

11720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 10 • ZESZYT 1



P<sup>A</sup>

WARSZAWA 1972  
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

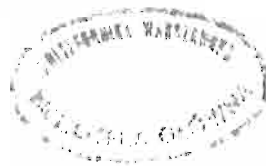
Jubileusz WITOLDA NOWACKIEGO	3
L. DIETRICH, K. TURSKI, Badania zmęczenia w złożonym stanie naprężenia Исследования усталостной прочности при сложном напряженном состоянии Investigations of fatigue under combined stresses	9
S. ZAHORSKI, Pewne niewiskozymetryczne przepływy cieczy lepkosprężystych Некоторые невискозиметрические течения вязкоупругих жидкостей Certain non-viscometric flows of viscoelastic fluids	29
Z. WIŚNIEWSKI, Analiza ruchu pewnego układu wibro-uderzeniowego o dwóch stopniach swobody Анализ некоторой виброударной системы с двумя степенями свободы On certain vibratory-impact system with two degrees of freedom	53
R. KRZYWIĘC, Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju Механико-стереомеханическая аналогия в классе многоиндексных уравнений Лагранжа второго рода The mechanical-stereomechanical analogy in the class of multi-indicial Lagrange equations of second kind	69
W. RUDNICKI, J. KIZYMA, Płyta o zmiennym module odkształcenia postaciowego skręcana stemplem kołowym Кручение круговой плиты с переменным модулем сдвига с помощью жесткого кругового штампа A plate with variable modulus of shear twisted by a circular stamp	85
J. BAUER, E. WŁODARCZYK, Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu ze zmienną granicą plastyczności. Część II. Sprężyste odciążenie Динамика жесткой плиты, расположенной на упруго-пластическом основании с переменным пределом текучести. Часть II. Упругая разгрузка Dynamics of a rigid plate resting on elastic-plastic foundation with variable plasticity limit. Part II. Elastic unloading	93
K. RYKALUK, Koncentracja naprężeń w tarczy nieograniczonej z otworem kołowym przy obciążeniu wewnętrznym Концентрация напряжений в неограниченной плите с круглым отверстием, находящимся под действием внутренней нагрузки Stress concentration under internal loading in an infinite disk with a circular hole	107
J. B. OBRĘSKI, Zastosowanie maszyn cyfrowych do rozwiązywania rusztów o regularnej sześciokątnej siatce prętów Применение вычислительных машин для решения рустверков с регулярной шестиугольной стержневой сеткой Application of digital computers to the solution of regular hexagonal gridworks	117
A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych Совместное влияние неоднородного внешнего и внутреннего трения на устойчивость неконсервативных систем Influence of simultaneous non-homogeneous external and internal damping upon the stability of non-conservative systems	127
M. CHRZANOWSKI, O możliwości opisu pełnego procesu pełzania metali О возможности описания всего процесса ползучести металлов On a possibility of description of full creep processes for metals	143
J. STURNICKI, Naprężenia kontaktowe w elementach maszyn w świetle badań zagadnienia elastohydrodynamicznego smarowania Контактные напряжения в деталях машин с точки зрения исследований эластогидродинамической смазки Contact stresses in machine components in the light of the recent investigation of elastohydrodynamic lubrication	157
BIULETYN INFORMACYJNY	171

J142

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 0 • Z E S Z Y T 1



531

W A R S Z A W A 1 9 7 2  
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## K O M I T E T   R E D A K C Y J N Y

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,  
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,  
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,  
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,  
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## REDAKCJA

Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 700 (582+108) egz. Ark. wydawn. 13,25. Ark. drukarskich 11,0. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 27.X.1971 r. Druk ukończono w marcu 1972 r. Zam. 1404/71 A-89 Cena zł 30.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa



## JUBILEUSZ WITOLDA NOWACKIEGO

20 lipca 1971 r. przypadła 60-rocznica urodzin wybitnego uczonego polskiego w dziedzinie mechaniki, wiceprezesa i członka rzeczywistego Polskiej Akademii Nauk, dyrektora Instytutu Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego — profesora doktora WITOLDA NOWACKIEGO.

Jubilat zasłużył się dobrze polskiej nauce, a wyjątkowe zalety Jego umysłu i charakteru zjednały sobie licznych przyjaciół. Nic więc dziwnego, że wiele osób spośród grona Jego współpracowników, kolegów i uczniów postanowiło uczcić tę rocznicę jak własne święto.

W dniach 31 sierpnia i 1 września 1971 r. odbyło się w Warszawie, w Pałacu Staszica poświęcone Jubilatowi sympozjum naukowe pod tytułem «Współczesne zagadnienia teorii sprężystości», nad którym protektorat zechcieli objąć następujący uczeni: prof. dr Janusz GROSZKOWSKI — przewodniczący Ogólnopolskiego Komitetu Frontu Jedności Narodu i prezes Polskiej Akademii Nauk, prof. dr Henryk JABŁOŃSKI — minister Oświaty i Szkolnictwa Wyższego, wiceprezes Polskiej Akademii Nauk, prof. dr Zygmunt RYBICKI — rektor Uniwersytetu Warszawskiego, prof. dr Helena RASIOWA — dziekan Wydziału Matematyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

Prof. J. GROSZKOWSKI wygłosił przemówienie otwierające konferencję, w którym podkreślił zasługi Jubilata jako wychowawcy licznych rzesz pracowników nauki oraz Jego własne osiągnięcia naukowe w dziedzinie mechaniki, gdzie prof. W. NOWACKI był inicjatorem w Polsce i kontynuatorem rozwoju teorii w wielu dziedzinach tej dyscypliny naukowej, na przykład w teorii dźwigarów powierzchniowych, teorii sprężystości ciał anizotropowych, elastodynamice, lepkosprężystości, termosprężystości, mikropolarnej teorii sprężystości i pól sprężonych.

Prof. H. JABŁOŃSKI w swoim adresie powitalnym, odczytanym podczas otwarcia konferencji pisał:

*Wielce Szanowny Panie Profesorze, Drogi Witoldzie!*

*...Kończysz 60 lat. Według mego głębokiego przekonania nie jest to żadna data graniczna. Dla bliżej niezrozumiałych powodów uznano ją jednak powszechnie za początek starości, a więc i początek bilansowania przebytej drogi. I tak już trwa od starożytności.*

*Ten, który tak wiele napsuł nam krwi w latach szkolnych — Marcus Tullius Cicero na temat tego bilansu powiedział:*

*«Conscientia bene actae vitae multorumque benefactorum recordatio iucundissima est».*

*Nie śmiałbym, oczywiście, tłumaczyć gdybyś Ty tylko czytał ten list, ale — być może — dasz go do przeczytania komuś, kto mniej ma od Ciebie humanistycznej zaprawy, więc ów*

stary Rzymianin twierdził, iż «świadomość dobrze przeżytego życia i pamięć wielu dokonanych dobrodziejstw jest najmilsza».

*I jeśli ten dotychczasowy etap Swego życia oceniasz, masz niewątpliwie ową «najmilszą świadomość», o jakiej pisał Cicero. Nic dziwnego, przecież tenże sam filozof powiedział: «Tylko mędrzec jest człowiekiem wolnym», «Tylko mędrzec jest człowiekiem bogatym». Jesteś więc wolny i bogaty, a z tej wolności i bogactwa umiałeś i umiesz robić wspaniały użytek. Twoje bogactwo łączy się bowiem ze szczodrością. Obdarzasz naukę polską i światową coraz to nowymi dziełami, obdarzasz swą wiedzą i doświadczeniem swych uczniów, obdarzasz nas, swych przyjaciół, dobrą radą, gdy trzeba pomocą, zawsze życzliwością.*

*Jednym słowem — jesteś twórcą wręcz paradoksalnej sytuacji: nie nie tracąc ze swego własnego bogactwa wzbogacasz skarbiec światowej kultury, wzbogacasz tych, którzy mieli możliwość poznać Cię osobiście czy choćby tylko Twoje dzieła.*

*Placimy Ci za to myślą serdeczną i jeśliby życzenia nasze mogły się spełnić byłbyś najszczęśliwszym wśród szczęśliwych.*

*Jak już uprzednio napisałem, nie wierzę (a może lepiej: nie chcę uwierzyć), że 60 lat to początek starości, ale prawdą jest niewątpliwą, że jest ona dziś bliższa niż wtedy, gdy rozpoczynaliśmy długie dni wspólnej troski o rozwój instytucji, w której przyszło nam razem pracować.*

*I, jako starszy od Ciebie, jako ten, który jubileusz 60-lecia ma już za sobą pozwalam sobie przesłać Ci radę w postaci cytatu z listu mego ulubionego filozofa Seneki do Lucyliusza.*

*«...Gdziekolwiek się skierowałem, ukazywała mi się moja starość. Powitajmy ją więc życzliwie i pokochajmy. Bo i ona jest pełna uroku, jeśli potrafisz z niej korzystać. Owoce najlepiej smakują wtedy, gdy przemijają. Czar dzieciństwa największy jest u jego schyłku. Lubiących się w winie najbardziej cieszy ostatni kielich — ten, który już pogrąża, który do szczytu doprowadza upojenie. Wszelka przyjemność na koniec przynosi to, co ma w sobie najmilszego. Najwięcej zadowolenia daje wiek już podeszły, lecz nie dochodzący jeszcze do kresu».*

*A był wówczas Seneka, gdy pisał te słowa, dużo starszy od nas obu, lecz wyciągał rękę po ten kielich, wciąż jeszcze nie wierząc, że to ostatni, bo — jak się pocieszał — «przecież nie wywołują nas stąd według listy!».*

*Zapewne wypisuję Ci to wszystko bez potrzeby. Wiesz to zapewne jeszcze lepiej i dokładniej. — «Filozof udowodni, że słońce jest wielkie, lecz jak wielkie jest, powie Ci to matematyk» — pisał Seneka. A więc lepiej, ale nie tak samo. «Inaczej caluje się kochankę a inaczej dzieci» — powiada tenże starożytny mędrzec.*

*Przyjmij więc bez urazy pozdrowienia humanisty w dniu, w którym czczą Twą rocznicę uczeni technicy. Przyjmij życzenia serdeczne długich szczęśliwych lat życia i twórczości od historyka, który w takich, jak Ty ludziach widzi zapowiedź zbliżającej się epoki wielkiego Odrodzenia, gdy technik będzie czuł głód humanistyki, a humanista, który nie będzie rozumiał techniki, będzie niezwinny na swoim własnym terenie pracy.*

*Niech Cię zawsze cechują — tak jak i dziś — myśl bystra, serce wrażliwe, intensywność przeżywania — najpiękniejsze cechy młodości.*

*Prof. Ian N. SNEDDON w liście do Jubilata napisał: Przyjaźń z Panem jest dla mnie źródłem wielkiej osobistej przyjemności i satysfakcji. Wiem o wielu cennych Pańskich osią-*

gnięciach w dziedzinie mechaniki ciała stałego oraz wybitnych zasługach Pana dla rozwoju życia akademickiego w Polsce w okresie odbudowy po II wojnie światowej.

Telegram gratulacyjny w imieniu Akademii Nauk Związku Radzieckiego podpisali akademik M. W. KIEŁDYSZ i członek koresp. A. P. WINOGRADOW, a pismo od Prezydium Czechosłowackiej Akademii Nauk akademik J. KOŽIŠNIK.

Podczas otwarcia konferencji, jak i na bankiecie, wieczorem 31.VIII.1971 r., przemawiało jeszcze wielu uczonych zagranicznych i polskich. Specjalny list w imieniu Akademii Nauk ZSRR i Instytutu Problemów Mechaniki wręczył prof. W. NOWACKIEMU przewodniczący Wszeczhwiązkowej Rady Towarzystw Naukowo-Technicznych (radziecki odpowiednik NOT) akademik i dyrektor Instytutu Problemów Mechaniki Akademii Nauk ZSRR A. Ju. ISZLIŃSKI, a w imieniu Politechniki Leningradzkiej członek koresp. AN ZSRR A. I. ŁURIE.

Trudno tu wymienić wszystkich, którzy przesłali depeze i listy gratulacyjne dla Jubilata.

Również podczas otwarcia konferencji został wręczony prof. W. NOWACKIEMU pierwszy egzemplarz książki wydanej w języku angielskim staraniem Komitetu Redakcyjnego w składzie: R. E. CZARNOTA-BOJARSKI, M. SOKOLOWSKI i H. ZORSKI, przez Wolters-Noordhoff Publishing Groningen, a noszącej tytuł *Trends in elasticity and thermoelasticity, Witold Nowacki Anniversary Volume*. Komitet honorowy stanowili następujący uczeni: N. K. ARUTUNIAN, N. I. MUSCHELISZWILI, W. OLSZAK, L. I. SIEDOW, I. N. SNEDDON, E. STERNBERG, C. TRUESDELL i J. H. WEINER.

Książka ta jest zbiorem 20 artykułów z dziedziny teorii sprężystości i termosprężystości, napisanych przez następujących autorów: N. K. ARUTUNIAN i S. M. MCHITARIAN (ZSRR), B. A. BALEY (St. Zjedn.), P. CHADWICK i L. T. C. SEET (W. Brytania), K. HERRMANN i M. HIEKE (NRD), J. IGNACZAK, Z. KĄCZKOWSKI, S. KALISKI, W. D. KUPRADZE i T. W. BURCZUŁADZE (ZSRR), A. I. ŁURIE (ZSRR), M. MIŚICU (Rumunia), Z. OLESIAK, H. PARKUS (Austria), G. RIEDER (NRF), G. N. SAWIN, A. N. GUZ i W. T. GOLOWCZAN (ZSRR), B. R. SETH (India), I. N. SNEDDON i S. C. DAS (W. Brytania), R. STOJANOVIĆ (Jugosławia), I. S. UFLAND (ZSRR), Z. WESOŁOWSKI, C. WOŹNIAK.

Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej również postanowiło uczcić zasługi Jubilata dla rozwoju mechaniki i naszego Towarzystwa przyznając mu godność Członka Honorowego PTMTS. Dyplom wręczył prof. W. NOWACKIEMU przewodniczący Towarzystwa prof. Z. KĄCZKOWSKI.

Po przemówieniach i odczytaniu listów i telegramów gratulacyjnych zabrał głos prof. W. NOWACKI (na fotografii obok widzimy Go właśnie podczas przemówienia).

Na konferencji wygłoszono następujące referaty z dziedzin mechaniki, do których rozwoju prof. W. NOWACKI przyczynił się szczególnie:

J. BRILLA: *Splotowe zasady wariacyjne i metody w liniowej lepkośćsprężystości ciał anizotropowych,*

A. I. ŁURIE: *Różniczkowanie tensora względem czasu,*

J. IGNACZAK: *Obustronne oszacowanie prędkości fal powierzchniowych w niejednorodnej półprzestrzeni sprężystej,*

A. Ju. ISZLIŃSKI: *Niezwykłe zagadnienia mechaniki,*

T. MANACORDA: *Fale uderzeniowe w ośrodku termosprężystym nieściśliwym w sensie Signoriniego,*



C. WOŹNIAK: *Dyskretne sprężyste ośrodki Cosseratów*,

Z. KĄCZKOWSKI: *Wpływ stałych naprężeń na prędkości fal sprężystych*.

Na zakończenie konferencji Jubilat, uczestnicy konferencji, oraz pracownicy Uniwersytetu Warszawskiego zostali zaproszeni przez J.M. Rektora Uniwersytetu Warszawskiego prof. Z. RYBICKIEGO na uroczystą lampkę wina.

Zasługi prof. W. NOWACKIEGO zostały wysoko ocenione przez Radę Państwa Polskiej Rzeczypospolitej Ludowej, która na wniosek Uniwersytetu Warszawskiego przyznała Mu w Dniu Nauczyciela tytuł i medal Zasłużonego Nauczyciela PRL.

Komitet Nauki Polskiego Związku Inżynierów i Techników Budownictwa przyznał prof. W. NOWACKIEMU nagrodę stowarzyszeniową imienia S. Bryły, która została wręczona na uroczystym posiedzeniu dnia 19 listopada 1971 r. Po wręczeniu nagrody prof. W. NOWACKI wygłosił prelekcję na temat rozwoju mechaniki budowli w ostatnim ćwierćwieczu.

Następnego dnia odbyło się specjalne posiedzenie Senatu Politechniki Gdańskiej, na którym prof. W. NOWACKIEMU został nadany tytuł «doktora honoris causa» Politechniki Gdańskiej. W uroczystym posiedzeniu Senatu pod przewodnictwem J.M. Rektora Politechniki Gdańskiej prof. Janusza STALIŃSKIEGO uczestniczyli rektorzy większości wyższych uczelni Wybrzeża, promotorem był prof. Roman KAZIMIERCZAK. Był to już drugi doktorat *honoris causa* nadany prof. W. NOWACKIEMU, pierwszy został nadany Mu przez Uniwersytet w Glasgow, w Szkocji w maju 1968 r.

Podczas inauguracji roku akademickiego 1971/72 w Uniwersytecie Warszawskim zakomunikowano, że prof. W. NOWACKIEMU została przyznana nagroda Ministra Oświaty i Szkolnictwa Wyższego za monografię *Teoria Sprężystości*, która ukazała się drukiem w roku 1970. Trudno przekazać w krótkim artykule ogrom osiągnięć prof. WITOLDA NOWACKIEGO, naukowych, wychowawczych, organizacyjnych, dlatego podamy tu tylko jako przykład spis Jego autorstwa monografii naukowych i podręczników i ich tłumaczeń. Oto one:

1. *Silosy*, Budownictwo i Architektura, Warszawa 1952, II wydanie 1955 (wspólnie z R. DĄBROWSKIM).
2. *Researches on elastic thin plates and shells*, Inst. of Mechanics, Chińska Akademia Nauk, Pekin 1956.
3. *Mechanika Budowli*, tom I, s. 547, PWN, Warszawa 1957, wydanie II 1964.
4. *Mechanika Budowli*, tom II, s. 844, PWN, Warszawa 1960, wydanie II 1967.
5. *Mechanika Budowli*, tom III, s. 624, PWN, Warszawa 1966.
6. *Zagadnienie termosprężystości*, s. 430, PWN, Warszawa 1960; tłumaczenie rosyjskie *Woprosy termouprugosti*, wyd. AN ZSRR, I wydanie 1962, II wydanie 1964; tłumaczenie czeskie *Problemy termoelasticity*, SNTL, Praha 1968,
7. *Dynamika Budowli*, s. 380, Arkady, Warszawa 1961, wydanie II 1972; tłumaczenie rosyjskie *Dynamika sooruzenja*, Gozstroizdat, Moskwa 1963; tłumaczenie angielskie *Dynamics of elastic systems*, Wyd. Chapman and Hall w Anglii oraz J. Wiley and Sons w Ameryce, 1963; tłumaczenie serbo-chorwackie, wyd. Gradevinska Knjiga, 1966; tłumaczenie rumuńskie, wyd. Editura Technica, 1970; tłumaczenie niemieckie, J. Springer, Wien (w druku).

8. *Thermoelasticity*, s. 628, Pergamon Press, Oxford 1962 — edycja amerykańska Reading, Mass. Addison-Weeley, 1962.
  9. *Teoria pelzania*, s. 170, Arkady, Warszawa 1963; tłumaczenie francuskie, wyd. Eyrolles, Paris 1965; tłumaczenie niemieckie, wyd. Deuticke, Wien 1965.
  10. *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, s. 366, PNN, 1966, tłumaczenie rosyjskie «Mir», 1967; tłumaczenie angielskie, Wolters-Noordhoff, Groningen (w oprac.).
  11. *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, s. 314, PWN, 1970; wydanie angielskie, J. Springer, Wien 1971.
  12. *Teoria sprężystości*, s. 730, PWN, 1970; w druku wydanie rosyjskie, Wyd. «Mir».
- Z okazji 60 rocznicy urodzin prof. W. NOWACKIEGO został wydany specjalny (6, 1971) zeszyt ARCHIWUM MECHANIKI STOSOWANEJ, w którym znalazły się prace 18 autorów.

KOMITET REDAKCYJNY



## BADANIA ZMĘCZENIOWE W ZŁOŻONYM STANIE NAPRĘŻENIA

LECH DIETRICH, KAROL TURSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Podstawowe badania zmęczeniowe można podzielić na dwie zasadnicze grupy. Pierwszą z nich tworzą badania zajmujące się istotą zjawisk zmęczeniowych. Jest to bardzo obszerna grupa prac na temat powstawania i rozprzestrzeniania się pęknięć podczas obciążeń zmiennych. Do drugiej grupy należą badania traktujące zagadnienia zmęczenia z fenomenologicznego punktu widzenia. Do grupy tej należą badania doświadczalne prowadzone w celu weryfikacji kryteriów zniszczenia zmęczeniowego w złożonym stanie naprężenia, którym poświęcona jest niniejsza praca przeglądowa.

W części prac wyniki doświadczeń przedstawione są w przestrzeni naprężeń w postaci powierzchni zniszczenia zmęczeniowego, a ściślej mówiąc przecięcia tej powierzchni płaszczyną  $\sigma_3 = 0$ , określonej dla stałej ilości cykli [2, 8, 9, 14, 15, 16]. Autorzy innych prac stawiają sobie za cel ustalenie, jakie czynniki i w jakim stopniu wpływają na zniszczenie zmęczeniowe w warunkach zmiennych obciążeń. Do grupy tej zaliczyć można pracę BLASSA i FINDLEYA [1] na temat wpływu naprężenia pośredniego  $\sigma_2$  (przy  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) na zniszczenie stali o wysokiej wytrzymałości, pracę PARRY'EGO [13], gdzie przedstawiono wpływ trójosiowego równomiernego rozciągania, oraz CROSSLANDA [3], który zajmował się wpływem hydrostatycznego ciśnienia na wytrzymałość zmęczeniową. Do grupy tej należy również praca FINDLEYA i in. [4], którzy starali się zbadać czy energia odkształcenia jest główną przyczyną zniszczenia zmęczeniowego.

Jednym z prostszych sposobów wywołania w próbkę cyklicznego, złożonego stanu naprężenia, jest poddanie jej jednoczesnemu zmiennemu zginaniu i skręcaniu. Metodyka takich badań jest o tyle prosta, że do wywoływania obciążenia mogą być użyte układy mechaniczne. Drugą zaletą tego sposobu obciążania jest możliwość stosowania wysokich częstości jego zmiany, co znacznie skraca czas trwania próby. Ale jednocześnie sposób ten ma istotne wady. Po pierwsze — stan naprężenia w przekroju próbki jest niejednorodny, cechujący się znacznym gradientem zmiany poszczególnych składowych. Po drugie — naprężenia wywołane zginaniem obrotowym mogą zmieniać się tylko według cyklu symetrycznego. Po trzecie — w zależności od stosunku zginania do skręcania zmieniają się główne osie naprężenia, co uniemożliwia stwierdzenie i ewentualne wprowadzenie poprawek uwzględniających anizotropowe własności materiału. Czynniki te powodują, że ten sposób wywoływania cyklicznego, złożonego stanu naprężenia lepiej nadaje się do doświadczalnych badań konstrukcji, niż dla określania własności materiałów.

Lepszym, z teoretycznego punktu widzenia, sposobem doświadczalnego wyznaczenia powierzchni zniszczenia zmęczeniowego jest metoda analogiczna do stosowanej przy określaniu powierzchni plastyczności. Metodyka doświadczeń jest jednak całkowicie odmienna. Zasadniczą przyczyną komplikacji są oczywiście zmienne obciążenia i długo-trwałość badania jednej próbki, co powoduje konieczność zastosowania automatycznej kontroli i regulacji obciążenia, jak również zwrócenia szczególnej uwagi na uszczelnienia (o ile obciążenie jest wywoływane za pośrednictwem cieczy). Poza tym należy pamiętać, że dla wyznaczenia jednego punktu na płaszczyźnie naprężeń głównych trzeba zbadać co najmniej kilka próbek przy różnych poziomach naprężeń w celu otrzymania części krzywej Wöhlera w interesującym nas zakresie. Badania przy obciążeniach zmiennych wymagają również ogromnej staranności w wykonaniu samej próbki. Wymienione tu czynniki są zapewne głównymi przyczynami stosunkowo niewielkiej ilości prac poświęconych temu zagadnieniu.

Do bezpośredniego wyznaczenia powierzchni zniszczenia zmęczeniowego służyły zazwyczaj cienkościennie próbki rurkowe poddane różnym kombinacjom ciśnienia wewnętrznego i siły osiowej. Natomiast próbki w postaci rur grubościennych czy też próbki kształtowe były wykorzystywane do badania wpływu określonych czynników na zniszczenie zmęczeniowe. Wyjątkiem jest tu praca SAWERTA [16], której celem było określenie powierzchni zniszczenia zmęczeniowego przy wykorzystaniu próbek kształtowych.

Zasadniczym celem niniejszej pracy było omówienie wyników badań doświadczalnych przeprowadzonych w złożonych stanach naprężenia i dotyczących warunków zniszczenia zmęczeniowego. Poza tym omówiono te badania przeprowadzone w warunkach jednoosiowego stanu naprężenia, które są pomocne przy interpretacji wyników doświadczeń w złożonych stanach.

Omawiane prace uszeregowano według rodzaju i kształtu próbek użytych w doświadczeniach. I tak jako pierwsze omówiono badania wykonane przy użyciu próbek kształtowych, następnie prace dotyczące grubościennych próbek cylindrycznych i wreszcie doświadczenia przeprowadzone na cienkościennych próbkach rurkowych. W każdej z wymienionych grup przyjęto chronologiczną kolejność omawiania poszczególnych artykułów. Podano również i opisano w zwarty sposób równania kryteriów zniszczenia zmęczeniowego, które wymienione były w pracach doświadczalnych.

## 2. Kryteria zniszczenia zmęczeniowego

Spotykane w literaturze kryteria zniszczenia zmęczeniowego w złożonym stanie naprężenia są oparte na tych samych założeniach i mają analogiczną budowę co kryteria uplastycznienia względnie zniszczenia w złożonym stanie naprężenia wywołanym obciążeniami statycznymi. Zmienia się jedynie w tych warunkach statyczną stałą materiałową przez trwałą, względnie wyznaczoną dla określonej ilości cykli, wytrzymałość zmęczeniową przy jednoosiowym stanie naprężenia.

Kryteria zniszczenia zmęczeniowego można podzielić w zależności od czynnika decydującego o zniszczeniu na cztery grupy [4].

1. Kryteria, w których o zniszczeniu decyduje wielkość naprężeń.
2. Kryteria, w których o zniszczeniu decydują odkształcenia.

3. Kryteria, w których o zniszczeniu decyduje energia odkształcenia.

4. Kryteria empiryczne.

W złożonym stanie naprężenia, warunki te można wyrazić w postaci równań. Amplitudy i średnie wartości naprężeń głównych oznaczono w równaniach odpowiednio przez  $\sigma_{a1}$ ,  $\sigma_{a2}$ ,  $\sigma_{a3}$  oraz  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$ ,  $\sigma_{m3}$ .

— Kryterium naprężeń głównych

$$(2.1) \quad \max\{|\sigma_{a1}|, |\sigma_{a2}|, |\sigma_{a3}|\} = \sigma_F.$$

— Kryterium naprężeń ścinających (Treski)

$$(2.2) \quad \sigma_{a1} - \sigma_{a3} = \sigma_F,$$

gdzie  $\sigma_{a1} > \sigma_{a2} > \sigma_{a3}$ .

— Kryterium odkształceń głównych

$$(2.3) \quad \sigma_{a1} - \mu(\sigma_{a2} + \sigma_{a3}) = \sigma_F,$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem Poissona; amplitudy naprężeń głównych spełniają nierówność  $|\sigma_{a1}| > |\sigma_{a2}| > |\sigma_{a3}|$ .

— Kryterium całkowitej energii odkształcenia

$$(2.4) \quad \sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 + \sigma_{a3}^2 - 2\mu(\sigma_{a1}\sigma_{a2} + \sigma_{a2}\sigma_{a3} + \sigma_{a3}\sigma_{a1})} = \sigma_F;$$

przez  $\mu$  oznaczono współczynnik Poissona.

— Kryterium Hubera-Misesa

$$(2.5) \quad \sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 + \sigma_{a3}^2 - (\sigma_{a1}\sigma_{a2} + \sigma_{a2}\sigma_{a3} + \sigma_{a3}\sigma_{a1})} = \sigma_F.$$

Równanie to ma wiele interpretacji fizycznych [7]. Przy badaniach zmęczeniowych nazywano je kryterium energii odkształcenia postaciowego lub oktaedrycznego naprężenia ścinającego.

— Kryterium uwzględniające wpływ pierwszego niezmiennika naprężenia zostało podane przez Coulomba-Mohra dla obciążeń statycznych, natomiast w odniesieniu do wytrzymałości zmęczeniowej nazywa się go również warunkiem Stanfielda (1935, cyt. za [15]). Przyjmując  $\sigma_{a1} > \sigma_{a2} > \sigma_{a3}$  możemy ten warunek wyrazić w postaci

$$(2.6) \quad \sigma_{a1} - \sigma_{a3} \left( \frac{\sigma_F}{\tau_F} - 1 \right) = \sigma_F,$$

gdzie jak poprzednio  $\sigma_F$  jest wytrzymałością zmęczeniową przy rozciąganiu, a  $\tau_F$  przy skręcaniu.

GOUGH i in. (cyt. za [5]) opierając się na wielu doświadczeniach przy złożonym cyklicznym obciążaniu momentem zginającym i skręcającym stwierdzili, że w zależności od materiału zmienia się w dość szerokich granicach stosunek wytrzymałości zmęczeniowej przy zginaniu do wytrzymałości zmęczeniowej przy skręcaniu. Zaproponowali oni dwa warunki. Jeden znany pod nazwą «the ellipse quadrant» (ćwiartka elipsy) opisywał zniszczenie zmęczeniowe miękkiej stali wywołane kombinacją cyklicznego zginania i skręcania.

W płaskim stanie naprężenia warunek ten ma postać

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_F^2} + \frac{\tau_a^2}{\tau_F^2} = 1,$$

gdzie  $\sigma_a$  i  $\tau_a$  są odpowiednio naprężeniami wywołanymi zginaniem i skręcaniem, a  $\sigma_F$  i  $\tau_F$  są stałymi materiałowymi. Wyrażając  $\sigma_a$  i  $\tau_a$  w funkcji naprężeń głównych [ $\sigma_a = \sigma_{a1} + \sigma_{a2}$ ;  $\tau_a = \sqrt{(-\sigma_{a1}\sigma_{a2})}$ ] otrzymujemy postać

$$(2.7) \quad \sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 - \left[ \left( \frac{\sigma_F}{\tau_F} \right)^2 - 2 \right] \sigma_{a1}\sigma_{a2} = \sigma_F^2.$$

Drugi warunek sformułowany przez Gougha zwany «the ellipse arc» (luk elipsy) opisywał zniszczenie zmęczeniowe żeliwa poddanego zmiennym obciążeniami zginającym i skręcającym. W płaskim stanie naprężenia, we współrzędnych  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  kryterium Gougha ma postać

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_F^2} \left( \frac{\sigma_F}{\tau_F} - 1 \right) + \frac{\sigma_a}{\sigma_F} \left( 2 - \frac{\sigma_F}{\tau_F} \right) + \frac{\tau_a^2}{\tau_F^2} = 1,$$

a wyrażone w naprężeniach głównych ma identyczną formę jak warunek Coulomba-Mohra.

W roku 1956 CROSSLAND [3] badał wpływ ciśnienia hydrostatycznego na wytrzymałość zmęczeniową stali przy skręcaniu obustronnym. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń, które będą omówione w dalszej części niniejszej pracy (rys. 4) wskazują, że dla badanego materiału kryterium zniszczenia zmęczeniowego można wyrazić w postaci

$$(2.8) \quad \sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 + \sigma_{a3}^2 - (\sigma_{a1}\sigma_{a2} + \sigma_{a2}\sigma_{a3} + \sigma_{a3}\sigma_{a1})} = \sqrt{3} \tau_F - \left( \sqrt{3} \frac{\tau_F}{\sigma_F} - 1 \right) (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3).$$

W równaniu tym przez  $\sigma_{a1}$ ,  $\sigma_{a2}$ ,  $\sigma_{a3}$  oznaczono amplitudy naprężeń głównych spowodowanych cyklicznym stanem obciążenia, a przez  $\sigma'_1$ ,  $\sigma'_2$ ,  $\sigma'_3$  największe wartości naprężeń w kierunkach głównych, będące sumą naprężeń wynikających z ciśnienia hydrostatycznego i naprężeń od obciążeń zmiennych. Przez  $\sigma_F$  oznaczono wytrzymałość zmęczeniową przy symetrycznym cyklu rozciąganie — ściskanie, a  $\tau_F$  odnosi się do symetrycznego cyklu skręcania.

Inną modyfikację warunku Hubera-Miscsa (2.5) zaproponował MARIN [10]. Celem wprowadzonych przez niego zmian było uwzględnienie średnich naprężeń w cyklu dla złożonego stanu naprężenia o synchronicznie zmiennych składowych. Punktem wyjścia jego rozważań było empiryczne równanie dla jednoosiowych stanów naprężenia uzależniające amplitudę naprężenia od średniej wartości naprężenia w cyklu. Równanie to podane przez Marina w postaci

$$(2.9) \quad \left[ \frac{\sigma_a}{\sigma_F} \right]^n + \left[ k \frac{\sigma_m}{R_m} \right]^l = 1$$

jest uogólnioną formą spotykanych w literaturze zależności tego typu. W równaniu tym  $\sigma_a$  oznacza amplitudę naprężenia,  $\sigma_m$  — średnie naprężenie w cyklu,  $\sigma_F$  — wytrzymałość zmęczeniową przy symetrycznym cyklu,  $R_m$  — doraźną wytrzymałość statyczną,  $n$ ,  $l$ ,  $k$  — stałe materiałowe. Przyjmując w zależności (2.9)  $n = l = 1$ ,  $k = \frac{R_m}{\sigma_{pl}}$  otrzymujemy równanie

Soderberga, gdzie  $\sigma_{pl}$  jest granicą plastyczności danego materiału. Zależność Goodmana otrzymamy dla  $n = l = k = 1$ . Podstawiając  $n = k = 1$ ,  $l = 2$  otrzymujemy parabolę Gerbera, natomiast dla wartości  $n = l = 2$ ,  $k = 1$  dostajemy spotykaną w literaturze zależność eliptyczną.

Wprowadzone przez Marina uogólnienie równania (2.9) na złożony stan naprężenia polegało na zastąpieniu jednoosiowych wartości  $\sigma_a$  i  $\sigma_m$  przez ich intensywności określone związkami

$$(\sigma_a)_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a2} - \sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a3} - \sigma_{a1})^2},$$

$$(\sigma_m)_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{m1} - \sigma_{m2})^2 + (\sigma_{m2} - \sigma_{m3})^2 + (\sigma_{m3} - \sigma_{m1})^2},$$

gdzie przez  $\sigma_{a1}$ ,  $\sigma_{a2}$ ,  $\sigma_{a3}$  określono amplitudy poszczególnych składowych głównych naprężenia, a przez  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$ ,  $\sigma_{m3}$  średnie wartości w cyklu poszczególnych składowych głównych.

Podstawiając powyższe zależności do równania (2.9) otrzymujemy

$$(2.10) \quad \left[ \left( \frac{1}{\sigma_F} \right) \sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2 + \sigma_{a3}^2 - \sigma_{a1} \sigma_{a2} - \sigma_{a2} \sigma_{a3} - \sigma_{a3} \sigma_{a1}} \right]^n +$$

$$+ \left[ \left( \frac{k}{R_m} \right) \sqrt{\sigma_{m1}^2 + \sigma_{m2}^2 + \sigma_{m3}^2 - \sigma_{m1} \sigma_{m2} - \sigma_{m2} \sigma_{m3} - \sigma_{m3} \sigma_{m1}} \right]^l = 1.$$

Przyjmując  $n = l = 2$ ,  $k = 1$  dostajemy dla dwuosiowego stanu naprężenia następujący związek

$$(2.11) \quad [\sigma_{a1}^2 - \sigma_{a1} \sigma_{a2} + \sigma_{a2}^2] + \left( \frac{\sigma_F}{R_m} \right)^2 [\sigma_{m1}^2 - \sigma_{m1} \sigma_{m2} + \sigma_{m2}^2] = \sigma_F^2.$$

Dla symetrycznych cykli zmian składowych naprężenia, gdy  $\sigma_{m1} = \sigma_{m2} = 0$  warunek Marina określony równaniem (2.11) sprowadza się do elipsy Hubera–Misesa. Zależność ta nie była jednak szerzej stosowana w pracach doświadczalnych traktujących o zniszczeniu zmęczeniowym w złożonym stanie naprężenia. Jedynie w pracy [19] obok innych wymieniono również warunek Marina.

Oprócz wymienionych fenomenologicznych kryteriów zniszczenia zmęczeniowego, spotyka się również w literaturze próby uwzględnienia w kryteriach zmęczeniowych wielkości fizycznych. Przykładem może być kryterium zaproponowane przez YOKOBORI [18], w którym zniszczenie uzależniono między innymi od średnicy ziarna, od średniej odległości między źródłami Franka–Reada i od naprężenia potrzebnego do uruchomienia dyslokacji. Warunek ten zawiera jednak szereg trudnych do określenia współczynników, bez których ocena jego zgodności z danymi doświadczalnymi jest niemożliwa.

### 3. Badania na próbkach kształtowych

Prace na temat doświadczalnej weryfikacji związków między naprężeniami, przy zniszczeniu zmęczeniowym w złożonym stanie naprężenia, prowadzone były początkowo na próbkach poddanych zginaniu i skręcaniu. Taki sposób obciążania oprócz wymienionych już poprzednio istotnych wad (niejednorodność stanu naprężenia, zmienność kierunku naprężeń głównych dla każdej kombinacji zginania i skręcania) ogranicza również zakres możliwych stanów naprężeń. Na płaszczyźnie naprężeń głównych punkty doświadczalne uzyskane z tak przeprowadzonych prób są zawarte w obszarze ograniczonym z jednej



strony osią  $\sigma_1$ , która odpowiada stanowi wywołanemu przez zginanie przy zerowym momencie skracającym, a prostą o równaniu  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , która odpowiada stanowi wywołanemu przez skracanie przy zerowym momencie zginającym.

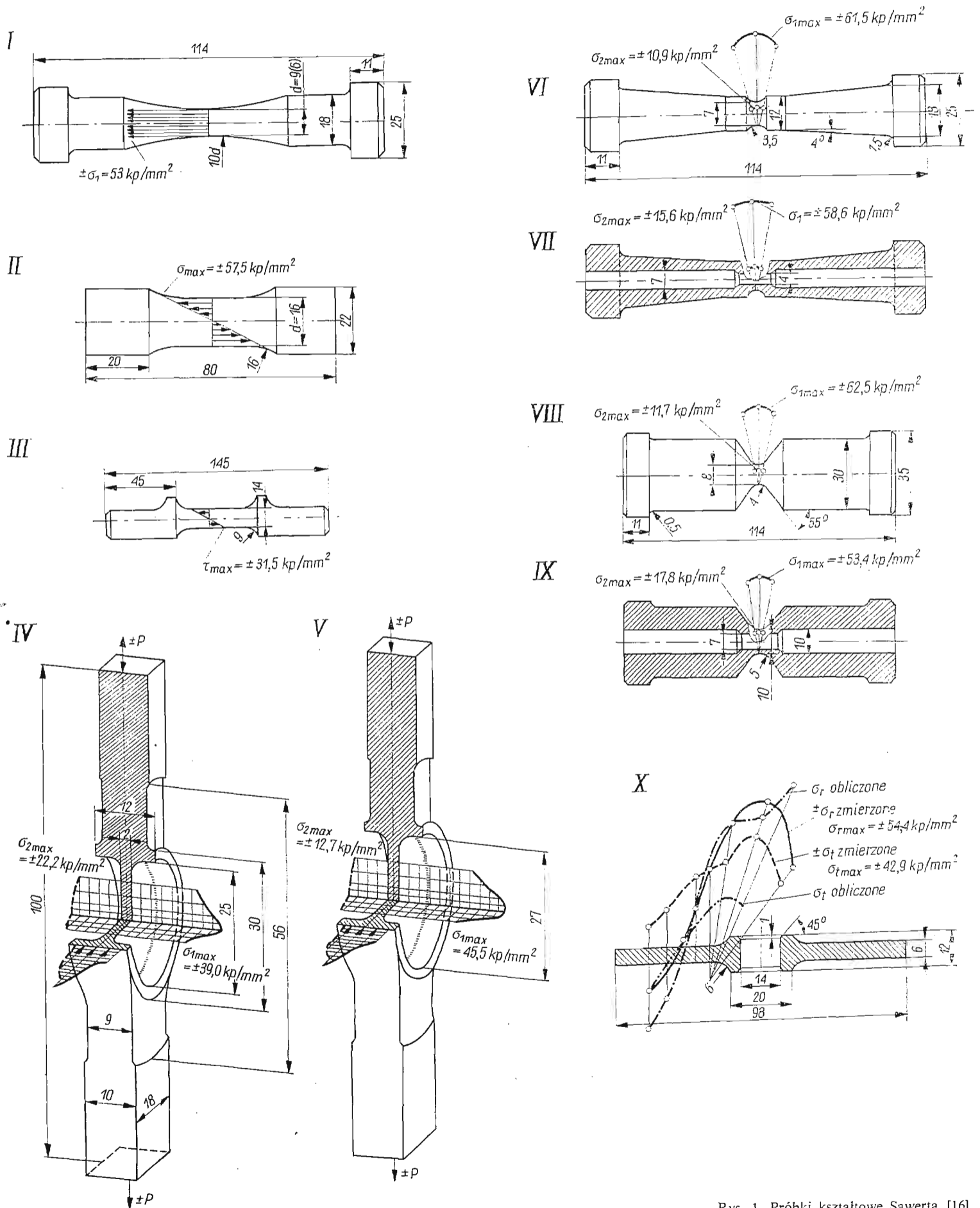
Pewną innowację ze względu na rodzaj próbek wprowadził w 1943 r. SAWERT [16]. Zastosował on próbki o tak dobranym kształcie, że w przekroju pomiarowym powstawał złożony stan naprężenia. Stosując różne kształty próbek (rys. 1) przeprowadził badania przy dziewięciu różnych proporcjach naprężeń głównych. Wszystkie próbki oprócz trzeciej z przedstawionych na rys. 1 obciążano cyklem wahadłowym rozciąganie — ściskanie. Próbka oznaczona numerem III była badana przy symetrycznym skręcaniu. Próbka X o kształcie tarczy kołowej była utwierdzona na obrzeżu i następnie przy pomocy trzpienia zamocowanego w otworze była uginana siłą osiową o symetrycznym cyklu.

Na poszczególnych rysunkach próbek zaznaczono w ich najbardziej osłabionym miejscu zarówno rozkłady naprężeń, jak i ich maksymalne wartości odpowiadające granicy zmęczenia (przy  $10^7$  cykli zmian obciążenia). Zaznaczone na tym rysunku wartości naprężeń odnoszą się do próbek wykonanych ze stali chromo-wanadowej (o zawartości w %: C — 0,29; Mn — 0,68; Cr — 2,55; Ni — 0,27; V — 0,25). Rozkłady naprężeń obliczono na podstawie określonego doświadczalnie pola odkształceń sprężystych. Dla cylindrycznych próbek z karbami oprócz wartości zmierzonych autor podał również wartości obliczone na podstawie nomogramów Neubera.

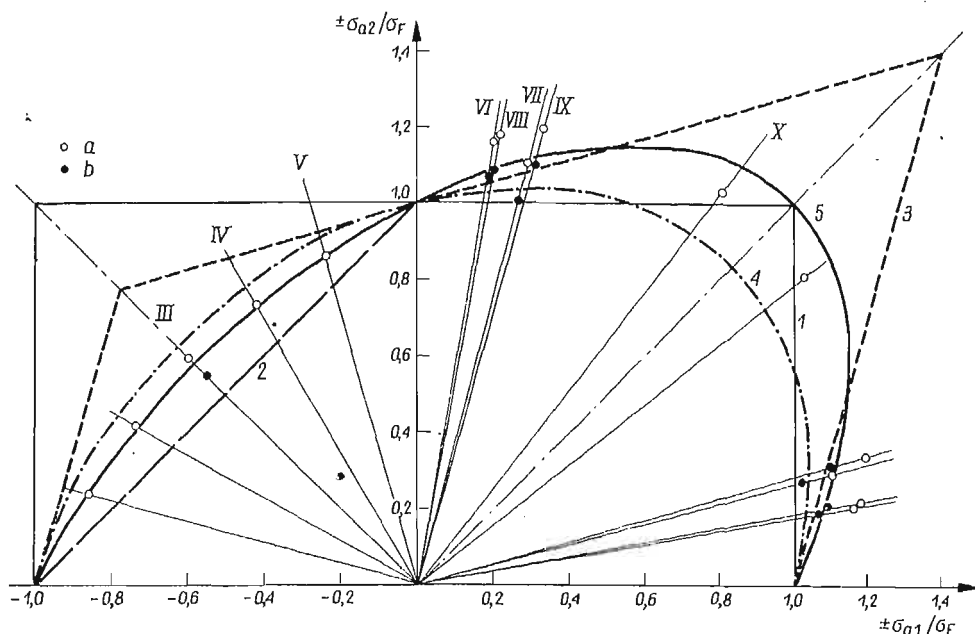
Wyniki doświadczeń zostały przedstawione na płaszczyźnie naprężeń głównych we współrzędnych bezwymiarowych (rys. 2). Punkty doświadczalne otrzymane na jednej próbce odkładano dwukrotnie, symetrycznie względem prostych  $\sigma_{a1} = \sigma_{a2}$  i  $\sigma_{a1} = -\sigma_{a2}$ . Stwarza to złudzenie izotropowych własności materiału, co jednak nie było stwierdzone doświadczalnie. Biorąc pod uwagę niejednorodność stanu naprężenia w przekroju próbki i różny gradient naprężenia dla poszczególnych próbek autor odnosił wyniki doświadczeń zarówno do jednoosiowej próby rozciągania — ściskania (punkty białe) jak i do próby przy zginaniu (punkty czarne). Podkreślono w ten sposób, że nie są to próby równoważne. Identyczne badania przeprowadzono również dla próbek ze stali węglowej (o zawartości węgla 0,14%) oraz dla próbek ze stali chromo-wanadowej azotowanej, o grubości warstwy utwardzonej w granicach 0,35 do 0,40 mm.

Wyniki doświadczeń, przedstawione w ewspółrzędnych bezwymiarowych dla stali węglowej i stopowej, różnią się w nieznacznym stopniu. Na zamieszczonych przez SAWERTA wykresach we współrzędnych  $\frac{\sigma_{a1}}{\sigma_F}$  i  $\frac{\sigma_{a2}}{\sigma_F}$  (rys. 2) punkty doświadczalne wykazują najlepszą zgodność z krzywą kryterium energii odkształcenia postaciowego (2.5), w stosunku do której największe odchylenie nie przekracza 8%.

Do kategorii prac, w których wykorzystywano próbki kształtowe można również zaliczyć pracę FINDLEYA i in. [4] z 1961 r. Autorzy postawili sobie za cel doświadczalne stwierdzenie, czy przy stałej energii odkształcenia wystąpi zniszczenie zmęczeniowe. W tym celu zaprojektowali urządzenie, w którym próbka o kształcie tarczy o zmiennej grubości i średnicy około 8 cm obracała się względem przyłożonego stałego ściskającego obciążenia promieniowego. W ten sposób zapewnili oni warunek stałej energii odkształcenia w środku tarczy przy zmiennej orientacji naprężeń głównych względem próbki. W tak zaprogramowanym doświadczeniu autorzy nie musieli określać stanu naprężenia w próbce, chodziło



Rys. 1. Próbkki kształtowe Sawerta [16]



Rys. 2. Porównanie kryteriów wytrzymałości zmęczeniowej z wynikami doświadczeń dla stali stopowej przy cyklu symetrycznym [16]. Punkty doświadczalne odniesiono do trwałej wytrzymałości przy: a — cyklu rozciąganie-ściskanie; b — cyklu zginania. 1; 2; 3; 4; 5 — linie teoretyczne według rozdziału 2.

tylko o stwierdzenie, czy wystąpi zniszczenie zmęczeniowe. Doświadczenia przeprowadzono na stopie aluminium 35S-T61 o składzie chemicznym w procentach: Cu — 1,34; Fe — 0,21, Si — 5,09; Mg — 0,44; Ti — 0,14. Wobec faktu wystąpienia pęknięcia tarczy autorzy konkludują, że zniszczenie zmęczeniowe może być wynikiem zmiany pewnych składowych naprężeń czy odkształceń odniesionych do szczególnej płaszczyzny materiału. Dalej autorzy stwierdzają, że chociaż energia odkształcenia może być użyteczna jako formuła przy projektowaniu w złożonym stanie naprężenia to przeprowadzone doświadczenia wskazują, że nie jest ona istotna dla opisu mechanizmu zniszczenia.

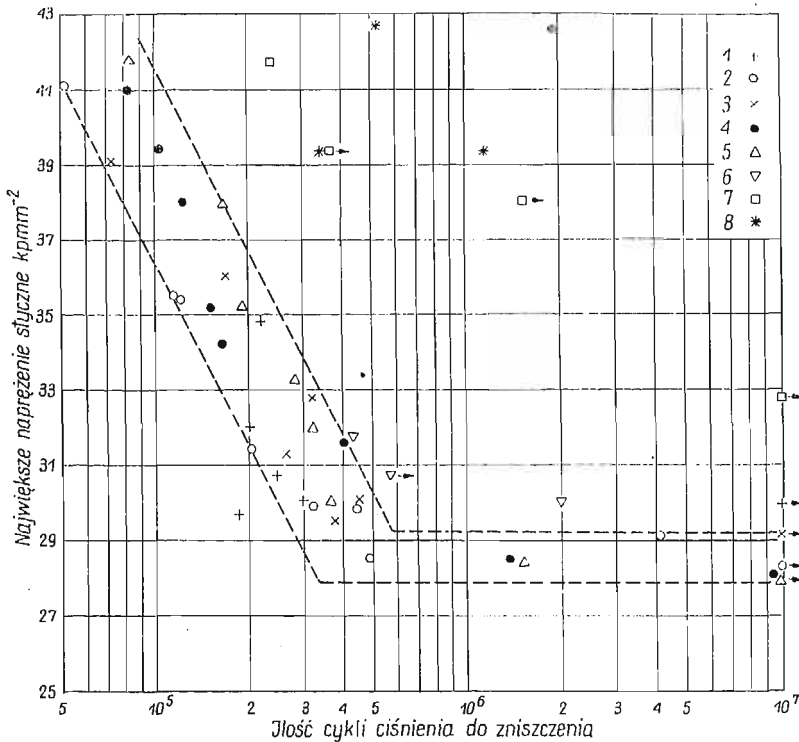
Ciekawą techniką doświadczalną dla otrzymania dwuosiowego stanu naprężenia zastosowali w 1968 r. SCHEWCHUK i in. [17]. Obciążając zmiennym ciśnieniem swobodnie podparte płyty kołowe i płyty eliptyczne o dwu różnych proporcjach wymiarowych, zrealizowano dwuosiowy stan naprężenia o stosunku naprężenia 1:1, 1:0,75, 1:0,5. Otrzymane w ten sposób wyniki doświadczeń przeprowadzonych na próbkach wyciętych z walcowego stopu aluminium 7075-T651 o składzie Zn — 5,5%; Mg — 2,5%; Cu — 1,5%; Cr — 0,3%, były porównywane z kryterium całkowitej energii odkształcenia. Przeprowadzone badania dotyczą niskocyklicznej wytrzymałości zmęczeniowej (do 1000 cykli).

#### 4. Badania na cylindrycznych próbkach grubościennych

Drugą grupę prac doświadczalnych traktujących o zniszczeniu zmęczeniowym w złożonym stanie naprężenia stanowią badania, w których używano próbek o kształcie grubościennego zamkniętego cylindra. W roku 1956 MORRISON i in. [11] opisali aparaturę do

bań w trójosiowym stanie naprężenia, w której wykorzystywano grubościennie próbki rurkowe. Urządzenie to pozwalało na otrzymywanie ciśnienia do  $3000 \text{ kpcm}^{-2}$ .

W grubościennym zamkniętym cylindrze poddanym wewnętrznemu ciśnieniu panuje trójosiowy stan naprężenia. Ze wzorów Lamègo wynika, że ściskające naprężenie promieniowe i rozciągające obwodowe osiągają największe wartości bezwzględne na wewnętrznej średnicy cylindra. Natomiast naprężenie osiowe jest jednorodne w przekroju próbki. Zarówno w pracy [11], jak i w pracy PARRY'EGO [13], tak określony stan naprężenia traktowano jako superpozycję trójosiowego równomiernego rozciągania i stanu ścinania naprężeniami, które zmieniają się od minimum na zewnętrznej średnicy do maksimum na wewnętrznej średnicy cylindra. Wykorzystując ten sposób podejścia podjęto w pracy [13] próbę doświadczalnego określenia wpływu trójosiowego jednorodnego rozciągania na wytrzymałość



Rys. 3. Krzywa Wohlera dla grubościennych próbek rurkowych [13]. Punkty doświadczalne: próbki wyżarzone po honowaniu 1.  $K=D_z/D_w=1,2$ ; 2.  $K=1,4$ ; 3.  $K=1,6$ ; 4.  $K=1,8$ ; 5.  $K=2,0$ ; 6.  $K=3,0$ ; 7. próbki honowane po wyżarzeniu:  $K=1,8$ ; 8. próbki o powierzchni otworu zabezpieczonej przed działaniem oleju:  $K=1,4$

zmęczeniu przy ścinaniu. Stosunek tego trójosiowego równomiernego rozciągania do największego naprężenia ścinającego występującego na wewnętrznej średnicy cylindra jest równy  $\frac{\sigma_z}{\tau_{\max}} = \frac{1}{K^2}$ , gdzie przez  $K$  oznaczono stosunek zewnętrznej do wewnętrznej średnicy cylindra.

Wykorzystując wyżej opisaną aparaturę poddawano pulsacji ciśnienia próbki o średnicy wewnętrznej 15,2 mm i długości pomiarowej 76,2 mm przyjmując sześć różnych proporcji wymiarowych od  $K = 1,2$  do  $K = 3$ . Wykonano je ze stali Vibrac V30 o składzie chemicznym w procentach: C — 0,29; Si — 0,15; Mn — 0,66; Ni — 2,55; Cr — 0,58; Mo — 0,58. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń (rys. 3) wskazują, że granica zmęczenia przy ścinaniu wynosi około  $28,5 \text{ kpm}^{-2}$  i jest niezależna od wartości naprężeń rozciągających, które zmieniały się w zakresie od  $\sigma_z = 3,28 \text{ kpm}^{-2}$  dla  $K = 3$  do wartości  $\sigma_z = 20 \text{ kpm}^{-2}$  dla  $K = 1, 2$ . Zaznaczone przy niektórych punktach strzałki oznaczają, jak to się zwykle przyjmuje, że nie uzyskano zniszczenia, lub że wystąpiło ono poza częścią pomiarową próbki. Tak otrzymana wartość trwałej wytrzymałości zmęczeniowej przy ścinaniu jest dużo mniejsza od wartości  $48,8 \text{ kpm}^{-2}$  otrzymanej dla tego samego materiału z próby jednostronnie zmiennego skręcania cienkościennej próbki rurkowej. Traktując otrzymane rezultaty jako wstępne, autor pracy konkluduje, że nałożenie trójosiowego rozciągania ma wpływ na granicę zmęczenia przy ścinaniu, ale jest zdumiewające, że wielkość tych naprężeń rozciągających nie ma istotnego znaczenia. Zamieszczone jednak w dalszej części pracy PARRY'EGO wyniki wskazują, że otrzymane różnice w wytrzymałości zmęczeniowej mogą być powodowane przez niszczące działanie oleju. Przytoczone dotychczas rezultaty (rys. 3) otrzymano na próbkach, które poddawano wyżarzaniu w próżni w temperaturze  $600^\circ\text{C}$  po honowaniu wewnętrznej średnicy cylindra. Zupełnie przypadkowo stwierdzono znaczny wzrost wytrzymałości zmęczeniowej dla próbek, które były honowane po obróbce cieplnej. Wyniki tych doświadczeń dla  $K = 1,8$  zaznaczono kwadracikami na rys. 3.

W rezultacie wielu dodatkowych badań autor doszedł do wniosku, że ten wzrost wytrzymałości jest spowodowany przez wytworzenie, na skutek honowania, warstwy ochronnej, która następnie zabezpieczała przed penetracją oleju w mikroszczeliny na powierzchni próbki. Dla potwierdzenia tego wniosku próbowano w inny sposób wytworzyć warstwę ochronną. Malowanie i lakierowanie oraz pokrywanie wewnętrznej powierzchni próbki warstwą kadmu nie dało pozytywnych rezultatów. Dopiero pokrycie powierzchni próbki warstwą gumy dało znaczne podwyższenie wytrzymałości zmęczeniowej. Na rys. 3 zaznaczono otrzymane w ten sposób punkty doświadczalne uzyskane na próbkach o stosunku  $K = 1,4$  (gwiazdki). Otrzymane rezultaty są więc potwierdzeniem istotnego wpływu oleju na wytrzymałość zmęczeniową w tego typu doświadczeniach.

Problem wpływu trójosiowego, równomiernego stanu naprężenia na wytrzymałość zmęczeniową, poza omówioną pracą PARRY'EGO [13], był badany również w innych pracach przy prostych stanach obciążenia. CROSSLAND [3] badał efekt ciśnienia hydrostatycznego na wytrzymałość zmęczeniową przy cyklicznym skręcaniu pełnych próbek o średnicy 5,6 mm wykonanych z identycznej stali co próbki użyte w pracy [13]. Przed zasadniczymi badaniami wykonano szereg wstępnych doświadczeń, z których wynikało bez wątpienia, że niezależnie od wielkości ciśnienia cieczy użytej przy badaniach ma ona szkodliwy wpływ na wytrzymałość zmęczeniową jeśli styka się bezpośrednio z powierzchnią próbki. Dobrym zabezpieczeniem przed tego rodzaju wpływem okazała się cienka warstwa gumy pokrywająca próbkę. Zmęczeniowe próby na skręcanie zrobiono przy dwóch wartościach nałożonego ciśnienia hydrostatycznego, przy  $31 \text{ kpm}^{-2}$  oraz przy ciśnieniu atmosferycznym. Wyniki doświadczeń (rys. 4) przedstawiono w postaci zależności amplit-

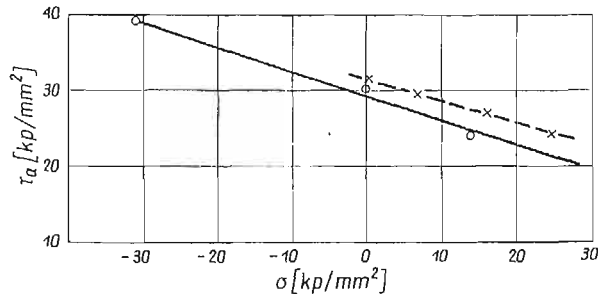
tudy intensywności naprężeń stycznych  $\tau_a$  w funkcji największej wartości średnich naprężeń normalnych  $\sigma$ . Wielkość  $\tau_a$  określoną wzorem

$$\tau_a = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{a1} - \sigma_{a2})^2 + (\sigma_{a2} - \sigma_{a3})^2 + (\sigma_{a3} - \sigma_{a1})^2}$$

obliczono podstawiając amplitudy poszczególnych składowych naprężeń będących wynikiem przyłożonego zmiennego obciążenia. Natomiast naprężenie średnie określone jest wzorem

$$\sigma = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3},$$

w którym poszczególne składowe są sumą naprężeń wywołanych ciśnieniem hydrostatycznym i przyłożonym cyklicznym obciążeniem. Przeprowadzone doświadczenia wskazują,

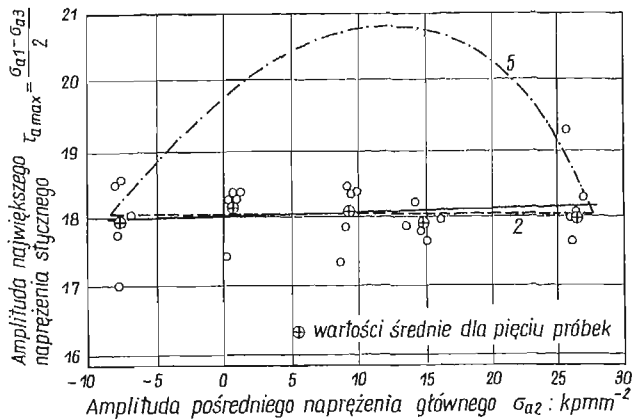


Rys. 4. Zależność amplitudy oktaedrycznego naprężenia stycznego od największej wartości naprężenia normalnego dla stali stopowej. Punkty doświadczalne [3]: ○ — próbki wycięte wzdłuż osi pręta; × — próbki wycięte prostopadłe do osi pręta

że przy wytrzymałości zmęczeniowej istnieje liniowa zależność między tymi dwiema współrzędnymi. Punkty doświadczalne na rys. 4 dla dodatnich wartości naprężeń średnich uzyskano z jednoosiowej próby zmęczeniowej o cyklu rozciąganie — ściskanie, przy której intensywność naprężeń stycznych  $\tau_a = \sigma_{a1} \sqrt{3}$ , a naprężenie średnie  $\sigma = \sigma_1/3$ , gdzie przez  $\sigma_{a1}$  oznaczono amplitudę cyklu obciążenia. Zaznaczone dwie linie proste opisujące punkty doświadczalne odnoszą się do próbek o różnej orientacji względem osi pręta, z którego były wycinane. Różnice między tymi punktami doświadczalnymi wskazują i pozwalają ocenić anizotropowe własności badanego materiału. Jak stwierdza autor, wyniki doświadczeń, chociaż zrobione tylko przy kilku wartościach ciśnienia średniego pokazują, że zniszczenie zmęczeniowe w złożonym stanie naprężenia można opisać przez zmodyfikowane kryterium Misesa uwzględniające wpływ średniego naprężenia.

W 1967 roku BLASS i FINDLEY [1] wykorzystując częściowo aparaturę opisaną w pracy [11], wykonali na grubościennych próbkach rurkowych badania mające na celu określenie wpływu pośredniego naprężenia  $\sigma_2$  (przy  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ), na wytrzymałość zmęczeniową w złożonym stanie naprężenia. Próbki wykonano ze stali 4340 o składzie w procentach: C — 0,41; Mn — 0,73; Si — 0,31; Ni — 1,78; Cr — 0,83; Mo — 0,27. Próbki poddawano jednakowym jednostronnie zmiennym cyklom ciśnienia wewnętrznego i siły osiowej.

Zastosowanie różnych głowic przyrządu pozwalało na otrzymanie pięciu różnych maksymalnych wartości naprężenia pośredniego, którym było naprężenie osiowe. Badano po pięć próbek przy każdej z pięciu wartości naprężenia pośredniego. Przy badaniach nie stosowano zabezpieczenia powierzchni próbki przed działaniem oleju. Biorąc pod uwagę fakt, że porównywano wyniki prób wykonanych w jednakowych warunkach sprawa ta nie ma istotnego znaczenia. Wyniki przedstawione na wykresie (rys. 5) w sposób przekonujący pokazują, że dla badanego materiału naprężenie pośrednie nie ma wpływu na wytrzymałość zmęczeniową. Linia ciągłą zaznaczono prostą najlepiej pasującą do punktów



Rys. 5. Wpływ pulsującego pośredniego naprężenia głównego na wytrzymałość zmęczeniową stali stopowej [1]. 2; 5 — linie teoretyczne według rozdziału 2.  $\circ$  — punkty doświadczalne dla  $1,19 \times 10^5$  cykli. Linia ciągła — prosta wyznaczona metodą najmniejszych kwadratów w stosunku do punktów doświadczalnych

doświadczalnych, którą obliczono metodą najmniejszych kwadratów. Natomiast liniami przerywanymi zaznaczono reprezentacje kryteriów zniszczenia. Elipsa przedstawia warunek Hubera–Misesa opisany równaniem (2.5), natomiast linia prosta równoległa do osi odciętych przedstawia warunek naprężeń ścinających (2.2). Na osi rzędnych odłożono wartości naprężeń ścinających odpowiadające wytrzymałości zmęczeniowej przy  $1,19 \times 10^5$  cykli zmian obciążenia. Ta ilość cykli jest średnią dla 25 badanych próbek. Wyciągnięte z tej pracy wnioski dotyczą tylko badanego materiału i, jak stwierdzają autorzy, nie mają ogólnego charakteru.

##### 5. Badania na cylindrycznych próbkach cienkościennych

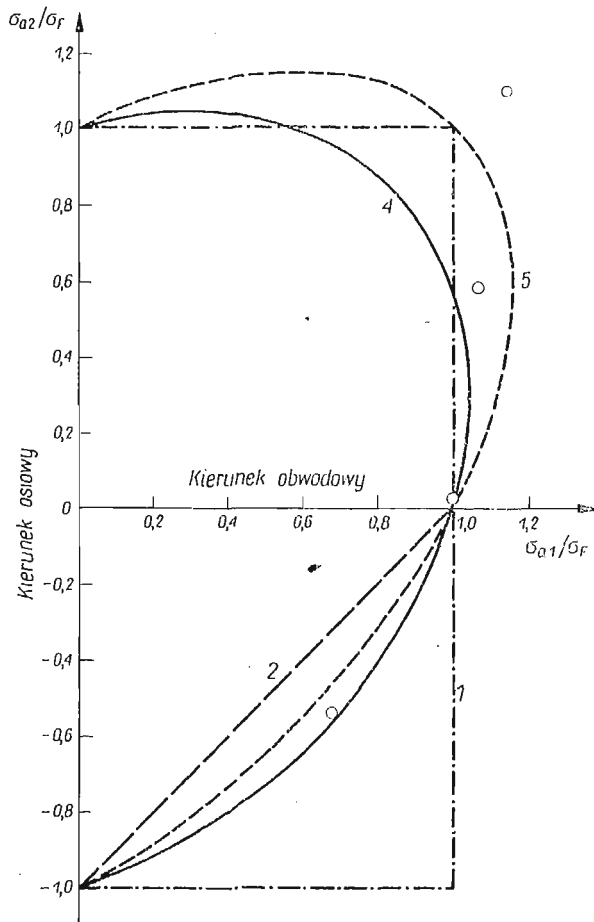
W dziedzinie badań zniszczenia zmęczeniowego w złożonym stanie naprężenia stosunkowo najliczniejszą grupę stanowią prace, w których używano cienkościennych próbek rurkowych obciążonych siłą osiową i ciśnieniem działającym na ścianki. W próbce takiej dla różnych wartości stosunków naprężenia osiowego do obwodowego zachowany jest stały kierunek osi głównych. Stan naprężenia jest w przybliżeniu płaski i jednorodny, przy czym stopień tego przybliżenia jest tym większy, im mniejszy jest stosunek grubości ścianki do wewnętrznej średnicy próbki. Z drugiej strony, ta minimalna grubość ścianki jest ogra-

niczona zarówno względami technologicznymi, jak i możliwością utraty stateczności, jeżeli jedno z naprężeń jest ściskające.

W roku 1934 MAIER (cyt. za [8]) poddawał cienkościennie rurki pulsacji ciśnienia wewnętrznego i statycznej sile osiowej badając jej wpływ na wytrzymałość zmęczeniową w kierunku obwodowym.

Weryfikacją kryteriów zniszczenia zmęczeniowego zajmowali się w 1945 r. MORIKAWA i GRIFFIS (cyt. za [8]), którzy poddawali próbkę rurkową, przy pomocy dwóch niezależnych układów, pulsacjom siły osiowej i ciśnienia wewnętrznego. Stwierdzili oni, że kryterium maksymalnych naprężeń dobrze zgadza się z wynikami ich doświadczeń po wprowadzeniu poprawek uwzględniających anizotropowe własności materiału.

