

J. 11. 720
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 10 • ZESZYT 2

WYDANIE SPECJALNE



PA

WARSZAWA 1972
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

M. KWIECIŃSKI, Waclaw Olszak Вацлав Ольшак	179
M. ŻYCZKOWSKI, Twórczość naukowa Profesora Waclawa Olszaka Научное творчество Профессора Вацлава Ольшака Scientific activity of Professor Waclaw Olszak	189
S. KAŁFASZ, Waclaw Olszak — Sylwetka inżyniera Вацлав Ольшак — облик инженера Professor Olszak as a civil engineer	203
M. ŻYCZKOWSKI, Wykaz publikacji Profesora Waclawa Olszaka Список научных трудов Профессора Вацлава Ольшака List of publications of Professor Waclaw Olszak	213
Z. BUCHAWSKI, Teoria nieliniowej lepkosprężystości i jej zastosowania Теория нелинейной вязкоупругости и её приложения Theory of non-linear viscoelasticity and its applications	229
Cz. EIMER, Teoria ośrodków wielofazowych Теория многофазных сред Theory of multi-phase media	243
Z. MRÓZ, Cz. Goss, O złożonych modelach wzmocnienia plastycznego О составных моделях пластического упрочнения On composite models of plastic workhardening	259
P. PERZYNA, Termodynamiczna, infinitesimalna teoria lepkoplastyczności Теория вязко-пластических малых деформаций Infinitesimal theory of viscoplasticity	281
A. SAWCZUK, Inżynierskie metody analizy konstrukcji sprężysto-plastycznych Инженерные методы анализа упруго-пластических сооружений Engineering aspects of plastic analysis of structures	309
W. SZCZEPIŃSKI, Problemy teorii mechanicznego urabiania gruntów Проблемы теории землестройных процессов Problems of the theory of earthmoving processes	327
BIULETYN INFORMACYJNY	343

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 0 • Z E S Z Y T 2

W Y D A N I E S P E C J A L N E



W A R S Z A W A 1 9 7 2

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (594+106) egz. Ark. wydawn. 14,75. Ark. drukarskich 10,75. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 28.I.1972 r. Druk ukończono w maju 1972 r. Zam. 157/72 A-84 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

*Niniejszy zeszyt
Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej
wydany został z okazji 70-lecia urodzin
Profesora Doktora Wacława Olszaka
i zawiera oryginalne
lub przeglądowe prace naukowe
Jego współpracowników i uczniów.*



WACŁAW OLSZAK

Jeśli początek pracy naukowej badacza utożsamić z datą ukazania się jego pierwszej publikacji, to w roku bieżącym zbiegają się w życiu Profesora WACŁAWA OLSZAKA trzy ważne daty: 70-lecie urodzin, 50-ciolecie pracy naukowo-badawczej, zapoczątkowanej opublikowaniem w 1922 roku artykułu na temat uproszczonego sposobu obliczania połączeń torów [11]¹⁾ oraz 35-lecie podjęcia przez Jubilata nauczania akademickiego, w roku 1937 habilitował się On bowiem jako docent na ówczesnej Akademii Górniczej w Krakowie. Na rok 1972 przypadają ponadto dwie dalsze rocznice: 20-lecie istnienia Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych PAN, którego Profesor W. OLSZAK był organizatorem (1952), twórcą i przez blisko dwadzieścia lat kierownikiem; jak również 20-lecie związania się Jego z Politechniką Warszawską (1952) przez objęcie na ówczesnym Wydziale Budownictwa Przemysłowego Katedry Wytrzymałości Materiałów. Ta, dziś już przez takie okrągłe dziesięciolecia zarysowana działalność naukowa, inżynierska i wychowawcza, jak również organizacyjna i społeczna WACŁAWA OLSZAKA, przeplatana wieloma barwnymi przeżyciami, jest miarą Jego wielokierunkowych zainteresowań, niespożytej energii oraz wielkiej optymistycznej wiary w efekty usilnego, rozumnego i konsekwentnego działania ludzkiego. W tym krótkim szkicu uwypuklić chciałbym ogólne aspekty Jego życiorysu na tle środowiska akademickiego i ważniejsze etapy pracy naukowo-dydaktycznej oraz organizacyjnej, przy czym wspomnę również o Jego wyróżnieniach i cennych dystynkcjach, będących wykładnikiem uznania dla osiągnięć WACŁAWA OLSZAKA na polu naukowym, organizacyjnym i społecznym. Szczegółowej analizie sylwetki naukowej Profesora oraz jego dorobku inżynierskiego w dziedzinie zastosowań osiągnięć badawczych i technicznych poświęcone są dwa następne opracowania.

WACŁAW OLSZAK urodził się 24 października 1902 roku w Karwinie, na Śląsku Cieszyńskim. Od najmłodszych lat wychowywał się w klimacie patriotycznym i w atmosferze pracy społecznej, wzrastając w specyficznym środowisku Ziemi Cieszyńskiej. Ziemia ta, odwieczny teren obcego naporu prowadzonego na froncie zarówno politycznym i kulturalnym, jak i gospodarczym, stanowiła zawsze bastion patriotyczny silnie związany z polskością, kultywując swój piękny, archaiczny język, swe barwne regionalne tradycje. Tak było i z najbliższym otoczeniem i rodziną WACŁAWA OLSZAKA. Ojciec jego Waclaw, lekarz i działacz społeczny, prezes Macierzy Szkolnej i członek Rady Narodowej Księstwa Cieszyńskiego, całe swe życie strawił na tym, by ludności miejscowej nie tylko nieść pomoc jako opiekun jej zdrowia, ale również jako odważny i nieugięty doradca, organizator polskości i pośrednik u władz. Był człowiekiem wielkich zasług i ogromnego autorytetu. Przypieczętował ostatecznie swe polskie przekonania własnym życiem, ginąc w dniu 9 września 1939 roku z rąk gestapo; żonę jego deportowano do obozu koncentracyjnego w Skro-

¹⁾ Patrz wykaz publikacji Waclawa Olszaka, str. 213.

chowicach. Dla uczczenia wielkiego patrioty i męczennika Ziemi Cieszyńskiej, miasto Cieszyn przemianowało w 1948 roku jedną z ulic w śródmieściu na ulicę Dra Wacława Olszaka.

Nic tedy dziwnego, że młody WACŁAW OLSZAK wrastał całą swą duszą w tę atmosferę patriotyzmu i ofiarnej pracy dla społeczeństwa. Objawiało się to wyraźnie już w czasach gimnazjalnych. W całym Zagłębiu Ostrawsko-Karwińskim istniała ówczesnie tylko jedna polska szkoła średnia: było nią polskie gimnazjum realne im. Juliusza Słowackiego w Orłowej. Codzienny czterokilometrowy marsz tam i z powrotem stanowił zdrowy, choć czasochłonny i mało wygodny element życia sporej grupy karwiniaków uczęszczających do gimnazjum orłowskiego. Mimo to, uczeń WACŁAW OLSZAK znajdował czas na wiele zajęć pozaszkolnych i dawał upust swym zamiłowaniom organizacyjnym, sportowym i muzycznym. Był współorganizatorem drużyny harcerskiej w Orłowej, członkiem, a później



dyrygentem chóru i orkiestry gimnazjalnej, pierwszym skrzypkiem kwartetu, entuzjastą kółka esperantystów. Mając lat 16 zgłosił się jako ochotnik do powstających wówczas pierwszych oddziałów armii polskiej, uzyskując przydział do Batalionu Saperów we Frysztacie. Z nauką radził sobie przy tym dobrze, czego ślady widoczne są w Jego ocenach szkolnych: w ciągu ośmiu lat na wszystkich szesnastu świadectwach figurują jedynie noty «bardzo dobre». Ze szczególnym zamiłowaniem oddawał się studiom nad literaturą polską i był jednym z najczynniejszych członków odpowiedniego koła gimnazjalnego.

Swe studia uniwersyteckie rozpoczął WACŁAW OLSZAK w roku 1920 na Wydziale Inżynierii Lądowej i Wodnej Politechniki Wiedeńskiej, którą ukończył w 1925 roku jako inżynier dróg i mostów, otrzymując zaszczytny dyplom *summa cum laude*. Dziekan Wy-

działu Inżynierii, Prof. dr A. OERLEY, taką wpisał adnotację do jego dokumentów: «Inż. Wacław Olszak należał do najbardziej utalentowanych i najdzielniejszych studentów naszej uczelni. Cenię go też wysoko jako wysoce wykształconego i organizacyjnie uzdolnionego inżyniera». W tymże 1925 roku dyplom WACŁAWA OLSZAKA został nostryfikowany na Politechnice Warszawskiej.

Tu znowu warto podkreślić szczególną cechę Jego osobowości, wszechstronność Jego talentów i niespożytą energię. Był nieustannie czynny społecznie i organizacyjnie, kontynuując jednocześnie swe zamiłowania muzyczne. Ukończył z wynikiem bardzo dobrym klasę skrzypiec w Konserwatorium Wiedeńskim, był członkiem jego orkiestry (I skrzypce), występując też jako solista. Czynnemu uprawianiu gry na skrzypcach położył dopiero kres niefortunny przestrzal przez lewą rękę, który naruszył ścięgna dłoni. WACŁAW OLSZAK był wiceprezesem i prezesem polskiego stowarzyszenia akademickiego «Ognisko» w Wiedniu, był kierownikiem sekcji obcokrajowców na swym Wydziale, grupującej studentów z Polski, Bułgarii, Węgier, Czechosłowacji i Rumunii. «Zawsze przy tym manifestował on swoje narodowe stanowisko» — jak stwierdził w 1925 roku Konsul Generalny RP w Wiedniu.

W latach 1926–27 WACŁAW OLSZAK odbył uzupełniające studia podyplomowe na Faculté des Sciences Paryskiej Sorbony, pogłębiając swą wiedzę w zakresie mechaniki ciała stałego oraz cieczy i gazów. Po powrocie z Francji staje z właściwym sobie entuzjazmem do pracy zawodowej jako konstruktor i kierownik budowy wielu obiektów inżynierskich na terenie Śląska i Zagłębia Dąbrowskiego. W roku 1927 wyjeżdża na Bliski Wschód, zwiedzając w ramach podróży naukowo-turystycznej Turcję, Liban, Palestynę i Egipt. Ukazują się pierwsze Jego publikacje o charakterze teoretycznym, których problematyka nawiązuje do zagadnień, z jakimi zetknął się w swej działalności inżynierskiej.

Ale i ciężkie doświadczenia miały być Jego udziałem. Przewlekła choroba zmusza go do przerwania czynnej pracy, nie załamuje Go jednak. Wytrzymał i nieustępliwy, w prawie całkowitej kilkuletniej izolacji sanatoryjnej, przerywanej jedynie kontaktem pocztowym, przygotowuje koncepcje swoich dwu prac doktorskich. Opracowuje je w czasie choroby i broni, obie z odznaczeniem, w roku 1933 i w roku 1934. Pierwsza z nich z teorii i projektowania konstrukcji inżynierskich nosi tytuł *Eisenbetonröhre für Hochdruckleitungen. Theorie und Praxis* i, obroniona w Politechnice Wiedeńskiej, zostaje w tymże 1933 roku nostryfikowana na Politechnice Lwowskiej. Druga dysertacja, z zakresu matematycznej teorii sprężystości, została wykonana pod kierownictwem Prof. M. T. HUBERA w Politechnice Warszawskiej. Została ona wydana drukiem w 1934 roku przez Akademię Nauk Technicznych, pod tytułem *Sprężyste układy płaskie z otworami kołowymi w zastosowaniu do zagadnień blach płaskich oraz tunelowych i górniczych robót inżynierskich* [2]. Niedługo później, w 1937 roku, WACŁAW OLSZAK habilituje się jako docent Akademii Górniczej w Krakowie, przedkładając pracę na temat statyki i dynamiki konstrukcji przeciwlotniczych [34].

Wybuch drugiej wojny światowej przerywa Jego działalność naukową i zawodową. Traci dom, rodzina zostaje rozbita, sam parokrotnie ledwo uchodzi z życiem, wojna niesie mu też kompletną ruinę materialną. Pracuje jako robotnik, dorywczo jako kierowca samochodowy.

Po skończonej wojnie spędził kilka miesięcy we Francji i blisko rok w Belgii, pracując początkowo na Uniwersytecie w Brukseli, aby potem skorzystać z zaproszenia na wykłady gościnne na Faculté des Sciences Appliquées Uniwersytetu Państwowego w Liège, który przed Jego powrotem do kraju odznaczył Go swym medalem honorowym. Tam też osiąga Go niespodziewane zaproszenie, którego zresztą nie przyjął: propozycja objęcia Katedry Teorii Konstrukcji Inżynierskich w Monachium. Nie skorzystał On również z podobnych propozycji późniejszych, mianowicie z zaproszenia z roku 1960 do objęcia Katedry Teorii Sprężystości i Wytrzymałości Materiałów na Politechnice Wiedeńskiej — po sławnym uczonym Prof. K. GIRKMANNIE — jak i z propozycji z lat 1956 i 1961, dotyczących objęcia podobnej Katedry w Dreźnie — po Prof. H. NEUBERZE.

W roku 1946 WACŁAW OLSZAK wraca z tułaczki do kraju, aby objąć — jako profesor zwyczajny — Katedrę Wytrzymałości Materiałów w Akademii Górniczej w Krakowie



oraz na wydziałach politechnicznych późniejszej Politechniki Krakowskiej. Natychmiast wraca do swych przerwanych prac naukowych oraz organizacyjnych, inicjuje i prowadzi międzywydziałowy ośrodek mechaniki stosowanej, kładąc tak wtedy, jak i w czasie całej swej dalszej działalności, wielki nacisk na konieczność istnienia forum dyskusyjnego o charakterze seminaryjnym, jednoczącego i doskonalącego wysiłki badawcze pracowników nauki w dziedzinie mechaniki.

W roku 1952 Prof. WACŁAW OLSZAK przenosi się do Warszawy, gdzie Politechnika powierzyła mu organizację i kierownictwo Katedry Wytrzymałości Materiałów na nowo

powstałym Wydziale Budownictwa Przemysłowego. Przekształca On ją niedługo (w roku 1956) w pierwszą w kraju funkcjonującą w pionie uczelni technicznych Katedrę Teorii Sprężystości i Plastyczności.

W tymże roku 1952 Prof. WACŁAW OLSZAK powołany został na organizatora, a następnie kierownika Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych Polskiej Akademii Nauk. Zakład ten stał się w niedługim czasie najsilniejszą w kraju placówką naukową w zakresie mechaniki stosowanej, znaną również szeroko poza granicami Polski. Placówka ta skupiła pod kierownictwem Prof. WACŁAWA OLSZAKA wielką liczbę badaczy w dziedzinie teorii sprężystości, teorii plastyczności, reologii, teorii konstrukcji oraz badań doświadczalnych, kształcąc jednocześnie młode kadry i dając im możliwości zasłużonego awansu naukowego. Doceniając wielkie znaczenie dobrze zorganizowanych dyskusji naukowych, Prof. OLSZAK doprowadził do realizacji corocznych letnich konferencji naukowych, które — po pierwszym takim spotkaniu we wrześniu 1953 roku w Karpaczu — stały się odtąd dobrą tradycją ośrodka i do dzisiaj regularnie się odbywają z udziałem pracowników instytutów naukowych i wyższych uczelni, jak również wybitnych przedstawicieli myśli badawczej z zagranicy.

W roku 1953 Zakład prowadzony przez Prof. OLSZAKA wszedł w skład Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, w którym od początku sprawował funkcję zastępcy dyrektora do spraw nauki, a w latach 1963–1969 był jego dyrektorem. Na stanowisku tym równie troskliwą opieką otaczał zagadnienia współpracy naukowej z krajowymi i zagranicznymi wyspecjalizowanymi ośrodkami badawczymi. Współpraca ta rozwijała się szczególnie pomyślnie i przejawiała w wielu formach: w zapraszaniu wybitnych uczonych na wykłady i seminaria; w organizowaniu cykli wykładów z nowych dyscyplin; w trosce o to, by młodzi pracownicy nauki korzystać mogli z krótko- i długoterminowych staży naukowych w wiodących ośrodkach myśli badawczej w kraju i za granicą; w inicjowaniu publikowania zagranicznych wyników prac badawczych w krajowych czasopismach naukowych. Doceniał zarazem w pełni rolę kongresów międzynarodowych dla rozwoju badań w Polsce, zarówno przez delegowanie na nie zainteresowanych daną problematyką naszych przedstawicieli, jak i przez organizowanie takich spotkań i dyskusji w kraju. Wychodząc z takich przesłanek, inicjował i popierał takie formy wzajemnych kontaktów; sam kierował przygotowaniem naukowym i organizacyjnym dwu międzynarodowych zjazdów z zakresu mechaniki stosowanej, które odbyły się w Polsce. Pierwszym z nich, w roku 1958, było sympozjum Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM) na temat *Niejednorodności w Sprężystości i Plastyczności*; natomiast w roku 1963 odbyło się sympozjum Międzynarodowego Stowarzyszenia Konstrukcji Powłokowych (IASS) na temat *Nieklasycznych Zagadnień Pówłok*.

Ale rozumiał, że inne jeszcze formy mogą okazać się konieczne. Współczesny, bardzo szybki, a na niektórych odcinkach wręcz gwałtowny rozwój badań naukowych wymaga poważnych koncentracji i nakładów w dziedzinie potencjału ludzkiego i materialnego, co nawet dla społeczeństw bogatych może okazać się zbyt kosztowne. Aby temu zaradzić, w licznych dyscyplinach powołano do życia badawcze ośrodki międzynarodowe. Takie placówki w zakresie np. fizyki teoretycznej, fizyki jądrowej, matematyki, biologii itp. okazały się nader skuteczne i dla poszczególnych partnerów naukowo i ekonomicznie efektywne. Nic podobnego nie istniało w dziedzinie mechaniki. W oparciu o analogiczne

założenia i zebrane gdzie indziej doświadczenia, powołano w roku 1969 do życia Międzynarodowy Ośrodek «Centre International des Sciences Mécaniques» w Udine (Włochy); Prof. OLSZAK jest jednym z jego kierowników, będąc jednocześnie jego współzałożycielem i entuzjastą jako międzynarodowego ośrodka badawczego, służącego rozwojowi i dyfuzji osiągnięć w dziedzinie nauk mechanicznych i dyscyplin im pokrewnych.

W roku 1950 Prof. OLSZAK wybrany został członkiem zwyczajnym Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, a w roku 1954 został członkiem korespondentem Polskiej Akademii Nauk. Od roku 1956 jest jej członkiem rzeczywistym. W latach 1957–60 był Sekretarzem naukowym Wydziału IV Nauk Technicznych PAN, a od roku 1960 do 1969 piastował godność członka Prezydium Polskiej Akademii Nauk.

Osobista działalność naukowa Prof. OLSZAKA związana jest z teorią plastyczności i lepkoplastyczności oraz, równoległym nurtem, z teorią konstrukcji inżynierskich. Szczególnie interesują Go przy tym zagadnienia niejednorodności i anizotropii, przy czym, obok zjawisk nieodwracalnych, studiuje zjawiska o charakterze reologicznym. Szczegółowa analiza prac badawczych i publikacji Prof. OLSZAKA przedstawiona jest w następnym opracowaniu, warto tu jedynie wspomnieć, że wokół Niego, jako faktycznego założyciela i kierownika polskiej szkoły teorii plastyczności, skupiło się liczne grono zdolnych współpracowników rozwijających Jego koncepcje naukowe. Szkoła ta zajmuje uznaną, zaszczytną pozycję we współczesnym świecie naukowym.

Bogaty dorobek Prof. OLSZAKA stanowi około 290 publikacji naukowych i technicznych, z których wielka część ukazała się w językach obcych, a liczne pozycje publikowane były za granicą. Wiele prac zostało przez zagraniczne wydawnictwa przetłumaczonych. Część ich wyników weszła do znanych monografii naukowych, jak np. *Encyclopedia of Physics*, tom VI; *Teoria Sprężystości* M. T. HUBERA; *Drang und Zwang* A. i L. FÖRPLÖW itd. Prace Prof. OLSZAKA były szeroko recenzowane. W «Applied Mechanics Reviews» ukazało się ponad 80 recenzji Jego prac, w «Referatiwnyj Żurnał Akademii Nauk ZSRR — Mechanika» opublikowano ich ponad 110. Wiele z nich omówiono w «Mathematical Reviews» (ponad 30), w «Zentralblatt für Mathematik» i innych. Syntezą dorobku Prof. OLSZAKA jest dziesięć monografii naukowych, z których pięć tłumaczonych ukazało się za granicą.

Prof. OLSZAKOWI, ze względu na Jego osobistą pozycję naukową, jak również talenty organizacyjne i, nie zawaham się użyć tego słowa, dyplomatyczne, wsparte biegłą znajomością języków i erudycją oraz wielką umiejętnością obcowania z ludźmi i zjednywania ich dla swych ambitnych poczynań, wielokrotnie powierzano zadania związane z reprezentowaniem nauki polskiej za granicą. Uczestniczył On w ponad 40 międzynarodowych kongresach naukowych, przedstawiając na nich swe prace. Wielekroć przewodniczył obradom, powierzane miał referaty generalne. Był również często przez liczne uniwersytety zapraszany na indywidualne wykłady i odczyty. Ponadto powierzone miał zwarte cykle wykładów, jak np. we Francji (1961), w NRD (1965). W roku 1957 Prof. OLSZAK wygłosił cykl wykładów na 11 uniwersytetach amerykańskich, ponawiając podobną wizytę w roku 1962. Analogiczne cykle wykładów wygłosił również w ZSRR (1955, 1968), w Skandynawii (1963) itp.

Wybitne osiągnięcia naukowe i organizacyjne Prof. OLSZAKA znajdują potwierdzenie w wielu aktach uznania ośrodków zagranicznych. W 1959 roku został członkiem zagra-

nicznym Serbskiej Akademii Nauk w Belgradzie oraz członkiem Académie des Sciences, Inscriptions et Belles Lettres w Tuluzie. Jest członkiem zagranicznym Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk Technicznych w Sztokholmie oraz Fińskiej Akademii Nauk Technicznych w Helsinkach. W 1964 roku Węgierska Akademia Nauk nadała Mu godność swego członka honorowego; jest również członkiem zagranicznym Niemieckiej Akademii Nauk Przyrodniczych Leopoldina w Halle, Akademii Nauk w Turynie, Akademii Nauk w Paryżu, Bułgarskiej Akademii Nauk w Sofii i Austriackiej Akademii Nauk w Wiedniu.

W roku 1962 Prof. OLSZAKOWI godność doktora honoris causa przyznał Uniwersytet w Tuluzie, a w 1963 roku taki sam tytuł zaofiarował Mu Uniwersytet Państwowy w Liège. Godność doktora honoris causa nadały Mu również: Politechnika w Wiedniu (1965),



Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie (1969) oraz Uniwersytet Techniczny w Dreźnie (1970).

Prof. OLSZAK pełnił też wielokrotnie odpowiedzialne funkcje w ramach międzynarodowych organizacji naukowych.⁵ W latach 1957–1970 był wiceprezesem IASS (International Association for Shell Structures), będąc współzałożycielem tego Stowarzyszenia. Jest również współzałożycielem (1947) Stowarzyszenia RILEM (Réunion International des Laboratoires d'Essais et de Recherches sur les Matériaux et les Constructions), które powołało Go w 1962 roku na swego prezesa. Jest członkiem Biura IUTAM (International Union of Theoretical and Applied Mechanics), a od 1946 roku członkiem Stałego Komi-

tetu AIPC (Association International des Ponts et Charpentes). Jest — razem z E. FREYSINETEM, A. A. GWOZDIEWEM i G. MAGNELEM — współzałożycielem (1946) Stowarzyszenia FIP (Fédération International de la Précontrainte), którego wiceprezesem był od chwili jego powołania do roku 1969. Ponadto współdziałał On z wieloma zagranicznymi towarzystwami naukowymi: jest — podobnie jak i Prof. WITOLD NOWACKI — współzałożycielem (1955, Kharagpur) i członkiem The Indian Society for Theoretical and Applied Mechanics, członkiem Iowa Academy of Sciences, Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik i kilku innych. W roku 1966 zaproszony został do Kathmandu w charakterze eksperta przy organizowaniu Wydziałów Technicznych na tamtejszym Uniwersytecie im. Tribhuwana.

Głównym jednak polem działalności Prof. OLSZAKA jest Jego praca naukowo-organizacyjna w kraju. Obok obowiązków kierownika Katedry w Politechnice Warszawskiej i kierownika Zakładu Mechaniki Ośrodków Ciągłych oraz dyrektora Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN powierzono Mu szereg dalszych funkcji, jak np. przewodniczącego Komitetu Mechaniki Stosowanej PAN, Członka Sekretariatu Wydziału IV, zastępcy przewodniczącego Komisji Zagranicznej, członka Komitetu Inżynierii Lądowej PAN, zastępcy przewodniczącego Rady Piśmiennictwa Technicznego Komitetu Nauki i Techniki. Jest współzałożycielem, wiceprezesem (1958–1962) i członkiem Zarządu Głównego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Towarzystwo to, w uznaniu zasług, które położył dla jego powstania i rozwoju, wyróżniło Go w 1970 roku godnością członka honorowego. Prof. OLSZAK był ponadto członkiem kilku rad naukowych (m.in. Instytutu Podstawowych Problemów Techniki, Instytutu Techniki Budowlanej i Polskiego Komitetu Normalizacyjnego, Rady Naukowo-Technicznej przy ministrze Budownictwa) oraz wielu komisji społecznych i fachowych. Za zasługi w pracy społecznej na terenie Śląska Cieszyńskiego, Macierz Szkolna Ziemi Cieszyńskiej nadała Mu swe członkostwo honorowe (1970), a Polski Związek Inżynierów i Techników Budownictwa, którego jest współzałożycielem (1934) i od tej chwili aktywnym członkiem, wyróżnił Go swą Złotą Odznaką.

Prof. OLSZAK znajduje również czas na prace edytorskie. Jest współzałożycielem i redaktorem dwu periodyków Polskiej Akademii Nauk: «Archiwum Mechaniki Stosowanej» («Archives of Mechanics») i «Rozpraw Inżynierskich», członkiem Komitetu Redakcyjnego czasopism «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Techniques», «Archiwum Inżynierii Lądowej», «Polskiego Słownika Biograficznego» PAN. Jest członkiem Międzynarodowego Komitetu Naukowego «Journal de Mécanique» (Gauthier-Villars, Paryż) oraz współwydawcą «Acta Mechanica» (Springer, Wiedeń), «Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik» (Akademie-Verlag, Drezno-Berlin), «International Journal of Nonlinear Mechanics» (Pergamon Press, Oxford). Był wydawcą dwu dzieł kongresowych: *Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity* (Pergamon Press, Oxford, 1958) oraz (wraz z Prof. A. SAWCZUKIEM) *Non-Classical Shell Problems* (North Holland — PWN, 1963).

Wybitne są zasługi Prof. OLSZAKA w dziedzinie dydaktyki i kształcenia młodych pracowników nauki. Jest On niezwykle utalentowanym wykładawcą i mówcą oraz inspiratorem znanych od blisko 25 lat poniedziałkowych seminariów, na których spotykali się i nadal spotykają się ci wszyscy, którzy interesują się zjawiskami pozasprężystymi. Ze śro-

dowiska tego wyszło wielu poważnych badaczy o międzynarodowej renomie; stanowią oni Jego szkołę naukową.

Prof. OLSZAK był promotorem szesnastu prac doktorskich, a nazwiska doktorów wraz z datami uzyskania promocji oraz placówkami, w których odbywały się obrony, podane są na końcu opracowania. Trudno powstrzymać się od podkreślenia, że z tej grupy szesnastu Jego wychowanków jedenastu habilitowało się, dwóch uzyskało tytuły profesorów zwyczajnych, sześciu profesorów nadzwyczajnych, dwóch docentów, trzech samodzielnych pracowników naukowo-badawczych, przy czym jeden z nich jest członkiem rzeczywistym, a jeden członkiem korespondentem Polskiej Akademii Nauk.

Oryginalne koncepcje naukowe Prof. WACŁAWA OLSZAKA, cenne wyniki Jego prac osobistych i zespołowych w dziedzinie współczesnej teorii plastyczności i lepkoplastyczności oraz Jego wybitne zasługi dla organizacji i rozwoju badań w zakresie mechaniki stosowanej i teorii konstrukcji upoważniają do stwierdzenia, że jest on dziś jednym z czołowych reprezentantów nauk technicznych, będąc jednocześnie wielkim patriotą nauki polskiej i jej ambasadorem na arenie międzynarodowej.

Nie można też nie podkreślić wielkiego humanizmu Prof. OLSZAKA, jego serdeczności, życzliwości i chęci służenia pomocą wszystkim, którzy mieli kiedykolwiek zaszczyt z Nim współpracować. Ma On ten wielki dar wyławiania wartościowych jednostek, zachęcania ich do twórczej pracy oraz stwarzania atmosfery pełnowartościowej współpracy z podległymi mu formalnie i organizacyjnie ludźmi.

Prof. OLSZAK jest laureatem nagród państwowych: dwóch I stopnia (1966, nagroda indywidualna za prace z zakresu teorii plastyczności; 1955, nagroda zespołowa za badania teoretyczne i eksperymentalne w dziedzinie konstrukcji sprężonych) oraz jednej III stopnia (1950, nagroda indywidualna za opracowanie koncepcji elementów nośnych ze wstępnie sprężonym zbrojeniem poprzecznym). Został odznaczony Krzyżem Komandorskim z Gwiazdą Orderu Odrodzenia Polski, Krzyżem Komandorskim i Oficerskim tegoż Orderu, Medalem Dziesięciolecia Polski Ludowej, Medalem za Zasługi dla Obrony Kraju, nagrodą naukową I stopnia ministra Szkolnictwa Wyższego. Z odznaczeń zagranicznych Prof. OLSZAK posiada: order bułgarski Cyryla i Metodego I klasy, order francuski «du Mérite pour la Science et l'Invention» (krzyż oficerski), order austriacki «Ehrenzeichen für Wissenschaft und Kunst» (Komandoria), Medal Czechosłowackiej Akademii Nauk, Medal Uniwersytetu w Neapolu, Złoty Medal «pour les Mérites dans la Recherche et l'Invention».

Marek Kwieciński

WYKAZ DOKTORÓW PROWADZONYCH PRZEZ PROFESORA WACŁAWA OLSZAKA

Stefan ZIEMBA	1949, AGH
Czesław EIMER	1950, AGH
Zbigniew BYCHAWSKI	1958, IPPT PAN
Antoni SAWCZUK	1958, PW
Ryszard KOWALCZYK	1959, PW
Zenon MRÓZ	1959, IPPT PAN
Dionizy NIEPOSTYN	1959, PW
Piotr PERZYNA	1959, IPPT PAN
Wojciech URBANOWSKI	1959, PW
Marek KWIECIŃSKI	1962, PW
Zbigniew WESOŁOWSKI	1962, IPPT PAN
Wanda PAPROCKA-GRABCZYŃSKA	1963, PW
Suj BIN-JE	1963, IPPT PAN
Jan RYCHLEWSKI	1964, IPPT PAN
Lesław BRUNARSKI	1965, PW
Wiesław WOJEWÓDZKI	1970, PW

TWÓRCZOŚĆ NAUKOWA PROFESORA WACŁAWA OLSZAKA

MICHAŁ ŻYCZKOWSKI. (KRAKÓW)

Trudno jest pokusić się o dokonanie próby podsumowania twórczości naukowej badacza tak stale czynnego i często publikującego, jak profesor WACŁAW OLSZAK. Jeszcze kilka lat temu opracowanie takie byłoby inne, uboższe nie tylko o poszczególne prace, ale nawet o całe działy twórczości; niewątpliwie za kilka następnych lat wzbogaci się o inne działy, dziś właśnie znajdujące się na naukowym warsztacie Autora. Tak więc niniejsza próba syntezy może pretendować jedynie do ujęcia dorobku na obecnym etapie twórczości.

Niezwykle rozległą twórczość naukową profesora OLSZAKA ujmiemy w pięciu podstawowych działach: teoria sprężystości, teoria plastyczności, reologia, mechanika gruntów — ośrodków sypkich i spoiстых, oraz teoria żelbetu i konstrukcji wstępnie sprężonych. Z działów tych należy szczególnie wyróżnić teorię plastyczności. W okresie międzywojennym i w pierwszych latach po drugiej wojnie światowej teoria sprężystości była w Polsce stosunkowo silnie rozwinięta, głównie dzięki działalności profesora M. T. HUBERA, natomiast teoria plastyczności stanowiła w naszym kraju dziedzinę praktycznie nietkniętą. M. T. HUBER, formułując swoją hipotezę energii odkształcenia postaciowego, przyczynił się do stworzenia podstaw teorii plastyczności, jednakże sam rozwijał dalej zagadnienia tej teorii w niewielkim stopniu. Powstanie polskiej szkoły teorii plastyczności należy przypisać właśnie profesorowi W. OLSZAKOWI, który począwszy od r. 1953 opublikował sto kilkadziesiąt prac z tej dziedziny, własnych lub z ponad 20 współautorami. Prace te zostały następnie podsumowane w opracowanych zbiorowo monografiach [5], [6], [7], [8] i [10]. Wielkim osiągnięciem Autora było również zorganizowanie w r. 1958 sympozjum Międzynarodowej Unii Mechaniki (IUTAM), pt. «Niejednorodność w teorii sprężystości i plastyczności» i zredagowanie książki zjazdowej, wydanej wspólnie przez PWN i Pergamon Press. Wydawnictwo to zostało przyjęte niezwykle przychylnie, a recenzent książki w *Applied Mechanics Reviews*, prof. A. KOCHENDORFER, stwierdził, że zainicjowana przez prof. OLSZAKA przed kilkunastu laty teoria niejednorodności sprężystej i plastycznej owocuje dziś w skali światowej.

Całkowicie nowatorskie są również prace z zakresu reologii i teorii konstrukcji wstępnie sprężonych — dziedzin niemal nie uprawianych w Polsce w poprzednim okresie. I tu również można mówić o stworzeniu polskiej szkoły: ogółem, ze wszystkich dziedzin, profesor OLSZAK opublikował prace wspólne z 42 współautorami, a monografie z zakresu konstrukcji sprężonych, [3], [4], i [9], stanowią trwale pozycje w skali światowej.

Przytoczyliśmy tu celowo liczby współautorów profesora OLSZAKA. Liczby te choć w pewnym stopniu odzwierciedlają niezwykłą umiejętność Autora tworzenia zespołów naukowych i organizowania pracy zespołowej, tak niezbędnej dla zbudowania nowoczesnej szkoły naukowej.

1. Teoria sprężystości

W pierwszym okresie twórczości naukowej profesora OLSZAKA dominowała — obok prac poświęconych konstrukcjom inżynierskim — teoria sprężystości. Kilkadziesiąt prac z zakresu teorii sprężystości można podzielić na trzy zasadnicze grupy: ogólna teoria zagadnień płaskich, zastosowanie metody inwersji i problemy nieklasyczne teorii sprężystości (anizotropia, niejednorodność, fizykalna nieliniowość).

Prace z dziedziny ogólnej teorii płaskiego stanu naprężenia i płaskiego stanu odkształcenia w zakresie sprężystym zostały rozpoczęte opracowaniem monograficznym [2] z r. 1934 i publikacjami [22] i [25] z r. 1936. Szczególnie wiele uwagi poświęcił Autor ponadto jednolitemu ujęciu obu typów zagadnień płaskich, [47], [56], [64], [65]. Wprowadzona przezeń koncepcja uogólnionego współczynnika Poissona została włączona przez M. T. HUBERA do jego *Teorii Sprężystości* już w r. 1948. Profesor OLSZAK podał również ogólną metodę rozwiązania dla obszarów wielospójnych i liczne przykłady.

Podstawy teoretyczne metody inwersji w zastosowaniu do zagadnień płaskich teorii sprężystości zostały sformułowane w monografiach [1] i [2] oraz w najczęściej cytowanej pracy [19], opublikowanej w *Ingenieur-Archiv* w r. 1935. Do ich upowszechnienia przyczynił się niewątpliwie prof. Ludwik FÖPPL (syn), który metodzie stosowanej przez Autora i uzyskanym przez niego wynikom poświęcił wiele uwagi w III tomie swej znanej monografii *Drang und Zwang*. Powtórzyła się tu w pewnej mierze sytuacja sprzed lat dwudziestu, gdy August FÖPPL (ojciec) podobną przysługę wyświadczył M. T. HUBEROWI, udostępniając wyniki jego badań (głównie na temat termosprężystości, teorii twardości i kryterium plastyczności) szerokim kręgom czytelników swego świetnego pięciotomowego podręcznika *Technische Mechanik*, którego dziesiątki nakładów rozchwytywane były błyskawicznie przez pracowników nauki i inżynierów różnych specjalności i były wszystkie rekordy w dziedzinie literatury naukowej.

Metoda inwersji należy do grupy metod odwzorowań konforemnych i umożliwia przekształcenie takich obszarów dwuspójnych, jak pierścień kołowy mimośrodowy lub półpłaszczyzna z otworem kołowym, w obszar pierścienia współśrodkowego, dla którego rozwiązania podstawowych zagadnień teorii sprężystości są znane. Powyższe prace Profesora OLSZAKA stały się podstawą dalszych badań w tej dziedzinie, w szczególności opublikowanych wspólnie z Z. MROZEM prac [107], [120] i [265], dotyczących zastosowania metody inwersji w teorii płyt. Autorzy rozważali płyty kołowe z mimośrodowym otworem kołowym przy różnych warunkach podparcia i obciążenia oraz podali kilka przykładów obliczeń numerycznych. O licznych pracach stosujących metodę inwersji w teorii plastyczności wspomniemy oddzielnie.

Autor poświęcił również uwagę cylindrom grubościennym i pierścieniom współśrodkowym, stanowiącym punkt wyjścia dla metody inwersji. Prace [30] i [36] dotyczą optymalnego projektowania takich ustrojów, mianowicie możliwego wyrównania naprężeń obwodowych.

Najlichniesze prace z zakresu teorii sprężystości dotyczą jednak zagadnień nieklasycznych, w szczególności anizotropii sprężystej. Pierwszą była tu praca [24] z r. 1936, poświęcona tarczom i cylindrom o ortotropii walcowej. Dalsze rozwinięcie tej tematyki przynosi praca [42], referowana na VI Kongresie Mechaniki Stosowanej w Paryżu w r. 1946. Praca [73] omawia teoretyczne i praktyczne aspekty anizotropii sprężystej. Podstawy teoretyczne samonaprężeń w ośrodkach anizotropowych ujęte zostały w pracach [63] i [66]. Liczne prace poświęcił Autor zastosowaniom teorii sprężystości ciał anizotropowych: w pracy [68] uogólniono problem C. Webera dużych odkształceń przy skręcaniu prętów niekołowych na przypadek anizotropii; dalsze rozwinięcie tego zagadnienia podaje praca [198], w której uwzględniono równocześnie działanie siły podłużnej; w pracach [75] i [245] podano analogię matematyczną dla skręcania prętów anizotropowych i rozpatrzono liczne przykłady, natomiast prace [76], [96], [246] i [257], napisane wspólnie z J. NOWIŃSKIM i W. URBANOWSKIM, poświęcone są zagadnieniom termosprężystym w przypadku anizotropii krzywoliniowej.

Dalsze prace dotyczą teorii sprężystości ciał fizykalnie nieliniowych i niejednorodnych. Podstawy teorii nieliniowości fizykalnej sformułował Autor wspólnie z J. NOWIŃSKIM w pracach [84] i [250], przyjmując hipotezę niezmienności współczynnika Poissona. Prace [94] i [256], napisane wspólnie z M. ŻYCZKOWSKIM, podają klasyfikację problematyki jednoczesnej niejednorodności i fizykalnej nieliniowości i kilka rozwiązań szczegółowych. Zagadnieniu klina sprężystego i płaszczyzny nieograniczonej w przypadku niejednorodności i jednoczesnej fizykalnej nieliniowości poświęcono opracowaną wspólnie z J. MURZEWSKIM pracę [242]. Zagadnieniami niejednorodności sprężystej i stanami poprzedzającymi uplastycznienie zajmują się wspólnie z J. RYCHLEWSKIM (prace [169] i [232]).

2. Teoria plastyczności

Jak już wspomnieliśmy w uwagach wstępnych, teoria plastyczności została zapoczątkowana przez profesora OLSZAKA dopiero w latach pięćdziesiątych, jednak rozwijana z dużym rozmachem i licznym gronem współpracowników stała się szybko czołową dziedziną twórczości Autora. Pierwsze prace z r. 1953 dotyczyły ogólnych zagadnień nośności granicznej [80] oraz nośności granicznej prętów ortotropowych [77], [81]. W dalszych swych pracach rozwijał Autor głównie nieklasyczne kierunki teorii plastyczności, mianowicie teorie ciał anizotropowych i niejednorodnych.

Najszerzy zasięg mają prace z zakresu teorii ciał plastycznych niejednorodnych. Opublikowane w r. 1954 prace [85], [87], [251], [252], [253] i [255], podające klasyfikację niejednorodności plastycznej i podstawowe równania w nawiązaniu do teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych i teorii płynięcia plastycznego, stały się punktem wyjścia dla wieloletnich, obszernych badań w tej dziedzinie, prowadzonych przez W. OLSZAKA i Jego Szkołę.

Pojęcie niejednorodności plastycznej nie tylko jest bogate w treść fizykalną i poznawczą, pozwala bowiem ująć zmienne z miejscem cechy mechaniczne ośrodka, co z reguły odzwierciedla realne warunki szerokiej klasy rozpatrywanych procesów; otwiera ono ponadto interesujące jeszcze możliwości badawcze: Autor wykazał bowiem, że pojęcie niejednorodności mechanicznej może być wykorzystane w opracowaniu nowej metody poszuki-

wania rozwiązań efektywnych w dziedzinie zagadnień równowagi sprężysto-plastycznej i plastycznego płynięcia. Jedną z głównych trudności, którą nastrocza teoria plastyczności, wynika z nieliniowego charakteru jej podstawowych zależności, które tylko wyjątkowo pozwalają na bezpośrednie ich całkowanie. Z drugiej strony dopuszczenie pewnych typów funkcji niejednorodnościowych prowadzić może do uzyskania rozwiązań ścisłych rozpatrywanych zagadnień. Zważyć przy tym należy, że do tych funkcji z reguły wprowadzić można parametry swobodne, których wartości następnie określa się w ten sposób, by zbliżyć się możliwie najbardziej do aktualnych warunków rzeczywistych, a więc np. z warunku minimalnego odchylenia od jednorodności czy też niejednorodności określonego typu.

Różnica w stosunku do podejścia klasycznego polega tu więc na tym, że zamiast ścisłych założeń fizykalnych i przybliżonych rozwiązań formalnych, wprowadzamy model fizykalnie przybliżony, dla którego znajdujemy rozwiązanie ścisłe. Może to być rzeczą bardziej korzystną i prowadzić do informacji pełniejszych, aniżeli rozpatrywanie modelu fizykalnie ścisłego, dla którego jednak rozwiązanie poszukiwane być musi dla każdorazowo aktualnych warunków szczególnych w drodze pracochłonnych metod numerycznych. Dodać należy, że metoda Autora umożliwia ocenę błędu przez zawarcie rozwiązania między kresami dolnym i górnym.

Dopuszczenie występowania niejednorodności materiału ma drugi jeszcze, choć spokrewniony, aspekt: stwarza możliwość stosowania metody odwrotnej, polegającej na założeniu pola naprężeń i poszukiwaniu odpowiedniego rozkładu niejednorodności. Metoda taka może służyć bądź do poszukiwania niejednorodności optymalnej ze względów wytrzymałościowych, bądź też do spełnienia innych kryteriów optymalizacyjnych. Jedną i drugą bardzo efektywną metodę stosował Autor wielokrotnie, i to zarówno w rozpatrywaniu zagadnień z dziedziny teorii plastyczności, jak też uprzednio już w teorii sprężystości.

Omówimy z kolei krótko ważniejsze prace poświęcone niejednorodności plastycznej, ograniczając się chwilowo do ciał izotropowych; problemy anizotropii plastycznej zostaną ujęte oddzielnie. Prace [97], [105], [258] i [259], opublikowane wspólnie z W. URBANOWSKIM, dotyczą niejednorodnych walców grubościennych i grubościennych powłok kulistych w zakresie sprężysto-plastycznym. Założono dowolną, ale zależną jedynie od współrzędnej promieniowej r , niejednorodność materiału zarówno w strefie sprężystej, jak i plastycznej, i poddano szczegółowym badaniom kolejność występowania uplastycznienia; określono również rozkład niejednorodności, odpowiadający jednoczesnemu uplastycznieniu się całego badanego elementu. Opublikowane wspólnie z J. MURZEWSKIM i J. GOLECKIM prace [103], [113] i [260], poświęcone są uplastycznianiu niejednorodnej półpłaszczyzny pod działaniem siły skupionej; zbadano, przy jakich typach niejednorodności występuje radialny rozkład naprężeń w półpłaszczyźnie i podano kilka rozwiązań szczegółowych przy założeniu liniowego wzmocnienia plastycznego.

Profesor OLSZAK jako pierwszy wprowadził metodę odwzorowania konforemnego do teorii plastyczności. Poświęcił on w szczególności liczne prace zastosowaniu metody inwersji w teorii ciał plastycznych niejednorodnych. Zastosowanie tej metody ograniczone jest co prawda do pewnych tylko typów niejednorodności, ale prowadzi do efektywnych rozwiązań niektórych trudnych zagadnień teorii plastyczności. Podstawy teoretyczne metody ujął Autor w pracach [130] i [168], uogólniając w ten istotny sposób swą pracę

[19] z r. 1935. Określono dopuszczalną klasę niejednorodności i podano rozwiązanie dla półpłaszczyzny z otworem kołowym. Prace [274] i [275] poświęcono mimośrodowemu cylindrowi kołowemu; w przypadku materiału jednorodnego można było uzyskiwać rozwiązania jedynie na drodze numerycznej, natomiast w powyższych pracach Autor podał stosunkowo proste rozwiązanie analityczne.

Dalsze prace z zakresu zastosowania metody inwersji w teorii plastyczności opublikowane zostały wspólnie z S. ZAHORSKIM. W pracy [158] badano mimośrodowy pierścień rozcięty pod działaniem obciążeń powierzchniowych, poddano analizie pięć typów niejednorodności oraz zastosowano inwersję wewnętrzną i zewnętrzną. W pracach [170], [176], [184], [282] i [283] badano procesy quasi-ustalone i zastosowano metodę odwrotną, dzięki której daje się uzyskać rozwiązania przybliżone dla szerokiej klasy możliwych niejednorodności materiału. Zagadnienia te przedstawiono również na X Międzynarodowym Kongresie Mechaniki w Stresie w roku 1960.

Z innych prac poświęconych teorii plastyczności izotropowych materiałów niejednorodnych wymienimy pracę [163], analizującą zakres sprężysto-plastyczny i nośność graniczną niejednorodnych konstrukcji mostowych, pracę wspólną z J. RYCHLEWSKIM [180], badającą własności geometryczne pól naprężeń w przypadku płaskiego stanu naprężenia oraz pracę [197], referowaną z tym samym współautorem na sympozjum IUTAM w Tbilisi, a rozważającą płaskie stany plastyczne spełniające równanie biharmoniczne. Autorzy pokazali, że własności ogólne linii poślizgu ośrodków niejednorodnych pozwalają poszukiwać rozwiązań przez zastosowanie metod odwrotnych i półodwrotnych. Wspólna z Z. WESOŁOWSKIM praca [241] dotyczy niejednorodnych konstrukcji łukowych. Liczne artykuły podają ogólny przegląd problematyki niejednorodności plastycznej i dorobku polskiego w tej dziedzinie; wymienimy tu prace [110], [112], [127], [137], [146], [151], [194]. Praca [137], opublikowana wspólnie z W. URBANOWSKIM w ramach książki zjazdowej sympozjum IUTAM niejednorodności w teorii sprężystości i plastyczności, została we wspomnianej już recenzji prof. A. KOCHENDÖRFFERA w «Applied Mechanics Reviews» oceniona jako wzorowe przedstawienie dorobku w tej dziedzinie.

Prace z zakresu niejednorodności plastycznej były przez licznych współpracowników profesora OLSZAKA rozwijane dalej w publikacjach samodzielnych. Przykładowo wymienimy tu tylko obszerny cykl prac J. RYCHLEWSKIEGO, poświęcony teorii plastyczności ciał o niejednorodności skokowej.

Dalszym dziełem nieklasycznej teorii plastyczności, szeroko rozwiniętym przez profesora OLSZAKA i Jego Szkołę, jest teoria ciał plastycznie anizotropowych, a szczególnie jednocześnie anizotropowych i niejednorodnych. Oparcie się o założenia wyjściowe tak ogólne ma na celu stworzenie teorii możliwie wiernie odzwierciedlającej rzeczywiste makrowłasności materiału. Podejście takie pozwala objąć programem badań zjawiska nowe i poszukiwać licznych rozwiązań, które — w ciaśniejszych ramach teorii klasycznej — były dla nich dotychczas niedostępne. Liczne są również zastosowania techniczne, i to zarówno w zakresie konstrukcji inżynierskich, jak i mechanicznych oraz lotniczych. Rzecz jasna, że układy w strukturze jednorodnej (lub izotropowej) mieszczą się w takiej analizie jako przypadki szczególne. Do pierwszych prac z powyższego zakresu dały impuls, podobnie zresztą jak już uprzednio w stosunku do ustrojów izotropowych, zagadnienia nośności granicznej płyt, w szczególności płyt ortotropowych, [77], [79], [81], [88], [108],

[109], [247]. Teoria nośności granicznej płyt, rozwinięta przez K. JOHANSENA i A. A. GWOZDIEWA, została w tych pracach uogólniona na ważny technicznie przypadek anizotropii ortogonalnej związany np. ze zbrojeniem odmienniej mocy w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. Jednakże podstawą znacznie rozleglejszych badań, dotyczących ośrodka trójwymiarowego, stała się dopiero seria prac opublikowanych w r. 1956 wspólnie z W. URBANOWSKIM.

W pracach [102], [104], [111], [261], [262] i [263], referowanych na IX Międzynarodowym Kongresie Mechaniki w Brukseli, Autorzy uogólnili sformułowaną przez R. MISESA koncepcję potencjału plastycznego na przypadek niejednorodności i jednoczesnej dowolnej anizotropii krzywoliniowej. Wprowadzono pojęcie tensora modułów plastyczności dla ogólnej anizotropii i zbadano szereg przypadków szczególnych; uogólniono również hipotezę energii odkształcenia postaciowego na przypadek ciał anizotropowych, wyodrębniając tę klasę materiałów anizotropowych, dla których rozkład energii na objętościową i postaciową daje się przeprowadzić. Autorzy wprowadzili następnie funkcje naprężeń we współrzędnych Lamégo; praca [102] zawiera tablice zestawieniowe dla różnych typowych układów współrzędnych. Dalsze rozwinięcie ogólnej teorii zawierają prace [145] i [199].

Przypadki płaskie teorii plastyczności niejednorodnych ciał anizotropowych zostały zbadane szczegółowo w pracach W. OLSZAKA, P. PERZYNY i Cz. SZYMAŃSKIEGO [121], [270], [271]. Autorzy stwierdzili, że przy rozpatrywaniu ciał anizotropowych przez problemy płaskie można rozumieć cztery różne przypadki: gdy przyrosty naprężeń zależą tylko od dwóch zmiennych w rozpatrywanej płaszczyźnie, gdy nie występują odkształcenia normalne do płaszczyzny, gdy zarówno odkształcenia podłużne, jak i kątowe leżą w rozpatrywanej płaszczyźnie, wreszcie gdy mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia w klasycznym sensie. Rozpatrzono szczególne przypadki anizotropii monoklinicznej, ortotropii i izotropii poprzecznej. Dalsze rozwinięcie tej tematyki przynosi praca wspólna z W. URBANOWSKIM [134].

Niezwykle ważne prace podstawowe z zakresu jednoczesnej niejednorodności i anizotropii plastycznej dotyczą sformułowania zasad wariacyjnych dla takich ośrodków. Odnośne twierdzenia wykazano w pracach wspólnych z P. PERZYNA [124], [266], [267], przy założeniu izotropowego wzmocnienia plastycznego i istnienia potencjału plastycznego. Prace [132], [138] i [272] formułują bardziej szczegółowo kryterium stosowalności wykazanych twierdzeń. Twierdzenia te umożliwiły uzyskanie przybliżonych oszacowań dla licznych trudniejszych zagadnień, nie rokujących nadziei na rozwiązanie ścisłe.

Wiele prac poświęcił profesor OLSZAK zastosowaniom teorii niejednorodnych ciał anizotropowych. Wykorzystując wyniki swych pierwszych prac z lat 1953 i 1954 dotyczących podstaw teorii nośności granicznej płyt [77], [80], [81], [88]. Autor podał szereg rozwiązań z zakresu zastosowań ogólnego typu ustrojów płytowych o różnorodnych ukształtowaniach, przy uwzględnieniu różnorodnych warunków brzegowych i poddanych działaniu różnego rodzaju obciążeń, jak również z zakresu zastosowań konstrukcji powłokowych. I tak sprężysto-plastycznemu zginaniu płyt kołowych poświęcone są opublikowane w r. 1957 wspólne z J. MURZEWSKIM prace [122], [123], [125], [268] i [269]. W pracach tych uwzględniono niejednorodność sprężystą i plastyczną płyty, zależną od współrzędnej promienio-

wej r , oraz — dopuszczając ściślność materiału — rozważono kilka hipotez odnośnie zmian współczynników odkształcenia poprzecznego w zakresie sprężysto-plastycznym.

Również z r. 1957 pochodzą pierwsze prace, dotyczące niejednorodności i anizotropii powłok plastycznych: praca wspólna z A. SAWCZUKIEM [126] i praca [128], rozważające nośność graniczną cienkościennych powłok obrotowo-symetrycznych. Dalsze badania w tym kierunku przynoszą prace [136], [150], [152], [162], [165] i [166]. Zależności nośności granicznej powłok od przyjętego warunku plastyczności poświęcona jest praca wspólna z A. SAWCZUKIEM [143]. Warunki plastyczności dla przekroju niejednorodnych ortotropowych płyt i powłok zostały sformułowane w pracach W. OLSZAKA i R. SANKARANARAYANANA [188], [285], [288]. Podsumowanie dorobku światowego z dziedziny nośności granicznej i odkształceń sprężysto-plastycznych powłok ze szczególnym uwzględnieniem niejednorodności i anizotropii zawierają wspólny z A. SAWCZUKIEM referat generalny na kongresie w San Francisco [185] oraz prace przeglądowe tychże Autorów [190] i [204] i ich monografia [10]. Prace z dziedziny anizotropowych płyt i powłok plastycznych były również kontynuowane przez licznych współpracowników profesora OLSZAKA. Przykładowo wymienimy tu jedynie prace A. SAWCZUKA, M. KWIECIŃSKIEGO i D. NIEPOSTYNA z teorii płyt, oraz prace A. SAWCZUKA i J. RYCHLEWSKIEGO z teorii powłok.

Z innych zastosowań teorii niejednorodnych ciał anizotropowych należy wymienić serię prac dotyczących plastycznego zginania grubościennego wycinka walcowego. Opublikowane wspólnie z S. ZAHORSKIM prace [140], [147] i [153] uogólniają rozwiązanie zagadnienia Shaffera i House'a na przypadek ortotropii i niejednorodności; założono nieściślność materiału, płaski stan odkształcenia i niejednorodność zależną od współrzędnej promieniowej r . Autorzy określili kolejność tworzenia się stref uplastycznionych, a także rozkład niejednorodności, odpowiadający jednoczesnemu uplastycznieniu całego wycinka.

Wymienione prace nie wyczerpują bogatego dorobku Autora z zakresu teorii plastyczności; liczne pozostałe prace odzwierciedlają szeroki wachlarz Jego zainteresowań. Wymienimy tu np. pracę [106] formułującą zasadę ekstremalną w teorii nośności granicznej płyt i stwierdzającą istnienie analogii matematycznej do teorii stanów granicznych geodynamiki; pracę [144] poświęconą probabilistycznemu ujęciu teorii nośności granicznej; pracę [200] rzucającą nowe światło na szeroko dyskutowaną w literaturze światowej koncepcję istnienia naroża plastycznego; pracę [218] dotyczącą teorii drgań sprężysto-plastycznych. Wspólną z P. PERZYŃĄ pracę [205] referował profesor OLSZAK na XI Międzynarodowym Kongresie Mechaniki w Monachium w r. 1964; Autorzy sformułowali w niej podstawy teorii plastyczności przy warunku plastyczności zależnym w sposób jawny od czasu; zależność taka może być związana np. z nagrzewaniem ciała lub poddaniem go napromieniowaniu. Dalsze rozwinięcie tej tematyki przynosi praca [234].

Niektóre z omówionych rozwiązań zostały potwierdzone przez badania eksperymentalne prowadzone u nas i za granicą, podczas gdy w pracach [100] i [254], napisanych wspólnie z A. SAWCZUKIEM, przedstawiono wyniki weryfikacji doświadczalnej teorii nośności granicznej płyt, ze szczególnym uwzględnieniem płyt ortotropowych. Wiele troski poświęcał Autor udostępnieniu uzyskanych wyników praktyce technicznej i ich licznym zastosowaniom. Dotyczy to w szczególnej mierze projektowania i obliczania konstrukcji inżynierskich [148], [149], [226], [243], [244] oraz teorii nośności granicznej płyt i powłok.

Osobną uwagę wypada poświęcić monografiom z zakresu teorii plastyczności, [5], [6], [7], [8] i [10], opracowanym z zespołami współpracowników. Przedstawiają one liczne nowoczesne działy teorii plastyczności w sposób ścisły, a zarazem możliwie przystępny. Niemal każda z nich została przełożona na jeden lub dwa języki obce, lub inne języki obce (gdy oryginał okazywał się w języku angielskim), co stanowi dobitny wyraz uznania ze strony nauki światowej. Poszczególne wydania znikają przy tym bardzo szybko z półek księgarskich, stanowiąc obecnie jedynie «białe kruki» w sprzedaży antykwarycznej.

Za prace swe w dziedzinie teorii plastyczności Autor wyróżniony został w r. 1966 indywidualną Nagrodą Państwową I Stopnia, a naukowe osiągnięcia grupy jego bliskich współpracowników i waga opracowywanych przez nich zagadnień podkreślone zostały przez przyznanie im w r. 1968 Nagrody Państwowej II stopnia; wyróżnieni zostali profesorowie Z. MRÓZ, P. PERZYNA, J. RYCHLEWSKI, A. SAWCZUK i W. SZCZEPIŃSKI.

3. Reologia

Na zjawiska reologiczne zwrócił WACŁAW OLSZAK uwagę już w okresie przedwojennym, podkreślając ich wielkie znaczenie w teorii konstrukcji inżynierskich [31]. Własne badania naukowe w tym kierunku rozwinął jednak dopiero po podjęciu, w okresie powojennym, szerokiej tematyki w zakresie zjawisk nieodwracalnych; pierwsze jego prace z dziedziny reologii pochodzą z lat pięćdziesiątych. Są to prace wspólne z J. LITWINISZYNEM [78], [248], podające pewien nieliniowy model reologiczny, prace [86], [249] dotyczące reologii elementów uzwojonych, wreszcie prace wspólne z P. PERZYNA [132], [142], [279], formułujące ogólne twierdzenia wariacyjne lepkościowości i precyzujące kryteria ich stosowalności. Zasadniczy jednakże okres twórczości Autora w zakresie reologii przypada na lata sześćdziesiąte. W dążeniu, by wyjść z założeń możliwie ogólnych i rozszerzyć je również na dziedziny nieklasyczne, jak niejednorodność i anizotropia, kierowali się Autorzy intencją, by w rozważaniach swych zbliżyć się możliwie najbardziej do warunków realnych. Wyniki badań podstawowych służyły im następnie jako punkt wyjścia przy rozwiązywaniu szeregu zagadnień do tej pory nie opracowanych, które jednak z punktu widzenia naukowego lub technicznego zasługują na uwagę. Prace z tego okresu można podzielić na dwie zasadnicze grupy: dotyczą one ogólnych zagadnień lepkoplastyczności oraz reologii cienkościennych powłok. Prace dotyczące reologii elementów uzwojonych omówimy w oddzielnym punkcie.

Za pierwszą publikację z lepkoplastyczności można uznać napisaną wspólnie z P. PERZYNA pracę [179], dotyczącą rozchodzenia się fal sferycznych w ośrodkach sprężysto-lepkoplastycznych, referowaną na międzynarodowej konferencji w Marsylii w r. 1962. Zastosowano w niej metodę charakterystyk i określono efektywnie ruch czoła fali. Praca [187] z r. 1963 rozpoczyna serię badań nad stanami krytycznymi, warunkującymi przejście ośrodka ze stanu fizycznie liniowego do stanu nieliniowego i pojawienie się pierwszych odkształceń trwałych typu lepkoplastycznego. Praca ta stanowi uogólnienie koncepcji M. REINERA i K. WEISENBERGA i jest oparta na rozważaniach energetycznych. W pracach [286] i [287] wprowadzono pojęcie wewnętrznych poziomów organizacji poszczególnych elementów sprężystych i lepkich i dla każdego z tych elementów określono odpowiednie kryterium przejścia w stan plastyczny. Interpretację energetyczną stanów krytycznych

podaje praca wspólna z Z. BYCHAWSKIM [213]. Dalsze rozwinięcie tej tematyki stanowi praca [240].

Liczne prace poświęcił profesor OLSZAK równaniom konstytutywnym, charakteryzującym zachowanie się ośrodków sprężysto-lepkoplastycznych, i ogólnej ich teorii. Pierwsze z nich, [193] i [203], napisane wspólnie z P. PERZYŃĄ, dotyczą problematyki gruntów, których własności sprężysto-lepkoplastyczne wykazują wielką różnorodność. Następne prace tych Autorów [211] i [214] rozważają ogólny przypadek materiałów sprężysto-lepkoplastycznych, dopuszczając anizotropię i duże odkształcenie. Dalsze prace [220], [223] i [231] naświetlają procesy sprężysto-lepkoplastyczne z punktu widzenia zasad termodynamiki i dyskutują wynikające stąd ograniczenia. Zjawiska relaksacji w ośrodkach sprężysto-lepkoplastycznych były przedmiotem pracy [225]. Ogólne ujęcie problematyki lepkoplastyczności i przegląd ważniejszych osiągnięć zawierają prace [224] i [235], praca wspólna z Z. BYCHAWSKIM [227] i prace wspólne z P. PERZYŃĄ [228] i [238].

Prace z zakresu reologii powłok należą również w znacznej większości do najnowszego okresu twórczości profesora OLSZAKA. Pierwsze badania z tej dziedziny zostały ujęte w pracach [101] i [161], a przegląd wcześniejszego dorobku światowego zawierają prace wspólne z A. SAWCZUKIEM [185] i [190]. Pełzanie powłok obrotowych w zakresie geometrycznie nieliniowym omawia praca wspólna z Z. BYCHAWSKIM, [212], referowana na symposium IUTAM w Kopenhadze w r. 1967. Dalsze prace z tym samym współautorem rozważają stadium zniszczenia w wyniku dużych ugięć przy pełzaniu powłok, [221], i membran obrotowo symetrycznych [233]; Autorzy zastosowali tu zaproponowane wcześniej kryterium zniszczenia przy pełzaniu [213]. Badania w tym kierunku kontynuowane są w pracy wspólnej z Z. BYCHAWSKIM [239], referowanej na kongresie mechaniki w Warnie.

4. Mechanika gruntów, ośrodki sypkie i spoiste

Analogia formalna, jaka istnieje pomiędzy teorią plastyczności a teorią ośrodków sypkich, inspirowała Autora do rozwinięcia mechaniki gruntów oraz ośrodków sypkich i spoistych, w szczególności ich stanów granicznych. Pojęcie makroniejednorodności okazało się z natury rzeczy nader aktualne. Prace poświęcone problematyce z tym związanej omawiamy oddzielnie z uwagi na ich po części odrębny charakter i odmienne przeznaczenie, choć łączą się one częściowo zarówno ze sprężystością i plastycznością, jak i reologią.

Zainteresowania profesora OLSZAKA w omawianym kierunku — choć o mniejszym zasięgu w porównaniu do innych dziedzin — rozwijały się przez cały okres twórczości. Prace z lat trzydziestych dotyczyły głównie mechaniki gruntów w nawiązaniu do problemów budownictwa inżynierskiego [21]. W latach pięćdziesiątych Autor, rozszerzając krąg swych zainteresowań na teorię ośrodków sypkich i spoistych, uogólnia w pracy [95] koncepcję W. W. SOKOŁOWSKIEGO na przypadek niejednorodności materiału i podaje klasyfikację możliwych typów niejednorodności; w pracy [141] rozważa powierzchnie graniczne w formie paraboloidy obrotowej i stożka kołowego, przy dopuszczeniu niejednorodności jedno- i dwufunkcyjnej. Szczegółowej analizie poddaje przypadek płaskiego stanu odkształcenia.

Ogólniejsze podejście do mechaniki gruntów reprezentują prace wspólne z P. PERZYŃĄ [193], [203], uwzględniające zjawiska reologiczne i traktujące jako materiały sprężysto-lepkoplastyczne; koncepcja taka umożliwiła określenie zjawisk, zachodzących w gruntach z biegiem czasu. Efekty lepkoplastyczne w mechanice gruntów z punktu widzenia problematyki budownictwa inżynierskiego naświetla praca [217], referowana przez Autora na międzynarodowym kongresie w Weimarze w r. 1967.

5. Teoria żelbetu i konstrukcji sprężonych

Teoria żelbetu i konstrukcji sprężonych wraz z zagadnieniami pokrewnymi (tworzenie się rys i szczelin, elementy uzwojone) była rozwijana przez profesora OLSZAKA niemal równomiernie w ciągu całego okresu Jego dotychczasowej twórczości.

Pierwsza praca z teorii żelbetu, dotycząca obliczania wytrzymałości na zginanie belek jedno- i dwustronnie zbrojonych, została opublikowana już w r. 1928 [13]. Wysokociśnieniowym zbrojonym rurociągom żelbetowym poświęcił Autor prace [18], [20], [27] i [39], uwzględniając anizotropię ośrodka i proponując optymalizację zbrojenia. Liczne prace z lat trzydziestych dotyczą zastosowań teorii żelbetu: przy wykonywaniu obudowy górniczej, [23], [26], [28], i przy budowie schronów przeciwlotniczych [29], [34], [35]. Obszerne opracowanie [34] stanowiło rozprawę habilitacyjną Autora. Prace powojenne dotyczą głównie nośności granicznej i reologii konstrukcji żelbetowych [101]; we wspólnej z A. SAWCZUKIEM pracy [173] podano metodę obliczania nośności granicznej zbiorników żelbetowych.

Lata czterdzieste przynoszą szybki rozwój teorii konstrukcji wstępnie sprężonych w skali światowej — profesor OLSZAK należy do pionierów tego typu konstrukcji w Polsce. Po raz pierwszy zwraca w r. 1937 uwagę na podstawowe znaczenie i głęboko sięgające efekty planowego regulowania przepływu sił wewnętrznych w konstrukcjach poprzez zabieg wstępnego ich, sprężania [31], podkreślając zarazem istotną przy tym rolę odkształceń plastycznych i reologicznych. Pierwsza powojenna jego praca z tej dziedziny pochodzi z r. 1946, [43], i dotyczy sprężonych belek i płyt. Praca [46], formułująca teorię elementów sprężonych przy zbrojeniu spiralnym (śrubowym), była przez Autora referowana na VII Międzynarodowym Kongresie Mechaniki w Londynie w r. 1948; rozszerzona wersja tej pracy została opublikowana w Polsce, [55], wyniki dalszych badań przynosi praca [67]. Praca [69] analizuje wpływ własności mechanicznych materiałów na teorię ustrojów sprężonych.

