytrzymałości betonu, wyznaczoną przez komisję Centralnego Naukowo-Badawczego Instytutu Konstrukcji Przemysłowych w ZSRR, która podjęła inicjatywę N. S. STRELECKIEGO zmierzającą do uzasadnienia obliczeniowych wytrzymałości w oparciu o szerokie badania statystyczne, a roboty przy budowie metra moskiewskiego dały ku temu dobrą okazję [2]. Rysunek 3 przedstawia histogram i krzywą rozkładu przedstawioną przez O. G. JULIANA w pierwszym raporcie o postępie prac komisji d/s współczynników bezpieczeństwa Amerykańskiego Towarzystwa Inżynierów Cywilnych [12]. Wykresy te nie dają jeszcze jasnego obrazu, jakie funkcje charakteryzują rozkład

parametrów wytrzymałościowych podstawowych materiałów budowlanych. Dalsze coraz liczniejsze badania statystyczne nie doprowadziły do sfinalizowania sprawy jednoznacznej weryfikacji empirycznej znanych rozkładów teoretycznych (tabl. 2). W tej sy-

Rys. 2. Krzywa rozkładu granicy plastyczności stali zbrojenowej St. 3 według CNIIPS (ZSRR)



Rys. 3. Krzywa rozkładu wytrzymałości walcowej betonu produkowanego pod dobrą kontrolą według raportu O. G. Juliana, ASCE (USA)

Tablica 2. Rozkłady prawdopodobieństw weryfikowane empirycznie

Nazwa	Gęstość prawdopodobieństw
normalny	$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v\bar{R}} \exp \frac{-(R/\bar{R}-1)^2}{2v^2}$
gamma	$f(R) = \frac{1}{\Gamma(p)R} \left(\frac{pR}{\bar{R}}\right)^p \exp\left(-\frac{pR}{\bar{R}}\right)$
log-normalny	$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}vR} \exp \frac{-\ln^2 R/\bar{R}}{2v^2}$
Weibulla	$f(R) = \frac{1}{\alpha\check{R}} \left(\frac{R}{\check{R}}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \exp \left[ \sqrt[\alpha]{\frac{R}{\check{R}}} \right]$

tuacji duże nadzieje wiąże się obecnie z zastosowaniem asymptotycznych rozkładów wartości ekstremalnych [11]. W zagadnieniach bezpieczeństwa dużą rolę grają ekstrema: największe obciążenia, najmniejsze wytrzymałości, itp. Jeśli te ekstremalne wartości

mamy wybrać spośród  $n$  stochastycznie niezależnych wielkości losowych, to ich prawdopodobieństwo możemy charakteryzować rozkładem asymptotycznym. Będzie to charakterystyka przybliżona, bo rozkłady asymptotyczne są dokładne dla  $n \rightarrow \infty$ , ale przy dostatecznie dużej liczbie  $n$  przybliżenie może być dobre. Matematycy R. A. FISHER i L. H. TIPPETT udowodnili, że istnieją 3 i tylko 3 asymptotyczne rozkłady ekstremów (tabl. 3), z których pierwszy charakteryzuje ekstrema zmiennych losowych nieograniczonych,

Tablica 3. Rozkłady prawdopodobieństw ekstremalne — asymptotyczne

Rodzaj	Dystrybuanta		Zakres
	$F(\min)$	$F(\max)$	
I. rodzaju	$1 - e^{-e^{r(R-\check{R})}}$	$e^{-e^{-r(P-\check{P})}}$	$-\infty < x < +\infty$
II. rodzaju	—	$e^{-\frac{x}{\check{P}^x}}$	$0 < x < \infty, x = P$
III. rodzaju	$1 - e^{-\frac{x}{\check{R}^x}}$	—	$0 < x < \infty, x = R$

nych, a następane — ograniczonych. Parametry rozkładu podlegają, oczywiście, osobnemu wyspecyfikowanemu i są zależne od każdorazowej liczebności ciągu  $n$  zmiennych losowych. Jeśliby udało się tak formułować zagadnienia bezpieczeństwa budowli, żeby w rachubę wchodziły tylko ekstrema ciągów zmiennych losowych jednorodnych i niezależnych, można by zrezygnować w ogóle z dociekań nad typem rozkładów macierzystych, tzn. rozkładów poszczególnych zmiennych losowych, a korzystać z gotowych wzorów na prawo rozkładu ekstremów z tabl. 3. Nie wchodząc w dyskusję, czy taka perspektywa jest realistyczna, a mając na uwadze inne utrudnienia, o których mowa za chwilę, wspominamy o innej jeszcze koncepcji polegającej na tym, żeby nie ustalać dokładnych praw rozkładu prawdopodobieństw i nie przykładać tak dużej wagi do tego zagadnienia. Wystarczające praktyczne wyniki można uzyskać charakteryzując każdą skalarową zmienną losową dwoma parametrami rozkładu i stosując twierdzenie ważne w zasadzie dla rozkładów normalnych. Na tym polega, z grubsza rzecz biorąc, teoria stochastyczna drugiego rzędu, zwana też metodą korelacyjną [3]. Dalej jeszcze idzie praktyczna propozycja autora [14], by w obliczeniach stosować różne rozkłady dla tej samej zmiennej losowej, w zależności od wygody. Przy tym wygodne są te rozkłady prawdopodobieństw, które są stochastycznie stateczne względem działania, które mamy wykonać. I tak stateczne są np.:

- a) rozkłady normalne — względem dodawania,
- b) rozkłady log-normalne — względem mnożenia,
- c) rozkłady ekstremalne — względem operacji wyznaczenia maksimum lub minimum.

Wiele wzorów mechaniki technicznej ma postać wielomianu:

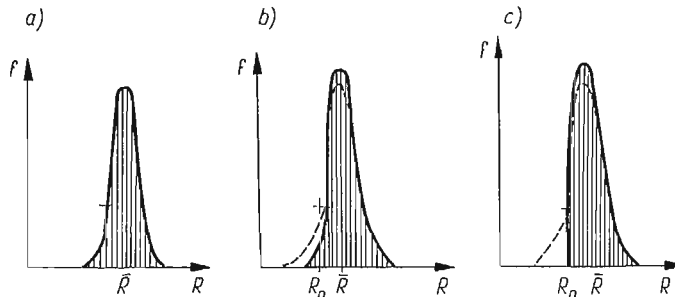
$$(1) \quad Z = aX_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{\alpha_3} \dots + bY_1^{\beta_1} Y_2^{\beta_2} Y_3^{\beta_3} + \dots,$$

gdzie  $Z, X_i, Y_j$  — zmienne losowe,  $a, \alpha_i, b, \beta_j$  — parametry zdeterminowane.

Parametry rozkładu prawdopodobieństw dla jednomianów łatwo obliczamy zakładając, że zmienne losowe  $X_i, Y_j \dots$  są log-normalne, bo wówczas iloczyny są również

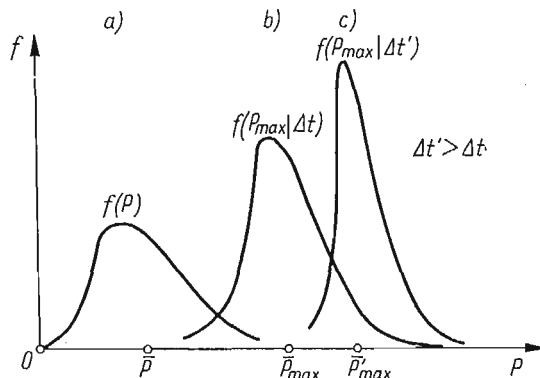
log-normalne, a parametry rozkładu całego wielomianu  $Z$  obliczamy jak dla zmiennej losowej normalnej, zakładając tym razem, że jego składniki losowe są normalne. Niekonsekwencja taka jest dopuszczalna przy małych współczynnikach zmienności  $v_i, v_j \dots$ , choć i w tych przypadkach wymaga niewątpliwie dużej ostrożności.

Dodatkowym utrudnieniem w wyznaczeniu funkcji rozkładu prawdopodobieństw jest to, że zmienne losowe muszą być bardzo ściśle zdefiniowane, z uwzględnieniem drobiazgowych warunków. Przy zaniedbaniu niektórych warunków materiał statystyczny może się okazać bezużyteczny. Weźmy dla przykładu rozkład prawdopodobieństwa wytrzymałości materiału przed kontrolą i po kontroli jakości. Gdyby kontrola była doskonała, rozkład prawdopodobieństw nieograniczony zamieniłby się w wyniku działalności brakażnika na rozkład ucięty (rys. 4a i c). W praktyce zauważamy na ogół tylko nieznaczne



Rys. 4. Rozkład prawdopodobieństw wytrzymałości materiału: a) naturalny, b) po wrywkowej kontroli braków, c) po kontroli doskonałej

powiększenie asymetrii rozkładu (rys. 4b). Jest to efekt drobny, którego nie powinno się jednak lekceważyć. W rozwiązaniach probabilistycznej teorii bezpieczeństwa ten właśnie efekt może być uwzględniony jako bardzo ważny parametr [14].



Rys. 5. Rozkład prawdopodobieństw parcia wiatru: a) chwilowego, b) maksymalnego w czasie  $\Delta t$ , c) maksymalnego w czasie  $\Delta t'$

Innym przykładem są krzywe rozkładu prawdopodobieństw dla parcia wiatru, które mogą mieć różną postać i różne parametry w zależności od tego, jak to obciążenie definiujemy (rys. 5). Czy to ma być losowa, chwilowa wartość parcia wiatru w czasie kalendarzowym, tzn. bez pominięcia chwil ciszy, czy w czasie obciążenia? A może maksimum

parcia wiatru obserwowane w okresach kilkusekundowych, kilkuminutowych, kilkuletnich? Żeby odpowiedzieć trafnie na te pytania, trzeba znać dynamikę budowli, której obciążenie wiatrem rozpatrujemy [3].

Z przykładów tych wynika, że rozwój badań teoretycznych probabilistycznej teorii bezpieczeństwa jest równie ważny jak rozwój badań statystycznych i powinien je wyprzedzać. Okazuje się przy tym, że głęboka probabilistyczna analiza problemów mechaniki prowadzi do wyników jakościowo różnych od tych, które znane są z klasycznych, deterministycznych rozważań. Wyjaśnione zostają efekty, które poprzednio były uwzględnione przy pomocy wzorów empirycznych, albo wręcz — zaniebawane, jako niemożliwe do pogodzenia z deterministycznymi kategoriami rozumowania.

Jako pierwszy taki efekt omówimy *efekt skali*. O efekcie skali mówimy wtedy, gdy sformułowane są teoretyczne prawa prawdopodobieństwa modelowego i gdy stwierdzamy w praktyce odstępstwa od tego prawa. W szczególności w mechanice technicznej zauważono, choć w obliczeniach inżynierskich na ogół nie uwzględniano, efekt skali polegający na tym, że wytrzymałość materiału w  $[\text{kG}/\text{cm}^2]$  zależy od objętości próbki badanej [7]. Niezależnie od różnych przyczyn technologicznych, które mogą to powodować, rachunek prawdopodobieństwa pozwala na przekonujące wytłumaczenie tego efektu. Wystarczy przyjąć, że zapoczątkowanie procesu w jednym miejscu naprężonego ciała prowadzi nieuchronnie do zniszczenia całego ciała i jest równoważnym zdarzeniem losowym. Tego typu koncepcję nazywa się koncepcją najsłabszego ogniwa w łańcuchu. Wytrzymałość łańcucha złożonego z  $n$  ogniw o losowo zmiennej wytrzymałości jest bowiem równa wytrzymałości najsłabszego ogniwa.

$$(2) \quad R = \min R_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Jeśli zmienne losowe  $R_i$  są niezależne, a ich dystrybuanty  $F_1(R_i)$  jednakowe, to dystrybuanta wytrzymałości łańcucha wynika ze wzoru

$$(3) \quad F(R) = 1 - [1 - F_1(R)]^n.$$

Dla dystrybuanty  $F_1(R)$  typu Weibulla o parametrach,  $R_0$ ,  $\alpha$ , lub dla dużej liczby ogniw ( $n \rightarrow \infty$ ) mamy

$$(4) \quad F(R) = 1 - \exp \left[ -n \left( \frac{R}{R_0} \right)^\alpha \right].$$

Przy oznaczeniu  $n = V/V_0$ , gdzie  $V_0$  — objętość jednego ogniwa, oraz  $\bar{R}_1$  — średnia wytrzymałość próbki o jednostkowej objętości, mamy wzór na średnią wytrzymałość obiektu o objętości  $V$

$$(5) \quad \bar{R} = \frac{\bar{R}_1}{\sqrt[\alpha]{V}}.$$

Wzór ten można stosować do rozciąganego łańcucha, którego ogniwa cechują stochastycznie niezależne granice wytrzymałości, a także do innych ciał, dla których jest aktualna koncepcja «najsłabszego ogniwa w łańcuchu».

Uogólnieniem tej koncepcji jest teoria zniszczenia zakładająca nieprzekraczalną, graniczną kumulację mikrodefektów. W myśl tej teorii

$$(6) \quad \lambda < \lambda_{\text{ult}} \approx \sqrt[\alpha]{V_0/V}, \quad r = \text{const.}$$



Kumulacja mikrodefektów  $\lambda$ , którą można też nazwać lokalnym stopniem wyężenia, definiowana jest jako prawdopodobieństwo geometryczne uszkodzonych mikro-elementów w małym makro-elemente. Wiąże się to z założeniem złożonej, losowej struktury ośrodka quasi-jednorodnego i z wyróżnieniem w nim elementów małych pierwszego rzędu (makro) i drugiego rzędu (mikro). Parametr  $r$  daje się zinterpretować jako graniczna ilość mikro-uszkodzeń, które mogą być skoncentrowane w jednym elemencie pierwszego rzędu. Lokalny stopień wyężenia wyraża się dla niezależnych mikro-naprężeń i mikro-wytrzymałości  $R$  całką

$$(7) \quad \lambda = \mathcal{P}(R < \sigma) = \int_0^{\infty} F_{\sigma}(R) f_R(R) dR,$$

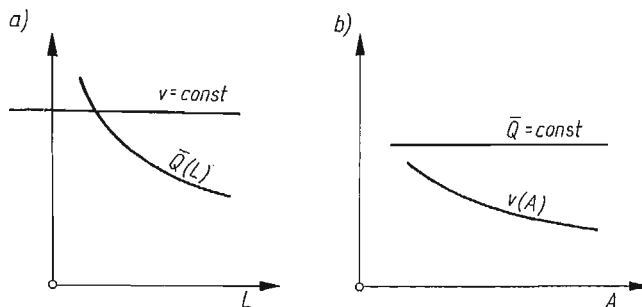
gdzie  $F_{\sigma}$  — dystrybuanta mikro-naprężeń,  $f_R$  — gęstość prawdopodobieństwa mikro-wytrzymałości.

Dla porównania ze wzorem (5) podajemy według [14] jeden ze wzorów na średnią wytrzymałość ciała o objętości  $V$ , który wynika z tej koncepcji. Mamy

$$(8) \quad \bar{R} \approx \frac{\bar{R}_1}{1 + v_1 \bar{\Psi} \left( 1 - \sqrt{\frac{V_0}{V}} \right)},$$

gdzie  $\bar{\Psi}$  — funkcja odwrotna do funkcji Laplace'a,  $v_1$  — współczynnik zmienności  $R_1$ .

Jeszcze ogólniejsza jest koncepcja równoległej wiązki łańcuchów. Można ją wykorzystać do wyjaśnienia efektu skali dla rozciąganych prętów przyrządycznych z materiału ciągliwego [14]. Okazuje się, że efekt ten ma jakby charakter anizotropowy, tzn. parametry

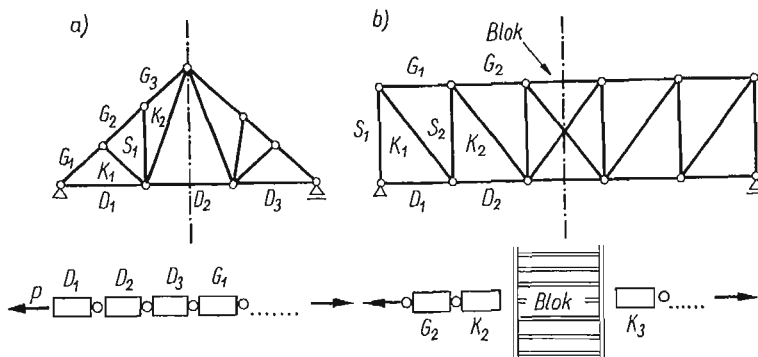


Rys. 6. Zależność oczekiwanej granicy plastyczności  $\bar{Q}$  i jej współczynnika zmienności  $v$  od (a) długości  $L$ , (b) pola przekroju  $A$  rozciąganego pręta ciągliwego stochastycznie niejednorodnego

rozkładu prawdopodobieństw granicy plastyczności  $\bar{Q}$  inaczej zależą od długości pręta  $L$ , a inaczej od pola jego przekroju  $A$  (rys. 6).

Układy szeregowe i równoległe są to podstawowe modele rozważane w teorii niezawodności systemów. Do modelu szeregowego czyli pojedynczego łańcucha daje się sprowadzić wszelkie ustroje statycznie wyznaczalne (np. z rys. 7a), złożone z elementów o niezależnych granicach wytrzymałości. Ustroje statycznie niewyznaczalne dają się podzielić czasem na takie podzespoły, które po zablokowaniu dają się sprowadzić do układu szeregowego (np. rys. 7b). Równoległy schemat bloku na ogół niezbyt dokładnie modeluje

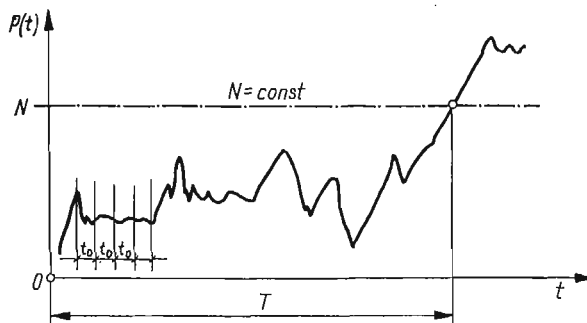
pracę statyczną podzespołu. Modele równoległe i mieszane, bardzo rozpowszechnione w teorii niezawodności układów elektronicznych [10], są niestety zbyt uproszczone w statyce ustrojów niewyznaczalnych. Nie sądzimy jednak, by rozwój analizy takich zastęp-



Rys. 7. Przykłady konstrukcji złożonej z losowo-jednorodnych elementów, których niezawodność maleje: a) układ szeregowy, b) układ mieszany

czych modeli był tu potrzebny. Są już bowiem przykłady ścisłych obliczeń prawdopodobieństwa zniszczenia elasto-plastycznych ram, belek ciągłych i kratownic hiperstatycznych [15], oparte na rozważeniu prawdopodobieństw warunkowych powstania wszelkich możliwych mechanizmów płynięcia, których zbiór może być przeliczalny, a może być — mocy continuum.

Drugim efektem statystycznym, który omówimy, jest *efekt trwałości*. Tak proponujemy nazwać efekt związany z czasem, a więc do pewnego stopnia analogiczny do efektu skali, który dotyczył wymiaru przestrzeni. Efekt trwałości uwzględnia się od dawna w prak-



Rys. 8. Losowy proces obciążenia  $P(t)$  przewyższający w czasie  $T$  nośność niestarczającej się konstrukcji

tyce projektowania, przyjmując inne obciążenia dla budowli prowizorycznych, a inne dla budowli stałych — na podstawie intuicyjnego odczucia. Teoria asymptotycznych rozkładów ekstremów pozwala na ściślejsze ustalenie obciążeń obliczeniowych  $P_{gr}$  w zależności od założonego z góry prawdopodobieństwa przeciążenia  $\mathcal{P}(P > P_{gr})$ , preliminowanej trwałości obiektu  $T$  i parametrów rozkładu  $\check{P}_0$ ,  $v_0$  maksymalnego obciążenia w ustalonym okresie  $t_0$  (rys. 8).

Dla rozkładu ekstremalnego pierwszego rodzaju (Gumbela) mamy

$$(9) \quad P_{gr}(T) = \check{P}_0 \left( 1 + \frac{\sqrt{6} V_0}{\pi} \ln \frac{T}{t_0 \ln \Theta} \right),$$

a dla rozkładu ekstremalnego drugiego rodzaju (Fréchéta)

$$(10) \quad P_{gr}(T) = \check{P}_0 \sqrt[\alpha]{\frac{T}{t_0 \ln \Theta}},$$

gdzie  $\Theta = \frac{1}{\mathcal{P}(P > P_{gr})}$  — średni okres powrotu przeciążenia,  $\alpha \cong 0,8 v_0$  — weibullowski wskaźnik zmienności.

Dla stosowalności tych wzorów potrzeba, by maksymalne obciążenia w sąsiednich okresach  $t_0$  były stochastycznie niezależne. Założenie to jest raczej kłopotliwe. Nie jest ono potrzebne w teorii przewyższenia ustalonego poziomu  $N$  przez stacjonarny proces stochastyczny  $P(t)$ .

Gdy proces jest gaussowski, to ryzyko przeciążenia  $P(t) > N$  wynosi

$$(11) \quad r = f_p N |\dot{P}| = \frac{\sqrt{-\ddot{K}_0}}{2\pi} \exp \left[ -\frac{(N - \bar{P}_0)^2}{2\mu_0^2} \right],$$

gdzie  $f_p$  — gęstość prawdopodobieństwa obciążenia chwilowego o parametrach  $\bar{P}_0$ ,  $\mu_0$ ,  $K_\tau$  — funkcja autokorelacyjna procesu obciążenia dla dwóch chwil odległych o  $\tau$ , a kropkami oznaczono różniczkowanie względem czasu.

Dystrybuanta trwałości przy stałym w czasie ryzyku wyraża się wzorem wykładniczym

$$(12) \quad F(t) = \mathcal{P}(T < t) = 1 - e^{-rt},$$

a obciążenie obliczeniowe dla okresu  $T$

$$(13) \quad P_{gr}(T) = \bar{P}_0 \left( 1 + v \sqrt{2 \ln \frac{T}{\theta \ln \theta}} \right),$$

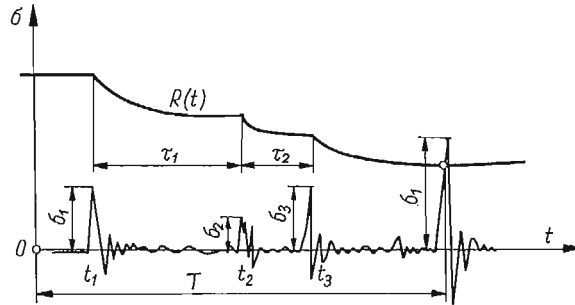
gdzie  $\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{-\ddot{K}_0}}$  tzw. efektywny okres powtarzalności, czyli średni czas powrotu wartości oczekiwanej obciążenia.

Ryzyko przeciążenia nie zawsze jest stałe w czasie. Zmienia się, gdy obiekt się starzeje. Szczególnym rodzajem starzenia, sprzężonym z procesem obciążenia jest zmęczenie materiału konstrukcyjnego. Rysunek 9 przedstawia jedno z rozwiązanych [16] prostszych zagadnień: przewyższania wytrzymałości  $R(t)$  malejącej w czasie na skutek zmęczenia. Uproszczenie założeń polega na tym, że proces stochastyczny naprężeń  $\sigma(t)$  określony jest rozkładem dwóch zmiennych losowych; losowej amplitudy impulsu naprężenia  $\sigma_i$  i losowego odstępu czasu między impulsami  $\tau_i$ .

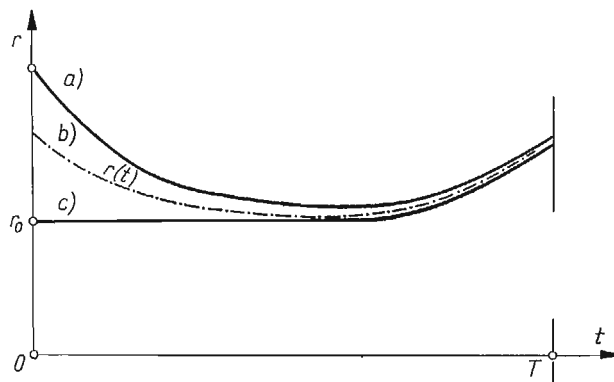
Najmniej może rozpoznanym i docenianym w teorii efektem statystycznym jest *efekt kontroli*. W praktyce przywiązuje się do niego pierwszorzędą wagę, lecz tylko na podstawie intuicyjnych przesłanek. W kategoriach teorii niezawodności da on się scharakteryzować poglądowo w ten sposób, że zależnie od sprawności kontroli odbiorowej (na początku eksploatacji) rozmaicie kształtuje się w czasie krzywa ryzyka  $r(t)$  (rys. 10) i krzywa

przetwania  $p(t)$ . Związki między tymi funkcjami, a w szczególności: gęstością  $f(t)$  i dystrybuantą  $F(t)$  trwałości oraz okresem powrotu awarii  $\Theta(t)$  określają równania:

$$(14) \quad \begin{cases} f(t) = \frac{d}{dt} F(t), & r(t) = \frac{d}{dt} \ln \Theta(t), \\ F(t) = 1 - p(t), & \Theta(t) = 1/p(t), \\ f(t) = r(t)p(t). \end{cases}$$



Rys. 9. Losowy łańcuch dynamicznych impulsów naprężenia przewyższający w czasie  $T$  wytrzymałość materiału malejącą na skutek zmęczenia



Rys. 10. Ryzyko dyskwalifikacji zmienne w czasie w przypadku: a) braku kontroli odbiorowej, b) kontroli realnej, c) kontroli doskonałej

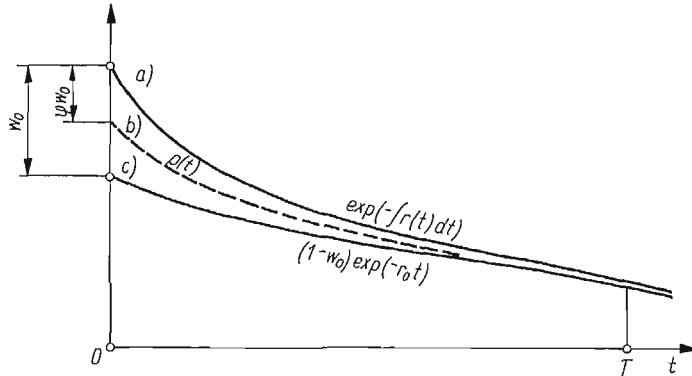
Co najmniej cztery parametry są potrzebne, by scharakteryzować krzywe na rys. 10 i 11:  $w_0$  — wadliwość początkowa,  $\psi$  — sprawność kontroli,  $r_0$  — ryzyko stacjonarne,  $T_0$  — trwałość preliminowana.

Najtrudniejszy do oszacowania jest parametr  $\psi$  mogący się wahać w granicach

$$(15) \quad 0 < \psi < 1.$$

Gdy sprawność kontroli osiąga kres dolny ( $\psi = 0$ ), to funkcję przetrwania będziemy nazywać funkcją niezawodności, gdy zaś  $\psi = 1$ , będziemy mówić o bezpieczeństwie. Proponując takie rozróżnienie pojęć niezawodności i bezpieczeństwa mamy na uwadze wymagania związane z odrębnymi dziedzinami zastosowań teorii niezawodności i teorii bezpieczeństwa, mianowicie z dziedziną urządzeń mechanicznych i elektrycznych w pierw-

szym przypadku, i dziedziną konstrukcji budowlanych — w drugim. W rzeczywistości nie ma tak drastycznych różnic sprawności kontroli w jednym i drugim przypadku i można oczekiwać, że krzywa przetrwania będzie zawsze przebiegać między krzywą niezawodności a krzywą bezpieczeństwa.



Rys. 11. Funkcja przetrwania obiektu, zmienna w czasie zależna od sprawności kontroli odbiorowej

Jeśli stawiamy problem kontroli, to od razu nasuwa się kwestia *podziału odpowiedzialności*. Ile ma być wielkości podlegających kontroli, z punktu widzenia ogólnej teorii bezpieczeństwa, czyli ile jest tzw. parametrów bezpieczeństwa?

Jeśli rozróżnimy tylko jeden parametr bezpieczeństwa, to mamy przypadek osobliwy, w którym nie ma właściwie sensu mówić o odpowiedzialności kogoś przed kimś. Ale dla możliwości późniejszego porównania rozpatrzmy najpierw ten właśnie przypadek. Tym jednym parametrem bezpieczeństwa może być np. losowy współczynnik bezpieczeństwa

$$(16) \quad x = R/\sigma > 1,$$

gdzie  $\sigma$  — losowe naprężenie,  $R$  — losowa wytrzymałość.

Z warunku zachowania z góry danego bezpieczeństwa  $\Omega$ ,

$$(17) \quad \mathcal{P}(x > 1) = 1 - F_x(1) = \Omega,$$

otrzymujemy dla rozkładów log-normalnych prosty wzór na obliczeniowy współczynnik bezpieczeństwa

$$(18) \quad x = e^{\lambda\nu}, \quad \nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2},$$

gdzie  $\nu_1, \nu_2$  — logarytmiczne wskaźniki zmienności i naprężenia. Dla normalnych rozkładów prawdopodobieństw wytrzymałości i naprężenia, względnie — nośności i obciążenia, lepiej jest wziąć jako jedyny parametr bezpieczeństwa — losową rezerwę nośności

$$(19) \quad x = N - P > 0.$$

Wówczas warunek bezpieczeństwa

$$\mathcal{P}(x > 0) = 1 - F_x(0) = \Omega$$

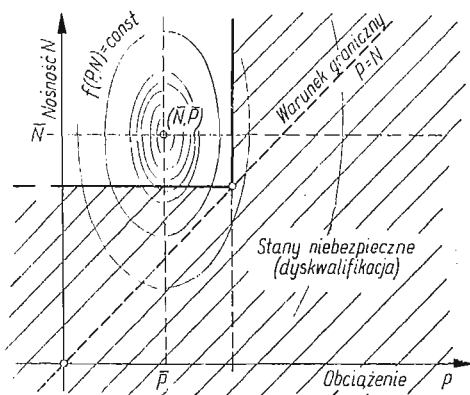
daje prosty wzór na wartość obliczeniową:

$$(20) \quad x = \lambda\mu, \quad \mu = \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2},$$

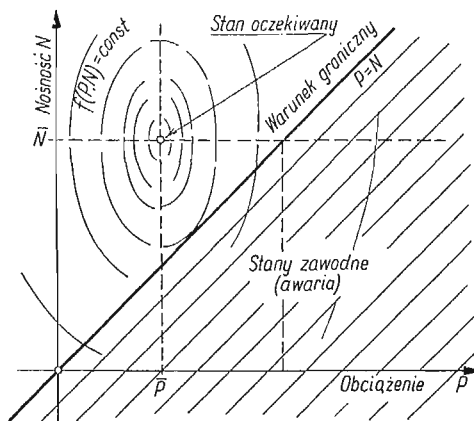
gdzie  $\mu_1, \mu_2$  — odchylenia standardowe nośności i obciążenia.

Jeśli zgodzimy się, że są dwa parametry bezpieczeństwa, to naturalną rzeczą będzie uważać jako takie — losową nośność i losowe obciążenie:

$$(21) \quad N > X, \quad P < X.$$



Rys. 12. Płaszczyzna stanu konstrukcji, z liniami stałej gęstości prawdopodobieństwa, dla przypadku, gdy kontroluje się nieprzekroczenie granicznych wartości obciążenia i nośności



Rys. 13. Płaszczyzna stanu konstrukcji w przypadku, gdy nie ma kontroli wartości granicznych obciążenia ani nośności

Prawdopodobieństwo bezpieczeństwa (rys. 12) nie jest wówczas bynajmniej równe prawdopodobieństwu niezawodności (rys. 13):

$$(22) \quad \mathcal{P}(N > X, \quad P < X) \neq \mathcal{P}(N > P),$$

co jak spostrzeżliśmy, przez długi czas rozwoju teorii bezpieczeństwa nie było rozumiane [14].

Z warunku bezpieczeństwa  $\mathcal{P} < \Omega$  i założenia o typie rozkładów wynikają współczynniki tolerancji

$$(23) \quad \begin{aligned} \Omega_1 &= 1 - F_1(X) \rightarrow \lambda_1, \\ \Omega_2 &= F_2(X) \rightarrow \lambda_2, \quad \Omega_1 \Omega_2 = \Omega, \end{aligned}$$

które służą do określenia częściowych współczynników bezpieczeństwa  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ , i obliczeniowej wartości granicznej  $X$ . Np. dla rozkładów log-normalnych

$$(24) \quad s_i = e^{\lambda_i v_i}, \quad X = \bar{N}/s_1 \quad \text{lub} \quad X = \bar{P}s_2.$$

Globalny współczynnik bezpieczeństwa wynosi

$$(25) \quad s = s_1 s_2 = e^{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}.$$

Współczynnik bezpieczeństwa daje się sformułować tą metodą dla trzech i więcej parametrów bezpieczeństwa, mianowicie

$$(26) \quad s = \exp \sum_i \lambda_i \nu_i,$$

nie da się jednak ogólnie określić dla tzw. metody «Stanów Granicznych» [2]. W metodzie SG ilość parametrów bezpieczeństwa nie jest z góry ustalona, a dla każdej ewentualnej zmiennej losowej (lub jej składowej), która występuje w obliczeniach wytrzymałościowych, określa się wartość graniczną według «reguły trzysigmowej»

$$(27) \quad X_i = \bar{x}_i \pm 3\sigma_i,$$

gdzie  $\sigma_i$  = odchylenie standardowe zmiennej losowej  $x_i$ .

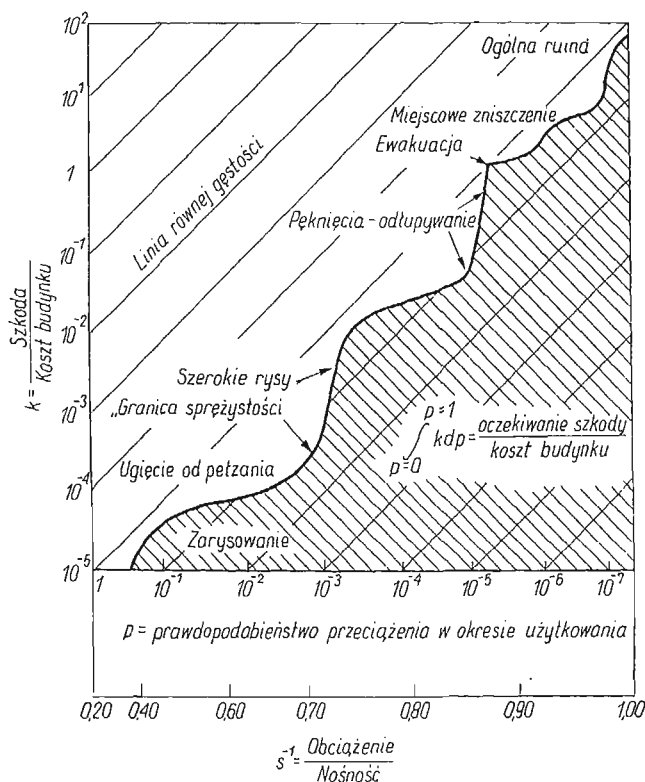
Bardzo ważnym problemem jest optymalizacja miar bezpieczeństwa [1], [20]. Teoria bezpieczeństwa nabiera właściwego sensu dopiero po sformułowaniu warunku ekonomicznego. W myśl tego warunku ogólny społeczny koszt obiektu, do którego oprócz kosztów realizacji i asekuracji doliczają także koszty eksploatacji i likwidacji, powinien osiągać minimum. Dla tej funkcji celu optymalizuje się prawdopodobieństwo bezpieczeństwa i zależnie od wskaźników kosztów awarii proponuje się klasyfikację bezpieczeństwa budowli i innych obiektów technicznych [14]. Oprócz tych zagadnień, które wymagają danych ekonometrycznych i które nazwiemy drugim zadaniem optymalizacyjnym teorii bezpieczeństwa, wyodrębniliśmy pierwsze zadanie optymalizacyjne, polegające na optymalnym rozkładzie z góry danego wskaźnika bezpieczeństwa  $\Omega$  na czynniki  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ . Zauważmy, że już przy dwóch parametrach bezpieczeństwa (23) mamy jeden stopień swobody w tym względzie.

Probabilistyczne teorie niezawodności i bezpieczeństwa są to teorie młode, stojące niewątpliwie u progu swego rozwoju. Same pojęcia niezawodności i bezpieczeństwa, które w sposób lapidarny objaśniliśmy przeciwstawiając rys. 12 i rys. 13, nie są rozumiane w sposób jednoznaczny. Niektórzy kojarzą pojęcie niebezpieczeństwa tylko z tymi okolicznościami, które stanowią bardzo poważne zagrożenie dla człowieka, a pojęcie niezawodności — z możliwością niespełnienia wszystkich innych funkcji obiektu. Tak często rozumie się teorię niezawodności w mechanice maszyn, silnie wiążąc niezawodność z zagadnieniami starzenia, zużycia i trwałości technicznej, a nawet moralnej. Oczywiście w mechanice budowli także można i trzeba zagadnienie niezawodności i bezpieczeństwa stawiać ogólnie i kompleksowo i tu przytoczymy za SAWYEREM [18] rys. 14, przedstawiający schemat ideowy takiego sposobu podejścia w budownictwie żelbetowym. Z tego schematu wyłania się bardzo szerokie zadanie probabilistycznej mechaniki konstrukcji, polegające na takim jej zaprojektowaniu, by zoptymalizować krzywą względnych kosztów szkód, wynikłych z niewłaściwego zachowania się budowli w zależności od prawdopodobieństwa przeciążenia.

Obecny stan rozwoju teorii niezawodności i bezpieczeństwa jest już jednak tak zaawansowany, że wielu autorów i instytucji uznaje za aktualną sprawę wprowadzenia niektórych wyników do norm projektowania konstrukcji budowlanych [14], [19] i innych [1], [13]. Rozważania i dyskusje idą w dwóch nie wykluczających się kierunkach:

a) określenia systemu częściowych współczynników bezpieczeństwa lub tym podobnych wartości obliczeniowych, które miałyby obiektywny sens statystyczny [17], [19];

b) wprowadzenia miar bezpieczeństwa pozwalających na klasyfikację bezpieczeństwa projektowanych lub wykonanych obiektów, na podstawie racjonalnych przesłanek [13], [14].



Rys. 14. Przybliżony wykres charakteryzujący koszty zmian stopnia niezawodności konstrukcji żelbetowej według Sawyera

Propozycje nowelizacji norm projektowania mają na razie charakter kompromisowy — zachowują na ogół konwencjonalną, deterministyczną metodykę obliczeń. Bardziej konsekwentne, probabilistyczne metody projektowania są jednak kwestią nie tak odległej chyba przyszłości. Problemy rozwojowe, których rozwiązanie może tę perspektywę przybliżyć są, zdaniem autora, następujące:

- 1) przetworzenie posiadanych informacji o obciążeniach konstrukcji i zebranie nowych danych statystycznych według jednolitego, spójnego systemu, opartego np. na teorii rozkładów ekstremalnych lub teorii procesów stochastycznych,
- 2) wyprowadzenie prostej, ale probabilistycznie uzasadnionej metody kojarzenia (koinkencji) obciążeń wieloźródłowych,
- 3) opracowanie praktycznych metod obliczania prawdopodobnej nośności ustrojów hiperstatycznych z uwzględnieniem niepewnych własności wytrzymałościowych, odchylek wymiarów i błędów wynikających z przyjęcia do obliczeń wyidealizowanych schematów statycznych,



4) zbadanie doświadczalne autokorelacji cech mechanicznych dla różnych materiałów konstrukcyjnych; dotkliwy brak danych w tym zakresie bardzo hamuje praktyczne zastosowanie probabilistycznej mechaniki budowli,

5) określenie uzasadnionych limitów dla czasu eksploatacji poszczególnych typów konstrukcji i przygotowanie planu wdrożenia techniki niezawodności dla konstrukcji budowlanych i innych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. E. ABRAHAMSEN, *Structural safety of ships and risks to human life*, European Shipbuilding, 6(1962), 3-7.
2. В. А. БАЛДИН и ин. *Расчёт строительных конструкции по предельным состояниям*, Москва 1951.
3. W. W. ВОЛОТИН, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Warszawa 1968.
4. В. В. БОЛОТИН, *Применение теории вероятностей и теории надёжности в расчётах сооружений*, Москва 1971.
5. J. F. BORGES, M. CASTANHETA, *Structural Safety*, Lab. Nac. de Engenharia Civil, Lisboa, Course 101 Nov. 1969.
6. C. A. CORNELL, *Bounds on the reliability of structural systems*, J. Struct. Div. ASCE, Febr. 1967, 171-200
7. Б. Б. ЧЕЧУЛИН, *Масштабный фактор и статистическая природа прочности металлов*, Москва 1963.
8. J. DAHL, G. SPAETHE, *Sicherheit und Zuverlässigkeit von Bauwerken*, Deutsche Bauinformation, DBA, Berlin 1970.
9. A. M. FREUDENTHAL, *Critical appraisal of safety criteria and their basic concepts*, VIII-th Congr. IABSE — New York 1968, Prel. Rep. 45-55.
10. W. W. GNIEDIENKO, J. K. BIELAJEW, A. D. SOŁOWIEW, *Metody matematyczne w teorii niezawodności*, Warszawa 1963.
11. E. GUMBEL, *Statistics of Extremes*, Columbia Un. Press, New York 1962.
12. O. G. JULIAN, *Synopsis of First Progress Report of Committee on Factors of Safety*, J. Struct. Div. ASCE, July 1967, 1-22.
13. P. H. JUUL, *Note sur le degré de sécurité et sur les risques de rupture dans l'étude des pylônes*, CIGRE — Session 1964, Paris, No 215.
14. J. MURZEWSKI, *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*, Warszawa 1970.
15. J. MURZEWSKI, J. SOJKA, *Charakterystyka prawdopodobieństwa nośności granicznej ustroju z quasi-jednorodnego materiału ciągliwego*, Rozpr. Inż., 2 (1967), 259-282.
16. J. MURZEWSKI, A. WINIARZ, *Safety of structures subject to random load impulses*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série sci. techn., 4 (1970), 1-8.
17. M. K. RAVINDRA, A. C. HEANEY, N. C. LIND, *Probabilistic Evaluation of Safety Factors*, Symposium IABSE — London 1969, Final Rep. 35-46.
18. H. A. SAWYER, *Comprehensive design of reinforced concrete frames by plasticity factors*, Bull. d'Inform. CEB, No 53, Janv. 1966, 299-316.
19. M. TICHY, *A Logical System for Partial Safety Factors*, Symposium IABSE — London 1969, Final Report, 273-277
20. C. J. TURKSTRA, *Choice of failure probabilities*, J. Struct. Div. ASCE, Dec. 1967, 189-200.
21. W. WIERZBICKI, *Obiektywne metody oceny bezpieczeństwa konstrukcji*, Warszawa 1961.

#### Р е з ю м е

#### ВОПРОСЫ НАДЁЖНОСТИ И БЕЗОПАСНОСТИ В МЕХАНИКЕ МАТЕРИАЛОВ И КОНСТРУКЦИЙ

В теории механической надёжности и безопасности на макроскопическом уровне применяются вероятностные методы, так для задач о нагрузках, как и для нахождения свойств сооружений. В первую очередь рассматривались некоторые основные распределения вероятностей (Табл. 2),

а затем был разработан анализ асимптотических распределений (Табл. 3), а также статистический анализ второго порядка при неопределенной форме распределения. Простая вероятностная теория масштабного эффекта дана Вейбуллом для хрупких тел. Для некоторых задач дано обобщение этой теории на упруго-пластические сооружения (Рис. 7). Расчётная нагрузка зависит от предполагаемого времени работы конструкции, (9), (10). Такой эффект долговечности был рассмотрен с точки зрения теории гауссовых стационарных случайных процессов (Форм. 13). С точки зрения эффекта контроля понятия надёжности и безопасности различны. Эти понятия относятся к двум крайним случаям: когда дефектные изделия не исключены (Фиг. 13), или когда они вполне исключены (Фиг. 12). Если эффект контроля учтён в расчётах необходимо определить относительные области ответственности. Различия между безопасностью и надёжностью возникают в случае двух или более контролируемых параметров безопасности (Фиг. 12). Коэффициент запаса разлагается в этом случае на частичные факторы (25).

#### S u m m a r y

### RELIABILITY AND SAFETY PROBLEMS IN MECHANICS OF MATERIALS AND STRUCTURES

Probabilistic methods are applied to mechanical reliability and safety problems on the macroscopic level, both to the loading and structural properties. First, some basic probability distributions (Tab. 2) have been taken under consideration, then a distribution-free analysis is attempted by means of the asymptotic distributions (Tabl. 3) or by a «second-order» statistical analysis, where the exact form of the distribution remains undefined.

Simple probabilistic theory of size-effect has been developed by Weibull for the brittle bodies. The extension of the theory to elastic-plastic structural systems is already accomplished in some cases (Fig. 7).

The design load depends on the anticipated service-life of the structure, Eqs. (9), (10). This «durability effect» has also been analysed by means of Gaussian stationary stochastic processes, Eq. (13).

Notions of reliability and safety are distinguished from the point of view of the effect of control. These notions correspond to the two extreme cases: no preliminary elimination of defective objects (Fig. 13) and the perfect elimination (Fig. 12). If the control effect is taken into account, the specific fields of responsibility must be defined and delimited. The difference between safety and reliability is evident in the case of two or more safety parameters under control (Fig. 12). The safety factor, Eq. (25), is easily decomposed into partial factors in these cases.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 listopada 1971 r.*

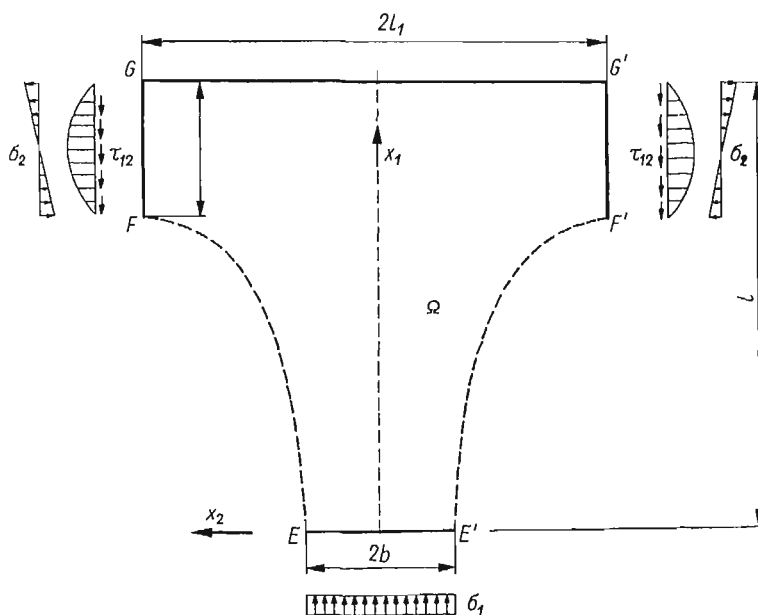
---

ZASTOSOWANIE ELASTOOPTYCZNYCH BADAŃ MODELOWYCH DO WYZNACZANIA  
OPTIMALNYCH KSZTAŁTÓW KONSTRUKCJI PŁASKICH

ROMAN S. DOROSZKIEWICZ, JERZY LIETZ, STEFAN OW CZAREK  
(WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienie wyznaczenia optymalnej linii brzegu ośrodka odkształcanego w zakresie sprężystym jest bardzo ważne w projektowaniu elementów konstrukcji i ich wzajemnych połączeń. Do takich elementów należą wały i pręty o zmiennej średnicy, koła zębate, węzły kratownic, połączenia belek i słupów itp. Nieuwzględnianie tych zagadnień prowadzi do konstrukcji narażonych na ujemne efekty karbu, obniżające ich maksymalną nośność, co pociąga za sobą zmniejszenie bezpieczeństwa projektowanych konstrukcji.