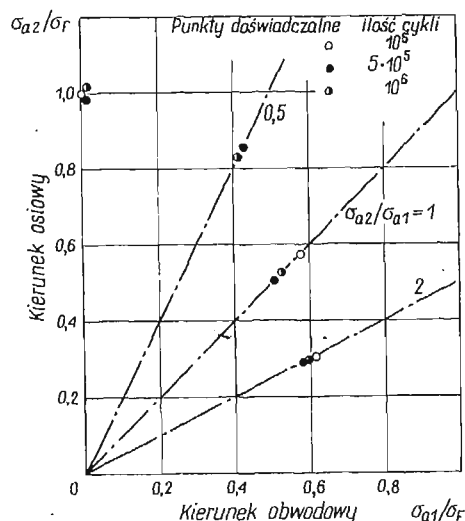
Niewątpliwym postępowaniem w badaniach zmęczeniowych próbek rurkowych była opublikowana w 1949 r. praca MAJORSA, MILLSA i MACGREGORA [8]. Pulsacje ciśnienia wewnętrznego i siły osiowej były wywoływane przez jedną tylko pompę olejową. Złożony stan na-



Rys. 6. Porównanie kryteriów wytrzymałości zmęczeniowej z wynikami doświadczeń [8] dla miękkiej stali ( $C = 0,2\%$ ) przy cyklu pulsującym dla  $10^7$  zmian obciążenia. 1; 2; 4; 5 — linie teoretyczne według rozdziału 2



prężenia był natomiast realizowany za pomocą oryginalnych w pomysłu głowic obciążających, które pozwoliły uzyskać różne proporcje między naprężeniem obwodowym i osiowym. Dla każdej z czterech różnych proporcji naprężeń badano po osiem próbek przy różnych poziomach obciążenia. Próbkę wykonano z wyżarzonej stali 1020 o zawartości 0,2% węgla i 0,55% manganu. Wartości wytrzymałości zmęczeniowej przy  $10^7$  cykli zmian obciążenia przedstawiono w bezwymiarowych współrzędnych na płaszczyźnie naprężeń głównych (rys. 6). Wartości te odniesiono do wytrzymałości zmęczeniowej próbki poddanej pulsacji ciśnienia wewnętrznego przy zerowej sile osiowej. Na nieregularność otrzymanych wyników niewątpliwie ma wpływ zarówno zauważona anizotropia własności materiału, jak i niszczące działanie oleju, które nie było uwzględniane w przeprowadzonych badaniach. Autorzy wnioskują, że mimo pewnej nieregularności punkty doświadczalne najlepiej pasują do hipotezy odkształcenia postaciowego (2.5).



Rys. 7. Wytrzymałość zmęczeniowa przy cyklu pulsującym w złożonym stanie naprężenia dla stopu aluminium Alcoa 24S-T [9]

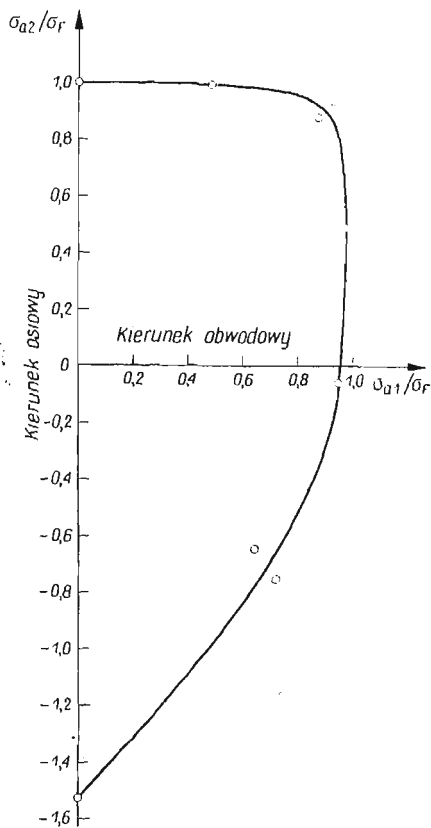
W 1949 r. MARIN [9] opisał aparaturę i otrzymane wyniki badań wytrzymałości zmęczeniowej cienkościennych próbek przy czterech różnych proporcjach naprężeń głównych.

Próbki wykonane z ciągniętej rury ze stopu aluminium Alcoa 24S-T o składzie: Cu — 4,4%, Mg — 1,5%, Mn — 0,6% poddawano niesymetrycznym cyklom obciążenia utrzymując stosunek minimalnych do maksymalnych naprężeń w granicach od 0,1 do 0,2. Dla każdej z czterech proporcji naprężeń obwodowego do osiowego, zawartych w granicach od 2 do 0, badano po osiem próbek.

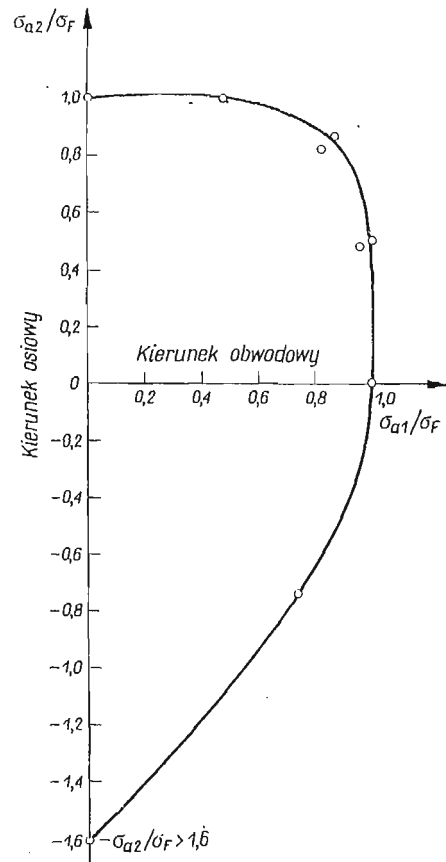
Otrzymane wyniki przedstawiono na płaszczyźnie naprężeń głównych (rys. 7) odniesione do wartości wytrzymałości zmęczeniowej przy osiowym rozciąganiu. Poszczególne punkty zaznaczone dla każdej proporcji naprężeń odpowiadają wytrzymałości zmęczeniowej przy różnych ilościach cykli  $10^5$ ;  $5 \times 10^5$  i  $10^6$ . Wytrzymałość zmęczeniowa w kierunku obwodowym wynosi około 60% wytrzymałości w kierunku osiowym chociaż, jak

zaznaczają autorzy, statyczna wytrzymałość w kierunku obwodowym wynosi dla tego samego materiału około 80% wytrzymałości w kierunku osiowym. Otrzymane rezultaty będą jednak duże wątpliwości. Powierzchnia próbki była w stanie nieobrobionym i nie zabezpieczono jej przed działaniem oleju. W przeciwieństwie do poprzednio omówionej pracy nie wszystkie próbki były obciążane w jednakowych warunkach. Wartości wytrzymałości  $\sigma_F$  otrzymano z próby jednoosiowego rozciągania, przy której nie było oleju wewnątrz próbki.

W opublikowanej w roku 1950 obszernej pracy ROŠA i EICHINGERA [14] dotyczącej zniszczenia, poświęcono dużo miejsca problemowi wytrzymałości zmęczeniowej w złożonym stanie naprężenia. Doświadczenia przeprowadzono przy siedmiu różnych pro-



Rys. 8. Wytrzymałość zmęczeniowa staliwa w złożonym stanie naprężenia przy cyklu pulsującym dla  $10^6$  cykli [14]



Rys. 9. Wytrzymałość zmęczeniowa stopu aluminium Avional D w złożonym stanie naprężenia przy cyklu pulsującym dla  $10^6$  cykli [14]

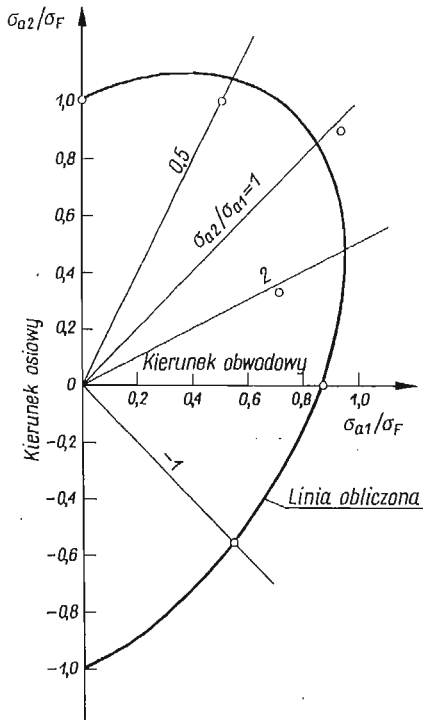
porcjach między naprężeniem obwodowym i osiowym, w tym również przy jednoosiowym rozciąganiu i ściskaniu. Badania wykonano dla siedmiu różnych materiałów stosując niesymetryczny cykl obciążenia. Dość duży stosunek grubości ścianki do średnicy wewnętrznej zabezpieczał wprawdzie próbkę przed utratą stateczności przy jednoosiowym ściskaniu,

ale jednocześnie powodował niejednorodny rozkład naprężeń w przekroju próbki i względnie duże wartości ściskających naprężeń promieniowych. Wartości te, liczone jako średnie między wielkością naprężenia promieniowego na zewnętrznej i wewnętrznej powierzchni próbki, nie przekraczają 11% większego z pozostałych naprężeń głównych. Na rys. 8 przedstawiono wyniki badań na próbkach wykonanych ze staliwa. Punkty doświadczalne i opisująca je linia ciągła dotyczą wytrzymałości zmęczeniowej przy  $10^6$  cykli zmian obciążenia. Wartość tej wytrzymałości przy jednoosiowym ściskaniu próbki jest około 1,5 raza większa niż to wynika z próby jednoosiowego rozciągania, przy czym był to jedyny wypadek uzyskania zniszczenia przy ściskaniu. W pozostałych wypadkach, jak na rys. 9, na którym przedstawiono wyniki badań dla stopu aluminium Avional D, wobec nie uzyskania zniszczenia określono jedynie, że wytrzymałość zmęczeniowa jest większa od pewnej wielkości naprężeń. Dla materiałów ciągliwych, podana wartość wytrzymałości przy ściskaniu była około 1,5 raza większa od wytrzymałości przy rozciąganiu. Natomiast dla materiałów kruchych (próbki wycięte ze spoin, żeliwo) wielkość przy ściskaniu była około 2 razy większa od analogicznej wielkości z próby jednoosiowego zmiennego rozciągania. Na podstawie przeprowadzonych badań autorzy stwierdzają, że przy zniszczeniu zmęczeniowym materiał podlega w przybliżeniu hipotezie Coulomba–Mohra.

BUNDY i MARIN [2] w roku 1954 przedstawili badania przeprowadzone na próbkach rurkowych ze stopu aluminium 14S-T4 (o składzie Cu — 4,4%, Si — 0,8%, Mn — 0,8%, Mg — 0,4%). Doświadczenia przeprowadzono w dwóch ćwiartkach płaszczyzny naprężeń głównych przy sześciu różnych proporcjach między pulsującym synchronicznie naprężeniem obwodowym i osiowym. Rozkład naprężeń traktowano jako jednorodny w przekroju próbki zaznaczając, że największe odchylenie od średniego naprężenia obwodowego, jak to wynika ze wzoru Lamégo, wynosi około 5%. Wyniki doświadczeń przedstawione na rys. 10 odpowiadają wytrzymałości zmęczeniowej przy  $10^6$  cykli. Wielkości te odniesiono do wytrzymałości zmęczeniowej przy jednoosiowym rozciąganiu. Autorzy podkreślają, że anizotropowe własności materiału są bardziej widoczne przy obciążeniu cyklicznym niż statycznym. Procentowa różnica w wytrzymałości zmęczeniowej w kierunku obwodowym i osiowym jest rzędu 15%, chociaż różnica przy obciążeniu statycznym była znacznie mniejsza. Dla opisanego otrzymanych wyników doświadczalnych, autorzy proponują modyfikację kryterium energii odkształcenia postaciowego przez wprowadzenie dwóch dodatkowych stałych uwzględniających anizotropię. Obliczoną w ten sposób krzywą zaznaczono linią ciągłą na rys. 10. Wprawdzie dane doświadczalne są niewystarczające i występuje nieregularność otrzymanych wyników, przy czym szczególnie odbiega punkt dla stosunku  $\sigma_{a2}/\sigma_{a1} = 2$ , to jednak jak stwierdzają autorzy widoczna jest ogólna zgodność wyników eksperymentalnych z krzywą otrzymaną teoretycznie. Być może jednym z czynników wpływających na tak duży rozrzut wyników doświadczalnych jest wpływ oleju na wytrzymałość zmęczeniową, na który w omawianej pracy nie zwracano uwagi. Należy tu podkreślić, że nie posiadając danych doświadczalnych autorzy przyjęli wytrzymałość zmęczeniową przy prostym ściskaniu taką samą jak przy prostym rozciąganiu. Jest to założenie mało wiarygodne szczególnie w konfrontacji z pracą NEWMARKA i in. [12] z 1951 r., która poświęcona była wytrzymałości zmęczeniowej przy jednoosiowym ściskaniu. Z przeprowadzonych bardzo starannie doświadczeń dla wszystkich badanych materiałów (żeliwo szare, stop aluminium, miękka stal) otrzymano znacznie wyższą wartość wytrzymałości

zmęczeniowej przy zmiennej od zera do określonej wartości sile ściskającej niż w przypadku pulsacji siły rozciągającej. Autorzy stwierdzają, że zbyt niskie wartości wytrzymałości zmęczeniowej przy ściskaniu podawane w innych pracach są rezultatem bądź to koncentracji naprężeń, bądź naprężeń szczątkowych czy wreszcie niezbyt starannego przeprowadzenia doświadczeń.

Zjawisko zniszczenia zmęczeniowego przy ściskaniu badał w 1969 r. HUBBARD [6]. Doświadczenia przeprowadzono na płaskich próbkach z karbem wykonanych ze stopu aluminium 7075-T6, na powierzchni których nałożono warstwę materiału czułego elastooptycznie. Obserwując rozprzestrzenianie się szczeliny i rozkład naprężeń w jej otoczeniu



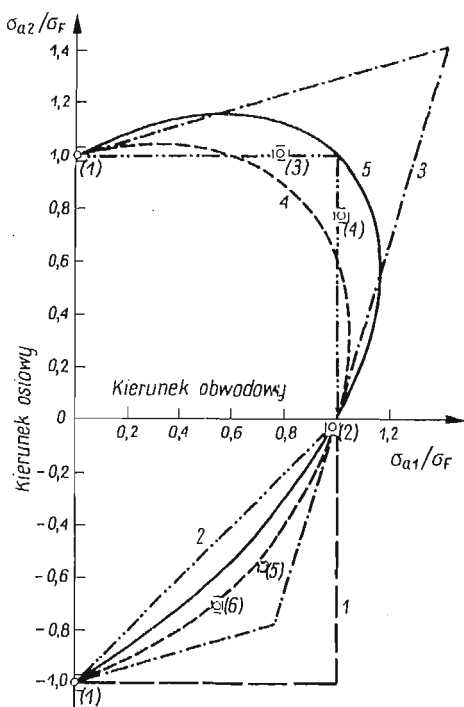
Rys. 10. Wytrzymałość zmęczeniowa stopu aluminium 14S-T4 w złożonym stanie naprężenia przy cyklu pulsacyjnym dla  $10^6$  cykli. [2]. Linia teoretyczna — elipsa Hubbera-Misesa z uwzględnieniem anizotropii

podczas jednostronnego cyklu zmiany obciążenia ściskającego autor wnioskuje, że za zniszczenie ściskanej próbki odpowiedzialne są rozciągające naprężenia szczątkowe występujące przy odciążaniu w pobliżu szczeliny. Stwierdzono również, że dla danej długości szczeliny i maksymalnej wartości naprężenia ściskającego można tak dobrać wartość minimalnego naprężenia ściskającego w cyklu, że zostanie zatrzymany proces wzrostu szczeliny.

W opublikowanej w 1970 r. pracy ROTVELA [15] opisano sposób przeprowadzenia doświadczeń i wyniki badań zmęczeniowych w dwuosiowym stanie naprężenia.

Próbki ze stali węglowej o zawartości 0,35% — C, 0,20% — Si, 0,45% — Mn, wykonano bardzo starannie w 10 klasie gładkości powierzchni. Dla zabezpieczenia przed niszczącym działaniem oleju powierzchnie próbek pokrywano cienką warstwą plastyku. Próbki były obciążane symetrycznym cyklem siły osiowej i ciśnienia działającego na ścianki.

Przy obliczaniu naprężeń uwzględniano ich nierównomierny rozkład spowodowany zbyt dużą grubością ścianki w stosunku do średnicy wewnętrznej, jak i występujący momentem gnącym wywołanym przez nieosiowe zamocowania próbki. Doświadczenia przeprowadzono dla sześciu różnych proporcji między naprężeniami głównymi, badając w każdej serii minimum sześć próbek. Wytrzymałość zmęczeniową określano przy  $2,5 \times 10^6$  cykli zmian obciążenia. Na wykresie rys. 11 odłożono punkty doświadczalne we współrzędnych bezwymiarowych odnosząc je do wartości wytrzymałości przy cyklu rozciągania-



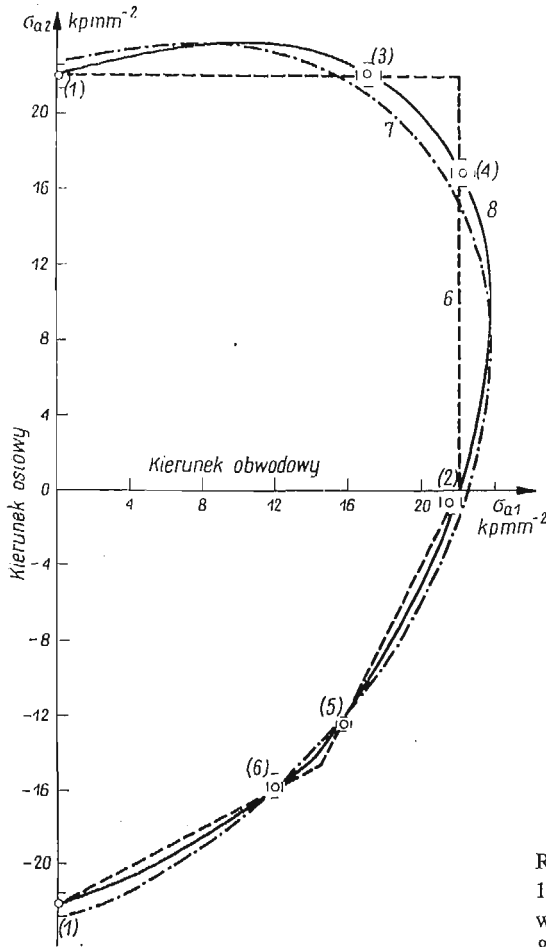
Rys. 11. Porównanie kryteriów wytrzymałości zmęczeniowej z wynikami doświadczeń dla stali węglowej ( $C = 0,35\%$ ) przy cyklu symetrycznym dla  $2,5 \times 10^6$  cykli [15]. 1; 2; 3; 4; 5 — linie teoretyczne według rozdziału 2

ściskanie wzdłuż osi próbki. Poziome i pionowe linie przy każdym punkcie oznaczają zakres błędu. Na rysunku tym zaznaczono również opisane poprzednio kryteria zniszczenia zmęczeniowego zawierające jedną stałą materiałową.

Te same punkty doświadczalne porównano również z trzema kryteriami o dwóch stałych materiałowych, które dobrano w ten sposób, żeby krzywa opisywała możliwie najlepiej punkty doświadczalne (rys. 12). Otrzymane wyniki dobrze zgadzają się zarówno z zaproponowanym przez Crosslanda kryterium naprężeń oktaedrycznych opisanym równaniem (2.8), jak i kryterium Coulomba-Mohra (2.6). Stwierdzenie, które z nich lepiej opisuje zniszczenie zmęczeniowe w złożonym stanie naprężenia wymaga przeprowadzenia dodatkowych doświadczeń przy takich proporcjach między naprężeniami, przy których różnice między obydwooma kryteriami są największe.

Tylko dwie z omówionych tu prac były przeprowadzone przy symetrycznych cyklach obustronnie zmiennych, mianowicie praca SAWERTA [16] i ROTVELA [15]. Wszystkie pozostałe prace wykonano przy cyklu niesymetrycznym (pulsującym), w którym naprężenia

zmieniały się od wartości zerowej (lub bliskiej zeru) do uprzednio ustalonej pewnej wartości, dodatniej lub ujemnej, w zależności od wymaganej proporcji między naprężeniami. Jak słusznie zauważono [15] doświadczenia takie są zaburzone wpływem średniego naprężenia cyklu na wytrzymałość zmęczeniową. Tylko przy cyklach symetrycznych obu-



Rys. 12. Porównanie wyników doświadczeń z rys. 11 z kryteriami wytrzymałości zmęczeniowej zawierającymi dwie stałe materiałowe [15]. 6; 7; 8 — linie teoretyczne według rozdziału 2

stronnie zmiennych, dla każdej proporcji między naprężeniami pozostaje stała, równa zero wartość średniego naprężenia. Natomiast przy cyklu jednostronnym zmiana amplitudy powoduje zmianę naprężenia średniego, które wobec tego ma różne wartości, zarówno dla poszczególnych naprężeń głównych przy danym stosunku między nimi, jak i dla różnych proporcji między naprężeniami.

## 6. Wnioski

Rozwój doświadczalnych badań zmęczeniowych w złożonym stanie naprężenia postępował w sposób wolny. Trudna technika doświadczalna i duża pracochłonność badań odgrywały w sposób istotny rolę czynnika hamującego. Poza tym wyniki prac wykona-

nych w różnych warunkach nie stanowią porównywalnego materiału. Większość badań eksperymentalnych przeprowadzono przy niesymetrycznym cyklu obciążenia, przy którym wyniki zaburzone są wpływem średniego naprężenia w cyklu na wytrzymałość zmęczeniową. Natomiast tylko dwie prace [15] i [16] wykonano przy obustronnie zmiennym cyklu zmiany obciążenia, a więc w warunkach, w których rzeczywiście jesteśmy w stanie określić zmęczeniowe cechy badanego materiału.

Wart podkreślenia jest również zauważony w wielu pracach doświadczalnych fakt wystąpienia silniejszej anizotropii przy cyklicznym obciążaniu, niż w warunkach statycznego obciążenia próbki.

Mimo że fenomenologiczny opis zniszczenia zmęczeniowego metali w złożonym stanie naprężenia pozostaje nadal niekompletny i nie udokumentowany doświadczalnie to jednak wyniki badań pozwalają już na wyciągnięcie pewnych ogólnych wniosków. Warunek zniszczenia zmęczeniowego w swej ogólnej postaci powinien uwzględniać wpływ pierwszego niezmiennika. W sposób przekonujący wykazał to CROSSLAND [3] dla stali stopowej. Wykonane przez niego stosunkowo proste doświadczenia były podstawą matematycznej formy warunku zniszczenia zmęczeniowego (2.8), który uwzględnia podstawowe efekty zauważone przy doświadczeniach przeprowadzonych przez innych autorów. Zaproponowany przez CROSSLANDA warunek przedstawia w przestrzeni naprężeń głównych stożek o osi równo nachylonej do osi współrzędnych układu. Wierzchołek stożka znajduje się po stronie naprężeń rozciągających. Do opisu zniszczenia klasy materiałów, których wytrzymałość zmęczeniowa w złożonym stanie nie zależy od wielkości pośredniego naprężenia, może być wykorzystany warunek Coulomba. Zdaniem autorów niniejszej pracy właśnie te dwa warunki zniszczenia zmęczeniowego, warunek Crosslanda i Coulomba, mogą być zalecane do analizy własności zmęczeniowych metali w złożonym stanie naprężenia.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. J. BLASS, W. N. FINDLEY, *The influence of the intermediate principal stress on fatigue under triaxial stresses*, Material Research and Standards, 7, 6, 1967, 254-261.
2. R. W. BUNDY, J. MARIN, *Fatigue strength of 14S-T4 aluminium alloy subjected to biaxial stresses*, Proc. ASTM, 54, 1954, 755-768.
3. B. CROSSLAND, *Effect of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel*, Int. Conf. on Fatigue of Metals, London, 1956, 138-149.
4. W. N. FINDLEY, P. N. MATHUR, E. SZCZEPANSKY, A. O. TEMEL, *Energy versus stress theories for combined stress — a fatigue experiment using a rotating disk*, Trans. ASME, D, 83, 1, 1961, 10-14.
5. W. N. FINDLEY, P. N. MATHUR, *Modified theories of fatigue failure under combined stress*, Proc. SESA, XIV, 1, 1956, 35-46.
6. R. P. HUBBARD, *Crack growth under cyclic compression*, Trans. ASME, D, 91, 4, 1969, 625-631.
7. LIEBOWITZ (editor), *Fracture*, 2, Mathematical Fundamentals, Academic Press, New York and London 1968.
8. H. MAJORS, B. D. MILLS, C. W. MACGREGOR, *Fatigue under combined pulsating stresses*, J. Appl. Mech., 16, 3, 1949, 269-276.
9. J. MARIN, *Biaxial tension-tension fatigue strengths of metals*, J. Appl. Mech., 16, 4, 1949, 383-388.
10. J. MARIN, *Interpretation of fatigue strengths for combined stresses*, Proc. Int. Conf. on Fatigue of Metals, London, 1956, 184-194.
11. J. L. M. MORRISON, B. CROSSLAND, J. S. C. PARRY, *Fatigue under triaxial stress: development of a testing machine and preliminary results*, Proc. Inst. Mech. Engr., 21, 170, 1956, 697-712.

12. N. M. NEWMARK, R. J. MOSBORG, W. H. MUNSE, R. E. ELLING, *Fatigue tests in axial compression*, Proc. ASTM, **51**, 1951, 792-803.
13. J. S. C. PARRY, *Further results of fatigue under triaxial stress*, Int. Conf. on Fatigue of Metals, London 1956, 132-137.
14. M. ROŠ, A. EICHINGER, *Die Bruchgefahr fester Körper bei wiederholter Beanspruchung — Ermüdung*, EMPA — Bericht, 173, Zürich 1950.
15. F. ROTVEL, *Biaxial fatigue tests with zero mean stresses using tubular specimens*, Int. J. Mech. Sci., **12**, 7, 1970, 597-613.
16. W. SAWERT, *Verhalten der Baustähle bei wechselnder mehrachsiger Beanspruchung*, Z. Ver. Deut. Ing., **87**, 39/40, 1943, 609-615.
17. J. SCHEWCHUK, S. Y. ZAMRIK, J. MARIN, *Low-cycle fatigue of 7075-T651 aluminium alloy in biaxial bending*, Exp. Mech., **8**, 11, 1968, 504-512.
18. T. YOKOBORI, T. YOSHIMURA, *A criterion for fatigue fracture under multi-axial alternating stress state*, Rep. of the Res. Inst. for Strength and Fracture of Materials, Tohoku University, Sendai, Japan, **2**, 2, 1966, 45-54.
19. И. Н. ШКАНОВ, *Экспериментальная проверка критериев усталостной прочности при двухосном растяжении*, Проблемы Прочности, **2**, 1970, 8-10.

## Р е з ю м е

ИССЛЕДОВАНИЯ УСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ  
НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Дается обзор экспериментальных работ по исследованию усталостной прочности при сложном напряженном состоянии. Работы группируются соответственно форме образцов: образцы сложной формы, трубчатые толстостенные образцы, трубчатые тонкостенные образцы. Внутри каждой группы работы описаны в хронологическом порядке. Кратко изложены критерии усталостной прочности для сложного напряженного состояния, которые сравнены с данными эксперимента.

## S u m m a r y

## INVESTIGATIONS OF FATIGUE UNDER COMBINED STRESSES

In this article the review of the original research is given in which are described the experimental investigations of fatigue fracture under combined stresses. The papers have been ordered according to shape of the specimens: complex shape specimens, thick-walled specimens, thin-walled specimens. Each group of papers is presented in the chronological order. Equations of the fatigue conditions mentioned in papers are given.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lutego 1971 r.



PEWNE NIEWISKOZYMETRYCZNE PRZEPŁYWY  
CIECZY LEPKOSPĘŻYSTYCH

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Do niedawna badanie własności reologicznych cieczy lepkospężytych, takich jak roztwory i stopione polimery, niektóre oleje mineralne i zawiesiny, ciecze przerabiane w przemyśle spożywczym itp., prowadzono z reguły dla tzw. przepływów wiskozymetrycznych będących różnymi modyfikacjami przepływów ścinających, charakteryzujących się poprzecznym gradientem prędkości. Przepływy wiskozymetryczne występują często w technologii i urządzeniach przetwórczych (przepływy przez przewody rurowe, kanały, szczeliny itp.) oraz prawie we wszystkich wiskozymetrach, tj. przyrządach służących do pomiaru lepkości i innych własności cieczy. Od przyrządów tych pochodzi zresztą nazwa klasy przepływów wiskozymetrycznych.

Parametrami charakteryzującymi własności cieczy w ustalonych lub nieustalonych, okresowo zmiennych przepływach wiskozymetrycznych są trzy niezależne funkcje wiskozymetryczne: funkcja lepkości (lepkość pozorna) i funkcje naprężeń normalnych lub odpowiednio dla małych oscylacji: funkcja lepkości dynamicznej, modułu dynamicznego i kąta stratności mechanicznej.

Teorii przepływów wiskozymetrycznych oraz wynikom badań doświadczalnych poświęcone są liczne prace i monografie (por. [1, 2, 3, 4, 5, 6]). Prosty, lecz jednocześnie nowoczesny wykład tych zagadnień ujęty w ich historycznym rozwoju zawiera książka COLEMANA, MARKOVITZA i NOLLA [7]; również poprzednia praca przeglądowa autora [8] ujmowała zasadnicze własności przepływów wiskozymetrycznych.

Wzrastające ostatnio zainteresowanie różnymi niewiskozymetrycznymi przepływami cieczy lepkospężytych ma swoje źródło nie tylko w rozwoju reologii teoretycznej i konieczności realizowania bardziej złożonych przepływów w przetwórstwie polimerów, ale również wynika z potrzeby konstruowania oraz stosowania reometrów pozwalających na pełniejsze i sprawniejsze wyznaczenie charakterystyk reologicznych cieczy. Znamienną rolę odgrywa tutaj ustalony przepływ rozciągający, posiadający duże praktyczne znaczenie dla procesów przedzenia, wyciągania itp., którego charakterystyki reologiczne są całkowicie odmienne i nie związane bezpośrednio z funkcjami wiskozymetrycznymi (por. [9]).

Wśród różnych niewiskozymetrycznych przepływów cieczy lepkospężytych szczególną pozycję zajmują przepływy zaliczające się do «ruchów ze stałą historią deformacji» (oznaczanych w dalszym ciągu skrótem: RSHD), których teorię dla cieczy prostych sfor-

mułowali COLEMAN [10] oraz NOLL [11], a następnie rozwinęli inni badacze (por. [12, 13, 14, 15, 16]). Szczególna pozycja przepływów ze stałą historią deformacji wynika z faktu, że dla takich przepływów, podobnie zresztą jak i dla przepływów wiskozymetrycznych, pamięć lepkosprężystej cieczy prostej ujawnia się w sposób istotnie ograniczony lub, używając słów COLEMANA [10], pamięci cieczy prostej w RSHD «...pozostaje bardzo niewiele do zapamiętania». Nie bez znaczenia był również fakt skonstruowania reometrów realizujących RSHD (por. p. 4) zanim jeszcze zorientowano się, że przepływy w nich występujące należą do tej szczególnej klasy przepływów niewiskozymetrycznych.

W niniejszym przeglądzie zajmiemy się przede wszystkim teorią przepływów niewiskozymetrycznych należących do klasy RSHD, zwracając szczególną uwagę na ich realizację w przyrządach i możliwość wyznaczania odpowiednich charakterystyk. Warto nadmienić już na wstępie, że interesująca nas klasa przepływów obejmuje nie tylko wszystkie ustalone przepływy wiskozymetryczne, ale również liczne inne, jak ustalone proste rozciąganie i ustalone czyste ścinanie (por. p. 4.1), przepływ w ortogonalnym reometrze Maxwella (por. p. 4.2), reometrze balansowym Kepesa (por. 4.3), itp.

## 2. Teoria przepływów ze stałą historią deformacji

**2.1. Zależności podstawowe.** Podstawą rozważań kinematycznych w mechanice ośrodka ciągłego są odpowiednie równania ruchu punktu materialnego (por. [3, 7]).

Oznaczając przez  $\mathbf{x}$  położenie w przestrzeni euklidesowej punktu materialnego  $X$  w aktualnym czasie  $t$ , zaś przez  $\xi$  położenie tego samego punktu materialnego w dowolnej chwili  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ), równania ruchu przyjmują postać

$$(2.1.1) \quad \xi = \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad -\infty < \tau \leq t,$$

gdzie  $\chi_t$  oznacza funkcję względnej deformacji<sup>1)</sup>.

Gradient względnej deformacji

$$(2.1.2) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{F}_t(t) = \mathbf{1}$$

opisuje zmianę lokalnej konfiguracji cząstki  $X$  w czasie między  $\tau$  i  $t$ . Często funkcję tensorową

$$(2.1.3) \quad \mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_t(t-s) \quad \text{dla} \quad \infty > s \geq 0$$

nazywa się historią względnego gradientu deformacji. Jeśli dane jest pole prędkości  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  w chwili aktualnej  $t$ , to funkcję względnej deformacji określamy rozwiązując następujące równania:

$$(2.1.4) \quad \dot{\xi}(\tau) = \mathbf{v}(\xi(\tau), \tau), \quad \xi(t) = \mathbf{x},$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie po czasie.

Pamiętając, że nieściśliwe cieczy proste to klasa ośrodków, dla których tensor naprężenia jest określony, z dokładnością do ciśnienia hydrostatycznego, przez historię względnego gradientu deformacji (por. [3, 7]), równania konstytutywne zapisujemy w postaci

$$(2.1.5) \quad \mathbf{T}_E(t) = \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \overset{\infty}{\mathcal{H}}(\mathbf{F}_t(t-s)), \quad \det \mathbf{F}_t(t-s) = 1,$$

<sup>1)</sup> Należy podkreślić, że taka właśnie postać równań ruchu jest najdogodniejsza, gdyż dla cieczy nie istnieje żadna inna wyróżniona konfiguracja odniesienia poza konfiguracją zajmowaną w chwili aktualnej  $t$ .

gdzie  $p$  jest ciśnieniem hydrostatycznym, zaś  $\mathcal{H}(\cdot)$  oznacza funkcjonal konstytutywny odwzorowujący względny gradient deformacji z przestrzeni historii deformacji na symetryczny tensor ekstra-napřężenia  $\mathbf{T}_E(t)$ . Ponieważ  $p$  nie jest określone przez równanie (2.1.5), niejednoznaczność funkcjonału konstytutywnego usuwamy przez założenie

$$(2.1.6) \quad \text{tr} \mathbf{T}_E(t) = \text{tr} \mathcal{H}(\mathbf{F}_t(t-s)) = 0, \quad p = -\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{T},$$

przy czym  $\text{tr}$  oznacza ślad odpowiedniego tensora.

Dla klasy RSHD, zwanych także ruchami stagnacyjnymi (por. [10]), historia gradientu deformacji danej cząstki jest, z dokładnością do sztywnego obrotu, taka sama dla wszystkich chwil czasu. Zgodnie z definicją NOLLA (por. [11]) wyrażoną w języku matematycznym, *ruch nazywa się RSHD wtedy i tylko wtedy, jeśli gradient deformacji w dowolnej chwili  $\tau$ , określony względem ustalonej konfiguracji odniesienia w chwili 0, jest dany przez*

$$(2.1.7) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp(\tau \mathbf{M}), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1},$$

przy czym  $\mathbf{Q}(\tau)$  jest tensorem ortogonalnym opisującym obrót cząstki od chwili 0 do chwili  $\tau$ , zaś  $\mathbf{M}$  — stałym tensorem. Często przyjmuje się, że  $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{N}_0$ , gdzie  $|\mathbf{N}_0| = 1$ , zaś  $\kappa$  oznacza stały parametr charakteryzujący wielkość deformacji (ścianania, rozciągania itp.).

Ponieważ dla cieczy konfiguracja odniesienia w chwili 0 nie posiada istotnego znaczenia, wykorzystujemy związek

$$(2.1.8) \quad \mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}_0(\tau) \mathbf{F}_0^{-1}(t), \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau) |_{t=0},$$

prowadzący do następujących zależności równoważnych definicji (2.1.7):

$$(2.1.9) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) \exp(-s \mathbf{M}) \mathbf{Q}^T(t), \quad 0 \leq s < \infty,$$

$$(2.1.10) \quad \mathbf{C}_t(t-s) = \mathbf{F}_t^T(t-s) \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t) \exp(-s \mathbf{M}^T) \exp(-s \mathbf{M}) \mathbf{Q}^T(t),$$

gdzie wskaźnik  $T$  u góry symbolu oznacza operację transponowania, zaś  $\mathbf{C}_t(t-s)$  oznacza historię prawego względnego tensora odkształcenia Cauchy'ego–Greena (por. [3]).

Wprowadzając pojęcie obróconego tensora parametrycznego (por. [13, 14]) będącego gradientem prędkości w chwili  $t$  względem obracającego się układu odniesienia, mianowicie

$$(2.1.11) \quad \mathbf{L}(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{M} \mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}(t) \kappa \mathbf{N}_0 \mathbf{Q}^T(t) = \kappa \mathbf{N},$$

mamy również

$$(2.1.12) \quad \mathbf{C}_t(t-s) = \exp(-s \mathbf{L}^T) \exp(-s \mathbf{L}), \quad 0 \leq s < \infty.$$

Warto nadmienić, że związek tensora  $\mathbf{L}(t)$  z przestrzennym gradientem prędkości  $\mathbf{L}_1(t)$  jest następujący:

$$(2.1.13) \quad \mathbf{L}_1(t) = \nabla_x \mathbf{v}(x, t) = \dot{\mathbf{F}}_0(t) \mathbf{F}_0^{-1}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t) \mathbf{Q}^T(t) + \mathbf{L}(t),$$

gdzie  $\mathbf{Q}(t)$ , jak poprzednio, oznacza zależny od czasu tensor obrotu od konfiguracji w chwili 0 do konfiguracji w chwili  $t$ , a antysymetria tensora  $\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$  jest oczywista.

W obracającym się układzie odniesienia, którego ruch charakteryzuje się tensorem  $\mathbf{Q}(t)$ , macierz obróconego gradientu prędkości jest stała. Można zatem podać równoważną definicję RSHD, dla których historia względnego tensora odkształcenia Cauchy'ego–Greena  $\mathbf{C}_t(t-s)$  ma postać (2.1.12) ze stałym, niezależnym od czasu tensorem  $\mathbf{L}$  (por. [12, 13]).

Na nietrywialne pytanie: czy ruch określony stałym tensorem przestrzennego gradientu prędkości  $\mathbf{L}_1$  jest RSHD? — otrzymujemy odpowiedź twierdzącą. Wynika to z faktu, że następujące równanie różniczkowe z odpowiednim warunkiem początkowym (por. [15]):

$$(2.1.14) \quad \dot{\mathbf{F}}_0(\tau) = \mathbf{L}_1 \mathbf{F}_0(\tau), \quad \mathbf{L}_1 = \text{const}, \quad \mathbf{F}_0(0) = \mathbf{1},$$

ma jednoznaczne rozwiązanie w postaci

$$(2.1.15) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \exp(\tau \mathbf{L}_1).$$

Ruch powyższy jest RSHD [por. (2.1.7)], jeśli tylko  $\mathbf{Q}(\tau) \equiv \mathbf{1}$ . Zależność (2.1.15) ilustruje również, w sposób przejrzysty dlaczego ustalone, jednorodne pola prędkości zawsze generują ruchy należące do klasy RSHD.

**2.2. Klasyfikacja przepływów.** Zgodnie z propozycją NÖLLA [1], wszystkie przepływy typu RSHD, zachodzące w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, można podzielić na trzy następujące klasy:

$$(2.2.1) \quad \begin{aligned} & \text{(I)} \quad \mathbf{M}^2 = \mathbf{0}; \\ & \text{(II)} \quad \mathbf{M}^2 \neq \mathbf{0}, \text{ lecz } \mathbf{M}^3 = \mathbf{0}; \\ & \text{(III)} \quad \mathbf{M}^n \neq \mathbf{0} \text{ dla wszystkich } n = 1, 2, 3 \dots \end{aligned}$$

Z uwagi na (2.1.11) identyczne warunki można również zapisać dla tensorów  $\mathbf{L}$  lub  $\mathbf{N}$ .

Klasa (I) obejmuje wszystkie ustalone przepływy wiskozymetryczne obszernie omówione w literaturze zagadnienia (por. [3, 4, 7]). Warto dodać, że w myśl definicji (2.1.9) mamy dla ustalonych przepływów wiskozymetrycznych

$$(2.2.2) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) [\mathbf{1} - s \mathbf{M}] \mathbf{Q}^T(t).$$

Zależność powyższa pozostaje w mocy dla dowolnych przepływów wiskozymetrycznych (niekoniecznie ustalonych), jeśli tensor  $\mathbf{M}$  jest zmienny, tj. zależny od czasu  $t$  i położenia  $x$  zajmowanego przez cząstkę materialną w chwili  $t$  (por. [7]).

Dla klasy (II) mamy

$$(2.2.3) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) \left[ \mathbf{1} - s \mathbf{M} + \frac{1}{2} s^2 \mathbf{M}^2 \right] \mathbf{Q}^T(t).$$

Mieści się w niej podklasa tzw. *podwójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych* (por. p. 3.1), które powstają przez bezpośrednie złożenie (dodanie pól prędkości) dwóch przepływów wiskozymetrycznych. Jej przedstawicielami są w szczególności przepływy Poiseuille'a ze skręcaniem i przepływy helikoidalne ze skręcaniem (por. p. 5).

Do klasy (III), dla której

$$(2.2.4) \quad \mathbf{F}_t(t-s) = \mathbf{Q}(t-s) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{s^n}{n!} \mathbf{M}^n \right] \mathbf{Q}^T(t),$$

należy cała podklasa tzw. *potrójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych* (por. p. 3.2), ustalone czyste ścinanie i ustalone proste rozciąganie oraz liczne inne przepływy w reometrach obrotowych z mimośrodami (por. p. 4).

Wszystkie przepływy typu RSHD można również dzielić na obrotowe (rotacyjne) i bezobrotowe (nierotacyjne). Zwłaszcza te ostatnie zasługują, ze względu na ich specyfikę, na parę słów uwagi. *W mechanice ośrodków ciągłych uważa się za ruchy bezobrotowe takie, dla których przestrzenny gradient prędkości  $\mathbf{L}_1$  jest symetryczny* (z wyłączeniem trywialnego przypadku  $\mathbf{L}_1 = \mathbf{0}$ ). Wszystkie RSHD opisywane stałym, symetrycznym tensorem  $\mathbf{L}_1$  przyjęto nazywać *przepływami rozciągającymi*, lub prościej *rozciąganiem* (por. [16, 3]). Ponieważ symetryczny tensor  $\mathbf{L}_1$  można zawsze diagonalizować następująco:

$$(2.2.5) \quad [\mathbf{L}_1^*] = [\mathbf{Q}\mathbf{L}_1\mathbf{Q}^T] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0,$$

przy czym  $\mathbf{Q}$  zależy od składowych macierzy  $\mathbf{L}_1$ , zaś wartości własne tensora  $\mathbf{L}_1$  są takie same, jak wartości własne obróconego tensora parametrycznego  $\mathbf{L}$  [por. (2.1.13)], łatwo stwierdzić, że *wszystkie bezobrotowe RSHD są równoważne przepływom rozciągającym i należą do klasy (III)*.

**2.3. Reprezentacje równań konstytutywnych i funkcje materiałowe.** Równania konstytutywne nieściśliwej cieczy prostej (2.1.5), po uwzględnieniu zasady materialnej obiektywności — wyrażającej niezależność funkcjonału konstytutywnego od ruchu «obserwatora» w przestrzeni odniesienia, dają się zapisać w postaci (por. [3])

$$(2.3.1) \quad \mathbf{T}_E(t) = \mathbf{T}(t) + p\mathbf{1} = \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}[\mathbf{C}_i(t-s)],$$

przy czym definicję tensora  $\mathbf{C}_i(t-s)$  podano w (2.1.10). Funkcjonał konstytutywny  $\int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\cdot)$  jest funkcjonałem izotropowym, tzn. że (por. [3])

$$(2.3.2) \quad \mathbf{Q} \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{C}_i(t-s)) \mathbf{Q}^T = \int_{s=0}^{\infty} \mathcal{F}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_i(t-s)\mathbf{Q}^T),$$

dla wszystkich stałych tensorów ortogonalnych  $\mathbf{Q}$  i dla każdej historii  $\mathbf{C}_i(t-s)$ .

Przy rozważaniach ogólnych dotyczących przepływów typu RSHD nie są potrzebne żadne dodatkowe ograniczenia ani na funkcjonał konstytutywny, ani też na historię odkształcenia. W przypadkach szczególnych często bazuje się na różnych aproksymacjach funkcjonału konstytutywnego w oparciu o zasadę zanikającej pamięci (por. [17, 3, 8]). W punkcie 4, omawiając własności dynamiczne cieczy, wykorzystamy całkową reprezentację funkcjonału konstytutywnego zaproponowaną przez GREENA i RIVLINA [18] w postaci (por. także [3, 17])

$$(2.3.3) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{T} + p\mathbf{1} = \int_{-\infty}^t m_1(t-\tau) \mathbf{G}(\tau) d\tau + \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \{ m_2(t-\tau_1, t-\tau_2) \mathbf{G}(\tau_1) \mathbf{G}(\tau_2) + m_3(t-\tau_1, t-\tau_2) [\text{tr} \mathbf{G}(\tau_1)] \mathbf{G}(\tau_2) \} \times d\tau_1 d\tau_2 + \dots,$$

gdzie  $m_i(\cdot)$  są odpowiednimi funkcjami materiałowymi, zaś

$$(2.3.4) \quad \mathbf{G}(\tau) = \mathbf{C}_i(\tau) - \mathbf{1}.$$

Pominięcie wszystkich całek wielokrotnych z wyjątkiem pierwszej z prawej strony (2.3.3) jest równoznaczne z założeniem, że wyrazy te dążą do zera szybciej niż odpowiednia norma w wektorowej przestrzeni historii odkształcenia; jest to przypadek tzw. skończonej liniowej lepkosprężystości (por. [19]).

Dla dowolnego RSHD, podstawiając (2.1.12) do (2.3.1), otrzymamy równania konstytutywne w postaci następującej:

$$(2.3.5) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{f}(\varkappa, \mathbf{N}) = \mathbf{f}(\varkappa, \mathbf{L}/\varkappa) = \mathbf{g}(\mathbf{L}),$$

gdzie  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{g}$  są izotropowymi funkcjami argumentów tensorowych.

W cytowanej już pracy [12], WANG dowiódł, że historia prawego, względnego tensora odkształcenia Cauchy'ego–Greena  $\mathbf{C}_t(t-s)$ , dla wszystkich RSHD, określona jest jednoznacznie przez pierwsze trzy kinematyczne tensory RIVLINA–ERICKSENA [20] zdefiniowane następująco:

$$(2.3.6) \quad \mathbf{A}_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{C}_t(\tau) \Big|_{\tau=t}, \quad \mathbf{A}_1(t) = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T,$$

$$\mathbf{A}_{n+1}(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_n \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_1^T \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{A}_n.$$

WANG wyróżnił ponadto trzy następujące przypadki RSHD:

(1) gdy  $\mathbf{A}_1$  ma trzy różne wartości własne,  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$  określają  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie;  
 (2) gdy  $\mathbf{A}_1$  ma dwie wartości własne równe, lecz różne od trzeciej; a)  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$  określają  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie, jeśli  $\mathbf{A}_2$  ma w tej samej bazie co  $\mathbf{A}_1$  postać diagonalną ze składowymi równymi odpowiednio kwadratowi wartości własnych  $\mathbf{A}_1$ ; b) w przypadku przeciwnym  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  i  $\mathbf{A}_3$  określają  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie;

(3) gdy wszystkie wartości własne  $\mathbf{A}_1$  są równe,  $\mathbf{A}_1$  określa  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{C}_t(t-s)$  jednoznacznie. Ostatni przypadek staje się trywialny dla cieczy nieściśliwych, dla których  $\text{tr } \mathbf{A}_1 = 0$ ; wówczas przy jednakowych wartościach własnych mamy  $\mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{0}$ .

Reasumując można stwierdzić, że dla większości RSHD [z wyjątkiem przypadku wymienionego w (2)] prawdziwe jest następujące równanie konstytutywne (por. [20]):

$$(2.3.7) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{h}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2 + \alpha_3 \mathbf{A}_2 + \alpha_4 \mathbf{A}_2^2 +$$

$$+ \alpha_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \alpha_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) +$$

$$+ \alpha_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \alpha_8 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2),$$

gdzie  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) są funkcjami dziewięciu niezmienników:

$$(2.3.8) \quad \text{tr } \mathbf{A}_1^2, \text{tr } \mathbf{A}_1^3, \text{tr } \mathbf{A}_2, \text{tr } \mathbf{A}_2^2, \text{tr } \mathbf{A}_2^3,$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2), \text{tr}(\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2).$$

Jest rzeczą oczywistą, że funkcje  $\alpha_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ) nie są całkowicie niezależne; wynika to z faktu, że tensor ekstra-naprężenia  $\mathbf{T}_E$  posiada co najwyżej sześć składowych, związanych przy tym warunkiem typu (2.1.6). Wystarczy zatem zdefiniować odpowiednio pięć ogólnych funkcji materiałowych opisujących całkowicie własności cieczy lepkosprężystych w dowolnym przepływie typu RSHD. Można postępować np. w sposób podany w pracy [14].

Dla ustalonego i jednorodnego pola prędkości, dla którego

$$(2.3.9) \quad [\mathbf{L}_1] = \begin{bmatrix} a_1 & a & b \\ d & a_2 & c \\ e & f & a_3 \end{bmatrix}, \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

jest stałym tensorem<sup>2)</sup>, definiujemy następujące funkcje:

$$(2.3.10) \quad \begin{aligned} n_1 &= T_E^{\langle 11 \rangle} - T_E^{\langle 33 \rangle}, & n_2 &= T_E^{\langle 22 \rangle} - T_E^{\langle 33 \rangle}, \\ s_1 &= T_E^{\langle 12 \rangle}, & s_2 &= T_E^{\langle 13 \rangle}, & s_3 &= T_E^{\langle 23 \rangle}, \end{aligned}$$

których argumentami są wszystkie dziewięć składowych macierzy (2.3.9), zaś  $T_E^{\langle ij \rangle}$  oznaczają fizyczne składowe tensora  $\mathbf{T}_E$ . Mamy również

$$(2.3.11) \quad T_E^{\langle 11 \rangle} = \frac{1}{3}(2n_1 - n_2), \quad T_E^{\langle 22 \rangle} = \frac{1}{3}(2n_2 - n_1), \quad T_E^{\langle 33 \rangle} = -\frac{1}{3}(n_1 + n_2).$$

Funkcje materiałowe  $n_i$  i  $s_i$  opisują zarówno ustalone przepływy wiskozymetryczne, ustalone przepływy rozciągające, jak i inne przepływy typu RSHD omówione szczegółowiej w punktach 3, 4 i 5. Ich postać podlega ograniczeniom wynikającym z własności izotropii funkcji konstytutywnych (2.3.5). Mamy np.

$$(2.3.12) \quad \begin{aligned} n_i(a_1, a_2, a_3, a, b, c, d, e, f) &= n_i(a_1, a_2, a_3, -a, -b, c, -d, -e, f) = \\ &= n_i(a_1, a_2, a_3, a, -b, -c, d, -e, -f) = n_i(a_1, a_2, a_3, -a, b, -c, -d, e, -f); \end{aligned}$$

$$(2.3.13) \quad \begin{aligned} s_i(a_3, a_2, a_1, f, e, d, c, b, a) &= s_j(a_1, a_2, a_3, a, b, c, d, e, f) \\ &\text{dla } i = 1, j = 3 \quad \text{lub} \quad i = 2, j = 2 \quad \text{lub} \quad i = 3, j = 1. \end{aligned}$$

Warto nadmienić, że dla wszystkich bezobrotowych RSHD, symetria tensora  $\mathbf{L}_1$  prowadzi do zależności:  $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{L}_1$ ,  $\mathbf{A}_2 = 4\mathbf{L}_1^2$ ,  $\mathbf{A}_3 = 8\mathbf{L}_1^3$ , a równania konstytutywne przyjmują postać

$$(2.3.14) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1) = \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_1^2,$$

gdzie funkcje materiałowe  $\beta_i$  ( $i = 1, 2$ ) zależą tylko od dwóch następujących niezmienników:  $\text{tr } \mathbf{A}_1^2$ ,  $\text{tr } \mathbf{A}_1^3$ . Z równania (2.3.14) wynika, że w przepływach typu bezobrotowych RSHD, własności każdej dowolnej nieściśliwej cieczy prostej są takie same jak własności cieczy Reinera–Rivlina (por. [3]) opisywanej również zależnością (2.3.14).

Wreszcie postępując w sposób podobny do zastosowanego przez COLEMANA [16], można równanie konstytutywne (2.3.14) przedstawić w innej postaci jako jedną funkcję od trzech wartości własnych tensora  $\mathbf{A}_1$ .

### 3. Przepływy złożone z przepływów wiskozymetrycznych

**3.1. Podwójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne.** Niebanalne zagadnienie określenia teoretycznych warunków, przy których nałożenie prostych wiskozymetrycznych przepływów prowadzi do bardziej złożonych RSHD, wiąże się zarówno z analizą przepływów występujących w praktyce, jak i z potrzebą konstruowania nowych reometrów (por. p. 4). Pewne przykłady RSHD powstałych z nałożenia przepływów wiskozymetrycznych omówiono w pracach NOLLA [11], OLDROYDA [21] i PIPKINA [22]; bardziej systematyczną analizą

<sup>2)</sup> Postać (2.3.9) jest również najogólniejsza dla obróconego tensora parametrycznego  $\mathbf{L}$  (por. p. 2.1). Jeśli  $\mathbf{L}$  jest stałym tensorem, to składowe  $\mathbf{L}_1$  nie muszą być stałe.

tych zagadnień zajmował się HUIŁGOL [13, 14]. Pokazał on m. in., że oprócz dobrze znanego wiskozymetrycznego przepływu helikoidalnego [2], powstałego z nałożenia wiskozymetrycznych przepływów Couette'a i Poiseuille'a (por. [3, 7]), istnieją inne przepływy typu RSHD otrzymywane z prostszych przepływów wiskozymetrycznych, a w szczególności tzw. podwójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne [13].

Zgodnie z definicją, *podwójnie nałożony przepływ wiskozymetryczny jest przepływem typu RSHD klasy (II)* (por. p. 2.2), *dla którego obrócony tensor parametryczny  $\mathbf{L}$  jest taki, że  $\mathbf{L}^2 \neq \mathbf{0}$  lecz  $\mathbf{L}^3 = \mathbf{0}$  oraz  $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{L}''$ , gdzie  $\mathbf{L}'$  i  $\mathbf{L}''$  są tensorami definiującymi dwa przepływy wiskozymetryczne.*

Z twierdzeń wyprowadzonych w [13] wynika, że następujące pole prędkości w ortogonalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych:

$$(3.1.1) \quad v^1 = 0, \quad v^2 = v(x^1) - cx^2 + ex^3, \quad v^3 = w(x^1) + fx^2 + cx^3,$$

gdzie  $c, e, f$  są stałymi takimi, że  $c^2 + ef = 0$ , zaś  $v(x^1)$  i  $w(x^1)$  dowolnymi gładkimi funkcjami  $x^1$ , daje podwójnie nałożony przepływ wiskozymetryczny, jeśli odpowiednie składowe tensora metrycznego nie zmieniają się wzdłuż toru każdej cząstki, a funkcja  $v(x^1)$  nie jest stałą lub zerem.

Także pole prędkości

$$(3.1.2) \quad v^1 = ax^2 + bx^3, \quad v^2 = -cx^2 + ex^3, \quad v^3 = fx^2 + cx^3,$$

gdzie  $a, \dots, f$  są stałymi takimi, że  $c^2 + ef = 0$ , prowadzi do podwójnie nałożonego przepływu wiskozymetrycznego.

W walcowym układzie współrzędnych  $r, \theta, z$  przykładem (3.1.1) jest pole

$$(3.1.3) \quad v^r = 0, \quad v^\theta = \omega(r) + cz, \quad v^z = u(r),$$

opisujące przepływ helikoidalny ze skręcaniem (por. p. 5.2), którego z kolei szczególnym przypadkiem jest przepływ Poiseuille'a ze skręcaniem (por. 5.1) dyskutowany przez OLDROYDA [21].

Ponieważ dla większości przepływów omawianego typu macierz tensora  $\mathbf{A}_1$  (por. 2.3) ma postać<sup>3)</sup>:

$$(3.1.4) \quad [\mathbf{A}_1] = k \begin{bmatrix} 0 & l & m \\ l & 0 & n \\ m & n & 0 \end{bmatrix}, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

z twierdzeń o reprezentacji równań konstytutywnych w punkcie 2.3 wynika, że  $\mathbf{A}_1$  ma trzy różne wartości własne [przypadek (1)], jeśli nie zachodzi zależność

$$(3.1.5) \quad l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3},$$

spełniona np. dla przepływu (3.1.3) tylko wtedy, gdy  $r^2 (d\omega/dr)^2 = (du/dr)^2 = c^2 r^2$ . Jeśli spełniona jest zależność (3.1.5), można pokazać (por. [14]), że  $\mathbf{A}_2 \neq \mathbf{A}_1^2$  i mamy do czynienia z przypadkiem (2b).

<sup>3)</sup>  $\mathbf{A}_1$  ma postać (3.1.4) również dla niektórych potrójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych (por. 3.2) oraz innych RSHD klasy (III) (por. p.4).



HUILGOL [14] dowiódł m. in., że dla trzech różnych wartości własnych tensora  $\mathbf{A}_1$ , równanie konstytutywne (2.3.7) redukuje się do postaci

$$(3.1.6) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{h}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2) = \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_1^2 + \beta_3 \mathbf{A}_2 + \beta_4 \mathbf{A}_2^2 + \\ + \beta_5 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_6 (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2),$$

gdzie  $\beta_i (i = 1, \dots, 6)$  są funkcjami niezmienników wymienionych w (2.3.8). Jeśli warunek (3.1.5) jest spełniony, mamy wówczas

$$(3.1.7) \quad \mathbf{T}_E = \mathbf{f}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) = \gamma_1 \mathbf{A}_1 + \gamma_2 \mathbf{A}_1^2 + \gamma_3 \mathbf{A}_2 + \gamma_4 \mathbf{A}_2^2 + \gamma_5 \mathbf{A}_3 + \gamma_6 \mathbf{A}_3^2,$$

gdzie  $\gamma_i (i = 1, \dots, 6)$  są funkcjami niezmienników (2.3.8).

Dla takich podwójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych, dla których w ortonormalnej bazie [por. (3.1.4)]

$$(3.1.8) \quad [\mathbf{L}] = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 \\ m & n & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{L}^2] = k^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ln & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^3 = \mathbf{0},$$

zamiast ogólnych funkcji (2.3.10), wygodnie jest wprowadzić następujące funkcje materiałowe:

$$(3.1.9) \quad \Sigma_1 = T_E^{(22)} - T_E^{(11)}, \quad \Sigma_2 = T_E^{(33)} - T_E^{(11)}, \\ \tau_1 = T_E^{(12)}, \quad \tau_2 = T_E^{(13)}, \quad \tau_3 = T_E^{(23)},$$

zależne tylko od argumentów  $k, l, m, n$ . Możliwość ich doświadczalnego określenia będzie omówiona w punkcie 5.

Na zakończenie tego punktu warto podkreślić, że nie zawsze złożenie dwóch przepływów wiskozymetrycznych prowadzi do przepływu wiskozymetrycznego lub podwójnie nałożonego przepływu wiskozymetrycznego, tj. typu RSHD klasy (II). Dobrą ilustracją tego faktu jest, powstały z nałożenia dwóch prostych przepływów ścinających, przypadek ustalonego czystego ścinania należący do klasy (III) (por. [23, 14]).

**3.2. Potrójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne.** Uogólnieniem podwójnie nałożonych przepływów wiskozymetrycznych są tzw. potrójnie nałożone przepływy wiskozymetryczne, tj. złożone z trzech przepływów wiskozymetrycznych. Ich definicja jest podobna do definicji podanej w punkcie poprzednim, przy czym  $\mathbf{L}$  musi być takie, że  $\mathbf{L}^n \neq \mathbf{0}$  dla  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Na podstawie twierdzenia podanego przez HUILGOLA [13] wynika, że następujące ustalone pole prędkości w ortogonalnym krzywoliniowym układzie współrzędnych  $x^k$ :

$$(3.2.1) \quad v^1 = ax^2 + bx^3, \quad v^2 = dx^1 + cx^3, \quad v^3 = ex^1 + fx^2,$$

gdzie  $a, \dots, f$  są stałymi, jest potrójnie nałożonym przepływem wiskozymetrycznym należącym do klasy (III) RSHD, dla którego  $\mathbf{L}^n \neq \mathbf{0}$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ , jeśli odpowiednie składowe tensora metrycznego nie zmieniają się wzdłuż toru każdej cząstki. Gdy tensor  $\mathbf{A}_1$  posiada trzy różne wartości własne, reprezentacja równania konstytutywnego zapisuje się również w postaci (3.1.6), przy czym funkcje materiałowe  $\beta_i (i = 1, \dots, 6)$  przybierają wartości z reguły inne niż w przypadku podwójnie nałożonego przepływu wiskozymetrycznego.

Przepływ (3.2.1) obejmuje jako przypadki szczególne przepływy w reometrze Maxwella i innych przyrządach (por. p. 4) oraz ustalone czyste ścinanie (przepływ bezobrotowy przy  $a = d, b = e, c = f$ ), dla którego równania konstytutywne przyjmują postać (2.3.14).

#### 4. Szczególne przypadki przepływów klasy (III). Reometry

**4.1. Ustalone czyste ścinanie i proste rozciąganie.** Typowymi przedstawicielami bezobrotowych RSHD klasy (III) są: ustalone czyste ścinanie, dla którego w kartezjańskim układzie współrzędnych (por. [21])

$$(4.1.1) \quad v^1 = ky, \quad v^2 = kx, \quad v^3 = 0$$

oraz ustalone proste rozciąganie, dla którego w układzie współrzędnych walcowych (por. [9])

$$(4.1.2) \quad v^r = -\frac{1}{2}qr, \quad v^\theta = 0, \quad v^z = qz.$$

Zwłaszcza ostatni przepływ posiada duże praktyczne znaczenie ze względu na przyrządy służące do pomiaru tzw. lepkości podłużnej oraz przybliżoną realizację w procesach przedzenia, wyciągania, itp. włókien sztucznych (por. [4, 23]).

Tensory charakteryzujące przepływ (4.1.1) mogą być sprowadzone do postaci diagonalnej za pośrednictwem przekształcenia

$$(4.1.3) \quad \mathbf{T}_E^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}_E\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{A}_I^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}_I\mathbf{Q}^T,$$

w którym  $\mathbf{Q}$  oznacza ortogonalny tensor obrotu o kąt równy  $\pi/4$ .

Na podstawie równania konstytutywnego (2.3.14) otrzymamy

$$(4.1.4) \quad [\mathbf{T}_E] = \beta_1(8k^2, 0)2k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta_2(8k^2, 0)4k^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dla czystego ścinania i

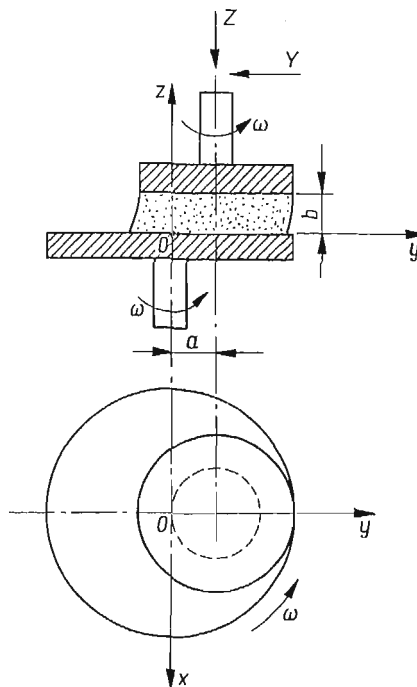
$$(4.1.5) \quad [\mathbf{T}_E] = \beta_1(6q^2, 6q^3)2q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \beta_2(6q^2, 6q^3)4q^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

dla prostego rozciągania. Formalne podobieństwa między (4.1.4), (4.1.5) oraz prostym rozciąganiem posłużyły autorowi [23] do zaproponowania przybliżonych wyrażeń na lepkość podłużną.

**4.2. Ortogonalny reometr Maxwella.** W roku 1965 MAXWELL i CHARTOFF [24] zaproponowali użycie reometru, składającego się z dwóch płaskich krążków odległych od siebie o  $b$  i obracających się ze stałą jednakową prędkością kątową wokół własnych osi przesuniętych na odległość  $a$ , do badania własności reologicznych cieczy lepkością sprężystych (rys. 1). Pomijając techniczny opis urządzenia różniące się nieistotnie w poszczególnych wersjach

nałeży zaznaczyć, że umożliwia ono dość dokładny pomiar sił działających w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach (np. na górny krążek).

W ostatnich latach poświęcono liczne prace teoretycznej analizie przepływu i badaniom doświadczalnym własności różnych roztworów i stopionych polimerów (por. [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]). Jest niewątpliwą zasługą HUILGOLA [13, 14, 27] stwierdzenie, że



Rys. 1. Schemat ortogonalnego reometru Maxwella

przepływ w reometrze Maxwella należy do przepływów typu RSHD klasy (III) oraz wyprowadzenie odpowiednich reprezentacji dla równań konstytutywnych w przypadku nieściślej cieczy prostej.

Równania ruchu (2.1.1) cieczy w ortogonalnym reometrze Maxwella wynikają z rozważenia względnego ruchu cząstki w układzie współrzędnych obracających się razem z odpowiednim krążkiem. Np. cząstka cieczy znajdująca się bezpośrednio nad początkiem kartezjańskiego układu współrzędnych  $x, y, z$  (por. rys. 1), zatoczy okrąg koła o promieniu  $az/b$  w płaszczyźnie równoległej do powierzchni krążków. Dodając ruch względny do ruchu unoszenia, otrzymamy

$$(4.2.1) \quad \begin{aligned} \xi &= x \cos \omega(t - \tau) + (y - \psi z) \sin \omega(t - \tau), \\ \eta &= -x \sin \omega(t - \tau) + (y - \psi z) \cos \omega(t - \tau) + \psi z, \\ \zeta &= z, \end{aligned}$$

gdzie  $\psi = a/b$ , a w myśl (2.1.1),  $x, y, z$  oznaczają współrzędne cząstki w chwili aktualnej  $t$ , zaś  $\xi, \eta, \zeta$  — współrzędne w czasie  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ). Pole prędkości dla ruchu określonego równaniami (4.2.1) jest następujące:

$$(4.2.2) \quad v^1 = -\omega y + \omega \psi z, \quad v^2 = \omega x, \quad v^3 = 0.$$

Warto zauważyć, że chociaż rozważany przepływ charakteryzuje się jednorodnym i ustalonym polem prędkości (4.2.2), ruch cząstki (4.2.1), wyrażony względem położenia w chwili  $t$ , zmienia się okresowo z czasem  $\tau$ . Fakt ten może być wykorzystany do wyznaczenia dynamicznych własności reologicznych cieczy lepkosprężystej (por. [26, 28, 30, 31]).

Wobec małości stosowanych praktycznie parametrów  $\psi$  (por. [24, 31]), można skorzystać z równań konstytutywnych (2.3.3) ograniczając się do wyrazów liniowych względem<sup>4)</sup>  $\psi$ . Na podstawie (2.3.4) i (4.2.1) otrzymamy

$$(4.2.3) \quad G_{13} = -\psi \sin \omega(t - \tau), \quad G_{23} = -\psi(1 - \cos \omega(t - \tau)), \\ G_{12} = G_{11} = G_{22} = 0, \quad G_{33} = O(\psi^2).$$

Wprowadzając pojęcie lepkości zespolonej (por. [5])

$$(4.2.4) \quad \eta^* = \eta' - i \frac{G'}{\omega} = \frac{i}{\omega} \int_0^{\infty} m_1(\sigma)(1 - e^{-i\omega\sigma}) d\sigma,$$

gdzie  $\eta'$  oznacza lepkość dynamiczną, zaś  $G'$  — moduł dynamiczny (zachowawczy), możemy równanie konstytutywne napisać w postaci zespolonej

$$(4.2.5) \quad \mathbf{T}_E = \text{Re}(\eta^* \mathbf{A}_1^*),$$

przy czym

$$(4.2.6) \quad G_{13}^* = i\psi(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \quad G_{23}^* = -\psi(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ A_{13}^{(1)*} = \psi\omega, \quad A_{23}^{(1)*} = i\psi\omega.$$

Jeśli naprężenia ścinające  $T^{(13)}$  i  $T^{(23)}$  działają na powierzchni koła o promieniu  $R$ , to odpowiednie siły w kierunku osi  $x$  i  $y$  (por. rys.) są następujące:

$$(4.2.7) \quad X = \pi R^2 \eta' \psi \omega, \quad Y = \pi R^2 G' \psi,$$

a po uwzględnieniu efektów inercji według poprawek ABBOTTA i WALTERSA [30]:

$$(4.2.8) \quad X - iY = \pi R^2 \eta^* \psi \omega \left( 1 + \frac{\alpha^2 b^2}{12} - \frac{\alpha^4 b^4}{720} + \dots \right),$$

gdzie  $\alpha^2 = -i\omega\rho/\eta^*$ , zaś  $\rho$  oznacza gęstość cieczy.