Liczne prace formułują podstawy teoretyczne konstrukcji sprężonych i podają przegląd osiągnięć w skali światowej ze szczególnym uwzględnieniem osiągnięć polskich. Należą tu przede wszystkim monografie [3], [4] i [9]. Monografia [3], która ukazała się w r. 1955, podaje obszerny, chronologicznie zestawiony wykaz piśmiennictwa światowego. Napisana wspólnie z S. KAUFMANEM, Cz. EIMEREM i Z. BYCHAWSKIM dwutomowa monografia [4] stanowi najobszerniejsze w Polsce i jedno z najobszerniejszych w literaturze światowej opracowań całokształtu zagadnień teoretycznych i technicznych z zakresu konstrukcji sprężonych; wiele uwagi poświęcono w niej takim zagadnieniom teoretycznym, jak reologia konstrukcji sprężonych, ujęcie probabilistyczne bezpieczeństwa konstrukcji, konstrukcje statycznie niewyznaczalne, oraz problemom technologicznym (metody uzyskiwa-

nia siły sprężającej), a także metodom obliczania poszczególnych typów konstrukcji. Nie tracąc z oczu technicznego wykorzystania uzyskanych wyników, Autor stara się wprowadzać je w życie. Celowi temu służy między innymi monografia [9], napisana wspólnie z S. KAUFMANEM i Cz. EIMEREM, a wydana przez «Arkady» w ramach serii *Budownictwo Betonowe*; omawia ona szczegółowo zagadnienia teorii i realizacji konstrukcji wstępnie sprężonych. Podobny cel miało opracowanie pierwszej obowiązującej u nas normy PKN, dotyczącej projektowania i wykonawstwa ustrojów sprężonych [157]. Szczegółowe, krytyczne omówienie dorobku światowego do r. 1955 z zakresu konstrukcji sprężonych zawiera praca [98], opublikowana jako wstępny artykuł przeglądowy w miesięczniku «Applied Mechanics Reviews». Dalszymi pracami przeglądowymi są [99], [129], [206], [210].

Wiele uwagi poświęcił profesor OLSZAK teorii elementów uzwojonych. Idea «poprzecznego» wzmocnienia elementów ściskanych, wykonanych z materiałów kruchych, została zapoczątkowana już w XIX wieku, jednak teoria tych elementów oparta o założenia liniowej sprężystości prowadziła do wyników całkowicie błędnych, sprzecznych z wynikami badań eksperymentalnych. Autor rozpoczął już w latach trzydziestych opracowywanie ogólniejszej teorii elementów uzwojonych, uwzględniając anizotropię i nieliniowość fizykalną materiału oraz efekty reologiczne. W okresie przedwojennym ukazały się na ten temat jedynie dwie krótkie prace [38] i [41]; większość badań z tego okresu została po znacznym ich uogólnieniu i rozszerzeniu opublikowana dopiero w r. 1960, [159], [160], [276], [277], [278]. W pracach [159] i [276] rozpatrywano stany użytkowe elementów uzwojonych, zakładając sprężystość odkształceń, ale uwzględniając anizotropię rdzenia. Określeniu sprężystych i plastycznych modułów i plastycznych modułów anizotropii rdzenia została poświęcona praca [277]. W pracach [160] i [278] rozpatrywano najważniejszy z punktu widzenia zastosowań problem nośności granicznej elementów uzwojonych. Stwierdzono możliwość występowania dwóch schematów zniszczenia, odpowiadających z osobna wyczerpaniu nośności rdzenia lub zbrojenia. Nośność graniczną rdzenia określono przy tym w oparciu o liniową obwiednię Mohra; przypadkom obwiedni parabolicznej poświęcił Autor odrębne prace [167] i [280], stwierdzając istotne różnice ilościowe i jakościowe.

Dalsze prace z zakresu elementów uzwojonych poświęcone są wstępnemu sprężeniu i efektom reologicznym. Efekt wstępnego sprężenia i możliwe fazy zniszczenia były badane w pracach [55] i [57]. Obszerne badania nad wpływem reologicznych własności materiałów na pracę elementów uzwojonych rozpoczął Autor w opublikowanych w r. 1954 pracach [86] i [249]. W opublikowanych wspólnie z A. STĘPNIEM pracach [171], [181], [183], [192] i [284] naświetlono wpływ pełzania i relaksacji rdzenia na pracę rozpatrywanych konstrukcji w oparciu o różnorodne teorie pełzania; szczególną uwagę zwrócono na teorię dziedziczenia N. Ch. ARUTIUNIANA, opisującą w sposób możliwie wierny zjawisko pełzania betonu. Praca [192] była referowana na VII Kongresie Międzynarodowego Stowarzyszenia Konstrukcji Mostowych (AIPC) w Rio de Janeiro w r. 1964. Wpływ fizykalnej nieliniowości rdzenia na stany użytkowe i nośność graniczną elementów uzwojonych został poddany szczegółowej analizie w pracach wspólnych z A. STĘPNIEM [195] i [229].

Do omawianej problematyki materiałów kruchych zaliczamy również kilka prac teorii rozprzestrzeniania się rys i szczelin. Pierwsza praca z tej dziedziny, [264], pochodzi z r. 1957.

W pracach [133] i [135] rozważał Autor przebieg zjawiska zarówno z punktu widzenia teorii sprężystości, jak i plastyczności. Przeprowadzone wspólnie z A. M. HAASEM i C. A. LOBRY DE BRUYNEM obszerne badania nad wpływem tworzenia się rys i pęknięć na korozję zbrojenia, [154], na sztywność zginania, [155], oraz propozycja normalizacji odnośnych przepisów, [156], były referowane na sympozjum RILEM w Sztokholmie w r. 1959.

6. Prace z innych dziedzin

Wymienionych pięć dziedzin obejmuje zasadnicze kierunki twórczości naukowej profesora OLSZAKA. Jednakże kilka prac, zarówno z najwcześniejszego okresu twórczości, jak i z lat ostatnich, nie mieści się w przyjętym schemacie. Należy tu na przykład pierwsza publikacja [11], z r. 1922, powstała w wyniku obserwacji poczynionych w czasie praktyki wakacyjnej przy budowie kolei Warszawice–Chybie, a podająca uproszczony sposób obliczania torów. Praca [12] dotyczy zagadnień parcia hydrodynamicznego na ruchome konstrukcje jazowe, podczas gdy szereg dalszych publikacji nawiązuje do zagadnień technicznych, z którymi Autor zetknął się z racji swej działalności inżynierskiej. Należą do nich prace [14], [32] i [33] dotyczące konstrukcji mostowych, prace [16], [17] i [26] związane z problematyką w zasadzie górniczą, interpretowaną jednak na tle teorii sprężystości.

Z nowszych prac sklasyfikujemy tu pozycję [89], opracowaną wspólnie z S. KAJFASZEM i J. PIETRZYKOWSKIM, a proponującą pewną nową metodę pomiaru wytrzymałości na rozciąganie materiałów kruchych. Wypada tu zaliczyć również pracę [182], dotyczącą badań elastooptycznych, napisaną wspólnie z B. LEWICKIM bardzo ogólną pracę [219] — formułującą obiektywne kryteria bezpieczeństwa konstrukcji, a przede wszystkim jedną z najnowszych publikacji [237], napisaną wspólnie z J. ZAWIDZKIM, dotyczącą nowoczesnej dziedziny biomechaniki. Autorzy zajęli się oceną wpływu indywidualnych własności nieliniowo sprężystych ciała badanego człowieka na wynik pomiarów ciśnienia krwi.

Liczne prace profesora OLSZAKA, mające charakter artykułów — dyskusyjnych, sprawozdawczych lub biograficznych — zostały oznaczone symbolem *D* w wykazie prac, natomiast nie zostały oddzielnie ujęte w obecnym opracowaniu.

Obszerą pozycję stanowią również prace popularyzacyjne, tak cenione ostatnio w nauce światowej. Kilkanaście prac tego typu opublikował Autor w miesięcznikach, tygodnikach i dziennikach; dzięki swej aktualności i przystępności spotkały się one z uznaniem najszerzych kręgów czytelników.

Szczególnie bogaty jest również dorobek profesora OLSZAKA w zakresie prac redakcyjnych. Jest on jednym ze współzałożycieli i wieloletnim redaktorem pierwszego i najbardziej rozpowszechnionego czasopisma polskiego z zakresu mechaniki stosowanej, «Archiwum Mechaniki Stosowanej», ukazującego się od r. 1949 jako kwartalnik, a od r. 1957 jako dwumiesięcznik. Jest współzałożycielem i członkiem kolegium redakcyjnego Biuletynu Zagranicznego Polskiej Akademii Nauk w zakresie nauk technicznych; redaktorem «Rozpraw Inżynierskich» (1960–1970) i «Biblioteki Mechaniki Stosowanej», a ponadto bierze udział w wydawaniu kilku innych czasopism krajowych. Oddzielnie należy podkreślić szczególnie zaszczytne prace redakcyjne przy redagowaniu czasopism uka-

zujących się za granicą. Profesor OLSZAK jest współredaktorem dwumiesięcznika «Acta Mechanica», wydawanego w Austrii przez Springer-Verlag, oraz jest członkiem rad redakcyjnych «Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik» (Drezno-Berlin), «Journal de Mécanique» (Paryż), «International Journal of Non-Linear Mechanics» (Oxford) i kilku innych.

Należy podkreślić nie tylko rozległość działalności i tematyki Autora, lecz jednocześnie głębokość ujmowania poszczególnych zagadnień oraz stosowanie nowoczesnego i różnorodnego narzędzia matematycznego. Profesor WACŁAW OLSZAK nie tylko stworzył polską szkołę teorii plastyczności, nie tylko wniósł trwały wkład do rozwoju teorii sprężystości, reologii, mechaniki gruntów, teorii żelbetu i konstrukcji sprężonych, lecz referując swe prace na dziesiątkach kongresów międzynarodowych, publikując ogółem w 26 krajach, w 11 językach, wreszcie działając czynnie w licznych międzynarodowych organizacjach naukowych, szeroko rozślał osiągnięcia nauki polskiej w powyższych dziedzinach.

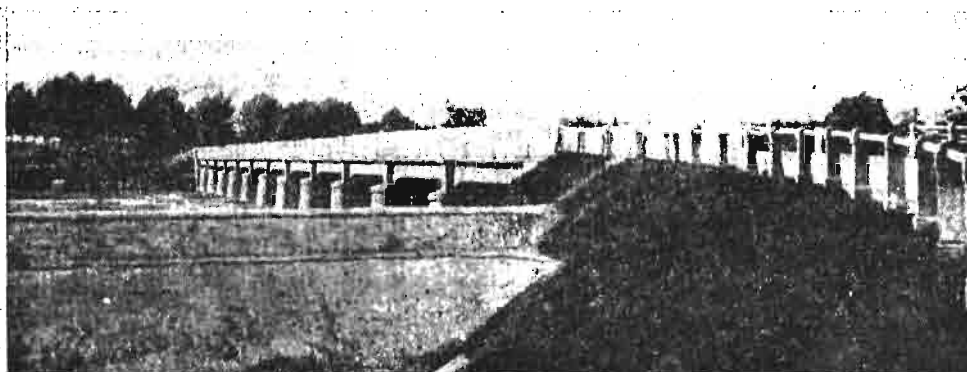
WACŁAW OLSZAK — SYLWETKA INŻYNIERA

STANISŁAW KAJFASZ (WARSZAWA)

Dyplom inżyniera dróg i mostów uzyskał WACŁAW OLSZAK w roku 1925 na Politechnice Wiedeńskiej, w wieku lat 23, kończąc studia z oceną *summa cum laude*.

Rozpoczyna pracę zawodową w roku 1925. Jest kolejno kierownikiem budowy mostów i obiektów inżynierskich, pracuje w Śląskim Urzędzie Wojewódzkim (Wydział Robót Publicznych) w latach 1927–1928, następnie — na stanowisku kierownika jednego z działów — w 70-osobowym Biurze Konstrucyjnym koncernu przemysłowego S. A. Giesche (Huta Uthemana w Szopienicach). Od roku 1929 pracuje na terenie Zagłębia Śląskiego i Dąbrowskiego w charakterze autoryzowanego inżyniera cywilnego, wykonując projekty szeregu obiektów inżynierskich i budowli przemysłowych, ekspertyzy naukowe i naukowo-techniczne. Jest rzeczoznawcą Banku Gospodarstwa Krajowego w Katowicach.

Już pierwsze zadanie, kierownictwo budowy żelbetowego mostu (długości 180 m, szerokości jezdni 6,6 m) na Wiśle pod Goczałkowicami, budowy wykonywanej przez 300-osobową załogę, było poważnym przedsięwzięciem inżynierskim [14]¹⁾ (rys. 1).



Rys. 1

Projekt został opracowany w roku 1925, w tym samym roku rozpoczęto budowę, most został oddany do użytku w lipcu 1927. Posiadał on 12 przęseł o rozpiętości 14,8 m o konstrukcji belek ciągłych trójprzęsłowych. Wysokość belek na podporach mierzyła

¹⁾ Patrz wykaz publikacji Wacława Olszaka, str. 213

1,7 m, w przęśle 1,1 m, odstęp belek wynosił 1,8 m, grubość płyty 24 cm. W czasie budowy filarów mostowych (posadowionych na palach) musiano uporać się z kurzawką, silnym dopływem wody wstępnej. Zużyto 2600 m³ betonu, koszt budowy wyniósł 533 tys. zł.

Nadzór techniczny z ramienia Śląskiego Urzędu Wojewódzkiego sprawował dr inż. S. KAUFMAN, co, jak zobaczymy, stało się początkiem wieloletnich kontaktów i współpracy obu osób. Roboty wykonała firma «Inżynierowie St. i A. Hajduk» z Cieszyna.

Projektuje z kolei, razem z S. KAUFMANEM, żelbetowy most łukowy na Wiśle pod Nowym Bieruniem. Most posiadał cztery sklepienia o rozpiętości 28+42+28+28 m. Zaprojektowany został jako czteroprzęstowy łukowy ustrój ciągły.

W czasie od roku 1928 do wybuchu wojny rozwinął WACŁAW OLSZAK szeroką działalność w dziedzinie projektowania budowli przemysłowych, w szczególności w zakresie obiektów górniczych i hutniczych na terenie Zagłębia Śląsko-Dąbrowskiego. W tym czasie powstały Jego liczne projekty budowli inżynierskich o różnorodnym przeznaczeniu, częstokroć nietypowych i o rozwiązaniach oryginalnych. Wiele hal maszynowych, wieże wodne, fundamenty pod maszyny, podszybia kopalni w Chwałowicach i Czerwionce, podziemna hala pomp w kopalni «Matylda», zbiorniki w Lublińcu, Hucie «Pokój» i Hucie «Baildon», żelbetowe rurociągi wysokich ciśnień dla rozprowadzania płynnej podsadzki w kopalniach węgla kamiennego [18], [27], obudowa szybów i podziemnych chodników w kopalniach węgla [23], [28], [30] i wiele obiektów zrealizowanych na ruchomych i niebezpiecznych, podkopanych terenach górniczych — stanowią przykłady tej urozmaiconej i bogatej działalności inżynierskiej W. OLSZAKA.

Uprzednio już w biurze konstrukcyjnym w Szopienicach nabył wiele doświadczenia w zakresie projektowania konstrukcji stalowych, które były ówczesnie szeroko stosowane w przemyśle. Skorzysta z zebranych tam wiadomości w latach późniejszych jako autoryzowany inżynier cywilny oraz jako współautor projektu mostu stalowego przy ul. Karowej w Warszawie, a później jeszcze jako badacz-teoretyk.

Z tego czasu pochodzą też liczne Jego ekspertyzy dotyczące budowli i urządzeń przemysłowych. Niektóre z proponowanych rozwiązań były oryginalne i śmiałe, jak np. sposób usunięcia błędu w projekcie i wykonaniu fundamentu pod turbinę wysokoobrotową w kopalni węgla w Jaworznie. Chodziło o konstrukcję żelbetową, której obliczenie statyczne było wprawdzie poprawne, natomiast chybiona analiza dynamiczna. Konstrukcja ta bowiem, przy obrotach bliskich użytkowym, wpadała z turbiną w rezonans. Wzmocnienie ustroju fundamentowego ze względów konstrukcyjnych i z uwagi na liczne przewody i urządzenia ruchowe było niemożliwe. W tej sytuacji WACŁAW OLSZAK zaproponował usunięcie jednego z jego elementów nośnych, by z częstością drgań własnych oddalić się należycie od użytkowej liczby obrotów maszyny. Dyrekcja Kopalni, nieufna i w opozycji do projektu «osłabienia» konstrukcji, zwróciła się o dodatkową ekspertyzę do znanego uczonego wiedeńskiego, prof. R. SALIGERA, który — po zapoznaniu się z trudnościami — w pełni zaakceptował propozycje swego byłego słuchacza. W następstwie realizacji zabiegu zespół turbinowy pracował już nienagannie.

Wiele uwagi poświęca WACŁAW OLSZAK problematyce obudowy podziemnych chodników górniczych, przekopów i podszybi, wykonanych z żelbetu. Stwierdza np., że zbrojenie umieszczone na wewnętrznej stronie obudowy w sposób tradycyjny ulega często — na skutek deformacji konstrukcji pod wpływem ogromnych parć górotworu — wrywaniu

z miąższu betonu i wychodzi na zewnątrz na podobieństwo cięciwy łuku. Aby temu zaradzić, proponuje zastępowanie ciągłego zbrojenia obwodowego przez stosowne krótsze pręty prostoliniowe układane według linii łamanej, a kotwione w strefie zewnętrznej obudowy [23].

Wspólnie z inż. W. ŻELESKIM patentuje i realizuje prefabrykowaną konstrukcję cylindryczną obudowy składanej z trzech elementów: dna i dwóch segmentów łukowych łączonych przegubowo w kluczu. Ustrój taki, statycznie wyznaczalny, ma zalety dużej prostoty w obliczeniach statycznych. Tym, co napotyka jednak trudności, jest sam dobór układu sił działających na konstrukcję obudowy. Ocena bowiem wielkości parcia górotworu w skomplikowanych warunkach geologicznych, przy równoczesnym istnieniu zaburzeń powodowanych przez sąsiednią obudowę górniczą, była zawsze i chyba na długo jeszcze pozostanie zadaniem trudnym i złożonym. Pierwsze przybliżenie jego rozwiązania w określonych warunkach poszukiwane być może w wielkoskalowym schemacie sprężystym. W. OLSZAK, zafrapowany tym problemem, podejmuje zagadnienie to w dwojakim aspekcie: opracowania teorii zjawisk związanych z drażnieniem chodników i przekopów w caliznie skały oraz wyciągnięcia z niej praktycznych wniosków, pożytecznych dla inżynierów budujących tunele i górników pędzących przekopy podziemne. Na tym tle powstała jego praca doktorska [2], obroniona z odznaczeniem w roku 1934 na Politechnice Warszawskiej. Posunęła ona zagadnienie to naprzód rozpatrując nie jedno, jak działo się to dotychczas, lecz dwa lub większą liczbę biegnących obok siebie wydrążań podziemnych i badając ich wpływ na otaczający górotwór. Autor miał przy tym możność porównania uzyskanych przez siebie wyników z rezultatami badań prowadzonych w innych ośrodkach, w szczególności w Szwajcarii (H. SCHMID), co pozwoliło mu na określenie warunków, w jakich wyniki jego analizy mogą z powodzeniem być stosowane.

Dopiero z pewnym opóźnieniem specjaliści nasi z zakresu górnictwa ocenili walory pracy [2], która w następstwie tego była przez nich wielokrotnie cytowana i wykorzystywana. W szczególnej mierze zainteresowany był nią Prof. A. SAŁUSTOWICZ z Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, wielki znawca zagadnień tąpnięcia w kopalniach, z którym Autor był w częstych kontaktach, zwłaszcza przy rozszerzeniu badań na górotwory o własnościach reologicznych, takich zatem, których reakcja na skutek zaburzenia ich równowagi pierwotnej przez procesy odbudowy była wyraźną funkcją czasu.

Wspomniana uprzednio koncepcja trójprzegubowej obudowy segmentowej, w okresie wzmożonego napięcia politycznego ostatnich lat przedwojennych, jest lansowana przez Autorów do budowy schronów przeciwlotniczych [34]. Rozwiązanie polegało na zastosowaniu krótkich odcinków prefabrykowanej obudowy przykrytych i maskowanych naturalnymi nierównościami terenu (wałdami, nasypami).

Sprawy obrony przeciwlotniczej i ich implikacji dla konstrukcji budynków oraz bezpieczeństwa mieszkańców zaabsorbują uwagę W. OLSZAKA. Koncepcje właściwego kształtowania budynku, rozmieszczania mas, wpływu uszkodzeń fundamentów, poruszy w pracach [34] i [35]. Zajmie się analizą warunków absorbowania energii kinetycznej bomby przez płytę stropową grubości ok. 1,10 m, oraz przez — lepszy jego zdaniem — układ kilku warstw mniej sztywnych, rozmieszczonych w odpowiednich odstępach jedna nad drugą. Zagadnieniom statycznym i dynamicznym konstrukcji przeciwlotniczych poświęca swą pracę habilitacyjną z roku 1937 [34].

Już w działalności W. OLSZAKA z lat 1930–1939 pojawi się drugi nurt, naukowy, odzwierciedlający Jego prawdziwe powołanie i temperament.

Jeszcze w roku 1928 zajmie się sprawą kłopotów, jakie sprawia projektantowi konstrukcji żelbetowych teoria naprężeń dopuszczalnych. W pracy [13] uzasadnia małą efektywność zbrojenia ściskanego w belkach żelbetowych o ograniczonej wysokości, które zgodnie z ówczesnymi przepisami musiało wzmacniać strefę ściskaną, gdy dopuszczalne naprężenie w betonie zostało przekroczone. Wykazuje nieracjonalność takiego stanowiska, wypowiadając się zarazem za zwiększeniem naprężeń dopuszczalnych i za wykorzystywaniem zbrojenia jedynie w strefie rozciąganej.

Podobne niedostatki wynikłe z traktowania materiału betonu jako sprężystego i izotropowego napotyka przy wymiarowaniu grubościennych rur żelbetowych, projektowanych dla rurociągów ciśnieniowych do rozprowadzania płynnej podsadzki w kopalniach. Ciśnienia hydrostatyczne występujące w tych przewodach przekraczają w konkretnych przypadkach z reguły 25 do 30 atmosfer; uderzenia dynamiczne, spowodowane np. nagłym zamknięciem lub zatkaniem przewodu, podnoszą ciśnienie to jeszcze bardzo znacznie. Nierównomierny rozkład naprężeń obwodowych poprzez grubość ścianki, największy na brzegu wewnętrznym, wymagał największego zbrojenia na tymże brzegu i powodował nie wykorzystanie rezerw wytrzymałościowych betonu w partiach przy brzegu zewnętrznym. Stawiało to ustroje żelbetowe w trudnej sytuacji w ich współzawodnictwie ze stałą, która — mimo iż droższa — miała start lepszy również i przez to, że współpraca kopalń z hutami była nie tylko typu technicznego, lecz często wspierana ponadto wzajemnymi ich powiązaniem organizacyjnymi. Pomysł stosowania do rozprowadzania płynnej podsadzki wysokociśnieniowych rurociągów żelbetowych był wtedy zupełną nowością. Po pokonaniu nieuchronnych pierwszych trudności wdrożeniowych spotkał się jednak z dużym zainteresowaniem. Znalazło ono wyraz w wielu kilometrach przewodów podsadzkowych, zrealizowanych w tej technice.

Wspomniany natomiast powyżej niedostatek musiał uprzednio zostać usunięty. W tym celu W. OLSZAK w swej pracy [30] proponuje znaczne ulepszenie rozwiązania, polegające na równomiernym wykorzystaniu materiału. Osiąga się je przez odpowiednią zmianę układu zbrojenia i jego zagęszczenie w kierunku strefy zewnętrznej; jeśli zabieg ten wykonany zostanie w sposób poprawny wynikający z analizy, uzyskuje się w efekcie całkowicie równomierne wykorzystanie materiału konstrukcyjnego poprzez całą grubość ścianki wraz ze znacznym zmniejszeniem grubości ścianki, i wynikającym stąd zmniejszonym zużyciem materiału, co z kolei prowadzi do dalszego obniżenia kosztów inwestycji. Autor wnioski swe uzasadnia teoretycznie biorąc pod uwagę pomijaną w dotychczasowych obliczeniach, istniejącą jednak w rzeczywistości, anizotropię zespołu stal–beton, jak i jego niejednorodność, objawiającą się przez zmienność z miejscem jego «wypadkowego» modułu sprężystości. Efektem końcowym jest redystrybucja napięć, polegająca na odciążeniu warstw wewnętrznych przy równoczesnym przekazaniu nadwyżki wyężenia wzmocnionym przez wspomniany zabieg warstwom zewnętrznym.

Niebawem uczyni w tej sprawie następny z kolei krok. Wspomniane powyżej rozwiązanie jest wprawdzie teoretycznie i realizacyjnie poprawne, potrzeby praktyki jednak stawiają bardziej złożone wymagania. Okazało się bowiem, że żelbetowe przewody podsadzkowe, podobnie zresztą jak i stalowe, ulegają — na skutek przepływu przez nie setek ty-

sięcy metrów sześciennych piasku, zazwyczaj ostroziarnistego — poważnej jednostronnej erozji wewnętrznej. Na szczęście zaradczy zabieg techniczny był prosty, znacznie natomiast trudniejsza jego analiza teoretyczna. Rozwiązanie techniczne polegało bowiem na mimośrodowym usytuowaniu otworu przepływu w stosunku do zewnętrznego obrysu rurociągu. Stworzyło to pożądaną rezerwę materiałową z rozmysłem wystawioną na działania erozyjne. Gdy te osiągnęły wielkość krytyczną, przewód poddawany był «regeneracji». W tym też leżała jedna z dodatkowych zalet systemu, regeneracja ta odbywała się bowiem w sposób prosty i ekonomiczny: uzupełnienie ubytków następowało przy zastosowaniu cementów szybkosprawnych i wysokowytrzymałych. Wyniki były zadowalające. Również i zagadnienie szczelności styków, trudniejsze do opanowania niż przy stosowaniu rurociągów stalowych, rozwiązane zostało po dłuższych studiach i badaniach w sposób należyty.

Istniała jednak nadal trudność teoretyczna, polegająca na tym, że analiza statyczna i dynamiczna zbrojonych ustrojów mimośrodowych była całkowicie nieznana. W. OLSZAK rozwiązał ten problem na gruncie teorii sprężystości przy zastosowaniu metody odwzorowania inwersyjnego, pozwalającego na sprowadzenie zagadnienia do analizy pierścienia współśrodkowego. Trudności z tym związane stały się impulsem do pogłębionego i pełnego opracowania teorii tego typu ustrojów zbrojonych, co w rezultacie zainicjowało przygotowanie pracy doktorskiej z roku 1933 obronionej (z odznaczeniem) na Politechnice Wiedeńskiej.

Wspomniane uprzednio zagadnienie z etapu pierwszego, mianowicie uzasadnienie teoretyczne realizacji równomiernego wyteżenia przekrojów grubościennych, rozwiązał W. OLSZAK przy założeniach wychodzących już poza ramy teorii sprężystych ośrodków izotropowych i jednorodnych. Generalne podstawy teorii i metod rozwiązywania tego ogólniejszego problemu zostaną jednak stworzone dopiero w dwadzieścia lat później, gdy Autor sformułuje je w ramach teorii plastyczności ośrodków niejednorodnych i anizotropowych choć — co warto podkreślić — naszkicowane tu rozwiązania szczególne z lat przedwojennych okazały się trafne i znalazły pełne potwierdzenie w ramach teorii ogólniejszej i znacznie przy tym pogłębionej.

Tak zatem nierozwiązane jeszcze ówczesnie, a domagające się realizacji, problemy techniczne zaważyły w poważnej mierze na przyszłej działalności naukowej Autora. W sformułowaniu technicznym te zagadnienia, które zaważyły na dłużej w koncepcjach inżynierskich Autora można by hasłowo określić w następujący sposób:

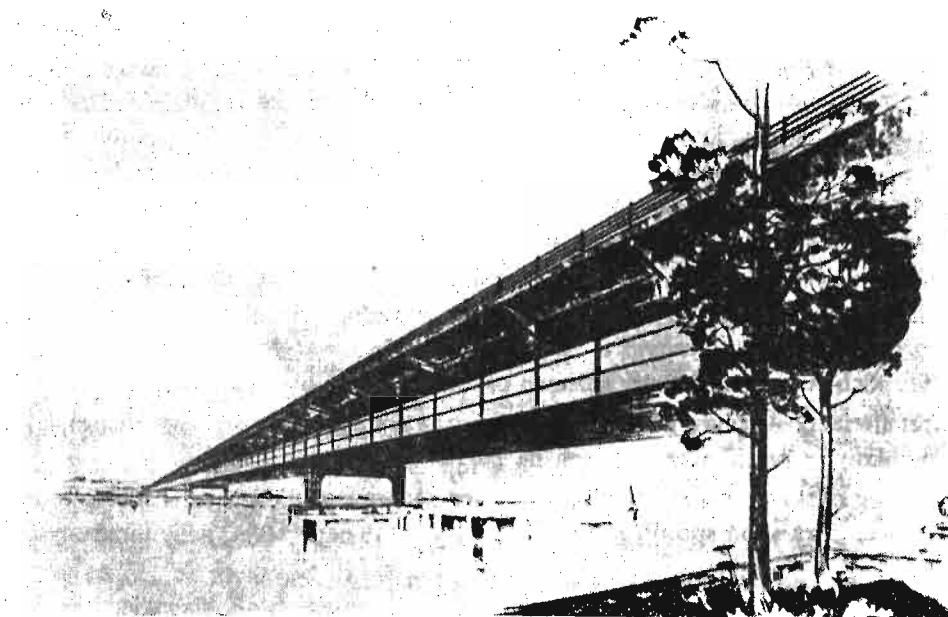
- a) materiał posiada «refleks obronny», który każe mu przekazywać «wyteżenie», jakiemu jest poddany, z partii przeciążonych na partie niedociążone,
- b) przez stosowne manewrowanie zbrojeniem możemy regulować przepływ sił wewnętrznych, narzucając w ten sposób materiałowi takie stany naprężenia, jakie uważamy za pożądane.

Pierwsza koncepcja, jak widzieliśmy, znajdzie z czasem swoje głębokie uzasadnienie w teorii plastyczności, podjętej niebawem i rozwijanej konsekwentnie przez W. OLSZAKA, druga znajdzie swój wyraz w Jego zainteresowaniu się sprężeniem wstępnym materiału jako środkiem regulującym pola i rozkłady naprężeń. Warto dodać, że omawiając na łamach prasy krajowej wyniki kongresu Międzynarodowego Stowarzyszenia Mostów i Konstrukcji Inżynierskich (AIPC) w Berlinie w roku 1936 [27], szczególnie podkreśli

znaczenie prac: E. FREYSSINETA związanych ze wstępnym sprzężeniem, L. P. BRICE'A na temat plastyczności betonu i THOMASA dotyczącej zjawiska pełzania. Jak widać zaabsorbowały Go już wtedy te przejawy fenomenologiczne, których istota — jak dziś wiadomo — znajduje swe wytłumaczenie logiczne w ramach teorii plastyczności i reologii, na których gruncie opracowane zostały również środki formalne do ich opisu i stworzenia metod rozwiązywania zagadnień konkretnych. Problematyce tej, podówczas ledwie się zarysowującej, przy tym jednak nader ważnej z punktu widzenia naukowego i zastosowań technicznych, pozostanie wiernym do chwili obecnej.

Trzecim wreszcie, «trwałym», tematem zainteresowań W. OLSZAKA staną się elementy nośne ze zbrojeniem poprzecznym, których obliczaniem zajął się w pracy [41]. Dyskutował polemicznie błędne założenie wyjściowe odnośnie odkształceń poprzecznych, podane w «Inżynierii i Budownictwie» przez jednego z autorów [38], sam wracał do tego tematu jeszcze wielokrotnie.

Mimo coraz wyraźniej rysującego się zainteresowania kierunkiem naukowym w dalszym ciągu pochłania Go działalność inżynierska. W roku 1937 uzyskuje wraz z dr S. KAUFMANEM i E. POLAKIEM jedną z czołowych nagród za projekt mostu stalowego przez Wisłę w Warszawie w ciągu ulicy Karowej. Był to dwupoziomowy most stalowy o dwóch belkach podłużnych, czterech przęsłach, o rozpiętości 150 m każde (rys. 2 i 3). Dolny poziom był przewidziany dla przyszłego metra, które — jak się okaże za lat dwadzieścia — będzie ponownie przedmiotem jego studiów technicznych i nowych koncepcji.



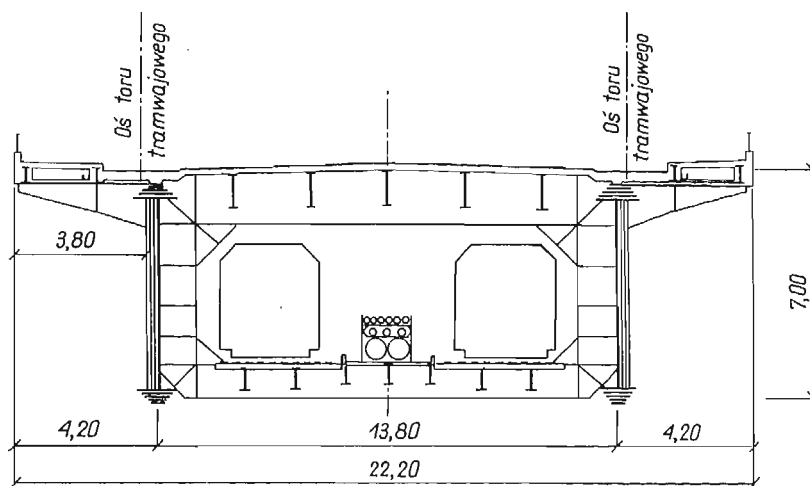
Rys. 2

Jest kompetentny w sprawach nie tylko obliczeń statycznych, lecz również wykonawstwa i rozliczeń. Świadczy o tym udział w dyskusji w prasie technicznej na temat sposobu zlecania robót inżynierskich i budowlanych, w której opowiada się za cenami jednostkowymi,

a nie za ryczałtem i uzasadnia to szczegółowo. Prowadzi własne biuro w Katowicach przy ul. 3 Maja 33.

Przymusowy rozbrat z działalnością zawodową przynosi W. OLSZAKOWI wojna. Powraca do kraju w roku 1946, by podjąć działalność naukową, która była Jego przeznaczeniem. Znajduje jednak w sobie dość pasji inżyniera, by nadal uczestniczyć w licznych pracach inżynierskich.

Od pierwszych chwil po powrocie do kraju staje się Prof. W. OLSZAK gorącym i entuzjastycznym rzecznikiem rozwijania konstrukcji sprężonych [43], [58], [61], [69], [71], [72], [82], [91], [92], [98], [3], [112], [116]. Ustroje te stanowią najdoskonalszy obecnie wyraz techniki w wielu dziedzinach budownictwa inżynierskiego, jak np. w budownictwie mostów wielkich rozpiętości, lekkich cienkościennych sklepień przekrywających wielkie powierzchnie, w realizacji wież, zbiorników itp. Prof. W. OLSZAK był pierwszym u nas

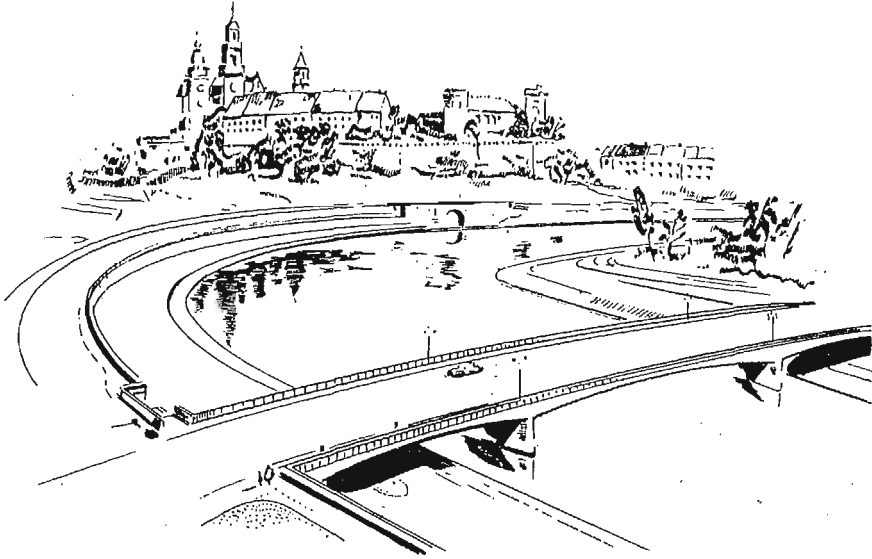


Rys. 3

uczonym, który podjął tematykę z tym związaną: już w 1946 roku zorganizował przy swojej Katedrze pierwszy Zakład Teorii Konstrukcji Wstępnie Sprężonych.

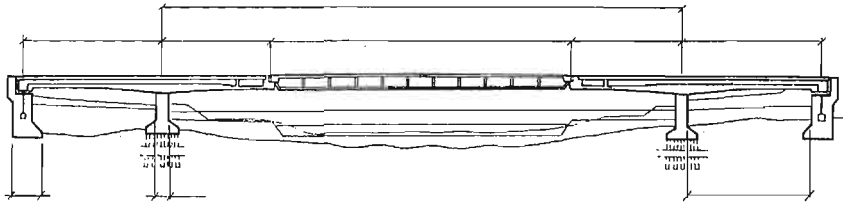
W roku 1946 uzyskuje Prof. W. OLSZAK, wraz z zespołem w składzie prof. B. KOPYCIŃSKI, inż. A. MAGIERA, inż. S. ŻYCHOŃ, inż. W. MINICH, dwie czołowe nagrody w konkursie na projekt mostu sprężonego przez Wisłę w Krakowie (most Dębicki). Był to trójprzęsłowy most drogowy. Generalne rozwiązania techniczne i architektoniczne obydwu nagrodzonych projektów widoczne są na rys. 4 i 5. W ten sposób powstaje — wraz z wykonanymi już uprzednio — «rodzina» jego siedmiu mostów, z których sześć związanych jest z górnym i średnim biegiem Wisły: prefabrykowany most przedładunkowy w Sosnowcu (1930), most płytowy w Wiśle-Głębcach (1936), most belkowo-płytowy w Wiśle-Zdroju (1935), wspomniane już uprzednio mosty o ustrojach ciągłych w Goczałkowicach (1925–1927), łukowy most ciągły w Nowym Bieruniu (1928), trójprzęsłowy most sprężony w Krakowie (1948) i most stalowy w Warszawie (1937).

W pracowni Strunobetonu Centralnego Biura Projektów Architektoniczno-Budowlanych w Krakowie powstają w roku 1950 pod kierunkiem Prof. W. OLSZAKA studialne projekty czterech typów stropów strunobetonowych. Próbną produkcję belek wykonano



Rys. 4

w Doświadczalnej Wytwórni na Żeraniu, a badania wytrzymałościowe przeprowadził Instytut Techniki Budowlanej.



Rys. 5

W zorganizowanym w roku 1954 konkursie konstrukcyjno-technologicznym na niezeliwną obudowę tunelu metra w Warszawie zespół w składzie mgr inż. W. BIELICKI, dr Cz. EIMER, prof. dr W. OLSZAK uzyskał dwie czołowe nagrody i jedną trzecią. W rozwiązaniu przyjęto wykonanie obudowy za pomocą tarczy tunelarskiej i tubingów betonowych wstępnie sprężonych.

Interesuje się również zagadnieniami technologicznymi. W roku 1954 opatentowuje wraz z mgr inż. W. BIELICKIM, dr inż. Cz. EIMEREM, prof. mgr inż. J. KORECKIM nowy sposób produkcji elementów strunobetonowych (Patenty Nr 38643, Nr 39294). Przedmiotem wynalazku jest metoda produkcji ciągła wraz z urządzeniami produkcyjnymi niezbędnymi dla realizacji tego systemu. W odróżnieniu od stosowanych dotychczas metod cyklicznych i używanych przy tym okresowo działających urządzeń naciągających i zwalnających,

istotę wynalazku stanowi ciągłość procesu naciągu strun i sprężania elementów, co umożliwia prowadzenie wszystkich operacji technologicznych na taśmie produkcyjnej. System ciągłego formowania elementów pozwala na wprowadzenie taśmowej metody produkcji, nieprzerywanej i równomiernej, zapewniającej pełną mechanizację, a następnie automatyzację procesów technologicznych.

Podsumowaniem doświadczeń w dziedzinie projektowania i wykonawstwa konstrukcji wstępnie sprężonych była Polska Norma PNB — 03320, której pierwszą wersję opracował w latach 1956–1958 zespół w składzie dr Cz. EIMER, dr W. GRZEGORZEWSKI, prof. T. KLUZ, prof. W. OLSZAK, (kierownik zespołu), inż. K. ZALŃSKI, dr Z. ZIELIŃSKI. Za zasługi w dziedzinie upowszechniania konstrukcji sprężonych został Prof. W. OLSZAK odznaczony w roku 1955 zespołową Nagrodą Państwową I stopnia. Już uprzednio (1950) przedmiotem indywidualnej Nagrody Państwowej III stopnia była jego koncepcja realizacji elementów konstrukcyjnych ze zbrojeniem poprzecznym poddanym wstępnemu sprężeniu.

Jest on także autorem monografii pt. *Konstrukcje Wstępnie Sprężone*, której I tom ukazał się w 1955 r. (PWN Warszawa) [3]. Dwutomowa *Teoria Konstrukcji Sprężonych* opracowana wspólnie z S. KAUFMANEM, Cz. EIMEREM i Z. BYCHAWSKIM, ukazała się w 1962 r. (PWN, Warszawa) [4]. Jest ona obecnie tłumaczona na język czeski.

Prócz działalności ściśle inżynierskiej interesował Prof. W. OLSZAKA szereg spraw z pogranicza «wdrożenia» i działalności badawczej. Wypowiadał się między innymi na temat cementów ekspansywnych [45], betonów napowietrzanych [53], wibrowania betonu w czasie jego wiązania [44], współczynnika w/c w betonie [172], zbrojenia poprzecznego i zbrojenia w postaci uzwojenia w elementach ściskanych [38], [41], [46], [48], [55], [86], parcia wiatru na budowle [83], [115], nośności granicznej płyt [81], [88], [100], zjawiska rys w konstrukcjach [133], [135], mierzenia wytrzymałości na rozciąganie materiałów kruchych [89]. Prowadził wraz z zespołem badania nad rekonstrukcją uszkodzonych ustrojów żelbetowych [70].

Wyrazem łączenia kompetencji inżynierskich i naukowych była działalność Prof. W. OLSZAKA w międzynarodowych organizacjach zajmujących się problematyką konstrukcji inżynierskich i budowlanych. Jest współzałożycielem (1947), członkiem Biura i przewodniczącym (1962–1963) Międzynarodowego Stowarzyszenia Laboratoriów Badań Materiałów i Konstrukcji (RILEM). Był współzałożycielem (1957) i piastował od początku do roku 1969 godność wiceprezesa Międzynarodowego Stowarzyszenia Konstrukcji Powłokowych (IASS). Od roku 1946 jest członkiem Stałego Komitetu Międzynarodowego Stowarzyszenia Mostów i Konstrukcji (AIPC). Jest przewodniczącym Grupy Polskiej, a zarazem współzałożycielem (1946) i wiceprezesem (1946–1969) Międzynarodowej Federacji Konstrukcji Sprężonych (FIP), jest członkiem grupy narodowej Europejskiego Komitetu Betonu (CEB). Jest wreszcie Prof. W. OLSZAK założycielem (1934) i od tej chwili aktywnym członkiem Polskiego Związku Inżynierów i Techników Budownictwa, który za wieloletnie zasługi wyróżnił Go Złotą Odznaką. Był w szczególności współorganizatorem I Zjazdu PZITB, który odbył się w roku 1936 w Katowicach.

Drogi życiowe poprowadziły Prof. W. OLSZAKA od praktyki w stronę teorii. Była Mu ta praktyka inżynierska inspiratorem dla wielu płodnych poszukiwań teoretycznych, źródłem wielu pomysłów, które później doczekały się pogłębionej analizy badawczej. Pozostanie w bogatym życiorysie Profesora Jego młodością.

WYKAZ PUBLIKACJI WACŁAWA OLSZAKA

Monografie

1. *Exzentrische Kreisrohre. Ihre Verwendung und Berechnung* (Powiel. Mechan.), 1933 (176 stron).
2. *Sprężyste Układy Plaskie z Otworami Kolowymi w Zastosowaniu do Zagadnień Blach Plaskich oraz Tunelowych i Górniczych Robót Inżynierskich*, Akad. Nauk Techn., Warszawa 1934 (154 strony).
3. *Konstrukcje Wstępnie Sprężone*, t. I, PWN, Warszawa 1955 (402 strony).
4. *Teoria Konstrukcji Wstępnie Sprężonych* (wsp. z S. KAUFMANEM, Cz. EIMEREM i Z. BYCHAWSKIM), t. I i II, PWN, Warszawa 1962 (1258 stron).
5. *Wprowadzenie w Teorię Plastyczności. Podstawy Matematyczne, Zastosowania Inżynierskie* (wsp. z Z. MARCINIAKIEM, Z. MROZEM, P. PERZYNA, J. RYCHLEWSKIM, A. SAWCZUKIEM i W. URBANOWSKIM), Polska Akad. Nauk, Warszawa 1962 (413 stron).
6. *Plasticity Under Non-Homogeneous Conditions* (wsp. z J. RYCHLEWSKIM i W. URBANOWSKIM), w wydawn. *Advances in Applied Mechanics*, tom VII, Acad. Press 1962 (84 strony).
Tłum. ros. *Теория Пластичности Неоднородных Тел*, Изд. „Мир”, Москва 1956 (156 stron).
7. *Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity* (wsp. z Z. MROZEM i P. PERZYNA), Pergamon Press—PWN, Oxford — Warszawa 1963 (196 stron).
Tłum. ros.: *Современное Состояние Теории Пластичности*, Изд. „Мир”, Москва 1964 (244 str.).
Tłum. czes.: *Nové Směry Vývoje v Teorii Plasticity*, Naklad. ČSAV, Praha 1964 (196 stron).
8. *Teoria Plastyczności* (wsp. z Z. MARCINIAKIEM, Z. MROZEM, P. PERZYNA, J. RYCHLEWSKIM, A. SAWCZUKIEM, W. SZCZEPIŃSKIM, W. URBANOWSKIM i M. ŻYCZKOWSKIM), PWN, Warszawa 1965 (399 stron).
Tłum. rumuńskie: *Teoria Plasticității*, Editura Tehnica, București 1970 (672 strony).
9. *Konstrukcje Sprężone* (wsp. z S. KAUFMANEM i Cz. EIMEREM), Arkady, Warszawa 1965, tom III serii „Budownictwo Betonowe” (920 stron).
10. *Inelastic Behaviour in Shells* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Noordhoff Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics, Groningen 1967 (122 strony).
Tłum. ros. *Неупругое Поведение Оболочек*, Изд. „Мир”, Москва 1969 (144 strony).

Prace naukowe i techniczne opublikowane w czasopismach krajowych i zagranicznych¹⁾

1922/23

11. *Uproszczony sposób obliczania połączeń torów*, Biul. Techn. 1922/23, Katowice. (C)

¹⁾ Z wyłączeniem prac opublikowanych w Biuletynie Zagr. PAN, które są zestawione oddzielnie. Objasnienie oznaczeń literowych:

A — Prace oryginalne, publikowane po raz pierwszy

B — Prace oryginalne, publikowane w postaci uzupełnionej lub rozszerzonej w odmiennym języku

C — Konstrukcje inżynierskie

D — Artykuły naukowe

1925

12. *Hydrodynamische Beanspruchung von beweglichen Wehrtafeln*, Techn. Ber., Techn. Hochschule Wien, 1925. (A)

1928

13. *Wytrzymałość na zginanie belek żelbetowych jedno- i dwustronnie zbrojonych*, Czasop. Techn., 1928, Nr. 2, Lwów. (A)
14. *Most na Wiśle pod Goczałkowicami*, Techn., 1928, Nr 3, Katowice. (C)

1933

15. *Żelazne ścianki szczelne*, Czasop. Techn., 1933, Nr 21, Lwów. (C)

1934

16. *O zjawiskach ciśnień przy robotach górniczych i tunelowych*, Techn., 1934, Nr 11, Katowice. (A)

1935

17. *Uwagi krytyczne dotyczące fali ciśnień oraz proste wyjaśnienie odnośnych zjawisk*, Techn. 1935, Nr 1, Katowice. (A)
18. *Eisenbetonrohre für Spülversatzzwecke*, Zement, 1935, Nr 14, 15, 16. (A)
19. *Anwendung der Inversionsmethode bei Behandlung von ebenen Problemen der Elastizitätstheorie*, Ing.-Archiv, 1935, Nr 6. (A)

1936

20. *Zagadnienia statyki ruwociągów żelbetowych oraz pokrewnych konstrukcji z betonu zbrojonego z uwagi na ich anizotropię*, Księga Pam. II Zj. Inż. Bud., 1936, Katowice. (B)
21. *O pewnym zagadnieniu z dziedziny mechaniki gruntów budowlanych*, Czasop. Tech., 1936, Nr 11, Lwów. (A)
22. *Über einen einfachen, praktisch wichtigen Zusammenhang von Spannungszuständen. Randbemerkungen zur Statik von langgestreckten und scheibenartigen Ingenieurbauwerken*, Beton u. Eisen, 1936, Nr 18. (A)
23. *O ulepszonym sposobie zbrojenia sklepień żelbetowych ze szczególnym uwzględnieniem wymogów obudowy górniczej i budownictwa przeciwlotniczego*, Techn., 1936, Nr 10, Katowice. (C)
24. *Beiträge zur Statik von polarorthotropen Scheiben und zylinderorthotropen Rohren*, Bauing., 1936, Nr 31, 32. (A)
25. *Der ebene Formänderungszustand und Spannungszustand der Elastizitätstheorie*, Zeitschr. Ing-u. Arch. Ver., 1936, Nr 15, 16, Wien. (A)
26. *Ustroje grubościenne w wykonaniu ulepszonym a dotychczasowym w zastosowaniu do obudowy chodników i szybów górniczych*, Przegl. Górn. Hutn. 1936, Nr 12, Katowice—Sosnowiec. (A)
27. *Thick-walled reinforced concrete-pipes. Proposal for increasing their statical efficiency*, Spr. Końc. II Międz. Kongr. AIPC, 1936. (A)

28. *Żelbet w obudowie górniczej. Wytrzymałościowe studium porównawcze* (wsp. z W. ŻELESKIM), Przegł. Górn., Hutn., 1936, Katowice—Sosnowiec. (C)
29. *Żelbetowe schrony przeciwlotnicze*, Przegł. Techn., 1936, Nr 10, 21, Warszawa. (C)

1937

30. *Pierścienie i rury o wyrównanych naprężeniach obwodowych. Studium nad usprawnieniem konstrukcji grubościennych*, Czasop. Techn., 1937, Nr 1—6, Lwów. (A)
31. *Niektóre zagadnienia teoretyczne z dziedziny statyki nowoczesnych ustrojów żelbetowych*, Przegł. Budowl., 1937, Nr 3, Warszawa. (C)
32. *Izolacje mostowe*, Cement, 1937, Nr 10, 11, Warszawa. (C)
33. *Nicht hochwasserfreie Holzbrücken*, Bauing., 1937, Nr 11, 12. (C)
34. *Budownictwo nowoczesne a postulaty OPL i OPG* (rozprawa habilitacyjna), Kraków 1937. (A)

1938

35. *O stropach przeciwlotniczych*, Inż. i Budown., 1938, Nr 1, Warszawa. (A)
36. *Ulepszone lufy działowe*, Przegł. Techn., 1938, Nr 14, Warszawa. (A)
37. *Ceny jednostkowe czy ryczałt?*, Przegł. Budowl., 1938, Nr 8, Warszawa. (C)

1939

38. *W sprawie artykułu inż. A. Hauke-Bosaka pt. „Wzory do obliczania słupów żelbetowych uzwojonych względnie oplaszczonych”*, Inż. i Budown., 1939, Nr 2, Warszawa. (A)
39. *Dickwandige Rohre und Ringquerschnitte aus Eisenbeton. Neue Erkenntnisse, neue Gesichtspunkte für Bemessung und Berechnung*, Beton u. Eisen, 1939, Nr 2. (A)
40. *Postępy lat ostatnich w budownictwie stalowym (ze szczególnym uwzględnieniem przykładów ze Śląska)*. Przedmowę napisał prof. dr Stefan BRYŁA. Techn., 1939, Nr 8 i 9, Katowice. (C)
41. *O słupach uzwojonych*, Inż. i Budown., 1939, Warszawa. (A)

1946

42. *Orthotropie polaire et cylindrique*, Spraw. Końc. VI Międz. Kongr. Mech. Stos., Paris 1946. (A)
43. *Z teorii belek i płyt wstępnie sprężonych*, Inż. i Budown., 1946, Nr 2, Warszawa. (A)

1947

44. *Wibrowanie betonu w czasie jego wiązania*, Inż. i Budown., 1947, Nr 3/4, Warszawa. (C)
45. *Cementy ekspansywne. Ich charakterystyka i własności*, Cement, 1947, Nr 9, Warszawa. (C)

1948

46. *Prestressed spiral reinforcement*, Spraw. VII Międz. Kongr. Mech. Stos., London 1948, t. I. (A)
47. *Two-dimensional strain and two-dimensional stress systems*, Spraw. VII Międz. Kongr. Mech. Stos., London 1948, t. I. (A)

48. *L'effet du frettage en nappes transversales des constructions en béton armé*, Spraw. II Międz. Kongr. AIPC, Liège 1948. (A)
49. *Ruszty poprzeczne jako uzbrojenie elementów ściskanych*, Inż. i Budown., 1948, Nr 5, Warszawa. (B)
50. *Cement i beton w świetle najnowszych badań międzynarodowych* (wsp. z J. NECHAYEM), Cement, 1948, Nr 4, Warszawa. (C)
51. *Żelbet w prefabrykacji włoskiej*, Cement, 1948, Nr 5, Warszawa. (C)
52. *Włoska ceramika budowlana* (wsp. z J. NECHAYEM), Inż. i Budown., 1948, Nr 7/8, Warszawa. (C)
53. *Betony napowietrzane. Betony koloidalne* (wsp. z M. MISCHEKE), Czasop. Techn., 1948, Nr 3/4, Kraków. (C)
54. *Znaczenie prac naukowo-badawczych dla rozwoju techniki budownictwa inżynierskiego*, Inż. i Budown., 1948, Nr 18, Warszawa. (D)

1949

55. *Prestressing applied to bound columns*, Arch. Mech. Stos., 1949, Nr 1, Gdańsk. (B)
56. *Plane strain and plane stress systems*, Arch. Mech. Stos., 1949, Nr 3, Gdańsk. (B)
57. *Sprężenie wstępne w zastosowaniu do słupów uzwojonych*, Ks. Zj. VI Zjazdu Nauk. PZITB, Gdańsk 1949, t. V. (B)
58. *Beton sprężony a żelbet. Dwie zasadniczo odmienne koncepcje*, Inż. i Budown., 1949, Nr 10—12, Warszawa. (C)
59. *50-lecie pracy naukowej Profesora Maksymiliana Tytusa Hubera*, Arch. Mech. Stos., 1949, Nr 4, Gdańsk. (D)
60. *Konstrukcje wstępnie sprężone we Włoszech i w Szwajcarii*, (wsp. z J. NECHAYEM), Inż. i Budown. 1949, Nr 7/8, Warszawa. (C)
61. *Beton sprężony*, Ref. Podsekcji VI Zj. Nauk. PZITB, Gdańsk 1949. (B)
62. *Żelbet, prefabrykacja, beton sprężony*, Inż. i Budown., 1949, Warszawa. (D)

1950

63. *Autocontraintes des milieux anisotropes*, Prace Komisji Nauk Techn. Polsk. Akad. Umiej., 1950, t. I, Nr 1, Kraków. (A)
64. *Dwuwymiarowy stan odkształcenia i dwuwymiarowy stan naprężenia teorii sprężystości we wspólnym ujęciu*, Ks. Jubil. Prof. M. T. Hubera, Gdańsk 1950. (B)
65. *O pewnej zależności stanów naprężenia w teorii sprężystości*, Spraw. Polsk. Akad. Umiej., 1950, Nr 6, Kraków. (A)
66. *Samonaprężenia w ośrodkach anizotropowych*, Spraw. Polsk. Akad. Umiej., 1950, Nr 6, Kraków. (B)

1951

67. *Les bases théoriques d'une nouvelle application de l'idée de la précontrainte*, Assoc. Scientif. Prec., Paris 1951; Travaux 1951, Nr 196. (B)
68. *Skrećanie prętów anizotropowych w świetle teorii odkształceń nieliniowych*, Arch. Mech. Stos., 1951, Nr 3/4, Gdańsk. (A)
69. *Wpływ własności mechanicznych materiałów na teorię ustrojów sprężonych*, I Konf. Nauk.-Techn. Bet., PWT, Warszawa 1951. (A)

70. *Badania nad zagadnieniem rekonstrukcji ustrojów żelbetowych* (wsp. z B. KOPYCIŃSKIM, W. MUSZYŃSKIM i J. KRAWCZYŃSKIM), Prace Inst. Techn. Bud., Nr 133, Warszawa 1951. (C)
71. *Konstrukcje wstępnie sprzężone*, Ref. I Kongr. Nauki Polsk., Inż. i Budown., 1951, Nr 2, Warszawa. (C)
72. *Rozwój konstrukcji wstępnie sprzężonych w świetle II Międzynarodowego Zjazdu 1950*, Przegl. Budowl., 1951, Nr 9, Warszawa. (C)

1952

73. *Anizotropia struktury jako problem teorii sprężystości*, Tow. Nauk. Warsz., Sprawozd. Wydz. VI Nauk Techn., Warszawa 1952. (A)
74. *Uj gondolatok az építőmérnöki gyakorlatban*, Węg. Akad. Nauk, t. VI, Nr 1/2, Budapest 1952. (B)

1953

75. *Uogólnienie analogii membranowej do zagadnień układów anizotropowych*, Arch. Mech. Stos., 1953, Nr 1, Warszawa. (A)
76. *Naprężenia termiczne w grubościennym walcu anizotropowym* (wsp. z J. NOWIŃSKIM), Arch. Mech. Stos., 1953, Nr 2, Warszawa. (A)
77. *Zagadnienie ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos., 1953, Nr 3, Warszawa. (A)
78. *Nieliniowe zjawisko pewnego przepływu cieczy jako model reologiczny* (wsp. z J. LITWINISZYNEM), Arch. Mech. Stos., 1953, Nr 4, Warszawa. (A)
79. *Az ortotrop lemezek határteher elméletének néhány kérdéséről*, Węg. Akad. Nauk, t. XI, Nr 1/2, Budapest 1953. (A)
80. *Plastostatyka ustrojów nośnych*, Inż. i Budown., 1953, Nr. 7, Warszawa. (B)
81. *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Bud. Przem., 1953, Nr 7/8, Warszawa. (A)
82. *Polskie prace badawcze nad betonem kablowym* (wsp. z Cz. EIMEREM), I Konf. Nauk.-Techn. Konstr. Wst. Spręż. ITB, Warszawa 1953. (C)
83. *Parcie wiatru na konstrukcje inżynierskie w świetle nowszych badań* (wsp. z A. MAGIERĄ), Inż. i Budown., 1953, Nr 11, Warszawa. (C)

1954

84. *O podstawach teorii ciał sprężystych fizycznie nieliniowych* (wsp. z J. NOWIŃSKIM), Arch. Mech. Stos., 1954, Nr 1, Warszawa. (A)
85. *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych (I)*, Arch. Mech. Stos., 1954, Nr 3, Warszawa. (A)
86. *Z zagadnień teorii elementów uzwojonych w świetle reologicznych własności materiałów*, Arch. Mech. Stos., 1954, Nr 2, Warszawa. (A)
87. *O podstawach teorii ciał elasto-plastycznych niejednorodnych (II)*, Arch. Mech. Stos., 1954, Nr 4, Warszawa. (A)
88. *Z zagadnień podstawowych teorii stanów granicznych w ortotropowych ustrojach płytowych. Plastyczne wyczerpanie nośności*, Rozpr. Inż., 1954, Nr VI, Warszawa. (A)
89. *O nowej metodzie pomiaru wytrzymałości na rozciąganie betonu i innych materiałów kruchych (teoria tarczy kołowej w zastosowaniu do badań laboratoryjnych)*, (wsp. z S. KAJFASZEM i J. PIETRZYKOWSKIM), Inż. i Budown., 1954, Nr 9, Warszawa. (C)

90. *Dziesięciolecie rozwoju konstrukcji inżynierskich w Polsce Ludowej* (wsp. z J. MUTERMILCHEM i W. NOWACKIM), Inż. i Budown., 1954, Nr 11, Warszawa. (C)
91. *Inne — poza betonem — materlały sprężone* (wsp. z Cz. EIMEREM), Inż. i Budown., 1954, Nr 10, Warszawa. (C)
92. *Mosty wstępnie sprężone* (wsp. z Cz. EIMEREM), w wyd. „Postęp techniczny w budowie mostów”, Wyd. Komunik., Warszawa 1954. (C)
93. *Die mathematischen Methoden der modernen Technik* (wsp. z S. TURSKIM, J. BONDEREM, S. DROBOTEK, J. G. MIKUSIŃSKIM, W. NOWACKIM, J. NOWIŃSKIM i P. SZULKINEM), w wydawn. „VIII Poln. Mathem. Kongr. 1953”, Deutsch. Verl. Wissensch., Berlin 1954; *Metody matematyczne współczesnej techniki*, Roczn. Polsk. Tow. Matem., Prace Mat., Ser. I, t. 2, Nr 2, 1958, Warszawa. (D)

1955

94. *Podstawy teorii sprężystości ciał fizykalnie nieliniowych o strukturze niejednorodnej* (wsp. z M. ŻYCZKOWSKIM), Arch. Mech. Stos., 1955, Nr 1, Warszawa. (A)
95. *O założeniach teorii ośrodków sypkich i spoistych niejednorodnych*, Arch. Mech. Stos., 1955, Nr 1, Warszawa. (A)
96. *O zagadnieniu termosprężystym w przypadku ośrodków o dowolnej ortotropii krzywoliniowej* (wsp. z J. NOWIŃSKIM i W. URBANOWSKIM), Arch. Mech. Stos., 1955, Nr 2, Warszawa. (A)
97. *Sprężysto-plastyczny grubościenny walec niejednorodny pod działaniem parcia wewnętrznego i siły podłużnej* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Arch. Mech. Stos., 1955, Nr 3, Warszawa. (A)
98. *Prestressing*, Appl. Mech. Reviews, 1955, Nr 1, New York. (A)
99. *Konstrukcje wstępnie sprężone i ich podstawy naukowe. Stan dzisiejszy i perspektywy rozwoju na przyszłość*, Arch. Inż. Łąd., 1955, Nr 1, Warszawa. (B)
100. *Teoria nośności granicznej płyt w świetle jej weryfikacji doświadczalnej* (wsp. z A. SĄWCZUKIEM), Rozpr. Inż., XXVIII, 1955, Nr 2, Warszawa. (A)
101. *Anizotropia, plastycita a rheologia w teorii żelazobetonowych konstrukcji*, w wydawn. „Problemy Teorie Oceli a Żelazobetonu”, SAV, Bratislava 1955. (A)

1956

102. *Niejednorodność i ortotropia w teorii plastyczności* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Arch. Mech. Stos., 1956, Nr 1, Warszawa. (A)
103. *Non-homogeneous elasto-plastic semi-infinite plane loaded by a concentrated force* (wsp. z J. MURZEWSKIM i J. GOLECKIM), Arch. Mech. Stos., 1956, Nr 2, Warszawa. (A)
104. *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of non-homogeneous anisotropic elastic-plastic bodies* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Arch. Mech. Stos., 1956, Nr 4, Warszawa. (A)
105. *Elasto-plastyczna grubościenna powłoka kulista z materiału niejednorodnego poddana działaniu obciążenia wewnętrznego i zewnętrznego* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Rozpr. Inż., 1956, Nr 1, Warszawa. (A)
106. *Zasada ekstremalna w teorii nośności granicznej płyt i jej analogia do podstaw teorii stanów granicznych geodynamiki*, Zesz. Nauk, Polit. Warsz., Seria Bud., 1956, Warszawa. (A)
107. *The method of inversion in the theory of plates* (wsp. z Z. MROZEM), 5-e Congr. Int. Ponts Charp., 1956, Mémoires AIPC, Vol. 16, Zurich. (A)
108. *Problems of limit analysis of orthotropic and non-homogeneous plates*, 5-e Congr. Int. Ponts Charp., 1956, Rapp. Fin., Zurich. (B)

109. *Probleme der Grenzlasttheorie der orthotropen Platten*, Acta Techn. Acad. Scient. Hung., 1956, Nr 1/2, Budapest. (B)
110. *Theory of plasticity of non-homogeneous bodies and its practical applications*, Proc. 1st Indian Congr. Theor. and Appl. Mech., Kharagpur 1956 (Indie). (A)
111. *The plastic potential and the generalized distortion energy in the theory of anisotropic non-homogeneous bodies* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Comptes Rendus, 9-e Congr. Int. Mec. Appl., 1956, Bruxelles. (B)
112. *Plastic non-homogeneity. Theory and applications*, „Symposium sulla Plasticità nella Scienza delle Costruzioni in Onore del Prof. Arturo Danusso”, 1956, Varenna—Milano. (B)
113. *Non-homogeneous elasto-plastic semi-infinite plate loaded by a concentrated force* (wsp. z J. MURZEWSKIM i J. GOLECKIM), Comptes Rendus, 9-e Congr. Méc. Appl., 1956, Bruxelles. (B)
114. *Podstawy teoretyczne zagadnień konstrukcyjnych*, Kraj. Narada Budown., Sekcja VI, Prace Nauk.-Bad. Bud. i Arch., Warszawa 1956. (C)
115. *Działanie wiatru na zbiorniki kształtu cylindrycznego* (wsp. z A. MAGIERĄ i A. SAWCZUKIEM), Budown. Przem., 1956, Nr 1, Warszawa. (C)
116. *Konstrukcje wstępnie sprężone ważnym elementem postępu technicznego w budownictwie inżynierskim* (wsp. z CZ. EIMEREM), Przegl. Techn., 1956, Nr 6, Warszawa. (C)
117. *Reinforced and prestressed concrete in Poland* (wsp. z S. KAŁFASZEM), Concr. Constr. Eng., 1956, Nr 1, London. (C)
118. *Dzielo naukowe Witolda Wierzbickiego*, Nauka Polska, 1956, Nr 1, Warszawa. (D)
119. *Trzy lata rozwoju nauk technicznych w ramach Wydziału IV PAN*, Sprawozd. z Czynn. i Prac PAN, 1956, Nr 1, Warszawa. (D)

1957

120. *Elastic bending of circular plates with eccentric holes* (wsp. z Z. MROZEM), Arch. Mech. Stos., 1957, Nr 2, Warszawa. (A)
121. *Two-dimensional problems in the theory of plasticity of non-homogeneous anisotropic bodies* (wsp. z P. PERZYŃĄ i CZ. SZYMAŃSKIM), Arch. Mech. Stos., 1957, Nr 3, Warszawa. (A)
122. *Elastic-plastic bending of non-homogeneous orthotropic circular plates (I)*, (wsp. z J. MURZEWSKIM), Arch. Mech. Stos., 1957, Nr 4, Warszawa. (A)
123. *Elastic-plastic bending of non-homogeneous orthotropic circular plates (II)*, (wsp. z J. MURZEWSKIM), Arch. Mech. Stos., 1957, Nr 5, Warszawa. (A)
124. *Extremum theorems in the theory of plasticity of non-homogeneous and anisotropic bodies* (wsp. z P. PERZYŃĄ), Arch. Mech. Stos., 1957, Nr 6, Warszawa. (A)
125. *Elastisch-plastische Biegung von nicht-homogenen orthotropen Kreisplatten* (wsp. z J. MURZEWSKIM), Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech., 1957, Nr 7/8. (B)
126. *Problems of limit analysis and limit design of non-homogeneous axially symmetric shells* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Proc. Int. Symp. Shell Struct., 1957, Oslo. (A)
127. *Об основах и приложениях теории неоднородных упруго-пластических сред*, Изв. Акад. Наук СССР, Отд. Техн. Наук, 1957, Нр. 8, Москва. (B)
128. *Limit analysis and limit design of non-homogeneous spherical and cylindrical shells*, Inż. i Budown., Appendix to 1957, Nr 3, Warszawa. (B)
129. *Súčasná vedecká problematika v odbore predpätých konstrukcií*, w wydawn. „Súčasný Stav Predpäteho Betónu v ČSSR”, SAV, Bratislava 1957. (B)

