

W J II 720  
P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

~~Wyższa Szkoła Inżynierska  
Instytut Konstrukcji i Techniki  
Zakład Termodynamiki i Silników  
ul. Racławicka 1-3/7  
75-620 KOSZALIN~~

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 11 • ZESZYT 2



Pw<sup>A</sup>

WARSZAWA 1973

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

## SPIS TREŚCI

WADIM WASILEWICZ SOKOŁOWSKI — Na 60-lecie urodzin Вадим Васильевич Соколовский (К шестидесятилетию со дня рождения) Sixtieth Birthday of Professor Vadim V. Sokolovskii	131
M. PISZCZEK, G. SZEFER, Zginanie pręta silnie zakrzywionego z uwzględnieniem naprężeń momentowych Изгиб сильно искривленного стержня с учетом моментных напряжений Bending of a strongly curved beam with the influence of couplestresses	135
J. DYSZLEWICZ, Pewien sposób rozwiązania statycznych zagadnień liniowej niesymetrycznej sprężystości О некотором способе решения статических задач линейной несимметричной теории упругости On a certain method of solution of static problems of the linear theory of non-symmetric elasticity	143
B. BIENIAZ, Rzeczywisty układ sił działających u podstawy pęcherzyka parowego Действительная система сил, действующих на основание парового пузырька Actual system of forces acting at the base of a vapour bubble	159
J. BOBLEWSKI, K. H. ВОЛДА, Zastosowanie operatorów Mikusińskiego do zagadnień teorii konstrukcji pośnych Применение операторов Микусинского в задачах теории несущих конструкций Application of the Mikusiński operators to the problems of engineering structures	165
BIULETYN INFORMACYJNY	177

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 11 • Z E S Z Y T 2



W A R S Z A W A 1973

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях



## KOMITET REDAKCYJNY

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,  
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,  
IGOR KÍSIEL, WITOLD NOWACKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,  
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,  
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (582 + 118) egz. Ark. wydawn. 5,75. Ark. drukarskich 4,0. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 24.I.1973 r. Druk ukończono w czerwcu 1973 r. Zam. 180/73. R-12. Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

gł 720

MECHANIKA  
TEORETYCZNA  
I STOSOWANA  
2, 11 (1973)



## WADIM WASILEWICZ SOKOŁOWSKI

### NA 60-LECIE URODZIN

WADIM WASILEWICZ SOKOŁOWSKI, wybitny uczony radziecki, specjalista w zakresie mechaniki ciał odkształcalnych, urodził się 17 października 1912 roku w Charkowie (Ukraińska SRR). Studia wyższe odbywał w Instytucie Budownictwa w Moskwie i ukończył je w 1933 roku. W latach 1936—1939 pracował w Instytucie Matematycznym, a od roku 1939 w Instytucie Mechaniki Akademii Nauk ZSRR. W roku 1940 zostaje profesorem.

Już pierwsze Jego prace, opublikowane w czwartym roku po ukończeniu studiów, swoją oryginalnością i wysokim poziomem zwróciły uwagę naukowców radzieckich na osobę ich autora.

Twórczość naukowa prof. W. W. SOKOŁOWSKIEGO koncentrowała się głównie w trzech podstawowych kierunkach: teorii plastyczności, mechanice ośrodków sypkich i teorii powłok. Jego dorobek w okresie 35 letniej działalności naukowej zamyka się liczbą około 100 publikacji, z których część publikowana była również zagranicą. Szereg Jego prac przetłumaczonych zostało przez wydawnictwa zagraniczne, w tym również i polskie. Znaczna część wyników tych prac weszła do dwu monografii naukowych: *Teoria Plastyczności* i *Statyka Ośrodków Sypkich*. Za obie monografie przyznano Mu nagrody państwowe. Monografie te wyszły w trzech wydaniach każda. Każde kolejne wydanie monografii stanowiło pogłębienie i istotne uzupełnienie zakresu badań w obu dziedzinach mechaniki. Drugie wydanie *Teorii plastyczności* (z 1950 r.) zostało przetłumaczone na 6 języków obcych, *Statyka ośrodków sypkich* zaś na 4 języki obce, w tym drugie wydanie (z 1954 r.) wyszło w 3 językach obcych, a trzecie wydanie tej monografii (z 1960 r.) wyszło również w języku angielskim.

