

211720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 11 • ZESZYT 3



WARSZAWA 1973

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

## SPIS TREŚCI

<p>J. J. TELEGA, Metoda elementów skończonych w mechanice gruntów i mechanice górotworu  Метод конечных элементов в механике грунтов и в механике горных массивов  Finite element method in soil and rock mechanics</p>	195
<p>W. WALCZAK, Wpływ wstępnych ugięć na pracę płyty prostokątnej, zginanej w swej płaszczyźnie  Влияние начального прогиба на работу прямоугольной пластинки изгибаемой в своей плоскости  Influence of initial deflections on the work of a rectangular plate subject to bending in its plane</p>	211
<p>J. MARYNIAK, W. MIERZEJEWSKI, J. KRUTUL, Drgania łopatek śmigła  Колебания лопастей винта  Propeller blade vibration problems</p>	229
<p>N. Ja. CYGANOWA, Związki pomiędzy różniczkowymi i całkowymi zasadami mechaniki  Связь между дифференциальными и интегральными принципами механики  Relations between differential and integral principles of mechanics</p>	245
<p>A. GAWEŃSKI, Ugięcie osiowo-symetryczne płyty Reissnera o zmiennej grubości  Осесимметрический изгиб пластинки типа Рейсснера переменной толщины  The axially symmetrical bending of Reissner's plate of variable thickness</p>	267
<p>S. ZANORSKI, Dynamiczne i stacjonarne własności cieczy lepkosprężystych w złożonych przepływach ścinających  Динамические и стационарные свойства вязко-упругих жидкостей в сложных течениях со сдвигом  Dynamic and steady-state properties of viscoelastic fluids in superposed shearing flows</p>	277
<p>J. MIASTKOWSKI, Doświadczalna analiza efektu pamięci materiału poddanego plastycznemu odkształceniu  Экспериментальный анализ эффекта наследственности пластически деформированного материала  Experimental analysis of the memory effect of a plastically prestrained material</p>	297
<p>R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHAŁSKI, Zastosowanie elastooptyki do kształtowania głowicy zapory filarowej  Применение фотоупругости к оптимальному формированию массивного консольного оголовка плотины  Application of photoelasticity to dam buttress optimum design</p>	315
<p>BIULETYN INFORMACYJNY</p>	329

47-20  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 1 • Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 7 3

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

•

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦИОННЫЙ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,  
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,  
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,  
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,  
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## РЕДАКЦИЯ

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 700 (586 + 114) egz. Ark. wydawn. 11,5. Ark. drukarskich 9,25. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 28.IV.1973 r. Druk ukończono we wrześniu 1973 r. Zam. 666/73. R-30. Cena zł 30.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

## METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W MECHANICE GRUNTÓW I MECHANICE GÓROTWORU

JÓZEF JOACHIM TELEGA (GLIWICE)

Metoda elementów skończonych stanowi jeden z najintensywniej rozwijanych działów przybliżonego rozwiązywania zagadnień mechaniki. Znalazła więc również zastosowanie w mechanice gruntów i mechanice górotworu. Dlatego też wydaje się celowe przedstawienie dotychczasowych wyników zastosowania tej metody do rozwiązywania problemów stawianych przez te dyscypliny.

W pracy RADHAKRISHNANA i REESE'A [120] przedstawiono rozwój interesującej nas problematyki zasadniczo do roku 1970, przy czym autorzy ograniczyli się tylko do literatury anglosaskiej i japońskiej. Nasza praca stanowi więc kontynuację i uzupełnienie pracy [120].

Pracę podzielono na cztery punkty. W punkcie pierwszym przedstawiamy ogólne wyniki zastosowania metody elementów skończonych do rozwiązywania zagadnień mechaniki ośrodków ciągłych. Wydaje się, iż zaprezentowane w tym punkcie prace mogłyby znaleźć zastosowanie w mechanice gruntów i mechanice górotworu.

Zastosowanie metody elementów skończonych do mechaniki gruntów rozpatrujemy w punkcie drugim.

Punkt trzeci poświęcony jest mechanice górotworu, natomiast w punkcie ostatnim podajemy kilka uwag końcowych.

### 1. Zagadnienia ogólne

Metoda elementów skończonych doczekała się już interesujących opracowań monograficznych [108, 149]. Pierwsza z nich ma charakter raczej matematyczny, natomiast druga — inżynierski (por. [8, 80, 136]). W pracach przeglądowych [148, 153] przedstawiono historię metody elementów skończonych, jej istotę oraz możliwości zastosowania do zagadnień mechaniki ciała odkształcalnego (por. [83, 163]). Popularyzatorskie, a przy tym interesujące ujęcie metody elementów skończonych zaproponował KISIEL [84a]. Omówił on również wady i zalety tej metody. Jako wady wymienia następujące fakty: 1) jest to metoda numeryczna, a nie analityczna, 2) z podziałem na elementy skończone nie można iść zbyt daleko, 3) im bardziej złożony problem, tym pamięć maszyny musi być większa.

Proste wprowadzenie do metody elementów skończonych znaleźć również można w pracach PAULSENA [114, 115, 116].

W pracach [6, 7] rozważono teorię metody elementów skończonych i zagadnienie zbieżności, przy czym autor wychodzi z twierdzenia o minimum energii potencjalnej układu (metoda przemieszczeń).

WUNDERLICH [141] jako punkt wyjścia przyjmuje zasadę wariacyjną Reissnera (metoda mieszana). Wówczas naprężenia i przemieszczenia są zmiennymi niezależnymi danego zadania, tzn. traktujemy te wielkości  $r$  ó w n o c z e ś n i e jako poszukiwane niewiadome (w metodzie przemieszczeń niewiadomymi są tylko przemieszczenia).

Teorię metody elementów skończonych rozważono także w pracy [1], przy czym autor wychodzi z ogólnych zasad mechaniki ciała odkształcalnego.

Zwróćmy uwagę na fakt, iż jeśli jako punkt wyjścia przyjmiemy twierdzenie o minimum energii dopełniającej, wówczas niewiadomymi zadania są naprężenia (metoda sił).

HODGE [70] eksplikuje metodę elementów skończonych korzystając z zasady prac przygotowanych. Takie podejście jest ogólniejsze od sposobów poprzednich, tzn. metody przemieszczeń, sił, bądź mieszanej, gdyż nie zależy od fizycznych własności materiału.

W pracy [122b] wykazano, że metodę elementów skończonych można traktować jako przypadek szczególny tzw. metody reziduwów wagowych, z którym to problemem mamy do czynienia przy przybliżonym rozwiązywaniu zagadnień brzegowych.

Podobieństwa i różnice między metodą elementów skończonych a metodą różnic skończonych omówiono w artykułach [40, 41, 43, 135, 148].

Związki pomiędzy metodą Bubnowa-Galerkina a metodą elementów skończonych rozważono w pracach [74, 162].

Tensorową interpretację przemieszczeniowej metody elementów skończonych przedstawiono w [82]. MORIN [104] wykazał, że wykorzystanie zapisu tensorowego pozwala zastosować bardzo ekonomiczną metodę iteracyjną dla rozwiązywania zadań nieliniowych.

Ścisłe matematyczne podejście do metody elementów skończonych zastosowano w artykułach [13, 13a, 32, 33, 58, 64, 95, 103, 147, 151, 152]. Takie podejście wymaga użycia aparatu analizy funkcjonalnej (np. przestrzeni Sobolewa).

Bardziej praktyczne rozważania przeprowadzono w [91], gdzie zastosowano metodę Bubnowa-Galerkina (szczególny przypadek metody reziduwów wagowych), w powiązaniu z metodą elementów skończonych do układu liniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych (por. [39]). Przypadkiem szczególnym tych równań są równania pola opisujące przepływ gazów lub cieczy (por. [9, 46, 73, 90, 123, 130, 134]).

Zagadnienia związane z doбором elementów skończonych i funkcji aproksymujących przedstawiono w pracach [12, 22, 25, 47, 51, 54, 85, 86, 109, 146, 158, 165].

Wzory na obliczanie sił węzłowych podano w [107, 113].

Formułując dane zadanie w terminach metody elementów skończonych należy uwzględnić sztywny ruch elementu. Problem ten rozważono w pracach [62, 96, 149].

Problematykę związaną z rozwiązywaniem na maszynach matematycznych równań, które otrzymuje się przy stosowaniu metody elementów skończonych omówiono w [10, 27, 28, 42, 59, 60, 65, 77, 89, 119, 122, 126].

Okazuje się, iż przemieszczeniowej metodzie elementów skończonych odpowiada analogon elektryczny wynikający z uogólnionego prawa Ohma [88]. Pozwala to na przejście od rozważań mechanicznych do rozważań elektrycznych (por. [3]).

Przykłady zastosowania metody elementów skończonych do ośrodków opisywanych przez bardziej skomplikowane równania konstytutywne (np. materiałów nieliniowo-lepkosprężystych) podano w pracach [11, 19, 108, 110, 111, 121, 127, 128, 132, 166].

W pracach [13b, 112] przedstawiono uogólnienie metody elementów skończonych na sprężyste ośrodki mikropolarne.

HART i COLLINS [68] rozważyli układ poddany obciążeniom losowym. Po dyskretyzacji zagadnienia macierz otrzymanego układu równań oraz wyrazy wolne autorzy rozpatrują jako funkcje pewnych zmiennych losowych, które w ogólności są skorelowane.

Na tym kończymy przegląd ogólnej problematyki związanej z metodą elementów skończonych<sup>1)</sup>. Zdajemy sobie sprawę z faktu, iż przegląd ten nie jest wyczerpujący. Ale jest on w zupełności wystarczający dla naszych celów.

## 2. Mechanika gruntów

2.1. Ogólne problemy związane z zastosowaniem metody elementów skończonych w mechanice gruntów przedstawiono w pracach [53, 57, 84, 94, 99, 133]. EISENSTEIN [53] twierdzi, iż główną przeszkodą w zastosowaniu tej metody jest postać równań konstytutywnych. Mianowicie związki między naprężeniami i odkształceniami w gruntach zależą od dużej liczby czynników, a ponadto pierwotny stan naprężenia w gruntach jest przede wszystkim wynikiem procesów geologicznych. Sądzimy, że trudność pierwsza objawia się w tym, iż do rozwiązywania konkretnych problemów potrzebna jest większa pamięć maszyny matematycznej. Częściowo można tego uniknąć stosując większe elementy skończone, ale za to bardziej dokładną aproksymację, np. za pomocą wielomianów Hermite'a. Ponadto nie należy zapominać o tym, iż do użytku oddawane będą maszyny o coraz większych możliwościach. Przeglądając prace amerykańskie związane z zastosowaniem programowania matematycznego do zagadnień optymalizacji konstrukcji (por. [128]) wysunęliśmy wniosek, iż pod koniec lat siedemdziesiątych oddane zostaną do użytku maszyny matematyczne, które pozwolą rozwiązywać — oczywiście numerycznie — nawet bardzo skomplikowane zadania optymalizacyjne. Wydaje się, iż podobne stwierdzenie można odnieść do zagadnień mechaniki gruntów i górotworu.

2.2. Przedstawimy obecnie zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień równowagi podłoża.

MILOVIĆ [100] (por. także [84, 97, 98]) przedstawił numeryczne rozwiązanie zadania o równowadze statycznej, sprężystej, jednorodnej (izotropowej lub anizotropowej) warstwy o stałej grubości  $H$ . Warstwa ta, w układzie współrzędnych walcowych, zajmuje obszar:  $0 \leq z \leq H$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ . Poddana ona jest obciążeniu równomiernie rozłożonemu, określonemu w obszarze  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq D/2$ , przyłożonemu do górnej płaszczyzny warstwy. Płaszczyzna dolna jest sztywnie utwierdzona. Zbudowano macierz sztywności oraz program obliczeń, który zrealizowano na maszynie «IBM 360-40». Wyniki obliczeń, dla różnych wartości parametrów, przedstawiono w postaci wykresów i tablic. W szczegól-

<sup>1)</sup> Ścisłejsze byłoby określenie «metody elementów skończonych», gdyż istnieje metoda przemieszczeń, mieszana, itd.

ności podano zależność naprężeń: promieniowego  $\sigma_r$  i normalnego  $\sigma_z$  wzdłuż osi symetrii, od różnych wartości parametru  $H/D$ . Parametr ten przyjmował wartości: 1,00, 2,00, 3,00,  $\infty$ . Obliczenia przeprowadzono dla dwu wartości współczynnika Poissona  $\mu$ : 0,23, 0,30. Parametr  $n = E_v/E_h$ , charakteryzujący anizotropię materiału, przyjmował wartości: 0,25, 0,50, 1,00, 2,00; gdzie  $E_v$ ,  $E_h$  oznaczają odpowiednio moduł sprężystości w kierunku pionowym i poziomym.

Podano wykres przemieszczeń pionowych  $w(0,0)$  [punkt (0,0) oznacza początek układu współrzędnych] w zależności od parametru  $H/D$ , dla  $\mu = 0,15, 0,25, 0,30, 0,40, 0,45$ . Obliczenia wykazały, że anizotropia wpływa na znaczny wzrost naprężeń  $\sigma_r$  w utwierdzonej płaszczyźnie  $z = H$ .

W pracy [63] rozwiązano zadanie o płaskim stanie odkształcenia w sprężystej warstwie, spoczywającej na nieodkształcalnym podłożu. Przemieszczenia w płaszczyźnie kontaktu są równe zeru. W pierwszej części pracy, przy pomocy szeregów Fouriera, rozwiązano zadanie o przemieszczeniach. Natomiast w drugiej części pracy, wykorzystując metodę elementów skończonych, wyznaczono naprężenia w warstwie. Wyniki obliczeń, podane w postaci tablic i wykresów, przedstawiają zależność poszukiwanych wielkości od współczynnika Poissona, grubości warstwy i wymiarów obszaru, na który działa obciążenie.

W pracy [102] rozważono następujące zadanie: nieodkształcalne pasmo poddane jest działaniu siły nachylonej pod pewnym kątem, pasmo to spoczywa na sprężystej warstwie, która z kolei leży na nieodkształcalnym podłożu (czyli ośrodek trójwarstwowy). Sprężystą warstwę zamieniono przez prostokątne i trójkątne elementy skończone. Zbudowano macierz sztywności. Otrzymano przybliżone wzory na określenie naprężeń kontaktowych i przemieszczeń pasma w zależności od grubości warstwy sprężystej i kąta nachylenia siły działającej na pasmo.

Zagadnienie rozkładu naprężeń i odkształceń w gruncie (będącym półprzestrzenią) poddanym działaniu nieruchomego lub ruchomego obciążenia w postaci kołowego stempla rozpatrzono w pracy [117]. Stempel może być sztywny lub odkształcalny. Rozważono zarówno liniowo-sprężysty, jak i nieliniowo-sprężysty materiał półprzestrzeni. W tym drugim przypadku zależność między naprężeniami i odkształceniami przyjęto na podstawie wyników badań doświadczalnych. Otrzymano pewną rozbieżność wyników numerycznych w porównaniu z laboratoryjnymi rezultatami pomiaru naprężeń. Różnice te, zdaniem autorów, spowodowane są błędami, jakimi obarczone są doświadczenia. Stwierdzono ponadto, iż korzystając z metody elementów skończonych, można stosunkowo łatwo uwzględnić nieliniowość zależności naprężenie-odkształcenie, jak i złożone warunki brzegowe.

DESAI [44] również rozważył nieliniową zależność pomiędzy naprężeniami a odkształceniami. Konstruuje on rozwiązanie przybliżone stosując metodę elementów skończonych w powiązaniu z funkcjami typu *spline* (por. [93a, 153a, 159]).

Obliczenia naprężeń w lessowym gruncie, przy zastosowaniu metody będącej kombinacją metody różnic skończonych i elementów skończonych, dokonano w [164].

THOMAS i ARMAN [129] zbadali stan naprężenia i odkształcenia w podłożu torfowym. Dane doświadczalne porównano z wynikami obliczeń otrzymanych przy zastosowaniu metody elementów skończonych i uwzględnieniu geometrycznej nieliniowości. Obliczenia numeryczne przeprowadzono metodą przyrostów przy linearyzacji zadania, tzn. na każdym



etapie zwiększa się obciążenie o pewną możliwie małą wartość. Istnieje różnica pomiędzy rozwiązaniem tradycyjnym, otrzymanym na bazie wzoru Boussinesqa, a rozwiązaniem podanym w pracy.

W pracy [72] HÖEG rozważył zachowanie się sprężysto-plastycznego ośrodka gliniastego (por. [37]). Stosuje on równania klasycznej teorii plastycznego płynięcia przy uwzględnieniu «rozmiękczenia» (*softening*). Wykorzystując metodę elementów skończonych autor określił krzywą przedstawiającą zależność między naprężeniami a odkształceniami oraz wyznaczył nośność graniczną kołowego podłoża. W dyskusji [87a] oponenti krytykują przyjęty model. Twierdzą oni, iż model powinien uwzględniać zmianę objętości w czasie plastycznego płynięcia materiału, czego jednakże klasyczne teorie plastyczności nie opisują.

Zagadnienia związane z oddziaływaniem podłoże–układ (np. budynek) przedstawiono w pracach [4, 5, 23, 34, 42a, 67, 81, 101, 118, 122a, 160].

2.3. Możliwości zastosowania metody elementów skończonych do analizy nawierzchni dróg rozpatrzono w pracach [2, 14, 131, 137, 139].

AGARWAL i HUDSON [2] podali wyniki doświadczeń laboratoryjnych przeprowadzonych na płytach aluminiowych spoczywających na specjalnie przygotowanym gruncie gliniastym, zawartym w skrzynce, celem wywołania przestrzennego stanu naprężenia. Przedstawiono związek między osiadaniem podłoża a naprężeniami w płycie. Wyniki badań porównano z rezultatami obliczeń płyt (metodą elementów skończonych) przy założeniu hipotezy Winklera o podłożu.

W pracy [131] rozpatrzono wpływ zmian wilgotności oraz temperatury gruntu i warstw nawierzchni drogowej na tworzenie się podłużnych szczelin w nawierzchni. Podano wartości naprężeń rozciągających w nawierzchni asfaltobetonowej, spowodowanych tymi zmianami. Wartości te obliczono na maszynie matematycznej, po uprzednim zastosowaniu metody elementów skończonych.

WANG, SARGIOUS, CHEUNG [139] określili wielkość normalnych naprężeń kontaktowych pomiędzy prostokątną płytą a jednorodną półprzestrzenią. Ponadto określono przemieszczenia pionowe płyty wywołane działaniem obciążenia równomiernie rozłożonego na kole.

W pracy [137] podano porównanie rezultatów badań doświadczalnych z wynikami obliczeń. Mianowicie przeprowadzono badania nawierzchni drogowej składającej się z warstwy gruntu piaszczysto-gliniastego wzmocnionej 3 lub 6-procentową zawartością cementu, poddanej działaniu obciążeń powtarzalnych. Stwierdzono, że zmierzone naprężenia i przemieszczenia zagadzają się z wynikami obliczeń otrzymanych na podstawie rozwiązań teorii sprężystości dla warstwowej półprzestrzeni oraz z rezultatami obliczeń otrzymanych przy zastosowaniu metody elementów skończonych.

Teoretyczne, oparte na metodzie elementów skończonych, jak i doświadczalne badania nawierzchni poddanej obciążeniu impulsowemu przeprowadził BARKSDALE [14].

2.4. Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania zapór przedstawiono w pracach [29, 53, 133a, 154, 155, 161, 167, 168], natomiast tuneli — [38]. Podkreślono konieczność uwzględniania odkształcalności podłoża [133a, 167], jak i efektów reologicznych [161].

2.5. W pracach [30, 43a, 55, 61, 76, 123, 142, 143, 144] rozpatrzono zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień konsolidacji, czyli przyływu płynu przez ośrodki porowate. Interesujące wydają się ujęcia wariacyjne, które pozwalają na stosunkowo łatwe sformułowanie problemu konsolidacji w terminach metody elementów skończonych. W cyklu artykułów [142, 143, 144] sformułowane zostały zasady wariacyjne — dla trójwymiarowej konsolidacji — przy następujących założeniach: 1) grunt (szkielet) jest niejednorodny, anizotropowy i zachowuje się sprężyste, 2) pory wypełnione są nieściśliwą cieczą (wodą), 3) deformacja szkieletu nie zależy od ciśnienia wody, lecz wyłącznie od naprężeń efektywnych, 4) przepływ wody odbywa się zgodnie z prawem Darcy'ego. Podano szczegółowo sformułowanie w terminach metody elementów skończonych (czyli rozwiązanie przybliżone). Rozważania ogólne zilustrowano na kilku przykładach (konsolidacja jednowymiarowa, osiowo-symetryczna).

Korzystając z dynamicznej teorii konsolidacji Biota, w pracy [61] przedstawiono wariacyjne sformułowanie problemu. Następnie dokonano dyskretyzacji zagadnienia stosując metodę elementów skończonych. Podano przykłady obliczeń numerycznych dla półprzestrzeni.

### 3. Mechanika górotworu

3.1. Ogólną problematykę związaną z zastosowaniem metody elementów skończonych do mechaniki górotworu przedstawiono w pracach [31, 79, 79a, 79b, 94a, 125, 125a, 133, 150].

MARTINETTI i RIBACCHI [94a] przedstawili zagadnienia, które rozważano na II Kongresie Międzynarodowego Towarzystwa Mechaniki Górotworu. Kongres ten odbył się w dniach 21—26 września 1970 roku w Belgradzie. Otóż na kongresie tym omówiono również metody obliczeń w mechanice górotworu. Podkreślono, iż należy więcej uwagi poświęcić metodzie elementów skończonych.

STEPHANSSON [125a] omawia treść ośmiu prac doktorskich zrealizowanych na Uniwersytecie Uppsala w Szwecji. W jednej z nich przedstawiono możliwości zastosowania metody elementów skończonych do analizy procesów tektonicznych. Inna praca omawia zastosowanie tej metody do zagadnień stabilności wyrobisk.

W pracy [150] przedstawiono model ośrodka blokowo-warstwowego, a więc takiego z jakim mamy do czynienia w górotworze szczelinowatym. Rozważono możliwości stosowania metody elementów skończonych.

W monografii JAEGERA i COOKA [79a], poświęconej podstawom mechaniki górotworu, rozpatrzono również metodę elementów skończonych (rozdz. 10). Podkreślono zalety tej metody wyrażające się w: 1) możliwości rozpatrywania układów o nieregularnych brzegach, 2) tym, że siły masowe i powierzchniowe mogą być zmienne, 3) fakcie, że materiał może posiadać własności reologiczne lub plastyczne, 4) możliwości uwzględnienia tarcia między blokami skalnymi (na powierzchniach uskoku).

W pracy [31] (por. [79b]) podano sformułowanie macierzy sztywności dla ośrodka liniowo-sprężystego. Podano ogólny schemat programu rozwiązującego podstawowy układ równań liniowych jaki otrzymuje się w tym przypadku.

W pracy [79b] autorzy niesłusznie twierdzą, iż metoda elementów skończonych jest szczególnym przypadkiem metody różnic skończonych. Jest akurat na odwrót: metoda różnic skończonych jest szczególnym przypadkiem metody elementów skończonych.

3.2. Rozpatrzmy obecnie prace poświęcone zagadnieniom określania naprężeń i odkształceń wokół wyrobisk górniczych, otworów strzelniczych i tuneli.

BARLA [15] rozwiązał statyczne zadanie o koncentracji naprężeń wokół pojedynczego wyrobiska w masywie gruntu. Wyrobisko znajduje się na skończonej odległości od powierzchni swobodnej. Przyjęto model ciała liniowo-sprężystego, izotropowego oraz płaski stan odkształcenia. Przedstawiono rozwiązania numeryczne dla wyrobisk o kształcie: okręgu, elipsy, kwadratu, prostokąta i prostokąta o jednym boku w postaci łuku okręgu. Tenże autor [16] (por. [75, 79]) przedstawił rozwiązania numeryczne dla koncentracji naprężeń wokół wyrobiska znajdującego się w nieograniczonym sprężystym ośrodku warstwowym.

DUNS i BUTTERFIELD [49] (por. [48, 50]), stosując metodę elementów skończonych, przedstawili rozwiązanie zadania o oddziaływaniu fal harmonicznym, rozchodzących się w gruncie, z nieskończonej długą powłoką walcową o skończonym promieniu. Powłoka ta znajduje się w gruncie na skończonej głębokości. Przyjęto, że otaczający powłokę grunt jest ośrodkiem liniowo-sprężystym. Stosując metodę elementów skończonych podano przejście od równań różniczkowych do równań algebraicznych. Podano przykład liczbowy.

W pracy [21] przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania rozkładu naprężeń w ośrodku sprężystym osłabionym kilkoma równoległymi wyrobiskami.

WINKEL, GERSTLE, KO [140] rozpatrzyli zagadnienie obliczania naprężeń i odkształceń wokół wyrobisk w ośrodkach modelujących sole. Przyjęto, iż ośrodek taki jest sprężysto-lepkoplastyczny. Przy zastosowaniu metody elementów skończonych podano algorytm rozwiązywania zadań brzegowych dla płaskiego stanu odkształcenia.

Analizę podziemnych wyrobisk, przy zastosowaniu metody elementów skończonych i kryterium równowagi granicznej Coulomba przedstawiono w [138] (por. [57]).

HEUZÉ, GOODMAN, BORNSTEIN [69] (por. [35]) analizują możliwości uwzględnienia szczelinowatości skał przy określaniu naprężeń wokół otworów wiertniczych. Rozważono dwie metody: 1) «zaburzenia szczeliny» (*joint perturbation*) i 2) «zerowego rozciągania» (*no-tension*). Metoda «zerowego rozciągania» uwzględnia fakt, iż praktycznie rzecz biorąc, wytrzymałość skał szczelinowatych na rozciąganie jest zerowa. Podano istotę tych dwu metod oraz wyniki obliczeń numerycznych (por. [78a]). Obydwie te metody dają wyniki podobne, natomiast istnieje znaczna rozbieżność w porównaniu z wynikami otrzymanymi przy założeniu, że ośrodek jest liniowo-sprężysty.

W pracy [18] przedstawiono wyniki obliczeń naprężeń i odkształceń wokół tunelu kołowego o średnicy 8 m przeprowadzonego na głębokości 500 m (por. [87]). Przyjęto płaski stan odkształcenia. Rozważania przeprowadzono dla dwu przypadków.

W przypadku pierwszym traktuje się ośrodek jako kontinuum sprężyste, natomiast w drugim jako szczelinowaty. W tym drugim przypadku autorzy mówią o «pseudoplastycznym dyskontinuum».

Dla ośrodka szczelinowatego przyjęto, iż szczeliny tworzą jedną rodzinę, określoną przez równoległe płaszczyzny. Podano wyniki obliczeń dla następujących wartości kąta nachylenia szczelin do poziomu:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ . Wyniki w obydwu przypadkach, tzn. dla kontinuum w porównaniu z «diskontinuum», znacznie się różnią. Omówiono także problem stabilności wyrobisk (por. [124, 145]).

3.3. Zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania filarów przedstawiono w pracach [21a, 52].

EDWARDS [52] badał stan naprężenia i odkształcenia filarów w warunkach laboratoryjnych jak i rzeczywistych. Wyniki numeryczne otrzymano stosując metodę elementów skończonych. Badania laboratoryjne przeprowadzono metodą polaryzacyjno-optyczną. Jeśli eksploatacja prowadzona jest w określonych warunkach to wyniki zarówno numeryczne jak i laboratoryjne wykazują obecność znacznej koncentracji naprężeń w filarach. Badano także wpływ podsadzki oraz sposobów wybierania filarów na panujący w nich stan naprężenia.

Przeprowadzono pomiary naprężeń i odkształceń w warunkach naturalnych. Czas trwania pomiarów wynosił półtora roku. Stwierdzono rozbieżność pomiędzy wynikami laboratoryjnymi a wynikami otrzymanymi w warunkach naturalnych.

3.4. W pracach [24, 26, 45, 92, 106] przedstawiono zastosowanie metody elementów skończonych do analizy próbek cylindrycznych. I tak celem pracy [106] było otrzymanie informacji odnośnie wpływu tarcia na końcach próbki poddanej ścisłaniu oraz wpływu współczynnika Poissona na tworzenie się szczelin w materiałach skalnych (por. [24, 26, 45]).

LUCKS, CHRISTIAN, BRANDOW, HOËG [92] badali na specjalnym urządzeniu, próbki cylindryczne poddane ścinaniu i ścisłaniu. Obciążenie jest tak przyłożone, iż otrzymuje się niesymetryczny rozkład naprężeń względnie osi próbki. Analizę numeryczną trójwymiarowego stanu naprężenia przeprowadzono stosując metodę elementów skończonych. Podano wykresy rozkładu naprężeń dla różnych przekrojów próbki.

3.5. GOLDIN i TROICKI [156] określili stan naprężenia i odkształcenia u podstawy i krawędzi bocznych skalnego kanionu.

W pracy [56] rozpatrzono zagadnienie obliczania podziemnych tam zaporowych zabezpieczających wyrobiska przed zatopieniem.

Możliwości zastosowania metody elementów skończonych do zagadnień kotwienia przedstawiono w pracach [36, 71].

NAIR [105] przeprowadził obliczenia przemieszczeń powierzchni na terenie objętym eksploatacją górniczą. Wyniki obliczeń osiadania niecki przedstawiono w postaci wykresów.

Wciskanie stempla betonowego w ośrodek szczelinowaty przedstawił MALINA [93]. Podano istotę sformułowania uwzględniającego warunek graniczny Mohra i wpływ tarcia między blokami skalnymi.

BARTH [17] przedstawił obliczenia kawerny, w której znajdować się będzie hala maszyn podziemnej siłowni. Obliczenia przeprowadzono stosując trójkątne elementy skończone o siatce zagęszczonej w pobliżu konturu.

Zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień kruszenia (drobnienia) przedstawiono w [78]. Kruszenia dokonuje się stosując materiały wybuchowe.

## 4. Uwagi końcowe

Wydaje się, iż w masie prac poświęconych zastosowaniu metody elementów skończonych do zagadnień mechaniki ciała stałego, problemom mechaniki gruntów i mechaniki górotworu poświęcono zbyt mało uwagi. Stan ten wynika między innymi ze złożoności problemów. Nie są nam znane artykuły, w których stosowano by metodę elementów skończonych do zagadnień tapania.

Istniejące prace z dziedziny mechaniki gruntów i mechaniki górotworu, których przeglądu dokonaliśmy, mają raczej charakter inżynierski, praktyczny. Dlatego też nie przeprowadzono w nich analizy błędów i nie rozważono zagadnienia zbieżności. Należy tutaj podkreślić, iż istnieją już teoretyczne opracowania tych zagadnień dla kontinuum materialnego (porównaj np. [108]).

## Literatura cytowana w tekście

1. E. ABSI, *Méthode des éléments finis*, Ann. Inst. techn. bâtim. et trav. publics, 262, **22** (1969), 1595–1621.
2. S. L. AGARWAL, W. R. HUDSON, *Experimental verification of discrete-element solutions for pavement slabs*, Highway Res. Rec. No 329 (1971), 1–19.
3. H. ALLIK, T. J. R. HUGHES, *Finite element method for piezoelectric vibration*, Int. J. Num. Meth. Eng., **2** (1970), 151–157.
4. D. J. D'APPOLONIA, T. W. LAMBE, *Method for predicting initial settlement*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., **2**, **96** (1970), 523–544.
5. D. J. D'APPOLONIA, H. G. POULOS, C. C. LADD, *Initial settlement of structures on clay*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., **10**, **97** (1971), 1359–1377.
6. E. R. de ARANTES e OLIVEIRA, *Theoretical foundations of the finite element method*, Int. J. Solids and Structures, **4** (1968), 929–952.
7. E. R. de ARANTES e OLIVEIRA, *Completeness and convergence in the finite element method*, Técnica, No 403, **33** (1970), 190–124.
8. J. H. ARGYRIS, *Recent advances in matrix methods of structural analysis*, Pergamon Press, 1964.
9. J. H. ARGYRIS, *The impact of the digital computer on engineering sciences*, Part I, Aeronaut. J., No 709, **74** (1970), 13–41.
10. J. H. ARGYRIS, D. E. BRÖNLUND, J. R. ROY, D. W. SCHARPF, *A direct modification procedure for the displacement method*, AIAA J., **9**, **9** (1971), 1861–1864.
11. J. H. ARGYRIS, A. S. L. CHAN, *Applications of the method of finite elements in space and time*, Ing. Archiv, **4**, **41** (1972), 235–257.
12. S. ATLURI, *A new assumed stress hybrid finite element model for solid continua*, AIAA J., **8**, **9** (1971), 1647–1649.
13. I. BABUSKA, *The finite element method for elliptic equations with discontinuous coefficients*, Computing, **3**, **5** (1970), 207–213.
- 13a. I. BABUSKA, M. B. ROSENZWEIG, *A finite element scheme for domains with corners*, Num. Math., **1**, **20** (1972), 1–21.
- 13b. M. H. BALUCH, J. E. GOLDBERG, S. L. KOH, *Finite element approach to plane microelasticity*, Proc. ASCE J. Struct. Div., **9**, **98** (1972), 1957–1964.
14. R. D. BARKSDALE, *Compressive stress pulse times in flexible pavements for use in dynamic testing*, Highway Res. Rec., No 345 (1971), 32–44.
15. G. BARLA, *Stresses around a single underground opening near a traction-free surface*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., **1**, **9** (1972), 103–126.

16. G. BARLA, *The distribution of stress around a single underground opening in a layered medium under gravity loading*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 1, 9 (1972), 127–154.
17. S. BARTH, *Felsmechanische Probleme beim Entwurf der Kaverne des Pumpspeicherwerkes Waldecke II*, Bautechnik, 3, 49 (1972), 73–83.
18. M. BAUDENDISTEL, H. MALINA, L. MÜLLER, *Einfluss von Diskontinuitäten auf die Spannungen und Deformationen in der Umgebung einer Tunnelröhre*, Rock Mechanics, 1, 2 (1970), 17–40.
19. Z. P. BAŽANT, *Matrix differential equation and higher — order numerical methods for problems of non-linear creep, viscoelasticity and elasto-plasticity*, Int. J. Numer. Meth. Eng., 1, 4 (1971), 11–25.
20. G. BIRKHOFF, M. H. SCHULTZ, R. S. VARGA, *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations*, Num. Math., 11 (1968), 232–256.
21. J. P. BLAKELEY, *The stresses around openings in rocks*, N. Z. Eng. 4, 26 (1971), 105–110.
- 21a. W. BLAKE, *Destressing test at the Galena Mine Wallace, Idaho*. Trans. Soc. Min. Eng. AIME. 3, 252 (1972), 294–299.
22. J. M. BOISSERIE, *Generation of two- and three-dimensional finite element*, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 3 (1971), 327–347.
23. E. BOTEÁ, I. MANOLIU, *O aplicare a metodei elemente lor finite la calculul tasarilor unei constructii*, Bul. sti. Inst. constr. Bucuresti, 3, 13 (1970), 107–114.
24. B. I. BRADY, *Initiation of failure in radially end-constrained circular cylinder of brittle rock*, Int. J. Mech. and Mining Sci., 4, 8 (1971), 371–387.
25. C. A. BREBBIA, *Integration of area and volume coordinates in the finite-element method*, AIAA J., 6, 7 (1969), 1212.
26. E. T. BROWN, J. A. HUDSON, M. P. HARDY, C. F. FAIRHURST, *Controlled failure of hollow rock cylinders in uniaxial compression*, Rock Mechanics, 1, 4 (1972), 1–24.
27. P. BURTON, *The shifting roles of computers; experiments and analysis in applied mechanics*, Exp. Mech., 9, 11 (1971), 385–393.
28. G. CANTIN, *An equation solver of very large capacity*, Int. J. Num. Meth. Eng. 3, 3 (1971), 379–388.
29. A. K. CHOPRA, P. R. PERUMALSWAM, *Dynamics of earth dams with foundation interaction*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., 2, 97 (1971), 181–191.
30. J. T. CHRISTIAN, J. W. BOEHMER, *Authors closure to discussion on the paper: „Plane strain consolidation by finite elements”*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found Div., 11, 97 (1971), 1596–1597.
31. S. CHWAŁA, L. GŁADYSZ, Z. KURCZABIŃSKI, *Możliwości wykorzystania metody elementów skończonych w mechanice górotworu*, Przegl. Górniczy, 4, 28 (1972), 133–138.
32. P. G. CIARLET, M. H. SCHULTZ, R. S. VARGA, *Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. II. Nonlinear boundary conditions*, Num. Math. 4, 11 (1968), 331–345.
33. P. G. CIARLET, P. A. RAVIART, *Interpolation de Lagrange sur des éléments finis courbes dans  $R^n$* , C. R. Acad. Sc. Paris, 274 (21 février 1972), A640–A643.
34. G. W. CLOUGH, J. M. DUNCAN, *Finite element analyses of retaining wall behavior*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 12, 97 (1971), 1657–1673.
35. D. F. COATES, Y. S. YU, *A note on the stress concentrations at the end of a cylindrical hole*, Int. J. Rock Mech. Min. Sciences 6, 7 (1970), 583–588.
36. D. F. COATES, Y. S. YU, *Rock anchor design mechanics*. «Mines Branch. Dep. Energy, Mines and Resour. Ottawa Res. Rept.», No R 223 (1971).
37. COMSA RADU; POPOVICI LASCAR, *Asupra analizei prin metoda elementului finit a stărilor de eforturi și deformării din masivele de pamint*, Stud. geotehn., fund. și constr. hidrotehn., 15 (1970), 299–336.
38. M. COTES et al. *Stress distribution analysis in solids by the finite element method: application to a tunnel with a semicircular cross section driven at little depth* (in French), Annales des Ponts et Chaussées, 4, 138 (1968), 211–223.
39. CRASTAN, *Eine Verallgemeinerung der Elementenmethode*, Nucl. Eng. and Des., 2, 15 (1971), 113–120.
40. J. G. A. CROLL, A. C. WALKER, *The finite difference and localized Ritz methods*, Int. J. Num. Eng. 2, 3 (1971), 155–160.
41. J. G. A. CROLL, *Boundary simulation in the localised collocation and localised Ritz methods*, Wiss. Z. Hochschule für Arch. und Bauwesen, Weimar, 2, 19 (1972), 145–150.

42. J. G. CROSE, *Bandwidth minimization of stiffness matrices*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 1, 97 (1971), 163–167.
- 42a. R. E. DAVIS, A. E. BACHER, *Concrete arch culvert behavior — phase 2*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 11, 98 (1972), 2329–2350.
43. F. H. DEIST, C. DIMITRIU, *The finite element method*, S. Afric. Mech. Engr., 5, 19 (1969), 124–126.
- 43a. CH. S. DESAI, *Seepage analysis of earth banks under drawdown*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. Found. Div., 11, 98 (1972), 1143–1162.
44. CH. S. DESAI, *Nonlinear analyses using spline functions*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found., 10, 97 (1971), 1461–1480. Closure to discussion: 9, 98 (1972), 967–971.
45. C. DINIS da GAMA, *Análise da compressão uniaxial de provetes de rocha pelo método dos elementos finitos*, Técnica, 403, 33 (1970), 143–155.
46. L. J. DOCTORS, *An application of the finite element technique to boundary value problems of potential flow*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2 (1970), 243–252.
47. I. J. MAC-DONALD, *A general matrix statement of multi-dimensional interpolation*, J. Sound and Vibr., 1, 14 (1971), 137–138.
48. C. S. DUNS, R. BUTTERFIELD, *Flexible buried cylinders. Part I. Static response*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 6, 18 (1971), 577–600.
49. C. S. DUNS, R. BUTTERFIELD, *Flexible buried cylinders. Part II. Dynamic response*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 6, 8 (1971), 601–612.
50. C. S. DUNS, R. BUTTERFIELD, *Flexible buried cylinders. Part III. Buckling behavior*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 6, 8 (1971), 613–627.
51. G. DUPUIS, J. J. GOËL, *Finite element with high degree of regularity*, Int. J. Num. Meth. Eng., 4, 2 (1970), 563–577.
52. D. B. EDWARDS, *Horizontal pillar extraction on Mt. Isa mines limited — some rock mechanics aspects*, Proc. 1 st Aust. — N. Z. Cont. Geomech., Melbourne, 1971, vol. 1, Sydney 1971, 73–79.
53. Z. EISENSTEIN, *Metoda konečných prvků v mechanice zemin*, Inž. stavby, 2, 19 (1971).
54. D. J. EWING, A. J. FAWKES, J. GRIFFITHS, *Rules governing the numbers of nodes and elements in a finite element mesh*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 4 (1970), 597–600.
55. W. D. L. FINN, P. M. BYRNE, F. BUCHER, *Discussion on the paper: «Plane strain consolidation by finite elements»*, by J. T. CHRISTIAN, J. W. BOEHMER, Proc. ASCE, J. Soil and Found. Div., 5, 97 (1971), 808–809.
56. W. FÖRSTER, P. SITZ, *Untersuchungen zur Beanspruchung und Gestaltung von untertätigen Pfropfen und Dämmen*, Neue Bergbautechnik, 8, 1 (1971), 595–603.
57. W. FÖRSTER, *Zur Anwendung der Methode finiter Elemente bei der Lösung bodenmechanischer Probleme*, Neue Bergbautechnik, 2, 2 (1972), 134–138.
58. M. FRÉMOND, *Formulations duales des énergies potentielles et complémentaires, Application a la méthode des éléments finis*, C. r. Acad. Sci., 17, 273 (1971), A 775–A 777.
59. I. FRIED, *Discretization and computational errors in high-order finite elements*, AIAA J., 10, 9 (1971), 2071–2073.
60. C. C. FU, *On the stability of explicit methods for the numerical integration of the equations of motion in finite element methods*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, 4 (1972), 95–107.
61. J. GHABOUSSI, E. L. WILSON, *Variational formulation of dynamics of fluid-saturated porous elastic solid.*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div., 4, 98 (1972), 947–963.
62. C. GILLES, *Rigid body motions in curved finite elements*, AIAA J., 7, 8 (1970).
63. J. P. GIROUD, H. WATISSEE, A. RABATEL, *Tassements et contraintes dans une couche de sol élastique supportant une charge uniformément répartie*, Bull. Liais. Lab. rout. pont et chaussées, No 48 (1970).
64. J. J. GOËL, *Construction of basic functions for numerical utilisation of Ritz's method*, Numer. Math., 5, 12 (1968), 435–447.
65. H. R. GROOMS, *Algorithm for matrix bandwidth reduction*, Proc. ASCE, J. Struct. Div., 1, 98 (1972) 203–214.
66. P. GUELLEC, A. DUBOUCHET, *Programmes de calcul par la méthode des éléments finis à la section de mécanique des roches du LCPC*, Bull. Liais. Lab. ponts et chausees, No 57 (1972).

67. M. J. HADDIN, *Mats and combined footings — analysis by the finite element method*, J. Amer. Concrete Inst. 12, **68** (1971), 945–949.
68. G. C. HART, J. D. COLLINS, *The treatment of randomness in finite elements modelling*, SAE Preprints, No 700842.
69. F. E. HEUZÉ, R. E. GOODMAN, A. BORNSTEIN, *Numerical analyses of deformability tests in jointed rock — «joint perturbation» and «no tension» finite element solutions*, Rock Mech., 1, **3** (1971), 13–24.
70. P. G. HODGE, *A consistent finite element model for the two-dimensional continuum*, Ing. — Archiv. **39** (1970), 375–382.
71. G. W. HOLLINGSHEAD, *Stress distribution in rock anchors*, Can. Geotechn. J., 4, **8** (1971), 588–592.
72. K. HÖEG, *Finite element analysis of strainsoftening clay*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 1, **98** (1972), 43–58.
73. D. A. HUNT, *Discrete element structural theory of fluids*, AIAA J., 3, **9** (1971), 457–464.
74. S. G. HUTTON, D. L. ANDERSON, *The finite element method: a Galerkin approach*, Proc. 3 rd Can. Congr. Appl. Mech., Calgary, 1971, 733–734.
75. W. HÜLS, *Die Anwendung der Finite-Element-Methode zur Lösung geomechanischer Aufgaben*, Bergakademie, 10, **21** (1969), 600–604.
76. C. T. HWANG, N. R. MORGENSTERN, D. W. MURRAY, *On solutions of plane strain consolidation problems by finite element methods*, Can. Geotechn. J., 1, **8** (1971), 109–118.
77. B. M. IRONS, *A frontal solution program for finite element analysis*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1, **2** (1970), 5–32.
78. ITO ITIRO, SASA, KOYTI, TANIMOTO TIKAOA, *Zastosowanie metody elementów skończonych do zagadnień strzelania*, J. Ind. Explos. Soc. Jap. 1, **32** (1971), 13–17 (po japońsku).
- 78a. ITOW TOMIO, FUJII KIYOSHI, UESAKA TSUNEO, *No tension analysis on use of rock bolts*, Techn. Repts. Osaka Univ. **22** (1972), 273–283.
79. F. JABUREK, G. HÖFLER, F. STURM, *Elementenmethode zur Berechnung ebener Spannungs — und Verformungszustände — ein Hilfsmittel der Gebirgsmechanik*, Berg — und Hüttenmann Monatsh., 2, **115** (1970), 32–35.
- 79a. J. C. JAEGER, N. G. W. COOK, *Fundamentals of rock mechanics*, Chapman and Hall Ltd., 1971.
- 79b. J. JĘGIER, M. STOPYRA, *Zarys metody elementów skończonych i możliwości jej zastosowania w górnictwie*, Przegląd Górniczy, 9 (1972), 389–394.
80. W. M. JENKINS, *Matrix and digital computer methods in structural analysis*, London (New York) McGraw-Hill, 1969.
81. M. J. KALDIJIAN, *Torsional stiffness of embedded footings*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 7, **97** (1971), 969–980.
82. H. KARDENSTUNCER, *K-tensors in discrete mechanics*, ZAMM, 1–4, **50** (1970).
83. KAWAI TADAHIKO, *Współczesne kierunki badań w metodzie elementów skończonych*, Seisan Kenkyu, Mon. J. Inst. Ind. Sci. Univ. Tokyo, 1, **22** (1970), 33–44 (po japońsku).
84. M. KINZE, *Berechnung ebener erdstatischer Probleme nach der Elementenmethode*, Baup. — Bautechn., 9, **24** (1970), 452–456.
- 84a. I. KISIEL, *O podstawach metody elementów skończonych*, Archiwum Hydrotechniki 3, **19** (1972), 341–358.
85. V. KOLÁR, *The influence functions in the finite element method*, ZAMM Sonderheft, **50** (1970), T 129–T 131.
86. V. KOLÁR, *The influence of division on the results in the finite element method*, ZAMM, Sonderheft, **51** (1971), T 59–T 60.
87. K. KOVARI, *On the dimensioning of underground structures* (in German), Schweizerische Bauzeitung, 37, **87** (1969), 687–697.
- 87a. KWAN Y. LO, C. F. LEE, *Discussion of paper: «Finite element analysis of strain — softening clay» by K. HÖEG*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. Found. Div., 9, **98** (1972), 981–983.
88. C. A. LABERGE, A. PAQUETTE, *An electrical analogy to the finite element method*, Proc. 3 rd Can. Congr. Appl. Mech., Calgary 1971, 225–226.



89. P. LAUNAY, *The three-dimensional thermoelastic computer code «Titus»*, Prepr. 1 st Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol. Berlin, 1971, vol. 5, Part M, M5-4/1-M5-4/21.
- 89a. I. K. LEE, J. R. HERINGTON, *Discussion of paper: «Finite element analyses of retaining wall behavior»*, by G. W. CLUOGH, J. M. DUNCAN, Proc. ASCE, J. Soil Mech. Found. Div., 9, 98 (1972), 973-974.
90. J. W. LEONARD, *Discussion of papers: «A general theory of finite elements, Parts 1-2»*, by J. T. ODEN, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 2 (1970), 295-297.
91. J. W. LEONARD, T. T. BRAMLETTE, *Finite element solutions of differential equations*, Proc. ASCE, J. Eng. Mech., Div., 6, 96 (1970), 1271-1283.
92. A. LUCKS, J. T. CHRISTIAN, G. E. BRANDOW, H. HOËG, *Stress conditions in NGI simple shear test*, Proc. ASCE, J. Soil Mech. and Found. Div., 1, 98 (1972), 155-160.
93. H. MALINA, *The numerical determination of stresses and deformations in rock taking into account discontinuities*, Rock Mech., 1, 2 (1970), 1-16.
- 93a. L. MANSFIELD, *On the variational characterization and convergence of bivariate splines*, Num. Math., 2, 20 (1972), 99-114.
94. S. MARTINETTI, G. MONTANI, R. RIBACCHI, R. RICCIONI, *L'impiego de elementi finiti di alto ordine nella meccanica dei terreni e delle rocce*, Riv. ital. geotecn., No 4 bis, 5 (1971), 328-335.
- 94a. S. MARTINETTI, R. RIBACCHI, *Secondo Congresso della Societa internazionale di meccanica delle rocce*. Riv. Ital. Geotech. 1, 6 (1972), 37-67.
95. F. MELKES, *The finite element method for non-linear problems*, Applikace Mat., 3, 15 (1970).
96. P. M. MEBANE, J. A. STRICKLIN, *Implicit rigid body motion in curved finite element*, AIAA J., 2, 9 (1971), 344-345.
97. D. MILOVIČ, *Naponi i pomeranja u sloju organiĉene debljine proizvedeni kruŹnim temeljem*, Građevinar, 8, 23 (1971), 247-252.
98. D. MILOVIČ, *Naponi i pomeranja u sloju ograniĉene debljine proizvedeni kruŹnim temeljem*, Izgradnja, 7, 25 (1971), 3-12.
99. D. MILOVIČ, *Moguĉnost primene metode koraĉnik elemenata na nehe probleme mehanike tla*, Tehnika, 4, 26 (1971), Nase gradev, 4, 25 (1971), 649-653.
100. D. MILOVIČ, *Naponi i pomeranja u izotropnom ili anizotropnom tlu usled krutog kruŹnog temelja*, Izgradnja, 4, 26 (1972), 1-14.
101. D. MILOVIČ, *Stresses and displacements in an anisotropic layer due to a rigid circular foundation*, Géotechnique, 1, 22 (1972), 169-174.
102. D. MILOVIČ, J. P. TOURNIER, G. TOUZOT, *Une application de la méthode des elements finis a la mécanique des sols*, Ing.-constr., 147, 68 (1970), 39-41.
103. A. R. MITCHELL, *Variational principles and the finite-element method in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Lond., A 323 (1971), 211-217.
104. N. MORIN, *Higher order stiffness tensors for nonlinear finite element analysis*, Proc. 3 rd Can. Congr. Appl. Mech., Calgary 1971, 221-222.
105. K. NAIR, *Analytical methods for predicting subsidence*, «Land subsidence. Proc. Tokyo Symp., 1969», vol. 2, Paris 1970, 588-595.
106. Y. NIWA, S. KOBAYASHI, K. NAKAGAWA, *The influence of end friction and Poisson's ratio on stresses in compressed specimens*, J. Soc. Mat. Sciences, 196, 19 (1970), 63-69.
107. J. T. ODEN, *Note on an approximate method for computing nonconservative generalized forces on finitely deformed finite elements*, AIAA J., 11, 8 (1970), 2088-2090.
108. J. T. ODEN, *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, 1972.
109. J. T. ODEN, H. J. BRAUCHLI, *On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations*, Int. J. Num. Meth. Eng., 3, 3 (1971), 317-325.
110. J. T. ODEN, B. E. KELLEY, *Finite element formulation of general electrothermoelasticity problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 3 (1971), 161-179.
111. J. T. ODEN, T. J. CHUNG, J. E. KEY, *Analysis of nonlinear thermoelastic and thermoplastic behavior of solids of revolution by the finite element method*, Prepr. 1 st Int. Conf. Struct. Mech. React. Techn., Berlin 1971, vol. 5, Part M, M5-6/1-M5-6/19.

112. J. T. ODEN, D. M. RIGSBY, D. CORNETT, *On the numerical solution a class of problems in a linear first strain-gradient theory of elasticity*, Int. J. Num. Meth. Eng., 2, 2 (1970), 159–174.
113. G. OLTEANU, *Evaluarea fortelar nodale echivalente pentru elementele finite liniare*, Bul. sti. Inst. constr. Bucuresti, 1/2, 14 (1971), 227–250.
114. W. C. PAULSEN, *Finite element stress analysis*, Part 1, Mach. Des., 24, 43 (1971), 46–52.
115. W. C. PAULSEN, *Finite element stress analysis*, Part 2, Mach. Des., 25, 43, (1971), 146–150.
116. W. C. PAULSEN, *Finite element stress analysis*, Part 3, Mach. Des., 26, 43 (1971), 90–94.
117. J. V. PERUMPRAL, J. B. LILJEDAHL, W. H. PERLOFF, *The finite element method for predicting stress distribution and soil deformation under a tractive device*, Trans. ASAE, 6, 14, (1971), 1184–1188.
118. P. E. PINTO, *Sulla dinamica del complesso suolo — struttura*, G. del Genio Civile, 9–10, 108 (1970), 601–636.
119. *Programy metody elementów skończonych*. Praca zb. pod red. J. SZMELTERA, Arkady (w druku).
120. N. RADHAKRISHNAN, L. C. REESE, *A review of applications of the finite element method of analysis to problems in soil and rock mechanics*, Soils and Found., 3, 10, (1970), 95–112.
121. Y. R. RASHID, T. Y. CHANG, *Stress analysis of two-dimensional problems under simultaneous creep and plasticity*, Prepr. 1. st Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol., Berlin, 1971, vol. 5, Part L, L4–5/1.
122. J. ROBINSON, G. W. HAGGENMACHER, *Optimization of redundancy selection in the finite-element force method*, AIAA J., 8, 8 (1970), 1429–1433.
- 122a. R. S. SANDHU, E. L. WILSON, *Finite element analysis of land subsidence*, «Land subsidence. Proc. Tokyo Symp., 1969. vol. 2». Paris, 1970, 393–400.
- 122b. G. SCHMID, *Die Methode der finiten Elemente als Sonderfall der Methode der gewichteten Residuen*, ZAMM, 9, 52 (1972), 461–469.
123. R. S. SKJOLINGSTAD, Y. K. CHEUNG, *Three-dimensional field problems by higher order finite elements*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl., 2, 16 (1971), 359–373.
124. T. R. STACEY, *Application of the finite element method in the field of rock mechanics with particular reference to slope stability*, S. Afric. Mech. Eng., 5, 19 (1969), 131–134.
125. K. G. STAGG, O. C. ZIENKIEWICZ, *Rock mechanics in engineering practice*, N. Y. John Wiley and Sons, 1968.
- 125a. O. STEPHANSSON, *Theoretical and experimental studies in tectonics and rock mechanics.*, Acta Univ. Uppsal. Abstrs. Uppsala Diss. Fac. Sci, 197 (1972).
126. J. SZMELTER, M. WIECZOREK, *Wykresy warstwowe funkcji  $F(x, y)$  wykonywane na maszynie cyfrowej*, Biul. WAT, 5, 20 (1971), 21–36.
127. J. J. TELEGA, *Zastosowanie programowania liniowego do wyznaczania nośności granicznej konstrukcji*, Mech. Teor., Stos. 1, 9 (1971), 7–52.
128. J. J. TELEGA, *Wyznaczanie nośności granicznej konstrukcji przy pomocy programowania matematycznego*, Rozprawa doktorska, Gliwice 1972.
129. R. L. THOMAS, A. ARMAN, *Photoelastic and finite element analysis of embankments constructed over soft soils*, Highway Res. Rec., No 323 (1971), 71–86.
130. P. TONG, Y. C. FUNG, *Slow particulate viscous flow in channels and tubes — application to biomechanics*, Trans. ASME, J. appl. mech., 4, 38 (1971), 721–728.
131. J. UZMAN, M. LIVNEH, E. SHKLARSKY, *Cracking mechanism of flexible pavements*, Proc. ASCE, Transp. Eng. J., 1, 98 (1972), 17–36.
132. C. VALENTIN, *Anwendung eines «Elementen-Methode» Programmes zur Lösung von Temperaturverteilungsproblemen*, Nucl. Eng. and Des., 1, 15 (1971), 56–64.
133. S. VALLIAPPAN, *Nonlinear stress analysis of two-dimensional problems with special reference to rock and soil mechanics*, Ph. D. Thesis University of Wales.
- 133a. R. S. VARSHNEY, *Effect of foundation elasticity on stresses in gravity dams*, Cem. and Concr. 3, 12 (1971), 239–254.
134. G. de VRIES, D. H. NORRIE, *The application of the finite-element technique to potential flow problems*, Trans. ASME, J. appl. mech., 4, 38 (1971), 798–802.
135. J. WALSH, *Finite-difference and finite-element method of approximation*, Proc. Roy. Soc. Lond., A 323 (1971), 155–165.

