

75720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 11 • ZESZYT 4

Pw

WARSZAWA 1973

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

N. Ja. CYGANOWA, O uderzeniu w układach typu Czetajewa-Przeborskiego Об ударе в системах типа Четаева-Пшеборского On the impact in the Chetaiev-Preborskii-type systems	343
J. F. BESSELING, Związki konstytutywne pełzania i plastyczności Определяющие уравнения для ползучести и пластичности Constitutive equations for creep and plasticity	351
J. DYSZLEWICZ, St. MATYSIAK, Osobliwość naprężeń siłowych i momentowych w ciele mikropolarnym wywołana obciążeniami skupionymi (I) Сингулярности силовых и моментных напряжений в микрополярной среде под воздействием сосредоточенных нагрузок (I) Force-stress and couple-stress singularities produced by concentrated loads in a micropolar medium	363
J. DYSZLEWICZ, St. MATYSIAK, Osobliwość naprężeń w liniowym ośrodku mikropolarnym spowodowana nieciągłymi obciążeniami (II) Сингулярности напряжений в линейной микрополярной среде, вызванные разрывами нагрузок (II) Stress singularity in a linear micropolar medium produced by discontinuous loads	393
K. DEMS, Wielostopniowa synteza macierzy sztywności Многостадийный синтез матриц жесткости A multi-stage synthesis of the stiffness matrices	407
S. KOSOWSKI, Stacjonarne oddziaływanie układu dwu nieskończenie małych dowolnie zorientowanych elementów, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym z dowolną prędkością Стационарное взаимодействие системы двух бесконечно малых произвольно ориентированных элементов твердого тела, движущегося в свободно-молекулярной среде с произвольной скоростью Stationary interactions of a system consisting of two infinitesimal, arbitrarily oriented elements moving at an arbitrary velocity in a free-molecular medium	417
E. WŁODARCZYK, Przybliżona metoda rozwiązywania płaskich niesamopodobnych fal uderzeniowych w doskonałym przewodniku w polu magnetycznym Приближенный метод решения плоских неавтомодельных ударных волн в идеальном проводнике в магнитном поле An approximate method of solving plane, non-selfsimilar shock waves in a perfect conductor subject to magnetic field	443
Z. KORDAS, Kształtowanie rurociągu o zmiennej średnicy, wykazującego pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia Формирование трубопровода переменного диаметра, полностью переходящего в стадии разрушения в пластическое состояние Design of a pipe line of a variable diameter, exhibiting full plastic yielding at collapse	455
N. Ja. CYGANOWA, O anholonomicznych układach pierwszego i drugiego rzędu z tarciem О неголономных системах первого и второго порядков с трением On non-holonomic systems of 1st and 2nd order with friction	467
H. MIKOŁAJCZAK, B. WOSIEWICZ, Macierz sztywności elementu zginanej płyty trójwarstwowej Матрица жесткостей элемента трехслойной пластины, подверженной изгибу Stiffness matrix of an element of a sandwich plate in bending	473
BIULETYN INFORMACYJNY	487

10 120

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 1 • Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 7 3

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 670 (548+122) egz. Ark. wydawn. 15,5. Ark. drukarskich 11,75. Papier druk. sat. III kl., 80 g 70×100. Oddano do składania 25.VII.1973 r. Druk ukończono w listopadzie 1973 r. Zam. 1087/73. R-29. Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

O UDERZENIU W UKŁADACH TYPU CZETAJEWA — PRZEBORSKIEGO

N. Ja. CYGANOWA (WOLGOGRAD)

W pracy [1] BOŁOTOW otrzymał uogólnioną formę zasady najmniejszego skrępowania dla układów z więzami holonomicznymi i anholonomicznymi pierwszego rzędu poddanych działaniu sił impulsowych.

W niniejszej pracy uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania rozszerza się na zjawisko udaru w układach typu Czetajewa-Przeborskiego.

1. W pracy BOŁOTOWA [1] uogólniona zasada najmniejszego skrępowania dla układu n punktów materialnych przy działaniu na nie sił impulsowych posiada postać

$$(1.1) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta})^2 < \sum_{i=1}^{3n} m_i (\dot{x}_{i\delta} - \dot{x}_{i\delta})^2,$$

gdzie \dot{x}_{id} , $\dot{x}_{i\delta}$, $\dot{x}_{i\delta}$ — rzuty prędkości punktów układu po udarze w ruchu rzeczywistym (d), częściowo zwolnionym z więzów (δ) i możliwym (δ).

Udar w układzie zachodzi albo pod wpływem działania zewnętrznych impulsów udarowych, lub pod wpływem nagłego nałożenia nowych więzów (holonomicznych lub anholonomicznych pierwszego rzędu) lub wskutek wspólnego działania obu tych czynników. Dowód prawdziwości związku (1.1) w pracy BOŁOTOWA [1] oparty jest na dwóch założeniach:

1. przemieszczenia możliwe danego układu zawarte są w zbiorze możliwych przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego z więzów,
2. istnieją możliwe przemieszczenia punktów układu, proporcjonalne do różnicy prędkości po udarze w ruchu rzeczywistym (d) i możliwym (δ).

Przy określeniu przemieszczeń możliwych według CZETAJEWA i PRZEBORSKIEGO, te dwa warunki są spełnione, a więc związek (1.1) będzie prawdziwy i dla układów z nieliniowymi więzami pierwszego rzędu.

Mamy układ n punktów materialnych μ_i z masami m_i . Zakładamy, że do udaru układ miał nałożone idealne, w ogólnym przypadku nieliniowe, anholonomiczne więzy pierwszego rzędu

$$(1.2) \quad f_j(t, x_i, z_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

(nie wyklucza się, że niektóre z tych więzów będą liniowe, anholonomiczne lub holonomiczne).

Udar spowodowany jest zewnętrznymi impulsami udarowymi \bar{S}_i (A_i, B_i, C_i) i momentalnym nałożeniem nowych więzów, które zachowują się przy późniejszym ruchu układu. Wśród tych więzów są idealne holonomiczne jednostronne więzy

$$(1.3) \quad \varphi_v(t, x_i, y_i, z_i) \geq 0 \quad (v = 1, 2, \dots, p, \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

i idealnie anholonomiczne pierwszego rzędu w ogólnym przypadku nieliniowe, jednostronne więzy

$$(1.4) \quad \psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i) \geq 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l, \quad i = 1, 2, \dots, n).$$

Przez ruch częściowo wyzwolony będziemy rozumieć ruch układu pod działaniem zewnętrznych impulsów udarowych \bar{S}_i i przy nałożeniu nowych więzów (1.3), (1.4) jak w ruchu rzeczywistym, lecz pod warunkiem wstępnego wyzwolenia układu od dowolnej liczby więzów (1.2).

Zgodnie z zasadą D'Alemberta-Lagrange'a dla sił impulsowych mamy

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^n [A_i m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i0})] \delta x_i + [B_i - m_i (\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i0})] \delta y_i + [C_i - m_i (\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i0})] \delta z_i,$$

gdzie $\dot{x}_{i0}, \dot{y}_{i0}, \dot{z}_{i0}$ — rzuty prędkości punktów układu do udaru,

$\dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id}$ — rzuty prędkości rzeczywistych punktów układu po udarze,

$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ — rzuty możliwych przemieszczeń punktów układu podczas udaru.

Możliwe przemieszczenia rozpatrywanego układu według CZETAJEWA [2] i PRZEBORSKIEGO [3] określone są związkami

$$(1.6) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

$$(1.7) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi_v}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial \varphi_v}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, p),$$

$$(1.8) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{x}_i} \delta x_i + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{z}_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, l).$$

Dla ruchu częściowo wyzwolonego zasada D'Alemberta-Lagrange'a przyjmie postać:

$$(1.9) \quad \sum_{i=1}^n [A_i - m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i0})] \delta x_i + [B_i - m_i (\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i0})] \delta y_i + [C_i - m_i (\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i0})] \delta z_i,$$

gdzie $\dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id}$ — rzuty prędkości punktów układu po udarze w ruchu częściowo wyzwolonym, $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ — rzuty przemieszczeń możliwych punktów układu częściowo wyzwolonego.

Ponieważ dla układów typu Czetajewa-Przeborskiego możliwe przemieszczenia danego układu znajduje się wśród możliwych przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego, to równanie (1.9) przyjmie postać

$$(1.10) \quad \sum_{i=1}^n [A_i - m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i0})] \delta x_i + [B_i - m_i (\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i0})] \delta y_i + [C_i - m_i (\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i0})] \delta z_i = 0.$$

Odejmując równanie (1.10) od równania (1.5) otrzymamy:

$$(1.11) \quad \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{x}_{i0} - \dot{x}_{id}) \delta x_i + (\dot{y}_{i0} - \dot{y}_{id}) \delta y_i + (\dot{z}_{i0} - \dot{z}_{id}) \delta z_i] = 0.$$

Udowodnimy, że istnieją możliwe przemieszczenia układu podczas uderu, proporcjonalne do różnicy prędkości punktów układu w ruchu rzeczywistym i możliwym.

Zapiszemy warunki, które spełniają prędkości punktów układu po uderze w ruchu rzeczywistym i możliwym. Jeśli w ruchu rzeczywistym układu w końcu uderu słabnie jakikolwiek z więzów (1.3), to wielkość

$$(1.12) \quad \beta_v = \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial x_i} \dot{x}_{id} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial y_i} \dot{y}_{id} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial z_i} \dot{z}_{id} \right),$$

którą BOŁOTOW [1] nazywa prędkością osłabiania więzów, nie może być ujemną [4]: $\beta_v \geq 0$.

Jeśli słabnie w końcu uderu jakikolwiek z więzów (1.4), to prędkości w chwili, kiedy układ odrzuca więź, spełniają warunek [4]

$$(1.13) \quad \psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id}) = 0.$$

Będziemy rozpatrywać tylko takie możliwe ruchy, w których prędkości osłabiania więzów (1.3) będą równe takim samym prędkościom w ruchu rzeczywistym. Dla takich ruchów możliwych prędkości spełniają następujące warunki:

$$(1.14) \quad \frac{\partial \varphi_v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_v}{\partial x_i} \dot{x}_{i\delta} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial y_i} \dot{y}_{i\delta} + \frac{\partial \varphi_v}{\partial z_i} \dot{z}_{i\delta} \right) = \beta_v,$$

$$(1.15) \quad \psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{i\delta}, \dot{y}_{i\delta}, \dot{z}_{i\delta}) = 0.$$

Odejmując odpowiednie związki (1.14) i (1.15) od związków (1.12) i (1.13) otrzymujemy:

$$(1.16) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_v}{\partial x_i} (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}) + \frac{\partial \varphi_v}{\partial y_i} (\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i\delta}) + \frac{\partial \varphi_v}{\partial z_i} (\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i\delta}) = 0,$$

$$(1.17) \quad \psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id}) - \psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{i\delta}, \dot{y}_{i\delta}, \dot{z}_{i\delta}) = 0.$$

Rozkładając funkcję $\psi_\lambda(t, x_i, y_i, z_i, \dot{x}_{id}, \dot{y}_{id}, \dot{z}_{id})$ na różnice $\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}$; $\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i\delta}$, $\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i\delta}$, i ograniczając się do członów pierwszego rzędu odnośnie tych różnic — z równości (1.17) otrzymamy

$$(1.18) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{x}_i} (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}) + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{y}_i} (\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i\delta}) + \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial \dot{z}_i} (\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i\delta}) = 0.$$

Jeśli chodzi o więzy dwustronne (1.2), które były nałożone na układ do uderu i które pozostają w czasie uderu, to dla nich widocznie spełnia się warunek

$$(1.19) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_i} (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}) + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{y}_i} (\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i\delta}) + \frac{\partial f_i}{\partial \dot{z}_i} (\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i\delta}) = 0.$$

Porównując warunki (1.16) z warunkami (1.7), warunki (1.18) z warunkami (1.8), warunki (1.19) z warunkami (1.6) wnioskujemy, że

$$(1.20) \quad \delta x_i = k(\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}), \quad \delta y_i = k(\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i\delta}), \quad \delta z_i = k(\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i\delta})$$

(k — dowolny współczynnik dodatni), co oznacza istnienie możliwych przemieszczeń podczas uderu, proporcjonalnych do różnic prędkości punktów układu po uderze w ruchu rzeczywistym i możliwym.

Na podstawie związku (1.20) równanie (1.11) zapiszemy w postaci:

$$\sum_{i=1}^{m_i} m_i [(\dot{x}_{i\delta} - \dot{x}_{id})(\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}) + (\dot{y}_{i\delta} - \dot{y}_{id})(\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i\delta}) + (\dot{z}_{i\delta} - \dot{z}_{id})(\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i\delta})] = 0.$$

Skąd otrzymamy

$$(1.21) \quad T_{d\delta} = T_{\delta\delta} - T_{\delta d},$$

gdzie $T_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta})^2 + (\dot{y}_{id} - \dot{y}_{i\delta})^2 + (\dot{z}_{id} - \dot{z}_{i\delta})^2]$ odchylenie ruchu rzeczywistego układu po uderze od ruchu częściowo wyzwolonego.

$T_{\delta\delta}$ i $T_{\delta d}$ — określa się analogicznie. Ze związku (1.21) wynikają dwie nierówności

$$(1.22) \quad T_{d\delta} < T_{\delta\delta},$$

$$(1.23) \quad T_{\delta d} < T_{\delta\delta},$$

z których pierwsza wyraża uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania, a druga — twierdzenie CZETAJEWA [2] dla uderu.

2. Na podstawie nierówności (1.22) i (1.23) można otrzymać związek między energiami kinetycznymi w (d), (δ) i (δ) — ruchach po uderze.

Dodając nierówności (1.22) i (1.23), podstawiając otrzymane nierówności do wzorów na $T_{d\delta}$, $T_{d\delta}$, $T_{\delta\delta}$ — otrzymamy

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta})^2 + \sum_{i=1}^{3n} m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta})^2 < 2 \sum_{i=1}^{3n} m_i (x_{i\delta} - x_{id})^2.$$

Wprowadzając energię kinetyczną dla ruchu rzeczywistego możliwego i wyzwolonego i oznaczając je odpowiednio T_d , T_δ , T_δ , nierówność (2.1) zapiszemy w postaci

$$(2.2) \quad T_d < \frac{T_\delta + T_\delta}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\delta} (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}) + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\delta} (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}) \right].$$

Sumy w nawiasach kwadratowych w ostatniej nierówności mają określony sens mechaniczny.

Rozpatrzmy pierwszą sumę. Wchodzące w nią różnice można uważać za przemieszczenia możliwe. Wówczas suma ta będzie miała postać

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\delta} \delta x_i.$$

Zgodnie z równaniami teorii uduaru

$$(2.4) \quad m_i \dot{x}_{i\delta} = A_i + R_{ix}^\delta + m_i \dot{x}_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, 3n),$$

gdzie \dot{x}_{i0} — rzuty prędkości punktów układu do uduaru, a R_{ix}^δ — rzut impulsów sił reakcji układu częściowo wyzwolonego. Dlatego sumę (2.3) można zapisać w postaci

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\delta} \delta_{xi} = \sum_{i=1}^{3n} (A_i + R_{ix}^\delta) \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i0} \delta_{xi}.$$

Ponieważ więzy są idealne, a możliwe przemieszczenia danego układu mieszczą się wśród możliwych przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego

$$\sum_{i=1}^{3n} R_{ix}^\delta \delta_{xi} = 0,$$

to równanie (2.5) przyjmie postać

$$(2.6) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\delta} \delta_{xi} = \sum_{i=1}^{3n} A_i \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i0} \delta_{xi}.$$

Rozważymy drugą sumę, wchodzącą w skład nierówności (2.2)

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i\delta} (\dot{x}_{i\delta} - \dot{x}_{i0}).$$

Z równań teorii uduaru mamy

$$(2.7) \quad m_i (\dot{x}_{i\delta} - \dot{x}_{i0}) = R_{ix}^{(d-\delta)},$$

gdzie $R_{ix}^{(d-\delta)}$ — rzuty impulsów reakcji więzów odrzuconych przy częściowym wyzwoleniu układu. Biorąc pod uwagę związki (2.6) i (2.7), nierówność (2.2) przedstawimy w postaci

$$(2.8) \quad T_d < \frac{T_\delta + T_\delta}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{3n} A_i \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_{i0} \delta_{xi} + \sum_{i=1}^n \dot{x}_{i\delta} R_{ix}^{(d-\delta)} \right].$$

Jeśli do uduaru prędkości punktów układu były równe zeru, to powyższa nierówność przyjmie postać

$$(2.9) \quad T_d < \frac{T_\delta + T_\delta}{2} + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{3n} A_i \delta_{xi} + \sum_{i=1}^{3n} \dot{x}_{i\delta} R_{ix}^{(d-\delta)} \right];$$

to znaczy, że energia kinetyczna układu po uduarze jest mniejsza od połowy sumy energii kinetycznych ruchu wyzwolonego i możliwego, zwiększonych o połowę sumy pracy wirtualnej zewnętrznych impulsów uduarowych i pracy impulsów sił reakcji więzów odrzuconych, wykonanej na prędkościach ruchu możliwego.

Kiedy uduar w układzie występuje tylko wskutek nałożenia nowych więzów, to ze związku (2.9) otrzymamy

$$(2.10) \quad T_d < \frac{T_\delta + T_\delta}{2} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} \dot{x}_{i\delta} R_{ix}^{(d-\delta)}.$$

Jeśli ograniczymy się tylko do takich możliwych ruchów, w których prędkości są ortogonalne do impulsów sił reakcji więzów odrzuconych, to z nierówności (2.10) otrzymamy

$$(2.11) \quad T_d < \frac{T_\delta + T_\partial}{2},$$

to znaczy, że jeżeli udar w układzie punktów materialnych znajdujących się w bezruchu następuje skutek nałożenia nowych więzów, to energia kinetyczna ruchu rzeczywistego układu po udarze jest mniejsza od połowy sumy energii kinetycznych ruchu częściowo wyzwolonego i takiego ruchu możliwego, w którym prędkości punktów są ortogonalne do impulsów odrzuconych reakcji więzów przy wyzwoleniu układu.

3. W pracy [2] CZETAJEW wyprowadził twierdzenie: *odchylenie ruchu rzeczywistego układu z więzami idealnymi (w przypadku ogólnym nieliniowymi anholonomicznymi) od jakiegokolwiek ruchu możliwego jest mniejsze niż odchylenie tego ostatniego od ruchu częściowo wyzwolonego.*

Dla udaru twierdzenie Czetajewa przyjmuje postać nierówności (1.23), które zapisujemy następująco:

$$(3.1) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i (\dot{x}_{id} - \dot{x}_\delta)^2 < \sum_{i=1}^{3n} m_i (\dot{x}_{i\partial} - \dot{x}_{i\delta})^2,$$

gdzie \dot{x}_{id} , $\dot{x}_{i\partial}$, $\dot{x}_{i\delta}$ — prędkości punktów układu po udarze w (d), (∂) i (δ) — ruchach, lub

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \dot{x}_{id}^2}{2} - \sum_{i=1}^{3n} \frac{m_i \dot{x}_{i\partial}^2}{2} < \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_\delta (\dot{x}_{id} - \dot{x}_{i\delta}).$$

Ta ostatnia nierówność na podstawie związku (2.7) będzie sprowadzona do postaci

$$(3.3) \quad T_d - T_\partial < \sum_{i=1}^{3n} \dot{x}_{i\delta} R_{ix}^{(d-\partial)},$$

gdzie $R_{ix}^{(d-\partial)}$ — impulsy sił reakcji więzów odrzucanych przy częściowym oswobodzeniu układu.

Jeżeli prędkości ruchu możliwego po udarze są ortogonalne do impulsów sił reakcji więzów odrzucanych przy częściowym oswobodzeniu układu, to biorąc pod uwagę nierówność (3.3)

$$T_d < T_\delta;$$

widzimy, że energia kinetyczna ruchu rzeczywistego po udarze jest mniejsza od energii kinetycznej ruchu częściowo wyzwolonego.

Literatura cytowana w tekście

1. E. A. Болотов, *О принципе Гаусса*, Изв. физ.-мат. Об-ва при Казанском университете, 1916, т. 21, в. 3.
2. Н. Г. ЧЕТАЕВ, *О принципе Гаусса*, Изв. физ.-мат. Об-ва при Казанском университете, 1932—33, сер. 3, 6.

3. A. PRZEBORSKI, *Die allgemeinsten Gleichungen der relativistischen Dynamik*, Math. Zeitschrift., Bd. 36, Berlin 1933, s. 184—194.
4. Г. К. Суслов, *Теоретическая механика*, Гостехиздат, 1944, стр. 281.

POLITECHNIKA, WOLGOGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1973 r.

ZWIĄZKI KONSTITUTYWNE PEŁZANIA I PLASTYCZNOŚCI¹⁾

J. F. BESSELING (DELFT)

1. Wstęp

Dla celów projektowania inżynierskiego konieczny jest ilościowy opis zachowania się materiałów poddanych określonym wpływom zewnętrznym. Teorie pełzania i plastyczności w ramach mechaniki inżynierskiej są teoriami fenomenologicznymi, ponieważ fizyczny mechanizm niesprężystych deformacji jest zbyt skomplikowany i, jak dotąd, nie udało się go ująć w logicznie spójny opis matematyczny. Wspomniane teorie zbudowane są na podstawie założenia, że drogą dedukcji potrafimy matematycznie sformułować prawa fizyczne dla standardowych materiałów, tzn.: wychodząc z pewnych specjalnych — w ogólności mierzalnych — programów obciążeń możemy określić zachowanie się materiałów dla programów (historii) dowolnych.

Opisując wpływ otoczenia na ciało z reguły ogranicza się go do wpływu zewnętrznych sił powierzchniowych, sił masowych i temperatury. Należy zaznaczyć, że nawet przy tych założeniach ograniczających nie ma w tej chwili jedynej, ogólnie akceptowanej teorii pełzania i plastyczności.

W obszernej literaturze przedmiotu publikowanej na przestrzeni minionych dwudziestu lat daje się zauważyć szczególną tendencję do koncentracji na matematycznych aspektach teorii, lekceważącą często dane eksperymentalne opisujące rzeczywiste zachowanie się materiałów. Współcześnie obserwuje się nacisk na rozwój teorii równań konstytutywnych mechaniki, a ostatnio — termodynamiki, na bazie apriorycznych pojęć naprężenia i temperatury, przy czym prace te zaczynają traktować o zjawiskach fizycznych dopiero po zbudowaniu imponującej struktury matematycznej złożonej z postulatów, lematów, twierdzeń itd. Z drugiej strony wielu matematyków parających się zastosowaniami usilnie dąży do rozwiązania szeregu problemów brzegowych i początkowych na bazie związków fizycznych w większości nie zweryfikowanych eksperymentalnie.

Na obecnym etapie — moim zdaniem — jedynym modelem materiału, dla którego istnieje dostateczna podbudowa eksperymentalna dla różnych rzeczywistych ośrodków jest tzw. model idealnego pełzania i idealnej plastyczności. I chociaż model ten daje opis daleko niekompletny, zawiera on te elementy mechaniki ośrodka, które są istotne w projektowaniu.

Co do zastosowań teorii bazujących na bardziej wyrafinowanych modelach materiałów — to lepiej byłoby je zarzucić do czasu potwierdzenia przez poprawny eksper-

¹⁾ Wykład wygłoszony w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie, 30.X.1972 r.

ment ich wartości dla opisu ilościowego. Tu właśnie znajduje się szerokie pole badań dla tych fizyków-eksperymentatorów, którzy wolą narzędzi racjonalnej mechaniki używać do teorii mechanizmów poślizgu w sieci krystalicznej w celu ich przenoszenia do rzeczywistej trójwymiarowej teorii deformacji. Tymczasem zaś inżynier dla pragmatycznych celów musi polegać na stosowaniu prostych modeli materiałów i na rozsądnej ekstrapolacji danych eksperymentalnych oraz na zwykłym doświadczeniu.

2. Podstawowe równania mechaniki i termodynamiki

Fenomenologiczny, czyli kontynuálny opis własności mechanicznych spełnia następujące postulaty matematyczne:

1. Zasada zachowania masy

$$(1) \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} + \varrho \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0.$$

2. Zasada zachowania pędu

$$(2) \quad \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_i} + \varrho f_j = \varrho \left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial t} + \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_k} \right).$$

3. Zasada zachowania momentu pędu (brak naprężeń momentowych)

$$(3) \quad t_{ij} = t_{ji}.$$

4. Zasada zachowania energii (bez źródeł promieniowania)

$$(4) \quad t_{ij} d_{ij} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = \varrho \dot{u}, \quad \text{gdzie} \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right),$$

5. Zasada wzrostu entropii¹⁾

$$(5) \quad \sigma = \varrho \dot{\eta} + \frac{\partial \left(\frac{q_i}{T} \right)}{\partial x_i} \geq 0, \quad \text{gdzie} \quad \sigma = \varrho \gamma.$$

Te podstawowe równania mechaniki i termodynamiki są bazą wyjściową w kierunku fenomenologicznego opisu mechaniki materiału.

Fakt naszego przyzwyczajania się i «oswojenia» z koncepcją gęstości ϱ , naprężenia t_{ij} , temperatury T , siły masowej f_j , strumienia ciepła q_i , energii wewnętrznej u i entropii η nie czyni tych wielkości mniej abstrakcyjnymi. Ich relacja do obserwowanego zjawiska jest na tyle prawdziwa, na ile są to wielkości mierzalne w odniesieniu do pewnych powtarzalnych zjawisk fizycznych.

Równania wiążące abstrakcyjne pojęcia z obserwowanymi miarami długości i czasu mogą być nazwane równaniami konstytutywnymi teorii. Bez tych równań cała struktura postulatów nie tworzy teorii mechanicznej, w sensie odpowiedzi na pytanie jaka jest reakcja układu na zewnętrzne działanie.

¹⁾ We wzorze (5) η jest właściwą entropią na jednostkę masy; $\sigma = \varrho \gamma$, gdzie γ oznacza właściwą prędkość powstawania entropii na jednostkę masy; σ więc odnosi się do jednostki objętości ciała (przyp. tłum.).

3. Materiały proste i koncepcja stanu lokalnego

W mechanice continuum ciało jest gładko odwzorowane na obszary przestrzeni euklidesowej. Obszar zajmowany przez ciało stanowi jego konfigurację. Ruch ciała jest wyszczególnieniem miejsc zajmowanych przez punkty materialne w miarę upływu czasu albo czasowym następstwem konfiguracji ciała. Mianowicie

$$(6) \quad x_i = \chi_i(\xi_\alpha, t).$$

Miejsce ξ jest «współrzędną materialną» cząstki materialnej w stosunku do pewnej konfiguracji odniesienia.

Szkoła TRUESDELLA, NOLLA i in. [1] wprowadza pojęcie «materiału prostego» w celu uproszczenia opisu «reakcji»²⁾ materiału na ruch ciała. Nazywają oni materiał materiałem prostym, jeśli ze znanego zachowania się materiału w procesach jednorodnych deformacji wynika zachowanie się materiału we wszystkich dowolnych procesach.

W procesie jednorodnej deformacji historia deformacji w ξ jest zbiorem wartości

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial \chi_i}{\partial \xi_\alpha}$$

W moim mniemaniu ta koncepcja materiału prostego jest jednym z aspektów bardziej ogólnej koncepcji lokalnego stanu termodynamicznego.

Ciało jako takie można podzielić na wiele wzajemnie sprzężonych podciał. Postuluje się, że podobnie jak masa i energia kinetyczna — energia wewnętrzna i entropia są wielkościami addytywnymi. Wynika stąd, że energia wewnętrzna i entropia podukładu są funkcjonalami zmiennych odniesionych wyłącznie do tego podukładu. Będzie istnieć, oczywiście, dolna granica wielkości podukładu, do którego ten postulat jeszcze się stosuje.

Podejście termodynamiczne jest z góry ograniczone do układów, w których sensowne są statystyczne uśrednienia.

Jakkolwiek więc definicje lokalnego naprężenia, temperatury, energii wewnętrznej i entropii są matematycznie trywialne dla układów w stanach jednorodnych, to ich przydatność do opisu stanów niejednorodnych jest oczywista. W stanach tych bowiem rozkłady temperatury, naprężenia, energii wewnętrznej i entropii mogą przedstawiać statystyczne uśrednienia dla wszystkich podukładów, aż do najmniejszych, w których dozwolona jest procedura uśredniająca. Jeśli dalej ograniczymy nasz opis do przypadków, w których różnica zmiennych — w tym również $F_{i\alpha}$ — jest niewielka w obszarze, który jest duży w porównaniu z najmniejszym podukładem termodynamicznym, to możemy przystąpić do poszukiwania lokalnie zdefiniowanych równań konstytutywnych.

Aby przekonać się, że pojęcie najmniejszego układu termodynamicznego nie ogranicza ważności koncepcji lokalnego stanu termodynamicznego w zwykłych warunkach, zauważmy, że liczba cząstek w powietrzu na poziomie morza wynosi $2,7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$, a w stali — $8,6 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$.

²⁾ Termin «material response» tłumaczymy dosłownie jako «reakcja materiału» zgodnie z dosadnością i precyzją terminu oryginalnego rozumiejąc przez to pole naprężeń generujące się w materiale jako dynamiczną reakcję na proces kinematyczny (deformacji).

4. Funkcjonalne podejście do równań konstytutywnych

Przechodząc do teorii równań konstytutywnych, podajemy następujące założenie — za COLEMANEM i NOLLEM [2]: *Każdy związek konstytutywny musi spełnić zasadę obiektywności i zasadę wzrostu entropii dla wszystkich możliwych historii deformacji i temperatury.* Zasada obiektywności mówi tutaj, że w każdym przypadku dwóch obserwatorów ciała stwierdza ten sam związek konstytutywny. Jeśli $\chi_\alpha(\xi_\alpha, t)$ opisuje ruch obserwowany przez pierwszego obserwatora, a $\chi'_i(\xi_\alpha, t)$ jest tym samym ruchem widzianym przez drugiego, można udowodnić, że zachodzi zależność

$$(7) \quad \chi'_i = Q_{ij}\chi_j + c_i, \quad t' = t - a,$$

gdzie Q_{ij} jest tensorem ortogonalnym zależnym od czasu, zaś c_i jest wektorową funkcją czasu; a — jest stałą.

Przechodząc do formułowania konkretnych związków konstytutywnych — po akceptacji powyższych zasad ogólnych — stoimy przed możliwością przechodzenia od szczególnych przypadków do ogólniejszych, albo odwrotnie. Szkoła Truesdella preferuje drugie podejście.

W duchu czysto kontynualnej teorii nie wziętnia się cząsteczkowej albo atomowej struktury materiału. W tym sensie układ jest «czarną skrzynką», dla której zachowanie się materiału definiuje się przy pomocy oddziaływań zewnętrznych i ich historii. Ogólną klasę takich materiałów zdefiniował Coleman za pomocą funkcjonałów:

$$(8) \quad \begin{aligned} t_{ij} &= \mathfrak{S}_{ij} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ q_i &= \mathfrak{S} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ u &= \mathfrak{e} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ \eta &= \mathfrak{h} \left(F_{k\alpha}(t-s), T(t-s); \frac{\partial T}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Dowodzi się, że $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ musi znikać z równań na u i η , oraz że t_{ij} i \mathfrak{h} wyznacza się z \mathfrak{e} przez różniczkowanie, uogólniając w ten sposób klasyczne formy związków naprężenie-odkształcenie i temperatura-entropia. Dalsza procedura przekształcania powyższych związków opiera się na zasadzie zanikającej pamięci [3].

Z jednej strony więc, zamierzamy wprowadzać do równań konstytutywnych wielkości mierzalne niezależne od historii procesu fizycznego, a z drugiej mamy współczesne tendencje do formułowania równań konstytutywnych za pomocą funkcjonałów, co oznacza, że w ogólności zachowanie się materiału może być jedynie wyznaczone na podstawie znajomości aktualnych i przeszłych oddziaływań zewnętrznych. Podejście to wydaje mi się niezadowolające dla ilościowego opisu zachowania się materiałów, ponieważ nie znamy eksperymentalnego sposobu jednoznacznego wyznaczenia tych funkcjonałów oprócz przypadków trywialnych — na przykład w układach liniowych — gdzie działa zasada superpozycji (na przykład liniowa teoria lepkosprężystości).

Kolejny problem związany z czysto kontynuualnym podejściem wynika z faktu, że ruch cząstek elementarnych układu nie może być w ogólności opisany ruchem continuum, w którym każda cząstka zajmowałaby punkt materialny. Molekuły i atomy nie mają przypisanego miejsca w continuum. Idąc dalej zauważamy, że układ składać się może z cząstek różnego typu. Jeśli jednak w danej chwili prawdopodobieństwo, że cząstka jest określonego typu jest niezależne od jej położenia w układzie, wówczas uśredniony ruch masy wewnątrz układu można przedstawić przy pomocy ruchu: $x_i = \chi_i(\xi_a, t)$. W przeciwnym razie powinny być rozważane zagadnienia dyfuzji. Trzeba wtedy zdefiniować uśredniony ruch masy dla każdego typu cząstek osobno.

Jeśli jednak wystarczy rozważać tylko jeden ruch $x_i = \chi_i(\xi_a, t)$, to identyfikacja cząstek materialnych continuum z miejscem ξ ma, według mnie, znaczenie fizyczne tylko wtedy, jeśli otoczenie ξ stanowi w całym procesie jeden i ten sam podukład termodynamiczny.

Jeśli identyfikacja cząstek materialnych, które wypełniają małe otoczenie punktu ξ , ulega zmianie — a tak dzieje się w gazach, cieczach, metalach deformowanych plastycznie — wówczas konfiguracja odniesienia w opisie kontynuualnym traci w trakcie procesu wszelkie znaczenie fizyczne w odniesieniu do stanu termodynamicznego materiału. Zasada zanikającej pamięci w formie zaproponowanej przez COLEMANA [3] jest w tym przypadku fizykalną koniecznością, jeśli funkcjonały konstytutywne mają być ważne.

5. Koncepcja naturalnego stanu odniesienia

Ograniczając się do równań konstytutywnych pełzania i plastyczności w metalach, powinniśmy, jak sądzę, wyciągnąć pewne wnioski z faktu, że poślizg w sieci krystalicznej wywołany ruchami dyslokacji jest głównym czynnikiem niesprężystych deformacji. Pozwolę sobie zacytować fragment pracy Y. HORIE [4], przedstawionej na Międzynarodowym Sympozjum Podstaw Plastyczności w Warszawie w 1972 r., dotyczący dyslokacji w kryształach:

a) Całkowita energia zdeformowanego kryształu zawierającego stacjonarną dyslokację jest sumą energii odkształcenia siatki i energii dyslokacji. Jest ona niezależna od położenia dyslokacji.

b) Obecność stacjonarnych dyslokacji nie wpływa na sprężyste własności kryształu. Mierząc zachowanie się ciała pod wpływem przyłożonych obciążeń nie możemy stwierdzić obecności dyslokacji, dopóki nie nastąpi ich ruch.

c) Naprężenia uplastyczniające są to przede wszystkim naprężenia wymagane dla wywołania ruchu dyslokacji w kryształach.

HORIE wyciąga stąd wnioski, że wpływ chwilowych wartości odkształceń plastycznych na termodynamikę materiału jest bardzo mały. Ich wkład — jeśli istnieje — jest pośredni: poprzez całkowitą pracę plastyczną.

Na tym samym sympozjum K. HAVNER [5] wskazał na możliwość opisanie procesów mechanicznych w metalach przy pomocy dwóch kinematycznie niezależnych mechanizmów deformacji, które stanowią fenomenologiczne przybliżenia złożonych procesów w siatce krystalicznej zajmującej objętość w otoczeniu punktu continuum materialnego. Mechanizmy te są następujące:

a) Sprężyste (mechanicznie odwracalne) infinitezymalne odkształcenie siatki;

b) prosty poślizg zgodnie z krystalograficznie dopuszczalną geometrią poślizgu, którego rezultatem jest względne przesunięcie materialnych elementów liniowych, pozostawiające jednak niezmienny typ struktury krystalicznej.

Wydaje mi się, że oba punkty widzenia nie są wzajemnie niezgodne, a usprawiedliwiają wprowadzenie koncepcji naturalnego stanu termodynamicznego, niezależnie od koncepcji ruchu continuum.

NOLL i inni słusznie wskazują, że ścisły matematyczny opis materiału z dyslokacjami wymagałby wprowadzenia konfiguracji odniesienia, która nie jest konfiguracją euklidesową, ale jest zdefiniowana przez afiniczną i antysymetryczną koneksję I' . NOLL podał równania ruchu dla przypadku, kiedy ta nieeuklidesowa konfiguracja odniesienia jest znana.

Wydaje się, że przy pomocy równań NOLLA byłoby możliwe udowodnienie własności dyslokacji stacjonarnych, które wymienia HORIE. Ale właśnie ze względu na te własności w procesie sprężystym, możemy nie brać pod uwagę obecności dyslokacji, zaś w przypadku ruchu dyslokacji możliwość ścisłego podejścia matematycznego, podobnego do podejścia NOLLA, wydaje się problematyczna. Dyslokacje powstają w źródłach Franka-Reada; są wzajemnie sprzężone, gromadzą się w grupy przy brzegach ciała; są eliminowane przez procesy dyfuzji.

W moim przekonaniu bardziej racjonalna metodyka wynika z przyjęcia koncepcji naturalnego stanu odniesienia; pojęcie takiego stanu wprowadził ECKART [6] jeszcze w 1948 r. W ujęciu ECKARTA stan ten opisany przez nieeuklidesową metrykę wyznaczany jest przez proces termodynamiczny i podlega ewolucji.

W 1966 r. na sympozjum IUTAM, poświęconym problemom termodynamiki procesów nieodwracalnych w Wiedniu, rozważałem [7] bardziej ogólny przypadek, kiedy bieżąca konfiguracja materiału w każdej chwili, w każdym punkcie ciała jest odniesiona do konfiguracji w stanie odniesienia dla aktualnego materiału — tzw. naturalnego stanu odniesienia — przez odwracalną transformację elementów liniowych:

$$(9) \quad da_\alpha = b_{\alpha i} dx_i, \quad \det(b_{\alpha i}) > 0.$$

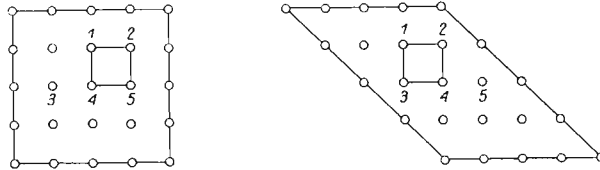
Tutaj da_α definiują elementy liniowe w lokalnym układzie współrzędnych, określonym przez ortogonalne trójki wektorów, które nie doznają obrotów w trakcie ruchu continuum. Zachowując stałe kierunki w przestrzeni, tworzą one bazę odniesienia dla anizotropowych własności materiału.

Powyższa transformacja elementów liniowych może być rozłożona na sztywny obrót i następującą po nim czystą deformację o symetrycznej macierzy transformacji, trzeba tylko zastosować twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie biegunowym tensora, którego macierz jest nieosobliwa.

Trzeba zdać sobie sprawę z faktu, że utożsamienie cząstek materialnych, które w naturalnym stanie odniesienia zajmują miejsce ξ , z punktem o tych współrzędnych dla continuum poruszającego się nie jest w ogólności konieczne. Tak więc, jeśli rozważymy siatkę krystaliczną, w której nastąpił poślizg, wówczas zauważamy, że pewna pojedyncza komórka posiada w swych wierzchołkach atomy, które przed prześlizgiem tworzyły z innymi atomami inną komórkę. Siatka pokazana na rysunku 1 w pewnym punkcie continuum

określającym oczko siatki jest w każdej chwili taka sama, co nie znaczy jednak, że tworzą ją te same atomy.

Tensor b_{ai} jest pojęciem fizycznym, który należy wprowadzić do równań konstytutywnych. Podobnie jak wprowadzony przez ECKARTA [6], a później SIEDOWA [8] tensor metryczny naturalnego stanu odniesienia $g_{ij} = b_{ai}b_{aj}$, przy czym tensor b_{ai} nie spełnia kinematycznych związków nierozdzielności wyprowadzonych z ruchu continuum, a więc ruchu opisującego uśredniony ruch rzeczywisty masy wewnątrz ciała.



Rys. 1. Pojedyncza komórka w naturalnym stanie odniesienia

Jest oczywiste, że dla materiału polikrystalicznego, o przypadkowej orientacji poszczególnych kryształów, jedno różniczkowalne pole b_{ai} nie wystarczy, aby zdefiniować naturalny stan odniesienia materiału. W tym miejscu rodzi się istotna trudność. Proponuję postępowanie idące w kierunku dyskretyzacji własności układów mechanicznych i precyzji równań, mianowicie aproksymację naturalnego stanu odniesienia przez skończoną liczbę pól b_{ai}^k ($k = 1, 2, \dots, N$).

Przystępując do formułowania równań konstytutywnych przyjmujemy następujące relacje:

$$(10) \quad \begin{aligned} t_{ij} &= t_{ij}(b_{ai}^k, \eta), \\ T &= T(b_{ai}^k, \eta), \\ u &= u(b_{ai}^k, \eta). \end{aligned}$$

Musimy zachować zasadę obiektywności. Elementy da_α są z definicji niezmiennicze względem transformacji

$$(11) \quad \chi'_i = Q_{ij}\chi_j + c_i$$

Stąd wynika, że

$$da_\alpha = b_{ai}dx_i = b_{ai}Q_{ij}dx_j = b'_{aj}dx'_j,$$

albo

$$b_{ai} = b'_{aj}Q_{ji}.$$

Składowe tensora b_{ai} definiują tensor

$$(12) \quad C_{\alpha\beta} = b_{ai}b_{\beta i} = b'_{aj}Q_{ji}b'_{\beta k}Q_{ki} = b'_{aj}b'_{\beta j}$$

niewrażliwy na transformację (11).

Widać, że tensor metryczny naturalnego stanu odniesienia

$$(13) \quad de_0^2 = da_\alpha da_\alpha = b_{ai}b_{aj}dx_i dx_j; \quad g_{ij} = b_{ai}b_{aj}$$

nie jest niezmienniczy względem (11). Można jednak odpowiednie wielkości t_{ij} , T , u , uzależnić od tensora g_{ij} poprzez jego niezmienniki; oznacza to izotropię materiału. Dalej przyjmuje się powyższe założenie w przypadku pojawienia się tensora metrycznego naturalnego stanu odniesienia w związkach fizycznych.

6. Odształcenie sprężyste i niesprężyste

Mówiąc o prędkości zmian naturalnego stanu odniesienia, oznaczonej przez \dot{da}_α można stwierdzić, że prędkość tę równie dobrze określają wielkości związane z lokalną propagacją dyslokacji, jak i zmiana tensora b_{ai} oraz pole prędkości poruszającego się continuum; mamy więc

$$(14) \quad \dot{da}_\alpha = p_{\alpha i} dx_i = \left(\dot{b}_{\alpha i} + b_{\alpha j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right) dx_i,$$

albo

$$(15) \quad \dot{b}_{\alpha i} = p_{\alpha j} - b_{\alpha j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i}.$$

W celu związania tensorów b_{ai} i $C_{\alpha\beta}$ ze znanymi pojęciami, takimi jak gradient deformacji i tensor odkształcenia, rozważmy na chwilę przypadek materiału sprężystego. Dla takiego materiału $p_{\alpha i} = 0$ i można utożsamić naturalny stan odniesienia z konfiguracją odniesienia continuum.

Zachodzi wówczas

$$(16) \quad da_\alpha = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} dx_i, \quad x_i = \chi_i(a_\alpha, t)$$

oraz

$$(17) \quad de_0^2 = \delta_{\alpha\beta} da_\alpha da_\beta, \quad de^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j = \frac{\partial x_k}{\partial a_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial a_\beta} da_\alpha da_\beta,$$

albo

$$(18) \quad de^2 = b_{k\alpha}^{-1} b_{k\beta}^{-1} da_\alpha da_\beta = c_{\alpha\beta}^{-1} da_\alpha da_\beta$$

i dalej

$$(19) \quad E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (c_{\alpha\beta}^{-1} - \delta_{\alpha\beta}),$$

gdzie $E_{\alpha\beta}$ jest tensorem odkształcenia Lagrange'a

Dla deformacji niesprężystej możemy przyjąć

$$(20) \quad E'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (c_{\alpha\beta}^{-1} - \delta_{\alpha\beta}),$$

jako tensor odkształceń sprężystych, nie spełniający wówczas warunków nierozdzielności narzuconych przez koncepcję ruchu continuum.

W ośrodku ciągłym tensor całkowitych odkształceń zdefiniowany jest następująco:

$$(21) \quad E_{\sigma\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_\beta} - \delta_{\sigma\beta} \right), \quad x_i = \chi_i(\xi_\alpha, t).$$

Znana jest koncepcja przyjmująca tensor odkształceń sprężystych jako różnicę pomiędzy tensorem całkowitego odkształcenia continuum i tensorem odkształceń niesprężystych $E'_{\alpha\beta}$. Otóż w teorii przyjmującej pojęcie naturalnego stanu odniesienia, ta koncepcja addytywności jest do przyjęcia tylko pod warunkiem, że dewiacja naturalnego stanu odniesienia do konfiguracji odniesienia continuum pozostaje mała.

Możemy napisać

$$(22) \quad da_\alpha = b_{\alpha i} dx_i = b_{\alpha i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_k.$$

Niech będzie

$$(23) \quad b_{\alpha i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = \delta_{\alpha k} + \beta_{\alpha k}; \quad |\beta_{\alpha k}| \ll 1.$$

W tym przypadku zachodzi

$$(24) \quad \begin{aligned} E_{kl} &= E'_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha k} + \beta_{\alpha k}) (\delta_{\beta l} + \beta_{\beta l}) - \frac{1}{2} \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{\alpha k} + \beta_{\alpha k}) (\delta_{\alpha l} + \beta_{\alpha l}) = \\ &= E'_{kl} + \frac{1}{2} (\beta_{lk} + \beta_{kl} + \beta_{\alpha k} \beta_{\alpha l}) = E'_{kl} + E'_{kl}'. \end{aligned}$$

Ograniczenie wielkości $\beta_{\alpha k}$ (tym samym $|E'_{kl}'| \ll 1$) jest naturalne w teorii, gdzie wszystkie zmiany mają być z góry określone względem niezdeformowanej konfiguracji ośrodka ciągłego. Przy znacznych różnicach między naturalnym stanem odniesienia i konfiguracją odniesienia continuum, ta ostatnia traci swój sens fizyczny. Teoria dużych deformacji niesprężystych jest raczej teorią płynięcia niż deformacji. Wymaga ona opisu we współrzędnych przestrzennych. Niniejsze rozważania ograniczamy do związków konstytutywnych opisujących małe deformacje niesprężyste.

7. Równania konstytutywne dla pełzania i plastyczności w przypadku małych odkształceń niesprężystych

W przypadku małych deformacji niesprężystych przyjmujemy ξ_1, ξ_2, ξ_3 jako zmienne niezależne i możemy prowadzić obliczenia w geometrii odniesienia ciała. Zasada zachowania masy jest tożsamościowo spełniona, a pozostałe równania podstawowe są następujące:

1. Zasada zachowania pędu

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} s_{jk} \right) = \rho_0 \ddot{x}_i,$$

$$(26) \quad t_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_j} s_{ij},$$

gdzie s_{ij} jest drugim tensorem Pioli-Kirchhoffa (symetrycznym).

2. Zasada zachowania momentu pędu

$$(27) \quad s_{ij} = s_{ji}.$$

3. Zasada zachowania energii

$$(28) \quad s_{ij} \dot{E}_{ij} = \rho_0 \dot{u} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_k}.$$

4. Zasada wzrostu entropii

$$(29) \quad \sigma^0 = \rho_0 \dot{\eta} + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \left(\frac{q_k}{T} \right)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \geq 0, \quad \sigma^0 = \gamma \rho_0.$$

5. Równania konstytutywne

$$(30) \quad u = u(E'_{ij}, \eta), \quad s_{ij} = \varrho_0 \frac{\partial u}{\partial E'_{ij}}, \quad T = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ostatnie dwa związki pozwalają przekształcić zasadę entropii do postaci następującej:

$$(31) \quad T\sigma^0 = -\frac{\varrho_0}{\varrho} \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} + s_{ij} \dot{E}'_{ij} \geq 0.$$

Ponieważ nierówność powyższa musi zachodzić dla wszystkich wirtualnych historii deformacji i temperatury, otrzymujemy, że

$$(32) \quad s_{ij} \dot{E}'_{ij} \geq 0.$$

Powracamy teraz do modelu, w którym naturalny stan odniesienia jest aproksymowany przez skończony szereg pól tensorowych b_{ai}^k albo — co jest równoważne w przypadku małych odkształceń niesprężystych — przez skończony szereg pól E_{ij}^k , mianowicie

$$(33) \quad u = \sum_{k=1}^N \psi^k u^k(E_{ij}^k, \eta), \quad \sum_{k=1}^N \psi^k = 1.$$

Z powyższego wynika, że

$$(34) \quad s_{ij} = \varrho_0 \sum_{k=1}^N \psi^k \frac{\partial u^k}{\partial E_{ij}^k} = \sum_{k=1}^N \psi^k s_{ij}^k.$$

Postulat wzrostu entropii wymaga, aby

$$(35) \quad s_{ij}^k \dot{E}'_{ij}{}^k \geq 0$$

albo, ponieważ $\dot{E}'_{ij}{}^k = 0$ (odkształcenie objętościowe jest sprężyste), aby

$$s_{ij}^{*k} \dot{E}'_{ij}{}^{*k} \geq 0,$$

gdzie s_{ij}^* i E_{ij}^* są składowymi dewiatorów

$$s_{ij}^* = s_{ij} - \frac{1}{3} s_{kk} \delta_{ij},$$

$$E_{ij}^* = E_{ij} - \frac{1}{3} E_{kk} \delta_{ij}.$$

Podstawowym problemem dla pełzania i plastyczności pozostaje określenie związku konstytutywnego dla prędkości dewiatora $\dot{E}'_{ij}{}^{*k}$. Postaram się zwięźle przedstawić własne podejście.

Definiuję funkcję dysypacji dla pełzania w postaci

$$(38) \quad s_{ij}^{*k} \dot{E}'_{ij}{}^{*k} = f^k(s_{ij}^{*k}, T).$$

Przyjmuję, że obszar sprężystego zachowania się materiału jest ograniczony przez funkcję płynięcia

$$(39) \quad g^k = g^k(s_{ij}^{*k}, T, h),$$

gdzie h jest parametrem wzmocnienia.

Stosując do przypadku pełzania prawo stowarzyszone z potencjałem f^k otrzymujemy

$$(40) \quad \dot{E}_{ij(c)^*}''^{k*} = \mu \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{*k}}; \quad \mu = \left[s_{ij}^{*k} \cdot \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \right]^{-1} f^k(s_{ij}^{*k}, T)$$

oraz postępując podobnie w przypadku odkształceń plastycznych przy $g^k = 0$, $\dot{g}^k \geq 0$, mamy

$$(41) \quad \dot{E}_{ij(p)^*}''^{k*} = p \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}}.$$

Jako prawo wzmocnienia przyjmujemy

$$(42) \quad \frac{\partial g^k}{\partial h} \dot{h} = - \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \dot{E}_{ij(p)^*}''^{k*} \cdot 2G\lambda, \quad \text{gdzie} \quad \lambda \geq 0.$$

Stąd, w przypadku deformacji izotermicznych, możemy rozwinąć warunek dla potencjału

$$(43) \quad \dot{g}^k = \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \dot{s}_{ij}^{*k} + \frac{\partial g^k}{\partial h} \dot{h} = \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} 2G \left(\dot{E}_{ij}^* - p \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} - \mu \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \right) - 2G\lambda \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} p \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} = 0.$$

Wyznaczamy mnożnik p

$$(44) \quad p(\lambda + 1) \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} = \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \dot{E}_{ij}^* - \mu \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{*k}}.$$

Równanie na $E_{ij}''^{k*}$ jest wówczas następujące:

$$(45) \quad \dot{E}_{ij}''^{k*} = \mu \left[\frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{*k}} - \frac{1}{\lambda + 1} \frac{\frac{\partial g^k}{\partial s_{hk}^{*k}} \frac{\partial f^k}{\partial s_{hk}^{*k}}}{\frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{*k}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{*k}}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \right] + \frac{1}{\lambda + 1} \frac{\frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}}}{\frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{*k}} \frac{\partial g^k}{\partial s_{mn}^{*k}}} \dot{E}_{hk}^*,$$

pod warunkiem, że zachodzi

$$(46) \quad g^k = 0, \quad \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \dot{E}_{ij}^* > \mu \frac{\partial g^k}{\partial s_{ij}^{*k}} \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{*k}};$$

w przeciwnym razie

$$\dot{E}_{ij}''^{k*} = \mu \frac{\partial f^k}{\partial s_{ij}^{*k}}.$$

W celu zbadania słuszności tych związków w przypadku plastyczności i pełzania przeprowadziliśmy szereg doświadczeń na rurach grubościennych.

Wychodząc z funkcji płynięcia Misesa, mianowicie

$$(47) \quad g = s_{ij}^* s_{ij}^* - h^2,$$

określiśmy na podstawie pomierzonych historii deformacji historie naprężenia i porównaliśmy je z wynikami uzyskanymi z pomiarów. Można było zauważyć, że (dla przyjętej funkcji płynięcia) wszystkie wielkości występujące w naszych równaniach konstytutywnych dla plastyczności zostały wyznaczone w oparciu o zwykłe krzywe naprężenie—odkształcenie dla rozciągania albo skręcania. W ten sposób spełniliśmy nasze pierwotne

żądanie polegające na wyprowadzeniu reakcji materiału przy złożonej historii obciążenia z pomierzonych wielkości dla pewnych specjalnych historii. Sądzę, że nasze pierwsze wyniki sugerują podejmowanie dalszych badań w oparciu o koncepcje przedstawione wyżej.

Badaliśmy też wartość pojęcia skończonej ilości naturalnych stanów odniesienia przy pomocy testów pełzania. Rezultaty, jakie uzyskaliśmy do tej pory, były przedstawione na sympozjum IUTAM poświęconemu pełzaniu w konstrukcjach w r. 1970 w Gothenburgu [9]. Rozrzuty wyników badań rzucają cień na niezbyt pomyślną zgodność między przyjętym modelem a rzeczywistym zachowaniem materiału.

Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Encyclopedia of Physics ed. by S. FLÜGGE, Vol. III/3, 1965.
2. W. NOLL, *A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media*, Arch. Rat. Mech. Anal., **2**, (1958—59), 197—226.
3. B. D. COLEMAN, V. J. MIZEL, *On the General Theory of Fading Memory*, Arch. Rat. Mech. Anal., **29**, (1968), 18—31.
4. Y. HORIE, *On the Thermodynamic States of Plastically Deformed Solids*, Pap. Contr. to the Int. Symp. on Foundations of Plasticity, Warsaw, 1972, preprint edition, ed. by A. SAWCZUK, s. 219—233.
5. K. S. HAVNER, *An Analytical Model of Large Deformation Effects in Crystalline Aggregates*, jw, s. 93—106.
6. C. ECKART, *The Thermodynamics of Irreversible Processes, IV. The Theory of Elasticity and Anelasticity*, Phys. Rev., **2**, **73** (1948), 373.
7. J. F. BESSELING, w *Irreversible Aspects of Cont. Mech....*, IUTAM Symposium, Vienna 1966, ed. by H. PARKUS, L. I. SEDOV, Wien 1968.
8. L. I. SEDOV, *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, New York 1965 (tłumaczenie angielskie), *Vvedenie v Mekhaniku Sploshnoi Sredy*, Moscow 1962.
9. J. F. BESSELING, J. H. LAMBERMONT, *An Experimental and Theoretical Investigation of Creep under Uniaxial Stress of a Mg-Alloy, Creep in Structures*, IUTAM, Symp. Gothenburg 1970, ed. by J. HULT, Berlin 1972.

OSOBLIWOŚĆ NAPRĘŻEŃ SIŁOWYCH I MOMENTOWYCH W CIELE MIKROPOLARNYM WYWOŁANA OBCIĄŻENIAMI SKUPIONYMI (I)

JANUSZ DYSZLEWICZ, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań w pracy będzie osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych w liniowym ośrodku mikropolarnym [1]. Rozpatrzmy półprzestrzeń sprężystą w płaskim stanie odkształcenia (zagadnienie statyczne bez uwzględnienia obciążeń masowych i temperatury) na brzegu której, w początku współrzędnych, działać będą skupione, ograniczone obciążenia.

Zagadnienie półprzestrzeni poddanej na brzegu rozłożonym obciążeniom nieciągłym rozpatrzone będzie w drugiej części pracy. Wnioski wynikające z rozpatrzenia tych zagadnień mogą być wykorzystane przy rozpatrywaniu problemów dotyczących koncentracji naprężeń w ciele mikropolarnym (np. zagadnienia szczelin, zagadnienia kontaktowe itp.)

Zagadnienia powyższe w ramach niesymetrycznej, liniowej teorii sprężystości dla ciała ze związanymi obrotami rozpatrzone są szczegółowo w pracach [2] i [3]. Wyczerpujące omówienie zagadnień prowadzących do koncentracji naprężeń w ciele ze związanymi obrotami wraz z podaniem literatury dotyczącej tych problemów znaleźć można w monograficznych pracach [4], [5] oraz w pracach [14÷17].

W pracy oprzemy się na następującym układzie związków opisujących deformację i stan naprężenia w ciele mikropolarnym zapisanym w prawoskrętnym kartezjańskim układzie współrzędnych x_i ($i = 1, 2, 3$) [1].

Przemieszczeniowe równania równowagi:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha)u_{i,jj} + (\lambda + \mu - \alpha)u_{j,ji} + 2\alpha\varepsilon_{ijk}\varphi_{k,j} &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)\varphi_{i,jj} - 4\alpha\varphi_i + (\beta + \gamma - \varepsilon)\varphi_{j,ji} + 2\alpha\varepsilon_{ijk}u_{k,j} &= 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

gdzie λ, μ oznaczają stałe Lamégo, natomiast $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ są dodatkowymi stałymi materiałowymi. Funkcje u_i, φ_i są składowymi odpowiednio wektora przemieszczenia \mathbf{u} i wektora obrotu $\boldsymbol{\varphi}$. Symbol ε_{ijk} oznacza alternator Levi-Civita.

Związki geometryczne:

$$(1.2) \quad \gamma_{ji} = u_{i,j} - \varepsilon_{kji}\varphi_k, \quad \varkappa_{ji} = \varphi_{i,j},$$

gdzie γ_{ji} jest niesymetrycznym tensorem odkształcenia, \varkappa_{ji} — niesymetrycznym tensorem skrętno-giętnym.

Równania konstytutywne:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\varkappa_{ij} + \beta\varkappa_{kk}\delta_{ij}, \end{aligned}$$

gdzie σ_{ji} jest niesymetrycznym tensorem naprężeń siłowych, μ_{ji} — niesymetrycznym tensorem naprężeń momentowych i symbol δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Warunki brzegowe

$$(1.4) \quad p_i = \sigma_{ji}n_j, \quad m_i = \mu_{ji}n_j$$

oznaczają, że na powierzchni ograniczającej ciało mikropolarne działają obciążenia w postaci siły \mathbf{p} i momentu \mathbf{m} . Ponadto n_j są tu składowymi jednostkowego wektora \mathbf{n} normalnego do powierzchni ciała.

2. Płaski stan odkształcenia

W dalszym ciągu pracy interesować nas będzie zagadnienie płaskiego stanu odkształcenia (a więc wszystkie przyczyny i skutki zależeć będą tylko od zmiennych x_1, x_2) reprezentowane przez wektory \mathbf{u} i $\boldsymbol{\varphi}$ postaci [1]:

$$(2.1) \quad \mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3).$$

W tym zagadnieniu stan deformacji opisują macierze

$$(2.2) \quad \gamma_{ji} \equiv \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \varkappa_{ji} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \varkappa_{13} \\ 0 & 0 & \varkappa_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

przy czym

$$(2.2') \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= \partial_1 u_1, & \gamma_{22} &= \partial_2 u_2, & \gamma_{12} &= \partial_1 u_2 - \varphi_3, \\ \gamma_{21} &= \partial_2 u_1 + \varphi_3, & \varkappa_{\alpha 3} &= \partial_\alpha \varphi_3 & (\alpha &= 1, 2). \end{aligned}$$

Dla stanu naprężenia uzyskujemy wyrażenia

$$(2.3) \quad \sigma_{ji} \equiv \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{vmatrix}, \quad \mu_{ji} \equiv \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mu_{13} \\ 0 & 0 & \mu_{23} \\ \mu_{32} & \mu_{32} & 0 \end{vmatrix}.$$

Równania równowagi (1.1) przyjmują teraz postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha)\nabla_1^2 u_1 + (\lambda + \mu - \alpha)\partial_1 e + 2\alpha\partial_2 \varphi_3 &= 0, \\ (\mu + \alpha)\nabla_1^2 u_2 + (\lambda + \mu - \alpha)\partial_2 e - 2\alpha\partial_1 \varphi_3 &= 0, \\ [(\gamma + \varepsilon)\nabla_1^2 - 4\alpha]\varphi_3 + 2\alpha(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) &= 0. \end{aligned}$$

Symbol ∇_1^2 oznacza dwuwymiarowy operator Laplace'a, natomiast e oznacza dylatację

$$\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2.$$

Składowe stanu naprężenia z (2.3) wyrażamy przez przemieszczenia u_1 , u_2 i obrót φ_3 następująco:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= (2\mu + \lambda) \partial_1 u_1 + \lambda \partial_2 u_2, \\ \sigma_{22} &= (2\mu + \lambda) \partial_2 u_2 + \lambda \partial_1 u_1, \\ \sigma_{12} &= (\mu + \alpha) \partial_1 u_2 + (\mu - \alpha) \partial_2 u_1 - 2\alpha \varphi_3, \\ \sigma_{21} &= (\mu + \alpha) \partial_2 u_1 + (\mu - \alpha) \partial_1 u_2 + 2\alpha \varphi_3 \end{aligned}$$

oraz

$$(2.6) \quad \mu_{\alpha 3} = (\gamma + \varepsilon) \partial_\alpha \varphi_3 \quad (\alpha = 1, 2).$$

Składowe σ_{33} , μ_{31} i μ_{32} wyznacza się ze wzorów

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \\ \mu_{\alpha 3} &= \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \mu_{\alpha 3} \quad (\alpha = 1, 2); \end{aligned}$$

wzorów tych w dalszym ciągu pracy nie będziemy powtarzać.

3. Ogólne rozwiązanie równań równowagi (2.4) dla półprzestrzeni $\{x_1 \geq 0, -\infty < x_2 < \infty\}$

W punkcie tym podamy ogólne rozwiązanie równań równowagi (2.4) dla półprzestrzeni będące sumą dwóch rozwiązań częściowych, z których jedno odpowiadać będzie zagadnieniu klasycznej teorii sprężystości, a drugie stanowić będzie rozwiązanie uzupełniające.

Rozwiązania częściowe wiązać się będą ze sobą poprzez warunki brzegowe. Wprowadźmy w tym celu wektor ζ przy pomocy związku [6]

$$(3.1) \quad \zeta = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \varphi.$$

Dla rozpatrywanego zagadnienia płaskiego (2.1) podstawienie (3.1) prowadzi do zależności

$$(3.2) \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) - \zeta_3.$$

Wprowadzając (3.2) do równań równowagi (2.4) otrzymujemy:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mu \nabla_1^2 u_1 + (\lambda + \mu) \partial_1 e &= 2\alpha \partial_2 \zeta_3, \\ \mu \nabla_1^2 u_2 + (\lambda + \mu) \partial_2 e &= -2\alpha \partial_1 \zeta_3, \\ \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 (\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) &= [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha] \zeta_3. \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań (3.3) przyjmujemy w postaci

$$(3.4) \quad u_1 = u_1' + u_1'', \quad u_2 = u_2' + u_2'', \quad \zeta_3 = \zeta_3' + \zeta_3''.$$

Podstawiając teraz (3.4) do (3.3) i przyjmując $\zeta_3' = 0$, widzimy, że (3.3) będzie spełnione, jeśli będą spełnione dwa układy równań

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \mu \nabla_1^2 u_1' + (\lambda + \mu) \partial_1 e' &= 0, \\ \mu \nabla_1^2 u_2' + (\lambda + \mu) \partial_2 e' &= 0, \\ \nabla_1^2 (\partial_1 u_2' - \partial_2 u_1') &= 0, \quad e' = \partial_1 u_1' + \partial_2 u_2' \end{aligned}$$

oraz

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mu \nabla_1^2 u_1'' + (\lambda + \mu) \partial_1 e'' &= 2\alpha \partial_2 \zeta_3'', \\ \mu \nabla_1^2 u_2'' + (\lambda + \mu) \partial_2 e'' &= -2\alpha \partial_1 \zeta_3'', \\ \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 (\partial_1 u_2'' - \partial_2 u_1'') &= [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha] \zeta_3'', \quad e'' = \partial_1 u_1'' + \partial_2 u_2''. \end{aligned}$$

Zauważmy, że równanie (3.5)₃ można uzyskać z równań (3.5)_{1,2}, które są przemieszczeniowymi równaniami klasycznej elastostatyki (por. [7]). Z faktu, że $\zeta_3' = 0$ wynika zależność

$$(3.7) \quad \varphi_3' = \frac{1}{2} (\partial_1 u_2' - \partial_2 u_1'),$$

która jest również słuszna w klasycznej teorii sprężystości. Zależność (3.7) wraz z (2.6) pozwolą na wyznaczenie $u_{\alpha 3}'$ ze związku

$$(3.8) \quad u_{\alpha 3}' = (\gamma + \varepsilon) \partial \varphi_3' = \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \partial_\alpha (\partial_1 u_2' - \partial_2 u_1') \quad (\alpha = 1, 2).$$

Przejdźmy teraz do układu równań (3.6). Z dwóch pierwszych równań tego układu uzyskujemy równanie Laplace'a dla dylatacji

$$(3.9) \quad \nabla_1^2 e'' = 0,$$

natomiast dla funkcji u_1'' , u_2'' , ζ_3'' uzyskujemy rozseparowane równania różniczkowe postaci

$$(3.10) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 (l^2 \nabla_1^2 - 1) u_1'' = 0,$$

$$(3.11) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 (l^2 \nabla_1^2 - 1) u_2'' = 0,$$

$$(3.12) \quad (l^2 \nabla_1^2 - 1) \zeta_3'' = 0,$$

gdzie wielkość l^2 jest stałą i wynosi $l^2 = (\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)/4\alpha\mu$.

Wprowadźmy wykładniczą transformację Fouriera [8]

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \tilde{f}(x_1, \xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{i\xi x_2} dx_2, \\ f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(x_1, \xi) e^{-i\xi x_2} d\xi. \end{aligned}$$

Wykonując transformację (3.13)₁ na równaniach (3.10)÷(3.12), otrzymujemy zwyczajne równania różniczkowe dla funkcji \tilde{u}_1'' , \tilde{u}_2'' , $\tilde{\zeta}_3''$,

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2 \right)^2 \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2 \right) (\tilde{u}_1'', \tilde{u}_2'') &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2 \right) \tilde{\zeta}_3'' &= 0, \quad \varrho = \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równań (3.14) dla półprzestrzeni przyjmujemy w postaci

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \tilde{u}'_1 &= (A'_1 + B'_1 |\xi| x_1) e^{-|\xi| x_1} + C'_1 e^{-\alpha x_1}, \\ \tilde{u}'_2 &= (A'_2 + B'_2 |\xi| x_1) e^{-|\xi| x_1} + C'_2 e^{-\alpha x_1}, \\ \tilde{\zeta}'_3 &= b'' e^{-\alpha x_1}. \end{aligned}$$

Aby spełnić przetransformowane równanie (3.9) oraz wyjściowe równania równowagi (3.6), uzależnimy wzory (3.15) tylko od trzech stałych (np. od A'_1 , B'_1 , C'_1),

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \tilde{u}'_1 &= (A'_1 + B'_1 |\xi| x_1) e^{-|\xi| x_1} + C'_1 e^{-\alpha x_1}, \\ \tilde{u}'_2 &= \frac{i\xi}{|\xi|} \left(A'_1 - \frac{3\mu + \lambda}{\lambda + \mu} B'_1 + B'_1 |\xi| x_1 \right) e^{-|\xi| x_1} + \frac{i\varrho}{\xi} C'_1 e^{-\alpha x_1}, \\ \tilde{\zeta}'_3 &= \frac{i\mu}{2\alpha\xi} (\varrho^2 - \xi^2) C'_1 e^{-\alpha x_1}. \end{aligned}$$

Dla konkretnych zagadnień wielkości A'_1 , B'_1 , C'_1 wyznaczamy z trzech warunków brzegowych. Warunki te muszą być takie, aby w połączeniu z warunkami brzegowymi odnoszącymi się do równań klasycznej elastostatyki (3.5)_{1, 2} realizowały całość warunków brzegowych dla półprzestrzeni mikropolarnej.

4. Przypadek półprzestrzeni obciążonej rozłożonym obciążeniem normalnym

Rozpatrzmy półprzestrzeń mikropolarną $\{(x_1, x_2): x_1 \geq 0, -\infty < x_2 < \infty\}$ w płaskim stanie odkształcenia (2.1), na brzegu której (dla $x_1 = 0$) działa rozłożone obciążenie normalne $p(x_2)$ (zależne tylko od zmiennej x_2) skierowane zgodnie z osią Ox_1 . Warunki brzegowe (1.4) przyjmują tu postać

$$(4.1) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0.$$

O funkcji $p(x_2)$ zakładamy, że jest bezwzględnie całkowalna w przedziale $(-\infty, +\infty)$ i przedziałami ciągła.

Założenia powyższe (z wyjątkiem warunków brzegowych) będą również odnosiły się do punktów 6, 8 i 10 pracy, czego wyraźnie podkreślać już nie będziemy.