Wyniki badań W. W. SOKOŁOWSKIEGO są wykorzystywane i cytowane we wszystkich poważniejszych pracach literatury światowej, poświęconych zagadnieniom teorii plastyczności, mechaniki gruntów i mechaniki ośrodków sypkich. Wyniki te stosowane są do projektowania konstrukcji maszynowych i budowlanych, jak również przy programowaniu procesów technologicznych.

Profesor W. W. SOKOŁOWSKI brał czynny udział w rozwoju nauki światowej nie tylko poprzez swoją twórczość naukową, ale również przez bezpośredni udział w działalności międzynarodowych organizacji naukowych. Jest członkiem Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM) oraz Międzynarodowego Stowarzyszenia Mechaniki Gruntów i Fundamentowania (ISSMFE)\*. Wielokrotnie był zapraszany i uczestniczył w międzynarodowych konferencjach i zjazdach naukowych.

\*)International Society of Soil Mechanics and Foundation Engineering

Duży jest również wkład prof. W. W. SOKOŁOWSKIEGO w dziedzinie dydaktyki i kształcenia nowych pracowników nauki. Wielu Jego wychowanków uzyskało stopnie kandydata nauk i doktora oraz stało się wybitnymi naukowcami.

W. W. SOKOŁOWSKI bierze również czynny udział w pracach edytorskich. Jest członkiem Komitetów Redakcyjnych następujących czasopism: «Inżynierijny Żurnał — Miechanika Twiordawo Tiele» (Moskwa, Izd. Nauka, ZSRR), «Journal of the Mechanics and Physics of Solids» (University of Cambridge) i «Archiwum Mechaniki Stosowanej» (Warszawa, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN).

Wybitne osiągnięcia i zasługi W. W. SOKOŁOWSKIEGO dla rozwoju nauki w dziedzinie mechaniki zostały potwierdzone w wielu aktach uznania dokonanych przez radzieckie i inne ośrodki naukowe. W 1946 roku został wybrany na członka korespondenta Akademii Nauk ZSRR, a w 1959 roku powołany zostaje na członka rzeczywistego Polskiej Akademii Nauk.

Radzieckie władze państwowe odpowiednio wysoko oceniły wyniki działalności naukowej i pedagogicznej prof. W. W. SOKOŁOWSKIEGO. Przyznane Mu zostały dwa ordery: order Czerwonego Sztandaru Pracy i order Znak Honoru oraz różne medale. Dwukrotnie uzyskał nagrody państwowe za obie swoje monografie, o czym wspomnieliśmy już wyżej. W 1971 roku nadany Mu został tytuł zasłużonego działacza nauki i techniki Rosyjskiej FSRR.

Omówimy obecnie ważniejsze wyniki i osiągnięcia prof. W. W. SOKOŁOWSKIEGO w twórczości naukowej.

W dziedzinie teorii plastyczności poza wprowadzeniem systematycznego i konsekwentnego zapisu równań deformacyjnej teorii plastyczności i równań teorii płynięcia plastycznego, wyczerpująco przebadał pewne klasy praktycznie ważnych zagadnień jednowymiarowych oraz dwuwymiarowych płaskich i osiowosymetrycznych tych teorii.

Opracował ogólną metodę badania i rozwiązywania równań dla płaskich stanów odkształcenia i naprężenia ośrodków plastycznych. Tę ogólną metodę z powodzeniem zastosował do rozwiązania ważnych technicznie zagadnień o ściskaniu masy plastycznej między dwoma sztywnymi płytami, o wciskaniu sztywnych stempli w półprzestrzeń plastyczną z płaskim i krzywoliniowym brzegiem, o przeciąganiu taśmy plastycznej przez nieodkształcalną matrycę, o rozciąganiu tarczy z niekołowym otworem i szeregiem innych zadań płaskich.