136. CHU-KIA WANG, *Matrix methods of structural analysis*, Scranton, Internat. Textbook, 1970.
137. M. C. WANG, J. K. MITCHELL, *Stress-deformation prediction in cement-treated soil pavements*, Highway Res. Rec., 351 (1971), 93–111.
138. F. D. WANG, L. A. PANEK, M. C. SUN, *Stability analysis of underground openings using a Coulomb failure criterion*, Trans. Soc. Mining Eng. AIME, 4, 250 (1971), 317–321.
139. S. K. WANG, M. SARGIOUS, Y. K. CHEUNG, *Advanced analysis of rigid pavements*, Proc. ASCE, Transp. Eng. J., 1, 98 (1972), 37–44.
140. B. V. WINKEL, K. H. GERSTLE, H. Y. KO, *Analysis of time-dependent deformations of openings in salt media*, Int. J. Rock Mech. and Mining Sci., 2, 9 (1972), 249–260.
141. W. WUNDERLICH, *Ein verallgemeinertes Variationsverfahren zur vollen oder teilweisen Diskretisierung mehrdimensionaler Elastizitätsprobleme*, Ing., Archiv., 39 (1970), 230–247.
142. YOSHITSURA YOKOO, KUNIO YAMAGATA, HIROAKI NAGAOKA, *Finite element method applied to Biot's consolidation theory*, Soils and Found., 1, 11 (1971), 29–46.
143. YOSHITSURA YOKOO, KUNIO YAMAGATA, HIROAKI NAGAOKA, *Variational principles for consolidation*, Soils and Found., 4, 11 (1971), 25–35.
144. YOSHITSURA YOKOO, KUNIO YAMAGATA, HIROAKI NAGAOKA, *Finite element analysis of consolidation following undrained deformation*, Soils and Found., 4, 11 (1971), 37–58.
145. Y. S. YU, D. F. COATES, *Analysis of rock slopes, using the finite element method*, Mines Branch, Dep. Energy, Mines and Resour Ottawa. Res. Rept., No R 229, 1970(71).
146. A. ZENIŠEK, *Některé typy prvků a náhradních funkcí v metodě konečných prvků*, Stavebn. časop., 1, 18 (1970), 48–62.
147. A. ZENIŠEK, *Interpolation polynomials on the triangle*, Numer. Math., 4, 15 (1970), 283–296.
148. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method: from intuition to generality*, Appl. Mech. Rev., 3 (1970), 249–256.
149. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972 (tł. z języka angielskiego).
150. O. C. ZIENKIEWICZ, G. C. NAYAK, D. R. J. OWEN, *Composite and overlay models in numerical analysis of elasto-plastic continua*, «Foundations of plasticity. Warsaw 1972», Noordhoff Int. Publ. Groningen, 107–123.
151. M. ZLAMAL, *On the finite element method*, Num. Math., 5, 12 (1968), 394–409.
152. M. ZLAMAL, *On some finite element procedures for solving second order boundary value problems*, Num. Math., 1, 14 (1969), 42–49.
153. Д. В. ВАЙНБЕРГ, А. С. ГОРОДЕЦКИЙ, В. В. КИРИЧЕВСКИЙ, А. С. САХАРОВ. *Метод конечного элемента в механике деформируемых тел*, Прикл. Мех., 8, 8 (1972), 3–28.
- 153a. В. Л. ВИЛЕНКИН, *О наилучшем приближении сплайн-функциями на классах непрерывных функций*, Мат. Заметки, 8 (1970).
154. М. В. ВИТЕНБЕРГ, *Влияние характеристик деформируемости и фактора постепенности возведения на напряженно-деформированное состояние поперечного сечения плотины с ядром*, «Тр. ВНИИ водоснабж., канализ., гидротех. соор. и инж. гидрогеол.», 34, (1972), 37–42.
155. Хр. ГАНЕВ, Ст. ГРИГОРОВ, *Някои допълнения към решаване на дъговите язовирни стени чрез «петмоментни уравнения»*, Изв. ин-та техн. мех. Бълг. АН., 7 (1970), 157–176.
156. А. Л. ГОЛЬДИН, А. П. ТРОИЦКИЙ, *Использование метода конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния треугольного каньона*, Изв. ВНИИ гидротехн., 95 (1971) 98–107.
157. В. П. КАНДИДОВ, Е. П. ХЛЫБОВ, *О сходимости метода конечных элементов при расчете динамики мембран*, Прикл. Мат. Мех., 3 (1972), 561–565.
158. В. Г. КОРНЕВ, *О методе конечных элементов для решения задач упругого равновесия*, В сб. «Строит. мех. соор.», Л., 1971, 28–46.
159. А. С. ЛОГИНОВ, *Об одном предельном соотношении приближения сплайн-функциями*, Укр. Мат. Журнал, 5, 24 (1972), 695–699.
160. Э. Ш. МЕЛАМЕД, Е. А. ЭРЕЗ, *Матричный алгоритм расчета конструкции на упругом основании с использованием метода конечных элементов*, Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 342 (1969), 81–87.

161. Л. Н. Рассказов, М. В. Витенберг, *Напряженно-деформированное состояние плотин из местных материалов и их устойчивость*, Тр. ВНИИ водоснабж., канал., гидротехн. соор. и инж. гидрогеол., 34, (1972), 18–32.
162. Л. А. Розин, *О связи метода конечных элементов с методами Бубнова-Галеркина и Рунца*, В сб. «Строит. мех. соор.», Л., 1971, 6–28.
163. Л. А. Розин, *Метод конечных элементов в строительной механике*, Строит. мех. расч. соор., 5 (1972), 1–7.
164. Э. М. Садетова, Я. Д. Гильман, Ю. Н. Музыченко, *Распределение напряжений в лёссовом основании в процессе его увлажнения*, Изв. высш. учеб. завед., Стр-о и архит., 6 (1972), 36–40.
165. Ю. Е. Скабицкий, М. Ф. Федосов, *Определение тензора напряжения упругого тела методом конечного элемента*, Сб. научн. тр. Киев. ин-т инж. гражд. авиации, 3 (1969), 161–166.
166. И. Г. Терегулов, *О методах сведения континуальных нелинейных задач механики твердого деформируемого тела к задачам дискретным*, Мех. тв. тела, 5 (1972), 21–27.
167. А. П. Троицкий, *Определение напряженного состояния плотин из местных материалов методом конечных элементов*, Изв. ВНИИ гидротех., 95 (1971), 108–121.
168. А. П. Троицкий, *Применение метода конечных элементов к расчету земляных плотин на сейсмические воздействия*, Тр. координац. совещ. по гидротехн., 65 (1971), 130–138.

#### Р е з ю м е

### МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МЕХАНИКЕ ГРУНТОВ И В МЕХАНИКЕ ГОРНЫХ МАССИВОВ

В работе дан обзор новейших работ, посвященных применениям метода конечных элементов к задачам механики грунтов и механики горных массивов.

#### S u m m a r y

### FINITE ELEMENT METHOD IN SOIL AND ROCK MECHANICS

The paper presents a review of recent achievements in the field of application of the finite elements method to the problems of soil and rock mechanics.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 29 stycznia 1973 r.*

## WPLYW WSTĘPNYCH UGIĘĆ NA PRACĘ PŁYTY PROSTOKĄTNEJ, ZGINANEJ W SWEJ PŁASZCZYŹNIE

WŁADYSŁAW WALCZAK (ŁÓDŹ)

### 1. Wstęp

Wstępne ugięcia grają znaczną rolę w zagadnieniach stateczności płyt cienkościennej i mają poważny wpływ na pracę tych płyt w warunkach obciążeń ponadkrytycznych. Dotyczy to tych przypadków obciążenia, gdy — oprócz obciążenia poprzecznego — istnieją również siły działające w płaszczyźnie środkowej płyty, bądź też gdy stanowią one jedyne obciążenie tych płyt. Wpływ tych sił na końcowy stan naprężenia i odkształcenia zależy bowiem nie tylko od ugięcia dodatkowego  $w_1$  wywołanego przyłożonym obciążeniem, lecz również od ugięcia wstępnego  $w_0$ . Z tego też względu przeprowadzenie, w przypadkach takiego obciążenia, analizy wpływu ugięć wstępnych na stan naprężenia i odkształcenia płyty wydaje się niezbędne.

Praca cienkościennej płyty prostokątnej po utracie stateczności, wywołanej zginaniem w płaszczyźnie płyty, została szczegółowo przeanalizowana przy założeniu płaskiej postaci tej płyty w stanie początkowym [3]. Celem niniejszej pracy jest zbadanie wpływu wstępnego ugięcia takiej płyty na jej stan końcowy dla przypadku takich samych warunków obciążenia, to znaczy zginania płyty w jej płaszczyźnie środkowej. Przyjmując, że końcowe ugięcia płyty są rzędu jej grubości, zagadnienie rozpatrzono w oparciu o nieliniową teorię płyt.

### 2. Przyjęte założenia oraz podstawy teoretyczne

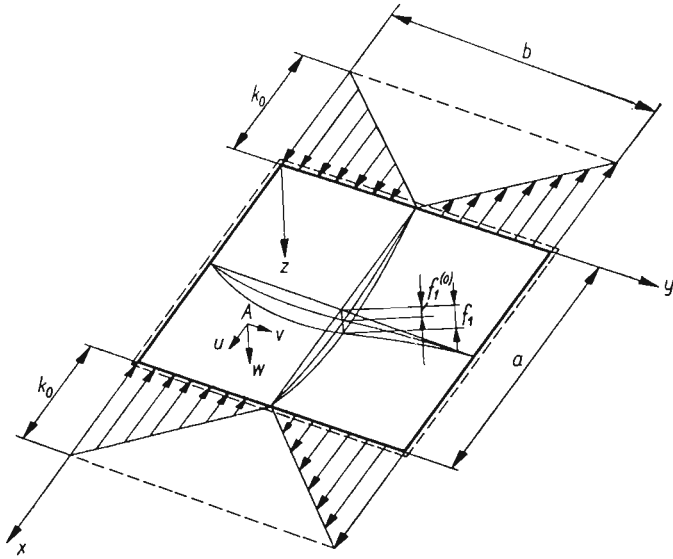
Przedmiotem rozważań jest cienka, prostokątna, izotropowa płyta o stałej grubości  $h$ , swobodnie podparta na całym swym obwodzie. Zakłada się ponadto, że przy odkształceniach płyty jej krawędzie pozostaną zawsze prostoliniowe. Ma to miejsce w przypadku wzmocnienia tych krawędzi odpowiednimi listwami usztywniającymi.

Obciążenie płyty przyjęto w postaci jednokierunkowego rozkładu sił liniowo zmiennych wzdłuż krawędzi  $x = 0$  i  $x = a$ , przyłożonych w płaszczyźnie środkowej płyty. Stan taki da się określić następującym wyrażeniem o ogólnej postaci

$$(2.1) \quad p = k_0 \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right).$$

Obciążenie przedstawione na rys. 1 odpowiada wartości współczynnika  $\alpha = 2$ , dla którego zachodzi przypadek czystego zginania.

Dla parametru  $k_0$  przyjęto założenie, że jest on liczbowo większy od wartości odpowiadającej obciążeniu krytycznemu. Założono, że powierzchnia środkowa płyty nie jest powierzchnią idealnie płaską, lecz ma początkową krzywiznę. W każdym jej punkcie istnieje zatem pewne wstępne ugięcie  $w_0$ . Przyjęto, że jest ono małe w porównaniu z grubością płyty.



Rys. 1. Schemat obciążenia płyty

Najmniej korzystna — z punktu widzenia pracy płyty przy obciążeniach ponadkrytycznych — jest taka postać wstępnego ugięcia, jaką pierwotnie płaska płyta przyjmuje po utracie stateczności. W rozpatrywanym przypadku podparcia i obciążenia postać taką można przedstawić jako wynik nałożenia się jednej półfali sinusoidy w kierunku osi  $0x$  z układem  $i$  półfal w kierunku poprzecznym. Założenie takie według [4] jest słuszne w odniesieniu do płyt, dla których stosunek długości krawędzi  $a/b \leq 0,95$ . Zakłada się ponadto, że w miarę wzrostu wartości parametru obciążenia  $k_0$  powyżej wartości krytycznej, zmiana pierwotnie płaskiej postaci płyty zachodzi stopniowo: w pierwszym przybliżeniu płyta przyjmuje po wyobczeniu kształt będący wynikiem kombinacji jednej półfali sinusoidy w kierunku osi  $0x$  z dwiema półfalami wzdłuż osi  $0y$ , w drugim przybliżeniu — jednej półfali wzdłuż osi  $0x$  z trzema półfalami wzdłuż osi  $0y$  itd. [3].

W rozpatrywanym zagadnieniu założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej płyty w postaci odpowiadającej pierwszemu przybliżeniu. Może on być zatem opisany za pomocą następującej, dwuparametrowej funkcji wstępnej ugięcia

$$(2.2) \quad w_0 = \sin \frac{\pi x}{a} \left[ f_1^{(0)} \sin \frac{\pi y}{b} + f_2^{(0)} \sin \frac{2\pi y}{b} \right].$$

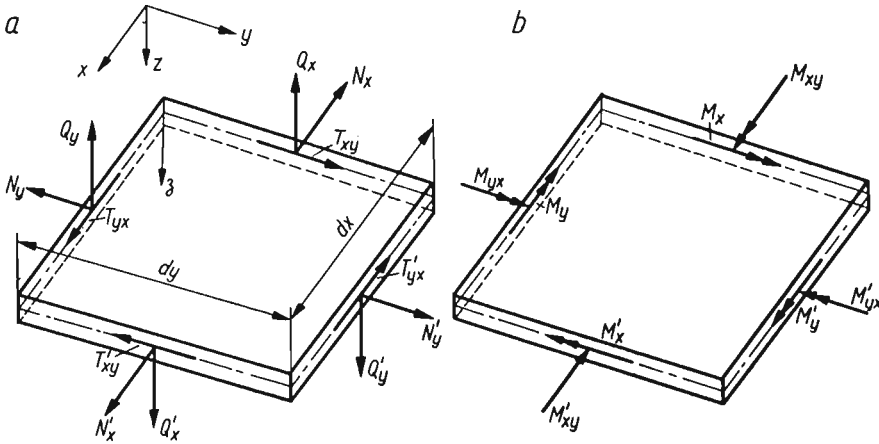
W wyrażeniu tym stałe  $a$  i  $b$  są długościami krawędzi płyty, zaś  $f_1^{(0)}$  i  $f_2^{(0)}$  są nieznanymi parametrami ugięcia. Parametr  $f_1^{(0)}$  równy jest przesunięciu (wzdłuż normalnej  $z$ ) środka płyty z płaszczyzny  $xy$ , wyznaczonej przez krawędzie jej powierzchni środkowej.

Postawione zagadnienie zostanie rozwiązane w oparciu o nieliniową teorię płyt. Pod wpływem przyłożonego obciążenia powierzchnia środkowa płyty ulega odkształceniu, a jej poszczególne punkty odpowiednim przemieszczeniom. Składowe stanu przemieszczenia dowolnego punktu  $A$  powierzchni środkowej płyty wzdłuż kierunków  $x$ ,  $y$  oraz  $z$  oznaczono odpowiednio przez  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  oraz  $w = w(x, y)$ . Składowa  $w$  przemieszczenia w kierunku normalnej do powierzchni środkowej płyty odpowiada pełnemu ugięciu płyty w stosunku do płaszczyzny  $xy$ , a więc wstępnemu  $w_0$  zwiększonemu o dodatkowe ugięcie  $w_1$ , wywołane danym obciążeniem.

Odpowiednio składowe stanu odkształcenia oznaczono przez  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  i  $\gamma_{xy}$ . Składowe te wyrażają się za pomocą składowych stanu przemieszczenia  $u$ ,  $v$  i  $w$  związkami, które przy uwzględnieniu dużych ugięć płyty mają następującą postać [2]:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned}$$

Jeżeli z otoczenia dowolnego punktu  $A$  wydzielimy element płyty o dowolnie małych długościach  $dx$  i  $dy$  krawędzi, wycięty płaszczyznami równoległymi do płaszczyzn  $xz$  i  $zy$ , to do krawędzi tego elementu należy przyłożyć następujące siły przekrojowe: siły normalne



Rys. 2. Siły przekrojowe na krawędziach wyciętego elementu płyty

$N_x$  i  $N_y$ , siły styczne  $T_{xy} = T_{yx} = T$ , siły poprzeczne  $Q_x$  i  $Q_y$ , momenty gnące  $M_x$  i  $M_y$ , oraz momenty skręcające  $M_{xy}$  i  $M_{yx}$ . Siły te, zredukowane do powierzchni środkowej wyciętego elementu i odniesione do jednostki długości jego krawędzi, przedstawiono na rysunkach 2a i 2b.

Momenty gnące i skręcające oraz siły poprzeczne zależą od przyrostu ugięcia płyty i wyrażają się następującymi wzorami [1, 2]:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w - w_0) \right], \\ M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (w - w_0) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w - w_0) \right], \\ M_{xy} &= M_{yx} = -(1 - \nu) D \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w - w_0), \end{aligned}$$

oraz

$$(2.5) \quad \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} [\nabla^2 (w - w_0)], \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} [\nabla^2 (w - w_0)]. \end{aligned}$$

We wzorach tych  $D$  oznacza płytową sztywność zginania

$$(2.6) \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Natomiast błonowe siły wewnętrzne  $N_x, N_y$  i  $T$  określono za pomocą funkcji naprężeń Airy'ego  $\Phi = \Phi(x, y)$  wzorami [1, 2]

$$(2.7) \quad N_x = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad T = -h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

W ten sposób wszystkie siły wewnętrzne wyrażają się za pomocą bądź funkcji naprężeń Airy'ego  $\Phi = \Phi(x, y)$ , bądź funkcji  $(w - w_0)$  przyrostu ugięcia płyty, wywołanego przyłożonym obciążeniem.

Funkcje te związane są ze sobą układem dwóch nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych noszących nazwę równań Karmana [1,2]. Dla rozpatrywanego zagadnienia równania te mają postać

$$(2.8) \quad \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

oraz

$$(2.9) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{E}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)].$$

W równaniach powyższych symbolem  $\nabla^2 \nabla^2$  oznaczono podwójny operator różniczkowy Laplace'a

$$(2.10) \quad \nabla^2 \nabla^2 (\dots) = \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (\dots)}{\partial y^4},$$

symbol zaś  $L$  w równaniu (2.9) jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu o postaci

$$(2.11) \quad L(\dots) = 2 \left[ \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 (\dots)}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$



Związki (2.8) i (2.9) stanowią podstawowy układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, służący do rozwiązywania zagadnień płyt o dużych ugięciach, z uwzględnieniem ich ugięcia wstępnego. Rozwiązanie tego układu równań, które na ogół daje się uzyskać jedynie metodami przybliżonymi, pozwala na określenie funkcji naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$  oraz funkcji ugięcia  $w = w(x, y)$ . Wyznaczenie zaś następnie z ich pomocą wszystkich wielkości określających stan naprężenia i odkształcenia rozpatrywanej płyty daje możliwość oceny wpływu wstępnego ugięcia płyty na jej stan końcowy.

### 3. Rozwiązanie zagadnienia

Celem uzyskania rozwiązania postawionego zagadnienia w oparciu o równania (2.8) i (2.9) założono taką postać funkcji  $w = w(x, y)$  określającą końcowe ugięcie płyty w stosunku do płaszczyzny  $xy$ , aby opisywała ona — z możliwie dobrym przybliżeniem — kształt, jaki przyjmie płyta pod wpływem danego obciążenia. Zgodnie ze wstępnymi uwagami dla funkcji tej przyjęto identyczną postać, jak dla funkcji ugięcia wstępnego  $w_0$

$$(3.1) \quad w = \sin \frac{\pi x}{a} \left[ f_1 \sin \frac{\pi y}{b} + f_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \right].$$

Współczynniki  $f_1$  i  $f_2$  występujące w powyższym wyrażeniu są nieznanymi parametrami ugięcia, przy czym współczynnik  $f_1$  przedstawia ugięcie środka płyty.

Przyjęta funkcja wstępnego ugięcia  $w_0 = w_0(x, y)$ , jak i funkcja końcowego ugięcia płyty  $w = w(x, y)$ , spełniają założone warunki swobodnego podparcia krawędzi płyty. Jak wynika bowiem z wyrażen (2.2) i (3.1),

$$(3.2) \quad \begin{aligned} (w_0)_{x=0} = (w_0)_{x=a} = (w_0)_{y=0} = (w_0)_{y=b} = 0, \\ (w)_{x=0} = (w)_{x=a} = (w)_{y=0} = (w)_{y=b} = 0, \end{aligned}$$

na podstawie zaś związku (2.4) zachodzi

$$(3.3) \quad (M_x)_{x=0} = (M_x)_{x=a} = 0, \quad (M_y)_{y=0} = (M_y)_{y=a} = 0.$$

Dla wyznaczenia przybliżonej postaci funkcji naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$ , za pomocą której określone są błonowe siły przekrojowe  $N_x$ ,  $N_y$  i  $T$ , wykorzystano równanie (2.9), które — przy uwzględnieniu wyrażen (2.2) i (3.1) — przyjmie postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 (\Phi) = \frac{\pi^4 E}{4a^2 b^2} \left\{ 2(f_1^2 - f_1^{(0)2}) \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right) + \right. \\ \left. + (f_1 f_2 - f_1^{(0)} f_2^{(0)}) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + 9 \cos \frac{3\pi y}{b} + \left( 9 \cos \frac{\pi y}{b} - \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\ \left. + 8(f_2^2 - f_2^{(0)2}) \left( \cos \frac{2\pi x}{a} + \cos \frac{4\pi y}{b} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Jeżeli do powyższego równania wprowadzić następujące współczynniki bezwymiarowe:

$\lambda = a/b$  — współczynnik kształtu płyty;

$\xi_0 = f_1^{(0)}/h$  — współczynnik wstępnego ugięcia płyty, zredukowanego w stosunku do jej grubości;

(3.5)  $\xi = f_1/h$  — współczynnik końcowego ugięcia płyty, zredukowanego w stosunku do jej grubości;

$\psi_0 = f_2^{(0)}/f_1^{(0)}$ ,  $\psi = f_2/f_1$ ,

to funkcja naprężeń  $\Phi = \Phi(x, y)$ , która jest ogólnym rozwiązaniem tego równania, będzie miała postać:

$$(3.6) \quad \Phi(x, y) = \frac{Eh^2}{4\lambda^2} \left\{ \frac{\lambda^4}{8} [(\xi^2 - \xi_0^2) + 4(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2)] \cos \frac{2\pi x}{a} + \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{8} \cos \frac{2\pi y}{b} + \right. \\ \left. + (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{9} \cos \frac{3\pi y}{b} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{9}{(1+4/\lambda^2)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9+4/\lambda^2)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2)}{32} \cos \frac{4\pi y}{b} \right\} - \frac{1}{2} k_0 y^2 \left( 1 - \alpha \frac{y}{3b} \right).$$

Ostatni człon powyższego wyrażenia jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$(3.7) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0.$$

Błonowe siły przekrojowe  $N_x$ ,  $N_y$  i  $T$  wyrażają się za pomocą funkcji naprężeń  $\Phi(x, y)$  związkami (2.7). Wykorzystując zatem wyrażenie (3.6) otrzymujemy

$$(3.8) \quad N_x = -\frac{\pi^2 Eh^3}{4\lambda^2 b^2} \left\{ \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{2} \cos \frac{2\pi y}{b} + (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{3\pi y}{b} + \right. \right. \\ \left. \left. + 9\lambda^4 \left( \frac{1}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2)}{2} \cos \frac{4\pi y}{b} \right\} - k_0 h \left( 1 - \frac{\alpha}{b} y \right), \\ N_y = -\frac{\pi^2 \lambda^2 Eh^3}{8a^2} \left\{ (\xi^2 - \xi_0^2) + 4(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2) + \right. \\ \left. + 8(\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ \frac{9}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right] \right\} \cos \frac{2\pi x}{a}, \\ T = -\frac{3\pi^2 \lambda^2 Eh^3}{2ab} (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left[ \frac{3}{(\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right] \sin \frac{2\pi x}{a}.$$

Trzecie z otrzymanych powyżej wyrażen staje się równe zeru dla  $x = 0$  i  $x = a$  oraz  $y = 0$  i  $y = b$ . Stąd wynika, że na obwodzie płyty nie ma sił stycznych  $T$  zgodnie z przyjętymi uprzednio założeniami dotyczącymi jej podparcia i obciążenia. Siły normalne  $N_x$  i  $N_y$  spełniają warunki obciążenia krawędzi płyty w sposób całkowity. Dla stanu początkowego, to znaczy gdy  $\xi = \xi_0$  oraz  $\psi = \psi_0$ , jest

$$N_x = -k_0 h \left( 1 - \frac{\alpha}{b} y \right); \quad N_y = 0.$$

Obciążenie krawędzi płyty siłami  $N_x$  i  $N_y$  sprowadza się zatem do pierwotnego, liniowo zmiennego rozkładu sił przyłożonych jedynie do krawędzi  $x = 0$  i  $x = a$  (rys. 1). Natomiast po utracie stateczności, gdy wartość liczbowa parametru  $k_0$  obciążenia tych krawędzi przekroczy wartość krytyczną, stan obciążenia wszystkich krawędzi płyty ulega zmianie.

Mianowicie rozkład sił  $N_x$  wzdłuż krawędzi  $x = 0$  i  $x = a$  zachowuje liniowy charakter pierwotnego obciążenia jedynie w rozciąganej części płyty. W części ściskanej zaś występuje wyraźne odstępstwo od rozkładu liniowego, rosnące wraz ze wzrostem ugięcia płyty. Maksymalna wartość obciążenia w tej części płyty jest większa od wartości wynikającej z rozkładu liniowego. Na pozostałych krawędziach płyty pojawia się natomiast zrównoważony rozkład sił  $N_y$ , zmieniających się wzdłuż krawędzi według funkcji  $\cos 2\pi x/a$ . Maksymalne wartości tych sił na krawędzi  $y = 0$  są kilkakrotnie większe od odpowiednich wartości na krawędzi  $y = b$  [3].

Omówione powyżej siły powstają na skutek zachowania prostoliniowości krawędzi płyty. Można wykazać, że przy założonych postaciach funkcji ugięcia wstępnego (2.2) i końcowego (3.1) oraz otrzymanej postaci funkcji naprężeń (3.6), przyjęte na wstępie założenie zachowania prostoliniowości tych krawędzi jest w rozpatrywanym zagadnieniu spełnione.

Odpowiadające powyższym siłom przekrojowym składowe  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  stanu naprężenia w powierzchni środkowej płyty można wyrazić za pomocą następujących bezwymiarowych współczynników [3]:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x \frac{a^2}{Eh^2} = \frac{N_x a^2}{Eh^3}, \\ \sigma_y^* &= \sigma_y \frac{b^2}{Eh^2} = \frac{N_y b^2}{Eh^3}, \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy} \frac{b^2}{Eh^2} = \frac{Tb^2}{Eh^3}. \end{aligned}$$

Jeśli ponadto dla parametru obciążenia  $k_0$  przyjąć również bezwymiarowy współczynnik o postaci [3]

$$(3.10) \quad k_0^* = k_0 \frac{a^2}{Eh^2},$$

to bezwymiarowe współczynniki (3.9) błonowego stanu naprężenia będą, przy wykorzystaniu związków (3.8), określone następującymi wzorami:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \sigma_x^* &= -\frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{(\xi^2 - \xi_0^2)}{2} \cos \frac{2\pi y}{b} + (\xi^2 \psi - \xi_0^2 \psi_0) \left[ -\cos \frac{\pi y}{b} + \cos \frac{3\pi y}{b} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 9\lambda^4 \left( \frac{1}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\xi^2 \psi^2 - \xi_0^2 \psi_0^2)}{2} \cos \frac{4\pi y}{b} \right\} - k_0^* \left( 1 - \frac{\alpha}{b} y \right), \\ \sigma_y^* &= -\pi^2 \left\{ \frac{1}{8} [(\xi^2 - \xi_0^2) + 4(\xi^2 \psi^2 - \xi_0^2 \psi_0^2)] + \right. \\ &\quad \left. + (\xi^2 \psi - \xi_0^2 \psi_0) \left[ \frac{9}{(\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \cos \frac{3\pi y}{b} \right] \right\} \cos \frac{2\pi x}{a}, \\ \tau_{xy}^* &= -\frac{3}{2} \pi^2 \lambda (\xi^2 \psi - \xi_0^2 \psi_0) \left[ \frac{3}{(\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{\pi y}{b} - \frac{1}{(9\lambda^2 + 4)^2} \sin \frac{3\pi y}{b} \right] \sin \frac{2\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Momenty gnące  $M_x$  i  $M_y$  oraz moment skręcający  $M_{xy}$ , powstające w wyniku zmiany krzywizny płyty wywołanej przyłożonym obciążeniem, dadzą się również wyrazić za pomocą bezwymiarowych współczynników o postaci [3]

$$(3.12) \quad M_x^* = \frac{M_x}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \quad M_y^* = \frac{M_y}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \quad M_{xy}^* = \frac{M_{xy}}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2.$$

Na podstawie wzorów (2.4) oraz wyrażeń (2.2) (3.1) i (3.5) powyższe współczynniki określone będą, po wprowadzeniu do nich współczynników zdefiniowanych wyrażeniami (3.5), następującymi wzorami

$$(3.13) \quad \begin{aligned} M_x^* &= \frac{\pi^2 \lambda}{12(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0)(1 + \nu \lambda^2) \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\ &\quad \left. + (\xi \psi - \xi_0 \psi_0)(1 + 4\nu \lambda^2) \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi x}{a}, \\ M_y^* &= \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0)(\lambda^2 + \nu) \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\ &\quad \left. + (\xi \psi - \xi_0 \psi_0)(4\lambda^2 + \nu) \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \sin \frac{\pi x}{a}, \\ M_{xy}^* &= -\frac{\pi^2 \lambda}{12(1-\nu^2)} \left[ (\xi - \xi_0) \cos \frac{\pi y}{b} + 2(\xi \psi - \xi_0 \psi_0) \cos \frac{2\pi y}{b} \right] \cos \frac{\pi x}{a}. \end{aligned}$$

Momenty  $M_x$ ,  $M_y$  i  $M_{xy}$  są wypadkowymi odpowiednich składowych dodatkowego, zgięciowego stanu naprężenia, a ich maksymalne wartości określone są za pomocą wzorów

$$(3.14) \quad (\sigma_{xg})_{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (\sigma_{yg})_{\max} = \frac{6M_y}{h^2}, \quad (\tau_g)_{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}.$$

Dla powyższych wielkości można również wprowadzić bezwymiarowe współczynniki o postaci [3]

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{xg}^* &= \frac{(\sigma_{xg})_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \\ \sigma_{yg}^* &= \frac{(\sigma_{yg})_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \\ \tau_g^* &= \frac{(\tau_g)_{\max}}{E} \left( \frac{a}{h} \right)^2, \end{aligned}$$

które, przy wykorzystaniu wyrażeń (3.6), określone będą następująco [3]:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \sigma_{xg}^* &= \frac{6M_x}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_x^*, \\ \sigma_{yg}^* &= \frac{6M_y}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_y^*, \\ \tau_g^* &= \frac{6M_{xy}}{Eh^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 = 6M_{xy}^*. \end{aligned}$$

Wprowadzając współczynniki  $\xi_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\xi$  i  $\psi$  do wyrażeń (2.2) i (3.1), można funkcje  $w_0$  i  $w$ , zarówno wstępnego jak i końcowego ugięcia płyty, wyrazić również bezwymiarowymi współczynnikami o postaci [3]

$$(3.17) \quad w_0^* = \frac{w_0}{h} = \xi_0 \sin \frac{\pi x}{a} \left[ \sin \frac{\pi y}{b} + \psi_0 \sin \frac{2\pi y}{b} \right]$$

oraz

$$(3.18) \quad w^* = \frac{w}{h} = \xi \sin \frac{\pi x}{a} \left[ \sin \frac{\pi y}{b} + \psi \sin \frac{2\pi y}{b} \right].$$

A zatem dla pełnego określenia stanu naprężenia i odkształcenia płyty konieczne jest wyznaczenie bezwymiarowych współczynników  $\psi$  i  $k_0^*$  w zależności od współczynników wstępnego ugięcia  $\xi_0$  i  $\psi_0$  — dla różnych wartości współczynnika  $\xi$  ugięcia końcowego płyty. Wykorzystamy w tym celu równanie (2.8), które rozwiążemy stosując metodę Galerkina. W rozpatrywanym przypadku muszą być spełnione następujące dwa równania:

$$(3.19) \quad \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0,$$

$$\int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} dx dy = 0,$$

w których symbolem  $X$  oznaczono niżej podany operator różniczkowy względem funkcji  $\Phi$ ,  $w_0$  i  $w$ ,

$$(3.20) \quad X = D \cdot \nabla^2 \nabla^2 (w - w_0) - h \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right].$$

Po wstawieniu do równań (3.19) odpowiednich pochodnych funkcji ugięcia  $w_0$  i  $w$  oraz funkcji naprężeń  $\Phi$  i wprowadzeniu do nich bezwymiarowych współczynników  $\xi_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\xi$ ,  $\psi$  i  $k_0^*$ , przyjmą one następującą postać:

$$(3.21) \quad \frac{\pi^2(1+\lambda^2)^2}{48(1-\nu^2)} (\xi - \xi_0) + \frac{\pi^2}{64} \xi \left[ (1+\lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2 + 4\xi^2\psi^2) - 4\xi_0^2\psi_0(\psi + \lambda^4\psi_0) + \right. \\ \left. + \psi(\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \cdot \left( \frac{225}{(1+4/\lambda^2)^2} + \frac{49}{(9+4/\lambda^2)^2} \right) \right] - k_0^* \xi \left( \frac{2-\alpha}{8} + \frac{4\alpha}{9\pi^2} \psi \right) = 0,$$

$$(3.22) \quad \frac{\pi^2(1+4\lambda^2)^2}{48(1-\nu^2)} (\xi\psi - \xi_0\psi_0) + \frac{\pi^2}{64} \xi \left[ 4\lambda^4\psi(\xi^2 - \xi_0^2) + (1+16\lambda^4)\psi(\xi^2\psi^2 - \xi_0^2\psi_0^2) + \right. \\ \left. + (\xi^2\psi - \xi_0^2\psi_0) \left( 4 + \frac{9}{(1+4/\lambda^2)^2} + \frac{25}{(9+4/\lambda^2)^2} \right) \right] - k_0^* \xi \left( \frac{2-\alpha}{8} \psi + \frac{4\alpha}{9\pi^2} \right) = 0.$$

Po wyrugowaniu z tych równań bezwymiarowego współczynnika obciążenia  $k_0^*$  otrzymuje się w przypadku czystego zginania ( $\alpha = 2$ ) następujące równanie czwartego stopnia względem współczynnika  $\psi$ :

$$(3.23) \quad (1 + 16\lambda^4)\xi^3\psi^4 + \xi \left[ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} - 4\lambda^4\xi_0^2 - \right. \\ \left. - (1 + 16\lambda^4)\xi_0^2\psi_0^2 - \lambda^4\xi^2 \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \psi^2 + \\ + \xi_0\psi_0 \left[ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} + \lambda^4\xi\xi_0 \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \psi - \\ - \xi \left[ (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) + \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} - 4\lambda^4\xi_0^2\psi_0^2 \right] = 0.$$

Bezwymiarowy współczynnik obciążenia  $k_0^*$ , w zależności od tych samych współczynników bezwymiarowych (3.5), wyraża się przy  $\alpha = 2$  następującym wzorem:

$$(3.24) \quad k_0^* = \frac{9\pi^4}{512\psi} \left\{ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} + (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) - 4\lambda^4\xi_0^2\psi_0^2 + \right. \\ \left. + \xi^2 \left[ 4(1 + \lambda^4) + \frac{225}{(1 + 4/\lambda^2)^2} + \frac{49}{(9 + 4/\lambda^2)^2} \right] \psi^2 - \right. \\ \left. - \xi_0^2\psi_0 \left[ 4 + \frac{225}{(1 + 4/\lambda^2)^2} + \frac{49}{(9 + 4/\lambda^2)^2} \right] \psi \right\}.$$

Kładąc w powyższych równaniach (3.23) i (3.24)  $\xi_0 = 0$  oraz  $\psi_0 = 0$  otrzymamy następujące związki, mające zastosowanie dla płyty zginanej w swej płaszczyźnie lecz pozbawionej wstępnego ugięcia  $w_0$ :

$$(3.25) \quad (1 + 16\lambda^4)\xi^2\psi^4 + \left[ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} - \lambda^4\xi^2 \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \psi^2 - \\ - \left[ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} + (1 + \lambda^4)\xi^2 \right] = 0;$$

$$(3.26) \quad (k_0^*)_{\substack{\xi_0=0 \\ \psi_0=0}} = \frac{9\pi^4}{128\psi} \left\{ \frac{(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} + \frac{\xi^2}{4} \left[ (1 + \lambda^4)(1 + 4\psi^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda^4 \left( \frac{225}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{49}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \psi^2 \right] \right\}.$$

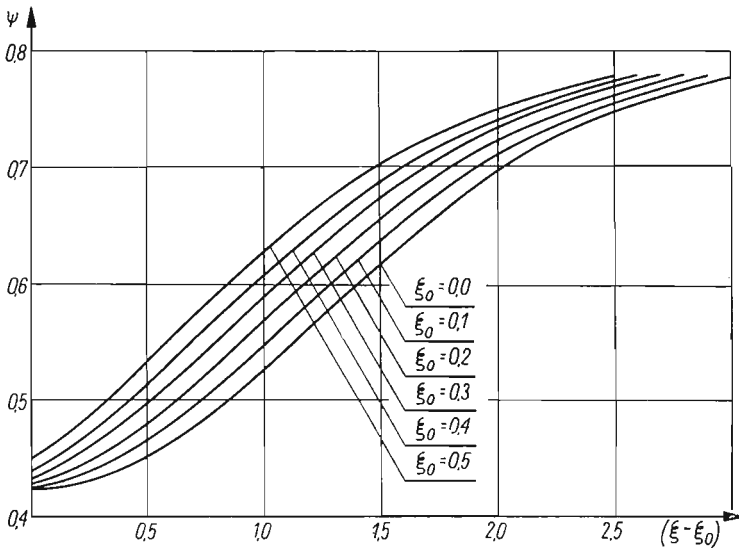
Wzory te odpowiadają przypadkowi rozpatrzonemu w pracy [3] dla pierwszego przybliżenia.

#### 4. Obliczenia liczbowe

Szczegółowe obliczenia liczbowe dotyczą płyty o współczynniku kształtu  $\lambda = a/b = 0,9$ . Dla materiału płyty przyjęto liczbę Poissona  $\nu = 0,3$ . Obliczenia przeprowadzono zakładając szereg wartości dla współczynnika  $\xi$  (od  $\xi = 0,1$  do 3,0), a następnie przyjmując

dla każdej z nich kilka kolejnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (od  $\xi_0 = 0,01$  do  $0,5$ ) oraz odpowiadających im wartości współczynnika  $\psi_0$ . Dla przyjmowanych wartości współczynników  $\xi_0$  zachowano warunek  $\xi_0 \leq \xi$ , wartości zaś współczynników  $\psi_0$  wyznaczono z równania (3.25) odpowiadającego przypadkowi płyty bez ugięcia wstępnego. Przyjęto zatem, że  $\psi_0 = (\psi)_{\xi_0=0}$ . Takie przyjęcie odpowiada najniekorzystniejszemu przypadkowi, w którym wstępne ugięcie powierzchni środkowej płyty ma taką postać, jaką początkowo płaska płyta przyjmuje po utracie stateczności.

Wartości liczbowe współczynników  $\psi$ , w zależności od założonych wartości współczynnika  $\xi$ , wyznaczone zostały na podstawie równania (3.23) dla różnych wartości współczynników  $\xi_0$  ugięcia wstępnego. Następnie w taki sam sposób wyznaczono wartości bezwymiarowego współczynnika  $k_0^*$  na podstawie równania (3.24). Obliczenia liczbowe wykonane zostały na maszynie cyfrowej ZAM-2, a wyniki przedstawione na wykresach.

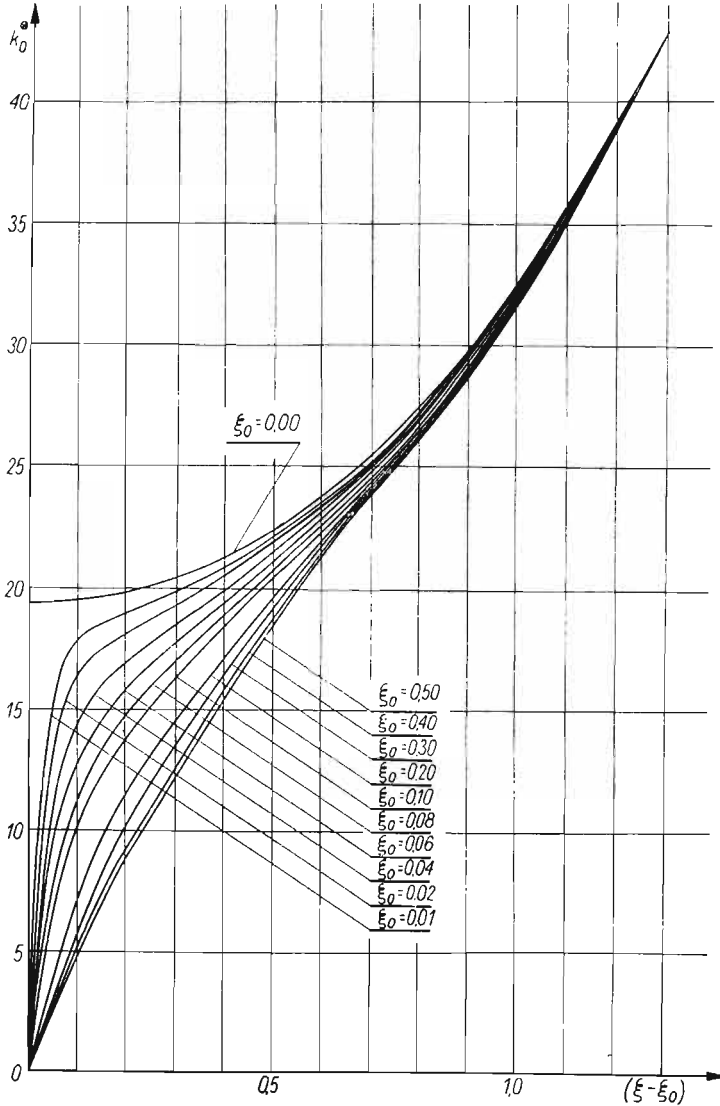


Rys. 3. Wykresy zależności  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia płyty

Na rys. 3 podano wykresy funkcji  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynników  $\xi_0$  ugięcia wstępnego. Wszystkie krzywe charakteryzują się podobnym do siebie przebiegiem w zakresie zbadanej zmienności przyrostu ugięcia płyty, określonego odciętą  $(\xi - \xi_0)$ . Dla każdej wartości tej odciętej rzędne krzywych rosną wraz ze wzrostem wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia płyty. Oznacza to, że im większe jest wstępne ugięcie płyty, tym odpowiednio większa jest amplituda dwóch półfal sinusoidy nałożonych na ugiętą powierzchnię środkową płyty wzdłuż osi  $Oy$ , reprezentowanych drugim członem wyrażenia (3.1). Amplituda ta jest najmniejsza wówczas, gdy płyta jest początkowo płaska.

Przebieg krzywych  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego przedstawiono na rys. 4. Krzywa górna przedstawia krytyczne wartości współczynnika obciążenia  $(k_0^*)_{\xi_0=0,00}$  odpowiadające płycie bez ugięcia wstępnego. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika  $\xi_0 = 0,01, \dots, 0,5$ , od-

biegają znacznie od siebie aż do wartości odciętej  $(\xi - \xi_0) \approx 1,1$ . Powyżej tej wartości wszystkie krzywe asymptotycznie dążą do krzywej  $\xi_0 = 0,00$ . Wynika stąd, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia wstępnego, wpływ tego ugięcia praktycznie zanika już wówczas, gdy całkowite ugięcie płyty wynosi nieco powyżej półtoręj grubości płyty.



Rys. 4. Wykresy zależności współczynnika obciążenia  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  wstępnego ugięcia płyty

##### 5. Porównawcza analiza z płytą o wstępnym jednostronnym wybrzuszeniu

Celem porównania otrzymanych wyników rozpatrzono drugi przypadek płyty podpartej i obciążonej identycznie jak płyta dotychczas rozpatrywana, dla której założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej w postaci jednostronnego wybrzuszenia,



najczęściej występującego w praktyce. W tym przypadku ugiętą wstępnie powierzchnię środkową płyty można opisać wyrażeniem, przedstawiającym nałożenie się jednej półfali sinusoidy zarówno wzdłuż osi  $Ox$ , jak i osi  $Oy$  przyjętego (rys. 1) układu współrzędnych.

Funkcji  $w_0$ , określającej kształt ugiętej powierzchni środkowej płyty przed jej obciążeniem, można zatem nadać postać

$$(5.1) \quad w_0 = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

gdzie  $f_0$  jest parametrem równym wstępnemu wychyleniu środka płyty z płaszczyzny  $xy$ . Funkcja ta ma postać identyczną z wyrażeniem (2.2) po przyjęciu  $f_2^{(0)} = 0$ .

Do dalszych rozważań przyjęto, że pod wpływem przyłożonego obciążenia powierzchnia środkowa płyty przyjmie kształt opisany równaniem (3.1). Wówczas odpowiednie związki i równania dla rozważanego obecnie przypadku można uzyskać z odpowiadających związków i równań, otrzymanych dla przypadku poprzednio rozpatrzonego, przyjmując w nich, że parametr  $f_2^{(0)}$ , lub odpowiadający mu współczynnik bezwymiarowy  $\psi_0 = f_2^{(0)}/f_1^{(0)}$  są równe zero. W szczególności równanie służące do wyznaczenia bezwymiarowego współczynnika  $\psi$ , występującego w równaniu (3.18) końcowego ugięcia powierzchni środkowej płyty, przyjmie postać następującego dwukwadratowego równania względem tego współczynnika:

$$(5.2) \quad (1 + 16\lambda^4) \xi^2 \psi^4 + \left\{ \frac{4(1 + 4\lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} - \lambda^4 \left[ 4\xi_0^2 + \left( \frac{216}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{24}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \xi^2 \right] \right\} \psi^2 - \left[ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} + (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) \right] = 0.$$

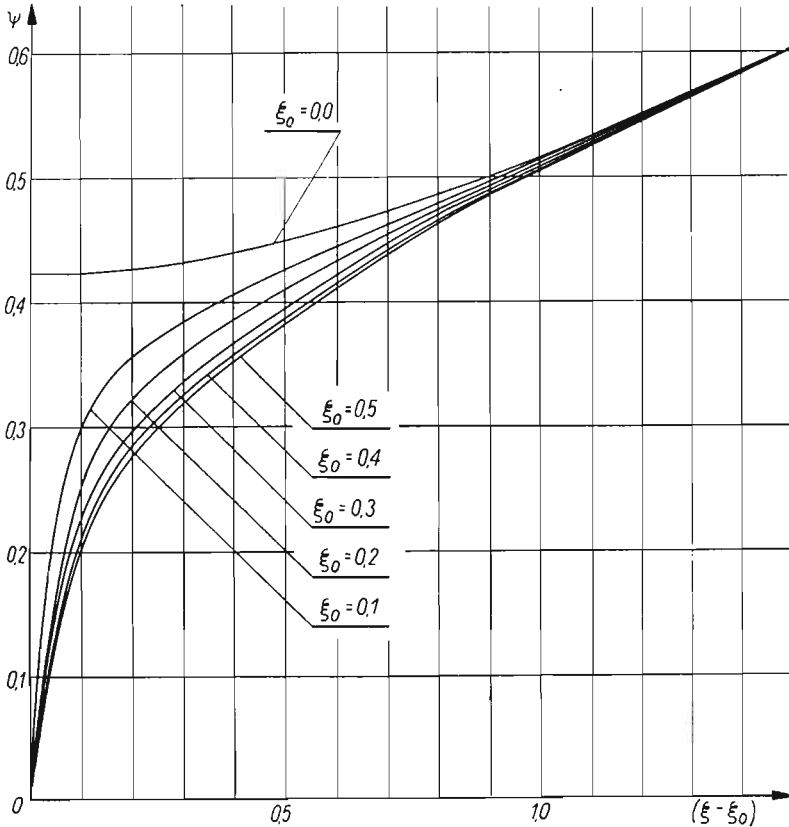
Bezwymiarowy współczynnik obciążenia  $k_\xi^*$ , określony poprzednio związkiem (3.24), wyrażać się będzie następująco:

$$(5.3) \quad k_\xi^* = \frac{9\pi^4}{512\psi} \left\{ \frac{4(1 + \lambda^2)^2}{3(1 - \nu^2)} \frac{(\xi - \xi_0)}{\xi} + (1 + \lambda^4)(\xi^2 - \xi_0^2) + \left[ 4 + \lambda^4 \left( 1 + \frac{225}{(\lambda^2 + 4)^2} + \frac{49}{(9\lambda^2 + 4)^2} \right) \right] \xi^2 \psi^2 \right\}.$$

Obliczenia liczbowe tych współczynników przeprowadzono zakładając te same jak poprzednio wartości współczynnika kształtu płyty  $\lambda$  oraz liczby Poissona  $\nu$ . Dla bezwymiarowego współczynnika ugięcia wstępnego  $\xi_0$  przyjęto wartości zmieniające się w granicach od  $\xi_0 = 0,1$  do  $0,5$ . Dla współczynnika  $\xi$  końcowego ugięcia płyty przyjęto wartości  $\xi = 0,1, \dots, 2,5$ . Obliczenia przeprowadzono przy zachowaniu warunku  $\xi_0 \leq \xi$ .

Otrzymane wyniki zilustrowano na następujących dwóch wykresach: pierwszy z nich, podany na rys. 5, przedstawia zależność współczynnika  $\psi$  od bezwymiarowo potraktowanego przyrostu ugięcia płyty, wywołanego przyłożonym obciążeniem; jest to więc zależność  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$ .

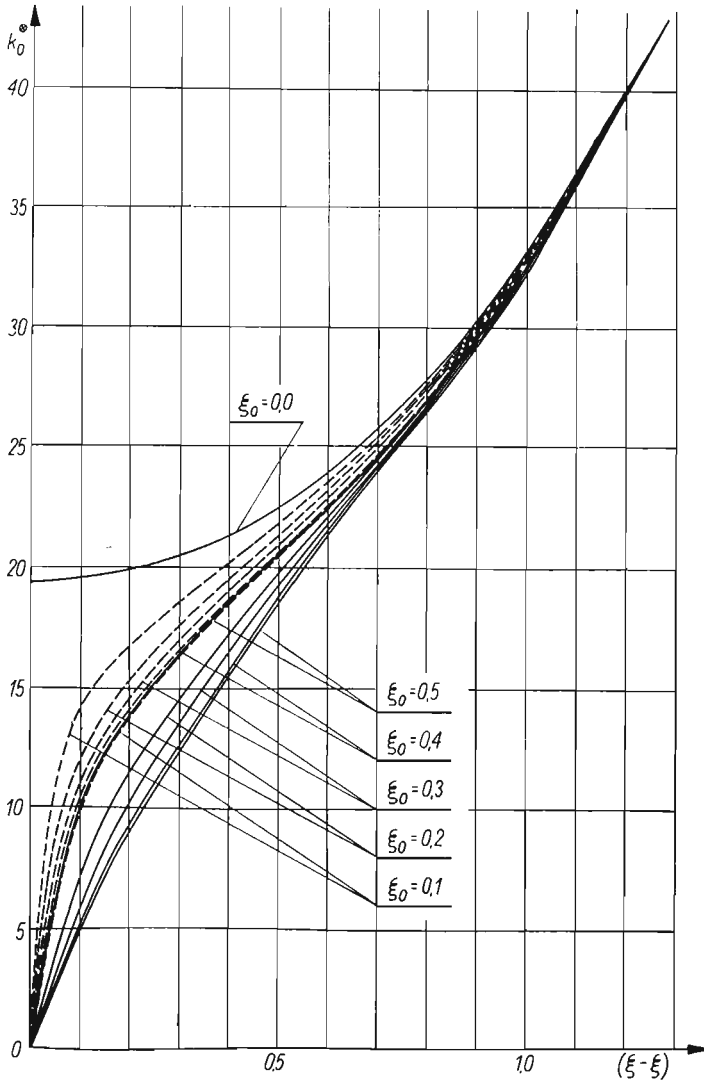
Górna krzywa, dla  $\xi_0 = 0,0$ , odpowiada wstępnie płaskiej postaci płyty. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (dla  $\xi_0 = 0,1, \dots, 0,5$ ), przebiegają poniżej tej krzywej. Wynika stąd, że — w przeciwieństwie do poprzednio rozpatrywanego przypadku — gdy płyta ma ugięcie wstępne w postaci jednostronnego wybrzuszenia, to amplituda dwóch półfal sinusoidy określonych drugim członem funkcji (3.1) końcowego ugięcia płyty, jest mniejsza niż w tym przypadku, gdy płyta jest początkowo idealnie płaska.



Rys. 5. Wykres zależności  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  i dla przypadku płyty z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

Wszystkie omawiane krzywe dla  $\xi_0 \neq 0,0$  zbliżają się asymptotycznie do krzywej dla  $\xi_0 = 0,0$ , przy czym różnice rzędnych między nimi praktycznie znikają począwszy od wartości odciętej  $(\xi - \xi_0) \approx 1,1$ . Na rysunku 6 przedstawiono przebieg zmian bezwymiarowego współczynnika obciążenia  $k_0^*$  w zależności od przyrostu ugięcia  $(\xi - \xi_0)$  dla kolejnych wartości współczynnika  $\xi_0$  ugięcia wstępnego (linie przerywane). Krzywe te przebiegają podobnie jak krzywe  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$  na rys. 5. Krzywa górna, dla  $\xi_0 = 0,0$ , odnosi się do płyty o początkowo płaskiej postaci. Pozostałe krzywe, odpowiadające płytom z ugięciem wstępnym ( $\xi_0 \neq 0$ ), przebiegają poniżej tej krzywej. Przy małych wartościach przyrostu ugięcia płyty różnice rzędnych między tymi krzywymi a krzywą górną

są znaczne. Ze wzrostem zaś ugięcia płyty różnice te maleją, a wszystkie krzywe zbliżają się do krzywej górnej. Dla mniej więcej tej samej wartości odciętej co w wykresie poprzednim dla funkcji  $\psi = \psi(\xi - \xi_0)$ , różnice rzędnych między wszystkimi krzywymi  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  stają się pomijalnie małe. Stąd wynika, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia



Rys. 6. Wykresy zależności współczynnika obciążenia  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  dla różnych wartości współczynnika  $\xi_0$  i dla przypadku płyty z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

wstępnego, wpływ tego ugięcia również i w rozpatrywanym przypadku zanika mniej więcej dla tej samej wartości całkowitego ugięcia płyty co w przypadku poprzednio rozpatrzonym.

Dla uwypuklenia powyższego faktu na rys. 6 naniesiono dodatkowo krzywe  $k_0^* = k_0^*(\xi - \xi_0)$  z rys. 4 (linie ciągłe). Jak widać, wszystkie krzywe ciągłe leżą poniżej odpowia-

dających im krzywych przerywanych (dla tych samych wartości  $\xi_0$ ). A zatem osiągnięcie określonego ugięcia końcowego płyty następuje przy mniejszej wartości obciążenia wówczas, gdy postać wstępnego ugięcia powierzchni środkowej płyty jest bliższa tej postaci, jaką pierwotnie płaska płyta przyjmuje po utracie stateczności.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można wnioskować, że — w zakresie zbadanych wartości ugięcia wstępnego — wpływ tego ugięcia praktycznie zanika, gdy końcowe ugięcie płyty wynosi około 1,6 jej grubości. Wówczas stan naprężenia i odkształcenia różni się pomijalnie mało od stanu jaki (przy danym obciążeniu) panuje w płycie początkowo płaskiej.

W praktyce początkowe ugięcie płyty wynika naogół z przypadkowego, mniej lub więcej nieregularnego pofalowania powierzchni. Temu pofalowaniu mogą odpowiadać zarówno dodatnie jak i ujemne wartości współczynnika  $\psi_0$ . Z punktu widzenia pracy płyty w warunkach obciążenia ponadkrytycznego najbardziej niekorzystne są takie przypadki, gdy pofalowanie związane jest z jednostronnym wybrzuszeniem powierzchni środkowej płyty; zachodzi to dla  $\psi_0 \geq 0$ . Taki rzeczywisty kształt wstępnego ugięcia płyty jednakże tylko w pewnym przybliżeniu odpowiada omówionym w pracy przypadkom.

Z tego też względu wydaje się właściwe, by stan naprężenia i odkształcenia płyty, przy uwzględnieniu jej wstępnego ugięcia, określać na podstawie wzorów odpowiadających przypadkowi najbardziej niekorzystnemu. Jak wynika z przeprowadzonej analizy, należy zatem preferować wzory mające zastosowanie w przypadku, gdy kształt ugiętej wstępnie powierzchni środkowej płyty odpowiada postaci, jaką płyta przyjmuje po utracie stateczności.

#### Literatura cytowana w tekście

1. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Гос. Изд. тех.-теор. лит., Москва 1956.
2. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Изд. Наука, Москва 1967.
3. W. WALCZAK, *Analiza stanu naprężenia tarczy prostokątnej po utracie stateczności, wywołanej zginaniem w płaszczyźnie tarczy*, Arch. Bud. Maszyn, 12, 1 (1962).
4. S. ТИМОШЕНКО, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Company, 1961.

#### Р е з ю м е

#### ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРОГИБА НА РАБОТУ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗГИБАЕМОЙ В СВОЕЙ ПЛОСКОСТИ

В работе выполнен теоретический анализ влияния начального прогиба на напряженное и деформированное состояния прямоугольной изотропной пластинки, свободно подпертой по контуру и изгибаемой в своей плоскости после потери устойчивости. В рассуждениях употребляется функция напряжений Аири  $\Phi(x, y)$ . Приняты соответствующие виды функций начального прогиба  $w_0(x, y)$ , окончательного прогиба  $w(x, y)$  срединной поверхности пластинки, удовлетворяющие краевым условиям задачи. Для определения этих функций использованы дифференциальные уравнения Кармана нелинейной теории пластинок, а для нахождения неизвестных параметров, содержащихся в принятых функциях прогиба применен метод Галеркина. Полученные таким образом формулы, определяющие напряжения и деформации в сверхкритическом состоянии пластинки, выражены затем через безразмерные величины. Численные примеры выполнены для двух различных форм начального прогиба срединной поверхности пластинки; для этих случаев определены условия, при которых влиянием начального прогиба можно пренебречь.