Zależności (4.2.7) są takie same jak w innych pracach [26, 28, 31]; pozwalają one, na podstawie pomiarów doświadczalnych  $X = X(\omega)$  oraz  $Y = Y(\omega)$ , określić  $\eta' = \eta'(\omega)$  oraz  $G' = G'(\omega)$ .

Porównanie charakterystyk  $\eta'$  i  $G'$  uzyskanych z pomiarów w reometrze Maxwella na podstawie wzorów (4.2.7) z charakterystykami uzyskanymi innymi metodami (np. z reogoniometru Weissenberga) wykazało dobrą zgodność wyników doświadczalnych (por. [31]). Chociaż niektórzy autorzy (por. [26, 31]) w oparciu o empiryczny model całkowy typu skończonej liniowej lepkosprężystości (por. p. 2.3) z odpowiednio dobraną kombi-

<sup>4)</sup> Jest to przypadek infitezymalnej liniowej lepkosprężystości [19]. Ograniczenie się wyłącznie do pierwszej całki w (2.3.3) nie jest związane z małością samej deformacji lecz z własnością historii odkształcenia określoną odpowiednią normą (por. p. 2.3).

nacją tensorów historii odkształcenia  $C_i$  i  $C_i^{-1}$ , usiłując uzyskać pewne informacje na temat naprężeń normalnych (w szczególności o stosunku odpowiednich różnic naprężeń normalnych, [31]), w niniejszym przeglądzie przedstawimy odmienny sposób podejścia bazujący na modelu nieściśliwej cieczy prostej i teorii RSHD klasy (III).

Na podstawie (4.2.2) i (2.3.6) obliczamy składowe tensorów kinematycznych  $A_1$  i  $A_2$ . Ponieważ tensor  $A_1$  ma trzy różne wartości własne, możemy skorzystać z uproszczonej wersji (3.1.6) równań konstytutywnych (2.3.7). Pamiętając, że  $\text{tr}T_E = 0$ , dochodzimy do zależności:

$$(4.2.9) \quad \begin{aligned} T_E^{<11>} &= \frac{1}{3}\beta_2\omega^2\psi^2 - \frac{2}{3}\beta_3\omega^2\psi^2 - \frac{1}{3}\beta_4(2\omega^4\psi^2 + 4\omega^4\psi^4) - \frac{1}{3}\beta_6(2\omega^6\psi^4 + 8\omega^6\psi^6), \\ T_E^{<22>} &= -\frac{2}{3}\beta_2\omega^2\psi^2 - \frac{2}{3}\beta_3\omega^2\psi^2 + \frac{1}{3}\beta_4(\omega^4\psi^2 - 4\omega^4\psi^4) - \frac{1}{3}\beta_6(2\omega^6\psi^4 + 8\omega^6\psi^6), \\ T_E^{<33>} &= \frac{1}{3}\beta_2\omega^2\psi^2 + \frac{4}{3}\beta_3\omega^2\psi^2 + \frac{1}{3}\beta_4(\omega^4\psi^2 + 8\omega^4\psi^4) + \frac{1}{3}\beta_6(4\omega^6\psi^4 + 16\omega^6\psi^6), \\ T_E^{<12>} &= -\beta_5\omega^3\psi^2, \\ T_E^{<13>} &= (\beta_1 + 2\beta_5\omega^2\psi^2)\omega\psi, \\ T_E^{<23>} &= -(\beta_3 + 2\beta_4\omega^2\psi^2 + 2\beta_6\omega^4\psi^4)\omega^2\psi, \end{aligned}$$

gdzie funkcje  $\beta_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ), zależne od niezmienników (2.3.8), są w gruncie rzeczy analitycznymi funkcjami dwóch argumentów:  $\omega^2\psi^2$ ,  $\omega^4\psi^2$ .

Analiza zależności (4.2.9), łącznie z siłami  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  i momentem obrotowym — wyznaczanymi bezpośrednio z przyrządu, wykazuje niemożliwość określenia funkcji  $\beta_i$  charakteryzujących własności cieczy w przypadku ogólnym. Ponieważ pomiar siły osiowej  $Z$ , przy jednoczesnym założeniu, że przy niskich prędkościach obrotowych i małych siłach inercji ciśnienie  $p$  równe jest ciśnieniu atmosferycznemu (por. [31]), pozwala określić  $T^{<33>}$  oraz  $T_E^{<33>} = T^{<33>} + p$ , na podstawie (2.3.11)<sub>3</sub> otrzymujemy tylko sumę  $n_1 + n_2$  odpowiednich różnic naprężeń normalnych zdefiniowanych wzorem (2.3.10)<sup>5</sup>.

Bardziej efektywną analizę można przeprowadzić dla przypadku małych odkształceń charakteryzujących się małym parametrem  $\psi$  i umiarkowanych prędkości obrotowych  $\omega$ .

Pomijając w (4.2.9) człony rzędu  $O(\psi^4)$ , otrzymamy

$$(4.2.10) \quad \begin{aligned} n_1 &= -(2\beta_3 + \beta_4\omega^2)\omega^2\psi^2, & n_2 &= -(\beta_2 + 2\beta_3)\omega^2\psi^2, \\ s_1 &= -\beta_5\omega^3\psi^2, & s_2 &= (\beta_1 + 2\beta_5\omega^2\psi^2)\omega\psi, \\ s_3 &= -(\beta_3 + 2\beta_4\omega^2\psi^2)\omega^2\psi, \end{aligned}$$

przy czym  $\beta_i$  są funkcjami  $\omega^2\psi^2$  i  $\omega^4\psi^2$ , uwzględniającymi pominięcie członów  $O(\psi^4)$ . W tym przypadku dokładny pomiar siły  $X$  (określającej  $s_3$ ) dla różnych wartości  $\omega$  pozwala, przynajmniej teoretycznie, dobrać odpowiednią funkcję  $\beta_3$  i stałą  $\beta_4$  (!). Wielkości te pod-

<sup>5</sup>) Fakt ten nie jest zaskakujący, jeśli wziąć pod uwagę, że pomiary siły normalnej w wiskozymetrach typów stożek-krażek, krażek-krażek itp., pozwalają również wyznaczyć tylko pewne kombinacje funkcji naprężeń normalnych (por. [4,6,7]).

stawione do (4.2.10)<sub>1</sub> określają przybliżony charakter funkcji  $n_1$ , a suma  $n_1 + n_2$  wyznaczona jest jak poprzednio przez pomiar siły osiowej  $Z$ .

Dalszy krok naprzód można uczynić dla odpowiednio małych prędkości  $\omega$ , pomijając w (4.2.10) człony rzędu  $O(\omega^4)$ ; jest to równoważne, w pewnym sensie, modelowi cieczy stopnia trzeciego (por. [3]), dla którego wszystkie  $\beta_i$  z wyjątkiem  $\beta_1$  są stałymi i dają się wyznaczyć z pomiarów wiskozymetrycznych. Mamy wówczas

$$(4.2.11) \quad \begin{aligned} n_1 &= -2\beta_3\omega^2\psi^2 = \sigma_2(\omega\psi) - \sigma_1(\omega\psi), \\ n_2 &= -(\beta_2 + 2\beta_3)\omega^2\psi^2 = -\sigma_1(\omega\psi), \\ s_1 &= -\beta_5\omega^3\psi^2, \quad s_2 = (\beta_1 + 2\beta_5\omega^2\psi^2)\omega\psi = \tau(\omega\psi), \\ s_3 &= -\beta_3\omega^2\psi, \end{aligned}$$

gdzie  $\tau = T^{<13>}$ ,  $\sigma_1 = T^{<33>} - T^{<22>}$ ,  $\sigma_2 = T^{<11>} - T^{<22>}$  są dobrze znanymi funkcjami wiskozymetrycznymi (por. [1, 3, 7]).

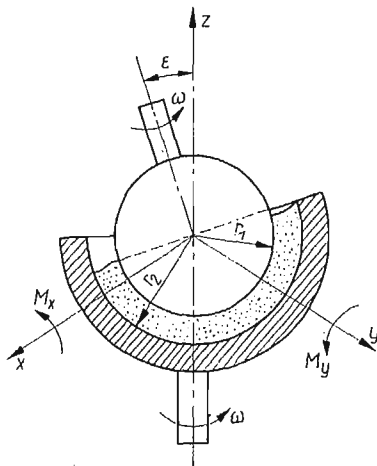
Jeśli funkcje  $\tau$ ,  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są znane dla badanej cieczy z innych pomiarów, to na podstawie (4.2.10) i (4.2.11) można skorzystać z zależności przybliżonych

$$(4.2.12) \quad T_E^{<23>} = s_3 = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1) - 2\beta_4\omega^4\psi^3,$$

$$n_1 = \sigma_2 - \sigma_1 + \beta_4\omega^4\psi^2, \quad n_2 = -\sigma_1,$$

przy czym  $\beta_4$  należy wyznaczyć z pomiaru siły  $Y$  ( $Y = \pi R^2 s_3$ ).

Na zakończenie rozważań nad przepływem w reometrze Maxwella, należy wspomnieć o przedstawionej w pracy [14] możliwości badania związków funkcji  $n_i$  i  $s_i$  z funkcjami wiskozymetrycznymi, traktując przepływ w reometrze Maxwella jako *przepływ bliski wiskozymetrycznemu* w sensie definicji PIPKINA [32].



Rys. 2. Schemat reometru balansowego Kepesa

**4.3. Reometr balansowy Kepesa.** W roku 1968 KEPES [33] zaproponował użycie reometru składającego się z kuli (lub półkuli) i czaszy kulistej o promieniach równych odpowiednio  $r_1$  i  $r_2$ , obracających się ze stałą jednakową prędkością kątową  $\omega$  wokół osi nachylonych w płaszczyźnie  $xz$  o mały kąt  $\varepsilon$  (rys. 2). Odpowiednie urządzenie balansowe z ciężarkami

umożliwia pomiar momentu obrotowego na wewnętrznej kuli, a w szczególności jego składowych w kierunku osi  $x$  i  $y$ . Reometr tego typu nazywa się reometrem balansowym, jego produkcję podjęła firma Contraves A. G. w Szwajcarii.

Ostatnio ukazało się kilka prac poświęconych analizie teoretycznej reometru oraz badaniom własności roztworów i stopionych polimerów (por. [28, 31, 34, 35]). Najbardziej wyczerpującą analizę przepływu w reometrze balansowym, pod kątem możliwości wyznaczenia charakterystyk dynamicznych cieczy i wpływu sił inercji, przeprowadził WALTERS [35]. Przytoczymy obecnie najważniejsze wyniki tej pracy podkreślając, że przepływ w reometrze balansowym należy do przepływów typu RSHD klasy (III).

Równania ruchu cieczy (2.1.1) przybierają w układzie współrzędnych kulistych  $r, \theta, \varphi$  następującą postać zespoloną:

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} r' &= r - \frac{\varepsilon}{i} U(r, \theta) e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ \theta' &= \theta - \frac{\varepsilon}{ir} V(r, \theta) e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ \varphi' &= \varphi - \omega(t-\tau) - \frac{\varepsilon}{ir \sin \theta} W(r, \theta) e^{i\varphi} (1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \end{aligned}$$

gdzie primami oznaczono współrzędne w chwili  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ), zaś funkcje  $U, V, W$  zmiennych  $r, \theta$  wyznacza się metodą kolejnych przybliżeń. Dla przybliżenia zerowego rzędu, tj. dla  $\alpha = 0$ , gdzie  $\alpha^2 = -i\omega\rho/\eta^*$  charakteryzuje siły inercji, mamy

$$(4.3.2) \quad U_0 = 0, \quad V_0 = i\lambda \left( r - \frac{r_1^3}{r^2} \right), \quad W_0 = -\lambda \left( r - \frac{r_1^3}{r^2} \right), \quad \lambda = \frac{r_2^3}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Ograniczenie się do wyrazów liniowych względem  $\varepsilon$  w równaniach konstytutywnych (2.3.3) prowadzi do następujących wyrażen na momenty:

$$(4.3.3) \quad M_x = 8\pi\lambda r_1^3 \eta' \varepsilon \omega, \quad M_y = 8\pi\lambda r_1^3 G' \varepsilon, \quad M_z = 0,$$

jeśli odpowiednie naprężenia rozłożone są na całej powierzchni kuli wewnętrznej. Uwzględnienie sił inercji poprzez przybliżenia wyższych rzędów względem  $\alpha$  (tj. członów rzędu  $O(\alpha^4)$ ) daje

$$(4.3.4) \quad M_x - iM_y = 8\pi\lambda r_1^3 \eta^* \varepsilon \omega \left( 1 - \frac{d^4 \alpha^4}{1200} \right),$$

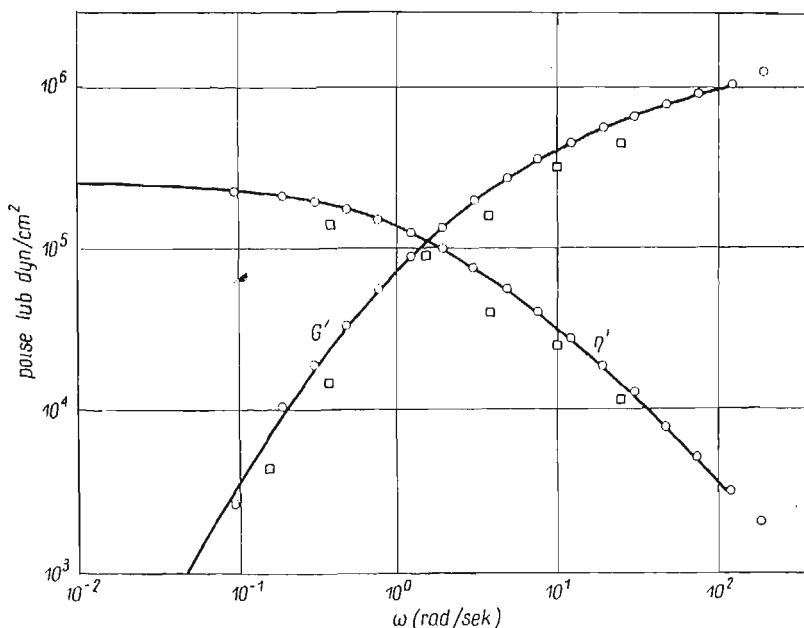
przy czym  $d = r_2 - r_1$  przyjęto jako wielkość małą, praktycznie rzędu 0,1 cm.

Zależności (4.3.3) pozwalają, na podstawie pomiarów doświadczalnych  $M_x(\omega)$  oraz  $M_y(\omega)$ , określić lepkość dynamiczną  $\eta'(\omega)$  oraz moduł dynamiczny  $G'(\omega)$ .

Porównanie charakterystyk  $\eta'$  i  $G'$  uzyskanych w reometrze balansowym z charakterystykami uzyskanymi na podstawie innych metod pomiarowych, wykazało dość dobrą zgodność wyników doświadczalnych (por. [31]). Zgodność ta była nieco gorsza niż w przypadku reometru Maxwella, co mogło niewątpliwie wiązać się z trudnościami dokładnego

ustawienia przyrządu i właściwego «wyważenia» obciążeń. Na rys. 3 przedstawiono dla porównania charakterystyki  $\eta'$  i  $G'$  dla poli-dimetylsiloksanu zestawione przez MACOSKO [31] dla reometru Maxwella, reogoniometru Weissenberga i reometru balansowego Kepesa.

Chociaż istniejące rozwiązania konstrukcyjne reometrów balansowych nie przewidują metody pomiaru naprężeń normalnych lub jakiegokolwiek ich kombinacji, teoretycznie istnieje możliwość wyznaczenia tych naprężeń poprzez pomiar odpowiednich sił w kierunku



Rys. 3. Lepkość dynamiczna i moduł dynamiczny w funkcji prędkości kątowej dla trzech typów reometrów: — reometr Maxwella,  $\circ$  reogoniometr Weissenberga,  $\square$  reometr balansowy (wg [31])

kach  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Pomijając rozważanie tego typu (por. p. 4.1), ograniczymy się do stwierdzenia, że punktem wyjścia są następujące fizyczne składowe pola prędkości:

$$(4.3.5) \quad v^{(r)} = 0, \quad v^{(\theta)} = \text{Re}[\varepsilon\omega V_0(r, \theta)e^{i\omega t}], \quad v^{(\varphi)} = \omega r \sin\theta + \text{Re}[\varepsilon\omega W_0(r, \theta)e^{i\omega t}],$$

nie uwzględniające efektów inercyjnych.

**4.4. Reometr typu mimośrodkowych cylindrów.** W roku 1970 ABBOTT i WALTERS [36] zaproponowali wykorzystanie do badań reologicznych reometru, składającego się z dwóch cylindrów, wewnętrznego o promieniu  $r_1$  i zewnętrznego o promieniu  $r_2$ , obracających się ze stałą, jednakową prędkością kątową  $\omega$  wokół własnych osi przesuniętych o wielkość mimośrodu  $a$  (rys. 4). Odpowiednie dodatkowe urządzenie powinno umożliwiać pomiar sił w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach  $x$  i  $y$ . Produkcja tego typu reometru jest przewidziana przez firmę Sangamo Controls Ltd. w W. Brytanii.



Równania ruchu cieczy (2.1.1) przybierają w układzie współrzędnych walcowych  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  następującą postać zespoloną:

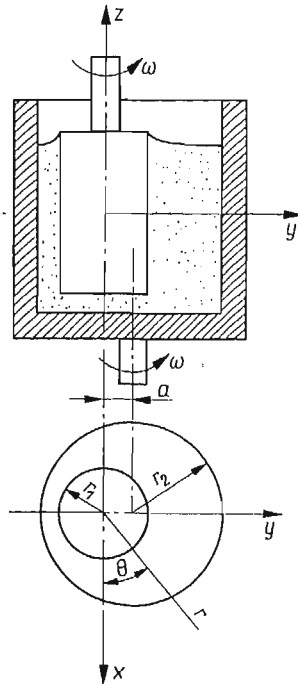
$$(4.4.1) \quad \begin{aligned} r' &= r - iaF(r)e^{i\theta}(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ \theta' &= \theta - \omega(t - \tau) - \frac{a}{r} \frac{d}{dr}(rF)e^{i\theta}(1 - e^{-i\omega(t-\tau)}), \\ z' &= z, \end{aligned}$$

gdzie primami oznaczono współrzędne w chwili  $\tau$  ( $\tau \leq t$ ), zaś funkcja  $F(r)$  dla  $\alpha = 0$ , gdzie  $\alpha^2 = -i\omega\varrho/\eta^*$  charakteryzuje siły inercji, jest następująca:

$$(4.4.2) \quad F(r) = Ar^2 + B \ln r + \frac{C}{r^2} + D,$$

przy czym A, B, C i D — odpowiednie stałe całkowania. Ograniczenie się do wyrazów liniowych względem  $a$  w równaniach konstytutywnych (2.3.3) daje siły

$$(4.4.3) \quad X = \frac{4\pi L \eta^* \omega a}{\ln \beta - (\beta^2 - 1)/(\beta^2 + 1)}, \quad Y = \frac{4\pi L G' a}{\ln \beta - (\beta^2 - 1)/(\beta^2 + 1)},$$



Rys. 4. Schemat reometru z mimośrodowymi cylindrami

gdzie  $\beta = r_2/r_1$ , zaś  $L$  oznacza efektywną długość cylindrów. Uwzględnienie sił inercji ( $\alpha \neq 0$ ) daje

$$(4.4.4) \quad X - iY = \frac{12\pi r_1^3 L \eta^* \omega a}{d^3} \left( 1 - \frac{\alpha^2 d^2}{10} \right),$$

gdzie  $d = r_2 - r_1$  przyjęto jako wielkość małą. Autorzy pracy [36] przeprowadzili ponadto analizę wpływu efektów nieliniowych (zależnych dopiero od członów rzędu  $O(a^3)$ ), uzasadniającą stosowanie wzorów (4.4.3) w zakresie  $0 \leq a \leq 0,3d$ .

Zależności (4.4.3) pozwalają, na podstawie pomiarów doświadczalnych  $X(\omega)$  oraz  $Y(\omega)$ , określić lepkość dynamiczną  $\eta'(\omega)$  oraz moduł dynamiczny  $G'(\omega)$ .

W pracy [36] podano odpowiednie zależności na składowe tensora naprężenia dla różnych przybliżeń, nie analizując możliwości wyznaczenia i pomiaru funkcji naprężeń normalnych. Rozważania podobne jak w p. 4.2 można przeprowadzić wychodząc z pola fizycznych składowych prędkości w postaci następującej:

$$(4.4.5) \quad \begin{aligned} v^{(r)} &= \operatorname{Re}[a\omega F(r)e^{i\theta}], \\ v^{(\theta)} &= \omega r + \operatorname{Re}\left[ia\omega \frac{d}{dr}(rF)e^{i\theta}\right], \\ v^{(z)} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ przepływ w reometrze typu mimośrodowych cylindrów jest RSHD klasy (III), pomiar odpowiedniej różnicy nacisków (naprężeń promieniowych) na ściankach cylindrów prowadzi do wyznaczenia różnicy  $n_2 - n_1$  funkcji naprężeń normalnych zdefiniowanych w (2.3.10).

Niewątpliwą zaletą rozważanego reometru, w porównaniu z innymi omówionymi rodzajami urządzeń, jest możliwość wykorzystania go do bezpośredniej kontroli charakterystyk reologicznych cieczy w procesach przemysłowych. Ażeby jednak uniknąć zaburzeń pomiarów wywołanych ewentualnym przepływem wzdłuż osi cylindrów, ABBOTT i WALTERS [36] proponują umieszczanie reometru w bocznym odgałęzieniu, w którym przepływ byłby zatrzymywany na okres czasu potrzebny do uzyskania odpowiednich danych.

Na zakończenie warto podkreślić, że dokonany przegląd najbardziej znanych reometrów realizujących przepływy typu RSHD klasy (III) nie wyczerpuje oczywiście wszystkich możliwości. Można, na przykład, analizować reometry typu krążek-krążek lub stożek-krążek, w których osie obrotu tworzą określony mały kąt. Wychodząc na przeciw ewentualnej pomysłowości badaczy i rzeczywistym potrzebom reologii należy stwierdzić, że nowe konstrukcje w tej dziedzinie powinny być poprzedzone wnikliwą analizą teoretyczną.

## 5. Szczególne przypadki przepływów klasy (II)

**5.1. Przepływ Poiseuille'a ze skręcaniem.** Istnieją dwa rodzaje przepływów typu RSHD klasy (II), które mogą być zrealizowane w sposób przybliżony w odpowiednich przyrządach: przepływ Poiseuille'a ze skręcaniem i jego uogólnienie — przepływ helikoidalny ze skręcaniem (por. [13, 14]).

Realizacja przepływu Poiseuille'a ze skręcaniem — zaproponowana przez OLDROYDA [21] — polega na przepływie cieczy pod działaniem podłużnego gradientu ciśnienia przez rurę zamkniętą na pewnym odcinku tarczami porowatymi, z których jedna obraca się względem drugiej z niewielką stałą prędkością kątową (rys. 5).

Z uwagi na postać tensora kinematycznego  $\mathbf{A}_1$  (trzy różne wartości własne) obliczonego dla fizycznych składowych prędkości w układzie współrzędnych walcowych

$$(5.1.1) \quad v^{<r>} = 0, \quad v^{<\theta>} = crz, \quad v^{<z>} = u(r),$$

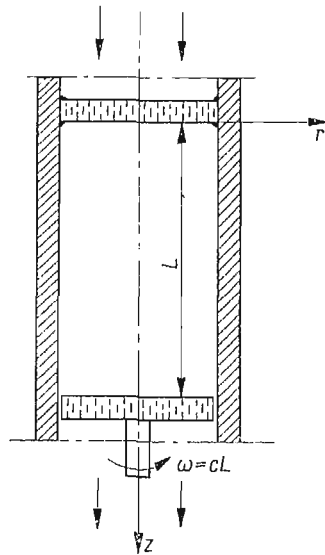
gdzie  $c = \text{const}$  (por. p. 3.1), możemy skorzystać z równań konstytutywnych (3.1.6) lub funkcji materiałowych zdefiniowanych w (3.1.9) przy założeniu, że<sup>6)</sup>

$$(5.1.2) \quad \begin{bmatrix} T_E^{<rr>} & T_E^{<r\theta>} & T_E^{<rz>} \\ \cdot & T_E^{<\theta\theta>} & T_E^{<\theta z>} \\ \cdot & \cdot & T_E^{<zz>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_E^{<11>} & T_E^{<13>} & T_E^{<12>} \\ \cdot & T_E^{<33>} & T_E^{<23>} \\ \cdot & \cdot & T_E^{<22>} \end{bmatrix}.$$

Analiza równań równowagi z pominięciem efektów inercyjnych (powolny obrót) wykazuje, że  $T^{<rz>} = \tau_1$  jest zmodyfikowanym spadkiem ciśnienia na jednostkę długości, zaś  $T^{<\theta z>} = \tau_3$  określone jest momentem potrzebnym do obrotu porowatych tarcz. Naprężenia normalne działające na jedną z tarcz dają

$$(5.1.3) \quad T^{<zz>}(r) - T^{<zz>}(0) = \Sigma_1 + \int_0^r \frac{1}{r} \Sigma_2 dr.$$

Przedstawiony schemat doświadczenia pozwala w zasadzie na obliczenie dwóch funkcji naprężeń normalnych  $\tau_1$  i  $\tau_3$  oraz kombinacji funkcji różnic naprężeń normalnych (5.1.3).



Rys. 5. Schemat przepływu Poiseuille'a ze skrecaniem

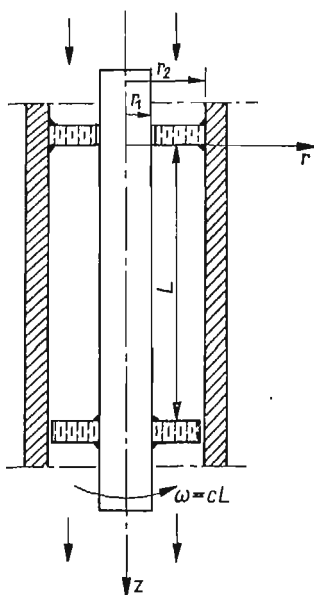
Należy jednak pamiętać, że w takim schemacie doświadczenia warunki brzegowe nie są ściśle spełnione.

**5.2. Przepływ helikoidalny ze skrecaniem.** Uogólnieniem przepływu Poiseuille'a ze skrecaniem jest przepływ helikoidalny ze skrecaniem, którego realizację można przeprowadzić

<sup>6)</sup> Taka zamiana wskaźników jest wynikiem określonego stałego obrotu dokonanego nad tensorem ekstra-naprężenia  $T_E$  oraz tensorami kinematycznymi  $\mathbf{A}_1$  i  $\mathbf{A}_2$ .

w sposób przybliżony (por. [13]). Przepływ taki pojawi się pod wpływem podłużnego gradientu ciśnienia między współosiowymi rurami obracającymi się względem siebie ze stałą prędkością kątową  $\omega$ , jeśli rury na pewnym odcinku zamknięte są tarczami porowatymi, z których jedna obraca się względem drugiej również ze stałą niewielką prędkością kątową  $\omega = cL$ , gdzie  $L$  jest odległością między tarczami (rys. 6).

Wychodząc z pola prędkości w postaci (3.1.3) stwierdzamy jak poprzednio, że  $T^{rz} = \tau_1$  wiąże się ze spadkiem ciśnienia na jednostkę długości,  $T^{0z} = \tau_3$  z momentem obracającym względem siebie porowate tarcze, zaś naprężenia normalne działające na jedną z tarcz dają zależność (5.1.3), przy czym 0 należy zastąpić promieniem wewnętrznym  $r_1$ .



Rys. 6. Schemat przepływu helikoidalnego ze skręcaniem

Dalsza analiza równań równowagi z pominięciem efektów inercyjnych pokazuje, że  $T^{0\theta} = \tau_2$  jest proporcjonalne do jednostkowego momentu obracającego względem siebie rury. Następnie różnica nacisków na ściankach zewnętrznej i wewnętrznej rury, przy założeniu, że siła masowa działa tylko wzdłuż osi  $z$ , daje następujące wyrażenie:

$$(5.2.1) \quad T^{rr}(r_2) - T^{rr}(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} \Sigma_2 dr$$

służące za podstawę obliczenia  $\Sigma_2$ .

Nie zapominając o przybliżonym spełnieniu odpowiednich warunków brzegowych warto zauważyć, że przepływ helikoidalny ze skręcaniem pozwala w zasadzie wyznaczyć wszystkie pięć funkcji materiałowych (3.1.9) charakteryzujących zachowanie się cieczy o przepływach typu RSHD klasy (II).

## 6. Uwagi końcowe

Przedstawiona w niniejszym przeglądzie analiza teoretyczna przepływów ze stałą historią deformacji (RSHD) oraz omówienie istniejących i hipotetycznych typów reometrów realizujących takie przepływy, pozwala na sformułowanie kilku następujących uwag:

(1) Przepływy ze stałą historią deformacji uogólniają dość istotnie klasę ustalonych przepływów wiskozymetrycznych.

(2) W przepływach ze stałą historią deformacji, podobnie jak w przepływach wiskozymetrycznych, historia deformacji cieczy lepkospřeżystej, opisywanej równaniami konstytutywnymi nieściśliwej cieczy prostej, ujawnia się w sposób ograniczony i specyficzny.

(3) Własności cieczy w niewiskozymetrycznych przepływach ze stałą historią deformacji opisane są pięcioma funkcjami materiałowymi (2 funkcje różnic naprężeń normalnych, 3 funkcje naprężeń ścinających), w przeciwieństwie do przepływów wiskozymetrycznych, dla których wystarczą tylko trzy funkcje.

(4) Możliwość składania różnych przepływów wiskozymetrycznych pozwala na analizowanie i «projektowanie» bardziej złożonych przepływów o określonych charakterystykach.

(5) Na gruncie teorii przepływów ze stałą historią deformacji istnieje możliwość ustalania ścisłych lub przybliżonych związków między ogólniejszymi funkcjami materiałowymi a funkcjami wiskozymetrycznymi.

(6) Takie urządzenia, jak: ortogonalny reometr Maxwella, reometr balansowy Kepesa i reometr z mimośrodowymi cylindrami Abbotta i Waltersa, pozwalają na stosunkowo proste wyznaczenie dynamicznych charakterystyk cieczy: lepkości dynamicznej  $\eta'(\omega)$  i modułu dynamicznego (zachowawczego)  $G'(\omega)$ .

(7) Niektóre wymienione wyżej reometry dają w zasadzie możliwość określania, chociaż nie w jednakowym stopniu i z różnym przybliżeniem, funkcji materiałowych (lub ich kombinacji) charakteryzujących naprężenia normalne.

(8) Reometry realizujące niewiskozymetryczne przepływy ze stałą historią deformacji, po likwidacji odpowiednich mimośródów lub kątów nachylenia osi obrotu, mogą być wykorzystane jako standardowe wiskozymetry.

### Literatura cytowana w tekście

1. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *On certain steady flows of general fluids*, Arch. Rational Mech. Anal. 3 (1959), 289.
2. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Helical flow of general fluids*, J. Appl. Phys., 30 (1959), 1508.
3. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik pod red. S. FLÜGGE, vol. III/3, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
4. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, London-New York 1964.
5. J. D. FERRY, *Lepkosprężystość polimerów*, Warszawa 1966.
6. И. М. БЕЛКИН, Г. В. ВИНОГРАДОВ, А. И. ЛЬВОНОВ, *Ротационные приборы. Измерение вязкости и физико-механических характеристик материалов*, Москва 1968.

7. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids. Theory and Experiment*, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
8. S. ZAHORSKI, *Ciecze nienuetonowskie w swietle mechaniki kontinuum*, Mech. Teoret. Stos., 7 (1968), 385.
9. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Steady extension of incompressible simple fluids*, Phys. Fluids, 5 (1962), 840.
10. B. D. COLEMAN, *Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic liquids*, Arch. Rational Mech. Anal., 9 (1962), 273.
11. W. NOLL, *Motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., 11 (1962), 97.
12. C.-C. WANG, *A representation theorem for the constitutive equation of a simple material in motions with constant stretch history*, Arch. Rational Mech. Anal., 20 (1965), 329.
13. R. R. HUILGOL, *On the construction of motions with constant stretch history. I. Superposable viscometric flows*, MRC Technical Report 954, Madison, Wisconsin 1968.
14. R. R. HUILGOL, *On the construction of motions with constant stretch history. II. Motions superposable on simple extension and various simplified constitutive equations for constant stretch histories*, MRC Technical Report 975, Madison, Wisconsin 1969.
15. R. R. HUILGOL, *Non-viscometric motions with constant stretch history*, A. I. Ch. E. Symp. on Fundamental Research in Fluid Mechanics, Washington D. C. 1969.
16. B. D. COLEMAN, *On the use of symmetry to simplify the constitutive equations of isotropic material with memory*, Proc. Roy. Soc., A306 (1968), 449.
17. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *An approximation theorem for functionals with applications in continuum mechanics*, Arch. Rational Mech. Anal., 6 (1960), 355.
18. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, *The mechanics of non-linear materials with memory*, Arch. Rational Mech. Anal., 1 (1957), 1.
19. B. D. COLEMAN, W. NOLL, *Foundations of linear viscoelasticity*, Rev. Modern Phys., 33 (1961), 239.
20. R. S. RIVLIN, J. E. ERICKSEN, *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., 4 (1955), 332.
21. J. G. OLDROYD, *Some steady flows of the general elastico-viscous liquid*, Proc. Roy. Soc., A283 (1965), 115.
22. A. C. PIPKIN, *Controllable viscometric flows*, Quart. Appl. Math., 26 (1968), 87.
23. S. ZAHORSKI, *Flows with constant stretch history and extensional viscosity*, Arch. Mech. Stos., 23 (1971) (w druku).
24. B. MAXWELL, R. P. CHARTOFF, *Studies of a polymer melt in an orthogonal rheometer*, Trans. Soc. Rheol., 9: 1 (1965), 41.
25. L. L. BLYLER, JR., S. J. KURTZ, *Analysis of the Maxwell orthogonal rheometer*, J. Appl. Polymer Sci., 11 (1967), 127.
26. R. B. BIRD, E. K. HARRIS, JR., *Analysis of steady state shearing and stress relaxation in the Maxwell orthogonal rheometer*, A. I. Ch. E. J., 14 (1968), 758.
27. R. R. HUILGOL, *On the proprieties of the motion with constant stretch history occurring in the Maxwell rheometer*, Trans. Soc. Rheol. 13: 4 (1969), 513.
28. M. YAMAMOTO, *Theoretical analysis of new rheometers*, Japan, J. Appl. Phys., 8 (1969), 1252.
29. R. J. GORDON, W. R. SCHOWALTER, *On the relation between complex viscosity and steady state shearing in the Maxwell orthogonal rheometer*, A. I. Ch. E. J., 16 (1970), 318.
30. T. N. G. ABBOTT, K. WALTERS, *Rheometrical flow systems. Part 2, Theory for the orthogonal rheometer, including an exact solution of the Navier-Stokes equations*, J. Fluid Mechanics, 40, part 1 (1970), 205.
31. C. W. MACOSKO, *Flow of polymer melts between eccentric rotating disks*, Princeton University Report, October 1970.
32. A. C. PIPKIN, D. R. OWEN, *Nearly viscometric flows*, Phys. Fluids, 10 (1967), 449.
33. A. KEPES, Proc. 5th Int. Congress Rheology, vol. IV, Kyoto, Japan 1970.
34. D. H. KAELBLE, *Rotating spherical interlayer (RSI) measurement of the dynamic mechanical properties of elastomers*, J. Appl. Polymer Sci., 13 (1969), 2547.
35. K. WALTERS, *Rheometrical flow systems. Part 1, Flow between concentric spheres rotating about different axes*, J. Fluid Mech., 40, part 1 (1970), 257.
36. T. N. G. ABBOTT, K. WALTERS, *Rheometrical flow systems. Part 3, Flow between eccentric rotating cylinders*, J. Fluid Mech., 43, part 2 (1970), 257.

## Резюме

## НЕКОТОРЫЕ НЕВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ

Возникший в последнее время интерес к невискозиметрическим течениям вязкоупругих жидкостей, таких как растворы и расплавы полимеров, является результатом как успехов теоретической реологии, так и нужд исследования более сложных течений в реометрах новых типов. Особое место среди всех невискозиметрических течений простых жидкостей занимают движения с постоянной историей деформации (см. [3, 11]). Они существенно отличаются от хорошо известного класса стационарных вискозиметрических течений, полностью характеризующихся тремя материальными функциями. К этим движениям можно причислить например течения, осуществляемые в ортогональном реометре Максвелла, балансирном реометре Кепеса и проч.

В первой части данного обзора изложена общая теория невискозиметрических течений с постоянной историей деформации. Вторая часть содержит анализ различных классов течений, в частности течений, осуществляемых в приборах, созданных в последнее время. Более подробно обсуждены возможности определения динамических реологических характеристик и влияния нормальных напряжений.

## Summary

## CERTAIN NON-VISCOMETRIC FLOWS OF VISCOELASTIC FLUIDS

Recent interests in various non-viscometric flows of viscoelastic fluids such as polymer melts and solutions result from the progress made in the field of theoretical rheology as well as from the needs for investigation of more complicated flows in new rheometers. Among all non-viscometric flows of simple fluids a particular position is filled by motions with constant stretch history — (cf. [3,11]). These motions differ significantly from the well known class of steady viscometric flows, characterized entirely by three material functions and include, among others, the types of flows realized in the Maxwell Orthogonal Rheometer, the Kepes Balance Rheometer etc.

In the first part of our review the general theory of non-viscometric flows with constant stretch history is outlined. The second part deals with various classes of flows, especially those occurring in the recently constructed rheometers. The possibilities of determination of dynamic rheological characteristics as well as normal stress effects are discussed in greater detail.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 marca 1971 r.*





ANALIZA RUCHU PEWNEGO UKŁADU WIBRO-UDERZENIOWEGO  
O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY

ZBIGNIEW WIŚNIEWSKI (GDAŃSK)

Oznaczenia

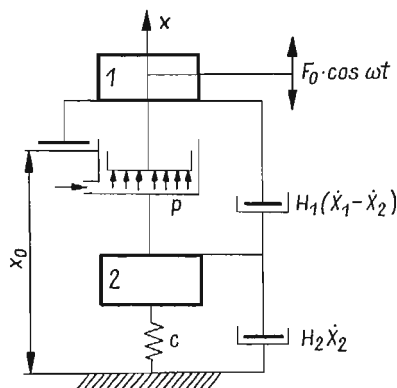
- $x_1$  bezwymiarowe przemieszczenie masy 1  
 $x_2$  bezwymiarowe przemieszczenie masy 2  
 $\dot{x}_1$  bezwymiarowa prędkość masy 1  
 $\dot{x}_2$  bezwymiarowa prędkość masy 2,  
 $\ddot{x}_1$  bezwymiarowe przyspieszenie masy 1,  
 $\ddot{x}_2$  bezwymiarowe przyspieszenie masy 2,  
 $t[s]$  czas,  
 $\tau$  czas bezwymiarowy,  
 $n$  stosunek okresu ruchu do okresu siły wymuszającej,  
 $\omega[s^{-1}]$  częstość zmian siły wymuszającej,  
 $\varphi[rad]$  kąt przesunięcia fazowego pomiędzy siłą wymuszającą a przemieszczeniem masy 1,  
 $R$  współczynnik restytucji,  
 $v$  bezwymiarowa prędkość uderzenia,  
 $\delta$  bezwymiarowe przemieszczenie środka masy układu w ciągu jednego cyklu ruchu,  
 $c \left[ \frac{N}{m} \right]$  sztywność sprężystego zawieszenia masy 2,  
 $h_1$  bezwymiarowy współczynnik oporu tłumienia w pneumatycznym elemencie sprężystym,  
 $h_2$  bezwymiarowy współczynnik oporu tłumienia drgań masy 2,  
 $Q_1[N]$  ciężar masy 1,  
 $Q_2[N]$  ciężar masy 2,  
 $P[N/m^2]$  ciśnienie w pneumatycznym elemencie sprężystym,  
 $S[m^2]$  pole powierzchni dna tłoka elementu sprężystego,  
 $F_0[N]$  amplituda siły wymuszającej.

1. Wprowadzenie

Doświadczalne i teoretyczne badania układu wibro-uderzeniowego z elementem sprężystym, umożliwiającym ciągłą regulację częstości uderzeń wykazały [4], że układ ten posiada szereg cech, odróżniających go od innych układów wibro-uderzeniowych.

Korzyści, jakie mogłoby przynieść zastosowanie takiego układu np. w wibro-uderzeniowych urządzeniach do pogrążania pali, były przyczyną podjęcia przez autora dalszych badań teoretycznych [5], dla głębszego poznania zjawisk towarzyszących pracy układu.

W pracy [5] badany był model dynamiczny układu o dwóch stopniach swobody, w którym ogranicznik posiadał skończoną masę i liniową sprężystość, przy czym przyjęto, że środek masy układu porusza się ruchem jednostajnym.



Rys. 1. Schemat układu badanego w pracy [5]

Założono tam również, że siła oporu towarzysząca ruchowi obu mas drgających jest proporcjonalna do prędkości ruchu.

Model dynamiczny tego układu przedstawiono schematycznie na rys. 1. Ruch układu opisany był równaniami różniczkowymi

$$(1.1) \quad \ddot{x}_1 + h_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + q = \cos(\tau + \varphi),$$

$$(1.2) \quad \ddot{x}_2 - \frac{h_1}{\mu}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + 2h_2\dot{x}_2 + s^2x_2 = \frac{q}{\mu},$$

przy czym warunki graniczne<sup>1)</sup> miały postać

$$(1.3) \quad x_1(0) = x_2(0) = x_0, \quad x_1(2\pi n) = x_2(2\pi n) = x_0 - \delta, \quad \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0) = Rv, \\ x_1(2\pi n) - x_2(2\pi n) = -v.$$

Równania (1.1.) i (1.2) wyrażono we współrzędnych bezwymiarowych, przy pomocy podstawień:

$$(1.4) \quad X_1 = \frac{F_0 g}{Q_1 \omega^2} x_1; \quad X_2 = \frac{F_0 g}{Q_2 \omega^2} x_2; \quad \tau = \omega t; \quad \frac{pS - Q_1}{F_0} = q; \\ H_1 = \frac{Q_1 \omega}{g} h_1; \quad H_2 = \frac{Q_2 \omega}{g} 2h_2; \quad Q_2/Q_1 = \mu; \quad \frac{cg}{Q_2 \omega^2} = s^2.$$

Równania (1.1) i (1.2) stanowią ogólny opis ruchu badanego układu. Z uwagi jednak na złożoną formę rozwiązań, występują trudności natury matematycznej w przedstawieniu

<sup>1)</sup> Termin «warunki graniczne» stosuje się w teorii układów wibro-uderzeniowych dla odróżnienia od typowej postaci warunków brzegowych, niezależnych od parametrów układu.

wyników analizy w postaci dogodnej dla zastosowań praktycznych. Dlatego też celowe jest wprowadzenie pewnych założeń upraszczających.

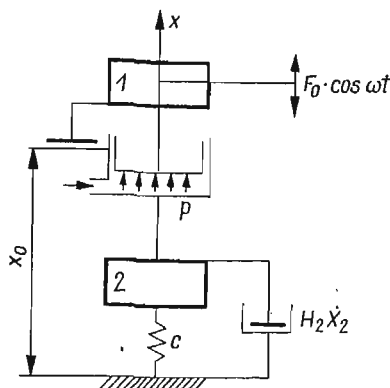
W niniejszej pracy zajmiemy się badaniem układu wibro-uderzeniowego o dwóch stopniach swobody, zawierającego element sprężysty o charakterystyce niezależnej od położenia masy drgającej [4], w przypadku gdy można pominąć tłumienie w elemencie sprężystym, jako znikome w porównaniu z siłą oporu ruchu masy 2 (rys. 2).

Zgodnie z przyjętymi wyżej oznaczeniami mamy więc  $h_1 \cong 0$ . Dla takiego przypadku określimy okresowe rozwiązania równań ruchu; warunki istnienia rozwiązań okresowych, wynikające z matematycznych i fizycznych ograniczeń wartości parametrów układu, jak również kryteria stabilności strukturalnej.

Oddzielnie rozpatrzony zostanie przypadek ruchu, gdy na masę 2 działa siła oporu o stałej wartości przyłożona skokowo w dowolnej chwili, w przedziale czasu pomiędzy uderzeniami.

## 2. Sformułowanie problemu

Rozważa się układ wibro-uderzeniowy z pneumatycznym elementem sprężystym, w którym wpływ zmiany położenia tłoka względem cylindra<sup>2)</sup> na ciśnienie w przestrzeni sprężania jest znikomy. Ogranicznik ruchu masy 1 (rys. 2) stanowi masę skupioną 2, zawieszoną



Rys. 2. Model dynamiczny układu wibro-uderzeniowego z pneumatycznym elementem sprężystym, bez oporów ruchu w elemencie sprężystym

na sprężynie o liniowej charakterystyce. Ruchowi ogranicznika towarzyszy siła oporu proporcjonalna do prędkości.

Do analizy przyjmujemy następujące założenia.

1. Możliwy jest ruch okresowy masy 1, przy czym okres ruchu równy jest okresowi siły wymuszającej lub jego całkowitej krotności;
2. siła wymuszająca zmienia się harmonicznie i działa w kierunku zgodnym z kierunkiem osi symetrii cylindra w elemencie sprężystym, zaś częstość zmian siły wymuszającej jest stała w ciągu cyklu ruchu układu;
3. nie występuje sprzężenie zwrotne pomiędzy układem a źródłem energii;

<sup>2)</sup> Budowę pneumatycznego elementu sprężystego opisano szczegółowo w pracy [4].

4. czas trwania zderzeń pomiędzy masą 1 i ogranicznikiem 2 jest krótki w porównaniu z okresem ruchu układu (odstępem czasu pomiędzy dwoma kolejnymi zderzeniami);

5. przekazywanie energii kinetycznej przy zderzeniu określa współczynnik restytucji  $R$ , przybierający wartości z przedziału  $[0; 1]$  oraz spełniający założenia podane w pracy [4];

6. opory ruchu tłoka względem cylindra w elemencie sprężystym są nieznaczne w porównaniu z oporami ruchu masy 2;

7. ruch ogranicznika 2 traktujemy jako drgania masy skupionej zawieszonyj na liniowej sprężynie;

8. środek masy całego układu przesuwa się ruchem jednostajnym, w kierunku ujemnego zwrotu osi  $x$ ;

9. położenie środka masy 1 nie zależy od chwilowego położenia mas niewyważonych wibratora bezwładnościowego, stanowiącego źródło siły wymuszającej drgania;

10. wszystkie parametry układu są zdeterminowane.

Uwzględniając powyższe założenia, ruch układu opisać można dwoma równaniami różniczkowymi:

$$(2.1) \quad \ddot{x}_1 + q = \cos(\tau + \varphi),$$

$$(2.2) \quad \ddot{x}_2 + 2h_2 \dot{x}_2 + s^2 x_2 = \frac{q}{\mu}$$

z warunkami okresowości ruchu (1.3).

### 3. Całkowanie równań ruchu

Ponieważ w równaniu (2.1) nie występują człony zależne od  $x_2$ , zaś równanie (2.2) nie zawiera członów zależnych od  $x$ , więc związek pomiędzy parametrami ruchu obu mas wynika jedynie z warunków okresowości ruchu (1.3)<sup>3)</sup>.

Całka równania (2.1) ma postać

$$(3.1) \quad x_1 = -\frac{q\tau^2}{2} + C_1\tau + C_2 - \cos(\tau + \varphi).$$

Korzystając z warunków (1.3) otrzymamy

$$(3.2) \quad x_1 = -\frac{q\tau^2}{2} + \left(\pi nq - \frac{\delta}{2\pi n}\right)\tau + x_0 + \cos\varphi - \cos(\tau + \varphi),$$

$$(3.3) \quad \dot{x}_1 = -q\tau + \pi nq - \frac{\delta}{2\pi n} + \sin(\tau + \varphi).$$

Całkując równanie (2.2), należy rozważyć trzy przypadki:

1)  $h_2 < s$ ,

2)  $h_2 = s$ ,

3)  $h_2 > s$ .

Dla  $h_2 < s$  otrzymamy

$$(3.4) \quad x_2 = \xi e^{-h_2\tau} (\cos \lambda\tau + E \sin \lambda\tau) + \frac{q}{\mu s^2}$$

<sup>3)</sup> Cechą charakterystyczną układów wibro-uderzeniowych jest zależność warunków okresowości od parametrów układu [1].

oraz

$$(3.5) \quad \dot{x}_2 = -\xi[(h_2 - \lambda E) \cos \lambda \tau + (\lambda + h_2 E) \sin \lambda \tau] e^{-h_2 \tau},$$

przy czym oznaczono

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \lambda &= \sqrt{s^2 - h_2^2}; & \xi &= x_0 - \frac{q}{\mu s^2}; \\ \varepsilon &= 1 - \frac{\delta}{\xi}; & E &= \frac{\varepsilon e^{2\pi n h_2} - \cos 2\pi n \lambda}{\sin 2\pi n \lambda}. \end{aligned}$$

Podstawiając warunki (1.3) do (3.3) i (3.5), otrzymamy po wykonaniu koniecznych przekształceń wyrażenia określające prędkość uderzenia oraz kąt przesunięcia fazowego pomiędzy siłą wymuszającą i przemieszczeniem:

$$(3.7) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} + \frac{\xi}{1+R} [(h_2 - \lambda E)(1 - e^{-2\pi n h_2} \cos 2\pi n \lambda) - (\lambda + h_2 E) e^{-2\pi n h_2} \sin 2\pi n \lambda],$$

$$(3.8) \quad \sin \varphi = Rv - \pi n q + \frac{\delta}{2\pi n} - \xi(h_2 - \lambda E).$$

Dla  $h_2 = s$  otrzymamy odpowiednio

$$(3.9) \quad x_2 = \left[ \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2}) - \delta}{2\pi n} \tau e^{2\pi n h_2} + \xi \right] e^{-h_2 \tau} + \frac{q}{\mu s^2},$$

$$(3.10) \quad \dot{x}_2 = \left[ (1 - h_2 \tau) \cdot \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2}) - \delta}{2\pi n} e^{2\pi n h_2} - h_2 \xi \right] e^{-h_2 \tau},$$

$$(3.11) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} + \frac{1}{1+R} \left[ h_2 \delta - \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2}) - \delta}{2\pi n} (e^{2\pi n h_2} - 1) \right],$$

$$(3.12) \quad \sin \varphi = Rv - \pi n q + \frac{\delta}{2\pi n} - h_2 \xi + \frac{\xi(1 - e^{-2\pi n h_2})}{2\pi n} e^{2\pi n h_2}$$

i wreszcie dla  $h_2 > s$ :

$$(3.13) \quad x_2 = - \frac{e^{-h_2 \tau}}{2e^{-2\pi n h_2} \operatorname{sh}(2\pi n \varkappa)} \left\{ [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] e^{\varkappa \tau} - \right. \\ \left. - [\delta - \xi(1 - e^{2\pi n(h_2 - \varkappa)})] e^{-\varkappa \tau} \right\} + \frac{q}{\mu s^2},$$

$$(3.14) \quad \dot{x}_2 = \frac{e^{-h_2 \tau}}{2e^{-2\pi n h_2} \operatorname{sh}(2\pi n \varkappa)} \left\{ (h_2 - \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] e^{\varkappa \tau} - \right. \\ \left. - (h_2 + \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{2\pi n(h_2 - \varkappa)})] e^{-\varkappa \tau} \right\},$$

gdzie

$$(3.15) \quad \varkappa = \sqrt{h_2^2 - s^2},$$

$$(3.16) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} - \frac{e^{2\pi n h_2}}{2(1+R) \operatorname{sh}(2\pi n \varkappa)} \left\{ (h_2 - \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] (1 - e^{-2\pi n(h_2 - \varkappa)}) + \right. \\ \left. + (h_2 + \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 - \varkappa)})] (1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)}) \right\}$$

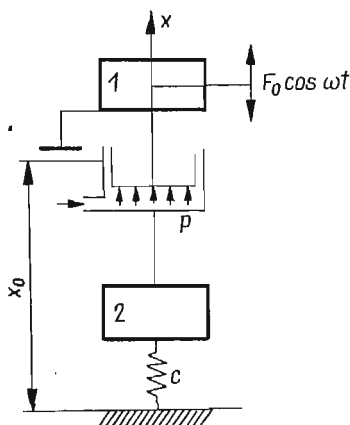
$$(3.17) \quad \sin \varphi = Rv - \pi n q + \frac{\delta}{2\pi n} + \frac{e^{2\pi n h_2}}{2 \operatorname{sh}(2\pi n \varepsilon)} \left\{ (h_2 - \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 + \varkappa)})] - \right. \\ \left. - (h_2 + \varkappa) [\delta - \xi(1 - e^{-2\pi n(h_2 - \varkappa)})] \right\}.$$

Rozpatrzmy z kolei przypadek, gdy opory ruchu ogranicznika 2 są do pominięcia w porównaniu z wartością siły wymuszającej.

Mamy więc  $h_1 = h_2 = 0$ . Model dynamiczny takiego układu przedstawia schematycznie rys. 3. Równania ruchu przybiorą postać

$$(3.18) \quad \ddot{x}_1 + q = \cos(\tau + \varphi),$$

$$(3.19) \quad \ddot{x}_2 + s^2 x_2 = q/\mu.$$



Rys. 3. Schemat układu bez tłumienia

Rozwiązaniem tego układu równań, przy  $s \neq 1$  i  $s \neq \frac{2k+1}{2}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), będą związkami:

$$(3.20) \quad x_1 = -\frac{q\tau^2}{2} + \left( \pi n q - \frac{\delta}{2\pi n} \right) \tau + x_0 - \cos \varphi - \cos(\tau + \varphi),$$

$$(3.21) \quad \dot{x}_1 = -q\tau + \pi n q - \frac{\delta}{2\pi n} + \sin(\tau + \varphi),$$

$$(3.22) \quad x_2 = \xi \cos s\tau + \left[ \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2\pi n s} \right) \sin s\tau + \frac{q}{\mu s^2} \right],$$

$$(3.23) \quad \dot{x}_2 = -s\xi \sin s\tau + s \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2\pi n s} \right) \cos s\tau.$$

Prędkość uderzenia określa związek

$$(3.24) \quad v = \frac{2\pi n q}{1+R} - \frac{s}{1+R} (2\xi \sin^2 \pi n s - \delta) + \operatorname{tg} \pi n s,$$

zaś kąt przesunięcia fazowego

$$(3.25) \quad \sin \varphi = -\frac{1-R}{1+R} \pi n q + s \left[ \xi \left( 1 - \frac{2R}{1+R} \sin^2 \pi n s \right) + \frac{\delta R}{1+R} \right] \operatorname{tg} \pi n s.$$

Możliwość istnienia ruchów okresowych ograniczona jest warunkiem typu matematycznego, tj. ażeby  $\sin \varphi$  osiągał wartości rzeczywiste

$$(3.26) \quad |\sin \varphi| \leq 1,$$

oraz warunkami typu fizycznego, mianowicie: ażeby prędkość uderzenia była dodatnia

$$(3.27) \quad v > 0,$$

oraz aby siła wywołana ciśnieniem powietrza na dno tłoka w elemencie sprężystym zrównoważyła ciężar masy uderzającej, czyli

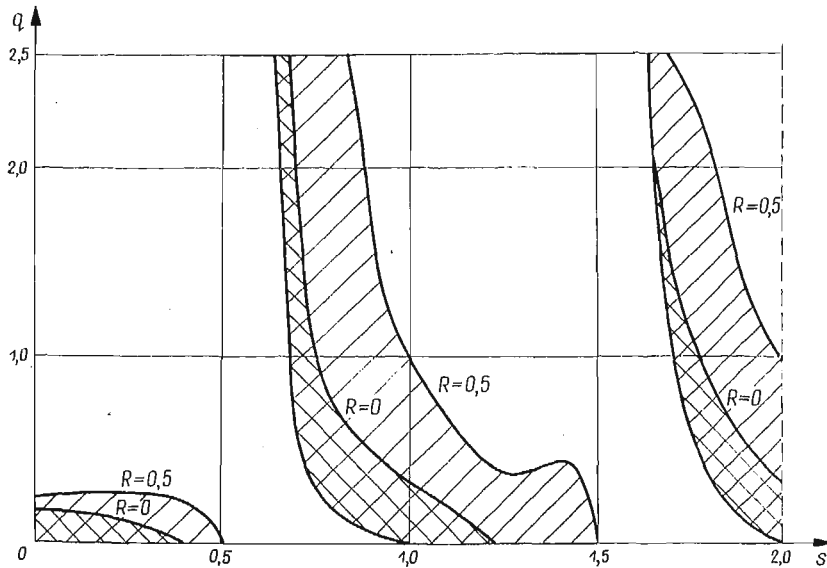
$$(3.28) \quad q > 0.$$

Z (3.26) otrzymamy po wykonaniu koniecznych przekształceń nierówność

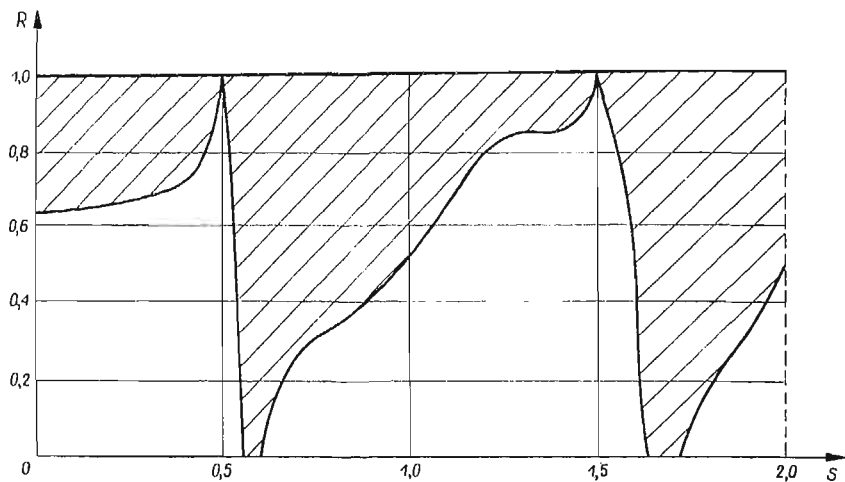
$$\frac{a-1}{b} \leq q \leq \frac{a+1}{b},$$

gdzie

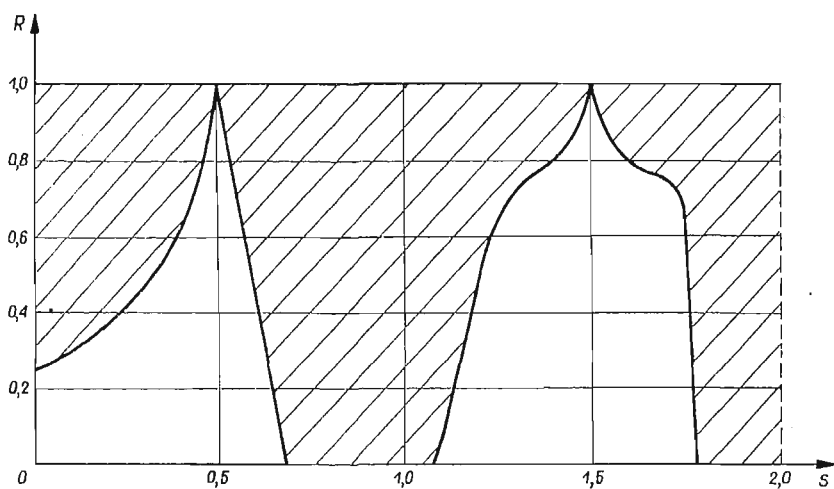
$$(3.29) \quad \left. \begin{aligned} a &= s \left[ \frac{\delta R}{1+R} + x_0 \left( 1 - \frac{2R}{1+R} \sin^2 \pi n s \right) \right] \operatorname{tg} \pi n s, \\ b &= \frac{1-R}{1+R} \pi n + \frac{1}{\mu s} \left( 1 - \frac{2R}{1+R} \sin^2 \pi n s \right) \operatorname{tg} \pi n s \end{aligned} \right\}$$



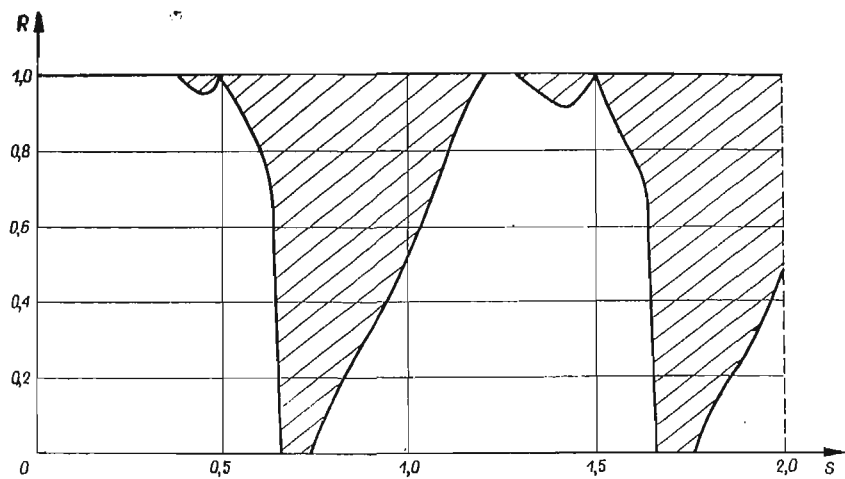
Rys. 4. Zakresy wartości parametrów układu, odpowiadających rozwiązaniom okresowym, przy  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 1$ ; dla  $R = 0$  i  $R = 0,5$



Rys. 5. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin \varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 10$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $q = 1$

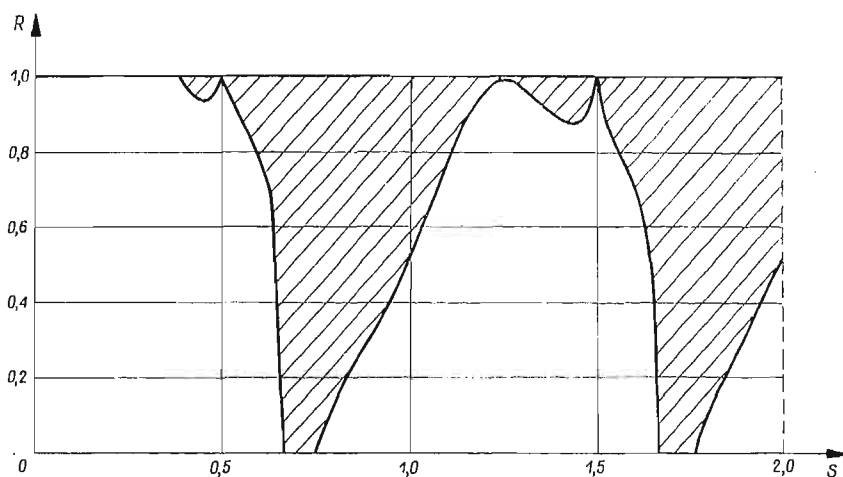


Rys. 6. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin \varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $q = 0,2$

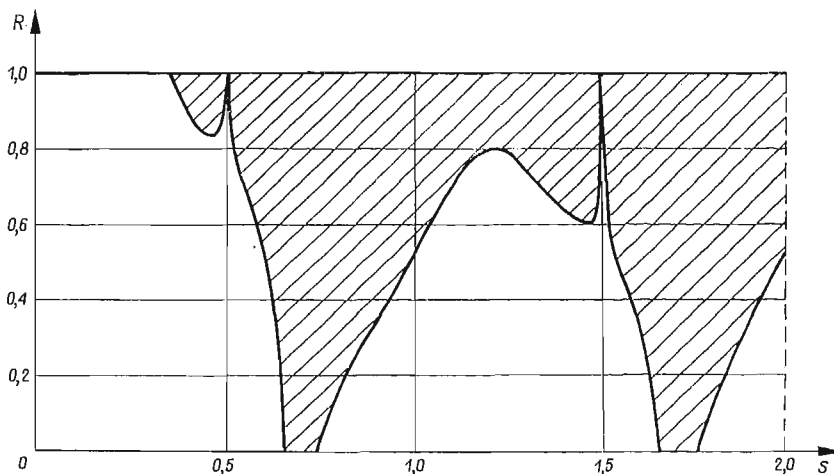


Rys. 7. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin \varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 0,01$ ;  $q = 1$





Rys. 8. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin\varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 0,1$ ;  $q = 1$



Rys. 9. Obszary istnienia rzeczywistych wartości  $\sin\varphi$  dla  $n = 1$ ;  $x_0 = -1$ ;  $\mu = 1$ ;  $\delta = 1$ ;  $q = 1$

Warunek (3.27) prowadzi do nierówności

$$(3.30) \quad q > \frac{\mu s^2 (2x_0 \sin^2 \pi n s - \delta) \operatorname{tg} \pi n s}{2(\pi \mu s + \sin^2 \pi n s \operatorname{tg} \pi n s)}$$

Związki (3.28), (3.29) (3.30) określają obszary wartości parametrów, dla których ruch opisany równaniami (3.18) i (3.19) jest okresowy. Na rys. 4-9 przedstawiono graficznie obszary istnienia rozwiązań okresowych dla wybranych wartości parametrów układu.

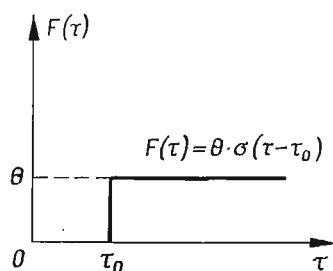
Z wykresów widać, że przy częstotliwości uderzeń równej częstotliwości siły wymuszającej ( $n = 1$ ) w żadnym z przypadków nie istnieje możliwość ruchów okresowych dla  $s = 0,5$ .

## 4. Ruch układu w przypadku dociężenia ogranicznika

Rozpatrzmy przypadek ruchu, gdy ogranicznik dociężony został siłą  $F(\tau)$  (rys. 10) przyłożoną w dowolnej chwili — w przedziale czasu pomiędzy uderzeniami.

Równanie ruchu masy 2 pod działaniem siły  $F(\tau)$  przyjmie postać

$$(4.1) \quad \ddot{x}_2 + s^2 x_2 = \frac{q}{\mu} - \theta \sigma(\tau - \tau_0).$$



Rys. 10.

Stosując do równania (4.1) transformację Laplace'a i wykonując niezbędne przekształcenia, otrzymamy

$$(4.2) \quad x_2 = \xi \cos(s\tau) + \frac{1}{s} \dot{x}_2(0) \sin(s\tau) - \frac{\theta}{s^2} (1 - \tau_0) + \frac{\theta}{s^2} \cos[s(\tau - \tau_0)] + \frac{q}{\mu s^2},$$

$$\dot{x}_2 = -s\xi \sin(s\tau) + \dot{x}_2(0) \cos(s\tau) - \frac{\theta}{s} \sin[s(\tau - \tau_0)],$$

gdzie

$$(4.3) \quad \dot{x}_2(0) = s\xi \operatorname{tg}(\pi ns) + \theta \left[ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right] \frac{1}{\sin(2\pi ns)} - \frac{\delta s}{\sin(2\pi ns)}.$$

Prędkość uderzenia opisuje zależność

$$(4.4) \quad v = \frac{2\pi n}{1+R} q - \frac{1}{1+R} \left\{ \left[ 2s\xi + \theta \left( \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right) \right] \operatorname{tg} \pi ns - \right.$$

$$\left. - \frac{\theta}{s} \sin s(2\pi n - \tau_0) - \delta s \operatorname{ctg} 2\pi ns \right\},$$

kąt zaś przesunięcia fazowego

$$(4.5) \quad \sin \varphi = \frac{\theta}{2} \left[ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right] \operatorname{ctg} \pi ns - \frac{\theta}{2s} \sin s(2\pi n - \tau_0) -$$

$$- \frac{v(1-R)}{2} - \delta s \operatorname{ctg} 2\pi ns.$$

Porównując odpowiednio związki (3.22) (3.25) i (4.2)–(4.5), można ocenić wpływ dociężenia masy 2 siłą  $F(\tau)$ .