Z innych inżynierskich zagadnień rozwiązanych przez W. W. SOKOŁOWSKIEGO wymienić można zagadnienia przepływu materiału plastycznego w kanałach zbieżnych, płaskich i stożkowych, zagadnienia równowagi plastycznej klina pod działaniem siły i momentu przyłożonych w wierzchołku oraz pod działaniem równomiernie rozłożonego ciśnienia wzdłuż jednej ze ścianek klina. Dalej dodać należy rozwiązania zadań o skręcaniu wałów o zmiennej średnicy i sprężysto-plastycznych prętów o przekrojach niekołowych, a następnie zagadnienia o sprężysto-plastycznym zginaniu płyt kołowych i pierścieniowych oraz belek o różnych przekrojach poprzecznych.

Na odrębną wzmiankę zasługują badania W. W. SOKOŁOWSKIEGO w dziedzinie teorii propagacji fal w ciałach stałych, z uwzględnieniem lepkich i plastycznych właściwości materiału. Badania te wytyczają nowy kierunek w dynamice ciał odkształcalnych.

Prowadzone w ostatnich latach badania W. W. SOKOŁOWSKIEGO poświęcone są rozwinięciu teorii dwuwymiarowego płynięcia plastycznego. Opracowane są metody rozwiązań całej klasy zagadnień ustalonego i nieustalonego płynięcia cienkich warstw materiału sztywno-plastycznego. Opracowana została ogólna metoda rozwiązywania płaskich zagadnień płynięcia sztywno-plastycznego przy mieszanych warunkach brzegowych, co pozwala na jednoczesne wyznaczenie zgodnych ze sobą pól naprężenia i prędkości. Wyniki te mają duże znaczenie w teorii obróbki plastycznej materiałów.

Przechodząc do krótkiego przeglądu dorobku naukowego W. W. SOKOŁOWSKIEGO w dziedzinie statyki ośrodków sypkich, należy przede wszystkim zaznaczyć, że obliczenia inżynierskie, dotyczące stateczności masy gruntowej i rozkładu ciśnień w gruntach, oparte są na teorii granicznych stanów równowagi plastycznej ośrodków sypkich, traktowanych jako ośrodki ciągle sztywno- i sprężysto-plastyczne. Do tej dziedziny mechaniki należą zagadnienia określania stateczności podłoża fundamentów i zapór, stateczności skarp ziemnych oraz określania ciśnienia gruntu na ścianki podporowe. Do czasu pojawienia się prac W. W. SOKOŁOWSKIEGO znane były tylko szczególne przypadki ścisłych rozwiązań statycznych dla ośrodka nieważkiego, opartych na teorii granicznych stanów plastycznych określonych terminem «stanów równowagi granicznej». W praktyce inżynierskiej stosowano metody rozwiązań przybliżonych, oparte na założeniu konturów linii względnie powierzchni poślizgu o określonej formie analitycznej. W. W. SOKOŁOWSKI w swoich badaniach rozpatrywał ośrodek ważki i nieważki i opracował ogólną metodę rozwiązywania równań teorii równowagi granicznej w stanach płaskich, metodę opartą na wykorzystaniu pojęcia charakterystyk układu dwu równań różniczkowych typu hiperbolicznego. Przeanalizował różne klasy zagadnień statycznych ośrodka ciągłego w granicznym plastycznym stanie naprężenia. Dla zagadnień płaskich metody W. W. SOKOŁOWSKIEGO pozwoliły na przebadanie wszystkich podstawowych problemów nośności granicznej gruntu, określenie metodą rachunkową konturów powierzchni poślizgu i wielkości obciążeń wywołujących graniczne stany plastyczne. W ostatnich latach zajmował się zagadnieniami dotyczącymi naprężeń kontaktowych na krzywoliniowych ściankach nieodkształcalnych oraz konturów statecznej skarpy zwisającej; to ostatnie zagadnienie związane jest ściśle z klasycznym zagadnieniem o stropie załamania.

Należy jeszcze dodać, że opracowana przez W. W. SOKOŁOWSKIEGO teoria równowagi granicznej, obejmuje również przypadki ośrodków bezkohezyjnych i spoistych, oparte na kryteriach uplastycznienia ogólnej postaci nie pokrywających się z warunkami plastyczności typu Coulomba czy Treski.

Duże osiągnięcia W. W. SOKOŁOWSKIEGO należy odnotować również w dziedzinie teorii cienkich powłok, której szczególnie silny rozwój nastąpił w ostatnim trzydziestolecu, zarówno w Związku Radzieckim, jak i w innych krajach. Przebadał On ogólne równania teorii bezmomentowych powłok obrotowych oraz przeanalizował i rozwiązał je dla powłok kulistych poddanych działaniu obciążenia niesymetrycznego.