Rozwiązanie klasyczne odpowiadające powyższemu problemowi (tzn. rozwiązanie równań (3.5)_{1, 2} z warunkami brzegowymi $\sigma'_{11}(0, x_2) = -p(x_2)$, $\sigma'_{12}(0, x_2) = 0$) ma postać [por. [7] s. 287]

dla przemieszczeń

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \tilde{u}'_1 &= \frac{\tilde{p}(\xi)}{2\mu|\xi|} [|\xi|x_1 + 2(1-\nu)] e^{-|\xi|x_1}, \\ \tilde{u}'_2 &= -\frac{i\tilde{p}(\xi)}{2\mu\xi} [(1-2\nu) - |\xi|x_1] e^{-|\xi|x_1}, \end{aligned}$$

dla naprężeń

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}'_{11} &= -\tilde{p}(\xi)(1 + |\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1}, \\ \tilde{\sigma}'_{22} &= -\tilde{p}(\xi)(1 - |\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1}, \\ \tilde{\sigma}'_{12} &= \tilde{\sigma}'_{21} = -\tilde{p}(\xi) i\xi x_1 e^{-|\xi|x_1}. \end{aligned}$$

Wielkość \tilde{q}'_3 wyznaczamy ze związków (3.7) i (4.2)

$$(4.4) \quad \tilde{q}'_3 = \frac{i\tilde{p}(\xi)}{\mu\xi} (1-\nu)|\xi|e^{-|\xi|x_1}.$$

W zależnościach (4.2) ÷ (4.4) $\nu = \lambda/2(\lambda + \mu)$.

«Primowane» składowe tensora naprężeń momentowych wyznaczamy ze związków (3.8) i (4.2) lub (4.4)

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \tilde{u}'_{13} &= -2i\xi a_0 \tilde{p}(\xi) e^{-|\xi|x_1}, \\ \tilde{u}'_{23} &= 2a_0 |\xi| \tilde{p}(\xi) e^{-|\xi|x_1}. \end{aligned}$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenie $a_0 = (\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\mu)/4\mu(\lambda + \mu)$.

Przejdźmy do układu równań (3.6). Odpowiednie warunki brzegowe mają postać

$$(4.6) \quad \sigma'_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma'_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu'_{13}(0, x_2) = 2a_0 \frac{dp}{dx_2}(x_2).$$

Ogólne rozwiązanie tego układu równań dla półprzestrzeni przedstawiliśmy wzorami (3.16). Stałe A''_1 , B''_1 , C''_1 wyznaczmy spełniając warunki (4.6). Ponieważ naprężenia z dwiema kreskami wyrażają się poprzez funkcje u''_1 , u''_2 , φ''_3 , jak w związkach (2.5) i (2.6), należy zatem do zależności (2.5)_{1,3} i (2.6) (dla $\alpha = 1$) podstawić związek

$$(4.7) \quad \varphi''_3 = \frac{1}{2} (\partial_1 u''_2 - \partial_2 u''_1) - \zeta''_3$$

i następnie spełnić warunki brzegowe (4.6)

Po zastosowaniu transformacji (3.13)₁ otrzymujemy algebraiczny układ trzech równań z niewiadomymi A''_1 , B''_1 , C''_1 ,

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}'_{11}(0, \xi) &= \left[(2\mu + \lambda) \frac{d\tilde{u}'_1}{dx_1} - i\xi \lambda \tilde{u}'_2 \right]_{x_1=0} = 0, \\ \tilde{\sigma}'_{12}(0, \xi) &= \left[\mu \left(\frac{d\tilde{u}'_2}{dx_1} - i\xi \tilde{u}'_1 \right) + 2\alpha \tilde{\zeta}'_3 \right]_{x_1=0} = 0, \\ \tilde{\mu}'_{13}(0, \xi) &= \left[\frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \left[\frac{d}{dx_1} \left(\frac{d\tilde{u}'_2}{dx_1} + i\xi \tilde{u}'_1 \right) - 2 \frac{d\tilde{\zeta}'_3}{dx_1} \right] \right]_{x_1=0} = 2ia_0 \xi \tilde{p}(\xi), \end{aligned}$$

po rozwiązaniu którego uzyskujemy

$$(4.9) \quad \begin{aligned} A''_1 &= \left[\left(1 - \frac{\varrho}{|\xi|} \right) \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} - 1 \right] C''_1, \\ B''_1 &= \left(1 - \frac{\varrho}{|\xi|} \right) C''_1, \\ C''_1 &= \frac{a_0}{\mu} \frac{\xi^2}{\varrho} \frac{\tilde{p}(\xi)}{\Delta_0(\xi)}. \end{aligned}$$

Tu

$$\Delta_0 \equiv \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{|\xi|}{\varrho} \right), \quad \tilde{p} \equiv \tilde{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2) e^{i\xi x_2} dx_2.$$

Podstawiając (4.9) do wzorów (3.16)_{1,2} otrzymujemy

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tilde{u}_1'' &= \frac{1}{2\mu} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left\{ (1 - \Delta_0) \left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{|\xi|} + x_1 \right) e^{-|\xi|x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} (e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi|x_1}) \right\}, \\ \tilde{u}_2'' &= \frac{i}{2\mu} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left\{ (1 - \Delta_0) \left(-\frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{|\xi|} + x_1 \right) e^{-|\xi|x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} \left(\frac{\varrho}{|\xi|} e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi|x_1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Wielkość φ_3'' uzyskujemy ze związku (4.7) wykonując na nim transformację (3.13)₁ i wykorzystując zależności (3.16)₃, (4.9)₃ i (4.10)

$$(4.11) \quad \tilde{\varphi}_3'' = \frac{i(2\mu + \lambda)}{2\mu(\lambda + \mu)} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-|\xi|x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-\varrho x_1} \right].$$

Odpowiadający przemieszczeniom u_1'' , u_2'' i obrotowi φ_3'' stan naprężenia wyznaczamy z przetransformowanych związków (2.5) i (2.6), wykorzystując (4.10) i (4.11)

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11}'' &= -\frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) (1 + |\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\varrho x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right], \\ \tilde{\sigma}_{22}'' &= \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) (-1 + |\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\varrho x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right], \\ \tilde{\sigma}_{12}'' &= -\frac{i\xi}{|\xi|} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) (|\xi|x_1 e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{|\xi|}{\varrho} (e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi|x_1})) \right], \\ \tilde{\sigma}_{21}'' &= -\frac{i\xi}{|\xi|} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) |\xi|x_1 e^{-|\xi|x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{|\xi|}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-\varrho x_1} - e^{-|\xi|x_1} \right) \right] \end{aligned}$$

oraz

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \tilde{\mu}_{13}'' &= -2ia_0 \xi \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} [(1 - \Delta_0) e^{-|\xi|x_1} - e^{-\varrho x_1}], \\ \tilde{\mu}_{23}'' &= 2a_0 |\xi| \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-|\xi|x_1} - \frac{|\xi|}{\varrho} e^{-\varrho x_1} \right]. \end{aligned}$$

Dla uzyskania całkowitej, rzeczywistej postaci składowych wektora przemieszczenia i obrotu oraz dla składowych tensora naprężeń siłowych i momentowych, rozdzielamy funkcję obciążenia $p(x_2)$ na część symetryczną $p_s(x_2)$ i część antysymetryczną $p_a(x_2)$ względem osi Ox_1 . Wówczas mamy

$$(4.14) \quad \tilde{p}(\xi) = \tilde{p}_s(\xi) + i\tilde{p}_a(\xi),$$

gdzie

$$(4.14)' \quad \begin{aligned} \tilde{p}_s &\equiv \tilde{p}_s(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_s(x_2) \cos(\xi x_2) dx_2, \\ \tilde{p}_a &\equiv \tilde{p}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p_a(x_2) \sin(\xi x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Uwzględniając (4.14) oraz stosując twierdzenie o odwracaniu transformacji Fouriera (3.13)₂, uzyskujemy ze wzorów (4.2) i (4.4) «primowane» przemieszczenia i obrót

$$\begin{aligned}
 u'_1 &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} [2(1-\nu) + \xi x_1] e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi, \\
 u'_2 &= -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} [(1-2\nu) - \xi x_1] e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi, \\
 \varphi'_3 &= \frac{2}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (1-\nu) e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi,
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

przy oznaczeniach

$$\begin{aligned}
 a(\xi, x_2) &= \tilde{p}_s \cos(\xi x_2) + \tilde{p}_a \sin(\xi x_2), \\
 b(\xi, x_2) &= \tilde{p}_s \sin(\xi x_2) - \tilde{p}_a \cos(\xi x_2).
 \end{aligned}
 \tag{4.15}'$$

Natomiast ze wzorów (4.3) i (4.5) uzyskujemy «primowane» naprężenia

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi, \\
 \sigma'_{22} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (1 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi, \\
 \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{2x_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 u'_{13} &= -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi, \\
 \mu'_{23} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

Funkcje u''_1 , u''_2 , φ''_3 otrzymujemy ze wzorów (4.10) i (4.11)

$$\begin{aligned}
 u''_1 &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left\{ (1 - \Delta_0) \left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right\} a(\xi, x_2) d\xi,
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

$$(4.18) \quad u''_2 = \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left\{ (1-\Delta_0) \left(-\frac{\mu}{\lambda+u} \frac{1}{\xi} + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} \left(\frac{\varrho}{\xi} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right\} b(\xi, x_2) d\xi, \\ \varphi''_3 = \frac{(2\mu+\lambda)}{\mu(\lambda+\mu)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\rho x_1} \right] b(\xi, x_2) d\xi.$$

Składowe naprężen z «dwoma kreskami» w postaci całkowej uzyskujemy ze wzorów (4.12) i (4.13)

$$(4.19) \quad \sigma''_{11} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] a(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma''_{22} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] a(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma''_{12} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] b(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma''_{21} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] b(\xi, x_2) d\xi$$

oraz

$$(4.20) \quad \mu''_{13} = -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0} [(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}] b(\xi, x_2) d\xi, \\ \mu''_{23} = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\rho x_1} \right] a(\xi, x_2) d\xi.$$

Końcowy wynik dla przemieszczeń i obrotu uzyskujemy sumując wzory (4.15) i (4.18):

$$(4.21) \quad u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha, \quad \varphi_3 = \varphi'_3 + \varphi''_3 \quad (\alpha = 1, 2).$$

Natomiast stan naprężenia w półprzestrzeni uzyskujemy dodając odpowiednio wzory (4.16) i (4.19) oraz (4.17) i (4.20):

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \sigma'_{\alpha\beta} + \sigma''_{\alpha\beta}, & \sigma_{33} &= \sigma'_{33} + \sigma''_{33} & (\alpha, \beta = 1, 2), \\ \mu_{\alpha 3} &= \mu'_{\alpha 3} + \mu''_{\alpha 3}, & \mu_{3\alpha} &= \mu'_{3\alpha} + \mu''_{3\alpha} & (\alpha = 1, 2). \end{aligned}$$

Stan odkształcenia wyznaczamy ze wzorów (2.2)' przy użyciu (4.21).

Można zauważyć, że jeżeli przejdziemy ze stałą materiałową α do granicy ($\alpha \rightarrow 0$), to zachodzi $\varrho \rightarrow |\xi|$, $\Delta_0 \rightarrow 1$ i wówczas mamy

$$(4.23) \quad \begin{aligned} u''_{\alpha} &\rightarrow 0, & \varphi''_3 &\rightarrow 0 & (\alpha = 1, 2), \\ \sigma''_{\alpha\beta} &\rightarrow 0, & \sigma''_{33} &\rightarrow 0 & (\alpha, \beta = 1, 2), \\ \mu_{\alpha 3} &\rightarrow 0, & \mu_{3\alpha} &\rightarrow 0 & (\alpha = 1, 2). \end{aligned}$$

Widać więc, że przejście $\alpha \rightarrow 0$ prowadzi do rozwiązania klasycznej teorii sprężystości (wzory (4.15)_{1,2} i (4.16)).

W pracy [9] płaskie zagadnienie niesymetrycznej sprężystości (2.1) rozwiązuje się poprzez wprowadzenie potencjałów sprężystych. Rezultat uzyskany w naszej pracy zgodny jest z wynikami uzyskanymi dla zagadnienia półprzestrzeni w wyżej cytowanej pracy.

5. Osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych spowodowana normalną siłą skupioną

Rozpatrzmy przypadek szczególny obciążenia $p(x_2)$ z poprzedniego punktu pracy. Przyjmujemy, że w początku układu współrzędnych działa normalna siła skupiona postaci

$$(5.1) \quad p(x_2) = P\delta(x_2).$$

Tu symbol $\delta(\dots)$ oznacza pseudofunkcję Diraca.

Podstawiając (5.1) do związków (4.14') otrzymujemy

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \tilde{p}_s &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P\delta(x_2)\cos(\xi x_2)dx_2 = \frac{P}{\sqrt{2\pi}}, \\ \tilde{p}_a &= 0. \end{aligned}$$

Oznaczenia (4.15') mają teraz postać

$$(5.2') \quad \begin{aligned} a(\xi, x_2) &= \tilde{p}_s \cos(\xi, x_2) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}} \cos(\xi, x_2), \\ b(\xi, x_2) &= \tilde{p}_s \sin(\xi, x_2) = \frac{P}{\sqrt{2\pi}} \sin(\xi, x_2). \end{aligned}$$

Zakładając, że pozostałe warunki na brzegu półprzestrzeni nie ulegają zmianie (tzn. $\sigma_{12} = \mu_{13} = 0$ dla $x_1 = 0$), możemy rozwiązanie dla stanu naprężenia otrzymane w punkcie 4 wykorzystać tu uwzględniając związki (5.2').

Dla primowanych składowych naprężeń z (4.16) i (4.17) mamy

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{P x_1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= -\frac{2a_0 P}{\pi} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \mu'_{23} &= \frac{2a_0 P}{\pi} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi. \end{aligned}$$

Ze wzorów (4.19) i (4.20) uzyskujemy składowe naprężeń z dwiema kreskami

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \sigma''_{11} &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0)(1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma''_{22} &= \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0)(-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma''_{12} &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma''_{21} &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} \left(\frac{\rho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \mu''_{13} &= -\frac{2a_0 P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} [(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}] \sin(\xi, x_2) d\xi, \\ \mu''_{23} &= \frac{2a_0 P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] \cos(\xi, x_2) d\xi. \end{aligned}$$

Wzory (5.3) ostatecznie możemy zapisać w postaci zamkniętej [por. [7] str. 288]

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x_1^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Również całki występujące we wzorach (5.4) można efektywnie wyliczyć i wówczas uzyskujemy z [10] wzory

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= -\frac{4a_0 P}{\pi} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \mu'_{23} &= \frac{2a_0 P}{\pi} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Całki występujące we wzorach (5.5) i (5.6) są dobrze zbieżne w całej półpłaszczyźnie $\{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, -\infty < x_2 < \infty\}$ poza punktem przyłożenia siły skupionej P , a więc z wyjątkiem początku układu współrzędnych. Ich osobliwości zależą od zachowania się funkcji podcałkowych w punkcie $(0, 0; \xi)$ przy $\xi \rightarrow \infty$, mianowicie od tych części funkcji podcałkowych, które przy $x_1 = x_2 = 0$ i przy $\xi \rightarrow \infty$ są rzędu $0(\xi^{-1})$ lub większego [por. prace [2÷4, [8]].

W celu wyznaczenia charakteru osobliwości całek (5.5) i (5.6) wykorzystamy następujące rozwinięcie asymptotyczne

$$(5.9) \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{l^2}} = \xi + \frac{1}{2\xi l^2} + 0(\xi^{-3}) \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Korzystając z (5.9) otrzymamy

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \Delta_0(\xi) &\equiv 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\varrho}\right) = 1 + \frac{a_0}{l^2} + 0(\xi^{-2}) \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty, \\ e^{-\varepsilon x} &= e^{-\xi x_1} \left[1 - \frac{x_1}{2\xi l^2} + \frac{x_1^2}{8\xi^2 l^2} + \frac{6l^2 x_1 - x_1^3}{48l^3 \xi^3} + 0(\xi^{-4})\right] \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

We wzorach (5.9) i (5.10) symbol $0(\xi^{-n})$ oznacza wyrażenie, które przy $\xi \rightarrow \infty$ zachowuje się jak funkcja $\frac{1}{\xi^n}$ (n — liczba naturalna). Wykorzystując rozwinięcia (5.9), (5.10) i obliczając *explicitie* część osobliwą całek (5.5) i (5.6) oraz oznaczając przez $0(1)$ ich część regularną, otrzymujemy

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \sigma''_{11} &= \frac{2P}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\ \sigma''_{22} &= \frac{2P}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{2x_1^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\ \sigma''_{12} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{2x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\ \sigma''_{21} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1) \end{aligned}$$

oraz

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \mu''_{13} &= \frac{2a_0 P}{\pi} \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\ \mu''_{23} &= -\frac{2a_0 P}{\pi} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} - \frac{P}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \log(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + 0(1). \end{aligned}$$

Poniżej zestawiamy całki wykorzystane do otrzymania wzorów (5.11) i (5.12) oraz całki, które będziemy wykorzystywać w dalszych częściach pracy [10]:

$$(5.12') \quad \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi &= \frac{x_1}{r^2}, \\ \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^4}, \\ \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi &= \frac{2x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}{r^6}, \\ \int_1^{\infty} \xi^{-1} e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi &= -\log r + 0(1), \quad r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(5.12'') \quad \begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi &= \frac{x_2}{r^2}, \\ \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi &= \frac{2x_1 x_2}{r^4}, \\ \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi &= \frac{2x_2(3x_1^2 - x_2^2)}{r^6}, \\ \int_0^{\infty} \xi^{-1} e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi &= \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}, \\ -\frac{\pi}{2} &< \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} < \frac{\pi}{2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Zestawiając wzory (5.7) z (5.11) oraz (5.8) z (5.12) można zauważyć, że w punkcie przyłożenia siły P składowe tensora naprężeń siłowych posiadają osobliwość postaci $0(r^{-1})$. Natomiast składowe tensora naprężeń momentowych zachowują się inaczej: μ_{13} i μ_{31} posiada wartość skończoną $0(1)$, a μ_{23} i μ_{32} posiada osobliwość logarytmiczną $0(\log r)$:

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \mu_{13} &= 0(1), \\ \mu_{23} &= -\frac{\varrho}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \log(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + 0(1). \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy ze stałą materiałową $\alpha (\alpha \rightarrow 0)$, uzyskujemy

$$(5.14) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a_0}{a_0 + l^2} = 0,$$

co prowadzi do rozwiązania klasycznego danego wzorami (5.7), ponieważ składowe naprężeń z (5.11) i składowe naprężeń z (5.13) dążą do zera. Dla przykładu, gdy $\alpha \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$(5.15) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{a_0}{a_0 + l^2} = \frac{2(1-\nu)}{3-2\nu},$$

gdzie ν jest stałą Poissona.

Przechodząc we wzorach (5.7), (5.8) i (5.11), (5.12) do granicy, gdy $\alpha \rightarrow \infty$ otrzymamy

$$(5.16) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{1}{3-2\nu} \frac{x_1 [x_1^2 + 2(1-\nu)x_2^2]}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\ \sigma_{22} &= \frac{2P}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\ \sigma_{12} &= \frac{2P}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\ \sigma_{21} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{1}{3-2\nu} \frac{x_2 [x_1^2 + 2(1-\nu)x_2^2]}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1) \end{aligned}$$

oraz

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \mu_{13} &= 0(1), \\ \mu_{23} &= -\frac{2P}{\pi} \frac{1-\nu}{3-2\nu} \log(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + 0(1). \end{aligned}$$

Jest to wynik dla niesymetrycznej teorii sprężystości ośrodka ze związanymi obrotami [por. [2], [4]].

6. Półprzestrzeń poddana rozłożonym obciążeniom stycznym

Rozpatrzmy zagadnienie półprzestrzeni z warunkami brzegowymi postaci

$$(6.1) \quad \tau_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = -s(x_2), \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0.$$

Rozwiązanie «primowane», tzn. rozwiązanie równań (3.5)_{1,2} z warunkami brzegowymi

$$(6.2) \quad \sigma'_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma'_{12}(0, x_2) = -s(x_2)$$

ma postać [por. [7] str. 290]:

dla przemieszczeń

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \tilde{u}'_1 &= \frac{i\tilde{s}(\xi)}{2\mu\xi} [(1-2\nu) + |\xi|x_1] e^{-\xi x_1}, \\ \tilde{u}'_2 &= \frac{\tilde{s}(\xi)}{2\mu|\xi|} [2(1-\nu) - |\xi|x_1] e^{-|\xi|x_1}; \end{aligned}$$

dla naprężeń

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}'_{11} &= -i\xi\tilde{s}(\xi)x_1 e^{-i\xi x_1}, \\ \tilde{\sigma}'_{22} &= -\frac{i\xi}{|\xi|}\tilde{s}(\xi)(2-|\xi|x_1)e^{-i\xi x_1}, \\ \tilde{\sigma}'_{12} = \tilde{\sigma}'_{21} &= -\tilde{s}(\xi)(1-|\xi|x_1)e^{-i\xi x_1}. \end{aligned}$$

Na podstawie związku (3.7) i (6.3) wyznaczamy

$$(6.5) \quad \tilde{q}'_3 = -\frac{\tilde{s}(\xi)}{\mu}(1-\nu)e^{-i\xi x_1}.$$

Wykorzystując powyższy wzór i związki (3.8) mamy

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \tilde{\mu}'_{13} &= 2a_0|\xi|\tilde{s}(\xi)e^{-i\xi x_1}, \\ \tilde{\mu}'_{23} &= 2ia_0\xi\tilde{s}(\xi)e^{-i\xi x_1}. \end{aligned}$$

Drugą część rozwiązania (z dwiema kreskami) uzyskamy rozwiązując układ równań (3.6) z warunkami brzegowymi postaci

$$(6.7) \quad \sigma''_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma''_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu''_{13}(0, x_2) = -\mu'_{13}(0, x_2).$$

Zauważmy jednak, że tego typu pomocniczy problem brzegowy rozwiązaliśmy w punkcie 4 pracy. Zatem wyniki dla rozwiązania z dwiema kreskami należące do zagadnienia z tego punktu uzyskujemy ze wzorów (4.10), (4.11), (4.12) i (4.13), podstawiając w nich

$$(6.8) \quad \tilde{p}(\xi) = \frac{i|\xi|}{\xi}\tilde{s}(\xi).$$

Ostatecznie przemieszczenia, obrót i stan naprężenia w półprzestrzeni uzyskujemy zestawiając rozwiązania częściowe jak we wzorach (4.21) i (4.22). W tym przypadku dla przejścia granicznego ($\alpha \rightarrow 0$) również zachodzą zależności (4.23) i otrzymujemy rezultat klasyczny (wzory (6.3) i (6.4)).

Przejdźmy do całkowitej rzeczywistej postaci rozwiązania. W tym celu, podobnie jak w punkcie 4, rozkładamy obciążenie na część symetryczną i antysymetryczną względem osi Qx_1

$$(6.9) \quad \tilde{s}(\xi) = \tilde{s}_s(\xi) + i\tilde{s}_a(\xi),$$

gdzie

$$(6.9') \quad \begin{aligned} \tilde{s}_s &\equiv \tilde{s}_s(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_s(x_2) \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \tilde{s}_a &\equiv \tilde{s}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}_a(x_2) \sin(\xi x_2) d\xi. \end{aligned}$$

Wykonując odwrotną transformację (3.13)₂ i uwzględniając (6.9) rozwiązanie zapisujemy ostatecznie w postaci następującej:

ze wzorów (6.3), (6.5) otrzymujemy

$$(6.10) \quad \begin{aligned} u'_1 &= -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} [(1-2\nu) + \xi x_1] e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi, \\ u'_2 &= -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\xi} [2(1-\nu) - \xi x_1] e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi, \\ \varphi'_3 &= -\frac{2(1-\nu)}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi, \end{aligned}$$

gdzie

$$(6.10') \quad \begin{aligned} a(\xi, x_2) &= \tilde{s}_s \cos(\xi x_2) + \tilde{s}_a \sin(\xi x_2), \\ b(\xi, x_2) &= \tilde{s}_s \sin(\xi, x_2) - \tilde{s}_a \cos(\xi x_2); \end{aligned}$$

ze wzorów (6.4), (6.6) otrzymujemy

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi x_1 e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (2 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty (1 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} a(\xi, x_2) d\xi, \\ \mu'_{23} &= -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \xi e^{-\xi x_1} b(\xi, x_2) d\xi; \end{aligned}$$

ze wzorów (4.10), (4.11) i (6.8) otrzymujemy

$$(6.13) \quad \begin{aligned} u''_1 &= \frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left\{ (1 - \Delta_0) \left[\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right] e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} (e^{-\mu x_1} - e^{-\xi x_1}) \right\} b(\xi, x_2) d\xi, \end{aligned}$$

$$(6.13) \quad u_2'' = -\frac{1}{\mu\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left\{ (1-\Delta_0) \left[-\frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + x_1 \right] e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \frac{\xi^2}{\varrho} \left(\frac{\varrho}{\xi} e^{-ex_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right\} a(\xi, x_2) d\xi, \\ \varphi_3'' = -\frac{(2\mu+\lambda)}{\mu(\lambda+\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-ex_1} \right] a(\xi, x_2) d\xi.$$

Ze wzorów (4.12), (4.13) i (6.8) otrzymujemy

$$(6.14) \quad \sigma_{11}'' = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-ex_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] b(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma_{22}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-ex_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] b(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma_{12}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi^2}{\varrho} (e^{-ex_1} - e^{-\xi x_1}) \right] a(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma_{21}'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-ex_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] a(\xi, x_2) d\xi$$

oraz

$$(6.15) \quad \mu_{13}'' = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0} [(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-ex_1}] a(\xi, x_2) d\xi, \\ \mu_{23}'' = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-ex_1} \right] b(\xi, x_2) d\xi.$$

7. Osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych spowodowana styczną siłą skupioną

Kolejny szczególny sposób obciążenia półprzestrzeni dotyczy przypadku działania w początku układu współrzędnych stycznej siły skupionej

$$(7.1) \quad s(x_2) = S\delta(x_2).$$

Wobec (7.1) wzory (6.9') i oznaczenia (6.10') przyjmują postać

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \tilde{s}_s &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} S \delta(x_2) \cos(\xi x_2) dx_2 = \frac{S}{\sqrt{2\pi}}, \\ \tilde{s}_a &= 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(7.2') \quad \begin{aligned} a(\xi, x_2) &= \tilde{S}_s \cos(\xi x_2) = \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \cos(\xi x_2), \\ b(\xi, x_2) &= \tilde{S}_s \sin(\xi x_2) = \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \sin(\xi x_2). \end{aligned}$$

Podstawiając związki (7.2) i (7.2') do wzorów (6.11) i (6.12) wyznaczamy primowane naprężenia

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= \frac{S}{\pi} \int_0^{\infty} \xi x_1 e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{S}{\pi} \int_0^{\infty} (2 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{S}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{2a_0 S}{\pi} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \mu'_{23} &= \frac{2a_0 S}{\pi} \int_0^{\infty} \xi e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi. \end{aligned}$$

Wzory (7.3) i (7.4) przy pomocy całek (5.12') i (5.12'') przedstawimy w postaci zamkniętej (por. [7]).

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{2S}{\pi} \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{2S}{\pi} \frac{x_1^3}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{2S}{\pi} \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{aligned}$$

oraz

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{2a_0 S}{\pi} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \mu'_{23} &= -\frac{2a_0 S}{\pi} \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Naprężenia z dwiema kreskami otrzymujemy ze wzorów (6.14), (6.15) oraz (7.2) i (7.2'):

$$\begin{aligned}
 \sigma''_{11} &= -\frac{S}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\nu x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma''_{22} &= \frac{S}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\nu x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma''_{12} &= \frac{S}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\nu x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma''_{21} &= \frac{S}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} \left(\frac{\rho^2}{\xi^2} e^{-\nu x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi
 \end{aligned}
 \tag{7.7}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mu''_{13} &= \frac{2a_0 S}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} [(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\nu x_1}] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 \mu''_{23} &= \frac{2a_0 S}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\nu x_1} \right] \sin(\xi x_2) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{7.8}$$

Dyskusja wzorów (7.7) i (7.8) dotycząca charakteru osobliwości całek w nich występujących jest taka sama jak dla wzorów (5.5) i (5.6) w punkcie 5 pracy. Wykorzystując zatem wzory asymptotyczne (5.9), (5.10) oraz całki (5.12'), (5.12''), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sigma''_{11} &= \frac{2S}{\pi} \frac{a_0}{l^2 + a_0} \frac{2x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\
 \sigma''_{22} &= \frac{2S}{\pi} \frac{a_0}{l^2 + a_0} \frac{x_2(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\
 \sigma''_{12} &= \frac{2S}{\pi} \frac{a_0}{l^2 + a_0} \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\
 \sigma''_{21} &= \frac{2S}{\pi} \frac{a_0}{l^2 + a_0} \frac{2x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1)
 \end{aligned}
 \tag{7.9}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mu''_{13} &= -\frac{2a_0 S}{\pi} \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\
 \mu''_{23} &= -\frac{2a_0 S}{\pi} \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1).
 \end{aligned}
 \tag{7.10}$$

Sumując odpowiednio wzory (7.5) z (7.7) i wzory (7.6) z (7.10) można zauważyć, że szukany charakter osobliwości naprężeń w punkcie przyłożenia siły S jest rzędu $O(r^{-1})$ dla naprężeń siłowych, naprężenia zaś momentowe $\mu_{\alpha 3}, \mu_{3\alpha}$, ($\alpha = 1, 2$) posiadają wartość skończoną

$$(7.11) \quad \mu_{\alpha 3} = O(1) \quad (\alpha = 1, 2).$$

Dla przejścia granicznego ($\alpha \rightarrow 0$) ważny jest wzór (5.14). Naprężenia we wzorach (7.9) i (7.11) dążą do zera. Pozostaje tylko rozwiązanie klasyczne dane wzorami (7.5).

Dla przykładu, gdy $\alpha \rightarrow \infty$ ze wzorów (7.5) i (7.9) oraz (7.11) po uwzględnieniu przejścia granicznego (5.15) otrzymujemy wynik z niesymetrycznej teorii sprężystości dla ośrodka ze związanymi obrotami

$$(7.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{2S}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{x_1^2 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + O(1), \\ \sigma_{22} &= \frac{2S}{\pi} \frac{1}{3-2\nu} \frac{x_2 [2(1-\nu)x_1^2 + x_2^2]}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + O(1), \\ \sigma_{12} &= \frac{2S}{\pi} \frac{1}{3-2\nu} \frac{x_1 [2(1-\nu)x_1^2 + x_2^2]}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + O(1), \\ \sigma_{21} &= -\frac{2S}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{x_1 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + O(1) \end{aligned}$$

oraz

$$(7.13) \quad \mu_{\alpha 3} = O(1) \quad (\alpha = 1, 2).$$

8. Półprzestrzeń pod działaniem rozłożonych obciążeń momentowych $m(x_2)$

W punkcie tym podamy rozwiązanie dla przypadku półprzestrzeni obciążonej rozłożonym obciążeniem momentowym

$$(8.1) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = -m(x_2).$$

Zagadnienie klasyczne odpowiadające powyższemu zagadnieniu prowadzi do jednorodnego układu równań równowagi (3.5)_{1,2} z jednorodnymi warunkami na brzegu [$\sigma'_{11}(0, x_2) = 0, \sigma'_{12}(0, x_2) = 0$], z czego wnioskujemy, że możemy przyjąć

$$(8.2) \quad \begin{aligned} u'_\alpha &\equiv 0, & \varphi'_3 &\equiv 0 & (\alpha = 1, 2). \\ \sigma'_{\alpha\beta} &\equiv 0, & \sigma'_{33} &\equiv 0, & \mu'_{\alpha 3} &\equiv 0, & \mu'_{3\alpha} &\equiv 0 & (\alpha, \beta = 1, 2). \end{aligned}$$

Ostateczny rezultat (w postaci transformat) dla tego przypadku uzyskamy więc (wobec (8.2)) ze wzorów (4.10) i (4.11) dla przemieszczeń i obrotu oraz ze wzorów (4.12) i (4.13) dla naprężeń siłowych i naprężeń momentowych, przy czym należy w tych wzorach podstawić

$$(8.3) \quad \tilde{p}(\xi) = \frac{i}{2a_0 \xi} \tilde{m}(\xi).$$

Dla dalszych rozważań rezultat ten przepiszemy w postaci całkowej, uwzględniając rozłożenie obciążenia na część symetryczną i antysymetryczną względem osi Ox_1 ,

$$(8.4) \quad \tilde{m}(\xi) = \tilde{m}_s(\xi) + i\tilde{m}_a(\xi),$$

gdzie

$$(8.4') \quad \begin{aligned} \tilde{m}_s &\equiv \tilde{m}_s(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} m_s(x_2) \cos(\xi x_2) dx_2, \\ \tilde{m}_a &\equiv \tilde{m}_a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} m_a(x_2) \sin(\xi x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Przemieszczenia i obrót:

$$(8.5) \quad \begin{aligned} u_1 = u_1'' &= \frac{1}{2a_0\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi\Delta_0} \left\{ (1-\Delta_0) \left(\frac{2\mu+\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} (e^{-\varrho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right\} b(\xi, x_2) d\xi, \\ u_2 = u_2'' &= -\frac{1}{2a_0\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi\Delta_0} \left\{ (1-\Delta_0) \left(-\frac{\mu}{\lambda+\mu} \frac{1}{\xi} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x_1 \right) e^{-\xi x_1} + \frac{2a_0 \xi^2}{\varrho} \left(\frac{\varrho}{\xi} e^{-\varrho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right\} a(\xi, x_2) d\xi, \\ \varphi_3 = \varphi_3'' &= -\frac{2}{\gamma+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\varrho x_1} \right] a(\xi, x_2) d\xi. \end{aligned}$$

Naprężenia siłowe:

$$(8.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} = \sigma_{11}'' &= \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\varrho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] b(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma_{22} = \sigma_{22}'' &= \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi\Delta_0} \left[(1-\Delta_0)(-1+\xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\varrho x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\xi x_1} \right) \right] b(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma_{12} = \sigma_{12}'' &= \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} (e^{-\varrho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] a(\xi, x_2) d\xi, \\ \sigma_{21} = \sigma_{21}'' &= \frac{1}{a_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\xi\Delta_0} \left[(1-\Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\varrho} \left(\frac{\varrho^2}{\xi^2} e^{-\varrho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] a(\xi, x_2) d\xi. \end{aligned}$$

Naprężenia momentowe:

$$(8.7) \quad \begin{aligned} \mu_{13} = \mu'_{13} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} [(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\varrho x_1}] a(\xi, x_2) d\xi, \\ \mu_{23} = \mu'_{23} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\varrho} e^{-\varrho x_1} \right] b(\xi, x_2) d\xi. \end{aligned}$$

We wzorach (8.5) ÷ (8.7) oznaczyliśmy

$$(8.7') \quad \begin{aligned} a(\xi, x_2) &= \tilde{m}_s \cos(\xi x_2) + \tilde{m}_a \sin(\xi x_2), \\ b(\xi, x_2) &= \tilde{m}_s \sin(\xi x_2) - \tilde{m}_a \cos(\xi x_2). \end{aligned}$$

W tym przypadku przejście graniczne $\alpha \rightarrow 0$ prowadzi do takiego ośrodka Cosseratów, który przy danych warunkach brzegowych o postaci (8.1) ma zdolność przenoszenia tylko naprężeń momentowych, natomiast stan deformacji opisują funkcje

$$\varphi_3, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \varkappa_{\alpha 3} \quad (\alpha = 1, 2),$$

zachodzą bowiem na podstawie wzorów (2.2'), (4.10) ÷ (4.13) i (8.3) zależności (przy $\alpha \rightarrow 0$, $\varrho \rightarrow |\xi|$, $\Delta_0 \rightarrow 1$)

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \gamma_{11} &= 0, \quad \gamma_{22} = 0, \quad \gamma_{12} = -\varphi_3, \\ \gamma_{21} &= \varphi_3, \quad \varkappa_{\alpha 3} = \partial_{\alpha} \varphi_3 \quad (\alpha = 1, 2); \\ \mu_{\alpha} &= 0 \quad (\alpha = 1, 2), \end{aligned}$$

$$(8.9) \quad \varphi_3 = \frac{1}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\xi|} \tilde{m}(\xi) e^{-(|\xi|x_1 + i\xi x_2)} d\xi$$

oraz

$$(8.10) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= 0, \quad \sigma_{33} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \\ \mu_{13} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{m}(\xi) e^{-(|\xi|x_1 + i\xi x_2)} d\xi \\ \mu_{23} &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \tilde{m}(\xi) e^{-(|\xi|x_1 + i\xi x_2)} d\xi. \end{aligned}$$

9. Osobliwość naprężeń spowodowana skupionym obciążeniem momentowym

Rozpatrzmy szczególnie przypadek warunków brzegowych (8.1). Niech półprzestrzeń będzie obciążona (w początku układu współrzędnych) skupionym momentem M_{μ} . Indeks μ ma tu wskazywać, że obciążenie M_{μ} nie pochodzi od pary sił skupionych (jak w teorii klasycznej) lecz ma charakter naprężenia momentowego μ_{13}

$$(9.1) \quad m(x_2) = M_{\mu} \delta(x_2).$$

Ze związków (8.4') i (8.7') otrzymujemy odpowiednio

$$(9.2) \quad \tilde{m}_s = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} M_\mu \delta(x_2) \cos(\xi x_2) dx_2 = \frac{M_\mu}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\tilde{m}_a = 0$$

oraz

$$(9.2') \quad a(\xi, x_2) = \tilde{m}_s \cos(\xi x_2) = \frac{M_\mu}{\sqrt{2\pi}} \cos(\xi x_2),$$

$$b(\xi, x_2) = \tilde{m}_s \sin(\xi x_2) = \frac{M_\mu}{\sqrt{2\pi}} \sin(\xi x_2).$$

Podstawiając związki (9.2') do wzorów (8.6) i (8.7) otrzymujemy rozwiązanie zagadnienia w naprężeniach w postaci całek

$$(9.3) \quad \sigma_{11} = \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0)(1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\nu x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi,$$

$$\sigma_{22} = \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0)(-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\nu x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi,$$

$$\sigma_{12} = \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\nu x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \cos(\xi x_2) d\xi,$$

$$\sigma_{21} = \frac{M_\mu}{2\pi a_0} \int_0^\infty \frac{1}{\xi \Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\nu x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \cos(\xi x_2) d\xi$$

oraz

$$(9.4) \quad \mu_{13} = \frac{M_\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} [(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\nu x_1}] \cos(\xi x_2) d\xi,$$

$$\mu_{23} = \frac{M_\mu}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\nu x_1} \right] \sin(\xi x_2) d\xi.$$

Przenosząc na całki we wzorach (9.3) i (9.4) dyskusję z punktu 5 pracy i wykorzystując wzory (5.12'), (5.12''), otrzymujemy związki asymptotyczne dla naprężeń

$$(9.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= 0(1), & \sigma_{22} &= 0(1), & \sigma_{12} &= 0(1), \\ \sigma_{21} &= -\frac{M_\mu}{\pi} \frac{1}{a_0 + l^2} \log r + 0(1) \end{aligned}$$

oraz

$$(9.6) \quad \begin{aligned} \mu_{13} &= -\frac{M_\mu}{\pi} \frac{x_1}{r^2} + 0(1), \\ \mu_{23} &= -\frac{M_\mu}{\pi} \frac{x_2}{r^2} + 0(1). \end{aligned}$$

Ze wzorów (9.5) i (9.6) widać, że osobliwość rzędu $O(r^{-1})$ wykazują naprężenia $\mu_{\alpha 3}$, $\mu_{3\alpha}$, ($\alpha = 1, 2$). Natomiast spośród naprężeń siłowych tylko składowa σ_{21} wykazuje osobliwość rzędu $O(\log r)$. Pozostałe składowe ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{33}$) mają wartość skończoną w punkcie przyłożenia momentu M_μ .

Dla przypadków szczególnych ($\alpha \rightarrow 0$) i ($\alpha \rightarrow \infty$) zachodzi

$$(9.7) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{a_0 + l^2} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0 + l^2} = \frac{1}{3 - 2\nu} \frac{1}{(l^*)^2},$$

gdzie przez l^* oznaczamy stałą sprężystości l z niesymetrycznej teorii sprężystości dla ośrodka ze związanymi obrotami. We wzorach (9.6) współczynnik intensywności osobliwości nie zależy od żadnej stałej materiałowej.

Wzory te pozostają słuszne dla wszystkich trzech przypadków (tzn. dla $\alpha = 0$, $\alpha = \infty$ i dla $0 < \alpha < \infty$). Natomiast naprężenia siłowe dla ($\alpha \rightarrow 0$) dążą do zera, co było omówione już poprzednio. Dla ośrodka ze związanymi obrotami ($\alpha \rightarrow \infty$) wzory (9.5) przekształcają się na wzory

$$(9.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= 0(1), & \sigma_{22} &= 0(1), & \sigma_{12} &= 0(1), \\ \sigma_{21} &= -\frac{M_\mu}{\pi} \frac{1}{3 - 2\nu} \frac{1}{(l^*)^2} \log r + 0(1). \end{aligned}$$

Zwraca tu uwagę fakt (w odróżnieniu od p. 5, 7, 11) pojawienia się we współczynniku intensywności wymiarowego parametru l^* .

10. Przypadek obciążenia półprzestrzeni momentem skupionym M

Dla uzyskania rozwiązania w przypadku, gdy na brzegu półprzestrzeni w początku układu współrzędnych działa moment skupiony M założmy, że w punkcie o współrzędnych $(0, \xi_2)$, ($\xi_2 > 0$) działa, zgodnie z dodatnim kierunkiem osi Ox_1 , siła skupiona $P\delta(x_2 - \xi_2)$ i niech taka sama siła, ale przeciwnie skierowana, działa w punkcie o współrzędnych

$(0, \xi_2 + \Delta\xi_2): -P\delta[x_2 - (\xi_2 + \Delta\xi_2)]$, $(\Delta\xi_2 > 0)$. Rozkład naprężeń w półprzestrzeni pochodzący od działania takiej pary sił uzyskujemy drogą superpozycji:

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{\beta} &= -P[\sigma_{\alpha\beta}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2 + \Delta\xi_2) - \sigma_{\beta}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2)], \\ \mu_3 &= -P[\mu_{\alpha 3}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2 + \Delta\xi_2) - \mu_{\alpha 3}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2)], \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \end{aligned}$$

gdzie wielkości $P\sigma_{\alpha\beta}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2)$ oraz $P\mu_{\alpha 3}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2)$ uzyskujemy z rozwiązania dotyczącego normalnej siły skupionej (punkt 5 pracy) dodając odpowiednio wzory (5.3) i (5.5) oraz wzory (5.4) i (5.6). Należy jednak we wzorach tych zmienną x_2 zastąpić teraz przez $(x_2 - \xi_2)$.

Mnożąc i dzieląc prawe strony wzorów (10.1) przez $\Delta\xi_2$ i przyjmując, że dla $\Delta\xi_2 \rightarrow 0$ zachodzi

$$(10.2) \quad \lim_{\Delta\xi_2 \rightarrow 0} P\Delta\xi_2 = M,$$

(gdzie M oznacza moment skupiony działający w punkcie $(0, \xi_2)$), otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= -M \frac{\partial}{\partial \xi_2} \sigma_{\beta}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2)|_{\xi_2=0}, \\ \mu_{\alpha 3} &= -M \frac{\partial}{\partial \xi_2} \mu_{\alpha 3}^*(x_1, x_2; 0, \xi_2)|_{\xi_2=0}, \quad (\alpha = 1, 2), \quad (\beta = 1, 2) \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu całki z funkcji zależnej od parametru, ze wzorów (5.3) ÷ (5.6) i związków (10.3) otrzymujemy kolejno:

rozwiązanie «primowane»

$$(10.4) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(1 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{Mx_1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= -\frac{2a_0 M}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \mu'_{23} &= -\frac{2a_0 M}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi. \end{aligned}$$

rozwiązanie z dwiema kreskami

$$\begin{aligned}
 \sigma''_{11} &= \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0)(1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma''_{22} &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0)(-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma''_{12} &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma''_{21} &= -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \cos(\xi x_2) d\xi
 \end{aligned}
 \tag{10.6}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mu''_{13} &= -\frac{2a_0 M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2}{\Delta_0} [(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 \mu''_{23} &= -\frac{2a_0 M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\xi^2}{\Delta_0} \left[(1 - \Delta_0) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] \sin(\xi x_2) d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{10.7}$$

Dodając odpowiednio wzory (10.4) i (10.6) oraz (10.5) i (10.7) otrzymujemy rozkład naprężeń w półprzestrzeni. Dla przypadku, gdy $\alpha \rightarrow 0$ otrzymujemy rozwiązanie klasyczne dane wzorami (10.4), zachodzi bowiem $\mu'_{\alpha 3} + \mu''_{\alpha 3} \rightarrow 0$ oraz $\sigma'_{\alpha\beta} \rightarrow 0$, ($\alpha, \beta = 1, 2$).

11. Osobliwość naprężeń spowodowana momentem skupionym M

Rozwiązanie klasyczne (10.4) zapisujemy w postaci zamkniętej (por. [11])

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= \frac{8M}{\pi} \frac{x_1^3 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^3}, \\
 \sigma'_{21} &= -\frac{4M}{\pi} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}, \\
 \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{2M}{\pi} \frac{x_1^2 (x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}.
 \end{aligned}
 \tag{11.1}$$

Podobnie (wykorzystując całki (5.12'), (5.12'')) zapisujemy wzory (10.5)

$$\begin{aligned}
 \mu'_{13} &= -\frac{4a_0 M}{\pi} \frac{x_1 (x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}, \\
 \mu'_{23} &= -\frac{4a_0 M}{\pi} \frac{x_2 (3x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3}.
 \end{aligned}
 \tag{11.2}$$

Dyskusja wzorów (10.6) i (10.7) (analogiczna do przeprowadzonej w punkcie 5 pracy dla rozwiązania z dwiema kreskami) prowadzi do rezultatu

$$\begin{aligned}
 \sigma''_{11} &= -\frac{4M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1 x_2 (3x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + 0(1), \\
 \sigma''_{22} &= \frac{8M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + 0(1), \\
 \sigma''_{12} &= \frac{4M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1^2 (x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + 0(1), \\
 \sigma''_{21} &= \frac{2M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{(x_1^2 - x_2^2)^2 - 4x_1^2 x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + 0(1)
 \end{aligned}
 \tag{11.3}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mu''_{13} &= \frac{4a_0 M}{\pi} \frac{x_1 (x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} - \frac{M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\
 \mu''_{23} &= \frac{4a_0 M}{\pi} \frac{x_2 (3x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} - \frac{M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_2 (3x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1).
 \end{aligned}
 \tag{11.4}$$

Sumując odpowiednio wzory (11.1) i (11.3) oraz (11.2) i (11.4) uzyskujemy poszukiwany charakter osobliwości naprężeń w tym zagadnieniu. Dla $r \rightarrow 0$ (tzn. w punkcie przyłożenia momentu M) naprężenia siłowe rosną nieograniczenie jak $1/r^2$, naprężenia zaś momentowe są rzędu $0(r^{-1})$

$$\begin{aligned}
 \mu_{13} &= -\frac{M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1), \\
 \mu_{23} &= -\frac{M}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_2 (3x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + 0(1).
 \end{aligned}
 \tag{11.5}$$

Dla przypadku granicznego ($\alpha \rightarrow 0$), wobec (5.14), naprężenia $\sigma''_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) ze wzoru (11.3) oraz $\mu_{\alpha 3}$ ze wzoru (11.5) dążą do zera. Otrzymujemy rozwiązanie klasyczne (wzory (11.1)). Dla przypadku, gdy $\alpha \rightarrow \infty$ (uwzględniając (11.1), (11.3), (11.5) oraz (5.15)), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{4M}{\pi} \frac{1}{3-2\nu} \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^3} [2\nu(x_1^2 - x_2^2) + 2x_2^2] + 0(1), \\
 \sigma_{22} &= \frac{4M}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + 0(1), \\
 \sigma_{12} &= \frac{2M}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \frac{x_1^2 (x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + 0(1), \\
 \sigma_{21} &= -\frac{2M}{\pi} \frac{1}{3-2\nu} \frac{[x_1^4 + 3(3-4\nu)x_1^2 x_2^2 + 2(1-\nu)x_2^4]}{(x_1^2 + x_2^2)^3} + 0(1)
 \end{aligned}
 \tag{11.6}$$

oraz

$$(11.7) \quad \begin{aligned} \mu_{13} &= -\frac{2M}{\pi} \frac{1-\nu}{3-2\nu} \frac{x_1(x_1^2-x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2} + 0(1), \\ \mu_{23} &= -\frac{2M}{\pi} \frac{1-\nu}{3-2\nu} \frac{x_2(3x_1^2+x_2^2)}{(x_1^2+x_2^2)^2} + 0(1). \end{aligned}$$

Wzory (11.6) i (11.7) odnoszą się do ośrodka ze związanymi obrotami.

12. Uwagi końcowe

Analizując (na przykładzie półprzestrzeni) naprężenia dla ciała mikropolarnego $\sigma_{\alpha\beta}$, σ_{33} ($\alpha, \beta = 1, 2$) widzimy, że rząd ich osobliwości w punkcie przyłożenia obciążeń skupionych (pkt. 5, 7, 11) jest taki sam jak w teorii klasycznej i wynosi $0(r^{-1})$. Również zachowany jest rząd osobliwości naprężeń (zarówno dla naprężeń siłowych jak i momentowych) w odniesieniu do modelu ciała ze związanymi obrotami (pkt. 5, 7, 9, 11).

Istotna różnica między przedstawionymi tu osobliwymi rozwiązaniami tkwi we współczynniku intensywności osobliwości. Dla ciała mikropolarnego współczynnik ten jest funkcją parametrów materiałowych i pozwala na ciągłe przejście z wynikami z p. 4, 5, 6, 7, 10, 11 do teorii klasycznej ($\alpha = 0$) i do teorii opisującej ciało ze związanymi obrotami ($\alpha = \infty$) (p. 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11).

W tej ostatniej teorii, jak wiadomo (por. [4]), współczynnik intensywności osobliwości zależy od wymiarowej stałej materiałowej l^* (wyłączmy tu z rozważań pkt. 9) i w granicznym przypadku nie uzyskujemy osobliwości klasycznej. Dlaczego osobliwość teorii ciała ze związanymi obrotami nie przechodzi na osobliwość ciała mikropolarnego zostało wyjaśnione w cytowanej pracy [4] na str. 41.

Kolejne spostrzeżenie wynika z porównań wyników z pkt. 8, 9 i pkt. 10, 11. Zarówno rozwiązanie ogólne tam uzyskane jak i rozwiązanie osobliwe pochodzące od obciążeń momentami M_μ i M są zasadniczo od siebie różne. Wynika to stąd, że dla ciała mikropolarnego obciążenie M_μ ma charakter obciążenia podstawowego tak samo jak obciążenia siłami: P , S lub M .

Problem ten dla zagadnień statycznych niesymetrycznej sprężystości zbadano w pracy [12], a dla zagadnień dynamicznych w pracy [13].

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. ROKURO MUKI and ELI STERNBERG, *The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids*, Z. angew. Math. Phys., **16**, 611 (1965).
3. D. B. BOGY and ELI STERNBERG, *The effect of couple-stresses on singularities due to discontinuous loadings*, Int. J. Solids Structures, **3**, 757 (1967).
4. M. SOKOŁOWSKI, *O teorii naprężeń momentowych*, PWN, Warszawa 1972.
5. Г. Н. САВИН, *Распределение напряжений около отверстий*, Наукова Думка, Киев 1968.
6. H. SCHAEFER, *Das Cosserat Kontinuum*, Z.A.M.M. **8**, 47 (1967), 485.
7. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

8. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, Mc Graw-Hill Book Company, INC. New York-Toronto-London 1951.
9. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., 5, 23 (1971), 587—611.
10. И. С. ГРАДШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
11. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, Tom III, PWN, Warszawa 1966.
12. P. P. TEODORESCU, *Sur la notion de moment massique dans le cas des corps du type de Cosserat*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Tech., 1, 15 (1967), 57.
13. W. NOWACKI, W. K. NOWACKI, *The generation of waves in an infinite micropolar elastic solid*, Proc. Vibr. Probl., 2, 10 (1969), 170.
14. ELI STERNBERG and ROKURO MUKI, *The effect of couple-stresses on the stress concentration around a crack*, Int. J. Solids Struct., 3, 69 (1967).
15. R. D. MINDLIN and H. F. TIERSTEN, *Effects of couple-stresses in linear elasticity*, Archs. Ration. Mech. Analysis, 11, 415 (1962).
16. R. D. MINDLIN, *Influence of couple stresses on stress concentrations*, Exp. Mech., 3, 1 (1963).
17. M. SOKOŁOWSKI, *O pewnym modelu ciała przenoszącego naprężenia momentowe*, Mech. Teor. i Stos., 3, 9 (1971), 391.

Резюме

СИНГУЛЯРНОСТИ СИЛОВЫХ И МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК (I)

Для линейной микрополярной среды рассматривается задача об упругом полупространстве в плоском деформированном состоянии, подверженном воздействию статических силовых и моментных нагрузок, приложенных к краю тела. На основе уравнений в перемещениях в предположении пренебрежимости массовыми членами определяются деформированное и напряженное состояния в полупространстве. Решение состоит из двух частей: из классического решения и решения типичной краевой задачи несимметричной теории упругости. В частности, рассматриваются сосредоточенные нагрузки, действующие на полупространство в начале системы координат. Основное внимание обращено на анализ характера особенностей силовых и моментных напряжений, возникающих в точке приложения этих нагрузок. Рассмотрены также предельные случаи: переходы к классической теории упругости ($\alpha \rightarrow 0$) и к теории со связанными вращениями ($\alpha \rightarrow \infty$).

Summary

FORCE-STRESS AND COUPLE-STRESS SINGULARITIES PRODUCED BY CONCENTRATED LOADS IN A MICROPOLAR MEDIUM

The problem of elastic half-space in the plane strain state due to static force and couple-forces loadings for linear micropolar medium is considered. Starting from the equations of displacements (without body force terms) we define the strain and stress distributions in the half-space. The solution consists of two parts: the classical solution and a typical solution of the boundary problem of non-symmetric elasticity.

In particular, loadings concentrated in the origin and acting on the half-space are considered and the character of stress and couple-stress singularities is examined. In all the cases the limiting results $\alpha \rightarrow 0$ (classical theory of elasticity) and $\alpha \rightarrow \infty$ (couple-stress theory of elasticity) are evaluated.

INSTYTUT MECHANIKI UNIWERSYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1973 r.

OSOBLIWOŚĆ NAPRĘŻEŃ W LINIOWYM OŚRODKU MIKROPOLARNYM SPOWODOWANA
NIECIĄGLYMI OBCIĄŻENIAMI (II)

JANUSZ DYSZLEWICZ, STANISŁAW MATYSIAK (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W pracy rozpatrzmy osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych w półprzestrzeni mikropolarnej Ω

$$(1.1) \quad \Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, -\infty < x_2 < \infty\},$$

spowodowaną nieciągłymi obciążeniami statycznymi $p_i(x_2)$, ($i = 1, 2, 3$) rozłożonymi na jej brzegu. Rozważania dotyczą płaskiego stanu odkształcenia (w ramach liniowej teorii niesymetrycznej sprężystości) reprezentowanego przez wektor przemieszczenia u i wektor obrotu φ postaci [1].

$$(1.2) \quad u(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \varphi(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3).$$

O funkcjach obciążeń $p_i(x_2)$ zakładamy, że są nieparzyste, przedziałami ciągłe i bezwzględnie całkowne w przedziale $(-\infty, \infty)$:

$$(1.3) \quad p_i(-x_2) = -p_i(x_2),$$

$$(1.4) \quad \lim_{x_2 \rightarrow 0} p_i(x_2) = p_i^0 \neq 0,$$

$$(1.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |p_i(x_2)| dx_2 < \infty, \quad (i = 1, 2, 3).$$

W pracy korzystając będziemy z naszych poprzednich wyników [10], gdzie badając wpływ naprężeń momentowych na osobliwości naprężeń pochodzące od skupionych obciążeń podaliśmy, w oparciu o [1] i [2], podstawowe równania i ogólne rozwiązanie dla stanu naprężenia w półprzestrzeni. W ramach teorii naprężeń momentowych zagadnienie rozwiązań osobliwych posiada bogatą literaturę (patrz [1], [3]). Obecna praca, jak również praca [10], zrodziły się niejako na podstawie prac [4] i [5].

2. Ogólne rozwiązanie dla składowych stanu naprężenia

Na podstawie [10] dwuwymiarowy stan naprężenia w półprzestrzeni wyznaczamy ze wzorów

$$(2.1) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma'_{\alpha\beta} + \sigma''_{\alpha\beta}, \quad \sigma_{33} = \sigma'_{33} + \sigma''_{33},$$

$$(2.2) \quad \mu_{\alpha 3} = \mu'_{\alpha 3} + \mu''_{\alpha 3}, \quad \mu_{3\alpha} = \mu'_{3\alpha} + \mu''_{3\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Dla wyznaczenia σ_{33} , σ'_{33} , σ''_{33} oraz $\mu_{3\alpha}$, $\mu'_{3\alpha}$, $\mu''_{3\alpha}$ pozostają słuszne wzory

$$(2.3) \quad \sigma_{33} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \mu_{3\alpha} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \mu_{\alpha 3}, \quad (\alpha = 1, 2).$$

Wielkości $\sigma'_{\alpha\beta}$, σ'_{33} są składowymi tensora naprężeń dla odpowiedniego rozwiązania klasycznego. «Primowane» naprężenia momentowe $\mu'_{\alpha 3}$ wyliczamy ze wzorów

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{2\mu} (\sigma'_{12,1} - \sigma'_{11,2} + \sigma'_{33,2}), \\ \mu'_{23} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{2\mu} (\sigma'_{22,1} - \sigma'_{33,1} - \sigma'_{12,2}). \end{aligned}$$

Dla rozwiązania uzupełniającego obejmującego składowe naprężeń siłowych $\sigma''_{\alpha\beta}$, σ''_{33} i naprężeń momentowych $\mu''_{\alpha 3}$, $\mu''_{3\alpha}$ pozostają słuszne wzory w postaci całek Fouriera

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi))(1 + |\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{|\xi|}{\rho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\ \sigma'_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi))(-1 + |\xi|x_1) e^{-|\xi|x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{|\xi|}{\rho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\ \sigma'_{12} &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) |\xi|x_1 e^{-|\xi|x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{|\xi|}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-|\xi|x_1}) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\ \sigma'_{21} &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi}{|\xi|} \frac{\tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) |\xi|x_1 e^{-|\xi|x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{|\xi|}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-|\xi|x_1}) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi \end{aligned}$$

oraz

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= -\frac{2ia_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi \tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)} [(1 - \Delta_0(\xi)) e^{-|\xi|x_1} - e^{-\rho x_1}] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\ \mu'_{23} &= \frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\xi| \tilde{p}^*(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) e^{-|\xi|x_1} - \frac{|\xi|}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] e^{-i\xi x_2} d\xi, \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$(2.7) \quad \varrho = \left(\xi^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}, \quad \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{|\xi|}{\varrho} \right),$$

$$(2.8) \quad l^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\alpha\mu}, \quad a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}.$$

Symbole α , μ , λ , γ , ε oznaczają stałe materiałowe. Wielkość $\tilde{p}^*(\xi)$ oznacza wykładniczą transformację Fouriera [7] wykonaną na funkcji $p^*(x_2)$,

$$(2.9) \quad \tilde{p}^*(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(x_2) e^{i\xi x_2} d\xi.$$

3. Półprzestrzeń pod działaniem rozłożonych obciążeń normalnych (1), stycznych (2) i momentowych (3)

Przypadek 1. Obciążenie normalne ($i = 1$).

Warunki brzegowe zapisujemy tu w postaci

$$(3.1) \quad \sigma_{11}(O, x_2) = -p_1(x_2), \quad \sigma_{12}(O, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(O, x_2) = 0.$$

Ponadto od rozwiązania określającego $\sigma_{\alpha\beta}$, σ_{33} , $\mu_{\alpha 3}$, $\mu_{3\alpha}$ wymaga się, aby dla $(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ odpowiednie składowe dążyły do zera. Warunek w nieskończoności uwzględniony jest w rozwiązaniu ogólnym (2.1)÷(2.9), wobec czego przy formułowaniu warunków brzegowych będziemy go pomijać.

Rozwiązanie klasyczne $\sigma'_{\alpha\beta}$ spełnia dwa pierwsze warunki (3.1). Z uwagi na nieparzystość funkcji $p_1(x_2)$ ma ono postać [por. [6], 287]

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} (1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} \tilde{p}_1(\xi) \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{22} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi) (1 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= \frac{2x_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi) \xi e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi. \end{aligned}$$

«Primowane» naprężenia momentowe wyznaczamy z (2.4) przy użyciu (2.3) i (3.2)

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi) \xi e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \mu'_{23} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_1(\xi) \xi e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi. \end{aligned}$$

Rozwiązanie określające $\sigma''_{\alpha\beta}$ i $\mu''_{\alpha 3}$ uzyskujemy ze wzorów (2.5), (2.6) podstawiając

$$(3.4) \quad \tilde{p}^*(\xi) = \tilde{p}_1(\xi)$$

i uwzględniając (1.3). W ten sposób otrzymamy

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi))(1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma'_{22} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi))(-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\
 (3.5) \qquad \qquad \qquad &\left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma'_{12} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma'_{21} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \cos(\xi x_2) d\xi
 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mu'_{13} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} [(1 - \Delta_0(\xi)) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}] \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 (3.6) \qquad \qquad \qquad \mu'_{23} &= \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \tilde{p}_1(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] \sin(\xi x_2) d\xi.
 \end{aligned}$$

P r z y p a d e k 2. Obciążenia styczne ($i = 2$).

Warunki brzegowe mają tu postać

$$(3.7) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = -p_2(x_2), \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0.$$

Rozwiązanie klasyczne [[6] s. 290] ma postać

$$\begin{aligned}
 \sigma'_{11} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \xi \tilde{p}_2(\xi) x_1 e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 (3.8) \qquad \qquad \qquad \sigma'_{22} &= \frac{2}{1 \ 2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{p}_2(\xi) (2 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi, \\
 \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{p}_2(\xi) (1 - \xi x_1) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi.
 \end{aligned}$$

«Primowane» naprężenia momentowe

$$\mu'_{13} = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \xi \tilde{p}_2(\xi) e^{-\xi x_1} \sin(\xi x_2) d\xi,$$

(3.9)

$$\mu'_{23} = -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \xi \tilde{p}_2(\xi) e^{-\xi x_1} \cos(\xi x_2) d\xi.$$

Podstawiając do wzorów (2.5) i (2.6)

$$\tilde{p}^*(\xi) = \frac{i|\xi|}{\xi} \tilde{p}_2(\xi)$$

uzyskujemy dla $\sigma''_{\alpha\beta}$ i $\mu''_{\alpha 3}$

$$\sigma''_{11} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi))(1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi,$$

$$\sigma''_{22} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi))(-1 + \xi x_1) e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi,$$

(3.11)

$$\sigma''_{12} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \sin(\xi x_2) d\xi,$$

$$\sigma''_{21} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) \xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} \left(\frac{\rho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi$$

oraz

$$\mu''_{13} = \frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1} \right] \sin(\xi x_2) d\xi,$$

(3.12)

$$\mu''_{23} = -\frac{4a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\xi \tilde{p}_2(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1 - \Delta_0(\xi)) e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] \cos(\xi x_2) d\xi.$$

Przypadek 3. Obciążenia momentowe ($i = 3$).

Warunki brzegowe są przyjęte w postaci

$$(3.13) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = -p_3(x_2).$$

Rozwiązanie «primowane», jak łatwo się przekonać, znika,

$$(3.14) \quad \sigma'_{\alpha\beta} \equiv 0, \quad \mu'_{\alpha 3} \equiv 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Ostateczna postać rozwiązania wynika ze wzorów (2.5), (2.6) po uwzględnieniu warunku (1.3) i podstawieniu

$$(3.15) \quad \tilde{p}^*(\xi) = \frac{i}{2a_0\xi} \tilde{p}_3(\xi).$$

Dla naprężeń siłowych otrzymamy

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi\Delta_0(\xi)} \left[(1-\Delta_0(\xi))(1+\xi x_1)e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0\xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{22} &= -\frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi\Delta_0(\xi)} \left[(1-\Delta_0(\xi))(-1+\xi x_1)e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0\xi^2 \left(e^{-\rho x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\xi x_1} \right) \right] \cos(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{12} &= \frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi\Delta_0(\xi)} \left[(1-\Delta_0(\xi))\xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0\xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1}) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \sigma_{21} &= \frac{1}{a_0\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\xi\Delta_0(\xi)} \left[(1-\Delta_0(\xi))\xi x_1 e^{-\xi x_1} + \right. \\ &\quad \left. + 2a_0\xi^2 \frac{\xi}{\rho} \left(\frac{\rho^2}{\xi^2} e^{-\rho x_1} - e^{-\xi x_1} \right) \right] \sin(\xi x_2) d\xi, \end{aligned}$$

dla naprężeń momentowych zaś mamy:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \mu_{13} &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\Delta_0(\xi)} [(1-\Delta_0(\xi))e^{-\xi x_1} - e^{-\rho x_1}] \sin(\xi x_2) d\xi, \\ \mu_{23} &= -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\tilde{p}_3(\xi)}{\Delta_0(\xi)} \left[(1-\Delta_0(\xi))e^{-\xi x_1} - \frac{\xi}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] \cos(\xi x_2) d\xi. \end{aligned}$$

4. Osobliwość naprężeń spowodowana obciążeniami $p_i(x_2)$ ($i = 1, 2, 3$)

Badanie osobliwości naprężeń dla obciążeń nieciągłych $p_i(x_2)$ ($i = 1, 2, 3$) sprowadza się do badania funkcji podcałkowych we wzorach (3.5), (3.6), (3.11), (3.12), (3.16), (3.17) w punkcie $(0, 0; \xi)$ przy $\xi \rightarrow \infty$, o ile nieciągłość $p_i(x_2)$ zjawia się tylko w punkcie $x_2 = 0$. Całki we wzorach (3.2), (3.3), (3.8), (3.9), jak się przekonamy, dadzą się wyrazić w postaci zamkniętej. W celu wyznaczenia charakteru osobliwości naprężeń wykorzystamy następujące rozwinięcia asymptotyczne:

$$(4.1) \quad \varrho = \sqrt{\xi^2 + \frac{1}{l^2}} = \xi + \frac{1}{2\xi l^2} + 0(\xi^{-3}) \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty$$

oraz

$$(4.2) \quad \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\varrho}\right) = 1 + \frac{a_0}{l^2} + 0(\xi^{-2}),$$

$$e^{-\rho x_1} = e^{-\xi x_1} \left[1 - \frac{x_1}{2\xi l^2} + \frac{x_1^2}{8\xi^2 l^2} + 0(\xi^{-3})\right] \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Transformantę sinusową obciążenia $p_i(\xi)$ przedstawiamy w postaci wzoru [8]

$$(4.3) \quad \tilde{p}_i(\xi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{p_i^0}{\xi} + 0(\xi^{-3}), \quad \text{dla} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Symbol $0(\xi^{-n})$ oznacza wyrażenie, które przy $\xi \rightarrow \infty$ zachowuje się jak ξ^{-n} .

Wykorzystując rozwinięcia (4.1)÷(4.3) i biorąc pod uwagę tylko te części funkcji podcałkowych, które przy $x_1 = x_2 = 0$ i przy $\xi \rightarrow \infty$ są rzędu $0(\xi^{-1})$ lub większego [por. [3÷5], [7]], oraz korzystając z [9], otrzymamy

P r z y p a d e k 1.

Naprężenia siłowe

$$(4.4) \quad \sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{2p_1^0}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1 x_2}{r^2} \right) + \frac{4p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1 x_2}{r^2} + 0(1),$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = -\frac{2p_1^0}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2} \right) +$$

$$+ \frac{4p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \left(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2} \right) + 0(1),$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = \frac{2p_1^0}{\pi} \frac{x_1^2}{r^2} - \frac{4p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \frac{x_1^2}{r^2} + 0(1),$$

$$\sigma_{21}(x_1, x_2) = \frac{2p_1^0}{\pi} \frac{x_1^2}{r^2} - \frac{4p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \left(\frac{x_1^2}{2r^2} + \log r \right) + 0(1).$$

Naprężenie momentowe

$$(4.5) \quad \mu_{13}(x_1, x_2) = -\frac{2p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} x_1 \log r + 0(1),$$

$$\mu_{23}(x_1, x_2) = \frac{2p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} x_1 \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + 0(1).$$

Przypadek 2.

Napężenia siłowe

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}(x_1, x_2) &= \frac{2p_2^0}{\pi} \frac{x_1^2}{r^2} - \frac{4p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0+l^2} \frac{x_1^2}{r^2} + 0(1), \\
 \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -\frac{4p_2^0}{\pi} \left(\log r + \frac{x_1^2}{2r^2} \right) + \frac{4p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0+l^2} \left(\log r + \frac{x_1^2}{r^2} \right) + 0(1), \\
 (4.6) \quad \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_2^0}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2} \right) - \frac{4p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0+l^2} \frac{x_1 x_2}{r^2} + 0(1), \\
 \sigma_{21}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_2^0}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{r^2} \right) + \\
 &\quad + \frac{4p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0+l^2} \left(\tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1 x_2}{2r^2} \right) + 0(1).
 \end{aligned}$$

Napężenia momentowe

$$\begin{aligned}
 (4.7) \quad \mu_{13}(x_1, x_2) &= \frac{2p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0+l^2} \frac{x_1 x_2}{r^2} + 0(1), \\
 \mu_{23}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0+l^2} \frac{x_1^2}{r^2} + 0(1).
 \end{aligned}$$

Przypadek 3.

Napężenia siłowe

$$\begin{aligned}
 (4.8) \quad \sigma_{11}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0+l^2} x_1 \log r + 0(1), \\
 \sigma_{22}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0+l^2} x_1 \log r + 0(1), \\
 \sigma_{12}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0+l^2} x_1 \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + 0(1), \\
 \sigma_{21}(x_1, x_2) &= -\frac{p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0+l^2} x_1 \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + 0(1).
 \end{aligned}$$

Napężenia momentowe

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad \mu_{13}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} + 0(1), \\
 \mu_{23}(x_1, x_2) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \log r + 0(1).
 \end{aligned}$$

We wzorach (4.4) ÷ (4.9) symbol 0(1) oznacza część regularną rozwiązania.

