POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 10 • ZESZYT 3

WARSZAWA 1972
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

TOM 10 • ZESZYT 3

WARSZAWA 1972
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (595+105) egz. Ark. wydawn. 10,5. Ark. drukarskich 8,5. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 27.IV.1972 r. Druk ukończono w sierpniu 1972 r. Zam. 677/72. A-84 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

SETNA ROCZNICA URODZIN PROFESORA MAKSYMILIANA TYTUSA HUBERA

Zapewne nie przypuszczał profesor M. T. HUBER, że w miejscu, w którym przed stu laty przyszedł na świat (4 stycznia 1872), to znaczy w Krościenku nad Dunajcem, niemal w przededniu tej rocznicy zgromadzą się uczeni z wielu krajów świata, by dyskutować tam problemy mechaniki na XIV Konferencji Mechaniki Ciała Stałego organizowanej przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk (2–11 września 1971). W ten, prawdopodobnie nie zamierzony, sposób Polska Mechanika przywędrowała do miejsca urodzin jej najwybitniejszego przedstawiciela pierwszej połowy XX wieku, a zebrani uczeni mogli złożyć należny Mu hołd.

Profesor MAKSYMILIAN TYTUS HUBER przejawiał aktywną działalność naukową przez ponad sześćdziesiąt lat. Jego pierwszy artykuł pt. *Prosta konstrukcja hiperboli* ukazał się drukiem w «Czasopiśmie Technicznym» we Lwowie w roku 1890, gdy był zaledwie osiemnastoletnim chłopcem, studentem pierwszego roku Wydziału Inżynierii Politechniki Lwowskiej. Politechnikę Lwowską ukończył w roku 1895, tj. w roku 50-lecia istnienia Uczelni. Jednocześnie wyszło drukiem studium teoretyczne pt. *O tacheografie systemu Zieglera i Hagera*, już czwarty artykuł młodego M. T. HUBERA. Ostatnia oryginalna praca pt. *Kilka uwag o własnościach mechanicznych ciał stałych* (Arch. Mech. Stos., 1, **5** (1951) była fragmentem wykładu pt. *Najważniejsze własności materiałów konstrukcyjnych i ich rola w zagadnieniach wytrzymałościowych współczesnej techniki*, wygłoszonego przez Autora na kursie wakacyjnym dla inżynierów we wrześniu 1950 i ukazała się już po śmierci profesora M. T. HUBERA zmarłego 9 grudnia 1950 r. Interesujące jest, że w tym artykule profesor M. T. HUBER rozpatruje podstawowe założenia teorii zniszczenia według GRIFFITHA i podaje kilka uwag dotyczących zastosowania osiągnięć współczesnej fizyki w zagadnieniach wytrzymałościowych. M. T. HUBER uważał, iż dziedzina ta ma duże perspektywy rozwojowe. Artykuł ten otwierał pierwszy zeszyt «Archiwum Mechaniki Stosowanej» po przejęciu wydawnictwa przez Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych PAN i był wyrazem uczczenia pamięci wielkiego uczonego i jednego z założycieli kwartalnika.

Nie jest celem tego artykułu przypominanie szczegółowego życiorysu czy dokładne omawianie dorobku Wielkiego Uczonego (patrz M. T. HUBER, *Pisma*, tom 1, PWN 1964, także AMS, 1949, z. 4). Wydaje nam się natomiast, że najwłaściwsze będzie przypomnienie, do jakiego stopnia Jego dzieła, myśli i poglądy są nadal aktualne.

Wróćmy jednak na razie do wieku XIX. Asystentem przy Katedrze Budowy Dróg i Kolei Żelaznych zostaje mianowany M. T. HUBER jeszcze w czasie studiów w roku 1894. Po uzyskaniu dyplomu i odbyciu służby wojskowej, przez jeden rok studiuje matematykę na Uniwersytecie Berlińskim, starania o przedłużenie stypendium nie dają wyniku. Od października 1898 r. jest znowu asystentem, tym razem przy Katedrze Matematyki w Politechnice Lwowskiej. Po roku przenosi się do Krakowa. Stopień doktora nauk technicznych uzyskuje w roku 1904 za pracę pt. *Z teorii stykania się ciał stałych.* W tymże roku ukazuje się jedna z jego najbardziej znanych prac pt. *Właściwa praca odkształcenia jako miara wytężenia materiału* opublikowana w «Czasopiśmie Technicznym» we Lwowie. W roku 1906 wraca do Lwowa obejmując wykłady Mechaniki Ogólnej, a w dwa lata później zostaje kierownikiem Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Lwowskiej i profesorem zwyczajnym. W latach 1910–1912 jest dziekanem Wydziału Inżynierii. W roku 1914 zostaje wybrany Rektorem, jednak pobór do wojska uniemożliwia Mu objęcie tej funkcji. Bierze udział w walkach na froncie i dostaje się do niewoli rosyjskiej. Okres niewoli nie jest dla Niego stracony, zaznajamia się z pracami uczonych rosyjskich, zaprzyjaźnia się z profesorem S. P. TIMOSZENKĄ, organizuje szkolnictwo polskie w Kazaniu, prowadzi wykłady. Po powrocie do kraju prowadzi ożywioną działalność naukową i organizacyjną. Ponownie wybrany Rektorem Politechniki Lwowskiej, tym razem obejmuje urząd w roku akademickim 1921/22. W roku 1925 zostaje wybrany przewodniczącym Oddziału Lwowskiego Polskiego Towarzystwa Matematycznego, w roku 1927 członkiem korespondentem, a w roku 1934 członkiem czynnym Polskiej Akademii Umiejętności. Na zaproszenie Senatu Politechniki Warszawskiej obejmuje w roku 1928 kierownictwo Katedry Mechaniki II pozostając na tym stanowisku aż do wybuchu wojny. W r. 1937 otrzymuje godność członka zagranicznego Akademii Pracy im. Masaryka w Pradze. Profesor M. T. HUBER jest w tym okresie szczególnie czynny zawodowo i społecznie w stowarzyszeniach naukowych. Klęska wrześniowa nie załamuje Go. Po śmierci przewodniczącego Kasy im. Mianowskiego, obejmuje tę funkcję starając się ukryć część majątku przed okupantem zużytkowując ją na pomoc dla naukowców. Prowadzi wykłady w szkołach technicznych i na tajnej Politechnice oraz żywą działalność twórczą. Po wybuchu powstania wysiedlony z Warszawy, gdzie traci cały dorobek życia, w tym archiwum i bibliotekę, po tułaczce dostaje się do Zakopanego. Po wyzwoleniu, na zaproszenie Politechniki Gdańskiej obejmuje Katedrę Wytrzymałości Materiałów i Wyższych Zagadnień Mechaniki, przemianowaną następnie na Katedrę Stereomechaniki Technicznej. Pracuje tu do roku 1949, kiedy to przenosi się do Krakowa, gdzie obejmuje Katedrę Wyższych Zagadnień Mechaniki Akademii Górniczo-Hutniczej pozostając na tym stanowisku do końca swojego życia.

Profesor M. T. HUBER był doktorem honoris causa Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie i Politechniki Gdańskiej, profesorem honorowym Politechniki Warszawskiej. W r. 1949 zostaje laureatem Państwowej Nagrody Naukowej. Odznaczony był Komandorią Orderu Polonia Restituta i trzykrotnie Złotym Krzyżem Zasługi (1933, 1936 i 1948 r.).

Działalność naukowa profesora M. T. HUBERA zawiera się w około 240 artykułach naukowych i publicystycznych i 17 książkach i monografiach, z których wiele osiągnęło po kilka wydań. Polska Akademia Nauk powołała, po śmierci Uczonego, Komitet, którego staraniem zostało wydane przez PWN w latach 1954–1964 pięciotomowe dzieło pt. *Pisma*, w którym podano życiorys i charakterystykę działalności naukowej profesora M. T. HUBERA oraz wybór najcelniejszych jego prac naukowych.

Życie profesora HUBERA cechowała niezwykła pracowitość i ofiarność, życzliwość dla kolegów i podwładnych, optymizm i zapał do pracy, rozległe horyzonty myślowe, a równocześnie skromność Wielkiego Uczonego. Życie Jego było trudne, wydawało się, że przeżycia obu wojen światowych przyniosły Mu kompletną ruinę. Jednak z niewoli rosyjskiej wrócił

M. T. HUBER obładowany rękopisami prac, a podczas drugiej wojny światowej, mimo podeszłego wieku napisał szereg znanych monografii i podręczników nie mówiąc o działalności dydaktycznej i społecznej. Był człowiekiem niezwykłego hartu ducha, a zarazem oryginalnego dowcipu, starającym się wypowiedzieć wszędzie tam, gdzie miał coś do powiedzenia. Jego myśli przetrwały, mało, są nadal aktualne. Po Jego śmierci ukazały się nowe wydania Jego monografii, według Jego pomysłu został opracowany, rozpoczęty przez Niego «Słownik Terminologii Mechaniki Klasycznej» w 5 językach oraz podobny «Słownik Terminologii Wytrzymałości Materiałów», które ukazały się następnie w wersji polskiej (WNT, 1962) i angielskiej (WNT, 1965).

O powszechnym uznaniu Jego zasług dla rozwoju Kultury Polskiej niech świadczy zbiornikowiec polski noszący Jego Imię, zwodowany w roku 1961 przez Stocznię im. Lenina w Gdańsku.

Jego powiedzenia do dzisiaj są cytowane, jak np. *„nie błąd dyskredytuje człowieka, lecz upieranie się przy błędzie"*. M. T. HUBER stwierdzał, że podstawy pracy badawczej inżyniera powinny się opierać:

1. na umiejętności przyrodniczego myślenia, kształtowanej na mechanice i fizyce teoretycznej,
2. na podbudowie matematycznej tej umiejętności,
3. na umiejętności wykonania stosownych doświadczeń.

Zauważone błędy wytykał profesor M. T. HUBER w sposób bezpardonowy, często w gwałtownych polemikach, przy tym starał się zawsze wniknąć jak najgłębiej w tok rozumowania krytykowanej pracy, przeprowadzić dowód błędności rozumowania i wykryć prawdę.

W kwestii języka profesor M. T. HUBER uważał, że słownictwo techniczne powinno być, zgodne z duchem języka polskiego, wolne od obcych naleciałości, odpowiadać zasadom logiki przez zachowanie koincydencji między wyrazem a odtwarzanym pojęciem. Znając gruntownie języki narodów sąsiadujących dbał o poprawność językową wyrazów technicznych i niezaśmiecanie języka, przeciwstawiał się przeszczepianiu wyrazów nasuwających błędne skojarzenia myślowe, równocześnie przestrzegał jednak przed megalomanią narodową i przesadnym rugowaniem z języka ojczystego wyrazów świadczących o wpływie starszych kultur oraz apelował o zachowanie umiaru. M. T. HUBER wprowadził do języka polskiego takie terminy, jak *granica plastyczności* i *stereomechanika.* O wadze wypowiedzi profesora M. T. HUBERA w sprawach językowych świadczy to, że w książce pt. *Polszczyzna piękna i poprawna* wydanej przez Ossolineum w r. 1963 przedrukowano 5 artykułów napisanych przez Niego.

Profesor M. T. HUBER był jednym z pierwszych polskich uczonych, który bez reszty, jeszcze w czasie I wojny światowej zaangażował się po stronie teorii względności Einsteina. Pisał w jej obronie m.in. *„można wybaczyć utyskiwania niematematyków na nieprzystępność teorii względności, ale poczytywać za ujmę teorii i odmawiać jej wartości tylko dlatego, że nie da się jasno wyrazić w języku ogólnie zrozumiałym, może tylko zaślepienie lub zła wola, nie mające z nauką nic wspólnego"*, *„teoria Einsteina jest najgłębszym wniknięciem myśli ludzkiej w sam ustrój rzeczywistości"*.

W innym miejscu profesor M. T. HUBER przestrzega: *„bez teorii nie wzniosłaby się technika do poziomu umiejętności, lecz pozostałaby surowym rzemiosłem"*, *„w zagadnieniach* *technicznych polega często główna trudność na ocenie, które wpływy można pominąć, a jednym z najlepszych środków do pokonania tych trudności jest gruntowne wykształcenie teoretyczne*", ale również: „*przesada ... w teoretyzowaniu, zaniedbanie doświadczenia, prowadzi niewątpliwie na manowce*". «*Ubóstwo myśli przyrodniczej niekiedy zasłaniane jest rozmyślnie złożonym aparatem matematycznym. Jest to bardzo niesympatyczna forma nadużywania tej „królowej Nauk*"».

„*Od lat kilkunastu walczę z importowaną do nas modą ... obierania nierealnych tematów ..., byleby imponowały bogactwem środków matematycznych. Prowadzi to najczęściej do odgrzewania w nowej postaci rozwiązań zapomnianych tylko z powodu ich małego znaczenia technicznego, albo do balamutnych interpretacji fizykalnych wskutek zepchnięcia na drugi plan podstaw przyrodniczych na rzecz popisu matematycznego*". ... „*zaznaczę z naciskiem, że wykształcenie matematyczne przyszłych inżynierów badaczy uważam za conditio sine qua non ich skutecznej pracy naukowej. Ich wiedza matematyczna musi być znacznie pogłębiona w stosunku do obowiązujących programów matematyki w politechnikach, ale z jednoczesnym ugruntowaniem metod przyrodniczego myślenia o mechanice i fizyce. Braki w tych ostatnich mszczą się fatalnie*".

Wreszcie jakże znamienne słowa wypowiedziane przez Rektora M. T. HUBERA na inauguracji roku akademickiego 1921/22,: „*do utrzymania niepodległości trzeba pracy, pracy i jeszcze raz pracy. Z orężem w ręku można zrzucić jarzmo niewoli, ale rękojmia trwałej wolności tkwi w pługu, kielni i młocie; tkwi w ołówku technika i piórze uczonego; tkwi we wszystkich warsztatach fizycznej i umysłowej, produktywnej pracy*".

Tym krótkim przypomnieniem zasług naukowych i sylwetki MAKSYMILIANA TYTUSA HUBERA, w stulecie Jego urodzin, Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej składa hołd pamięci Uczonego i Człowieka.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

BADANIA W DZIEDZINIE TERMOMECHANIKI ODKSZTAŁCALNEGO CIAŁA STAŁEGO WYKONANE W UKRAIŃSKIEJ AKADEMII NAUK

A. D. KOWALENKO (KIJÓW)

W pracy omawiane są badania nieizotermicznych procesów odkształcania elementów konstrukcyjnych. Badania te są domeną termomechaniki odkształcalnych ciał stałych, rozumianej jako zespół teorii termosprężystości, termolepkosprężystości i termoplastyczności. Pokrótce omawia się prace z tych dziedzin, wykonane w AN Ukraińskiej SRR.

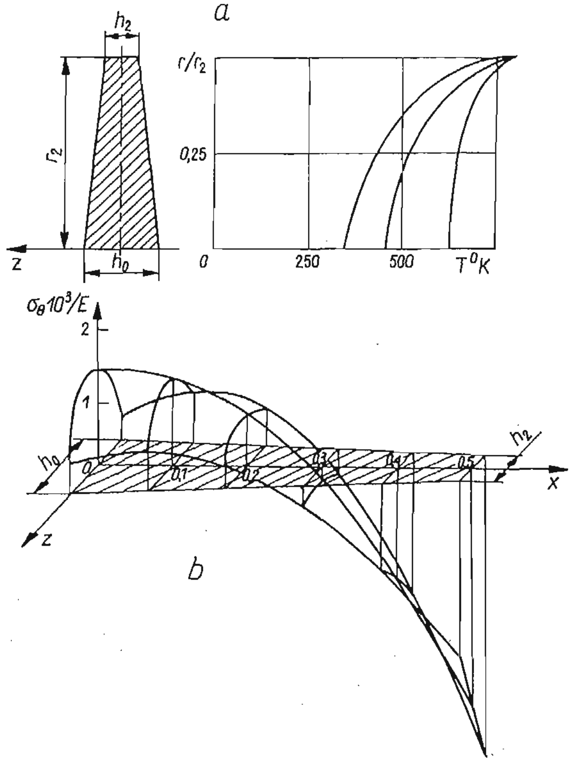
1. Największe znaczenie praktyczne mają quasi-statyczne zagadnienia termosprężystości, rozwiązywane w oparciu o teorię Duhamela–Neumanna. Ze wczesnych prac w tej dziedzinie wymienić należy publikacje członka Akademii prof. A. N. DINNIKA [1, 2], w których przeanalizowano rozkład naprężeń termosprężystych w długich walcach i rurach, znajdujących się pod działaniem niestacjonarnego pola temperatury.

W. M. MAJZEL uogólnił twierdzenie o wzajemności przemieszczeń na klasę quasi-statycznych zagadnień termosprężystości oraz opracował metodę znajdowania naprężeń termosprężystych w tarczach, płytach, powłokach i innych elementach konstrukcyjnych, opartą na wykorzystaniu rozwiązań izotermicznych zagadnień teorii sprężystości, w których dla odpowiednich ciał określa się stan naprężenia pod działaniem sił skupionych [3].

Quasi-statyczna teoria termosprężystości cienkich płyt i powłok, podobnie jak i odpowiednia teoria izotermiczna, oparta jest na hipotezie niezmienności elementu normalnego i szeroko wykorzystuje wyniki, podane w znanych monografiach A. L. GOLDENWEJZERA, A. I. ŁURIE, W. W. NOWOŻYŁOWA.

Jednakowoż dla niestacjonarnego przestrzennego pola temperatury, gdy czysto cieplne odkształcenia mogą zmieniać się po grubości płyty lub powłoki w sposób istotnie różniący się od liniowego, liniowe prawo zmiany naprężeń termosprężystych po grubości nie odpowiada już hipotezie o niezmienności elementu normalnego. Zastosowanie całkowych charakterystyk cieplnych pozwala sprowadzić zagadnienia termosprężyste z przestrzennymi polami temperatury do dwuwymiarowych izotermicznych problemów teorii płyt i powłok. Na tej podstawie opracowano teorię naprężeń cieplnych w okrągłych płytach o grubości zmiennej po promieniu oraz w powłokach obrotowych o stałej krzywiźnie linii tworzącej (powłoki stożkowe, kuliste) [4, 5, 6,]. Teoria ta oparta została na ścisłych rozwiązaniach w funkcjach specjalnych, do zbudowania których zastosowano i rozwinięto teorię funkcji hipergeometrycznych.

Część wyników obliczeń naprężeń termosprężystych podano na rys. 1 i 2. Na rys. 1 przedstawione są naprężenia obwodowe σ_θ/E w tarczy turbiny o liniowej zależności grubości tarczy od promienia; tarcza znajduje się pod działaniem pola temperatury nierównomiernego po promieniu i grubości. Rysunek 2 ilustruje istotny wpływ parametru geometrycznego $\varkappa = \frac{S_z}{h}\operatorname{ctg}\alpha$ na naprężenia termosprężyste w powłoce stożkowej o małej wyniosłości, spowodowane działaniem pola temperatury w postaci $T = T_0 + T_2 s^2 (T_0, T_2 = \text{const})$. Na rysunku tym z lewej i prawej strony pokazano rozkłady naprężeń obwodowych $\frac{\sigma_0}{K}$, gdzie $K = \alpha_T T_2 s_2^2 E$, zaś α_T jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności



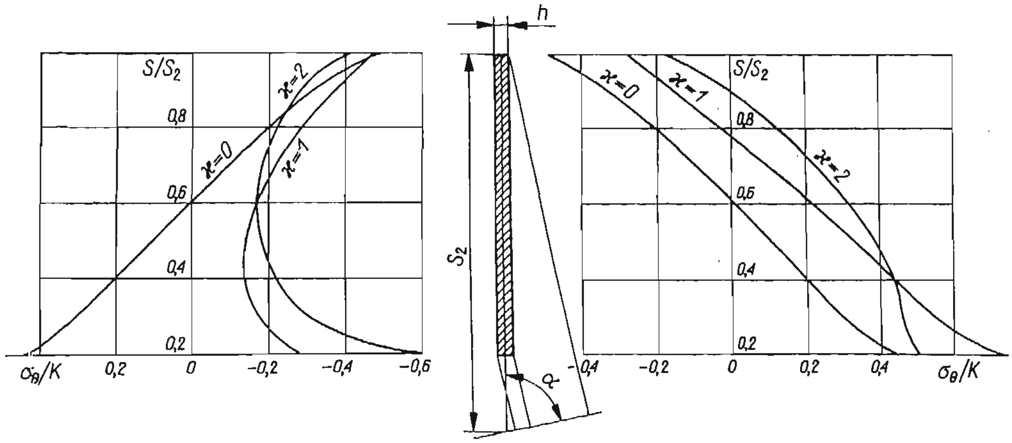
Rys. 1

cieplnej; wykresy te odnoszą się do zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni powłoki przy różnych wartościach parametru $\varkappa$; warunek $\varkappa = 0$ odpowiada płycie okrągłej.

Dla obliczania naprężeń cieplnych w masywnych częściach maszyn, takich jak wirniki oraz obudowy turbin parowych i gazowych, części reaktorów jądrowych itp., istotne znaczenie ma opracowanie metod efektywnego rozwiązywania przestrzennych zagadnień termosprężystości. Specyfika przestrzennych zagadnień termosprężystości, w porównaniu z przestrzennymi problemami izotermicznej teorii sprężystości, polega na tym, że przy gwałtownie niestacjonarnych procesach wymiany ciepła powstaje znaczna nierównomierność rozkładu temperatury, a więc i naprężeń w rozpatrywanych częściach maszyn. Wymaga to dalszych badań zagadnień brzegowych termosprężystości, w których dla dowolnego rozkładu temperatury warunki brzegowe są ściśle spełniane na całej powierzchni ciała sprężystego.

Problemy osiowosymetryczne termosprężystości są stosunkowo najlepiej opracowane ze wszystkich zagadnień przestrzennych tej teorii.

Zanim przeanalizowano te problemy dla ciał o skończonych wymiarach, opracowano metody rozwiązywania takich zagadnień dla ciał sprężystych jednospójnych, dla których możliwe jest rozdzielenie zmiennych w wektorowym równaniu Laplace'a (długi walec, pełna kula, stożek itp.). Doprowadziło to do sformułowania efektywnej metody wektorowych funkcji własnych. Charakterystyczne dla tej metody jest specjalne sformułowanie



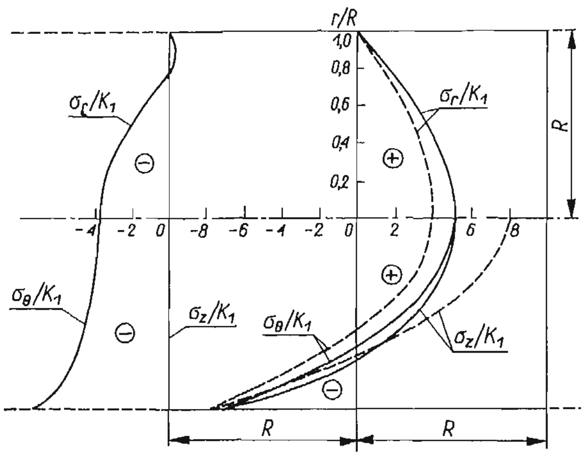
Rys. 2

warunków brzegowych dla stycznych składowych przemieszczeń i naprężeń oraz zbudowanie równań Lamégo termosprężystości w postaci wygodnej dla spełnienia warunków brzegowych [7, 8]. Za pomocą metody wektorowych funkcji własnych skonstruowano w najprostszej postaci rozwiązania zagadnień teorii sprężystości dla warstwy sprężystej, walca o przekroju kołowym i eliptycznym, kuli oraz rozwiązania nowych problemów brzegowych teorii sprężystości dla stożka, torusa, klina i innych ciał [7–12].

Badanie naprężeń cieplnych w ciele o symetrii obrotowej, dla którego wartości brzegowe funkcji poszukiwanych nie mogą być przedstawione na całej powierzchni ciała w postaci szeregów względem pełnego ortogonalnego układu funkcji, oparto o metodę superpozycji rozwiązań bardziej prostych zagadnień brzegowych, wywodzącą się z prac Lamégo i Mathiéu. Metoda superpozycji pozwala budować takie rozwiązania równań Lamégo, które zawierają wystarczającą dowolność funkcjonalną dla spełnienia warunków brzegowych na całej powierzchni ciała. Metoda ta prowadzi do nieskończonych układów równań algebraicznych lub do układów osobliwych równań całkowych. Opracowano efektywne sposoby rozwiązywania tych układów, umożliwiające uzyskanie ważnych szacowań dla wielkości nieznanych. Uzyskano rozwiązania zagadnień osiowosymetrycznych termosprężystości, takich jak rozkład naprężeń cieplnych w walcu o skończonej długości [13, 6], rozkład naprężeń cieplnych w grubościennej powłoce kulistej przy dowolnym sposobie zmiany temperatury wzdłuż tworzącej [6] i innych; dla przykładu — w pierwszym z tych problemów rozwiązanie zbudowano jako superpozycję rozwiązań dla długiego walca i dla warstwy.

Na podstawie uzyskanych ścisłych rozwiązań zbadano rozkłady naprężeń cieplnych w tarczach, powłokach, walcach, kulach itp. w funkcji postaci pola temperatury i wymiarów geometrycznych ciał sprężystych, przeanalizowano wpływ skończonych wymiarów tych ciał oraz oszacowano błędy wynikające z zastosowania zasady Saint-Venanta. Wyniki te stanowią ważne wzorce dla konstruowania i szacowania efektywności rozmaitych metod numerycznych i przybliżonych w teorii termosprężystości.

Przykładem obliczeń według rozwiązania wzorcowego są wyniki przedstawione na rys. 3. Dla pełnego walca o skończonej długości i pola temperatury w postaci $T = T_0 + T_2 r^2$, rozkład naprężeń $\frac{\sigma_r}{K_1}, \frac{\sigma_\theta}{K_1}, \frac{\sigma_z}{K_1}$, $K_1 = \frac{\alpha_T T_2 r_2^2 E}{16(1-\nu)}$, przy ścisłym spełnieniu warunków brzegowych, przedstawiony jest linią ciągłą, przy spełnieniu zaś tych warunków w sensie zasady Saint-Venanta — linią przerywaną.



Rys. 3

2. W dalszym etapie badań problemów quasi-statycznych termosprężystości rozpoczęto uwzględniać bardziej złożone formy geometryczne ciał, ich niejednorodność i anizotropię, badać mieszane warunki brzegowe wymiany ciepła itp.

Wyprowadzono równania rozwiązujące dla zagadnień równowagi termosprężystej powłok obrotowych z użebrowaniem wzdłuż tworzącej oraz tarcz z użebrowaniem krzywoliniowym, przy uwzględnieniu dyskretnego rozkładu umocnień [14, 15]. Zbadano stan naprężenia w płytach niejednorodnych o zmiennej sztywności i niesymetrycznej strukturze po grubości, znajdujących się pod działaniem obciążeń mechanicznych i cieplnych [16, 17]. Opracowano metodę obliczania powłok obrotowych, których sprężyste charakterystyki zależą od temperatury i mają charakter funkcji losowych; metoda ta polega na aproksymacji zależności funkcjonalnych pomiędzy naprężeniami i danymi wielkościami losowymi na podstawie wyników obliczeń szeregu wariantów deterministycznych [18].

Szczególną uwagę zwrócono na numeryczne sposoby rozwiązywania quasi-statycznych problemów brzegowych dla termosprężystych powłok obrotowych. Zbadano podstawowe równania wymienionej klasy zagadnień i sprowadzono je do postaci wygodnej do obliczeń numerycznych na maszynach cyfrowych. Opracowano metody, skonstruowano algorytmy i programy typowe dla numerycznego rozwiązywania zagadnień naprężeń cieplnych w niejednorodnych ortotropowych warstwowych powłokach obrotowych o zmiennej sztywności w warunkach symetrycznego i niesymetrycznego rozkładu temperatury [19–23].

Pierwszy etap rozwiązania quasi-statycznego problemu termosprężystości polega na określeniu odpowiedniego pola temperatury.

Opracowano szereg kwestii dotyczących poszukiwania stacjonarnych i niestacjonarnych pól temperatury w płytach, powłokach i ciałach obrotowych przy różnych warunkach nagrzewania [24]. Zaproponowano metodę sprowadzania przestrzennych niestacjonarnych zagadnień przewodnictwa cieplnego w płytach i powłokach o zmiennej grubości do zagadnień dwuwymiarowych; u podstaw tej metody leży aproksymacja rozkładu temperatury po grubości funkcją potęgową [23–29]. W oparciu o metodę skończonych przekształceń całkowych skonstruowano rozwiązania problemów niestacjonarnego rozkładu temperatury w rurze ortotropowej i powłoce kulistej [30, 24].

Szczególnie interesujące są mieszane problemy brzegowe termosprężystości.

Zbadany został osiowosymetryczny stan naprężenia termosprężystego w długim walcu, część powierzchni którego jest izolowana cieplnie od otoczenia, na pozostałej zaś części dana jest temperatura [24].

Przeanalizowano niestacjonarny rozkład temperatury w płytach przy mieszanych warunkach nagrzewania. Zbudowano rozwiązanie zagadnienia stacjonarnego rozkładu temperatury i naprężeń cieplnych w ortotropowej płycie półnieskończonej, znajdującej się pod działaniem źródła ciepła [24]; mieszane warunki brzegowe w tym zagadnieniu polegają na daniu strumienia ciepła na jednej części brzegu i temperatury na pozostałej części brzegu.

Na rys. 4 pokazano rozkłady naprężeń $\frac{\sigma_r}{K_2}$, gdzie $K_2 = \frac{\alpha_r E \omega_0}{\lambda}$, oznaczone linią ciągłą, oraz temperatury $(T-T_0)\frac{\lambda}{\omega_0}$, oznaczone linią przerywaną, dla różnych wartości względnej współrzędnej ξ; wielkość λ oznacza tu współczynnik przewodnictwa cieplnego, ω_0 — moc źródła ciepła, odniesioną do jednostki długości.

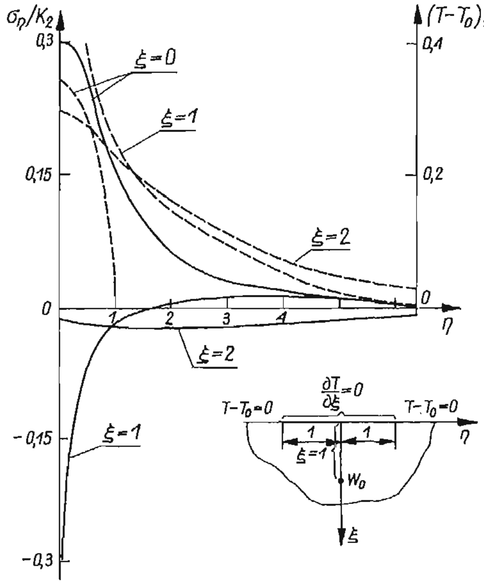
Rozpatrzono problem osiowosymetryczny dla półprzestrzeni ze stacjonarnym polem temperatury, gdy w obszarze pierścieniowym na powierzchni dany jest strumień ciepła, poza tym obszarem zaś dana jest temperatura stała [31]. Rozwiązanie konstruowane jest we współrzędnych toroidalnych. Zastosowanie transformacji całkowej Mellera — Focka sprowadza problem do układu parzystych równań całkowych, a następnie zaś wykorzystanie nieciągłych całek Mellera przekształca ten układ w równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju z jądrem symetrycznym ciągłym względem pewnej funkcji pomocniczej, określającej rozkład temperatury w półprzestrzeni.

Wyłożony powyżej przegląd quasi-statycznych zagadnień termosprężystości dotyczy badań wykonanych w Instytucie Mechaniki Ukraińskiej Akademii Nauk.

W tej samej dziedzinie istotne wyniki uzyskano w Instytucie Fizyko-Mechaniki Ukraińskiej Akademii Nauk.

Opracowano metodę operatorową znajdowania podstawowych parametrów pola temperatury, to znaczy temperatury uśrednionej po grubości i jej «momentu», które określają termosprężysty stan naprężenia w płycie lub powłoce bez jakichkolwiek początkowych założeń, dotyczących charakteru rozkładu temperatury po grubości [32–37].

Wykorzystując wyprowadzone poprzednio ogólne związki teorii przewodnictwa cieplnego sformułowano sprzężowe zagadnienie przewodnictwa cieplnego i naprężeń cieplnych w cienkich powłokach, zbadano pewne ogólne własności termosprężystego stanu naprężenia powłok oraz rozwiązano szereg konkretnych zagadnień termosprężystości powłok walcowych, m.in. zagadnienie naprężeń cieplnych, spowodowanych przez skupione nagrzewanie [34]. Uogólniono warunki cieplnego kontaktu ciał stałych [38], jak również



Rys. 4

sformułowano warunki konieczne i wystarczające braku naprężeń cieplnych w powłokach [39]. Wprowadzono pojęcie asymptotycznego stanu cieplnego, odpowiadającego takiemu czasowi nagrzewania ciała, dla którego pole temperatur nie zależy w sposób istotny od warunków początkowych. Zbadano zakres stosowalności tego pojęcia dla płyt i walców z pustkami [40, 41]. Przeanalizowano stan naprężenia w cienkich płytach i powłokach walcowych przy ruchomym obciążeniu cieplnym [42, 43, 44]. Wyprowadzono równania przewodnictwa cieplnego dla płyt i powłok, wzmocnionych dyskretnym rozkładem użebrowań [45, 46].

Wyprowadzono podstawowe równania termosprężystości i sformułowano warunki termomechaniczne nieidealnego kontaktu oraz warunki odpływu ciepła na zamocowanym brzegu dla płyt izotropowych i anizotropowych, znajdujących się pod działaniem źródeł ciepła. Zbadano wpływ anizotropii, chłodzenia powierzchni bocznych i elementów mocujących oraz nieidealnego kontaktu cieplnego i mechanicznego na rozkład naprężeń cieplnych w płytach z polimerów (tekstolitu szklanego i żywicy epoksydowej zbrojonej taśmą szklaną) [47–52].

Rozwiązano problem niestacjonarnego pola temperatury i naprężeń w półnieskończonej płycie ze szczeliną, z wnętrza której unoszony jest strumień ciepła; między ściankami bocznymi szczeliny i ośrodkiem zachodzi konwektywna wymiana ciepła. Powyższe rozwiązanie uogólniono na przypadek nieskończonej płyty i powłoki walcowej z układem szczelin, oraz półnieskończonej płyty i pasma płytowego z nieciągłymi brzegowymi warunkami cieplnymi [53].

Wiele uwagi zwrócono na badania termosprężystego stanu naprężenia w ciałach z makrodefektami typu obcych wtrąceń, pustek i szczelin. W sposób ogólny sformułowano zagadnienie płaskiego stacjonarnego pola temperatury w ośrodku z dowolnym wtrąceniem walcowym w warunkach nieidealnego kontaktu cieplnego. Zaproponowano metodę konstrukcji płaskiego stacjonarnego pola temperatury i pola naprężenia termosprężystego w nieskończonym jednorodnym i obszarami jednorodnym ciele z kilkoma izolowanymi cieplnie szczelinami prostoliniowymi i łukowymi oraz w nieograniczonym izotropowym i transwersalnie izotropowym ośrodku z przewodzącą ciepło szczeliną kołową itp. [54–58].

Na zakończenie zwróćmy uwagę na badania, mające znaczenie dla wyboru optymalnego warunku lokalnej obróbki cieplnej i dla badania termonaprężeń powstałych w rezultacie nagrzewania indukcyjnego. Pierwsza grupa badań dotyczy określenia takich pól temperatury w cienkich powłokach sprężystych, które w danym zakresie warunków nagrzewania wywołują stosunkowo najniższe naprężenie cieplne [59–62]. Druga grupa badań wiąże się z kompleksowym zagadnieniem powstawania prądów indukcyjnych oraz pól temperatury i naprężeń przez nie spowodowanych. Opracowano metodykę rozwiązania tego zagadnienia, dzięki której zbadano rozkłady temperatury i naprężenia w półprzestrzeni, warstwie, walcu i powłoce walcowej, w zależności od warunków pracy induktora, warunków wymiany ciepła oraz innych czynników [63].

3. Z zasadniczego punktu widzenia teoria Duhamela–Neumanna dla zagadnień niestacjonarnych, oddziaływań mechanicznych i cieplnych okazuje się teorią ograniczoną, gdyż nie uwzględnia efektów dynamicznych, powstających w konstrukcjach w określonych warunkach wymiany ciepła, jak również wzajemnego oddziaływania pól odkształceń i temperatury.

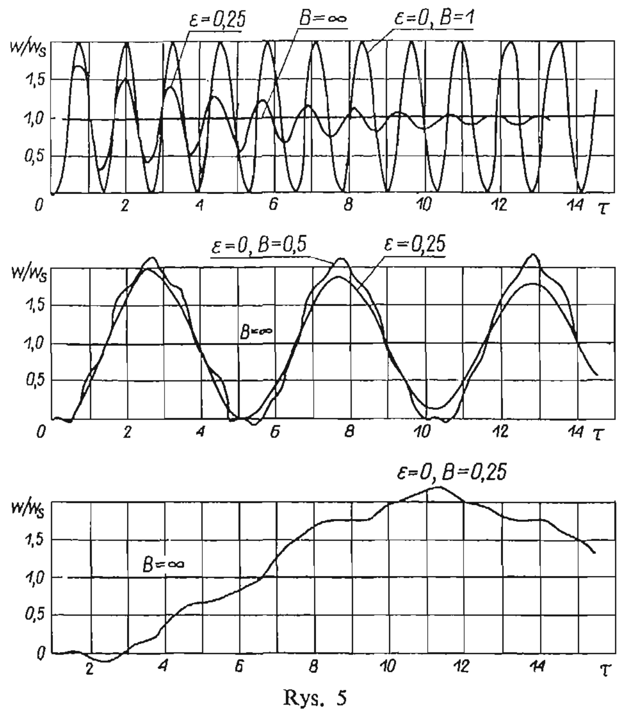
Konsekwentne badanie procesów odkształcenia termosprężystego i przewodnictwa cieplnego, jako zjawisk sprzężonych, okazało się możliwe na bazie rozważań termodynamicznych. Opracowana w ostatnich latach termodynamika procesów nieodwracalnych umożliwiła bardziej precyzyjną analizę procesów mechanicznych i cieplnych, zachodzących przy odkształcaniu ciała sprężystego. W związku z tym wyraźniej zarysowały się kontury ogólnej teorii termosprężystości, uogólniającej klasyczną teorię sprężystości i teorię przewodnictwa cieplnego.

Zazwyczaj przyjmuje się w tej teorii następujące ograniczenie na wielkość zaburzenia termicznego: zakłada się, że przyrost temperatury jest mały w porównaniu z temperaturą początkową. W pracy [6] skonstruowano ogólną teorię termosprężystości, odrzucając powyższe ograniczenie na wielkość zaburzenia cieplnego; nie naruszono przy tym założenia infinitezymalności odkształceń oraz uwzględniono zależność stałych sprężystych i współczynników przewodnictwa cieplnego od temperatury. W ogólnym przypadku teoria ta jest nieliniową, sprzężoną, dynamiczną teorią termosprężystości, zawierającą w sobie, jako przypadki szczególne, liniowe teorie dynamicznej i quasi-statycznej sprzężonej termosprężystości z małymi zaburzeniami cieplnymi, oraz dynamiczne i quasi-statyczne teorie niesprzężonej termosprężystości z dużymi zaburzeniami cieplnymi, korzystające z liniowych równań ruchu i nieliniowego równania przewodnictwa cieplnego.

Wymieńmy inne badania, związane z ogólnymi zagadnieniami teorii termosprężystości. Do nich można zaliczyć uogólnienia znanych reprezentacji rozwiązań klasycznej teorii sprężystości, podanych przez B. G. GALERKINA i P. F. PAPKOWICZA, na przypadki sprzężonych zagadnień termosprężystości oraz bardziej precyzyjną klasyfikację problemów termosprężystości i innych zagadnień [64, 6].

Jedną z pierwszych prac w dziedzinie dynamicznych zagadnień termosprężystości była praca W. I. DANIŁOWSKIEJ na temat udaru cieplnego na powierzchni półprzestrzeni.

Teoretyczna analiza wykazała możliwość pobudzenia drgań w cienkościennych elementach konstrukcyjnych (belkach, płytach, powłokach) przy pomocy impulsywnych oddziaływań termicznych. W 1957 r. BOLEY i BARBER zbadali problem udaru termicznego na powierzchni płyty prostokątnej, przeciwna strona której jest cieplnie izolowana. Wykazali oni, że maksymalne ugięcie dynamiczne tej płyty jest dwukrotnie większe od quasi-statycznego. Dla płyty okrągłej, obciążonej w analogicznych warunkach impulsem termicznym, maksymalny współczynnik dynamiczności dla osiowosymetrycznych postaci drgań okazał się równy 2,24 [6].



Rys. 5

Na rys. 5 podano krzywe zależności stosunku dynamicznego ugięcia środka płyty do quasi-statycznego ugięcia tegoż punktu $\frac{w}{w_s}$ w funkcji bezwymiarowego parametru czasu τ przy różnych wartościach parametru $B = \frac{h}{R\sqrt{a}}\left(\frac{D}{\varrho h}\right)^{1/4}$, gdzie h oznacza grubość, R—promień, ϱ — gęstość, a — współczynnik przewodnictwa temperatury, zaś $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, oraz przy różnych wartościach współczynnika sprzężenia ε. W przypadku, gdy nie uwzględnia się sprzężenia między polem temperatury i polem odkształcenia ($\varepsilon = 0$) drgania płyty dążą asymptotycznie do stanu ustalonego, w przypadku zaś uwzględniającym to sprzężenie ($\varepsilon = 0{,}25$) drgania wygasają.

Rozpatrzono problem oddziaływania na nieograniczoną przestrzeń termosprężystą źródeł ciepła okresowo zmiennych w czasie [65] lub skupionych oddziaływań siłowych [66], jak również problem drgań wymuszonych walca pod działaniem okresowo zmiennego w czasie pola temperatury [67]. Wychodząc z równań sprzężonych teorii termosprężystości przeanalizowano wpływ przewodnictwa cieplnego i odpływu ciepła na propagację fal naprężenia w cienkich prętach, płytach i powłokach walcowych, na drgania własne i wymuszone pręta o skończonej długości oraz płyty pierścieniowej [66–71].

Sformułowano przestrzenne i płaskie quasi-statyczne sprzężone zagadnienia termosprężystości oraz rozpatrzono rozwiązania tych zagadnień dla przypadku przestrzeni z pustką walcową i walca pełnego [72].

Zbadano wpływ skończonej prędkości propagacji ciepła na rozkład naprężeń cieplnych, powstających przy uderzeniu termicznym w płytach [73].

Przeanalizowano zjawisko rezonansu termoparametrycznego, polegające na pobudzeniu cienkościennego elementu konstrukcyjnego do drgań termoparametrycznych, spowodowanych przez okresowo zmienne w czasie pole temperatury, co może wywołać utratę stateczności dynamicznej tego elementu [74, 75].

Badania zjawisk termosprężystych w prętach i w warstwie sprężystej, przy uwzględnieniu wzajemnego oddziaływania pól odkształcenia i temperatury, wykazały, że w ciałach tych propagują się dwa rodzaje fal: fale sprężyste i fale termiczne, przy czym obydwie rodziny fal ulegają dyspersji i tłumieniu [76, 77].

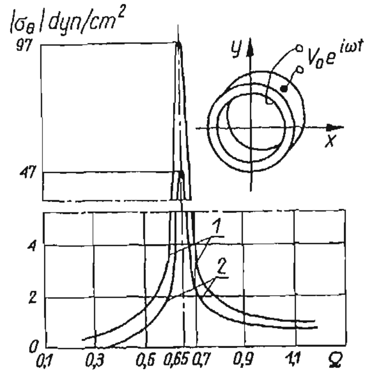
Do klasy zagadnień uwzględniających sprzężenia pól o różnym charakterze należy zaliczyć sprzężone zagadnienia elektrosprężystości. Zbadano sprzężone drgania elektrosprężyste grubościennych walców piezoceramicznych, wstępnie polaryzowanych zarówno po promieniu, jak i w kierunku obwodowym [78, 79, 80]. Wykonane obliczenia wykazały, że naprężenia dynamiczne w walcach drgających, pod wpływem harmonicznie zmiennej w czasie różnicy potencjałów przyłożonych do elektrod, mogą osiągać granicę wytrzymałości przy zmęczeniu w otoczeniu częstotliwości rezonansowej.

Na rys. 6 pokazano, dla przypadku walca polaryzowanego po promieniu, zależność bezwzględnych wartości amplitud naprężeń obwodowych σ_θ na powierzchni wewnętrznej walca (krzywa *1*) oraz na powierzchni zewnętrznej walca (krzywa *2*) w funkcji względnej częstotliwości elektrycznego pola pobudzającego Ω.

4. Przejdźmy teraz do prac z dziedziny termolepkosprężystości. Na podstawie termodynamiki procesów nieodwracalnych zbudowano zamknięty układ równań całkowo-różniczkowych, opisujących zachowanie ciała lepkosprężystego, którego właściwości mechaniczne i termofizykalne zależą od temperatury. Analogiczny układ równań dla powłok wyprowadzono w ramach hipotez Kirchhoffa–Love'a [81]. W ogólnym przypadku jest to układ nieliniowy, natomiast dla materiałów, których własności nie zależą od tempera-

tury, układ ten może być zlinearyzowany przez zaniedbanie wpływu funkcji dysypatywnej na równanie bilansu energetycznego, istotnego przy długotrwałym okresowym obciążaniu ciała.

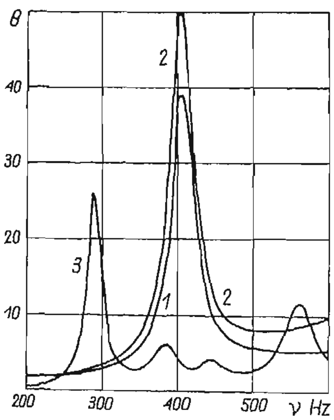
W ramach liniowej teorii dynamicznych sprzężonych problemów termolepkosprężystości przebadano propagację fal płaskich, kulistych, walcowych i powierzchniowych Ray-



Rys. 6

leigha w ośrodku lepkosprężystym. Oszacowano wpływ lepkości i sprzężenia pól na prędkości fazowe i współczynniki tłumienia zmodyfikowanych fal lepkosprężystych i termicznych w całym zakresie zmiany częstotliwości. W szczególności, głębiej zbadano mechanizm propagacji fal powierzchniowych Rayleigha i wyjaśniono charakterystyczne własności tej propagacji, opierając się na wynikach analizy równania sekularnego teorii funkcji algebraicznych [82, 83, 84].

W ramach sformułowań quasi-statycznych i dynamicznych, zbadano zagadnienia produkcji ciepła w ciałach walcowych, wykonanych z typowego materiału lepkosprężystego



Rys. 7

o dyspersji relaksacyjnej i rezonansowej w warunkach obciążenia cyklicznego. Wyjaśniono podstawowe własności pola temperatury w otoczeniu częstotliwości rezonansowych oraz wskazano zakres stosowalności przybliżenia quasi-statycznego [85, 86, 87].

Rysunek 7 ilustruje zależność bezwymiarowej temperatury θ w średnim przekroju poprzecznym powłoki walcowej w funkcji częstotliwości drgań skrętnych ν. Krzywa *1* dotyczy rozwiązania quasi-statycznego, krzywe *2* i *3* — rozwiązań dynamicznych dla różnych długości powłoki.

Dla rozwiązywania zagadnień quasi-statycznych termolepkosprężystości opracowano przybliżoną metodę operatorową, opartą na wykorzystaniu zbieżnych majoryzujących szeregów liczbowych, odpowiadających danemu szeregowi operatorowemu. Metodę tę zastosowano do rozwiązania konkretnych zagadnień [88]. Wykazano zbieżność metody rozwiązań sprężystych w postaci zaproponowanej przez SHAPERY'EGO [89].

W funkcjach hipergeometrycznych skonstruowano rozwiązania problemów osiowo-symetrycznych, dotyczących deformacji wielowarstwowych powłok stożkowych i kulistych, przy uwzględnieniu zwiększonej podatności materiału warstw przy poprzecznym ścinaniu oraz reonomicznych własności materiału [90].

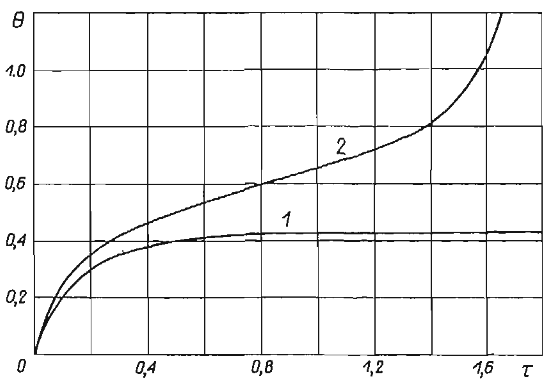
Dla ciał lepkosprężystych, wykonanych z materiałów, których własności zależą od temperatury, zbadano następujące zagadnienia.

Przeanalizowano zachowanie termomechaniczne ortotropowych powłok lepkosprężystych z uwzględnieniem sprzężenia pól temperatury i odkształcenia. Do rozwiązania tego typu zagadnień zaproponowano metodę kolejnych przybliżeń.

Uogólniono analogię Alfreya. Dla zagadnień termolepkosprężystości opracowano metodę rozwiązań sprężystych.

Rozwiązano szereg problemów nagrzewania powłok kulistych, walcowych i stożkowych przy obciążeniach cyklicznych, przy czym zależność własności materiału od temperatury przyjęto w postaci liniowej lub nieliniowej [91, 81].

Na rys. 8 pokazano zależność bezwymiarowej temperatury θ od bezwymiarowego



Rys. 8

parametru czasu τ przy drganiach skrętnych powłoki walcowej. Krzywa *1* odpowiada stanowi dokrytycznemu, krzywa *2* — stanowi nadkrytycznemu.

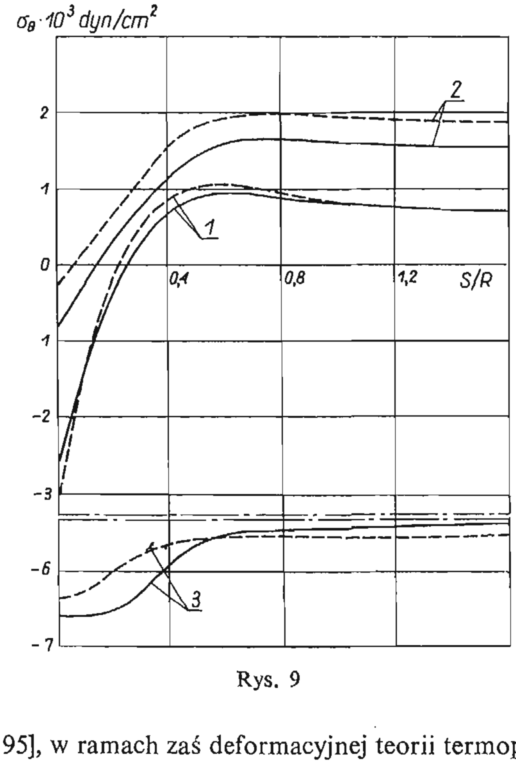
5. Nieizotermicznemu obciążeniu części maszyn częstokroć towarzyszą znaczne odkształcenia plastyczne.