1958

130. *The inversion mapping as applied in the theory of plasticity*, Arch. Mech. Stos., 1958, Nr 3, Warszawa. (A)
131. *Note on the completeness of the elastic-plastic solution to certain boundary value problems for the eccentric ring* (wsp. z Z. MROZEM), Arch. Mech. Stos. 1958, Nr 3, Warszawa. (A)
132. *Criteria of validity of variational theorems in the mechanics of inelastic non-homogeneous anisotropic deformable bodies* (wsp. z P. PERZYNA), Arch. Mech. Stos., 1958, Nr 4, Warszawa. (A)
133. *Zjawisko rys w elementach konstrukcyjnych w świetle teorii sprężystości i plastyczności*, Arch. Inż. Łąd., 1958, Nr 2, Warszawa. (B)
134. *Plane problems in the theory of plasticity of non-homogeneous and anisotropic bodies* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Journ. of Science and Eng. Research, 1958, Nr 2, Kharagpur (Indie). (B)
135. *The mechanism of crack formation and propagation from the theoretical point of view*, Proc. Int. Symp., 1958, Stockholm. (A)
136. *Applications of the theory of plasticity to problems of non-homogeneous and anisotropic plates and shells*, IV Jug. Kongr. Mech. Stos., 1958, Opatija. (B)
137. *Plastic non-homogeneity: a survey of theoretical and experimental research* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Int. Symp. on Non-Homogeneity in Elasticity and Plast., Warszawa 1958; publ. Pergamon Press — PWN 1959. (B)
138. *Remarks on the validity of variational theorems in the mechanics of inelastic non-homogeneous anisotropic media* (wsp. z P. PERZYNA), Int. Symp. on Non-Homogeneity in Elasticity and Plast., Warszawa 1958; publ. Pergamon Press — PWN 1959. (B)
139. *Industrial structures in Poland* (wsp. z S. KAJFASZEM), Concr. and Constr. Eng., 1958, Nr 1, London. (C)

1959

140. *A non-homogeneous orthotropic circular segment as an elastic-plastic problem* (wsp. z S. ZAHORSKIM), Arch. Mech. Stos., 1959, Nr 3, Warszawa. (A)
141. *On some basic aspects of the theory of non-homogeneous loose and cohesive media*, Arch. Mech. Stos. 1959, Nr 6, Warszawa. (A)
142. *Variational theorems in general visco-elasticity* (wsp. z P. PERZYNA), Festschrift Prof. R. Grammel (Ing. Archiv), 1959, Springer — Verlag. (A)
143. *Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Schalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., 1959, Budapest. (A)
144. *Plastyczne wyczerpanie nośności konstrukcji inżynierskich a koncepcja probabilistyczna ich bezpieczeństwa*, Księga Jubil. W. Wierzbickiego, Warszawa 1959. (A)
145. *Quelques problèmes fondamentaux relatifs à la théorie des milieux élasto-plastiques anisotropes et non-homogènes* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Bull. C.E.R.E.S., 1959, Vol. X, Bruxelles. (B)
146. *Sur les applications techniques de la théorie de la plasticité des milieux non-homogènes*, Bull. C.E.R.E.S., 1959, Vol. X, Bruxelles. (B)
147. *Flexion élasto-plastique d'une bande incurvée* (wsp. z S. ZAHORSKIM), Anz. Math. Naturw. Kl., Österr. Akad. Wiss. Nr 8 (1959 r). (B)
148. *Théorie de la plasticité appliquée aux constructions*, Trav. Publ., 1959, Nr 912, Paris. (B)
149. *La théorie de la plasticité appliquée aux constructions*, Construire, 1959, Nr 990, Casablanca. (B)
150. *Limit analysis and limit design of non-homogeneous and anisotropic structures* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Acta Mechanica Sinica, 1959, Nr 3. (B)

151. *On engineering applications of the theory of plasticity of non-homogeneous media*, Acta Mechanica Sinica, 1959, Nr 4. (B)
152. *Použitie teórie medzných stavov na nehomogénne a anizotropické dosky a škorupiny* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), w wydawn. „Nove príspevky k teórii stavebných konštrukcii”, SAV, Bratislava 1959. (B)
153. *Elastisch-plastische Biegung eines nichthomogenen orthotropen Bogenstreifens*, (wsp. z S. ZAHORSKIM), Österr. Ing.-Archiv, 1959, Nr 2, Wien. (B)
154. *Influence de l'adhérence et de la fissuration sur la corrosion de l'armature* (wsp. z A. M. HAASEM i C. A. LOBRY DE BRUYN, po franc. i ang.), Proc. RILEM Symp. on Bond and Crack Formation, 1959, Stockholm. (C)
155. *Influence de l'adhérence et de la fissuration sur la rigidité en flexion* (wsp. z A. M. HAASEM i C. A. LOBRY DE BRUYN, po franc. i ang.), Proc. RILEM Symp. on Bond and Crack Formation, 1959, Stockholm. (C)
156. *Règles et spécifications simplifiées concernant l'ouverture des fissures* (wsp. z A. M. HAASEM i C. A. LOBRY DE BRUYN, po franc. i ang.), Proc. RILEM Symp. on Bond and Crack Formation, 1959, Stockholm. (C)
157. *Konstrukcje z betonu sprężonego. Obliczenia statyczne i projektowanie* (wsp. z T. KLUZEM, CZ. EIMEREM, W. GRZEGORZEWSKIM, K. ZALESKIM i Z. ZIELIŃSKIM), PKN, PN-57/B-03320, Warszawa 1959. (C)

1960

158. *Some problems of continued plastic flow of the eccentric cylinder* (wsp. z S. ZACHORSKIM), Arch. Mech. Stos., 1960, Nr 5, Warszawa. (A)
159. *Zagadnienia teorii elementów uzwojonych. I Stany użytkowe*, Arch. Inż. Łąd., 1960, Nr 2, Warszawa. (A)
160. *Zagadnienia teorii elementów uzwojonych. II. Analiza ich nośności granicznej*, Arch. Inż. Łąd., 1960, Nr 2, Warszawa. (A)
161. *Nonlinearity, plasticity and rheology in the theory of structures*, Acta Mechanica Sinica, 1960, Nr 1. (B)
162. *Théorie de la capacité portante des constructions nonhomogènes et anisotropes (I. Plaques; II. Voiles minces)* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Ann. Inst. Bât. Trav. Publ., 1960, Nr 149, Paris. (B)
163. *Elastic-plastic and limit analysis of non-homogeneous arched bridge structures*, Rapp. Fin. Congr. Int. AIPC, 1960, Stockholm. (A)
164. *Cracks in structural elements considered as a problem of the theory of elasticity and plasticity* (tłum. z polsk. A. BYRSKI), wyd. P. C. Paris 1960, Washington. (B)
165. *Calcolo a rotura de estruturas heterogeneas orthotrópicas. I. Parte: Placas* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Técnica, Revista de Engenharia, 1960, Nr 305. (B)
166. *Calcolo a rotura de estruturas heterogeneas orthotrópicas. II. Parte: Cascas* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Técnica, Revista de Engenharia, 1960, Nr 306. (B)

1961

167. *On the load-carrying capacity of bound elements with a curvilinear limit characteristic*, Arch. Mech. Stos., 1961, Nr 3, Warszawa. (A)
168. *Note on single-valued solutions to certain elastic-plastic plane problems*, Arch. Mech. Stos., 1961, Nr 6, Warszawa. (A)
169. *Nichthomogenitäts-Probleme in elastischen und vorplastischen Bereich* (wsp. z J. RYCHLEWSKIM), Österr. Ing.-Archiv, 1961, Nr 1—4. (A)

170. *Гипотеза неоднородности в квази-стационарной задаче пластического течения* (po ros. i ang), (wsp. z S. ZAHORSKIM), „Проблемы Механики Сплошной Среды”, Tom Jubil. Akad. N. I. MUSCHELISZWILI, 1961, Moskwa i Philadelphia. (A)
171. *Efekty reologiczne i zjawiska dziedziczenia w sprężonych elementach uzwojonych* (wsp. z A. STĘPNIEM), Sympozjum Reologii PTMTS, Wrocław 1961. (A)
172. *Współczynnik w/c w teorii i w praktyce*, Arch. Inż. Łąd., 1961, Nr 3, Warszawa. (A)
173. *A method of limit analysis of reinforced concrete tanks* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Int. Coll. on Simplif. Calcul. Methods, 1961, Bruxelles. (A)
174. *Az inhomogén testek plaszticitás-elméletének mernöki alkalmazásairól*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., 1961, Nr 1—4, Budapest. (B)
175. *An anisotróp inhomogén elasztoplastikus testek elméletének néhány alapvető problémájáról* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., 1961, Nr 1—4, Budapest. (B)
176. *Задача о пластическом течении, зависящем от времени* (wsp. z S. ZAHORSKIM), Механика 1961, Нр. I, Москва. (B)
177. *Simplified methods for instability problems* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Int. Coll. on Simplif. Calcul. Methods, 1961, Bruxelles. (C)
178. *Problematyka budownictwa inżynierskiego w pracach i organizacji Polskiej Akademii Nauk* (wsp. z S. KAJFASZEM), Inwest. i Budown., 1961, Nr 2, Warszawa. (D)

1962

179. *Propagation of spherical waves in a non-homogeneous elastic-visco-plastic medium* (wsp. z P. PERZYNA), Coll. Int. Marseille, CNRS Paris 1962. (A)
180. *Geometric properties of stress fields in plastically non-homogeneous bodies under conditions of plane strain* (wsp. z J. RYCHLEWSKIM), Int. Coll. IUTAM, Haifa 1962. (A)
181. *Creep phenomena in prestressed bound elements* (wsp. z A. STĘPNIEM), Arch. Mech. Stos., 1962, Nr 2, Warszawa. (A)
182. *Two examples of photoelastic investigations*, Symp. „Analysis and Design of Hydraulic Structures”, Bangalore 1962 (Indie). (A)
183. *Rheological effects in prestressed compressed elements* (wsp. z A. STĘPNIEM), Proc. IV Int. Congr. FIP, Roma—Napoli, t. I, 1962. (A)
184. *On a time dependent plastic flow problem* (wsp. z S. ZAHORSKIM), Elsevier Publ. Co., Amsterdam—New York 1962. (A)
185. *Inelastic shell problems* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Proc. World Conf. on Shell Structures, San Francisco 1962. (B)
186. *Maksymilian Tytus Huber*, Polski Słownik Biograficzny 1961, t. X, Nr 44, Kraków. (D)

1963

187. *On critical states in viscoelasticity*, w wydawn. „Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniv. Volume”, MacMillan, New York 1963. (A)
188. *The load carrying capacity of plates and shells* (wsp. z R. SANKARANARAYANANEM), IASS Symp. on Non-Classical Shell Problems, North Holland — PWN, Warszawa 1963. (A)
189. *Quelques remarques sur la Construction et la Science*, Bull. RILEM, 1963, Nr 19, Paris. (C)

190. *Zagadnienia powłok niesprężystych* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Mech. Teor. i Stos., 1963, Nr 1, Warszawa. (B)
191. *Międzynarodowe Stowarzyszenie RILEM. Jego historia, organizacja i działalność*, Przegl. Bud., 1963, Nr 10, Warszawa. (D)

1964

192. *Time dependent effects in bound elements* (wsp. z A. STĘPNIEM), Rapp. Prel. 7-e Congr. AIPC, Rio de Janeiro 1964. (A)
193. *The constitutive equations for elasto/visco-plastic soils* (wsp. z P. PERZYNA), Symp. Mechaniki Gruntów i Fundam., Łódź 1964. (B)
194. *La non-homogénéité plastique en tant que phénomène physique et problème scientifique*, Księga Jubil. Prof. F. CAMPUSA, Bruxelles 1964. (B)
195. *Stany użytkowe i nośność graniczna elementów uzwojonych z rdzeniem fizycznie nieliniowym* (wsp. z A. STĘPNIEM), Arch. Inż. Łąd., 1964, Nr 1, Warszawa. (A)
196. *Dzielo naukowe Maksymiliana T. Hubera* (wsp. z W. URBANOWSKIM), w wydawn. Pisma tom I, PWN, Warszawa 1964. (D)

1965

197. *On biharmonic plane-equilibrium states in non-homogeneous elastic-plastic media* (wsp. z J. RYCHLEWSKIM), Int. Symp. IUTAM „Theory of Functions”, Tbilisi 1965. (A)
198. *On anisotropic twisted bars; a non-linear aspect*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungar., 1965, Nr 50, Budapest. (A)
199. *On some fundamental problems of non-homogeneous and anisotropic plasticity; O nekim osnovnym problemima nehomogene i anisotropne plasticznosti* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Glas, Acad. Serbe Sci., Beograd 1965. (B)
200. *Koncepcja naroża plastycznego w świetle teorii i doświadczenia*, Księga Jubil. Prof. A. KRUPKOWSKIEGO, PWN, Kraków 1965. (A)
201. *Witold Wierzbicki 1890—1965*, Nauka Polska, 1965, Nr 4, Warszawa. (D)
202. *Konstrukcje inżynierskie* (wsp. z CZ. EIMEREM), Podst. Problemy Współcz. Techniki, tom X, PWN, Warszawa 1965. (C)

1966

203. *On elastic/visco-plastic soils* (wsp. z P. PERZYNA), Symp. Int. IUTAM „Mécanique et Rhéologie des Sols”, Grenoble 1966. (A)
204. *Theory of inelastic shells* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Symp. „Theory of Plates and Shells”, Smolenice 1963, publ. Bratislava 1966. (B)
205. *The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition* (wsp. z P. PERZYNA), Int. Congr. IUTAM, München 1964, publ. Springer — Verlag 1966. (A)
206. *Prestressing* (wsp. z CZ. EIMEREM), Applied Mechanics Surveys, Spartan Books, Washington 1966. (B)
207. *Teoria plastyczności i jej zastosowania*, Pol. Per., 1966, Nr 9, Warszawa. (D)

208. *Zastosowanie maszyn cyfrowych do analizy statycznej konstrukcji inżynierskich* (słowo wstępne do książki M. Z. BZYMKKA), wyd. Arkady, Warszawa 1966; Bevezetés (tłum. na jęz. węgierski), Tankönyvkiado, Budapest 1969. (D)
209. *Dzielo naukowe Witolda Wierzbickiego*, Ks. Jubil. Wydz. Inż., Warszawa 1966. (D)
210. *Prestressed structures* (wsp. z Cz. EIMEREM), Intern. Science, 1966, Nr 58. (D)

1967

211. *General constitutive equations for elastic-visco-plastic materials* (wsp. z P. PERZYNA), F. K. G. ODQVIST Anniv. Volume, Stockholm 1967. (A)
212. *Rheological states of geometrically non-linear rotational shells* (wsp. z Z. BYCHAWSKIM), IUTAM Symp. „Theory of Thin Shells”, Copenhagen 1967. (A)
213. *Interpretacja energetyczna stanów krytycznych w ciałach lepkosprężystych* (wsp. z Z. BYCHAWSKIM), Prace IPPT, 1967, Nr 2, Warszawa. (A)
214. *Общие определяющие уравнения для упруго-вязко-пластических материалов* (wsp. z P. PERZYNA), Механика, 1967, № 4, Москва. (B)
215. *Problematyka naukowa w zagłębiu przemysłowym*, Zeszyty Problem., 1967, Nr 3, Katowice. (C)
216. Przedmowa do książki L. BRUNARSKIEGO i M. KWIECIŃSKIEGO: *Wstęp do Teorii Sprężystości i Plastyczności*, Wydawn. Politechn. Warsz., Warszawa 1967. (D)
217. *Über visko-plastische Effekte in der Erdbaumechanik*, IKM — IV Int. Kongress, t. 2, Weimar 1967. (B)
218. *Attitudes active et passive dans l'étude des vibrations*, Symp. RILEM, Final Report, Vol. III, 1967. (B)
219. *On the objective estimation of criteria of safety in structural engineering* (wsp. z B. LEWICKIM), Symp. AIPC, London 1967. (C)

1968

220. *On thermo-dynamics of the differential type material* (wsp. z P. PERZYNA), Symp. IUTAM „Irreversible Phenomena in Continuum Mechanics”, Wien 1968. (A)
221. *Creep failure of nonlinear rotational shells* (wsp. z Z. BYCHAWSKIM), VII. Int. Congr. AIPC, 1968. (A)
222. *Elasticity or plasticity?* VIII. Int. Congr. AIPC, 1968. (C)
223. *Thermal effects in viscoplasticity* (wsp. z P. PERZYNA), Symp. IUTAM „Thermoinelasticity”, East Kilbride 1968. (A)
224. *Sur la théorie des phénomènes visco-plastiques*, Rendiconti del Seminario Matematico, Milano, t. 138, 1968. (B)
225. *Les équations constitutives et phénomènes de relaxation dans les milieux elasto/visco-plastiques* (wsp. z P. PERZYNA), Rendiconti del Seminario Matematico, Milano, t. 36, 1968. (B)
226. *Les phénomènes inélastiques et leur importance dans le domaine du Génie Civil* (wstęp napisany przez prof. J. VERDEYEN), Centre Nat. Rech. Constr. Civ., Bruxelles 1968. (C)
227. *O podstawowych pojęciach w reologii* (wsp. z Z. BYCHAWSKIM), Księga Jubil. Prof. R. Szewalskiego, PWN, Warszawa 1968. (B)
228. *On compressible visco-plastic media* (wsp. z P. PERZYNA), Prof. B. R. SETH Anniv. Issue, Journ. Math. and Phys. Sci., 1968, Nr 1, Madras (Indie). (B)
229. *Les effets de la precontrainte sur le comportement des éléments frettés non-linéaires* (wsp. z A. STĘPNIEM), IASS, Vol. Homm. au Prof. A. M. Haas, Nr 36, 1968, Delft. (A)
230. *Nauka a przemysł*, Zeszyty Problem., 1968, Nr 6, Katowice. (D)

1969

231. *On thermal phenomena in visco-plasticity* (wsp. z P. PERZYNA), Z. angew. Math. u. Physik, 1969, Nr 5, Basel. (A)
232. *On certain cases of elastic non-homogeneity* (wsp. z J. RYCHLEWSKIM), w wydawn. „Contributions to Mechanics”, Pergamon Press 1969. (A)
233. *Creep phenomena and failure of non-linear rotational membranes* (wsp. z Z. BYCHAWSKIM), Księga Jubil. Prof. L. I. Siedowa „Problemy Gidrodinamiki i Miechaniki Sploszonej Sriedy”, Izd. Nauka, Moskwa 1969, oraz Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia 1969. (A)
234. *Non-stationary yield criterion* (wsp. z P. PERZYNA), Symp. „Progress in Thermoelasticity”, PWN, Warszawa 1969. (B)
235. *Visco-plasticity in engineering materials*, Int. Conf. on Structures and Solid Mechanics, Southampton 1969. (B)
236. *O podstawach i kierunkach rozwoju konstrukcyj* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Inż. i Budown., 1969, Nr 8—9 Warszawa. (C)

1970

237. *О влиянии индивидуальных упругих свойств человеческого тела на результаты измерений артериального давления* (wsp. z J. ZAWIDZKIM), Księga Jubil. Prof. W. W. Nowożiłowa „Проблемы Механики Тверд. Деформ. Тела”, Ленинград 1970. (A)
238. *Stationary and non-stationary visco-plasticity* (wsp. z P. PERZYNA), Symp. „Inelastic Behaviour of Solids”. Columbus, Ohio 1970. (B)
239. *Реологические эффекты в теории нелинейных оболочек* (wsp. z Z. BYCHAWSKIM), Proc. First Nat. Congress on Theor. and Appl. Mech. Warna 1970. (B)

1971 i w druku

240. *Übergangserscheinungen in visko-plastischen Medien*, IKM—Int. Kongress, Weimar. (B)
241. *Stany sprężysto-plastyczne i nośność graniczna niejednorodnych konstrukcji mostowych w formie tarcz łukowych* (wsp. z Z. WESOŁOWSKIM), Księga Jubil. Prof. K. Havelki, SAV, Bratislava. (A)
242. *Le problème de l'angle solide et du plan indéfini non-homogène à propriétés non-linéaires, sollicité par une force concentrée* (wsp. z J. MURZEWSKIM), Księga ku Czci Prof. J. Klitchieff'a, Acad. Serbe des Sciences et Arts, Beograd. (A)
243. *Die Plastizitätstheorie und ihre Bedeutung für die Ingenieurwissenschaften*, Österr. Ing.-Zeitschr., Wien. (B)
244. *Neuzeitliche Entwicklungsrichtungen in der Mechanik und deren Bedeutung für die technischen Wissenschaften*, Wiss. Zeitschr., Techn. Univ., Dresden. (B)

Prace opublikowane w Biuletynie Zagranicznym PAN

245. *Généralisation de l'analogie de la membrane élastique aux problèmes des systèmes anisotropes*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1953, Nr 1/2; *Обобщение мембранной аналогии в применении к проблемам анизотропных систем*, Бюлл. ПАН, 1953, № 1/2.

246. *Thermal stresses in thick-walled anisotropic cylinders* (wsp. z J. NOWIŃSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1953, Nr 1/2; *Термические напряжения в толстостенном анизотропном цилиндре*, Бюлл. ПАИ, 1953, № 1/2
247. *Sur la théorie de la charge limite des plaques orthotropes*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1954, Nr 1; *К теории несущей способности ортотропных плит*, Бюлл. ПАИ, 1954, № 1.
248. *Non-linear liquid flow as a rheological model* (wsp. z J. LIŃWISZYŃEM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1954, Nr 2; *Нелинейное явление некоторого протекания жидкости в качестве реологической модели*, Бюлл. ПАИ, 1954, № 2.
249. *On some problems of the theory of bound elements with regard to the rheological properties of their materials*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1954, Nr 3; *Из вопросов теории элементов со спиральной облойкой в связи с реологическими свойствами материалов*, Бюлл. ПАИ, 1954, № 3.
250. *On the bases of the theory of physically non-linear elastic bodies* (wsp. z J. NOWIŃSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci. 1954, Nr 3; *Об основах теории упругих физических нелинейных тел*, Бюлл. ПАИ 1954, № 3.
251. *On the bases of the theory of non-homogeneous elasto-plastic bodies (I)*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1955, Nr 2; *Об основах теории неоднородных упруго-пластических тел (I)*, Бюлл. ПАИ, 1955, № 2.
252. *Principles of the theory of non-homogeneous elastic-plastic bodies (II)*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1955, Nr 3; *Об основах теории неоднородных упруго-пластических тел (II)*, Бюлл. ПАИ, 1955, № 3.
253. *Plane problems of the theory of plastic flow of non-homogeneous bodies*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1955, Nr 3; *Плоская задача теории пластического течения неоднородных тел*, Бюлл. ПАИ 1955, № 3.
254. *Experimental verification of the limit analysis of plates (I)* (wsp. z A. SAWCZUKIEM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1955, Nr 4; *Экспериментальная проверка теории несущей способности пластинок (I)* Бюлл. ПАИ, 1955, № 4.
255. *On a classification of non-homogeneous elasto-plastic bodies*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1956, Nr 1; *Некоторая классификация неоднородных упруго-пластических сред*, Бюлл. ПАИ, 1956, № 1.
256. *On the foundations of the theory of elasticity of physically non-linear non-homogeneous bodies* (wsp. z M. ŻYCZKOWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1956, *Об основах теории упругости физически нелинейных неоднородных тел*, Бюлл. ПАИ, 1956, № 2.
257. *On the thermoelastic problem in the case of bodies of any type of curvilinear orthotropy* (wsp. z J. NOWIŃSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1956, Nr 2.
258. *Non-homogeneous thick-walled elastic-plastic cylinder subjected to internal pressure* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1956, Nr 3.
259. *Non-homogeneous thick-walled elasto-plastic spherical shell subjected to internal and external pressures* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1956, Nr 3.
260. *Non-homogeneous elastic-plastic semi-infinite plate loaded by a concentrated force* (wsp. z J. MURZEWSKIM i J. GOLECKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1956, Nr 4.
261. *The generalized distortion energy in the theory of anisotropic bodies* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1957, Nr 1.
262. *The tensor of moduli of plasticity* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1957, Nr 1.
263. *The flow function and the yield condition for non-homogeneous orthotropic bodies* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1957, Nr 4.
264. *On the phenomena of crack formation and propagation*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1957, Nr 6.
265. *Elastic bending of circular plates with eccentric holes (application of the method of inversion)* (wsp. z Z. MROZEM), Bull. Acad. Pol. Sci. 1958, Nr 2.
266. *Variational theorems in the theory of non-homogeneous elastic-plastic bodies (I). Non-homogeneous and anisotropic bodies* (wsp. z P. PERZYŃĄ), Bull. Acad. Pol. Sci., 1958, Nr 2.

267. *Variational theorems in the theory of non-homogeneous elastic-plastic bodies (II). Non-homogeneous isotropic bodies* (wsp. z P. PERZYŃĄ), Bull. Acad. Pol. Sci., 1958, Nr 2.
268. *On the elastic-plastic bending of non-homogeneous orthotropic plates* (wsp. z J. MURZEWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1958, Nr 3.
269. *The general case of axisymmetric bending of elastic-plastic plates* (wsp. z J. MURZEWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1958, Nr 3.
270. *Two-dimensional plastic flow problems of non-homogeneous anisotropic media (I). Two-dimensional states of strain* (wsp. z P. PERZYŃĄ i CZ. SZYMAŃSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1959, Nr 1.
271. *Two-dimensional plastic flow problems of non-homogeneous anisotropic media (II). Two-dimensional states of stress* (wsp. z P. PERZYŃĄ i CZ. SZYMAŃSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1959, Nr 1.
272. *Remarks on the validity of variational theorems in the mechanics of inelastic non-homogeneous anisotropic bodies* (wsp. z P. PERZYŃĄ), Bull. Acad. Pol. Sci., 1959, Nr 2/3.
273. *Plastic non-homogeneity: a survey of theoretical and experimental research* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1959, Nr 2/3.
274. *On an elastic-plastic problem of the eccentric cylinder (I). Basic assumptions, method of elastic and plastic solutions*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1959, Nr 11.
275. *On an elastic-plastic problem of the eccentric cylinder (II). Plastic and elastic-plastic problems*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1959, Nr 11.
276. *Theoretical approach to problems of bound elements (I). Working stages*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1960, Nr 10.
277. *Theoretical approach to problems of bound elements (II). The mechanical moduli of the core*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1960, Nr 11/12.
278. *Theoretical approach to problems of bound elements (III). Limit analysis*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1960, Nr 11/12.
279. *Extremum theorems in general visco-elasticity* (wsp. z P. PERZYŃĄ), Bull. Acad. Pol. Sci., 1961, Nr 1.
280. *Theoretical problems of bound elements. Limit analysis with a curvilinear limit characteristic. Conclusions and applications*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1961, Nr 5.
281. *Propagation of spherical waves in a non-homogeneous elastic-visco-plastic medium* (wsp. z P. PERZYŃĄ), Bull. Acad. Pol. Sci., 1961, Nr 9.
282. *On a problem of plastic flow of the eccentric cylinder* (wsp. z S. ZAHORSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1961, Nr 12.
283. *The one-parameter problem of continued plastic flow of the eccentric cylinder* (wsp. z S. ZAHORSKIM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1961, Nr 12.
284. *Rheological effects in prestressed bound elements* (wsp. z A. STĘPNIEM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1962, Nr 3.
285. *The load carrying capacities of plates and shells* (wsp. z R. SANKARANARAYANANEM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1964, Nr 7.
286. *Les critères de transition en élasto-visco-plasticité (I). Les phénomènes physiques*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1964, Nr 7.
287. *Les critères de transition en élasto-visco-plasticité (II). Considérations théoriques*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1966, Nr 1.
288. *A note on the plastic theory of plates and shells* (wsp. z R. SANKARANARAYANANEM), Bull. Acad. Pol. Sci., 1965, Nr 11.

Pozycje dołączone po opracowaniu wykazu

289. *Energetic approach to nonlinear viscoelasticity* (wsp. Z. BYCHAWSKIM), Arch. Mech. Stos., Nr 6 (1971), (Jubil. Prof. W. NOWACKIEGO). (A)

290. *Nonclassical instability problems*, Proc. Int. Symp. RILEM on Instability Problems, vol. IV, I.N.T.I., Buenos Aires 1971. (A)
291. *Time-dependent yield phenomena* (wsp. z P. PERZYŃĄ), Centre Int. Sci. Méc., Udine 1971. (B)
292. *Physical and geometrical aspects of the rheological theory of membranes undergoing large deformations* (wsp. z Z. BYCHAWSKIM), IX Int. Congr. AIPC, Amsterdam. (A)
293. *Pełna teoria elementów uzwojonych. Przegląd wyników, uwagi krytyczne, perspektywy rozwoju*, Arch. Inż. Łąd., 1972, Nr 6 (Jubil. prof. Z. Wasutyńskiego), Warszawa. (B)
294. *Physical theory of viscoplasticity for small deformations* (wsp. z P. PERZYŃĄ), XIII Int. Congr. Theor. and Appl. Mech., Moscow 1972. (A)
295. *Plastizitätskriterien für rheologisch reagierende Stoffe*, Kongres GAMM, Lublana 1972 (w druku). (A)

Prace mniejsze

- Cementy ekspansywne* (wsp. z W. BIELICKIM), Przegl. Bud., 1947, Nr 9, Warszawa.
- Konkurs na projekt Mostu Dębnickiego w Krakowie*, Cem., 1948, Nr 4, Warszawa.
- Badania naukowe Zakładu Konstrukcji Wstępnie Sprężonych w Krakowie*, Inż. i Bud., 1948, Nr 12, Warszawa.
- Most Dębnicki w Krakowie*, Inż. i Bud., 1948, Nr 7/8, Warszawa.
- Znaczenie dyscyplin podstawowych dla rozwoju nauk inżynierskich*, Politechn., 1954, Nr 8, Warszawa.
- Powiązanie badań naukowych z praktyką inżynierską*, Budowl., 1956, Nr 8, Warszawa.
- Elastisch-plastische Biegung von nicht homogenen orthotropen Kreisplatten* (wsp. z J. MURZEWSKIM), Phys. Verl., 1956, Nr 3, Mosbach.
- Zjawisko rys w elementach konstrukcyjnych*, Konfer. Nauk. PZITB, 1958, Warszawa.
- Неоднородность в теории пластичности*, Инст. Мех. АН СССР, 1962, Москва
- oraz ponad 110 recenzji prac naukowych w czasopismach „Polska Bibliografia Analityczna — Mechanika” Warszawa, „Реферативный Журнал АН СССР — Механика” Москва, „Applied Mechanics Reviews” San Antonio, „Zentralblatt für Mathematik” Berlin, „Quarterly of Applied Mathematics” Providence. R. I., „Inżynieria i Budownictwo” Warszawa i in.

Prace popularyzacyjne

- O bezpieczeństwie konstrukcyj*, Wydawn. Pol., 1928, Katowice.
- Międzynarodowy Zjazd Delegatów Laboratoriów w Paryżu*, Przegl. Bud., 1947, Nr 8, Warszawa.
- Z międzynarodowej wystawy urbanistyki i budownictwa w Paryżu*, Przegl. Bud., 1947, Nr 12, Warszawa.
- Teoria plastyczności i jej zastosowania w technice* (wsp. z W. URBANOWSKIM), Podst. Probl. Współcz. Techn., tom II, PWN 1957, Warszawa.
- Konstrukcje cieńsze od skorupki jajka...*, W Świecie Nauki i Techniki, 1960, Nr 4126, Warszawa.
- Wszystko płynie... czyli problematyka reologii w budownictwie inżynierskim*, Świat się zmienia, 1961, Nr 38, Warszawa.

Opracował: Michał Życzkowski

TEORIA NIELINIOWEJ LEPKOSPĘŻYSTOŚCI I JEJ ZASTOSOWANIA

ZBIGNIEW BYCHAWSKI (KRAKÓW)

Nieliniowa mechanika ciała stałego, a w jej ramach również teoria nieliniowej lepkospężystości, rozwinęły się wszechstronnie w ostatnich latach i posunęły naprzód w opisie mechanicznych i innych własności ciał rzeczywistych. W szczególności ugruntowane zostały podstawy teoretyczne tych nauk w oparciu o osiągnięcia współczesnej matematyki i fizyki, co wiąże się z wprowadzeniem nowego formalizmu do mechaniki. Jest to niewątpliwą zasługą TRUESDELLA i innych reprezentantów wytyczonego przez niego kierunku w badaniach teoretycznych.

Jednakże przyczynami tak szybkiego rozwoju mechaniki nieliniowej były nie tylko potrzeby i możliwości teoretycznych uogólnień, ale również — i to przede wszystkim — obiektywne warunki jakie stworzyła współczesna technika i zapotrzebowanie rozwijającego się szybko przemysłu. Jest to związane z koniecznością lepszej znajomości i bardziej ścisłego opisu własności nowych, a także tradycyjnych materiałów konstrukcyjnych. Te ostatnie poddane zostały bowiem zaostrzonym warunkom eksploatacyjnym lub też nie stosowanym dotychczas działaniom.

Jest rzeczą oczywistą, że rozwój nieliniowej teorii materiałów znacznie wyprzedził eksperyment i możliwości zastosowań praktycznych. Niemniej jednak teoria, nie ograniczając się jedynie do podsumowania dotychczasowych osiągnięć mechaniki ciał stałych, zawarła w sobie potencjalne źródło możliwości na przyszłość. Chodzi tu nie tylko o ulepszenie własności materiałów znanych, ale również o komponowanie materiałów o pożądanych własnościach.

Nieliniowe własności lepkospężyste, a ogólniej sprężysto-lepkoplastyczne, były przedmiotem zainteresowania teoretyków i eksperymentatorów od dziesięcioleci. W pierwszym okresie próby ich opisanie sprowadzały się głównie do określania praw empirycznych opartych na danych doświadczalnych dla specyficznych materiałów. Takie podejście, zresztą stosowane z konieczności do dziś, ma głównie znaczenie praktyczne i może spełnić — chociaż w ograniczonym zakresie — pozytywną rolę. Inne podejście, szeroko stosowane w pewnym okresie rozwoju reologii, opiera się na analogiach i modelach mechanicznych lub nawet modelach innego typu, których elementy składowe o charakterystykach nieliniowych mają poglądowo uzmysławiać złożone reakcje modelowanego materiału na odpowiednie działania. Zwykle w takich przypadkach równania konstytutywne formułowane z wykorzystaniem ogólnych zasad mechaniki przyjmują postać nieliniowych równań różniczkowych, niekiedy bardzo skomplikowanych.

Najbardziej ogólne podejście teoretyczne w nieliniowej teorii lepkosprężystości oparte jest na koncepcji wyrażania równań konstytutywnych w postaci funkcjonalnej. Kierunek ten jest reprezentowany w podstawowych pracach z zakresu nieliniowej mechaniki ciał odkształcalnych TRUESDELLA [1], GREENA i RIVLINA [2], [3], [4], NOLLA [5], COLEMANA i NOLLA [6] oraz innych autorów.

Rozważymy niektóre aspekty tego kierunku mające szczególne znaczenie w nieliniowej lepkosprężystości. I tak na przykład GREEN i RIVLIN stosują do opisu własności ciał lepkosprężystych rozwinięcie Volterry dla nieliniowych funkcjonalów, które — mając postać analogiczną do szeregu potęgowego — pozwala na uwzględnienie wpływu nieliniowości z żadaną dokładnością. Warto zauważyć, że pierwsze dwa wyrazy tego szeregu funkcjonalnego będącego uogólnieniem regularnego funkcjonału dowolnego stopnia odpowiadają prawu liniowej lepkosprężystości. W związku z tym należy podkreślić, że przybliżenie opisu własności nieliniowych materiałów lepkosprężystych szeregiem funkcjonalnym opiera się na odchyleniu od liniowości. W ogólnym jednak przypadku takie podejście ma charakter ograniczony, ponieważ istnieją materiały, których nieliniowe zachowanie się nie wykazuje w pewnych zakresach liniowego poziomu odniesienia. Jako przykład można tutaj podać ciało pełzające typu Odqvista. Próby zastosowania linearyzacji jego równania konstytutywnego w skończonym przedziale czasowym muszą prowadzić do błędnych rezultatów. Linearyzacja w tym przypadku może mieć jedynie znaczenie lokalne zewzględu na czas i nie usuwa nieliniowości równań problemów brzegowych przy wykorzystaniu tego prawa.

Ostatnie zagadnienie wiąże się bezpośrednio z zakresem słabej nieliniowości materiałów lepkosprężystych. Wiadomo z badań doświadczalnych na materiałach niemetalowych oraz na niektórych metalach lekkich, że wykazują one liniowość tylko do pewnej krytycznej wielkości naprężenia. Dla naprężeń większych odchylenie od liniowości wzrasta, a w efekcie proces ten prowadzi do stanu zniszczenia materiału. Jeżeli natomiast, chodzi o deformację czysto sprężystą, to liniowość jest zachowana prawie aż do stanu zniszczenia. Można zatem uważać, że dla stanu naprężenia, który różni się dostatecznie mało od stanu krytycznego¹⁾, dewiacja od liniowości będzie mała, a zatem nieliniowość słaba. Można więc przyjąć z kolei istnienie parametru fizycznego, zależnego od rodzaju materiału i odpowiedzialnego za wielkość dewiacji, przez który wyraża się zmianę stanu naprężenia ponad stan krytyczny. Koncepcja słabej nieliniowości rozwinięta w pracy BYCHAWSKIEGO i FOXA [7] ma jednak inny aspekt, aniżeli podobne podejście perturbacyjne do nieliniowej lepkosprężystości ARUTUNIANA [8], który uogólnienie swojej nieliniowej teorii pełzania betonu oparł na równaniach teorii małych deformacji sprężysto-plastycznych. Zastrzeżenie budzi tutaj fakt przyjęcia relacji wiążącej intensywności odkształcenia i naprężenia w postaci analogicznej do równania konstytutywnego dla przypadku jednowymiarowego. Postać ta, jak można łatwo wykazać, jest bardziej złożona. Jest to oczywiście tylko postulat teorii, który nie ma jednak uzasadnienia fizycznego.

Alternatywne podejście do ujęcia nieliniowości zaproponował LEADERMAN [9], [10], który wprost uogólnił zasadę Boltzmanna nadając jej formę nieliniowego równania całkowego. Uzasadnienie takiego ujęcia wynika z doświadczeń, które wskazują, że krzywe odkształceń zależnych od czasu uzyskane przy różnych stałych naprężeniach mogą być

¹⁾ Przez stan krytyczny będziemy rozumieli taki stan materiału, który prowadzi w określonej chwili do istotnych zmian jakościowych w jego zachowaniu się.

sprowadzone do siebie za pomocą czynnika niezależnego od czasu, a będącego jedynie funkcją naprężenia. Uogólnienie tych faktów na przypadek naprężeń zmiennych w czasie prowadzi bezpośrednio do równania proponowanego przez Leadermana. Równanie to jest szczególnym przypadkiem teorii, którą zajmujemy się w dalszym ciągu w niniejszej pracy. Ze względu na swoją stosunkową prostotę nadaje się ono niewątpliwie do zastosowań praktycznych. Odnosi się to szczególnie do zakresu słabej nieliniowości.

Podobna idea rozwinięta została w pracy RABOTNOWA [11], który podał teorię pełzania metali w postaci nieliniowego równania całkowego. Należy więc ona do teorii typu dziedziczenia.

Nie ulega wątpliwości, że w chwili obecnej najbardziej rozpowszechnioną w zastosowaniach teoretycznych i praktycznych jest teoria pełzania ODQVISTA [12], która powstała jako uogólnienie empirycznego prawa Nortona. Obejmuje ona cały zakres pełzania uwzględniając równocześnie efekty natychmiastowe w postaci nieodwracalnej. Jej zaletami są przede wszystkim stosunkowo prosta postać oraz dobra zgodność z doświadczeniem.

Jednym z naszych celów było znalezienie związku pomiędzy teoriami dziedziczenia, które zwykle wiąże się z własnościami reologicznymi materiałów niemetalowych, a teoriami pełzania metali. Związek taki został wykazany w pracy BYCHAWSKIEGO i FOXA [13], z której wynika, że teoria Odqvista jest szczególnym przypadkiem podanej tam teorii dla całkowicie nieliniowego ośrodka lepkospężystego.

Celem naszym nie jest podanie pełnego przeglądu prac w dziedzinie nieliniowej teorii lepkospężystości, a jedynie naświetlenie niektórych zagadnień, które wiążą się bezpośrednio z pewnymi aspektami prac własnych. Dlatego też we wstępie, który zupełnie nie pretenduje do rysu historycznego zagadnienia, ograniczamy się do cytowania prac, które wywarły bezpośredni wpływ na nasze prace oraz do sygnalizowania zagadnień jakie zamierzamy poruszyć.

Zanim przejdziemy do właściwej części pracy, omówimy pokrótce własne osiągnięcia w zakresie teorii nieliniowej lepkospężystości i jej zastosowań.

Dotychczasowe nasze prace wiązały się w początkowym okresie z ujęciem teoretycznym wpływu nieliniowości reologicznej na stan odkształcenia i stan naprężenia w zagadnieniach jednowymiarowych (BYCHAWSKI [14], [15], [16], [17]), z zastosowaniem teorii nieliniowej do analizy reologicznej konstrukcji sprężonych (OLSZAK, KAUFMAN, EIMER, BYCHAWSKI [18]) oraz koncepcjami o charakterze podstawowym (BYCHAWSKI, FOX [19]), które następnie posłużyły do postawienia ogólnej teorii (BYCHAWSKI, FOX [20], [21]), jak również rozważenia jej przypadków szczególnych (BOROWSKI, BYCHAWSKI [22]). Dalsze uogólnienie teorii znalazło swój wyraz w analizie zasad formułowania równania konstytutywnego nieliniowego ośrodka termo-lepkospężystego w oparciu o podaną w pracy [19] uogólnioną zasadę superpozycji (BYCHAWSKI, FOX [23]). Tutaj poruszone zostało podstawowe, naszym zdaniem, zagadnienie postulatów kompleksowości i zwartości czasowej równania konstytutywnego. Podana została również metoda operatorowa odwracania nieliniowego prawa lepkospężystości oparta na bazie funkcjonalnej (BYCHAWSKI [24]), która znajduje szczególne zastosowanie w problemach słabej nieliniowości.

Dalsze uogólnienie to ujęcie dystrybucyjnych aspektów deformacji plastycznej oraz zastosowanie tej teorii do analizy zjawisk niestabilności ośrodków reologicznych (BYCHAWSKI [25], BOROWSKI, BYCHAWSKI [57]).

Niezależnie od omówionego powyżej kierunku naszych prac, prowadzone były badania nad energetycznymi kryteriami dla stanów krytycznych ośrodków lepkosprężystych, które w efekcie prowadzą do nieliniowości (BYCHAWSKI, OLSZAK [26], [27], [28]). W szczególności kryteria te dotyczą ciał, które charakteryzują się prawie wyłącznie dysypacją energii. W tym przypadku tę ostatnią przyjmuje się jako miarę osiągnięcia stanu krytycznego. Wykazano tutaj intuicyjnie oczywisty fakt, że energia dysypowana nie posiada ekstremum różnego od trywialnego na poziomie zerowym (minimum).

Zastosowania teorii nieliniowej lepkosprężystości koncentrowały się głównie na zagadnieniach stateczności reologicznej (wyboczenia przy pełzaniu) płyt i powłok w zakresie geometrycznie nieliniowym (BYCHAWSKI [29], [30], [31], BYCHAWSKI, KOPECKI [32], [33]). Ostatnio rozpoczęte zostały również badania modelowe nad zagadnieniem wyboczenia przy pełzaniu dla powłok kulistych z materiałów metalowych i niemetalowych. Zjawisko było ujęte zarówno lokalnie, jak i integralnie. Pierwsze wyniki doświadczeń wraz z interpretacją teoretyczną zostały już opublikowane (BYCHAWSKI, KOPECKI [34]).

Dużą uwagę poświęcono geometrycznie nieliniowym membranom płaskim (kołowym) i powierzchniowym (obrotowo-symetrycznym, kulistym). Podano dla nich szereg rozwiązań ścisłych dla złożonych stanów fizycznych tych konstrukcji (BYCHAWSKI [35], [36], BYCHAWSKI, KOPECKI, [37], KOPECKI [38]). W szczególności duże znaczenie można przypisać odkrytej analogii między stanem natychmiastowym (sprężystym) a pełzaniem (nieliniowym) dla problemów geometrycznie nieliniowych membran kołowych (BYCHAWSKI [39]) i o dowolnym kształcie (BYCHAWSKI [40]). Jest rzeczą charakterystyczną i wartą podkreślenia, że możliwość istnienia takiej analogii negował ODQVIST [41], będąc — jak się wydaje — zasugerowany analogią Hoffa. Ostatnio fakt istnienia naszej analogii został potwierdzony przez jego szkołę w pracy doktorskiej STORÅKERSA [42].

Uogólnienia dotyczące zagadnień geometrycznie nieliniowych powłok w stanie membranowym przy złożonych stanach deformacji sprężysto-lepkoplastycznej znalazły swój wyraz w rozwiązaniach ścisłych dla powłok obrotowo-symetrycznych (BYCHAWSKI [43], BYCHAWSKI, OLSZAK [44]) i szczegółowej analizie powłoki kulistej pod ciśnieniem wewnętrznym (BYCHAWSKI, KOPECKI [45]). W pracach tych uogólniona została również omówiona powyżej analogia, która w ten sposób objęła szerszą klasę zagadnień nie tylko płaskich, lecz również ustrojów powierzchniowych.

Inne praktycznie ważne zagadnienie pełzania powłoki cylindrycznej o przekroju kołowym pod ciśnieniem wewnętrznym postawione zostało odmiennie, aniżeli to miało miejsce w dotychczasowych pracach. Równanie problemu, uwzględniające współdziałanie sił wewnętrznych, rozwiązane zostało w sposób ścisły (BYCHAWSKI [46]). Przeprowadzono również krytyczną konfrontację teoretycznego ujęcia problemu przez innych autorów.

Termo-lepkosprężysta analiza powłoki walcowej pod ciśnieniem wewnętrznym pozwoliła na dyskusję możliwości podejścia do rozwiązania tego trudnego problemu i przedstawienie rozwiązań dla przypadków szczególnych (BYCHAWSKI [47]).

Z prac o charakterze ogólnym wymienić należy przegląd podstawowych pojęć i zagadnień reologii nieliniowej oraz teorii nieliniowej lepkosprężystości (BYCHAWSKI, OLSZAK [48]), jak również monograficzny wykład podstaw reologii liniowej i nieliniowej w Duńskim Uniwersytecie Technicznym w Kopenhadze (BYCHAWSKI [49]), oparty w dużej części na oryginalnej interpretacji i pracach własnych.

Zagadnienie płaskich stanów lepkospężytych elementów konstrukcyjnych w ujęciu nieliniowym rozważane było dla tarczy kołowej poddanej zginaniu (BYCHAWSKI, SIENICKI [50]) i dla geometrycznie nieliniowych płyt prostokątnych (BYCHAWSKI [51]). W tym ostatnim przypadku rozwiązania ściśle dotyczą silnej nieliniowości pełzania, co pozwala na przejście graniczne do membranowego stanu plastycznego na podstawie ujęcia stanu natychmiastowego (pełzanie przejściowe). Ważnym wnioskiem wynikającym z tej pracy jest stwierdzenie, że, podobnie jak to ma miejsce dla membran, również w przypadku płyt pełzanie jest nieustalone.

Problemy matematyczne nieliniowej teorii lepkospężytych rozważane były pod kątem wprowadzenia uogólnionych form funkcji pełzania (BYCHAWSKI [52]), metod rozwiązania konstytutywnych równań całkowych nieliniowych (BYCHAWSKI, PIŚCZEK [53]) oraz metod odwracania równań konstytutywnych (BYCHAWSKI [54]). W szczególności wykazano możliwości zastosowania tych metod do problemów geometrycznie nieliniowych powłok obrotowo-symetrycznych (BYCHAWSKI [55]). Przeprowadzona tutaj linearyzacja fizycznego aspektu zagadnienia pozwala na prostą i poglądową interpretację wyników w zakresie słabej nieliniowości.

Dalsze aktualnie prowadzone prace wiążą się z zastosowaniami teorii nieliniowej lepkospężytych do materiałów i konstrukcji wykazujących w procesie odkształcenia duże deformacje. Prace te dotyczą zarówno podstaw teorii dużych deformacji lepkospężytych, jak i jej zastosowań do konstrukcji membranowych (BYCHAWSKI [56], BYCHAWSKI, OLSZAK [58]). Ideą przewodnią, chociaż trudną do zrealizowania, jest uzyskanie rozwiązań analitycznych. W związku z problemem dużych deformacji poszukiwane są również ujęcia energetyczne nieliniowej lepkospężytych w postaci funkcjonalnej (BYCHAWSKI [24]), a pierwsze wyniki prac w tym kierunku wskazują na potrzebę oparcia teorii na bazie termodynamiki procesów nieodwracalnych.

Problemy jakimi zamierzamy się zająć w dalszym ciągu niniejszej pracy mają charakter podstawowy i stanowią uogólnienie prac omówionych powyżej. Celem naszym jest tutaj przedstawienie nowych koncepcji i nowego ujęcia formalnego, a na tej podstawie bardziej ogólnej interpretacji i bardziej wnikliwej dyskusji zagadnień nieliniowej lepkospężytych.

1. Postać równania konstytutywnego nieliniowej teorii lepkospężytych

Równanie konstytutywne materiału rzeczywistego, a w istocie jego wyidealizowanego modelu możliwie ściśle opisującego obserwowalne własności tego materiału, powinno być przede wszystkim pozbawione wewnętrznych sprzeczności. Jeśli warunek ten jest spełniony, to od równania konstytutywnego należy oczekiwać możliwości wyciągnięcia wniosków co do zachowania się materiału w odpowiednich sytuacjach działań mechanicznych i innych. Inaczej mówiąc, równanie to dawać powinno możliwość przewidywania skutków przy zadanych przyczynach lub określenia przyczyn na podstawie obserwowanych skutków.

Jest rzeczą oczywistą, że podstawą dla formułowania równania konstytutywnego ciała rzeczywistego musi być eksperyment przeprowadzony z reguły w prostszych warunkach aniżeli te, dla których odpowiedź ma dać to równanie. Jest również oczywiste, że równanie konstytutywne może być także określone na drodze eksperymentu myślowego (dla materiału hipotetycznego), co nie jest wcale pozbawione sensu praktycznego.

Zgodnie z ogólnymi założeniami fizyki, równanie konstytutywne powinno odpowiadać trzem podstawowym zasadom: przyczynowości, lokalności działania i obiektywności materialnej.

O ile znaczenie dwóch ostatnich zasad jest równorzędne dla wszystkich typów ośrodków, to zasadzie pierwszej należy przypisać szczególne znaczenie w teorii nieliniowej lepkosprężystości. Wynika to z roli historii ruchu materiału, która określa jego stan w danej chwili i z konieczności pamiętania o tej zasadzie każdorazowo przy wykonywaniu operacji funkcjonalnych na związkach konstytutywnych. Formalnym wyrazem zasady przyczynowości jest uogólniona zasada superpozycji sformułowana i rozwinięta w pracach [7], [19]. Tę ostatnią można napisać dla składowych tensora stanu odkształcenia ośrodka lepkosprężystego w następującej postaci:

$$(1.1) \quad e_{ij}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau) d[\theta(\tau-t_0) e_{ij}(\tau)],$$

gdzie t_0 jest chwilą początkową, θ zaś oznacza dystrybucję Heaviside'a zdefiniowaną jak następuje

$$(1.2) \quad \theta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Przez wprowadzenie dystrybucji θ określamy ściśle przedział czasowy superpozycji $[t, t_0]$ tak, że uwzględnia ona ewentualne efekty początkowe związane z historią do chwili t_0 lub zachodzące w tejże chwili (efekty natychmiastowe).

Zasada superpozycji w postaci (1.1) jest tylko przepisem formalnym sposobu określania tensora odkształcenia w chwili t . Dlatego też nie będzie miała ona znaczenia fizycznego dopóty, dopóki nie podamy związku pomiędzy skutkami, które superponujemy w określony sposób a przyczynami, które je wywołują.

Jak widać z postaci równania (1.1) związek taki powinien być zadany w postaci różniczkowej, a ponieważ ma być spełniony warunek całkowalności, to wyrażenie pod znakiem całki musi być różniczką zupełną.

Uwzględniając warunek początkowy jako niezerowy, możemy (1.1) napisać alternatywnie

$$(1.3) \quad e_{ij}(t) - e_{ij}(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t-\tau) \theta(\tau-t_0) de_{ij}(\tau),$$

co implikuje formę różniczkową

$$(1.4) \quad \alpha(t, \tau, t_0) de_{ij}(\tau) = \alpha(t, \tau, t_0) \Phi_{ij}(\tau) d\tau,$$

ze względu na ciągłość parametru t . Jest ona równoważna formie (1.1) zgodnie z przyjętą klasą całkowalności i wyborem określonej miary. Z ostatniej formy wynika, że różniczkowa postać konstytutywna wyraża się jedyną «zwartą» funkcją tensorową parametru czasu Φ_{ij} , która może reprezentować nawet bardzo złożone zachowanie się materiału lepkosprężystego w procesie odkształcenia. Tutaj przez α oznaczamy czynnik

$$(1.5) \quad \alpha(t, \tau, t_0) = \theta(t-\tau) \theta(\tau-t_0).$$

Łatwo zauważyć, że przy założeniu różniczkowalności tensora odkształcenia otrzymamy z (1.4) wprost

$$(1.6) \quad \alpha(t, \tau, t_0) e_{ij}(\tau) = \alpha(t, \tau, t_0) \Phi_{ij}(\tau),$$

co nadaje funkcji Φ_{ij} bezpośrednią interpretację fizyczną.

Z formą (1.4) lub (1.1) wiążą się dwa, naszym zdaniem, podstawowe postulaty, które powinno spełniać równanie konstytutywne uzyskane w oparciu o zasadę uogólnionej superpozycji: postulat zwartości czasowej i postulat kompleksowości.

Aby wyjaśnić znaczenie wymienionych postulatów określimy w jaki sposób, naszym zdaniem, należy rozumieć zachowanie się ośrodka lepkospężystego w zakresie nieliniowym. Wszystkie cechy reakcji materiału na działania, które istnieją obiektywnie, a które, zgodnie z obserwowalnymi faktami, możemy mu przypisać niezależnie od skali czasu obserwacji, ujawniają się z chwilą wystąpienia odpowiednich przyczyn w postaci (1.4). Wynika stąd *współzależność rozmaitych efektów fizycznych w czasie, na które zwykle rozkładamy myślowo zachodzący proces ze względu na dogodność rozważań*. W związku z powyższym należy stwierdzić, że postulat zwartości czasowej przeczy w ogólności możliwości addytywnej reprezentacji efektów nieliniowych w czasie. Efekty te są bowiem «wymieszane» w czasie, a kompleksowa reakcja wyraża się równaniem (1.4).

Takie podejście do ujęcia deformacji odbiega od znacznych założeń klasycznych, które za punkt wyjścia przyjmują addytywność formy równania konstytutywnego dla zakresu nieliniowego bez uzasadnienia. Można wykazać, jak na przykład uczyniliśmy to dla ośrodka lepkospężystego w pracy [23], że jedynie jego liniowy zakres dopuszcza addytywną formę bez dodatkowych warunków. Nie należy jednak sądzić, iż ta ostatnia nie jest w ogóle dopuszczalna dla zakresu nieliniowego. Przeciwnie, taka możliwość istnieje. Należy jednak spełnić dodatkowe warunki w taki sposób, aby forma addytywna przedstawiała różniczkę zupełną, to znaczy aby tensor odkształcenia mógł być przedstawiony w postaci (1.1). Warunki dodatkowe, o których mowa, muszą z konieczności wiązać ze sobą funkcje fizyczne charakteryzujące rozmaite własności materiału. Oznacza to, że na przykład tzw. własności natychmiastowe muszą się wyrażać przez własności czasowe i na odwrót, co z klasycznego punktu widzenia wydaje się w pierwszej chwili niemożliwe. Tak jednak jest w istocie, jeżeli weźmiemy pod uwagę fakt, że funkcje o których mowa, są współczynnikami formy różniczkowej przy różniczkach wydzielonych zmiennych niezależnych równania konstytutywnego. Muszą one zatem, w myśl zasady (1.1), spełniać tzw. relacje krzyżowe.

Załóżmy, że konstytutywna forma różniczkowa ma w przypadku ogólnym postać

$$(1.7) \quad \bar{d}e_{ij} = \bar{A}_{ij}^1 d\varrho_1 + \bar{A}_{ij}^2 d\varrho_2 + \dots + \bar{A}_{ij}^n d\varrho_n,$$

gdzie

$$(1.8) \quad \bar{A}_{ij}^k = \bar{A}_{ij}^k(\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n, ers),$$

a ϱ_k są niezależnymi zmiennymi fizycznymi. Wtedy, o ile forma ma przedstawiać różniczkę zupełną, muszą być spełnione relacje

$$(1.9) \quad \partial_l \bar{A}_{ij}^k + \bar{A}_{ij}^l \cdot \partial_{ers} \bar{A}_{pq}^k \delta_{pr} \delta_{qs} = \partial_k \bar{A}_{ij}^l + \bar{A}_{ij}^k \cdot \partial_{ers} \bar{A}_{pq}^l \delta_{pr} \delta_{qs} \quad (k, l = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie symbole różniczkowania mają następujące znaczenie

$$(1.10) \quad \partial_i = \partial/\partial\varrho_i, \quad \partial_{ers} = \partial/\partial\varrho_{ers},$$

a δ_{ij} oznacza tensor jednostkowy.

Jeżeli jedną ze zmiennych niezależnych jest czas, co oczywiście ma miejsce dla ciała lepkosprężystego, wówczas zgodnie z zasadą przyczynowości piszemy

$$(1.11) \quad \bar{d}e_{ij} = \alpha de_{ij}, \quad \bar{A}_{ij}^k = \alpha A_{ij}^k,$$

gdzie α jest czynnikiem (1.5).

W szczególnym przypadku (1.8) może nie mieć charakteru równania zupełnego, a wtedy relacje (1.9) redukują się do postaci

$$(1.12) \quad \partial_i \bar{A}_{ij}^k = \partial_k \bar{A}_{ij}^l.$$

Jak wynika z naszych rozważań, postulat kompleksowości równania konstytutywnego lepkosprężystości nieliniowej będzie spełniony dla addytywnej formy superpozycyjnej (1.7), jeżeli spełnione będą relacje (1.9) lub (1.12). Jak wykazaliśmy w pracy [23], relacje te są spełnione dla ośrodka liniowego tożsamościowo. W danym przypadku natomiast, dostarczają one dodatkowych związków konstytutywnych pomiędzy funkcjami charakteryzującymi rozmaite własności fizyczne materiału, które zabezpieczają kompleksowość równania konstytutywnego w przypadku stosowania uogólnionej superpozycji.

2. Funkcjonalna interpretacja równania konstytutywnego nieliniowej lepkosprężystości

Równanie (1.1) wyrażające uogólnioną zasadę superpozycji może być interpretowane fizycznie jako funkcjonał, w naszym przypadku ośrodka nieściśliwego, dewiatora naprężenia s_{ij} . Możemy zatem napisać formalnie

$$(2.1) \quad e_{ij}(t) = L(s; t) s_{ij},$$

gdzie L jest nieliniowym operatorem funkcjonalnym (całkowym) nałożonym na dewiator naprężenia, zaś s oznacza intensywność naprężenia²⁾.

Formę funkcjonału (2.1) otrzymamy rozważając przestrzeń funkcji ciągłych (mierzalnych i ograniczonych) $s_{ij}(\tau)$, w której

$$(2.2) \quad e_{ij}(t) = \lim \sum s_{ij}(\tau^*) \Delta_\tau K[t, \tau^*, s(\tau^*)] = \int_{t_0-0}^{t+0} s_{ij}(\tau) d_\tau K[t, \tau, s(\tau)],$$

gdzie K odgrywa rolę kompleksowej funkcji fizycznej charakteryzującej nieliniowe własności lepkosprężyste materiału, τ^* oznacza dowolną chwilę z podprzedziału $\Delta\tau$ przedziału $[t_0-0, t+0]$, zaś $\Delta_\tau K$ jest przyrostem funkcji K .

Jak widać, funkcjonał typu (2.2) może być przedstawiony w postaci wydzielonych (addytywnych) trzech członów, odpowiadających reprezentacji całki Stieltjesa, przez którą się wyraża. Pierwszy z tych członów jest związany z nieciągłościami funkcji fizycznej K , a zatem reprezentuje efekty typu natychmiastowego. Drugi człon przedstawia bezwzględ-

²⁾ Tutaj i w dalszym ciągu zakładamy, że operator L zależy tylko od drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia, tzn. od intensywności naprężenia, przez którą ten ostatni się wyraża.

nie ciągłą część funkcji K , a więc związany jest z ciągłością efektów zależnych od czasu o sumowalnej gęstości dystrybucji. Wreszcie, trzeci człon, który w naszej interpretacji pomijamy, odpowiada efektom rozłożonym w sposób ciągły na zbiorze miary zero.

W ten sposób funkcjonal (2.2) sprowadzamy ostatecznie do postaci

$$(2.3) \quad e_{ij}(t) = s_{ij}(t) \Psi[s(t)] - \int_{t_0}^t s_{ij}(\tau) d_\tau \{ \Psi[s(\tau)] + H[t, \tau, s(\tau)] \} d\tau,$$

gdzie przyjęliśmy

$$(2.4) \quad K[t, \tau, s(\tau)] = -\{ \Psi[s(\tau)] \theta(t-\tau) + H[t, \tau, s(\tau)] \}.$$

Tutaj funkcja Ψ wyraża nieliniowe efekty, które występują w sposób natychmiastowy w chwili obserwacji t , zaś funkcja H odpowiedzialna jest za efekty rozciągnięte na przedziale $[t_0, t]$.

Forma funkcjonalna równania konstytutywnego (2.3) jest uogólnieniem koncepcji całkowicie nieliniowego materiału lepkospęrzystego podanej w pracy [21]. Tutaj została ona otrzymana na innej drodze.

Jak wynika z naszych rozważań, superpozycyjna postać funkcjonalu (2.2) w zupełności odpowiada idei kompleksowej reprezentacji nieliniowych własności lepkospęrzystych. Addytywna forma (2.3) wynika tutaj w sposób naturalny ze skojarzeń o charakterze czysto formalnym, które jednak posiadają w naszym przypadku interpretację fizyczną.

3. Rozwinięcia funkcjonalu konstytutywnego nieliniowej lepkospęrzystości

Omówiona już we wstępie koncepcja GREENA i RIVLINA [2], [3], [4] reprezentacji własności materiałów z pamięcią przy pomocy funkcjonalnych szeregów potęgowych dla funkcjonalów analitycznych ma z natury rzeczy charakter czysto ilościowy. Oznacza to, że nieliniowość jest uwzględniona w kolejnych przybliżeniach w postaci «dodatków» do wyjściowego lub podstawowego stanu liniowego. Wiadomo jednak, że nie wszystkie funkcjonały dają się przedstawiać przy pomocy rozwinięcia Volterry, którego członki mają postać jednorodnych regularnych funkcjonalów.

Ideą naszą jest próba przedstawienia rozwinięcia funkcjonalu typu (2.3), które posiadałoby charakter jakościowy, co z kolei pozwoliłoby na określenie charakteru nieliniowości.

Bez umniejszenia ogólności naszych rozważań, możemy przyjąć funkcjonal

$$(3.1) \quad e_{ij}(t) = - \int_{t_0}^t s_{ij}(\tau) d_\tau H[t, \tau, s(\tau)] d\tau,$$

a więc ograniczyć się do stanu deformacji zależnej od czasu.

Przyrost zmiennej funkcjonalu s_{ij} można przedstawić w następującej postaci

$$(3.2) \quad \Delta s_{ij}(\tau) = s_{ij}(\tau, \varrho) - s_{ij}(\tau, O) = \varrho (\partial_\rho s_{ij})_{\rho=0} + \frac{1}{2} \varrho^2 (\partial_\rho^2 s_{ij})_{\rho=0} + \dots,$$

gdzie ϱ jest parametrem rozwinięcia w punkcie

$$(3.3) \quad s_{ij}^0 = s_{ij}(\tau, O).$$

Przyrostowi s_{ij} w postaci (3.2) odpowiada przyrost funkcjonału (3.1)

$$(3.4) \quad \Delta \bar{e}_{ij}(t) = L(t; \varrho) s_{ij}(\tau; \varrho) - L(t; 0) s_{ij}(\tau; 0) = \varrho (\partial_\rho L s_{ij})_{\rho=0} + \frac{1}{2} \varrho^2 (\partial_\rho^2 L s_{ij})_{\rho=0} + \dots,$$

co jest równoważne reprezentacji wariacyjnej

$$(3.5) \quad \Delta \bar{e}_{ij}(t) = \delta \bar{e}_{ij}(t) + \frac{1}{2} \delta^2 \bar{e}_{ij}(t) + \dots$$

W ten sposób wariacje funkcjonału wyrażone są przez pochodne funkcjonalne (3.1) dla wartości parametru rozwinięcia $\varrho = 0$.

Rozwinięcie funkcjonału (3.1) przedstawione powyżej mają charakter jakościowy w tym sensie, że mogą dotyczyć dowolnego stanu nieliniowego materiału lepkosprężystego w dowolnej chwili z rozważanego przedziału czasu. Stan wyjściowy dla rozwinięcia odpowiada zatem jakościowo tym efektom, które ujmuje teoria nieliniowa i dzięki temu może ono znaleźć szerokie zastosowanie w przybliżonych rozwiązaniach brzegowych zagadnień nieliniowej lepkosprężystości. Rozwiązania podobnego typu dla zakresu słabej nieliniowości, które opierają się na stanie liniowym jako stanie wyjściowym, podane zostały w szeregu naszych prac omówionych we wstępie.

4. Uwagi końcowe

Zasadniczym celem niniejszej pracy było podanie krytycznego przeglądu interesujących nas bezpośrednio kierunków w teorii nieliniowej lepkosprężystości, a na tej podstawie omówienie własnych rezultatów, zarówno w zakresie teorii, jak i jej zastosowań do problematyki o charakterze praktycznym.

Niezależnie od powyższego celu, poruszyliśmy również w sposób poglądowy pewne wybrane zagadnienia teorii nieliniowej lepkosprężystości o znaczeniu ogólnym, które są przedmiotem naszych aktualnych prac. Jest rzeczą oczywistą, że niektóre z nich mają w przedstawionym ujęciu charakter dyskusyjny, jak również nie wyczerpują interesującej nas tematyki.