Oceniając ogólnie zasługi W. W. SOKOŁOWSKIEGO położone dla rozwoju mechaniki, należy zauważyć, że niezależnie od wartości naukowej i praktycznej badanych przez Niego wielu podstawowych zagadnień mechaniki, wartość Jego prac polega przede wszystkim na opracowaniu i rozwinięciu metod rozwiązania równań podstawowych dla różnych wymienionych dziedzin mechaniki.

Wszyscy, którzy zetknęli się z prof. W. W. SOKOŁOWSKIM i Jego pracami, znają wysoki poziom naukowy Jego badań oraz wybitną osobowość i głębokość ujmowania poszczególnych zagadnień nauki. Jego zasługi wniesione do rozwoju badań w zakresie mechaniki upoważniają do stwierdzenia, że jest On wybitnym reprezentantem nauk technicznych w skali światowej.

Komitet Redakcyjny naszego czasopisma życzy Profesorowi W. W. SOKOŁOWSKIEMU dobrego zdrowia i dalszych sukcesów w Jego działalności naukowej oraz wiele powodzenia w życiu osobistym.

### Wykaz monografii

#### W. W. Sokolowskiego, członka korespondenta Akademii Nauk ZSRR

1. *Теория Пластичности*, издание первое, Изд. АН СССР, 1946 (20 ark. wyd.).
2. *Теория Пластичности*, издание второе, переработанное и дополненное, Гостехиздат, Москва, Ленинград 1950 (24 ark. wyd.);  
Tłumaczenie czeskie, Praha 1952,  
Tłumaczenie rumuńskie, Bukareszt 1952,  
Tłumaczenie węgierskie, Budapeszt 1953,  
Tłumaczenie niemieckie, Berlin 1955,  
Tłumaczenie polskie, Warszawa 1957 (480 stron),  
Tłumaczenie japońskie, Tokio 1959.
3. *Теория Пластичности*, издание третье, переработанное и дополненное, Изд. «Высшая школа», Москва 1969 (39 ark. wyd., 608 stron).
4. *Статика Сыпучей Среды*, издание первое, Изд. АН СССР 1942 (14 ark. wyd.).
5. *Статика Сыпучей Среды*, издание второе, переработанное и дополненное, Гостехиздат, Москва 1954 (17 ark. wyd., 274 strony);  
Tłumaczenie chińskie, Pekin 1956,  
Tłumaczenie polskie, Warszawa 1958,  
Tłumaczenie angielskie, Londyn 1960.
6. *Статика Сыпучей Среды*, издание третье, переработанное и дополненное, Изд. Физматгиз, Москва 1960 (15 ark. wyd., 243 strony);  
Tłumaczenie angielskie, Londyn 1965.



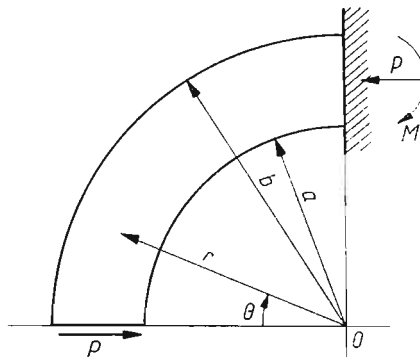
## ZGINANIE PRĘTA SILNIE ZAKRZYWIONEGO Z UWZGLĘDNIENIEM NAPRĘŻEŃ MOMENTOWYCH

MARIAN PISZCZEK, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Od chwili opublikowania klasycznej już dzisiaj pracy MINDLINA [3], w której zwrócono uwagę na znaczenie teorii naprężeń momentowych w zagadnieniach koncentracji naprężeń, ukazało się wiele rezultatów ilustrujących efekty i zastosowania niesymetrycznej teorii sprężystości. Przeglądowa praca BARAŃSKIEGO, WILMAŃSKIEGO i WOŹNIAKA [1] cytuje 54 publikacje za okres do 1967 r.; od tego czasu liczba ta znacznie wzrosła.