Badania zagadnień teorii plastyczności na Ukrainie, wykonywane w zasadzie w Kijowie, znajdowały się pod wpływem radzieckiej szkoły mechaniki, w szczególności A. J. Isz-

LIŃSKIEGO, który wiele lat pracował w Kijowie, jak również A. A. ILIUSZYNA i jego uczniów. Charakterystyczną cechą badań w dziedzinie termoplastyczności jest uogólnienie teorii plastyczności na zagadnienia nieizotermicznego obciążania oraz opracowanie metod rozwiązywania problemów termoplastyczności z uwzględnieniem wzmocnienia materiału i historii obciążenia.

W pracach [92, 93] postulat plastyczności ILIUSZYNA uogólniono na procesy obciążania nieizotermicznego ciał sprężysto-plastycznych, mechaniczne charakterystyki których zależą od temperatury. Uogólniony postulat plastyczności, to znaczy postulat termoplastyczności, sformułowano w sposób następujący: odkształcenia plastyczne towarzyszą przejściu elementarnej cząstki ciała z jednego stanu odkształcenia do innego wtedy, gdy praca sił zewnętrznych na cyklu zamkniętym po odkształceniach i temperaturze jest dodatnia; jeżeli praca ta jest równa zeru, to odkształcenia są sprężyste; zakłada się przy tym, że w procesie odwrotnym temperatura przebiega te same wartości, co w procesie odkształcania aktywnego.

Na podstawie sformułowanego powyżej postulatu otrzymano różne teorie termoplastyczności i w szczególnym przypadku wyprowadzono związki deformacyjnej teorii termoplastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym [94]. W ramach teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych udowodniono twierdzenia o odciążeniu i o prostym obcią-



Rys. 9

żeniu zmiennym [93, 95], w ramach zaś deformacyjnej teorii termoplastyczności ze wzmocnieniem kinematycznym, udowodniono twierdzenie o obciążeniu prostym [94].

Teoria małych odkształceń sprężysto-plastycznych oraz teoria płynięcia ze wzmocnieniem izotropowym posłużyły za podstawę opracowania metod obliczania sprężysto-plastycznego stanu naprężenia w tarczach o profilu symetrycznym i niesymetrycznym oraz w długich walcach przy obciążeniach wielokrotnych [96, 97, 98, 93], jak również metod obliczania naprężeń sprężysto-plastycznych w nierównomiernie nagrzanych powłokach obrotowych [99, 102].

Na rys. 9 porównano wyniki obliczeń naprężeń obwodowych σ_θ w niestacjonarnie nagrzanym obszarze brzegowym sztywno zamocowanej powłoki walcowej, obciążonej ciśnieniem wewnętrznym; liniami ciągłymi zaznaczono wyniki, otrzymane na podstawie teorii płynięcia ze wzmocnieniem izotropowym, a liniami przerywanymi — wyniki teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych. Krzywe *1, 2, 3* dotyczą odpowiednio powierzchni zewnętrznej, środkowej i wewnętrznej powłoki. Różnica między naprężeniami obliczonymi według obydwu teorii jest stosunkowo niewielka, podczas gdy trajektorie obciążenia różnią się istotnie od linii prostych.

Zbadano doświadczalnie proces odkształcania sprężysto-plastycznego nierównomiernie nagrzanych tarcz wirujących, dokonując weryfikacji stosowalności teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych oraz teorii płynięcia ze wzmocnieniem izotropowym [98, 103]. Przeprowadzono również doświadczenia, celem których była weryfikacja postulatu izotropii A. A. ILIUSZYNA i pewnych konsekwencji tego postulatu [104].

Literatura cytowana w tekście

1. А. Н. Динник, *Температурные напряжения в цилиндре*, Изв. Киевск. политехн. ин-та, Отд. инж.-мех., кн. 2, 1911.
2. А. Н. Динник, *Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости*, ч. 2 (гл. VI, Температурные напряжения в цилиндре), Изв. Екатериносл. горн. ин-та, 1915.
3. В. М. Майзель, *Температурная задача теории упругости*, К., Изд-во АН УССР, 1951.
4. А. Д. Коваленко, *Круглые пластины переменной толщины*, Физматгиз, М., 1959.
5. А. Д. Коваленко, Я. М. Григоренко, Л. А. Ильин, *Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении*, К., Изд-во АН УССР, 1963.
6. А. Д. Коваленко, *Основы термоупругости*, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.
7. А. Т. Улітко, *Розв"язання деяких задач просторової теорії пружності методом власних вектор-функцій*, Прикладна механіка, т. VI, в. 4, (1960).
8. А. Ф. Улитко, *Метод векторных собственных функций в пространственных задачах теории упругости*, Прикладная механика, т. III, в. 9, (1967).
9. Г. В. Куценко, *Осесимметричная деформация толстостенной торидальной оболочки*, Прикладная механика, т. III, в. 1, (1967).
10. А. Т. Улітко, *Загальна задача рівноваги пружного конуса*, Прыкладна механика, т. VI, в. 3, (1960).
11. А. Т. Улітко, *Про рівновагу пружного конуса, навантаженого зосередженим моментом у вершині*, ДАН УРСР, № 10, (1960).
12. А. Ф. Улитко, *Напряженое состояние полой сферы, нагруженной сосредоточенными силами*, Прикладная механика, т. IV, в. 5, (1968).
13. В. Т. Гринченко, *Термонапряженное состояние толстостенного цилиндра конечной длины*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 7, К., Изд-во „Наукова думка", (1967).
14. Л. О. Ільїн, *Диференціальні рівняння пружної рівноваги оболонок обертання з меридіональними ребрами при силових і температурних навантаженнях*, Прикладна механіка, т. X, в. 3, (1964).
15. Л. А. Ильин, *Диффференциальные уравнения задачи о напряженном состоянии круглых дисков с криволинейными ребрами при силовых и тепловых воздействиях*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 4, К., Изд-во „Наукова думка", 1964.

16. Н. А. Лобкова, *Уравнения теории тонких неоднородных пластин в цилиндрических координатах*, Прикладная механика, т. III, в. 7, (1967).
17. Н. А. Лобкова, Л. А. Ильин, *К теории тонких неоднородных пластин*, Прикладная механика, т. I, в. 8, (1965).
18. Л. А. Ильин, Н. А. Лобкова, Л. Д. Криворучко, В. В. Соколов, В. И. Жлуктенко, *Расчет оболочек вращения со случайными упругими характеристиками*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 10, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.
19. Я. М. Григоренко, *Система разрешающих уравнений циклически симметричной деформации конической оболочки переменной жесткости с учетом температурных воздействий*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 4, К., Изд-во „Наукова думка", 1964.
20. Я. М. Григоренко, *Об уравнениях циклически симметричного термонапряженного состояния оболочек вращения переменной жесткости*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 5, К., Изд-во „Наукова думка", 1965.
21. Я. М. Григоренко, *Деформация незамкнутых оболочек вращения с шарнирно опертыми меридиональными краями*, Прикладная механика, т. III, в. 1, (1967).
22. Я. М. Григоренко, *Применение численных методов к расчету элементов машин*, Сб. „Динамика и прочность машин", в. 5, Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.
23. Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, *Несимметричная деформация изотропных и анизотропных оболочек вращения*, Прикладная механика, т. IV, в. 3, (1968).
24. И. А. Мотовиловец, *Теплопроводность пластин и тел вращения*, К., Изд-во „Наукова думка", 1969.
25. А. И. Борисюк, И. А. Мотовиловец, *О температурном поле оболочки переменной толщины*, Прикладная механика, т. III, в. 12, (1967).
26. І. О. Мотовиловець, *Про виведення ривнянь теплопровідности пластин*, Прикладна механіка, т. I, в. 3, (1960).
27. И. А. Мотовиловец, *Решение задачи о нестационарном температурном поле пластины при конвективном теплообмене на ее боковых поверхностях*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах турбомашин", в. 1, К., Изд-во АН УССР, 1961.
28. И. А. Мотовиловец, *Тепловые напряжения в диске при переменной по толщине температуре*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах турбомашин", в. 2, К., Изд-во АН УССР, 1962.
29. И. А. Мотовиловец, *Температурное поле и тепловые напряжения в обогреваемой цилиндрической оболочке при переменном уровне жидкости*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 3, К., Изд-во АН УССР, 1963.
30. И. А. Мотовиловец, *Температурное поле ортотропного цилиндра*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 5, К., Изд-во „Наукова думка", 1965.
31. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, *Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства*, Инженерно-физический журнал, т. VI, № 10, (1963).
32. Я. С. Підстригач, *Температурне поле в тонких оболочках*, ДАН УРСР, № 5, (1958).
33. Я. С. Підстригач, В. М. Гембара, *Рівняння теплопровідності пластин змінної товщини*, ДАН УРСР, № 12, (1962).
34. Я. С. Підстригач, С. Я. Ярема, *Температурні напруження в оболонках*, К., Вид-во АН УРСР, 1961.
35. Я. С. Подстригач, *Приближенное определение нестационарных температурных полей в тонких пластинах и оболочках*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах турбомашин", в. 1, К., Изд-во АН УССР, 1961.
36. Я. С. Подстригач, *Некоторые общие вопросы теории термоупругости и теплопроводности тонких оболочек*, Теория пластин и оболочек, Труды II Всесоюзной конференции (Львов 1961), К., Изд-во АН УССР, 1962.
37. Я. С. Подстригач, В. М. Гембара, *Уравнения теплопроводности анизотропных пластин и оболочек*, Сб. „Вопросы машиноведения и прочности в машиностроении", в. 9, К., Изд-во АН УССР, 1964.
38. Я. С. Підстригач, *Умови теплового контакту твердих тіл*, ДАН УРСР, № 7, (1963).

39. Я. С. Підстригач, *Про умови відсутності температурних напружень в оболонках*, ДАН УРСР, № 9, (1961).
40. Я. С. Підстригач, *Температурне поле в стінках постійної товщини при асимптотичному тепловому режимі*, Зб. „Температурні напруження в тонкостінних конструкціях", К., Вид-во АН УРСР, 1959.
41. Г. В. Пляцко, *Нестационарные задачи теплопроводности и термоупругости*, К., Изд-во АН УССР, 1960.
42. Я. С. Підстригач, Ю. М. Коляно, *Двовимірна температурна задача теорії пружності для півнескінченної пластинки, по краю якої рухається джерело тепла*, Прикладна механіка, т. X, в. 2, (1964).
43. Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, *Температурное поле и температурные напряжения в нагреваемой источниками тепла тонкой неограниченной пластинке с теплообменом*, Инженерно-физический журнал, т. VII, № 6, (1964).
44. Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец, *Осесимметричное напряженное состояние в бесконечной цилиндрической оболочке, вызванное движущимся температурным полем*, Теория пластин и оболочек, Труды II Всесоюзной конференции (Львов 1961), К., Изд-во АН УССР, 1962.
45. Я. С. Подстригач, О. В. Караванский, *К расчету температурных полей в тонкостенных ребристых элементах конструкций*, Сб. „Исследования по теплопроводности", Минск, Изд-во „Наука и техника", 1967.
46. О. В. Караванский, *О термомеханическом контакте пластин, соединенных ребрами жесткости*, Прикладная механика, т. 6, в. 7, (1970).
47. Ю. М. Коляно, *Температурные напряжения в ортотропной полосе-пластинке с теплоотдачей*, Прикладная механика, т. 3, в. 6, (1967).
48. Ю. М. Коляно, Е. А. Пакула, *Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла анизотропных пластинках с теплоотдачей*, Прикладная механика, т. 5, в. 1, (1969).
49. Ю. М. Коляно, Л. А. Гавур, *Температурные напряжения в сопряженных пластинках*, Прикладная механика, т. 5, в. 9, (1969).
50. Ю. М. Коляно, *Температурные поля и напряжения в нагреваемых источниками тепла анизотропных пластинках с подкрепленным краем*, Инженерный журнал, Механика твердого тела, в. 3, 1968.
51. Ю. М. Коляно, *Нагрев источниками тепла сопряженных встык ортотропных пластинок с теплообменом*, Инженерно-физический журнал, т. XVII, № 6, (1969).
52. Ю. М. Коляно, Е. А. Пакула, *Температурные напряжения в пластинках из армированного слоистого материала*, Механика полимеров, № 4, (1970).
53. Ю. М. Коляно, Я. С. Подстригач, *Неустановившиеся температурные поля и напряжения в оболочках и пластинках при разрывных граничных условиях*, Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск 1969), М., Изд-во „Наука", 1970.
54. Я. С. Подстригач, Г. С. Кит, *Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 7, К., Изд-во „Наукова думка", 1967.
55. Г. С. Кит, Я. С. Подстригач, *Определение стационарного температурного поля и напряжений в окрестности щели, обладающей термосопротивлением*, Физ.-хим. механика материалов, т. 2, № 3, (1966).
56. Я. С. Подстригач, И. В. Гайвась, *Фундаментальное решение задачи термоупругости для бесконечной пластинки с круговым включением*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 8, К., Изд-во „Наукова думка", 1969.
57. И. В. Гайвась, *О термоупругом состоянии в окрестности щели в неоднородной упругой среде*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 9, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.
58. Г. С. Кит, О. В. Побережный, *Термоупругое состояние бесконечного тела с теплопроводящей круговой трещиной*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 9, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.

59. Э. И. Григолюк, Я. И. Бурак, Я. С. Подстригач, *Об одной экстремальной задаче термоупругости для бесконечной цилиндрической оболочки*, ДАН СССР, т. 174, № 3, (1967).
60. Э. И. Григолюк, Я. И. Бурак, Я. С. Подстригач, *К вопросу об экстремальном осесимметричном нагреве цилиндрической оболочки*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 8, К., Изд-во „Наукова думка", 1969.
61. Я. И. Бурак, *Некоторые вариационные задачи, возникающие в связи с проблемой оптимального нагрева пологих оболочек*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", вып. 9, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.
62. Я. И. Бурак, Э. И. Григолюк, Я. С. Подстригач, *О применении вариационного исчисления к решению задач об оптимальном нагреве тонких оболочек*, Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск 1969), М., Изд-во „Наука", 1970.
63. Б. И. Колодий, *Определение температурных полей и напряжений в полом цилиндре при индукционном нагреве*, Прикладная механика, т. 5, в. 10, (1969).
64. Я. С. Підстригач, *Загальний розв"язок нестаціонарної задачі термопружності*, Прикладна механіка, т. VI, в. 2, (1960).
65. Я. С. Подстригач, *О влиянии термоупругого рассеяния на напряженное состояние деформируемого тела*, Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 4, 1960.
66. Я. С. Підстригач, Я. Й. Бурак, *Про особливі розв"язки динамічної задачі термопружності для нескінченного середовища*, Прикладна механіка, т. VIII, в. 3, (1962).
67. Я. С. Подстригач, В. Ю. Кручкевич, *О влиянии инерционных сил на напряженное состояние, обусловленное действием периодического во времени температурного поля*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах турбомашин", в. 2, К., Изд-во АН УССР, 1962.
68. Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец, *Динамическая задача термоупругости для тонкого стержня с учетом теплоотдачи с его поверхности*, Сб. „Вопросы механики реального твердого тела", в. 2, К., Изд-во „Наукова думка", 1964.
69. Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец, *Некоторые динамические задачи термоупругости тонких оболочек*, Теория оболочек и пластин, Труды IV Всесоюзной конференции (Ереван 1961), Изд-во АН АрмССР, 1964.
70. Р. Н. Швец, *Взаимосвязанная задача термоупругости для тонкой пластинки*, Прикладная механика, т. I, в. 3, (1965).
71. Р. Н. Швец, *Осесимметричные термоупругие колебания цилиндрических оболочек*, Прикладная механика, т. V, в. 3, (1969).
72. Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец, *Квазистатическая задача взаимосвязанной термоупругости*, Прикладная механика, т. V, в. 1, (1969).
73. Ю. М. Коляно, Ф. В. Семерак, *Вплив швидкості поширення тепла на динамічні температурні напруження в тонкій пластинці*, ДАН УРСР, Серія А, № 8, (1970).
74. Г. А. Кильчинская, *Динамическая неустойчивость круглых цилиндрических оболочек, находящихся под действием продольных сжимающих усилий при термопараметрическом резонансе*, Теория оболочек и пластин, Труды IV Всесоюзной конференции (Ереван, 1962), Изд-во АН АрмССР, 1964.
75. Г. А. Кильчинская, *О термопараметрическом резонансе гибких оболочек в нестационарном температурном поле*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 3, К., Изд-во АН УССР, 1963.
76. Г. А. Кильчинская, М. П. Петренко, *Распространение продольных термоупругих волн в стержне*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 5, К., Изд-во „Наукова думка", 1965.
77. Г. А. Кильчинская, *Распространение термоупругих волн в упругом слое при конвективном теплообмене на его поверхностях*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 6, К., Изд-во „Наукова думка", 1966.
78. Г. А. Коломиец, А. Ф. Улитко, *Некоторые граничные задачи электроупругих колебаний пьезокерамических тел*, Труды VI Всесоюзной акустической конференции, М., 1968.

79. Г. А. Коломиец, А. Ф. Улитко, *Связанные электроупругие колебания пьезокерамических тел*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 8, К., Изд-во „Наукова думка", 1969.

80. Г. А. Коломиец, А. Ф. Улитко, *Связанные электроупругие колебания толстостенных пьезокерамических цилиндров*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 9, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.

81. А. Д. Коваленко, В. Г. Карнаухов, *Уравнения и решения некоторых задач теории вязко-упругих оболочек*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 7, К., Изд-во „Наукова думка", 1967.

82. А. Д. Коваленко, В. Г. Карнаухов, В. И. Тюптя, *Распространение волн в неограниченной вязко-упругой среде с учетом термомеханического сопряжения*, Прикладная механика, т. IV, в. 9, (1968).

83. А. Д. Коваленко, В. Г. Карнаухов, В. И. Тюптя, *Распространение волн Релея в вязко-упругом полупространстве с учетом термомеханического сопряжения*, Прикладная механика, т. IV, в. 12, (1968).

84. А. Д. Коваленко, В. И. Тюптя, *Распространение продольных волн в вязко-упругом цилиндре с учетом термомеханического сопряжения*, Прикладная механика, т. VI, в. 1, (1970).

85. А. Д. Коваленко, В. Г. Карнаухов, *Про теплоутворення у в"язко-пружних тілах з матеріалу з резонансною дисперсією*, ДАН УРСР, серія А, № 11, (1968).

86. А. Д. Коваленко, В. Г. Карнаухов, *О теплообразовании в вязко-упругих телах при периодических воздействиях*, Прикладная механика, т. V, в. 2, (1969).

87. А. Д. Коваленко, В. Г. Карнаухов, А. А. Кильчинский, *О теплообразовании в ортотропных вязко-упругих цилиндрических оболочках при поперечных колебаниях*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 10, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.

88. А. А. Кильчинский, *Исследование реологических эффектов в осесимметрично деформированной цилиндрической оболочке из стеклопластика при повышенной температуре*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 9, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.

89. А. Д. Коваленко, А. А. Кильчинский, *О методе переменных модулей в задачах линейной наследственной упругости*, Прикладная механика, т. VI, в. 12, (1970).

90. В. Г. Карнаухов, А. А. Кильчинский, А. Д. Коваленко, *Решение задач об осесимметричной деформации многослойных оболочек вращения с учетом поперечного сдвига*, Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок (Днепропетровск 1969), М., Изд-во „Наука", 1970.

91. А. Д. Коваленко, В. Г. Карнаухов, *Про вплив циклічного навантаження на температуру циліндра з в"язко-пружного матеріалу*, ДАН УРСР, № 9, (1966).

92. Ю. Н. Шевченко, *О теориях термопластичности упрочняющегося материала*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 6, К., Изд-во „Наукова думка", 1966.

93. Ю. Н. Шевченко, *Термопластичность при переменных нагружениях*, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.

94. Ю. Н. Шевченко, *Деформационная теория термопластичности при трансляционном упрочнении*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 10, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.

95. Ю. Н. Шевченко, *Теоремы о простом переменном нагружении и разгрузке в теории упруго-пластических деформаций при неравномерном нагреве*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 9, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.

96. Ю. Н. Шевченко, *Упруго-пластическое напряженное состояние диска при повторном нагружении*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 8, К., Изд-во „Наукова думка", 1969.

97. Ю. Н. Шевченко, И. А. Мотовиловец, В. Г. Савченко, В. Н. Василенко, *Упруго-пластическое напряженное состояние диска несимметричного профиля при повторном нагреве*, Прикладная механика, т. IV, в. 2, (1968).

98. Ю. Н. ШЕВЧЕНКО, Р. Г. ТЕРЕХОВ, *Применение теории течения к исследованию термонапряженности дисков*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 8, К., Изд-во „Наукова думка", 1969.
99. А. И. БОРИСЮК, *Осесимметричное упруго-пластическое напряженное состояние оболочек вращения*, Прикладная механика, т. II, в. 11, (1966).
100. А. И. БОРИСЮК, *Упруго-пластическое напряженное состояние оболочек вращения при осесимметричных повторных нагружениях*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 8, К., Изд-во „Наукова думка", 1969.
101. В. В. ПИСКУН, *Упруго-пластическое осесимметричное напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины при нестационарном нагреве*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 6, К., Изд-во „Наукова думка", 1966.
102. В. В. ПИСКУН, *Напряженное состояние упрочняющейся цилиндрической оболочки при неизотермическом нагружении*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций", в. 9, К., Изд-во „Наукова думка", 1970.
103. Р. Г. ТЕРЕХОВ, *Экспериментальное исследование упруго-пластического деформирования вращающихся неравномерно нагретых дисков*, Прикладная механика, т. II, в. 10, (1966).
104. Р. Г. ТЕРЕХОВ, *Проверка постулата изотропии при сложном нагружении с поворотом осей тензора напряжений*, Прикладная механика, т. VI, в. 10, (1970).

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 października 1971 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

ODBICIE PŁASKICH FAL NAPRĘŻENIA W OŚRODKU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM O ZMIENNEJ GRANICY PLASTYCZNOŚCI

KRZYSZTOF PODOLAK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem niżej przedstawionych rozważań jest określenie pól naprężenia i prędkości przemieszczeń, powstałych na skutek nagłego pojawienia się ciśnienia na swobodnym brzegu warstwy materiału sprężysto-plastycznego, leżącej na półprzestrzeni wypełnionej ośrodkiem sprężystym. Dodatkowo przyjmuje się założenie, że intensywność wymuszenia maleje od wartości początkowej w sposób monotoniczny z czasem, przyjmując od pewnego momentu wartość równą zeru. Materiał warstwy jest niejednorodny, przy czym własność ta przejawia się w zmienności granicy plastyczności z odległością od powierzchni warstwy. Taką cechę wykazują na przykład grunty.

Przeprowadzona analiza uwzględnia zjawiska propagacji płaskich fal naprężenia powstałych w sprężysto-plastycznej warstwie wskutek wymuszenia brzegu, ich odbicie od powierzchni półprzestrzeni sprężystej oraz wzajemne oddziaływanie fal padających i odbitych.

Zagadnienie podobne do przedstawionego, w przypadku ośrodka warstwowego, jednorodnego, który posiada własności ciała sztywno-plastycznego ze sztywnym odciążeniem (uwzględniono również przypadek szczególny, gdy granica plastyczności jest równa zeru) jest przedmiotem pracy [1].

Modele ciał sztywno- i sprężysto-plastycznych ze sztywnym odciążeniem były wykorzystane w szeregu innych prac dotyczących problemu rozprzestrzeniania się i odbicia płaskich fal naprężenia [2 ÷ 4] z uwagi na to, że dają one możliwość uzyskiwania rozwiązań w postaci zamkniętej.

Analogiczne zagadnienia w przypadku ośrodka niejednorodnego, charakteryzującego się zmiennym w zależności od współrzędnej modułem wzmocnienia oraz odciążenia (przy założeniu granicy plastyczności równej zeru) zostały zbadane w pracy [5], w dużej mierze przy wykorzystaniu metod numerycznych.

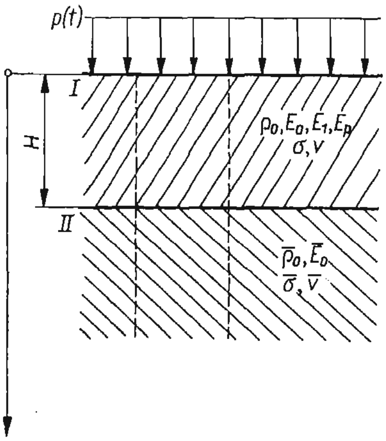
Pewną liczbę prac wchodzących w zakres omawianej problematyki i nie wymienionych wyżej zawiera [6].

Na tle przedstawionych publikacji praca niniejsza stanowi ich częściowe uzupełnienie. Jej wyniki mogą być wykorzystane przy obliczaniu oddziaływań fal naprężenia, silnej nieciągłości na konstrukcje oddzielone warstwą gruntu od źródła wywołującego te fale, jak również do oceny wielkości energii przekazywanej przez warstwę do półprzestrzeni podczas procesu odbicia zachodzącego w płaszczyźnie ich styczności.

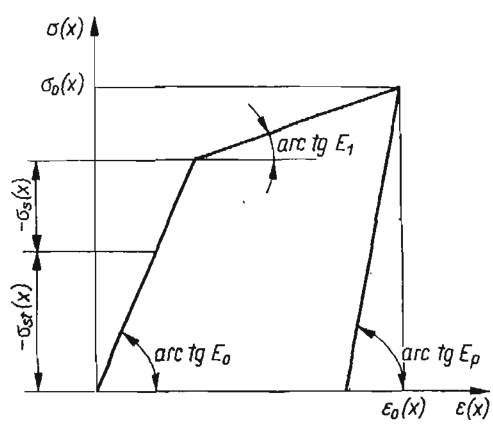
2. Sformułowanie zagadnienia

2.1 Rozważmy ośrodek składający się z warstwy ograniczonej dwiema równoległymi płaszczyznami o odległości H i leżącej na półprzestrzeni, której powierzchnia stanowi jedną z granicznych płaszczyzn warstwy.

Materiał warstwy posiada własności opisane przez sprężysto-plastyczny model Prandtla z odciążeniem, którego moduł E_p jest różny od modułu sprężystości E_0 (patrz rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Niejednorodność własności warstwy uwzględniona jest przez założenie, że granica plastyczności jest funkcją odległości x od swobodnej powierzchni warstwy, wyrażoną następująco:

$$\sigma_s(x) = \sigma_s(0) + \sum_{m=1}^{l} B_m x^m, \tag{2.1}$$

gdzie B_m — stałe współczynniki.

Odnośnie do gęstości ośrodka przyjmuje się, że jest ona niezależna od współrzędnej x i równa ϱ_0.

Półprzestrzeń, na której spoczywa warstwa, jest wypełniona ośrodkiem sprężystym o module sprężystości $\bar{E}_0$ i gęstości $\bar{\varrho}_0$. Wprowadzimy oś współrzędnych x skierowaną w głąb ośrodka, a punkt początkowy osi umiejscowimy na swobodnej powierzchni ośrodka (rys. 1).

Załóżmy obecnie, że na swobodnej powierzchni ($x = 0$) opisanego wyżej ośrodka, w chwili $t = 0$ pojawia się nagle ciśnienie o wartości maksymalnej p_m. W dalszym ciągu ciśnienie maleje z czasem w sposób monotoniczny przyjmując dla $t \geqslant \tau$ wartość równą zeru. Przyjmijmy, że obciążenie brzegu opisuje następująca funkcja:

$$p(t) = \begin{cases} p_m\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right)^n & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \text{dla } t > \tau, \end{cases} \tag{2.2}$$

gdzie

n — liczba naturalna,

τ — czas, po upływie którego ciśnienie na granicy ośrodka osiąga wartość zero.

Zauważmy, że zaburzenia rozprzestrzeniające się w czasie trwania procesu zdeterminowanego podanymi wyżej warunkami mają charakter płaskich fal o frontach równoległych do granic warstwy. Fakt ten pozwala sprowadzić rozważane zagadnienie do jednowymiarowego, a co za tym idzie, badać interesujące nas efekty na przykładzie pręta składającego się z dwu części o jednakowym, stałym przekroju. Dodatkowo należy przyjąć, że pręt nie ma możności rozszerzania się w kierunku prostopadłym do wektora przemieszczeń w rozważanym procesie falowym (por. [5]).

2.2. Równania ruchu ośrodka wyprowadzone na podstawie przyjętych w 2.1 założeń posiadają następującą postać:

$$v_{,t} = \frac{1}{\varrho_0}\sigma_{,x}, \quad v_{,x} = \frac{1}{\varrho_0 a_i^2(\sigma)}\sigma_{,t} \quad \text{— w przypadku warstwy sprężysto-plastycznej,} \tag{2.3}$$

$$\bar{v}_{,\bar{t}} = \frac{1}{\bar{\varrho}_0}\bar{\sigma}_{,\bar{x}}, \quad \bar{v}_{,\bar{x}} = \frac{1}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0^2(\bar{\sigma})}\bar{\sigma}_{,\bar{t}} \quad \text{— w przypadku półprzestrzeni,} \tag{2.4}$$

gdzie

$v(x,t), \bar{v}(\bar{x},\bar{t})$ — prędkości przemieszczeń,

$\sigma(x,t), \bar{\sigma}(\bar{x},\bar{t})$ — naprężenia,

$$a_i(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{E_i}{\varrho_0}} = a_i, & \text{gdzie } i = 0, 1, p \text{ — dla warstwy,} \\ \sqrt{\dfrac{\bar{E}_0}{\bar{\varrho}_0}} = \bar{a}_0 & \text{— dla półprzestrzeni,} \end{cases}$$

$$\bar{x} = x - H,$$

$$\bar{t} = t - \frac{H}{a_0}.$$

Każdy z podanych wyżej układów równań cząstkowych (2.3) i (2.4) można sprowadzić do równań zwyczajnych, które są spełnione wzdłuż charakterystyk. Otrzymamy w ten sposób:

a) wzdłuż dodatniej charakterystyki, $dx = adt$

$$d\sigma = \varrho_0 a_i(\sigma) dv, \quad d\bar{\sigma} = \bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 d\bar{v},$$

b) wzdłuż ujemnej charakterystyki, $dx = -adt$

$$d\sigma = -\varrho_0 a_i(\sigma) dv, \quad d\bar{\sigma} = -\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 d\bar{v}.$$

Układ równań (2.3) rozwiążemy przy następujących warunkach brzegowych:

a) na brzegu $x = 0$

$$\sigma(0,t) = \begin{cases} -p(t) & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0 & \text{dla } t > \tau; \end{cases} \tag{2.5}$$

b) na brzegu $x = H$

$$\begin{aligned} \sigma\left(H, t-\frac{H}{a_0}\right) &= \bar{\sigma}(0, \bar{t}), \\ v\left(H, t-\frac{H}{a_0}\right) &= \bar{v}(0, \bar{t}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Warunki początkowe na obu odcinkach pręta przyjmujemy jednorodne.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Zajmiemy się na wstępie przypadkiem, gdy w części warstwy bezpośrednio przylegającej do półprzestrzeni (por. obszar *IV* na rys. 3) wystąpi zjawisko odciążenia po odbiciu pierwszej, sprężystej fali silnej nieciągłości:

$$x = a_0 t. \tag{3.1}$$

Rozważać będziemy ponadto warstwy, których grubość spełnia warunek

$$H < \frac{a_0 a_1}{a_0+a_1}\tau,$$

(co dla warstwy z piasku daje ograniczenie $H < 167$ m, gdy czas działania zewnętrznego obciążenia $\tau = 1$ sek).

Obraz rozwiązań, jaki otrzymamy na płaszczyźnie fazowej, w określonych wyżej warunkach został przedstawiony na rys. 3.

W dalszym ciągu podamy sposób otrzymania oraz postać rozwiązań w poszczególnych obszarach. Następnie na podstawie analizy tych rozwiązań określimy warunki, których spełnienie wprowadzi zmiany o charakterze jakościowym w przyjętym na rys. 3 obrazie rozwiązań oraz przedstawimy postać tych zmian.

Naprężenia i prędkości przemieszczeń w kolejnych obszarach (według oznaczeń z rys. 3) płaszczyzny fazowej wyrażają niżej podane zależności.

Obszar 0. Obszar niezaburzony

$$\sigma_0(x, t) = 0, \quad v_0(x, t) = 0. \tag{3.2}$$

Obszar I. Obszar sprężystego obciążenia

$$\sigma_1(x, t) = -\sigma_s(\xi_1), \quad v_1(x, t) = \frac{\sigma_s(\xi_1)}{\varrho_0 a_0}, \tag{3.3}$$

gdzie

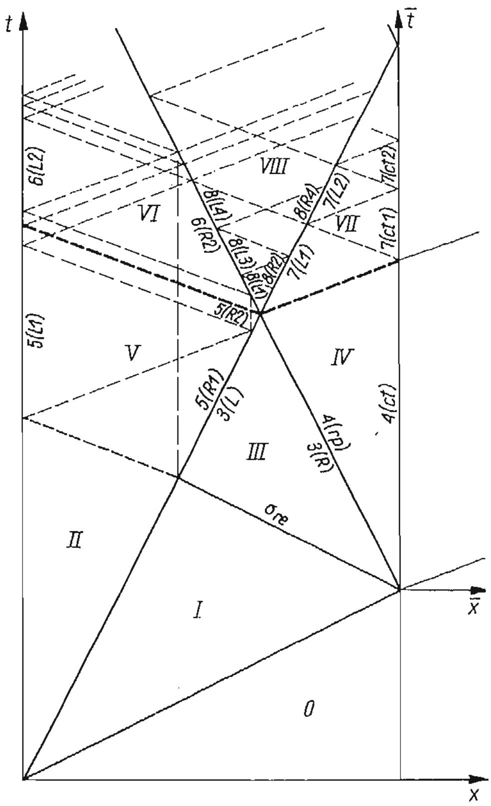
$$\xi_1 = \frac{a_1}{a_0-a_1}(a_0 t - x).$$

Obszar II. Jest to obszar odciążenia. Określenie rozwiązań wewnątrz obszaru jest możliwe po uprzednim wyznaczeniu rozkładu naprężenia i prędkości przemieszczeń wzdłuż fali odciążenia

$$x = a_1 t. \tag{3.4}$$

Odpowiednie wyrażenia analityczne tych wielkości możemy uzyskać na drodze omówionej w rozdz. 1 [6]. W dalszym ciągu stosując metodę charakterystyk otrzymamy wyrażenie określające prędkość przemieszczeń brzegu ($x = 0$) ośrodka

$$v_{2(L)}(t) = \frac{1}{\varrho_0 a_p}\left[p(t)+\frac{a_1-a_p}{a_1}\sigma_{02}\left(\frac{a_p a_1}{a_p+a_1}t\right)+a_p\frac{a_0-a_1}{a_0 a_1}\sigma_s\left(\frac{a_p a_1}{a_p+a_1}t\right)\right] \tag{3.5}$$



Rys. 3

oraz rozwiązania wewnątrz rozważanego obszaru:

$$\begin{aligned} \sigma_2(x,t) &= -p\left(t-\frac{x}{a_p}\right)+\frac{a_1-a_p}{2a_1}[\sigma_{02}(\xi_2)-\sigma_{02}(\eta_2)]+a_p\frac{a_0-a_1}{2a_0 a_1}[\sigma_s(\xi_2)-\sigma_s(\eta_2)],\\ v_2(x,t) &= \frac{1}{\varrho_0 a_p}\left\{p\left(t-\frac{x}{a_p}\right)+\frac{a_1-a_p}{2a_1}[\sigma_{02}(\xi_2)+\sigma_{02}(\eta_2)]+a_p\frac{a_0-a_1}{2a_0 a_1}[\sigma_s(\xi_2)+\sigma_s(\eta_2)],\right. \end{aligned} \tag{3.6}$$

gdzie

$$\sigma_{02}(x') = -p_m\left\{1+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{2n(n-1)\dots(n-k+1)(\mu_p^2-1)^k}{[(\mu_p+1)^{k+1}-(\mu_p-1)^{k+1}]k!\mu_p^k}\left(\frac{x'}{a_1\tau}\right)^k\right\}+$$

$$+\frac{E_1}{E_0}\sum_{k=1}^{l}(\mu_0-1)\mu_0 B_k\left[1-\frac{(\mu_p+1)^k+(\mu_p-1)^k}{(\mu_p+1)^{k+1}-(\mu_p-1)^{k+1}}\right](x')^k,$$

$$\xi_2 = \frac{a_1}{a_1+a_p}(a_p t+x), \qquad \eta_2 = \frac{a_1}{a_1+a_p}(a_p t-x), \qquad \mu_0 = \frac{a_0}{a_1}, \qquad \mu_p = \frac{a_p}{a_1},$$

n, l — wynikają ze związków (2.2) i (2.1).

Obszar III. Założenia przyjęte na wstępie obecnego paragrafu i przeprowadzona na ich podstawie analiza zjawiska odbicia sprężystej fali opisanej równaniem (3.1) prowadzą do wniosku, że wzdłuż odbitej fali silnej nieciągłości

$$x = -a_0 t+2H \tag{3.7}$$

występują naprężenia równe granicy plastyczności

$$|\sigma_{re}(x)| = \sigma_s(x), \tag{3.8}$$

natomiast prędkości przemieszczeń wynikające z warunku ciągłości dynamicznej wyraża wzór następujący:

$$v_{re}(x) = \frac{1}{\varrho_0 a_0}\left\{\sigma_s(0)+\sum_{m=1}^{l}B_m\left[2\left(2a_1\frac{H-x}{a_0-a_1}\right)^m-x^m\right]\right\}. \tag{3.9}$$

Wykorzystując (3.8) i (3.9) oraz mając na uwadze fakt, że w rozważanym obecnie obszarze następuje plastyczne obciążenie, określimy rozwiązania we wnętrzu obszaru metodą charakterystyk:

$$\begin{aligned}\sigma_3(x,t) &= -\frac{1}{2}[\sigma_s(\xi_3)+\sigma_s(\eta_3)]-\frac{\varrho_0 a_1}{2}[v_{re}(\xi_3)-v_{re}(\eta_3)],\\ v_3(x,t) &= \frac{1}{2\varrho_0 a_1}[\sigma_s(\xi_3)-\sigma_s(\eta_3)]+\frac{1}{2}[v_{re}(\xi_3)+v_{re}(\eta_3)],\end{aligned} \tag{3.10}$$

gdzie

$$\xi_3 = \frac{a_0(x-a_1 t)+2a_1 H}{a_0+a_1}, \qquad \eta_3 = \frac{a_0(x+a_1 t)-2a_1 H}{a_0-a_1}.$$

Obszar IV. W obszarze tym, zgodnie z postawionym na wstępie obecnego rozdziału żądaniem, występuje zjawisko odciążenia. Znalezienie rozwiązań wewnątrz obszaru możliwe jest po określeniu zależności wyrażających naprężenie i prędkości przemieszczeń w płaszczyźnie styku warstwy z półprzestrzenią oraz wzdłuż fali silnej nieciągłości

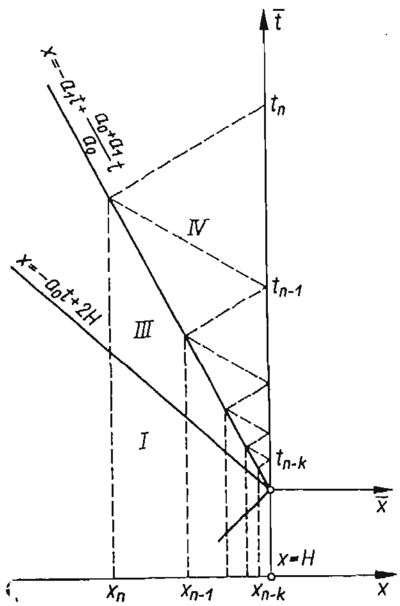
$$x = -a_1 t+\frac{a_0+a_1}{a_0}H. \tag{3.11}$$

W tym celu wykorzystujemy relację wynikającą z rozważenia zjawiska propagacji fal naprężenia w półprzestrzeni sprężystej,

$$\sigma_4(H, t) = -\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 v_4(H, t) \tag{3.12}$$

oraz warunek ciągłości dynamicznej wzdłuż fali odbitej (3.11).

Stosując metodę podobną do opisanej w rozdz. 1 [6] określimy zależności rekurencyjne, wiążące naprężenia lub prędkości przemieszczeń w punktach leżących na prostej $x = H$, o współrzędnych t_n, $t_{n-1}, \ldots$ oraz w punktach o współrzędnych x_n, $x_{n-1}, \ldots$, znajdujących się na fali odbitej (3.11) (patrz rys. 4). Punkty te wyznaczamy prowadząc kolejno charakterystyki dodatnie i ujemne dla zakresu odciążenia do przecięcia się z granicami rozważanego obszaru, jak to wskazuje rys. 4. Punktem początkowym omawianej procedury



Rys. 4

jest ten, w którym określamy naprężenie bądź prędkość przemieszczenia.

Wielkości te wewnątrz obszaru wyrażają następujące zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_4(x, t) &= \frac{1}{2}[\sigma_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) + \sigma_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)] + \frac{\varrho_0 a_p}{2}[v_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) - v_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)], \\ v_4(x, t) &= \frac{1}{2}[v_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) + v_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)] + \frac{1}{2\varrho_0 a_p}[\sigma_{4(ct)}(\bar{\xi}_4) - \sigma_{4(rp)}(\bar{\eta}_4)], \end{aligned} \tag{3.13}$$

gdzie

$$\sigma_{4(ct)}(\xi) = C \cdot D \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} (A \cdot B)^{j-1} [\sigma_{3(R)}(\xi_{n-j+1}) - \varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\xi_{n-j+1})],$$

$$v_{4(ct)}(\xi) = -\frac{\sigma_{4(ct)}(\xi)}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0},$$

$$\sigma_{4(rp)}(\eta) = \frac{a_p}{a_p+a_1}[\sigma_{3(R)}(\eta)-\varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta)]+$$

$$+\frac{2a_p a_1}{(a_p+a_1)^2}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j A^{j-1}B^{j-2}\sigma_3[_{(R)}(\eta_{n-j+1})-\varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta_{n-j+1})],$$

$$v_{4(rp)}(\eta) = -\frac{1}{\varrho_0(a_p+a_1)}[\sigma_{3(R)}(\eta)-\varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta)]+$$

$$+\frac{2a_p}{\varrho_0(a_p+a_1)^2}\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j A^{j-1}B^{j-2}[\sigma_{3(R)}(\eta_{n-j+1})-\varrho_0 a_1 v_{3(R)}(\eta_{n-j+1})],$$

$$\bar{\xi}_4 = \frac{x+a_p t-H}{a_p}, \qquad \bar{\eta}_4 = \frac{x-a_p t}{a_p+a_1}a_1+\frac{a_p(a_0+a_1)}{a_0(a_p+a_1)}H,$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{3(R)}(x) &= [\sigma_3(x,t)] \quad \text{dla } t = -\frac{x}{a_1}+\frac{a_0+a_1}{a_0 a_1}H,\\ v_{3(R)}(x) &= [v_3(x,t)] \quad \text{dla } t = -\frac{x}{a_1}+\frac{a_0+a_1}{a_0 a_1}H, \end{aligned}\right\} \text{— wielkości te określamy na podstawie (3.10);}$$

$$\xi_{n-j+1} = -B^{j-1}\left[\frac{a_1 a_p}{a_1+a_p}\xi_j-\frac{a_0(a_p+a_1)+a_p a_1}{a_0(a_1+a_p)}H\right]+a_0\mathcal{H}\sum_{i=2}^{j}B^{i-2},$$

$$\eta_{n-j+1} = B^{j-1}\eta+a_0\mathcal{H}\sum_{i=2}^{j}B^{i-2},$$

$$A = \frac{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0-\varrho_0 a_p}{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0+\varrho_0 a_p}, \qquad B = \frac{a_p-a_1}{a_p+a_1}, \qquad C = \frac{2a_p}{a_p+a_1},$$

$$D = \frac{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0}{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0+\varrho_0 a_p}, \qquad \mathcal{H} = \frac{2a_1 H}{a_0(a_p+a_1)}.$$

Z (3.13), po podstawieniu $x = H$ i $t = H/a_0$ w wyrażeniu określającym naprężenia, wynika następujący warunek pojawienia się w momencie odbicia pierwszej fali sprężystej (3.1) naprężenia, którego wartość bezwzględna przewyższa granicę plastyczności

$$\frac{\sigma_s(0)}{\sigma_s(H)} > \frac{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0+\varrho_0 a_0}{2\bar{\varrho}_0\bar{a}_0}. \tag{3.14}$$

Obszar V. Jest to obszar odciążenia. Analiza obrazu rozwiązań przedstawionego na rys. 3 wskazuje, że wartości, jakie przyjmują naprężenia i prędkości przemieszczeń w obszarach *V*, *VI* i *VIII* nie wpływają na rozwiązania w płaszczyźnie styku warstwy z półprzestrzenią w rozważanym zakresie czasów (tj. do momentu odbicia fali (3.4) od powierzchni półprzestrzeni).

Aby nie rozszerzać zbytnio objętości artykułu, jak również biorąc pod uwagę fakt stwierdzony w poprzednim zdaniu, nie będziemy zamieszczać wymagających zbyt wiele miejsca zależności rekurencyjnych, które wyrażają naprężenia i prędkości przemieszczeń w poszczególnych częściach wymienionych obszarów. Ograniczymy się więc w dalszym ciągu do zwięzłego omówienia sposobu uzyskania tych zależności.

Jako pierwszy krok w kierunku określenia rozwiązań wewnątrz obszaru V potraktujemy wyznaczenie naprężeń i prędkości przemieszczeń występujących na froncie fali odciążenia (3.4), wzdłuż jej odcinka *5* (*R1*) (patrz rys. 3). W tym celu należy wykorzystać scałkowane związki dla dodatnich charakterystyk w zakresie odciążenia, które biorą początek na granicy $x = 0$ obszaru *II* i przecinają front fali (3.4) na odcinku *5* (*R1*). Otrzymana w ten sposób zależność między naprężeniem i prędkością przemieszczeń występującymi na froncie fali (3.4) pozwala określić każdą z tych wielkości, jeśli uwzględnimy warunek dynamicznej ciągłości oraz (3.10). W dalszym ciągu na podstawie scałkowanych związków wzdłuż ujemnych charakterystyk w zakresie odciążenia, biorących początek na odcinku *5* (*R1*) oraz (2.5) wyznaczamy prędkość przemieszczeń na brzegu $x = 0$ warstwy na odcinku *5* (*L1*) — patrz rys. 3).

Procedura określania rozwiązań na kolejnych odcinkach fali odciążenia (3.4) i granicy $x = 0$ rozważanego obszaru dalej powtarza się.

Stosując metodę charakterystyk znajdziemy bez trudu rozwiązania wewnątrz obszaru pamiętając o tym, że określiliśmy je na granicach tego obszaru.

Obszar VI. W obszarze tym materiał warstwy znajduje się w zakresie odciążenia, jednakże mamy tu do czynienia z procesem narastania bezwzględnej wartości naprężenia. Osiąga ono w poszczególnych punktach o współrzędnej przestrzennej x leżących przed frontem fali silnej nieciągłości (3.11) (na jej odcinku stanowiącym granicę między obszarami *VI* i *VII*) wartości takie jakie przyjmowało w punktach o tej samej współrzędnej na froncie fali odciążenia (3.4). Fakt ten pozwala w sposób podobny do stosowanego w obszarze V określić rozwiązania na granicach rozważanego obecnie obszaru, a następnie w jego wnętrzu.

Obszar VII. W obszarze tym występuje zjawisko podobne jak w obszarze *VI.* Naprężenie w poszczególnych punktach o współrzędnej przestrzennej x, należących do obszaru i znajdujących się przed frontem fali silnej nieciągłości (3.1) osiąga wartość taką samą, jaką miało w punktach o tej samej współrzędnej, leżących na fali odbitej (3.11). Fakt ten pozwala, w sposób analogiczny do stosowanego w obszarze *VI,* określić rozwiązania poszukiwane obecnie.

Naprężenie i prędkości przemieszczeń wzdłuż odcinków *7*(*Rk*) granicy prawostronnej $x = H$) obszaru, o numerach kolejnych „k", wyrażają się następująco:

$$
\tag{3.15}
\begin{aligned}
\sigma_{7(Rk)}(t) &= (-A)^k \sigma_{4(ct)}(t_n) + \frac{2\varrho_0 a_0}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \sum_{i=1}^{k} (-A)^{k-i} \sigma_{4(rp)}(x_{si}),\\
v_{7(Rk)}(t) &= -\frac{\sigma_{7(Rk)}(t)}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
t_n = B^{-k} t + \frac{H}{a_p}(B^{-k}+1) - 2\frac{H}{a_p} \sum_{j=0}^{k} B^{-j},
$$

$$x_{sl} = \frac{a_p a_1}{a_p - a_1}\left\{\left(t + \frac{H}{a_p}\right)B^{-(k-i)} - 2\frac{H}{a_p}\sum_{j=1}^{k-(i-1)} B^{1-j}\right\},$$

$\sigma_{4(ct)}(t_n)$, $\sigma_{4(rp)}(x_{si})$ — odpowiednio naprężenia na styku warstw oraz na froncie fali odbitej (3.11) określone w objaśnieniach wzorów (3.13).