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. Anal., 1, 1 (1952),
2. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Part I, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, 1 (1957),
3. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, J. M. SPENCER, *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Part II, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, 3 (1959),
4. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of nonlinear materials with memory*, Part III, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 5 (1960),
5. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1, 2 (1958),
6. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *On certain steady flows of general fluids*, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, 3 (1959),
7. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Some fundamental concepts of the theory of nonlinear viscoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, 18, (1966),

- 7a. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Generalized creep function and the problem of inversion in the theory of nonlinear viscoelasticity*, Bull. Acad. Pol. Sci., 5, 15 (1967),
- 7b. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Generalized superposition principle for nonlinear range and small nonlinearity in the theory of nonlinear viscoelasticity*, Bull. Acad. Pol. Sci., 5, 15 (1967),
8. Н. Х. АРУТЮНЯН, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Москва-Ленинград 1952,
9. H. LEADERMAN, *Elastic and creep properties of filamentous and other high polymers*, The Textile Foundation, Washington 1943,
10. H. LEADERMAN, *Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike natural polymers*, 32nd Annual Meeting of the Am. Soc. Rheol., Madison,
11. Ю. Н. РАБОТНОВ, *Расчёт деталей машин на ползучесть*, Изв. АН. Наук СССР, От. тех. наук, 6, (1948),
12. F. K. G. ODQVIST, J. HULT, *Kriechfestigkeit metallischer Werkstoffe*, Berlin-Goettingen-Heidelberg 1962,
14. Z. BYCHAWSKI, *Odkształcenia opóźnione w betonie*, Arch. Inż. Łąd., 1 (1956),
15. Z. BYCHAWSKI, *Straty naprężeń w belce sprężonej w świetle nieliniowej teorii pelzania*, Czasop. Techn., 4, (1957),
16. Z. BYCHAWSKI, *Analiza reologiczna belki sprężonej armaturą sztywną*, Rozpr. dokt., 1957,
17. Z. BYCHAWSKI, *Le problème du fluage non-linéaire du béton dans les constructions précontraintes*, Bull. RILEM, 4 (1959),
- 17a. Z. BYCHAWSKI, *Le problème du fluage non-linéaire du béton dans constructions précontraintes*, Bull. Acad. Pol. Sci., 1, 7 (1959),
18. W. OLSZAK, S. KAUFMAN, C. EIMER, Z. BYCHAWSKI, *Teoria Konstrukcji Sprężonych*, Tom I, Warszawa 1961,
19. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Foundations of a theory of nonlinear viscoelasticity*, Arch. Mech. Stos., 4, 19 (1967),
- 19a. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Theory of nonlinear behaviour of viscoelastic bodies*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8, 15 (1967),
- 19b. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Theory of nonlinear behavior of viscoelastic bodies*, Technika, XXII, 7 (1968),
20. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *An outline of the theory of complete nonlinear viscoelastic behaviour*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8, 15 (1967),
21. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *The constitutive equation of a complete nonlinear viscoelastic material*, Acta Mechanica, 6, (1968),
22. A. BOROWSKI, Z. BYCHAWSKI, *Podstawowe własności nieliniowych ciał lepkospężystych*, III Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1966,
23. Z. BYCHAWSKI, A. FOX, *Some concepts of nonlinear thermo-viscoelasticity*, 1st Int. Conf. on Structural Mech. in Reactor Technology, Vol. 5, Part L, Berlin 1971,
24. Z. BYCHAWSKI, *Pewne szczególne zagadnienia teorii nieliniowej lepkospężystości*, Sympozjum polsko-francuskie „Zagadnienia reologii”, Warszawa-Jabłonna 1971,
25. Z. BYCHAWSKI, *Distributional aspects of the theory of plastic time phenomena*, Symposium on Foundations of Plasticity, Warszawa 1972,
26. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Energetyczna interpretacja stanów krytycznych w ciałach lepkospężystych*, Prace IPPT, 2, (1967),
27. W. OLSZAK, Z. BYCHAWSKI, *Creep failure of nonlinear rotational shells*, 8th Congress of AIPC, New York 1968,
28. W. OLSZAK, Z. BYCHAWSKI, *Creep phenomena and failure of nonlinear rotational membranes*, Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics, Moskwa 1969,
29. Z. BYCHAWSKI, *Badanie wybożenia przy pelzaniu płyt kołowych w zakresie małych i dużych ugięć*, Rozpr. Inż., 4, 9 (1961),
- 29a. Z. BYCHAWSKI, *Creep buckling of geometrically nonlinear circular plates*, PAN Kraków, Mechanika 2, 1966,
30. Z. BYCHAWSKI, *Investigation of creep buckling of a cylindrical sheet panel in the range of small and moderately large deflections*, Proc. World Conf. on Shell Structures IASS, US Nat. Acad. of Sciences, Washington 1964,

31. Z. BYCHAWSKI, *Some problems of creep bending and creep buckling of viscoelastic sheet panels in the range of large deflections*, Proc. of IASS Symposium Nonclassical Shell Problems, Warszawa 1963,
32. Z. BYCHAWSKI, H. KORECKI, *Creep buckling of viscoelastic nonlinear spherical shell*, Proc. of IASS Symposium Large-Span Shells, Leningrad 1966,
- 32a. З. БЫХАВСКИ, Х. КОПЕЦКИ, *Потеря устойчивости при ползучести вязкоупругой и геометрически нелинейной сферической оболочки*, Большепролетные оболочки, Труды Межд. Конгресса, Москва 1969.
33. Z. BYCHAWSKI, H. KORECKI, *Wyboczenie przy pelzaniu geometrycznie nieliniowej powloki kulistej*, Rozpr. Inż., 3, 16 (1968),
34. Z. BYCHAWSKI, H. KORECKI, *Experimental and theoretical analysis of creep buckling of nonlinear spherical shells*, Coll. Int. RILEM Experimental Analysis of Instability Problems on Reduced and Full-Scale Models, Buenos Aires 1971,
35. Z. BYCHAWSKI, *Duże ugięcia sprężyste nieliniowych membran kołowych*, Rozpr. Inż., 1, 14 (1966),
36. Z. BYCHAWSKI, *Large deflections of the elasto-creeping circular membrane*, Arch. Mech. Stos., 3, 17 (1965)
37. Z. BYCHAWSKI, H. KORECKI, *Nieliniowe zagadnienia deformacji sprężysto-plastycznych i pelzania membran kołowych*, Rozpr. Inż., 3, 15 (1967),
38. H. KORECKI, *Reologiczne problemy nieliniowej deformacji powłok obrotowych w stanie membranowym*, Rozpr. doktorska, Kraków 1967,
39. Z. BYCHAWSKI, *O stosowalności analogii sprężystej w zakresie nieliniowej geometrycznej teorii pelzania membran kołowych*, Rozpr. Inż., 3, 13 (1965),
40. Z. BYCHAWSKI, *Elastic analogue in the general case of a geometrically nonlinear membrane subjected to creep*, Arch. Mech. Stos., 4, 17 (1965),
41. F. K. G. ODQVIST, *Одна нелинейная задача о собственных значениях в теории ползучести*, Изв. АН СССР, Москва 1961.
42. B. STORÅKERS, *Finite creep of a circular membrane under hydrostatic pressure*, Acta Polytechnica Scandinavica, Mech. Eng. Series, No. 44, (1969),
43. Z. BYCHAWSKI, *Combined instantaneous and creep deformation of rotational shells in a nonlinear membrane state*, Southeastern Conf. on Theor. and Appl. Mech., Auburn 1966,
44. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Rheological states of geometrically nonlinear rotational membranes*, IUTAM Symposium Theory of Thin Shells Copenhagen 1967, Berlin-Heidelberg-New York 1969,
45. Z. BYCHAWSKI, H. KORECKI, *Elasto-plastic and creep deformation of geometrically nonlinear shallow spherical shells in membrane state*, Bull. Acad. Pol. Sci., 8, 15 (1967),
- 45a. Z. BYCHAWSKI, H. KORECKI, *Sprężysto-plastyczna deformacja i pelzanie powloki kulistej*, Rozpr. Inż., 2, 15 (1967),
46. Z. BYCHAWSKI, *Exact solution of creep bending of a long circular cylindrical shell under internal pressure*, 10th Yugoslav Congress of Theor. and Appl. Mech., Basko Polje 1970,
47. Z. BYCHAWSKI, *Thermal and creep analysis of cylindrical shells under internal pressure*, Ist Int. Conf. on Structural Mech. in Reactor Technology, Vol. 5, Part L, Berlin 1971,
48. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *O podstawowych pojęciach reologii*, Zagadnienia Maszyn Przepływowych-Problems of Fluid-Flow Machines, Warszawa 1969,
49. Z. BYCHAWSKI, *Introduction into theoretical and applied rheology*, The Technical University of Denmark, Dept. of Appl. Mech., Part I, II, Copenhagen 1968,
50. Z. BYCHAWSKI, H. SIENNICKI, *Zginanie tarczy kołowej w zakresie nieliniowej deformacji natychmiastowej i pelzania*, III Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1966,
51. Z. BYCHAWSKI, *Exact solutions of nonlinear instantaneous and creep bending problems of plates with large deflections*, 2nd IUTAM Symposium on Creep in Structures, Goeteborg 1970,
52. Z. BYCHAWSKI, *Resolving kernel of the Volterra equation in the case of the generalized creep function*, Arch. Mech. Stos., 2, 9 (1957),
- 52a. Z. BYCHAWSKI, *On the application of creep function in generalised form*, Bull. Acad. Pol. Sci., 2, 4 (1957),
53. Z. BYCHAWSKI, K. PISZCZEK, *On the operational perturbation method of solution of the Volterra nonlinear integral equations*, IBTP Reports, 14, 1968,

54. Z. BYCHAWSKI, *Ueber eine Methode der Umkehrung von der Materialgleichung fuer nichtlineare viskoelastische Stoffe*, VI. Int. Kongress ueber Anwendungen der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, Weimar 1972,
55. Z. BYCHAWSKI, *Large deflections of nonlinear viscoelastic rotational membranes*, Symposium IASS Tension Structures and Space Frames, Tokyo-Kyoto 1971.
56. Z. BYCHAWSKI, *Duże odkształcenia pelzających powłok obrotowych*, XVI Konf. Nauk. KIL PAN i KN PZITB, Krynica 1970,
57. A. BOROWSKI, Z. BYCHAWSKI, *Własności reologiczne materiałów niestabilnych*, 1971 (praca przygotowana do druku).
58. Z. BYCHAWSKI, W. OLSZAK, *Rheological theory of membranes undergoing large deformations*, 9th Congress AIPC, Amsterdam 1972.

Р е з ю м е

ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

В работе обсуждаются некоторые направления развития нелинейной теории вязкоупругости. На фоне этих тенденций представлены результаты, полученные автором так в области теоретических исследований, как и в практических приложениях этой теории.

В общей форме наглядно изложены избразные теоретические вопросы, являющиеся в настоящее время предметом работы автора. В частности, представляют интерес исследования вида определяющего уравнения нелинейной вязкоупругости, получаемого на основе обобщенного принципа суперпозиции, постулатов комплексности и временной компактности, функциональной трактовки этого уравнения, а также функционального разложения для решения краевых задач.

S u m m a r y

THEORY OF NON-LINEAR VISCOELASTICITY AND ITS APPLICATIONS

In the paper are critically reviewed certain trends of development of the theory of viscoelasticity; on this background author's results are presented, in the field of both the theory and its practical applications.

Discussed are certain selected problems of the theory being the subject of author's current interest. In particular, the forms of constitutive equations are examined governing the behaviour of non-linear elastic bodies; they follow from the generalized theorem of superposition. The functional interpretation of that equation is given, as also its functional generalization from the point of view of its applications to boundary value problems.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.

TEORIA OŚRODKÓW WIELOFAZOWYCH

CZESŁAW EIMER (WARSZAWA)

1. Definicja ośrodka wielofazowego. Założenia podstawowe

Przez ośrodki wielofazowe rozumiemy ośrodki niejednorodne o budowie ziarnistej, takie jak metale, materiały ceramiczne, beton, skały, polimery zbrojone itp. Skład chemiczny, krystalograficzny itd. są z punktu widzenia teorii obojętne, dopóki spełnione są podstawowe założenia teorii, o których zaraz będzie mowa.

Słowo «faza» ma w mechanice i fizyce wiele znaczeń i występuje w różnych kontekstach, jak np. «przestrzeń fazowa» w mechanice statystycznej, «faza» układu drgającego w dynamice, «układ wielofazowy» w termodynamice i in. W teorii ośrodków wielofazowych określenie «faza» używane jest w specjalnym znaczeniu i, aby uniknąć nieporozumień, mówimy również, zamiast o ośrodkach wielofazowych, o ośrodkach *złożonych*. Nie należy zwłaszcza utożsamiać naszej «fazy» ze zbliżonym pojęciem w termodynamice, gdzie przez «fazę jednolitą» rozumie się część układu o tych samych wartościach parametrów intensywnych.

Układ definicji teorii ośrodków wielofazowych jest następujący. Rozważamy ośrodek ciągły niejednorodny specjalnego typu, mianowicie o własnościach obszarami stałych. Uważamy, że ośrodek składa się z ziaren i powierzchni ograniczających ziarna — granic ziaren. Przez *ziarno* rozumiemy obszar (w zagadnieniu przestrzennym — obszar przestrzeni trójwymiarowej) wypełniony ośrodkiem ciągłym jednorodnym, tj. o stałych własnościach, włącznie z orientacją przestrzenną. Nieco ściślej — obszar otwarty, w którym pole tensorowe opisujące rozważaną własność kierunkową (np. pole tensora sprężystości) jest stałe. Do opisu zjawisk w ziarnie stosuje się więc teoria ośrodka ciągłego; aby odpowiadało to fizycznej rzeczywistości, musimy założyć, że rozmiary ziaren są duże w stosunku do odległości międzycząsteczkowych. Przez *fazę* rozumiemy zbiór ziaren tego samego typu, różniących się wyłącznie orientacją, ściślej — obszar o stałym odnośnym polu tensorowym z dokładnością do pełnej grupy transformacji ortogonalnych (tj. włączając odbicie zwierciadlane). Zakładamy, że liczba faz w ośrodku jest skończona, zaś zbiór ziaren — przeliczalny. Podane określenia umożliwiają definiowanie różnych wielkości *fazowych*, np. średnich w danej fazie.

Zgodnie z wyżej powiedzianym, najprostszym ośrodkiem złożonym jest ośrodek jedno-fazowy (ziarna różnią się tylko orientacją), w szczególności *polikryształ*. Teoria polikryształu stanowi przejście do teorii ośrodków wielofazowych. Z drugiej strony, przejście takie

stanowi teoria ośrodka o fazach izotropowych, w których pojęcia ziarna i fazy utożsamiają się.

Dotychczas nic nie mówiliśmy o geometrii wewnętrznej ośrodka, określającej formę i rozmieszczenie ziaren i faz. Może ona mieć charakter *deterministyczny* (przykładem mogą być konstrukcje z betonu zbrojonego) lub *stochastyczny* (losowy). Ten ostatni przypadek jest charakterystyczny dla materiałów (nie konstrukcji!) i do niego w zasadzie ogranicza się teoria ośrodków wielofazowych, którą należałoby ściślej określić mianem teorii ośrodków stochastycznych wielofazowych.

Podstawowym założeniem teorii na jej obecnym etapie rozwoju jest *niezmiennność geometrii wewnętrznej* w toku rozważanego procesu fizycznego (myślimy o niezmienności wzajemnego położenia cząstek, z dokładnością do ruchu sztywnego). Tym samym wyłączone są z rozważań zagadnienia mechaniki ośrodków (do których się ograniczymy), gdzie decydujące znaczenie ma ruch i energia kinetyczna, jak np. teoria turbulencji lub teoria zawieszin. Opis ruchu jest opisem Lagrange'a i ogranicza się do rozważania pól odkształceń, o których zakładamy, że są małe. Są to założenia charakterystyczne dla ciała stałego, aczkolwiek nie wyklucza się, że pewne ziarno może stanowić ciecz, w sensie inkluzji materiału nie stawiającego oporu odkształceniom postaciowym. Zgodnie z tym, na obecnym etapie teoria ośrodków wielofazowych jest teorią *liniową* geometrycznie. W konsekwencji, poza zakresem rozważań pozostaje problematyka związana z topologią ośrodka, np. nieistotna jest kwestia, czy ziarna lub fazy stanowią obszary jednospójne, czy też nie. Z pewnych przyczyn, które staną się jasne w dalszym ciągu, dogodnie jest jednak wydzielić klasę ośrodków, w których ziarna o postaci obszarów jednospójnych są «zanurzone» w ośrodku macierzystym. Mówimy wówczas o *zawieszinie*, przy czym jeśli inkluduje są dostatecznie od siebie odległe, by ich wzajemne oddziaływanie było pomijalne, mówimy o *zawieszinie rzadkiej*.

2. Zakres poszukiwań

Na ogół za punkt startowy poszukiwań w dziedzinie ośrodków wielofazowych uważa się pracę EINSTEINA z r. 1906 [26], w której określił on lepkość zawiesziny rzadkiej sztywnych kulek.

W ogólności klasyczny problem teorii ośrodków wielofazowych stanowi określenie *makroskopowych własności materiałów* («stałych materiałowych») na podstawie znanych własności faz i probabilistycznego opisu geometrii wewnętrznej. Najbardziej podstawowym elementem opisu ośrodka jest podanie koncentracji faz (stosunku objętości fazy do objętości ośrodka). Niewątpliwie u podstaw rozważań pierwszych badaczy tkwiło przeświadczenie, że znajomość koncentracji jest wystarczająca dla wyznaczenia własności makroskopowych. W tym kręgu rozumowań mieszczą się podstawowe prace: VOIGTA z r. 1910 [93] i REUSSA z r. 1929 [79], którzy określili stałe sprężystości ośrodka izotropowego o fazach izotropowych. VOIGT określił makroskopowe stałe sprężystości w postaci średnich arytmetycznych ze stałych fazowych, co odpowiada założeniu jednorodnego (stałego) pola odkształceń w ośrodku wielofazowym

$$\mu_V = \sum_i v_i \mu_i, \quad \kappa_V = \sum_i v_i \kappa_i;$$

tutaj μ, κ oznaczają stałe sprężystości postaciowej i objętościowej, v_i koncentrację fazy i , wskaźnik V oznacza stałą Voigta. Reuss podał wyrażenia w postaci średnich harmonicznym, co jest równoznaczne z przyjęciem jednorodnego pola naprężeń,

$$\frac{1}{\mu_R} = \sum_i \frac{v_i}{\mu_i}, \quad \frac{1}{\kappa_R} = \sum_i \frac{v_i}{\kappa_i}$$

(R oznacza stałą Reussa). Dzisiaj wiemy (wykazał to ściśle dopiero HILL, [43]), że stałe Voigta i Reussa nie są co prawda ogólnymi rozwiązaniami, natomiast stanowią ograniczenia stałych makroskopowych, mianowicie

$$\mu_R \leq \mu \leq \mu_V, \quad \kappa_R \leq \kappa \leq \kappa_V$$

i w tym sensie grają ważną rolę w teorii sprężystości ośrodków wielofazowych, uwypukloną specjalnymi ich oznaczeniami (podanymi wyżej).

Okres międzywojenny charakteryzował się podejściem podobnym, polegającym na bezpośrednim uśrednianiu różnych wielkości, przy czym problem skupiał zainteresowanie głównie metalografów i krystalografów. Znane są z tego okresu prace BOASA, SCHMIDA, BRUGGEMANA, HUBERA, RÖHLA i in. [7], [8], [12], [42], [82]. Naturalną kontynuacją tych badań są ujęcia wariacyjne (por. p. 3).

Problem stałych materiałowych formułujemy dzisiaj ogólniej jako określenie *równania konstytutywnego* ośrodka, gdy znane są także równania dla poszczególnych faz. Niech na przykład w zagadnieniu reologicznym dla ośrodka o fazach izotropowych L będzie operatorem liniowym określającym historię naprężenia $\sigma(t)$, gdy zadana jest historia odkształcenia $\epsilon(t)$, znanym dla każdej fazy i

$$\bar{\sigma} = L_i \epsilon.$$

Zadanie polega na znalezieniu operatora makroskopowego \hat{L} wiążącego odnośnie «makro»-historie

$$\bar{\sigma} = \hat{L} \bar{\epsilon},$$

gdzie kreska pozioma nad symbolem oznacza wynik operacji uśredniania (do kwestii, co pod tą operacją rozumiemy, powrócimy poniżej). Lokalność związków fenomenologicznych zachowujemy rozpatrując ośrodek nieograniczony i pola statystycznie jednorodne. W literaturze spotyka się tu pojęcia (nieprecyzyjne) objętości reprezentatywnej (np. [39]), dużej w stosunku do rozmiarów ziaren, małej w porównaniu ze zmianami makroskopowymi pola, po której przeprowadzamy uśrednianie.

Jak widać, określanie własności makroskopowych ośrodka związane jest z wyznaczaniem wartości oczekiwanych (przeciętnych). Problemem szerszym, ogólniejszym zadaniem teorii, jest określenie wszelkich charakterystyk probabilistycznych *pól losowych* (np. naprężenia i odkształcenia) w postaci np. funkcji korelacyjnych lub (wielowymiarowych) rozkładów prawdopodobieństwa dowolnego rzędu. Na takiej podstawie można rozpatrywać szereg zagadnień specjalnych, jak np. tzw. *problem skałi* (m.in. zależność fluktuacji wielkości uśrednianych od rozmiarów obszaru uśredniania), problem wartości *ekstremalnych* (np. rozkłady prawdopodobieństwa pewnych wielkości ekstremalnych w określonej objętości), *tworzenie* nowych stałych materiałowych (np. związanych z energią odkształcenia, z funk-

cjami wyteżenia lub opisujących fluktuacje) i in. Praktyczne znaczenie naszkicowanej problematyki jest oczywiste.

Oddzielny kierunek rozwoju związany jest z *zagadnieniem brzegowym*; uzyskano tu nowe wyniki o charakterze poznawczym. W szczególności okazuje się, że makroskopowy tensor sprężystości zależny jest od położenia, mimo że geometria wewnętrzna ośrodka opisuje się polem stochastycznie jednorodnym — pojawia się zatem *efekt brzegowy*; w konsekwencji ciało jest sprężyste (makroskopowo) niejednorodne. W ogólności występuje również zależność od pola obciążenia — tensor sprężystości przekształca się w operator sprężystości i problem staje się nielokalny; tym samym określenie «stałe materiałowe» może być tylko luźno rozumiane.

Teoria ośrodków wielofazowych obejmuje różne problemy fizyczne, w zależności od typu równania (operatora) i rzędu pola tensorowego; dla ilustracji wymienimy:

— w zakresie równań *eliptycznych*: problem stałej dielektrycznej i przenikalności magnetycznej; problem tensora sprężystości; zagadnienia ze źródłami dystorsji, np. makroskopowy współczynnik rozszerzalności cieplnej;

— w zakresie równań *parabolicznych*: wyznaczenie stałych dyfuzji, stałych przewodnictwa cieplnego, oporności elektrycznej; charakterystyki różnorodnych pól przepływu;

— w zakresie równań *hiperbolicznych* bogata problematyka propagacji fal w ośrodku wielofazowym: określenie charakterystyk dyspersji, dyfrakcji, tłumienia, polaryzacji, rozkładu widmowych fal; problematyka fal powierzchniowych.

Ogólnie można powiedzieć, że w zasadzie każde zagadnienie fizyki ośrodków ciągłych ma swojego reprezentanta w zakresie ośrodków stochastycznych wielofazowych.

3. Metody matematyczne

Postępy teorii ośrodków wielofazowych zależą być może w większym stopniu od rozwoju metod matematycznych, aniżeli od typu zagadnienia fizycznego.

W obecnej chwili dominują dwie metody, wariacyjna i probabilistyczna, przy czym większość prac korzysta z ujęcia *wariacyjnego* i ogranicza się do rozwiązań przybliżonych. Kierunek ten można scharakteryzować jako poszukiwane odpowiedzi na pytanie: co można powiedzieć o własnościach makroskopowych ośrodka, gdy znana jest tylko *koncentracja faz*? Odpowiedź jest taka, że poszukiwanie wielkości można zamknąć w odpowiednie obustronne nierówności i postęp polega w pierwszym rzędzie na zacieśnianiu tych ostatnich. Pomijając odosobnione przypadki, gdy tą drogą można dojść do rozwiązania ścisłego, istnieją określone «granice» owego zacieśniania, których przekroczyć nie można bez dokładniejszych informacji o geometrii wewnętrznej. W szeregu przypadków udało się osiągnąć te «granice», tj. wykazać, że przy danej wyłącznie koncentracji faz nie istnieje przybliżenie lepsze od uzyskanego. Kierunek ten ma szczególne znaczenie praktyczne, inżynierskie, gdyż koncentracja faz jest zwykle wielkością znaną, a końcowe formuły sprowadzają się do pewnych wyrażeń algebraicznych.

Kierunek *probabilistyczny* zakłada znajomość geometrii wewnętrznej z dowolną dokładnością w sensie opisu pola losowego metodami probabilistycznymi. Uzyskanie takiego opisu drogą eksperymentalną jest na ogół dość pracochłonne i wymaga użycia korelatorów mechanicznych. Wyniki (zwykle w postaci pewnych szeregów całkowych) wymagają, przy przejściu do obliczeń numerycznych, zastosowania maszyn cyfrowych. Natomiast

tą drogą uzyskuje się rozwiązanie ściśle i można zbudować zamkniętą teorię zagadnienia. Stosownie do sposobu opisu pola losowego można wyróżnić tu trzy główne metody: metodę *funkcji korelacyjnych*, metodę *analizy harmonicznej*, oraz zastosowanie wielowymiarowych *rozkładów prawdopodobieństwa*, ogólniej, funkcjonalów prawdopodobieństwa i funkcjonalów charakterystycznych. Niemal cała uwaga, jak dotąd, koncentruje się na ujęciu korelacyjnym, najbardziej bezpośrednim.

Z uwagi na znaczenie obu ujęć (wariacyjnego i korelacyjnego) omówimy je dokładniej w oddzielnych punktach, obecnie zaś wspomnimy jeszcze o dwóch metodach specjalnych mających zastosowanie do ośrodków o uproszczonej geometrii wewnętrznej.

Pierwsza z nich obejmuje teorię *zawieszin rzadkich* (por. definicję w p. 1). Jeśli znane jest rozwiązanie dla jednej inkluzji określonej formy w ośrodku macierzystym nieograniczonym, to rozwiązanie dla zawiesziny otrzymujemy przez prostą superpozycję skutków. Ma ona zwykle postać (na przykładzie współczynnika sprężystości objętościowej)

$$\hat{\kappa} = \kappa_M \left(1 + \sum_i \alpha_i v_i \right),$$

gdzie κ_M oznacza stałą ośrodka macierzystego, α_i pewną stałą bezwymiarową zależną od własności sprężystych ośrodka macierzystego i inkluzji oraz od kształtu tej ostatniej (pozostałe oznaczenia, jak w poprzednich wzorach). Dobre przybliżenia uzyskuje się przy koncentracjach rzędu $\sum_i v_i \leq 2\%$, przy czym rozwiązania ograniczają się w zasadzie do inkluzji kulistych i elipsoidalnych.

Prostota założeń geometrycznych pozwoliła rozszerzyć krąg zagadnień fizycznych i w rzeczy samej większość rozwiązań dotyczy zawieszin ciała stałego w cieczy. Przytoczyliśmy już rozwiązanie EINSTEINA [26] dla układu ciecz lepka-inkluzje kuliste sztywne. Tenże przypadek dla inkluzji elipsoidalnych analizował JEFFREY [28]; dla inkluzji lepkich sferycznych z uwzględnieniem napięcia powierzchniowego TAYLOR [90], przy dodatkowym uwzględnieniu tarcia i poślizgu OLDROYD [75], dla inkluzji sferycznych sprężystych FRÖHLICH i SACK [31]. Dla ośrodka macierzystego sprężystego znane są wczesne prace BRUGGEMANA [12] i DEWEYA [22]; dla inkluzji elipsoidalnych podstawowe rozwiązania podał ESHELBY [27]; rozwiązanie dla pustek sferycznych przedstawił MACKENZIE [68], dla inkluzji sztywnych sferycznych HASHIN [32]. Warto zauważyć, że niektóre rozwiązania wynikają z innych, jako ich szczególne przypadki. Rozwój tej drogi poszukiwań prowadził do uwzględnienia w mniej lub bardziej ścisły sposób wzajemnego oddziaływania inkluzji, niektóre ujęcia mają charakter półdoświadczalny.

Drugie stosowane często założenie upraszczające polega na tym, że co prawda nie «ograniczamy» w niczym konfiguracji geometrycznej ośrodka, lecz za to przyjmujemy, że własności (np. sprężyste) faz różnią się mało, tj. różnice są na poziomie *fluktuacji*. Tutaj z powodzeniem znajdują zastosowanie metody *perturbacyjne*, wykorzystywane chętnie zwłaszcza w zagadnieniu falowym, z uwagi na trudności pojawiające się przy ściślejszych metodach (por. MOLYNEUX [71], BERAN [1], SOBCZYK [86]).

4. Ujęcie wariacyjne

Ujęcie wariacyjne (scharakteryzowane w p. 3) w zastosowaniu do problemu sprężystości, na którym zilustrujemy koncepcję rozwiązania, polega na wykorzystaniu twierdzeń

o energii potencjalnej i energii dodatkowej (komplementarnej) teorii sprężystości. Rozważmy dla przykładu pierwsze zagadnienie brzegowe i ograniczmy (pełną) energię odkształcenia E , następującymi nierównościami

$$\int \sigma^*(2\epsilon_0 - S\sigma^*) dV \leq 2E \leq \int \epsilon^* C \epsilon^* dV.$$

Prawa strona nierówności wynika z twierdzenia o energii potencjalnej, lewa — z twierdzenia o energii dodatkowej; C i S oznaczają kolejno tensor sprężystości i tensor odkształcalności; ϵ^* jest polem odkształceń wirtualnych (odpowiednio gładkim) zgodnych z przemieszczeniami na brzegu, zaś σ^* dowolnym zrównoważonym polem naprężeń i ϵ_0 dowolnym, zgodnym z warunkami brzegowymi, polem odkształceń (notacja jest absolutna i może być interpretowana w znany sposób macierzowo-wektorowy). Weźmy na przykład ośrodek dwufazowy o fazach izotropowych i jednorodne pole odkształceń wirtualnych. Ponieważ $2E = \epsilon \hat{C} \epsilon$, gdyż energia odpowiada określonym przemieszczeniom na brzegu, otrzymamy na podstawie prawej strony nierówności

$$\epsilon \hat{C} \epsilon \leq \nu_1 \epsilon C_1 \epsilon + \nu_2 \epsilon C_2 \epsilon,$$

a stąd

$$\epsilon (\nu_1 C_1 + \nu_2 C_2 - \hat{C}) \epsilon \geq 0.$$

Oznacza to, że macierz w nawiasach jest dodatnio określona (ściślej półokreślona), a stąd otrzymuje się szereg nierówności obejmujących składowe tensora sprężystości (korzystając np. z twierdzenia o dodatniości minorów głównych). W taki sposób można udowodnić (i jednocześnie uogólnić) nierówności Voigta i Reussa.

Przybliżenie to jest jeszcze zbyt grube. W celu zacieśnienia nierówności HASHIN i SHTRIKMAN [38] oraz HILL [45] podali bardziej rozwinięte twierdzenia wariacyjne, w których pojawiają się pojęcia tensora polaryzacji naprężenia τ i odkształcenia η grające ważną rolę w całej teorii ośrodków wielofazowych. Są one zdefiniowane następującymi równościami

$$\tau = (C - C_0)\epsilon, \quad \eta = (S_0 - S)\sigma,$$

gdzie C_0, S_0 oznaczają tensory sprężystości i odkształcalności dla ośrodka odniesienia, za który można przyjąć dowolny ośrodek (np. o własnościach sprężystych jednej z faz izotropowych lub o średnim tensorze sprężystości, w sensie średniej arytmetycznej). Wprowadzenie tensorów polaryzacji prowadzi do zastąpienia ośrodka niejednorodnego jednorodnym (mianowicie ośrodkiem odniesienia) obciążonym polem odnośnego tensora polaryzacji.

Przytoczmy obecnie dla przykładu jedno z twierdzeń Hashina-Shtrikmana-Hilla dla pierwszego zagadnienia brzegowego:

$$2(E_0 - E) \geq \int \tau^* [(C - C_0)^{-1} \tau^* - \epsilon_0 - \epsilon^*] dV,$$

gdzie E_0 jest energią ośrodka odniesienia dla zadanych warunków brzegowych, zaś τ^* oznacza wirtualne pole tensora polaryzacji naprężenia (odpowiednio gładkie). Dalszy ciąg rozwiązania polega na przyjęciu tego pola w postaci pola fazami jednorodnego (tj. obsza-

rami stałego, lecz w ogólności różnego dla kolejnych faz izotropowych), a następnie na doborze (z warunku ekstremum) optymalnego układu wielkości τ_i^* dla poszczególnych faz. Dla przykładu podamy rozwiązanie dla modułu objętościowego, dla ośrodka dwufazowego

$$\kappa^{(1)} \leq \hat{\kappa} \leq \kappa^{(2)},$$

$$\kappa^{(1)} = \kappa_1 + \frac{\nu_2}{\frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} + \frac{3\nu_1}{3\kappa_1 + 4\mu_1}},$$

$$\kappa^{(2)} = \kappa_2 + \frac{\nu_1}{\frac{1}{\kappa_1 - \kappa_2} + \frac{3\nu_2}{3\kappa_2 + 4\mu_2}},$$

$$\kappa_1 < \kappa_2, \quad \mu_1 < \mu_2.$$

Wyrażenia tego typu wyznaczono dla wielu konkretnych przypadków i dla różnych stałych sprężystości (a także innych własności fizycznych). Wyniki przedstawia się zwykle na wykresach w zależności od koncentracji faz; krzywe typu $\kappa^{(1)}$, $\kappa^{(2)}$ wydzielają obszar, w którym musi się mieścić poszukiwana wielkość makroskopowa ($\hat{\kappa}$).

Aby unaocznić zakres poszukiwań podamy niektóre wyniki. PAUL [76] wyznaczył ograniczenia dla modułu Younga; analizę ośrodków dwufazowych przeprowadził HILL [44], [48]; ośrodki zbrojone włóknami (mające duże znaczenie techniczne) analizowali HASHIN [35], HILL [46]; twierdzenia energetyczne w ujęciu klasycznym stosowali BERAN i MOLYNEUX [4]. Pewną modyfikację metody przedstawił WALPOLE [94]; rozszerzenie badań na ośrodki lepkosprężyste przedstawili ROSCOE [80], CHRISTENSEN [19]; własności zawieszin z zastosowaniem metod harmonicznymi analizowali RUBENFELD i KELLER [83]; rozwiązania dla zagadnienia rozszerzalności cieplnej podali ROSEN i HASHIN [81] oraz LEWIN [60]; problem lepkości cieczy analizował HASHIN [34]; zastosowanie metody dla polikryształu przedstawili HASHIN i SHTRIKMAN [39]. Nie podajemy tu dość obszerniej literatury w zakresie stałej dielektrycznej i ograniczamy się do prac BERANA [2] i BROWNA [10] z uwagi na wprowadzenie elementów statystycznego opisu geometrii wewnętrznej; wiele rezultatów zebrał w swej książce BERAN [1].

Dalszy rozwój metod przybliżonych związany będzie niewątpliwie z rozszerzeniem zakresu założeń o ośrodku poza koncentrację faz, tj. uwzględnieniem dalszych informacji o geometrii wewnętrznej, co pozwoli na dalsze zacieśnienie uzyskiwanych nierówności. Główny (aczkolwiek nie jedyny) nurt poszukiwań wiąże się z rozwojem metod probabilistycznych.

5. Ujęcie korelacyjne

Z przyczyn omawianych powyżej należy przewidywać, że ujęcie statystyczne będzie określało w przyszłości główny kierunek poszukiwań, przy czym postępy będą związane z rozwojem teorii operatorów i równań stochastycznych.

Dla wprowadzenia w to zagadnienie przyjmijmy, że mamy ogólnie operator różniczkowy liniowy rzędu drugiego

$$D = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

i że równanie rozważanego problemu fizycznego ma postać

$$D\varphi = f,$$

gdzie φ jest szukaną funkcją, a f oznacza niejednorodność (w chwili obecnej nie precyzujemy, czy chodzi o funkcję skalarną czy tensorową; dla ustalenia uwagi pomyślimy o równaniu Lamégo, gdzie φ oznacza pole przemieszczeń, a f pole sił objętościowych).

Możemy rozróżnić trzy przypadki: 1) D jest operatorem deterministycznym, a f funkcją losową, bądź też warunki brzegowe są losowe (zauważmy, że losowość warunków brzegowych może wynikać zarówno z losowości funkcji na brzegu — np. obciążenia lub przemieszczenia, jak i z losowości geometrii samego brzegu); jest to w szczególności przypadek losowego obciążenia konstrukcji (jednorodnych), związany blisko z problematyką bezpieczeństwa konstrukcji; obejmuje on m.in. prawie całą dynamikę statystyczną konstrukcji; 2) D jest operatorem losowym (f może być funkcją losową lub deterministyczną); ten przypadek obejmuje m.in. teorię (liniową) ośrodków stochastycznych wielofazowych; 3) D jest operatorem losowym skorelowanym z funkcją φ ; oznacza to, że własności ośrodka zależą od tejże funkcji, co w szczególności zachodzi przy przejściu do zjawisk nieliniowych (fizycznie).

W każdym z wymienionych przypadków poszukiwana funkcja φ staje się losową i operator D (niezależnie od tego czy jest deterministyczny czy stochastyczny) działa na funkcję losową. Tym samym nie może on być zdefiniowany w zwykły sposób, gdyż nie można mówić o zbieżności funkcji losowej (występującej przy definiowaniu pochodnej) w zwykłym sensie; zwykle korzystamy z definicji pochodnej w sensie zbieżności średniokwadratowej (l.i.m.). Jeśli operator jest stochastyczny, jak np. w przypadku (2) (tzn. współczynniki a_{ij} , b_i , c są funkcjami losowymi), to w ogóle musimy zacząć od jego definicji (zauważmy, że w sensie deterministycznym nie moglibyśmy nawet określić typu równania, zależnego od współczynników). Ograniczymy się tutaj, dla ilustracji, do podania definicji (ściślej, jednej z istniejących definicji) operatora stochastycznego. Najpierw wprowadzamy pojęcie uogólnionej zmiennej losowej w następujący sposób: niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, gdzie Ω oznacza zbiór zdarzeń elementarnych, \mathcal{A} — algebrę podzbiorów tego zbioru, μ miarę zupełną unormowaną na tych podzbiorach. Niech z kolei $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ oznacza przestrzeń mierzalną, gdzie \mathcal{X} jest przestrzenią ośrodkową Banacha, \mathcal{B} — algebrą podzbiorów borelowskich. Wówczas uogólnioną zmienną losową nazywamy przekształcenie $x(\omega): \Omega \rightarrow \mathcal{X}$, jeśli $\{\omega: x(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$ dla $B \in \mathcal{B}$ (warunek zachowania prawdopodobieństwa). Operatorem losowym nazywamy przekształcenie $T(\omega): \Omega \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, jeśli $T(\omega)[x]$ jest uogólnioną zmienną losową z wartościami w \mathcal{X} , dla każdego $x \in \mathcal{X}$. Jeśli operator jest liniowy ograniczony to mówimy o endomorfizmie losowym.

Nie kontynuując tych abstrakcyjnych rozważań wyjaśnimy tok rozwiązania używając «języka deterministycznego» i ograniczając się na razie do przypadku (1). Uśredniając obustronnie równanie problemu otrzymujemy (uwzględniając, że D jest deterministyczny)

$$D\bar{\varphi} = \bar{f}.$$

Jest to równanie (w którym wszystkie elementy są deterministyczne) na średnią funkcję $\bar{\varphi}$. Chcąc wyznaczyć funkcję momentu korelacyjnego wypisujemy równanie dwa razy dla różnych argumentów i mnożymy stronami

$$D\varphi(\mathbf{x}_1)D\varphi(\mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1)f(\mathbf{x}_2),$$

po czym znowu uśredniamy

$$D_1 D_2 \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = D^{(2)} \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = \langle f_1 f_2 \rangle,$$

w czym nawiasy $\langle \rangle$ oznaczają operację uśredniania, a $D^{(2)}$ jest skrótowym zapisem operatora IV rzędu działającego na funkcję argumentów (x_1, x_2) ; otrzymaliśmy więc równanie IV rzędu na funkcję korelacyjną (niescentrowaną) $\overline{\overline{\varphi_1 \varphi_2}} = \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle$. Postępowanie to można kontynuować w sposób oczywisty, otrzymując równania (deterministyczne) na funkcje korelacyjne dowolnego rzędu, co rozwiązuje problem.

Rozwiązanie przedstawia się jeszcze prościej, jeśli podanie funkcji Greena dla problemu deterministycznego nie nastrocza trudności; wówczas

$$\varphi = G * f,$$

gdzie G jest operatorem całkowym z funkcją Greena jako jądrem. Uśredniając kolejno, w sposób identyczny jak poprzednio, otrzymujemy od razu w postaci jawnej wyrażenia na poszukiwane funkcje korelacyjne:

$$\overline{\overline{\varphi}} = G * \overline{\overline{f}}, \quad \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle = G^{(2)} * \langle f_1 f_2 \rangle \quad \text{itd.}$$

Przechodząc do operatorów stochastycznych [przypadek (2)] i do teorii ośrodków wielofazowych napotykamy trudność wynikającą z niemożności bezpośredniego uśredniania lewej strony równania (gdyż $\langle D\varphi \rangle \neq \overline{\overline{D\varphi}}$). Widać stąd, że pożądane byłoby sprowadzenie zagadnienia do obciążenia ośrodka *jednorodnego* (któremu odpowiada operator D deterministyczny) jakimś polem losowym. Jest to, jak widzieliśmy w p. 4, możliwe, przy czym polem tym jest pole tensora polaryzacji τ . Np. dla zagadnienia Lamégo otrzymuje się równanie

$$L_0 u + \operatorname{div} \tau = 0,$$

gdzie L_0 jest operatorem Lamégo dla ośrodka odniesienia (jednorodnego) o tensorze sprężystości C_0 . Przechodząc do przedstawienia całkowego otrzymuje się następujący wynik końcowy, rozpisany we współrzędnych kartezjańskich

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ijkl} \tau_{kl}(\mathbf{x}) + \int \overline{A_{ijkl}(\mathbf{x}, \xi)} \tau_{kl}(\xi) dV,$$

$$A_{ijkl} = G_{k(i,j)l},$$

$$a_{ijkl} = -\lim_{r \rightarrow 0} \oint G_{k(i,j)l} n_l dS,$$

$$n_l = \frac{x_l - \xi_l}{r},$$

który zapisujemy krótko w postaci operatorowej

$$\epsilon = \mathcal{A} \tau,$$

Tutaj ϵ jest poszukiwanym polem tensora odkształcenia, G tensorem Greena dla zagadnienia Lamégo, \int wartością główną całki (osobliwej), \oint całką po małej sferze o promieniu r , ξ punktem bieżącym, a, jak widać, pewnym stałym tensorem. Ponieważ pole τ zależy od pola ϵ otrzymujemy równanie całkowe

$$\epsilon = \epsilon_0 + \mathcal{A} \epsilon,$$

gdzie ϵ_0 jest rozwiązaniem dla ośrodka odniesienia (jednorodnego) oraz $c = C - C_0$. Podobne równanie otrzymujemy dla pola tensora polaryzacji. Rozwijając te równania w szeregi typu Neumanna i uśredniając wyraz po wyrazie otrzymujemy następujący wzór końcowy na makroskopowy tensor sprężystości

$$\hat{C} = BA^{-1} + c_0,$$

$$A = I + A_{12}\langle c_2 \rangle + A_{123}\langle c_2 c_3 \rangle + \dots$$

$$B = \langle c_1 \rangle + A_{12}\langle c_1 c_2 \rangle + A_{123}\langle c_1 c_2 c_3 \rangle + \dots$$

gdzie A_{12}, A_{123}, \dots oznaczają operatory iterowane po punktach odpowiednio $x_1, x_2; x_1, x_2, x_3; \dots$ itd.

Jak widać, do pełnego rozwiązania konieczna jest znajomość funkcji korelacyjnych dowolnego rzędu, $\langle c_1 \rangle, \langle c_1 c_2 \rangle, \dots$. Wyrażają się one dla faz izotropowych następująco:

$$\langle c_1 c_2 \dots c_n \rangle = \sum p_{k_1 \dots k_n}(x_1, \dots, x_n) c_{k_1} c_{k_2} \dots c_{k_n}.$$

Tutaj $p_{k_1 \dots k_n}$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia polegającego na tym, że w ustalonym zbiorze punktów x_1, \dots, x_n punkt x_1 jest położony w fazie k_1 , punkt x_2 w fazie k_2 itd., zaś $c_{k_n} = C_{k_n} - C_0$. Widać stąd wyraźnie, że funkcje korelacyjne zależą od geometrii wewnętrznej ośrodka.

Przy naszkicowanym rozwiązaniu wyłania się oczywiście szereg kwestii matematycznych, np. gładkości funkcji, zbieżności szeregów itp. Rozwiązanie powyższego typu, przy zastosowaniu tensora polaryzacji, zostało podane przez EIMERA [23], [25]. Wydaje się, że prowadzi ono najszybciej do celu, aczkolwiek nie jest jedynym możliwym. Uogólnienie założeń matematycznych podał TRZĘSOWSKI [92]. Rozpatruje on zagadnienie w kontekście przestrzeni Sobolewa funkcji różniczkowalnych w sposób uogólniony i dochodzi do wniosku, że wyniki uzyskane przy silniejszych założeniach obowiązują również, gdy materiał nie zachowuje się jak ośrodek ciągły w stanie równowagi.

Kierunek rozwoju polegający na ścisłym rozwiązaniu probabilistycznym został zapoczątkowany przez LIFSZYCA i ROENZWEIGA [62], 1946. Również pionierską rolę odegrały prace BROWNA [10] (problem dielektryczny) i PRAGERA [78] (problem dyfuzji). W kontekście pola elektrycznego, z opisem do dwupunktowych funkcji korelacyjnych włącznie problem został opracowany przez BERANA i MOLYNEUX [4]. Teoria polikryształu została rozwinięta przez KRÖNERA [55], [57]; warto tu też wymienić prace HERSHEYA i DAHLGRENA [41] oraz KNEERA [53]. Kierunek probabilistyczny był szeroko rozwijany przez autorów radzieckich. Wymienić tu można prace DARINSKIEGO i SZERMIEGOWA [21], FOKINA i SZERMIEGOWA [29], ŁOMAKINA [66], BOŁOTINA i MOSKALENKI [9], CHOROSZUNA [18], WOŁKOWA i KLINSKICHA [98]; ta ostatnia zajmuje się zwłaszcza analizą pól losowych. Rozwinięcia na zagadnienia brzegowe i ośrodki lepkosprężyste podał autor niniejszego szkicu [24], [25]. Obszerną dyskusję całości zagadnienia można znaleźć w książce BERANA [1].

Aczkolwiek zasadnicza droga rozwiązania zagadnień liniowych metodą funkcji korelacyjnych jest już dziś dostatecznie jasna, to jednak stosunkowo niewiele zrobiono w zakresie zastosowań teorii do całej masy konkretnych zagadnień. Wydaje się, że na przeszkodzie takiej «rozbudowie wszerg» popartej pomiarami doświadczalnymi, stoi brak odpowied-

nych metod takich pomiarów, zwłaszcza korelatorów mechanicznych i należałoby życzyć sobie wzmożenia wysiłków w tym kierunku.

6. Rzut oka w przyszłość

Powyższy szkic jest daleki od kompletności, gdyż staraliśmy się skoncentrować uwagę na kluczowych kierunkach rozwoju. Pominęliśmy szereg metod o mniejszym zasięgu takich, jak np. metody «self consistent» i «smearing-out» por. HILL [48], BUDIANSKY [14], KERNER [52], a także metody funkcjonalne, typu stosowanych w kwantowej teorii pola. Również pominęliśmy obszerną problematykę dynamiczną i falową, gdyż rozwija się ona głównie w kontekście dynamiki statystycznej, stanowiącej oddzielną dyscyplinę. To samo dotyczy zagadnień elektrostatyki i elektrodynamiki; interesują one w mniejszym stopniu mechaników. Wydaje się, że rozszerzenie poszukiwań na zagadnienie *falowe*, w tym problematykę *elektrodynamiki*, wyznacza jeden z kierunków rozwoju teorii.

Natomiast chcielibyśmy jeszcze powiedzieć kilka słów o zagadnieniach nieliniowych w kontekście zjawisk plastyczności. Celem jest tu określenie zachowania się materiału polikrystalicznego i wielofazowego przy znanym zachowaniu poszczególnych krystalitów. Wskutek plastycznego płynięcia sieci krystaliczne ulegają obrotom, co zwykle się pomija, pomijając tym samym efekt anizotropii generowanej tymi zjawiskami. Podstawowe prace zawdzięczamy tu TAYLOROWI [88]. (dyskusja ogranicza się do sieci kubicznych centrowanych) oraz [89] (związek naprężenia z odkształcenia przy obciążeniu jednoosiowym). Kluczowym zagadnieniem jest tu określenie aktywnego systemu poślizgu, np. za pomocą odpowiednich zasad minimalizujących oraz ustalenie miejsca poślizgu. Przeglądy wcześniejszych prac można znaleźć u BISHOPA i HILLA [6] oraz COTTRELLA [20]. Rozszerzenie metod Taylora, m.in. na krystality sprężysto-plastyczne przeprowadził LIN [63], PAYNE [77] i in. Warto zauważyć, że założenia, z uwagi na stopień trudności, są tu znacznie bardziej ograniczone niż w teorii liniowej, np. przyjmuje się jednorodne pole odkształceń całkowitych. W innym ujęciu rozważa się krystalit jako kulę izotropową zanurzoną w ośrodku sprężystym (BUDIANSKY, HASHIN, SANDERS [15]), w czym można odnaleźć podobieństwo do teorii zawiesin rzadkich, a nawet z uwzględnieniem w pewien sposób oddziaływań wzajemnych inkluzji (KRÖNER [56]). Z powodu tych upraszczających założeń teoria plastyczności polikrystalu stoi «na pograniczu» teorii ośrodków wielofazowych, lecz nie ma powodów, by w przyszłości nie miała nią być w pełni objęta.

Istotne rozszerzenie i pogłębienie teorii ośrodków wielofazowych zarysowuje się w kontekście przejścia do mechaniki *nieliniowej* (geometrycznie), skąd dopiero z właściwego punktu widzenia można ocenić przybliżenie liniowe, jak również naszkicowaną problematykę plastyczności. Określi to niewątpliwie drugi istotny kierunek rozwoju.

Szkic niniejszy nie obejmuje problematyki badań eksperymentalnych ośrodków wielofazowych. Są one prowadzone w licznych przodujących ośrodkach naukowych i to na dużą skalę, z uwagi na znaczenie techniczne różnego typu materiałów «wzmocnionych», lecz wydają się biec torem równoległym, niezależnym od rozwoju teorii. O jednej z przyczyn (trudności ustalenia geometrii ośrodka) wspomnieliśmy już wyżej. Warto zwrócić uwagę na dwie, obiecujące metody eksperymentalne (w sensie możliwego powiązania z teorią), mianowicie analizy strukturalnej (metoda proszkowa Debye'a — Scherrerera w monochro-

matycznej wiązce promieni Roentgena) oraz analizy widmowej dla ośrodków, gdzie dysponujemy długościami fal zbliżonymi do rozmiarów ziaren.

Przyszłość powinna przynieść ustalenie związków (zrazu korelacyjnych, w dalszej przyszłości być może opartych na rozwiązaniach teoretycznych) między parametrami określającymi warunki wytwarzania materiałów a strukturą (geometrią) ośrodka. Jest to, być może, najbardziej perspektywiczny kierunek rozwoju, który pozwoli w pełni opanować problem projektowania materiałów o pożądanym własnościach.

Literatura cytowana w tekście

1. M. J. BERAN, *Statistical continuum theories*, Wiley, 1968.
2. M. J. BERAN, *Use of the variational approach to determine bounds for the effective permittivity in random media*, *Il nuovo cimento*, 38 (1965), no 2.
3. M. J. BERAN, J. J. MCCOY, *The use of strain gradients theory for analysis of random media*, *Int. J. Sol. Struct.*, 6, (1970), no 9.
4. M. J. BERAN, J. MOLYNEUX, *Statistical properties of the electric field in a medium with small random variations in permittivity*, *Il nuovo cimento*, 30 (1963), no 6.
5. M. BEN-AMOZ, *The effective thermal properties of two-phase solids*, *Int. J. Eng. Sci.*, 8 (1970), no 1.
6. J. F. W. BISHOP, R. HILL, *A theory of a plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses*, *Phil. Mag.*, 42 (1951), 414.
7. W. BOAS, *Zur Berechnung des Torsionsmoduls quasiisotroper Vielkristalle aus den Einkristallkonstanten*, *Helv. Phys. Acta*, 8 (1935), 674.
8. W. BOAS, E. SCHMID, *Zur Berechnung physikalischer Konstanten quasiisotroper Vielkristalle*, *Helv. Phys. Acta*, 7 (1934), 628.
9. В. В. БОЛОТИН, В. Н. МОСКАЛЕНКО, *Макроскопические характеристики сильно изотропных стохастических материалов*, Пробл. Надежн. в Строит. Мех., Конф., Вильнюс 1968, с. 93.
10. W. F. BROWN, Jr, *Solid mixture permittivities*, *Journ. Chem. Phys.*, 23 (1955), no 8.
11. W. F. BROWN Jr., *Dielectric constants, permeabilities and conductivities of random media*, *Symp. Phys. Mech. Random Media*, Pa, Oct. 1964.
12. D. A. BRUGGEMAN, *Die elastischen Konstanten der quasiisotropen Mischkörper aus isotropen Substanzen*, *Ann. Phys.*, 29, (1937), 160.
13. B. BUDIANSKY, *On the elastic moduli of some heterogeneous materials*, *J. Mech. Phys. Solids*, 13 (1965), no. 4.
14. B. BUDIANSKY, N. F. DOW, R. W. PETERS, R. P. SHEPHERD, *Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity*, *Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1951, p. 503.
15. B. BUDIANSKY, Z. HASHIN, J. L. SANDERS, *The stress field of a slipped crystal and the early plastic behavior of polycrystalline materials*, *Plasticity, Proc. 2nd Symp. Naval Struct. Mech.*, Pergamon Press, N. York 1960, s. 239.
16. B. BUDIANSKY, WU TAI TE, *Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals*, *Proc. 4th US Nat. Cong. Appl. Mech.*, 1962, s. 1175.
17. B. BÜRCEL, A. J. PERRY, W. R. SCHNEIDER, *On the theory of fibre strengthening*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 18 (1970), no 2.
18. Л. П. ХОРОШУН, *Реологические свойства твердых тел со случайно расположенными неоднородностями*, Сб. „Тепловые напряжения в элементах конструкций”, Вып. 7, АН Укр. ССР, Инст. Мех., Киев 1966.
19. R. M. CHRISTENSEN, *Viscoelastic properties of heterogeneous media*, *J. Mech. Phys. Sol.*, 17 (1969), s. 23.
20. A. H. COTTRELL, *Dislocations and plastic flow in crystals*, Oxford Univ. Press, London 1953.
21. Б. М. ДАРИНСКИЙ, Т. Д. ШЕРМЕРГОР, *К теории релаксации в поликристаллах*, ПМТФ, 1968 № 5.

22. J. M. DEWEY, *The elastic constants of materials loaded with non-rigid fillers*, J. Appl. Phys., 18 (1947), 578.
23. CZ. EIMER, *Stresses in multiphase media*, Arch. Mech. Stos., 19 (1967), no 4
24. CZ. EIMER, *The boundary effect in multiphase media*, Arch. Mech. Stos., 20 (1968), no 1.
25. CZ. EIMER, *The viscoelasticity of multiphase media*, Arch. Mech. Stos., 23 (1971), no 1.
26. A. EINSTEIN, *Eine neue Bestimmung der Moleküldimensionen*, Ann. Phys., 19 (1906), 289.
27. J. D. ESHELBY, *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems*, Proc. Roy. Soc. London (A), 241 (1957), 376.
28. G. B. JEFFREY, *The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid*, Proc. Roy. Soc., London (A), 102 (1923), 161.
29. А. Г. ФОКИН, Т. Д. ШЕРМЕРГОР, *К расчету упругих модулей неоднородных материалов*, Мех. Полимер., 1968, № 4.
30. А. Г. ФОКИН, Т. Д. ШЕРМЕРГОР, *Вычисление упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий*, Журн. Прикл. Мех. Тех. Физ., 1969, № 1.
31. H. FRÖHLICH, R. SACK, *Theory of the rheological properties of dispersions*, Proc. Roy. Soc. London (A), 185, 1946, s. 415.
32. Z. HASHIN, *The moduli of an elastic solid reinforced by rigid particles*, Bull. Res. Council. Israel, 5C 1955, s. 46.
33. Z. HASHIN, *The moduli of an elastic solid containing spherical particles of another elastic material*, Non-Hom. in Elast. and Plast., Symp. IUTAM, Warszawa 1958.
34. Z. HASHIN, *Bounds for viscosity coefficients of fluid mixtures by variational methods*, IUTAM Symp. 1962, Haifa, Pergamon Press, 1964, s. 434.
35. Z. HASHIN, *On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1955), no 3.
36. Z. HASHIN, *The inelastic inclusion problem*, Intern. Journ. Eng. Sci., 7 (1969), no 1.
37. Z. HASHIN, *Complex moduli of viscoelastic composites I. General theory and application to particulate composites*, Int. J. Sol. Struct., 6, 1970, no 5; II. *Fiber reinforced materials*, id. 6, 1970, no 6.
38. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962), 395.
39. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, 10 (1962), 343.
40. Z. HASHIN, S. SHTRIKMAN, *A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials*, J. Mech. Phys. Solid, 11 (1963), no 2.
41. A. V. HERSHEY, DAHLGREN, *The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals*, J. Appl. Mech., 1954, s. 236.
42. A. HUBER, E. SCHMID, *Bestimmung der elastischen Eigenschaften quasiisotroper Vielkristalle durch Mittelung*, Helv. Phys. Acta, 7, 1934, s. 620.
43. R. HILL, *Report on theories of the elastic properties of composite media*, British Iron and Steel Research Association, Rep. P(19)62, 1962.
44. R. HILL, *Elastic properties of reinforced solids; some theoretical principles*, Journ. Mech. Phys. Solids, 11, 1963, no 5.
45. R. HILL, *New derivations of some elastic extremum principles*, Progress in Applied Mechanics, the Prager Anniv. Vol., N. York-London 1963, s. 99.
46. R. HILL, *Theory of mechanical properties of fibre — strengthened materials*; I. *Elastic behaviour*, Jour. Mech. Phys. Solids, 12, 1964, no 4.; II *Inelastic behaviour*, id., 12 1964, no 4; III *Self — consistent model*, id. 13, 1965, no 4.
47. R. HILL, *Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, 13, 1965, no 2.
48. R. HILL, *A self-consistent mechanics of composite materials*, J. Mech. Phys. Solids, 13, 1965, no 4.
49. R. HILL, *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*, J. Mech. Phys. Sol., 15, 1967, s. 79.

50. V. КАФКА, *Der Einfluss der mikroskopischen Heterogenität auf die elastisch-plastischen Verformungsgesetze*, Z.A.M.M., 46, 1966, no. 8.
51. H. H. KAUSCH-BLECKEN VON SCHEMLING, *Elastic properties of anisotropic heterogeneous materials*, Journ. Appl. Physics, 38 (1967), No 11.
52. E. H. KERNER, *The elastic and thermoelastic properties of composite media*, Proc. Phys. Sol. (B), 69 (1956), 808.
53. G. KNEER, *Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln vielkristalliner Aggregate mit Textur*, Phys. Stat. Sol., 9 (1965), 825.
54. А. Г. КОСТЮК, *О статистической модели микронеоднородной среды*, Механика, 1965, № 1.
55. E. KRÖNER, *Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls*, Zeitschr. f. Physik, 151 (1958), no 4.
56. E. KRÖNER, *Zur plastischen Verformung des Vielkristalls*, Acta Metallurg., 9 (1961), 155.
57. E. KRÖNER, *Elastic moduli of perfectly disordered composite materials*, J. Mech. Phys. Sol., 15 (1967), 319.
58. E. KRÖNER, B. K. DATTA, D. KESSEL, *On the bounds of the shear modulus of macroscopically isotropic aggregates of cubic crystals*, J. Mech. Phys. Solids, 14 (1966), no 1.
59. P. V. MC LAUGHLIN Jr, S. C. BATTERMAN, *Limit behavior of fibrous materials*, Int. J. Sol. Struc., 6 (1970), no 10.
60. В. М. ЛЕВИН, *О коэффициентах температурного расширения*, Мех. Твер. Тела, 1967, № 1.
61. В. М. ЛЕВИН, *Вариационный метод в теории вязкоупругих композиционных тел*, Мех. Твер. Тела, 1968, № 2.
62. И. М. ЛИФШИЦ, Л. Н. РОЗЕНЦВЕЙГ, *К теории упругих свойств поликристаллов*, Журн. Эксп. Теор. Физ., 16 (1946), № 11.
63. T. H. LIN, *Analysis of elastic and plastic strains of a face-centred cubic crystal*, J. Mech. Phys. Sol., 5 (1954), 143.
64. T. H. LIN, *Slip and stress fields of a polycrystalline aggregate at different stages of loading*, J. Mech. Phys. Sol., 12, (1964), 391.
65. T. H. LIN, M. ИТО, *Theoretical plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined and reversed stresses*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), no 2.
66. В. А. ЛОМАКИН, *О деформировании микронеоднородных упругих тел*, Прикл. Мех., 29, 1965.
67. В. А. ЛОМАКИН, *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*, Изд. „Наука” 1970.
68. J. K. MACKENZIE, *The elastic constants of a solid containing spherical holes*, Proc. Phys. Soc., (B) 63 (1950), no 2.
69. MELVIN H. MILLER, *Bounds for effective modulus of heterogeneous materials*, J. Math. Phys., 10 (1969), no 11.
70. MELVIN H. MILLER, *Bounds for effective electrical, thermal and magnetic properties of heterogeneous materials*, J. Math. Phys., 10 (1969), no 11.
71. J. E. MOLYNEUX, *Application of perturbation techniques to problems in statistical continuum theory*, Doct. diss. Univ. Pa, 1964.
72. J. F. MULHERN, *Cylindrically symmetric deformations of a fibre reinforced material*, Quart., J. Mechanics and Appl. Math., 22, Part I, II (1969).
73. J. F. MULHERN in., *A continuum theory of a plastic-elastic fibre reinforced material*, Int. J. Eng. Sci, 7 (1969), no 2.
74. J. F. MULHERN, T. G. ROGERS, A. J. M. SPENCER, *A continuum theory of a plastic-elastic fibre-reinforced material*, Int. J. Eng. Sci, 7 (1969), no 2.
75. J. G. OLDROYD, *The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions*, Proc. Roy-Soc., London (A), 218, 1954, s. 122.
76. B. PAUL, *Prediction of elastic constants of multiphase materials*, Trans. AIME, 218, 1960, s. 36.
77. H. PAYNE, *The slip theory of plasticity for crystalline aggregates*, J. Mech. Phys. Sol., 7 (1957), 126.
78. S. PRAGER, *Diffusion in heterogeneous media*, J. Chem. Phys., 33 (1960), no 1.

79. A. REUSS, *Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle*, ZAMM, 9, 1929, s. 49.
80. R. ROSCOE, *Bounds for the real and imaginary parts of the dynamic moduli of composite viscoelastic systems*, J. Mech. Phys. Sol., 17 (1969), 17.
81. B. W. ROSEN, Z. HASHIN, *Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials*, Int. Journ. Eng. Sci., 8 (1970), no 2.
82. H. RÖHL, *Die elastischen Eigenschaften von Gold-Silber-Einkristallen*, Ann. der Physik, 5 Folge, 16 (1933), s. 887.
83. L. A. RUBENFELD, J. B. KELLER, *Bounds on elastic moduli of composite media*, SIAM J. Appl. Math., 17 (1969), no 3.
84. A. R. T. de SILVA, G. A. CHADWICK, *Thermal stresses in fibre reinforced composites*, J. Mech. Phys. Sol., 17 (1969) no 5.
85. G. E. SMITH, A. J. M. SPENCER, *Interfacial tractions in a fibre reinforced elastic composite material*, J. Mech. Phys. Sol., 18 (1970), no 2.
86. K. SOB CZYK, *Random vibrations of statistically inhomogeneous elastic systems*, Proc. Vibr. Probl, 4 (1970), no 11.
87. T. R. STEEL, *Linearised theory of plane strain of a mixture of two solids*, Intern. J. Eng. Sci., 5 (1967), 775.
88. G. J. TAYLOR, C. F. ELAM, *The plastic extension and fracture of aluminium crystals*, Proc. Roy. Soc. London (A), 108, 1925, s. 28.
89. G. J. TAYLOR, W. S. FARREN, *The distortion of crystals of aluminium under compression*, Proc. Roy. Soc. London (A), 111, 1926; s. 529; G. J. Taylor, id., 116, 1927, s. 16.
90. G. J. TAYLOR, *The viscosity of a fluid containing small drops of another fluid*, Proc. Roy. Soc. London (A), 138, 1932, s. 41.
91. G. J. TAYLOR, *Plastic strain in metals*, J. Inst. Metals, 62 (1938), 307.
92. A. TRZĘSOWSKI, *Analiza problemu brzegowego w ośrodku wielofazowym*, dysert., 1971.
93. W. VOIGT, *Lehrbuch der Kristallphysik*, Teubner, Berlin 1910.
94. L. J. WALPOLE, *On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems*, J. Mech. Phys. Solids, 14 (1966), no 3.
95. L. J. WALPOLE, *On the overall elastic moduli of composite materials*, J. Mech. Phys. Solids, 17 (1969), no 4.
96. L. J. WALPOLE, *Strengthening effects in elastic solids*, J. Mech. Phys. Sol., 18 (1970), no 5.
97. С. Д. ВОЛКОВ, *О краевой задаче теории упругости поликристаллов*, Физ. Мет. и Металловед., 13 (1962), № 2.
98. С. Д. ВОЛКОВ, Н. А. КЛИНСКИХ, *К теории свойств упругости поликристаллов*, Физ. Мет. и Металловед., 10 (1965), № 1.
99. ТАЙ ТЕ ВУ, *The effect of inclusion shape, on the elastic moduli of a two-phase material*, Int. J. Solids Struct., 2 (1966), no 1.
100. С. ZWEBEN, B. W. ROSEN, *A statistical theory of material strength with application to composite materials*, J. Mech. Phys. Sol., 18 (1970), no 3.

Резюме

ТЕОРИЯ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД

Работа имеет обзорный характер. Изложены основные понятия, такие как определения зерна, фазы и тп., а также исходные предположения и предмет исследований данной теории, в частности вывод определяющих уравнений для многофазных сред. Наряду со специальными методами, относящимся к более узким областям применения, например к теории слабых растворов, теории сред с флуктуационными изменениями свойств и пр., внимание сосредоточено на: 1° вариационном подходе, использующем приближенные методы решения, путем включения искомым величин в некоторые неравенства, 2° вероятностном подходе, использующем точные решения в виде рядов корреляционных функций возрастающего порядка.

Перечисленные вопросы изложены в приложении к теории упругости многофазных сред, указаны, однако, и другие возможности их приложений. Отмечены возможные направления развития теории, в частности в области волновых задач, теории пластичности, а также усиления её связи с физико-механическим производством материалов.

S u m m a r y

THEORY OF MULTI-PHASE MEDIA

The paper provides a survey of the present state and basic trends of the theory. Following topics are dealt with: basic definitions (grain, phase, etc.), field of research (in particular, macroscopic constitutive equations), fundamental assumptions. Apart from some special methods (e.g. dilute suspensions, fluctuating inhomogeneities), main attention is focused on (1) variational approach (approximate solutions, closing inequalities for effective quantities), (2) probabilistic approach (exact solutions in the form of series according to correlation functions of increasing order). Problems are mainly tackled in the context of the theory of elasticity, other fields of applications, however, being also pointed out. Some possible future trends are discussed, especially the wave problem, theory of micro- and macro-plasticity, relations to chemical physics of manufacturing of materials.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.

O ZŁOŻONYCH MODELACH WZMOCNIENIA PLASTYCZNEGO

ZENON MRÓZ, CZESŁAW GOSS (WARSZAWA)

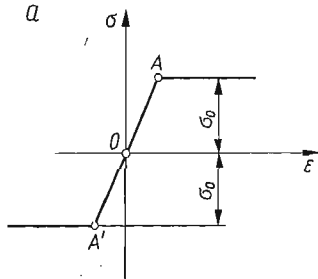
1. Wstęp

W niniejszej pracy rozpatrzemy możliwości opisu wzmocnienia plastycznego metali przy uwzględnieniu efektów anizotropii. Nasze rozważania dotyczyć będą małego zakresu odkształceń (rzędu kilku procent), przy którym efekty zmiany struktury wskutek obrotów ziaren i tworzenia się mikropęknięć mogą być pominięte. Anizotropia wzmocnienia jest zatem wynikiem naprężeń resztkowych, powstałych w wyniku niejednorodności odkształceń plastycznych, koncentrujących się głównie wzdłuż określonych płaszczyzn poślizgu. W jednoosiowym stanie naprężenia uwidacznia się ona jako tzw. efekt Bauschingera; w złożonym stanie naprężenia (dla teorii opartej na istnieniu powierzchni plastyczności) anizotropia prowadzi do zmiany początkowej powierzchni płynięcia. Uwidacznia się to kierunkową zmianą sztywności elementu po wstępnym odkształceniu plastycznym. Zatem gdy chcemy opisać proces deformacji plastycznej dla złożonych dróg obciążenia, a w szczególności dla obciążeń cyklicznych, musimy uwzględnić efekty anizotropii wzmocnienia.