Rys. 1. Warunki brzegowe naprężeń w węźle trójramiennym

W celu ustalenia rozważań zagadnienia optymalizacji brzegów obszarów płaskich posłużymy się przykładem węzła trójramiennego (rys. 1). Założymy, że węzeł ten został wycięty z konstrukcji i jego granice na odcinkach  $FGG'F'$  i  $EE'$  oraz obciążenia działające wzdłuż tych granic są dane.

Sformułowanie zagadnienia na gruncie płaskiej teorii sprężystości jest następujące.

Mając dane granice obszaru  $\Omega$  na odcinkach  $FGG'F'$  i  $EE'$  oraz wartości naprężeń brzegowych wzdłuż tych granic należy znaleźć linię ograniczającą ten obszar na odcinku  $EF$  tak, aby był spełniony warunek kształtowania odnośnie całego obszaru. Krawędzie  $EF$  i  $E'F'$  są nieobciążone. Jako kryterium optymalności przyjmujemy stałość wielkości niezerowego naprężenia głównego nazywanego w elastooptyce naprężeniem brzegowym, wzdłuż kształtowanego brzegu  $\sigma_b = \text{const}$ .

W przypadku stosowania funkcji naprężeń Airy'ego należy znaleźć taki brzeg obszaru  $\Omega$ , aby w tym obszarze i na jego brzegach były spełnione następujące warunki na funkcję  $F$ :

a) Funkcja  $F(x_1, x_2)$  spełnia w obszarze równanie

$$(1) \quad \nabla^4 F = 0,$$

w którym  $\nabla^4$  oznacza operator biharmoniczny.

b) Na danych brzegach  $EE'$ ,  $F'G'$ ,  $G'G$ ,  $GF$  spełnione są warunki na wartości pierwszych pochodnych cząstkowych  $F_{,1}$  i  $F_{,2}$

$$(2) \quad F_{,1} = G_1(x_1, x_2), \quad F_{,2} = G_2(x_1, x_2).$$

c) Na poszukiwanym brzegu  $EF$  i  $E'F'$  pochodne cząstkowe funkcji  $F$  mają stałe wartości

$$(3) \quad F_{,1} = C_1, \quad F_{,2} = C_2.$$

d) Na poszukiwanym brzegu  $EF$  jest spełniony warunek

$$(4) \quad \nabla^2 F = C,$$

w którym  $\nabla^2$  oznacza operator Laplace'a.

Warunek (1) zastępuje równania równowagi i ciągłości deformacji w obszarze. Warunki (2) i (3) wynikają z całkowania naprężeń wzdłuż brzegów obszaru. Prawa strona równania (4) jest niezmiennikiem wyrażającym się sumą naprężeń głównych. Wzdłuż brzegu wolnego od obciążeń niezmiennik ten jest równy wartości naprężenia normalnego o kierunku stycznym do brzegu. Z kryterium optymalizacji — wyrównania naprężenia brzegowego do stałej wartości — wynika równanie (4).

Z matematycznego punktu widzenia należy rozwiązać zagadnienie brzegowe równania biharmonicznego z warunkami brzegowymi niejednorodnymi, o nieustalonej *a priori* części granicy obszaru, oraz wyznaczyć tę granicę z warunku narzuconego na poszukiwaną funkcję. Sformułowane zagadnienie sprowadza się więc do określenia wpływu granicy obszaru na rozwiązanie zagadnienia brzegowego równania biharmonicznego, a następnie wyboru takiego brzegu, który spełniałby postawiony warunek optymalizacji.

Zależność rozwiązania zagadnienia brzegowego równania biharmonicznego od granicy obszaru była przedmiotem prac [1], [2]. Prace te dotyczyły jednak szczególnych obszarów płaskich jakimi są półpłaszczyzna i obszar kolisty oraz szczególnych zakresów zmian brzegów. Ponieważ zagadnienie wpływu zmiany obszaru na rozwiązanie problemu brzegowego równania biharmonicznego dotychczas nie doczekało się ogólnego rozwiązania, również rozwiązanie zagadnień optymalizacji obszarów płaskich było możliwe jedynie

w szczególnych przypadkach. Uzyskano zadowalające rozwiązanie teoretyczne powyżej sfomrowalnego zagadnienia optymalizacji brzegów jedynie w dwóch przypadkach:

— wyznaczenia kształtu otworu w tarczy nieskończonej w przypadku rozciągania dwukierunkowego [3],

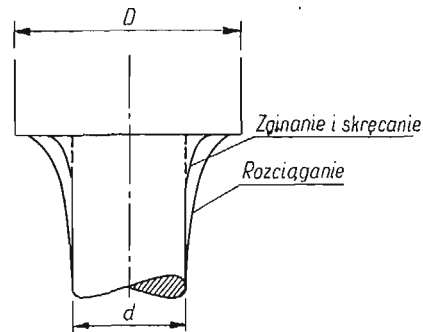
— optymalizacji kształtów korbów i linii przejścia w prętach rozciąganych o dużym przekroju [4].

Inne problemy z tego zakresu wynikające z praktyki inżynierskiej były dotychczas rozwiązywane za pomocą badań eksperymentalnych.

Spośród wszystkich metod rozwiązań tego zagadnienia na drodze eksperymentu najczęściej stosowane są modelowe badania elastoptyczne. W badaniach tych rozwiązanie zagadnienia uzyskuje się metodą kolejnego poprawiania brzegu na podstawie wyników uzyskanych z badań modelu nie spełniającego warunku kształtowania.

## 2. Przegląd prac dotyczących eksperymentalnego wyznaczenia linii brzegu o stałym naprężeniu

Zadanie efektywnego wyznaczenia brzegów o stałym naprężeniu zostało postawione po raz pierwszy przez BAUDA. Zajmował się on obrzeżem o stałym naprężeniu w przypadku wałów o zmiennej średnicy, poddanych rozciąganiu. W pracy [5] stwierdzono, że w przypadku dużego stosunku większej ze średnic wału do mniejszej brzeg o stałym naprężeniu jest identyczny z konturem wolnego strumienia wody wypływającego z okrągłego otworu. Rozważania BAUDA znalazły potwierdzenie w badaniach elastoptycznych THUMA i BAUTZA [6]. Rozszerzyli oni badania wykonane przez BAUDA na zginanie i skręcanie oraz na większy zakres stosunków średnic wału. W pracy tej wykazano, że przy jednakowym zamocowaniu części wału o większej średnicy, brzezi o stałym naprężeniu odpowiadające zginaniu i skręcaniu są identyczne, natomiast brzeg wału rozciąganego jest



Rys. 2. Zależność kształtu brzegu od warunków obciążenia wału o zmiennej średnicy

położony po ich zewnętrznej stronie (rys. 2). Podano również interpretację warunku wyrównania naprężenia brzegowego w elastoptyce jako równoległości skrajnej izochromy do brzegu badanego modelu.

W badaniach elastoptycznych DURELIEGO i MURRAYA [7] poszukiwano zależności naprężenia na brzegu eliptycznego otworu od stosunku jego półosi, w tarczy dwukierunkowo rozciąganej. Na podstawie obserwacji modeli wykazano, że naprężenie dookoła otworu jest stałe, jeżeli stosunek osi elipsy jest równy stosunkowi stałych naprężeń wywieranych na wzajemnie prostopadłych krawędziach.

Wyznaczaniem linii przejścia pomiędzy dwoma zębami koła przekładni zajmowało się wielu autorów. Między innymi HEYWOOD [8] porównał wyniki badań ciągłego połączenia pomiędzy dwoma zębami koła przekładni z badaniami obrzeża ograniczonego dwoma łukami koła i linią prostą. Ten sam autor [9] i [10] zajmował się wyznaczaniem linii łączącej dwa boki kołnierza obudowy silnika. Zaproponował on metodę kolejnego ulepszania kształtu modelu opartą na dodawaniu warstwy materiału w punktach, w których naprężenia występujące w modelu badanym są większe od nominalnego i odejmowaniu w punktach o naprężeniach mniejszych od nominalnego. Grubość warstwy dodawanej lub odejmowanej określono za pomocą wzoru empirycznego

$$(5) \quad \delta = \alpha R \left( \sqrt{\frac{\sigma_b}{\sigma_N}} - 1 \right),$$

w którym przyjęto oznaczenia:

przesunięcie brzegu (dodatnie na zewnątrz, ujemne do wewnątrz),

promień krzywizny brzegu,

naprężenie brzegowe,

$\sigma_N$  naprężenie nominalne,

$\alpha$  stała równa około 1,5 (wybierana metodą prób).

Nieokreśloność stałej  $\alpha$  oraz wyznaczanie promienia krzywizny obrzeża  $R$  z pomiaru w każdym punkcie brzegu są powodem dużej dowolności rachunku zaproponowanego przez HEYWOODA. Posługując się wzorem (5) wyznaczył on efektywne linie przejścia pomiędzy bokami kątownika zginanymi na końcach czystym momentem (rys. 3). Proces poprawy brzegu modelu powtarzano siedmiokrotnie, co wskazuje na słabą zbieżność zaproponowanego postępowania.

Z opublikowanych prac widać, że zbieżność stosowanych dotychczas eksperymentalnych metod kolejnego ulepszania kształtu brzegu jest bardzo mała. Wynika to z faktu, że oparte są one na przesłankach intuicyjnych, a nie na ogólnym rozwiązaniu zagadnienia zmiany naprężeń przez zmianę funkcji brzegu, przy ustalonych warunkach obciążenia badanego modelu.

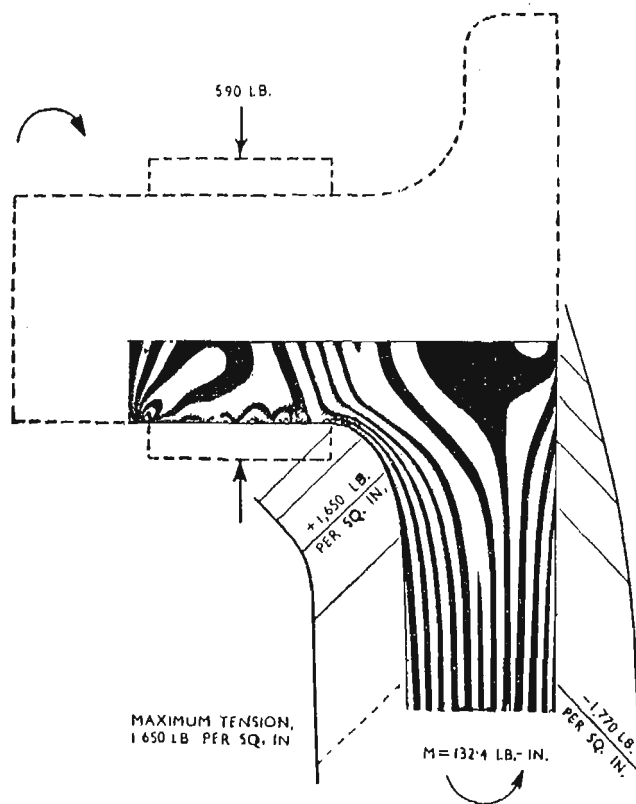
W dalszym ciągu artykułu przedstawimy metodę iteracyjną wyznaczania optymalnego kształtu brzegu modelu płaskiego opracowaną przez S. OWCZARKA.

Tok postępowania w tej metodzie jest następujący:

- a) wyznaczenie przybliżonego kształtu optymalizowanego brzegu modelu,
- b) wyznaczenie przy pomocy elastooptyki naprężenia brzegowego w tym modelu,
- c) wypisanie zależności naprężenia brzegowego od współrzędnych brzegu optymalizowanego, w oparciu o przybliżoną teorię, na przykład klasyczną wytrzymałość materiałów,
- d) określenie przesunięcia  $\delta$  a następnie kształtu brzegu modelu do badań w etapie następnym, z wartości [punkt b)] i gradientu [(punkt c)] naprężenia brzegowego.

Kolejne etapy są powtarzane aż do spełnienia kryterium kształtowania, to jest stałości naprężenia wzdłuż optymalizowanego brzegu.

Czynności a) i b) są identyczne ze stosowanymi przez innych autorów w rozwiązywaniu analogicznych problemów. Istota opisywanej metody zawarta w punktach c) i d) polega na tym, że wielkość przesunięcia brzegu  $\delta$  jest wyprowadzona z rozważań nad zmianą naprężenia brzegowego przy zmianie jego kształtu.



Rys. 3. Kształt linii brzoj o stałym naprężeniu kątownika obciążonego czystym momentem

Zasadniczą treść metody z wyprowadzeniem wzorów i przykładem obliczenia brzoju ulepszonego w oparciu o wyniki badań modelu wstępnego podano w punkcie 5. Zastosowanie metody zilustrowano na przykładzie wyznaczenia optymalnego kształtu połączenia słupa z belką przy danym polu statycznym sił zewnętrznych.

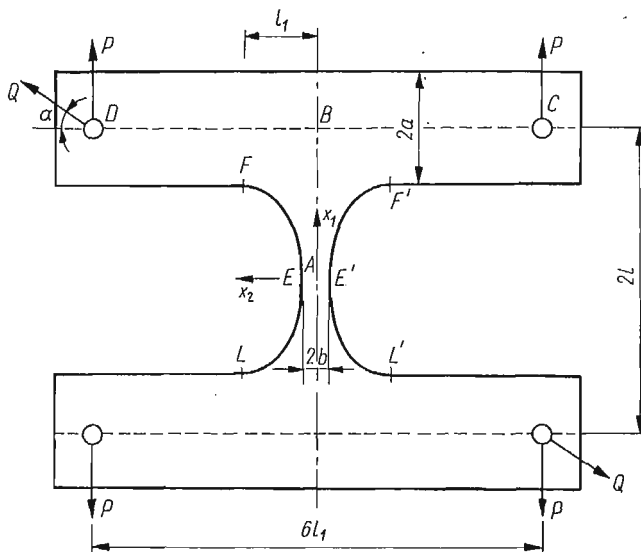
### 3. Schemat, obciążenia i opis kolejnych etapów wyznaczania kształtów modeli

Model przyjęty do badań i obciążenia, przy których poszukiwano optymalnego kształtu przedstawiono schematycznie na rys. 4. Stan obciążenia modelu jest określony siłami: dwiema pionowymi  $P$  i jedną ukośną  $Q$  działającą po przekątnej pod kątem  $\alpha = 33^\circ$ .

Kształtu optymalnego poszukiwano w dwóch przypadkach stanu obciążenia słupa zgięciowego oraz bezzgięciowego. W stanie zgięciowym siłami obciążającymi były siły  $P$  i  $Q$ , natomiast w stanie bezzgięciowym występowały jedynie siły  $P$ .

Jako kryterium wyznaczania optymalnego kształtu słupa monolitycznie połączonego z belką przyjęto stałość niezerowego naprężenia głównego wzdłuż nieobciążonej krawędzi  $EF$  i  $E'F'$  (rys. 4). Wykonano dwa etapy badań. Do badań w pierwszym etapie przyjęto w obydwu przypadkach stanu obciążenia po dwa modele.

W przypadku stanu zgięciowego kształt pierwszego modelu był wyznaczony z kryterium minimalnej energii sprężystej od zginania i ściskania przy stałej objętości tworzywa według elementarnych wzorów wytrzymałości materiałów przy obciążeniu  $P = 75$  kG,  $Q = 30$  kG. Kształt brzegu drugiego modelu założono w postaci elipsy o wyrównanych naprężeniach na półosiach przy tym samym obciążeniu.



Rys. 4. Schemat modelu i jego obciążeń

W przypadku stanu bezzgięciowego kształt brzegu modelu na odcinku  $EF$  (rys. 4) wyznaczono z warunku wyrównania naprężenia brzegowego według elementarnych wzorów wytrzymałości materiałów. Na przykład model 5 wyznaczono ze wzoru (30). Kładąc we wzorze (30)  $\sigma_b = 190$  kG/cm<sup>2</sup> otrzymano równanie uwikłane kształtu brzegu modelu 5.

Po wykonaniu badań elastoptycznych w etapie pierwszym w oparciu o uzyskane z nich wartości naprężeń brzegowych zaprojektowano nowe modele do badań w etapie drugim. Wyznaczenia brzegów modeli do badań w etapie drugim dokonano według metody przedstawionej w punkcie 5 niniejszego artykułu, zawierającym jako przykład obliczenie współrzędnych brzegu poprawionego wykonane w oparciu o wyniki badań modelu 1.

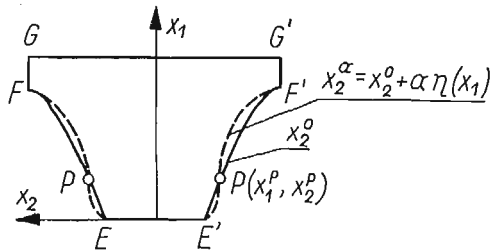
Przed przystąpieniem do wyprowadzenia wzorów na przesunięcia brzegu  $\delta$  na podstawie wyników badań modelu niespełniającego warunku optymalizacji, przeprowadzimy rozważania wstępne nad zagadnieniem zmiany naprężenia brzegowego przy zmianie funkcji brzegu.

#### 4. Wpływ kształtu brzegu na naprężenie brzegowe

Rozważmy zagadnienie zmiany naprężenia brzegowego przy zmianie funkcji brzegu na odcinku  $EF$  i symetrycznym do niego odcinku  $E'F'$  (rys. 5). Zakładamy stałość pozostałych brzegów  $E'E$ ,  $FG$ ,  $GG'$ ,  $G'F'$  i obciążeń na nich działających.



W celu wyciągnięcia pewnych wniosków jakościowych odnośnie zmiany naprężenia brzegowego przy zmianie brzegu oprzemy się na twierdzeniu o bliskości zasięgu zmian odkształceń. Twierdzenie to w pracy HEYWOODA ([10] s. 122) podano jako *Proximity*



Rys. 5. Brzeg i jego wariacja

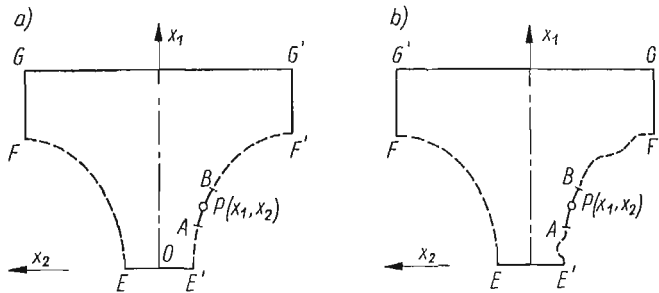
*Low*: «Pole naprężeń zmienia się tylko lokalnie przez lokalne nieregularności w kształcie ciała i lokalny rozkład działających sił».

Bliskość zasięgu zmian pola naprężeń przez lokalną zmianę kształtu ciała została potwierdzona w rozwiązanych przez NEUBORA zagadnieniach koncentracji naprężeń [11]. Druga część przytoczonego twierdzenia jest odmianą sformułowania twierdzenia St. Venanta.

Dowód twierdzenia o bliskości zasięgu zmian odkształceń przez wprowadzenie elementu  $\Delta V$  został podany przez WASIUTYŃSKIEGO w pracy [12].

Opierając się na twierdzeniu o bliskości zasięgu zmian naprężeń przez lokalną zmianę kształtu brzegu wprowadzimy pojęcie *otoczenia wpływu*.

W celu uproszczenia rozważań wprowadzimy definicje odnośnie zagadnienia płaskiego: otoczeniem wpływu danego punktu należącego do brzegu ciała będziemy nazywać taki przedział linii brzegu  $AB$  (rys. 6), w którym wprowadzenie zmiany (karbu) danego



Rys. 6. Otoczenie wpływu punktu  $P(x_1, x_2)$

rzędu wielkości o określonej geometrii powoduje w tym punkcie zmianę naprężenia tego samego rzędu. W zagadnieniu przestrzennym nic by się nie zmieniło w powyższym sformułowaniu jedynie, brzeg liniowy należałoby zastąpić przez powierzchnię ograniczającą, a stan jednoosiowy przez stan dwuosiowy.

Wielkość otoczenia wpływu zależy od geometrii karbu (zmiany). Otoczenie wpływu danego punktu brzegu zwiększa się wraz z wymiarem karbu. Wymiar karbu określa obszar dopuszczalnej zmienności brzegu.

Rozważmy zagadnienie zmiany naprężenia brzegowego przy zmianie funkcji brzegu o ustalonych końcach  $E, F$  (rys. 5).

W przeprowadzonych rozważaniach przez  $x_1, x_2$  oznaczono współrzędne dowolnego punktu rozpatrywanego zakresu zmienności brzegu. Załóżmy, że są to współrzędne kartezjańskie. Niech będzie dany węzeł trójramienny o brzegu opisanym równaniem

$$(6) \quad \overset{0}{x}_2 = \overset{0}{x}_2(x_1).$$

Rozpatrzmy rodzinę brzegów o postaci

$$(7) \quad \overset{\alpha}{x}_2 = \overset{0}{x}_2(x_1) + \alpha\eta(x_1),$$

w której  $\alpha$  oznacza parametr,  $\eta(x_1)$  funkcja równa zero na końcach przedziału  $EF$ . Weźmy punkt  $P(x_1, x_2)$  (rys. 5) należący do wszystkich krzywych rozpatrywanej rodziny brzegów. Wartość naprężenia brzegowego w tym punkcie będzie różna w zależności od charakteru krzywej brzegowej. Zależność tego naprężenia od współrzędnych punktu  $P(x_1, x_2)$  i pochodnych funkcji brzegu  $\overset{\alpha}{x}_2^{(i)}$ , aż do rzędu  $r$  włącznie można wyrazić za pomocą wzoru

$$(8) \quad \sigma_b^\alpha = f(x_1, x_2, \overset{\alpha}{x}_2, \overset{\alpha}{x}_2', \dots, \overset{\alpha}{x}_2^{(k)}, \dots, \overset{\alpha}{x}_2^{(r)})$$

w którym  $f$  jest funkcją ciągłą  $r+2$  zmiennych, a  $r > k$ .

Aby określić bliżej liczbę  $k$  przeprowadzimy następujące rozumowanie. Rozważmy dwie bliskie krzywe  $\overset{0}{x}_2, \overset{1}{x}_2$ , odpowiadające parametrom  $\alpha = 0, \alpha = 1$ . Niech linie te mają wspólny punkt, którego współrzędne oznaczmy przez  $x_1^P$

Rozwińmy w szereg Taylora obydwie brzegi  $\overset{0}{x}_2$  i  $\overset{1}{x}_2$  w otoczeniu punktu  $x_1^P$ .

$$(9) \quad \overset{0}{x}_2(x_1) = x_2^P(x_1^P) + \overset{0}{x}_2'(x_1^P)(x_1 - x_1^P) + \frac{\overset{0}{x}_2''(x_1^P)}{2!}(x_1 - x_1^P)^2 + \frac{\overset{0}{x}_2^{(k)}(x_1^P)}{k!}(x_1 - x_1^P)^k + \dots +$$

$$+ \frac{\overset{0}{x}_2^{(r)}(x_1^P)}{r!}(x_1 - x_1^P)^r + \int_{x_1^P}^{x_1} \overset{0}{x}_2^{(r+1)}(t)(x_1 - t)^r dt,$$

$$(10) \quad \overset{1}{x}_2(x_1) = x_2^P(x_1^P) + \overset{1}{x}_2'(x_1^P)(x_1 - x_1^P) + \frac{\overset{1}{x}_2''(x_1^P)}{2!}(x_1 - x_1^P)^2 +$$

$$+ \frac{\overset{1}{x}_2^{(k)}(x_1^P)}{k!}(x_1 - x_1^P)^k + \dots + \frac{\overset{1}{x}_2^{(r)}(x_1^P)}{r!}(x_1 - x_1^P)^r + \frac{1}{r!} \int_{x_1^P}^{x_1} \overset{1}{x}_2^{(r+1)}(t)(x_1 - t)^r dt.$$

Tym dwóm brzegom w punkcie  $x_1^P$  będą odpowiadać naprężenia  $\sigma_b^0$  i  $\sigma_b^1$  wyznaczone ze wzoru (8)

$$(11) \quad \sigma_b^0 = f(x_1^P, x_2^P, \overset{0}{x}_2, \overset{0}{x}_2', \dots, \overset{0}{x}_2^{(k)}, \dots, \overset{0}{x}_2^{(r)}),$$

$$(12) \quad \sigma_b^1 = f(x_1^P, x_2^P, \overset{1}{x}_2, \overset{1}{x}_2', \dots, \overset{1}{x}_2^{(k)}, \dots, \overset{1}{x}_2^{(r)}).$$

Założmy teraz, że istnieje taka liczba  $k$ , że

$$(13) \quad \overset{0}{x}_2' = \overset{1}{x}_2', \quad \overset{0}{x}_2'' = \overset{1}{x}_2'', \quad \dots, \quad \overset{0}{x}_2^{(k)} = \overset{1}{x}_2^{(k)}, \quad \overset{0}{x}_2^{(k+1)} \neq \overset{1}{x}_2^{(k+1)}, \quad \dots, \quad \overset{0}{x}_2^{(r+1)} \neq \overset{1}{x}_2^{(r+1)},$$

przy której obydwie krzywe można przyjąć za identyczne w otoczeniu wpływu punktu  $x_1^P$ .

Z założenia identyczności obydwóch brzegów w strefie wpływu punktu  $P$  o współrzędnych  $x_1^p, x_2^p$  wynika równość naprężeń brzegowych w tym punkcie

$$(14) \quad \sigma_b^0 = \sigma_b^1.$$

Jeżeli  $k$  jest takie, że obydwie krzywe (9) i (10) można przyjąć za identyczne w otoczeniu wpływu danego punktu, to naprężenia w obydwu przypadkach krzywych brzegowych będą identyczne. Ponieważ pochodne tych krzywych względem ich współrzędnych od rzędu  $k$  do  $r$  są różne zatem wnioskujemy, że naprężenie brzegowe zależy od pochodnych tylko od rzędu  $k$  włącznie

$$(15) \quad \sigma_b = f[x_1, x_2, x_2'(x_1), x_2''(x_1), \dots, x_2^{(k)}(x_1)].$$

Liczba  $k$  zależy bezpośrednio od wielkości otoczenia wpływu, albo mówiąc inaczej od wielkości obszaru, w którym dopuszczamy zmiany brzegu,  $k$  jest tym większą liczbą naturalną, im większe dopuszczamy otoczenie krzywej.

Jeżeli założymy, że rozpatrujemy zmianę naprężenia na krzywych gładkich i w bezpośrednim otoczeniu danej krzywej — o małych dopuszczalnych zmianach brzegu, to można rozpatrywać naprężenie brzegowe jako funkcję współrzędnych kartezjańskich

$$(16) \quad \sigma_b = f(x_1, x_2).$$

Wynik rozważań (16) zostanie zastosowany poniżej do wyznaczenia przybliżonej wartości gradientu naprężenia brzegowego generowanego przez zmianę funkcji brzegu, z pola skalarnego zależnego tylko od współrzędnych  $x_1, x_2$ .

## 5. Metoda gradientu korygowania kształtu brzegu na podstawie wyników badań wstępnego modelu

**5.1. Wyprowadzenie wzorów na współrzędne brzegu poprawionego.** Metoda korygowania kształtu brzegu jest oparta na następujących wnioskach wynikających z wyżej przeprowadzonych rozważań:

— konstruowanie funkcji naprężenia brzegowego występującego przy zmianach brzegu w dopuszczalnym obszarze zmienności daje się sprowadzić do pola skalarnego zależnego od skończonej liczby zmiennych niezależnych,

— rząd zmiennych niezależnych przy konstruowaniu pola naprężenia brzegowego w przypadku małych obszarów dopuszczalnej zmienności i dostatecznie regularnej klasy brzegów może być tak niski, że pole to można traktować jako zależne tylko od współrzędnych kartezjańskich.

Z teorii pola wiadomo, że:

$$(17) \quad d\sigma_b = \text{grad } \sigma_b \cdot d\mathbf{r},$$

$$(18) \quad \text{grad } \sigma_b = \sigma_{b,1} \mathbf{i} + \sigma_{b,2} \mathbf{j}.$$

We wzorach (17) i (18) oznaczono:

$d\mathbf{r}$  —  $eds$  przyrost wektora miejsca,

$\mathbf{i}$  wersor kierunku  $x_1$ ,

$\mathbf{j}$  wersor kierunku  $x_2$ .

Jeżeli  $\mathbf{e}$  jest jednostkowym wektorem gradientu, to przyrost pola naprężenia wzdłuż jego linii o długości różniczkowej  $ds$  wyniesie

$$(19) \quad d\sigma_b = \|\text{grad } \sigma_b\| ds.$$

Przy małych zmianach brzegu możemy zastąpić różniczki występujące we wzorze (19) przez skończone przyrosty, a więc:

$$(20) \quad d\sigma_b = \bar{\sigma}_b - \sigma_b^r, \quad ds = \delta.$$

Przyjęto tu następujące oznaczenia:

$\bar{\sigma}_b$  wartość, do której wyrównujemy naprężenia brzegowe,

$\sigma_b^r$  wartość naprężenia brzegowego w modelu badanym,

$\delta$  różnica odległości punktów brzegu poprawionego i badanego mierzona wzdłuż wektora gradientu. Wielkość  $\delta$  przyjęto nazywać *przesunięciem brzegu*.

Podstawiając (20) do (19) otrzymano wzór na przesunięcie brzegu

$$(21) \quad \delta = ds = \frac{\bar{\sigma}_b - \sigma_b^r}{\|\text{grad } \sigma_b\|}.$$

Wzór (21) może być porównywany np. ze wzorem empirycznym (5) na poprawę brzegu, zaproponowanym przez HEYWOODA. Oznaczając współrzędne punktu, w którym kształt ma być skorygowany przez  $x_1, x_2$ , poprawionego przez  $X_1, X_2$  znajdujemy:

$$(22) \quad \begin{aligned} X_1 &= x_1 + \Delta x_1, \\ X_2 &= x_2 + \Delta x_2. \end{aligned}$$

Przyrosty współrzędnych kartezjańskich obliczono z zależności:

$$(23) \quad \Delta x_1 = \delta \cos \alpha, \quad \Delta x_2 = \delta \cos \beta,$$

w których  $\cos \alpha, \cos \beta$  cosinusy kierunkowe gradientu pola naprężenia brzegowego

$$(24) \quad \cos \alpha = \frac{\sigma_{b,1}}{\sqrt{\sigma_{b,1}^2 + \sigma_{b,2}^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\sigma_{b,2}}{\sqrt{\sigma_{b,1}^2 + \sigma_{b,2}^2}}.$$

Podstawiając (23) i (24) do (22) otrzymano ostatecznie wzory na współrzędne brzegu poprawionego:

$$(25) \quad X_1 = x_1 + \frac{\bar{\sigma}_b - \sigma_b^r}{\sigma_{b,1}^2 + \sigma_{b,2}^2} \sigma_{b,1}, \quad X_2 = x_2 + \frac{\bar{\sigma}_b - \sigma_b^r}{\sigma_{b,1}^2 + \sigma_{b,2}^2} \sigma_{b,2}.$$

Wzory (25) odnoszą się do dowolnego modelu i dowolnych obciążeń nań działających. Przystosowanie wzoru (25) do danego modelu polega na przyjęciu odpowiedniego pola skalarnego naprężeń brzegowych  $\sigma_b$ .

**5.2. Przykład obliczenia współrzędnych brzegu poprawionego wykonany w oparciu o wyniki badań modelu 1.** Funkcje naprężenia brzegowego  $\sigma_b$  na odcinku  $EF$  (rys. 4) przyjęto poprzez modyfikację wzorów wytrzymałości materiałów w sposób następujący: zakładając, że są znane naprężenia normalne  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  i biorąc pod uwagę, że naprężenie główne o kierunku normalnym do brzegu jest równe zeru (brzeg nieobciążony) i wychodząc z pierwszego niezmiennika naprężeń  $I_1$  określono wartość naprężenia brzegowego jako

$$(26) \quad I_1 = \sigma_b = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Przyjmując, że:

$$(27) \quad \sigma_1^0 = \frac{M(x_1)}{W(x_2)} + \frac{N(x_1)}{A(x_2)}, \quad \sigma_2^0 = \frac{M(\eta)}{W(x_1)} + \frac{N(\eta)}{A(x_1)},$$

otrzymano

$$(28) \quad \sigma_b^0 = \frac{M(x_1)}{W(x_2)} + \frac{N(x_1)}{A(x_2)} + \frac{M(\eta)}{W(x_1)} + \frac{N(\eta)}{A(x_1)}.$$

We wzorach (27) i (28) przyjęto następujące oznaczenia:

$x_1, x_2$  współrzędne dowolnego punktu rozpatrywanego brzegu  $EF$  (rys. 4),  
 $M(x_1), N(x_1)$  moment zginający i siła wzdłużna w przekroju poziomym słupa, odniesione do jego środka ciężkości,

$M(\eta), N(\eta)$  moment zginający i siła wzdłużna w przekroju pionowym belki, odniesione do jej środka ciężkości,

$W(x_2), A(x_2)$  wskaźnik wytrzymałości i pole przekroju poziomego słupa,

$W(x_1), A(x_1)$  wskaźnik wytrzymałości i pole przekroju pionowego belki.

Wzór przybliżony (28) mógłby być zastosowany do wyznaczenia współrzędnych brzegu poprawionego ze wzoru (25), bowiem w przedstawianej metodzie nie postuluje się ściśłego określania pola naprężenia brzegowego. Stawiane jest jedynie wymaganie, aby zależność naprężenia brzegowego od współrzędnych brzegu była wyprowadzona z rozważań przybliżonych, jak na przykład w tym przypadku przy użyciu wzorów wytrzymałości materiałów. Jednakże jest oczywiste, że im ściślejszą postać funkcji przyjmiemy za podstawę do obliczenia gradientu naprężenia brzegowego tym wyniki będą lepsze. Dążąc do uściślenia wzoru (28) wprowadzono współczynniki funkcyjne (29):

$$(29) \quad \beta_1^0 = \left[ \frac{l_1 - x_2}{l_1 - b} \right]^2 \beta_1, \quad \beta_3^0 = \frac{x_1^2}{(l-a)^2} \beta_3.$$

Wprowadzając współczynniki (29) do wzoru (28) otrzymano

$$(30) \quad \sigma_b = \left[ \frac{M(x_1)}{W(x_2)} + \frac{N(x_1)}{A(x_2)} \right] \left[ \frac{l_1 - x_2}{l_1 - b} \right]^2 \beta_1 + \left[ \frac{M(\eta)}{W(x_1)} + \frac{N(\eta)}{A(x_1)} \right] \left( \frac{x_1}{l-a} \right)^2 \beta_3.$$

Postać wyrażenia (29) została zaproponowana po porównaniu wyników z badań czterech modeli z pierwszego etapu badań z wartościami wyznaczonymi ze wzoru (30).

Współczynnik  $\beta$  jest współczynnikiem koncentracji naprężeń w punkcie o współrzędnej  $x_1 = 0, x_2 = b$  (punkt  $E$  na rys. 4), a współczynnik  $\beta_3$  jest współczynnikiem koncentracji w punkcie modelu o współrzędnych  $x_2 = l_1, x_1 = l-a$  (punkt  $F$  na rys. 4). Można się o tym łatwo przekonać podstawiając współrzędne punktów  $E$  i  $F$  do wzoru (30).

$$(31) \quad \beta_1 = \frac{\sigma_b^0}{\frac{M(x_1)}{W(x_2)} + \frac{N(x_1)}{A(x_2)}} \bigg|_{\substack{x_1 = 0 \\ x_2 = b}}, \quad \beta_3 = \frac{\sigma_b^0}{\frac{M(\eta)}{W(x_1)} + \frac{N(\eta)}{A(x_1)}} \bigg|_{\substack{x_1 = l-a \\ x_2 = l_1}}.$$

We wzorze (31)  $\sigma_b^0$  oznacza naprężenie brzegowe otrzymane z badań.

Współczynniki  $\beta_1, \beta_3$  wyznaczone po wykonaniu pierwszego etapu badań wynosiły:  $\beta_1 = 1,025, \beta_3 = 1,243$ .

Momenty i siły podłużne w przypadku modelu 1 (rys. 4) są określone następującymi funkcjami:

$$(32) \quad \begin{aligned} M(x_1) &= T_A x_1, & N(x_1) &= N_A, \\ M(\eta) &= M(x_1, x_2) = T_D(3l_1 - x_2) - \frac{N_D(l - x_1 - a)}{2}, \\ N(\eta) &= N_D. \end{aligned}$$

Podstawiając dane z badań  $P = 75$  kG,  $Q = 30$  kG,  $\sin \alpha = 0,5547$ ,  $\cos \alpha = 0,8321$  otrzymamy:

$$\begin{aligned} N_A &= 2P + Q \sin \alpha = 150 + 30 \cdot 0,5547 = 166,4 \text{ kG}, \\ T_A &= Q \cos \alpha = 30 \cdot 0,8321 = 25 \text{ kG}, \\ T_D &= P + Q \sin \alpha = 75 + 30 \cdot 0,5547 = 91,41 \text{ kG}, \\ N_D &= Q \cos \alpha = 30 \cdot 0,8321 = 25 \text{ kG}. \end{aligned}$$

Funkcje określające parametry geometryczne w przypadku modelu 1 mają postać:

$$(33) \quad \begin{aligned} W(x_2) &= \frac{2g}{3} (x_2)^2, & A(x_2) &= 2gx_2, \\ W(x_1) &= \frac{g(l+a-x_1)^2}{6}, & A(x_1) &= g(l+a-x_1). \end{aligned}$$

Podstawiając (33) i (32) do (30) przy danych  $l = 8$  cm,  $l_1 = 4$  cm,  $a = 3$  cm,  $g = 1$  cm,  $b = 0,81$  cm otrzymano:

$$(34) \quad \sigma_b = \left[ \frac{37,5x_1}{x_2^2} + \frac{83,2}{x_2} \right] \left[ \frac{4-x_2}{3,19} \right]^2 \beta_1 + \left[ \frac{548,45(12-x_2) - 75(5-x_1)}{(11-x_1)^2} + \frac{25}{(11-x_1)} \right] \left[ \frac{x_1}{5} \right]^2 \beta_3.$$

Przez różniczkowanie (34) otrzymano:

$$(35) \quad \begin{aligned} \sigma_{b,1} &= \frac{37,5}{x_1^2} \left( \frac{4-x_2}{3,19} \right)^2 \beta_1 + \left[ \frac{1096,9(12-x_2) - 150(5-x_1)}{(11-x_1)^3} + \frac{75}{(11-x_1)^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{25}{(11-x_1)^2} \right] \left( \frac{x_1}{5} \right)^2 \beta_3 + \left[ \frac{1096,9(12-x_2) - 150(5-x_1)}{(11-x_1)^2} + \frac{50}{11-x_1} \right] \frac{x_1}{25} \beta_3, \\ \sigma_{b,2} &= - \left[ \frac{75x_1}{x_2^3} + \frac{83,2}{x_2^2} \right] \left( \frac{4-x_2}{3,19} \right)^2 \beta_1 - \\ &- \left[ \frac{75x_1}{x_2^2} + \frac{166,4}{x_2} \right] \left[ \frac{4-x_2}{3,19^2} \beta_1 - \frac{548,45}{(11-x_1)^2} \right] \left( \frac{x_1}{5} \right)^2 \beta_3. \end{aligned}$$

Podstawiając współrzędne w dziesięciu punktach brzegu obliczono wartości numeryczne pochodnych danych wzorem (35). Wyniki zestawiono w tabelcy 1, która zawiera również wartości naprężeń brzegowych otrzymanych z badań modelu 1. W tabelcy tej wykonano obliczenie współrzędnych brzegu poprawionego według wzoru (25) na podstawie wyników badań modelu 1. Wykres kształtu wykonany w oparciu o obliczone w tabelcy współrzędne brzegu poprawionego przedstawiono na rys. 11a. Wykres ten jest

Tablica 1. Obliczanie współrzędnych brzegu poprawionego na podstawie wyników badań modelu 1  $\bar{\sigma} = 158,2 \text{ kG/cm}^2$

$x_1$ cm	$x_2$ cm	$\sigma_b^f$ kG/cm <sup>2</sup>	$\sigma - \sigma_b^f$ kG/cm <sup>2</sup>	$\sigma_{b,1}$ kG/cm <sup>3</sup>	$\sigma_{b,2}$ kG/cm <sup>3</sup>	$\sigma_{b,1}^2$ kG <sup>2</sup> /cm <sup>6</sup>	$\sigma_{b,2}^2$ kG <sup>2</sup> /cm <sup>6</sup>	$\sigma_{b,1}^2 + \sigma_{b,2}^2$ kG <sup>2</sup> /cm <sup>6</sup>	$\frac{\sigma_{b,1}}{\sigma_{b,1}^2 + \sigma_{b,2}^2}$ cm <sup>3</sup> /kG	$\frac{\sigma_{b,2}}{\sigma_{b,1}^2 + \sigma_{b,2}^2}$ cm <sup>3</sup> /kG	$\Delta x_1$ cm	$\Delta x_2$ cm	$X_1$ cm	$X_2$ cm
0,0	0,81	106,2	52,0	59,1	-197,7	3 494	39 085	42 579	0,00014	-0,00464	0,007	-0,241	0,007	0,569
1,0	0,89	144,6	13,6	54,7	-297,0	2 992	88 126	91 118	0,00060	-0,00326	0,008	-0,044	1,008	0,846
2,0	1,07	146,9	11,3	53,7	-276,6	2 886	76 474	79 360	0,00068	-0,00349	0,008	-0,039	2,008	1,031
3,0	1,34	144,6	13,6	60,0	-171,6	3 596	29 453	33 030	0,00182	-0,00519	0,025	-0,070	3,025	1,270
4,0	2,01	140,1	18,1	86,6	-63,8	7 498	4 073	11 571	0,00748	-0,00552	0,135	-0,100	4,135	1,910
4,2	2,28	144,6	13,6	94,3	-46,9	8 900	2 194	11 094	0,00850	-0,00422	0,116	-0,057	4,316	2,223
4,4	2,64	146,9	11,3	102,6	-31,9	10 521	1 020	11 541	0,00889	-0,00277	0,100	-0,031	4,500	2,609
4,6	3,03	146,9	11,3	111,8	-25,4	12 506	646	13 152	0,00850	-0,00193	0,096	-0,022	4,696	3,008
4,8	3,51	158,2	0,0	123,5	-20,9	15 255	438	15 692	0,00787	-0,00133	0,000	0,000	4,800	3,510
5,0	4,00	158,2	0,0	130,9	-19,1	17 143	365	17 509	0,00748	-0,00109	0,000	0,000	5,008	4,000

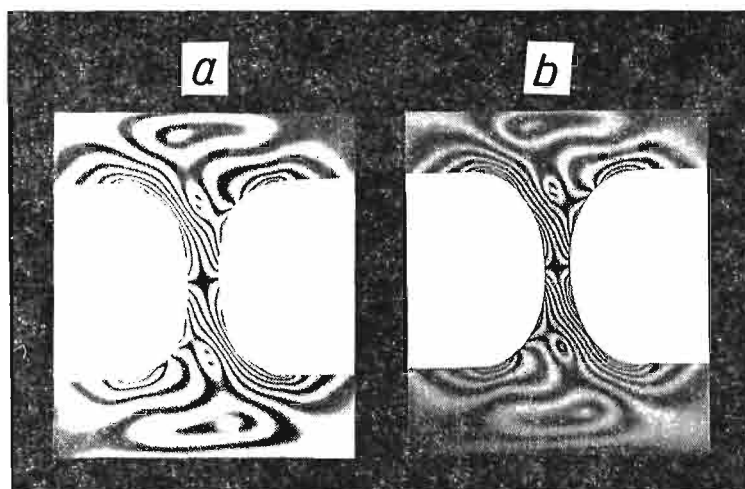
jednocześnie kształtem brzegu modelu 3 poddawanego badaniom w stanie zgięciowym w etapie drugim. Analogicznie na podstawie wyników badań modelu 5 zaprojektowano model 6 do badań w stanie bezzgięciowym w etapie drugim (rys. 11b).

### 6. Opis badań

Wykonano badania sześciu modeli. W etapie pierwszym wykonano badania czterech modeli. Numerami 1 i 2 oznaczono modele badane w stanie zgięciowym, a numerami 4 i 5 w stanie bezzgięciowym słupa. W etapie drugim wykonano badania dwóch modeli: stanowi zgięciowemu obciążeniu odpowiada Nr 3, a stanowi bezzgięciowemu Nr 6.

Jak wspomniano wyżej kryterium stałości naprężenia brzegowego sprowadza się w elastooptyce do łatwo sprawdzalnego, wizualnego efektu równoległości skrajnej izochromy do kształtowanego brzegu. Poszukiwano więc takich kształtów modelu, przy których skrajna izochroma była równoległa do kształtowanej krawędzi na odcinkach  $EF, F'L'$  w stanie zgięciowym i  $EFL, E'F'L'$  w stanie bezzgięciowym słupa (rys. 4).

Modele wykonano z materiału elastooptycznego VP 1527 w stanie wygrzewanym. Obciążenia w postaci trzech sił skupionych: dwóch pionowych  $P$  i jednej ukośnej  $Q$  realizowano bezpośrednio przez układ dźwigni i krążka. Badania wykonano w polaryskopie o średnicy pola widzenia 30 cm w świetle rozproszonym. W każdym przypadku obciążenia rejestrowano obrazy izochrom całkowitych i połówkowych. Obrazy izochrom uzyskiwano w monochromatycznym świetle sodowym. Obrazy te rejestrowano za pomocą aparatu Exacta Varex na błonie panchromatycznej o czułości 10 DIN.