Rozwiązania wzdłuż kolejnych odcinków o numerach „k" lewostronnej granicy obszaru [tj. przed frontem fali silnej nieciągłości (3.4)]:

$$\sigma_{7(Lk)}(x) = \sigma_{4(rp)}(x),$$

(3.16)
$$v_{7(Lk)}(x) = \frac{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0 - \varrho_0 a_p}{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0\varrho_0 a_p}(-A)^{k-1}\sigma_{4(ct)}(t_n) - \frac{\sigma_{4(rp)}(x)}{\varrho_0 a_p} - \frac{2}{\varrho_0 a_p}\sum_{i=1}^{k-1}(-A)^{k-1}\sigma_{4(rp)}(x_{si}),$$

gdzie

$$t_n = \frac{a_p + a_1}{a_p a_1}B^{-(k-1)}x - 2\frac{H}{a_p}\sum_{i=0}^{k-1} B^{i} + \frac{H}{a_p},$$

$$x_{si} = B^{-(k-i)}x - 2\frac{a_1 H}{a_p - a_1}\sum_{j=0}^{k-(i+1)} B^{-j}.$$

Na podstawie (3.15) i (3.16) określamy rozwiązania w dowolnym punkcie (x, t) leżącym wewnątrz obszaru:

(3.17
$$\sigma_7(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\sigma_{7(Rk)}(t_h) + \sigma_{7(Ll)}(x_s)] + \frac{\varrho_0 a_p}{2}[v_{7(Rk)}(t_h) - v_{7(Ll)}(x_s)], \\ \frac{1}{2}[\sigma_{4(ct)}(t_n) + \sigma_{7(L1)}(x_s)] + \frac{\varrho_0 a_p}{2}[v_{4(ct)}(t_n) - v_{7(L1)}(x_s)], \end{cases}$$

$$v_7(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[v_{7(Rk)}(t_h) + v_{7(Ll)}(x_s)] + \frac{1}{2\varrho_0 a_p}[\sigma_{7(Rk)}(t_h) - \sigma_{7(Ll)}(x_s)], \\ \frac{1}{2}[v_{4(ct)}(t_n) + v_{7(L1)}(x_s)] + \frac{1}{2\varrho_0 a_p}[\sigma_{4(ct)}(t_n) - \sigma_{7(L1)}(x_s)], \end{cases}$$

gdzie

$$t + \frac{x-H}{a_p} = \begin{cases} t_h \\ t_n \end{cases}$$
— dla punktu (x, t) leżącego wewnątrz trójkąta przyległego do odcinka $8(L1)$ lewostronnej granicy (ograniczonego charakterystykami — patrz rys. 3),

$$x_s = \frac{a_p t - x}{a_p - a_1}a_1,$$

l, k — numery kolejnych odcinków odpowiednio lewo i prawostronnej granicy obszaru, które określa się po obliczeniu wielkości t_h, t_n, x_s na podstawie wyrażeń podanych wyżej.

Obszar VIII. Jest to obszar odciążenia. Poszukiwanie rozwiązań w obecnym przypadku można sprowadzić do dwu etapów. W pierwszym z nich wykorzystując warunki dynamicznej ciągłości na frontach fal silnej nieciągłości (3.4) i (3.11) (stanowiących granice obszaru) oraz rozwiązania w sąsiednich obszarach *VI* i *VII* określimy naprężenia i prędkości przemieszczeń na odcinkach *8(L1)* i *8(R1)* tych granic (patrz rys. 3). Zastosujemy w tym celu metodę podobną, jak przy znajdowaniu rozwiązań w obszarze *IV*.

Naprężenia i prędkości przemieszczeń określają następujące wzory:

$$
(3.18)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{8(R1)}(x) &= \frac{a_p}{a_p+a_1}\sum_{i=1}^{\infty} B^{2(i-1)}[\varphi_{\mathscr{P}}(x_{s-(i-1)})-B\varphi_{\mathscr{P}}(x_{s-1})]+\\
&\qquad + (B-1)\frac{a_p}{a_p+a_1}\sum_{i=1}^{\infty} B^{2(i-1)}\varphi_{\mathscr{L}}(x_{q-(i-1)}),\\
v_{8(R1)}(x) &= -\frac{\sigma_{8(R1)}(x)}{\varrho_0 a_1}+v_{7(L1)}(x)+\frac{\sigma_{4(rp)}(x)}{\varrho_0 a_1},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\varphi_{\mathscr{P}}(x) &= \varrho_0 a_1 v_{7(L1)}(x)+\sigma_{4(rp)}(x),\\
\varphi_{\mathscr{L}}(x) &= \varrho_0 a_1 v_{6(R1)}(x)+\sigma_{6(R1)}(x),\\
x_{s-(i-1)} &= B^{2(i-1)}x+2\frac{a_p a_1}{(a_p+a_1)^2}\frac{a_0+a_1}{a_0}H\sum_{j=1}^{i-1}B^{2(j-1)},\\
x_{s-1} &= B^{2i}x+2\frac{a_p a_1}{(a_p+a_1)^2}\frac{a_0+a_1}{a_0}H\sum_{j=1}^{i}B^{2(j-1)},\\
x_{q-(i-1)} &= -B^{2i-1}x+\frac{a_p(a_0+a_1)}{a_0(a_p+a_1)}H\left[1-\frac{2a_1 B}{a_p+a_1}\sum_{j=1}^{i-1}B^{2(j-1)}\right].
\end{aligned}
$$

$$
(3.19)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_{8(L1)}(x) &= -B^{-1}\sigma_{8(R1)}(x_s)+\\
&\qquad +\frac{a_p}{a_p-a_1}\{[\sigma_{4(rp)}(x_s)+\varrho_0 a_1 v_{7(L1)}(x_s)]+[\sigma_{6(R1)}(x)-\varrho_0 a_1 v_{6(R1)}(x)]\},\\
v_{8(L1)}(x) &= \frac{\sigma_{8(L1)}(x)}{\varrho_0 a_1}+v_{6(R1)}(x)-\frac{\sigma_{6(R1)}(x)}{\varrho_0 a_1},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
x_s = -B^{-1}x+\frac{a_p(a_0+a_1)}{a_0(a_p+a_1)}B^{-1}H.
$$

Zależności (3.18) i (3.19) stanowią podstawę do określenia rozwiązań na dalszych odcinkach prawo i lewostronnej granicy obszaru oraz w jego wnętrzu. Sposób znajdowania tych rozwiązań podano przy omawianiu obszaru *V*.

Podział rozważanego obecnie obszaru na części może przyjmować różne formy w zależności od przyjętych wartości parametrów. Fakt ten pociąga za sobą konieczność określania rozwiązań osobno dla każdego przypadku. Z tego względu nie będziemy tutaj zamieszczać wymagających wiele miejsca zależności, które odpowiadają przedstawionemu na rys. 3 obrazowi rozwiązań.

Znając w dalszym ciągu rozkład naprężenia na frontach fal silnej nieciągłości (3.4) i (3.11), jak również przed ich frontami (na podstawie rozwiązań w obszarach *VI* i *VII*) możemy określić współrzędne punktów, w których silna nieciągłość zanika. W przypadku zaistnienia tego rodzaju możliwości wyniknie konieczność analizy zjawiska odbicia fali słabej nieciągłości od powierzchni półprzestrzeni sprężystej.

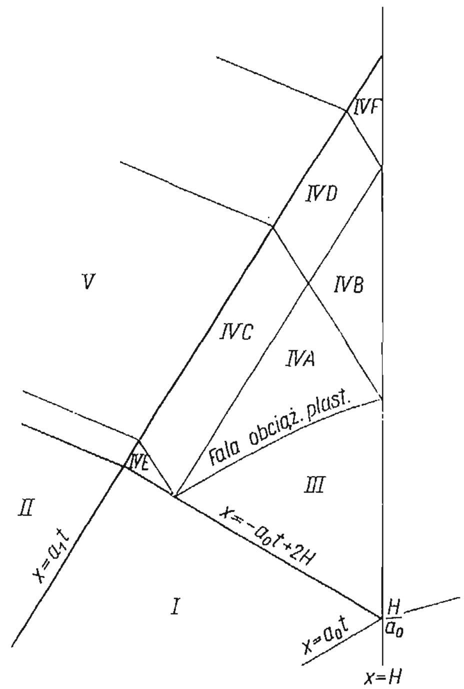
Jeśli natomiast od powierzchni półprzestrzeni ulegnie odbiciu fala silnej nieciągłości (3.4) (jak to widać na rys. 3), wówczas znajdowanie rozwiązań w dalszych obszarach płaszczyzny fazowej sprowadzi się do rozważań prowadzonych poprzednio.

W dalszym ciągu zostaną scharakteryzowane dwa przypadki, dla których pola naprężenia i prędkości przemieszczeń różnią się jakościowo od analizowanych dotychczas.

4. Inne przypadki pól naprężenia i prędkości przemieszczeń

W tym rozdziale zajmiemy się wyłącznie analizą naprężenia występującego w części płaszczyzny fazowej zawartej w granicach obszarów oznaczonych numerami *III*, *IV*, i *VII* na rys. 3.

4.1. Jako pierwszy rozważymy przypadek, gdy wartość bezwzględna naprężenia po odbiciu sprężystej fali silnej nieciągłości (3.1) od powierzchni półprzestrzeni sprężystej



Rys. 5

będzie mniejsza od granicy plastyczności materiału warstwy o współrzędnej $x = H$. Analitycznie fakt ten oznacza niespełnienie warunku (3.14).

Zmieniony obraz rozwiązań w zakresie interesującej nas części płaszczyzny fazowej przedstawia rys. 5. Maksymalne (co do wartości bezwzględnej) naprężenia i prędkości przemieszczeń na froncie sprężystej fali odbitej (w punkcie o współrzędnej $x = H$) określonej równaniem (3.7) obliczamy na podstawie następujących zależności:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{re}(H) &= -\frac{2\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \sigma_s(0), \\
v_{re}(H) &= \frac{2}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \sigma_s(0).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Rozwiązania we wnętrzu obszaru *III* określimy metodą charakterystyk wykorzystując warunek ciągłości dynamicznej na froncie wspomnianej fali odbitej oraz warunki (2.6) i (4.1). Uzyskane tą drogą wzory na naprężenie i prędkości przemieszczeń w punkcie (x, t) rozważanego obszaru są następujące:

$$
\begin{aligned}
\sigma_3(x, t) &= -\frac{2\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \sigma_s(0) + \\
&+ \sum_{m=1}^{l} B_m \left\{ \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (a_0 t - x) \right]^m + \frac{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 - \varrho_0 a_0}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (x + a_0 t - 2H) \right]^m \right\}, \\
v_3(x, t) &= \frac{2}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \sigma_s(0) + \\
&+ \sum_{m=1}^{l} \frac{B_m}{\varrho_0 a_0} \left\{ \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (a_0 t - x) \right]^m - \frac{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 - \varrho_0 a_0}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_0} \left[\frac{a_1}{a_0 - a_1} (x + a_0 t - 2H) \right]^m \right\}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Przyrównując wartość bezwzględną naprężenia z (4.2) do granicy plastyczności (2.1) znajdujemy równanie fali obciążenia plastycznego, która oddziela analizowany obecnie obszar odkształceń sprężystych *III* od obszaru odkształceń plastycznych *IV*.

W przypadku liniowej zmiany granicy plastyczności, którą założono w przykładzie liczbowym, falę obciążenia plastycznego reprezentuje na płaszczyźnie fazowej linia prosta.

Na podstawie (4.2) możemy określić rozkład naprężenia i prędkości przemieszczeń wzdłuż fali obciążenia plastycznego. W tej sytuacji znalezienie rozwiązań w poszczególnych częściach obszaru *IV* nie przedstawia trudności.

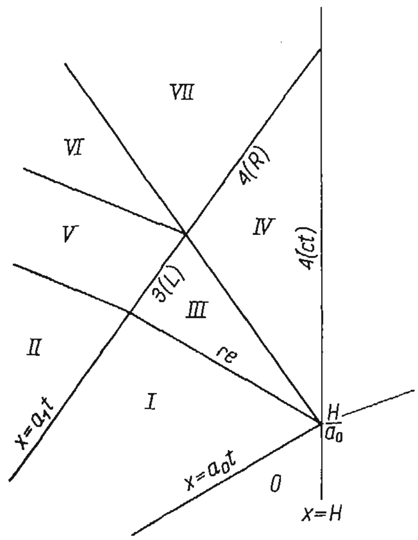
Dodatkowo należy pamiętać, że wartość bezwzględna naprężenia występującego na froncie sprężystej fali odbitej, wzdłuż jej odcinka wchodzącego w zakres obszaru *IVE* (patrz rys. 5), jest równa granicy plastyczności.

Obraz rozwiązań w rozważanym obecnie przypadku znacznie upraszcza się w porównaniu z przedstawionym na rys. 3. Z uwagi na to, że w wyniku odbicia nie pojawia się fala obciążenia plastycznego silnej nieciągłości (3.11), ulega zanikowi obszar *VII* i związany z jego występowaniem obszar *VI*. Na ich miejscu powstanie obszar, w którym pola naprężenia i prędkości przemieszczeń zachowują taki charakter, jak w omawianym uprzednio obszarze *V*. Z tego względu nie będziemy dalej omawiać wyników rozważań dotyczących obecnego przypadku.

4.2. Zbadamy obecnie możliwość wystąpienia w obszarze *IV* (patrz rys. 3) procesu obciążenia plastycznego w przypadku, gdy spełniony jest warunek (3.14). Jak pamiętamy, w rozważaniach prowadzonych w p. 3 założyliśmy, że w obszarze tym występuje odciążenie.

Rozwiązania, na podstawie których obliczamy obecnie naprężenia i prędkości przemieszczeń w obszarze IV mają następującą postać:

$$
\begin{aligned}
\sigma_4(x,t) &= -\frac{a_0-a_1}{2a_0}\sigma_s(z_A)+\frac{a_1}{a_0}\sigma_{1(R)}(z_A)+\\
&\quad+\frac{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0-\varrho_0 a_1}{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0+\varrho_0 a_1}\left[\frac{a_1}{a_0}\sigma_{1(R)}(z_B)+\frac{a_0-a_1}{2a_0}\sigma_s(z_B)\right],\\
v_4(x,t) &= \frac{1}{2\varrho_0 a_1}\left[\frac{a_0-a_1}{a_0}\sigma_s(z_A)-2\frac{a_1}{a_0}\sigma_{1(R)}(z_A)\right]+\\
&\quad+\frac{\bar{\varrho}_0\bar{a}_0-\varrho_0 a_1}{2\varrho_0 a_1(\bar{\varrho}_0\bar{a}_0+\varrho_0 a_1)}\left[\frac{a_0-a_1}{a_0}\sigma_s(z_B)-2\frac{a_1}{a_0}\sigma_{1(R)}(z_B)\right],
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$



Rys. 6

gdzie

$\sigma_s(z_A)$ — na podstawie (2.1),

$\sigma_{1(R)}(z_A)$ — określamy przyjmując we wzorze (3.3) zależność między współrzędnymi według (3.7),

$$
z_A = \frac{a_0}{a_0+a_1}(x-a_1 t)+\frac{2a_1}{a_0+a_1}H,
$$

$$
z_B = -\frac{a_0}{a_0+a_1}(x+a_1 t)+2H.
$$

Obraz rozwiązań, w aktualnie rozważanym przypadku, w interesującej nas części płaszczyzny fazowej ma postać, jak na rys. 6.

Na podstawie (4.3) można określić zachowanie się naprężenia w czasie, badając znak pochodnej:

$$\frac{\partial \sigma_4(x,t)}{\partial t} = -\frac{a_0-a_1}{2(a_0+a_1)} a_1 \frac{\partial \sigma_s(z_A)}{\partial z_A} - \frac{a_1^2}{a_0+a_1} \frac{\partial \sigma_{1(R)}(z_A)}{\partial z_A} + \tag{4.4}$$

$$+ \frac{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 - \varrho_0 a_1}{\bar{\varrho}_0 \bar{a}_0 + \varrho_0 a_1} \left[\frac{(a_0-a_1)a_1}{(a_0+a_1)2} \frac{\partial \sigma_s(z_B)}{\partial z_B} - \frac{a_1^2}{a_0+a_1} \frac{\partial \sigma_{1(R)}(z_B)}{\partial z_B} \right].$$

Jeśli przyjmiemy konkretną postać związku (2.1), wówczas warunek wystąpienia zjawiska obciążenia plastycznego w obszarze *IV* można sprowadzić do prostej postaci, która w przypadku ograniczenia się do $l = 1$ w (2.1) jest następująca:

$$\frac{a_0}{a_1} < 3. \tag{4.5}$$

W tym ostatnim przypadku, w porównaniu z rozważanym w p. 3, ulega zanikowi obszar *VI* (patrz rys. 3) i nie istnieje możliwość wystąpienia zjawiska odciążenia w obszarach położonych przed frontem fali (3.4).

Wielkości naprężenia i prędkości przemieszczeń w płaszczyźnie styku dwu warstw określamy na podstawie (4.3) przyjmując $x = H$.

Obraz rozwiązań na płaszczyźnie fazowej, w części za frontem fali (3.4) jest zbliżony do omówionego w p. 3.

5. Przykład liczbowy

Zasadniczym celem wykonanego przykładu liczbowego jest zilustrowanie zmienności naprężenia działającego w płaszczyźnie styku ośrodków o własnościach określonych wyżej.

Rozważono następujące trzy możliwości jakie mogą pojawić się w wyniku odbicia sprężystej fali silnej nieciągłości (3.1) od powierzchni półprzestrzeni sprężystej:

I — wartość bezwzględna naprężenia pojawiającego się w momencie odbicia na froncie fali odbitej jest mniejsza od granicy plastyczności $\sigma_s(H)$;

II — wartość bezwzględna naprężenia (jak w I) jest większa od granicy plastyczności, natomiast pochodna (4.4) spełnia warunek:

$$\frac{\partial \sigma_4(x,t)}{\partial t} < 0;$$

III — jak w II, lecz pochodna czyni zadość nierówności:

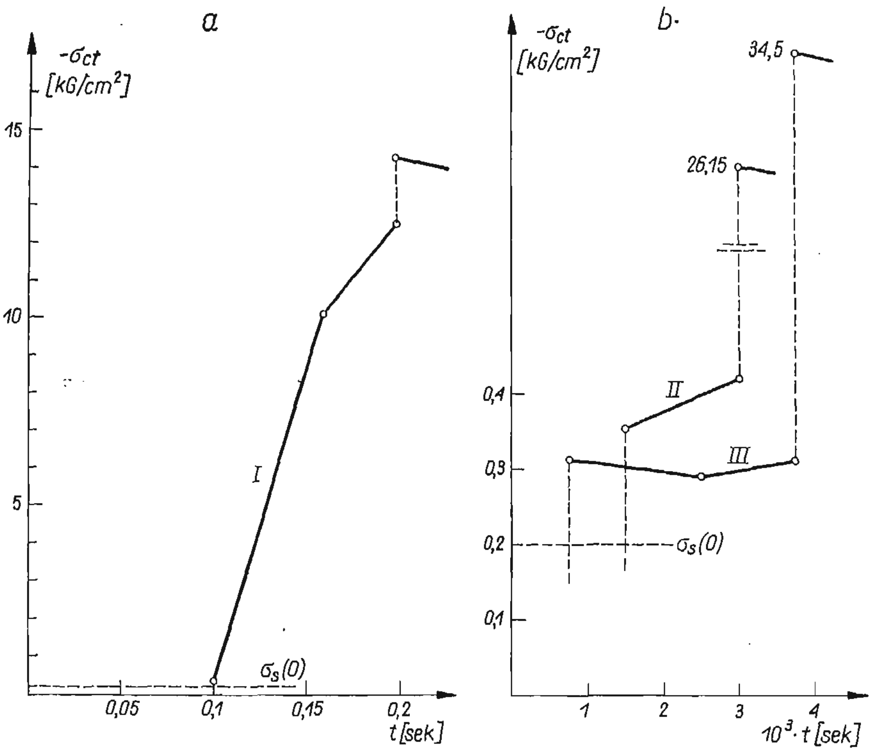
$$\frac{\partial \sigma_4(x,t)}{\partial t} > 0.$$

Do obliczeń przyjęto dane liczbowe:

dla I i II — $a_0 = 500$[m/sek] $= a_p$, $a_1 = 250$ [m/sek], $\varrho_0 = 200$ [kg/m^3], $\sigma_s(x) = 0{,}2(1+x)$ [kG/cm^2], $p_m = 20$ [kG/cm^2], $\tau = 0{,}4$ [sek], $n = 2$, $\bar{a}_0 = 3000$ [m/sek], $\bar{\varrho}_0 = 255$ [kg/m^3]: $H = 50$ [m] (przyp. I), $H = 0{,}75$ [m] (przyp. II);

dla III — $a_0 = 1000$ [m/sek] $= a_p$, $a_1 = 200$ [m/sek], $H = 0{,}75$ [m], $\sigma_s(x) = 0{,}2+0{,}15x$ [kG/cm^2], pozostałe parametry jak poprzednio.

Sporządzone na podstawie obliczeń wykresy naprężenia w funkcji czasu przedstawione są na rys. 7 (a i b). Porównanie wykresów wykazuje istnienie efektu «łagodzenia» silnej nieciągłości (przypadek I — rys. 7a) dzięki znacznej grubości warstwy (50 [m]) charakte-



Rys. 7

ryzującej się rosnącą z głębokością granicą plastyczności. Efekt ten jest znikomy w przypadkach II i III, bowiem warstwa ma tutaj grubość zaledwie 0,75 [m].

6. Uwagi końcowe

Na podstawie przeprowadzonych w pp. 3 i 4 rozważań można uzyskać szereg innych przypadków wynikających bądź z różnych warunków brzegowych (sztywna ściana lub brzeg swobodny w miejscu półprzestrzeni sprężystej), bądź też ze szczególnych własności materiału (sztywne odciążenie, stała granica plastyczności).

Przedstawione w pracy wyrażenia analityczne, określające pola naprężenia i prędkości przemieszczeń mają niejednokrotnie złożoną postać, stąd też w praktycznych przypadkach może być słuszne korzystanie z modelu materiału jeszcze bardziej uproszczonego (np. sztywne odciążenie) niż materiał opisany w p. 2. Stosując jednakże tego typu podejście nie uwzględniamy często dość istotnych efektów jakościowych, jak np. wspomniane w poprzednim punkcie «złagodzenie» silnej nieciągłości.

Literatura cytowana w tekście

1. S. KALISKI, *Fala odciążenia dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia w ośrodku warstwowym*, Biul. WAT, 3 (103), X (1961).
2. E. H. LEE, *A boundary value problem in the theory of plastic wave propagation*, Quart. Appl. Math., **10**, 4 (1953).
3. S. KALISKI, J. OSIECKI, *Problem odbicia się fali odciążenia od sztywnej ściany dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia*, Biul. WAT, 2 (85), VIII (1959).
4. S. KALISKI, J. OSIECKI, *Zagadnienie odbicia się fali odciążenia od odkształcalnej podpory dla ciała o sztywnej charakterystyce odciążenia*, Biul. WAT, XLIII, VIII (1959).
5. J. OSIECKI, *Odbicie płaskiej fali naprężenia w ośrodku stałym niejednorodnym*, Biul. WAT, 9 (98), IX (1960).
6. Х. А. РАХМАТУЛИН, Ю. А. ДЕМЯНОВ, *Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.

Р е з ю м е

ОТРАЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ

В работе рассмотрена задача о распространении плоских волн напряжения, вызванных внезапно появляющимся давлением на поверхности упруго-пластического слоя, основанного на поверхности упругого полупространства. Материал слоя обладает переменным пределом текучести, зависящим от расстояния от внешней поверхности слоя. Полученные результаты позволяют оценивать усилия, действующие на сооружение, находящееся в грунте, возникающие во время волнового процесса.

S u m m a r y

REFLECTION OF PLANE STRESS WAVES IN ELASTIC-PLASTIC MEDIUM WITH VARIABLE YIELD LIMIT

The problem of propagation of plane stress waves in a layered medium consisting of an elastic-plastic layer and elastic semi-space is considered. At outer surface of the layer, the suddenly increasing pressure (which then monotonically decreases to zero) is given. It is assumed that the layer is inhomogeneous with respect to the yield limit. The results obtained in the present paper can be applied to estimate the dynamic forces acting on a structure placed on soil.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 kwietnia 1971 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

BADANIA WŁASNOŚCI REOLOGICZNYCH MATERIAŁU MODELOWEGO WYKONANEGO W OPARCIU O ŻYWICĘ EPOKSYDOWĄ «EPIDIAN 2»*)

KAZIMIERZ SZULBORSKI (WARSZAWA)

1. Problem badań optycznie czułych materiałów modelowych

1.1. Wstęp. Wśród wielu metod stosowanych do badań elementów konstrukcyjnych w różnych warunkach ich pracy ważne miejsce zajmują badania modelowe. Istotny — z uwagi na szeroki zakres stosowania — jest tu rozwijający się ostatnio kierunek zmierzający do wykorzystania materiałów optycznie czułych, prześwietlanych światłem spolaryzowanym. Wykorzystanie światła spolaryzowanego do badań modelowych w szerszym zakresie uzależnione jest od rozwoju prac eksperymentalnych nad materiałami optycznie czynnymi szczególnie w zakresie odkształceń nieliniowo-sprężystych i niesprężystych oraz określenie wpływu na te parametry, jak i na inne cechy fizyko-chemiczne takich czynników, jak obciążenia szybko zmienne, temperatura i wilgotność powietrza.

Prowadzone obecnie elastooptyczne badania modelowe w znacznym stopniu wyprzedzają prace związane z poznaniem samych materiałów modelowych. Dotychczasowe badania tego typu wykonywano przy użyciu takich materiałów, jak szkło, żelatyna, celuloid oraz aktualnie żywice syntetyczne. Szczególnie burzliwy rozwój produkcji tych ostatnich spowodował konieczność prowadzenia równolegle badań nad oceną ich przydatności do modelowania tak w zakresie sprężystym, jak i pozasprężystym.

Własności omawianych tworzyw zależą w sposób istotny od temperatury i czasu trwania obciążenia.

Literatura techniczna zawiera cały szereg publikacji z zakresu badań własności mechanicznych i reologicznych tworzyw sztucznych niewzmocnionych i wzmocnionych. Badania te wiążą się w głównej mierze z rozwojem zastosowań tworzyw sztucznych do wykorzystania różnego rodzaju elementów konstrukcyjnych. Znacznie mniejsza liczba prac jest związana z problemami reologicznymi optycznie czułych materiałów modelowych. Prace z tej dziedziny są fragmentaryczne, brak jest opisu i dyskusji wymaganych własności materiałów modelowych.

Szczególnie przydatnym materiałem na modele elastooptyczne mogą być żywice epoksydowe, które w ostatnim okresie produkuje się w kraju w coraz większych ilościach. Wykazują one znaczną czułość optyczną przy stosunkowo dużym module sprężystości. Własności mechaniczne materiałów modelowych opartych na żywicach epoksydowych zmieniają się w szerokim zakresie w zależności od użytych składników wyjściowych i stosowanych

*) Przedstawione materiały stanowią fragmenty rozprawy doktorskiej autora.

procesów technologicznych. Wyznaczone w próbach doraźnych moduły sprężystości podłużnej dla omawianych tworzyw zmieniają się od kilku do kilkudziesięciu tysięcy kG/cm².

Dość obszerny przegląd dostępnych prac z zakresu wykorzystania żywic epoksydowych jako materiału modelowego nasuwa wniosek, iż nie są jeszcze głęboko zbadane i opisane własności reologiczne, mechaniczne i optyczne tego tworzywa. Mając na względzie wykorzystanie żywic epoksydowych do wykonywania modeli o większej sztywności oraz ewentualnego zastosowania ich w metodzie zamrażania, skoncentrowano uwagę na tworzywach o większych modułach sprężystości.

Na podstawie przeprowadzonych we wcześniejszym okresie badań własnych, których wyniki umieszczono w publikacji [7], wytypowano do dalszych szerszych prac badawczych żywicę epoksydową syntezowaną na gorąco przy wykorzystaniu krajowego surowca wyjściowego. Wyniki przeprowadzonych dotychczas w tym kierunku doświadczeń są przedmiotem tego artykułu.

1.2. Cel badań. W badaniach dążono do określenia w różnych temperaturach własności reologicznych, mechanicznych i optycznych materiału modelowego syntezowanego na gorąco na bazie krajowej żywicy «Epidian 2». Przez własności reologiczne rozumiemy tu w szczególności pełzanie mechaniczne w jednoosiowym stanie naprężenia i towarzyszącą temu pełzaniu zmianę efektu optycznego, określoną wartością rzędu izochromy, zwaną w dalszym ciągu pełzaniem optycznym.

Badania przeprowadzono przy różnych temperaturach w zakresie od 18 do 120°C na próbkach poddanych rozciąganiu. Przy każdej ustalonej temperaturze badano próbki, w których realizowano różne wartości naprężeń rozciągających. W celu pogłębienia wniosków dotyczących pełzania przy stałym naprężeniu, przeprowadzono dodatkowo badania relaksacji.

Wydaje się, że wyniki wymienionych badań — oprócz możliwości wykorzystania w analizie naprężeń metodą elastooptyczną — mogą również być przydatne w coraz bardziej aktualnej problematyce zastosowań żywic epoksydowych przy wykonywaniu złącz i elementów konstrukcyjnych.

1.3. Stan badań własności materiałów modelowych wykonywanych z żywic epoksydowych. Problem badania i interpretacji własności materiałów modelowych optycznie czynnych jest bardzo obszerny i dlatego obecnie ograniczono się do przedstawienia jedynie niektórych jego aspektów, bardziej związanych z tematem artykułu. Współczesny materiał modelowy do typowych badań stanu naprężenia w zakresie sprężystym przy zastosowania światła spolaryzowanego powinien posiadać cechy, które określono w pracy PINDERY [8]. Należy stwierdzić, że żaden z dotychczas stosowanych materiałów nie spełnia tych wymagań.

Najbardziej znanymi żywicami epoksydowymi, stosowanymi w Europie jako materiał do badań modelowych, są żywice szwajcarskiej firmy CIBA typu «Araldit» [1].

Krajowe żywice epoksydowe, produkowane przez wytwórnię chemiczną w Sarzynie, znane są pod nazwą «Epidian».

Pewne charakterystyki mechaniczne i optyczne tworzyw opartych na żywicach epoksydowych typu «Araldit» podano w pracy LOVENA i SAMPSONA [6].

Zdolność do zamrażania wymuszonego efektu optycznego oraz niektóre właściwości optyczne i mechaniczne «Aralditu B» zostały zbadane przez MÖNCHA [3], [4]. Prace badawcze w tym kierunku prowadzone były również przez HABERLANDA i PIDDE [5]. Możliwość modelowania konstrukcji i ustrojów złożonych z elementów o różnych wartościach modułu sprężystości naświetlona została przez PINDERĘ [8].

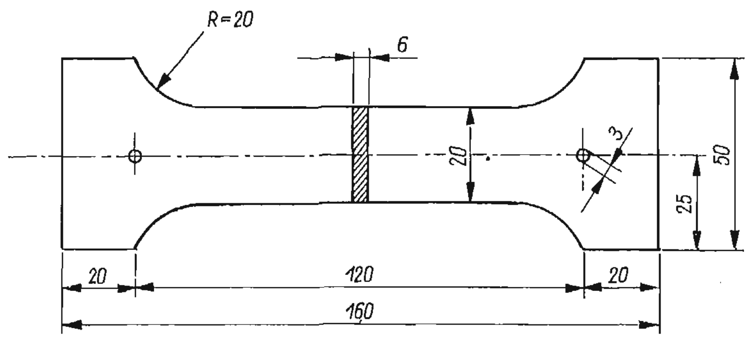
Mimo że żywicę epoksydową stosuje się obecnie coraz częściej w elastooptycznych badaniach modelowych, zdaniem autora własności reologiczne mechaniczne i optyczne tego materiału w różnych temperaturach nie zostały jeszcze w dostatecznym stopniu wyjaśnione. W szczególności odczuwa się niedostatek w zakresie badań własności materiałów optycznie czynnych, opartych na krajowych surowcach typu «Epidian». Z tego zakresu wymienić można nieliczne jeszcze dotąd prace na temat badań niektórych własności tego typu materiałów w temperaturach pokojowych. Badania takie zostały przeprowadzone w kraju przez SŁOWIKOWSKĄ, KOZŁOWSKIEGO i BŁAŻEWICZA [9], DOROSZKIEWICZA [2] i WOLNĄ [11].

Dążąc do dalszego rozwoju zastosowania żywic epoksydowych do badań modelowych metodami optycznymi wykonano w tym kierunku wstępne prace doświadczalne, które opisano w pracy ORŁOSIA, SOBICZEWSKIEGO i autora [7]. Na podstawie analizy przeprowadzonych badań wstępnych, wytypowano materiał oparty na żywicy «Epidian 2» do dalszych bardziej wnikliwych badań własności reologicznych mechanicznych i optycznych w różnych temperaturach.

1.4. Materiał badany. W punkcie 1.3 uzasadniono wybór rodzaju materiału przewidywanego do szerszych badań modelowych. Z uwagi na charakter prowadzonych badań, dążono do otrzymania kompozycji epoksydowej, której własności mechaniczne i optyczne stosunkowo w niewielkim stopniu zależą od czasu żelowania, a okres starzenia nowo odlanych płyt jest ściśle określony. Stabilność wymienionych cech może być zagwarantowana w dość dużym stopniu poprzez utwardzenie żywicy na gorąco. Do utwardzania badanej żywicy «Epidian 2» użyto bezwodnika ftalowego, który jest jednym z najczęściej używanych utwardzaczy z uwagi na łatwą dostępność i niską cenę. Bezwodnik ftalowy krystalizuje w postaci długich igieł w temperaturze $T = 131{,}5°C$. Poza tym jest dobrze rozpuszczalny w żywicy podgrzanej do temperatury $T > 60°C$.

Wykonywanie płyt do badań odbywało się według następujących czynności: Odważoną ilość żywicy ogrzewano w parownicy porcelanowej, sączono przez gazę w celu oddzielenia zanieczyszczeń mechanicznych i dodawano następnie 30 cz. wag. bezwodnika ftalowego na 100 cz. wag. «Epidianu 2». Zarób mieszano w łaźni o temperaturze 130°C do całkowitego rozpuszczenia utwardzacza. Następnie wlewano zarób do metalowej formy umieszczonej w suszarce. Poziom formy regulowano śrubami korekcyjnymi. Utwardzanie prowadzono przez 24 godziny w temperaturze 90°C. Z kolei wyjmowano płytę z formy i wkładano ją do płasko-równoległej kuwety w celu dalszego dotwardzenia w temperaturze 130°C przez następne 24 godziny. Po upływie tego czasu ochładzano układ przez obniżanie temperatury z szybkością 1°C na godzinę do poziomu 50°C, po czym suszarkę wyłączano. Umieszczenie odlewu w oleju podczas dotwardzania i ochładzania miało na celu wyeliminowanie przypadkowych naprężeń. W celu zapewnienia dobrego odstawania odlewu od ścianki formy, płytę stalową smarowano każdorazowo płynem silikonowym, który spełniał rolę czynnika antyadhezyjnego. Otrzymane płyty epoksydowe miały wymiary $5\text{–}6 \times 240 \times 260$ mm. Z płyt wycinano odpowiednie kształtki służące do badań.

1.5. Urządzenia pomiarowe. Wszystkie badania przeprowadzono wykorzystując polaryskop JP-2 wraz z układem obciążającym. Do badań w podwyższonych temperaturach posłużyła specjalna komora termiczna konstrukcji własnej autora. Polaryskop JP-2 pracuje przy rozproszonym źródle światła monochromatycznego lamp sodowych lub przy świetle



Rys. 1

żarowym lamp wolframowych i wyposażony jest w skalę umożliwiającą wykonywanie pomiarów ułamkowych rzędów izochrom metodą kompensacyjną według Tardy'ego.

Pomiary odkształceń wykonano za pomocą tensometrów mechanicznych, czujników zegarowych oraz aparatury optycznej. Do pomiaru odkształceń wzdłużnych użyto tensometrów mechanicznych o elementarnej działce 0,01 mm, wyposażonych w listwy. Tensometr posiadał dwa symetryczne czujniki zegarowe.

Odkształcenia w kierunku poprzecznym, z uwagi na pożądaną większą dokładność, mierzono za pomocą tensometrów mechanicznych Huggenbergera o elementarnej działce bliskiej 0,001 mm i bazie $l = 20$ mm. Pomiar odkształceń próbek badanych w temperaturach podwyższonych odbywał się za pomocą katetometru pionowego i tensometrów mechanicznych. Układy izochrom rejestrowano za pomocą małoobrazkowego aparatu fotograficznego.

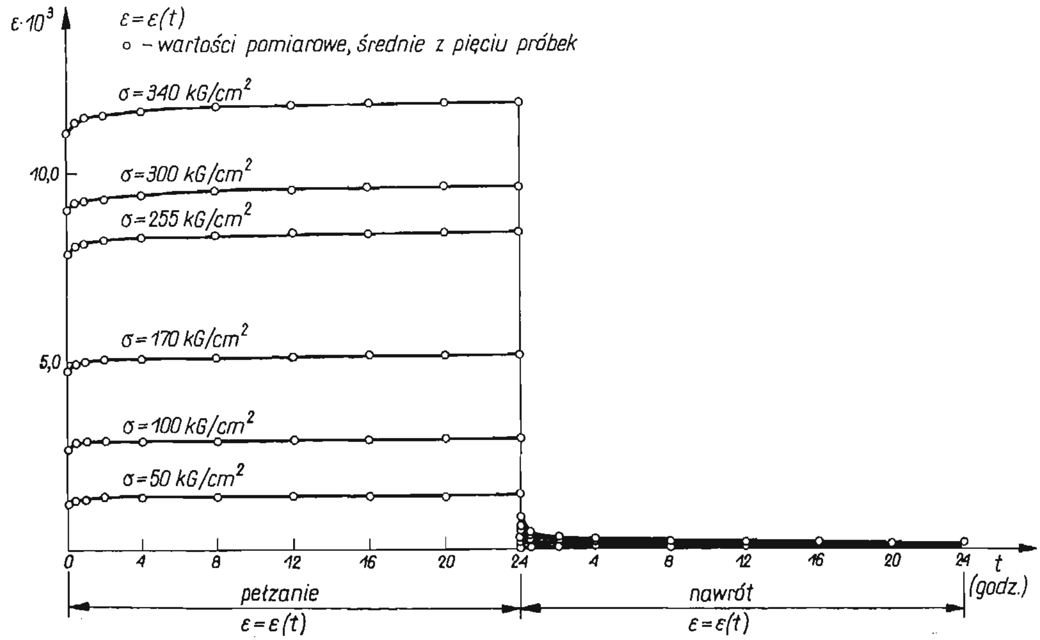
W badaniach stosowano kilka rodzajów próbek. Przykładowo na rys. 1 przedstawiono próbkę do badań w temperaturze pokojowej. Brzegi próbek były polerowane, następnie pokrywane warstwą lakieru w celu eliminowania efektu brzegowego. Próbki przed i po badaniach przechowywano w wannach wypełnionych olejem w celu ochrony ich przed wilgocią.

2. Badanie własności reologicznych materiału modelowego opartego na żywicy epoksydowej

2.1. Pełzanie mechaniczne w temperaturze pokojowej. Badania reologiczne rozpatrywanego materiału w temperaturze pokojowej obejmowały próby pełzania oraz relaksacji. Materiał modelowy na próbki przygotowywany był zgodnie z opisem podanym w punkcie 1.4.

Z uwagi na charakter prowadzonych badań istotnym zagadnieniem jest okres starzenia się nowo odlewanych płyt. Według danych zawartych w pracy [10] dotyczącej żelazowania kompozycji epoksydowych na bazie krajowej żywicy «Epidian 2», niezbędny okres starzenia w temperaturze pokojowej wynosi około 4 dni.

W przedstawionych badaniach próbki do badań pełzania wycinano po co najmniej 14-dniowym okresie utwardzania. Kształt i wymiary modeli w postaci prętów pryzmatycznych o przekroju prostokątnym były tak dobrane, aby można było jednocześnie mierzyć odkształcenia wzdłużne i poprzeczne. Modele poddawano jednoosiowemu rozciąganiu. Do pomiaru odkształceń wzdłużnych użyto czujników zegarowych opisanych w punkcie 1.5. Pomiary odkształceń poprzecznych wykonywano tensometrami Huggenbergera. Równocześnie badano własności optyczne, rozpatrywane w dalszym ciągu artykułu. Podczas prób pełzania stałą siłę osiową wywierano za pomocą układu obciążającego polaryskopu JP-2. Czas trwania pełzania wynosił 24 godziny. Badania prowadzono przy sześciu różnych wartościach naprężeń w poprzecznych przekrojach próbek, mianowicie: 50, 100, 170 255, 300 i 340 kG/cm^2. Po odciążeniu próbek obserwowano zmiany odkształceń (nawrót po pełzaniu związany ze zjawiskiem opóźnienia sprężystego) w ciągu następnych 24 godzin.



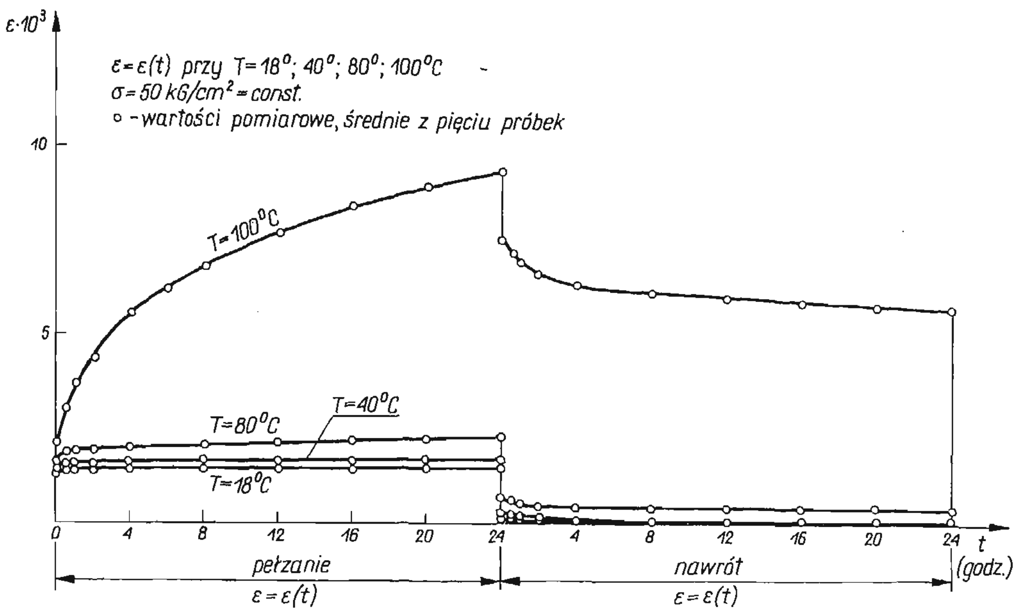
Rys. 2

Na rys. 2 przedstawiono wyniki badań pełzania mechanicznego w temperaturze pokojowej. Na rysunku tym uwidoczniono również wyniki pomiarów odkształceń przy nawrocie po pełzaniu wyznaczonych w ciągu 24 godzin. Uzyskane wyniki badań pełzania mechanicznego pozwoliły na wyznaczenie zależności σ od ε przy ustalonych czasach pełzania.

2.2. Pełzanie mechaniczne w temperaturach podwyższonych. Badania pełzania w temperaturach podwyższonych wykonano w komorze o automatycznej regulacji temperatury z dokładnością do 0,1°C. Komora była umieszczona w przestrzeni pomiarowej polaryskopu JP-2. Pomiary odkształceń wzdłużnych i poprzecznych dokonywano przy użyciu wzorcowanych czujników zegarowych i tensometrów mechanicznych Huggenbergera oraz katetometru pionowego.

Badania pełzania przeprowadzono na próbkach przedstawionych na rys. 1 przy ustalonych trzech poziomach temperatur, mianowicie: 40°C, 80°C i 100°C. Czas pełzania przy wszystkich poziomach temperatur wynosił 24 godziny. Podobnie jak poprzednio w temperaturze pokojowej, rejestrowano odkształcenia przy nawrocie po pełzaniu w ciągu następnych 24 godzin. Wyniki szczegółowe z badań podano w pracy [12].

Na rys. 3 przedstawiono przykładowo przebieg krzywych zależności $\varepsilon = \varepsilon(t)$ przy naprężeniu $\sigma = 50$ kG/cm^2 w temperaturach T równych 18, 40, 80 i 100°C. Z rys. 3 widać,



Rys. 3

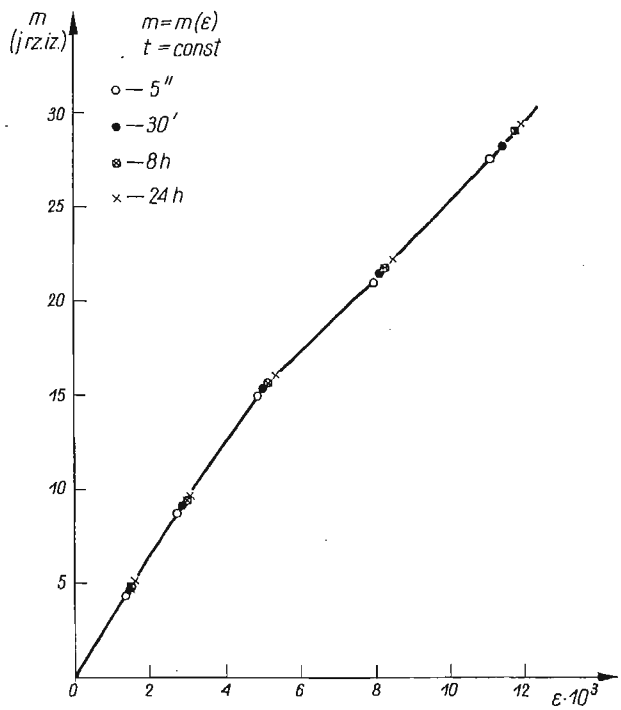
że w temperaturze 100°C przebieg wymienionych zależności różni się istotnie od przebiegu pełzania w temperaturach 40 i 80°C. Próbki po odciążeniu w temperaturze 100°C wykazują znaczne przyrosty odkształceń utrzymujące się po upływie 24-godzinnego czasu nawrotu i następnym ochłodzeniu do temperatury pokojowej.

2.3. Pełzanie optyczne w temperaturze pokojowej. Podczas badań pełzania mechanicznego prowadzono obserwacje zmian efektu optycznego przez pomiar wartości m rzędu izochromy. Wartości m wyznaczono stosując kompensację metodą Tardy'ego z dokładnością do 0,01 j. rz. iz.

W zagadnieniach własności optycznych materiału modelowego w celach porównawczych dogodnie jest odnosić wyniki badań do modeli o grubości równej jednostce. W związku z tym otrzymane wyniki końcowe pomiarów przeliczono na wartości odpowiadające grubości równej 1 cm.

Wszystkie podane wykresy z badań pełzania optycznego odnoszą się zatem do próbek o grubości $\delta = 10$ mm.

Badania pełzania optycznego w temperaturze pokojowej ($T_{śr} = 18°C$) prowadzono dla tych samych wartości naprężeń, jak przy pełzaniu mechanicznym, tj. równych: 50, 100, 170, 255, 300, 340 kG/cm^2. Otrzymane zależności $m = m(t)$ dla różnych naprężeń



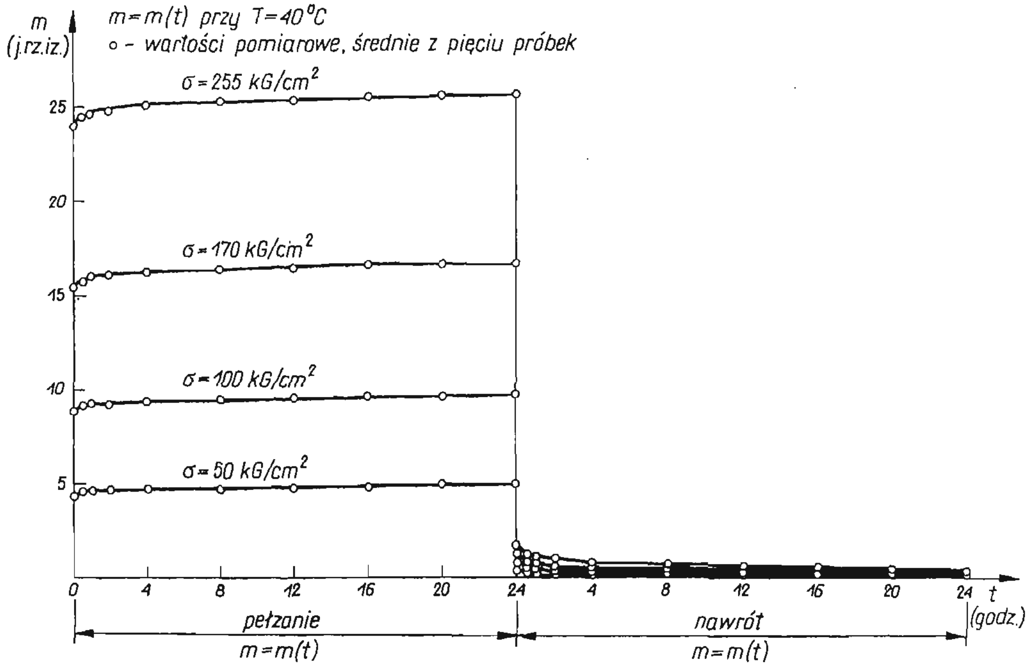
Rys. 4

pozwoliły wyznaczyć krzywe izochroniczne dla ustalonych czasów pełzania, tj.: 5 sek., 15 min., 2h, 8h i 24h. Krzywe te przedstawiono na rys. 4.

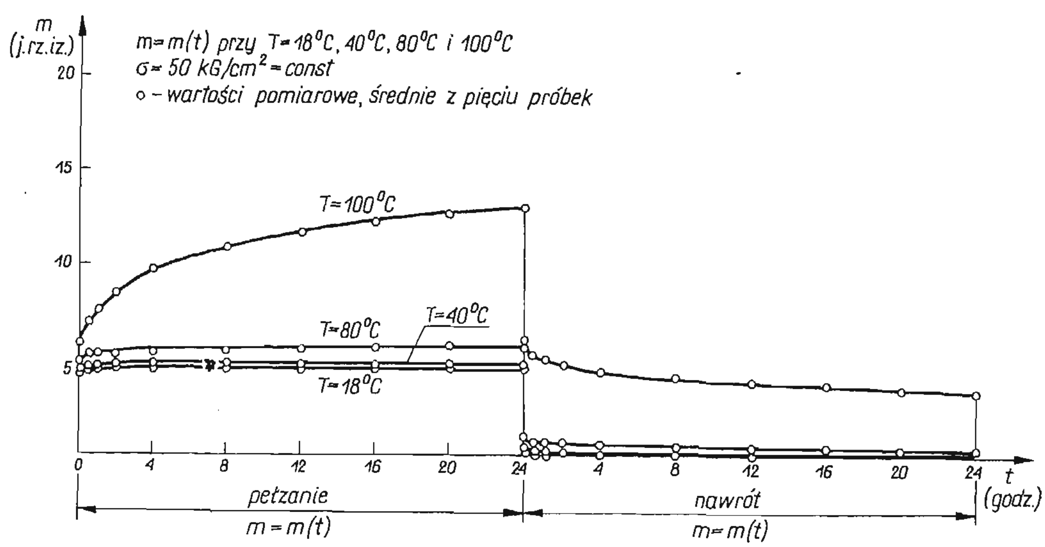
2.4. Pełzanie optyczne w temperaturach podwyższonych. Badanie pełzania optycznego realizowano przy wykorzystaniu komory grzejnej oraz układu optycznego polaryskopu. Pomiar rzędów izochromy wykonywano równocześnie z pomiarem odkształceń wzdłużnych i poprzecznych. Obserwacje prowadzono w temperaturach: 40, 80 i 100°C.