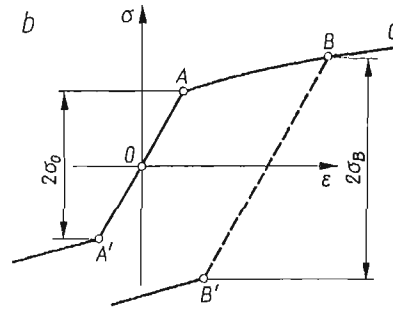
Ponieważ naszym celem jest przedstawienie i omówienie dostatecznie prostych związków fizycznych, tak aby można było efektywnie określać stany naprężenia lub odkształcenia dla złożonych procesów deformacji, nie będziemy rozpatrywali mechanizmów dyslokacyjnych ani procesów zachodzących w pojedynczych kryształach. Rozpatrywany makroelement ciała potraktujemy jako zbiór podelementów o jednorodnych lecz różnych stanach naprężenia lub odkształcenia i różnych własnościach plastycznych. Do podobnego opisu wzmocnienia dojdziemy również przyjmując pewne hipotezy o zmianie pola modułów wzmocnienia lub o złożonym charakterze zmiany mikronaprężeń resztkowych. Przedstawimy opis poszczególnych modeli oraz sposoby całkowania różniczkowych równań płynięcia wzdłuż zadanych trajektorii naprężenia czy odkształcenia. Ograniczymy się do szczegółowego rozpatrzenia płaskiego stanu naprężenia, gdyż większość badań doświadczalnych przeprowadza się w tym stanie na próbkach płaskich lub rurkowych; dlatego też przedstawiona analiza może być przydatna przy opracowywaniu programów badań doświadczalnych oraz przy interpretacji ich wyników. W rozdziale 4 przedstawimy wyniki obliczeń porównawczych dla kilku modeli wzmocnienia i dla trzech złożonych programów obciążenia.

2. Proste modele wzmocnienia

Ciało idealnie plastyczne określone jest warunkiem plastyczności zależnym tylko od stanu naprężenia, $f = f(\sigma_{ij}) = 0$. W czasie deformacji warunek ten nie ulega zmianie; geometrycznie oznacza to, że w przestrzeni naprężeń powierzchnia oddzielająca stany sprężyste od plastycznych jest ustalona. W przypadku jednoosiowego stanu naprężenia otrzymamy krzywą odkształcenia przedstawioną na rys. 1a.



Rys. 1a



Rys. 1b

Bardziej realistyczny opis otrzymamy, zakładając, że

$$(2.1) \quad f = f(\sigma_{ij}, \lambda) = 0;$$

to znaczy warunek plastyczności zależy od skalarne go parametru λ , rosnącego monotonicznie wraz ze wzrostem deformacji plastycznej. Jako miarę parametru λ możemy przyjąć

$$(2.2) \quad \lambda_1 = \int_0^t \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dt, \quad \text{lub} \quad \lambda_2 = \int_0^t (\dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p)^{1/2} dt,$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ oznacza prędkość odkształceń plastycznych. W szczególnym przypadku, gdy

$$(2.3) \quad f = f(\sigma_{ij}) - F(\lambda) = 0,$$

początkowa powierzchnia płynięcia nie zmienia swego kształtu, lecz rozszerza się (lub kurczy) równomiernie w miarę wzrostu odkształceń plastycznych. Mówimy, że równanie (2.3) opisuje *wzmocnienie izotropowe* materiału, bowiem nie zależy ono od kierunku trajektorii obciążenia. Na rys. 1b przedstawiona jest krzywa jednoosiowego obciążenia odpowiadająca temu modelowi wzmocnienia. Początkowy obszar sprężysty ograniczony punktami A i A' rozszerza się i po obciążeniu do punktu B oraz zmianie znaku naprężenia, odkształcenie plastyczne pojawi się po dojściu do punktu B', symetrycznie położonego względem osi odkształcenia. Krzywa obciążenia B'C' jest symetrycznym odbiciem odcinka AC krzywej pierwotnego obciążenia.

Aby uwzględnić efekt Bauschingera przyjmujemy, że równanie powierzchni uplastycznienia ma postać

$$(2.4) \quad f = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - F(\lambda) = 0.$$

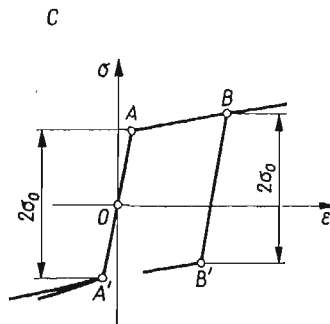
W szczególnym przypadku, gdy $F(\lambda) = \text{const}$ otrzymujemy tak zwany *model wzmocnienia kinematycznego*. Początkowa powierzchnia uplastycznienia doznaje jedynie szywnego

przesunięcia, bez zmiany kształtu początkowego. Odpowiadająca temu modelowi krzywa umocnienia w przypadku jednoosiowym pokazana jest na rys. 1c.¹⁾ Dla pełności opisu podajemy jeszcze prawo płynięcia. Zakładając, że wektor przyrostu odkształceń plastycznych jest skierowany wzdłuż zewnętrznej normalnej do powierzchni płynięcia, możemy napisać

$$(2.5) \quad d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right),$$

lub w notacji wektorowej

$$(2.6) \quad d\varepsilon^p = \frac{1}{K} n_f d\sigma_f, \quad K \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{1/2} = H,$$



Rys. 1c

gdzie n_f jest wektorem jednostkowym, normalnym do powierzchni płynięcia, to znaczy

$$(2.7) \quad n_f = \frac{\partial f / \partial \underline{\sigma}}{|\partial f / \partial \underline{\sigma}|} = \frac{\underline{f}_\sigma}{|f_\sigma|},$$

a $d\sigma_f = d\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_f$ jest rzutem wektora przyrostu naprężenia na kierunek \underline{n}_f (kropka pomiędzy dwoma wektorami oznaczać będzie ich iloczyn skalarny, $|\underline{a}| = a = (\underline{a} \cdot \underline{a})^{1/2}$ oznacza moduł wektora, zaś $f_x = \partial f / \partial x$). Skalar K nazywać będziemy *modułem wzmocnienia*, gdyż zgodnie ze związkem (2.6) określony on jest stosunkiem $K = \partial \sigma_f / \partial \varepsilon^p$, to znaczy składowej normalnej przyrostu naprężenia do modułu wektora przyrostu odkształceń plastycznych. Moduł wzmocnienia K jest zatem uogólnieniem modułu stycznego krzywej obciążenia w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia. Związany on jest z funkcjami α_{ij} i $F(\lambda)$ występującymi w zależności (2.4). Aby określić tę zależność rozpatrzmy dwie hipotezy o przesuwaniu się początkowej powierzchni płynięcia. Zgodnie z propozycją wysuniętą przez MELANA [1], a później PRAGERA [2] i ISZLIŃSKIEGO [3], chwilowe przesunięcie powierzchni zachodzi wzdłuż zewnętrznej normalnej, to znaczy

$$(2.8) \quad d\underline{\sigma} = c d\varepsilon^p.$$

¹⁾ Opis prostych modeli wzmocnienia można znaleźć w książkach [30, 31].

Zgodnie z propozycją ZIEGLERA [4] powierzchnia płynięcia przemieszcza się w kierunku wektora $\underline{\sigma} - \underline{\alpha}$, a zatem

$$(2.9) \quad d\underline{\alpha} = d\mu(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}), \quad \text{gdzie} \quad d\mu = c_1 d\varepsilon^p.$$

Różniczkując związek (2.4) i pamiętając, że $\underline{f}_\sigma = -\underline{f}_\alpha = \underline{f}_{\sigma-\alpha}$, mamy

$$(2.10) \quad \underline{f}_\sigma \cdot d\underline{\sigma} - \underline{f}_\sigma \cdot d\underline{\alpha} - F'(\lambda) d\lambda = 0,$$

gdzie $F'(\lambda) = dF/d\lambda$. Przyjmując zgodnie z (2.2) $d\lambda = d\lambda_2 = d\varepsilon^p = (d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p)^{1/2}$ oraz pamiętając, że $\underline{f}_\sigma = \underline{n}_f |\underline{f}_\sigma|$ dla hipotezy (2.8) otrzymujemy ze związku (2.10) następujące wyrażenie określające moduł K

$$(2.11) \quad K = c + \frac{F'(\lambda)}{|\underline{f}_\sigma|} = c + F'(\lambda) \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right)^{-1/2},$$

zaś dla hipotezy (2.9) mamy

$$(2.12) \quad K = c_1(\underline{\sigma} - \underline{\alpha}) \cdot \underline{n}_f + \frac{F'(\lambda)}{|\underline{f}_\sigma|}.$$

Wzory (2.11) i (2.12) umożliwiają przeprowadzenie ogólnej dyskusji praw wzmocnienia i ich możliwości opisu procesu odkształcenia plastycznego. Rozpatrzmy dla przykładu związek (2.11). Gdy $F'(\lambda) = 0$, wzmocnienie ma charakter kinematyczny i $K = c$. Zazwyczaj przyjmuje się, że $c = \text{const}$ i wtedy model teoretyczny opisuje wzmocnienie liniowe, dla którego moduł wzmocnienia ma stałą wartość. Bardziej ogólnie możemy przyjąć, że

$$(2.13) \quad c = c(I_2^p) \quad \text{lub} \quad c = c(\lambda_2),$$

gdzie $I_2^p = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p$ jest drugim niezmiennikiem tensora odkształceń plastycznych, zaś parametr λ_2 jest określony przez związek (2.2). Moduł wzmocnienia zmienia się teraz wraz z odkształceniem plastycznym i zmienność tę możemy opisać opierając się na krzywej umocnienia dla jednoosiowego stanu naprężenia. Model kinematycznego wzmocnienia przy nieliniowej krzywej obciążenia rozpatrywany był szczegółowo w pracy EISENBERGA i PHILIPSA [5], którzy przyjęli, że tensor przemieszczenia α_{ij} początkowej powierzchni płynięcia wyraża się wzorem

$$(2.14) \quad \alpha_{ij} = c(\lambda_2) \varepsilon_{ij}^p.$$

Przy przyjęciu zależności (2.14), chwilowe przemieszczenie powierzchni nie zachodzi wzdłuż zewnętrznej normalnej, gdyż

$$(2.15) \quad d\alpha_{ij} = c(\lambda_2) d\varepsilon_{ij}^p + c'(\lambda_2) d\lambda_2 \varepsilon_{ij}^p.$$

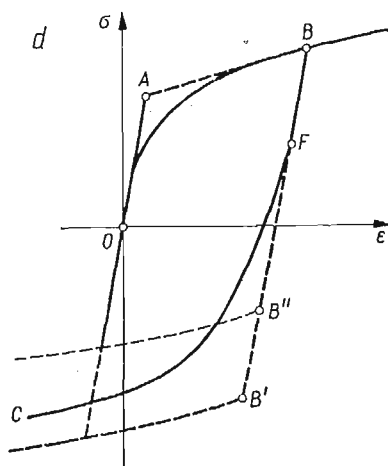
Dlatego też wydaje się, że prostsza jest propozycja wprowadzenia nieliniowości w związku przyrostowym (2.8), zgodnie z założeniem (2.13). Gdy do opisu wprowadzimy dwie funkcje $c = c(\lambda)$ i $F = F(\lambda)$, otrzymamy nie tylko nieliniową krzywą umocnienia, ale i zmienny obszar sprężysty, bowiem początkowa powierzchnia płynięcia nie tylko przesuwa się, ale i rozszerza przy wzroście odkształceń plastycznych.

Zmianę kształtu początkowej powierzchni płynięcia, jej obrót i przesunięcie możemy opisać przyjmując warunek plastyczności w postaci

$$(2.16) \quad F(\sigma_{ij}) = K_{ijkl}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma_{kl} - \alpha_{kl}) - 1 = 0,$$

gdzie tensory K_{ijkl} i α_{ij} są funkcjami odkształcenia plastycznego. Bardziej szczegółową dyskusję tego warunku można znaleźć w pracach BAŁTOWA i SAWCZUKA [6] oraz BACKHAUSA [7].

Wzory (2.11) i (2.12) wskazują jednak, że model wzmocnienia przy użyciu jednej powierzchni plastyczności ma ograniczone możliwości opisu w przypadku, gdy będziemy rozpatrywali procesy odciążania i następnego obciążenia w przeciwnym kierunku. Istotnie moduł wzmocnienia K przy poruszaniu się po powierzchni płynięcia przyjmuje albo stałą



Rys. 1d

wartość, albo wartość zmienną, zależną od kształtu tej powierzchni, ale nie od procesu obciążenia. Tak na przykład, jeśli chwilowa powierzchnia płynięcia określona jest warunkiem Hubera-Misesa, to równanie (2.4) przyjmie postać

$$(2.17) \quad f = \frac{1}{2} (s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - F(\lambda) = 0.$$

Ponieważ $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 2F(\lambda)$, to wyrażenie (2.11) przyjmie postać

$$(2.18) \quad K = c + \frac{F^2(\lambda)}{[2F(\lambda)]^{1/2}},$$

i oczywiście moduł K ma stałą wartość na chwilowej powierzchni płynięcia, osiągniętej po określonej drodze obciążenia.

Różnice, jakie powstają pomiędzy wskazaniem modelu teoretycznego a rzeczywistym zachowaniem się materiału ilustruje rys. 1d. Po obciążeniu do punktu B i następnym zmianie znaku obciążenia, pierwsze odkształcenia plastyczne pojawiają się w punkcie F i krzywa odwrotnego obciążenia FC posiada moduł styczny zmieniający się w sposób ciągły, po-

czynając od wartości modułu sprężystego. Stosując model wzmocnienia izotropowego, kinematycznego lub model bardziej złożony (2.4), otrzymać możemy dość dobrą aproksymację pierwotnej krzywej obciążenia OB , natomiast duże rozbieżności powstają, jeśli chodzi o krzywą obciążenia odwrotnego FC , bowiem moduły styczne w punktach B' i B'' , zgodnie z (2.18) muszą być takie same, jak w punkcie B . Podobna sytuacja powstanie dla innego rodzaju złożonych dróg obciążenia, a w szczególności dla obciążeń cyklicznych, gdzie proces obciążania i odciążania występuje przy każdym cyklu. Aby móc dostatecznie dokładnie opisać tego rodzaju procesy, musimy się uciec do bardziej złożonych modeli, przez wprowadzenie dodatkowych parametrów opisujących stan materiału. Tego rodzaju modele rozpatrzemy w następnym paragrafie.

Możliwość skonstruowania teorii plastyczności przy użyciu parametrów wewnętrznych rozpatrywana była w pracach wielu autorów. Celem obecnej pracy będzie przedstawienie konkretnych form związków, możliwych do wykorzystania przy opisie własności plastycznych metali. Wprowadzimy przy tym nową strukturę matematyczną związków, nie rozpatrywaną do tej pory w literaturze naukowej.

3. Złożone modele wzmocnienia

Założmy teraz, że dla opisanego zachowania się materiału przy zmiennych obciążeniach wprowadzimy większą ilość parametrów określających stan materiału. Nasuwają się tu dwa sposoby podejścia do zagadnienia: parametry te można traktować jako wewnętrzne, to znaczy nie wchodzące do równań równowagi ani do związków geometrycznych; występują one jedynie w związkach fizycznych, a tym samym w wyrażeniach na dysypację, czy energię wewnętrzną. Drugi sposób polegałby na potraktowaniu ciała jako zbioru elementów o prostych własnościach sprężysto-plastycznych czy lepkich i określeniu związków fizycznych dla makroskopowo jednorodnego zbioru takich elementów. Podejście tego rodzaju stosuje się np. przy próbach określania własności mechanicznych polikryształów, wychodząc z własności pojedynczych kryształów. Nazywać je będziemy podejściem *strukturalnym*. Istnieje podobieństwo między obydwojma podejściami bowiem stany naprężenia w poszczególnych fazach możemy traktować jako parametry wewnętrzne. Jednak przy podejściu strukturalnym, naprężenie i odkształcenie makroskopowe otrzymujemy przez odpowiednie uśrednianie po wszystkich podelementach, które powinny spełniać warunki równowagi i zgodności odkształceń. Wprowadzając pojęcie parametrów wewnętrznych omijamy trudny problem uśredniania.

3.1. Opis wzmocnienia przy pomocy wewnętrznych parametrów stanu. Założmy, że stan materiału określony jest przez stan naprężenia σ , odkształcenia $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^e + \underline{\varepsilon}^p$, gdzie $\underline{\varepsilon}^e$ i $\underline{\varepsilon}^p$ oznaczają część odwracalną i nieodwracalną odkształcenia, oraz przez $N+M$ parametrów wewnętrznych, które w naszym przypadku będą skalarami $\gamma^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots, N$) i tensorami drugiego rzędu $\alpha_{ij}^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, M$). Niech warunek plastyczności będzie funkcją stanu naprężenia, pewnej liczby parametrów wewnętrznych, oraz temperatury θ , to znaczy

$$(3.1) \quad f^{(0)}(\sigma, \alpha^{(s)}, \gamma^{(r)}, \theta) = 0.$$

Przy odkształcaniu materiału w zakresie sprężystym parametry wewnętrznie nie ulegają zmianie, to znaczy

$$(3.2) \quad d\underline{\varepsilon}^p = 0, \quad d\alpha^{(s)} = 0, \quad d\gamma^{(r)} = 0, \quad \text{gdy} \quad f^o < 0.$$

Zakładamy, że oprócz związku skalarnego (3.1), parametry wewnętrzne spełniają $K+L$ dodatkowych związków skalarnych, określających obszary wewnętrznej nieodwracalności

$$(3.3) \quad \begin{aligned} f_{\alpha}^{(q)}(\sigma, \underline{\alpha}^{(s)}, \gamma^{(r)}, \theta) &= 0, & q &= 1, 2, \dots, K, \\ f_{\gamma}^{(v)}(\sigma, \underline{\alpha}^{(s)}, \gamma^{(r)}, \theta) &= 0, & v &= 1, 2, \dots, L, \end{aligned}$$

przy czym pierwsza grupa równości skalarnych (3.3) odnosi się do parametrów $\underline{\alpha}^{(s)}$, zaś druga do parametrów $\gamma^{(r)}$. Na przykład, gdy zachodzi równość $f_{\alpha}^{(q)} = 0$, to parametr $\underline{\alpha}^{(q)}$ ulega zmianie w czasie procesu według określonego prawa; natomiast, gdy $f_{\alpha}^{(q)} < 0$, to $d\underline{\alpha}^{(q)} = 0$, podczas gdy pozostałe parametry mogą się zmieniać. Założymy następnie, że przyrost parametrów wewnętrznych jest liniowo zależny od przyrostu odkształceń plastycznych, to znaczy

$$(3.4) \quad \begin{aligned} d\underline{\alpha}_{ij}^{(s)} &= A_{ijkl}^{(s)} d\varepsilon_{kl}^p = b_{ij}^{(s)} d\lambda, & \text{gdy } f_{\alpha}^{(s)} &= 0, \\ d\underline{\alpha}_{ij}^{(s)} &= 0, & \text{gdy } f_{\alpha}^{(s)} &< 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(3.5) \quad \begin{aligned} d\gamma^{(r)} &= C_{ij}^{(r)} d\varepsilon_{ij}^p = d^{(r)} d\lambda, & \text{gdy } f_{\gamma}^{(r)} &= 0, \\ d\gamma^{(r)} &= 0, & \text{gdy } f_{\gamma}^{(r)} &< 0, \end{aligned}$$

gdzie $A_{ijkl}^{(s)}$, $b_{ij}^{(s)}$, $C_{ij}^{(r)}$, $d^{(r)}$ są funkcjami naprężenia oraz parametrów stanu. Wykorzystując prawo płynięcia (2.6) możemy napisać

$$(3.5a) \quad A_{ijkl}^{(s)} n_{ij}^{(0)} = b_{kl}^{(s)}, \quad C_{ij}^{(r)} n_{ij}^{(0)} = d^{(r)}.$$

Na ogół ilość związków skalarnych $f_{\alpha}^{(q)} = 0$ i $f_{\gamma}^{(v)} = 0$ może być mniejsza aniżeli ilość parametrów wewnętrznych.

Założmy, że spełniony jest warunek plastyczności (3.1) oraz niektóre z warunków (3.3); odpowiadające tym warunkom parametry wewnętrzne ulegają zatem zmianie w czasie procesu odkształcenia. Różniczkując równania (3.1) i (3.3) i rozpatrując jedynie proces izotermiczny, otrzymujemy

$$(3.6a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot d\underline{\alpha}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \gamma^{(r)}} d\gamma^{(r)} &= 0, \\ \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot d\underline{\alpha}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \gamma^{(r)}} d\gamma^{(r)} &= 0. \end{aligned}$$

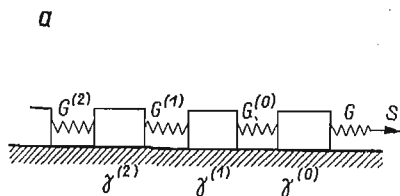
Wykorzystując prawo płynięcia (2.6) i związki (3.4), (3.5) możemy równości (3.6a) przedstawić w postaci

$$(3.6b) \quad \begin{aligned} K|f_{\sigma}^{(0)}| + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot \underline{b}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\sigma}^{(0)}}{\partial \gamma^{(r)}} d^{(r)} &= 0, \\ K|f_{\gamma}^{(v)}| + \sum_{s=1}^M \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \underline{\alpha}^{(s)}} \cdot \underline{b}^{(s)} + \sum_{r=1}^N \frac{\partial f_{\gamma}^{(v)}}{\partial \gamma^{(r)}} d^{(r)} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym sumowanie dotyczy tych s i r , dla których spełnione są równości (3.3).

spełniony jest warunek plastyczności (3.8), zmieniać się zaczyna parametr $\alpha^{(0)}$ i moduł styczny krzywej umocnienia określony jest pierwszą zależnością (3.11). Gdy z kolei spełniony zostanie pierwszy warunek (3.9), zmieniać się zacznie parametr $\alpha^{(1)}$ i spełnione będą dwie równości (3.11). Przyjmując, że parametr $b^{(1)}$ jest zadany, wartość $b^{(0)}$ musi ulec zmianie, aby spełniony był drugi związek (3.11). W szczególnym przypadku, gdy $\underline{n}^{(0)} = \underline{n}^{(1)} \dots \underline{n}^{(k)}$ mamy $b^{(0)} = b^{(1)} = b^{(k)}$. Zatem spełnienie kolejnego warunku (3.9), np.: $f^{(i)} = 0$, prowadzi do zmiany parametrów $b^{(i)}$ dla $i = 0, 1, 2, \dots, l-1$.

Możemy parametrom $b^{(i)}$ nadawać pewną interpretację mechaniczną, rozpatrując model przedstawiony na rys 2a. Omawiany on już był przez IWLEWA [21] i PRAGERA [10] i jest uogólnieniem modelu wprowadzonego przez KADASZEWICZA i NOWOŻYŁOWA [12]. Rozważ-



Rys. 2a

my układ złożony z szeregu sztywnych bloków połączonych elementami sprężystymi i spoczywających na sztywnym podłożu o zadanej granicznej sile tarcia $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$. Przeszczenie bloku O i siła nań działająca odpowiadają plastycznemu odkształceniu i naprężeniu makroskopowemu. Natomiast siły w elementach sprężystych $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}$ oraz przeszczenia trwałe bloków $1, 2, \dots, n$ odpowiadają mikronaprężeniom i trwałym mikroodkształceniom, które oznaczać będziemy przez $d\varepsilon^{(1)}, d\varepsilon^{(2)}, \dots, d\varepsilon^{(n)}$. Załóżmy, że układ pod działaniem siły zewnętrznej osiągnął taki stan, w którym warunek plastyczności (3.8) oraz dwa pierwsze warunki (3.9) są spełnione. Przyrosty mikroodkształceń plastycznych odpowiadające przeszczeniu bloków 1 i 2 wyniosą:

$$(3.12) \quad d\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{K^{(1)}} \underline{n}^{(1)} (d\alpha^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)}), \quad d\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{K^{(2)}} \underline{n}^{(2)} (d\alpha^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)}),$$

zaś przyrosty mikronaprężeń modelowane jako zmiana sił w elementach sprężystych wyrażą się następująco:

$$(3.13) \quad d\alpha^{(0)} = G^{(0)} (d\varepsilon^{(0)} - d\varepsilon^{(1)}), \quad d\alpha^{(1)} = G^{(1)} (d\varepsilon^{(1)} - d\varepsilon^{(2)}), \quad d\alpha^{(2)} = G^{(2)} d\varepsilon^{(2)},$$

gdzie $G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}$ oznaczają sztywności elementów sprężystych. Wykorzystując warunki zgodności w postaci

$$(3.14) \quad \underline{n}_f \cdot d\sigma = \underline{n}_f \cdot d\alpha^{(0)}, \quad \underline{n}^{(1)} \cdot d\alpha^{(0)} = \underline{n}^{(1)} \cdot d\alpha^{(1)}, \quad \underline{n}^{(2)} \cdot d\alpha^{(1)} = \underline{n}^{(2)} \cdot d\alpha^{(2)}$$

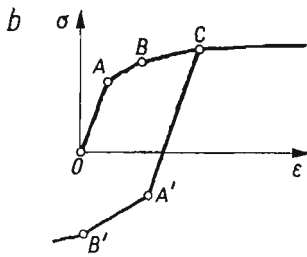
oraz równania (2.5), (3.12) i (3.13) możemy otrzymać zależności pomiędzy współczynnikami $G^{(i)}$ i $K^{(i)}$, mianowicie:

$$(3.15) \quad K^{(2)} = G^{(2)}, \quad K^{(1)} = G^{(1)} - G^{(1)2} \frac{(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)})}{G^{(1)} + G^{(2)}}, \quad K^{(0)} = G^{(0)} - G^{(0)2} \frac{(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(0)})}{G^{(0)} + G^{(1)}},$$

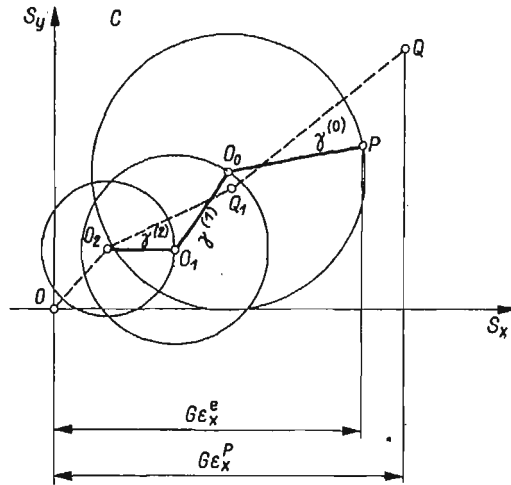
zaś rugując wielkości $d\varepsilon^{(1)}$, $d\varepsilon^{(2)}$, otrzymujemy ostatecznie zależności analogiczne do związków (3.10), mianowicie

$$(3.16) \quad \begin{aligned} d\alpha^{(0)} &= \left[G^{(0)}\underline{n}^{(0)} - \frac{G^{(0)} - K^{(0)}}{(\underline{n}^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)})} \underline{n}^{(1)} \right] d\lambda = \underline{b}^{(0)} d\lambda, \\ d\alpha^{(1)} &= \left[G^{(1)}\underline{n}^{(1)} - \frac{G^{(1)} - K^{(1)}}{(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)})} \underline{n}^{(2)} \right] \frac{G^{(0)}(\underline{n}^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)})}{G^{(0)} + K^{(1)}} d\lambda = \underline{b}^{(1)} d\lambda, \\ d\alpha^{(2)} &= G^{(2)} \frac{G^{(1)} - K^{(1)}}{G^{(1)}(\underline{n}^{(1)} \cdot \underline{n}^{(2)})} \cdot \frac{G^{(0)}(\underline{n}^{(0)} \cdot \underline{n}^{(1)})}{G^{(0)} + K^{(1)}} \underline{n}^{(2)} d\lambda = \underline{b}^{(2)} d\lambda. \end{aligned}$$

Równanie powyższe można uogólnić na dowolnie dużą ilość spełnionych równości (3.9), odpowiadających uplastycznieniu w poszczególnych elementach. Stosując model przedstawiony na rys. 2a, nie musimy już określać parametrów $\underline{b}^{(i)}$ w związkach (3.10), lecz jedynie znać rozkład wielkości skalarnych $\gamma^{(i)}$ i $G^{(i)}$.



Rys. 2b



Rys. 2c

Rysunek 2b przedstawia odpowiadającą temu modelowi krzywą umocnienia, zaś rys. 2c pokazuje dwuwymiarową reprezentację na płaszczyźnie sił, którą możemy utożsamiać z płaszczyzną naprężeń makroskopowych. Ruch poszczególnych bloków uwarunkowany jest spełnieniem odpowiednich warunków plastyczności, które przyjmujemy w postaci

$$(3.17) \quad \begin{aligned} f^{(0)} &= (s_x - \alpha_x^{(0)})^2 + (s_y - \alpha_y^{(0)})^2 - \gamma^{(0)2} = 0, \\ f^{(1)} &= (\alpha_x^{(0)} - \alpha_x^{(1)})^2 + (\alpha_y^{(0)} - \alpha_y^{(1)})^2 - \gamma^{(1)2} = 0. \end{aligned}$$

Warunki te odpowiadają okręgom na płaszczyźnie (S_x, S_y) . Wektory $\underline{OO}_2/G^{(2)}$, $\underline{OO}_1/G^{(1)}$, $\underline{OO}_0/G^{(0)}$ przedstawiają względne przemieszczenia bloków; zatem całkowite przemieszczenie bloku O odpowiadające odkształceniu plastycznemu wyraża się sumą $\underline{OO}_2/G^{(2)} + \underline{OO}_1/G^{(1)} + \underline{OO}_0/G^{(0)}$. Całkowitą siłę działającą na blok O przedstawia wektor \underline{OP} , zaś wektor \underline{OP}/G przedstawia makroskopowe odkształcenie sprężyste. Wykorzystując repre-

zentację na płaszczyźnie sił i całkując w sposób graficzny równania przyrostowe, możemy określić odkształcenia plastyczne oraz stan naprężeń wewnętrznych dla dowolnie zadanego programu obciążenia.

M o d e l 2. Oznaczamy jak poprzednio parametry wewnętrzne przez $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}$ i $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(n)}$. Załóżmy, że warunek plastyczności ma postać

$$(3.18) \quad f^{(0)}(\sigma - \sum \alpha^{(i)}) - \gamma^{(0)} = 0,$$

zaś równania skalarne, które powinny spełniać parametry $\alpha^{(i)}$ w pewnym zakresie swej zmienności mają postać

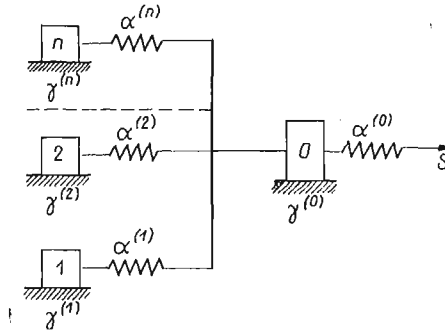
$$(3.19) \quad f^{(i)}(\alpha^{(i)} - \gamma^{(i)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Przyjmujemy, że parametry $\gamma^{(s)}$ są stałe w czasie procesu. Różniczkując (3.19), otrzymujemy

$$(3.20) \quad \underline{n}^{(i)} \cdot d\alpha^{(i)} = 0,$$

gdzie $\underline{n}^{(i)}$ oznaczają wektory jednostkowe do powierzchni $f^{(i)} = 0$. Załóżmy, że spełnionych jest l pierwszych równości (3.19). Wtedy równanie przyrostowe dla parametrów $\alpha^{(i)}$, spełniające warunki zgodności (3.20), możemy zapisać w postaci:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} d\alpha^{(i)} &= G^{(i)}[d\varepsilon^p - (d\varepsilon^p \cdot \underline{n}^{(i)})\underline{n}^{(i)}], & f^{(i)} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, l, \\ d\alpha^{(i)} &= G^{(i)}d\varepsilon^p, & f^{(i)} &\leq 0, & i &= l+1, \dots, n. \end{aligned}$$



Rys. 3

Moduł styczny K krzywej umocnienia otrzymamy różniczkując (3.18) oraz wykorzystując (2.5) i (3.21). W wyniku otrzymamy:

$$(3.22) \quad K = \frac{\sum_{i=1}^l G^{(i)} \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha^{(i)}} \cdot \underline{n}_f - \frac{\partial f}{\partial \alpha^{(i)}} \cdot \underline{n}^{(i)} (\underline{n}_f \cdot \underline{n}^{(i)}) \right] + \sum_{k=l}^n G^{(k)} \frac{\partial f}{\partial \alpha^{(k)}} \cdot \underline{n}_f}{|f'_\sigma^{(0)}|}.$$

Widzimy, że w naszym przypadku równania skalarne (3.19) mają inny sens, aniżeli dla modelu poprzedniego. Zmiana wszystkich parametrów $\alpha^{(i)}$ zachodzi, jeśli tylko spełniony jest warunek plastyczności (3.18), zgodnie z drugim równaniem (3.21), gdy $f^{(i)} < 0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Spełnienie związku skalarnego (3.19) dla dowolnego parametru implikuje zmianę jego prawa przyrostowego, gdyż dla $f^{(i)} = 0$ obowiązuje pierwszy związek (3.21). Mamy zatem przypadek opisany ogólnie równaniem (3.7).

Interpretację mechaniczną tego modelu przedstawia rys. 3. Sztynny blok, którego przemieszczenie odpowiada odkształceniu plastycznemu spoczywa na płaszczyźnie o sile

tarcia granicznego $\gamma^{(0)}$. Z blokiem połączone są równoległe elementy sprężyste i bloki o granicznych wartościach siły tarcia $\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, \dots, \gamma^{(n)}$. Parametry $\alpha^{(i)}$ odpowiadają siłom w elementach sprężystych.

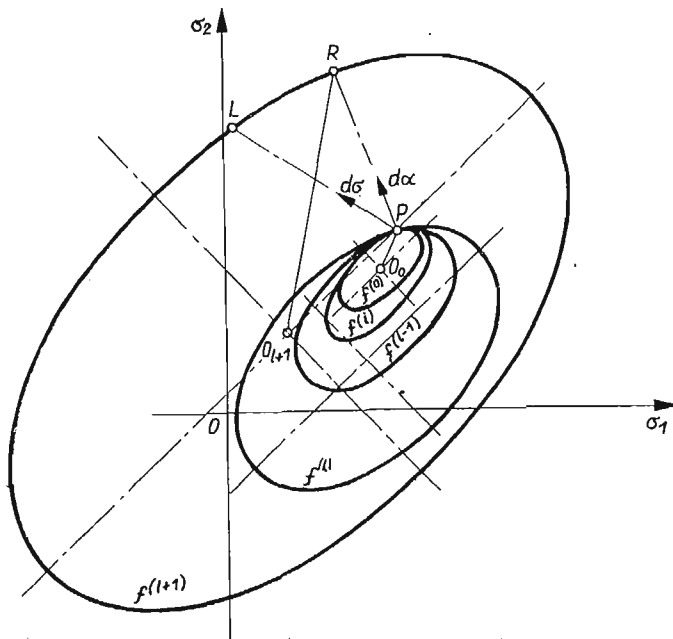
M o d e l 3. Załóżmy, że parametrami stanu jest $n+1$ wielkości tensorowych $\underline{\alpha}^{(0)}, \underline{\alpha}^{(1)}, \dots, \underline{\alpha}^{(n)}$, oraz $2(n+1)$ wielkości skalarnych $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}$ i $K^{(0)}, K^{(1)}, \dots, K^{(n)}$. Warunek plastyczności ma postać

$$(3.23) \quad f^{(0)}(\sigma - \underline{\alpha}^{(0)}) - \gamma^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

zaś warunki skalarne określające obszar zmienności parametrów mają postać

$$(3.24) \quad f^{(i)}(\sigma - \underline{\alpha}^{(i)}) - \gamma^{(i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Jeśli spełniony jest warunek plastyczności oraz l pierwszych związków (3.24), zakładamy, że wszystkie powierzchnie są styczne do siebie w przestrzeni naprężeń w punkcie określonym przez stan naprężenia σ . Każdej z powierzchni (3.23) i (3.24) odpowiada określony



Rys. 4

moduł wzmocnienia $K^{(l)}$; jeśli w danym punkcie $P^{(l)}$, l powierzchni jest stycznych do siebie, to moduł wzmocnienia ma wartość $K = K^{(l)}$ i przyrost odkształceń plastycznych określamy, zgodnie z równaniem (2.5) przy $K = K^{(l)}$. W ten sposób konfiguracja powierzchni (3.23), (3.24) określa w przestrzeni naprężeń pole modułów wzmocnienia, którego zmianę możemy śledzić całkując związki przyrostowe wzdłuż programu obciążenia. Tego rodzaju model był rozpatrywany przez MROZA w pracach [16, 17].

Ruch chwilowy powierzchni $f^{(l)}$ zachodzi w kierunku wektora $\underline{\sigma}^{(l+1)} - \underline{\sigma}^{(l)}$, gdzie $\underline{\sigma}^{(l+1)}$ jest punktem na powierzchni $f^{(l+1)}$ o tej samej normalnej, co w punkcie $P^{(l)}$. Wszystkie

powierzchnie $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(l-1)}$ poruszają się wraz z powierzchnią $f^{(l)}$, zachowując z nią styczność (rys. 4). Możemy te założenia ująć matematycznie pisząc:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} d\alpha^{(l)} &= d\mu(\alpha^{(l+1)} - \alpha^{(l)}) = \frac{d\mu}{\gamma^{(l)}}[(\gamma^{(l+1)} - \gamma^{(l)})(\alpha^{(l)} - \alpha^{(l)}\gamma^{(l+1)} - \alpha^{(l+1)}\gamma^{(l)}), \\ \alpha^{(l-1)} &= \alpha^{(l)} - \frac{\gamma^{(l-1)}}{\gamma^{(l)}}(\alpha^{(l)} - \alpha^{(l)}), \\ d\alpha^{(l+1)} &= \dots = d\alpha^{(n)} = 0, \\ d\gamma^{(i)} &= C^{(i)}(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

przy czym przyjmujemy, że wszystkie powierzchnie posiadają środek symetrii, a więc równania (3.23) i (3.24) są jednorodnymi funkcjami argumentów $\sigma - \alpha^{(i)}$. Wykorzystując równania zgodności w postaci:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma - \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \alpha^{(l)}} \cdot d\alpha^{(l)} - d\gamma^{(l)} &= 0, \\ \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \sigma} \cdot d\sigma - \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \alpha^{(i)}} \cdot d\alpha^{(i)} - d\gamma^{(i)} &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, (l-1), \end{aligned}$$

oraz związku (3.25), otrzymujemy z pierwszego równania (3.26)

$$(3.27) \quad d\mu = \frac{\left| \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \sigma} \right| K^{(l)} - C^{(l)}}{\left| \frac{\partial f^{(l)}}{\partial \sigma} \right| (\alpha^{(l+1)} - \alpha^{(l)}) \cdot n_f},$$

zaś pozostałe równania (3.26) są spełnione automatycznie przy założeniu jednorodności związków (3.23) i (3.24)²⁾.

Niniejszy model jest skonstruowany bardziej formalnie, aniżeli poprzednie i nie ma bezpośredniej interpretacji mechanicznej. Jest on natomiast wygodniejszy do badania własności materiału, bowiem pole modułów wzmocnienia bezpośrednio ilustruje kierunkowy rozkład sztywności w materiale i jego zmianę pod wpływem odkształcenia plastycznego. Podobną koncepcję przedstawiania własności materiału odkształconego plastycznie omówił również HAYTHORNWAITE [22].

Jest rzeczą jasną, że podobnych modeli możemy konstruować więcej, lecz wszystkie one dadzą się umieścić w jednym schemacie ogólnym omówionym na początku tego rozdziału. Istotną cechą wszystkich modeli jest wprowadzenie obok warunku plastyczności odpowiedniej ilości związków skalarnych określających obszary zmienności parametrów wewnętrznych oraz odpowiadających im przyrostowych równań zgodności.

3.2. Opis wzmocnienia przy uwzględnieniu niejednorodności struktury. Załóżmy, że element makroskopowy jest układem utworzonym z podelementów o pewnych, określonych własnościach sprężystoplastycznych, czy lepkich. Powstaje problem, jak określić własności tego makro-

²⁾ Istotnie, warunki zgodności (3.26) dla $i = 0, 1, \dots, l-1$ prowadzą do równań

$$\frac{\partial f^{(i)}}{\partial \sigma^{(i)}} \cdot (\sigma^{(i)} - \alpha^{(i)}) - \gamma^{(i)} = 0,$$

które są spełnione, jeśli $f^{(i)}$ są funkcjami jednorodnymi rzędu pierwszego.

-elementu, o ile znamy konfigurację geometryczną podelementów i ich własności. Próby matematyczne rozwiązania tego zagadnienia dotyczą w pierwszym rzędzie ciał polikrystalicznych. Spośród dużej ilości prac wymienić tu należy w pierwszym rzędzie prace TAYLORA [23], BATDORFA i BUDIANSKY'EGO [24], HILLA [26] oraz LINA i ITO [25], którzy rozpatrywali problem określenia związków fizycznych i warunku uplastycznienia agregatu polikrystalicznego, wychodząc z własności monokryształów. W rzeczywistości nasza informacja zarówno o własnościach fizycznych monokryształów, jak i ich geometrii jest ograniczona, gdyż do tej pory nie dysponujemy metodami pomiaru własności poszczególnych ziaren krystalicznych, zaś ich geometrię możemy opisać jedynie w sposób statystyczny.

Dlatego w wielu przypadkach cenna jest możliwość podania *oszacowań* rzeczywistych własności. Możemy to uczynić przyjmując pewne założenia o rozkładzie naprężeń lub odkształceń wewnątrz makroelementu. Najprostszym założeniem będzie przyjęcie, że stan naprężeń jest jednorodny, natomiast niejednorodność występuje jedynie w rozkładzie odkształceń; otrzymamy w ten sposób krzywą umocnienia, która będzie *dolną* oceną rzeczywistej krzywej. Możemy również założyć odwrotnie, że w makroelemente panuje jednorodny stan odkształcenia, a niejednorodność występuje jedynie w rozkładzie naprężeń; odpowiadająca temu założeniu krzywa umocnienia będzie *górną* oceną krzywej rzeczywistej. Podobne podejście stosowane już było od dawna przy szacowaniu własności sprężystych polikryształów (tzw. oceny Reussa i Voigta) przy określaniu modułu Younga dla polikryształów. W teorii BATDORFA i BUDIANSKY'EGO [24] przyjmuje się również, że w każdym monokryształe panuje ten sam stan naprężenia co w elemencie makroskopowym, zatem ich teoria prowadzi do dolnej oceny krzywej umocnienia. Na odwrót TAYLOR [23] oraz LIN i ITO [25] wychodzą z założenia jednorodności stanu odkształcenia. Teorie uwzględniające niejednorodność naprężeń i odkształceń w polikryształe [27, 29] prowadzą do bardzo złożonych związków, które mają charakter bardziej poznawczy aniżeli praktyczny.

Ponieważ warunek plastyczności monokryształu jest powierzchnią odcinkowo regularną, z występującymi na niej krawędziami, analiza teoretyczna prowadzi do wniosku, że na powierzchni uplastycznienia dla makroelementu powstają również naroża. Aby uzyskać bardziej proste związki, które można by stosować w praktycznych zagadnieniach przyjmijmy, że makroelement utworzony jest z podelementów o regularnych powierzchniach płynięcia. Przyjmując hipotezę o jednorodnym stanie naprężenia, możemy ją zilustrować jako model w *szeregowym* uporządkowaniu podelementów; odwrotnie, założenie o jednorodnym stanie odkształcenia będziemy modelować przyjmując *równoległe* ułożenie podelementów. W ten sposób wyniki uzyskane z tych dwóch założeń powinny dać obustronne oszacowanie rzeczywistych własności sprężysto-plastycznych, które wystąpią przy dowolnej konfiguracji podelementów, o tych samych własnościach.

M o d e l 4. Załóżmy, że w elemencie makroskopowym panuje jednorodny stan naprężenia; odpowiada to przyjęciu szeregowego połączenia elementów sprężysto-plastycznych, z których każdy charakteryzuje się powierzchnią plastyczności

$$(3.28) \quad f^{(i)}(\sigma - \underline{\sigma}^{(i)}) - \gamma^{(i)} = 0;$$

zakładamy przy tym, że $\gamma^{(i)}$ są stałe, zaś

$$(3.29) \quad d\underline{\sigma}^{(i)} = C^{(i)} d\underline{\varepsilon}^{(i)p}.$$

Prawo płynięcia dla każdego elementu przyjmiemy w postaci

$$(3.30) \quad d\underline{\varepsilon}^{(i)p} = \frac{1}{K^{(i)}} \eta_f^{(i)} d\sigma_f^{(i)},$$

gdzie $K^{(i)} = C^{(i)}$, zgodnie z równaniem (2.11). Makroskopowy stan odkształcenia otrzymujemy jako średnią wartość odkształceń plastycznych poszczególnych elementów, to znaczy

$$(3.31) \quad d\underline{\varepsilon}^p = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n d\underline{\varepsilon}^{(i)p}, \quad d\underline{\varepsilon}^e = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n d\underline{\varepsilon}^{(i)e}.$$

Powyższy model rozpatrywany był w pracy IWANA [14, 15].

Model 5. Załóżmy, że w elemencie mamy jednorodny stan odkształcenia $\underline{\varepsilon} = \bar{\underline{\varepsilon}}$. Odpowiada to równoległemu połączeniu elementów sprężysto-plastycznych. Odkształcenie sprężyste dowolnego elementu wynosi $\underline{\varepsilon}^{(i)p} = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{(i)p}$, zaś naprężenie $\underline{\sigma}^{(i)} = \underline{K}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{(i)p})$ gdzie \underline{K} oznacza tensor modułów sprężystości. Warunek plastyczności dla dowolnego elementu ma zatem postać

$$(3.32) \quad f^{(i)}[\underline{K}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{(i)p}) - \underline{\alpha}^{(i)}] - \gamma^{(i)} = 0,$$

zaś przyrost $d\underline{\alpha}^{(i)}$ jest związany zależnością (3.29) z przyrostem odkształcenia plastycznego. Równanie (3.32) przyjmuje zatem postać

$$(3.33) \quad f^{(i)}[\underline{K}\underline{\varepsilon} - (\underline{K} + \underline{c})\underline{\varepsilon}^{(i)p}] - \gamma^{(i)} = 0.$$

Naprężenie makroskopowe określimy ze wzoru

$$(3.34) \quad \underline{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \underline{\sigma}^{(i)} = \underline{K}\underline{\varepsilon} - \frac{\underline{K}}{n} \sum_{i=0}^n \underline{\varepsilon}^{(i)p}.$$

W przypadku warunku plastyczności Hubera-Misesa, jedynie naprężenia dewiatorowe $\underline{S}^{(i)}$ wchodzi do tego warunku, otrzymujemy zatem $\underline{s}^{(i)} = 2G(\underline{e} - \underline{e}^{(i)p})$, gdzie \underline{e} i $\underline{e}^{(i)p}$ oznaczają odkształcenia dewiatorowe, G —moduł Kirchhoffa, zaś warunek plastyczności ma postać

$$(3.35) \quad \frac{1}{2}(\underline{s}^{(i)} - \underline{\alpha}^{(i)}) \cdot (\underline{s}^{(i)} - \underline{\alpha}^{(i)}) - \gamma^{(i)2} = 0.$$

Wyrażając ten warunek przez odkształcenia, mamy

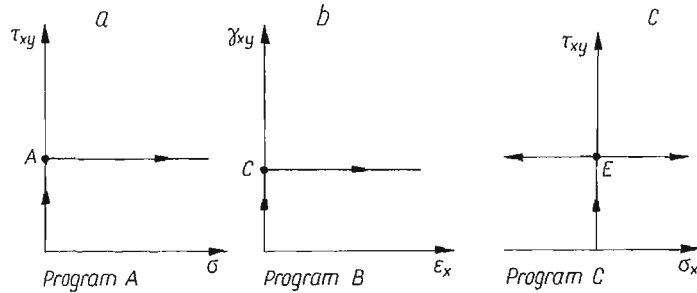
$$(3.36) \quad (\underline{e} - k\underline{e}^{(i)p}) \cdot (\underline{e} - k\underline{e}^{(i)p}) - \frac{\gamma^{(i)2}}{2G^2} = 0,$$

gdzie $k = 1 + \frac{c}{2G}$. W danym przypadku wygodniej jest zatem posługiwać się przestrzenią odkształceń.

Tego rodzaju model był rozpatrywany przez BESSELINGA [18,19] oraz WELLSA i PASLAYA [20], do opisu anizotropii wzmocnienia oraz w teorii pełzania.

4. Obliczenie porównawcze dla czterech modeli wzmocnienia

Aby uzyskać dane porównawcze o własnościach poszczególnych modeli, przeprowadzimy obliczenia dla trzech różnych programów obciążenia. Ograniczymy się do płaskiego stanu naprężenia, określonego ogólnie przez trzy składowe naprężenia σ_x , σ_y , τ_{xy} , odniesione do obranego układu kartezjańskiego (x, y) . Rozpatrzmy szczególny przypadek, gdy materiał poddany jest jednoosiowemu rozciąganiu naprężeniem σ_x i ścinaniu naprężeniem



Rys. 5

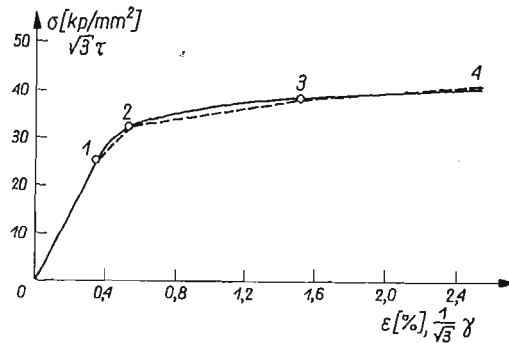
τ_{xy} . Stan taki uzyskujemy w próbce rurkowej poddanej działaniu siły rozciągającej i momentu skręcającego. Trajektorie naprężenia i odkształcenia można wtedy rozpatrywać na płaszczyźnie σ_x , τ_{xy} i ϵ_x , γ_{xy} .

Założmy trzy następujące programy obciążenia (rys. 5).

Program A: po wstępnym obciążeniu naprężeniem τ_{xy} , materiał poddajemy rozciąganiu przy zachowaniu stałej wartości τ_{xy}^A (rys. 5a),

Program B: po wstępnym odkształceniu ścinającym do wartości γ_{xy}^C , materiał poddajemy rozciąganiu przy zachowaniu stałej wartości γ_{xy}^C (rys. 5b),

Program C: po wstępnym obciążeniu naprężeniem τ_{xy} materiał poddajemy cyklicznemu ścisłaniu i rozciąganiu przy zachowaniu stałej wartości $\tau_{xy} = \tau_{xy}^E$.

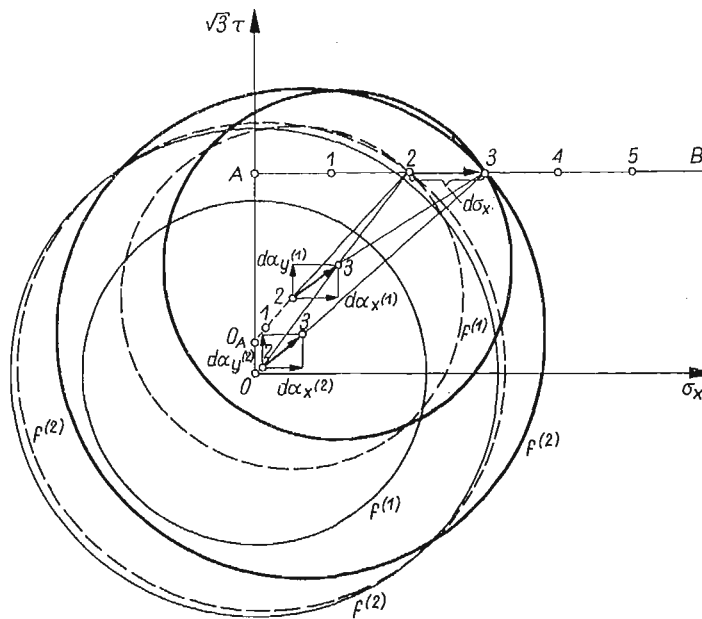


Rys. 6

Założmy, że krzywa wzmocnienia przy jednoosiowym rozciąganiu ma postać przedstawioną na rys. 6 (jest to krzywa rozciągania stopu aluminium). Aproxymujemy ją w zakresie plastycznym trzema odcinkami prostymi 1—2, 2—3, 3—4. W stanie złożonym tego ro-

dzaju aproksymacja odpowiadać będzie wprowadzeniu trzech parametrów tensorowych $\alpha^{(0)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}$ i sześciu parametrów skalarnych $\gamma^{(0)}, \gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}, G^{(0)}, G^{(1)}, G^{(2)}$ dla modelu 1, lub $K^{(0)}, K^{(1)}, K^{(2)}$ dla modelu 3. Założymy, że parametry skalarne są stałe w czasie procesu deformacji, zaś poszczególne powierzchnie ulegają jedynie przemieszczeniu. W przypadku warunku Hubera–Misesa możemy powierzchnie te przedstawić jako okręgi na płaszczyźnie $t_{xy} = \sqrt{3}\tau_{xy}, t_x = \sigma_x$, mamy bowiem $(t_x - \alpha_x^{(0)})^2 + (t_{xy} - \alpha_{xy}^{(0)})^2 - \gamma^{(0)2} = 0$ i analogiczne równania dla pozostałych powierzchni.

Rysunek 7 przedstawia przykładowo sposób całkowania graficznego przyrostowych równań płynięcia dla programu A, przy zastosowaniu szeregowego modelu 4. Dla większej przejrzystości przedstawiono jedynie dwie powierzchnie. Odcinek AB dzielimy na małe



Rys. 7

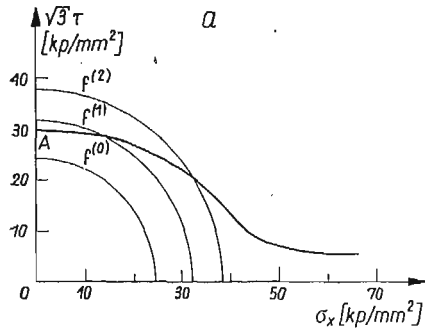
części odpowiadające przyrostom $d\sigma_x$. Powierzchnie $f^{(0)}, f^{(1)} \dots$ przemieszczają się wzdłuż zewnętrznych normalnych w punkcie odpowiadającym stanowi naprężenia, przy czym muszą jednocześnie przejść przez odpowiednie punkty podziału na odcinku AB . Warunek ten określa chwilowy ruch okręgów, zaś położenie ich środków $\alpha_{ij}^{(0)}, \alpha_{ij}^{(1)}, \dots$ pozwala na określenie odkształceń plastycznych

$$\varepsilon_{ij}^{(0)p} = \alpha_{ij}^{(0)}/K^{(0)}, \quad \varepsilon_{ij}^{(1)p} = \alpha_{ij}^{(1)}/K^{(1)}, \quad \dots, \quad \varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{3}(\varepsilon_{ij}^{(0)p} + \varepsilon_{ij}^{(1)p} + \varepsilon_{ij}^{(2)p}).$$

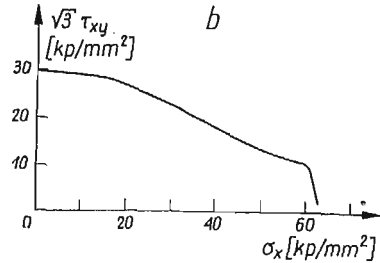
W przypadku zadanego programu w odkształceniach (program B) całkowania dokonujemy drogą kolejnych przybliżeń. Zakładamy najpierw przyrost naprężenia i określamy odpowiadający mu przyrost odkształcenia. Jeśli nie pokrywa się z kierunkiem zadanej trajektorii odkształcenia, poszukujemy rozwiązania dla nowego przyrostu naprężenia aż do uzyskania zgodności. W podobny sposób przeprowadzimy całkowanie dla pozostałych modeli. Dla

modelu 1 wykorzystujemy reprezentację na płaszczyźnie naprężeń przedstawioną na rys. 2, zaś dla modelu 5 posługujemy się płaszczyzną odkształceń.

Rysunki 8a i 8b przedstawiają przebieg zmiany naprężeń $t_{xy} = \sqrt{3}\tau_{xy}$ i $t_x = \sigma_x$ dla programu B obliczony przy użyciu szeregowego modelu 4 i równoległego modelu 5. Przebieg

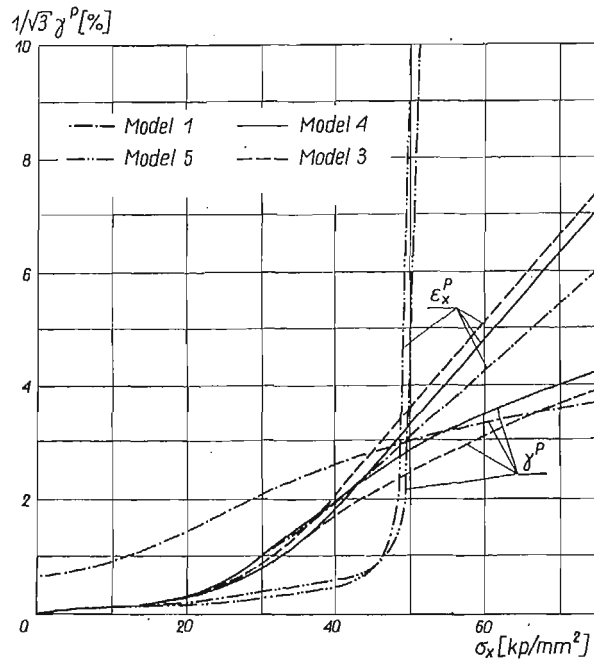


Rys. 8a



Rys. 8b

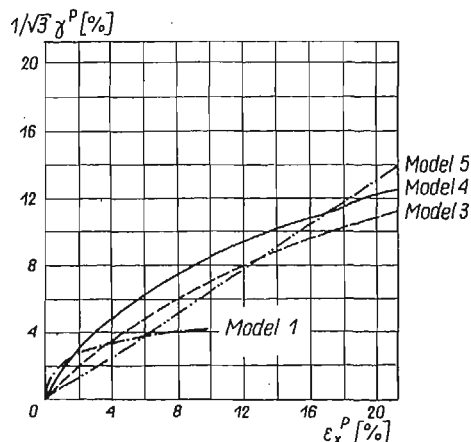
zmian odkształceń plastycznych $\varepsilon_{xy}^p = \gamma_{xy}^p/\sqrt{3}$, $\varepsilon_x^p = e_x$ dla programu A przedstawia rys. 9. Widoczne są znaczne różnice w zachowaniu poszczególnych modeli, szczególnie dla większych wartości naprężenia σ_x . Należy przypomnieć, że przy prostym rozciąganiu



Rys. 9

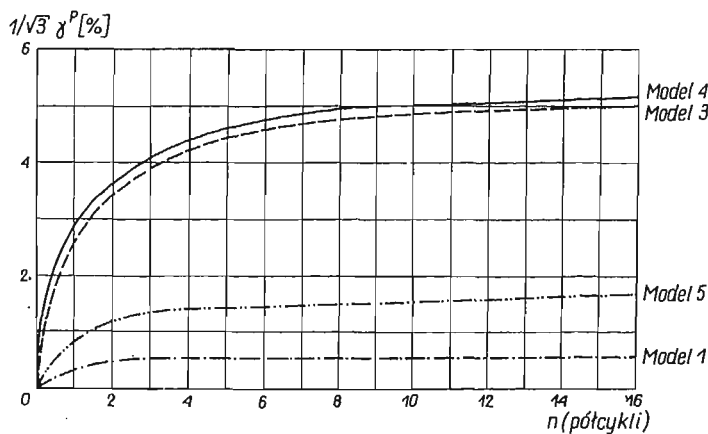
wszystkie modele dają tę samą krzywą wzmocnienia. Rysunek 10 przedstawia krzywe z rys. 9 przeniesione na płaszczyznę odkształceń.

Rysunek 11 przedstawia narastanie odkształceń e_{xy}^p , wywołane cyklicznie zmiennym naprężeniem rozciągającym i ściskającym, nałożonym na stałe naprężenie t_{xy} (program C). Widzimy, że odkształcenia e_{xy}^p , po początkowym szybkim wzroście, dążą do pewnej wartości



Rys. 10

asymptotycznej. Widoczne są również różnice w zachowaniu się poszczególnych modeli: o ile modele 1 i 5 przewidują bardzo mały wzrost odkształceń e_{xy}^p , dla modeli 2 i 4 wzrost ten jest kilkakrotnie większy. Tego typu doświadczenie mogłoby zatem służyć jako doświadczenie krytyczne przy ocenie przydatności poszczególnych modeli. Należy zauważyć,



Rys. 11

że w rzeczywistości obserwuje się stały wzrost odkształceń e_{xy}^p , wywołany cykliczną zmianą t_x ; krzywa zależności e_{xy}^p od ilości cykli przypomina klasyczną krzywą pełzania metali przy podwyższonych temperaturach, por. np. [28].

5. Wnioski końcowe

W pierwszej części pracy przedstawiliśmy strukturę matematyczną teorii plastyczności przy użyciu większej ilości parametrów materiałowych do opisanja własności plastycznych. Widzimy, że istotnym elementem jest wprowadzenie odpowiedniej ilości związków skalar-nych, określających obszary wewnętrznej nieodwracalności. Komplikuje to podstawowy układ równań przyrostowych, pozwala jednak na bardziej realistyczny opis własności plastycznych metali. Dla uproszczenia analizy pominięliśmy efekty cieplne oraz zjawisko pełzania towarzyszące zazwyczaj natychmiastowym odkształceniom plastycznym.

Uzyskane obliczeniowe wyniki porównawcze wskazują, że dla pewnych programów obciążenia, np. obciążenie cykliczne nałożone na stałe obciążenie, występują istotne różnice pomiędzy wskazaniem poszczególnych modeli. Tego typu programy powinny być zatem użyte w badaniach doświadczalnych.

Literatura cytowana w tekście

1. E. MELAN, *Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums*, Ingen. Arch., 1938, 116—126.
2. W. PRAGER, *A new method of analysing stress and strain in work-hardening, plastic solids*, J. Appl. Mech., 23 (1956).
3. А. Ю. Ишлинский, *Общая теория пластичности с линейным упрочнением*, Укр. Мат. Журнал, 6, т. 3 (1954).
4. H. ZIEGLER, *A modification of Prager's hardening rule*, Quart. Appl. Math., 17 (1959), 55—60.
5. M. EISENBERG, A. PHILIPS, *On non-linear kinematic hardening*, Acta Mechanica, 6 (1968).
6. A. BALTOU, A. SAWCZUK, *A rule of anisotropic hardening*, Acta Mechanica, 1/2 (1965), 81—92.
7. G. BACSKHAUS, *Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung*, ZAMM, vol. 48 (1968), 99—108.
8. А. А. ВАКУЛЕНКО, *О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах*, Иссл. по упругости и пластичности, Изд. Ленингр. Унив., 1 (1961).
9. E. KRÖNER, *A new concept in the continuum theory of plasticity*, J. Math. and Phys., vol. 42, N. 1, (1963).
10. W. PRAGER, *Composite stress-strain relations for elastoplastic solids*, Proc. IUTAM Symp. «Irreversible aspects of continuum mechanics». Springer Verl., Viena 1966.
11. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, *Обобщенная теория пластического течения*, Сб. «Исследования по упругости и пластичности», Изд. Ленинград. Унив., 6 (1967).
12. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, В. В. НОВОЖИЛОВ, *Об учете микронапряжений в теории пластичности*, Мех. Тверд. Тела, 3, (1968), 82—91.
13. Ю. И. КАДАШЕВИЧ, В. В. НОВОЖИЛОВ, *Теория пластичности учитывающая остаточные микронапряжения*, Прикл. Мат. Мех., 22 (1968).
14. W. D. IWAN, *A distributed element model for hysteresis and its steady-state dynamic response*, Journ. Appl. Mech., 33 (1966).
15. W. D. IWAN, *On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems*, Journ. Appl. Mech., 34 (1967).
16. Z. MRÓZ, *On the description of anisotropic workhardening*, J. Mech. Phys. Solids, 15, (1967) 163—175.
17. Z. MRÓZ, *An attempt to describe the behaviour of metals under cyclic loads using a more general work-hardening model*, Acta Mechanica, 7 (1967), 199—212.
18. J. F. BESSELING, *A theory of plastic flow for anisotropic hardening in plastic deformation of an initially isotropic material*, Nat. Aero. Res. Inst., Amsterdam Rep. S—410, 1953.
19. J. F. BESSELING, *Theory of elastic, plastic and creep deformation of an initially isotropic material showing anisotropic strain hardening, creep recovery and secondary creep*, J. Appl. Mech., 4, 25, (1958).
20. C. H. WELLS, P. R. PASLAY, *A small-strain plasticity theory for planar slip materials*, Journ. Appl. Mech., 26 (1969).

21. В. Д. ИВЛЕВ, *О теории сложных сред*, Докл. Акад. Наук СССР, 8 (1963).
22. R. M. HAYTHORNTHWAITE, *A more rational approach to strain hardening data*, «Engineering Plasticity», Ed. J. Heyman, F. A. Leckie, 1968.
23. G. I. TAYLOR, *Plastic strain in metals*, Journ. Inst. of Metals, 62 (1938).
24. S. B. BATDORF, B. BUDIANSKY, *Polyaxial stress-strain relations of strainhardening metal*, J. Appl. Mech., 21 (1954), 323—326.
25. T. H. LIN, M. ITO, *Theoretical plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined and reversed stress*, J. Mech. Phys. Solids, 13 (1965), 103—115.
26. R. HILL, *The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals*, J. Mech. Phys. Solids, 15, 1967.
27. BUDIANSKY, T. T. WU, Proc. 4-th U. S. Natl. Congr. Appl. Mech., ASME, 2 (1962).
28. A. M. FREUDENTHAL, M. RONAY, *Second order effects in dissipative media*, Proc Roy. Soc., ser. A, 292 (1966), 14—50.
29. V. KAFKA, *The general theory of isothermal elastic-plastic deformation of polycrystals based on analysis of the microscopic state of stress*, ZAMM, 48 (1968), 265—282.
30. *Teoria plastyczności*, praca zbiorowa, wyd. PWN, 1963.
31. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
32. Z. MRÓZ, *On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids*, Arch. Mech. Stos., 18 (1966).
33. J. KRATOCHVIL, O. W. DILLON, *Thermodynamics of elasticplastic materials, as a theory with internal state variables*, J. Appl. Phys., vol. 40, No 8 (1969), 3207—3218.

Р е з ю м е

О СОСТАВНЫХ МОДЕЛЯХ ПЛАСТИЧЕСКОГО УПРОЧНЕНИЯ

Простые модели изотропического или кинематического упрочнения совместно с законом пластического течения не могут правильно описать сложные явления, происходящие при пластическом деформировании для непропорциональных программ нагружения, в частности при циклических нагрузках, допускающих последовательно чередующиеся процессы нагружения и разгрузки. Необходимо поэтому ввести систему дополнительных параметров.

В предложенной работе обсуждается математическая структура теории пластичности с параметрами внутреннего состояния. В рамках общей теории рассмотрены некоторые частные модели. Для трех различных программ нагружения получены сравнительные численные результаты. Дается краткий обзор некоторых ранее предложенных теорий.

S u m m a r y

ON COMPOSITE MODELS OF PLASTIC WORKHARDENING

Simple models of isotropic or kinematic workhardening when combined with flow rule are not capable to describe complex phenomena occurring during plastic deformation for non-proportional loading programmes, especially for cyclical loads involving consecutive loading and unloading. A mathematical structure of the plasticity theory with internal state parameters is discussed and some particular models are considered within the framework of a general theory. Comparative results are obtained for three different loading programmes. Some previous theories are also briefly reviewed in the paper.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN
WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.