Oznaczmy

$$\begin{aligned}\Delta x_2 &= (x_2)_0 - x_2, & \Delta v &= v_0 - v, \\ \Delta \dot{x}_2 &= (\dot{x}_2)_0 - \dot{x}_2, & \Delta(\sin \varphi) &= (\sin \varphi)_0 - \sin \varphi,\end{aligned}$$

(indeks  $\theta$  oznacza wielkość liczoną z uwzględnieniem dociążenia).

Po wykonaniu koniecznych działań otrzymamy

$$(4.6) \quad \Delta x_2 = \frac{\theta}{s^2} \left\{ (1 - \tau_0) \left( 1 - \frac{\sin s\tau}{\sin 2\pi ns} \right) + \cos[s(\tau - \tau_0)] - \frac{s \cos[s(2\pi n - \tau_0)] \sin s\tau}{\sin 2\pi ns} \right\},$$

$$(4.7) \quad \Delta \dot{x}_2 = \theta \left\{ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos[s(2\pi n - \tau_0)] \right\} \frac{\cos s\tau}{\sin 2\pi ns} - \frac{\theta}{s} \sin[s(\tau - \tau_0)],$$

$$(4.8) \quad \Delta v = -\frac{s\xi}{1+R} \sin 2\pi ns - \frac{\theta s}{1+R} \{ [1 - \tau_0 + s \cos s(2\pi n - \tau_0)] \operatorname{tg} \pi ns + \\ + \sin s(2\pi n - \tau_0) \} + \frac{s\delta}{1+R} (2 \operatorname{tg} \pi ns - \operatorname{ctg} 2\pi ns),$$

$$(4.9) \quad \Delta(\sin \varphi) = \frac{\theta}{2} \left( \operatorname{ctg} \pi ns + \frac{1-R}{1+R} \operatorname{tg} \pi ns \right) \left[ \frac{1 - \tau_0}{s} - \cos s(2\pi n - \tau_0) \right] - \\ - \frac{\theta}{s} \sin s(2\pi n - \tau_0) - \frac{2s\xi R}{1+R} \left( 1 + \frac{\sin^2 \pi ns}{1+R} \right) \operatorname{tg} \pi ns - \frac{\delta s}{1+R} [(1+3R) \operatorname{ctg} \pi ns + R \operatorname{tg} \pi ns].$$

W przypadku szczególnym, gdy dociążenie pojawia się na początku cyklu ruchu, czyli  $\tau_0 = 0$ , związki (4.6) – (4.9) przyjmą postać

$$(4.10) \quad \Delta x_2 = \frac{\theta}{s^2} \left[ 1 + \cos s\tau - \frac{\sin s\tau}{\sin 2\pi ns} (1 + s \cos 2\pi ns) \right],$$

$$(4.11) \quad \Delta \dot{x}_2 = \frac{\theta}{s} \left[ (1 - s \cos 2\pi ns) \frac{\cos(s\tau)}{\sin 2\pi ns} - \sin(s\tau) \right],$$

$$(4.12) \quad \Delta v = -\frac{s\xi}{1+R} \sin 2\pi ns - \frac{\theta}{s(1+R)} [(1 + s \cos 2\pi ns) \operatorname{tg} \pi ns + \sin 2\pi ns] + \\ + \frac{s\delta}{1+R} (2 \operatorname{tg} \pi ns - \operatorname{ctg} \pi ns),$$

$$(4.13) \quad \Delta(\sin \varphi) = \frac{\theta}{2} \left( \operatorname{ctg} \pi ns + \frac{1-R}{1+R} \right) \left( \frac{1}{s} - \cos 2\pi ns \right) - \\ - \frac{\theta}{s} \sin 2\pi ns - \frac{2sR}{1+R} \xi \left( 1 + \frac{\sin^2 \pi ns}{1+R} \right) \operatorname{tg} \pi ns - \\ - \frac{s\delta}{1+R} [(1+3R) \operatorname{ctg} \pi ns + R \operatorname{tg} \pi ns].$$

### 5. Stabilność strukturalna układu

Z punktu widzenia zastosowań technicznych badanie stabilności strukturalnej przynosi szczególnie korzyści, gdyż pozwala określić wpływ błędów realizacji układu na charakter ruchu.

Dla określenia warunków stabilności strukturalnej posłużymy się metodą «dopasowywania» [1], polegającą na nadaniu stałym w całkach ogólnych równań opisujących ruch układu, pewnych małych zaburzeń (przyrostów), a następnie na porównaniu ruchu zaburzonego i niezaburzonego, przy liczbie przedziałów ruchu dążącej do nieskończoności.

Niech całki ogólne równań (3.18) i (3.19) mają postać

$$(5.1) \quad x_1 = x_1(\tau; C_1; C_2; \varphi),$$

$$(5.2) \quad x_2 = x_2(\tau; C_3; C_4).$$

Nadajmy stałym  $C_1; C_2; C_3; C_4$  oraz kątowni przesunięcia fazowego  $\varphi$  — małe przyrosty — odpowiednio:  $\alpha_v; \beta_v; \gamma_v; \sigma_v; \Delta_v$ . Ruch układu zostanie zaburzony, a całki ogólne dla ruchu zaburzonego w  $\nu$ -tym przedziale przyjmą postać:

$$(5.3) \quad x_1^{(\nu)} = x_1^{(\nu)}(\tau; C_1 + \alpha_{\nu-1}; C_2 + \beta_{\nu-1}; 2\pi n + \delta_\nu; \varphi + \Delta_{\nu-1}),$$

$$(5.4) \quad x_2^{(\nu)} = x_2^{(\nu)}(\tau; C_3 + \gamma_{\nu-1}; C_4 + \sigma_{\nu-1}; 2\pi n + \delta_\nu).$$

Czas trwania  $\nu$ -go cyklu ruchu wynosić będzie  $(2\pi n + \delta_\nu)$  zamiast  $2\pi n$ .

Określmy różnicę pomiędzy ruchem zaburzonym i niezaburzonym na końcu  $\nu$ -go przedziału ruchu

$$(5.5) \quad \Delta x_{1k}^{(\nu)} = x_1^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - x_1(2\pi n),$$

$$(5.6) \quad \Delta x_{2k}^{(\nu)} = x_2^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - x_2(2\pi n),$$

oraz na początku  $(\nu+1)$ -go przedziału

$$(5.7) \quad \Delta x_{1p}^{(\nu+1)} = x_1^{(\nu+1)}(0) - x_1(0),$$

$$(5.8) \quad \Delta x_{2p}^{(\nu+1)} = x_2^{(\nu+1)}(0) - x_2(0).$$

Podobnie określimy przyrosty pochodnych na końcu  $\nu$ -go przedziału

$$(5.9) \quad \Delta \dot{x}_{1k}^{(\nu)} = \dot{x}_{1k}^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - \dot{x}_1(2\pi n),$$

$$(5.10) \quad \Delta \dot{x}_{2k}^{(\nu)} = \dot{x}_{2k}^{(\nu)}(2\pi n + \delta_\nu) - \dot{x}_2(2\pi n),$$

oraz na początku  $(\nu+1)$ -go przedziału

$$(5.11) \quad \Delta \dot{x}_{1p}^{(\nu+1)} = \dot{x}_{1p}^{(\nu+1)}(0) - \dot{x}_1(0),$$

$$(5.12) \quad \Delta \dot{x}_{2p}^{(\nu+1)} = \dot{x}_{2p}^{(\nu+1)}(0) - \dot{x}_2(0).$$

Ażeby ruch był stabilny, określone wyżej przyrosty spełniać muszą następujące warunki:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \Delta x_{1p}^{(\nu+1)} &= \Delta x_{1k}^{(\nu)}, & \Delta x_{2p}^{(\nu+1)} &= \Delta x_{2k}^{(\nu)}, & \Delta x_{1k}^{(\nu)} &= \Delta x_{2k}^{(\nu)}, \\ \Delta \dot{x}_{1p}^{(\nu+1)} &= -R \Delta \dot{x}_{1k}^{(\nu)}, & \Delta \dot{x}_{2p}^{(\nu+1)} &= -R \Delta \dot{x}_{2k}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Po wykonaniu koniecznych przekształceń warunki (5.13) sprowadzą się do układu równań różnicowych, liniowych, jednorodnych, względem przyrostów  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \sigma_v, \Delta_v$ . Rozwiązań tego układu poszukujemy w postaci

$$(5.14) \quad \alpha_v = k_1 e^{\nu}, \quad \beta_v = k_2 e^{\nu}, \quad \gamma_v = k_3 e^{\nu}, \quad \sigma_v = k_4 e^{\nu}, \quad \Delta_v = k_5 e^{\nu},$$

gdzie  $k_1, \dots, k_5$  — pewne stałe.

Podstawiając (5.11) do układu równań, wyprowadzonych z warunków (5.13), otrzymamy układ równań algebraicznych, liniowych, względem stałych  $k_1, \dots, k_5$ . Z kolei

tworzymy wyznacznik charakterystyczny tego układu równań. Zerowanie się tego wyznacznika jest warunkiem koniecznym istnienia rozwiązań niezerowych układu.

Rozwijając wyznacznik charakterystyczny, otrzymano równanie algebraiczne względem  $\varepsilon$ .

Ażeby układ był stabilny, przyrosty  $\alpha_v, \beta_v, \gamma_v, \sigma_v, \Delta_v$  muszą dążyć do zera przy liczbie przedziałów ruchu  $\nu$  dążącej do nieskończoności. Wynika stąd warunek

$$(5.15) \quad |\varepsilon| < 1;$$

czyli moduły pierwiastków równania charakterystycznego muszą być mniejsze od jedności.

Warunek konieczny i dostateczny spełnienia związku (5.15) wyznaczmy, posługując się twierdzeniem Schura [1]. Zgodnie z tym twierdzeniem moduły pierwiastków równania charakterystycznego są mniejsze od jedności, gdy zachodzi nierówność

$$(5.16) \quad |W_i| < 1,$$

gdzie  $W_i$  oznacza wielomiany utworzone ze współczynników równania charakterystycznego.

Dla rozpatrywanego układu wielomiany  $W_i$  mają postać:

$$(5.17) \quad W_0 = \frac{a_4}{a_0},$$

$$(5.18) \quad W_1 = \frac{a_0 a_3 - a_1 a_4}{a_0^2 - a_4^2},$$

$$(5.19) \quad W_2 = \frac{(a_0 a_1 - a_3 a_4)(a_0^2 - a_4^2 - a_0 a_3 + a_1 a_4)}{(a_0^2 - a_4^2)^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_4)^2},$$

$$(5.19) \quad W_3 = (a_0 - a_4) \times$$

$$\times \left[ \frac{(a_0^2 - a_4^2)[(a_0^2 - a_4^2) - (a_0 a_1 - a_3 a_4)] - (a_0 a_3 - a_1 a_4)[(a_0 a_3 - a_1 a_4) - (a_0 a_1 - a_3 a_4)]}{[(a_0^2 - a_4^2)^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_4)^2]^2 - (a_0 a_1 - a_3 a_4)^2 [(a_0^2 - a_4^2) - (a_0 a_3 - a_1 a_4)]^2} \right] \times$$

$$\times [(a_0 + a_4)(a_0 a_1 - a_3 a_4) - a_2(a_0 a_3 - a_1 a_4)]:$$

W związkach (5.17)–(5.19) oznaczono:

$$(5.20) \quad a_0 = s[\pi n q + \sin \varphi - s \xi \operatorname{tg} \pi n s + \delta s \operatorname{ctg} 2 \pi n s] \cos 2 \pi n s.$$

$$(5.21) \quad a_1 = 2s(\pi n q + \sin \varphi)(R - \cos^2 \pi n s) \cos 2 \pi n s - 2s^2(2 - R) \xi \sin 2 \pi n s \sin^2 \pi n s +$$

$$+ \delta s^2(2 - R) \operatorname{ctg} 2 \pi n s + 1.$$

$$(5.22) \quad a_2 = s^2 \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2 \pi n s} \right) [R^2 - 2R - (1 - 2R) \cos^2 \pi n s] -$$

$$- \frac{s^2}{2} (1 - 2R) \xi \sin 4 \pi n s + 2 \pi n s [(1 + R) \cos \varphi - R q] +$$

$$+ s(\pi n q + \sin \varphi) [(1 - 2R) \cos^2 2 \pi n s - R(2 - R) \cos 2 \pi n s - R s \sin^2 2 \pi n s].$$

$$(5.23) \quad a_3 = R s \left\{ (\pi n q + \sin \varphi) [1 + \cos^2 2 \pi n s - R(\cos 2 \pi n s + \sin^2 2 \pi n s)] + \right.$$

$$+ 2 \pi n (1 + R) (\cos 2 \pi n s + \sin^2 2 \pi n s) \cos \varphi + (1 - R) \cos 2 \pi n s +$$

$$\left. + s \left( \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta}{\sin 2 \pi n s} \right) (1 - 2R + \cos^2 2 \pi n s) \right\}.$$

$$(5.24) \quad a_4 = R^2 s \left[ \pi n q + \sin \varphi + s \xi \operatorname{tg} \pi n s - \frac{\delta s}{\sin 2 \pi n s} + 2 \pi n q (\cos 2 \pi n s + \sin^2 2 \pi n s) \right].$$

Zależności (5.17)–(5.19) określają warunki stabilności strukturalnej układu wibro-uderzeniowego, opisanego równaniami (3.18) i (3.19). Na podstawie tych związków można określić obszary wartości parametrów układu, dla których ruch pozostaje okresowy po wprowadzeniu małych zaburzeń.

Taka metoda badania stabilności daje istotne informacje dla praktyki konstrukcyjnej, ponieważ pozwala ocenić wpływ błędów powstających przy technicznej realizacji urządzenia na charakter jego pracy.

Warunki (5.17)–(5.19), po podstawieniu do nich wartości współczynników  $a_0 \div a_4$ , przybierają złożoną postać, co utrudnia znacznie ich praktyczne wykorzystanie.

Numeryczne określenie dopuszczalnych wartości poszczególnych parametrów wymagałoby zaangażowania szczególnie wydajnych środków obliczeniowych na długi okres czasu.

Tak więc, korzystanie z powyższych warunków stabilności sprowadza się do możliwości sprawdzenia stabilności strukturalnej układu o przyjętych uprzednio parametrach.

## 6. Uwagi końcowe

W przedstawionych wyżej rozważaniach badano model dynamiczny układu wibro-uderzeniowego, w którym ogranicznik stanowił masę skupioną, zawieszoną na elemencie podatnym, o liniowej charakterystyce. Opisany model przedstawiać może wibro-uderzeniowe urządzenie do pogrążania pali, z pneumatycznym elementem sprężystym, przy czym masa 2 odpowiada w układzie rzeczywistym elementowi pogrążanemu i drgającej wraz z nim części otaczającego gruntu.

Jakkolwiek taki model ruchu elementu pogrążanego jest znacznie uproszczony w stosunku do warunków rzeczywistych, to jednak jego analiza daje szereg informacji istotnych dla oceny wpływu podatności elementu pogrążanego na pracę urządzenia do pogrążania.

Jak widać z rys. 4–9, bardzo istotne znaczenie ma dobór częstości wymuszającej drgania, a w szczególności «omijanie» wartości

$$s = \frac{2k+1}{2},$$

gdyż dla tych wartości  $s$  nie ma możliwości realizacji ruchu ustalonego.

Wartość  $\delta$  określa prędkość pogrążania. Jak wynika z rys. 7–9, większym prędkościom pogrążania odpowiadają większe obszary stabilnej pracy.

Wyrażenie  $\theta\sigma(\tau - \tau_0)$  — po prawej stronie równania (4.1) interpretować można jako dociążenie urządzenia do pogrążania, wywołane wejściem elementu pogrążanego w nową warstwę podłoża, o większym oporze.

Na podstawie wyprowadzonych zależności można stwierdzić, że wpływ dociążenia wywołanego przejściem przez granicę dwóch różnych warstw gruntu — zarówno ilościowy, jak i jakościowy — jest istotny i zależy od stosunku częstości własnej elementu pogrążanego do częstości wymuszającej.

Porównując wyniki analizy rozpatrywanego wyżej modelu z odpowiednimi wynikami, otrzymanymi w pracy [4], dla układu ze sztywnym ogranicznikiem, można stwierdzić wyraźny jakościowy i ilościowy wpływ podatności elementu pogrążanego.

Złożona forma rozwiązań wskazuje na celowość zastosowania w badaniach takich układów techniki modelowania analogowego.

#### Literatura cytowana w tekście

1. А. Е. Ковринский, *Механизмы с упругими связями*, Москва 1964.
2. X. И. Раскин, *О переходных режимах при движении с односторонними ударами*, Сб. Вопросы динамики и прочности, № 15, Рига 1967.
3. О. А. Савинов, А. Я. Лускин, *Вибрационный метод погружения свай и его применение в строительстве*, Ленинград 1960.
4. Z. WIŚNIEWSKI, *Badania układu wibro-uderzeniowego z pneumatycznym elementem sprężystym*, Archiwum Budowy Maszyn, 3 (1968).
5. Z. WIŚNIEWSKI, *Układ wibro-uderzeniowy z pneumatycznym elementem sprężystym i z podatnym ogranicznikiem*, Archiwum Budowy Maszyn 1(1972).

#### Резюме

#### АНАЛИЗ НЕКОТОРОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В статье описаны исследования виброударной системы с пневматическим упругим элементом и с подвижным ограничителем.

Экспериментальные исследования такой системы с жестким ограничителем, проведенные ранее автором, показали что система обладает возможностью непрерывной регулировки частоты ударов во время работы устройства.

В настоящей работе рассматривается модель, состоящая из двух масс, одна из которых соответствует массе погружаемого элемента и вибрирующей вместе с ним части грунта, так как исследуемая система представляет динамическую модель виброударного погружающего устройства. Для этой системы решаются дифференциальные уравнения движения при отсутствии рассеяния энергии в пневматическом упругом элементе. Особо рассмотрен случай движения без затухания. Для этого случая решены уравнения движения, вычислены главные параметры системы, выведены условия структурной устойчивости. Рассмотрен случай нестационарного движения, вызванного внезапным действием постоянной внешней силы. Некоторые результаты исследований изображены на графиках. Выведенные в работе формулы могут найти применение при проектировании виброударных погружателей.

#### S u m m a r y

#### ON CERTAIN VIBRATORY-IMPACT SYSTEM WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

The paper deals with a vibratory-impact system with pneumatic suspension element and a movable stop.

The experimental investigation of the model of a similar system (with a rigid stop) which had been carried out formerly by the author, proved an important feature of the system, namely the possibility of continuous control of impact frequency during the work of the system.

The model considered in this paper consists of two masses, one of which represents the mass of a driven pile and the vibrating part of surrounding soil (the system investigated is to be applied to pile driving). Equations of motion are formulated and solved under the assumption of negligibility of energy dissipation in pneumatic suspension element. The main parameters of motion are calculated.

The case of system with no energy dissipation received a special treatment. For that case the main parameters of motion were calculated. The structural stability conditions were formulated. The non-stationary motion caused by suddenly applied external force was considered as an analogy of the behaviour of a real system, while the driven pile passes the contact surface of two layers of soil.

Some results of the analysis is presented by graphs. The formulae derived in the paper might be applied in the vibratory-impact pile drivers design.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 września 1970 r.; po raz drugi dnia 1 marca 1971 r.*

---



ANALOGIA MECHANICZNO-STEREOMECHANICZNA W KLASIE  
WIELOWSKAŹNIKOWYCH RÓWNAŃ LAGRANGE'A DRUGIEGO RODZAJU

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

1. Wstęp

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju są dziś powszechnie wykorzystywane do zagadnień dynamiki nie tylko przez mechaników. Stosują je również z powodzeniem elektrycy, a przede wszystkim automatycy, chociaż na ogół ich układy dynamiczne nie posiadają interpretacji geometrycznej.

Stosowalność tych równań jest dotychczas ograniczona najwyżej do ciągu jednowskaźnikowego (czasem wektora) zmiennych lub współrzędnych uogólnionych. Istnieje w literaturze także postać krakowianowa tych równań [1].

W rozwijającej się teorii szeroko pojmowanych systemów wielkich [2] zawierających również i układy mechaniczne, korzystne jest wprowadzenie zmiennych uogólnionych więcej niż jednowskaźnikowych. Przydatna do tego jest algebra i analiza ciągów wielowskaźnikowych [3, 4], których przypadkami szczególnymi mogą być wektory, macierze, krakowiany i nawet tensory. Dogodne jest również formułowanie zagadnień przy użyciu równań różniczkowych zwyczajnych wielociągowych [5] w przypadku systemów wielkich o strukturze dyskretnej.

Duże znaczenie ma także uzasadnianie licznych analogii między różnymi zjawiskami (na przykład mechanicznymi, stereomechanicznymi, elektrycznymi oraz innymi), jak też i modelowanie odmiennych zjawisk za pomocą analogii w klasach pewnych przekształceń wielociągowych.

Dotychczas nie uzasadniono analogii mechaniczno-stereomechanicznej w klasie równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Autor uczynił to w pracy [6] rozważając najpierw ciąg jednowskaźnikowy równań, którego przypadkiem szczególnym jest jedno równanie. W pracy [7] uogólniono je na przypadek równań dwuwskaźnikowych.

Obecnie pokażemy, że dzięki algebrze i analizie  $w$ -ciągów (gdzie  $w$  jest dowolną liczbą naturalną), czyli ciągów wielowskaźnikowych można otrzymać wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju w stereomechanice, podobnie jak to uczyniono w pracy [8] dla mechaniki.

Uzasadnienie analogii mechaniczno-stereomechanicznej ( $M$ - $SM$ ) polega na podaniu pewnej równoważności

$$M \rightleftharpoons SM$$

wynikającej z równoważności

$$\overline{C}(M) \Leftrightarrow \overline{C}(SM)$$

ciągów rozważań logicznych obu nauk.

Przez ciąg rozważań logicznych rozumiemy tu uporządkowane przedstawienie pewnej liczby pojęć pierwotnych, definicji, aksjomatów i twierdzeń (zasad) w językach obu rozważanych nauk.

Istnieje ciąg rozważań logicznych w mechanice, za pomocą którego możemy otrzymać wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju [8] bez stosowania rachunku wariacyjnego.

Wyprowadzimy je obecnie w terminologii stereomechanicznej z użyciem ciągów  $w$ -wskaźnikowych i tym samym uzasadnimy analogię mechaniczno — stereomechaniczną w klasie tych równań wielowskaźnikowych. Uzyskane w taki sposób równania zastosujemy następnie do otrzymania równań wielowskaźnikowych tak zwanego oscylatora stereomechanicznego jako funkcji stanu sprężystego wybożenia systemu wielkiego prętów. Taki układ wielokrotny prętów rozważaliśmy w pracy [9]. Pokazano tam, że jego równania różniczkowe wielociągowe ruchu (przez analogię) są naturalnym uogólnieniem klasycznego zagadnienia jednego pręta sprężystego poddanego wybożeniu [10]. Uogólnienie to wynika z algebry i analizy ciągów wielowskaźnikowych.

Dzięki użyciu  $w$ -ciągów można rozważać wybożenie sprężyste systemu wielkiego prętów<sup>1)</sup> prawie tak samo, jak w przypadku wybożenia jednego pręta. To samo dotyczy wyprowadzenia wielowskaźnikowych równań Lagrange'a i uzasadnienia analogii mechaniczno-stereomechanicznej. Jest to konsekwencją zdefiniowania pewnych działań na ciągach wielowskaźnikowych. W efekcie mamy swoistą niezmienniczość tak ciągów rozważań logicznych, jak i wzorów dla każdego  $q = 0, 1, \dots, w$ , gdzie  $q$  jest liczbą wskaźników rozważanych uogólnionych współrzędnych wielowskaźnikowych.

Dodamy przy tym, że wielowskaźnikowe prawo Hooke'a sformułowano w pracach [11, 12]. Korzystając z tego prawa możemy także otrzymać równanie wielociągowe oscylatora stereomechanicznego, w którym wielkością poszukiwaną jest ciąg wielowskaźnikowy ugięcie systemu wielkiego prętów sprężystych poddanych wybożeniu.

Nadmieniamy, że zastosowana algebra i analiza ciągów wielowskaźnikowych nie wymaga znajomości rachunku tensorowego.

Przypomnimy jeszcze dwa niezbędne pojęcia dotyczące istoty formułowanego obecnie uogólnienia względem prac [6, 7].

**1.1. Ciągi wielowskaźnikowe ( $w$ -ciągi).** Niech przy danej liczbie naturalnej  $w$  i danym ciągu liczb naturalnych  $n_q$ ,  $q = 1, \dots, w$ , symbol  $Z$  oznacza dowolny zbiór, natomiast  ${}^w\overline{K}$  przedstawia zbiór elementów  ${}^w\overline{k}$ , które są iloczynami kartezyjańskimi

$$\prod_{q=1}^w \{n_q\} = \{n_1\} \times \dots \times \{n_w\}$$

<sup>1)</sup> System prętów jest wielki, jeśli opisuje go ciąg jednowskaźnikowy o dużej liczbie elementów lub ciąg wielowskaźnikowy wielkości.

zbiorów

$$\begin{aligned} \{n_1\} &= \{1, \dots, n_1\}, \\ &\vdots \\ \{n_w\} &= \{1, \dots, n_w\} \end{aligned}$$

zwanych odcinkami naturalnymi o długościach  $\{n_q\}$ .

**Definicja 1.**  $w$ -ciągami nazywamy każdą funkcję (odwzorowanie)  $r$  typu

$$r : {}^w\bar{k} \in {}^w\bar{K} \rightarrow Z$$

i zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} {}^w\bar{r} &= [r_{j_1 \dots j_w}] = [r_{\bar{j}}], \\ \bar{j} &= [j_1 \dots j_w], \quad j_q = 1, \dots, n_q; \quad q = 1, \dots, w. \end{aligned}$$

W pracy [6] rozważono jednościagi

$$\bar{r} = [r_{j_1}], \quad j_1 = 1, \dots, n_1$$

zmiennych uogólnionych, czyli przypadek  $w = 1$ . W pracy [7] uwzględniono dwuciągi

$${}^2\bar{r} = [r_{j_1 j_2}], \quad j_1 = 1, \dots, n_1; \quad j_2 = 1, \dots, n_2$$

zmiennych uogólnionych, czyli przypadek  $w = 2$ .

Obecnie założymy, że  $w$  może być dowolną liczbą naturalną.

Algebrę i elementy analizy wielociągów podano w pracach [3, 4].

**1.2. Równanie różniczkowe zwyczajne wielociągowe rzędu  $n$ .**

**Definicja 2.** Równanie różniczkowe zwyczajne wielociągowe rzędu  $n$  ma postać

$${}^k\bar{F}[x, {}^k\bar{y}(x), {}^k\bar{y}'(x), \dots, {}^k\bar{y}^{(n)}(x)] = {}^k\bar{0},$$

gdzie ciąg  $k$ -wskaźnikowy funkcji  ${}^k\bar{F}$  jest ciągły<sup>2)</sup> względem swoich argumentów, przy czym strona lewa zależy od  $k$ -ciągu najwyższych pochodnych  ${}^k\bar{y}^{(n)}(x)$  funkcji wielociągowej  ${}^k\bar{y}(x)$  argumentu zerociągowego  $x$ .

Prostym przykładem takiego równania  $w$ -ciągowego jest wielowskaźnikowe równanie oscylatora harmonicznego, którego przypadek szczególny stanowi równanie

$${}_1a y'' + {}_2a y = 0, \quad \text{gdzie } {}_1a, {}_2a \text{ — stałe,}$$

opisujące wyboczenie sprężyste jednego pręta [10].

Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju służy do:

1° otrzymania równań wyboczenia sprężystego układu wielokrotnego prętów opisanego ciągiem wielowskaźnikowym ugięć za pomocą wyprowadzonych równań Lagrange'a opisujących zjawisko stereomechaniczne wyboczenia systemu wielkiego prętów sprężystych;

2° wykazania, że dane zagadnienie wyboczenia systemu wielkiego prętów jest ruchem.

<sup>2)</sup> Oznacza to, że wszystkie wyrazy  $F_{\bar{j}}$   $k$ -ciągu  ${}^k\bar{F}$  są funkcjami ciągłymi.

## 2. Ruch dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego. Więzy

Będziemy rozważali przestrzeń ciągów  $w$ -wskaźnikowych [3, 4]

$$(2.1) \quad {}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}(x), \quad x \in \langle x_1, x_2 \rangle$$

utworzoną z rozwiązań równań różniczkowych  $w$ -ciągowych rzędu  $n$

$$(2.2) \quad {}^w\bar{y}^{(n)} = {}^w\bar{f}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}', \dots, {}^w\bar{y}^{(n-1)}),$$

których prawe strony są funkcjami ciągłymi i posiadającymi ciągłe pochodne cząstkowe względem każdej zmiennej.

**Definicja 1.** Ruchem (jednoparametrowym) układu stereomechanicznego wielokrotnego  ${}^w\bar{y}$  nazywamy każdą funkcję (2.1) lub w postaci uwikłanej

$$(2.3) \quad {}^w\bar{U}(x, {}^w\bar{y}) = {}^w\bar{0}.$$

**Definicja 2.** Prędkością  ${}^w\bar{y}^{(k)}(x)$  rzędu  $k$ ;  $k = 1, \dots, n$ , ruchu układu stereomechanicznego wielokrotnego (2.1) nazywamy  $k$ -tą pochodną funkcji (2.1), czyli

$$(2.4) \quad {}^w\bar{y}^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k} {}^w\bar{y}(x).$$

**Definicja 3.** Równanie (2.2) lub w postaci uwikłanej

$$(2.5) \quad {}^w\bar{G}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}', \dots, {}^w\bar{y}^{(n-1)}, {}^w\bar{y}^{(n)}) = {}^w\bar{0}$$

nazywamy równaniem (stanu) ruchu układu stereomechanicznego wielokrotnego.

**Definicja 4.** Więżami ruchu układu stereomechanicznego wielokrotnego (2.1) nazywamy niezależne od siebie związki

$$(2.6) \quad {}^v\bar{H}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}', \dots, {}^w\bar{y}^{(n-1)}) = {}^v\bar{0},$$

posiadające ciągłe pierwsze pochodne w rozważanym otoczeniu zmiennych  $x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}', \dots, {}^w\bar{y}^{(n-1)}$ .

Przyjmujemy, że badane zjawisko może podlegać pewnym ograniczeniom.

*Postulat 1.* Istnieje absolutna zmienna niezależna  $x$ .

*Postulat 2.* Istnieje inercjalny układ odniesienia.

*Postulat 4.* Słuszne są prawa Newtona z tym, że czas absolutny  $t$  jest zastąpiony absolutną zmienną niezależną  $x$ .

**U w a g a.** Jeśli ograniczymy się do przykładu wybożenia sprężystego pręta pryzmatycznego o długości skończonej, to  $y(x)$  jest jego ugięciem w przekroju opisanym odciętą  $x$ .

W przypadku  $n = 2$  otrzymujemy z (2.2) równania ruchu układu stereomechanicznego

$$(2.7) \quad {}^w\bar{y}'' = {}^w\bar{f}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}')$$

analogiczne do newtonowskich równań ruchu [8]

$${}^w\bar{r}'' = {}^w\bar{f}(t, {}^w\bar{r}, {}^w\bar{r}').$$

Wynika to stąd, że zamiast proporcji

$$\frac{d^2}{dt^2} {}^w\bar{r}(t) \sim {}^w\bar{r}(t)$$

istotnej w przypadku oscylatora mechanicznego wielowskaźnikowego słuszna jest proporcja

$$\frac{d^2}{dx^2} {}^w\bar{y}(x) \sim {}^w\bar{y}(x),$$

którą otrzymujemy z uwzględnienia wielowskaźnikowej linii ugięcia.

**Definicja 1.1.** Równanie (2.7) nazywamy równaniem ruchu układu stereomechanicznego (2.1) przez analogię do newtonowskich równań ruchu.

Wtedy więzy stereomechaniczne przez analogię do więzów mechanicznych mogą przyjmować postać

$$(2.8) \quad {}^v\bar{H}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}') = {}^v\bar{0}$$

— nieholonomiczne (różniczkowe lub kinematyczne),

$$(2.9) \quad {}^v\bar{H}(x, {}^w\bar{y}) = {}^v\bar{0}$$

— holonomiczne reonomiczne (skończone lub geometryczne),

$$(2.10) \quad {}^v\bar{H}({}^w\bar{y}) = {}^v\bar{0}$$

— holonomiczne skleronomiczne.

Dla stereomechanicznych równań ruchu formułujemy zagadnienie Cauchy'ego.

**Definicja 5.** Siłą stereomechaniczną przez analogię do siły newtonowskiej

$$\bar{F} = m \bar{a}, \quad m \text{ — masa, } \bar{a} \text{ — przyspieszenie,}$$

nazywamy funkcję liniową

$$(2.11) \quad {}^w\bar{F} = {}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}'' = [{}^{w-1}(\bar{E}J)_1 // {}^{w-1}\bar{y}_1'', \dots, {}^{w-1}(\bar{E}J)_{n_{w-1}} // {}^{w-1}\bar{y}_{n_{w-1}}'']$$

daną za pomocą  $p$ -iloczynu<sup>3)</sup>, gdzie

$$(2.12) \quad {}^w\bar{F} = {}^w\bar{F}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}'),$$

przy czym

$${}^1\bar{F} = \bar{E}J \bar{y}'' = [E_1 J_1 y_1'', \dots, E_n J_n y_n''].$$

**Definicja 6.** Związki (2.1), (2.12) nazywamy równaniami ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego wielokrotnego.

**Definicja 6.1.** Dynamiczne układy stereomechaniczne spełniające równania więzów nazywamy układami nieswobodnymi.

Prawa ruchu dynamicznych układów stereomechanicznych są uogólnieniem praw ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego zerowskaźnikowego<sup>4)</sup>

$$EJy'' = f(x, y, y'),$$

gdzie  $EJ$  jest sztywnością pręta pryzmatycznego o długości skończonej. Wymagają one kilku dalszych pewników zgodnych z doświadczeniem.

<sup>3)</sup> Symbol // oznacza mnożenie dwóch ciągów wielowskaźnikowych w sensie  $p$ -iloczynu [3]. Przypadek ciągów dwuwowskaźnikowych ilustrujący te pojęcia rozważono w pracy [7].

<sup>4)</sup> W równaniach wielociągowych konkretnych  $EJ$  jest na ogół ciągiem  $2w$  — wskaźnikowym sztywności wzajemnych układu stereomechanicznego wielokrotnego jako systemu wielkiego [9].

*Postulat IV.* Z istnienia więzów i ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego wielokrotnego po nich (ruchu zgodnego z więzami) wynika istnienie sił działania (reakcji) więzów  ${}^w\bar{R}$  na układ i odwrotnie.

*Postulat V.* Pod wpływem sił  ${}^w\bar{F}$  nieswobodny dynamiczny układ stereomechaniczny wielokrotny  ${}^w\bar{y}$  porusza się, jak układ dynamiczny wielokrotny swobodny pod działaniem sumy sił danych i oddziaływań więzów, czyli w inercjonalnym układzie odniesienia spełnione są równania ruchu

$${}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}' = {}^w\bar{F} + {}^w\bar{R},$$

przy czym współrzędne  $y_j$  w-ciągu  ${}^w\bar{y}$  spełniają odpowiednie równania więzów.

U w a g a. Siły, które nie są spowodowane działaniem więzów nazywamy siłami czynnymi.

Będziemy rozważali tylko takie więzy różniczkowe, które są spełnione liniowo przez prędkość (2.4) dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, to znaczy  $v$ -ciągi równań

$$(2.13) \quad {}^w\bar{l} \supseteq {}^w\bar{y}' = {}^v\bar{D},$$

wynikające z ogólnej definicji więzów

$$(2.14) \quad {}^v\bar{H}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}') = \bar{0},$$

przy czym  ${}^w\bar{l}$  i  ${}^v\bar{D}$  są funkcjami  $x$ ,  ${}^w\bar{y}$  i nie wszystkie  $l_j$  są równe zero, natomiast symbol  $\supseteq$  oznacza mnożenie dwóch ciągów wielowskaźnikowych w sensie  $m$ -iloczynu, a  $\supseteq$  przedstawia ciąg sum  $m$ -iloczynu [3]<sup>5</sup>).

### 3. Przemieszczenia możliwe. Przemieszczenia przygotowane

Niech dany dynamiczny układ stereomechaniczny wielokrotny

$$(3.1) \quad {}^w\bar{y} = [y_j]$$

spełnia więzy skończone

$$(3.2) \quad {}^{v_1}\bar{H}(x, {}^w\bar{y}) = {}^{v_1}\bar{0},$$

które zastępujemy wynikającymi z nich więzami różniczkowymi

$$(3.3) \quad \frac{\partial {}^{v_1}\bar{H}}{\partial {}^w\bar{y}} // {}^w\bar{y}' + \frac{\partial {}^{v_1}\bar{H}}{\partial x} = {}^{v_1}\bar{0}$$

i więzy różniczkowe o których zakładamy, że są liniowe, czyli

$$(3.4) \quad {}^w\bar{l} \supseteq \bar{y}' = {}^{v_2}\bar{D},$$

gdzie symbol  $//$  oznacza ciąg sum  $p$ -iloczynu tensorowego różniczkowego rzędu pierwszego funkcji wielowskaźnikowej argumentu wielowskaźnikowego [3]<sup>6</sup>

<sup>5</sup>) Przypadek ciągów dwuwskaźnikowych ilustrujący te pojęcia rozważono w pracy [7].

<sup>6</sup>) Uwaga identyczna, jak w notce <sup>5</sup>).

**Definicja 7.** Prędkość  ${}^w\bar{y}'(x)$  dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego znajdującego się w położeniu

$${}^w\bar{y} = {}^w\bar{A}$$

nazywamy prędkością możliwą (zgodną z więzami) w tym położeniu, jeżeli układ może ją posiadać w miejscu  $x$ , co zachodzi wtedy, gdy ta prędkość spełnia równania liniowe więzów (3.3) i (3.4).

**Definicja 8.** Przez analogię do  $d\bar{r} = \bar{r}'dt$ ,  $\bar{r}$  — wektor promień punktu materialnego, układ nieskończenie małych przemieszczeń

$$d{}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}'dx,$$

gdzie  ${}^w\bar{y}'(x)$  jest prędkością możliwą dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, nazywamy nieskończenie małym przemieszczeniem<sup>7)</sup> możliwym tego układu.

Przemieszczenia możliwe spełniają równania

$$(3.5) \quad \frac{\partial {}^{v_1}\bar{H}}{\partial {}^w\bar{y}} \llcorner d{}^w\bar{y} + \frac{\partial {}^{v_1}\bar{H}}{\partial x} dx = {}^{v_1}\bar{0}$$

oraz

$${}^w\bar{I} \supseteq {}^w\bar{y}' dx = {}^{v_2}\bar{D} dx,$$

które otrzymujemy mnożąc obustronnie równanie (3.3) i (3.4) przez  $dx$ .

Niech będą dane dwa przemieszczenia możliwe

$$(3.6) \quad d{}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}' dx$$

i

$$(3.7) \quad d{}_1{}^w\bar{y} = {}^w_1\bar{y}' dx$$

odpowiadające przekrojowi  $x$  oraz temu samemu położeniu dynamicznego układu stereomechanicznego.

Spełniają one równania (3.5), natomiast ich różnica

$$(3.8) \quad \delta {}^w\bar{y} = d{}_1{}^w\bar{y} - d{}^w\bar{y}$$

spełnia związki jednorodne

$$(3.9) \quad \frac{\partial {}^{v_1}\bar{H}}{\partial {}^w\bar{y}} \llcorner {}^w\bar{y} = {}^{v_1}\bar{0}$$

oraz

$$(3.10) \quad {}^w\bar{I} \supseteq \delta {}^w\bar{y} = {}^{v_2}\bar{0}.$$

**Definicja 9.** Różnicę (3.8) nazywamy przemieszczeniem przygotowanym (wirtualnym) dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego (3.1) w przekroju  $x$  dla pewnego położenia możliwego.

<sup>7)</sup> Mamy tu na myśli przemieszczenie uogólnione  $d{}^w\bar{y}$  jako iloczyn  $dx$  oraz prędkości  ${}^w\bar{y}'$ , charakteryzującej zjawisko stereomechaniczne w układzie stereomechanicznym (systemie wielkim)  $w$ -wskaźnikowym.

#### 4. Podstawowe zagadnienie dynamiki układów stereomechanicznych wielokrotnych. Więzy idealne

Oznaczmy wymiary wewnętrzne  $w$ -ciągu,  $v_1$ -ciągu i  $v_2$ -ciągu przez

$$(4.1) \quad \text{Dim } {}^w\bar{y} = u^w,$$

$$(4.2) \quad \text{Dim } {}^{v_1}\bar{H} = u^{v_1},$$

$$(4.3) \quad \text{Dim } {}^{v_2}\bar{H} = u^{v_2}.$$

Równania (3.9) i (3.10) zawierają  $n^w$  niewiadomych współrzędnych  $w$ -ciągu  ${}^w\bar{y}$ . Jeśli równania te są niezależne, to wśród współrzędnych  $\delta y_{\bar{J}}$  istnieje

$$n^w = u^w - u_1^{v_1} - u_2^{v_2}$$

współrzędnych niezależnych.

**Definicja 10.** Liczbę  $n^w$  współrzędnych niezależnych  $w$ -ciągu  $y_{\bar{J}}$  nazywa się liczbą stopni swobody danego dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, ściślej:  $n^w$ -krotnego.

*Podstawowe zagadnienie dynamiki* nieswobodnego układu stereomechanicznego wielokrotnego można sformułować następująco.

Należy określić ruch

$$(4.5) \quad {}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}(x), \quad x_1 < x < x_2$$

układu  ${}^w\bar{y}$  oraz oddziaływania więzów

$$(4.6) \quad {}^w\bar{R} = {}^w\bar{R}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}')$$

przy danych siłach czynnych

$$(4.7) \quad {}^w\bar{F} = {}^w\bar{F}(x, {}^w\bar{y}, {}^w\bar{y}')$$

i zgodnych z więzami jego położeniach początkowych

$$(4.8) \quad {}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}(x)|_{x=0}$$

oraz prędkościach początkowych

$$(4.9) \quad {}^w\bar{y}' = {}^w\bar{y}'(x)|_{x=0}.$$

Jeśli nie jest znany charakter więzów, to nie są też wiadome oddziaływania  ${}^w\bar{R}$  i zagadnienie jest nieokreślone, ponieważ liczba  $u^w$  niewiadomych  $y_{\bar{J}}$ ,  $R_{\bar{J}}$  jest większa od liczby równań

$$n^w + u^w > u^w + u_1^{v_1} + u_2^{v_2},$$

gdzie  $n = u$ .

Podstawowe zagadnienie dynamiki układu stereomechanicznego staje się określone, jeśli mamy

$$u^w + u^w - (u^w + u_1^{v_1} + u_2^{v_2}) = k^w, \\ k^w = u^w - u_1^{v_1} - u_2^{v_2}$$

dodatkowych niezależnych związków między szukanymi wielkościami  $\delta y_{\bar{J}}$ . Związki te otrzymamy postulując istnienie klasy więzów idealnych.



*Postulat VI.*  $w$ -krotny iloczyn<sup>8)</sup>  $\underline{w\bar{R}}/\delta w\bar{y}$ , jako praca sił oddziaływania więzów na dowolnych (zgodnych z więzami) przemieszczeniach przygotowanych zeruje się, gdy nie występują siły tarcia, albo włączamy je do sił danych, to znaczy

$$(4.10) \quad \underline{w\bar{R}}/\delta w\bar{y} = 0.$$

*Definicja 11.* Więzy stereomechaniczne nazywamy idealnymi, jeżeli siły oddziaływania  $\underline{w\bar{R}}$  na punkty dynamicznego układu stereomechanicznego spełniają związek (4.10).

### 5. Ogólne równanie dynamiki układu stereomechanicznego

Rozważmy dynamiczny stereomechaniczny wielokrotny układ nieswobodny. Jego równanie ruchu ma postać

$$(5.1) \quad \underline{wEJ}/w\bar{y}'' = \underline{w\bar{F}} + \underline{w\bar{R}}.$$

Jeśli więzy są idealne, to w każdym położeniu układu dowolne przemieszczenia przygotowane spełniają równanie (4.10)

$$\underline{w\bar{R}}/\delta w\bar{y} = 0.$$

Z układu tych dwóch związków wynika równość

$$(5.2) \quad (\underline{w\bar{F}} - \underline{wEJ}/w\bar{y}'')\delta w\bar{y} = 0,$$

które nosi nazwę ogólnego równania dynamiki układu stereomechanicznego.

Podczas ruchu układu w dowolnym miejscu  $x$  (przekroju) suma prac sił czynnych i stereomechanicznych sił bezwładności<sup>9)</sup> na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych jest równa zeru.

*Twierdzenie.* Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by ruch dynamicznego układu stereomechanicznego zgodny z więzami odpowiadał danemu układowi sił czynnych  $\underline{w\bar{F}}$  jest spełnienie ogólnego równania dynamiki<sup>10)</sup>.

### 6. Zasada przemieszczeń przygotowanych. Zasada D'Alemberta

*Definicja 12.* Położeniem równowagi  $\delta w\bar{y}$  dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego  $w\bar{y}$  nazywamy takie jego położenie, w którym układ znajduje się w sposób ciągły, jeśli w miejscu początkowym był on w tym położeniu i prędkości  $w\bar{y}'$  wszystkich jego punktów były równe zeru.

<sup>8)</sup> Symbol  $w \perp$  oznacza sumę  $w$ -krotną  $p$ -iloczynu [3]. Przypadek ciągów dwuwskaznikowych ilustrujący te pojęcia rozważono w pracy [7].

<sup>9)</sup> Stereomechanicznymi siłami bezwładności  $\underline{w\bar{B}}$  nazywamy wyrażenie  $\underline{w\bar{B}} = -\underline{wEJ}/w\bar{y}''$ .

<sup>10)</sup> Należy pamiętać, że ogólne równanie dynamiki (5.2) jest w istocie układem równań, bowiem zamiast  $\delta w\bar{y}$  można w dowolnym miejscu  $x$  (przekroju) wstawić dowolne przemieszczenie przygotowane.

Położenie układu  ${}^w\bar{y}$  jest wtedy i tylko wtedy położeniem równowagi, gdy ruch

$$(6.1) \quad {}^w\bar{y}(x) \equiv {}^w\bar{y}$$

spełnia ogólne równanie dynamiki, to jest jeżeli w tym położeniu

$$(6.2) \quad \underline{{}^w\bar{F}} // \delta {}^w\bar{y} = 0.$$

Równość ta jest treścią zasady przemieszczeń przygotowanych.

**Twierdzenie.** Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby pewne (zgodnie z więzami) położenie dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego było położeniem równowagi, jest równa zero w tym położeniu suma prac sił czynnych  ${}^w\bar{F}$  na dowolnych przemieszczeniach przygotowanych  $\delta {}^w\bar{y}$ .

Równość (6.2), wyznaczająca zasadę przemieszczeń przygotowanych jest przypadkiem szczególnym ogólnego równania dynamiki (5.2).

Potraktujmy równanie dynamiki jako zasadę przemieszczeń możliwych, charakteryzującą położenie równowagi dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego, które powstaje z dodania sił bezwładności do sił czynnych.

Stąd wynika zasada d'Alemberta: Podczas ruchu dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego można dowolne jego położenia traktować jako położenia równowagi dodając siły bezwładności  ${}^w\bar{B}$  do sił czynnych  ${}^w\bar{F}$  w danym położeniu

$$(6.3) \quad {}^w\bar{F} + {}^w\bar{B} = {}^w\bar{0}.$$

Dzięki tej zasadzie metody statyki przenoszą się na zagadnienia dynamiki.

#### 7. Współrzędne niezależne (uogólnione) układów stereomechanicznych holonomicznych. Siły uogólnione

Niech będzie dany dynamiczny układ stereomechaniczny wielokrotny

$${}^w\bar{y} = [y_{\bar{j}}]$$

holonomiczny, czyli spełniający więzy

$$(7.1) \quad {}^{v_1}\bar{H}(x, {}^w\bar{y}) = {}^w\bar{0}.$$

Przyjmujemy, że funkcje  ${}^{v_1}\bar{H}$  w ilości  $u_1^{v_1}$  są niezależne, przy czym  $x$  jest parametrem, natomiast zmiennych  $y_{\bar{j}}$  jest  $n^w$ . Wobec powyższego można z równań więzów wyrazić  $u_1^{v_1}$  współrzędnych (czyli  $v_1$  — ciąg współrzędnych) przez  $u^w - u_1^{v_1}$  pozostałych współrzędnych oraz zmiennej  $x$  i rozpatrywać te współrzędne w liczbie

$$(7.2) \quad k^w = u^w - u_1^{v_1}$$

jako wielkości niezależne, określające położenia dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego w miejscu  $x$ . Takimi współrzędnymi niekoniecznie muszą być współrzędne kartezyjańskie.

Także współrzędne kartezyjańskie  $w$ -ciągu  ${}^w\bar{y}$  (w ilości  $u^w$ ) można wyrazić jako funkcje ciągłe i różniczkowalne  $s$ -ciągu parametrów niezależnych

$$(7.3) \quad {}^s\bar{q} = [q_{j_1 \dots j_s}]$$

i zmiennej  $x$ , mianowicie

$$(7.4) \quad {}^w\bar{y} = {}^w\bar{y}(x, {}^s\bar{q}),$$

przy czym

$$(7.5) \quad \text{Dim } {}^s\bar{q} = k^w.$$

Funkcje te spełniają tożsamościowo równania więzów podane wyżej.

Zakładamy ponadto, że dowolne (zgodne z więzami) położenia dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego w miejscu  $x$  można przy pewnych wartościach  ${}^s\bar{q}$  otrzymać z równań (7.4).

**Definicja 13.** Wielkości  ${}^s\bar{q}$  występujące w równości (7.4) nazywamy współrzędnymi uogólnionymi niezależnymi dynamicznego układu stereomechanicznego holonomicznego wielokrotnego.

Każdemu  $s$ -ciągowi współrzędnych uogólnionych  ${}^s\bar{q}$  odpowiada  $s$ -ciąg sił uogólnionych  ${}^s\bar{Q}$ . Wprowadzamy je następująco.

Niech będzie dana praca  $\delta L$  sił czynnych  ${}^w\bar{F}$  jako  $w$ -krotny iloczyn

$$(7.6) \quad \delta L = \underbrace{{}^w\bar{F} // \delta {}^w\bar{y}}_w.$$

Przemieszczenia przygotowane są różniczkami przygotowanymi funkcji  ${}^w\bar{y}(x, {}^s\bar{q})$

$$(7.7) \quad \delta {}^w\bar{y} = \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} \llcorner \delta {}^s\bar{y}$$

przy ustalonym  $x$ .

Podstawienie związku (7.7) do (7.6) prowadzi do wyrażenia pracy elementarnej sił czynnych  ${}^w\bar{F}$  przez dowolne przyrosty  $\delta {}^s\bar{q}$  współrzędnych uogólnionych  ${}^s\bar{q}$

$$(7.8) \quad \delta L = \underbrace{{}^w\bar{F} // \left[ \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} \llcorner \delta {}^s\bar{q} \right]}_w = \underbrace{{}^w\bar{F} \llcorner \left[ \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} \right]^T // \delta {}^s\bar{q}}_s = \underbrace{{}^s\bar{Q} // \delta {}^s\bar{q}}_s.$$

**Definicja 14.** Współczynniki  ${}^s\bar{Q}$  przy  $\delta {}^s\bar{q}$  wyrażające się wzorem

$$(7.9) \quad {}^s\bar{Q} = {}^w\bar{F} \llcorner \left[ \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} \right]^T,$$

(gdzie  $T$  — symbol ciągu transponowanego) nazywamy siłami uogólnionymi.

### 8. Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju we współrzędnych niezależnych dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego

Równania te wyprowadzimy z równania ogólnego dynamiki

$$({}^w\bar{F} - \underbrace{{}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}''}_w) // \delta {}^w\bar{y} = 0.$$

Praca  $\delta L$  sił czynnych  ${}^w\bar{F}$  w układzie kartezjańskim

$$\delta L = \underbrace{{}^w\bar{F} // \delta {}^w\bar{y}}_w$$

we współrzędnych niezależnych  ${}^s\bar{q}$  przyjmuje postać

$$\delta L = \underbrace{{}^s\bar{Q}}_{s} // \delta {}^s\bar{q},$$

gdzie według (7.9)

$${}^s\bar{Q} = {}^w\bar{F} // \left[ \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} \right]^T.$$

Analogiczną postać ma praca  $\delta L_B$  sił bezwładności

$$(8.1) \quad \delta L_B = - \underbrace{{}^s\bar{B}}_{s} // \delta {}^s\bar{q},$$

gdzie we współrzędnych niezależnych

$$(8.2) \quad {}^s\bar{B} = ({}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}') // \left[ \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} \right]^T = \frac{d}{dx} \left\{ ({}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}') // \left[ \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} \right]^T \right\} - ({}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}') // \frac{d}{dx} \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}}.$$

Ponadto stwierdzamy, że prędkość

$$(8.3) \quad {}^w\bar{y}' = \frac{d}{dx} {}^w\bar{y}(x, {}^s\bar{q}) = \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}} // {}^s\bar{q}' + \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial x}$$

jest funkcją liniową  ${}^s\bar{q}'$ . Wobec tego

$$(8.4) \quad \frac{\partial {}^w\bar{y}'}{\partial {}^s\bar{q}'} = \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}}.$$

Dodatkowo z (8.3) mamy

$$(8.5) \quad \frac{\partial {}^w\bar{y}'}{\partial {}^s\bar{q}} = \frac{d}{dx} \frac{\partial {}^w\bar{y}}{\partial {}^s\bar{q}}.$$

Wobec powyższego po uwzględnieniu związków (8.4) i (8.5) równość (8.2) przyjmie postać

$$(8.6) \quad {}^s\bar{B} = \frac{d}{dx} \left\{ ({}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}') // \left[ \frac{\partial {}^w\bar{y}'}{\partial {}^s\bar{q}'} \right]^T \right\} - ({}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}') \frac{\partial {}^w\bar{y}'}{\partial {}^s\bar{q}} = \frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial {}^s\bar{q}'} - \frac{\partial T}{\partial {}^s\bar{q}},$$

gdzie  $T$  jest energią kinetyczną przez analogię dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego

$$(8.7) \quad T = \frac{1}{2} \frac{{}^w\bar{E}J // {}^w\bar{y}'^2}{w} = \frac{1}{2} \frac{{}^w\bar{T}}{w}$$

przy czym  ${}^w\bar{T}$  jest ciągiem  $w$ -wskaznikowym energii układu.

Z równania ogólnego dynamiki

$$(8.8) \quad \delta L + \delta L_B = 0,$$

lub po wykorzystaniu wyrażeń na prace mamy

$$(8.9) \quad \underbrace{({}^s\bar{Q} - {}^s\bar{B})}_{s} // \delta {}^s\bar{q} = 0.$$

Równość ta może zachodzić wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki przy  $\delta^s \bar{q}$  są równe zeru<sup>11)</sup>. Zatem związek (8.9) jest równoważny równości

$${}^s \bar{B} = {}^s \bar{Q},$$

która zgodnie z (8.6) może być zapisana w postaci

$$(8.10) \quad \frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial {}^s \bar{q}'} - \frac{\partial T}{\partial {}^s \bar{q}} = {}^s \bar{Q}.$$

Ostatnia równość nosi nazwę równań Lagrange'a drugiego rodzaju lub równań Lagrange'a we współrzędnych niezależnych (uogólnionych) dynamicznego układu stereomechanicznego wielokrotnego. Są one słuszne również — jak wiadomo — w przypadku działania na układ sił posiadających potencjał, czyli przy uwzględnieniu energii potencjalnej.

### 9. Przykład

Przedstawimy przykład równań ruchu układu dynamicznego stereomechanicznego wielokrotnego otrzymanych za pomocą równań Lagrange'a drugiego rodzaju wyprowadzonych w tej pracy.

Weźmy jeden pręt sprężysty o sztywności  $EJ = a_1 = \text{const}$  poddany wyobczeniu siłą  $P = a_2 = \text{const}$ . W tym przypadku zerowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$$a_1 y'' + a_2 y = 0.$$

Otrzymujemy je z zerowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial y'} - \frac{\partial T}{\partial y} = 0,$$

gdzie  $T$  jest energią kinetyczną pręta.

Weźmy następnie ciąg  $n$  prętów sprężystych usytuowanych na jednym odcinku i na przykład utwierdzonych sztywno jednym końcem. Swobodne końce są połączone sprężyscie. Każdy pręt jest obciążony jedną siłą.

Jednowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$${}^2_1 \bar{a} \bar{y}'' + {}^2_2 \bar{a} \bar{y} = \bar{0},$$

czyli

$$\begin{aligned} {}_1 a_{11} y_1'' + \dots + {}_1 a_{1n} y_n'' + {}_2 a_{11} y_1 + \dots + {}_2 a_{1n} y_n &= 0, \\ \vdots & \\ {}_1 a_{n1} y_1'' + \dots + {}_1 a_{nn} y_n'' + {}_2 a_{n1} y_1 + \dots + {}_2 a_{nn} y_n &= 0. \end{aligned}$$

Otrzymujemy je z jednowskaźnikowego równania Lagrange'a

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial {}^1 \bar{y}'} - \frac{\partial T}{\partial {}^1 \bar{y}} = {}^1 \bar{0},$$

które wyprowadzono w pracy [6].

<sup>11)</sup> Wynika to stąd, że współrzędne niezależne  $s$ -ciągu  ${}^s \bar{q}$  mają zupełnie dowolne przyrosty  $\delta^s \bar{q}$ .

W przypadku ogólnym mamy  $n_1, \dots, n_w$  prętów sprężystych usytuowanych na przykład sztywno jednymi końcami w płaszczyźnie. Końce swobodne są połączone sprężystością. Każdy pręt jest obciążony jedną siłą.

Wielowskaźnikowe równanie ruchu ma postać

$${}^2_1\bar{a}{}^w\bar{y}' + {}^2_2\bar{a}{}^w\bar{y} = {}^w\bar{0},$$

przy czym charakter przyjętych iloczynów wyjaśniono w pracach [3, 4]. Równania te otrzymujemy z wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial T}{\partial {}^w\bar{y}'} - \frac{\partial T}{\partial {}^w\bar{y}} = {}^w\bar{0}$$

wyprowadzonych w niniejszej pracy.

Rozważania szczegółowe dotyczące wykorzystania tych równań (z podaniem ciągu wielowskaźnikowego energii) do otrzymania przytoczonych równań ruchu przez analogię zawarte są w pracy [13]. Przypadek ciągów dwuowskaźnikowych ugięć ilustrujący rozważane w tej pracy pojęcia rozpatrzono w pracy [7], która tym samym jest przykładem do powyższych wywodów wielowskaźnikowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. ZŁONKIEWICZ, *A cracoviën method for solving equations of motion of dynamics systems*, Rozpr. Inż., **11** (1963).
2. R. KULIKOWSKI, *Sterowanie w wielkich systemach*, WNT, Warszawa 1970.
3. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagadn. Drgań Nieliniowych, **11**, PWN, Warszawa 1970.
4. R. KRZYWIEC, *Wielociągi* (praca doktorska).
5. R. KRZYWIEC, *O stabilności rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych w-ciągowych* (w druku).
6. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Zagadn. Drgań Nieliniowych (w druku).
7. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie dwuowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mech. Teoret. i Stos., **2**, **8**, (1970).
8. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadn. Drgań Nieliniowych, **11**, PWN, Warszawa 1970.
9. R. KRZYWIEC, *Wyboczenie sprężyste układu wielowskaźnikowego prętów jako ruch przez analogię*, Archiwum Budowy Maszyn, **18** (1971).
10. M. T. HUBER, *Stereomechanika Techniczna*, 1951.
11. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe prawo Hooke'a wielkich systemów stereomechanicznych*, Archiwum Budowy Maszyn (w druku).
12. R. KRZYWIEC, *Uogólnione prawo Hooke'a układów stereomechanicznych wielokrotnych*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych (w druku).

#### Р е з ю м е

#### МЕХАНИКО-СТЕРЕОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ В КЛАССЕ МНОГОИНДЕКСНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

В статье сформулирована и обоснована механико-стереомеханическая аналогия для класса многоиндексных уравнений Лагранжа второго рода, которые используются для вывода (по аналогии) уравнений движения большой многоиндексной системы стержней в условиях упругой потери устойчивости.

S u m m a r y

THE MECHANICAL-STEREOMECHANICAL ANALOGY IN THE CLASS OF MULTI-INDICIAL  
LAGRANGE EQUATIONS OF SECOND KIND

In the paper the mechanical-stereomechanical analogy is formulated and proved to hold true within the class of multi-indicial Lagrange equations of second kind; these equations have been derived and applied in order to obtain (by the analogy) the equations of motion of a multi-indicial great system of rods subject to elastic buckling.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 września 1970 r.; po raz drugi dnia 1 marca 1971 r.*

---





PLYTA O ZMIENNYM MODULE ODKSZTAŁCENIA POSTACIOWEGO  
SKRĘCANA STEMPLEM KOŁOWYM

WIACZESŁAW RUDNICKI J (LWÓW), JAROSŁAW KIZYMA (TARNOPOL)

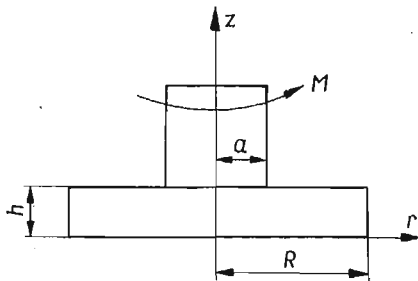
1. Wstęp

Zagadnienie skręcania płyty kołowej jednorodnej zostało rozpatrzone w pracy [3]. Przedmiotem niniejszej publikacji jest zagadnienie skręcania kołowej płyty izotropowej kołowym stemplem. Założymy zmienność modułu odkształcenia postaciowego od współrzędnej  $z$  oraz, że płyta jest utwierdzona na powierzchni bocznej lub podstawie.

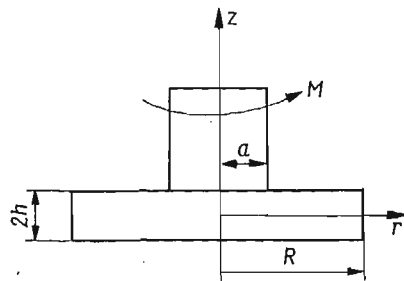
W celu rozwiązania zagadnienia zastosujemy metodę Fouriera. Dla wielkości charakteryzujących stan naprężenia i odkształcenia otrzymaliśmy rozwiązania w postaci jawnej. Wyniki obliczeń zostały przedstawione na wykresach.

2. Wzory podstawowe

Rozpatrzmy stan naprężenia i odkształcenia płyty kołowej o promieniu  $R$  i grubości  $h$  (rys. 1, 2), zamocowanej na powierzchni bocznej lub czołowej i znajdującej się pod



Rys. 1



Rys. 2

działaniem sztywnego kołowego stempla spojenego z płytą. Będziemy zakładać, że stempel doznaje obrotu o kąt  $\varepsilon$  pod wpływem momentu  $M$ . Powierzchnia płyty na zewnątrz stempla i obszaru utwierdzenia jest swobodna.

Przy tak postawionym zagadnieniu płyta będzie znajdowała się w stanie czystego skręcania, a zagadnienie sprowadzi się do wyznaczenia różnych od zera składowych stanu naprężenia  $\tau_{\theta z}$ ,  $\tau_{\theta r}$  spełniających równania

$$(2.1) \quad \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} = 0$$

i składowej przemieszczenia  $u_0$  związanej z  $\tau_{\theta z}$  i  $\tau_{\theta r}$  zależnościami

$$(2.2) \quad \tau_{\theta z} = G \frac{\partial u_0}{\partial z}, \quad \tau_{\theta r} = G \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).$$

Tutaj  $G$  — moduł odkształcenia postaciowego,  $r, \theta, z$  — współrzędne walcowe; oś  $z$  pokrywa się z osią symetrii płyty. Zakładamy, że moduł  $G(z)$  zależy od współrzędnej  $z$ .

Podstawiając wielkości (2.2) do (2.1) otrzymamy następujące równanie względem

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{G'(z) \partial u_0}{G(z) \partial z} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_0}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0.$$

Rozwiązanie równania (2.3) znajdziemy metodą Fouriera

$$(2.4) \quad u_0 = R(z)Z(z).$$

Wstawiając (2.4) do (2.3) otrzymamy równania:

$$(2.5) \quad \frac{d^2 R}{dz^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left( \lambda^2 + \frac{1}{r^2} \right) = 0,$$

$$(2.6) \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{G'(z)}{G(z)} \frac{dZ}{dz} + \lambda^2 Z = 0$$

gdzie  $\lambda$  jest parametrem.

Równanie (2.5) nie zależy od zmiennego modułu  $G(z)$ . Rozwiązaniami szczególnymi (2.5) są zmodyfikowane funkcje Bessela oraz funkcje McDonalda  $I_1(\lambda r)$  i  $K_1(\lambda r)$ . Rozwiązanie ogólne ma postać

$$(2.7) \quad R = AI_1(\lambda r) + BK_1(\lambda r).$$

Rozwiązania równania (2.6) będziemy poszukiwać dla trzech przypadków:

I  $G(z) = G_0 + G_1 z,$

II  $G(z) = G_0 e^{-\alpha z},$

III  $G(z) = \text{const.}$

Podstawiając wyrażenia  $G(z)$  do równania (2.6) otrzymamy odpowiednio rozwiązania:

$$(2.8) \quad Z(z) = C J_0 \left( \lambda \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D Y_0 \left( \lambda \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right),$$

$$(2.9) \quad Z(z) = e^{-\frac{\alpha z}{2}} \left[ C \sin \left( \sqrt{\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + D \cos \left( \sqrt{\lambda^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right],$$

$$(2.10) \quad Z(z) = C \sin \lambda z + D \cos \lambda z.$$

Rozwiązanie ogólne jest sumą (2.8)–(2.10) i całek szczególnych, które mają postać:

$$(2.11) \quad u_0^0 = A_0 r \ln(G_0 + G_1 z) + B_0 r,$$

$$(2.12) \quad u_0^0 = A_0 r e^{-\alpha z} + B_0 r,$$

$$(2.13) \quad u_0^0 = A_0 r z + B_0 r.$$

Wykorzystując (2.2), (2.4), (2.7), (2.8)–(2.13) dla naprężeń  $\tau_{\theta z}$ ,  $\tau_{\theta r}$  i przemieszczenie  $u_\theta$  otrzymamy następujące wzory:

I — dla  $G(z)$  zmieniającego się w sposób liniowy

$$\begin{aligned}
 u_\theta(r, z) &= A_0 r \ln(G_0 + G_1 z) + B_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] \times \\
 &\quad \times \left[ C_k I_0 \left( \lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D_k Y_0 \left( \lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) \right], \\
 \tau_{\theta z}(r, z) &= G_1 A_0 r - (G_0 + G_1 z) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] \times \\
 (2.14) \quad &\quad \times \left[ C_k I_1 \left( \lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D_k Y_1 \left( \lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) \right], \\
 \tau_{\theta r}(r, z) &= (G_0 + G_1 z) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_2(\lambda_k r) - B_k K_2(\lambda_k r)] \times \\
 &\quad \times \left[ C_k I_1 \left( \lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) + D_k Y_1 \left( \lambda_k \frac{G_0 + G_1 z}{G_1} \right) \right];
 \end{aligned}$$

II — dla  $G(z)$  zmniejszającego się w sposób wykładniczy:

$$\begin{aligned}
 u_\theta(r, z) &= A_0 r e^{-\alpha z} + B_0 r + e^{-\frac{\alpha z}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)) \times \\
 &\quad \times \left[ C_k \sin \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + D_k \cos \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right], \\
 \tau_{\theta z}(r, z) &= -A_0 \alpha G_0 e^{-\alpha z} r + e^{-\frac{\alpha z}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] \times \\
 (2.15) \quad &\quad \times \left\{ C_k \left[ -\frac{\alpha}{2} \sin \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \cos \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - D_k \left[ \frac{\alpha}{2} \cos \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} \sin \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right] \right\}, \\
 \tau_{\theta r}(r, z) &= G_0 e^{-\frac{\alpha z}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_2(\lambda_k r) + B_k K_2(\lambda_k r)] \times \\
 &\quad \times \left[ C_k \sin \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) + D_k \cos \left( \sqrt{\lambda_k^2 - \frac{\alpha^2}{4}} z \right) \right];
 \end{aligned}$$

III — dla  $G(z) = \text{const}$ :

$$\begin{aligned}
 u_\theta &= A_0 r z + B_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] (C_k \sin \lambda_k z + D_k \cos \lambda_k z), \\
 (2.16) \quad \tau_{\theta z}(r, z) &= G_0 A_0 r + G_0 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_1(\lambda_k r) + B_k K_1(\lambda_k r)] (C_k \cos \lambda_k z - D_k \sin \lambda_k z), \\
 \tau_{\theta r}(r, z) &= G_0 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k [A_k I_2(\lambda_k r) - B_k K_2(\lambda_k r)] (C_k \sin \lambda_k z + D_k \cos \lambda_k z).
 \end{aligned}$$

W powyższych wzorach  $A_0, B_0, A_k, C_k, B_k, D_k$  są dowolnymi stałymi,  $J_1(x), Y_1(x), I_1(x), K_1(x)$  są funkcjami Bessela pierwszego rzędu odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju zmiennej rzeczywistej i urojonej.