## S u m m a r y

INFLUENCE OF INITIAL DEFLECTIONS ON THE WORK OF A RECTANGULAR PLATE  
SUBJECT TO BENDING IN ITS PLANE

This paper presents a theoretical analysis of the influence of initial deflections on the state of stress and strain in an isotropic, rectangular plate simply supported along the edges and subject to bending in its plane — after the stability loss. The Airy stress function  $\Phi(x, y)$  is introduced, and the form of initial deflection  $w_0(x, y)$  and final deflection  $w(x, y)$  is assumed to satisfy the boundary conditions. These functions are then determined with the aid of the Karman equations of the non-linear plate theory, the unknown parameters appearing in the function of deflection being found by means of the Galerkin method. The final formulas determining the stresses and strains in the post-critical state of the plate are written in terms of dimensionless coefficients. Numerical calculations are performed for two different forms of the initial deflection of the middle surface of the plate; conditions are also derived under which the influence of initial deflections may be disregarded.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1972 r.*

---

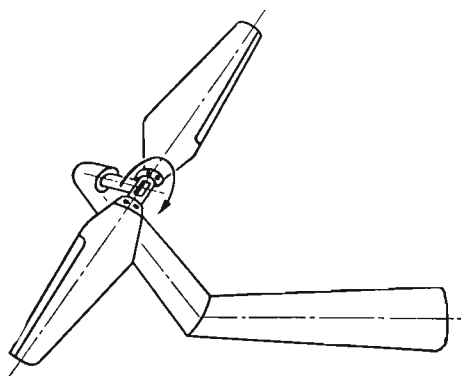


## DRGANIA ŁOPAT ŚMIGŁA\*

JERZY MARYNIAK, WAĆLAW MIERZEJEWSKI, JÓZEF KRUTUL (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Na przykładzie łopaty śmigła ogonowego śmigłowca (rys. 1) przedstawiono obliczenia częstości i postaci drgań własnych. Stosując szereg uproszczeń przyjętego modelu dyskretnego, otrzymane wyniki obliczeń analitycznych [8] porównano z wynikami doświadczalnymi [6].



Rys. 1. Śmigło ogonowe śmigłowca

Zbadano również wpływ obrotów śmigła na częstości i postaci drgań własnych [9] i porównano z otrzymanymi postaciami dla łopaty utwierdzonej sztywno.

Znajomość częstości i postaci drgań własnych mogą służyć jako dane wyjściowe do obliczeń dynamicznych, np. określenia krytycznej prędkości flutteru, jak również jako dane porównawcze dla nowych konstrukcji lub weryfikacji już gotowych produktów. Łopaty śmigła posiadające identyczne rozkłady węzłów i te same częstości dla szeregu postaci drgań własnych muszą nie tylko posiadać podobieństwo geometryczne, ale i zbliżony rozkład mas i sztywności.

Częstości i postaci drgań własnych można wyznaczyć na drodze eksperymentu poprzez próby rezonansowe stosując metody przedstawione w pracach [1], [2], jak również na drodze obliczeń analitycznych.

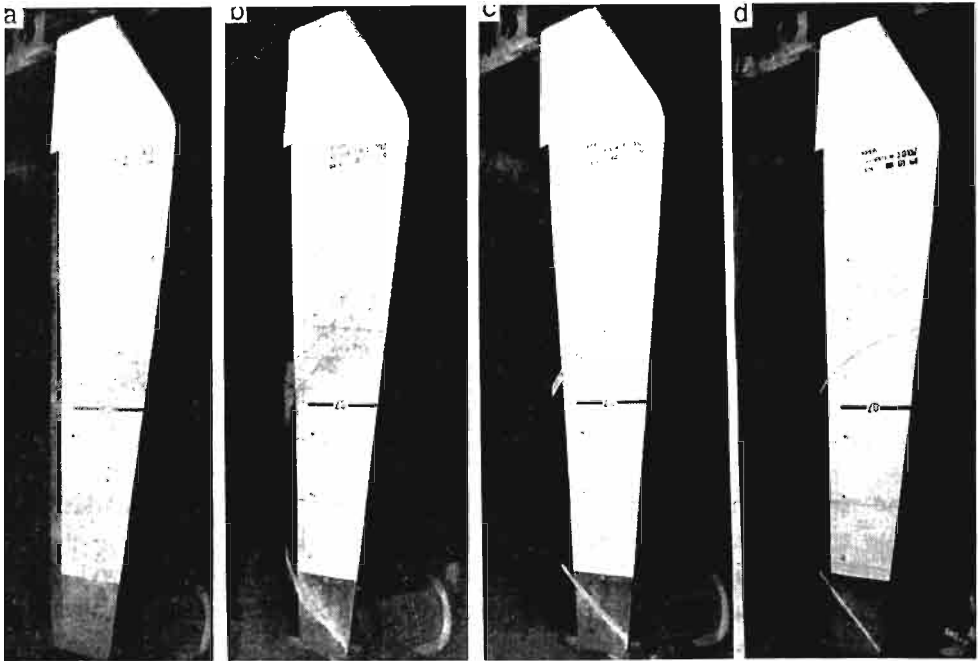
\* Fragment niniejszej pracy był przedstawiony na VII Polsko-Czechosłowackiej Konferencji Dynamiki Maszyn, Gliwice 1971.

Przy wykonywaniu obliczeń dane dotyczące geometrii mas i rozkładu sztywności zostały przyjęte z pomiarów wykonanych w Katedrze Mechaniki Wydziału Mechanicznego Energetyki i Lotnictwa Politechniki Warszawskiej [7]. Do obliczeń stosowano znane metody przedstawione między innymi w [5] i [10]. Wyznaczanie częstości i postaci drgań własnych łopaty śmigła sprowadzało się do obliczeń wartości własnych i wektorów własnych macierzy symetrycznych otrzymanych po odpowiednich przekształceniach z równań opisujących swobodne drgania śmigła.

Drgania giętne wirującej łopaty śmigła [9] przeprowadzono stosując metodę trzech momentów zastosowaną przez MORRISA i TYE'A [5].

## 2. Pomiary rezonansowe

Pomiary rezonansowe wykonano na sztywno utwierdzonej łopacie śmigła za pomocą wzbudników elektrodynamicznych wzbudzających sinusoidalne drgania w zakresie częstości 3–800 Hz. Pomiaru amplitud i faz w poszczególnych punktach łopaty dokonano przy pomocy czujników indukcyjnych. W celu dokładnego wyznaczenia linii węzłów na łopacie



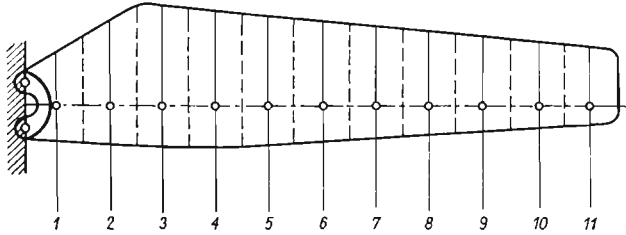
Rys. 2. Wizualizacja linii węzłów postaci drgań własnych łopaty śmigła przy częstości 176 Hz: a) łopata nieruchoma pokryta trocinami dębowymi, b) łopata wzbudzona — widoczne przemieszczenia się trocin do linii węzłów, c) łopata wzbudzona — tworzenie się linii węzłów, d) łopata wzbudzona — linie węzłów uformowane

pacie śmigła zastosowano wizualizację postaci, pokrywając łopatę równomiernie suchymi trocinami dębowymi (rys. 2). Każda z otrzymanych postaci została sfotografowana, co umożliwiło porównanie z postaciami otrzymanymi na drodze pomiarów amplitud i faz. W ten sposób wyznaczono 10 kolejnych postaci drgań własnych i określono ich częstości [6]; przedstawione one są w tablicy 1 i na rys. 6–11.



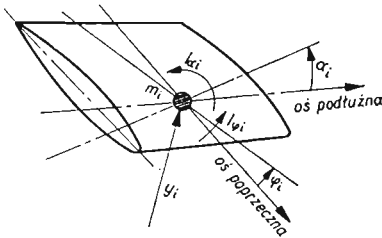
## 3. Obliczenia analityczne częstości i postaci drgań swobodnych łopaty

Obliczenia przeprowadzono dla modelu łopaty śmigła z dyskretnie rozłożonymi parametrami dynamicznymi.

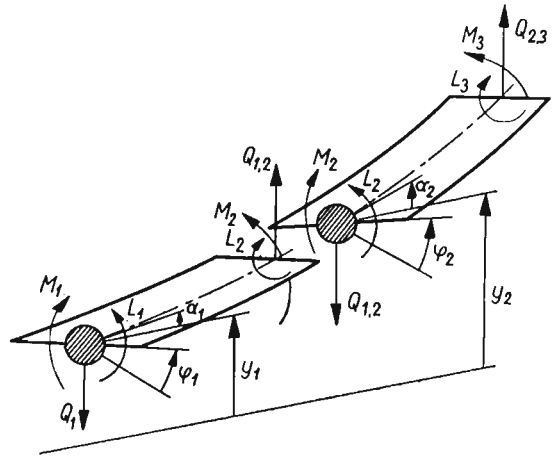


Rys. 3. Podział łopaty śmigła na segmenty i rozkład mas punktowych

Łopatę śmigła podzielono na 11 segmentów (rys. 3), które zastąpiono punktowymi masami skupionymi  $m$  przypisując im momenty bezwładności segmentów  $J_\varphi$  względem osi podłużnej oraz uwzględniono wpływ bezwładności obrotów poprzecznych  $J_\alpha$  i odkształceń postaciowych w płaszczyźnie ugięcia (rys. 4).



Rys. 4. Układ osi, przyjętych przemieszczeń ugięcia  $Y_i$  skręcenia  $\varphi_i$  i obrotu poprzecznego  $\alpha_i$  oraz położenie masy skupionej  $m_i$  i momentów bezwładności względem osi podłużnej  $J_\varphi$  i osi poprzecznej  $J_\alpha$



Rys. 5. Układ przyjętych przemieszczeń i sił działających na dwa sąsiednie segmenty łopaty śmigła,  $M$  — moment zginający,  $L$  — moment skręcający,  $Q$  — siła tnąca

W przyjętym modelu uwzględniono przez odpowiednie współczynniki wpływowe sztywności giętne  $C^{zz}$ , skrętne  $C^{\varphi\varphi}$ , obrotowe  $C^{\alpha\alpha}$  oraz sprzężenie sztywnościowe giętno-obrotowe  $C^{z\alpha} = C^{\alpha z}$ . Pominięto wpływ tłumienia wewnętrznego i sprzężenia sztywnościowe giętno-skrętne  $C^{z\varphi} = C^{\varphi z} = 0$  oraz skrętno-obrotowe  $C^{\varphi\alpha} = C^{\alpha\varphi} = 0$ .

Odpowiednie przyjęcie osi podłużnych i poprzecznych segmentów (rys. 4) jako osi głównych spowodowało wyeliminowanie momentów dewiacji. W przyjętym ogólnym modelu uwzględniono sprzężenia bezwładnościowe drgań giętno-skrętnych.

Dla tak przyjętego dyskretnego modelu śmigła (rys. 3, 4, 5) na podstawie [5] i [10] otrzymano układ równań w postaci:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [0] & [-C^{z\alpha}] \\ [0] & [C^{\varphi\varphi}] & [0] \\ [-C^{\alpha z}] & [0] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [-S] & [0] \\ [-S] & [J_\varphi] & [0] \\ [0] & [0] & [J_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\varphi}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0,$$

gdzie  $\bar{Y}$  — wyrazy macierzy kolumnowej ugięć,  $\bar{\varphi}$  — wyrazy macierzy kolumnowej kątów skręceń,  $\bar{\alpha}$  — wyrazy macierzy kolumnowej kątów obrotu poprzecznego,  $C^{zz}$ ,  $C^{z\alpha}$ ,  $C^{\alpha z}$ ,  $C^{\alpha\alpha}$ ,  $C^{\varphi\varphi}$  — współczynniki wpływowe ugięć, obrotów i skręceń,  $[m]$  — macierz diagonalna mas segmentów łopaty śmigła,  $[S]$  — macierz diagonalna momentów statycznych względem osi podłużnej,  $[J_\varphi]$ ,  $[J_\alpha]$  — macierze diagonalne momentów bezwładności segmentów względem osi podłużnej i poprzecznej, przy czym zgodnie z [10] i [8]

$$(2) \quad [J'_\alpha] = (1+k)[J_\alpha],$$

gdzie  $k = \frac{E}{kG}$ ,  $E$  — moduł Younga,  $G$  — moduł odkształcenia postaciowego,  $k$  — współczynnik zależny od kształtu poprzecznego łopaty śmigła.

Przy obliczeniach przyjęto, że współczynnik  $k = \text{const}$  jest stały dla wszystkich segmentów łopaty. Ze względu na złożoną budowę i materiał, nie można było dokładnie wyznaczyć właściwego określenia i zmiany współczynnika  $k$  wzdłuż łopaty śmigła. W związku z powyższym obliczenia wykonano dla kilku wartości współczynnika.

Rozwiązując numerycznie układ równań wyznaczono 9 kolejnych postaci drgań własnych i ich częstotści, które przedstawiono w tablicy 1 na rys. 6–11.

Do przyjętego modelu wprowadzono szereg kolejnych uproszczeń otrzymując następujące przypadki:

a) *Drgania giętno-skrętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego — pominięto przy tym odkształcalność postaciową.* Zakładając  $k = 0$  pominięto odkształcalność postaciową. Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(3) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\varphi} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [0] & [-C^{z\alpha}] \\ [0] & [C^{\varphi\varphi}] & [0] \\ [-C^{\alpha z}] & [0] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [-S] & [0] \\ [-S] & [J_\varphi] & [0] \\ [0] & [0] & [J_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\varphi}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0.$$

b) *Drgania giętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego i odkształcalności postaciowej.* Zakładając  $J_\varphi = S = C^{\varphi\varphi} = 0$  pominięto drgania skrętne  $\bar{\varphi}$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(4) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [-C^{z\alpha}] \\ [-C^{\alpha z}] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J'_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0.$$

c) *Drgania giętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego.* Zakładając  $J_\varphi = S = C^{\varphi\varphi} = k = 0$  pominięto drgania skrętne  $\bar{\varphi}$  i odkształcalność postaciową przekrojów poprzecznych segmentów  $k = 0$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(5) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [-C^{z\alpha}] \\ [-C^{\alpha z}] & [C^{\alpha\alpha}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [J'_\alpha] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\alpha}} \end{bmatrix} = 0.$$

Podczas drgań giętnych elementy łopaty oprócz ruchów pionowych wykonują obrót  $\alpha$  w płaszczyźnie ugięcia.

d) *Drgania giętno-skrętne*. Zakładając  $J_\alpha = C^{\alpha\alpha} = C^{\alpha z} = k = 0$  pominięto bezwładność obrotu poprzecznego  $\alpha$  i odkształcalność postaciową  $k = 0$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(6) \quad \begin{bmatrix} \bar{Y} \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C^{zz}] & [0] \\ [0] & [C^{\varphi\varphi}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [m] & [-S] \\ [-S] & [J_\varphi] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\bar{Y}} \\ \ddot{\bar{\varphi}} \end{bmatrix} = 0.$$

W modelu tym uwzględniono sprzężenia bezwładnościowe drgań giętnych ze skrętnymi, wywołane tym, że środki mas elementów łopat nie leżą na osi łopaty.

a) *Drgania skrętne*. Łopatę śmigła potraktowano jako belkę z prostoliniową osią zginania, na której znajdują się środki mas elementów łopaty z określonymi momentami bezwładności  $J_\varphi$  i sztywnościami  $C^{\varphi\varphi}$ . Pominięto sprzężenia giętno-skrętne eliminując zginanie  $y$ ;  $C^{zz} = 0$ , bezwładność obrotu poprzecznego  $\alpha$ ;  $C^{\alpha z} = C^{\alpha\alpha} = J_\alpha = 0$  i odkształcalność postaciową  $k = 0$ . Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(7) \quad [\bar{\varphi}] + [C^{\varphi\varphi}] [J_\alpha] [\ddot{\bar{\varphi}}] = 0.$$

Jest to najprostszy model stosowany wyłącznie do określenia postaci skrętnych i traktowany jako pierwsze przybliżenie.

f) *Drgania giętne*. W pierwszym przybliżeniu częstości i postaci drgań giętnych obliczono przy założeniu braku sprzężeń skrętno-giętnych oraz pominięciu sztywności i bezwładności skrętnej  $J_\varphi = S = C^{\varphi\varphi} = 0$ , bezwładności obrotu poprzecznego  $J_\alpha = C^{\alpha z} = C^{\alpha\alpha} = 0$  i odkształcalności postaciowej  $k = 0$ . Konsekwencją poczynionych założeń jest przyjęcie modelu łopaty w postaci prostoliniowej belki zmodelowanej układem jedynastu mas dyskretnych. Układ równań (1) otrzymano w postaci:

$$(8) \quad [\bar{Y}] + [C^{zz}] [m] [\ddot{\bar{Y}}] = 0.$$

Przyjmując  $\bar{y}_i = y_i \sin \omega t$ , gdzie  $y_i$  jest amplitudą ugięcia  $i$ -tej masy oraz po wprowadzeniu do układu równań (8) i przekształceniu, otrzymano równanie przedstawione w zapisie macierzowym

$$(9) \quad \mathbf{Y} = \omega^2 \mathbf{C} \mathbf{M} \mathbf{Y},$$

gdzie  $\mathbf{Y}$  — macierz kolumnowa amplitud ugięć,  $\mathbf{C}$  — symetryczna macierz współczynników wpływowych  $C^{zz}$ ,  $\mathbf{M} = [m]$  — przekątna macierz mas skupionych.

Stosując podstawienie

$$(10) \quad \mathbf{Y} = \mathbf{M}^{-1/2} \boldsymbol{\eta},$$

układ równań (9) sprowadzono do postaci

$$(11) \quad (\mathbf{M}^{1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2} - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\eta} = 0,$$

gdzie  $\lambda = 1/\omega^2$ ,  $\mathbf{I}$  — macierz jednostkowa.

Zagadnienie znalezienia częstości i postaci drgań giętnych łopaty sprowadza się do obliczenia wartości własnych  $\lambda$  i wektorów własnych  $\eta$  symetrycznej macierzy  $M^{1/2}CM^{-1/2}$ . Ze związku (10) wynika, że amplituda ugięcia  $i$ -tej masy ma wartość

$$(12) \quad y_i = \frac{\eta_i}{\sqrt{m_i}}.$$

Analogicznie można przedstawić przebieg rozwiązań poprzednich przypadków. Wszystkie powyższe przypadki rozwiązano numerycznie na elektronowej maszynie GIER według programów własnych w języku GIER-ALGOL IV.

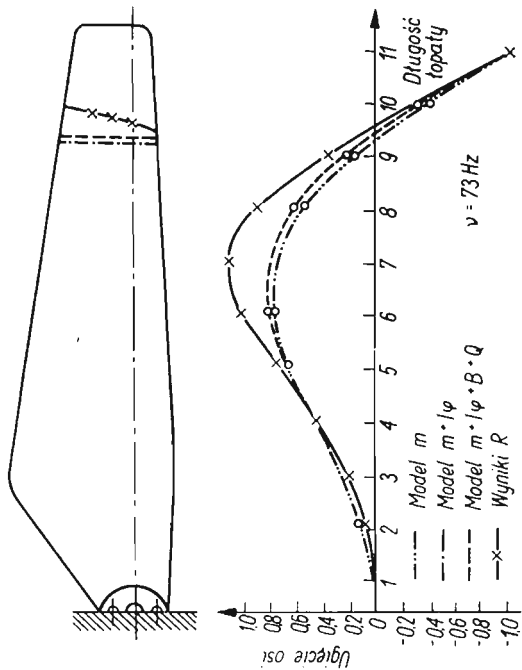
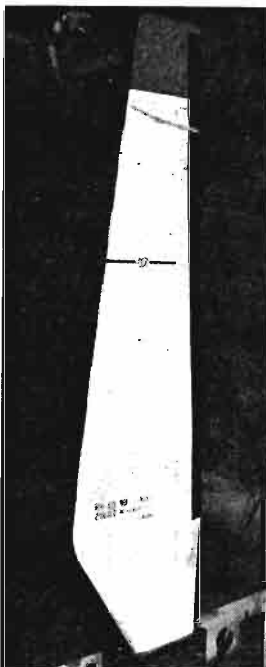
Wyznaczono 9 kolejnych postaci drgań giętno-skrętnych dla przypadków a) i d), 5 kolejnych postaci drgań giętnych dla przypadków b), c) i f) oraz 4 kolejne postacie drgań skrętnych dla przypadku e). Wyniki doświadczalne i obliczenia numeryczne przedstawiono w tablicy 1 oraz na sześciu wykresach i fotografiach postaci drgań własnych (rys. 6-11).

Tablica 1

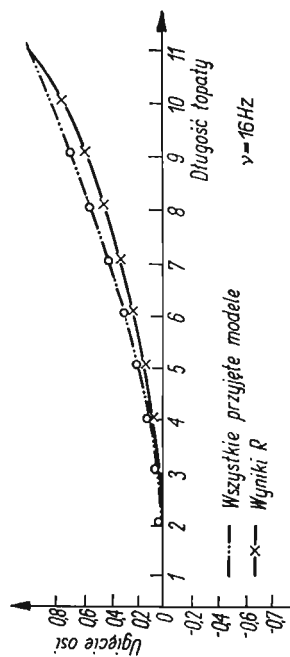
Model drgań łopaty śmigła		Częstości drgań własnych łopaty śmigła [w Hz]								
		I-g	II-g	I-s	III-g	II-s	IV-g	III-s	V-g	IV-s
	wyniki $R$	16,1	73,0	125,0	176	255	314	365	468	546
	$m+I+B+Q$	15,7	66,4	124,9	154	255	273	392	422	520
a	$m+I+B$	16,3	71,8	125,2	169	258	305	395	471	525
b	$m+B+Q$	16,5	74,1		174		305		452	
c	$m+B$	16,6	77,0		188		348		545	
d	$m+I$	16,6	78,3	125,5	191	264	361	411	597	530
e	$I$			126,7		256		396		532
f	$m$	16,6	78,4		195		372		604	

Oznaczenia:

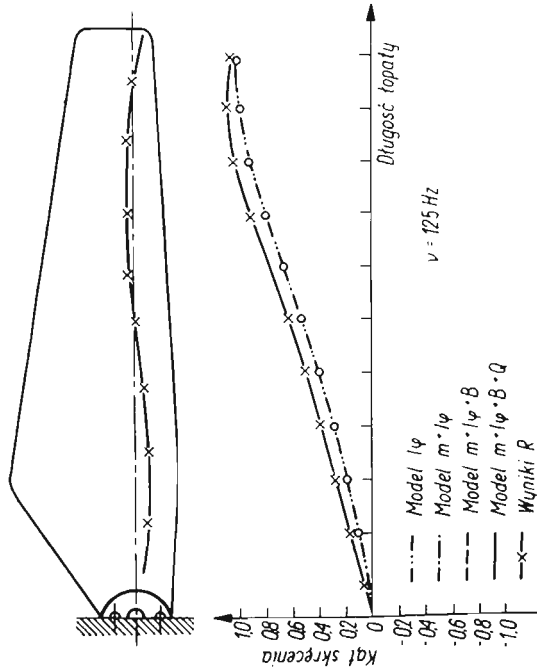
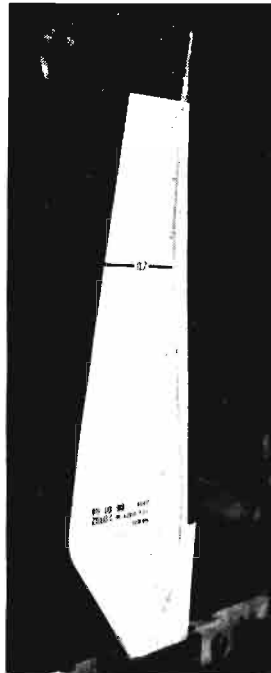
- $m$  — model dyskretny mas punktowych — drgania giętne,
- $I$  — model dyskretny podłużnych momentów bezwładności — drgania skrętne,
- $B$  — uwzględnienie bezwładności obrotu poprzecznego,
- $Q$  — uwzględnienie odkształcalności postaciowej,
- $m+I+B+Q$  — model dyskretny parametrów dynamicznych opisujący drgania giętno-skrętne z uwzględnieniem bezwładności obrotu poprzecznego i odkształcalności postaciowej,
- $R$  — wyniki otrzymane na drodze pomiarów rezonansowych.
- $g$  — postać drgań własnych giętnych,
- $s$  — postać drgań własnych skrętnych,
- $I-g$  — pierwsza postać drgań własnych giętnych łopaty śmigła,
- $II-s$  — druga postać drgań własnych skrętnych łopaty śmigła.



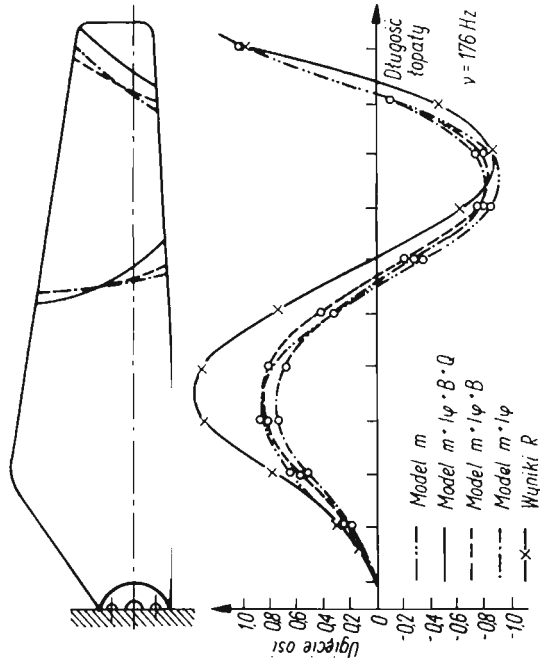
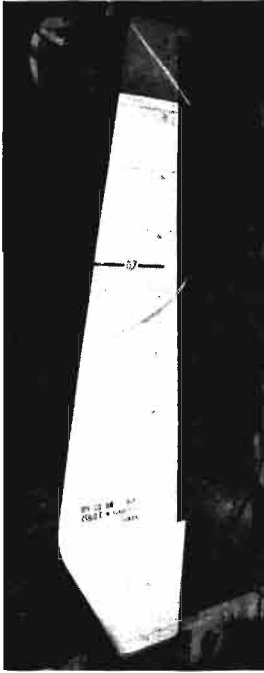
Rys. 7. Druga harmoniczna giętą II-g



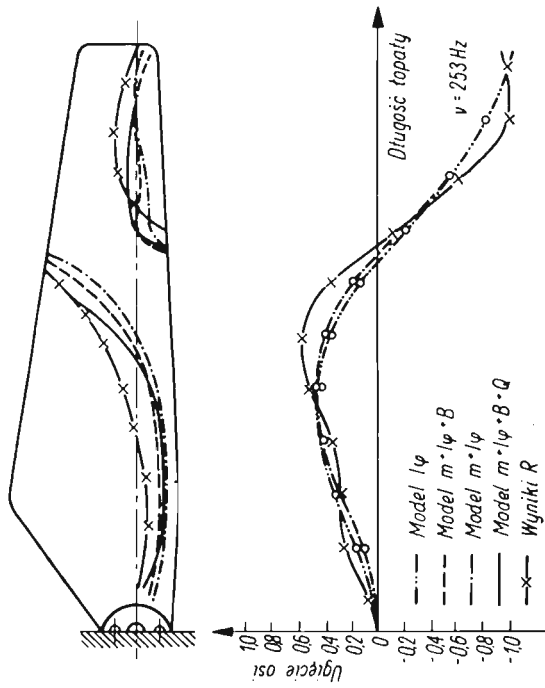
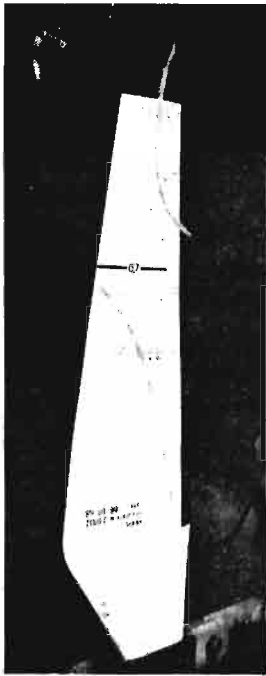
Rys. 6. Pierwsza harmoniczna giętą I-g



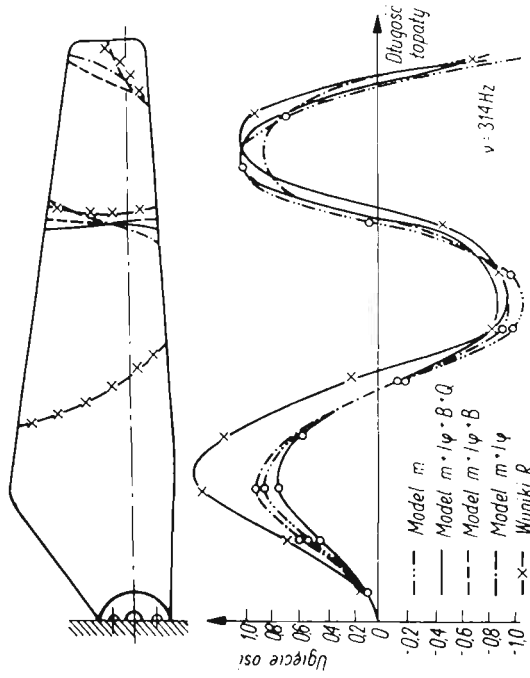
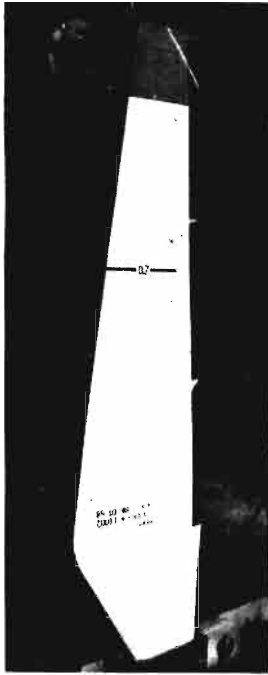
Rys. 8. Pierwsza harmoniczna skrętna I-s



Rys. 9. Trzecia harmoniczna giętna III-g



Rys. 10. Druga harmoniczna skrętna II-s



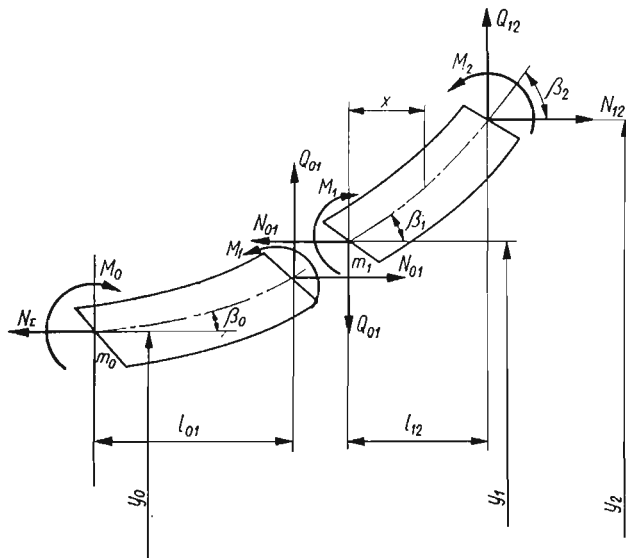
Rys. 11. Czwarta harmoniczna giętą IV-g

## 4. Wpływ obrotów śmigła na częstości i postaci drgań własnych łopaty

Obliczenia przeprowadzono według metody trzech momentów, którą opracowali w roku 1938 MORRIS i TYE [5], przedstawionej w [10]. Biorąc pod uwagę współczesne możliwości zastosowania elektronowej techniki obliczeniowej, metoda ta uważana jest za najlepszą, bowiem wykazuje dużą stateczność w procesie obliczeń. Jest stosowana do wyznaczania z dużą dokładnością częstości i postaci drgań własnych wirujących łopat rotorów nośnych śmigłowców. Metoda ta może być stosowana również przy obliczeniach innych elementów drgających konstrukcji nielotniczych.

Poniżej w skrócie podano powyższą metodę przy następujących założeniach:

- oś zginania łopaty przechodzi przez oś obrotu śmigła,
- łopaty przyjęte jako układ mas dyskretnych rozmieszczonych wzdłuż osi zginania,
- sztywności giętkie poszczególnych segmentów łopaty są stałe.



Rys. 12. Układ przyjętych przemieszczeń, sił i momentów działających na segmenty wirujące łopaty śmigła

Na rys. 12 wprowadzono odpowiednie oznaczenia:  $m_i$  — masa skupiona w  $i$ -tym przekroju,  $y_i$  — przemieszczenie  $i$ -tej masy,  $M_i$  — moment gnący,  $Q_{i,i+1}$  — siła tnąca w przekroju łopaty,  $N_{i,i+1}$  siła odśrodkowa w przekroju łopaty.

Równania momentów sił dla segmentu 0—1 względem punktu 0 i segmentu 1—2 względem punktu 1 (rys. 12) mają postać:

$$(13) \quad M_1 - M_0 - N_{0,1}(y_1 - y_0) + Q_{0,1}l_{0,1} = 0,$$

$$(14) \quad M_2 - M_1 - N_{1,2}(y_2 - y_1) + Q_{1,2}l_{1,2} = 0,$$

gdzie

$$Q_{0,1} = - \sum_{i=1}^{11} m_i \ddot{y}_i, \quad Q_{1,2} = - \sum_{i=2}^{11} m_i \ddot{y}_i.$$



Dzieląc równanie (13) przez  $N_{0,1}l_{0,1}$  i równanie (14) przez  $N_{1,2}l_{1,2}$  oraz odejmując stronami, otrzymano równanie równowagi elementu w postaci:

$$(15) \quad b_0 y_0 + a_1 y_1 + b_1 y_2 = k_0 M_0 + n_1 M_1 + k_1 M_2 + \frac{Q_{1,2}}{N_{1,2}} - \frac{Q_{0,1}}{N_{0,1}},$$

gdzie

$$b_0 = -a_0 = \frac{1}{l_{0,1}}, \quad k_0 = \frac{1}{N_{0,1}l_{0,1}}, \quad b_1 = \frac{1}{l_{1,2}},$$

$$a_1 = -b_0 - b_1, \quad k_1 = \frac{1}{N_{1,2}l_{1,2}}, \quad n_1 = -k_0 - k_1.$$

Rozpatrując małe przemieszczenia elementów łopaty, deformację elementu  $i, i+1$  opisano równaniem:

$$(16) \quad (EJ)_{i,i+1} y^{iv} - N_{i,i+1} y' = 0.$$

Zakładając, że na długości przyjętego segmentu zachodzi  $(EJ)_{i,i+1} = \text{const}$  i  $N_{i,i+1} = \text{const}$  oraz że  $EJy'' = M$ , otrzymano

$$(17) \quad \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - \mu_i^2 M = 0,$$

gdzie

$$\mu_i^2 = \frac{N_{i,i+1}}{(EJ)_{i,i+1}}.$$

Rozwiązanie równania (16) i uwzględnienie warunków brzegowych dla elementu 1-2, tj. przy:  $x = 0$ ,  $M_x = M_1$ ;  $x = l_{1,2}$ ,  $M_x = M_2$ , otrzymano w postaci:

$$(18) \quad M_x = (EJ)_{1,2} y'' = \left( \frac{M_2}{\text{sh } \alpha_1} - \frac{M_1}{\text{th } \alpha_1} \right) \text{sh}(\mu_1 x) + M_1 \text{ch}(\mu_1 x),$$

gdzie  $\alpha_1 = \mu_1 l_{1,2}$ .

Całkując dwukrotnie równanie (18) i wprowadzając warunki brzegowe dla elementu 1-2, mianowicie

$$y|_{x=0} = y_1, \quad y'|_{x=0} = \beta_1,$$

$$y|_{x=l_{1,2}} = y_2, \quad y'|_{x=l_{1,2}} = \beta_2,$$

otrzymano następujący związek:

$$(19) \quad b_1(y_2 - y_1) = d_1 M_2 + e_1 M_1 + \beta_1,$$

lub związek równoważny

$$(20) \quad b_1(y_2 - y_1) = -e_1 M_2 - d_1 M_1 + \beta_2,$$

gdzie

$$d_1 = k_1 \left( 1 - \frac{\alpha_1}{\text{sh } \alpha_1} \right), \quad e_1 = k_1 \left( \frac{\alpha_1}{\text{th } \alpha_1} - 1 \right).$$

Analogicznie do równania (20) otrzymano równanie deformacji dla elementu 0-1 w postaci:

$$(21) \quad b_0(y_1 - y_0) = -e_0 M_1 - d_0 M_0 + \beta_1.$$

Odejmując stronami równanie (21) od równania (19), mamy

$$(22) \quad b_0 y_0 + a_1 y_1 + b_1 y_2 = d_0 M_0 + c_1 M_1 + d_1 M_2,$$

gdzie  $c_1 = e_0 + e_1$ , oraz przyrównując do siebie prawe strony równań (22) i (15) otrzymano równanie następujące:

$$(23) \quad h_0 M_0 + g_1 M_1 + h_1 M_2 = \frac{Q_{1,2}}{N_{1,2}} - \frac{Q_{0,1}}{N_{0,1}},$$

gdzie:  $h_0 = d_0 - k_0$ ,  $h_1 = d_1 - k_1$ ,  $g_1 = c_1 - n_1$ .

Przeprowadzając analogiczne rozważania dla pozostałych elementów łopaty uzyskano układ równań względem nieznanymi funkcji czasu  $y_i(t)$  i  $M_i(t)$ . Układ ten składa się z dwóch części: pierwsza zawiera równanie typu (23) oraz równanie typu (21) wypisane dla skrajnych odcinków łopaty, druga natomiast równanie typu (22).

Zakładając, że

$$y_i(t) = y_i \sin(pt); \quad M_i(t) = M_i \sin(pt),$$

możemy rozpatrzyć układ równań sprowadzić do układu równań algebraicznych względem wielkości amplitud przemieszczeń i momentów.

Układ ten rozwiązujemy metodą kolejnych przybliżeń w następujący sposób: Zakładamy w zerowym przybliżeniu wartości  $y_{10}$  szukanej postaci, przy czym niech spełniony będzie warunek  $y_{11} = 1$ . Z kolei możemy z dokładnością do stałego współczynnika  $p^2$  obliczyć występujące z prawej strony pierwszej części układu równań amplitudy sił bezwładności.

Przyjmując  $p^2 = 1$  obliczamy wartości momentów gnących  $M$  oraz kąt  $\beta_0$ . Wykorzystując te wielkości, z drugiej części układu równań obliczamy odpowiadające im wielkości deformacji  $u_i$ . Ponieważ  $y_i = p^2 u_i$ , mając wielkości  $u_i$  obliczamy kwadrat częstoty

$$p^2 = \frac{y_{11}}{u_{11}} = \frac{1}{u_{11}},$$

a następnie wartości deformacji pierwszego przybliżenia

$$(y_i)_1 = p^2 (u_i)_1.$$

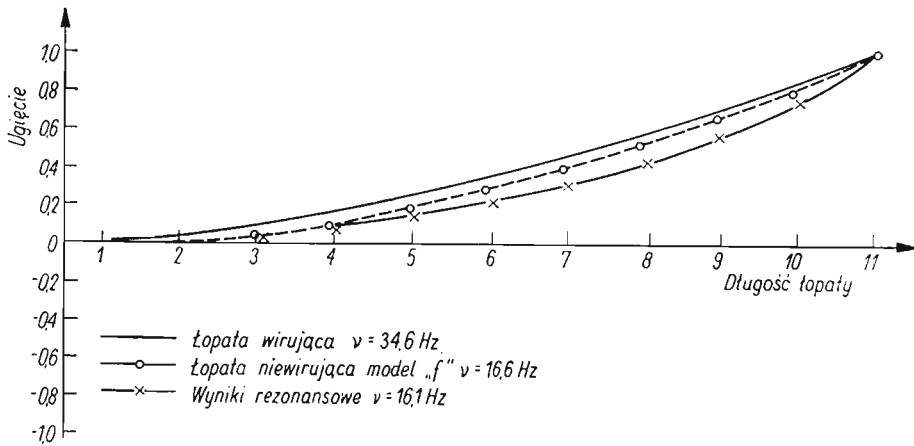
Proces ten powtarzamy do uzyskania żądanej dokładności.

Przy obliczaniu kolejnej  $i$ -tej postaci własnej, należy spełnić warunek jej ortogonalności do postaci poprzednich, mianowicie

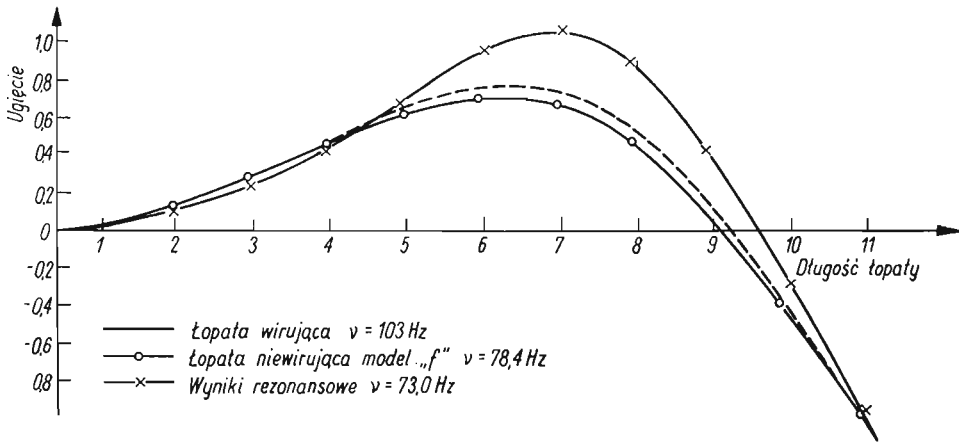
$$(24) \quad \sum_{i=0}^{11} m_i y_i^{(j)} y_i^{(m)},$$

gdzie  $y_i^{(j)}$ ,  $y_i^{(m)}$  — znalezione już postacie własne.

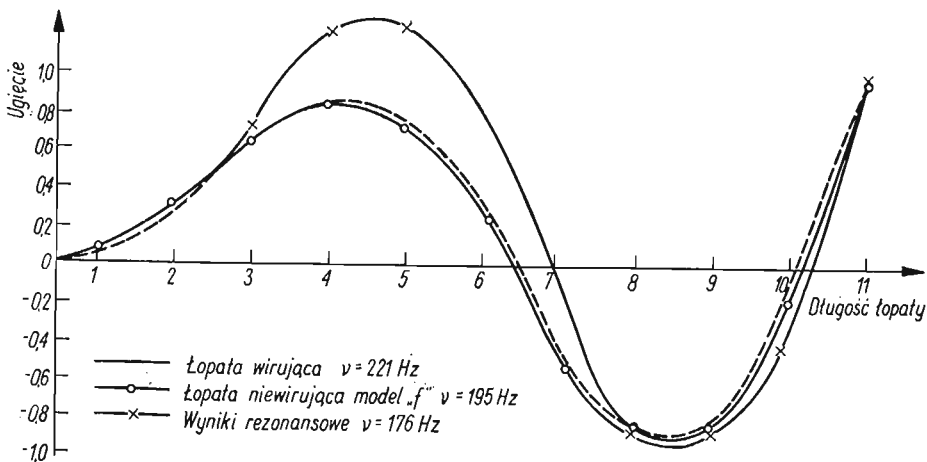
Stosując powyższe metody obliczono kolejne częstoty i postacie drgań giętych. Na rys. 13, 14, 15 częstoty i postacie drgań własnych łopaty wirującej porównano z wielkościami otrzymanymi dla łopaty sztywno utwierdzonej.



Rys. 13. Pierwsza postać giętna I-g



Rys. 14. Druga postać giętna II-g



Rys. 15. Trzecia postać giętna III-g

## 5. Wnioski

Z analizy wyników otrzymanych dla danej łopaty śmigła można wnioskować, że przyjęcie określonego modelu ma większy wpływ na częstotliwości (tablica 1), niż na charakter postaci drgań własnych (rys. 6-11). Biorąc pod uwagę 6 pierwszych kolejnych postaci widzimy, że w zależności od postaci i przyjętego modelu, różnice między wynikami eksperymentu a obliczonymi dla częstotliwości drgań własnych wynoszą od 0,1% do 30%, natomiast maksymalne odchylenia linii węzłów wynoszą 5% w stosunku do długości łopaty śmigła.

Najlepsze przybliżenie w zakresie obliczeń pierwszych sześciu postaci uzyskano stosując model «a» łopaty (tablica 1) dla drgań giętno-skrętnych z uwzględnieniem obrotów poprzecznych przy pominięciu odkształcalności postaciowej.

Najprostsze modele dyskretnie (e i f, tablica 1), opisujące wyłącznie drgania skrętne i drgania giętne z pominięciem sprzężeń giętno-skrętnych sztywnościowych i bezwładnościowych oraz nieuwzględniające bezwładności obrotów poprzecznych i odkształcalności postaciowej, mogą być stosowane do obliczeń I i II postaci, zarówno skrętnej jak i giętej. Odpowiednie różnice wynoszą poniżej 2% dla drgań skrętnych oraz 3% dla I-giętej i 8% dla II-giętej.

Jak wynika z rys. 13, 14, 15 obroty śmigła w niewielkim stopniu wpływają na postacie drgań giętnych natomiast mają decydujący wpływ na częstotliwości drgań. Do obliczeń flutteru przy nieokreślonych współczynnikach sztywności można przyjąć postacie drgań własnych wyznaczonych z prób rezonansowych dla łopaty niewirującej, natomiast częstotliwości drgań własnych wyznaczyć na podstawie [3] ze wzoru

$$(25) \quad \omega_i^2 = \omega_{gi}^2 + S_i \Omega^2,$$

gdzie  $\omega_i$  — częstotliwość drgań  $i$ -tej postaci giętej łopaty wirującej,  $\omega_{gi}$  — częstotliwość drgań  $i$ -tej postaci giętej łopaty niewirującej,  $\Omega$  — prędkość kątowna śmigła wirującego.

Współczynnik  $S_i$  we wzorze (25) uwzględniający wpływ obrotów śmigła ma postać:

$$(26) \quad S_i = \frac{\int_r^R m(x)x \int_r^x \frac{df_i(x)}{dx} dx dx}{\int_r^R m(x)f_i^2(x) dx},$$

gdzie  $m(x)$  — funkcja rozkładu mas wzdłuż łopaty śmigła, zaś  $f_i(x)$  — funkcja ugięcia  $i$ -tej postaci drgań giętnych.

Wyniki uzyskane w niniejszej pracy posłużyły jako dane wyjściowe do obliczeń krytycznych obrotów śmigła ogonowego śmigłowca.

## Literatura cytowana w tekście

1. R. ALEKSANDROWICZ, W. SZEMPLIŃSKA, J. MARYNIAK, *Ground resonance testing of saiplace*, Aero Revue, 4 (1959).
2. M. BOSSAK, J. PIETRUCHA, W. POTKAŃSKI, *Metodyka prostych rezonansowych badań szybowców*, Prace Instytutu Lotnictwa, 49 (1972).
3. J. LIPKA, *Częstość drgań własnych wirujących łopat wirników nośnych śmigłowca*, Arch. Bud. Masz., 3, 4 (1956).

4. J. MARYNIAK, W. MIERZEJEWSKI, J. KRUTUL, *Wpływ przyjętego modelu na dokładność obliczeń częstotliwości i postaci drgań własnych łopaty śmigła ogonowego śmigłowca*, VII Polsko-Czechosłowacka Konferencja Dynamiki Maszyn, Zbiór referatów, Tom 2, Gliwice 1971.
5. G. MORRIS, W. TYE, *The stressing of rotor blades*, Aircraft Eng., **10**, 112 (1938).
6. *Próby rezonansowe łopaty śmigła ogonowego śmigłowca Mi-2*, Sprawozdanie Nr 68B Katedry Mechaniki Wydziału MEiL PW, Warszawa 1960 (nie publikowane).
7. *Pomiary sztywności i geometrii mas łopaty laminatowej śmigła ogonowego Mi-2*, Sprawozdanie Katedry Mechaniki Wydz. MEiL PW, Warszawa 1970 (nie publikowane).
8. *Obliczenia częstości i postaci drgań własnych łopaty śmigła ogonowego Mi-2*, Sprawozdanie Nr 68C Katedry Mechaniki Wydz. MEiL PW, Warszawa 1970 (nie publikowane).
9. *Obliczenia częstości i postaci własnych drgań giętych wirującej łopaty śmigła ogonowego Mi-2*, Sprawozdanie Nr 69 Zakładu Mechaniki Instytutu Mechaniki Stosowanej Wydz. MEiL PW, Warszawa 1970 (nie publikowane).
10. М. Л. Миль, А. Б. Некрасов, А. С. Браверман, Л. Н. Гродко, М. А. Лейканд, *Вертолеты — колебания и динамическая прочность*, т. 2, Москва 1967.
11. С. П. Тимошенко, *Колебания в инженерном деле*, Москва 1967.

## R e z y u m e

## КОЛЕБАНИЯ ЛОПАСТЕЙ ВИНТА

В статье приведены вычисления частот и форм собственных колебаний лопастей хвостового винта вертолета и их сравнения с результатами эксперимента. Для вычислений употреблены полученные из опытов данные относительно распределения масс, инерциальных моментов и коэффициентов упругости. Лопасти винта рассматриваются как система с дискретно распределенными параметрами, причем учитываются инерция поперечных вращений и перерезывающие силы, действующие в сечении элемента лопасти.

Для принятых моделей вычислены собственные частоты и формы изгибных, крутильных и изгибно-крутильных колебаний; при этом вводятся различные дополнительные упрощающие предположения. Вычисления выполнены для девяти последовательных форм собственных колебаний лопастей винта.

Результаты вычислений для различных принятых моделей сравниваются с величинами собственных частот и форм, полученными при резонансных измерениях.

Выводы, вытекающие из вычислений, могут найти применение в определении динамических характеристик других механических систем.

## S u m m a r y

## PROPELLER BLADE VIBRATION PROBLEMS

First nine natural modes and frequencies of a helicopter tail rotor blade are calculated and compared with results of resonance tests. Experimentally determined distributions of mass, moments of inertia and stiffnesses are used as input data. The blade is divided into eleven segments and considered as a system of discrete parameters. Six mathematical models of the blade are analysed, the effects of rotational inertia of individual segments being taken into account.

Conclusions drawn from the analysis concerning the propeller blade mechanics may also be applied to determine the dynamic characteristics of other mechanical systems.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 3 stycznia 1973 r.*



## ZWIĄZKI POMIĘDZY RÓŻNICZKOWYMI I CAŁKOWYMI ZASADAMI MECHANIKI

N. JA. CYGANOWA (WOLGOGRAD)

Decydujące znaczenie dla kierunków rozwoju badań w omawianej dziedzinie miała praca O. HOELDERA<sup>1)</sup>, w której całkowita wariacyjna zasada mechaniki wyprowadzona została dla ogólnego przypadku wariacji ruchu. W szczególnych przypadkach z zasady tej wynikają zasady Hamiltona lub Lagrange'a w zwykłej, względnie uogólnionej postaci.

Ogólną zasadę całkowitą wyprowadza Hoelder wychodząc z zasady d'Alemberta-Lagrange'a. Dalsze uogólnienie zasady Hoeldera podane jest w pracy A. VOSSA<sup>2)</sup>.

Uogólniona zasada całkowita Hoeldera-Vossa oraz prace o charakterze krytycznym, jakie zaczęły pojawiać się po ukazaniu się publikacji O. HOELDERA i A. VOSSA, dotyczące w szczególności kwestii analizy definicji przemieszczeń wirtualnych, podanej przez O. HOELDERA i A. VOSSA<sup>3)</sup>, są wyczerpująco zreferowane w książce L. C. POLAKA<sup>4)</sup> na temat wariacyjnych zasad mechaniki i w pracy doktorskiej B. N. FRADLINA<sup>5)</sup>.

W niniejszej pracy zastanowimy się jedynie nad różnymi postaciami formułowania zasady Hoeldera-Vossa oraz nad jej związkami z różniczkowymi zasadami w mechanice. W podstawowych pracach HOELDERA i VOSSA określony został związek pomiędzy ogólną zasadą całkowitą a zasadą d'Alemberta-Lagrange'a; badania w następnych latach, w szczególności prace H. BRELLA (1913), C. SCHAEFFERA (1919), L. NORDHEIMA (1919), podkreśliły ten związek jeszcze wyraźniej.

W pracach H. BRELLA (1913) i R. LEITINGERA (1913) wykazano związek między zasadą Hoeldera-Vossa, a zasadami Gaussa i Jourdaina.

<sup>1)</sup> O. Hoelder, *Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, II zeszyt, 1896, s. 122-157.

<sup>2)</sup> A. Voss, *Über die Prinzipie von Hamilton und Maupertuis*, Nachricht. d. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, 1900, s. 322-327.

<sup>3)</sup> P. Jourdain, *The derivation of equations in generalized coordinates from the principle of least action and allied principles*, Math. Ann., t. 62, 1906, s. 413-418.

P. Jourdain, *On those principles of mechanics which depend upon processes of variation*, Math. Ann. t. 65, 1908, s. 513-527.

M. Rethy, *Über das Prinzip der Kleinsten Action und das Hamilton'sche Prinzip*, Math. Annalen, t. 48, 1897, s. 514-547.

<sup>4)</sup> Л. С. Полак, *Вариационные принципы механики, их развитие и применение в физике*. М., 1960

<sup>5)</sup> Б. Н. Фрадлин, *Неголономная механика и её приложения в естествознании и технике*, Диссертация, Киев 1965.

### 1. Ogólne przekształcenie zasady d'Alemberta–Lagrange'a do postaci całkowej. Różne postaci uogólnionej zasady najmniejszego działania

Ogólne przekształcenie zasady d'Alemberta–Lagrange'a do postaci całkowej dokonywane jest za pomocą asynchronicznej wariacji ruchu i całkowania po czasie. W pracy O. HOELDERA (1896) wariacja ruchu składa się z dwu niezależnych etapów.

Każdemu punktowi początkowej trajektorii ruchu nadaje się najpierw dowolnie małe przemieszczenie  $\Delta x_i$  (zwane wariacją położenia), otrzymując w ten sposób nową trajektorię wariacyjną, której punkty odpowiadają punktom trajektorii wyjściowej. Następnie każdemu punktowi trajektorii wariacyjnej nadaje się prędkość, która może być dowolna, ale możliwie mało różniącą się od prędkości w odpowiednim punkcie trajektorii początkowej. Prędkość można określić dwiema metodami — izochroniczną lub izoenergetyczną.

HOELDER określa wariację energii kinetycznej  $\Delta T$ , zakładając wariację czasu, skąd wynika zależność

$$\Delta \left( \frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\Delta x_i) - \dot{x}_i \frac{d\Delta t}{dt}.$$

Zakładając poza tym, że położenie układu w chwili początkowej i końcowej nie ulega zmianie, w wyniku całkowania względem czasu wariacji  $\Delta T$  HOELDER otrzymuje następujące równanie:

$$(1.1) \quad \int_{t_0}^{t_1} \Delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{3n} m_i (\ddot{x}_i \Delta x_i) dt - 2 \int_{t_0}^{t_1} T d\Delta t.$$

Wprowadzenie wyrażenia

$$\Delta' A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \Delta x_i,$$

całkowanie tego wyrażenia i dodanie do równania (1.1) pozwala mu uzyskać równanie

$$(1.2) \quad \int_{t_0}^{t_1} \{ 2T d\Delta t + (\Delta T + \Delta' A) dt \} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \Delta x_i$$

stanowiące podstawę wyprowadzenia całkowych zasad mechaniki.

Prawa strona równania (1.2), która uzyskała w literaturze naukowej nazwę tożsamości Hoeldera, względnie transformacji Hoeldera, jest określone, przy danych siłach i danym rzeczywistym ruchu układu, wyłącznie przez wariacje położenia  $\Delta x_i$ . Wykonując wariację ruchu układu w ten sposób, by wariacje współrzędnych były przemieszczeniami wirtualnymi i korzystając z zasady d'Alemberta–Lagrange'a otrzymuje HOELDER z równania (1.2) następującą postać całkowej zasady mechniki:

$$(1.3) \quad \int_{t_0}^{t_1} \{ 2T d\Delta t + (\Delta T + \Delta' A) dt \} = 0.$$

Transformacja Hoeldera (1.2) i wynikająca z niej ogólna zasada całkowa (1.3) jest jednym z najwybitniejszych wyników uzyskanych w dziedzinie zasad dynamiki w pierwszej ćwierci XX wieku. W związku z tym należy szczególnie podkreślić znaczenie prac C. SCHAEFFERA i L. NORDHEIMA.



1.1. Najbardziej klarowne i ściśle wyprowadzenie tożsamości Hoeldera podał C. SCHAEFFER<sup>6)</sup>. Za punkt wyjścia przyjmuje SCHAEFFER wyrażenie

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^{3n} [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \Delta x_i],$$

które uzyskuje się z lewej części równania, opisującej zasadę d'Alemberta-Lagrange'a, przez zastąpienie przemieszczeń wirtualnych pełnymi wariacjami współrzędnych. Pełna wariacja współrzędnych rozumiana jest początkowo jako zupełnie ogólna wariacja, zawierająca wariacje po czasie.

Figurująca w wyrażeniu (1.4) suma

$$- \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i$$

jest następnie przekształcana do postaci, wynikającej z obliczenia pełnej wariacji energii kinetycznej

$$(1.5) \quad - \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i = \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \Delta x_i.$$

Całkowanie równania (1.5) względem czasu z uwzględnieniem tego, że na końcach przedziału całkowania pełne wariacje współrzędnych  $\Delta x_i$  są równe zeru, prowadzi do zależności

$$(1.6) \quad - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i = \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} \right) dt.$$

Kładąc następnie

$$\sum_{i=1}^{3n} X_i \Delta x_i = \Delta' A,$$

całkując ostatnią z równości względem czasu i dodając ją do równania (1.6) uzyskuje Schaeffer tożsamość Hoeldera (1.2). Ogólna postać figurujących w niej wariacji pozwala wyprowadzać, przy odpowiednich założeniach ograniczających, różne zasady dynamiczne.