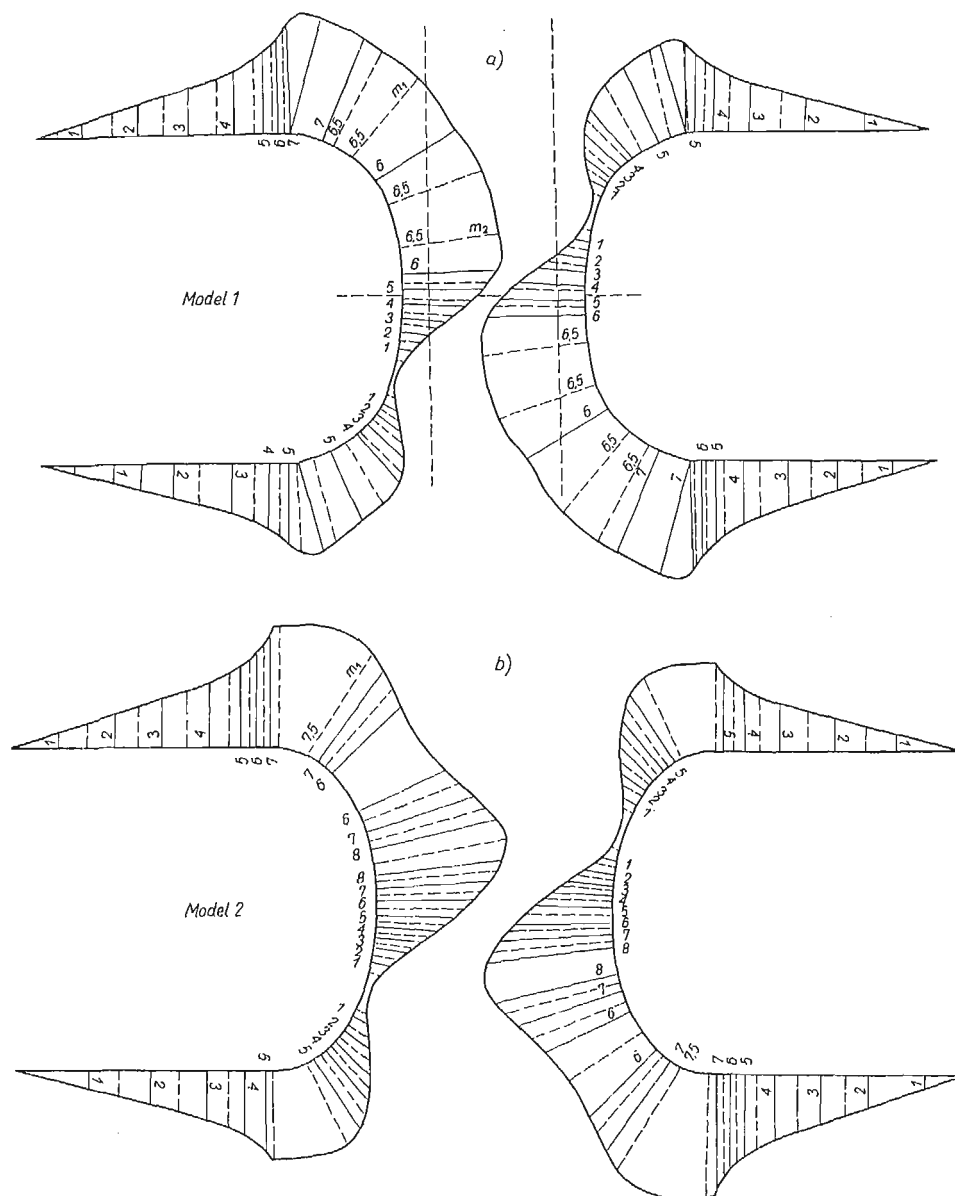


Rys. 7. Obrazy izochrom w modelach przy obciążeniu  $P = 75$  kG,  $Q = 30$  kG; a) model 1, b) model 2

W badaniach etapu pierwszego na podstawie zdjęć izochrom wykonano wykresy naprężeń brzegowych.

Izochromy przy siłach  $P = 75$  kG,  $Q = 30$  kG w modelu 1 przedstawiono na rys. 7a, a w modelu 2 na rys. 7b.

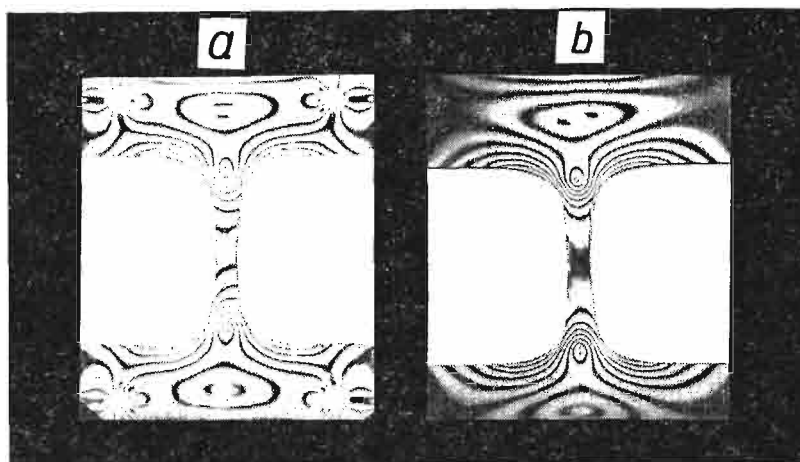




Rys. 8. Wykresy naprężeń brzegowych przy obciążeniu  $P = 75 \text{ kG}$ ,  $Q = 30 \text{ kG}$ ; a) model 1, b) model 2

Wykresy naprężeń brzegowych przy tym obciążeniu wykonano na rysunkach 8a i 8b. Obraz izochrom w modelu 4 przy sile  $P = 110$  kG i w modelu 5 przy sile  $P = 112,5$  kG przedstawiono na rys. 9, a wykresy naprężeń brzegowych wykonano na rys. 10.

Badania w etapie drugim wykonano przy różnych wartościach sił  $P$  i  $Q$ . W stanie zgięciowym siły te zmieniono proporcjonalnie tak, że ich stosunek wynosił  $P:Q = 2,5$  i był równy stosunkowi tych sił w etapie pierwszym. Ponieważ efekt równoległości skrajnej izochromy do brzegu w badaniach etapu drugiego był niewątpliwy, zdjęcia izochrom



Rys. 9. Obraz izochrom w modelach; a) model 4 pod obciążeniem  $P = 110$  kG, b) model 5 pod obciążeniem  $P = 112,5$  kG

wykonywano przy obciążeniach odpowiadających położeniom skrajnych izochrom na brzegu badanego modelu.

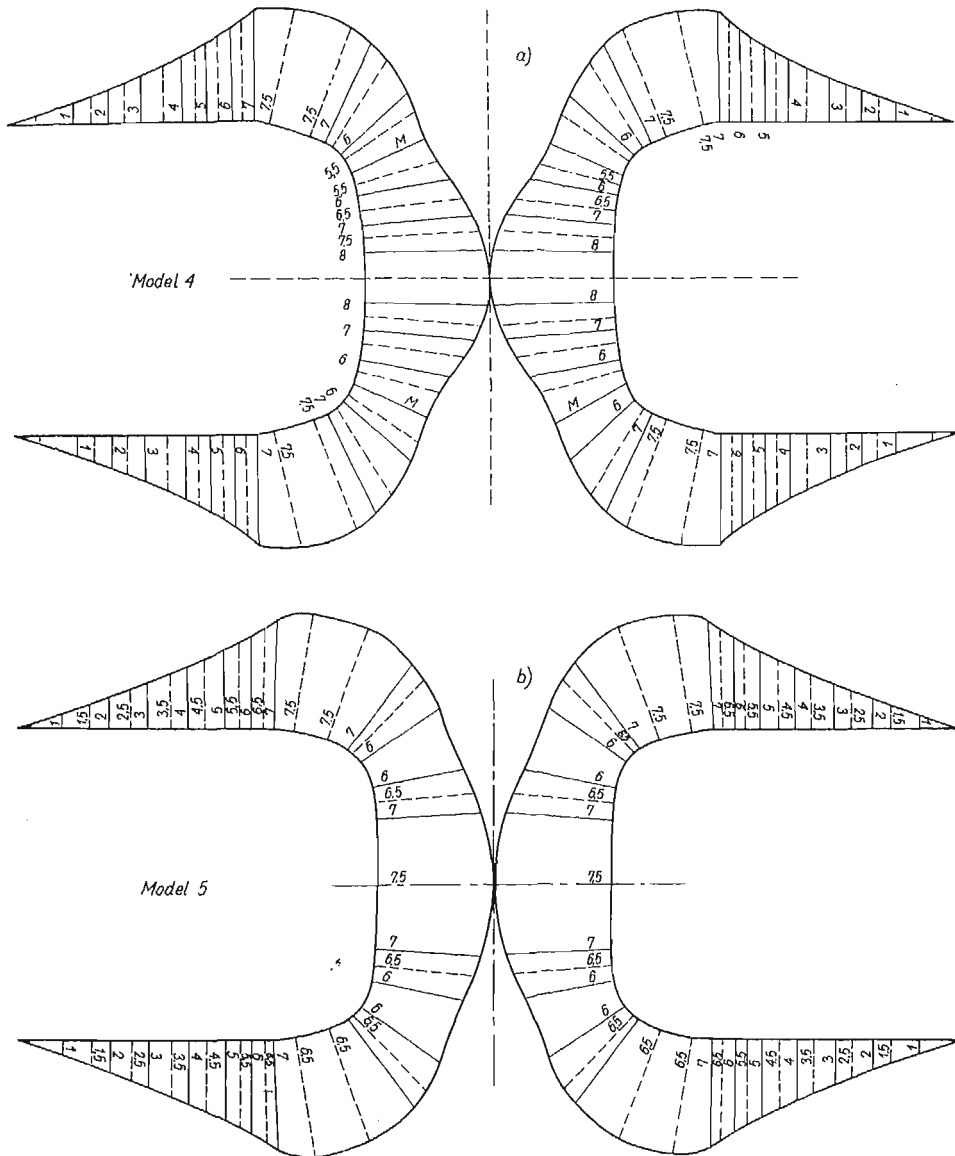
Zdjęcia odpowiadające położeniom na brzegu modelu 3 kolejnych połowkowych izochrom od rzędu 0,5 do 3,5 zestawiono na rys. 12a. Analogiczne zdjęcia izochrom na brzegu modelu 6 zestawiono na rys. 12b.

Na podstawie rys. 12a i 12b stwierdzono, że kształt brzegu modelu 3 (rys. 11a) może być przyjęty (rys. 11b) jako rozwiązanie stanu zgięciowego, a kształt modelu 6 — stanu bezzgięciowego słupa.

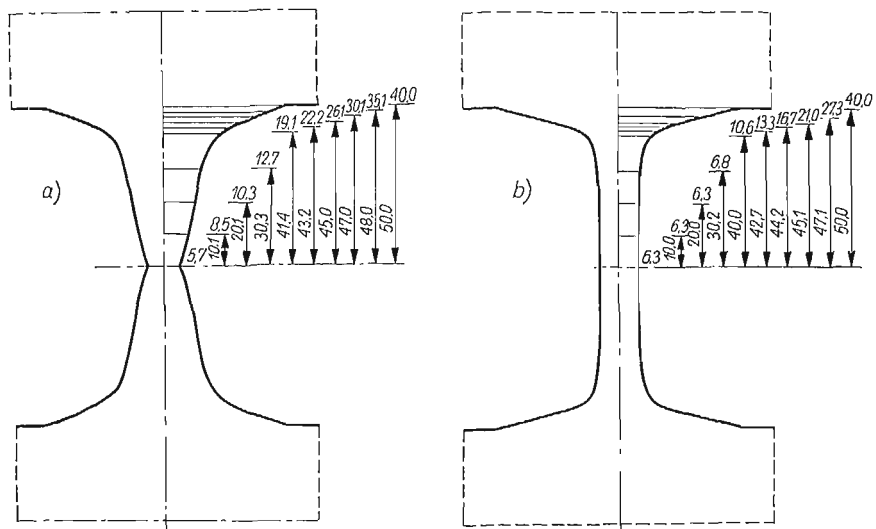
Uzyskanie zadowalającego spełnienia warunku kształtowania już w drugim etapie badań stanowi potwierdzenie opisanej w punkcie 5 metody korekcji brzegów. Zdaniem autorów niniejszego artykułu dalszy postęp w rozwiązywaniu zagadnień wyznaczania kształtów brzegu modelu jest zależny od udoskonalenia techniki badawczej oraz dokładności wykonywania badanego modelu.

#### 7. Wnioski ogólne dotyczące kształtu brzegu równej wytrzymałości

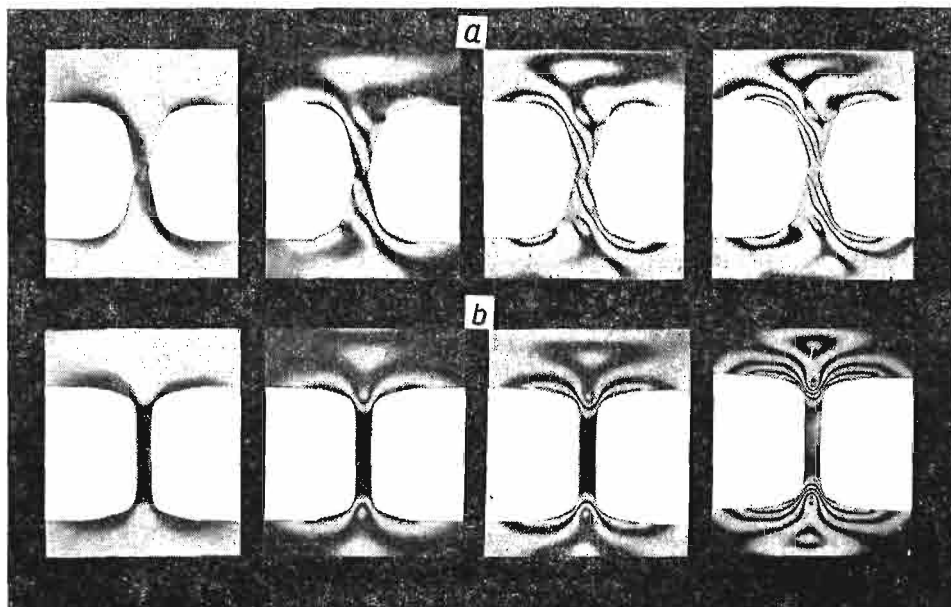
Pierwsze kolejne pochodne funkcji brzegu równej wytrzymałości są ciągłe względem jego współrzędnych.



Rys. 10. Wykresy naprężeń brzegowych: a) w modelu 4 pod obciążeniem  $P = 110 \text{ kG}$ , b) w modelu 5 pod obciążeniem  $P = 112,5 \text{ kG}$

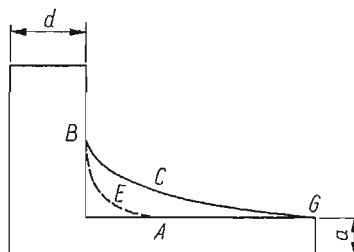


Rys. 11. Wyznaczone kształty brzegów równej wytrzymałości: a) stan zgięciowy modelu, b) stan bezzgięciowy modelu



Rys. 12. Obrazy izochrom połówek w modelach przy obciążeniach odpowiadających położeniom na brzegu ich kolejnych rzędów od 0,5 do 3,5.; a) model 3, b) model 6

Długość linii łączącej dwie części jest większa od strony tej części, która posiada większe nominalne naprężenie. Jeżeli nominalne naprężenie wzdłuż strony  $A$  (rys. 13) jest większe w porównaniu ze stroną  $B$ , wtedy linia łącząca punkty  $G$  i  $B$  o stałym naprężeniu ma kształt, jak pokazano na rysunku. W przypadku, kiedy szerokości łączonych boków  $a$  i  $d$  są równe i z obydwu stron występują równe naprężenia nominalne, linia brzegu jest symetryczna względem jej środka,  $AEB$  na rys. 13. Promień krzywizny jest największy w punkcie  $A$  i  $B$ , a najmniejszy w punkcie środkowym. Podobna jest relacja pomiędzy stosunkiem szerokości ścian łączonych części,  $a:d$ . Linia brzegu jest dłuższa od strony elementu o mniejszej szerokości,  $GCB$  na rys. 13. Kształt linii brzegu zależy



Rys. 13. Zależność kształtu brzegu od naprężenia nominalnego i stosunku szerokości boków

od typu obciążenia, pełniejszy przekrój jest wymagany dla obciążenia rozciągającego niż dla zginania lub skręcania (rys. 2).

Dotychczas nie została opracowana metoda, która pozwoliłaby na drodze teoretycznej wyznaczyć linie brzegu równej wytrzymałości konstrukcji płaskiej przy dowolnym obciążeniu. Dlatego też przy projektowaniu nowych konstrukcji podlegających złożonym stanom obciążenia nadal konieczne jest stosowanie badań eksperymentalnych. Przedstawiona w punkcie 5 metoda poprawy brzegu stanowi dalszy postęp w rozwiązywaniu zagadnienia wyznaczania linii brzegu o stałym naprężeniu poprzez elastooptyczne badania modelowe.

#### Literatura cytowana w tekście

1. I. BABUŠKA, J. KAUTSKY, *Ein Beitrag zur Theorie der Kerbspannungen*, ZAMM, 41 (1961).
2. J. KAUTSKY, *Approximation of solution of Dirichlet's problem on nearly circular domains and their applications in numerical methods*, Aplikace matematiky, 3 (1962).
3. Г. П. ЧЕРЕПАНОВ, *Обратная упруго-пластическая задача в условиях плоской деформации*, Изв. Акад. Наук СССР, Отд. Тех. Наук. Мех. и Маш., 1 (1963).
4. I. BABUŠKA, J. KAUTSKY, *Über die Optimierung von Kerbformen*, ZAMM, 43/1, 2 (1963).
5. R. V. BAUD, *Fillet profiles for constant stress*, Machinist, June 23, 1934. Product Engg. Apr. 1934, 133.
6. A. THUM and W. BAUTZ, *Photoelastic analysis of streamline fillets*, Forsch. Ing. Wessen, 6 (1935), 269.
7. A. J. DURELLI, W. M. MURRAY, *Stress distribution around an alliptical discontinuity in any two dimensional, uniform and axial, system of combined stress*, Proc. Soc. Exp. Stress. Anal., 1, 1 (1943).
8. R. B. HEYWOOD, *Tensile fillet stresses loaded projections*, Optimum thread form. Proc. IME, 195 (1948).
9. R. B. HEYWOOD, *Modern applications of photoelasticity*, Proc. Inst. Mech. Engrs., 158 (1948).
10. R. B. HEYWOOD, *Designing by photoelasticity*, Chapman, Hall., London 1952.
11. H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Berlin 1938.

12. Z. WASIUTYŃSKI, *A theorem on the concentration of load reinforcement effect of structure*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 3, 17 (1969).
13. S. OWCZAREK, *Stan naprężenia na brzegu połączenia belki ze słupem*, Inżynieria i Budownictwo, grudzień 1969.

## Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИОННО - ОПТИЧЕСКИХ МОДЕЛЬНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ОЧЕРТАНИЙ  
ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Сформулирована задача об определении очертаний плоских конструкций, удовлетворяющих условию постоянства напряжения на краю. Дан обзор работ, относящихся к этому вопросу. Более обширно изложен экспериментальный метод, состоящий в коррекции первоначальной модели, не удовлетворяющей условию оптимального формирования, путем добавления или изъятия материала. Необходимое изменение края вычисляется по данным поляризационно-оптических исследований, причем приближенное значение градиента напряжений определяет новое, исправленное очертание модели. Эта процедура повторяется до получения выравненного краевого напряжения.

Метод иллюстрируется примером определения линии перехода от балки к опорному столбу.

## Summary

APPLICATION OF PHOTOELASTIC MODEL INVESTIGATIONS FOR DETERMINATION OF  
OPTIMUM SHAPES OF TWO-DIMENSIONAL STRUCTURES

The problem of determination of shapes of plane structures satisfying the condition of constant boundary stresses is formulated in the paper. Survey of relevant literature on this subject is given. Moreover, an experimental method consisting in improving the initial model by adding or subtracting some material is presented in a more detailed manner. The displacement of the boundary calculated on the basis of photoelastic investigations and an approximate value of the stress gradient give the new improved shape of the model. This procedure may be repeated as long as the uniform boundary stress is obtained. The method described is illustrated on the example of determination of the transition line between a column and a beam.

NISTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 października 1971 r.*

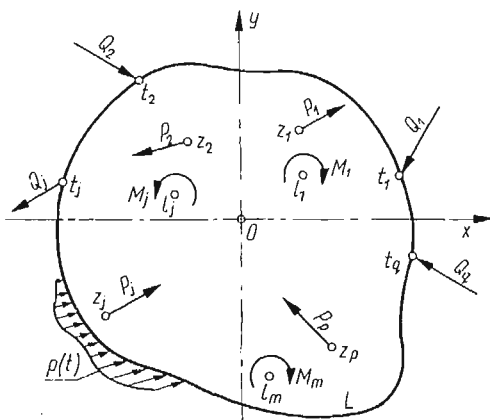
---

PRAKTYCZNA POSTAĆ OGÓLNEGO ROZWIĄZANIA TARCZY JEDNOSPÓJNEJ

KAZIMIERZ RYKAŁUK (WROCLAW)

1. Wprowadzenie

UGODCZIKOW [1] podał ogólne (zespolone) rozwiązanie sprężystej i jednorodnej tarczy jednorodnej obciążonej dowolnym układem sił. Układ ten stanowią: siły skupione  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, q$ ) przyłożone w punktach  $t_j$  konturu tarczy  $L$  (rys. 1), obciążenie roz-



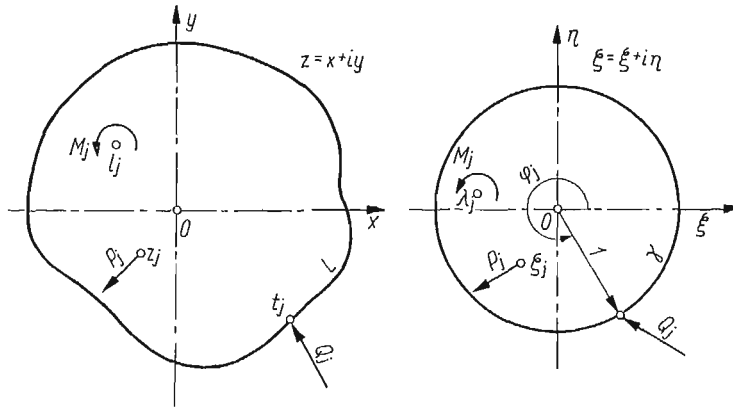
Rys. 1

łożone na konturze  $L-p(t) = p_x(t) + ip_y(t)$ , siły skupione  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ) przyłożone w wewnętrznych punktach tarczy  $z_j$  oraz momenty skupione  $M_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) przyłożone w wewnętrznych punktach  $l_j$ .

Rozwiązanie to, dokonane metodą MUSCHELISZWILIEGO [2], dotyczy przypadku, gdy obszar tarczy  $S$  leżący na płaszczyźnie zmiennej  $z = x + iy$  można odwzorować konformnie na koło jednostkowe  $|\zeta| \leq 1$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ) za pomocą wielomianu

$$(1.1) \quad z = \omega(\zeta) = \sum_{k=1}^n c_k \zeta^k.$$

Wtedy kontur tarczy  $L$  zostaje odwzorowany w okrąg  $\gamma$  (rys. 2), punkty  $t_j$  — w punkty  $e_j = \exp(i\varphi_j)$ , a punkty  $z_j$  i  $l_j$  — w punkty  $\zeta_j$  i  $\lambda_j$  odpowiednio.



Rys. 2

Dwie funkcje analityczne Goursata  $\varphi(\zeta)$  i  $\psi(\zeta)$ , będące rozwiązaniem problemu, zostały podane w następujących postaciach:

$$(1.2) \quad \varphi(\zeta) = A_*(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \ln(1 - \bar{\varrho}_j \zeta) - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^p \left\{ P_j [\ln(\zeta - \zeta_j) + \right. \\ \left. + \kappa \ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)] - \bar{P}_j \left[ \sum_{k=1}^n D_k^{(j)} \zeta^k + \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \bar{\zeta}_j \zeta \omega(\zeta_j)}{\bar{\zeta}_j(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) \bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \right] \right\} + \\ + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{\zeta}{1 - \bar{\lambda}_j \zeta} - \sum_{k=1}^n K_k \zeta^k + C_1,$$

$$(1.3) \quad \psi(\zeta) = \bar{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{T}}{2\pi} \ln \zeta - \bar{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta),$$

gdzie

$$(1.4) \quad T = - \sum_{j=1}^q Q_j - \sum_{j=1}^p P_j,$$

$$(1.5) \quad F(\varrho) = i \int_{\rho_0}^{\rho} \{p_x[\omega(\varrho)] + ip_y[\omega(\varrho)]\} \omega'(\varrho) d\varrho - \frac{T}{2\pi} \ln \varrho = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^* \varrho^k,$$

$$(1.6) \quad A_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(\varrho) \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^k,$$

$$(1.7) \quad D_k^{(j)} = - \frac{1}{\bar{\zeta}_j} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{b_{k+r}}{\bar{\zeta}_j^r}, \quad k = n, n-1, \dots, 1,$$



$$(1.8) \quad b_k = \frac{1}{\bar{c}_1} \left( c_k - \sum_{r=2}^{n-k+1} r \bar{c}_r b_{k+r-1} \right), \quad k = n, n-1, \dots, 1, 0,$$

$$(1.9) \quad K_k = A_k - a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(1.10) \quad A_k = A_k^* + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \frac{\bar{\varrho}_j^k}{k} + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{j=1}^p \left\{ \frac{\varkappa P_j}{k} \bar{\zeta}_j^k + \right. \\ \left. + \bar{P}_j \left[ D_k^{(j)} + \bar{\zeta}_j^{k-1} \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\zeta_j)} \right] \right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j \bar{\lambda}_j^{k-1}}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)},$$

$\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$  w płaskim stanie naprężenia i  $\varkappa = 3-4\nu$  w płaskim stanie odkształcenia,  $\nu$  — współczynnik Poissona.

Współczynniki  $a_k$  są zespolone,

$$(1.11) \quad a_k = \alpha_k + i\beta_k$$

i należy je obliczyć z następującego układu równań liniowych:

$$(1.12) \quad a_k + \sum_{r=1}^{n-k+1} b_{k+r-1} r \bar{a}_r = A_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Warunkiem jednoznaczności rozwiązania układu (1.12) jest [1]

$$(1.13) \quad \beta_1 = 0.$$

Składowe tensora naprężenia oraz wektora przemieszczenia w dowolnym punkcie  $z$  obliczymy ze wzorów Kotosowa-Muscheliszwiliego [2]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{aligned} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \mp \left[ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \right] \exp(2i\varphi) \right\}, \\ (1.14) \quad \tau_{r\varphi} = \operatorname{Im} \left\{ \left[ \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \bar{\omega}(\bar{\zeta}) \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^3} \right] \exp(2i\varphi) \right\}, \\ 2G \left\{ \begin{aligned} u_r \\ u_\varphi \end{aligned} \right\} = \frac{\operatorname{Re}}{\operatorname{Im}} \left\{ \left[ \varkappa\varphi(\zeta) - \bar{\psi}(\bar{\zeta}) - \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta})} \bar{\varphi}'(\zeta) \right] \exp(-i\varphi) \right\},$$

gdzie  $G$  jest modulem Kirchhoffa.

Potrzebny we wzorach (1.14) punkt  $\zeta$  odpowiadający punktowi  $z$  wyznaczmy z funkcji odwrotnej  $\zeta = \omega^{-1}(z)$ . Funkcja taka istnieje, gdyż odwzorowanie jest konforemne i jednoznaczne [3]. Sposoby wyznaczania funkcji odwrotnej podaje FIŁCZAKOW [6].

Przytoczone powyżej rozwiązanie Ugodczikowa posiada dwie niedogodności:

1) Przy działaniu jednej z sił  $P_j$  w punkcie  $z_j = 0$  (czyli również w  $\zeta_j = 0$ ) nie można obliczyć dla tej siły współczynników  $D_k^{(j)}$  według wzoru (1.7).

2) Funkcja  $\psi(\zeta)$  określona wzorem (1.3) posiada w punkcie  $\zeta = 0$  osobliwość, co uniemożliwia analizę stanu naprężenia i odkształcenia w tym punkcie oraz w jego otoczeniu. Obszar wpływu osobliwości jest tym większy im wyższy jest stopień wielomianu (1.1).

Celem niniejszej pracy jest doprowadzenie funkcji  $\psi(\zeta)$  (1.3) oraz współczynników  $D_k^{(j)}$  (1.7) do takich postaci, aby można je było obliczyć w każdym punkcie  $\zeta$  z wyjątkiem punktów  $\zeta_j$  i  $\lambda_j$ , które są punktami istotnie osobliwymi.

## 2. Rozwiązanie problemu

Rozpatrzmy najpierw działanie siły  $P_1$  w początku układu współrzędnych ( $\zeta_1 = 0$ ). Obliczmy całkę typu Cauchy'ego oznaczoną w pracy [1] jako  $J_5^{(j)}$ .

$$J_5^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'(\varrho)} \frac{1}{\varrho - \bar{\zeta}_j} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{1}{\frac{1}{\varrho} - \bar{\zeta}_j} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Korzystając z własności całki sumy, możemy napisać

$$(2.1) \quad J_5^{(j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{1}{\frac{1}{\varrho}} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{1}{\frac{1}{\varrho} - \bar{\zeta}_j} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta},$$

$j = 2, 3, \dots, p.$

Wyrażenie  $\omega(\varrho)/\bar{\omega}'(\varrho^{-1})$  jest wartością brzegową funkcji  $\omega(\zeta)/\bar{\omega}'(\zeta^{-1})$  regularnej w obszarze  $|\zeta| > 1$  i ciągłej w obszarze  $|\zeta| \geq 1$  z wyjątkiem punktu  $\zeta = \infty$ , w którym posiada biegun rzędu  $n$ . Funkcję tę można zatem zapisać w postaci [2]

$$(2.2) \quad \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \zeta^k.$$

Wyrażenie  $\varrho\omega(\varrho)/\bar{\omega}'(\varrho^{-1})$  jest wartością brzegową funkcji  $\zeta\omega(\zeta)/\bar{\omega}'(\zeta^{-1})$  regularnej w obszarze  $|\zeta| \geq 1$  z wyjątkiem punktu  $\zeta = \infty$ , w którym posiada biegun rzędu  $n+1$ .

Korzystając z (2.2), otrzymamy

$$(2.3) \quad \zeta \frac{\omega(\zeta)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \zeta^{-k+1}.$$

W myśl twierdzenia Cauchy'ego jest [4]

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varrho \frac{\omega(\varrho)}{\bar{\omega}'\left(\frac{1}{\varrho}\right)} \frac{d\varrho}{\varrho - \zeta} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} + b_{-1}.$$

Dla drugiej całki po prawej stronie wyrażenia (2.1) zastosujemy wzory podane w [1]. Stąd

$$(2.5) \quad J_5^{(j)} = \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} + b_{-1} + \sum_{k=1}^n D_k^{(j)} \zeta^k + \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \frac{1}{\bar{\zeta}_j(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)}, \quad j = 2, 3, \dots, p.$$

Funkcja  $\varphi(\zeta)$  wyrazi się ostatecznie następującym wzorem:

$$(2.6) \quad \varphi(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^k - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \ln(1 - \bar{\varrho}_j \zeta) + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left[ \bar{P}_1 \left[ b_{-1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=0}^n b_k \zeta^{k+1} \right] + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[ \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \bar{\zeta}_j \zeta \omega(\zeta_j)}{\bar{\zeta}_j(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) \bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^n D_k^{(j)} \zeta^k \right] - \sum_{j=1}^p P_j [\ln(\zeta - \zeta_j) + \varkappa \ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)] \right] + \\ \left. + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{\zeta}{1 - \bar{\lambda}_j \zeta} - \sum_{k=1}^n K_k \zeta^k + C_1, \right.$$

przy czym zmieni się także wzór na współczynniki  $A_k$

$$(2.7) \quad A_k = A_k^* + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q Q_j \frac{\bar{\varrho}_j^k}{k} + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left[ \sum_{j=1}^p \frac{\varkappa P_j}{k} \bar{\zeta}_j^k + \bar{P}_1 b_{k-1} + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[ D_k^{(j)} + \bar{\zeta}_j^{k-1} \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \right] \right] + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j \bar{\lambda}_j^{k-1}}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)}.$$

Rozpatrzmy teraz drugie interesujące nas zagadnienie. Otóż każdą funkcję regularną  $f(\zeta)$  można w otoczeniu punktu  $\zeta = 0$  zapisać w postaci sumy jej części regularnej  $R(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \zeta^k$  i części osobliwej  $O\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} r_{-k} \zeta^{-k}$  [3], a więc

$$(2.8) \quad f(\zeta) = R(\zeta) + O\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Przy rozwiązywaniu zagadnienia płaskiego metodą Muscheliszwiliego zachodzi potrzeba obliczania całek typu Cauchy'ego z wartości brzegowych pewnych funkcji. Całki te równają się częściom regularnym tych funkcji [2], czyli

$$(2.9) \quad I(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\varrho)}{\varrho - \zeta} d\varrho = R(\zeta).$$

Na podstawie (2.8) całkę tę można zapisać także w postaci

$$(2.10) \quad I(\zeta) = f(\zeta) - O\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

Postać (2.10) była stosowana w pracy [1] przy obliczaniu funkcji  $\psi(\zeta)$  co spowodowało, że niektóre jej wyrazy stały się osobliwe w punkcie  $\zeta = 0$ . Z powyższych rozważań wynika jednak, że osobliwość ta jest pozorna i można się jej pozbyć poprzez wyodrębnienie części regularnej funkcji  $\psi(\zeta)$  w obszarze  $|\zeta| < 1$ .

Na podstawie (1.5) można napisać

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k}^* \zeta^{-k}.$$

Stąd

$$(2.11) \quad F\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* \zeta^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k}^* \zeta^k.$$

Pochodna funkcji (2.6) wynosi

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \varphi'(\zeta) = & \sum_{k=1}^{\infty} k A_k^* \zeta^{k-1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \frac{Q_j \bar{Q}_j}{1 - \bar{Q}_j \zeta} + \\ & + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left\{ \bar{P}_1 \sum_{k=0}^n (k+1) b_k \zeta^k + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[ \sum_{k=1}^n k D_k^{(j)} \zeta^{k-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \omega(\bar{\zeta}_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \frac{1}{(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)^2} \right] + \sum_{j=1}^p P_j \left[ \frac{\varkappa \bar{\zeta}_j}{1 - \bar{\zeta}_j \zeta} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_j} \right] \right\} + \\ & + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{1}{(1 - \bar{\lambda}_j \zeta)^2} - \sum_{k=1}^n k K_k \zeta^{k-1}. \end{aligned}$$

Po wstawieniu (1.4), (2.6), (2.11) i (2.12) do wzoru (1.3) otrzymamy:

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \psi(\zeta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{-k}^* \zeta^k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \bar{Q}_j \ln(\zeta - \varrho_j) + \\ & + \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{P}_j [\ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) + \varkappa \ln(\zeta - \bar{\zeta}_j)] - P_1 \left( \bar{b}_{-1} + \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \zeta^{-k-1} \right) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=2}^p P_j \left[ \sum_{k=1}^n \bar{D}_k^{(j)} \zeta^{-k} + \frac{\zeta \bar{\omega}\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_j}\right) - \bar{\zeta}_j \bar{\omega}(\bar{\zeta}_j)}{\bar{\zeta}_j \bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j) (\zeta - \bar{\zeta}_j)} \right] \right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\bar{\omega}'(\bar{\lambda}_j)} \frac{1}{\zeta - \bar{\lambda}_j} + \\ & + \sum_{k=1}^n \bar{K}_k \zeta^{-k} - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\bar{\omega}'(\zeta)} \varphi'(\zeta) - C_1. \end{aligned}$$

W obszarze  $|\zeta| < 1$  funkcję  $\varphi(\zeta)$  można przedstawić w postaci [1]

$$\varphi(\zeta) = \sum_{k=1}^n a_k \zeta^k - \frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{j=1}^p P_j \ln(\zeta - \zeta_j).$$

Wtedy:

$$(2.14) \quad \varphi'(\zeta) = \sum_{k=1}^n k a_k \zeta^{k-1} - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^p \frac{P_j}{\zeta - \zeta_j}.$$

Na podstawie (2.2) obliczymy

$$(2.15) \quad \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} = \sum_{k=0}^n \bar{b}_k \zeta^{-k} - \frac{\sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k}{\omega'(\zeta)},$$

gdzie współczynniki  $\bar{b}_k$  wyrażają się wzorem (1.8) jako wartości sprzężone, natomiast współczynniki  $g_k$  obliczymy z następującego wzoru rekurencyjnego:

$$(2.16) \quad g_k = (k+2)c_{k+2}b_1 + (k+3)c_{k+3}b_2 + \dots + nc_n b_{n-k-1}.$$

Iloczyn funkcji (2.14) i (2.15) wynosi

$$(2.17) \quad \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \zeta^{-k} \cdot \sum_{r=1}^n r a_r \zeta^{r-1} - \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k - \\ - \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \sum_{j=1}^p \frac{P_j}{\zeta - \zeta_j} \cdot \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \zeta^{-k}.$$

Ze wzorów (1.9) i (1.12) wynika, że

$$\bar{K}_k = \sum_{r=1}^{n-k+1} \bar{b}_{k+r-1} r a_r.$$

Stąd

$$(2.18) \quad \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \zeta^{-k} \cdot \sum_{r=1}^n r a_r \zeta^{r-1} = \sum_{k=1}^n \bar{K}_k \zeta^{-k} + \sum_{k=0}^{n-2} h_k \zeta^k,$$

gdzie współczynniki  $h_k$  wyrażają się następującym wzorem rekurencyjnym:

$$(2.19) \quad h_k = n a_n \bar{b}_{n-k-1} + (n-1) a_{n-1} \bar{b}_{n-k-2} + \dots + (k+2) a_{k+2} \bar{b}_1.$$

Rozwińmy funkcję  $\frac{1}{\zeta - \zeta_j}$  w szereg Maclaurina:

$$\frac{1}{\zeta - \zeta_j} = -\frac{1}{\zeta_j} \frac{1}{1 - \zeta/\zeta_j} = -\frac{1}{\zeta_j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta}{\zeta_j}\right)^k.$$

Jeżeli wykorzystamy (1.7), to otrzymamy

$$(2.20) \quad \frac{1}{\zeta - \zeta_j} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\bar{b}_k}{\zeta^k} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{D}_k^{(j)}}{\zeta^k} - \frac{\bar{D}_1^{(j)}}{\zeta - \zeta_j}.$$

Wstawiając (2.17) do (2.13), z uwzględnieniem (2.18) i (2.20), otrzymamy

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad \psi(\zeta) = & \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}_{-k}^* \zeta^k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \bar{Q}_j \ln(\zeta - \varrho_j) + \\
 & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{P}_j [\ln(1 - \bar{\zeta}_j \zeta) + \kappa \ln(\zeta - \zeta_j)] - P_1 \left( \bar{b}_{-1} + \sum_{k=0}^n \frac{\bar{b}_k}{\zeta^{k+1}} \right) - \right. \\
 & \left. - \sum_{j=2}^p P_j \left[ \frac{\bar{D}_1^{(j)}}{\zeta - \zeta_j} + \frac{\zeta \bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta_j} \right) - \zeta_j \bar{\omega}(\bar{\zeta}_j)}{\zeta_j \bar{\omega}'(\zeta_j) (\zeta - \zeta_j)} \right] \right\} + \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\omega'(\lambda_j)} \frac{1}{\zeta - \lambda_j} + \\
 & + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k - \sum_{k=0}^{n-2} h_k \zeta^k - C_1.
 \end{aligned}$$

Funkcja (2.21) posiada w punkcie  $\zeta = 0$  osobliwość, ale jest to związane tylko z działaniem siły  $P_1$  w tymże punkcie.

Współczynnik  $b_{-1}^+$  obliczymy z rozwinięcia funkcji  $\omega(\varrho)/\omega'(\bar{\varrho})$  w szereg Lauranta, a więc według wzoru [4]

$$(2.22) \quad b_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\omega(\varrho)}{\omega'(\bar{\varrho})} e^{-i\varphi} d\varphi.$$

Stałą zespoloną  $C_1$  należy wyznaczyć z warunków brzegowych. Obliczymy jeszcze potrzebne we wzorach (1.14) pochodne:

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad \varphi''(\zeta) = & \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) A_k^* \zeta^{k-2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \frac{Q_j \bar{\varrho}_j^2}{(1 - \bar{\varrho}_j \zeta)^2} + \\
 & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p P_j \left[ \frac{\kappa \bar{\zeta}_j^2}{(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)^2} + \frac{1}{(\zeta - \zeta_j)^2} \right] + \bar{P}_1 \sum_{k=1}^n k(k+1) b_k \zeta^{k-1} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=2}^p \bar{P}_j \left[ \sum_{k=2}^n k(k-1) D_k^{(j)} \zeta^{k-2} + 2 \frac{\omega \left( \frac{1}{\zeta_j} \right) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)} \frac{\bar{\zeta}_j}{(1 - \bar{\zeta}_j \zeta)^3} \right] \right\} + \\
 & + \frac{i}{\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\omega'(\lambda_j)} \frac{\bar{\lambda}_j}{(1 - \bar{\lambda}_j \zeta)^3} - \sum_{k=2}^n k(k-1) K_k \zeta^{k-2},
 \end{aligned}$$

$$(2.24) \quad \psi'(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} k \bar{A}_k^* \zeta^{k-1} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^q \frac{\bar{Q}_j}{\zeta - \varrho_j} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{P}_j \left( \frac{\kappa}{\zeta - \zeta_j} - \frac{\bar{\zeta}_j}{1 - \bar{\zeta}_j \zeta} \right) + P_1 \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)\bar{b}_k}{\zeta^{k+2}} + \right. \\
 & + \sum_{j=2}^p \frac{P_j}{(\zeta - \zeta_j)^2} \left[ \bar{D}_1^{(j)} + \frac{\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta_j} \right) - \bar{\omega}(\bar{\zeta}_j)}{\omega'(\zeta_j)} \right] \left. \right\} - \frac{i}{2\pi} \sum_{j=1}^m \frac{M_j}{\omega'(\lambda_j)} \frac{1}{(\zeta - \lambda_j)^2} + \\
 & + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \sum_{k=1}^{n-2} k g_k \zeta^{k-1} + \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} \sum_{k=1}^{n-2} g_k \zeta^k - \sum_{k=1}^{n-2} k h_k \zeta^{k-1}.
 \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że wzory, (2.21), i (2.24) obowiązują tylko w obszarze  $|\zeta| < 1$ , natomiast na konturze  $\gamma$  funkcja  $\psi(\zeta)$  wyraża się wzorem (1.3).

### 3. Przykłady liczbowe

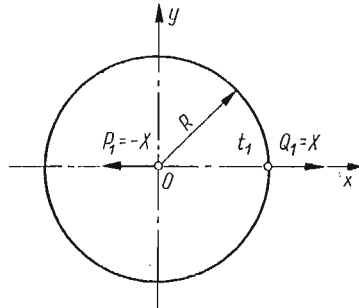
1. Wyznaczyć rozkład naprężeń obwodowych  $\sigma_\varphi$  na konturze tarczy kołowej o promieniu  $R$  obciążonej, jak na rys. 3.

Funkcja odwzorowująca jest w tym przypadku jednomianem i wynosi

$$z = R\zeta.$$

Ze wzoru (1.8) obliczymy  $b_1 = 1$ .

Punkt zaczepienia siły  $Q_1 - t_1 = R$  zostaje odwzorowany w punkt  $\varrho_1 = 1$ .



Rys. 3

Na podstawie wzorów (2.7), (1.12) i (1.9) obliczamy kolejno  $A_1 = X/2\pi$ ,  $a_1 = X/4\pi$ ,  $K_1 = X/4\pi$ .

Ze względu na to, że na konturze  $\sigma_r = 0$ , wystarczy obliczyć tylko funkcję  $\varphi'(\zeta)$ , gdyż

$$\sigma_\varphi = 4 \operatorname{Re} \frac{\varphi'(\varrho)}{\omega'(\varrho)}.$$

Ze wzoru (2.12) otrzymamy

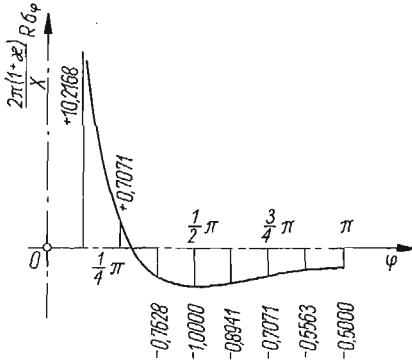
$$\varphi'(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \frac{X}{1-\zeta} + \frac{1}{2\pi(1+\kappa)} \frac{X}{\zeta} - \frac{X}{4\pi} = \frac{X}{4\pi(1+\kappa)} \frac{2 + (\kappa-1)\zeta + (\kappa+1)\zeta^2}{\zeta(1-\zeta)}.$$

Na konturze  $\gamma - \zeta = \rho = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ . Wtedy

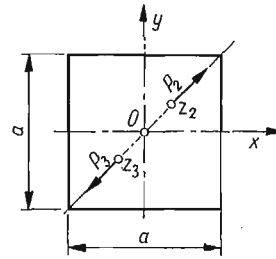
$$\sigma_\varphi = \frac{X}{2\pi R(1+\nu)} \frac{\cos\varphi - \sin^2\varphi}{1 - \cos\varphi}.$$

Przebieg naprężeń obwodowych dla połowy konturu pokazano na rys. 4.

Dla różnych materiałów otrzymujemy różne wartości naprężenia  $\sigma_\varphi$ . I tak w płaskim stanie naprężenia te będą większe o 50% dla materiału posiadającego  $\nu = 0,5$  w stosunku do materiału posiadającego  $\nu = 0$ .



Rys. 4



Rys. 5

2. Wyznaczyć rozkład naprężeń normalnych wzdłuż przekątnych tarczy kwadratowej o boku  $a$  obciążonej, jak na rys. 5.

Funkcja odwzorowująca (1.1) oraz funkcja odwrotna mają następujące postacie [5]:

$$z = \omega(\zeta) = c_1 \zeta + c_5 \zeta^5 + c_9 \zeta^9 = (0,53935\zeta - 0,05393\zeta^5 + 0,02247\zeta^9)a,$$

$$\zeta = \omega^{-1}(z) = m_1 z + m_5 z^5 + m_9 z^9 = 1,85408z/a + 2,19138(z/a)^5 + 2,16062(z/a)^9.$$

Przyjmijmy jednostkowe moduły sił, tzn.  $P_2 = -P_3 = (1+i)/\sqrt{2}$  oraz następujące punkty zaczepienia tych sił:  $\zeta_2 = -\zeta_3 = (1+i)/2$ , co odpowiada na płaszczyźnie  $z = x+iy$  punktom  $z_2 = -z_3 = 0,27712(1+i)$ .

Współczynniki  $b_k$ , obliczone według wzoru (1.8), wynoszą

$$b_1 = 1 - 5 \left( \frac{c_5}{c_1} \right)^2 - 9 \left( \frac{c_9}{c_1} \right)^2 + 25 \left( \frac{c_5}{c_1} \right)^2 \frac{c_9}{c_1} = 0,94484,$$

$$b_5 = \left( 1 - 5 \frac{c_9}{c_1} \right) \frac{c_5}{c_1} = -0,07917,$$

$$b_9 = \frac{c_9}{c_1} = 0,04166,$$

$$b_2 = b_4 = b_6 = b_8 = 0.$$



Obliczamy teraz współczynniki  $D_k^{(j)}$  według wzoru (1.7).

$$D_1^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left( b_1 + \frac{b_5}{\zeta_2^4} + \frac{b_9}{\zeta_2^8} \right) = -D_1^{(3)} = -1,92808(1+i),$$

$$D_2^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left( \frac{b_5}{\zeta_2^3} + \frac{b_9}{\zeta_2^7} \right) = D_2^{(3)} = -0,98324,$$

$$D_3^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left( \frac{b_5}{\zeta_2^2} + \frac{b_9}{\zeta_2^6} \right) = -D_3^{(3)} = -0,49162(1-i),$$

$$D_4^{(2)} = -\frac{1}{\zeta_2} \left( \frac{b_5}{\zeta_2} + \frac{b_9}{\zeta_2^5} \right) = D_4^{(3)} = 0,49162i,$$

$$D_5^{(2)} = -\left( \frac{b_5}{\zeta_2} + \frac{b_9}{\zeta_2^5} \right) = -D_5^{(3)} = 0,24581(1+i),$$

$$D_6^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2^4} = D_6^{(3)} = 0,16664, \quad D_7^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2^3} = -D_7^{(3)} = 0,08332(1-i),$$

$$D_8^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2^2} = D_8^{(3)} = -0,08332i, \quad D_9^{(2)} = -\frac{b_9}{\zeta_2} = -D_9^{(3)} = -0,04166(1+i).$$

Wprowadźmy oznaczenie:  $R_j = \frac{\omega(1/\bar{\zeta}_j) - \omega(\zeta_j)}{\bar{\omega}'(\bar{\zeta}_j)}$ . Wtedy  $R_2 = -R_3 = 1,35206(1+i)$ .