Niezależnie od badań podstawowych, swoje odrębne metodologiczne i poznawcze znaczenie mają rozwiązania wybranych zadań, uogólniających rezultaty klasycznej teorii sprężystości. Praca niniejsza należy do takiej grupy opracowań. Rozważymy w niej płaski stan naprężenia silnie zakrzywionego kołowego pręta sprężystego obciążonego siłą skupioną (rys. 1) uwzględniając istnienie naprężeń momentowych. Pokażemy, że podobnie jak



Rys. 1

w przypadku klasycznym, również na gruncie niesymetrycznej teorii sprężystości zadanie ma ścisłe, zamknięte rozwiązanie. Zagadnienie rozpatrzmy w ramach ogólnej teorii z niezależnymi obrotami, stosując funkcję naprężeń i naprężeń momentowych AIRY'EGO-MINDLINA.

## 2. Sformułowanie i rozwiązanie problemu

Analiza płaskiego stanu naprężenia jakiegokolwiek zagadnienia brzegowego niesymetrycznej teorii sprężystości może być, jak wiadomo [4], sprowadzona do dyskusji dwóch funkcji naprężeń  $F$  i naprężeń momentowych  $\Phi$ , które w dogodnym dla nas, biegunowym układzie współrzędnych  $(Or\theta)$  winny spełniać równania

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F &= 0, \\ (2.1) \quad \frac{\partial}{\partial r} (1 - l^2 \Delta) \Phi &= -A \frac{\partial}{r \partial \theta} \Delta F, \\ \frac{\partial}{r \partial \theta} (1 - l^2 \Delta) \Phi &= A \frac{\partial}{\partial r} \Delta F, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad l^2 = \frac{(\alpha + \mu)(\gamma + \varepsilon)}{4\mu\alpha},$$

$\alpha, \gamma, \varepsilon, \mu, \nu$  — stałe materiałowe;  $A = \frac{\gamma + \varepsilon}{2\mu(1 + \nu)}$ .

Funkcje  $F(r, \theta)$  i  $\Phi(r, \theta)$  określają naprężenia znanymi związkami

$$\begin{aligned} (2.2) \quad \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \\ \tau_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \mu_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \mu_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Tutaj

$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}$  — zwyczajowe oznaczenia naprężeń normalnych i stycznych,  
 $\mu_r, \mu_\theta$  — naprężenia momentowe.

Zgodnie z rys. 1 należy spełnić następujące warunki brzegowe:

$$(2.3) \quad \text{dla } r = a \quad \sigma_r(a, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0, \quad \mu_r(a, \theta) = 0;$$

$$(2.4) \quad \text{dla } r = b \quad \sigma_r(b, \theta) = 0, \quad \tau_{r\theta}(b, \theta) = 0, \quad \mu_r(b, \theta) = 0;$$

$$(2.5) \quad \text{dla } \theta = 0 \quad \int_a^b \tau_{\theta r} dr = -P, \quad \sigma_\theta(r, 0) = 0, \quad \mu_\theta(r, 0) = 0;$$

$$(2.6) \quad \text{dla } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \int_a^b \sigma_\theta dr = P, \quad \tau_{\theta r}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \int_a^b (\mu_\theta + \sigma_\theta r) dr = 0.$$

Funkcji  $F$  i  $\Phi$  poszukiwać będziemy w postaci

$$(2.7) \quad \begin{aligned} F(r, \theta) &= f(r) \sin \theta, \\ \Phi(r, \theta) &= \varphi(r) \cos \theta. \end{aligned}$$

Dzięki temu warunki  $(2.5)_{2,3}$  i  $(2.6)_2$  spełnione są tożsamościowo.

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia funkcji  $F(r, \theta)$  i  $\varphi(r)$ . Podstawienie  $(2.7)_1$  do  $(2.1)_1$  daje funkcję naprężeń w postaci identycznej, jak w przypadku klasycznym

$$(2.8) \quad F(r, \theta) = (A_1 r + A_2 r \ln r + A_3 r^{-1} + A_4 r^3) \sin \theta.$$

W dalszym ciągu rozpatrujemy związek  $(2.1)_2$  oznaczając

$$(2.9) \quad (1 - l^2 \Delta) \Phi = \psi(r, \theta).$$

Uwzględniając  $(2.8)$  otrzymujemy

$$(2.10) \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{A}{r} (2A_2 r^{-1} + 8A_4 r) \cos \theta,$$

a stąd

$$(2.11) \quad \psi(r, \theta) = (2AA_2 r^{-1} - 8AA_4 r + C) \cos \theta.$$

Łatwo sprawdzić, że taka postać funkcji  $\psi(r, \theta)$  spełnia pozostałą relację  $(2.1)_3$ , gdy  $C = 0$ .