TERMODYNAMICZNA, INFINITEZYMALNA TEORIA LEPKOPLASTYCZNOŚCI

PIOTR PERZYNA (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienia lepkoplastyczności wyłoniły się głównie z problemów dynamicznych teorii plastyczności. Zaobserwowane różnice między rezultatami teoretycznymi uzyskanymi za pomocą metod teorii plastyczności a wynikami doświadczalnymi zrodziły potrzebę uwzględnienia efektów reologicznych. Rezultaty badań eksperymentalnych wykazały, że jednocześnie uwzględnienie własności plastycznych i reologicznych materiału jest szczególnie potrzebne przy opisie rozprzestrzeniania się fal naprężenia oraz przy określaniu wytrzymałości konstrukcji poddanych obciążeniom dynamicznym.

Specyfika zagadnienia i skomplikowany charakter sprzężenia efektów reologicznych i plastycznych wymagają specjalnych metod opisu opartych na wnikliwej analizie fizyki materiałów oraz własnych oryginalnych opisów matematycznych.

Łączne traktowanie zjawisk reologicznych i zjawisk plastycznych stwarza jednak ogromne trudności. Uwzględnienie lepkości materiału wprowadza zależność stanów naprężenia i odkształcenia od czasu, natomiast własności plastyczne materiału uzależniają te stany od drogi obciążenia. Uwzględniając jednocześnie właściwości lepkie i plastyczne otrzymujemy więc zależność równań konstytutywnych od drogi i czasu.

Głównym celem obecnej pracy przeglądowej jest dyskusja termodynamicznego opisu materiałów sprężysto/lepkoplastycznych w oparciu o koncepcję parametrów wewnętrznych przy założeniu infinytezymalnych deformacji.

2. Opis deformacji i naprężenia¹⁾

2.1. Opis deformacji. Ciało \mathcal{B} będziemy traktować jako trójwymiarową różniczkowalną rozmaitość, której elementy X nazywać będziemy cząsteczkami. Natomiast przez konfigurację χ ciała \mathcal{B} rozumieć będziemy gładki homeomorfizm ciała \mathcal{B} na obszar trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa, tzn.

$$(2.1) \quad x = \chi(X), \quad X = \chi^{-1}(x),$$

gdzie χ^{-1} oznacza odwzorowanie odwrotne do χ . Punkt $x = \chi(X)$ jest nazywany miejscem zajmowanym przez cząstkę X .

¹⁾ Por. C. Truesdell i W. Noll [40].

Ruchem ciała \mathcal{B} nazywać będziemy jednoparametrową rodzinę konfiguracji χ_t , gdzie rzeczywisty parametr t będziemy utożsamiać z czasem. Możemy więc napisać

$$(2.2) \quad x = \chi_t(X) = \chi(X, t).$$

Punkt $x = \chi(X, t)$ jest miejscem, w którym znajduje się cząstka X w chwili t .

Chociaż ciała \mathcal{B} nie należy utożsamiać z jakąkolwiek z jego konfiguracji przestrzennych, to jednak obserwacji fizykalnych nie można na nim przeprowadzać bez przypisania mu jakiejś wybranej konfiguracji. Z wielu względów dogodnie jest uwzględniać ten fakt identyfikując poszczególne cząstki ciała przez podawanie ich położenia w jakiejś konkretnej, ustalonej konfiguracji. Tę ustaloną konfigurację będziemy nazywać konfiguracją odniesienia i oznaczać przez \mathcal{R} . Konfiguracja odniesienia \mathcal{R} może być jedną z pozycji zajmowanych przez ciało w czasie jego ruchu. Miejsce cząstki X w konfiguracji odniesienia \mathcal{R} określone będzie przez

$$(2.3) \quad X = \mathcal{R}(X).$$

Przypiszemy cząstce pewien układ współrzędnych X^α , który będziemy nazywać układem współrzędnych materialnych. Wtedy równanie (2.3) może być napisane następująco:

$$(2.4) \quad X = \mathcal{R}(X^\alpha) \quad \text{lub} \quad X^\alpha = \mathcal{R}^{-1\alpha}(X).$$

Równanie (2.4)₂ definiuje układ współrzędnych; w ten sposób cząstka X i jej miejsce $X = \mathcal{R}(X)$ w konfiguracji odniesienia mają te same współrzędne X^α . Dzięki temu równanie (2.2) opisujące ruch ciała \mathcal{B} możemy napisać w postaci

$$(2.5) \quad x = \chi(\mathcal{R}(X), t) = \chi(X, t).$$

Równanie to opisuje rodzinę konfiguracji ciała w stosunku do konfiguracji odniesienia.

Odnośnie do rozpatrywanego ruchu przyjmujemy następujące aksjomaty:

- 1) aksjomat ciągłości wymagający, aby funkcja ruchu i funkcja odwrotna miała ciągle pochodne dowolnego rzędu, tzn. funkcje χ^k i $\chi^{-1\alpha}$ są dowolną liczbę razy różniczkowalne;
- 2) aksjomat o nieprzenikalności materii, który wymaga, aby funkcja (2.5) była funkcją jednowartościową.

Jeżeli mamy określoną funkcję ruchu (2.5), to dowolny obiekt geometryczny A zależny od czasu i charakteryzujący pewne pole może być rozpatrywany jako funkcja $A(X, t)$ cząstki i czasu lub jako funkcja $A(x, t)$ miejsca i czasu. Zmienne X i t nazywamy zmiennymi materialnymi, a zmienne x i t zmiennymi przestrzennymi.

Prędkością \dot{x} nazywamy prędkość zmiany położenia cząstki w czasie ruchu i definiujemy ją następująco:

$$(2.6) \quad \dot{x} = \left[\frac{\partial}{\partial t} \chi(X, t) \right]_{X=\text{const}}.$$

Podobnie zdefiniujemy przyśpieszenie jako

$$(2.7) \quad \ddot{x} = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi(X, t) \right]_{X=\text{const}}.$$

Równanie (2.5), które określa rodzinę konfiguracji ciała w stosunku do konfiguracji odniesienia \mathcal{R} , możemy również interpretować jako rodzinę deformacji w stosunku do kon-

figuracji odniesienia, przy czym słowo deformacja oznacza zarówno zmiany kształtu, jak i orientacji ciała w przestrzeni.

Gradient deformacji zdefiniowany następująco

$$(2.8) \quad \nabla \chi = \partial \chi(X, t) / \partial X$$

opisuje wszystkie lokalne własności deformacji, dlatego nazywany jest podstawową miarą deformacji.

Wektor przemieszczenia u jest określony równaniem

$$(2.9) \quad u \equiv x - X = \chi(X, t) - X.$$

Obliczmy następnie gradient przemieszczenia

$$(2.10) \quad \nabla u = \nabla \chi(X, t) - \mathbf{1},$$

gdzie $\mathbf{1}$ oznacza tensor fundamentalny. Równanie (2.10) pozwala na wyciągnięcie wniosku, że gradient przemieszczenia ∇u może być również traktowany jako podstawowa miara deformacji.

Zdefiniujmy tensor odkształcenia infinitezymalnego w sposób następujący

$$(2.11) \quad E = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T),$$

przy założeniu, że gradient przemieszczenia ∇u jest wielkością małą dla dowolnego czasu $t \in [0, \infty)$, tzn. spełniony jest warunek

$$(2.12) \quad \delta \ll 1, \quad \text{jeżeli} \quad \delta = \sup_{t \in [0, \infty]} |\nabla u(t)|.$$

Będziemy następnie rozważać funkcje zależne od czasu t i określone przez $\nabla u(t)$ oraz mające własność, że dla każdego $t \in (0, \infty)$ ich bezwzględna wartość jest mniejsza niż $C\delta^n$, gdzie C jest dowolną stałą. Każdą taką funkcję będziemy oznaczali symbolem określającym $O(\delta^n)$. Jeżeli mamy na przykład dowolną funkcję $\varphi(t)$ określoną przez gradient przemieszczenia $\nabla u(t)$, to będziemy mówili, że funkcja ta jest rzędu $O(\delta^n)$ i pisali

$$(2.13) \quad \varphi = O(\delta^n),$$

jeżeli

$$(2.14) \quad |\varphi(t)| = C\delta^n \quad \text{dla} \quad t \in [0, \infty).$$

Łatwo zauważymy, że zdefiniowany za pomocą związku (2.11) tensor odkształcenia infinitezymalnego jest wielkością rzędu $O(\delta)$.

W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko takie procesy deformacji, które spełniają warunek (2.12).

2.2. Opis naprężenia. Dotychczas zajmowaliśmy się tylko kinematyką ruchu ciał. Obecnie musimy się zastanowić nad przyczynami ruchu. W tym celu zanalizujemy różne rodzaje sił działających na rozpatrywane ciało \mathcal{B} .

Żałómy, że mamy dane ciało \mathcal{B} i jego ruch. Ruch ciała jest spowodowany działaniem sił zewnętrznych. Siły zewnętrzne dzielą się na dwie grupy: na siły masowe i siły kontaktowe nazywane często siłami powierzchniowymi.

W rozważaniach naszych będziemy pomijać działanie momentów masowych i naprężeń momentowych.

Zdefiniujemy najpierw pojęcie siły masowej. Niech w każdej chwili t określone będzie pole wektorowe $b(x, t)$. Pole to nazywać będziemy gęstością siły masowej na jednostkę masy. Wektor $F_b(\mathcal{P})$ określony przez całkę objętościową

$$(2.15) \quad F_b(\mathcal{P}) = \int_{\mathcal{P}} b \rho \, dv$$

wziętą po całej objętości części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} w konfiguracji χ_t , nazywa się wypadkową zewnętrznych sił masowych działających na część \mathcal{P} ciała \mathcal{B} .

Siły kontaktowe albo powierzchniowe zdefiniujemy następująco. Niech w każdej chwili t na powierzchni $\partial\mathcal{P}$ ograniczającej pewną część \mathcal{P} ciała \mathcal{B} zdefiniowane będzie pole wektorowe $t(x, \mathcal{P})$. Nazywać je będziemy gęstością siły kontaktowej albo powierzchniowej. Pole to prościej będziemy nazywać wektorem naprężenia działającym na część \mathcal{P} ciała \mathcal{B} . Wypadkowa siła kontaktowa $F_c(\mathcal{P})$ działająca na \mathcal{P} w chwili t określona jest przez całkę powierzchniową

$$(2.16) \quad F_c(\mathcal{P}) = \int_{\partial\mathcal{P}} t(x, \mathcal{P}) \, da,$$

liczoną po powierzchni $\partial\mathcal{P}$ w konfiguracji χ_t .

Założmy, że istnieje funkcja wektorowa $t(x, n)$, zdefiniowana dla wszystkich punktów x w ciele \mathcal{B} i dla wszystkich wektorów jednostkowych n , taka, że naprężenie działające na dowolną część \mathcal{P} ciała \mathcal{B} określa funkcja

$$(2.17) \quad t(x, \mathcal{P}) = t(x, n),$$

gdzie n jest zewnętrznym, jednostkowym wektorem normalnym w punkcie x na powierzchni ograniczającej \mathcal{P} . Wektor $t(x, n)$ jest nazywany wektorem naprężenia w punkcie x działającym na zorientowany element powierzchni o normalnej n . Wprowadzając odpowiednie warunki ciągłości udowodnić możemy istnienie tensorowego pola naprężenia T , takiego że wektor naprężenia $t(x, n)$ może być wyrażony za pomocą tensora $T(x, t)$ następująco:

$$(2.18) \quad t(x, n) = T(x, t) n.$$

Tensor $T(x, t)$ jest nazywany tensorem naprężenia Cauchy'ego. Często wygodnie jest posługiwać się inną miarą naprężenia zdefiniowaną wyrażeniem

$$(2.19) \quad T_{\mathfrak{A}} \equiv \det(\nabla\chi) (\nabla\chi)^{-1} T (\nabla\chi^{-1})^T.$$

Tensor $T_{\mathfrak{A}}$ nazywany jest drugim tensorem naprężenia Pioli–Kirchhoffa.

W przypadku spełnienia warunku (2.12) tzn. kiedy proces deformacji prowadzi do nieskończonej małych odkształceń tensor naprężenia Cauchy'ego T i drugi tensor naprężenia Pioli–Kirchhoffa $T_{\mathfrak{A}}$ są nierozróżnialne, tzn.

$$(2.20) \quad T = T_{\mathfrak{A}}.$$

3. Podstawowe zasady mechaniki i termodynamiki

3.1. Zasada zachowania pędu i momentu pędu²⁾. W celu sformułowania podstawowych zasad mechaniki wprowadzimy definicję siły i momentu działających na ciało \mathcal{B} o objętości \mathcal{P} . Wielkości te są następującymi wektorami:

$$(3.1) \quad F = \int_{\mathcal{P}} dF, \quad M = \int_{\mathcal{P}} (p \times dF + dM),$$

gdzie dF i dM są odpowiednio elementarną siłą i elementarnym momentem działającym na jednostkowy element objętości ciała. Równanie (3.1)₂ jest odniesione do początku układu, w którym określony jest promień wektora p . Symbol x oznacza iloczyn wektorowy wektorów p i dF .

Wielkości F i M są znane a priori dla danego ciała i są takie same dla wszystkich obserwatorów.

Oznaczmy przez P pęd, a przez H moment pędu względem początku układu ciała \mathcal{B} .

Podstawowe prawa mechaniki klasycznej, nazywane prawami Eulera, mogą być wyrażone wzorami

$$(3.2) \quad F = \dot{P}, \quad M = \dot{H}$$

słusznymi dla dowolnego ciała \mathcal{B} . Te dwa równania opisują odpowiednio zasadę zachowania pędu i zasadę zachowania momentu pędu.

Wielkości F i M przedstawiają obciążenie ciała \mathcal{B} , podczas gdy wielkości P i H w dowolnym układzie odniesienia są reakcją ciała wywołaną działaniem obciążenia F i M .

Prawa Eulera mogą być ogólnie wysłowione w postaci następującego stwierdzenia: w układzie inercjalnym reakcja dowolnego ciała jest równa działającemu na nie obciążeniu.

Korzystając z analizy sił działających na ciało, przeprowadzonej w p. 2.2 możemy napisać

$$(3.3) \quad F = \int_{\partial\mathcal{P}} t(x, n) da + \int_{\mathcal{P}} b \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \dot{p} \rho dv = \dot{P},$$

$$(3.4) \quad M = \int_{\partial\mathcal{P}} p \times t(x, n) da + \int_{\mathcal{P}} (p \times b) \rho dv = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} (p \times \dot{p}) \rho dv = \dot{H}.$$

3.2. Podstawowe prawa Cauchy'ego. Wykorzystując definicję tensora naprężenia (2.17), definicję przyspieszenia \ddot{x} (2.7) oraz posługując się przekształceniem Greena

$$(3.5) \quad \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} T dv = \int_{\partial\mathcal{P}} T n da,$$

dostajemy z (3.3) zależność

$$(3.6) \quad \operatorname{div} T - \rho \ddot{x} = -\rho b,$$

spełnioną w każdym punkcie rozpatrywanego ciała \mathcal{B} .

²⁾ Wyczerpujące omówienie zasad mechaniki można znaleźć w monografii C. Truesdella i R. Toupin [39]; por. również A. E. Green i W. Zerna [9].

Równanie (3.6) jest pierwszym prawem ruchu Cauchy'ego i wyraża dostateczny i wystarczający warunek dla zachowania zasady pędu. W reprezentacji kontrawariantnej równanie (3.6) ma postać

$$(3.7) \quad T^{km},{}_m - \rho \ddot{x}^k = -\rho b^k.$$

Postępując podobnie z równaniem (3.4) i uwzględniając równanie (3.6) dostajemy następujący rezultat:

$$(3.8) \quad T = T^T, \quad T^{km} = T^{mk}$$

spełniony w każdym punkcie ciała \mathcal{B} .

Równanie (3.8) wyraża drugie prawo ruchu Cauchy'ego. Prawo to może być wypowiedziane następująco: koniecznym i wystarczającym warunkiem spełnienia zasady zachowania momentu pędu w ciele, dla którego spełniona jest zasada zachowania pędu, jest symetryczność tensorowa naprężenia.

3.3. Niezmienniki tensora naprężenia. Drugie prawo ruchu Cauchy'ego wymaga, aby tensor naprężenia T był symetryczny. To zapewnia istnienie trzech rzeczywistych liczb, nazywanych naprężeniami głównymi oraz istnienie trzech rzeczywistych ortogonalnych kierunków głównych, które określają główne osie naprężenia.

Niezmienniki tensora naprężenia I_T , II_T , III_T są zdefiniowane jako współczynniki następującego wielomianu względem λ

$$(3.9) \quad \det(\lambda I + T) = \lambda^3 + I_T \lambda^2 + II_T \lambda + III_T.$$

Jeżeli przez σ_a oznaczamy naprężenia główne, to mamy proste związki:

$$(3.10) \quad I_T = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad II_T = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad III_T = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

3.4. Pierwsza zasada termodynamiki. Rozważmy ruch ciała \mathcal{B} o objętości \mathcal{P} ograniczonej powierzchnią $\partial\mathcal{P}$. Oznaczamy przez \mathcal{K} energię kinetyczną ciała podczas jego ruchu, a przez \mathcal{E} jego energię wewnętrzną. Następnie przyjmujemy, że do ciała \mathcal{B} dostarczona jest energia mechaniczna na skutek działania na ciało układu sił oraz energia niemechaniczna za pośrednictwem przepływu ciepła i promieniowania. Całkowitą moc mechaniczną oznaczmy przez \mathcal{W} , a całkowitą moc niemechaniczną przez Q .

Zasada zachowania energii dla ciała \mathcal{B} może być wyrażona przez następujące równanie:

$$(3.11) \quad \dot{\mathcal{K}} + \dot{\mathcal{E}} = \mathcal{W} + Q.$$

Prawo (3.11) jest nazywane często pierwszą zasadą termodynamiki, którą można wypowiedzieć następująco: zmiana całkowitej energii ciała \mathcal{B} w czasie jest spowodowana przyrostem pracy dostarczonej do ciała przez źródła mechaniczne i niemechaniczne.

Dla ośrodka ciągłego moc mechaniczna będzie równa sumie prędkości zmiany pracy sił powierzchniowych działających na powierzchni $\partial\mathcal{P}$ ciała \mathcal{B} oraz prędkości zmiany pracy sił masowych wewnątrz całej objętości \mathcal{P} ciała \mathcal{B} . Możemy napisać

$$(3.12) \quad \mathcal{W} = \int_{\partial\mathcal{P}} Tn \cdot \dot{x} da + \int_{\mathcal{P}} b \cdot \dot{x} \rho dv.$$

Natomiast moc niemechaniczna spowodowana jest przepływem strumienia ciepła q przez powierzchnię ciała $\partial\mathcal{P}$ oraz prędkością zmiany energii promieniowania r na jednostkę masy i może być wyrażona następująco:

$$(3.13) \quad Q = \int_{\partial\mathcal{P}} qn da + \int_{\mathcal{P}} r\rho dv = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} q dv + \int_{\mathcal{P}} r\rho dv.$$

Energia wewnętrzna \mathcal{E} ciała B może być wyrażona za pomocą właściwej energii wewnętrznej ε odniesionej do jednostkowej masy w postaci całki

$$(3.14) \quad \mathcal{E} = \int_{\mathcal{P}} \varepsilon\rho dv.$$

Obliczamy wreszcie energię kinetyczną \mathcal{K} ciała \mathcal{B}

$$(3.15) \quad \mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{P}} \dot{x}^2 \rho dv,$$

gdzie przez \dot{x}^2 rozumiemy iloczyn skalarny $\dot{x} \cdot \dot{x}$.

Dla obszarów, w których T , \dot{x} i q są funkcjami klasy C^1 , tzn. są ciągłe wraz ze swymi pierwszymi pochodnymi, podczas gdy \ddot{x} i r są funkcjami klasy C^0 , tzn. ciągłymi, po wykorzystaniu tożsamości

$$(3.16) \quad \int_{\partial\mathcal{P}} Tn \cdot \dot{x} da = \int_{\mathcal{P}} [\operatorname{div} T \cdot \dot{x} + \operatorname{tr}(T\dot{E})] dv,$$

gdzie \dot{E} jest tensorem prędkości odkształcenia, możemy napisać

$$(3.17) \quad \rho\ddot{x} \cdot \dot{x} + \rho\dot{\varepsilon} = \operatorname{div} T \cdot \dot{x} + \operatorname{tr}(T\dot{E}) + \rho b \cdot \dot{x} + \operatorname{div} q + \rho r.$$

Należy zaznaczyć, że przy różniczkowaniu materialnym wyrażen na energię wewnętrzną (3.14) i energię kinetyczną (3.15) uwzględniłszy zasadę zachowania masy wyrażoną związkiem

$$(3.18) \quad \frac{d}{dt}(\rho dv) = 0,$$

który w przypadku odkształceń infinytezymalnych ma postać

$$(3.19) \quad \rho_R = \rho.$$

Napiszemy równanie (3.17) w następującej postaci:

$$(3.20) \quad (\rho\ddot{x} - \operatorname{div} T - \rho b) \cdot \dot{x} = \operatorname{tr}(T\dot{E}) - \operatorname{div} q - \rho\dot{\varepsilon} + \rho r.$$

Uwzględniając w (3.20) pierwsze prawo ruchu Cauchy'ego dostaniemy

$$(3.21) \quad \operatorname{tr}(T\dot{E}) - \operatorname{div} q - \rho\dot{\varepsilon} = -\rho r.$$

Otrzymane równanie jest spełnione w każdym punkcie materialnym X ciała \mathcal{B} . Jest to różniczkowa postać równania zachowania energii.

3.5. Druga zasada termodynamiki³⁾. Oznaczmy przez $\vartheta = \vartheta(X, t)$ lokalną temperaturę, którą będziemy przyjmowali jako zawsze dodatnią, $\vartheta > 0$, tzn. może być np. mierzona w skali bezwzględnej. Wprowadźmy następnie funkcję $\eta = \eta(X, t)$, którą będziemy nazywać właściwą entropią na jednostkę masy.

³⁾ Por. B. D. Coleman i W. Noll [1].

Uważając q/ϑ za wektorowy strumień entropii spowodowany przepływem ciepła i r/ϑ za skalarową prędkość dostarczania entropii na skutek promieniowania, możemy zdefiniować prędkość powstawania entropii w części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} jako

$$(3.22) \quad \dot{\mathcal{E}} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \eta dm - \int_{\mathcal{P}} \frac{r}{\vartheta} dm + \int_{\partial\mathcal{P}} \frac{1}{\vartheta} q \cdot n da,$$

gdzie dm jest elementem masy w \mathcal{B} w konfiguracji χ_t .

Należy zwrócić uwagę na znak ostatniej całki w równaniu (3.22). Jeżeli wektor strumienia przepływu ciała q jest skierowany do wewnątrz ciała, to ze względu na to, że jednostkowy wektor normalny skierowany jest na zewnątrz powierzchni $\partial\mathcal{P}$ elementu \mathcal{P} , znak analizowanej całki będzie ujemny. W przypadku przeciwnym, kiedy odbieramy od ciała \mathcal{B} ciepło, znak tej całki będzie dodatni.

Przy odpowiednich założeniach regularności równanie (3.22) można zapisać w postaci

$$(3.23) \quad \dot{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{P}} \xi dm,$$

gdzie

$$(3.24) \quad \xi = \dot{\eta} - \frac{r}{\vartheta} + \frac{1}{\varrho} \operatorname{div}(q/\vartheta) = \dot{\eta} - \frac{r}{\vartheta} + \frac{1}{\varrho\vartheta} \operatorname{div} q - \frac{1}{\varrho\vartheta^2} q \cdot \nabla\vartheta$$

jest właściwą prędkością powstawania entropii.

Drugą zasadę termodynamiki można ściśle matematycznie sprecyzować w postaci następującego postulatu:

Dla każdego dopuszczalnego procesu termodynamicznego w ciele \mathcal{B} następująca nierówność musi być spełniona w każdej chwili czasu t i dla wszystkich części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} :

$$(3.25) \quad \dot{\mathcal{E}} \geq 0.$$

Ścisłą definicję dopuszczalnego procesu termodynamicznego podamy w następnym rozdziale.

Nierówność (3.25) jest nazywana nierównością Clausiusa–Duhema. Jak się przekonamy w następnych punktach podstawowy postulat wyrażający drugą zasadę termodynamiki będzie nakładał pewne ograniczenia na układ równań konstytutywnych opisujących rozważany materiał.

Aby nierówność (3.25) była spełniona dla wszystkich części \mathcal{P} ciała \mathcal{B} , warunkiem koniecznym i wystarczającym będzie

$$(3.26) \quad \xi \geq 0$$

w każdej cząstce X ciała \mathcal{B} .

Dla każdego procesu termodynamicznego zasada zachowania energii (3.21) pozwala na napisanie (3.24) w postaci

$$(3.27) \quad \xi = \dot{\eta} - \frac{\dot{\varepsilon}}{\vartheta} + \frac{1}{\varrho\vartheta} \operatorname{tr}(T\dot{\mathcal{E}}) - \frac{1}{\varrho\vartheta^2} q \cdot \nabla\vartheta.$$

Wprowadzimy obecnie jeszcze jedną nową wielkość, mianowicie właściwą energię swobodną ψ . Funkcję $\psi(X, t)$ zdefiniujemy następującym równaniem

$$(3.28) \quad \psi = \varepsilon - \eta\vartheta.$$

Funkcja ψ jest często nazywana swobodną energią Helmholtza na jednostkę masy.

Zrózniczkujemy materialnie równanie (3.19). Dostaniemy zależność

$$(3.29) \quad \dot{\psi} = \dot{\epsilon} - \vartheta \dot{\eta} - \dot{\vartheta} \eta.$$

Uwzględniając, że $\vartheta > 0$ na podstawie (3.29) możemy związek (3.27) napisać jako równanie

$$(3.30) \quad \vartheta \dot{\xi} = -\dot{\psi} + \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(\dot{T}E) - \eta \dot{\vartheta} - \frac{1}{\rho \vartheta} q \cdot \nabla \vartheta.$$

4. Termodynamiczna teoria materiału reologicznego z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi

Będziemy rozważać ciało \mathcal{B} , które może być deformowane i przewodzić ciepło. Celem naszym będzie opis dysypacji w takim ciele. Chcąc ją bliżej scharakteryzować musimy zdecydować się, jaki materiał będziemy przypisywać ciału \mathcal{B} . Praktyka bowiem wykazuje, że dwa fizyczne ciała o identycznym kształcie i rozkładzie masy mogą zachowywać się zupełnie inaczej pod wpływem takich samych obciążeń. Różnica ta spowodowana jest tym, że ciała te są z innych materiałów. Materiał ciała jest zdefiniowany założeniem konstytutywnym, które jest ograniczeniem nałożonym na procesy termodynamiczne dla ciała \mathcal{B} i które wyraża zasadę determinizmu. W punkcie tym chcemy opisać szeroką klasę materiałów, które nazywaliśmy materiałami reologicznymi z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi. Są to materiały, które przed uplastycznieniem charakteryzują się właściwościami reologicznymi, a po osiągnięciu stanu plastycznego mogą podlegać odkształceniom trwałym. Odkształcenia te, nazywane odkształceniami plastycznymi, wywołują w materiale wewnętrzne zmiany strukturalne. Należy jednak podkreślić, że charakter procesu deformacji plastycznych będzie w dużym stopniu zależny od tego czy rozważane obciążenia, które wywołują plastyczne płynięcie, są statyczne czy dynamiczne. Obciążenia dynamiczne wywołują zwykle proces odkształceń plastycznych zależnych od prędkości deformacji.

Termodynamiczny opis materiałów reologicznych z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi oprzemy na koncepcji wprowadzenia parametrów wewnętrznych⁴⁾.

Aby zdefiniować parametry wewnętrzne i omówić ich rolę musimy podać różnicę między procesem termodynamicznym odwracalnym i procesem termodynamicznym nieodwracalnym. Makroskopowy proces termodynamiczny będziemy nazywać odwracalnym jeśli możliwe jest przywrócenie stanu początkowego układu i otoczenia. Proces termodynamiczny nie spełniający tych warunków nazwiemy nieodwracalnym.

Zmienne służące do pełnego zdefiniowania ciała \mathcal{B} podczas odwracalnego procesu termodynamicznego nazywamy zmiennymi stanu. W procesie termodynamicznym nieodwracalnym aktualne wartości zmiennych stanu są niewystarczające, aby opisać stan ciała \mathcal{B} . Tak więc, w celu pełnego opisu stanu ciała \mathcal{B} podczas nieodwracalnego procesu termodynamicznego wymagane są dodatkowe zmienne, które mogłyby jednoznacznie

⁴⁾ Opis dysypacji materiału za pomocą parametrów wewnętrznych został szeroko omówiony w pracach B. D. Colemana i M. E. Gurtina [3] oraz przez K. C. Valanisa [41, 42]. Inny opis dysypacji materiału wykorzystujący zanikającą pamięć materiału podany został przez B. D. Colemana [2], B. D. Colemana i V. J. Mizela [4], M. E. Gurtina i A. C. Pipkina [11] oraz J. Meixnera [20].

opisać wewnętrzną dysypację materiału. Te dodatkowe zmienne nazywać będziemy parametrami wewnętrznymi⁵⁾.

W przypadku materiału reologicznego z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi są dwie jakościowo różne przyczyny wewnętrznej dysypacji materiału. Przyczyną pierwszą są efekty lepkie materiału, a drugą wewnętrzne zmiany strukturalne zachodzące podczas deformacji plastycznych. W celu jednoczesnego opisu obydwu przyczyn dysypacji wprowadzimy dwie jakościowo różne grupy parametrów wewnętrznych.

Będziemy rozważać tylko infinitezymalne odkształcenia ciała \mathcal{B} spełniające warunek (2.12). Dzięki temu opis deformacji ulegnie istotnemu uproszczeniu. Warunek (2.12) pozwala rozdzielić addytywnie całkowite odkształcenie E na odkształcenie sprężysto-lepkie i odkształcenie niesprężyste o charakterze trwałym (plastycznym) P , tzn.

$$(4.1) \quad E = V + P.$$

Proces termodynamiczny dla ciała \mathcal{B} jest opisany układem funkcji zależnych od części X i czasu t , tzn.

$$(4.2) \quad \{A^*(x, t), \quad II(x, t), \quad \alpha(x, t), \quad \omega(x, t)\}.$$

Funkcja A^* reprezentuje parę odkształcenie–temperatura

$$(4.3) \quad A^* = \{E, \vartheta\}.$$

Często mówimy, że A^* opisuje konfigurację lokalną temperaturowo-deformacyjną części X . Funkcja II reprezentuje zmienne zależne

$$(4.4) \quad II = \{\psi, \eta, T, q\},$$

gdzie ψ oznacza właściwą energię swobodną na jednostkę masy, η właściwą entropię, T tensor naprężenia i q wektor strumienia ciepła odniesiony do jednostkowej powierzchni w konfiguracji odniesienia \mathcal{B} . Funkcje α i ω reprezentują dwie grupy parametrów wewnętrznych⁶⁾. Pierwsza grupa α jest wprowadzona w celu opisu efektów reologicznych, a druga ω w celu opisu zmian strukturalnych zachodzących podczas deformacji plastycznych.

Postulujemy, że

$$(4.5) \quad \alpha = \alpha^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie $\alpha^{(j)}$ dla $j = 1, 2, \dots, m$ są skalarami, natomiast

$$(4.6) \quad \omega = \{\kappa, P, I^{(i)}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie κ reprezentuje skalarowy parametr wzmocnienia izotropowego, P oznacza zdefiniowany za pomocą związku (4.1) infinitezymalny tensor odkształcenia niesprężystego o charakterze trwałym (plastycznym) i $I^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) są symetrycznymi tensorami drugiego rzędu opisującymi rozkład dyslokacji.

W zdefiniowanym powyżej procesie termodynamicznym dla ciała \mathcal{B} nie występują dwie funkcje, mianowicie funkcja siły masowej, $b(X, t)$ i funkcja określająca prędkość dostarczania ciepła na jednostkę masy $r(X, t)$. Ponieważ jednak każdy proces termodynamiczny powinien być zgodny z prawami mechaniki i termodynamiki, stąd spełnienie

⁵⁾ Definicję tę podał K. C. Valanis [42].

⁶⁾ Koncepcja ta została przedstawiona w pracach [34, 35], por. również [25, 32, 33, 15 i 16].

pierwszego równania ruchu Cauchy'ego (3.6) determinuje gęstość siły masowej b , a spełnienie pierwszego prawa termodynamiki (3.21) określa funkcję r .

Warto zauważyć, że para odkształcenie–temperatura $A^* = \{E, \vartheta\}$ reprezentuje termodynamiczne zmienne stanu. Ze względu na zależność (4.1) oraz na wprowadzenie drugiej grupy parametrów wewnętrznych ω w postaci (4.6) możemy przyjąć w celu wygody jako termodynamiczne zmienne stanu nową parę

$$(4.7) \quad A = \{V, \vartheta\},$$

gdzie V oznacza infinitezymalne odkształcenie sprężysto-lepkie zdefiniowane zależnością (4.1).

Wprowadźmy pojęcie cząsteczki uogólnionej p , która jest zdefiniowana następująco (por. WANG [43]):

1. Jest opisana za pomocą funkcji

$$(4.8) \quad g(t) = \{A(t), \nabla\vartheta; \quad \alpha, \omega\};$$

2. Wyposażona jest w układ funkcji konstytutywnych $L = \{\Psi, N, T, Q\}$, $A = \{A^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\Omega = \{K, G, Z^{(i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, definiujących materiał w cząsteczce X za pomocą równań

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \Pi(t) &= L(g(t)), \\ \dot{\alpha}(t) &= A(g(t)), \\ \dot{\omega}(t) &= \Omega(g(t)), \end{aligned}$$

gdzie Ψ oznacza funkcję konstytutywną energii swobodnej, N entropii, T naprężenia, Q strumienia ciepła, funkcje $A^{(j)}$ określają prędkość zmiany parametrów $\alpha^{(j)}$ dla $j = 1, 2, \dots, m$, K określa prędkość zmiany parametru wzmocnienia izotropowego, G prędkość zmiany tensora odkształcenia niesprężystego i $Z^{(i)}$ prędkość zmiany tensorów opisujących rozkład dyslokacji ($i = 1, 2, \dots, n$).

Proces termodynamiczny $\{A, \Pi, \alpha, \omega\}$ spełniający równania konstytutywne (4.9) w każdej cząsteczce uogólnionej p ciała \mathcal{B} będziemy nazywać dopuszczalnym procesem termodynamicznym.

Dopuszczalny proces termodynamiczny $\{A, \Pi, \alpha, \omega\}$ powinien być zgodny z drugim prawem termodynamiki. Musimy zażądać, aby proces ten spełniał postulat termodynamiczny (3.25). Jest to równoważne spełnieniu następującej nierówności [por. z (3.26) i (3.30)]:

$$(4.10) \quad -\dot{\psi} - \eta\dot{\vartheta} + \frac{1}{\rho} \operatorname{tr}(T\dot{E}) - \frac{1}{\rho\dot{\vartheta}} q \cdot \nabla\vartheta \geq 0$$

w każdej cząsteczce uogólnionej p w ciele \mathcal{B} .

W celu zbadania ograniczeń jakie nakłada postulat termodynamiczny założmy, że będziemy rozważać tylko taki materiał i takie procesy, dla których funkcja konstytutywna energii swobodnej Ψ jest różniczkowalna względem $g(t)$.

Obliczmy

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \operatorname{tr}(\partial_V \Psi \dot{V}) + \partial_s \Psi \dot{\vartheta} + \partial_{\nabla s} \Psi \cdot \nabla \dot{\vartheta} + \\ &+ \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi \dot{\alpha}^{(j)} + \partial_x \Psi \dot{x} + \operatorname{tr}(\partial_r \Psi \dot{P}) + \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}[\partial_{Z^{(i)}} \Psi \dot{Z}^{(i)}]. \end{aligned}$$

Podstawiając rezultat (4.11) do nierówności (4.10) otrzymujemy

$$(4.12) \quad \frac{1}{\varrho} \operatorname{tr}[(T - \varrho \partial_\nu \Psi) \dot{V}] - (\partial_s \Psi + \eta) \dot{\vartheta} - \partial_{\nabla s} \Psi \cdot \nabla \dot{\vartheta} - \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi \dot{\alpha}^{(j)} - \\ - \partial_x \Psi \dot{\kappa} - \operatorname{tr} \left[\left(\partial_p \Psi - \frac{1}{\varrho} T \right) \dot{P} - \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}[\partial_{r^{(i)}} \Psi \dot{r}^{(i)}] \right] - \frac{1}{\varrho \vartheta} q \cdot \nabla \vartheta \geq 0.$$

Wybierając dowolnie wielkości \dot{V} , $\dot{\vartheta}$ i $\nabla \dot{\vartheta}$ można wykazać, że zawsze potrafimy określić dopuszczalny proces termodynamiczny w ciele \mathcal{B} .

Spełnienie nierówności termodynamicznej (4.10) daje następujące rezultaty:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \partial_{\nabla s} \Psi &= 0, \\ T(t) &= \varrho \partial_\nu \Psi(g^*(t)), \\ \eta(t) &= -\partial_s \Psi(g^*(t)), \\ \sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi \dot{\alpha}^{(j)} + \partial_x \Psi \dot{\kappa} + \operatorname{tr} \left[\left(\partial_p \Psi - \frac{1}{\varrho} T \right) \dot{P} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}[\partial_{r^{(i)}} \Psi \dot{r}^{(i)}] + \frac{1}{\varrho \vartheta} q \cdot \nabla \vartheta \leq 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.14) \quad g^*(t) = \{A; \alpha, \omega\}.$$

Zdefiniujmy funkcję opisującą dysypację wewnętrzną materiału w sposób następujący:

$$(4.15) \quad \sigma = \sigma_\alpha + \sigma_\omega = -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \left[\sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi A^{(j)} \right] + \right. \\ \left. + \left[\partial_x \Psi K + \operatorname{tr} \left(\partial_p \Psi - \frac{1}{\varrho} T \right) G + \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\partial_{r^{(i)}} \Psi Z^{(i)}) \right] \right\}.$$

Po podstawieniu (4.15) do nierówności ogólnej dysypacji (4.13)₄ otrzymamy

$$(4.16) \quad \sigma - \frac{1}{\varrho \vartheta^2} q \cdot \nabla \vartheta \geq 0.$$

W przypadku jednorodnego rozkładu temperatury w całym ciele \mathcal{B} mamy $\nabla \vartheta \equiv 0$ i wtedy nierówność ogólnej dysypacji przybiera postać nierówności dysypacji wewnętrznej

$$(4.17) \quad \sigma \geq 0.$$

Założmy następnie, że wewnętrzne zmiany strukturalne zachodzą tylko podczas deformacji plastycznych, tzn. wtedy kiedy $\dot{P} \neq 0$. Warunek ten będzie spełniony dla naszego opisu jeżeli przyjmiemy⁷⁾

$$(4.18) \quad K = \operatorname{tr}[J(g(t)) \dot{P}], \quad Z^{(i)} = S^{(i)}(g(t))[\dot{P}].$$

⁷⁾ Ogólniejszy opis parametrów wewnętrznych $r^{(i)}$ wprowadzili J. Kratochvil i O. W. Dillon [16].

Założenie to implikuje, że dysypacja wewnętrzna jest określona zależnością

$$(4.19) \quad \sigma = -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \left[\sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi A^{(j)} \right] + \text{tr} \left[\left(\partial_{\kappa} \Psi J + \partial_P \Psi - \partial_V \Psi + \sum_{i=1}^n \partial_{r^{(i)}} \Psi S^{(i)} \right) G \right] \right\}.$$

5. Materiał sprężysto/lepkoplastyczny

Zajmiemy się obecnie opisem materiału, który przed uplastycznieniem posiada właściwości reologiczne, a po uplastycznieniu sprężysto/lepkoplastyczne (por. [34 i 35]). Wykorzystamy w tym celu poprzednie rezultaty otrzymane dla materiału reologicznego z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi.

Z wzoru na dysypację wewnętrzną widzimy, że funkcja G , która opisuje prędkość zmiany tensora deformacji niesprężystej odgrywa decydującą rolę w teorii materiału z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi.

Rezultaty badań eksperymentalnych w zakresie dynamicznych właściwości materiałów wskazują, że podstawową przyczyną różnego zachowania się materiału podczas dynamicznego i statycznego obciążenia jest wrażliwość materiału na prędkość deformacji i zmiany temperatury. Efekty prędkości odkształcenia i zmian temperatury mogą być uwzględnione w ramach lepkoplastyczności. Ogólnie przyjmuje się w lepkoplastyczności, że prędkość odkształcenia nieprężystego \dot{P} jest funkcją nadwyżki naprężenia nad stan quasi-statycznego uplastycznienia. To założenie jest umotywowane fizykalną teorią ruchu dyslokacji dla materiałów krystalicznych bazującą na procesach termicznych aktywacji.

Materiał reologiczny z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi przed uplastycznieniem ma właściwości lepkie, stąd początkowy warunek quasi-statycznego uplastycznienia powinien zależeć od efektów pamięci. Efekty te są opisane przez parametry wewnętrzne $\alpha^{(j)}$. Tak więc, quasi-statyczny warunek uplastycznienia może być zdefiniowany następująco

$$(5.1) \quad \mathcal{F}(A(t); \alpha(t), \omega(t)) = \frac{f(T, \vartheta; \alpha^{(j)}, P, \Gamma^{(i)})}{\kappa} - 1,$$

gdzie parametr wzmocnienia izotropowego κ zdefiniowany jest równaniami (4.9)₃ i (4.18)₁, a tensory rozkładu dyslokacji równaniami (4.9)₃ i (4.18)₂.

Postulujemy, że następujące równanie różniczkowe determinuje wewnętrzny parametr P dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego:

$$(5.2) \quad \dot{P}(t) = \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \alpha, \omega),$$

gdzie $\gamma(\vartheta)$ jest zależnym od temperatury współczynnikiem lepkości materiału. Bezwymiarowa funkcja $\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$ może być tak dobrana aby reprezentowała rezultaty badań dotyczące dynamicznego zachowania się materiału. Odpowiedni wybór funkcji $\Phi(\mathcal{F})$ pozwoli opisać wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na granicę plastyczności materiału. Symbol $\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$ jest zdefiniowany następująco:

$$(5.3) \quad \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mathcal{F} \leq 0, \\ \Phi(\mathcal{F}) & \text{dla } \mathcal{F} > 0. \end{cases}$$

Przez M oznaczyliśmy symetryczny tensor drugiego rzędu.

Założenie konstytutywne (5.2) dla $\mathcal{F} > 0$ prowadzi do następującego dynamicznego kryterium plastyczności

$$(5.4) \quad f(T, \vartheta; \alpha^{(j)}, P, \Gamma^{(i)}) = \varkappa \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(\text{tr } \dot{P}^2)^{1/2}}{\gamma(\vartheta)} (\text{tr } M^2)^{-1/2} \right] \right\}.$$

Związek (5.4) może być interpretowany jako opis aktualnej zmiany powierzchni płynięcia w czasie procesu termodynamicznego. Zmiana ta jest wywołana efektami wzmocnienia, wpływem prędkości odkształcenia i temperatury na granicę plastyczności materiału oraz efektami lepkości. Warto podkreślić, że związek (5.4) stanowi bazę dla badań eksperymentalnych.

Uwzględniając założenia (4.9), (4.18) oraz (5.2) dostajemy następujące równania różniczkowe opisujące parametry wewnętrzne \varkappa i $\Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{\varkappa}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} [J(g(t)) M(g(t))], \\ \dot{\Gamma}^{(i)}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle S^{(i)}(g(t)) [M(g(t))]. \end{aligned}$$

Wykorzystując poprzednie rezultaty dla materiałów reologicznych z wewnętrznymi zmianami strukturalnymi i wprowadzone założenia konstytutywne możemy napisać pełny układ równań konstytutywnych dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego w postaci:

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi(g^*(t)), \\ T(t) &= \rho \partial_V \Psi(g^*(t)), \\ \eta(t) &= -\partial_\vartheta \Psi(g^*(t)), \\ q(t) &= Q(g(t)), \\ \dot{\alpha}^{(j)}(t) &= A^{(j)}(g(t)), \\ \dot{\varkappa}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} [J(g(t)) M(g(t))], \\ \dot{P} &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)), \\ \dot{\Gamma}^{(i)}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle S^{(i)}(g(t)) [M(g(t))]. \end{aligned}$$

Z układu równań konstytutywnych (5.6) widzimy, że materiał sprężysto/lepkoplastyczny jest opisany w procesie termodynamicznym następującymi funkcjami konstytutywnymi: $\Psi, Q, A^{(j)}, \Phi(\mathcal{F}), M, J, S^{(i)}$ oraz współczynnikiem $\gamma(\vartheta)$.

Wszystkie równania konstytutywne (5.6)₅₋₈ opisujące wewnętrzne parametry $\alpha^{(j)}$, $\varkappa, P, \Gamma^{(i)}$ zależą od zmiany skali czasu. Równania różniczkowe dla parametrów wewnętrznych $\alpha^{(j)}$ opisują efekty lepkie, a równania różniczkowe dla parametrów wewnętrznych $\varkappa, P, \Gamma^{(i)}$ opisują efekty lepkoplastyczne. Równania te jednocześnie pokazują, że obecna teoria materiału sprężysto/lepkoplastycznego uwzględnia historię odkształcenia V , temperatury ϑ i gradientu temperatury $\nabla\vartheta$. Jest to spowodowane faktem, że w celu scałkowania równań (5.6)₅₋₈ i określenia aktualnych wartości parametrów wewnętrznych $\alpha^{(j)}(t), \varkappa(t), P(t), \Gamma^{(i)}(t)$ w cząsteczce X w ciele \mathcal{B} musimy znać wartości początkowe $\alpha_0^{(j)}, \varkappa_0, P_0, \Gamma_0^{(i)}$ oraz całkowite historie V, ϑ i $\nabla\vartheta$.

Dysypacja wewnętrzna materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest określona w sposób następujący

$$(5.7) \quad \sigma = -\frac{1}{\vartheta} \left\{ \left[\sum_{j=1}^m \partial_{\alpha^{(j)}} \Psi A^{(j)} \right] + \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} \left[\left[\partial_x \Psi J + \partial_p \Psi - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \partial_v \Psi + \sum_{i=1}^n \partial_{r^{(i)}} \Psi S^{(i)} \right) M \right] \right\}.$$

Nierówność dysypacji ogólnej

$$(5.8) \quad \sigma - \frac{1}{\rho \vartheta^2} Q \cdot \nabla \vartheta \geq 0$$

zapewnia spełnienie postulatu termodynamicznego dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego.

Związek dla naprężenia (5.6)₂ można napisać w postaci

$$(5.9) \quad T = \bar{\varphi}(V, \vartheta; \alpha, \omega).$$

Żałómy, że zależność funkcyjna (5.9) jest odwracalna względem odkształcenia sprężysto-lepkiego, tzn.

$$(5.10) \quad V = \varphi^*(T, \vartheta; \alpha, \omega).$$

Jeśli tensor V ma reprezentować odkształcenie sprężysto-lepkie tak, aby zachodził związek (4.1), to funkcja φ^* w (5.10) musi być niezależna od ω . Będzie to spełnione, jeżeli funkcja konstytutywna energii swobodnej ma postać

$$(5.11) \quad \Psi(g^*(t)) = \Psi_1(V, \vartheta, \alpha) + \Psi_2(\omega).$$

Wtedy

$$(5.12) \quad T = \rho \partial_V \Psi_1(V, \vartheta, \alpha).$$

Jeżeli zależność (5.12) jest odwracalna względem V to mamy

$$(5.13) \quad V = \varphi(T, \vartheta, \alpha),$$

skąd

$$(5.14) \quad \dot{V} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_\vartheta \varphi \dot{\vartheta} + \partial_\alpha \varphi \dot{\alpha}.$$

Wykorzystując zależności (4.1), (5.6)₇ i (5.14) dostajemy

$$(5.15) \quad \dot{E} = \dot{V} + \dot{P} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_\vartheta \varphi \dot{\vartheta} + \partial_\alpha \varphi \dot{\alpha} + \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)).$$

6. Omówienie podstaw fizycznych

Deformacje plastyczne w metalach powstają głównie na skutek ruchu defektów w kryształach nazywanych dyslokacjami. Rozkład dyslokacji w ciele jest charakterystyczny dla wewnętrznego mechanicznego stanu ciała, które poddane było plastycznym deformacjom. Przy konstruowaniu teorii makroskopowej bazującej na rezultatach fizycznych badań mikroskopowych powinniśmy rozważyć możliwość opisu stanu wewnętrznego ciała przez

podanie pewnych średnich wielkości, które charakteryzują rozkład dyslokacji w sposób makroskopowy. Wybór tych charakterystycznych wielkości jest niezmiernie istotny dla każdej teorii fenomenologicznej. W naszych rozważaniach rolę takich wielkości spełniają parametry wewnętrzne, mianowicie parametr wzmocnienia izotropowego κ , tensor odkształcenia niesprężystego P oraz tensor rozkładu dyslokacji $I^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Najpierw podamy fizykalne motywacje wyboru tensora odkształcenia niesprężystego P i parametru wzmocnienia izotropowego κ jako parametrów wewnętrznych.

Zauważmy, że aby wywołać plastyczne płynięcie materiału potrzebna jest skończona, określona wartość naprężenia. Naprężenie to jest potrzebne do pokonania przeszkód hamujących ruch dyslokacji przez kryształ. Wygodnie jest podzielić te przeszkody na dwie grupy w zależności od odległości oddziaływania ich pól naprężenia z polami naprężenia przesuwających się dyslokacji: na pole naprężenia długiego zasięgu i na pole krótkiego zasięgu. Termiczne aktywacje nie odgrywają żadnej roli przy pokonaniu przeszkód charakteryzujących się polem długiego zasięgu, dlatego przeszkody te są nazywane często atermicznymi. Termiczne fluktuacje mogą pomagać przyłożonym naprężeniom w pokonaniu przeszkód charakteryzujących się polem krótkiego zasięgu. Te przeszkody są nazywane przeszkodami termicznymi i one właśnie są odpowiedzialne za efekty dynamiczne deformacji plastycznych.

Popularnymi mechanizmami termicznych przeszkód w czystych metalach są: naprężenie Peierlsa-Nabarro, las dyslokacji, ruch progów w dyslokacjach śrubowych, poślizg poprzeczny dyslokacji śrubowych i wspinanie się dyslokacji krawędziowych.

Mechanizm przewyciężenia lasu dyslokacji, który może mieć miejsce w kryształach metali o budowie f.c.c., c.p.h. i b.c.c. w różnych zakresach temperatur został opracowany teoretycznie przez SEEGERA [37] (por. również prace przeglądowe [5, 8]).

Jeżeli deformacja jest kontrolowana przez pojedynczy proces termicznej aktywacji, wtedy mamy

$$(6.1) \quad \dot{P} = \nu \exp[-U/k\vartheta],$$

gdzie U jest energią, która powinna być dostarczona przez termiczną fluktuację dla każdej zachodzącej aktywacji, k oznacza stałą Boltzmanna i ν współczynnik częstości.

Aby być w zgodzie z danymi eksperymentalnymi, energia aktywacji U jest najczęściej przyjmowana jako nieliniowa funkcja nadwyżki naprężenia nad stan uplastycznienia, tzn.

$$(6.2) \quad U = \varphi[a(T - Y)],$$

gdzie a jest stałą strukturalną i Y oznacza atermiczne naprężenie lub granicę plastyczności materiału.

Tak więc prędkość odkształcenia niesprężystego jest określona następująco

$$(6.3) \quad \dot{P} = \nu \exp\{-\varphi[a(T - Y)]/k\vartheta\}.$$

To implikuje zależność dla naprężenia

$$(6.4) \quad T = Y \left\{ 1 + \frac{a^{-1}}{Y} \varphi^{-1}[k\vartheta \ln(\nu/\dot{P})] \right\}.$$

Porównanie teoretycznego dynamicznego kryterium uplastycznienia (5.4) ze związkiem fizykalnym (6.4) pokazuje, że fenomenologiczne kryterium uplastycznienia może być

traktowane jako uogólnienie dla polikryształów i dla ogólnego stanu naprężenia fizykalnie uzasadnionego związku (6.4). Przy tym uogólnieniu założono, że wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na granicę plastyczności może być opisany przez nieliniową funkcję $\Phi(\mathcal{F})$.

Z powyższych rozważań wynika również prosta interpretacja wewnętrznego parametru α . Może on być uważany za proste uogólnienie naprężenia atermicznego Y .

We wcześniejszych pracach [31] i [32] wykazano na podstawie wyników eksperymentalnych, że nieliniowa zależność (6.4) może dobrze opisywać dane doświadczalne w całym zakresie zmian prędkości odkształcenia. Udowodniono również, że wprowadzenie nieliniowej funkcji $\Phi(\mathcal{F})$ do założeń konstytutywnych i jej wybór na podstawie danych doświadczalnych mogą być uważane za dobrze uzasadnione hipotezy.

Tensory rozkładu $I^{(i)}$ są interpretowane przez KRÖNERA [17] jako nadwyżka gęstości dyslokacji $I^{(1)}$, nadwyżka gęstości pętli dyslokacji $I^{(2)}$, nadwyżka gęstości pary pętli dyslokacji $I^{(3)}$, itd. Oczywiście, rozumowanie to może być kontynuowane dalej w ten sam sposób i wtedy otrzymamy nieskończony i pełny układ parametrów wewnętrznych, który opisywałby kompletnie rozkład dyslokacji. Jednak nie wydaje się celowe wprowadzanie wszystkich szczegółów ze skali mikroskopowej do opisu makroskopowego materiałów sprężysto/lepkoplastycznych. Można powiedzieć, że nie wszystkie szczegóły mechanizmu mikroskopowego są ważne do opisu zjawisk makroskopowych. W praktyce wygodniej jest posłużyć się tylko pewnymi uśrednionymi wielkościami reprezentatywnymi dla opisu makroskopowego. Dlatego wystarczy założyć skończony zbiór parametrów wewnętrznych $I^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Pierwsza grupa parametrów wewnętrznych $\alpha^{(j)}$ jest interpretowana jako parametry niezależne od prędkości odkształcenia P . Parametry $\alpha^{(j)}$ są wprowadzone w celu opisanie tarcia wewnętrznego. Wiadomo, że tarcie wewnętrzne w materiale może być wyjaśnione w oparciu o różne mechanizmy. Jednak w liniowej aproksymacji każdy z tych mechanizmów prowadzi do znanych równań lepkosprężystości Boltzmana. Aby opisać ten przypadek liniowy należy zlinearyzować równania różniczkowe opisujące parametry $\alpha^{(j)}$ (por. VALANIS [14] i [42]).

7. Materiał sprężysto/lepkoplastyczny

Przez materiał sprężysto/lepkoplastyczny rozumiemy taki materiał, który przed uplastycznieniem zachowuje się jak materiał sprężysty, a po uplastycznieniu uzyskuje możliwość deformacji lepkoplastycznych⁸⁾.

Aby otrzymać opis materiału sprężysto/lepkoplastycznego wystarczy założyć w poprzednim opisie

$$(7.1) \quad \dot{\alpha}(t) = 0$$

w całym rozważanym procesie termodynamicznym dla ciała \mathcal{B} .

⁸⁾ Koncepcja takiego materiału została zaproponowana przez K. Hohenemsera i W. Pragera [12], rozwinięta dalej dla zagadnień jednoosiowych przez W. W. Sokołowskiego [38] i L. E. Malverna [19] oraz dla zagadnień trójwymiarowych w pracach [23–35, 44].

Funkcja opisująca cząsteczkę uogólnioną p ma obecnie postać

$$(7.2) \quad g(t) = \{A, \nabla\vartheta; \omega\}.$$

Ponieważ materiał sprężysto/lepkoplastyczny nie posiada właściwości lepkich przed uplastycznieniem, to statyczny warunek uplastycznienia może być napisany następująco:

$$(7.3) \quad \mathcal{F}(A(t); \omega(t)) = \frac{f(T, \vartheta; P, \Gamma^{(i)})}{\kappa} - 1.$$

Biorąc pod uwagę poprzednio uzyskane rezultaty i uwzględniając obecne założenia możemy napisać pełny układ równań konstytutywnych opisujących właściwości materiału sprężysto/lepkoplastycznego:

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi_1(V, \vartheta) + \Psi_2(\omega), \\ T(t) &= \rho \partial_V \Psi_1(V, \vartheta), \\ \eta(t) &= -\partial_S \Psi_1(V, \vartheta), \\ q(t) &= Q(g(t)), \\ \dot{\kappa}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr}[M(g(t))J(g(t))], \\ \dot{P}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)), \\ \dot{\Gamma}^{(i)}(t) &= \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle S^{(i)}(g(t)) [M(g(t))]. \end{aligned}$$

Dysypacja wewnętrzna materiału sprężysto/lepkoplastycznego jest określona w sposób następujący:

$$(7.5) \quad \sigma = \sigma_\omega = -\frac{\gamma(\vartheta)}{\vartheta} \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \text{tr} \left\{ \left[\partial_\kappa \Psi_2 J + \partial_P \Psi_2 - \partial_V \Psi_1 + \sum_{i=1}^n \partial_{\Gamma^{(i)}} \Psi_2 S^{(i)} \right] M \right\}.$$

Nierówność dysypacji ogólnej

$$(7.6) \quad \sigma_\omega - \frac{1}{\rho \vartheta^2} Q \cdot \nabla \vartheta \geq 0$$

zapewnia spełnienie postulatu termodynamicznego dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego.

Odwracając zależność dla naprężenia (7.4)₂ względem tensora V dostajemy

$$(7.7) \quad V = \varphi(T, \vartheta),$$

skąd

$$(7.8) \quad \dot{V} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_S \varphi \dot{\vartheta}.$$

Z zależności (7.7) i (7.8) widać, że tensor V ma obecnie charakter odkształcenia termosprężystego.

Dla całkowitej prędkości tensora odkształcenie E mamy zależność

$$(7.9) \quad \dot{E} = \partial_T \varphi \dot{T} + \partial_S \varphi \dot{\vartheta} + \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle M(g(t)).$$

8. Materiał sprężysto-plastyczny

W celu otrzymania opisu materiału sprężysto-plastycznego jako szczególny przypadek materiału sprężysto/lepkoplastycznego należy założyć

$$(8.1) \quad \dot{\alpha}(t) = 0$$

w całym procesie termodynamicznym dla ciała \mathcal{B} oraz dodatkowo, że parametry wewnętrzne reprezentowane przez ω są opisane równaniami niezależnymi od skali czasu.

Termodynamiczne kryterium uplastycznienia (5.4) wskazuje, że materiał sprężysto-lepkoplastyczny traci swoje właściwości wrażliwości na prędkość odkształcenia tylko wtedy, kiedy współczynnik lepkości $\gamma(\vartheta) \rightarrow \infty$. W tym przypadku $\mathcal{F} = 0$, tzn.

$$(8.2) \quad f(T, \vartheta, P, I^{(i)}) = \kappa.$$

Z definicji symbolu $\langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$ widzimy, że równanie różniczkowe określające parametr wewnętrzny P może być napisane w postaci

$$(8.3) \quad \overset{\text{tr}}{\dot{P}}(t) = \zeta M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega),$$

gdzie parametr $\zeta = \gamma(\vartheta) \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle$ może być określony z warunku, że punkt reprezentujący w przestrzeni naprężenie-temperatura aktualny stan temperatury i naprężenia leży na powierzchni płynięcia (8.2).

Z warunku plastyczności (8.2) i z ogólnego założenia, że prędkość parametrów wewnętrznych $\dot{\kappa}$ i $\dot{I}^{(i)}$ znikają, gdy $\dot{P} = 0$ możemy wydedukować następujące kryterium obciążenia

$$(8.4) \quad f = \kappa \quad \text{i} \quad \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} > 0.$$

Podobnie, kryteria

$$(8.5) \quad f = \kappa \quad \text{i} \quad \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} \leq 0$$

definiują odpowiednio odciążanie i stan neutralny.

Aby spełnić poprzednio wypowiedziane żądanie odnośnie punktu określającego aktualny stan naprężenia i temperaturę wystarczy zadośćuczynić równaniu $\dot{f} = \dot{\kappa}$, tzn.

$$(8.6) \quad \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta} + \zeta \text{tr}(\partial_P f M) + \zeta \sum_{i=1}^n \text{tr}(\partial_{I^{(i)}} f S^{(i)}[M]) = \zeta \text{tr}(JM),$$

gdzie obecnie

$$(8.7) \quad \dot{\kappa}(t) = \zeta \text{tr}(JM),$$

$$(8.8) \quad \dot{I}^{(i)}(t) = \zeta S^{(i)}[M].$$

Ze związku (8.6) dostajemy

$$(8.9) \quad \zeta = \lambda [\text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_\vartheta f \dot{\vartheta}],$$

gdzie przyjęto oznaczenie

$$(8.10) \quad \lambda = \left\{ \text{tr} \left[\left(J - \partial_P f - \sum_{i=1}^n \partial_{I^{(i)}} f S^{(i)} \right) M \right] \right\}^{-1} > 0.$$

Uwzględniając ostatnie rezultaty oraz kryteria obciążania (8.4) i (8.5) możemy napisać równanie różniczkowe określające parametr wewnętrzny P w postaci

$$(8.11) \quad \dot{P}(t) = \lambda \langle [] \rangle \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_s f \dot{\vartheta} \rangle M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega),$$

gdzie symbol $\langle [] \rangle$ jest zdefiniowany następująco:

$$(8.12) \quad \langle [] \rangle = \begin{cases} [] , & \text{jeżeli } f = \kappa \text{ oraz } [] > 0, \\ 0, & \text{jeżeli } f = \kappa \text{ oraz } [] \leq 0 \text{ lub } f < \kappa. \end{cases}$$

Pełny układ równań konstytutywnych opisujący zachowanie się materiału sprężysto-plastycznego w czasie procesu termodynamicznego w cząsteczce X w ciele \mathcal{B} ma postać⁹⁾

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \psi(t) &= \Psi_1(V, \vartheta) + \Psi_2(\omega), \\ T(t) &= \rho \partial_V \Psi_1(V, \vartheta), \\ \eta(t) &= -\partial_s \Psi_1(V, \vartheta), \\ q(t) &= Q(V, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega), \\ \dot{P}(t) &= \lambda \langle [] \rangle \text{tr}(\partial_T f \dot{T}) + \partial_s f \dot{\vartheta} \rangle M(T, \vartheta, \nabla \vartheta; \omega), \\ \dot{\kappa}(t) &= \lambda \langle [] \rangle \text{tr}(JM), \\ \dot{I}^{(i)}(t) &= \lambda \langle [] \rangle S^{(i)}[M]. \end{aligned}$$

Należy zwrócić uwagę na fakt, że wszystkie równania opisujące parametry wewnętrzne są obecnie niezmiennicze ze względu na zmianę skali czasu.

Aby zapewnić spełnienie postulatu termodynamicznego, należy obecnie zażądać spełnienia następującej nierówności

$$(8.14) \quad \sigma_\omega - \frac{1}{\rho \vartheta^2} Q \cdot \nabla \vartheta \geq 0,$$

gdzie

$$(8.15) \quad \sigma_\omega = -\frac{\lambda}{\vartheta} \langle [] \rangle \text{tr} \left\{ \left[\partial_\kappa \Psi_2 + \partial_P \Psi_2 - \partial_V \Psi_1 + \sum_{i=1}^n \partial_{T^{(i)}} \Psi_2 S^{(i)} \right] M \right\}$$

określa dysypację wewnętrzną materiału sprężysto-plastycznego.

9. Materiały stateczne

W poprzednich punktach przedstawiona została ogólna teoria materiałów sprężysto-lepkoplastycznych. Teoria ta była rozwinięta w oparciu o rozważania termodynamiczne w ramach założeń dla materiałów z wewnętrznymi parametrami stanu. Od równań konstytutywnych wymagaliśmy, aby były zgodne z prawami termodynamiki. Obecnie rozważymy węższą klasę materiałów, tzn. materiały stateczne. Pojęcie niesprężystego materiału statecznego zostało wprowadzone przez DRUCKERA [7]. Wykorzystując pewne spostrze-

⁹⁾ Por. z wynikami pracy A. E. Greena i P. M. Naghdiego [10]. Dyskusję opisu termodynamicznego materiałów sprężysto-plastycznych można znaleźć również w pracach [6, 13, 14, 15, 32—34 i 36].

zenia z teorii plastyczności celowo wprowadził on postulat ograniczający rozważaną klasę materiałów do materiałów statecznych. Okazuje się, że wprowadzając postulat o materiale statecznym można otrzymać podstawowe warunki, których spełnienie pozwala na wyrowadzenie równań konstytutywnych istotnych dla zastosowań praktycznych.

Postulat DRUCKERA o materiale statecznym można wypowiedzieć następująco: w danym procesie izotermicznym ciała \mathcal{B} praca wykonana przez przyrost sił zewnętrznych na odpowiednich przyrostach składowych wektora przemieszczenia musi być nieujemna.

Postulat ten prowadzi do następującego warunku

$$(9.1) \quad \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\varrho} \operatorname{tr}(\Delta T \Delta \dot{E}) dt \geq 0,$$

gdzie przyrosty

$$(9.2) \quad \Delta T = T^{(2)} - T^{(1)}, \quad \Delta \dot{E} = \dot{E}^{(2)} - \dot{E}^{(1)}$$

są określone przez różnice tensorów naprężenia i różnice prędkości odkształcenia liczonych dla dwóch różnych dróg obciążenia zaczynających się od siebie różni w chwili t_0 ; przez t_k oznaczono czas końcowy.

Aby podać szczegółowe interpretacje ograniczeń wynikających z postulatu DRUCKERA, zanalizujemy bliżej jego postać matematyczną dla przypadku nieskończenie małych odkształceń.

Rozważmy w tym celu ciało \mathcal{B} o objętości \mathcal{P} ograniczone regularną powierzchnią $\partial\mathcal{P}$, poddane działaniu sił powierzchniowych t i sił masowych b , które są funkcjami czasu. Określone przez te warunki brzegowe stany przemieszczenia u , odkształcenia E i naprężenia T , są również funkcjami czasu. Załóżmy, że warunki brzegowe ulegają pewnym wariacjom i są określone siłami powierzchniowymi $t + \Delta t$ i siłami masowymi $b + \Delta b$, którym odpowiadają: stan przemieszczenia $u + \Delta u$, stan odkształcenia $E + \Delta E$ i stan naprężenia $T + \Delta T$. Definicję materiału statecznego można przedstawić w następującej postaci:

$$(9.3) \quad \int_{t_0=0}^{t_k} \left\{ \int_{\partial\mathcal{P}} (\Delta t \cdot \Delta \dot{u}) da + \int_{\mathcal{P}} \varrho (\Delta b \cdot \Delta \dot{u}) dv \right\} dt \geq 0,$$

jeżeli $t = 0$ oznacza chwilę przyłożenia przyrostów sił zewnętrznych.

Wykorzystując zasadę prac przygotowanych można siły powierzchniowe, siły objętościowe i prędkości przemieszczenia zastąpić naprężeniami i prędkościami odkształcenia. Zasada prac przygotowanych stwierdza, że dla dowolnych ciągłych prędkości \dot{u} zachodzi równość

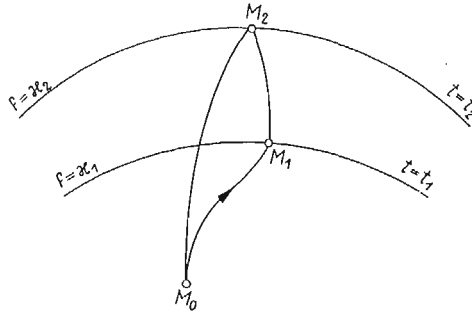
$$(9.4) \quad \int_{\partial\mathcal{P}} (t \cdot \dot{u}) da + \int_{\mathcal{P}} \varrho (b \cdot \dot{u}) dv = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{tr}(T \dot{E}) dv,$$

gdzie t , b , T reprezentują układ wielkości statycznych będących w równowadze, a \dot{u} , \dot{E} są zgodnym układem kinematycznym.