Ponadto zachodzi

$$-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} < \frac{\pi}{2}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

W przypadku 1 ze wzorów (4.4) i (4.5) widać, że dla $r \rightarrow 0$ osobliwość rzędu $0(\log r)$ wykazuje składowa σ_{21} . Pozostałe naprężenia są rzędu $0(1)$.

W przypadku 2 osobliwość logarytmiczną wykazują składowe σ_{22} , σ_{33} (wzory (2.3) i (4.6)₂). Natomiast pozostałe składowe pozostają skończone.

W przypadku 3 (wzory (4.8) i (4.9)) składowe naprężeń siłowych oraz μ_{13} są rzędu $0(1)$, natomiast dla $r \rightarrow 0$ μ_{23} i μ_{32} wykazują osobliwość logarytmiczną (wzór (2.3)₂ i (4.9)₂).

Wprowadźmy biegunowy układ współrzędnych (r, θ) :

$$(4.10) \quad x_1 = r \sin \theta, \quad x_2 = r \cos \theta, \quad \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

i zapiszmy wzory (4.4) ÷ (4.9) w tym układzie.

P r z y p a d e k 1.

Naprężenia siłowe

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi}(\pi - 2\theta + \sin 2\theta) + \frac{2p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \sin 2\theta + 0(1), \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi}(\pi - 2\theta - \sin 2\theta) + \frac{2p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} (\pi - 2\theta - \sin 2\theta) + 0(1), \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= \frac{2p_1^0}{\pi} \sin^2 \theta - \frac{4p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \sin^2 \theta + 0(1), \\ \sigma_{21}(r, \theta) &= \frac{2p_1^0}{\pi} \sin^2 \theta - \frac{4p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \left(\log r + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) + 0(1). \end{aligned}$$

Naprężenia momentowe

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \mu_{13}(r, \theta) &= -\frac{2p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} r \sin \theta \log r + 0(1), \\ \mu_{23}(r, \theta) &= \frac{2p_1^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) r \sin \theta + 0(1). \end{aligned}$$

P r z y p a d e k 2.

Naprężenia siłowe

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= \frac{2p_2^0}{\pi} \sin^2 \theta - \frac{4p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \sin^2 \theta + 0(1), \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{4p_2^0}{\pi} \left(\log r + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) + \frac{4p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} (\log r + \sin^2 \theta) + 0(1), \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{p_2^0}{\pi} (\pi - 2\theta - \sin 2\theta) - \frac{2p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \sin 2\theta + 0(1), \\ \sigma_{21}(r, \theta) &= -\frac{p_2^0}{\pi} (\pi - 2\theta - \sin 2\theta) - \frac{2p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta - \pi + 2\theta \right) + 0(1). \end{aligned}$$

Naprężenia momentowe

$$(4.14) \quad \begin{aligned} \mu_{13}(r, \theta) &= \frac{p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \sin 2\theta + 0(1), \\ \mu_{23}(r, \theta) &= -\frac{2p_2^0}{\pi} \frac{a_0}{a_0 + l^2} \sin^2 \theta + 0(1). \end{aligned}$$

Przypadek 3.

Naprężenia siłowe

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0 + l^2} r \sin \theta \log r + 0(1), \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0 + l^2} r \sin \theta \log r + 0(1), \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0 + l^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) r \sin \theta + 0(1), \\ \sigma_{21}(r, \theta) &= -\frac{p_3^0}{\pi} \frac{1}{a_0 + l^2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) r \sin \theta + 0(1). \end{aligned}$$

Naprężenia momentowe

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \mu_{13}(r, \theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + 0(1), \\ \mu_{23}(r, \theta) &= -\frac{2p_3^0}{\pi} \log r + 0(1). \end{aligned}$$

Rozpatrzmy przypadki graniczne ($\alpha \rightarrow 0$ i $\alpha \rightarrow \infty$) korzystając ze związków

$$(4.17) \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{a_0}{a_0 + l^2} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{a_0}{a_0 + l^2} = \frac{2(1-\nu)}{(3-2\nu)}.$$

Dla $\alpha \rightarrow 0$, zarówno dla przypadku ($i = 1$) jak i dla ($i = 2$) zachodzi

$$(4.18) \quad \sigma'_{\alpha\beta} \rightarrow 0, \quad \mu_3 \rightarrow 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

We wzorach (4.4), (4.6), (4.11), (4.13) pozostają tylko naprężenia $\sigma'_{\alpha\beta}$ reprezentujące odpowiednie rozwiązania klasyczne (por. [6]). Gdy $\alpha \rightarrow \infty$ otrzymujemy wyniki teorii ze związanymi obrotami [por. [4]]:

Przypadek 1 ($\alpha = 0$).

Naprężenia siłowe

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi} \left(\pi - 2\theta - \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \sin 2\theta \right) + 0(1), \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{p_1^0}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} (-\pi + 2\theta + \sin 2\theta) + 0(1), \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{2p_1^0}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \sin^2 \theta + 0(1), \\ \sigma_{21}(r, \theta) &= -\frac{8p_1^0}{\pi} \frac{1-\nu}{3-2\nu} \log r + 0(1). \end{aligned}$$

Naprężenia momentowe

$$(4.20) \quad \mu_{13}(r, \theta) = 0(1), \quad \mu_{23}(r, \theta) = 0(1).$$

Przypadek 2 ($\alpha = \infty$).

Naprężenia siłowe

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}(r, \theta) &= -\frac{2p_2^0}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \sin^2\theta + 0(1), \\ \sigma_{22}(r, \theta) &= -\frac{4p_2^0}{\pi} \frac{1}{3-2\nu} \log r + 0(1), \\ \sigma_{12}(r, \theta) &= -\frac{p_2^0}{\pi} \left(\pi - 2\theta + \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \sin^2 2\theta \right) + 0(1), \\ \sigma_{21}(r, \theta) &= -\frac{p_2^0}{\pi} \frac{1-2\nu}{3-2\nu} (-\pi + 2\theta + \sin 2\theta) + 0(1). \end{aligned}$$

Naprężenia momentowe

$$(4.22) \quad \mu_{13}(r, \theta) = 0(1), \quad \mu_{23}(r, \theta) = 0(1).$$

Dyskusja wzorów (4.15) i (4.16) dotycząca przypadku (3) wymaga zanotowania granic

$$(4.23) \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a_0 + l^2} = 0, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a_0 + l^2} = \frac{1}{(3-2\nu)(l^*)^2};$$

l^* oznacza tu wymiarową stałą sprężystości z teorii ze związanymi obrotami. Dla $\alpha \rightarrow 0$ otrzymujemy ośrodek mikropolarny przenoszący tylko naprężenia momentowe (wzory (4.16)).

Podstawiając (4.23)₂ do wzorów (4.15) otrzymujemy, w połączeniu z niezmiennymi wzorami (4.16), rozwiązanie teorii ze związanymi obrotami w układzie (r, θ) lub wzory (4.8), (4.9) w układzie (x_1, x_2) .

5. Uwagi końcowe

W klasycznej teorii sprężystości w punkcie nieciągłości obciążenia $p_\alpha(x_2)$ ($\alpha = 1, 2$) wszystkie składowe naprężeń są skończone dla przypadku 1, natomiast dla przypadku 2 tylko składowe σ_{22} i σ_{33} wykazują osobliwość logarytmiczną przy $r \rightarrow 0$. Wszystkie składowe natomiast (w obu przypadkach) są nieciągłe w początku układu współrzędnych w tym sensie, że przy ustalonych θ dla $r \rightarrow 0$ otrzymujemy różne wartości naprężeń.

W teorii mikropolarnej, analizując przypadek 1 i 2, oprócz nieciągłości naprężeń w punkcie skoku obciążenia $p_\alpha(x_2)$ i osobliwości logarytmicznej składowych σ_{22} , σ_{33} (przypadek 2), zwraca uwagę logarytmiczna osobliwość składowej σ_{21} (przypadek 1) przy $r \rightarrow 0$. Stanowi to istotną różnicę w odniesieniu do rozwiązania klasycznego. Pozostałe składowe naprężeń zarówno siłowych jak i momentowych są rzędu $0(1)$.

W stosunku do teorii ze związanymi obrotami teoria mikropolarnej sprężystości nie wnosi żadnych różnic odnośnie rzędu osobliwości składowych naprężeń. Różnica tkwi we współczynnikach intensywności i w możliwości otrzymania przypadków granicznych ($\alpha = 0, \alpha = \infty$). Jak widać ze wzorów (4.4) ÷ (4.7) oraz ze wzorów (4.11) ÷ (4.14), współ-

czynnikami intensywności osobliwości teorii mikropolarnej odpowiadające naprężeniom $\sigma''_{\alpha\beta}$, $\mu''_{\alpha 3}$ są bezwymiarowe i zależą od stałych materiałowych. Nie można tego powiedzieć o osobliwościach teorii ze związanymi obrotami, gdzie współczynniki intensywności osobliwości naprężeń zależą (przypadek 1, 2) od wymiarowej stałej sprężystości I^* (por. [3 ÷ 5]). W teorii tej przejście z $I^* \rightarrow 0$ nie prowadzi do rozwiązania klasycznego. Szczegółowe omówienie i wyjaśnienie tego faktu znaleźć można w pracy [3] na 41.

Oddzielnego omówienia wymaga przypadek 3. Nieklasyczny charakter obciążenia (warunki brzegowe (3.13)) powoduje, że rozwiązanie klasyczne jest tożsamościowo równe zeru i rozwiązanie teorii mikropolarnej jest określone przez naprężenia z dwiema kreskami. Rozwiązanie to dla $\alpha \rightarrow 0$ nie dąży do zera jak w przypadku 1 i 2 (pozostają naprężenia momentowe różne od zera) i nie prowadzi do rozwiązania dla klasycznego ośrodka Hooke'a, lecz do pewnego ośrodka hipotetycznego, w którym możliwe są tylko obroty φ_3 . Rezultat ten jest usprawiedliwiony tym, że obciążenie momentowe na brzegu półprzestrzeni powinno być zrównoważone pewnym polem naprężeń momentowych w jej wnętrzu.

Zwraca tu również uwagę fakt, że współczynnik intensywności osobliwości naprężeń momentowych [wzory (4.9) lub (4.16)] jest bezwymiarowy i nie zależy od stałych materiałowych, natomiast dla naprężeń siłowych współczynnik ten [wzory (4.8) lub (4.15)] zależy od stałych materiałowych i przestaje być bezwymiarowy. Przejście do teorii ze związanymi obrotami ($\alpha \rightarrow \infty$) daje dla naprężeń siłowych współczynnik intensywności zależny od stałej sprężystości I^* . Zauważmy wreszcie, że dla $r \rightarrow 0$ wzory (4.15) i (4.16) implikują osobliwość logarytmiczną dla μ_{23} i μ_{32} oraz osobliwość rzędu $0(1)$ dla μ_{13} i μ_{31} .

I. literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. Mech. Stos., 5, 23 (1971), 587—611.
3. M. SOKOŁOWSKI, *O teorii naprężeń momentowych*, PWN, Warszawa 1972.
4. D. B. BOGY and ELI STERNBERG, *The effect of couple-stresses on singularities due to discontinuous loadings*, Int. J. Solids Structures, 3, 757 (1967).
5. ROKURO MUKI and ELI STERNBERG, *The influence of couple-stresses on singular stress concentrations in elastic solids*, Z. angew. Math. Phys., 16, 611 (1965).
6. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
7. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York—Toronto—London 1951.
8. A. ERDELYI, *Rozwinięcie asymptotyczne*, PWN, Warszawa 1967.
9. И. С. ГРАДСШТЕЙН, И. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сумм, рядов, произведений*, Изд. Наука, Москва 1971.
10. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, *Osobliwość naprężeń siłowych i naprężeń momentowych w ciele mikropolarnym wywołana obciążeniami skupionymi (I)*, Mech. Teor. i Stos., 4, 11 (1973), 363—391.

Р е з ю м е

СИНГУЛЯРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ СРЕДЕ, ВЫЗВАННЫЕ РАЗРЫВАМИ НАГРУЗОК (II)

В рамках линейной микрополярной среды рассмотрена статическая задача об упругом полупространстве в плоском деформированном состоянии, описываемом векторами $\mathbf{u}(u_1, u_2, 0)$ и $\boldsymbol{\varphi}(0, 0, \varphi_3)$ на край полупространства воздействуют статические распределенные разрывные нагрузки (каса-

тельные, нормальные и моментные). Дан анализ характера особенностей в силовых и моментных напряжениях в точке разрыва нагрузок. Рассмотрены предельные случаи классической упругости ($\alpha = 0$) и связанных вращений ($\alpha = \infty$).

S u m m a r y

STRESS SINGULARITY IN A LINEAR MICROPOLAR MEDIUM PRODUCED BY DISCONTINUOUS LOADS

The static problem of a micropolar elastic half-space in a plane state of strain (represented by the vectors \mathbf{u} ($u_1, u_2, 0$) and $\boldsymbol{\varphi}$ ($0, 0, \varphi_3$) due to discontinuous (normal, tangential and couple) loadings at the boundary is considered. For these loadings, the singularities of stresses and couple-stresses are discussed. Two limiting cases are considered: $\alpha \rightarrow 0$ (classical theory of elasticity) and $\alpha \rightarrow \infty$ (couple-stress theory of elasticity).

INSTYTUT MECHANIKI UNIwersYTETU WARSZAWSKIEGO

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1973 r.

WIELOSTOPNIOWA SYNTEZA MACIERZY SZTYWNOŚCI

KRZYSZTOF D E M S (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Stosowanie metody elementów skończonych do rozwiązywania zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych prowadzi w efekcie do układów równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych, których wielkość zależy od gęstości podziału ciała na elementy oraz ilości stopni swobody wprowadzonych w każdym węzle siatki narzuconej na ciało. Macierze współczynników otrzymanych układów są symetrycznymi macierzami pasmowymi o dużej liczbie elementów zerowych. Rozwiązanie tych układów może być przeprowadzone dowolnymi metodami algebry liniowej.

Niezależnie od stosowanej metody proces rozwiązania wymaga wykonania dużej liczby operacji arytmetycznych. Wymaga ponadto maszyn cyfrowych o dużej pojemności pamięci. Istotne staje się zatem opracowanie algorytmów rozwiązania zmniejszających liczbę wykonywanych działań oraz liczbę niezbędnych komórek pamięci maszyny. W literaturze przedmiotu zagadnienie to rozwiązywane jest różnymi metodami [1], [2], [3], [6]. Niniejsza praca przedstawia pewną metodę tworzenia i rozwiązywania układów równań metody elementów skończonych.

Rozwiązanie układu równań postaci

$$(1.1) \quad [\mathbf{K}] \cdot \{\delta\} = \{\mathbf{R}\},$$

gdzie $[\mathbf{K}]$ jest macierzą współczynników układu, $\{\delta\}$ — wektorem nieznanych stopni swobody, a $\{\mathbf{R}\}$ wektorem sił przyłożonych w węzłach elementów, przeprowadzone jest metodą eliminacji Gaussa.

Symetria macierzy $[\mathbf{K}]$ układu (1.1) pozwala dokonywać wszelkich operacji jedynie na współczynnikach leżących poniżej przekątnej macierzy. Pasmowa budowa tej macierzy pozwala dodatkowo zmniejszyć niezbędną ilość operacji. Eliminując mianowicie niewiadomą z k -tego równania, przekształceniu podlegają jedynie te j -te wiersze macierzy, którym odpowiadają niezerowe współczynniki w k -tym równaniu. Powyższe powoduje, że niezbędna ilość operacji wynosi około 3% ilość operacji wykonywanych na pełnej macierzy współczynników układu [4]. Zmniejsza się również konieczna ilość komórek pamięci maszyny.

Dodatkowe zmniejszenie rozwiązywanego układu równań oraz ilości operacji i liczby komórek pamięci uzyskać można stosując specyficzną metodę tworzenia i rozwiązywania układu (1.1), nazywaną wielostopniową syntezą macierzy sztywności.

2. Zasady podziału ciała na elementy

W większości spotykanych w literaturze prac przyjmuje się podział ciała na elementy niepodlegające dalszemu podziałowi. W pewnych przypadkach podział ciała na elementy może być generowany automatycznie przez maszynę cyfrową [5]. W niniejszej pracy wprowadzono wielostopniowy podział obszaru, dzieląc każdy element na szereg podelementów. Podział ten dokonuje się następująco: Rozpatrywany obszar dzielony jest na skończoną liczbę elementów dowolnego kształtu, połączonych ze sobą w węzłach leżących na liniach (lub powierzchniach) podziału. Elementy te nazwano *elementami rzędu I*. Każdy element rzędu I dzielony jest na dowolną liczbę *elementów rzędu II* zawierających węzły na swoich liniach podziału. Z kolei każdy element rzędu II dzielony jest na *elementy rzędu III* itd.

Stopnie swobody węzłów leżących na liniach (powierzchniach) podziału między elementami tego samego rzędu zebrano w grupy *własnych stopni swobody elementów* odpowiedniego rzędu, i tak np. stopnie swobody węzłów leżących na liniach granicznych między elementami rzędu I nazwano *własnymi stopniami swobody elementów rzędu I* i analogicznie dla elementów wyższych rzędów. Osobno wydzielona została grupa *stałych stopni swobody* o określonych wartościach. Tak więc wektor stopni swobody wszystkich węzłów ciała przedstawić można jako

$$(2.2) \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_i \\ \cdot \\ \delta_N \\ \delta_s \end{Bmatrix},$$

gdzie $\{\delta_i\}$ jest grupą własnych stopni swobody elementów rzędu i , a $\{\delta_s\}$ jest grupą stałych stopni swobody.

3. Wielostopniowa synteza macierzy sztywności

Rozwiązanie układu równań liniowych (1.1) metodą Gaussa składa się z dwóch etapów. W pierwszym, drogą eliminacji kolejnych niewiadomych z układu (1.1) macierz współczynników tego układu przekształca się na macierz trójkątną. W etapie drugim na drodze postępowania odwrotnego wyznacza się wartości nieznanych stopni swobody.

Zgodnie z ogólną teorią metody elementów skończonych układ równań (1.1) tworzą równania równowagi wszystkich węzłów ciała. Macierz współczynników tego układu powstaje przez odpowiednie zsumowanie macierzy sztywności wszystkich elementów na które podzielono ciało. Traktując wspomnianą macierz jako macierz sztywności całego ciała można ją przedstawić jako odpowiednią sumę macierzy sztywności wszystkich elementów rzędu I, które z kolei powstają przez zsumowanie macierzy sztywności elementów rzędu II w każdym elemencie rzędu I. Podobnie tworzyć można macierze sztywności ele-

Wstawiając (3.5) do (3.3) po przekształceniach otrzymamy układ równań postaci:

$$(3.6) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & & & & & \\ & \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & & \\ \mathbf{K}_{r1} & \mathbf{K}_{r2} & \cdot & \cdot & \mathbf{K}_{r,r-1} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix}' \cdot \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_r \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{F}_r \end{Bmatrix}'$$

gdzie nowy wektor sił węzłowych określony jest przez

$$(3.7) \quad \{\mathbf{F}_i\}' = \{\mathbf{F}_i\}' - [\mathbf{K}_{r+1,i}]^T [\mathbf{K}_{r+1,r+1}]^{-1} \{\mathbf{F}_{r+1}\}',$$

a nowe podmacierze macierzy $[\mathbf{K}]'$ dane są przez

$$(3.8) \quad [\mathbf{K}_{ij}] = [\mathbf{K}_{ij}] - [\mathbf{K}_{r+1,i}]^T [\mathbf{K}_{r+1,r+1}]^{-1} [\mathbf{K}_{r+1,j}].$$

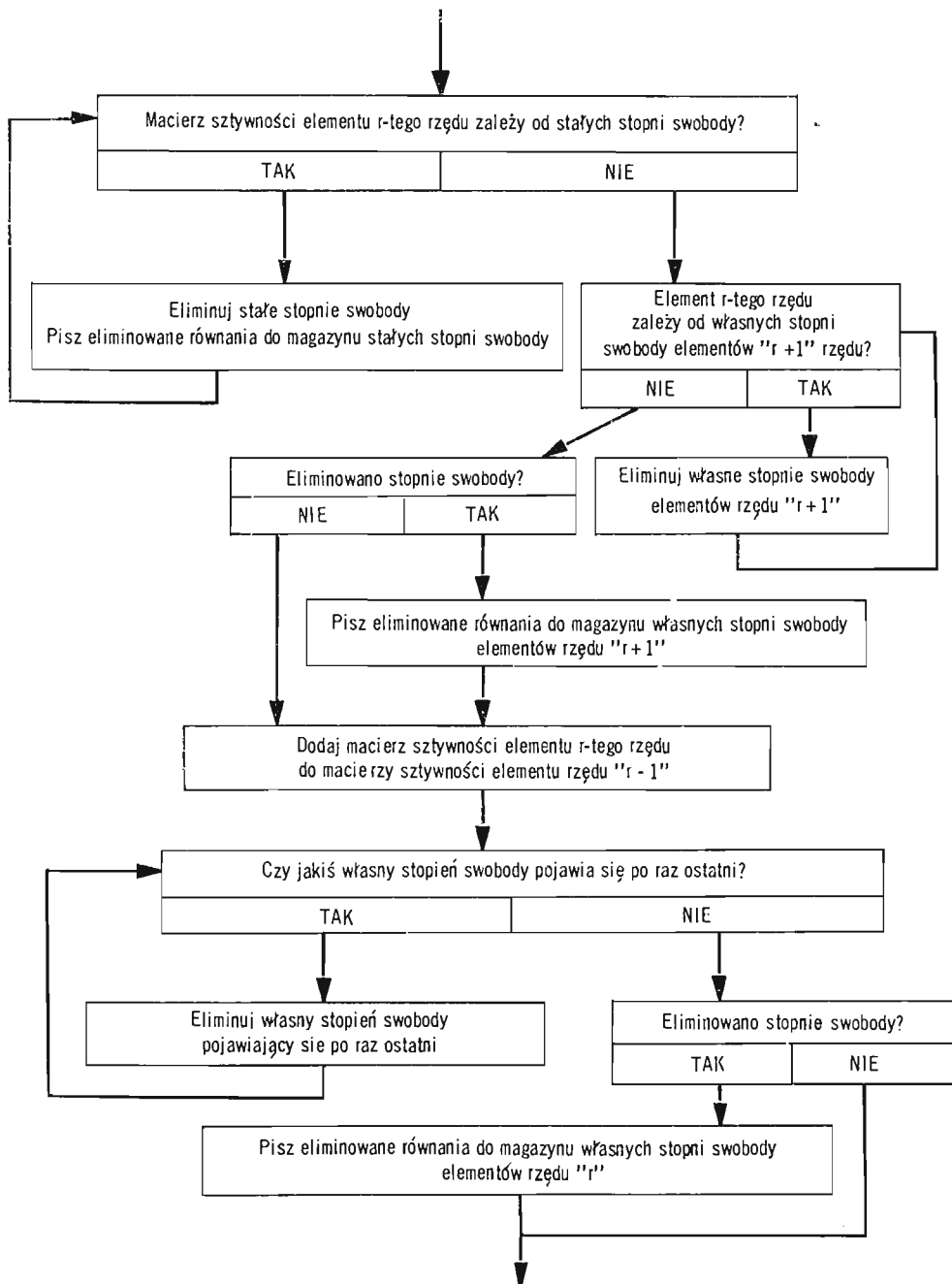
W wyniku opisanego powyżej postępowania w równaniach równowagi elementu r -tego rzędu jako niewiadome występują jedynie własne stopnie swobody elementów do rzędu r włącznie. Macierz $[\mathbf{K}]'$ jest nową macierzą sztywności tego elementu, związaną jedynie ze stopniami swobody węzłów położonych na liniach granicznych tego elementu. Obliczając podobnie macierze sztywności wszystkich elementów r -tego rzędu tworzących element rzędu $r-1$ i dodając je do siebie tworzymy macierz sztywności elementu rzędu $r-1$ związaną ze stopniami swobody elementów do rzędu r włącznie. Usuwając z niej współczynniki odpowiadające własnym stopniom swobody elementów r -tego rzędu według postępowania opisanego powyżej, otrzymuje się macierz sztywności tego elementu związaną jedynie ze stopniami swobody elementów do rzędu $r-1$ włącznie.

Stosując wielokrotnie powyższą syntezę macierzy sztywności wyznacza się macierze sztywności wszystkich elementów rzędu I, których współczynniki związane są jedynie z własnymi stopniami swobody elementów rzędu I. Tworząc, przy pomocy tych macierzy, równania równowagi całego ciała i rozwiązując otrzymany układ wyznacza się nieznanne stopnie swobody elementów rzędu I. Następnie, drogą postępowania odwrotnego, korzystając z wzorów podobnych do (3.5) wyznaczyć można stopnie swobody wszystkich grup $\{\delta_{ij}\}$. Na końcu wreszcie wyznacza się reakcje $\{F_s\}$ odpowiadające stałym stopniom swobody.

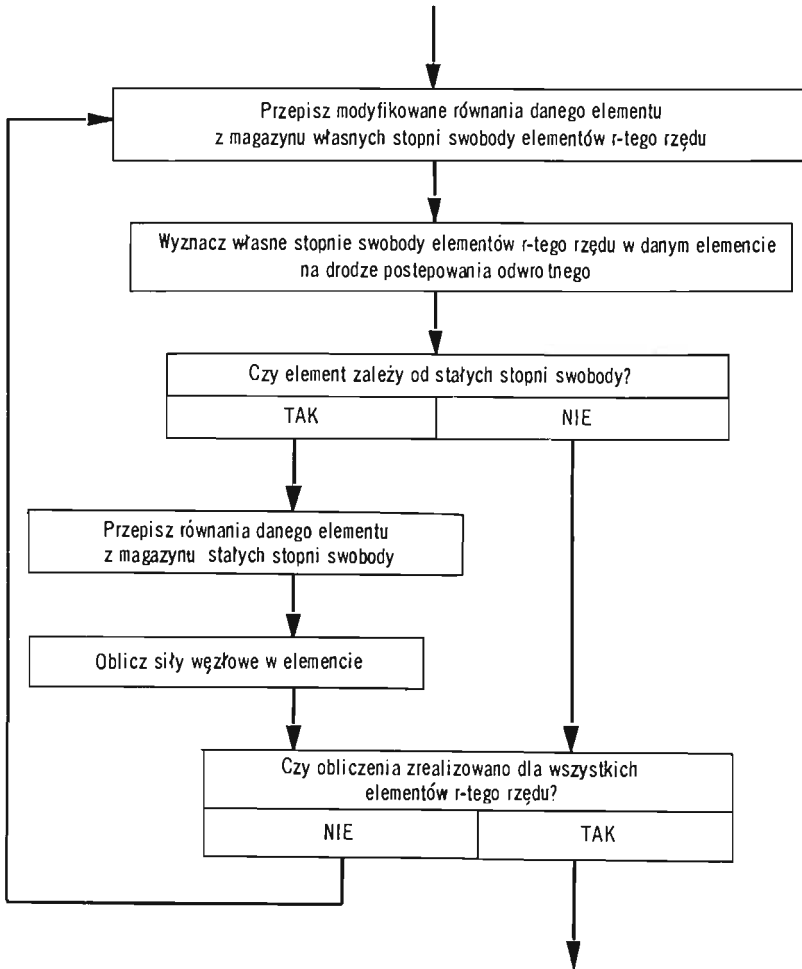
Omówiony schemat wielostopniowej syntezy macierzy sztywności wskazuje drogę postępowania, pozwalającą na prowadzenie procesu eliminacji nie dla całego układu równań (1.1) lecz dla jego kolejnych fragmentów odpowiadających elementom kolejnych rzędów. Stwarza to możliwość rozwiązywania dużych układów równań przy wykorzystaniu małych maszyn cyfrowych.

Podstawowe operacje etapu eliminacji w wielostopniowej syntezie macierzy sztywności sprowadzają się do operacji na dwóch macierzach sztywności: macierzy sztywności elementu rzędu $r-1$ oraz macierzy sztywności elementu r -tego rzędu wchodzącego w skład elementu rzędu $r-1$. Schemat blokowy operacji dokonywanych na tych macierzach przedstawiony jest na rys. 1.

W wyniku eliminacji wszystkich stopni swobody rozwiązywanego układu w pamięci pomocniczej maszyny cyfrowej zapisane są przekształcone równania układu. Za ich pomocą w drodze postępowania odwrotnego wyznacza się wartości stopni swobody i reakcji według schematu z rys. 2.



Rys. 1. Schemat blokowy podstawowych operacji w etapie eliminacji stopni swobody



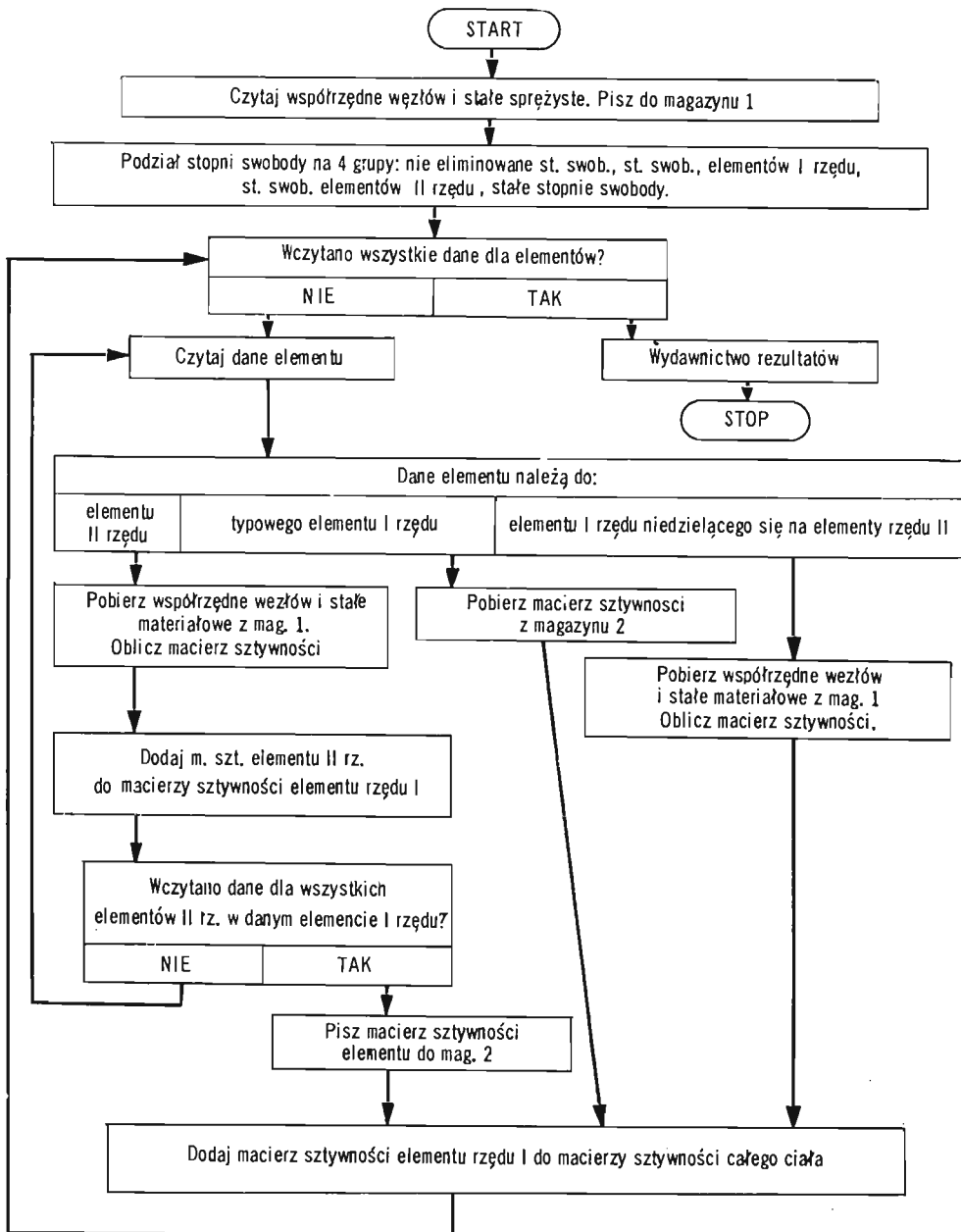
Rys. 2. Schemat blokowy podstawowych operacji w etapie postępowania odwrotnego

4. Wnioski

Przedstawiona metoda wskazuje prostą drogę postępowania przy układaniu i rozwiązywaniu dużych układów równań liniowych występujących przy stosowaniu metody elementów skończonych. Umożliwia ona zmniejszenie wymaganej liczby komórek pamięci maszyny cyfrowej oraz zmniejszenie wymaganej liczby działań arytmetycznych, szczególnie w etapie eliminacji niewiadomych.

Metoda ta jest bardzo korzystna szczególnie w przypadku, jeżeli w rozpatrywanym cieple dają się wyróżnić elementy geometrycznie i mechanicznie podobne. Dla takich elementów macierz sztywności związaną z własnymi stopniami swobody elementów rzędu I można obliczać jednokrotnie. W ten sposób zmniejsza się ilość równań które należy rozwiązać.

Metoda stwarza ponadto możliwość rozwiązywania bardzo dużych problemów nawet przy zastosowaniu małych maszyn cyfrowych drogą kilkukrotnego wyznaczania



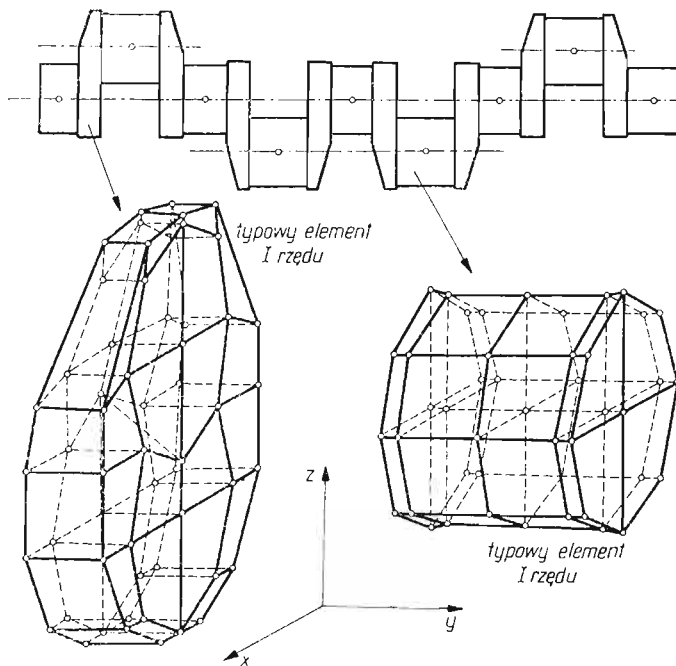
Rys. 3. Schemat blokowy programu wyznaczającego współczynniki wpływu

kolejnych grup stopni swobody bez konieczności pamiętania niektórych przekształconych równań. To ostatnie uzyskiwane jest oczywiście kosztem dłuższego czasu rozwiązania zagadnienia.

Program układający i rozwiązujący równania metody elementów skończonych według przedstawionej metody opracowany został w języku SAKO na maszynie cyfrową ZAM-41. W programie wprowadzono elementy I i II rzędu.

5. Przykład

Jednym z przykładów zastosowania wielostopniowej syntezy macierzy sztywności jest wykorzystanie jej do wyznaczania współczynników wpływowych ciała uzależnionych od stopni swobody pewnych wybranych węzłów ciała.



Rys. 4. Zastępczy model wału

Opracowany został program wyznaczający współczynniki wpływowe przy uwzględnieniu podziału ciała na elementy I i II rzędu. Dla elementów rzędu I geometrycznie i mechanicznie podobnych macierz sztywności wyznaczana jest jednokrotnie. Schemat blokowy programu napisanego w języku SAKO dla maszyny ZAM-41 przedstawiono na rys. 3.

Za pomocą wspomnianego programu wyznaczono współczynniki wpływu dla wału korbowego czterocylindrowego silnika spalinowego. Wał przybliżono modelem zawierającym 17 elementów I rzędu. 8 elementów rzędu I zawierało po 20 elementów II rzędu, 7 elementów I rzędu zawierało po 16 elementów rzędu II i 2 elementy I rzędu zawierały po 12 elementów rzędu II. Model zastępczy wału (pokazany na rys. 4) zawierał 2373

stopnie swobody. Poprzez wprowadzenie 8 typowych elementów I rzędu rozwiązywany układ zmniejszył się do 1227 niewiadomych. Tak więc poprzez wprowadzenie elementów geometrycznie i mechanicznie podobnych ilość równań zmniejszyła się o około 50%. Czas rozwiązywania zagadnienia stanowił około 50% czasu niezbędnego na rozwiązanie problemu przy wprowadzeniu jednokrotnego podziału na elementy.

Podziękowanie

Autor chciałby podziękować Prof. J. SZMELTEROWI z Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie za Jego uprzejmą pomoc przy opracowaniu tego artykułu.

Literatura cytowana w tekście

1. G. GANTIN, *An Equation Solver of Very Large Capacity*, Int. J. Num. Meth. Engng. 3, (1971), 379—388
2. B. M. IRONS, *A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis*, Int. J. Num. Meth. Engng., 2, (1970) 5—32.
3. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Program rozwiązujący równania metody elementów skończonych*, Biuletyn WAT, 6 (266), (1971), 43—51.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *The Finite Element Method in Engineering Science*, London 1971.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, D. V. PHILLIPS, *An Automatic Mesh Generation Scheme for Plane and Curved Surface by Isoparametric Coordinates*, Int. J. Num. Meth. Engng., 3, (1971), 519—528.
6. K. DEMS, *Wielostopniowa synteza oraz wielomiany Hermite'a w metodzie elementów skończonych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź 1971.

Резюме

МНОГОСТАДИЙНЫЙ СИНТЕЗ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ

Представлен метод образования и решения систем уравнений методом конечных элементов. Введен многостадийный раздел тела путем раздела каждого элемента на ряд подэлементов. Представлены основы метода и блочные схемы программ для электронно-вычислительной машины ЗАМ 41. Предлагаемый метод позволяет сократить размеры памяти машины, а также уменьшить число необходимых арифметических действий. Предлагаемым методом можно решать большие задачи даже на небольших электронно-вычислительных машинах.

Summary

A MULTI-STAGE SYNTHESIS OF THE STIFFNESS MATRICES

The paper presents a method of constructing and solving the systems of equations of the finite element method. A multi-stage division of the space is introduced by dividing each element into a series of subelements. The principles of the method are described and the flow diagrams of programs prepared for the ZAM-41 digital computer are given. The method presented enables us to reduce the required number of digital computer storage words, as well as that of the arithmetical operations. The method also creates a possibility of solving very extensive problems by means of even relatively small digital computers.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 lutego 1973 r.

STACJONARNE ODDZIAŁYWANIE UKŁADU DWU NIESKOŃCZENIE MAŁYCH
DOWOLNIE ZORIENTOWANYCH ELEMENTÓW, PORUSZAJĄCEGO SIĘ W OŚRODKU
SWOBODNO-MOLEKULARNYM Z DOWOLNĄ PRĘDKOŚCIĄ

STANISŁAW K O S O W S K I (WARSZAWA)

Wstęp

Wyznaczanie charakterystyk aerodynamicznych ciał, tj. oporu, siły nośnej i przekazywania ciepła, należy do klasycznych zagadnień aerodynamiki. W zależności od potrzeb współczynniki te oblicza się w różnych reżimach przepływów, a więc w reżimie ośrodka ciągłego, w reżimie przejściowym czy wreszcie swobodno-molekularnym. Warunki swobodno-molekularne panują w ośrodku wtedy, jeśli średnia droga swobodna cząsteczek gazu jest znacznie większa od największej ze wzajemnych odległości ciał w nim zanurzonych. Można uważać, że w takich warunkach cząsteczki gazu praktycznie nie zderzają się z sobą, zderzają się natomiast z obiektami znajdującymi się w gazie. Olbrzymi wzrost zainteresowania przepływami w reżimie swobodno-molekularnym i bliskim swobodno-molekularnego nastąpił wraz z otwarciem możliwości przeprowadzania lotów i eksperymentów kosmicznych. Praktyka lotów i eksperymentów kosmicznych domaga się gwałtownie rozwiązania bardziej złożonych problemów; podejmowane są zagadnienia wyznaczania charakterystyk dynamicznych dla ciał bardziej złożonego kształtu, dla ciał niewypukłych, dla ciał znajdujących się w ruchu obrotowym i wreszcie dla prostszych układów ciał.

Zagadnienie opływu ciała wypukłego zasadniczo różni się od zagadnienia opływu dla ciała wklęsłego czy też układu ciał. Konieczność uwzględnienia wielokrotnych odbić cząsteczek gazu pomiędzy różnymi częściami powierzchni ciała wklęsłego lub różnymi powierzchniami dla układu ciał jest źródłem poważnych komplikacji matematycznych. Fakt ten możemy wyrazić inaczej w ten sposób, że dla ciał niewypukłych i układów ciał należy uwzględniać efekty interferencji swobodno-molekularnej. Literatura dotycząca jednak samej interferencji ciał w gazie lub przepływie swobodno-molekularnym jest zaskakująco uboga; na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat ukazało się w piśmiennictwie światowym (powszechnie dostępnym) zaledwie kilkanaście prac, z czego tylko kilka jest sensu stricto związanych z tematem niniejszej pracy. Większość tych prac dotyczy interferencji najprostszyc ciał i w najprostszej geometrii przy założeniu hipersoniczności przepływu i dyfuzyjnego lub maxwellowskiego oddziaływania gazu z powierzchnią.

I tak w pracy [6] rozwiązane jest zadanie o aerodynamicznym oddziaływaniu dwu płytek prostokątnych, tworzących kąt prosty, w strumieniu swobodno-molekularnym nacierającym wzdłuż wspólnej krawędzi płytek, przy założeniu modelu dyfuzyjnego. W pracy [4] rozpatruje się dwie jednakowe, równoległe do siebie, prostokątne płaszczyzny

o tej samej temperaturze w strumieniu swobodno-molekularnym, napływającym pod zerowym kątem natarcia równoległe do jednej z krawędzi, również przy założeniu modelu dyfuzyjnego — siły interakcji starają się odepchnąć płaszczyzny. Z kolei podobny problem dla dwu okrągłych równoległych płytek, położonych w pewnej odległości od siebie na wspólnej osi, rozwiązuje autor [5] numerycznie metodą Monte-Carlo, kontrolując takie parametry, jak liczba Macha napływającego strumienia, kąt natarcia, stosunki promieni i temperatur, współczynniki akomodacji i dyfuzyjności.

Problem oddziaływania dwu ciał skończonych rozmiarów poruszających się w ośrodku swobodno-molekularnym, tj. problem wymiany pędu i energii pomiędzy ciałami i ośrodkiem jest na tyle złożony, że nie daje się w sposób ścisły i analityczny rozwiązać nawet w najprostszym przypadku, tj. spoczywających ciał o najwyższej symetrii (kule), przy założeniu również najprostszego — dyfuzyjnego modelu odbicia [8]. Ścisłe analitycznie udało się jedynie rozwiązać zagadnienie wymiany ciepła dla poruszającego się układu dwu kul o równych temperaturach w założeniu dyfuzyjnego modelu odbicia [11].

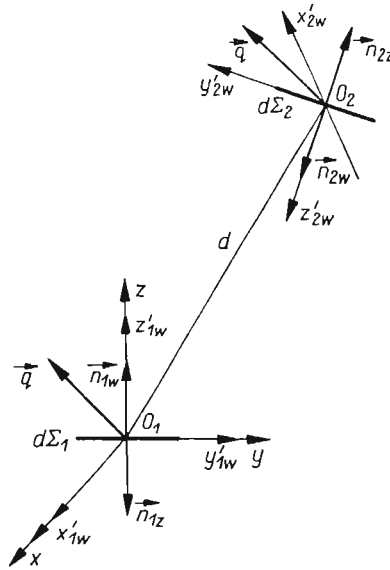
Inne szczególne przypadki np. małych prędkości ciał (w porównaniu z prędkością termiczną ośrodka) i dużych odległości [9], dużych prędkości i dużych odległości [10] lub dużych prędkości i dowolnych odległości, można rozwiązać tylko w sposób przybliżony, przy czym w ostatnim przypadku rozwiązanie nie udaje się w pełni analitycznie doprowadzić do końca [13]. Rozwiązanie to wymaga numerycznego uzupełnienia. Należy wyraźnie podkreślić, że problem oddziaływania ciał w ośrodku swobodno-molekularnym w ogóle nie nadaje się do bezpośredniej analizy numerycznej (wiąże się to z koniecznością obliczania 5-krotnych całek o skomplikowanych obszarach całkowania, wynikających ze złożonej geometrii zasłaniania). We wszystkich wspomnianych wyżej przypadkach, gdzie uzyskanie rozwiązania analitycznego lub numerycznego staje się możliwe, przyjmowano najprostszy dyfuzyjny model odbicia. Konieczność przebadania oddziaływania ciał ze względu na model odbicia, jak również odzyskania dalszych charakterystycznych cech oddziaływania wymykających się przybliżonemu i jednostkowemu traktowaniu zagadnienia, skłoniło do zajęcia się oddziaływaniem nieskończenie małych elementów i analizy tego oddziaływania w możliwie jak najbardziej ogólnym aspekcie. Zauważmy, że zasadniczo są do pomyślenia dwa uproszczenia:

- a) uproszczona geometria (jeden kierunek prędkości), pełny rozkład modułu prędkości,
- b) zaniedbany rozkład modułu prędkości (jedna prędkość), pełna geometria.

Zagadnienie oddziaływania nieskończenie małych elementów dokładnie koresponduje z przypadkiem a).

Ogólne sformułowania zagadnienia

Rozważmy układ dwu nieskończenie małych elementów płaskich $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$ dowolnie względem siebie zorientowanych, poruszających się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością \mathbf{q} . Z układem wiążemy dwa rodzaje układów współrzędnych: globalny x , y , z i lokalny x' , y' , z' (rys. 1). Układ globalny ustalamy tak, aby jego początek leżał na elemencie $d\Sigma_1$, oś z była skierowana prostopadłe do elementu i w stronę elementu $d\Sigma_2$, natomiast oś x leżała w płaszczyźnie (z, \mathbf{q}) . Układy lokalne x' , y' , z' wybieramy tak, by początek leżał na elemencie $d\Sigma_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$). by oś z' była skierowana wzdłuż normalnej



Rys. 1

wewnętrznej lub zewnętrznej do $d\Sigma_\alpha$, zaś oś x' leżała w płaszczyźnie (q, z') . Normalną do elementu $d\Sigma_1$ skierowaną w stronę $d\Sigma_{2z}$ oznaczamy n_{1w} (wewnętrzna), skierowaną w stronę przeciwną n_{1z} (zewnętrzna), analogiczne oznaczenia n_{2w} , n_{2z} przyjmujemy dla elementu $d\Sigma_2$. Poszukujemy sił i wymiany ciepła, związanych z ruchem układu.

A. Zagadnienie sił

1. Wyrażenia na siły. Siłę działającą na element $d\Sigma_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) możemy przedstawić jako superpozycję siły niezaburzonej $F_{\alpha 0}$, jaka występowałaby pod nieobecność elementu $d\Sigma_\beta$ ($\beta = 1, 2$; jeśli $\alpha = 1$ to $\beta = 2$ i na odwrót) i siły iteracyjnej $F_{\alpha in}$, będącej wynikiem obecności elementu $d\Sigma_\beta$.

Siłę $F_{\alpha 0}$ można złożyć z siły $F_{\alpha 0w}$ działającej na wewnętrzną powierzchnię elementu α i z siły $F_{\alpha 0z}$ działającej na zewnętrzną powierzchnię elementu α

$$(1.1) \quad F_\alpha = F_{\alpha 0} + F_{\alpha in}.$$

$$(1.2) \quad F_{\alpha 0} = F_{\alpha 0w} + F_{\alpha 0z}.$$

Siły te, równoważne strumieniom pędu, przekazywanym elementowi $d\Sigma_\alpha$ wyrażają się całkami po przestrzeni prędkości z elementarnych strumieni pędu określonych odpowiednimi funkcjami rozkładu:

$$(1.3) \quad F_{\alpha 0w} = -m \left[\int_{\Omega_{1/2}^{(i)}} c_{0\alpha} (c_{0\alpha} \cdot n_{\alpha w}) f_{0-\alpha}^{(i)} d^3 c_{0\alpha} + \int_{\Omega_{1/2}^{(r)}} c_{\alpha\alpha} (c_{\alpha\alpha} \cdot n_{\alpha w}) f_{0-\alpha}^{(r)} d^3 c_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha w},$$

$$(1.4) \quad F_{\alpha 0z} = -m \left[\int_{\Omega_{1/2}^{(i)}} c_{0\alpha} (c_{0\alpha} \cdot n_{\alpha z}) f_{0-\alpha}^{(i)} d^3 c_{0\alpha} + \int_{\Omega_{1/2}^{(r)}} c_{\alpha\alpha} (c_{\alpha\alpha} \cdot n_{\alpha z}) f_{0-\alpha}^{(r)} d^3 c_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha z},$$

gdzie m — masa cząsteczek gazu ośrodka, $c_{0\alpha}$ — prędkość cząsteczki ośrodka względem elementu α , $c_{\alpha\alpha}$ — prędkość cząsteczki odbitej od elementu $d\Sigma_\alpha$ w układzie tego elementu, $f_{0-\alpha}^{(i)}$ — funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka w układzie elementu α , $f_{0-\alpha}^{(r)}$ —

funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka odbitych od wewnętrznej powierzchni elementu α , $f_{0-\alpha z}^{(r)}$ — funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka odbitych od zewnętrznej powierzchni elementu α , $\Omega_{1/2}^c$ — półprzestrzeń prędkości, $d^3\mathbf{c}$ — element objętości w przestrzeni prędkości.

Z kolei, siłę interakcyjną \mathbf{F}_{in} , możemy złożyć z siły interakcyjnej $\mathbf{F}_{\alpha in\beta}$, związanej bezpośrednio z obecnością elementu $d\Sigma_\beta$ i siły $\mathbf{F}_{\alpha in0}$ związanej pośrednio z obecnością $d\Sigma_\beta$, mianowicie w taki sposób, że z obecnością $d\Sigma_\beta$ zmienia się funkcja rozkładu cząsteczek odbitych od $d\Sigma_\alpha$

$$(1.5) \quad \mathbf{F}_{in} = \mathbf{F}_{in\beta} + \mathbf{F}_{\alpha in0}.$$

Podobnie jak poprzednio, siły te wyrażają się przez odpowiednie całki z funkcji rozkładu:

$$(1.6) \quad \mathbf{F}_{\alpha in\beta} = m \left[\int_{\Omega^c} \mathbf{c}_{\beta\alpha}(\mathbf{c}_{\beta\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)} d^3\mathbf{c}_{\beta\beta} - \int_{\Omega^c} \mathbf{c}_{0\alpha}(\mathbf{c}_{0\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta}^{(i)} d^3\mathbf{c}_{0\beta} \right] d\Sigma_{\beta w},$$

$$(1.7) \quad \mathbf{F}_{\alpha in0} = m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} - \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_{\alpha w}) f_{0-\alpha}^{(r)} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha w},$$

gdzie $\mathbf{c}_{\beta\alpha}$, $\mathbf{c}_{\beta\beta}$ — prędkość cząsteczek odbitych od elementu $d\Sigma_\beta$ odpowiednio względem elementu $d\Sigma_\alpha$, $d\Sigma_\beta$, $\mathbf{c}_{0\beta}$ — prędkość cząsteczki ośrodka względem elementu $d\Sigma_\beta$, $f_{0\alpha}^{(i)}$ — funkcja rozkładu prędkości cząsteczek ośrodka w układzie $d\Sigma_\beta$, $f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)}$, $f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ — funkcje rozkładu cząsteczek odbitych od powierzchni wewnętrznych odpowiednio elementów $d\Sigma_{\alpha w}$, $d\Sigma_{\beta w}$, a padających z ośrodka i elementów α lub β odpowiednio, Ω^c — przestrzeń modułu prędkości.

W wyrażeniu na siłę $\mathbf{F}_{\alpha in\beta}$ występuje jedynie całkowanie po przestrzeni modułu prędkości, gdyż mamy tylko jeden kierunek prędkości, od elementu β do α . Funkcje $f_{0\alpha}^{(i)}$, $f_{0\beta}^{(i)}$ są znane, funkcje $f_{0-\alpha w}^{(r)}$, $f_{0-\alpha z}^{(r)}$, $f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)}$, $f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ nieznanne.

O ośrodku zakładamy, że znajduje się w stanie globalnej równowagi termodynamicznej, opisanym funkcją rozkładu Maxwella-Boltzmana. Zgodnie z tym mamy

$$(1.8) \quad f_{0-\alpha}^{(i)} = A^{(i)} \exp \{ -B_0^{(i)}(\mathbf{c}_{0\alpha} + \mathbf{q})^2 \},$$

$$A^{(i)} = n_0 \left(\frac{2\pi k T_0}{m} \right)^{-3/2}, \quad B_0^{(i)} = \frac{m}{2k T_0},$$

gdzie n_0 — gęstość liczbowa cząsteczek ośrodka, T_0 — temperatura ośrodka, k — stała Boltzmana.

Funkcje $f^{(r)}$ dla cząstek odbitych możemy znaleźć z równań ciągłości (zachowania liczby cząstek) postulując model odbicia (model oddziaływania gazu z powierzchnią).

W niniejszej pracy w charakterze modelu odbicia przyjmiemy zmodyfikowany model Maxwella z anizotropową częścią dyfuzyjną, mianowicie

$$(1.9) \quad f^{(r)} = (1 - \varepsilon) f^{(r)(s)} + \varepsilon f^{(r)(D)}.$$

Część molekuł $(1 - \varepsilon)$ odbija się zwierciadlanie z funkcją zwierciadlanego odbicia $f^{(r)(s)}$, pozostała część ε — odbija się dyfuzyjnie anizotropowo z funkcją rozkładu $f^{(r)(D)}$. Zatem

$$(1.10) \quad f^{(r)(s)} = f^i[\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)})],$$

$$(1.11) \quad f^{(r)(D)} = A^D \exp \{ -B^D [\alpha \mathbf{c}^{(r)} - \beta(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - \mathbf{q}^*]^2 \},$$

$$(1.12) \quad \mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}) = \mathbf{c}^{(r)(s)} - 2(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad B^D = \frac{m}{2k T^{(D)}},$$

gdzie \mathbf{n} jest normalną do ścianki, $T^{(D)}$ temperaturą ścianki; $\alpha, \beta, \mathbf{q}^*$ — parametrami modelu, A^D — nieokreśloną stałą, którą wyznaczyć można z rozwiązania równania ciągłości. Przyjmując w $f^{(r)D}$ $\beta = 0$ otrzymujemy model Nocilli, $q^* = 0$ model odbicia dyfuzyjnego z anizotropią normalną, przyjmując wreszcie $\beta = 0, q^* = 0$ dostajemy zwykły model dyfuzyjny, który w połączeniu z modelem zwierciadlanym, jak w (1.9), daje zwykły model Maxwella.

Model typu (1.9) z dyfuzyjną funkcją rozkładu wydaje się być wystarczająco ogólny, by z rozwiązania zagadnienia oddziaływania w tym modelu można było sądzić o zależności oddziaływania od modelu odbicia.

Do efektywnego obliczenia siły F_α konieczna jest znajomość stałej A_D w funkcjach rozkładu cząstek odbitych. Możemy ją odzyskać z rozwiązania równania ciągłości, przy czym rozwiązanie te znajduje się inaczej na zaburzonych powierzchniach elementów, inaczej na niezaburzonych; a zróżnicowanie to jest prostą konsekwencją faktu, że na powierzchni «niezaburzone» padają tylko cząsteczki z ośrodka, natomiast na «zaburzone» cząsteczki z ośrodka i z elementów i w tych przypadkach zagadnienie staje się znacznie bardziej złożone ze względu na efekty interakcji.

2. Rozwiązanie równań ciągłości (obliczenie stałych A^D). a) *Powierzchnie elementów «niezaburzone».* Równanie ciągłości jest równością strumieni cząstek padającego $N_{0-\alpha(V)}^{(i)}$ i odbitego $N_{0-\alpha(V)}^{(r)}$, mianowicie

$$(2.1) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = N_{0-\alpha(V)}^{(r)}.$$

Wskaźnik $0-\alpha(V)$ oznacza, że cząsteczki padają z ośrodka na powierzchnię α (1 lub 2) wewnętrzną lub zewnętrzną, czemu odpowiada znak alternatywy w nawiasie ($V \equiv zV_W$) Wyrażając strumienie przez funkcje rozkładu mamy

$$(2.2) \quad \int_{\Omega_{\hat{f}/2}} (-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} = \int_{\Omega_{\hat{f}/2}} (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha}.$$

Przyjmując w charakterze $f^{(r)}$ zmodyfikowany model Maxwella (1.9), możemy napisać

$$(2.3) \quad (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(i)} + \varepsilon_{\alpha(V)} N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(r)S} + \varepsilon_{\alpha(V)} N_{0-\alpha(V)}^{(r)D},$$

gdzie $\varepsilon_{\alpha(V)}$ — jest współczynnikiem mieszania dla powierzchni $\alpha(V)$,

$$(2.4) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(r)S} = \int_{\Omega_{\hat{f}/2}} (\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(r)S} d^3 \mathbf{c}^{(r)}, \quad N_{0-\alpha(V)}^{(r)D} = \int_{\Omega_{\hat{f}/2}} (\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha(V)}) f_{0-\alpha(V)}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}^{(r)}.$$

Ponieważ

$$(2.5) \quad (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = (1 - \varepsilon_{\alpha(V)}) N_{0-\alpha(V)}^{(r)S},$$

także

$$(2.6) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = N_{0-\alpha(V)}^{(r)D}.$$

Rozpisując wykładnik w wyrażeniu na $f^{(r)D}$ (1.11), można stwierdzić, że we współrzędnych prostokątnych wyrażenie podcałkowe daje się rozdzielić, wobec czego dostajemy:

$$(2.7) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(r)D} = A_{0-\alpha(V)}^D I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(1) I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(2) I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(3) \exp\{-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}\},$$

$$I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_{\alpha(V)}^D [\alpha_{\alpha(V)} c_{\alpha\alpha}^2 - 2\alpha_{\alpha(V)} c_{\alpha\alpha x} q_{0-\alpha(V)x}^*]\} dc_{\alpha\alpha x},$$

$$(2.8) \quad I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_{\alpha(V)}^D [\alpha_{\alpha(V)}^2 c_{\alpha\alpha y}^2 - 2\alpha_{\alpha(V)} c_{\alpha\alpha y} g_{0-\alpha y}^*]\} dc_{\alpha\alpha y},$$

$$I_{0-\alpha(V)}^{D(N)}(3) = \int_0^{\infty} c_{\alpha\alpha z} \exp\{-B_{\alpha(V)}^D [(\alpha_{\alpha(V)} - \beta_{\alpha(V)})^2 c_{\alpha\alpha z}^2 - 2(\alpha_{\alpha(V)} - \beta_{\alpha(V)}) (\mathbf{n}_{\alpha(V)} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha(V)}^*) c_{\alpha\alpha z}]\} dc_{\alpha\alpha z} \cdot z | \mathbf{n}_{\alpha(V)}.$$

Korzystając z tego samego faktu możemy podobnie wyrazić

$$(2.9) \quad N_{0-\alpha(V)}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(1) I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(2) I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(3),$$

$$I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0\alpha x}^2 + 2c_{0\alpha x} q'_x]\} dc_{0\alpha x},$$

$$(2.10) \quad I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0\alpha y}^2 + 2c_{0\alpha y} q'_y]\} dc_{0\alpha y},$$

$$I_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}(3) = \int_0^{\infty} -c_{0\alpha Vz} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0\alpha Vz}^2 + 2c_{0\alpha Vz} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\} dc_{0\alpha Vz}.$$

Na podstawie (2.6), (2.7) i (2.9) znajdujemy ostatecznie

$$(2.11) \quad A_{0-\alpha(V)}^D = \frac{A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} I_{0-\alpha V}^{(i)}(1) I_{0-\alpha V}^{(i)}(2) I_{0-\alpha V}^{(i)}(3)}{I_{0-\alpha V}^D(1) I_{0-\alpha V}^D(2) I_{0-\alpha V}^D(3) \exp\{-B_{\alpha V}^D q_{0\alpha V}^{*2}\}} \equiv \frac{A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} \bar{I}_{0-\alpha(V)}^{(i)(N)}}{\exp\{-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}\} \bar{I}_{0-\alpha V}^{(D)N}}.$$

b) *Powierzchnie elementów «zaburzone»*. Korzystając z rozważań w p. a) możemy napisać

$$(2.12) \quad N_{0-\alpha w-\beta w}^{(r)D} = N_{0\alpha w-\beta w}^{(i)}, \quad N_{0-\alpha w-\beta w}^{(r)D} = \int_{\Omega_{1j2}^{(r)}} (\mathbf{c}^{(r)} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}^{(r)}.$$

Symbol $0\alpha W-\beta W$ oznacza, że cząstki padają z ośrodka i z wewnętrznej powierzchni elementu α ($\alpha = 1 \vee 2$) na wewnętrzną powierzchnię elementu β ($\beta = 2 \vee 1$), przy czym jeśli $\alpha = 1$ to $\beta = 2$ i odwrotnie. Strumień cząstek padający na wewnętrzną powierzchnię elementu $\beta - N_{0\alpha w-\beta w}^{(i)}$ możemy złożyć z strumienia $N_{0-\beta w}^{(i)}$, padającego tylko z ośrodka i strumienia interakcyjnego $N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}$ pochodzącego z wewnętrznej powierzchni elementu α :

$$(2.13) \quad N_{0\alpha w-\beta w}^{(i)} = N_{0-\beta w}^{(i)} + N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}.$$

Strumienie te wyrażają się poprzez funkcje rozkładu następująco:

$$(2.14) \quad N_{0-\beta w}^{(i)} = \int_{\Omega_{1,2}^c} (-\mathbf{c}_{0\beta w} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\beta},$$

$$(2.15) \quad N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)} = \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{\alpha\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{\alpha w-\beta w}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\beta} - \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{0\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta w}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\beta},$$

gdzie $f_{\alpha w-\beta w}^{(i)}$ jest funkcją rozkładu molekuł padających z wewnętrznej powierzchni elementu α na wewnętrzną powierzchnię elementu β . Tę samą funkcję można traktować jako funkcję rozkładu molekuł odbitych od wewnętrznej powierzchni elementu α , przy czym molekuły odbite pochodzą z kolei z padających na element α z ośrodka i z wewnętrznej powierzchni β . Fakt ten można wyrazić związkem

$$(2.16) \quad f_{\alpha w-\beta w}^{(i)} = f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}.$$

W strumieniu $N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}$ całkowanie zachodzi tylko po przestrzeni modułu prędkości. Zauważając, że

$$(2.17) \quad \mathbf{c}_{\alpha\beta} \equiv \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)} = c_{\alpha\alpha}^{(r)} \mathbf{d}_\alpha^{(V)},$$

znajdujemy

$$(2.18) \quad d^3 \mathbf{c}_{\alpha\beta} = c_{\alpha\alpha}^{(r)2} d c_{\alpha\alpha}^{(r)} d\Omega \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)},$$

$$(2.19) \quad d\Omega \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)} = \frac{\mathbf{d}^{(V)} \mathbf{n}_{\alpha w}}{d^2} d\Sigma_{\alpha w}^*,$$

gdzie d — odległość elementów 1, 2, $\mathbf{d}_\alpha^{(V)}$ — wektor jednostkowy w kierunku od elementu α do elementu β .

Podstawiając w poszczególnych strumieniach funkcje rozkładu $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D}$, $f_{0-\beta w}^{(i)}$, $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} &= A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp\{-B_{\beta w}^D [\alpha^{\beta w} \mathbf{c}_{\beta w} - \beta_{\beta w} (\mathbf{c}_{\beta w} \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{n}_{\beta w} - \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*]^2\}, \\ f_{0-\beta w}^{(i)} &= A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} [c_{0-\beta w}^{(i)} + \mathbf{q}]^2\}, \\ f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} &= (1 - \varepsilon_{\alpha w}) f_{0-\alpha w}^{(r)S} + \varepsilon_{\alpha w} f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} \end{aligned}$$

i obliczając strumienie $N_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D}$ oraz $N_{0-\beta w}^{(i)}$ we współrzędnych prostokątnych (w wyrażeniach podcałkowych można w tych współrzędnych dokonać separacji zmiennych), natomiast strumień $N_{\alpha w-\beta w(in)}^{(i)}$ we współrzędnych sferycznych (w strumieniu tym całkowanie przeprowadza się tylko po przestrzeni modułu prędkości) dostajemy:

$$(2.21) \quad N_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} = A_{0\alpha w-\beta w}^D I_{0\alpha w-\beta w}^D (1) I_{0\alpha w-\beta w}^D (2) I_{0\alpha w-\beta w}^D (3) \exp\{-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w-\beta w}^{*2}\} \equiv A_{0\alpha w-\beta w}^D \bar{I}_{0\alpha w-\beta w}^D,$$

$$(2.22) \quad N_{0-\beta w}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} I_{0-\beta w}^{(i)(N)} (1) I_{0-\beta w}^{(i)(N)} (2) I_{0-\beta w}^{(i)(N)} (3) \equiv A_0^{(i)} \bar{I}_{0-\beta w}^{(i)(N)},$$

$$(2.23) \quad \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{0\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\beta} = -d\Omega \mathbf{c}_{0\beta} (\mathbf{d}_\alpha^V \mathbf{n}_{\beta w}) I_{0\beta w}^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} \equiv A_0^{(i)} I_{0\beta w}^{(i)el} d\Sigma_{\alpha w}^*,$$

$$d\Omega \mathbf{c}_{0\beta} \equiv d\Omega \mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)},$$

$$(2.24) \quad \int_{\Omega^c} (-\mathbf{c}_{z\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) f_{\alpha w - \beta w}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\beta} = -[(1 - \varepsilon_{zw})(\mathbf{d}_z^{(V)} \mathbf{n}_{\beta w}) A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(V)} q^2\} I_{0-\alpha w}^{(r)s} + \\ + \varepsilon_{zw}(\mathbf{d}_z^{(V)} \mathbf{n}_{\beta w}) I_{0\beta w - \alpha w}^{(r)D} A_{0\beta w - \alpha w}^D \exp\{-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}\}] \frac{(\mathbf{d}_\alpha^{(V)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} \equiv$$

$$\equiv A_0^{(i)} I_{0-\alpha w}^{(r)(s)el} d\Sigma_{\alpha w} + A_{0\beta w - \alpha w}^D I_{0-\beta w - \alpha w}^{(D)(r)el} d\Sigma_{\alpha w},$$

$$(2.25) \quad I_{0-\alpha w}^{(r)sel} = \int_0^\infty c^{(r)3} \exp(-B_0^{(i)} \{c^{(r)2} + 2c^{(r)}[(\mathbf{d}_V \mathbf{q}) - (\mathbf{d}_V \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{n}_{\alpha w} \mathbf{q})]\}) dc^{(r)},$$

$$(2.26) \quad I_{0\beta w - \alpha w}^{(r)Del} = \int_0^\infty c^{(r)3} \exp\{-B_{\alpha w}^D c^{(r)2} [\alpha_{\alpha w}^2 + (\beta_{\alpha w}^2 - 2\alpha_{\alpha w} \beta_{\alpha w})(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2]\} \times \\ \times \exp\{2B_{\alpha w}^D c^{(r)} [\alpha_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*) - \beta_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^* \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})]\} dc^{(r)}.$$

Wielkości $I_{0\alpha w - \beta w}^D$ można uzyskać z wielkości $I_{0-\alpha(V)}^D$, figurujących w (2.8) przez formalną zamianę symboli $0-\alpha(V)$ na $0\alpha W-\beta W$; podobnie wielkości $I_{0-\beta w}^{(i)}$ z wielkości $I_{0-\alpha(V)}^{(i)}$ [wzór (2.10)] przez zamianę $0-\alpha(V)$ na $0-\beta(V)$. Stałe $A_{0\alpha w - \beta w}^D$ i $A_{0\beta w - \alpha w}^D$ są nieznane. Możemy je wyznaczyć z równania (2.12), które w rzeczywistości reprezentuje sobą układ dwu równań: jedno dla $\alpha = 1, \beta = 2$, drugie dla $\alpha = 2, \beta = 1$. Rozwiązując układ (2.12) znajdujemy ostatecznie:

$$(2.27) \quad A_{01w-2w}^D = \frac{b_1 a_2 + c_1 b_2}{a_1 a_2 - c_1 c_2},$$

$$(2.28) \quad A_{02w-1w}^D = \frac{a_1 b_2 + c_2 b_1}{a_1 a_2 - c_1 c_2},$$

gdzie

$$(2.29) \quad a_1 = \bar{I}_{01w-2w}^D, \quad c_1 = I_{02w-1w}^{(D)(r)el} d\Sigma_{1w}, \\ b_1 = A_0^{(i)} \bar{I}_{0-2w}^{(i)} + d\Sigma_{1w} (I_{0-1w}^{(s)(r)el} - I_{0-2w}^{(i)(el)}) A_0^{(i)},$$

a_2, b_2, c_2 zaś otrzymujemy przez formalną zamianę wskaźników $1 \rightleftharpoons 2$.

Fakt, że układ równań ciągłości (2.12) daje się ściśle analitycznie rozwiązać, wiąże się z tym, że w naszym zagadnieniu odpada cała geometria związana ze skończonymi rozmiarami ciał. W przypadku ciał o rozmiarach skończonych w strumieniu (2.15) w pierwszej całce nie można wynieść stałej $A_{0\beta w - \alpha w}^D$ przed znak całki (stała ta zależy od punktu na powierzchni ciała, a różnym kierunkom $\mathbf{c}^{\alpha\beta}$ odpowiadałyby różne punkty) i w ten sposób układ równań ciągłości (2.12) stanowi układ dwu skomplikowanych równań całkowych w 4 zmiennych (punktowi na powierzchni jednego ciała odpowiadają dwie zmienne), który praktycznie można próbować rozwiązać jedynie w sposób przybliżony.