Wracając do  $(2.9)$  mamy

$$(2.12) \quad \Phi - l^2 \Delta \Phi = \frac{1}{r^2} (2AA_2 r - 8AA_4 r^3) \cos \theta,$$

a uwzględniając  $(2.7)$  otrzymujemy

$$(2.13) \quad \varphi - l^2 \left( \varphi'' + \frac{1}{r} \varphi' - \frac{1}{r^2} \varphi \right) = \frac{1}{r^2} (2AA_2 r - 8AA_4 r^3).$$

Zajmiemy się najpierw całką szczególną  $(2.13)$ . Oznaczając ją przez  $\varphi_1(r)$  otrzymujemy

$$\varphi_1'' + \frac{1}{r} \varphi_1' - \varphi_1 \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{l^2} \right) = -\frac{A}{l^2} (2A_2 r^{-1} - 8A_4 r).$$

Wprowadzając zmienną bezwymiarową  $x = r/l$  otrzymujemy równanie

$$(2.14) \quad y'' + \frac{1}{x} y' - y \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right) = -2A(A_2 l^{-1} x^{-1} - 4A_4 l x)$$

gdzie oznaczono  $y(x) = \varphi_1(lx)$ .

Jest to niejednorodne równanie Bessela z urojonym argumentem. Należy ono do równań klasy Fuxsa, dlatego jego rozwiązanie szukać będziemy w postaci szeregu

$$(2.15) \quad y(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j x^j.$$

Podstawiając wyrażenie  $(2.15)$  do równania  $(2.14)$  i porządkując je względem potęg  $x$ , dochodzimy do wniosku, że wszystkie współczynniki  $C_j$  z wyjątkiem  $C_2, C_4$  są równe zeru. W rezultacie rozwiązaniem  $(2.14)$  jest funkcja

$$y = 2AA_2 l^{-1} x^{-1} - 8AA_4 l x.$$

Po powrocie do zmiennej  $r$  otrzymujemy zatem poszukiwaną całkę szczególną

$$(2.16) \quad \varphi_1(r) = 2AA_2r^{-1} - 8AA_4r.$$

Całka ogólna równania jednorodnego (2.19) ma znaną postać

$$(2.17) \quad \varphi_0(r) = C_1I_1(r/l) + C_2K_1(r/l).$$

Tutaj  $I_1(r/l)$ ,  $K_1(r/l)$  są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela odpowiednio I i II rodzaju i pierwszego rzędu. Zatem funkcja naprężeń momentowych  $\Phi(r, \theta)$  przyjmie ostatecznie postać

$$(2.18) \quad \Phi(r, \theta) = [C_1I_1(r/l) + C_2K_1(r/l) + 2AA_2r^{-1} - 8AA_4r] \cos \theta.$$

Dysponując funkcjami (2.8) i (2.18) możemy obliczyć naprężenia i naprężenia momentowe ze związków (2.2). Otrzymujemy wtedy