W temperaturze 40°C stosowano naprężenia równe: 50, 100, 170 i 255 kG/cm^2. Grubość użytych próbek wynosiła $\delta = 6$ mm, wyniki pomiarów sprowadzono do grubości 10 mm. Na rys. 5 przedstawiono przebieg zależności $m = m(t)$ dla różnych naprężeń. Ten sam rysunek przedstawia nawrót efektu optycznego w ciągu 24 godzin. Zależność $m = m(t)$ pozwoliła na wyznaczenie krzywych izochronicznych przy stałych czasach t. Podobnie jak przy pełzaniu mechanicznym w temperaturze 100°C zastosowano mniejsze wartości naprężeń, z uwagi na występujące duże odkształcenia i ograniczone wymiarami komory możliwości pomiarowe.

Na rys. 6 przedstawiono przebieg zależności $m = m(t)$ dla próbek o grubości $\delta = 10$ mm, przy naprężeniu równym 50 kG/cm^2 w temperaturach T równych 18, 40,


m
(j.rz.iz.)
m=m(t) przy T=40°C
o - wartości pomiarowe, średnie z pięciu próbek
σ=255 kG/cm²
σ=170 kG/cm²
σ=100 kG/cm²
σ=50 kG/cm²
25
20
15
10
5
0
4
8
12
16
20
24
4
8
12
16
20
24
t
(godz.)
pełzanie
m=m(t)
nawrót
m=m(t)

Rys. 5

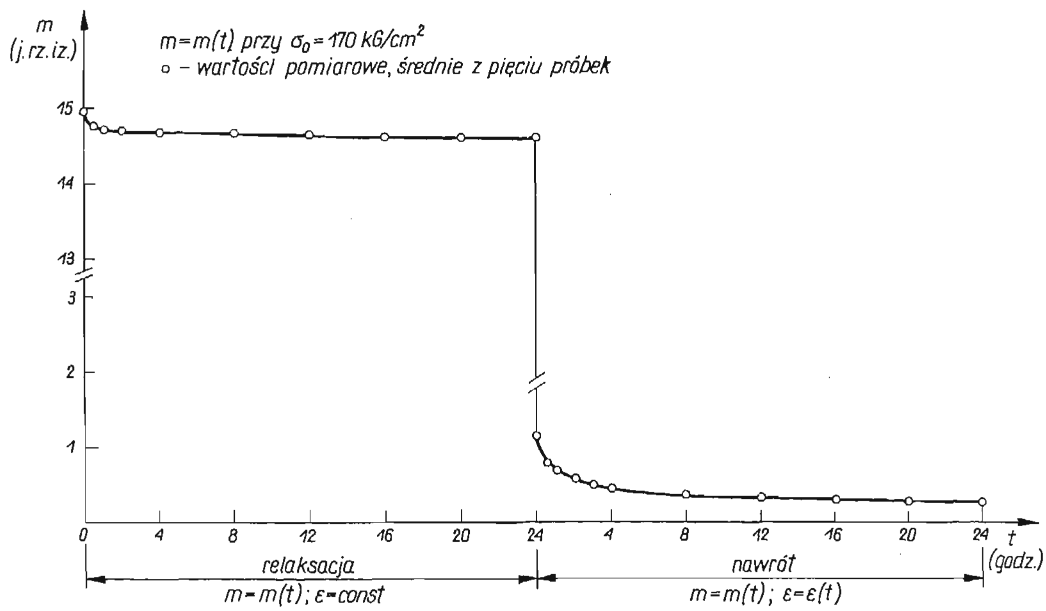

m
(j.rz.iz.)
m=m(t) przy T=18°C, 40°C, 80°C i 100°C
σ=50 kG/cm²=const
o - wartości pomiarowe, średnie z pięciu próbek
20
15
10
5
T=100°C
T=80°C
T=40°C
T=18°C
0
4
8
12
16
20
24
4
8
12
16
20
24
t
(godz.)
pełzanie
m=m(t)
nawrót
m=m(t)

Rys. 6

80 i 100°C. Wyniki badań pełzania mechanicznego i optycznego przedyskutowano w następnym artykule[1].

Tak jak przy pełzaniu mechanicznym w zakresie czasu pełzania do 24 godzin przy temperaturze 100°C można zauważyć jedynie okres pełzania nieustalonego. Po odciążeniu w tej temperaturze występuje nawrót do efektu optycznego wyrażonego skończoną wartością izochromy. Po ochłodzeniu do temperatury pokojowej pozostaje utrwalony efekt optyczny (efekt zamrażania).

2.5. Relaksacja naprężeń i efektu optycznego tworzywa w temperaturze pokojowej. Przeprowadzone badania relaksacji naprężeń i efektu optycznego stanowiły uzupełnienie opisanych poprzednio w punktach 2.1 do 2.4 badań na pełzanie. Wykonano je w temperaturze pokojowej i w temperaturach podwyższonych. Z uwagi na sprawdzający charakter badań, pomiary



Rys. 7

wykonano przy jednym poziomie naprężeń. W badaniach wykorzystano stanowisko pomiarowe stosowane przy próbach pełzania. Stanowisko to umożliwiło przeprowadzenie wstępnego rozciągania próbek poprzez układ obciążający polaryskopu. Badania relaksacyjne realizowano przy użyciu próbek tego samego typu co przy pełzaniu w temperaturze pokojowej. Próbki wycinano z płyt, których okres starzenia wynosił 14 dni. Kontrolę stałego wstępnego odkształcenia przeprowadzono za pomocą czujników zegarowych opisanych w punkcie 1.5.

Pomiar spadku siły rozciągającej wykonywano zestawem własnego projektu. W skład

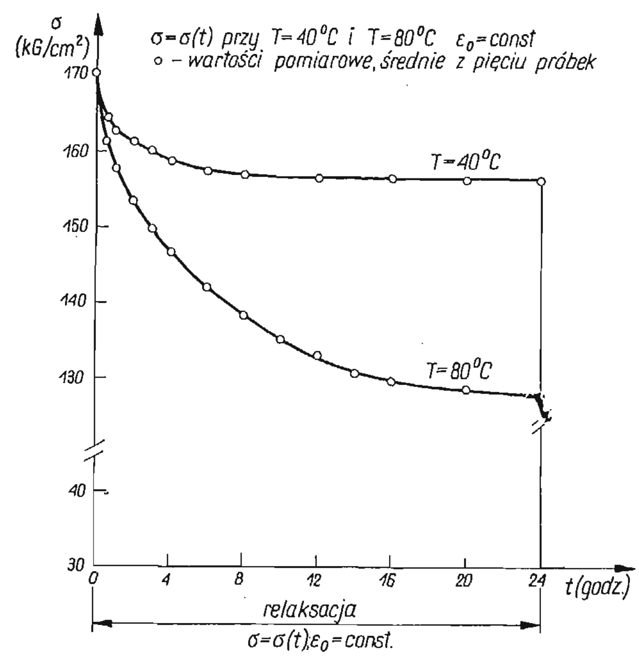
[1]) Następny artykuł ukaże się w zeszycie 4(1972) Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej.

zestawu do pomiaru spadku siły wchodziły naczynia szklane, które wykorzystano po wypełnieniu wodą jako obciążniki ramy polaryskopu, poza tym krany spustowe, zawory, przewód gumowy oraz cechowane obojętnościowo naczynie zbiorcze.

Spadek siły rejestrowano poprzez pomiar wody w naczyniu zbiorczym, którą odlewano z naczynia obciążającego przez otwarcie kranu. W trakcie wykonywania pomiarów spadku siły rejestrowano równocześnie odpowiedni rząd izochromy, reprezentujący relaksację optyczną. Badania przeprowadzono przy początkowym naprężeniu $\sigma_0 = 170$ kG/cm^2.

Okres badań relaksacyjnych wynosił 24 godziny. Podczas relaksacji mierzono wartości rzędu izochromy m przy różnych czasach t. Na rys. 7 przedstawiono wykres relaksacji optycznej w czasie 24-godzinnej próby. Po zakończonych próbach relaksacji mierzono przez następne 24 godziny rzędy izochrom oraz odkształcenia, które określały odpowiednio zanikający efekt optyczny towarzyszący nawrotowi odkształceń.

2.6. Relaksacja naprężeń i efektu optycznego w temperaturach podwyższonych. W badaniach wykorzystano komorę wmontowaną w układ obciążający polaryskopu opisaną w punkcie 1.5. Badania relaksacji naprężeń i efektu optycznego mierzonego rzędem izochromy przeprowadzono w temperaturach 40 i 80°C. Spadek siły obciążającej próbkę mierzono podobnie,



Rys. 8

jak podczas badania w temperaturze pokojowej (wg punktu 2.5). Kontrole stałości odkształcenia wstępnego dokonywano czujnikami zegarowymi i katetometrem pionowym. Równocześnie ze spadkiem siły mierzono wartości rzędów izochrom. Na rys. 8 przedstawiono zależność naprężeń σ od czasu t w czasie 24-godzinnej próby relaksacji materiału w temperaturach 40 i 80°C i przy początkowym naprężeniu $\sigma_0 = 170$ kG/cm^2.

Szczegółowa analiza wyników badań z obliczeniami naprężeń relaksacyjnych metodami elastooptycznymi, analitycznymi oraz porównanie otrzymanych wyników z danymi pomiarowymi przedstawione zostaną w następnym artykule.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. BROJER, Z. HERTZ, SŁ. PENECZEK, *Żywice epoksydowe*, PWT, Warszawa, 1960.
2. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Przegląd badań elastooptycznych Pracowni Doświadczalnej Analizy Naprężeń IPPT*; IV Sympozjon z zakresu doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego, Warszawa 1970.
3. L. FÖPPL, E. MÖNCH, *Практика оптического моделирования*, Изд. Наука, Сибирское отделение, Новосибирск 1966.
4. L. FÖPPL, E. MÖNCH, *Praktische Spannugsoptik*, Springer Verlag, Berlin 1950.
5. G. HABERLAND, Ch. PIDDE, *Der dehnungsoptische Effekt der Epoxydharze beim spannungsoptischen Erstarrungsvefahren*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar 11, Jahrangang, 1964, Heft 2.
6. M. M. LOVEN, R. C. SAMPSON, *Large eopoxy resin castings for threedimensional photoelastic tests*, Westinghouse Research Laboratories. Research Report, Pittsburg, Pensylvania 1960.
7. Z. ORŁOŚ, Z. SOBICZEWSKI, K. SZULBORSKI, *Własności mechaniczne i optyczne niektórych żywic epoksydowych, przeznaczonych na modele do badań elastooptycznych*, PWN, Warszawa 1966.
8. J. T. PINDERA, *Reologiczne własności materiałów modelowych*, WNT, Warszawa 1962.
9. I. SŁOWIKOWSKA, A. KOZŁOWSKI, T. BŁAŻEWICZ, *Badania elastooptyczne własności krajowych żywic epoksydowych*, Polimery (w druku).
10. Z. SOBICZEWSKI, M. WAJNRYB, *Über Mikrohärte Prüfungen an Poliester und Epoxydharzen*, Plaste und Kautschuk, 9, 342 (1962).
11. M. WOLNA, *Epoksydowe materiały elastooptyczne o niskim module Younga*, IV Sympozjon z zakresu doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego, Warszawa 1970.
12. K. SZULBORSKI, *Własności mechaniczne i optyczne w różnych temperaturach materiału modelowego opartego na żywicy epoksydowej «Epidan 2»*, Rozprawa doktorska, WAT, 1970.

Р е з ю м е

ИСПЫТАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МОДЕЛЬНОГО МАТЕРИАЛА, ИЗГОТОВЛЕННОГО НА ОСНОВЕ ЭПОКСИДНОЙ СМОЛЫ ЭПИДИАН 2

В статье описаны некоторые результаты реологических испытаний механических и оптических свойств эпоксидной смолы. Для эксперимента подобран оптически чувствительный материал, изготовленный на основе отечественной смолы Эпидиан 2. Сооружена испытательская установка, состоящая из полярископа с большим полем зрения и нагревательной камеры, позволяющей производить опыты в различных температурах с одновременным измерением деформаций и величин порядка изохромы.

Результатам испытаний дано графическое истолкование.

S u m m a r y

EXAMINATION OF RHEOLOGICAL PROPERTIES OF A MATERIAL MADE FROM THE EPOXY RESIN «EPIDIAN 2»

The paper describes several results of testing of the mechanical and optical properties of the epoxy resin. The optically sensitive material prepared from the locally produced «Epidian 2» resin was sampled for investigation. The testing unit comprised a polariscope with a wide field of vision and a heating chamber enabling the tests to be carried out at various temperatures and with simultaneous measurement of deformations and isochrome orders. The results of the tests have been presented graphically.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

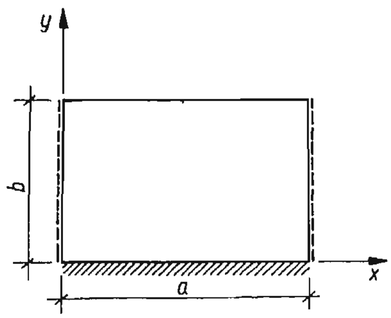
Praca została złożona w Redakcji dnia 14 kwietnia 1971 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

PŁYTY PROSTOKĄTNE O JEDNOKIERUNKOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

W pracy wykorzystano własności operacji T^{α} [1] do rozwiązania równania różniczkowego płyty prostokątnej izotropowej o jednokierunkowo zmiennej sztywności. Rozważania ograniczono do płyt o dwóch przeciwległych krawędziach $x = 0$ i $x = a$ swobodnie



Rys. 1

podpartych, krawędzi $y = 0$ sztywno utwierdzonej i o dowolnych warunkach brzegowych na krawędzi $y = b$ (rys. 1).

Płyty o innych warunkach brzegowych na krawędzi $y = 0$ rozwiązuje się tak samo.

1. Równanie wyjściowe

Równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty niejednorodnej w swej płaszczyźnie ma kształt [2]

$$\nabla^2(D\nabla^2 w)-(1-\nu)L(D, w) = q, \tag{1.1}$$

gdzie

$$L(D, w) = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

W wielu przypadkach zmienność sztywności płyty może być wyrażona z dostateczną dokładnością równaniem

$$D(y) = D_0\delta^{y/b}, \tag{1.2}$$

w którym δ — stała, którą w każdym poszczególnym przypadku należy tak dobrać, by równanie (1.2) odtwarzało możliwie najwierniej rzeczywistą zmienność sztywności płyty. Podstawiając wyrażenie (1.2) do równania (1.1) znajdujemy

$$(1.3)\qquad D_0\delta^{y/b}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+2D_0\delta^{y/b}\frac{1}{b}\ln\delta\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)+$$
$$+D_0\delta^{y/b}\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=q.$$

2. Rozwiązanie równania (1.3)

Wprowadźmy operację T^α zdefiniowaną równością [1]

$$\bigwedge_{\{\varphi(y)\}\in\mathscr{K}}\left(T^\alpha\{\varphi(y)\}=\{e^{\alpha y}\varphi(y)\}\right),$$

gdzie $\mathscr{K}$ jest pewną klasą funkcji określoną w [1].

Ponieważ

$$\frac{\partial^{k+l}w}{\partial x^k\partial y^l}\in\mathscr{K}\qquad\text{dla } k+l\leqslant 4,$$

więc równanie (1.3) z warunkami brzegowymi

$$w(0,y)=0,\qquad w(a,y)=0,\qquad w(x,0)=0,$$
$$w_{x^2}(0,y)=0,\qquad w_{x^2}(a,y)=0,\qquad w_y(x,0)=0$$

sprowadza się do postaci operatorowej

$$(2.1)\qquad T^{(1/b)\ln\delta}\left[(w^{(4)}+2s^2w''+s^4w)+\frac{2}{b}\ln\delta(sw''+s^3w)+\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(\nu w''+s^2w)\right]=$$
$$=\frac{q}{D_0}+\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)w_{y^2}(x,0)+w_{y^3}(x,0)+\frac{2}{b}\ln\delta\, w_{y^3}(x,0),$$

gdzie s jest operatorem różniczkowym, z operatorowymi warunkami

$$w(0)=0,\qquad w''(0)=0,\qquad w(a)=0,\qquad w''(a)=0.$$

Przyjmując

$$q=\sum_{m\geqslant 1}q_m\sin\alpha_m x,\qquad w_{y^2}(x,0)=\sum_{m\geqslant 1}A_m\sin\alpha_m x,$$
$$w_{y^3}(x,0)=\sum_{m\geqslant 1}B_m\sin\alpha_m x,\qquad w=\sum_{m\geqslant 1}w_m\sin\alpha_m x,\qquad \alpha_m=\frac{m\pi}{a},$$

z (2.1) otrzymujemy

$$(2.2)\qquad T^{(1/b)\ln\delta}w_m\left[(\alpha_m^4-2\alpha_m^2s^2+s^4)+\frac{2}{b}\ln\delta(-\alpha_m^2s+s^3)+\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2(-\nu\alpha_m^2+s^2)\right]=$$
$$=\frac{q_m}{D_0}+A_m\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)+B_m+2\frac{A_m}{b}\ln\delta.$$

Przedstawiając operatory w_m w postaci

$$w_m = \sum_{n\geq 0} C_{mn} \frac{1}{s^{n+1}} \tag{2.3}$$

i uwzględniając, że jeżeli $\varphi(s)$ jest dowolnym wyrażeniem wymiernym operatora s

$$\varphi(s) = \frac{\beta_k s^k + \dots + \beta_0}{\gamma_l s^l + \dots + \gamma_0}, \tag{2.4}$$

to

$$T^\alpha \varphi(s) = \varphi(s-\alpha)$$

oraz że każdy wyraz szeregu (2.3) jest postaci (2.4), wartości C_{mn} można wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych. Należy w tym celu porównać współczynniki przy tych samych potęgach wyrażenia $\left(s - \frac{1}{b}\ln\delta\right)$.

Po wyznaczeniu współczynników C_{mn} rozwiązanie dane jest wzorem

$$w = \sum_{m\geq 1} \sum_{n\geq 0} C_{mn} \frac{y^n}{n!} \sin\alpha_m x.$$

Stałe A_m i B_m wyznacza się z warunków brzegowych na krawędzi $y = b$.

Jeżeli obciążenie nieciągłe ze względu na zmienną y dane jest funkcją operatorową

$$q(x) = \sum_{t=0}^{j} \sum_{m\geq 1} q_{tm} h^{y_t} \sin\alpha_m x,$$

gdzie h^{y_t} jest operatorem przesunięcia, to operatory w_m należy przyjąć w postaci

$$w_m = \sum_{t=0}^{j} \sum_{n\geq 0} C_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{s^{n+1}}. \tag{2.5}$$

Po podstawieniu (2.5) do (2.2) należy porównać współczynniki przy tych samych operatorach przesunięcia i tych samych potęgach wyrażenia $\left(s - \frac{1}{b}\ln\delta\right)$. Otrzymujemy wtedy j niezależnych związków rekurencyjnych dla C_{tmn}.

Należy zwrócić uwagę, że teraz współczynniki $C_{tmn}h^{y_t}$ nie są już operatorami liczbowymi, zatem

$$T^{(1/b)\ln\delta}\left[C_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{s^{n+1}}\right] = C_{tmn}(T^{(1/b)\ln\delta} h^{y_t}) \frac{1}{\left(s - \frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}}.$$

Ponieważ [1]

$$T^\alpha e^{\lambda\varphi} = e^{\lambda T^\alpha \varphi}$$

gdzie λ jest dowolną liczbą rzeczywistą, a φ dowolnym operatorem, to

$$T^{(1/b)\ln\delta} h^{y_t} = \delta^{y_t/b} h^{y_t}.$$

Wobec tego

$$T^{(1/b)\ln\delta}\left[C_{tmn}h^{y_t}\frac{1}{s^{n+1}}\right] = C_{tmn}\delta^{y_t/b}h^{y_t}\frac{1}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}}. \tag{2.6}$$

Po wyznaczeniu współczynników C_{tmn} operatorowe rozwiązanie przyjmuje postać

$$w = \sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 0}\sum_{t=0}^{j} C_{tmn}h^{y_t}\frac{1}{s^{n+1}}\sin\alpha_m x. \tag{2.7}$$

3. Przykład

Jako przykład zastosowania przedstawionego sposobu rozpatrzmy płytę dowolnie obciążoną wzdłuż prostej $y = y_1$. Ponieważ

$$q(x) = \sum_{m\geqslant 1} q_m h^{y_1}\sin\alpha_m x,$$

to zgodnie z (2.5) operatory w_m przyjmujemy w postaci

$$w_m = \sum_{n\geqslant 0}(C_{0mn}+C_{1mn}h^{y_1})\frac{1}{s^{n+1}}. \tag{3.1}$$

Podstawiając (3.1) do (2.2) otrzymujemy

$$\sum_{n\geqslant 0}(C_{0mn}+C_{1mn}\delta^{y_1/b}h^{y_1})\left[\frac{\alpha_m^4-\frac{\nu\alpha_m^2}{b^2}(\ln\delta)^2}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}} - \frac{\frac{2\alpha_m^2}{b}\ln\delta}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2-2\alpha_m^2}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n-1}} + \frac{\frac{2}{b}\ln\delta}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n-2}} + \frac{1}{\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)^{n-3}}\right] =$$

$$= \frac{q_m}{D_0}h^{y_1}+A_m\left(s-\frac{1}{b}\ln\delta\right)+B_m+\frac{2A_m}{b}\ln\delta.$$

Z (3.2) znajdujemy natychmiast

$$C_{0m0} = 0,\quad C_{0m1} = 0,\quad C_{0m2} = A_m,\quad C_{0m3} = B_m,$$

$$C_{1m0} = 0,\quad C_{1m1} = 0,\quad C_{1m2} = 0,\quad C_{1m3} = \frac{q_m}{D_0\,\delta^{y_1/b}}$$

oraz dwa związki rekurencyjne dla $n \geqslant 4$,

$$C_{tmn} = -\frac{2}{b}\ln\delta\, C_{tmn-1}+\left[2\alpha_m^2-\frac{1}{b^2}(\ln\delta)^2\right]C_{tmn-2}+2\frac{\alpha_m^2}{b}\ln\delta\, C_{tmn-3}+$$

$$+\left[\frac{\nu\alpha_m^2}{b^2}(\ln\delta)^2-\alpha_m^4\right]C_{tmn-4},$$

$$(t = 0, 1).$$

Rozwiązanie w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$w = \begin{cases} \sum\limits_{m\geqslant 1} \sum\limits_{n\geqslant 0} C_{0mn} \dfrac{y^n}{n!} \sin \alpha_m x & \text{dla } 0 \leqslant y < y_1, \\ \sum\limits_{m\geqslant 1} \sum\limits_{n\geqslant 0} \left[C_{0mn} \dfrac{y^n}{n!} + C_{1mn} \dfrac{(y-y_1)^n}{n!} \right] \sin \alpha_m x & \text{dla } 0 \leqslant y_1 < y. \end{cases}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\lambda_1 = \frac{2}{b} \ln \delta, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2} (\ln \delta)^2 - 2\alpha_m^2, \quad \lambda_3 = -2 \frac{\alpha_m^2}{b} \ln \delta, \tag{3.3}$$
$$\lambda_4 = \alpha_m^4 - \frac{\nu \alpha_m^2}{b^2} (\ln \delta)^2,$$

związki rekurencyjne można przedstawić w postaci równań różnicowych rzędu czwartego

$$C_{tmr+4} + \lambda_1 C_{tmr+3} + \lambda_2 C_{tmr+2} + \lambda_3 C_{tmr+1} + \lambda_4 C_{tmr} = 0, \tag{3.4}$$
$$(t = 0, 1)$$

z warunkami początkowymi

$$C_{0m0} = 0, \quad C_{0m1} = 0, \quad C_{0m2} = A_m, \quad C_{0m3} = B_m,$$
$$C_{1m0} = 0, \quad C_{1m1} = 0, \quad C_{1m2} = 0, \quad C_{1m3} = \frac{q_m}{D_0 \delta^{y_1/b}}.$$

Po wprowadzeniu operatora [1]

$$\Gamma_0 = \sum_{r\geqslant 0} C_{0mr} h^r \tag{3.5}$$

otrzymamy równości

$$\frac{1}{h} \Gamma_0 = \sum_{r\geqslant 0} C_{0mr+1} h^r, \quad \frac{1}{h^2} \Gamma_0 = \sum_{r\geqslant 0} C_{0mr+2} h^r,$$
$$\frac{1}{h^3} (\Gamma_0 - A_m h^2) = \sum_{r\geqslant 0} C_{0mr+3} h^r,$$
$$\frac{1}{h^4} (\Gamma_0 - A_m h^2 - B_m h^3) = \sum_{r\geqslant 0} C_{0mr+4} h^r.$$

Stąd na podstawie (3.4)

$$\frac{1}{h^4} (\Gamma_0 - A_m h^2 - B_m h^3) + \frac{\lambda_1}{h^3} (\Gamma_0 - A_m h^2) + \frac{\lambda_2}{h^2} \Gamma_0 + \frac{\lambda_3}{h} \Gamma_0 + \lambda_4 \Gamma_0 = 0$$

i ostatecznie

$$\Gamma_0 = \frac{(B_m + \lambda_1 A_m) h^3 + A_m h^2}{\lambda_4 h^4 + \lambda_3 h^3 + \lambda_2 h^2 + \lambda_1 h + 1}. \tag{3.6}$$

Po wprowadzeniu operatora

$$\Gamma_1 = \sum_{r\geqslant 0} C_{1mr} h^r \tag{3.7}$$

w ten sam sposób znajdujemy

(3.8) $$\Gamma_l = \frac{\dfrac{q_m}{D_0\,\delta^{y_l/b}}}{\lambda_4 h^4+\lambda_3 h^3+\lambda_2 h^2+\lambda_1 h+1}.$$

Wyrażenia (3.6) i (3.8) należy rozbić na ułamki proste, które z kolei należy rozwinąć w szeregi potęgowe operatora przesunięcia. Otrzymane szeregi należy porównać odpowiednio z (3.5) i (3.7) i w ten sposób znaleźć niewiadome C_{0mr}, C_{1mr}.

W obliczeniach praktycznych wygodniej jest jednak wyznaczyć kilka pierwszych współczynników szeregu (2.7) ze związków rekurencyjnych, nie szukając ogólnej postaci tych współczynników. Przedstawiony sposób może być z korzyścią stosowany, gdyż niezależnie od warunków brzegowych na krawędziach $y = 0$ i $y = b$ oraz charakteru obciążenia, do wyznaczenia pozostają zawsze tylko dwie stałe. Poza tym wyznaczanie współczynników z prostych związków rekurencyjnych nie sprawia kłopotów rachunkowych.

Metodę tę można natychmiast rozszerzyć na szereg innych przypadków, np. na płyty o zmiennej sztywności spoczywające na sprężystym podłożu.

4. Uwagi o alternatywnych rozwiązaniach równania (2.2)

Przyjmując operatory w_m w postaci

$$w_m = \sum_{t=0}^{j}\sum_{n\geq 0} G_{tmn} h^{y_t} \frac{1}{\left(s+\dfrac{1}{b}\ln\delta\right)^{n+1}},$$

wartości G_{tmn} można także wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych. W tym celu należy porównać wyrażenia przy tych samych operatorach przesunięcia i tych samych potęgach operatora różniczkowego.

Po wyznaczeniu współczynników G_{tmn} rozwiązanie przyjmuje postać

$$w = \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\sum_{t=0}^{j} G_{tmn}\,\delta^{-y/b}\frac{y^n}{n!} h^{y_t}\sin\alpha_m x.$$

Rozwiązanie to jest mniej przydatne do praktycznych obliczeń od rozwiązania (2.7) z powodu czynnika $\delta^{-y/b}$. Poza tym związki rekurencyjne dla G_{tmn} są bardziej złożone od związków dla C_{tmn}.

Operatory w_m można także otrzymać w postaci zamkniętej. Istotnie, z (2.2) wynika

(4.1) $$w_m = \frac{A_m s+B_m+2\dfrac{A_m}{b}\ln\delta+\dfrac{1}{D_0}T^{-(1/b)\ln\delta}q_m}{s^4+\lambda_1 s^3+\lambda_2 s^2+\lambda_3 s+\lambda_4}.$$

Wielkości λ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) określone są wzorami (3.3).

Rozwiązanie operatorowe dane jest pojedynczym szeregiem sinusowym

(4.2) $$w = \sum_{m\geq 1}\frac{A_m s+B_m+2\dfrac{A_m}{b}\ln\delta+\dfrac{1}{D_0}T^{-(1/b)\ln\delta}q_m}{s^4+\lambda_1 s^3+\lambda_2 s^2+\lambda_3 s+\lambda_4}\sin\alpha_m x.$$

Aby otrzymać rozwiązanie w zwykłej, nieoperatorowej postaci należy wyrażenie (4.1) rozłożyć na ułamki proste, a następnie, korzystając ze znanych wzorów rachunku operatorów [1], otrzymane wyrażenia przedstawić w postaci funkcji zmiennej y. W tym przypadku trudności rachunkowe są więc takie same, jak przy wyznaczaniu ogólnej postaci współczynników C_{tmn}.

Literatura cytowana w tekście

1. J. Mikusiński, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
2. Z. Kączkowski, *Płyty*, PWN, Warszawa 1968.

Резюме

ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПЛАСТИНКИ С ОДНОСТОРОННЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ

Работа содержит точное решение дифференциального уравнения изотропной пластинки с переменной жёсткостью.

Исследованы прямоугольные пластинки с некоторыми краевыми условиями. Пластинки с другими краевыми условиями решаются подобным образом. Решение получено при помощи операторов Микусинского в виде двойного степенно-тригонометрического ряда. Коэффициенты этого ряда вычисляются по простым реккурентным формулам.

Summary

RECTANGULAR PLATES WITH UNIDIRECTIONALLY VARIABLE RIGIDITY

The paper discusses a formally accurate solution of a differential equation of bending of an isotropic plate with variable rigidity. The considerations concern rectangular plates with certain prescribed boundary conditions. Plates with other boundary conditions are to be solved in a similar way. The solution in the form of a double trigonometric exponential series has been obtained on the basis on Mikusiński's operators. The coefficients of the series are calculated by means of simple recurrent relations.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 maja 1971 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

O NIEKTÓRYCH UOGÓLNIENIACH TWIERDZEŃ NOŚNOŚCI GRANICZNEJ DLA OŚRODKA COSSERATÓW

JÓZEF JOACHIM TELEGA (GLIWICE)

W ostatnich latach ukazało się kilka prac poświęconych naprężeniom momentowym w teorii plastyczności [4, 5, 9, 11, 16, 25].

MIŞICU [11] rozważył pewne możliwe formy warunku plastyczności dla ciał sprężysto-plastycznych przy uwzględnieniu naprężeń momentowych. Przedstawił on również równania konstytutywne dla ciała lepkosprężystego i lepko-sprężysto-plastycznego z naprężeniami momentowymi oraz uogólnił postulat Druckera; mikrostruktura ośrodka omówionego w [11] jest sztywna.

SAWCZUK [16] rozważa materiał plastyczny o mikrostrukturze sztywnej, przy czym ośrodek płynie przy pewnych wartościach naprężeń i naprężeń momentowych, przed osiągnięciem tych wartości jest on sztywny. Krótko mówiąc, w pracy [16] autor zajmuje się analogonem znanego z teorii klasycznej ciała sztywno-plastycznego. SAWCZUK formułuje równania konstytutywne tensorowo liniowe skojarzone z maksymalnym rozproszeniem lokalnym. Ogólny warunek plastyczności otrzymany w [16] ma postać

$$\psi(d_{ij}d_{ij}, m_{(ij)}m_{(ij)}, m_{[ij]}m_{[ij]}) = 0,$$

gdzie d_{ij} jest dewiatorem symetrycznej części tensora naprężenia, natomiast $m_{(ij)}(m_{[ij]})$ oznacza symetryczną (skośnie symetryczną) część dewiatora naprężeń momentowych (por. [8]). Okazuje się, że tylko w przypadku, gdy (por. [11])

$$2\psi = \frac{1}{A}(d_{ij}d_{ij} + L_1^{-2}m_{(ij)}m_{(ij)} + L_1^{-2}m_{[ij]}m_{[ij]}) = \text{const},$$

to otrzymujemy prawo plastycznego płynięcia, tzn.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} : \dot{\varkappa}_{(ij)} : \dot{\varkappa}_{[ij]} = \frac{\partial\psi}{\partial d_{ij}} : \frac{\partial\psi}{\partial m_{(ij)}} : \frac{\partial\psi}{\partial m_{[ij]}},$$

gdzie A, L_1, L_2 są stałymi, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ jest tensorem prędkości odkształceń, a $\dot{\varkappa}_{ij}$ tensorem prędkości zginania–skręcania.

W pracy GREENA, NAGHDI'EGO, OSBORNA [5] omówiono sprężysto-plastyczną powierzchnię Cosseratów, tzn. powierzchnię posiadającą w każdym punkcie wektor kierunkowy. Wyniki uzyskane w tej pracy są dalszym rozwinięciem rezultatów pracy [3].

KOLOKOLCZYKOW [25], rozwijając wyniki pracy [8], właściwie w sposób formalny uogólnił związki odkształceniowej teorii plastyczności na przypadek sprężysto-plastycznych ośrodków Cosseratów.

Inne podejście, przy wprowadzaniu naprężeń momentowych, zaproponował LIPPMANN [9]. Przedstawił on teorię plastycznego płynięcia dla sztywno-plastycznych ośrodków Cosseratów, w których cząstki, oprócz obrotów spowodowanych przemieszczeniem, obracają się dodatkowo w sposób niezależny od pola przemieszczeń (ośrodek Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek). Podstawą naszych dalszych rozważań będzie właśnie praca [9]. W punkcie pierwszym przedstawimy podstawowe zależności omówione w pracy [9], w punkcie drugim uogólnimy postulat Druckera, w punkcie zaś trzecim zastanowimy się nad niektórymi możliwymi warunkami plastyczności i uplastycznieniem częściowym. W punkcie czwartym przedstawimy pewien wniosek wynikający z drugiej zasady termodynamiki. Punkt piąty jest poświęcony uogólnieniu nośności granicznej, a w punkcie szóstym uogólnimy zasadę wariacyjną przedstawioną w pracy [12] (por. [13, 14, 15]). Na koniec w punkcie siódmym uogólnimy twierdzenia Melana i Koitera [7].

1. Podstawowe zależności

W pracy stosujemy wyłącznie prostokątne kartezjańskie układy współrzędnych, a także konwencję sumacyjną odnoszącą się do takich układów.

Równania równowagi rozważanego przez nas ośrodka Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek mają postać [6], [9]

(1.1) $$s_{ij,i}+X_j = 0,$$

(1.2) $$m_{ij,i}+2\tau_j+Y_j = 0, \quad i,j = 1,2,3,$$

gdzie s_{ij} jest niesymetrycznym tensorem naprężeń, m_{ij} tensorem naprężeń momentowych; X_j, Y_j oznaczają odpowiednio siły masowe i momenty masowe (na jednostkę objętości). Ponadto

(1.3) $$\tau_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\tau_{kl}, \quad k,l = 1,2,3,$$

(1.4) $$s_{ij} = \sigma_{ij}+\tau_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \tau_{ij} = -\tau_{ji},$$

przy czym ε_{ijk} jest symbolem Ricciego.

Jednostkowa moc odkształceń i zginania-skręcania $\dot{A}$ ma postać

(1.5) $$\dot{A} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij}+2\dot{\Omega}_i\tau_i,$$

gdzie

(1.6) $$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{j,i}+\dot{u}_{i,j}),$$

(1.7) $$\dot{\varkappa}_{ij} = \dot{\omega}_{j,i},$$

przy czym $\dot{u}_i$ i $\dot{\omega}_i$ są odpowiednio współrzędnymi wektora prędkości przemieszczeń i wektora prędkości obrotów własnych (cząstki). Wektor $(\dot{\omega}_i)$ jest niezależny od wektora prędkości obrotów ($\dot{\gamma}_j$); ten ostatni określony jest zależnością

$$\dot{\gamma}_j = \frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}\dot{\gamma}_{kl}, \quad \dot{\gamma}_{kl} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{l,k}-\dot{u}_{k,l}), \tag{1.8}$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_{ij}$ jest tensorem prędkości odkształceń, $\dot{\varkappa}_{ij}$ tensorem prędkości zginania-skręcania, zaś $\dot{\gamma}_{ij}$ tensorem prędkości obrotów pola prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$. Względna prędkość obrotów $\dot{\Omega}_i$ wynosi

$$\dot{\Omega}_i = \dot{\gamma}_i - \omega_i. \tag{1.9}$$

SAWCZUK [16], KOŁOKOŁCZYKOW [25] i MIŞICU [11] przyjmują $\dot{\Omega}_i = 0$.

Zależność (1.5) wygodnie jest przedstawić w postaci

$$\dot{A} = Q_s\dot{q}_s = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}, \tag{1.10}$$

gdzie wektor $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_{18})$ utworzony jest z sześciu niezależnych współrzędnych tensora σ_{ij}, dziewięciu współrzędnych tensora m_{ij} i trzech współrzędnych τ_i; natomiast wektor $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{18})$, zbudowany jest z $\dot{\varepsilon}_{ij}$ $(i=j)$ lub $2\dot{\varepsilon}_{ij}(i\neq j)$, $\dot{\varkappa}_{ij}$ i $2\dot{\Omega}_i$. Wektory $\mathbf{Q}$ i $\dot{\mathbf{q}}$ można również uważać za wektory sił uogólnionych (por. [20]) i uogólnionych prędkości odkształceń.

Przypomnimy obecnie podstawowe założenia teorii LIPPMANNA [9]. Ponieważ rozważa on sztywno-plastyczny ośrodek Cosseratów, więc $\dot{\mathbf{q}}^{(pl)} = \dot{\mathbf{q}}$.

Przyjmijmy postulat Lippmanna o n niezależnych warunkach plastyczności

$$f_p(\mathbf{Q}) = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{1.11}$$

przy czym n nie przekracza liczby współrzędnych wektora $\mathbf{Q}$ (tzn. 18). Zakładamy, że funkcje te są gładkie, tzn. w przestrzeni fizycznej o osiach współrzędnych Q_s w każdym punkcie powierzchni (ściśle hiperpowierzchni) f_p istnieje wektor normalny. Powierzchnie f_p mogą być w ogólności rozłączne. Funkcje f_p mogą zależeć również od historii obciążenia, temperatury, mocy dysypowanej $\dot{A}$ i prędkości $\dot{\mathbf{q}}$. LIPPMANN przyjmuje ponadto, że warunki (1.11) są równocześnie spełnione (uplastycznienie zupełne). Jeśli $f_p < 0$, to mamy stan sztywny, jeśli $f_p = 0$ — stan plastyczny. Stan $f_p > 0$ jest niemożliwy (przy nieuwzględnieniu efektu wzmocnienia).

Sprecyzujemy obecnie pojęcie obciążania i odciążania dla ośrodków Cosseratów (w pracy [9] tego nie zrobiono). Otóż dla idealnie plastycznego ośrodka Cosseratów (powierzchnie plastyczności nie zmieniają się w procesie odkształceń plastycznych) obciążanie określamy następująco:

$$f_p = 0, \quad \dot{f}_p = 0,$$

natomiast związki

$$f_p = 0, \quad \dot{f}_p < 0$$

definiują odciążanie.

Dla ośrodków Cosseratów ze wzmocnieniem (powierzchnie plastyczności mogą się zmieniać w procesie odkształceń plastycznych) obciążanie, stan neutralny i odciążanie dane są odpowiednio zależnościami:

$$f_p = 0, \quad \dot{f}_p > 0; \quad f_p = 0, \quad \dot{f}_p = 0; \quad f_p = 0, \quad \dot{f}_p < 0.$$

W celu otrzymania zależności pomiędzy $\mathbf{Q}$ i $\dot{\mathbf{q}}$ Lippmann [9] postuluje zasadę Sadowskiego-Phillipsa-Hilla, która mówi, że dla danego stanu prędkości $\dot{\mathbf{q}}$, siły $\mathbf{Q}$ są takie, że moc dysypowana osiąga extremum (ściśle maximum). Stąd wnioskujemy, że $\delta\dot{A} = 0$, przy czym dokonujemy wariacji $\mathbf{Q}$ o $\delta\mathbf{Q}$. Po prostych przekształceniach otrzymujemy związki

$$\dot{q}_s = \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial Q_s}, \quad \lambda_p \geqslant 0. \tag{1.12}$$

Z ostatniej zależności wnioskujemy, że wektor $\dot{\mathbf{q}}$ jest kombinacją liniową, o współczynnikach nieujemnych, gradientów $\frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{Q}}$. Lippmann wykazał, iż przyjęcie prawa plastycznego płynięcia (1.12) i tylko jednego warunku plastyczności powoduje trudności przy przejściu do teorii klasycznej, tzn. gdy $m_{ij} \to 0$, $\tau_i \to 0$. Trudności te polegają na tym, iż otrzymany przez przejście $m_{ij} \to 0$, $\tau_i \to 0$ układ równań zawiera więcej równań niż niewiadomych, co powoduje, że nie posiada on na ogół rozwiązań.

2. Uogólnienie postulatu Druckera

W klasycznej teorii plastyczności (tzn. w teorii bez naprężeń momentowych) fundamentalną rolę odgrywa postulat Druckera (por. np. [1, 7, 20]). Ma on postać

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)} \geqslant 0, \tag{2.1}$$

gdzie σ_{ij} spełnia równanie powierzchni plastyczności, natomiast σ_{ij}^* jest naprężeniem dopuszczalnym, tzn. znajduje się wewnątrz lub na powierzchni plastyczności, $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)}$ jest częścią tensora prędkości odkształceń związaną z odkształceniami plastycznymi. Dla ciała sztywno-plastycznego $\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)} = \dot{\varepsilon}_{ij}$. Wiadomo, że postulat Druckera jest równoważny wypukłości powierzchni plastyczności.

Postulat (2.1) można uogólnić na przypadek rozważanej przez nas teorii Lippmanna następująco:

$$(Q_s - Q_s^*)\tilde{\dot{q}}_{sp} \geqslant 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{2.2}$$

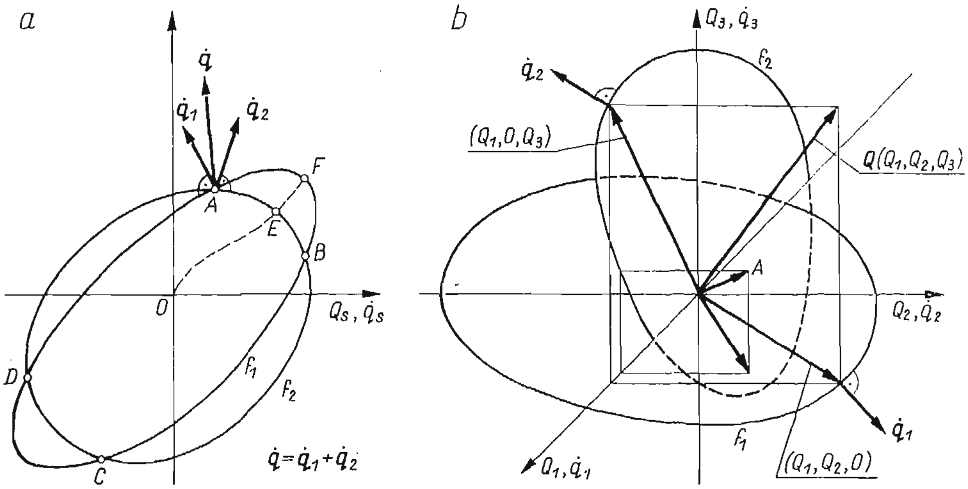
gdzie $\tilde{\dot{q}}_{sp} \overset{\text{df}}{=} \lambda_{\underline{p}} \frac{\partial f_{\underline{p}}}{\partial Q_s}$ (po p nie sumować). Wektor $\mathbf{Q}^*(Q_s^*)$ nazwiemy naprężeniami dopuszczalnymi. Jest to wektor, który w fizycznej przestrzeni naprężeń znajduje się wewnątrz (lub na) wszystkich powierzchni f_p. Z zależności (2.2) wnioskujemy, że każda z powierzchni f_p jest wypukła, tzn. obszar ograniczony przez każdą z tych powierzchni jest wypukły. Sumując w (2.2) po „p" mamy

$$\sum_p (Q_s - Q_s^*)\tilde{\dot{q}}_{sp} = (Q_s - Q_s^*)\dot{q}_s \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Tak więc związek (2.3) jest formalnie podobny do klasycznego postulatu Druckera.

3. Niektóre możliwe warunki plastyczności. Uplastycznienie częściowe

Przyjęcie n niezależnych warunków plastyczności, które mają być równocześnie spełnione, jest dużym ograniczeniem na możliwe drogi obciążeń.



$$\dot{q} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 = \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_1},\ \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_2},\ \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_3}\right)$$

Rys. 1

Rozpatrzmy przypadek $n = 2$. Na rys. 1a przedstawiono dwie powierzchnie f_1, f_2 przecinające się w punktach A, B, C, D. Ponieważ założyliśmy, że warunki plastyczności mają być równocześnie spełnione, oznaczałoby to, że teoria opisuje tylko stany uplastycznienia odpowiadające tym czterem punktom. Jeśli natomiast wektor **Q** odpowiada punktowi E, to będziemy mieć tzw. uplastycznienie częściowe: $f_2 = 0, f_1 < 0$. Podobnie sprawa wygląda z przypadkiem przedstawionym na rys. 1b. W tym przypadku teoria Lippmanna opisuje tylko takie stany uplastycznienia, dla których

$$f_1(Q_1, Q_2) = 0 \quad \text{i} \quad f_2(Q_1, Q_3) = 0.$$

Jeśli wektor naprężeń $\mathbf{Q}(Q_1, Q_2, Q_3)$ odpowiada na przykład punktowi A (rys. 1b), to wówczas stanu takiego nie można opisać teorią Lippmanna.

Rozpatrzmy pewne możliwe (teoretycznie) sposoby włączenia do teorii Lippmanna stanów częściowego uplastycznienia. Niech wektor **Q** odpowiada punktowi E (rys. 1a). Powstaje pytanie, co się będzie działo na drodze EF przy obciążaniu. Można sobie wyobrazić następujące odpowiedzi na tak postawione pytanie:

1° Powierzchnia f_2 doznaje wzmocnienia izotropowego, przesuwa się i obraca. Włączamy tutaj również obroty, gdyż badania eksperymentalne na gruncie teorii klasycznej (por. [18], [21]) wykazały, iż w niektórych przypadkach powierzchnia plastyczności może się obracać. Kiedy punkty E i F pokryją się wówczas mamy sytuację podobną do stanu A (rys. 1a).

2° Oznaczmy wektor naprężeń odpowiadający punktowi E przez $\overline{\mathbf{Q}}(\overline{Q}_s)$. Wówczas $\bar{\dot{q}}_s = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_s}\Big|_{Q_s = \overline{Q}_s}$. Zakładamy, że na drodze EF wektor $\dot{\mathbf{q}}$ nie doznaje przyrostów. Natomiast w punkcie F

$$\tilde{\dot{q}}_s = \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_s}\Big|_{Q_s = \tilde{Q}_s},$$

gdzie $\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{Q}_s)$ jest wektorem naprężenia odpowiadającym punktowi F. Całkowita prędkość odkształceń $\dot{q}_s$ wyniesie

$$\dot{q}_s = \bar{\dot{q}}_s + \tilde{\dot{q}}_s = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial Q_s}\Big|_{Q_s = \overline{Q}_s} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial Q_s}\Big|_{Q_s = \tilde{Q}_s}. \tag{3.1}$$

SAYIR [17] rozważa warunek plastyczności (w teorii klasycznej) w postaci wielomianowej

$$\Phi = K_0 + K_{ij}\sigma_{ij} + K_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + K_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \ldots,$$

gdzie współczynniki $K_0, K_{ij}, K_{ijkl}, \ldots$ są tensorami stałych materiałowych. Ich charakter tensorowy wynika z zasady obiektywności materiału tzn. niezależności równania konstytutywnego od układu odniesienia. W teorii plastyczności zasada ta oznacza niezależność warunku plastyczności od układu współrzędnych, stanowiących układ odniesienia. W naszym przypadku można by przyjąć trzy następujące warunki plastyczności:

$$f_1 = K_0 + K_{ij}s_{ij} + K_{ijkl}s_{ij}s_{kl} + \ldots, \tag{3.2}$$

$$f_2 = L_0 + L_{ij}m_{ij} + L_{ijkl}m_{ij}m_{kl} + \ldots, \tag{3.3}$$

$$f_3 = M_0 + M_{ijkl}s_{ij}m_{kl} + \overline{M}_{ijkl}s_{kl}m_{ij} + M_{ijklmn}s_{ij}s_{kl}m_{nm} + \ldots. \tag{3.4}$$

Nie będziemy dalej szczegółowo rozpatrywać związków (3.2)–(3.4), gdyż ze względu na brak danych doświadczalnych przyjęcie takiego czy innego warunku plastyczności — w teorii z naprężeniami momentowymi — jest, jak na razie, sprawą czysto formalną.

LIPPMANN [9] uogólnił warunek plastyczności Hubera–Misesa i warunek Treski na przypadek ośrodka Cosseratów.

4. Wnioski wynikające z pierwszej i drugiej zasady termodynamiki

ZIEGLER [23] wykazał, że w klasycznej teorii plastyczności warunek

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{(pl)} \geqslant 0 \tag{4.1}$$

wynika z drugiej zasady termodynamiki. Rozpatrzmy ośrodek sztywno-plastyczny. Przedstawiamy energię swobodną f, przypadającą na jednostkę masy, w postaci

$$\varrho f = \varrho f_0 - \varrho s_0(\vartheta - \vartheta_0) - \frac{\varrho c}{2\vartheta_0}(\vartheta - \vartheta_0)^2, \tag{4.2}$$

gdzie f_0 odnosi się do stanu początkowego $\vartheta = \vartheta_0$, ϑ jest temperaturą bezwzględną, natomiast s_0 przedstawia wartość entropii na jednostkę masy w stanie ϑ_0, ϱ jest stałą gęstością (w teorii małych odkształceń).

Ponadto

$$c = \left.\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right|_{\vartheta = \vartheta_0},$$

przy czym

$$\varrho u = \varrho(f + \vartheta s), \tag{4.3}$$

gdzie

$$\varrho s = -\varrho \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \varrho s_0 + \frac{\varrho c}{\vartheta}(\vartheta - \vartheta_0). \tag{4.4}$$

Zależność (4.4) przedstawia entropię na jednostkę objętości.