Zaniedbując w rozwiązaniach równań ciągłości (2.27) i (2.28) nieskończenie małe uzyskujemy:

$$(2.30) \quad A_{01w-2w}^D = \frac{\tilde{b}_1}{a_1}, \quad A_{02w-1w}^D = \frac{\tilde{b}_2}{a_2}, \quad \tilde{b}_1 = A_0^{(i)} \bar{I}_{0-2w}^{(i)}, \quad \tilde{b}_2 = A^{(i)} \bar{I}_{0-1w}^{(i)},$$

co odpowiada rozwiązaniom przy pominięciu drugiego elementu. Zaniedbując natomiast w rozwiązaniach nieskończenie małe drugiego rzędu dostajemy:

$$(2.31) \quad A_{01w-2w}^D = \frac{b_1 a_2 + c_1 \tilde{b}_2}{a_1 a_2}, \quad A_{02w-1w}^D = \frac{a_1 b_2 + c_2 \tilde{b}_1}{a_1 a_2}.$$

Jest oczywiste, że dla uchwycenia oddziaływania nieskończenie małych elementów musimy w rozwiązaniach równań ciągłości zachować co najmniej wyrazy proporcjonalne do $d\Sigma$, gdyż one, między innymi, są odpowiedzialne za to oddziaływanie. Przyjęcie w całkach oddziaływania (1.3), (1.4), (1.6), (1.7) rozwiązań niezaburzonych (2.30) prowadziłoby do błędnego wyniku, gdyż nie uzyskalibyśmy wszystkich przyczynków do oddziaływania interakcyjnego proporcjonalnych do $d\Sigma$, na ten fakt zwrócimy jeszcze uwagę przy obliczaniu całek oddziaływania.

3. Specyfikacja całek oddziaływania. Całki oddziaływania wyrażamy najpierw w układach lokalnych $x^{(l)}, y^{(l)}, z^{(l)}$, oś $z^{(l)}$ takiego układu jest skierowana wzdłuż normalnej do elementu, oś $x^{(l)}$ leży w płaszczyźnie $(z^{(l)}, z)$, a następnie transformujemy do układu globalnego x, y, z według macierzy transformacyjnej a_{kl} :

$$(3.1) \quad a_{kl} = \begin{pmatrix} -\cos \vartheta_{nV} \cos \varphi_{nV}, & \sin \varphi_{nV}, & \sin \vartheta_{nV} \cos \varphi_{nV} \\ -\cos \vartheta_{nV} \sin \varphi_{nV}, & -\cos \varphi_{nV}, & \sin \vartheta_{nV} \sin \varphi_{nV} \\ \sin \vartheta_{nV}, & 0, & \cos \vartheta_{nV} \end{pmatrix},$$

gdzie $\vartheta_{n\alpha V}$, $\varphi_{n\alpha V}$ są kątami azymutalnym i biegunowym normalnej $\mathbf{n}_{\alpha V}$ (wewnętrznej lub zewnętrznej elementu 1 lub 2) w układzie absolutnym x, y, z . Całki typu \mathbf{F}_{10w} , \mathbf{F}_{10z} określone wewnątrz i zewnątrz, dla elementu 1 i 2, możemy przedstawić w postaci jednej całki:

$$(3.2) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0V}^{(i)} = -m \int_{\Omega_{1/2}^{(i)}} \mathbf{c}_{0\alpha} (\mathbf{c}_{0\alpha} \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} d\Sigma_{\alpha}, \quad V \equiv wVz.$$

Podstawiając (3.3) $f_{0-\alpha V}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}[\mathbf{c}_{0\alpha} + \mathbf{q}]^2\}$ i uwzględniając fakt, że w współrzędnych prostokątnych wyrażenie podcałkowe daje się rozdzielić, znajdujemy w układzie lokalnym:

$$(3.4) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0V}^{(i)'} = mA_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}q^2\} d\Sigma_{\alpha} \mathbf{I}_{\alpha 0V}^{(i)'}.$$

$$(3.5) \quad I_{\alpha 0V k}^{(i)'} = I_{\alpha 0V k}^{(i)}(1) I_{\alpha 0V k}^{(i)}(2) I_{\alpha 0V k}^{(i)}(3), \quad k = 1, 2, 3 \equiv (x, y, z),$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} I_{\alpha 0V k}^{(i)}(1) &= \int_{-\infty}^{\infty} (c_{0\alpha x})^{\delta 1k} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha x}^2 + 2c_{0\alpha x} q'_{\alpha V x}]\} dc_{0\alpha x}, \\ I_{\alpha 0V k}^{(i)}(2) &= \int_{-\infty}^{\infty} (c_{0\alpha y})^{\delta 2k} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha y}^2 + 2c_{0\alpha y} q'_{\alpha V y}]\} dc_{0\alpha y}, \\ I_{\alpha 0V k}^{(i)}(3) &= -\int_0^{-\infty} (c_{0\alpha z})^{(1+\delta 3k)} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha z}^2 + 2c_{0\alpha z} q'_{\alpha V z}]\} dc_{0\alpha z}, \end{aligned}$$

δ Kroneckera.

Zamiast całek $\mathbf{F}_{10w}^{(r)}$, $\mathbf{F}_{10z}^{(r)}$ rozważamy całkę ogólniejszą

$$(3.7) \quad \mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(r)} = -m \int_{\Omega_{1/2}^{(r)}} \mathbf{c}_{\alpha\alpha V} (\mathbf{c}_{\alpha\alpha V} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha V} d\Sigma_{\alpha V}.$$

Podstawiając

$$(3.8) \quad f_{0-\alpha V}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)S} + \varepsilon_{\alpha V} f_{0-\alpha V}^{(r)D},$$

gdzie

$$(3.9) \quad f_{0-\alpha V}^{(r)s} = f_{0-\alpha V}^{(i)} [c_{0-\alpha V}^{(i)}(c_{0-\alpha V}^{(r)})], \quad c_{0-\alpha V}^{(i)}(c_{0-\alpha V}^{(r)}) = c_{0-\alpha V}^{(r)} - 2(c_{0-\alpha V}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \mathbf{n}_{\alpha V},$$

$$(3.10) \quad f_{0-\alpha V}^{(r)D} = A_{0-\alpha V}^D \exp \{ -B_{\alpha V}^D [\alpha_{\alpha V} c_{0-\alpha V}^{(r)} - \beta_{\alpha V} (c_{0-\alpha V}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \mathbf{n}_{\alpha V} - \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*]^2 \},$$

znajdujemy

$$(3.11) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0 V}^{(r)} = -m(1 - \varepsilon_{\alpha V}) d\Sigma_{\alpha V} A_0^{(i)} \exp \{ -B_0^{(i)} q^2 \} [I_{\alpha 0 V}^{(i)} - 2\mathbf{n}_{\alpha V} I_{\alpha 0 V}^{(i)}] + \\ - m\varepsilon_{\alpha V} d\Sigma_{\alpha V} A_{0-\alpha V}^D \exp \{ -B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2} \} I_{0-\alpha V}^{(r)D},$$

$$(3.12) \quad I_{0-\alpha V k}^{(r)D} = I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(1) I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(2) I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(3),$$

$$I_{0-\alpha(V)k}^{(r)D}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} (c_x^{(r)})^{\delta 1k} \exp \{ -B_{\alpha V}^D [\alpha_{\alpha V}^2 c_x^{(r)2} - 2\alpha_{\alpha V} c_x^{(r)} q_{0-\alpha V}^{*1}] \} dc_x^{(r)},$$

$$(3.13) \quad I_{0-\alpha(V)k}^{(r)D}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} (c_y^{(r)})^{\delta 2k} \exp \{ -B_{\alpha V}^D [\alpha_{\alpha V}^2 c_y^{(r)2} - 2c_y^{(r)} \alpha_{\alpha V} q_{0-\alpha V}^{*1}] \} dc_y^{(r)},$$

$$I_{0-\alpha V k}^{(r)D}(3) = \int_0^{\infty} (c_z^{(r)})^{1+\delta 3k} \exp \{ -B_{\alpha V}^D \{ (\alpha_{\alpha V}^2 + \beta_{\alpha V}^2 - 2\alpha_{\alpha V} \beta_{\alpha V}) c_z^{(r)2} \} \} \times \\ \times \exp \{ -2B_{\alpha V}^D c_z^{(r)} [-\alpha_{\alpha V} q_{0-\alpha V}^{*1} + \beta_{\alpha V} (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*)] \} dc_z^{(r)}.$$

W całce $F_{\alpha i n \beta}$ występuje tylko całkowanie po przestrzeni modułu prędkości; zachodzi więc konieczność obliczenia elementów kątów bryłowych $d\Omega \mathbf{c}_{\beta\beta}$, $d\Omega \mathbf{c}_{0\beta\beta}$. Jeśli przez $d\mathbf{v}$ oznaczać wersor w kierunku od elementu 1 do 2, to wektory prędkości $\mathbf{c}_{\beta\beta}$ (skierowany do elementu β do α) i $\mathbf{c}_{0\beta\beta}$ (skierowany również do elementu β do α) można przedstawić w postaci:

$$(3.14) \quad \mathbf{c}_{\beta\beta} = c_{\beta\beta} \mathbf{d}_V (-1)^{1+\beta}, \quad \mathbf{c}_{0\beta\beta} \equiv \mathbf{c}_{\beta\beta}.$$

Na podstawie tych związków mamy

$$(3.15) \quad d\Omega \mathbf{c}_{\beta\beta} \equiv d\Omega \mathbf{c}_{0\beta\beta} = (-1)^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Podstawiając

$$(3.16) \quad f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\beta w}) f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w} f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)D},$$

gdzie

$$(3.17) \quad f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)D} = A_{0\alpha w - \beta w}^D \exp \{ -B_{\beta w}^D [\alpha_{\beta w} c_{\beta\beta} - \beta_{\beta w} (c_{\beta\beta} \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{n}_{\beta w} - \mathbf{q}_{0\alpha w - \beta w}^*]^2 \},$$

znajdujemy:

$$(3.18) \quad \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} = -m d\Sigma_{\beta w} (-1)_{ii}^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{d}_V \times [(1 - \varepsilon_{\beta w}) I_{\alpha i n \beta}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} - I_{\alpha i n \beta}^{(i)}],$$

$$(3.19) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp \{ -B_0^{(i)} q^2 \} \int_0^\infty c_{0\beta}^4 \exp \{ -B_0^{(i)} [c_{0\beta}^2 + 2c_{0\beta} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q})] \} dc_{0\beta},$$

$$(3.20) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} = A_{0\alpha w - \beta w}^D \exp \{ -B_{\beta w}^D q_{0\alpha w - \beta w}^{*2} \} \int_0^\infty c_{\beta\beta}^4 \exp \{ -B_{\beta w}^D (c_{\beta\beta}^2 \gamma + 2\delta c_{\beta\beta}) \} dc_{\beta\beta},$$

$$\gamma = \alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w}) (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2,$$

$$\delta = (-1)^{1+\beta} \beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) (\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w - \beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w - \beta w}^*),$$

$$(3.21) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)s} = \int_0^\infty c_{\beta\beta}^4 f_{0\alpha w - \beta w}^{(r)s} dc_{\beta\beta}.$$

W funkcji rozkładu $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ kierunek $c_{\beta\beta}$ od elementu β do elementu α musi mieć odpowiednik w prędkości cząstki padającej $\mathbf{c}_{0-\beta w}^{(i)}$ z otoczenia na element β_w ($\mathbf{c}_{0-\beta w}^{(i)}$ nie może pochodzić z elementu α , bo element jest nieskończenie mały). Mamy zatem

$$(3.22) \quad \begin{aligned} f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} &= f_{0-\beta w}^{(i)}[\mathbf{c}_{0-\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)})] = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}[\mathbf{c}_{0\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)}) + \mathbf{q}]^2\}, \\ \mathbf{c}_{0\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)}) &= \mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)} - 2(\mathbf{c}_{\beta\beta}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta w})\mathbf{n}_{\beta w}. \end{aligned}$$

Korzystając z relacji (3.14), otrzymujemy $I_{\alpha i n \beta}^{(r)s}$ w postaci jawnej

$$(3.23) \quad \begin{aligned} I_{\alpha i n \beta}^{(r)s} &= A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\} \int_0^\infty c_{\beta\beta}^4 \exp\{-B_0^{(i)}\{c_{\beta\beta}^2 + 2(-1)^{1+\beta} c_{\beta\beta} [(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - \\ &\quad - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})]\} dc_{\beta\beta}. \end{aligned}$$

Określenie $F_{\alpha i n 0}$

Podstawiamy

$$(3.24) \quad \begin{aligned} f_{0-\alpha w}^{(r)} &= (1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0-\alpha w}^{(r)D}, \\ f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} &= (1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}. \end{aligned}$$

Pamiętając, że

$$(3.25) \quad f_{0-\alpha w}^{(r)s} = f_{0-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)})), \quad \mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}) = \mathbf{c}^{(r)} - 2(\mathbf{c}^{(r)} \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w},$$

dostajemy

$$(3.26) \quad -m \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})f_{0-\alpha w}^{(r)s} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} = -F_{0-\alpha w}^{(i)} d\Sigma_{\alpha w}^{-1} - 2m \mathbf{n}_{\alpha w} I_{0-\alpha w}^{(i)s} A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\},$$

gdzie

$$(3.27) \quad I_{0-\alpha w}^{(i)s} = \int_{\Omega_{1/2}^c} (\mathbf{c}_{0-\alpha w}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w})^2 \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0-\alpha w}^2 + 2\mathbf{c}_{0\alpha w} \cdot \mathbf{q}]\} dc_{0\alpha-wx} dc_{0-\alpha wy} dc_{0-\alpha wz}.$$

Podobnie funkcja rozkładu molekuł odbitych $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s}$ związana jest z funkcją rozkładu molekuł padających $f_{0\beta w-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}))$. Możemy napisać

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \mathbf{n}_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} &= \\ &= \int_{\Omega_{1/2}^c} [\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)} - 2(\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w}]f_{0\beta w-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)})(-\mathbf{c}_{0\beta w-\alpha w}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})d^3 \mathbf{c}_{0\alpha w-\beta w}. \end{aligned}$$

Całkowanie po półprzestrzeni prędkości $\Omega_{1/2}^c$ prowadzimy w ten sposób, że obszar całkowania $\Omega_{1/2}^c$ rozbijamy na dwa: jeden ($\Omega_{1/2}^c - \Omega_{\Sigma\beta w}^c$), w którym na element αW przychodzą tylko cząsteczki z otoczenia o funkcji rozkładu $f_{0-\alpha w}^{(i)}$, drugi $\Omega_{\Sigma\beta w}^c$, w którym na element αw przychodzą cząsteczki z elementu β o funkcji rozkładu $f_{\beta w-\alpha w}^{(i)}$. Zgodnie z tym mamy

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega_{1/2}^c} \mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} &= \int_{\Omega_{1/2}^c - \Omega_{\Sigma\beta w}^c} [\mathbf{c}_{0\alpha}^{(i)} - 2(\mathbf{c}_{0\alpha}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w}]f_{0-\alpha w}^{(i)}(-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} + \\ &+ \int_{\Omega_{\Sigma\beta w}^c} [\mathbf{c}_{\beta w}^{(i)} - 2(\mathbf{c}_{\beta w\alpha}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w})\mathbf{n}_{\alpha w}](-\mathbf{c}_{\beta w\alpha}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w})f_{\beta w-\alpha w}^{(i)}d^3 \mathbf{c}_{\beta\alpha}^{(i)}, \\ \Omega_{\Sigma\beta w}^c &\equiv \Omega^c \times d\Omega_{\Sigma\beta w}. \end{aligned}$$

Funkcja rozkładu cząstek padających $f_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}$ ($\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}$) równoważna jest funkcji rozkładu molekuł odbitych od elementu β_w , a przychodzących z otoczenia i z elementu α_w , mianowicie

$$(3.30) \quad f_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}) = f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}).$$

Dla funkcji tej mamy

$$(3.31) \quad f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}) = (1 - \varepsilon_{\beta_w})f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)s}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}) + \varepsilon_{\beta_w}f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)D}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}).$$

W odbiciu zwierciadlanym, prędkości «odbitej» $\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}$ odpowiada wektor prędkości cząsteczki padającej $\mathbf{c}_{0-\beta_w}^{(i)}$ ($\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)}$) pochodzącej z otoczenia według relacji:

$$(3.32) \quad \mathbf{c}_{0-\beta_w}^{(i)}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)}) = \mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} - 2(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})\mathbf{n}_{\beta_w}.$$

Funkcja rozkładu $f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)s}$ molekuł odbitych zwierciadlanie jest więc następująca:

$$(3.33) \quad f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)s} = A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}[\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} - 2(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})\mathbf{n}_{\beta_w} + \mathbf{q}]^2\}.$$

Dalej mamy

$$(3.34) \quad f_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)D} = A_{0\alpha_w-\beta_w}^D \exp\{-B_{\beta_w}^D[\alpha_{\beta_w}\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} - \beta_{\beta_w}(\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})\mathbf{n}_{\beta_w} + \mathbf{q}_{0\alpha_w-\beta_w}^*]^2\}.$$

Uwzględniając jeszcze, że

$$(3.35) \quad \mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)} = \mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)} = (-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}\mathbf{d}_V,$$

$$d\Omega_{\Sigma\beta_w} \equiv d\Omega\mathbf{c}_{\beta_w-\alpha_w}^{(i)} = (-1)^{1+\beta}\frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})}{d^2}d\Sigma_{\beta_w},$$

oraz, podstawiając znalezione wielkości do (3.29), znajdujemy

$$(3.36) \quad \int_{\Omega_{1/2}^F} \mathbf{c}_{\alpha_w}(\mathbf{c}_{\alpha_w} \cdot \mathbf{n}_{\alpha_w})f_{0\beta_w-\alpha_w}^{(r)s}d^3\mathbf{c}_{\alpha_w} = \mathbf{F}_{0-\alpha_w}^{(i)}(md\Sigma_{\alpha_w}) + 2\mathbf{n}_{\alpha_w}A_0^{(i)}\exp(-B_0^{(i)}q^2)I_{0-\alpha_w}^{(i)s} +$$

$$- (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha_w})[\mathbf{d}_V - 2\mathbf{n}_{\alpha_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha_w})](-1)^{1+\beta}\frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})}{d^2}d\Sigma_{\beta_w} \times$$

$$\times \{A_0^{(i)}\exp(-B_0^{(i)}q^2)I_{0-\alpha_w}^{(i)F} - (1 - \varepsilon_{\beta_w})A_0^{(i)}\exp(-B_0^{(i)}q^2)I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)sF} +$$

$$- \varepsilon_{\beta_w}A_{0\alpha_w-\beta_w}^D\exp(-B_{\beta_w}^Dq_{0\alpha_w-\beta_w}^{*2})I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)DF}\},$$

gdzie

$$(3.37) \quad I_{0-\alpha_w}^{(i)F} = \int_0^\infty c_{\beta_w-\alpha_w}^4 \exp\langle -B_0^{(i)}[c_{\beta_w-\alpha_w}^2 + 2(-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q})] \rangle dc_{\beta_w-\alpha_w},$$

$$(3.38) \quad I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)sF} = \int_0^\infty c_{\beta_w-\alpha_w}^4 \exp\langle -B_0^{(i)}\{c_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)2} + 2(-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}[(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})(\mathbf{n}_{\beta_w} \cdot \mathbf{q})]\} \rangle dc_{\beta_w-\alpha_w},$$

$$(3.39) \quad I_{0\alpha_w-\beta_w}^{(r)DF} = \int_0^\infty c_{\beta_w-\alpha_w}^4 \exp\langle -B_{\beta_w}^D\{[\alpha_{\beta_w}^2 + \beta_{\beta_w}^2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})^2 - 2\alpha_{\beta_w}\beta_{\beta_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})^2]\}c_{\beta_w-\alpha_w}^{(r)2} \rangle \times$$

$$\times \exp\langle -2B_{\beta_w}^D(-1)^{1+\beta}c_{\beta_w-\alpha_w}[-\alpha_{\beta_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0-\beta_w}^*) + \beta_{\beta_w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta_w})(\mathbf{n}_{\beta_w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha_w-\beta_w}^*)] \rangle dc_{\beta_w-\alpha_w}.$$

Pierwsze dwa wyrazy (3.36) i pierwszy wyraz w nawiasie klamrowym odpowiadają strumieniowi cząstek odbitych zwierciadlanie od powierzchni α_w w obszarze bryłowym $(\Omega_{1/2} - \Omega_{\Sigma\beta_w})$, dwa pozostałe wyrazy w nawiasie klamrowym odpowiadają strumieniowi cząstek odbitych zwierciadlanie od powierzchni α_w w obszarze bryłowym $\Omega_{\Sigma\beta_w}$. Warto

zwrócić uwagę na fakt, że dwa pierwsze wyrazy (przed nawiasem klamrowym) są identyczne z wyrazami w całce (3.26), co nie powinno być zaskoczeniem, gdyż reprezentują strumień odbity od powierzchni α_w pod nieobecność drugiego elementu β . Pozostałe całki w wyrażeniu na F_{ain0} znajdujemy bez trudu. Mamy

$$(3.40) \quad \int_{\Omega_{1/1}^*} \mathbf{c}_{\alpha z} (\mathbf{c}_{\alpha z} \cdot \mathbf{n}_{zw}) f_{0-\alpha w}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}_{\alpha z} = A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D},$$

$$(3.41) \quad \int_{\Omega_{1/2}^*} \mathbf{c}_{\alpha z} (\mathbf{c}_{\alpha z} \cdot \mathbf{n}_{zw}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} d^3 \mathbf{c}_{\alpha z} = A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D},$$

gdzie wektor $\mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}$ jest wektorem, który występował już przy obliczaniu $F_{0-\alpha V}^{(r)}$, natomiast wektor $\mathbf{I}_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}$ daje się utworzyć z wektora $\mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}$ przez zamianę $\mathbf{q}_{0-\alpha w}^*$ na $\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*$. W ten sposób otrzymujemy

$$(3.42) \quad \mathbf{F}_{ain0} = -m \{ -(1 - \varepsilon_{\alpha w})(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})[\mathbf{d}_V - 2\mathbf{n}_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})] \times \\ \times (-1)^{1+\beta} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2} d\Sigma_{\beta w} [A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(i)F} - (1 - \varepsilon_{\beta w}) A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0\alpha w-\beta w}^{(s)F} + \\ - \varepsilon_{\beta w} A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp(-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w-\beta w}^{*2}) \mathbf{I}_{0\alpha w-\beta w}^{(D)F}] + \\ + \varepsilon_{\alpha w} A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D} (\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) - \varepsilon_{\alpha w} A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D} \}.$$

Ostateczne wyrażenie na siłę, działającą na którykolwiek element układu dwu dowolnie zorientowanych nieskończenie małych elementów, poruszających się w ośrodku swobodno-molekularnym ze stałą dowolnie zorientowaną prędkością \mathbf{q} , uzyskane przy założeniu zmodyfikowanego modelu odbicia Maxwella z anizotropową częścią dyfuzyjną, jest następujące:

$$(3.43) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha 0} + \mathbf{F}_{ain\beta},$$

$$(3.44) \quad \mathbf{F}_{\alpha 0} = \mathbf{F}_{0\alpha}^{(i)} + \mathbf{F}_{0\alpha}^{(r)} = \mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(i)} + \mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(r)} + \mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(r)},$$

$$(3.45) \quad \mathbf{F}_{ain} = \mathbf{F}_{ain0} + \mathbf{F}_{ain\beta}^{(i)},$$

$$(3.46) \quad \mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(i)} = m A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(i)} d\Sigma_\alpha,$$

$$(3.47) \quad \mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(r)} = -m(1 - \varepsilon_{\alpha V}) d\Sigma_{\alpha V} A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) [\mathbf{I}_{\alpha V}^{(i)} - 2\mathbf{n}_{\alpha V} \mathbf{I}_{\alpha V}^{(i)z}] + \\ - m \varepsilon_{\alpha V} d\Sigma_{\alpha V} A_{0-\alpha V}^D \exp(-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(r)},$$

$$(3.48) \quad \mathbf{F}_{ain\beta}^{(i)} = -m d\Sigma_{\beta w} (-1) \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \mathbf{d}_V \times \\ [(1 - \varepsilon_{\beta w}) \mathbf{I}_{ain\beta}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} \mathbf{I}_{ain\beta}^{(r)D} - \mathbf{I}_{ain\beta}^{(i)}],$$

$$(3.49) \quad \mathbf{F}_{ain0} = -m \left\{ -(1 - \varepsilon_{\alpha w}) \left\{ (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})[\mathbf{d}_V - 2\mathbf{n}_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})] (-1)^{1+\beta} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2} d\Sigma_{\beta w} \times \right. \right. \\ \times [A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(i)F} - (1 - \varepsilon_{\beta w}) A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \mathbf{I}_{0\beta w}^{(s)F} - \\ - \varepsilon_{\beta w} A_{0-\beta w}^D \exp(-B_{\beta w}^D q_{0-\beta w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\beta w}^{(D)F}] \left. \right\} + \varepsilon_{\alpha w} A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D} (\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) + \\ \left. - \varepsilon_{\alpha w} A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D} \right\} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Wielkości wektorowe $\mathbf{I}_{0\alpha V}^{(i)}$ i $\mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(r)(D)}$ możemy uzyskać z wyspecyfikowanych uprzednio w układzie lokalnym wielkości wektorowych $\mathbf{I}_{0\alpha V}^{(i)}$ i $\mathbf{I}_{0-\alpha V}^{(r)(D)}$, przez transformację z układu lokalnego do globalnego według reguły transformacji tensorów:

$$(3.50) \quad I_{0\alpha V m}^{(i)} = a_{mn} I_{0\alpha V n}^{(i)'},$$

gdzie a_{mn} jest macierzą transformacyjną przejścia

$$(3.51) \quad a_{mn} = \begin{pmatrix} -\cos\vartheta_{nV} \cos\varphi_{nV}, & \sin\varphi_{nV}, & \sin\vartheta_{nV} \cos\varphi_{nV} \\ -\cos\vartheta_{nV} \sin\varphi_{nV}, & -\cos\varphi_{nV}, & \sin\vartheta_{nV} \sin\varphi_{nV} \\ \sin\vartheta_{nV}, & 0, & \cos\vartheta_{nV} \end{pmatrix},$$

zaś φ_{nV} , ϑ_{nV} oznaczają kąty biegunowy i azymutalny normalnej \mathbf{n}_V , reprezentującej układ lokalny (oś $z^{(i)}$ układu lokalnego skierowana równoległe do \mathbf{n}_V) w układzie globalnym.

4. Obliczenie całek oddziaływania pędowego. Dla pełnego rozwiązania zagadnienia musimy jeszcze obliczyć całki, które występują w stałych $A_{0-\alpha V}^D$ i $A_{0-\beta w}^D$, uzyskanych z rozwiązania równań ciągłości, oraz całki oddziaływania, występujące w wyrażeniach $\mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(i)}$, $\mathbf{F}_{0-\alpha V}^{(r)}$, $\mathbf{F}_{\alpha in\beta}$ i $\mathbf{F}_{\alpha in0}$. Stała $A_{0-\alpha V}^D$ określona jest przez całki $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$ (1), $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$ (2), $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$ (3), $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ (1), $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ (2), $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ (3).

Wyrażają się one następująco:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} n = 1, 2 \quad I_{0-\alpha V}^{(i)(N)'}(n) &= \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp(q_n'^2 B_0^{(i)}), \\ n = 3 \quad I_{0-\alpha V}^{(i)(N)'}(3) &= \\ &= \frac{1}{2B_0^{(i)}} + \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp[B_0^{(i)}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})^2] \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\}, \end{aligned}$$

gdzie Φ — całka prawdopodobieństwa oraz

$$(4.2) \quad \begin{aligned} n = 1, 2 \quad I_{0-\alpha V}^{D(N)'}(n) &= \frac{1}{\alpha_{\alpha V}} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D}} \exp(q_{0-\alpha V n}^{*2} B_{\alpha V}^D), \\ n = 3 \quad I_{0-\alpha V}^{D(N)'}(3) &= \frac{1}{2B_{\alpha V}^D(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*)}{\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2}} \times \\ &\times \exp(B_{\alpha V}^D(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*)^2) \times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{B_{\alpha V}^D} \frac{(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})}{|\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}|} (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wielkości $I_{0-\alpha V}^{(i)(N)}$, $I_{0-\alpha V}^{D(N)}$ są skalarami i dlatego w układach lokalnym i globalnym wyrażają się tak samo. W oparciu o (4.1), (4.2) uzyskujemy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \bar{I}_{0-\alpha V}^{(i)(N)} &= \frac{\pi}{2B_0^{(i)2}} \exp[B_0^{(i)}(q^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})^2)] + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \left(\frac{\pi}{B_0^{(i)}} \right)^{2/3} \exp(B_0^{(i)} q^2) \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\}, \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \bar{I}_{0-\alpha V}^{D(N)} &= \frac{\pi}{2B_{\alpha V}^{D2}(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2 \alpha_{\alpha V}^2} \exp[B_0^{(i)}(q_{0-\alpha V}^{*2} - (\mathbf{q}_{0-\alpha V}^* \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}))] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*)}{\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2}} \times \frac{\pi}{\alpha_{\alpha V}^2 B_{\alpha V}^D} \exp[B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}] \times \\ &\times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{B_{\alpha V}^D} \frac{(\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})}{|\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V}|} (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{\alpha V}^*) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Z kolei stała A_0^D w- β w jest określona przez całki I_0^D w- β w(1),

$$I_{0\alpha w-\beta w}^D(2), \quad I_{0\alpha w-\beta w}^D(3), \quad I_{0-\beta w}^{(i)}(1), \quad I_{0-\beta w}^{(i)}(2), \quad I_{0-\beta w}^{(i)}(3)$$

oraz

$$I_{0-\alpha w}^{(r)s} \text{ i } I_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}.$$

Całki typu $I_{0\alpha w-\beta w}^{(D)}$ (n), $n = 1, 2, 3$, można uzyskać z całek typu $I_{0-\beta w}^{(D)(N)}(n)$ przez formalną zamianę symboli $0-\alpha(V)$ na $0\alpha W-\beta W$; podobnie całki $I_{0-\beta w}^{(i)(N)}(n)$ z całek $I_{0-\alpha(V)}^{(i)}$ przez zamianę $0-\alpha(V)$ na $0-\beta(V)$. Dla całek $I_{0-\alpha w}^{(r)s}$ i $I_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D}$ dostajemy:

$$(4.5) \quad I_{0-\alpha w}^{(r)s} = (2B_N^{(s)})^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{1}{8} \frac{\gamma_N^{(s)2}}{\beta_N^{(s)}}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma_N^{(s)}}{\sqrt{2\beta_N^{(s)}}}\right),$$

$$\beta_N^{(s)} = \beta_0^{(i)}, \quad \gamma_N^{(s)} = 2B_0^{(i)}[(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{n}_{\alpha w} \cdot \mathbf{q})],$$

$$(4.6) \quad I_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} = (2\beta_N^{(D)})^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{\gamma_N^{(D)2}}{8\beta_N^{(D)}}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma_N^{(D)}}{\sqrt{2\beta_N^{(D)}}}\right),$$

$$\beta_N^{(D)} = B_{\alpha w}^D[\alpha_{\alpha w}^2 + (-2\alpha_{\alpha w}\beta_{\alpha w} + \beta_{\alpha w}^2)(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2],$$

$$\gamma_N^{(D)} = -2B_{\alpha V}^D[\alpha_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{\beta w-\alpha w}^*) - \beta_{\alpha w}(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{q}_{\beta w-\alpha w}^* \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})],$$

gdzie D_{-n} jest funkcją walca parabolicznego.

Całki występujące w wyrażeniu $F_{\alpha 0V}^{(i)}$ można przedstawić następująco:

$$(4.7) \quad \begin{cases} n = 1, 2 & \left\{ \begin{array}{l} n \neq k \\ n = k \end{array} \right. \begin{cases} I_{\alpha 0V_k}^{(i)'}(n) = \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp(q_{\alpha V_n}^{\prime 2} B_0^{(i)}), \\ I_{\alpha 0V_k}^{(i)}(n) = -q_{\alpha V_n} \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp(q_{\alpha V_n}^{\prime 2} B_0^{(i)}), \end{cases} \\ k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$(4.8) \quad \begin{cases} n \neq k \\ n = 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{cases} \begin{cases} I_{\alpha 0V_k}^{(i)'}(3) = \frac{1}{2B_0^{(i)}} + \frac{1}{2} q_{\alpha V_z} \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} [1 - \Phi(-\sqrt{B_0^{(i)}} q_{\alpha V_z}')] \times \\ \times \exp(B_0^{(i)} q_{\alpha V_z}^{\prime 2}), \\ I_{\alpha 0V_{(k)}}^{(i)'}(3) = -\frac{q_{\alpha V_z}}{2B_0^{(i)}} - \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)5}}} \frac{1}{4} (2B_0^{(i)2} q_{\alpha V_z}^{\prime 2} + B_0^{(i)2}) \times \\ \times \exp(B_0^{(i)} q_{\alpha V_z}^{\prime 2}) [1 - \Phi(-\sqrt{B_0^{(i)}} q_{\alpha V_z}')] . \end{cases}$$

Po prostych przekształceniach, wektor $I_{\alpha 0V}^{(i)}'$ można zapisać w postaci:

$$(4.9) \quad I_{\alpha 0V_x}^{(i)'} \equiv q_{\alpha V_x} I_{xy}^{(i)}, \quad I_{\alpha 0V_y}^{(i)'} = q_{\alpha V_y} I_{xy}^{(i)}, \quad I_{\alpha 0z}^{(i)'} = q_{\alpha V_z} I_{xy}^{(i)} + I_z^{(i)},$$

gdzie $I_{xy}^{(i)}$, $I_z^{(i)}$ są skalarami, zaś

$$(4.10) \quad I_{xy}^{(i)} = -\frac{\pi}{2B_0^{(i)2}} \exp\{B_0^{(i)}[q^2 - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})^2]\} - \frac{1}{2} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) \left(\frac{\pi}{B_0^{(i)}}\right)^{3/2} \exp(B_0^{(i)} q^2) \times \\ \times \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\},$$

$$(4.11) \quad I_z^{(i)} = -\frac{1}{4} \frac{\pi^{3/2}}{B_0^{(i)5/2}} \exp(B_0^{(i)} q^2) \{1 - \Phi[-\sqrt{B_0^{(i)}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V})]\}.$$

Korzystając z reguły transformacyjnej dla tensorów mamy

$$(4.12) \quad I_{\alpha 0V_x}^{(i)} = a_{xn} I_{\alpha V_n}^{(i)'} \equiv a_{xn} q_{\alpha V_n} I_{xy}^{(i)} + a_{x3} I_z^{(i)}.$$

Zauważając, że

$$(4.13) \quad a_{xn} q'_{avn} = q_x,$$

dostajemy

$$(4.14) \quad I_{a_0 v x}^{(i)} = q_x I_{xy}^{(i)} + n_{avx} I_z^{(i)},$$

bez dodatkowej konieczności transformowania q'_{avn} do układu globalnego.

Okazuje się, że analogicznie

$$(4.15) \quad I_{a_0 v y}^{(i)} = q_y I_{xy}^{(i)} + n_{avy} I_z^{(i)},$$

$$(4.16) \quad I_{a_0 v z}^{(i)} = q_z I_{xy}^{(i)} + n_{avz} I_z^{(i)}.$$

Ogólnie zatem

$$(4.17) \quad \mathbf{I}_{a_0 v}^{(i)} = \mathbf{q} I_{xy}^{(i)} + \mathbf{n}_{av} I_z^{(i)}.$$

Całki określające $\mathbf{F}_{a_0 v}^{(r)}$ są typu podobnego do występujących w wyrażeniu $\mathbf{F}_{a_0 v}^{(i)}$. Znajdujemy:

$$(4.18) \quad \left. \begin{array}{l} n = 1, 2 \\ k = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \begin{cases} n \neq k & I_{0_{av}^{(r)D}k}(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha_{av}^2 B_{av}^D}} \exp(B_{av}^D q_{0_{av}^{(r)D}n}^{*/2}), \\ n = k & I_{0_{av}^{(r)D}k}(n) = \frac{q_{0_{av}^{(r)D}n}^{*'}}{\alpha_{av}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha_{av}^2 B_{av}^D}} \exp(B_{av}^D q_{0_{av}^{(r)D}n}^{*/2}), \end{cases}$$

$$(4.19) \quad \left. \begin{array}{l} n = 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{array} \right\} \begin{cases} n \neq k & I_{0_{av}^{(r)D}k}(3) = \frac{1}{2B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2} + \frac{\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}n}^* \cdot \mathbf{n}_{av}}{2(\beta_{av} - \alpha_{av})} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2}} \exp\{B_{av}^D(\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}n}^* \cdot \mathbf{n}_{av})^2\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\frac{B_{av}^D}{\alpha_{av} - \beta_{av}}} \frac{\beta_{av} - \alpha_{av}}{|\beta_{av} - \alpha_{av}|} (\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}n}^* \cdot \mathbf{n}_{av}) \right] \right\}, \\ n = k & I_{0_{av}^{(r)D}k}(3) = -\frac{1}{2} \frac{\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}n}^* \cdot \mathbf{n}_{av}}{B_{av}^D(\beta_{av} - \alpha_{av})^2} + \frac{1}{4B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2} \times \\ & \times \sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2}} [2B_{av}^D q_{0_{av}^{(r)D}z}^{*/2} + 1] \exp\{B_{av}^D q_{0_{av}^{(r)D}z}^{*/2}\} \times \\ & \times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\frac{B_{av}^D}{\alpha_{av} - \beta_{av}}} q_{0_{av}^{(r)D}z}^{*'} \frac{\beta_{av} - \alpha_{av}}{|\beta_{av} - \alpha_{av}|} \right] \right\}. \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, po dokonaniu transformacji wielkości »primowanych«, wektor $I_{0_{av}^{(r)D}}$ można sprowadzić do postaci:

$$(4.20) \quad \mathbf{I}_{0_{av}^{(r)D}} = \mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}}^* I_{xy}^{(r)D} + \mathbf{n}_{av} I_z^{(r)D},$$

gdzie

$$(4.21) \quad I_{xy}^{(r)D} = \frac{\pi}{2\alpha_{av}^3(\alpha_{av} - \beta_{av})^2 B_{av}^{D2}} \exp\{B_{av}^D [q_{0_{av}^{(r)D}}^{*2} - (\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}}^* \cdot \mathbf{n}_{av})^2]\} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \frac{\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}}^* \cdot \mathbf{n}_{av}}{\alpha_{av}^3(\beta_{av} - \alpha_{av}) B_{av}^D} \sqrt{\frac{\pi}{B_{av}^D(\alpha_{av} - \beta_{av})^2}} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\frac{B_{av}^D}{\alpha_{av} - \beta_{av}}} (\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}}^* \cdot \mathbf{n}_{av}) \frac{\beta_{av} - \alpha_{av}}{|\alpha_{av} - \beta_{av}|} \right] \right\} \exp(B_{av}^D q_{0_{av}^{(r)D}}^{*2}),$$

$$I_z^{(r)D} = I_{0_{av}^{(r)D}z}^{(r)D} - I_{xy}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0_{av}^{(r)D}}^* \cdot \mathbf{n}_{av}),$$

$$I_{0_{av}^{(r)D}z}^{(r)D} = I_{0_{av}^{(r)D}z}^{(r)D}(1) I_{0_{av}^{(r)D}z}^{(r)D}(2) I_{0_{av}^{(r)D}z}^{(r)D}(3).$$

Pozostałe całki, występujące w składowych $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}$ i $\mathbf{F}_{i n 0}$ i wyrażają się następująco:

$$(4.22) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)S} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) (2\beta^{(s)})^{-5/2} \Gamma(5) \exp\left(\frac{\gamma^{(s)2}}{8\beta^{(s)}}\right) D_{-5} \left(\frac{\gamma^{(s)}}{\sqrt{2\beta^{(s)}}}\right),$$

$$\gamma^{(s)} = 2B_0^{(i)}(-1)^{1+\beta}[(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})], \quad \beta^{(s)} = B_0^{(i)},$$

$$(4.23) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} = A_{0\alpha w - \beta w}^D \exp\{-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w - \beta w}^{*2}\} (2\beta^{(D)})^{-5/2} \Gamma(5) \exp\left(\frac{\gamma^{(D)2}}{8\beta^{(D)}}\right) D_{-5} \left(\frac{\gamma^{(D)}}{\sqrt{2\beta^{(D)}}}\right),$$

$$\beta^{(D)} = B_{\beta w}^D [\alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w})(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2],$$

$$\gamma^{(D)} = 2B_{\beta w}^D (-1)^{1+\beta} [\beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w - \beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w - \beta w}^*)],$$

$$(4.24) \quad I_{\alpha i n \beta}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) (2\beta^{(i)})^{-5/2} \Gamma(5) \exp\left(\frac{\gamma^{(i)2}}{8\beta^{(i)}}\right) D_{-5} \left(\frac{\gamma^{(i)}}{\sqrt{2\beta^{(i)}}}\right),$$

$$\beta^{(i)} = B_0^{(i)}, \quad \gamma^{(i)} = 2B_0^{(i)}(-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}),$$

$$(4.25) \quad I_{0-\alpha w}^{(i)F} \equiv I_{\alpha i n \beta}^{(i)} / (A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\}),$$

$$(4.26) \quad I_{0-\beta w}^{(r)(s)F} \equiv I_{\alpha i n \beta}^{(r)S} / (A_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)} q^2\}),$$

$$(4.27) \quad I_{0-\beta w}^{(r)(D)F} \equiv I_{\alpha i n \beta}^{(r)D} / (A_{0\alpha w - \beta w}^D \exp\{-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w - \beta w}^{*2}\}),$$

$$(4.28) \quad \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*) = \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^* I_{xy}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0-\alpha w}^* \rightarrow \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*) + \mathbf{n}_{\alpha w} I_z^{(r)D}(\mathbf{q}_{0-\alpha w}^* \rightarrow \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*).$$

5. Dyskusja wyrażenia na siły. Siłę działającą na element „ α ” układu można przedstawić jeszcze w innej, dogodnej do interpretacji postaci:

$$(5.1) \quad \mathbf{F}_\alpha = (\mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}) + (\mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(i)} + \mathbf{F}_{0-\alpha z}^{(r)}) + \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}.$$

Pierwsze dwa wyrazy przedstawiają składową siły, pochodzącą od cząstek padających na wewnętrzną powierzchnię elementu α z otoczenia i z elementu β , następne dwa wyrazy przedstawiają składową siły, pochodzącą od cząstek padających na zewnętrzną powierzchnię elementu α i od niej odbitych; ostatni wyraz jest składową pochodzącą od cząstek odbitych od wewnętrznej powierzchni elementu α .

Ostatnią składową $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ podobnie jak funkcję rozkładu molekuł odbitych można rozbić na składowe: «odbity» zwierciadlanie i «odbity» dyfuzyjnie, mianowicie

$$(5.2) \quad \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)} = -(1 - \varepsilon_{\alpha w}) \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(s)} - \varepsilon_{\alpha w} \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^D,$$

gdzie

$$(5.3) \quad \mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(s)} = \mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - 2[(\mathbf{F}_{0-\alpha w}^{(i)} + \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}) \mathbf{n}_{\alpha w}] \mathbf{n}_{\alpha w},$$

$$(5.4) \quad \mathbf{F}_D = m A_{0\beta w - \alpha w}^D \exp\{-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w - \alpha w}^{*2}\} \mathbf{I}_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0-\alpha w}^* \rightarrow \mathbf{q}_{0\beta w - \alpha w}^*) d\Sigma_{\alpha w}.$$

Wektor składowej «odbitej» zwierciadlanie ma analogiczną postać do wektora prędkości «odbitej» zwierciadlanie. Pojawienie się znaków minus w wyrażeniu na $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ (w $f_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ występują znaki +) związane jest z faktem, że impuls przekazywany ścianie przez cząstki odbite jest w odbiciu zwierciadlanym tak samo skierowany jak impuls pochodzący od cząstek padających na ściankę (podczas gdy wektor prędkości odbitej skierowany jest od ścianki).

Oddziaływanie interakcyjne zawarte jest w wyrazach $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$ i $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ i scharakteryzowane jest jedynie wyrazem $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$, gdyż interakcja zawarta w $\mathbf{F}_{0\beta w - \alpha w}^{(r)}$ wyraża się również poprzez $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$. Wyraz $\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)}$ jest proporcjonalny do elementarnego kąta bryłowego $d\Omega_\alpha$, pod jakim

widać element $d\Sigma_\beta$ z elementu α $\left(d\Omega_\alpha = d\Sigma_{\beta w} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2}\right)$. Interakcja znika, jeśli którykolwiek z elementów leży na linii łączącej elementy. Analiza ogólnego wyrażenia na siły jest bardzo uciążliwa. Dla uzyskania czytelnych wyników możemy przeprowadzić ją jednak w uproszczony sposób.

I tak zakładając najprostszy model «odbicia» gaz-powierzchnia (model dyfuzyjny) i najprostszą orientację elementów możemy zbadać wpływ prędkości na oddziaływanie; przyjmując najprostszy model «odbicia» i kładąc $q = 0$ możemy prześledzić wpływ orientacji elementów i wreszcie przyjmując najprostszą orientację elementów i biorąc $q = 0$ możemy przebadąć zjawisko oddziaływania ze względu na model «odbicia», co zresztą było głównym celem pracy.

W charakterze przykładu rozważymy oddziaływanie elementów o różnych temperaturach spoczywających w ośrodku, równoległych do siebie i prostopadłych do łączącej ich osi. Równość $q = 0$ pociąga za sobą $q^* = 0$ [12]. Dla uproszczenia przyjmiemy jeszcze że strony wewnętrzne i zewnętrzne elementów są sobie równoważne pod względem własności fizycznych. Uwzględniając powyższe, znajdujemy z wzorów ogólnych następujące wyrażenie na siłę działającą na element α ($\alpha, \beta = 1 \vee 2, \alpha \neq \beta$) dla probabilistyczno-deterministycznego modelu odbicia:

$$(5.5) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - m \varepsilon_\alpha \frac{d\Sigma_{\alpha w} d\Sigma_{\beta w}}{d^2} \frac{1}{\alpha_\beta} \left[b_\beta^{(1)*} + \frac{b_\alpha^0}{\alpha_\alpha} c_\beta^* \right] \Gamma_{0-\alpha w}^{(r)D} + \\ - (1 - \varepsilon_\alpha) [\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - 2(\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} \mathbf{n}_{\alpha w}) \mathbf{n}_{\alpha w}],$$

gdzie

$$(5.6) \quad \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} = -\frac{3}{8} m \sqrt{\pi} \frac{d\Sigma_\alpha d\Sigma_\beta \mathbf{d}_V}{d^2} [(2\beta_\beta^D)^{-5/2} A_{0-\beta}^D - (2B_0^{(i)})^{-5/2} A_0^{(i)}], \\ \alpha_\beta = \frac{\pi}{2(B_\alpha^D)^2 \alpha_\alpha^2 (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2}, \quad b_\beta^0 = \frac{\pi}{(2B_0^{(i)})^2} A_0^{(i)}, \\ b_\beta^{(1)*} = -2\varepsilon_\beta A_0^{(i)} (2B_0^{(i)})^{-2}, \quad c_\beta^* = 2\varepsilon_\beta (2\beta_{N\beta}^D)^{-2}, \\ \beta_{N\beta}^D = B_\beta^D [\alpha_\beta^2 + (-2\alpha_\beta \beta_\beta + \beta_\beta^2) (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2], \\ \Gamma_{0-\alpha w}^{(r)D} = \frac{\pi}{4(B_\alpha^D)^2 \alpha_\alpha^2 (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2} \sqrt{\frac{\pi}{B_\alpha^D (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2}} \mathbf{n}_{\alpha w}, \\ \beta_\beta^D = B_\beta^D [\alpha_\beta^2 + (\beta_\beta^2 - 2\alpha_\beta \beta_\beta) (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_\beta)^2], \\ A_{0-\beta}^D = A_0^{(i)} \frac{(B_\alpha^D)^2 \alpha_\alpha^2 (\alpha_\alpha - \beta_\alpha)^2}{(B_0^{(i)})^2}.$$

Wielkości różniące się tylko wskaźnikami można otrzymać przez zamianę wskaźników.

Zakładając dalej model Maxwella, tzn. kładąc $\alpha_\beta = 1, \beta_\beta = 0$ dostajemy:

$$(5.7) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - (1 - \varepsilon_\alpha) [\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} - 2(\mathbf{F}_{\alpha i n \beta}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) \mathbf{n}_{\alpha w}], \\ \mathbf{F}_{\alpha i n \beta} = -\frac{3}{8} m \sqrt{\pi} \frac{d\Sigma_\alpha d\Sigma_\beta \varepsilon_\beta \mathbf{d}_V}{d^2} A_0^{(i)} (2B_0^{(i)})^{-5/2} \left[\left(\frac{B_0^{(i)}}{B_\beta} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

W szczególności dla zwykłego modelu dyfuzyjnego

$$(5.8) \quad \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha in\beta}^{(i)}.$$

Na podstawie wzorów (5.7), (5.8), uzyskanych dla modeli Maxwella i dyfuzyjnego, możemy wyciągnąć następujące wnioski:

- 1) Wyrażenie na siłę \mathbf{F}_α określone jest tylko przez człon interakcyjny $\mathbf{F}_{\alpha in\beta}^{(i)}$.
- 2) Charakterystyczne jest, że wielkość siły działającej na element nie zależy od temperatury tego elementu: \mathbf{F}_α zależy jedynie od stosunków energetycznych otoczenie–element β i od wielkości współczynników dyfuzyjności (mieszania) $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta$.
- 3) Oddziaływanie znika, jeśli $\varepsilon_\beta = 0$ tj. w przypadku, gdy element β odbija czysto zwierciadlanie.
- 4) Dla $\varepsilon_\alpha = 0$, czyli dla przypadku gdy element α odbija cząstki w sposób czysto zwierciadlany, siła \mathbf{F}_α osiąga wartość maksymalną (przy zadanym ε_β) — efektywny pęd przycho-dzący z obszaru brylowego, wyznaczonego powierzchnią elementu β jest wskutek odbicia zreprodukowany dwukrotnie (dla $\varepsilon_\alpha = 0$, $\mathbf{F} = 2\mathbf{F}_{in\beta}^\alpha$).
- 5) Jeśli element β jest gorętszy od gazu otoczenia, to wywiera na α działanie odpychające, jeśli zimniejszy — to przyciągające.

6) Wynik (5.8) jest potwierdzeniem wyniku pracy [8], w której uzyskano wyrażenia na siły dla kul spoczywających w ośrodku dla modelu dyfuzyjnego. Potwierdzenie zawiera się w proporcjonalności siły \mathbf{F}_α do wyrazu $[(B_0^{(i)}/B_\beta)^{1/2} - 1]$ — fakt ten oznacza, że rozwiązania równań ciągłości dla elementów spoczywających przy założeniu modelu dyfuzyjnego są takie same jak w przypadku, gdy każdy z elementów spoczywa w ośrodku samotnie.

Zależność sił od odległości jest trywialna — mianowicie niezależnie od orientacji elementów, prędkości układu i modelu odbicia, siły są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości — jest to zresztą prostą konsekwencją specyfiki zagadnienia mianowicie tego faktu, że powierzchnie oddziaływujące są nieskończenie małe.

W szczególności, zaniedbując we wzorach ogólnych oddziaływanie interakcyjne wywołane obecnością drugiego elementu, możemy w prosty sposób otrzymać oddziaływanie z ośrodkiem płaskiej skończonej płytki o różnych własnościach «odbicia» po obu stronach powierzchni: dla modelu dyfuzyjnego anizotropowego

$$(5.9) \quad \mathbf{F} = \frac{\pi}{4} m \frac{A_0^{(i)}}{(B_0^{(i)})^2} \left[\sqrt{\frac{\pi}{B_z^D(\alpha_z - \beta_z)^2}} - \sqrt{\frac{\pi}{B_w^D(\alpha_w - \beta_w)^2}} \right] d\Sigma \mathbf{n}_w.$$

B. Zagadnienie wymiany ciepła

1. **Wyrażenie na wymianę ciepła.** Postępując podobnie jak w przypadku zagadnienia sił, całkowite ciepło Q_α przekazywane elementowi α ($\alpha = 1V2$) można złożyć z ciepła «nieburzonego» $Q_{\alpha 0}$, jakie byłoby przekazywane elementowi α pod nieobecność elementu β i ciepła $Q_{\alpha in}$, które jest wynikiem interakcji elementów

$$(1.1) \quad Q_\alpha = Q_{\alpha 0} + Q_{\alpha in}.$$

Ciepło $Q_{\alpha 0}$ jest sumą ciepła $Q_{\alpha 0w}$ i $Q_{\alpha 0z}$ przekazywanych odpowiednio stronie wewnętrznej i zewnętrznej elementu α

$$(1.2) \quad Q_{\alpha 0} = Q_{\alpha 0w} + Q_{\alpha 0z}.$$

Ciepło interakcyjne Q_{ain} można traktować jako złożenie ciepła $Q_{ain\beta}$, będącego różnicą pomiędzy ciepłem przychodzącym od elementu β i ciepłem, które przychodziłoby do elementu α z ośrodka, z obszaru zasłoniętego przez element β , i ciepła Q_{ain0} , które jest różnicą ciepła «wyemitowanego» z elementu α i ciepła «wyemitowanego» z elementu α pod nieobecność elementu β :

$$(1.3) \quad Q_{ain} = Q_{ain\beta} + Q_{ain0}.$$

Poszczególne ciepła wyrażają się poprzez całki po przestrzeni prędkości z elementarnych strumieni energii, określonych odpowiednimi funkcjami rozkładu w sposób następujący:

$$(1.4) \quad Q_{\alpha 0V} = m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} c_{0\alpha}^2 (-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\alpha}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} - \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha V},$$

$$(1.5) \quad Q_{ain0} = -m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} - \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha V}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right] d\Sigma_{\alpha V},$$

$$(1.6) \quad Q_{ain\beta} = m \left[\int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\beta\alpha}^2 (\mathbf{c}_{\beta\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)} d^3 \mathbf{c}_{\beta\alpha} - \int_{\Omega^c} c_{0\alpha}^2 (\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) f_{0-\beta z}^{(i)} d^3 \mathbf{c}_{0\alpha} \right] d\Sigma_{\beta w}.$$

W interakcyjnym strumieniu energii $Q_{ain\beta}$, pochodzącym od elementu β funkcja rozkładu cząsteczek padających z elementu β została zastąpiona funkcją rozkładu cząsteczek odbitych od elementu β (zresztą jest to zastąpienie formalne). Jeśli skorzystać z gotowych wzorów wyprowadzanych w rozważaniach dotyczących zagadnienia sił:

$$(1.7) \quad \mathbf{c}_{\beta\alpha} = \mathbf{c}_{\beta\beta} = \mathbf{c}_{0\alpha} = c(-1)^{1+\beta} \mathbf{d}_V, \quad d^3 \mathbf{c} = c^2 dc d\Omega_c,$$

$$d\Omega_1 = (-1)^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w}, \quad \mathbf{c}_{\beta\beta} \cdot \mathbf{n}_{\beta w} = c_{\beta\beta} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}),$$

$$(1.8) \quad f_{0-\beta z}^{(i)} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) [c_{0\alpha}^2 + 2c_{0\alpha} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q})],$$

$$(1.9) \quad f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\beta w}) f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D},$$

$$(1.10)$$

$$f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} = A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) \exp(-B_0^{(i)} \{c_{\beta\beta}^2 + 2(-1)^{1+\beta} c_{\beta\beta} [(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})]\}),$$

$$(1.11) \quad f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} = A_{0\alpha w-\beta w}^D \exp(-B_{\beta w}^D q_{0\alpha w-\beta w}^{*2}) \exp\{-B_{\beta w}^D c_{\beta\beta}^2 [\alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w}) \times$$

$$\times (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2] - 2B_{\beta w}^D c_{\beta\beta} (-1)^{1+\beta} [\beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})(\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*)]\},$$

to $Q_{ain\beta}$ daje się przedstawić w postaci

$$(1.12) \quad Q_{ain\beta} = m d\Sigma_{\beta w} (-1)^\beta \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} d\Sigma_{\alpha w} (-1)^{1+\beta} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \times$$

$$\times \{(1 - \varepsilon_{\beta w}) J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} + \varepsilon_{\beta w} J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} - J_{ain\beta}^{(i)}\},$$

$$(1.13) \quad J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} = \int_0^\infty c_{\beta\beta}^5 f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s} dc_{\beta\beta}, \quad J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} = \int_0^\infty c_{\beta\beta}^5 f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} dc_{\beta\beta},$$

$$J_{ain\beta}^{(i)} = \int_0^\infty c_{0\alpha}^5 f_{0-\beta z}^{(i)} dc_{0\alpha}.$$

W charakterze funkcji rozkładu $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ cząsteczek odbitych zwierciadlanie od elementu β wzięliśmy funkcję rozkładu molekuł padających na element β z otoczenia, dla takiej prędkości «padającej», która po zwierciadlanym odbiciu od elementu β osiągnie element

$\alpha(f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}(\mathbf{c}^{(r)})) = f_{0-\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}))$ (można tak postąpić, gdyż w $Q_{\alpha in\beta}$ znamy tylko możliwy jeden kierunek prędkości mianowicie od β do α — w przypadku ogólnym, kiedy dopuszczony jest określony zbiór kierunków prędkości «odbitych» (np. przy liczeniu $Q_{\alpha in0}$ zbiór ten jest półprzestrzenią kierunków) w charakterze $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ musimy wziąć funkcję rozkładu cząsteczek padających, nie tylko z otoczenia, ale również z elementu $\alpha : f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}(\mathbf{c}^{(r)}) = f_{0\alpha w-\beta w}^{(i)}(\mathbf{c}^{(i)}(\mathbf{c}^{(r)}))$. Podstawiając dalej do $Q_{\alpha in0}$ funkcję $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$ w postaci jawnej

$$(1.14) \quad f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} = (1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0\beta w-\alpha w}^D,$$

dostajemy

$$(1.15) \quad Q_{\alpha in0} = -m \left\{ \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) [(1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0\beta w-\alpha w}^D] d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} + \right. \\ \left. - \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) [(1 - \varepsilon_{\alpha w})f_{0-\alpha w}^{(r)s} + \varepsilon_{\alpha w}f_{0-\alpha w}^D] d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \right\} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Korzystając z właściwości funkcji zwierciadlanej $f_{0-\alpha w}^{(r)s}$ mamy natychmiast

$$(1.16) \quad m \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha w}^{(r)s} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = Q_{0\alpha w}^{(i)},$$

co możemy zinterpretować w ten sposób, że strumień energii «odbitej» zwierciadlanie jest równy strumieniowi energii «padającej». Nietrudno również udowodnić, rozbijając półprzestrzeń prędkości $\Omega_{1/2}^c$ na dwa obszary $\Omega_{1/2}^c - d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\Sigma\beta)$ i $d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha}(\Sigma\beta)$ (i uwzględniając, że $f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} = f_{0\beta w-\alpha w}^{(i)}(\mathbf{c}_w^{(r)}(\mathbf{c}^{(i)})) = f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)}$ oraz fakt, że funkcja $f_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$ dla prędkości $\mathbf{c}^{(r)}$ o kierunku od β do α jest związana z funkcją rozkładu $f_{0-\beta w}^{(i)}$ cząsteczek padających tylko z otoczenia), że zachodzi związek

$$(1.17) \quad m \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)s} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha in\beta}, \\ Q_{0-\alpha w}^{(i)} = m \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{0\alpha}^2(-\mathbf{c}_{0\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\alpha}^{(i)} d^3\mathbf{c}_{0\alpha}.$$

Dla pozostałych całek w wyrażeniu $Q_{\alpha in0}$ dostajemy:

$$(1.18) \quad \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0-\alpha w}^{(r)D} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) J_{0-\alpha w}^{(r)D},$$

$$(1.19) \quad J_{0-\alpha w}^{(r)D} = \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w}) \exp\{-B_{\alpha w}^D[\alpha_{\alpha w}^2 + (\beta_{\alpha w}^2 - 2\alpha_{\alpha w}\beta_{\alpha w})(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})^2] + \\ -B_{\alpha w}^D[-2\alpha_{\alpha w}(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha w}^*) + 2\beta_{\alpha w}(\mathbf{c}^{(r)} \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})(\mathbf{n}_{\alpha w} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha w}^*)]\} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha}^{(r)},$$

$$(1.20) \quad \int_{\Omega_{1/2}^c} c_{\alpha\alpha}^2(\mathbf{c}_{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{n}_{\alpha V}) f_{0\beta w-\alpha w}^{(r)D} d^3\mathbf{c}_{\alpha\alpha} = A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) J_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*).$$

Uwzględniając (1.16), (1.17), (1.18) i (1.19) możemy przedstawić $Q_{\alpha in0}$ w postaci

$$(1.21) \quad Q_{\alpha in0} = -m \{ (1 - \varepsilon_{\alpha w}) [Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha in\beta}] + \varepsilon_{\alpha w} A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}) \times \\ \times J_{0-\alpha w}^{(r)D}(\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) - (1 - \varepsilon_{\alpha w}) Q_{0-\alpha w}^{(i)} - \varepsilon_{\alpha w} A_{0-\alpha w}^D \exp(-B_{\alpha w}^D q_{0-\alpha w}^{*2}) J_{0-\alpha w}^{(r)D} \} d\Sigma_{\alpha w}.$$

Wreszcie dla ostatniej komponenty $Q_{\alpha 0V}$ w ogólnym wyrażeniu na ciepło w lokalnym układzie współrzędnych o osi $z^{(i)} \parallel \mathbf{n}_{\alpha V}^*$, znajdujemy

$$(1.22) \quad Q_{\alpha 0V} = -m \{ A_0^{(i)} \exp(-B_0^{(i)} q^2) [J_{0-\alpha V}^{(i)} - (1 - \varepsilon_{\alpha V}) J_{0-\alpha V}^{(i)}] + \\ + \varepsilon_{\alpha V} A_{0-\alpha V}^D \exp(-B_{\alpha V}^D q_{0-\alpha V}^{*2}) J_{0-\alpha V}^{(r)D} \},$$

gdzie

$$(1.23) \quad J_{0-\alpha V}^{(i)} = \sum_{k=1}^3 J_{0\alpha V(k)}^{(i)},$$

$$(1.24) \quad J_{0-\alpha V}^{(r)D} = \sum_{k=1}^3 J_{0\alpha V(k)}^{(r)D},$$

$$(1.25) \quad J_{0\alpha V(k)}^{(i)} = J_{0\alpha V(k)}^{(i)} J_{0V(k)}^{(i)} J_{0\alpha V(k)}^{(i)}, \quad k = 1, 2, 3 \equiv x, y, z;$$

$$(1.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{0\alpha Vx}^{(i)}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{0\alpha x}^2 \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha x} + 2c_{0\alpha x} q'_x]\} dc_{0\alpha x}, \\ J_{0\alpha Vy}^{(i)}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha y}^2 + 2c_{0\alpha y} q'_y]\} dc_{0\alpha y}, \\ J_{0\alpha Vz}^{(i)}(3) = - \int_0^{\infty} c_{0\alpha z}^* \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha z}^{*2} - 2c_{0\alpha z}^* q'_z]\} dc_{0\alpha z}^*, \quad c_{0\alpha z}^* = -c_{0\alpha z}. \end{array} \right.$$

$$(1.27) \quad J_{0\alpha Vy}^{(i)}(1) = J_{0\alpha Vx}^{(i)}(2)(q'_x), \quad J_{0\alpha Vy}^{(i)}(2) = J_{0\alpha Vx}^{(i)}(1)(q'_y), \quad J_{0\alpha Vy}^{(i)}(3) = J_{0\alpha Vx}^{(i)}(3),$$

$$(1.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{0\alpha Vz}^{(i)}(1) = J_{0\alpha Vy}^{(i)}(1), \quad J_{0-\alpha Vz}^{(i)}(2) = J_{0\alpha Vx}^{(i)}(2), \\ J_{0\alpha Vz}^{(i)}(3) = - \int_0^{\infty} c_{0\alpha z}^* \exp\{-B_0^{(i)}[c_{0\alpha z}^{*2} - 2c_{0\alpha z}^* q'_z]\} dc_{0\alpha z}^*, \end{array} \right.$$

$$(1.29) \quad J_{0\alpha V(k)}^{(r)D} = J_{0\alpha V(k)}^{(r)D}(1) J_{0\alpha V(k)}^{(r)D}(2) J_{0\alpha V(k)}^{(r)D}(3),$$

$$(1.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{0\alpha Vx}^{(r)D}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{\alpha\alpha x}^2 \exp\{-B_{\alpha V}^D[\alpha_{\alpha V}^2 c_x^{(r)2} - 2\alpha_{\alpha V} c_x^{(r)} q_{0-\alpha Vx}^*]\} dc_{\alpha\alpha x}, \\ J_{0\alpha Vy}^{(r)D}(2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-B_{\alpha V}^D[\alpha_{\alpha V}^2 c_y^2 - 2\alpha_{\alpha V} c_y q_{0-\alpha Vy}^*]\} dc_{\alpha\alpha y}, \\ J_{0\alpha Vz}^{(r)D}(3) = \int_0^{\infty} c_{\alpha\alpha z} \exp\{-B_{\alpha V}^D[(\alpha_{\alpha V}^2 + \beta_{\alpha V}^2 - 2\alpha_{\alpha V} \beta_{\alpha V}) c_z^2] + \\ - 2B_{\alpha V}^D c_z (-\alpha_{\alpha V} + \beta_{\alpha V})(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*)\} dc_z, \end{array} \right.$$

$$(1.31) \quad J_{0\alpha Vy}^{(r)D}(1) = J_{0\alpha Vx}^{(r)D}(2)(q_{0\alpha Vx}^*), \quad J_{0\alpha Vy}^{(r)D}(2) = J_{0\alpha Vx}^{(r)D}(1)(q_{0-\alpha Vy}^*),$$

(1.32)

$$\left\{ \begin{array}{l} J_{0\alpha Vy}^{(r)D}(3) = J_{0\alpha Vx}^{(r)D}(3), \quad J_{0\alpha Vz}^{(r)D}(1) = J_{0\alpha Vx}^{(r)D}(2)(q_{0\alpha Vx}^*), \quad J_{0\alpha Vz}^{(r)D}(2) = J_{0\alpha Vx}^{(r)D}(2), \\ J_{0\alpha Vz}^{(r)D}(3) = \int_0^{\infty} c_{\alpha\alpha z}^3 \exp\{-B_{\alpha V}^D[(\alpha_{\alpha V}^2 + \beta_{\alpha V}^2 - 2\alpha_{\alpha V} \beta_{\alpha V}) c_z^2 + 2c_z(-\alpha_{\alpha V} + \beta_{\alpha V})(\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*)]\}. \end{array} \right.$$

*¹) Ze względu na to, że liczone wielkości są skalarami, wyniki w lokalnym układzie współrzędnych są takie same, jak w globalnym układzie odniesienia (nie zachodzi konieczność transformacji).

W wyrażeniu $Q_{\alpha 0V}$ mamy więc do obliczenia następujące całki: $J_{0\alpha V_x}^{(i)}(1)$, $J_{0\alpha V_x}^{(i)}(2)$, $J_{0\alpha V_x}^{(i)}(3)$, $J_{0\alpha V_z}^{(i)}(3)$, $J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(1)$, $J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(2)$, $J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(3)$, $J_{0\alpha V_z}^{(r)D}(3)$. Faktycznie ilość całek do obliczenia jest o połowę mniejsza, gdyż niektóre całki są znane z zagadnienia sił; mamy mianowicie

$$\begin{aligned} J_{0\alpha V_x}^{(i)}(2) &= I_{0\alpha V_x}^{(i)}(2), & J_{0\alpha V_x}^{(i)}(3) &= -I_{0\alpha V_x}^{(i)}(3), \\ J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(2) &= I_{0\alpha V_x}^{(r)D}(2), & J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(3) &= I_{0\alpha V_x}^{(r)D}(3). \end{aligned}$$

2. Obliczenie całek oddziaływania energetycznego. Pozostałe do obliczenia całki z wyrażenia $Q_{\alpha 0V}$ są następujące:

$$(2.1) \quad J_{0\alpha V_x}^{(i)}(1) = \frac{1}{2B_0^{(i)}} \sqrt{\frac{\pi}{B_0^{(i)}}} \exp\{B_0^{(i)} q_x'^2\} (1 + 2B_0^{(i)} q_x'^2),$$

$$(2.2) \quad J_{0\alpha V_z}^{(i)}(3) = -(2\beta)^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right), \quad \beta = B_0^{(i)}, \quad \gamma = 2B_0^{(i)} q_z',$$

$$(2.3) \quad J_{0\alpha V_x}^{(r)D}(1) = \frac{1}{2B_{\alpha V}^D \alpha_{\alpha V}^2} \sqrt{\frac{\pi}{B_{\alpha V}^D \alpha_{\alpha V}^2}} \exp\{B_{\alpha V}^D q_{0\alpha V_x}^{*2}\} (1 + 2B_{\alpha V}^D q_{0\alpha V_x}^{*2}),$$

$$(2.4) \quad J_{0\alpha V_z}^{(r)D}(3) = (2\beta^*)^{-2} \Gamma(4) \exp\left(\frac{\gamma^{*2}}{8\beta^*}\right) D_{-4}\left(\frac{\gamma^*}{\sqrt{2\beta^*}}\right),$$

$$\beta^* = B_{\alpha V}^D (\alpha_{\alpha V} - \beta_{\alpha V})^2, \quad \gamma^* = 2B_{\alpha V}^D (\beta_{\alpha V} - \alpha_{\alpha V}) (\mathbf{n}_{\alpha V} \cdot \mathbf{q}_{0-\alpha V}^*).$$

Wszystkie całki występujące w wyrażeniu $Q_{\alpha in\beta}$ dają się zapisać w postaci

$$(2.5) \quad J = A \exp\{-Bq^2\} (2\beta)^{-3} \Gamma(6) \exp\left(\frac{\gamma^2}{8\beta}\right) D_{-6}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\beta}}\right),$$

przy czym wielkości A , B , q , β , γ dla poszczególnych całek J wynoszą odpowiednio:

dla całki $J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$,

$$(2.6) \quad A = A_0^{(i)}, \quad B = B_0^{(i)}, \quad q = q, \quad \beta = B_0^{(i)}, \quad \gamma = 2(-1)^{1+\beta} B_0^{(i)} [(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}) - 2(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) (\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q})],$$

dla całki $J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)s}$,

$$(2.7) \quad \begin{aligned} A &= A_{0\alpha w-\beta w}^D, \quad B = B_{\beta w}^D, \quad q = q_{0\alpha w-\beta w}^*, \quad \beta = B_{\beta w}^D [\alpha_{\beta w}^2 + (\beta_{\beta w}^2 - 2\alpha_{\beta w} \beta_{\beta w}) \times \\ &\quad \times (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})^2], \\ \gamma &= 2(-1)^{1+\beta} B_{\beta w}^D [\beta_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) (\mathbf{n}_{\beta w} \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*) - \alpha_{\beta w} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}_{0\alpha w-\beta w}^*)]; \end{aligned}$$

dla całki $J_{\alpha in\beta}^{(i)}$,

$$(2.8) \quad A = A_0^{(i)}, \quad B = B_0^{(i)}, \quad q = q, \quad \beta = B_0^{(i)}, \quad \gamma = 2(-1)^{1+\beta} B_0^{(i)} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{q}).$$

Całki występujące w wyrażeniu $Q_{\alpha in 0}$ nie wychodzą poza zbiór całek w wyrażeniach $Q_{\alpha 0V}$ i $Q_{\alpha in\beta}$.