Współczynniki  $A_k$ , obliczone według wzoru (2.7), wynoszą

$$A_1 = \frac{2,00000\kappa - 2,30408}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \quad A_3 = \frac{-0,33333\kappa - 0,73764}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i,$$

$$A_5 = \frac{-0,10000\kappa - 0,36882}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \quad A_7 = \frac{0,03571\kappa + 0,34275}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i,$$

$$A_9 = \frac{0,01389\kappa + 0,17137}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \quad A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = 0.$$

Układ równań (1.12) przybierze postać:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 \bar{a}_1 + 5b_5 \bar{a}_5 + 9b_9 \bar{a}_9 &= A_1, \\ a_2 + 4b_5 \bar{a}_4 + 8b_9 \bar{a}_8 &= 0, \\ a_3 + 3b_5 \bar{a}_3 + 7b_9 \bar{a}_7 &= A_3, \\ a_4 + 2b_5 \bar{a}_2 + 6b_9 \bar{a}_6 &= 0, \\ a_5 + b_5 \bar{a}_1 + 5b_9 \bar{a}_5 &= A_5, \\ a_6 + 4b_9 \bar{a}_4 &= 0, \\ a_7 + 3b_9 \bar{a}_3 &= A_7, \\ a_8 + 2b_9 \bar{a}_2 &= 0, \\ a_9 + b_9 \bar{a}_1 &= A_9. \end{aligned}$$

Powyższy układ da się rozseparować na dwa układy niezależne — jeden z nieparzystymi wskaźnikami przy niewiadomych i drugi z parzystymi posiadający jedynie rozwiązanie zerowe, tzn.  $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$ . Natomiast z układu równań posiadającego nieparzyste wskaźniki przy niewiadomych tworzymy dwa układy równań poprzez rozdzielenie części rzeczywistych i urojonych, stosując dla współczynników  $a_k$  zapis (1.11). Z rozwiązania układów równań otrzymamy

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1,03087\kappa - 1,30782}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & a_3 &= \frac{-0,26926\kappa - 0,53173}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ a_5 &= \frac{-0,01522\kappa - 0,39093}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & a_7 &= \frac{0,00206\kappa + 0,27630}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ a_9 &= \frac{-0,02905\kappa + 0,22585}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & a_2 &= a_4 = a_6 = a_8 = 0. \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (1.9) obliczamy współczynniki  $K_k$

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{0,96913\kappa - 0,99626}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & K_3 &= \frac{-0,06407\kappa - 0,20591}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ K_5 &= \frac{-0,08478\kappa + 0,02211}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & K_7 &= \frac{0,03365\kappa + 0,06645}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ K_9 &= \frac{0,04294\kappa - 0,05448}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, & K_2 &= K_4 = K_6 = K_8 = 0. \end{aligned}$$

Współczynniki  $g_k$  oraz  $h_k$ , obliczone według wzorów (2.16) i (2.19), wynoszą

$$\begin{aligned} g_3 &= 5c_5b_1 + 9c_9b_5 = -0,39002a, & g_7 &= 9c_9b_1 = 0,19107a, \\ h_1 &= 3b_1a_3 + 7b_5a_7 = \frac{-0,76436\kappa - 1,66032}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ h_3 &= 5b_1a_5 + 9b_5a_9 = \frac{-0,05120\kappa - 2,00775}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}, \\ h_5 &= 7b_1a_7 = \frac{0,01362\kappa + 1,82741}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}i, \\ h_7 &= 9b_1a_9 = \frac{-0,24703\kappa + 1,92053}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)}. \end{aligned}$$

Mamy zatem wszystkie dane, aby móc napisać wzory (2.12), (2.23) i (2.24):

$$\begin{aligned} \varphi'(\zeta) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(1+\kappa)} \left[ \frac{4\kappa}{2+i\zeta^2} - \frac{4i}{2\zeta^2-i} + 10,81648 \frac{2-i\zeta^2}{(2+i\zeta^2)^2} - 6,71606 + \right. \\ &\quad \left. + 6,51717i\zeta^2 + 4,80565\zeta^4 - 2,79811i\zeta^6 - 1,00944\zeta^8 + \kappa(-0,96913 + \right. \\ &\quad \left. + 0,19221i\zeta^2 + 0,42390\zeta^4 - 0,23555i\zeta^6 - 0,38646\zeta^8) \right], \end{aligned}$$

Таблица 1

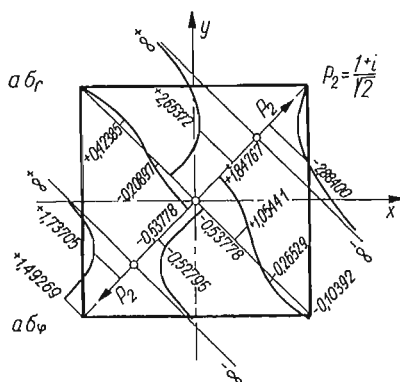
$\zeta$	$\frac{1}{a} \omega(\zeta)$	$\frac{1}{a} \omega''(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi'(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi''(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\psi'(\zeta)$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\sigma_r$	$2\sqrt{2\pi}(1+\zeta)\sigma_p$
0	0,53935	0	2,69218 + +1,03087 <i>z</i>	0	(8,26848 + +4,76436 <i>z</i> ) <i>i</i>	25,31349 + +12,15616 <i>z</i>	-5,34741 - -4,51088 <i>z</i>	
0,30788 (1+i)	0,54930	0,06635 (1-i)	5,52404 + +1,18653 <i>z</i>	(14,39008 + +0,26512 <i>z</i> ) (1-i)	(18,44067 + +6,71795 <i>z</i> ) <i>i</i>	38,52439 + +16,41562 <i>z</i>	1,70165 - -7,77534 <i>z</i>	
0,58370 (1+i)	0,70814	0,72774 (1-i)	-8,83537 + +1,57878 <i>z</i>	(86,45993 - -1,34526 <i>z</i> ) (1-i)	(63,86835 - -11,79679 <i>z</i> ) <i>i</i>	-61,77580 - -8,25449 <i>z</i>	11,86832 + +17,17237 <i>z</i>	
0,70711 (1+i)	1,01123	1,90668 (1-i)	6,60301 + +1,79275 <i>z</i>				26,11872 + +7,09136 <i>z</i>	
0,30788 (i-1)	0,54930	-0,06635 (1+i)	1,34934 + +0,88001 <i>z</i>	(3,21664 + +0,70951 <i>z</i> ) (1+i)	(4,36848 + +3,95094 <i>z</i> ) <i>i</i>	0,69366 - -3,08733 <i>z</i>	9,13222 + +9,49557 <i>z</i>	
0,58370 (i-1)	0,70814	-0,72774 (1+i)	-0,16229 + +0,44799 <i>z</i>	(2,13493 + +2,73629 <i>z</i> ) (1+i)	(-2,63498 + +1,98436 <i>z</i> ) <i>i</i>	5,96436 + +2,71281 <i>z</i>	-6,88108 - -0,18229 <i>z</i>	
0,70711 (i-1)	1,01123	-1,90668 (1+i)	-0,68071 - -0,01840 <i>z</i>				-2,69260 - -0,07276 <i>z</i>	

Tablica 2

$\xi$	$\alpha\sigma_r$			$\alpha\sigma_\varphi$		
	$\nu = 0$	$\nu = 0,5$	$\delta$ [%]	$\nu = 0$	$\nu = 0,5$	$\delta$ [%]
	0	1,73823	1,92333	10,65	-0,53119	-0,54296
0,30788 (1+i)	2,46944	2,78046	12,59	-0,60814	-0,47508	28,00
0,58370 (1+i)	-2,43478	-3,18770	30,92	1,78335	1,70873	4,37
0,70711 (1+i)	0	0		1,33340	1,60106	20,07
0,30788 (i-1)	-0,24107	-0,18788	28,31	1,05841	1,05330	0,48
0,58370 (i-1)	0,39678	-0,44252	11,53	-0,20898	-0,30322	45,09
0,70711 (i-1)	0	0		-0,08190	-0,11875	44,99

$$\varphi''(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi(1+\kappa)}} \left\{ \frac{16i\zeta}{(2\zeta^2-i)^2} - 21,63296 \frac{6i\zeta+\zeta^3}{(2+i\zeta^2)^3} + \right. \\ \left. + 13,03434i\zeta + 19,22260\zeta^3 - 16,78866i\zeta^5 - 8,07552\zeta^7 + \right. \\ \left. + \kappa \left[ \frac{-8i\zeta}{(2+i\zeta^2)^2} + 0,38442i\zeta + 1,69560\zeta^3 - 1,41330i\zeta^5 - 3,09168\zeta^7 \right] \right\}, \\ \psi'(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi(1+\kappa)}} \left\{ \frac{4\kappa}{2\zeta^2-i} + \frac{4i}{2+i\zeta^2} - 4,60816 \frac{2\zeta^2+i}{(2\zeta^2-i)^2} + \right. \\ \left. + \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} (-1,17006\zeta^2 + 1,33749\zeta^6) + (-0,39002\zeta^3 + \right. \\ \left. + 0,19107\zeta^7) \frac{\varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) - \varphi'(\zeta)\omega''(\zeta)}{[\omega'(\zeta)]^2} a + 1,66032i + 6,02325\zeta^2 - 9,13705i\zeta^4 - \right. \\ \left. - 13,44371\zeta^6 + \kappa(0,76436i + 0,15360\zeta^2 - 0,06810i\zeta^4 + 1,72921\zeta^6) \right\}.$$

Dla siedmiu wybranych punktów:  $z = 0$ ,  $(\pm 1+i)a/6$ ,  $(\pm 1+i)a/3$  i  $(\pm 1+i)a/2$ , którym odpowiadają punkty  $\zeta = 0$ ,  $0,30788(\pm 1+i)$ ,  $0,58370(\pm 1+i)$ ,  $0,70711(\pm 1+i)$ , obliczono wartości  $\omega'(\zeta)$ ,  $\omega''(\zeta)$ ,  $\varphi'(\zeta)$ ,  $\varphi''(\zeta)$  i  $\psi'(\zeta)$ . Wartości te zestawiono w tabelcy 1. W dwu ostatnich kolumnach tejże tabelcy zamieszczono wartości naprężeń  $\sigma$ , i  $\sigma_\varphi$ . W tabelcy 2 zamieszczono wartości naprężeń w tych punktach dla tarcz posiadających współczyn-



Rys. 6

niku Poissona  $\nu = 0$  oraz  $\nu = 0,5$ , jak również procentowe różnice między tymi naprężeniami, liczone względem materiału o  $\nu = 0$ .

Wykresy naprężeń normalnych w rozpatrywanych przekrojach dla tarczy wykonanej z materiału o współczynniku Poissona  $\nu = 0,3$  pokazano na rys. 6.

#### Literatura cytowana w tekście

1. А. Г. Угодчиков, М. И. Длугач, А. Е. Степанов, *Решение краевых задач плоской теории упругости на цифровых и аналоговых машинах*, Высшая школа, Москва 1970.
2. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Наука, Москва 1966.

3. F. LEJA, *Teoria funkcji analitycznych*, PWN, Warszawa 1957.
4. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, t. 3, PWN, Warszawa 1967.
5. K. RYKALUK, *Tarcza kwadratowa obciążona na konturze siłami skupionymi*, Rozprawy Inżynierskie, 19, 2 (1971).
6. П. Ф. Фильчаков, *Приближенные методы конформных отображений*, Наукова Думка, Киев 1964.

#### Резюме

#### ПОЛЕЗНЫЙ ВИД ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОДНОСВЯЗНОМ ДИСКЕ

Общее (комплексное) решение задачи об односвязном диске, нагруженном произвольным образом (непрерывная нагрузка и сосредоточенные силы на контуре, а также сосредоточенные силы и сосредоточенные моменты внутри диска), предложенное А. Г. Угодчиковым [1], приведено удобному для использования, при анализе напряжённого и деформированного состояний в любой точке диска (за исключением точек приложения сосредоточенных нагрузок).

Способ приведения проиллюстрирован двумя числовыми примерами.

#### Summary

#### PRACTICAL FORM OF GENERAL SOLUTION OF A SIMPLY-CONNECTED DISK

A general (complex) solution of a simply-connected disk, loaded in an arbitrary manner (continuous loading and concentrated forces on the contour, and concentrated forces and concentrated couples within the disk region), presented by A. G. Ugodčikow [1] has been brought to a form enabling an analysis of the strain and stress state at its arbitrary point (except the points of application of the concentrated loads).

The procedure has been illustrated by two numerical examples.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 października 1971 r.*

---

## SZACOWANIE WSPÓŁCZYNNIKA TARCIA NA CZOŁACH ŚCISKANEJ PLASTYCZNIE PRÓBKII WALCOWEJ

ZDZISŁAW MALINOWSKI, JANUSZ KLEPACZKO (WARSZAWA)

### 1. Założenia wstępne

Dotychczasowa literatura dotycząca plastycznego ściskania próbek walcowych pomiędzy praktycznie nieodkształcalnymi płytami jest niezwykle obszerna. Dokładne poznanie wszystkich efektów towarzyszących próbie ściskania materiałów, w tym metali, stanowi podstawowy problem w badaniu ich własności plastycznych. Przy czym można tu wyróżnić następujące trzy kierunki badawcze:

a) teoretyczny opis procesu ściskania krążków na gruncie teorii plastyczności, w którym zmierza się do coraz bardziej dokładnego ujęcia problemu,

b) doświadczalne wyznaczanie krzywych umocnienia dla warunków idealnych (bez tarcia) przez sprowadzenie rezultatów uzyskanych dla próbek o różnej smukłości  $s_0 = h_0/d_0$  do wartości dla  $s_0 = \infty$ ;  $h_0$  oznacza początkową wysokość próbki,  $d_0$  oznacza jej początkową średnicę,

c) doświadczalne określanie przy pomocy ściskania cienkich krążków najbardziej przydatnych smarów z punktu widzenia technologii plastycznego formowania metali, co wiąże się bezpośrednio z wartościami współczynnika tarcia na czołach krążka.

Również literatura dotycząca teoretycznej analizy procesu plastycznego ściskania krążków jest bardzo obszerna. Należy tu wymienić przede wszystkim klasyczną pracę SIEBLA [11]. W pracy tej założono, że  $\sigma_r = \sigma_\theta$  oraz przyjęto warunek plastyczności w postaci  $\sigma_0 = \sigma_z - \sigma_r$ . Następnie przekształcono uproszczone równanie równowagi zapisane we współrzędnych cylindrycznych ( $z, r, \theta$ )

$$(1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\frac{2\mu\sigma_z}{h}$$

do postaci

$$(2) \quad \frac{d\sigma_z}{dr} + \frac{2\mu\sigma_z}{h} = 0.$$

Z kolei całkując równanie (2) dla warunku brzegowego  $\sigma_z = \sigma_0$ , gdy  $r = a$  otrzymano następującą zależność opisującą rozkład naprężeń poosiowych w funkcji promienia

$$(3) \quad \sigma_z(r) = \sigma_0 \exp \frac{2\mu}{h} (a-r),$$

gdzie  $\mu$  oznacza współczynnik tarcia,  $\sigma_0$  jest aktualnym naprężeniem plastycznego płynięcia przy ściskaniu,  $h$  stanowi bieżącą wysokość krążka,  $a$  jest bieżącym maksymalnym promieniem.

Średnie naprężenie poosiowe  $\bar{\sigma}_z$  uzyskuje się przez scałkowanie wyrażenia (3) i podzielenie wyniku przez aktualne pole przekroju próbki, stąd

$$(4) \quad \bar{\sigma}_z = \sigma_0 \frac{2}{\alpha^2} (e^\alpha - \alpha - 1),$$

gdzie

$$\alpha = \frac{2\mu a}{h}.$$

Ponieważ spełniony jest warunek stałej objętości materiału próbki, to zachodzi równość

$$a^2 h = a_0^2 h_0$$

wyrażenie na  $\alpha$  przekształca się do postaci

$$(5) \quad \alpha = \frac{2\mu a_0 h_0^{1/2}}{h^{3/2}}.$$

W pracy [10] wykazano, że wyrażenia (3) i (4) są słuszne jedynie wtedy, gdy współczynnik tarcia  $\mu$ , przy danej wartości  $a/h$ , nie przekracza pewnej wartości krytycznej  $\mu_k$ , którą wyznacza się z warunku

$$(6) \quad \frac{a}{h} \leq \frac{1}{2\mu_k} \ln \left( \frac{1}{2\mu_k} \right).$$

Gdy warunek (6) nie jest spełniony, to dla  $r \leq r_k$ , przy ograniczeniu  $0 < r_k < a$ , pojawia się pewna strefa, gdzie obserwuje się tarcie szczipne i wzajemny poślizg materiału próbki względem ściskającej płyty nie zachodzi. Bardziej szczegółowa dyskusja tego zjawiska wraz z odpowiednimi zależnościami na naprężenie średnie  $\bar{\sigma}_z$  została zamieszczona na przykład w pracach [10] i [12].

Przedstawione rozwiązanie (4) jest rozwiązaniem przybliżonym, a ponadto ogranicza się do odpowiednio małych wartości odkształcenia i współczynnika tarcia  $\mu$ .

Próbkę bardziej dokładnego rozwiązania zagadnienia przy dowolnych wartościach współczynnika tarcia  $\mu$  podjęto w pracy [7] wykorzystując graficzną metodę konstruowania pól statycznie i kinematycznie dopuszczalnych, zaproponowaną pierwotnie w pracy [9].

Pewne przybliżone metody szacowania średniego nacisku omówiono także w pracy [13]. Należy podkreślić, że wspomniane rozważania teoretyczne ograniczają się jedynie do modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego.

Nieco odmienne zagadnienie stanowią prace teoretyczne uwzględniające w procesie ściskania również lepkość materiału, a także jego bezwładność poprzeczną, należy tu wymienić prace [2], [4] oraz [5].

Spośród prac dotyczących drugiego kierunku należy przede wszystkim wymienić pracę [3], gdzie po przeprowadzeniu serii doświadczeń na próbkach o różnej smukłości  $s_0$ , ograniczono się do wyznaczenia krzywych umocnienia miedzi i kilku jej stopów dla  $s_0 = \infty$ . Metoda ta była później wielokrotnie wykorzystywana przez różnych autorów.



Wreszcie spośród prac ostatniej grupy można wymienić wspomnianą pracę [10] oraz ponadto prace [6], [8] i [14]. We wszystkich wymienionych w tej grupie pracach wyniki doświadczeń nanoszono w postaci wykresów we współrzędnych  $(\bar{\sigma}_z/\sigma_0, a/h)$  celem porównania z wynikiem teoretycznym (4), który w tych współrzędnych przedstawiano w postaci rodziny linii dla stałych wartości współczynnika tarcia  $\mu$ . Stwierdzono, że dla małych wartości  $\mu$  zależność (4) wykazuje zadowalającą dokładność w porównaniu z wynikami doświadczalnymi. Ponadto w pracach [6] i [14] zmierzono doświadczalnie przy pomocy odpowiednich miniaturowych czujników szpilkowych rozkład naprężeń normalnych  $\sigma_z(r)$  wzdłuż promienia, stwierdzając dla wartości  $\varepsilon$  mniejszych od 0,05 dobrą zgodność z równaniem (3).

## 2. Podstawowe zależności

Ponieważ przeprowadzone przez innych autorów doświadczenia potwierdza ją przydatność równania (4), dla warunków praktycznych istnieje zatem możliwość bezpośredniego szacowania współczynników tarcia przy wykorzystaniu tego równania. Należy jednak założyć, że współczynniki tarcia oraz maksymalne odkształcenia nie przekraczają odpowiednich wartości przy równoczesnym spełnieniu warunku (6).

Po wprowadzeniu inżynierskiej miary odkształcenia

$$\varepsilon = \frac{h_0 - h}{h_0} \quad \text{lub} \quad h = h_0(1 - \varepsilon)$$

oraz warunku nieściśliwości materiału krążka

$$a = a_0 \left( \frac{h_0}{h} \right)^{1/2} \quad \text{lub} \quad a = a_0(1 - \varepsilon)^{-1/2},$$

równanie (3) przekształca się do postaci

$$(7) \quad \beta(r) = \exp \alpha \left[ 1 - \frac{r}{a_0} (1 - \varepsilon)^{1/2} \right],$$

gdzie

$$\beta(r) = \frac{\sigma_z(r)}{\sigma_0}$$

oraz na podstawie (5)

$$(8) \quad \alpha = \frac{\mu}{s_0(1 - \varepsilon)^{3/2}}; \quad s_0 = \frac{h_0}{2a_0}.$$

Jak wspomniano poprzednio,  $s_0$  oznacza początkową smukłość próbki. Równanie (4) oraz warunek (6) można zapisać w formie

$$(9) \quad \bar{\beta} = \frac{2}{\alpha^2} (e^\alpha - \alpha - 1); \quad \bar{\beta} = \frac{\bar{\sigma}_z}{\sigma_0},$$

$$(10) \quad 1 < \frac{1}{\alpha_k} \ln \left( \frac{1}{2\mu_k} \right); \quad \alpha_k = \frac{\mu_k}{s_0(1 - \varepsilon)^{3/2}}.$$

Otrzymane zależności (7), (8) i (9) umożliwiają wyznaczenie w różny sposób współczynnika tarcia  $\mu$  w oparciu o odpowiednie dane doświadczalne.

I tak, dysponując zredukowanym rozkładem naprężeń  $\beta(r)$  wzdłuż promienia, otrzymanym na drodze doświadczalnej z pomiarów czujnikami szpilkowymi, można wyznaczyć  $\mu(r)$  posługując się zależnością (7), stąd

$$(11) \quad \mu(r) = \frac{s_0(1-\varepsilon)^{3/2} \ln \beta(r)}{1 - \frac{r}{a_0}(1-\varepsilon)^{3/2}}.$$

Ponieważ jednak przy wyprowadzaniu wzoru (7) założono, że  $\mu$  nie zależy od  $r$ , błąd tak wyznaczonego rozkładu  $\mu(r)$  jest tym większy, im wartości  $\mu(r)$  bardziej odbiegają od wartości stałej. Stąd też postępowanie takie jest racjonalne, gdy wartości  $\varepsilon$  i  $\mu$  są odpowiednio małe. W ten sposób obliczono w pracy [14] wartości  $\mu(r)$  dla aluminium przy  $\varepsilon = 0,02$  i przy użyciu mydła jako smaru.

Jeżeli rozkład współczynnika tarcia  $\mu$  nie jest stały wzdłuż promienia, można również wyznaczyć  $\mu(r)$  bezpośrednio z równania (2). Dokładna metoda oparta na lokalnych pomiarach nacisku  $\sigma_z$  i naprężenia stycznego  $\tau$  czujnikami szpilkowymi, skośnie umieszczonymi na osi  $z$ , została opisana w pracy [14]. Uzyskane na podstawie tej metody rozkłady  $\mu(r)$  są jakościowo podobne do wynikających ze wzorów (2) i (7). Gdy nie dysponuje się doświadczalnie wyznaczonym rozkładem  $\beta(r)$ , a jedynie wartością naprężenia średniego  $\bar{\beta}$ , można korzystając z zależności (9) wyznaczyć średnią wartość  $\mu$ . W tym celu należy przeprowadzić serię doświadczeń pozwalających na otrzymanie zależności  $\bar{\beta}(s_0, \varepsilon)$ , gdzie początkowa smukłość  $s_0$  jest parametrem. Ponieważ jednak  $\mu$  wchodzi do zależności (9) w sposób uwikłany, przeto wartość współczynnika tarcia należy wyznaczyć na drodze numerycznej. Dodatkową trudnością jest posługiwanie się modelem ciała sztywno-idealnie plastycznego dla opisu zachowania się realnych metali wykazujących zjawisko umocnienia.

Zjawisko umocnienia można do pewnego stopnia uwzględnić przyjmując jako  $\sigma_0$  dla danego odkształcenia wartość  $\sigma$  odpowiadającą temu samemu odkształceniu na rzeczywistej krzywej umocnienia uzyskanej dla  $s_0 \rightarrow \infty$ . Sytuacja taka została przedstawiona na rys. 1.

Równanie (9) może zostać wykorzystane do obliczeń numerycznych  $\mu$  przy pomocy kolejnych przybliżeń: w dwóch następujących postaciach:

$$(12) \quad \mu = s_0(1-\varepsilon)^{3/2} \left( e^{\alpha - \bar{\beta} \frac{\alpha^2}{2}} - 1 \right),$$

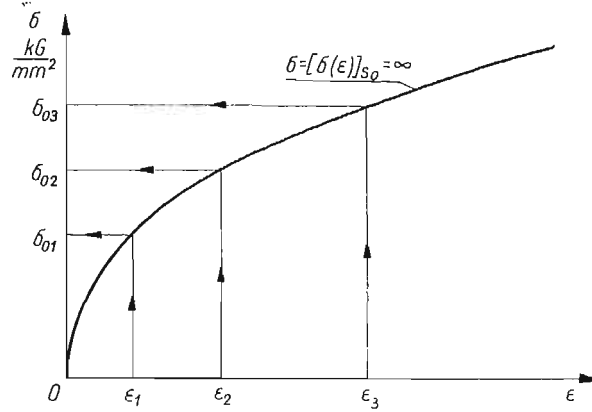
lub

$$(13) \quad \mu = s_0(1-\varepsilon)^{3/2} \ln \left( \alpha + \bar{\beta} \frac{\alpha^2}{2} + 1 \right).$$

Przy danych wartościach  $s_0$ ,  $\bar{\beta}$  oraz  $\varepsilon$  należy dać spodziewaną wartość  $\mu$  i z równania (8) obliczyć  $\alpha$ , a następnie sprawdzić zależność (12) lub (13). Kolejne przybliżenia prowadzą do wyznaczenia dokładnej wartości  $\mu$ .

Po rozwinięciu  $e^\alpha$  w szereg oraz przy założeniu małych wartości  $\alpha$  równanie (9) można zapisać w formie

$$(14) \quad \bar{\beta} = 1 + 2\frac{\alpha}{3!} + 2\frac{\alpha^2}{4!} + 2\frac{\alpha^3}{5!} + \dots$$



Rys. 1. Schemat wyznaczania obliczeniowej wartości naprężenia plastycznego płynięcia  $\sigma_0$  dla danego odkształcenia

Po pominięciu wyrazów zawierających  $\alpha$  w potęgze wyższej od jedności otrzymuje się wzór przybliżony

$$(15) \quad \mu = 3s_0(1-\epsilon)^{3/2}(\bar{\beta}-1).$$

Ze względu na to, że wyniki doświadczalne nie zawsze pozwalają na dokładne wyznaczenie  $\sigma_0$  dla  $s_0 \approx \infty$  można skorzystać z równania (12) przekształconego do postaci

$$(16) \quad \mu = s_0 \frac{\partial \mu}{\partial s_0} - \frac{\alpha^2(1-\epsilon)^{3/2}s_0^2}{2 \left[ (e^\alpha - 1) \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \right) + 2 \right]} \left( - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s_0} \right),$$

przy czym w praktyce wyrażenie  $s_0 \frac{\partial \mu}{\partial s_0}$  jest zwykle pomijane. Pominięcie wyrażenia

$s_0 \frac{\partial \mu}{\partial s_0}$  jest równoznaczne z założeniem  $\mu(s_0) = \text{const}$ .

W takim przypadku wzór (16) przyjmuje postać

$$(17) \quad \mu = \frac{\alpha^2(1-\epsilon)^{3/2}s_0^2}{2 \left[ (e^\alpha - 1) \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \right) + 2 \right]} \left( - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s_0} \right)$$

oraz w przybliżeniu

$$(18) \quad \mu = 3s_0(1-\epsilon)^{3/2} \left( - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s_0} \right).$$

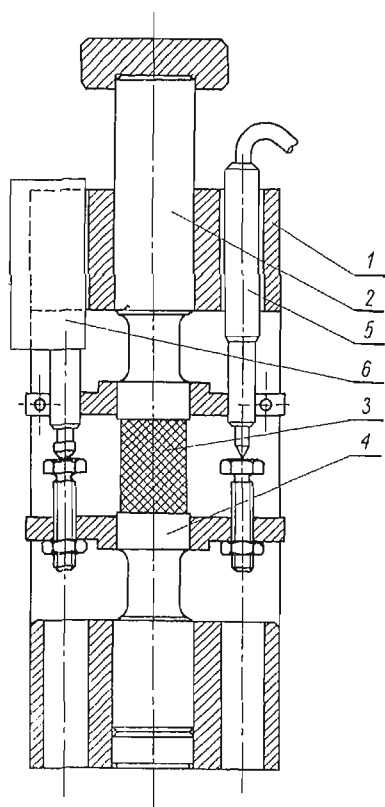
Należy zatem zróżniczkować względem  $s_0$  otrzymaną z doświadczeń zależność  $\bar{\beta}(s_0, \epsilon)$ , a wartości pochodnej  $\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial s_0}$  podstawić do równania (16) i obliczyć  $\mu$ .

Otrzymano więc kilka zależności umożliwiających efektywne szacowanie współczynnika tarcia  $\mu$  po przeprowadzeniu serii doświadczeń polegających na ściskaniu próbek o różnej smukłości  $s_0$ . Celem pracy jest wykazanie efektywności proponowanej metody oraz porównanie wartości  $\mu$  obliczonych z różnych podanych wyżej zależności.

### 3. Opis i wyniki doświadczeń

Celem doświadczeń było wyznaczenie zależności  $\bar{\beta}(s_0, \epsilon)$ . Zależność tę można uzyskać na podstawie znajomości krzywych umocnienia dla procesu ściskania próbek o różnych smukłościach  $s_0$ . Próbie ściskania poddano serię próbek o następujących wartościach smukłości  $s_0$ : 0,1; 0,125; 0,162; 0,2; 0,25; 0,33; 0,4; 0,5; 0,667; 1,0 i średnicy początkowej  $d_0 = 14$  mm.

Próbki z technicznie czystego aluminium w stanie wyżarzonym rekrytalizacyjnie ściskano w specjalnym przyrządzie, przedstawionym schematycznie na rys. 2. Czoła pró-

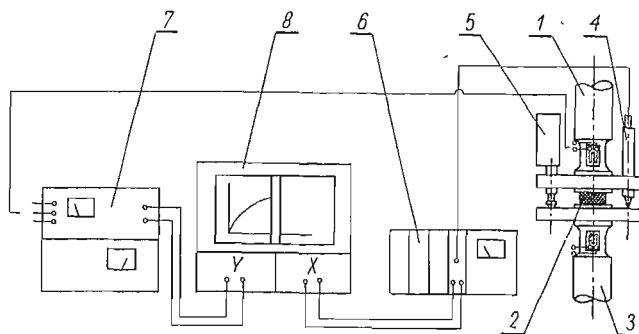


Rys. 2. Przekrój przyrządu do ściskania próbek

1 — korpus, 2 — stempel z dynamometrem, 3 — próbka, 4 — kowadełko z dynamometrem, 5 — czujnik indukcyjny, 6 — czujnik zegarowy

bek były dokładnie toczone z zachowaniem równoległości i smarowane sproszkowanym  $\text{MoS}_2$ . Przyrząd umieszczano w kinematycznej maszynie wytrzymałościowej. Dokładny zapis siły oraz skrócenia próbki odbywał się przy pomocy pisaka X-Y. Sygnał siły uzyskiwano z tensometrów elektrooporowych naklejonych na dynamometrze, natomiast sygnał przemieszczenia czoł próbki z czujnika indukcyjnego. Na rys. 3 przedstawiono schemat

pomiarowy przyrządu. Prędkość odkształcenia przy różnych wartościach  $s_0$  była prawie równa i wynosiła w przybliżeniu  $8 \times 10^{-4} \text{S}^{-1}$ . Przekroje uzyskanej powierzchni we współrzędnych  $(\sigma, \varepsilon, s_0$  lub  $1/s_0)$  płaszczyznami stałych odkształceń  $\varepsilon = 0,01; 0,03; 0,05; 0,10; 0,15$ , zamieszczono na rys. 4a i b.



Rys. 3. Schemat pomiarowy próby ściskania

1 — stempel z naklejonymi tensometrami (dynamometr), 2 — próbka, 3 — kowadełko z naklejonymi tensometrami (dynamometr), 4 — czujnik indukcyjny, 5 — czujnik zegarowy, 6 — wzmacniacz N-101, 7 — mostek tensometryczny ZPT-147, 8 — pisak X-Y Endim 2200

Jak wynika z rys. 4b krzywe  $\sigma(s_0)$  dla  $\varepsilon = 0,03$  i  $\varepsilon = 0,05$  w zakresie  $s_0 < 0,25$  są bardziej strome, niż krzywe dla odkształceń 0,01; 0,10; i 0,15. Przyczyną tego jest wystąpienie w tym obszarze efektu Portevin-Le Chatelier (na przykład praca [1]). Jako miarę naprężenia przyjęto naprężenie rzeczywiste  $\sigma = P/F$ , gdzie  $P$  oznacza siłę, a  $F$  bieżące pole przekroju próbki. W dalszej części pracy zakłada się, że  $\bar{\sigma}_z \equiv \sigma$ . Dla odkształceń przyjęto miarę  $\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0}$ . Wykresy  $\sigma$  wykonano w zależności od  $s_0$  i od  $1/s_0$ , uzyskując

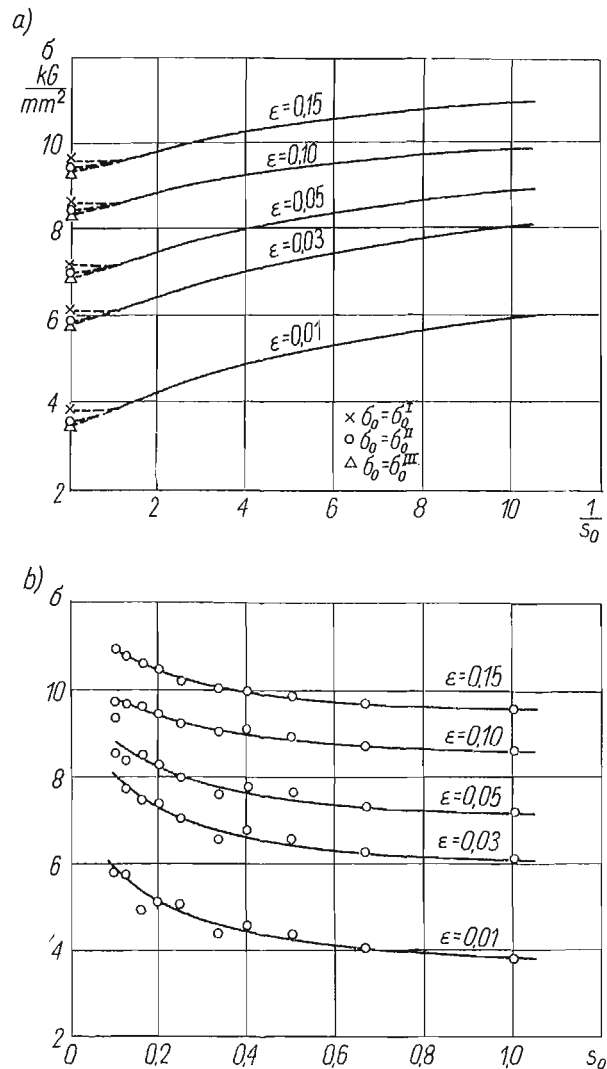
w ten sposób możliwość ekstrapolacji w obu przypadkach granicznych, tzn. gdy  $s_0 \rightarrow 0$  i  $s_0 \rightarrow \infty$ . Na rys. 4 przedstawiono różne sposoby ekstrapolacji  $\sigma$  przy  $s_0 \rightarrow \infty$ . Ponieważ wartości  $\sigma$  dla  $s_0 = \infty$  traktowane są jako  $\sigma_0$ , sposób ekstrapolacji ma bardzo duży wpływ na wyniki obliczeń wartości  $\mu$  ze wzorów (12) lub (15). Dla lepszego zbadania przydatności proponowanej metody skorzystano także z wyników badań przeprowadzonych dla miedzi, a zamieszczonych w pracy [3]. Zaczerpnięte z pracy [3] przekroje powierzchni  $(\sigma, \varepsilon, s_0)$  dla próbek o wartościach  $s_0 = 0,25; 0,33; 0,5; 1,0; 1,5$ ; przedstawia rys. 5. Czoła używanych w pracy [3] próbek były toczone, nie były jednak smarowane podczas procesu ściskania. Maksymalne odkształcenie wynosiło 0,60.

#### 4. Wyniki obliczeń współczynnika tarcia

Korzystając z wyznaczonych doświadczalnie zależności  $\sigma(1/s_0)$  dla  $\varepsilon = \text{const}$  oraz ze wzorów (12), (15) i (17) można obliczyć wartości średniego współczynnika tarcia  $\mu$  pomiędzy próbką i ściskającymi ją stemplami.

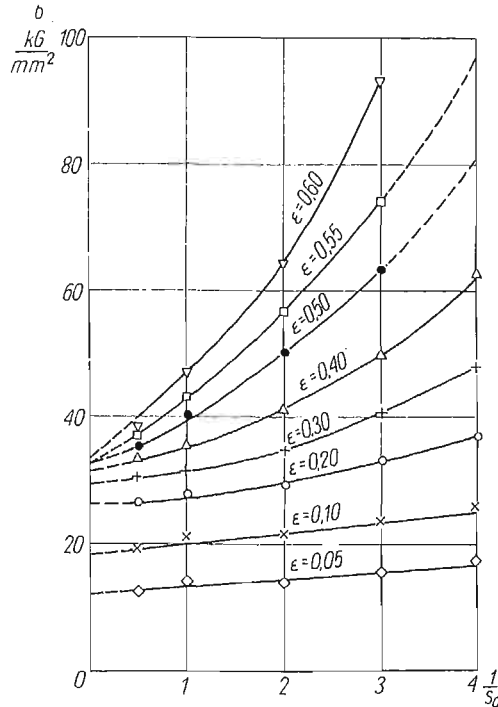
We wzorze (12)  $\mu$  występuje w postaci uwikłanej. Dodatkową trudność stanowi to, że metoda kolejnych przybliżeń w odniesieniu do tego wzoru jest stosunkowo wolno

zbieżna względem  $\mu$ , a jej zbieżność zależy od  $s_0$  i  $\varepsilon$ . W związku z tym obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej «Odra 1204» według programu zapewniającego uzyskanie dokładnych rozwiązań. Również na tej maszynie według odpowiednio ułożonego pro-



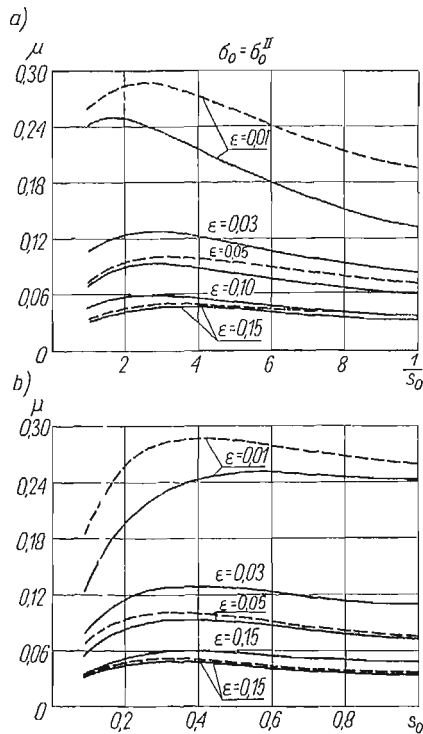
Rys. 4. Doświadczalnie wyznaczone dla próbek aluminiowych wartości naprężenia  $\sigma$  w funkcji  $1/s_0$  oraz  $s_0$ ; a) zależność  $\sigma(1/s_0)$ , b) zależność  $\sigma(s_0)$

gramu wykonano obliczenia  $\mu$  z zależności (17). W tym przypadku na podstawie danych doświadczalnych należało obliczać pochodną  $\frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)$ , co pociągało za sobą konieczność interpolacji i znajdowania analitycznych zależności opisujących krzywe doświadczalne  $\sigma(s_0, \varepsilon)$ .

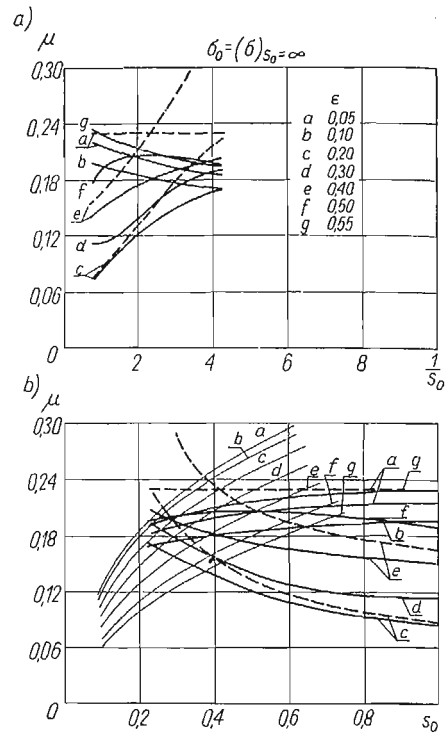
Rys. 5. Zależności  $\sigma(1/s_0)$  dla miedzi według pracy [3]

Na rys. 6a i b zostały przedstawione obliczone numerycznie na podstawie wzorów (12) oraz (15) wartości  $\mu$ , odpowiadające uzyskanym doświadczalnie dla próbek aluminiowych zależnościom według rys. 4a i b. W obliczeniach przyjęto jako  $\sigma_0$  wartość  $\sigma$  dla  $s_0 = \infty$  oznaczoną na rys. 4a przez  $\sigma_0^{\text{II}}$ . Taki sposób ekstrapolacji  $\sigma_0$  przy  $s_0 \rightarrow \infty$  należy przyjąć, jeżeli uwzględnimy charakter zależności  $\sigma(s_0)$  w przedziale  $0,5 < s_0 < 1$ , oraz warunek, że  $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial s_0}\right)_{s_0=\infty} = 0$ .

Na rys. 7a i b przedstawione zostały wyniki obliczeń  $\mu$  na podstawie wzorów (12) i (15) przy wykorzystaniu wyznaczonych doświadczalnie w pracy [3] krzywych  $\sigma(1/s_0)$  dla miedzi, zamieszczonych uprzednio na rys. 5. Jako granicę plastyczności  $\sigma_0$  dla danego odkształcenia przyjmowano ekstrapolowaną na rys. 5 wartość  $\sigma$  dla  $s_0 \rightarrow \infty$ . W celu lepszego pokazania właściwości wzorów (12) i (15) wyniki obliczeń przedstawiono w zależności od  $s_0$ , jak również od  $1/s_0$ . Zakresy smukłości  $s_0$  i odkształceń  $\epsilon$ , w których obliczano  $\mu$  dla aluminium i miedzi zawierają się w następujących granicach:  $0 \leq \epsilon \leq 0,15$ ,  $0,25 \leq s_0 \leq 1$ . Porównując w tym obszarze wyniki uzyskane dla aluminium — rys. 6 i dla miedzi — rys. 7, widzimy, że charakter zależności  $\mu(s_0)$  jest w obu przypadkach podobny. Współczynnik  $\mu$  wzrasta wraz ze wzrostem  $s_0$ . Zarówno dla aluminium, jak i dla miedzi przyjęto w tym przypadku prostoliniową zależność  $\sigma(1/s_0)$  w omawianym zakresie wartości  $\epsilon$  i  $s_0$ . Na podstawie otrzymanych wyników ze wzoru przybliżonego (15) (rys. 6 i rys. 7 — linia przerywana) można stwierdzić, że wzór ten szacuje wartość  $\mu$  od góry. Daje on tym lepsze przybliżenie, im mniejsze są wartości  $\alpha$ , a więc błąd wzrasta wraz ze zwiększeniem



Rys. 6. Wartości współczynnika tarcia  $\mu$  dla próbek aluminiowych obliczone z zależności (12) — linia ciągła oraz z zależności (15) — linia przerywana; a)  $\mu$  w funkcji  $1/s_0$ , b)  $\mu$  w funkcji  $s_0$ .  
W obliczeniach przyjęto  $\sigma_0 = \sigma_0^{II}$



Rys. 7. Wartości współczynników tarcia  $\mu$  dla próbek miedzianych obliczone z zależności (12) — linia ciągła oraz z zależności (15) — linia przerywana; a)  $\mu$  w funkcji  $1/s_0$ , b)  $\mu$  w funkcji  $s_0$ . Linie cienkie, ciągłe ilustrują warunek (10). W obliczeniach przyjęto  $\sigma_0 = (\sigma)_{s_0=\infty}$ .

się  $\mu$  i  $\varepsilon$  oraz maleje gdy,  $s_0$  wzrasta. Na rys. 8 zestawiono wyniki uzyskane dla próbek aluminiowych i miedzianych przy wykorzystaniu odpowiednio wzoru (12) lub (17). W obliczeniach przyjmowano  $\sigma_0 = \sigma_0^{II}$  dla aluminium oraz  $\sigma_0 = (\sigma)_{s_0=\infty}$  dla miedzi. Widzimy, że gdy zachodzi warunek  $\frac{\partial \mu}{\partial s_0} = 0$  wartości  $\mu$  uzyskane z zależności (12) i (17) są

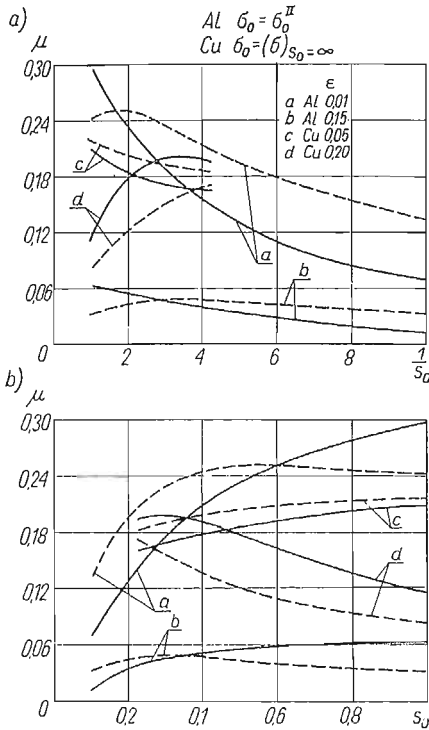
równe, natomiast w przypadku ogólnym różnią się o  $\frac{\partial \mu}{\partial s_0} s_0$ .