Z pierwszej zasady termodynamiki — dla przedziału czasu dt — otrzymujemy (por. [2], [26])

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - h_{k,k} dt = \varrho du = \varrho c \frac{\vartheta}{\vartheta_0} d\vartheta, \tag{4.5}$$

gdzie h_k jest wektorem strumienia ciepła.

Z (4.4) i (4.5) otrzymujemy następujący wzór na przyrost entropii w czasie dt

$$\varrho ds = \frac{\varrho c}{\vartheta_0} d\vartheta = \frac{\varrho du}{\vartheta} = \frac{1}{\vartheta}\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - \frac{h_{k,k}}{\vartheta} dt. \tag{4.6}$$

Przekształćmy ostatnią zależność do postaci

$$\varrho ds = \frac{1}{\vartheta}\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \left[-\frac{h_k}{\vartheta^2}\vartheta_{,k} - \left(\frac{h_k}{\vartheta}\right)_{,k}\right] dt. \tag{4.7}$$

Druga zasada termodynamiki (por. [2], [26]) mówi, że

$$\varrho ds \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Ograniczając się do procesów adiabatycznych ($h_k = 0$) lub izotermicznych ($\vartheta_{,k} = 0$), z (4.7) i (4.8) otrzymujemy (4.1). Oznacza to, że powierzchnia plastyczności, dla materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem, nie może przesuwać się nieograniczenie, lecz musi zawierać początek układu odpowiadający stanowi beznaprężeniowemu. Fakt ten został przez Zieglera [23] udowodniony również dla materiałów sprężysto-plastycznych ze wzmocnieniem.

Nierówność (4.1) łatwo uogólnić na przypadek teorii Lippmanna. Jak wiemy, w tym przypadku moc dysypowana dana jest wzorem (1.5), więc zależność (4.7) przyjmuje postać

$$\varrho ds = \frac{1}{\vartheta}(\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + m_{ij} d\varkappa_{ij} + 2\tau_i d\Omega_i) + \left[-\frac{h_k}{\vartheta^2}\vartheta_{,k} - \left(\frac{h_k}{\vartheta}\right)_{,k}\right] dt.$$

Rozważając, podobnie jak w teorii klasycznej, tylko procesy izotermiczne lub adiabatyczne mamy

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij} + 2\dot{\Omega}_i \tau_i \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Korzystając z poprzednio wprowadzonych oznaczeń, związek (4.9) zapiszemy krótko w następującej postaci:

$$\mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}} = Q_s\dot{q}_s = \sum_p Q_s\tilde{\dot{q}}_{sp} \geqslant 0. \tag{4.10}$$

Jeśli więc przyjmiemy, że powierzchnie f_p mogą przesuwać się (ośrodek Cosseratów z wzmocnieniem), to uwzględniając (4.10) i niezależność warunków plastyczności wnioskujemy, że muszą one zawierać początek układu współrzędnych przestrzeni fizycznej.

Uwaga 4.1. VALANIS [22] wykazał również na drodze termodynamicznej, że powierzchnia plastyczności (w teorii klasycznej) musi zawierać początek układu. Niemniej jednak wydaje się, iż dowód ZIEGLERA [23] jest bardziej interesujący, gdyż VALANIS [22] korzysta z postulatu Druckera (2.1), zaś ZIEGLER nie.

5. Nośność graniczna dla ośrodka Cosseratów

Niech rozpatrywany przez nas sztywno-plastyczny ośrodek Cosseratów o objętości V będzie ograniczony powierzchnią S. Załóżmy, że w każdym punkcie tej powierzchni istnieje zewnętrzny, jednostkowy wektor normalny o współrzędnych n_i i niech S_{u^n}, S_{u^t}, S_{T^n}, S_{T^t}, S_{ω^n}, S_{ω^t}, S_{M^n}, $S_{M^t} \subset S$, przy czym zachodzą następujące rozłączne rozkłady:

$$S = S_{u^n} \cup S_{T^n} = S_{u^t} \cup S_{T^t} = S_{\omega^n} \cup S_{M^n} = S_{\omega^t} \cup S_{M^t}. \tag{5.1}$$

Przyjmijmy następujące warunki brzegowe [6]:

$$\dot{u}^n = \dot{u}_0^n \quad \text{na} \quad S_{u^n}, \tag{5.2a}$$

$$\dot{u}_i^t = \dot{u}_{0i}^t \quad \text{na} \quad S_{u^t}, \tag{5.2b}$$

$$\dot{\omega}^n = \dot{\omega}_0^n \quad \text{na} \quad S_{\omega^n}, \tag{5.2c}$$

$$\dot{\omega}_i^t = \dot{\omega}_{0i}^t \quad \text{na} \quad S_{\omega^t}, \tag{5.2d}$$

$$T^n = \overline{T}^n \quad \text{na} \quad S_{T^n}, \tag{5.3a}$$

$$T_i^t = \overline{T}_i^t \quad \text{na} \quad S_{T^t}, \tag{5.3b}$$

$$M^n = \overline{M}^n \quad \text{na} \quad S_{M^n}, \tag{5.3c}$$

$$M_i^t = \overline{M}_i^t \quad \text{na} \quad S_{M^t}, \tag{5.3d}$$

przy czym wskaźniki n lub t oznaczają odpowiednio składową normalną lub styczną wektora, tzn.

$$\dot{u}_o^n = \dot{u}_{oj}^n n_j, \quad \dot{u}_{oi}^t = \dot{u}_{0i} - \dot{u}_{0j}n_jn_i, \quad \dot{u}^n = \dot{u}_jn_j, \quad \dot{u}_i^t = \dot{u}_i - \dot{u}_jn_jn_i,$$
$$T^n = s_{jk}n_jn_k, \quad T_i^t = s_{ji}n_j - s_{jk}n_jn_kn_i, \quad s_{jk} = \sigma_{jk} + \tau_{jk},$$

i podobnie dla $\dot{\omega}_i$, m_{ij}.

Łatwo udowodnić, że

$$\dot{A} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij} + 2\dot{\Omega}_i\tau_i = s_{ij}(\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k) + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij}. \tag{5.4}$$

Przez wektor $\mathbf{Q}$ można więc rozumieć wektor odpowiadający tensorom s_{ij}, m_{ij}, zaś przez $\dot{\mathbf{q}}$ wektor odpowiadający tensorom $\dot{\lambda}_{ij} = \dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k$ i $\dot{\varkappa}_{ij}$.

Zasada mocy przygotowanych dla ośrodka Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek ma postać [6]

$$\int_V [s_{ij}(\dot{u}_{j,i}-\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k)+m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij}]dV = \int_V (X_i\dot{u}_i+Y_i\dot{\omega}_i)dV+\int_{S_{Tn}} \overline{T}^n\dot{u}^n dS+\int_{S_{Tt}} \overline{T}_i^t\dot{u}_i^t dS+ \tag{5.5}$$

$$+\int_{S_{Mn}} \overline{M}^n\dot{\omega}^n dS+\int_{S_{Mt}} \overline{M}_i^t\dot{\omega}_i^t dS+\int_{S_{un}} T^n\dot{u}_0^n dS+\int_{S_{ut}} T_i^t\dot{u}_{0i}^t dS+\int_{S_{\omega n}} M^n\dot{\omega}_0^n dS+\int_{S_{\omega t}} M_i^t\dot{\omega}_{0i}^t dS,$$

(po n i t nie sumować).

Uogólnimy obecnie znane — z klasycznej teorii nośności granicznej (por. [7,20,24]) pojęcia statycznie dopuszczalnego pola naprężeń i kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości przemieszczeń.

Przez statycznie dopuszczalne pole naprężeń $\mathbf{Q}^\circ$ rozumieć będziemy pola naprężeń s_{ij}^0 i naprężeń momentowych m_{ij}^0 spełniające następujące warunki:

1° spełnione są warunki równowagi

$$s_{jl,j}^0+X_l = 0, \quad m_{jl,j}^0+2\tau_l^0+Y_l = m_{jl,j}^0+\varepsilon_{lij}s_{ij}^0+Y_l = 0,$$

i warunki brzegowe (5.3a)-(5.3d);

2° $f_p(\mathbf{Q}^\circ) \leqslant 0$, $p = 1, \ldots, n$.

Mówimy, że zbiór $\{\dot{\mathbf{U}}^*\} = \{\dot{u}_i^*, \dot{\omega}_i^*\}$ stanowi kinematycznie dopuszczalne pole prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i^*$ i mikroobrotów $\dot{\omega}_i^*$ jeśli:

I. Pole to spełnia kinematyczne warunki brzegowe (5.2a)-(5.2d).

II. Można z niego otrzymać pole $\dot{\mathbf{q}}^*$, tzn. pole prędkości odkształceń $\dot{\lambda}_{ij}^*$ i pole $\dot{\varkappa}_{ij}^*$ (lub $\dot{\varepsilon}_{ij}^*, \dot{\varkappa}_{ij}^*, \dot{\Omega}_i^*$).

III. Określona prawą stroną wzoru (5.5) moc obciążeń zewnętrznych — oznaczmy ją przez $\dot{L}$ — jest dodatnia, tzn. $\dot{L} > 0$.

Dla prostoty rozważań rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy

$$S_{un} = S_{ut} = S_{\omega n} = S_{\omega t} = S_u, \quad S_{Tn} = S_{Tt} = S_{Mn} = S_{Mt} = S_T.$$

Wówczas warunki brzegowe (5.2a)-(5.2d), (5.3a)-(5.3d) przyjmują odpowiednio postać

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{0i}, \quad \dot{\omega}_i = \dot{\omega}_{0i} \text{ na } S_u, \tag{5.6}$$

$$\overline{T}_i = s_{ji}n_j, \quad \overline{M}_i = m_{ji}n_j \text{ na } S_T. \tag{5.7}$$

Załóżmy ponadto, że $\dot{u}_{0i} = \dot{\omega}_{0i} = 0$. Uwzględniając (1.10), (5.4), (5.6) i (5.7) w (5.5) otrzymujemy

$$\int_V Q_s\dot{q}_s dV = \int_V (X_i\dot{u}_i+Y_i\dot{\omega}_i)dV+\int_{S_T} \overline{T}_i\dot{u}_i dS+\int_{S_T} \overline{M}_i\dot{\omega}_i dS. \tag{5.8}$$

Weźmy pod uwagę obciążenie jednoparametrowe, tzn. obciążenie dane zależnościami (por. [25])

$$X_i = \mu X_i^0(x_j), \quad Y_i = \mu Y_i^0(x_j), \quad \overline{T}_i = \mu T_i^0(x_j), \quad \overline{M}_i = \mu M_i^0(x_j), \tag{5.9}$$

gdzie $\mu > 0$ jest parametrem obciążenia.

Można również wprowadzić pojęcie statycznie dopuszczalnego μ_s i kinematycznie dopuszczalnego μ_k mnożników obciążenia. Zdefiniujemy je podobnie jak w teorii klasycznej (por. [7, 20, 24]). I tak, jeśli dla obciążenia μX_i^0, μY_i^0, μT_i^0, μM_i^0 można wyznaczyć jakiekolwiek pole Q_s^0, to odpowiadające temu μ nazwiemy statycznie dopuszczalnym mnożnikiem obciążenia μ_s. Kinematycznie dopuszczalny mnożnik μ_k określony jest następująco:

$$\mu_k^{dt} = \frac{\int\limits_V Q_s^* \dot{q}_s^* dS}{\int\limits_V (X_i^0 \dot{u}_i^* + Y_i \dot{\omega}_i^*) dV + \int\limits_{S_T} (T_i^0 \dot{u}_i^* + M_i^0 \dot{\omega}_i^*) dS}. \tag{5.10}$$

Z postulatu III wynika, że mianownik we wzorze (5.10) jest dodatni.

Przez rozwiązanie zupełne rozumiemy takie rozwiązanie, które spełnia zarówno wymagania strony statycznej, jak i kinematycznej (por. [20]). Odnoszący się do rozwiązania zupełnego mnożnik obciążenia oznaczmy symbolem μ_G. Łatwo udowodnić, że

$$\mu_s \leqslant \mu_G \leqslant \mu_k. \tag{5.11}$$

Dowód przebiega jak w przypadku klasycznym.

Uwaga 5.1. Ponieważ zasadę mocy wirtualnych (5.5) można uogólnić na przypadek nieciągłych pól naprężeń s_{ij} i naprężeń momentowych m_{ij} [6], zależność (5.11) pozostaje słuszna i dla takiego przypadku.

Uwaga 5.2. Rozpatrzmy zagadnienie nieciągłości pól prędkości przemieszczeń $\dot{u}_i$ i prędkości mikroobrotów $\dot{\omega}_i$ Oznaczmy przez S_{hk} powierzchnie nieciągłości prędkości przemieszczeń między obszarami R_h, R_k rozpatrywanego ośrodka, zaś przez M_{lm} powierzchnie nieciągłości pola mikroobrotów $\dot{\omega}_i$ pomiędzy obszarami Z_l, Z_m. Niech ponadto pole $\dot{u}_i$ jest nieciągłe w kierunku stycznym do powierzchni S_{hk}, natomiast pole $\dot{\omega}_i$ w kierunku normalnym do M_{lm}. Wówczas moc dysypowana na powierzchniach nieciągłości ma postać (por. [24], [14])

$$\overline{D} = \Sigma \int\limits_{S_{hk}} T^{(hk)} [\dot{u}_T^{(h)} - \dot{u}_T^{(k)}] dS + \Sigma \int\limits_{M_{lm}} M^{(lm)} [\dot{\omega}_N^{(l)} - \dot{\omega}_N^{(m)}] dS, \tag{5.12}$$

gdzie $T^{(hk)}$ oznacza naprężenie styczne przekazywane przez element powierzchni dS z obszaru R_k do R_h; $\dot{u}_T^{(h)}, \dot{u}_T^{(k)}$ są składowymi stycznymi prędkości przemieszczeń odpowiednio w obszarach R_h, R_k, natomiast $M^{(lm)}$ oznacza normalne do powierzchni M_{lm} naprężenie momentowe przekazywane przez element powierzchni dS z obszaru Z_l do Z_m; $\dot{\omega}_N^{(l)}$, $\dot{\omega}_N^{(m)}$ są składowymi normalnymi prędkości mikroobrotów w obszarach Z_l, Z_m.

Naprężenie styczne $T^{(hk)}$, związane z naprężeniami s_{ij} na powierzchni S_{hk}, wynosi (por. [9] rys. 2).

$$T^{(hk)} = \sqrt{\sum_l (s_{jl} n_j)^2 - (s_{jk} n_j n_k)^2}, \tag{5.13}$$

natomiast momentowe naprężenie normalne $M^{(lm)}$, związane z naprężeniami momentowymi m_{ij} na powierzchni M_{lm}, dane jest wzorem

$$M^{(lm)} = m_{jk} n_j n_k, \tag{5.14}$$

przy czym w (5.13) wektor jednostkowy n_j jest wektorem normalnym do powierzchni S_{hk}, natomiast w (5.14) — do M_{lm}.

Całkowita moc dysypowana D wynosi

$$D = \int_V \dot{A}\, dV + \bar{D}. \tag{5.15}$$

Jeśli w (5.10) uwzględnimy moc $\bar{D}$, dysypowaną na powierzchniach nieciągłości, to związek (5.11) pozostaje słuszny.

6. Uogólnienie zasady wariacyjnej T. Mury i S. Lee

W pracach [12], [14] MURA i LEE podali zasadę wariacyjną przydatną w nośności granicznej. Zasadę tę będziemy krótko oznaczać symbolem ML. W pracy [13] autorzy ci stosują zasadę ML do analizy granicznej ortotropowej płyty kołowej swobodnie podpartej i poddanej obciążeniu rozłożonemu. SACCHI i SAVE [15] stosując zasadę ML, rozważyli statyczne i kinematyczne podejście dla trójwymiarowego kontinuum.

Obecnie naszym celem będzie uogólnienie zasady ML na ośrodki Cosseratów.

Rozważmy funkcjonał

$$\begin{aligned} F(s_{ij}, m_{ij}, \dot{u}_i, \dot{\omega}_i, R_i, M_i^R, \mu, \varphi_p) = \int_V s_{ij}(\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k)dV + \int_V m_{ij}\dot{\omega}_{j,i}dV - \\ - \int_{S_u} R_i \dot{u}_i dS - \int_{S_u} M_i^R \dot{\omega}_i dS - \mu\Big[\int_{S_T} (T_i^0 \dot{u}_i + M_i^0 \dot{\omega}_i)dS - 1\Big] - \int_V \lambda_p [f_p(s_{ij}, m_{ij}) + \varphi_p^2]dV. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Z zasady stacjonarności funkcjonału F dla dowolnych wariacji jego argumentów — przy dodatkowym warunku $\lambda_p \geqslant 0$, $p = 1, \ldots, n$ — otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta F = \int_V \delta s_{ij}(\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k)dV + \int_V s_{ij}(\delta\dot{u}_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k)dV + \int_V \delta m_{ij}\dot{\omega}_{j,i}dV + \\ + \int_V m_{ij}\delta\dot{\omega}_{j,i}dV - \int_{S_u} \delta R_i \dot{u}_i dS - \int_{S_u} R_i \delta\dot{u}_i dS - \int_{S_u} \delta M_i^R \dot{\omega}_i dS - \int_{S_u} M_i^R \delta\dot{\omega}_i dS - \\ - \delta\mu\Big[\int_{S_T} (T_i^0 \dot{u}_i + M_i^0 \dot{\omega}_i)dS - 1\Big] - \mu\int_{S_T} (T_i^0 \delta\dot{u}_i + M_i^0 \delta\dot{\omega}_i)dS - \int_V \delta\lambda_p [f_p(s_{ij}, m_{ij}) + \varphi_p^2)dV - \\ - \int_V \lambda_p\Big(\frac{\partial f_p}{\partial s_{ij}}\delta s_{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial m_{ij}}\delta m_{ij}\Big)dV - \int_V 2\sum_p \lambda_p \varphi_p \delta\varphi_p\, dV = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Ponieważ spełnione są związki

$$\begin{aligned} \int_V s_{ij}\delta\dot{u}_{j,i}dV - \int_V s_{ij}\varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k dV = \int_V (s_{ij}\delta\dot{u}_j)_{,i} - \int_V s_{ij,i}\delta\dot{u}_j dV - \int_V s_{ij}\varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k dV = \\ = \int_V s_{ij}\delta\dot{u}_j n_i dS - \int_V s_{ij,i}\delta\dot{u}_j dV - \int_V s_{ij}\varepsilon_{ijk}\delta\dot{\omega}_k dV, \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\int_V m_{ij}\delta\dot{\omega}_{j,i}dV = \int_V m_{ij}\delta\dot{\omega}_j n_i dS - \int_V m_{ij,i}\delta\dot{\omega}_j dV, \tag{6.4}$$

więc z (6.2), po uwzględnieniu (6.3), (6.4) i z dowolności wariacji otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned} &s_{ij,i} = 0 \\ &m_{ij,i}+\varepsilon_{ijk}s_{jk} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ w } V, \tag{6.5–6.6}$$

$$R_i = s_{ij}n_i \quad \text{na } S_u, \tag{6.7}$$

$$\mu T_i^0 = s_{ij}n_i \quad \text{na } S_T, \tag{6.8}$$

$$M_i^R = m_{ij}n_i \quad \text{na } S_u, \tag{6.9}$$

$$\mu M_i^0 = m_{ij}n_i \quad \text{na } S_T, \tag{6.10}$$

$$\dot{u}_i = 0 \quad \text{na } S_u, \tag{6.11}$$

$$\dot{\omega}_i = 0 \quad \text{na } S_u, \tag{6.12}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{u}_{j,i}-\varepsilon_{ijk}\dot{\omega}_k = \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial s_{ij}} \\ &\dot{\omega}_{j,i} = \lambda_p\frac{\partial f_p}{\partial m_{ij}} \end{aligned}\right\} \text{ w } V, \tag{6.13–6.14}$$

$$\int_{S_T} (T_i^0\dot{u}_i+M_i^0\dot{\omega}_i)dS = 1 \quad \text{na } S_T, \tag{6.15}$$

$$f_p(s_{ij}, m_{ij})+\varphi_p^2 = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \text{ w } V \tag{6.16}$$

$$\lambda_p\varphi_p = 0 \quad \text{w } V. \tag{6.17}$$

Podobnie, jak uczyniono to w pracy [15], można wykazać, że $F_G = \mu_G$, gdzie F_G jest wartością funkcjonału F odpowiadającą zależnościom (6.5)–(6.17).

7. Twierdzenia Melana i Koitera o dostosowywaniu, uogólnione na przypadek ośrodków Cosseratów

W dotychczasowych naszych rozważaniach przyjmowaliśmy model sztywno-plastyczny. Aby mówić o zagadnieniach dostosowywania, należy rozpatrywać ośrodek sprężysto-plastyczny [7].

Przez sprężysto-plastyczny ośrodek Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek będziemy rozumieć taki ośrodek Cosseratów, dla którego całkowite odkształcenia λ_{ij} i całkowite zginanie–skręcanie $\varkappa_{ij}$ są dane zależnościami

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(e)}+\lambda_{ij}^{(p)}, \tag{7.1}$$

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_{ij}^{(e)}+\varkappa_{ij}^{(p)}, \tag{7.2}$$

gdzie części sprężyste $\lambda_{ij}^{(e)}$, $\varkappa_{ij}^{(e)}$ są dane wzorami [6]

$$\lambda_{ij}^{(e)} = P_{ijkl}s_{kl}+Q_{ijkl}m_{kl}, \quad P_{ijkl} = P_{klij}, \tag{7.3}$$

$$\varkappa_{ij}^{(e)} = Q_{klij}s_{kl}+S_{ijkl}m_{kl}, \quad S_{ijkl} = S_{klij}, \tag{7.4}$$

przy czym tensory P_{ijkl}, Q_{ijkl} S_{ijkl} są stałymi materiałowymi.

Uogólnimy obecnie pojęcie naprężeń resztkowych. Mianowicie rzeczywiste naprężenia

s_{ij} i rzeczywiste naprężenia momentowe m_{ij} można zapisać w postaci

$$s_{ij} = s_{ij}^{(e)} + \varrho_{ij}, \tag{7.5}$$

$$m_{ij} = m_{ij}^{(e)} + \varphi_{ij}, \tag{7.6}$$

gdzie $s_{ij}^{(e)}$, $m_{ij}^{(e)}$ oznaczają odpowiednio naprężenia i naprężenia momentowe w doskonale sprężystym ośrodku Cosseratów, poddanym tym samym obciążeniom i warunkom brzegowym, zaś ϱ_{ij}, φ_{ij} oznaczają odpowiednio naprężenia resztkowe i resztkowe naprężenia momentowe. Resztkowe naprężenia i resztkowe naprężenia momentowe definiujemy jako stałe naprężenia, pozostające w ośrodku po odciążeniu, tzn. usunięciu zewnętrznych obciążeń i powrocie przemieszczeń i obrotów na S_u do zera, przy czym odciążanie to zachodzi bez plastycznych odkształceń i bez plastycznego zginania–skręcania. Przyjmujemy, że odciążanie opisywane jest zależnościami (7.3), (7.4). Resztkowe naprężenia i resztkowe naprężenia momentowe spełnianiają równania równowagi (1.1), (1.2), (5.7), gdzie $X_i = Y_i = T_i = M_i = 0$.

Przez doskonale sprężysty ośrodek Cosseratów będziemy rozumieć ośrodek, dla którego równania konstytutywne mają postać (7.3), (7.4).

Dla prostoty przyjmujemy, że na S_u: $u_i = \omega_i = 0$. Niech ośrodek będzie poddany pewnemu programowi obciążenia, tzn. T_i, M_i, X_i, Y_i są funkcjami czasu i zmieniają się w pewnych przedziałach w sposób na ogół dowolny, ale quasi-statyczny (por. [19]). Oznaczmy przez $s_{ij}(t)$, $\lambda_{ij}^{(e)}(t)$, $\lambda_{ij}^{(p)}(t)$ odpowiednio rzeczywiste wartości naprężeń, odkształceń sprężystych i odkształceń plastycznych, natomiast przez $m_{ij}(t)$, $\varkappa_{ij}^{(e)}(t)$, $\varkappa_{ij}^{(p)}(t)$ odpowiednio rzeczywiste naprężenia momentowe, sprężyste zginanie–skręcanie i plastyczne zginanie–skręcanie.

Rozważmy idealnie sprężysty ośrodek Cosseratów poddany tym samym obciążeniom i warunkom brzegowym, co ośrodek sprężysto-plastyczny. Niech $s_{ij}^{(e)}(t)$, $m_{ij}^{(e)}(t)$ oznaczają odpowiednio naprężenia i naprężenia momentowe w ośrodku idealnym, a odpowiadające im odkształcenia i tensor zginania–skręcania oznaczmy odpowiednio przez $\lambda_{ij}^{(s)}(t)$, $\varkappa_{ij}^{(s)}(t)$. Resztkowe naprężenia oznaczmy przez $\varrho_{ij}(t)$, resztkowe zaś naprężenia momentowe przez $\varphi_{ij}(t)$. Wstawiając do (7.3), (7.4) ϱ_{ij} zamiast s_{ij} oraz φ_{ij} zamiast m_{ij} otrzymujemy sprężyste odkształcenia $\lambda_{ij(r)}^{(e)}(t)$ i sprężyste zginanie–skręcanie $\varkappa_{ij(r)}^{(e)}(t)$. Spełnione są oczywiście związki

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}^{(e)} + \lambda_{ij}^{(p)} = \lambda_{ij}^{(s)} + \lambda_{ij(r)}^{(e)} + \lambda_{ij}^{(p)}, \tag{7.7}$$

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_{ij}^{(e)} + \varkappa_{ij}^{(p)} = \chi_{ij}^{(s)} + \varkappa_{ij(r)}^{(e)} + \varkappa_{ij}^{(p)}, \tag{7.8}$$

$$s_{ij} = s_{ij}^{(e)} + \varrho_{ij}, \tag{7.9}$$

$$m_{ij} = m_{ij}^{(e)} + \varphi_{ij}. \tag{7.10}$$

Pozostajemy na gruncie rozważań quasi-statycznych, występujące więc w (7.7)–(7.10) funkcje zmieniają się «powoli» wraz ze zmianą czasu t.

Dopuszczalny cykl prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)}(t)$ definiujemy w ten sposób, że całka

$$\Delta\lambda_{ij0}^{(p)} = \int_0^T \dot{\lambda}_{ij0}^{(p)} dt, \tag{7.11}$$

przedstawiająca przyrost odkształceń plastycznych za cykl określony czasem T, stanowi kinematycznie dopuszczalne pole odkształceń, tzn. odkształcenie (7.11) można otrzymać wiedząc, że $\lambda_{ij} = u_{j,i} - \varepsilon_{ijk}\omega_k$ (por. punkt 5), z odpowiednich pól przemieszczeń i mikroobrotów, które z kolei znikają na S_u.

Tensor odkształceń λ_{ij} zależy od pola przemieszczeń u_i i pola mikroobrotów ω_i. Musimy więc wprowadzić pojęcie dopuszczalnego cyklu prędkości plastycznego zginania–skręcania $\dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}$. Dopuszczalny cykl prędkości plastycznego zginania–skręcania $\dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}$ określamy w ten sposób, że przyrost

$$\Delta\varkappa^{(p)}_{ij0} = \int_0^T \dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}\,dt, \tag{7.12}$$

zaś cykl wyznaczony przez przedział czasu T stanowi kinematycznie dopuszczalne pole zginania–skręcania. Oznacza to, że tensor (7.12) można otrzymać, korzystając z (1.7), z pola mikroobrotów $\Delta\omega_{i0}$, przy czym pole to znika na S_u (zgodnie z warunkami brzegowymi). Ponieważ przyrosty odkształceń plastycznych (7.11) mają być kinematycznie dopuszczalne, można je otrzymać z pola przemieszczeń Δu_{i0}, które znika na S_u, oraz z pola $\Delta\omega_{i0}$.

Polom $\dot{\lambda}^{(p)}_{ij0}(t)$, $\dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}(t)$ towarzyszą resztkowe prędkości naprężeń $\dot{\varrho}_{ij0}(t)$ i resztkowe prędkości naprężeń momentowych $\dot{\varphi}_{ij0}(t)$. Z kolei tym resztkowym polom naprężeń i naprężeń momentowych odpowiadają sprężyste odkształcenia $\dot{\lambda}^{(e)}_{ij0}(t)$ i sprężyste zginanie-skręcanie $\dot{\varkappa}^{(e)}_{ij0}(t)$. Niech $\dot{u}^0_i(t)$ i $\dot{\omega}^0_i(t)$ oznaczają odpowiednio pole prędkości przemieszczeń i pole mikro-obrotów, z których otrzymujemy kinematycznie dopuszczalne pole prędkości odkształceń

$$\dot{\lambda}_{ij0} = \dot{\lambda}^{(e)}_{ij0} + \dot{\lambda}^{(p)}_{ij0} \tag{7.13}$$

i kinematycznie dopuszczalne pole prędkości zginania–skręcania

$$\dot{\varkappa}_{ij0} = \dot{\varkappa}^{(e)}_{ij0} + \dot{\varkappa}^{(p)}_{ij0}. \tag{7.14}$$

Przyrosty przemieszczeń i mikroobrotów za cykl dopuszczalnych prędkości odkształceń plastycznych i dopuszczalnych prędkości plastycznego zginania–skręcania są dane zależnościami

$$\Delta u_{i0} = \int_0^T \dot{u}^0_i\,dt, \tag{7.15}$$

$$\Delta\omega_{i0} = \int_0^T \dot{\omega}^0_i\,dt. \tag{7.16}$$

Resztkowe naprężenia i resztkowe naprężenia momentowe w chwili $t = T$ przyjmują wartość taką, jak w chwili $t = 0$, gdyż przyrosty odkształceń plastycznych i przyrosty plastycznego zginania–skręcania są kinematycznie dopuszczalne. Stąd wynika, że

$$\int_0^T \dot{\lambda}^{(e)}_{ij0}\,dt = 0, \tag{7.17}$$

$$\int_0^T \dot{\varkappa}^{(e)}_{ij0}\,dt = 0. \tag{7.18}$$

Po tych długich, aczkolwiek niezbędnych określeniach, możemy sformułować twierdzenia o dostosowaniu, uogólnione na przypadek ośrodków Cosseratów z niezwiązanymi obrotami cząstek.

Uogólnione twierdzenie Melana

a) Jeśli istnieją niezależne od czasu pola, odpowiednio naprężeń resztkowych $\bar{\varrho}_{ij}$ i resztkowych naprężeń momentowych $\bar{\varphi}_{ij}$ takie, że wektor $\mathbf{Q}(s_{ij}^{(b)}, m_{ij}^{(b)})$, gdzie $s_{ij}^{(b)} = s_{ij}^{(e)} + \bar{\varrho}_{ij}$ $m_{ij}^{(b)} = m_{ij}^{(e)} + \bar{\varphi}_{ij}$ leży w e w n ą t r z wszystkich powierzchni plastyczności, w każdym punkcie ośrodka i dla wszystkich możliwych kombinacji obciążeń dla danego programu obciążenia, to układ dostosowuje się,

b) Dostosowanie nie nastąpi, jeśli nie istnieją niezależne od czasu pola resztkowych naprężeń i resztkowych naprężeń momentowych, dla których wektor $\mathbf{Q}$ o składowych, jak w a) byłby dopuszczalnym (por. punkt 5) w każdym punkcie ośrodka i dla wszystkich możliwych kombinacji obciążenia.

Uogólnione twierdzenie Koitera

a) Układ nie dostosowuje się, jeśli istnieje dopuszczalny cykl prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)}(t)$ i dopuszczalny cykl prędkości plastycznego zginania-skręcania $\dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)}(t)$, a ponadto istnieją obciążenia zewnętrzne $X_i(t)$, $Y_i(t)$, $T_i(t)$, $M_i(t)$ wewnątrz danych przedziałów zmienności tych obciążeń, takie że,

$$\int_0^T dt\Big[\int_V (X_i\dot{u}_i^0 + Y_i\dot{\omega}_i^0)dV + \int_{S_T} (T_i\dot{u}_i^0 + M_i\dot{\omega}_i^0)ds\Big] > \int_0^T dt \int_V (s_{ij}\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)} + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)})dV.$$

b) Układ dostosowuje się, jeśli istnieje $k > 1$, o takiej własności, że dla wszystkich dopuszczalnych cykli odpowiednio prędkości odkształceń plastycznych $\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)}(t)$ i prędkości plastycznego zginania-skręcenia $\dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)}(t)$ oraz wszystkich obciążeń zewnętrznych (wewnątrz danych przedziałów), zachodzi

$$k\int_0^T dt\Big[\int_V (X_i\dot{u}_i^0 + Y_i\dot{\omega}_i^0)dV + \int_{S_T} (T_i\dot{u}_i^0 + M_i\dot{\omega}_i^0)ds\Big] \leqslant \int_0^T dt \int_V (s_{ij}\dot{\lambda}_{ij0}^{(p)} + m_{ij}\dot{\varkappa}_{ij0}^{(p)})dV.$$

Dowodów powyższych twierdzeń nie podajemy. Chcąc je dowieść, należy skorzystać z prac [6], [7].

Literatura cytowana w tekście

1. D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech., 1, **26** (1959), 101–106; сб. пер. Механика, 2 (1960), 55–70.
2. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Warszawa 1969.
3. A. E. GREEN, P. M. NAGDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rational Mech. Anal., 4, **18** (1965), 251–281; сб. пер. Механика, 5 (1965), 111–142.

4. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, *Plasticity and multipolar continuum mechanics*, Mathematica, 12 (21), (1965), 21–26.
5. A. E. GREEN, P. M. NAGHDI, R. B. OSBORN, *Theory of an elastic-plastic Cosserat surface*, Int. J. Solids Struct., **4** (1968), 907–927.
6. I. HLAVÁČEK, M. HLAVÁČEK, *On the existence and uniqueness of solution and some variational principles in linear theories of elasticity with couple-stresses*, Aplikace Mat., 5, **14** (1969), 387–410.
7. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, Progress in Solid Mechanics, Amsterdam 1960, 166–221.
8. W. T. KOITER, *Couple-stresses in the theory of elasticity*, Proc. Nederl. Akad. Wetenschappen, Ser. B, 1, **67**, (1964), 17–44, сб. Механика, 3 (1965), 89–112.
9. H. LIPPMANN, *Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fliessens*, Acta Mechanica, **8** (1969), 255–284
10. R. D. MINDLIN, *Micro-structure in linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal,. 1, **16** (1964), 51–78; сб. Механика, 4 (1964), 129–160.
11. M. MIŞICU, *On a theory of asymmetric plastic and visco-plastic solids*, Mech. Appl., 3, **9**, (1964), 477–495.
12. T. MURA, S. LEE. *Application of variational principles to limit analysis*, Quart. Appl. Math., 3, **21**, (1963), 243–248.
13. T. MURA, J. S. KAO, S. LEE, *Limit analysis of circular orthotropic plates*, Proc. ASCE, J. Engn. Mech. Div., 5, **90** (1964), 375–395.
14. T. MURA, W. H. RIMAWI, S. LEE, *Extended theorems of limit analysis*, Quart. Appl. Math., 2, **23** (1965).
15. G. SACCHI, M. SAVE, *On the evaluation of the limit load for rigid-perfectly plastic continua*; Meccanica, 3, **3** (1968), 199–206.
16. A. SAWCZUK, *On yielding of Cosserat continua*, Arch. Mech. Stos., 3, **19** (1967), 471–480.
17. M. SAYIR, *Zur Fiessbedingung der Plastizitätstheorie*, Ing. Arch., **39** (1970), 314–432.
18. W. SZCZEPIŃSKI, J. MIASTKOWSKI, *An experimental study of the effect of the prestraining history on the yield surfaces of an aluminium alloy*, J. Mech. Phys. Solids, 3, **16** (1968), 153–162.
19. J. J. TELEGA, *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji*, (Przegląd prac), Mech. Teor. Stos., 1, **9** (1971), 7–52.
20. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa pod red. W. OLSZAKA, P. PERZYNY, A. SAWCZUKA. Warszawa 1965.
21. K. TURSKI, *Badanie wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metalu przy różnych drogach wtórnego obciążenia*, Mech. Teor. Stos., 1, **9** (1971), 155–199.
22. K. C. VALANIS, *On the thermodynamic foundation of classical plasticity*, Acta Mechanica, **9** (1970), 278–291.
23. H. ZIEGLER, *Plastizität ohne Thermodynamik*, ZAMP, 5, **21** (1970), 798–805.
24. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Москва 1969.
25. В. В. КОЛОКОЛЬЧИКОВ, *Моментная теория малых упруго-пластических деформаций*, Вестн. Моск. Ун., Мат-Мех., 1 (1971), 76–84.
26. Л. И. СЕДОВ, *Механика сплошной среды*, т. I, Москва 1970.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМ О НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ДЛЯ СРЕДЫ КОССЕРА

В работе дано обобщение на случай среды Коссера теорем о несущей способности и теорем Мелана и Койтера о приспособляемости. Даны обобщения вариационного принципа Мюра-Ли, выводов Циглера, вытекающих из первого и второго принципов термодинамики, а также обобщение постулата Друккера. Выполненное исследование основано на предлагаемой Липпманном теории пластического течения среды Коссера.

Summary

ON SOME GENERALIZATIONS OF LIMIT ANALYSIS THEOREMS FOR COSSERAT MEDIA

This paper presents the generalizations of limit analysis and shake-down theorems of Melan and Koiter to the case of Cosserat media. Moreover, the variational principle of Mura-Lee, Ziegler's conclusion from the first and second laws of thermodynamics and Drucker's postulate have been generalized. The problems discussed in the paper are based on Lippmann's theory of plastic flow of Cosserat media.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 czerwca 1971 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

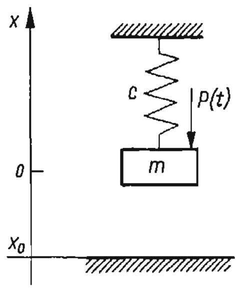
STATYSTYCZNA ANALIZA UKŁADU WIBROUDERZENIOWEGO

WŁODZIMIERZ GAWROŃSKI (GDAŃSK)

Ważniejsze oznaczenia

$\frac{\partial(\ldots\ldots)}{\partial(\ldots\ldots)}$ jakobian (wyznacznik funkcyjny),
M_x wartość średnia zmiennej x,
E symbol uśredniania,
σ_x^2 wariancja zmiennej x,
K_{xx} moment korelacyjny zmiennej x,
K_{xy} moment korelacji wzajemnej zmiennych x i y.

Schemat układu pokazano na rys. 1. Na masę m podwieszoną na sprężynie o sztywności c działa siła okresowa $P(t) = P_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Masa m w czasie ruchu uderza o zderzak. Przy analizie ruchu układu zakładamy, że masa zderzaka jest nieskończenie duża, a czas



Rys. 1

uderzenia masy o zderzak jest mały w porównaniu z okresem ruchu. Zjawisko uderzenia scharakteryzowane jest współczynnikiem restytucji prędkości R.

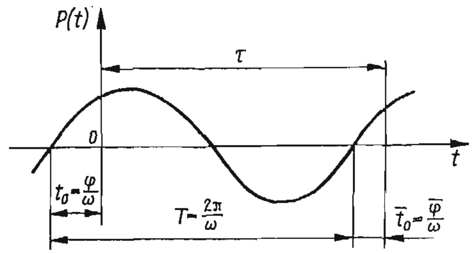
W przyjmowanym najczęściej modelu układu wibrouderzeniowego zakłada się, że położenie zderzaka jest niezmienne w czasie. Zderzakiem tym często bywa pal wbijany w grunt, a zadaniem wibromłota, którego modelem jest układ wibrouderzeniowy, jest zmiana położenia tego zderzaka. Skład i struktura gruntu jest (również w kierunku przesuwu pala) zmienną losową. Parametry statystyczne tej zmiennej dla danego typu gleb, warunków otoczenia itp. można wyznaczyć doświadczalnie. Położenie zderzaka x_0 jest więc zmienną losową.

Dalej przyjmujemy założenie, że zarówno wartość średnia tej zmiennej, jak i jej wariancja są wielkościami stałymi

$$M_{x_0} = \text{const}, \quad \sigma_{x_0}^2 = \text{const}. \tag{1}$$

Ruch układu rozpatrywać będziemy między dwoma kolejnymi uderzeniami masy o zderzak. Przy tego typu analizie ruchu układu zjawisko uderzenia masy o zderzak wpływa na warunki początkowe ruchu. Ponieważ położenie zderzaka x_0 jest zmienną losową, więc i warunki początkowe ruchu są zmienną losową. Ruch masy, tj. stan dynamiczny układu należy więc rozpatrywać w aspekcie probabilistycznym.

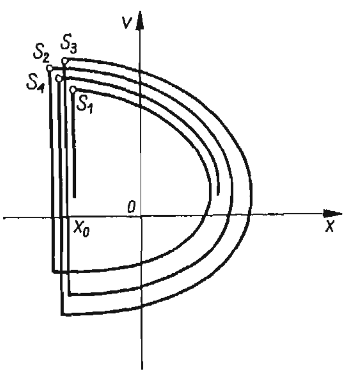
Położenie układu $x(t)$ i jego prędkość $v(t)$ można przedstawić w zależności od losowych warunków początkowych w postaci rozwiązania różniczkowego równania ruchu układu.



Rys. 2

W badanym przypadku nie interesuje nas jednak położenie i prędkość masy w chwili bieżącej t, lecz czas w jakim masa m wychodząc z położenia $x = x_0$ wróci do tego położenia oraz jej prędkość w tym momencie. Czas ten oznaczymy przez τ, a prędkość przez v_1. Obie te wielkości są zmiennymi losowymi. Zakładamy, że w chwili $t = 0$ nastąpiło i-te uderzenie masy o zderzak. Wielkość fazy siły wymuszającej w tym momencie oznaczamy przez φ. Przez $\bar{\varphi}$ oznaczamy wielkość fazy siły wymuszającej po $i+1$–szym uderzeniu. Z rys. 2 odczytujemy zależność między $\bar{\varphi}$, φ i τ. Analogicznie oznaczamy wielkości prędkości początkowej po i-tym uderzeniu przez v_0, a po $i+1$-szym uderzeniu przez $\bar{v}_0$.

Dla rozpatrywanego układu szukamy rozwiązania ograniczonego. Pod pojęciem ograniczoności rozumiemy tutaj prawdopodobieństwo zdarzenia, że trajektoria fazowa



Rys. 3

układu wyjdzie poza obszar A o skończonej średnicy, jest równa zeru dla $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Oznacza to, że wszystkie momenty wektora fazowego układu muszą przyjmować wartości skończone.

Rozpatrzmy w tym aspekcie ciąg punktów $S_1, S_2, S_3, \ldots$, na prostej $x = x_0$ w przestrzeni fazowej (rys. 3), jednoznacznie scharakteryzowanych przez trójwymiarową zmienną losową $y = \{\varphi, v_0, x_0\}$ (rys. 3 przedstawia rzut trajektorii fazowych na płaszczyznę $\varphi = \varphi_0$). Zależność między i-tym i $i+1$-szym wyrazem tego ciągu wyznaczona jest za pomocą funkcji, którą otrzymujemy z rozwiązania równania różniczkowego ruchu. Funkcję tę oznaczamy literą Ω, współrzędne i-tego wyrazu ciągu przez $y = \{\varphi, v_0, x_0\}$, a współrzędne $i+1$-szego wyrazu ciągu przez $\bar{y} = \{\bar{\varphi}, \bar{v}_0, \bar{x}_0\}$. Mamy zatem

$$\bar{y} = \Omega(y). \tag{2}$$

Niech zmienne losowe y i $\bar{y}$ mają wartości średnie oznaczone odpowiednio przez $M_y = \{M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}\}$, $\overline{M}_y = \{\overline{M}_\varphi, \overline{M}_{v_0}, \overline{M}_{x_0}\}$ oraz momenty drugiego rzędu oznaczone przez

$$\mu_2 = \{K_{\varphi\varphi}, K_{v_0 v_0}, K_{x_0 x_0}, K_{\varphi v_0}, K_{\varphi x_0}, K_{v_0 x_0}\},$$

$$\bar{\mu}_2 = \{\overline{K}_{\varphi\varphi}, \overline{K}_{v_0 v_0}, \overline{K}_{x_0 x_0}, \overline{K}_{\varphi v_0}, \overline{K}_{\varphi x_0}, \overline{K}_{v_0 x_0}\}.$$

Zależności między tymi wielkościami dane są w postaci

$$\overline{M}_y = \Omega_1(M_y), \tag{3}$$

$$\bar{\mu}_2 = \Omega_2(\mu_2). \tag{4}$$

Funkcje Ω_1 i Ω_2 nazywamy odpowiednio funkcjami następstwa rzędu pierwszego i drugiego.

Jeśli istnieje rozwiązanie ograniczone, tzn. o skończonych wartościach momentów zmiennej y, to znajdziemy takie punkty M_{yi}^* i μ_2^* (patrz Aneks 1), że

$$M_{yi}^* = \Omega_1(M_y^*), \tag{5}$$

$$\mu_2^* = \Omega_2(\mu_2^*). \tag{6}$$

Punkty M_y^* i μ_2^* nazywamy punktami stałego odwzorowania odpowiednio funkcji Ω_1 i Ω_2.

W przypadku układu zdeterminowanego (występuje tylko funkcja następstwa rzędu pierwszego) związek (5) wyznacza warunki okresowości ruchu układu (czas między uderzeniami jest stały) [1]. W przypadku układu probabilistycznego czas między uderzeniami jest zmienną losową, chociaż zarówno jego wartość średnia, jak i momenty wyższego rzędu są stałe [wynika to ze związków (5) i (6)]. Ruch taki nazwiemy ruchem quasi-okresowym.