3. Dyskusja wyrażenia na wymianę ciepła. Ostateczne wyrażenie na wymianę ciepła pomiędzy ośrodkiem swobodno-molekularnym i układem dwu nieskończenie małych elementów, dowolnie zorientowanych, poruszającym się w ośrodku z dowolną prędkością, jest następujące:

$$(3.1) \quad Q_{\alpha} = (Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha in\beta}^{(i)}) + (Q_{0-\alpha z}^{(i)} - Q_{0-\alpha z}^{(r)}) - Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)},$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} Q_{0-\alpha w}^{(i)} &= -mA_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}q^2\} J_{0-\alpha w}^{(i)} d\Sigma_{\alpha w}, \\ Q_{0-\alpha z}^{(i)} &= -mA_0^{(i)} \exp\{-B_0^{(i)}q^2\} J_{0\alpha z}^{(i)} d\Sigma_{\alpha z}, \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad Q_{0-\alpha z}^{(r)} = [-m(1-\varepsilon_{\alpha z})J_{0-\alpha z}^{(i)} + m\varepsilon_{\alpha z}A_{0-\alpha z}^D \exp\{-B_{\alpha z}^D q_{0-\alpha z}^{*2}\} J_{0-\alpha z}^{(r)D}] d\Sigma_{\alpha z},$$

$$(3.4) \quad Q_{\alpha i n \beta} = -md\Sigma_{\beta w} d\Sigma_{\alpha w} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\alpha w})}{d^2} (\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w}) \{ (1-\varepsilon_{\beta w}) J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)S} + \varepsilon_{\beta w} J_{0\alpha w-\beta w}^{(r)D} - J_{\alpha i n \beta}^{(i)} \},$$

$$(3.5) \quad Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)} = (1-\varepsilon_{\alpha w}) Q_{0\beta w-\alpha w}^{(s)} + \varepsilon_{\alpha w} Q_{0\beta w-\alpha w}^D,$$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} Q_{0\beta w-\alpha w}^{(s)} &= Q_{0-\alpha w}^{(i)} + Q_{\alpha i n \beta}, \\ Q_{0\beta w-\alpha w}^D &= A_{0\beta w-\alpha w}^D \exp\{-B_{\alpha w}^D q_{0\beta w-\alpha w}^{*2}\} J_{0-\alpha w}^{(r)D} (\mathbf{q}_{0\beta w-\alpha w}^*) d\Sigma_{\alpha w}. \end{aligned}$$

Pierwsze dwa wyrazy w nawiasie możemy interpretować jako strumień energii padający na wewnętrzną stronę elementu α , z otoczenia i od elementu β ; dwa następne wyrazy, w drugim nawiasie, jako strumienie energii: padający na zewnętrzną stronę elementu α i odbity od zewnętrznej strony α ; wreszcie wyraz ostatni jako strumień energii odbity od wewnętrznej strony α (strumień ten możemy uważać za złożenie strumienia energii odbitego zwierciadlanie i strumienia energii dyfuzyjnego).

Oddziaływanie interakcyjne zawarte jest w wyrazach $Q_{\alpha i n \beta}$ i $Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$. Interakcja znika jeśli którykolwiek z elementów leży na linii łączącej elementy (w szczególności również wtedy, gdy elementy są prostopadłe do siebie). Wyraz $Q_{\alpha i n \beta}$, który decyduje o interakcji (oddziaływanie interakcyjne zawarte w $Q_{0\beta w-\alpha w}^{(r)}$ przejawia się również poprzez występowanie w tym wyrazie $Q_{\alpha i n \beta}$ jest proporcjonalny do $d\Sigma_{\beta w} \frac{(\mathbf{d}_V \cdot \mathbf{n}_{\beta w})}{d^2}$, czyli do elementarnego kąta bryłowego pod jakim widać element $d\Sigma_{\beta}$ z elementu α — tym samym jest to zależność oddziaływania od odległości. Rozwiązanie zagadnienia oddziaływania nieskończenie małych elementów dostarcza informacji o wpływie na oddziaływanie takich parametrów jak prędkość układu w ośrodku, wzajemna orientacja ciał układu i model «odbicia» gaz-powierzchnia.

Zę względu na skomplikowany charakter ogólnego wyrażenia, analizę wpływu poszczególnych parametrów można przeprowadzić w następujący sposób: 1) dla zbadania wpływu prędkości na oddziaływanie — przyjąć najprostszą orientację elementów (elementy równoległe) i najprostszy model odbicia gaz — powierzchnia (model dyfuzyjny); 2) dla zbadania wpływu orientacji elementów — położyć $q = 0$ i przyjąć najprostszy model odbicia; 3) dla zbadania wpływu modelu — położyć $q = 0$ i przyjąć najprostszą orientację elementów. Wyników tej analizy nie przytaczamy, gdyż zajęłoby to dużo miejsca i byłoby w znacznej mierze powtórzeniem szeregu relacji ogólnych, sformułowanych tylko w bardziej fragmentarycznej formie, w szczególności zaś byłoby powtórzeniem podobnej dyskusji, przeprowadzonej dla zagadnienia sił.

Literatura cytowana w tekście

1. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа*, Москва 1961.
2. S. A. SCHAAF, P. L. CHAMBRE, *Flow of rarefied gases*, Princeton, New Jersey (1961).
3. Э. Лариш, *Аэродинамические взаимодействия при свободно-молекулярном обтекании*, Изв. АН СССР Отд. техн. и механ. и машиностр. № 3 (1960), 117—120.

4. ABE KANZI, *On the interaction between two rectangular plates in a free molecule flow*, Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., No. 10, 7 (1964), 13—19.
5. FAU CHIEN, *Aerodynamic forces and heat transfer on shielded flat plates in a free molecule flow*, New York—London Rarefied Gas Dynamic, 1, (1969), 551—560.
6. WANI TAKEKI, *Aerodynamic interference in a free molecular flow*, Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., No. 4, 3 (1960), 13—20.
7. C. CERCIGNANI, M. LAMPIS, *Influence of gas-surface interaction on drag and lift in free-molecular flow*, Entropie, No. 44 (1972), 40—46.
8. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie kul spoczywających w ośrodku swobodno-molekularnym*, Prace IPPT, 36, 1973.
9. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie układu dwu kul o stałych temperaturach, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym wzdłuż osi łączącej środki kul w przybliżeniu dużych odległości i małych prędkości*, Prace IPPT, 36, 1973.
10. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie układu dwu kul, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością hipersoniczną wzdłuż osi łączącej środki kul, w przybliżeniu dużych odległości*, Prace IPPT, 36, 1973.
11. S. KOSOWSKI, *Ustalona wymiana ciepła dla układu dwu kul o równych temperaturach, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością hipersoniczną dowolnie skierowaną*, Prace IPPT, 36, 1973.
12. S. KOSOWSKI, *Anizotropowy model deterministyczno-probabilistycznego oddziaływania gazu ze ścianką* Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. (w druku).
13. S. KOSOWSKI, *Stacjonarne oddziaływanie układu dwu kul, poruszającego się w ośrodku swobodno-molekularnym z prędkością hipersoniczną skierowaną prostopadle do osi łączącej środki kul*, Prace IPPT, 36, 1973.

Резюме

СТАЦИОНАРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТВЕРДОГО ТЕЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ В СВОБОДНО-МОЛЕКУЛЯРНОЙ СРЕДЕ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

В работе решена задача о сопротивлении и теплообмене в системе, состоящей из двух бесконечно малых произвольно ориентированных поверхностных элементов твердого тела, находящегося в свободно-молекулярном течении. В качестве модели отражения газа от поверхности принята модифицированная модель Максвелла с анизотропной диффузионной частью. Ввиду того, что данная модель содержит как частные случаи некоторые общеизвестные модели (диффузионную, модели Максвелла и Ночилли, диффузионно-анизотропную модель), решение задачи дает возможность исследования взаимодействия системы тел, движущейся в свободно-молекулярной среде, в зависимости от модели отражения газа от поверхности. Решение позволяет также исследовать взаимодействие в зависимости от скорости системы и от ориентировки её элементов.

Для тел конечных размеров, даже в самом простом случае системы двух шаров, покоящихся в среде, и в предположении самой простой модели отражения газа от поверхностей тел, нельзя найти точного аналитического решения. В общем же случае задача о взаимодействии не может быть решена в численном виде. Сопротивление и теплообмен для бесконечно малых элементов можно определить точным образом аналитическим путем. Они выражаются через специальные функции Φ и D_n (интеграл вероятностей и функцию параболического цилиндра).

Summary

STATIONARY INTERACTIONS OF A SYSTEM CONSISTING OF TWO INFINITESIMAL, ARBITRARILY ORIENTED ELEMENTS MOVING AT AN ARBITRARY VELOCITY IN A FREE-MOLECULAR MEDIUM

In the paper is solved the problem of drag and heat exchange for a system of two infinitesimal, arbitrarily oriented surface elements in a free-molecular flow. Reflection of the gas from the surface is described by a Maxwell model with anisotropic diffusive part.

Since the model contains, as particular cases, a number of models being in common use, such as the diffusion model, Maxwell's, Nocilla's and the anisotropic diffusion models, the solution creates the possibility of investigating of the interaction of bodies moving in a free-molecular medium from the point of view of model of gas reflection from the surface. The solution also enables us to investigate the interaction from the point of view of velocity of the system and orientation of its elements. As far finite dimension bodies are considered, the simplest case of two spheres placed in the medium can not be solved analytically to yield an accurate result, even in the case of the simplest, diffusion model of gas reflection; the problem of interaction in a general form is, however, not suitable for numerical analysis. The drag and heat exchange for infinitely small bodies may be solved analytically in an accurate manner: the solutions are expressed in terms of special functions Φ and D_{-n} (error function and the function of parabolic cylinder).

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 marca 1973 r.

PRZYBLIŻONA METODA ROZWIĄZYWANIA PŁASKICH NIESAMOPODOBNYCH FAL
UDERZENIOWYCH W DOSKONAŁYM PRZEWODNIKU W POLU MAGNETYCZNYM

EDWARD WŁODARCZYK (WARSZAWA)

1. Wstęp

Zagadnienie rozprzestrzeniania się fal uderzeniowych w doskonałym przewodniku umieszczonym w polu magnetycznym było badane w pracach [1] i [2]. W [1] rozpatrzono wypukło-wklęsłą i wklęsłą charakterystykę $\sigma - \varepsilon$. Wyprowadzono związki na froncie fali uderzeniowej i przeprowadzono jakościową analizę strat energii przy formowaniu się frontu silnej nieciągłości. W pracy [2] rozwiązano *explicite* problem samopodobnej (stacjonarnej) fali uderzeniowej dla doskonałego przewodnika.

Celem niniejszej pracy jest podanie rozwiązania problemu propagacji niesamopodobnej fali uderzeniowej w półprzestrzeni wypełnionej doskonałym przewodnikiem i zanurzonej w polu magnetycznym. Fale wzbudzone są ciśnieniem mechanicznym przyłożonym w sposób nagły do powierzchni półprzestrzeni. Ciśnienie to do chwili $t = \tau_0$ jest stałe w czasie i następnie maleje monotonicznie do zera. Nad półprzestrzenią znajduje się próżnia, w którą wypromieniowuje fala elektromagnetyczna. Rozpatrzono wklęsłą charakterystykę $p - V$ dla ośrodka wypełniającego półprzestrzeń. O ile autorowi wiadomo, problem ten nie był badany w literaturze.

W punkcie drugim formułujemy problem, w trzecim — dokonujemy odcinkowej linearyzacji problemu, natomiast w czwartym podajemy analityczne rozwiązanie zagadnienia.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy problem przy następujących założeniach:

1. Stosujemy współrzędne Lagrange'a x, y, z, t .
2. Przyjmujemy układ osi współrzędnych dla dolnej i górnej półprzestrzeni jak na rys.1.
3. Obciążenie powierzchni półprzestrzeni zależy tylko od czasu t , natomiast nie zależy od y, z (rys. 1). Przyłożone jest w sposób nagły; do chwili $t = \tau_0$ jest stałe w czasie i następnie monotonicznie maleje do zera (rys. 2).
4. Przyjmujemy:

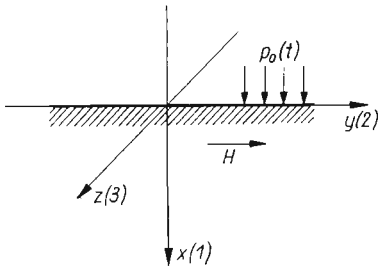
$$(2.1) \quad H_1 = H_3 = 0, \quad H_2 = H.$$

5. Ośrodek wypełniający dolną półprzestrzeń jest doskonałym przewodnikiem, tj. jego przewodność $\sigma \rightarrow \infty$ (w przybliżeniu złoto, miedź). Górna półprzestrzeń jest próżnią.
6. Pomijamy w równaniach sprzężonych pól dla $\sigma \rightarrow \infty$ prądy przesunięcia.
7. Nie uwzględniamy przewodnictwa cieplnego i lepkości mechanicznej ośrodka.
8. Będziemy badać fale uderzeniowe średniej intensywności (do kilkuset kilobarów).

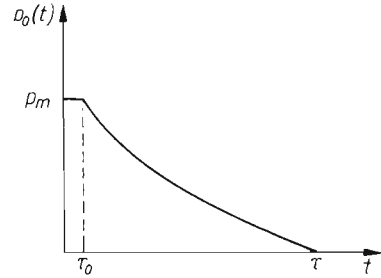
Dlatego równanie stanu dla przewodnika przyjmujemy w postaci jednoczłonowej bez wpływu temperatury [3] i [4]

$$(2.2) \quad p = A \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^n - 1 \right],$$

A , n są stałymi charakteryzującymi dany przewodnik (miedź: $A = 296$ kbar, $n = 4,8$; złoto $A = 310$ kbar, $n = 5,7$, [4]).



Rys. 1.



Rys. 2.

Zgodnie z powyższymi założeniami równania ruchu ośrodka przyjmują następującą postać:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} v_{,x} &= \frac{1}{V_0} V_{,t} \\ v_{,t} &= -V_0 \tilde{p}_{,x}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.4) \quad \tilde{p} = p + \frac{H_0^2}{8\pi} \left(\frac{V_0}{V} \right)^2 = A \left[\left(\frac{V_0}{V} \right)^n - 1 \right] + \frac{H_0^2}{8\pi} \left(\frac{V_0}{V} \right)^2;$$

H_0 jest tu pierwotnym stałym polem magnetycznym.

Przy wyprowadzaniu równań (2.3) wykorzystano fakt, że pole magnetyczne w doskonałym przewodniku jest odwrotnie proporcjonalne do objętości właściwej [1, 2]

$$(2.5) \quad H = \frac{H_0 V_0}{V}.$$

W próżni pole elektromagnetyczne opisane jest równaniami

$$(2.6) \quad \frac{1}{c^2} H_{,tt}^* = H_{,x_1 x_1}^*, \quad \frac{1}{c^2} E_{,tt}^* = E_{,x_1 x_1}^*,$$

gdzie

$$(2.7) \quad H^* = H_0 + H_1^*, \quad E^* = E_1^*.$$

H_1^* i E_1^* — są to składowe fali elektromagnetycznej wypromieniowanej od przewodnika w próżnię.

Mając na uwadze fakt, że

$$(2.8) \quad H_1^* = -E_1^*,$$

z (2.6) otrzymujemy

$$(2.9) \quad H_1^* = -E_1^* = f\left(t - \frac{x_1}{c}\right),$$

gdzie f jest na razie dowolną funkcją.

Warunki na brzegu półprzestrzeni wynikają z ciągłości składowych stycznych pola elektrycznego w układzie związanym z granicą

$$(2.10) \quad \vec{E}_t' = \vec{E}_t^*$$

oraz z ciągłości ciśnienia na granicy ośrodka i próżni

$$(2.11) \quad \tilde{p} = p^* + p_0(t),$$

gdzie p^* jest składową normalną tensora napięć Maxwella w próżni

$$(2.12) \quad p^* = T_{x_1 x_1}^* = \frac{1}{8\pi} H^{*2}.$$

Z (2.10) po przejściu na układ Lagrange'a otrzymujemy

$$(2.13) \quad E + \frac{v_0(t)}{c} H = E^* + \frac{v_0(t)}{c} H^*.$$

Ponieważ w przewodniku zachodzi zależność

$$(2.14) \quad E = -\frac{v_0(t)}{c} H,$$

przeto

$$(2.15) \quad E^* + \frac{v_0(t)}{c} H^* = 0.$$

Wprowadzając (2.9) do (2.15) otrzymamy

$$(2.16) \quad f\left(t - \frac{\eta(t)}{c}\right) = \frac{\frac{v_0(t)}{c} H_0}{1 - \frac{v_0(t)}{c}} = \frac{H_0 v_0(t)}{c - v_0(t)};$$

natomiast z (2.7), (2.9) i (2.16) wynika, że

$$(2.17) \quad H^* = \frac{H_0}{1 - \frac{v_0(t)}{c}}.$$

Ostatecznie warunek brzegowy (2.11) można przedstawić w postaci

$$(2.18) \quad \left(\frac{V_0}{V}\right)^n - 1 + \alpha \left(\frac{V_0}{V}\right)^2 = \frac{\alpha}{\left[1 - \frac{v_0(t)}{c}\right]^2} + \frac{p_0(t)}{A},$$

gdzie

$$(2.19) \quad \alpha = \frac{H_0^2}{8\pi A}.$$

Z warunku ciągłości masy i pędu na froncie fali uderzeniowej $x = \varphi(t)$ otrzymujemy

$$(2.20) \quad \frac{\dot{\varphi} - v_x}{\dot{\varphi}} = \frac{V_x}{V_0},$$

$$\tilde{p}_x = \frac{\dot{\varphi}^2}{V_0} \left(1 - \frac{V_x}{V_0} \right) + \frac{H_0^2}{8\pi}.$$

Warunki początkowe są następujące:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} v(x, 0) &= 0, & V(x, 0) &= V_0, \\ H^*(x, 0) &= H_0, & H_{,t}^*(x, 0) &= 0, \\ E^*(x, 0) &= 0, & E_{,t}^*(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Tym samym problem został jednoznacznie sformułowany.

3. Aproxymacja związku $\tilde{p} = \tilde{p}(V)$ odcinkami prostymi

Rozwiązanie quasi-liniowego układu równań w warunkach tworzenia się niestacjonarnego frontu fali uderzeniowej jest skomplikowanym problemem równań fizyki matematycznej. Do chwili obecnej w literaturze brak jest zamkniętego rozwiązania tego zagadnienia. Numeryczna konstrukcja rozwiązania w ogólnym ujęciu jest żmudna i pracochłonna, mimo zastosowania elektronicznej techniki obliczeniowej. Dlatego w niniejszej pracy pójdziemy w kierunku pewnych uproszczeń natury fizycznej, aby uzyskać zamkniętą analityczną formę rozwiązania tego problemu.

Mianowicie, z prawa zachowania masy wynika, że:

$$(3.1) \quad \frac{V}{V_0} = \frac{\rho_0}{\rho} = 1 + u_{,x} = 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon = u_{,x},$$

gdzie u jest przemieszczeniem ośrodka.

Wprowadzając (3.1) do (2.4) otrzymamy

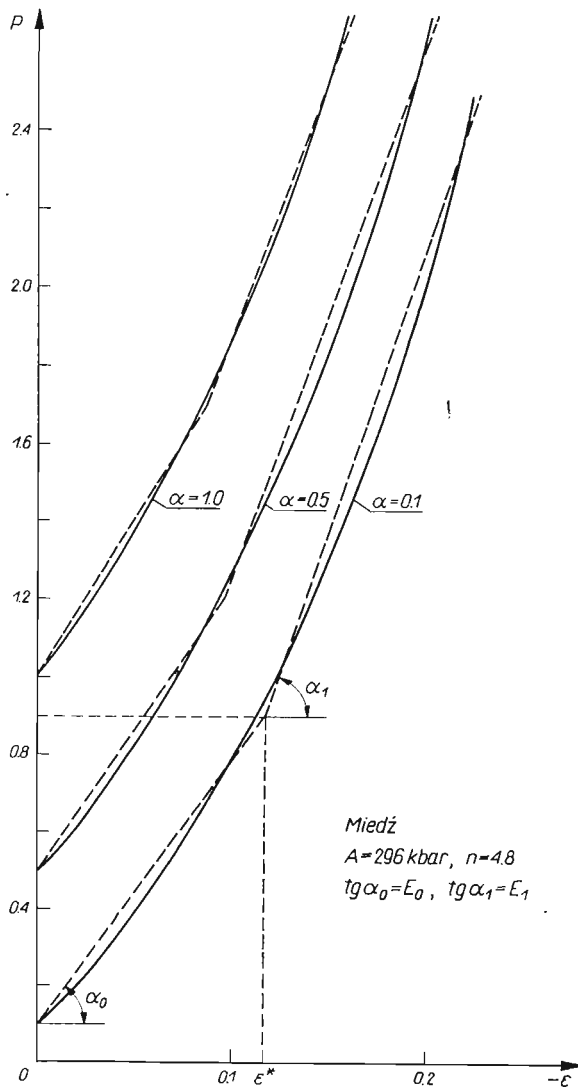
$$(3.2) \quad P = \frac{\tilde{p}}{A} = \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^n - 1 + \alpha \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \right)^2.$$

Na rys. 3 wykreślono funkcję $P(\varepsilon)$ dla miedzi (linie ciągłe). Podobne przebiegi uzyskuje się dla złota. Jak wynika z zamieszczonych wykresów funkcję $P(\varepsilon)$ w zakresie stosowalności równania stanu (2.2) ($P < 2,5$) z wystarczającą dla celów praktyki dokładnością można aproxymować w strefie obciążenia linią łamaną złożoną z dwóch odcinków prostych (linie przerywane na rys. 3), których nachylenie i długość zależy od parametru α (początkowego pola magnetycznego H_0). Ponieważ równanie stanu (2.2) jest również pewnym przybliżeniem wyników eksperymentalnych, przeto proponowana odcinkowa aproxymacja funkcji $P(\varepsilon)$ jest tym bardziej uzasadniona. W strefie odciążenia przyjmujemy, że funkcja $P(\varepsilon)$ jest liniowa (rys. 4).

Mamy wówczas:

$$\tilde{p} = A\alpha - E_0\varepsilon = A\alpha - E_0 \left(\frac{V}{V_0} - 1 \right),$$

Jeśli $A\alpha \leq \tilde{p} \leq \tilde{p}^*(\alpha)$,



Rys. 3

oraz

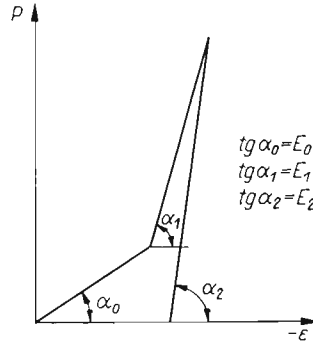
$$(3.3) \quad \tilde{p} = \tilde{p}^*(\alpha) - E_1(\varepsilon - \varepsilon^*) = (E_1 - E_0)\varepsilon^* + A\alpha - E_1 \left(\frac{V}{V_0} - 1 \right),$$

jeśli $\tilde{p} \geq \tilde{p}^*(\alpha)$; natomiast

$$(3.4) \quad \tilde{p} = \tilde{p}_\varphi(x) + E_2 \varepsilon_\varphi(x) - E_2 \varepsilon = \tilde{p}_\varphi(x) + E_2 \varepsilon_\varphi(x) - E_2 \left(\frac{V}{V_0} - 1 \right)$$

w strefie odciążenia.

Za frontem fali uderzeniowej postulujemy proces odciążenia. Wówczas ruchem ośrodka rządzą równania



Rys. 4

$$(3.5) \quad v_{,x} = -\frac{1}{E_2} \tilde{p}_{,t}; \quad v_{,t} = -\frac{1}{\varrho_0} \tilde{p}_{,x}.$$

Powyższy układ równań różniczkowych można zastąpić równoważnym układem równań algebraicznych na charakterystykach o następującej postaci

$$(3.6) \quad v = \mp \frac{1}{\varrho_0 a_2} \tilde{p} + C^\pm, \quad \text{jeśli} \quad x = \pm \varrho_0 a_2 t + c^\mp,$$

gdzie

$$a_2 = \sqrt{\frac{E_2}{\varrho_0}}.$$

Warunek brzegowy (2.18) po uwzględnieniu (3.4) oraz faktu, że

$$(3.7) \quad \frac{v_0(t)}{c} \ll 1,$$

można przedstawić w następującej formie

$$(3.8) \quad \tilde{p}_\varphi(0) + E_2 \varepsilon_\varphi(0) - E_2 \left[\frac{V(0, t)}{V_0} - 1 \right] = A\alpha + p_0(t).$$

Ponieważ

$$\tilde{p}_x(0) = p_m, \quad \varepsilon_x(0) = \varepsilon_m = \frac{A\alpha - \tilde{p}^*}{E_0} - \frac{\tilde{p}_m - \tilde{p}^*}{E_1},$$

przeto z (3.8) mamy

$$(3.9) \quad \frac{V(0, t)}{V_0} - 1 = \left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1} \right) \tilde{p}_m + \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right) A\alpha + \left(1 - \frac{E_0}{E_1} \right) \varepsilon^* - \frac{1}{E_2} p_0(t).$$

Warunki na froncie fali uderzeniowej przyjmują obecnie postać

$$(3.10) \quad v_\varphi = \left(1 - \frac{V_\varphi}{V_0} \right) \dot{\varphi},$$

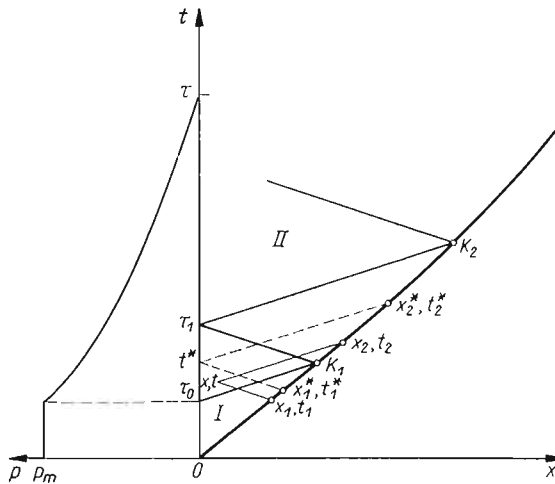
$$\left(1 - \frac{E_1}{E_0} \right) \tilde{p}^*(\alpha) + \frac{E_1}{E_0} A\alpha - E_1 \left(\frac{V_\varphi}{V_0} - 1 \right) = \left(1 - \frac{V_\varphi}{V_0} \right) \frac{\dot{\varphi}^2}{V_0} + \frac{H_0^2}{8\pi}.$$

Warunki początkowe nie ulegają zmianie.

Przejdziemy obecnie do analitycznego rozwiązania uproszczonego w ten sposób problemu.

4. Rozwiązanie problemu

Falowy obraz rozwiązania przedstawionego wyżej problemu przyjmuje postać pokazaną na rys. 5. Płaszczyzna x, t podzielona jest na dwa obszary. Obszar I zawiera stacjonarny odcinek frontu fali uderzeniowej wywołany stałym obciążeniem p_m działającym w czasie $0 \leq t \leq \tau_0$. W obszarze II propaguje się niestacjonarny, krzywoliniowy odcinek frontu fali uderzeniowej generowanej przez malejące w czasie ciśnienie $p_0(t)$. Analityczne rozwiązanie problemu w poszczególnych obszarach kształtuje się następująco.



Rys. 5

Obszar I. W obszarze tym zgodnie z rozwiązaniami podanymi w [1] i [2] propaguje się stacjonarny (ze stałą prędkością) front fali uderzeniowej $x = \varphi(t)$. Wszystkie parametry problemu za frontem takiej fali mają stałą wartość. Zatem po rozwiązaniu równań (3.9) i (3.10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_1(x, t) &= \tilde{p}_m = A\alpha + p_m, \\
 V_1(x, t) &= V_m = V_0 \left[1 - \frac{p_m}{E_1} + \left(1 - \frac{E_0}{E_1} \right) \varepsilon^*(\alpha) \right], \\
 v_1(x, t) &= v_m = \left[\frac{p_m}{E_1} - \left(1 - \frac{E_0}{E_1} \right) \varepsilon^*(\alpha) \right] D_m, \\
 \dot{\varphi}_1(t) &= D_m = a_1 \left[1 - \frac{(E_0 - E_1)\varepsilon^*(\alpha)}{p_m + (E_0 - E_1)\varepsilon^*(\alpha) + \frac{E_1}{E_2} A\alpha} \right]^{1/2},
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

gdzie

$$a_1 = \sqrt{\frac{E_1}{\rho_0}}.$$

Z kolei na podstawie (2.5) i (2.14) mamy:

$$(4.2) \quad H_1(x, t) = H_m = H_0 \left[1 - \frac{p_m}{E_1} + \left(1 - \frac{E_0}{E_1} \right) \varepsilon^*(\alpha) \right]^{-1},$$

$$E_1(x, t) = E_m = -\frac{v_m}{c} H_m.$$

Obszar II. Ze związków wzdłuż charakterystyk wychodzących z frontu fali uderzeniowej i przecinających się w dowolnym punkcie x, t obszaru II znajdujemy:

$$(4.3) \quad v_2(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ v_{\varphi_1}(t_1) + v_{\varphi_2}(t_2) + \frac{1}{\rho_0 a_2} [\tilde{p}_{\varphi_2}(t_2) - \tilde{p}_{\varphi_1}(t_1)] \right\},$$

$$\tilde{p}_2(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{p}_{\varphi_1}(t_1) + \tilde{p}_{\varphi_2}(t_2) + \rho_0 a_2 [v_{\varphi_2}(t_2) - v_{\varphi_1}(t_1)] \right\},$$

gdzie

$$(4.4) \quad t_1 = t - \frac{\varphi_1(t_1) - x}{a_2},$$

$$t_2 = t + \frac{\varphi_2(t_2) - x}{a_2}.$$

Ponieważ początkowy odcinek frontu fali jest już znany

$$(4.5) \quad \varphi_1(t_1) = D_m t_1,$$

zatem czas t_1 można wyliczyć *explicite*

$$(4.6) \quad t_1 = \frac{a_2 t + x}{a_2 + D_m}.$$

Wielkości $v_{\varphi_1}(t_1)$ i $\tilde{p}_{\varphi_1}(t_1)$ są znane z I obszaru [patrz wzory (4.1)]. Natomiast wartości $v_{\varphi_2}(t_2)$ i $\tilde{p}_{\varphi_2}(t_2)$ określamy ze związków na froncie fali (3.10) i równań konstytutywnych (3.3):

$$(4.7) \quad v_{\varphi_2}(t_2) = \varepsilon^*(\alpha) \left(1 - \frac{E_1}{E_0} \right) \frac{a_0^2}{a_1^2 - \dot{\varphi}_2^2(t_2)} \dot{\varphi}_2(t_2), \quad a_0^2 = \frac{E_0}{\rho_0},$$

$$\tilde{p}_{\varphi_2}(t_2) = A\alpha + (E_1 - E_0)\varepsilon^* + E_1\varepsilon^* \left(1 - \frac{E_1}{E_0} \right) \frac{a_0^2}{a_1^2 - \dot{\varphi}_2^2(t_2)}.$$

Z podanych wyżej zależności wynika, że do jednoznacznego określenia funkcji $v_2(x, t)$ i $p_2(x, t)$ potrzebna jest prędkość propagacji następnego odcinka frontu fali uderzeniowej $\dot{\varphi}_2(t_2)$. Określmy go w następujący sposób. Ze związków wzdłuż charakterystyk, zaznaczonych na rys. 5 liniami przerywanymi, mamy

$$(4.8) \quad v_0(t^*) = \frac{1}{\rho_0 a_2} \tilde{p}_0(t^*) + v_{\varphi_1}(t_1^*) - \frac{1}{\rho_0 a_2} \tilde{p}_{\varphi_1}(t_1^*),$$

$$v_0(t^*) = -\frac{1}{\rho_0 a_2} \tilde{p}_0(t^*) + v_{\varphi_2}(t_2^*) + \frac{1}{\rho_0 a_2} \tilde{p}_{\varphi_2}(t_2^*),$$

gdzie

$$(4.9) \quad \begin{aligned} t_1^* &= t^* - \frac{\varphi_1(t_1^*)}{a_2} = \frac{a_2}{a_2 + D_m} t^*, \\ t_2^* &= t + \frac{\varphi_2(t_2^*)}{a_2}. \end{aligned}$$

Z (4.8) po dodaniu stronami otrzymujemy

$$(4.10) \quad 2v_0(t^*) = v_{\varphi_1}(t_1^*) + v_{\varphi_2}(t_2^*) + \frac{1}{\varrho_0 a_2} [\tilde{p}_{\varphi_2}(t_2^*) - \tilde{p}_{\varphi_1}(t_1^*)].$$

Ponieważ

$$(4.11) \quad \tilde{p}_0(t^*) = A\alpha + p_0(t^*),$$

pręto prędkość poruszania się brzegu $v_0(t^*)$ zgodnie z (4.8)₁ wynosi

$$(4.12) \quad v_0(t^*) = \frac{A\alpha}{\varrho_0 a_2} + \frac{p_0(t^*)}{\varrho_0 a_2} + v_{\varphi_1}(t_1^*) - \frac{1}{\varrho_0 a_2} \tilde{p}_{\varphi_1}(t_1^*).$$

Wprowadzając (4.7) i (4.12) do (4.10) po licznych przekształceniach otrzymamy

$$(4.13) \quad \dot{\varphi}_2(t_2^*) = \frac{b_0}{2b_1} + \sqrt{\left(\frac{b_0}{2b_1}\right)^2 + 4b_1 b_2},$$

gdzie

$$(4.14) \quad \begin{aligned} b_0 &= \left(\frac{E_1}{E_0} - 1\right) a_0^2 \varepsilon^*, \quad a_0^2 = \frac{E_0}{\varrho_0}; \\ b_1 &= \frac{A\alpha}{\varrho_0 a_2} + \frac{2}{\varrho_0 a_2} p_0(t^*) + v_{\varphi_1}(t_1^*) - \frac{1}{\varrho_0 a_2} \tilde{p}_{\varphi_1}(t_1^*) - \frac{E_1 - E_0}{\varrho_0 a_2} \varepsilon^*, \\ b_2 &= b_1 a_1^2 + \frac{E_1}{\varrho_0 a_2} b_0. \end{aligned}$$

Dla jednoznacznego rozwiązania problemu potrzebna jest jeszcze znajomość położenia frontu fali $\varphi_2(t_2^*)$ na płaszczyźnie x, t .

Z równania dodatniej charakterystyki wynika, że

$$(4.15) \quad \frac{dt_2^*}{dt^*} = 1 + \frac{1}{a_2} \frac{d\varphi_2(t_2^*)}{dt^*}.$$

Poza tym mamy

$$(4.16) \quad \frac{d\varphi_2(t_2^*)}{dt^*} = \dot{\varphi}_2(t_2^*) \frac{dt_2^*}{dt^*}, \quad \dot{\varphi}_2(t_2^*) = \frac{d\dot{\varphi}_2}{dt_2^*}.$$

Z (4.15) i (4.16) otrzymujemy

$$(4.17) \quad \frac{d\varphi_2(t_2^*)}{dt^*} = \frac{a_2 \dot{\varphi}_2(t_2^*)}{a_2 - \dot{\varphi}_2(t_2^*)},$$

a po scałkowaniu

$$(4.18) \quad \varphi_2(t_2^*) = D_m t_1 + \int_{\tau_0}^{t_2^*} \frac{a_2 \dot{\varphi}_2(t_2^*)}{a_2 - \dot{\varphi}_2(t_2^*)} dt^*,$$

gdzie

$$(4.19) \quad t_1 = \frac{a_2}{a_2 - D_m} \tau_0.$$

W ten sposób określiliśmy *explicite* następny odcinek frontu fali uderzeniowej $K_1 K_2$ i wartości funkcji $v_2(x, t)$ i $\tilde{p}_2(x, t)$ w strefie $\tau_0 \tau_1 K_2 K_1 \tau_0$ (rys. 5).

Dla rozwiązania problemu w następnych strefach obszaru II stosujemy wyprowadzone wyżej zależności w sposób rekurencyjny.

Mając określone funkcje $v_2(x, t)$ i $\tilde{p}_2(x, t)$ łatwo znajdujemy pozostałe parametry problemu. I tak, z (3.10)₁ i (4.7)₁ mamy

$$(4.20) \quad V_{\varphi_2}(t_2^*) = V_0 \left[1 - \varepsilon^*(\alpha) \left(1 - \frac{E_1}{E_0} \right) \frac{a_0^2}{a_1^2 - \dot{\varphi}_2^2(t_2^*)} \right].$$

Natomiast z (3.4) otrzymujemy:

$$(4.21) \quad V_2(x, t) = \left\{ \tilde{p}_{\varphi_2}(t_2^*) + E_2 \left[\frac{V_{\varphi_2}(t_2^*)}{V_0} - 1 \right] - \tilde{p}_2(x, t) \right\} \frac{V_0}{E_2} + 1.$$

Składowe pola magnetycznego i elektrycznego odpowiednio wynoszą:

$$(4.22) \quad H_2(x, t) = H_0 \frac{V_0}{V_2(x, t)},$$

$$E_2(x, t) = - \frac{v_2(x, t)}{c} H_2(x, t).$$

Tym samym uzyskaliśmy pełne zamknięte rozwiązanie dość złożonego problemu.

Literatura cytowana w tekście

1. S. KALISKI, *Plaska fala uderzeniowa w ciałach stałych w polu magnetycznym przy doskonałym przewodnictwie elektrycznym*, Biul. WAT, 6 (95), (1960). — *The plane elastic shock wave in perfectly conducting solids in a magnetic field*, Proc. Vibr. Probl., 1, 2 (1961).
2. J. MICHAŁEC, *Samopodobna fala uderzeniowa w stałym ośrodku doskonale przewodzącym w polu magnetycznym*, Biul. WAT, 3 (175), (1967).
3. Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ, Ю. П. РАЙЗЕР, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Москва 1966.
4. В. П. ЧЕЛЬШЕВ, Б. И. ШЕХТЕР, Л. А. ШУШКО, *Об изменении давления на поверхности преграды при контактном взрыве заряда ВВ*, Физика взрыва, 2, 6 (1970).
5. E. WŁODARCZYK, *O pewnym zamkniętym rozwiązaniu problemu propagacji uderzeniowej fali odciążenia w biliniowym ośrodku sprężystym*, Biul. WAT, 6 (238), (1972). — *A closed-form solution of the propagation problem of an unloading shock wave in a bilinear elastic body*, Proc. Vibr. Probl., 3, 13 (1972).

6. E. WŁODARCZYK, *Propagacja płaskiej uderzeniowej fali obciążenia w biliniowym pręcie sprężystym*, Biul. WAT, 8 (240), (1972). — *Propagation of a plane loading shock wave in a bilinear bar*, Proc. Vibr. Probl., 4, 13 (1972).
7. E. WŁODARCZYK, *Propagacja płaskiej fali uderzeniowej w ośrodku trójskładnikowym ze sprężystym odciążeniem*, Biul. WAT, 1 (245), (1973). — *Propagation of a plane shock wave in a three-component medium with elastic unloading*, Proc. Vibr. Probl., 1, 13 (1973).

R e z y m e

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНОМ ПРОВОДНИКЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В работе решена задача о распространении плоской неавтомодеальной ударной волны, распространяющейся в полупространстве, заполненном идеально проводящим материалом и находящимся под действием магнитного поля, направленного параллельно поверхности полупространства. Волны возбуждаются механическим давлением, приложенным мгновенно к поверхности полупространства, и остающимся постоянным до некоторого момента времени $t = \tau_0$, а затем монотонически исчезающего до нуля. Над полупространством находится пустота, в которую излучается электромагнитная волна. Получено замкнутое решение для упрощенной задачи. Упрощение состоит в том, что уравнение состояния аппроксимируется кусочно-линейной зависимостью, дополненной членами, связанными с магнитным полем. Насколько известно автору статьи, данная задача еще не изучалась в литературе.

S u m m a r y

AN APPROXIMATE METHOD OF SOLVING PLANE, NON-SELSIMILAR SHOCK WAVES IN A PERFECT CONDUCTOR SUBJECT TO MAGNETIC FIELD

The paper presents a solution to the problem of propagation of a plane, non-selfexcited impact wave moving in a perfectly conducting halfspace subject to a magnetic field directed parallel to its surface. The waves are excited by a mechanical pressure applied instantaneously to the surface of the halfspace; at the instant $t = \tau_0$ it is constant in time and then monotonically decreases to zero. Electromagnetic waves are radiated into the vacuum over the halfspace. A closed-form solution of the simplified problem is found. The simplification consisted in a sectionally linear approximation of the constitutive equation supplemented with magnetic field terms. In author's opinion, the problem has not been considered in literature thus far

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 marca 1973 r.

KSZTAŁTOWANIE RUROCIĄGU O ZMIENNEJ ŚREDNICY, WYKAZUJĄCEGO PEŁNE UPLASTYCZNIENIE W STADIUM ZNISZCZENIA

ZDZISŁAWA KORDAS (KRAKÓW)

1. Wstęp

Metody optymalnego projektowania konstrukcji z uwagi na nośność graniczną (minimum objętości przy ustalonej nośności granicznej) budzą w ostatnich latach szczególne zainteresowanie. Omawiane są między innymi w pracach WASIUTYŃSKIEGO i BRANDTA [7], RETMANA i SZAPIRO [5], SHEU i PRAGERA [6]. W podstawowych pracach DRUCKERA i SHIELDA [1], [2] oraz MROZA [4] stwierdzono, że w optymalnej konstrukcji w stadium zniszczenia uplastycznione być powinno bądź całe ciało, bądź też możliwie wielki podobszar tego ciała. W pracy KORDAS i ŻYCKOWSKIEGO [3] badano problem pokrewny do problemu optymalnego kształtowania. Zajmowano się mianowicie poszukiwaniem kształtów ciał podlegających całkowitemu uplastycznieniu w stadium zniszczenia. Do analizy wybrano stosunkowo prosty nietrywialny przypadek, poszukując takich kształtów niekołowych cylindrów grubościennych, które w warunkach płaskiego stanu odkształcenia wykazują pełne uplastycznienie przy wyczerpaniu nośności granicznej pod działaniem stałego ciśnienia zewnętrznego i wewnętrznego.

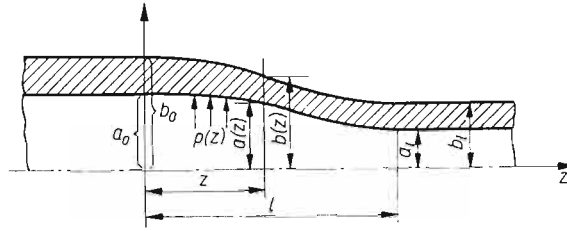
W niniejszej pracy zajęto się również problemem kształtowania kołowych cylindrów grubościennych. Zagadnienie dotyczy jednak cylindrów niepryzmatycznych, tzn. rurociągów o średnicy zmieniającej się wzdłuż osi rurociągu, poddanych działaniu zmiennego ciśnienia wewnętrznego. Tego typu rurociąg może być odcinkiem łączącym dwa rurociągi przyzmatyczne o różnych średnicach. Podobnie jak w pracy [3] dla uzyskania poszukiwanego, optymalnego kształtu zastosowano kryterium całkowitego uplastycznienia przy wyczerpaniu nośności granicznej.

2. Założenia i równania podstawowe

2.1. Rozważamy poziomy rurociąg grubościenny o osi geometrycznej pokrywającej się z osią z , o promieniu wewnętrznym $a(z)$ i promieniu zewnętrznym $b(z)$, poddany działaniu zmiennego ciśnienia $p(z) = p$ (rys. 1). Zakładamy, że w przekroju $z = 0$, ciśnienie i prędkość przepływającego płynu określone są odpowiednio przez p_0 i v_0 , natomiast wymiary cylindra przez promień wewnętrzny a_0 i zewnętrzny b_0 . Rozkład ciśnień wzdłuż osi rurociągu zakładamy zgodnie z prawem Bernoulli'ego oraz z równaniem ciągłości strugi dla płynu idealnego, mianowicie:

$$(2.1) \quad p = p_0 + \frac{\gamma}{2g} v_0^2 \left(1 - \frac{F_0^2}{F^2} \right),$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie, γ — ciężar właściwy płynu, F i F_0 — pole przekroju strugi odpowiednio dla dowolnego z i dla $z = 0$.



Rys. 1. Odcinek łączący dwa rurociągi pryzmatyczne o różnych średnicach

2.2. Rozważany problem wykazuje, przy pominięciu ciężaru własnego, cechy kołowej symetrii. Równaniami podstawowymi będą więc następujące równania zapisane we współrzędnych walcowych:

a) dwa równania równowagi wewnętrznej (równania naprężeniowe):

$$(2.2) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0;$$

b) dwa równania nierozdzielności (równania geometryczne):

$$(2.3) \quad \varepsilon_\theta + r \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \varepsilon_r = 0,$$

$$\frac{\partial \gamma_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} = 0;$$

c) warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego, o którym założymy, że ma być spełniony w każdym punkcie ciała:

$$(2.4) \quad (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2 = 2Q^2;$$

d) prawo zmiany objętości dla materiału nieściśliwego:

$$(2.5) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0;$$

e) trzy równania prawa zmiany postaci, które mogą być interpretowane bądź jako równania Hencky-Iliuszyna, bądź Levy-Misesa:

$$(2.6) \quad \varphi(\sigma_z - \sigma_r) = \varepsilon_z - \varepsilon_r,$$

$$\varphi(\sigma_\theta - \sigma_z) = \varepsilon_\theta - \varepsilon_z,$$

$$2\varphi\tau_{rz} = \gamma_{rz}.$$

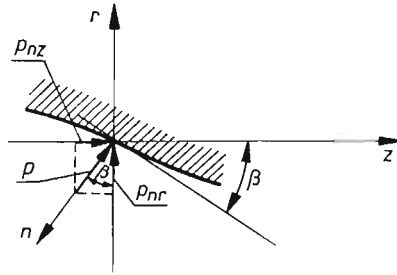
W równaniach (2.2)—(2.6) σ_r , σ_θ , σ_z , τ_{rz} , ε_r , ε_θ , ε_z , γ_{rz} oznaczają składowe naprężenia i odkształcenia bądź prędkości odkształceń, φ — moduł zaawansowania odkształceń plastycznych, Q — granicę plastyczności przy rozciąganiu.

2.3. Związki między ciśnieniem a składowymi stanu naprężenia na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej rozważanego cylindra określimy z naprężeniowych warunków brzegowych:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} p_{nr} &= a_{nr} \sigma_r + a_{nz} \tau_{rz}, \\ p_{nz} &= a_{nr} \tau_{rz} + a_{nz} \sigma_z, \end{aligned}$$

gdzie a_{nr} i a_{nz} oznaczają cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej.

Na brzegu wewnętrznym (rys. 2) składowe ciśnienia są równe odpowiednio $p_{nr} =$



Rys. 2. Rozkład obciążeń na brzegu wewnętrznym

$= p \cos \beta$, $p_{nz} = p \sin \beta$. Cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej z osiami r i z wyrazimy przez funkcje trygonometryczne kąta β , jaki tworzy styczna do konturu (brzegu) z osią z , mianowicie

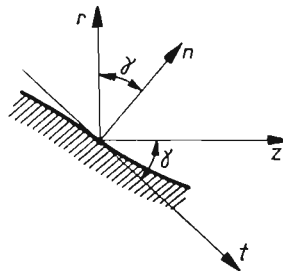
$$(2.8) \quad \begin{aligned} a_{nr} &= \cos(\widehat{nr}) = -\cos \beta, \\ a_{nz} &= \cos(\widehat{nz}) = -\sin \beta. \end{aligned}$$

Ponieważ $\operatorname{tg} \beta = -\frac{dr}{dz} = -\frac{da(z)}{dz} = -a'(z)$, warunki brzegowe (2.7) mają więc postać:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_r - a'(z) \tau_{rz} + p &= 0, \\ \tau_{rz} - a'(z) \sigma_z - a'(z) p &= 0. \end{aligned}$$

Na brzegu zewnętrznym (rys. 3) składowe ciśnienia są równe zero, natomiast cosinusy kierunkowe normalnej zewnętrznej są odpowiednio równe:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} a_{nr} &= \cos(\widehat{nr}) = \cos \gamma, \\ a_{nz} &= \cos(\widehat{nz}) = \sin \gamma. \end{aligned}$$



Rys. 3. Brzeg zewnętrzny rurociągu

Ponieważ $\operatorname{tg} \gamma = -\frac{db(z)}{dz} = -b'(z)$, warunki brzegowe (2.7) otrzymujemy w postaci:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma_r - b'(z) \tau_{rz} &= 0, \\ \tau_{rz} - b'(z) \sigma_z &= 0. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie problemu metodą małego parametru

3.1. Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu parametru α , który charakteryzuje małe odstępstwo promienia wewnętrznego cylindra od wartości stałej a_0 (promień wewnętrzny dla $z = 0$, por. rys. 1). Zakładamy mianowicie

$$(3.1) \quad a(z) = a_0 + \alpha a_1 + \dots$$

oraz następujące rozwiązania równań (2.2), (2.3), (2.4), (2.5) i (2.6):

$$(3.2) \quad X = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i X_i,$$

gdzie $X = \sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{rz}, \varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_z, \varphi$. Zerowe przybliżenia funkcji X są składowym stanu naprężenia i odkształcenia dla cylindra pryzmatycznego pod działaniem stałego ciśnienia p_0 , w przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Mianowicie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{r_0} &= -p_0 + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a_0}, & \varepsilon_{r_0} &= -\frac{C}{r^2}, \\ \sigma_{\vartheta_0} &= -p_0 + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a_0} + \frac{2Q}{\sqrt{3}}, & \varepsilon_{\vartheta_0} &= \frac{C}{r^2}, \\ \sigma_{z_0} &= -p_0 + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{r}{a_0} + \frac{Q}{\sqrt{3}}, & \varphi_0 &= \frac{C\sqrt{3}}{Qr^2}, \\ \tau_{rz_0} &= \varepsilon_{z_0} = \gamma_{rz_0} = 0, \end{aligned}$$

gdzie C oznacza dowolną stałą.

Wprowadzając założone rozwiązania (3.2) do równań podstawowych i porównując współczynniki przy pierwszych potęgach α , otrzymujemy układ dziewięciu równań, w których niewiadomymi są pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia, odkształcenia i φ . Równania te mają następującą postać:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r_1}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz_1}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r_1} - \sigma_{\vartheta_1}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{z_1}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz_1}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz_1}}{r} &= 0, \\ \varepsilon_{\vartheta_1} + \frac{\partial \varepsilon_{\vartheta_1}}{\partial r} r - \varepsilon_{r_1} &= 0, \\ \frac{\partial \gamma_{rz_1}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{z_1}}{\partial r} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_{\vartheta_1}}{\partial z^2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad & \sigma_{r_1} - \sigma_{\vartheta_1} = 0, \\
 [\text{c.d.}] \quad & \varepsilon_{r_1} + \varepsilon_{\vartheta_1} + \varepsilon_{z_1} = 0, \\
 & \varphi_0(\sigma_{z_1} - \sigma_{r_1}) + \varphi_1 \frac{Q}{\sqrt{3}} = \varepsilon_{z_1} - \varepsilon_{r_1}, \\
 & \varphi_0(\sigma_{\vartheta_1} - \sigma_{z_1}) + \varphi_1 \frac{Q}{\sqrt{3}} = \varepsilon_{\vartheta_1} - \varepsilon_{z_1}, \\
 & 2\varphi_0 \tau_{r\vartheta_1} = \gamma_{r\vartheta_1}.
 \end{aligned}$$

W szereg parametru α rozwiniemy również ciśnienie wewnętrzne p i funkcję $b(z)$, określającą kształt powierzchni zewnętrznej cylindra. Zapiszemy mianowicie

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & p = p_0 + \alpha p_1 + \dots, \\
 & b(z) = b_0 + \alpha b_1(z) + \dots,
 \end{aligned}$$

gdzie p_1 wynika z prawa rozkładu ciśnienia (2.1) i równa się

$$(3.6) \quad p_1 = -\frac{2v_0^2 \gamma}{g a_0} a_1(z),$$

b_0 jest promieniem zewnętrznym cylindra w przekroju $z = 0$, a $b_1(z)$ jest pierwszą poprawką tego promienia.

Warunki brzegowe (2.9) i (2.11) (wobec założeń (3.3) i (3.5)) dla pierwszego przybliżenia przyjmują następującą postać:

na powierzchni wewnętrznej, dla $r = a(z)$

$$(3.7) \quad \sigma_{r_1} \Big|_{r=a_0} + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{a_1(z)}{a_0} + p_1 = 0,$$

$$\tau_{r\vartheta_1} \Big|_{r=a_0} - \frac{Q}{\sqrt{3}} a_1'(z) = 0;$$

na powierzchni zewnętrznej, dla $r = b(z)$

$$(3.8) \quad \sigma_{r_1} \Big|_{r=b_0} + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{b_1(z)}{b_0} = 0,$$

$$\tau_{r\vartheta_1} \Big|_{r=b_0} - \frac{Q}{\sqrt{3}} b_1'(z) = 0.$$

Rozwinięcie równań podstawowych i warunków brzegowych przeprowadzono według schematu przedstawionego w pracy [3]. Należy zaznaczyć, że warunki brzegowe w zerowym przybliżeniu określają stosunek promieni cylindra pryzmatycznego, mianowicie

$$(3.9) \quad \frac{b_0}{a_0} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2Q} p_0}.$$

3.2. Równania podstawowe (3.4) stosunkowo łatwo dają się rozwiązać przy założeniu płaskiego stanu odkształcenia. Założymy mianowicie $\varepsilon_{z_1} = 0$. Z prawa zmiany objętości, prawa zmiany postaci oraz warunku plastyczności wynika, że pierwsze poprawki naprężeń normalnych są sobie równe, tzn. $\sigma_{r_1} = \sigma_{\vartheta_1} = \sigma_{z_1}$. Przy tym założeniu problem może

być rozwiązywany w naprężeniach. Warunki równowagi wewnętrznej dają następujący układ dwóch równań o niewiadomych $\sigma_1 \equiv \sigma_{r1} \equiv \sigma_{\theta 1} \equiv \sigma_{z1}$ i $\tau_1 \equiv \tau_{rz1}$:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial z} + \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{\tau_1}{r} &= 0. \end{aligned}$$

Układ (3.10) sprowadzamy do jednego równania cząstkowego drugiego rzędu na pierwszą poprawkę naprężenia stycznego τ_1 ,

$$(3.11) \quad \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r} + \frac{\partial \tau_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \tau_1 = 0.$$

Równanie (3.11) będziemy rozwiązywać metodą Fouriera. Założymy mianowicie, że

$$(3.12) \quad \tau_1 = F_1(z)F_2(r).$$

Rozdzielenie zmiennych prowadzi do równości

$$(3.13) \quad \frac{F_1''(z)}{F_1(z)} = \frac{F_2''(r)}{F_2(r)} + \frac{1}{r} \frac{F_2'(r)}{F_2(r)} - \frac{1}{r^2} = -\lambda^2,$$

a tym samym do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu, określających funkcje $F_1(z)$ i $F_2(r)$. Przyjęcie dodatniej stałej po prawej stronie równości (3.13) prowadzi — jak się okazuje — do rozbieżnych rozwiązań, natomiast przypadek $\lambda = 0$ odpowiada całkowitemu uplastycznieniu cylindra liniowo zbieżnego. Otrzymujemy zatem równanie drgań harmonicznym

$$(3.14) \quad F_2''(z) + \lambda^2 F_1(z) = 0$$

oraz równanie Bessela w postaci

$$(3.15) \quad F_2''(r) + \frac{1}{r} F_2'(r) - \left(\frac{1}{r^2} - \lambda^2 \right) F_2(r) = 0.$$

Całką ogólną równania (3.14) jest następująca kombinacja funkcji trygonometrycznych

$$(3.16) \quad F_1(z) = A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z).$$

Całką ogólną równania (3.15) jest natomiast poniższa kombinacja funkcji Bessela

$$(3.17) \quad F_2(r) = A_2 I_1(\lambda r) + B_2 Y_1(\lambda r).$$

W rozwiązaniach (3.16) i (3.17) A_1, B_1, A_2, B_2 są nieoznaczonymi stałymi całkowania, $I_1(\lambda r), Y_1(\lambda r)$ są funkcjami Bessela pierwszego rzędu.

Rozwiązaniem ogólnym równania (3.11) jest funkcja określająca pierwszą poprawkę naprężenia stycznego, mianowicie

$$(3.18) \quad \tau_1 = \tau_1(z, r) = [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda r) + B_2 Y_1(\lambda r)].$$

Przez całkowanie równań (3.10) i wykorzystanie warunku zgodności, określimy pierwszą poprawkę naprężeń normalnych

$$(3.19) \quad \sigma_1 = \sigma_1(z, r) = [A_1 \cos(\lambda z) - B_1 \sin(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda r) + B_2 Y_0(\lambda r)] + K,$$

gdzie K jest dowolną stałą całkowania, którą dalej przyjmiemy równą zero. $I_0(\lambda r), Y_0(\lambda r)$ są funkcjami Bessela rzędu zerowego.

3.3. Po uwzględnieniu rozwiązań (3.18) i (3.19), warunki brzegowe (3.7) i (3.8) dają następujący układ czterech równań:

$$(3.20) \quad [A_1 \cos(\lambda z) - B_1 \sin(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda a_0) + B_2 Y_0(\lambda a_0)] + \left(\frac{2Q}{\sqrt{3}} + \frac{2V_0^2 \gamma}{g} \right) \frac{a_1}{a_0} = 0,$$

$$(3.21) \quad [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda a_0) + B_2 Y_1(\lambda a_0)] - \frac{Q}{\sqrt{3}} a'_1 = 0,$$

$$(3.22) \quad [A_1 \cos(\lambda z) - B_1 \sin(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda b_0) + B_2 Y_0(\lambda b_0)] + \frac{2Q}{\sqrt{3}} \frac{b_1}{b_0} = 0,$$

$$(3.23) \quad [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda b_0) + B_2 Y_1(\lambda b_0)] - \frac{Q}{\sqrt{3}} b'_1 = 0.$$

Wykorzystanie tego układu równań prowadzi do problemu wartości własnych. Pierwsze równanie (3.20) określa funkcję $a_1 = a_1(z)$, a trzecie (3.22) — funkcję $b_1 = b_1(z)$:

$$(3.24) \quad a_1 = a_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2Q} a_0 \eta [B_1 \sin(\lambda z) - A_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda a_0) + B_2 Y_0(\lambda a_0)],$$

$$(3.25) \quad b_1 = b_1(z) = \frac{\sqrt{3}}{2Q} b_0 [B_1 \sin(\lambda z) - A_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_0(\lambda b_0) + B_2 Y_0(\lambda b_0)],$$

gdzie

$$(3.26) \quad \eta = \frac{Qg}{Qg + V_0^2 \gamma \sqrt{3}} = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2 \gamma \sqrt{3}}{Qg}},$$

jest parametrem uwzględniającym ciężar właściwy i prędkość przepływającego płynu oraz przyspieszenie siły ciężkości.

Zróżniczkujemy względem z funkcje (3.24) i (3.25). Wstawiając obliczone pochodne $a'_1(z)$ i $b'_1(z)$ do równań (3.21) i (3.23), otrzymujemy następujący układ dwóch równań, który powinien być spełniony dla każdego z :

$$(3.27) \quad \begin{aligned} & [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda a_0) + B_2 Y_1(\lambda a_0)] - \frac{a_0}{2} \lambda \eta [B_1 \cos(\lambda z) + A_1 \sin(\lambda z)] \times \\ & \times [A_2 I_0(\lambda a_0) + B_2 Y_0(\lambda a_0)] = 0, \\ & [A_1 \sin(\lambda z) + B_1 \cos(\lambda z)] [A_2 I_1(\lambda b_0) + B_2 Y_1(\lambda b_0)] - \frac{b_0}{2} \lambda [B_1 \cos(\lambda z) + A_1 \sin(\lambda z)] \times \\ & \times [A_2 I_0(\lambda b_0) + B_2 Y_0(\lambda b_0)] = 0. \end{aligned}$$

Układ (3.27) spełniony dla każdego z , daje układ dwóch równań jednorodnych ze względu na stałe A_2 i B_2 , typowy dla problemu wartości własnych

$$(3.28) \quad A_2 [I_1(\lambda a_0) - \frac{a_0}{2} \lambda \eta I_0(\lambda a_0)] + B_2 [Y_1(\lambda a_0) - \frac{a_0}{2} \lambda \eta Y_0(\lambda a_0)] = 0,$$

$$A_2 [I_1(\lambda b_0) - \frac{b_0}{2} \lambda I_0(\lambda b_0)] + B_2 [Y_1(\lambda b_0) - \frac{b_0}{2} \lambda Y_0(\lambda b_0)] = 0.$$

Warunek na istnienie rozwiązań niezerowych tego układu (zerowanie się wyznacznika głównego), daje równanie przestępne na wartości własne λ . Równocześnie określony jest więc kształt cylindra (równania (3.24) i (3.25)), który ulegnie zniszczeniu w sensie przyjętego kryterium. Równanie to jest liniowe ze względu na parametr η . Może zatem być zapisane w postaci

$$(3.29) \quad \eta = 1 + \frac{Y_2(\lambda a_0)I_2(\lambda b_0) - I_2(\lambda a_0)Y_2(\lambda b_0)}{Y_0(\lambda a_0)I_2(\lambda b_0) - I_0(\lambda a_0)Y_2(\lambda b_0)},$$

gdzie I_2, Y_2 są funkcjami Bessela drugiego rzędu.

Zakładając, że w przekroju $z = 0$ naprężenie $\sigma_{r1} = 0$ (warunek zgodności naprężeń promieniowych dla cylindra pryzmatycznego), otrzymujemy $A_1 = 0$. Z drugiego równania układu (3.28) obliczamy

$$(3.30) \quad C_2 = \frac{B_2}{A_2} = -\frac{I_2(\lambda b_0)}{Y_2(\lambda b_0)}.$$

Ostatecznie więc otrzymujemy pierwsze poprawki promienia wewnętrznego i zewnętrznego jako następujące funkcje współrzędnej z :

$$(3.31) \quad \begin{aligned} a_1(z) &= \frac{\sqrt{3}}{2Q} a_0 C_1 \eta [I_0(\lambda a_0) + C_2 Y_0(\lambda a_0)] \sin(\lambda z), \\ b_1(z) &= \frac{\sqrt{3}}{2Q} b_0 C_1 [I_0(\lambda b_0) + C_2 Y_0(\lambda b_0)] \sin(\lambda z), \end{aligned}$$

gdzie $C_1 = B_1 A_2$ pozostaje do końca nieokreśloną stałą, spełniającą rolę parametru.

Pierwsze poprawki składowych stanu naprężenia są ostatecznie następującymi funkcjami r i z :

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \tau_1 &= \tau_1(r, z) = C_1 [I_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r)] \cos(\lambda z), \\ \sigma_1 &= \sigma_1(r, z) = -C_1 [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z). \end{aligned}$$

4. Zestawienie wzorów końcowych i przykład liczbowy

4.1. Wykorzystując wyniki uzyskane w p. 3.3, przedstawimy wyrażenia na promień zewnętrzny i wewnętrzny kształtowanego cylindra, który zostanie całkowicie uplastyczniony w stadium zniszczenia. Są to następujące funkcje z (z dokładnością do pierwszego przybliżenia):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} a(z) &= a_0 + \bar{\alpha} a_0 \eta [I_0(\lambda a_0) + C_2 Y_0(\lambda a_0)] \sin(\lambda z) + \dots, \\ b(z) &= b_0 + \bar{\alpha} b_0 [I_0(\lambda b_0) + C_2 Y_0(\lambda b_0)] \sin(\lambda z) + \dots \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.2) \quad \bar{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2Q} C_1 \alpha$$

jest nowym parametrem, charakteryzującym niepryzmatyczny kształt cylindra.

Składowe stanu naprężenia, z dokładnością do pierwszego przybliżenia, określone są następującymi funkcjami r i z .

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \ln \frac{r}{b_0} - \bar{\alpha} [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z) + \dots \right\}, \\ \sigma_\theta(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\ln \frac{r}{b_0} + 1 \right] - \bar{\alpha} [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z) \dots \right\}, \\ \sigma_z(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \left[\ln \frac{r}{b_0} + \frac{1}{2} \right] - \bar{\alpha} [I_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r)] \sin(\lambda z) + \dots \right\}, \\ \tau_{rz}(r, z) &= \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left\{ \bar{\alpha} [I_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r)] \cos(\lambda z) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Równania (4.1) mogą być wykorzystane po uprzednim wyliczeniu wartości własnej λ z równania (3.9), stałej całkowania C_2 z (3.20), oraz parametru $\bar{\alpha}$. Parametr $\bar{\alpha}$ powinien być wyznaczony z warunku zgodności średnic w przekrojach łączących przyrównane części cylindra z kształtowaną częścią nieprzyrównaną. Przyjmijmy, że stosunek promieni wewnętrznych cylindrów przyrównanych wynosi $k = a_\alpha/a_\beta$ (rys. 4) oraz że długość kształtowanego odcinka wyznaczona jest długością przedziału $-\pi/2 \leq z/a_0 \leq \pi/2$. Na granicach tego przedziału styczne do uzyskanych konturów są poziome, bowiem z równań (4.1) wynika, że dla $\frac{a_0}{z} = \pm \frac{\pi}{2}$, $\frac{da}{dz} = \frac{db}{dz} = 0$. Wyliczając z pierwszego z równań (4.1) promienie wewnętrzne kształtowanego odcinka dla $z/a_0 = \pm \pi/2$ oraz przyrównując ich stosunek do założonej wartości k , otrzymujemy następujący wzór na parametr $\bar{\alpha}$:

$$(4.4) \quad \bar{\alpha} = \frac{1-k}{\eta(1+k)[I_0(\lambda a_0) + C_2 Y_0(\lambda a_0)] \sin\left(\frac{\pi}{2} \lambda a_0\right)}.$$

4.2. Zbadamy teraz kształt rurociągu, wykazującego pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia na konkretnym przykładzie liczbowym.

Przy projektowaniu rurociągów zwykle znane jest ciśnienie p_0 i prędkość v_0 przepływającego płynu w przekroju $z = 0$. Wielkość ciśnienia p_0 określa stosunek b_0/a_0 [wzór (3.9)]. Jedynie bowiem kształty odbiegające od przyrównanych o tak wyznaczonym stosunku ulegną całkowitemu uplastycznieniu. Dla ułatwienia obliczeń założymy $a_0 = 1$, $b_0 = 1,5$, co odpowiada ciśnieniu $p_0 = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln 1,5$.

Kształt rurociągu, czyli zmienne średnice w funkcji z , określiliśmy z wzorów (4.1). Wcześniej jednak należy wyznaczyć λ , C_2 oraz wartość parametru $\bar{\alpha}$. W celu wyznaczenia wartości własnej λ należy rozwiązać równanie (3.29) dla ustalonej prędkości v_0 czyli parametru η . Prędkość v_0 jest bowiem związana z parametrem η wyrażeniem (3.26). Ponieważ równanie (3.29) jest trudnym do rozwiązania równaniem przestępnym na λ , dla wygody rachunkowej przyjmijmy więc λ , wyliczając wielkość η (co odpowiada pewnej prędkości v_0 przepływającego płynu).

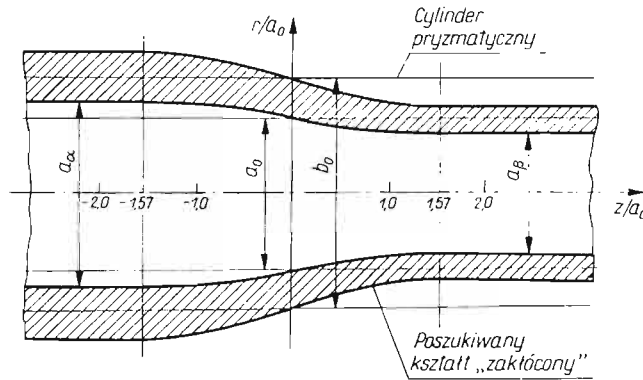
Mianowicie dla $\lambda = 1/a_0$, $\eta = 0,6239$ [z równania (3.29)] oraz

$$C_2 = -\frac{J_2(\lambda b_0)}{Y_2(\lambda b_0)} = 0,2490.$$

Dla powyższych danych, funkcje określające kształt cylindra z dokładnością do pierwszego przybliżenia mają następującą postać:

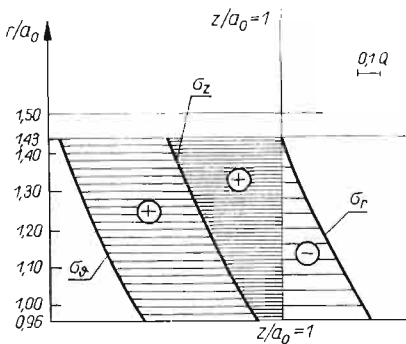
$$(4.5) \quad \begin{aligned} a(z) &= 1 + 0,4911\bar{\alpha}\sin z + \dots, \\ b(z) &= 1,5 + 0,9150\bar{\alpha}\sin z + \dots \end{aligned}$$

W dalszym ciągu przyjmujemy ujemną wartość parametru $\bar{\alpha}$, mianowicie $\bar{\alpha} = -0,4330$, co odpowiada stosunkowi średnic wewnętrznych cylindrów pryzmatycznych $k = a_\alpha/a_\beta = 1,5$. Znaleziony kształt dla powyższych danych zilustrowano na rys. 4.