### 5. Dyskusja wyników doświadczeń i obliczeń numerycznych

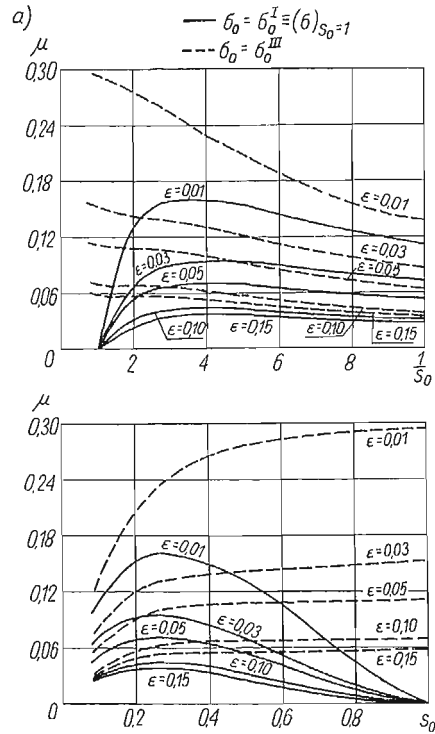
Obliczając współczynnik tarcia z zależności (12), (15) i (17) należy znać aktualną granicę plastycznego płynięcia  $\sigma_0$ . Wartości  $\sigma_0$  przy różnych sposobach ekstrapolacji oznaczono na rys. 4a przez  $\sigma_0^I$ ,  $\sigma_0^{II}$ ,  $\sigma_0^{III}$ . Wyniki obliczeń  $\mu$  według wzoru (12) dla próbek aluminiowych przy przyjęciu jako  $\sigma_0$  odpowiednio  $\sigma_0^I$  i  $\sigma_0^{II}$  są podane na rys. 9a i b. Wartość  $\sigma_0^I$  odpowiada wartości  $\sigma$  dla  $s_0 = 1$ ,  $\sigma_0^{II}$  odpowiada prostoliniowej ekstrapolacji  $\sigma$



dla  $s_0 \rightarrow \infty$ . Widzimy, że wpływ  $\sigma_0$  na  $\mu$  zależy od  $s_0$  i zwiększa się, gdy  $s_0$  wzrasta. Przy przyjęciu  $\sigma_0 = (\sigma)_{s_0=1} \equiv \sigma_0^I$  stwierdzono na podstawie wzoru (12), że niezależnie od wartości  $\varepsilon$  w granicy otrzymuje się  $s_0 \rightarrow 1$ ,  $\mu \rightarrow 0$ . Analogiczne wyniki obliczeń, uzyskane



Rys. 8. Wartości współczynnika tarcia  $\mu$  dla próbek aluminiowych i miedzianych obliczone z zależności (12) — linia przerywana i (17) — linia ciągła; a)  $\mu$  w funkcji  $1/s_0$ , b)  $\mu$  w funkcji  $s_0$ . W obliczeniach przyjęto  $\sigma_0 = \sigma_0^I$  dla aluminium oraz  $\sigma_0 = (\sigma)_{s_0=\infty}$  dla miedzi

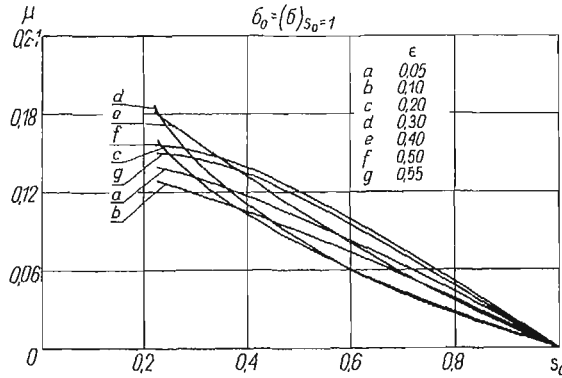


Rys. 9. Wartości współczynnika tarcia  $\mu$  dla próbek aluminiowych obliczone z zależności (12) przy przyjęciu  $\sigma_0 = \sigma_0^I \equiv (\sigma)_{s_0=1}$ , — linia ciągła oraz  $\sigma_0 = \sigma_0^{III}$  — linia przerywana. Wyniki obliczeń przedstawiono w funkcji  $1/s_0$  oraz  $s_0$ ; a)  $\mu$  w funkcji  $1/s_0$ , b)  $\mu$  w funkcji  $s_0$

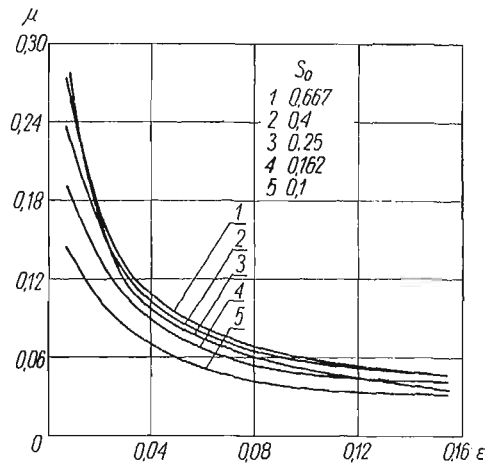
dla miedzi na podstawie krzywych doświadczalnych  $\sigma(1/s_0)$  z rys. 5 i przy przyjęciu  $\sigma_0 = (\sigma)_{s_0=1}$ , przedstawiono na rys. 10.

Podobne własności, jak wzór (12) wykazuje również wzór przybliżony (15). W oparciu o analizę otrzymanych wyników można stwierdzić, że jako dobre oszacowanie wartości  $\mu$ , które otrzymuje się na podstawie zależności (12) i (15), należy przyjmować wartości  $\mu$  dla próbek o smukłościach  $s_0 \leq 0,3$ . Znacznie mniejsze różnice w wartościach  $\mu$  przy przyjęciu różnych  $\sigma_0$  otrzymuje się ze wzoru (17). Ponieważ dla dużych  $s_0$  pochodna  $\frac{\partial \mu}{\partial s_0}$  jest bardzo mała, stąd wzór (17) może mieć pewne znaczenie dla szacowania współczynnika tarcia przy wykorzystaniu próbek o większych smukłościach. Wzór ten jest jednak obciążony błędem wynikającym z pominięcia wyrażenia  $s_0 \frac{\partial \mu}{\partial s_0}$ , a więc zależnym od charakteru zmienności  $\mu(s_0)$ , co zmniejsza jego praktyczną przydatność.

Na podstawie otrzymanych wyników obliczeń numerycznych można pokazać, jak zmienia się współczynnik tarcia  $\mu$  w zależności od odkształcenia przy ściskaniu krążków o różnych smukłościach.



Rys. 10. Wyniki obliczeń współczynnika tarcia  $\mu$  z zależności (12) dla próbek miedzianych. W obliczeniach przyjęto  $\sigma_0 = (\sigma)_{s_0=1}$



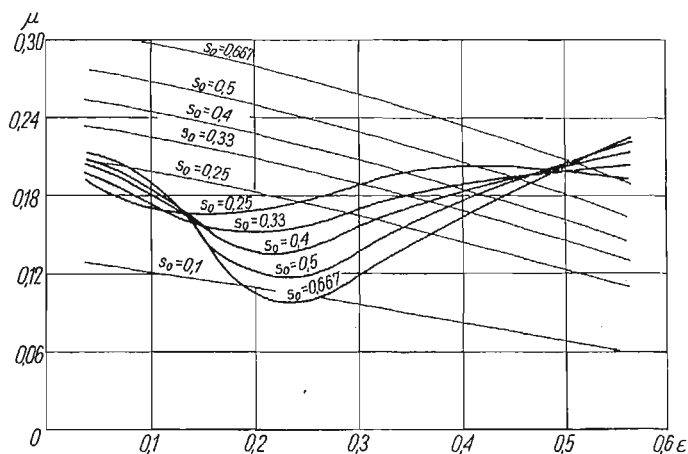
Rys. 11. Wartości współczynnika tarcia  $\mu$  w zależności od odkształcenia dla próbek aluminiowych, uzyskane na podstawie wyników przedstawionych linią ciągłą na rys. 6

Na rys. 11 i rys. 12 zamieszczone są krzywe ilustrujące zależność  $\mu(\varepsilon)$ . Sporządzono je na podstawie rys. 6 dla aluminium i rys. 7 dla miedzi. Jak wynika z pracy [14], krzywe te zależą w dużym stopniu, zarówno jakościowo, jak i ilościowo, od materiału próbek, rodzaju ich powierzchni oraz użytego przy ściskaniu smaru. Dlatego też rys. 11 i rys. 12 odnoszą się tylko do próbek aluminiowych i miedzianych ściskanych w ściśle określonych warunkach, które zostały uprzednio podane.

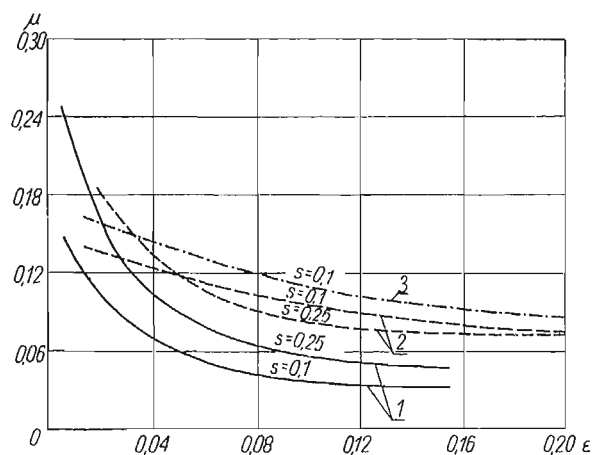
Na rys. 13 zestawiono krzywe (linia ciągła) dla  $s_0 = 0,1$  i  $s_0 = 0,25$  wzięte z rys. 11, z odpowiednimi krzywymi z pracy [14] (linia przerywana), odnoszącymi się również do próbek aluminiowych smarowanych  $\text{MoS}_2$ . Należy podkreślić, że wartości  $\mu$  w pracy [14] zostały uzyskane inną metodą, mianowicie na podstawie pomiarów nacisku skośnie

osadzonymi czujnikami. Widzimy, że charakter krzywych jest podobny, natomiast różnice w wartościach  $\mu$  należy prawdopodobnie tłumaczyć nieco odmiennymi warunkami przeprowadzonych w obu pracach eksperymentów.

Na rys. 13 przedstawiono także (linia kreska-kropka) wartości  $\mu$  uzyskane na drodze numerycznej z zależności (12) dla próbek o smukłości  $s_0 = 0,1$ , badanych w pracy [14]. Porównanie tych wartości z wartościami  $\mu$  przedstawionymi linią przerywaną, a uzyska-



Rys. 12. Zależności współczynnika tarcia  $\mu$  od odkształcenia uzyskane dla próbek miedzianych na podstawie wyników przedstawionych linią ciągłą na rys. 7. Linie cienkie ilustrują warunek (10) powstawania strefy tarcia szpepnego



Rys. 13. Porównanie wyników uzyskanych dla próbek aluminiowych smarowanych  $\text{MoS}_2$   
1 — krzywe obliczone z zależności (12) według rys. 11, 2 — krzywe uzyskane inną, niezależną metodą w pracy [14], 3 — krzywa uzyskana na podstawie zależności (12) oraz danych doświadczalnych odpowiadających krzywej 2 dla  $s_0 = 0,1$

nymi w pracy [14] metodą bardziej dokładną wskazuje, że obydwie metody dają w tym przypadku zbliżone rezultaty. Ponieważ jednak proponowana metoda szacowania  $\mu$  jest mniej pracochłonna, nadaje się ona bardziej do praktycznego zastosowania.

Na rys. 12 i rys. 7b naniesiono linie stanowiące warunek (10) i określające zależność pomiędzy parametrami  $\mu$ ,  $s_0$ ,  $\varepsilon$ , dla których na powierzchni próbki pojawia się strefa z tarcie szcypnym. Jednakże na podstawie przedstawionych wyników trudno jest ustalić jednoznaczny związek pomiędzy charakterem zmienności  $\mu$  a punktem, w którym powinno wystąpić tarcie szcypne.

## 6. Wnioski

Uzyskane w niniejszej pracy wyniki wskazują, że proponowana metoda oparta na uproszczonej analizie Siebla daje możliwość szacowania współczynnika tarcia  $\mu$  na powierzchniach ściskanych próbek walcowych i nadaje się do praktycznego zastosowania. Porównanie wyników uzyskanych tą metodą z wynikami bardziej dokładnych badań, zamieszczonymi w pracy [14], wskazuje na dobrą jakościową i ilościową ich zgodność. Zastosowane w teoretycznej analizie uproszczenia dotyczące różniczkowego równania równowagi, modelu rozważanego ciała, a także założenie stałego na powierzchni próbki współczynnika tarcia  $\mu$  nie powodują w tym wypadku dużego błędu. W pracy nie wnikano w fizyczną stronę zjawisk mających wpływ na wartość współczynnika tarcia, a zachodzących wewnątrz i na powierzchni ściskanej próbki. W związku z tym przeprowadzono tylko ilościową analizę uzyskanych zależności  $\mu(\varepsilon)$  oraz  $\mu(s_0)$ .

Przedstawiona metoda może mieć praktyczne znaczenie dla badania przydatności smarów stosowanych w procesach przeróbki plastycznej. Można ją również stosować do procesów dynamicznych. Należy jednak skorzystać wówczas z ogólniejszych zależności wypracowanych dla modelu ciała lepkoplastycznego, na przykład prace [4] oraz [5].

Potrzebne w tym przypadku do wyznaczenia współczynnika tarcia dane doświadczalne są takie same, jak dla procesu statycznego. Wyznaczanie jednak dynamicznych krzywych umocnienia jest o wiele trudniejsze i wymaga stosowania skomplikowanej aparatury badawczej.

## Literatura cytowana w tekście

1. J. F. BELL, *The Physics of Large Deformation of Crystalline Solids*, Springer, 1968.
2. R. L. CARLSON, *Compression of a viscoplastic disk*, J. Basic Engng., 4, **86** (1964), 700.
3. M. COOK, E. C. LARKE, *Resistance of copper and copper alloys to homogeneous deformation in compression*, J. Inst. Metals, **71** (1945), 371.
4. J. B. HADDOW, *On the compression of a thin disk*, Int. J. Mech. Sciences, 10, 7 (1965), 657.
5. J. KLEPACZKO, *Lateral Inertia Effects in the Compression Impact Experiments*, Inst. Fund. Tech. Res. Reports (Prace IPPT PAN), 17, 1969.
6. S. KOBAYASHI, A. G. MACDONALD, E. G. THOMSEN, *Some aspects of press forging*, Int. J. Mech. Sciences, 2/3, **1** (1960), 282.
7. K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *A theoretical analysis of plastic compression of short circular cylinders*, Arch. Mech. Stos., 5, **19** (1967), 787.
8. A. MACDONALD, S. KOBAYASHI, E. G. THOMSEN, *Some problems of press forging lead and aluminum*, J. Eng. Ind., **82** (1960), 246.
9. Z. MRÓZ, *Graphical solution of axially symmetric problem of plastic flow*, ZAMP, **18** (1967), 219.

10. W. SCHROEDER, D. A. WEBSTER, *Press-forging thin sections: effect of friction, area, and thickness on pressures Required*, J. Appl. Mech., **16** (1949), 289.
11. E. SIEBEL, *Grundlagen zur Berechnung des Kraft und Arbeitsbedarf bei Schmieden und Walzen*, Stahl u. Eisen, Düsseldorf, **41**, **43** (1923), 1295.
12. E. G. THOMSEN, C. H. YANG, S. KOBAYASHI, *Plastic Deformation in Metal Processing*, Mac Millan, 1965.
13. L. TÓTH, *Die Wirkung des Schmierens Beim Stauchen von Metallen*, Acta Techn. Hung., **51** (1965), 327.
14. G. T. VAN ROOYEN, W. A. BACKOFEN, *A study of interface friction in plastic compression*, Int. J. Mech. Sciences, **1**, **1** (1960), 1.

## Р е з ю м е

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ КОНТАКТА  
ПЛАСТИЧЕСКИ СЖАТОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА

В работе предлагается метод оценки коэффициента трения на поверхностях контакта во время пластического сжатия цилиндрического образца. Метод основан на зависимостях, вытекающих из упрощенного теоретического анализа проблемы, данного Зибелем. Эти зависимости, преобразованные в работе к соответствующему виду, позволяют определить численно коэффициент трения на основании экспериментально установленных кривых упрочнения в процессе сжатия образцов при различных отношениях  $h_0/d_0$ , где  $h_0$  и  $d_0$  обозначают соответственно начальную высоту и начальный диаметр образца. Применяя предлагаемый метод можно оценить коэффициент трения в исследованном экспериментально диапазоне отношений  $h_0/d_0$ , диапазоне деформации образца, а также для использованной в процессе сжатия смазки. В работе даются результаты вычислений коэффициента трения, полученные для алюминиевых образцов на основе собственных опытных данных и для медных образцов — на основе экспериментальных данных, взятых из литературы. В проведенном анализе учтено влияние неточностей определения предела текучести  $\sigma_0$  на значение коэффициента трения. Результаты полученные в работе сравнены с результатами известными по литературе, но вычисленными по другим методам. Оценивая пригодность предлагаемого метода следует отметить, что он годится для практического применения в исследовании статических процессов, однако существует также возможность использования его в случае динамических процессов сжатия.

## Summary

ESTIMATION OF THE COEFFICIENT OF FRICTION ON THE INTERFACES OF  
THE PLASTICALLY DEFORMED CYLINDRICAL SPECIMEN

In this paper the method has been proposed which makes it possible to estimate the coefficient of friction between the interfaces of the plastically deformed cylindrical specimen and loading plates. The method is based on earlier Siebel's simple theoretical analysis of this problem. The relations given by Siebel were reformulated to the proper form enabling us to estimate the coefficient of friction from the series of compression experiments on specimens of different height to diameter ratio. The method proposed can be applied to different height to diameter ratio, also to different stages of deformation and different conditions of lubrication. In the paper some numerical results are shown which have been obtained on the basis of the compression experiments on aluminium. In addition, some numerical results are shown for copper, based on earlier results given in literature. The present analysis takes into account the effect of inaccurate determination of the yield limit on the coefficient of friction, in the model of a perfectly

plastic body assumed in the considerations. The results obtained in this way are compared with the proper data taken from the different sources and obtained by different methods. It may be stated that the proposed method can be applied to the practical cases of static compression as well as to the dynamic compression experiments.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1971 r.*

---

## WYBOCZENIE TRÓJWARSTWOWEJ PŁYTY KOŁOWEJ POZA ZAKRESEM SPRĘŻYSTYM\*

ZENON W A S Z C Z Y S Z Y N (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Przy obliczaniu obciążeń krytycznych płyt poza zakresem sprężystym korzystamy z dwóch koncepcji — podobnie jak przy badaniu stateczności prętów ściskanych. Pierwsza, tzw. koncepcja ustalonego obciążenia zakłada, że po wyboczeniu obciążenie nie ulega zmianie, a w chwili utraty stateczności powstają natychmiast pełne strefy lokalnych odciążeń (procesów biernych). Druga koncepcja dopuszcza wzrastanie obciążenia i rozwijanie się stref procesów biernych w wyniku powstawania pozakrytycznych ugięć. W prętach analogiczne podejścia łączy się odpowiednio z nazwiskami ENGESSERA i KÁRMÁNA oraz SHANLEYA (por. [29]). W odniesieniu do płyt pierwszą koncepcję zaproponowali ILIUSZYN [6] oraz HANDELMAN i PRAGER [4], a drugą koncepcję — wzrastającego obciążenia — zapoczątkowali STOWELL [22] oraz PEARSON [14]\*\*.

W porównaniu z prętami, znaczną komplikacją w zagadnieniach stateczności płyt jest konieczność uwzględnienia złożonego stanu naprężeń. Stosowano tutaj różne teorie plastyczności. Na teorii odkształceniowej, obok wymienionych prac [6, 22] opierał swoje rozważania BIJLAARD [1]. Z prac korzystających z równań konstytutywnych teorii płynięcia plastycznego, obok [4, 14] należy wymienić pracę [5] HOPKINSA.

Przytoczone prace dotyczą płyt prostokątnych. Płytami kołowymi zajmowali się TOŁOKONNIKOW [26, 27], LEPIK [9, 10] i POPOW [16].

Podstawową trudnością w koncepcji ustalonego obciążenia jest wyznaczanie położenia stref procesów biernych, zarówno wzdłuż grubości płyty, jak też w odniesieniu do jej powierzchni środkowej. Trudność tę można obejść w wielu przypadkach przez zastosowanie metody przybliżonej ILIUSZYNA [6], która zakłada zerowanie się wariacji sił podłużnych wewnątrz całej płyty.

Rachunki znacznie upraszczają się, jeśli przekrój pełnościenny zastąpimy idealnym przekrojem «sandwiczowym». Taka aproksymacja często stosowana w teorii plastyczności (por. [24]), pozwala na dobre opisanie zachowania się konstrukcji. Przyjęcie takiego modelu płyty umożliwiło KLUSZNIKOWI [7] przeprowadzenie jakościowej analizy utraty

\*) Podstawowe tezy pracy zostały przedstawione na sympozjum nt. stateczności, organizowanym przez Oddział Łódzki PTMTS i Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej (Łódź, 18–19.XI.1971).

\*\*) Przy cytowaniu literatury ograniczono się do prac podstawowych i bezpośrednio związanych z obecną pracą. Obszerniejszy przegląd literatury dotyczącej wyboczenia płyt poza zakresem sprężystym można znaleźć w [29].

stateczności z punktu widzenia stosowania różnych koncepcji i różnych teorii plastyczności.

W obecnej pracy zajmiemy się szczegółowo obliczaniem symetrycznych postaci utraty stateczności idealnej, symetrycznej płyty trójwarstwowej (w całym przekroju obowiązywać będzie hipoteza odcinka normalnego, płaski stan naprężenia jest jednorodny wzdłuż nośnych warstw zewnętrznych o jednakowej grubości i własnościach). Będziemy opierali się na liniowych równaniach teorii małych ugięć, przyjmując materiał izotropowy i ściśliwy. Taki przekrój pozwoli na otrzymanie ścisłych rozwiązań, podobnych do znanych z teorii stateczności sprężystej, dla różnych koncepcji i teorii plastyczności.

Otrzymane rozwiązania przeanalizujemy w granicznym przypadku materiału idealnie sprężysto-plastycznego, a w oparciu o metodę rozdzielania sztywności BIJLAARDA [2] uogólnimy otrzymane wzory dla opisanego ogólnej utraty stateczności płyty trójwarstwowej z wypełniaczem lekkim.

Wszystkie równania, i wzory podamy w postaci bezwymiarowej, a obok powszechnie stosowanych, będziemy posługiwali się następującymi oznaczeniami:

$A_j, B_j, C_{jr}$	elementy macierzy sztywności,
$C_j, D_j$	stałe całkowania,
$\alpha, \beta^2$	bezwymiarowe ciśnienie radialne według (2.16),
$d, h$	grubość i odległość osi ciężkości warstw zewnętrznych przekroju trójwarstwowego
$\varepsilon_p, \sigma_p$	odkształcenie i naprężenie na granicy plastyczności przy jednoosiowym ściskaniu,
$e_j = \varepsilon_j / \varepsilon_p$	względne odkształcenia główne,
$\varepsilon_{j0} = \varepsilon_{j0} / \varepsilon_p, k_j = \kappa_j h / \varepsilon_p$	uogólnione odkształcenia płaszczyzny środkowej,
$E_{jr}$	macierz transformacji w związkach fizycznych,
$E, \nu$	stałe sprężyste warstw zewnętrznych,
$G_c$	moduł odkształcenia postaciowego wypełniacza,
$f_s = E_s / E, f_t = E_t / E$	bezwymiarowe moduły: sieczny i styczny,
$n_j = \frac{N_j}{2d\sigma_p}, m_j = \frac{M_j}{dh\sigma_p}$	bezwymiarowe siły podłużne i momenty zginające,
$p = \frac{P}{2d\sigma_p}$	bezwymiarowa intensywność zewnętrznego ciśnienia radialnego,
$s_j = s_j / \sigma_p, s_i = s_1^2 - s_1 s_2 + s_2^2$	bezwymiarowe naprężenia główne i intensywność odkształceń,
$\tau$	współczynnik kątowy stycznej w punkcie bifurkacji stanów równowagi,
$u = \bar{u} / h, w = \bar{w} / h, \varphi$	bezwymiarowe przemieszczenie radialne i normalne oraz kąt obrotu normalnej do płaszczyzny środkowej płyty,
$\xi = r / h$	bezwymiarowa zmienna niezależna,
$x = \beta \xi$	argument funkcji Bessela.

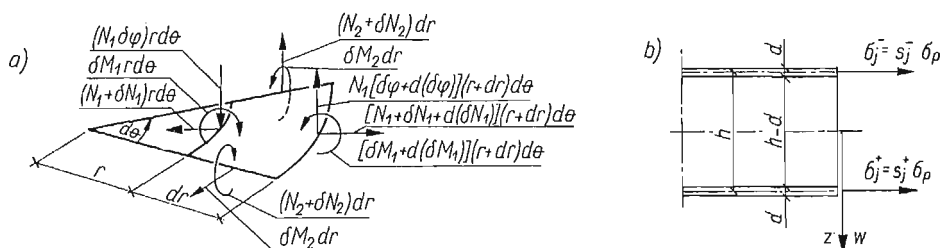


## 2. Podstawowe równania

W równaniach będziemy posługiwali się wariacjami odpowiednich wielkości statycznych i kinematycznych, odpowiadających przejściu od stanu tarczowego do bliskiego stanu giętnego, spełniającego narzucone warunki brzegowe.

**2.1. Równania równowagi.** Dla symetrycznej postaci wybozczenia równania równowagi elementu płyty (rys. 1a) można doprowadzić, zgodnie z teorią małych ugięć (por. [6]), do postaci

$$(2.1) \quad \frac{d}{dr}(r\delta N_1) - \delta N_2 = 0, \quad \frac{d}{dr}(r\delta M_1) - \delta M_2 = rN_1 \delta\varphi.$$



Rys. 1

Równania te przekształcimy do postaci bezwymiarowej korzystając z podanych na wstępie oznaczeń,

$$(2.2) \quad \delta n_1' - \frac{1}{\xi}(\delta n_2 - \delta n_1) = 0,$$

$$\delta m_1' - \frac{1}{\xi}(\delta m_2 - \delta m_1) = 2n_1 \delta\varphi,$$

gdzie kreską oznaczono różniczkowanie względem zmiennej niezależnej  $\xi = r/h$ .

Zgodnie z przyjętym modelem płyty o idealnym przekroju «sandwich», siły podłużne i momenty obliczamy ze wzorów (rys. 1b)

$$(2.3) \quad N_j = d(\sigma_j^+ + \sigma_j^-), \quad M_j = \frac{dh}{2}(\sigma_j^+ - \sigma_j^-), \quad \text{dla } j = 1, 2.$$

Wzory te obowiązują również w odniesieniu do wariacji odpowiednich wielkości i w postaci bezwymiarowej przyjmują one postać

$$(2.4) \quad \delta n_j = \frac{1}{2}(\delta s_j^+ + \delta s_j^-), \quad \delta m_j = \frac{1}{2}(\delta s_j^+ - \delta s_j^-) \quad \text{dla } j = 1, 2.$$

**2.2. Związki geometryczne.** Zgodnie z przyjętym założeniem Kirchhoffa, w płycie będzie obowiązywała hipoteza odcinka normalnego

$$(2.5) \quad \delta\varepsilon_j = \delta\varepsilon_{j0} + z\delta\kappa_j,$$

dzięki czemu można obliczyć wariacje odkształceń  $\delta e_j = \delta \varepsilon_j / \varepsilon_p$  w zewnętrznych warstwach płyty

$$(2.6) \quad \delta e_j^\pm = \delta \varepsilon_j \pm \frac{1}{2} \delta k_j,$$

gdzie znaki +, - należy przypisać warstwom zgodnie z rys. 1b.

Wielkości  $n_j$  i  $m_j$  będziemy dalej nazywali uogólnionymi siłami wewnętrznymi, a odpowiednio  $\varepsilon_j$  i  $k_j$  — uogólnionymi odkształceniami. Związki geometryczne pomiędzy wariacjami uogólnionych odkształceń i przemieszczeniami płaszczyzny środkowej piszemy od razu w postaci bezwymiarowej

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \delta \varepsilon_1 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \delta u', & \delta \varepsilon_2 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{\delta u}{\xi}, \\ \delta k_1 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \delta \varphi', & \delta k_2 &= \frac{1}{\varepsilon_p} \frac{\delta \varphi}{\xi}. \end{aligned}$$

**2.3 Równania fizyczne.** Związek fizyczny pomiędzy wariacjami głównych naprężeń i odkształceń został wyprowadzony w [28] i ma postać

$$(2.8) \quad \delta s_j = E_{jr} \delta e_r, \quad j, r = 1, 2,$$

gdzie obowiązuje konwencja sumacyjna dla powtarzającego się wskaźnika. Elementy macierzy  $E_{jr}$  zależą od typu procesu i stopnia uplastycznienia materiału w rozpatrywanym punkcie ustroju. W pracy [28] wyprowadzono wzory na  $E_{jr}$  dla materiału sprężysto-plastycznego, ściśliwego, izotropowego lub ortotropowego oraz dla różnych teorii plastyczności.

W obecnej pracy ograniczymy się do materiału izotropowego, lecz ściśliwego, oraz do przypadku równomiernego dwuwymiarowego ciśnienia

$$(2.9) \quad s_1 = s_2 = -p, \quad s_3 = 0,$$

jakie będzie występowało w stanie tarczowym rozpatrywanej płyty.

Typ procesu określimy według znaku wariacji intensywności naprężeń; po uwzględnieniu (2.9) otrzymujemy

$$(2.10) \quad \delta s_i = \frac{1}{s_i} \left[ \left( s_1 - \frac{1}{2} s_2 \right) \delta s_1 + \left( s_2 - \frac{1}{2} s_1 \right) \delta s_2 \right] = -\frac{1}{2} (\delta s_1 + \delta s_2).$$

W przypadku procesów czynnych, a więc takich, gdy  $\delta s_i \geq 0$ , będziemy korzystali z następujących wzorów, odpowiadających wzmocnieniu izotropowemu:

a) teoria odkształceniowa

$$(2.11a) \quad \begin{aligned} E_{11} = E_{22} &= \frac{1}{M} (f_s + 3f_t), & E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{M} [3f_t - f_s - 2(1-2\nu)f_s f_t], \\ M &= [3 - (1-2\nu)f_s][1 + (1-2\nu)f_t]; \end{aligned}$$

b) teoria płynięcia

$$(2.11b) \quad \begin{aligned} E_{11} = E_{22} &= \frac{1}{M} (1 + 3f_t), & E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{M} [-1 + (1+4\nu)f_t], \\ M &= 2(1+\nu)[1 + (1-2\nu)f_t]. \end{aligned}$$

We wzorach tych bezwymiarowe moduły: sieczny  $f_s = E_s/E$  i styczny  $f_t = E_t/E$ , należy przyjąć na podstawie próby jednoosiowego ściskania.

Dla procesów biernych, a więc takich, gdy  $\delta s_i < 0$ , w odniesieniu do przyrostów obowiązuje prawo Hooke'a i należy przyjąć

$$(2.12) \quad E_{11} = E_{22} = \frac{1}{1-\nu^2}, \quad E_{12} = E_{21} = \frac{\nu}{1-\nu^2}.$$

Przy posługiwaniu się wzorami teorii odkształceniowej na granicy strefy procesów czynnych i biernych mogą wystąpić nieciągłości w wartościach przyrostów naprężeń. Wynika to z braku ciągłego przejścia od (2.11a) do (2.12), gdy  $f_t = 1$ . Przejście takie istnieje<sup>1)</sup> dla  $f_s = 1$ . Sprzeczności takiej nie wykazuje teoria płynięcia plastycznego, gdyż wzory (2.11b) są niezależne od wartości  $f_s$  modułu siecznego.

Po podstawieniu (2.8) do (2.4) i wykorzystaniu (2.6) otrzymujemy potrzebne równania fizyczne, które napiszemy w postaci macierzowej

$$(2.13) \quad \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ A_2 & B_2 & A_1 & B_1 \\ B_2 & A_2 & B_1 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \\ \delta \kappa_1/2 \\ \delta \kappa_2/2 \end{bmatrix},$$

gdzie elementy macierzy sztywności wynoszą

$$(2.14) \quad \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} (E_{11}^+ + E_{11}^-), & B_1 &= \frac{1}{2} (E_{12}^+ + E_{12}^-), \\ A_2 &= \frac{1}{2} (E_{11}^+ - E_{11}^-), & B_2 &= \frac{1}{2} (E_{12}^+ - E_{12}^-). \end{aligned}$$

Przy posługiwaniu się wzorami (2.11b) teorii płynięcia plastycznego równanie (2.13) upraszcza się, gdyż wtedy  $A_2 = B_2$ .

**2.4. Podstawowy układ równań i jego rozwiązanie.** Pełny układ równań (2.1), (2.7) i (2.13) można w drodze eliminacji doprowadzić do dwóch równań różniczkowych z nieznanymi funkcjami  $\delta\varphi$  i  $\delta u$ ,

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \delta\varphi'' + \frac{\delta\varphi'}{\xi} + \left( \beta^2 - \frac{1}{\xi^2} \right) \delta\varphi &= 0, \\ \delta u'' + \frac{\delta u}{\xi} - \frac{\delta u}{\xi^2} &= \alpha \delta\varphi, \end{aligned}$$

gdzie użyto różnych oznaczeń na bezwymiarową promieniową siłę podłużną

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \beta^2 &= -\frac{4A_1}{A_1^2 - A_2^2} \varepsilon_p n_1 = \frac{2\varepsilon_p}{C_{11}} p, & C_{11} &= \frac{A_1}{2} - \frac{A_2^2}{2A_1}, \\ \alpha &= -\frac{2A_2}{A_1^2 - A_2^2} \varepsilon_p n_1 = \frac{A_2}{2A_1} \beta^2. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> A. A. Iljuszyn [6] wyprowadził równania stateczności dla słabo rozwiniętych odkształceń plastycznych, tj. przyjął we wzorach teorii odkształceniowej  $f_s = 1$ . Jak wynika z (2.11a) otrzymujemy wtedy wzory na  $E_{jk}$  zgodne ze wzorami (2.11b) teorii płynięcia plastycznego.

Przy ustalonych wartościach  $\alpha$  i  $\beta^2$  równania (2.15) są równaniami różniczkowymi liniowymi odpowiednio Bessela oraz Eulera. Można je kolejno rozwiązać ze względu na poszukiwane funkcje  $\delta\varphi$  i  $\delta u$ , otrzymując

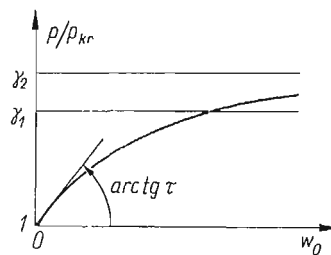
$$(2.17) \quad \begin{aligned} \delta\varphi &= C_1 J_1(x) + C_2 Y_1(x), \\ \delta u &= -\frac{\alpha}{\beta^2} \delta\varphi + D_1 \xi + \frac{D_2}{\xi}, \end{aligned}$$

gdzie  $J_1(x)$  i  $Y_1(x)$  są funkcjami Bessela pierwszego i drugiego rodzaju o argumentcie  $x = \beta\xi$ . Stałe całkowania  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D_1$  i  $D_2$  wyznaczymy z odpowiednich warunków brzegowych. Przy formułowaniu statycznych warunków brzegowych będziemy posługiwali się wzorami na wariacje uogólnionych sił promieniowych; wynikają one bezpośrednio z (2.13) i (2.7) po podstawieniu do nich rozwiązania (2.17)

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \varepsilon_p \delta n_1 &= -\frac{\beta}{2A_1 x} (A_1 B_2 - B_1 A_2) (C_1 J_1 + C_2 Y_1) + (A_1 + B_1) D_1 - (A_1 - B_1) \frac{D_2}{\xi^2}, \\ \varepsilon_p \delta m_1 &= \frac{\beta}{2} \left( A_1 - \frac{A_2^2}{A_1} \right) (C_1 J_0 + C_2 Y_0) + \\ &+ \frac{\beta}{x} \left[ \frac{A_2}{A_1} (A_2 - B_2) - (A_1 - B_1) \right] (C_1 J_2 + C_2 Y_2) + (A_2 + B_2) D_1 - (A_2 - B_2) \frac{D_2}{\xi^2}. \end{aligned}$$

### 3. Rozwiązanie według koncepcji wzrastającego obciążenia

Jeśli przyjmiemy, że w chwili utraty stateczności cała płyta jest uplastyczniona, a strefy lokalnych odciążen powstają dopiero w wyniku ugięć płyty, to dochodzimy do koncepcji wzrastającego obciążenia. Przy takim podejściu rozwijaniu się stref procesów biernych towarzyszy wzrost obciążenia ponad wartość krytyczną, a kąt nachylenia krzywej  $p(w)$  w punkcie bifurkacji jest na ogół różny od zera (rys. 2). Koncepcja ta była zaproponowa-



Rys. 2

na przez SHANLEY'A do analizy wybożenia prętów i zastosowana przez STOWELLA [22] do obliczania obciążenia krytycznego płyt prostokątnych.

Zasadniczą cechą tej koncepcji jest jej duża prostota. Pozwala ona na znaczne uproszczenie równań i ich rozwiązań, a jeśli połączymy ją z teorią odkształceniową, to otrzymujemy dobrą zgodność z eksperymentami wykonanymi na płytach prostokątnych (por. [29]).

Należy tutaj podkreślić różnicę między wzorami na obciążenia krytyczne dla prętów i płyt. Jeśli w prętach podejście SHANLEYA sprowadza się do zamiany modułu sprężystości modułem stycznym, to w płytach rozwiązania oparte na teorii odkształceniowej zależą zarówno od modułu stycznego, jak też siecznego. Wynika to ze wzorów (2.11a), a zgodnie z pracą STOWELLA [22] udział poszczególnych modułów silnie zależy od warunków brzegowych.

W przypadku płyty «sandwiczowej» wystąpią procesy czynne<sup>2)</sup> w całej płycie w chwili wyboczenia. Prowadzi to do zależności  $E_{jr}^+ = E_{jr}^- = E_{jr}^a$ , skąd wynika

$$(3.1) \quad A_2 = B_2 = 0.$$

Dzięki temu równania fizyczne rozprzegają się — przyrosty sił podłużnych i momentów zależą odpowiednio tylko od przyrostów odkształceń płaszczyzny środkowej lub tylko od przyrostów krzywizn

$$(3.2) \quad \delta n_j = 2C_{jr}\delta\alpha_r, \quad \delta m_j = C_{jr}\delta k_r,$$

gdzie elementy macierzy  $C_{jr}$  wynoszą

$$(3.3) \quad C_{11} = C_{22} = \frac{A_1}{2} = E_{11}^a, \quad C_{12} = C_{21} = \frac{B_1}{2} = E_{12}^a.$$

Rozprężenie równań fizycznych umożliwia korzystanie ze znanych rozwiązań sprężystych, jedynie ze zmienionymi współczynnikami, zależnymi od  $A_1$  i  $B_1$ . Pokażemy to na przykładach najczęściej przyjmowanych warunków brzegowych.

**3.1. Obciążenie krytyczne płyty utwierdzonej i przegubowo podpartej.** Przy stosowaniu podejścia wzrastającego obciążenia w całej płycie będzie obowiązywało rozwiązanie (2.17). Z warunku istnienia skończonych wartości przemieszczeń w środku płyty wynika  $C_2 = D_2 = 0$  i rozwiązanie przyjmuje prostą postać

$$(3.4) \quad \delta\varphi = C_1 J_1(x), \quad \delta u = D_1 \xi.$$

W płycie utwierdzonej warunek brzegowy  $\delta\varphi(\xi_l) = 0$  będzie spełniony po wyboczeniu, jeśli

$$(3.5) \quad J_1(x_l) \equiv J_1(\beta\xi_l) = 0.$$

Odpowiednie równanie charakterystyczne dla płyty przegubowo podpartej uzyskamy z warunku  $\delta m_1(\xi_l) = 0$ ; po elementarnych przekształceniach (2.18) otrzymujemy

$$(3.6) \quad x_l J_0(x_l) - \left(1 - \frac{C_{12}}{C_{22}}\right) J_1(x_l) = 0.$$

Rozwiązanie  $x_l = \beta\xi_l$  równań (3.5) lub (3.6) pozwala obliczyć obciążenie krytyczne  $p_{kr} = -n_1$  według (2.16)

$$(3.7) \quad p_{kr} = \frac{x_l^2 C_{11}}{2\varepsilon_p \xi_l^2}.$$

<sup>2)</sup> Jeśli w przekroju trójwarstwowym w jednej z warstw nośnych będzie zachodził proces bierny, a w drugiej czynny, to będziemy mówili o procesie czynno-biernym. Część płyty, w której zachodzi taki proces nazwiemy obszarem lub strefą czynno-bierną. Podobnie definiujemy obszary czynne i bierne.

W przypadku płyty utwierdzonej pierwiastki równania przestępnego (3.5) nie zależą od współczynników  $C_{jr}$  (najniższy pierwiastek  $x_1 = 3,8317$ ).

W zakresie sprężystym otrzymujemy taką samą postać równań charakterystycznych. W przypadku płyty przegubowo podpartej  $1 - C_{12}/C_{11} = 1 - \nu$ , a  $p_{kr} = x_1^2/2(1 - \nu^2)\varepsilon_p \xi_1^2$ , co po uwzględnieniu użytych wielkości bezwymiarowych daje wyniki znane z teorii stateczności sprężystej (por. [25]).

**3.2. Obliczenie kąta nachylenia stycznej w punkcie bifurkacji.** Nachylenie stycznej do krzywej «obciążenie–ugięcie» w punkcie rozdzielenia stanów równowagi (rys. 2) opiszemy wielkością (por. [10])

$$(3.8) \quad \tau = \left. \frac{d(p/p_{kr})}{dw} \right|_{w_0=0} = \frac{1}{p_{kr}} \left. \frac{\delta p}{\delta w_0} \right|_{w_0=0},$$

gdzie  $w_0$  oznacza ugięcie w środku płyty.

Przyrost ugięcia w środku płyty obliczymy przez scałkowanie (3.4)<sub>1</sub>

$$(3.9) \quad \delta w_0 = \int_0^{\xi_1} \delta \varphi d\xi = \frac{C_1}{\beta} \int_0^{x_1} J_1(x) dx = \frac{C_1}{\beta} [1 - J_0(x_1)],$$

a przyrost obciążenia obliczymy według (3.2)<sub>1</sub>

$$(3.10) \quad \delta p = -\delta n_1(\xi_1) = -\frac{D_1}{\varepsilon_p} (A_1 + B_1).$$

Dalsze postępowanie będzie podobne do tego, jakie zaproponował LEPIK [10]. Warunek występowania procesu czynnego w jednej z warstw  $\delta s_i^\pm \geq 0$ , po uwzględnieniu (2.6), (2.8) i (2.9), można łącznie napisać

$$(3.11) \quad -\frac{\delta \varepsilon_1 + \delta \varepsilon_2}{|\delta k_1 + \delta k_2|} \geq \frac{1}{2}.$$

Dla rozwiązania (3.4) powyższą nierówność można doprowadzić do postaci

$$(3.12) \quad -\frac{D_1}{C_1} \geq \frac{1}{4} \beta |J_0(x)|.$$

W przedziale  $0 \leq x \leq 3,8317$  funkcja  $|J_0(x)| \leq 1$  i jako stosunek  $D_1/C_1$  można przyjąć

$$(3.13) \quad \frac{D_1}{C_1} = -\frac{\beta}{4};$$

fizycznie odpowiada to przejściu jednej z warstw w środku płyty od procesu aktywnego do biernego.

Po podstawieniu wyprowadzonych zależności do (3.8) otrzymujemy poszukiwany wzór na współczynnik kątowy stycznej w punkcie bifurkacji stanów równowagi

$$(3.14) \quad \tau = \frac{1 + C_{12}/C_{11}}{1 - J_0(x_1)},$$

gdzie  $C_{12}$  i  $C_{11}$  liczymy według wzorów (3.3).

#### 4. Koncepcja ustalonego obciążenia

W płytach, podobnie jak w prętach, można obliczyć asymptotyczną wartość obciążenia jakie może powstać w wyniku powstania stref lokalnych odciążeń przy nieograniczonym wzroście ugięć (opieramy się na geometrycznie liniowej teorii małych ugięć). Zamiast rozpatrywać pozakrytyczne stany równowagi można od razu obliczyć odpowiednią wartość obciążenia krytycznego zakładając, że w płycie natychmiast po wyboczeniu wystąpią rozwinięte strefy czynno-bierne, a wartość obciążenia nie ulegnie zmianie.

W prętach takie podejście Engessera-Kármána sprowadza się do obliczenia odpowiedniego modułu zredukowanego. W płytach problem jest znacznie bardziej skomplikowany ze względu na złożony stan naprężeń. Główną trudnością jest tu wyznaczenie granicy występowania obszarów czynno-bierynych. Odpowiednie równania, wyprowadzone dla teorii odkształceniowej przez ILIUSZYNA [6], a dla teorii płynięcia plastycznego przez HANDELMANA i PRAGERA [4] oraz HOPKINSA [5], można scałkować jedynie w nielicznych przypadkach. Wynika stąd zainteresowanie metodami przybliżonymi rozwiązywania poszczególnych zadań.

Przy obliczaniu płyt kołowych LEPIK [9] zastosował metodę Bubnowa-Galerkina, a TOŁOKONNIKOW [26] i POPOW [16] otrzymują przybliżone wartości obciążeń krytycznych dzięki założeniu rozkładu stref lokalnych odciążeń. Proste rozwiązania można otrzymać przez połączenie metod wariacyjnych z założeniem ILIUSZYNA o zerowaniu się wariacji sił podłużnych wewnątrz płyty (por. [6, 17]).

Najpierw zajmiemy się rozwiązaniem przybliżonym metodą Iliuszyna, gdyż w płycie trójwarstwowej jest ono podobne do rozwiązywania otrzymanego według koncepcji wzrastającego obciążenia.

**4.1. Metoda przybliżona Iliuszyna.** Aby uprościć obliczenia ILIUSZYNA [6] założył, że w koncepcji stałego obciążenia wariacje sił podłużnych są równe zeru nie tylko przy brzegu, ale też wewnątrz całej płyty,

$$(4.1) \quad \delta n_1(\xi) = \delta n_2(\xi) \equiv 0.$$

Dzięki temu można z dwóch pierwszych równań fizycznych (2.13) obliczyć  $\delta s_j$ , a po podstawieniu do równań na  $\delta m_j$  wyrazić je tylko poprzez krzywizny. Otrzymamy w ten sposób wzory (3.2)<sub>2</sub> na wariacje momentów  $\delta m_j$ , gdzie współczynniki  $C_j$ , wyniosą

$$(4.2) \quad \begin{aligned} C_{11} = C_{22} &= \frac{A_1}{2} - \frac{1}{2(A_1^2 - B_1^2)} [(A_1 A_2 - B_1 B_2) A_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) B_2], \\ C_{12} = C_{21} &= \frac{B_1}{2} - \frac{1}{2(A_1^2 - B_1^2)} [(A_1 A_2 - B_1 B_2) B_2 + (A_1 B_2 - A_2 B_1) A_2]. \end{aligned}$$

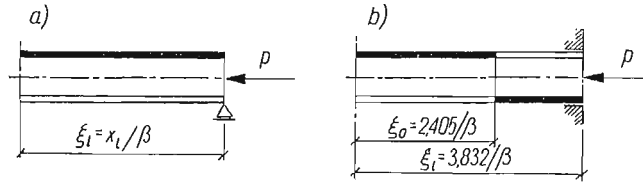
Przy posługiwaniu się teorią płynięcia plastycznego  $A_1 = B_2$  i wzory (4.2) znacznie upraszczają się,

$$(4.2a) \quad C_{11} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2^2}{A_1 + B_1}, \quad C_{12} = \frac{B_1}{2} - \frac{A_2^2}{A_1 + B_1}.$$

Rozprzężenie układu równań fizycznych umożliwia posługiwanie się rozwiązaniami (3.5) i (3.6) ze współczynnikami (4.2) liczonymi dla procesów czynno-bierynych. W każdym

punkcie płyty jedna z warstw będzie dociążana, a w drugiej wystąpi proces bierny; zaznaczono to na rys. 3, gdzie nie zaczerznięta część odpowiada procesowi biernemu.