«Znaczenie transformacji Hoeldera — pisze Schaeffer — polega na tym, że wariacje, figurujące w (116) (w niniejszej pracy (1.2) — N.C.), są, dzięki wprowadzeniu  $\Delta t$ , znacznie bardziej ogólne, niż rozważane poprzednio (wirtualne — N.C.). Dzięki temu możemy zadać dodatkowo jakieś relacje pomiędzy  $\Delta x_i \Delta t$ , to znaczy ograniczyć w odpowiedni sposób ogólne wariacje w zależności (116). Dla każdego przypadku ograniczeń otrzymujemy nową zasadę dynamiki<sup>7)</sup>. Najbardziej radykalnym ograniczeniem byłoby założenie  $\Delta t = 0$ , skąd wynikałaby Hamiltonowska zasada działania stacjonarnego<sup>8)</sup>»

<sup>6)</sup> C. Schaeffer, *Die Prinzipie der Dynamik*, Berlin, Lipsk 1919.

<sup>7)</sup> Podkreślenie nasze — N.C.

<sup>8)</sup> op. cit., str. 43.

Następnie Schaeffer obiera zależność między pełną wariacją współrzędnych  $\Delta x_i$  i wariacją czasu  $\Delta t$  w postaci równania

$$(1.7) \quad \Delta x_i = \delta x_i + \dot{x}_i \Delta t,$$

gdzie symbol  $\delta x_i$  oznacza wariację współrzędnych w ustalonej chwili czasu, nie mającą na ogół znaczenia przemieszczenia wirtualnego (wariacje  $\delta x_i$  mogą być wielkościami zupełnie niezależnymi). Zależność (1.7) pozwala Schaefferowi sprowadzić tożsamość Hoeldera (1.2) do postaci

$$(1.8) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i \Delta t - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{i=1}^{3n} m_i (\ddot{x}_i \dot{x}_i) \Delta t = \\ = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \Delta T + \Delta' A + 2T \frac{d\Delta t}{dt} \right],$$

którą nazwiemy tożsamością Hoeldera w formie Schaeffera. Jeżeli  $\delta x_i$  oznacza przemieszczenia wirtualne, to z tożsamości (1.8) wynika ogólna zasada całkowa w formie Schaeffera

$$(1.9) \quad \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \Delta T + \Delta' A + 2T \frac{d\Delta t}{dt} - \frac{d'A}{dt} \Delta t + \frac{dT}{dt} \Delta t \right] = 0,$$

gdzie

$$\frac{d'A}{dt} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \dot{x}_i.$$

Różnica między formami Hoeldera i Schaeffera dla tożsamości podstawowej i wynikającej z niej ogólnej zasady całkowej związana jest z różnicą między rozważanymi procesami wariacyjnymi. O ile Hoelder traktuje na ogół wariacje położenia jako niezależne od wariacji czasu, Schaeffer określa między nimi związek (1.7).

**1.2.** Jak wykazał A. Voss, ogólna zasada całkowa w formie Hoeldera (1.3) jest słuszna jedynie dla układów o więzach stacjonarnych. Analizując problem w uogólnionych współrzędnych Lagrange'a dla stacjonarnych więzów holonomicznych i liniowych anholonomicznych rzędu pierwszego, Voss wyprowadza zasadę w formie Hoeldera, dla więzów zaś niestacjonarnych — w formie uogólnionej. Wariacja zależności wraz z całkowaniem po czasie prowadzi w przypadku więzów niestacjonarnych do równania

$$(1.10) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt} \Delta t + \delta A \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k + \\ + \left[ 2T \Delta t + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1},$$

zwanej tożsamością Vossa.

Jeżeli wariacje  $\delta q_k$ ,  $\Delta t$  spełniają warunek

$$(1.11) \quad \left[ 2T\Delta t + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

to z równania (1.10) wynika

$$(1.12) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt} \Delta t + \delta A \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k.$$

Równania Lagrange'a drugiego rzędu dla układów holonomicznych oraz równania Ferrersa

$$(1.13) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k = \sum_{l=1}^r \lambda_l p_{lk}$$

dla układów o więzach holonomicznych i liniowych anholonomicznych pierwszego rzędu

$$(1.14) \quad \sum_{k=1}^s p_{lk} dq_k + p_l dt = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, r)$$

pozwalają wyprowadzić z równania (1.12) następującą ogólną postać zasady całkowej w formie Vossa:

$$(1.15) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt} \Delta t + \delta A \right) dt = 0.$$

Wobec tego, że dla więzów holonomicznych i liniowych anholonomicznych pierwszego rzędu mamy zależność

$$(1.16)^9 \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i \right] dt$$

tożsamość (1.10) możemy przepisać w postaci następującej:

$$(1.17) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt} \Delta t + \delta A \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i \right] dt + \left[ 2T\Delta t + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1}.$$

<sup>9)</sup> Istotnie, dla układów o więzach spełniających (1.14), w tożsamości

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \delta x_i = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^r \lambda_l p_{lk} - Q_k \right] \delta q_k$$

suma  $\sum_{k=1}^s p_{lk} \delta q_k = 0$ , co w konsekwencji prowadzi do tożsamości (1.16).

Stąd na mocy zasady d'Alemberta–Lagrange'a i warunku (1.11) dla wariacji otrzymujemy ogólną zasadę całkową w postaci (1.15). Tożsamość Vossa została wyprowadzona w postaci (1.17) w książce L. NORDHEIMA *Zasady dynamiki*<sup>10)</sup>. NORDHEIM wychodzi ze wzoru na  $T$  we współrzędnych kartezjańskich i najpierw otrzymuje równanie

$$(1.18) \quad \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \Delta x_i = - \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i.$$

Przechodząc do współrzędnych uogólnionych, czyli quasi-współrzędnych, oraz uwzględniając zależności spełniane w ogólnym przypadku więzów niestacjonarnych przy przejściu do tych współrzędnych

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{k=1}^s \alpha_{ik} \dot{q}_k + \alpha_i, & \Delta x_i &= \sum_{k=1}^s \alpha_{ik} \Delta q_k + \alpha_i \Delta t, \\ 2T &= \sum m_i \alpha_{ik} \alpha_{il} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum 2m_i \alpha_{ik} \alpha_i \dot{q}_k + \sum m_i \alpha_i^2, \end{aligned}$$

NORDHEIM wyprowadza następującą tożsamość

$$(1.19) \quad \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \Delta x_i = 2T \Delta t + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k.$$

Z równań (1.18), (1.19) i równania

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \frac{dT}{dt} \Delta t$$

wynika zależność

$$(1.20) \quad \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} + \frac{dT}{dt} \Delta t = - \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \delta x_i + \frac{d}{dt} \left( 2T \Delta t + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right).$$

Dodając równanie (1.20) do równania

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i$$

i całkując tę zależność, otrzymuje Nordheim tożsamość Vossa (1.17). Równanie, wynikające z tożsamości (1.17), na mocy zasady d'Alemberta–Lagrange'a, w postaci

$$(1.21) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T + 2T \frac{d\Delta t}{dt} dt + \frac{dT}{dt} \Delta t + \delta A \right) dt = \left[ 2T \Delta t + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1}$$

wyraża twierdzenie równoważne zasadzie d'Alemberta–Lagrange'a. Jest ono punktem wyjścia do wyprowadzenia wszystkich całkowych zasad wariacyjnych.

<sup>10)</sup> L. Nordheim, *Die Prinzip der Dynamik*. Berlin, Lipsk 1919, s. 83.

1.3. Rozpatrzmy obecnie dwie inne postacie uogólnionej zasady najmniejszego działania, wyprowadzone przez H. BRELLA<sup>11)</sup>. Zostały one wyprowadzone przez niego przy pomocy prostego przekształcenia wyrażenia podcałkowego w lewej części tożsamości Vossa (1.10). Wyrażając funkcję podcałkową

$$(1.22) \quad \Delta T dt + 2T \frac{d\Delta t}{dt} dt + \frac{dT}{dt} \Delta t dt + \delta A dt$$

w postaci

$$\Delta T + \frac{d}{dt} (2T\Delta t) dt - \frac{dT}{dt} \Delta t dt + \delta A dt,$$

Brell wyprowadza z tożsamości Vossa następujący związek:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T - \frac{dT}{dt} \Delta t + \delta A \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + Q_k \right) \delta q_k + \left[ \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1},$$

wynika stąd zasada całkowa w pierwszej formie Brella

$$(1.23) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T - \frac{dT}{dt} \Delta t + \delta A \right) dt = 0$$

z warunkami granicznymi

$$(1.24) \quad \left[ \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Przedstawiając następnie wyrażenie (1.22) w postaci

$$\Delta T dt + T \frac{d\Delta t}{dt} dt + \frac{d}{dt} (T\Delta t) dt + \delta A dt,$$

Brell otrzymuje analogicznie drugą formę zasady całkowej

$$(1.25) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left( \Delta T + T \frac{d\Delta t}{dt} + \delta A \right) dt = 0$$

z warunkami granicznymi w postaci

$$(1.26) \quad \left[ T\Delta t + \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

<sup>11)</sup> H. Brell, *Über eine neue Fassung des Prinzips der kleinsten Aktion*, Wien. Ber., 122 (2a), (1913), s. 1031-1036.

## 2. Równoważność uogólnionej zasady najmniejszego działania i zasady Gaussa

Dowód równoważności uogólnionej zasady najmniejszego działania Hoeldera–Vossa zasady Gaussa dla układów holonomicznych o więzach niestacjonarnych przeprowadził BRELL<sup>12)</sup>, korzystając z równania Gibbsa–Appela.

Do wyrażenia podcałkowego w całce Vossa

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + dT \Delta t + 2T d\Delta t + \delta A dt)$$

wprowadza BRELL energię przyspieszeń  $S$ . Używa przy tym związku, wiążącego energię przyspieszeń z energią kinetyczną  $T$ , który w przypadku więzów niestacjonarnych ma postać

$$(2.1) \quad \frac{dT}{dt} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial t},$$

gdzie

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t).$$

Wówczas dla wirtualnych wariacji pochodnej energii kinetycznej po czasie  $dT/dt$  otrzymuje BRELL następujący związek;

$$(2.2) \quad \Delta \frac{dT}{dt} - \frac{d^2 T}{dt^2} \Delta t = - \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^s \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \frac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^s \Phi_k \delta q_k,$$

gdzie

$$\delta q_k = \Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t, \quad \Phi_k = \sum_{i=1}^{3n} m_i \psi_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k},$$

$$\psi_i = \sum_{k=1}^s \left( \dot{q}_k \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_j \right).$$

Dodając do obydwu stron równania (2.2) wyrażenia  $2 \frac{d^2}{dt^2} (T \Delta t)$  i całkując od  $t_0$  do  $t_1$  przy założeniu, że na brzegach wszystkie wariacje zerują się, otrzymujemy równanie

$$\Delta T + \frac{dT}{dt} \Delta t + 2T \frac{d\Delta t}{dt} = - \sum_{k=1}^s \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^s \Phi_k \delta q_k + 2T \Delta t \right).$$

Z kolei, dodając do tego równania następujące

$$\delta A = \sum_{k=1}^s Q_k (\Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t)$$

<sup>12)</sup> H. Brell, *Nachweis der Äquivalenz des veralgem. Prinzipes der kleinsten Aktion mit dem Prinzipie d. kleinsten Zwanges.*—Wien. Sitz. Ber., tom 122 (2a), V zeszyt, Wien 1913.

i całkując, otrzymujemy

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + dT \Delta t + 2T d\Delta t + \delta A dt) = - \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_{k=1}^s \left( \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} - Q_k \right) (\Delta q_k - \dot{q}_k \Delta t).$$

Na mocy równań Appela wynika stąd związek

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta t dt + dT \Delta t + 2T d\Delta t + \delta A dt) = 0,$$

który wyraża zasadę Hoeldera–Vossa. Wobec tego, że równania Appela wyprowadza się z zasady Gaussa powyższe rozumowanie dowodzi równoważności tej zasady z zasadą Hoeldera–Vossa.

### 3. Równoważność uogólnionej zasady najmniejszego działania i zasady Jourdaina

LEITINGER (1913) wykazał związek pomiędzy zasadą Jourdaina i uogólnioną zasadą najmniejszego działania Hoeldera–Vossa dla układów o więzach holonomicznych i liniowych anholonomicznych, w ogólnym przypadku niestacjonarnych.

LEITINGER wyprowadza zasadę Hoeldera–Vossa bezpośrednio z zasady Jourdaina przekształcając odpowiednio wyrażenie podcałkowe w całce Vossa. Jeżeli więzy holonomiczne, nałożone na układ, są niestacjonarne, to asynchroniczne wariacje współrzędnych uogólnionych  $\Delta q_k$  związane są z wariacjami wirtualnymi tych współrzędnych  $\delta q_k$  zależnościami

$$(3.1) \quad \Delta q_k = \delta q_k + \dot{q}_k \Delta t,$$

zaś dla  $\Delta$  — wariacji prędkości uogólnionych mamy związek

$$(3.2) \quad \Delta \dot{q}_k = \frac{d}{dt} (\Delta q_k) - \dot{q}_k \frac{\Delta dt}{dt}.$$

Uwzględniając równania (3.1) i (3.2) oraz wyrażenie na pracę wirtualną działających sił

$$\delta A = \sum_{k=1}^s Q_k \delta q_k,$$

możemy przedstawić wyrażenie podcałkowe w całce Vossa w następującej postaci:

$$(3.3) \quad \Delta T dt + 2T \Delta dt + dT \Delta t + \delta A dt = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta q_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k + Q_k \delta q_k + \right. \\ \left. + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \Delta q_k \right) dt - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \Delta t \right) \right] + \frac{d}{dt} (2T \Delta t) dt.$$

Różniczkując względem czasu równanie (3.3) i kładąc następnie w wyprowadzonej zależności  $\delta q_k = 0$  zgodnie z zasadą Jourdaina, jak również uwzględniając sformułowanie zasady Jourdaina dla układów holonomicznych i liniowych anholonomicznych w postaci

$$\sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right] \delta \dot{q}_k = 0$$

LEITINGER uzyskuje następujące równanie:

$$\frac{d}{dt} [\Delta T dt + 2T \Delta dt + dT \Delta t + \delta A dt] = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \Delta q_k \right) - \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \Delta t \right) \right] + \frac{d^2}{dt^2} (2T \Delta t).$$

Równanie to można traktować jako jedno z analitycznych wyrażenia zasady Jourdaina. Całkując ostatnie z równań dwukrotnie względem  $t$  w określonym przedziale czasu, odpowiadającym ustalonym początkowemu i końcowemu położeniu układu, LEITINGER otrzymuje równanie, wyrażające zasadę Hoeldera-Vossa w przypadku więzów niestacjonarnych

$$\int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + dT \Delta t + 2T \Delta dt + \delta A dt) = 0.$$

Powyższe wyprowadzenie upraszcza się znacznie w przypadku więzów stacjonarnych. Mamy wówczas

$$(3.4) \quad \Delta q_k = \delta q_k$$

oraz

$$(3.5) \quad \Delta \frac{dq_k}{dt} = \delta \dot{q}_k - \dot{q}_k \frac{\Delta dt}{dt},$$

energia zaś kinetyczna układu  $T$  jest jednorodną funkcją kwadratową prędkości uogólnionych. Zgodnie z twierdzeniem Eulera o funkcjach jednorodnych możemy napisać

$$(3.6) \quad 2T = \sum_{k=1}^s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k.$$

Uogólniona zasada najmniejszego działania dla układów o więzach stacjonarnych opisana jest równaniem

$$(3.7) \quad \int_{t_0}^{t_1} (\Delta T dt + 2T \Delta dt + \delta A dt) = 0.$$

Pochodna względem czasu z wyrażenia podcałkowego po uwzględnieniu zależności (3.4), (3.5) i (3.6) przejmie postać:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \Delta T + 2T \frac{\Delta dt}{dt} + \delta A \right] = \sum_{k=1}^s \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) \delta q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} \delta \dot{q}_k + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right) - \right. \\ \left. - \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta \dot{q}_k + \frac{dQ_k}{dt} \delta q_k + Q_k \delta \dot{q}_k \right]. \end{aligned}$$

Zgodnie z zasadą Jourdaina otrzymujemy stąd równanie

$$\frac{d}{dt} \left( \Delta T + 2T \frac{\Delta dt}{dt} + \delta A \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right).$$

Dwukrotnie całkując to równanie otrzymujemy zależność (3.7), to znaczy wyrażenie analityczne zasady Hoeldera-Vossa dla układów o więzach stacjonarnych.



## 4. Związek zasady energetycznej G. Helma z zasadą d'Alemberta–Lagrange'a w badaniach A. Vossa

W pracy pod tytułem *Uwagi o zasadach mechaniki*<sup>13)</sup> (1901) A. Voss analizuje próby niektórych badaczy wyprowadzenia z zasady energetycznej zasady d'Alemberta–Lagrange'a lub jakiegokolwiek innej równoważnej do niej postaci równań ruchu. Szczegółowo analizuje Voss zasadę energetyczną HELMA<sup>14)</sup>, która ma postać wariacyjną: zmiana energii w każdym z możliwych kierunków równa się zeru. Wyniki analizy VOSSA świadczą o tym, że proces wariacyjny w zasadzie Helma nie prowadzi do równoważności z zasadą d'Alemberta–Lagrange'a. Istotnie, określmy wariację energii całkowitej  $T+V$ , odpowiadającą izochronicznym wariacjom współrzędnych, to znaczy przejściu od punktu o współrzędnych  $x_i(t)$ ,  $y_i(t)$ ,  $z_i(t)$  do punktu o współrzędnych  $x_i(t) + \varepsilon \xi_i(t)$ ,  $y_i(t) + \varepsilon \eta_i(t)$ ,  $z_i(t) + \varepsilon \zeta_i(t)$ , gdzie  $\varepsilon$  jest dowolną małą liczbą stałą, zaś  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  — dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami czasu. Otrzymamy wyrażenie:

$$\delta(T+v) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i \xi_i + \dot{y}_i \eta_i + \dot{z}_i \zeta_i) - \sum_{i=1}^n m_i (\ddot{x}_i \xi_i + \ddot{y}_i \eta_i + \ddot{z}_i \zeta_i) + \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \xi_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} \eta_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} \zeta_i \right).$$

Wobec tego, że wyrażenie to oczywiście nie równa się wyrażeniu

$$\sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} + m_i \ddot{x}_i \right) \xi_i + \left( \frac{\partial V}{\partial y_i} + m_i \ddot{y}_i \right) \eta_i + \left( \frac{\partial V}{\partial z_i} + m_i \ddot{z}_i \right) \zeta_i \right]$$

stwierdzamy, że dla danego sposobu wprowadzenia wariacji zasada, wyrażająca się równaniem  $\delta(T+V) = 0$ , nie jest równoważna zasadzie d'Alemberta–Lagrange'a.

Następnie Voss wykazuje, że proces wariacyjny należy zmienić tak, by oprócz współrzędnych, wariacji podlegał również czas: dopiero wówczas obydwie zasady stają się równoważne. Wariacja pełnej energii, odpowiadająca przejściu od  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ ,  $t$  do  $x_i + \varepsilon \xi_i$ ,  $y_i + \varepsilon \eta_i$ ,  $z_i + \varepsilon \zeta_i$ ,  $t + \varepsilon \tau$ , gdzie  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$ ,  $\tau$  są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami czasu, równa się według VOSSA następującemu wyrażeniu:

$$\delta(T+V) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} + m_i \ddot{x}_i \right) \xi_i + \left( \frac{\partial V}{\partial y_i} + m_i \ddot{y}_i \right) \eta_i + \left( \frac{\partial V}{\partial z_i} + m_i \ddot{z}_i \right) \zeta_i + \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_i \xi_i + \dot{y}_i \eta_i + \dot{z}_i \zeta_i) - 2 \sum_{i=1}^n m_i (\xi_i \ddot{x}_i + \eta_i \ddot{y}_i + \zeta_i \ddot{z}_i) - 2\dot{\tau} T$$

Dobierając odpowiednio funkcję  $\tau(t)$  (co jest zawsze możliwe, gdyż  $T \neq 0$ ), możemy powyższą zależność sprowadzić do postaci

$$\delta(T+V) = \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} + m_i \ddot{x}_i \right) \xi_i + \left( \frac{\partial V}{\partial y_i} + m_i \ddot{y}_i \right) \eta_i + \left( \frac{\partial V}{\partial z_i} + m_i \ddot{z}_i \right) \zeta_i \right],$$

<sup>13)</sup> A. Voss, *Bemerkungen über die Prinzipien der Mechanik*, Munch. Bericht math.-phys. kl. 1901.

<sup>14)</sup> G. Helm, *Die Energetik in ihrer geschichtlichen Entwicklung*, Lipsk 1918.

skąd wynika równoważność zasady Helma z zasadą d'Alemberta–Lagrange'a. «Jest to jednak — jak dodaje Voss — nic innego, jak tylko abstrakcyjny formalizm», po czym konkluduje: «Wydaje się, że czynione dotąd próby wyprowadzenia zasady d'Alemberta lub zasady Gaussa z zasady energii nie zostały uwieńczone sukcesem.»<sup>15)</sup>

W tym samym artykule Voss formułuje ogólną zasadę całkową mechaniki w następującej postaci:

«przy odpowiednim doborze procesu wariacji wariacja całki

$$(4.1) \quad J = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta U) dt,$$

gdzie  $\alpha$  i  $\beta$  są dowolnymi stałymi, jest równa zeru ze względu na różniczkowe równania ruchu. Odwrotnie, założenie, że wariacja równa się zeru przy wszystkich dopuszczalnych przemieszczeniach wirtualnych, prowadzi do różniczkowych równań ruchu». Nie ma przy tym istotnego znaczenia warunek znikania wariacji współrzędnych na końcach przedziału całkowania.

Pod wielkością  $\delta U$  autor rozumie tu pracę sił zewnętrznych  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  na przemieszczeniach wirtualnych układu

$$\delta U = \sum_{i=1}^n (X_i \xi_i + Y_i \eta_i + Z_i \zeta_i).$$

Na ogół funkcja  $U$  ma jedynie sens symboliczny.

Voss rozpatruje najpierw w ogólnej postaci wariację całki

$$(4.2) \quad J' = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t),$$

odpowiadającą przejściu od stanu  $x, y, z$  do  $x + \varepsilon \xi, y + \varepsilon \eta, z + \varepsilon \zeta$ , to znaczy, gdy wariacji ulega argument całkowania.

Podstawienie  $t = ku + k_0$ , gdzie  $k = \frac{t_1 - t_0}{1 - t_0}$ ,  $k_0 = t_0 \frac{1 - t_1}{1 - t_0}$ , pozwala sprowadzić całkę (4.2) do całki o stałych granicach

$$(4.3) \quad J' = \int_0^1 F\left(x, \frac{dx}{kdu}, ku + u_0\right) k du.$$

Obliczając wariację całki (4.1), odpowiadającą przejściu od stanu  $x, y, z, t$  do  $x + \varepsilon \xi, y + \varepsilon \eta, z + \varepsilon \zeta, t + \varepsilon \tau$ , gdzie  $\xi, \eta, \zeta, \tau$  są dowolnymi różniczkowalnymi funkcjami czasu, otrzymujemy zależność

$$(4.4) \quad \delta J = \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T)\dot{t} + \alpha \dot{S} - \alpha W + \beta V] dt,$$

<sup>15)</sup> A. Voss, *Bemerkungen ...*, s. 170.

gdzie

$$V = \delta U = \sum_{i=1}^n (X_i \xi_i + Y_i \eta_i + Z_i \zeta_i),$$

$$S = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{x} \xi_i + \dot{y} \eta_i + \dot{z} \zeta_i),$$

$$W = \sum_{i=1}^n m_i (\ddot{x} \xi_i + \ddot{y} \eta_i + \ddot{z} \zeta_i).$$

Wyrażenie (4.4) na wariację  $\delta J$  można przedstawić również w dwu innych postaciach

$$(I) \quad \delta J = \beta \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt + \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T) \dot{\tau} + (\beta - \alpha) W + \alpha \dot{S}] dt,$$

$$(II) \quad \delta J = \alpha \int_{t_0}^{t_1} (V - W) dt + \int_{t_0}^{t_1} [(\beta U - \alpha T) \dot{\tau} + (\beta - \alpha) V + \alpha \dot{S}] dt.$$

Przy odpowiednim doborze funkcji  $\tau$ , mianowicie takim, przy którym druga z całek we wzorach (I) i (II) równa się zero, uzyskujemy równoważność zasady d'Alemberta-Lagrange'a z zasadą opisywaną przez równanie  $\delta J = 0$ . Natomiast odpowiedni dobór stałych  $\alpha$  i  $\beta$  prowadzi do uzyskania różnych postaci szczególnych tej uogólnionej zasady całkowej.

A. Voss rozważa następujące cztery przypadki szczególne:

1.  $\alpha = \beta$ . Odpowiedni wybór funkcji  $\tau$  prowadzi, na mocy równania (I), do następującego warunku

$$(U - T) \dot{\tau} + \dot{S} = 0.$$

Całkując względem czasu  $t$  i zakładając, że wariacje współrzędnych na brzegach przedziału całkowania są równe zero, otrzymujemy  $\tau = \text{const}$ , a w szczególnym przypadku  $\tau = 0$ . Jeżeli  $T - U = h$ , to dla  $\tau$  mamy następujący związek:  $h\tau + s = 0$ . W tym przypadku uzyskujemy zasadę Hamiltona.

2. Jeżeli  $\beta = 0$ , to z równania (II) wynika następująca postać warunku, określającego funkcję  $\tau$ :

$$T \dot{\tau} + V - \dot{S} = 0.$$

Wobec tego, że  $T \neq 0$ , funkcję  $\tau$  możemy zawsze określić. W tym przypadku mamy do czynienia z rozszerzoną postacią zasady najmniejszego działania.

3. Jeżeli  $\alpha = 0$ , to z równania (I) mamy

$$U \dot{\tau} + W = 0$$

przy czym założenie co do charakteru wariacji na brzegach przedziału nie jest konieczne.

Na to, by można było określić funkcję  $\tau$  z ostatniego równania, trzeba założyć, że w obszarze całkowania  $U$  nie równa się zero. Przy takim założeniu zasada, wyrażająca się równaniem

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} U dt = 0,$$

prowadzi również do różniczkowych równań ruchu.

4. Jeżeli  $\beta = -\alpha$ , to całka (4.1) ma w tym przypadku postać

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \alpha(T-U) dt \quad \text{lub} \quad J = \int_{t_0}^{t_1} E dt.$$

Dla określenia funkcji  $\tau$  otrzymujemy z równania (II) związek

$$(T+U)\dot{\tau} + 2V - \dot{S} = 0.$$

Jedynie w pierwszych dwu z rozpatrywanych przypadków uzyskuje się tą drogą wygodne postacie uogólnionej zasady całkowej. W obydwu pozostałych przypadkach, jak też w ogólnym przypadku dowolnych  $\alpha$  i  $\beta$ , interpretacja sensu mechanicznego symbolicznej wielkości  $U$  jest utrudniona, nie mówiąc już o tym, że przy dowolnych znaczeniach  $\alpha$  i  $\beta$  nie można na ogół w obszarze całkowania spełnić warunku

$$\beta U - \alpha T \neq 0$$

niezbędnego dla określenia funkcji  $\tau$ .

Jeżeli zamiast symbolicznego wyrażenia  $U$  wprowadzimy funkcję

$$A = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n (X_i \dot{x}_i + Y_i \dot{y}_i + Z_i \dot{z}_i)$$

wobec tego zamiast całki (4.1) rozważymy całkę

$$\int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta A) dt,$$

to z wariacji tej całki uzyskamy następujące postacie całkowe zasady d'Alemberta-Lagrange'a:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+A) dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} U dt = 0, \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} E dt = 0,$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\alpha T + \beta A) dt = 0.$$

#### 5. Całkowa postać zasady Gaussa dla układów holonomicznych. Praca E. Schenkla

Myśl o poszukiwaniu zasady, mającej postać całki względem czasu w określonych granicach całkowania i równoważnej zasadzie Gaussa, została po raz pierwszy sformułowana przez profesora Wassmutha. Jako podstawę swych badań w tej dziedzinie przyjął E. SCHENKL, zgodnie z ideą Wassmutha, następującą analogię.<sup>16)</sup>

Równoważność zasady Hamiltona i zasady d'Alemberta-Lagrange'a wynika z tożsamości

$$(5.1) \quad \int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta U) dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i dt.$$

<sup>16)</sup> E. Schenkl, *Über eine dem Gaußschen Prinzipie des kleinsten Zwanges entsprechende Integralform*, Sitz. bericht. d. k. Academie d. Wiss. in Wien, t. 122. Wiedeń 1913.

Zasada Hamiltona jest całkową postacią zasady d'Alemberta–Lagrange'a. Jeżeli zbudujemy tożsamość, formalnie analogiczną do tożsamości (5.1), której prawa część przyjmuje postać:

$$(5.2) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i dt,$$

to możemy dojść do całkowej postaci zasady Gaussa. W zasadzie Gaussa nie zakłada się żadnego związku pomiędzy wariacjami przyspieszeń, odpowiadającymi różnym chwilom czasu  $t$  i  $t'$ . Wariacje muszą jedynie spełniać warunki zgodności z więzami; natomiast przy przejściu od jednej chwili podczas ruchu układu do innej wariacje mogą zmieniać się w sposób dowolny, w tym również skokowo, skąd wynika, że ciąg przyspieszeń, w czasie podlegających wariacji, może nie być ciągły.

Ciąg przyspieszeń podlegających wariacji w czasie musi spełniać warunek, nadający sens całce (5.2). Innymi słowy, trzeba przejść od wariacji ruchu w danej chwili czasu do wariacji ruchu w całości, to znaczy w skończonym przedziale czasu. W zasadzie Hamiltona przejście to jest dokonywane w następujący sposób.

Niech ruch układu holonomicznego w kartezjańskim układzie współrzędnych będzie opisany związkiem  $x_i = f_i(t)$ . W pewnej ustalonej chwili czasu  $t$  nadajmy układowi przemieszczenie wirtualne, które jest zgodne z nałożonymi na układ więzami. Uzyskamy dla tej chwili wariację położenia układu, określoną przez współrzędne  $x_i + \delta x_i$ .

W dowolnie bliskiej sąsiedniej chwili czasu  $t'$  współrzędne układu równają się  $x'_i = f_i(t')$ . Jeżeli nadamy układowi w chwili  $t'$  przemieszczenie wirtualne  $\delta x'_i$ , to dla tej chwili uzyskamy wariację położenia układu, opisaną współrzędnymi  $x'_i + \delta x'_i$ .

W ten sposób, przechodząc od chwili czasu do następnej, wszędzie zastosujemy wskazaną metodę wariacji w punkcie. Wielkości wariacji  $\delta x_i$ , odpowiadające różnym chwilom czasu, są zupełnie niepowiązane ze sobą; spełniając warunki zgodności z więzami możemy od jednej chwili do innej zmieniać wariacje w sposób dowolny, dzięki czemu ciąg w czasie wariacji położenia układu może nie być ciągły, całka zaś

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta x_i dt$$

może nie mieć sensu. Zażądamy więc od ciągu położenia układu ciągłości względem czasu, przyjmując zależność

$$\delta x_i = \varepsilon f_i(t),$$

gdzie  $\varepsilon$  jest infinytezymalnie małym parametrem niezależnym od czasu,  $f_i(t)$  zaś dowolną ciągłą i skończoną funkcją czasu. Wówczas wariacje współrzędnych będą infinytezymalnie małymi funkcjami czasu. Całka

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta x_i dt$$

będzie miała obecnie sens, jako całka funkcji ciągłej.

Ciąg położeń wariacyjnych układu  $x_i + \epsilon f_i(t)$  będzie reprezentował pewien ruch, który nazywamy wariacją ruchu. E. SCHENKL dowodzi, że w metodzie Gaussa nie można dokonać w analogiczny sposób przejścia od wariacji ruchu punktu do wariacji ruchu całego układu.

Istotnie, jeżeli założymy, że wariacje przyspieszeń  $\delta\ddot{x}_i$  są ciągłymi funkcjami czasu<sup>17)</sup>, to wariacje prędkości i wariacje współrzędnych nie mogą być w każdej chwili równe zeru, jak żąda się w metodzie wariacyjnej Gaussa. Wynika to stąd, że w przypadku, gdy wielkość  $\delta\ddot{x}_i$  jest ciągłą funkcją czasu, powinna ona zachowywać znak w dostatecznie małym przedziale czasowym. Wówczas ze względu na relację

$$(5.3) \quad \delta\ddot{x}_i = \frac{d\delta\dot{x}_i}{dt},$$

wielkość  $\delta\dot{x}_i$  zwiększa się lub zmniejsza w tym przedziale czasu, co oznacza, że gaussowska metoda wariacji w punkcie zostaje naruszona. Zauważmy, że relacja (5.3) jest słuszna przy założeniu, że czas nie podlega wariacji.

Następnie E. SCHENKL analizuje jeszcze jedną próbę przejścia do wariacji ruchu w całości przy użyciu metody Gaussa wariacji ruchu w punkcie.

W myśl zasady Gaussa stan ruchu podlega w każdej chwili następującej wariacji:  $\delta x_i = 0$ ,  $\delta \dot{x}_i = 0$ ,  $\delta \ddot{x}_i \neq 0$ . Niech punkt materialny  $M$  opisuje w ruchu rzeczywistym dany tor z daną prędkością. Ustalmy dowolną chwilę ruchu. Mówiąc o wariacji stanu ruchu w tej chwili według Gaussa, mamy na myśli punkt  $M$ , leżący na innym torze, mającym z danym torem wspólny punkt  $M$  ( $\delta x_i = 0$ ); tor ten nazwiemy wariacją toru. We wspólnym punkcie  $M$  tor rzeczywisty i wariacja toru mają wspólną styczną ( $\delta \dot{x}_i = 0$ ), natomiast krzywizna wariacji toru w punkcie  $M$  jest różna od krzywizny toru rzeczywistego, co oznacza, że normalne składowe przyspieszenia punktu w danej chwili czasu są inne na torze rzeczywistym, niż na jego wariacji ( $\delta \ddot{x}_i \neq 0$ ). Dla danej chwili czasu mamy nieskończenie wiele wariacji stanu ruchu. Zasada najmniejszego przymusu stwierdza, że w nieskończonej różnorodności stanów ruchu w danej chwili czasu rzeczywistym ruchem jest ten, dla którego wariacja przymusu równa się zeru.

Rozważmy z kolei przejście od jednej chwili czasu  $t_1$  do innej  $t_2$ . Wariację trajektorii, odpowiadającą przedziałowi czasu  $t_2 - t_1$ , przedstawimy jako nieskończoną sumę infinitezymalnych części, odpowiadających opisanemu powyżej sposobowi konstruowania wariacji w punkcie. Geometrycznie możemy to wyobrazić sobie w następujący sposób.

Niech z każdego punktu rzeczywistej trajektorii wychodzi pęk torów, wynikających z dokonania wariacji w punkcie. Wariację toru, odpowiadającą przedziałowi czasu od  $t_1$  do  $t_2$ , wyobrazimy sobie jako sumę nieskończenie wielkiej liczby infinitezymalnie małych trajektorii cząstkowych, odpowiadających wariacji w punkcie. Wariacje przyspieszeń, odpowiadających tak skonstruowanemu torowi, nie mogą mieć stałego znaku w żadnym, dowolnie małym, przedziale czasu, gdyż w przeciwnym przypadku jak zostało stwierdzone poprzednio, nie mogłyby równać się zeru wariacje prędkości, odpowiadające dowolnej chwili czasu.

<sup>17)</sup> L. Boltzmann, *Vorlesungen über die Prinzipien der Mechanik*, I Część, 1897, s. 211.

Wynika stąd, że wariacje przyspieszeń można przedstawić tylko jako takie funkcje czasu, które w każdym, dowolnie małym, przedziale czasu zmieniają swój znak w sposób dowolny. Jednakowoż funkcje tego typu nie są całkowalne. Oznacza to, że obie próby przejścia do wariacji ruchu w całości skończyły się niepowodzeniem, gdyż zarówno w pierwszym, jak i w drugim przypadku, czas nie podlegał wariacji i obowiązywała relacja (5.3).

«Tak więc — kończy swe rozważania Schenkl — nie można ustalić odpowiedniości między punktami toru rzeczywistego i jego wariacji w taki sposób, by wzajemnie odpowiadające sobie położenia w obydwu ruchach zajmowane były jednocześnie.» To stwierdzenie prowadzi autora do konkluzji, że wariację ruchu należy budować, dokonując jednocześnie wariacji czasu.

Zalóżmy, że wzajemnie odpowiadającym sobie stanom ruchu rzeczywistego i jego wariacji odpowiadają różne chwile czasu  $t$  i  $t + \delta t$ . Przy tym założeniu możemy skonstruować taką wariację ruchu, dla której wariacje przyspieszeń  $\bar{\delta}\ddot{x}_i$  (w odróżnieniu od wariacji przyspieszeń  $\delta\ddot{x}_i$ , które dokonywane są bez wariacji czasu) są całkowalnymi funkcjami czasu. Wariacje przyspieszeń  $\delta\ddot{x}_i$ , jak już zostało stwierdzone, należy przedstawić jako takie funkcje czasu, które w każdym dowolnie małym przedziale czasu dowolnie często zmieniają znak. Funkcja taka została zbudowana przez Schenkla w następujący sposób. Podzielmy przedział czasu  $[t_1, t_2]$ , w którym funkcję tę będziemy rozpatrywali, na  $n$  równych części  $\tau$ . Niech wariacje przyspieszeń  $\delta\ddot{x}_i$ , w chwilach czasu  $t_+ = t_1 + \mu\tau$ ,  $\mu = 0, 2, 4, \dots, n$ , są równe wartościom dowolnej, danej z góry, ciągłej, dodatniej funkcji czasu  $f_i(t)$ , zaś w chwilach czasu  $t_- = t_1 + \nu\tau$ ,  $\nu = 1, 3, 5, \dots, n-1$ , wartości tych wariacji są ujemne i równe co do modułu średnim arytmetycznym od wartości wariacji w sąsiednich (parzystych) chwilach czasu. Wówczas przy  $n \rightarrow \infty$  (lub  $\tau \rightarrow 0$ ) wielkość  $\delta\ddot{x}_i$  jest reprezentowana przez funkcję o żądanej własności, to znaczy dowolnie często zmieniającą znak.

Następnie wprowadza się wariację czasu  $\delta t$ . Wariacja czasu jest taką funkcją czasu, która przybiera wartości zerowe w każdej chwili  $t_+ = t_1 + \mu\tau$ , dla której wariacje przyspieszenia  $\delta\ddot{x}_i$  są dodatnie, oraz wartości  $\tau$  w każdej chwili  $t_- = t_1 + \nu\tau$ , dla której wariacja  $\delta\ddot{x}_i$  jest ujemna. Wreszcie, wykonując pełną wariację możemy zastąpić wariację przyspieszenia w chwili  $t$  wariacją przyspieszenia w chwili  $t + \delta t$ . Wówczas chwilom czasu  $t_-$  będą odpowiadały wariacje przyspieszeń dla chwil  $t_+ = t_- + \tau$ . A więc wszystkim chwilom czasu odpowiadać będą dodatnie wartości wariacji przyspieszeń  $\bar{\delta}\ddot{x}_i$  (w ten sposób oznaczymy wariacje przyspieszenia, z wariacją czasu  $t$ ). Mamy więc relację  $\bar{\delta}\ddot{x}_i = f_i(t)$ . Traktując wariacje przyspieszenia jako wielkości nieskończenie małe możemy je przedstawić w postaci  $\bar{\delta}\ddot{x}_i = \varepsilon f_i(t)$ , gdzie  $\varepsilon$  oznacza nieskończenie mały parametr.

Przy takim określeniu wariacji przyspieszenia całka (5.2) ma sens. Zauważmy przy tym, że wariacja czasu  $\delta t$  nie jest w żaden sposób związana z wariacją przyspieszenia  $\delta\ddot{x}_i$ , dlatego można ją traktować (jak to czyni Schenkl) jako wielkość nieskończenie małą wyższego rzędu niż wariacja  $\delta\ddot{x}_i$ , a więc również niż wariacja  $\bar{\delta}\ddot{x}_i$ .

Dzięki wprowadzeniu wariacji czasu  $\delta t$ , wariacje współrzędnych i prędkości przyjmują postać

$$\bar{\delta}x_i = \dot{x}_i \delta t, \quad \bar{\delta}\dot{x}_i = \ddot{x}_i \delta t,$$

gdzie  $\dot{x}_i$  i  $\ddot{x}_i$  są wielkościami skończonymi,  $\delta t$  zaś jest nieskończenie małą wyższego rzędu niż  $\bar{\delta}\dot{x}_i$ . W takim razie  $\bar{\delta}x_i$  i  $\bar{\delta}\dot{x}_i$  są wielkościami nieskończenie małymi wyższego rzędu w porównaniu z  $\bar{\delta}\ddot{x}_i$ . Dlatego dalej będziemy je przyrównywali do zera:

$$\bar{\delta}x_i = 0, \quad \bar{\delta}\dot{x}_i = 0.$$

Wariację ruchu konstruujemy więc przy następujących warunkach:

- (1) Wariację  $\bar{\delta}x_i$  i  $\bar{\delta}\dot{x}_i$  są równe zero w dowolnej chwili czasu z rozważanego przedziału.
- (2) Wariacja przyspieszenia  $\bar{\delta}\ddot{x}_i \neq 0$  i jest całkowalną funkcją czasu.
- (3) Dodatkowo zakłada się, że

$$\bar{\delta}\ddot{x}_i = \frac{d\bar{\delta}\dot{x}_i}{dt}$$

co oznacza, że symbole  $d$  i  $\bar{\delta}$  są przemienne.

- (4) W skończonych chwilach czasu  $t_1$  i  $t_2$  wariacje przyspieszeń równają się zero:

$$(\bar{\delta}\ddot{x}_i)_{t_1} = 0, \quad (\bar{\delta}\ddot{x}_i)_{t_2} = 0.$$

Spełnienie tych warunków dla wariacji ruchu jako całości zapewnia jednoczesne spełnienie poprzednich warunków wariacji w dowolnej chwili czasu oraz istnienie całki

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \bar{\delta}\dot{x}_i \delta t.$$

Zbadajmy z kolei kwestię formułowania całkowitej postaci twierdzenia Gaussa. W tym celu obliczymy wariację  $\bar{\delta} \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right)$ . Uwzględniając warunek  $\bar{\delta}\dot{x}_i = 0$  otrzymujemy dla niej wyrażenie

$$(5.4) \quad \bar{\delta} \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right) = \sum_{i=1}^{3n} m_i (2\ddot{x}_i \bar{\delta}\ddot{x}_i + \dot{x}_i \bar{\delta}\ddot{x}_i).$$

Następnie rozważmy pracę wirtualną sił aktywnych, oddziałujących na układ

$$\delta A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \delta x_i.$$

Druga pochodna względem czasu z pracy wirtualnej przyjmuje postać:

$$(5.5) \quad \frac{d^2}{dt^2} \delta A = \sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{d^2 X_i}{dt^2} \delta x_i + 2 \frac{dX_i}{dt} \delta \dot{x}_i + X_i \delta \ddot{x}_i \right).$$

Przyjęte warunki wariacji umożliwiają obliczenie wariacji  $\bar{\delta}$  w ten sposób, jak gdyby czas nie ulegał wariacji. Dlatego w równaniu (5.5) możemy formalnie zastąpić symbol  $\delta$  przez symbol  $\bar{\delta}$ .

Wówczas z równania (5.5) otrzymamy zależność

$$\frac{d^2 \bar{\delta} A}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{d^2 X_i}{dt^2} \bar{\delta} x_i + 2 \frac{dX_i}{dt} \bar{\delta} \dot{x}_i + X_i \bar{\delta} \ddot{x}_i \right),$$



wobec tego zaś, że  $\bar{\delta}x_i = \bar{\delta}\dot{x}_i = 0$ , otrzymujemy

$$(5.6) \quad \frac{d^2 \bar{\delta}A}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3n} X_i \bar{\delta}\ddot{x}_i.$$

Odejmując stronami równanie (5.6) od równania (5.4) uzyskamy

$$\bar{\delta} \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right) - \frac{d^2 \bar{\delta}A}{dt^2} = \sum_{i=1}^{3n} \left( 2m_i \dot{x}_i \bar{\delta}\ddot{x}_i + m_i \dot{x}_i \frac{d\bar{\delta}\ddot{x}_i}{dt} - X_i \bar{\delta}\ddot{x}_i \right).$$

Całkowanie ostatniej z tych zależności w określonym przedziale czasowym od  $t_1$  do  $t_2$ , z uwzględnieniem warunków brzegowych, prowadzi do równania

$$(5.7) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[ \bar{\delta} \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right) - \frac{d^2 \bar{\delta}A}{dt^2} \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \dot{x}_i - X_i) \bar{\delta}\ddot{x}_i dt,$$

z którego wynika całkowita postać zasady Gaussa

$$(5.8) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[ \bar{\delta} \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right) - \frac{d^2 \bar{\delta}A}{dt^2} \right] dt = 0.$$

Zasadę, opisywaną przez równanie (5.8), nazwiemy zasadą Schenkla. Równoważność zasady Schenkla i zasady Gaussa wynika z równania (5.7). Rzeczywiście, założmy, że spełniona jest zasada Schenkla. Wówczas z równania (5.7) otrzymujemy zależność

$$(5.9) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \dot{x}_i - X_i) \bar{\delta}\ddot{x}_i dt = 0$$

dla dowolnych wartości  $t_1$  i  $t_2$ . Jest to możliwe jedynie wtedy, gdy funkcja podcałkowa równa się zeru. Mamy więc relację

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i \dot{x}_i - X_i) \bar{\delta}\ddot{x}_i = 0,$$

co oznacza, że wariacje przymusu są według Schenkla równe zeru

$$(5.10) \quad \bar{\delta}Z = 0.$$

Nowe (zgodne z podejściem Schenkla) i stare (gaussowskie) warunki wariacji w punkcie pokrywają się. Dlatego z równania (5.10) wynika, że również wariacje przymusu według Gaussa równają się zeru  $\delta Z = 0$ , a więc spełniona jest zasada Gaussa.

Odwrotnie, założmy, że zachodzi zasada Gaussa, to znaczy

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma (m_i \dot{x}_i - X_i) \bar{\delta}\ddot{x}_i dt = 0.$$

Wówczas z równania (5.7) wynika od razu spełnienie zasady Schenkla w postaci

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \bar{\delta} \left( \frac{d^2 T}{dt^2} \right) - \frac{d^2 \bar{\delta}A}{dt^2} \right] dt = 0.$$

## 6. Postać całkowa zasady Jourdaina

Różniczkowa zasada Jourdaina<sup>18)</sup> jest wyrażona przez równanie

$$(6.1) \quad \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i = 0$$

i odpowiada takiemu procesowi wariacyjnemu, w którym w dowolnej chwili czasu ulegają wariacji prędkości punktów układu materialnego ( $\delta \dot{x}_i \neq 0$ ), zaś ich współrzędne nie ulegają zmianom ( $\delta x_i = 0$ ). Całkowa postać zasady Jourdaina może być wyprowadzona analogicznie do tego, jak SCHENKL wyprowadził całkową postać zasady Gaussa. Zbudowanie całkowitej postaci zasady Jourdaina wymaga skonstruowania tożsamości, w której jedna ze stron ma postać następującej całki:

$$(6.2) \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta \dot{x}_i dt.$$

Całka ta istnieje, gdy założymy, że funkcje  $\delta \dot{x}_i$  są ciągłe. Przypuśćmy, że  $\delta \dot{x}_i$  jest ciągłą funkcją czasu, w ten sposób przechodzimy od wariacji ruchu w ustalonej chwili czasu do wariacji tego ruchu w skończonym przedziale czasu. Zauważmy, że warunki wariacji według Jourdaina nie są spełnione. Istotnie, z równości

$$(6.3) \quad \delta \dot{x}_i = -\frac{d\delta x_i}{dt}$$

wynika, że wariacje współrzędnych  $\delta x_i$  rosną lub maleją ( $\delta x_i \neq 0$ ), gdyż warunek ciągłości  $\delta \dot{x}_i$  oznacza zachowanie znaku funkcji  $\delta \dot{x}_i$  w dostatecznie małym przedziale czasu.

Równanie (6.3) zakłada, że czas nie ulega wariacji. Oznacza to, że spełnienie w dowolnej chwili czasu warunków wariacji według Jourdaina wymaga wariacji czasu. Przechodzimy więc, zgodnie z metodą Schenkla w zastosowaniu do wariacji prędkości, od  $\delta$ -procesu wariacji izochronicznej do  $\bar{\delta}$ -procesu wariacji asynchronicznej. Dzięki temu dokonujemy przejścia od niecałkowalnych funkcji czasu  $\delta \dot{x}_i$  do całkowalnych funkcji  $\bar{\delta} \dot{x}_i$ .

Funkcje  $\bar{\delta} \dot{x}_i$  są konstruowane podobnie, jak funkcje  $\bar{\delta} \ddot{x}_i$  u SCHENKLA. Zakłada się, że wariacje czasu są wielkościami nieskończenie małymi wyższego rzędu, niż wariacje  $\delta \dot{x}_i$  lub  $\bar{\delta} \dot{x}_i$ . Dzięki wprowadzeniu wariacji czasu współrzędne doznają wariacji  $\bar{\delta} x_i = \dot{x}_i \delta t$ . Ze względu jednak na to, że  $\delta t$  jest wielkością nieskończenie małą wyższego rzędu, niż  $\bar{\delta} \dot{x}_i$ , możemy zakładać, że  $\bar{\delta} x_i = 0$ . W ten sposób wariacja w skończonym przedziale czasu jest dokonywana przy następujących warunkach:

(1) Wariacja  $\bar{\delta} x_i$  jest w dowolnej chwili czasu równa zero:  $\bar{\delta} x_i = 0$ .

(2) Wariacja  $\bar{\delta} \dot{x}_i \neq 0$  i jest całkowaną funkcją czasu.

(3) Spełniona jest zależność  $\bar{\delta} \ddot{x}_i = \frac{d}{dt} \bar{\delta} \dot{x}_i$ , która oznacza przemienność operacji  $d$  i  $\bar{\delta}$ .

(4) Na końcach przedziału spełnione są warunki  $(\bar{\delta} \dot{x}_i)_{t_1} = 0$ ,  $(\bar{\delta} \dot{x}_i)_{t_2} = 0$ .

<sup>18)</sup> P. Jourdain, *Note on an analogue of Gauss principle of least constraint*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, t. 40, Londyn 1909.

Przejdźmy do budowania całkowitej formy zasady Jourdaina. W tym celu najpierw obliczamy wariację

$$(6.4) \quad \bar{\delta} \left( \frac{dT}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \bar{\delta} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \bar{\delta} \dot{x}_i,$$

$$(6.5) \quad \frac{d}{dt} \delta A = \sum_{i=1}^{3n} (\dot{X}_i \delta x_i + X_i \delta \dot{x}_i).$$

Przyjęte przez nas warunki wariacji pozwalają na zastąpienie w równaniu (6.5) symbolu  $\delta$  symbolem  $\bar{\delta}$ . Wówczas otrzymamy związek

$$(6.6) \quad \frac{d}{dt} \bar{\delta} A = \sum_{i=1}^{3n} X_i \bar{\delta} \dot{x}_i.$$

Odejmując stronami równanie (6.6) od równania (6.5) mamy

$$\bar{\delta} \left( \frac{dT}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \bar{\delta} A = \sum_{i=1}^{3n} m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \bar{\delta} \dot{x}_i + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \bar{\delta} \dot{x}_i - \sum_{i=1}^{3n} X_i \bar{\delta} \dot{x}_i.$$

Całkując tę zależność i uwzględniając warunki wariacji 2–4 uzyskujemy tożsamość

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \bar{\delta} \left( \frac{dT}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \bar{\delta} A + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \bar{\delta} \dot{x}_i \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3n} (m_i \ddot{x}_i - X_i) \bar{\delta} \dot{x}_i dt,$$

z której wynika całkowita forma zasady Jourdaina, mająca postać warunku zerowania się następującej całki:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \bar{\delta} \left( \frac{dT}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \bar{\delta} A + \sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_i \bar{\delta} \dot{x}_i \right] dt = 0.$$

POLITECHNIKA, WOLGOGRAD

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 lipca 1972 r.*



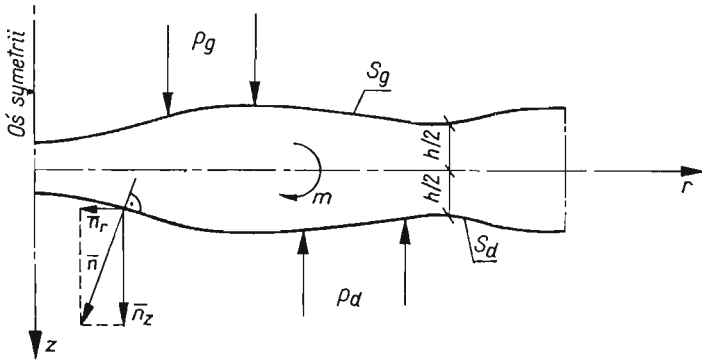
## UGIĘCIE OSIOWO-SYMETRYCZNE PŁYTY REISSNERA O ZMIENNEJ GRUBOŚCI

ANDRZEJ GAWECKI (POZNAŃ)

### 1. Wstęp

Celem niniejszej pracy jest wyprowadzenie równań podstawowych dla osiowo-symetrycznego zginania liniowo-sprężystej płyty Reissnera o zmiennej grubości oraz porównanie przedstawionej teorii z teoriami znanymi.

Osiowo-symetryczne zginanie izotropowych, jednorodnych płyt Reissnera o zmiennej grubości rozważał ESSENBURG [3]. Zależności między siłami wewnętrznymi a przemieszczeniami przyjął on takie same, jak dla płyt o stałej grubości.



Rys. 1

W pracy niniejszej uwzględniono ortotropię cylindryczną i podłużną niejednorodność materiału płyty oraz wpływ zmiany grubości na związki między siłami wewnętrznymi a kątem obrotu i ugięciem płyty. Zasadnicze założenia i sposób postępowania przy wyprowadzeniu równań podstawowych przedstawiono w pracy [5], gdzie rozważany był przypadek dowolnej zmiany grubości i niejednorodność materiału płyty.

### 2. Równania podstawowe

Rozważania przeprowadzono w walcowym układzie współrzędnych  $r, \psi, z$ . Przyjęto, że współczynniki sprężystości materiału, grubość płyty i obciążenie są funkcjami jednej zmiennej  $r$ . Stanowi to pewne ograniczenie, gdyż ugięcie osiowo-symetryczne może wystąpić również przy innych założeniach. Równania podstawowe można by otrzymać wprost z równań podanych w pracy [5] przechodząc z układu ortokartezjańskiego do układu

walcowego. Ze względów rachunkowych wygodniej jednak będzie od początku uwzględnić osiową symetrię zadania przyjmując fizyczne współrzędne tensorów naprężenia i odkształcenia.

Kosinusy kierunkowe dla górnej i dolnej powierzchni ograniczających płytę wyrażają się odpowiednio wzorami

$$(2.1) \quad n_z = \mp \left(1 + \frac{1}{4} h_{,r}^2\right)^{-1/2}, \quad n_r = -\frac{1}{2} h_{,r} \left(1 + \frac{1}{4} h_{,r}^2\right)^{-1/2}, \quad (\quad)_{,r} = \frac{d}{dr} (\quad).$$

Zgodnie z teorią REISSNERA i przy uwzględnieniu symetrii osiowej można przyjąć następujące wzory na przemieszczenia i naprężenia:

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_r = z\varphi(r), & u_\psi = 0, & u_z = w(r), \\ \sigma_r = \frac{6M_r}{h^2} \cdot \frac{z}{h/2}, & \sigma_\psi = \frac{6M_\psi}{h^2} \cdot \frac{z}{h/2}, & \sigma_{r\psi} = \sigma_{z\psi} = 0. \end{cases}$$

We wzorach (2.2)  $\varphi(r)$  i  $w(r)$  oznaczają średni kąt obrotu i ugięcie płyty, a  $M_r$  i  $M_\psi$  — promieniowy i obwodowy moment zginający.

Związki fizyczne dla przypadku ortotropii cylindrycznej i symetrii osiowej mają następującą postać (porównaj np. [8]):

$$(2.3) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\psi + a_{13}\sigma_z, & \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}a_{55}\sigma_{rz}, \\ \varepsilon_\psi = a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\psi + a_{23}\sigma_z, & \varepsilon_{r\psi} = \varepsilon_{\psi z} = 0, \\ \varepsilon_z = a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\psi + a_{33}\sigma_z, \end{cases}$$

gdzie  $a_{KL}$  ( $K, L = 1, 2, 3$ ) są technicznymi współczynnikami sprężystości materiału.

Równania podstawowe otrzymano na podstawie zasady E. REISSNERA [10]. W omawianym przypadku z zasady tej wynika równanie wariacyjne:

$$(2.4) \quad \delta \left\{ \int_V [2W(\sigma, \varepsilon) - W(\sigma)] dV - \int_{S_\theta} p_\theta w dS_\theta + \int_{S_d} p_d w dS_d + \int_S m\varphi dS - \oint_C \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r^* z\varphi + \sigma_{rz}^* w) dz dC \right\} = 0,$$

w którym  $W(\sigma, \varepsilon)$  oraz  $W(\sigma)$  oznaczają energię sprężystą właściwą wyrażoną odpowiednio przez naprężenia i odkształcenia oraz tylko przez naprężenia, symbol  $S$  oznacza obszar zajmowany przez płaszczyznę środkową płyty ograniczony linią  $C$ . Gwiazdka przy naprężeniach dotyczy wartości brzegowych, które nie podlegają wariacji.