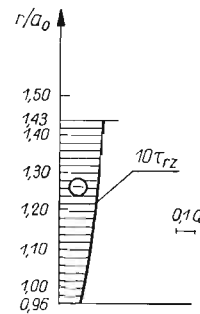


Rys. 4. Znaleziony kształt niepryzmatycznej części rurociągu

Rozkład naprężeń w ścianie znalezionej rurociągu określony jest wzorami (4.3). Dla omówionego powyżej przykładu zbadano szczegółowo wartości naprężeń w przekroju $z/a_0 = 1$. Na rys. 5 przedstawiono rozkład naprężeń promieniowych, obwodowych i poprzecznych, natomiast na rys. 6 podano dziesięciokrotnie powiększone naprężenia styczne.



Rys. 5. Rozkład naprężeń normalnych w przekroju $z/a_0 = 1$.



Rys. 6. Rozkład naprężeń stycznych w przekroju $z/a_0 = 1$.

Literatura cytowana w tekście

1. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Design for minimum weight*, Proc. 9th Intern. Congr. Appl. Mech., Brussels 1956, 5, 212—222.
2. D. C. DRUCKER, R. T. SHIELD, *Bounds on minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 15 (1957), 269—281.
3. Z. KORDAS, M. ŻYCZKOWSKI, *Kształtowanie niekołowych cylindrów grubościennych wykazujących pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia*, Rozpr. Inż., 3, 18 (1970), 371—390.
4. Z. MRÓZ, *On a problem of minimum weight design*, Quart. Appl. Math., 3, 19 (1961), 127—135.
5. М. И. РЕЙТМАН, Г. С. ШАПИРО, *Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности*, Итоги Науки, Механика, Упругость и пластичность, 1964, Москва 1966.
6. С. Y. SHEU, W. PRAGER, *Recent developments in optimal structural design*, Appl. Mech. Reviews, 10, 21 (1968), 985—992.
7. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *The present state of knowledge in the field of optimum design of structures* Appl. Mech. Rev., 6, 16 (1963), 341—350.

Резюме

ФОРМИРОВАНИЕ ТРУБОПРОВОДА ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА, ПОЛНОСТЬЮ ПЕРЕХОДЯЩЕГО В СТАДИИ РАЗРУШЕНИЯ В ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

Данная работа посвящена формированию непризматического трубопровода, т. е. трубопровода, диаметр которого изменяется вдоль горизонтальной оси, находящегося под действием переменного внутреннего давления.

Давление изменяется согласно уравнению Бернулли для идеальной жидкости.

Для нахождения оптимальной формы применен критерий полного перехода в пластическое состояние, т. е. удовлетворения условию пластичности в произвольной точке сечения трубопровода.

В предлагаемом методе компоненты напряжений и деформаций, а также функции $a(z)$ и $b(z)$, определяющие форму трубопровода, развернуты в ряды по малому параметру. Задача сводится к задаче о собственных значениях.

Краевые условия приводят в первом приближении к системе однородных уравнений для постоянных интегрирования.

Условия существования ненулевых решений для этой системы определяют форму тела.

Приведена сводка полученных формул и дан численный пример.

Summary

DESIGN OF A PIPE LINE OF A VARIABLE DIAMETER, EXHIBITING FULL PLASTIC YIELDING AT COLLAPSE

In the paper is discussed the design of a pipe line with diameter varying along its horizontal axis subject to variable internal pressure (Fig. 1). The pressure changes according to Bernoulli's theorem for ideal liquids [formula (2.1)]. The criterion of full yielding satisfying the plasticity condition (2.4) is used for the optimization of the pipe line form. In the method used the components of stress, strain and the functions $a(z)$ and $b(z)$ are expanded into series of a small parameter. The boundary conditions of the first approximation (3.7) and (3.8) yield the system of homogeneous equations for the constants of integration. The condition of existence of non-trivial solutions determines the form of the body.

Sec. 4 presents the full set of formulae derived and a numerical example.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 kwietnia 1973 r.

O ANHOLONOMICZNYCH UKŁADACH
PIERWSZEGO I DRUGIEGO RZĘDU Z TARCIEM

N. Ja. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

W niniejszej pracy ustala się ekstremalne własności reakcji więzów dla układów materialnych typu Czetajewa-Przeborskiego i układów z anholonomicznymi więzami drugiego rzędu, wychodząc z ogólnej definicji Painlevé'go układów z tarcie. Otrzymano zależność między odchyleniami ruchu rzeczywistego od możliwego w układzie z tarcie i w układzie bez tarcia, a także pewne wnioski wynikające z tej zależności.

1. Ekstremalne właściwości reakcji więzów

Rozważmy układ n punktów materialnych z anholonomicznymi, w przypadku ogólnym, nieliniowymi więzami pierwszego rzędu z tarcie:

$$(1.1) \quad f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k; i = 1, 2, \dots, n).$$

Wychodząc z ogólnej definicji Painlevé'go układów z tarcie [1], będziemy uważać, że suma prac elementarnych reakcji więzów \bar{R}_i na możliwych przemieszczeniach układu nie zawsze będzie równa zeru. Załóżmy, że suma ta na możliwym przemieszczeniu równa jest $\tau \neq 0$

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^n R_i \delta \bar{r}_i = \tau \quad (\tau \neq 0).$$

Możliwe przemieszczenia układu określa się według Czetajewa [2] i Przeborskiego [3] następującym wzorem:

$$(1.3) \quad \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Rozważmy sumę

$$(1.4) \quad A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i)^2,$$

gdzie m_i oznacza masę i -tego punktu, \bar{w}_i — przyspieszenie tego punktu w określonej chwili czasu t w trakcie ruchu rzeczywistego pod działaniem danej siły \bar{F}_i i reakcji \bar{R}_i ; $\bar{\gamma}_i$ — jedno z możliwych przyspieszeń dla danych więzów przy stałych położeniach i prędkościach punktu w określonej chwili czasu. Suma $A_{d\delta}$ określa miarę odchylenia rzeczywistego ruchu (d) danego układu punktów materialnych od ruchu możliwego (δ).

W charakterze ruchu, z którym będziemy porównywać ruch rzeczywisty (d) według wielkości odchylenia od ruchu możliwego (δ), przyjmiemy ruch (d') przy tych samych danych siłach \bar{F}_i i dowolnych reakcjach \bar{R}'_i , różniących się od rzeczywistych reakcji, lecz spełniających warunek (1.2), tj.

$$(1.5) \quad \sum_{i=1}^n R'_i \delta \bar{r}_i = \tau.$$

Układów sił \bar{R}'_i posiadających właściwości (1.5) istnieje nieskończona ilość [4].

Ruch (d') nie będzie, mówiąc ogólnie, możliwym przy nałożonych więzach. Odchylenie ruchu (d') od ruchu możliwego (δ) jest równe

$$(1.6) \quad A_{d',\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}'_i - \bar{\gamma}_i)^2,$$

a przyrost odchylenia przy przejściu od ruchu rzeczywistego (d) do ruchu (d') jest równy

$$(1.7) \quad \Delta A = \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i) \Delta \bar{w}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\Delta \bar{w}_i)^2, \quad \Delta \bar{w}_i = \bar{w}'_i - \bar{w}_i.$$

Dla rozpatrywanych układów typu Czetajewa istnieją możliwe przemieszczenia punktów układu, proporcjonalne do różnic ich przyspieszeń w ruchu rzeczywistym i możliwym (przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów w ruchu rzeczywistym i możliwym rozpatrywanym w danej chwili czasu t). A więc różnice $\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i$ we wzorze (1.7) są przemieszczeniami możliwymi. Przyrost przyspieszeń w porównywanych ruchach $\Delta \bar{w}_i$ równy jest

$$(1.8) \quad \Delta \bar{w}_i = \frac{\bar{R}'_i - \bar{R}_i}{m_i}.$$

Ponieważ \bar{R}_i i \bar{R}'_i spełniają warunki (1.2) i (1.5), to

$$\sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i) \Delta \bar{w}_i = \sum_{i=1}^n (\bar{R}'_i - \bar{R}_i) \delta \bar{r}_i = 0.$$

W ten sposób z równania (1.7) mamy

$$(1.9) \quad \Delta A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\Delta \bar{w}_i)^2 > 0,$$

skąd wynika, że

$$(1.10) \quad A_{d\delta} > A_{d',\delta};$$

innymi słowy, w przypadku rzeczywistych reakcji więzów \bar{R}_i suma (1.4), traktowana jako funkcja reakcji dla ustalonych sił \bar{F}_i , przyjmuje wartość minimalną.

Jeżeli więzy nałożone na układ są idealne, tj.

$$\sum_{i=1}^n \bar{N}_i \delta r_i = 0,$$

gdzie N_i jest wypadkową reakcji idealnych więzów (1.1), to minimalizacja sumy (1.4) dla rzeczywistych reakcji więzów \bar{N}_i wynika bezpośrednio z poprzedniego ogólnego rezultatu dla $\tau = 0$. Przypadek więzów idealnych był rozpatrywany przez autora w pracy [5].

Udowodnione wyżej twierdzenie można rozciągnąć i na układy z idealnymi i nieidealnymi anholonomicznymi więzami drugiego rzędu, liniowymi względem przyspieszeń, mianowicie

$$\sum_{i=1}^n (a_{\lambda i} \ddot{x}_i + b_{\lambda i} \ddot{y}_i + c_{\lambda i} \ddot{z}_i) = a_{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k).$$

Współczynniki $a_{\lambda i}$, $b_{\lambda i}$, $c_{\lambda i}$, a_{λ} są zależne od czasu, współrzędnych i prędkości ruchu punktów układu.

W pracy [3] Przeborski po raz pierwszy wprowadził dla rozważanych układów definicję możliwych przemieszczeń, uogólniającą definicję (1.3), w myśl której przemieszczenia możliwe są definiowane związkami:

$$\sum_{i=1}^n (a_{\lambda i} \delta x_i + b_{\lambda i} \delta y_i + c_{\lambda i} \delta r_i) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k).$$

Łatwo spostrzec, że różnica przyspieszeń punktów układu dla ruchu rzeczywistego i możliwego, przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów układu w obu ruchach dla ustalonej chwili czasu, jest przemieszczeniem możliwym. Rozciągając na rozważane układy ogólną definicję Poinslevé'go układów z tarciem (1.2) oraz powtarzając rozważania jak dla układów typu Czetajewa, można udowodnić, że

$$A_{d\delta} < A_{d'\delta},$$

przy zachowaniu warunków (1.2) i (1.5) dla sił reakcji więzów w ruchach porównywanych.

2. Związki pomiędzy niektórymi charakterystykami dynamicznymi ruchu danego układu z tarciem i bez tarcia

Niech będzie dany układ n punktów materialnych, z nałożonymi więzami holonomicznymi i anholonomicznymi pierwszego i drugiego rzędu z tarciem.

Przekształćmy wzór dla odchylenia rzeczywistego ruchu układu od ruchu możliwego

$$(2.1) \quad A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_i - \bar{\gamma}_i)^2,$$

$$(2.2) \quad A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{\bar{F}_i + \bar{R}_i}{m_i} - \bar{\gamma}_i \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{F}_i + \bar{q}_i + \bar{N}_i}{m_i} - \bar{\gamma}_i \right)^2,$$

gdzie \bar{N}_i — siła więzów, zaś $\bar{\varrho}_i$ — siła tarcia. A zatem

$$(2.3) \quad \sum_{i=1}^n \bar{N}_i \delta \bar{r}_i = 0,$$

$$(2.4) \quad \sum_{i=1}^n \bar{\varrho}_i \delta \bar{r}_i = \tau.$$

Siła więzów \bar{N}_i jest tą reakcją, która w określonej chwili czasu t działałaby na punkt μ_i , w przypadku gdyby układ był bez tarcia, z tym że każdy punkt μ_i układu w określonej chwili czasu t miałby te same położenie, tę samą prędkość i podlegał działaniu tej samej danej siły \bar{F}_i , jak w ruchu z tarciami [4].

Niech będzie dane \bar{w}_{ido} — przyspieszenie punktu układu w ruchu bez tarcia, a $A_{do\delta}$ — odchylenie ruchu bez tarcia ($d0$) od ruchu możliwego (δ). Wówczas

$$(2.5) \quad A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\left(\frac{\bar{F}_i + \bar{N}_i}{m_i} - \bar{\gamma}_i \right) + \frac{\bar{\varrho}_i}{m_i} \right]^2 = A_{do\delta} + \\ + \sum_{i=1}^n (\bar{w}_{ido} - \bar{\gamma}_i) \bar{\varrho}_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\varrho}_i^2}{m_i}.$$

Ponieważ

$$(2.6) \quad \bar{w}_{ido} - \bar{\gamma}_i = \delta \bar{r}_i,$$

to zgodnie ze wzorem (2.4) otrzymamy

$$(2.7) \quad A_{d\delta} = A_{do\delta} + \tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\varrho}_i^2}{m_i}.$$

Trzeci składnik prawej części równania (2.7) stanowi odchylenie rzeczywistego ruchu z tarciami od ruchu rzeczywistego bez tarcia. Rzeczywiście

$$(2.8) \quad \bar{\varrho}_i = m_i (\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido}),$$

dlatego też

$$(2.9) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\varrho}_i^2}{m_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido})^2.$$

W ten sposób wzór (2.7) dla $A_{d\delta}$ możemy zapisać w postaci

$$(2.10) \quad A_{d\delta} = A_{do\delta} + \tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido})^2$$

lub

$$(2.11) \quad A_{d\delta} = A_{do\delta} + \tau + A_{dd0},$$

gdzie

$$A_{d00} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido})^2.$$

Znajdziemy wzór dla $A_{d'\delta}$. Ze wzoru (1.9) mamy

$$(2.12) \quad A_{d'\delta} - A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\Delta \bar{w}_i)^2,$$

gdzie

$$\Delta \bar{w}_i = \bar{w}_{id'} - \bar{w}_{id}.$$

Można udowodnić, że

$$(2.13) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{id})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{ido})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido})^2.$$

Istotnie

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{ido})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido})^2 &= \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [(\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{id})^2 + 2(\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido})(\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{id})]. \end{aligned}$$

Udowodnimy również, że

$$(2.14) \quad \sum_{i=1}^n m (\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido})(\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{id}) = 0.$$

W rzeczywistości

$$\bar{w}_{id} - \bar{w}_{ido} = \delta \bar{r}_i, \quad m_i (\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{id}) = \bar{R}'_i - \bar{R}_i.$$

A więc, zgodnie z warunkami (1.2) i (1.5), równanie (2.14) jest spełnione. W ten sposób mamy

$$(2.15) \quad A_{d'\delta} = A_{d0\delta} + \tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\bar{w}_{id'} - \bar{w}_{ido})^2.$$

Nierówność (1.10) wspólnie z wzorami (2.10) i (2.15) możemy zinterpretować następująco: w ruchu rzeczywistym układu z tarciem pod działaniem danych sił \bar{F}_i i reakcji \bar{R}_i wykonujących tę samą pracę wirtualną co i reakcje rzeczywiste, odchylenie od ruchu bez tarcia jest minimalne.

Napiszemy równanie (2.11) w postaci

$$(2.16) \quad A_{d0\delta} + A_{d00} - (A_{d\delta} - \tau) = 0.$$

Stąd wynikają dwie nierówności:

$$(2.17) \quad A_{d0\delta} < A_{d\delta} - \tau,$$

$$(2.18) \quad A_{dd0} < A_{d\delta} - \tau;$$

pierwsza z nich (2.17) wyraża związek między odchyleniami ruchu możliwego od rzeczywistego i od ruchu uwolnionego od tarcia, a druga (2.18) — związek między odchyleniami ruchu rzeczywistego od możliwego i od ruchu uwolnionego od tarcia.

Literatura cytowana w tekście

1. П. ПЭНЛЕВЕ, *Лекции о трении*, Гостехиздат, 1954.
2. П. Г. ЧЕТАЕВ, *О принципе Гаусса*, Изв. физ-мат. Об-ва при Казанском университете, 1932—33, т. 6, серия 3.
3. A. PRZEBORSKI, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeitschrift, B. 36, Berlin 1933, s. 184—194.
4. В. В. РУМЯНЦЕВ, *О системах с трением*, П.М.М., т. 25, № 6, 1961.
5. Н. Я. ЦЫГАНОВА, *Об одном свойстве реакций связей для неоголономных систем типа Н.Г. Четаева*, Науч. труды ВПИ, Волгоград, 1970, стр. 104—109; *O pewnych własnościach układów anholonomicznych typu Czetajewa—Przeborskiego*, Mech. Teoret. Stos., 1, 11 (1973).

POLITECHNIKA, WOLGOGRAD

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1973 r.

MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU ZGINANEJ PŁYTY TRÓJWARSTWOWEJ

HENRYK MIKOŁAJCZAK, BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

1. Uwagi wstępne

Płyty trójwarstwowe, z uwagi na swoje zalety, znajdują coraz szersze zastosowanie także w konstrukcjach inżynierskich. Obliczenia statyczne tych płyt, pomimo różnych założeń upraszczających, wymagają dużego nakładu pracy rachunkowej. Stosunkowo prosty model oparty na założeniach HOFFA [1] prowadzi do układu trzech równań różniczkowych cząstkowych (2.1) lub równoważnego im jednego równania rzędu ósmego. Praktyczne wyniki, poza nielicznymi wyjątkami, uzyskać można tylko na drodze obliczeń numerycznych.

Uniwersalną metodą, doskonale przystosowaną do elektronicznej techniki obliczeniowej, jest metoda elementów skończonych szczegółowo opracowana w literaturze [2], [3], [4], [5], [6]. Jej kluczowym problemem jest znajomość macierzy sztywności pozwalająca na ułożenie ogólnego programu obliczeń na drodze standardowego postępowania.

W pracy poniższej przedstawiono ogólną postać macierzy sztywności dla rozważanego zagadnienia, uzyskując ją na dwóch różnych drogach: albo korzystając z metody ortogonalizacyjnej zastosowanej uprzednio do zagadnienia płaskiego [7], albo z warunku na minimum energii potencjalnej odkształcenia sprężystego.

Na zakończenie przedstawiono pewne wyniki liczbowe, przyjmując podział płyty na elementy prostokątne o pięciu stopniach swobody w każdym węzle.

2. Podstawowe założenia i zależności

Rozważaniami objęto płytę trójwarstwową symetryczną względem płaszczyzny środkowej (rys. 1), o warstwach zewnętrznych spełniających założenia teorii płyt cienkich i teorii tarcz i o warstwie środkowej stałej grubości, nieodkształcalnej w kierunku pionowym (założenia HOFFA) [1].

Zagadnienie można opisać przez trzy funkcje przemieszczeń:

$u(x, y)$ — przemieszczenie w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej w kierunku osi x ,

$v(x, y)$ — przemieszczenie w płaszczyźnie środkowej warstwy dolnej w kierunku osi y ,

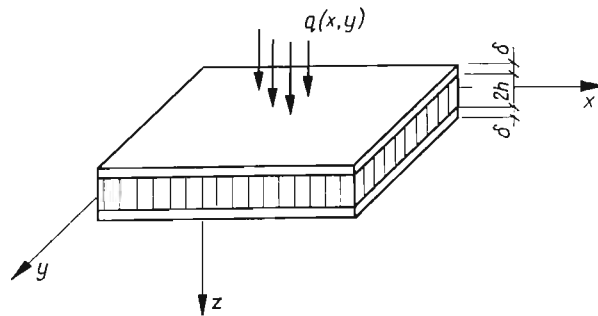
$w(x, y)$ — ugięcie pionowe płyty jednakowe dla wszystkich warstw.

Równania równowagi zagadnienia mają postać [8], [9]:

$$(2.1) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{(1-\nu^2)G_w}{E\delta h} \right] u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$(2.2) \quad \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(1-\nu^2)G_w}{E\delta h} \right] v - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial w}{\partial y} = 0,$$

$$(2.3) \quad - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)}{2E\delta h} \frac{\partial v}{\partial y} + \left[D \frac{1-\nu^2}{2E\delta} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{(1-\nu^2)G_w(2h+\delta)^2}{4E\delta h} \right] w = \frac{q(1-\nu^2)}{2E\delta}.$$



Rys. 1

Oznaczenia:

E — moduł Younga,

ν — liczba Poissona,

G_w — moduł ścinania dla warstwy środkowej,

δ — grubość płytek zewnętrznych,

$2h$ — grubość warstwy środkowej,

q — obciążenie prostopadłe do powierzchni płyty,

D — sztywność giętą płytek zewnętrznych.

Równania (2.1) i naturalne warunki brzegowe można otrzymać z funkcjonału energii potencjalnej odkształcenia sprężystego, który ma postać [10]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_A \int \left\{ 2D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{2E\delta}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] + 2hG_w \left[\frac{u^2}{h^2} + 2\frac{u}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{v^2}{h^2} + 2\frac{v}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{(2h+\delta)^2}{4h^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \Big\} dx dy - \int_A \int q w dx dy. \end{aligned}$$

Wielkości statyczne dla tego typu płyt trójwarstwowych dane są przez poniższe wyrażenia różniczkowe.

Wypadkowe siły tarczowe w płytkach zewnętrznych:

$$(2.5) \quad N_x = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$(2.6) \quad N_y = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$(2.7) \quad N_{xy} = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Naprężenia styczne w warstwie środkowej (τ_{xz}^w, τ_{yz}^w) i wypadkowe siły tnące (N_{xz}, N_{yz}):

$$(2.8) \quad N_{xz} = (2h + \delta) \tau_{xz}^w = G_w(2h + \delta) \left(\frac{u}{h} + \frac{2h + \delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$(2.9) \quad N_{yz} = (2h + \delta) \tau_{yz}^w = G_w(2h + \delta) \left(\frac{v}{h} + \frac{2h + \delta}{2h} \frac{\partial w}{\partial y} \right).$$

Wielkości płytowe (momenty m_x, m_y, m_{xy} i siły poprzeczne q_x, q_y) określone zgodnie z teorią płyt cienkich izotropowych

$$(2.10) \quad m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$(2.11) \quad m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$(2.12) \quad m_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$(2.13) \quad q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w),$$

$$(2.14) \quad q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w).$$

Do dalszych rozważań obszar A płyty trójwarstwowej podzielono na podobszary A^k ($k = 1, 2, \dots, r$). Podobszary te nazywa się elementami skończonymi. Przemieszczenia w k -tym elemencie u^k, v^k, w^k aproksymować będziemy poniższymi wyrażeniami macierzowymi

$$(2.15) \quad u^k = [\Phi^k] \{U^k\} = [\Phi_1^k \Phi_2^k \dots \Phi_n^k] \begin{Bmatrix} U_1^k \\ U_2^k \\ \vdots \\ U_n^k \end{Bmatrix},$$

$$(2.16) \quad v^k = [\Psi^k] \{V^k\} = [\Psi_1^k \Psi_2^k \dots \Psi_n^k] \begin{Bmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \vdots \\ V_n^k \end{Bmatrix},$$

$$(2.17) \quad w^k = [Q^k] \{W^k\} = [\Omega_1^k \Omega_2^k \dots \Omega_m^k] \begin{Bmatrix} W_1^k \\ W_2^k \\ \vdots \\ W_m^k \end{Bmatrix}.$$

W wyrażeniach (2.15) ÷ (2.17) U_i^k, V_i^k, W_j^k ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) oznaczają odpowiednio n parametrów związanych z przemieszczeniem w kierunku osi x w k -tym elemencie, n parametrów związanych z przemieszczeniem w kierunku osi y , oraz m parametrów związanych z ugięciem płyty.

Wyrażenia te mogą oznaczać np. wartość funkcji przemieszczeń w wyróżnionych punktach elementu (w węzłach), wartość pochodnych funkcji przemieszczeń w tych punktach itp.

Funkcje $\Phi_i^k = \Phi_i^k(x, y)$, $\Psi_i^k = \Psi_i^k(x, y)$, $\Omega_j^k = \Omega_j^k(x, y)$ określają w jaki sposób przemieszczenia w k -tym elemencie zależą od współrzędnych x, y i parametrów węzłowych U_i^k, V_i^k, W_j^k . Funkcje te nazywane są funkcjami kształtu. Sposoby tworzenia funkcji kształtu oraz warunki jakim muszą odpowiadać znaleźć można np. w pracach ZIENKIEWICZA [4], KOLARA i innych [6].

3. Metoda ortogonalizacyjna

Rozważmy k -ty element wyodrębniony ze zginanej płyty trójwarstwowej. Na podstawie (2.15) ÷ (2.17) i (2.1) ÷ (2.3) po pewnych przekształceniach otrzymamy równania równowagi w postaci

$$(3.1) \quad \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \right] \{U^k\} + \nu \left[\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} \right) + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial y^2} \right] \{U^k\} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} \right) - G_w \left(\frac{1}{h} [\Phi^k] \{U^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} \right) = \\ = f_1(x, y, U_1^k, \dots, U_n^k, V_1^k, \dots, V_n^k, W_1^k, \dots, W_m^k),$$

$$(3.2) \quad \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\left[\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial y^2} \right] \{V^k\} + \nu \left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x \partial y} \right] \{U^k\} \right) + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x \partial y} \right] \{U^k\} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x^2} \right] \{V^k\} \right) - G_w \left(\frac{1}{h} [\Psi^k] \{V^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \{W^k\} \right) = \\ = f_2(x, y, U_1^k, \dots, U_n^k, V_1^k, \dots, V_n^k, W_1^k, \dots, W_m^k)$$

$$(3.3) \quad \frac{2D}{(2h+\delta)} \left(\left[\frac{\partial^4 \Omega^k}{\partial x^4} \right] \{W^k\} + 2 \left[\frac{\partial^4 \Omega^k}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \{W^k\} + \left[\frac{\partial^4 \Omega^k}{\partial y^4} \right] \{W^k\} + \right. \\ \left. - G_w \left(\frac{1}{h} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] \{W^k\} \right) - G_w \left(\frac{1}{h} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2h+\delta}{2h} \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] \{W^k\} \right) \right) - q = f_3(x, y, U_1^k, \dots, U_n^k, V_1^k, \dots, V_n^k, W_1^k, \dots, W_m^k).$$

Wielkości statyczne w k -tym elemencie jako funkcje parametrów węzłowych mają postać

$$(3.4) \quad N_x^k = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} + \nu \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} \right),$$

$$(3.5) \quad N_y^k = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} + \nu \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} \right),$$

$$(3.6) \quad N_{xy}^k = \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \{U^k\} + \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \{V^k\} \right),$$

$$(3.7) \quad N_{xz}^k = G_w(2h+\delta) \left(\frac{1}{h} [\Phi^k] \{U^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} \right),$$

$$(3.8) \quad N_{yz}^k = G_w(2h+\delta) \left(\frac{1}{h} [\Psi^k] \{V^k\} + \frac{2h+\delta}{2h} \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \{W^k\} \right),$$

$$(3.9) \quad m_x^k = -D \left(\left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] + \nu \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] \right) \{W^k\},$$

$$(3.10) \quad m_y^k = -D \left(\left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] + \nu \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] \right) \{W^k\},$$

$$(3.11) \quad m_{xy}^k = -(1-\nu) D \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x \partial y} \right] \{W^k\},$$

$$(3.12) \quad q_x^k = -D \left(\left[\frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial x^3} \right] + \left[\frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial x \partial y^2} \right] \right) \{W^k\},$$

$$(3.13) \quad q_y^k = -D \left(\left[\frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial x^2 \partial y} \right] + \left[\frac{\partial^3 \Omega^k}{\partial y^3} \right] \right) \{W^k\}.$$

Wyrażenia (3.1)÷(3.3) nie są tożsamościowo równe zero, gdyż funkcje przemieszczeń u^k , v^k , w^k , są funkcjami przybliżonymi. Dokładność tak przyjętej aproksymacji równań (2.1)÷(2.3) zależy od dokładności opisu rzeczywistych przemieszczeń w elemencie przez wyrażenia (2.15)÷(2.17). Funkcje f_1, f_2, f_3 oznaczają błąd aproksymacji. W naszym przypadku błąd ten zminimalizujemy przez ortogonalizację funkcji f_1, f_2, f_3 z układem funkcji $\Phi_i^k, \Psi_i^k, \Omega_j^k$ (metoda Galerkina [7]). Sposób ten prowadzi tutaj do układu $(2n+m)$ algebraicznych równań liniowych. Macierz współczynników przy niewiadomych jest poszukiwaną macierzą sztywności elementu.

Zastosujemy do równań (3.1)÷(3.3) metodę Galerkina w postaci

$$(3.14) \quad \iint_{A^k} \Phi_i^k f_1 dx dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(3.15) \quad \iint_{A^k} \Psi_i^k f_2 dx dy = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(3.16) \quad \iint_{A^k} \Omega_j^k f_3 dx dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Całkowanie w powyższych wzorach rozciąga się na obszar elementu A^k . Funkcje $\Phi_i^k, \Psi_i^k, \Omega_j^k$ są funkcjami kształtu z zależności (2.15)÷(2.17).

Wykonajmy działania opisane zależnościami (3.14)÷(3.16). Dla (3.14) otrzymamy (dla $i = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} & \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \right] \{U^k\} dx dy + \nu \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} dx dy \right) + \\ & + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \left(\iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial y^2} \right] \{U^k\} dx dy + \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} dx dy \right) + \\ & - G_w \left(\frac{1}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k [\Phi^k] \{U^k\} dx dy + \frac{2h+\delta}{2h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} dx dy \right) = 0. \end{aligned}$$

Po zastosowaniu do powyższych całek przekształcenia Greena według wzorów

$$\begin{aligned} (3.17) \quad \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial x^2} \right] \{U^k\} dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} \cos \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] \{U^k\} dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial^2 \Psi^k}{\partial x \partial y} \right] \{V^k\} dx dy &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} \cos \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} dx dy = \\ (3.18) \quad &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \{V^k\} \sin \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] \{V^k\} dx dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3.19) \quad \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial^2 \Phi^k}{\partial y^2} \right] \{U^k\} dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \{U^k\} \sin \alpha ds - \iint_{A^k} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \{U^k\} dx dy \end{aligned}$$

(gdzie Γ_{\square}^k oznacza brzeg elementu, α jest kątem między normalną zewnętrzną a osią x) otrzymamy ostatecznie pierwsze n równań w postaci

$$\begin{aligned} (3.20) \quad 2 \iint_{A^k} \left(\frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] + \frac{G_w}{h} \Phi_i^k [\Phi^k] \right) \{U^k\} dx dy + \\ + 2 \iint_{A^k} \left(\frac{E\delta\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \right) \{V^k\} dx dy + \\ + G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W^k\} dx dy = 2 \int_{\Gamma^k} \Phi_i^k (N_x^k \cos \alpha + N_{xz}^k \sin \alpha) ds, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Postępując analogicznie otrzymamy dla (3.15) i (3.16) pozostałe równania układu,

$$(3.21) \quad 2 \iint_{A^k} \left(\frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] + \frac{G_w}{h} \Psi_i^k [\Psi^k] \right) \{V^k\} dx dy +$$

$$+ 2 \iint_{A^k} \left(\frac{E\delta\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] \right) \{U^k\} dx dy +$$

$$+ G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \Psi_i^k \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \{W^k\} dx dy = 2 \int_{r^k} \Psi_i^k (N_y^k \sin \alpha + N_x^k \cos \alpha) ds,$$

$$i = 1, 2, \dots, n;$$

$$(3.22) \quad G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} [\Phi^k] \{U^k\} dx dy + G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} [\Psi^k] \{V^k\} dx dy +$$

$$+ 2D \iint_{A^k} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] + \nu \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x^2} \right] + \nu \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial y^2} \right] + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial^2 \Omega^k}{\partial x \partial y} \right] + \frac{G_w}{D} \frac{(2h+\delta)^2}{4h} \left(\frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial y} \right] \right) \right\} \{W^k\} dx dy = \iint_{A^k} \Omega_j^k q dx dy + 2 \int_{r^k} \Omega_j^k (q_x^k \cos \alpha + q_y^k \sin \alpha) ds +$$

$$+ \int_{r^k} \Omega_j^k (N_{xz}^k \cos \alpha + N_{yz}^k \sin \alpha) ds - 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} (m_x^k \cos \alpha - m_{xy}^k \sin \alpha) ds -$$

$$- 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} (m_y^k \sin \alpha - m_{xy}^k \cos \alpha) ds,$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Otrzymany układ $(2n+m)$ równań dla wyznaczenia nieznanymi parametrów węzłowych U_i^k , V_i^k , W_j^k można przedstawić w postaci macierzowej

$$(3.23) \quad \begin{bmatrix} k^{11} & k^{12} & k^{13} \\ k^{21} & k^{22} & k^{23} \\ k^{31} & k^{32} & k^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^k\} \\ \{V^k\} \\ \{W^k\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ p \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{Bmatrix},$$

gdzie k^{ij} , p^i , b_i^j są podmacierzami określonymi przez poniższe wyrażenia:

$$(3.24) \quad [k^{11}]_{ij} = 2\delta \iint_{A^k} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial y} + \frac{G_w}{\delta h} \Phi_i^k \Phi_j^k \right] dx dy,$$

$$(3.25) \quad [k^{12}]_{ij} = 2\delta \iint_{A^k} \left[\frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial x} \right] dx dy,$$

$$(3.26) \quad [k^{13}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \Phi_i^k \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} dx dy,$$

$$(3.27) \quad [k^{21}]_{ij} = 2\delta \int_{A^k} \int \left[\frac{E\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$(3.28) \quad [k^{22}]_{ij} = 2\delta \int_{A^k} \int \left[\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial y} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Psi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Psi_j^k}{\partial x} + \frac{G_w}{\delta h} \Psi_i^k \Psi_j^k \right] dx dy,$$

$$(3.29) \quad [k^{23}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \Psi_i^k \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} dx dy,$$

$$(3.30) \quad [k^{31}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} \Phi_j^k dx dy,$$

$$(3.31) \quad [k^{32}]_{ij} = G_w \frac{2h + \delta}{h} \int_{A^k} \int \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} \Psi_j^k dx dy,$$

$$(3.32) \quad [k^{33}]_{ij} = 2D \int_{A^k} \int \left[\frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. + \frac{G_w}{D} \frac{(2h + \delta)^2}{4h} \left(\frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} \right) \right] dx dy,$$

$$(3.33) \quad [p]_i = \int_{A^k} \int \Omega_i^k q dx dy,$$

$$(3.34) \quad [b^1]_i = 2 \int_{r^k} \Phi_i^k (N_x^k \cos \alpha + N_{xy}^k \sin \alpha) ds,$$

$$(3.35) \quad [b^2]_i = 2 \int_{r^k} \Psi_i^k (N_y^k \sin \alpha + N_{xy}^k \cos \alpha) ds,$$

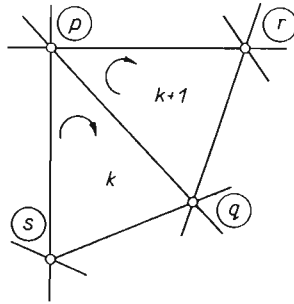
$$(3.36) \quad [b^3]_i = \int_{r^k} \Omega_i^k (N_{xz}^k \cos \alpha + N_{yz}^k \sin \alpha) ds + 2 \int_{r^k} \Omega_i^k (q_x^k \cos \alpha + q_y^k \sin \alpha) ds + \\ - 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} (m_x^k \cos \alpha - m_{xy}^k \sin \alpha) ds - 2 \int_{r^k} \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} (m_y^k \sin \alpha - m_{xy}^k \cos \alpha) ds.$$

Ponieważ funkcjonal (2.4) jest formą kwadratową przemieszczeń i ich pochodnych, macierz współczynników przy niewiadomych U_i^k , V_i^k , W_j^k jest macierzą symetryczną.

Macierz (3.23) jest poszukiwaną macierzą sztywności elementu k . Macierz sztywności całej płyty (macierz globalną) uzyskuje się przez sumowanie po wszystkich elementach ($k = 1, 2, \dots, r$) wyrażeń (3.23). Przy zapewnieniu ciągłości przemieszczeń i naprężeń między elementami całki po konturze typu (3.34)—(3.36) są równe zeru dla brzegów

elementu wewnątrz płyty. Dla elementów graniczących z konturem zewnętrznym płyty można je wyznaczyć z warunków brzegowych.

Zaznaczyć należy, że przy prowadzeniu obliczeń według tej metody konieczne jest przyjęcie zerowania się całek (3.34)—(3.36) wzdłuż brzegów wewnętrznych [7], nawet w wypadku, gdy stosowane funkcje kształtu nie zapewniają ciągłości przemieszczeń i naprężeń. Jednakże po wyznaczeniu przemieszczeń i naprężeń można obliczyć wartości całek dla wszystkich lub tylko niektórych elementów. Pozwala to na oszacowanie błędu dyskretyzacji.



Rys. 2

Rozpatrzmy dla przykładu całkę (3.34) na brzegu $p-q$ dla dwóch graniczących ze sobą elementów k i $k+1$ (rys. 2). Dla elementu k mamy

$$(b_i^1)^k = 2 \int_p^q \Phi_i^k (N_x^{k+1} \cos \alpha + N_{xy}^{k+1} \sin \alpha) ds.$$

Podobnie dla elementu $k+1$ otrzymamy

$$(b_i^1)^{k+1} = 2 \int_q^p \Phi_i^{k+1} (N_x^k \cos \alpha + N_{xy}^k \sin \alpha) ds.$$

W macierzy globalnej wystąpi suma powyższych całek

$$(3.37) \quad (b_i^1)^k + (b_i^1)^{k+1} = 2 \int_p^q [\Phi_i^k (N_x^{k+1} \cos \alpha + N_{xy}^{k+1} \sin \alpha) - \Phi_i^{k+1} (N_x^k \cos \alpha + N_{xy}^k \sin \alpha)] ds.$$

Wyrażenie (3.37) będzie równe zero, gdy $\Phi_i^k = \Phi_i^{k+1}$, $N_x^k = N_x^{k+1}$, $N_{xy}^k = N_{xy}^{k+1}$ wzdłuż brzegu $p-q$, to znaczy, gdy przemieszczenia i naprężenia będą ciągłe na granicy elementów. Obliczona po wyznaczeniu przemieszczeń wartość całki (3.37) służyć może jako oszacowanie błędu dyskretyzacji. Podobnie uczynić można dla pozostałych całek typu (3.34)—(3.36).

4. Metoda energetyczna

Przez podstawienie zależności (2.15)—(2.17) do (2.4) wyrazimy funkcjonal energii sprężystej w k -tym elemencie (Π^k) jako funkcję nieznanymi parametrów węzłowych. Energię potencjalną całej płyty otrzymamy przez sumowanie po wszystkich elementach [2], [4],

$$(4.1) \quad \Pi = \sum_{k=1}^r \Pi^k.$$

Wykorzystując warunki na minimum funkcjonału

$$(4.2) \quad \frac{\partial \Pi^k}{\partial U_i^k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(4.3) \quad \frac{\partial \Pi^k}{\partial V_i^k} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$(4.4) \quad \frac{\partial \Pi^k}{\partial W_j^k} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

otrzymamy układ $(2n+m)$ równań algebraicznych dla k -tego elementu.

Wykonajmy dla przykładu działania opisane zależnościami (4.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^k}{\partial U_i^k} = & \frac{1}{2} \iint_{A^k} \left\{ \frac{2E\delta}{1-\nu^2} \left[2 \frac{\partial u^k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x} \right) + 2\nu \frac{\partial v^k}{\partial y} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2 \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial u^k}{\partial y} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left(\frac{\partial u^k}{\partial y} \right) + (1-\nu) \frac{\partial v^k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left(\frac{\partial u^k}{\partial y} \right) \right] + \right. \\ & \left. + 2hG_w \left[2 \frac{u^k}{h^2} \frac{\partial}{\partial U_i^k} (u^k) + 2 \frac{1}{h} \frac{2h+\delta}{2h} \frac{\partial w^k}{\partial x} \frac{\partial}{\partial U_i^k} (u^k) \right] \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że (por. (2.15)—(2.17))

$$\frac{\partial}{\partial U_i^k} \left(\frac{\partial u^k}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial U_i^k} \left(\frac{\partial u^k}{\partial y} \right) = \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial U_i^k} (u^k) = \Phi_i^k,$$

otrzymamy ostatecznie n pierwszych równań układu

$$\begin{aligned} (4.5) \quad 2 \iint_{A^k} & \left(\frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial x} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Phi^k}{\partial y} \right] + \frac{G_w}{h} \Phi_i^k [\Phi^k] \right) \{U^k\} dx dy + \\ & + 2 \iint_{A^k} \left(\frac{E\delta}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial y} \right] + \frac{E\delta}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \left[\frac{\partial \Psi^k}{\partial x} \right] \right) \{V_{\blacksquare}^k\} dx dy + \\ & + G_w \frac{2h+\delta}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \left[\frac{\partial \Omega^k}{\partial x} \right] \{W_{\blacksquare}^k\} dx dy = 0, \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Dla warunków (4.3) i (4.4) otrzymamy pozostałe równania układu.

Macierz współczynników jest identyczna z macierzą (3.23) (macierz sztywności). Uzyskany w ten sposób układ równań nie zawiera całek po konturze elementu. Brak całek (3.34)—(3.36) jest konsekwencją założenia prawdziwości związku (4.1) i ukrytego założenia, że związki (2.15)—(2.17) spełniają warunki brzegowe płyty. W praktycznych zastosowaniach dobór funkcji kształtu Φ_i^k , Ψ_i^k , Ω_j^k spełniających warunki brzegowe płyty jest bardzo uciążliwy. Trudność tę można ominąć przez dodanie do funkcjonału (2.4) całek krzywoliniowych rozciągniętych na brzeg płyty, które po minimalizacji prowadzą automatycznie do całek (3.34)—(3.36), [7].

W analizowanym przypadku do funkcjonału (2.4) należy dodać wyrażenie

$$(4.6) \quad -2 \int_{\Gamma} \left(q_n w - \frac{\partial w}{\partial n} m_n + \frac{\partial w}{\partial t} m_{nt} + \frac{1}{2} N_{nz} w + N_n u_n + N_t u_t \right) ds.$$

Wyrażenie (4.6) ma prostą interpretację fizyczną, stanowi bowiem pracę obciążeń brzegowych na odpowiadających im przemieszczeniach.

5. Uwagi końcowe

Otrzymana macierz sztywności (3.23) może być przedstawiona w postaci sumy trzech macierzy: macierzy sztywności płytek zewnętrznych pracujących jako tarcze w płaskim stanie naprężenia $[k_1]$, macierzy sztywności płytek zewnętrznych pracujących jako płyty cienkie $[k_2]$, macierzy sztywności wynikającej z trójwarstwowej struktury płyty $[k_3]$

$$(5.1) \quad [k] = 2[k_1] + 2[k_2] + [k_3] = 2 \begin{bmatrix} k_1^{11} & k_1^{12} & 0 \\ k_1^{21} & k_1^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2^{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_3^{11} & k_3^{12} & k_3^{13} \\ k_3^{21} & k_3^{22} & k_3^{23} \\ k_3^{31} & k_3^{32} & k_3^{33} \end{bmatrix}.$$

Czynnik 2 w zależności (5.1) wynika z istnienia dwóch płytek zewnętrznych.

Dla przykładu podajemy niektóre wyrazy tych macierzy:

$$[k_1^{11}]_{ij} = \delta \iint_{A^k} \left[\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j^k}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$[k_3^{11}]_{ij} = \frac{2G_w}{h} \iint_{A^k} \Phi_i^k \Phi_j^k dx dy,$$

$$[k_2^{33}]_{ij} = D \iint_{A^k} \left(\frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Omega_i^k}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Omega_j^k}{\partial x \partial y} \right) dx dy,$$

$$[k_3^{33}]_{ij} = G_w \frac{(2h+\delta)^2}{2h} \iint_{A^k} \left(\frac{\partial \Omega_i^k}{\partial x} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial y} \frac{\partial \Omega_j^k}{\partial y} \right) dx dy, \text{ itd.}$$

Takie przedstawienie macierzy sztywności pozwala na stwierdzenie, że wyrazy macierzy $[k_1]$ są identyczne z wyrażeniami otrzymanymi przez SZABO i LEE [7], a $[k_2]$ jest identyczna z wyrażeniem użytym przez SZMELTERA i DOBROCIŃSKIEGO w pracy [11]. Macierz $[k_3]$ ujmuje wpływ przyjętego modelu płyty trójwarstwowej. Otrzymanej macierzy sztywności nie odniesiono do żadnego konkretnego elementu ani konkretnej funkcji kształtu. Po wyborze elementu i określeniu funkcji kształtu [4], [6] można obliczyć macierz sztywności (3.23). Obliczenia te można wykonać na EMC.

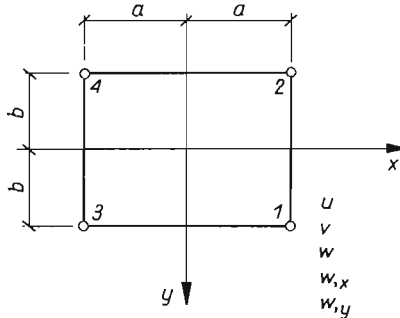
Przykładowo obliczymy wyraz k_{11} macierzy (3.23) przyjmując najprostszy element o pięciu stopniach swobody w każdym węźle (rys. 3). Φ_1 można wyrazić poniższym wielomianem

$$\Phi_1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \right).$$

Otrzymamy [por. (3.24)]

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{2\delta E}{1-\nu^2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{16a^2} \left(1 + \frac{y}{b} \right)^2 dx dy + \frac{\delta E}{1+\nu} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{16b^2} \left(1 + \frac{x}{a} \right)^2 dx dy + \\ &+ \frac{2G_w}{h} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{16} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \right)^2 dx dy = \\ &= \frac{2\delta E}{1-\nu^2} \left[\frac{b}{3a} + \frac{(1-\nu)a}{6b} \right] + \frac{8}{9} \frac{G_w}{h} ab. \end{aligned}$$

Pierwszy składnik sumy jest identyczny z obliczonym dla tarczy w płaskim stanie naprężenia [12], a drugi ujmuje wpływ warstwowej struktury płyty.



Rys. 3

Rozkład macierzy sztywności (3.23) na sumę trzech macierzy składowych (5.1) pozwala na znaczne uproszczenie pracy rachunkowej, gdyż dwa pierwsze składniki są opracowane dla elementów o różnych kształtach jak i różnej liczbie stopni swobody (np. [4], [5], [12]).

Literatura cytowana w tekście

1. N. J. HOFF, *Bending and Buckling of Rectangular Sandwich Plates*, NACA (1950), No. 2225.
2. T. H. H. PIAN, P. TONG, *Basis of Finite Element Methods for Solid Continua*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969), 3—28.
3. J. T. ODEN, *A General Theory of Finite Elements I. Topological considerations, II. Applications*, Int. J. Num. Math. Eng., 1 (1969) 205—211 i 247—259.
4. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, ARKADY, Warszawa 1972.
5. J. S. PRZEMIENIECKI, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw Hill (1968).
6. V. KOLAR, J. KRATOCHVIL, M. ZLÁMAL, A. ŽENIŠEK, *Technical, Physical and Mathematical Principles of the Finite Element Methods*, Rozpr. CSAV, z. 2, 81 (1971).

7. B. A. SZABO, G. C. LEE, *Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969), 301—310.
8. J. WACHOWIAK, P. WILDE, *Wolnopodparte prostokątne płyty trójwarstwowe*, Arch. Inż. Łądowej, 1, 12 (1966), 71—90.
9. H. MIKOŁAJCZAK, *Zagadnienia nieciągłych warunków brzegowych dla prostokątnych płyt trójwarstwowych*, Roczn. WSR Poznań, 1965, dod. 12.
10. J. GOŁAŚ, *Pewne przypadki nieciągłych warunków brzegowych dla kołowych płyt trójwarstwowych*, Politechnika Poznańska (1969).
11. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementów płyty*, Biul. WAT, 4, 18 (1969), 44—55.
12. I. HOLAND, K. BELL (ed.), *Finite Element Methods in Stress Analysis*, TAPIR, Trondheim-Norway 1970.

Резюме

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТЕЙ ЭЛЕМЕНТА ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ,
ПОДВЕРЖЕННОЙ ИЗГИБУ

Двумя способами выведено общее выражение для матрицы жесткостей элемента трехслойной пластины, подверженной изгибу и удовлетворяющей предположениям Хоффа [1]. Путем разделения пластины на элементы и аппроксимации перемещений в элементе при помощи формулы (2.15)—(2.17) выведены приближенные уравнения равновесия (3.1), причем функционал потенциальной энергии (3.1)—(3.3) представлен как функция неизвестных узловых параметров (обобщенных перемещений в узлах). Ортогонализация выражений для погрешности дискретизации f_1, f_2, f_3 с системой функций Φ_i, Ψ_i, Ω_j [7] приводит к системе $2n+m$ алгебраических линейных уравнений с неизвестными узловыми параметрами (3.6).

Матрица коэффициентов при неизвестных является искомой матрицей жесткостей элемента. Точно такой же результат получен при использовании принципа минимума функционала потенциальной энергии упругой деформации. Формулу (3.6) можно использовать для написания процедуры для ЭЦВМ при расчете конкретных задач. В качестве примера вычислена одна компонента матрицы жесткостей для прямоугольного элемента, обладающего пятью степенями свободы в каждом из узлов.

Summary

STIFFNESS MATRIX OF AN ELEMENT OF A SANDWICH PLATE IN BENDING

Two different methods are used to derive the general expression for the stiffness matrix of an element of a three-layer sandwich plate satisfying N. J. Hoff's [1] assumptions. Dividing the region of the plate into elements and approximating the element displacements by expressions (2.15)—(2.17), an approximate equilibrium equation [(3.1)—(3.3)] is obtained, and the potential energy functional (2.4) is expressed in terms of the unknown nodal parameters (generalized displacements of the nodes). Applying Galerkin's method to the expressions for discretization errors f_1, f_2, f_3 and the set of functions Φ_i, Ψ_i, Ω_j [7], a system of $(2n+m)$ simultaneous algebraic equations is obtained making it possible to determine the nodal parameters (3.23). The matrix of coefficients at the unknowns is the element stiffness matrix required. Using the principle of minimum of the potential energy functional of elastic deformation, an identical expression may be obtained. Eq. (3.23) may also be used to prepare the EMC procedures for particular elements. As an example, one term of the stiffness matrix is evaluated for the case of a rectangular element with five degrees of freedom at each node.

AKADEMIA ROLNICZA, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 maja 1973 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SYMPOZJUM «METODY KOMPUTEROWE W MECHANICE KONSTRUKCJI»

W dniach 17-18 maja 1973 r. odbyło się w Poznaniu Sympozjum «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji». Było to pierwsze ogólnopolskie spotkanie tego typu poświęcone mechanice komputerowej.

Sympozjum zorganizowała Sekcja Mechaniki Konstrukcji Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN wspólnie z Zarządem Oddziału PZITB w Poznaniu przy udziale Instytutu Technologii i Konstrukcji Budowlanych Politechniki Poznańskiej. Komitet Organizacyjny Sympozjum składał się z 7 osób: prof. dr J. SZMELTER (przewodniczący Komitetu Organizacyjnego), prof. dr A. SAWCZUK (przewodniczący Komitetu Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN), prof. dr K. WRZEŚNIEWSKI (sekretarz naukowy Komitetu Organizacyjnego i Sekcji Mechaniki Konstrukcji), inż. J. MATUSZEWSKI (przewodniczący Zarządu Oddziału PZITB w Poznaniu), doc. dr Z. LEŚNIAK (Instytut Techniki Budowlanej), dr B. ORŁOWSKA (Centrum Informatyki Przemysłu Budowlanego) i prof. dr G. RAKOWSKI (Politechnika Warszawska).

Zasadniczym celem sympozjum było zorientowanie zebranych w całokształcie tematyki i badań prowadzonych przez poszczególne ośrodki krajowe na tle problematyki rozwijanej za granicą oraz ocena aktualnego stanu i potrzeb tej nowej, ważnej dla rozwoju gospodarczego kraju, dyscypliny. Ponadto sympozjum miało wytyczyć kierunki dalszych badań w zakresie mechaniki komputerowej i wskazać niezbędność szerzego wprowadzenia metod komputerowych do programu nauczania mechaniki na uczelniach technicznych.

W obradach wzięło udział 130 osób z całego kraju. Zdecydowana większość uczestników reprezentowała uczelnie wyższe (79%); pozostałe osoby to przedstawiciele biur projektów (12%) i ośrodków obliczeniowych (9%). Wygłoszono 29 referatów. Autorzy nadesłanych prac reprezentują różne ośrodki: Warszawa (27%), Kraków (17%), Wrocław (12%), Gdańsk (10%), Poznań (10%), Opole (10%), Koszalin (7%), Katowice i Gliwice (7%).

Obrady Sympozjum otworzył prof. dr A. SAWCZUK podkreślając wielorakość oddziaływań mechaniki komputerowej. Dzięki komputerom zaawansowana mechanika przenika w technologię; odpowiednio unowocześnione powinny być programy nauczania. Podkreślił on również, że pojawienie się komputerów wprowadza istotną zmianę do mechaniki. Maszyny liczące wymagają innej morfologii teorii. Nie należy traktować tych maszyn tylko jako urządzenia do szybkiego wykonywania rachunków. Rozwijając mechanikę komputerową nie można jednak zapominać o utrzymaniu właściwych proporcji pomiędzy metodami analitycznymi a numerycznymi. W zakończeniu wystąpienia prof. dr A. SAWCZUK odczytał list wiceprezesa PAN, prof. dra W. NOWACKIEGO. List ten, skierowany do uczestników sympozjum, zawiera m.in. następujące stwierdzenia: *...w miarę rozwoju elektronicznej techniki obliczeniowej konstruktorzy, uwolnieni od nadmiaru pracy rachunkowej, będą mogli skupić się na pracy koncepcyjnej związanej przede wszystkim z optymalizacją konstrukcji, ...łatwo przewidzieć, że znacznie szersze zastosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej zezwoli na obliczanie konstrukcji jako układów przestrzennych, ...wzrastać będzie zainteresowanie zagadnieniami dynamicznymi, a zwłaszcza dynamiczną statecznością, ...przewidywać należy wielki rozwój teorii dźwigarów powierzchniowych, ...mechanika budowy, po latach zastoju, staje się znowu nauką szybko się rozwijającą...*

Obrady sympozjum zapoczątkowały dwa referaty generalne. Pierwszy z referatów, opracowany przez J. SZMELTERA, Z. WASZCZYSZYNA i K. WRZEŚNIEWSKIEGO, zawierał omówienie metod matematycznych stosowanych w obliczeniach konstrukcji. W imieniu autorów wystąpił Z. WASZCZYSZYN. Przedstawił on analizę procesu projektowania konstrukcji oraz klasyfikację metod matematycznych i omówił szczegółowo te etapy procesu projektowania, które stosunkowo łatwo można zautomatyzować, mianowicie analizę ukła-

dów i optymalizację rozwiązań konstrukcyjnych. Referat zawierał szeroki przegląd metod matematycznych w ich historycznym rozwoju. Szczególny nacisk położono na przedstawienie istoty i cech charakterystycznych metod znajdujących zastosowanie w elektronicznej technice obliczeniowej.

W drugim referacie generalnym, którego autorami byli Z. LEŚNIAK i G. RAKOWSKI, omówiony został stan aktualny i kierunki badań oraz podstawowe problemy mechaniki komputerowej w Polsce. G. RAKOWSKI omówił problematykę dotyczącą analizy konstrukcji, syntezy konstrukcji i symulacji. Przedstawił on aktualną sytuację w kraju (problematyka, metody, języki programowania, sprzęt, potencjał badawczy, osiągnięte wyniki, formy szkolenia) na tle osiągnięć mechaniki komputerowej za granicą. Z referatu wynika, że w zakresie zastosowań mechaniki komputerowej do analizy konstrukcji w stosunku do krajów produkujących jesteśmy opóźnieni o około 10 lat. Rozwój metod komputerowych w syntezie konstrukcji i symulacji jest również niezadawalający. Wnioski końcowe referatu zawierają szczegółowe omówienie i uzasadnienie proponowanych kierunków badań w zakresie mechaniki komputerowej oraz wytyczne działania zmierzającego do zmniejszenia dystansu dzielącego nas od czołówki światowej. Realizacja tych wniosków gwarantuje stworzenie odpowiedniej bazy, co — zdaniem autorów referatu — umożliwi w stosunkowo krótkim okresie czasu zajęcie w wybranych, niezamkniętych jeszcze, kierunkach badań czołowych pozycji w świecie.

Referaty generalne były głębokie i pobudzające do refleksji, a wnioski i myśli w nich zawarte wielokrotnie przewijały się w trakcie dalszych dyskusji.

Pierwsze posiedzenie, któremu przewodniczył prof. dr G. RAKOWSKI, rozpoczęło się od referatu T. NAWROTA na temat wdrażania elektronicznej techniki obliczeniowej w praktyce inżynierskiej. Referat postuluje wprowadzenie na wszystkich szczeblach szkolenia obowiązku rozwiązywania problemów w formie algorytmów postępowania. Następnie S. ŚWISZCZOWSKI przedstawił koncepcję metody modyfikacji konstrukcji, której celem jest zmniejszenie czasu i kosztów obliczeń konstrukcji o identycznej topologii. Referat Z. BOROWCA zawierał omówienie teorii równoważności. Teoria ta, wywodząca się z Francji, znacznie skraca czas pracy maszyny kosztem niewielkiego zmniejszenia dokładności obliczeń. E. GAWRYCH-ŻUKOWSKI przedstawił metodę podziału na podukłady do analizy dużych konstrukcji przestrzennych na elektronicznej maszynie cyfrowej. O. MATEJA omówił dotychczasowy rozwój wiedzy w zakresie metody macierzy przeniesienia. J. WILK przedstawił zbiorczy algorytm obliczeń dla wiotkich powłok obrotowo-symetrycznych przy odkształceniach skończonych. Opracowany program umożliwia optymalizację konstrukcji. Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy skręcanego pręta cienkościennego o zmiennym przekroju poprzecznym omówił J. WEKEZER.

W dyskusji nad referatami pierwszego posiedzenia największe zainteresowanie budziła metoda równoważności (istota metody, porównanie z metodą elementów skończonych, zalety i wady metody).

Drugiemu posiedzeniu przewodniczył doc. dr M. KWIECIŃSKI. Wysłuchano interesującego referatu D. ROGULI, który przedstawił oryginalną metodę obliczania konstrukcji płaskich i przestrzennych, złożonych z wielkiej liczby elementów. Istotną nowością metody jest rezygnacja z metod macierzowych na rzecz metody modelowania cyfrowego, która polega na bezpośrednim wykorzystaniu topologiczno-algebraicznej relacji przylegania. W następnym referacie W. WOJEWÓDZKI rozpatrzył dynamiczne wyboczenie lepkoelastycznych i sprężystoelastycznych powłok kulistych. Specjalnie opracowany program pozwolił wykonać odpowiednie obliczenia numeryczne. E. FILIPOW przedstawiła sposób modelowania na maszynie cyfrowej losowych odchyłek od przyjętej geometrii w zbiornikach walcowych. Analizę oparto o rozważania statystyczne i dane technologiczne. W referatach J. FILIPKOWSKIEGO i SZ. PAŁOWSKIEGO oraz J. FILIPKOWSKIEGO i H. MARKOWSKIEGO przedstawiono analizę statyczną belki na sprężystych podporach i niejednorodnym sprężystym podłożu oraz analizę statyczną przestrzennej konstrukcji pokrycia dachowego sztucznego lodowiska w Bydgoszczy. Rozwiązania tych zadań uzyskane zostały za pomocą metody elementów skończonych.

Dyskusja nad referatami koncentrowała się na metodzie przedstawionej przez D. ROGULĘ. Metoda ta stała się przedmiotem zainteresowania niemal wszystkich dyskutantów (możliwość obliczania dużych konstrukcji, nieliniowych fizycznie i geometrycznie).

Następnemu posiedzeniu przewodniczył prof. dr O. DĄBROWSKI. Pierwszy referat wygłosił O. MATEJA, który przedstawił zastosowanie metody elementów skończonych w ujęciu metody sił do analizy statycznej liniowo-sprężystych cienkich powłok obrotowych spoczywających na dwuparametrowym podłożu Winklera. Referat, którego autorami byli J. GOŁAŚ i Z. KASPERSKI, zawierał analizę numeryczną powłok obrotowo-

wych opartą na metodzie elementów skończonych. Dzięki odpowiedniej konstrukcji programu czas obliczeń jest niewielki. Wyniki obliczeń porównano z wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu metody sił. Algorytm analizy statycznej płyt dla maszyn cyfrowych o niedużej pamięci przy użyciu metody elementów skończonych omówiono w referacie A. PEER-KASPERSKIEJ, Z. KASPERSKIEGO, J. GOŁASIA i J. MAKOWSKIEGO. I. KOZŁOWSKI przedstawił model obliczeniowy drgań ram przestrzennych uzyskany w oparciu o metodę sztywnych elementów skończonych. Dalsze zastosowania metody sztywnych elementów skończonych zawierały referaty S. GRABOWSKIEGO i E. WITTBRODTA oraz E. WITTBRODTA i J. KRUSZEWSKIEGO. Pierwszy z referatów omawia zmodyfikowaną metodę Gaussa zastosowaną do rozwiązywania równań drgań wymuszonych, drugi — algorytm obliczeń tłumionych drgań wymuszonych obciążeniami okresowymi. Z. LIS przedstawił sposób obliczania tarcz usztywniających w budynkach wysokich, oparty na metodzie pasm skończonych. Sposób ten w porównaniu do klasycznej metody elementów skończonych pozwala znacznie zmniejszyć liczbę elementów i czas pracy maszyny. Referat A. OLEŚNIEWICZA zawiera analizę strefy podporowej dźwigarów strunobetonowych. Wykorzystano program opracowany przez J. SZMELTERA dla płaskiego stanu naprężenia.

Największym zainteresowaniem dyskutantów cieszyły się referaty omawiające zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do analizy drgań oraz referat o tarczach usztywniających w budynkach wysokich.

Ostatnie posiedzenie, któremu przewodniczył prof. dr A. SAWCZUK, rozpoczęło się referatem K. WRZEŚNIEWSKIEGO, P. RAPPA i J. WADOWICKIEGO. Autorzy tego referatu omówili 4 procedury obliczania modelu różniczkowego konstrukcji usztywniających w budynkach wysokich. Dzięki specjalnie zbudowanemu programowi uzyskano znaczne zmniejszenie pracochłonności przy opracowywaniu danych wejściowych. Z. WASZCZYŹYNA przedstawił numeryczną analizę niesymetrycznego wybożenia sprężystych płyt pierścieniowych. Analizę przeprowadzono metodą półdwrotną zamieniając zagadnienia brzegowe na początkowe. Obciążenie krytyczne oblicza się za pomocą całkowicie zautomatyzowanego programu. Referat M. RADWAŃSKIEJ zawiera obliczenie przemieszczeń w stanie pokrytycznym wybożonej niesymetrycznie płyty pierścieniowej. Problem sformułowano na gruncie teorii Kármána. Do całkowania układu czterech nieliniowych równań przemieszczeniowych zastosowano metodę półdwrotną zaproponowaną przez Z. WASZCZYŹYNA. S. KROCZAK omówił bezpośrednio całkowanie układu sześciu liniowych równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach dla danego zagadnienia brzegowego za pomocą metody różnic skończonych. Równania opisują zachowanie się powłoki stożkowej spoczywającej na podłożu sprężystym. Dla przedstawionego algorytmu obliczeń ułożono program w języku Algol 1204 i wykonano obliczenia dla kilku przykładów. W następnym referacie W. GAMBIN i J. SOKÓŁ-SUPEL przedstawili analizę stanów granicznych ram płaskich. Opracowany program służy do projektowania ram sprężysto-plastycznych przy pominięciu wpływu sił podłużnych. A. GOMUŁIŃSKI, A. RADWAŃSKI i M. WITKOWSKI zaprezentowali analizę statyczną struktury kratowej. Konstrukcję prętową aproksymowano ciągłym modelem płyty Reissnera. Wprowadzenie funkcji przemieszczeń pozwoliło na kilkakrotne zmniejszenie liczby równań w porównaniu z metodą przemieszczeń stosowaną dla ustrojów prętowych. Rozwiązanie układu równań różniczkowych przy danych warunkach brzegowych rozwiązano za pomocą metody różnic skończonych. Program napisano w języku Algol 1204. Ostatni referat symposiumu wygłosił A. GARSTECKI. Referat ten zawiera analizę przestrzenne utraty stateczności cienkościennych belek ciągłych. Rozwiązanie uzyskano stosując pewną metodę pośrednią między metodą Bubnowa-Galerkina a metodą podobszarów. Całość obliczeń zaprogramowano na maszynie Odra 1204.

Dyskusja nad ostatnią grupą referatów dotyczyła przede wszystkim pracy, w której konstrukcję prętową aproksymowano ciągłym modelem płyty o średniej grubości. Koncepcja takiego uproszczenia, zdaniem dyskutantów, jest godna stosowania.

Specjalne posiedzenie poświęcono na dyskusję ogólną, którą prowadził prof. dr J. SZMELTER. W dyskusji poruszane były dwa zasadnicze problemy: problem wzajemnej informacji w zakresie mechaniki komputerowej i problem szkolenia komputerowego. Wypowiedź dra T. NAWROTA dotyczyła wzrostu wydajności biur projektowych drogą komputeryzacji. Okazało się, że w chwili obecnej (brak odpowiedniego sprzętu) tylko 8—10% prac można objąć komputeryzacją (obliczenia konstrukcji). Dyskutant postulował, by skoncentrować się na wpajaniu inżynierom i studentom wiedzy z zakresu algorytmów projektowania; jest celowe wydanie książki poświęconej tej problematyce. Potencjalnych autorów poprosił o zgłaszanie chęci współ-

pracy. Prof. dr K. WRZEŚNIEWSKI podkreślił konieczność szerszej informacji w biurach projektowych i zaproponował, by wszcząć starania o wprowadzenie zagadnień mechaniki komputerowej do problemu węzłowego. Następnym dyskutantem był prof. dr W. GUTKOWSKI, który występując w imieniu Wydziału IV PAN poinformował zebranych, że w opracowaniu jest projekt problemu węzłowego, obejmującego zagadnienia obliczeń wytrzymałościowych i optymalizacji konstrukcji maszynowych i budowlanych (analityczne i numeryczne metody obliczeń, modelowanie konstrukcji, badania materiałowe w stanach złożonych, normy, informacje o istniejących metodach i programach). Dyskutant zwrócił się z prośbą o zgłaszanie tematów, które mogłyby wejść do problemu węzłowego. Propozycje doc. dra J. ORKISZA były następujące: utworzyć nowy dwumiesięcznik o roboczym tytule „Mechanika komputerowa”, zdecydować się na wybór tylko dwóch języków (Algol, Fortran), importować z zagranicy gotowe programy, opracować optymalne programy dla najczęściej spotykanych problemów, systematycznie organizować konferencje o zasięgu ogólnokrajowym, poświęcone zastosowaniom maszyn matematycznych w obliczeniach konstrukcji. Wyowiedź prof. dra G. RAKOWSKIEGO dotyczyła problemów szkolenia. Na wydziałach budowlanych politechnik szkolenie należy rozpocząć od zastosowań rachunku macierzowego i metody elementów skończonych, w przedmiocie «Mechanika budowli».

Przedstawicielka Centrum Informatyki Przemysłu Budowlanego dr B. ORŁOWSKA, postulowała w odniesieniu do dużych problemów konstrukcyjnych (duża czasochłonność prac programowych) przygotowywanie programów obliczeń z wyprzedzeniem w stosunku do aktualnych potrzeb. Doc. dr Z. WASZCZYŹYŃ stwierdził, że na przeszkodzie komputeryzacji stoi bariera sprzętowa (automatyzacja wykonania dokumentacji projektowej). Wyniki szkolenia studentów w zakresie przedmiotu «Mechanika budowli» należy wykorzystywać w innych przedmiotach. Dr W. GAMBIN proponował, by poza programowaniem i kodowaniem zwrócić również uwagę na modelowanie i algorytmizację. Prof. dr J. SZMELTER poddał myśl, by naukę języków i programowania przenieść do szkół średnich, co przy odpowiedniej liczbie maszyn w uczelniach wyższych pozwoliłoby na swobodne stosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej w procesie dydaktycznym. Przedstawiciel biura projektów inż. ZIENKIEWICZ wyraził pogląd, iż zaufanie do wyników obliczeń na maszynach matematycznych wzrośnie, gdy wprowadzi się sprawdzanie obliczeń za pomocą specjalnych programów. Konieczne jest wydanie katalogu aktualnych programów.

W podsumowaniu prof. dr J. SZMELTER sprecyzował główne postulaty dyskusji ogólnej, mianowicie:

1) utworzyć nowy dwumiesięcznik o tytule roboczym «Mechanika komputerowa», zawierający najnowsze wyniki prac badawczych, kronikę prac, informacje o badaniach i programach zagranicznych, informacje o konferencjach,

2) zdecydować się na dwa języki: Algol i Fortran,

3) rozpocząć intensywne szkolenie w zakresie metod komputerowych na studiach technicznych, a może nawet w szkole średniej.

Zadaniem Sekcji Mechaniki Konstrukcji KILiW PAN jest doprowadzenie do tego, aby wnioski z dyskusji ogólnej były zrealizowane.