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ A_2r^{-1} - 2r^{-3}(A_3 + 2AA_2) + 2A_4r + \frac{C_1}{2rl} [I_0(r/l) + \right. \\ &\quad \left. + I_2(r/l)] - \frac{C_2}{2rl} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] - \frac{C_1}{r^2} I_1(r/l) - \frac{C_2}{r^2} K_1(r/l) \right\} \sin \theta; \\ \tau_{r\theta} &= \left\{ A_2r^{-1} + 2r^{-3}(A_3 + 2AA_2) + 6A_4r - \frac{C_1}{2rl} [I_0(r/l) + \right. \\ &\quad \left. + I_2(r/l)] + \frac{C_2}{2rl} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] + \frac{C_1}{r^2} I_1(r/l) + \frac{C_2}{r^2} K_1(r/l) \right\} \sin \theta; \\ \tau_{r0} &= \left\{ -A_2r^{-1} + 2(A_3 + 2AA_2)r^{-3} - 2A_4r - \frac{C_1}{2rl} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [I_0(r/l) + I_2(r/l)] + \frac{C_2}{2rl} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] + \frac{C_1}{r^2} I_1(r/l) + \frac{C_2}{r^2} K_1(r/l) \right\} \cos \theta; \\ \tau_{0r} &= \left\{ -A_2r^{-1} + 2(A_3 + 2AA_2)r^{-3} - 2A_4r + \frac{C_1}{4l^2} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot [I_{-1}(r/l) + 2I_1(r/l) + I_3(r/l)] + \frac{C_2}{4l^2} [K_{-1}(r/l) + 2K_1(r/l) + K_3(r/l)] \right\} \cos \theta; \\ \mu_\theta &= \left[ -2AA_2r^{-2} + 8AA_4 - \frac{C_1}{r} I_1(r/l) - \frac{C_2}{r} K_1(r/l) \right] \sin \theta; \\ \mu_r &= \left\{ -2AA_2r^{-2} + 8AA_4 - \frac{C_1}{2l} [I_0(r/l) + I_2(r/l)] - \frac{C_2}{2l} [K_0(r/l) + K_2(r/l)] \right\} \cos \theta. \end{aligned}$$

Tutaj  $I_{-1}$ ,  $I_0$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  i  $K_{-1}$ ,  $K_0$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  — zmodyfikowane funkcje Bessela I i II rodzaju, rzędu  $-1$ ,  $0$ ,  $2$ ,  $3$ .

Wzory (2.19) zawierają pięć nie określonych dotąd stałych  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ . Wyznamy je z warunków brzegowych (2.3) — (2.6). Warunków tych jest w sumie 12. Trzy spośród nich, mianowicie (2.5)<sub>2,3</sub> oraz (2.6)<sub>2</sub>, jak to już wcześniej zaznaczyliśmy, spełnione są tożsamościowo dzięki postaci (2.7). Dwa następne, (2.6)<sub>1</sub> oraz (2.6)<sub>3</sub>, spełnione są na mocy zewnętrznych warunków równowagi pręta. Ponadto zauważamy, że

wzory na  $\delta_r$  i  $\tau_{r\theta}$  w części zależnej jedynie od zmiennej  $r$  różnią się tylko znakiem — spełnienie warunków  $(2.3)_1$  i  $(2.4)_1$  pociąga za sobą równoczesne spełnienie  $(2.3)_2$  i  $(2.4)_2$ . Spośród 12 warunków, niezależnych pozostaje tylko pięć — one też w zupełności wystarczają do jednoznacznego obliczenia brakujących pięciu stałych.

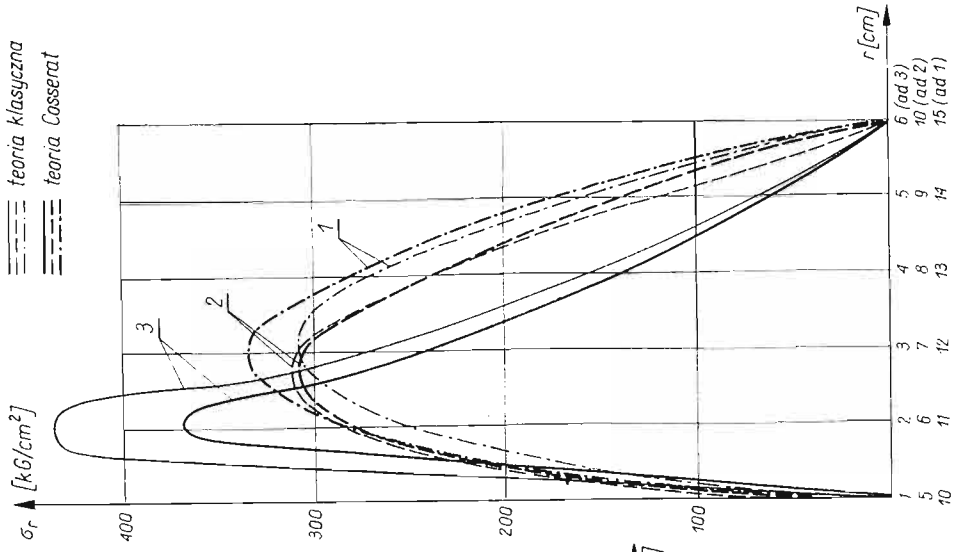
Uwzględniając kolejno warunki  $(2.3)_1$ ,  $(2.3)_3$ ,  $(2.4)_1$ ,  $(2.4)_3$  i  $(2.5)_1$  otrzymamy układ równań