Stałe  $A_0, B_0, A_k, B_k$  i wartości własne wyznaczymy odpowiednio z warunków brzegowych:

a) utwierdzenie powierzchni bocznej (rys. 1)

$$(2.17) \quad \text{przy } z = 0, \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad 0 \leq r \leq R,$$

$$(2.18) \quad \text{przy } z = h, \quad u_\theta = \varepsilon r, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$(2.19) \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad a \leq r \leq R,$$

$$(2.20) \quad \text{przy } z = R, \quad u_\theta = 0; \quad -h \leq z \leq h;$$

b) utwierdzenie podstawy dolnej (rys. 2)

$$(2.21) \quad \text{przy } z = -h, \quad u_\theta = 0, \quad 0 \leq r \leq R,$$

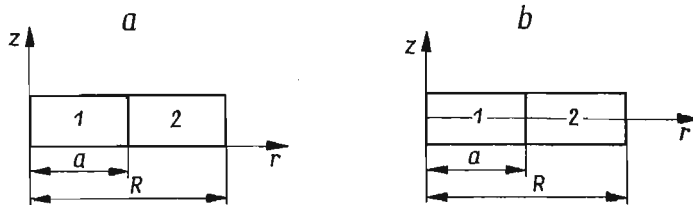
$$(2.22) \quad \text{przy } z = h, \quad u_\theta = \varepsilon r, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$(2.23) \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad 0 \leq z \leq h,$$

$$(2.24) \quad \text{przy } z = R, \quad \tau_{\theta z} = 0, \quad 0 \leq z \leq h.$$

### 3. Przykłady liczbowe

Rozpatrzmy szczegółowo przypadek, kiedy moduł skręcania jest wielkością stałą. W celu otrzymania rozwiązania obszar przekroju osiowego płyty (rys. 3a, b) podzielmy na dwa obszary:  $0 \leq z \leq h, 0 \leq r \leq a$  (obszar 1) i  $0 \leq z \leq h, a \leq r \leq R$  (obszar 2).



Rys. 3

Rozwiązania dla każdego z znajdziemy oddzielnie. Przez  $u_\theta^{(1)}, \tau_{\theta r}^{(1)}, \tau_{\theta z}^{(1)}, u_\theta^{(2)}, \tau_{\theta r}^{(2)}, \tau_{\theta z}^{(2)}$  oznaczmy wielkości odnoszące się odpowiednio do obszaru 1 i obszaru 2. Przy takim sposobie postępowania oprócz warunków brzegowych (2.17) — (2.20), (2.21) — (2.24) winny być spełnione warunki zgodności

$$(3.1) \quad u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)}, \quad \tau_{\theta r}^{(1)} = \tau_{\theta r}^{(2)},$$

przy  $r = a$ .

Rozwiązania w obszarze 1 spełniające warunki brzegowe (2.17)–(2.20), (2.21)–(2.24) i (dążące do zera) ograniczone przy  $r = 0$  mają postać:

Przypadek a)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} u_0^{(1)} &= \frac{\varepsilon}{h} r z + \sum_{k=1}^{\infty} N_k I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k (h-z), \\ \tau_{0z}^{(1)} &= G \frac{\varepsilon}{h} r - G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k N_k I_1(\lambda_k r) \cos \lambda_k (h-z), \\ \tau_{0r}^{(1)} &= G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k N_k I_1(\lambda_k r) \sin \lambda_k (h+z). \end{aligned}$$

Przypadek b)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u_0^{(1)} &= \frac{\varepsilon}{h} r z + \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_1(\mu_k r) \sin \mu_k z, \\ \tau_{0z}^{(1)} &= G \frac{\varepsilon}{h} r + G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k A_k I_1(\mu_k r) \cos \mu_k z, \\ \tau_{0r}^{(1)} &= G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k A_k I_2(\mu_k r) \sin \mu_k z. \end{aligned}$$

Kładąc  $A_0 = 0$  dla obszaru 2 znajdujemy:

Przypadek a)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} u_0^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} M_k \frac{I_1(2\mu_k R) K_1(2\mu_k r) - I_1(2\mu_k r) K_1(2\mu_k R)}{I_1(2\mu_k R)} \cos 2\mu_k (h-z), \\ \tau_{0z}^{(2)} &= 2G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M_k \frac{I_1(2\mu_k R) K_1(2\mu_k r) - I_1(2\mu_k r) K_1(2\mu_k R)}{I_1(2\mu_k R)} \sin 2\mu_k (h-z), \\ \tau_{0r}^{(2)} &= -2G \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k M_k \frac{K(2\mu_k R) I_2(2\mu_k r) + I_1(2\mu_k R) K_2(2\mu_k r)}{I_1(2\mu_k R)} \cos 2\mu_k (h-z). \end{aligned}$$

Przypadek b)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} u_0^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} D_k \frac{I_1(2\lambda_k r) K_2(2\lambda_k R) + K_1(2\lambda_k r) I_2(2\lambda_k R)}{I_2(2\lambda_k R)} \sin 2\lambda_k z, \\ \tau_{0z}^{(2)} &= 2G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k D_k \frac{I_1(2\lambda_k r) K_2(2\lambda_k R) + K_1(2\lambda_k r) I_2(2\lambda_k R)}{I_2(2\lambda_k R)} \cos 2\lambda_k z, \\ \tau_{0r}^{(2)} &= 2G \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k D_k \frac{I_2(2\lambda_k r) K_2(2\lambda_k R) - I_2(2\lambda_k R) K_2(2\lambda_k r)}{I_2(2\lambda_k R)} \sin 2\lambda_k z. \end{aligned}$$

Tutaj

$$\lambda_k = \frac{2k \cdot 1}{h} \frac{\pi}{4}; \quad \mu_k = \frac{k}{h} \frac{\pi}{2}, \quad (k = 1, 2, 3 \dots).$$

$N_k, M_k, A_k$  i  $D_k$  są nowymi stałymi, które wyznaczymy z warunków zgodności (3.2) uwzględniając ortogonalność funkcji trygonometrycznych. Ostatecznie w celu wyznaczenia stałych otrzymujemy nieskończony układ równań algebraicznych:

dla przypadku a)

$$(3.6) \quad \sum_{k=1}^{\infty} L_k \frac{(4k-1)[ak(2k-1)+2kbn]}{(2k-1)^2-4n^2} = \frac{(-1)^{n+2}-1}{n} 2b_n;$$

dla przypadku b)

$$(3.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{4k[2kC_k-(2n-1)dn](-1)^{k+n}}{4k^2-(2n-1)^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} d_n;$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{I_2(\lambda_k a)}{I_1(\lambda_k a)}, & C_k &= \frac{I_2(2\mu_k a)}{I_1(2\mu_k a)}, \\ b_n &= \frac{K_1(\mu_n R)I_2(\mu_n a) + I_1(\mu_n R)K_2(\mu_n a)}{I_1(\mu_n R)K_1(\mu_n a) - I_1(\mu_n a)K_1(\mu_n R)}, \\ d_n &= \frac{I_2(2\mu_n a)K_2(2\mu_n R) - K_2(2\mu_n a)I_2(2\mu_n R)}{I_1(2\mu_n a)K_2(2\mu_n R) + K_1(2\mu_n a)I_2(2\mu_n R)}, \\ L_k &= \frac{N_k I_1(\lambda_k a) \pi}{2\epsilon a}; & B_k &= \frac{A_k I_1(2\lambda_k a) \pi}{4\epsilon a}. \end{aligned}$$

Stałe  $M_k$  i  $D_k$  wyrażają się przez  $L_k$  i  $B_k$  następującymi związkami:

$$\begin{aligned} M_n &= -\frac{2}{\pi} \frac{\mu_n^{-1} I_2(\mu_n a)}{I_2(\mu_n a)K_1(\mu_n R) + I_1(\mu_n R)K_2(\mu_n a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k L_k a_k (4k-1)}{(2k-1)^2-4n^2}, \\ D_n &= \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_k^{-1} I_2(2\lambda_k R)}{I_2(2\lambda_k a)K_2(2\lambda_k R) - K_2(2\lambda_k a)I_2(2\lambda_k R)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k C_k 4k (-1)^{k+n} B_k}{4k^2-(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia związku między kątem obrotu podstawy  $\epsilon$  i momentem  $M$  przyłożonym do kołowego stempla wykorzystamy związek

$$(3.8) \quad M = 2\pi \int_0^a \rho^2 \tau_{\theta z}^{(1)}(\rho) d\rho.$$

Podstawiając  $\tau_{\theta z}^{(1)}$  do równania (3.8) i po scałkowaniu otrzymamy:  
przypadek a)

$$M = \frac{G\epsilon a^3}{4\pi} \left[ \pi \frac{a}{h} - 8 \sum_{k=1}^{\infty} 4k \frac{I_2(\lambda_k a)}{I_1(\lambda_k a)} \right];$$

przypadek b)

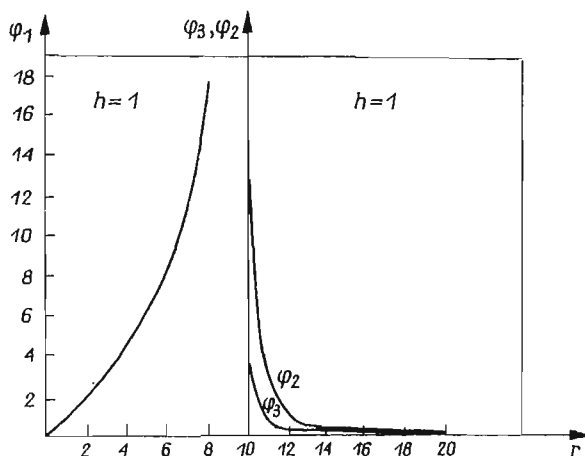
$$M = \frac{4\epsilon a^3}{\pi} \left[ \frac{\pi}{16} \frac{a}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{I_2(\mu_k a)}{I_1(\mu_k a)} \right].$$

Z powyższych rozważań widzimy, że rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia stałych  $L_k$  i  $B_k$  z nieskończonego układu równań algebraicznych (3.6), (3.7). Wykonano obliczenia numeryczne i stwierdzono, że układy (3.6) i (3.7) mają macierze współczynników symetryczne i współczynniki ich nie mają osobliwości.

Z układu (3.7) wyznaczono 18 stałych dla parametrów  $\frac{R}{a} = 2$ ,  $\frac{R}{a} = 20$ .

Na podstawie wzorów (3.3) i (3.5) obliczono naprężenia kontaktowe pod stemplem i przemieszczenia na zewnątrz stempla. Wyniki obliczeń pokazano na wykresach.

Na rys. 4 przedstawiono wielkości  $\varphi_1 = \frac{h\pi}{4\epsilon G} \tau_{\theta z}^{(1)}$ ,  $\varphi_2 = \frac{1}{\epsilon G} u_b^{(2)}$ ,  $\varphi_3 = \frac{\pi}{4G\epsilon} \tau_{\theta r}^{(2)}$ .



Rys. 4

Należy zaznaczyć, że szeregi w wyrażeniach (3.2)–(3.5) są naprzemienne przy wszystkich  $r$  i ich zbieżność jest dobra. Wyjątek stanowi szereg w wyrażeniu na  $\tau_{\theta z}^{(1)}$  przy  $r = a$ . W tych punktach, jak należało oczekiwać, szereg jest rozbieżny, a naprężenia wzrastają nieograniczenie.

Literatura cytowana w tekście

1. И. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян, *Кручение упругих тел*, Физматгиз, Москва 1969.
2. Г. Н. Положий, *Уравнения математической физики*, Изд. Высшая школа, Москва 1964.
3. Я. М. Кизыма, *Кручение круглой изотропной плиты, жестко защемленной по боковой поверхности*, ИМ Т. У., вып. 10 (1969).

## Р е з ю м е

КРУЧЕНИЕ КРУГОВОЙ ПЛИТЫ С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ СДВИГА  
С ПОМОЩЬЮ ЖЕСТКОГО КРУГОВОГО ШТАМПА

Рассматривается смешанная задача о кручении круглой изотропной плиты жестким штампом, когда модуль сдвига  $G$  является величиной переменной, зависящей от координаты  $z$ . Для решения задачи применяется метод разделения переменных Фурье. Получены явные формулы для напряжений и смещений. Численные расчеты представлены в виде графиков.

## S u m m a r y

## A PLATE WITH VARIABLE MODULUS OF SHEAR TWISTED BY A CIRCULAR STAMP

The mixed problem of an isotropic plate twisted by a rigid circular stamp is considered in the case when the variable shear modulus  $G$  depends on the  $z$  coordinate only. In order to obtain the solution of the problem, the Fourier method of separated variables is applied. The explicit expressions for stresses and displacements are obtained. Numerical results are presented in the form of graphs.

UNIwersytet Lwowski, Instytut Mechaniki  
Państwowy Instytut Ekonomiki Przemysłu w Tarnopolu

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1970 r.*

---



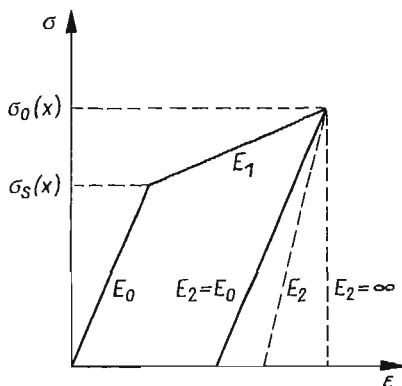
DYNAMIKA SZTYWNEJ PŁYTY SPOCZYWAJĄCEJ NA SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYM  
PODŁOŻU ZE ZMIENNĄ GRANICĄ PLASTYCZNOŚCI

CZĘŚĆ II. SPRĘŻYSTE ODCIĄŻENIE

JERZY BAUER (WROCŁAW), EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

W niniejszej drugiej części pracy rozwiążemy badany w [1] problem dla ośrodka (gruntu) ze sprężystym odcieżeniem (przyjmujemy model Prandtla — rys. 1). Matematyczny opis



Rys. 1

problemu przedstawiają równania (2.1)–(2.7) z Cz. I [1], z tym, że związek fizyczny w strefie odcieżenia (2.4) w [1] przyjmuje obecnie postać

$$(1.1) \quad \sigma(\varepsilon, x) = E_2 \varepsilon + [\sigma_s^0 + f(x)] \left( \frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right) - \sigma_0(x) \frac{E_2 - E_1}{E_1},$$

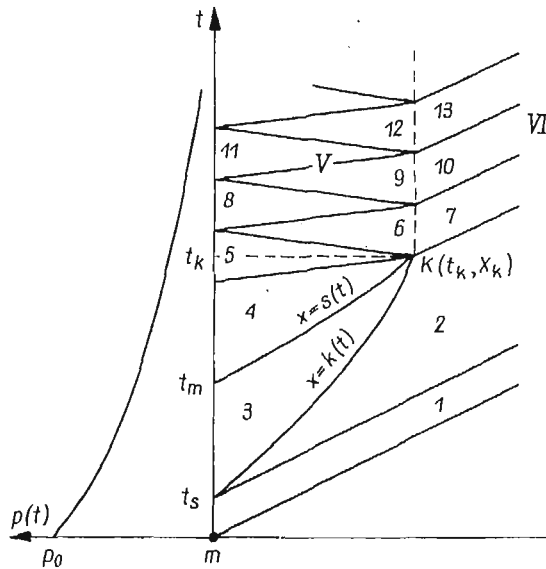
gdzie  $\sigma_0(x)$  oznacza napężenie na froncie fali odcieżenia, natomiast  $E_2$  jest modułem odcieżenia. Pozostałe oznaczenia, jak w [1].

Otrzymane w niniejszej pracy wyniki po porównaniu ich z rezultatami części I pozwolą ustalić wnioski, przy jakich wartościach modułu odcieżenia  $E_2$  można stosować w praktyce inżynierskiej bardziej efektywny w obliczeniach model gruntu ze sztywnym odcieżeniem. Obecnie przejdziemy do konstrukcji rozwiązania problemu.

## 2. Konstrukcja rozwiązania problemu

Dla sformułowanego w [1] problemu, uzupełnionego sprężystym odciążeniem (1.1) falowy obraz rozwiązania przyjmuje postać pokazaną na rys. 2. Analityczne rozwiązanie problemu kształtuje się następująco:

Strefa obciążenia. Strefa obciążenia obejmuje obszary 1, 2 i 3. Rozwiązanie problemu w tych obszarach skonstruowano w [1]. Dlatego ograniczymy się tutaj do przytoczenia



Rys. 2

gotowych wzorów na naprężenie i prędkość w obszarze 3 oraz równania określające front plastycznej fali obciążenia, z których będziemy w dalszym ciągu korzystać przy konstrukcji rozwiązania w strefie odciążenia. Zgodnie z [1] mamy

$$(2.1) \quad \sigma_3(x, t) = -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2),$$

$$v_3(x, t) = \frac{a_0}{E_0} \sigma_s^0 - Lf(x_1) + Nf(x_2),$$

gdzie

$$x_1 = k \left( t + \frac{x_1 - x}{a_1} \right), \quad x_2 = k \left( t - \frac{x_2 - x}{a_1} \right), \quad L = -\frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{E_0} + \frac{a_1}{E_1} \right), \quad N = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{E_0} - \frac{a_1}{E_1} \right)$$

oraz

$$(2.2) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) =$$

$$= m \left[ -L \frac{a_1 k' \left( t + \frac{x_1}{a_1} \right)}{a_1 - k' \left( t + \frac{x_1}{a_1} \right)} f'(x_1) + N \frac{a_1 k' \left( t - \frac{x_2}{a_1} \right)}{a_1 + k' \left( t - \frac{x_2}{a_1} \right)} f'(x_2) \right] - p(t),$$

gdzie obcnie

$$x_1 = k \left( t + \frac{x_1}{a_1} \right), \quad x_2 = k \left( t - \frac{x_2}{a_1} \right).$$

*Strefa sprężystego odciążenia.* Ruchem ośrodka zgodnie z (2.1) i (2.2) z [1] oraz (1.1) rządzi tutaj następujące równanie:

$$(2.3) \quad u_{,tt} - a_2^2 u_{,xx} = f'(x) \left( \frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right) \frac{1}{\rho_0} - \sigma'_0(x) \frac{E_2 - E_1}{\rho_0 E_1}$$

o ogólnym rozwiązaniu

$$(2.4) \quad u(x, t) = \Phi \left( t - \frac{x}{a_2} \right) + \Psi \left( t + \frac{x}{a_2} \right) - \int_0^x \left\{ \left( \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1} \right) f(\xi) - \right. \\ \left. - \frac{E_2 - E_1}{E_1 E_2} [\sigma_0(\xi) - \sigma_m] \right\} d\xi,$$

gdzie

$$\sigma_m = \sigma_0(0), \quad a_2 = \sqrt{E_2/\rho_0},$$

$\Phi$  i  $\Psi$  — dowolne, różniczkowalne funkcje.

Zajmiemy się obecnie konstrukcją rozwiązania w obszarze 4. Wykorzystując (2.4), pole naprężeń i prędkości zapiszemy następującymi wzorami:

$$(2.5) \quad \sigma_4(x, t) = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_4 \left( t - \frac{x}{a_2} \right) + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_4 \left( t + \frac{x}{a_2} \right) - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left( \frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right), \\ v_4(x, t) = \Phi'_4 \left( t - \frac{x}{a_2} \right) + \Psi'_4 \left( t + \frac{x}{a_2} \right).$$

Z warunków ciągłości naprężeń i prędkości na froncie fali odciążenia  $x = s(t)$  otrzymujemy

$$(2.6) \quad -\Phi'_4 \left[ t - \frac{s(t)}{a_2} \right] = \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{2E_1 E_2} a_2 - \frac{1}{2} \sigma_s^0 a_2 \left( \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{a_0}{E_0 a_2} \right) + \\ + \frac{1}{2} L \left( \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_1) + \frac{1}{2} N \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_2), \\ \Psi'_4 \left[ t + \frac{s(t)}{a_2} \right] = \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{2E_1 E_2} a_2 - \frac{1}{2} \sigma_s^0 a_2 \left( \frac{1}{E_0} - \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{a_0}{E_0 a_2} \right) + \\ + \frac{1}{2} L \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_1) + \frac{1}{2} N \left( \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_2),$$

gdzie

$$L = -\frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{E_0} + \frac{a_1}{E_1} \right), \quad N = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{E_0} - \frac{a_1}{E_1} \right), \\ x_1 = k \left[ t - \frac{s(t)}{a_1} + \frac{x_1}{a_1} \right], \quad x_2 = \left[ t + \frac{s(t)}{a_1} - \frac{x_2}{a_1} \right].$$

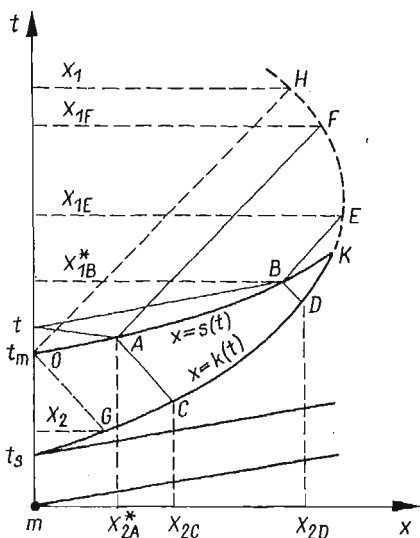
Załóżmy chwilowo, że funkcje  $s(t)$  i  $k(t)$  są znane. Wówczas naprężenie  $\sigma_4(x, t)$  i prędkość  $v_4(x, t)$  można przedstawić w następującej postaci:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_4(x, t) = & -\sigma_s^0 + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1E}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2D}) + \\ & + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2C}), \\ v_4(x, t) = & \sigma_s^0 \frac{a_0}{E_0} - \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f(x_{1E}) - \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f(x_{2D}) + \\ & + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f(x_{2C}), \end{aligned}$$

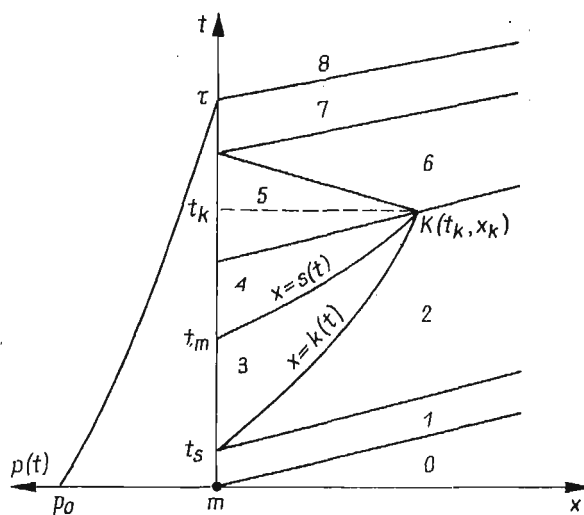
gdzie

$$(2.8) \quad \begin{aligned} x_{1B}^* &= s\left(t - \frac{x}{a_2} + \frac{x_{1B}^*}{a_2}\right), & x_{2A}^* &= s\left(t + \frac{x}{a_2} - \frac{x_{2A}^*}{a_2}\right), \\ x_{1E} &= k\left(t - \frac{x_{1B}^*}{a_1} + \frac{x_{1B}^*}{a_2} + \frac{x_{1E}}{a_1}\right), & x_{2D} &= k\left(t + \frac{x_{1B}^*}{a_1} + \frac{x_{1B}^*}{a_2} - \frac{x_{2D}}{a_1}\right), \\ x_{1F} &= k\left(t - \frac{x_{2A}^*}{a_1} - \frac{x_{2A}^*}{a_2} + \frac{x_{1F}}{a_1}\right), & x_{2C} &= k\left(t + \frac{x_{2A}^*}{a_1} - \frac{x_{2A}^*}{a_2} - \frac{x_{2C}}{a_1}\right). \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna tych wielkości podana jest na rys. 3. Argumenty w nawiasach wyrażeń (2.8) można uważać jako współrzędne na osi  $t$ , kolejno punktów  $A, B,$



Rys. 3



Rys. 4

$C, D, E, F$ . Przyspieszenie na brzegu  $\dot{v}_4(0, t)$  otrzymujemy różniczkując wyrażenie (2.7)<sub>2</sub> po podstawieniu  $x = 0$  we wzorach (2.8)<sub>1,2</sub>.

Uwzględnienie tak otrzymanego przyspieszenia i naprężenia w warunku brzegowym (2.6) w [1] prowadzi do równania na front fali sprężystego odciążenia

$$(2.9) \quad -\sigma_s^0 + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1E}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2D}) + \\ + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2C}) = m\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{1E})\dot{x}_{1E} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{2D})\dot{x}_{2D} + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{1F})\dot{x}_{1F} + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{2C})\dot{x}_{2C}\right] - p(t),$$

gdzie obecnie

$$(2.9a) \quad x_{1B}^* = s\left(t + \frac{x_{1B}^*}{a_2}\right), \quad x_{2A}^* = s\left(t - \frac{x_{2A}^*}{a_2}\right).$$

Wielkości  $x_{1E}$ ,  $x_{1F}$ ,  $x_{2D}$  i  $x_{2C}$  obliczamy według (2.8) uwzględniając (2.9a). Pozostałe wielkości dane są wzorami:

$$(2.10) \quad \dot{x}_{1E} = x'_{1E}\left[1 + \left(-\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{1B}^*\right], \quad \dot{x}_{2D} = x'_{2D}\left[1 + \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{1B}^*\right], \\ \dot{x}_{1F} = x'_{1F}\left[1 + \left(-\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{2A}^*\right], \quad \dot{x}_{2C} = x'_{2C}\left[1 + \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right)\dot{x}_{2A}^*\right].$$

Wprowadzając pochodne w poszczególnych punktach frontu odciążenia ( $A, B$ ) i obciążenia ( $C, D, E, F$ ) mamy

$$(2.11) \quad \dot{x}_{1B}^* = \frac{a_2 s'_B}{a_2 - s'_B}, \quad \dot{x}_{2A}^* = \frac{a_2 s'_A}{a_2 + s'_A}, \\ x'_{1E} = \frac{a_1 k'_E}{a_1 - k'_E}, \quad x'_{2D} = \frac{a_1 s'_D}{a_1 + s'_D}, \\ x'_{1F} = \frac{a_1 k'_F}{a_1 - k'_F}, \quad x'_{2C} = \frac{a_1 s'_C}{a_1 + s'_C}.$$

Wyrażenia (2.9) — (2.11) łącznie stanowią równanie określające front fali sprężystego odciążenia z warunkiem początkowym  $x = s(t_m) = 0$ .

Równanie to jest ważne w przedziale  $t_m \leq t \leq t_K - \frac{x_K}{a_2}$ . Po rozwiązaniu równań określających front plastycznej fali obciążenia i front fali sprężystego odciążenia możemy przystąpić do konstruowania pól naprężeń i prędkości w pozostałych obszarach płaszczyzny fazowej (rys. 2). Wykorzystanie jednorodnych warunków początkowych w obszarach 7, 10, ...,  $3n+1$ , oraz warunków ciągłości na granicach poszczególnych obszarów ( $n \geq 2$ ), pozwala napisać rozwiązanie ogólne w postaci:

obszary 7, 10, ...,  $3n+1$

$$(2.12) \quad \sigma_{3n+1} = -\frac{a_0}{E_0} \Phi'_{3n+1}; \quad v_{3n+1} = \Phi'_{3n+1};$$

obszar 5

$$\sigma_5 = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_5 + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_4 - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left( \frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right),$$

$$v_5 = \Phi'_5 + \Psi'_4;$$

obszary 8, 11, ..., 3n-1

$$(2.13) \quad \sigma_{3n-1} = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_{3n-1} + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_{3(n-1)} - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left( \frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right),$$

$$v_{3n-1} = \Phi'_{3n-1} + \Psi'_{3(n-1)};$$

obszary 6, 9, ..., 3n

$$(2.14) \quad \sigma_{3n} = -\frac{E_2}{a_2} \Phi'_{3n-1} + \frac{E_2}{a_2} \Psi'_{3n} - \sigma_m \frac{E_2 - E_1}{E_1} + \sigma_s^0 \left( \frac{E_2}{E_0} - \frac{E_2}{E_1} \right),$$

$$v_{3n} = \Phi'_{3n-1} + \Psi'_{3n}.$$

Nieznane funkcje wyznaczmy kolejno;  $\Phi'_{3n-1}$  z warunku brzegowego, a  $\Psi'_{3n}$  i  $\Phi'_{3n+1}$  z warunków ciągłości naprężeń i prędkości na linii  $x = x_k$ . Dla wyznaczenia funkcji  $\Phi'_{3n+1}$ , z warunku brzegowego otrzymujemy równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Warunek początkowy dla tego równania dostajemy z założenia ciągłości prędkości pod obiektem, co pociąga za sobą i ciągłość naprężenia (fale słabej nieciągłości).

Rozwiązanie w obszarach  $n \geq 5$  można również otrzymać wykorzystując związki na charakterystykach (metoda charakterystyk).

Przykładowo podajemy wyznaczenie pola naprężenia i prędkości w obszarze 5. Uwzględnienie (2.12)<sub>2</sub> i (2.6)<sub>2</sub> w warunku brzegowym pozwala, po spełnieniu warunku ciągłości prędkości w punkcie  $(0, t_k - \frac{x_k}{a_2})$ , wyznaczyć nieznaną funkcję  $\Phi_5(t - \frac{x}{a_2})$ . Tak więc pola naprężeń i prędkości mają postać

$$(2.15) \quad \sigma_5(x, t) = -\frac{E_2}{a_2} G + \frac{E_2}{a_2} L \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_{1F}) + \frac{E_2}{a_2} N \left( \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_{2C}) -$$

$$-\frac{E_2}{a_2} V_1 e^{-l \left( t - t_k + \frac{x_k - x}{a_2} \right)},$$

$$v_5(x, t) = -\frac{a_2}{E_2} \sigma_5(x, t) + L \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_{1F}) + N \left( \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_{2C}),$$

gdzie

$$G = l e^{-l \left( t - t_k + \frac{x_k - x}{a_2} \right)} \int_{t_k - \frac{x_k}{a_2}}^{t - \frac{x}{a_2}} \left\{ L \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f[x_{1F}(\xi)] + \right.$$

$$\left. + N \left( \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f[x_{2C}(\xi)] + \frac{p(\xi)}{lm} \right\} e^{l \left( \xi - t_k + \frac{x_k}{a_2} \right)} d\xi,$$

$$(2.16) \quad V_1 = \sigma_s^0 \frac{a_0}{E_0} - \frac{1}{2} L \left( \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(x_K) - \frac{1}{2} N \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(x_K) + \\ + \frac{L}{2} \left( \frac{a_1}{a_2} - 1 \right) f(\bar{x}_{1F}) + \frac{N}{2} \left( \frac{a_1}{a_2} + 1 \right) f(\bar{x}_{2C}),$$

$$I = \frac{E_2}{ma_2}.$$

Pozostałe wielkości obliczamy według wzorów

$$(2.17) \quad x_2^*(\xi) = s \left( \xi - \frac{x_2^*(\xi)}{a_2} \right),$$

$$x_{1F}(\xi) = k \left( \xi - \frac{x_2^*(\xi)}{a_1} - \frac{x_2^*(\xi)}{a_2} + \frac{x_{1F}(\xi)}{a_1} \right),$$

$$x_{2C}(\xi) = k \left( \xi + \frac{x_2^*(\xi)}{a_1} - \frac{x_2^*(\xi)}{a_2} - \frac{x_{2C}^*(\xi)}{a_1} \right);$$

$\bar{x}_{1F}$  i  $\bar{x}_{2C}$  otrzymujemy z powyższych wzorów wstawiając

$$\xi = t_K - \frac{x_K}{a_2}.$$

### 3. Analiza osobliwości równania frontu fali sprężystego odciążenia

Zajmiemy się zbadaniem charakteru krzywej  $x = s(t)$  w otoczeniu punktu  $0, t_m$  (początek fali odciążenia). Informacje te są konieczne przy ustawianiu algorytmu numerycznych obliczeń w strefie odciążenia.

Jeżeli w obszarze odciążenia, dla  $x = 0$ , z czasem  $t$  będziemy dążyć do  $t_m$ , to punkty  $A, B$  pokryją się z punktem  $0$ , punkty  $E, F$  z punktem  $H$ , a punkty  $C, D$  z punktem  $G$  (rys. 3). W konsekwencji przyjęcia, że  $t = t_m$  z (2.8) otrzymamy

$$x_1^* = x_2^* = 0, \quad x_1(t_m) = x_{1E} = x_{1F}, \quad x_2(t_m) = x_{2D} = x_{2C}.$$

Wzory (2.10) dla czasu  $t = t_m$  dają wyrażenia

$$(3.1) \quad \dot{x}_{1B}^* = \frac{a_2 s_0'}{a_2 - s_0'}, \quad \dot{x}_{2A}^* = \frac{a_2 s_0'}{a_2 + s_0'},$$

$$x_1' = \frac{a_1 k_H'}{a_1 - k_H'}, \quad x_2' = \frac{a_1 k_G'}{a_1 + k_G'}.$$

Czas  $t_m$  określamy z faktu, że naprężenie pod płytą osiąga dla  $t = t_m$  ekstremum, zatem

$$(3.2) \quad \sigma_{3,t}(0, t_m) = 0.$$

Równość ta po wykorzystaniu (2.1)<sub>1</sub> ma postać

$$(3.3) \quad Lf'(x_1)\dot{x}_1 + Nf'(x_2)\dot{x}_2 = 0.$$

Po zróżniczkowaniu po  $t$  obu stron równania (2.2) i podstawieniu  $t = t_m$ , lewa strona równania, a więc i prawa, ma wartość zero jako pochodna naprężenia w jego ekstremum. W wyniku tego otrzymujemy

$$(3.4) \quad m[-Lf''(x_1)(\dot{x}_1)^2 - Lf'(x_1)\ddot{x}_1 + Nf''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + Nf'(x_2)\ddot{x}_2] - p'(t_m) = 0.$$

Poza tym równanie (2.2) można zapisać w następującej skróconej formie:

$$(3.5) \quad -\sigma_s^0 + \frac{E_1}{a_1} Lf(x_1) + \frac{E_1}{a_1} Nf(x_2) + mLf'(x_1)\dot{x}_1 - mNf'(x_2)\dot{x}_2 + p(t_m) = 0.$$

W powyższych zapisach przyjęto:  $x_1(t_m) = x_1$ ,  $x_2(t_m) = x_2$ ,

$$\begin{aligned} x_1 &= k\left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right), & x_2 &= k\left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right), \\ \dot{x}_1 &= \frac{a_1 k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}{a_1 - k' \left(t_m + \frac{x_1}{a_1}\right)}, & \dot{x}_2 &= \frac{a_1 k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}{a_1 + k' \left(t_m - \frac{x_2}{a_1}\right)}. \end{aligned}$$

W ten sposób otrzymaliśmy trzy tożsamości (3.3)–(3.5), które wykorzystamy przy badaniu frontu fali sprężystego odciążenia.

Równanie frontu sprężystego odciążenia (2.9), po uwzględnieniu (2.10), można wyrazić w sposób następujący:

$$(3.6) \quad M_1 \dot{x}_{1B}^* + M_2 \dot{x}_{2A}^* = R,$$

gdzie

$$M_1 = \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1 a_2^2} [Lf'(x_{1E})x'_{1E} + Nf'(x_{2D})x'_{2D}],$$

$$M_2 = \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1 a_2^2} [Lf'(x_{1F})x'_{1F} + Nf'(x_{2C})x'_{2C}],$$

$$\begin{aligned} R &= -\sigma_s^0 + \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1E}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2D}) + \\ &+ \frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{1F}) + \frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)\frac{E_2}{a_2}f(x_{2C}) + m\frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{1E})\dot{x}_{1E} + \\ &+ m\frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{2D})\dot{x}_{2D} - m\frac{1}{2}L\left(\frac{a_1}{a_2} - 1\right)f'(x_{1F})\dot{x}_{1F} - \\ &- m\frac{1}{2}N\left(\frac{a_1}{a_2} + 1\right)f'(x_{2C})\dot{x}_{2C} + p(t). \end{aligned}$$

Dla czasu  $t = t_m$  współczynniki równania (3.6)  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $R$  są równe zero ze względu na (3.3)–(3.5). Nie można więc ze wzoru (3.6), po uwzględnieniu w nim wyrażen na  $\dot{x}_{1B}^*$  i  $\dot{x}_{2A}^*$  z (3.1), obliczyć początkowej prędkości frontu fali odciążenia  $s_0'$ . Dowodzi to, że równanie (3.6) posiada punkt osobliwy. W celu znalezienia początkowej prędkości frontu fali odciążenia przeprowadzimy analizę punktu osobliwego, uogólniając metodę FROMMERA [3].



W bezpośrednim otoczeniu punktu  $x = 0$ ,  $t = t_m$ , po przyjęciu oznaczeń  $x_1^* = x_{1B}^*$ ,  $x_2^* = x_{2A}^*$ , wielkościom  $x_1^*$  i  $x_2^*$  nadajemy znaczenie zmiennych niezależnych. Przy tym założeniu współczynniki równania (3.6)  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $R$  są funkcjami trzech zmiennych niezależnych  $t$ ,  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ . Obliczmy różniczki zupełne współczynników równania (3.6) zachowując postać tej równości

$$(3.7) \quad (M_{1,t}dt + M_{1,x_1^*}dx_1^* + M_{2,x_2^*}dx_2^*)\dot{x}_1^* + (M_{2,t}dt + M_{2,x_1^*}dx_1^* + M_{2,x_2^*}dx_2^*)\dot{x}_2^* = \\ = R_{,t}dt + R_{,x_1^*}dx_1^* + R_{,x_2^*}dx_2^*.$$

Występujące w tym wyrażeniu pochodne cząstkowe, po podstawieniu w nich  $x_1^* = x_2^* = 0$  i  $t = t_m$  oraz po uwzględnieniu (3.3)–(3.5), mają wartości

$$(3.8) \quad \begin{aligned} M_{1,x_2^*} &= M_{2,x_1^*} = R_{,t} = 0, \\ M_{1,x_1^*} &= \frac{T_1}{a_2} + \frac{T_2}{a_1}, \quad M_{2,x_2^*} = -\frac{T_1}{a_2} + \frac{T_2}{a_1}, \\ M_{1,t} &= T_1, \quad M_{2,t} = T_1, \\ R_{,x_1^*} &= -T_1, \quad R_{,x_2^*} = -T_1, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.9) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1 a_2^2} [Lf''(x_1)(\dot{x}_1)^2 + Lf'(x_1)\ddot{x}_1 + Nf''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + Nf'(x_2)\ddot{x}_2], \\ T_2 &= \frac{m(a_2^2 - a_1^2)}{2a_1 a_2^2} [-Lf''(x_1)(\dot{x}_1)^2 - Lf'(x_1)\ddot{x}_1 + Nf''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + Nf'(x_2)\ddot{x}_2]. \end{aligned}$$

Równość (3.7) nie jest prawdziwa dla dowolnych przyrostów  $dt$ ,  $dx_1^*$  i  $dx_2^*$ . Mamy prawo żądać spełnienia tej równości tylko wtedy, jeżeli do punktu 0 będziemy zdążać po krzywej  $s(t)$ , a to prowadzi do zależności

$$(3.10) \quad \frac{dx_1^*}{dt} = \dot{x}_1^* = \frac{a_2 s'_0}{a_2 - s'_0}, \quad \frac{dx_2^*}{dt} = \dot{x}_2^* = \frac{a_2 s'_0}{a_2 + s'_0}.$$

Uwzględniając (3.10) w (3.7) otrzymamy równanie algebraiczne stopnia czwartego na początkową prędkość frontu fali odciążenia  $s'_0$

$$(3.11) \quad -\frac{(s'_0)^4}{a_2^3} + \frac{(s'_0)^2}{a_2} + 2\frac{T_1}{T_2} \frac{a_1}{a_2} s'_0 = 0.$$

Równanie to posiada dwa rzeczywiste pierwiastki. Rozwiązanie  $s'_0 = 0$  należy odrzucić, ponieważ jest sprzeczne z warunkami ciągłości w otoczeniu punktu 0,  $t_m$ .

Prędkość początkową określa drugi pierwiastek

$$(3.12) \quad s'_0 = a_2 \sqrt[3]{-\frac{T_1 a_1}{T_2 a_2} + \left(\frac{T_1^2 a_1^2}{T_2^2 a_2^2} + \frac{1}{27}\right)^{1/2}} - a_2 \sqrt[3]{\frac{T_1 a_1}{T_2 a_2} + \left(\frac{T_1^2 a_1^2}{T_2^2 a_2^2} + \frac{1}{27}\right)^{1/2}}.$$

Na podstawie (3.9) i (3.3) mamy

$$(3.13) \quad \frac{T_1}{T_2} = 2mN \frac{f''(x_2)(\dot{x}_2)^2 + f'(x_2)\ddot{x}_2}{p'(t_m)} - 1.$$

Rozpatrzmy kilka praktycznie ważnych przypadków postaci wzoru (3.12) w zależności od stosunku  $T_1/T_2$ .

1. Wzrost granicy plastyczności ośrodka jest liniową funkcją głębokości  $f(x) = Ax$ . Wówczas mamy

$$(3.14) \quad \frac{T_1}{T_2} = 2 \frac{mAN\ddot{x}_2}{p'(t_m)} - 1.$$

2. Ośrodek jednorodny  $f(x) \equiv 0$ . W tym wypadku front fali plastycznej degeneruje się do charakterystyki plastycznej  $x = a_1(t - t_s)$ .

W konsekwencji  $\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = 0$ , a zatem

$$(3.15) \quad \frac{T_1}{T_2} = -1.$$

3. Szttywne odciążenie. Dla sztywnego odciążenia  $a_2 \rightarrow \infty$  i po przejściu granicznym w (3.12) — mamy

$$(3.16) \quad s'_0 = -2a_1 \frac{T_1}{T_2},$$

co się pokrywa ze wzorem (4.15) w [1] otrzymanym dla sztywnego odciążenia w części I.

Tym samym pokazaliśmy, że istnieje krzywa całkowa równania (2.9) przechodząca przez punkt  $x = 0$ ,  $t = t_m$  i znaleźliśmy styczną (prędkość) z jaką startuje z punktu osobliwego front fali sprężystego odciążenia. Postać frontu fali odciążenia określimy z równania (2.9), rozwiązując go metodą Runge-Kutta [4].

#### 4. Przykład liczbowy

W niniejszym punkcie, w oparciu o wyprowadzone wyżej wzory, zbadamy ilościowy wpływ parametrów ośrodka i przyłożonego obciążenia na ruch płyty i reakcję przekazywaną przez nią na ośrodek.

Celem przeprowadzonych obliczeń numerycznych jest określenie wartości współczynnika odciążenia  $\mu_1 = a_2/a_1$ , dla którego można stosować w praktyce inżynierskiej bardziej wygodny i efektywny w obliczeniach model podłoża ze sztywnym odciążeniem.

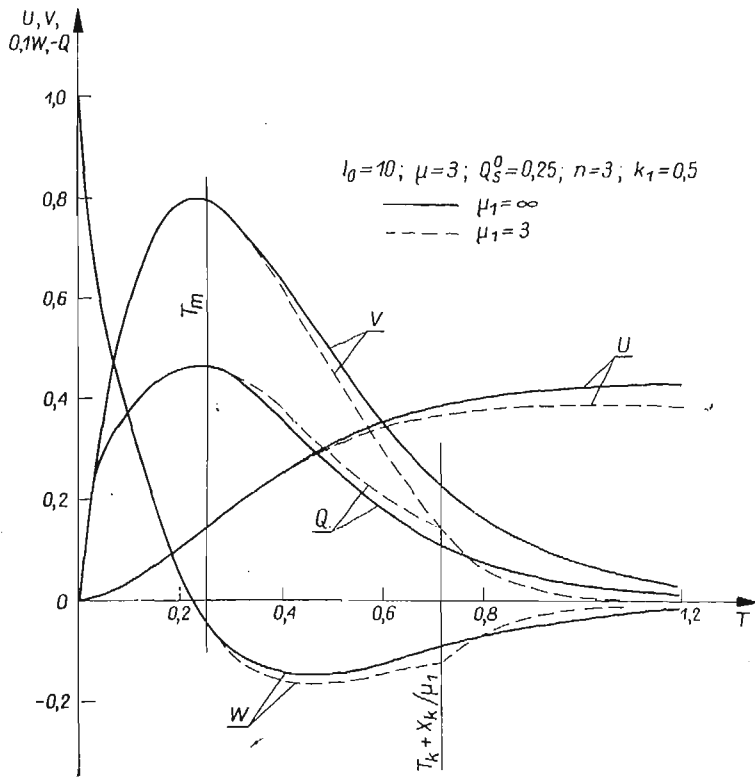
Największy wpływ sprężystego odciążenia występuje dla  $E_2 = E_0$  (patrz rys. 1). Z tego powodu w obliczeniach przyjęto  $a_2 = a_0$ , co oznacza, że  $\mu_1 = \mu = a_0/a_1$ . Poza tym założono

$$(4.1) \quad f(x) = Ax,$$

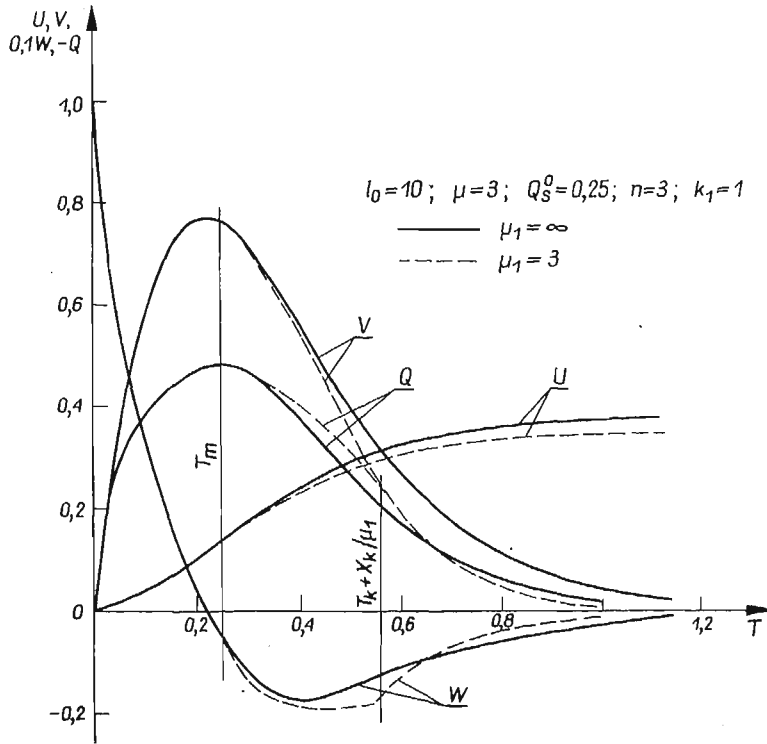
$$(4.2) \quad p(t) = p_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^n.$$

Wielkości bezwymiarowe, potrzebne do przeprowadzenia obliczeń numerycznych przyjmujemy takie same, jak w części I [1].

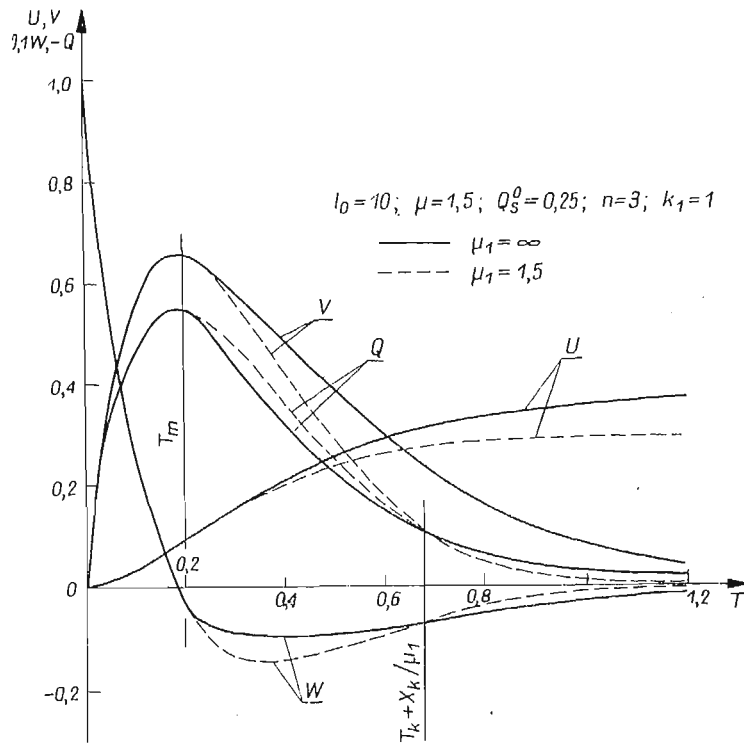
Jak już wspomniano w poprzednich punktach front plastycznej fali obciążenia określono za pomocą zmodyfikowanej metody kroków, natomiast do rozwiązania równania na front fali sprężystego odciążenia zastosowano metodę Runge-Kutta. Znajomość do-



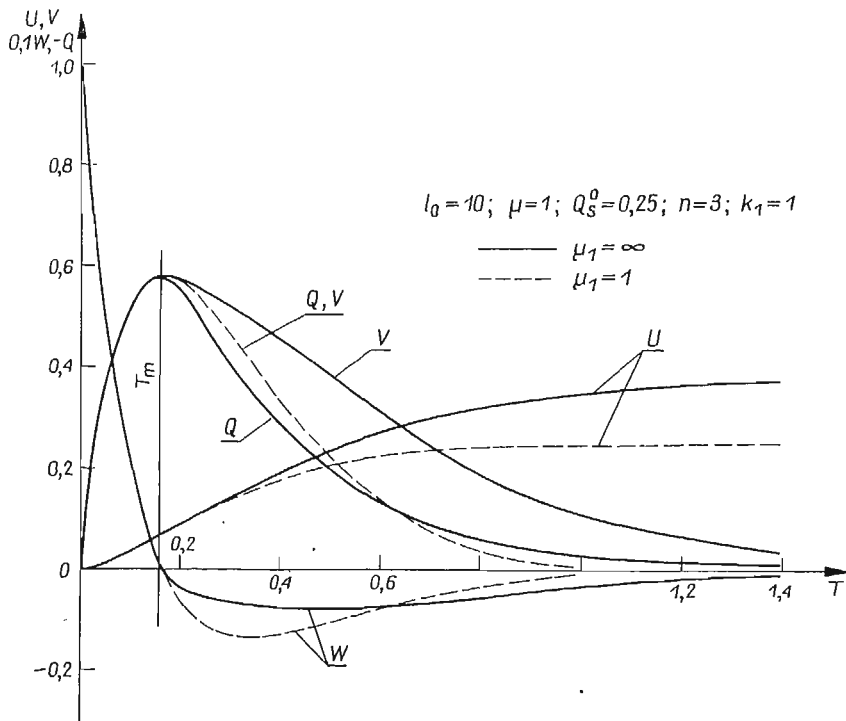
Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

kladnej wartości początkowej prędkości frontu fali odciążenia (patrz wzór (3.12)), oraz fakt, że osobliwość równania (2.9) w punkcie  $0, t_m$  jest typu siodła, zwiększyły w znacznym stopniu dokładność obliczeń — praktycznie w badanych przedziałach uzyskano ściśle wyniki na parametry ruchu płyty i reakcję przekazywaną przez nią na podłoże.

Przykładowe wyniki obliczeń parametrów ruchu płyty, tj. bezwymiarowe współczynniki: przemieszczenia  $U$ , prędkości  $V$ , przyspieszenia  $W$  oraz reakcji pod płytą  $Q$  pokazane są na rys. 5–8.

Z wykresów zamieszczonych na rys. 5 i 6 można zauważyć, że zwiększenie gradientu wzrostu granicy plastyczności ośrodka (wzrost  $k_1$ ) powoduje zmniejszenie wpływu sprężystego odciążenia (linia przerywana) w stosunku do sztywnego odciążenia (linia ciągła). Wynika to z faktu malenia pętli strat na odkształcenia plastyczne ze wzrostem  $k_1$ .

Na rys. 6, 7 i 8 pokazujemy zwiększanie się wpływu sprężystego odciążenia na parametry ruchu płyty w miarę malenia współczynnika  $\mu_1 = \mu$ . Największą możliwą różnicę pomiędzy sztywnym a sprężystym odciążeniem, dla ustalonych pozostałych parametrów, pokazują wykresy na rys. 8. Linia przerywana reprezentuje tutaj stan sprężysty ośrodka, a linia ciągła model liniowy ze sztywnym odciążeniem po przekroczeniu granicy plastyczności.

Reasumując można stwierdzić, że wpływ sprężystego odciążenia na pole naprężeń generowane w podłożu, na którym spoczywa płyta, jest minimalny.

Większe znaczenie ma sprężyste odciążenie przy obliczaniu parametrów ruchu płyty (przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia).

Otrzymane wyniki pozwalają wyciągnąć wniosek, że dla współczynników sprężystego odciążenia  $\mu_1 \geq 3$  wpływ sprężystego odciążenia jest zanedbywalny i w praktycznych obliczeniach można stosować bardziej efektywny model gruntu ze sztywnym odciążeniem.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. BAUER, E. WŁODARCZYK, *Dynamika sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym podłożu ze zmienną granicą plastyczności. Część I. Sztywne odciążenie.*, Mech. Teor. i Stos., 1, 9 (1971).
2. E. WŁODARCZYK, *Wpływ liniowo-sprężystego odciążenia na parametry ruchu sztywnej płyty spoczywającej na sprężysto-plastycznym gruncie*, Biul. WAT, 7 (203), (1969).
3. W. W. СТЕПАНОВ, *Równania różniczkowe*, PWN, Warszawa 1956.
4. L. COLLATZ, *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*, PWN, Warszawa 1960.

#### Резюме

#### ДИНАМИКА ЖЕСТКОЙ ПЛИТЫ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ОСНОВАНИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПРЕДЕЛОМ ТЕКУЧЕСТИ ЧАСТЬ II. УПРУГАЯ РАЗГРУЗКА

Во второй части работы исследовано влияние упругой разгрузки на нестационарное движение жесткой плиты, расположенной на упруго-пластическом основании с переменным (возрастающим вглубь основания) пределом текучести. Фронт волны разгрузки описан нелинейным дифференциальным уравнением со смещенным аргументом, которое затем решено при помощи метода Рунге-Кутты. Выведена замкнутая формула для начальной скорости распространения волны разгрузки, из которой в предельном переходе получается скорость волны для жесткой разгрузки, приведенная в ч. I [1].

Параметры движения плиты и среды, находящейся под плитой, определены при помощи фронтов волн пластической нагрузки и упругой разгрузки. На основе полученных формул произведен достаточно широкий численный анализ задачи. В результате этого анализа установлено, что для величин коэффициентов упругой разгрузки  $\mu_1 = a_2/a_1 \geq 3$  влиянием упругой разгрузки можно пренебречь, а в инженерной практике можно применять более эффективную в расчетах модель грунта с жесткой разгрузкой.

#### S u m m a r y

### DYNAMICS OF A RIGID PLATE RESTING ON ELASTIC-PLASTIC FOUNDATION WITH VARIABLE PLASTICITY LIMIT PART II. ELASTIC UNLOADING

In the second part of the paper the influence of elastic unloading on non-stationary motion of a rigid plate resting on elastic-plastic foundation with variable (increasing with the depth) limit of plasticity has been investigated. The front of the unloading wave is presented in the form of a non-linear equation with a shifted argument. The equation is solved by the Runge-Kutt method. The initial velocity of propagation of the unloading wave is found in a closed form. From this formula the limiting case of the rigid unloading wave velocity given in part I can be obtained.

The parameters of motion of the plate and the medium lying under the plate are evaluated by means of wave fronts of plastic loading and elastic unloading. On the basis of the formulae obtained the detailed numerical analysis of the problem is carried out.

As a result of the analysis it has been found that for the coefficients of elastic unloading  $\mu_1 = a_2/a_1 \geq 3$  the influence of elastic unloading can be neglected, and therefore in the case of practical engineering calculations a more effective model of soil with rigid unloading can be applied.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1971 r.*

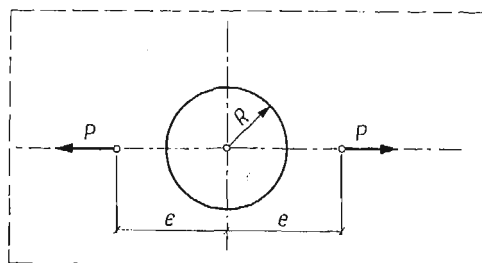
KONCENTRACJA NAPRĘŻEŃ W TARCZY NIEOGRANICZONEJ Z OTWOREM KOŁOWYM  
PRZY OBCIĄŻENIU WEWNĘTRZNYM

KAZIMIERZ RYKALUK (WROCLAW)

1. Wstęp

Rozpatrzmy sprężystą izotropową tarczę nieograniczoną z otworem kołowym o promieniu  $R$  obciążoną podłużną parą sił, symetryczną względem środka otworu (rys. 1).

Wewnątrz obszaru tarczy wokół brzegu otworu wystąpi koncentracja naprężeń (por. [2]). Zadaniem naszym jest określenie wielkości tej koncentracji, scharakteryzowanej przez tzw. współczynniki koncentracji naprężeń. Przez współczynnik koncentracji naprężeń



Rys. 1

rozumiemy iloraz którejkolwiek składowej tensora naprężenia w dowolnym punkcie strefy koncentracji przez tę samą składową w tym samym punkcie tarczy bez otworu, obciążonej tak samo jak tarcza z otworem (por. [2]).

Do wyznaczenia stanów naprężeń w tarczy bez otworu i z otworem posłużymy się funkcją zmiennej zespolonej, wykorzystując metodę MUSCHELISZWILIEGO (por. [1])

Przy znanych dwóch funkcjach holomorficznym  $\varphi_1(z)$  i  $\psi_1(z)$ , zwanych funkcjami Goursata, składowe tensora naprężenia  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\tau_{r\varphi}$  oraz wektora przemieszczenia  $u_r$ ,  $u_\varphi$  obliczymy ze wzorów Kołosowa–Muscheliszwiliego

$$(1.1) \quad \begin{cases} \sigma_r + \sigma_\varphi = 4 \operatorname{Re} \varphi_1'(z), \\ \sigma_\varphi - \sigma_r + 2i \tau_{r\varphi} = 2[\bar{z} \varphi_1''(z) + \psi_1'(z)] \exp(2i\varphi), \end{cases}$$

$$(1.2) \quad 2G(u_r + iu_\varphi) = [\kappa \varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)}] \exp(-i\varphi),$$

gdzie  $G$  oznacza moduł sprężystości poprzecznej,  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$  w płaskim stanie naprężenia, lub  $\kappa = 3-4\nu$  w płaskim stanie odkształcenia,  $\nu$  — współczynnik Poissona.

## 2. Tarcza bez otworu

Przy obranym układzie współrzędnych, jak na rys. 2, funkcje Goursata będą miały następujące postacie (por. [1]):

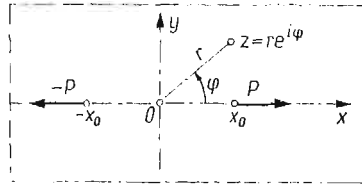
$$(2.1) \quad \varphi_1(z) = A \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \varphi_1^0(z),$$

$$(2.2) \quad \psi_1(z) = A \left( -\kappa \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z+x_0} \right) + \psi_1^0(z),$$

gdzie  $A = \frac{P}{2\pi(1+\kappa)}$ .

Jeżeli założymy, że naprężenia w nieskończoności są równe zeru, wówczas

$$(2.3) \quad \varphi_1^0(z) = \psi_1^0(z) = 0.$$



Rys. 2

Po wykonaniu potrzebnych we wzorach (1.1) operacji na funkcjach (2.1) i (2.2), z uwzględnieniem (2.3), otrzymamy:

$$(2.4) \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_r^{(1)} \\ \sigma_\varphi^{(1)} \end{array} \right\} = 2Ax_0 \left\{ \frac{(2 \pm \kappa \cos 2\varphi)x_0^2 \mp (\kappa \pm 2 \cos 2\varphi)r^2}{r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \pm \frac{r^6 + 4x_0^2 r^4 - x_0^4 r^2 (1 + 2 \sin^2 2\varphi) - (2r^6 - x_0^6 + x_0^2 r^4 + 2x_0^4 r^2) \cos 2\varphi}{(r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi)^2} \right\},$$

$$(2.5) \quad \tau_{r\varphi}^{(1)} = \frac{-2Ax_0 \sin 2\varphi}{r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \left( \kappa x_0^2 + \frac{2r^6 + x_0^6 - 2x_0^4 r^2 - 3x_0^2 r^4 + 2x_0^4 r^2 \cos 2\varphi}{r^4 + x_0^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \right).$$

## 3. Tarcza z otworem

Założmy następujące postacie funkcji Goursata:

$$(3.1) \quad \varphi_2(z) = A \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \varphi_2^0(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2^0(z),$$

$$(3.2) \quad \psi_2(z) = A \left( -\kappa \ln \frac{z+x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z-x_0} + \frac{x_0}{z+x_0} \right) + \psi_2^0(z) = \psi_1(z) + \psi_2^0(z),$$

gdzie funkcje  $\varphi_2^0(z)$  i  $\psi_2^0(z)$  są holomorficzne w obszarze  $|z| > R$ . Wyznaczymy je z pierwszego warunku brzegowego

$$(3.3) \quad \varphi_2(t) + t\overline{\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = 0,$$

przy czym  $t$  oznacza punkt bieżący na okręgu.



Odwzorujemy obszar tarczy na zewnątrz koła jednostkowego  $|\zeta| > 1$ , leżącego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\zeta = \xi + i\eta$  za pomocą funkcji

$$(3.4) \quad z = \omega(\zeta) = R\zeta.$$

Okrąg jednostkowy oznaczmy przez  $\gamma$ , a punkt tego okręgu odpowiadający punktowi  $t$  — przez  $\varrho$ .

Na płaszczyźnie  $\zeta$  będziemy operowali funkcjami

$$(3.5) \quad \begin{cases} \varphi(\zeta) = \varphi_2[\omega(\zeta)], \\ \psi(\zeta) = \psi_2[\omega(\zeta)]. \end{cases}$$

Uwzględniając (3.4) i (3.5) we wzorach (3.1) i (3.2), otrzymamy

$$(3.6) \quad \varphi(\zeta) = A \ln \frac{\zeta + \xi}{\zeta - \xi} + \varphi_0(\zeta),$$

$$(3.7) \quad \psi(\zeta) = A \left( -\kappa \ln \frac{\zeta + \xi}{\zeta - \xi} + \frac{\xi_0}{\zeta - \xi_0} + \frac{\xi_0}{\zeta + \xi_0} \right) + \psi_0(\zeta),$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{cases} \xi_0 = x_0/R, \\ \varphi_0(\zeta) = \varphi_2^0[\omega(\zeta)], \\ \psi_0(\zeta) = \psi_2^0[\omega(\zeta)], \end{cases}$$

przy czym  $\varphi_0(\zeta)$  i  $\psi_0(\zeta)$  są funkcjami holomorficznymi w obszarze  $|\zeta| > 1$ .

Warunek brzegowy (3.3) przyjmie postać

$$(3.9) \quad \varphi(\varrho) + \frac{\omega(\varrho)}{\omega'(\varrho)} \overline{\varphi'(\varrho)} + \overline{\psi(\varrho)} = 0,$$

z którego, na podstawie (3.4), (3.6) i (3.7), otrzymujemy

$$(3.10) \quad \varphi_0(\varrho) + \overline{\varphi_0'(\varrho)} + \overline{\psi_0(\varrho)} = f_0(\varrho),$$

gdzie

$$(3.11) \quad f_0(\varrho) = A \left( \ln \frac{\varrho - \xi_0}{\varrho + \xi_0} - \kappa \ln \frac{\frac{1}{\varrho} - \xi_0}{\frac{1}{\varrho} + \xi_0} - \varrho \frac{\varrho + \xi_0}{1 + \xi_0 \varrho} + \varrho \frac{\varrho - \xi_0}{1 - \xi_0 \varrho} \right).$$

Ze względu na brak obciążenia zewnętrznego na krawędzi otworu, funkcje  $\varphi_0(\zeta)$  i  $\psi_0(\zeta)$  wyznaczamy ze wzorów (por. [1]):

$$(3.12) \quad \varphi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_0(\varrho)}{\varrho - \zeta} d\varrho,$$

$$(3.13) \quad \psi_0(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{f_0(\varrho)}}{\varrho - \zeta} d\varrho - \frac{\varphi_0'(\zeta)}{\zeta},$$

gdzie

$$(3.14) \quad \overline{f_0(\varrho)} = A \left( \ln \frac{\frac{1}{\varrho} - \xi_0}{\frac{1}{\varrho} + \xi_0} - \kappa \ln \frac{\varrho - \xi_0}{\varrho + \xi_0} - \frac{1}{\varrho} \frac{1 + \xi_0 \varrho}{\varrho + \xi_0} + \frac{1}{\varrho} \frac{1 - \xi_0 \varrho}{\varrho - \xi_0} \right).$$

Dla wieloznacznych funkcji  $\ln \frac{\zeta - \xi_0}{\zeta + \xi_0}$  i  $\ln \frac{1/\rho - \xi_0}{1/\rho + \xi_0}$  wybieramy takie gałęzie, aby na okręgu  $\gamma$  były wielkościami sprzężonymi. Dla pierwszej wybieramy gałąź holomorficzną w obszarze  $|\zeta| < 1$  i równą  $\pi i$  w punkcie  $\zeta = 0$ , zaś dla drugiej — gałąź holomorficzną w obszarze  $|\zeta| > 1$  i równą  $\pi i$  w punkcie  $\zeta = \infty$ .

Zatem, w myśl twierdzenia Cauchy'ego (por. [3]), mamy

$$(3.15) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \ln \frac{\rho - \xi_0}{\rho + \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = 0,$$

$$(3.16) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \ln \frac{\frac{1}{\rho} - \xi_0}{\frac{1}{\rho} + \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\ln \frac{1 - \xi_0 \zeta}{1 + \xi_0 \zeta} + \pi i.$$

Wyrażenia  $\rho \frac{\rho + \xi_0}{1 + \xi_0 \rho}$  i  $\rho \frac{\rho - \xi_0}{1 - \xi_0 \rho}$  są wartościami brzegowymi funkcji  $\zeta \frac{\zeta + \xi_0}{1 + \xi_0 \zeta}$  i  $\zeta \frac{\zeta - \xi_0}{1 - \xi_0 \zeta}$  holomorficznym w obszarze  $|\zeta| > 1$  z wyjątkiem punktu  $\zeta = \infty$ , w którym posiadają bieguny rzędu pierwszego z częściami głównymi odpowiednio  $\left(\frac{\zeta}{\xi_0} + 1 - \frac{1}{\xi_0^2}\right)$  i  $\left(1 - \frac{\zeta}{\xi_0} - \frac{1}{\xi_0^2}\right)$ .