Zamknięcia obrad dokonał prof. dr A. SĄWCZUK. Wyraził on pogląd, że zasadniczy cel sympozjum został osiągnięty: uzyskano informacje o tematyce badań w różnych ośrodkach, o stosowanych modelach matematycznych i mechanicznych, o stosowanych dyskretyzacjach, o uzyskanych rozwiązaniach oraz o zasięgu przenikania mechaniki komputerowej do biur projektowych. Przedstawiono oryginalną koncepcję obliczania konstrukcji złożonych z dużej liczby elementów. Podano pewne wartościowe rozwiązania techniczne (badania powłok, metoda sztywnych elementów skończonych). Szczególnie owocna była dyskusja ogólna, w wyniku której stwierdzono konieczność bieżącej informacji i utworzenia nowego pisma poświęconego mechanice komputerowej. Jednocześnie prof. A. SĄWCZUK zwrócił uwagę na pewne niedociągnięcia sympozjum, mianowicie:

— brak referatów teoretycznych na temat matematycznej dyskretyzacji (aktualnie stwierdza się dużą dowolność i różnorodność stosowanych sposobów dyskretyzacji),

— niedobór referatów poświęconych optymalizacji programów i konstrukcji,

— niewielka liczba referatów dotyczących problemów nieliniowych fizycznie i geometrycznie.

Sympozjum w Poznaniu było platformą wymiany myśli między przedstawicielami wyższych uczelni i instytutów naukowych a przedstawicielami biur projektów i ośrodków obliczeniowych. Ogólna liczba dyskutantów (54) świadczy o dużym zainteresowaniu problematyką konferencji. Mimo dosyć dużego

zróznicowania referatów z punktu widzenia tematyki i metod obliczeniowych stwierdzić można zarysowującą się powoli specjalizację ośrodków (grupa SZMELTERA, grupa krakowska). Wydaje się, że zastosowanie komputerów stwarza szanse dynamicznego rozwoju metod dyskretnych w mechanice. Przeciętny niski wiek autorów referatów pozwala realnie myśleć o szybkim rozwoju badań i zastosowań elektronicznej techniki obliczeniowej w mechanice konstrukcji.

Sympozjum poznańskie miało jeszcze jeden aspekt: zasygnalizowało konieczność zmodyfikowania sposobu myślenia przy formułowaniu i rozwiązywaniu zadań mechaniki konstrukcji. Problematyka ta przewijała się niejednokrotnie w dyskusjach ogólnych i kularowych.

A. Gawęcki (Poznań)
B. Orłowska (Warszawa)

III POLSKO-RADZIECKA KONFERENCJA NIEKLASYCZNE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Pod tradycyjną nazwą odbyła się w Warszawie, w dniach 22—25 maja 1973 r., trzecia dwustronna konferencja polsko-ukraińska, poświęcona nieklasycznym zagadnieniom w mechanice ciała stałego, będącym przedmiotem badań w ośrodkach naukowych w Ukraińskiej Socjalistycznej Republice Radzieckiej i Polsce. Uczestnikami Konferencji byli pracownicy Instytutu Mechaniki AN USRR i Instytutu Problemów Wytrzymałości AN USRR w Kijowie oraz przedstawiciele 5 ośrodków naukowych w Polsce. Wygłoszono 26 referatów 37 autorów, w tym 12 referatów gości radzieckich, 6 referatów wygłoszili pracownicy Uniwersytetu Warszawskiego, po 2 pracownicy Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, Wojskowej Akademii Technicznej i Politechniki Poznańskiej, po jednym przedstawicielu Politechniki Krakowskiej, Gdańskiej i Wrocławskiej. W obradach Konferencji uczestniczyło około 70 osób. Dyskusja po wykładach była ożywiona, zanotowano ponad sto pytań i wypowiedzi dyskusyjnych, a sama dyskusja zajęła więcej niż czwartą część czasu obrad. Tematyka Konferencji była różnorodna, autorzy prac przedstawianych na obradach rozpatrywali wpływ różnych własności materiałów na stan naprężenia i odkształcenia, mianowicie sprężystych, plastycznych, lepkosprężystych, mikropolarnych i anizotropowych. Rozpatrywano wpływy pola temperatury, elektrycznego i magnetycznego, zagadnienia dotyczące ośrodków złożonych, ośrodków z więzami, materiałów wielofazowych, ośrodków z mikrostrukturą, zagadnienia rozprzestrzeniania się fal, zagadnienia szczelin, stochastyczne, płyt i powłok, dwie prace dotyczyły zagadnień doświadczalnych. W porównaniu z poprzednią Konferencją w Kijowie i Pierwszą Konferencją w Warszawie znacznie rozszerzyła się tematyka przedstawianych prac, może nawet nadmiernie.

Uczestnicy Konferencji, w toku obrad i podczas zakończenia Konferencji wypowiadali się za kontynuacją podobnych dwustronnych konferencji w przyszłości i za rozszerzeniem współpracy na mniej oficjalne konsultacje, wymianę profesorów i młodszych pracowników nauki oraz zastanawiali się nad możliwością prowadzenia wspólnych badań naukowych zakończonych wspólnymi publikacjami.

W trzecim dniu Konferencji duża część jej uczestników zwiedziła Toruń, włącznie z nowo wzniesionym Uniwersytetem i Płock. Poniżej podajemy, w porządku alfabetycznym, spis wygłoszonych referatów:

1. Ł. P. CHOROSZUN (Kijów), *Pewne zagadnienia mechaniki układów wielofazowych*,
2. F. CHWALCZYK, J. RAFA, E. WŁODARCZYK (Warszawa WAT), *Dwuwymiarowe fale naprężenia w sprężysto-lepkiej półprzestrzeni wymuszone ruchomym obciążeniem*,
3. W. DUDZIAK (Pol. Poznańska), *Plaskie zagadnienie termodyfuzji w ciele stałym*,
4. J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK (Pol. Wrocl., Uniw. Warsz.), *Osobliwość naprężeń siłowych i momentowych w ośrodku mikropolarnym*,
5. A. GAŁKA (Warszawa, UW), *Powłoki jako ciała sprężyste z więzami*,
6. M. E. GARF, I. I. ISZCZENKO (Kijów), *Badania zmęczeniowe materiałów i konstrukcji przy programowanym obciążeniu*,
7. J. GRABACKI, G. SZEFER (Pol. Krak.), *Uogólnione rozwiązania dla pasma płytowego na podporze liniowej*,

8. JA. M. GRIGORENKO, A. T. WASILENKO, N. D. PANKRATOWA (Kijów), *Badania wpływu efektu odkształceń poprzecznych w niejednorodnych powłokach anizotropowych*,
9. W. T. GRINCZENKO, A. F. ULITKO (Kijów), *Drgania ciał sprężystych z materiałów z piezoe efektem*,
10. A. A. KAMINSKIJ (Kijów), *O zniszczeniu dwuwymiarowych ciał kruchych w otoczeniu otworów*,
11. N. A. KILCZEWSKIJ (Kijów), *Termomechaniczne i elektromechaniczne zjawiska towarzyszące zderzeniom twardych ciał odkształcalnych*,
12. W. O. KONONIENKO, M. I. WOROTNIKOWA (Kijów), *Wzajemne oddziaływanie fali uderzeniowej i walca w wodzie*,
13. E. KOSSECKA (Warszawa, IPPT), *Osobliwe deformacje wstępne*,
14. A. D. KOWALENKO, W. G. KARNAUCHOW, W. I. KOZŁOW (Kijów), *Dynamiczne zagadnienia termolepkosprężystości*,
15. W. KUFEL (Warszawa, UW), *Dyskretyzowane ciała sprężyste*,
16. W. A. KUZMIENKO (Kijów), *O wpływie rodzaju stanu naprężenia na odkształceniowe wzmocnienie materiałów konstrukcyjnych*,
17. W. NOWACKI (Warszawa, UW), *Zagadnienia dystorsji w ośrodku mikropolarnym*,
18. Z. OLESIAK (Warszawa, UW), *Inkluzje w ośrodku sprężystym i sprężysto-plastycznym*,
19. JA. JA. RUSZCZYCKIJ (Kijów), *O rozwiązaniu typu Papkowicza-Neubera w zagadnieniach mechaniki ośrodków wieloskładnikowych*,
20. CZ. RYMARZ (Warszawa, WAT), *Problemy brzegowe nielokalnej teorii sprężystości*,
21. J. STEFANIAK (Pol. Poznańska), *Plaskie źródło dylatacji w przypadku działania pola magnetycznego*,
22. JU. N. SZEWCZENKO (Kijów), *Zagadnienia termoplastyczności*,
23. A. TRZĘSOWSKI (Warszawa, IPPT), *Wpływ liniowych charakterystyk mikrostruktury na naprężenia I rodzaju*,
24. G. A. WAN FO FY (Kijów), *Zmodyfikowane modele w teorii ośrodków złożonych*,
25. P. WILDE (Pol. Gdańska), *Duże odkształcenia makrojednorodne w ośrodku sprężystym o losowych niejednorodnościach*,
26. CZ. WOŹNIAK (Warszawa, UW), *Podstawy teorii ciał sprężystych z więzami*.

Dla potrzeb uczestników Konferencji wydano w języku polskim i rosyjskim streszczenia referatów i program obrad.

Z. Olesiak (Warszawa)

V SYMPOZJON POŚWIĘCONY REOLOGII Wrocław, 1—2 grudnia 1972 r.

Na V Sympozjonie poświęconym reologii, zorganizowanym przez Oddział Wrocławski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w dniach 1—2 grudnia 1972 r., wygłoszono następujące referaty generalne:

1. Reologia metali i polimerów — prof. dr J. Zawadzki,
2. Reologia betonu — prof. dr A. Mitzel,
3. Reologia gruntów — prof. dr S. Dmitruk,
4. Zagadnienia ogólne reologii — prof. dr O. Dąbrowski.

Pełne teksty referatów generalnych zamieszczamy w niniejszym Biuletynie.

REOLOGIA METALI I POLIMERÓW*)

JERZY ZAWADZKI (WROCLAW)

Podstawowym celem II Kongresu Nauki Polskiej jest jej przyszłość i rozwój w najbliższym 10—15-leciu. W takim też ujęciu zostały opracowane referaty poszczególnych sekcji i komisji [3]. W ramach prac Podsekcji Mechaniki Ciała Stałego ważne i istotne fragmenty referatu stanowią również problemy reologii i wyteżenia metali i polimerów.

Takie też miejsce zajmują te zagadnienia w opracowaniu I. Kisiela, poświęconym rozwojowi reologii w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia PTMTiS (1958—1968), opublikowanym w MTiS [1]. Na podkreślenie zasługują tu również dwa obszernie fragmenty pracy W. NOWACKIEGO na temat *Kierunki rozwojowe i zadania badawcze w dziedzinie mechaniki ciała stałego* — opublikowanej również w wydawnictwie MTiS [2]:

...7. *Badania reologiczne. Mam tu na myśli przede wszystkim prace doświadczalne, dotyczące polimerów i gruntów oraz znanych materiałów konstrukcyjnych, takich jak stal i beton. Chodzi o to, aby uzyskać dane doświadczalne z pierwszej ręki. Prace teoretyczne polegałyby na tworzeniu nowych modeli, głównie nieliniowych, opisujących zachowanie się pewnych klas materiałów ...*

...*Istnieje wreszcie konieczność znacznego rozszerzenia badań w dziedzinie termodynamiki procesów nieodwracalnych jako koniecznej wspólnej bazy przy tworzeniu szeregu teorii mechaniki ośrodków ciągłych, zarówno ciała stałego, jak i cieczy.*

Nasilenia wymagają wreszcie badania eksperymentalne, dotyczące zjawiska zmęczenia i mechanizmu pękania materiałów.

Przedstawiane na sympozjum prace — w szczególności w zakresie reologii metali i polimerów — stanowią przegląd wybranych prac naukowo-badawczych w tej dziedzinie trzech ośrodków: białostockiego, warszawskiego i wrocławskiego. Niestety, podobnie jak na poprzednim sympozjum, zabrakło wśród autorów referatów reprezentantów dwu równie aktywnych ośrodków, a to krakowskiego i poznańskiego. Podkreślam «wybranych», gdyż zgodnie z założeniami organizacyjnymi sympozjum, przedstawiane mogą być tylko prace dotychczas niepublikowane, a więc na ogół z ostatniego okresu działalności naukowo-badawczej cytowanych ośrodków, o których wiadomo, że efekty ich działalności publikacyjnej w okresie od poprzedniego sympozjum są bogatsze.

Komitet Organizacyjny przyjął, podobnie jak na IV Sympozjum, siedemnaście referatów z zakresu reologii metali i polimerów. Poszczególne ośrodki reprezentowane są przez:

Białystok — 6 autorów i 5 referatów

Warszawa — 6 autorów i 5 referatów,

Wrocław — 9 autorów (w tym jeden współautor z Łodzi) i 7 referatów.

W podziale na dziedziny, zagadnienia—rozwinęte i omówione w pracach przedstawionych na obecne sympozjum — różnią się nieco od zreferowanych na poprzednim. Nie są obecnie reprezentowane: reologiczne aspekty teorii plastyczności (2), metody optyczne w świetle spolaryzowanym (2), zagadnienia reostateczności przepływów (1).

Wzrosła natomiast liczba prac poświęconych pelzaniu przy zmiennych parametrach stanu i struktury (+2), problemom stabilizacji polimerów i kompozycji (+2), zagadnieniom relaksacyjnym (+4), a w szczególności — co należy uważać za zjawisko jak najbardziej pozytywne — zgłoszono 7 prac doty-

*) Referat generalny wygłoszony w dniu 1 grudnia 1972 r. we Wrocławiu na V Sympozjonie Reologii.

czących tworzyw warstwowych i zbrojonych. W innych dziedzinach występują wahania ∓ 1 . W ogólnym zestawieniu podział prac zgłoszonych na obecne sympozjum przedstawia się następująco:

pelzanie przy zmiennych parametrach stanu i struktury	7
zagadnienia wibropelzania	3
fizyko-strukturalne badania polimerów (dośw.-teoret.)	4
zagadnienia zmęczenia mechanicznego	3
zagadnienia stabilizacji polimerów i kompozycji	4
badania zjawisk relaksacyjnych	4
reostateczność struktur warstwowych zbrojonych	1
podstawowe własności mechaniczne i analiza odkształceń	2
kompozycje warstwowe wzmocnione-zbrojone	7

Jak łatwo zauważyć, większość z siedemnastu referatów obejmuje dwa z wydzielonych zagadnień.

W podziale na grupy materiałów 10 referatów poświęcono reologii polimerów i ich kompozycji, 4 metalem oraz 3 badaniom preszpanu transformatorowego.

Większość prac ma charakter doświadczalny o aspektach fenomenologicznych, aczkolwiek niektóre z nich powiązано również z analizą fizykalno-strukturalną badanych zjawisk reologicznych oraz z próbą zamodelowania procesów oraz opisu teoretycznego.

Prace ośrodka białostockiego

Dwie z prac przedstawionych przez ten ośrodek dotyczą «Badań wibropelzania przy zginaniu...» (A. JAKOŁLUK, B. KRUPICZ, M. ANISIMOWICZ) oraz «Badań wibropelzania przy ściskaniu laminatu epoksydowego» (A. JAKOŁLUK, J. KAHANE, B. KRUPICZ, M. ANISIMOWICZ).

Próbki przygotowano drogą obróbki mechanicznej z prętów wykonanych przez oddział Technologii i Materiałoznawstwa Elektrotechnicznego Instytutu Elektrotechniki we Wrocławiu. Zbrojone tworzywo zawierało 23—25% żywicy «Epidian 5» oraz 75—77% włókna szklanego firmy «Gevetex» z trójetyleno-czterooaminą jako utwardzaczem. W obu pracach przeprowadzono próby w temperaturze $373 \pm 0,5$ K, częstotliwości 40 Hz oraz współczynnika amplitudy obciążeń $A = 0,20$ na bazie $5 \cdot 10^2$ cykli. W badaniach wykorzystano wibropelzarkę, stosowaną w innych pracach zespołu, odpowiednio zaadaptowaną do obu rodzajów obciążeń. W obu też przypadkach przeprowadzono badania na trzech poziomach naprężeń maksymalnych, a to: zginanie — 228, 264 i 300 MN/m², ściskanie — 31'8, 33'6 oraz 36'0 MN/m². Wyniki badań, opracowane statystycznie, przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów krzywych wibropelzania w skali logarytmicznej. W oparciu o te wyniki opracowano równania prostych regresji dla przyjętych granicznych odkształceń (zginanie — $f/L = 0,5\%$, ściskanie — $\varepsilon = 0,75\%$) oraz granicy wibrowytrzymałości. Równania te określono w odpowiednich przedziałach N przy wysokiej wartości współczynnika korelacji; np. dla granicznych odkształceń przy ściskaniu $r = -0,962$. Równania wibrowytrzymałości przedstawiają się odpowiednio:

Zginanie — $R_z(373 \text{ K})_{0,2} = 493 - 61,071 \lg N \text{ MN/m}^2$ dla $10^3 < N < 2 \cdot 10^4$ cykli;

Ściskanie — $R_z(373 \text{ K})_{0,2} = 38,67 - 0,8439 \lg N \text{ MN/m}^2$ dla $N < 10^8$ cykli.

Wykazano, że przy zginaniu, przy przyjętym granicznym ugięciu, laminat odkształca się według innych praw powyżej $N = 2 \cdot 10^6$ cykli. Stwierdzono, że wibrowytrzymałość przy zginaniu jest około siedmiokrotnie wyższa niż przy ściskaniu, przy czym przy tym drugim obciążeniu zniszczenie występuje w wyniku ściskania przy odkształceniu pelzania około 0,1%.

Trzy następne prace zespołu, to: A. JAKOŁLUK, J. KOŁYBKO, *Wpływ stabilizacji na przebieg funkcji naprężenie-odkształcenie dla preszpanu zanurzonego w oleju*, A. JAKOŁLUK, J. KOŁYBKO, *Pelzanie preszpanu transformatorowego zanurzonego w oleju przy niestacjonarnych warunkach obciążeń*, M. CZECH, A. JAKOŁLUK, *Badanie relaksacji naprężeń preszpanu zanurzonego w oleju*.

Tworzywo to stosowane jest szeroko na przekładki, kołnierze i kliny w uzwojeniach transformatorów, pracujących w ośrodku olejowym. Brak jest na ogół odpowiednich badań podstawowych zjawisk reologicznych w trakcie pracy materiału przy niestacjonarnych warunkach obciążeń.

Przedstawione wyniki badań quasi-statycznych podstawowych własności i cech reologicznych preszpanu mają charakter prac wstępnych do obszerniejszych badań modułów dynamicznych tego materiału. Do

trzech rodzajów badań przy ściskaniu na odpowiednio zaadaptowanych pelzarkach z rewersorami — zastosowano jako próbki stopy 14 pierścieni z preszpanu ($g = 2$ mm, $D_z = 15$ mm, $D_w = 4,2$ mm) wykonanych na wykrojniku, suszonych przez 48 godzin w komorze próżniowej, a następnie nasyconych w oleju przez kilkanaście godzin w temperaturze 323 K. Próby przeprowadzono natomiast przy zanurzeniu w oleju przy temperaturze 295 ± 2 K i wilgotności $65 \pm 5\%$ w seriach o licznosci 8.

Przez stabilizację rozumieją autorzy powtarzanie cyklu obciążanie-odciążanie z prędkością $0,25$ MN m⁻²s⁻¹ o maksymalnym naprężeniu 30 MN/m², które spowodowało — ze wzrostem liczby cykli — zwięźnienie się pętli histerezy i asymptotyczne zdążanie obu gałęzi do jednakowej stałej wartości odkształcenia. W oparciu o dane statystyczne z pomiarów, w zakresie naprężeń $0,96 \div 29,98$ MN/m² otrzymano równania prostych w układzie logarytmicznym o określonych współczynnikach. Na tej podstawie dobrano funkcję $\sigma = f(\epsilon)$ w postaci $\sigma = A_n \epsilon^{Bn}$.

Próby pełzania przeprowadzono bez «stabilizacji wstępnej», wprowadzając natomiast naprężenie wstępne $0,12$ MN/m². Celem ich było zasadniczo sprawdzenie, czy badany materiał zachowuje się liniowo-lepko-sprężyste w sensie zasady Boltzmana. Zastosowano dwa programy obciążeń:

t	$t_1 - t_0 = 25$ h	$t_2 - t_1 = 50$ h	$t_3 - t_2 = 25$ h
a	$\sigma_1 = 30$ MN/m ²	$\sigma_2 = 10$ MN/m ²	$\sigma_3 = 0,12$ MN/m ²
b	$\sigma_1 = 30$ MN/m ²	$\sigma_2 = 20$ MN/m ²	$\sigma_3 = 0,12$ MN/m ²

przy czym oba powtarzano dla danej próby dwukrotnie, otrzymując wartości odkształceń: $\epsilon_{I/13} = 100$ h oraz $\epsilon_{II/13} = 100$ h.

Opracowanie statystyczne (próby o licznosci 8) z zastosowaniem testu t-Studenta na poziomie ufności $0,95$ wykazało, że wyniki spostrzeżeń ϵ_I mieszczą się w przedziale ufności wyników ϵ_{II} , co przyjęto jako dowód i hipotezę reologicznej liniowości badanego materiału.

W podobny sposób przeprowadzono również badania relaksacji naprężeń przy pięciu poziomach początkowych: $\sigma_0 = 5, 10, 15, 20$ i 25 MN/m², stosując serie prób o licznosci 6 z oceną rozrzutu wg. testu Dixona. Opracowanie statystyczne wyników badań doprowadziło do wyznaczenia równania prostej regresji w postaci

$$\sigma(t_1, \sigma_0) = \sigma_0(0,8129 - 0,06573 \lg t) \text{ MN/m}^2$$

w przedziale $0,017$ h $< t < 15$ h z ewentualną możliwością pewnej ekstrapolacji w górę.

Prace ośrodka warszawskiego

Koledzy z Instytutu Techniki Budowlanej przedstawili dwie prace dotyczące procesów reologicznych w metalach: M. KOSIOREK, *Metody badań relaksacji naprężeń w metalach*; M. KOSIOREK, W. ŁUKASIUŁ, *Badania pełzania i relaksacji naprężeń w stalach do konstrukcji sprężonych*.

Pierwsza z nich stanowi krótkie, ale interesujące studium na temat zjawisk relaksacyjnych i krytycznej analizy porównawczej metod badania tych procesów przy jednoosiowym lub quasi-jednoosiowym (np. liny) stanie naprężeń, w szczególności w zastosowaniu do cięgien konstrukcji sprężonych. Słusznie stwierdza Autor, że stosowana aparatura i metodyka winny być adekwatne do postawionego celu i zapewniać: 1) przebieg zjawiska zgodny z jego definicją fizyczną, 2) porównywalność wyników badań.

Po systematycznej klasyfikacji metod pomiaru i analizie ich dokładności — ze szczególnym uwzględnieniem metod i schematów aparatury, stosowanej w ITB — przedstawiono ostateczne wnioski, które w podsumowaniu sprowadzają się do stwierdzeń: a) omówione metody przedstawiają różne wartości w zależności od celu badania, b) ponieważ w większości eksperymentów zjawiska fizyczne są jedynie mniej lub bardziej ściśle modelowane, nie należy więc trudności związanych z pomiarami relaksacji naprężeń przeceniać, a jedynie stworzyć warunki porównywalności wyników badań, prowadzonych w różnych ośrodkach różnymi metodami.

Drugi z referatów stanowi fragment obszerniejszego opracowania poświęconego badaniom wpływu przeciążeń (instrukcje i normy zalecające 10% wstępne przeciążenia) na własności reologiczne stali o wysokiej wytrzymałości. W przedstawionych badaniach przyjęto zarówno dla drutów i lin (trzy produkcji krajowej, a trzy importowane: NRF, CSR, WRL) w próbach pełzania i relaksacji (naprężenia początkowe) naprężenia bliskie stosowanym w praktyce, tj. $0,7 R_m$, zaś przeciążano wstępnie do $0,8 R_m$, przy czym dla

opracowania statystycznego wyników badano serie o licznosci co najmniej $n = 3$. Próby przeprowadzono w temperaturze 293 ± 3 K na odpowiednio przystosowanych pelzarkach produkcji NRD w zakresie 1000 (a w nielicznych przypadkach 1500) godzin. Porównano różnice w wartościach umownej granicy plastyczności $R_{0,2}$, odkształceń i prędkości pelzania oraz intensywności relaksacji naprężeń w wyniku cytowanych wstępnych 10-minutowych przeciążeń, występujące na tle tychże wskaźników dla ciągnięć nieprzeciążanych. Ogólnie Autorzy stwierdzają, że przeciążenie wstępne powoduje w początkowym okresie zmniejszenie intensywności efektów reologicznych, natomiast negatywny jego wpływ przejawia się z upływem czasu (przynajmniej w zakresie stosowanego czasu trwania badań, tj. do 1500 godzin), a więc może być niekorzystny z punktu widzenia budownictwa. Wydaje się jednak, że należy zachować ostrożność przy uogólnianiu takich wniosków.

Praca S. OLCHELSKIEGO, *Pelzanie poliamidu w warunkach złożonej historii obciążenia*, stanowi interesujący przykład zastosowania koncepcji H. LEADERMANA, M. WARDA i E. ONATA, z wykorzystaniem aproksymacji proponowanych przez A. GREENA i R. RIVLINA wzgl. R. STAFFORDA ogólnego równania konstytutywnego dla materiałów fizykalnie nieliniowo-lepkosprężystych z zanikającą pamięcią, przy badaniach osiowego pelzania poliamidu T-27 przy 1,2 i 3-stopniowych programach obciążeń.

Badania przeprowadzono na pelzarce, zbudowanej według koncepcji autora, w temperaturze $296 \pm 0,2$ K, wilgotności 40—52%, na próbkach wiósekowych ($60 \times 10 \times 4$ mm³), wykonanych metodą wtryskową, przy czym dla statystycznego opracowania wyników stosowano serie o licznosci $n = 5$. Złożone programy obciążeń (o stopniach: $\sigma = 1'12, 2'24$ oraz $3'36$ kG/mm²) obejmowały pelzanie aktywne przy $\sigma = \text{const}$, nawrót oraz pelzanie dodatkowe przy dodatkowym obciążeniu, przy czym czas trwania 1-go stopnia obciążenia wynosił 1000 godz., zmian obciążenia zaś dokonywano w czasach $t_1 = 10$ i 100 godz. oraz $t_2 = 110$ i 200 godz.

Zasadniczym celem pracy była próba określenia odpowiednich funkcji materiałowych. Stosując cytowane koncepcje opisu fenomenologicznego oraz odpowiednie aproksymacje, udało się autorowi wyznaczyć — co zostało poprzedzone odpowiednią analizą dotychczasowych prób w tym zakresie — pewną liczbę funkcji materiałowych dla 1, 2 i 3-stopniowych programów obciążeń, np: dla 1 stopnia:

$$\varepsilon(t) = 0,0018 t^{0,389} \sigma_i + 0,0016 \sigma_i^3.$$

Ponadto wyniki badań wykazały nieliniowość tworzywa w temp. 296 K powyżej $\sigma = 1$ kG/mm² oraz efekt «umocnienia», co potwierdzają również prace naszego zespołu.

Tematem pracy S. OCHELSKIEGO i Z. ORŁOSIA, *Pelzanie stali żarowytrzymałej w podwyższonych temperaturach*, były badania stali zaworowej, zrealizowane na próbkach rozciąganych przy parametrach uwzględniających warunki pracy zaworów

T [K]	σ [kG/mm ²]
873	10, 20, 25 i 30
973	4, 7 i 10
1073	2'2, 4'2, 6, 8, 10

Badania podstawowe (E , $R_{0,02}$, $R_{0,2}$ oraz H_{RC}) wykazały dostateczną jednorodność materiału próbek. Próby pelzania przeprowadzono na pelzarce firmy L. Schopper z dodatkowymi urządzeniami pomiarowymi i kontrolnymi. Dla statystycznego opracowania wyników stosowano serie o licznosci $3 \leq n \leq 9$, czas zaś trwania próby wynosił od 100 do 5000 godzin.

Po przeanalizowaniu kształtów krzywych pelzania oraz prędkości pelzania stwierdzono występowanie trzeciego okresu pelzania, który zależy od parametrów badania, tj. T oraz σ .

Szczególnie wartościowe ze względów zastosowań konstrukcyjnych jest wyznaczenie umownej «czasowej granicy pelzania» (dla $\varepsilon_p = 1\%$) w funkcji temperatury.

Praca A. WILCZYŃSKIEGO i K. PUCIŁOWSKIEGO, *Długość krytyczna włókna wzmacniającego ośrodek lepkosprężysty* składa się z trzech zasadniczych części: 1. Ogólnego omówienia stanu badań i teorii kompozycji wzmocnionych ciętym i ciągłym włóknem szklanym. 2. Opisu znanych teorii wzmocnienia włóknem przy założeniu idealnie sprężystego materiału wiążącego, z wyznaczeniem długości krytycznej. 3. Własnych rozważań przy założeniu liniowo lepkosprężystych cech reologicznych materiałów wiążących.

W oparciu o przedstawione w poprzednich pracach koncepcje równań konstytutywnych dla materiałów liniowo lepkosprężystych autorzy proponują modyfikację oszacowania długości krytycznej włókna (wg teorii Outwatera, Rosena i Dowa) oraz przeprowadzają analizę zależności naprężenia w włóknach w funkcji

ich długości krytycznych i krytycznego udziału objętościowego. Autorzy wykazują ponadto, że np. dla termoplastycznych tworzyw wiążących (w porównaniu do liniowo sprężystych) długość krytyczna winna ulec zwiększeniu w granicach $73 \div 145\%$, przy czym istotną rolę odgrywa w tym przypadku G_{∞} i jego zależność od temperatury, a dla tworzyw polarnych również od wilgotności. Ogólnie stwierdzają Autorzy, że z punktu widzenia podstawowego mechanizmu wzmocnienia pożądana jest jak największa długość włókna w kompozycji.

Prace ośrodka wrocławskiego

Sześć z siedmiu referatów przedstawionych przez zespół, prezentujący wybrane prace w dziedzinie reologii i wyteżenia tworzyw, prowadzone w Instytucie Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej, stanowi kontynuację kompleksowych prac naukowo-badawczych, których poprzednie etapy zreferowaliśmy na IV sympozjum poświęconym reologii.

W pracy J. ZAWADZKIEGO i E. GROZIKA, *Ocena zjawisk «superpozycji» wpływu impulsów termicznych przy anizotermicznym pelzaniu poliamidu Tarlon XB*, przedstawiono analizę wybranych wyników badań w zakresie temperatur $T = 308 \div 338$ K i naprężeń $\sigma = 16 \div 31$ MN/m² — przedstawionych w poprzednich publikacjach. Stanowi ona podstawę odpowiedniej modyfikacji zasady dziedziczności Boltzmanna. Przeanalizowano i zbadano — z uwzględnieniem aspektów fizykalno-strukturalnych — przesunięcia funkcji jąder pelzania, spowodowane działaniem trójkątnych impulsów termicznych (wzgl. zastępczych prostokątnych: $T = 15$ K, $\Delta t = 15$ min) według programów:

1. pelzanie przy stałej temperaturze,
2. „ z impulsem termicznym $A(\tau_1^* - \tau_1)$,
3. „ z impulsem termicznym $B(\tau_2^* - \tau_2)$ przy czym $\tau_2 > \tau_1^*$,
4. „ z impulsami $A + B$.

Nie wnikając w szczegóły obszernej analizy i opisu fenomenologicznego badanych zjawisk reologicznych, wyeksponujemy w podsumowaniu, że pelzanie poliamidu po impulsie nie jest zgodne ani z teorią wzmocnienia, ani z teorią płynięcia. Oceniając wpływ impulsów termicznych na pelzanie poliamidu z praktycznego punktu widzenia, można stwierdzić, że chociaż impulsy termiczne powiększają wartość odkształcenia (zwłaszcza pierwszy), to jednak «przyłożenie» odpowiednio dobrane impulsu powoduje, iż poliamid staje się prawie nieczuły na ewentualne impulsy termiczne, jakie mogą wystąpić w czasie pracy.

Praca J. ZAWADZKIEGO i J. KALWAKA, *Oszacowanie parametru prognozującego intensywność rozwoju dekohezji zmęczeniowej polimerów przy wymuszeniach kinematycznych o stałej amplitudzie*, zawiera próbę teoretycznego opisu zjawisk relaksacyjnych zachodzących w polistyrenie wysokoudarowym KA w trakcie postępującego procesu zmęczeniowego w obszarze tworzącego się «węzła odkształceń trwałych».

Zasadnicze założenie opracowanej metody polegało na pomiarze odkształceń $\epsilon_m(t)$ w takiej odległości od tworzącego się «węzła», która zapewniałaby możliwość zastosowania równań fenomenologicznych dla modeli strukturalnych liniowej lepkość sprężystości.

W oparciu o analizę opracowanych statystycznie wyników badań w trzech temperaturach $T = 293, 303$ oraz 313 K dla sześciu wybranych charakterystyk cykli zmęczeniowych (od symetrycznego do asymetrycznego o charakterystyce $r = 0,43$ przy $y_m = 0 \div 18,75$ mm, $y_a = 6 \div 32$ mm) z częstotliwością 7 Hz, określono (z wyznaczeniem numerycznych wartości współczynników) funkcje prognozujące intensywność rozwoju złomu zmęczeniowego $\sigma(t)$, $\delta(t)$ oraz parametr k prognozujący stopień zużycia zmęczeniowego przy wymuszeniach kinematycznych okresowo zmiennych o stałej amplitudzie.

Opis fenomenologiczny i ocena reoefektów wibropelzania belek równomiernej wytrzymałości na zginanie z Metapleksu NO przedstawiony przez J. ZAWADZKIEGO i A. KANIĘ zawiera szczegółową analizę — z uwzględnieniem również aspektów fizykalno strukturalnych — zjawisk reologicznych towarzyszących cytanemu procesowi obciążania przy $\sigma_{m0} = 8,6$ MN/m², w zakresie częstotliwości $f = 0 \div 41,6$ Hz, w trzech temperaturach $T = 293, 303$ i 313 K oraz czasach trwania próby $t = 18 \cdot 10^3$ s.

Opracowanie statystyczne wyników badań, przeprowadzonych według ustalonego obszernego programu, oraz wspomniana analiza pozwoliła na sformułowanie wniosków, z których wyeksponujemy w szczególności: proces wibropelzania Metapleksu NO przebiega — dla $f = \text{const}$ i $T = \text{const}$ — przy stałych modu-

lach kinetycznych i praktycznie stałej prędkości $\dot{\epsilon}_m$, przy czym nałożenie wibracji o różnych częstotliwościach i różnych temperaturach wpływa na zróżnicowanie przyspieszenia procesu (f — różne, $T = \text{const}$) i ułożenie krzywych wibropełzania ($f = \text{const}$, T — różne). Reoefekty wibropełzania są wyraźnie zdeterminowane współczynnikiem amplitudy odkształceń $A\epsilon_0$, określającym «położenie układu» w stosunku do lokalnego rezonansu, tzn. im większy $A\epsilon_0$ tym wystąpią większe reoefekty, wzrastają również prędkości pełzania $\dot{\epsilon}_m$. Z praktycznego punktu widzenia nałożenie wibracji w procesie pełzania przyspiesza niekorzystne efekty reologiczne, a tym samym skraca okres pracy elementu wykonanego z badanego tworzywa.

W pracy przedstawiono również, w oparciu o analizę wyników badań, koncepcję sformułowania równań krzywych wibropełzania $\epsilon_m(t)$ dla danych częstotliwości i temperatur w oparciu o wyznaczone moduły kinetyczne.

J. ZAWADZKI i M. NOWAK w pracy *Analiza fizykalna fenomenologicznych aspektów zmęczenia poliamidu starzonego w różnych środowiskach* przedstawiają własne koncepcje wykorzystania w ocenie żywotności zmęczeniowej klasycznego już równania Arrheniusa-Boltzmanna. Oszacowuje ono «czas życia osiadłego» odpowiedniej jednostki kinetycznej w zależności od wysokości bariery ΔE energii aktywacji badanego procesu fizycznego. Przystosowanie tej dość elastycznej zależności dla oceny żywotności różnych elementów (np. próbek) przy różnych programach obciążania, w różnych temperaturach i w różnych stanach fizycznych tworzywa wymaga jednak szczególnie wnikliwej analizy fizykalno-strukturalnej badanego procesu.

W przypadku dowolnie programowanych zmian obciążeń i temperatur wprowadza się dla oceny żywotności tzw. kryterium J. Baileya, opierające się na podobnych założeniach jak np. tzw. reguła Minera-Palmgrenna. Przedstawiając krytyczną próbę jego modyfikacji uwzględniono ponadto fizykalno-strukturalne aspekty starzenia i jego wpływ na odpowiednie wielkości występujące w proponowanej formule. Dotyczy to w szczególności «krytycznej bariery energetycznej» Φ_0 oraz «objętości jednostki kinetycznej» γ_0 . Autorzy wprowadzają również tzw. funkcję ryzyka, uwzględniającą «wagę» naprężeń niskich i wysokich oraz wpływ czasu trwania obciążenia, a też zakładają możliwość występowania tzw. «prógu czułości», odpowiadającego nieograniczonej wytrzymałości zmęczeniowej. W opisie teoretycznym ocena żywotności sprowadza się do analizy całkowitego zapisu funkcji Bessela rzędu zerowego pierwszego rodzaju, z wykorzystaniem funkcji zmodyfikowanych.

Przedstawione rozważania, opierające się na fenomenologicznym uśrednieniu założeń fizykalno-strukturalnej teorii statystycznej, wykorzystują Autorzy do oceny porównawczej wpływu starzenia na ograniczoną wytrzymałość i żywotność zmęczeniową tworzywa.

Praca J. ZAWADZKIEGO i E. ŚWIĄTKA *Badania wstępne reostateczności prętów z tworzyw sztucznych zbrojonych WS* składa się z dwu zasadniczych części. W pierwszej przedstawiono charakterystykę badanego tworzywa (kompozycja Polimalu 109 z wzmocnieniem w postaci warstw tkaniny z włókna szklanego w ilości średnio wagowo 26%), opis zaprojektowanej i zastosowanej aparatury dla badania reostateczności prętów ($100 \times 10 \times 4 \text{ mm}^3$), metodykę rejestracji sił i odkształceń oraz wybrane wykresy z pomiarów (w trzech temperaturach: 293, 313 i 333 K) wyboczenia pełzającego w szerokim zakresie obciążeń (naprężeń), zależnych od temperatury badania. Za czas krytyczny przy wyboczeniu pełzającym przyjęto moment, w którym odkształcenia wzrastają gwałtownie, przy czym dla badanej kompozycji kryterium takie nie nastęczało trudności technicznych. W oparciu o serie prób w wysokiej liczności — ze względu na możliwość występowania dużych rozrzutów — opracowano metodami statystycznymi równania prostych regresji w układzie $(\sigma_k \div \ln \tau_k)_T$.

W części drugiej, analizując kształt cytowanych zależności $(\sigma_k \div \ln \tau_k)_T$, charakter mechanizmu rozwoju procesu dekohezji oraz wykorzystując, wspomnianą przy omawianiu poprzedniej pracy, elastyczność formuły Arrheniusa-Boltzmanna, autorzy przedstawili koncepcję przystosowania jej w sensie fenomenologicznym do oszacowania zależności czasów krytycznych od poziomu obciążenia. Autorzy wprowadzili do cytowanej zmodyfikowanej formuły tzw. funkcję ryzyka, uwzględniającą zarówno «próg czułości» układu na zaistniały bodziec termokinetyczny, jak też różną «wagę» względnej wartości tego bodźca w odniesieniu do jego wartości krytycznej — doraźnej.

A. WŁOCHOWICZ (Łódź) i M. NOWAK przedstawiają w pracy *Wpływ stabilizacji termicznej, starzenia i naprężeń zmiennych na strukturę submikroskopową poliamidu* etap drugi (końcowy) (pierwszy zreferowano na poprzednim IV sympozjum) badań strukturalnych, mających na celu ustalenie charakteru zmian

zachodzących w mikrostrukturze fizycznej poliamidu pod wpływem obciążeń zmiennych, czasu starzenia w różnych środowiskach oraz wpływu tych procesów na wytrzymałość zmęczeniową.

Stabilizację termiczną przeprowadzono na specjalnie zaprojektowanym do tego celu i wykonanym ZRW IMMT urządzeniu w oleju cylindrowym wg pięciu programów obróbki cieplnej z zastosowaniem temperatur $T = 443, 448$ i 463 K i różnych ciśnień do 200 at; 1/3 z ogólnej ilości próbek poddano oznaczeniu trwałości zmęczeniowej przy stałej amplitudzie naprężenia $\sigma_{\max} = \sigma_a = 187$ kG/cm² w temperaturze 298 K i częstotliwości 15 Hz, pozostałe zaś próbki przechowywano w klimacie laboratoryjnym (1/3) oraz w wodzie destylowanej (1/3) i zbadano na trwałość zmęczeniową po 4-ro miesięcznym starzeniu w tych ośrodkach.

Badania strukturalne przeprowadzono więc na preparatach wykonanych z wyprasek «dziewiczych» i zużonych oraz z próbek starzonych w powietrzu i w wodzie. Oznaczenia zawartości fazy krystalicznej przeprowadzono metodą Hermansa-Weidingera wielkości obszarów krystalicznych wg klasycznych formuł, oznaczenie zaś gęstości metodą gradientową według Tunga-Taylora, a na tej podstawie obliczono stopień krystaliczności.

Z przedstawionych przez Autorów obszernych pięciu wniosków wyeksponujemy niektóre, mianowicie: zawartość fazy krystalicznej maleje w próbkach stabilizowanych jedynie dla programu 463 K (1 h) 0 at. o około 11%, podobnie jak dla próbek starzonych w powietrzu, natomiast dla próbek starzonych w wodzie i w powietrzu oraz zużonych wzrasta o $4 \div 11\%$. Wymiary poprzeczne krystalitów ulegają, w wyniku zużycia, zmianom w kierunkach uprzywilejowanych w próbkach starzonych w wodzie, zaś w kierunku płaszczyzny (020) dla starzonych w powietrzu.

Z. GABRYSZEWSKI i C. WITKOWSKI przedstawili pracę *Mechaniczne własności żeliwa*. Aczkolwiek nie wiąże się ona bezpośrednio dość ściśle z głównym hasłem sympozjum «reologia», gdyż przedstawiono w niej wyniki pomiarów odkształceń i naprężeń w próbkach cienkościennych rurowych z żeliwa Z1 14 (przy pięciu programach obciążenia: rozciąganie osiowe, rozciąganie obwodowe, ściskanie osiowe, rozciąganie dwuosiowe i skręcanie), to jednak również i dla takiego tworzywa, jakim jest badane żeliwo w normalnej temperaturze, wyeksponują się przy powtórnych obciążeniach pewne efekty typu reologicznego, związane ze zmianami kształtu krzywych obciążenie—odkształcenie. W szczególności stwierdzono to dla dwu pierwszych programów obciążeń «prostowanie» się wykresów w zakresie większych obciążeń (naprężeń).

Autorzy wykazali ponadto silną zależność współczynnika przewężenia $\nu = \nu(\epsilon)$ od odkształcenia — zmniejszanie się przy rozciąganiu — co świadczy o nieliniowej zależności pomiędzy naprężeniem średnim i odkształceniem objętościowym, różnice w modułach Younga przy rozciąganiu i ścisnaniu, wreszcie oszacowali odkształcenie krytyczne wg. hipotezy złomu kruchego.

Cytowana literatura

1. J. KISIEL, *Rozwój reologii w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia PTMTiS (1958—1968)*, Mech. Teor. i Stos., 3, 6 (1968).
2. W. NOWACKI, *Kierunki rozwojowe i zadania badawcze w dziedzinie mechaniki ciała stałego*, Mech. Teor. i Stos., 3, 6 (1968).
3. *Zadania sekcji, podsekcji i komisji II Kongresu Nauki Polskiej wynikające z uchwał i materiałów VI Zjazdu PZPR.*

Dyskusja

Dyskusji przewodniczył referent generalny prof. dr inż. Jerzy ZAWADZKI. W pierwszej części, poświęconej pytaniom i uwagom odnośnie poszczególnych referatów uczestniczyło 6 osób. J. ZAWADZKI — na tle referatu A. WILCZYŃSKIEGO i K. PUCIŁOWSKIEGO — przedstawił uwagi o wpływie współczynnika przewężenia na nośność kompozycji zbrojonej WS, prosząc autorów o ustosunkowanie się do tego zagadnienia np. w porównaniu z koncepcjami Rabinowicza i in. A. WILCZYŃSKI zwrócił się do autorów A. JAKOŁUKA i in. z prośbą o wyjaśnienie odnośnie przyjęcia tak wysokiego procentu zbrojenia. T. HOP ustosunkował

się krytycznie do terminologii, stosowanej w referatach zespołu z Białegostoku (A. JAKOWLUK, B. KRUPICZ i in.), np. do definicji «wibrowytrzymałość» itp. Z. BYCHAWSKI przedstawił pewne uwagi odnośnie ścisłości sformułowań i założeń przyjętych w kilku referatach, prosząc autorów o wyjaśnienia. Z. ORŁOŚ zwrócił się do referenta z prośbą o wyjaśnienie, dlaczego łączy się na sympozjone problemy reologii metali i polimerów w jednym referacie generalnym. W wyniku ponownego wystąpienia T. HOPA w sprawie poprawności definicji, stosowanych w referatach zespołu z Białegostoku, wywiązała się dyskusja, w której uczestniczyli ponadto A. WILCZYŃSKI, A. JAKOWLUK i Z. ORŁOŚ.

W drugiej części, poświęconej wystąpieniom autorów uczestniczyło 7 osób. A WILCZYŃSKI ustosunkował się do zagadnienia wpływu współczynnika przewężenia na nośność laminatów szklanych. L. BRUNARSKI przedstawił w uzupełnieniu referatów zespołu z ITB Warszawa (M. KOSIOREK i in.) dodatkowe wyniki badań własnych. B. KRUPICZ odpowiedział na pytania dyskutanta oraz przedstawił dodatkowe informacje o pracach naukowo-badawczych ośrodka białostockiego. S. OCHELSKI, E. GROZIK i J. ZAWADZKI ustosunkowali się do uwag dyskutanta, uzgadniając z nim swe poglądy. Z. GABRYSZEWSKI przedstawił, na propozycję J. ZAWADZKIEGO, dodatkowe uwagi odnośnie problemu rozszerzalności termicznej anizotropowych laminatów szklanych w oparciu o własne badania.

REOLOGIA BETONU*)

ADAM MITZEL (WROCLAW)

Celem referatu jest omówienie prac zamieszczonych w materiałach sympozjonu pod wspólną nazwą «Reologia Betonu» (s. 239—273). Zgrupowano w tym dziale 12 prac, z których tylko 10 zaliczyć można do zagadnień związanych bezpośrednio z reologią betonu. Jedna praca dotyczy bowiem wpływu podwyższonej temperatury na pełzanie cięgien sprężających i powinna się znaleźć w grupie prac objętych reologią metali i polimerów. Ze względu jednak na fakt, że zmienne warunki temperatury wywołane są niektórymi metodami przyspieszonego dojrzewania betonu, pracę zaszeregowano do reologii betonu.

Druga praca zajmująca się odkształcaniem betonów polimerowych, a więc odkształcaniem betonów, których pełzanie nie jest wywołane zachowaniem się w czasie zaczynu cementowego, powinna także być zamieszczona w grupie reologii polimerów.

Podział tych 12 prac według ośrodków jest następujący: Gliwice — 1 praca, Warszawa — 3 prace, Wrocław — 7 prac, Wrocław-Odesa — 1 praca.

Przed omówieniem poszczególnych prac przedstawiono krótki przegląd prac poświęconych reologii betonu, opublikowanych w okresie do ostatniego sympozjonu wrocławskiego (1969 r.).

Należy stwierdzić, że przez długi okres czasu ukazywały się drukiem liczne prace przyczynkowe z dziedziny reologii betonu o charakterze teoretycznym i doświadczalnym w czasopiśmie krajowych i zagranicznych, natomiast w ostatnich latach zanotować można pojawienie się na rynku księgarskim monografii obejmujących w pewnym sensie całość zagadnień związanych z reologią betonu. W roku 1970 została wydana książka A. M. NEVILLE (Uniwersytet Leeds, Anglia) pt.: *Creep of Concrete, Plain, Reinforced and Prestressed* oraz książka A. MITZELA pt.: *Reologia betonu*, wydana w 1972 r. (Wydawnictwo Arkady, Warszawa).

Mimo braku jeszcze wyników badań doświadczalnych szeregu zagadnień z zakresu reologii betonu, ukazanie się tych książek świadczy o potrzebie pewnej syntezy obecnego stanu wiedzy w tej dziedzinie.

Warto także podkreślić, że w roku 1969 odbyła się w Kijowie konferencja na temat pełzania i skurczu betonu, na której przedstawiono 43 referaty z całego Związku Radzieckiego. We wrześniu 1972 (4—8.IX) odbył się w Lionie (Francja) 6 Międzynarodowy Kongres Reologii o bardzo szerokiej tematyce, obejmującej, oprócz ogólnych zagadnień teoretycznych, także reologię różnych materiałów, m.in. metali, polimerów, farb, gruntów, betonu i innych. Interesującymi elementami programu są ponadto reoptyka i bioreologia.

W pierwszej z wymienionych konferencji godne podkreślenia są referaty, w których autorzy podejmują próbę wyjaśnienia pełzania i skurczu na gruncie zjawisk strukturalnych. W innej pracy przedstawiono próbę uściślenia współczynnika Poissona pełzania jako funkcji dwóch zmiennych (t , τ). Praca ta, jak też prace innych autorów (Leeds, Wrocław) wykazuje, że funkcja ta zależy na ogół od poziomu naprężenia i wieku betonu w chwili przyłożenia obciążenia i po pewnym okresie stabilizacji (50 do 70 dni), jest wartością stałą nieodbiegającą w zasadzie od wartości doraźnego współczynnika Poissona. Mimo że zagadnienie to nie jest jeszcze w pełni wyjaśnione, można już obecnie stwierdzić, że w problemach dwu- i trójosiowych przyjęcie współczynnika Poissona $\nu(t, \tau)$ jako uśrednionej wartości stałej niedaleko odbiega od rze-

*) Referat generalny wygłoszony w dniu 1 grudnia 1972 r. we Wrocławiu na V Sympozjonie Reologii.

czywistości. Takie założenie w dużym stopniu upraszcza ogólne równanie pelzania przy wieloosiowych stanach naprężenia.

Na wyniki badań przedstawionych na drugiej z wymienionych konferencji (Lion) trzeba będzie jeszcze poczekać, albowiem materiały są obecnie w druku w czasopiśmie «Reologica Acta» wydanym przez l'Association Rhône-Alpes (Francja)

Omawiając wieloosiowy stan naprężenia należy zwrócić uwagę na jeszcze jedno zagadnienie, które — mimo sporadycznie ukazujących się prac — nie znalazło jeszcze ostatecznego rozwiązania. Chodzi o miarę pelzania w dwuosiowym stanie naprężenia. Miara pelzania przy dwuosiowym stanie naprężenia nie może być zidentyfikowana z miarą pelzania stanu jednoosiowego. W oparciu o swoje badania, podobne zdanie wyraża A. M. NEVILLE. Stwierdzenie takie pociąga za sobą zmiany w równaniach (pelzania) dwuosiowego stanu naprężenia, w których wg Arutiuniana wystarczy wstawić do jądra równań całkowych Volterry funkcję reprezentującą miary pelzania jednoosiowego stanu. Popelniony błąd może — jak badania wstępne wykazują — dochodzić do 30%. Sprawa ta wymaga dalszych badań eksperymentalnych, które niestety nie należą do łatwych.

Z dalszych, dotąd niewyjaśnionych problemów, należy wymienić sprawę addytywności pelzania i skurczu betonu. Wspomniałem o tym w referacie generalnym na IV Sympozjone reologii w 1969 r. Zjawisko to jest nadal niewyjaśnione. W ostatnich 3 latach żadna praca na ten temat nie została opublikowana. Przyczyną tego stanu jest brak badań doświadczalnych i opracowań teoretycznych dotyczących zjawisk zachodzących w strukturze betonu.

Intensyfikacji badań eksperymentalnych i dociekań teoretycznych wymaga szereg zagadnień, między innymi:

- problemy wibropelzania ustrojów żelbetowych i sprężonych,
- naprężenia wywołane polem temperatury w betonowych konstrukcjach tarczowych, płytowych i łupinowych z uwzględnieniem skurczu i pelzania betonu,
- uwzględnienie nieliniowego pelzania betonu w zginanych elementach żelbetowych w stanie granicznym,
- problemy stateczności betonowych elementów prętowych i powierzchniowych z uwzględnieniem zjawisk reologicznych betonu.

Przystępując do omówienia poszczególnych referatów pozwolę sobie omówić je w kolejności, w które zostały wydrukowane w materiałach sympozjonu.

W pracy pt. *Pelzanie płyt żelbetowych o zmiennej sztywności* (L. BRUNARSKI, W. DESCOURS, s. 239) autorzy przedstawiają sposób uwzględnienia pelzania betonu przy obliczaniu ugięć prostokątnych płyt żelbetowych. Obliczenia oparte są na założeniu ciągłej zmiany sztywności, spowodowanej nierównomiernym zbrojeniem i zarysowaniem wg schematu podanego na rys. 1e (s. 241). Rozwiązanie numeryczne uzyskano przy zastosowaniu metody różnic skończonych. Celem sprawdzenia metody przeprowadzono pomiary ugięć stropu. Zgodność ugięć pomierzonych i obliczonych jest zadowalająca, bo nawet po 300 dniach różnica między wynikami obliczeń a ugięciami stwierdzonymi w naturze nie przekracza 10%.

Praca pt. *O obliczaniu ugięć żelbetowych płyt kołowsymetrycznych przy obciążeniu długotrwałym* (L. BRUNARSKI, S. ŻMIGRODZKI, s. 251) jest zastosowaniem do płyt kołowych równań podanych w poprzedniej pracy dla płyt prostokątnych.

Praca pt. *Odkształcenia betonów polimerowych pod obciążeniem długotrwałym* (T. HOP, s. 259) dotyczy ciekawego i z punktu widzenia praktyki ważnego problemu betonów składających się z różnych kompozycji żywicznych mieszanych z kruszywem jako wypełniaczem. Nasuwa się szereg pytań odnośnie sposobu wyznaczenia modułu sprężystości betonu oraz roli wilgotności względnej przy tego rodzaju betonach.

W pracy pt. *Funkcje liniowego i nieliniowego pelzania* (M. KŁAPOĆ, s. 275) autor zajmuje się zagadnieniem określenia granicy między tak zwanym pelzaniem liniowym i nieliniowym betonu. Propozycja autora polega na podaniu jednego wyrażenia opisującego przebieg odkształceń betonu przy długotrwałym obciążeniu w całym obszarze naprężeń od zera do «wytrzymałości długotrwałej».

Ze wzorów (34) podanych na s. 284 wynika, że dla obliczenia odkształcenia jednostkowego pelzania $\epsilon_p(\sigma, \tau, t)$ trzeba wyznaczyć w sposób eksperymentalny 5 parametrów (według teorii Arutiuniana). Odnośnie postaci funkcji (34), w której wykładnik potęgi jest $-\gamma/\sqrt{t-\tau}$ mam pewne wątpliwości, powstaną

bowiem trudności przy rozwiązywaniu równań całkowych, ponieważ wyrażenie $(1 - e^{-\gamma\sqrt{t-\tau}})$ jest częścią jądra równania całkowego Volterry.

Praca pt. *Wpływ podwyższonej temperatury na pelzanie ciągien sprężających* (M. KOSIOREK, W. ŁUKASIAK, s. 291) dotyczy doświadczalnego określenia wpływu zmiennych warunków temperatur występujących przy stosowaniu niektórych metod przyspieszonego dojrzewania betonu na pelzanie ciągien sprężających. Interesujący jest nagły wzrost prędkości odkształceń (pelzania) oraz szybki spadek prędkości odkształceń przy wzroście czasu trwania ogrzewania.

Pracę pt. *Pelzanie betonu w świetle parametrów technologicznych* (A. MITZEL, R. STUS, M. KŁAPOĆ, s. 303) oraz pracę pt. *Kształtowanie skurczu betonu* (R. STUS, A. MITZEL, M. KŁAPOĆ, W. RAWA, s. 363) można zaliczyć do zagadnień inżynierii materiałowej, zajmującej się komponowaniem lub wykonaniem materiałów o z góry ustalonych własnościach fizycznych lub chemicznych. W tym przypadku chodzi o własności reologiczne. Najważniejsze wnioski z obu prac są następujące:

— betony wykonane na cemencie portlandzkim wykazują mniejsze pelzanie niż analogiczne betony oparte na cemencie hutniczym,

— betony wykonane z cementów z dodatkiem gipsu dwuwodnego w ilości 3% do klinkieru wykazały najmniejsze pelzanie,

— dodatek klutanitu (jako plastyfikatora) warunkujący polepszenie urabialności nie powoduje wzrostu odkształceń skurczowych.

W pracy pt. *Analityczne ujęcie odkształceń postaciowych betonu* (M. PERSONA, s. 317) na podstawie wyników własnych badań doświadczalnych autor przedstawia wyrażenia opisujące odkształcenia postaciowe doraźne i reologiczne betonu. Zaproponowane wzory składają się z części «liniowej» i «nieliniowej» (wzór (1), s. 318); parametry wchodzące w skład tych wzorów wyznaczono za pomocą maszyny analogowej. Mimo dobrej zgodności wyrażań analitycznych z wynikami empirycznymi istnieje obawa, że w konkretnych zadaniach nie można będzie z nich skorzystać (wzór (11), s. 322), zależności te mają bowiem te same mankamenty co wzór (34) i dalsze na s. 289 pracy M. KŁAPOCIA.

Praca pt. *Badania odkształceń betonu naparzanego przy obciążeniach długotrwałych* (M. PERSONA, A. DZIENDZIEL, s. 327) zawiera wyniki pomiaru odkształceń postaciowych uzyskanych na skręcanych elementach rurowych dla betonów naparzanym i nienaparzanym. We wnioskach autorzy stwierdzają, że wykresy odkształceń przy ściskaniu i ścinaniu są w całym obszarze naprężeń — krzywoliniowe, tak dla betonów nienaparzanym jak też naparzanym. Stwierdzenie, że naparzanie betonu przyspiesza nie tylko jego wiązanie i dojrzewanie lecz także starzenie, jest oczywiste, dojrzewanie bowiem jest w tym przypadku synonimem starzenia.

Praca pt. *Wykorzystanie matematycznych maszyn analogowych do wyznaczenia parametrów funkcji pelzania* (M. PERSONA, J. RÓŻEWICZ, s. 339) wskazuje na możliwości elektronicznej techniki analogowej przy opisywaniu analitycznym i wyznaczaniu parametrów funkcji pelzania betonu na podstawie wyników badań doświadczalnych.

Celem pracy pt. *Uwzględnienie cech reologicznych betonu przy obliczaniu konstrukcji betonowych* (I. PROKOPOWICZ, S. JASMAN, s. 347) jest ustalenie zakresu zastosowania teorii fenomenologicznych liniowej teorii pelzania betonu do obliczania konstrukcji betonowych. Między innymi autorzy analizują wpływ pelzania betonu na odkształcenia i naprężenia w konstrukcjach żelbetowych pracujących w fazie I i II. Interesujące są wykresy odkształceń ściskanej strefy elementów pracujących w fazie drugiej oraz wykresy zmian w czasie współczynnika $\Psi_z(t)$, który przy wzroście czasu t dąży do jedności.

Praca pt. *Współczynnik odkształcalności betonu przy zmiennych prędkościach obciążenia* (A. MITZEL, J. WŁODARCZYK, s. 373) jest rozszerzeniem pracy pierwszego z autorów, który przedstawił E jako funkcję dwóch zmiennych — $E(t, \sigma)$. W tym przypadku podano ujęcie analityczne współczynnika E jako funkcji trzech zmiennych — $E(\sigma, \tau, v)$, gdzie v jest prędkością przyrostu obciążenia. Na podstawie wyników badań można stwierdzić, że największy wpływ na wartość E betonu wywiera zmiana naprężeń. Prędkość narastania naprężenia oraz wiek betonu τ mają znaczenie tylko w pewnych konkretnych przypadkach, na przykład przy sprawdzeniu odkształceń starej konstrukcji, albowiem wówczas różnica wartości E betonu w wieku 15 dni i np. 200 dni wynosi już około 17%.

Dyskusja

L. BRUNARSKI (Warszawa) w odniesieniu do referatu PERSONY i DZIENDZIELA uważa, że można wykorzystać aparaturę z ciśnieniem wewnętrznym, by uzyskać pomiary w płaskim stanie naprężenia. Odnośnie referatu PROKOPOWICZA i JASMANA — należałoby niektóre terminy zmienić, np. współczynnik relaksacji.

Z. BYCHAWSKI (Kraków) w odniesieniu do referatu KŁAPOCIA pyta, w jaki sposób w równaniu (38) mogą wystąpić dwa czasy (τ i t)? Podkreśla fakt podany przez A. MITZELĄ, iż równania (36) i (37) są trudne w stosowaniach praktycznych. Wzór (35) przedstawia dwie różne funkcje f ; w tej sprawie prosi o wyjaśnienie.

G. SZEFER (Kraków) uważa, że współczynnik Poissona $\nu(\tau, t)$ jako funkcja dwóch zmiennych jest ważny dla betonu, dla glin, górotworów. Jest to zagadnienie mało zbadane. Badania przedstawione w referacie J. WŁODARCZYKA i A. MITZELĄ są pierwszymi badaniami na ten temat w Polsce.

Na końcu dyskusji autorzy referatów ustosunkowali się do wypowiedzi dyskutantów, udzielając odpowiedzi na postawione pytania.

AKTUALNE PROBLEMY REOLOGII OŚRODKA ROZDROBNIONEGO*)

STANISŁAW DMITRUK (WROCLAW)

1. Wstęp

Metody reologii wprowadzone zostały do mechaniki gruntu w połowie lat pięćdziesiątych. Fakt ten łączy się z nazwiskami TAN TJONG-KIE, W. A. GEUZE i J. M. BURGERSA. Pierwszy z wymienionych był autorem rozprawy *Onderzoekingen over de rheologische Eigenschappen van Klei* — pozostali, jego promotorami [1]. Wkrótce potem metody reologii w polskiej mechanice gruntów zostają zaadaptowane przez I. KISIELA. To, że mam szczęście zaliczać się do uczniów I. KISIELA i TANA, pozwoliło mi prześledzić od początku rozwój tej dziedziny mechaniki.

Wspomniane wydarzenia poprzedziły specyficzny kryzys mechaniki gruntów, którego skutki dają znać o sobie jeszcze i dziś. Sądzę, że celowe jest zastanowienie się nad przyczynami tego kryzysu.

Zarówno klasyczna mechanika, jak i reologia gruntu zajmują się opisem tego samego ciała, tj. ośrodka rozdrobionego. Punktem wyjścia w obu przypadkach jest model fizyczny, definiowany przez pojęcie reprezentatywnego obszaru elementarnego. Obszarowi temu przypisuje się wymiary skończone [2, 4], w przeciwieństwie do nieograniczonego małego obszaru elementarnego, jakim operuje mechanika ośrodków ciągłych.

Pociąga to za sobą bardzo istotne następstwa, o których nie zawsze się pamięta, a może nawet w wielu przypadkach nie zdaje sobie sprawy. Pierwszym z nich jest interpretacja pojęcia naprężenia. Jeżeli w mechanice ośrodków ciągłych naprężenie interpretuje się jako

$$(1) \quad \sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta S},$$

to, wobec skończonych wymiarów obszaru elementarnego, w ośrodku rozdrobionym naprężenie charakteryzujące się jako

$$(2) \quad \hat{\sigma} = \frac{\Delta P}{\Delta S}.$$

Aby zdać sobie sprawę z dalszych następstw interpretacji przeprowadzimy następujące rozumowanie. Niech obszar elementarny ośrodka rozdrobionego znajduje się wewnątrz ciała ciągłego, na konturze którego dane zostało obciążenie zewnętrzne. Jeżeli w dowolnej chwili naprężenia działające na powierzchnię zewnętrzną obszaru elementarnego mają być zrównoważone przez oddziaływanie materiału tworzącego ten obszar, konieczne jest spełnienie warunku

$$(3) \quad \int_{\Delta F} \sigma_{(t)} dF = \int_{\Delta F} r_{(t)} dF,$$

gdzie ΔF — powierzchnia ograniczająca element, $r_{(t)}$ — funkcja oddziaływania materiału.

Warunek może być spełniony przez różne funkcje: właściwa, dla materiału obszaru elementarnego, powinna być określona przez związki fizyczne. Przypomnijmy, że skomplikowane właściwości ośrodka uniemożliwiły klasycznej mechanice ośrodka rozdrobionego na funkcyjny zapis związku

$$(4) \quad \gamma = F\{\sigma\}$$

*) Referat generalny wygłoszony dnia 2 grudnia 1972 r. we Wrocławiu na V Sympozjone Reologii.

i spowodowały wprowadzenie związków lokalnych w postaci

$$(5) \quad q = k(I - I_0),$$

$$(6) \quad \Delta \varepsilon = a(\Delta \sigma - \Delta \sigma_w),$$

$$(7) \quad \tau^{\theta r} = c' + (\sigma - \sigma_w)^{\theta r} \operatorname{tg} \varphi'.$$

W związkach tych czas występuje w sposób niejawny, będąc argumentem funkcji złożonych σ_w , c' , φ' , k , a .

Wobec takiej sytuacji mechanika ośrodka rozdrobionego podjęła próby adaptacji równań stanu prostych ciał reologicznych. Jednak skończone wymiary obszaru elementarnego wykluczyły możliwość dyskretyzacji efektów wewnątrz obszaru [4], dyskretyzacji która stanowi ogromną zaletę mechaniki ośrodków ciągłych operującej nieograniczenie małymi elementami.

Metody reologiczne pozwoliły na przewyżczenie tych trudności dzięki:

- a) wprowadzeniu do rozważań przestrzeni wymiarowej o bazie: naprężenie, odkształcenie, czas;
- b) wprowadzeniu analogu zewnętrznych efektów reakcji wewnętrznej obszaru elementarnego.

Rozważania w przestrzeni wymiarowej o bazie σ , γ , t pozwoliły na funkcyjny opis, przynajmniej powierzchni ograniczających i przekrojów związku [4], właściwości zaś modeli reologicznych — na opis reakcji wewnętrznej materiału, poprzez analog efektów zewnętrznych. Dało to możliwość rozwiązania szeregu zadań w zastosowaniach technicznych.

2. Omówienie referatów sekcyjnych

Na tle przytoczonej krótkiej analizy rozpatrzmy referaty naszej sekcji.

Poza sugerowaną przez analizę «klasyfikacją» znajduje się referat A. BORCZA i J. DUBISA pt. *Badania naporu gruntu na tymczasowe umocnienia ścian wykopu*. Ograniczona ilość wyników pomiarów uniemożliwiła Autorom ich interpretację. Niemniej informacje zawarte w referacie zapowiadają możliwość uzyskania interesujących materiałów.

Określoną grupę tematyczną reprezentują referaty pochodzące z Gdańskiego Oddziału naszego Towarzystwa. Ich podstawę teoretyczną stanowią założenia ośrodka sztywno-idealnie plastycznego lub sprężysto plastycznego, podstawowe zaś narzędzie — badania modelowe. Wszystkie traktują o ważnych i niedostatecznie rozpoznanych zagadnieniach. Są to prace: 1) E. DEMBICKI, W. ODROBIŃSKI, B. ZADROGA pt. *Nośność podłoża fundamentowego stanowiącego zbocze w świetle doświadczeń*, 2) A. BOLT, E. DEMBICKI pt. *Nośność fundamentów blokowych poddanych działaniu momentu wywracającego w świetle badań modelowych*, 3) E. DEMBICKI, W. ODROBIŃSKI pt. *Nośność uwarstwionego podłoża fundamentowego*.

W pracach 1) i 2) zreferowane zostały wyniki badań modelowych, które porównano z wynikami rozwiązań odpowiednich zadań ośrodka sztywno-idealnie plastycznego. Szersze opracowanie teoretyczne, przy zastosowaniu modelu sprężysto-plastycznego zawiera referat 3. Znajdujemy propozycję wykorzystania zasady zachowania energii, przy założeniu stałej objętości obszaru uplastycznionego, do rozwiązania zadania podanego w tytule referatu. Sądzę, że w przypadku wszystkich referatów przedmiotem dyskusji może stać się sprawa udokumentowania wpływu, lub braku wpływu oddziaływania ścian i dna na wyniki badań modelowych, oraz problem przetransponowania wyników na obiekty rzeczywiste.

W tym ostatnim aspekcie nowe problemy dyskusyjne stwarza wprowadzenie w referacie E. DEMBICKIEGO i W. ODROBIŃSKIEGO — *Nośność uwarstwionego podłoża fundamentowego*, analogu sprężysto-plastycznego i zastosowana metoda rozwiązania.

Podkreślając niewątpliwą nowość jaką stanowi to podejście w rozwiązaniu zadania (dotychczas podobne propozycje dotyczyły rozważań nad niektórymi zagadnieniami obszaru elementarnego np. [3]), nie można jednak nie dostrzec wylaniających się w związku z propozycją zagadnień.

W rozpatrywanym przez Autorów zadaniu materiał tworzący warstwy musi przejść wszystkie fazy pracy od minimalnych wartości stanu naprężenia aż do stanu granicznego. Z natury rzeczy proces ten musi odbywać się w czasie, a zmiany stanu naprężenia nie muszą przebiegać monotonicznie. Wobec skomplikowanych właściwości ośrodka rzeczywistego i wyraźnie występujących efektów dziedziczności (pamięci)

powstaje pytanie: czy zastosowanie modelu sprężysto-plastycznego pozwoli na dostatecznie dokładne oszacowanie pracy w tym ośrodku?

Sądzę, że problem ten wart jest przeanalizowania przed przystąpieniem do rozwiązania zadania. Istnieje oczywiście szereg przykładów zastosowania «ponadczasowych» analogów, ma to jednak miejsce w określonych warunkach wyznaczania efektów zewnętrznych np. przy niewielkich przyrostach naprężeń czy szczególnych stanach naprężenia np. w stanie granicznym.