Wyznaczymy funkcje Ω_1 i Ω_2 dla badanego układu oraz ich punkty stałego odwzorowania. Charakterystyki probabilistyczne przemieszczenia masy zależą tylko od warunków początkowych, wymuszenie jest wielkością zdeterminowaną, a więc związek między $\bar{\varphi}$, $\bar{v}_0$, $\bar{x}_0$ i φ, v_0, x_0 możemy przedstawić za pomocą zależności funkcjyjnej $\bar{\varphi} = f(\varphi, v_0, x_0)$, $\bar{v}_0 = g(\varphi, v_0, x_0)$, $\bar{x}_0 = x_0$. Ostatni związek wynika, z dokładnością do momentów rzędu drugiego, z założenia (1), pozostałe wyznaczamy następująco: najpierw znajdujemy zależności między prędkością układu $\bar{v}_0$ i kątem przesunięcia fazowego siły wymuszającej $\bar{\varphi}$ tuż po $i+1$-szym uderzeniu, a prędkością układu v_1 tuż przed $i+1$-szym uderzeniem i czasem przebywania układu między uderzeniami τ. Te ostatnie zaś wielkości zależą funkcyjnie od prędkości v_0, położenia zderzaka x_0 i fazy siły wymuszającej φ tuż po i-tym uderzeniu:

$$\tau = f_1(v_0, \varphi, x_0),$$
$$v_1 = f_2(v_0, \varphi, x_0).$$

Funkcje te otrzymamy z rozwiązania równania różniczkowego ruchu, w postaci uwikłanej

$$F_1(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) = 0, \qquad (7)$$
$$F_2(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) = 0.$$

Zależność między $\bar{\varphi}$, τ i φ wynika z rys. 2 (przyjęliśmy, że czas uderzenia jest pomijalnie mały)

$$\bar{\varphi} = \omega\tau + \varphi - 2\pi, \qquad (8)$$

a między $\bar{v}_0$ i v_1 określona jest związkiem

$$\bar{v}_0 = -Rv_1. \qquad (9)$$

Wartości średnie M_{v_1}, M_τ i odpowiednie momenty korelacyjne wyznaczymy w sposób przybliżony, przy pomocy linearyzacji funkcji zmiennych losowych (patrz Aneks 2). Zgodnie z tą metodą wartości średnie wyznaczamy ze związków

$$\begin{aligned} F_1(M_\tau, M_{v_1}, M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}) &= 0, \\ F_2(M_\tau, M_{v_1}, M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}) &= 0, \end{aligned} \qquad (10)$$

momenty zaś korelacyjne wyznaczamy na podstawie zależności:

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau} &= \delta_1^2 K_{\varphi\varphi} + 2\delta_1\delta_3 K_{\varphi_0} + \delta_3^2 K_{v_0v_0} + \delta_5^2 K_{x_0x_0} + 2\delta_1\delta_5 K_{\varphi x_0} + 2\delta_3\delta_5 K_{v_0x_0}, \\ K_{\tau v_1} &= \delta_1\delta_2 K_{\varphi\varphi} + (\delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_3)K_{\varphi v_0} + \delta_3\delta_4 K_{v_0v_0} + \delta_5\delta_6 K_{x_0x_0} + \\ &\quad + (\delta_1\delta_6 + \delta_2\delta_5)K_{\varphi x_0} + (\delta_3\delta_6 + \delta_4\delta_5)K_{v_0x_0}, \\ K_{v_1v_1} &= \delta_2^2 K_{\varphi\varphi} + 2\delta_2\delta_4 K_{\varphi v_0} + \delta_4^2 K_{v_0v_0} + \delta_6^2 K_{x_0x_0} + 2\delta_2\delta_6 K_{\varphi x_0} + 2\delta_4\delta_6 K_{v_0x_0} \end{aligned} \qquad (11)$$

oraz

$$\begin{aligned} K_{\tau\varphi} &= \delta_1 K_{\varphi\varphi} + \delta_3 K_{\varphi v_0} + \delta_5 K_{\varphi x_0}, \\ K_{\tau v_0} &= \delta_1 K_{\varphi v_0} + \delta_3 K_{v_0v_0} + \delta_5 K_{v_0x_0}, \\ K_{\tau x_0} &= \delta_1 K_{\varphi x_0} + \delta_3 K_{v_0x_0} + \delta_5 K_{x_0x_0}, \\ K_{v_1\varphi} &= \delta_2 K_{\varphi\varphi} + \delta_4 K_{\varphi v_0} + \delta_6 K_{\varphi x_0}, \\ K_{v_1v_0} &= \delta_2 K_{\varphi v_0} + \delta_4 K_{v_0v_0} + \delta_6 K_{v_0x_0}, \\ K_{v_1x_0} &= \delta_2 K_{\varphi x_0} + \delta_4 K_{vx_0} + \delta_6 K_{x_0x_0}. \end{aligned} \qquad (12)$$

W związkach (11) i (12) oznaczyliśmy

$$\begin{aligned} &\delta_1 = -\frac{\Delta_{11}}{\Delta_0}, \quad \delta_2 = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_0}, \quad \delta_3 = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_0}, \quad \delta_4 = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_0}, \\ &\delta_5 = -\frac{\Delta_{31}}{\Delta_0}, \quad \delta_6 = -\frac{\Delta_{32}}{\Delta_0}, \end{aligned} \qquad (13)$$

gdzie

$$\Delta_0 = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(M_\tau, M_{v_1})}, \quad \Delta_{11} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(M_\varphi, M_{v_1})}, \quad \Delta_{12} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(M_\tau, M_\varphi)},$$

$$\Delta_{21} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(M_{v_0}, M_{v_1})}, \quad \Delta_{22} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(M_\tau, M_{v_0})}, \quad \Delta_{31} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(M_{x_0}, M_{v_1})}, \tag{14}$$

$$\Delta_{32} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(M_\tau, M_{x_0})}$$

Ze związków (8) i (9) mamy

$$\overline{M}_\varphi = \omega M_\tau + M_\varphi - 2\pi, \tag{15}$$

$$\overline{M}_{v_0} = -RM_{v_1}. \tag{16}$$

Na podstawie (8) i (9) wyznaczamy także zależności między momentami korelacyjnymi zmiennych τ i v_1 i momentami korelacyjnymi zmiennych $\overline{\varphi}$, $\overline{v}_0$, $\overline{x}_0$:

$$\overline{K}_{\varphi\varphi} = E[(\overline{\varphi} - \overline{M}_\varphi)^2] = E[\overline{\varphi}^2] - \overline{M}_\varphi^2 = E[(\omega\tau + \varphi - 2\pi)^2] - \tag{17}$$
$$-(\omega M_\tau + M_\varphi - 2\pi)^2 = \omega^2 K_{\tau\tau} + 2\omega K_{\tau\varphi} + K_{\varphi\varphi},$$

$$\overline{K}_{\varphi v_0} = E[(\overline{\varphi} - \overline{M}_\varphi)(\overline{v}_0 - \overline{M}_{v_0})] = E[\overline{\varphi}\overline{v}_0] - \overline{M}_\varphi \overline{M}_{v_0} = \tag{18}$$
$$= E[(\omega\tau + \varphi - 2\pi)(-Rv_1)] + (\omega M_\tau + M_\varphi - 2\pi) RM_{v_1} = -R(\omega K_{\tau v_1} + K_{\varphi v_1}),$$

$$\overline{K}_{v_0 v_0} = E[(\overline{v}_0 - \overline{M}_{v_0})^2] = E[\overline{v}_0^2] - \overline{M}_{v_0}^2 = E[R^2 v_1^2] - R^2 \overline{M}_{v_1}^2 = R^2 K_{v_1 v_1}, \tag{19}$$

$$\overline{K}_{\varphi x_0} = E[\overline{\varphi}\overline{x}_0] - \overline{M}_\varphi \overline{M}_{x_0} = E[(\omega\tau + \varphi - 2\pi) x_0] - \tag{20}$$
$$-(\omega M_\tau + M_\varphi - 2\pi) M_{x_0} = \omega K_{\tau x_0} + K_{\varphi x_0},$$

$$K_{v_0 x_0} = E[\overline{v}_0 \overline{x}_0] - \overline{M}_{v_0} \overline{M}_{x_0} = E[-Rv_1 x_0] + RM_{v_1} M_{x_0} = -RK_{v_1 x_0}. \tag{21}$$

We wzorach (17)$\div$(21) skorzystaliśmy z następującej zależności:

$$E[(x - M_x)^2] = E[x^2] - M_x^2.$$

Zależności między v_0, φ, x_0 po i-tym i $i+1$-szym uderzeniu mają postać:

a) dla wartości średniej (funkcja następstwa rzędu pierwszego), po uwzględnieniu (1), (8), (9), (10)

$$\begin{aligned} \overline{M}_{x_0} &= M_{x_0}, \\ \overline{M}_\varphi &= \omega M_\tau + M_\varphi - 2\pi, \\ \overline{M}_{v_0} &= -RM_{v_1}, \\ F_1(M_\tau, &M_{v_1}, M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}) = 0, \\ F_2(M_\tau, &M_{v_1}, M_\varphi, M_{v_0}, M_{x_0}) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

b) dla momentów korelacyjnych (funkcja następstwa rzędu drugiego), po uwzględnieniu (1), (11), (12), (17)$\div$(21), przy oznaczeniu $K_{x_0 x_0} = \sigma_{x_0}^2$:

$$\overline{K}_{\varphi\varphi} = (\omega\delta_1 + 1)^2 K_{\varphi\varphi} + 2\omega\delta_3(\omega\delta_1 + 1) K_{\varphi v_0} + \omega^2 \delta_3^2 K_{v_0 v_0} + \tag{23}$$
$$+ 2\omega\delta_5(\omega\delta_1 + 1) K_{\varphi x_0} + 2\omega^2 \delta_3 \delta_5 K_{v_0 x_0} + \omega^2 \delta_5^2 \sigma_{x_0}^2,$$

(23) $\overline{K}_{\varphi v_0} = -R[\delta_2(\omega\delta_1+1)K_{\varphi\varphi}+(\omega\delta_1\delta_4+\omega\delta_2\delta_3+\delta_4)K_{\varphi v_0}+$

[c.d.] $+\omega\delta_3\delta_4 K_{v_0 v_0}+(\omega\delta_1\delta_6+\omega\delta_2\delta_5+\delta_6)K_{\varphi x_0}+(\delta_3\delta_6+\delta_4\delta_5)K_{v_0 x_0}+\delta_5\delta_6\sigma^2_{x_0}]$,

$$\overline{K}_{v_0 v_0} = R^2[\delta_2^2 K_{\varphi\varphi}+2\delta_2\delta_4 K_{\varphi v_0}+\delta_4^2 K_{v_0 v_0}+2\delta_2\delta_6 K_{\varphi x_0}+2\delta_4\delta_6 K_{v_0 x_0}+\delta_6^2\sigma^2_{x_0}],$$

$$\overline{K}_{\varphi x_0} = \omega\left[\left(\delta_1+\frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi x_0}+\delta_3 K_{v_0 x_0}+\delta_5\sigma^2_{x_0}\right],$$

$$K_{v_0 x_0} = -R[\delta_2 K_{\varphi x_0}+\delta_4 K_{v_0 x_0}+\delta_6\sigma^2_{x_0}].$$

Funkcje F_1 i F_2 otrzymujemy z równania ruchu układu, które ma postać

$$\ddot{x}+b^2x = p\sin(\omega t+\varphi); \quad 0 \leqslant t < \tau, \tag{24}$$

gdzie

$$b = \sqrt{\frac{c}{m}}, \qquad p = \frac{P_0}{m}.$$

Przyjmując warunki początkowe $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ (stan układu po uderzeniu) otrzymujemy rozwiązanie równania (24) w postaci

$$x(t) = \left(x_0-\frac{p}{b^2-\omega^2}\sin\varphi\right)\cos bt+\frac{\sin bt}{b}\left(v_0-\frac{p\omega}{b^2-\omega^2}\cos\varphi\right)+\frac{p}{b^2-\omega^2}\sin(\omega t+\varphi),$$

$$\dot{x}(t) = b\sin bt\left(\frac{p}{b^2-\omega^2}\sin\varphi-x_0\right)+\left(v_0-\frac{p}{b^2-\omega^2}\omega\cos\varphi\right)\cos bt+ \tag{25}$$

$$+\frac{p\omega}{b^2-\omega^2}\cos(\omega t+\varphi).$$

Następne uderzenie w układzie nastąpi w chwili $t = \tau$, gdy $x = x_0$ i:

$$x(\tau) = x_0, \quad \dot{x}(\tau) = v_1. \tag{26}$$

Z warunków (26), na podstawie (25) otrzymujemy funkcje F_1 i F_2 w postaci

$$F_1(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) = -x_0+(x_0+C\sin\varphi)\cos b\tau+\frac{\sin b\tau}{b}\times$$

(27) $$\times(v_0-C\omega\cos\varphi)+C\sin(\omega\tau+\varphi) = 0,$$

$$F_2(\tau, v_1, \varphi, v_0, x_0) = -v_1+b\sin b\tau(C\sin\varphi-x_0)+$$

$$+\cos b\tau(v_0-C\omega\cos\varphi)+C\omega\cos(\omega\tau+\varphi) = 0,$$

gdzie

$$C = \frac{p}{b^2-\omega^2}.$$

Na podstawie zależności (22) i (27) znajdujemy punkt stałego odwzorowania dla funkcji następstwa rzędu pierwszego. Zadanie to sprowadza się do wyznaczenia warunków okresowości ruchu dla układu zdeterminowanego i zostało przeanalizowane np. w [1, 2]. Z analizy tej otrzymujemy m.in., że $M_\tau = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Na podstawie (14) i (27) wyznaczamy wielkości $\Delta_0, \Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{31}, \Delta_{32}$;

$$
\begin{aligned}
\Delta_0 &= (C\sin M_\varphi - M_{x_0})b\sin\lambda + (M_{v_0} + C\omega\cos M_\varphi)\cos\lambda + C\omega\cos M_\varphi,\\
\Delta_{11} &= C\left[\frac{\omega}{b}\sin M_\varphi \sin\lambda - \cos M_\varphi(1-\cos\lambda)\right],\\
\Delta_{12} &= C\left\{\left[\cos M_\varphi(\cos\lambda - 1) + \frac{\omega}{b}\sin M_\varphi \sin\lambda\right][b^2\cos\lambda(C\cos M_\varphi - M_{x_0}) +\right.\\
&\quad + b(C\omega\cos M_\varphi - M_{v_0})\sin\lambda - C\omega^2\sin M_\varphi] + [b\sin\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) +\\
&\quad + (M_{v_0} + C\omega\cos M_\varphi)\cos\lambda + C\omega\cos M_\varphi][b\cos M_\varphi \sin\lambda + \omega\sin M_\varphi(\cos\lambda - 1)],
\end{aligned}
$$

$$
\Delta_{21} = -\frac{\sin\lambda}{b}, \tag{28}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{22} &= \frac{\sin\lambda}{b}[b^2\cos\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) + b\sin\lambda(C\omega\cos M_\varphi - M_{v_0}) - C\omega^2\sin M_\varphi] +\\
&\quad + \cos\lambda[b\sin\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) + \cos\lambda(M_{v_0} + C\omega\cos M_\varphi) + C\omega\cos M_\varphi],\\
\Delta_{31} &= 1 - \cos\lambda,\\
\Delta_{32} &= (1-\cos\lambda)[b^2(C\sin M_\varphi - M_{x_0})\cos\lambda + b\sin\lambda(C\omega\cos M_\varphi - M_{v_0}) -\\
&\quad - C\omega^2\sin M_\varphi] - b\sin\lambda[b\sin\lambda(C\sin M_\varphi - M_{x_0}) + \cos\lambda(M_{v_0} - C\omega\cos M_\varphi) +\\
&\quad + C\omega\cos M_\varphi],
\end{aligned}
$$

gdzie:

$$
\lambda = 2\pi\frac{b}{\omega}.
$$

Z powyższych zależności i z równań (13) wyznaczone są współczynniki $\delta_1 \div \delta_6$. Wyznaczamy stąd, na podstawie (6) i (23), punkt stałego odwzorowania dla funkcji następstwa rzędu drugiego. Otrzymujemy układ równań

$$
\begin{aligned}
&\delta_1\left(\delta_1 + \frac{2}{\omega}\right)K_{\varphi\varphi} + 2\delta_3\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi v_0} + \delta_3^2 K_{v_0 v_0} + 2\delta_5\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi x_0} +\\
&\qquad + 2\delta_3\delta_5 K_{v_0 x_0} = -\delta_5^2\sigma_{x_0}^2,\\
&\delta_2\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right)K_{\varphi\varphi} + \left(\delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_3 + \frac{\delta_4}{\omega} + \frac{1}{R\omega}\right)K_{\varphi v_0} + \delta_3\delta_4 K_{v_0 v_0} +\\
&\qquad + \left(\delta_1\delta_6 + \delta_2\delta_5 + \frac{\delta_6}{\omega}\right)K_{\varphi x_0} + (\delta_3\delta_6 + \delta_4\delta_5)K_{v_0 x_0} = -\delta_5\delta_6\sigma_{x_0}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_2^2 K_{\varphi\varphi} + 2\delta_2\delta_4 K_{\varphi v_0} + \left(\delta_4^2 - \frac{1}{R^2}\right)K_{v_0 v_0} + 2\delta_2\delta_6 K_{\varphi x_0} + 2\delta_4\delta_6 K_{v_0 x_0} = -\delta_6^2\sigma_{x_0}^2,\\
&\delta_1 K_{\varphi x_0} + \delta_3 K_{v_0 x_0} = -\delta_5\sigma_{x_0}^2,\\
&\delta_2 K_{\varphi x_0} + \left(\delta_1 + \frac{1}{R}\right)K_{v_0 x_0} = -\delta_6\sigma_{x_0}^2,
\end{aligned} \tag{29}
$$

Powyższy układ równań ma następujące rozwiązanie

$$K_{\varphi\varphi} = \frac{W_1}{W_0}\sigma_{x_0}^2, \quad K_{\varphi v_0} = \frac{W_2}{W_0}\sigma_{x_0}^2, \quad K_{v_0 v_0} = \frac{W_3}{W_0}\sigma_{x_0}^2, \tag{30}$$

$$K_{\varphi x_0} = \frac{R\alpha_2 - \delta_5}{R\alpha_1 + \delta_1}\sigma_{x_0}^2, \quad K_{v_0 x_0} = \frac{-R\alpha_3}{R\alpha_1 + \delta_1}\sigma_{x_0}^2,$$

gdzie

$$W_0 = a_1(a_5 a_9 - a_6 a_8) + a_2(a_6 a_7 - a_4 a_9) + a_3(a_4 a_8 - a_5 a_7),$$

$$W_1 = b_1(a_5 a_9 - a_6 a_8) + b_2(a_3 a_8 - a_2 a_9) + b_3(a_2 a_6 - a_3 a_5),$$

$$W_2 = b_1(a_6 a_7 - a_4 a_9) + b_2(a_1 a_9 - a_3 a_7) + b_3(a_3 a_4 - a_1 a_6),$$

$$W_3 = b_1(a_4 a_8 - a_5 a_7) + b_2(a_2 a_7 - a_1 a_8) + b_3(a_1 a_5 - a_2 a_4),$$

oraz

$$\alpha_1 = \delta_1\delta_4 - \delta_2\delta_3, \quad \alpha_2 = \delta_3\delta_6 - \delta_4\delta_5, \quad \alpha_3 = \delta_1\delta_6 - \delta_2\delta_5,$$

$$a_1 = \delta_1\left(\delta_1 + \frac{2}{\omega}\right), \quad a_2 = 2\delta_3\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right), \quad a_3 = \delta_3^2,$$

$$a_4 = \delta_2\left(\delta_1 + \frac{1}{\omega}\right), \quad a_5 = \delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_3 + \frac{\delta_4}{\omega} + \frac{1}{R\omega}, \quad a_6 = \delta_3\delta_4,$$

$$a_7 = \delta_2^2, \quad a_8 = 2\delta_2\delta_4, \quad a_9 = \delta_4^2 - \frac{1}{R^2},$$

$$b_1 = \frac{\delta_5}{\omega(R\alpha_1 + \delta_1)}(R\omega\alpha_1\delta_5 + \omega\delta_1\delta_5 + 2\delta_5 - 2R\alpha_2\delta_5^2),$$

$$b_2 = \frac{1}{R\alpha_1 + \delta_1}\left[R\delta_6\left(\delta_5\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\omega}\right) + \delta_5\left(\delta_2\delta_5 + \frac{\delta_6}{\omega}\right)\right],$$

$$b_3 = \frac{\delta_6}{R\alpha_1 + \delta_1}(R\delta_6\alpha_1 + \delta_2\delta_5 - \alpha_3).$$

ANEKS

1. O punkcie stałego odwzorowania dla ciągu zmiennych losowych

Rozpatrzmy w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej ciąg punktów

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots, \tag{A1}$$

których współrzędne są zmiennymi losowymi. Oznaczmy współrzędne punktu S_i przez x_1, x_2, x_3, a współrzędne punktu S_{i+1} przez $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$. Wartości średnie tych współrzędnych oznaczamy odpowiednio przez $M_{x_1}, M_{x_2}, M_{x_3}$ i $\overline{M}_{x_1}, \overline{M}_{x_2}, \overline{M}_{x_3}$, zaś momenty centralne rzędu n-tego oznaczamy μ_n i $\bar{\mu}_n$:

$$\text{(A2)}\qquad \begin{aligned} \mu_n &= E[(x_1-M_{x_1})^p(x_2-M_{x_2})^q(x_3-M_{x_3})^r], \\ \bar{\mu}_n &= E[(\bar{x}_1-\bar{M}_{x_1})^p(\bar{x}_2-\bar{M}_{x_2})^q(\bar{x}_3-\bar{M}_{x_3})^r], \end{aligned}$$

gdzie $p, q, r = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, $p+q+r = n$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Mamy więc

$$\mu_n = \{\mu_{n,0,0}, \mu_{n-1,1,0}, \mu_{n-1,0,1}, \ldots, \mu_{1,0,n-1}, \mu_{0,1,n-1}, \mu_{0,0,n}\},$$
$$\bar{\mu}_n = \{\bar{\mu}_{n,0,0}, \bar{\mu}_{n-1,1,0}, \bar{\mu}_{n-1,0,1}, \ldots, \bar{\mu}_{1,0,n-1}, \bar{\mu}_{0,1,n-1}, \bar{\mu}_{0,0,n}\},$$

gdzie

$$\mu_{n-s,s-u,u} = E[(x_1-M_{x_1})^{n-s}(x_2-M_{x_2})^{s-u}(x_3-M_{x_3})^u],$$
$$\bar{\mu}_{n-s,s-u,u} = E[(\bar{x}_1-\bar{M}_{x_1})^{n-s}(\bar{x}_2-\bar{M}_{x_2})^{s-u}(\bar{x}_3-\bar{M}_{x_3})^u],$$

$s, u = 0, 1, 2, \ldots, n$. μ_n i $\bar{\mu}_n$ są więc wektorami k-wymiarowymi, gdzie $k = 1+2+ \ldots +n+ +n+1 = \sum_{i=1}^{n+1} i$.

Załóżmy, że między charakterystykami statystycznymi wyrazów ciągu (A1) zachodzi jednoznaczna zależność:

$$\text{(A3)}\qquad \bar{M}_x = \Omega_1(M_x),$$

$$\text{(A4)}\qquad \bar{\mu}_n = \Omega_n(\mu_n),$$

przy czym $M_x = \{M_{x_1}, M_{x_2}, M_{x_3}\}$, $\bar{M}_x = \{\bar{M}_{x_1}, \bar{M}_{x_2}, \bar{M}_{x_3}\}$. Zależność (A3) nazywamy funkcją następstwa rzędu pierwszego, a (A4) funkcją następstwa rzędu n-tego.

Oznaczmy przez $\mathscr{E}_k$ k-wymiarową przestrzeń euklidesową, oraz obierzmy w tej przestrzeni podzbiór $\mathscr{B}_k$, ograniczony i domknięty. Ciąg (A1) możemy scharakteryzować ciągami punktów:

$$\text{(A5)}\qquad M_x^{(1)}, M_x^{(2)}, M_x^{(3)}, M_x^{(4)}, \ldots,$$

$$\text{(A6)}\qquad \mu_n^{(1)}, \mu_n^{(2)}, \mu_n^{(3)}, \mu_n^{(4)}, \ldots,$$

przy czym dla każdego wyrazu ciągów (A5) i (A6) zachodzi $M_x \in \mathscr{B}_3$ i $\mu_n \in \mathscr{B}_k$. Ponieważ zbiór $\mathscr{B}_k$ jest nieprzeliczalny i ograniczony, więc posiada na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa co najmniej jeden punkt skupienia. Oznacza to, że istnieje taki punkt $\mu_n^* \in \mathscr{B}_k$, że

$$\text{(A7)}\qquad \mu_n^* = \Omega_n(\mu_n^*).$$

Punkt ten nazywamy punktem stałego odwzorowania. Analogiczny związek zachodzi dla wartości średniej.

$$M_x^* = \Omega_1(M_x^*).$$

2. O linearyzacji funkcji zmiennych losowych

PUGACZEW [3] podał metodę wyznaczania wartości średnich i momentów korelacyjnych funkcji zmiennych losowych. Niech dana będzie funkcja

$$\text{(A8)}\qquad \begin{gathered} y = f(x), \\ y = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}, \quad x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}. \end{gathered}$$

Funkcję tę rozwija się w szereg Taylora wokół wartości średniej M_x i po pominięciu wyrazów rzędu drugiego i wyższych otrzymujemy funkcję (A8) w postaci liniowej

$$(A9)\qquad y_i = f_i(M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}) + \sum_{i=1}^{n} a_{ip}(x_p - M_{x_p}),$$

gdzie

$$(A10)\qquad a_{ip} = \frac{\partial f_i(M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_p})}{\partial M_{x_p}}.$$

Stosując odpowiednie wzory definicyjne otrzymano wartości średnie i momenty korelacyjne zmiennej losowej y w postaci

$$(A11)\qquad M_{y_i} = f_i(M_x),$$

$$(A12)\qquad K_{y_i y_j} = \sum_{p,q=1}^{n} a_{ip} a_{jq} K_{x_p x_q},$$

$$i, j = 1, 2, \ldots, r$$

oraz

$$a_{ip} = \frac{\partial f_i(M_x)}{\partial M_{x_p}}, \qquad a_{jq} = \frac{\partial f_j(M_x)}{\partial M_{x_q}}.$$

Metoda ta wymaga uzupełnienia. W celu wyznaczenia pełnych charakterystyk zmiennej y (z dokładnością do momentów rzędu drugiego) należy wyznaczyć funkcje korelacji wzajemnej wartości funkcji i jej argumentów. Wykorzystując zlinearyzowaną funkcję (A9), zgodnie z definicją momentów korelacyjnych znajdujemy

$$(A13)\qquad K_{y_i x_s} = E[(y_i - M_{y_i})(x_s - M_{x_s})] = E\left[\sum_{p=1}^{n} a_{ip}(x_p - M_{x_p})(x_s - M_{x_s})\right] = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} K_{x_p x_s},$$

$$i = 1, 2, \ldots, r, \qquad s = 1, 2, \ldots, n.$$

Dalej załóżmy, że dana jest funkcja (A8) w postaci uwikłanej, tj.

$$(A14)\qquad F_i(y_1, y_2, \ldots, y_r, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, r,$$

Postępując podobnie jak w poprzednim przypadku znajdujemy, że wartość średnia zmiennej losowej y wyznaczona jest związkiem

$$(A15)\qquad F_i(M_{y_1}, M_{y_2}, \ldots, M_{y_r}, M_{x_1}, M_{x_2}, \ldots, M_{x_n}) = 0$$

$$i = 1, 2, \ldots, r,$$

momenty zaś korelacyjne tej zmiennej oraz momenty korelacji wzajemnej y i x dane są związkami (A12) i (A13), przy czym współczynniki a_{ip} i a_{jq} wyznaczamy z następujących związków

$$a_{ip} = -\frac{\Delta_{pi}}{\Delta_0}, \qquad a_{jq} = -\frac{\Delta_{qj}}{\Delta_0}, \tag{A16}$$

$$i,j = 1, 2, \ldots, r, \quad p, q = 1, 2, \ldots, n \quad \text{i} \quad \Delta_0 \neq 0.$$

W związkach (A16) oznaczyliśmy

$$\Delta_0 = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{\partial(M_{y_1}, M_{y_2}, \ldots, M_{y_i}, \ldots, M_{y_r})},$$

$$\Delta_{pi} = \frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_r)}{\partial(M_{y_1}, M_{y_2}, \ldots, M_{x_p}, \ldots, M_{y_r})}.$$

Literatura cytowana w tekście

1. И. И. Быховский, *Основы теории вибрационной техники*, Изд. Машиностроение, Москва 1969.
2. B. Kowalczyk, *Badanie stabilności strukturalnej układu wibrouderzeniowego o jednym stopniu swobody*, Zesz. Nauk. Politechniki Gdańskiej, Nr 112, Mechanika Nr 9, Gdańsk 1967.
3. В. С. Пугачев, *Теория случайных функции*, Изд. Наука, Москва 1962.

Резюме

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

Исследовано поведение виброударной системы при случайном положении ограничителя. Среднее значение и вариация положения ограничителя являются величинами постоянными. Найдено ограниченное решение, основанное на методе точечных отображений, примененном для последовательности точек со случайными координатами. Решением являются корреляционные моменты фазовых координат системы.

Summary

STATISTICAL ANALYSIS OF VIBRO-IMPACT SYSTEM

In the paper the vibro-impact system with random coordinate of the buffer is analyzed. The average value and the variance of this variable are assumed to be constant. The bounded solutions are found by means of the point mappings method, interpreted for points sequence of random coordinates. The correlation moments of state coordinates of the system are determined.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 lipca 1971 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

OBCIĄŻENIE LOSOWE KONSTRUKCJI JAKO FUNKCJA STOCHASTYCZNA Z NIEZALEŻNYMI PRZYROSTAMI

JANUSZ MURZEWSKI, ADAM WINIARZ (KRAKÓW)

Probabilistyczna teoria obciążeń konstrukcji jest dziedziną, która dopiero zaczyna się formować. Stosunkowo najwięcej jest prac dotyczących statystycznej analizy obciążeń żywiołowych: parcia wiatru [4], falowania morskiego [8], wstrząsów sejsmicznych [3]. Prac dotyczących użytkowych obciążeń konstrukcji, w ujęciu probabilistycznym, jest niewiele. Znane nam prace [1], [6] dotyczą koncentracji obciążeń ruchomych na mostach i korzystają z modeli stochastycznych ruchu drogowego lub kolejowego, które rozwija się raczej dla potrzeb teorii transportu. Obciążenia ruchome rozpatrywane z punktu widzenia teorii bezpieczeństwa konstrukcji [9] mają swoją odrębną specyfikę i prowadzą do wielu szczególnych problemów, jak np. kojarzenie obciążeń losowych, współczynniki przeciążenia itd. Te szczególne zagadnienia próbuje się rozwiązywać za pomocą metod probabilistycznych, mimo że dotąd brak adekwatnego modelu teoretycznego losowych obciążeń konstrukcji. W tej pracy próbujemy zbudować model dla obciążeń użytkowych mostów i budynków, oparty na teorii procesów stochastycznych o przyrostach niezależnych.

Pod pojęciem funkcji stochastycznej o przyrostach niezależnych rozumiemy rodzinę zmiennych losowych $Q(x)$, dla których przyrosty $Q(x_{i+1})-Q(x_i)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi dla każdego skończonego układu $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ [5]. Teoria funkcji stochastycznych o przyrostach niezależnych jest ściśle związana z teorią funkcji stochastycznych Markowa, których własności probabilistyczne w dowolnym punkcie x_{i+1} są całkowicie określone przez wartości funkcji w punktach x_{i+1} i x_i, i nie zależą od wartości funkcji w punktach poprzedzających x_i, czyli

$$\begin{aligned}(1)\qquad \operatorname{Prob}\{Q(x_{i+1}) < Q_{i+1}|Q(x_i) = Q_i, Q(x_{i-1}) = Q_{i-1}, \ldots, Q(x_1) = Q_1\} = \\ = \operatorname{Prob}\{Q(x_{i+1}) < Q_{i+1}|Q(x_{i-1}) = Q_{i-1}\}.\end{aligned}$$

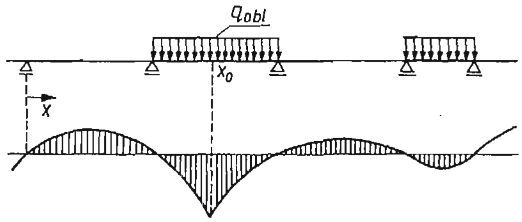
Obciążenie użytkowe konstrukcji potraktujemy jako funkcję stochastyczną o argumencie dyskretnym, wartościach niezależnych, jednorodną. Własność jednorodności polega na tym, że funkcja rozkładu dla przyrostu $Q(x+x_0)-Q(x_0)$ nie zależy od x_0. Każde obciążenie użytkowe konstrukcji traktujemy jako sekwencję ciężarów skupionych działających w punktach $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i to mamy na myśli mówiąc o argumencie dyskretnym.

Dotychczasowe metody wyznaczania najbardziej niekorzystnych oddziaływań w konstrukcjach statycznie wyznaczalnych i statycznie niewyznaczalnych polegają na założeniu, że obciążenie użytkowe działa na te elementy konstrukcji, dla których linie wpływowe są tego samego znaku (rys. 1).

Według wprowadzonej ostatnio do norm projektowania metody stanów granicznych obciążenie nominalne (obliczeniowe) jest iloczynem obciążenia normowego, które w zasadzie przyjmuje się równe średniej $\bar{g}$ i współczynnika przeciążenia α według wzorów

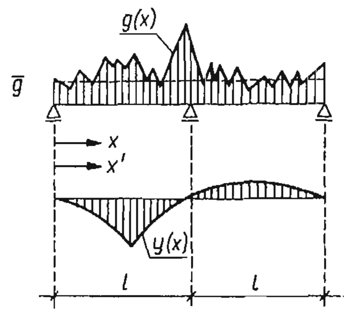
$$g_{\mathrm{nom}} = \bar{g} \cdot \alpha = \bar{g}(1+t_{\omega}v_g) = \bar{g}+t_{\omega}\mu_g, \tag{2}$$

gdzie α — współczynnik przeciążenia, v_g — współczynnik zmienności, μ_g — odchylenie standardowe, t_{ω} — współczynnik tolerancji.



Rys. 1

Jeśli obciążenie losowe g ma rozkład normalny, to współczynnik tolerancji t_{ω} jest kwantylem standaryzowanym rozkładu Gaussa, czyli wartością funkcji odwrotnej do dystrybuanty Gaussa dla danego prawdopodobieństwa ω.



Rys. 2

Są próby zastosowania teorii stacjonarnych funkcji stochastycznych do analizy obciążeń. Pierwszy z autorów [9] założył następującą postać funkcji autokorelacyjnej obciążenia

$$K(x-x') = \mu_g^2 e^{-c|x-x'|} \tag{3}$$

i obliczył moment zginający jako całkę stochastyczną

$$M = \int\limits_0^{2l} g(x)y(x)dx, \tag{4}$$

której wagami są rzędne linii wpływowej momentu zginającego dla belki ciągłej według rys. 2. Całka stochastyczna (4) jest stosowana w sensie ITO [11].

Parametr c ma wymiar odwrotny do długości i może być zapisany jako $\frac{\gamma}{l}$, gdzie γ jest bezwymiarowym współczynnikiem, a l — rozpiętością przęsła. W skrajnych przypadkach $\gamma \to \infty$ i $\gamma \to 0$, funkcja autokorelacyjna obciążenia degeneruje się. Gdy $\gamma \to \infty$, to obciążenie stabilizuje się na poziomie $\bar{g}\Delta l$ dla każdego skończonego odcinka Δl, wobec czego intensywność obciążenia można przyjmować jako w pełni określoną wielkość, stałą na całej długości belki. Gdy $\gamma \to 0$, to intensywność obciążenia g jest również jednostajna na całej długości belki, ale jest zmienną losową dla różnych belek, o wartości oczekiwanej $\bar{g}$ i wariancji μ_g^2. Przy podejściu tradycyjnym zakłada się, że obciążenia są w pełni skorelowane (czyli $\gamma \to 0$), ale tylko na długości jednego przęsła l, a ściślej na długości gałęzi linii wpływowej jednego znaku, a poza tym są niezależne. Tak więc zarówno w tradycyjnym ujęciu, jak również w proponowanym analitycznym sformułowaniu autokorelacji obciążenia (3) tkwi przypuszczenie o jej względnym charakterze, tzn. o zależności autokorelacji od rozpiętości l.

Przykładowo dla $c = 1/l$, korzystając z równań linii wpływowej dla belki dwuprzęsłowej liniowo-sprężystej

$$(5)\qquad y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x}{8l^2}(l^2-x^2) & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{l}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(l-x) - \dfrac{x}{8l^2}(l^2-x^2) \quad \text{dla} & \dfrac{l}{2} \leqslant x \leqslant l, \\ -\dfrac{2l-x}{8l^2}[l^2-(2l-x)^2] & l \leqslant x \leqslant 2l, \end{cases}$$

wyznacza się parametry rozkładu prawdopodobieństw i wartość obliczeniową momentu zginającego, jak następuje:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \overline{M} &= \bar{g}\int_0^{2l} y(x)dx = 0{,}070\bar{g}l^2, \\ \mu_M^2 &= \int_0^{2l}\int_0^{2l} y(x)y(x')K(x-x')dxdx', \\ \mu_M &= 0{,}061\mu_g l^2, \\ M_{\text{obl}} &= 0{,}070\,\bar{g}l^2 + 0{,}061 t_\omega \mu_g l^2. \end{aligned}$$

W przypadkach granicznych, gdy $c \to \infty$ i $c \to 0$, otrzymujemy dla $c \to \infty$

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\mu_M' \to 0, \quad M_{\text{obl}}' = 0{,}070\bar{g}l^2, \\ &\text{dla } c \to 0 \\ &\mu_M'' \to 0{,}070\mu_g l^2, \quad M_{\text{obl}}'' = 0{,}070 g_{\text{obl}} l^2. \end{aligned}$$

Przy zastosowaniu metody konwencjonalnej wartość $M_{\text{nom}} = 0{,}096\, g_{\text{obl}} l^2$ znacznie wybiega poza omawiany przedział.

Rozbieżności te budzą zastrzeżenia odnośnie do stosowania omawianej metody, dlatego w obecnej pracy proponujemy nowy model probabilistyczny dla wyznaczania maksymalnych obciążeń, który by dał wyniki bardziej zbliżone do konwencjonalnych rozwiązań.

Rozważamy najpierw sekwencję ciężarów losowych G (rys. 3), stochastycznie niezależnych, działających na konstrukcję w odstępach stałych $\Delta x = \text{const}$, przy czym oczywiście może być $G = 0$.

Ponieważ założyliśmy, że obciążenia G_i są niezależne, a ponadto spełniają pozostałe założenia centralnego twierdzenia granicznego rachunku prawdopodobieństwa (skończona wartość średnia i skończona wariancja) [5], wobec tego moment zginający

$$M = \sum_{i=1}^{n} G_i y_i \tag{8}$$

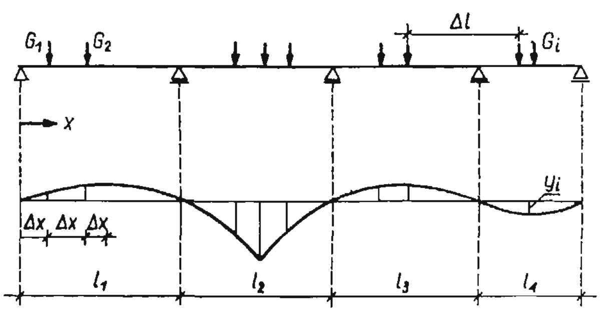
ma rozkład asymptotycznie normalny o parametrach

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \frac{\overline{G}}{\Delta x} \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x \approx \bar{g} \int_0^{sl} y(x)\,dx, \\ \mu_M &= \frac{\mu_G}{\Delta x} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 (\Delta x)^2} \approx \mu_g \sqrt{\int y^2(x)\,dx/\lambda}, \end{aligned} \tag{9}$$

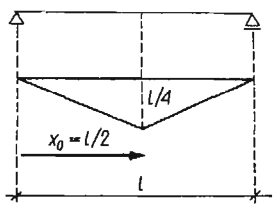
gdzie

$$\bar{g} = \lambda \overline{G}, \qquad \mu_g = \lambda \mu_G, \qquad \lambda = \frac{1}{\Delta x}.$$

Obliczenia oparte na rozkładach asymptotycznych dają dokładne wyniki wówczas, gdy rozpiętość belki l jest bardzo duża w porównaniu z elementarnym odstępem Δx.



Rys. 3



Rys. 4

Przykładowo dla belki jednoprzęsłowej (rys. 4) parametry (9) rozkładu dla momentu zginającego wynoszą odpowiednio

$$\overline{M} = \frac{\bar{g} l^2}{8}, \qquad \mu_M = \frac{\mu_g l}{4} \sqrt{\frac{l}{3\lambda}}. \tag{10}$$

Przyjmując współczynnik tolerancji $t_\omega = 3$ oraz współczynnik zmienności $v = 0{,}067$ porównujemy obliczenia uzyskane przy zastosowaniu omawianej metody i metody konwencjonalnej

$$M_{\text{obl}} = \frac{\bar{g} l^2}{8} \left(1 + \frac{0{,}231}{\sqrt{\lambda l}}\right), \qquad M_{\text{nom}} = 1,2 \frac{\bar{g} l^2}{8}. \tag{11}$$

Traktując parametr λ jako stałą cechę otrzymujemy następujący wniosek:

$$M_{\text{obl}} \leqslant M_{\text{nom}} \quad \text{dla} \quad l \geqslant l_0 = \frac{1{,}32}{\lambda} = 1{,}32 \Delta x. \tag{12}$$

W przypadku belki dwuprzęsłowej (rys. 5) rozkład przęsłowego momentu zginającego ma parametry

$$(13) \qquad \overline{M} = 0{,}070\overline{g}l^2, \qquad \mu_M = 0{,}11\mu_g l\sqrt{\frac{l}{\lambda}},$$

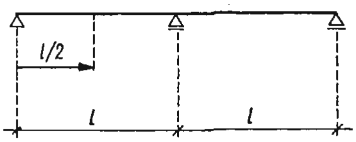
a wartości momentów obliczeniowych i «rozpiętość przełomowa» l_0 wynoszą

$$(14) \qquad M_{\text{obl}} = 0{,}070\overline{g}l^2\left(1+\frac{0{,}33}{\sqrt{\lambda l}}\right), \quad M_{\text{nom}} = 1{,}2\cdot 0{,}070\overline{g}l^2, \quad l_0 = \frac{2{,}72}{\lambda}.$$

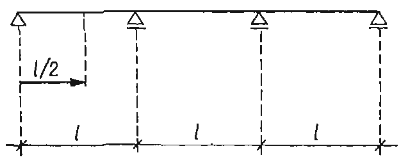
Podobnie w przypadku belki trójprzęsłowej (rys. 6) mamy

$$(15) \qquad M_{\text{obl}} = 0{,}078\overline{g}l^2\left(1+\frac{0{,}28}{\sqrt{\lambda l}}\right), \quad M_{\text{nom}} = 1{,}2\cdot 0{,}078\overline{g}l^2, \quad l_0 = \frac{1{,}96}{\lambda}.$$

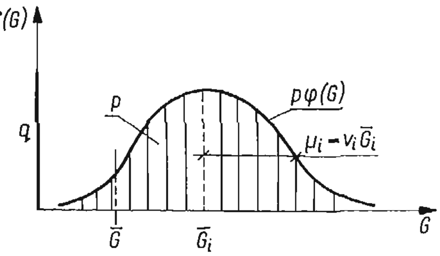
Rozkład prawdopodobieństw ciężarów losowych G nie jest ciągły gdyż nie można pominąć, realistycznie rzecz biorąc, skończonego prawdopodobieństwa q braku obciążenia (tzn. $G = 0$) (rys. 7).



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Gęstość rozkładu wyraża się więc wzorem

$$(16) \qquad f(G) = q\delta(G)+p\varphi(G),$$

gdzie $\delta(G)$ — dystrybucja Diraca, $p+q = 1$, $\varphi(G_i)$ — gęstość warunkowa dla $G_i \neq 0$, a parametry rozkładu wynoszą

$$\overline{G} = p\overline{G_i} = \overline{g}\Delta x, \qquad \mu = \sqrt{p(q+v_i^2)}\,\overline{G}_i, \qquad v = \sqrt{\frac{q+v_i^2}{p}},$$

gdzie $\overline{G}_i, v_i$ — parametry rozkładu realnych (niezerowych) ciężarów.

Gęstość rozkładu $\varphi(G)$ niekoniecznie musi być normalna. Może być to np. funkcja rozkładu gamma lub inna — niesymetryczna, a nawet funkcja rozkładu wielomodalna. Ta ostatnia występuje np. w przypadku obciążenia niezbyt długich mostów samochodami osobowymi lub ciężarowymi o bardzo różnych ciężarach.

W dotychczasowych rozważaniach zakładaliśmy, że Δx = const. Obecnie potraktujemy odstęp między ciężarami $\Delta x = t$ jako losowy i wyprowadzimy rozkład prawdopodobieństw dla zastępczego obciążenia $g = G/t$, korzystając z niezależności zmiennych losowych G i t. Na mocy twierdzeń dotyczących rozkładu ilorazu zmiennych losowych niezależnych [7] mamy

$$f(g) = q\delta(g)+p\int\limits_0^\infty \varphi(gt)f(t)\,t\,dt, \tag{17}$$

gdzie $f(t)$ — gęstość prawdopodobieństw odstępów pojedynczych obciążeń, $t = x_{i+1}-x_i$.

Ogólnie możemy tu rozróżnić 3 typy strumieni obciążeń:

$$\begin{aligned} &1)\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} && \text{— Poissona,}\\ &2)\ f(t) = \frac{(\lambda k)^k}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{-\lambda kt} && \text{— Erlanga,}\\ &3)\ f(t) = \delta(t-\Delta x) && \text{— Palma (rozważany poprzednio),}\end{aligned} \tag{18}$$

gdzie obecnie $\lambda = \dfrac{1}{\bar{t}}$.

Pierwszy i trzeci typ strumienia są to szczególne przypadki strumienia Erlanga, a to odpowiednio dla $k = 1$ i $k = \infty$.

W przypadku strumienia poissonowskiego otrzymujemy

$$f(g) = q\delta(g)+\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\varphi(gt)\,t\,dt, \tag{19}$$

w czym rozpoznajemy transformację Laplace'a funkcji $\varphi(gt)t$ [10]. Postać wzoru (19) pozwala na szerokie jego stosowanie ze względu na rozpowszechnione tablice transformat Laplace'a [2]. I tak, w przypadku gdy rozkład warunkowy $\varphi(G_i)$ jest normalny o parametrach $N(\overline{G}_i, \mu_i)$ mamy

$$f(g) = q\delta(g)+\frac{p\lambda}{g^2}e^{-\frac{\overline{G}_i^2}{2\mu_i^2}}\left[\frac{\mu_i}{\sqrt{2\pi}}-\frac{\mu_i^2}{2}se^{\frac{\mu_i^2 s^2}{2}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\mu_i}{\sqrt{2}}s\right)\right], \tag{20}$$

gdzie

$$s = \frac{\lambda}{g}-\frac{\overline{G}_i}{\mu_i^2},\quad \operatorname{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-u^2}du.$$

Prostszy rozkład otrzymujemy w przypadku, gdy rozkład $\varphi(G_i)$ jest typu gamma

$$\varphi(G) = \frac{1}{G\Gamma(v_i^{-2})}\sqrt[v_i^2]{\frac{G}{v_i^2\overline{G}_i}}\exp\left(\frac{-G}{v_i^2\overline{G}_i}\right). \tag{21}$$

Mamy wówczas

$$f(g) = q\delta(g)+\frac{p\lambda\overline{G}_i}{g^2}\left(\frac{g}{\lambda v_i^2\overline{G}_i+g}\right)^{v_i^{-2}+1}. \tag{22}$$

W celu wyznaczenia występującego we wzorze (16) prawdopodobieństwa p zanalizujemy bliżej zagadnienie przerw między sekwencjami obciążeń.

Losowa liczba brakujących sił w przerwie między grupami ciężarów podlega rozkładowi geometrycznemu

$$P(n) = q^{n-1}p, \quad \bar{n} = \frac{1}{p}. \tag{23}$$

Wyprowadzimy rozkład prawdopodobieństw $f(\Delta l)$ przerwy w obciążeniu korzystając z zależności

$$f(\Delta l) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\Delta l/n)P(n) \tag{24}$$

i z faktu, że w przypadku strumienia poissonowskiego $f(t)$ rozkład warunkowy $f(\Delta l/n)$ jest typu gamma.

Mamy więc

$$f(\Delta l/n) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}(\Delta l)^{n-1}e^{-\lambda\Delta l}. \tag{25}$$

Stąd i z (24) wynika

$$f(\Delta l) = p\lambda e^{-p\lambda\Delta l}. \tag{26}$$

Rozkład (26) jest typu wykładniczego o wartości średniej $\overline{\Delta l} = \frac{1}{p\lambda}$, co pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo $p = \frac{1}{\lambda\overline{\Delta l}} = \frac{\bar{t}}{\overline{\Delta l}}$ z pomiarów średniego gabarytu pojedynczego obciążenia i średniej przerwy między obciążeniami. Podobnie w przypadku strumienia Erlanga mamy

$$f(\Delta l/n) = \frac{\lambda^{nk}}{\Gamma(nk)}(\Delta l)^{nk-1}e^{-\lambda\Delta l}, \tag{27}$$

stąd warunkowa wartość średnia

$$\overline{\Delta l}_n = \frac{nk}{\lambda}.$$

Tym razem na mocy relacji między wartością średnią warunkową i bezwarunkową otrzymujemy

$$\overline{\Delta l} = \frac{k}{p\lambda}, \tag{28}$$

a więc

$$p = \frac{k}{\lambda\overline{\Delta l}} = \frac{\bar{t}}{v_t^2\overline{\Delta l}}, \tag{29}$$

bowiem dla rozkładu Erlanga

$$k = v_t^{-2}, \quad \lambda = \bar{t}^{-1}.$$

Powyższe rozważania wskazują, że znajomość statystyk: $\bar{G}_i, v_i; \bar{t}, v_t; \overline{\Delta l}$ w pełni pozwala wyznaczyć wszystkie parametry omawianego modelu probabilistycznego.

Przypuszczamy, że przedstawiona teoria probabilistyczna pozwoli wytłumaczyć efekty takie, jak redukcja maksymalnych obciążeń szkieletów wielokondygnacyjnych, specjalne reguły obciążenia mostów wieloprzęsłowych itd., które w tradycyjnej metodzie wymiarowania uwzględniano w sposób intuicyjny, umownymi przepisami.

Literatura cytowana w tekście

1. O. Asplund, *Probabilities of traffic loads on bridges*, ASCE Proc., Vol. 81, Sep. 585, Jan. 1955.
2. H. Bateman, *Tables of integral transforms*, vol. I, N. York 1954, (tłum. ros., wyd. Nauka, Moskwa 1969).
3. В. В. Болотин, *Применение статистических методов для оценки прочности конструкции при сейсмических воздействиях*, Инж. Сборник, т. 27, Изд. АН СССР, 1959.
4. E. Comellini, C. Manuzio, *Rational determination of design loadings for overhead line towers*, International Conference on Large High Tension Electric Systems, No 23-08, June 1968.
5. W. Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, t. I i II, PWN, Warszawa 1969.
6. J. Ferry Borges, *Dynamic loads*, General Report on theme VI, VIII Congress International Association for Bridge and Structural Engineering, N. York 1968.
7. I. Kotlarski, *Rachunek prawdopodobieństwa dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1966.
8. E. V. Lewis, *Predicting long-term distributions of wave induced bending moment on ship hulls*, The Society of Naval Architects and Marine Engineers, No 6, July 1967.
9. J. Murzewski, *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*, Arkady, Warszawa 1970.
10. J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego*, WNT, Warszawa 1965.
11. Р. Л. Стратонович, *Условные марковские процессы и их применения к теории оптимального управления*, Изд. Московского Университета, Москва 1966.

Резюме

СЛУЧАЙНАЯ НАГРУЗКА СООРУЖЕНИЙ КАК СЛУЧАЙНАЯ ФУНКЦИЯ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Изгибающие моменты для упругих балок [8] зависят линейно от последовательности случайных нагрузок G_i на балке, причём вполне определёнными коэффициентами y_i являются ординаты линии влияния изгибающего момента. Для эквивалентных распределённых нагрузок $g(x)$ определяются параметры распределения вероятностей изгибающего момента. При выводе распределения вероятности нагрузки $g(x)$ сперва предполагается постоянные расстояния Δx, между стохастически независимыми нагрузками G, а затем случайные расстояния t. Учитывается также конечная вероятность, отсутствия нагрузки ($G = 0$).

Summary

RANDOM LOAD OF STRUCTURES AS A STOCHASTIC FUNCTION WITH INDEPENDENT INCREMENTS

The bending moments for elastic beams (8) depend linearly on the sequence of random gravity loads G_i acting on the beam, and the deterministic factors y_i are the ordinates of an influence line for the bending moment. The parameters of probability distribution for the bending moment are defined for an equivalent uniformly distributed load $g(x)$. Constant distance Δx for stochastically independent loads G are initially assumed, and then — a random variable distance t is prescribed for the derivation of the probability distribution of the load $g(x)$. A finite probability q of no loading ($G = 0$) is taken under consideration.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lipca 1971 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

OPTYMALIZACJA WŁAŚCIWOŚCI DYNAMICZNYCH NAPĘDU GŁÓWNEGO OBRABIARKI

JANUSZ BARAN, KRZYSZTOF MARCHELEK (SZCZECIN)

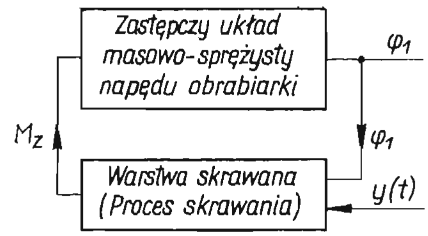
Procesy dynamiczne zachodzące w napędzie głównym obrabiarki w czasie jego rozruchu i hamowania, a także podczas skrawania, wywierają istotny wpływ na trwałość i żywotność elementów obrabiarki oraz na takie wskaźniki technologiczne, jak chropowatość powierzchni obrobionej i trwałość ostrza narzędzia skrawającego. Na podstawie obserwacji pracy napędów obrabiarek w warunkach przemysłowych stwierdzono, że najczęstszym uszkodzeniom ulegają podczas rozruchu i hamowania napędy nie zawierające sprzęgieł. Zachodzące w takich napędach procesy przejściowe, wywołane włączeniem silnika napędzającego, charakteryzują się dużym przeregulowaniem odpowiedzi skokowej i znacznym czasem trwania.

Przeprowadzone przez WEJCA [1] na matematycznej maszynie analogowej badania procesów przejściowych zachodzących w napędzie głównym wykazały, że jednym z podstawowych wskaźników jakości dynamicznej napędu jest stosunek T_E/T_M, gdzie: T_E — elektromagnetyczna stała czasowa silnika, T_M — elektromechaniczna stała czasowa silnika. Im większa jest wartość T_E/T_M, tym silniejszy jest wpływ procesów przejściowych przebiegających w silniku elektrycznym na procesy dynamiczne zachodzące w napędzie głównym. RIWIN [2] wykazał, że przebieg procesów przejściowych zachodzących przy rozruchu i hamowaniu zależy od parametrów opisujących model fizyczny napędu głównego.