Po podstawieniu znanych wzorów na energię sprężystą właściwą [1, 8] oraz po wykonaniu wariacji i całkowania przez części otrzymano następujące równanie:

$$(2.5) \quad \int_S \left[ \left( \varphi_{,r} - \frac{\partial \Delta}{\partial M_r} \right) \delta M_r + \left( \frac{\varphi}{r} - \frac{\partial \Delta}{\partial M_\psi} \right) \delta M_\psi + \left( \varphi + w_{,r} - \frac{\partial \Delta}{\partial Q} \right) \delta Q + \right. \\ \left. + \left( -M_{r,r} - \frac{1}{r} M_r + \frac{1}{r} M_\psi + Q + m \right) \delta \varphi + \left( -Q_{,r} - \frac{1}{r} Q + \bar{p} \right) \delta w \right] dS + \\ + \oint_C [(M_r - M_r^*) \delta \varphi + (Q - Q^*) \delta w] dC = 0,$$

gdzie  $Q$  jest siłą poprzeczną,

$$(2.6) \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}(M_r, M_\psi, Q) = \int_{-h/2}^{h/2} W(\sigma) dz, \quad \bar{p} = (p_d - p_g) \left(1 + \frac{1}{4} h_{,r}^2\right)^{1/2}.$$

Z równania (2.5) otrzymujemy zależności wiążące przemieszczenia z siłami wewnętrznymi

$$(2.7) \quad \varphi_{,r} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial M_r}, \quad \frac{1}{r} \varphi = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial M_\psi}, \quad \varphi + w_{,r} = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q},$$

równania równowagi płyty

$$(2.8) \quad (rM_r)_{,r} - M_\psi = (Q + m)r$$

oraz warunki brzegowe  $M_r = M_r^*$ ,  $Q = Q^*$ .

W celu wyznaczenia funkcji  $\mathcal{A}(M_r, M_\psi, Q)$  należy obliczyć nie znane jeszcze naprężenia  $\sigma_{zr}$  i  $\sigma_z$ . Naprężenia te wyznaczono przy wykorzystaniu różniczkowych równań równowagi naprężeń, warunków na powierzchniach  $S_g$  i  $S_d$  oraz równań równowagi płyty (2.8). Wzory na  $\sigma_{zr}$  i  $\sigma_z$  mają następującą postać:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \sigma_{zr} = \frac{3}{2h} \left\{ Q \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] - 3M_r \frac{h_{,r}}{h} \left[ 1 - 3 \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \right\}, \\ \sigma_z = \frac{3}{4} \left\{ -\bar{p} \left[ \left( \frac{z}{h/2} \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{z}{h/2} \right)^3 \right] + \left[ \left( 2Q + \frac{1}{r} M_\psi \right) \frac{h_{,r}}{h} + M_r \frac{h_{,rr}}{h} \right] \left[ \left( \frac{z}{h/2} \right) - \left( \frac{z}{h/2} \right)^3 \right] - 2M_r \left( \frac{h_{,r}}{h} \right)^2 \left[ \left( \frac{z}{h/2} \right) - 2 \left( \frac{z}{h/2} \right)^3 \right] - \frac{2}{3} \bar{p} \right\}; \quad \bar{p} = (p_g + p_d) \left( 1 + \frac{1}{4} h_{,r}^2 \right)^{1/2}. \end{cases}$$

Jeżeli przy całkowaniu funkcji  $W(\sigma)$  w obszarze grubości płyty uwzględnimy wzory (2.9) i zróżniczkujemy funkcję  $\mathcal{A}(M_r, M_\psi, Q)$  zgodnie z równaniem (2.7), to otrzymamy równania wiążące przemieszczenia z siłami wewnętrznymi w postaci jawnej,

$$(2.10) \quad \begin{cases} M_r f_{11} + M_\psi f_{12} + Q f_{13} = f_{10} \bar{p} + \varphi_{,r}, \\ M_r f_{21} + M_\psi f_{22} + Q f_{23} = f_{20} \bar{p} + \varphi/r, \\ M_r f_{31} + M_\psi f_{32} + Q f_{33} = f_{30} \bar{p} + \varphi + w_{,r}, \end{cases}$$

gdzie współczynniki  $f_{AB} = f_{BA}$  oraz  $f_{A0}$  ( $A, B, = 1, 2, 3$ ) są funkcjami zmiennej  $r$ :

$$(2.11) \quad \begin{cases} f_{11} = \frac{12a_{11}}{h^3} + \frac{9a_{55}}{5h^3} h_{,r} + \frac{6a_{13}}{5h^3} (h_{,rr} h + h_{,r}^2) + \frac{3a_{33}}{140h^3} (2h_{,rr}^2 h^2 + 11h_{,r}^4 - 2h_{,r} h_{,r}^2 h), \\ f_{12} = f_{21} = \frac{12a_{12}}{h^3} + \frac{3a_{13}}{5h^2 r} h_{,r} + \frac{3a_{23}}{5h^3} (h_{,rr} h + h_{,r}^2) + \frac{3a_{33}}{140h^2 r} (2h_{,rr} h_{,r} h - h_{,r}^3), \\ f_{13} = f_{31} = -\frac{3a_{55}}{5h^2} h_{,r} + \frac{6a_{13}}{5h^2} h_{,r} + \frac{3a_{33}}{70h^2} (2h_{,rr} h_{,r} h - h_{,r}^3), \\ f_{10} = \frac{6a_{13}}{5h} + \frac{3a_{33}}{140h} (3h_{,rr} h + 2h_{,r}^2), \\ f_{22} = \frac{12a_{22}}{h^3} + \frac{6a_{23}}{5h^2 r} h_{,r} + \frac{3a_{33}}{70hr^2} h_{,r}^2, \end{cases}$$

$$(2.11) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{c.d.} \\ f_{23} = f_{32} = \frac{6a_{23}}{5h^2} h_{,r} + \frac{3a_{33}}{35hr} h_{,r}^2, \\ f_{20} = \frac{6a_{23}}{5h} + \frac{9a_{33}}{140r} h_{,r}, \\ f_{33} = \frac{6a_{55}}{5h} + \frac{6a_{33}}{35h} h_{,r}^2, \\ f_{30} = \frac{9a_{33}}{70} h_{,r}. \end{array} \right.$$

Równania równowagi płyty (2.8) łącznie z równaniami (2.10) stanowią równania podstawowe omawianego problemu.

### 3. Równania różniczkowe płyty

Ponieważ w zadaniu osiowo-symetrycznym budowa wzoru na siłę poprzeczną jest znana, równania różniczkowe płyty otrzymuje się stosunkowo prosto. Jeśli w wyrażeniu na siłę poprzeczną występuje nieznaną reakcją, którą wyznacza się z warunków brzegowych, to reakcja ta pełni rolę stałej całkowania. W celu wyprowadzenia równań różniczkowych płyty w pierwszej kolejności rozwiążemy układ równań algebraicznych (2.10)<sub>1</sub> i (2.10)<sub>2</sub> ze względu na  $M_r$  i  $M_\psi$ . Rozwiązanie to napiszemy w postaci:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_r = \left( \frac{1}{r} g_{12} + g_{11} \frac{d}{dr} \right) \varphi - B_{13} Q + B_{10} \bar{p}, \\ M_\psi = \left( \frac{1}{r} g_{22} + g_{21} \frac{d}{dr} \right) \varphi - B_{23} Q + B_{20} \bar{p}, \end{array} \right.$$

gdzie

$$(3.2) \quad g_{11} = \frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}; \quad g_{12} = g_{21} = -\frac{f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}; \quad g_{22} = \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2};$$

$$f_{11}f_{22} - f_{12}^2 \neq 0, \quad B_{ij} = \sum_{l=1}^2 g_{il}f_{lj}; \quad (i = 1, 2; j = 0, 3).$$

Równanie różniczkowe funkcji kąta obrotu otrzymuje się po podstawieniu równań (3.1) do równania równowagi (2.8)<sub>1</sub>:

$$(3.3) \quad \left[ r \left( \frac{1}{r} g_{12} + g_{11} \frac{d}{dr} \right) \varphi \right]_{,r} - \left( \frac{1}{r} g_{22} + g_{21} \frac{d}{dr} \right) \varphi =$$

$$= (rB_{13}Q)_{,r} - B_{23}Q + (Q+m)r - (rB_{10}\bar{p})_{,r} + B_{20}\bar{p}.$$

Równanie (2.10)<sub>3</sub> służy do wyznaczenia ugięcia płyty. Uwzględniając wzory (3.1) otrzymano następujące równanie różniczkowe funkcji ugięcia:

$$(3.4) \quad w_{,r} = \left( -1 + \frac{1}{r} B_{23} + B_{13} \frac{d}{dr} \right) \varphi + (f_{33} - f_{13}B_{13} - f_{23}B_{23})Q + (-f_{30} + f_{13}B_{10} + f_{23}B_{20})\bar{p}.$$

Równania (3.3) i (3.4) są poszukiwanymi równaniami różniczkowymi płyty.



Z budowy wyrażenia opisującego pracę sił na brzegu płyty (2.5) wynika sposób formułowania warunków brzegowych. Warunki te, jak widać, są takie same, jak w teorii klasycznej. Na brzegu płyty możemy spełnić dwa warunki ustalając siłę poprzeczną  $Q^*$  lub ugięcie  $w^*$  oraz moment promieniowy  $M_r^*$  lub kąt obrotu  $\varphi^*$ . Liczba stałych całkowania będzie odpowiadała liczbie warunków brzegowych, jeśli uwzględnimy, że rolę czwartej stałej pełni nieznaną reakcja występująca w wyrażeniu na siłę poprzeczną.

#### 4. Równania różniczkowe płyty izotropowej przy pominięciu wpływu poprzecznych naprężeń normalnych

GANOWICZ [4] rozważając działanie siły skupionej na płytę Reissnera o stałej grubości wykazał, że rozwiązanie osobliwe nie jest jednoznaczne. Warunki jednoznaczności spełnia jedynie pewna część rozwiązania. Pozostała część rozwiązania spełnia równania równowagi, równanie różniczkowe płyty i warunki brzegowe, nie spełnia natomiast równania wyrażającego treść twierdzenia Bettiego o wzajemności prac. Z dalszych rozważań wynika, że niejednoznaczność rozwiązania nie występuje, jeżeli pominiemy wpływ naprężeń  $\sigma_z$ , jak to ma miejsce na przykład w płycie trójwarstwowej. Warto dodać, że wielu autorów, np. KĄCZKOWSKI [7], również przyjmuje  $\sigma_z = 0$ .

Przejdziemy obecnie do szerszego omówienia uproszczonego modelu izotropowej płyty Reissnera, w którym pominiemy wpływ poprzecznych naprężeń normalnych. We wzorach (2.11) trzeba wówczas założyć, że funkcje  $a_{B3} = a_{3B} = 0$  ( $B = 1, 2, 3$ ). Ostatecznie uzyskujemy następujące równania:

$$(4.1) \quad \begin{cases} M_r = D \left[ \left( \varphi_{,r} + \frac{4\mu T}{Eh^2} Q \right) + \nu \frac{1}{r} \varphi \right], \\ M_\psi = D \left[ \nu \left( \varphi_{,r} + \frac{4\mu T}{Eh^2} Q \right) + (1+\mu) \frac{1}{r} \varphi \right], \end{cases}$$

$$(4.2) \quad \begin{cases} (rD\varphi_{,r})_{,r} + \left[ (D\nu)_{,r} - D \frac{1+\mu}{r} \right] \varphi = (Q+m)r - \left[ \frac{h\mu Tr}{3(1-\nu^2+\mu)} Q \right]_{,r} + \nu \frac{h\mu T}{3(1-\nu^2+\mu)} Q, \\ w_{,r} = -\varphi + \chi \frac{12(1+\nu)}{5Eh} Q - \frac{4\mu T}{Eh^2} M_r, \end{cases}$$

$$\text{gdzie } D = D(r) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2+\mu)}; \quad \mu = \mu(r) = \frac{3(1+\nu)}{10T^2} \geq 0; \quad T = T(r) = \frac{1}{h_{,r}},$$

$E(r)$  i  $\nu(r)$  oznaczają odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona. Współczynnik  $\chi$  uwzględnia wpływ sił poprzecznych na ugięcie. W naszym przypadku  $\chi = 1$ . Warto zwrócić uwagę, że jeżeli w równaniach (4.1) i (4.2) przyjmiemy  $\mu = 0$  i  $\chi = 0$ , to otrzymamy równania dla płyty klasycznej. Jeżeli natomiast  $\mu = 0$  i  $\chi = 1$ , to równania (4.1) i (4.2) przyjmują postać podaną przez ESSENBURGA [3] dla przypadku, gdy  $\bar{p} = m = 0$  oraz  $E, \nu = \text{const}$

Ponieważ całkowanie równania (4.2)<sub>2</sub> przy znanej funkcji  $\varphi(r)$  sprowadza się do kwadratur, przeanalizujemy bliżej równanie (4.2)<sub>1</sub>. W celu zapisania tego równania w postaci bezwymiarowej wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(4.3) \quad \varrho = \frac{r}{R}; \quad (R = \text{const}); \quad E(\varrho) = E_1 \eta(\varrho); \quad h(\varrho) = h_1 \tau(\varrho); \quad D(\varrho) = B_1 B(\varrho);$$

$$B(\varrho) = \frac{\eta(\varrho) \tau^3(\varrho)}{1 - \nu^2(\varrho) + \mu(\varrho)}; \quad B_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12}; \quad E_1 = E(1); \quad h_1 = h(1); \quad D_1 = D(1).$$

Uwzględniając powyższe oznaczenia równanie (4.2)<sub>1</sub> przyjmuje postać

$$(4.4) \quad [(\varrho B)\varphi, \rho]_{,\rho} + \left[ (\nu B)_{,\rho} - \frac{B}{\varrho} (1 + \mu) \right] \varphi = \pi(\varrho, Q),$$

$$\text{gdzie } \pi(\varrho, Q) = \frac{R}{B_1} \left\{ R \varrho (Q + m) - \left[ \varrho \frac{h_1 \mu T \tau}{3(1 - \nu^2 + \mu)} Q \right]_{,\rho} + \nu \frac{h_1 \mu T \tau}{3(1 - \nu^2 + \mu)} Q \right\}.$$

Jeżeli wprowadzimy nową funkcję  $z(\varrho)$ , związaną z funkcją  $\varphi(\varrho)$  zależnością  $\varphi = (B\varrho)^{-z/2}$  (por. [9] s. 391), to otrzymamy równanie, w którym znika pierwsza pochodna:

$$(4.5) \quad z_{,\rho\rho} + J(\varrho)z = \pi(\varrho, Q).$$

Funkcja  $J(\varrho)$  jest niezmiennikiem równania i wyraża się wzorem

$$(4.6) \quad J(\varrho) = -\frac{1}{2} [\ln(\varrho B)]_{,\rho\rho} - \frac{1}{4} [\ln(\varrho B)]_{,\rho}^2 + \frac{\nu}{\varrho} [\ln(\nu B)]_{,\rho} - \frac{1 + \mu}{\varrho}.$$

Przedstawimy obecnie dwa przypadki, w których można otrzymać ściśle rozwiązanie równania (4.4).

(1) Jeśli współczynnik przy funkcji  $\varphi$  jest równy zeru, a więc gdy

$$\ln(\nu B) = \int \frac{1 + \mu}{\nu \varrho} d\varrho; \quad \nu \neq 0,$$

to

$$\varphi(\varrho) = C_1 \int \frac{d\varrho}{dB} + C_2,$$

gdzie  $C_1$  i  $C_2$  są stałymi całkowania.

(2) Jeśli grubość płyty zmienia się liniowo, tzn. gdy  $\tau(\varrho) = \frac{h_0 T + R\varrho}{h_0 T + R}$  ( $h_0 = h(0)$ ),  $\nu = \text{const}$ , a  $B = \varrho^s$ , gdzie  $s$  jest liczbą rzeczywistą, to równanie (4.4) można zapisać w następującej formie:

$$(4.7) \quad \varrho^2 \varphi_{,\rho\rho} + (1 + s)\varrho \varphi_{,\rho} + [s\nu - (1 + \mu)]\varphi = \varrho^{-s+1} \cdot \pi(\varrho, Q).$$

Jest to równanie Eulera, dla którego równanie charakterystyczne przybiera niżej podaną postać:

$$k^2 + ks + [s\nu - (1 + \mu)] = 0.$$

Ponieważ wyróżnik tego równania  $\Delta = s^2 - 4sv + 4(1 + \mu)$  jest zawsze dodatni ( $\mu \geq 0$ ;  $0 \leq \nu \leq 0,5$ ), pierwiastki  $k_1$  i  $k_2$  są rzeczywiste. Rozwiązanie ogólne równania (4.7) jest następujące:

$$(4.8) \quad \varphi(\varrho) = C_1 \varrho^{k_1} + C_2 \varrho^{k_2} + \varphi_0(\varrho),$$

gdzie

$$(4.9) \quad k_{1,2} = -\frac{1}{2}s \pm \sqrt{0,25s^2 - \nu s + 1 + \mu},$$

a  $\varphi_0(\varrho)$  jest całką szczególną.

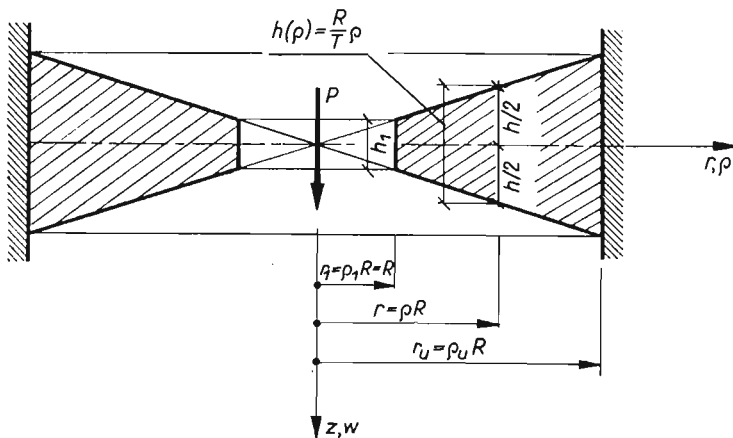
Funkcja modułu Younga  $\eta(\varrho)$  musi zmieniać się według wzoru

$$(4.10) \quad \eta(\varrho) = \varrho^s(1 - \nu^2 + \mu) \left( \frac{h_0 T + R}{h_0 T + R \varrho} \right)^3.$$

Należy zwrócić uwagę, że wiele ścisłych rozwiązań równań liniowych o specjalnej budowie zmiennych współczynników podał KAMKE [6]. W bardziej złożonych przypadkach, o ile rozwiązanie jest regularne, można stosować metody przybliżone. Jeśli współczynniki równania są analityczne, to rozwiązanie przybliżone uzyskuje się metodą współczynników nieoznaczonych, którą do potrzeb inżynierskich przystosował WIERZCHOLSKI w pracy [11].

### 5. Przykład

Rozważmy szczegółowo jednorodną płytę pierścieniową o grubości zmieniającej się liniowo według funkcji  $h(\varrho) = \frac{R}{T}\varrho$  (porównaj rys. 2). Obciążenie płyty stanowi siła  $P$ , będąca wypadkową sił równomiernie rozłożonych na obwodzie wewnętrznym o promieniu



Rys. 2

$r = 1 \cdot R$ . Wzdłuż grubości płyty naprężenia styczne zmieniają się zgodnie z prawem rozkładu (2.9)<sub>1</sub>. Podobny przypadek rozważali CONWAY [2] i ESSENBURG [3]. Pierwszy z wymienionych autorów posłużył się teorią klasyczną, drugi — pewną uproszczoną teorią REISSNERA (por. p. 1).

W niniejszej pracy ograniczymy się do podania szkicu rozwiązania, ponieważ sformułowane wyżej zadanie jest przedmiotem innej pracy autora. W omawianym zadaniu siła poprzeczna jest znana i wynosi:  $Q = -P/2\pi R\varrho$ . Równanie różniczkowe kąta obrotu otrzymamy kładąc w równaniu (4.7)  $s = 3$ . Wówczas mamy przypadek płyty jednorodnej ( $E = \text{const}$ ). Wzory na przemieszczenia i siły wewnętrzne są następujące:

$$\varphi(\varrho) = \frac{PR}{2\pi D_1} (C_1 \varrho^{-3-k} + C_2 \varrho^k + \alpha \varrho^{-2}),$$

$$M_r(\varrho) = \frac{P}{2\pi} [-(3+k-\nu)C_1 \varrho^{-1-k} + (k+\nu)C_2 \varrho^{2+k} - \beta],$$

$$M_\psi(\varrho) = \frac{P}{2\pi} [(1-3\nu-k\nu+\mu)C_1 \varrho^{-1-k} + (1+k\nu+\mu)C_2 \varrho^{2+k} + 1 - \beta],$$

$$w(\varrho) = \frac{PR^2}{2\pi D_1} \left[ \frac{C_1}{2+k} \left( 1 - \mu \frac{3+k-\nu}{3(1-\nu^2+\mu)} \right) \varrho^{-2-k} - \frac{C_2}{1+k} \left( 1 + \mu \frac{k+\nu}{3(1-\nu^2+\mu)} \right) \varrho^{1+k} + \left( \alpha + \chi \frac{(1+\nu)}{5T^2(1-\nu^2+\mu)} - \mu \frac{\beta}{3(1-\nu^2+\mu)} \right) \varrho^{-1} + C_3 \right],$$

$$\alpha = \frac{1}{3(1-\nu)+\mu} \left[ 1 - \mu \frac{1-\nu}{3(1-\nu^2+\mu)} \right],$$

$$\beta = \frac{2-\nu}{3(1-\nu)+\mu} + \mu \frac{1}{3(1-\nu^2+\mu)} \left( 1 - \frac{(1-\nu)(2-\nu)}{3(1-\nu)+\mu} \right),$$

$$k = k_1, \quad D_1 = \frac{E_1 h_1^3}{12(1-\nu^2+\mu)}.$$

Rozwiązanie płyty powinno spełniać trzy warunki brzegowe:  $\varphi(\varrho_u) = M_r(\varrho_1) = w(\varrho_u) = 0$ , z których wyznaczono stałe całkowania  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$ . Podane wyżej wzory umożliwiają porównanie wyników teorii Conwaya ( $\mu = \chi = 0$ ) i teorii Essenburga ( $\mu = 0$ ,  $\chi = 1$ ) z wynikami niniejszej pracy ( $\mu \neq 0$ ,  $\chi = 1$ ). Z obliczeń wykonanych przez autora oraz z budowy wzorów na funkcję kąta obrotu i momenty zginające wynika, że<sup>1)</sup>

$$\varphi_C = \varphi_E > \varphi; \quad w_C < w < w_E; \quad M_{rC} = M_{rE} > M_r; \quad M_{\psi C} = M_{\psi E} > M_\psi$$

oraz  $Q_C = Q_E = Q$ .

Dla ilustracji podanych wyżej wywodów przytoczymy kilka wartości liczbowych ( $\nu = 1/3$ ).

$$T = 3, \quad \varrho_1 = 1, \quad \varrho_u = 4: \varphi(1) = 45,0554 P/2\pi ER^2$$

$$\varphi_C(1) = 45,4736 P/2\pi ER^2$$

$$M_r(4) = -0,3805 P/\pi, \quad M_{rC}(4) = -0,3816 P/\pi.$$

<sup>1)</sup> Indeks C — teoria Conwaya (klasyczna), indeks E — teoria Essenburga. Wartości bez indeksu  $\alpha$  obliczone według wzorów podanych w niniejszej pracy.

$$\begin{aligned}
 T = 2\sqrt{2}, \varrho_1 = 1, \varrho_u = \sqrt{2}: w/w_C = 2,04; & \quad w_E/w_C = 2,23, \\
 \varrho_u = 2: w/w_C = 1,33; & \quad w_E/w_C = 1,41, \\
 \varrho_u = 4: w/w_C = 1,17; & \quad w_E/w_C = 1,19, \\
 \varrho_u \rightarrow \infty: w/w_C = 1,07; & \quad w_E/w_C = 1,11, \\
 \varrho_u \rightarrow 1: w/w_C \rightarrow \infty; & \quad w_E/w_C \rightarrow \infty. \\
 T = 2, \varrho_1 = 1, \varrho_u \rightarrow \infty: w/w_C = 1,25; & \quad M_r/M_{rC} = 0,0972, \\
 \varphi/\varphi_C = 0,965. \\
 T = 1, \varrho_1 = 1, \varrho_u \rightarrow \infty: w/w_C = 1,76; & \quad M_r/M_{rC} = 0,992, \\
 \varphi/\varphi_C = 0,805.
 \end{aligned}$$

## 6. Podsumowanie

1. Równania podstawowe dla osiowo-symetrycznego zginania ortotropowej płyty Reissnera o zmiennej grubości mają złożoną budowę. Układ równań różniczkowych płyty składa się z równania zwyczajnego drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach i z równania zwyczajnego pierwszego rzędu. Warunki brzegowe formułuje się tak samo, jak w teorii klasycznej.

2. Pominięcie wpływu naprężeń normalnych  $\sigma_z$  upraszcza w sposób istotny równania podstawowe zagadnienia. Współczynniki równań podstawowych w takim przypadku zależą od funkcji grubości płyty i jej pierwszej pochodnej.

3. Przykład podany w p. 5 niniejszej pracy ilustruje fakt, że dla modelu płyty Reissnera o zmiennej grubości, w którym pominięto wpływ poprzecznych naprężeń normalnych, wartości momentów zginających i kątów obrotu odbiegają od wartości wyznaczonych na gruncie teorii klasycznej. Jest to zasadnicza różnica w nawiązaniu do teorii płyt o stałej grubości, gdzie momenty i kąty obrotu w obu teoriach są identyczne (por. [7], s. 213).

4. Uproszczenie wprowadzone przez ESSENBURGA [3], polegające na przyjęciu zależności pomiędzy siłami wewnętrznymi a przemieszczeniami, tak jak w płytach o grubości stałej, daje nieco wyższe wartości momentów zginających, kąta obrotu i ugięcia od wartości wyznaczonych w sposób ścisły. Uwaga powyższa wynika z przykładu płyty pierścieniowej, rozważanego w p. 5. W innych przypadkach, np. w płytach o dużej zmianie grubości lub innych warunkach brzegowych, uproszczenie Essenburga może prowadzić do większych różnic.

## Literatura cytowana w tekście

1. С. А. АМБАРЦУМЯН, *Теория анизотропных оболочек*, Гос. Изд. Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.
2. H. D. CONWAY, *The bending of symmetrically loaded circular plates of variable thickness*, J. Appl. Mech., 1, 1-6 (1948).
3. F. ESSENBURG, *On axially symmetrical plates of variable thickness*, J. Appl. Mech., 25, 4, 625-626 (1958).
4. R. GANOWICZ, *Wybrane zagadnienia teorii płyt Reissnera i teorii trójwarstwowych*, Mech. Teor. i Stos., 4, 3, 55-95 (1966).
5. A. GAWĘCKI, *Statyka podłużnie niejednorodnej płyty Reissnera o zmiennej grubości*, Rozpr. Inżyn., 20, 4, 555-576, (1972).

6. E. КАММЕ, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Leipzig 1951, Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K. -G.
7. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1968.
8. С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ, *Анизотропные пластинки*, Гостехиздат, 1957.
9. N. M. МАТВИЕВ, *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1970.
10. E. REISSNER, *On a variational theorem in elasticity*, J. Math. Physics, **29**, 90-95, (1950).
11. K. WIERZCHOLSKI, *Rozwiązania równań różniczkowych n-tego rzędu występujących w mechanice*, *Rozprawy Inżyn.*, **20**, 2, 153-165 (1972).

## Р е з ю м е

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНКИ ТИПА РЕЙССНЕРА  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Основные уравнения, описывающие заглавную задачу, получены на основе применения вариационной теоремы Э. Рейсснера к анизотропному, линейно-упругому телу. Уравнения сведены к уравнениям в перемещениях, в которых неизвестными функциями являются: угол поворота линейного элемента нормального к срединной плоскости и прогиб пластинки.

Далее, исходя из результатов полученных Р. Гановичем [4], предполагается, что влиянием поперечных нормальных напряжений можно пренебречь. Представлены некоторые методы решения системы дифференциальных уравнений, описывающих данную задачу. Получено точное решение для пластинки с линейно изменяющейся толщиной. В заключение приводится числовой пример для кольцевой пластинки. Результаты вычислений сравнены с результатами, полученными Г. Д. Конвейем [2] и Ф. Эссенбургем [3].

## S u m m a r y

## THE AXIALLY SYMMETRICAL BENDING OF REISSNER'S PLATE OF VARIABLE THICKNESS

The fundamental equations of the problem indicated in the title are derived by means of the E.Reissner variational principle applied to the anisotropic, linearly elastic body. The equations are written in terms of «average displacements» (i.e.: angle of rotation of the linear element normal to the middle surface of the plate and its deflection). Starting from results obtained by R. Ganowicz [4], the influence of transversal normal stress is neglected. Methods of solutions of displacement equations are discussed. An exact solution for a particular case of linear variation of plate thickness is given. This solution is applied to the numerical example of the annular plate. The comparison with results obtained by H. D. Conway [2] and F. Essenburg [3] is presented.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca złożona została w Redakcji dnia 8 lutego 1973 r.

## DYNAMICZNE I STACJONARNE WŁASNOŚCI CIECZY LEPKOSPĘŻYSTYCH W ZŁOŻONYCH PRZEPLÝWACH ŚCINAJĄCYCH

STEFAN Z A H O R S K I (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Teoretyczne i doświadczalne badania różnych złożonych przepływów cieczy lepko-sprężystych, opisujących zachowanie się roztworów i polimerów stopionych, znajdują się w centrum uwagi badaczy w wielu ośrodkach naukowych zajmujących się reologią. Potrzeba takich badań wypływa, z jednej strony, z możliwości uzyskania pełniejszych informacji o własnościach badanego materiału, oraz, z drugiej strony, ze znaczenia praktycznego przepływów złożonych występujących w realnych sytuacjach technologicznych.

W niniejszej pracy rozważono teorię złożonych przepływów ścinających oraz dokonano krótkiego przeglądu najważniejszych wyników i stwierdzeń eksperymentalnych. Szczególną uwagę zwrócono na zagadnienie istnienia związków między własnościami dynamicznymi i stacjonarnymi, zagadnienie wpływu ustalonego przepływu ścinającego na charakterystyki dynamiczne przepływu złożonego oraz zagadnienie związków między charakterystykami przepływu złożonego z ustalonego ścinania i małych dodatkowych oscylacji ścinających. Analizę teoretyczną przeprowadzono dla modelu nieściśliwej cieczy prostej NOLLA (por. [1]) w oparciu o zaproponowaną wcześniej przez autora [2, 3] teorię złożonych przepływów z proporcjonalną historią deformacji.

### 2. Związki między własnościami dynamicznymi i stacjonarnymi

Należy właściwie zacząć od stwierdzenia, że do chwili obecnej nie istnieją wystarczająco ogólne i uniwersalne teorie fenomenologiczne lub strukturalne, z których wynikałyby zgodne z doświadczeniem związki między lepkością przy ustalonym ścinaniu  $\eta(\kappa)$  (lepkością pozorną) i rzeczywistą lepkością dynamiczną  $\eta'(\omega)$  oraz między naprężeniami normalnymi lub ich różnicami i odpowiednimi charakterystykami dynamicznymi:  $\eta'(\omega)$ ,  $\eta''(\omega)$ ,  $G'(\omega)$  itp. Znane ogólne teorie nieliniowe, jak na przykład teoria Colemana–Nolla (por. [1]), wykazują, że związki tego typu nie mogą istnieć w szerokim zakresie parametrów kinematycznych z uwagi na istotnie nieliniowy charakter teorii ogólnych oraz fakt, że lepkości i moduły dynamiczne są poprawnie zdefiniowane tylko dla liniowych teorii lepkospężystości.

Dla porządku należy wspomnieć o możliwościach formułowania nieliniowych teorii całkowych typu Greena–Rivlina (por. [1]) w terminach zespolonych modułów lub lepkości—zaproponowanych przez NAKADĘ [4] oraz LOCKETTA i GURTINA [5]. Jednak podejście takie

zachowuje nieliniowy charakter związków konstytutywnych i nie prowadzi do prostych relacji. Ilość modułów dynamicznych jest zbyt wielka, żeby przeprowadzić stosunkowo nieskomplikowane doświadczenia i uzyskać odpowiednie związki z funkcjami relaksacji lub pełzania — charakterystycznymi dla teorii typu całkowego (por. [6]).

Wśród dotychczasowych teorii, porównujących przepływy ustalone z dużymi szybkościami ścinania z przepływami oscylacyjnymi, można wyróżnić dwie zasadnicze grupy.

Pierwsza grupa teorii zakłada niezmiennosc struktury materiału zarówno w zakresie liniowym, jak i nieliniowym procesu ścinania. Dla ilustracji można tu wymienić teorie zaproponowane przez BUCHE'GO [7], ZIMMA [8], PAO [9], ROSCOE [10] oraz LODGE'A [11].

Druga grupa teorii przyjmuje zmienność struktury materiału w trakcie ustalonego płynięcia (np. zniszczenie sieci splątań), w zależności od różnych kryteriów deformacyjnych, czasowych lub energetycznych. Dla ilustracji można przytoczyć teorie YAMAMOTO [12] i GRAESLY'A [13], teorię tiksotropii LEONOWA i WINOGRADOWA [14], zmodyfikowaną teorię zniszczenia sieciowego TANNERA i SIMMONSA [15] oraz uogólnioną molekularną teorię opartą na modelu ROUSE'A — zaproponowaną przez BOOJJA [16].

Właściwie żadna z wymienionych teorii nie określa wszystkich charakterystyk dynamicznych i stacjonarnych w sposób całkowicie porównywalny z wynikami eksperymentów. Stosunkowo dobrą zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych uzyskuje się dla niektórych z wymienionych teorii, tylko w ograniczonym zakresie gradientów  $\kappa$  i częstości  $\omega$ , lub tylko dla naprężeń ścinających<sup>1)</sup>.

Teoria PAO [9], na przykład, prowadzi do związków:

$$(2.1) \quad \eta(\kappa) = \frac{|\eta^*(\omega)|^2}{\eta'(\omega)} \quad \text{dla } \omega = \kappa,$$

$$(2.2) \quad \frac{1}{\kappa^2} (T^{11} - T^{22}) = 2 \frac{G'(\omega)}{\omega^2} \frac{|\eta^*(\omega)|^2}{(\eta'(\omega))^2} \quad \text{dla } \omega = \kappa,$$

gdzie  $\eta^* = \eta' - i\eta''$  oznacza zespoloną lepkość dynamiczną, zaś  $G'$  — część rzeczywistą modułu dynamicznego. Porównanie z wynikami doświadczeń prowadzi do wniosku, że teoria Pao przewiduje lepkość  $\eta(\kappa)$  nie tylko większą od lepkości dynamicznej  $\eta'(\omega)$ , lecz także większą od wartości eksperymentalnych (por. [17]).

Wynikiem rozważań ROSCOE'A [10] są zależności:

$$(2.3) \quad \eta(\kappa) = \eta'(\omega) \quad \text{dla } \omega = m\kappa,$$

$$(2.4) \quad \frac{1}{\kappa^2} (T^{11} - T^{22}) = 2 \frac{G'(\omega)}{\omega^2} \quad \text{dla } \omega = m\kappa,$$

$$(2.5) \quad \frac{1}{\kappa^2} (T^{11} - T^{33}) = (1+r) \frac{G'(\omega)}{\omega^2} \quad \text{dla } \omega = m\kappa,$$

gdzie  $m$  i  $r$  oznaczają stałe materiałowe, przy czym  $m$  można interpretować jako stałe przesunięcie odpowiednich wykresów wzdłuż osi szybkości ścinania  $\kappa$ . Eksperyment nie potwierdza w ogólnym przypadku istnienia takiego przesunięcia pozwalającego bezpośrednio porównywać charakterystyki dynamiczne i stacjonarne (por. [17, 18]).

<sup>1)</sup> Należy podkreślić, że część z wymienionych teorii nie interesuje się w ogóle zagadnieniem naprężeń normalnych w przepływach ścinających.



Z licznych teorii *kontynualnych* opierających się na różnych założeniach (por. COLEMAN i MARKOVITZ [19]), wynikają następujące zależności graniczne:

$$(2.6) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \eta(\kappa) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'(\omega),$$

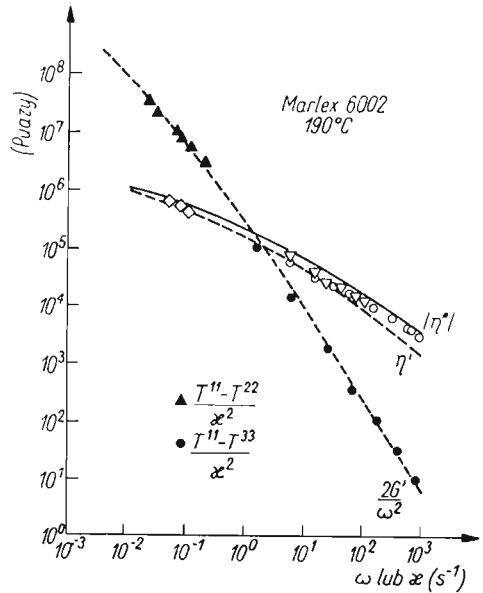
$$(2.7) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{T^{11} - T^{22}}{\kappa^2} = 2 \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G'(\omega)}{\omega^2}.$$

Pomimo ich ograniczonego charakteru, mianowicie słuszności dla małych wartości  $\kappa$  i  $\omega$ , związki (2.6) i (2.7) dość dobrze sprawdzają się eksperymentalnie dla roztworów i stopionych polimerów (por. np. [20, 21, 22, 23]).

Wśród zależności czysto *empirycznych*, można przytoczyć związek zaproponowany przez COXA i MERZA [24], mianowicie

$$(2.8) \quad \eta(\kappa) = |\eta^*(\omega)| \quad \text{dla} \quad \omega = \kappa,$$

w którym  $|\eta^*|$  oznacza bezwzględną wartość zespolonej lepkości dynamicznej. Badania doświadczalne WALESA i DEN OTTERA [17] potwierdzają w dużym stopniu słuszność propozycji (2.8) dla polietylenów, lecz nie dla wszystkich badanych rodzajów. Dla Marlexu



Rys. 1. Porównanie lepkości pozornej z lepkościami dynamicznymi  $|\eta^*|$  (—) i  $\eta'$  (---) dla Marlexu 6002.  $2G'\omega^{-2}$  (-·-·-). Według [17]

6002 dane doświadczalne dla lepkości pozornej układają się między krzywymi  $|\eta^*|$  i  $\eta'$  (rys. 1). Ci sami autorzy (por. także [22, 23]) proponują dla stopionych polistyrenów następujące zależności:

$$(2.9) \quad \eta(\kappa) = |\eta^*(\omega)| = \eta' \left( \frac{\omega}{m} \right), \quad m = m(\omega) \geq 1,$$

$$(2.10) \quad T^{11} - T^{33} = 2m^2 G' \left( \frac{\omega}{m} \right) \approx T^{11} - T^{22},$$

gdzie parametr  $m$  jest zmienny i zależy od częstości kątowej  $\omega$ . Związek (2.9) jest w zasadzie równoważny (2.8). Dane doświadczalne dowodzą, że proste przesunięcie wzdłuż

osi  $\kappa - \omega$  nie wystarczy dla pokrywania się wykresów  $\eta'(\omega)$  i  $\eta(\kappa)$ . Z drugiej strony przesunięcia  $m$ , obliczone z (2.9) dla każdej wybranej wartości  $\omega$ , są prawie takie same, jak odpowiednie przesunięcia wiążące współczynniki naprężeń normalnych z krzywymi  $2G'/\omega^2$ .

Wśród bardzo obszernej literatury, poświęconej interesującemu nas zagadnieniu, starsze prace przemawiają na korzyść związków typu (2.3) lub (2.7). W niektórych pracach współczynnik przesunięcia zmienia się w granicach 1,4–1,5 (por. [25, 26]), podczas gdy w innych jest wyraźnie wyższy, tj. 2,2–2,3 (por. [27, 28]). ONOGI, FUJII, KATO i OGIHARA [18] stwierdzają zmienność współczynników przesunięcia, które przybierają, w zależności od rodzaju badanego polietylenu, wartości od 1 do 2,7 lub nawet 3,1. Potwierdza to fakt, że krzywe  $\eta(\kappa)$  i  $\eta'(\omega)$  nie mogą być nasunięte na siebie za pomocą stałego przesunięcia wzdłuż osi odciętych.

Od czasu do czasu w literaturze zagadnienia notuje się próby strukturalnego uzasadnienia obserwowanych doświadczalnie zależności dla  $\eta(\kappa)$  i  $\eta'(\omega)$  poprzez różne mechanizmy hamujące lub niszczące w układach sieciowych. Większość rozważań na ten temat nosi charakter sugestii lub hipotez i nie prowadzi w efekcie do teorii, które nawet w przypadku liniowym tłumaczyłyby zadowalająco przebieg rzeczywistych zjawisk.

Reasumując rozważania niniejszego punktu, należy jeszcze raz powtórzyć stwierdzenie o braku wystarczająco ogólnych teorii opisujących poprawnie obserwowane związki między charakterystykami dynamicznymi i stacjonarnymi. Jest sprawą oczywistą, że teoria taka, gdyby istniała, musiałaby równie poprawnie opisywać inne własności polimerów, zarówno w przepływach wiskozymetrycznych (ścinających) jak i niewiskozymetrycznych.

### 3. Wpływ ustalonej szybkości ścinania na własności dynamiczne w przepływach zaburzonych

W ostatnim czasie, uwagę badaczy przyciągają zagadnienia związane z określaniem własności dynamicznych polimerów w przepływach złożonych, w których dodatkowo, zwykle harmoniczne, oscylacje nałożone są na przepływ podstawowy, zwykle ustalony wiskozymetryczny. Przepływy takie często odpowiadają sytuacjom laboratoryjnym lub technologicznym, w których zamierzony charakter przepływu podstawowego jest zaburzony okresowo zmienną pracą samego urządzenia. Istotny staje się wówczas problem znajomości związków charakteryzujących własności przepływu złożonego.

Pierwszym zagadnieniem jest wpływ parametrów opisujących ustalony przepływ podstawowy na dynamiczne własności przepływu zaburzonego, który różni się «nieznacznie» od przepływu podstawowego.

Obszerna analiza teoretyczna przepływów złożonych stanowiła przedmiot rozważań PIPKINA i OWENA [29] dla przypadku «przepływów bliskich do wiskozymetrycznych» w cieczy prostej, TANNERA i SIMMONSA [15] dla zmodyfikowanego modelu układów sieciowych, WALTERSA i JONESA [30, 31] dla przepływów ścinających cieczy Greena–Rivlina typu całkowitego (por. [1]), BOOJA [16] dla przepływów ścinających cieczy opisywanej uogólnionym modelem Rouse'a oraz autora [3] dla cieczy prostych w przepływach z proporcjonalną historią deformacji. Liczne inne prace (por. [32, 33, 34, 35]) poruszały po-

dobne zagadnienia dla innych modeli ośrodków, a zwłaszcza dla cieczy typu BKZ, których równania konstytutywne zaproponowali BERNSTEIN, KEARSLEY i ZAPAS [36].

Wśród badań doświadczalnych należy wymienić przede wszystkim prace OSAKI, TAMURY, KURATY i KOTAKI [37, 38], poświęcone skoncentrowanym roztworom polietyrenów, polimetakrylanu metylu i polimetakrylanu n-butylu, prace BOOJA [30, 40] nad roztworami dwulaurynianu glinu oraz kopolimerów etylenu-propylenu, badania SIMMONSA [41, 42, 43] nad roztworami poliizobutylenu i karboksymetylocelulozy, prace KUROIWY i NAKAMURY [44] nad roztworami elektrolitów, takich jak karboksymetyloceluloza i poliakrylan sodu, badania KATAOKI i UEDY [45] nad stopionymi polietylenami oraz WALTERSA i JONESA [30, 31] nad różnymi roztworami poliakryloamidów.

W kolejnym punkcie przedstawimy skrócone rozważania teoretyczne na temat złożonych przepływów z proporcjonalną historią deformacji, w oparciu o poprzednie prace autora [2, 3].

#### 4. Złożone przepływy z proporcjonalną historią deformacji

W poprzedniej pracy [2], poświęconej teorii przepływów z proporcjonalnymi historiami deformacji, rozważyliśmy przypadek ruchów utworzonych z «nałożenia» prostszych ruchów, z których każdy charakteryzował się proporcjonalną historią deformacji. Dla naszych obecnych celów wystarczy podać definicję ruchów złożonych z dwóch proporcjonalnych deformacji.

**Definicja.** *Ruch nazywa się ruchem złożonym z dwóch proporcjonalnych historii deformacji, wtedy i tylko wtedy, jeśli gradient deformacji w chwili  $\tau$ , względem ustalonej konfiguracji odniesienia w chwili 0, przybiera postać następującą:*

$$(4.1) \quad \mathbf{F}_0(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp[\mathbf{M}_1 k_1(\tau) + \mathbf{M}_2 k_2(\tau)], \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{1},$$

gdzie  $\mathbf{Q}(\tau)$  jest tensorem ortogonalnym,  $\mathbf{M}_1$  i  $\mathbf{M}_2$  są wzajemnie komutującymi stałymi tensorami, zaś  $k_1(\tau)$  i  $k_2(\tau)$  są dowolnymi gładkimi funkcjami czasu, takimi że  $k_1(0) = k_2(0) = 0$ .

Dla takich ruchów historia względnego tensora deformacji Cauchy'ego-Greena (por. [1]) przyjmuje postać:

$$(4.2) \quad \mathbf{C}(s) = \exp(\mathbf{N}_1^T g_1(s)) \mathbf{C}_2(s) \exp(\mathbf{N}_1 g_1(s)), \quad s \in [0, \infty),$$

gdzie

$$(4.3) \quad \mathbf{C}_2(s) = \exp(\mathbf{N}_2^T g_2(s)) \exp(\mathbf{N}_2 g_2(s)),$$

$$(4.4) \quad \mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{M}_i \mathbf{Q}^T(t), \quad g_i(s) = k_i(t-s) - k_i(t), \quad i = 1, 2,$$

przy czym  $t$  oznacza aktualną chwilę czasu.

Jeśli ruch określony przez (4.2) oraz jego ruchy składowe są ruchami izochorycznymi, wówczas

$$(4.5) \quad \det \mathbf{C}(s) = \det \mathbf{C}_1(s) = \det \mathbf{C}_2(s) = 1.$$

Dla nieściśliwej cieczy prostej (por. [1]) o następującym równaniu konstytutywnym:

$$(4.6) \quad \mathbf{T}_E(t) = \int_{s=0}^{\infty} (\mathbf{C}(s) - \mathbf{1}), \quad \text{tr } \mathbf{T}_E = 0,$$

gdzie  $\mathbf{T}_E(t)$  oznacza ekstra-naprężenie w chwili  $t$ , a  $\mathcal{F}$  jest izotropowym funkcjonałem konstytutywnym, otrzymamy (por. [2])

$$(4.7) \quad \mathbf{T}_E(t) = \mathcal{G} \left( g_1(s), \mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1 \right), \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{C}_2(s) - \mathbf{1},$$

gdzie  $\mathcal{G}$  jest funkcjonałem skalarnej funkcji  $g_1(s)$  i tensorowej funkcji  $\mathbf{G}(s)$  oraz funkcją tensora  $\mathbf{N}_1$ .

Jeśli przyjmiemy, że ruch oznaczony wskaźnikiem 2 jest ruchem małym, w sensie historii deformacji określonej odpowiednią normą  $\|\mathbf{G}(s)\|$ , zastosowanie zasady zanikającej pamięci (por. [1, 3]), przy jednoczesnych założeniach odnośnie różniczkowalności funkcjonału  $\mathcal{G}$ , prowadzi do zależności:

$$(4.8) \quad \bar{\mathbf{T}}_E(t) = \mathcal{G} \left( g_1(s), \mathbf{0}; \mathbf{N}_1 \right),$$

$$(4.9) \quad \Delta \mathbf{T}_E(t) = \delta_{\mathbf{G}} \mathcal{G} \left( g_1(s) | \mathbf{G}(s); \mathbf{N}_1 \right),$$

gdzie  $\bar{\mathbf{T}}_E$  oznacza ekstra-naprężenie odpowiadające przepływowi podstawowemu oznaczonemu wskaźnikiem 1,  $\Delta \mathbf{T}_E$  — przyrost ekstra-naprężenia wskutek nałożenia przepływu dodatkowego oznaczonego wskaźnikiem 2, przy czym  $\delta_{\mathbf{G}} \mathcal{G}$  jest funkcjonałem liniowym względem argumentu  $\mathbf{G}(s)$ . Dla małych dodatkowych przepływów człony wyższych rzędów mogą być pominięte.

Dotychczasowe rozważania nosiły charakter dość ogólny i nie ograniczały istotnie klasy przepływów podstawowych i dodatkowych. Są one również słuszne dla różnych typów przepływów niewiskozymetrycznych z proporcjonalną historią deformacji (por. [2]).

Założmy w dalszym ciągu, że przepływ podstawowy jest ustalonym przepływem wiskozymetrycznym, dla którego (por. [1,46])

$$(4.10) \quad \text{tr} \mathbf{N}_1 = \text{tr} \mathbf{N}_1^2 = 0, \quad \text{tr} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T = \kappa^2,$$

gdzie  $\kappa$  oznacza odpowiedni parametr ścinania (szybkość ścinania dla przepływu ścinającego). Wówczas dla ustalonego przepływu podstawowego

$$(4.11) \quad \bar{\mathbf{T}}_E(t) = \eta(\kappa) (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) + \frac{\sigma_1(\kappa)}{\kappa^2} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T + \frac{\sigma_2(\kappa)}{\kappa^2} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1,$$

gdzie  $\eta(\kappa)$  oznacza funkcję lepkości (lepkość pozorną), zaś  $\sigma_1(\kappa)$  i  $\sigma_2(\kappa)$  — odpowiednie funkcje różnic naprężeń normalnych (por. [46]).

Ponieważ funkcjonał występujący w (4.9) może być zawsze przedstawiony w postaci całkowitej, przyrost ekstra-naprężenia wywołany ruchem dodatkowym przyjmie ostatecznie postać

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \Delta \mathbf{T}_E(t) = \int_0^\infty \{ & \psi_0 \mathbf{G} + \psi_1 (\mathbf{G} (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) + (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) \mathbf{G}) + \\ & + \psi_2 (\mathbf{G} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \mathbf{G}) + \psi_3 (\mathbf{G} \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T + \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_1^T \mathbf{G}) + \\ & + \psi_4 (\mathbf{N}_1 \mathbf{G} + \mathbf{G} \mathbf{N}_1^T) + \psi_5 (\mathbf{G} \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{G}) + \psi_6 \mathbf{N}_1 \mathbf{G} \mathbf{N}_1^T + \\ & + \psi_7 (\mathbf{N}_1 \mathbf{G} \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{G} \mathbf{N}_1^T) + \psi_8 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) \text{tr} (\mathbf{N}_1 \mathbf{G}) + \psi_9 \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \text{tr} (\mathbf{N}_1 \mathbf{G}) + \\ & + \psi_{10} (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T) \text{tr} (\mathbf{N}_1 \mathbf{G} \mathbf{N}_1^T) + \psi_{11} \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \text{tr} (\mathbf{N}_1 \mathbf{G} \mathbf{N}_1^T) \} ds, \end{aligned}$$

gdzie  $\psi_i (i = 0, 1, \dots, 11)$  należy rozumieć jako funkcje materiałowe zależne od  $g_1(s)$  i  $\kappa^2$ , tj.  $\psi_i = \psi_i(g_1(s), \kappa^2)$ , zaś  $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(s)$ . Rozważania prowadzące do reprezentacji (3.12) oraz wszystkie redukcje, których należało dokonać w celu otrzymania 12 funkcji materiałowych  $\psi_i$ , zostały szczegółowo przedstawione w pracy [3].

Równania (4.12) są w pewnym sensie równoważne zależnościom uzyskanym przez PIPKINA [47] oraz zależnościom wynikającym z przedstawionej przez PIPKINA i OWENA [29] teorii «przepływów bliskich do wiskozymetrycznych». Mniejsza o jeden (12 zamiast 13) liczba niezależnych funkcji materiałowych  $\psi_i$  wynika z dodatkowo przyjętego przez nas warunku komutacji dla  $\mathbf{M}_1$  i  $\mathbf{M}_2$ , lub dla  $\mathbf{N}_1$  i  $\mathbf{N}_2$ .

Jeśli ruch dodatkowy jest przepływem wiskozymetrycznym typu *oscylacyjnego* (oscylacje harmoniczne), to

$$(4.13) \quad \mathbf{G}(s) = g_2(s)(\mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T) + g_2^2(s)\mathbf{N}_2^T\mathbf{N}_2, \quad \mathbf{N}_2^2 = \mathbf{0},$$

gdzie

$$(4.14) \quad g_2(s) = ie^{i\omega t}(1 - e^{-i\omega s}), \quad g_2(s)g_2(s) = -e^{2i\omega t}(1 - e^{-i\omega s})(1 - e^{-i\omega s}),$$

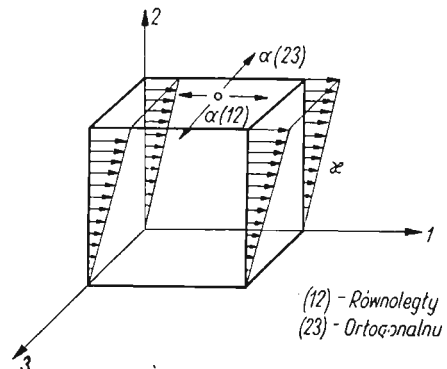
przy czym

$$(4.15) \quad k_2(\tau) = -ie^{i\omega\tau}, \quad k_2(0) = 0, \quad \dot{k}_2(\tau) = \omega e^{i\omega\tau}.$$

W wyrażeniach powyższych tylko rzeczywiste części funkcji są istotne, zaś  $\omega$  oznacza częstość kątową oscylacji.

5. Przepływy złożone z ustalonego przepływu ścinającego i małych oscylacji ścinających

Rozważania punktu poprzedniego mogą stanowić podstawę dla badania własności dynamicznych przepływu złożonego z ustalonego ścinania oraz małych dodatkowych zaburzeń ścinających — zmiennych harmonicznie w czasie. Z zależności (4.11) i (4.12) widać, że przyrosty ekstra-naprężenia  $\Delta T_E$  zależą, poprzez funkcje materiałowe  $\psi_i$ , od parametru  $\kappa$  charakteryzującego ustalony ruch podstawowy.



Rys. 2. Porównanie przepływu równoległego z ortogonalnym

Jeśli ruchy składowe są typu ścinającego, istnieją dwie możliwości: albo dodatkowe ścinanie zachodzi w płaszczyźnie równoległej do kierunku przepływu podstawowego, albo też w płaszczyźnie prostopadłej (ortogonalnej) do płaszczyzny przepływu podstawowego (por. [16,48]). Możliwości takie przedstawiono graficznie na rys. 2. W dalszym ciągu przedyskutujemy je po kolei.

**5.1. Przepływy równoległe.** Dla przepływów równoległych (por. rys. 2), mamy we współrzędnych kartezjańskich:

$$(5.1.1) \quad [N_1] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [N_2] = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 N_2 = N_2 N_1,$$

gdzie  $\kappa$  i  $\alpha$  oznaczają gradienty ścinania odpowiednio dla przepływu podstawowego i dodatkowego. Zakładamy, jak poprzednio, że przepływ podstawowy jest ustalony, zaś przepływ dodatkowy — oscylacyjny.

Ograniczając się do wyrazów liniowych względem amplitudy zaburzeń  $\alpha$ , na podstawie (4.12), (4.7)<sub>2</sub>, (4.3) i (5.1.1), otrzymamy dla przyrostów ekstra-naprężenia (por. [3]):

$$(5.1.2) \quad \begin{aligned} \Delta T_E^{23} &= \Delta T_E^{13} = 0, \\ \Delta T_E^{12} &= \int_0^\infty (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3 + \kappa^2 \psi_7 + \kappa^2 \psi_8) g_2(s) \alpha ds, \\ \Delta T_E^{11} &= \int_0^\infty 2\kappa (\psi_1 + \psi_4) g_2(s) \alpha ds, \\ \Delta T_E^{22} &= \int_0^\infty 2\kappa (\psi_1 + \psi_5 + \kappa^2 \psi_9) g_2(s) \alpha ds, \\ \Delta T_E^{33} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym funkcje  $\psi_i$  mają postać  $\psi_i = \psi_i(-s, \kappa^2)$ . Ponieważ funkcje  $\psi_i$  są parzyste względem  $\kappa$ , zmiana kierunku przepływu podstawowego nie zmienia znaku  $\Delta T_E^{12}$ , natomiast zmienia znak przyrostów naprężeń normalnych.

Zależności (5.1.2) mogą stanowić formalną podstawę do określania własności materiałowych cieczy, tj. określania odpowiednich funkcji  $\psi_i$ . Z doświadczalnego punktu widzenia, problem nie wydaje się łatwy; pewne uproszczenia teoretyczne wprowadza założenie małych gradientów  $\kappa$ , co z kolei powoduje dodatkowe trudności przy realizacji doświadczeń.

W celu zbadania wpływu  $\kappa$  na własności dynamiczne, przynajmniej dla małych wartości częstości kątowej  $\omega$ , wprowadzimy pojęcia zespolonej lepkości dynamicznej, zespolonego modułu dynamicznego i zespolonego modułu dynamicznego dla różnicy naprężeń normalnych, w sposób następujący (porównaj np. [49]):

$$(5.1.3) \quad \mu_{12}^*(\kappa, \omega) = \mu'_{12} - i\mu''_{12} = \frac{1}{\alpha \omega \exp i\omega t} \Delta T_E^{12},$$

$$(5.1.4) \quad G_{12}^*(\kappa, \omega) = G'_{12} + iG''_{12} = -\frac{1}{i\alpha \exp i\omega t} \Delta T_E^{12},$$

$$(5.1.5) \quad H^*(\kappa, \omega) = H' + iH'' = -\frac{1}{i\alpha \exp i\omega t} (\Delta T_E^{11} - \Delta T_E^{22}),$$

gdzie uwzględniliśmy (4.15). Podstawiając (4.14)<sub>1</sub> do (4.1.2), korzystając z definicji (5.1.3)–(5.1.5) oraz przechodząc do granicy dla  $\omega \rightarrow 0$ , otrzymamy:

$$(5.1.6) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \mu'_{12}(\kappa, \omega) = - \int_0^{\infty} (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3 + \kappa^2 \psi_7 + \kappa^2 \psi_8) s ds,$$

$$(5.1.7) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} G'_{12}(\kappa, \omega) = 0,$$

$$(5.1.8) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{H''(\kappa, \omega)}{\omega} = - \int_0^{\infty} 2\kappa \left( \psi_4 - \psi_5 - \frac{1}{2} \kappa \psi_9 \right) s ds,$$

gdzie  $\mu'_{12}$  jest rzeczywistą lepkością dynamiczną,  $G'_{12}$  jest rzeczywistym modułem dynamicznym, a  $H''$  — urojoną częścią dynamicznego modułu różnicy naprężeń normalnych.