Zakładając, że rozpatrujemy tylko jednorodne stany naprężenia i odkształcenia i wykorzystując zasadę prac przygotowanych (9.4) z (9.3) po uwzględnieniu (9.2) dostajemy

$$(9.5) \quad \int_0^{t_k} [T^{(2)} - T^{(1)}] [\dot{E}^{(2)} - \dot{E}^{(1)}] dt \geq 0.$$

Założmy, że stan $T^{(1)}$ jest identyczny ze stanem stacjonarnym T^* w chwili $t = 0$, a stan $T^{(2)}$ będzie stanem aktualnym, zmiennym w czasie i stan ten oznaczmy przez T . Zanalizujemy następujący zamknięty cykl obciążenia. W chwili $t = 0$ aktualny stan obciążenia T pokrywa się ze stanem stacjonarnym T^* , następnie stan bieżący T zmienia się wzdłuż drogi M_0M_1 (rys. 1) osiągając w chwili $t = t_1$ punkt M_1 odpowiadający stanowi uplastycznionemu. Na drodze M_1M_2 istnieją przyrosty odkształcenia plastycznego. Stan



Rys. 1

M_2 osiągnięty zostaje w chwili $t = t_2$. Poczynając od chwili t_2 następuje odciążenie wzdłuż drogi M_2M_0 . W chwili $t = t_k$ stan aktualny pokrywa się ze stanem początkowym i wtedy $T = T^*$. Warunek (9.5) dla zamkniętego cyklu $M_0M_1M_2M_0$ w czasie $t \in [0, t_k]$ daje

$$(9.6) \quad \int_0^{t_k} [T - T^*][\dot{E} - \dot{E}^*] dt \geq 0,$$

gdzie \dot{E} i \dot{E}^* zastępują odpowiednio $\dot{E}^{(2)}$ i $\dot{E}^{(1)}$. Uwzględniając, że $\dot{P}^* = 0$ oraz $\dot{E} = \dot{V} + \dot{P}$, wyrażenie (9.6) można zapisać w postaci¹⁰⁾

$$(9.7) \quad \int_{t_1}^{t_2} [T - T^*] \dot{P} dt + \{\beta(T, V)\}_0^{t_k} \geq 0,$$

gdzie

$$(9.8) \quad \{\beta(T, V)\}_0^{t_k} = \int_0^{t_k} (T - T^*) (\dot{V} - \dot{V}^*) dt.$$

Rozwijając pierwszy składnik wyrażenia (9.7) w szereg Taylora w punkcie $t = t_1$ i zachowując tylko pierwszy wyraz, otrzymamy

$$(9.9) \quad [(T - T^*) \dot{P}]_{t=t_1} \Delta t + \{\beta\}_0^{t_k} \geq 0.$$

Jeżeli założymy, że $\Delta t = t_2 - t_1$ jest dostatecznie małe, ograniczymy się wtedy do żądania «stateczności w małym» (w przeciwieństwie do żądania «stateczności w dużym», jeżeli przedział czasu nie jest ograniczony do małego i może być dowolny), to nierówność (9.9) implikuje nierówność (9.7).

¹⁰⁾ Por. P. M. Naghdi i S. A. Murch [21].

Ostatnia nierówność (9.9) pozwala wyciągnąć pewne ważne wnioski dotyczące kierunku wektora prędkości odkształcenia (w przestrzeni dziewięciowymiarowej tensor P jest wektorem). Załóżmy obecnie, że rozważana powierzchnia płynięcia dla procesu izotermicznego

$$(9.10) \quad f(T, P, \Gamma^{(i)}) = \kappa$$

jest w przestrzeni naprężenia powierzchnią wypukłą.

Wyraz $\frac{1}{\Delta t} \{\beta\}_{0i}^{tk}$ jest zależny od efektów lepkich i znika tylko wtedy kiedy tensor V jest tensorem odkształcenia czysto sprężystego. W tym przypadku tylko całkowita praca sprężysta wykonana na zamkniętym cyklu jest równa zero. Zachodzi to dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego, który przed uplastycznieniem zachowuje się sprężysto.

Tak więc, dla materiału sprężysto/lepkoplastycznego posiadającego właściwości lepkie przed uplastycznieniem obowiązuje w przypadku materiału statecznego nierówność (9.9). Natomiast dla statecznego materiału sprężysto/lepkoplastycznego nierówność (9.9) upraszcza się do postaci

$$(9.11) \quad (T - T^*) \dot{P} \geq 0.$$

Ograniczenie rozważań do klasy statecznych materiałów sprężysto/lepkoplastycznych prowadzi do interesującego wniosku, że wektor prędkości infinitezymalnego odkształcenia niesprężystego \dot{P} jest ortogonalny do wypukłej aktualnej powierzchni płynięcia (9.10). Oczywiście wniosku takiego nie możemy wyciągnąć dla statecznego materiału sprężysto-lepkoplastycznego¹¹⁾.

10. Szczególne przypadki

Zanalizujemy pewne szczególne przypadki równań konstytutywnych w klasie statecznych materiałów sprężysto/lepkoplastycznych. Będziemy obecnie rozważać tylko procesy izotermiczne.

Przyjmijmy uproszczoną postać statycznej funkcji uplastycznienia

$$(10.1) \quad \mathcal{F}(T; \kappa, P) = \frac{f(T, P)}{\kappa} - 1.$$

Założmy również szczególną postać równania różniczkowego opisującego parametr wzmocnienia izotropowego

$$(10.2) \quad \dot{\kappa} = \text{tr}(T\dot{P}),$$

które można również napisać w postaci

$$(10.3) \quad d\kappa = \text{tr}(TdP),$$

skąd

$$(10.4) \quad \kappa = \int_0^P TdP.$$

¹¹⁾ Szeroka dyskusja tego zagadnienia została przeprowadzona przez P. M. Naghdiego i S. A. Murcha [21].

W tym przypadku parametr wzmocnienia izotropowego utożsamiamy z pracą odkształcenia plastycznego. Jest to bardzo dobrze znana hipoteza w teorii plastyczności.

O powierzchni płynięcia $\mathcal{F} = 0$, rozważanej w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężenia zakładamy, że jest regularna i wypukła.

Na podstawie związku konstytutywnego (7.9) możemy napisać dla analizowanego przypadku zależność (por. [26])

$$(10.5) \quad \dot{E} = C[\dot{T}] + \gamma \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \partial_T f,$$

gdzie obecnie C oznacza macierz sprężystą.

W równaniu konstytutywnym (10.5) wykorzystano ortogonalność tensora \dot{P} do powierzchni płynięcia.

Dynamiczny warunek uplastycznienia przybiera obecnie postać

$$(10.6) \quad f(T, P) = \kappa \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{(\text{tr} \dot{P}^2)^{1/2}}{\gamma} (\text{tr} (\partial_T f)^2)^{-1/2} \right] \right\}.$$

Dalsze ograniczenia otrzymamy przyjmując prostsze postaci funkcji statycznego uplastycznienia \mathcal{F} . Zakładając na przykład tylko opis wzmocnienia izotropowego mamy

$$(10.7) \quad \mathcal{F}(T; \kappa) = \frac{f(T)}{\kappa} - 1,$$

gdzie κ jest określone zależnością (10.4).

Ponieważ funkcja f zależy tylko od naprężenia, stąd dla materiału izotropowego możemy napisać

$$(10.8) \quad f(T) = f(I_T, II_T, III_T),$$

gdzie I_T, II_T, III_T oznaczają niezmienniki tensora naprężenia zdefiniowane przez (3.10).

Równanie konstytutywne (10.5) przyjmie dla tego przypadku postać

$$(10.9) \quad \dot{E} = C_1[\dot{T}] + \gamma \langle \Phi(\mathcal{F}) \rangle \{ [\partial_{I_T} f + \partial_{II_T} f I_T + \partial_{III_T} f III_T] - [\partial_{II_T} f + \partial_{III_T} f I_T] T + \partial_{III_T} f T^2 \},$$

gdzie obecnie C_1 oznacza macierz sprężystą materiału izotropowego.

Ograniczając dalej właściwości materiału do idealnie plastycznych bez wzmocnienia można funkcję \mathcal{F} przyjąć w postaci

$$(10.10) \quad \mathcal{F}(T) = \frac{f(T)}{\kappa_0} - 1,$$

tzn.

$$(10.11) \quad \dot{\kappa}(t) = 0 \quad \text{skąd} \quad \kappa = \kappa_0 = \text{const.}$$

Równanie konstytutywne dla tego przypadku ma nadal postać (10.9). Przypadek ten był analizowany w pracy [26].

Wyczerpującą dyskusję dalszych przykładów równań konstytutywnych dla materiałów sprężysto/lepkoplastycznych wraz z ich zastosowaniami do opisu metali i gruntów można znaleźć w pracy przeglądowej [29] lub monografii [30].

Literatura cytowana w tekście

1. B. D. COLEMAN and W. NOLL, *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*, Arch. Rat. Mech. Anal., **13** (1963), 167—178.
2. B. D. COLEMAN, *Thermodynamics of material with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17** (1964), 1—46.
3. B. D. COLEMAN and M. E. GURTIN, *Thermodynamics with internal state variables*, J. Chem. Phys., **47** (1967), 597—613.
4. B. D. COLEMAN and V. J. MIZEL, *A general theory of dissipation in materials with memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **27** (1968), 255—274.
5. H. CONRAD, *Thermally activated deformation of metals*, J. Metals, **16** (1964), 582—588.
6. D. C. DRUCKER, *Comments by Session Chairman, Symposium on Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, September 1967, San Antonio*; Springer, New York 1968, pp. 405—409.
7. D. C. DRUCKER, *A definition of stable inelastic material*, J. Appl. Mech., **26** (1959), 101—106.
8. A. G. EVANS and R. D. RAWLINGS, *The thermal activated deformation of crystalline materials*, Phys. Stat. Sol., **34** (1969), 9—31.
9. A. E. GREEN and W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Oxford, Second Edition 1968.
10. A. E. GREEN and P. M. NAGHDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18** (1965), 251—281.
11. M. E. GURTIN and A. C. PIPKIN, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Arch. Rat. Mech. Anal., **31** (1968), 113—126.
12. K. HOHENEMSER and W. PRAGER, *Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua*, ZAMM, **12** (1932), 216—226.
13. J. KESTIN, *On the application of the principles of thermodynamics to strained solid materials*, IUTAM Symposium on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics, Vienna, June 22—25, 1966; Springer, Wien 1968, pp. 177—212.
14. J. KESTIN and J. R. RICE, *Paradoxes in the application of thermodynamics to strained solids*, International Symposium on a Critical Review of the Foundations of Relativistic and Classical Thermodynamics, University of Pittsburgh, April 7—8, 1969.
15. J. KRATOCHVIL and O. W. DILLON, *Thermodynamics of elastic-plastic materials as a theory with internal state variables*, J. Appl. Phys., **40** (1969), 3207—2318.
16. J. KRATOCHVIL and O. W. DILLON, *Thermodynamics of crystalline elastic-visco-plastic materials*, J. Appl. Phys., **41** (1970), 1470—1470.
17. E. KRÖNER, *Dislocation; A new concept in the continuum theory of plasticity*, J. Math. and Phys., **42** (1962), 27—37.
18. E. KRÖNER, *Initial studies of a plasticity theory based upon statistical mechanics*, The Battelle Institute Colloquium on the Inelastic Behavior of Solids, September, 1969.
19. L. E. MELVERN, *The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain rate effect*, J. Appl. Mech., **18** (1951), 203—208.
20. J. MEIXNER, *Processes in simple thermodynamic materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., **33** (1969), 33—53.
21. P. M. NAGHDI and S. A. MURCH, *On the mechanical behavior of viscoelastic-plastic solids*, J. Appl. Mech., **30** (1963), 321—328.
22. W. NOLL, *A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media*, Arch. Rat. Mech. Anal., **2** (1958), 193—228.
23. W. OLSZAK and P. PERZYNA, *The constitutive equations of the flow theory for a non-stationary yield condition*, Eleventh International Congress of Applied Mechanics, München, August 30 to September 5, 1964, Proc. Springer 1966, Berlin, pp. 545—553.
24. W. OLSZAK and P. PERZYNA, *On elastic-visco-plastic soil*, Proc. Symposium on Rheology and Mechanics of Soils, Grenoble, April 1964.
25. W. OLSZAK and P. PERZYNA, *Thermal effects in viscoplasticity*, Proc. IUTAM Symp. East Kilbride, June 25—28, 1968, Springer, pp. 206—212.
26. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20** (1963), 321—332.

27. P. PERZYNA, *The constitutive equations for work-hardening and rate sensitive plastic materials*, Proc. Vibr. Probl., **4** (1963), 281—290.
28. P. PERZYNA and T. WIERZBICKI, *Temperature dependent and strain rate sensitive plastic materials*, Arch. Mech. Stos., **16** (1964), 135—143.
29. P. PERZYNA, *Fundamental problems in viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **9** (1966), pp. 243—377.
30. P. PERZYNA, *Teoria Lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa 1966.
31. P. PERZYNA, *On physical fundations of viscoplasticity*, Report of the Institute of Fundamental Technical Research, 28/1968; 12th International Congress of Applied and Theoretical Mechanics, Stanford, August 1968.
32. P. PERZYNA, *Thermodynamic theory of viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **11** (1971).
33. P. PERZYNA and W. WOJNO, *Thermodynamics of a rate sensitive plastic material*, Arch. Mech. Stos., **20** (1968), 499—511.
34. P. PERZYNA, *Thermodynamics of rheological material with internal changes*, Journal de Mécanique, **10** (1971), 391—408.
35. P. PERZYNA, *On rheological effects and internal changes of a material*, Bull. Pol. Scien., Sér. Scien. tech., **19** (1971), I, 177—181; II, 183—188.
36. D. RIBIN, *Mechanical and thermodynamic considerations of an assemblage of homogeneous elastic-plastic states*, J. Appl. Mech., **35** (1968), 596—603.
37. A. SEEGER, *The generation of lattice defects by moving dislocations, and its application to the temperature dependence of flow-stress of f.c.c. crystals*, Phil. Mag., **46** (1955), 1194—1217.
38. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Распространение упруго-вязко-пластических волн в стержнях*, Прикл. Мат. Мех., **12** (1948), 3.
39. C. TRUESDELL and R. A. TOUPIN, *The Classical Field Theories*, Encyclopedia of Physics, vol. III/1. Springer, Berlin 1960, pp. 226—793.
40. C. TRUESDELL and W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopedia of Physics, vol. III/3, Springer, Berlin 1965.
41. K. C. VALANIS, *Unified theory of thermomechanical behavior of viscoelastic materials*, Symposium on Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads, September 1967, San Antonio; Springer, New York 1968, pp. 343—364.
42. K. C. VALANIS, *Proof of existence of entropy for irreversible systems*, Acta Mech., in print.
43. C. C. WANG, *Generalized simple bodies*, Arch. Rat. Mech. Anal., **32** (1969), 1—29.
44. W. WOJNO, *Uwagi o nieskończonej teorii materiałów sprężysto-lepkoplastycznych*, Mech. Teor. Stos., **8** (1970), 239—256.

Резюме

ТЕОРИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Целью работы является тщательный анализ термодинамической теории вязкопластичности, в предположении, что деформации бесконечно малы.

В первой части работы обсуждены основы механики и термодинамики сплошной среды. Вводится определение понятия тела, а затем излагаются описания деформаций и напряжений. На основе интегральных формулировок выведены уравнения движения Коши, первый и второй принципы термодинамики.

Раздел 4 содержит математическую теорию реологического материала с внутренними структурными изменениями. Описание внутренней диссипации в материале основано на введении двух групп внутренних параметров.

В разделе 5 предложенная теория использована для описания свойств упруго-вязкопластического тела. Подробно обсуждены ограничения, следующие из термодинамики и предположения малых деформаций.

Раздел 6 посвящен изложению физических основ вязкопластичности. Дан анализ механизмов, вызывающих реологические явления и механизмов, управляющих динамическими деформациями пластического типа. Подробно обсуждены механизмы, приводящие к теории упруго-вязкопластического материала.

В разделах 7 до 10 дается анализ некоторых частных случаев материалов. Широко обсуждаются устойчивые материалы.

S u m m a r y

INFINITESIMAL THEORY OF VISCOPLASTICITY

The object of this paper is to discuss a thermodynamic theory of viscoplasticity under the assumption of infinitesimal deformations.

In the first part the foundations of mechanics and thermodynamics of continua are analyzed. After defining a continuous body the descriptions of deformation and stress are showed. Based on integral formulation Cauchy's laws and the principles of thermodynamics are stated.

In p. 4 a mathematical theory of a rheological material with internal structural changes is proposed. To describe the internal dissipation of a material two groups of internal parameters are introduced. In p. 5 this theory is used to describe the properties of an elastic-viscoplastic material. Restrictions implied by thermodynamics and the assumption of infinitesimal deformations are discussed.

In p. 6 the physical foundations of viscoplasticity are analyzed. The mechanisms generating the rheological effects and dynamic plastic deformations are investigated. The mechanisms leading to the theory of an elastic-viscoplastic material are discussed.

In p. 7—10 some particular cases of materials are investigated. In particular the stable material is described.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.

INŻYNIERSKIE METODY ANALIZY KONSTRUKCJI SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH

ANTONI S A W C Z U K (WARSZAWA)

1. Wstęp

Główną właściwością inżynierskich teorii jest dążenie do prostoty opisu matematycznego rozpatrywanej grupy zagadnień technicznych, przy równoczesnym ujęciu tym opisem najbardziej charakterystycznych cech fizycznych badanych zjawisk. Celem jest takie matematyczne ujęcie problemu, które byłoby zarazem ścisłe i praktyczne. Ścisłość polega na tym, że rozumowanie prowadzi się w oparciu o sprecyzowane założenia i w myśl prawideł odpowiedniej dziedziny matematyki. Praktyczność natomiast wyraża się w tym, że stosowane metody matematyczne pozostają w zasięgu umiejętności inżynierów. Oczywiście metody te stają się coraz bardziej wyrafinowane w miarę pogłębiania przygotowania zawodowego inżynierów w zakresie nauk podstawowych

Wymienione wyżej przymioty cechują w dużym stopniu mechanikę konstrukcji, formułującą zasady i opracowującą metody obliczenia wytrzymałości i bezpieczeństwa budowli i urządzeń. Wprowadza ona cały szereg różnego typu postulatów i uproszczeń, prowadzących w rezultacie do łatwiejszych równań różniczkowych, do prostszych metod matematycznych lub do ustalenia algorytmów obliczeniowych.

W pierwszym rzędzie idealizujemy — podobnie jak to ma miejsce w mechanice ośrodków ciągłych — zachowanie się materiału pod oddziaływaniami zewnętrznymi, przyjmując odpowiedni «model»: liniową sprężystość, idealną plastyczność, określony typ wzmocnienia plastycznego, liniowe lub nieliniowe pełzanie itp. Następną grupę uproszczeń stanowią założenia dotyczące kinematyki odkształcenia. Wprowadzamy np. założenie płaskich przekrojów, ograniczamy się do stosowania związków dotyczących małych odkształceń, pomijamy niektóre składowe wektora przemieszczenia jako wielkości małe w porównaniu z ugięciem. Wprowadzamy również uproszczenia do równań ruchu, pomijając niektóre składowe tensora naprężenia w zależnościach opisujących równowagę układu lub pomijając momenty naprężeń w przekrojach, jak to ma na przykład miejsce w błonowej teorii powłok. Nie są z reguły rozróżniane stany równowagi w konfiguracjach nieodkształconej i odkształconej. Odrębna wreszcie grupa uproszczeń, to stosowanie przybliżonych metod rozwiązywania otrzymywanych równań.

Nawyk posługiwania się ustalonymi schematami może spowodować, że czasem zapomnimy o «wrodzonych» ograniczeniach określonych teorii czy metod analizy konstrukcji.

Stojąc przed nowym zagadnieniem inżynierskim mamy tendencję do «uogólniania» istniejących teorii często bez dokładnej analizy założeń upraszczających i ich konsekwencji dla równań problemu, bez oceny rzędu wielkości pomijalnych członów itp. Możemy w ten sposób dojść do wewnętrznie sprzecznych teorii, uwzględniających niektóre wielkości wyższego rzędu, a pomijających, wskutek dziedziczonych założeń, bardziej istotne wpływy. W konsekwencji powstają metody, które nie tylko nie umożliwiają ilościowej oceny badanego zjawiska, ale i niewłaściwie je ujmują.

Dlatego też przy opracowywaniu inżynierskich metod analizy bardziej złożonych zagadnień z dziedziny mechaniki konstrukcji słuszne jest takie podejście, w którym przechodzimy od zasad czy zależności ogólnych do metod i zależności przybliżonych. Formułujemy wówczas praktyczne metody przez wprowadzanie uproszczeń, których skutki możemy ocenić. Celem, do którego wówczas świadomie zdążamy, jest «praktyczność» teorii.

Analiza lekkich, a więc wiotkich konstrukcji sprężysto-plastycznych, badanie dotyczące zachowania się konstrukcji niesprężystych pod działaniem powtarzanych obciążeń, analiza nośności granicznej elementów znajdujących się w złożonych stanach zginania i ściskania, badania wpływu uderzeń i fal naprężenia na trwałość konstrukcji i połączeń, warunki lokalnej stateczności elementów konstrukcji sprężysto-plastycznych — są przykładowymi grupami zagadnień, które są dość dobrze opracowane od strony podstaw, a niedostatecznie wprowadzone w sferę działalności inżynierskiej. Sposobami, którymi ten stan rzeczy można zmienić są z jednej strony popularyzacja już istniejących inżynierskich metod analizy konstrukcji plastycznych, z drugiej zaś — opracowanie, stosownie do wspomnianych wyżej zasad, takich praktycznych metod, które umożliwiałyby szybkie uzyskiwanie przez projektantów wiarygodnej odpowiedzi.

W obecnym artykule zamierzamy omówić tzw. kinematyczne podejście w analizie konstrukcji sprężysto-plastycznych oraz wskazać te dziedziny, w których można nadać tej metodzie postać umożliwiającą wykorzystanie metod i wyników bezpośrednio w projektowaniu. Rozpoczniemy od metod oceny nośności granicznej konstrukcji, a następnie omówimy zagadnienia teorii przystosowania. Z kolei zajmiemy się nośnością graniczną w obecności sił błonowych i metodami oceny stateczności rozwiązań uzyskiwanych w oparciu o założenia teorii nośności granicznej. Okazuje się, że ocena stateczności jest możliwa tylko wtedy, gdy odejdziemy od stosowania założenia o nieskończeniu małych odkształceniach i oprzemy się na teorii dużych odkształceń. Będzie to przykład przejścia od nieliniowej mechaniki kontinuum do praktycznych metod oceny, na przykład «efektu tarczowego». Ostatnią grupę w tym omówieniu stanowią zagadnienia dynamiki konstrukcji plastycznych.

2. Nośność graniczna

Teoria nośności granicznej jest jedną z najlepiej opracowanych dziedzin mechaniki konstrukcji niesprężystych. Rozpatruje ona konstrukcje sztywno-plastyczne, a przy dodatkowym założeniu o *małości* odkształceń — również sprężysto-plastyczne, w chwili ich *równowagi granicznej*, czyli w momencie przekształcenia konstrukcji w mechanizm o co najmniej jednym stopniu swobody. Teoria ta zajmuje się tylko przypadkiem propor-

cyjonalnego narastania obciążeń zewnętrznych. Wszystkie obciążenia wzrastają proporcjonalnie do jednego parametru, np. czasu, i to w sposób monotoniczny, a zarazem dostatecznie powoli, tak aby można było zaniedbać efekty dynamiczne.

Celem teorii nośności granicznej jest opracowanie metod wyznaczania intensywności obciążenia *granicznego*, a więc takiego obciążenia, przy którym rozpoczyna się *plastyczne płynięcie* konstrukcji. Przy tej granicznej intensywności obciążenia konstrukcja staje się mechanizmem znajdującym się w chwilowym ruchu. Należy szczególnie podkreślić, że teoria nośności granicznej zajmuje się tylko początkiem ruchu, a więc nie można za jej pomocą opisać np. zjawisk wzmocnienia.

W zakres zainteresowania teorii nośności granicznej wchodzi zarówno konstrukcje z materiałów jednorodnych, np. metali, jak i konstrukcje o złożonej budowie przekroju poprzecznego elementów, np. uwarstwione, zbrojone itp. — jeśli tylko można do nich zastosować idealnie plastyczny model odkształcenia.

Teoria nośności granicznej posługuje się metodami o różnym stopniu trudności, w zależności od wymaganej dokładności i kompletności poszukiwanego rozwiązania. Pełne rozwiązanie problemu, stanowiące w istocie rozwiązanie problemu brzegowego dla równań teorii plastycznego płynięcia, jest na ogół trudne do uzyskania. Takie rozwiązanie daje pełną informację na temat rozpatrywanego problemu, a więc nie tylko wyznacza obciążenie graniczne, ale określa także siły wewnętrzne w każdym przekroju, a również i mechanizm, stosownie do którego konstrukcja się «łamie» w chwili wyczerpania nośności.

Aby łatwo uzyskiwać wielkość najbardziej interesującą inżyniera, to jest obciążenie *graniczne*, sformułowane zostały twierdzenia i rozwinięte metody pozwalające na szybkie otrzymanie informacji o tej wielkości. Mówiąc o twierdzeniach mamy na myśli tzw. twierdzenia podstawowe teorii nośności granicznej [23], które pozwalają oszacować nośność zarówno od góry, jak i od dołu, a więc określić przedział w jakim na pewno mieści się rzeczywista nośność graniczna, odpowiadająca rozwiązaniu zupełnemu. Sformułowanie tych twierdzeń i odpowiednie dowody znaleźć można np. w monografiach [7, 16, 22, 28].

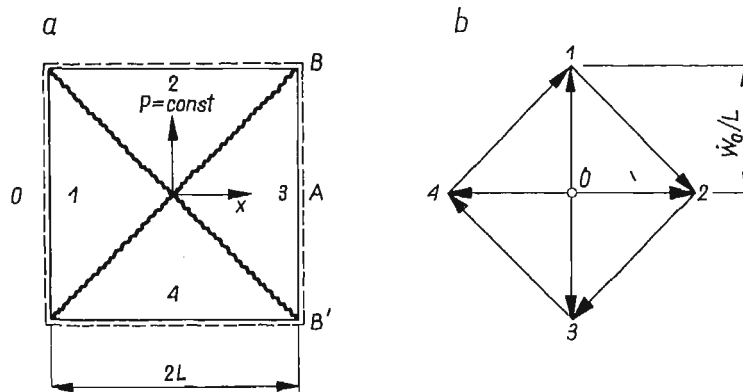
Twierdzenia o oszacowaniu nośności granicznej są przykładem właściwego przejścia od ogólnej teorii do praktycznych metod, dających prawdziwą informację o interesującej inżyniera wielkości. W oparciu o te twierdzenia można formułować metody dotyczące szczególnych zagadnień czy szczególnych typów konstrukcji. Takie metody z dziedziny nośności granicznej, które powstają bez nawiązania do tych twierdzeń, pozostają tylko metodami przybliżonymi, których stopnia dokładności nie można ocenić.

Przykładem dobrej inżynierskiej teorii, związanej z twierdzeniem o górnej granicy nośności konstrukcji, jest metoda linii załomów w teorii nośności granicznej płyt. Powstała ona na drodze syntezy pewnych faktów doświadczalnych dotyczących pęknięcia płyt żelbetowych. Jest to więc przykład podejścia kinematycznego, ale jej ogólniejsze znaczenie stało się niewątpliwie po sformułowaniu wspomnianych wyżej twierdzeń.

Punktem wyjścia tej metody jest stwierdzenie, że do przekształcenia płyty w mechanizm wystarczy, by powstał w niej pewien kinematycznie dopuszczalny układ obszarów uplastycznionych. Linie tych *skoncentrowanych odkształceń*: linie załomu, dzielą płytę na skończoną liczbę obszarów, o których zakładamy, że pozostają sztywne [5, 12]. Ruch otrzymanego układu sztywnych pól, stykających się ze sobą wzdłuż linii przegubów, jest możliwy wówczas, gdy linie te są osiami chwilowego obrotu. Można wtedy zbudować

plan prędkości obrotu. Dla swobodnie podpartej płyty kwadratowej kinematycznie dopuszczalny układ linii załamów podaje rys. 1a. Odpowiedni plan prędkości obrotu przedstawia rys. 1b, podający wektory obrotów pól 1, 2, 3, 4 wokół chwilowych osi obrotu: podpór i linii załomu.

W izotropowej płycie jednostkowy moment plastyczny przekroju jest niezależny od kierunku linii załomu. Dlatego też, rozpatrując chwilowy ruch kinematycznie dopuszczal-



Rys. 1. Metoda linii załamów

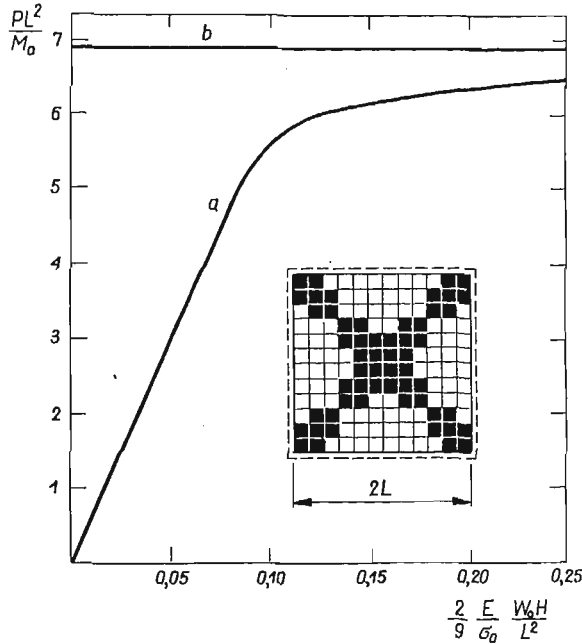
a) mechanizm zniszczenia, b) plan prędkości obrotu pól

nego mechanizmu i stosując zasadę prac przygotowawczych otrzymujemy w tym przypadku następującą zależność pomiędzy mocą obciążeń zewnętrznych P na prędkościach ugięć \dot{W} a rozpraszaniem energii na obroty plastyczne $\dot{\Phi}_i$ w przegubach o długości L_i

$$(2.1) \quad \int_A P \dot{W} dA = M_0 \sum_1^n \dot{\Phi}_i L_i.$$

Dla równomiernie obciążonej płyty kwadratowej o wymiarach, jak na rys. 1a, otrzymane z (2.1) obciążenie graniczne, a ściślej: jego górna ocena, wynosi $p = PL^2/M_0 = 6$ w przypadku warunku plastyczności największego momentu głównego, natomiast $p = 2/\sqrt{3} \cdot 6 \approx 6,92$ dla płyty podlegającej warunkowi Hubera-Misesa.

Nośność graniczną można otrzymać rozwiązując problem brzegowy dla równań sprężysto-plastycznego zginania płyty. Przy takim podejściu śledzimy uplastycznianie się płyty wskutek przyrastającego obciążenia. Możliwe jest tylko numeryczne rozwiązanie układu równań. Rezultat obliczeń przeprowadzonych przy zastosowaniu metody elementów skończonych pokazano na rys. 2, dla przypadku płyt podlegających warunkowi plastyczności Hubera-Misesa [1]. Widać żeń, jak przyrasta ugięcie w środku płyty ze wzrostem obciążenia oraz jaki jest układ stref uplastycznionych w chwili wyczerpania nośności. Otrzymany układ stref plastycznych koncentrujących się wzdłuż przekątnych potwierdza dopuszczalność idealizacji z rys. 1a. Dla porównania zaznaczono również na rys. 2 wartość obciążenia granicznego uzyskanego na podstawie teorii linii załamów dla płyty z materiału Hubera-Misesa.



Rys. 2. Zginanie płyty sprężysto-plastycznej
 a) rozwiązanie numeryczne, b) ocena górna nośności granicznej

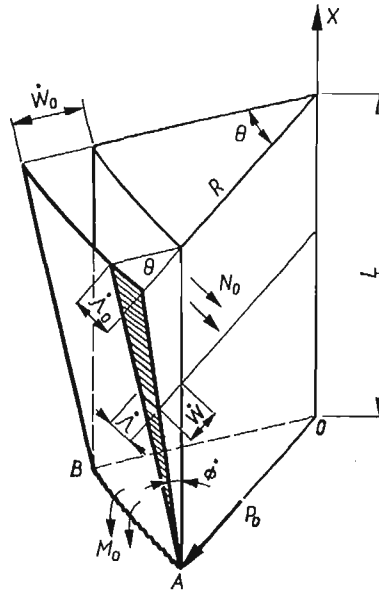
Przykład ten wskazuje, że metoda linii załamów postępująca się niezwykle prostą zależnością (2.1) stanowi przydatne narzędzie przy ocenianiu udźwigu płyt. Metoda ta została u nas wprowadzona przez OLSZAKA [20, 21] i doczekała się szeregu opracowań monograficznych [8, 11, 18, 19, 26, 28] oraz badań doświadczalnych [26, 27].

Metoda linii załomu lub *skoncentrowanych (prędkości) odkształceń* może być stosowana do oceny nośności granicznej powłok, połączeń ścinanych, wysokich belek itp. [5, 24, 34]. Jako przykład rozpatrzmy zbiornik walcowy o wysokości L , zamocowany u podstawy i swobodny na górnym brzegu. Zbiornik poddany jest działaniu parcia hydrostatycznego $P = P_0 (L - x)$. W chwili wyczerpania nośności zbiornik walcowy przekształca się w ścięty stożek. Następuje więc przyrost obwodu oraz pojawia się przegub plastyczny u podstawy zbiornika. Wycinek zbiornika i odpowiednie *uogólnione odkształcenia* pokazano na rys. 3. Zasada bilansowania mocy obciążeń zewnętrznych i energii rozpraszanej na wywołanie odkształceń plastycznych przyjmuje — na jednostkę obwodu — następującą postać

$$(2.2) \quad \int_0^L P \dot{W} dx = \frac{1}{R} \int_0^L N_0 \dot{\Delta} dx + M_0 \dot{\Phi},$$

gdzie M_0 i N_0 są odpowiednio jednostkowym momentem granicznym w przegubie AB oraz graniczną siłą obwodową, jaką może przenieść ścianka zbiornika. Ponieważ, jak to łatwo stwierdzić na podstawie rys. 3: $\dot{\Delta} = Q \dot{W} = Q \dot{W}_0 \frac{x}{L}$ — otrzymujemy w rezultacie, że

$$(2.3) \quad P_0 = 3 \frac{N_0}{R} + 6 \frac{M_0}{L^2}.$$



Rys. 3. Mechanizm zniszczenia zbiornika

Jest to górna ocena nośności granicznej zbiornika. Dolną ocenę otrzymać można bezpośrednio z rozwiązania «sprężystego». Pełne rozwiązanie problemu wraz z wyznaczeniem zakresu R/L , dla którego stosuje się (2.3), znaleźć można w [11, 29].

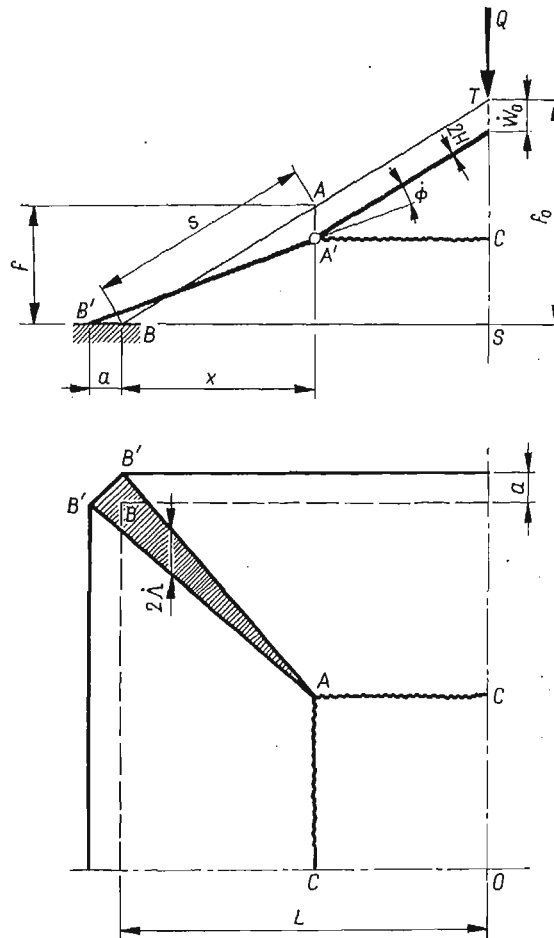
Przejdziemy z kolei do rozpatrzenia nośności granicznej układów płytowo-tarczowych. Zasada postępowania jest analogiczna, jak w przykładach poprzednich: rozpatrujemy równowagę sztywnych płytów, na granicach których skupiają się obszary uplastycznione. Energia zostaje rozpraszana tylko w tych obszarach, a jej wyznaczenie sprowadza się do obliczenia całek liniowych [8, 24].

Oceniemy nośność graniczną małowyniosłego ostrostłupa o podstawie kwadratowej. Ta konstrukcja tarczowa podparta jest w ten sposób, że brzegi mają swobodę przesuwu poziomego. Wymiary oraz kinematycznie dopuszczalny mechanizm zniszczenia podane są na rys. 4. Wzdłuż krawędzi OB , na części jej długości, powstaje skupione odkształcenie *obwodowe*. Linie AC są przegubami plastycznymi, wzdłuż których tylko moment zginający bierze udział w rozpraszaniu energii. Położenie tego przegubu podlega wyznaczeniu z warunku minimum obciążenia. Oznacza to, że spośród kinematycznie dopuszczalnych *mechanizmów zniszczenia* rozpatrywanej rodziny poszukujemy takiego, któremu odpowiada najmniejsza wartość obciążenia, a więc w rozpatrywanym przypadku minimum siły skupionej Q zaczepionej w wierzchołku ostrostłupa.

Zasada bilansu mocy obciążeń zewnętrznych i sił wewnętrznych ma postać

$$(2.4) \quad Q\dot{W}_0 = \sum N\dot{\Delta}_i L_i + \sum M\dot{\Phi}_j L_j.$$

Wskutek nadania wierzchołkowi ostrosłupa prędkości wirtualnej \dot{W}_0 , skupione odkształcenia wydłużeń $\dot{\Lambda}$ i obrotów $\dot{\Phi}$ są — dla rozpatrywanego mechanizmu — jednoznacznie określone. Z zależności geometrycznych otrzymujemy, na podstawie rys. 4,



Rys. 4. Mechanizm zniszczenia tarczownicy stożkowej

$$(2.5) \quad \dot{a} = \dot{W}_0 \frac{f_0}{L}, \quad \dot{\Phi} = \frac{\dot{W}_0}{X}, \quad s = X \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{L^2}},$$

a w rezultacie następującą postać równania (2.4)

$$(2.6) \quad Q \dot{W}_0 = 4N \dot{a} s + 8M \dot{\Phi} (L - X) = 4N_0 \dot{W}_0 X \frac{f_0}{L} \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{L^2}} + 8M_0 \dot{W}_0 \left(\frac{L}{X} - 1 \right).$$

Wyznaczając X z warunku $dQ/dX = 0$ dochodzimy do wyrażenia określającego udźwig konstrukcji

$$(2.7) \quad \frac{Q}{8M_0} = \sqrt{2f_0 \frac{N_0}{M_0}} \sqrt{1 + \frac{f_0^2}{L^2}} - 1.$$

W obszarach skoncentrowanych odkształceń występować mogą równocześnie momenty i siły błonowe. Wówczas wielkości M i N nie mogą być traktowane jako niezależne. Związane są one z warunkiem plastyczności, który przybiera postać $f(M, N) = 0$, a więc przedstawić go można w postaci krzywej granicznej wiążącej moment normalny i siłę błonową przekroju poprzecznego. Zagadnienie to omówimy przy rozpatrywaniu «efektów geometrycznych», czyli wpływu ugięć na udźwig konstrukcji.

3. Przystosowanie

Rzadko kiedy mamy do czynienia z takimi konstrukcjami, które podlegają wyłącznie działaniu obciążeń narastających monotonicznie i proporcjonalnie do jednego parametru. Zwykle programy obciążania są bardzo złożone i na ogół mamy tylko informację o brzegu obszaru obciążeń, a więc o ekstremalnych wartościach jakie poszczególne oddziaływania mogą przyjąć. Niektóre informacje o ekstremalnych wartościach, np. parcia wiatru, obciążeń użytkowych itp. ujęte są przepisami. Badaniem zachowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych poddanych wieloparametrowym oddziaływaniom lub cykлом obciążania zajmuje się teoria przystosowania [6, 7, 29].

Dla określonego programu oddziaływań cyklicznych może nastąpić bądź narastanie odkształceń plastycznych w konstrukcji w czasie każdego cyklu, bądź też ustalenie się tych odkształceń. W tym drugim przypadku konstrukcja — po przejściu przez pewien zakres odkształceń plastycznych — reagować będzie już tylko sprężysto. Mówimy wówczas, że przystosowała się ona do granic aktualnego programu naprężenia. Celem teorii przystosowania jest opracowanie zasad i metod ustalenia takich właśnie granic obszarów zmienności mnożników obciążeń, dla których odkształcenia plastyczne stabilizują się.

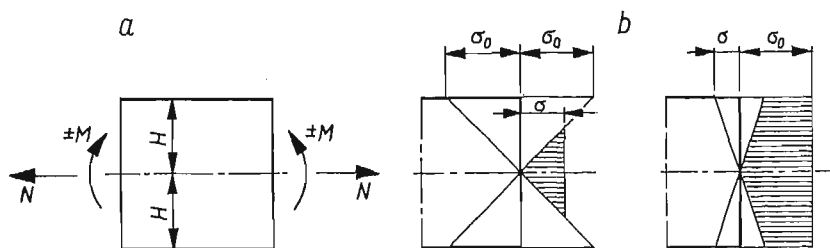
Konstrukcja sprężysto-plastyczna poddana działaniu obciążeń powtarzalnych — przy czym czas trwania cyklu i jego amplituda niekoniecznie muszą być dokładnie znane — może utracić cechy użytkowe bądź wskutek narastania odkształceń (zniszczenie *przyrostowe*), bądź też wskutek niskocyklowego zmęczenia w rezultacie przemiennych odkształceń plastycznych. Uznajemy, że konstrukcja przystosuje się do pewnego programu obciążeń, jeśli po skończonej liczbie cykli odkształcenia plastycznego powstaje w niej taki układ naprężeń resztkowych, że przy dalszym obciążaniu, w ramach tego programu odkształcenia będą czysto sprężyste.

Zupełne rozwiązanie problemu równowagi konstrukcji sprężysto-plastycznej w przypadku zmiennych obciążeń polegałoby na kłopotliwym określaniu krok po kroku całej historii procesu odkształcenia. Dla celów prostej oceny przystosowania potrzebne są praktyczne metody, które umożliwiłyby — podobnie, jak to ma miejsce w teorii nośności granicznej — oszacowanie obszaru dopuszczalnych zmian obciążeń, wielkości trwałych przemieszczeń itp., bez potrzeby rozwiązywania kompletu równań zawierających już w tym

przypadku co najmniej dwie zmienne, jako że proces przebiega w czasie. Możliwość takiej praktycznej oceny dają dwa podstawowe twierdzenia teorii przystosowania, aczkolwiek metody dokonywania takiej oceny w oparciu o te twierdzenia nie są jeszcze dostatecznie proste [13, 14, 28].

Jedno ze wspomnianych twierdzeń głosi, że konstrukcja na pewno przystosuje się do rozpatrywanego programu, jeśli istnieje niezależne od czasu pole naprężeń resztkowych takie, że w każdej chwili suma naprężeń resztkowych i naprężeń otrzymanych dla analogicznej konstrukcji sprężystej nie wykracza poza powierzchnię plastyczności. Obszar przystosowania można ograniczyć od góry korzystając z twierdzenia o nieprzystosowaniu. Stanowi ono rozszerzenie kinematycznego podejścia teorii nośności granicznej i posługuje się pojęciem kinematycznie dopuszczalnego cyklu odkształceń [14]. Jeśli taki cykl w badanym programie obciążenia wystąpi, to konstrukcja na pewno do tego programu się nie przystosuje i stanie się nieużytkowalna bądź wskutek narastania przemieszczeń, bądź też wskutek niskocyklowego zniszczenia [2, 7, 14].

Cel teorii przystosowania, mianowicie ustalenie zakresu obciążeń, na które konstrukcja reaguje czysto sprężystie (po przejściu przez pewien zakres odkształceń plastycznych i powstanie samonaprężeń) — zilustrujemy na prostym przykładzie. Rozpatrzmy pręt o przekroju prostokątnym $2H \times B$, poddany działaniu siły osiowej N i momentu zginają-



Rys. 5. Cykliczne zginanie pręta rozciąganego
a) obciążenie, b) dopuszczalne stany naprężenia

cego M , jak pokazano na rys. 5a. Chcemy wyznaczyć taki obszar w płaszczyźnie obciążeń, aby przy stałej sile osiowej N i cyklicznym zginaniu $\pm M$ odkształcenia plastyczne ustabilizowały się. Wytworzony stan samonaprężeń zapewni wówczas, że wypadkowe naprężenia nie przekroczą granicy plastyczności σ_0 .

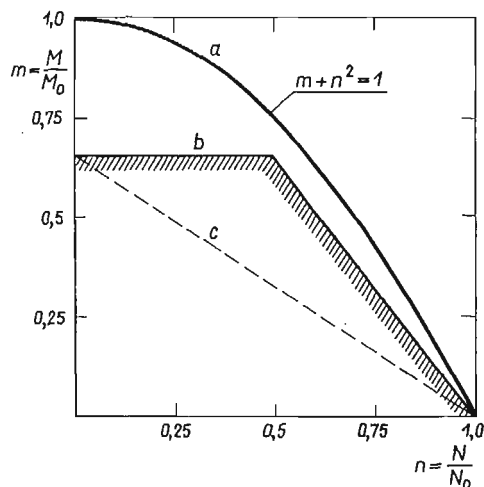
Siłę graniczną i moment graniczny pręta oznaczymy odpowiednio przez $N_0 = 2\sigma_0 BH$ i $M_0 = \sigma_0 BH^2$ oraz wprowadzimy bezwymiarowe wielkości $n = N/N_0$, $m = M/M_0$. Jeśli $n = \text{const}$, to mogą powstać sytuacje pokazane na rys. 5b. Ze stałą siłą N można stwarzyć pewne momenty oraz pewien stan samonaprężeń, którego nie potrzebujemy explicite wyznaczać. Przy cyklicznym zginaniu warunek plastyczności nie zostanie przekroczony, jeśli siłę podłużną uzależnimy tylko od zakresowanych pól na rys. 5b. Otrzymujemy w rezultacie następujące zależności [6], [17]

$$m = \frac{2}{3}, \quad 0 \leq n \leq \frac{1}{2},$$

$$(3.1) \quad n + \frac{3}{4}m = 1, \quad \frac{1}{2} \leq n \leq 1,$$

ograniczające obszar przystosowania pokazany na rys. 6.

Dla porównania podano na rys. 6 również krzywą graniczną $f = n^2 + m - 1 = 0$ odpowiadającą proporcjonalnemu narastaniu siły i momentu, a więc przedstawiającą rozwiązanie problemu nośności granicznej. Widać, że obszar przystosowania znajduje się wewnątrz obszaru ograniczonego krzywą nośności granicznej. Dziedzina czysto sprężystego oddziaływania dla materiału bez samonaprężeń ograniczona jest prostą $n + (3/2)m - 1 = 0$, jak łatwo się przekonać ze wzoru znanego z wytrzymałości materiałów, a dotyczące mimośrodowego zginania. Widać, że obszar przystosowania jest, w rozpatrywanym przypadku, znacznie większy. Przez wytworzenie odpowiedniego pola samonaprężeń konstrukcja przystosowała się do większego zakresu zmian współczynników obciążenia [6, 17].



Rys. 6. Krzywe graniczne dla pręta mimośrodowo rozciąganego

a) nośność graniczna, b) przystosowanie do cyklicznego obciążenia $\pm M$, c) granica obszaru sprężystego

Podany przykład ilustruje różnice pomiędzy nośnością graniczną i przystosowaniem. Daje on odpowiedź na pytanie co do wielkości obszaru przystosowania w przypadku pary obciążeń $N = \text{const}$, $\pm M$, ale nie mówi, jakie muszą być odkształcenia plastyczne, aby to przystosowanie nastąpiło. Może się bowiem zdarzyć, że nim przystosowanie nastąpi konstrukcja straci przydatność wskutek zmian jej geometrii. Podejmowane są próby opracowania metod umożliwiających ocenę przemieszczeń towarzyszących przystosowaniu [2]. Metody te powstają w nawiązaniu do wyników doświadczalnych odnoszących się do niskocyklowego zniszczenia metali.

4. Stateczność

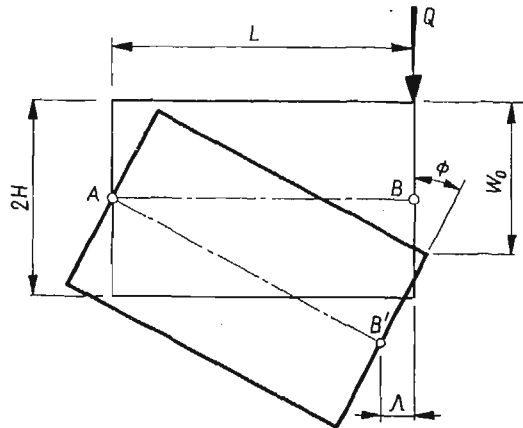
Plastyczne płynięcie, które rozpoczyna się z chwilą przekształcenia konstrukcji w mechanizm, prowadzi w rezultacie do zmian jej geometrii. W konsekwencji zmiany ukształto-

wania konstrukcji może nastąpić bądź zatrzymanie się procesu odkształceń plastycznych, bądź też gwałtowny ich wzrost, towarzyszący utracie stateczności i przejściu do nowej konfiguracji równowagi. Badanie tych zjawisk wykracza poza możliwości teorii nośności granicznej i wymaga oparcia się na związkach mechaniki nieliniowej, a więc, między innymi, rozróżniania pierwotnej i aktualnej konfiguracji konstrukcji [4, 25].

Fakt, iż rozwiązania teorii nośności granicznej mogą się okazać niestateczne, a więc w rzeczywistości konstrukcja przenosi mniejsze obciążenie niż to wynika z tej teorii, wymaga właściwego uwzględnienia w projektowaniu. Z drugiej strony, w innych przypadkach zmiany geometrii powodują zmiany wzrostu obciążenia, a więc mają korzystne skutki dla udźwigu konstrukcji [3, 9].

Mówiąc o zmianach geometrii trzeba od razu zaznaczyć, że nie muszą one być «duże» aby pojawiły się ich skutki. Zjawiska — jak już nadmieniliśmy — należą do *nieliniowych*, a więc małe perturbacje mogą dawać bardzo duże ilościowe zmiany. Przemieszczenia rzędu grubości płyty mogą na przykład w sposób zasadniczy zmienić jej udźwig [10]. Nie są to więc zagadnienia, które mogą pozostawać poza zasięgiem zainteresowań projektanta.

Ocena stateczności rozwiązania danego przez teorię nośności granicznej polega na określeniu nachylenia krzywej «obciążenie–ugięcie». Jeśli $dP/dW > 0$, to obciążenie graniczne jest stateczne i ze wzrostem ugięć następuje «geometryczne» wzmocnienie. Nie-



Rys. 7. Zależności geometryczne przy dużych ugięciach belki sztywno-plastycznej

równość $dP/dW < 0$ wskazuje, że konstrukcja może ulec zniszczeniu w sposób «katastrofalny». Początkowe nachylenie krzywej zależności «obciążenie–ugięcie» stanowi więc bardzo istotną informację.

Rozpatrzymy najpierw przypadek statecznego procesu, kiedy to zmiany geometrii prowadzą do zwiększenia udźwigu. Istotę zagadnienia przedstawimy na prostym przykładzie belki, przekształcającej się w mechanizm pokazany na rys. 7.

Sztywne ogniwa obracają się wokół nieprzesuwanych przegubów podporowych tak, że ugięcie W_0 jest porównywalne z wysokością przekroju belki. W przegubie środkowym pojawiają się odkształcenia, przy czym występują tam nie tylko obroty, ale i wydłużenia

osiowe, właściwe wskutek «dużych» ugięć [30, 34]. Z zależności geometrycznych wynika, że odkształcenia oraz ich prędkości wynoszą odpowiednio

$$(4.1) \quad \Delta = \frac{W^2}{2L}, \quad \Phi = \frac{W}{L}, \quad \dot{\Delta} = \frac{W\dot{W}}{L}, \quad \dot{\Phi} = \frac{\dot{W}}{L}.$$

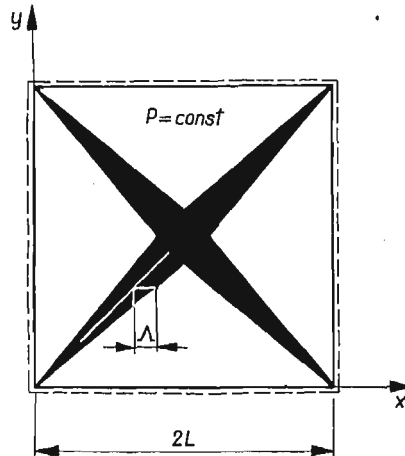
Zasada bilansu mocy przyjmuje postać

$$(4.2) \quad \int P\dot{W} dA = \sum (NW + M)\dot{\Phi}_i L_i.$$

Widać więc, że udźwig zależy od ugięcia. Jeśli M i N w przegubie byłyby niezależne, to przyrost udźwigu ze wzrostem ugięcia byłby liniowy. Ponieważ jednak M i N , w takiej sytuacji jak pokazano na rys. 7, są związane i ich wartości zależą od aktualnego położenia osi obojętnej, to zachodzi między nimi określony związek. Dla jednorodnego przekroju, w przypadku materiału o jednakowych własnościach na ściskanie i rozciąganie, zachodzą związki

$$(4.3) \quad \xi H = \dot{\Delta}/\dot{\Phi} = W, \quad N = N_0 \xi, \quad M = M_0(1 - \xi^2),$$

gdzie N_0 i M_0 są wielkościami granicznymi siły podłużnej i momentu w przekroju. Pierwszą z zależności (4.3) otrzymujemy rozpatrując kinematykę. Aby ruch prowadzący do konfiguracji pokazanej linią ciągłą na rys. 7 był możliwy, wektory chwilowego obrotu muszą przechodzić przez punkty A i B . Stąd wynika zależność pomiędzy położeniem ξH włókna neutralnego a wielkością ugięcia W .



Rys. 8. Obszary skupionych odkształceń przy dużych ugięciach płyty

Dla belki obciążonej siłą skupioną w środku rozpiętości (rys. 7) otrzymujemy, wykorzystując (4.3) w (4.2), zależność

$$(4.4) \quad \frac{QL}{M_0} = 1 + \frac{W^2}{H^2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Dla $\xi \geq 1$ zachodzi $M = 0$, czyli w całym «przegubie» środkowym występują naprężenia rozciągające. Łatwo się przekonać z (4.2), że wówczas udźwig wzrasta liniowo z przyrostem ugięcia.

Z zależności (4.4) widać, że ugięcie równe połowie wysokości przekroju związane jest dwukrotnym zwiększeniem obciążenia, jakie może przenieść sztywno-plastyczna belka z nieprzesuwnymi podporami. Sprężysta podatność podpór ten przyrost zmniejsza [10].

Dla płyty kwadratowej o przegubowo zamocowanych krawędziach układ stref skoncentrowanych odkształceń pokazuje rys. 8. Kinematycznie dopuszczalny mechanizm związany jest w tym przypadku z wystąpieniem wzdłuż przekątnych zarówno obrotów, jak i wydłużeń [30, 34]. Jeśli W_0 oznacza ugięcie w środku płyty, to wzdłuż przekątnych

$$(4.5) \quad \xi H = W = W_0 \frac{x}{L}, \quad \dot{A} = W_0 \frac{x}{L} \dot{\phi}.$$

Obciążenie związane z tym schematem zniszczenia wyznaczamy z zależności (4.2), uwzględniając w nim wyniki (4.3). Po wykonaniu całkowań otrzymujemy — w przypadku równomiernie rozłożonego obciążenia P — następujące wyrażenie:

$$(4.6) \quad \frac{PL^2}{M_0} = 6 + 2 \frac{W_0^2}{H^2}, \quad 0 \leq \xi \leq 1.$$

Przedstawia ono wpływ «dużych» ugięć na udźwig płyty w zakresie przemieszczeń $W_0 \leq H$.

Ponieważ wielkości M i N wchodzące do (4.2) zależą od budowy przekroju poprzecznego — i są inne dla przekroju pełnego, a inne np. dla dwuteownika, to fakt ten uwidoczni się w ostatecznych wzorach określających *wzmocnienie geometryczne* [30].

Podane przykłady ilustrują metodę kinematyczną obliczania tego geometrycznego wzmocnienia. Informacja o tym, czy nośność graniczna, tzn. obciążenie powodujące ruch, odpowiada rozwiązaniu statecznemu czy niestatecznemu, otrzymać można badając nachylenie krzywej: obciążenie — charakterystyczne ugięcie [4].

Niech nośność graniczna konstrukcji wynosi P_0 . Rozpatrzmy takie procesy obciążania, dla których aktualna intensywność obciążenia wyraża się zależnością $P = \lambda P_0$, a więc λ jest mnożnikiem charakteryzującym wzrost oddziaływań. W oparciu o zasadę bilansu mocy obciążeń zewnętrznych i mocy sił wewnętrznych otrzymujemy

$$(4.7) \quad \lambda = \frac{P}{P_0} = \frac{D(W_0)}{D_0},$$

gdzie $D(W_0)$ oznacza dysypację z uwzględnieniem zmian geometrii płyty, zaś D_0 — odpowiednią jej wartość dla chwili rozpoczynania się ruchu plastycznego. Jako parametr charakteryzujący wpływ czasu przyjmujemy tu przemieszczenie W_0 w pewnym punkcie konstrukcji.

O stateczności decyduje, przy takim sformułowaniu problemu, znak wielkości $d\lambda/dW_0$ dla $W_0 = 0$. W konsekwencji otrzymujemy warunek stateczności w następującej postaci

$$(4.8) \quad D_0 \frac{\partial \lambda}{\partial W_0} = \frac{dD}{dW_0} > 0.$$

Przypadek niestatecznego obciążenia granicznego zilustrujemy na przykładzie tzw. efektu sklepieniowego w płycie. Rozpatrzmy pasmo płytowe wykonane z materiału, który przenosić może tylko naprężenia ściskające. Pasma podparte jest przegubowo nie-

przesuwnie, np. wskutek umieszczenia pomiędzy dwiema nieodkształcalnymi ścianami. Jeśli chodzi o geometrię i kinematykę, to mamy tu sytuację jak na rys. 7. Zależność pomiędzy ugięciem W_0 w środku rozpiętości a położeniem «warstwy obojętnej» w przegubie opisana jest pierwszym z równań (4.3), a ponadto

$$(4.9) \quad N = N_0(1-\xi)/2, \quad M = M_0(1-\xi^2)/2.$$

Rozpraszanie energii następuje tylko w «uogólnionym» przegubie. Otrzymujemy

$$(4.10) \quad \lambda M_0 = NW + M = -\frac{N_0}{2}(1-\xi)\xi H + \frac{M_0}{2}(1-\xi^2),$$

gdź w przegubie występuje ściskanie. Wykorzystując zależność (4.3) oraz związek pomiędzy M_0 i N_0 dla przekroju prostokątnego, dochodzimy w rezultacie do następującej postaci kryterium (4.8)

$$(4.11) \quad \dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial (W_0/H)} = -2 + 2 \frac{W_0}{H}.$$

W początkowym stanie ruchu, a więc dla $W_0 = 0$, otrzymujemy $\dot{\lambda} = -2 < 0$, a więc mamy do czynienia z przypadkiem niestateczności.

Udźwig pasma przy uwzględnieniu efektu sklepieniowego łatwo obliczyć z zależności (4.2). Wynosi on, w przypadku obciążenia siłą skupioną w środku rozpiętości,

$$(4.12) \quad \frac{QL}{M_0} = 1 - 2 \frac{W_0}{H} + \frac{W_0^2}{H^2},$$

a więc nośność spada do zera kiedy ugięcie osiąga połowę grubości płyty.

W zakresie badań efektu sklepieniowego, wzmocnienia geometrycznego i stateczności opracowano u nas szereg problemów zarówno o znaczeniu podstawowym (twierdzenia o oszacowaniach) [4], jak i rozwiązań szczegółowych, również z uwzględnieniem wpływu odkształceń sprężystych [10].

5. Dynamika

Konstrukcja idealnie sprężysto-plastyczna może być obciążana poza nośność graniczną jeśli działanie obciążeń jest impulsowe. Wówczas, wskutek nadanych przyspieszeń poprzez np. wprowadzenie do układu pewnej energii kinetycznej, następuje ruch, który trwa aż do rozproszenia tej energii na odkształcenia plastyczne. W takim przypadku mamy do czynienia z problemami «dynamicznej» nośności granicznej. Jeśli obciążenie działa przez krótki czas, to uruchomione wskutek nagłego przyłożenia impulsu siły bezwładności mogą być dostatecznie duże na to, aby zapobiec nadmiernym odkształceniom, a w rezultacie i zniszczeniu konstrukcji.

Inną grupę problemów związanych z dynamicznymi oddziaływaniami na budowle stanowią zagadnienia propagacji fal sprężysto-plastycznych w elementach konstrukcji, związanych z tym koncentracji odkształceń plastycznych, a w rezultacie i zmęczenia niskocyklowego. Te dwie grupy zagadnień wymagają odmiennych podejść.

Dynamika konstrukcji plastycznych stosuje w zasadzie wszystkie założenia teorii belek, płyt lub powłok i posługuje się odpowiednimi uogólnionymi wielkościami: momenta-

mi zginającymi, wypadkowymi naprężeń itp. Odmienność w stosunku do zagadnień nośności granicznej polega na uwzględnieniu sił bezwładności i występowaniu w równaniach czasu jako zmiennej niezależnej. Wprowadza to znaczne komplikacje, jako że problemy są teraz opisywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Problemy falowe rozpatrywane są zarówno w naprężeniach, jak i w wypadkowych wielkościach. Cel badań z tego zakresu jest — w zastosowaniach do konstrukcji — odmienny. Chodzi o ustalenie miejsc i wielkości lokalnych koncentracji trwałych odkształceń, podczas gdy dynamika konstrukcji zajmuje się raczej deformacją całej budowli wskutek podmuchu czy uderzenia «masowego» oraz oszacowaniem czasu trwania wymuszonego w ten sposób ruchu.

W zagadnieniach dynamiki konstrukcji plastycznych wielkością szczególnie ważną jest pole trwałych przemieszczeń, które realizuje się w rezultacie np. przyłożenia impulsu ciśnienia, działającego w czasie $0 \leq t \leq \tau$. Dla scharakteryzowania tego typu zagadnień i przedstawienia prostych metod ich liczbowej oceny rozpatrzmy płytę kwadratową poddaną działaniu krótkotrwałego równomiernego ciśnienia. Zajmiemy się określeniem trwałego ugięcia środka płyty pokazanej na rys. 1 i obciążonej impulsem ciśnienia takim, że $P = \text{const}$ dla $0 \leq t \leq \tau$ oraz $P = 0$ dla $t \geq \tau$.

Wskutek naglego przyłożenia impulsu ciśnienia wzbudzone zostają siły bezwładności — $\mu \ddot{W}$, przy czym μ oznacza masę przypadającą na jednostkę płaszczyzny środkowej płyty, zaś $\ddot{W} \equiv \partial^2 W / \partial t^2$ jest przyspieszeniem jej uginania się. Zasada bilansowania mocy obciążeń zewnętrznych i sił wewnętrznych (2.1), zastosowana do mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys. 1, przyjmuje postać

$$(5.1) \quad \int_A \ddot{W} (P - \mu \ddot{W}) dA = M_0 \sum \dot{\Phi}_i L_i.$$

Uderzona płyta dozna przyspieszeń. Poszczególne punkty płata OBA powierzchni środkowej, w przypadku rozpatrywanego, kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu, mają następujące prędkości i przyspieszenia ugięć

$$(5.2) \quad \dot{W} = \dot{W}_0(t) \left(1 - \frac{x}{L}\right), \quad \ddot{W} = \ddot{W}_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right).$$

Wykorzystując (5.2) w (5.1) otrzymujemy, po wykonaniu przepisanych całkowań, następujące wyrażenie na przyspieszenie punktu 0

$$(5.3) \quad \ddot{W}_0 = \frac{2}{\mu} (P - P_0), \quad P_0 = \frac{6M_0}{L^2},$$

gdzie P_0 oznacza nośność graniczną płyty obciążonej równomiernym ciśnieniem w sposób statyczny. Jeśli przed uderzeniem płyta jest nieodkształcona i nieruchoma, tzn. $\dot{W}(x, 0) = \ddot{W}(x, 0) = 0$, to całkując (5.3) otrzymujemy następującą zależność pomiędzy intensywnością przyłożonego ciśnienia a ugięciem środka płyty:

$$(5.4) \quad W_0 = \frac{1}{\mu} (P - P_0) t^2, \quad P > P_0.$$

Po zdjęciu obciążenia w chwili $t = \tau$ ruch trwa nadal z tym, że następuje teraz spowalnianie ugięć aż do chwili, gdy energia włożona zostanie całkowicie rozproszona na odkształcenia plastyczne. Przyspieszenie tego zamierającego ruchu wynosi $\dot{W}_0 = -2P_0/\mu$. Ruch ustaje w chwili $t = T$, gdy $\dot{W}_0(T) = 0$. Wymagając ciągłości prędkości i ugięć w chwili $t = \tau$ otrzymuje się stałe całkowania dla $\tau \leq t \leq T$, a w rezultacie zostaje jednoznacznie opisany proces ruchu mechanizmu pokazanego na rys. 1.

Płyta przestaje się ugiąć w chwili $t = T$. Chwila ustania ruchu i wielkości trwałego ugięcia środka płyty wynoszą odpowiednio

$$(5.5) \quad T = \frac{P}{P_0} \tau, \quad W_0 = \frac{P\tau^2}{\mu P_0} (P - P_0).$$

Rozwiązanie to jest ważne dla pewnego zakresu ciśnień, mianowicie, gdy $P \leq 2P_0$. Przy większych ciśnieniach tworzy się inny mechanizm, mianowicie środkowa część porusza się w początkowym okresie jak ciało sztywne tak, że pole prędkości ugięć ograniczone jest powierzchnią ściętego ostrosłupa [33].

6. Zakończenie

Przedstawiliśmy przegląd zagadnień teorii konstrukcji sprężysto-plastycznych, ze szczególnym podkreśleniem praktycznych metod ich analizy. Koniecznym krokiem w stronę zastosowań w projektowaniu jest przejście do opracowania metod i procedur obliczeniowych, dostosowanych do szczegółowych typów konstrukcji, węzłów i połączeń [32, 35].

Przy omawianiu metod skoncentrowaliśmy się na podejściu, które można nazwać *kinematycznym*, gdyż geometryczną stronę procesu deformacji konstrukcji łatwiej sobie wyobrazić, a więc w konsekwencji łatwiej zastosować takie właśnie metody w działalności projektowej.

Omawiana tematyka była przedmiotem referatu problemowego wygłoszonego na sympozjum «Practical Applications of Plasticity Theory» ASME Winter Annual Meeting, Nowy Jork 30 listopada — 3 grudnia 1970 r.

Literatura cytowana w tekście

1. J. BÄCKLUND, *Mixed finite element analysis of elastic-plastic plates in bending*, Arch. Mech. Stos., 24 (1972) (w druku).
2. R. BRZEZIŃSKI, J. A. KÖNIG, *Ocena ugięć sprężysto-plastycznych konstrukcji ramowych przy obciążeniach zmiennych*, Prace IPPT, 60/1971.
3. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflection*, Arch. Mech. Stos., 18 (1966), 653—663.
4. M. DUSZEK, *Stateczność konstrukcji sztywno-plastycznych*, Prace IPPT 1972 (w przygotowaniu).
5. А. А. Гвоздев, *Расчёт несущей способности конструкции по методу предельного равновесия*, Стройздат, Москва 1949.
6. Д. А. Гохфельд, *Несущая способность конструкции в условиях теплосмен*, Машиностроение, Москва 1970.
7. P. G. HODGE, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
8. M. JANAS, *Nośność graniczna łuków i sklepień*, Arkady, Warszawa 1967.