Zatem, w myśl twierdzenia Cauchy'ego, mamy

$$(3.17) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \rho \frac{\rho + \xi_0}{1 + \xi_0 \rho} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\zeta \frac{\zeta + \xi_0}{1 + \xi_0 \zeta} + 1 - \frac{1}{\xi_0^2} + \frac{\zeta}{\xi_0},$$

$$(3.18) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \rho \frac{\rho - \xi_0}{1 - \xi_0 \rho} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\zeta \frac{\zeta - \xi_0}{1 - \xi_0 \zeta} + 1 - \frac{1}{\xi_0^2} - \frac{\zeta}{\xi_0}.$$

Wyrażenia  $\frac{1}{\rho} \frac{1 + \xi_0 \rho}{\zeta + \xi_0}$  i  $\frac{1}{\rho} \frac{1 - \xi_0 \rho}{\zeta - \xi_0}$  są wartościami brzegowymi funkcji  $\frac{1}{\zeta} \frac{1 + \xi_0 \zeta}{\zeta + \xi_0}$  i  $\frac{1}{\zeta} \frac{1 - \xi_0 \zeta}{\zeta - \xi_0}$  holomorficznym w obszarze  $|\zeta| < 1$  z wyjątkiem punktu  $\zeta = 0$ , w którym posiadają bieguny rzędu pierwszego z częściami głównymi odpowiednio  $\left(-\frac{1}{\xi_0 \zeta}\right)$  i  $\left(\frac{1}{\xi_0 \zeta}\right)$ .

Zatem, w myśl twierdzenia Cauchy'ego, mamy

$$(3.19) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\rho} \frac{1 + \xi_0 \rho}{\zeta + \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = -\frac{1}{\xi_0 \zeta},$$

$$(3.20) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\rho} \frac{1 - \xi_0 \rho}{\zeta - \xi_0} \frac{d\rho}{\rho - \zeta} = \frac{1}{\xi_0 \zeta}.$$

Wykorzystując całki (3.15)–(3.20) we wzorach (3.11) i (3.12) oraz (3.13) i (3.14), otrzymamy

$$(3.21) \quad \varphi_0(\zeta) = A \left( \kappa \ln \frac{1 + \xi_0 \zeta}{1 - \xi_0 \zeta} + \frac{2\zeta}{\xi_0} + 2\xi_0 \zeta \frac{\zeta^2 - 1}{1 - \xi_0^2 \zeta^2} \right),$$

$$(3.22) \quad \psi_0(\zeta) = A \left( -\ln \frac{1 + \xi_0 \zeta}{1 - \xi_0 \zeta} - \frac{4}{\xi_0 \zeta} + 4\xi_0 \zeta \frac{\xi_0^2 - 1}{(1 - \xi_0^2 \zeta^2)^2} + \frac{2\xi_0}{\zeta} \frac{1 - \zeta^2 - \varkappa}{1 - \xi_0^2 \zeta^2} \right),$$

przy czym pominięto tu wyrazy stałe, które nie mają wpływu na składowe tensora naprężenia.

Przetransformujemy funkcje (3.21) i (3.22) na płaszczyznę zmiennej  $z$  za pomocą odwrotnej funkcji odwzorowującej  $\zeta = \omega^{-1}(z) = z/R$ :

$$(3.23) \quad \varphi_2^0(z) = A \left( \varkappa \ln \frac{R^2 + x_0 z}{R^2 - x_0 z} + \frac{2z}{x_0} + 2x_0 z \frac{z^2 - R^2}{R^4 - x_0^2 z^2} \right),$$

$$(3.24) \quad \psi_2^0(z) = A \left[ -\ln \frac{R^2 + x_0 z}{R^2 - x_0 z} - \frac{4R^2}{x_0 z} + \frac{2R^2 x_0}{z} \frac{(1 - \varkappa)R^2 - z^2}{R^4 - x_0^2 z^2} + 4x_0 z R^4 \frac{x_0^2 - R^2}{(R^4 - x_0^2 z^2)^2} \right].$$

Uwzględniając funkcje (3.23) i (3.24) we wzorach (3.1) i (3.2), otrzymamy rozwiązanie dla tarczy nieograniczonej z otworem kołowym, obciążoną podłużną parą sił skupionych zaczepionych wewnątrz obszaru tarczy.

Składowe tensora naprężenia możemy zapisać w postaci

$$(3.25) \quad \sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)} + \sigma_r^{(0)}, \quad \sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_\varphi^{(0)}, \quad \tau_{r\varphi}^{(2)} = \tau_{r\varphi}^{(1)} + \tau_{r\varphi}^{(0)},$$

gdzie  $\sigma_r^{(1)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(1)}$  i  $\tau_{r\varphi}^{(1)}$  są określone wzorami (2.4) i (2.5), natomiast  $\sigma_r^{(0)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(0)}$  i  $\tau_{r\varphi}^{(0)}$  wyliczymy według wzorów (1.1) na podstawie funkcji (3.23) i (3.24):

$$(3.26) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r^{(0)} \\ \sigma_\varphi^{(0)} \end{aligned} \right\} = 4Ax_0 \left\{ \frac{1}{x_0^2} + \frac{(\varkappa - 1)(R^4 - x_0^2 r^2 \cos 2\varphi)R^2 + (R^4 \cos 2\varphi - x_0^2 r^2)r^2}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi} + \right. \\ \left. + 2r^2 R^2 (R^2 - x_0^2) \frac{(R^8 + x_0^4 r^4) \cos 2\varphi - 2x_0^2 r^2 R^4}{(R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^2} \mp \frac{R^2}{x_0^2 r^2} \mp \frac{R^4}{2r^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{(\varkappa - 1)(R^4 - x_0^2 r^2 \cos 2\varphi)}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 \cos 2\varphi} \mp R^2 (r^2 - R^2) [(\varkappa - 1)x_0^2 + R^2] \frac{(R^8 + x_0^4 r^4) \cos 2\varphi - 2x_0^2 r^2 R^4}{(R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^2} \mp \right. \\ \left. \mp R^2 (x_0^2 - R^2) \frac{R^4 (R^2 - 2r^2) [R^4 (R^8 + 3x_0^4 r^4) \cos 2\varphi - x_0^6 r^6 \cos 4\varphi - 3x_0^2 r^2 R^8] +}{(R^8 + x_0^4 r^4 -} \right. \\ \left. \left. \frac{+ x_0^2 r^2 (3R^2 - 2r^2) [R^4 (R^8 \cos 4\varphi + 3x_0^4 r^4) - (x_0^6 r^6 + 3x_0^2 r^2 R^8) \cos 2\varphi]}{-2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^3} \right\}, \right.$$

$$(3.27) \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = \frac{2Ax_0 \sin 2\varphi}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi} \left\{ (\varkappa - 1)x_0^2 R^4 + \right. \\ \left. + [(\varkappa - 1)x_0^2 + R^2] \frac{2R^2 (r^2 - R^2) (R^8 - x_0^4 r^4)}{R^8 + x_0^4 r^4 - 2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi} + \right. \\ \left. + 2R^2 (x_0^2 - R^2) \frac{R^4 (R^2 - 2r^2) [R^4 (R^8 - 3x_0^4 r^4) + 2x_0^6 r^6 \cos 2\varphi] + x_0^2 r^2 (3R^2 - 2r^2) [(x_0^6 r^6 -}{(R^8 + x_0^4 r^4 -} \right. \\ \left. \left. \frac{-3x_0^2 r^2 R^8) + 2R^1 \cos 2\varphi]}{-2x_0^2 r^2 R^4 \cos 2\varphi)^2} \right\}.$$

## 4. Współczynniki koncentracji naprężeń

Zgodnie z definicją podaną w punkcie 1, współczynniki koncentracji naprężeń są równe:

$$(4.1) \quad k_r = \frac{\sigma_r^{(2)}}{\sigma_r^{(1)}} = 1 + \frac{\sigma_r^{(0)}}{\sigma_r^{(1)}},$$

$$(4.2) \quad k_\varphi = \frac{\sigma_\varphi^{(2)}}{\sigma_\varphi^{(1)}} = 1 + \frac{\sigma_\varphi^{(0)}}{\sigma_\varphi^{(1)}},$$

$$(4.3) \quad k_{r\varphi} = \frac{\tau_{r\varphi}^{(2)}}{\tau_{r\varphi}^{(1)}} = 1 + \frac{\tau_{r\varphi}^{(0)}}{\tau_{r\varphi}^{(1)}},$$

gdzie składowe tensorów naprężeń są określone wzorami (2.4), (2.5) oraz (3.26) i (3.27).

Ze względu na wyteżenie materiału najbardziej interesujący jest współczynnik  $k_\varphi$  na krawędzi otworu. Wynosi on

$$(4.4) \quad k_\varphi|_{r=R} = 1 + \frac{\sigma_\varphi^{(0)}}{\sigma_\varphi^{(1)}} \Big|_{r=R},$$

gdzie

$$(4.5) \quad \sigma_\varphi^{(0)}|_{r=R} = 4Ax_0 \left\{ \frac{2}{x_0^2} + \frac{3(\kappa-1)(R^2 - x_0^2 \cos 2\varphi) + 2(R^2 \cos 2\varphi - x_0^2)}{2(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)} + \right. \\ \left. + 2(R^2 - x_0^2) \frac{(R^4 + x_0^4) \cos 2\varphi - 2x_0^2 R^2}{(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)^2} + \right. \\ \left. + (x_0^2 - R^2) \frac{(R^4 + x_0^4) x_0^2 R^2 (3 + \cos 4\varphi) - (R^8 + 6x_0^4 R^4 + x_0^8) \cos 2\varphi}{(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)^3} \right\},$$

$$(4.6) \quad \sigma_\varphi^{(1)}|_{r=R} = \frac{2Ax_0}{(R^4 + x_0^4 - 2x_0^2 R^2 \cos 2\varphi)^2} \{ (\kappa-1)R^6 + (\kappa+3)x_0^4 R^2 + 2x_0^6 - \\ - 2x_0^2 R^4 + [(\kappa+1)x_0^6 + (1-3\kappa)x_0^2 R^4 - 4x_0^4 R^2] \cos 2\varphi + \\ + [2(\kappa-1)x_0^4 R^2 + 4x_0^2 R^4] \cos^2 2\varphi \}.$$

## 5. Przykład liczbowy

Obliczyć naprężenia  $\sigma_\varphi^{(0)}$ ,  $\sigma_\varphi^{(1)}$  i  $\sigma_\varphi^{(2)}$  oraz współczynnik  $k_\varphi$  w trzech punktach krawędzi otworu o promieniu  $R$ :  $\varphi = 0, \frac{\pi}{4}$  i  $\frac{\pi}{2}$ . Przyjmąc  $x_0 = 2R, 4R, 8R$  i  $16R$  oraz  $\kappa = 2$ , co odpowiada  $\nu = 0,333$ .

Obliczone wartości  $\sigma_\varphi^{(0)}$  i  $\sigma_\varphi^{(1)}$  według wzorów (4.5) i (4.6),  $\sigma_\varphi^{(2)} = \sigma_\varphi^{(1)} + \sigma_\varphi^{(0)}$  oraz  $k_\varphi$  według wzoru (4.4) zestawiono w tablicy 1.

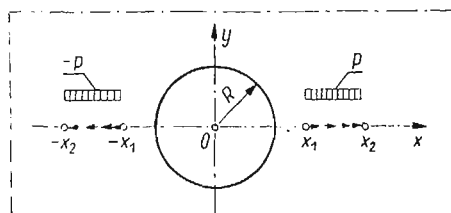
## 6. Uwagi końcowe i wnioski

1. Przedstawiony problem tarczy nieograniczonej może stanowić podstawę do wyznaczenia rozkładów naprężeń w tarczach dwuspójnych obciążonych wewnątrz ich obszarów.

2. Z obciążeniami wewnętrznymi tarcz spotykamy się przy obliczaniu poszycia w tzw. płytach zestawnych (por. [4, 5]).

Tablica 1. Wartości naprężeń  $\sigma_\varphi$  oraz współczynnika  $k_\varphi$  na krawędzi otworu

$x_0$	$2R$	$4R$	$8R$	$16R$
$\varphi = 0$				
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(0)} =$	-10,666 667	-3,866 667	-1,793 650	-0,880 392
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(1)} =$	17,629 620	3,350 281	1,343 655	0,636 344
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(2)} =$	6,962 954	-0,516 385	-0,449 995	-0,244 048
$k_\varphi =$	0,394 958	-0,154 132	-0,334 903	-0,383 516
$\varphi = \frac{\pi}{4}$				
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(0)} =$	4,816 609	1,446 108	0,557 958	0,257 305
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(1)} =$	2,782 007	1,143 514	0,519 156	0,252 430
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(2)} =$	7,598 616	2,589 622	1,077 114	0,509 735
$k_\varphi =$	2,731 343	2,264 617	2,074 740	2,019 312
$\varphi = \frac{\pi}{2}$				
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(0)} =$	7,471 104	4,880 165	2,663 615	1,362 010
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(1)} =$	0,902 400	-0,111 780	-0,194 179	-0,117 764
$\frac{R}{A} \sigma_\varphi^{(2)} =$	8,373 504	4,768 385	2,469 436	1,244 246
$k_\varphi =$	9,279 148	-42,658 659	-12,717 317	-10,565 588



Rys. 3

3. Do obliczenia wartości naprężeń obwodowych na krawędzi otworu wystarczy znać tylko funkcję  $\varphi_2(z)$ , gdyż

$$\sigma_\varphi^{(2)}|_{r=R} = 4 \operatorname{Re} \varphi_2'(z).$$

4. Rozwiązanie tarczy dla obciążenia rozłożonego wzdłuż linii uzyskuje się drogą całkowania (w sensie Riemanna) wyrażeń na naprężenia lub funkcji Goursata. I tak dla obciążenia o stałej intensywności  $p$  na odcinku  $|x_2 - x_1|$  (rys. 3) funkcja  $\varphi_2(z)$  wynosi

$$\varphi_2(z) = \frac{p}{2\pi(1+\kappa)} \left\{ z \ln \frac{x_2^2(z^2 - x_2^2)}{x_1^2(z^2 - x_1^2)} - \frac{z^2 - R^2}{z} \ln \frac{R^4 - x_2^2 z^2}{R^4 - x_1^2 z^2} + x_2 \ln \frac{z + x_2}{z - x_2} - \right. \\ \left. - x_1 \ln \frac{z + x_1}{z - x_1} + \kappa \left[ \frac{R^2}{z} \ln \frac{(R^2 + x_2 z)(R^2 - x_1 z)}{(R^2 - x_2 z)(R^2 + x_1 z)} + x_2 \ln(R^4 - x_2^2 z^2) - \right. \right. \\ \left. \left. - x_1 \ln(R^4 - x_1^2 z^2) - 2(x_2 - x_1) \right] \right\}.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. Н. И. Мусхелишвили, *Некоторые основные задачи математической теории упругости*, Москва 1966.
2. Г. Н. Савин, *Концентрация напряжений около отверстий*, Москва-Ленинград 1951.
3. W. I. SMIRNOW, *Matematyka wyższa*, t. 3, Warszawa 1967.
4. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, Warszawa 1966.
5. С. BRANICKI, К. WYSIATYCKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy statycznej lekkich jezdni mostowych*, XVI Konferencja Naukowa Kł PAN i KN PZITB — Krynica 1970. Referaty i komunikaty, t. I.

#### Резюме

#### КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛИТЕ С КРУГЛЫМ ОТВЕРСТИЕМ НАХОДЯЩИМСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕЙ НАГРУЗКИ

Дан расчет коэффициентов концентрации напряжений (по определению Г. Н. Савина) в неограниченной плите с круглым отверстием, симметрично нагруженным продольной парой сил.

Для решения задачи о плите с отверстием использованы методы функций комплексного переменного, в частности метод Н. И. Мусхелишвили, основанные на использовании конформных отображений и интегралов типа Коши.

Вычислены окружные напряжения и коэффициенты концентрации напряжений в трех характерных точках края отверстия при четырех различных точках приложения усилий  $x_0$ .

Полученное решение является исходным для определения напряжений и концентрации напряжений в задаче о действии внутренней распределенной нагрузки.

#### Summary

#### STRESS CONCENTRATION UNDER INTERNAL LOADING IN AN INFINITE DISK WITH A CIRCULAR HOLE

The paper presents a method of calculation of stress concentration coefficients (according to Savin's definition) for an infinite disk with a circular hole. The disk is loaded by two longitudinal forces symmetric with respect to the centre of the hole. The methods of complex argument functions and, in particular, the

method of Muskhelishvili based on conformal mappings and Cauchy type integrals is applied to the solution of the problem. The circumferential stresses as well as the coefficient of stress concentration are calculated in three characteristic points of the hole edge, for the case of four different points of application  $x_0$  of the forces. The solution obtained gives a basis to determine the stresses and their concentrations under distributed internal loads.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 lutego 1971 r.*

---





## ZASTOSOWANIE MASZYN CYFROWYCH DO ROZWIĄZYWANIA RUSZTÓW O REGULARNEJ SZEŚCIOKĄTNEJ SIATCE PRĘTÓW

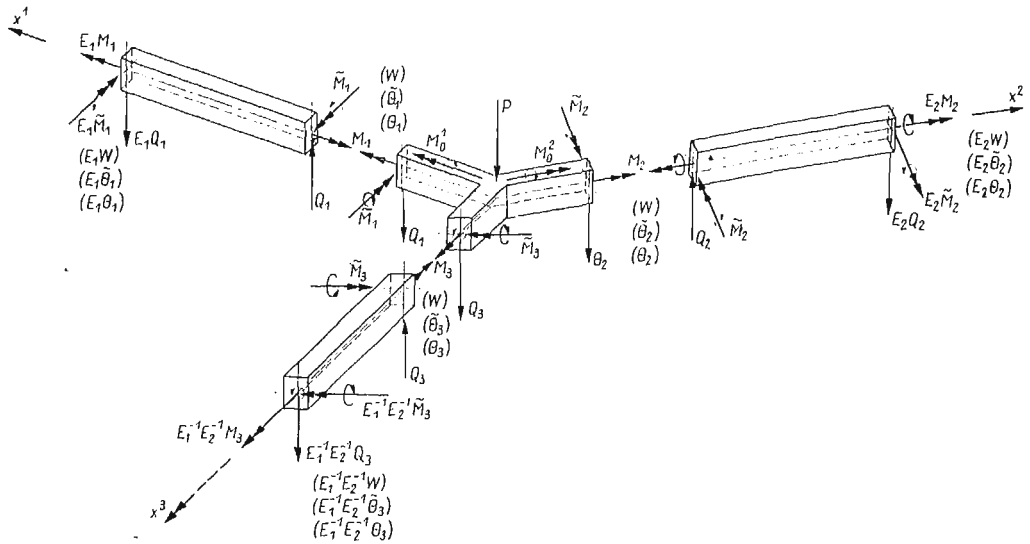
JAN BOGDAN OBRĘBSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono metodę obliczeń numerycznych regularnego, heksagonalnego rusztu płaskiego składającego się z prostych, sprężystych prętów, tworzących w planie siatkę sześciokątów foremnych. Ruszt ten jest obciążony w węzłach siłami prostopadłymi do płaszczyzny konstrukcji oraz momentami o wektorach leżących w tej płaszczyźnie. Do tej pory zagadnieniem tego typu zajmowano się jedynie w pracach [2], [3], [6], [9]. Prace te dotyczyły rozwiązania zagadnienia w sposób analityczny podając jedynie wyniki przybliżone lub omawiały pewne przypadki szczególne. W poniższej pracy osiągnięto w oparciu o równania równowagi węzła, wyprowadzone w pracy [3], pełne numeryczne rozwiązanie postawionego zagadnienia, uwzględniające możliwość obciążania konstrukcji w węzłach dowolnym obciążeniem. Ponadto po raz pierwszy wprowadzono do równań typu macierzowego operatory przesunięcia stosowane w rachunku różnic skończonych. Pozwoliło to zapisać równania równowagi węzła w postaci bardziej przejrzystej i zwartej, a zarazem wygodnej w obliczeniach numerycznych. Jednocześnie zastosowana procedura «DET GAUSS PASMOWY» daje dogodny aparat matematyczny do rozwiązywania tego typu zagadnień. Przykładowe obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej ODRA 1204 dla rusztu ograniczonego kołem o średnicy około ośmiu długości prętów siatki.

### 2. Oznaczenia i założenia

W zadaniu przyjęto kartezjański prawoskrętny, ukośnokątny układ współrzędnych o osiach  $x^1$  i  $x^2$  leżących w płaszczyźnie rusztu i nachylonych do siebie pod kątem  $120^\circ$  oraz o trzecim kierunku  $n$  skierowanym prostopadłe do dwóch pozostałych. Wszystkie pręty rusztu leżą na trzech rodzinach prostych równoległych oznaczonych odpowiednio  $A = I, II, III$ , są równej długości i zbiegają się w węzłach w taki sposób, że ich osie przecinają się w jednym punkcie tworząc sztywne węzły. Wykonane są one z materiału sprężystego i mają główne osie bezwładności przekroju poprzecznego odpowiednio równoległe i prostopadłe do płaszczyzny rusztu. W związku z tym postuluje się, że siły prostopadłe do płaszczyzny rusztu powodują jedynie pionowe przemieszczenia węzłów. Zwroty dodatnie sił wewnętrznych i obciążeń ilustruje rys. 1.



Rys. 1

## Oznaczenia

 $E$ 

moduł Younga,

$$E_I \Phi(x^1, x^2) = E_1^{\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 + \mu, x^2)$$

operator przesunięcia wzdłuż  $A = I$ ,

$$E_{II} \Phi(x^1, x^2) = E_2^{\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1, x^2 + \mu)$$

operator przesunięcia wzdłuż  $A = II$ ,

$$E_{III} \Phi(x^1, x^2) = E_3^{\mu} \Phi(x^1, x^2) = \Phi(x^1 - \mu, x^2 - \mu)$$

operator przesunięcia wzdłuż  $A = III$ , $J$ 

moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem osi poziomej,

 $J^*$ 

geometryczna sztywność skręcania,

$$k^I = \tilde{k} = \frac{EJ}{l} = \text{const}$$

sztywność prętów na zginanie,

$$k^{II} = k = \frac{GJ^*}{l} = \text{const}$$

sztywność prętów na skręcanie,

$$\alpha = \frac{k^{II}}{k^I} = \text{const}$$

stosunek sztywności pręta na skręcanie do jego sztywności na zginanie,

 $l = \text{const}$ 

długość pręta,

 $M_0^1, M_0^2$ składowe momentu zewnętrznego przyłożonego w węzle, odpowiednio równoległe do osi  $x^1, x^2$ ,

$$M_A^1 = \tilde{M}_A$$

moment zginający pręta  $A$  w przekroju przy węzle  $(x^1, x^2)$ ,

$$M_A^{II} = M_A$$

moment skręcający pręta  $A$  w przekroju przy węzle  $(x^1, x^2)$ , $P$ 

siły zewnętrzne przyłożone w węzłach i prostopadłe do płaszczyzny rusztu,

 $Q(A)$ siła poprzeczna pręta  $A$ ,

$$\mu(x^1, x^2) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x^1 + x^2 = 3n+1 \\ 0 & \text{dla } x^1 + x^2 = 3n+0, \\ -1 & \text{dla } x^1 + x^2 = 3n-1 \end{cases} \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots,$$

w

przemieszczenie węzła w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rusztu,

$\Theta^1, \Theta^2$

składowe skalarnie nieskończenie małego kąta obrotu węzła  $\Theta$ , odpowiednio wzdłuż osi układu współrzędnych  $x^1, x^2$ .

### 3. Równania równowagi węzła oraz związki między siłami a przemieszczeniami w poszczególnych prętach układu

Jak łatwo zauważyć, w całym ruszcie sześciokątnym występują właściwie dwa rodzaje węzłów, z których każdy można otrzymać przez przesunięcie i obrót drugiego o  $180^\circ$ . W związku z tym punktem wyjścia przedstawionej poniżej metody było zapisanie układu równań równowagi typowego węzła w sposób opisujący równocześnie stan równowagi w dowolnym węzle konstrukcji. Zgodnie z cytowaną pracą [3] układ ten ma postać:

$$\begin{aligned} & \mu \left\{ -\tilde{k} \left[ \frac{3}{2} (E_2^\mu + E_3^\mu + 4) \Theta^1 - \frac{3}{2} (2 + E_3^\mu) \Theta^2 - \mu \frac{3\sqrt{3}}{l} (E_2^\mu - E_3^\mu) w \right] + \right. \\ & \left. + k \left[ \left( E_1^\mu + \frac{1}{4} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu - \frac{3}{2} \right) \Theta^1 + \left( -\frac{1}{2} E_1^\mu - \frac{1}{2} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu + \frac{3}{4} \right) \Theta^2 \right] + M_0^1 - \frac{1}{2} M_0^2 \right\} = 0, \\ (3.1) \quad & \mu \left\{ -\tilde{k} \left[ -\frac{3}{2} (2 + E_3^\mu) \Theta^1 + \frac{3}{2} (E_1^\mu + E_3^\mu + 4) \Theta^2 - \mu \frac{3\sqrt{3}}{l} (E_3^\mu - E_1^\mu) w \right] + \right. \\ & \left. + k \left[ \left( -\frac{1}{2} E_1^\mu - \frac{1}{2} E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu + \frac{3}{4} \right) \Theta^1 + \left( \frac{1}{4} E_1^\mu + E_2^\mu + \frac{1}{4} E_3^\mu - \frac{3}{2} \right) \Theta^2 \right] - \frac{1}{2} M_0^1 + M_0^2 \right\} = 0, \\ & \mu \tilde{k} \left\{ 3\sqrt{3} (E_2^\mu - E_3^\mu) \Theta^1 - 3\sqrt{3} (E_1^\mu - E_3^\mu) \Theta^2 - \mu \frac{12}{l} (E_1^\mu + E_2^\mu + E_3^\mu - 3) w \right\} = Pl\mu^2. \end{aligned}$$

Związki między siłami wewnętrznymi a przemieszczeniami wyrażają się wzorami:

$$\begin{aligned} & \tilde{M}_I = \mu \tilde{k} \left[ (4 + 2E_1^\mu) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_1^\mu - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ (3.2) \quad & \tilde{M}_{II} = \mu \tilde{k} \left[ (4 + 2E_2^\mu) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 \right) - \mu (E_2^\mu - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ & \tilde{M}_{III} = \mu \tilde{k} \left[ (4 + 2E_3^\mu) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_3^\mu - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ & E_1^\mu \tilde{M}_I = -\mu \tilde{k} \left[ (2 + 4E_1^\mu) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_1^\mu - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ (3.3) \quad & E_2^\mu \tilde{M}_{II} = -\mu \tilde{k} \left[ (2 + 4E_2^\mu) \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 \right) - \mu (E_2^\mu - 1) \frac{6w}{l} \right], \\ & E_3^\mu \tilde{M}_{III} = -\mu \tilde{k} \left[ (2 + 4E_3^\mu) \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Theta^2 \right) - \mu (E_3^\mu - 1) \frac{6w}{l} \right], \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} M_I &= E_1^\mu M_I = \mu k(E_1^\mu - 1) \left( \Theta^1 - \frac{1}{2} \Theta^2 \right), \\ M_{II} &= E_2^\mu M_{II} = \mu k(E_2^\mu - 1) \left( -\frac{1}{2} \Theta^1 + \Theta^2 \right), \\ M_{III} &= E_3^\mu M_{III} = \mu k(E_3^\mu - 1) \left( -\frac{1}{2} \Theta^1 - \frac{1}{2} \Theta^2 \right). \end{aligned}$$

#### 4. Warunki brzegowe zadania oraz równania równowagi w zapisie macierzowym

Równania równowagi węzła (3.1) dotyczące węzła typowego w przypadku sąsiedowania węzła z punktem podporowym degenerują się w zależności od sposobu podparcia rusztu. Będziemy rozpatrywać tu dwa zasadnicze sposoby podparcia, jako mogące mieć zastosowanie przy realizacji konkretnych konstrukcji, mianowicie swobodne podparcie oraz utwierdzenie na obwodzie. W obydwu przypadkach otrzymamy trzy układy brzegowych równań równowagi, w zależności od kierunku  $\mathcal{A}$  pręta, za pośrednictwem którego węzeł łączy się z punktem podparcia.

Pręt  $\mathcal{A}$  nazywamy swobodnie podpartym na brzegu, jeżeli na podporze są spełnione warunki

$$(4.1) \quad E_{\mathcal{A}} \tilde{M} = E_{\mathcal{A}} M_{\mathcal{A}} = E_{\mathcal{A}} \left( \frac{w}{l} \right) = 0.$$

Wykorzystując (4.1) oraz wzory (3.3), (3.4), określimy związane z takim rodzajem podparcia przemieszczenia węzłów podporowych dla każdego z trzech kierunków  $\mathcal{A}$ . Rugując te przemieszczenia z układu równań (3.1) otrzymamy trzy brzegowe równania równowagi węzła o postaci:

$$\text{dla } \mathcal{A} = \text{I:} \quad W_2 E_2^\mu x + W_3 E_3^\mu x + W_4 x = \bar{Q},$$

$$\text{dla } \mathcal{A} = \text{II:} \quad W_1 E_1^\mu x - W_3 E_3^\mu x + W_5 x = \bar{Q},$$

$$\text{dla } \mathcal{A} = \text{III:} \quad W_1 E_1^\mu x + W_2 E_2^\mu x + W_7 x = \bar{Q}.$$

Stosując identyczną formę zapisu do układu (3.1) dla węzła typowego, otrzymamy,

$$(4.2) \quad W_1 E_1^\mu x + W_2 E_2^\mu x + W_3 E_3^\mu x + W_8 x = \bar{Q},$$

gdzie  $W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_7, W_8, x, \bar{Q}$  są macierzami

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} t_6 & t_3 & 0 \\ t_3 & t_1 & -\mu t_{11} \\ 0 & -t_{11} & -\mu t_{13} \end{vmatrix}, & W_2 &= \begin{vmatrix} t_1 & t_3 & \mu t_{11} \\ t_3 & t_6 & 0 \\ t_{11} & 0 & -\mu t_{13} \end{vmatrix}, & W_3 &= \begin{vmatrix} t_1 & t_4 & -\mu t_{11} \\ t_4 & t_1 & \mu t_{11} \\ -t_{11} & t_{11} & -\mu t_{13} \end{vmatrix}, \\ W_4 &= \begin{vmatrix} t_2 & t_5 & 0 \\ t_5 & t_7 & -\mu t_{12} \\ 0 & t_{12} & \mu t_1 \end{vmatrix}, & W_5 &= \begin{vmatrix} t_7 & t_5 & \mu t_{12} \\ t_5 & t_2 & 0 \\ -t_{12} & 0 & \mu t_{14} \end{vmatrix}, & W_7 &= \begin{vmatrix} t_7 & t_8 & -\mu t_{12} \\ t_8 & t_7 & \mu t_{12} \\ t_{12} & -t_{12} & \mu t_{14} \end{vmatrix}, \\ W_8 &= \begin{vmatrix} t_9 & t_{10} & 0 \\ t_{10} & t_9 & 0 \\ 0 & 0 & \mu t_{15} \end{vmatrix}, & x &= \begin{vmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \frac{w}{l} \end{vmatrix}, & \bar{Q} &= \begin{vmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

oraz

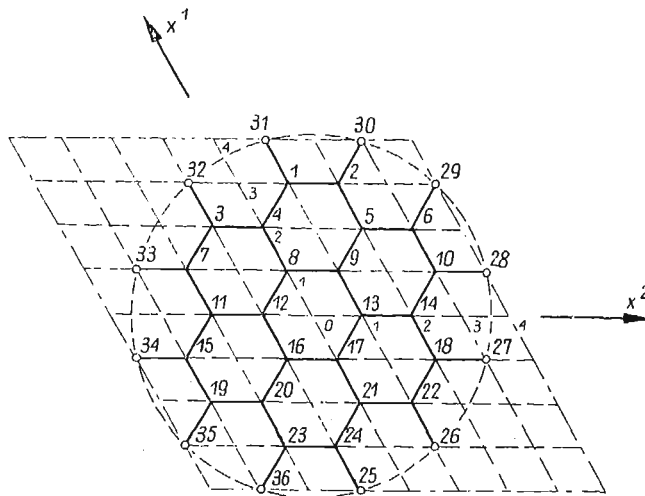
$$\begin{aligned}
 t_1 &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\varkappa, & t_6 &= \varkappa, & t_{11} &= 3\sqrt{3}, & \bar{Q}_1 &= \frac{1}{k} \left( -M_0^1 + \frac{1}{2}M_0^2 \right), \\
 t_2 &= -6 - \frac{1}{2}\varkappa, & t_7 &= -\frac{21}{4} - \frac{5}{4}\varkappa, & t_{12} &= \frac{3\sqrt{3}}{2}, & \bar{Q}_2 &= \frac{1}{k} \left( \frac{1}{2}M_0^1 - M_0^2 \right), \\
 t_3 &= -\frac{1}{2}\varkappa, & t_8 &= \frac{9}{4} + \varkappa, & t_{13} &= 12, & \bar{Q}_3 &= \mu \frac{Pl}{k}, \\
 t_4 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\varkappa, & t_9 &= -6 - \frac{3}{2}\varkappa, & t_{14} &= 27, \\
 t_5 &= 3 + \frac{1}{4}\varkappa, & t_{10} &= 3 + \frac{3}{4}\varkappa, & t_{15} &= 36.
 \end{aligned}$$

Należy zaznaczyć, że w danym przypadku traktujemy działanie operacji  $E_\Delta$  na wektor  $x$  podobnie jak działanie iloczynu wielkości skalarnej na macierz.

W przypadku brzegu utwierdzonego zakładamy, że  $E_\Delta x = 0$ . Stąd bezpośrednio z równania (4.2) otrzymamy dla każdego  $\Delta$  brzegowe, macierzowe równanie równowagi węzła. Wystarczy po prostu przyrównać do zera odpowiedni składnik w równości (4.2). Jednocześnie w przypadku brzegu z wymuszonymi przemieszczeniami otrzymamy równania brzegowe przenosząc na prawą stronę (4.2) człony dla określonego  $\Delta$ .

### 5. Przykład rozwiązania rusztu o kształcie kołowym

Rozpatrzmy obecnie ruszt o kształcie kołowym (rys. 2), obciążony w każdym węźle siłą i momentem zgodnie z przyjętymi założeniami. W celu znalezienia rozwiązania postawionego zagadnienia należy zbudować z otrzymanych poprzednio równań różnic-



Rys. 2

wych opisujących równowagę węzłów układ równań algebraicznych liniowych, w którym niewiadomymi są przemieszczenia. Po rozwiązaniu tego układu w drugim etapie obliczamy wszystkie interesujące nas wartości sił wewnętrznych. Dla rusztu swobodnie podpartego na obwodzie, po dokonaniu przenumrowania jego węzłów zgodnie z rys. 2, otrzymamy układ 72 równań, którego współczynniki tworzą quasi-macierz o charakterze pasmowym przedstawioną w tabl. 1.

Tablica 1

		→ q																									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	$\mu[p]$
↓ p	1	$W_4 W_2$		$W_3$																						$\bar{Q}$	+1
	2	$W_2 W_7$			$W_1$																					$\bar{Q}$	-1
	3			$W_4 W_2$				$W_3$																		$\bar{Q}$	+1
	4	$W_3$		$W_2 W_8$					$W_1$																	$\bar{Q}$	-1
	5		$W_1$			$W_8 W_2$			$W_3$																	$\bar{Q}$	+1
	6					$W_2 W_7$				$W_1$																$\bar{Q}$	-1
	7			$W_3$				$W_5$			$W_1$															$\bar{Q}$	-1
	8				$W_1$				$W_8 W_2$			$W_3$														$\bar{Q}$	+1
	9					$W_3$				$W_2 W_8$			$W_1$													$\bar{Q}$	-1
	10						$W_1$				$W_5$			$W_3$												$\bar{Q}$	+1
	11							$W_1$				$W_8 W_2$			$W_3$											$\bar{Q}$	+1
	12								$W_3$				$W_2 W_8$			$W_1$										$\bar{Q}$	-1
	13									$W_1$				$W_8 W_2$			$W_3$									$\bar{Q}$	+1
	14										$W_3$				$W_2 W_8$			$W_1$								$\bar{Q}$	-1
	15											$W_3$				$W_5$			$W_1$							$\bar{Q}$	-1
	16												$W_1$				$W_8 W_2$			$W_3$						$\bar{Q}$	+1
	17													$W_3$				$W_2 W_8$			$W_1$					$\bar{Q}$	-1
	18														$W_1$				$W_5$			$W_3$				$\bar{Q}$	+1
	19															$W_1$				$W_7 W_2$						$\bar{Q}$	+1
	20																$W_3$				$W_2 W_8$			$W_1$		$\bar{Q}$	-1
	21																	$W_1$				$W_8 W_2$		$W_3$		$\bar{Q}$	+1
	22																						$W_2 W_4$			$\bar{Q}$	-1
	23																							$W_1$	$W_7 W_2$	$\bar{Q}$	+1
	24																								$W_3$	$W_2 W_4$	$\bar{Q}$

W przypadku rusztu tej samej wielkości i kształtu lecz utwierdzonego na obwodzie otrzymamy macierz współczynników podobną do przedstawionej w tabl. 1. Wówczas jedyną różnicą będzie fakt, że na głównej przekątnej wystąpią jedynie podmacierze  $W_8$ .

Wbrew pozorom macierze te nie są symetryczne ze względu na przypisanie każdemu węzłowi określonej wartości funkcji  $\mu$ . W przypadkach takich, ze względu na ograniczone pojemności pamięci maszyn cyfrowych, należy dążyć do korzystania z metod rozwiązywania, które w czasie wykonywania procedury wykorzystują jedynie wyrazy z obszaru

objętego wyrazami niezerowymi. Znane dotychczas metody rozwiązywania układów równań z macierzami pasmowymi wymagają jednak specyficznej i bardzo regularnej budowy macierzy współczynników. Można tu przytoczyć metodę Choleskiego [4], Cornocka [1] oraz metodę eliminacji Gaussa dla macierzy i quasi-macierzy o charakterze trójdziagonalnym [4]. Wymagają one albo symetryczności macierzy, albo określonego podziału jej na podmacierze występujące regularne w całym obszarze lub nawet występowania w ramach takiego podziału macierzy jednostkowych.

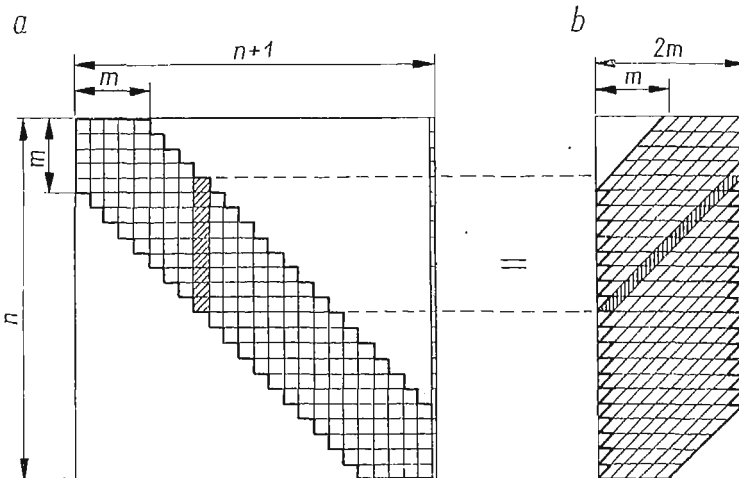
Ze względu na bardzo nieregularny charakter macierzy współczynników występującej w zadaniu powstała konieczność zastosowania bardziej ogólnej procedury. W oparciu o prace [7], [8], [10] opracowano procedurę «DET GAUSS PASMOWY» liczącą w oparciu o metodę kolejnych eliminacji Gaussa i wykorzystującą przy eliminacji wyrazy leżące na głównej przekątnej. Stąd metoda ta może być stosowana jedynie w przypadku, gdy wyrazy te nie są równe zero. Warunek ten nie stanowi jednak ograniczenia przy rozwiązywaniu rozpatrywanych zagadnień. Procedura ta napisana jest w języku Algol 1204. Rozwiązuje ona  $n$  równań z  $n$  niewiadomymi  $(2m-1)$  diagonalnych, gdzie  $m$  oznacza liczbę diagonalni liczoną poziomo od głównej przekątnej do brzegu obszaru niezerowego (rys. 3a). Dzięki odpowiedniemu przenumerowaniu, przy wykonywaniu obliczeń pamiętana jest jedynie tablica współczynników uwidoczniiona na rys. 3b.

W zadaniu obliczenie i ułożenie tej tablicy zlecono maszynie. Przy układaniu programu poczyniono założenia pozwalające na dowolne kształtowanie wymiarów i obciążenia rusztu w ramach przyjętych założeń w p. 1 i 2. Stąd wartościami podawanymi maszynie do wczytania są kolejno: stosunek sztywności pręta  $\kappa$ , jego sztywność giętna  $\tilde{k}$ , wektory składowych obciążeń zewnętrznych  $M_0^1, M_0^2, P$  oraz długość prętów rusztu  $l$ .

Następnie po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy poszukiwane wartości dwóch składowych kątów obrotów oraz ilorazu wartości ugięcia węzła przez długość pręta w kolejności zgodnej z wprowadzoną numeracją. Wykorzystując teraz związki (3.2), (3.4), oraz (3.5) zbudowany został program obliczający siły wewnętrzne występujące w ruszcie. Danymi podawanymi maszynie do wczytania są w danym przypadku:

$s$	parametr określający podparcie ; dla $s = 0$ obliczane są siły dla rusztu swobodnie podpartego na obwodzie, dla $s \neq 0$ — dla rusztu utwierdzonego na obwodzie,
$k^I = \tilde{k}$	sztywność prętów na zginanie,
$k^{II} = k$	sztywność prętów na skręcanie,
$l$	długość prętów rusztu,
$X$	wektor znanych przemieszczeń węzłów — dla $s = 0$ $X = X[1:72]$ , dla $s \neq 0$ $X = X[1:108]$ ,
$a, b, c, b, f, g, h, j,$	jednowymiarowe macierze określające geometrię rusztu, o współczynnikach odpowiadających numerom końców prętów,
$\mu$	wartości tej funkcji dla węzłów zgodnie z przyjętą numeracją.

Przy wykorzystaniu przedstawionych programów przeprowadzono obliczenia zarówno dla rusztu utwierdzonego, jak i swobodnie podpartego na obwodzie przy różnych wartościach  $\kappa$ . Między innymi dla  $\kappa = 0$  uzyskano pełną zgodność z obliczeniami analitycznymi wykonanymi w pracy [3].



Rys. 3

cal procedure DET GAUSS PASMOWY (n,m,b,x);  
 comment rozwiązuje n równan algebraicznych liniowych z n niewiadomymi, (2m-1) diagonalnych, sprowadzonych  
 do tablicy b[1:n, 1:2m];

```

value m,n;
integer m, n;
array b, x;
begin
integer N, c, h, H, d, i, j, e1;
real s, r, t, k, l, p;
N:=2*m;
c:=n-m+1;
begin comment obliczanie nowych współczynników b[i, j] dla obszaru typowego;
for h:=1 step 1 until c do
begin d:=h+m-1; s:=b[h, m]; H:=h+1; r:=b[h, N]:=b[h, N]/s;
for i:=h+1 step 1 until d do
begin
b[i, N]:=b[i, N]-b[i, m-i+h]*r
end;
for j:=H step 1 until d do
begin
t:=b[h, m-h+j]:=b[h, m-h+j]/s;
for i:=H step 1 until d do
b[i, m-i+j]:=b[i, m-i+j]-b[i, m-i+h]*t
end j
end h
end;
begin comment obliczanie nowych współczynników b[i, j] dla pozostałej macierzy prostokątnej;
for h:=n-m+2 step 1 until n do
begin k:=b[h, m]; H:=h+1; r:=b[h, N]:=b[h, N]/k;
for i:=H step 1 until n do
begin
b[i, N]:=b[i, N]-b[i, m-i+h]*r
end;
for j:=H step 1 until n do
begin l:=b[h, m-h+j]:=b[h, m-h+j]/k;
for i:=H step 1 until n do
b[i, m-i+j]:=b[i, m-i+j]-b[i, m-i+h]*l
end j
end h
end;
begin comment obliczanie niewiadomych x[h] dla obszaru nictypowego;
for h:=n step -1 until c do
begin p:=b[h, N];
for j:=h+1 step 1 until n do
p:=p-b[h, m-h+j]*x[j]; x[h]:=p
end h
end;
begin comment obliczanie niewiadomych x[h] Dla obszaru typowego;
for h:=n-m step -1 until 1 do
begin p:=b[h, N]; cf:=h+m-1;
for j:=h+1 step 1 until cf do
p:=p-b[h, m-h+j]*x[j]; x[h]:=p
end h
end
end procedure DET GAUSS PASMOWY;

```



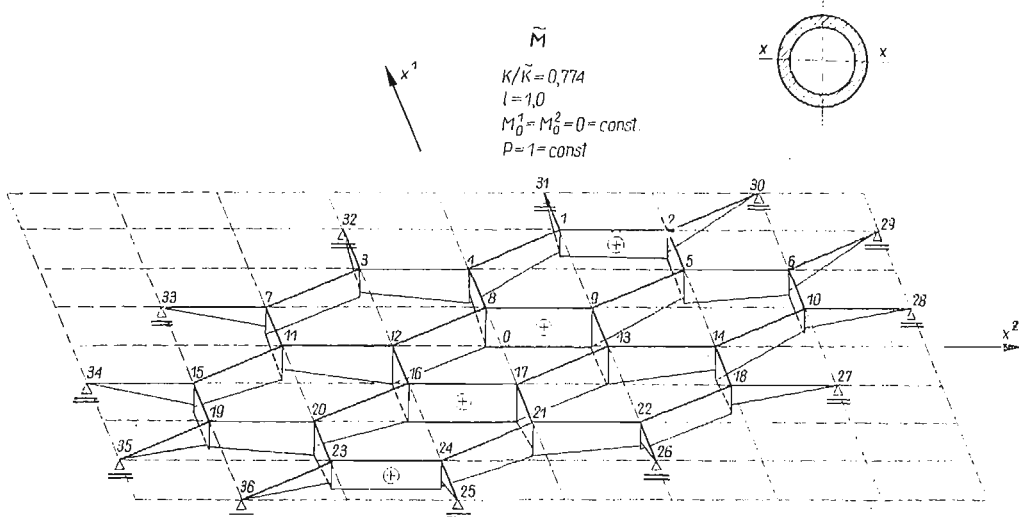
Objaśnienie do rys. 4:

preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$	preł		$\frac{\tilde{M}}{Pl}$			
	31	2,00		8	2,45		11	2,28		6	2,55		9	3,45		12	3,45		15	2,55		26	2,00
1	2	2,55	4	3	3,28	7	33	2,00	10	28	2,00	13	14	3,45	16	17	3,45	19	20	2,28	22	21	2,28
	4	2,28		1	3,28		3	2,55		14	2,28		17	3,45		20	3,45		35	2,00		18	2,55
	5	2,28		2	3,28		4	3,45		7	3,28		18	3,28		21	3,45		23	3,28		20	2,28
2	1	2,55	5	6	3,28	8	9	3,45	11	12	2,45	14	13	2,45	17	16	3,45	20	16	3,28	23	24	2,55
	30	2,00		9	2,45		12	3,45		15	3,28		10	3,28		13	3,45		16	2,45		36	2,00
	32	2,00		10	2,55		13	3,45		16	3,45		19	2,55		14	2,28		17	2,45		25	2,00
3	4	2,28	6	5	2,28	9	8	3,45	12	11	3,45	15	34	2,00	18	27	2,00	21	22	3,28	24	23	2,55
	7	2,55		29	2,00		5	3,45		8	3,45		11	2,28		22	2,55		24	3,28		21	2,28

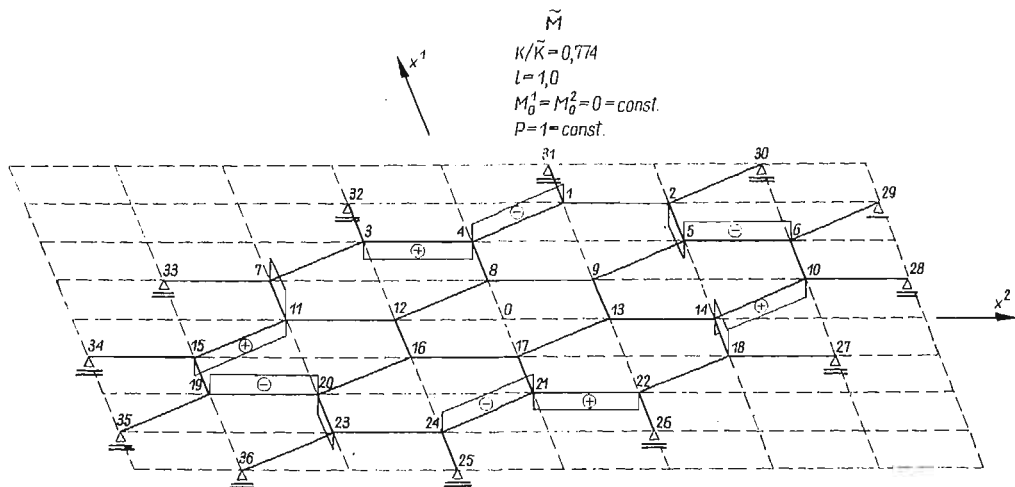
Objaśnienie do rys. 5:

preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$	preł		$\frac{M}{Pl}$			
	31	0		8	0		11	-0,478		6	0		9	0		12	0		15	0		26	0
1	2	0	4	3	+0,478	7	33		10	28	0	13	14	0	16	17	0	19	20	-0,478	22	21	+0,478
	4	-0,478		1	-0,478		3	0		14	+0,478		17	0		20	0		35	0		18	0
	5	+0,478		2	+0,478		4	0		7	-0,478		18	-0,478		21	0		23	+0,478		20	+0,478
2	1	0	5	6	-0,478	8	9	0	11	12	0	14	13	0	17	16	0	20	19	-0,478	23	24	0
	30	0		9	0		12	0		15	+0,478		10	+0,478		13	0		16	0		36	0
	32	0		10	0		13	0		16	0		19	0		14	-0,478		71	0		25	0
3	4	+0,478	6	5	-0,478	9	8	0	12	11	0	15	34	0	18	27	0	21	22	+0,478	24	23	0
	7	0		29	0		5	0		8	0		11	+0,478		22	0		24	-0,478		21	-0,478

Dla przykładu na rys. 4 i 5 przedstawione zostały wyniki obliczeń dla rusztu swobodnie podpartego na obwodzie i obciążonego w węzłach jedynie siłami  $P = \text{const}$ , przy stosunku sztywności  $\kappa = 0,774$ . Odpowiada to dla współczynnika Poissona  $\nu = 0,29$  (dla stali) przekrojowi pierścieniowemu pręta.



Rys. 4



Rys. 5

## 6. Wnioski

Przedstawiona metoda rozwiązywania prętowych rusztów heksagonalnych daje pełne rozwiązanie postawionego zagadnienia, w którym uwzględnia się równocześnie skręcanie prętów. Możliwość rozwiązywania rusztów poddanych złożonym obciążeniom oraz posiadających dowolne kształty wyraźnie przemawia za rozwiązaniami numerycznymi jako znacznie efektywniejszymi niż metody analityczne.

Wprowadzenie operatorów różnicowych do równań macierzowych pozwoliło zapisać w sposób bardzo przejrzysty i zwięzły stan równowagi węzłów. Ponadto wykorzystując te równania, bez dodatkowych obliczeń, otrzymujemy gotowy ogólny układ równań algebraicznych liniowych z niewiadomymi przemieszczeniami. Zastosowanie do rozwiązywania tego układu procedury «DET GAUSS PASMOWY» pozwala na obliczanie tego typu konstrukcji zawierających dość dużą liczbę węzłów, ze względu na wykorzystanie pasmowego charakteru macierzy współczynników układu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. F. CORNOCK, *The numerical solutions of Poisson's and the bi-harmonic equations by matrices*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **50** (1954).
2. W. GUTKOWSKI, C. P. UGARTE, *A generalized micro-approach of two dimensional structures*, Department of Civil Engineering, University of Delaware, **9** (1967).
3. W. GUTKOWSKI, J. OBRĘBSKI, *Ruszt o sześciokątnej siatce prętów*, Rozpr. Inżyn., **19**, 3 (1971).
4. W. M. JENKINS, *Matrix and digital computer methods in structural analysis*, McGraw-Hill, London 1969.
5. C. JORDAN, *Calculus of finite differences*, Chelsea Pub. Com., New York 1950.
6. P. KLEMM, Cz. WOŹNIAK, *Gęste heksagonalne siatki sprężyste*, Mech. Teoret. i Stos., **3**, 8 (1970).
7. S. PASZKOWSKI, *Język ALGOL 60*, PWN, Warszawa 1968.
8. P. R. PATHARE, *A computational technique for the efficient handling of the large matrices in the analysis of large space structures*, «Space structures», Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967.
9. J. D. RENTON, *The related behaviour of plane grids, space grids and plates*, «Space structures», Blackwell Scientific Publications, Oxford and Edinburgh 1967.
10. A. F. SMIRNOW, A. W. ALEKSANDROW, N. N. SZAPOSZNIKOW, B. J. ŁASZCZENIKOW, *Obliczanie konstrukcji za pomocą maszyn cyfrowych*, ARKADY, Warszawa 1970.

#### Р е з ю м е

#### ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН ДЛЯ РЕШЕНИЯ РОСТВЕРКОВ С РЕГУЛЯРНОЙ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СЕТКОЙ

Изложен метод численного решения регулярного гексагонального плоского ростверка, состоящего из прямых упругих стержней, образующих в плоскости сетку правильных шестиугольников. Ростверк нагружен в узлах силами, перпендикулярными к плоскости сооружения, и моментами, векторы которых расположены в той же плоскости.

Метод иллюстрируется на примере ростверка вписанного в круг, диаметр которого равен приблизительно восьми длинам стержней сетки.

#### S u m m a r y

#### APPLICATION OF DIGITAL COMPUTERS TO THE SOLUTION OF REGULAR HEXAGONAL GRIDWORKS

The paper presents the method of numerical solution of regular, hexagonal plane grids consisting of straight elastic rods which form a network of regular hexagons. The grid is loaded at its nodes by the forces perpendicular to the plane and by the couples with vectors lying in the plane of the structure. The considerations are illustrated by a solution of a gridwork bounded by a circle of a radius approximately equal to eight lengths of the rods of the lattice.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 marca 1971 r.

WPLYW JEDNOCZESNEGO NIEJEDNORODNEGO TARCIA WEWNĘTRZNEGO  
I ZEWNĘTRZNEGO NA STATECZNOŚĆ UKŁADÓW NIEKONSERWATYWNYCH

ANTONI GAJEWSKI, MICHAŁ ŻYCZKOWSKI (KRAKÓW)

1. Wstęp

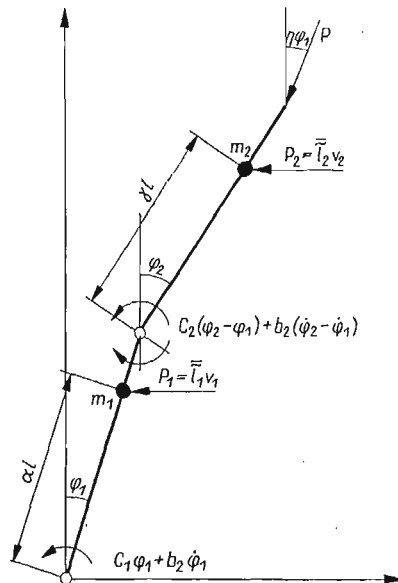
W ostatnich latach wiele uwagi poświęcono paradoksalnemu zjawisku destabilizacji tzn. znacznemu obniżeniu siły krytycznej, powodującej utratę stateczności ruchu układów niekonserwatywnych, w których uwzględniono tarcie wewnętrzne materiału i zastosowano kinetyczne kryterium stateczności; destabilizacja występuje nawet w przypadku, gdy parametr charakteryzujący to tarcie zmierza do zera. Po raz pierwszy zwrócił uwagę na to zjawisko ZIEGLER [14], a w dalszym ciągu ZORIJ i LEONOW [15] zbadali szczegółowo tzw. model Zieglera (układ dwóch sztywnych prętów połączonych przegubowo), obciążony niekonserwatywną siłą ściskającą, dla dowolnych wartości współczynnika śledzenia. Założyli oni, że w przegubach występują momenty tłumiące ruch proporcjonalne do względnej prędkości kątowej prętów modelu. Identyczne zagadnienie rozwiązano w pracach HERRMANNNA i JONGA [4, 5]. Efekt destabilizacji zbadano również w pracy NEMAT-NASSERA, PRASADA i HERRMANNNA [10] na przykładzie wspornikowej, ciągłej rurki przewodzącej płyn ze stałą prędkością. Wykazano, że dowolnie małe siły zależne od prędkości, takie jak zewnętrzne tłumienie i siły Coriolisa mają wpływ destabilizujący, natomiast zewnętrzne tłumienie wiskotyczne nie ma takiego wpływu. Ponadto NEMAT-NASSER i HERRMANN [11] udowodnili, że obciążenia krytyczne, powodujące utratę stateczności układu dyskretnego o  $N$  stopniach swobody bez tłumienia, jest kresem górnym dla obciążenia krytycznego tego samego układu poddanego dodatkowo działaniu pewnych dowolnie małych sił, będących liniowymi funkcjami uogólnionych prędkości. Ostatnio w pracy SHIELDA [12] zastosowano uogólnioną metodę wariacyjną do problemów niekonserwatywnych oraz rozwiązano problem stateczności pręta wspornikowego ściskanego siłą śledzącą, z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego (materiał pręta opisany jest modelem Voigta-Kelvina). Porównano wyniki uzyskane za pomocą metody Galerkina z wynikami ścisłymi.

We wszystkich wymienionych pracach uwzględniano niezależnie od siebie tłumienie wewnętrzne lub tłumienie zewnętrzne (opór wiskotyczny). Dopiero DŻYGADŁO i SOLARZ badając wymuszone, parametryczno-samowzbudne i wymuszone parametrycznie pobudzone drgania pręta ściskanego okresowo zmienną lub stałą siłą śledzącą wyznaczyli siłę krytyczną w zależności od parametrów charakteryzujących tłumienie wewnętrzne (model Voigta-Kelvina) i zewnętrzne (opór wiskotyczny).

Celem niniejszej pracy również jest uwzględnienie wpływu obu tych oporów równocześnie na siłę krytyczną, a ponadto zbadanie wpływu niejednorodności tarcia wewnętrznego i zewnętrznego. W części drugiej przeanalizujemy stateczność modelu ZIEGLERA [14], (podwójne wahadło), w którym przyjmiemy dodatkowo istnienie tarcia wiskotycznego w przegubach oraz działanie, na sztywne pręty modelu, skupionych sił oporu, proporcjonalnych do liniowych prędkości w punktach zaczepienia tych sił. W części trzeciej zbadamy stateczność rzeczywistego pręta wspornikowego ściskanego siłą niekonserwatywną o zmieniającym się kierunku (w pełnym zakresie współczynnika śledzenia), zakładając, że materiał pręta może być opisany modelem Voigta-Kelvina (tłumienie wiskotyczne) oraz że pręt porusza się w ośrodku lepkiem o tarcie wiskotycznym (tłumienie zewnętrzne). Wyniki uzyskane w części drugiej będą ścisłymi dla modelu, natomiast w części trzeciej zastosujemy przybliżoną metodę energetyczną, równoważną metodzie Ritz'a.

## 2. Destabilizacja modelu Zieglera

2.1. Podwójne wahadło przedstawione na rys. 1 poddane jest działaniu ściskającej siły niekonserwatywnej. Kierunek działania siły po wyboczeniu modelu określony jest przez współczynnik śledzenia  $\eta$ , zdefiniowany jako stosunek kąta zawartego między kierunkiem



Rys. 1

siły (po wyboczeniu) a nieodkształconą osią modelu do kąta nachylenia stycznej na swobodnym końcu. Założymy, że przeguby scharakteryzowane są przez stałe sprężystości  $c_1$  i  $c_2$  oraz przez współczynniki  $b_1$  i  $b_2$ , określające tłumienie (momenty tłumiące są odpowiednio równe:  $b_1\dot{\varphi}_1$  i  $b_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$ ), a masy  $m_1$  i  $m_2$  umieszczone są w odległościach  $\alpha l$  i  $\gamma l$  od przegubów). Przyjmujemy, iż na masy te działają punktowe siły oporu wiskotycznego,

proporcjonalne do prędkości liniowych mas:  $P_1 = \bar{\tau}_1 v_1$  i  $P_2 = \bar{\tau}_2 v_2$  ( $\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2$  — stałe określające wielkości tych sił).

Aby zbadać stateczność układu dla dowolnych wartości  $\eta$ , przeanalizujemy ruch układu (małe drgania) w pobliżu położenia równowagi. Wykorzystamy w tym celu równania Lagrange'a drugiego rodzaju, w których siły dysypatywne ujęto dodając wyrazy  $\frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_i}$  [7]

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\varphi}_i} = Q_i, \quad i = 1, 2.$$

W równaniach tych, przy założeniu, że kąty  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$  są małe, należy przyjąć:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} l^2 \left[ \left( m_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} m_2 \right) \dot{\varphi}_1^2 + m_2 \gamma \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + m_2 \gamma^2 \dot{\varphi}_2^2 \right], \\ V &= \frac{1}{2} [(c_1 + c_2) \varphi_1^2 - 2c_2 \varphi_1 \varphi_2 + c_2 \varphi_2^2], \\ D &= \frac{1}{2} [(b_1 + b_2) \dot{\varphi}_1^2 - 2b_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( (\alpha^2 \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_2) \dot{\varphi}_1^2 + \gamma \tau_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + \gamma^2 \tau_2 \dot{\varphi}_2^2 \right) \right], \\ Q_1 &= \frac{1}{2} Pl(\varphi_1 - \eta \varphi_2), \quad Q_2 = \frac{1}{2} Pl(1 - \eta) \varphi_2, \end{aligned}$$

$T$  oznacza tu energię kinetyczną układu,  $V$  — potencjał sił sprężystych,  $D$  — funkcję dysypacji,  $Q_1$  i  $Q_2$  — siły uogólnione (niepotencjalne),  $\tau_1 = l^2 \bar{\tau}_1$ ,  $\tau_2 = l^2 \bar{\tau}_2$ . Równania (2.1) prowadzą do układu równań różniczkowych liniowych:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \left( m_1 \alpha^2 + \frac{1}{4} m_2 \right) l^2 \ddot{\varphi}_1 + \left[ (b_1 + b_2) + \left( \alpha^2 \tau_1 + \frac{1}{4} \tau_2 \right) \right] \dot{\varphi}_1 + \left( c_1 + c_2 - \frac{1}{2} Pl \right) \varphi_1 + \\ + \frac{1}{2} m_2 \gamma l^2 \ddot{\varphi}_2 + \left( -b_2 + \frac{1}{2} \gamma \tau_2 \right) \dot{\varphi}_2 + \left( \frac{1}{2} Pl \eta - c_2 \right) \varphi_2 = 0, \\ \frac{1}{2} m_2 \gamma l^2 \ddot{\varphi}_1 + \left( -b_2 + \frac{1}{2} \gamma \tau_2 \right) \dot{\varphi}_1 - c_2 \varphi_1 + m_2 \gamma^2 l^2 \ddot{\varphi}_2 + \\ + (b_2 + \gamma^2 \tau_2) \dot{\varphi}_2 + \left[ c_2 - \frac{1}{2} Pl(1 - \eta) \right] \varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci

$$(2.4) \quad \varphi_1 = C_1 e^{\omega t}, \quad \varphi_2 = C_2 e^{\omega t},$$

oraz wprowadzając bezwymiarowe wielkości:

$$\begin{aligned} \Omega &= l \left( \frac{m_2}{c_2} \right)^{1/2} \omega, \quad \beta = \frac{Pl}{c_2}, \quad \mu = \frac{m_1}{m_2}, \quad \psi = \frac{c_1}{c_2}, \\ B_i &= \frac{b_i}{l \sqrt{m_2 c_2}}, \quad T_i = \frac{\tau_i}{l \sqrt{m_2 c_2}}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

otrzymujemy układ liniowych i jednorodnych równań na stałe  $C_1$  i  $C_2$ :

$$(2.6) \quad \left\{ \left( \mu\alpha^2 + \frac{1}{4} \right) \Omega^2 + \left[ (B_1 + B_2) + \left( \alpha^2 T_1 + \frac{1}{4} T_2 \right) \right] \Omega + \left( 1 + \psi - \frac{1}{2} \beta \right) \right\} C_1 + \\ + \left\{ \frac{1}{2} \gamma \Omega^2 + \left( -B_2 + \frac{1}{2} \gamma T_2 \right) \Omega + \left( \frac{1}{2} \beta \eta - 1 \right) \right\} C_2 = 0, \\ \left\{ \frac{1}{2} \gamma \Omega^2 + \left( -B_2 + \frac{1}{2} \gamma T_2 \right) \Omega - 1 \right\} C_1 + \\ + \left\{ \gamma^2 \Omega^2 + (B_2 + \gamma^2 T_2) \Omega + \left( 1 - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} \beta \eta \right) \right\} C_2 = 0.$$

Wyznacznik tego układu przyrównany do zera określa bezwymiarowy, na ogół zespolony, parametr częstości (urojonej częstości)  $\Omega$  w zależności od wielkości siły ściskającej  $\beta$ , parametrów charakteryzujących tłumienie  $B_i$  i  $T_i$  oraz pozostałych parametrów:

$$(2.7) \quad 8\mu\alpha^2\gamma^2\Omega^4 + [8\gamma^2 B_1 + 2(1+4\gamma+4\gamma^2+4\mu\alpha^2) B_2 + 8\alpha^2\gamma^2 T_1 + 8\mu\alpha^2\gamma^2 T_2] \Omega^3 + \\ + \{ [2(1+4\mu\alpha^2) + 8\gamma^2(1+\psi) + 8\gamma] - \beta[(1-\eta)(1+4\mu\alpha^2) + 4\gamma^2 + 2\eta\gamma] + \\ + 8B_1 B_2 + 8\gamma^2 B_1 T_2 + 2(1+4\gamma+4\gamma^2) B_2 T_2 + 8\alpha^2 B_2 T_1 + 8\alpha^2\gamma^2 T_1 T_2 \} \Omega^2 + \\ + \{ 4(2-\beta+\eta\beta) B_1 + 8(\psi+\eta\beta-\beta) B_2 + 4(2\alpha^2 - \alpha^2\beta + \alpha^2\eta\beta) T_1 + \\ + [2(1+4\gamma+4\gamma^2) + 8\gamma^2\psi + \beta(\eta-1-4\gamma^2-2\eta\gamma)] T_2 \} \Omega + \\ + [8\psi - 4(1-\eta)(2+\psi)\beta + 2(1-\eta)\beta^2] = 0.$$

Jeśli tylko wszystkie pierwiastki równania (2.7) mają ujemne części rzeczywiste, to ruch układu jest stateczny; ruch przestaje być stateczny, gdy chociaż jeden z pierwiastków będzie miał część rzeczywistą dodatnią. Przyrównanie części rzeczywistych pierwiastków równania (2.7) do zera prowadzi do tzw. kinetycznego kryterium stateczności, pozwalającego na obliczenie siły krytycznej, powodującej zamianę drgań ustalonych z malejącą amplitudą na drgania z amplitudą rosnącą w czasie. W przypadku równania czwartego stopnia kryterium Routha–Hurwita pozwala na obliczenie poszukiwanej siły krytycznej.

Układ traci również stateczność (przez wyboczenie), gdy istnieje sąsiednie, dowolnie bliskie, odkształcone położenie równowagi trwałej. Zachodzi to wówczas, gdy wyraz wolny równania (2.7) jest równy zeru (kryterium statyczne,  $\Omega = 0$ ).

Siła krytyczna obliczona w oparciu o kryterium statyczne (w zakresie, w którym to jest możliwe) jest na ogół niższa od siły krytycznej obliczonej z kryterium kinetycznego, chociaż, jak wykazano w pracy [3], nie jest to ogólna reguła.