Biorąc ponadto pod uwagę relacje zgodności wyprowadzone przez PIPIKINA [29, 48]<sup>2)</sup>, otrzymamy również, że

$$(5.1.9) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \mu'_{12}(\kappa, \omega) = \frac{d\tau(\kappa)}{d\kappa} = \eta(\kappa) \left( 1 + \frac{d \ln \eta}{d \ln \kappa} \right),$$

$$(5.1.10) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{H''(\kappa, \omega)}{\omega} = \frac{d}{d\kappa} [\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)],$$

gdzie  $\tau(\kappa) = \kappa \eta(\kappa)$  oznacza funkcję naprężenia ścinającego, zaś  $\sigma_1(\kappa)$  i  $\sigma_2(\kappa)$  — funkcje różnic naprężeń normalnych w przepływie podstawowym [por. (4.11)]. Pierwszy z powyższych związków jest formalnie zgodny z wynikami innych prac (por. [48, 16, 31]), podczas gdy drugi jest analogiczny do relacji R-3 na liście BERNSTEINA [34], obejmującej tzw. zależności reologiczne (porównaj p. 7).

Jeszcze jeden związek może być wyprowadzony dla nieściśliwych cieczy prostych w przypadku, gdy  $\omega \rightarrow 0$  i  $\kappa \rightarrow 0$ . Na podstawie teorii cieczy rzędu drugiego, COLEMAN i MARKOVITZ [19] pokazali, że [por. wzór (2.7)]

$$(5.1.11) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G'(\omega)}{\omega^2} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)}{2\kappa^2},$$

gdzie  $G'(\omega)$  oznacza moduł zachowawczy dla przepływu wyłącznie oscylacyjnego.

W naszym przypadku mamy

$$(5.1.12) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G'_{12}(\kappa, \omega)}{\omega^2} = - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3 + \kappa^2 \psi_7 + \kappa^2 \psi_8) s^2 ds.$$

W założeniu, że funkcje  $\psi_i$  nie są osobliwe względem argumentu  $\kappa^2$  oraz ponieważ

$$(5.1.13) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\kappa^2} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{d}{d\kappa} \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\kappa} \right),$$

dochodzimy ostatecznie do związku

$$(5.1.14) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} - \int_0^{\infty} \psi_0(-s, \kappa^2) s^2 ds = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{d}{d\kappa} \left( \frac{\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)}{\kappa} \right),$$

<sup>2)</sup> Relacje zgodności mogą być wyprowadzone w sposób podobny do [48], z rozważenia przypadku ruchu dodatkowego jako nieskończenie małego przyrostu ustalonego ruchu podstawowego.

którego lewa strona jest niczym innym, jak graniczną wartością drugiego momentu funkcji relaksacji  $\psi_0$ .

**5.2. Przepływy ortogonalne.** Dla przepływów ortogonalnych (porównaj rys. 2), mamy w kartezjańskim układzie współrzędnych:

$$(5.2.1) \quad [N_1] = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [N_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 N_2 = N_2 N_1,$$

gdzie  $\kappa$  i  $\alpha$  oznaczają gradienty ścinania odpowiednio dla przepływu podstawowego i dodatkowego.

Postępując podobnie, jak w punkcie poprzednim, otrzymamy dla przyrostów ekstra-naprężenia (por. [3]):

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned} \Delta T_E^{23} &= \int_0^\infty (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3) g_2(s) \alpha ds, \\ \Delta T_E^{13} &= \int_0^\infty \kappa (\psi_1 + \psi_4) g_2(s) \alpha ds, \\ \Delta T_E^{12} &= 0, \\ \Delta T_E^{11} &= \Delta T_E^{22} = \Delta T_E^{33} = 0, \end{aligned}$$

a zatem tylko przyrosty naprężeń ścinających. Zmiana zwrotu przepływu podstawowego nie zmienia znaku  $\Delta T_E^{23}$ , tj. naprężenia w płaszczyźnie przepływu dodatkowego, natomiast zmienia znak  $\Delta T_E^{13}$ , tj. przyrostu naprężenia w płaszczyźnie, która nie jest płaszczyzną przepływu podstawowego, ani też przepływu dodatkowego. Wyrażenia (5.2.2) są całkowicie odmienne od wyrażeń (5.1.2), chociaż niektóre funkcje podcałkowe występują w bardzo zbliżonej postaci. Liczba różnych funkcji typu  $\psi_i$  wynosi obecnie 5, zamiast 9 dla przepływu równoległego.

W celu zbadania wpływu  $\kappa$  na własności dynamiczne przy małych wartościach  $\omega$ , postępujemy podobnie, jak w p. 5.1. Wprowadzając dwie zespolone lepkości dynamiczne, w myśl definicji podobnych do (5.1.3) (por. [3]) oraz przechodząc do granicy  $\omega \rightarrow 0$ , otrzymamy ostatecznie:

$$(5.2.3) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{23}(\kappa, \omega) = - \int_0^\infty (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3) s ds,$$

$$(5.2.4) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} G'_{23}(\kappa, \omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} G'_{13}(\kappa, \omega) = 0,$$

$$(5.2.5) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{13}(\kappa, \omega) = - \int_0^\infty \kappa (\psi_1 + \psi_4) s ds,$$

gdzie  $\eta'_{23}$  jest rzeczywistą lepkością dynamiczną w płaszczyźnie przepływu dodatkowego (23),  $\eta'_{13}$  — taką samą lepkością w płaszczyźnie (13), a  $G'_{23}$  i  $G'_{13}$  — rzeczywistymi modułami dynamicznymi w tych płaszczyznach.



Biorąc pod uwagę relacje zgodności wyprowadzone przez PIPKINA [48], mamy również

$$(5.2.6) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{23}(\kappa, \omega) = \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} = \eta(\kappa),$$

$$(5.2.7) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{13}(\kappa, \omega) = \frac{\sigma_1(\kappa)}{\kappa},$$

gdzie  $\tau(\kappa)$  oznacza funkcję naprężenia ścinającego, zaś  $\sigma_1(\kappa)$  — funkcję pierwszej różnicy naprężeń normalnych w przepływie podstawowym [por. (4.11)].

Zależność (5.2.6) dobrze opisuje znaną własność funkcji lepkości dynamicznej (por. [10, 48]). Natomiast zależność (5.2.7) nie występuje na liście związków reologicznych podanych przez TANNERA i WILLIAMSZA [33] (porównaj p. 7). Zależności (5.2.6) i (5.2.7) są jedynymi zależnościami wynikającymi, dla rozważanego przepływu, z relacji zgodności Pipkina.

Związek podobny do (5.1.14) wyprowadza się na podstawie zależności

$$(5.2.8) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G'_{23}(\kappa, \omega)}{\omega^2} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3) s^2 ds.$$

Stosując, jak poprzednio, odpowiednie przejścia graniczne otrzymamy

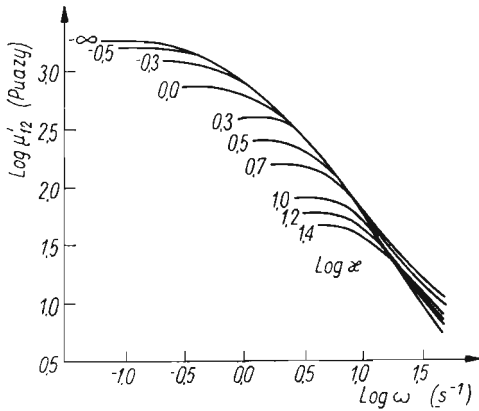
$$(5.2.9) \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} - \int_0^{\infty} \psi_0(-s, \kappa^2) s^2 ds = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\kappa^2}.$$

Przedstawione w niniejszym punkcie związki mogą być w zasadzie poddane weryfikacji doświadczalnej. Ponieważ dotyczą one z reguły granicznych wartości dla  $\omega \rightarrow 0$ , przeprowadzenie odpowiednich eksperymentów przy małych częstościach kątowych jest trudne i często nie zapewnia wystarczającej dokładności pomiarów. Istniejące jednak dane doświadczalne, zawarte w pracach wymienionych na wstępie p. 3, pozwalają na ogólną analizę wpływu ustalonej szybkości ścinania na własności dynamiczne przepływu złożonego przy dużych i małych częstościach kątowych. Należy przy tym pamiętać, że dane doświadczalne otrzymano w różnych eksperymentach i dla różnych rodzajów materiałów. Tylko nieliczne badania miały na celu wykazanie słuszności takich lub innych związków.

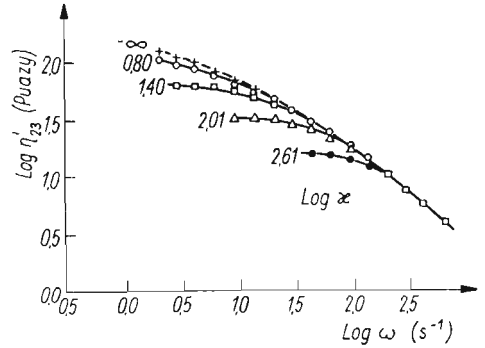
Większość wymienionych poprzednio prac dotyczyła przepływów równoległych (por. [37, 38, 39, 40, 44, 45]), badanych za pomocą urządzeń typu reogoniometru Weissenberga. Tylko nieliczne prace zajmowały się przepływami ortogonalnymi (por. [41–43]) realizowanymi w przyrządach typu współosiowych cylindrów, z których jeden wykonywał dodatkowy ruch drgający w kierunku swojej osi. Szczegółowe omówienie wyników badań doświadczalnych zawarte jest w pracy BOOJA [16], gdzie również dokonano porównania eksperymentów z teorią molekularną zaproponowaną przez autora.

Dla przepływów równoległych odpowiednie krzywe lepkości dynamicznej  $\mu'_{12}(\kappa, \omega)$ , lub wielkości  $G'_{12}(\kappa, \omega)/\omega$ , zależą istotnie od zmieniającej się szybkości ścinania  $\kappa$ . Lepkość dynamiczna jest tym mniejsza, im większa jest szybkość ścinania (porównaj rys. 3). Prawie wszystkie doświadczenia wykazują, że lepkość dynamiczna dla  $\omega \rightarrow 0$  jest mniejsza od

odpowiednich wartości lepkości pozornej  $\eta(\kappa)$ ; jest to zgodne jakościowo z charakterem związku (5.1.9). Porównanie wyników, przeprowadzone przez BOOJA [16], wykazało również ilościową zgodność (5.1.9) z przebiegiem krzywych doświadczalnych. Fakt ten



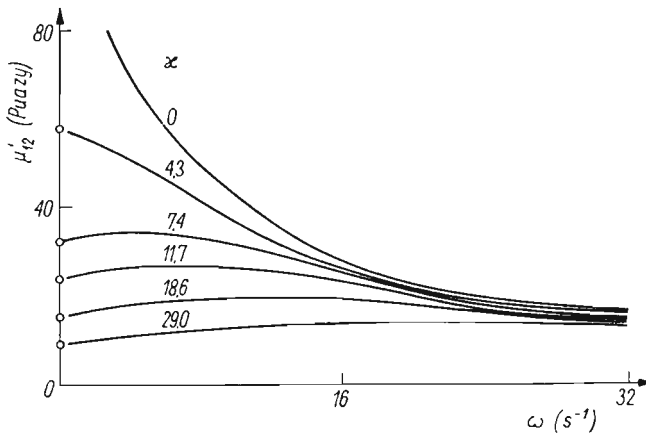
Rys. 3. Lepkość dynamiczna  $\mu'_{12}(\kappa, \omega) = G'_{12}(\kappa, \omega)\omega^{-1}$  w funkcji częstotliwości  $\omega$  przy podanych wartościach  $\log \kappa$ . Roztwór dwulaurynianu glinu. Według [16]



Rys. 4. Lepkość dynamiczna  $\eta'_{23}(\kappa, \omega) = G'_{23}(\kappa, \omega)\omega^{-1}$  w funkcji częstotliwości  $\omega$  przy podanych wartościach  $\log \kappa$ . Roztwór poliizobutyleny. Według [16, 42]

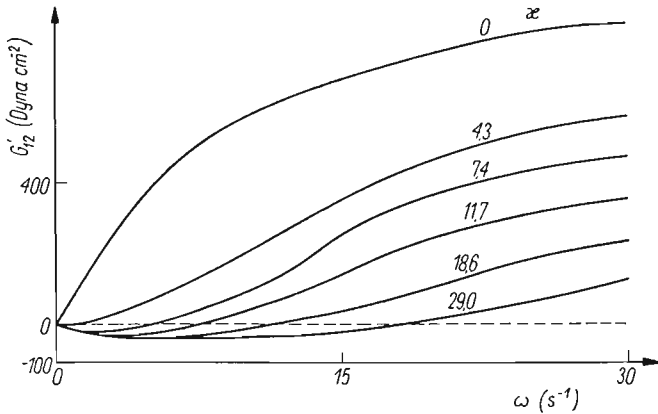
potwierdzają także badania JONESA i WALTERSA [31] przeprowadzone dla stosunkowo niskich, mniejszych od odpowiednich  $\kappa$ , wartości częstotliwości  $\omega$  (porównaj rys. 5 i 6).

Badania doświadczalne lepkości dynamicznych dla różnicy naprężeń normalnych (por. [16, 40]) wykazują, że część rzeczywista  $N'(\kappa, \omega) = H'(\kappa, \omega)\omega^{-1}$  zmniejsza się istotnie ze wzrostem szybkości ścinania  $\kappa$ , posiadając maksima przy określonych war-

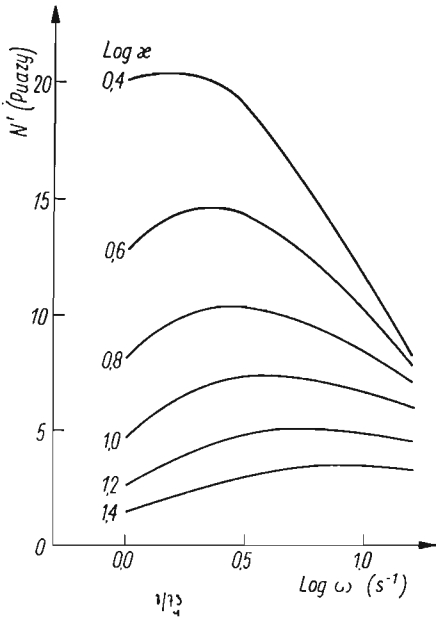


Rys. 5. Lepkość dynamiczna  $\mu'_{12}(\kappa, \omega)$  w funkcji częstotliwości  $\omega$  przy podanych wartościach  $\kappa$ . Roztwór poliakrylamidu. Według [31]

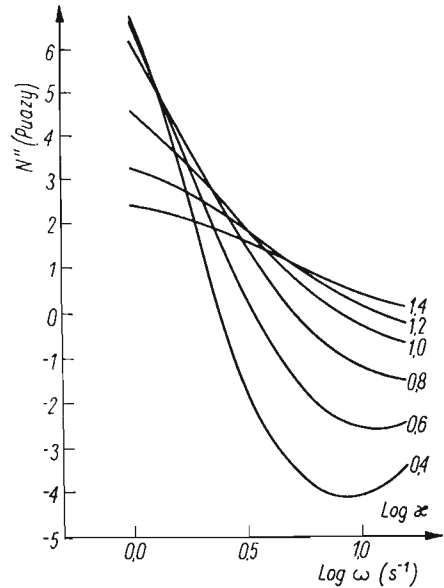
tościach  $\omega$  (porównaj rys. 7). Część urojona  $N''(\kappa, \omega) = H''(\kappa, \omega)\omega^{-1}$  w zasadzie rośnie ze wzrostem  $\kappa$ , chociaż dla małych  $\kappa$  przyjmuje wartości ujemne oraz posiada wyraźne minima (porównaj rys. 8). Dane te mają istotne znaczenie dla ewentualnej weryfikacji (5.1.10).



Rys. 6. Moduł dynamiczny  $G'_{12}(\kappa, \omega)$  w funkcji częstości kątowej  $\omega$  przy podanych wartościach  $\kappa$ . Roztwór poliakrylamidu. Według [31]



Rys. 7. Rzeczywista część dynamicznej lepkości dla naprężeń normalnych  $N'(\kappa, \omega) = H'(\kappa, \omega)\omega^{-1}$  w funkcji częstości kątowej  $\omega$  przy podanych wartościach  $\log \kappa$ . Roztwór kopolimeru etylenu-propylenu. Według [16]



Rys. 8. Urojona część dynamicznej lepkości dla naprężeń normalnych  $N''(\kappa, \omega) = H''(\kappa, \omega)\omega^{-1}$  w funkcji częstości kątowej  $\omega$  przy podanych wartościach  $\log \kappa$ . Roztwór kopolimeru etylenu-propylenu. Według [16]

Dla przepływów ortogonalnych ogólny charakter krzywych lepkości dynamicznej jest podobny do przypadku przepływów równoległych, chociaż wpływ wzrastających  $\kappa$  jest wyraźnie mniejszy (porównaj rys. 4). Doświadczenia wykazują również, że graniczna lepkość  $\eta'_{23}(\kappa, \omega)$  (dla  $\omega \rightarrow 0$ ) jest znacznie większa niż graniczne  $\mu'_{12}(\kappa, \omega)$  określone

w przepływach równoległych, a nawet większa niż lepkość pozorna  $\eta(\kappa)$  wynikająca ze związku (5.2.6). W obecnym stanie eksperymentów trudno jest stwierdzić obiektywnie, czy «anomalie» powyższego typu zależy od struktury materiału, czy też wiąże się z niedokładnością pomiarów.

## 6. Wpływ małych oscylujących zaburzeń ścinających na własności ustalonego przepływu ścinającego

W poprzednich rozważaniach interesowaliśmy się bezpośrednio lub pośrednio wpływem ustalonej szybkości ścinania na dynamiczne charakterystyki przepływu złożonego. Jak wykazali JONES i WALTERS [31], zagadnienie odwrotne nie jest trywialne i prowadzi do interesujących wyników.

W celu rozważenia wpływu małych oscylujących zaburzeń należy rozważyć, zamiast liniowych  $\alpha$  przyrostów ekstra-naprężeń określonych przez (5.1.2) i (5.2.2), pełne przyrosty tych wielkości zachowując w (4.12) człony rzędu  $O(\alpha^2)$ .

Dla przepływu równoległego łatwo zauważyć, że ewentualna zmiana średniego przyrostu ekstra-naprężenia  $\Delta T_E^{12}$  jest określona całką następującą:

$$(6.1) \quad \int_0^{\infty} \kappa(\psi_1 + \psi_4 + \kappa^2 \psi_{10}) \alpha^2 g_2(s) g_2(s) ds,$$

gdzie funkcje  $g_2(s)$  mają postać (4.14). Biorąc pod uwagę, że

$$(6.2) \quad \operatorname{Re}(g_2) \operatorname{Re}(g_2) = \frac{1}{2} [\operatorname{Re}(g_2^2) + \operatorname{Re}(g_2 \bar{g}_2)],$$

gdzie  $\operatorname{Re}$  oznacza część rzeczywistą, kreska zaś u góry oznacza funkcję sprzężoną, otrzymamy

$$(6.3) \quad \langle \Delta T_E^{12} \rangle = \frac{1}{2} \alpha^2 \int_0^{\infty} \kappa(\psi_1 + \psi_4 + \kappa^2 \psi_{10}) (1 - e^{-i\omega s}) (1 - e^{i\omega s}) ds,$$

przy czym  $\langle \rangle$  oznacza średni przyrost.

Oznaczając przez  $\varepsilon = \alpha\omega/\kappa$  mały bezwymiarowy parametr charakteryzujący amplitudę oscylacji<sup>3)</sup>, na podstawie (6.3) określamy następujące wartości graniczne (por. [3]):

$$(6.4) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle \Delta T_E^{12} \rangle = 0 \quad \text{dla} \quad \kappa = \text{const},$$

$$(6.5) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle \Delta T_E^{12} \rangle = \frac{\varepsilon^2 \kappa^3}{2} \int_0^{\infty} (\psi_1 + \psi_4 + \kappa^2 \psi_{10}) s^2 ds \quad \text{dla} \quad \varepsilon = \text{const}.$$

<sup>3)</sup> Jeśli  $\alpha$  jest amplitudą kątową w ruchu obrotowym (por. [31]),  $\varepsilon$  oznacza stosunek amplitudy prędkości ruchu dodatkowego  $\alpha\omega$  do szybkości ścinania  $\kappa$  w przepływie podstawowym.

Podstawiając w (4.12) czony proporcjonalne do  $\alpha^2$ , można również określić zmiany średnich przyrostów naprężeń normalnych  $\Delta T_E^{11}$  i  $\Delta T_E^{22}$ . Postępując, podobnie jak poprzednio, otrzymamy:

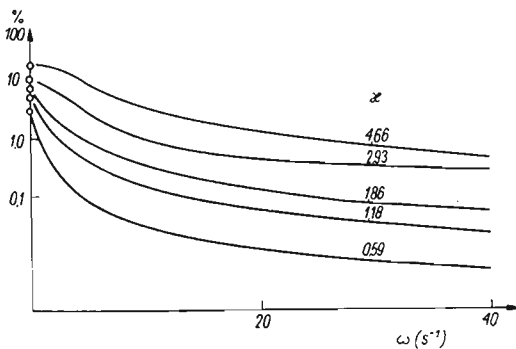
$$(6.6) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle \Delta T_E^{11} \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle \Delta T_E^{22} \rangle = 0 \quad \text{dla} \quad \kappa = \text{const},$$

$$(6.7) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle \Delta T_E^{11} \rangle = \frac{\varepsilon^2 \kappa^4}{2} \int_0^\infty \psi_6 s^2 ds \quad \text{dla} \quad \varepsilon = \text{const},$$

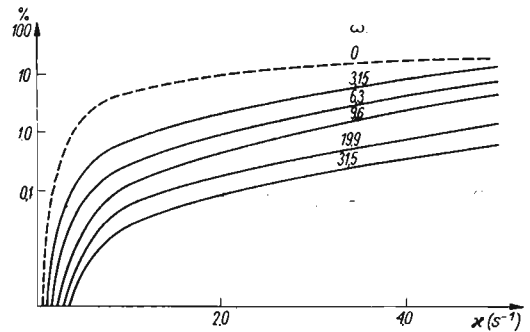
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \langle \Delta T_E^{22} \rangle = \frac{\varepsilon^2 \kappa^2}{2} \int_0^\infty (\psi_0 + 2\kappa^2 \psi_2 + \kappa^4 \psi_{11}) s^2 ds.$$

Zależności (6.4)–(6.7) można interpretować w sposób następujący. Jeśli podstawowy przepływ ścinający jest realizowany ze ściśle stałą szybkością  $\kappa$ , a przepływ dodatkowy nałożony jest równoległe z małą częstością kątową  $\omega$ , to zarówno średnie przyrosty naprężeń ścinających, jak i normalnych są zerowe. Jeśli natomiast przepływ podstawowy zachodzi z dużą szybkością ścinania  $\kappa$ , taką że stosunek amplitud  $\alpha\omega/\kappa$  jest mały i w przybliżeniu stały, to średnie przyrosty naprężeń ścinających i normalnych zmieniają się w myśl (6.5) i (6.7). Zmiany te istotnie zależą od szybkości ścinania i przy dużych  $\kappa$  mogą być znaczne.

Powyższe zjawiska zostały eksperymentalnie stwierdzone przez JONESA i WALTERSA [31], którzy w konkluzji zauważają, że małe zaburzenia ustalonego przepływu ścinającego mogą w sposób mierzalny wpływać na średnie naprężenia, momenty obrotowe itp. Dla ilustracji podajemy wyniki z pracy [31] opisujące procentowe zmniejszenie średniego momentu obrotowego w reometrze Weissenberga dla zmiennych wartości  $\kappa$  i  $\omega$  (rys. 9, 10).



Rys. 9. Średni przyrost momentu obrotowego (naprężenie  $\Delta T_E^{12}$ ) w funkcji częstości kątowej  $\omega$  przy podanych wartościach  $\kappa$ ;  $\varepsilon = 0,0283$ . Roztwór poliakryloamidu. Według [31]



Rys. 10. Średni przyrost momentu obrotowego (naprężenie  $\Delta T_E^{12}$ ) w funkcji szybkości ścinania  $\kappa$  przy podanych wartościach  $\omega$ ;  $\varepsilon = 0,0283$ . Roztwór poliakryloamidu. Według [31]

Dla przepływu ortogonalnego zasadnicze wyniki są bardzo podobne. Nie stwierdza się żadnych zmian przyrostów naprężeń  $\Delta T_E^{13}$  i  $\Delta T_E^{23}$ , podczas gdy zmiany  $\Delta T_E^{12}$  określone są zależnościami identycznymi do (6.4), (6.5). Średnie przyrosty naprężeń normalnych wyrażają się w tym przypadku również wzorami (6.6), (6.7).

## 7. Zależności reologiczne dla cieczy typu BKZ

Niedawno BERNSTEIN i FOSDICK [34], dla przepływów równoległych, oraz TANNER i WILLIAMS [33], dla przepływów ortogonalnych, wyprowadzili pewne zależności obowiązujące dla nieściśliwej cieczy BKZ, tj. cieczy opisanej równaniami konstytutywnymi podanymi przez BERNSTEINA, KEARSLEYA i ZAPASA [36]. Należy podkreślić, że równania takiej cieczy stanowią szczególnie przypadek równań funkcjonalnych nieściśliwej cieczy prostej (por. [1]). Równania cieczy BKZ, dzięki swej stosunkowej prostocie, są szeroko stosowane do opisu własności licznych cieczy lepkoskrężystych.

W niniejszym punkcie ograniczymy się do zbadania dodatkowych związków, które zależności reologiczne implikują dla cieczy prostej. Innymi słowy, zbadamy jakie ograniczenia dla funkcji materiałowych  $\psi_i$  (porównaj p. 4) wynikają z zależności reologicznych.

Dla równoległych przepływów cieczy BKZ, autorzy pracy [34] udowodnili na drodze teoretycznej zależności następujące:

$$(7.1) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \mu'_{12}(\kappa, \omega) = \frac{d}{d\kappa} \tau(\kappa),$$

$$(7.2) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{2G'_{12}(\kappa, \omega)}{\omega^2} = \frac{d}{d\kappa} \left( \frac{\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)}{\kappa} \right),$$

$$(7.3) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{H''(\kappa, \omega)}{\omega} = \frac{d}{d\kappa} [\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)],$$

$$(7.4) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(\kappa, \omega) = \frac{d}{d\kappa} [\kappa \tau(\kappa)],$$

gdzie  $H^* = H' + iH''$  oznacza, jak poprzednio, moduł dynamiczny dla różnicy naprężeń normalnych  $\Delta T_E^{11} - \Delta T_E^{22}$ .

Zależności (7.1) i (7.3) obowiązują również dla nieściśliwej cieczy prostej; zostały one podane w p. 5. Zależności (7.2) i (7.4) obowiązują dla cieczy BKZ. Jeśli mają być spełnione dla cieczy prostej, to

$$(7.5) \quad - \int_0^{\infty} (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3 + \kappa^2 \psi_7 + \kappa^2 \psi_8) s^2 ds = \frac{d}{d\kappa} \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\kappa} \right),$$

$$(7.6) \quad - \int_0^{\infty} 2\kappa(\psi_4 - \psi_5 - \kappa^2 \psi_9) ds = \kappa \frac{d\tau(\kappa)}{d\kappa} + \tau(\kappa) = \tau(\kappa) \left( 1 + \frac{d \ln \tau}{d \ln \kappa} \right),$$

gdzie w (7.6) wykorzystaliśmy twierdzenie Riemanna-Lesbegue'a.

Dla ortogonalnych przepływów cieczy BKZ, autorzy pracy [33] udowodnili na drodze teoretycznej zależności następujące:

$$(7.7) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \eta'_{23}(\kappa, \omega) = \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} = \eta(\kappa),$$

$$(7.8) \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G'_{23}(\kappa, \omega)}{\omega^2} = \frac{\sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa)}{2\kappa^2}.$$

Zależność (7.7) obowiązuje również dla nieściśliwej cieczy prostej; wyprowadzono ją w p. 5. Zależność (7.8) przypomina relację podaną przez COLEMANA i MARKOVITZA [19] [por. także wzór (2.7)], z tym, że po prawej stronie nie występuje granica dla  $\kappa \rightarrow 0$ . Jeśli (7.8) ma być spełnione dla dowolnej nieściśliwej cieczy prostej, to

$$(7.9) \quad - \int_0^{\infty} (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3) s^2 ds = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\kappa^2}.$$

W niedawnym czasie BERNSTEIN [35] pokazał, że dla cieczy BKZ zespolone moduły lub lepkości dynamiczne w przepływach równoległych i ortogonalnych związane są relacją:

$$(7.10) \quad \mu_{12}^* = \eta_{23}^* + \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} \eta_{23}^*.$$

Przepisując (7.10) dla części rzeczywistych, przechodząc do granicy  $\omega \rightarrow 0$  oraz podstawiając (5.1.8) i (5.2.6), uzyskujemy tożsamość.

Z porównania zależności (5.1.6) i (5.2.3) otrzymamy związek

$$(7.11) \quad \frac{d\tau(\kappa)}{d\kappa} - \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} \equiv \kappa \frac{d\eta(\kappa)}{d\kappa} = - \int_0^{\infty} \kappa^2 (\psi_7 + \psi_8) s ds,$$

który obowiązuje dla cieczy prostych. Łatwo zauważyć, że (7.10) będzie spełnione, jeśli tylko

$$(7.12) \quad \frac{\partial}{\partial \kappa} (\psi_0 + \kappa^2 \psi_2 + \kappa^2 \psi_3) = \kappa (\psi_7 + \psi_8)$$

dla dowolnego  $\kappa$  i  $s$ . Jest to bardzo szczególny związek między funkcjami materiałowymi.

Weryfikacja doświadczalna wszystkich diskutowanych zależności jest bardzo trudna z uwagi na możliwość przeprowadzenia odpowiednich eksperymentów przy  $\omega \rightarrow 0$ , szczególnie w przypadku naprężeń normalnych.

O ile zależności (7.1) i (7.3) ( $R-1$  i  $R-3$  według [34]), obowiązujące dla cieczy prostej, zgadzają się stosunkowo dobrze z dostępnymi danymi doświadczalnymi, o tyle zależności (7.2) i (7.4) ( $R-2$  i  $R-3$  według [34]) nie zgadzają się zbyt dobrze z doświadczeniami dla różnych dotychczas badanych materiałów.

Prawe strony zależności (7.1), (7.3) i (7.4) są dodatnie dla wszystkich wartości  $\kappa$ , podczas gdy prawa strona (7.2) jest ujemna, jeśli nachylenie krzywej  $\log(\sigma_1 - \sigma_2)$  w funkcji  $\log \kappa$  jest mniejsze od jedności. Wówczas moduł  $G'_{12}(\kappa, \omega)$  przybiera również wartości ujemne przy określonych parametrach  $\kappa$  i  $\omega$  (porównaj rys. 6). Autorzy pracy [34] analizując wcześniejsze dane eksperymentalne, wysuwają zasadniczą zgodność związku (7.2) z doświadczeniem. Jednakże dokładniejsze zbadanie wyników doświadczalnych dla naprężeń normalnych skłoniło BOOJA [16] do stwierdzenia, że związek (7.2) nie zgadza się z eksperymentem przeprowadzonym dla roztworów dwulfaurynianu glinu oraz kopolimeru etylenu-propyleny o większym wagowo średnim ciężarze molekularnym.

## 8. Wnioski

Rozważania niniejszej pracy pozwalają na sformułowanie całego szeregu stwierdzeń i uogólnień. Przytoczymy obecnie najważniejsze z nich w formie następujących wniosków:

1. Nie istnieje wystarczająco ogólna teoria opisująca poprawnie obserwowane zależności między charakterystykami dynamicznymi i stacjonarnymi cieczy lepkosprężystych w przepływach ścinających. Znane z literatury związki, głównie empiryczne, noszą szczególny charakter i obowiązują w ograniczonych obszarach zmienności parametrów kinematycznych.

2. Ważnym zagadnieniem, zarówno z punktu widzenia teorii, jak i zastosowań w technologii, jest określenie wpływu parametrów opisujących ustalony przepływ podstawowy na dynamiczne własności przepływu zaburzonego, który powstał przez nałożenie małych dodatkowych oscylacji. Dla przepływów ścinających dysponujemy obecnie niezbyt licznymi lecz wiarygodnymi danymi doświadczalnymi.

3. Zachowanie się nieściśliwej cieczy prostej w przepływach ścinających złożonych z przepływu ustalonego i małych dodatkowych oscylacji można całkowicie opisać 3 funkcjami wiskozymetrycznymi oraz 12 funkcjami materiałowymi zależnymi od częstości kątowej ruchu oscylacyjnego i szybkości ścinania ruchu podstawowego. Funkcje te wchodziły do równań konstytutywnych w postaci określonych kombinacji, wyznaczenie doświadczalne tych funkcji przedstawia istotną trudność.

4. Odpowiednie lepkości dynamiczne różnią się znacznie w przypadku zaburzeń równoległych i przypadku zaburzeń ortogonalnych do przepływu podstawowego. Dla małych częstości kątowych lepkość dynamiczna w przepływie równoległym jest wyraźnie mniejsza niż w przepływie ortogonalnym. Podobne różnice obserwuje się dla lepkości lub modułów charakteryzujących naprężenia normalne.

5. Badania doświadczalne prowadzone za pomocą reogoniometru Weissenberga lub zmodyfikowanego aparatu typu Couette'a potwierdzają w zasadzie różnice we własnościach dynamicznych dla przepływów równoległych i ortogonalnych. Dla naprężeń normalnych dane doświadczalne są znacznie skromniejsze.

6. Drugim istotnym dla praktyki zagadnieniem jest wpływ małych oscylacji na średnie własności ustalonego przepływu ścinającego. Wpływ taki wynika z rozważań teoretycznych jako efekt drugiego rzędu oraz daje się stwierdzić doświadczalnie. W pewnych sytuacjach małe zaburzenia przepływu podstawowego mogą prowadzić do dużych, mierzalnych zmian średniego naprężenia ścinającego, średniego momentu obrotowego itp. Fakt ten może odgrywać istotną rolę w procesach przetwórstwa polimerów.

7. Funkcje materiałowe charakteryzujące przepływy złożone nie są całkowicie niezależne. W granicznych przypadkach małych częstości kątowych lub małych szybkości ścinania istnieją między funkcjami materiałowymi określone związki. Niektóre z nich dają się weryfikować doświadczalnie.

8. Dla niektórych szczególnych modeli cieczy lepkosprężystych, takich jak cieczy typu BKZ, wyprowadza się dodatkowe «zależności reologiczne» wiążące charakterystyki dynamiczne dla małych częstości kątowych z funkcją lepkości pozornej lub funkcjami naprężeń normalnych. Badania doświadczalne nie potwierdzają wszystkich zależności



omawianego typu. Z punktu widzenia bardziej ogólnych teorii, na przykład teorii cieczy prostych, «zależności reologiczne» prowadzą do dodatkowych ograniczeń na funkcje materiałowe.

9. W opinii autora tylko modele ogólne, o szerokim zakresie stosowalności, zasługują na głębszą analizę teoretyczną i podjęcie ewentualnych skomplikowanych doświadczeń; takie modele dają większe szanse prawidłowego opisu własności reologicznych cieczy w różnych rodzajach przepływów.

#### Literatura cytowana w tekście

1. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, vol. III/3, Berlin-Heidelberg-New York 1965.
2. S. ZAHORSKI, Arch. Mech. Stos., 5-6, **24** (1972) 681.
3. S. ZAHORSKI, Arch. Mech. Stos., 4, **25** (1973).
4. O. NAKADA, J. Phys. Soc. Japan, **15** (1960) 2280.
5. F. J. LOCKETT, M. E. GURTIN, Brown Univ., Div. Appl. Math., Report No 562 (30)/7, (1964).
6. F. J. LOCKETT, *Nonlinear Viscoelastic Solids*, London—New York 1972.
7. F. BUECHE, J. Chem. Phys., **22** (1954) 1570.
8. B. H. ZIMM, J. Chem. Phys., **24** (1956) 269.
9. Y. H. PAO, J. Appl. Phys., **28** (1957) 591.
10. R. ROSCOE, Brit. J. Appl. Phys., **15** (1964) 1095.
11. A. S. LODGE, *Elastic Liquids*, London—New York 1964.
12. M. YAMAMOTO, J. Phys. Soc. Japan, **11** (1956) 413; **12** (1957) 1148; **13** (1958) 1200.
13. W. W. GRAESLY, J. Chem. Phys., **43** (1965) 2696.
14. А. И. ЛЕОНОВ, Г. В. ВИНГРАДОВ, Докл. Акад. Наук СССР, **155** (1964) 406.
15. R. I. TANNER, J. M. SIMMONS, Chem. Eng. Sci., **22** (1967) 1803.
16. M. C. BOOIJ, Ph. D. Thesis, Leiden 1970.
17. J. L. S. WALES, J. L. DEN OTTER, Rheol. Acta, **9** (1970) 115-119.
18. S. ONOGI, T. FUJII, H. KATO, S. OGIHARA, J. Phys. Chem., **68** (1964) 1598.
19. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, J. Appl. Phys., **35** (1964) 1.
20. K. OSAKI, M. TAMURA, T. KOTAKA, M. KURATA, J. Chem. Phys., **69** (1965) 3642.
21. W. PHILIPPOFF, J. Appl. Phys., **36** (1965) 3033.
22. J. L. DEN OTTER, Ph. D. Thesis, Leiden 1967.
23. J. W. C. ADAMSE, J. L. JANESCHITZ-KRIEGL, J. L. DEN OTTER, J. L. S. WALES, J. Polymer Sci., **A2**, **6** (1968) 781.
24. W. P. COX, E. H. MERZ, J. Polymer Sci., **28** (1958) 619.
25. T. W. DE WITT, H. MARKOVITZ, F. J. PADDEN, J. ZAPAS, J. Colloid Sci., **10** (1955) 174.
26. H. MARKOVITZ, B. WILLIAMSON, Trans. Soc. Rheology, **1** (1957) 25.
27. W. PHILIPPOFF, J. Appl. Phys., **25** (1954) 1102.
28. T. ARAI, Chem. High Polymers, **18** (1961) 292.
29. A. C. PIPKIN, D. R. OWEN, Phys. Fluids, **10** (1967) 836.
30. K. WALTERS, T. E. R. JONES, Proc. Vth Int. Congress Rheol., 1968, vol. IV, Kyoto 1970.
31. T. E. R. JONES, K. WALTERS, J. Phys. A: Gen. Phys., **4** (1971) 85.
32. B. BERNSTEIN, Int. J. Nonlinear Mech., **4** (1969) 183.
33. R. I. TANNER, G. WILLIAMS, Rheol. Acta, **10** (1971) 528.
34. B. BERNSTEIN, R. L. FOSDICK, Rheol. Acta, **9** (1970) 186.
35. B. BERNSTEIN, Rheol. Acta, **11** (1972) 210.
36. B. BERNSTEIN, E. A. KEARSLEY, L. ZAPAS, J. Res. Nat. Bur. Stand., **B 68** (1964) 103.
37. K. OSAKI, M. TAMURA, M. KURATA, T. KOTAKA, J. Soc. Math. Sci., Japan **12** (1963) 339.
38. K. OSAKI, M. TAMURA, M. KURATA, T. KOTAKA, J. Phys. Chem., **69** (1965) 4183.

39. H. C. BOOIJ, *Rheol. Acta*, **5** (1966) 215.
40. H. C. BOOIJ, *Rheol. Acta*, **7** (1968) 202.
41. J. H. SIMMONS, *J. Sci. Instrum.*, **43** (1966) 887.
42. J. H. SIMMONS, Ph. D. THESIS, Sydney 1967.
43. J. H. SIMMONS, *Rheol. Acta*, **7** (1968) 184.
44. S. KUROIWA, M. NAKAMURA, *Kobunshi Kagaku*, **24** (1967) 807.
45. T. KATAOKA, S. UEDA, *J. Polymer Sci., A 2*, **7** (1968) 475.
46. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*, Berlin-Heidelberg—New York 1966.
47. A. C. PIPKIN, *Rev. Modern Phys.*, **36** (1964) 1034.
48. A. C. PIPKIN, *Trans. Soc. Rheol.*, **12** (1968) 397.
49. J. D. FERRY, *Viscoelastic Properties of Polymers*, New York-London 1961.

## Р е з ю м е

ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ СВОЙСТВА ВЯЗКО-УПРУГИХ  
ЖИДКОСТЕЙ В СЛОЖНЫХ ТЕЧЕНИЯХ СДВИГА

В статье рассмотрена теория сложных течений сдвига и дан краткий обзор основных экспериментальных результатов и явлений. Особое внимание обращено на поиски зависимости между динамическими и стационарными характеристиками жидкости. Исследовано влияние стационарного сдвига на динамические характеристики сложного течения. Обсуждены соотношения, справедливые для сложных течений, состоящих из установившегося сдвигового течения, на которое наложены малые дополнительные сдвиговые колебания. Теоретический анализ для несжимаемых простых жидкостей основан на теории составных течений с пропорциональной историей деформирования, предложенной автором (см. работы [2], [3]).

## S u m m a r y

DYNAMIC AND STEADY-STATE PROPERTIES OF VISCOELASTIC FLUIDS IN SUPERPOSED  
SHEARING FLOWS

In the present paper a theory of superposed shearing flows is considered, and a brief review of the most important experimental results and statements is presented. Particular attention is paid to the problem of existence of relations between dynamic and steady-state properties, the problem of the effect of a steady shearing flow on dynamic characteristics of a combined flow, and the problem of relations valid for flows composed of a steady-state shear and small additional shear oscillations. The theoretical analysis for incompressible simple fluids is based on the theory of superposed flows with proportional stretch histories (cf. [2,3]) proposed by the author.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 lutego 1973 r.*

## DOŚWIADCZALNA ANALIZA EFEKTU PAMIĘCI MATERIAŁU PODDANEGO PLASTYCZNEMU ODKSZTAŁCENIU\*)

JÓZEF M I A S T K O W S K I (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Rozwój techniki, zwłaszcza w ostatnim dwudziestolecu, w istotny sposób rozszerzył zakres i warunki pracy konstrukcji maszynowych i podwyższył poziom naprężeń dopuszczalnych. W laboratoriach na całym świecie olbrzymi wysiłek skierowany został na badania istniejących materiałów pod kątem możliwości ich optymalnego wykorzystania w konkretnych warunkach obciążenia. Obserwuje się rozwój eksperymentalnych metod badawczych odkształcalności i wytrzymałości konstrukcji przy wieloparametrowych obciążeniach zadawanych według określonych programów. Pojawiły się, odpowiadające tym warunkom, metody badań materiałów w warunkach złożonego obciążenia oraz specjalna aparatura pomiarowa i badawcza.

Duże znaczenie w powyższym zespole zagadnień mają doświadczalne badania plastyczności materiałów konstrukcyjnych przy różnych obciążeniach w warunkach złożonego stanu naprężenia. Gromadzenie wyników tych badań jest niezbędne zarówno dla rozwoju teorii plastyczności, jak i dla opracowania bardziej dokładnych metod obliczania i wyboru materiałów przy projektowaniu konstrukcji.

Zwykłe charakterystyki mechaniczne, określane na podstawie prób standardowych, nie dają pełnego obrazu o zachowaniu się materiału w różnych warunkach obciążenia i nie pozwalają w pełni określać jakościowych i ilościowych związków między naprężeniami i odkształceniami.

Praca poświęcona jest doświadczalnemu badaniu wpływu wstępnych odkształceń plastycznych, wywołanych różnymi sposobami obciążenia, na kształt powierzchni plastyczności i własności mechaniczne stopu aluminium do obróbki plastycznej PA 3 (AlMg 5). Na podstawie otrzymanych wyników badań doświadczalnych oraz w oparciu o hipotezy izotropowego i kinematycznego wzmocnienia przeprowadzono doświadczalną i teoretyczną analizę efektu pamięci materiału poddanego wstępnym plastycznym odkształceniom.

### 2. Metodyka badań

Badania powierzchni plastyczności przeprowadzane są niemal z reguły na cienkościenych próbkach rurkowych poddawanych różnym kombinacjom obciążenia siłą osiową, ciśnieniem wewnętrznym lub zewnętrznym i momentem skręcającym. W przedstawionej pracy zastosowano odmienną metodykę badań opartą na rozciąganiu płaskich próbek

\*) Praca wyróżniona trzecią nagrodą w roku 1972 na konkursie PTMTS na prace doświadczalne, zorganizowanym przez Oddział Częstochowski Towarzystwa.

wycinanych z arkusza blachy. Teorię zastosowania tej metody badań do analizy zachowania się powierzchni płynięcia w warunkach złożonego stanu naprężenia podał SZCZEPIŃSKI w roku 1963 [1].

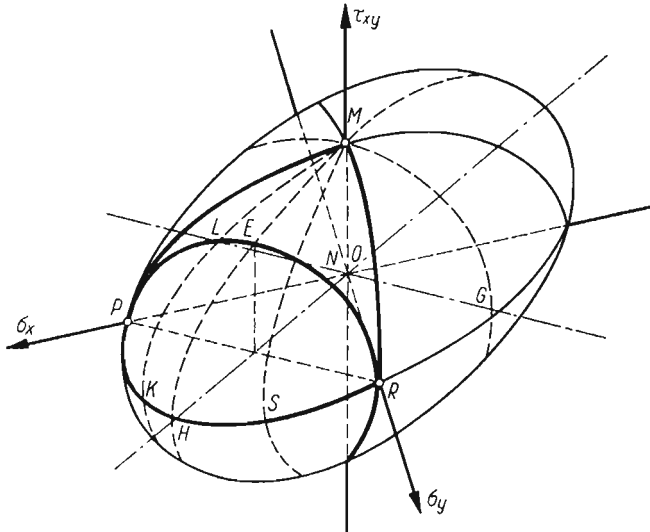
Badania doświadczalne przeprowadzane są z reguły w płaskim stanie naprężenia, tj. gdy jedno z naprężeń głównych, np.  $\sigma_3$ , jest równe zero. W układzie współrzędnych prostokątnych  $x, y, z$ , z płaszczyzną  $xy$  pokrywającą się z płaszczyzną kierunków głównych 1 i 2, istnieją wobec tego tylko składowe naprężenia  $\sigma_x, \sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ . Pozostałe składowe naprężenia równają się zero.

Dla wyjaśnienia stosowanych w pracy schematów obciążeń rozpatrzmy warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. Dla płaskiego stanu naprężenia warunek ten ma postać

$$(1) \quad \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_{pl}^2,$$

gdzie  $\sigma_{pl}$  jest granicą plastyczności przy rozciąganiu.

Obrazem geometrycznym tego wyrażenia w przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  jest elipsoida trójosiowa (rys. 1) o jednej osi pokrywającej się z osią  $\tau_{xy}$ . Dwie pozostałe osie elip-

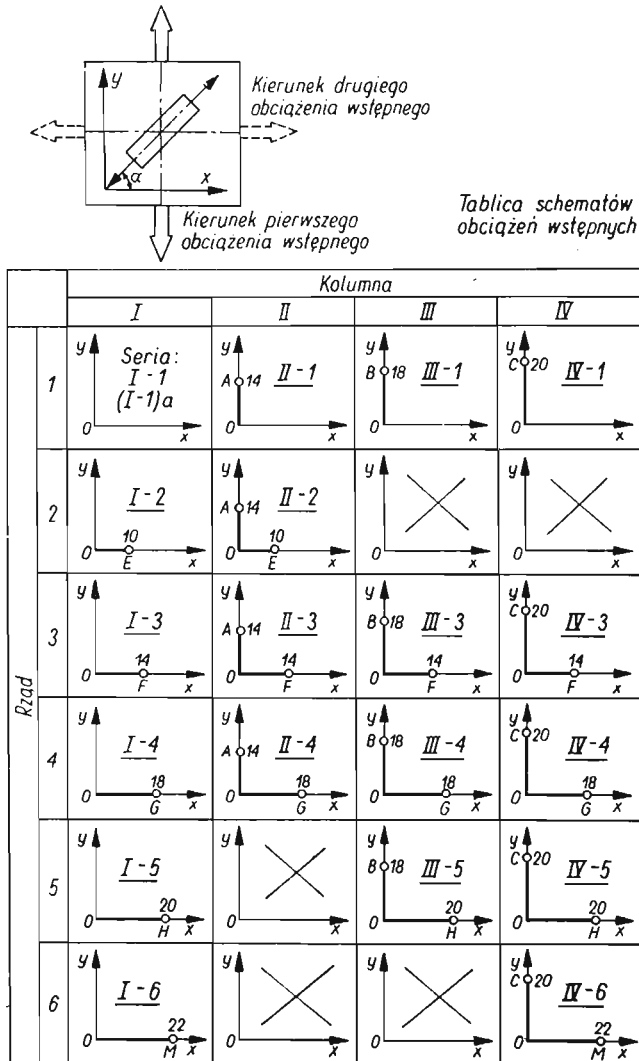


Rys. 1

soidy leżą w płaszczyźnie współrzędnych  $\sigma_x, \sigma_y$ , przy czym są one dwusiecznymi kątów między osiami  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$ . Na powierzchni elipsoidy można wyodrębnić pewne szczególne elipsy, które odpowiadają stosowanym w doświadczeniach różnym sposobom obciążenia próbek. W przedstawionej pracy badania doświadczalne na próbkach płaskich pozwoliły na weryfikację krzywej granicznej przedstawiającej dla początkowo izotropowego materiału elipsę PLENR. Elipsa ta utworzona jest przez przecięcie elipsoidy płaszczyzną  $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_{pl}$  prostopadłą do płaszczyzny  $\sigma_x \sigma_y$ . Podstawiając do warunku plastyczności (1) sumę  $\sigma_x + \sigma_y$  zamiast  $\sigma_{pl}$ , otrzymujemy zależność  $\sigma_x \cdot \sigma_y = \tau_{xy}^2$ , która musi być spełniona na elipsie PLENR. Z wykresu Mohra wynika, że zależność ta ma miejsce jedynie wtedy, gdy jedno z naprężeń głównych jest równe zero. Znaczący to, że punkty leżące na elipsie PLENR odpowiadają stanom jednoosiowego rozciągania w różnych kierunkach względem osi  $x$ . Doś-

wiadczalne badania zmian formy krzywej płynięcia PLENR przeprowadza się więc metodą jednoosiowego rozciągania próbek wycinanych w różnych kierunkach z materiału poddanego wstępnej plastycznej deformacji. Do badań użyto blachy ze stopu aluminium PA 3 (Al Mg 5) w stanie miękkim o grubości 3 mm. Przy wyborze materiału kierowano się tym, że jest to stop o dobrych własnościach plastycznych, szeroko stosowany na średnio obciążone elementy konstrukcji lotniczych i pojazdów mechanicznych.

Arkusz blachy o wymiarach  $2000 \times 1000$  mm pocięto na duże prostokątne próbki o wymiarach  $330 \times 250$  mm. Do badań użyto 20 takich próbek. Dwie duże próbki wykorzystano do badania własności mechanicznych materiału wyjściowego, pozostałe próbki poddano wstępnej plastycznej deformacji według określonych programów obciążenia wstępnego. Programy te pokazano na rys. 2. Ze względu na ich charakterystyczne cechy,



Rys. 2

programy te można podzielić na pionowe kolumny i poziome rzędy. Kolumna *I* charakteryzuje się brakiem obciążeń w kierunku osi *y*. Znaczy to, że próbki przy tych programach wstępnego obciążenia odkształcano tylko w kierunku osi *x* do różnych określonych wartości naprężeń. Kolumny *II*, *III* i *IV* mają stałe wartości wstępnego obciążenia w kierunku osi *y*, różne tylko co do wartości w każdej z kolumn (punkty *A*, *B*, *C*).

Jeżeli chodzi o rzędy, to w każdym z nich mamy identyczny stan wstępnego przygotowania w kierunku osi *x*. Jest oczywiste, że w poszczególnych rzędach stan ten jest inny.

Dla wyznaczenia kształtu krzywych granicznych płynięcia, z każdej dużej próbki wycinano po siedem małych próbeczek o wymiarach  $18 \times 110$  mm. Próbeczki wycinano w różnych kierunkach tworzących z osią *x* kąty  $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  i  $90^\circ$ . Każdą z małych próbeczek poddawano jednoosiowemu rozciąganiu na zwykłej zrywarce o napędzie mechanicznym. Odkształcenia mierzono za pomocą elektrycznych tensometrów oporowych typu *RL 15/120* (długość 15 mm, opór 120 omów) naklejanych na powierzchni próbeczek, a do ich odczytów użyto mostka tensometrycznego T-2 wykonanego przez ZBMM Politechniki Warszawskiej.

Dla każdej małej próbeczki sporządzono wykres naprężenia w funkcji odkształcenia, z których określano wartości naprężeń odpowiadających granicy proporcjonalności oraz wartości naprężeń dla określonych odkształceń plastycznych  $\varepsilon_{pl} = 0,01, 0,02, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4,$  i  $0,5\%$ . Proces rozciągania próbeczek prowadzono aż do zerwania dla określenia wartości naprężeń maksymalnych.

Wyniki badania każdej serii próbeczek wyciętych z dużej próbki przedstawiono w formie punktów w przestrzeni naprężeń  $\sigma_x, \sigma_y$  i  $\tau_{xy}$ . Przez punkty te wykreślano następnie linie odpowiadające różnie zdefiniowanym powierzchniom plastyczności.

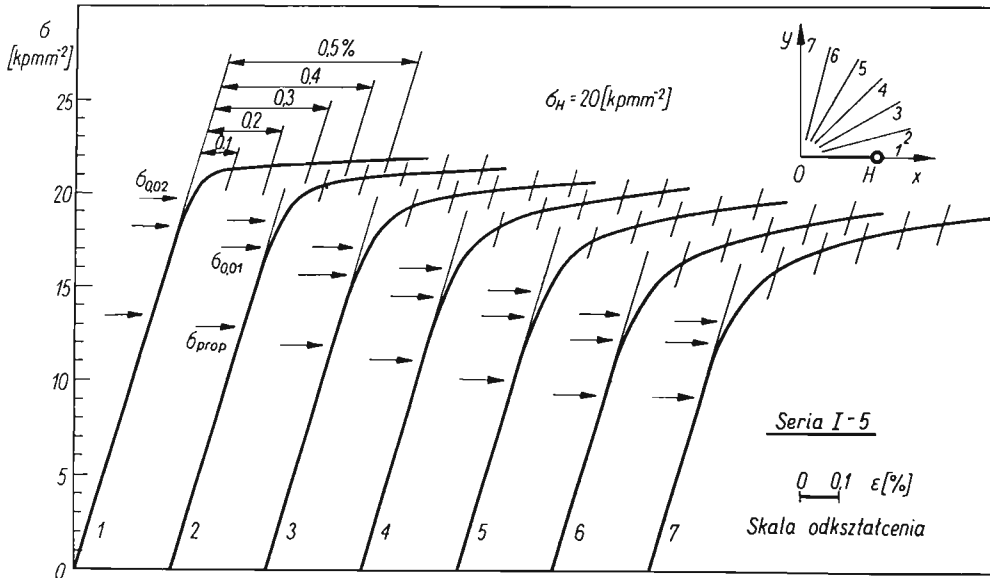
Analizę doświadczalną przeprowadzono przez porównanie wyników kolumny pierwszej z wynikami pozostałych kolumn. Porównywane pary dwóch kolumn różnią się tym, że w seriach z kolumny pierwszej brak jest początkowego odcinka, wzdłuż osi *y*, drogi wstępnego obciążenia. Można więc przyjąć, że porównujemy wyniki badań uzyskanych dla dwóch różnych materiałów, pod względem ich wyjściowych własności mechanicznych, poddawanych jednakowym obciążeniom na drodze wzdłuż osi *x*, poprowadzonej prostopadle do kierunku walcowania. Jesteśmy więc w stanie prześledzić wpływ początkowej deformacji, wywołanej obciążeniem wzdłuż osi *y*, na kształt powierzchni plastyczności materiału odkształcanego ponownie wzdłuż osi *x*.

Pierwsze próby badania efektu pamięci materiału zostały podjęte w pracach [2–5]. W pracach [2–4] badania doświadczalne przeprowadzono na cienkościennych próbkach rurkowych, wykonanych z mosiądzu M-63, poddawanych działaniu osiowego rozciągania i ciśnienia wewnętrznego. W pracy [5] badania przeprowadzono na próbkach płaskich. We wspomnianych pracach efekt pamięci materiału badano tylko dla jednej określonej wartości naprężenia wstępnego  $\sigma_y$ .

W przedstawionej pracy badania efektu pamięci materiału oparto na trzech różnych wartościach obciążenia wzdłuż osi *y* (punkty *A*, *B*, *C*) podanych w kolumnach *II*, *III* i *IV* na rys. 2. Stopniowe zwiększanie obciążeń na osi *x* i badanie dla poszczególnych wartości tych obciążeń kształtu powierzchni płynięcia pozwoliło na przeprowadzenie pełnej analizy efektu pamięci materiału. Obszerny materiał doświadczalny (140 próbek) pozwolił na uzyskanie wyników nie tylko jakościowych, ale również i ilościowych.