4.2. Rozwiązanie ściśle dla płyty przegubowo podpartej. Zajmiemy się teraz rozwiązaniem ścisłym, polegającym na odrzuceniu założenia Iliuszyna (4.1). Przyjmujemy, że



Rys. 3

w przypadku przegubowego podparcia rozkład stref różnych typów procesów będzie taki, jak na rys. 3a (w całej płycie zachodzą procesy czynno-bierne — w warstwie zaczerzniętej czynne, a w dolnej nie zaczerzniętej — bierne).

W przypadku płyty kołowej  $C_2 = D_2$  i wariacje uogólnionych odkształceń powierzchni środkowej (2.7) zgodnie z (2.17) wynoszą

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \delta \vartheta_1 &= -\frac{\alpha}{\beta^2} \delta k_1 + \frac{D_1}{\varepsilon_p}, & \delta \vartheta_2 &= -\frac{\alpha}{\beta^2} \delta k_2 + \frac{D_1}{\varepsilon_p}, \\ \delta k_1 &= C_1 \frac{\beta}{\varepsilon_p} \left( J_0 - \frac{J_1}{x} \right), & \delta k_2 &= C_1 \frac{\beta}{\varepsilon_p} \frac{J_1}{x}. \end{aligned}$$

Wariacje uogólnionych sił promieniowych (2.18) można doprowadzić do następującej postaci:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \delta n_1 &= \left( \frac{B_2}{2} - \frac{B_1 A_2}{2A_1} \right) \delta k_2 + \frac{D_1}{\varepsilon_p} (A_1 + B_1), \\ \delta m_1 &= C_{11} \delta k_1 + C_{12} \delta k_2 + \frac{D_1}{\varepsilon_p} (A_2 + B_2), \end{aligned}$$

gdzie przez analogię do (3.2) użyto oznaczeń

$$(4.5) \quad C_{11} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2^2}{2A_1}, \quad C_{12} = \frac{B_1}{2} - \frac{A_2 B_2}{2A_1}.$$

Warunki brzegowe

$$(4.6) \quad \delta n_1(\xi_1) = \delta m_1(\xi_1) = 0$$

będą spełnione, jeśli wyznacznik główny ze współczynników przy  $C_1$  i  $D_1$  w (4.4) będzie zerował się. Otrzymujemy stąd równanie charakterystyczne o postaci analogicznej do (3.6),

$$(4.7) \quad x_1 J_0(x_1) - \left[ 1 - \frac{C_{12}}{C_{11}} + \frac{(A_2 + B_2)(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1^2 - A_2^2)(A_1 + B_1)} \right] J_1(x_1) = 0.$$

W teorii płynięcia plastycznego  $A_2 = B_2$  i będziemy posługiwali się równaniem

$$(4.7a) \quad x_1 J_0(x_1) - \left[ 1 - \frac{C_{12}}{C_{11}} + \frac{A_2^2}{A_1 C_{11}} \frac{A_1 - B_1}{A_1 + B_1} \right] J_1(x_1) = 0.$$



Po rozwiązaniu równania (4.6) obciążenie krytyczne obliczymy z (3.7), przyjmując  $C_{11}$  według (4.5)<sub>1</sub>.

Należy jeszcze sprawdzić, czy dobrze został przyjęty typ procesów zachodzących przy wyboczeniu się płyty. Jeśli będzie występował proces bierny w dolnej warstwie (rys. 3a), to powinna być w niej spełniona nierówność (3.11), w której ze względu na pierwszą (podstawową) formę wyboczenia można opuścić znak bezwzględnej wartości. Po podstawieniu (4.3) można (3.11) przekształcić do postaci

$$(4.8) \quad J_0(x) \geq \frac{2(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1 - A_2)(A_1 + B_1)} \frac{J_1(x)}{x}.$$

Przy wzrastającej wartości argumentu  $0 \leq x \leq 3,832$  funkcja  $J_0(x)$  maleje, natomiast  $J_1(x)/x$  wzrasta. Wystarczy więc zbadać czy zachodzi nierówność przy podporze dla wartości  $x = x_1$ , która jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (4.7). Możemy stąd obliczyć  $J_0(x_1)$  i zamiast (4.8) zbadać czy

$$1 - \frac{C_{12}}{C_{11}} + \frac{(A_2 + B_2)(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1^2 - A_2^2)(A_1 + B_1)} \geq \frac{2(A_1 B_2 - B_1 A_2)}{(A_1 - A_2)(A_1 + B_1)}.$$

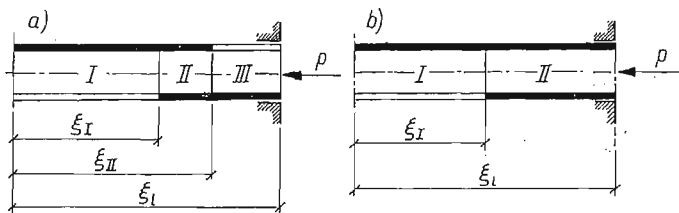
W drodze elementarnych przekształceń można doprowadzić tę nierówność do postaci

$$(4.9) \quad f_i[3 - (1 - 2\nu)f_s] \geq 0,$$

która jest zawsze spełniona. Przy stosowaniu wzorów (2.11b) teorii płynięcia plastycznego należy przyjąć  $f_s = 1$ .

W ten sposób wykazaliśmy, że poprawnie przyjęliśmy obszar czynno-bierny w całej płycie trójwarstwowej. Do podobnego wniosku doszedł LEPIK [9] określając rozkład stref w płycie pełnościennej. Natomiast TOŁOKONNIKOW [26] i POPOW [16] zakładali występowanie strefy procesów czynnych w całych przekrojach przypodporowych, co nie wydaje się być uzasadnione.

**4.3. Rozwiązanie ściśle dla płyty utwierdzonej.** Zajmiemy się drugim skrajnym przypadkiem podparcia brzegu. W płycie utwierdzonej mogą wystąpić dwa przypadki roz-



Rys. 4

kładu obszarów różnych typów procesów. Rozważamy najpierw przypadek ogólniejszy, któremu odpowiada rys. 4a.

W płycie obok obszarów czynno-biernych może wystąpić obszar bierny, którego nie było przy stosowaniu założenia Iliuszyna (por. rys. 3b). W obszarze tym, wobec jednakowego typu procesów zachodzących w zewnętrznych warstwach, będzie

$$A_2^{II} = B_2^{II} = \alpha_{II} = 0,$$

co nieco uprości dalsze równania. Aby skrócić zapis, wielkości odnoszące się do poszczególnych obszarów opatrzymy odpowiednimi indeksami. W punktach styku obszarów argument  $x$  będzie miał dwa indeksy, z których dolny oznacza punkt, a górny obszar:

$$(4.10) \quad x_r^s = \beta_s \xi_r, \quad r = \text{I, II}; \quad s = \text{I, II, III}.$$

Punkty  $\xi_{\text{I}}$  i  $\xi_{\text{II}}$  rozgraniczają różne obszary i jeśli umówimy się, że warstwa „+” będzie warstwą dolną na rys. 4a, to będą obowiązywały równania wynikające z warunku  $\delta s_i^s = 0$ :

$$(4.11) \quad \left. \frac{\delta \beta_1 + \delta \beta_2}{\delta k_1 + \delta k_2} \right|_{\xi_{\text{I}}} = -\frac{1}{2}, \quad \left. \frac{\delta \beta_1 + \delta \beta_2}{\delta k_1 + \delta k_2} \right|_{\xi_{\text{II}}} = \frac{1}{2}.$$

W punktach tych muszą być spełnione warunki ciągłości

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \delta \varphi_r^s &= \delta \varphi_r^{s+1}, & (\delta \varphi_r^s)' &= (\delta \varphi_r^{s+1})', \\ \delta u_r^s &= \delta u_r^{s+1}, & (\delta u_r^s)' &= (\delta u_r^{s+1})', \end{aligned} \quad r, s = \text{I, II},$$

a w punkcie końcowym  $\xi_{\text{I}}$  warunki brzegowe

$$(4.13) \quad \delta \varphi_{\text{I}} = 0, \quad \delta n_1(\xi_{\text{I}}) = 0.$$

Otrzymujemy w ten sposób komplet dwunastu równań na wyznaczenie stałych  $C_j^s$ ,  $D_j^s$  dla  $s = \text{I, II, III}$  i  $j = 1, 2$  (przyjmujemy  $C_2^{\text{I}} = D_2^{\text{I}} = 0$ ) oraz współrzędnych  $\xi_{\text{I}}$ ,  $\xi_{\text{II}}$  i  $\xi_{\text{I}}$ . Ponieważ równania są liniowe względem stałych  $C_j$  i  $D_j$ , to można te stałe wyeliminować i zamiast jednego równania charakterystycznego otrzymać następujący układ równań:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} b_1 J_0^{\text{II}}(x_{\text{II}}^{\text{II}}) + b_2 Y_0^{\text{II}}(x_{\text{II}}^{\text{II}}) + \frac{x_{\text{I}}^{\text{I}}}{x_{\text{I}}^{\text{II}}} J_0^{\text{I}}(x_{\text{I}}^{\text{I}}) &= 0, \\ d_1 J_1^{\text{II}}(x_{\text{I}}) + d_2 Y_1^{\text{II}}(x_{\text{I}}) &= 0, \\ f \equiv [K_a(x_{\text{I}})^2 J_0(x_{\text{I}}^{\text{I}}) - (x_{\text{I}}^{\text{I}})^2 J_2(x_{\text{I}}^{\text{I}})] + [k(x_{\text{I}})^2 J_0(x_{\text{II}}^{\text{II}}) - (x_{\text{II}}^{\text{II}})^2 J_2(x_{\text{II}}^{\text{II}})] d_1 + \\ &+ [(k x_{\text{I}})^2 Y_0(x_{\text{II}}^{\text{II}}) - (x_{\text{II}}^{\text{II}})^2 Y_2(x_{\text{II}}^{\text{II}})] d_2 = 0, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(4.15) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{\pi}{2} (x_{\text{I}}^{\text{II}} J_1^{\text{I}} Y_0^{\text{II}} - x_{\text{I}}^{\text{I}} J_0^{\text{I}} Y_1^{\text{II}})_{\xi_{\text{I}}}, \\ b_2 &= \frac{\pi}{2} (-x_{\text{I}}^{\text{II}} J_1^{\text{I}} J_0^{\text{II}} + x_{\text{I}}^{\text{I}} J_0^{\text{I}} J_1^{\text{II}})_{\xi_{\text{I}}}, \\ d_1 &= \frac{\pi}{2} [(x_{\text{II}}^{\text{II}} J_1^{\text{II}} Y_0^{\text{III}} - x_{\text{II}}^{\text{I}} J_0^{\text{II}} Y_1^{\text{III}}) b_1 + (x_{\text{II}}^{\text{III}} Y_1^{\text{II}} Y_0^{\text{III}} - x_{\text{II}}^{\text{II}} Y_0^{\text{II}} Y_1^{\text{III}}) b_2]_{\xi_{\text{II}}}, \\ d_2 &= \frac{\pi}{2} [(-x_{\text{II}}^{\text{III}} J_1^{\text{II}} J_0^{\text{III}} + x_{\text{II}}^{\text{II}} J_0^{\text{II}} J_1^{\text{III}}) b_1 + (-x_{\text{II}}^{\text{III}} Y_1^{\text{II}} J_0^{\text{III}} + x_{\text{II}}^{\text{II}} Y_0^{\text{II}} J_1^{\text{III}}) b_2]_{\xi_{\text{II}}}, \\ \frac{x_{\text{I}}^{\text{I}}}{x_{\text{I}}^{\text{II}}} &= \frac{x_{\text{II}}^{\text{II}}}{x_{\text{II}}^{\text{I}}} = \left[ \frac{A_1^{\text{I}} A_1^{\text{II}}}{(A_1^{\text{I}})^2 - (A_2^{\text{I}})^2} \right]^{1/2}, \quad k = \frac{A_1^{\text{I}} + B_1^{\text{I}}}{A_1^{\text{I}} - B_1^{\text{I}}}, \quad K_a = \frac{A_1^{\text{I}}}{A_2^{\text{I}}} k. \end{aligned}$$

W podanych współczynnikach użyto skróconych oznaczeń wartości funkcji Bessela, zgodnie z przyjętymi indeksami, np.  $J_1^{III}|_{\xi_{11}} = J_1(x_{11}^{III})$ . Jako mnożnik po prawej stronie tych współczynników występuje  $\pi/2$ , co wynika ze związku (por. [12]),

$$[J_1(x)Y_0(x) - J_0(x)Y_1(x)]x = \frac{2}{\pi}.$$

Układ (4.14) zastępuje równanie charakterystyczne (3.5) z koncepcji wzrastającego obciążenia i może być łatwo rozwiązany w drodze kolejnych prób. Postać układu narzuca metodę rozwiązywania. Jeśli mianowicie będziemy ustalali wartości  $x_1^I$ , to można wtedy obliczyć  $b_1$  oraz  $b_2$  i rozwiązać równanie (4.14)<sub>1</sub> ze względu na  $x_{11}^{II}$ . Z kolei można obliczyć współczynniki  $d_1$  oraz  $d_2$  i rozwiązać (4.14)<sub>2</sub> ze względu na  $x_1$ . Wartość  $x_1^I$  należy tak dobrać, aby było spełnione równanie (4.14)<sub>3</sub>, tj.  $f = 0$ .

Jeśli podczas rozwiązywania będzie  $x_{11}^{III} > x_1$  to oznacza, że strefa bierna dochodzi do podpory i należy rozpatrzyć rozkład obszarów, jak na rys. 4b. W tym przypadku liczba równań (4.11) i (4.12) maleje i zamiast (4.14) otrzymujemy następujący układ równań:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} b_1 J_1^{II}(x_1) + b_2 Y_1^{II}(x_1) &= 0, \\ f \equiv K_b x_1^2 J_0(x_1^I) - (x_1^I)^2 J_2(x_1^I) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie współczynniki  $b_1$  i  $b_2$  zostały określone w (4.15), a  $K_b$  wynosi

$$(4.17) \quad K_b = \frac{(A_1^I)^2 A_1^{II} (A_1^{II} + B_1^{II})}{A_2^I [(A_1^I)^2 - (A_2^I)^2] (A_1^{II} - B_1^{II})}.$$

Użyte w równaniach (4.14) i (4.16) współczynniki  $b_j$  i  $d_j$  wynikają z równań ciągłości i są stosunkami odpowiednich stałych,

$$(4.18) \quad C_j^{II}/C_j^I = b_j, \quad C_j^{III}/C_j^I = d_j \quad \text{dla } j = 1, 2.$$

Tak więc typ stref przy brzegu płyty utwierdzonej będzie ustalony w trakcie obliczeń i nie jest zakładany *a priori*, jak to uczyniono w pracach [26] i [16].

### 5. Materiał idealnie plastyczny

Rozważając modele materiału ze wzmocnieniem należy pamiętać, że moduły styczny  $f_t$  i sieczny  $f_s$  nie są niezależne, lecz powiązane charakterystyką materiału  $\sigma(\epsilon)$ . Przy przejściu do materiału idealnie plastycznego we wzorach (2.11) należy przyjąć  $f_t = 0$ , natomiast  $1 \geq f_s \geq 0$ . Taka niejednoznaczność będzie miała wpływ na wyniki obliczeń, toteż zajmujemy się dokładniej tym przypadkiem (por. też [8], [10]).

Wszystkie wzory podamy dla teorii odkształceniowej, gdyż jak wskazaliśmy w p. 2.3 przejście do teorii płynięcia uzyskamy przyjmując  $f_s = 1$ . Potrzebne współczynniki podamy dla różnych koncepcji:

a) wzrastające obciążenie

$$(5.1a) \quad C_{11} = -C_{12} = \frac{f_s}{2[3 - (1 - 2\nu)f_s]},$$



Wyniki otrzymane dla płyty przegubowo podpartej mają znaczenie czysto teoretyczne, gdyż odpowiadają przypadkowi granicznemu  $x_1 \rightarrow 0$ . Z (3.7) wynika, że  $\varepsilon_p \xi_1^2 p_{kr} \rightarrow 0$ , co dla  $p_{kr} \rightarrow 1$  prowadzi do wniosku, że promień płyty  $\xi_1 \rightarrow 0$ . W takim przypadku przestają obowiązywać założenia płyt cienkich, na których oparliśmy całą analizę.

**5.2. Płyta utwierdzona.** Pierwiastek równania (3.5) obowiązującego w koncepcjach a) i b) jest niezależny od własności materiału i wynosi  $x_1 = 3,832$ . Analiza równań (4.14) wskazuje, że przy  $f_t \rightarrow 0$  przy podporze pojawia się obszar procesów czynnych i należy się posługiwać układem (4.16).

Jeśli  $f_t = 0$  to  $K_b = 0$  i równanie (4.16)<sub>2</sub> jest spełnione dla  $x_1^1 = 0$ . Oznacza to, że w całej płycie zachodzi proces czynny i należy posługiwać się wzorem (5.1a) dla  $C_{11}^a$ . Ponieważ w tym przypadku  $b_1 = 1$  i  $b_2 = 0$ , równanie (4.16)<sub>1</sub> przechodzi w (3.5). Tak więc obciążenie krytyczne obliczane metodą ścisłą według koncepcji ustalonego i wzrastającego obciążenia przyjmuje w płycie utwierdzonej tę samą wartość ( $g_2 \equiv 1$ )

$$(5.4) \quad \lim_{f_t \rightarrow 0} p_{kr} = \frac{3,832^2 C_{11}^a}{2 \xi_1^2 \varepsilon_p} = \frac{3,670 f_s}{\xi_1^2 \varepsilon_p [3 - (1 - 2\nu) f_s]}.$$

Graniczna wartość współczynnika kąтового  $\tau$  w punkcie bifurkacji wynosi zgodnie z (3.14)

$$(5.5) \quad \lim_{\substack{f_t \rightarrow 0 \\ x_1 \rightarrow 3,832}} \tau = 0.$$

Ponieważ wartości  $g_1$  należy liczyć według wzoru (5.2.1), więc wynika stąd wniosek, że obciążenie krytyczne liczone według metody Iliuszyna będzie dla  $f_s \rightarrow 0$  wyższe od obciążenia wyznaczonego metodą ścisłą. W granicznym przypadku  $f_s = 0$  posługiwanie się metodą Iliuszyna może prowadzić do znacznych błędów.

W pracy [17] przeprowadzono obliczenia dla płyty kołowej, wykonanej z materiału sprężysto-plastycznego, o zależności  $\sigma - \varepsilon$  aproksymowanej wzorem Ylinena:  $\varepsilon/\sigma = E^{-1}(1 - c|\sigma/\sigma_p|)/(1 - |\sigma/\sigma_p|)$ . Obliczenia prowadzono metodą odwrotną, czyli że dla ustalonych wartości  $p_{kr}$  określano  $f_s$  i  $f_t$  i obliczano  $\xi_1$ . W takim postępowaniu otrzymywano duże różnice wyników przy stosowaniu metody Iliuszyna, gdyż dla  $f_t \rightarrow 0$  wartości  $g_1 \rightarrow 2$ .

Przeprowadzona analiza materiału idealnie plastycznego rozszerza wnioski podane w pracach LEPIKA [8, 10], gdyż została dokonana w oparciu o rozwiązanie ściśle koncepcji ustalonego obciążenia. Z drugiej strony została ona wykonana dla płyty trójwarstwowej, którą zastąpiliśmy płytą pełnościenną.

## 6. Przykład numeryczny

Aby uniezależnić się od charakterystyki materiału  $\sigma - \varepsilon$ , obliczenia numeryczne wykonano w oparciu o wzory teorii plastycznego płynięcia. Obliczenia prowadzono metodą odwrotną, która polegała na obliczaniu obciążeń krytycznych  $\bar{p} = p_{kr} \varepsilon_p \xi_1^2$  dla ustalonych wartości modułów stycznych  $f_t = E_t/E$ . Wszystkie obliczenia wykonano dla materiału ściśliwego, gdy współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ .

Wartości funkcji Bessela wzięto z tablic [20, 23], w których przyrost argumentu  $\Delta x = 0,01$ . Wartości pośrednie otrzymywano z interpolacji liniowej, zachowując 5 cyfr znaczących.

W tabl. 1 podano wartości  $\bar{p}$  dla płyty przegubowo podpartej, obliczone według koncepcji wzrastającego obciążenia oraz współczynniki  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  dla metody przybliżonej Iliuszyna i rozwiązania ścisłego według koncepcji ustalonego obciążenia.

Tablica 1. Płyta przegubowa podparta, teoria plastycznego płynięcia,  $\nu = 0,3$

$f_i$	$\bar{p}_{wzr}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_2/\gamma_1$	$\tau$
0	0	1	1,440	1,440	2
0,005	0,00861	2,277	2,324	1,021	1,180
0,01	0,01975	2,622	2,646	1,009	1,021
0,02	0,04026	1,859	1,877	1,010	1,011
0,05	0,09437	1,823	1,851	1,015	1,097
0,1	0,17978	1,704	1,733	1,017	1,175
0,2	0,33259	1,532	1,552	1,013	1,290
0,5	0,70200	1,239	1,244	1,004	1,482

$$\bar{p}_{wzr} = p_{kr} \xi_i^2 \varepsilon_p = \frac{1}{2} x_i^2 C_{11}^a$$

$$\gamma_1 = \bar{p}_{ust.II} / \bar{p}_{wzr}, \quad \gamma_2 = \bar{p}_{ust.śc.} / \bar{p}_{wzr}$$

Tablica 2. Płyta utwierdzona, teoria plastycznego płynięcia,  $\nu = 0,3$

$f_i$	$\bar{p}_{wzr}$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_2/\gamma_1$	$\tau$	Pierwiastki równań (4.14) lub (4.16)		
						$\frac{x_I^I}{x_I^{II}}$	$\frac{x_{II}^{II}}{x_{II}^{III}}$	$x_I$
0	1,4117	1	1	1	0	0	—	3,832
0,005	1,4300	1,013	1,043	1,030	0,0061	$\frac{1,152}{1,400}$	—	3,913
0,01	1,4483	1,034	1,068	1,034	0,0360	$\frac{1,344}{1,630}$	—	3,960
0,02	1,4846	1,046	1,102	1,053	0,0727	$\frac{1,550}{1,874}$	$\frac{3,780}{3,126}$	3,326
0,05	1,5917	1,099	1,160	1,056	0,1612	$\frac{1,770}{2,120}$	$\frac{3,328}{2,779}$	3,446
0,1	1,7647	1,153	1,205	1,049	0,2852	$\frac{1,952}{2,302}$	$\frac{3,130}{2,653}$	3,566
0,2	2,0915	1,191	1,223	1,027	0,4634	$\frac{2,133}{2,448}$	$\frac{2,940}{2,562}$	3,693
0,5	2,9411	1,137	1,142	1,004	0,6844	$\frac{3,320}{2,495}$	$\frac{2,655}{2,469}$	3,807

$$\bar{p}_{wzr} = p_{kr} \xi_i^2 \varepsilon_p = \frac{1}{2} x_{i,wzr}^2 C_{11}^a$$

$$\gamma_1 = \bar{p}_{ust.II} / \bar{p}_{wzr}, \quad \gamma_2 = \bar{p}_{ust.śc.} / \bar{p}_{wzr}$$

Wyniki obliczeń dla płyty utwardzonej zestawiono w tabl. 2. Podano tutaj wartości  $x_I^I$ ,  $x_{II}^{II}$  i  $x_I$  rozgraniczające obszary czynne od czynno-biernych. Widać, że dla małych modułów  $f_i \leq 0,01$  obszar czynny dochodzi do utwardzenia.

Otrzymane wyniki potwierdzają wniosek, jaki często wyciągano w oparciu o znacznie skromniejsze dane numeryczne (por. np. [9, 16]), o dobrej dokładności metody przybliżonej Iliuszyna. W przypadku płyty swobodnie podpartej różnice w odniesieniu do metody ścisłej ustalonego obciążenia (z wyjątkiem  $f_i = 0$ ) nie przekraczają 2%, a dla płyty utwardzonej — 6%.

### 7. Uogólnienie wyników na rzeczywistą płytę trójwarstwową

Zgodnie z założeniami przyjęliśmy, że przekrój trójwarstwowy ma aproksymować przekrój pełnościenny. Otrzymane wyniki można wykorzystać również do obliczenia sił krytycznych w rzeczywistym przekroju trójwarstwowym. W takich płytach duży wpływ na ugięcia mają odkształcenia postaciowe wypełniacza i stosowana przez nas hipoteza Kirchhoffa (2.5) odcinka normalnego w odniesieniu do całego przekroju może prowadzić do znacznych błędów (por. [21]). Zajmiemy się teraz uogólnieniem rozważań na przypadek ogólnej utraty stateczności płyty trójwarstwowej w oparciu o metodę Bijlaarda rozdzielonych sztywności.

W pracy [2] BIJLAARD zaproponował obliczanie obciążenia krytycznego według wzoru

$$(7.1) \quad p_{kr} = p_0 + \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right)^{-1},$$

w którym  $p_0$  jest obciążeniem krytycznym liczonym dla oddzielnych warstw nośnych (zewnątrznych),  $p_1$  — obciążenie krytyczne bez uwzględnienia wpływu odkształceń postaciowych wypełniacza,  $p_2$  — obciążenie krytyczne tylko od odkształceń wypełniacza. Przy liczeniu  $p_1$  i  $p_2$  pomija się sztywności własne na zginanie warstw nośnych.

W naszym przypadku obciążenie  $p_{kr}$  liczone wzorem (3.7) odpowiada  $p_1$  w (7.1). Jak wykazano w [2] dla wszechstronnego płaskiego ściskania, siła  $p_2$  jest niezależna od formy wybożenia i wynosi

$$(7.2) \quad p_2 = \frac{h^2}{h-d} G_c,$$

gdzie  $G_c$  jest modułem odkształcenia postaciowego wypełniacza.

W zastosowaniach można całkowicie pominąć sztywności własne warstw nośnych, a więc przyjmując  $p_0 = 0$ . Po połączeniu wzorów (3.6) i (7.2) wzór (7.1) na obciążenie krytyczne napiszemy w postaci

$$(7.3) \quad p_{kr} = \frac{p_1}{1 + \alpha p_1},$$

gdzie, dla skrócenia zapisu, użyto oznaczeń

$$(7.4) \quad p_1 = \frac{x_I^2 C_{11}}{2\varepsilon_p \xi_I^2}, \quad \alpha = 2\varepsilon_p \frac{E}{G_c} \frac{d}{h} \left( 1 - \frac{d}{h} \right).$$

Współczynnik  $\alpha$  zależy wyłącznie od stałych materiałowych ( $E$  i  $\varepsilon_p$  odnoszą się do warstw nośnych) i wymiarów poprzecznych wypełniacza, natomiast wartość współczynnika  $C_{11}$  odpowiada obciążeniu  $p_{kr}$  z (7.3). W rozważanym poprzednio przypadku niepodatnego wypełniacza  $G_c \rightarrow \infty$  i współczynnik  $C_{11} = f(p_1)$ .

Wzór (7.3) został wyprowadzony dla wypełniacza typu lekkiego (taki termin jest stosowany w literaturze radzieckiej — por. [29]), który przenosi jedynie naprężenia styczne od sił poprzecznych, a nośne warstwy zewnętrzne są w stanie bezmomentowym (pomijaliśmy dla tych warstw sztywność własną na zginanie).

Ogólniejsze równania stateczności płyt trójwarstwowych uwzględniające również uplastycznienie wypełniacza, wyprowadził GRIGOLUK [3]; występują jednak znaczne trudności przy ich całkowaniu.

### 8. Uwagi końcowe

W pracy zajęliśmy się tylko symetryczną płytą trójwarstwową. Rozważania można bez trudu uogólnić na płyty o różnej grubości i różnych własnościach warstw nośnych (por. [13]).

W konstrukcjach warstwowych często istotne jest uwzględnienie anizotropowych własności materiału. Odpowiednie równania stateczności dla sprężysto-plastycznej płyty pełnościennej zostały wyprowadzone w [18]. Wszystkie równania i wzory wyprowadzone w obecnej pracy zachowują swoją postać w przypadku cylindrycznej ortotropii. Należy wtedy tylko przyjąć macierz  $E_j$ , wyprowadzoną dla materiału ortotropowego w [28] zarówno dla teorii odkształceniowej, jak też plastycznego płynięcia.

W pracy obliczaliśmy obciążenia krytyczne według koncepcji wzrastającego i ustalonego obciążenia. W obliczeniach inżynierskich znaczenie ma przede wszystkim pierwsza koncepcja, która daje bezpieczniejsze (niższe) wartości obciążeń krytycznych i w przypadku płyt prostokątnych jest zgodna z doświadczeniami (por. [29]). Obciążenie krytyczne liczone według koncepcji ustalonego obciążenia jest wyższe i daje oszacowanie od góry obciążeń jakie może przenieść płyta w wyniku rozwinięcia się stref procesów biernych. Należy tutaj podkreślić dobrą dokładność przybliżonej metody Iliuszyna, co wykorzystano w pracy [17] do sporządzenia wykresów zależności pomiędzy krytycznymi wartościami obciążenia i odpowiednimi promieniami płyty  $p - \xi_t$ .

Należy dodać, że wartości krytyczne liczone według koncepcji ustalonego obciążenia mogą być osiągnięte przy nieograniczonym wroście ugięć (opieramy się na geometrycznej liniowej teorii małych ugięć). Analiza stanu pozakrytycznego wymaga oparcia się na teorii dużych ugięć (por. [28]), przy czym może powstać konieczność rozważania nie tylko procesów biernych, ale też wtórnych odkształceń plastycznych (por. [11, 19]).

Jak wykazaliśmy w p. 5, przy  $f_t \rightarrow 0$  i  $f_s \rightarrow 0$  również promień płyty  $\xi_t \rightarrow 0$ . Podkreśliśmy, że takie rozważania mają charakter czysto teoretyczny, gdyż przy krępych płytach przestają obowiązywać przyjęte założenia. W takim przypadku następuje znaczny wzrost odkształceń i zagadnienie utraty stateczności należy rozpatrywać w ujęciu teorii odkształceń skończonych (por. [27]).

W pracy opieraliśmy się na klasycznych teoriach plastyczności. Jak wynika z przyjętych wzorów (2.11), wyniki obliczeń według teorii odkształceniowej i płynięcia plastyczne-



go nie będą się wiele różniły przy małych odkształceniach plastycznych. Przy wzroście tych odkształceń otrzymujemy podwyższenie wyników teorii płynięcia w stosunku do teorii odkształceniowej, przy czym ta ostatnia na ogół lepiej zgadza się z wynikami doświadczeń. Zbliżenie wyników teoretycznych można uzyskać przez odpowiednią modyfikację teorii płynięcia (por. [15]). Należy też wymienić próby stosowania teorii statystycznych (por. [29]), które prowadzą jednak do żmudnych rachunków.

#### Literatura cytowana w tekście

1. P. P. BIJLAARD, *Theory and tests on the plastic stability of plates and shells*, J. Aero. Sci., 9, 16 (1949), 529–541.
2. P. P. BIJLAARD, *Analysis of the elastic and plastic stability of sandwich plates by the method of split rigidities*, J. Aero. Sci., P. I, 5, 18 (1951), 339–349; P. II, 12, 18 (1951), 790–796, 835.
3. Е. И. ГРИГОЛЮК, *Об устойчивости трёхслойных оболочек и пластин за пределом упругости*, Изв. АН СССР, ОТН, 6 (1958), 68–72.
4. G. H. HANDELMAN, W. PRAGER, *Plastic buckling of a rectangular plate under edge thrusts*, NACA TR946, 1949.
5. H. G. HOPKINS, *The plastic instability of plates*, Quart. Appl. Math., 2, 11 (1953), 185–200.
6. А. А. ИЛЬЮШИН, *Пластичность*, Гостехиздат, Москва—Ленинград 1948.
7. В. Д. КЛЮШНИКОВ, *Устойчивость процесса сжатия идеализированной пластинки*, Мех. Тв. Тела, 4 (1966), 28–36.
8. Ю. Р. ЛЕПИК, *Потеря устойчивости пластинок из сжимаемого материала на площадке текучести*, Прикл. Мат. и Мех., 5, 15 (1951), 629–634.
9. Ю. Р. ЛЕПИК, *Одна возможность решения задачи об устойчивости упруго-пластических пластинок в точной постановке*, Изв. АН СССР, ОТН, 8, (1957), 13–19.
10. Ю. Р. ЛЕПИК, *К исследованию послекритической стадии пластинок, потерявших устойчивость за пределом упругости*, Уч. Зап. Тартуского Гос. Унив., 73 (1959), 181–192.
11. Ю. Р. ЛЕПИК, Е. Е. САККОВ, *Исследование закритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости*, Мех. Полимеров, 5 (1968), 881–886.
12. N. W. MCLACHLAN, *Bessel Functions for Engineers*, Clarendon Press, Oxford 1955 ( tłum. polskie, PWN, W-wa 1964)
13. Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ, *Об устойчивости за пределом упругости слоистых оболочек несимметричного строения*, Мех. Тв. Тела, 4 (1966), 97–103.
14. С. Е. PEARSON, *Bifurcation criterion and plastic buckling of plates and columns*, J. Aero. Sci., 7, 17 (1950), 417–424, 455.
15. A. PFLÜGER, *Zur plastischen Beulung von Flächenträgern*, ZAMM, Sonderheft 47 (1967), T209–211.
16. С. М. ПОПОВ, *Устойчивость круглых пластинок за пределом упругости*, Инж. Сборник, 27 (1960), 92–100.
17. Е. РУТЕЛ, Z. WASZCZY SZY N, *Przybliżone obliczanie obciążenia krytycznego trójwarstwowej płyty poza zakresem sprężystym*, Arch. Bud. Maszyn (w druku).
18. Ф. И. РУЗАНОВ, *О потере устойчивости тонких анизотропных пластин и пологих оболочек в пластической области*, Сб. „Пластическое течение металлов”, Изд. „Наука”, Москва 1968, 44–52.
19. Е. САККОВ, *Исследование послекритической стадии устойчивости*, Уч. Зап. Тартуского Унив., 206 (1967), 160–173.
20. Б. И. СЕГАЛ, К. А. СЕМЕНДЯЕВ, *Пятизначные математические таблицы*, Изд. 3, Физматгиз, Москва 1965.
21. M. SOKOŁOWSKI, *O granicy stosowania hipotezy Kirchhoffa w teorii zginania płyt poprzecznie niejednorodnych i warstwowych*, Arch. Inż. Łąd., 1, 5 (1959), 3–13.
22. E. Z. STOWELL, *A unified theory of plastic buckling of columns and plates*, NACA TR 898, 1948.

23. *Таблицы функций Бесселя целого положительного индекса*, Библ. Матем. Таблиц, вып. 12, Вычисл. Центр АН СССР, Москва 1960.
24. *Teoria plastycznosci*, праца zbiorowa pod red. W. OLSZAKA, P. PERZYNY i A. SAWCZUKA, PWN, Warszawa 1965.
25. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, Mc Graw-Hill, 1961 (tłum. polskie, „Arkady”, Warszawa 1963).
26. Л. А. Голоконников, *К вопросу об устойчивости круглых пластин, сжатых равномерно распределенным давлением по контуру*, Уч. Зап. Ростовского Гос. Унив., 3, 18 (1953).
27. Л. А. Голоконников, *Критическое давление на круглую пластинку*, Изв. АН СССР, ОТН 10, (1958), 77–86.
28. Z. WASZCZYŹYŹYŹYŹ, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo-symetrycznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Krakowskiej, 3 (1970).
29. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Изд. „Наука”, Москва 1967.

### Резюме

## УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Идеализированная трехслойная пластинка исследуется в рамках гипотезы Кирхгоффа о нормальном сечении, обобщенной на все поперечное сечение, и в предположении однородного распределения напряжений во внешних слоях пластинки. Благодаря этим предположениям становится возможным интегрирование основной системы уравнений (2.15). Точное решение (2.17) сходно по форме с решением для упругой пластинки, однако коэффициенты в этом решении зависят как от типа процесса, так и от величины пластической деформации в несущих слоях.

Исследованы результаты, полученные в рамках принципа постоянной нагрузки (подход Кармана) и в рамках принципа возрастающей нагрузки (подход Шенли). Полученные решения справедливы как для деформационной теории пластичности, так и для теории пластического течения, в зависимости от формы элементов матрицы жесткостей  $E_{jr}$  (2.11).

Для случая возрастающей нагрузки выведена формула (3.14), по которой можно рассчитать угол наклона касательной в точке бифуркации.

Приближенное решение в рамках принципа постоянной нагрузки получено на основе метода Ильюшина, т. е. в предположении равенства нулю вариаций продольных усилий внутри пластинки. Точный метод решения приводит к характеристическим уравнениям, которые получаются при удовлетворении соотношениям непрерывности на границах между областями с различного типа процессами и при удовлетворении соответствующим краевым условиям. Для свободноопертой пластинки получается уравнение (4.7), а для заземленной пластинки — системы уравнений (4.14) или (4.16), в зависимости от числа областей. Рассмотрена также пластинка из идеально упруго-пластического материала.

В качестве численного примера в рамках теории пластического течения рассчитана пластинка из сжимаемого материала с коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ .

В таблицах сопоставлены результаты для разных значений коэффициента  $f_t = E_t/E$ .

Полученные решения обобщены на случай трехслойной пластинки с упругим наполнителем. Формула (7.3) дает величину критической нагрузки для этой пластинки.

### Summary

## BUCKLING OF A SANDWICH CIRCULAR PLATE BEYOND THE ELASTIC LIMIT

When considering an ideal sandwich plate (the Kirchhoff hypothesis of normal segment is valid for the whole plate cross-section, in external layers act the membrane stresses), the integration of the basic set of Eqs. (2.15) is possible. The exact solution (2.17) is of the same form as in elastic plates but its coeffic-

ients depend both on the type of process and yielding of the zones of the plate considered. Results obtained on the base of the hypothesis of constant loads (Kármán's approach) and increasing loads (Shanley-type approach) are analyzed. These solutions are valid both for the deformation theory and for the plastic flow theory, depending on the form of the stiffness matrix  $E_{jr}$ , according to (2.11).

In the case of increasing loads the formula (3.14) for the slope at the bifurcation point is derived.

An approximate solution for the constant load hypothesis is obtained, applying the Ilyushin method of neglecting the membrane forces variation. The exact solution leads to characteristic equations which result from satisfying the continuity relations and the appropriate boundary conditions. Eq. (4.7) for the simply supported plate is obtained, and for the clamped one the set of Eqs. (4.14) or (4.16), depending on the number of zones of different types of processes. A special case of ideally elastic-plastic material is also considered.

Numerical computations for the theory of plastic flow and Poisson's ratio  $\nu = 0.3$  are performed. The results are presented in tables for different values of the tangent modulus  $f_t = E_t/E$ .

The obtained solutions are generalized on the case of the real sandwich cross-section with a determinable core. The formula (7.3) has been derived to calculate the buckling load according to the Bijlaard method of split rigidities.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 31 grudnia 1971 r.*



## WARUNEK PODOBIEŃSTWA WSPÓLCZYNNIKA SKURCZU POPRZECZNEGO W FOTOPLASTYCZNOŚCI

ANDRZEJ LITWKA (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

Przy modelowaniu sprężysto-plastycznych zagadnień metodą fotoplastyczności istotny jest problem podobieństwa modelowego. Z dotychczasowych prac [2, 5, 7, 9] wynika, że wartości naprężeń obliczone na podstawie badań przeprowadzonych metodą fotoplastyczności mogą być przeniesione na geometrycznie podobny i podobnie obciążony element wykonany z takich materiałów konstrukcyjnych, jak stal, aluminium lub mosiądz. Jest to możliwe z uwagi na to, że celuloid używany jako materiał modelowy w fotoplastyczności oraz wymienione materiały konstrukcyjne spełniają następujące warunki:

a) krzywe rozciągania materiału modelowego oraz materiału, z którego wykonany jest prototyp muszą być podobne,

b) zachowanie obu materiałów w obszarze plastycznym powinno być opisywane tym samym warunkiem plastyczności,

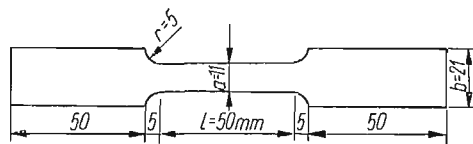
c) współczynniki skurczu poprzecznego  $\nu$  zarówno w obszarze sprężystym, jak i plastycznym powinny być dla obu materiałów równe lub zbliżone.

Dwa pierwsze warunki były przedmiotem licznych badań [2, 6, 7, 8], mniej natomiast uwagi poświęcono warunkowi trzeciemu. Problem spełnienia tego warunku rozstrzygany był w oparciu o znane stwierdzenie [10] mówiące, że współczynnik skurczu poprzecznego dla odkształceń plastycznych zbliża się do granicznej wartości 0,5. Dla bliższego poznania tego problemu przeprowadzone zostały badania współczynnika  $\nu$  w zakresie sprężysto-plastycznym dla celuloidu oraz stopów aluminium PA2 i PA4. Badania przedstawione w niniejszej pracy nie obejmują pomiarów współczynnika skurczu poprzecznego dla innych materiałów konstrukcyjnych, gdyż były one przedmiotem pracy [3].

### 2. Celuloid

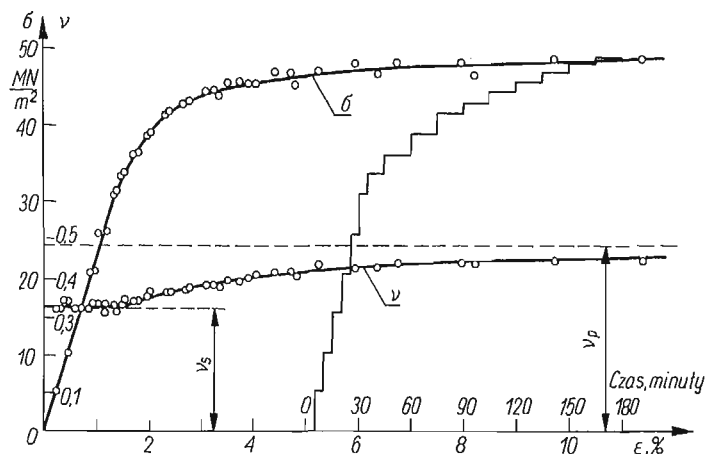
Badania współczynnika  $\nu$  przeprowadzono na próbkach osiowo rozciąganych, których kształt i wymiary pokazano na rys. 1, drogą równoczesnego pomiaru wydłużenia osiowego próbki oraz poprzecznego zwężenia. Grubość próbek wynosiła około 3 mm. Do pomiaru wydłużenia użyto katetometru Wild KM801 dającego dokładność pomiaru  $\pm 0,01$  mm, natomiast zwężenie próbki mierzono odpowiednio przebudowanym tensometrem mechanicznym B. Holle MK3 o dokładności  $\pm 0,001$  mm. Długość bazy pomiarowej dla odkształceń podłużnych próbki wynosiła 40 mm, natomiast odkształcenie poprzecz-

ne mierzono na bazie około 9 mm, której długość każdorazowo przed zamontowaniem tensometru na próbce mierzono komparatorem Abee'go o dokładności pomiaru  $\pm 0,001$  mm.



Rys. 1. Próbki użyte do badań

W omawianych badaniach zrezygnowano z zastosowania jednego ze sposobów eliminacji czynnika czasu na kształt krzywej rozciągania dla celuloidu, gdyż w danym przypadku byłoby to zbędnym utrudnieniem badań. Obciążenie próbek przeprowadzono w sposób umożliwiający otrzymanie możliwie dużej ilości odczytów odkształceń w zakresie sprężysto-plastycznym.

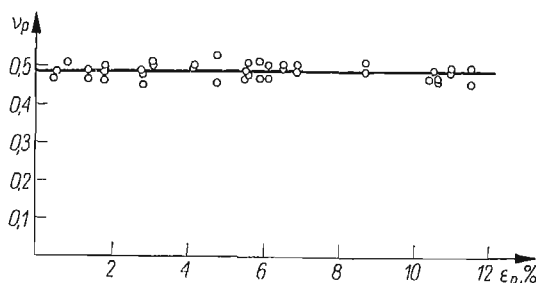


Rys. 2. Krzywa rozciągania, przebieg zmienności obciążenia w czasie badania oraz krzywa zmienności współczynnika skurczu poprzecznego dla celuloidu

Przebieg zmienności obciążenia w czasie badania przedstawiony został na rys. 2. Na rysunku tym wykreślono również otrzymaną z badań krzywą rozciągania celuloidu oraz naniesiono obliczone na podstawie pomiarów wartości współczynnika  $\nu$ .

Z rozkładu punktów pomiarowych wynika, że współczynnik skurczu poprzecznego dla celuloidu wzrasta od wartości  $\nu_s$ , odpowiadającej zakresowi liniowo sprężystemu, do pewnej granicznej wartości  $\nu_p$ , która jest współczynnikiem skurczu poprzecznego dla odkształceń trwałych. Wielkość współczynnika  $\nu_s$  wyznaczona jako średnia z 44 pomiarów wynosi  $\nu_s = 0,326 \pm 0,006$ . Współczynnik  $\nu_p$  wyznaczono natomiast na podstawie trwałych odkształceń próbek po ich odciążeniu. Pomiar trwałego wydłużenia próbek przeprowadzono za pomocą katetometru, a trwałe zwężenie mierzono śrubą mikrometryczną. Wyniki otrzymane z pomiarów przeprowadzonych na próbkach wykazujących

odkształcenia trwałe w zakresie 0,5–12% przedstawia rys. 3. Średnia wielkość współczynnika skurczu poprzecznego dla odkształceń trwałych otrzymana z 43 pomiarów wynosi  $\nu_p = 0,486 \pm 0,007$ .