Trzy następne referaty przedstawiają zagadnienia teorii konsolidacji, a to: 1) Z. KOŃCZAKA, pt. *Osiadanie powierzchni półprzestrzeni konsolidującej pod działaniem obciążenia statycznego*, 2) J. GASZYŃSKIEGO i G. SZEFERA pt. *Konsolidacja półprzestrzeni lepkosprężystej pod obciążeniem osiowo-symetrycznym*, 3) B. LACHOWICZA i G. SZEFERA pt. *Konsolidacja półprzestrzeni lepkosprężystej przy obciążeniu antysymetrycznym*.

Zwróćmy uwagę, że model fizyczny ośrodka rozdrobionego dopuszcza co najmniej trzy typy konsolidacji z uwagi na układ strukturalny szkieletu, różniące się przede wszystkim warunkiem początkowym dla momentu realizacji warunków brzegowych (obciążenia)

dla szkieletu statecznego

$$(8a) \quad \Delta\sigma = \Delta\sigma_{s(0)}; \quad \Delta\sigma_{w(0)} = 0,$$

dla szkieletu quasi-statecznego

$$(8b) \quad \Delta\sigma = \Delta\sigma_{w(0)} + \Delta\sigma_{s(0)},$$

dla szkieletu niestatecznego

$$(8c) \quad \Delta\sigma = \Delta\sigma_{w(0)}; \quad \Delta\sigma_{s(0)} = 0,$$

i co najmniej dwa typy z uwagi na związek opisujący filtrację, a różniące się warunkami końcowymi

$$(8d) \quad \text{gdy } I_0 = 0 \quad \Delta\sigma_{w(T)} = 0,$$

$$(8e) \quad \text{gdy } I_0 \neq 0 \quad \Delta\sigma_{w(T)} \neq 0.$$

Stąd, z punktu widzenia mechaniki ośrodka rozdrobionego, przedstawione rozwiązania są rozwiązaniami szczególnych zadań stanu odkształcenia.

Inny problem związany z zastosowaniami teorii konsolidacji znajdujemy w referacie R. DZIĘCIELAKA pt. *O określaniu stałych ośrodka konsolidującego*.

Problem może być względnie prosty, tak jak to przedstawia Autor, dla ośrodka, w którym moduł sprężystości i współczynnik Poissona mogą być traktowane jako stałe materiałowe, a technika oznaczania modułów ściśliwości objętościowej ziaren szkieletu opanowana. Nie odnosi się to niestety do ośrodka rozdrobionego.

Ostatnią grupę stanowią referaty eksponujące metodykę reologiczną, zastosowaną w rozwiązaniach zadań technicznych.

Referat K. ABRAMSKIEGO pt. *Wiskozymetryczne badania reologiczne osadów poprodukcyjnych przemysłu sodowego*. Wyniki uzyskane przez K. Abramowskiego pozwalają na wyrobienie sobie poglądu na właściwości reologiczne opisywanego materiału. Sądzę, że referat sygnalizuje intencję Autora i dalsze uogólnienie uzyskanych wyników.

J. KWIATEK w pracy pt. *Reologiczne aspekty współpracy budowlanej z podłożem górniczym* i H. GLINKO w pracy pt. *Wpływ prędkości odkształcenia na zmianę stanu naprężenia w gruncie na terenach górniczych*, przedstawiają wyniki badań konsekwentnie prowadzonych w głównym Instytucie Górnictwa, z których początkami mieliśmy możliwość zapoznać się na poprzednich Sympozjonach.

W aktualnym stanie zagadnienia wskazane byłoby, moim zdaniem, podjęcie prób identyfikacji efektów reologicznych procesu rzeczywistego z przyjętymi w referatach modelami. Jak mi wiadomo, autorzy dysponują już obecnie pewnymi materiałami naświetlającymi to zagadnienie.

Referat I. KISIELA pt. *Działanie obciążenia na ciało kruche* przedstawiam jako ostatni z tej przyczyny, że wykracza poza problematykę reologii ośrodka rozdrobionego. W referacie analizowana jest możliwość zastosowania przedstawionego przez Autora modelu ciała kruchego do rozwiązania pewnych zagadnień mechaniki skał. Aktualność i waga poruszonego w referacie zagadnienia nie wymaga chyba komentarzy.

3. Wnioski

Na przedstawione referaty trzeba by jeszcze spojrzeć jako na odzwierciedlenie rozwoju reologii pomiędzy sympozjonami, a także odzwierciedlenie tendencji tego rozwoju.

Niewątpliwie jednym z przejawów rozwoju jest, że już w czasie przygotowań do sympozjonu, pojawiły się trudności i dyskusje na temat kierowania prac do poszczególnych sekcji i precyzyjnie określenia tematyki tych ostatnich. Z dyskusji i analizy przedstawionych referatów wyłania się wniosek, że w przyszłości należałoby wyróżnić dwa działy tematyczne w ramach naszej sekcji: a) reologię ośrodka rozdrobionego, b) reologię skał. Wydaje się, że właśnie w tym ostatnim dziale znajdą swe miejsce zastosowania teorii konsolidacji, która historycznie i merytorycznie wywodzi się z mechaniki skał i tam może znaleźć bardziej efektywne zastosowanie.

Inne, równie naturalne zjawisko rozwojowe, to pogłębienie się «inflacji» modeli przypisywanych jednemu i temu samemu ośrodkowi. Zwrócił na nie uwagę I. KISIEL na II Sympozjonie.

Zjawisko to wymaga z jednej strony analizy samej metodyki tworzenia modeli reologicznych, z drugiej — analizy związków fizycznych ośrodka.

Jeżeli chodzi o analizę metodyki konstruowania modeli, warto w tym miejscu zwrócić uwagę na pracę F. STOPPA [5], która ukaże się wkrótce w «Studiach i Materiałach Instytutu Matematyki i Fizyki Teoretycznej» naszej uczelni. Zawiera ona analizę podstaw teoretycznych i reguły konstruowania modeli reologicznych.

Dругa, fizyczna strona analizy, to zagadnienie identyfikacji modeli reologicznych z procesami zachodzącymi w ośrodku rzeczywistym. Istnieją, moim zdaniem, podstawy do twierdzenia, że są już obecnie możliwości rozwiązania tego zagadnienia na drodze sformułowania równania konstytutywnego dla reprezentatywnego obszaru elementarnego ośrodka [6].

Uważam, że poza dalszym rozwojem zastosowań w najbliższym okresie prace badawcze powinny rozwinąć się we wspomnianych powyżej kierunkach.

Literatura

1. TAN TJONG-KIE, *Onderzoekingen over de rheologische Eigenschappen van Klei*, Gravenhage 1954.
2. Н. А. ЦЫТОВИЧ, *Механика грунтов*, ГИЛСА и С. М., Москва 1963.
3. K. HOSHINO, *A General Theory of Mechanics of Soils*, Proc. IV ICOS an EF, London 1957.
4. I. KISIEL, B. LYSIK, *Zarys reologii gruntów. Działanie obciążenia statycznego na grunt*, Arkady, Warszawa 1966.
5. F. STOPP, *Die Zustandsgleichungen der Bodenrheologie* (w druku).
6. S. DMITRUK, B. LYSIK, H. SUCHNICKA, *Podstawowe problemy wytrzymałości gruntu* (w przygotowaniu do druku).

Dyskusja

W zapoczątkowanej przez G. SZEFERA (Kraków) dyskusji, który szczegółowo omówił aktualny stan rozwoju teorii konsolidacji i jej zastosowań, mówca wskazał, że najpilniejszymi są obecnie badania doświadczalne (zapoczątkowane w Oddziale Poznańskim) oraz rozwiązania zadań dla możliwie najogólniejszych modeli liniowych. W obecnej chwili uważa za niecelowe «przypisywanie» omawianej teorii mechanice skał czy gruntu z uwagi na różnorodność jej zastosowań.

L. BRUNARSKI (Warszawa) poruszył zagadnienie równań konstytutywnych zastosowanych w referacie E. DEMBICKIEGO i W. ODROBIŃSKIEGO.

J. WOJCIECHOWSKI (Wrocław) poddał analizie przyczyny rozbieżności pomiędzy rozwiązaniami numerycznymi, modelowymi i pomiarami na obiektach, które zauważył w referacie E. DEMBICKIEGO, W. ODROBIŃSKIEGO i B. ZADROGA. K. NIEPOKOJAK (Warszawa) i J. WOJCIECHOWSKI omawiali zagadnienie jksotropii i niektórych jego aspektów technicznych.

A. BORCZ (Wrocław) uzupełniając referat przedstawił problematykę konstrukcji i eksploatacji czujników magneto-sprężystych i uzyskane w tej dziedzinie rezultaty.

J. GASZYŃSKI (Kraków) zilustrował tezy referatu przykładami rozwiązań numerycznych konsolidacji dla przypadków nagłego i rosnącego, lokalnego obciążenia półprzestrzeni lepkosprężystej oraz wynikającymi stąd wnioskami. Odpowiadając na kwestie poruszone w dyskusji, a dotyczące referatów, których był współautorem, W. ODROBIŃSKI (Gdańsk) stwierdził, że badania modelowe jak i założenia o cechach ośrodka traktowane były przez Autorów jako pierwsze przybliżenie; poinformował też o dalszym toku badań.

ZAGADNIENIA OGÓLNE W REOLOGII*)

OTTON DĄBROWSKI (WROCLAW)

W dziale «Zagadnienia ogólne w reologii» umieszczono prace nie mieszczące się w trzech podstawowych działach sympozjonu, mianowicie w działach: reologia metali i polimerów, reologia betonu oraz reologia gruntów.

Do działu zagadnienia ogólne w reologii z pośród prac, które wpłynęły na V Sympozjon Reologii, zakwalifikowano 5 prac. Prace te są opublikowane na ss. 533 do 557 i 563 do 591 wydawnictwa pt. «V Sympozjon poświęcony reologii», referaty, Wrocław 1972. PTMTiS, Oddział we Wrocławiu. Wydrukowane w wydawnictwie dwie prace dotyczące konsolidacji ujęte są w referacie generalnym na temat reologii gruntów.

Dwie prace traktują o reologii powłok, jedna o stateczności i wyboczeniu i dwie o pewnych zagadnieniach lepkosprężystości. Z. BYCHAWSKI i J. LEDZIŃSKI przedstawiają w pracy pt. *Deformacja pełzającej powłoki walcowej pod ciśnieniem wewnętrznym* rozwiązanie zagadnienia pełzania powłoki walcowej obciążonej osiowo-symetrycznie. W pracy oparto się na poprzednich publikacjach Bychawskiego. W rozwiązaniu, w przeciwieństwie do rozwiązań innych autorów, uwzględniono interakcję sił wewnętrznych w powłoce. Rozwiązano przypadki szczególne, gdy powłoka na brzegu jest przegubowo podparta i drugi, gdy jest utwierdzona. Otrzymane wyniki dla obu wariantów warunków brzegowych przedstawiono graficznie podając na wykresach zmianę momentu zginającego i prędkości przemieszczenia normalnego dla powłoki wzdłuż długości powłoki.

Byłaby pożyteczna w pracy bliższa analiza różnic między przedstawionym rozwiązaniem a rozwiązaniami innych autorów.

H. KOPECKI, E. REJMAN, J. ZAKRZEWSKI w pracy pt. *Analityczne rozwiązania w zakresie reologii powłok kulistych, a badania eksperymentalne* przeprowadzili weryfikację rozwiązań analitycznych dużych ugięć reologicznych powłok kulistych za pomocą badań doświadczalnych. Weryfikacji eksperymentalnej poddano założenia i wyniki przedstawione w pracach BYCHAWSKIEGO oraz BYCHAWSKIEGO i KOPECKIEGO. Rozwiązania analityczne otrzymano przy założeniu nieliniowych związków geometrycznych oraz równania konstytutywnego dla materiału powłoki, zaproponowanego przez Odquista.

Autorzy opisali sposób przeprowadzenia badań oraz warunki w jakich one zostały przeprowadzone. W wyniku pomiarów otrzymali związki między przemieszczeniem normalnym do powłoki w jej środku, a czasem (do 200 godz). Na wykresach przedstawiono te zależności przy różnych wielkościach obciążenia powłoki i porównano je z wynikami analitycznymi. Jakościowy przebieg tych zależności jest zgodny, ilościowo wielkości otrzymane na drodze teoretycznej są większe od wielkości otrzymanych z eksperymentu.

Podane w pracy wnioski są, moim zdaniem, może zbyt śmiałe w stosunku do zakresu przeprowadzonych badań. Mierzono bowiem tylko ugięcia środka powłoki, nie badano zachowania się innych wielkości. Również nie badano, czy powłoka pracuje wyłącznie w stanie błonowym, taki bowiem stan uwzględniła rozwiązanie analityczne, z którym porównuje się wielkości otrzymane eksperymentalnie.

Z. BYCHAWSKI i H. KOPECKI poddają pod dyskusję w pracy pt. *O stateczności reologicznej i reologicznym wyboczeniu* problem stateczności i wyboczenia reologicznego. Uważają, że klasyczne ujęcie zagadnień stateczności i wyboczenia reologicznego w ujęciu jak dla układów sprężystych wymaga innego podejścia.

*) Referat generalny wygłoszony dnia 2 grudnia 1972 r. we Wrocławiu na V Sympozjonie Reologii.

Uważają, że wymienione zjawiska reologiczne są jakościowo różne od tych zjawisk w stanie sprężystym. Należy przyjąć brak reakcji natychmiastowej materiału na działanie zewnętrzne. Materiał, zakładają, ma wyłącznie własności zależne od czasu. Twierdzą, że dla materiałów czysto pełzających stosowanie kryterium typu dynamicznego nie ma uzasadnienia. Utrata stateczności sprężystej następuje przy pewnej minimalnej wielkości energii akumulowanej, natomiast utrata stateczności reologicznej zachodzi przy pewnej wartości dysypacji, która nie musi mieć charakteru ekstremalnego.

A. WILCZYŃSKI analizuje w pracy pt. *Funkcja wykładnicza ułamkowa i jej własności w zastosowaniu do opisu zjawisk lepkosprężystości* przydatność funkcji

$$e_r(\gamma, t) = -\gamma \sum_1^{\infty} (-1)^m \frac{(\nu t)^{m\nu-1}}{\Gamma(m, \nu)}$$

do opisu zjawisk lepkosprężystości liniowej, zarówno do celów praktycznych, jak i teoretycznych. W zależności od doboru wartości parametrów ν i γ można dopasować tę funkcję do dowolnych danych doświadczalnych pełzania, występujących w praktyce. Autor pokazuje, że funkcja ta daje proste wyrażenia poszczególnych funkcji lepkosprężystości, jej przekształcenie Laplace'a jest łatwe do obliczenia. Całka tej funkcji wyraża się jako nowa funkcja $e_r^*(\gamma, t)$. Uzasadniono celowość tabelaryzacji tej funkcji. Badania prowadzone przez autora są interesujące i pożyteczne.

Z. PIEKARSKI wykazuje w pracy pt. *Analogia sprężysto-lepkosprężysta* możliwość istnienia sprężysto-lepkosprężystej analogii dla półprzestrzeni przy różnym pełzaniu postaciowym i objętościowym, z uwzględnieniem starzenia ośrodka. Przedstawiona sprężysto-lepkosprężysta analogia jest uogólnieniem analogii Arutuniana i Grahama. Dyskusję nad postawioną tezą przeprowadzono dla trzech przypadków, a mianowicie: 1) dla obszaru całkowania Ω niezależnego od czasu (Ω obszar obciążenia półprzestrzeni), 2) gdy funkcję obciążenia półprzestrzeni $p(x_1, x_2, t)$ można przedstawić w postaci iloczynu dwóch funkcji o rozdzielanych zmiennych w postaci

$$p(x_1, x_2, t) = \sum_{k=1}^n p_k(x_1, x_2) A_k(t)$$

oraz dla materiału bez starzenia.

Dyskusja

Z. KOWAL wypowiedział się o potrzebie badań fizycznych podstaw reologicznego zachowania się ciał stałych. Stanowisko swoje uzasadnia następująco:

Stosowany w fizyce podział ciał na: ciała stałe, ciała ciekłe i ciała gazowe oraz podział ciał stałych na ciała sztywne, ciała sprężyste oraz ciała plastyczne, z punktu widzenia reologii posiada luki. W fizyce ciała stałego do dzisiejszego dnia nie wypracowano kompletu podstawowych, mierzalnych wielkości fizycznych, za pomocą których można wytłumaczyć w prosty i logiczny sposób reologiczne zachowanie się ciał stałych i pod tym względem została ona wyprzedzona przez fizykę jądrową.

Klasyczny podział na ciała stałe, ciecze i gazy w reologii traci swoją ostrość, mimo że w technice ten podział ma nadal istotne znaczenie. Reiner na przykład twierdził, że beton można uważać za ciecz o czasie relaksacji około 10^6 , natomiast powietrze za ciecz o czasie relaksacji 10^{-10} . Na podstawie analizy sił międzyatomowych i międzycząsteczkowych można przyjąć, że stan skupienia ciała zależy od energii zgromadzonej w ciele. Reologiczne stałe materiałowe możemy uważać za funkcje losowe takich nielosowych parametrów jak: temperatura, ładunek elektryczny oraz naprężenia. Tak zwane stałe reologiczne zmieniają się w polu temperatur, w polu elektrycznym i w polu naprężeń. Zależnie od natężenia wymienionych pól mamy różne własności reologiczne tych samych ciał. Szereg obserwowanych odchyień własności reologicznych ciał jest spowodowany tym, że mierzone techniczne własności reologiczne są wielkościami losowymi o znacznym nieraz rozproszeniu cech. Szereg anomalii zależy od szybkości odkształceń lub przemieszczeń, a zwłaszcza od tego czy siły bezwładności odgrywają zasadniczą, czy też drugorzędą rolę w stosunku do sił międzycząsteczkowych.

O potrzebie badań fizycznych uwarunkowań reologicznego zachowania się ciał świadczy szereg niekonsekwentnych lub niedostatecznie wyjaśnionych efektów reologicznych, jak na przykład:

Efekt ujemnej lepkości uważany za przyczynę wzrostu średniej szybkości w ruchu wirowym. Zastosowanie efektu ujemnej lepkości ma miejsce w obliczeniach obrotu słonecznej fotosfery i mgły słonecznej, obrotu atmosfery ziemskiej i atmosfery planet, obrotu dysków spiralnych galaktyk, przepływu Golfstromu i sezonowych efektów atmosferycznych. Należy dodać, że efekty ujemnej lepkości dadzą się obserwować w laboratoriach. Należy przypuszczać, że wprowadzenie pojęcia ujemnej lepkości wiąże się z ułatwieniem matematycznego opisu szeregu zjawisk geofizycznych i astrofizycznych, a nie rzeczywistą ujemną lepkością. Wiąże się też zapewne z brakiem ujęcia wszystkich źródeł energii wywołujących ruch.

L'Hermite wprowadził pojęcie antytiksotropii w celu określenia zjawiska zwiększania się stosunku sił stycznych do szybkości w miarę wzrostu odkształceń stycznych. Kaczański wykrył przypadek 350-krotnego wzrostu lepkości w ciągu 1 minuty, przy szybkości odkształceń stycznych 10 sek^{-1} . Lepkość w tym przypadku różni się od lepkości strukturalnej tym, że w przypadku tiksotropii i antytiksotropii odbudowa lepkości następuje ze znacznym nieraz opóźnieniem.

Znany jest pozatem efekt elektrolepki, polegający na powiększaniu się lepkości w obecności ładunków na cząsteczkach oraz efekt elektoreologiczny, polegający na natychmiastowym zwiększeniu lepkości zależnie od napięcia i częstości pola elektrycznego i szybkości ścinania, który bywa wykorzystywany do obróbki niektórych ciał kruchych.

A. MITZEL poprosił autorów referatu *O stateczności reologicznej i reologicznym wyboczeniu* o bliższe wyjaśnienie zastosowania proponowanych rozwiązań.

Z. BYCHAWSKI zwrócił uwagę w związku z wypowiedzią Z. KOWALA, że referat J. WŁODARCZYKA i A. MITZLA pt. *Współczynnik odkształcalności betonu przy zmiennych prędkościach obciążenia* daje w pewnej części odpowiedź na poruszone sprawy. Odpowiedział A. MITZLOWI w sprawie wyboczenia reologicznego; rozwiązania dotyczące pewnych szczególnych przypadków opublikował H. KOPECKI. Przytoczył on również przykłady, wynikające z prac RABOTNOWA i SZESTERIKOWA. Podał także pewne uwagi formalne do referatu Z. PIEKARSKIEGO. Uznał, natomiast, że w referacie A. P. WILCZYŃSKIEGO własności funkcji wykładniczej zostały przedstawione w sposób przejrzysty i celowy.

H. KOPECKI przedstawił szkicowo, w związku z zapytaniem A. MITZLA, wyniki swojej pracy na temat wyboczenia, opublikowanej w Arch. Bud. Maszyn, 3 (1972). Ustosunkował się także do wypowiedzi generalnego referenta.

A. WILCZYŃSKI przedstawił kilka uwag krytycznych do referatu Z. PIEKARSKIEGO.

Z. PIEKARSKI wyjaśnił wątpliwości wyrażone w wypowiedziach Z. BYCHAWSKIEGO i A. WILCZYŃSKIEGO.

L. LEDZIŃSKI w związku z uwagami generalnego referenta omówił różnice między przedstawionym rozwiązaniem na sympozjonie, a rozwiązaniem innych autorów.

Należy podkreślić żywość i wysoki poziom wypowiedzi dyskusyjnych.

XV ZJAZD DELEGATÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

XV Zjazd PTMTS odbył się w Warszawie w Pałacu Kultury i Nauki dnia 12 maja 1973. W Zjeździe wzięły udział 54 osoby, w tym 49 osób z mandatami delegatów, reprezentujące 11 Oddziałów Towarzystwa. Obrady otworzył przewodniczący ZG prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, który stwierdził, że Towarzystwo włączyło się do przygotowań do II Kongresu Nauki Polskiej. Komisja pod przewodnictwem prof. dra G. RAKOWSKIEGO opracowała memoriał w sprawie szkolenia młodej kadry i programów nauczania. Sądzymy, że memoriał ten odegrał pewną rolę przy opracowywaniu raportu o stanie oświaty oraz wytycznych Ministerstwa Nauki, Techniki i Szkolnictwa Wyższego w sprawie programów nauczania.

Otwierając Zjazd przewodniczący ZG przypomniał, że dnia 9 kwietnia br. zmarł prof. dr Edmund KARAŚKIEWICZ, członek założyciel i członek honorowy PTMTS, przewodniczący Oddziału Poznańskiego PTMTS. Zebrani uczcili pamięć zmarłego minutą ciszy.

Na przewodniczącego obrad Zjazdu Delegatów powołano doc. dra Jerzego MIERZEJEWSKIEGO ze Szczecina, na z-ców przewodniczącego prof. dra Gwidona SZEFERA z Krakowa i prof. dra Kazimierza WRZEŚNIEWSKIEGO z Poznania; na sekretarza dr Bożenę TĘCZYŃSKĄ ze Szczecina.

Przyjęto następujący porządek obrad:

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarza Zjazdu.
2. Przyjęcie protokołu z XIV Zjazdu Delegatów PTMTS.
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej.
4. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa.
5. Złożenie sprawozdania finansowego.
6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
7. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich oraz postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium i głosowanie nad wnioskiem.
8. Wybory:
 - a) przewodniczącego;
 - b) uzupełniające członków Zarządu Głównego;
 - c) uzupełniające Głównej Komisji Rewizyjnej.
9. Sprawa zmiany Statutu Towarzystwa.
10. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności na następny okres.
11. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

Ad 1. Pierwszy punkt porządku dziennego wyczerpano na wstępie.

Ad 2. Protokół z poprzedniego Zjazdu Delegatów odbytego dnia 6 maja 1972 r. przyjęto bez zmian.

Ad 3. Komisję Matkę i Skrutacyjną powołano w składzie: prof. dr Zbigniew OLESIAK, doc. dr Marian SUCHAR i prof. dr Piotr WILDE.

Ad 4. Sprawozdanie z działalności Towarzystwa za rok 1972 oraz za pierwszy kwartał 1973 r. złożył sekretarz generalny prof. dr J. SZMELTER.

Ad 5. Sprawozdanie finansowe za rok 1972 i pierwszy kwartał 1973 r. złożył skarbnik — prof. dr Zbigniew WESOŁOWSKI.

Ad 6. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej przewodniczący prof. dr Stanisław KOCAŃDA.

Ad 7. W dyskusji nad sprawozdaniami, która dotyczyła zaległych składek, ożywienia działalności Towarzystwa, współpracy PTMTS ze stowarzyszeniami NOT oraz Towarzystwem Elektrotechniki i Tow. Cybernetyki zabierali głos doc. dr Z. WASZCZYŹYŃ, prof. dr A. MORECKI i prof. dr Z. BRZOSKA. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI poruszył również kwestię nieprawidłowości w załatwianiu spraw finansowych w pewnych oddziałach Towarzystwa.

Po dyskusji przyjęto sprawozdania:

- 1) z działalności Towarzystwa w r. 1972 i za pierwszy kwartał 1973 r.;
- 2) finansowe;
- 3) Głównej Komisji Rewizyjnej.

Wniosek o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium z podziękowaniem za owocną pracę przyjęto jednogłośnie przy wstrzymaniu się od głosowania członków Zarządu Głównego.

Ad 8. W imieniu Komisji Matki sprawę wyborów zreferował prof. dr Zbigniew OLESIAK.

U p ł y w a k a d e n c j a:

przewodniczącego — prof. dra Zbigniewa KĄCZKOWSKIEGO
członków Zarządu Głównego

- 1) prof. dra Janusza MURZEWSKIEGO (Kraków)
- 2) prof. dra Zbigniewa WESOŁOWSKIEGO
- 3) prof. dra Gustawa RAKOWSKIEGO
- 4) dra Kazimierza BORSUKA

Główniej Komisji Rewizyjnej (częściowo)

- 1) doc. dra Eugeniusza BIELEWICZA (Gdańsk)
- 2) prof. dra Jerzego Sułockiego (Łódź)
- 3) doc. dra Jacka STUPNICKIEGO
- 4) doc. dra Zenona WASZCZYŻYNA (Kraków)

T r w a k a d e n c j a

a) członków Zarządu Głównego

- 1) doc. dra Marka KWIECIŃSKIEGO
- 2) prof. dra Zbigniewa OSIŃSKIEGO
- 3) prof. dra Jana SZMELTERA

oraz

zastępców członków Zarządu Głównego

- 4) prof. dra Ottona DĄBROWSKIEGO (Wrocław)
 - 5) doc. dra Henryka MIKOŁAJCZAKA (Poznań)
- b) Główniej Komisji Rewizyjnej (częściowo):

- 1) prof. dra Stanisława KOCĄNDY
- 2) doc. dra Romana JANICZKA (Częstochowa)
- 3) doc. dra Zbigniewa BYCHAWSKIEGO (Kraków).

Komisja Matka zaproponowała następujące kandydatury:

Na przewodniczącego Zarządu Głównego prof. dra Zbigniewa KĄCZKOWSKIEGO (ponownie). Innych kandydatów nie zgłoszono. Po przeprowadzeniu tajnego głosowania prof. dr Z. KĄCZKOWSKI uzyskał 47 głosów (na 49 uprawnionych do głosowania).

Na członków Zarządu Głównego

prof. dra Zdzisława PARSZEWSKIEGO (Łódź)
prof. dra Zbigniewa WESOŁOWSKIEGO (ponownie)
prof. dra Gustawa RAKOWSKIEGO (ponownie)
doc. dra Eugeniusza BIELEWICZA (Gdańsk)

Prof. dr Zbyszko STOJEK zgłosił dodatkowo kandydaturę prof. dra Stefana PIĘCHNIKA (Kraków).

Drogą tajnego głosowania członkami Zarządu Głównego zostali wybrani:

- 1) prof. dra Zdzisław PARSZEWSKI (43 głosy)
- 2) doc. dr Eugeniusz BIELEWICZ (40 głosów)
- 3) prof. dr Gustaw RAKOWSKI (37 „)
- 4) prof. dr Zbigniew WESOŁOWSKI (37 „)

Do Główniej Komisji Rewizyjnej wybrano zgodnie z propozycjami Komisji Matki:

- 1) prof. dra Jerzego SUŁOCKIEGO (Łódź) (47 głosów)
- 2) doc. dra Jacka STUPNICKIEGO (47 „)
- 3) dra Karola GRUDZIŃSKIEGO (47 „)

Upoważnionych do głosowania Delegatów (w momencie głosowania) było 49.

Korzystając z głosu prof. dr Z. OLESIAK złożył prof. drowi Z. KĄCZKOWSKIEMU serdeczne gratulacje z powodu ponownego wyboru na Przewodniczącego Towarzystwa.

Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI podziękował za okazane mu zaufanie i ponowny wybór, obiecując dolożyć wszelkich starań, aby działalność PTMTS była owocna. Jednocześnie prof. dr KĄCZKOWSKI złożył podzięk-

kowanie za dotychczasową pracę w Zarządzie członkom, którzy przestali pełnić swe funkcje prof. drowi J. MURZEWSKIEMU i drowi K. BORSUKOWI.

Ad 9. Sprawę zmiany Statutu PTMTS zreferował przewodniczący ZG. Weszła ona pod obrady Zjazdu Delegatów, ponieważ Statut w brzmieniu uchwalonym przez poprzedni Zjazd nie został zatwierdzony. Stołeczna Rada Narodowa w ramach akcji ujednolicania statutów zaproponowała nowe brzmienie statutu.

W dyskusji poprawki do Statutu zaproponowali prof. dr J. KOŁAKOWSKI, prof. dr A. MORECKI i doc. dr. W. SZUŚCIK.

Przewodniczący Zjazdu Delegatów poddał pod głosowanie wniosek prof. dr J. KOŁAKOWSKIEGO w sprawie dwuletniej kadencji Władz PTMTS. Wniosek został uchwalony jednomyślnie. Projekt Statutu z poprawkami przyjęto również jednomyślnie. Zjazd Delegatów upoważnił Zarząd Główny do dokonania ewentualnych zmian, które mogą wynikać przy uzgadnianiu z Władzami.

Ad 10. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI zreferował plan pracy PTMTS na rok 1973, opracowany zbiorczo na podstawie planów nadesłanych przez poszczególne Oddziały.

Przewiduje się wzrost liczby członków do 638 osób, zebrań organizacyjnych 94. W ramach działalności rzeczowej planuje się zorganizowanie 70 zebrań naukowych, 4 sesji naukowych, 4 sympozjów, 6 seminariów, 2 konkursów oraz 6 pozycji wydawniczych (w tym kwartalnik „MTiS” oraz 5 wydawnictw materiałów konferencyjnych). Konkursy naukowe przeprowadzą: Oddział w Gliwicach na najlepszą pracę z dziedziny mechaniki teoretycznej i stosowanej z wyłączeniem prac czysto doświadczalnych oraz Oddział w Krakowie na najlepszą pracę z zakresu badań doświadczalnych.

Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI podał również tematykę planowanych sympozjów i konkursów naukowych.

Po przedstawieniu generalnych wytycznych działalności PTMTS na następny okres prof. KĄCZKOWSKI zacytował jeden z referatów na II-gi Kongres Nauki Polskiej, w którym podkreślona jest ważność kształcenia kadr w zakresie nauk podstawowych. Następnie stwierdził, że hasło to nie jest realizowane, gdyż w praktyce następuje wypieranie nauk podstawowych w obecnie nowelizowanych planach nauczania na uczelniach technicznych na korzyść przedmiotów zawodowych. Prof. KĄCZKOWSKI proponuje określić formy działalności PTMTS dla wzmocnienia pozycji nauk podstawowych.

W dyskusji nad wytycznymi działalności, która skoncentrowała się na temacie znaczenia nauk podstawowych w kształceniu kadr inżynierskich, wypowiedzieli się profesorowie i docenci: J. SZMELTER (dwukrotnie), Z. BRZOSKA, Z. PARSZEWSKI (dwukrotnie), K. WERNEROWSKI, J. WOJNAROWSKI, B. SKALMIERSKI i S. PIECHNIK.

Zjazd Delegatów podjął uchwałę wyrażającą zaniepokojenie z powodu stanu kształcenia i ograniczenia przedmiotów podstawowych.

Ad 11. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI powiadomił zebranych, że dnia 11 kwietnia br. odbył się ogólnopolski Zjazd Towarzystw Naukowych PAN. Po całonocnych obradach uchwalono tezy, które sprowadzają się do tego, aby uregulować stan pracy Towarzystw i wprowadzić ustawę ujednolicającą, która podniosłaby rangę Towarzystw Naukowych. Po wyczerpaniu porządku obrad doc. dr J. MIERZEJEWSKI podziękował ustępującym członkom Zarządu Głównego za pracę oraz Delegatom i wszystkim obecnym za udział w Zjeździe.

Na tym obrady zakończono.

Z. Olesiak (Warszawa)

WŁADZE PTMTS W KADENCJI 1973/74

Zarząd Główny

prof. dr Zbigniew KĄCZKOWSKI — przewodniczący, prof. dr Zbigniew OSIŃSKI i prof. dr Zdzisław PARSZEWSKI (Łódź) — wiceprzewodniczący, prof. dr Jan SZMELTER — sekretarz generalny, prof. dr Zbigniew WESOŁOWSKI — skarbnik, prof. dr Gustaw RAKOWSKI — zast. sekr. generalnego, doc. dr Marek KWIECIŃSKI — zast. skarbnika, doc. dr Eugeniusz BIELEWICZ (Gdańsk) — członek Z.G., prof. dr Otton DĄBROWSKI (Wrocław), doc. dr Henryk MIKOŁAJCZAK (Poznań) — zast. czł. Z.G.

Główna Komisja Rewizyjna

prof. dr Stanisław KOCANĀ — przewodniczący, dr Karol GRUZIŃSKI (Szczecin), doc. dr Roman JANICZEK (Częstochowa), doc. dr. Jacek STUPNICKI, prof. dr Jerzy SUŁOCKI (Łódź) — członkowie, doc. dr Zbigniew BYCHAWSKI — zast. członka.

Oddział w Bydgoszczy

doc. dr Lech M. KAMIŃSKI — przewodniczący, dr Tadeusz KABAT — wiceprzewodniczący, mgr inż. Bronisław SIOLKOWSKI — sekretarz, mgr inż. Wojciech WEINER — skarbnik.

Oddział w Częstochowie

prof. dr Jerzy KOLAKOWSKI — przewodniczący, doc. dr Roman JANICZEK — wiceprzewodniczący, doc. dr Janusz ELSNER — sekretarz, doc. dr Adolf SŁOŻALEC — skarbnik, doc. dr Waldemar BACHMACZ i dr Ryszard PARKITNY — członkowie.

Oddział w Gdańsku

prof. dr Piotr WILDE — przewodniczący, prof. dr Józef WIĘCKOWSKI — wiceprzewodniczący, dr Czesław BRANICKI — sekretarz, doc. dr Jan KRUSZEWSKI — skarbnik, dr Wojciech PIETRASZKIEWICZ — członek zarządu.

Oddział w Gliwicach

doc. dr Józef WOJNAROWSKI — przewodniczący, doc. dr Szczepan BORKOWSKI i doc. dr Stanisław GDULA — wiceprzewodniczący, doc. dr Walery SUŚCIK — sekretarz, dr hab. Andrzej TYLIKOWSKI — skarbnik, dr hab. Tadeusz BES, dr hab. Ernest CZOGALA — czł. zarządu, dr Remigiusz ĆWIK — zast. czł.

Oddział w Krakowie

doc. dr Zenon WASZCZYŹYN — przewodniczący, doc. dr Stanisław KASPRZYK — wiceprzewodniczący, doc. dr Bogdan OLSZOWSKI — sekretarz, doc. dr Wiesław KRZYŚ — skarbnik, prof. dr Gwidon SZEFER, doc. dr Zbigniew KORDECKI, doc. dr Zbigniew ENGEL, prof. dr Antoni CZUBAK — członkowie zarządu.

Oddział w Łodzi

doc. dr Marian SUCHAR — przewodniczący, doc. dr Władysław WALCZAK — wiceprzewodniczący, doc. dr Zbyszko KAZIMIERSKI — sekretarz, doc. dr Janusz LIPIŃSKI — skarbnik.

Oddział w Poznaniu

doc. dr Jarosław STEFANIAK — wiceprzewodniczący, dr Zbigniew MAGIER-ULLRICH — sekretarz, dr R. DZIĘCIELAK — skarbnik, doc. dr Henryk MIKOŁAJCZAK — członek zarządu.

Oddział w Rzeszowie

prof. dr Zbyszko STOJEK — przewodniczący, mgr inż. J. LENDZIŃSKI — sekretarz, mgr inż. Andrzej ŚWIDER — skarbnik.

Oddział w Szczecinie

doc. dr Czesław MICKIEWICZ — przewodniczący, mgr inż. Czesław KOSECKI — wiceprzewodniczący, dr Bożena TĘCZYŃSKA — sekretarz, dr Halina KARPIŃSKA — skarbnik, dr Leon WAŚKO — członek zarządu.

Oddział we Wrocławiu

prof. dr Stanisław DMITRUK — przewodniczący, doc. dr Zdzisław GABRYSZEWSKI — wiceprzewodniczący, dr Ryszard IZBICKI — sekretarz, doc. dr Eugeniusz BRZUCHOWSKI — skarbnik, doc. dr Bronisław OKOŁÓW i dr Henryk BOROCH — członkowie zarządu.

Oddział w Warszawie

prof. dr Marek DIETRICH — przewodniczący, doc. dr Bohdan KRAJEWSKI — wiceprzewodniczący, doc. dr Andrzej JAWORSKI — sekretarz, doc. dr Przemysław JASTRZĘBSKI — skarbnik, dr hab. Andrzej DRESCHER — zast. sekretarza, dr Edward RADWAŃSKI — zast. skarbnika, prof. dr Jerzy RUTKOWSKI i doc. dr Dionizy NIEPOSTYN — członkowie zarządu.

SYMPOZJA IUTAM

1. Sympozjum 4/1974 (patrz MTiS 1/1973 str. 123) pt. «Dynamics of Vehicle Roads and Railway Tracks» zostało przesunięte na rok 1975 z powodu prawie równoczesnej konferencji na ten sam temat w Virginia Polytechnic Institute.

2. Sympozjum 5/1974 «Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies» odbędzie się, z powodu rezygnacji prof. A. A. ILIUSZYNA, nie w Moskwie lecz w Gothenburgu (Szwecja), w dniach 2-7 września 1974. Przewodniczącym komitetu organizacyjnego jest prof. J. HULT.

EUROMECH 46

«Numerical and Experimental Investigations of the Stability of Boundary Layers» odbędzie się w dniach 4-8 marca 1974 w Oberwolfach (NRF). Komitetowi Organizacyjnemu przewodniczą profesorowie R. EPPLER i F. X. WORTMANN. Zgłoszenia z podaniem tytułu referatu należy złożyć najpóźniej do 1 grudnia pod adresem: Prof. Dr. R. EPPLER, Institut A. für Mechanik, Universität Stuttgart, D 7 Stuttgart 1, Keplerstr. 17, NRF.

KONFERENCJA SZKOLENIOWA nt. TERMOPLASTYCZNOŚĆ

Jabłonna 18-27 czerwiec 1973

Staraniem Biura Kształcenia i Doskonalenia Kadr Naukowych PAN odbyła się w Jabłonie w dniach 18-27 czerwca 1973 r. konferencja poświęcona teorii termoplastyczności i jej zastosowaniu.

Celem konferencji było zapoznanie słuchaczy z najnowszymi osiągnięciami naukowymi w zakresie termodynamiki procesów nieodwracalnych i termoplastyczności oraz przedstawienie tych zagadnień w szerokim aspekcie zastosowań praktycznych.

Otwierając konferencję członek korespondent PAN prof. A. SAWCZUK omówił jej cele i zadania oraz rolę i znaczenie teorii termoplastyczności. Podkreślił, że niniejsza konferencja jest kontynuacją cyklu konferencji, które poświęcone były termodynamice, lepkoplastyczności, zagadnieniom dynamiki ośrodków niesprężystych, a które były regularnie organizowane przez prof. P. PERZYŃĘ z IPPT PAN. Ambicją organizatorów było połączenie zaawansowanej teorii z praktycznymi zastosowaniami, a więc również w pewnym sensie doprowadzenie tego szczególnego działu mechaniki, jakim jest termoplastyczność, do zastosowań.

Termoplastyczność i termopękanie są już od dawna w krajach o nowoczesnej technologii dziedzinami nie tylko rozważań teoretycznych, ale wręcz działalności projektowej. Technologia reaktorowa, przemysł chemiczny nie mówiąc już o aero- i astronautyce są odbiorcami wyników mechaniki i termodynamiki. W naszym kraju przemysł chemiczny i będąca w załężku energetyka jądrowa narzucają konieczność rozwijania różnych działów termomechaniki. Termoplastyczność jest jedną z dyscyplin, której rozwój postulowany był we wnioskach drugiego Kongresu Nauki Polskiej.

Tematyka konferencji obejmowała oprócz podstaw termodynamiki procesów nieodwracalnych i ogólnego matematycznego opisu materiału fizyczne podstawy termoplastyczności i termolepkoplastyczności, zagadnienia jednoznaczności i twierdzenia ekstremalne w termoplastyczności jak również zastosowania omawianych teorii do rozwiązywania statycznych i dynamicznych zagadnień termoplastyczności i zbadania problemów przystosowania się konstrukcji do zmiennych obciążeń i zmiennej temperatury.

Wykładowcami byli znani polscy i zagraniczni specjaliści w zakresie zagadnień termodynamiki i termoplastyczności: dr hab. A. BAŁTOW (Sofia, Bułgaria), prof. D. A. GOKHFELD (Czelabińsk, ZSRR), prof. J. KESTIN (Providence, USA), prof. P. PERZYNA (IPPT PAN), dr B. RANIECKI (IPPT PAN), prof. A. SAWCZUK (IPPT PAN), prof. C. TEODOSIU (Bukareszt, Rumunia) oraz prof. H. ZIEGLER* (Zurich, Szwajcaria). Za-

*) Profesor H. ZIEGLER z powodu nagłej choroby nie mógł wziąć udziału w Konferencji, lecz jego wykłady będą wydrukowane w książce wydanej przez Ossolineum.

pewnienie ich udziału w konferencji dało możliwość szerokiej konfrontacji różnych kierunków w omawianych dziedzinach.

Prof. J. KESTIN w wykładzie swym pt. *Rola termodynamiki w termoplastyczności* podał najpierw zwięzłe przedstawienie termostatyki, kładąc szczególny nacisk na procesy równowagi w kontinuum ciała stałego, a następnie rozszerzył termoplastykę na układy ciągłe, podlegające procesom nieodwracalnym (termodynamikę). Uogólnienie to otrzymano przez przyjęcie zasady stanu lokalnego w duchu klasycznej teorii procesów nieodwracalnych de Groota-Meixnera-Prigoginae'a.

Przedstawione w wykładzie idee zostały zastosowane do procesów plastycznych w metalach dając w efekcie zarys termodynamicznej teorii lepkoplastyczności.

Wykład prof. P. PERZYNY pt. *Fizykalna teoria lepkoplastyczności* dotyczył matematycznych teorii opisu materiałów. W pierwszej jego części przedstawiono termodynamiczną teorię materiałów sprężysto-plastycznych wrażliwych na prędkość odkształcenia. Sprężenie efektów termomechanicznych w materiałach niesprężystych: plastycznych i lepkoplastycznych, ma doniosłe znaczenie w wielu problemach praktycznych współczesnej techniki, natomiast ich właściwy opis jest możliwy dzięki wykorzystaniu termodynamiki procesów nieodwracalnych.

Wykorzystując koncepcję parametrów wewnętrznych (wewnętrznych zmiennych stanu) prof. PERZYNA zbudował teorię termodynamiczną, opisał zachowanie się materiałów dysypatywnych, podlegających skończonym (dużym) deformacjom i zmianom temperatury w pełnym zakresie prędkości odkształcenia. Analiza mechanizmów odpowiedzialnych za plastyczne płynięcie materiałów była podstawą do zaproponowanych przez wykładowcę równań ewolucji dla parametrów wewnętrznych. Porównanie wyprowadzonych związków z dostępnymi wynikami badań eksperymentalnych potwierdziło słuszność przyjętych założeń.

Druga część wykładu prof. PERZYNY, oparta na wspólnej pracy z drem W. KOSIŃSKIM, poświęcona była problemowi ścisłego matematycznego sformułowania ogólnej teorii ośrodka odkształcalnego w ramach teorii mechanicznej, wolnej od potrzeby wyboru układu i przestrzeni odniesienia.

Podstawowym pojęciem obok pojęcia elementu ciała, występującym w tej teorii, jest przestrzeń metody przygotowania. Wprowadzona ona została jako zbiór dodatkowych wielkości potrzebnych do jednoznacznego związania z każdym procesem deformacji (bodźcem) procesu naprężenia (reakcji) w postaci pary zgodnej z relacją konstytutywną opisywanego ośrodka ciągłego. Przestrzeń stanów, zdefiniowana za pomocą przestrzeni konfiguracji i metody przygotowania, została zilustrowana trzema przykładami: materiału prostego z pamięcią, materiału typu różniczkowego i materiału z parametrami wewnętrznymi.

Prof. C. TEODOSIU w wykładzie pt. *Sprężysto-lepkoplastyczne zachowanie się pojedynczych kryształów* przedyskutował zjawiska plastyczności i lepkoplastyczności materiałów na podstawie defektów siatki, w szczególności dyslokacji i defektów punktowych. Po krytycznym przeglądzie aktualnych osiągnięć w dziedzinie mikrodynamiki lepkoplastycznego płynięcia wykazał, że fizyczne obserwacje w skali mikroskopowej mogą dostarczyć wielu wskazówek dla makroskopowej teorii ośrodka odkształcalnego.

Pośród głównych zagadnień szczegółowo zostały przedyskutowane następujące: termicznie aktywowany ruch dyslokacji w pojedynczych kryształach, współdziałanie potencjałów stowarzyszonych z różnymi typami lokalnych przeszkód oraz zależność między makroskopową lepkoplastyczną prędkością odkształcenia a ruchem dyslokacji.

Druga część wykładu dotyczyła makroskopowej teorii sprężysto-lepkoplastycznego odkształcenia pojedynczych kryształów. Wykazano, że dystorsja lepkoplastyczna jest całkowicie zdeterminowana przez ruch dyslokacji. Termosprężyste równania konstytutywne zostały wyprowadzone przy założeniu, że jako zmienne niezależne, oprócz zmiennych klasycznych, występuje układ wewnętrznych zmiennych stanu, mianowicie gęstość dyslokacji we wszystkich układach poślizgu i koncentracja defektów punktowych na jednostkę masy. Niesprężyste równania konstytutywne i warunki aktywacji zaproponowane zostały dla obydwu teorii plastyczności, zarówno uwzględniającej jak i nie uwzględniającej efektu prędkości odkształcenia.

Zagadnienia jednoznaczności i twierdzenia ekstremalne w termoplastyczności były treścią wykładu dra B. RANIĘCKIEGO. Nawiązując do powszechnie stosowanych stowarzyszonych nieizotermicznych praw plastycznego płynięcia Pragera zbudowano podstawy termodynamiczne teorii plastyczności. Stan termodynamiczny opisano przyjmując w charakterze niezależnych parametrów temperaturę, tensor naprężenia

i tensor odkształceń plastycznych. Związki fenomenologiczne (prawa płynięcia) otrzymane zostały przy wykorzystaniu zasady «minimalnych nieodwracalnych sił termodynamicznych» Zieglera.

Sformułowano sprzężony problem termoplastyczności oraz podano warunki wystarczające dla istnienia jednoznacznego rozwiązania. Warunki te mogą być bezpośrednio wykorzystane do badania obciążeń krytycznych, przy których następuje rozdzielenie (bifurkacja) stanu równowagi, spowodowane ciepłem dysypacji.

Zasady wariacyjne w sprzężonej termoplastyczności zostały opracowane przy pominięciu efektu piezoelektrycznego oraz rozszerzalności cieplnej. Przedyskutowano również zasady wariacyjne w niesprężonej termoplastyczności.

Na przykładzie fal płaskich pokazano wpływ sprzężeń termodynamicznych na prędkość propagacji fal (w warunkach adiabatycznych). Przedyskutowano również wpływ rozszerzalności cieplnej na profil fali sprężysto-plastycznej, generowanej przez impuls mechaniczny w obecności silnie niestacjonarnego pola temperatur.

Zastosowanie omówionych wyżej teorii termoplastyczności do rozwiązywania statycznych zagadnień termoplastyczności przedstawił prof. A. SAWCZUK w wykładzie pt. *Analiza rozwiązań zagadnień brzegowych w termoplastyczności*. Zakres tych zagadnień jest bardzo szeroki i obejmuje różne dziedziny współczesnej techniki i technologii — od metalurgii poczynając poprzez inżynierię nuklearną i aeronautykę aż do projektowania konstrukcji i kształtowania metali. W jednym przypadku jest to pole naprężeń resztkowych spowodowane hartowaniem lub przemianą fazową, kiedy indziej zaś — wzrost objętości materiału wskutek cyklicznego strumienia ciepła przy ustalonym obciążeniu mechanicznym (ratchetting). Zjawiska te mają duży wpływ na wymiarowanie części maszyn i dlatego powinny być uwzględniane przy ich projektowaniu.

Różnorodność zastosowań wymaga m.in. analizy wpływu wzmocnienia materiału, zmienności granicy plastyczności wraz z temperaturą lub przenoszenia ciepła przez powierzchnię na aktualny lub resztkowy stan naprężenia, na wyczerpanie nośności granicznej lub trwałe deformacje.

W wykładzie rozpatrzone zostały niesprężone zagadnienia termomechaniczne. W tego typu zagadnieniach temperatura wchodzi do związków «naprężenie-odkształcenie» jedynie przez dylatację termiczną oraz może wpływać na stałe materiałowe. Zatem rozwiązanie problemu analizy naprężeń cieplnych, niezależnie od własności materiału, uzyskuje się w dwóch krokach. Najpierw rozwiązuje się problem brzegowy przewodnictwa, a następnie, znając pole temperatury, formuluje i rozwiązuje się mechaniczny problem brzegowy. Jeśli stałe materiałowe zależą od temperatury, to otrzymuje się w zasadzie ośrodek niejednorodny. W wielu zagadnieniach praktycznych rozkład temperatury jest na ogół dany na stałym brzegu konstrukcji lub jej elementów. W przeciwnym razie w takich przypadkach jak solidifikacja (krzepnięcie) lub topnienie powstaje problem poruszającego się brzegu.

Główne cechy analizy naprężeń termoplastycznych wykazano szczegółowo na przykładzie sprężysto-plastycznej kuli. Rozważano zarówno ustalone jak i zmienne pole temperatury. Przyjmując sprzężone równania termoplastyczności uwzględniono efekt powierzchniowego przenoszenia ciepła.

Omówione zostało zachowanie się metali przy cyklicznych obciążeniach termicznych, a w szczególności zjawisko kumulacji odkształceń plastycznych (ratchetting). Podana została analiza tego zjawiska w przypadku powłoki walcowej.

Zagadnieniom dynamicznym w infinitezymalnej teorii termolepkoplastyczności był poświęcony wykład dra A. BAŁTOWA.

Po wstępnej analizie różnych równań konstytutywnych, opisujących sprzężone efekty termiczne i mechaniczne, przeprowadzono dyskusję takich efektów, jak wzmocnienie materiału, anizotropia odkształcenia, efekty termiczno-falowe. Główny nacisk położono na analizę matematyczną równań opisujących dynamiczne zagadnienia w termo-lepkoplastyczności. Matematycznie zagadnienia te zostały sprowadzone do układów równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu. Wyprowadzono warunki charakterystyczne, znaleziono ich elementy charakterystyczne i układy charakterystyczne. Podano również twierdzenia wariacyjne dla dynamicznej teorii termo-lepkoplastyczności.

Szczegółowo zbadane zostały zagadnienia rozprzestrzeniania się fal uderzeniowych i fal przyspieszenia, gdy pole temperatury zmienia własności lepkie i plastyczne materiału. Podano warunki ciągłości różnego rodzaju i rzędu. Wyprowadzono równania ewolucji dla skoków propagujących się na czole fali wielkości. Przeprowadzono szczegółową dyskusję przydatności różnych metod rozwiązywania dynamicznych zagadnień termoplastyczności.

Na zakończenie rozpatrzono przypadek płaskiego stanu odkształcenia. Znalezione wszystkie elementy charakterystyczne, prędkości propagacji fal oraz warunki na powierzchniach charakterystycznych i falowych. Szczegółowe rozwiązania podano dla rury grubościennej i dla półprzestrzeni.

Prof. D. GOKHFELD w wykładzie pt. *Teoria przystosowania konstrukcji sprężysto-plastycznych i jej niektóre zastosowania* przedstawił aktualny stan teorii przystosowania łącznie z twierdzeniami oraz podał możliwości wykorzystania tej teorii do adekwatnego opisu głównych zjawisk powstałych wskutek powtórnych izotermicznych i nieizotermicznych obciążeń konstrukcji sprężysto-plastycznych. Zjawiska te zilustrowane zostały na prostych układach prętowych (modelach) jednoparametrowych a następnie dwuparametrowych (w zależności od liczby parametrów określających rozkład obciążeń własnych). Określono warunki graniczne, odpowiadające przejściu od przystosowania do każdego z podstawowych stadiów plastycznego odkształcenia cyklicznego (znakoprzemienne płynięcie, postępujące zniszczenie).

Przedstawiono nową interpretację podstawowych statycznych i niestatycznych twierdzeń (MELAN, 1938; KORTER, 1956), sprowadzającą zagadnienie przystosowania konstrukcji do zagadnienia nośności granicznej fikcyjnego ciała niejednorodnego przy stałych składowych obciążeniu. Fikcyjne powierzchnie płynięcia określane są uprzednio w każdym punkcie ciała przy uwzględnieniu przyłożonych zmiennych naprężeń.

Dyskutowane były warunki pojawienia się postępującego odkształcenia, w szczególności przy cyklicznych działaniach pola temperatury. Dyskusja ta pozwala określić typy pól odpowiadających w tym przypadku własnościom stanu granicznego.

Analizowano problem zmiennych uogólnionych w zagadnieniach przystosowania oraz omawiano sposoby skonstruowania fikcyjnej powierzchni płynięcia w siłach uogólnionych.

Przedstawiono krótki przegląd ścisłych i przybliżonych metod rozwiązywania zagadnień teorii przystosowania. Jako przykłady rozpatrzono zagadnienia o przystosowaniu się tarczy wirującej, płyty kołowej i powłoki kulistej przy cyklicznych działaniach obciążenia mechanicznego i pola temperatury.

Poziom wykładów ocenić należy bardzo wysoko. O zainteresowaniu słuchaczy wykładami mogą świadczyć codzienne długie dyskusje nie tylko w czasie na nie przeznaczonym, lecz również w chwilach wolnych od zajęć.

Prowadzone też były seminaria, na których przedstawione zostały niektóre nowe koncepcje i rozwiązania z dziedziny teorii i zastosowań termoplastyczności.

Teksty wykładów, przygotowane specjalnie na konferencję szkoleniową, zostaną opublikowane przez Ossolineum i stanowią będą przy braku specjalnej monografii poświęconej termoplastyczności wartościową pomoc naukową i dydaktyczną.

Konferencja zgromadziła 37 uczestników z Polski, głównie z Instytutów PAN (24 osoby, w tym — IPPT 21, Inst. Geofizyki — 2, IBW — 1) i Politechnik (13 osób — z Politechniki Krakowskiej — 4, Warszawskiej — 3, Gdańskiej — 2, z WAT — 2 oraz z Politechniki Wrocławskiej i Poznańskiej po-1.

Józef Bejda (Warszawa)

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W II KWARTALE 1973 R.

W okresie sprawozdawczym zorganizowano 17 zebrań i sesji naukowych, na których wygłoszono 23 referaty

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczest- ników	dysku- tantów
Oddział w Bydgoszczy					
1	27.04.73	B. SIOLKOWSKI	Stateczność techniczna na przykładzie mieszadła dla cieczy	14	5
2	27.04.73	T. WYSOCKI	Zniekształcenie impulsów przy pomiarze obciążeń udarowych	14	4

Oddział w Częstochowie				
3	02.05.73	Z. WESOŁOWSKI	Stateczność elementów sprężystych poddanych dużym odkształceniom	16 3
Oddział w Gdańsku				
4	10.04.73	K. SOB CZYK	Stochastyczny problem brzegowy propagacji fal	brak danych
Oddział w Gliwicach				
5	03.05.73	J. SZARGUT	Zagadnienia termoeconomiczne ochrony środowiska	18 6
Oddział w Krakowie				
6	11.04.73	O. W. ŁUŻNIN (Moskwa)	Drgania przekryć tarczownicowych	28 5
7	03.05.73	J. HULT	Wybrane zagadnienia teorii pełzania	32 8
8	29.06.73	D. GOCHFELD (ZSSR)	Teoria plastycznego przystosowania się konstrukcji przy obciążeniach cieplnych	16 5
Oddział w Łodzi				
9	03.05.73	H. ZORSKI	Statystyczna teoria dyslokacji	17 5
10	17.05.73	A. DRESCHER T. HÜCKEL	Nieliniowy opis deformacji sprężysto-plastycznych ciał rozdrobnionych	15 4
11	14.06.73	ST. SPRYSZYŃSKI	Stateczność dynamiczna skręcanej powłoki walcowej	14 5
Oddział w Poznaniu				
12	07.05.73	Z. BYCHAWSKI	Pewne zagadnienia konstrukcji powierzchniowych	25 5
Oddział w Szczecinie				
13	25.04.73	M. KMIECIK	Wpływ odkształceń i naprężeń pospawalniczych na nośność graniczną płyt okrętowych	23 8
14	31.05.73	K. SZMIDT, W. PACZKOWSKI	Aktualne problemy mechaniki komputerowej w Polsce	20 7
15	14.06.73	B. KUŹNIEWSKI	Zagadnienia kinematyki ciała sztywnego w badaniach sztywności maszyn	22 12
Oddział w Warszawie				
(zebrania w formie sesji naukowych)				
16	02.04.73	„Metody geometryczne w analizie konstrukcji cienkościennych” S. ŁUKASIEWICZ	Metody geometryczne w analizie bardzo dużych ugięć powłok	
17	02.04.73	W. SZYSZKOWSKI	Bardzo duże ugięcia ściskanej osiowo powłoki walcowej i stożkowej	
18	02.04.73	J. ZWOLIŃSKI	Zagadnienia projektowania połączeń metodami geometrycznymi	18 5
19	21.05.73	„Problemy drganiowo-przepływowe” R. GUTOWSKI	Metody badania własności rozwiązań równań ruchu układów mechanicznych i pewne ich zastosowania	
20	21.05.73	W. ŁUCJANEK	O pewnej metodzie pomiaru pochodnych aerodynamicznych	
21	21.05.73	L. LAUDAŃSKI	Analiza obciążeń odkształcalnej konstrukcji poddanej losowym zakłóceniom	
22	21.05.73	K. ARCZEWSKI	Topologiczna analiza mechanicznych drgających układów liniowych metodą liczb charakterystycznych	17 8

Oddział we Wrocławiu

23 07.05.73 B. OKOŁÓW

Ocena efektów reologicznych metodą elementów skończonych

23

5

Seminaria i kursy

Oddział w Gdańsku przeprowadził seminarium na temat „Metody elementów skończonych”. Seminarium prowadzili — Prof. B. Kowalczyk i Doc. J. Kruszewski. Wykłady, po 2 godziny tygodniowo, trwały przez 2 semestry. W seminarium wzięło udział około 80 uczestników.

Oddział w Poznaniu przeprowadził kurs na temat „Problemy reologii nieliniowej”. Kurs trwał od 2 do 11 kwietnia. Odbłyło się 9 wykładów z udziałem 18 uczestników.

Działalność organizacyjna

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach PTMTS ilustruje następująca tabela:

Lp.	Oddział	stan na koniec I kw. 1973 r.	stan na koniec II kw. 1973 r.	przybyło lub ubyło w okresie sprawozdawczym
1	Bydgoszcz	18	18	—
2	Częstochowa	24	25	+1
3	Gdańsk	44	45	+1
4	Gliwice	63	82	+19
5	Kraków	75	65*)	-10
6	Łódź	36	36	—
7	Poznań	52	51**)	-1
8	Rzeszów	11***)	11***)	—
9	Szczecin	30	31	+1
10	Warszawa	197	201	+4
11	Wrocław	62	64	+2
	Razem	612	629	+17

*) 1 przeniesienie, 9 skreśleń na skutek zaległości w opłacaniu składek członkowskich;

***) 1 członek zmarł;

***) dane z końca roku 1972 wobec braku dalszej sprawozdawczości.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

SPIS TREŚCI TOMU XI/1973

Zeszyt 1

N. Ja. Cyganowa, O pewnych własnościach układów anholomicznych typu Czetajewa-Przeborskiego	3
О некоторых свойствах неголономных систем типа Четаева-Пшеборского	
Certain properties of non-holonomic systems of the Chetaiev-Psheborskii type	
W. Szemplińska-Stupnicka, Współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych nieliniowych układów drgających o wielu stopniach swobody	17
Нормальные координаты в анализе главных резонансов нелинейных колебательных систем со многими степенями свободы	
Normal coordinates in the analysis of principal resonances of nonlinear vibrating systems with many degrees of freedom	
J. Kubik, Podstawy teorii konstrukcji prętowych na ośrodku górniczym	35
Основы теории стержневых сооружений установленных на горных массивах	
Foundations of the theory of rod structures built in mining areas	
Cz. Woźniak, Podstawy mechaniki ciał dyskretnych	47
Основы механики дискретизированных тел	
Basic concepts of the mechanics of discretized bodies	
W. Kufel., O liniowych zagadnieniach teorii sprężystości ciał dyskretyzowanych	63
Линейные задачи теории упругости дискретизированных тел	
On the linear problems of elasticity of discretized bodies	
J. Grabacki, G. Szefer, Uogólniona funkcja Greena dla nieskończonego pasma płytowego	75
Обобщённая функция Грина для бесконечной полосы	
Generalized Green's function for an infinite plate strip	
J. Wranik, Wyznaczanie zmian stałych sprężystości materiału występujących na grubości modelu gipsowego	85
Определение изменений упругих постоянных материала по толщине гипсовой модели	
Determination of changes of elastic material constants occuring across the thickness of a plaster model	
J. Grabacki, G. Szefer, Przykłady ultradystrybucyjnych rozwiązań pasma płytowego	95
Примеры обобщённых решений для полосы	
Examples of ultradistribution solutions for plate strips	
BIULETYN INFORMACYJNY	113

Zeszyt 2

Wadim Wasilewicz Sokołowski	131
Вадим Васильевич Соколовский (К шестидесятилетию со дня рождения)	
Sixtieth Birthday of Professor Vadim V. Sokolovskii	

M. Piszczek, G. Szefer, Zginanie pręta silnie zakrzywionego z uwzględnieniem naprężeń momentowych	135
Изгиб сильно искривленного стержня с учетом моментных напряжений	
Bending of a strongly curved beam with the influence of couplestresses	
J. Dyszlewicz, Pewien sposób rozwiązania statycznych zagadnień liniowej niesymetrycznej sprężystości	143
О некотором способе решения статических задач линейной несимметричной теории упругости	
On a certain method of solution of static problems of the linear theory of non-symmetric elasticity	
B. Bieniasz, Rzeczywisty układ sił działających u podstawy pęcherzyka parowego	159
Действительная система сил, действующих на основание порового пузырька	
Actual system of forces acting at the base of a vapour bubble	
J. Boblewski, K. H. Bojda, Zastosowanie operatorów Mikusińskiego od zagadnień teorii konstrukcji nośnych	165
Применение операторов Микусинского в задачах теории несущих конструкций	
Application of the Mikusiński operators to the problems of engineering structures	
BIULETYN INFORMACYJNY	177

Zeszyt 3

J. J. Telega, Metoda elementów skończonych w mechanice gruntów i mechanice górotworu	195
Метод конечных элементов в механике грунтов и в механике горных массов	
Finite element method in soil and rock mechanics	
W. Walczak, Wpływ wstępnych ugięć na pracę płyty prostokątnej, zginanej w swej płaszczyźnie	211
Влияние начального прогиба на работу прямоугольной пластинки изгибаемой в своей плоскости	
Influence of initial deflections on the work of a rectangular plate subject to bending in its plane	
J. Maryniak, W. Mierzejewski, J. Krutul, Drgania łopat śmigła	229
Колесания лопастей винта	
Propeller blade vibration problems	
N. Ja. Cyganowa, Związki pomiędzy różniczkowymi i całkowymi zasadami mechaniki	245
Связь между дифференциальными и интегральными принципами механики	
Relations between differential and integral principles of mechanics	
A. Gawęcki, Ugięcie osiowo-symetryczne płyty Reissnera o zmiennej grubości	267
Осесимметрический изгиб пластинки типа Рейсснера переменной толщины	
The axially symmetrical bending of Reissner's plate of variable thickness	
S. Zahorski, Dynamiczne i stacjonarne własności cieczy lapkosprężystych w złożonych przepływach ścinających	277
Динамические и стационарные свойства вязко-упругих жидкостей в сложных течениях со сдвигом	
Dynamic and steady-state properties of viscoelastic fluids in superposed shearing flows	
J. Miastkowski, Doświadczalna analiza efektu pamięci materiału poddanego plastycznemu odkształceniu	297
Экспериментальный анализ эффекта наследственности пластически деформированного материала	
Experimental analysis of the memory effect of a plastically prestrained material	
R. Doroszkiewicz, J. Lietz, B. Michalski, Zastosowanie elastooptyki do kształtowania głowicy zapory filarowej	315

Zeszyt 4

N. Ja. Cyganowa, O uderzeniu w układach typu Czetajewa-Przeborskiego	343
Об ударе в системах типа Четаева-Пшеборского	
On the impact in the Chetaiev-Psheborskii type systems	
J. F. Besseling, Związki konstytutywne pełzania i plastyczności	351
Определение уравнения для ползучести и пластичности	
Constitutive equations for creep and plasticity	
J. Dyszlewicz, S. Matysiak, Osobliwość naprężeń siłowych i momentowych w ciele mikro- polarnym wywołana obciążeniami skupionymi (I)	363
Сингулярности силовых и моментных напряжений в микрополярной среде под воздействием сосредоточенных нагрузок (I)	
Force-stress and couple-stress singularities produced by concentrated loads in a micropolar medium (II)	
J. Dyszlewicz, S. Matysiak, Osobliwość naprężeń w liniowym ośrodku mikropolarnym spo- wodowana nieciągłymi obciążeniami (II)	393
Сингулярности напряжений в линейной микрополярной среде, вызванные раз- рывами нагрузок (II)	
Stress singularity in a linear micropolar medium produced by discontinuous loads (II)	
K. Dems, Wielostopniowa synteza macierzy sztywności	407
Многостадийный синтез матриц жесткости	
A multi-stage synthesis on the stiffness matrices	
S. Kosowski, Stacjonarne oddziaływanie układu dwu nieskończenie małych dowolnie zo- rientowanych elementów poruszającego się w ośrodku swobodno molekularnym z dowolną prędkością	417
Стационарное взаимодействие системы двух бесконечно малых произвольно ориентированных элементов твердого тела, движущегося в свободномолеку- лярной среде с произвольной скоростью	
Stationary interactions of a system consisting of two infinitesimal, arbitrarily oriented moving at an arbitrary velocity in a free-molecular medium	
E. Włodarczyk, Przybliżona metoda rozwiązywania płaskich niesamopodobnych fal uderze- niowych w doskonałym przewodniku w polu magnetycznym	443
Приближенный метод решения плоских неавтоподобных ударных волн в идеальном проводнике в магнитном поле	
An approximate method of solving plane, non-selfexcited impact waves in a perfect conductor subject to magnetic field	
Z. Kordas, Kształtowanie rurociągu o zmiennej średnicy wykazującego pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia	455
Формирование трубопровода переменного диаметра, полностью переходящего в стадии разрушения в пластическое состояние	
Design of a pipe line of a variable diametr, exhibiting full plastic yielding at collapse	
N. Ja. Cyganowa, O nieholonomicznych systemach 1-go i 2-go stopnia z tarciem	467
О неголономных системах первого и второго порядков с трением	
On non-holonomic systems of 1st and 2nd order with friction	
H. Mikołajczak, B. Wosiewicz, Macierz sztywności elementu zginanej płyty trójwarstwowej	473
Матрица жесткостей элемента трехслойной пластины, подверженной изгибу	
Stiffness matrix of an element of a sandwich plate in bending	
BIULETYN INFORMACYJNY	487

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- E. WALICKI, Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami
Течение вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения
Flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution
- B. GAJL, Analiza nieliniowych samowzbudnych cykli granicznych drgań powłoki o małym wzniosie w nieliniowym opływie naddźwiękowym
Анализ нелинейных автоколебательных предельных циклов пологой оболочки в нелинейном сверхзвуковом потоке
Analysis of nonlinear selfexcited limit cycles of vibrations of shallow shells in a non-linear supersonic flow
- A. BAR, J. NIZIOŁ, Wyznaczenie sztywności na zginanie przewodu AFL-8-525
Определение жёсткости изгиба кабеля АФЛ-8-525
Determination of the bending rigidity of a AFL-8-525 conductor
- A. ZIĄBICKI, Molekularne modele skondensowanych układów polimerowych. Krytyka rozszerzania teorii rozcieńczonych roztworów na układy sieciowe
Молекулярные модели конденсированных систем полимеров. Критика распространения теории слабых растворов на сеточные системы
Molecular models of condensed systems. Criticism of the extensions of dilute solution theory onto network systems
- Z. ONISZCZUK, Drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych elementem sprężystym
Поперечные колебания системы двух балок, связанных упругим элементом
Transversal vibration of the system of two beams connected by means of an elastic element
- J. GRABACKI, G. SZEFER, Przykłady ultradystrybucyjnych rozwiązań pasma płytowego
Примеры обобщённых решений для полосы
Examples of ultradistribution solutions for plate strips
- W. BABUŁ, H. DERENTOWICZ, M. FRUCZEK, E. WŁODARCZYK, Z. ZIÓLKOWSKI, O metodach pomiarów parametrów ruchu zewnętrznej ścianki rury rozprężonej wybuchowo
О методах измерений параметров движения внешней стенки трубы, расширяемой взрывом заряда
On measurement methods of kinematic parameters of external wall of a tube subject to explosive expansion

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