## 3. Wyniki doświadczeń

Na rys. 3 pokazano dla przykładu komplet wykresów rozciągania małych próbeczek dla serii I-5. Na wykresach tych pokazano sposób wyznaczania umownych granic plastyczności. Oznaczono je przez  $\sigma$  z odpowiednim dolnym wskaźnikiem. Przez  $\sigma_{prop}$  oznaczono granicę proporcjonalności, która odpowiada początkowi odchylenia się wykresów



Rys. 3

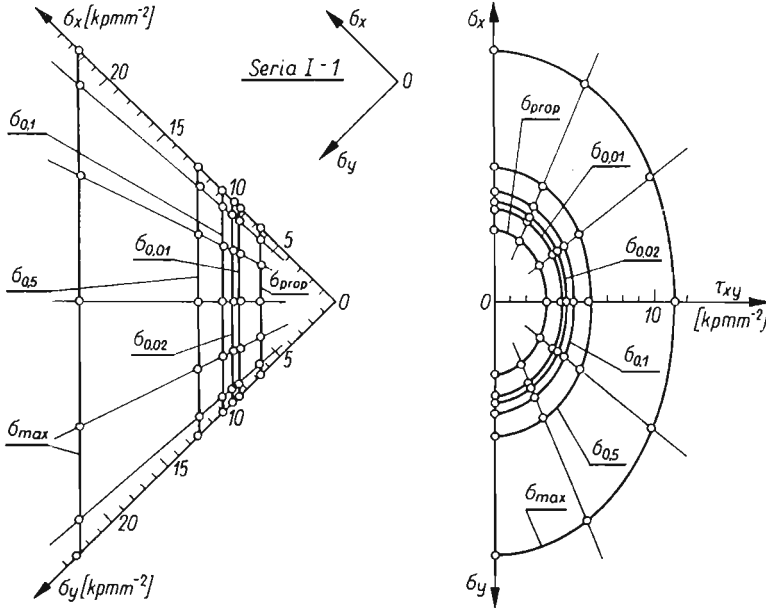
od swoich początkowo prostoliniowych części. Wskaźniki liczbowe określają wartości odkształceń plastycznych, dla których określone granice plastyczności wyznaczono.

Po określeniu wyżej wymienionych granic płynięcia obliczono składowe naprężenia z zależności

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\alpha), \\ \sigma_y &= \frac{1}{2} \sigma (1 - \cos 2\alpha), \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Składowe te wyznaczają współrzędne punktów doświadczalnych w przestrzeni naprężeń dla płaskiego stanu naprężenia. Przez punkty te wykreslano następnie krzywe płynięcia. Przedstawiono je na rysunkach w dwóch rzutach. We wszystkich przypadkach po lewej stronie pokazano rzuty na płaszczyznę  $\sigma_x, \sigma_y$ , po prawej stronie — rzuty na płaszczyznę  $MOG$ , prostopadłą do dłuższej osi elipsoidy (rys. 1) i przechodzącą przez oś  $\tau_{xy}$ . Na rys. 4 pokazano wyniki badań dwóch serii próbek I-1 i (I-1)a. Punkty na rysunku określają wartości średnie z dwóch wielkości doświadczalnych. Badania te przeprowadzono dla

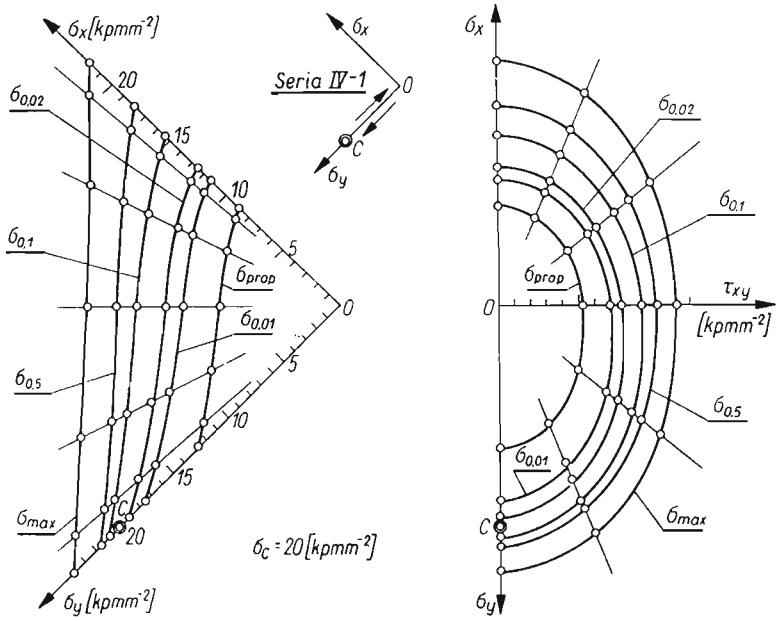
sprawdzenia izotropowości materiału oraz dla wyznaczenia kształtu umownych powierzchni plastyczności materiału wyjściowego. Otrzymane punkty leżą bardzo blisko elipsy teoretycznych Hubera–Misesa. Badany materiał można więc praktycznie uważać za izotropowy.



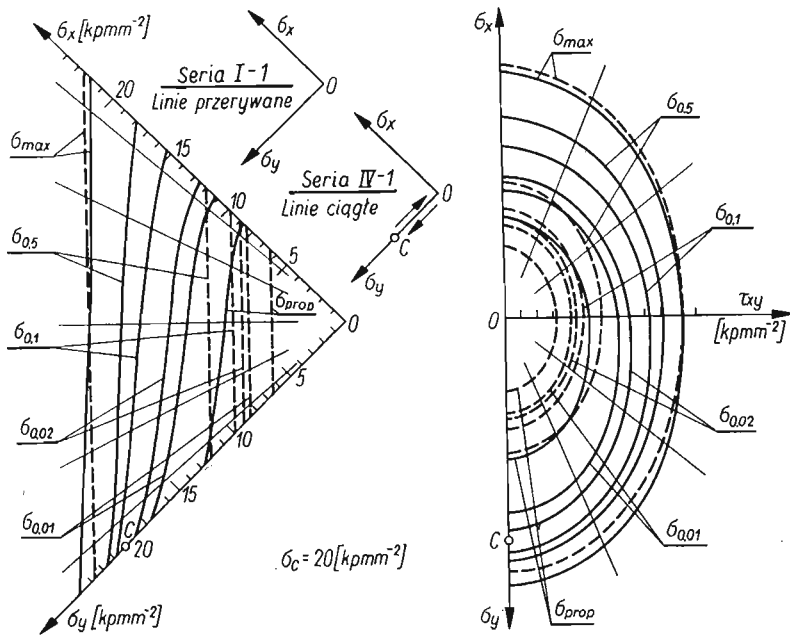
Rys. 4

Duże próbki w kolumnach II, III i IV w rzędzie 1 (rys. 2) odkształcano plastycznie wstępnym obciążeniem do punktów A, B, C i odciążono. W wyniku takiego zabiegu uzyskano nowe materiały, jeśli chodzi o ich własności mechaniczne, i nazwano je materiałami «drugim», «trzecim» i «czwartym». Materiał wyjściowy natomiast przyjęto jako materiał «pierwszy». Na rys. 5 pokazano kształty umownych powierzchni plastyczności dla materiału «czwartego». Jak bardzo przebieg ich różni się od kształtu odpowiednich powierzchni materiału wyjściowego przedstawiono na rys. 6. Podobne różnice, chociaż znacznie mniejsze, uzyskano z porównania materiałów «drugiego» i «trzeciego» z «pierwszym». W następnych seriach badań te cztery materiały poddawano jednakowym obciążeniom wzdłuż osi x, kolejno do punktu E w rzędzie 2, do punktu F w rzędzie 3 oraz do punktów G, H i M w rzędach następnych. Na rys. 7–10 pokazano dla przykładu porównania odpowiednich wyników badań uzyskanych dla I i IV kolumny. Analiza powyższa pozwoliła prześledzić proces «zapominania» przez materiał, podczas wtórnego obciążenia, o skutkach w nim wywołanych wcześniejszym odkształceniem na innej drodze wstępnego obciążenia. Analiza ta pozwoliła również określić wpływ wielkości obciążenia pierwotnego ( $\sigma_C > \sigma_B > \sigma_A$ ) wzdłuż osi y na późniejszy proces «zapominania» przy powtórnym obciążeniu materiału na drodze  $0x$ . Przedstawiony w pracy program badań pozwolił na prześledzenie całego procesu zbliżania się własności mechanicznych porównywanych materiałów w czasie powtórznego obciążenia. Wprowadzono parametr  $\beta = |\Delta\sigma_x| + |\Delta\sigma_y|$ . Przez

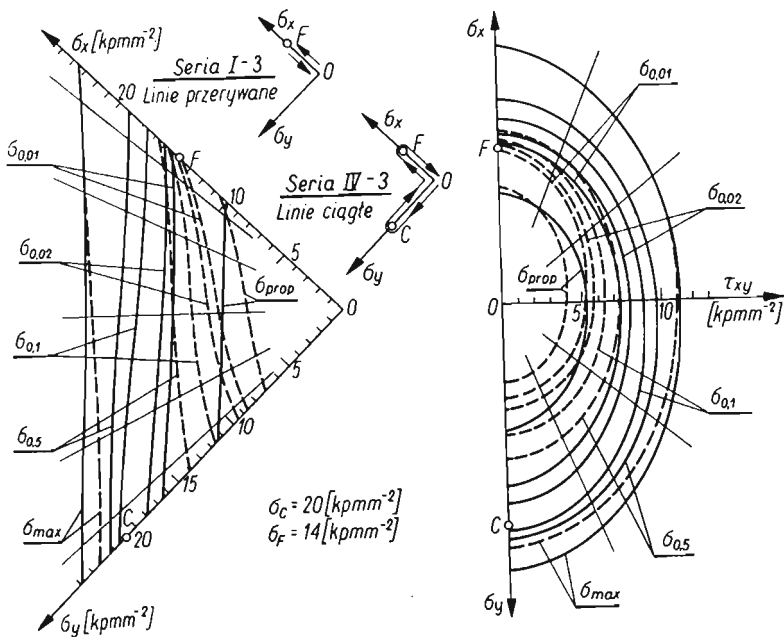




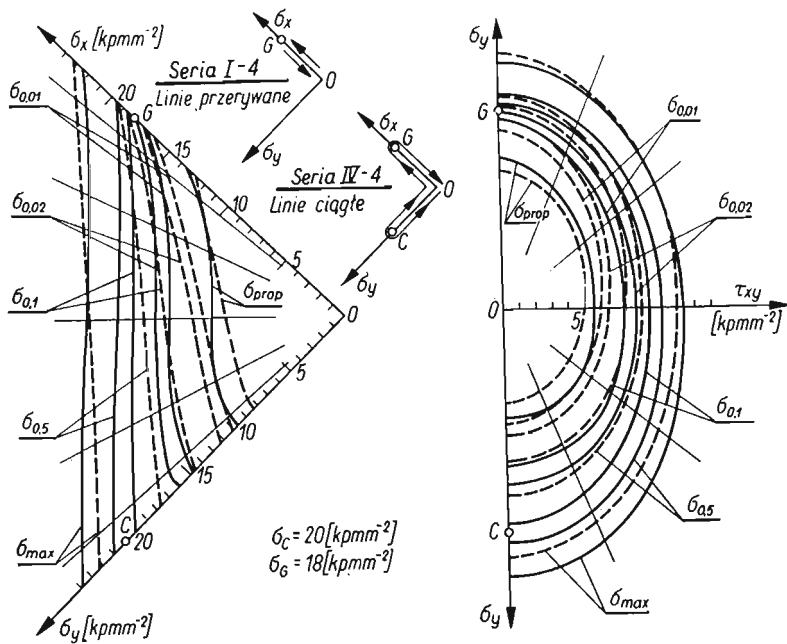
Rys. 5



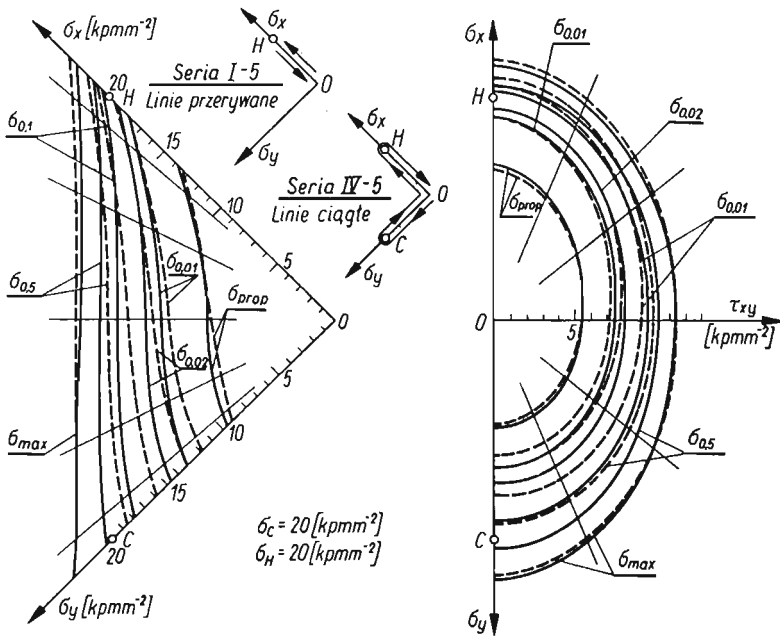
Rys. 6



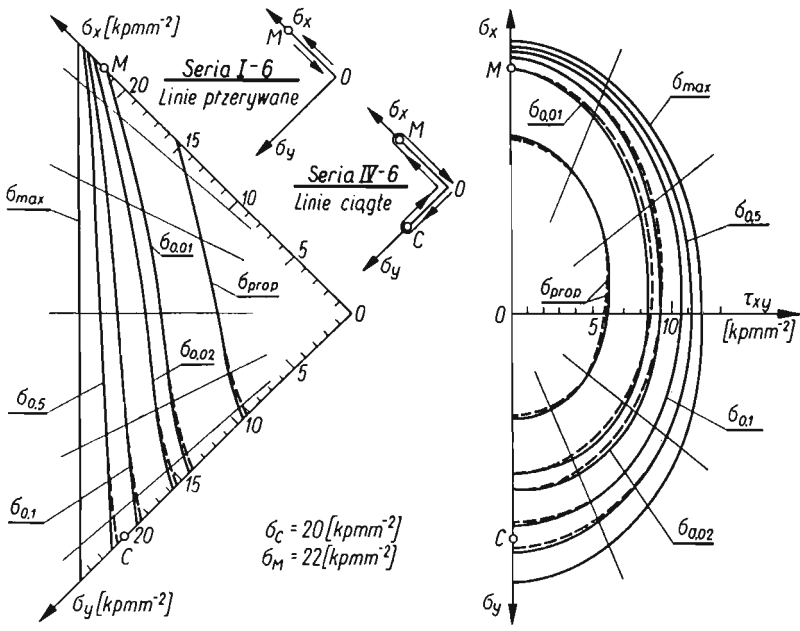
Rys. 7



Rys. 8



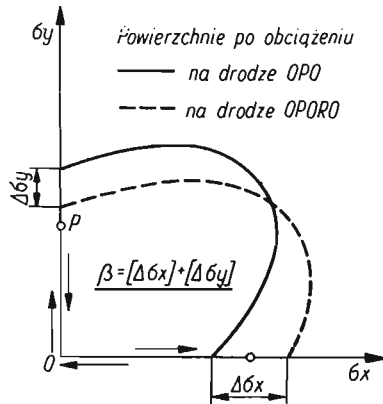
Rys. 9



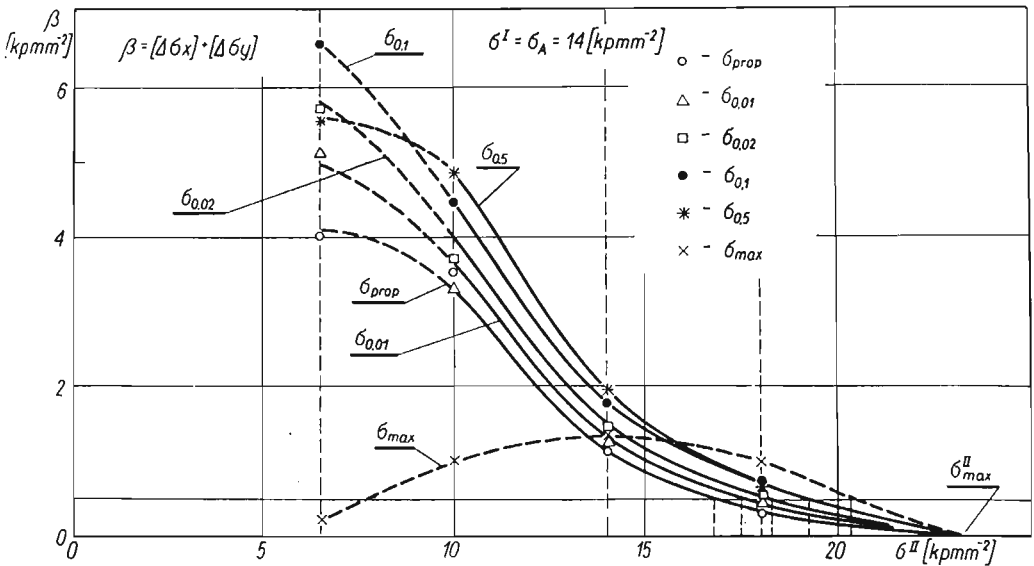
Rys. 10

$\Delta\sigma_x$  i  $\Delta\sigma_y$  oznaczono różnicę naprężeń na osiach współrzędnych jaką wykazują porównywane powierzchnie płynięcia (rys. 11).

Na rys. 12—14 pokazano przebieg parametru  $\beta$  w funkcji wielkości drugiego obciążenia wstępnego  $\sigma^{II}$ . Z wykresów tych widać, jak w miarę wzrostu wielkości drugiego obciążenia  $\sigma^{II}$  różnice między porównywanymi powierzchniami maleją.

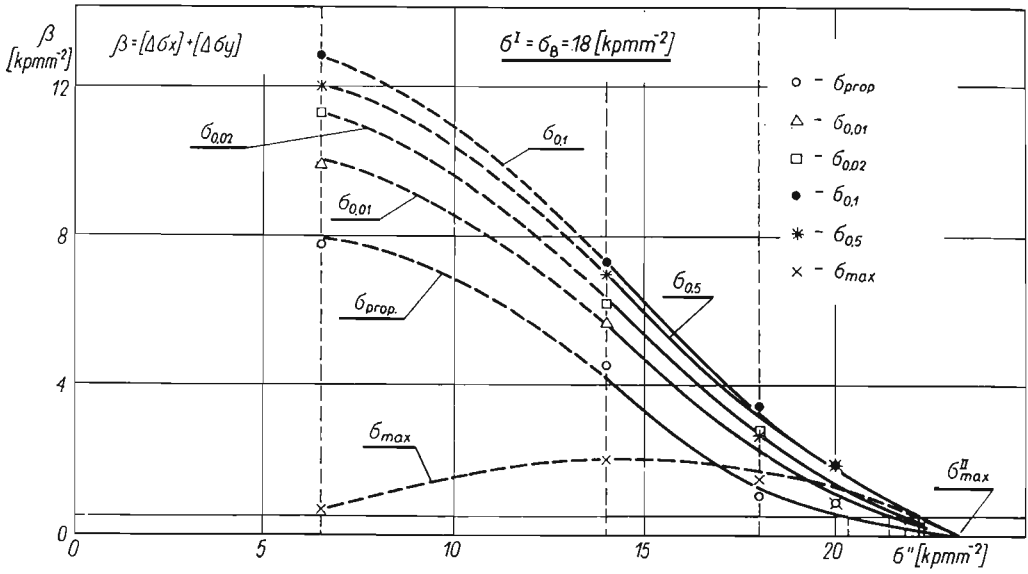


Rys. 11

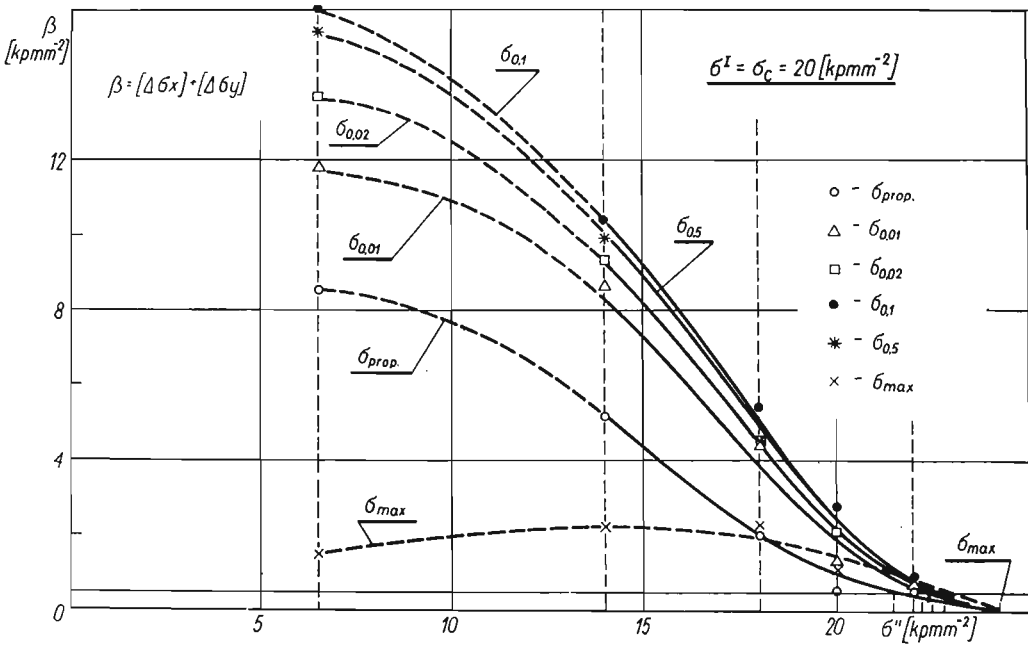


Rys. 12

Ponieważ wyniki doświadczalne otrzymuje się z określoną dokładnością, przyjęto że porównywane powierzchnie są praktycznie identyczne, jeżeli dla  $\beta/\sigma^0 = \kappa = 5$  [%]. Z rys. 12—14 wyznaczono wartości  $\sigma^{II}$  dla  $\kappa = 5, 10$  i  $15$  [%] i podano je w tabelicy 1. Jak wynika z tabelicy 1, największe wartości  $\sigma^{II}$  występują dla powierzchni  $\sigma_{0,1}$ . Wynika stąd, że spełnienie warunków, przy których nastąpi pokrywanie się powierzchni  $\sigma_{0,1}$



Rys. 13



Rys. 14

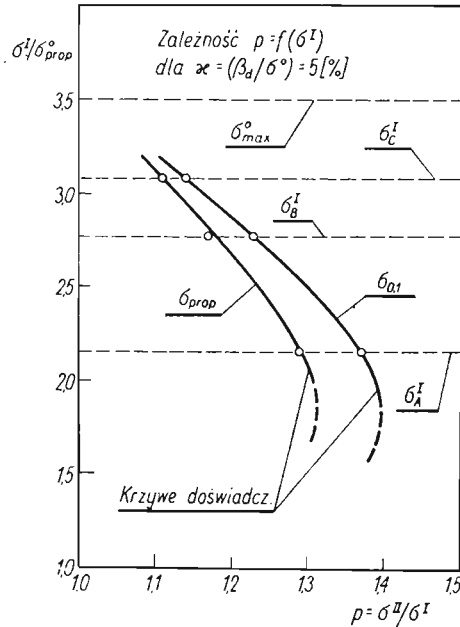
Tablica 1

$\sigma^0$ [kpmmm <sup>-2</sup> ]	$\beta_d = \frac{\%}{100} \sigma^0$ [kpmmm <sup>-2</sup> ]						$\sigma^I H$ [kpmmm <sup>-2</sup> ]											
	%						$\sigma_A^I = 14$ [kpmmm <sup>-2</sup> ]				$\sigma_B^I = 18$ [kpmmm <sup>-2</sup> ]				$\sigma_C^I = 20$ [kpmmm <sup>-2</sup> ]			
	5	10	15	5	10	15	%			%			%			%		
prop	0,325	0,650	0,975	18,00	15,80	14,45	21,05	19,70	18,70	22,30	20,90	19,95						
0,01	0,425	0,850	1,275	18,00	15,55	14,05	21,65	20,55	19,65	22,40	21,45	20,80						
0,02	0,440	0,881	1,321	18,55	16,00	14,40	21,95	20,95	20,10	22,60	21,60	20,95						
0,1	0,495	0,990	1,485	19,20	16,55	14,80	22,20	21,30	20,05	22,80	21,65	21,00						
0,2	0,525	1,050	1,575	19,05	16,30	—	22,10	21,20	20,30	22,70	21,60	20,90						
0,5	0,600	1,200	1,800	18,60	16,00	14,25	21,80	20,95	20,00	22,45	21,40	20,65						

Tablica 2

$\sigma^0$ [kppmm <sup>-2</sup> ]		$\approx$ [%]		$\sigma^{II}$ [kppmm <sup>-2</sup> ]																
				$\sigma_A^I = 14$ [kppmm <sup>-2</sup> ]				$\sigma_B^I = 18$ [kppmm <sup>-2</sup> ]				$\sigma_C^I = 20$ [kppmm <sup>-2</sup> ]								
				$\sigma_A^I / \sigma_{prop}^0$ 2,154	$\sigma^{II} / \sigma^0$	$\sigma_A^0 / \sigma_{0,1}$ 1,414	$\sigma_B^I / \sigma_{prop}^0$ 2,770	$\sigma^{II} / \sigma^0$	$\sigma_B^0 / \sigma_{0,1}$ 1,818	$\sigma_C^I / \sigma_{prop}^0$ 3,077	$\sigma^{II} / \sigma^0$	$\sigma_C^0 / \sigma_{0,1}$ 2,020								
prop	6,50	18,00	2,77	1,29	21,05	3,24	1,17	22,30	3,43	1,11	15,80	2,43	1,13	19,70	3,03	1,10	20,90	3,22	1,04	
		14,45	2,22	1,03	18,70	2,88	1,04	19,95	3,07	1,00										
		19,20	1,93	1,37	22,20	2,24	1,23	22,80	2,30	1,14										
0,1	9,90	16,55	1,65	1,18	21,30	2,15	1,18	21,65	2,19	1,08	14,80	1,50	1,06	20,05	2,02	1,11	21,00	2,12	1,05	

zapewni pokrywanie się pozostałych porównywanych powierzchni. W dalszym ciągu rozpatrzono więc efekt pamięci materiału w odniesieniu do powierzchni  $\sigma_{prop}$  i  $\sigma_{0,1}$ . Dla tych dwóch wybranych powierzchni sporządzono tablicę 2. Podano w niej stosunek  $p = \sigma^{II}/\sigma^I$ , a więc taki stosunek wielkości drugiego obciążenia do pierwszego, przy którym materiał zapomina o skutkach w nim wywołanych tym pierwszym obciążeniem. Wielkość  $p$  będziemy nazywali funkcją pamięci materiału. Przebieg funkcji  $p$ , dla dwóch powierz-



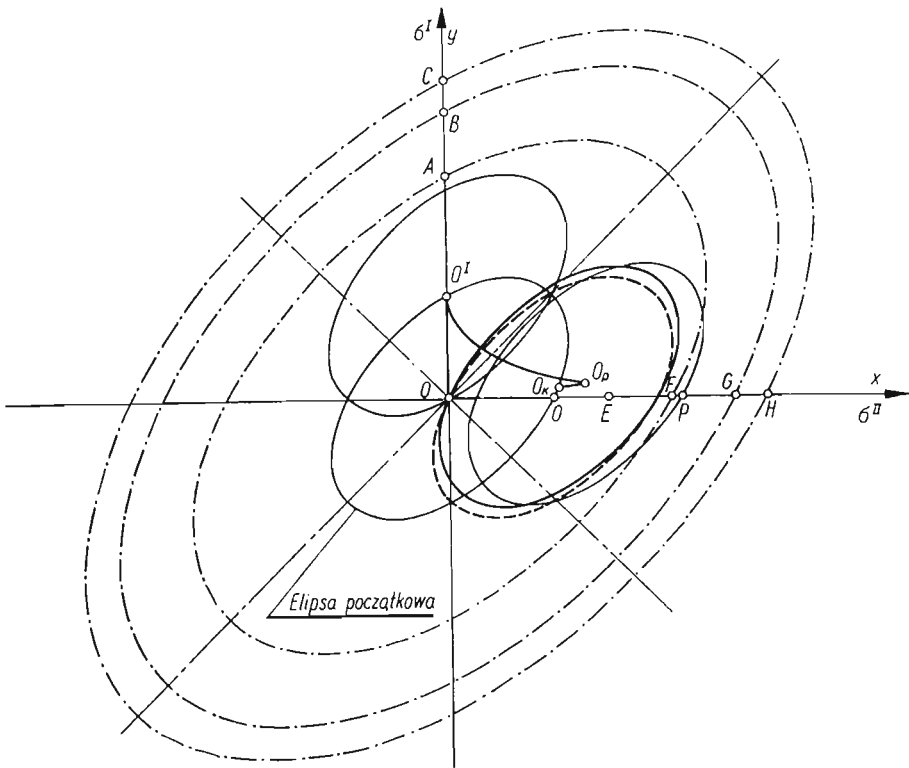
Rys. 15

chni, w zależności od wartości pierwszego obciążenia przedstawiono na rys. 15. Łatwo zauważyć, że efekt «zapominania» osiąga się zawsze dla  $p > 1$ . Najciekawsze jest jednak to, że największa wartość  $p = 1,4$  występuje dla małych wartości obciążenia pierwszego. W miarę wzrostu  $\sigma^I$  wielkość obciążenia drugiego maleje, a funkcja  $p$  dąży do jedności.

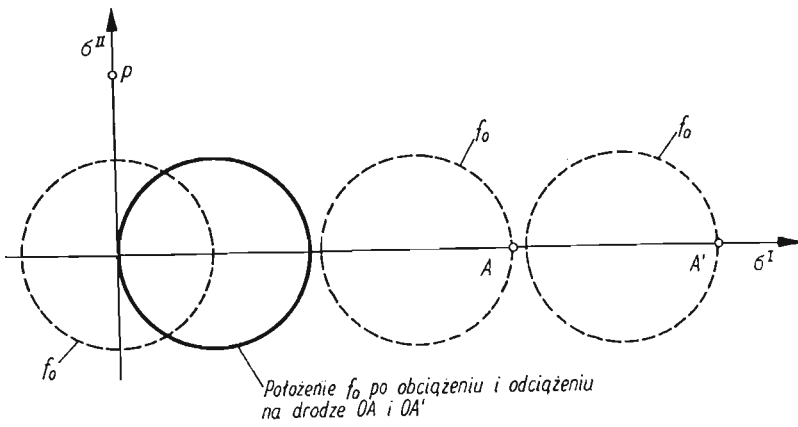
#### 4. Analiza wyników

Jak wynika z doświadczeń omówionych w poprzednim punkcie, początkowa powierzchnia plastyczności doznaje wskutek odkształceń plastycznych zarówno zmiany wymiarów i kształtu, jak i przemieszczenia w przestrzeni naprężeń (rys. 5). Zmiany te wynikają ze wzmocnienia metali na skutek deformacji plastycznej. Wobec powyższego warunek plastyczności Hubera-Misesa stanowi tylko punkt wyjścia w naszych rozważaniach. W dalszym ciągu, w każdym momencie procesu odkształcenia musimy znać ciągle zmieniający się kształt i położenie powierzchni plastyczności. Ścisły opis matematyczny tych zmian jest ze względu na ich złożoność praktycznie niemożliwy i dlatego staramy się je opisać za pomocą uproszczonych zależności zwanych hipotezami wzmocnienia. Hipotez tych jest

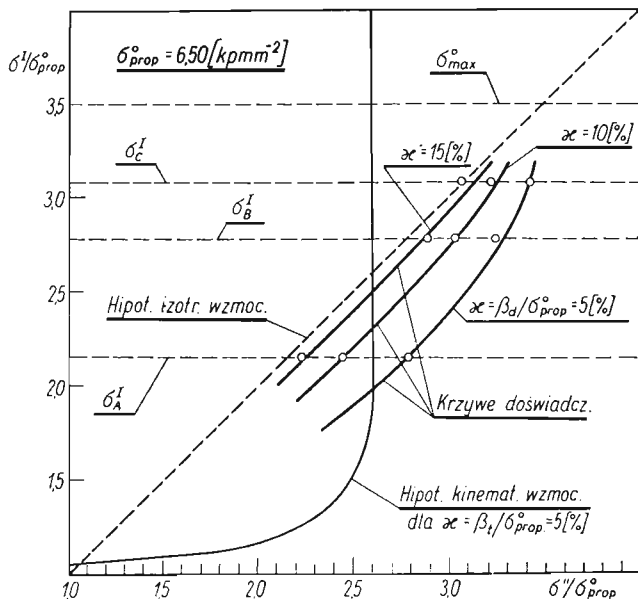




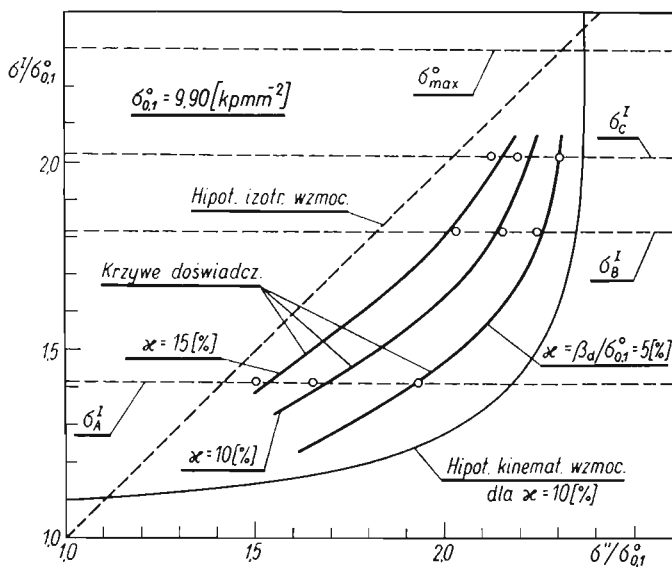
Rys. 16



Rys. 17



Rys. 18



Rys. 19

kilka, ale w tej pracy zajmiemy się opisem efektu pamięci materiału tylko w oparciu o dwie z nich, mianowicie, w oparciu o hipotezy izotropowego i kinematycznego wzmocnienia. Hipoteza wzmocnienia izotropowego polega na założeniu, że wskutek procesu odkształcania początkowa powierzchnia plastyczności ulega jedynie równomiernemu rozszerzeniu we wszystkich kierunkach, zachowując poprzednie położenie w przestrzeni naprężeń

i kształt geometryczny. Na rys. 16 pokazują to linie przerywane z kropkami. Wynika stąd, że w hipotezie izotropowego wzmocnienia efekt «zapominania» zawsze zależy od stopnia pierwotnego obciążenia. Inaczej jest natomiast w hipotezie wzmocnienia kinematycznego. Tutaj efekt «zapominania» dla pewnych wartości obciążenia nie zależy od stopnia pierwotnego obciążenia. Zarówno dla programu  $OA_0$  jak i  $OA'_0$  (rys. 17) powierzchnia  $f_0$  zajmuje to samo położenie, a zatem, ta sama droga  $OP$  w kierunku  $\sigma^{II}$  jest śladem zapominania niezależnie od długości drogi  $OA$  pierwszego obciążenia. Na rys. 16 ślad ten przedstawia linia  $O^I O_P O_K$ .

Weryfikację teoretyczną efektu pamięci przeprowadzono dla dwóch powierzchni plastyczności, mianowicie  $\sigma_{prop}$  i  $\sigma_{0,1}$ .

Na rys. 18, na płaszczyźnie  $\sigma^{II}-\sigma^I$ , przedstawiono wyniki doświadczalne i zależności teoretyczne dla powierzchni  $\sigma_{prop}$ . W zakresie wartości  $\sigma^{II}/\sigma_{prop} = 2,6$  lepszy opis efektu pamięci materiału wynika z hipotezy kinematycznego wzmocnienia. Powyżej tej wartości lepszy opis efektu wynika z hipotezy izotropowego wzmocnienia. Podobne przedstawienie wyników teoretycznych i doświadczalnych dla  $\sigma_{0,1}$  podano na rys. 19. Dla tego przypadku widzimy niezaprzeczną wyższość hipotezy kinematycznego wzmocnienia do opisu efektu pamięci materiału. Ma to duże znaczenie praktyczne z punktu widzenia obróbki plastycznej.

## 5. Wnioski

Wyniki doświadczeń wykazały, że pod wpływem odpowiednio dużego obciążenia wtórnego materiał zapomina o swojej pierwotnej historii obciążenia i zachowuje się tak jak materiał obciążony tylko tym późniejszym sposobem obciążenia. W przypadkach tych o własnościach materiału decydują tylko ostatnie stany obciążenia, pod działaniem których materiał się znajdował.

Wartość drugiego obciążenia zależy od wielkości obciążenia pierwszego oraz od tego, którą z powierzchni płynięcia rozpatrujemy.

Przyjmując w rozważaniach powierzchnię  $\sigma_{0,1}$ , efekt pamięci materiału można opisywać w oparciu o hipotezę kinematycznego wzmocnienia.

Badania wykazały, że istnieje możliwość wywoływania w materiale, przy pomocy odpowiedniego obciążenia, określonych własności mechanicznych korzystnych dla późniejszej pracy elementu konstrukcji wykonanego z tego materiału lub zmiany tych własności, które materiał nabył w przeszłości na skutek odkształceń plastycznych.

## Literatura cytowana w tekście

1. W. SZCZEPIŃSKI, *On the effect of plastic deformation on yield condition*, Arch. Mech. Stos., 15 (1963), 275.
2. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności*, Część I., Mech. Teoret. Stos., 4, 2, (1966).
3. J. MIASTKOWSKI, *Wpływ historii obciążenia na powierzchnię plastyczności*, Część II. Mech. Teoret. Stos., 6, 1, (1968).
4. J. MIASTKOWSKI, *Analysis of the memory effect of plastically prestrained material*, Arch. Mech. Stos., 3, 20, (1968).
5. W. SZCZEPIŃSKI and J. MIASTKOWSKI, *An experimental study of the effect of the prestraining history on the yield surfaces of an aluminium alloy*, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968) 153-162.

## Р е з ю м е

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТА НАСЛЕДСТВЕННОСТИ  
ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА

В работе даётся экспериментальный анализ эффекта наследственности материала, подвергнутого предварительным пластическим деформациям. Эксперименты проводились на плоских образцах из алюминий-магниевого сплава методом вырезки образцов из предварительно деформированной одноосным растяжением пластины. Образцы вырезались под различными углами к направлению предварительной деформации, а затем растягивались до достижения предела текучести. На основании полученных данных определялось несколько условных поверхностей течения. Путем сравнения соответствующих поверхностей текучести проводится анализ эффекта наследственности материала. Показано, что для достаточно длинного участка пути нагружения, по сравнению с начальным, форма поверхности течения не зависит от начального участка пути нагружения.

## S u m m a r y

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF THE MEMORY EFFECT OF A PLASTICALLY PRESTRAINED  
MATERIAL

Experimental analysis of the memory effect is discussed for plastically prestrained aluminium alloy. Tests were carried out using plane specimens cut out in different directions from previously plastically deformed sheets.

Experimental results show that if two various loading paths have different initial sectors and a common final sector, the influence of these initial sectors on the yield surface is the smaller, the longer is the final common sector.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1973 r.*

---

## ZASTOSOWANIE ELASTOPTYKI DO KSZTAŁTOWANIA GŁOWICY ZAPORY FILAROWEJ\*)

ROMAN S. DOROSZKIEWICZ, JERZY LIETZ, BOGDAN MICHAŁSKI  
(WARSZAWA)

### 1. Zastosowanie metod elastoptycznych do kształtowania zapór wodnych

Przy projektowaniu zapór korzysta się od dawna i w bardzo szerokim zakresie z modelowych badań doświadczalnych, a w szczególności z badań elastoptycznych. Można nawet powiedzieć, że badania modelowe zapór stały się klasyczną domeną zastosowań elastoptyki. Rodzaj i charakter prowadzonych badań jest uzależniony od rangi i typu projektowanej zapory i może być bardzo różny: od wycinkowych płaskich badań stanu naprężenia w pewnych wybranych częściach konstrukcji do badań pełnego stanu naprężenia w całej sekcji zapory na modelach trójwymiarowych. Przykładem tych ostatnich mogą być badania zapory brackiej [1] i [2]. Przykłady badań pierwszego typu spotykamy w literaturze często [3]÷[7]. Należą do nich także badania stanu naprężenia w przekroju poprzecznym głowicy zapory filarowej opisanej w niniejszej pracy.

Przyczyn tak szerokiego wykorzystania modelowych metod doświadczalnej analizy naprężeń przy projektowaniu zapór szukać należy w charakterze tych konstrukcji. Po pierwsze zapory grawitacyjne i filarowe stanowiące w istocie ciężkie masywy betonowe o dość złożonym kształcie z galeriami kontrolnymi, komorami i przewodami wewnętrznymi są z reguły trudne do obliczenia wytrzymałościowego metodami analitycznymi, nawet przybliżonymi.

W tej sytuacji metody doświadczalnej analizy naprężeń pozostają głównym, a często nawet jedynym narzędziem wyznaczania stanu naprężenia w tych konstrukcjach. Po wtóre, budowle piętrzące należą do inwestycji bardzo kosztownych, są obiektami wymagającymi wielkich ilości materiałów budowlanych (betonu i stali) i często nawet zupełnie niewielka korekta kształtu zapory prowadzi do nader poważnych oszczędności. Po trzecie, w przypadku tak kosztownych inwestycji, jak zapory, koszt badań eksperymentalnych, choćby nawet o najszerszym programie, stanowi zawsze jedynie niewielki ułamek ogólnych kosztów projektowanej inwestycji, zaś korzyści wypływające z tych badań mogą okazać się bezsporne i wielokrotnie przewyższając poniesione wydatki. Wiadomo w końcu, jak poważnymi konsekwencjami grozi katastrofa zapory. Stąd też od budowli tych wymagamy szczególnie wysokiego współczynnika pewności i stąd też wypływa znaczenie możliwie dokładnego poznania naprężeń w tych konstrukcjach.

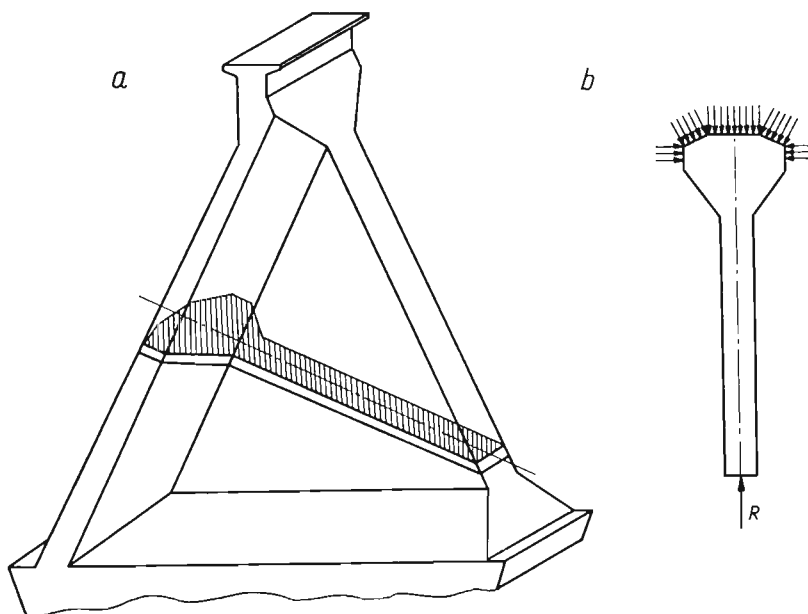
---

\*) Praca została wyróżniona trzecią nagrodą w roku 1972 na konkursie PTMTS na prace doświadczalne organizowanym przez Oddział Częstochowski Towarzystwa.

## 2. Modelowe badanie głowicy zapory filarowej

2.1. Cel i zakres badań. Wymienione we wstępie przyczyny skłoniły do oparcia się na wynikach pomiarów elastoptycznych przy projektowaniu głowicy piętrzącej jednej z zapór filarowych w Polsce.

Jakkolwiek zaporą filarową (rys. 1a) jest konstrukcją typowo przestrzenną i rozkład naprężeń w sekcji zapory jest trójwymiarowy, to jednak stan naprężenia w pewnych jej częściach można badać z dobrym przybliżeniem na modelach płaskich. Dotyczy to w szczególności badania rozkładu głównych naprężeń poziomych na ścianie odwodnej, które decydują o kształcie głowicy piętrzącej zapory. Sporządzić można tutaj model płaski, będący odwzorowaniem części wydzielonej z korpusu zapory dwiema bliskimi płaszczyznami równoległymi, prostopadłymi od ściany odwodnej (rys. 1a). Obciążenie przyłożyć trzeba na brzegu odwodnym w sposób równomierny (rys. 1b), modelując parcie



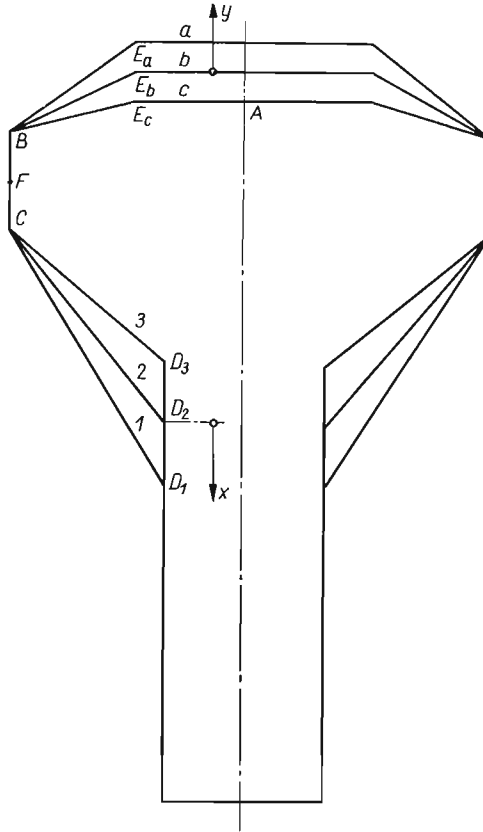
Rys. 1

hydrostatyczne wody. Wypadkową tego parcia równoważymy reakcją  $R$  przyłożoną możliwie z dala od głowicy, co oczywiście nie odpowiada rzeczywistemu schematowi statycznemu, gdyż w konstrukcji przestrzennej parcie hydrostatyczne równoważone jest naprężeniami stycznymi na powierzchniach tak wydzielonego obszaru płaskiego. Pozostaje to jednak bez większego znaczenia dopóki analizę naprężeń ograniczamy do strefy przy odwodnej ścianie głowicy.

Przy ustalaniu kształtu głowicy zapory piętrzącej stawia się warunek, żeby na brzegu odwodnym nie występowały naprężenia rozciągające wywołane parciem hydrostatycznym.

Prowadzone przez autorów badania nie ograniczały się do wyznaczenia stanu naprężenia na brzegu odwodnym głowicy dla zaprojektowanego kształtu, lecz miały szerszy

zakres. Zbadano mianowicie, jaki wpływ na stan naprężenia ma zmiana kształtu przekroju oraz jaki kształt można uznać za optymalny. W tym celu zbadano dziewięć różnych wariantów ukształtowania głowicy (patrz rys. 2), o których będzie mowa w rozdziale 4 poświęconym optymalizacji.



Rys. 2

**2.2. Sposoby realizacji obciążenia równomiernie rozłożonego.** W elastoptycznych badaniach modelowych realizacja równomiernego obciążenia brzegu modelu nastęrcza zazwyczaj pewne trudności.

Najprostszym jej sposobem jest zastąpienie obciążenia równomiernego układem sił skupionych. Ten sposób prosty w realizacji bywa stosowany wówczas, gdy przedmiotem analizy jest stan naprężenia w strefie dostatecznie oddalonej od obciążonego brzegu.

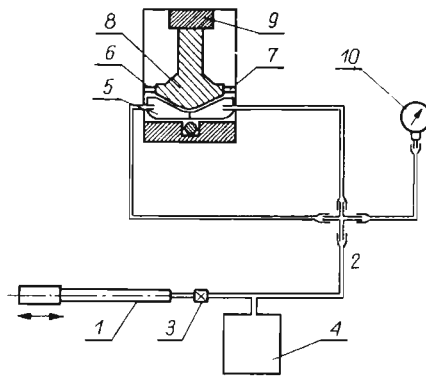
Lepsze wyniki uzyskać można przez zastosowanie mechanicznego układu dźwigniowego, który działa na brzeg modelu za pośrednictwem miękkich, elastycznych podkładek. Jednak i w tym przypadku nieuniknione są pewne lokalne nierównomierności obciążenia uniemożliwiające dokładną analizę naprężeń na obciążonym brzegu.

Najbardziej równomierny rozkład obciążenia uzyskać można przez zastosowanie specjalnych pneumatycznych lub hydraulicznych urządzeń obciążających. Ten sposób obciążenia bywa jednak rzadko stosowany w praktyce badań elastoptycznych, gdyż

wymaga on przeważnie budowy specjalnego urządzenia dla każdego kształtu modelu. Cennymi zaletami pneumatycznych i hydraulicznych urządzeń obciążających są: płynne przykładanie obciążeń, możliwość obciążenia załamanych i krzywoliniowych powierzchni modelu oraz stosunkowo niewielkie wymiary.

W literaturze technicznej znaleźć można opisy hydraulicznych urządzeń obciążających do równomiernego obciążania brzegów prostoliniowych oraz otworów okrągłych. Brak natomiast dotychczas hydraulicznych lub pneumatycznych urządzeń umożliwiających obciążanie brzegów o innym kształcie. Wobec tego autorzy zaprojektowali i wykonali hydrauliczne urządzenia do równomiernego obciążenia załamanych brzegów modelu o różnym ukształtowaniu, do obciążenia liniowo zmiennego i do obciążenia brzegów modelu o zarysie krzywoliniowym.

Najbardziej uniwersalny charakter spośród tych urządzeń ma pneumatyczne urządzenie obciążające, którego schemat działania jest przedstawiony na rys. 3. Urządzenie to



Rys. 3

umożliwia równomierne obciążenie brzegu modelu wykonanego ze sprężystego materiału elastooptycznego o wysokiej czułości. Model (8) umieszczony jest pomiędzy dwiema płytkami ze szkła organicznego. Równomierne obciążenie brzegu modelu uzyskiwane jest za pomocą jednego lub dwóch baloników (6) z bardzo cienkiej gumy, poddanych ciśnieniu powietrza do  $0,3 \text{ MN/m}^2$ . Ograniczenie strefy działania obciążenia uzyskano za pośrednictwem dwóch zasuwek (7) przylegających do modelu. Górny brzeg modelu jest oparty na poziomej poprzeczce (9), której położenie można zmieniać. Ułatwia to kompensację przemieszczenia modelu skutkiem odkształceń. Powietrze tłoczone jest pompą tłokową (1), zaopatrzoną w zawór zwrotny (3) przewodami (2) do balonika (6), który pełni rolę elementu obciążającego. Zbiornik o pojemności około jednego litra (4) umieszczony bezpośrednio za pompą zapewnia ciągle narastanie ciśnienia, które mierzone jest manometrem (10). W układzie umieszczony jest również model skalujący (5), wykonany z tego samego materiału, co i badany model (8). Stanowi go tarcza kołowa ściskana wzdłuż średnicy.

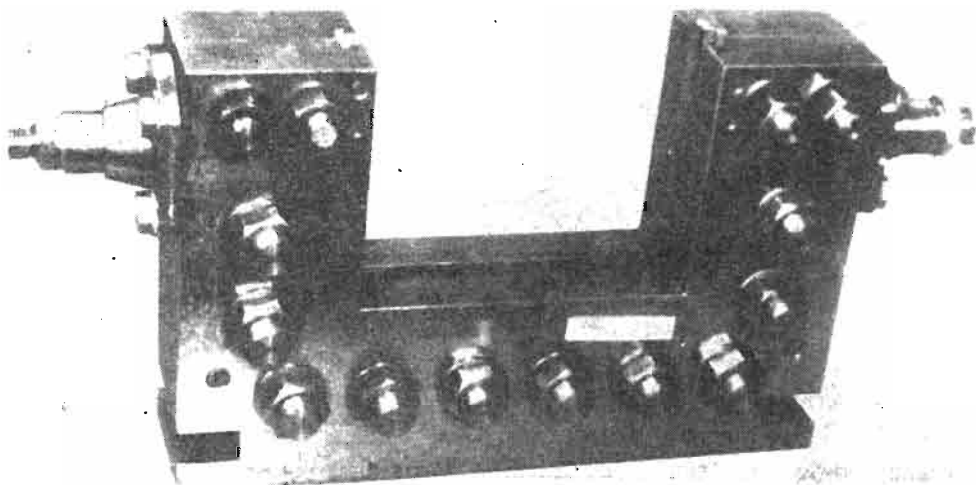
Takie urządzenie pneumatyczne może być stosowane do obciążenia różnie ukształtowanych brzegów modelu, również krzywoliniowych. Jego ujemną stroną jest to, że nie pozwala na realizację dużych ciśnień. Poza tym stosować je można tylko do obciążenia modeli wykonanych z materiałów specjalnych o niskim module sprężystości i wysokiej



czułości optycznej. Modele te wykazują znaczne odkształcenia, co pogarsza dokładność wyników.

Większe obciążenia zrealizować można przy zastosowaniu hydraulicznych urządzeń obciążających.

W badaniach modelu głowicy zapory głównym przedmiotem zainteresowania nie był stan naprężenia w głębi modelu, lecz wartości naprężeń na obciążonym brzegu. Wobec wymagania znacznej dokładności wyników należało stosować modele z normalnych, sztywnych materiałów elastoptycznych. Zastosowano więc hydrauliczne urządzenie obciążające, przedstawione na rys. 4. Zasada jego działania widoczna jest na schemacie pokazanym na rys. 5. Urządzenie składa się z dwuczęściowego korpusu (1), w którym wyprofilowany jest odpowiedni kanał (2). Do kanału tego wprowadzona jest cienkościenna rurka gumowa (3) zamknięta odpowiednimi zaworami (4).

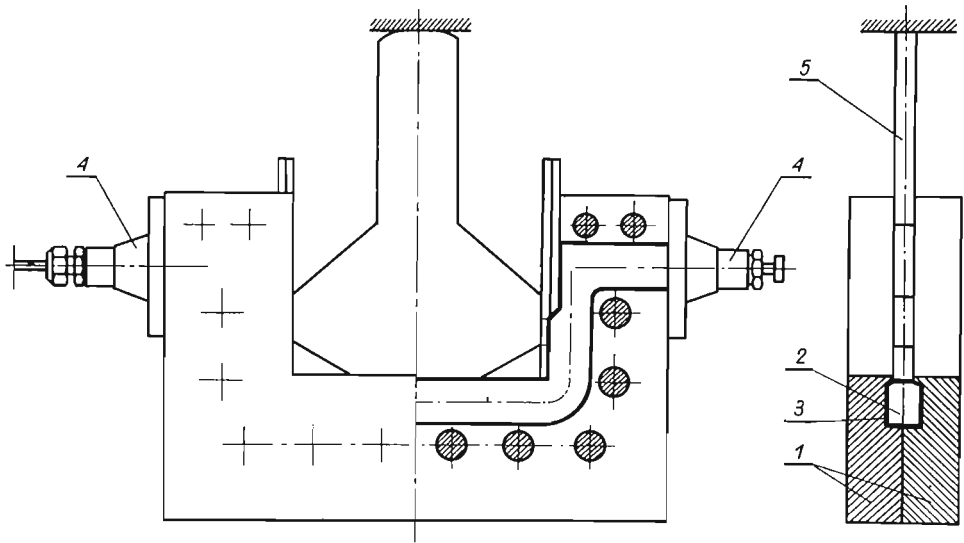


Rys. 4. Hydrauliczne urządzenie obciążające

Do rurki wprowadzony zostaje pod odpowiednim ciśnieniem olej, który poprzez szczelinę w korpusie wywiera równomierny nacisk na model (5). Powinien on wchodzić do szczeliny z luzem około 0,1 mm na ściśle określonej głębokości. Wysuwanie się dolnej krawędzi modelu w czasie obciążania, będące wynikiem jego odkształceń oraz luzów i odkształceń w całym układzie obciążającym, należy kompensować. Dokonywane jest to ręcznie drogą pokręcania widocznych na zdjęciu (rys. 6) śrub przesuwających górną podporę modelu. Można w ten sposób również poprawić symetrię obrazu elastoptycznego, a więc i obciążenia.

**2.3. Pomiary elastoptyczne.** Ze wstępnej analizy zagadnienia wynika, że niepożądane naprężenia rozciągające przy zmianie ukształtowania sekcji zapory zaczynają najpierw pojawiać

się pośrodku brzegu odwodnego. Wartość naprężeń ściskających w tym punkcie jest miarą pewności, że w konstrukcji nie występują rozciągania. Wartości naprężeń w środku brzegu odwodnego stanowią zatem punkt wyjścia przy wyborze kształtu przekroju poprzecznego głowicy najkorzystniejszego z punktu widzenia bezpieczeństwa i ekonomii. Z tego też względu w punkcie tym trzeba szczególnie dokładnie określać wartości naprężeń.



Rys. 5

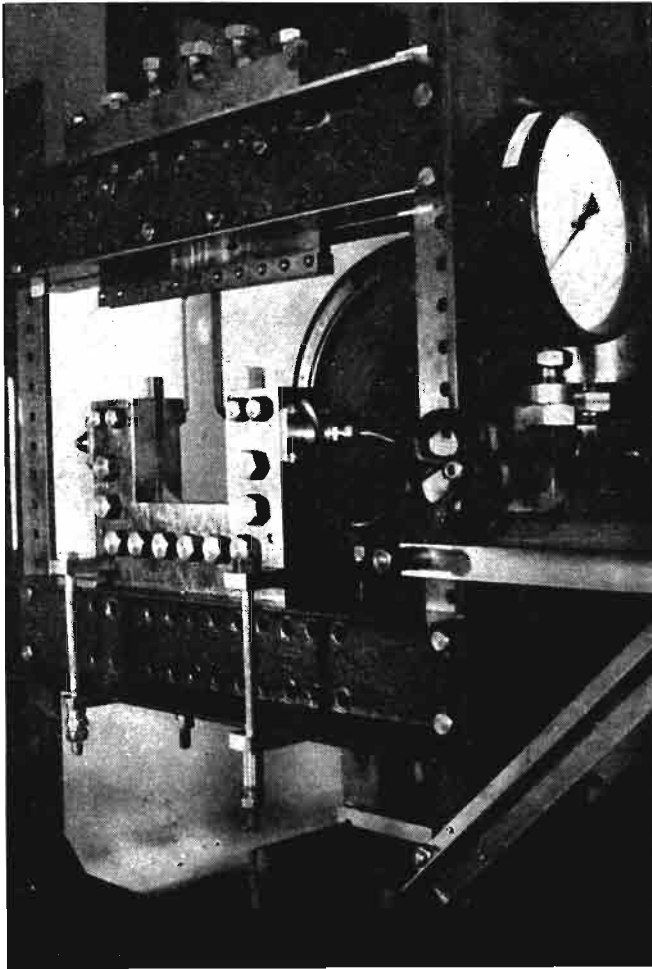
Metoda powierzchniowa opierająca się na analizie izochrom nie zapewnia wymaganej dokładności, zwłaszcza przy zaobserwowanej konfiguracji izochrom. W związku z tym zastosowano sposób określania rzędu izochromy metodą kompensacji goniometrycznej. Przyjęto najpraktyczniejszą w tym przypadku metodę kompensacji goniometrycznej Tardy'ego i dla każdego modelu przeprowadzono serię pomiarów kompensacyjnych w środku obciążonego brzegu.