Rys. 3. Współczynnik skurczu poprzecznego  $\nu_p$  przy różnych odkształceniach trwałych dla celulozoidu

W przypadku, gdy odkształcenie próbki składa się z odkształcenia sprężystego  $\nu_s$  oraz trwałego odkształcenia plastycznego  $\nu_p$ , co dotyczy każdego z punktów leżących na krzywej rozciągania powyżej granicy sprężystości, współczynnik skurczu poprzecznego  $\nu$  może być obliczony z zależności

$$\nu = \frac{\nu_s \varepsilon_s + \nu_p \varepsilon_p}{\varepsilon_s + \varepsilon_p}.$$

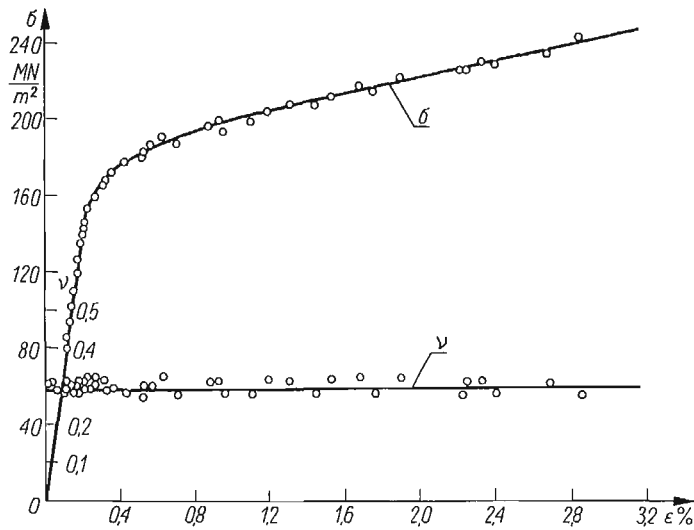
Zależność tę w nieco innej postaci podali BAHUAUD i BOIVIN [1] oraz JEREMIEJEW [3]. Linia ciągła na rys. 2 przedstawia przebieg zmienności współczynnika  $\nu$  według podanej zależności, przy czym za  $\nu_s$  i  $\nu_p$  podstawiono wyznaczone poprzednio wartości, natomiast  $\varepsilon_s$  i  $\varepsilon_p$  odczytywano dla poszczególnych punktów z krzywej rozciągania przedstawionej na rys. 2. Z rysunku tego wynika, że rozkład punktów odpowiadających zmierzonym wartościom współczynnika skurczu poprzecznego  $\nu$  w zakresie sprężysto-plastycznym dokładnie odwzorowuje przebieg krzywej opisanej powyższą zależnością.

### 3. Stopy aluminium

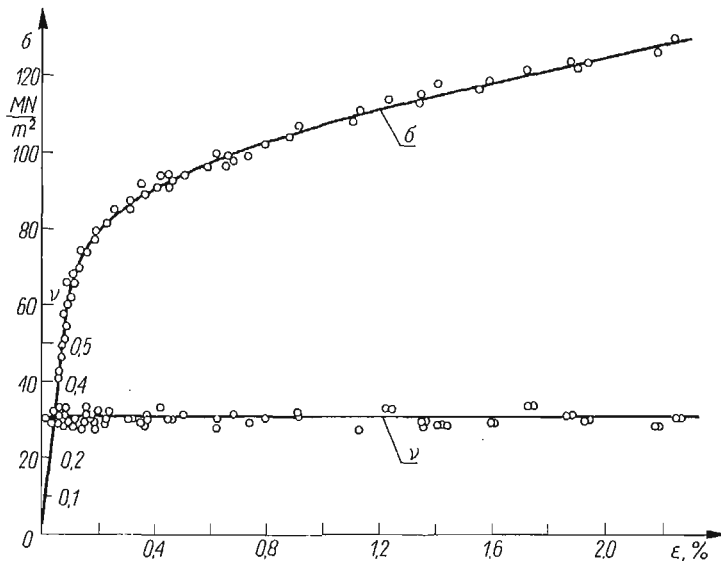
W podobny sposób jak dla celulozoidu przeprowadzono pomiary współczynnika skurczu poprzecznego dla stopów aluminium PA2-M (wyżarzony, miękki) i PA4-T1 (prze-sycony, sztucznie starzony). Próbki użyte do badań wycinano z blachy o grubości 5 mm dla stopu aluminium PA4 i 1 mm dla stopu aluminium PA2, przy czym oś podłużna próbek pokrywała się z kierunkiem walcowania. Kształt próbek był podobny do kształtu próbek celulozoidowych przedstawionych na rys. 1, przy czym ich wymiary liniowe były następujące (w mm)

Stop aluminium	Wymiary próbek			
	a	l	r	b
PA2	22	140	15	50
	30	210	20	60
PA4	30	250	20	70

Wydłużenie próbek mierzono tensometrem mechanicznym B. Holle Mk3 o najmniejszej działce 0,01 mm, a nie jak w przypadku celulozoidu katetometrem, natomiast pomiaru zwężenia poprzecznego dokonywano odpowiednio przebudowanym tensometrem me-



Rys. 4. Krzywa rozciągania i współczynnik skurczu poprzecznego dla stopu aluminium PA2



Rys. 5. Krzywa rozciągania i współczynnik skurczu poprzecznego dla stopu aluminium PA4

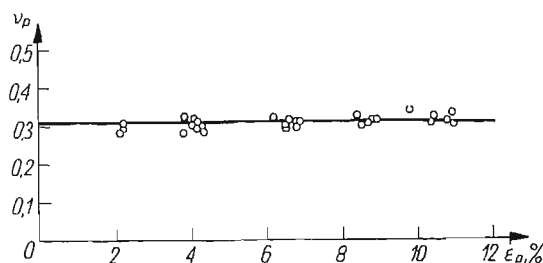
chanicznym B. Holle Mk3 o dokładności  $\pm 0,001$  mm. Baza pomiarowa dla odkształceń podłużnych wynosiła 100 mm, a dla odkształceń poprzecznych 20 lub 28 mm, w zależności od szerokości próbki. Siłę obciążającą dla próbek wykonanych ze stopu PA2, podobnie jak dla celulozoidu, zrealizowano w układzie obciążającym polaryskopu, natomiast



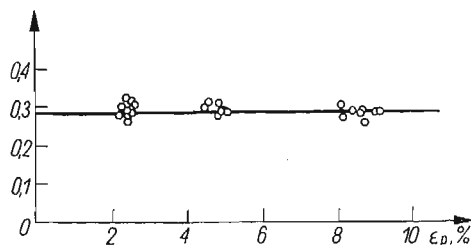
badanie próbek ze stopu PA4 wykonano w maszynie wytrzymałościowej ZD-10 WPM Leipzig.

Przebieg otrzymanych z pomiarów krzywych rozciągania dla aluminium PA2 i PA4 oraz rozkład zmierzonych wartości współczynnika  $\nu$  przedstawiają rys. 4 i 5. Z rysunków tych wynika, że współczynnik skurczu poprzecznego dla stopów aluminium nie wzrasta w zakresie sprężysto-plastycznym, jak to miało miejsce w przypadku celulozoidu oraz innych materiałów konstrukcyjnych przebadanych w pracy [3].

Dla sprawdzenia otrzymanych wyników przeprowadzono, jak w p. 2, pomiary  $\nu_s$  i  $\nu_p$ . Pomiary  $\nu_s$  przeprowadzono w trakcie obciążenia próbek poniżej granicy sprężystości, natomiast  $\nu_s$  mierzono na podstawie trwałych odkształceń próbek pozostających po ich odciążeniu. Trwałe odkształcenia podłużne próbek mierzono komparatorem Abee'go z dokładnością  $\pm 0,001$  mm na bazie pomiarowej o długości 22 lub 30 mm, a trwałe odkształcenia poprzeczne mierzono śrubą mikrometryczną z dokładnością  $\pm 0,01$  mm przy bazie pomiarowej równej szerokości próbki, to znaczy 22 lub 30 mm.



Rys. 6. Współczynnik skurczu poprzecznego  $\nu_p$  przy różnych odkształceniach trwałych dla stopu aluminium PA2



Rys. 7. Współczynnik skurczu poprzecznego  $\nu_p$  przy różnych odkształceniach trwałych dla stopu aluminium PA4

Średnie wartości  $\nu_s$  i  $\nu_p$ , obliczone na podstawie 33–38 niezależnych pomiarów przedstawiają się następująco:

Stop aluminium	$\nu_s$	$\nu_p$
PA2	$0,306 \pm 0,009$	$0,307 \pm 0,006$
PA4	$0,289 \pm 0,006$	$0,288 \pm 0,006$

Pomiary współczynnika  $\nu_p$  przeprowadzono na próbkach wykazujących odkształcenia trwałe, w granicach 2–11%. Wyniki tych pomiarów przedstawiają rys. 6 i 7.

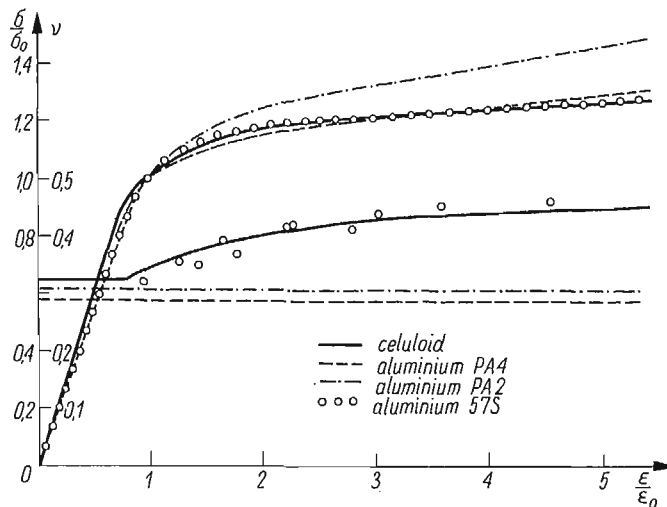
Z podanego powyżej zestawienia średnich wartości  $\nu_s$  i  $\nu_p$  wynika, że dla obu badanych stopów aluminium współczynnik skurczu poprzecznego dla odkształceń sprężystych jest równy współczynnikowi dla odkształceń plastycznych, to znaczy  $\nu_s = \nu_p$ . Podstawiając tę równość do zależności podanej w p. 2 otrzymuje się  $\nu = \nu_s = \nu_p = \text{const}$ . Linie ciągłe na rys. 4 i 5 przedstawiające powyższy wynik odpowiadają dość dobrze rozkładowi punktów pomiarowych.

Dla zbadania wpływu kierunku walcowania na wartość współczynnika skurczu poprzecznego dla odkształceń trwałych przeprowadzono pomiary  $\nu_p$  na próbkach wykonanych ze stopu PA2 wyciętych pod kątem  $90^\circ$  i  $50^\circ$  do kierunku walcowania. Dla kąta  $90^\circ$  otrzymano  $\nu_p = 0,308 \pm 0,006$ , a dla kąta  $50^\circ$   $\nu_p = 0,408 \pm 0,009$ . Podane wartości są średnimi obliczonymi z 21 niezależnych pomiarów.

Odstępstwo wartości  $\nu_p$  dla stopów aluminium od ogólnie przyjmowanej wartości zbliżonej do 0,5, jak również wpływ kierunku walcowania blachy na współczynnik skurczu poprzecznego dla stopu PA2 wskazuje na konieczność przeprowadzenia bliższych badań własności mechanicznych stopów aluminium.

#### 4. Porównanie wyników

Dla przeprowadzenia porównania wyników otrzymanych w p. 2 i 3 wykonano bezwymiarowe wykresy krzywych rozciągania dla stopów aluminium PA2 i PA4 oraz bezwymiarowy wykres krzywej rozciągania celuloidu dla czasu badania 300 minut otrzymany w sposób opisany w pracy [4]. Krzywe te wraz z odpowiadającymi im wykresami zmienności współczynnika skurczu poprzecznego przedstawia rys. 8. Na rysunku tym na-



Rys. 8. Bezwymiarowe krzywe rozciągania i współczynnik skurczu poprzecznego dla celuloidu i stopów aluminium

niesiono również krzywą rozciągania stopu aluminium 57S użytego przez THEOCARISA i MARKETOSA do badań przedstawionych przez nich w pracy [11]. Praca ta dotyczyła sprężysto-plastycznego rozkładu odkształceń i naprężeń w rozciąganych osiowo pasmach osłabionych otworem kołowym.

Badania przeprowadzili oni na modelach wykonanych ze stopu aluminium za pomocą metody optycznie czulej warstwy powierzchniowej w połączeniu z metodą analogii elektrycznej. Poza założeniem plastycznej nieściśliwości przy obliczaniu składowych stanu naprężenia, w oparciu o wyznaczone doświadczalnie składowe odkształceń, THEOCARIS i MARKETOS w pracy swej nie podali żadnych informacji odnośnie współczynnika  $\nu$  użytego do badań materiału. Na podstawie zamieszczonych w powyższej pracy wykresów odkształceń  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$  możliwe było dla punktów leżących na krawędzi modelu wyznaczenie współczynnika skurczu poprzecznego  $\nu = |\varepsilon_x/\varepsilon_y|$ . Otrzymane tą drogą wartości  $\nu$  dla stopu aluminium 57S przedstawiono na rys. 8.

Na podstawie wykresów przedstawionych na rys. 8 można stwierdzić, że krzywa rozciągania celulozoidu wykazuje podobieństwo do krzywych rozciągania dla stopów aluminium PA4 i 57S, natomiast krzywa rozciągania aluminium PA2 odbiega znacznie od krzywej dla celulozoidu. Znacznie odbiegają od siebie także wykresy zmienności współczynnika  $\nu$  dla celulozoidu oraz stopów aluminium PA2 i PA4. Dotyczy to zakresu powyżej granicy sprężystości, gdyż jak wynika z pomiarów omówionych w p. 2 i 3, wartości  $\nu_s$  dla tych trzech materiałów są do siebie zbliżone. Rozbieżności występujące w obszarze odkształceń sprężysto-plastycznych wynikają z anomalii zaobserwowanej w badanych stopach aluminium, polegającej na równości  $\nu_s = \nu_p$  w przeciwieństwie do większości materiałów, gdzie  $\nu_p \neq \nu_s$ , a ponadto  $\nu_p \cong 0,5$ . Z rys. 8 wynika również, że anomalia ta nie występuje w przypadku aluminium 57S, gdyż z rozkładu obliczonych wartości  $\nu$  wynika, że współczynnik skurczu poprzecznego dla tego materiału wzrasta do pewnej granicznej wartości zbliżonej do 0,5. Z uwagi jednak na to, że przedstawione wyniki dla tego materiału otrzymano drogą pośrednią przy pomocy metody warstwy optycznie czulej, wniosek ten nie może być traktowany jako ostateczny.

Podsumowując przeprowadzone badania należy stwierdzić, że warunek równości współczynników skurczu poprzecznego w zakresie odkształceń sprężysto-plastycznych nie jest spełniony dla celulozoidu oraz stopów aluminium PA2 i PA4. Warunek ten jest jednak spełniony w przypadku aluminium 57S oraz, co wynika z pracy [3], dla innych materiałów konstrukcyjnych, takich jak mosiądz i pewne gatunki stali.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. BAHUAUD, M. BOIVIN, *Nouvel aspect des formules du coefficient de Poisson sécant et tangent*, Journal de Mécanique, 4, 8 (1969), 553–564.
2. M. M. FROCHT, R. A. THOMSON, *Studies in photoplasticity*, Archiwum Mechaniki Stosowanej, 2, 11 (1959), 157–171.
3. А. Е. ЕРЕМЬЕВ, *К вопросу о получении коэффициента поперечной деформации материалов в упруго-пластической области*, Труды метрологических институтов СССР, 1969, вып. 104 (164), 140–143.
4. A. LITEWKA, *Polaryzacyjno-optyczna metoda wyznaczania składowych płaskiego stanu naprężenia w obszarze plastycznym*, Rozprawy Inżynierskie, 4, 17 (1969), 693–704.
5. A. LITEWKA, *Modelowanie płaskich sprężysto-plastycznych zagadnień metodą fotoplastyczności*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 1, 8 (1970) 19–26.
6. E. MÖNCH, R. JIRA, *Studie zur Photoplastizität von Celluloid am Rohr unter Innerdruck*, Zeitschrift für Angewandte Physic, 9, 7 (1955), 450–453.
7. E. MÖNCH, R. LORECK, *A study of the accuracy and limit of application of plane photoplastic experiments*, Photoelasticity, Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris 1963, 169–184.

8. В. П. НЕТРЕВКО, *Проверка и уточнение основных законов фотопластичности целлулоида*, Вестник Московского университета, Математика, механика, 2 (1963), 53–59.
9. В. П. НЕТРЕВКО, В. Д. КОПЫТОВ, *К вопросу о моделировании напряженно-деформированного состояния при упруго-пластических деформациях поляризационно-оптическим методом*, Вестник Московского университета, Математика, механика, 3 (1970), 93–98.
10. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965, s. 63.
11. P. S. THEOCARIS, E. MARKETOS, *Elastic-plastic analysis of perforated thin strips of the strain-hardening material*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 6, 12 (1964), 377–390.

## Р е з ю м е

УСЛОВИЕ ПОДОБИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ  
В ФОТОПЛАСТИЧНОСТИ

В работе представлены исследования коэффициента поперечной деформации в упруго-пластической области для целлулоида в алюминиевых сплавах ПА2 и ПА4. Результаты исследований показывают, что для этих материалов условие подобия коэффициентов поперечной деформации не выполняется. Это является результатом постоянства коэффициента поперечной деформации алюминиевых сплавов за пределом упругости. Коэффициент этот не возрастает до предельной величины 0,5, а остается равным коэффициенту для упругих деформаций.

## S u m m a r y

SIMILARITY CONDITION OF THE LATERAL CONTRACTION COEFFICIENT IN  
PHOTOPLASTICITY

The results of measurements of the lateral contraction coefficient  $\nu$  in the elastic-plastic deformation domain for celluloid and aluminium alloys PA2 and PA4 are presented. From the experiments it follows that the model similarity condition concerning the equality of the coefficient  $\nu$  for these materials is not fulfilled. The conclusion results from the observation that in the case of aluminium Poisson's ratio does not increase, after passing the elastic limit, to the limiting value of about 0.5; it remains constant and equal to the lateral contraction coefficient of purely elastic deformations.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 24 stycznia 1972 r.*

---

ANALIZA WYNIKÓW BADAŃ PEŁZANIA MECHANICZNEGO I OPTYCZNEGO MATERIAŁU  
MODELOWEGO SYNTEZOWANEGO Z KRAJOWEJ ŻYWICY EPOKSYDOWEJ

KAZIMIERZ SZULBORSKI (WARSZAWA)

1. Ujęcie analityczne wyników badań

Przed przystąpieniem do próby szczegółowego przedstawienia zależności opisujących przebieg pełzania mechanicznego i optycznego tworzywa modelowego syntezowanego z krajowej żywicy «Epidian 2» zostaną rozpatrzone wstępnie niektóre kierunki ujęcia wymienionego zjawiska w formie związków funkcyjnych.

W literaturze dotyczącej badań innych materiałów, głównie konstrukcyjnych, zawarte są rozmaite formy opisu pełzania mechanicznego, które ujmują poszczególne parametry mające wpływ na wartość odkształcenia przy pełzaniu.

Reologiczne równania stanu tworzywa o budowie łańcuchowej wynikające ze struktury fizycznej materiału można zapisać równaniami różniczkowymi wiążącymi ze sobą naprężenia, odkształcenia i ich pochodne różnych rzędów względem czasu. Równania te mogą być liniowe lub nieliniowe.

W wielu przypadkach zamiast równań różniczkowych do opisu rozpatrywanego zjawiska stosuje się zależności przedstawione w formie całkowej.

W celu określenia zależności opisujących przebieg pełzania sprawdzono wstępnie możliwość zastosowania zasady superpozycji Boltzmanna dla rozpatrywanego materiału, badanego w różnych temperaturach\*.

Z szeregu sposobów sprawdzenia tej zasady (patrz np. [3], [5]) w niniejszym artykule zastosowano metodę polegającą na określeniu ilorazów  $\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0}$  dla stosowanych poziomów naprężeń oraz określonej temperatury badań. Wyznaczone wartości tych ilorazów przedstawiono w tablicy 1.

Wartości wymienionych odchyłek upoważniają do stwierdzenia, że w zakresie stanu szklistego oraz stosowanych poziomów naprężeń badane tworzywo wykazuje pełzanie o charakterze liniowym.

Analiza wartości ilorazów  $\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0}$  (tablica 1) w temperaturach 80 i 100°C wskazuje, że pełzanie w zasadzie tylko w początkowym okresie ma charakter liniowy.

\*) W artykule [11] przedstawiono niektóre wyniki badań własności reologicznych mechanicznych i optycznych materiału opartego na krajowej żywicy «Epidian 2».

Tablica 1

$T$ [°C]	$\sigma$ kG/cm <sup>2</sup>	$t$ (h)						
		0,5	1	2	4	8	16	24
18	170	1,027	1,032	1,040	1,047	1,054	1,060	1,064
	255	1,022	1,031	1,038	1,047	1,053	1,060	1,063
	300	1,028	1,033	1,042	1,051	1,058	1,062	1,067
	340	1,027	1,033	1,038	1,045	1,053	1,060	1,064
40	50	1,063	1,074	1,092	1,103	1,109	1,109	1,109
	100	1,050	1,061	1,075	1,089	1,100	1,106	1,106
	170	1,046	1,053	1,063	1,075	1,085	1,102	1,102
	255	1,039	1,048	1,058	1,068	1,081	1,092	1,098
80	50	1,089	1,104	1,124	1,159	1,222	1,292	1,357
	100	1,074	1,100	1,127	1,164	1,208	1,280	1,335
	170	1,091	1,127	1,71	1,223	1,282	1,388	1,449
100	25	1,286	1,434	1,647	1,966	2,360	2,950	3,258
	50	1,416	1,686	2,008	2,575	3,120	3,839	4,239
	100	1,374	1,583	1,928	2,422	3,320	5,006	6,023

Z tablicy wynika, że rozpatrywane tworzywo w temperaturach 18° i 40°C z dostatecznym przybliżeniem podlega wymiennej zasadzie superpozycji.

Największe procentowe odchyłki ilorazów w temperaturze  $T = 18^\circ\text{C}$  od wartości skrajnej wynoszą 0,6%, od średniej zaś — 0,39%, natomiast w temperaturze  $T = 40^\circ\text{C}$  maksymalne odchyłki wynoszą w odniesieniu do wartości skrajnej 3,4% i 1,87% względem wartości średniej.

Maksymalne wartości wymienionych poprzednio odchyłek od wartości skrajnych wynoszą 11,4% przy temperaturze 80°C i 13% przy temperaturze 100°C (dla  $t < 0,5$  h). W podanych zakresach maksymalne odchyłki od wartości średniej rozpatrywanego ilorazu wynoszą odpowiednio 5 i 5,37%.

Przebiegi krzywych izochronicznych potwierdzają z dostatecznym przybliżeniem linio-we związku między naprężeniami i odkształceniami pełzania w ustalonych czasach [11]. Na podstawie uzyskanych wyników badań wydaje się możliwe zaproponowanie przedstawienia całkowitego odkształcenia  $\varepsilon_c = \varepsilon(t)$  w przypadku pełzania w różnych temperaturach przy  $\sigma(t) = \sigma = \text{const}$  w postaci sumy trzech składników według następującej zależności:

$$(1) \quad \varepsilon_c = \varepsilon_0 + \varepsilon_{cn} + \varepsilon_p,$$

gdzie:

- $\varepsilon_0$  odkształcenie natychmiastowe,
- $\varepsilon_{cn}$  odkształcenie odwracalne pełzania,
- $\varepsilon_p$  odkształcenie trwałe pełzania.

W dalszym ciągu przedyskutujemy występowanie wyszczególnionych we wzorze (1) składników całkowitego odkształcenia w zakresie temperatur od 18° do 100°C.

Z przebiegu krzywych pełzania i nawrotu przy pełzaniu w temperaturach 18° i 40°C można stwierdzić, że w tym zakresie ze względu na pomijalnie małe odkształcenia  $\varepsilon_p$

pełzanie ma — praktycznie ujmując — charakter odwracalny. W przypadku tym przyjmując  $\varepsilon_p = 0$  można całkowite odkształcenie  $\varepsilon_c$ , przy uwzględnieniu zasady superpozycji Boltzmana oraz historii obciążenia opisać, następującą zależnością:

$$(2) \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma(t)}{E_1} + \int_{-\infty}^t K(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau,$$

gdzie:

- $\sigma(t)$       naprężenie w chwili  $t$ ,
- $E_1$           natychmiastowy moduł sprężystości,
- $K(t-\tau)$    funkcja określająca wpływ historii obciążenia w chwili  $\tau$  na odkształcenie w chwili  $t$ .

Przyjmując, że historia obciążenia nie zaczyna się od  $-\infty$ , lecz w chwili  $t_0 = 0$ , można odkształcenie  $\varepsilon_c$  wyrazić również w postaci:

$$(3) \quad \varepsilon_c = \frac{\sigma(t)}{E_1} + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau.$$

Z przeprowadzonych doświadczeń wynika, że odkształcenie natychmiastowe  $\varepsilon_0$  można z dostateczną dokładnością określić wzorem

$$(4) \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E_1},$$

przyjmując przy tym za  $E_1$  wartości modułów sprężystości wyznaczonych w badaniach doraźnych.

Do wyznaczenia odkształceń  $\varepsilon_{cn}$  można wykorzystać drugi składnik równania (3), otrzymując przy  $\sigma = \text{const}$

$$(5) \quad \varepsilon_{cn} = \sigma \int_0^t K(t-\tau) d\tau.$$

Warunki jakim powinna odpowiadać funkcja  $K(t-\tau)$  podane są m.in. w pracy [8].

Przyjmijmy funkcję  $K(t-\tau)$  w postaci

$$(6) \quad K(t-\tau) = \frac{\gamma}{(t-\tau)^{1-\alpha}},$$

gdzie  $\gamma$  i  $\alpha$  — odpowiednie stałe zależne od warunków pomiarów.

Po podstawieniu (6) do równania (5) otrzymuje się

$$(7) \quad \varepsilon_{cn} = \sigma \int_0^t \frac{\gamma}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = \sigma \frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha.$$

Wprowadzając nowe oznaczenie zgodnie z zależnością

$$(8) \quad V = \sigma \frac{\gamma}{\alpha}$$

można również napisać

$$(9) \quad \varepsilon_{cn} = Vt^\alpha.$$

Przy uwzględnieniu wpływu temperatury na wartości  $\varepsilon_0$  i  $V$  można całkowite odkształcenie przy pełzaniu w stanie szklistym wyrazić w postaci

$$(10) \quad \varepsilon_c = \varepsilon_0(\sigma, T) + V(\sigma, T)t^\alpha,$$

gdzie  $\varepsilon_0(\sigma, T)$  i  $V(\sigma, T)$  — funkcje naprężenia i temperatury.

Po przeanalizowaniu wykresów pełzania i nawrotu przy pełzaniu w temperaturach 80° i 100°C wydaje się, że podobnie jak to ma miejsce w modelu Burgersa, odkształcenie trwałe w tych temperaturach można przedstawić w postaci

$$(11) \quad \varepsilon_p = \frac{\sigma}{\eta} t,$$

gdzie  $\eta$  — lepkość.

Wzrost temperatury oraz obciążenie powodują, prawdopodobnie wskutek zmian zachodzących w wiązaniach drugorzędowych, przejście badanego tworzywa ze stanu szklistego w stan pośredni między stanem szklistym i wysokoelastycznym. Zakresowi temu, jak wykazały pomiary, towarzyszy znaczne pełzanie oraz występowanie odkształceń trwałych.

Biorąc pod uwagę zależność ilorazu  $\frac{\sigma}{\eta}$  od temperatury można równanie (11) przedstawić w postaci

$$(12) \quad \varepsilon_p = \mu(\sigma, T)t,$$

gdzie

$$(13) \quad \mu(\sigma, T) = \frac{\sigma}{\eta}.$$

Po uwzględnieniu zależności (12) równanie (11) można przedstawić w postaci stosowanej do opisu wyników badań pełzania mechanicznego w temperaturze 80° i 100°C

$$(14) \quad \varepsilon_c = \varepsilon_0(\sigma, T) + V(\sigma, T)t^\alpha + \mu(\sigma, T)t.$$

Przy rozpatrywaniu związków funkcyjnych określających pełzanie badanego tworzywa w różnych temperaturach rozważano zamieszczone w pracy [10] słuszne zastrzeżenia odnośnie zasady dziedziczności Boltzmana.

W niniejszej pracy wykonywano badania przy ustalonych poziomach temperatur, uzyskując równomierne ogrzanie materiału w całej objętości, co potwierdzają obliczenia współczynnika Poissona posiadającego wartość stałą na poziomej danej temperatury badań. W związku z tym w omawianym zakresie badań wydaje się, że można się oprzeć na zasadzie dziedziczności Boltzmana bez wprowadzenia dodatkowych poprawek.

Uzyskane w przeprowadzonych równolegle pomiarach optycznych wyniki wskazują, że charakter krzywych pełzania mechanicznego i optycznego jest podobny, zatem do opisu pełzania optycznego można również wykorzystać zależności w formie związków funkcyjnych o budowie podobnej do zależności (10) i (14), określających odkształcenia przy pełzaniu mechanicznym.



**1.1. Analiza pełzania mechanicznego w różnych temperaturach.** Wyniki badań pełzania mechanicznego w temperaturze 18°C przedstawiono w oparciu o równanie (10).

W celu wyznaczenia wartości  $\alpha$  przyjmijmy, że w chwili  $t_1$  wartość odkształcenia pełzania równa jest  $\varepsilon_{c1}$ , a w chwili  $t_2$  —  $\varepsilon_{c2}$ . Otrzymuje się odpowiednio do poprzedniej zależności:

$$(15) \quad \varepsilon_{c1} = \varepsilon_0 + Vt_1^\alpha,$$

$$(16) \quad \varepsilon_{c2} = \varepsilon_0 + Vt_2^\alpha$$

lub

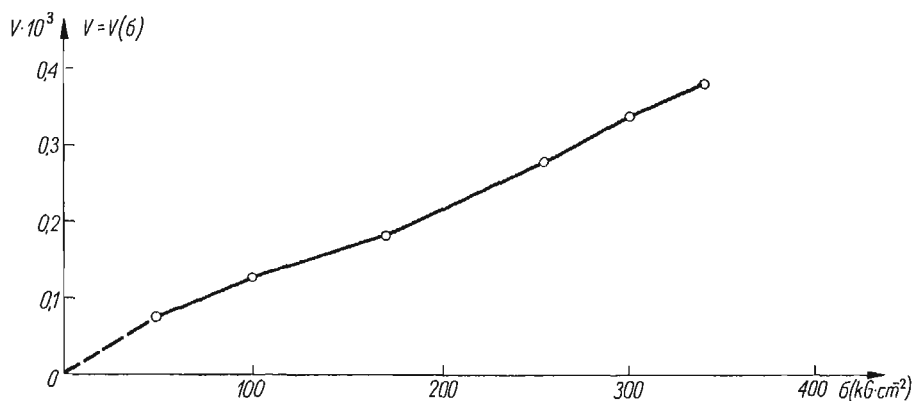
$$\varepsilon_{c1} - \varepsilon_0 = Vt_1^\alpha,$$

$$\varepsilon_{c2} - \varepsilon_0 = Vt_2^\alpha.$$

Po podzieleniu stronami i następnie zlogarytmowaniu wzór na parametr  $\alpha$  przyjmuje postać

$$(17) \quad \alpha = \frac{\lg \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_0}}{\lg \frac{t_2}{t_1}}.$$

Do wyznaczenia parametru  $\alpha$  przyjęto odkształcenia pełzania  $\varepsilon_{c1}$  odpowiadające czasowi  $t_1 = 2$  h oraz odkształcenia  $\varepsilon_{c2}$  dla czasu  $t_2 = 24$  h. Dla wyznaczonej wartości  $\alpha$  odpowiednie wartości  $V$  określono z równania (15).



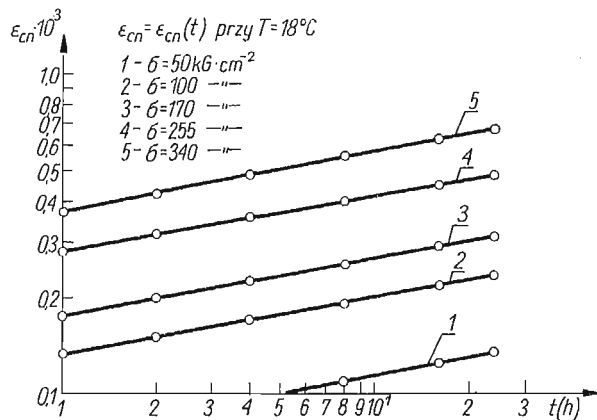
Rys. 1

Na rys. 1 przedstawiono wykres zależności parametru  $V$  od  $\sigma$ . Z rysunku tego widać, że parametr  $V$  rośnie monotonicznie wraz z naprężeniami.

Na rys. 2 przedstawiono w układzie podwójnie logarytmicznym zależności  $\varepsilon_{cn}$  od  $t$  dla stosowanych poziomów naprężeń przy pełzaniu w temperaturze 18°C. W celu sprawdzenia poprawności uzyskanych formuł empirycznych, wykonano obliczenia wartości odkształceń dla różnych czasów  $t$ .

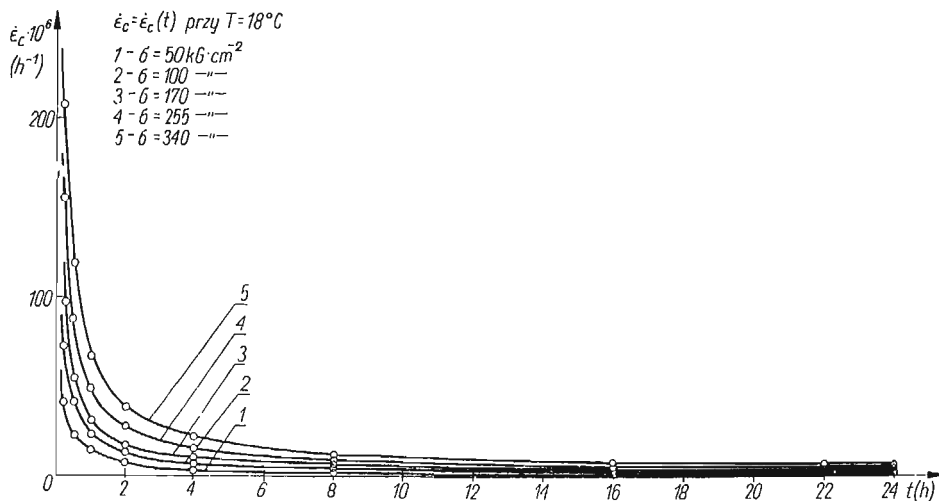
Analiza otrzymanych wyników prowadzi do stwierdzenia, iż największa odchyłka wartości odkształcenia  $\varepsilon_c$  obliczonej według (10) od wartości wyznaczonej doświad-

czalnie w stosunku do tej ostatniej nie przekracza 2,5% dla czasów  $t < t_1$ , zaś przy czasach  $t > t_1$  największa procentowa wartość odchyłki wynosi 1,23%. Charakterystyczny jest również fakt, że odchyłki procentowe są mniejsze przy wartościach naprężeń



Rys. 2

$\sigma > 100 \text{ kg/cm}^2$ . Należy zatem stwierdzić, że przedstawienie odkształceń pełzania proponowanymi zależnościami daje dobrą zgodność z otrzymanymi wynikami doświadczalnymi.



Rys. 3

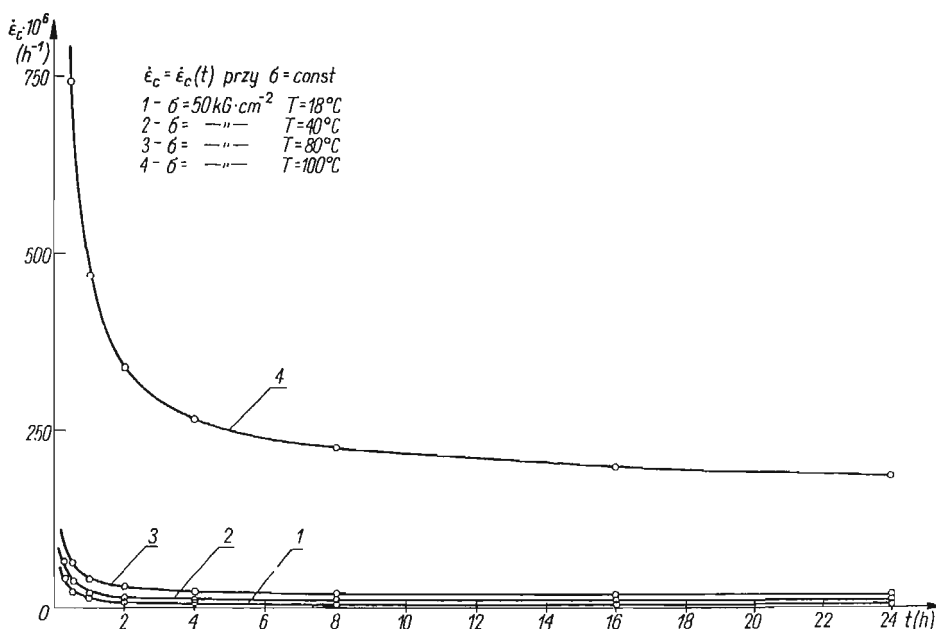
Na podstawie wzoru (10) wyznaczono prędkość pełzania (rys. 3)

$$(18) \quad \dot{\epsilon}_c = \frac{d\epsilon_c}{dt} = V\sigma t^{\alpha-1}.$$

Do opisu pełzania w temperaturach podwyższonych wykorzystano równanie (14) zamieszczone w punkcie 3.1.

W zakresie stanu szklistego tworzywa, tj. temperaturze badań  $T = 40^{\circ}\text{C}$ , nie stwierdzono odkształceń trwałych. Można przyjąć, iż lepkość  $\eta$  jest tak duża, że odkształcenia  $\varepsilon_p(t)$  są bliskie zeru. Zatem do przedstawienia wyników pomiarów odkształceń w temperaturze  $40^{\circ}\text{C}$  wykorzystano zależność (10).

Analiza wykresów pełzania mechanicznego w temperaturach  $80^{\circ}$  i  $100^{\circ}\text{C}$  nasuwa przypuszczenie, że badany materiał znajduje się w obszarze przejściowym między stanem szklistym i stanem wysokoelastycznym. Ten stan przejściowy określany jest często [1], [5], jako stan wymuszonej elastyczności. Zaobserwowane znaczne odkształcenia trwałe podczas prób pełzania w temperaturze  $80^{\circ}$  i  $100^{\circ}\text{C}$  wskazują na zmniejszanie się lepkości  $\eta$  w miarę wzrostu temperatury. Szczegółową analizę wyników badań w temperaturze  $80^{\circ}$  i  $100^{\circ}\text{C}$ , opartą o zależność (14), podano w pracy [12].



Rys. 4

Na rys. 4 pokazano wykresy prędkości pełzania w różnych temperaturach dla naprężenia przy pełzaniu  $\sigma = 50 \text{ kGcm}^{-2}$ . Z wykresu na rysunku 4 widać, że pełzanie mechaniczne w temperaturze  $100^{\circ}\text{C}$  odbywa się ze znaczną prędkością odkształcenia i ma charakter niestabilny.

**1.2. Zależności opisujące pełzanie optyczne w temperaturze pokojowej i w temperaturach podwyższonych.** Na podstawie stwierdzonego poprzednio w punkcie 1.1 podobieństwa przebiegu krzywych charakteryzujących pełzanie mechaniczne i optyczne podjęto próbę

przedstawienia zależności między efektem optycznym i czasem w postaci funkcji w analogicznej formie, jak w przypadku odkształceń, mianowicie

$$(19) \quad m_c = m_0 + m_{cn},$$

gdzie

- $m_c$  sumaryczny rząd izochromy przy pełzaniu,
- $m_0$  rząd izochromy bezpośrednio po obciążeniu,
- $m_{cn}$  reologiczny efekt optyczny.

Wprowadzając nowe parametry  $V_1$  i  $\alpha_1$  można analogicznie do wyrażenia (9) przedstawić  $m_{cn}$  w postaci

$$(20) \quad m_{cn} = V_1 t^{\alpha_1}$$

tutaj  $V_1$  — parametr zależny od naprężenia i temperatury,  $\alpha_1$  — parametr zależny od rodzaju materiału

Biorąc pod uwagę (19) i (20) otrzymuje się

$$(21) \quad m_c = m_0 + V_1 t^{\alpha_1}.$$

Wartość parametru  $\alpha_1$  zmienia się od 0,20226 do 0,26759. Ze względu na małe zmiany tego parametru wydaje się możliwe przyjęcie wartości  $\alpha_1 = 0,22390$  równej średniej sumarycznej w rozpatrywanym przedziale naprężeń. Największa procentowa odchyłka od wartości średniej tego parametru wynosi 9,51%.

Wyznaczone parametry  $\alpha_1$  i  $V_1$  pozwoliły na przedstawienie zależności  $m_c = m(t)$  dla  $\sigma = \text{const}$ . Odchyłki procentowe wyników badań doświadczalnych od wartości wyznaczonych równaniem (21) osiągają dla czasów  $t < t_1$  ( $t_1 = 2$  h) wartość 0,95% oraz dla  $t > t_1$  odpowiednio 0,70%. Małe wartości procentowe odchyłek świadczą o prawidłowości przedstawienia krzywych pełzania optycznego zależnością (21).

Na rys. 5 przedstawiono w układzie podwójnie logarytmicznym reologiczny efekt optyczny  $m_{cn}$  w zależności od czasu  $t$ . Pełzanie optyczne w temperaturach podwyższonych opisano równaniami przyjętymi przez analogię do pełzania mechanicznego.

Z uwagi na podobieństwo przebiegu krzywych pełzania mechanicznego i optycznego w temperaturach 80° i 100°C nasuwa się przypuszczenie, że całkowity rząd izochromy przy pełzaniu optycznym w wymienionych temperaturach można wyrazić wzorem

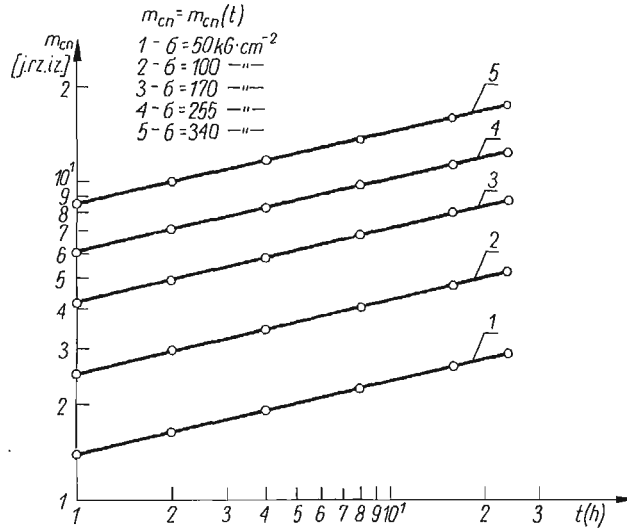
$$(22) \quad m_c = m_0 + V_1 t^{\alpha_1} + \mu_1 t,$$

gdzie  $\mu_1$  — parametr charakteryzujący trwały efekt optyczny.

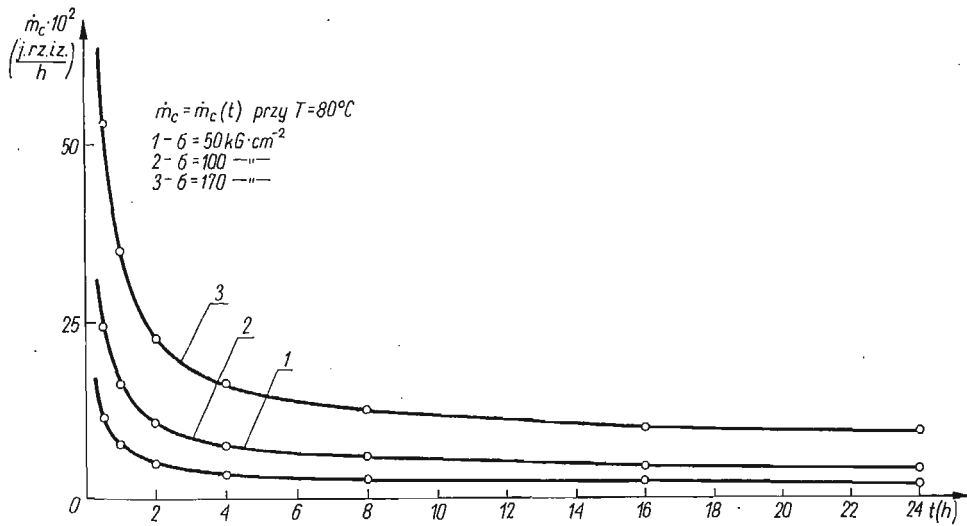
Przykładowo na rys. 6 przedstawiono wykresy krzywych prędkości pełzania obliczonych po zróżniczkowaniu zależności (22) w temperaturze  $T = 80^\circ\text{C}$ . Analizę wyników badań pełzania optycznego w temperaturze 100°C oparto o analogiczną zależność, jak w przypadku pełzania w temperaturze 80°C.

**1.3. Relaksacja naprężeń w różnych temperaturach.** Wyniki badań relaksacji mogaw pewnym stopniu stanowić potwierdzenie otrzymanych poprzednio związków charakteryzujących pełzanie przy stałej wartości naprężenia. W tym celu rozpatrzony zostanie przebieg relaksacji w możliwie prostym ujęciu. Opisane w artykule [11] badania relak-

sacji prowadzono w temperaturach 18°, 40° i 80°C. Z uwagi na kontrolny charakter tych badań w dalszych rozważaniach ograniczymy się do opisu relaksacji naprężeń w temperaturach 18° i 40°C.



Rys. 5



Rys. 6

Całkowite odkształcenie podczas relaksacji jest sumą odkształcenia sprężystego i odkształcenia pełzania przy zmiennym naprężeniu. Zakładając, że odkształcenie sprężyste podlega prawu Hooke'a przy pewnym stałym module  $E$ , przebieg relaksacji można określić

lić równaniem różniczkowym:

$$(23) \quad \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \dot{\varepsilon}_{cn} = 0,$$

gdzie

$$E \quad \text{moduł sprężystości,}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} \quad \text{prędkość naprężenia,}$$

$$\dot{\varepsilon}_{cn} \quad \text{prędkość odkształcenia przy pełzaniu.}$$

Prędkość odkształcenia przy pełzaniu  $\dot{\varepsilon}_{cn}$  można wyznaczyć w oparciu o zależności opisujące pełzanie w temperaturach 18° i 40°C (punkt 1).

Pierwiastkując obustronnie związek (9) otrzymuje się

$$(24) \quad \varepsilon_{cn}^{1/\alpha} = V^{1/\alpha} t.$$

Po obustronnym zróżniczkowaniu zależności (24) względem czasu  $t$  prędkość  $\sigma$  wyraża się w postaci

$$(25) \quad \dot{\varepsilon}_{cn} = \frac{V^{1/\alpha}}{\varepsilon_{cn}^{1/\alpha-1}},$$

co odpowiada uzależnieniu umocnienia od odkształcenia.

Z drugiej strony w rozpatrywanym przypadku relaksacji odkształcenie  $\varepsilon_{cn}$  spełnia zależność

$$(26) \quad \varepsilon_{cn} = \frac{\sigma_0 - \sigma}{E},$$

gdzie  $\sigma_0$  — naprężenie początkowe,  $\sigma$  — naprężenie w chwili czasowej  $t$ .