Dla uproszczenia dalszych obliczeń założymy, że równe sobie masy są umieszczone w środku sztywnych prętów oraz, że stałe sprężystości w przegubach są również sobie równe, tzn. przyjmujemy:  $\alpha = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{4}$ ,  $\mu = 1$ ,  $\psi = 1$ . Równanie (2.7) przybiera wobec tego postać

$$(2.8) \quad \Omega^4 + (16B_1 + 160B_2 + T_1 + T_2) \Omega^3 + [176 - 24(2-\eta)\beta + 256B_1 B_2 + \\ + 16B_1 T_2 + 144B_2 T_2 + 16B_2 T_1 + T_1 T_2] \Omega^2 + \{ 128(2-\beta+\eta\beta) B_1 + \\ + 256(1+\eta\beta-\beta) B_2 + 8(2+\eta\beta-\beta) T_1 + [160 + 8(2\eta-5)\beta] T_2 \} \Omega + \\ + 64[4 - 6(1-\eta)\beta + (1-\eta)\beta^2] = 0.$$

Kryterium statyczne pozwala na obliczenie siły krytycznej tylko w pewnym zakresie zmienności współczynnika śledzenia  $\eta$  i polega na przyrównaniu do zera wyrazu wolnego równania (2.8). Otrzymana w ten sposób siła krytyczna

$$(2.9) \quad \beta_{1,2} = \frac{3(1-\eta) \mp \sqrt{(1-\eta)(5-9\eta)}}{1-\eta}$$

nie zależy od parametrów charakteryzujących tłumienie.

W przedziale, w którym kryterium statyczne nie prowadzi do rozwiązania (w naszym przypadku  $5/9 < \eta < 1$ ), musimy stosować kryterium kinetyczne. Ruch typu (2.4) jest stateczny, jeśli częstość kołowa  $\Omega$  nie ma dodatniej części rzeczywistej. Warunkiem koniecznym stateczności w przypadku wielomianu czwartego stopnia typu (2.8)

$$(2.10) \quad L\Omega^4 + M\Omega^3 + N\Omega^2 + S\Omega + R = 0$$

jest spełnienie nierówności

$$(2.11) \quad LS^2 - MNS + M^2R < 0.$$

Jeśli dodatkowo wszystkie współczynniki równania (2.10) są dodatnie, to jest to również warunek wystarczający, znany pod nazwą kryterium stateczności ruchu Routha-Hurwitza [7]. Przyrównanie do zera wyrażenia (2.11) pozwoli rozgraniczyć stateczny obszar ruchu od niestatecznego.

Należy tu zwrócić uwagę na fakt, iż nieuwzględnienie tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego, tzn. założenie od początku, że  $B_1 = B_2 = T_1 = T_2 = 0$  prowadzi do równania dwukwadratowego na częstość drgań ( $M = S = 0$ ), dla którego kryterium kinetyczne stateczności ma postać

$$(2.12) \quad N^2 - 4LR = 0.$$

Kryterium to można otrzymać z (2.11) tylko przy założeniu, że współczynniki  $M$  i  $S$  zmierzają do zera w ten sposób, aby spełniona była zależność

$$(2.13) \quad \frac{M}{S} = \frac{N}{2R},$$

która, oczywiście, na ogół nie jest spełniona. Wobec tego, kryterium (2.11) pozwala obliczyć siłę krytyczną przy tłumieniu zmierzającym do zera z reguły różną od obliczonej w oparciu o kryterium (2.12).

Tak więc w przypadku braku tłumienia z równania (2.12) otrzymujemy

$$(2.14) \quad \beta_{1,2} = \frac{6(20-9\eta) \pm 12\sqrt{-9\eta^2 + 14\eta - 4}}{9\eta^2 - 32\eta + 32}.$$

Uwzględniając tłumienie korzystamy z kryterium (2.11), które prowadzi do równania kwadratowego na siłę krytyczną

$$(2.15) \quad A\beta^2 - B\beta + C = 0, \quad \beta_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$



gdzie

$$\begin{aligned}
 A &= b^2 - bce + 64(1-\eta)c^2, \\
 B &= 2ab - bcd - ace + 384(1-\eta)c^2, \\
 C &= a^2 - acd + 256c^2, \\
 (2.16) \quad a &= 256 + 256\zeta + 16\kappa + 160\xi\kappa, \\
 b &= (1-\eta)(128 + 256\zeta + 8\kappa) - 8(2\eta - 5)\xi\kappa, \\
 c &= 16 + 160\zeta + \kappa + \xi\kappa, \\
 d &= 176 + B_1^2(256\zeta + 16\xi\kappa + 144\zeta\xi\kappa + 16\zeta\kappa + \xi\kappa^2), \\
 e &= 24(2-\eta).
 \end{aligned}$$

Wprowadzono tu następujące parametry:

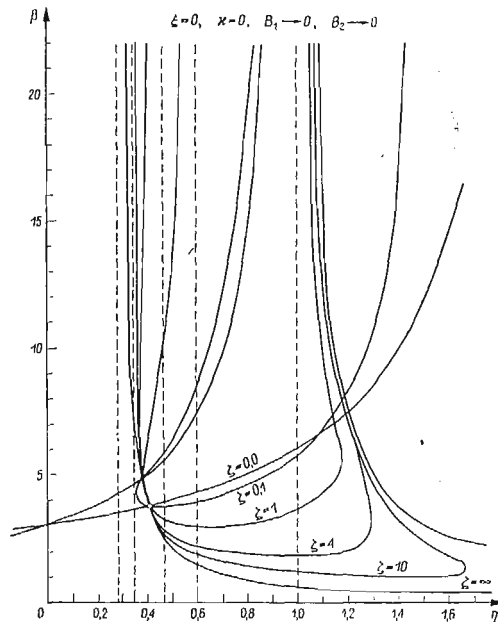
$B_2/B_1 = \zeta$  — charakteryzuje niejednorodność tłumienia wewnętrznego;

$T_2/T_1 = \xi$  — charakteryzuje niejednorodność tłumienia zewnętrznego;

$T_1/B_1 = \kappa$  — charakteryzuje stosunek wielkości tłumienia zewnętrznego do wewnętrznego.

Przedstawimy teraz kilka szczególnych przypadków rozwiązania równania (2.15).

**2.2. Brak tłumienia zewnętrznego:**  $T_1 = T_2 = 0$ . Na rys. 2 przedstawiono zależność siły krytycznej  $\beta$  od współczynnika śledzenia  $\eta$  w przypadku, gdy tłumienie wewnętrzne zmierza

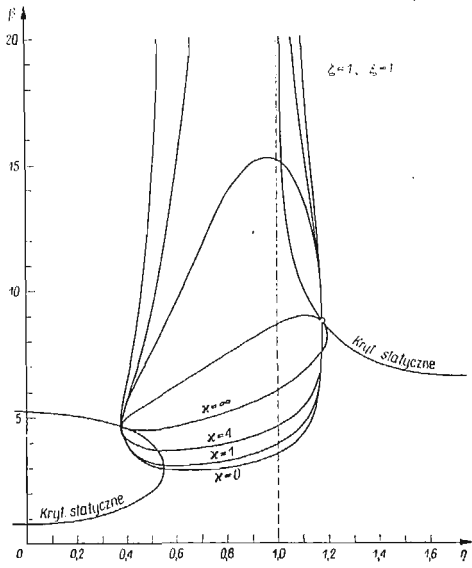


Rys. 2

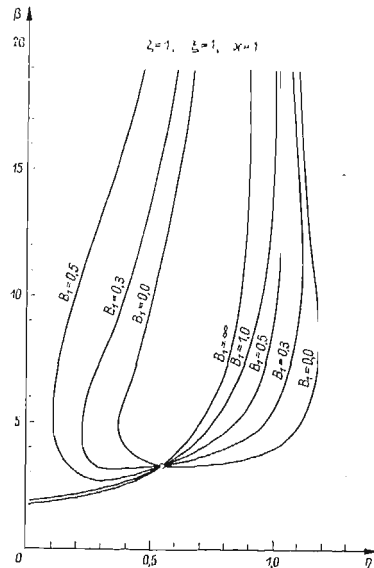
do zera, a stosunek tłumień w przegubach jest stały ( $\xi = 0, \kappa = 0, B_1 \rightarrow 0, B_2 \rightarrow 0, \frac{B_2}{B_1} = \zeta$ ). Stopień destabilizacji zależy tu w istotny sposób od parametru  $\zeta$ ; dla  $\zeta \rightarrow \infty$  destabilizacja jest największa. Gdy  $\eta = 1$ , siła krytyczna jest dziesięciokrotnie mniejsza od siły krytycznej obliczonej bez uwzględnienia tłumień.

2.3. Brak tłumienia wewnętrznego:  $B_1 = B_2 = 0$ ,  $T_1 \rightarrow 0$ ,  $T_2 \rightarrow 0$ . Zależnie od parametru  $\xi$  otrzymujemy krzywe  $\beta(\eta)$  niewiele odbiegające od przypadku, gdy nie ma tłumienia. Na przykład dla  $\xi = 0$  i  $\xi = \infty$  otrzymujemy krzywą  $\zeta = 0$  z rys. 2, dla  $\xi = 1$  wykres  $\beta(\eta)$  pokrywa się z wykresem otrzymanym w przypadku gdy nie ma tłumienia. Wyniki obliczeń świadczą o tym, iż niejednorodne tłumienie zewnętrzne może również powodować destabilizację układu, chociaż w naszym przypadku jest ona bardzo mała. Przy sile śledzącej ( $\eta = 1$ ) destabilizacja nie występuje w ogóle.

2.4. Jednorodne równoczesne tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne. Gdy tłumienia są jednorodne ( $\zeta = 1$ ,  $\xi = 1$ ) i zbieżają do zera, jednak w ten sposób, aby ich stosunek był stały, otrzymujemy krzywe przedstawione na rys. 3. Jak widać stopień destabilizacji zależy od sto-



Rys. 3



Rys. 4

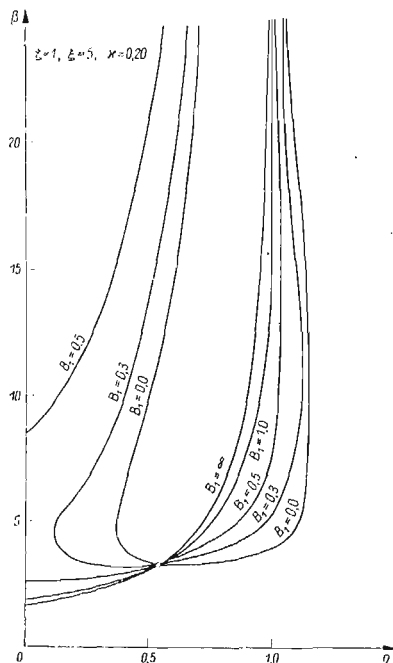
sunku tłumienia zewnętrznego do wewnętrznego i nie jest tak duży jak w przypadku 2.2. W przypadku jednorodnych tłumień ( $\zeta = 1$ ,  $\xi = 1$ ) i  $\kappa = 1$  nie zbieżających do zera, otrzymujemy wykresy przedstawione na rys. 4. Wzrost tłumienia powoduje wzrost siły krytycznej, jednak tylko do pewnej granicy.

Ogólnie, gdy  $B_1 \rightarrow \infty$  otrzymujemy:

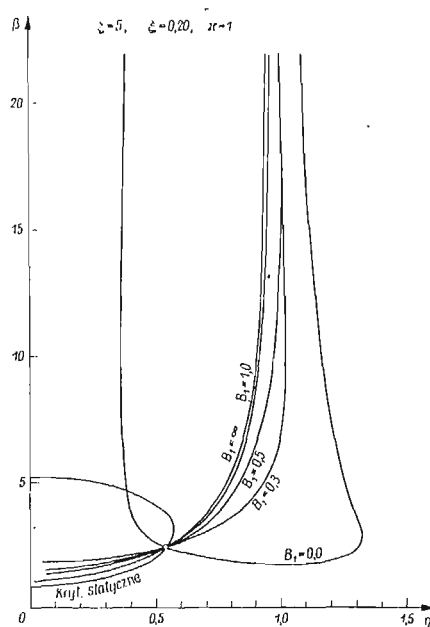
$$(2.17) \quad \beta = \frac{256 + 256\zeta + 16\kappa + 160\xi\kappa}{(1-\eta)(128 + 256\zeta + 8\kappa) - 8(2\eta - 5)\xi\kappa}$$

2.5. Niejednorodne równoczesne tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne. Na rys. 5 i 6 przedstawiono rodziny krzywych w przypadkach silnych niejednorodności tłumień, wybierając następujące parametry:  $\zeta = 1$ ,  $\xi = 5$ ,  $\kappa = 1/5$  na rys. 5 i  $\zeta = 5$ ,  $\xi = 1/5$ ,  $\kappa = 1$ , na rys. 6.

Z przedstawionych rys. 2, 3, 4, 5 i 6 wynika, iż siła krytyczna bardzo silnie zależy od niejednorodności tłumień oraz ich stosunku. Dla ustalonych parametrów  $\zeta$ ,  $\xi$  i  $\kappa$  różnie



Rys. 5



Rys. 6

ona ze wzrostem tłumienia do pewnej wartości granicznej. Przy tłumieniach zmierzających do zera stopień destabilizacji jest znacznie mniejszy, gdy uwzględnimy tłumienie zewnętrzne.

### 3. Destabilizacja pręta wspornikowego (metoda energetyczna)

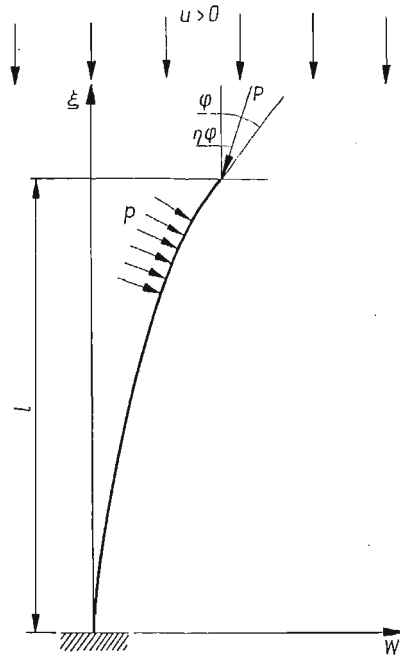
Przejdziemy obecnie do zbadania wpływu tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego na siłę krytyczną powodującą utratę stateczności pręta jednostronnie utwierdzonego. Założymy ogólnie, że niepryzmatyczny pręt (rys. 7) znajduje się w strumieniu płynu, poruszającym się z prędkością  $U$  w kierunku równoległym do jego nieodkształconej osi. Przyjmujemy, że niepryzmatyczność pręta opisana jest funkcją określającą zmianę momentu bezwładności przekroju poprzecznego

$$(3.1) \quad g(\xi) = \frac{J(\xi)}{J_0}, \quad J_0 = J(0).$$

Zastosujemy proste, tzw. «łukowe» prawo opływu pręta (podobnie jak w pracy KORDAS [8]), zgodnie z którym obciążenie boczne wywierane na jednostkę długości pręta jest równe

$$(3.2) \quad p = 2Bb(\xi) \left( U \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial w}{\partial t} \right), \quad b(\xi) = b_0 f_3(\xi),$$

gdzie  $B = (p_0 \gamma_0) / c_0$  jest stałą charakteryzującą własności płynu. Dla gazu  $c_0$  oznacza prędkość dźwięku,  $\gamma_0$  — wykładnik politropy,  $U$  — prędkość strumienia,  $b(\xi)$  — zmienną szerokość płytki,  $w$  — ugięcie pręta w punkcie  $\xi$ . Jak łatwo można wykazać [8], człon  $2Bb(\xi) \partial w / \partial t$  we wzorze (3.2) stanowi ciśnienie wywierane przez płyn na pręt, wynikające z dodatkowego ruchu drgającego pręta w poruszającym się strumieniu. Tak więc, w przypadku płynu spoczywającego ( $U = 0$ ) funkcja  $2Bb(\xi)$  charakteryzuje tłumienie zewnętrzne (wiskotyczne) ruchu pręta w płynie i może być, niezależnie od zmiennej szerokości pręta, przyjęta dowolnie jako funkcja określająca niejednorodność tłumienia zewnętrznego. Składową pionową ciśnienia występującą przy opływie pręta niepryzmatycznego pomijamy



Rys. 7

jako małą drugiego rzędu. Oprócz ciśnienia bocznego na swobodny koniec pręta działa niekonserwatywna siła ściskająca, której kierunek działania ulega zmianom w czasie ruchu pręta i jest określony przez współczynnik śledzenia  $\eta$  (rys. 7).

Aby uwzględnić również tłumienie wewnętrzne materiału pręta założymy, iż może on być opisany prostym modelem Voigta–Kelvina

$$(3.3) \quad \sigma = E(\xi) \varepsilon + \lambda(\xi) \dot{\varepsilon}, \quad E(\xi) = E_0 f_1(\xi), \quad \lambda(\xi) = \lambda_0 f_2(\xi),$$

gdzie  $E(\xi)$  jest to zmieniający się wzdłuż długości pręta moduł Younga, a  $\lambda(\xi)$  — zmieniający się współczynnik lepkości charakteryzujący tłumienie wewnętrzne. Zmienność modułu Younga i współczynnika lepkości pozwala na zbadanie wpływu niejednorodności sprężystej i lepkościowej na stateczność pręta.

Aby zbadać stateczność pręta obciążanego w opisany powyżej sposób, rozważymy ruch układu (małe drgania) stosując przybliżoną metodę energetyczną. Analizę dokładności tej metody (ale bez uwzględnienia tłumienia) przeprowadzono w pracy KORDAS i ŻYCKOWSKIEGO [9]. Wprowadzając zmienne bezwymiarowe

$$x = \xi/l, \quad y = w/l,$$

zapiszemy linię ugięcia pręta w postaci przybliżonej

$$(3.4) \quad y(x, t) = \sum_{i=1}^n y_i(x) q_i(t),$$

w której funkcje  $y_i(x)$  powinny spełniać wymagane warunki brzegowe.

Dalszy tok postępowania polega na rozwiązaniu układu równań różniczkowych zwyczajnych (wynikających z równań Lagrange'a) na funkcje  $q_i(t)$ , określających w sposób przybliżony ruch układu i jest szczegółowo przedstawiony w pracy Kordas [8] dla przyrmatycznego pręta idealnie sprężystego. Powtórzmy tu podstawowe wzory

$$(3.5) \quad T = \frac{1}{2} ml^3 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = \int_0^1 g^{\kappa_1} y_i y_j dx;$$

$T$  oznacza tu energię kinetyczną układu,  $m$  — masę jednostki długości pręta. Wykładnik  $\kappa_1$  w najczęściej spotykanych przypadkach przyjmuje wartości:  $\kappa_1 = 1$  dla pręta płasko-zbieżnego o stałej wysokości przekroju poprzecznego,  $\kappa_1 = 1/2$  dla pręta równomiernie wszechstronnie zbieżnego,  $\kappa_1 = 1/3$  dla pręta płasko-zbieżnego o stałej szerokości przekroju.

$$(3.6) \quad V = \frac{1}{2} \frac{EJ}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = \int_0^1 f_1(x) g(x) y_i''(x) y_j''(x) dx,$$

$V$  jest tu potencjalną energią sprężystą przy zginaniu;

$$(3.7) \quad A_1 = \frac{1}{2} Pl \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} q_i q_j, \quad c_{ij} = \int_0^1 y_i'(x) y_j'(x) dx,$$

$A_1$  jest pracą składowej pionowej siły  $P$  (stałej dla małych ugięć pręta).

Poza tym należy jeszcze obliczyć uogólnione siły niekonserwatywne, pochodzące od składowej poziomej ciśnienia płynu (składowa pionowa jest zanedbywalnie mała), od składowej poziomej siły skupionej  $P$  oraz od członu charakteryzującego lepkość materiału w równaniu (3.2). Jak łatwo można wykazać obliczając elementarną pracę wymienionych sił na przemieszczeniach wirtualnych  $\delta q_i$ , siły uogólnione mają postać

$$(3.8) \quad Q_i = -Pl\eta \sum_{j=1}^n d_{ij} q_j + 2Bb_0 l^2 \left( U \sum_{j=1}^n e_{ij} q_j - l \sum_{j=1}^n s_{ij} \dot{q}_j \right) - \frac{\lambda_0 J_0}{l} \sum_{j=1}^n z_{ij} \dot{q}_j,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 d_{ij} &= y_i(1)y_j'(1), \\
 e_{ij} &= \int_0^1 f_3(x)y_i(x)y_j'(x) dx, \\
 s_{ij} &= \int_0^1 f_3(x)y_i(x)y_j(x) dx, \\
 z_{ij} &= \int_0^1 f_2(x)g(x)y_i''(x)y_j''(x) dx.
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Równania Lagrange'a drugiego rodzaju

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n,
 \tag{3.10}$$

w których

$$W = T - V + A_1,$$

określają ruch układu w sposób przybliżony. Korzystając ze wzorów (3.5)–(3.9) i podstawiając je do równań (3.10) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{m_0 l^4}{E_0 J_0} a_{ij} \ddot{q}_j + \left( \frac{2Bb_0 l^4}{E_0 J_0} s_{ij} + \frac{\lambda_0}{E_0} z_{ij} \right) \dot{q}_j + \right. \\
 \left. + \left[ b_{ij} - \frac{Pl^2}{E_0 J_0} (c_{ij} - \eta d_{ij}) - U \frac{2Bb_0 l^3}{E_0 J_0} e_{ij} \right] q_j \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Zakładając w dalszym ciągu, że współrzędne uogólnione  $q_i(t)$  są następującymi funkcjami czasu:

$$(3.12) \quad q_i(t) = A_i e^{\omega \frac{t}{\gamma}}, \quad \gamma^2 = \frac{m_0 l^4}{E_0 J_0}, \quad [\gamma] = \text{sek},$$

gdzie:  $\omega$  — bezwymiarowa częstość,  $A_i$  — stałe współczynniki, sprowadzamy układ równań różniczkowych (3.11) do układu jednorodnych równań algebraicznych ze względu na stałe  $A_i$

$$(3.13) \quad \sum_{j=1}^n \{ a_{ij} \omega^2 + (\alpha s_{ij} + \delta z_{ij}) \omega + [b_{ij} - \beta (c_{ij} - \eta d_{ij}) - U^* e_{ij}] \} A_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

W równaniach (3.13) wprowadzono następujące parametry bezwymiarowe:

$$(3.14) \quad \alpha = \frac{2Bb_0 l^4}{\gamma E_0 J_0}, \quad \delta = \frac{\lambda_0}{\gamma E_0}, \quad U^* = U \frac{2Bb_0 l^3}{E_0 J_0}, \quad \beta = \frac{Pl^2}{E_0 J_0}$$

charakteryzujące odpowiednio tłumienie zewnętrzne, tłumienie wewnętrzne, prędkość płynu i siłę ściskającą.

Wyznacznik główny układu równań (3.13) przyrównany do zera określa bezwymiarową częstość  $\omega$  w zależności od siły ściskającej  $\beta$ , parametrów tłumienia  $\alpha$  i  $\delta$  oraz pozostałych parametrów. W przypadku dwóch stopni swobody otrzymujemy równanie czwartego stopnia ze względu na częstość  $\omega$  o postaci (2.10) i badanie stateczności układu przebiega tak samo jak w części drugiej pracy.

Ponieważ chodzi nam tu przede wszystkim o zbadanie efektu destabilizacji z uwzględnieniem tłumienia zewnętrznego, więc w dalszym ciągu uczynimy szereg uproszczeń; założymy mianowicie, że badany pręt jest jednorodny (sprężyste i lepkościowo), pryzmatyczny oraz że porusza się w ośrodku spoczywającym, tzn. przyjmiemy  $f_1(x) \equiv 1, f_2(x) \equiv 1, f_3(x) \equiv 1, g(x) \equiv 1$  oraz  $U^* = 0$ .

Przechodząc do szczegółowych obliczeń założymy równanie linii ugięcia w postaci dwuparametrowej, w której funkcje  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  są równe [8]:

$$(3.15) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= x^4 - 4x^3 + 6x^2, \\ y_2(x) &= -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2, \end{aligned}$$

a więc spełniają następujące warunki brzegowe:

$$(3.16) \quad y_i(0) = y_i'(0) = y_i''(1) = y_i'''(1) = 0.$$

Warunki te odpowiadają obciążeniu pręta siłą śledzącą ( $\eta = 1$ ) i funkcje (3.15) nie spełniają warunku brzegowego na siłę poprzeczną dla dowolnych wartości współczynnika śledzenia  $\eta$ . Jednak, jak wykazano w pracy [8], uproszczenie to w małym stopniu wpływa na dokładność wyników, przynajmniej w zakresie siły podśledzającej ( $\eta < 1$ ), do którego się obecnie ograniczymy.

W celu uproszczenia obliczeń numerycznych, początek układu odniesienia będziemy w dalszym ciągu pracy przyjmować na swobodnym końcu nieodkształconego pręta (układ stały). W układzie tym funkcje (3.15) mają postać

$$(3.17) \quad \begin{aligned} y_1(x) &= x^4 - 4x + 3, \\ y_2(x) &= x^5 - 5x + 4. \end{aligned}$$

Współczynniki  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, e_{ij}, s_{ij}$  i  $z_{ij}$  pozostają bez zmiany, a współczynniki  $d_{ij}$  zmieniają jedynie znak. Po prostych obliczeniach otrzymujemy:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} a_{ij} &= s_{ij}, \quad a_{11} = \frac{104}{45}, \quad a_{12} = a_{21} = \frac{664}{210}, \quad a_{22} = \frac{1000}{231}, \\ b_{ij} &= z_{ij}, \quad b_{11} = \frac{144}{5}, \quad b_{12} = b_{21} = 40, \quad b_{22} = \frac{400}{7}, \\ c_{11} &= \frac{721}{7}, \quad c_{12} = c_{21} = \frac{27}{2}, \quad c_{22} = \frac{160}{9}, \\ d_{11} &= 12, \quad d_{12} = 15, \quad d_{21} = 16, \quad d_{22} = 20, \\ e_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

Równanie określające częstości (2.10) ma w naszym przypadku następujące współczynniki:

$$\begin{aligned}
 L &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \\
 M &= \alpha(a_{11}s_{22} + a_{22}s_{11} - 2a_{12}s_{12}) + \delta(a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}), \\
 N &= B_1 - \beta B_2 + B_3, \\
 B_1 &= a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} - 2a_{12}b_{12}, \\
 B_2 &= a_{11}\bar{c}_{22} + a_{22}\bar{c}_{11} - a_{12}\bar{c}_{21} - a_{21}\bar{c}_{12}, \\
 B_3 &= \alpha^2(s_{11}s_{22} - s_{12}^2) + \alpha\delta(s_{11}b_{22} + s_{22}b_{11} - 2s_{12}b_{12}) + \delta^2(b_{11}b_{22} - b_{12}^2); \\
 S &= C_1 - \beta C_2, \\
 C_1 &= \alpha(s_{11}b_{22} + s_{22}b_{11} - 2s_{12}b_{12}) + 2\delta(b_{11}b_{22} - b_{12}^2), \\
 C_2 &= \alpha(s_{11}\bar{c}_{22} + s_{22}\bar{c}_{11} - s_{12}\bar{c}_{21} - s_{21}\bar{c}_{12}) + \delta(b_{11}\bar{c}_{22} + b_{22}\bar{c}_{11} - b_{12}\bar{c}_{21} - b_{21}\bar{c}_{12}); \\
 R &= D_1 - \beta D_2 + \beta^2 D_3, \\
 D_1 &= b_{11}b_{22} - b_{12}^2, \\
 D_2 &= b_{11}\bar{c}_{22} + b_{22}\bar{c}_{11} - b_{12}\bar{c}_{21} - b_{21}\bar{c}_{12}, \\
 D_3 &= \bar{c}_{11}\bar{c}_{22} - \bar{c}_{12}\bar{c}_{21}, \\
 \bar{c}_{ij} &= c_{ij} - \eta d_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Wprowadzając pomocniczy parametr  $\varkappa$  określony jako stosunek tłumienia wewnętrznego do zewnętrznego

$$(3.20) \quad \varkappa = \delta/\alpha$$

otrzymujemy przy przyjętych uproszczeniach i założonych funkcjach (3.17)

$$\begin{aligned}
 L &= 0,00716828, \\
 M &= \alpha(0,0143366 + 3,786435\varkappa), \\
 B_1 &= 3,786435, \\
 B_2 &= 0,241893 - 0,151227\eta, \\
 B_3 &= \alpha^2(0,00716828 + 3,786435\varkappa + 45,71428\varkappa^2), \\
 C_1 &= \alpha(3,786435 + 91,42856\varkappa), \\
 C_2 &= \alpha[(0,241893 - 0,151227\varkappa) + (19,75510 - 21,71428\eta)\varkappa], \\
 D_1 &= 45,71428, \\
 D_2 &= 19,75510 - 21,71428\eta, \\
 D_3 &= 0,607143 - 0,547619\eta.
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

Statyczne kryterium stateczności,  $R = 0$ , prowadzi do rozwiązania

$$(3.22) \quad \beta = \frac{D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - 4D_1D_3}}{2D_3},$$

które przedstawiono wykreślić na rys. 8.

Kinetyczne kryterium stateczności (2.11) przybiera postać równania kwadratowego:

$$\begin{aligned}
 (3.23) \quad (AC_2^2 + M^2D_3 - MB_2C_2)\beta^2 + (MB_1C_2 + MC_1B_2 - M^2D_2 - 2AC_1C_2 + \\
 + MC_2B_3)\beta + (AC_1^2 + M^2D_1 - MB_1C_1 - MC_1B_3) = 0,
 \end{aligned}$$

z którego obliczamy siłę krytyczną w zależności od  $\eta$ ,  $\alpha$  i  $\delta$ .



Przedstawimy tu rozwiązania szczególne w przypadku, gdy tłumienie wewnętrzne i zewnętrzne zmierzają do zera, jednak w ten sposób aby stosunek  $\kappa = \delta/\alpha$  był stały.

1)  $\kappa = 0$ , brak tłumienia wewnętrznego,

$$(3.24) \quad \beta = \frac{633,831}{(30,7853 - 12,71432\eta) \pm \sqrt{-319,9269 + 989,2586\eta - 543,6581\eta^2}};$$

2)  $\kappa = 0,05$ ,

$$(3.25) \quad \beta = \frac{329,7198}{(16,01457 - 6,614013\eta) \pm \sqrt{-402,9733 + 1246,0507\eta - 684,7800\eta^2}};$$

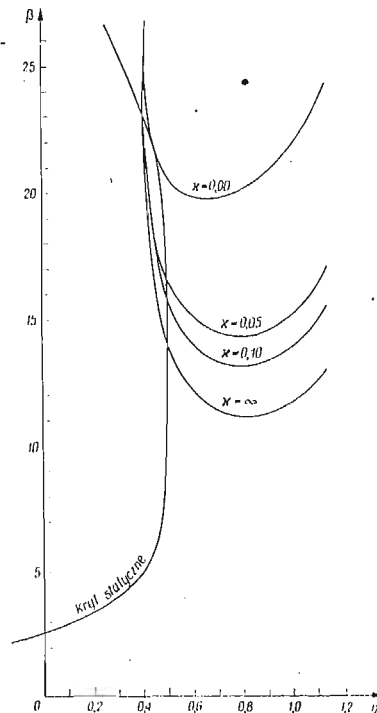
3)  $\kappa = 0,10$ ,

$$(3.26) \quad \beta = \frac{268,5542}{(13,04374 - 5,387061\eta) \pm \sqrt{-366,9693 + 1134,7211\eta - 623,5974\eta^2}};$$

4)  $\kappa = \infty$ , brak tłumienia zewnętrznego,

$$(3.27) \quad \beta = \frac{180,678}{(8,77559 - 3,624316\eta) \pm \sqrt{-284,3457 + 879,2444\eta - 483,1985\eta^2}}.$$

Zależności (3.24)–(3.27) przedstawiono na rys. 8. Potwierdzają one wnioski wyciągnięte w poprzedniej części pracy. Stopień destabilizacji zależy w istotny sposób od stosunku



Rys. 8

wielkości tłumienia zewnętrznego do wewnętrznego. Z powodu małej dokładności metody energetycznej, przy przyjętych funkcjach (3.15), dalszych obliczeń nie przeprowadzono.

Błąd obliczeń sięga 10% w zakresie  $\eta < 1$  (ściśła wartość siły krytycznej dla  $\kappa = \infty$  i  $\eta = 1$  jest równa  $\beta = 10,76$ , a nie  $\beta = 11,50$ ), natomiast jest znacznie większy dla  $\eta > 1$ .

Być może, iż uzyskane w niniejszej pracy wyniki tłumaczą rozbieżność między danymi doświadczalnymi [6, 13] i wartością śledzącej siły krytycznej, obliczoną z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego malejącego do zera. Doświadczenia wykazują raczej zgodność z górną wartością siły krytycznej ( $\beta \approx 20$ ), obliczoną bez uwzględnienia tłumień. W przeprowadzonych eksperymentach, obok znikomego tarcia wewnętrznego, występowało pewne znikome tłumienie zewnętrzne i dopiero ich stosunek decyduje o wielkości siły krytycznej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Z. DŻYGADŁO, L. SOLARZ, *On nonautonomous vibrations of a self-excited system with tangential force*, Proc. of Vibration Problems, 2, **11** (1970), 157–178.
2. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalizacji kształtu prętów przy niekonserwatywnych zagadnieniach stateczności*, Prace Komisji Mech. Stos. Oddz. Kraków, PAN, Mechanika Nr 4, 1970, 3–27.
3. A. GAJEWSKI, *Badanie postaci drgań prętów ściskanych obciążeniem niekonserwatywnym*, Czas. Techn. 10-M(141), (1970), 1–8
4. G. HERRMANN, I. C. JONG, *On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems*, J. of Appl. Mech., 3, **32** (1965), 592–597.
5. G. HERRMANN, I. C. JONG, *On nonconservative stability problems of elastic systems with slight damping*, J. of Appl. Mech., 1, **33** (1966), 125–133.
6. Ю. И. ЯГН, Л. К. ПАРШИН, *Экспериментальное изучение устойчивости стержня при сжатии следящей силой*, Проч. Мат. и Констр., Труды Л.П.И. № 278, 52–54.
7. T. v. KÁRMÁN, M. A. BIOT, *Metody matematyczne w technice*, PWN, Warszawa 1958.
8. Z. KORDAS, *Stateczność pręta opływanego równoległym strumieniem płynu przy uwzględnieniu oporu czołowego*, Rozpr. Inż., 1, **13** (1965), 19–41.
9. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Analiza dokładności metody energetycznej przy kinetycznym kryterium stateczności*, Czas. Techn., 9, **35** (1960), 1–8.
10. S. NEMAT-NASSER, S. N. PRASAD, G. HERRMANN, *Destabilizing effect of velocity-dependent forces in nonconservative continuous systems*, A. I. A. A. Journal, 7, **4** (1966), 1276–1280.
11. S. NEMAT-NASSER, G. HERRMANN, *Some general consideration concerning the destabilizing effect in nonconservative systems*, ZAMP, 2, **17** (1966), 305–313.
12. R. C. SHIEN, *Variational method in the stability analysis of nonconservative problems*, ZAMP, 1, **21** (1970), 88–100.
13. W. G. WOOD, S. S. SAW, P. M. SAUNDERS, *The kinetic stability of a tangentially loaded strut*, Proc. Roy. Soc. Lond., A. **313** (1969), 239–248.
14. H. ZIEGLER, *On the concept of elastic stability*, Advances in Appl. Mech. V. 4, Acad. Press. Inc., N. York 1956.
15. Л. М. Зорий, М. Я. Леонов, *Влияние трения на устойчивость неконсервативных систем*, Вопросы машиностроения и прочности в машиностроении, 7, **7** (1961), 127–136.

#### Р е з ю м е

#### СОВМЕСТНОЕ ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ВНЕШНЕГО И ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

В работе исследована устойчивость модели Циглера и закрепленного стержня, находящихся под воздействием сжимающего неконсервативного усилия. Учитывается наличие неоднородного внутреннего и внешнего трения. Показано, что эффект дестабилизации неконсервативных систем

зависит существенным образом от соотношения параметров, характеризующих внутренне и внешнее трение, а также от степени неоднородности демпфирования.

Получена зависимость критического усилия от показателя следящего эффекта усилия, от параметров, характеризующих неоднородность демпфирования, а также от величины трения. Для случая модели Циглера получено точное решение, для закрепленного стержня результат получен при помощи приближенного энергетического метода оценки устойчивости.

Полученные зависимости свидетельствуют о том, что внешнее трение ослабляет эффект дестабилизации, вызванной внутренним трением.

#### S u m m a r y

#### INFLUENCE OF SIMULTANEOUS NON-HOMOGENEOUS EXTERNAL AND INTERNAL DAMPING UPON THE STABILITY OF NON-CONSERVATIVE SYSTEMS

The paper presents the problem of stability of Ziegler's model and of a cantilever beam compressed by non-conservative load. The existence of non-homogeneous internal and external damping is taken into consideration. It has been proved that the effect of destabilization substantially depends on the ratio of parameters characterizing the internal and external damping, and on the degree of non-homogeneity of these dampings.

The critical force has been expressed in terms of the direction of compressive force, the non-homogeneous damping parameters and their ratio, and of the magnitude of damping. The results are accurate in the case of Ziegler's model and approximate in the case of cantilever beam where the approximate energy method of investigation of the stability problem has been applied.

The results obtained prove that the external damping decreases the destabilization effect produced by the internal damping.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 marca 1971 r.*

---

## O MOŻLIWOŚCI OPISU PEŁNEGO PROCESU PEŁZANIA METALI\*

MARCIN CHRZANOWSKI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Problemy pełzania metali od kilkadziesiąt lat przyciągają uwagę badaczy nie tylko w związku z konkretnymi zadaniami stawianymi przez dynamicznie rozwijający się przemysł, lecz także jako uogólnienie procesu odkształcania ciał stałych. W istocie pełzanie, jako jeden z działów reologii, przedstawia sobą wielowymiarowy proces opisany równaniem

$$(1.1) \quad \Phi(\varepsilon, \sigma, t, T) = 0,$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza odkształcenie,  $\sigma$  — naprężenie,  $t$  — czas,  $T$  — temperaturę. Mimo nagromadzenia znacznej ilości wyników badań doświadczalnych, prowadzonych głównie w krajach o wysokim stopniu uprzemysłowienia (USA, ZSRR, Angia, Szwecja, Japonia), a także licznych prac teoretycznych, brak jest w chwili obecnej teorii, pozwalającej na opis pełnego procesu narastania odkształceń pełzania od przyłożenia obciążenia aż do zniszczenia materiału w wyniku zachodzących procesów fizycznych, związanych z budową materiału.

Przyjmowane uproszczenia w opisie pełzania metali polegają przede wszystkim na rozdzieleniu zmiennych w (1.1)

$$(1.2) \quad \dot{\varepsilon}_c = g(\varepsilon, \sigma, t)h(T),$$

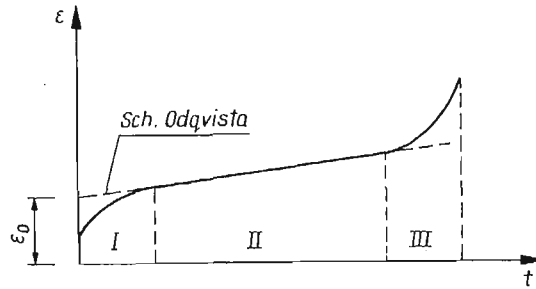
gdzie  $\varepsilon_c$  oznacza odkształcenie pełzania, a kropką oznaczono różniczkowanie po czasie. Dotychczasowe teorie nawet dla funkcji  $g$  nie podają postaci, umożliwiającej opis przebiegu całego procesu. Wyjątek stanowi tu teoria starzenia, sformułowana przez SODERBERGA [18], dla której

$$(1.3) \quad \varepsilon_c = \varphi(\sigma, t).$$

Posługując się krzywymi izochronicznymi, można na jej podstawie wyznaczyć odkształcenia dla kolejnych, ustalonych wartości czasu. Znane niedostatki tej teorii (nieinwariantność w stosunku do zmiany początku osi czasu, przydatność tylko dla słabo zmieniających się obciążeń) powodują, że mimo swej prostoty jest ona stosowana tylko w szczególnych przypadkach i równaniu (1.3) nie można przypisać uniwersalnego znaczenia.

\*) III nagroda na Ogólnopolskim konkursie na prace teoretyczne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Warszawski PTMTS w 1970 r.

Powszechnie przyjętym sposobem prowadzenia obliczeń na pełzanie jest umowne rozbicie typowej (zawierającej wszystkie trzy okresy) krzywej pełzania na trzy odcinki (rys. 1) i wykorzystywanie dla opisu każdego z nich niezależnych równań. Zwykle drugi okres pełzania stanowi znaczną część życia konstrukcji i stąd, a także dzięki swej prostocie,



Rys. 1

szerokie zastosowanie znalazła teoria pełzania ustalonego, dla której związek fizyczny ma postać

$$(1.4) \quad \dot{\epsilon}_c = f(\sigma).$$

Dla pierwszego okresu pełzania zmianę odkształceń w czasie dobrze opisuje teoria umocnienia, sformułowana przez LUDVIKA [6], a następnie rozwinięta przez NADAI [7] i DAVENPORTA [3]. Według tej teorii, prędkość odkształceń pełzania jest określona przez wartość działającego naprężenia i aktualną wartość odkształcenia pełzania

$$(1.5) \quad \dot{\epsilon}_c = g(\sigma, \epsilon_c).$$

Przy wykorzystaniu podobieństwa krzywych pełzania, które dla pierwszego okresu pełzania jest dobrze potwierdzone doświadczalnie [16], równanie stanu (1.5) można zapisać w postaci

$$(1.6) \quad \dot{\epsilon}_c \epsilon_c^n = f(\sigma),$$

gdzie dla funkcji  $f$  przyjmuje się różne postaci, np:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} f(\sigma) &= A\sigma^n, \\ f(\sigma) &= \kappa \exp \frac{\sigma}{C}, \\ f(\sigma) &= \eta \left( 2 \operatorname{sh} \frac{\sigma}{D} \right)^{n_0}, \end{aligned}$$

zaś  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\eta$ ,  $n$ ,  $n_0$ ,  $A$ ,  $C$ ,  $D$  oznaczają stałe materiałowe. Zakres stosowania teorii umocnienia jest jednak ograniczony tylko do pierwszego okresu pełzania.

Próba opisu pierwszego i drugiego okresu pełzania jest koncepcja ODQVISTA [11], polegająca na przedłużeniu prostej odpowiadającej odcinkowi pełzania ustalonego do przecięcia z osią odkształceń (rys. 1). Długość odcinka odciętego w ten sposób na osi odkształceń jest funkcją naprężenia i obejmuje odkształcenie sprężyste, natychmiastowe odkształcenie plastyczne oraz częściowo odkształcenie pełzania nieustalonego.

Analiza odkształceń pełzania w trzecim okresie pełzania stała się możliwa (w określonym przedziale naprężeń i temperatur) dzięki opracowaniu i rozwinięciu teorii kruchego zniszczenia w wyniku pełzania. Podstawowymi były tu prace KACZANOWA [5] i RABOTNOWA [14]. Proces narastania uszkodzeń dla jednoosiowego stanu naprężenia opisuje równanie (por. [14])

$$(1.8) \quad \omega^\beta \frac{d\omega}{dt} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^k,$$

gdzie  $\omega$  — parametr charakteryzujący stopień uszkodzenia materiału,  $k$  i  $B$  — stałe materiałowe zależne od temperatury,  $\beta$  — stała zależna od hipotetycznego kształtu rozwijających się szczelin. Warunek początkowy dla równania (1.8) ma postać

$$(1.9) \quad \omega(t=0) = 0,$$

a warunek zniszczenia

$$(1.10) \quad \omega(t = t_*) = 1.$$

Należy tu podkreślić, że warunki te — przyjmowane zresztą w dalszym ciągu pracy — stanowią jedynie idealizację rzeczywistego procesu; warunek (1.9) oznacza, że przyłożenie w chwili  $t = 0$  obciążenia nie wywoła natychmiastowego uszkodzenia, zaś warunek (1.10) — pominięcie faktu, że w chwili osiągnięcia pewnej wartości  $\omega_* < 1$  zajdzie natychmiastowe zniszczenie na skutek przekroczenia wytrzymałości doraźnej.

Wykorzystując równania (1.8) (przy  $\beta = 0$ ) i (1.4), RABOTNOW [15] zaproponował opis pełzania krótkoczasowego o postaci

$$(1.11) \quad \dot{\varepsilon}_c = f(\sigma, \omega), \quad \dot{\omega} = \varphi(\sigma, \omega).$$

O nieprzydatności tego opisu dla drugiego i trzeciego odcinka typowych krzywych pełzania decyduje fakt, że stałe materiałowe występujące w pierwszym z równań (1.11), a wyznaczone na podstawie odcinków krzywych pełzania odpowiadających pełzaniu ustalonymu, są skażone na skutek uszkodzeń materiału, występujących już w tym okresie pełzania [5]. Niedostatkim tym jest również obarczona propozycja SÖDERQUISTA [19] sprzężenia równań teorii Odqvista z równaniem (1.8) przez wprowadzenie funkcji  $\omega$  do związku  $\varepsilon - \sigma$ .

W prezentowanej pracy podano opis procesu pełzania w oparciu o równania teorii umocnienia i kruchego zniszczenia. Opis taki nie może jednak stanowić celu samego dla siebie; skonstruowana teoria musi spełniać dwa podstawowe warunki: z jednej strony musi ona lepiej niż dotychczasowe teorie opisywać i wyjaśniać znane fakty doświadczalne, z drugiej — lepiej przewidywać zachowanie się materiału pod obciążeniem. W dalszym ciągu skupiono uwagę głównie na pierwszym z wymienionych warunków, który jest warunkiem koniecznym akceptacji każdej teorii.

## 2. Podstawowe równania dla jednoosiowego stanu naprężenia

Podstawą proponowanego opisu jest doświadczalnie obserwowany fakt zachodzenia w czasie pełzania metali i ich stopów dwu zjawisk: umocnienia i narastania uszkodzeń (mikrospekkań). Założymy, że oba te procesy rozpoczynają się w chwili przyłożenia obciążenia i rozwijają się równolegle aż do momentu zniszczenia, przy czym proces umocnienia

przebiega z malejącą prędkością, zaś proces narastania uszkodzeń — ze wzrastającą. Występowanie umocnienia w pierwszym okresie pełzania jest widoczne z przebiegu krzywych pełzania. Podobnie, kształt krzywej pełzania w trzecim okresie można wyjaśnić uszkodzeniami, intensywnie narastającymi w tym okresie i powodującymi osłabienie materiału ( $\dot{\varepsilon}_c > 0$ ). Rozwój uszkodzeń był jednak także stwierdzany już we wczesnych stadiach pełzania [17]. Tak więc, spośród przyjętych założeń, jedynie założenie o trwaniu procesu umocnienia na dalszych etapach pełzania ma charakter czysto hipotetyczny.

Równanie opisujące odkształcenia pełzania — przy wykorzystaniu powyższych założeń — otrzymamy, wprowadzając do równań teorii umocnienia (1.6) naprężenie efektywne (odniesione do nieuszkodzonej powierzchni przekroju poprzecznego próbki)

$$(2.1) \quad \dot{\varepsilon}_c \varepsilon_c^\alpha = A \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n,$$

gdzie dla funkcji  $\omega$  zachowuje swą ważność równanie teorii zniszczenia kruchego

$$(2.2) \quad \dot{\omega} = B \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^k,$$

a  $\alpha, n, k, A, B$  są stałymi materiałowymi.

W dalszym ciągu przyjęto, że pełne odkształcenie jest sumą odkształcenia pełzania i odkształcenia sprężystego

$$(2.3) \quad \varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_e,$$

przy czym zakłada się, że rozwijające się uszkodzenia materiału nie mają wpływu na odkształcenia sprężyste

$$(2.4) \quad \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}.$$

Równania (2.1), (2.2) są ważne tylko dla  $\sigma > 0$ . Dla  $\sigma < 0$  należy położyć  $\omega = 0$ , gdyż teoria zniszczenia kruchego zaproponowana w pracach [5, 14] nie obejmuje przypadku ściskania. Warto jednak zauważyć, że i dla  $\sigma < 0$  będą się rozwijały uszkodzenia, które ponadto będą wpływały na odkształcenia pełzania przy rozciąganiu poprzedzonym ściskaniem. Proponowany opis nie obejmuje tych zjawisk.

Na zakończenie tego rozdziału zaznaczmy, że układ równań (2.1), (2.2) nie opisuje niesprężystego nawrotu (odwrotnego pełzania) ani starzenia metali czy ich stopów w wyniku długotrwałego działania podwyższonej temperatury. Proponowaną koncepcję można więc stosować dla metali o stabilnej strukturze, które nie wykazują powyższych własności.

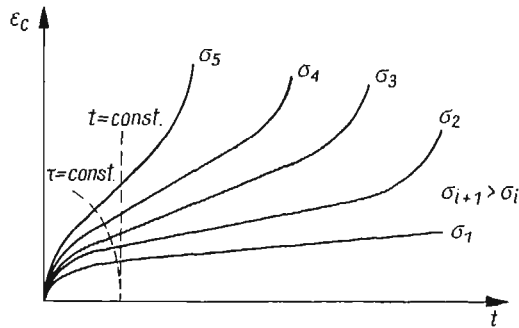
### 3. Stałe materiałowe

W równaniach (2.1) i (2.2) figuruje pięć stałych materiałowych:  $\alpha, n, k, A, B$ . Stałe  $\alpha, n, A$  można wyznaczyć jak dla zwykłej teorii umocnienia (teorii sformułowanej dla naprężeń nominalnych, tzn. odniesionych do początkowej, nieuszkodzonej elementarnej powierzchni), wykorzystując jednak tylko początkowe odcinki krzywych pełzania, dla których stopień uszkodzenia materiału jest pomijalnie mały. Stałą  $\alpha$  wyznacza się wprost

z krzywych pełzania, przedstawionych w układzie dwulogarytmicznym. Dla wyznaczenia stałych  $n$  i  $A$  konieczne jest sporządzenie wykresu zależności odkształcenia pełzania od naprężenia. Jeśli wykres ten sporządzić dla ustalonego czasu  $t = \text{const}$ , okazuje się, że stałe  $n$  i  $A$  zależą od naprężenia (zob. np. [9]) i równanie teorii umocnienia nie może być stosowane dla pełnego zakresu naprężeń, jakie może przenosić materiał. Porównywanie wartości odkształceń pełzania, wywołanych różnymi naprężeniami, dla ustalonego czasu fizycznego  $t$  nie wydaje się jednak słuszne. Porównywalne mogą być jedynie odkształcenia pełzania dla ustalonego czasu względnego

$$(3.1) \quad \tau = \frac{t}{t_*} = \text{const},$$

gdzie  $t_* = t_*(\sigma)$  jest czasem zniszczenia próbki przy danym, stałym naprężeniu  $\sigma$  (rys. 2). Tak wyznaczone punkty krzywej, obrazującej zależność  $\epsilon_c$  od  $\sigma$  będą się teraz układać wokół jednej prostej, a więc  $n$  i  $A$  nie będą zależały od naprężenia.



Rys. 2

Stałe  $k$  i  $B$  można wyznaczać tak, jak zwykle się to robi — z krzywej wytrzymałości czasowej (tzn. zależności  $t_* - \sigma$ ). Jest to jednak kłopotliwe, gdyż wymaga przeprowadzania długotrwałych badań przy niezbyt wysokim poziomie naprężeń, tak dobranym, aby przełom w chwili zniszczenia miał charakter kruchy. Proponowany opis pozwolić może na łatwiejsze i szybsze wyznaczenie stałych materiałowych  $k$  i  $B$ . Znając stałe  $\alpha$ ,  $n$ ,  $A$  stałe  $k$  i  $B$  możemy wyznaczyć, żądając spełnienia w dowolnej chwili czasu zgodności wartości odkształcenia i jego prędkości, wyliczonych na podstawie proponowanego opisu z odpowiednimi wartościami zmierzonymi doświadczalnie. Ten sposób postępowania pozwoli uniknąć długotrwałych badań, doprowadzanych aż do chwili zniszczenia próbki i szacować czas zniszczenia na podstawie stosunkowo krótkotrwałych badań.

#### 4. Pełzanie przy stałym naprężeniu rozciągającym

Dla  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  z (2.2) otrzymujemy

$$(4.1) \quad \omega = 1 - (1 - \tau)^{\frac{1}{k+1}},$$



gdzie  $\tau = t/t_*$ , a  $t_* = [B(k+1)\sigma_0^k]^{-1}$  jest czasem kruchego zniszczenia. Podstawiając (4.1) do (2.1) otrzymamy po rozdzieleniu zmiennych

$$\varepsilon_c^\alpha d\varepsilon_c = \frac{A}{B} \frac{1}{k+1} \sigma_0^{n-k} \frac{1}{(1-\tau)^{\frac{n}{k+1}}} d\tau.$$

Scałkowanie powyższej równości przy założeniu  $n \neq k+1$  daje

$$(4.2.1) \quad \varepsilon_c^{\alpha+1} = \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \left[ \frac{1}{(1-\tau)^{\frac{n}{k+1}}} - 1 \right],$$

a dla  $n = k+1$

$$(4.2.2) \quad \varepsilon_c^{\alpha+1} = \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{k+1} \sigma_0^{n-k} \ln \frac{1}{1-\tau}.$$

Ze związków tych widać, że podobieństwo krzywych pełzania zachodzi w przybliżeniu tylko dla małych wartości  $\tau$ , tzn. tylko dla początkowego okresu pełzania. Fakt ten był obserwowany doświadczalnie [16].

W chwili zniszczenia jest  $t = t_*$  (czyli  $\tau = 1$ ), a wartość odkształcenia pełzania wynosi

$$(4.3) \quad \varepsilon_{c*} = \begin{cases} \infty & \text{dla } n \geq k+1, \\ \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{-n+k+1} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} & \text{dla } n < k+1. \end{cases}$$

Przypadek  $n < k+1$  zachodzi rzadko (zob. np. stałe materiałowe przytoczone w [13]) i proponowany opis daje na ogół  $\varepsilon_{c*} = \infty$ . Ten niedostatek teorii wynika z idealizacji warunku brzegowego (1.10) dla  $\omega$  w chwili zniszczenia.

### 5. Skokowa zmiana obciążenia

Porównanie doświadczalnych krzywych pełzania przy skokowej zmianie obciążenia z krzywymi teoretycznymi stanowi przejrzystą weryfikację różnych teorii pełzania. Najlepszą zgodność z doświadczeniami daje teoria umocnienia, choć i dla niej krzywe teoretyczne układają się poniżej krzywych doświadczalnych. Dla poprawienia ich przebiegu proponowano ulepszenie teorii umocnienia przez wprowadzenie jako miary umocnienia nie wartości aktualnego odkształcenia  $\varepsilon_c$ , lecz parametrów:

$$q = \int \varepsilon_c d\sigma,$$

jak w pracy [10], lub

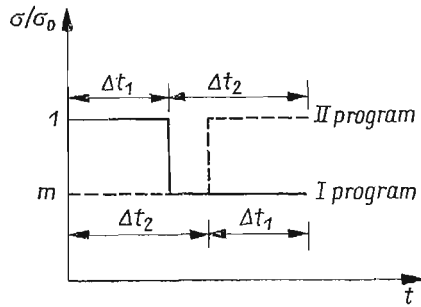
$$q = \int \sigma d\varepsilon_c$$

jak w [20]. Otrzymywano w ten sposób lepszą zgodność przy skokowym zwiększaniu naprężenia, lecz gorszą — w stosunku do zwykłej teorii umocnienia — przy skokowym zmniejszaniu obciążenia.

Zgodnie z proponowanym opisem, prędkość odkształcenia pełzania przy skokowej zmianie obciążenia zależy nie tylko od aktualnej wartości odkształcenia, lecz także od

wielkości nagromadzonego uszkodzenia w momencie zmiany obciążenia. Prędkość ta będzie — jak to widać z wyjściowych równań (2.1), (2.2) — większa niż to wynika z zwykłej teorii umocnienia.

Dla opisu pełzania przy zmiennych naprężeniach Odqvist sformułował komutatywne prawo pełzania [12], zgodnie z którym odkształcenie pełzania w wyniku działania kilku stałych, lecz różnych naprężeń nie zależy od kolejności ich przyłożenia, pod warunkiem, że czas ich działania jest taki sam. Zasada komutatywności nie jest na ogół potwierdzana doświadczeniami, na co zresztą zwracał uwagę już jej autor. Poniżej pokażemy, że proponowany opis również nie potwierdza tej zasady a więc daje wyniki jakościowo zgodne



Rys. 3

z doświadczeniami. W tym celu rozważmy w oparciu o proponowaną koncepcję, odkształcenia pełzania dla obciążenia zrealizowanego według dwóch programów (rys. 3). Wykorzystując rozwiązanie podstawowego układu równań (2.1), (2.2) i przyjmując  $n > k+1$ , otrzymamy następujące wartości odkształceń:

dla I programu obciążenia

$$0 \leq t \leq \Delta t_1, \quad \sigma = \sigma_0$$

$$(5.1) \quad \varepsilon_{cI}(\Delta t_1) = \varepsilon_{cI1} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

$$\Delta t_1 \leq t \leq \Delta t_1 + \Delta t_2 = t_2, \quad \sigma = m\sigma_0, \quad m < 1,$$

$$(5.2) \quad \varepsilon_{cI}(t_2) = \varepsilon_{cI2} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [1 - m^{n-k}] + \right. \\ \left. + m^{n-k} \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

dla II programu obciążenia

$$0 \leq t \leq \Delta t_2, \quad \sigma = m\sigma_0, \quad m < 1,$$

$$(5.3) \quad \varepsilon_{cII}(\Delta t_2) = \varepsilon_{cII1} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} m^{\frac{n-k}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

$$\Delta t_2 \leq t \leq \Delta t_2 + \Delta t_1 = t_2, \quad \sigma = \sigma_0,$$

$$(5.4) \quad \varepsilon_{cII}(t_2) = \varepsilon_{cII2} = \left[ \frac{A}{B} \frac{\alpha+1}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k} \right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \left\{ \left[ 1 - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [m^{n-k} - 1] + \right. \\ \left. + \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{n+1-k}{k+1}} - 1 \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

We wzorach tych oznaczono

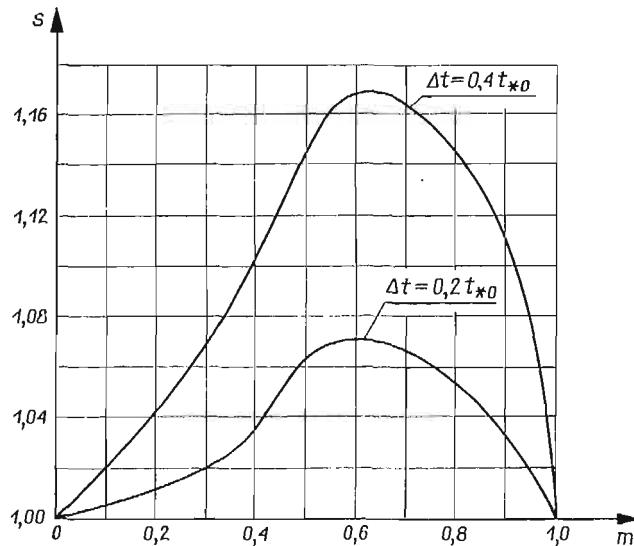
$$t_{*0} = \frac{1}{B(k+1)\sigma_0^k}$$

Stosunek końcowych wartości odkształceń pełzania dla obu programów (5.2), (5.4) wynosi

$$(5.5) \quad s = \frac{\varepsilon_{cII2}}{\varepsilon_{cI2}} = \frac{\left[ 1 - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [m^{n-k} - 1] + \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - m^{n-k}}{\left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} [1 - m^{n-k}] + m^{n-k} \left[ 1 - \frac{\Delta t_1}{t_{*0}} - \frac{\Delta t_2}{t_{*0}} m^k \right]^{\frac{k+1-n}{k+1}} - 1}$$

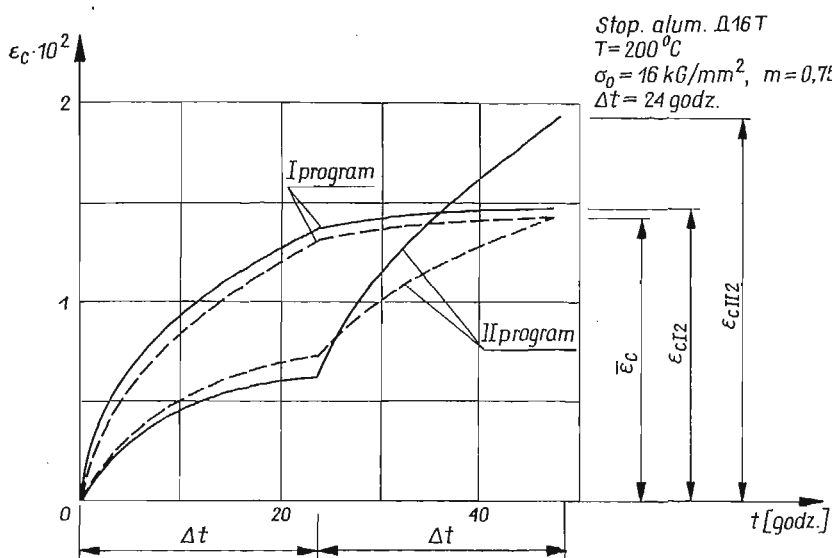
Dla zwykłej teorii umocnienia wartości odkształceń w chwili  $t_2$  dla obu programów potwierdzają zasadę komutatywności i wynoszą

$$(5.6) \quad \bar{\varepsilon}_{cI2} = \bar{\varepsilon}_{cII2} = \{A(\alpha+1)\sigma_0^n(\Delta t_1 + m^n \Delta t_2)\}^{\frac{1}{\alpha+1}}$$



Rys. 4

Dla przypadku  $\Delta t_1 = \Delta t_2$  i wybranych wartości stałych materiałowych ( $n = 4$ ,  $k = 2$ ) sporządzono wykres zależności stosunku  $s$  od  $m$  (rys. 4). Do obliczeń przyjęto  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = = 0,2 t_{*0}$  oraz  $\Delta t_1 = \Delta t_2 = 0,4 t_{*0}$ . Dla wszystkich  $0 < m < 1$  odkształcenie w chwili  $t_2$  jest większe przy zwiększaniu obciążenia (program II) niż przy jego zmniejszaniu (pro-



Rys. 5

gram I). Zjawisko to było pokazane doświadczalnie; na rys. 5 przytoczono wyniki doświadczeń z pracy [9] oraz — liniami przerywanymi — krzywe teoretyczne dla teorii umocnienia.

### 6. Relaksacja naprężeń

Dla opisu zjawiska relaksacji naprężeń konieczne jest scałkowanie równań (2.1), (2.2) przy założeniu  $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$  z warunkami początkowymi  $\sigma(0) = \sigma_0$  i  $\omega(0) = 0$ , oraz uwzględnienie odkształceń sprężystych. Dla poszukiwanych funkcji  $\sigma(t)$  i  $\omega(t)$  otrzymujemy teraz układ

$$(6.1) \quad \int_0^t \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n (1-\omega)^{-n} dt = t_0 \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\alpha+1}, \quad (1-\omega)^{k+1} = 1 - \frac{1}{t_{*0}} \int_0^t \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^k dt,$$

gdzie  $t_0 = \sigma^{\alpha+1-n} / AE^{\alpha+1}(\alpha+1)$ .

Analityczne rozwiązywanie układu (6.1) jest dosyć kłopotliwe, podobnie jak to jest dla zwykłej teorii umocnienia, gdzie na ogół stosuje się metody numeryczne. Wygodnym wydaje się tu całkowanie układu (6.1) krokami po naprężeniu. Oznaczając przez  $\sigma_i$  naprężenie w chwili  $t_i$ , położymy:

$$(6.2) \quad \sigma_i = \sigma_0(1-i\delta), \quad i = 1, 2, \dots, \frac{1}{\delta},$$

gdzie  $0 < \delta < 1$  jest krokiem po  $\sigma_i$  (np.  $\delta = 0, 1$ ). Przyjmijmy, że naprężenie  $\sigma_i$  jest stałe w przedziale czasu  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ . Teraz układ (6.1) można zapisać w postaci:

$$(6.3) \quad \sum_{j=1}^i (1-j\delta)^n (1-\omega_j)^{-n} \Delta t_j = t_0 (i\delta)^{\alpha+1}, \quad (1-\omega_i)^{k+1} = 1 - \frac{1}{t_{*0}} \sum_{j=1}^i (1-j\delta)^k \Delta t_j.$$

Z równań tych można wyznaczać  $\Delta t_i$  i  $\omega_i$  dla każdego kroku. Ten sposób postępowania wymaga jednak rozwiązywania równań algebraicznych wysokiego stopnia ze względu na  $\omega_i$ . Aby tego uniknąć, można — szczególnie przy zastosowaniu maszyn cyfrowych — wyznaczyć  $\Delta t_i$  z równań zwykłej teorii umocnienia, które w przyjętych oznaczeniach mają postać:

$$(6.4) \quad \sum_{j=1}^i (1-j\delta)^n \Delta t_j = t_0 (i\delta)^{\alpha+1},$$

a następnie z drugiego z równań (6.3) obliczać  $\omega_i$ . Podstawiając  $\omega_i$  do pierwszego z równań (6.3) wyznaczmy poprawioną wartość  $\Delta t_i$ , na podstawie której z drugiego równania wyznaczamy kolejne przybliżenie dla  $\omega_i$ . Ten proces iteracyjny należy prowadzić aż do uzyskania żądanej dokładności obliczeń.

Przebieg krzywych relaksacji, wyznaczonych na podstawie (6.1) [bądź (6.3)] zależy od wartości stosunku  $t_0/t_{*0}$ , który np. dla stali i przy naprężeniach  $\sigma_0 < \sigma_e$  ( $\sigma_e$  — granica sprężystości) jest rzędu  $10^{-6}$ . Tym niemniej krzywe te układają się poniżej krzywych otrzymanych na podstawie teorii umocnienia, a więc tak, jak i krzywe doświadczalne (zob. np. [2]). Różnice ilościowe pomiędzy obiema teoriami są jednak bardzo małe, gdyż wpływ szybko malejących naprężeń na uszkodzenia, a co za tym idzie na odkształcenia, jest mały.

## 7. Zniszczenie mieszane

Równanie (1.8) opisuje proces narastania uszkodzeń materiału, w wyniku którego następuje zniszczenie kruche. Realizuje się ono dla małych wartości naprężeń. Dla dużych naprężeń HOFF [4] zaproponował opis zniszczenia lepkiego, uwzględniając duże odkształcenia dla pełzania ustalonego. Propozycję uwzględnienia obu rodzajów zniszczenia podał KACZANOW [5], nie biorąc jednak pod uwagę wpływu uszkodzeń na odkształcenia i opierając się na teorii pełzania ustalonego. Dla pełzania nieustalonego koncepcje Hoffa i Kaczanowa rozwinął NAMIESTNIKOW [8]. Opis pełzania dla teorii pełzania ustalonego, przy uwzględnieniu dużych odkształceń i wpływu na nie uszkodzeń, zaproponował RABOTNOW [16].