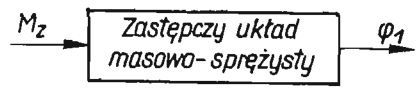
Zależność wskaźników procesu przejściowego od parametrów opisujących model napędu głównego obrabiarki jest bardzo złożona. Trudno jest zatem wprost określić optymalne wartości parametrów opisujących, które gwarantowałyby osiągnięcie eksperymentalnych wartości wskaźników jakości dynamicznej napędu. Dysponując odpowiednio dokładnym modelem matematycznym napędu głównego można, stosując metody optymalizacyjne, wyznaczyć także wartości parametrów opisujących, przy których spełnione będą założone kryteria. Ogólnie biorąc, optymalizacja napędu głównego obrabiarki powinna być optymalizacją wielokryterialną, uwzględniającą zarówno wskaźniki techniczne (sztywność technologiczna, zapas stabilności, ciężar, wymiary itp.), jak i wskaźniki ekonomiczne (wydajność urządzenia, koszty budowy i eksploatacji itp.). W literaturze dotyczącej obrabiarek spotkać można prace na temat optymalizacji konstrukcji, np. w pracy [3] omówiono zagadnienia optymalizacji konstrukcji obrabiarek ze względu na wskaźniki ekonomiczne. Brak jest natomiast opracowań metod optymalizacji właściwości dynamicznych obrabiarek i zespołów obrabiarkowych.

W rozpatrywanym przypadku optymalizacja została przeprowadzona pod kątem polepszenia jakości przebiegu procesów przejściowych w zależności od parametrów opisujących model. Jest to zatem optymalizacja jednokryterialna. Przebieg procesów przejściowych jest związany z takimi wskaźnikami, jak czas jego trwania wartość «przeregulowania» odpowiedzi skokowej układu itp. Wskaźniki te ściśle są związane z innymi wskaźnikami jakości dynamicznej, jak stopień i zapas stabilności, reakcja układu na wymuszenie zewnętrzne.

Optymalizację dynamicznego układu napędu głównego przeprowadzić można dla przypadku biegu jałowego oraz dla skrawania. Układ dynamiczny napędu głównego obrabiarki przedstawić można za pomocą schematu blokowego (rys. 1). Schemat ten opisuje przypadek skrawania. Dla biegu jałowego schemat blokowy układu dynamicznego upraszcza się (rys. 2), nie występuje bowiem człon «proces skrawania» i sprzężenie zwrotne między członami «układ masowo-sprężysty» i «proces skrawania».



Rys. 1. Schemat blokowy zamkniętego układu dynamicznego napędu obrabiarki



Rys. 2. Schemat blokowy układu dynamicznego napędu głównego biegu jałowego

Ponieważ procesy przejściowe odgrywają dominującą rolę przy rozruchu i hamowaniu napędu, optymalizację układu dynamicznego napędu głównego należy przede wszystkim prowadzić pod kątem ich polepszenia. Oczywiste jest, że uzyska się także polepszenie wskaźników procesów dynamicznych zachodzących w czasie skrawania; przede wszystkim wzrośnie stopień i zapas stabilności.

Własności dynamiczne układu dynamicznego pokazanego na rys. 2 opisuje zależność między sygnałem wyjściowym a sygnałem wejściowym [4]

$$\varphi(t) = G[W, M_z(t)], \tag{1}$$

gdzie

$\varphi(t)$ — sygnał wyjściowy, $M_z(t)$ — sygnał wejściowy, W — funkcja przejścia członu.

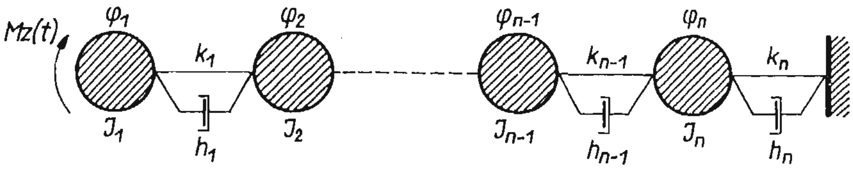
W najogólniejszym przypadku napęd obrabiarki jest układem bardzo złożonym pod względem dynamicznym. Jest to układ nieliniowy, o nieskończonej liczbie stopni swobody, o masach i właściwościach sprężystych rozłożonych w sposób ciągły. W dynamicznym układzie napędu głównego obrabiarki występują sprzężenia wewnętrzne między drganiami skrętnymi i poprzecznymi. Optymalizacja własności dynamicznych tak złożonego układu jest zagadnieniem trudnym.

Na podstawie licznych badań [2, 4] wykazano, że z dużym powodzeniem układ dynamiczny napędu głównego obrabiarki aproksymować można modelem liniowym. Liniowe przybliżenie pozwala przeanalizować znaczną część praktycznie ważnych zjawisk i stanowi bazę do dalszego badania układów bardziej złożonych. Liniowy model mechaniczny układu przedstawiono na rys. 3. Model matematyczny napędu głównego frezarki stanowi układ liniowy równań różniczkowych zwyczajnych następującej postaci:

$$
\begin{aligned}
&J_1\ddot{\varphi}_1+h_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)+k_1(\varphi_1-\varphi_2) = M(t),\\
(2)\qquad &J_2\ddot{\varphi}_2-h_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)+h_2(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3)-k_1(\varphi_1-\varphi_2)+k_2(\varphi_2-\varphi_3) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&J_n\ddot{\varphi}_n-h_{n-1}(\dot{\varphi}_{n-1}-\dot{\varphi}_n)+h_n\varphi_n-k_{n-1}(\varphi_{n-1}-\varphi_n)+k_n\varphi_n = 0.
\end{aligned}
$$

Ostatnie z równań układu (2) jest równaniem ruchu silnika napędzającego [4].

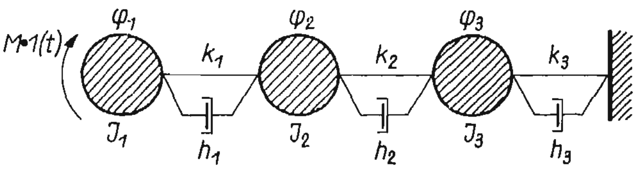
Jako funkcję celu (odległości) w procedurze optymalizacji przebiegu procesu przejściowego w napędzie głównym obrabiarki przyjęto: przeregulowanie odpowiedzi skokowej



Rys. 3. Układ dyskretny napędu głównego frezarki

układu Δh_1 i czas trawania procesu przejściowego t_{r_1} dla współrzędnej φ_1 opisującej kąt skręcenia napędu mierzony na wrzecionie. Właściwie są to dwie funkcje celu sprzężone pomiędzy sobą parametrami układu. Wyznaczenie tych funkcji w postaci pewnego związku matematycznego parametrów napędu głównego obrabiarki jest praktycznie niemożliwe, dlatego do badań optymalizacyjnych zastosowano zmodyfikowaną metodę reaksacyjną.

W metodzie tej procedurę optymalizacji rozpoczyna się od zmiany tylko jednego parametru, podczas gdy inne są utrzymywane na poziomie stałej wartości. Stosując ją osiąga się ten sam wynik, jak przy innych metodach, jest ona natomiast łatwiejsza do zrealizowania na maszynie analogowej. Parametr ulega zmianie aż do chwili osiągnięcia minimum lokalnego. Operację iteracyjną stosuje się dla każdego z parametrów zmiennych do chwili osiągnięcia przez ten parametr minimum. Proces minimalizacji można ograniczyć do mniejszej liczby kroków, przechodząc do następnego parametru już wówczas, gdy minimum lokalnego nie osiągnięto przy założonej liczbie kroków.



Rys. 4. Układ masowo-sprężysty z tłumieniem wiskotycznym o trzech stopniach swobody

Metody gradientowe mają jedną niekorzystną cechę. Jeżeli istnieje kilka ekstremów (minimów) i jeżeli się osiągnie jedno z minimów, to nie można gwarantować, że rozwiązanie uzyskane na maszynie zbliży się właśnie do tego minimum, ponieważ rozwiązanie zadania rozpoczęła maszyna od dowolnego zbioru wartości parametrów.

Wadę zastosowanej metody usunięto w ten sposób, że na końcu procesu optymalizacji sprawdzono, czy istnieją inne minima lokalne. Wyniki były negatywne, co oznacza, że w założonych granicach zmian parametrów istniało tylko jedno minimum lokalne.

Procedurę optymalizacji napędu głównego obrabiarki przeprowadzono na maszynie analogowej ELWAT-1. Ze względu na ograniczoną pojemność operacyjną użytej maszyny model mechaniczny napędu głównego obrabiarki należy zredukować do trzech stopni swobody. Redukcji stopni swobody dokonano za pomocą zmodyfikowanej metody RIWINA [6]. Model mechaniczny napędu głównego frezarki przedstawiono na rys. 4.

Model ten opisany jest układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1+h_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)+k_1(\varphi_1-\varphi_2) &= M\cdot 1(t),\\ J_2\ddot{\varphi}_2-h_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)+h_2(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3)-k_1(\varphi_1-\varphi_2)+k_2(\varphi_2-\varphi_3) &= 0,\\ J_3\ddot{\varphi}_3-h_2(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3)+h_3\dot{\varphi}_3-k_2(\varphi_2-\varphi_3)+k_3\varphi_3 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Jako funkcję wejścia przyjęto skok jednostkowy (funkcja Heaviside'a), Równania (3) przekształcono w postać bezwymiarową

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1+2\xi_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)+(\varphi_1-\varphi_2) &= m\cdot 1(t),\\ n_1^2\ddot{\varphi}_2-2\xi_2 n_1[\alpha_1(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)-(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3)]+[-\beta_1(\varphi_1-\varphi_2)+(\varphi_2-\varphi_3)] &= 0,\\ n_2^2\ddot{\varphi}_3-2\xi_3 n_2[\alpha_2(\dot{\varphi}_2-\dot{\varphi}_3)-\dot{\varphi}_3]+[-\beta_2(\varphi_2-\varphi_3)+\varphi_3] &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

W równaniach (4) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} &\xi_1=\frac{h_1}{2\sqrt{J_1k_1}}, && \alpha_1=\frac{h_1}{h_2}, && \beta_2=\frac{k_2}{k_3},\\ &\xi_2=\frac{h_2}{2\sqrt{J_2k_2}}, && \alpha_2=\frac{h_2}{h_3}, && \frac{1}{n_1}=\frac{T_1}{T_2},\\ &\xi_3=\frac{h_3}{2\sqrt{J_3k_3}}, && \beta_1=\frac{k_1}{k_2}, && \frac{1}{n_2}=\frac{T_1}{T_3}, \end{aligned} \tag{5}$$

przy czym

$$T_1=\sqrt{\frac{J_1}{k_1}},\quad T_2=\sqrt{\frac{J_2}{k_2}},\quad T_3=\sqrt{\frac{J_3}{k_3}}$$

oraz przyjęto skalę czasu w postaci tzw. czasu bezwymiarowego

$$\tau=\frac{t}{T_1}, \tag{6}$$

gdzie τ — czas maszynowy (bezwymiarowy), t — czas rzeczywisty.

Model analogowy napędu głównego obrabiarki przedstawiono na rys. 5.

Stosując metody analizy wymiarowej stwierdzono, że dwa parametry bezwymiarowe są zależne, tzn. są funkcją pozostałych parametrów.

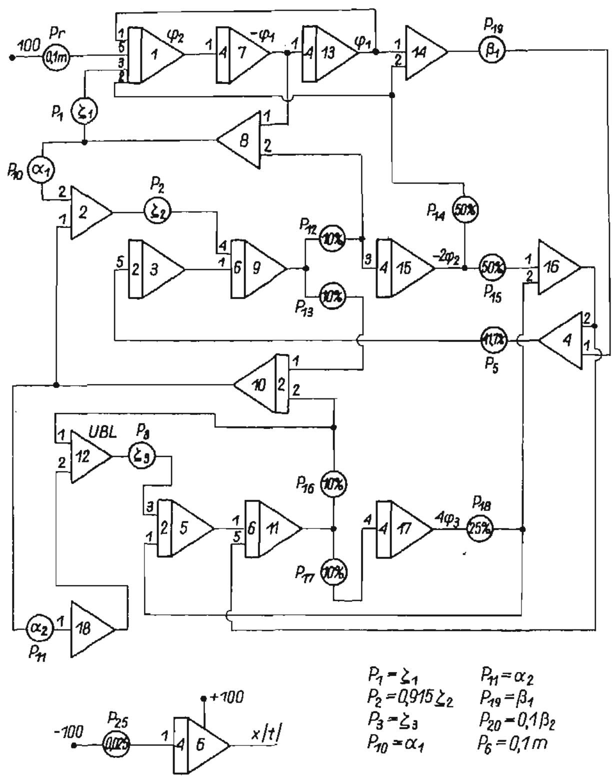
$$\alpha_1=\frac{\xi_1}{\xi_2}\frac{\beta_1}{n_1},\qquad \alpha_2=\frac{\xi_2}{\xi_3}\frac{\beta_2}{n_2}n_1. \tag{7}$$

Współczynniki te charakteryzują sprzężenia dysypacyjne w układzie, a ich wpływ na jakość przebiegu procesów przejściowych jest minimalny (mieści się w granicach błędu pracy maszyny analogowej).

Parametry podlegające optymalizacji, tj. ξ_1, ξ_2, ξ_3, β_1, β_2, $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$ nie mogą zmieniać się dowolnie. Nałożone są na nie ograniczenia wynikające z prawidłowego funkcjonowania obiektu. Granice dopuszczalnych zmian przyjęto w sposób następujący:

— dla współczynników względnego tłumienia za maksymalną wartość przyjęto $\xi_{max} = 0{,}4$–$0{,}5$. Odpowiada to takiemu stopniowi dysypacji energii mechanicznej, jaki zapewnić mogą tarciowe tłumiki drgań [5],

— dla współczynników β_1, β_2, $\frac{1}{n_1}$, $\frac{1}{n_2}$ przyjęto zmianę w dół w zakresie 50% wartości nominalnej i w górę, w zakresie 100% wartości nominalnej.



Rys. 5. Model analogowy napędu głównego obrabiarki

Można przypuszczać, że zmiana parametrów w tak określonych granicach gwarantuje uzyskanie wartości optymalnej, możliwej do praktycznej realizacji. Współczynniki te mają wpływ na modulację przebiegu w zależności od dominacji pierwszej lub kolejnej częstotliwości układu. Podlegające optymalizacji parametry J_i, h_i oraz k_i (lub ich kombinacje bezwymiarowe) traktować można jako zmienne losowe. Wynika to stąd, że optymalizacji podlegają parametry zredukowane np. na wrzeciono. Uzyskane na tej podstawie tzw. parametry bezwzględne mają dla każdej prędkości obrotowej napędu inne wartości optymalne. Ponieważ napęd można zrealizować konstrukcyjnie tylko dla jednego zbioru parametrów bezwzględnych, zastosowano do tego celu prawa rachunku prawdopobieństwa i statystyki matematycznej. Wyznaczyć można w ten sposób najbardziej prawdopodobne bezwzględne parametry.

Opierając się na niecentralnej statystyce [7] stwierdzono, że powyżej liczby prób $n = 5$ dla prawdopodobieństwa $p = 95\%$ dokładność uzyskanych wyników rośnie bardzo wolno. Z tego względu przyjęto do optymalizacji pięć prędkości obrotowych napędu głównego. Na podstawie uzyskanych danych prędkości obrotowych parametrów optymalnych wyznaczono najbardziej prawdopodobne parametry bezwzględne.

Na podstawie analizy wykresu przełożeń napędu głównego frezarki FWH25 do badań wytypowano następujące łańcuchy kinematyczne:

1. $n = 45$ obr/min — zakres wolnoobrotowy,
2. $n = 180$ obr/min }
3. $n = 560$ obr/min } — zakres średnioobrotowy,
4. $n = 900$ obr/min }
5. $n = 2240$ obr/min } — zakres wysokoobrotowy.

Prędkości obrotowe są tak dobrane, że w sposób wystarczający charakteryzują właściwości dynamiczne napędu głównego frezarki. Parametry charakteryzujące układ przed optymalizacją i układ po optymalizacji podano odpowiednio w tabl. 1 i tabl. 2 (jako przy-

Tablica 1. Parametry modelu mechanicznego — układ przed optymalizacją

Frezarka FWH25; n = 560 obr/min		
J_i [kGmsek²]	h_i [kGmsek]	k_i [kGm/rad]
$13{,}204 \cdot 10^{-3}$	0,184	$1{,}12 \cdot 10^{3}$
$3{,}654 \cdot 10^{-3}$	0,051	$0{,}75 \cdot 10^{3}$
$23{,}092 \cdot 10^{-3}$	0,095	$0{,}171 \cdot 10^{3}$

Tablica 2. Parametry modelu mechanicznego — układ po optymalizacji

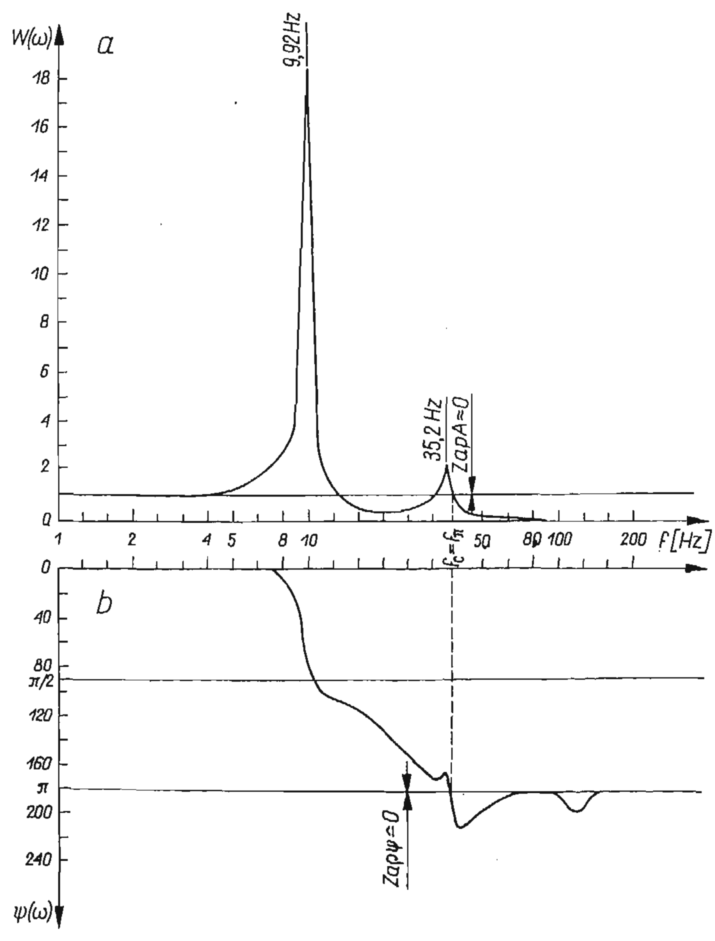
Frezarka FWH25; n = 560 obr/min		
J_i [kGmsek²]	h_i [kGmsek]	k_i [kGm/rad]
$13{,}20 \cdot 10^{-3}$	0,384	$1{,}12 \cdot 10^{3}$
$5{,}4 \cdot 10^{-3}$	0,245	$1{,}12 \cdot 10^{3}$
$74{,}6 \cdot 10^{-3}$	3,66	$0{,}281 \cdot 10^{3}$

kład wybrano prędkość obrotową $n = 560$ obr/min napędu głównego frezarki FWH25).

Procedurę optymalizacji dla wybranych prędkości obrotowych napędu głównego frezarki FWH25 przeprowadzono według następującego harmonogramu opracowanego na podstawie przeprowadzonych badań wstępnych:

1. sporządzono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe i fazowo-częstotliwościowe wyjściowych układów mechanicznych oraz określono zapas stabilności układów otwartych (przy założeniu, że transmitancja operatorowa członu «warstwa skrawana» ma postać $W(p) = 1$),

2. zarejestrowano odpowiedzi skokowe wyjściowych układów mechanicznych dla wszystkich trzech współrzędnych uogólnionych (φ_1, φ_2, φ_3),



Rys. 6. Charakterystyka częstotliwościowa układu wyjściowego dla $n = 560$ obr/min

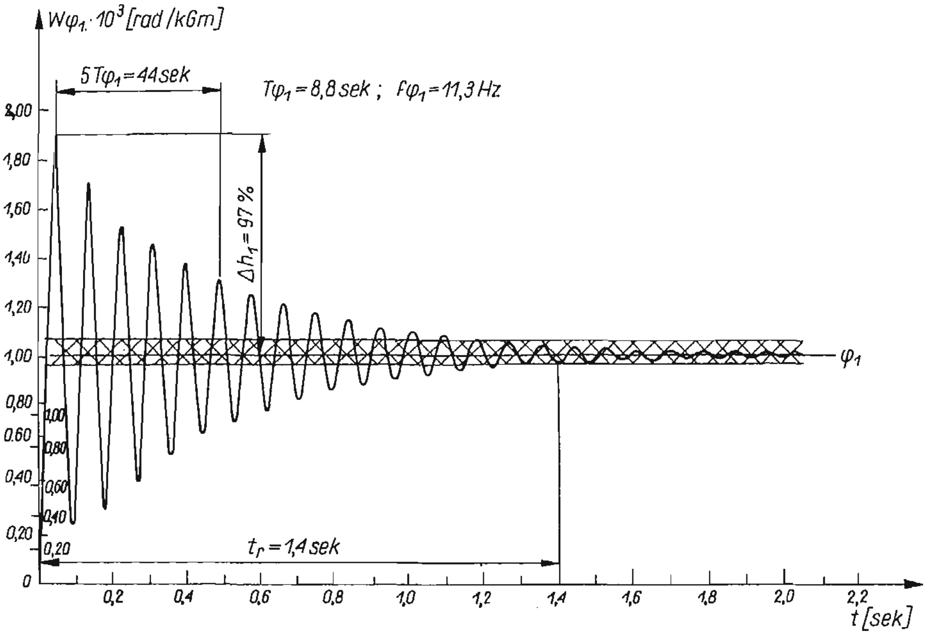
3. procedurę optymalizacji przeprowadzono dla współrzędnej φ_1, tj. kąt skręcenia wrzeciona frezarki,

4. dla parametrów optymalnych określono odpowiedzi skokowe dla trzech współrzędnych (φ_1, φ_2, φ_3),

5. dla układów optymalnych sporządzono charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe i fazowo-częstotliwościowe oraz określono zapas stabilności układów otwartych.

Odpowiedzi skokowe układu wyznaczono na maszynie analogowej ELWAT-1, natomiast charakterystyki częstotliwościowe na analogu RLC.

Dla przykładowo przyjętej prędkości obrotowej $n = 560$ obr/min charakterystyka częstotliwościowa układu przed optymalizacją ma duże wyraźne rezonanse ($f_1 = 9{,}92$ Hz, $f_2 = 35{,}2$ Hz) (rys. 6). Odpowiedzi skokowe układu przed optymalizacją są modulowane

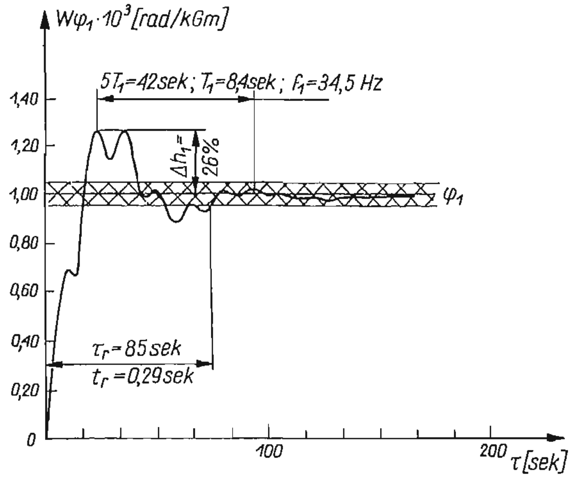


Rys. 7. Odpowiedzi skokowe układu wyjściowego dla $n = 560$ obr/min

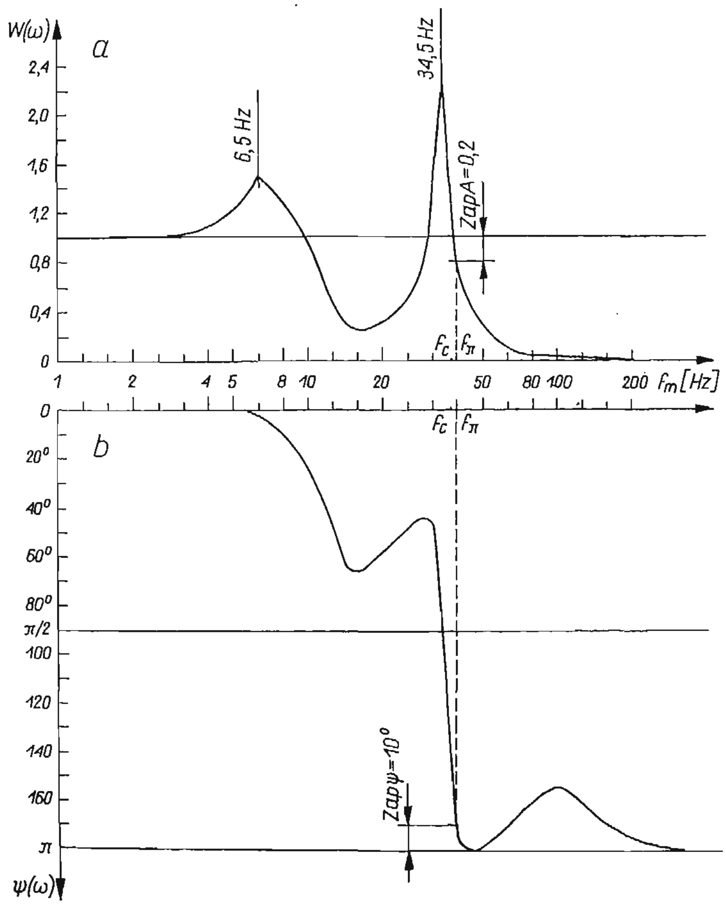
przez częstotliwość własną silnika napędowego (rys. 7). W czasie badań stwierdzono, że największy wpływ na jakość procesu przejściowego ma współczynnik ξ_3.

Porównując charakterystyki częstotliwościowe układu przed optymalizacją i układu po optymalizacji stwierdza się, że we wszystkich przypadkach nastąpiło polepszenie właściwości dynamicznych układu, zmniejszenie amplitud rezonansowych układu oraz wzrost zapasu stabilności amplitudy i zapasu fazy układu otwartego. Od postaci charakterystyk częstotliwościowych i odpowiedzi skokowych układu jest uzależniony proces optymalizacji. Proces ten składa się jak gdyby z dwóch etapów.

Przy optymalnej wartości współczynnika ξ_3, przeregulowanie odpowiedzi skokowej Δh_1 układu optymalnego jest mniejsze o około 43% w stosunku do przeregulowania odpowiedzi skokowej układu przed optymalizacją (rys. 8). Czas trwania procesu przejściowego układu optymalnego jest wielokrotnie krótszy od czasu t_r dla układu przed optymalizacją. Odpowiedzi skokowe układu po optymalizacji są modulowane odpowiednio: pierwsza współrzędna φ_1 przez częstotliwość własną wrzeciennika ($f_{1opt} = 34{,}5$ Hz), druga φ_2 i trzecia φ_3 przez częstotliwość własną silnika napędzającego ($f_{2opt} = f_{3opt} = 6{,}9$ Hz).



Rys. 8. Odpowiedzi skokowe układu optymalnego dla n = 560 obr/min

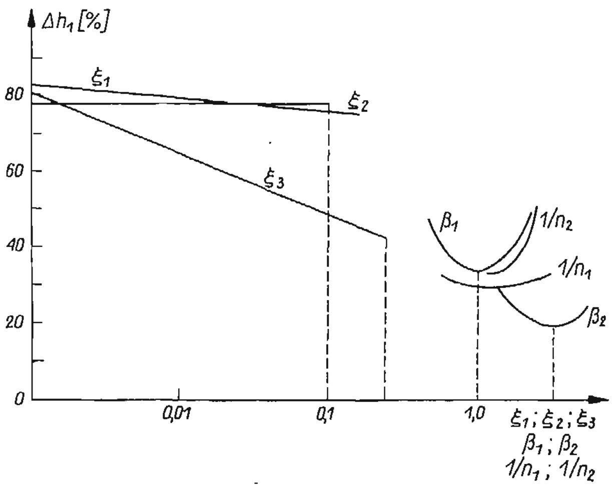


Rys. 9. Charakterystyki częstotliwościowe układu optymalnego dla n = 560 obr/min

Charakterystyki częstotliwościowe układu optymalnego dla prędkości obrotowej $n = 560$ obr/min podano na rys. 9.

W pierwszym etapie, przez zwiększenie właściwości dysypacyjnych układu polepsza się jakość procesu przejściowego (minimalizacja przeregulowania odpowiedzi skokowej układu Δh_1 i czas trwania procesu przejściowego t_{r1}), w drugim etapie przez zmianę modulacji przebiegu φ_1 (w zależności od dominacji kolejnej składowej częstotliwości) minimalizuje się w dalszym ciągu wyżej wymienione wskaźniki. Tak więc na podstawie charakterystyk częstotliwościowych lub odpowiedzi skokowych układu można stwierdzić, który ze współczynników względnego tłumienia ma największy wpływ na jakość procesu przejściowego oraz czy istnieje możliwość modulacji przebiegu przez kolejną składową częstotliwości. Na podstawie zarejestrowanych odpowiedzi skokowych układu stwierdzono, że największy wpływ na jakość procesu przejściowego mają parametry względnego tłumienia ξ_1, ξ_3, a następnie współczynniki β_1 i β_2 oraz $\frac{1}{n_1}$ i $\frac{1}{n_2}$.

Charakter wpływu poszczególnych parametrów dla łańcucha kinematycznego $n = 560$ obr/min na jakość procesu przejściowego przedstawiono na rys. 10. Analizując wykresy pokazane na rys. 10 stwierdza się, że parametry układu mają różny stopień wpływu



Rys. 10. Charakter wpływu poszczególnych parametrów na jakość procesu przejściowego dla $n = 560$ obr/min

na jakość procesu przejściowego oraz różny stopień «stabilności własnej» dla różnych prędkości obrotowych wrzeciona. W przypadku parametrów ξ_1 i ξ_3, ze wzrostem ich wartości polepsza się jakość procesu przejściowego, a wartość optymalna leży zawsze na górnej granicy obszaru dopuszczalnych rozwiązań. Parametry te są «niestabilne», tzn. przebieg procesu przejściowego jest bardzo czuły na każdą małą zmianę ich wartości.

Na podstawie przeprowadzonych badań otrzymano wartości optymalne parametrów dla pięciu wybranych łańcuchów kinematycznych. Parametry te są funkcją parametrów bezwzględnych układu oraz kwadratów przełożeń pomiędzy p-tym wałkiem a wrzecionem frezarki, tj.

$$X_j = f_j(X_{j0}, i^2), \quad j = 1, 2, \ldots, 5, \tag{8}$$

gdzie X_j — parametr optymalny zredukowany na wrzeciono, X_{j0} — parametr optymalny bezwzględny, i — przełożenie pomiędzy p-tym wałkiem a wrzecionem frezarki.

Zakładając, że parametry X_{j0} są zmiennymi losowymi niezależnymi, otrzymuje się ze wzoru (8), że parametry X_j są zmiennymi losowymi skorelowanymi. Zatem zagadnienie estymacji parametru optymalnego z próbki parametrów optymalnych sprowadza się do:

1. znalezienia funkcji f_j,
2. transformacji z parametrów zredukowanych na wrzeciono do parametrów bezwzględnych,
3. obliczenia statystyk [7],

$$\overline{X}_{j0} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{kj0}, \qquad S^2_{j0} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_{kj0}-\overline{X}_{j0}), \tag{9}$$

4. obliczenia parametrów zredukowanych na wrzeciono według wzoru

$$X_j = f_j(\overline{X}_{j0}, i^2). \tag{10}$$

Estymator $\overline{X}_{j0}$ jest wartością optymalną parametru dla całego zakresu prędkości obrotowych wrzeciona napędu głównego frezarki.

W trakcie wykonywania pracy dysponowano tylko maszyną analogową ELWAT-1, która zmuszała do zredukowania układu do trzech stopni swobody. W tym przypadku postacie funkcji f_j, określone wzorem (8), są bardzo skomplikowane. Na przykład, momenty bezwładności układu o trzech stopniach swobody wyrażają się poprzez parametry układu o ośmiu stopniach swobody następującym układem równań funkcyjnych:

$$\begin{aligned} J^3_{1R} &= f_1(J^8_1, J^8_2, \ldots, J^8_8, h^8_1, h^8_2, \ldots, h^8_8, k^8_1, k^8_2, \ldots, k^8_8),\\ J^3_{2R} &= f_2(J^8_1, J^8_2, \ldots, J^8_8, h^8_1, h^8_2, \ldots, h^8_8, k^8_1, k^8_2, \ldots, k^8_8),\\ J^3_{3R} &= f_3(J^8_1, J^8_2, \ldots, J^8_8, h^8_1, h^8_2, \ldots, h^8_8, k^8_1, k^8_2, \ldots, k^8_8), \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie J^3_{jR} — momenty bezwładności zredukowane na wrzeciono dla układu o trzech stopniach swobody, J^8_j — momenty bezwładności zredukowane na wrzeciono dla układu o ośmiu stopniach swobody, h^8_j — współczynniki tłumienia zredukowane na wrzeciono dla układu o ośmiu stopniach swobody, k^8_j — zredukowane na wrzeciono współczynniki sztywności dla układu o ośmiu stopniach swobody.

Analogiczne wzory można napisać dla współczynników sztywności k^3_{jR} i współczynników tłumienia h^3_{jR}.

Tak więc, wyznaczenie parametrów optymalnych dla modelu napędu głównego, przed redukcją liczby stopni swobody do trzech na podstawie estymatorów (9), obliczonych dla układu o trzech stopniach swobody, jest praktycznie bardzo trudne, z uwagi na dużą pracochłonność obliczeń według wzoru (11).

Opracowana metodyka optymalizacji nie traci jednak przez to nic z ogólności. Zastosowanie maszyny analogowej o większej pojemności operacyjnej pozwoli na wyznaczenie parametrów optymalnych dla układu o większej liczbie stopni swobody bez potrzeby rozwiązania równań (11).

Wnioski

1. Możliwość zbudowania adekwatnego układowi rzeczywistemu modelu matematycznego napędu głównego stwarza realne warunki do opracowania i stosowania metod optymalizacji właściwości dynamicznych napędu już w fazie jego projektowania. Eliminuje się przez to częściowo lub nawet całkowicie wykonanie w metalu wszystkich rozpatrywanych wariantów, co oznacza w praktyce obniżenie nakładu kosztów oraz skrócenie cyklu wykonania projektowanego napędu.

2. Przedstawiona w pracy metodyka optymalizacji dla kryteriów czasowych oparta jest na wykorzystaniu analogowej techniki obliczeniowej, charakteryzującej się prostotą programowania i obsługi, ekonomicznością cyklu rozwiązania danego zagadnienia, wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością obliczeń, możliwością obserwacji przebiegu rozwiązań.

3. Rozwiązanie kinematyczne i konstrukcyjne napędu zdeterminowane jest wartościami parametrów optymalnych modelu matematycznego zależnymi od przyjętego kryterium optymizującego oraz od ograniczeń nałożonych na te parametry, związanych z prawidłowym funkcjonowaniem obiektu.

4. Otrzymane w wyniku badań optymalne modele dla wybranych prędkości obrotowych charakteryzują się zwiększonym stopniem i zapasem stabilności, kilka, a nawet kilkanaście razy mniejszą amplitudą drgań w rezonansach, skróconym czasem trwania procesu przejściowego. Parametry opisujące modele optymalne są możliwe do praktycznego zrealizowania.

Literatura cytowana w tekście

1. В. Л. ВЕЙЦ, *Динамика машинных агрегатов*, Ленинград 1969.
2. Е. И. РИВИН, *Динамика привода станков*, Москва 1966.
3. I. MOKED, *Managerial decision making the optimal machine tool design and coast*, Paper. Amer. Soc. Mech. Eng., 1969, Nr WA.
4. K. MARCHELEK, *Teoretyczne podstawy dynamicznych obliczeń napędów głównych frezarek*, Zesz. Nauk. Politechniki Szczecińskiej, Nr 103, Prace Monogr., Nr 49, Szczecin 1968.
5. L. LEWIN, *Metody stosowania maszyn analogowych do rozwiązania problemów w technice*, Warszawa.
6. J. BARAN, K. MARCHELEK, *Redukcja stopni swobody układów dyskretnych*, Mech. Teoret. Stos., 1, 9, (1971).
7. M. FISZ, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*, Warszawa 1967.

Резюме

ОПТИМАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГЛАВНОГО ПРИВОДА СТАНКА

Работа содержит попытку разработки методики расчета оптимальной динамической характеристики главного привода станка. Оптимализация выполнена с точки зрения улучшения качества переходных процессов, в зависимости от параметров системы. Механическая модель главного привода фрезерного станка является дискретной системой масс с упругими сочленениями и вязкостным демпфированием. Процедура оптимализации этой динамической системы выполнена на аналоговой машине ELWAT-1. Полученные результаты являются основой конструирования оптимальной системы главного привода станка.

Summary

OPTIMIZATION OF DYNAMIC PROPERTIES OF THE MACHINE TOOL MAIN DRIVE

The paper presents an attempt to establish a method of calculating the optimum dynamic characteristics of the machine tool main drive. The optimization was carried out in order to increase the running quality of transition processes with respect to the system parameters. The mechanical model of the main drive of the milling machine is the spring-mass system with viscous damping. The optimization procedure was carried out by means of the ELWAT-1 analogue computer. The results obtained form a basis for the construction of the main drive of machine tools.

POLITECHNIKA SZCZECIŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 28 lipca 1971 r.

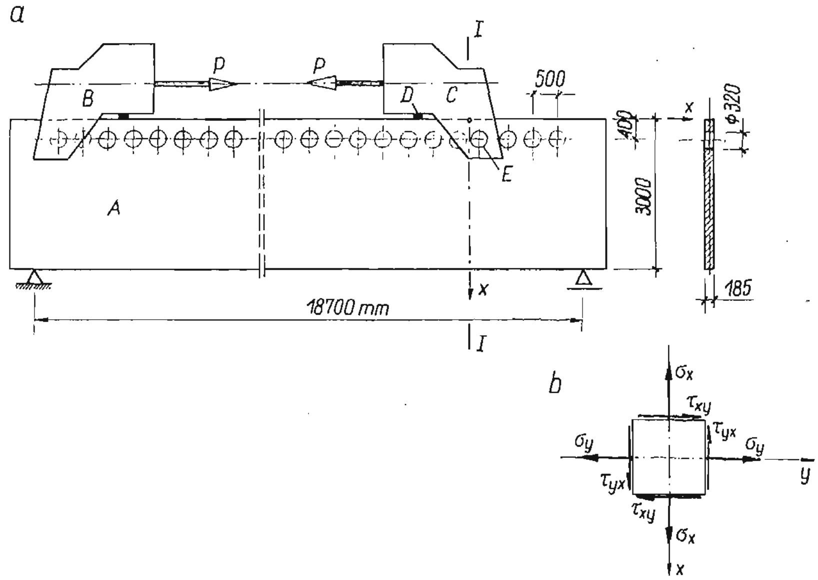
MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
3, 10 (1972)

O PEWNYM PRZYPADKU ANALIZY KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ METODĄ ELASTOOPTYCZNĄ

STEFAN CIEŚLA, WOJCIECH SITKO (GLIWICE)

W wielu przypadkach elementów konstrukcji skomplikowanych pod względem kształtu lub schematu statycznego, przeprowadzenie analizy stanu naprężenia na drodze doświadczalnych badań modelowych jest o wiele skuteczniejsze, aniżeli na drodze analitycznej.

W artykule przedstawiony jest przykład zastosowania metody elastooptycznej do analizy koncentracji naprężeń w stalowej belce (stal 18G2A) osłabionej szeregiem regularnie

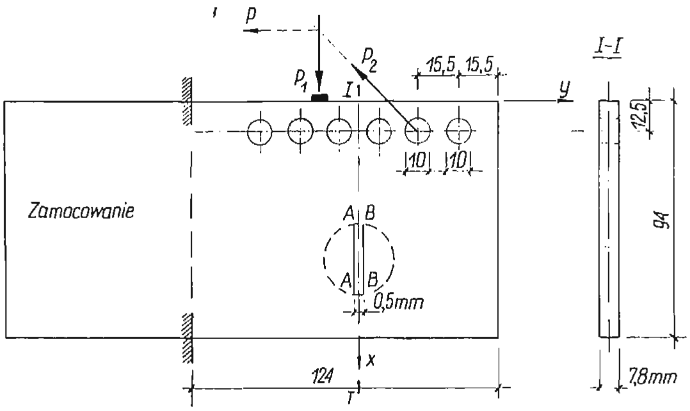


Rys. 1. Schemat belki stanowiącej przedmiot badań modelowych

rozstawionych otworów i poddanej działaniu obciążenia układem dwóch sił skupionych (rzędu tysiąca ton każda) — przy pominięciu wpływu ciężaru własnego. Przedstawione uwagi dotyczą rezultatów tylko części badań modelowych dla danego obiektu.

Belka (rys. 1) stanowi podstawową część konstrukcji urządzenia technologicznego przeznaczonego do prostowania blach, a zaprojektowanego w wersji prototypu dla jednego z zakładów produkcyjnych.

Obiekt konstrukcyjny w schematycznym ujęciu przedstawić można jako belkę wolnopodpartą (A), na której ustawione są dwie głowice — nieruchoma (B) i przestawna (C). Głowica nieruchoma może realizować siłę P, rozciągającą blachę umieszczoną między głowicami (B) i (C). Linia działania sił P jest równoległa do osi podłużnej belki. W ten sposób, przy pominięciu wpływu ciężaru własnego, ustrój można traktować jako wewnętrznie statycznie zrównoważony. Głowica przestawna zamocowana jest przy pomocy sworznia (E) i opiera się dodatkowo na płycie centrującej (D). Siłę P działającą na głowicę przedstawić można przy pomocy dwóch jej składowych, z których jedna, P_1, przyłożona jest prostopadle do górnego pasa belki, druga — ukośna P_2, dociska przez sworzeń do powierzchni otworu (rys. 2). Otwór wzmocniony jest wprasowaną dwudzielną tuleją (rys. 3)



Rys. 2. Model przyjęty do badań

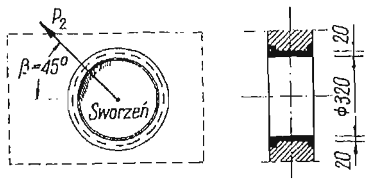
wykonaną z odpowiednio dobranego tworzywa. Koncentracja naprężeń, jaka wystąpi przy docisku sworznia, jest w tym przypadku decydującym czynnikiem przy wymiarowaniu konstrukcji.

Wymiarowanie konstrukcji przeprowadzone zostało przez projektantów w oparciu o podstawowe relacje wytrzymałości materiałów, jak dla klasycznego ustroju belkowego. Relacje te umożliwiły, i to w sposób przybliżony, określenie tylko wielkości σ_y i τ_{xy} (rys. 1b). Określenie wszystkich składowych stanu naprężenia, jak i ustalenie stref koncentracji, w oparciu o wyniki przeliczeń wytrzymałościowych było jednak niemożliwe. Otrzymane wielkości naprężeń w miejscach przewidywanych zaburzeń zostały w rezultacie zwiększone przez wprowadzenie współczynników korygujących, ustalonych w różny sposób na drodze poszukiwań w literaturze fachowej podobnych rozwiązań konstrukcyjnych. Ponadto wymiarowanie konstrukcji przeprowadzono z dużym zapasem bezpieczeństwa, zaniżając znacznie wartości naprężeń dopuszczalnych (w omawianym przypadku w stosunku do $k_{r,c} = 2000\ \mathrm{kG/cm^2}$). Z uwagi na niezmiernie odpowiedzialny charakter konstrukcji, zweryfikowano otrzymane rezultaty przeliczeń i wymiarowania na drodze badań modelowych metodą elastooptyczną.

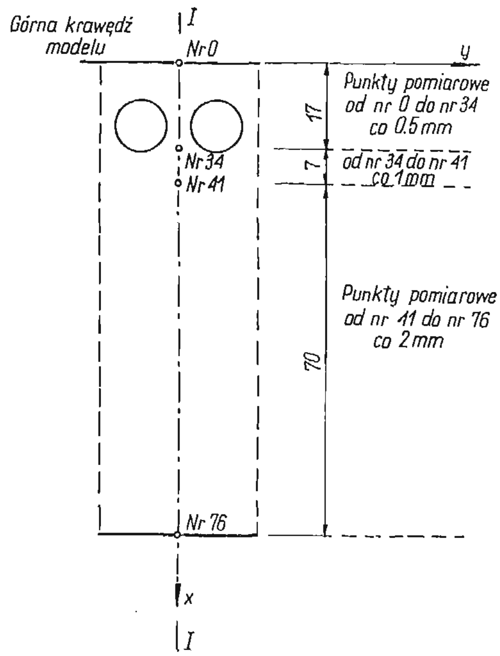
Dominujący wpływ obciążenia użytkowego skłonił autorów do pominięcia w badaniach wpływu ciężaru własnego konstrukcji. To uproszczenie, przy wewnętrznie zrównoważonym układzie sił obciążających i symetrii kształtu konstrukcji, pozwoliło na przyjęcie do badań modelowych schematu zastępczego w postaci wspornika–tarczy (rys. 2), zamocowanego w przekroju odpowiadającym osi symetrii układu rzeczywistego.

W rozważaniach siłę P, działającą w stosunku do osi belki na mimośrodzie, zastąpiono zgodnie z rzeczywistym oddziaływaniem głowicy, statycznie równoważnym układem sił P_1 i P_2 (rys. 2), co ułatwiło realizację obciążenia modelu. Obciążenie realizowane było w sposób mechaniczny przez układ ciężarków, przykładanych w równych odstępach czasu. Intensywność obciążenia zwiększano sukcesywnie dla siły P_2 od 0 do 30 kG; dla siły P_1 dane te wynoszą odpowiednio od 0 do 42,3 kG, co 7,05 kG. Przy wykonywaniu modelu pominięto cały szereg szczegółów oprzyrządowania technologicznego związanego z układem podstawowym, mającym minimalny wpływ na pracę statyczno-wytrzymałościową obiektu.

Do badań modelowych użyto płyt wykonanych z żywic epoksydowych typu EPIDIAN produkcji krajowej. Tworzywo, otrzymane przez polimeryzację na gorąco, stanowiło



Rys. 3. Szczegół otworu z wprasowaną tuleją



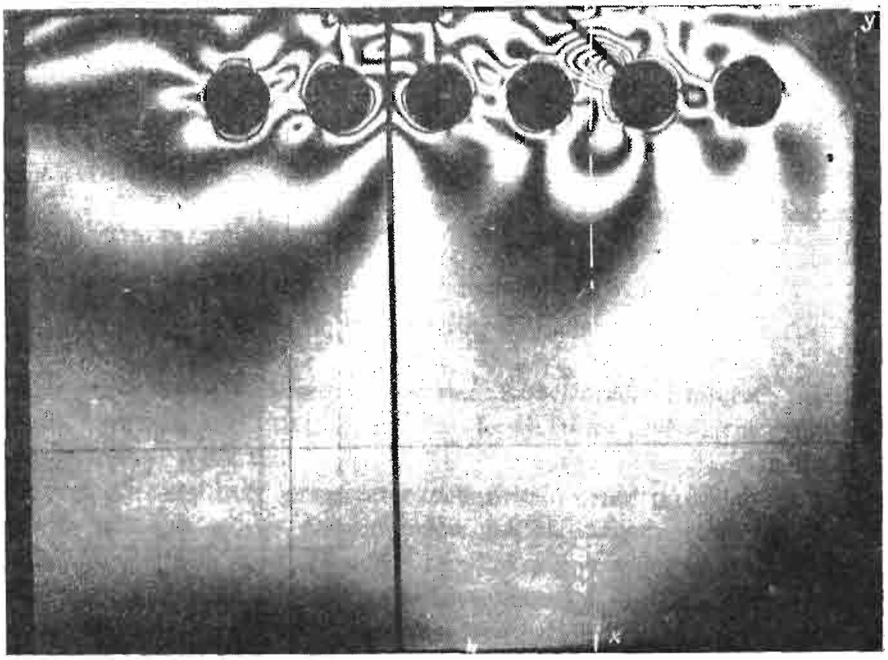
Rys. 4. Rozmieszczenie punktów pomiarowych

kompozycję dwóch składników: EPIDIANU 2–70% i EPIDIANU 5–30%. Stała modelowa (wartość izochromy) dla badanego tworzywa $K = 13{,}25\ \mathrm{kG/cm^2} \times$ rząd. Skala modelowa ograniczona została średnicą pola widzenia polaryskopu (Ø 300 mm). Ze względów tak technologicznych, jak i konstrukcyjnych, interesujące okazało się określenie rozkładu naprężeń wzdłuż przekroju I–I (rys. 2). Jak wykazały późniejsze badania, przekrój ten został w rzeczywistości poprowadzony przez obszar największej koncentracji naprężeń.

Określenie składowych płaskiego stanu naprężenia na podstawie znanych rozkładów rzędów izochrom i parametrów izoklin przeprowadzono metodą numeryczną, wykorzystując różnicową postać warunków równowagi (tzw. metoda różnic naprężeń stycznych).

Wzdłuż omawianego przekroju ustalono 76 punktów pomiarowych z tym, że odległości między nimi są odcinkami różne (w skali modelu od 0,5 do 2 mm). Najmniejszą odległość między punktami pomiarowymi przyjęto przy górnej krawędzi belki, w obszarze na wysokości otworów (rozmieszczenie punktów pomiarowych podano na rys. 4).