W dalszym ciągu rozważań za wartości modułów sprężystości  $E$  w rozpatrywanych temperaturach przyjmowane będą umownie wartości  $E$  wyznaczone w badaniach porównawczych. Uwzględniając związki (24), (25) i (26) otrzymuje się równanie relaksacji naprężenia w czasie

$$(27) \quad \frac{d\sigma}{dt} + \alpha \frac{V^{1/\alpha}}{(\sigma_0 - \sigma)^{1/\alpha-1}} E^{1/\alpha} = 0.$$

Biorąc pod uwagę fakt, że zależną od naprężenia funkcję  $V$  określono jedynie wykreślnie, równanie (27) rozwiązano metodą numeryczną. Przyjmując  $t$  za funkcję  $\sigma$  można równanie (27) przedstawić w postaci

$$(28) \quad dt = f(\sigma) d\sigma,$$

gdzie

$$(29) \quad f(\sigma) = - \frac{1(\sigma_0 - \sigma)^{1/\alpha-1}}{\alpha E^{1/\alpha}}.$$

Przez wprowadzenie w miejsce różniczek różnic skończonych, stosownie do zależności (28) otrzymuje się

$$(30) \quad (\Delta t)_i = f_i(\sigma_i)(\Delta \sigma_i),$$

gdzie:

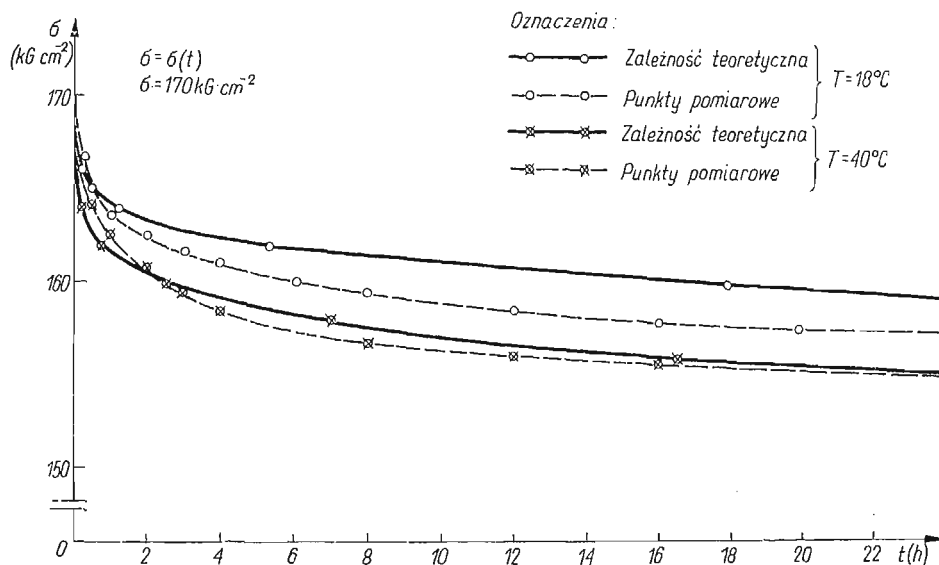
$$f_i(\sigma) = \frac{1}{2} [f(\sigma_i) + f(\sigma_{i-1})],$$

$$(\Delta\sigma)_i = \sigma_i - \sigma_{i-1},$$

$$(\Delta t)_i = t_i - t_{i-1}.$$

Posiłkując się wzorem (30) wyznaczono wartości naprężenia podczas relaksacji badanego materiału modelowego przy założeniu naprężeń początkowych  $\sigma_0 = 170 \text{ kG/cm}^2$  w temperaturach  $18^\circ \text{C}$  i  $40^\circ \text{C}$ .

Na rys. 7 przedstawiono wykresy zależności  $\sigma = \sigma(t)$ , przy temperaturach badania  $T = 18^\circ \text{C}$  i  $T = 40^\circ \text{C}$  uzyskanych z rozwiązania równania (27). Z rysunku tego można



Rys. 7

Tablica 2

Lp	Metoda	Naprężenie $\sigma_k$ (kG/cm <sup>2</sup> ) przy temperaturach		% odchyłki w stosunku do metody [3]	
		18°C	40°C	18°C	40°C
1	Obliczeniowa na podstawie równania (27)	159,40	155,30	-1,06	+0,40
2	Pomiar elastooptyczny	158,95	155,65	-0,78	+0,18
3	Na podstawie wartości siły rozciągającej z pomiarów bezpośrednich	157,72	155,93	0	0

stwierdzić dostateczną zgodność przebiegu zależności  $\sigma = \sigma(t)$  wyznaczonych równaniem (27) oraz wartości  $\sigma(t)$  określonych doświadczalnie. Maksymalne podstawowe odchyłki osiągają wartość 1,28% w temperaturze 18°C oraz 0,51% w temperaturze 40°C. Pomiary relaksacji optycznej mierzonej spadkiem rzędu izochromy potwierdziły zgodność wyników otrzymanych metodą analityczną.

W tablicy 2 zestawiono wartości naprężeń końcowych  $\sigma_k$  po 24 godzinach relaksacji, wyznaczonych na podstawie: rozwiązania równania (27), pomiarów elastooptycznych i wartości siły obciążającej próbkę.

Otrzymane niewielkie odchyłki procentowe świadczą o poprawności opisu relaksacji przyjętym równaniem różniczkowym.

## 2. Wnioski szczegółowe z przeprowadzonych badań

Analiza wyników pełzania mechanicznego i optycznego w różnych temperaturach rozpatrywanego materiału prowadzi do następujących wniosków szczegółowych:

1. W stanie szklistym w zakresie temperatur 18° i 40°C badane tworzywo wykazuje pełzanie o charakterze liniowym, podlegając zasadzie superpozycji Boltzmana.
2. W temperaturze 80° i 100°C pełzanie ma charakter zbliżony do liniowego tylko w początkowym okresie ( $t < 0,5$  h).
3. Prędkość pełzania zależy zarówno od temperatury, jak i wartości naprężenia;
4. W miarę upływu czasu wartości prędkości pełzania w badanym zakresie naprężeń i temperatury maleją monotonicznie.
5. W temperaturach 80° i 100°C można zauważyć występowanie odkształceń trwałych, których wartość zwiększa się w miarę wzrostu temperatury, naprężeń i czasu. W wymienionych temperaturach odkształcenie trwałe jest proporcjonalne do wartości naprężenia i czasu pełzania.
6. Z uwagi na zmienność reologicznego efektu optycznego przy równoczesnej zmianie wywołanych pełzaniem mechanicznym składowych stanu odkształcenia, nasuwa się myśl o związku pełzania optycznego wyrażonego rzędem izochromy z odkształceniami wywołanymi pełzaniem mechanicznym.
7. Prędkość pełzania optycznego jest zależna od naprężenia i temperatury  $T$ . Przy ustalonej temperaturze prędkość pełzania optycznego jest większa dla większych naprężeń. Przy ustalonym naprężeniu prędkość ta rośnie w miarę wzrostu temperatury  $T$ .
8. W stanie szklistym tworzywa proces pełzania optycznego można w zasadzie uznać za odwracalny. Przykładowo wartość rzędu izochromy po okresie 24-godzinnego nawrotu wynosi 0,03 j.r.z.iz. dla naprężeń  $\sigma = 340$  kG/cm<sup>2</sup>.
9. Badane tworzywo w przedziale  $T = 80^\circ\text{C}$  i  $T = 100^\circ\text{C}$  po okresie 24-godzinnego nawrotu przy pełzaniu wykazuje znaczny trwały efekt optyczny o wartościach proporcjonalnych do czasu pełzania.
10. Badane tworzywo podlega relaksacji, której przebieg w czasie można opisać z dobrą dokładnością równaniem (23).
11. Opis analityczny relaksacji naprężeń w temperaturach 18° i 40°C potwierdza wyniki badań pełzania mechanicznego.



## Literatura cytowana w tekście

1. Т. АЛФРЕЙ, *Механические свойства высокополимеров*, Издат. Иностранной Литературы, Москва 1952.
2. L. BRUNARSKI, W. CIOLEK, *Odkształcenia reologiczne stali przy liniowo zmieniającym się naprężeniu*, IV Sympozjon poświęcony reologii, Wrocław 1969.
3. J. H. FERRY, *Lepkosprężystość polimerów*, WNT, Warszawa 1968.
4. I. FINNIE, W. R. HELLER, *Pełzanie materiałów konstrukcyjnych*, WNT, Warszawa 1962.
5. J. KAPUŚCIŃSKI, *Własności lepkoelastyczne szkła organicznego w zakresie temperatur jego stosowania*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1970.
6. Z. ORŁOŚ, K. SZULBORSKI, *Niektóre zagadnienia reologiczne materiałów do badań modelowych*, IV Sympozjon poświęcony reologii, Wrocław 1969.
7. J. T. PINDERA, *Reologiczne własności materiałów modelowych*, WNT, Warszawa 1962.
8. Н. И. РАБОТНОВ, *Ползучесть элементов конструкций*, Издат. „Наука”. Главная Редакция Физико-Математической Литературы, Москва 1966.
9. A. WILCZYŃSKI, *Badanie własności mechanicznych niektórych tworzyw sztucznych*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 1, 6 (1963).
10. J. ZAWADZKI, E. GROZIK, *Badania podstawowe do studium nad anizotermicznym pełzaniem tworzyw termoplastycznych*, IV Sympozjon poświęcony reologii, Wrocław 1969.
11. K. SZULBORSKI, *Badanie własności reologicznych materiału modelowego wykonanego w oparciu o żywicę epoksydową «Epidian 2»*, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 3, 10 (1972).
12. K. SZULBORSKI, *Własności mechaniczne i optyczne w różnych temperaturach materiału modelowego opartego na żywicy epoksydowej «Epidian 2»*. Rozprawa doktorska, WAT, 1970.

## Резюме

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ И ОПТИЧЕСКОЙ  
ПОЛЗУЧЕСТЕЙ МОДЕЛЬНОГО МАТЕРИАЛА СИНТЕЗИРОВАННОГО  
ИЗ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ЭПОКСИДНОЙ СМОЛЫ

В статье представлены зависимости описывающие механическую и оптическую ползучести модельной пластмассы, изготовленной на основе эпоксидной смолы «Эпидиан 2». Предложены реологические уравнения состояния пластмассы испытываемой в температурах 18°C, 40°C, 80°C, 100°C.

Поведение кривых механической ползучести проверено дополнительно при помощи зависимостей, описывающих релаксацию напряжений в температурах эксперимента 18 и 40°C.

## Summary

ANALYSIS OF RESULTS OF MECHANICAL AND OPTICAL CREEP INVESTIGATIONS OF  
A POLISH RESIN USED FOR PHOTOELASTIC MODELS

The paper presents relations describing the process of mechanical creep and fading of a model material based on the epoxy resin «Epidian 2». The rheological constitutive equation is proposed for the material tested at temperatures 18°, 40°, 80° and 100° centigrades.

The form of the mechanical creep curves has been additionally verified by means of the relations describing the relaxation of stresses at the temperatures of 18°C and 40°C.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1972 r.*



# BIULETYN INFORMACYJNY

## KOMUNIKAT

### I MIĘDZYNARODOWE — CISM — IFToMM

#### SYMPOZJUM TEORII I PRAKTYKI ROBOTÓW I MANIPULATORÓW (ROMANSY-73)\*

Udine, Włochy, wrzesień 1973 r.

Podczas III Międzynarodowego Kongresu Teorii Maszyn i Mechanizmów, który odbył się w Kupar (Jugosławia), we wrześniu 1971 r., przyjęto uchwałę o zorganizowaniu I Sympozjum Teorii i Praktyki Robotów i Manipulatorów pod auspicjami Międzynarodowego Centrum Mechaniki (CISM) oraz Międzynarodowej Federacji Teorii Maszyn i Mechanizmów (IFToMM). Powołano Komitet Organizacyjny Sympozjum, którego przewodnictwem objął prof. A. KOBRYŃSKI z Instytutu Budowy Maszyn AN ZSRR w Moskwie, znany specjalista w dziedzinie teorii maszyn, sterowania i biocybernetyki. Wiceprzewodniczącym Komitetu został prof. L. SOBRERO, sekretarz generalny CISMu. W skład Komitetu weszli akad. I. ARTOBOLEWSKI (AN ZSRR Moskwa) — prezydent IFToMM, prof. G. BIANCHI (Politechnika Mediolańska), dr inż. C. BONA (Ivrea, Włochy), prof. I. KATO (Uniwersytet Waseda, Tokio), prof. M. KONSTANTINOV (Sofia) — sekretarz generalny IFToMM, prof. A. MORECKI (Politechnika Warszawska, PK TMM), prof. B. ROTH (Uniwersytet w Stanfordzie, USA), prof. M. W. THRING (Uniwersytet Londyński), prof. M. VUKOBRATOVIČ (Instytut Mihajlo Pupin, Belgrad), prof. D. WHITNEY (Instytut Techniczny w Massachusetts, USA) oraz prof. M. J. WARNECKE (Politechnika w Stuttgarcie, NRF).

W dniach 10—13 maja 1972 r. w Pałacu-Muzeum w Nieborowie odbyło się pierwsze posiedzenie Komitetu ROMANSY-73.

W organizacji posiedzenia udział wzięły: Polski Komitet Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN i Polski Komitet Teorii Maszyn i Mechanizmów.

Szczególnej pomocy i poparcia podczas prac przygotowawczych udzielali prof. W. NOWACKI, Wiceprezes PAN, prof. W. OLSZAK, PAN i CISM, prof. J. ODERFELD, przewodniczący PKTMM oraz prof. A. SAWCZUK, przewodniczący KM i FOC PAN.

Pracą Komitetu Organizacyjnego kierował prof. dr A. MORECKI przy udziale sekretarzy posiedzeń, dra inż. K. KĘDZIORA i mgr inż. W. SZYDŁOWSKIEGO.

Podczas jednej z sesji roboczych w obradach uczestniczyli prof. A. LETOV (ZSRR), przedstawiciel IFACu, prof. B. SOTSKOV członek AN ZSRR oraz prof. dr M. NAŁĘCZ, sekretarz Wydziału IV PAN.

Ustalono, że tematyka Sympozjum będzie zgrupowana wokół pięciu podstawowych kierunków, mianowicie:

1. Mechanika robotów i manipulatorów.
2. Sterowanie ruchem robotów i manipulatorów.
3. Konstrukcja i synteza robotów i manipulatorów.
4. Biochemika ruchu z zastosowaniem do zagadnień robotów i manipulatorów.
5. Zastosowania robotów i manipulatorów.

Przewiduje się wygłoszenie podczas obrad Sympozjum około 50 referatów i komunikatów zakwalifikowanych wstępnie przez Narodowe Komitety IFToMM, członków Komitetu Organizacyjnego i Komitet Organizacyjny ROMANSY-73. Liczba zaproszonych referentów i obserwatorów z 18 krajów —

\*) Robots and Manipulators Systems.

do 75 osób. Wszystkie referaty powinny zawierać oryginalny, niepublikowany materiał. Przewiduje się ogłoszenie materiałów Sympozjum przez Wydawnictwo Springer-Verlag. Poza kilkoma sesjami roboczymi odbytymi w Nieborowie, podczas których, niezależnie od spraw organizacyjnych, wyświetlono i omówiono kilka ciekawych filmów japońskich, angielskich, jugosłowiańskich i polskich z dziedziny manipulatorów i robotów, uczestnicy posiedzenia odbyli dwie sesje wyjazdowe.

Podczas pierwszej sesji, odbytej w Instytucie Mechaniki Stosowanej Wydziału MEiL Politechniki Warszawskiej, przedstawiono kilka komunikatów ilustrujących kierunki badawcze uprawiane przez uczonych polskich, wygłoszonych przez doc. dr hab. K. FIDELUSA z AWF oraz dr inż. K. KĘDZIORA i dr inż. K. NAZARCZUKA z PW z dziedziny biomechaniki mięśni naturalnych i sztucznych, koordynacji ruchu oraz biomanipulatorów kończyn górnych człowieka. Podczas kolejnej sesji w Klinice Rehabilitacji w Konstancinie uczestnicy posiedzenia mieli możliwość zapoznania się z pracami z dziedziny ortotycznych manipulatorów kończyn górnych oraz «żywych» manipulatorów kończyn, tzn. uruchamiania kończyn przy użyciu stymulatorów implantowanych.

Obrady przebiegały w miłej i roboczej atmosferze, przy dużej pomocy kierownictwa i personelu Muzeum.

*A. Morecki (Warszawa)*

#### POLSKO-RADZIECKA SESJA NAUKOWA PROBLEMY MECHANIKI CIAŁA ODKSZTAŁCALNEGO

W dniach 12—15 czerwca 1972 r. odbyła się w Sandomierzu polsko-radziecka sesja naukowa z dziedziny mechaniki ośrodków ciągłych, zorganizowana z okazji 25-lecia współpracy naukowo-technicznej między Polską a ZSRR.

Sesja została zorganizowana przez Kielecko-Radomską Wyższą Szkołę Inżynierską (doc. dr A. RADOWICZ) i Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN (dr inż. J. NAJAR). Uczestniczyło w niej około 50 naukowców polskich, reprezentujących głównie IPPT, Politechnikę Krakowską i Kielecko-Radomską WSI oraz delegacja mechaników radzieckich składająca się z 7 osób na czele z czł. rzecz. AN ZSRR prof. dr Ju. N. RABOTNOWEM. Wygłoszono 30 referatów o szerokim wachlarzu tematycznym, od ogólnych zagadnień mechaniki racjonalnej poprzez problemy mechaniki ciała stałego do zagadnień hydrodynamiki. Obszerny zakres rozpatrywanych problemów związany był z przygotowaniem do światowego Kongresu Mechaniki w Moskwie w sierpniu 1972 r., bowiem większość wygłoszonych prac była przygotowana na ten kongres.

Obrady sesji zagał rektor Kielecko-Radomskiej WSI prof. dr H. FRĄCKIEWICZ, a przemówienia powitalne wygłosili wicepr. zes PAN prof. dr W. NOWACKI i kierownik grupy radzieckiej prof. dr Ju. N. RABOTNOW.

Pierwsze posiedzenie, któremu przewodniczył prof. dr W. NOWACKI rozpoczęło się od referatu S. A. AMBARCUMIANA (Erewań), na temat zagadnień różnomodułowej teorii sprężystości, sprowadzonej do pewnego rodzaju anizotropii, narzuconej przez stan naprężenia. Następnie D. ROGULA (Warszawa) zaprezentował problemy nielokalnej kontynualnej teorii sprężystości, koncentrując się na badaniu osobliwości rozwiązań fundamentalnych operatorów nielokalnych. Ju. W. NIMIROWSKI (Nowosybirsk) przedstawił możliwości realizacji stanu bezmomentowego w powłokach sprężystych i niesprężystych przy pomocy doboru parametrów geometrycznych i fizycznych tych powłok. W. OLSZAK, P. PERZYNA i W. KOSTŃSKI (Warszawa) zaprezentowali w swoich referatach punkt widzenia termomechaniki racjonalnej na problemy lepkoplastyczności i pamięci materiału.

W drugim posiedzeniu sesji, któremu przewodniczył prof. dr Ju. N. RABOTNOW, przedstawiono trzy prace z dziedziny dynamiki ośrodków plastycznych. J. ZAWIDZKI (Warszawa) zreferował problem inercyjnego grawitacyjnego wpływu ośrodka syckiego ze zbiornika, przy założeniu stacjonarności kinematyki. T. WIERZBICKI (Warszawa) przedstawił koncepcję uproszczonej analizy konstrukcji w stanie plastycznym

przy obciążeniach dynamicznych, polegającą na rozdzieleniu zmiennych przestrzennych i czasu oraz całkowym spełnieniu warunku plastyczności. J. KLEPACZKO (Warszawa) zanalizował równanie konstytutywne Lubliner-Cristescu i na podstawie własnych wyników doświadczalnych omówił możliwości weryfikacji tych równań przy pomocy doświadczeń z falą dociążania w prętach stalowych, aluminiowych i miedzianych.

Trzeciemu posiedzeniu przewodniczył prof. dr A. SAWCZUK. Wysłuchano referatu W. N. NIKOLAJEWSKIEGO (Moskwa) na temat analizy wybuchu podziemnego w warunkach, gdy do powierzchni dociera jedynie fala akustyczna, zaś strefa zniszczeń (kawerna) pozostaje pod ziemią. Następnie M. ŻYCZKOWSKI (Kraków) omówił zagadnienia nośności rozdzielczej konstrukcji sprężysto-plastycznych; na zakończenie K. A. KERIMOW (Baku) przedstawił wyniki obszernego cyklu badań dynamicznych własności materiałów przy uderzeniu poprzecznym w nici i membrany.

Tematyka posiedzenia czwartego pod przewodnictwem prof. dr S. A. AMBARCUMIANA skupiła się na zagadnieniach dynamiki gazów i plazmy. W. FISZDON i Z. WALENTA (Warszawa) przedstawili teoretyczną i eksperymentalną analizę warstwy przyściennej za frontem fali uderzeniowej w rurze udarowej, stosując dla uzyskania profilu frontu aproksymację profilu cienkiego przy zimnej ścianie. A. SZANIAWSKI (Warszawa) omówił przepływy jednoskładnikowych mieszanin trójfazowych, rozważając różne warianty oddziaływań między fazą gazową, ciekłą i stałą. S. KOSOWSKI (Warszawa) zreferował problem oddziaływania z powierzchnią ośrodka swobodnie-molekularnego poruszającego się układu dwu ciał. Z. PIETRZYK (Warszawa) porównał własne rezultaty doświadczalne z teoretyczną propozycją opisu wpływu dyfuzji na temperaturę pinch-elektronów. Z. PERADZYŃSKI (Warszawa) przedstawił na przykładzie dynamiki gazów nieliniowe oddziaływanie fal w ośrodkach rządzonych przez quasi-liniowe układy równań cząstkowych.

Problemy reologii dominowały w referatach wygłoszonych na piątym posiedzeniu, któremu przewodniczył prof. dr H. ZORSKI. Ju N. RABOTNOW (Moskwa) omówił cykl prac teoretycznych i doświadczalnych wykonanych pod jego kierownictwem w Instytucie Maszynoznawstwa AN ZSRR i dotyczących dwu grup zagadnień: pelzania tworzyw zbrojonych włóknem szklanym oraz problemów dynamiki stali niskowęglowych z uwzględnieniem czasu opóźnienia płynięcia plastycznego. J. RYCHLEWSKI (Warszawa) przedstawił koncepcję ogólnej definicji lepkości materiałów, sformułowaną w terminologii mechaniki racjonalnej i teorii półgrup. S. ZAHORSKI (Warszawa) rozpatrzył niewiskozymetryczne przepływy nieściślnych cieczy prostych, opisywane przez proporcjonalne zmiany w czasie wszystkich składowych tensorowego wykładnika historii czystej deformacji.

Następne posiedzenie pod przewodnictwem prof. dr W. GUTKOWSKIEGO rozpoczęło się referatem A. DRESCHERA (Warszawa) i T. HUECKELA (Gdańsk) na temat gęstościowego wzmocnienia w ośrodku sypkim nieliniowo sprężysto-plastycznym ze stowarzyszonym prawem płynięcia oraz weryfikacji eksperymentalnej tego modelu. W. SZCZEPIŃSKI (Warszawa) rozważył problemy urabiania masywów gruntowych z punktu widzenia teorii plastyczności, omawiając dokładniej zagadnienia splywania warstwy np. lawiny pod wpływem sily ciężkości oraz problem wypływu ośrodka sypkiego pod parciem lemieszka spychacza lub noża zgarniacza. J. PIEŃKOWSKA (Warszawa) omówiła zagadnienia odbicia strumienia gazu jednoatomowego (szlachetnego) od powierzchni metalu, rozważanej jako kontinuum sprężyste, rozpatrując modele aktywacji termicznej oddziaływań, powodujące odchylenia od klasycznego newtonowskiego modelu odbicia. Stochastyczny problem wartości własnych związany z drganiami układów sprężystych był przedmiotem referatu K. SOBZYKA (Warszawa).

Na posiedzeniu siódmym pod przewodnictwem prof. dra W. SZCZEPIŃSKIEGO wysłuchano referatu G. S. SZAPIRO (Moskwa), który mówił o pewnych problemach mechaniki ośrodków warstwowych, mogących być przedmiotem wspólnych badań polsko-radzieckich. H. ZORSKI (Warszawa) zanalizował możliwości przybliżenia ośrodka dyskretnego przez model ciągły, wskazując na znaczenie oddziaływań dynamicznych w takim przybliżeniu. Zasady ekstremalne w teorii skończonych odkształceń plastycznych i zagadnienia stateczności konstrukcji przy tych odkształceniach były tematem referatu M. DUSZEK (Warszawa). Na zakończenie posiedzenia J. A. KÖNIG (Warszawa) omówił problemy optymalizacji niejednorodności sprężystej w procesach przystosowania konstrukcji sprężysto-plastycznych.

Ostatniemu posiedzeniu przewodniczył prof. dr G. S. SZAPIRO. O problemach geometrycznej niezmienności dyskretnych powłok siatkowych mówił H. FRĄCKIEWICZ (Kielce), rozważając zagadnienie

kinematyczne i statyczne. Z. WESOŁOWSKI (Warszawa) zreferował problem propagacji fal akustycznych w materiale sprężystym przy skończonych odkształceniach, badając problemy dyspersji geometrycznej i kształtu frontu fal. K. WILMAŃSKI (Warszawa) w ramach termodynamiki racjonalnej rozważył aksjomatyczną termodynamikę mieszanin.

Podsumowania sesji polsko-radzieckiej dokonali: zastępca sekretarza Wydziału IV PAN prof. dr J. RYCHLEWSKI, w imieniu zaś uczonych radzieckich prof. dr Ju. N. RABOTNOW. Obaj mówcy wysoko ocenili zarówno prace naukowe przedstawione na sesji, jak i atmosferę tego spotkania. Szczególne podziękowania należały się gościnnym władzom województwa kieleckiego i miasta Sandomierza.

Do zalet tego spotkania należałoby zaliczyć jego kameralny charakter, umożliwiający uczestnikom lepszą koncentrację i łatwiejsze kontakty; na sesji tej przedstawiono szeroki wachlarz zagadnień, co również przyczyniło się do ożywienia atmosfery i wzrostu aktywności w dyskusjach; znaczenie miał w tym także udział delegacji radzieckiej, liczebnie niewielkiej, ale reprezentującej wysoki poziom naukowy.

*Jerzy Najar (Warszawa)*

#### XIV ZJAZD DELEGATÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

XIV Zjazd PTMTS odbył się w Warszawie dnia 6 maja 1972 r. W Zjeździe wzięło udział 51 delegatów, przedstawiciele 11 Oddziałów Towarzystwa. Obrady otworzył przewodniczący ZG prof. dr Z. KĄCZKOWSKI. Na przewodniczącego obrad wybrano prof. dr R. KAZIMIERCZAKA (Gdańsk), na wiceprzewodniczącego prof. dr O. DĄBROWSKIEGO (Wrocław), a na sekretarzy — dr Cz. BRANICKIEGO (Gdańsk) i dr A. JAWORSKIEGO (Warszawa).

Przyjęto następujący porządek obrad:

1. Otwarcie Zjazdu, Wybór Przewodniczącego, Zastępcy Przewodniczącego i Sekretarzy Zjazdu.
2. Przyjęcie protokołu z XIII Zjazdu Delegatów PTMTS.
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej.
4. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa.
5. Złożenie sprawozdania finansowego.
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
8. Wybory:
  - a) uzupełniające Członków Zarządu Głównego,
  - b) uzupełniające Głównej Komisji Rewizyjnej.
9. Sprawa zmiany statutu Towarzystwa.
10. Zatwierdzenie uchwały Zarządu Głównego o przyjęciu członków zagranicznych PTMTS.
11. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności na następny okres.
12. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

Ad 1. Pierwszy punkt porządku dziennego wyczerpano na wstępie.

Ad 2. Protokół z poprzedniego, XIII Zjazdu Delegatów PTMTS odbytego dnia 12 czerwca 1971 r. przyjęto po wprowadzeniu poprawki, wniesionej przez prof. dra J. MUTERMILCHA.

Ad 3. Komisję Matkę i Komisję Skrutacyjną powołano w następującym składzie: doc. dr Augustyn BORCZ (Wrocław), prof. dr Zbigniew OLESIAK (Warszawa), doc. dr Kazimierz WRZEŚNIEWSKI (Poznań).

Ad 4. Sprawozdanie z działalności Towarzystwa za okres roku 1971 oraz I kwartał roku 1972 złożył przewodniczący ZG prof. dr Zbigniew KĄCZKOWSKI.

Ad 5. Sprawozdanie finansowe za rok 1971 oraz I kwartał 1972 roku (łącznie ze zreferowaniem budżetu PTMTS na rok 1972) złożył skarbnik ZG dr Kazimierz BORSUK.

- Ad 6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej przewodniczący — prof. dr Stanisław KOCAŃDA.
- Ad 7. W dyskusji, która dotyczyła sprawy składek członkowskich, konkursów naukowych przeprowadzanych przez Oddziały, nowych Oddziałów, spraw wydawniczych i budżetu Towarzystwa, zabierali głos: doc. dr R. JANICZEK, doc. dr Z. ENGEL, prof. dr Z. BRZOSKA, prof. dr J. MUTERMILCH, dr W. WALCZAK, doc. dr J. ANTONIAK.  
Odpowiedzi dyskutantom udzielili prof. dr Z. KĄCZKOWSKI i dr K. BORSUK.  
Po dyskusji przyjęto sprawozdania z działalności, finansowe i Głównej Komisji Rewizyjnej. Wniosek Głównej Komisji Rewizyjnej o udzielenie absolutorium przyjęto jednomyślnie.
- Ad 8. Sprawę wyborów, w imieniu Komisji Matki, zreferował prof. dr Z. OLESIAK.

Trwa kadencja:

- a) Przewodniczącego — prof. dra Zbigniewa KĄCZKOWSKIEGO.  
b) Członków Zarządu Głównego:  
prof. dra Janusza MURZEWSKIEGO (Kraków)  
prof. dra Zbigniewa WESOŁOWSKIEGO  
prof. dra Gustawa RAKOWSKIEGO  
dra Kazimierza BORSUKA  
c) Głównej Komisji Rewizyjnej (częściowo)  
doc. dra Eugeniusza BIELEWICZA (Gdańsk)  
dra Jacka STUPNICKIEGO  
prof. dra Jerzego SUŁOCKIEGO (Łódź)  
doc. dra Zenona WASZCZYSZYNA (Kraków)

Upływa kadencja:

- a) Członków Zarządu Głównego:  
prof. dra Wacława OLSZAKA  
prof. dra Zbigniewa OSIŃSKIEGO  
prof. dra Jana SZMELTERA  
Zastępców Członków Zarządu Głównego  
prof. dra Zbigniewa BUDZIANOWSKIEGO (Gliwice)  
doc. dra Mariana SUCHARA (Łódź)  
b) Głównej Komisji Rewizyjnej (częściowo):  
doc. dra Henryka MIKOŁAJCZAKA (Poznań)  
prof. dra Stanisława KOCAŃDY.

Na wniosek Komisji Matki w głosowaniu tajnym wybrano następujące osoby:

Do Zarządu Głównego:

- doc. dra Marka KWIECIŃSKIEGO  
prof. dra Zbigniewa OSIŃSKIEGO (ponownie)  
prof. dra Jana SZMELTERA (ponownie)

oraz na Zastępców Członków Zarządu Głównego:

- prof. dra Ottona DĄBROWSKIEGO (Wrocław)  
doc. dra Henryka MIKOŁAJCZAKA (Poznań)

Do Głównej Komisji Rewizyjnej:

- prof. dra Stanisława KOCAŃDĘ  
doc. dra Romana JANICZKA (Częstochowa)  
doc. dra Zbigniewa BYCHAWSKIEGO (Kraków)

- Ad 9. Sprawę dokonania zmian w statucie PTMTS zreferował prof. dr Z. KĄCZKOWSKI. Propozycje zmierzają m.in. do skrócenia i uproszczenia statutu oraz mają na celu zacieśnienie więzi między Zarządem Głównym a Oddziałami poprzez częstsze zwoływanie Plenarnych zebrań Zarządu Głównego o charakterze roboczym. Jednocześnie nie wydaje się celowe organizowanie corocznych (kosztownych) Zjazdów Delegatów, tym bardziej, że w czasie jednorocznej kadencji ani Zarząd Główny, ani Zarządy Oddziałów nie są w stanie przeprowadzić i zakończyć wielu długofalowych

akcji. W związku z tym zaproponowano, aby Zjazdy Delegatów odbywały się nie rzadziej niż raz na trzy lata.

Po dyskusji, w której głos zabierali: prof. dr A. CYBULSKI, doc. dr J. ANTONIAK, doc. dr E. BIELEWICZ, doc. dr Z. ENGEL, doc. dr R. JANICZEK i doc. dr Z. WASZCZYŻYŃ, oraz po wprowadzeniu sześciu poprawek do tekstu projektu nowego statutu Zjazd Delegatów przyjął jednomyślnie projekt wraz z wprowadzonymi poprawkami.

Ad 10. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI zaproponował trzy kandydatury na członków zagranicznych PTMTS, mianowicie:

prof. dr Georga RIEDERA z NRF, którego opiniodawcami i członkami wprowadzającymi są prof. dr Z. KĄCZKOWSKI i prof. dr J. SZMELTER; prof. dr L. G. ŁOJCIAŃSKIEGO z ZSSR, którego opiniodawcami i członkami wprowadzającymi są prof. dr R. SZEWAŁSKI i dr hab. R. PUZYREWSKI z Gdańska; prof. dr O. C. ZIENKIEWICZA z Wielkiej Brytanii, którego opiniodawcami i członkami wprowadzającymi są prof. dr I. KISIEL i doc. dr M. KWIECIŃSKI.

Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI scharakteryzował kandydatów informując o ich zasługach naukowych oraz aktywności na polu zacieśnienia współpracy z polskimi naukowcami.

Po dyskusji, uchwała Zarządu Głównego o przyjęciu wysuniętych kandydatów została zatwierdzona przez Zjazd Delegatów.

Ad 11. Wytyczne kierunkowe na najbliższy okres zreferował prof. dr Z. KĄCZKOWSKI. Mówca podkreślił, że uchwały i głosy w dyskusji przeprowadzonej na Zjeździe będą wytycznymi działalności. Zarząd Główny będzie realizował plan pracy na rok 1972, opracowany na podstawie planów poszczególnych Oddziałów. Zgodnie z nim przewiduje się zwiększenie liczby członków oraz uaktywnienie ośrodków terenowych, w których istnieją WSI. Odbyło się już zebranie Członków Założycieli Oddziału w Rzeszowie, przygotowuje się również założenie Oddziału w Kielcach, trudności są natomiast z powołaniem oddziałów w Białymstoku, Lublinie i Opolu.

W ramach działalności naukowej planuje się w b.r. zorganizowanie 9 sympozjów:

Oddział Gdańsk — «Metody numeryczne w mechanice»;

Oddział Gliwice — «Metody statystyczne w mechanice — stabilność, pomiary, modelowanie»;

Oddział Gliwice — «Kierunki rozwoju górniczych urządzeń wyciągowych»;

Oddział Kraków — «Mechanika ośrodków porowatych»;

Oddział Kraków — «Technika wibracyjna»;

Oddział Poznań — «VI Międzynarodowa Konferencja Drgań Nieliniowych»;

Oddział Szczecin — «Problemy wytrzymałości konstrukcji klejowych»;

Oddział Warszawa — «V symposium z zakresu doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego»;

Oddział Wrocław — «Reologia».

Ponadto planuje się zorganizowanie 4 seminariów i 4 kursów.

Konkursy naukowe zaplanowały trzy Oddziały: w Krakowie, Łodzi i Częstochowie. Jednak po dyskusji, w której wypowiedzieli się doc. dr J. ANTONIAK (dwukrotnie), prof. dr Z. BRZOSKA, doc. dr R. JANICZEK, prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, prof. dr J. MUTERMILCH (dwukrotnie), prof. dr Z. OLESIAK, prof. dr Z. OSIŃSKI i doc. dr Z. WASZCZYŻYŃ postanowiono, że konkursy ogłosi Oddział w Łodzi na najlepszą pracę w dziedzinie mechaniki teoretycznej i stosowanej, z wyłączeniem prac czysto doświadczalnych oraz Oddział w Częstochowie na najlepszą pracę doświadczalną.

W ramach akcji wydawniczej poza «Mechaniką Teoretyczną i Stosowaną» o objętości 50 arkuszy wydawniczych rocznie, streszczenia referatów na sympozja zostaną wydane przez Oddziały w Gdańsku, Krakowie, Poznaniu, Szczecinie i Warszawie.

Zreferowane wytyczne ze zmianami wynikającymi z dyskusji Zjazd przyjął jednomyślnie.

Ad 12. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI poinformował o utworzeniu nowego Oddziału Towarzystwa w Rzeszowie. Aktywny udział w utworzeniu tego Oddziału brał Zarząd i członkowie Oddziału w Krakowie. Przewodniczący Oddziału w Rzeszowie zapoznał zebranych z działalnością ośrodka rzeszowskiego w dziedzinie mechaniki i o zebraniu założycielskim dnia 14.IV.1972. Zjazd podjął jednomyślnie uchwałę powołującą Oddział PTMTS w Rzeszowie.



Po wyczerpaniu porządku dziennego Zjazdu, Przewodniczący obrad prof. dr R. KAZIMIERCZAK podziękował wszystkim referentom, którzy składali sprawozdania, dyskutantom oraz uczestnikom obrad.

Prof. dr Z. KAŹCZKOWSKI podziękował przewodniczącemu obrad, prezydium i członkom Komisji Matki i Komisji Skrutacyjnej za sprawne przeprowadzenie obrad.

Z. Olesiak (Warszawa)

## SPRAWOZDANIE

### Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA II KWARTAŁ 1972 R.

W okresie sprawozdawczym zorganizowano 16 zebrań i sesji naukowych, na których wygłoszono 21 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	T e m a t	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
1	2	3	4	5	6
Oddział w Bydgoszczy					
1.	27.04.72	A. Matysiak, K. Wierzbicki	Rzeczywista praca konstrukcji ramowej obciążonej ciężarem wielokondygnacyjnego budynku wykonanego z wielkich płyt	11	5
Oddział w Częstochowie					
2.	24.04.72	S. Piwowar	Nowe możliwości wytwarzania części maszyn przy zastosowaniu zgrzewania dyfuzyjnego	52	6
3.	11.04.72	St. Ziemia	Fizyka uszkodzeń	56	4
4.	03.05.72	R. Janiczek	Uczczenie pamięci prof. M. T. Hubera w setną rocznicę urodzin	9	1
5.	02.06.72	Szymczak	Ustroje cienkościenne o przekroju otwartym, zakrzywione, ukośnie podparte	15	4
Oddział w Gliwicach					
6.	20.04.72	St. Ścieszka	Problem tarcia suchego w hamulcach maszyn roboczych	21	3
Oddział w Krakowie					
7.	14.04.72	A. Świder	Problematyka drgań samowzbudnych w procesie przeciągania	9	5
8.	14.04.72	Z. Bychawski	Rozwój i zadania mechaniki teoretycznej wspólnie z Wydziałem Technicznym i stosowanej w świetle współczesnych możliwości analizy układów		
9.	20.04.72	J. Walczak	Działaność naukowa Profesora Hubera	26	9
10.	20.04.72	M. Życzkowski	Problematyka aproksymacji hipotezy wyę- wspólnie z Komisją Mechaniki Sto- sowanej Oddziału Krakowskiego PAN		
Oddział w Łodzi					
11.	15.06.72	R. Godlewski	Miernik kąta przesunięcia fazowego	15	3

1	2	3	4	5	6
			Oddział w Poznaniu		
12.	23.05.72	St. Wiśniewski	Zastosowanie operatora różniczkowego do obliczania wartości własnych	7	3
			Oddział w Szczecinie		
13.	04.05.72	Cz. Mickiewicz	Uczczenie setnej rocznicy urodzin Prof. M. T. Hubera	14	3
14.	04.05.72	A. Bodnar	Matematyczne metody badania stabilności układów technicznych		4
15.	09.06.72	J. Rzepka	Obliczenie fundamentów na palach metodą odkształceń sprężystych	14	4
			Oddział w Warszawie		
16.	10.04.72	J. Madejski	Efekty wlotowe w rekuperatorach współprądowych	6	5
	5.06.72	Z. Kączkowski	Wprowadzenie		
17.	5.06.72	Z. Reipert	Drgania ram obciążonych siłą ruchomą	30	7
18.	5.06.72	F. Jarzyński	Drgania płyty prostokątnej pod wpływem siły ruchomej		
19.	5.06.72	R. Skarzyński	Drgania ustrojów prętowych i płyt ciągłych wywołane ruchomym obciążeniem		
			Oddział we Wrocławiu		
20.	10.04.72	St. Dmitruk	Wytrzymałość jako cecha reologiczna gruntu i możliwość jej oznaczania	27	6
21.	29.05.72	E. Brzuchowski	Energetyczna interpretacja układów z drganiami nieliniowymi	9	3

Oddział w Warszawie zorganizował V z kolei Sympozjum z zakresu doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego. Odbyło się ono w dniach 8 i 9 czerwca 1972 r.

Wygłoszono 40 referatów 63 autorów, na siedmiu następujących sesjach:

I Zagadnienia zmęczenia

II Metody badań

III Elastooptyczne metody analizy naprężeń i odkształceń

IV i V Badania konstrukcji

VI Badania materiałowe

VII Nowe zastosowania elastooptyki

Oddział w Bydgoszczy zorganizował seminarium na temat «Teoria probabilistyczna w mechanice ośrodka ciągłego», 3 wykłady wygłosił dr J. Czajkowski.

Oddział w Gdańsku zorganizował seminarium pt. «Teoria prababilistyczna w mechanice ośrodka ciągłego». Seminarium prowadził doc. dr E. Bilewicz.

Oddział w Poznaniu przeprowadził kurs «Teoria dyslokacji»; odbyło się 10 wykładów.

We wszystkich Oddziałach odbyły się Walne Zgromadzenia, na których wybrano nowe Zarządy i Komisje Rewizyjne.

## ZARZĄDY ODDZIAŁÓW PTMETS W KADENCJI 1972/73

### Oddział w Bydgoszczy

Przewodniczący — doc. dr K. WERNEROWSKI, wiceprzewodniczący — dr T. KABAT, sekretarz — mgr inż. B. STOLKOWSKI, skarbnik — mgr inż. W. WEINER.

**Oddział w Częstochowie**

Przewodniczący — prof. dr J. KOŁAKOWSKI, wiceprzewodniczący — doc. dr hab. R. JANICZEK, sekretarz — doc. dr J. ELSNER, skarbnik — doc. dr A. SŁUŻALEC, członkowie — dr R. PARKITNY, doc. dr J. PO-ROCHNICKI.

**Oddział w Gdańsku**

Przewodniczący — prof. dr P. WILDE, wiceprzewodniczący — prof. dr J. WIĘCKOWSKI, sekretarz — dr inż. Cz. BRANICKI, skarbnik — doc. dr J. KRUSZEWSKI.

**Oddział w Gliwicach**

Przewodniczący — doc. dr hab. J. ANTONIAK, wiceprzewodniczący — doc. dr hab. J. BURSA, sekretarz — doc. dr hab. J. FOLWARCZNY, skarbnik — dr inż. A. TYLIKOWSKI.

**Oddział w Krakowie**

Przewodniczący — doc. dr Z. ENGEL, wiceprzewodniczący doc. dr Z. WASZCZYSZYN, sekretarz — dr S. KASPRZYK, skarbnik — doc. dr W. KRZYŚ, członkowie — prof. dr W. BOGUSZ, prof. dr G. SZEFER, doc. dr B. OLSZOWSKI, doc. dr Z. KORDECKI.

**Oddział w Łodzi**

Przewodniczący — prof. dr Z. PARSZEWSKI, wiceprzewodniczący — doc. dr M. SUCHAR, sekretarz — dr inż. Z. KAZIMIERSKI, skarbnik — doc. dr J. GLUZA.

**Oddział w Poznaniu**

Przewodniczący — prof. dr E. KARAŚKIEWICZ, wiceprzewodniczący — doc. dr hab. J. STEFANIAK, sekretarz — dr Zb. MAGIERA-ULRICH, skarbnik — mgr inż. A. KĘBŁOWSKI.

**Oddział w Rzeszowie**

Przewodniczący — prof. dr Z. STOJEK, sekretarz — mgr inż. J. LENDZIŃSKI, skarbnik — mgr inż. A. ŚWIDER.

**Oddział w Szczecinie**

Przewodniczący — doc. dr J. MIERZEJEWSKI, wiceprzewodniczący — doc. dr Cz. MICKIEWICZ, sekretarz — dr inż. B. TĘCZYŃSKI, skarbnik — dr inż. H. KARPIŃSKA.

**Oddział w Warszawie**

Przewodniczący — prof. dr Z. OLESIAK, wiceprzewodniczący — doc. dr B. KRAJEWSKI, sekretarz — dr A. JAWORSKI, skarbnik — doc. dr hab. P. JASTRZĘBSKI, z-ca sekr. — dr A. DRESCHER, z-ca skarbnika — dr hab. Z. REPERT, członkowie — doc. dr D. NIEPOSTYN, doc. dr E. RADWAŃSKI.

**Oddział we Wrocławiu**

Przewodniczący — prof. dr A. BORCZ, wiceprzewodniczący — doc. dr Z. GABRYSZEWSKI, sekretarz — dr inż. R. ŻUCHOWSKI, skarbnik — doc. dr E. BRZUCHOWSKI.



## INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronie z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2, itd.), w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- N.J.CYGANOWA, Niektóre własności nieholonomicznych systemów typu Czetajewa-Przeborskiego  
О некоторых свойствах неголономных систем Четаева-Пршеборского  
Certain properties of non-holonomic systems of the Cetaiev-Prieborskii type
- W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, Współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych nieliniowych układów drgających o wielu stopniach swobody  
Нормальные координаты в анализе главных резонансов нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы  
Normal coordinates in the analysis of principal resonances of nonlinear vibrating systems with many degrees of freedom
- J. КУВК, Podstawy teorii konstrukcji prętowych na ośrodku górniczym  
Основы теории стержневых сооружений установленных на горных массивах  
Foundations of the theory of rod structures built in mining areas
- C. WOŹNIAK, Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych  
Основы механики дискретизированных тел  
Basic concepts of the mechanics of discretized bodies
- W. KUFEL, O liniowych zagadnieniach teorii sprężystości ciał dyskretyzowanych  
Линейные задачи теории упругости дискретизированных тел  
On the linear problems of elasticity of discretized bodies
- J. GRABACKI, G. SZEFER, Uogólniona funkcja Greena dla nieskończonego pasma płytowego  
Обобщённая функция Грина для бесконечной полосы  
Generalized Green's function for an infinite plate strip
- J. WRANIK, Wyznaczenie zmian stałych sprężystości materiału występujących na grubości modelu gipsowego  
Определение изменений упругих постоянных материала по толщине гипсовой модели  
Determination of changes of elastic material constants occurring across the thickness of a plaster model
- J. GRABACKI, G. SZEFER, Przykłady ultradystrybucyjnych rozwiązań pasma płytowego  
Примеры обобщённых решений для полосы  
Examples of ultradistribution solutions for plate strips

BIULETYN INFORMACYJNY

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*

---