9. M. JANAS, *Large plastic deformations of reinforced concrete slabs*, Int. J. Solids Struct., 4 (1968), 61—74.
10. M. JANAS, *Skończone ugięcia sprężysto-plastyczne płyt zamocowanych*, Prace IPPT 36/1970.
11. M. JANAS, J. A. KÖNIG, *Nośność graniczna powłok. Przekrycia i zbiorniki*, Arkady, Warszawa 1968.
12. K. W. JOHANSEN, *Yield-line theory*, Cem. Concr. Assoc., London 1961.
13. L. KONIECZNY, *Teoria przystosowywania się belek*, Mech. Teoret. Stos., 8 (1970), 257—276.
14. J. A. KÖNIG, *Podstawowe twierdzenia z zakresu teorii dostosowania się konstrukcji sprężysto-plastycznych do obciążeń zmiennych w czasie*, Mech. Teoret. Stos., 8 (1970), 149—158.
15. J. A. KÖNIG, *A method of shakedown analysis of frames and arches*, Int. J. Solids Struct., 7 (1971), 327—344.
16. Ch. MASSONNET, M. SAVE, *Calcul plastique des constructions*, 2, CBLIA, Bruxelles 1963.
17. Z. MRÓZ, *On the theory of steady plastic cycles in structures*, Structural Mechanics in Reactor Technology (Berlin 1971) Reprint L5/6.
18. D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt prostokątnych*, Arkady, Warszawa 1962.
19. D. NIEPOSTYN, *Nośność graniczna płyt kołowo-symetrycznych*, Arkady, Warszawa 1963.
20. W. OLSZAK, *Teoria nośności granicznej płyt ortotropowych*, Budownictwo Przemysłowe, 2 (1953), 254—265.
21. W. OLSZAK, *Zagadnienia ortotropii w teorii nośności granicznej płyt*, Arch. Mech. Stos., 5 (1953), 329—350.
22. W. OLSZAK i in., *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
23. W. PRAGER, *An introduction to plasticity*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1959.
24. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчёт сооружений с учётом пластических свойств материалов*, Госстройиздат, Москва 1954.
25. A. SAWCZUK, *Zagadnienia teorii umiarkowanie dużych ugięć powłok plastycznych*, Mech. Teoret. Stos., 2 (1971), 335—354.
26. A. SAWCZUK, Th. JAEGER, *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*, Springer, Berlin 1963.
27. A. SAWCZUK, M. JANAS, J. ZAWIDZKI, *Z zagadnień technicznej teorii nośności granicznej płyt o mieszanych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inż., 10 (1962) 243—278.
28. A. SAWCZUK, M. JANAS, J. A. KÖNIG, *Analiza plastyczna konstrukcji*, Ossolineum, Wrocław 1972.
29. A. SAWCZUK, J. A. KÖNIG, *Analiza stanu zniszczenia walcowych silosów żelbetowych*, Arch. Inż. Łąd., 8 (1962), 161—183.
30. A. SAWCZUK, L. WINNICKI, *Plastic behavior of simply supported reinforced concrete plates at moderately large deflections*, Int. J. Solids Struct., 1, (1965) 97—111.
31. Z. SOBOTKA, *Theorie plasticity a meznich stavu stavebných konstrukci*, CSAV, Praha 1955.
32. J. J. TELEGA, *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji*, Mech. Teoret. Stos., 9 (1971), 7—52.
33. T. WIERZBICKI, *Liniowa teoria lepkoplastycznych konstrukcji*, Prace IPPT 29/1971.
34. R. H. WOOD, *Plastic and elastic design of slabs and plates*, Thames and Hudson, London 1961.
35. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering science*, McGraw Hill, New York 1971.

Р е з ю м е

ИНЖЕНЕРНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СООРУЖЕНИЙ

В работе излагаются приложения методов теории пластичности в механике сооружений. Рассмотрены следующие разделы этой теории: теория несущей способности сооружений, теория приспособляемости, вопросы больших прогибов и динамики пластин. Особое внимание обращено на приближенные методы анализа упруго-пластических сооружений (теория линий пластических шарниров, кинематические оценки несущей способности оболочек, поведение пластин при импульсных нагружениях). Подчеркивается значение инженерного подхода к теории пластических со-

оружений. Обсуждены вопросы устойчивости решений в теории предельных состояний (геометрическое упрочнение и прочелкивание), а также некоторые задачи теории приспособляемости при циклических нагружениях.

S u m m a r y

ENGINEERING ASPECTS OF PLASTIC ANALYSIS OF STRUCTURES

The theory of plastic structures is discussed from the viewpoint of applications in structural design. Limit analysis, shakedown and large deformation theory are considered. Approximate methods (yield-line theory of plates, kinematical methods in shell analysis and in dynamics of plates) are commented upon, their engineering motivation being emphasized. Stability of yield point loads («geometrical hardening» and snap-through) and shakedown to cyclic loading are considered.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.

PROBLEMY TEORII MECHANICZNEGO URABIANIA GRUNTÓW*

WOJCIECH SZCZEPIŃSKI (WARSZAWA)

1. Uwagi wstępne

Istnieje dość bogata literatura dotycząca inżynierskich metod obliczania oporów, jakie stawia grunt lub inny ośrodek sypki przy urabianiu go narzędziami mechanicznymi. Jednakże wobec trudności, jakie sprawia opracowanie teorii mechanicznego urabiania, opartej na bardziej solidnych podstawach, metody te mają bardzo przybliżony charakter, a niekiedy notuje się nawet poważne rozbieżności między nimi. Z reguły metody inżynierskie ograniczają się do wyznaczenia wielkości wypadkowych sił działających na narzędzie. Ich najpoważniejszym brakiem jest pominięcie kinematyki ruchu ośrodka, ale również w zakresie statyki nie można na ich podstawie obliczyć, na przykład, rozkładu nacisków na powierzchnię narzędzia.

Rozpowszechniony jest pogląd, że mechanika procesów urabiania gruntów jest zbyt złożona, aby można było do jej analizy stosować metody matematyczne analogiczne do metod stosowanych w teorii plastyczności. Jednakże notowany w ostatnich latach wyraźny rozwój matematycznej teorii mechaniki gruntów wskazuje na celowość podjęcia poważniejszych prób zastosowania jej metod do analizy różnych procesów urabiania gruntów. Oczywiście pojawia się tu szereg poważnych trudności dotyczących zarówno przyjęcia odpowiedniego modelu opisującego złożone fizyczne własności rzeczywistych gruntów, jak i samego rozwiązywania lub nawet sformułowania odpowiednich zagadnień brzegowych dla konkretnych przypadków, nawet przy założeniu możliwie prostego modelu gruntu. Tym niemniej dla niektórych praktycznie ważnych procesów mechanicznego urabiania można już przedstawić rozwiązania uwzględniające statykę i kinematykę ruchu ośrodka. Rozwiązania te odnoszące się do płaskiego stanu odkształcenia polegają na zbudowaniu siatek charakterystyk dla naprężeń i prędkości, a następnie na skonstruowaniu planu prędkości. Można również prześledzić na drodze teoretycznej znaczny etap przebiegu tych procesów metodą kolejnych kroków. Dla niektórych ważnych procesów urabiania gruntów rozwiązania teoretyczne mają bardzo prostą postać i nadają się bezpośrednio do obliczeń inżynierskich. W przypadkach, gdy rozwiązania teoretyczne są skomplikowane mogą one stanowić podstawę do opracowania odpowiednich tablic lub wykresów dla obliczeń praktycznych.

*) Referat problemowy przedstawiony na XIV Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego, Krocienko 1971.

Ważną technicznie grupę procesów stanowi manipulowanie za pomocą maszyn przedładunkowych materiałami sypkimi, jak koks, węgiel, cement luzem, zboże, ziemiopłody itp. Własności fizyczne tych materiałów dają się w ścisły sposób opisać za pomocą prostych związków, a zatem nie ma tu potrzeby wprowadzania sztucznych uproszczeń, które dla gruntów w stanie naturalnym powodują następnie powstanie pewnych rozbieżności między rozwiązaniami teoretycznymi a wynikami badań doświadczalnych. W przypadku materiałów sypkich rozbieżności te są minimalne.

Dla wielu procesów o dużym znaczeniu praktycznym nie udaje się jeszcze zbudować rozwiązań teoretycznych. W takich przypadkach duże usługi mogą oddać badania modelowe tych procesów w małej skali. Badania takie można również stosować dla weryfikacji rozwiązań teoretycznych. Przy badaniach modelowych podstawowe znaczenie ma ustalenie kryteriów podobieństwa między rzeczywistym procesem a badaniem tego procesu na modelu. Zagadnienie ustalenia kryteriów podobieństwa sprawia jednak wiele trudności, specjalnie wtedy gdy proces urabiania zachodzi ze znaczną prędkością. Wiadomo bowiem, że grunty wykazują wyraźną zmianę oporu odkształcenia przy zwiększaniu prędkości odkształcenia. Niestety brak danych doświadczalnych nie pozwala na ogólne matematyczne ujęcie tej zależności, co z kolei uniemożliwia ściśle ustalenie kryteriów podobieństwa modelowego.

W dalszych punktach pracy omówiono pokrótce wspomniane wyżej problemy wyłaniające się przy opracowywaniu matematycznej teorii mechanicznego urabiania gruntów oraz perspektywy jej rozwoju.

2. Warunek stanu granicznego

Ogólnie przyjmuje się (patrz np. [1]), że osiągnięcie stanu granicznego w gruncie następuje w chwili, gdy stan naprężenia spełnia warunek Coulomba-Mohra. Warunek ten w przestrzeni naprężeń głównych można przedstawić w postaci nieskończonej długiej piramidy o przekroju sześciobocznym. Może być on zapisany w znanej postaci

$$(2.1) \quad \sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + 2H) \sin \varrho \quad (\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2),$$

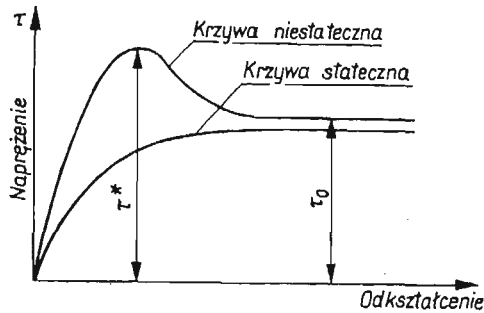
ϱ jest tu kątem tarcia wewnętrznego, a H przedstawia wytrzymałość gruntu przy trójosiowym izotropowym rozciąganiu.

Badania doświadczalne w warunkach quasi-statycznych na aparatach trójosiowych na ogół potwierdzają słuszność warunku Coulomba-Mohra, chociaż niejednokrotnie otrzymana doświadczalnie obwiednia granicznych kół Mohra nie jest prostoliniowa, jak to wynikałoby z zależności (2.1). Fakt ten jest powodem wysuwania innych propozycji opisu warunku stanu granicznego i opracowania dla nich teorii płaskich stanów granicznych (patrz np. [1, 2]). Wydaje się jednak, że dla analizy procesów urabiania gruntów warunek Coulomba-Mohra pozostanie warunkiem podstawowym, mając niezłe potwierdzenie doświadczalne, a jednocześnie mając stosunkowo prostą postać.

Pewne rodzaje gruntów (np. grunty gliniaste w stanie naturalnym, zagęszczony piasek) wykazują zjawisko niestateczności w procesie odkształcania. Przejawia się to przy badaniach doświadczalnych prowadzonych, na przykład, w aparacie bezpośredniego ścinania utwo-

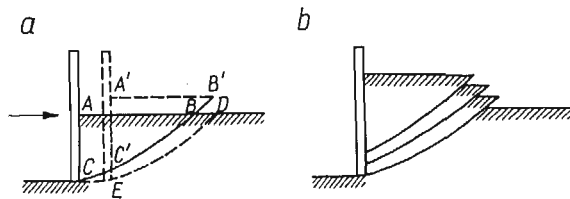
rzeniem się na krzywej odkształcania charakterystycznego spadku oporu gruntu od wartości τ^* do τ_0 po osiągnięciu pewnej wielkości odkształcenia (rys. 1).

Niestateczność charakterystyki wytrzymałościowej gruntu powoduje, że proces odkształcania przy urabianiu nie ma charakteru ciągłego, ale przebiega skokowo. Schematycznie przedstawia to rys. 2 na przykładzie naporu płaskiej ściany. W położeniu początkowym



Rys. 1

(rys. 2a) powstaje obszar deformacji ABC oddzielony od nieruchomego masywu gruntu linią nieciągłości prędkości CB , nazywaną w praktyce inżynierskiej linią odłamu. Wzdłuż niej powstają znacznie większe odkształcenia, niż w pozostałej części obszaru deformacji. Po pewnym przemieszczeniu ściany napierającej opór gruntu wzdłuż CB spadnie do wielkości τ_0 , zachowując większe wartości w pozostałym obszarze. Przy dalszym ruchu ściany nastąpi poślizg trójkąta ABC wzdłuż CB powodujący powstanie uskoku BB' na



Rys. 2

swobodnej powierzchni gruntu. Uskok ten będzie się powiększał do chwili, gdy odcinek $C'E$, na którym ściana napiera na część masywu poniżej linii odłamu BC' , będzie dostatecznie duży dla utworzenia się nowej linii odłamu ED . W ciągu całego procesu powstają kolejno nowe linie odłamu, wzdłuż których zachodzą poślizgi całych partii gruntu. W rezultacie na powierzchni deformowanego gruntu powstaje szereg uskoków (rys. 2b).

Dotychczas, zarówno w teorii plastyczności, jak i w teorii mechaniki gruntów brak jest metod obliczeniowych pozwalających rozwiązywać konkretne zagadnienia deformowania materiałów z niestateczną charakterystyką wytrzymałościową. Nie ma jeszcze dostatecznej liczby danych doświadczalnych z badań zjawiska niestateczności w ogólniejszych trójosiowych stanach naprężenia. Nie pozwala to na opracowanie ilościowe podstaw teorii gruntów mających niestateczną charakterystykę. Opracowanie takiej teorii nie rozwiązywałoby jeszcze sprawy teoretycznej analizy mechaniki konkretnych procesów

urabiania, ponieważ skokowy przebieg tych procesów dla ośrodków niestatecznych wymagałby dodatkowego opracowania metod rozwiązywania zagadnień brzegowych. W obecnej fazie rozwoju teorii procesów urabiania zjawisko niestateczności musi być z konieczności pominięte. Przyjmując dla rzeczywistych gruntów warunek stanu granicznego bez niestateczności, otrzymamy w wyniku teoretycznej analizy procesów urabiania pewne uśrednienie ich przebiegu. W przypadku pokazanym na rys. 2b otrzymalibyśmy, zamiast skokowego charakteru zdeformowanej powierzchni gruntu, uśrednioną pewną linię zastępczą.

Innym ważnym, a dotychczas słabo opracowanym, zagadnieniem jest wpływ prędkości odkształcenia na opór gruntu przy deformacji. Przede wszystkim brak jest danych doświadczalnych pokazujących zmianę oporu gruntu w zależności od prędkości odkształcania dla złożonych stanów naprężenia. Obszerniejsze badania w tym zakresie pozwoliłyby podjąć próbę teoretycznego opisu wpływu prędkości przy odkształcaniu gruntu. Miałoby to podstawowe znaczenie dla ustalenia kryteriów podobieństwa przy modelowych badaniach procesów urabiania. Jako najprostszą można by wysunąć sugestię uzależnienia obu stałych q i H w warunku Coulomba-Mohra od odpowiednio obliczonej zastępczej prędkości odkształcania. Pewne próby opisu własności reologicznych gruntów zawarto w monografii [3]. Rozważania te mają jednak raczej związek ze zjawiskami pelzania gruntu przy posadowieniu na nim budowli. Zjawiska te przebiegają z bardzo małymi prędkościami odkształcania, znacznie mniejszymi od prędkości występujących przy mechanicznej obróbce gruntów. Należy tu zwrócić uwagę, że również dla metali brak jest dostatecznej dokumentacji doświadczalnej dla różnych proponowanych w teorii lepkoplastyczności opisów zmiany własności przy różnych prędkościach odkształcania.

3. Związki między naprężeniami a prędkościami odkształcenia

Sprawa wyboru związków pomiędzy naprężeniami a prędkościami odkształcenia ma podstawowe znaczenie dla opracowania teorii urabiania gruntów. Istnieje kilka koncepcji budowy takich związków. Źródłowy przegląd tych koncepcji zawierają prace [4, 5, 6], a sprawie wyboru najbardziej odpowiedniej z nich dla teorii procesów mechanicznego urabiania gruntów poświęcono poprzednią pracę [7].

Możliwe są dwie drogi eksperymentalnego badania przydatności tej czy innej koncepcji związków fizycznych do teoretycznej analizy procesów urabiania. Pierwsza droga, to badania typu podstawowego na aparatach trójosiowych przy zastosowaniu cylindrycznych, pełnych lub rurkowych, próbek gruntu. Badania takie są pracochłonne i chociaż z naukowego punktu widzenia są najbardziej odpowiednie nie wydaje się, aby tą drogą można było uzyskać niezbędną ilość danych doświadczalnych. Druga droga, to badania typu weryfikacyjnego, polegające na teoretycznym opracowaniu kinematyki gruntu dla wybranych procesów odkształcania przy zastosowaniu różnych związków fizycznych, a następnie na porównaniu tych rozwiązań z rzeczywistą kinematyką otrzymaną na stanowiskach modelowych. Taką drogę postępowania przyjęto w pracach [4] i [5], w zastosowaniu do zagadnień wciskania stempli o różnych kształtach. Badania tego typu bliższe procesom urabiania gruntów przedstawiono w pracy [7].

Szczególnie przydatny do badań modelowych okazał się proces spiętrzania gruntu, analogiczny do procesu występującego w pewnej fazie pracy zgarniaka. Rozwiązanie teoretyczne dla tej fazy procesu jest bardzo proste (rys. 3), co znacznie ułatwia analizę wyników doświadczalnych. Jeżeli swobodna powierzchnia badanego ośrodka jest prostoliniowa, to rozwiązanie da się wyrazić elementarnymi wzorami.

Z różnych teoretycznych propozycji praw płynięcia dla gruntów dwie mają charakter związków ogólnych obejmujących dowolne stany naprężenia. Pierwsza, to prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem stanu granicznego Coulomba-Mohra

$$(3.1) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}.$$

W związkach tych zaproponowanych przez DRUCKERA i PRAGERA [8] utożsamiono potencjał plastyczny z warunkiem stanu granicznego (2.1). Wynika z nich efekt ciągłego przyrostu objętości ośrodka w procesie odkształcania, co szczególnie przy znacznie większych odkształceniach jest sprzeczne z własnościami rzeczywistych gruntów. W teorii płaskiego stanu płynięcia związki (3.1) prowadzą do pokrywania się charakterystyk dla naprężeń i prędkości.

W drugiej propozycji praw płynięcia dla gruntów [9, 4] przyjmuje się jako jedną z zależności warunek nieściśliwości. Drugą zależnością jest pokrywanie się kierunków głównych tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcania. Tak sformułowane prawo płynięcia można ogólnie zapisać w postaci

$$(3.2) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right).$$

Jest ono więc identyczne ze związkami Lévy'ego-Misesa dla ośrodków idealnie plastycznych. Wyniki doświadczalne uzyskane w pracach [4] i [7] wykazują, że koncepcja ta może być bardzo przydatna przy analizie procesów urabiania gruntów. W przypadku płaskiego stanu płynięcia charakterystyki dla prędkości będą teraz ortogonalne i nie będą pokrywały się z charakterystykami dla naprężeń.

4. Równania płaskiego stanu płynięcia gruntów

Wiele praktycznie ważnych procesów urabiania gruntów przebiega w warunkach płaskiego stanu płynięcia i z tego względu teorii tego stanu poświęca się wiele uwagi. Zwykle przyjmuje się taką orientację układu współrzędnych x , y , z , aby stan naprężenia i pole prędkości były niezależne od współrzędnej z . Oś y skierowana jest pionowo w dół. Stan płaskiego płynięcia opisany jest układem pięciu równań, mianowicie:

a) warunkiem stanu granicznego

$$(4.1) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y + 2H)^2 \sin^2 \varrho,$$

w którym, jak wspomniano w punkcie 2, wielkości H i ϱ można by uzależnić od prędkości odkształcania;

b) równaniami ruchu

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g} \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \gamma; \end{aligned}$$

c) warunkiem nieściśliwości

$$(4.3) \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0;$$

d) warunkiem izotropii

$$(4.4) \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \operatorname{tg} 2\varphi = 0.$$

Równania (4.3) i (4.4) odpowiadają założeniu prawa płynięcia (3.2). Wielkość φ jest kątem, jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią x , a więc nie jest nową niewiadomą, gdyż kąt ten może być określony przez składowe naprężenia.

Perspektywy uzyskania rozwiązań dla konkretnych problemów brzegowych sformułowanych dla powyższego układu równań można ocenić przez porównanie z problemem płaskiego płynięcia metali opisanym analogicznym, ale nieco prostszym układem równań. Wiadomo (patrz np. [10]), że dotychczas nie ma efektywnej metody rozwiązania dla płaskiego płynięcia metali z uwzględnieniem sił bezwładności i czułości materiału na prędkość odkształcania. Możliwa jest jedynie analiza quasi-statyczna, w której pomija się również efekty wzrostu oporu plastycznego przy zwiększaniu prędkości odkształcania. Wynika stąd, że również dla gruntów możliwe będzie obecnie uzyskanie rozwiązań quasi-statycznych. Większość procesów urabiania gruntów przebiega z niezbyt dużymi prędkościami i pominięcie sił bezwładności w równaniach (4.2) nie spowoduje godnych uwagi błędów. Pominięcie wpływu prędkości odkształcania gruntu na jego opór plastyczny może jednak nawet przy praktycznie stosowanych prędkościach urabiania dać znaczne odchylenia. Trudność tę można by częściowo ominąć oceniając wstępnie średnią prędkość odkształcania, jaka wystąpi w rozpatrywanym procesie i przy takiej prędkości wyznaczyć doświadczalnie stałe H i ρ .

W następnych punktach zostaną przedstawione przykłady quasi-statycznych rozwiązań dla praktycznych procesów urabiania gruntów. Będą one polegały na rozwiązywaniu zagadnień brzegowych dla wyżej podanego układu równań, w którym zamiast równań ruchu (4.2) wystąpią równania równowagi

$$(4.2a) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma.$$

W tym zmodyfikowanym układzie pola naprężeń i prędkości są sprzężone tylko przez warunki brzegowe. Rozwiązanie równań dla naprężeń przeprowadza się w klasyczny sposób [1] metodą charakterystyk. Równania różniczkowe charakterystyk mają znaną postać

$$(4.5) \quad dy = \operatorname{tg}(\varphi \pm \varepsilon) dx, \quad d\sigma \pm 2\sigma \operatorname{tg} \varphi d\varphi = \gamma(dy \pm \operatorname{tg} \varphi dx).$$

Pomocnicze wielkości σ i φ są określone przez podstawienia

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \end{array} \right\} = \sigma(1 \pm \sin \varrho \cos 2\varphi) - H, \quad \tau_{xy} = \sigma \sin \varrho \sin 2\varphi.$$

Równania dla prędkości mają charakterystyki ortogonalne o współczynnikach kierunkowych

$$(4.6) \quad dx/dy = \operatorname{tg} \left(\varphi \pm \frac{\pi}{4} \right).$$

A zatem charakterystyki dla naprężeń i prędkości nie pokrywają się. Przyjęta procedura budowania konkretnych rozwiązań polega na wyznaczeniu najpierw siatki charakterystyk dla naprężeń, a następnie na wykreślonym wyznaczeniu siatki charakterystyk dla prędkości. Pole prędkości określa się budując hodograf według metod identycznych, jak w teorii plastyczności (patrz np. [10]). Metodę tę zastosowano w pracy [4] rozwiązując zagadnienie wciskania sztywnego klina w suchy piasek. Posłużono się nią również w pracy [7] do analizy kinematyki ośrodka idealnie sypkiego przy naporze pionowej ściany. W obu powyższych pracach otrzymano dobrą zgodność wyników z badaniami eksperymentalnymi.

W przypadkach biernego parcia gruntu, jakie zwykle występują w procesach urabiania, obszar odkształcania ograniczony przez skrajne linie siatki charakterystyk pola prędkości mieści się całkowicie wewnątrz obszaru pokrytego siatką charakterystyk dla naprężeń.

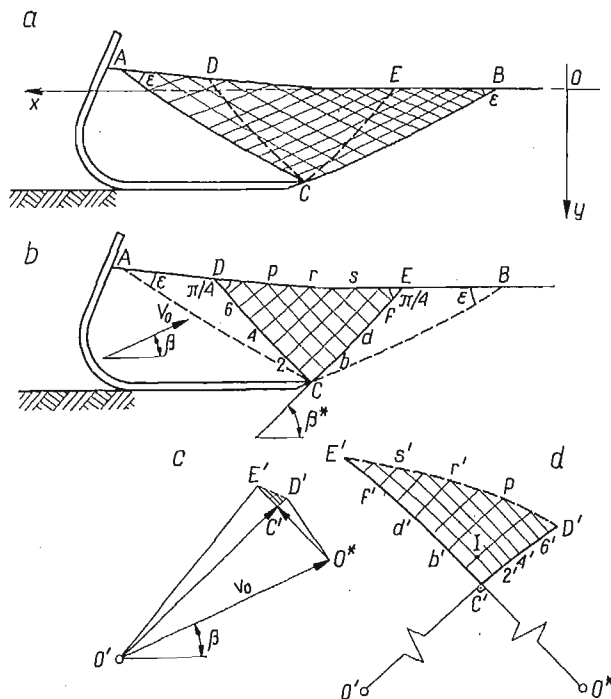
Poniżej podamy kilka typowych przykładów zastosowania teorii płaskiego stanu płynięcia do analizy mechaniki gruntu przy urabianiu różnymi narzędziami. We wszystkich przypadkach założono więc, że swobodna powierzchnia gruntu jest walcowa, ale profil jej może mieć dowolną postać.

Podobnie jak w teorii obróbki plastycznej metali [10], różne procesy urabiania gruntów można rozpatrywać jako procesy niestacjonarne stosując procedurę kolejnych kroków. Zakładając początkową konfigurację swobodnego brzegu, można wyznaczyć odpowiadające jej pole prędkości. Pole to można uważać za niezmiennie w okresie dostatecznie małego przyrostu czasu. Taka przybliżona metoda umożliwia wyznaczenie deformacji jakiej doznała swobodna powierzchnia gruntu w okresie tego przyrostu czasu. Następnie dla nowego kształtu powierzchni buduje się nowe rozwiązanie i nową deformację swobodnej powierzchni. Procedurę tę można powtarzać aż do momentu, gdy dla jakiegoś stopnia deformacji powierzchni niemożliwe już będzie zbudowanie rozwiązania teoretycznego. Podany zostanie również przykład takiej sytuacji.

5. Rozwiązanie dla narzędzia typu zgarniaka [11]

Narzędzie zgarniające o przekroju pokazanym schematycznie na rys. 3 zamknięte jest z obu stron ścianami równoległymi do płaszczyzny rysunku. Ściany te uniemożliwiają odkształcanie gruntu w kierunku osi z stwarzają warunki zbliżone do płaskiego stanu odkształcania. Przyjmijmy, że narzędzie porusza się z prędkością v_0 o wektorze nachylnym pod kątem β ($0 \leq \beta \leq \beta^*$) względem poziomu. Zakładamy, że kształt profilu AB swobodnej powierzchni gruntu w rozpatrywanej chwili jest znany.

Siatkę charakterystyk dla naprężeń pokazaną na rys. 3a otrzymano przez rozwiązanie zagadnienia brzegowego Cauchy'ego, określonego przez znane wartości σ i φ na swobodnej powierzchni AB . Siatka ta pokrywa obszar krzywoliniowego trójkąta ABC . Położenie punktów A i B określa warunek przechodzenia skrajnych charakterystyk AC i BC przez ostrze zgarniaka C .



Rys. 3

Na rys. 3b przedstawiono siatkę charakterystyk dla prędkości wyznaczoną wykreślnie na podstawie siatki charakterystyk dla naprężeń. Obszar odkształcanego gruntu DEC ograniczają linie nieciągłości prędkości EC i DC . Cząstki gruntu położone na prawo od CE pozostają w spoczynku, a cały obszar na lewo od DC porusza się jak sztywna całość wraz z narzędziem z prędkością v_0 .

Konstrukcję hodografu (rys. 3c) rozpoczynamy od rozpatrzenia warunków zwartości w punkcie C , w którym prędkość od strony obszaru odkształcanego musi być skierowana stycznie do CE . Ponadto skok prędkości na linii nieciągłości CD musi być do niej styczny. Prędkość punktu C będzie więc przedstawiał na płaszczyźnie hodografu punkt C' , przy czym odcinek $O'C'$ jest równoległy do stycznej do CE w punkcie C , zaś O^*C' poprowadzono równoległe do stycznej do CD w punkcie C . Obie linie nieciągłości CE i CD reprezentowane są na płaszczyźnie hodografu odpowiednio przez łuki kół $C'E'$ i $C'D'$. Prędkości wewnętrznych punktów trójkąta ABC znajdujemy przez poprowadzenie na hodografie siatki linii ortogonalnych do charakterystyk prędkości. Tę część hodografu pokazano w powiększeniu na rys. 3d.

Z hodografu wynika, że kąt β nachylenia prędkości v_0 do osi x nie może być większy od kąta β^* , jaki tworzy styczna do EC w punkcie C z poziomem. Dla $\beta > \beta^*$ wektor nieciągłości prędkości wzdłuż CD miałby taki sam zwrot, jak naprężenie styczne. Dysypacja energii na linii nieciągłości CD byłaby więc ujemna. Rozwiązanie tego typu dla $\beta > \beta^*$ byłoby niepoprawne. Przykład ten wskazuje na konieczność zwrócenia uwagi na zachowanie warunku, aby dysypacja energii była wszędzie nieujemna.

Jeżeli profil powierzchni gruntu tworzy prosta nachylona pod pewnym kątem do poziomu, to charakterystyki dla naprężeń i prędkości wyznacza się z prostych równań parametrycznych. Dla ośrodka bez spójności, siatki charakterystyk dla naprężeń i prędkości składają się z linii prostych. Rozwiązania te o dużym znaczeniu praktycznym przedstawiono w pracy [7] wraz z weryfikacją doświadczalną. Otrzymano dobrą zgodność teoretycznych i doświadczalnych pól prędkości dla suchego piasku i dla modelu ośrodka złożonego ze szklanych pręcików.

6. Rozwiązania dla łyżki ładowarki [11]

Charakter pracy łyżki ładowarki zbliżony jest do pracy zgarniaka omówionej w poprzednim punkcie. Rozwiązania teoretyczne są jednak odmienne. Maksymalne obciążenie łyżki powstaje w końcowej fazie procesu napełniania, a więc dla tego etapu pracy rozwiązania będą miały znaczenie techniczne. Ze względu na inne ukształtowanie łyżki niż zgarniaka, przy próbach zbudowania siatki charakterystyk dla naprężeń takiego typu, jak na rys. 3 przecięlibyśmy charakterystyką CA ścianę łyżki, co byłoby sprzeczne z istniejącymi na niej warunkami tarcia. Z kilku możliwych wariantów rozwiązań teoretycznych dla pracy łyżki przytoczymy dwa najbardziej typowe.

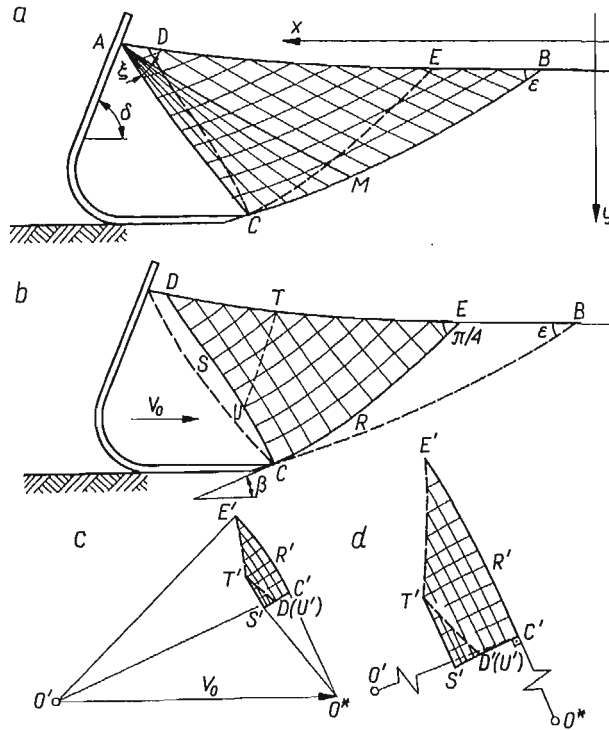
Pierwszy przykład przedstawia rys. 4. W siatce charakterystyk dla naprężeń (rys. 4a) linia AM , wynikająca z rozwiązania zagadnienia brzegowego Cauchy'ego w trójkącie ABM nie przechodzi przez krawędź łyżki C . Pozostałą część siatki tworzy wachlarz CAM . Kąt wachlarza ξ wynika z warunku przechodzenia skrajnej charakterystyki przez punkt C .

Rozwiązanie statyczne tego typu jest możliwe, jeżeli współczynnik tarcia μ pomiędzy gruntem a wewnętrzną powierzchnią łyżki jest dostatecznie duży. Warunek lokalnej równowagi w punkcie A będzie spełniony, jeżeli $|\tau_{nt}| \leq \mu\sigma_n$, gdzie σ_n i τ_{nt} są odpowiednio naprężeniem normalnym i stycznym działającym na ścianę. Dla danego μ graniczna dopuszczalna wartość kąta wachlarza ξ^* wynika z równości $|\tau_{nt}| = \mu\sigma_n$. Jeżeli dla uzyskania przechodzenia skrajnej charakterystyki wachlarza przez punkt C konieczny byłby kąt ξ większy od granicznej wartości ξ^* , to rozwiązanie tego typu nie spełniałoby warunków statycznych w otoczeniu punktu A . Dalej omówimy typ rozwiązania dotyczący takich przypadków.

Siatka charakterystyk dla prędkości może mieć wachlarz z biegunem w punkcie A , albo ograniczać się do krzywoliniowego trójkąta w zależności od geometrii łyżki i swobodnej powierzchni ośrodka. Na rys. 4b przedstawiono ten drugi typ siatki, a na rys. 4c zbudowany na jej podstawie hodograf. Ma on podobną budowę, jak hodograf podany w poprzednim punkcie. Nieznaczna zmiana budowy wynika z faktu zmiany znaku krzywizny linii nieciągłości CD w punkcie S . Każdy punkt trójkąta $D'S'T'$ na planie prędkości

przedstawia jednocześnie prędkości ruchu dwóch różnych punktów na płaszczyźnie fizycznej. Na przykład punkty D i U , w których nachylenie stycznej do charakterystyki DC jest takie samo, są na płaszczyźnie hodografu reprezentowane przez jeden punkt $D'(U')$ — rys. 4d.

Jeżeli współczynnik tarcia na wewnętrznej ścianie łyżki jest zbyt mały, to skrajna charakterystyka wachlarza wychodząca z punktu A pod kątem ξ^* nie przejdzie przez



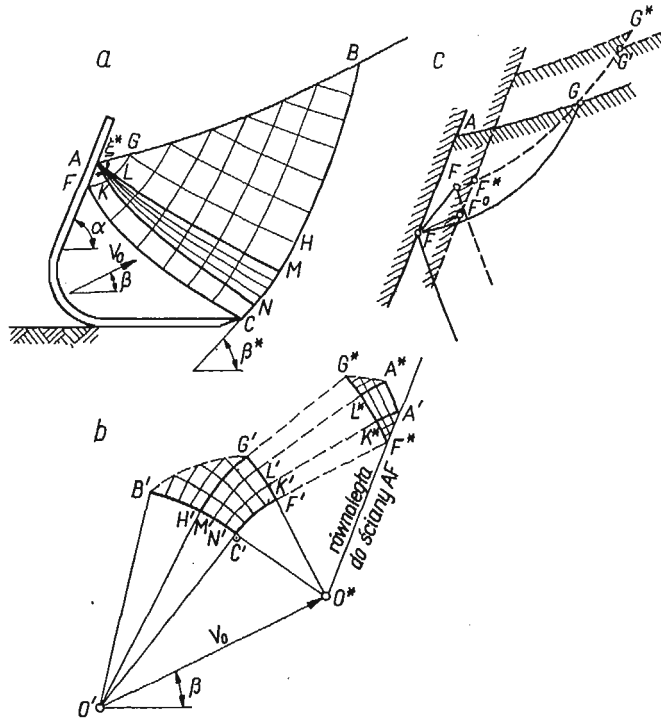
Rys. 4

krawędź łyżki C . Na rys. 5 przedstawiono schemat rozwiązania takiego przypadku dla gruntu idealnie spójnego, dla którego charakterystyki dla naprężeń i prędkości pokrywają się.

Jak w poprzednim przypadku kąt ξ^* wachlarza będzie określony przez warunek tarcia $|\tau_{nt}| = \mu\sigma_n$ na ścianie AF . Warunek ten wraz z charakterystyką AN wyznacza jednoznacznie siatkę charakterystyk w obszarze $AFCN$. Położenie punktu F wynika z warunku, że charakterystyka FC musi przechodzić przez ostrze łyżki C .

Obszar zalegający na lewo od FC porusza się jak sztywna całość wraz z łyżką, a cały maszyn gruntu na prawo od BC pozostaje w spoczynku. Dla spełnienia warunków zwarłości w otoczeniu linii styku AF konieczne jest wprowadzenie dodatkowej linii nieciągłości prędkości $FKLG$. Sytuację w tym miejscu po małym przesunięciu łyżki pokazuje rys. 5c. Dolna i górna strona tej linii nieciągłości są reprezentowane na płaszczyźnie hodografu odpowiednio przez łuki $F'G'$ i F^*G^* . Odcinek $F'F^*$ przedstawia skok prędkości wzdłuż

tej linii. Prosta O^*F^* jest poprowadzona równolegle do AF , ponieważ względna prędkość przeslizgu ośrodka po ścianie łyżki musi być do niej styczna. Prędkości punktów leżących na swobodnej powierzchni gruntu są na hodografie reprezentowane przez punkty dwóch łuków $B'G'$ i G^*A^* . A zatem w punkcie G tworzy się na powierzchni uskok.

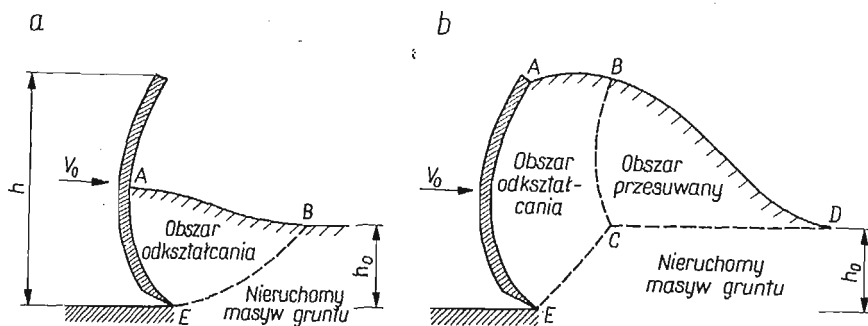


Rys. 5

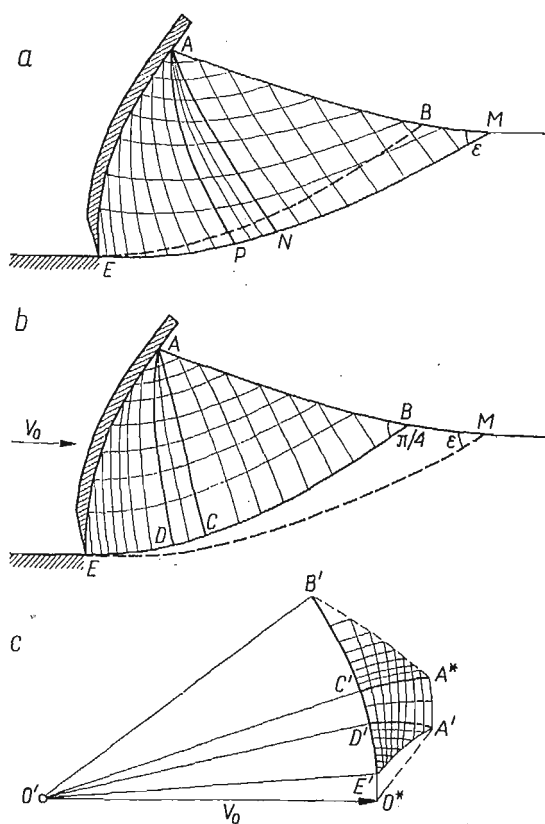
Jeżeli przyjąć, że stan graniczny ośrodka opisany jest warunkiem Coulomba–Mohra (2.1), to z wyżej podanym rozwiązaniem mogą być związane różne typy pól prędkości. Problem ten omówiono szerzej w pracy [11].

7. Mechanika procesów spychania gruntów [12]

Przedstawimy teraz dwa typy rozwiązań związanych z pracą lemieszka spychacza. Można wyróżnić dwie podstawowe fazy pracy lemieszka, mianowicie fazę początkową (rys. 6a) i fazę końcową (rys. 6b). W fazie początkowej niejednorodne pole prędkości obejmuje obszar ABE przylegający bezpośrednio do ściany lemieszka i oddzielony od nieruchomej części gruntu wyraźnie widoczną linią nieciągłości BE . W fazie końcowej oprócz obszaru niejednorodnego ruchu $ABCE$ pojawia się obszar BCD przemieszczający się jak sztywny blok po początkowej powierzchni gruntu CD . Obszar BCD może nie być w stanie granicznym, co powoduje znaczne trudności w sformułowaniu zagadnień na wartości brzegowe. Obecnie nie udaje się jeszcze otrzymać rozwiązań dla tej końcowej fazy procesu. Rozważania nasze ograniczymy zatem tylko do fazy początkowej.



Rys. 6

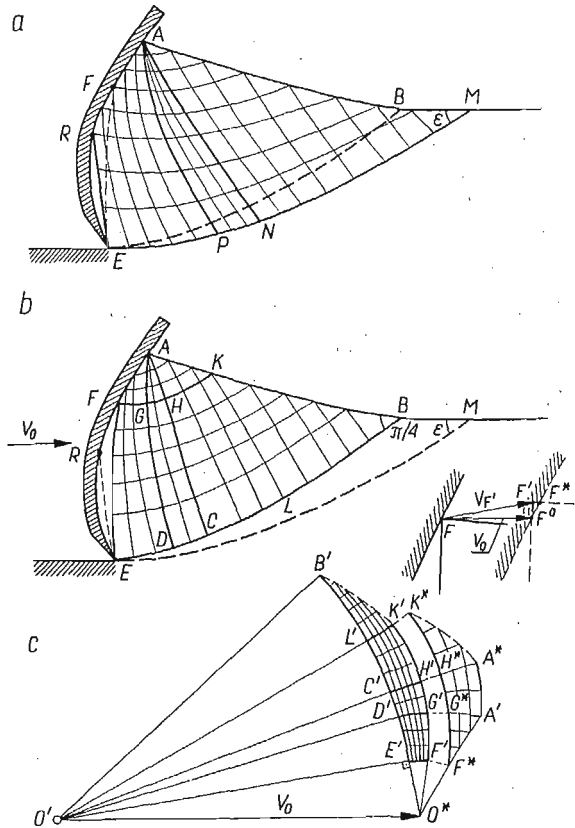


Rys. 7

Stosując metodę kolejnych kroków można prześledzić dość znaczną część przebiegu początkowej fazy pracy lemieszki. Dla każdego kroku wyznacza się siatki charakterystyk dla naprężeń i prędkości, a następnie po zbudowaniu hodografu określa zmianę kształtu powierzchni gruntu dla tego kroku. Stanowi to punkt wyjścia dla zbudowania rozwiązania w następnym kroku.

W zależności od kształtu i położenia lemieszka oraz formy powierzchni gruntu można otrzymać różne typy rozwiązań dla początkowej fazy pracy lemieszka. W pewnych przypadkach na całej powierzchni lemieszka może występować przeslizg gruntu. W innych przypadkach mogą tworzyć się obszary martwego materiału przylegającego do lemieszka na całej lub części długości jego profilu. Poniżej podamy dwa przykłady takich rozwiązań.

Jako pierwszy omówimy przypadek, gdy przeslizg gruntu następuje na całej powierzchni lemieszka. Lemiesz przesuwają się na prawo z zadaną prędkością v_0 . Kształt swobodnej powierzchni gruntu AM (rys. 7) jest również znany.



Rys. 8

Siatkę charakterystyk dla naprężeń przedstawia rys. 7a. Na jej podstawie została następnie zbudowana wykreślnie siatka charakterystyk dla prędkości (rys. 7b). Obszar odkształcania gruntu ograniczony jest linią nieciągłości prędkości $EDCB$, poniżej której cząstki gruntu pozostają w spoczynku.

Budowę hodografu (rys. 7c) rozpoczynamy od punktu E rozkładając prędkość lemieszka v_0 na składową przeslizgu wzdłuż linii nieciągłości EB (wektor $O'E'$) i wzdłuż powierzchni lemieszka (wektor O^*E'). Linię nieciągłości EB reprezentuje na hodografie łuk koła $E'B'$. W obszarze EDA pole prędkości jest określone przez warunek, że prędkość przeslizgu gruntu po lemieszku musi być styczna do jego powierzchni, oraz przez dane na ED . Profil

lemiesza reprezentuje na hodografie łuk $E'A'$. Punkтови osobliwemu A odpowiada na płaszczyźnie hodografu odcinek $A'A^*$, a odcinek $B'A^*$ przedstawia prędkości punktów swobodnej powierzchni gruntu BA . Prędkość ruchu dowolnego punktu obszaru odkształcania znajdujemy jako wektor łączący biegun hodografu O' z punktem hodografu odpowiadającym wybranemu punktowi na płaszczyźnie fizycznej. Dla wyznaczenia prędkości ruchu cząstek gruntu względem lemiesza należy jako biegun przyjąć punkt O^* . Widoczne jest, że pole prędkości odniesione do lemiesza jest silnie niejednorodne. Fakt ten stwierdzono również doświadczalnie w badaniach modelowych przy użyciu suchego piasku [14].

Rysunek 8 przedstawia inny typ rozwiązania, w którym pojawia się martwy obszar gruntu przylegający do części profilu lemiesza. W rozwiązaniu statycznym (rys. 8a) charakterystyka RE wychodząca z punktu R przechodzi przez ostrze lemiesza E . Podobna sytuacja występuje w siatce charakterystyk dla prędkości (rys. 8b), w której charakterystyka EF wychodząca z punktu E przecina kontur lemiesza w punkcie F . Obszar odkształcania gruntu zawiera się między odcinkiem AF profilu lemiesza i charakterystykami FE i EB . Obszar na lewo od FE stanowi martwą strefę poruszającą się jak sztywna całość wraz z lemieszem. Oprócz obu linii nieciągłości prędkości FE i EB pojawia się trzecia linia nieciągłości FK , konieczna dla spełnienia warunków zwartości w punkcie F .

Na planie prędkości (rys. 8c) znajdujemy promienie $O'E'$ i O^*E' łuków $E'B'$ i $E'F'$ reprezentujących linie nieciągłości EB i EF rozkładając prędkość v_0 na składowe wzdłuż tych linii. Linie nieciągłości FK reprezentują dwa równoległe łuki $F'K'$ i F^*K^* . Swobodnemu brzegowi AB odpowiadają na płaszczyźnie hodografu dwa łuki A^*K^* i $B'K'$. W punkcie K powstaje więc uskok w procesie odkształcania.

8. Uwagi końcowe

Rozwiązania przedstawione powyżej należy traktować jako pierwszy krok w kierunku zbudowania teorii procesów mechanicznego urabiania gruntów opartej na bardziej solidnych podstawach. Obszerne badania doświadczalne [14] przeprowadzone na suchym piasku wskazują, że rozwiązania takie mają znaczenie praktyczne przynajmniej dla ośrodków bezkohezyjnych. Dobrą zgodność teoretycznych i doświadczalnych pól prędkości otrzymano dla piasku w stanie luźnym. Nieco gorszą zgodność otrzymano dla piasku w stanie zagęszczonym. Niezbędne są dalsze badania doświadczalne, przede wszystkim dla grutów ze spójnością oraz dla gruntów wykazujących niestateczność krzywych naprężenie-odkształcenie.

Literatura cytowana w tekście

1. В. В. Соколовский, *Статика сыпучей среды*, Москва 1960.
2. П. И. Перлин, *Об уравнениях пластичности при некотором предельном условии*, Прикл. Мат. Мех., 3, 26 (1962), 580–582.
3. I. KISTEL, *Reologia w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1967.
4. A. DRESCHER, K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *Statics and kinematics of the granular medium in the case of wedge indentation*, Arch. Mech. Stos., 1, 19 (1967), 99–113.
5. A. DRESCHER, A. BUJAK, *Kinematyka ośrodka sypkiego na przykładzie wciskania płaskiego stempla*, Rozpr. Inż., 2, 14 (1966), 313–325.
6. A. J. M. SPENCER, *A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions*, J. Mech. Phys. Sol., 12 (1964), 337–351.

7. W. SZCZEPIŃSKI, H. WINEK, *Doświadczalne studium kinematyki ośrodka sypkiego dla pewnych problemów brzegowych*, Rozpr. Inż., 1, 20 (1972).
8. D. C. DRUCKER, W. PRAGER, *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*, Quart. Appl. Math., 10 (1952), 157—165.
9. A. W. JENIKE, R. T. SHIELD, *On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure*, J. Appl. Mech., 27 (1959), 599—602.
10. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej metali*, PWN, Warszawa 1967.
11. W. SZCZEPIŃSKI, *Mechanika ośrodka sypkiego przy pracy łyżki ładowarki*, Arch. Bud. Maszyn, 3, 18 (1971), 463—478.
12. W. SZCZEPIŃSKI, *Mechanika ruchu ośrodka sypkiego w początkowej fazie pracy lemieszka sypcharki*, Arch. Bud. Maszyn, 1, 19 (1972), 15—24.
13. W. SZCZEPIŃSKI, *Some slip-line solutions for earthmoving processes*, Arch. Mech. Stos., 6, 23 (1971), 885—896.
14. W. SZCZEPIŃSKI, H. WINEK, *Badania modelowe procesów mechanicznego urabiania gruntów* (w przygotowaniu).

Резюме

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ЗЕМЛЕРОЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Обсуждаются вопросы, вытекающие из попытки построения математической теории землеройных процессов при помощи тяжелых строительных землеройных машин. Исследуются возможности формулировки наиболее правильного критерия предельного напряженного состояния и соответствующих зависимостей между тензорами напряжений и скоростей деформирования. Отмечается, что в данной стадии изучения вопроса при решении практически интересных проблем нет возможности учитывать силы инерции и влияние скоростей деформирования. Другие трудности возникают в связи с тем, что для грунтов с неустойчивой характеристикой напряжение — деформация, способ деформирования среды при землеройных процессах подвергается скачкообразным изменениям.

Излагается несколько квазистатистических решений некоторых практически интересных процессов. При этом предполагаются: жестко-пластическая модель материала без неустойчивости характеристики напряжение-деформация, неассоциированный закон течения, несжимаемость и изотропия.

Summary

PROBLEMS OF THE THEORY OF EARTHMOVING PROCESSES

Discussed are the problems resulting if an attempt is undertaken to build the mathematical theory of the mechanics of earthmoving processes with the use of heavy construction machinery. Discussed are problems of the choice of the most suitable limit state criterion for stresses and of the respective relations between the stress and strain-rate tensors. It is pointed out that, at present, the inertia forces and strain rate effects cannot be accounted for in solutions of practical problems. Another difficulty arises from the fact that if the stress-strain curve for a given soil is unstable, the deformation during earthmoving process proceeds in a non-continuous manner.

Presented are several quasi-static solutions for some practical processes. The rigid-plastic model of the material without instability in the stress-strain curve has been assumed. A non-associated flow rule assuming incompressibility and isotropy of the soil has been introduced.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 31 października 1971 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W CZWARTYM KWARTALE 1971 r.

W okresie tym zorganizowano 19 zebrań i sesji naukowych, na których wygłoszono 26 referatów.

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczest-	dysku-
				ników	tantów
Oddział w Bydgoszczy					
1.	24.11	W. Weiner	Zależność cech materiałowych przy zginaniu epoksydowego tworzywa zbrojonego włóknem szklanym od szerokości kształtki		
		H. Holka	Wpływ drgań wybranych elementów obrabiarki na chropowatość powierzchni toczenia wykańczającego stopów aluminiowych	11	6
2.	20.12	J. Steinborn	Zmienność modułu sprężystości liniowej epoksydowego tworzywa zbrojonego włóknem szklanym w próbie rozciągania		
		B. Siolkowski	Wpływ rozstawu podpór na granice statecznej pracy wałów wysięgnikowych	28	8
Oddział w Częstochowie					
3.	4.10	S. Ziemia (Warszawa)	Tarcie i zużycie a niezawodność w procesach obróbki plastycznej	19	6
4.	29.10	Z. Olesiak (Warszawa)	Zagadnienia szczelin	26	3
5.	10.11	W. Lenkiewicz	Natura procesów tarcia	38	8
6.	1.12	Z. Marciniak (Warszawa)	Problemy lokalnej utraty stateczności powłok plastycznych poddanych dwuosowemu rozciąganiu	11	—
7.	17.12	E. Olszewski i S. Waczyński	Mechanizm planetarno-kulisowy o jednym zmiennym parametrze jako transformator ruchu obrotowego	10	4
8.	9.11	W. Nowacki (Warszawa)	Termodyfuzja w ciałach stałych	50	4
Oddział w Gliwicach					
9.	25.11	Cz. Woźniak (Warszawa)	Dyskretna teoria sprężystości i jej zastosowania w mechanice konstrukcji	29	7
Oddział w Krakowie					
10.	17.11	W. Bogusz	Sprawozdanie z Kongresu Teorii Maszyn w Dubrowniku oraz Sprawozdanie z konferencji Mechaniki w Berlinie		

		Z. Engel	Sprawozdanie z VII Konferencji Dynamiki Maszyn w Gliwicach		
		S. Szefer	Sprawozdanie z Sympozjum nieklasycznych zagadnień teorii sprężystości w Kijowie		
		M. Chrzanowski	Pelzanie rury grubościennnej z uwzględnieniem równoczesnego narastania uszkodzeń	15	8
11.	2.12	S. Böttcher (Berlin)	Obciążenie dynamiczne i ich zmiany w czasie oraz wpływ na żywotność napędów hutniczych	38	9
12.	13.12	J. Szmelter (Warszawa)	Zastosowanie metody elementów skończonych w mechanice teoretycznej	33	8
Oddział w Poznaniu					
13.	29.11	J. Kubik	Działanie karbu w świetle analizy wymiarowej	18	4
14.	13.12	Z. Sobczyńska	Zagadnienia niesymetrycznej teorii konsolidacji	14	5
Oddział w Szczecinie					
15.	28.10	J. Dorobczyński	Krytyczny stan równowagi ściskanego pręta wstępnie sprężonego	17	7
16.	18.12	W. Nowacki (Warszawa)	O niesymetrycznej teorii sprężystości	36	6
Oddział w Warszawie					
17.	6.12	Cz. Woźniak W. Kufel M. Kleiber	Wprowadzenie do dyskretnej teorii sprężystości Niektóre twierdzenia dyskretnej teorii sprężystości Dyskretne powłoki sprężyste	40	5
Oddział we Wrocławiu					
18.	29.11	E. Brzuchowski	Znane i nieznanne własności eksponenty	11	3
19.	6.12	Z. Mazurkiewicz	Historia mechaniki teoretycznej i stosowanej w Polsce	33	5

Sympozja

Oddział w Łodzi zorganizował wspólnie z Instytutem Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej II Sympozjum na temat «Stateczności konstrukcji» z udziałem 90 osób (w tym 40 spoza ośrodka łódzkiego). W dyskusji zabrały głos 52 osoby.

Wygłoszono 22 następujące referaty podzielone na trzy grupy tematyczne oraz wydano streszczenia referatów.

I. Stateczność prętów i układów prętowych

1. W. Gutkowski
J. Bauer Stateczność regularnych konstrukcji prętowych
2. E. Switoński Stateczność prętów cienkościennych o profilu odwrotnym i zmiennym przekroju
3. B. Husiar O pewnym przypadku stateczności pasma rusztowego
4. J. Murzewski, J. Siepak Zwichrzenie powłokowego dźwigara naprężonego przy obciążeniach losowych
5. J. Juszkievicz Zwichrzenie stalowych belek ciągłych
6. H. Kopecki, J. Zacharzewski Energia dysponowana jako kryterium do określania czasu krytycznego pręta ściskanego z materiału o własnościach reologicznych

II. Stateczność płyt

7. R. Dąbrowski Stany podkrytyczne w cienkich środnikach elementów metalowych
8. L. Adamiec Metoda energetyczna w zastosowaniu do określania obciążeń krytycznych płyt poddanych działaniu sił skupionych
9. W. Walczak Wpływ wstępnych ugięć na pracę płyty prostokątnej zginanej w swej płaszczyźnie
10. M. Trombski Praca płyt pierścieniowych ortotropowych po utracie stateczności
11. Z. Waszczyszyn Wyboczenie dwuwarstwowych płyt kołowych poza zakresem sprężystym
12. M. Kmieciak Nośność graniczna osiowo ściskanych wzdłużnie uźebrowanych płyt okręgowych

III. Stateczność powłok

13. S. Łukasiewicz Ściskana osiowo powłoka walcowa przy bardzo dużych ugięciach
14. K. Sobiesiak Analityczna ocena wpływu niedokładności wykonania powłok walcowych długich i średniej długości na górne ciśnienie krytyczne w ujęciu nieliniowym
15. T. Gałkiewicz Pewne zagadnienia stateczności powłok walcowych poddanych skręcaniu
16. St. Spryszyński Stateczność dynamiczna powłok walcowych poddanych skręcaniu
17. W. Szyc O pewnym dynamicznym zagadnieniu stateczności trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej
18. R. Dąbrowski, S. Wachowiak Naprężenia w cienkich środnikach zakrzywionych
19. W. Zwoliński Stateczność dynamiczna powłok w kształcie czaszy kulistej o małej wyniosłości poddanej ciśnieniu normalnemu
20. S. Janiak Badania doświadczalne nad statecznością powłoki stożkowej
21. D. Bugajny Nieliniowe zagadnienia stateczności trójwarstwowej powłoki stożkowej wszechstronnie ściskanej
22. J. Zielnica Zastosowanie teorii plastycznego płynięcia do analizy stateczności powłoki stożkowej

Konkursy naukowe

1. Oddział w Częstochowie przeprowadził ogólnokrajowy konkurs na temat «Prace doświadczalne w mechanice teoretycznej». Na konkurs zgłoszono 4 prace. Przyznano następujące nagrody:

III w wysokości zł. 4.000 — dr Waldemarowi BACHMACZOWI za pracę pt. *Zastosowanie metody Locati do wyznaczania granicy zmęczenia żeliwa szarego*; wyróżnienie w wysokości zł. 3.000 — otrzymali dr Zdzisław MALINOWSKI i dr Janusz KLEPACZKO za pracę pt. *Szacowania współczynnika tarcia Colomba na czołach ściskanej plastycznej próbki walcowej*.

2. Oddział we Wrocławiu przeprowadził ogólnopolski konkurs na prace naukowe teoretyczne z mechaniki w zakresie zastosowań inżynierskich. Wpłynęło ogółem 20 prac.

Pierwszej nagrody nie przyznano.

Dwie II nagrody po zł. 6.000 — każda otrzymali: doc. dr Jan LANGER za pracę pt. *Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem*; dr inż. Zbyszko KAZIMIERSKI za pracę pt. *Optymalizacja hybrydowych stożkowych łożysk gazowych*.

Trzy III nagrody po zł. 3.000 — każda otrzymali: dr Henryk BOROCH za pracę pt. *Drgania podłużne i obciążenie dynamiczne taśm przenośnikowych w ruchu nieustalonym*; dr Wiesław WOJEWÓDZKI za pracę pt. *Wyboczenie lepkoplastycznych powłok cylindrycznych obciążonych radialnym impulsem ciśnienia*; dr inż.

Wanda SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA za pracę pt. *Współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych nieliniowych układów drgających o wielu stopniach swobody* oraz cztery wyróżnienia po zł. 1.000 — każde otrzymali: dr inż. Jan KUBIK za pracę pt. *Podstawy teorii konstrukcji prętowych na ośrodku górniczym*; doc. dr Zbigniew MAZURKIEWICZ za pracę pt. *The statics and dynamics of elastic and heterogeneous rectangular plates with arbitrary variable thicknesses and arbitrary boundary conditions*; dr inż. Czesław SZYM-CZAK za pracę pt. *Obliczanie mostów zakrzywionych ukośnie o przekroju otwartym*; dr inż. Władysław MIRONOWICZ za pracę pt. *Drgania własne płaskich układów prętowych jako zagadnienie dyskretne*.

Seminaria i kursy

1. Oddział w Gdańsku przeprowadził seminarium na temat «Teorii probabilistycznych w mechanice ośrodka ciągłego» z udziałem 18 uczestników. Cotygodniowe, dwugodzinne wykłady prowadził doc. dr hab. Eugeniusz BIELEWICZ.

2. Oddział w Poznaniu zorganizował w okresie od 1.10—13.12.1971 r. kurs na temat: «Termoplastyczność statyczna» — «Przekształcenie Laplace'a i jego zastosowania». W kursie uczestniczyło 40 osób. Ogółem odbyło się 15 wykładów.

Różne

Zgodnie z uchwałą XIII Zjazdu Delegatów powołana została przez Zarząd Główny Komisja pod przewodnictwem prof. dr G. RAKOWSKIEGO do opracowania memoriału w sprawie kształcenia w wyższych szkołach technicznych. Przygotowany memoriał rozesłano do: Ministerstwa Oświaty i Szkolnictwa Wyższego, Sekcji Technicznej Rady Głównej Szkolnictwa Wyższego, Komitetu do spraw Oświaty oraz do Wydziału IV Nauk Technicznych PAN.

Ministerstwo Oświaty i Szkolnictwa Wyższego w odpowiedzi powiadomiło PTMTS, że memoriał przekazany został zespołom Kierunkowym Mechaniki i Budownictwa Lądowego Sekcji Technicznej Rady Głównej Szkolnictwa Wyższego do wykorzystania zawartych w nim postulatów.

Również Komitet Ekspertów dla opracowania raportu o stanie oświaty w PRL odpowiedział, że opracowanie PTMTS będzie dyskutowane w gronie członków Komitetu.

Działalność organizacyjna

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach PTMTS ilustruje następująca tabela.

Oddział	IV kw. 70 r.	IV kw. 71 r.	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
Bydgoszcz	15	18	+3
Częstochowa	22	24	+2
Gdańsk	38	41	+3
Gliwice	62	63	+1
Kraków	81	79	-2
Łódź	37	37	—
Poznań	52	48	-4
Szczecin	28	29	+1
Warszawa	172	183	+11
Wrocław	61	63	+2
Razem:	568	585	+17

Zebrania organizacyjne w roku 1971

Zjazd Delegatów				1
Zebrania Zarządu Głównego				2
Zebrania Prezydium Zarządu Głównego				2
Zebrania Głównej Komisji Rewizyjnej				1
Inne zebrania organizacyjne w Zarządzie Głównym				1
Walne Zgromadzenia Oddziałów				11
Zebrania Zarządów Oddziałów:				
Bydgoszcz	7	Łódź		3
Częstochowa	11	Poznań		5
Gdańsk	5	Szczecin		5
Gliwice	8	Warszawa		2
Kraków	7	Wrocław		8
Inne zebrania organizacyjne w Oddziałach				5
Razem odbyły się 84 zebrania organizacyjne w Zarządzie Głównym i Oddziałach.				

IV KANADYJSKI KONGRES MECHANIKI STOSOWANEJ

Redakcja otrzymała wstępne zawiadomienie, którego treść podajemy Czytelnikom w polskim tłumaczeniu:

ZAPROSZENIE DLA AUTORÓW

Czwarty Kanadyjski Kongres Mechaniki Stosowanej (CANCAM 73) odbędzie się w Politechnice w Montrealu między 28 maja i 1 czerwca 1973 r. Komitet kongresu przewiduje udział w obradach ponad 500 inżynierów i naukowców.

Zakres tematyczny obejmuje: mechanikę ciała stałego, mechanikę płynów, biomechanikę, wymianę ciepła, termodynamikę, zastosowania matematyki w mechanice i metody eksperymentalne. Sesje specjalne będą poświęcone takim nie rozwiązany problemom praktycznym, dla których można sugerować metody rozwiązania. Każdego dnia, oprócz zwykłych komunikatów naukowych, wygłoszony będzie przez specjalistę o międzynarodowym autorytecie referat ogólny. Językami oficjalnymi kongresu są francuski i angielski.

Selekcja prac zostanie dokonana na podstawie oceny streszczeń o objętości do 800 słów, które w przypadku akceptacji zostaną opublikowane w Pracach Kongresu.

Dla zainteresowanych istnieje możliwość zakwaterowania w domach studenckich Uniwersytetu Montrealskiego.

Streszczenia prac powinny być nadesłane do 10 listopada 1972 r. Wszyscy zainteresowani powinni zwrócić się o instrukcję dotyczącą przygotowania tekstu do przewodniczącego komitetu referatów pod adresem:

Professeur Paul Fazio
 Departement de Génie Civil
 Université Sir George Williams
 Montréal 107, Québec
 Canada

Wszystkie zapytania o charakterze ogólnym należy adresować do przewodniczącego kongresu:

Professeur André Biron
Division de Mécanique Appliquée
École Polytechnique
C.P. 501 Snowdon
Montréal 248, Qué.
Canada.

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- Setna rocznica urodzin profesora Maksymiliana Tytusa HUBERA
Столетие со дня рождения профессора Максимилиана Титуса Губера
Hundredth birthday anniversary of professor M. T. Huber
- A. D. KOWALENKO, Badania w dziedzinie termomechaniki odkształcalnego ciała stałego wykonane w Ukraińskiej Akademii Nauk
Развитие исследований по термомеханике твердого деформируемого тела в АН УССР
Investigations in the domain of thermomechanics of deformable solids in the Ukrainian Academy of Sciences
- K. PODOLAK, Odbicie płaskich fal naprężenia w ośrodku sprężysto-plastycznym o zmiennej granicy plastyczności
Отражение плоских волн напряжений в упруго-пластической среде с переменным пределом текучести
Reflection of plane stress waves in elastic-plastic medium with variable yield limit
- K. SZULBORSKI, Badania własności reologicznych materialu modelowego wykonanego w oparciu o żywicę epoksydową 2
Испытание реологических свойств модельного материала, изготовленного на основе эпоксидной смолы Эпидан 2
Examination of rheological properties of a material made from the epoxy resin EPIDAN 2
- K. ВОДА, Płyty prostokątne o jednokierunkowo zmiennej sztywności
Прямоугольные пластинки с односторонней переменной жёсткостью
Rectangular plates with unidirectionally variable rigidity
- J. J. ТЕЛЕГА, О некоторых обобщениях теорем о несущей способности для среды Коссера
О некоторых обобщениях теорем о несущей способности для среды Коссера
On some generalizations of limit analysis theorems for Cosserat media
- W. GAWROŃSKI, Statystyczna analiza układu wibrouderzeniowego
Статистический анализ виброударной системы
Statistical analysis of vibro-impact system
- J. MURZEWSKI, A. WINIARZ, Obciążenie losowe konstrukcji jako funkcja stochastyczna z niezależnymi przyrostami
Случайная нагрузка сооружений как случайная функция с независимыми приращениями
Random load of structures as a stochastic function with independent increments
- J. BARAN, K. MARCZELEK, Оптимализация właściwości dynamicznych napędu głównego obrabiarki
Оптимализация динамических свойств главного привода станка
Optimization of dynamic properties of the machine tool main drive
- S. CIEŚLA, W. SITKO, О певным przypadku analify koncentracji naprężeń metodą elastooptyczną
О некотором случае исследования концентрации напряжений методом фотоупругости
On a certain case of analysis of stress concentration by the photo-elastic method
- BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 10, z. 2, s. 179—348, Warszawa 1972, Indeks 36712