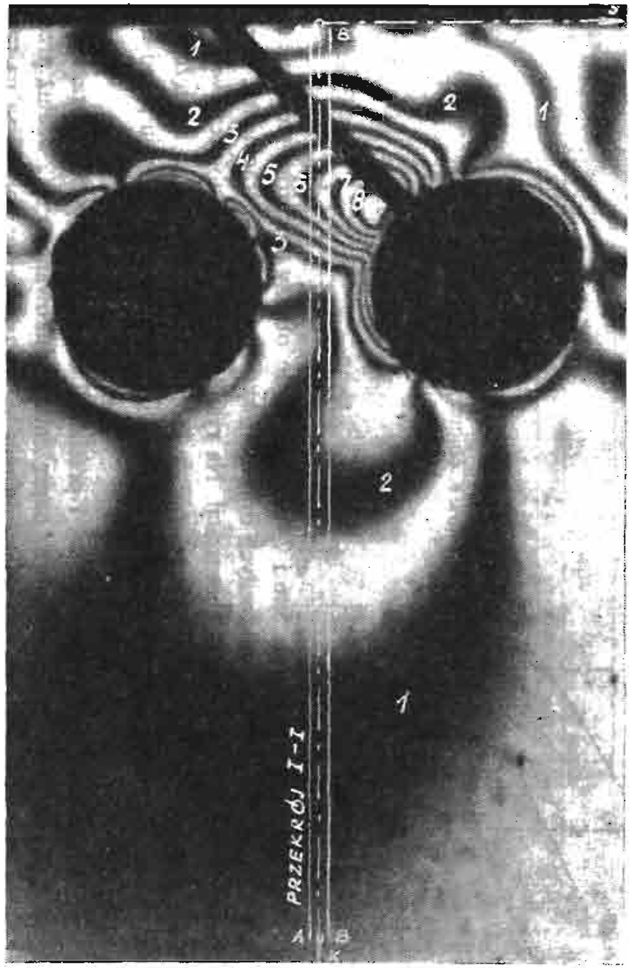
Badania przeprowadzono na polaryskopie z powierzchniowym źródłem światła monochromatycznego i białego, o kołowej i liniowej polaryzacji. Polaryzację kołową otrzymano przez zastosowanie celofanowych płytek ćwierćfalowych. Rozkład izochrom analizowano w świetle monochromatycznym przy różnych wartościach obciążenia. Rzędy izochrom rozpoznawano w świetle białym. Parametry izoklin analizowano w świetle białym przy różnym obciążeniu, zachowując podział co 5°. Określenie rzędów izochrom całkowitych nie przysporzyło najmniejszych trudności, w przeciwieństwie do izoklin. W kilku przypadkach przy ustalaniu przebiegu izoklin musiano się uciec do pomocy identycznego co do kształtu modelu wykonanego ze szkła organicznego.



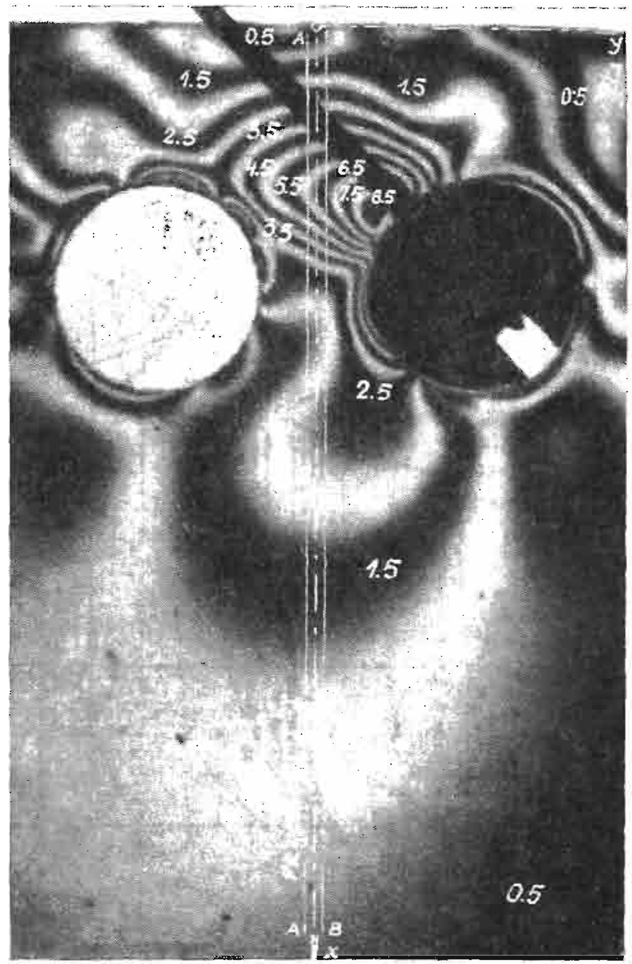
Rys. 5. Izochromy rzędów całkowitych w modelu belki z otworami

Otrzymane w czasie badań obrazy odwzorowywane były techniką fotografowania na błonach produkcji NRD — ORWO o czułości 10 DIN. Zdjęcia robiono w jednakowych odstępach czasu od chwili przyłożenia obciążenia. Celem zwiększenia dokładności odczytu, rozkłady rzędów izochrom i parametrów izoklin analizowano przy powiększeniu czterokrotnym w stosunku do wymiarów modelu. Żądane powiększenie zrealizowano przez rzutowanie odpowiedniej klatki filmu na pokryty kalką techniczną szklany ekran. Otrzymany obraz można było wtedy dokładnie przerysować nie zasłaniając pola widzenia.

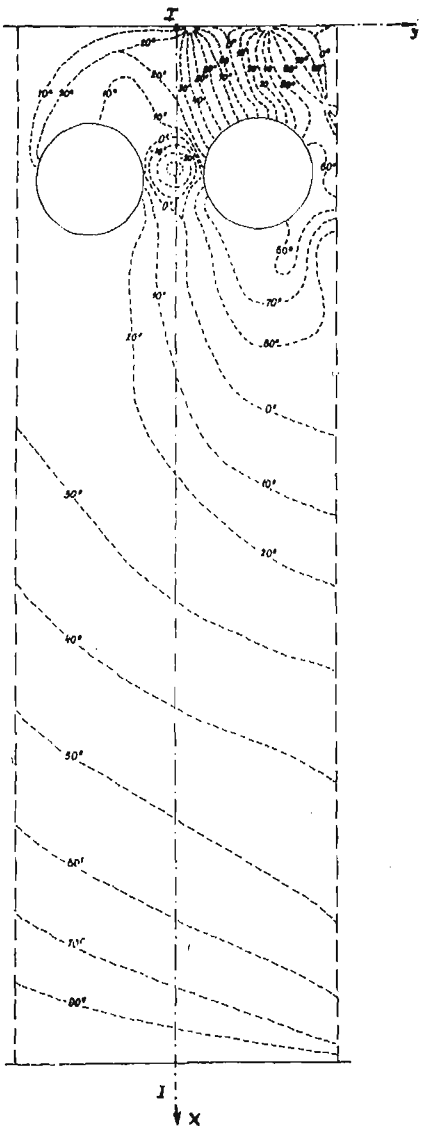
Pomiary przeprowadzono w pomieszczeniu o temperaturze ~21°C, przy wilgotności względnej powietrza ~70%.



Rys. 6. Izochromy rzędów całkowitych dla fragmentu modelu obejmującego obszar koncentracji



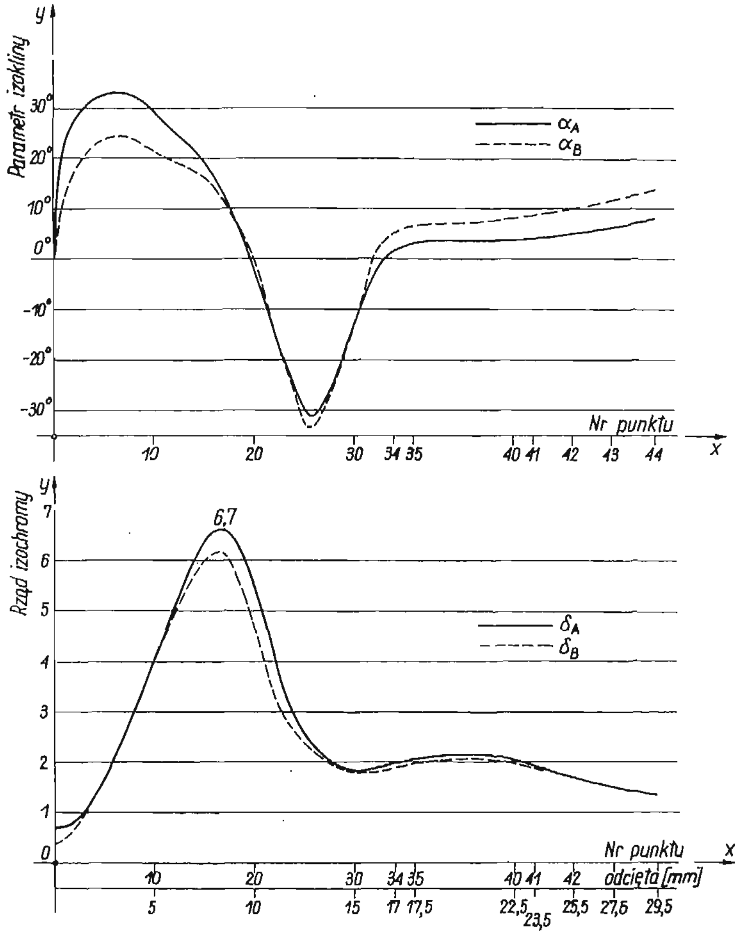
Rys. 7. Izochromy rzędów połówkowych dla fragmentu modelu obejmującego obszar koncentracji



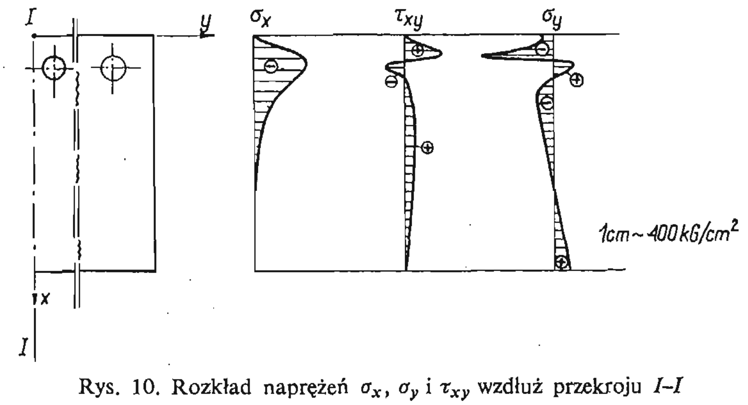
Rys. 8. Zbiorczy wykres izoklin dla fragmentu modelu wzdłuż przekroju *I–I*

Na załączonych zdjęciach (rys. 5, 6 i 7) przedstawiono obrazy izochrom rzędów całkowitych dla modelu i rzędów całkowitych oraz połówkowych dla jego fragmentu, obejmującego tylko strefę największej koncentracji. Na rys. 8 przedstawiono zbiorczy wykres izoklin dla fragmentu modelu wzdłuż przekroju, w którym analizowano stan naprężenia. Rozkłady rzędów izochrom i parametrów izoklin wzdłuż określonego przekroju przedstawione są na rys. 9.

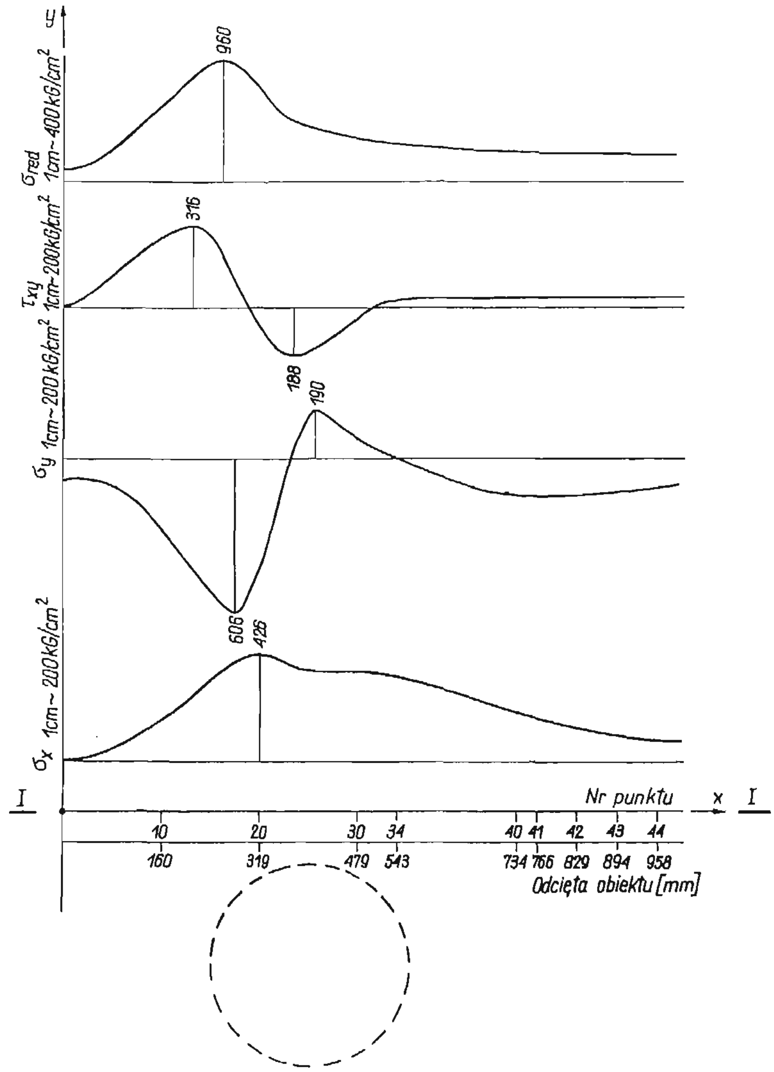
W wyniku przeprowadzonych rozważań i przeliczeń otrzymano wykresy obrazujące zmianę rozkładu naprężeń σ_x, σ_y i τ_{xy} oraz naprężenia zredukowanego σ_{red} wzdłuż przekroju *I–I* dla modelu. Rezultaty w przeliczeniu na obiekt rzeczywisty podane są na rys. 10 i 11.



Rys. 9. Rozkład izochrom i parametrów izoklin wzdłuż przekroju *I–I*



Rys. 10. Rozkład naprężeń σ_x, σ_y i τ_{xy} wzdłuż przekroju *I–I*



Rys. 11. Rozkład naprężeń σ_x, σ_y i τ_{xy} w fragmencie przekroju (obszar koncentracji)

Przeprowadzona w kolejności analiza stanu naprężenia pozwoliła na wyciągnięcie szeregu wniosków dla obiektu rzeczywistego.

1. Rozciągające naprężenia normalne σ_x, określone na podstawie badań elastooptycznych, rozłożone są na długości od górnej krawędzi belki do punktu pomiarowego Nr 60, o odciętej $x = 198$ cm (wymiary z przeliczenia skali modelu na obiekt rzeczywisty zaokrąglono z dokładnością do centymetra). Naprężenia te posiadają ten sam rząd wielkości,

co i naprężenia σ_y (max $\sigma_x = 0,7$ max σ_y) i ich wpływ nie może być pominięty przy wymiarowaniu konstrukcji.

2. W przekroju *I–I* występują trzy warstwy obojętne, przechodzące przez punkty o odciętych $x_1 = 37$ cm, $x_2 = 55$ cm i $x_3 = 211$ cm. Konsekwencją jest otrzymanie dwóch obszarów poddanych działaniu naprężeń ściskających i dwóch — naprężeń rozciągających. W punktach wskazanych przez $x = 27$ cm i $x = 42$ cm mamy do czynienia: w przypadku pierwszym — z bezwzględnym ekstremum naprężeń ($\sigma_y = -606$ kG/cm^2) dla przekroju *I–I*, w drugim — z naprężeniami znacznie mniejszymi co do wartości liczbowej, ale o przeciwnym znaku ($\sigma_y = +190$ kG/cm^2). Obydwa ekstrema znajdują się w partii pasa górnego, osłabionej otworami.

3. Rozkład naprężeń stycznych wskazuje na zmianę ich kierunku w obszarze ograniczonym odciętymi: $x = 32$ cm i $x = 52$ cm. Strefa ta znajduje się na wysokości otworów pasa górnego. Bezwzględne ekstremum naprężeń stycznych max $\tau = 316$ kG/cm^2 — zachodzi dla $x = 22$ cm.

→ 4. Obliczając według hipotezy HUBERA największe wytężenie materiału, otrzymano ekstremum funkcji σ_{red} w punkcie Nr 16, o odciętej $x = 26$ cm. Ekstremum $\sigma_{\text{red}} = 960$ kG/cm^2 wskazuje, iż naprężenia dopuszczalne $k_{r,c} = 2000$ kG/cm^2, w przekroju *I–I*, nie będą przekroczone.

5. Na podstawie obrazu izochrom można wnioskować, że bezwzględne ekstremum funkcji σ_{red} może zachodzić na wysokości punktu pomiarowego Nr 18, o odciętej $x = 29$ cm, o około 9 cm w prawo od przekroju *I–I* (w tzw. punkcie Bielajewa). W punkcie tym określono rząd izochromy $\delta = 8,6$, podczas gdy w odpowiednim punkcie leżącym na tej samej wysokości, a przyporządkowanym do przekroju *I–I*, rząd izochromy $\delta = 6,1$ (procentowo wzrost o 40%). Powyższy punkt znajduje się w niewielkim oddaleniu od punktu przyłożenia siły P_2, która w rzeczywistym obiekcie realizowana jest przez docisk sworznia o średnicy równej średnicy otworu. Sworzeń dociska do tworzywa belki przez tuleję o grubości ścianki 20 mm. Tuleja zwiększa strefę docisku, a tym samym zmniejsza bezpośrednio koncentrację naprężeń. Z uwagi na to, że w badaniach modelowych nie zastosowano tulei powodującej podobne powiększenie strefy docisku, można przyjąć, że koncentracja naprężeń w modelu była większa niż w obiekcie rzeczywistym. Wynika stąd, że maksymalne naprężenia w obiekcie rzeczywistym są z pewnością mniejsze od naprężeń obliczonych powyżej, na podstawie badań modelowych metodą elastooptyczną. Pozwoliło to na sformułowanie końcowego wniosku o bezpiecznej pracy omawianego obiektu, a nawet wskazało na możliwość wprowadzenia szeregu zmian, w kierunku ekonomicznego zwymiarowania niektórych elementów konstrukcyjnych.

Literatura cytowana w tekście

1. M. M. FROCHT, *Photoelasticity*, S. Wiley Sons Inc., New York–London 1962.
2. Г. Н. САВИН, *Распределение напряжений около отверстии*, Изд. Наукова Думка, Киев 1968.
3. Е. И. КОМСКИЙ, *Исследование напряжений вокруг камер в зависимости от их ширины*, Сб. трудов ДТИ, **44**, (1964).
4. И. И. БУГАКОВ, *Исследование оптическим методом концентрации напряжений в растягиваемой плоскости с круговым вырезом*, Ж. прик. мех. и тех. физ., 6, (1964).

Р е з ю м е

О НЕКОТОРОМ СЛУЧАЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ

В работе представлен случай исследования концентрации напряжений в стальной детали в виде балки с регулярно распределенными отверстиями, находящейся в плоском напряженном состоянии под действием сосредоточенных сил. Исследование проведено на модели, по методу фотоупругости. Дан анализ распределения составляющих плоского напряженного состояния вдоль прямой, проведённой через область концентрации напряжений. Концентрация напряжений происходит от нажима болта головки, создающей на стенке одного отверстия рабочее усилие $1{,}2 \cdot 10^6$ кГ.

Полученные результаты служат проверке правильности расчёта поперечных размеров исследуемой детали.

S u m m a r y

ON A CERTAIN CASE OF ANALYSIS OF STRESS CONCENTRATION BY THE PHOTO-ELASTIC METHOD

In the paper is described a case of model testing of a structural element designed to be made of steel. This element constitutes the fundamental part of a technological device of the scheme of a beam weakened by a regular row of holes. By means of the photo-elastic method the components of the plane state of stress are analyzed in the cross-section passing through the concentration zone. The stress concentration is produced by the pressure of the bolt head (transmitting the force of the order of $1.2 \cdot 10^6$ kG) exerted on the edge of the hole. The results obtained allow for the estimation of the quality of the structural design

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 lutego 1971 r.; po raz drugi dnia 4 października 1971 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

«WSPÓŁCZESNE PROBLEMY I METODY W MECHANICE PŁYNÓW»

X SYMPOZJUM ZAKŁADU MECHANIKI CIECZY I GAZÓW IPPT PAN

Rynia k. Warszawy, 6—11.IX.1971

Sympozja organizowane co dwa lata przez Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów mają charakter międzynarodowych konferencji, których celem jest przegląd aktualnego dorobku nauki światowej w mechanice płynów.

Na konferencji wygłoszono 10 referatów przeglądowych i 64 referaty oryginalne; ponadto odbyły się 4 dyskusje ogólne nad wybranymi zagadnieniami mechaniki płynów. W konferencji wzięło udział 179 uczestników z 17 krajów, w tym 103 z Polski.

X Sympozjum otworzył honorowy przewodniczący Komitetu Organizacyjnego prof. dr Janusz Groszkowski, Prezes Polskiej Akademii Nauk. W obecności przedstawicieli Ambasady Brytyjskiej i British Council prof. dr J. Groszkowski wręczył dyplom członka zagranicznego PAN nestorowi mechaniki płynów Sir Goeffreyowi Ingramowi Taylorowi (Uniwersytet w Cambridge), który wygłosił referat inauguracyjny nt. *Stabilność strugi przewodzącej w polu elektrycznym.*

Referaty przeglądowe przedstawili: G. K. Batchelor (Cambridge) : *Reologiczne własności zawiesin małych cząstek w płynach*, E. G. Broadbent (Farnborough) : *Przepływy ze źródłami ciepła i towarzyszące im pola ciśnienia*, M. Burnat (Warszawa) : *Metody geometryczne w mechanice płynów*, F. O. Goodman (Waterloo, Kanada): *Fizyczne i empiryczne modele rozpraszania atomów gazu na powierzchni ciał stałych*, F. C. Hurlbut (Berkeley) : *Oddziaływanie gazu ze ścianką*, O. A. Ladyzhenskaya (Leningrad) : *Przegląd wyników badań stabilności przepływów w ramach równań Naviera-Stokesa*, M. Landahl (Stanford) : *Stabilność hydrodynamiczna*, C. S. Morawetz (Nowy Jork) : *Dobrze postawione zagadnienia dla przepływów transsonicznych*, Yu. D. Nagornykh (Nowosybirsk) : *Doświadczalne badania oddziaływania gazu ze ścianką*, P. R. Owen (Londyn) : *Podstawowe problemy aerodynamiczne budownictwa.*

Dyskusje ogólne dotyczyły następujących zagadnień: fizyczne mechanizmy generacji turbulencji, metody skojarzonych rozwinięć asymptotycznych, oddziaływanie gazu ze ścianką oraz stabilność hydrodynamiczna.

Referaty z prac własnych były przedstawione na 13 posiedzeniach (równolegle 2 lub 3 posiedzenia); można je podzielić na 11 następujących grup (odpowiada to mniej więcej podziałowi na Sympozjum):

1. Matematyczne i numeryczne metody i zagadnienia mechaniki płynów (2 referaty polskie, 10 zagranicznych),
2. problemy turbulencji (3 referaty polskie, 6 zagranicznych),
3. problemy przepływów płynów lepkich i warstwy przyściennej (2 referaty polskie, 4 zagraniczne),
4. problemy oddziaływania gazu ze ścianką (2 referaty polskie, 2 zagraniczne),
5. problemy przepływów gazów zjonizowanych (2,5 referatu polskiego, 1,5 zagranicznego),
6. problemy fal uderzeniowych (1 referat polski, 3 zagraniczne),
7. problemy stabilności (4 referaty zagraniczne),
8. problemy opływów (1 referat polski, 2 zagraniczne),
9. problemy przepływów i własności zawiesin (3 referaty polskie),
10. teoria gazów rozrzedzonych (1 referat polski, 1 zagraniczny),
11. problemy różne (1 referat polski, 12 zagranicznych).

Jak widać z powyższego zestawienia, tematyka konferencji była bardzo szeroka. W większości przypadków referaty wywołały ożywioną dyskusję (zwłaszcza referaty przeglądowe), o czym świadczy chociażby konieczność zorganizowania czterech dodatkowych dyskusji ogólnych. Referaty i sama obecność licznych przedstawicieli nauki zagranicznej umożliwiły szeroką i swobodną dyskusję i wymianę poglądów, zwłaszcza młodym polskim pracownikom naukowym, z uczonymi krajowymi i zagranicznymi, nie tylko podczas obrad, ale również w bezpośrednich rozmowach.

Całość materiałów konferencyjnych została opublikowana w „Fluid Dynamics Transactions". Proceedings of the Xth Symposium on Advanced Problems and Methods in Fluid Mechanics, Rynia, Poland, September 6–11, 1971 (Part I — Survey Papers, PWN, Warszawa 1971; Part II — Contributed Papers, PWN, Warszawa 1971).

Konferencję zorganizował Komitet Organizacyjny złożony z pracowników Zakładu Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN przy współpracy z Biurem Zjazdów i Konferencji Orbisu — pod honorowym protektoratem prof. dr Janusza GROSZKOWSKIEGO, Prezesa Polskiej Akademii Nauk i pod przewodnictwem prof. dr Władysława FISZDONA.

Zbigniew Płochocki

SPRAWOZDANIE

Z VII POLSKO-CZECHOSŁOWACKIEJ KONFERENCJI DYNAMIKI MASZYN

W dniach od 21 do 25 września 1971 r. odbyła się w Gliwicach VII Polsko-Czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn zorganizowana przez PAN i Katedrę Konstrukcji Maszyn Roboczych Politechniki Śląskiej. Materiały konferencji, zawierające 99 prac, wydano w dwutomowym zbiorze. Jako całość opublikowane referaty stanowią ciekawy materiał zbiorczy, będący ogólnym przedstawieniem zagadnień rozwijającej się Dynamiki Maszyn.

Po referatach plenarnych, na temat rozwoju i stanu dynamiki maszyn w Czechosłowacji i w Polsce, wygłoszonych przez profesorów J. GONDĘ i W. BOGUSZA, referaty inauguracyjne wygłosili: czł. AN USRR, prof. A. P. FILIPOW — *Działanie udarowych obciążeń na konstrukcję*, prof. czł. AN USRR W. KONONIENKO — *Analiza dynamiczna rzeczywistych układów drgających.*

Spośród przewidzianych w programie 99 referatów wygłoszono 94 w czterech sekcjach, które tematycznie można ująć w następujące działy:

— zagadnienie drgań w pojazdach	5	prac
— zagadnienie dynamiczne w maszynach ciężkich (maszyny transportowe, budowlane)	7	„
— dynamika wirników, wałów i łożysk	11	„
— urządzenia wibrouderzeniowe	5	„
— dynamika napędu	6	„
— zagadnienia optymalizacji w dynamice maszyn	4	„
— metody probabilistyczne w dynamice maszyn	9	„
— zagadnienia ogólne drgań układów dyskretnych	9	„
— zagadnienia ogólne drgań układów ciągłych	5	„
— metody eksperymentalne i modelowanie układów	16	„
— zagadnienia tłumienia drgań	6	„
— inne zagadnienia specjalne	11	„

Liczba uczestników konferencji wygłaszających referaty wyniosła 120 osób; w tym 17 z CSSR, 6 z ZSRR, 2 z NRD oraz po 1 z Bułgarii, Rumunii, Węgier i NRF.

VII WSZECHZWIĄZKOWA KONFERENCJA NAUKOWA Z ZAKRESU POLARYZACYJNO-OPTYCZNEJ METODY BADANIA NAPRĘŻEŃ

Tallin, 23—26 listopada 1971 r.

Konferencja ta została zorganizowana wspólnie przez 5 instytucji:
— Naukową Radę Problemową «Naukowych podstaw wytrzymałości i plastyczności»,
— Instytut Problemów Mechaniki Akademii Nauk ZSRR,
— Instytut Cybernetyki Akademii Nauk Estońskiej SRR w Tallinie,
— Instytut Maszynoznawstwa w Moskwie,
— Państwowy Uniwersytet Leningradzki.

W skład Komitetu Organizacyjnego weszli najlepsi specjaliści ZSRR z zakresu omawianej metody. Funkcje przewodniczącego i wiceprzewodniczącego pełnili odpowiednio, prof. dr N. PRIGOROWSKI i doc. dr CH. ABEN. Poza tym do Komitetu wchodzili profesorowie i docenci: A. J. ALEKSANDROW, G. L. CHESIN, E. I. EDELSTEIN, E. N. FILIMONOWA, A. A. ILJUSZYN, A. J. ISZLINSKI, Ł. M. KACZANOW, T. D. MAKSUTOWA, B. A. MOROZOW, W. P. NIETREBKO, P. I. POŁUCHIN, M. S. ROZANOW, W. I. SAWCZENKO, N. A. SZCZEGOLEWSKA, M. A. STRELCZUK, G. K. TICHONOW, W. F. TRUMBACZEW, E. P. UNKSOW, N. D. VEKSLER, W. K. WORONCOW.

Celem konferencji było rozpatrzenie podstawowych zagadnień omawianej metody i przyciągnięcie szerokiego kręgu specjalistów związanych z tą dziedziną badań, pracujących w laboratoriach akademii nauk, na wyższych uczelniach, jak również w przemyśle. Zaproponowano rozpatrzenie nowych osiągnięć w zakresie teorii, metod pomiaru i opracowania wyników badań oraz ważniejszych zastosowań polaryzacyjno-optycznej metody badania naprężeń.

Komitet organizacyjny zaprosił do wzięcia udziału w pracach konferencji pracowników laboratoriów stosujących tę metodę, specjalistów metody polaryzacyjno-optycznej, przedstawicieli akademii nauk krajów socjalistycznych oraz naukowych pracowników zagranicznych, z którymi organizatorzy utrzymywali kontakty naukowe.

W konferencji wzięło udział około 260 uczestników, z czego ok. 30 osób z zagranicy.

Ogółem zgłoszono 176 prac, w tym: 18 — z laboratoriów akademii nauk, 64 — z wyższych uczelni, 81 — z przemysłu, 13 — z zagranicy.

W ramach tych prac rozpatrzono szeroki zakres podstawowych zagadnień. Niestety, czas przewidziany na konferencję oraz liczba jej uczestników były bardzo ograniczone. Z tego powodu nie było możliwości zaproszenia na konferencję wszystkich zainteresowanych. Komitet Organizacyjny znalazł chyba jedyny sposób pokonania tych trudności i zaspokojenia życzeń wszystkich zainteresowanych tematyką konferencji wydając drukiem pełną treść wszystkich zgłoszonych na konferencję prac na miesiąc przed jej rozpoczęciem. Materiały te stanowią cztery tomy o objętości około 1000 stron. Dzięki temu odpadła konieczność wygłaszania wszystkich referatów. Można było uzyskać odpowiedzi na pytania przygotowane w oparciu o otrzymane poprzednio materiały konferencyjne i prowadzić z autorami dyskusje na interesujące tematy. Otrzymanie materiałów przed konferencją przyczyniło się również do szybkiego nawiązywania osobistych kontaktów ze specjalistami przedstawiającymi swe prace.

Treść prac opublikowanych w materiałach konferencyjnych odzwierciedla współczesny rozwój i wskazuje na nowe możliwości metod badania naprężeń, opartych na zjawisku dwójłomności wymuszonej. Możliwości te osiągnięto dzięki rozwojowi teorii metody, wykorzystaniu nowych metod oraz środków pomiaru i techniki obliczeń, a także dzięki nowym zadaniom, które stawia nowoczesna technika przed badaczami. Jak wynika z treści przedstawionych na konferencji prac, elastooptyka, pozwalająca wyznaczać pola naprężeń i odkształceń w modelach i obiektach w różnych warunkach obciążenia, uzyskuje coraz szersze i bardziej efektywne zastosowania przy rozwiązywaniu nowych zagadnień. Już obecnie metoda ta jest wykorzystywana do badania naprężeń w zagadnieniach dynamicznych, termosprężystości, materiałów złożonych i odkształceń niesprężystych, w zadaniach górniczo-geologicznych i mechaniki procesu zniszczenia. Elastooptyka stosowana jest również w badaniach rozkładu naprężeń i odkształceń w złożonych przypadkach sprawdzania i udoskonalania metod obliczania, rozwiązywania zagadnień projektowych oraz oceny wytrzymałości części maszyn, konstrukcji i budowli. Opublikowane w materiałach konferencyjnych prace świadczą o szerokim praktycznym wykorzystaniu rozpatrywanej metody badań, która może być zastosowana bądź jako metoda jedyna bądź w połączeniu z innymi doświadczalnymi lub obliczeniowymi metodami.

Przyjęte prace podzielono na dziewięć grup tematycznych:

1. ogólne metody badania, przyrządy i technika badawcza (42 prace);
2. materiały i wykonywanie modeli (20 prac);
3. metody powierzchniowej warstwy elastooptycznej (14 prac);
4. odkształcenia sprężysto-plastyczne (10 prac);
5. problemy termiczne (12 prac);
6. zagadnienia dynamiczne (16 prac);
7. badania naprężeń w częściach maszyn i połączeniach (31 prac);
8. zastosowania w budownictwie i mechanice górotworu (18 prac);
9. badania naprężeń w materiałach anizotropowych (12 prac).

Do najczęściej rozpatrywanych i stosowanych w tych pracach specjalnych metod elastooptycznych należą metody zamrażania i powierzchniowej warstwy elastooptycznej (omawiano je w około 25 pracach).

Następne z kolei pod względem rozpowszechnienia są metody elastooptyczne z zastosowaniem laserów (są one rozpatrywane w około 10 pracach).

Na zakończenie należy stwierdzić, że ogromna praca włożona przez Komitet Organizacyjny, autorów zgłoszonych prac i wszystkich specjalistów biorących udział w terminowym przygotowaniu druku prac i organizacji konferencji przyczyniła się do jej pełnego sukcesu. Poza tym ułożono i zorganizowano bardzo interesujący program towarzyski.

R. S. Doroszkiewicz

KOLOKWIA «EUROMECH»

Sekretarz Komitetu «Euromech» prof. D. KÜCHEMANN podaje szereg uwag w okólniku przeznaczonym dla przewodniczących kolokwiów organizowanych w ramach tej organizacji. Wydaje nam się, że uwagi te zainteresują naszych czytelników, podajemy je w skrócie.

Kolokwia powinny być organizowane w tych dziedzinach mechaniki, które cechuje szczególnie szybki rozwój. Komitet «Euromech» kontaktuje się ze środowiskami naukowymi i inżynierskimi przez swoich przedstawicieli z 21 krajów Europy, którzy zwykle są również przedstawicielami krajowego komitetu IUTAM (Międzynarodowy Związek Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej).

Celem spotkań jest przedyskutowanie bieżącej działalności naukowej i nawiązanie współpracy. Kolokwia są małymi, nieoficjalnymi konferencjami o liczbie uczestników nie przekraczającej 50 osób, liczba referatów uczestników zagranicznych powinna stanowić przynajmniej połowę. Wybrany temat konferencji powinien dotyczyć wyspecjalizowanych, zaawansowanych i aktualnych zagadnień oraz bieżących problemów mechaniki teoretycznej i stosowanej, zwłaszcza o znaczeniu praktycznym, ale nie dotyczących szczegółowych zastosowań inżynierskich.

Propozycje dotyczące konferencji i jej przewodniczącego należy przesyłać do Sekretarza Komitetu «Euromech» celem uzyskania akceptacji przez Komitet. Po otrzymaniu zgody na zorganizowanie kolokwium jego przewodniczący rozsyła do korespondentów «Euromechu» informacje dotyczące zagadnień, które mają być dyskutowane na konferencji. W kolokwium biorą udział tylko zaproszeni goście, rekrutujący się spośród osób aktywnie pracujących w danej gałęzi mechaniki. Nie należy uwzględniać spraw prestiżowych ani zapraszać przedstawicieli poszczególnych organizacji. Wskazane jest dyskutowanie również prac jeszcze nie ukończonych.

Zgoda na zorganizowanie kolokwium powinna nastąpić nie później niż na 6 miesięcy przed jego zorganizowaniem, również w tym terminie przewodniczący konferencji przesyła zawiadomienia korespondentom «Euromechu». Zaproszenia do uczestników kolokwium należy przesłać nie później niż 4 miesiące przed terminem, odpowiedzi i streszczenia prac winny wpłynąć na 2–3 miesięcy przed terminem, a program i streszczenia rozesłane uczestnikom na miesiąc przed kolokwium. Sekretarz «Euromechu» zachęca do prowadzenia kolokwiów w formie dyskusji przy okrągłym stole, wskazane jest jednak wcześniejsze przygotowanie dostatecznej liczby kopii i diagramów istotnych dla dyskusji, z legendą w kilku językach. Dyskusja powinna być nieoficjalna, swobodna i szczera.

Uczestnicy kolokwium przyjeżdżają na koszt swój lub instytucji delegującej. Istnieje możliwość pokrycia kosztów podróży niewielkiej liczby młodych uczestników kolokwiów. Polskimi korespondentami «Euromechu» są profesorowie W. NOWACKI i W. FISZDON.

W roku 1972 przewidywane są następujące kolokwia «Euromechu»:

27. Numeryczne metody rozwiązywania równań Naviera-Stokesa kwiecień 1972, Jablonna	prof. W. PROSNAK, IPPT, Warszawa, Świętokrzyska 21
30. Mechanics of Composite Solids 18–21 kwietnia 1972, Nottingham	prof. A. J. M. SPENCER, dr T. G. ROGERS, Department of Theoretical Mechanics University Park, Nottingham NG7 2RD, Anglia
31. The Sonic Bang 25–27 maja 1972 Aachen	prof. K. OSWATITSCH, DFVLR, Inst. Theor. Gasdynamik, 51 Aachen, Theaterstr. 13, NRF
33. Threedimensional Turbulent Boundary Layers październik 1972 Berlin	prof. R. WILLE, prof. H. FERNHOLZ, Hermann-Föttinger-Inst. Strömungstechnik Technische Universität Berlin, 1 Berlin 12, Müller-Breslau-Str. 8, NRF
34. Control and Feedback Mechanisms in Flow Noise 4–6 października 1972 Göttingen	prof. E. A. MÜLLER, MPI Strömungsforschung, 34 Göttingen, Böttingerstr. 6/8, NRF
36. Laser Anemometry 17–19 kwietnia 1972 London	dr T. H. WHITELAW, Department of Mechanica Engineering, Imperial College, Exhibition Road London S. W. 7, Anglia
37. Fluid Mechanics of Polymer Processing czerwiec 1972 Naples	prof. G. ASTARITA, Universita di Napoli Instituto di Principi di Inge gneria Chimica, Piazalle Tecchio, 80125 Napoli, Włochy
39. Fundamental Aspects of Fracture Mechanics czerwiec 1972 Stockholm	prof. J. CARLSSON, The Royal Institute of Technology, S 10044 Stockholm 70, Szwecja

W roku 1973 przewidziane są między innymi następujące kolokwia:

32. Cardiovascular and Respiratory Mechanisms Jesień 1973 London	dr D. G. CARO, Physiological Flow Studies Unit, Depatment of Aeronautics, Imperial College, Prince Consort Road, London S. W. 7, Anglia
35. Exchanges at the Air/Sea Boundary Wiosna 1973 Marseille	prof. A. FAVRE, Institut de Mécanique Statistique de la Turbulence, 12 Avenue de Général Leclerc, Marseille 3e, Francja
38. Gyrodynamics 1973 Louvain	prof. F. BUCKENS, dr P. Y. WILLEMS, Institut de Mécanique et Mathématiques Appliquées, Université Catholique de Louvain, 300 Celestignenlaan, Héverlée, Belgia

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W PIERWSZYM KWARTALE 1972 R.

W okresie sprawozdawczym zorganizowano 18 sesji lub zebrań naukowych, na których wygłoszono 23 referaty.

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba uczestników	Liczba dyskutantów
			Oddział w Bydgoszczy		
1.	28.03.72	W. Weiner	Położenie osi obojętnej w zginanej belce z tworzywa zbrojonego w zależności od wielkości naprężeń	22	7
2.	28.03.72	K. Wernerowski, T. Sauter	Konstrukcja, działanie i wyniki prób wychwytywania taśmy piłowej przy pilarce DRSB-80	22	7
			Oddział w Częstochowie		
3.	26.01.72	Z. Osiński (Warszawa)	Kierunki rozwojowe badań drgań nieliniowych	14	5
4.	24.02.72	Maria Zastawnik	Zagadnienia tarcia i smarowania w wysokich temperaturach	24	6
5.	03.03.72	J. Elsner, S. Płusa	Pewne aspekty pomiarów termoanemometrycznych	8	3
6.	29.03.72	W. Gundlach	Pewne aspekty rozwoju maszyn przepływowych	29	2
			Oddział w Gdańsku		
7.	28.02.72	T. Chmielewski	Sprawozdanie z Sympozjum n. t. zastosowania metod statystycznych w mechanice — luty 1972 r.		
8.	17.03.72	T. Chmielewski	Drgania losowe układu belka mostowa — pojazd wywołane nierównościami jezdni		
			Oddział w Gliwicach		
9.	01.02.72	J. Jędrzejczyk, J. Kubik, B. Wilk, R. Wójcik	Zastosowanie równań układów lepkosprężystych i termolepkosprężystych do rozwiązywania zadań inżynierskich	22	4
10.	16.03.72	M. Gryczmański	Zastosowanie elementów skończonych do rozwiązywania trójwymiarowych zagadnień teorii sprężystości	31	5
			Oddział w Krakowie		
11.	15.03.72	Cz. Woźniak (Warszawa)	Wstęp do mechaniki ciał dyskretyzowanych	23	5
			Oddział w Łodzi		
12.	24.02.72	Cz. Woźniak (Warszawa)	Mechanika konstrukcji w ujęciu dyskretnej teorii sprężystości	37	6

			Oddział w Poznaniu		
13.	27.03.72	H. Zorski (Warszawa)	Statystyczna teoria dyslokacji	16	5
			Oddział w Szczecinie		
14.	02.03.72	R. Dąbrowski	Stany ponadkrytyczne w cienkich środnikach elementów konstrukcji metalowych	20	7
			Oddział w Warszawie		
15.	24.01.72	W. Nowacki	Termodyfuzja w ciałach stałych	27	10
16.	21.02.72	D. Niepostyn	Rozwiązanie zupełne w teorii nośności płyt	26	7
17.	21.02.72	A. Spychała	Nośność graniczna płyt z otworami	26	7
18.	21.02.72	G. Bąk	Sztywno-plastyczna płyta obciążona impulsem ciśnienia	26	7
19.	27.03.72	A. Morecki, K. Fidelus, J. Ekiel	Wybrane zagadnienia bioniki ruchu	23	5
20.	27.08.72	St. Manczarski	Fale sprężyste elektromagnetyczne i ich zastosowanie w biocybernetyce	23	5
21.	21.02.72	J. Langer	Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem	14	6
22.	27.03.72	R. Izbicki	Zaganienia nośności granicznej w mechanice gruntów i skał	11	5
23.	27.03.72	H. Boroch	Drgania podłużne i obciążenia dynamiczne taśm przenośnikowych w ruchu nieustalonym	11	4

Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach 2–9.II.1972 r. III Sympozjon pt. «Metody statystyczne w mechanice — stabilność, pomiary, modelowanie».

Oddział w Gdańsku prowadził seminarium «Teoria probabilistyczna w mechanice ośrodka ciągłego», wykłady prowadził doc. dr hab. E. Bielewicz.

Oddział w Poznaniu zorganizował kurs pt. «Teoria dyslokacji termodynamiki ośrodków ciąglych».

SPRAWOZDANIE Z III SYMPOZJONU POD HASŁEM «METODY STATYSTYCZNE W MECHANICE — STABILNOŚĆ, POMIARY, MODELOWANIE»

Sympozjon odbył się w dniach od 2–9.II.1972 r. w Szczyrku Białej DW «Szczyrk». Liczba uczestników: 72 osoby. W ramach przygotowań do Sympozjonu Oddział Gliwicki PTMTS wydał drukiem referaty, zebrane w zeszycie: Sympozjon pod hasłem «Metody statystyczne w mechanice — stabilność, pomiary, modelowanie». Ponadto wydano drukiem specjalne zeszyty:

1. Przyrządy do badania procesów stochastycznych — L. Müller.
2. Badanie procesów stochastycznych w technice górniczej przy zastosowaniu metod symulacji na maszynach cyfrowych — J. Antoniak, A. Wianecki.
3. Stabilność w mechanice — B. Skalmierski, A. Tylikowski.

Wyżej wymienione zeszyty zostały doręczone uczestnikom Sympozjonu.

Do programu obrad zakwalifikowano 24 referaty, z których wygłoszono 21 o następującej tematyce:

1. E. Czogała, A. Tylikowski — O stabilności stochastycznej rozwiązań pewnej klasy równań cząstkowych,
2. B. Skalmierski, M. Tylikowski — O numerycznym rozwiązaniu pewnych typów równania Fokkera-Plancka-Kołmogorowa-Gichmana,

3. A. Tylikowski	—	Techniczna stabilność stochastyczna ciągłych układów dynamicznych,
4. J. Wołkow	—	Tłumienie drgań skrętnych sprzęgła hydrokinetycznego w świetle stabilności Lapunowa,
5. T. Chmielewski	—	Badania doświadczalne drgań losowych układu belka mostowa-pojazd wywołanych nierównościami jezdni,
6. J. Dekert, W. Kurowski, J. Wicher	—	Badania korelacji między obciążeniami dynamicznymi przekładni zębatej, a przyśpieszeniami wybranych punktów korpusu,
7. Z. Dyląg, Z. Orłoś	—	Interpretacja wyników doświadczalnych badań nacisków pierścieni tłokowych,
8. J. Hajduk	—	Sprawdzanie wytrzymałości spawanych konstrukcji nośnych w maszynach roboczych,
9. J. Kawaler, H. Połcik, J. Wilk	—	Numeryczna analiza pola odkształceń konstrukcji na podstawie badań powłokami optycznie czynnymi,
10. M. Lurski	—	Wybrane zagadnienia analizy naprężeń połączenia klejowego grubych blach,
11. L. Müller	—	Przyrządy do badania procesów stochastycznych,
12. L. Solecki	—	Metody pomiaru drgań mechanicznych,
13. A. Białas Zabawa, M. Zabawa	—	Analiza dynamiczna koparki SRs-2400 przy obciążeniu losowym w oparciu o model dwumasowy,
14. Z. Engel, R. Panuszka	—	Analiza i synteza wibratora elektrohydraulicznego z uwzględnieniem przypadkowego obciążenia,
15. T. Kasprzyk	—	Określenie optymalnego poziomu ograniczenia amortyzatora samochodowego z uwzględnieniem tarcia suchego w zawieszeniu,
16. T. Kasprzyk	—	Metoda tłumienia drgań tarciem suchym w zawieszeniu samochodu, ekwiwalentnego tłumieniu wiskotycznemu,
17. W. Stojanowski	—	Ocena bezawaryjności układu na podstawie przypadkowych zmian jego parametrów,
18. J. Kłosowicz, W. Leszek	—	Zastosowanie techniki pomiarów promieniowania jonizującego do modelowania procesów statystycznych,
19. J. Antoniak, A. Wianecki	—	Badanie procesów stochastycznych w technice górniczej przy zastosowaniu metod symulacji na maszynach cyfrowych,
20. J. Migdalski	—	Modelowanie i optymalizacja niezawodnościowa układów o strukturach złożonych,
21. M. Sarna	—	O pewnym modelu elektrody elektrofiltru.

Zgodnie z ustaleniami poprzedniego II Sympozjonu «Metody statystyczne w mechanice», odbytego w 1971 r., Oddział Gliwicki PTMTS zorganizował pod patronatem PAN, w Jabłonnej, w okresie od 17–29.IV.1972 r. konferencję szkoleniową na temat: «Metody statystyczne w mechanice». Kierownikiem naukowym konferencji szkoleniowej był doc. dr hab. inż. Bogdan SKALMIERSKI.

Konferencja poświęcona była niekonwencjonalnym działom mechaniki. Zostały poruszone problemy leżące w centrum zainteresowania współczesnej myśli naukowej. Na terenie naszego kraju tym kierunkiem badań zajmuje się niewielka liczba specjalistów. Ze względu na tę «deficytowość» należy uznać konferencję szkoleniową na temat: «Metody statystyczne w mechanice» za celową. Zainteresowanie samą tematyką było duże.

Wykłady na konferencji prowadzili: doc. B. Skalmierski, dr A. Tylikowski, dr J. Marszał, prof. M. Kuczma, doc. M. Zabawa, prof. Z. Osiński, prof. W. Bogusz, prof. L. Müller, dr E. Czogała. prof. J. Murzewski, Liczba uczestników wynosiła 62 osoby.

Staraniem organizatorów było prowadzenie słuchaczy od zagadnień prostych do zagadnień złożonych, stojących w centrum zainteresowania nauki światowej (np. stabilność stochastyczna układów ciągłych).

Celem naczelnym było wprowadzenie słuchaczy w trudną dziedzinę działalności naukowej. Sądzimy, że jest to pewien krok na drodze do budowy pomostu ponad przepaścią dzielącą z jednej strony działalność matematyków, a z drugiej działalność inżynierów tak, aby pierwszym wskazać możliwości zastosowań, a drugim potrzebę silnych podstaw teoretycznych. Problematyka spotkała się z dużym zainteresowaniem, co potwierdza dobra frekwencja, jak również liczne dyskusje.

Jerzy Antoniak, Bogdan Skalmierski

INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronice z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2, itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.

W następnym zeszycie ukażą się prace:

A. Ziabicki, Zachowanie się cieczy polimerowych w przepływach rozciągających
Поведение полимерных жидкостей в растягивающих течениях
Behaviour of polymer fluids in elongational flow

J. Murzewski, Zagadnienia niezawodności i bezpieczeństwa w mechanice materiałów i konstrukcji
Вопросы надёжности и безопасности в механике материалов и конструкций
Reliability and safety problems in mechanics of materials and structures

R. S. Doroszkiewicz, J. Lietz, S. Owczarek, Zastosowanie elastooptycznych badań modelowych do wyznaczania optymalnych kształtów konstrukcji płaskich
Применение поляризационно-оптических модельных исследований для определения оптимальных очертаний плоских конструкций
Application of photoelastic model investigations for determination of optimum shapes of two-dimensional structures

K. Rykaluk, Praktyczna postać ogólnego rozwiązania tarczy jednospójnej
Полезный вид общего решения задачи об односвязном диске
Practical form of general solution of a simply-connected disk

Z. Malinowski, J. Klepaczko, Szacowanie współczynnika tarcia na czołach ściskanej plastycznie próbki walcowej
Оценка коэффициента трения на поверхностях контакта пластически сжатого цилиндрического образца
Estimation of the coefficient of friction on the interfaces of the plastically deformed cylindrical specimen

Z. Waszczyszyn, Wyboczenie trójwarstwowej płyty kołowej poza zakresem sprężystym
Устойчивость круглой трехслойной пластинки за пределом упругости
Buckling of a sandwich circular plate beyond the elastic limit

A. Litewka, Warunek podobieństwa współczynnika skurczu poprzecznego w fotoplastyczności
Условие подобия коэффициента поперечной деформации в фотопластичности
Similarity condition of the lateral contraction coefficient in photoplasticity

K. Szulborski, Analiza wyników badań pełzania mechanicznego i optycznego materiału modelowego syntezowanego z krajowej żywicy epoksydowej
Анализ результатов испытаний механической и оптической ползучестей модельного материала синтезированного из отечественной эпоксидной смолы
Analysis of results of mechanical and optical creep investigations of a Polish resin used for photoelastic models

Biuletyn Informacyjny

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 10, z. 3, s. 349—483, Warszawa 1972, Indeks 36712