Przyjmując logarytmiczną miarę odkształceń i wykorzystując warunek nieściśliwości, otrzymamy z (2.1) i (2.2) układ równań

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_c \varepsilon_c^\alpha &= A \left( \frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^n \exp(n\varepsilon_c), \\ \dot{\omega} &= B \left( \frac{\sigma_0}{1-\omega} \right)^k \exp(k\varepsilon_c). \end{aligned}$$

W dalszym ciągu przyjmiemy  $n > k+1$ . Dzieląc równania (7.1) stronami przez siebie i obustronnie całkując, otrzymamy

$$\int_0^{\varepsilon_c} \varepsilon_c^\alpha \exp[(k-n)\varepsilon_c] d\varepsilon_c = \frac{A}{B} \sigma_0^{n-k} \int_0^{\omega} (1-\omega)^{k-n} d\omega.$$

Dla całkowitych  $\alpha$  całkę po lewej stronie powyższej równości można obliczyć; otrzymamy stąd związek pomiędzy  $\varepsilon_c$  i  $\omega$  w postaci

$$(7.2) \quad \varepsilon_c = \frac{1}{n-k} \ln \sum_{i=0}^{\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-i)!} \frac{\varepsilon_c^{\alpha-i}}{(n-k)^i} = -\frac{1}{n-k} \ln \left\{ \frac{\alpha!}{(n-k)^\alpha} + \nu - \frac{\nu}{(1-\omega)^{n-(k+1)}} \right\},$$

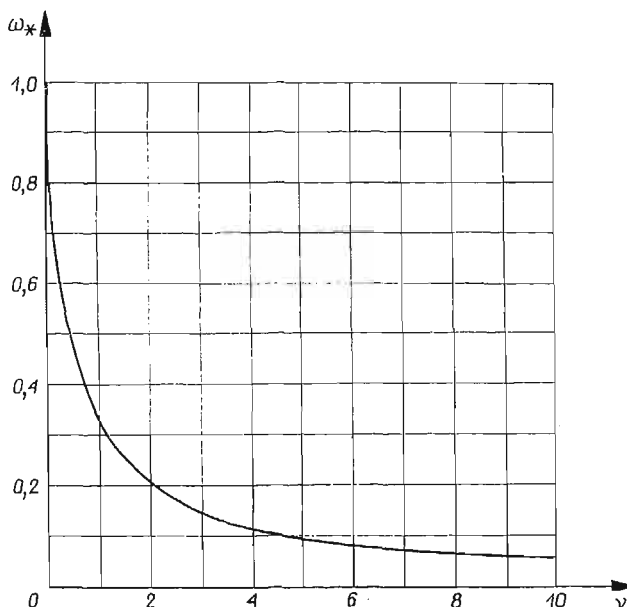
gdzie oznaczono

$$(7.3) \quad \nu = \frac{A}{B} \frac{n-k}{n-(k+1)} \sigma_0^{n-k}.$$

Z warunku istnienia prawej strony równości (7.2) otrzymujemy

$$(7.4) \quad \omega \leq \omega_* = 1 - \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{\nu} \frac{\alpha!}{(n-k)^\alpha}} \right]^{\frac{1}{n-(k+1)}},$$

gdzie  $\omega_*$  oznacza stopień zniszczenia kruchego w chwili, gdy odkształcenia pełzania narastają nieograniczenie (tzn. przekrój poprzeczny próbki zmierza do zera).



Rys. 6

Czas zniszczenia mieszanego można teraz wyznaczyć z drugiego z równań (7.1)

$$(7.5) \quad t_m = \frac{1}{B\sigma_0^k} \int_0^{\omega_*} (1-\omega)^k \exp[-k\varepsilon_c(\omega)] d\omega.$$

Warto zauważyć, że w ustalonej temperaturze, wzrost przyłożonego naprężenia  $\sigma_0$  powoduje zmniejszanie wartości  $\omega_*$  do wartości granicznej  $\omega_* = 0$ , co odpowiada przypadkowi zniszczenia idealnie lepkiego. Drugi przypadek graniczny  $\sigma_0 \rightarrow 0$  (tzn.  $\omega_* \rightarrow 1$ ) stanowi przejście do zniszczenia idealnie kruchego. Zależność  $\omega_*$  od  $\nu$  (a więc i od  $\sigma_0$ ) dla  $n = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\alpha = 1$  pokazuje rys. 6.

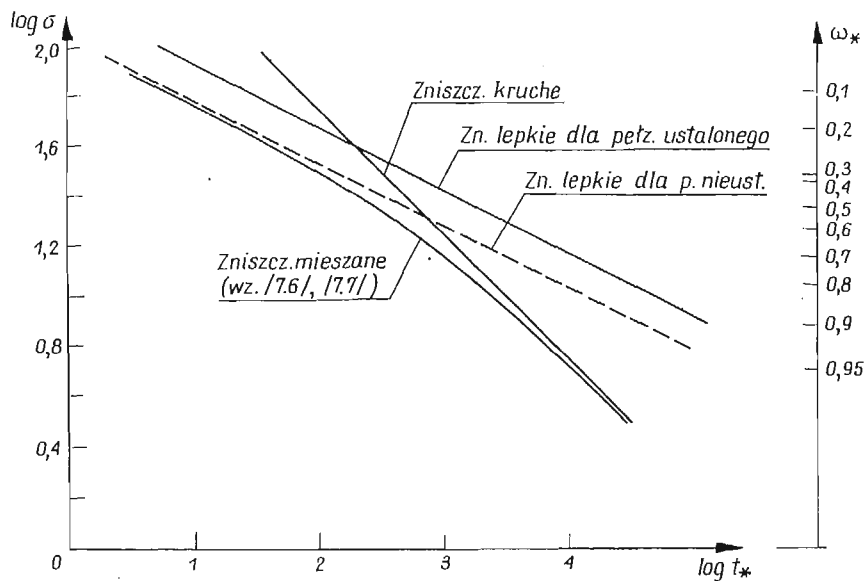
Posługiwanie się równaniami (7.1) w postaci analitycznej jest niewygodne, szczególnie gdy  $\alpha$  jest niecałkowite. Prostim sposobem będzie całkowanie krokami po  $\omega$  w przedziale  $0 \leq \omega \leq \omega_*$ . Przyjmując przyrosty  $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_{i-1}$  na tyle małe, aby małe były odpowiadające im przyrosty czasu  $\Delta t_i$  i zakładając, że  $\varepsilon_{ci}$  jest stałe w tych przedziałach czasu, otrzymamy równanie

$$(7.6) \quad \varepsilon_{ci}^{\alpha} \exp[(k-n)\varepsilon_{ci}] \Delta\varepsilon_{ci} = \frac{A}{B} \sigma_0^{n-k} \frac{1}{n-(k+1)} \left[ \frac{1}{(1-\omega_i)^{n-(k+1)}} - \frac{1}{(1-\omega_{i-1})^{n-(k+1)}} \right],$$

z którego możemy wyznaczyć  $\varepsilon_{ci}$ , a następnie z równania

$$(7.7) \quad (1-\omega_{i-1})^{k+1} - (1-\omega_i)^{k+1} = B\sigma_0^k(k+1) \exp(k\varepsilon_{ci}) \Delta t_i,$$

wyliczyć  $\Delta t_i$ . Krzywą wytrzymałości czasowej, zbudowaną w oparciu o wzory (7.6) i (7.7) pokazano na rys. 7. Jak widać z tego rysunku, proponowany opis zniszczenia mieszanego



Rys. 7

odpowiada zastąpieniu schematycznego wykresu  $\log t_* - \log \sigma_0$  w postaci dwu prostych — jedną krzywą. Asymptotyczne zbliżanie się tej krzywej do prostych wykresu schematycznego odpowiada przejściu do zniszczenia idealnie lepkiego (lewa gałąź) i idealnie kruchego (prawa gałąź wykresu).

## 8. Uwagi końcowe

Przedstawiona propozycja opisu pełnego procesu pełzania metali jest uogólnieniem hipotezy RABOTNOWA [15] dzięki wprowadzeniu do rozważań zjawiska umocnienia. Jak pokazano, koncepcja niniejsza dobrze odpowiada stronie empirycznej zjawiska pełzania. Pozwala ona nie tylko wyjaśniać fakty obserwowane doświadczalnie, lecz także przewidywać zachowanie się konstrukcji, pracujących w podwyższonych temperaturach.

Пропонowany opis daje możliwość opisanja redystrybucji naprężeń, zachodzącej w statycznie niewyznaczalnych konstrukcjach, a w konsekwencji na precyzyjniejsze wyznaczenie czasu zniszczenia tych konstrukcji. Przy umownym podziale krzywej pełzania na trzy odcinki, redystrybucję naprężeń można opisać tylko dla pełzania nieustalonego. Problem ten był niedawno omawiany w pracy CALLADINE [1]. Przedstawiona propozycja opisu pełzania, dla której nie wydziela się poszczególnych okresów pełzania, pozwoli na prześledzenie zmiany rozkładu naprężeń w ciągu całego procesu.

Poprawny opis pełzania przy skokowej zmianie naprężeń daje także możliwość opisu ruchu frontu zniszczenia dla złożonych konstrukcji.

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. R. CALLADINE, *Time-scales for redistribution of stress in creep of structures*, Proc. Roy. Soc., 1498. A 309, (1969).
2. В. И. Даниловская, Т. М. Иванова, Ю. Н. Работнов, *Ползучесть и релаксация хромомолибденовой стали*, Изв. АН СССР, ОТН, 5 (1955).
3. C. C. DAVENPORT, *Correlation of creep and relaxation properties of copper*, J. Appl. Mech., A 56, 10 (1938).
4. N. J. HOFF, *The necking and rupture of rods subjected to constant tensile loads*, J. Appl. Mech., 20 (1953).
5. Л. М. Качанов, *О времени разрушения в условиях ползучести*, Изв. АН СССР, ОТН, 8 (1958).
6. P. LUDVIK, *Elemente der technologischen Mechanik*, Berlin 1908.
7. A. NADAI, *On the creep of solids at elevated temperatures*, J. Appl. Phys., 6, 8 (1937).
8. В. С. Наместников, *О времени до разрушения при ползучести*, ПМТФ, 1 (1961)
9. В. С. Наместников, А. А. Хвостунков, *Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках*, ПМТФ, 4 (1960).
10. В. С. Наместников, Ю. Н. Работнов, *О гипотезе уравнения состояния при ползучести*, ПМТФ, 3 (1961).
11. F. K. G. ODQVIST, *Influence of primary creep on stresses in structural parts*, Trans. Roy. Inst. Techn., 66, Stockholm 1953.
12. F. K. G. ODQVIST, *Engineering theories of metallic creep*, Proc. Symp. su la plasticita nella scinza delle costruzioni, Varenna 1956.
13. F. K. G. ODQVIST, *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Oxford 1967.
14. Ю. Н. Работнов, *О механизме длительного разрушения*, Вопросы прочности мат. и констр., Москва 1959.
15. Yu. N. Работнов, *On the equations of state for creep*, Progress in Appl. Mech., New York 1963.
16. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Москва 1966.
17. В. М. Розенберг, *Ползучесть металлов*, Москва 1967.
18. R. SODERBERG, *The interpretation of creep tests for machine design*, Trans. ASME, 8, 58 (1936).
19. B. SODERQUIST, *Some aspects of creep and creep rupture*, Acta Polyt. Scand., Phys. Nucl. Ser., 58 (1968).
20. Н. С. Вилесова, В. С. Наместников, *Об одном параметре упрочнения*, ПМТФ, 3 (1964).

#### Резюме

#### О ВОЗМОЖНОСТИ ОПИСАНИЯ ВСЕГО ПРОЦЕССА ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛОВ

Предложено полное описание всего процесса ползучести металлов, охватывающее все три условных участка кривой ползучести. Построена математическая модель в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, основанная на предположении параллельности процессов упрочнения и нарастания повреждений. При помощи этой модели исследована



ползучесть в условиях одноосного растяжения под действием как постоянной, так и внезапно изменяющейся нагрузки, что дало возможность более полно объяснить некоторые явления, наблюдаемые в экспериментах. Рассмотрена задача об определении материальных констант, а также указаны возможности прогнозирования временной прочности, основанные на предлагаемой теории. Рассмотрены процессы релаксации напряжений и смешанного вязко-хрупкого разрушения при конечных деформациях.

#### S u m m a r y

#### ON A POSSIBILITY OF DESCRIPTION OF FULL CREEP PROCESSES FOR METALS

A method of description of full creep processes of metals is proposed in the paper for all three conventional parts of typical creep curves. Under the assumption of parallel course for hardening and damage increase processes, the mathematical model is built in the form of a set of non-linear differential equations of the first order. Using the above model the creep under axial extension is analyzed for the cases of constant and jump variable loadings. In this way a richer explanation of experimentally observed facts is acquired. The problem of material constants determination as well as the possibility of predicting the time-dependent strength are discussed. The course of the stress relaxation process and, taking into account large deformations, the case of mixed visco-brittle fracture are also considered.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1971 r.*

---

NAPRĘŻENIA KONTAKTOWE W ELEMENTACH MASZYN W ŚWIELE BADAŃ ZAGADNIENIA  
ELASTOHYDRODYNAMICZNEGO SMAROWANIA\*

JACEK STUPNICKI (WARSZAWA)

Oznaczenia

$E$  moduł Younga,

$E'$  zredukowany moduł Younga wyrażony przez wzór  $\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1-\nu_p^2}{E_p} + \frac{1-\nu_w^2}{E_w} \right]$ ,

$F$  wartość naprężeń stycznych wywołujących 1 izochromę,

$n$  rząd izochromy,

$p_0$  maksymalne naciski według Hertza,

$R_p$  promień bieżni pierścienia,

$R_w$  promień bieżni walca,

$R$  promień zastępczego walca wyrażony następująco  $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_w}$ ,

$\tau$  naprężenia styczne,

$\kappa$  współczynnik redukcji maksymalnych naprężeń stycznych wyrażony przez  $\kappa =$

$$= \frac{\tau_{\max} \text{ z olejem}}{\tau_{\max} \text{ bez oleju}},$$

$V_p$  prędkość bieżni pierścienia,

$V_w$  prędkości bieżni walca,

$\mu_0$  lepkość oleju pod ciśnieniem atmosferycznym i w temperaturze pomiarów,

$\alpha$  współczynnik wzrostu lepkości z ciśnieniem we wzorze  $\mu = \mu_0 e^{\alpha p}$ ,

$\beta$  współczynnik poślizgu wyrażony przez  $\beta = \frac{V_w}{V_p} - 1$ .

1. Wstęp

Badania prowadzone w szeregu ośrodków nad zagadnieniami elastohydrodynamicznego smarowania wykazują, że nieprzerwana warstwa oleju oddzielająca współpracujące powierzchnie elementów maszyn jest zjawiskiem występującym częściej niż się tego dawniej spodziewano. Do typowych elementów maszyn pracujących w warunkach elastohydrodynamicznego smarowania należą łożyska toczne, zęby kół zębatych, krzywki itp.

\*) III nagroda na Ogólnopolskim Konkursie na prace doświadczalne z mechaniki, zorganizowanym przez Oddział Gliwicki PTMTS w 1970 r.

Szereg ważnych czynników odróżnia elastohydrodynamiczne smarowanie od klasycznego smarowania hydrodynamicznego. Czynnikiemami tymi są: wpływ wysokiego ciśnienia na lepkość oleju, ściśliwość oleju, sprężyste odkształcenie powierzchni, szorstkość powierzchni i lokalne zmiany temperatury.

Kiedy pod wpływem ciśnienia powierzchnie ciał ulegają deformacji, zmienia się kształt szczeliny olejowej, co wpływa na rozkład ciśnień w warstwie oleju. Rozwiązanie zagadnienia musi jednocześnie spełniać równania hydrodynamiki uwzględniając zmianę własności cieczy z ciśnieniem i temperaturą, jak i równania sprężystości.

Zagadnienie jest złożone, a rozwijając je należy mieć stale na uwadze rząd wielkości charakterystycznych parametrów. Dla większości technicznie ważnych przypadków szerokość kontaktu wynosi  $B = 0,1 - 0,5$  mm, grubość warstwy  $h = (5 \div 20) \cdot 10^{-4}$  mm. Olej wchodząc w strefę kontaktu pod ciśnieniem atmosferycznym zostaje sprężony do  $p = 500 - 1500$  MN/m<sup>2</sup> i odprężony, w czasie  $t = (1 \div 5) \cdot 10^{-5}$  sek, co odpowiada prędkości toczenia  $V = 10$  m/sek. Pomimo tak krótkiego czasu, olej odbywa długą drogę pomiędzy współpracującymi powierzchniami. Stosunek szerokości pola styku do grubości warstwy wynosi bowiem  $\frac{B}{h} = 500 \div 1000$ , a lokalne nierówności powierzchni wpływają nań w sposób zasadniczy.

W literaturze naukowej ukazują się liczne publikacje poświęcone analizie elastohydrodynamicznego smarowania. Prace GRUBINA [11] i PETRUSEWICZA [12] stały się podstawą do analiz teoretycznych [2, 5, 6, 7, 8]. Charakteryzując je ogólnie można stwierdzić, że dla rozwiązania zagadnienia muszą być czynione daleko idące uproszczenia. W szczególności uproszczenia te polegają na przyjmowaniu własności olejów na podstawie badań statycznych, zaniechaniu efektów termicznych i odprowadzania ciepła, zaniechaniu wpływu obecności faz lotnych w oleju, co zasadniczo zmienia ściśliwość, i zaniechaniu różnic prędkości wzdłuż grubości warstwy oleju.

Powyższe fakty skłaniają do poszukiwań wyjaśnienia zagadnień kontaktu na drodze badań doświadczalnych, uwzględniających specyfikę zjawiska.

Z punktu widzenia zastosowań do projektowania łożysk tocznych, szczególne znaczenie ma określenie grubości warstwy w zależności od szeregu czynników takich, jak geometria kontaktu, wielkość obciążenia, prędkość toczenia i poślizgu, lepkość oleju itp. Zagadnieniu temu poświęcono szereg prac doświadczalnych [3, 4, 13] ujmujących wyniki w postaci wzorów lub wykresów określających potrzebne wartości w sposób jednoznaczny.

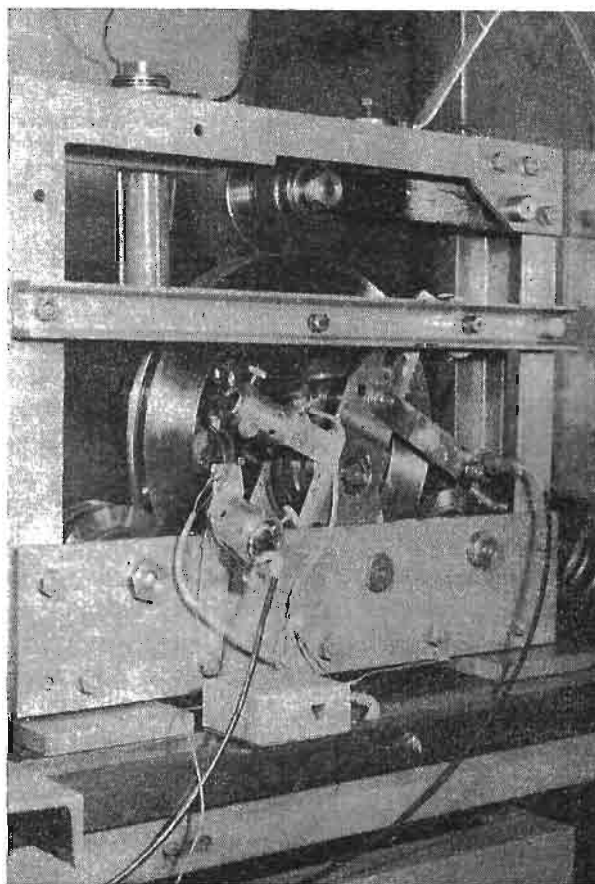
Drugim zagadnieniem jest określenie rozkładu ciśnień w warstwie oleju i odpowiadającego mu rozkładu naprężeń w ciałach stałych w funkcji wymienionych powyżej parametrów.

Zagadnienie to, szczególnie ważne z punktu widzenia wytrzymałości zmęczeniowej, interesującej zarówno projektantów łożysk tocznych, jak i przekładni zębatych, nie znalazło dotychczas zadowalającego rozwiązania. Z uwagi na bardzo małe wymiary badanego obszaru w stosunku do istniejących elementów pomiarowych, uzyskanie wyników na rzeczywistych konstrukcjach jest niemożliwe. Badania ograniczają się więc bądź do stwierdzenia wpływu grubości warstwy na trwałość konstrukcji [1, 13], bądź do wyznaczenia interesujących wielkości na modelach o zwiększonej strefie kontaktu drogą modyfikacji geometrii [10]. Wiąże się z tym odejście od charakterystycznych parametrów kontaktu takich, jak wielkość nacisku i czas przechodzenia oleju przez strefę kontaktu.

Autor w swojej wcześniejszej pracy [14] wykazał istnienie wpływu warstwy oleju na rozkład nacisków. Podane tam wyniki dotyczące rozkładu ciśnień i naprężeń w zależności od prędkości toczenia poślizgu i lepkości oleju oparte były na badaniach wykonanych przy małych ciśnieniach rzędu  $p = 30 \text{ MN/m}^2$ . Praca prezentowana obecnie omawia uzyskane ostatnio na ulepszonym stanowisku badawczym wyniki dotyczące wpływu warstwy oleju przy dziesięciokrotnie wyższych ciśnieniach.

## 2. Opis aparatury i technika pomiarów

Badania były przeprowadzone przy użyciu elastooptycznej metody pomiaru naprężeń, pozwalającej uzyskać w czasie mikrosekundy rozkład naprężeń w całym badanym obszarze. Użycie odpowiednich materiałów na modele walców współpracujących gwarantuje, że

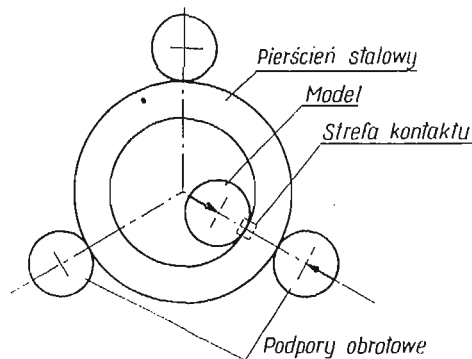


Rys. 1

pomiar jest bezinercyjny. Przy odpowiednio dobranym układzie optycznym można uzyskać dane o naprężeniach w punktach odległych o ułamki milimetra, co przy stosowaniu wszystkich innych metod analizy naprężeń jest nieosiągalne.

Rysunek 1 przedstawia ogólny widok, a rys. 2 schemat urządzenia pomiarowego. Zaprojektowane ono było w ten sposób, by mogło być umieszczone pomiędzy elementami układu optycznego polaryskopu.

Modele pomiarowe walców wykonane z plastyku CR-39 posiadały wymiary: średnica  $d_p = 120$  mm, grubość  $t_p = 18$  mm; obciążane były do  $p_0 = 30$  MN/m<sup>2</sup>. Modele wykonane ze szkła miały średnicę  $d_s = 125$  mm i grubość  $t_s = 25$  mm; obciążane były do  $p_0 = 210$  MN/m<sup>2</sup>, gdzie  $p_0$  oznacza maksymalne naciski w miejscu kontaktu według wzorów Hertza. Warunki kontaktu realizowane były przez docisk modeli do wewnętrznej powierzchni pierścienia stalowego o średnicy  $d_p = 260$  mm i średnicy zewnętrznej  $d_p = 400$  mm ułożyskowanego na trzech rolkach. Wielkiej staranności w czasie budowy urządzenia wymagało



Rys. 2

zapewnienie, by osie modelu, pierścienia i rolek prowadzących były równoległe. Nawet niewielkie odchylenia tych osi od równoległości powodowały drgania układu i niestabilną pracę pierścienia.

Dowolny nacisk w miejscu kontaktu wywoływany był sprężyną połączoną przez element dynamometryczny z dźwignią, w której osadzono łożyska modelu walca.

Zarówno model walca, jak i pierścień były napędzane osobnymi silnikami dla umożliwienia badania w warunkach toczenia i toczenia z poślizgiem.

Pierścień napędzany był silnikiem prądu zmiennego przez pas klinowy. Zmienne przełożenie pozwalało uzyskiwać trzy prędkości obrotów odpowiadające prędkości wewnętrznej bieżni pierścienia  $V_p = 3,1$  m/sek,  $V_p = 8,8$  m/sek i  $V_p = 17,2$  m/sek. Model walca był napędzany silnikiem prądu stałego, który umożliwiał ciągłą zmianę prędkości bieżni walca od  $V_w = 0$  do  $V_w = 35,5$  m/sek.

Prędkości walca i pierścienia były mierzone za pomocą układu fotokomórek, których wskazania rejestrowano na taśmie oscylografu. Dokładność tego typu pomiarów prędkości oceniono na około 3%.

Na bieżnię walca i pierścienia natryskiwano olej. Stosowano kilka gatunków olejów przekładniowych, olej Hipol 10 i Hipol 15, Spirax 90 EP.

Obrazy izochrom odpowiadające dynamicznym naprężeniom uzyskiwano fotografując strefę kontaktu w świetle monochromatycznym ( $\lambda = 4470$  Å) pochodzącym z lampy błyskowej dużej mocy. Czas naświetlania filmu wynosił około 1 mikrosekundy.

Dla sprawdzenia prawidłowego działania aparatury i czułości optycznej materiału modelowego wykonano zdjęcia rozkładu izochrom obciążając walec statycznie i w czasie toczenia z różnymi prędkościami. Otrzymane rozkłady izochrom statyczne i dynamiczne dla suchego kontaktu nie wykazywały różnic co świadczy, że materiały stosowane na walce w zakresie stosowanych prędkości toczenia nie wykazują histerezy sprężystej ani optycznej.

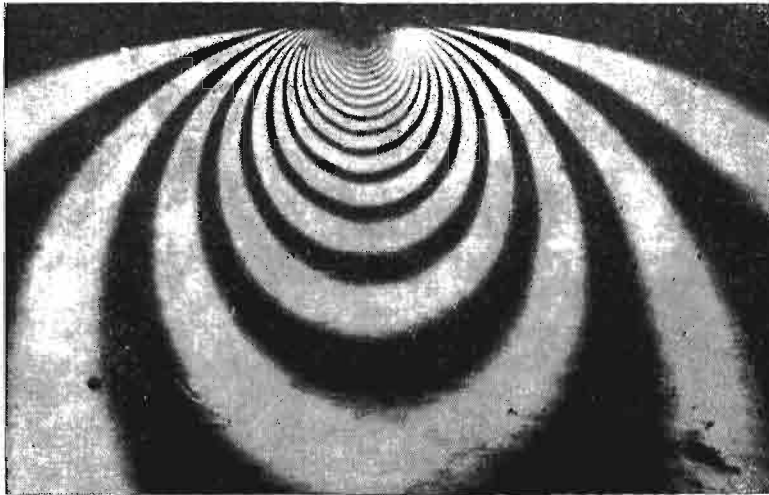
Rysunek 3 przedstawia rozkład izochrom dla suchego kontaktu przy użyciu walca szklanego. Obciążenie jednostkowe  $P = 160 \text{ KN/m}$  wywołuje maksymalne naciski według Hertza  $p_0 = 163 \text{ MN/m}^2$ .

Izochromy są to miejsca geometryczne punktów, w których naprężenia styczne  $\tau$  w płaszczyźnie modelu są stałe. Wartość naprężeń stycznych jest dana równaniem

$$\tau = nF,$$

gdzie  $n$  jest rzędem izochromy,  $F$  — stałą modelową.

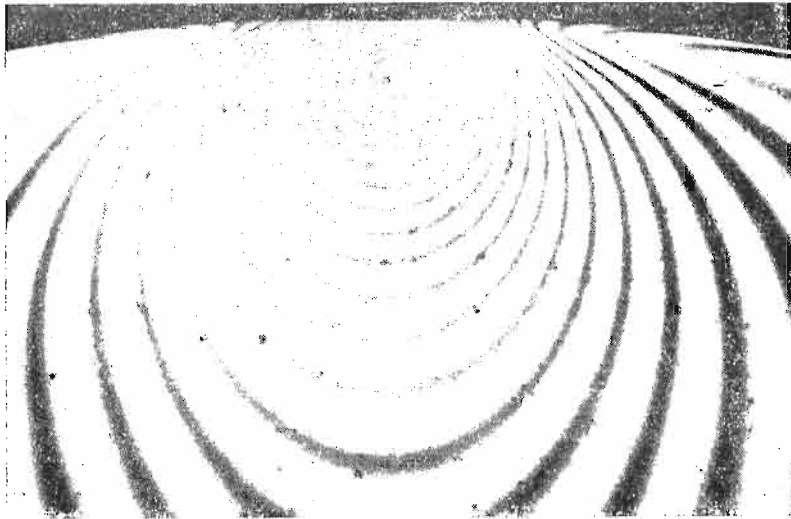
Największy rząd izochromy  $n_{\max}$ , a więc i  $\tau_{\max}$ , występuje nieco pod powierzchnią bieżni. Przy zastosowaniu techniki fotografowania izochrom, najmniejsza różnica w wartości izochrom, którą można odczytać wynosi 0,25 rzędu. Jeśli  $n_{\max}$  utrzymywać na poziomie 15 izochrom dokładność odczytu możemy ocenić na  $\pm 1,6\%$ .



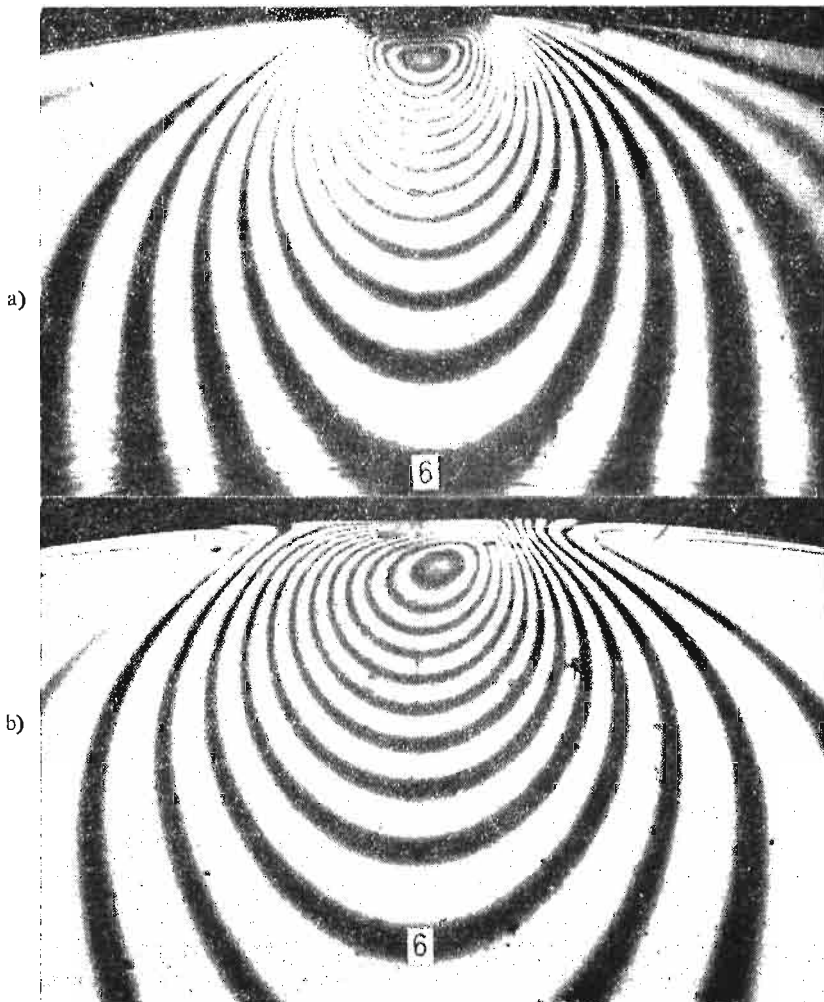
Rys. 3

We wcześniejszych badaniach autora [14] plastikowe modele walców miały budowę warstwową. Zewnętrzne warstwy wykonane były ze szkła organicznego, optycznie nieczułego, a warstwa wewnętrzna CR-39. Taka budowa modelu pozwalała wyznaczyć rozkład naprężeń w środkowej warstwie walca. Badania te wykazały, że dla rozważanych wymiarów pola styku i stosunku grubości modelu do grubości warstwy oleju wpływ boczny oleju może być zaniedbany.

Aby otrzymane wyniki mogły być porównywane z otrzymanymi przez innych autorów przyjęto stosowane zazwyczaj [9] bezwymiarowe współczynniki charakteryzujące warunki kontaktu.



Rys. 4



Rys. 5

[162]

Współczynniki te w omawianych pomiarach zmieniały się w następujących granicach:

$$\text{Parametr prędkości } U = \frac{\mu_0 V_p}{E'R} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ do } 10 \cdot 10^{-10}.$$

$$\text{Parametr obciążenia } W = \frac{P}{E'R},$$

$$W = 10^{-4} \text{ dla modeli plastykowych,}$$

$$W = 1,05 \cdot 10^{-5} \text{ do } 1,42 \cdot 10^{-5} \text{ dla modeli szklanych.}$$

$$\text{Parametr materiałowy } G = \alpha E',$$

$$G = 160 \text{ dla modeli plastykowych,}$$

$$G = 2600 \text{ dla modeli szklanych.}$$

### 3. Wyniki

Rysunek 4 ukazuje rozkład izochrom w strefie kontaktu w czasie toczenia modelu z CR-39 ze smarowaniem bieżni. Widzimy wyraźną zmianę rozkładu izochrom w porównaniu do rozkładu izochrom kontaktu suchego (rys. 3). Musi to być efektem różnicy rozkładu nacisków pomiędzy walcem a pierścieniem, występujących dla kontaktu suchego i dla kontaktu w przypadku toczenia z olejem.

Rysunki 5a, b i 6a, b podają przykładowo dwa komplety obrazów izochrom uzyskanych dla plastykowych i szklanych modeli dla warunków kontaktu suchego i smarowanego, gdy pozostałe warunki takie, jak całkowite obciążenie, prędkość, poślizg w danym komplecie są te same.

Porównanie rys. a) i b) każdego z kompletów pozwala nam wyciągnąć wniosek, że dla stosowanego w pomiarach zakresu parametrów rozkład ciśnień w warstwie oleju różni się znacznie od eliptycznego rozkładu Herta.

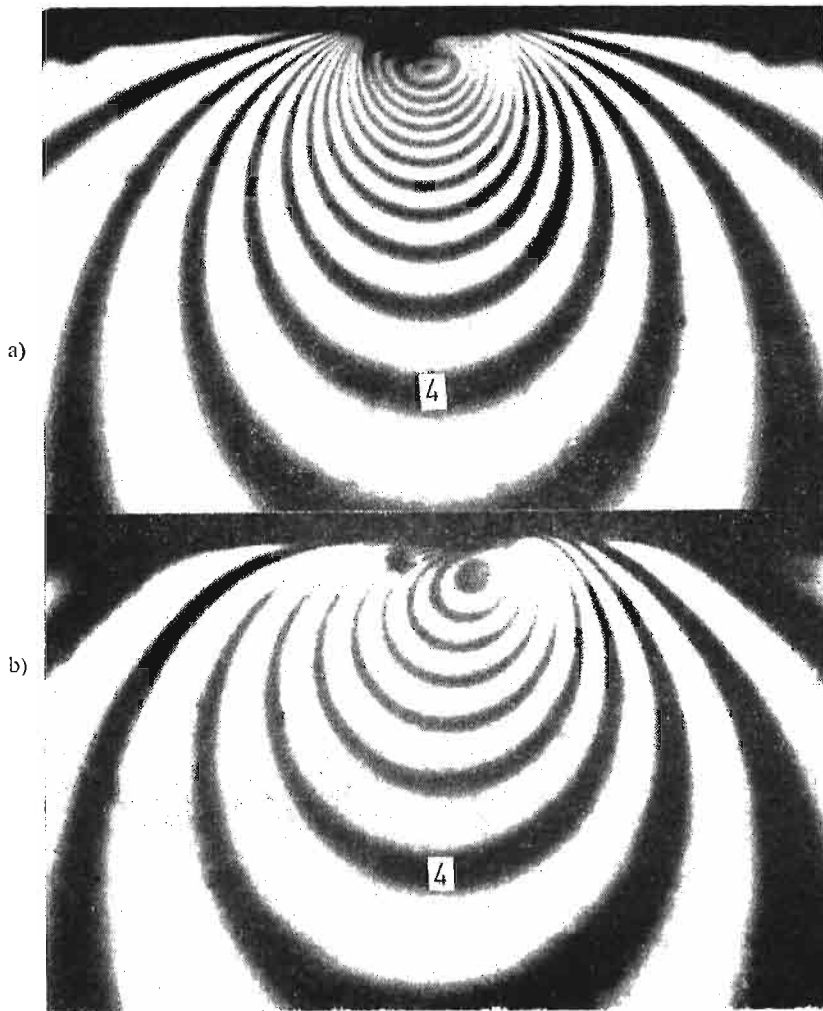
Rozkłady izochrom dla toczenia z olejem są niesymetryczne względem osi łączących środek walca i pierścienia. Isochromy są rozrzedzone przy wejściu w strefę kontaktu, a zgęszczone przy wyjściu. To wskazuje na inne gradienty wzrostu i spadku ciśnienia w warstwie oleju.

W warunkach smarowanego kontaktu maksymalny rząd izochrom  $n_{\max}$  jest niższy niż dla tego samego obciążenia dla suchego kontaktu. Ten fakt jest bardzo istotny, gdyż wskazuje, że obecność oleju w miejscu styku redukuje maksymalne naprężenia styczne  $\tau_{\max}$ . Dla kompletów podanych na rys. 5 i 6  $n_{\max}$  jest zmniejszone przez warstwę oleju odpowiednio o 20 i 33%.

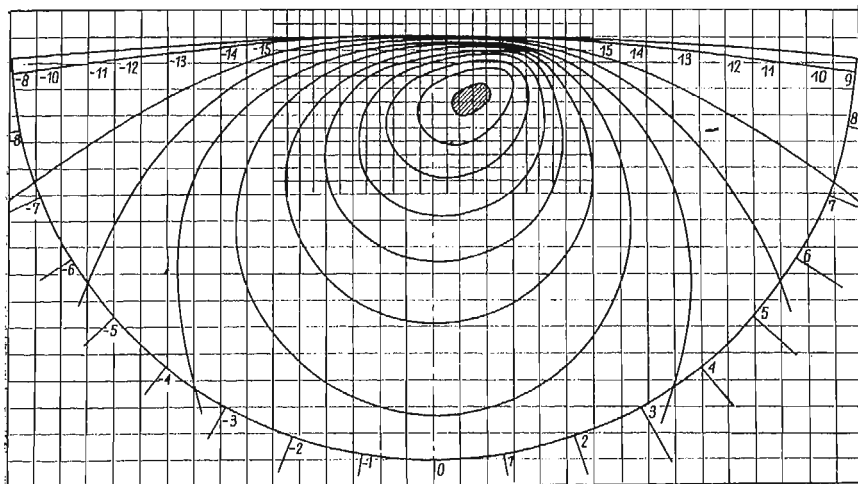
Zmiana w rozkładzie izochrom w okolicy miejsca styku wskazuje, że powierzchnia przenosząca obciążenie w warunkach kontaktu smarowanego jest zwiększona 2–3 razy w stosunku do kontaktu suchego.

Ciekawych informacji dostarcza porównanie rozkładów izochrom pokazanych na rys. 5b i 6b. Obydwa uzyskane dla smarowania tym samym olejem przy tej samej prędkości toczenia różnią się obciążeniem i własnościami sprężystymi modelu. Rozkład izochrom na rys. 5b dla modelu plastykowego odpowiada analizie zjawiska przy założeniu odkształcalności walca i stałej lepkości oleju, podczas gdy rozkład izochrom na rys. 6b dla modelu szklanego odpowiada analizie, uwzględniającej odkształcalność walca i zmianę





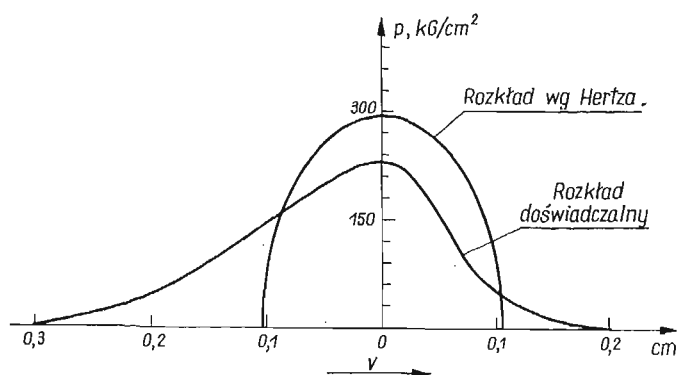
Rys. 6



Rys. 7

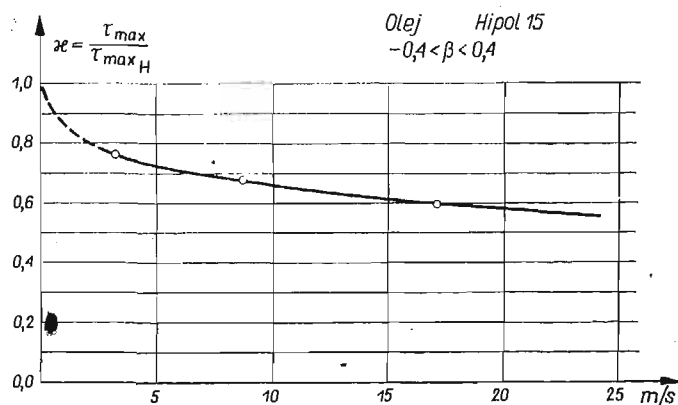
pod wpływem ciśnienia lepkości oleju (dla oleju mineralnego ciśnienie  $p_0 = 200 \text{ MN/m}^2$  wywołuje pięćdziesięciokrotny wzrost lepkości).

Charakter przebiegu izochrom w obydwu przypadkach jest podobny, dlatego możemy przyjąć, że pomimo różnic co do wartości ciśnienia, charakter zmiany ciśnienia wzdłuż brzegu walca jest podobny. Rozkład ciśnień na brzegu walca odpowiadający znanemu rozkładowi izochrom można wyznaczyć wieloma metodami. Posługując się metodą cha-



Rys. 8

rakterystyk [14] autor wyznaczył przebieg ciśnień dla podanego na rys. 7 obrazu izochrom. Odpowiadający przebieg ciśnień w warstwie oleju podaje rys. 8 w zestawieniu z teoretycznym rozkładem nacisków dla suchych gładkich walców.



Rys. 9

Na podstawie szeregu kompletów zdjęć izochrom możemy otrzymać informacje na temat wpływu parametrów toczenia na maksymalne naprężenia styczne. Jako współczynnik redukcji naprężeń stycznych przyjmijmy stosunek

$$\lambda = \frac{n_{max} \text{ z olejem}}{n_{max} \text{ bez oleju}} = \frac{\tau_{max} \text{ z olejem}}{\tau_{max} \text{ bez oleju}}$$

Na rys. 9–12 podano wykresy zmiany współczynnika  $\kappa$  otrzymane dla modeli szklanych, przy zachowaniu stałego obciążenia wywołującego według Hertza maksymalne naciski  $p_0 = 163 \text{ MN/m}^2$  i zastosowaniu olejów przekładniowych Hipol 15 i Spirax 90 EP o lepkości odpowiednio  $\mu_0 = 810 \text{ cP}$  i  $\mu_0 = 690 \text{ cP}$  w temperaturze około  $18^\circ\text{C}$ .

Wykres na rys. 9 podaje zmianę współczynnika  $\kappa$  w funkcji prędkości pierścienia  $V_p$  dla niewielkich poślizgów  $-0,4 < \beta < 0,4$ . Widać, że wpływ prędkości jest znaczny dla małych prędkości  $V_p < 4 \text{ m/sek}$ . Powyżej tej prędkości wartość współczynnika  $\kappa$  nie ulega dużym zmianom. Przebieg wykresu dla bardzo małych prędkości wymaga dalszego sprawdzenia. Wydaje się, że wartość współczynnika  $\kappa$  winna dążyć do 1 dla  $V_p \rightarrow 0$  i  $\beta = 0$ , ale wyniki w zakresie małych prędkości wykazują duże rozrzuty.

Wykresy podane na rys. 10, 11, 12 podają wpływ współczynnika poślizgu  $\beta = \frac{V_w}{V_p} - 1$  na wartość współczynnika  $\kappa$ . Każdy punkt zaznaczony na wykresach odpowiada kompletnemu zdjęciu podobnemu, jak na rys. 6. Dla małych prędkości (rys. 10) wzrost poślizgu powoduje wzrost wpływu oleju, co można tłumaczyć wzrostem średniej prędkości kontaktu  $V = \frac{V_w + V_p}{2}$ . Dla prędkości dużych (rys. 12) wartość współczynnika  $\kappa = 0,56$  wydaje się niezależna od poślizgu w całym badanym zakresie  $-1 < \beta < 1$ . Wartość  $\kappa = 0,56$  oznacza, że maksymalne naprężenia styczne w strefie kontaktu dla toczenia z olejem są mniejsze o około 44% od naprężeń dla kontaktu suchego.

#### 4. Wnioski

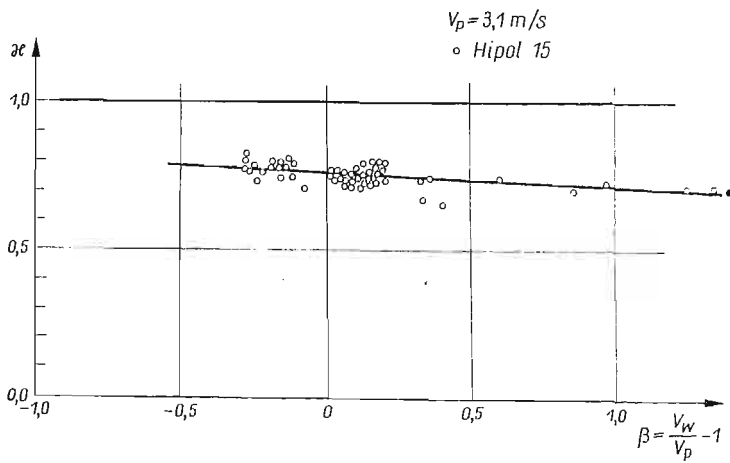
W wyniku przeprowadzonych pomiarów uzyskano rozkłady naprężeń w strefie kontaktu w zależności od prędkości toczenia, wielkości poślizgu, obciążenia oraz własności oleju. Stosowane w pomiarach prędkości toczenia odpowiadają prędkościom rzeczywistych konstrukcji, co ma podstawowe znaczenie z uwagi na czas przejścia oleju przez strefę kontaktu ( $t = 10^{-4}$  sek).

Zastosowanie na modele szkła pozwoliło na osiągnięcie nacisków w strefie kontaktu bliskich rzeczywistym spotykanym w kołach zębatych lub łożyskach toczyń. Materiał modelu posiadał moduł Younga niezbyt różniący się od modułów materiałów spotykanych w rzeczywistych konstrukcjach (brąz, żeliwo).

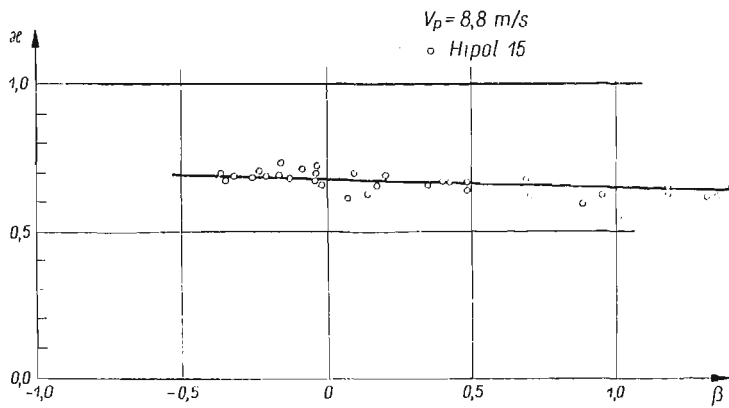
Uzyskane wyniki świadczą, że warstwa oleju wpływa na wielkość i rozkład naprężeń kontaktowych w sposób następujący:

1. Warstwa oleju pomiędzy powierzchniami elementów współpracujących zabezpiecza przed punktowym przenoszeniem obciążeń przez szczyty nierówności powierzchni, co pozwala traktować ciała jako gładkie oraz zmniejsza maksymalne naprężenia kontaktowe odgrywając rolę «poduszki» pomiędzy ciałami stałymi. Dla stosowanych w pomiarach warunków kontaktu zmniejszenie maksymalnych nacisków w stosunku do liczonych z wzoru Hertza wynosi 20%–40%. W pojedynczych przypadkach obserwowano zmniejszenie wytężenia materiału w strefie kontaktu o około 50%.

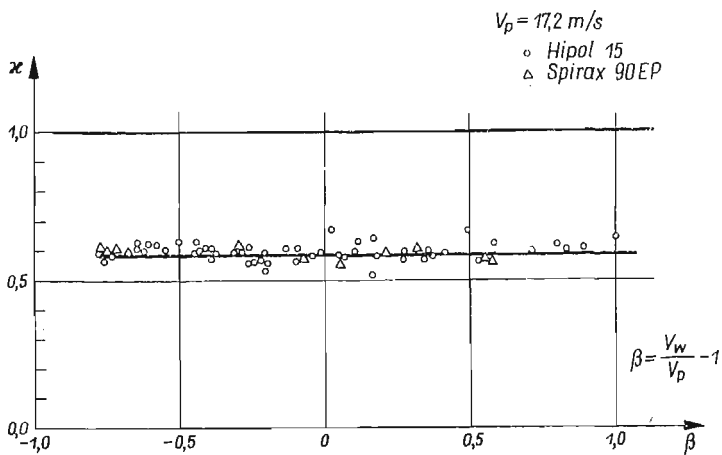
2. Rozkłady izochrom dla czystego toczenia wykazały, że punkt największego wytężenia materiału nie ma tendencji do przesuwania się w kierunku brzegu walca.



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

3. Wpływ warstwy oleju na naprężenia kontaktowe w strefie małych prędkości  $V_p < 4$  m/sek silnie zależy od prędkości toczenia. Dla prędkości większych ulega niewielkim zmianom (rys. 9).

4. Izochromy rozrzedzone w strefie wejścia, a zgęszczone w strefie wychodzenia z kontaktu wskazują, że gradienty wzrostu i spadku ciśnienia w warstwie oleju różnią się znacznie. Na żadnym obrazie izochrom nie zauważono jednak efektów przewidywanego teoretycznie ostrego drugiego maksimum ciśnienia w pobliżu wylotu.

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. J. ANDERSON, *Elastohydrodynamic lubrication theory as a design parameter for rolling element bearings*, Pap. Amer. Soc. Mech. Eng., N. DE-19, (1970).
2. H. БЛОК, *Fundamental mechanical aspects of thin film lubrication*, Annals of the New York Academy of Sciences, 53, 779, (1950).
3. A. CAMERON, *Surface failure in gears*, J. Inst. Petrol, 40, 191 (1954).
4. A. W. CROOK, *The lubrication of rollers I*, Phil. Trans., A 250, 387 (1957).
5. A. W. CROOK, *The lubrication of rollers II. Film thickness with relation to viscosity and speed*, Phil. Trans., A 254, 223 (1961).
6. D. DOWSON, G. R. HIGGINSON, *A numerical solution to the elastohydrodynamic problem*, J. Mech. Engrs. Sci., 1 No 1, 6 (1959).
7. D. DOWSON, G. R. HIGGINSON, *New roller — bearing lubrication formula*, Engineering, Lond., 192, 195 (1961).
8. D. DOWSON, G. R. HIGGINSON, A. V. WHITAKER, *Elasto-hydrodynamic lubrication a survey of isothermal solutions*, J. Mech. Engrs. Sci., 4,2, 121 (1962).
9. D. DOWSON, *Thin Film Lubrication*, Proceedings Int. Symp. on Lubrication and Wear., Berkeley 1965.
10. D. DOWSON, M. D. LONFIELD, *The distribution of pressure and temperature in highly loaded lubricated contact*, Inst. Mech. Engrs, Lubrication and Wear Convention 1963.
11. А. Н. ГРУВИН, *Основы гидродинамической теории смазки нагруженных цилиндрических поверхностей*, Машгиз 1949.
12. А. Я. ПЕТРУСЕВИЧ, *Основные выводы из контактно гидродинамической теории смазки*, Издат. Акад. Наук СССР, 1951.
13. L. B. SIBLEY, J. C. BELL, F. K. ORCUTT, S. M. ALLEN, *A study of the influence of lubricant properties on the performance of aircraft gas turbine engine rolling contact bearings*, WADD Technical Report, 60, 189.
14. J. STUPNICKI, *Wpływ warstwy oleju na kinostatyczne naprężenia kontaktowe*, Arch. Budowy Maszyn, XII (1965), 48.

#### Р е з ю м е

#### КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДЕТАЛЯХ МАШИН С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ЭЛАСТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СМАЗКИ

Описаны опыты по нахождению распределения напряжений в области контакта стального кольца с моделями цилиндров из стекла или пластмассы CR-39, обкатываемыми по внутренней кромке кольца в условиях сухого трения или смазки. Как цилиндры, так и кольцо приводились отдельными двигателями, обеспечивающими произвольные условия качения и качения с проскальзыванием.

Максимальные напряжения в месте контакта по Герцу были равны  $p = 30$  Мнт/м<sup>2</sup> для пластмассовых цилиндров и  $p = 210$  Мнт/м<sup>2</sup> для стеклянных моделей.

Влияние смазки на распределение напряжений в области контакта исследовано путем сравнения изохром для случаев смазки и сухого трения, при одинаковых нагрузках и скоростях качения. В изучаемом диапазоне нагрузок и для употребляемых смазок отмечено значительное изменение распределения напряжений по отношению к распределению Герца.

#### S u m m a r y

#### CONTACT STRESSES IN MACHINE COMPONENTS IN THE LIGHT OF THE RECENT INVESTIGATION OF ELASTOHYDRODYNAMIC LUBRICATION

The paper describes some experiments, the object of which was to determine the stress distribution at the contact surface. Plastic and glass cylinders were rolled on the inner surface of a hardened steel ring under dry and lubricated conditions. The ring and the cylinder were driven by separate motors to enable the rolling and sliding contact.

The maximum pressure at the contact point was, according to the Hertz theory,  $p_0 = 30$  MN/m<sup>2</sup> for a plastic model and  $p_0 = 210$  MN/m<sup>2</sup> for a glass model.

Direct comparison, under a given load, of isochromatic patterns for dry and lubricated conditions show that the oil film exerts an influence on the stress distribution in the contact zone, the discrepancy with the Hertzian distribution being considerable.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 22 marca 1971 r.*

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W DRUGIM I TRZECIM KWARTALE 1971

W okresie sprawozdawczym zorganizowano 22 zebrania naukowe, na których wygłoszono 31 referatów, mianowicie:

L.p.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				ucze- stni- ków	dysku- tantów
Oddział w Bydgoszczy					
1.	21.V.1971	T. Jędryka	O metodzie Galerkina	15	8
2.	21.V.1971	A. Matysiak	Teoria i wyniki badań ściskanego wiotkiego pręta zabezpieczonego przed wyboczeniem ciąglą obudową	15	8
Oddział w Częstochowie					
3.	7.IV.1971	J. Kołakowski	Niektóre zagadnienia automatyzacji	12	4
4.	30.IV.1971	T. Pełczyński	O krzywych umocnienia	30	5
Oddział w Gliwicach					
5.	9.IV.1971	J. Kubiak	Problemy niezmienniczości zasad fizyki w Mechanice Ośrodków Ciągłych	22	
6.	9.IV.1971	J. Telega	Zastosowanie elementów skończonych w teorii plastyczności	22	
7.	9.IV.1971	J. Jędrzejczyk, J. Kubiak, B. Wilk, R. Wójcik	Problemy termo-lepkosprężystości	22	
8.	9.IV.1971	J. Jędrzejczyk R. Wójcik	Statyka termo-lepkosprężystości	22	
9.	29.IV.1971	St. Gdula i F. Kern	Nieustalone przewodzenie przy zmiennym współczynniku wnikania ciepła	23	2
10.	29.IV.1971	B. Mochnacki	Metody numeryczne obliczania pola temperatur	23	4



## Oddział w Gdańsku

## Oddział w Krakowie

11.	16.IV.1971	St. Ziemba (Warszawa)	Elementy teorii niezawodności urządzeń mechanicznych	55	12
12.	17.IV.1971	St. Ziemba i W. Nadolski	Cele i metody współczesnej diagnostyki drganiowej	42	11
13.	12.V.1971	B. Olszowski	Dualizm stanów równowagi sił i zgodności przemieszczeń dyskretnych w układach liniowo-sprężystych	9	8
14.	20.V.1971	J. Hult (Goeteborg)	A rational approach to creep design	18	4
15.	25.IX.1971	W. O. Kononienko Czł. Ukr. Ak. Nauk	Dinamiczeskij analiz naturalnych kolebatielnych sistemi		
16.	25.IX.1971	A. Filipow Czł. Ukr. Akad. Nauk	Diejstwije udarnych i impuśnych nagruzok na konstrukcji	51	12

## Oddział w Łodzi

17.	14.VI.1971	W. Nowacki (Warszawa)	Zagadnienia termodyfuzji w ciałach stałych	40	10
18.	24.VI.1971	Z. Kazimierski	Analiza pracy hybrydowego łożyska gazowego w warunkach samowzbudnego proggu stabilności	11	5
19.	29.IX.1971	A. S. Tooth (W. Brytania)	Survey of Research Work in the Department of Mechanics of Matielals University of Starthclyde	32	6
20.	30.IX.1971	A. S. Tooth	Pressure Vessels Research and Standards in Britain	37	4

## Oddział w Poznaniu

21.	20.IV.1971	Cz. Cempel	Optymalizacja układu drgającego przy okresowym wymuszeniu impulsywnym	32	4
22.	1.VI.1971	W. Nowacki (Warszawa)	Termodyfuzja ciał stałych	32	3
23.	15.VI.1971	W. Bogusz (Kraków)	Stabilność ruchu niestatecznego	21	3

## Oddział w Szczecinie

24.	4.III.1971	Cz. Mickiewicz	Stateczność powłoki z materiału lepko-sprężystego	12	3
25.	29.IV.1971	L. Wysokiński (Warszawa)	Badania laboratoryjne cech wytrzymałości skał	9	6
26.	3.VI.1971	B. Kuźmierski	Metodyka pomiarów przemieszczeń w badaniach sztywności maszyn	9	6

## Oddział w Warszawie

27.	17.V.1971	J. Rutkowski	Propozycja dwujednostkowego układu miar fizycznych	11	8
-----	-----------	--------------	----------------------------------------------------	----	---

## Oddział we Wrocławiu

28.	26.IV.1971	Z. Kowal	Nośność graniczna konstrukcji równolegle sprzężonych z punktu widzenia teorii niezawodności	24	5
29.	31.V.1971	J. Langer	Uwagi o hipotezach tłumienia w dynamice budownictwa	20	6
30.	28.VI.1971	K. Biernatowski	Obliczanie fundamentów na terenach górniczych	16	4
31.	28.VI.1971	J. W. Parzonka	Badania rozkładu koncentracji i prędkości lokalnych przy przepływach rurowych mieszanin	16	5

Oddział w Gliwicach kontynuował rozpoczęte w pierwszych kwartale 1971 seminarium pt. «Dynamika nieliniowych układów mechanicznych» prowadzone przez doc. dr R. Grybosia. Odbyło się 9 zebrań.

Oddział w Gdańsku prowadził dwa cotygodniowe seminaria: a) mechanika ogólna ośrodka ciągłego, b) zagadnienie stabilności w układach dyskretnych.

Oddział w Poznaniu prowadził seminarium z zakresu podstaw mechaniki układów z uwzględnieniem sił uderowych. Referentami byli dr hab. Cz. Cempel, dr S. Kasprzyk i mgr inż. J. Adamczyk. Ponadto prowadzono dwa cotygodniowe seminaria: a) dynamiczne zagadnienia teorii plastyczności, b) nieodwracalne procesy termodynamiczne.

**ROZSTRZYGNĘCIE KONKURSU NAUKOWEGO ODDZIAŁU W CZĘSTOCHOWIE  
NA TEMAT «MECHANIKA CIAŁA SZTYWNEGO»**

Sąd konkursowy w składzie: prof. dr J. KOŁAKOWSKI (przewodniczący), prof. dr M. JANUSZ, prof. dr T. OPOLSKI, doc. dr A. SŁUŻALEC (członkowie), postanowił na posiedzeniu w dniu 31 maja 1971 r., przyznać następujące nagrody za najlepsze prace przysłane na konkurs:

I nagrodę w wysokości zł. 2.000.- dr inż. Ewaldowi OLSZEWSKIEMU i mgr inż. Stefanowi WACZYŃSKIEMU za pracę pt. *Mechanizm planetarno-kulisty o jednym zmiennym parametrze jako transformator ruchu obrotowego.*

II nagrodę w wysokości zł. 1.000. — mgr. inż. Januszowi MILLEROWI i Ryszardowi PARKITNEMU za pracę pt. *Uwagi dotyczące redukcji wektorów uczipionych.*

Wyróżnienie w wysokości zł. 1.000. — doc. drowi Romanowi JANICZKOWI za pracę pt. *Określenie maksymalnej wartości sumy działań cyklicznych dla danego przedziału czasu.*

**II SYMPOZJUM POLSKO-RADZIECKIE**  
**pt. »NIEKLASYCZNE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI«**

W dniach 19—22 października 1971 r. odbyła się w Kijowie, w Instytucie Mechaniki Akademii Nauk Ukr. SRR, druga już polsko-radziecka konferencja na temat nieklasycznych zagadnień teorii sprężystości. Przewodniczącym delegacji polskiej, liczącej 13 osób, był prof. dr W. NOWACKI. Podczas sympozjum wygłoszono 19 referatów naukowych, na ogół opartych na oryginalnych pracach własnych autorów, lub przeglądowych. Niezwykle gościnni gospodarze umożliwili nam również zapoznanie się z bardzo interesującymi pracami doświadczalnymi i badawczymi prowadzonymi w Instytucie Mechaniki Akademii Nauk oraz Instytucie Wytrzymałości A N Ukr. SRR (dyrektor akademik G. S. PISARENKO). Ponadto mieliśmy okazję do zaznajomienia się ze skarbami kultury stolicy Ukraińskiej Socjalistycznej Republiki Radzieckiej.

Duża część referatów dotyczyła dziedzin będących na pograniczu różnych gałęzi mechaniki ciała stałego w szerokim znaczeniu tego słowa. Największa liczba referatów dotyczyła efektów cieplnych poczynając od zagadnień termodyfuzji w ciałach stałych odkształcalnych, problemów termo-lepkosprężystości, zagadnień sprzężonych termosprężystości, a kończąc na zagadnieniach obróbki cieplnej powłok cienkich. Druga liczna grupa referatów była poświęcona dyskretnej teorii sprężystości i układom siatkowym. Pozostałe referaty dotyczyły zagadnień mikropolarnej teorii sprężystości, lepkosprężystości, ośrodków złożonych. Podstawami matematycznymi mechaniki zajęli się autorzy dwóch prac. Autorami sześciu referatów byli uczeni radzieccy. Również sześć referatów zgłoszonych na sympozjum zostało odwołanych.

Wymiana poglądów i konferencja była bardzo pożyteczna i dlatego postanowiono kontynuować współpracę przez organizowanie podobnych konferencji co dwa lata na przemian w Polsce i na Ukrainie. Następna konferencja ma się odbyć na wiosnę 1973 w Polsce.

W chronologicznej kolejności wygłoszone zostały następujące referaty:

1. W. O. KONONIENKO (akademik, dyrektor Instytutu Mechaniki AN w Kijowie), *O badaniach w dziedzinie nieklasycznych zagadnień teorii sprężystości w Instytucie Mechaniki AN w Kijowie,*
2. W. NOWACKI (Warszawa), *Termodyfuzja w ciałach stałych odkształcalnych,*
3. A. A. ILIUSZYN, B. E. POBIEDRIA (Moskwa), *O pewnych zagadnieniach termo-lepkosprężystości,*
4. G. A. WAN-FO-FY (Kijów), *Niesprężyste efekty w ośrodkach złożonych,*
5. G. SZEFER, Z. PIEKARSKI (Kraków), *Lepkosprężyste zagadnienia koncentracji naprężeń z uwzględnieniem wzrostu materiału,*
6. J. RYCHLEWSKI (Warszawa), *Trzy twierdzenia o funkcjach tensorowych,*
7. M. MATCZYŃSKI, M. SOKOŁOWSKI (Warszawa), *Rozprzestrzenianie się szczelin w warstwach sprężystych w antyplaskim stanie odkształcenia,*
8. W. DERSKI (Poznań), *Związki konstytutywne teorii konsolidacji,*
9. Z. OLESIAK (Warszawa), *Termosprężyste zagadnienie stempla,*
10. A. D. KOWALENKO, W. I. KOZŁOW (Kijów), *Sprężone dynamiczne zagadnienia termosprężystości dla cienkościennych elementów konstrukcyjnych,*
11. S. KALISKI, Cz. RYMARZ (Warszawa), *Fale powierzchniowe w ośrodkach z nielokalnymi oddziaływaniami,*
12. N. A. KILCZEWSKI, E. A. BRUSENCOWA (Kijów), *O związkach pomiędzy mikro i makro fizycznymi charakterystykami ciał polikrystalicznych,*
13. Z. WESOŁOWSKI (Warszawa), *Rozprzestrzenianie się fal akustycznych z uwzględnieniem dużych odkształceń,*
14. J. IGNACZAK (Warszawa), *Warunki wypromieniowania typu Sommerfelda w niesymetrycznej teorii sprężystości,*
15. Cz. WOŹNIAK (Warszawa), *O podstawach dyskretnej teorii sprężystości,*
16. A. WACHECKA (Warszawa), *Tarcze niejednorodne i perforowane jako płaskie zagadnienie dyskretnej teorii sprężystości,*

17. Ja. S. PODSTRYHACZ, E. I. GRIGOLUK, Ja. I. BURAK (Lwów), *Ekstremalne zagadnienia teorii sprężystości w zastosowaniu do optymalnych reżymów obróbki cieplnej powłok cienkich*,
18. W. GUTKOWSKI, J. BAUER (Warszawa), *Stateczność sprężystych układów prętowych*,
19. H. FRĄCKIEWICZ (Kielce), *Zagadnienie zmienności geometrycznej osiowo symetrycznych, dyskretnych, zamkniętych powłok*.

Z. Olesiak (Warszawa)

### PLANOWANE SYMPOZJA IUTAM

W uzupełnieniu komunikatu zawartego w z. 3 (tom 9) str. 449 podajemy ostatnio zaktualizowane dane dotyczące sympozjów:

#### 1972

1. Symposium on the Stability of Dynamical Stochastic Systems, prof. J. A. Shercliff, School of Engineering Science, University of Warwick, Coventry.  
Termin: 10—14 lipca 1972.
2. IUTAM-IAHR Symposium on Flow-Induced Structural Vibrations, prof. E. Naudascher, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe, 75 Karlsruhe, NRF.  
Termin: 14—16 sierpnia 1972.

#### 1973

1. Symposium on Photoelastic Effect and its Applications, prof. Jean Kestens, Laboratoire d'analyse des contraintes, Université Libre de Bruxelles, 87, avenue Ad. Buyl, Bruxelles 5, Belgia.  
Termin: 3—9 września 1973.

#### 1973—74

1. Symposium on Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies;
2. IUTAM-IUGG Symposium on Turbulent Diffusion and Environmental Pollution;
3. Symposium on Problems in Relation to Contact between Bodies.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- M. KWIECIŃSKI, Życiorys naukowy Wacława Olszaka  
Вацлав Ольшак
- M. ŻYCZKOWSKI, Twórczość naukowa Profesora Wacława Olszaka  
Научное творчество Профессора Вацлава Ольшак  
Scientific activity of Professor Wacław Olszak
- S. KAJFASZ, Wacław Olszak — sylwetka inżyniera  
Вацлав Ольшак — облик инженера  
Professor Olszak as a civil engineer
- M. ŻYCZKOWSKI, Wykaz publikacji Profesora Wacława Olszaka  
Список научных трудов Профессора Вацлава Ольшак  
List of publications of Professor Wacław Olszak
- Z. ВУСНАВСКИ, Teoria nieliniowej lepkosprężystości i jej zastosowania  
Теория нелинейной вязкоупругости и её приложения  
Theory of non-linear viscoelasticity and its applications
- C. EIMER, Teoria ośrodków wielofazowych  
Теория многофазных сред  
Theory of multi-phase media
- Z. MRÓZ, C. Goss, O złożonych modelach wzmocnienia plastycznego  
О составных моделях пластического упрочнения  
On composite models of plastic workhardening
- P. PERZYNA, Termodynamiczna infinitezymalna teoria lepkoplastyczności  
Теория вязко-пластических малых деформаций  
Infinitesimal theory of viscoplasticity
- A. SAWCZUK, Inżynierskie metody analizy konstrukcji sprężysto-plastycznych  
Инженерные методы анализа упруго-пластических сооружений  
Engineering aspects of plastic analysis of structures
- W. SZCZEPIŃSKI, Problemy teorii mechanicznego urabiania gruntów  
Проблемы теории землеройных процессов  
Problems of the theory of earthmoving processes

WYDANO Z ZASIĘKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)