Niezależnie ustalono kompensacyjnie średnią wartość rzędu izochromy w części prostokątnej modelu, w przekroju leżącym pomiędzy podporą a głowicą. Określono z tego wypadkową parcia hydrostatycznego dokładniej niż na podstawie wskazań manometru.

Stanowisko badawcze wraz z modelem widoczne jest na rys. 6. Hydrauliczne urządzenie obciążające przymocowane jest do belki ramy obciążającej i zasilane olejem tłoczonym pompą śrubową.

Ponieważ stosowane urządzenie hydrauliczne dawało obciążenie na konturze prostokątnym, a poszczególne modele miały różne skosy po stronie obciążonej, skosy te wypełniono klinami odpowiedniego kształtu.

Modele do badań wycięto z arkusza żywicy epoksydowej typu Epidian o module sprężystości podłużnej  $E = 3300 \text{ MN/m}^2$  i stałej materiałowej  $K = 1,1 \text{ MN/m}^2$  rz. izochr.



Rys. 6. Stanowisko badawcze

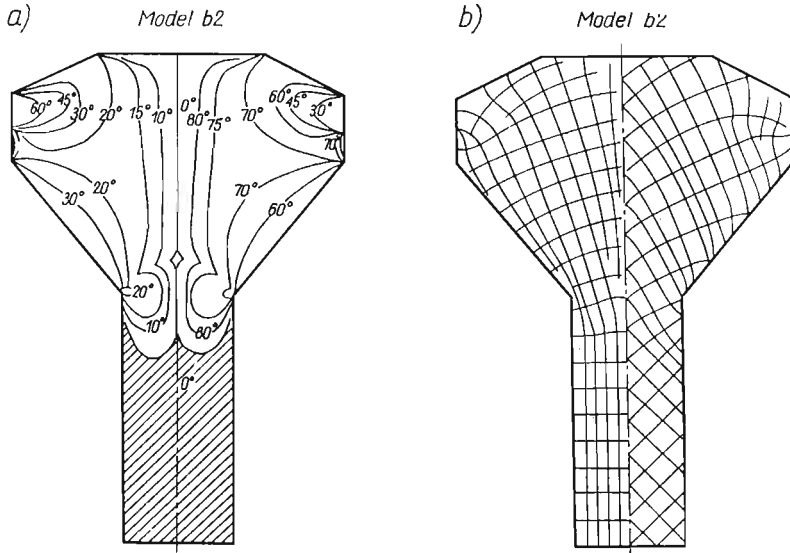
### 3. Wyniki pomiarów elastoptycznych

Na podstawie otrzymanych zdjęć izoklin sporządzono zestawieniowe wykresy izoklin (rys. 7a) oraz wykresy trajektorii naprężeń głównych i maksymalnych stycznych (rys. 7b).

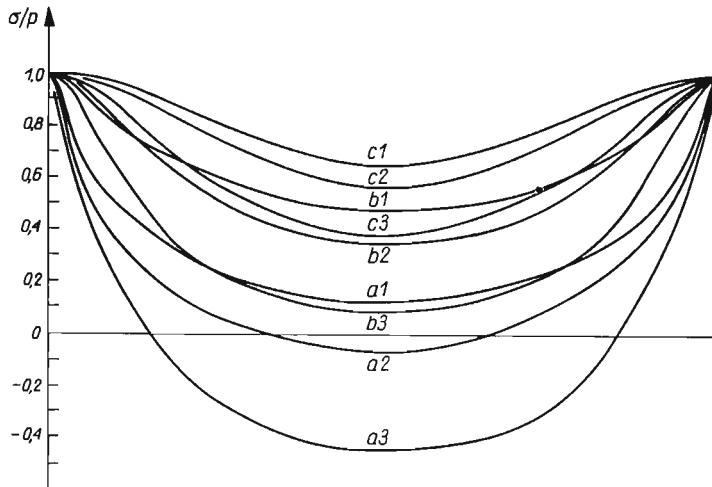
Zestawienie zdjęć izochrom dla wszystkich zbadanych modeli przedstawiono na rys. 9.

W oparciu o wykresy izochrom i wartości efektów optycznych, zmierzone metodą kompensacji, sporządzono zestawieniowe wykresy naprężeń brzegowych dla środkowej części brzegu odwodnego zapory (rys. 8). W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy jedynie ekstremalną wartość naprężenia brzegowego po stronie odwodnej (punkt *A* rys. 2) oznaczając je przez  $\sigma$ . Posługiwać się będziemy bezwymiarową wartością naprężenia odnosząc ją do obciążającego ciśnienia hydrostatycznego  $p$ .

Analiza otrzymanych wykresów naprężeń brzegowych pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków jakościowych. Wielkość skosu *BE* po stronie odwodnej (rys. 2) ma znacznie większy wpływ na wartości naprężeń brzegowych aniżeli wielkość skosu *CD* po



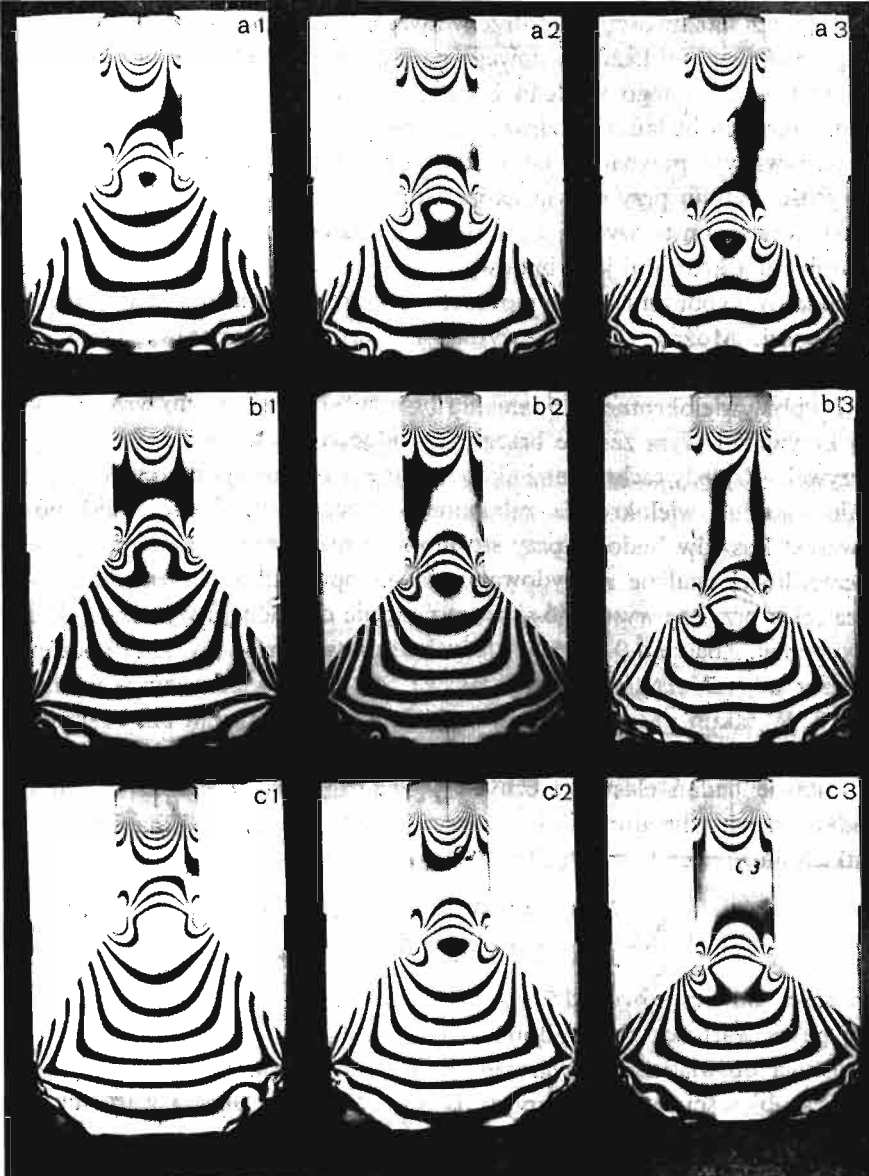
Rys. 7



Rys. 8

stronie odpowietrznej. W przypadku modeli o niewielkim skosie po stronie odwodnej (wariant *c*) konieczna jest stosunkowo znaczna wysokość skosu głowicy po stronie odpowietrznej, aby na brzegu odwodnym nie występowały naprężenia rozciągające. Wynika stąd, że przy projektowaniu głowicy zapory główny nacisk położyć trzeba na należyte ukształtowanie skosu ściany odwodnej.

Celem dokładnego zbadania wpływu zmiany wielkości obu skosów na wartości naprężeń brzegowych i wyznaczenia optymalnych parametrów głowicy zapory przeprowadzono analizę optymalizacyjną, opisaną w następnym rozdziale.



Rys. 9. Zestawienie zdjęć izochrom

4. Optymalizacja kształtu głowicy zapory<sup>1)</sup>

Podstawowym problemem przy optymalizacji kształtu jakiejkolwiek konstrukcji jest wybór właściwego kryterium optymalizacji i zmiennych parametrów kształtu. W praktyce nie ma bowiem ani możliwości, ani potrzeby uwzględnienia zmiany zbyt wielu parametrów: wprowadzenie zmienności każdego nowego parametru pociąga za sobą kilkakrotne zwiększenie liczby badań i z tego względu konieczny jest zawsze pewien kompromis między pożądanym zakresem badań a możliwościami technicznymi.

W rozpatrywanym przypadku jako kryterium kształtowania przyjęto warunek minimalnej objętości betonu przy stałym naprężeniu poziomym w środku brzegu odwodnego  $\sigma/p = \text{const}$ . Kryterium to wydaje się słuszne ze względu na bezpośredni związek między kubaturą obiektu a kosztami jego budowy.

Jeśli chodzi o wybór zmiennych parametrów kształtu przekroju istnieje cała gama różnych możliwości. Można zmieniać wysokość i szerokość skosów, wysokość głowicy, to jest odcinka głowicy prostopadłego do brzegu odwodnego (odcinek  $BC$  na rys. 2), analizować wpływ wielokrotnego załamania brzegu odwodnego, lub wreszcie wprowadzić głowicę o krzywoliniowym zarysie brzegu odwodnego i pokusić się o wyznaczenie optymalnej krzywej. Względy techniczne i ekonomiczne przemawiają przeciwko wprowadzeniu krzywoliniowego lub wielokrotnie załamanego brzegu odwodnego, gdyż powoduje to znaczny wzrost kosztów budowy przy stosunkowo nieznacznej oszczędności betonu.

Po szczegółowej analizie zdecydowano się na optymalizację względem dwóch parametrów, za jakie przyjęto wysokość skosu po stronie odwodnej i wysokość skosu po stronie odpowietrznej. Zbadano 9 modeli, których kształty określa rys. 2. Oznaczono je odpowiednio przez  $a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3$ . Obrazy izochrom w modelach przedstawia rys. 8. W takim układzie centralne miejsce zajmuje kształt  $b2$ . Przyrosty długości skosów względem  $b2$  oznaczono przez  $x$  po stronie odpowietrznej i  $y$  po stronie odwodnej.

Na podstawie badań elastoptycznych wyznaczono wartości poziomego naprężenia  $\sigma/p$  w środku brzegu odwodnego sekcji zapory (punkt  $A$  na rys. 2) dla dziewięciu modeli, dla wszystkich możliwych kombinacji parametrów  $x$  i  $y$  równych:

$$\begin{array}{rcl} x = -2,0 \text{ m} & 0 & +2,0 \text{ m} \\ y = -0,95 \text{ m} & 0 & +1,0 \text{ m} \end{array}$$

przy szerokości głowicy równej 15 m.

Każdej parze wartości  $x$  i  $y$  odpowiada:

- określona doświadczalnie wartość naprężenia  $\sigma/p$  (tablica 1),
- różnica objętości elementu zapory  $\Delta V$  spowodowana zmianą wartości  $x$  i  $y$  w stosunku do kształtu wyjściowego  $b2$  ( $x = 0, y = 0$ ), (tablica 2).

W celu znalezienia rozwiązania analitycznego sformułowanego zadania, aproksymowano funkcję naprężeń  $\sigma/p = \varphi(xy)$  oraz funkcję zmian objętości  $\Delta V = \psi(xy)$  powierzchniami drugiego stopnia stosując metodę najmniejszych kwadratów. Jak wynika z porównania rzędnych funkcji aproksymujących z danymi wyjściowymi wyznaczone powierzchnie leżą bardzo blisko danych punktów. Świadczy to korzystnie o dokładności pomiarów.

<sup>1)</sup> Obliczenia optymalizacyjne przeprowadzili W. Marks i J. Kasperkiewicz na komputerze Odra 1204.

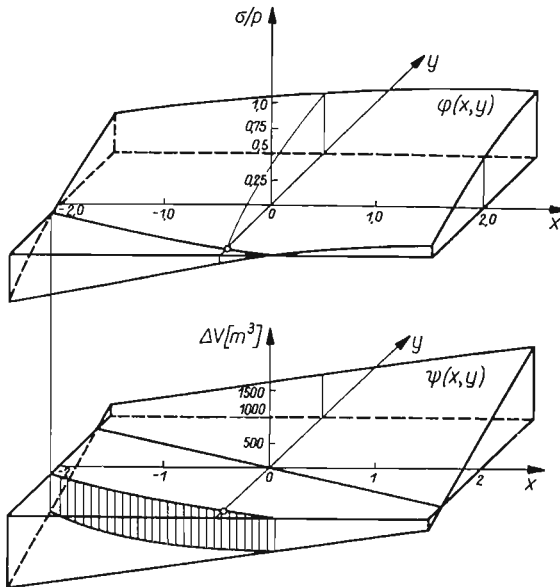
Tablica 1. Wartości  $\sigma/p$  w punkcie  $A$  modelu wyznaczone na podstawie badań elastoptycznych

$y \backslash x$	-2,0	0,0	2,0
+1,0	0,38	0,57	0,65
0,0	0,0	0,36	0,48
-0,95	-0,44	-0,07	0,13

Tablica 2. Różnica objętości elementu zapory  $\Delta V = V(x, y) - V(x = 0, y = 0)$  w  $m^3$ 

$y \backslash x$	-2,0	0,0	2,0
1,0	201	805	1409
0,0	-604	0	604
-0,95	-1309	-765	-161

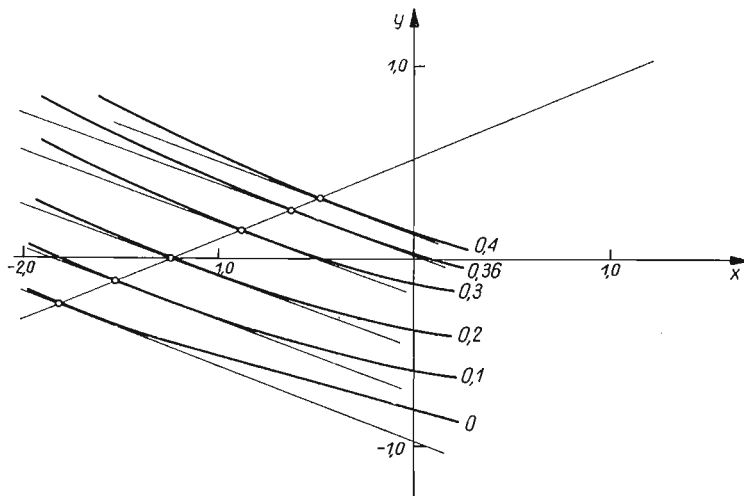
Powierzchnie  $\varphi(x, y)$  i  $\psi(x, y)$  przedstawione zostały w aksonometrii na rys. 10.



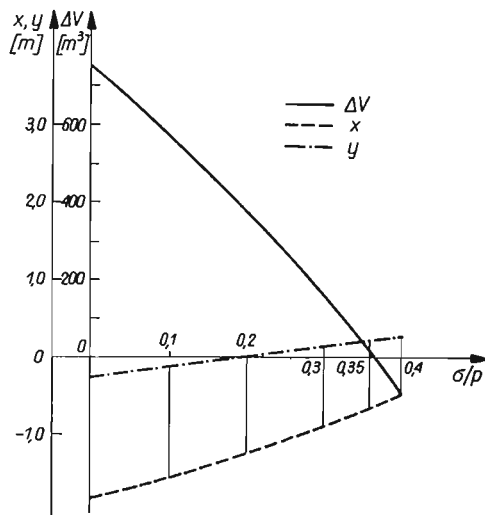
Rys. 10

Na rys. 11 przedstawiono rzuty krzywych przecięcia powierzchni  $\varphi(x, y)$  płaszczyznami poziomymi  $\sigma/p = \text{const}$  na płaszczyznę układu współrzędnych  $xy$ . Z krzywych tych widać, jak zmieniają się parametry  $x$  i  $y$  (wysokość skosów przy  $\sigma/p = \text{const}$ ). Posługując się tym rysunkiem wyznaczyć można kombinacje wartości  $x$  i  $y$  (wielkości skosów) odpowiadające danej wartości naprężenia  $p_x/p_z$  lub, metodą interpolacji, wartość naprężenia  $p_x/p_z$  odpowiadającą przyjętej kombinacji parametrów  $x$  i  $y$ . Każdej kombinacji parametrów

$x$  i  $y$  odpowiada inna objętość sekcji zapory. Optymalna kombinacja parametrów  $x$  i  $y$  przy założonej wartości  $\sigma/p$  odpowiada punktowi, w którym styczna do krzywej  $\varphi(x, y) = \text{const}$  jest równoległa do krzywej  $\psi(x, y) = \text{const}$ , tj. do linii przecięcia powierzchni zmian objętości płaszczyzną poziomą. Łącząc te punkty styczności otrzymamy linię bezwzględnie optymalnych parametrów  $x$  i  $y$ . Jak widać z rys. 11 jest to linia prosta.



Rys. 11



Rys. 12

Na rys. 12 uwidoczniono krzywą zmian objętości w funkcji zmian naprężenia  $\sigma/p$  oraz odpowiadające krzywe  $x$  i  $y$ . Na podstawie krzywych przedstawionych na tym rysunku wyznaczyć można optymalne parametry geometryczne głowicy piętrzącej zapory odpowiadające przyjętej wartości naprężenia  $\sigma/p$  i możliwą do uzyskania oszczędność objętości zapory w stosunku do objętości sekcji zapory przy kształcie wyjściowym (wariant b2).



Оптимальные значения  $x$  и  $y$  oraz różnice objętości w zależności od założonych dopuszczalnych wartości  $\sigma/p$  zestawione zostały w tablicy 3.

Tablica 3

$\frac{\sigma}{p}$	$x$ [m]	$y$ [m]	$\Delta V$ [m <sup>3</sup> ]
0	-1,82	-0,25	-750
0,1	-1,54	-0,13	-572
0,2	-1,23	+0,01	-379
0,3	-0,89	+0,13	-162
0,36	-0,65	+0,23	-16
0,4	-0,49	+0,30	+92

Zamieszczone wykresy dają właściwie projektantowi pełne informacje na temat wzajemnych zależności pomiędzy parametrami kształtu zapory i naprężeniami na ścianie odwodnej. Pozwalają one na optymalne z wytrzymałościowego punktu widzenia kształtowanie głowicy zapory. Potwierdzają one poprzedni wniosek, że wysokość skosu po stronie odpowietrznej ma mniejszy wpływ na wartości naprężeń na brzegu odwodnym niż wysokość skosu na brzegu odwodnym.

### 5. Uwagi końcowe

W większości badań o charakterze praktycznym eksperymentatorzy ograniczają się do rozpatrzenia jednego tylko przypadku (kształtu), dla którego określają stan naprężenia.

Przykład opisany w niniejszej pracy wskazuje, jak na podstawie wyników badań elastooptycznych można pójść dalej i dokonać optymalizacji kształtu badanej konstrukcji. Wymaga to zbadania większej liczby modeli. Jednak nakład pracy nie jest bynajmniej proporcjonalny do liczby zbadanych modeli, a uzyskane wyniki są o wiele pełniejsze.

### Literatura cytowana w tekście

1. Ф. Ф. Губин, Н. И. Пригоровский, Г. Л. Хесин, *Исследование встроенного варианта гидроэлектростанции с высокой массивной плотной*, Гидротехническое Строительство, 1 (1958), 29–36.
2. Г. Л. Хесин, *Применение фотоупругости и электротензометрирования при исследовании напряжений в гидротехнических сооружениях сложной формы*, Изв. высших учебных заведений Мин. Высшего Образования СССР, Стронт. и Архитектура, 3 (1968), 132.
3. L. FÖRPL, E. MÖNCH, *Praktische Spannungsoptik*, Heidelberg 1957.
4. Н. С. Розанов, *Исследование напряженного состояния гидротехнических сооружений*, Вестник Ленинградского Государственного Университета, 1958, 1960.
5. R. L. SANKS, *Photoelastic analysis of stress in a dam containing a large gallery*, Proceedings of American Society of Civil Engineers, vol. 81, separate No. 693.
6. А. В. Дмоховский, *Концентрация напряжений вокруг одиночных отверстий прямоугольной формы с полукруглым сводом*, Моделирование динамики, термоупругости и статике поляризациино-оптическим методом, Москва 1970.
7. R. S. DOROSKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHALSKI, *Fotoelasticimetrické vyšetřovanie modelu gravitačnej priehrady s prihliadnutim na vplyv podložia*, Stavebnicky Casopis, SAV, Bratislava, 7, 19 (1971), 547–558.

8. R. DOROSZKIEWICZ, *Fotosprężystościowe badania przekroju poprzecznego zapory filarowej*, Mech. Teoret. i Stos., 2, 3 (1964), 3–14.
9. R. S. DOROSZKIEWICZ, *Przegląd możliwości zastosowania elastoptyki do badania zapór*, Arch. Hydrotechniki, 3, 1, (1969), 337–354.

## Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ ФОТОУПРУГОСТИ К ОПТИМАЛЬНОМУ ФОРМИРОВАНИЮ  
МАССИВНОГО КОНСОЛЬНОГО ОГОЛОВКА ПЛОТИНЫ

В работе описан пример применения фотоупругости к оптимальному формированию массивного консольного оголовка. Описана техника исследования, причем особое внимание обращено на разработку методов реализации равномерного распределения нагрузки по краю. Предложена программа исследований, дающая возможность определения оптимальной формы поперечного сечения массивного консольного оголовка.

Получена оптимальная форма оголовка плотины, основанная на результатах фотоупругих исследований. В качестве критерия принято условие минимальной кубатуры оголовка, для заданной величины напряжений со стороны верхнего бьефа. Оптимальные параметры разреза, вычисленные при использовании ЭЦВМ ODRA 1204, представлены в виде таблиц и диаграмм.

## S u m m a r y

## APPLICATION OF PHOTOELASTICITY TO DAM BUTTRESS OPTIMUM DESIGN

The paper contains an example of application of the photoelastic method to designing of a dam buttress. Testing procedures are described, special attention being paid to the method of realization of a uniform loading along the boundary of the model. Program of investigations is suggested rendering it possible to determine an optimum cross-section of the dam buttress.

In the paper is described the optimization procedure of the shape of the dam buttress based on the results of photoelastic investigations. As the optimization criterion is assumed the condition of minimum volume of the buttress at a determined stress value on the upstream side. Optimum section parameters calculated on the ODRA 1204 computer are presented in the form of tables and diagrams.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

*Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1973 r.*

---

# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE

### Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA I KWARTAŁ 1973 R.

#### 1. Zebrania naukowe

W okresie I kwartału 1973 odbyło się 13 zebrań naukowych, na których wygłoszono 15 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				ucze- stników	dysku- tantów
Oddział w Bydgoszczy					
1.	19.01.73	T. Kabat	Model ideowy płaskiego układu cięgien sprzężonych	12	17
2.	„ „ „	J. Lorkowski	Zastosowanie EMC do obliczeń płaskich układów prętowych	12	6
3.	13.02.73	T. Jędryka	Modele matematyczne procesów sterowania optymalnego	15	4
4.	„ „ „	A. Topoliński	Drgania przy toczeniu ostrzami diamentowymi	15	8
Oddział w Częstochowie					
5.	17.01.73	W. Truszkowski	Anizotropia własności mechanicznych i tekstura walcownicza metali o typie Al	58	7
6.	21.03.73	E. Tuliszka	Wybrane zagadnienia przepływowe turbin cieplnych	26	4
Oddział w Gdańsku					
7.	16.01.73	W. Pietraszkiewicz	Nieliniowa teoria powłok w ujęciu Lagrange'a	15	3
8.	14.02.73	E. Melerski	Statyka pewnego przekrycia jednosłupowego w ujęciu probabilistycznym	12	4
9.	27.03.73	P. G. Glockner (Kanada)	Powierzchnie Cosseratów a teoria powłok trójwarstwowych	17	4
Oddział w Gliwicach					
10.	22.03.73	T. Bes	Rozkład materiału na sicie przesiewacza węgla	12	5

## Oddział w Krakowie

11.	21.03.73	G. Szefer, B. Lechowicz, J. Gaszyński	Płaskie i osiowo-symetryczne zagadnienie konsolidacji ośrodka lepko-sprężystego	17	6
-----	----------	---	---	----	---

## Oddział w Łodzi

12.		J. Krodkiewski	Stateczność i prędkości krytyczne wałów o niekołowym przekroju	13	3
-----	--	----------------	--	----	---

## Oddział w Szczecinie

13.	18.01.73		Zebranie dyskusyjne nad referatami II kongresu Nauki Polskiej	11	8
14.	23.02.73	L. Waško	Mocowanie elektryczne maszyn na konstrukcjach podatnych	26	8

## Oddział we Wrocławiu

15.	05.03.73	A. Borcz	Prototypowe metody badania konstrukcji opracowane w Zakładzie Budownictwa Przemysłowego Politechniki Wrocławskiej	19	brak danych
-----	----------	----------	---	----	-------------

## 2. Seminarium

1) Oddział w Gdańsku przeprowadził Seminarium na temat «Metody elementów skończonych». Wykłady prowadzili doc. J. KRUSZEWSKI i prof. B. KOWALCZYK, przez 2 semestry, po 2 godziny tygodniowo. W seminarium uczestniczyło 80 osób.

2) Oddział w Warszawie zorganizował wspólnie z IPPT PAN Seminarium na temat «Powierzchnie Cosseratów a teoria powłok sandwichowych». Wykłady wygłosił prof. dr P. G. GLOCKNER z Uniwersytetu w Calgary (Kanada). Wykłady te odbyły się w Karpaczu, w dniach 23 i 26 marca 1973 r., uczestniczyło w nich około 60 osób.

3) Oddział we Wrocławiu przeprowadził Seminarium na temat «Oddziaływanie ośrodka sypkiego na konstrukcję». Seminarium odbyło się w Karpaczu, w dniach od dnia 31 stycznia do 5 lutego 1973 r., z udziałem 46 osób. Podczas seminarium wygłoszono 18 następujących referatów:

*Silosy*

1. Z. Mróz, Współczesne teorie parcia ośrodków sypkich w zbiornikach pionowych,
2. B. Budkowska, W sprawie obliczania parcia statycznego w lejach silosów,
3. Cz. Szymański, Pasywny i aktywny stan ciśnień w zasobnikach na materiały sypkie,
4. J. Zawadzki, Analiza grawitacyjnych przepływów ośrodków sypkich przez zasobniki,
5. S. Kobiela, Wyniki badań modelowych naporu piasku i cementu w silosie,
6. Z. Marcinkowski, Wyniki badań naporu cementu w silosie w skali naturalnej.

*Napór gruntu na konstrukcje*

7. B. Broś, Przegląd metod badania naporu gruntu,
8. S. Dmitruk, B. Lysik, Problemy związków fizycznych w mechanice ośrodka rozdrobnionego,
9. T. Hüchel, O sprzężeniu cech sprężystych i plastycznych w organicznych ciałach sypkich,
10. J. Dubis, Wyniki pomiarów naporu gruntu na tymczasowe umocnienie wykopu,
11. Cz. Dawdo, Badania dotyczące naporu gruntu na umocnienia tymczasowych wykopów.

*Metody doświadczalne*

12. A. Drescher, O interpretacji wyników badań bezpośredniego ścinania ośrodków sypkich,
13. A. Borcz, J. Dubis, S. Kobiela, Metody pomiaru naporu ośrodka sypkiego na konstrukcje — czujniki, aparatura,
14. A. Kwaśniewski, Z. Marcinkowski, B. Podolski, Referat połączony z demonstrowaniem aparatury.

*Oddziaływanie gruntu na narzędzia w procesach urabiania*

15. W. Szczepiński, Problemy teorii mechanicznego urabiania gruntów,
16. W. Trąmpczyński, Weryfikacja doświadczalna rozwiązań teoretycznych dla pracy łyżki ładowarki,
17. S. Dymitruk, B. Lysik, Niektóre zagadnienia obciążeń zewnętrznych maszyn roboczych w świetle badań i doświadczeń,
18. A. Dragon, O zastosowaniu modelu ciała sztywno-idealnie plastycznego do problemu stateczności skarpy,
19. J. Ostrowska-Maciejewska, Zastosowanie metody szeregów potęgowych do opisu pola naprężenia w stanie granicznym ośrodka sypkiego.

**3. Sympozja**

1) Oddział w Gliwicach przeprowadził w dniach 9—14 lutego 1973 r. w Szczyrku, IV Sympozjum na temat «Metody statystyczne w mechanice — stochastyczna teoria maszyn». Sprawozdanie z Sympozjum zamieszczamy oddzielnie.

2) Oddział w Krakowie zorganizował wspólnie z AGH oraz Instytutem Budowy Maszyn III Sympozjum na temat «Techniki wibracyjnej». Podczas Sympozjum wygłoszono 27 referatów:

1. J. Adamkiewicz, Analiza płytowej zagęszczarki do gruntu z dwumasowym wibratorem,
2. T. Banaszewski, Wpływ parametrów konstrukcyjnych na amplitudy nieliniowych drgań przesiewacza rezonansowego dwumasowego,
3. St. Bednarz, St. Kasprzyk, M. Robakowski, Dynamika i synteza wibrodozatorów,
4. W. Bogusz, Stateczność techniczna stochastyczna układów wibrouderzeniowych,
5. Cz. Cempel, Kryteria minimalnej dynamiczności w agregacie narzędzie — ręka człowieka — operatora,
6. A. Czubak, Funkcja modulująca uderzenie nosiwa w rynnę wibracyjną,
7. Z. Drzymała, Próba opracowania modelu matematycznego procesu wibracyjnego brykietowania wiórów metalowych,
8. Z. Drzymała, K. Ruszała, Urządzenia do wibracyjnego cięcia metali,
9. Z. Drzymała, W. Zapałowicz, Aktualny stan badań w ośrodku techniki wibracyjnej w Instytucie Maszyn Hutniczych i Automatyki AGH,
10. Z. Engel, St. Czareński, Badania doświadczalne procesu przejściowego urządzenia wibrouderzeniowego,
11. Z. Engel, Analiza drgań nieliniowego układu wibrouderzeniowego o jednym stopniu swobody,
12. Z. Engel, R. Panuszka, Nowe konstrukcje napędów urządzeń wibracyjnych,
13. W. Ferenc, St. Kasprzyk, Oszacowanie błędu przy aproksymacji zderzenia rzeczywistego delta Diraca,
14. J. Giergiel, J. Liszka, Zastosowanie przenośników wibracyjnych do transportu gorącego żużla z pieców przewalowych,
15. T. I. Ilgakois, A. R. Jaksztas (ZSSR), Badanie stateczności tłumika elektrodynamicznego,
16. St. Kasprzyk, Dobór racjonalnej charakterystyki tłumienia dla skipowych urządzeń przeciwko kruszeniowym,
17. J. Kolenda, Analiza pewnych rezultatów badań wibratorów pograżalnych,
18. P. Krzyworzeka, Przydatność diagnostyczna akustycznego pola drganiowego sprężarki tłokowej,
19. T. Maślanka, Wybrane zagadnienia identyfikacji procesu walcowania wibracyjnego rur,
20. J. Michalczyk, Optymalny przenośnik wibracyjny,
21. A. Mikołajczuk, Model dynamiczny oddziaływania warstwy sypkiego nosiwa na ruch rynny przenośnika wibracyjnego,

22. Z. Osiński, Charakter rezonansu drgań tłumionych tarcie wiskotycznym i konstrukcyjnym,
23. A. Pasierb, Parametry siłowe w procesie ciągnięcia drutów przy zastosowaniu ultradźwiękowych drgań ciągłego,
24. T. Piech, Wykorzystanie efektu Villary'ego do badań zmiennych sił w technice wibracyjnej,
25. J. Raniszewski, Badania analityczne i doświadczalne ruchu wibromłota w przypadku występowania kilku uderzeń w okresie siły wymuszającej,
26. W. Ł. Ragulskene, O steromechanicznych modelach uderzenia,
27. W. Stanek, Zespolony moduł Younga w technice wibracyjnej.

W sympozjum uczestniczyło 117 osób, a w dyskusji zabrało głos — 48. Wydano materiały konferencyjne.

#### 4. Sprawy organizacyjne

W okresie sprawozdawczym odbyło się Plenarne Zebranie ZG oraz 14 zebrań organizacyjnych w Oddziałach. Liczba członków PTMTS wyniosła 610 osób.

### SYMPOZJUM «METODY STOCHASTYCZNE W MECHANICE — STOCHASTYCZNA TEORIA MASZYN»

Szczyrk-Biała, 9—15.II.1973 r.

Czwarty już Sympozjon z zakresu metod statystycznych w mechanice odbył się w dniach od 9—15.II. 1973 r. w Szczyрку-Białej. Sympozjon, w którym uczestniczyły 52 osoby, został zorganizowany przez Oddział Gliwicki PTMTS we współpracy z Instytutem Mechanizacji Górnictwa Politechniki Śląskiej. Materiałami podstawowymi, przygotowanymi na Sympozjon, były referaty wydane drukiem w Zeszytach IMG Politechniki Śląskiej i PTMTS Gliwice 1973 r. oraz praca E. CZOGAŁY pt. *Niestacjonarne procesy stochastyczne w układach dynamicznych o stałych rozłożonych*, Zeszyt PTMTS, Gliwice, a także książka prof. M. DIETRICH pt. *Wstęp do stochastycznej teorii maszyn*, PAN, Warszawa 1972 r. Materiały te zostały doręczone uczestnikom sympozjonu.

Program obrad obejmował 15 referatów o następującej tematyce:

1. M. DIETRICH, O stochastycznej teorii maszyn,
2. A. MIĄDOWICZ, L. SOCHA, J. SZOPA, Równania ruchu i stabilność stochastyczna zwijarki blachy przy działaniu wymuszenia stochastycznego,
3. A. CZECH, B. JANIEC, O asymptotycznych własnościach rozwiązań problemu brzegowego dla równania struny,
4. A. TYLIKOWSKI, Stabilność techniczna pewnego ciągłego układu dynamicznego poddanego działaniu zaburzeń stochastycznych,
5. M. TYLIKOWSKI, Stabilność stochastyczna zamkniętej powłoki cylindrycznej,
6. A. BIAŁAS-ZABAWA, M. ZABAWA, Analiza pewnego układu ze strefą nieczułości przy pobudzeniu stochastycznym,
7. W. BATKO, Zastosowanie aproksymacji stochastycznej do określenia funkcji intensywności uszkodzeń,
8. A. FILIPOW, J. WEKEZER, P. WILDE, Stochastyczny model odchyłek powierzchni zbiorników cylindrycznych,
9. M. CHMURAWA, K. GRAJDEK, J. WOJNAROWSKI, Niektóre problemy badań wpływu ruchu zwierciadła wody w osadzarce na jakość wzbogacenia,
10. J. DEKERT, W. KUROWSKI, O możliwości zastosowania pewnej składowej drgań skrętnych układu koło zębate — wał, jako sygnału diagnostycznego do wyznaczania obciążeń dynamicznych na zębach,
11. St. DUBIEL, O pewnej koncepcji określenia prawdopodobieństwa sterowalności obiektów sterowanych nieciągłym procesem (ref. niepublikowany),
12. G. ORLIK, Analiza statycznych własności rzeczywistych okształceń w powłokach zbiorników walcowych,
13. J. WICHER, Wykorzystanie obciążeń losowych do badań dynamiki frezarek,

14. A. BADURA, E. CZOGAŁA, O pewnym problemie nieliniowych drgań ciągłego układu dynamicznego o współczynnikach losowych i wymuszeniu stochastycznym,
15. B. WAGNER, Metoda małego parametru przy wymuszeniu stochastycznym.

Referowane prace spotkały się z dużym zainteresowaniem słuchaczy, o czym świadczy duża liczba dyskutantów, łącznie 65.

Celem Sympozjonu i odbywanych w trakcie spotkań było przedyskutowanie bieżącej działalności naukowej reprezentowanych krajowych ośrodków naukowych i nawiązanie współpracy lub jej kontynuacja. Referat wprowadzający wygłosił prof. M. DIETRICH: *O stochastycznej teorii maszyn*, a w poszczególnych dniach obradom przewodniczyli profesorowie: T. OPOLSKI, Z. OLESIAK, Z. ORŁOŚ, W. KASPRZAK i M. DIETRICH.

Głównymi organizatorami Sympozjonu byli: doc. J. ANTONIAK i dr hab. A. TYLIKOWSKI. Ważnym osiągnięciem Sympozjonu było dalsze rozszerzenie grona osób, zajmujących się metodami statystycznymi w mechanice. Szereg referatów było wynikiem prac osób rozpoczynających swoją działalność naukową, a rzeczowa i ostra dyskusja wskazała im dalsze kierunki badań. Dyskutowano także nad tematyką przyszłorocznego Sympozjonu.

*Jerzy Antoniak (Gliwice)*

### III SYMPOZJUM TECHNIKI WIBRACYJNEJ

Kraków, 9—10.II.1973 r.

W dniach 9—10 lutego 1973 r. odbyło się w Krakowie III Sympozjum Techniki Wibracyjnej organizowane przez Krakowski Oddział Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej oraz Akademię Górniczo-Hutniczą im. St. Staszica w Krakowie. Otwarcia sympozjum dokonał JM. Rektor AGH prof. dr Roman NEY. W sympozjum wzięło udział 117 osób reprezentujących różne ośrodki krajowe. W ramach sympozjum zorganizowany został pokaz aparatury pomiarowej do pomiarów drgań firmy Hottinger z NRF.

Podczas sympozjum wygłoszono 26 referatów i komunikatów, a mianowicie:

1. T. BANASZEWSKI, K. LASZCZAK, Wpływ parametrów konstrukcyjnych na amplitudy nieliniowych drgań przesiewacza rezonansowego dwumasowego,
2. S. BEDNARZ, S. KASPRZYK, M. ROBAKOWSKI, Dynamika i synteza dozatora.
3. W. BOGUSZ, Stateczność techniczna stochastycznych układów wibrouderzeniowych,
4. C. CEMPEL, Kryteria minimalnej dynamiczności w agregacie — narzędzie ręka człowieka operatora,
5. A. CZUBAK, Funkcja modelująca uderzenie nosiwa w rynnę wibracyjną,
6. Z. DRZYMAŁA, Próba opracowania modelu matematycznego procesu wibracyjnego brykietowania wiórów metalowych,
7. Z. DRZYMAŁA, K. RUSZAŁA, Urządzenia wibracyjnego cięcia metali,
8. Z. DRZYMAŁA, W. ZAPAŁOWICZ, Aktualny stan badań w Ośrodku Techniki Wibracyjnej Instytutu Maszyn Hutniczych i Automatyki AGH,
9. Z. ENGEL, S. KASPRZYK, Analiza drgań mechanicznego układu wibrouderzeniowego o jednym stopniu swobody,
10. Z. ENGEL, R. PANUSZKA, Nowe konstrukcje napędów urządzeń wibracyjnych,
11. W. FERENC, S. KASPRZYK, Oszacowanie błędu przy aproksymacji zderzenia delta Diraka,
12. J. GIERGIEL, J. LISZKA, Zastosowanie przenośników wibracyjnych do transportu gorącego żużla z pieców przewalowych,
13. M. HOPP, Zagadnienie zmian naprężeń zginających w wałach napędów bezwładnościowych,
14. P. J. IŁGAKOJIS, A. R. JAKSZTAS, Issledowaniej ustojcziwosti elektro-dynamiczeskiego dempfera,
15. S. KASPRZYK, H. KNOP, Dobór racjonalnej charakterystyki tłumienia dla skipowych urządzeń przeciwkrszeniowych,
16. KRZYWORZEKA, Przydatność diagnostyczna akustycznego pola drganiowego sprężarki tłokowej,
17. T. MAŚLANKA, Wybrane zagadnienia identyfikacji procesów walcowania wibracyjnego rur,
18. J. MICHALCZYK, Optymalny przenośnik wibracyjny,

19. MIKOŁAJCZUK, Model dynamiczny oddziaływania warstwy sypkiego nosiwa na ruch rynny przenośnika wibracyjnego,
20. A. MIKOŁAJCZUK, Badania doświadczalne procesu wibracyjnego zgarniania gruntu,
21. A. MIELNICKA, Badania materiałów pochłaniających w technice wibracyjnej,
22. Z. OSIŃSKI, Charakter rezonansu drgań tłumionych tarciami wiskotycznym i konstrukcyjnym,
23. A. PASIERB, Parametry sitowe w procesie ciągnięcia drutów przy zastosowaniu ultradźwiękowych drgań ciągła,
24. T. PIECH, Wykorzystanie efektu Villary'ego do badania zmiennych sił w technice wibracyjnej,
25. W. STANEK, Zespolony model Younga w technice wibracyjnej,
26. J. TOKARSKI, Urządzenia wibracyjne do przygotowania masy formierskiej.

Jak z zestawienia wynika, referaty dotyczyły szerokich problemów, związanych z zagadnieniem czynnego zastosowania drgań do realizacji różnych procesów technologicznych. Po referatach prowadzona była bardzo ożywiona niekiedy dyskusja. Głos w dyskusji zabrało 48 osób.

Od ostatniego Sympozjum Techniki Wibracyjnej, które odbyło się w dniach 6—7.III.70 r. upłynęło trzy lata. Zarówno w referatach, jak i w dyskusjach podkreślano, że mimo prowadzenia badań związanych z techniką wibracyjną w wielu ośrodkach polskich nie widać dużego postępu w tych pracach. Stosowane są niekiedy te same metody analizy układów wibracyjnych.

W tematyce konferencji przejawiały się zagadnienia: 1. metody badań, 2. opisy urządzeń i procesów wibracyjnych. Część referowanych prac dotyczyła wywodów czysto teoretycznych nie popartych doświadczeniem. Druga część prac, to prace doświadczalne i prowadzone równoległe do nich badania teoretyczne. Po referatach tych występowała najbardziej ożywiona dyskusja.

Bardzo mało prac było natomiast poświęconych podstawom fizycznym techniki wibracyjnej i wibrouderzeniowej. Dla przykładu w dyskusji podkreślono, że jeszcze stale przy wibrouderzeniach posługuje się współczynnikiem restytucji, natomiast nie atakuje się pojęcia tego współczynnika od podstaw fizycznych. Po raz pierwszy w tematyce sympozjum znalazły się referaty poświęcone ochronie środowiska pracy człowieka przed drganiami mechanicznymi i akustycznymi. Zagadnienia te były bardzo mocno podkreślane w dyskusji, gdyż w maszynach wibracyjnych drgania są celowo wprowadzane przez konstruktora dla realizacji zadanego procesu technologicznego. Trzeba więc odizolować od nich ludzi.

Uczestnicy sympozjum stwierdzili konieczność organizowania okresowych zebrań naukowych poświęconych technice wibracyjnej oraz zorganizowania za dwa lata IV Sympozjum Techniki Wibracyjnej. Równocześnie powołano zespół pod przewodnictwem prof. W. BOGUSZA, który ma ocenić stan rozwoju wibrotechniki w Polsce.

Na marginesie sprawozdania z III Sympozjum Techniki Wibracyjnej nasuwają się następujące uwagi:

W referatach sekcji mechaniki na II Kongres Nauki Polskiej podkreślono sprawy rozwoju tej ważnej i nowej dyscypliny wiedzy z uwzględnieniem wszystkich warunków zabezpieczenia człowieka przed szkodliwym wpływem drgań celowo wprowadzanych do maszyn. Trzeba dokładnie zdać sobie sprawę ze stanu tej dyscypliny w Polsce oraz wytyczyć kierunki rozwojowe dla prac poświęconych wibrotechnice. W Polsce działa szereg ośrodków zajmujących się problemem maszyn i urządzeń wibracyjnych. Prace takie prowadzone są w ośrodku warszawskim, gdańskim, poznańskim śląskim i w Krakowie w AGH. Szereg maszyn i urządzeń wibracyjnych zaprojektowanych i wykonanych w Polsce cieszy się dobrą marką zagranicą, np. wibromoty, przesiewacze wibracyjne,

Z drugiej strony występuje szereg braków. Brak jest odpowiednich wibratorów umożliwiających zmiany ich parametrów w szerokim zakresie (zmiana częstotliwości, amplitudy, prędkości). Brak jest odpowiednich materiałów konstrukcyjnych, maszyn i urządzeń wibracyjnych, jak np. odpowiednich elementów sprężystych, amortyzacyjnych itp.

W wszystkich badaniach teoretycznych preferuje się modele mechaniczne nie wrażliwe na zmianę struktury. A przecież podczas procesu dynamicznego realizowanego przez maszyny wibracyjne zmienia się struktura układu.

Mimo dużego zastosowania maszyn wibracyjnych oraz możliwości ich stosowania w innych procesach technologicznych nie stworzono dotąd teorii maszyn wibracyjnych. Dlatego konstruktorzy napotykają duże trudności przy projektowaniu takich maszyn i urządzeń, związane z doбором optymalnych parametrów. Trudności występują przy doborze silników, wibratorów, tłumików, elementów sprężystych oraz



przy ocenie efektywności procesów realizowanych przy pomocy maszyn wibracyjnych. Ogólna teoria maszyn wibracyjnych może być stworzona przy pomocy badań dynamiki całego układu złożonego z silnika i wibratora, drgającego organu roboczego oraz środowiska pracy (uwzględnienie np. materiału sypkiego przy transporcie wibracyjnym, uwzględnienie właściwości gruntu przy wibracyjnym zagęszczeniu itp.).

Opracowanie takiej teorii wiąże się z jednej strony z trudnościami matematycznymi wynikającymi z tego, że badania maszyn wibracyjnych, jako złożonego układu, sprowadzają się do szukania okresowych rozwiązań układu nieliniowych równań różniczkowych. Opracowanie teorii ma podstawowe znaczenie dla dalszego rozwoju teorii drgań i jej zastosowań. Z drugiej strony często trudno jest ująć charakterystyki mechaniczne ośrodka, trudny do ilościowego opisu jest sposób wzajemnego oddziaływania pomiędzy obrabianym, przemieszczanym, rozdrabnianym itp. ośrodkiem a narzędziami maszyny wibracyjnej.

*Zbigniew Engel (Kraków)*

## KONKURSY NAUKOWE PTMTS

### 1. Na prace doświadczalne z mechaniki technicznej

Krakowski Oddział PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS w Warszawie organizuje w 1973 r. Ogólnokrajowy Konkurs na prace z zakresu badań doświadczalnych z mechaniki technicznej. Prace konkursowe zawierające elementy nowości w stosunku do obecnego stanu wiedzy — należy przesłać na adres Krakowskiego Oddziału PTMTS w Krakowie, al. Mickiewicza 30, Instytut Podstaw Budowy Maszyn AGH w terminie do 15 listopada 1973 r.

Objętość pracy nie powinna przekraczać 20 str. maszynopisu.

Prosimy o przesłanie prac w 3 egzemplarzach, w formie nadającej się do druku, podpisanie imieniem i nazwiskiem, z podaniem adresu.

Prace nie mogą być przed tym terminem opublikowane ani złożone do druku.

Prace oceniane będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału. Konkurs prowadzony będzie zgodnie z Regulaminem Konkursów Naukowych PTMTS.

Konkurs jest ograniczony, dostępny tylko dla członków PTMTS. Przewiduje się 3 nagrody: I — 12.000 zł., II — 8.000 zł., III — 6.000 zł.

Nagrodzone prace zostaną opublikowane w MTiS.

*Sekretarz*

*Krakowskiego Oddziału PTMTS*

(—) *doc. dr habil. inż. S. Kasprzyk*

*Przewodniczący*

*Krakowskiego Oddziału PTMTS*

(—) *doc. dr habil. inż. Z. Engel*

### 2. Na pracę teoretyczną z mechaniki

Oddział Gliwicki, zgodnie z decyzją Zarządu Głównego, ogłasza ogólnopolski konkurs na prace teoretyczne z dziedziny mechaniki. W konkursie mogą brać udział osoby nie posiadające tytułu profesora, docenta lub stopnia doktora habilitowanego. Za najlepsze prace zostaną przyznane następujące nagrody: I nagroda — 12.000 zł., II nagroda — 8.000 zł., III nagroda — 6.000 zł. Prace konkursowe należy przedstawić Zarządowi Oddziału Gliwickiego (44-100 Gliwice, ul. Powstańców 12, pokój nr 24) do dnia 30 września 1973 r. Praca nie może być przed tą datą opublikowana ani złożona do druku. Maszynopis pracy należy przedstawić w 3 egzemplarzach; jego objętość nie powinna przekraczać 15 stron, nie licząc rysunków i wykresów. Przed rozstrzygnięciem konkursu jego uczestnicy zreferują swoje prace na publicznym zebraniu naukowym w terminie określonym przez Zarząd.

Zarząd Oddziału Gliwickiego zastrzega sobie prawo nieprzyznania lub innego podziału nagród.

*Przewodniczący*

*Sądu Konkursowego*

(—) *prof. dr inż. Jan Szargut*

*Przewodniczący*

*Oddziału Gliwickiego PTMTS*

(—) *doc. dr inż. Józef Wojnarowski*

## KOŁOKWIA EUROMECH

Podajemy dodatkowy wykaz kolokwiiw Euromechu ustalonych na rok 1974:

1974 r.

48. Turbulent Transport, Erosion and Deposition of Sediment in Turbulent Streams  
22—24 sierpień 1974  
Copenhagen  
Professor F. Engelund  
Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark  
Building 115  
DK-2800 LYNGBY/COPENHAGEN, Denmark
49. The Mechanics of Fluid Suspensions and Polymer Solutions  
2—5 kwiecień 1974  
Jabłonna  
Professor G. K. Batchelor  
Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Silver Street CAMBRIDGE  
CB3 9EW, England.  
Professor S. Zahorski  
Inst. Fund. Technological Research, Polish Academy of Sciences,  
ul. Świętokrzyska 21  
00-049 WARSZAWA, Poland.
50. Windtunnel Simulation of the Atmospheric Boundary Layer  
marzec 1974  
Berlin  
Professor R. L. Wille  
Technische Universität  
1 BERLIN 12  
Strasse des 17. Juni 135  
Germany
51. Small-scale Mixing in Stably Stratified Fluids  
wrzesień 1974  
Gotenburg  
Dr J. S. Turner  
Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics University of Cambridge Silver Street  
CAMBRIDGE  
CB3 9EW, England
52. Drag Reduction in Turbulent Flow due to Additives  
sierpień 1974  
Stockholm  
Professor M. Landahl  
The Royal Institute of Technology Division of Mechanics  
10044 STOCKHOLM, Sweden
53. Thermoplasticity  
16—20 wrzesień 1974  
Jabłonna (Polska) lub Udine (Włochy)  
Professor P. Perzyna  
IPPT PAN  
ul. Świętokrzyska 21  
00-049 WARSZAWA, Poland
54. Finite Deformations in Plasticity  
wrzesień lub listopad 1974  
Jabłonna (Polska) lub Udine (Włochy)  
Professor A. Sawczuk  
IPPT PAN  
ul. Świętokrzyska 21  
00-049 WARSZAWA Poland
55. Optical Interferometry in Experimental Gas Dynamics  
25—26 marzec 1974  
Bochum  
Professor W. Merzkirch  
Ruhr-Universität  
D-463 BOCHUM-QUERENBURG  
Buscheystrasse 1c  
Germany  
Dr. C. Veret  
ONERA  
29 Avenue de la Division Leclerc  
92 CHATTILLON-sous-BAGNEUX, France

Podajemy również wstępny wykaz kolokwiów «Euromechu» przewidzianych na lata następne:

**1975 r.**

- |  |   |
|--|---|
| <p>56. Non-linear Processes in Rotating Fluids<br/>marzec lub kwiecień 1975<br/>London</p> | <p>Dr L. M. Hocking<br/>Department of Mathematics University College<br/>London Gower Street<br/>LONDON WC1E 6BT<br/>England</p>      |
| <p>57. Transition and Separation in Unsteady Flow<br/>kwiecień 1975<br/>Zürich</p>         | <p>Professor N. Rott and Professor H. Thomann<br/>Eidg. Technische Hochschule CH-8006 ZÜRICH<br/>Sonneggstrasse 3<br/>Switzerland</p> |
| <p>58. Dynamic Problems in Non-linear Elasticity<br/>maj 1975<br/>Jabłonna</p>             | <p>Professor Z. Wesolowski<br/>IPPT PAN<br/>ul. Świętokrzyska 21<br/>00-049 WARSZAWA, Poland</p>                                      |
| <p>59. Boundary Layers in Turbomachines<br/>Salford</p>                                    | <p>Professor J. H. Horlock<br/>and Professor J. L. Livesey<br/>University of Salford<br/>SALFORD<br/>M5 4WT, England</p>              |
| <p>Hot-wire Anemometry<br/>(Design and Application)<br/>wrzesień 1975<br/>Copenhagen</p>   | <p>Professor K. Refslund<br/>Technical University<br/>Oster Farimagsgade 2-D<br/>COPENHAGEN<br/>Denmark</p>                           |
| <p>Internal Flow in Ducts, Pipes and Diffusers<br/>Leicester</p>                           | <p>Dr. D. J. Cockrell<br/>University of Leicester Department of Engineering<br/>LEICESTER<br/>LE1 7RH, England.</p>                   |

**1976 r.**

- |  |   |
|--|---|
| <p>Flow and Heat Transfer with Surface Evaporation<br/>Jabłonna (Polska)</p> | <p>Professor dr B. Staniszewski<br/>Poland.</p> |
|--|---|

**W następnym zeszycie ukaza się prace:**

- N. J. CYGANOWA, O uderzeniu w układach typu Czetajewa-Przeborskiego  
Об ударе в системах типа Четаева-Пшеборского  
On the impact in the Cetaiev-Preborskii-type systems
- J. F. BESSELING, Związki konstytutywne pełzania i plastyczności  
Определяющие уравнения для ползучести и пластичности  
Constitutive equations for creep and plasticity
- J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, Osobliwość naprężeń siłowych i momentowych w ciele mikropolarnym wywołana obciążeniami skupionymi (I)  
Сингулярности силовых и моментных напряжений в микрополярной среде под воздействием сосредоточенных нагрузок (I)  
Force-stress and couple-stress singularities produced by concentrated loads in a micropolar medium
- J. DYSZLEWICZ, S. MATYSIAK, Osobliwość naprężeń w liniowym ośrodku mikropolarnym spowodowana nieciągłymi obciążeniami (II)  
Сингулярности напряжений в линейной микрополярной среде, вызванные разрывами нагрузок (II)  
Stress singularity in a linear micropolar medium produced by discontinuous loads
- K. DEMS, Wielostopniowa synteza macierzy sztywności  
Многостадийный синтез матриц жесткости  
A multi-stage synthesis of the stiffness matrices
- K. KOSOWSKI, Stacjonarne oddziaływanie układu dwu nieskończenie małych dowolnie zorientowanych elementów poruszającego się w ośrodku swobodnomolekularnym z dowolną prędkością  
Стационарное взаимодействие системы двух бесконечно малых произвольно ориентированных элементов твердого тела, движущегося в свободномолекулярной среде с произвольной скоростью  
Stationary interactions of a system consisting of two infinitesimal, arbitrarily oriented moving at an arbitrary velocity in a free-molecular medium
- E. WŁODARCZYK, Przybliżona metoda rozwiązywania płaskich niesamopodobnych fal uderzeniowych w doskonałym przewodniku w polu magnetycznym  
Приближенный метод решения плоских неавтомоделных ударных волн в идеальном проводнике в магнитном поле  
An approximate method of solving plane, non-selfexcited impact waves in a perfect conductor subject to magnetic field
- Z. KORDAS, Kształtowanie rurociągu o zmiennej średnicy wykazującego pełne uplastycznienie w stadium zniszczenia  
Формирование трубопровода переменного диаметра, полностью переходящего в стадии разрушения в пластическое состояние  
Design of a pipe line of a variable diameter, exhibiting full plastic yielding at collapse
- N. J. CYGANOWA, O nieholonomicznych systemach 1-go i 2-go stopnia z tarciem  
О неголономных системах первого и второго порядков с трением  
On non-holonomic systems of 1st and 2nd order with friction
- H. MIKOŁAJCZAK, B. WOSIEWICZ, Macierz sztywności elementu zginanej płyty trójwarstwowej  
Матрица жесткостей элемента трехслойной пластины, подверженной изгибу  
Stiffness matrix of an element of a sandwich plate in bending

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

---