$$\begin{aligned}
 & A_2(a^{-1} - 4Aa^{-3}) + A_3(-2a^{-3}) + A_4 \cdot 2a + C_1 \left\{ -\frac{1}{2al} [I_0(a/l) + I_2(a/l)] - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{a^2} I_1(a/l) \right\} + C_2 \left\{ -\frac{1}{2al} [K_0(a/l) + K_2(a/l)] - \frac{1}{a^2} K_1(a/l) \right\} = 0; \\
 & A_2(-2Aa^{-2}) + A_4(-8A) + C_1 \frac{1}{2l} [I_0(a/l) + I_2(a/l)] - \\
 & \quad - C_2 \frac{1}{2l} [K_0(a/l) + K_2(a/l)] = 0; \\
 (2.20) \quad & A_2(b^{-1} - 4Ab^{-3}) + A_3(-2b^{-3}) + A_4 \cdot 2b + C_1 \left\{ \frac{1}{2bl} [I_0(b/l) + I_2(b/l)] - \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{b^2} I_1(b/l) \right\} + C_2 \left\{ -\frac{1}{2bl} [K_0(b/l) + K_2(b/l)] - \frac{1}{b^2} K_1(b/l) \right\} = 0; \\
 & A_2(-2Ab^{-2}) + A_4(-8A) + C_1 \frac{1}{2l} [I_0(b/l) + I_2(b/l)] - \\
 & \quad - C_2 \frac{1}{2l} [K_0(b/l) + K_2(b/l)] = 0, \\
 & A_2[\ln b/a + 2A(b^{-2} - a^{-2})] + A_3(b^{-2} - a^{-2}) + A_4(b^2 - a^2) + \\
 & \quad + C_1 \frac{1}{2l} [I_0(a/l) + I_2(a/l) - I_0(b/l) - I_2(b/l)] + C_2 \frac{1}{2l} [K_0(b/l) + K_2(b/l) - \\
 & \quad - K_0(a/l) - K_2(a/l)] = P.
 \end{aligned}$$

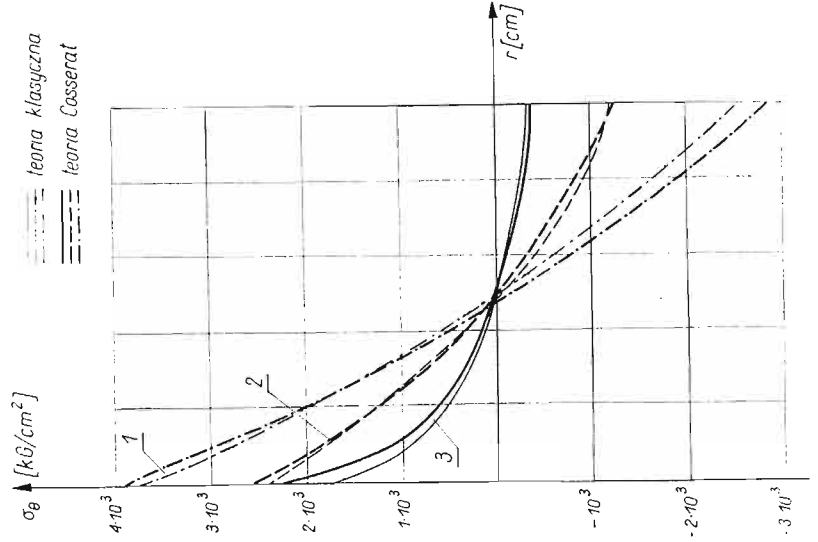
W ten sposób zadanie zostało w zasadzie rozwiązane. Na końcach pręta otrzymujemy rozkłady naprężeń i naprężeń momentowych ( $\tau_{\theta r}$  dla  $\theta = 0$  oraz  $\tau_{\theta}$ ,  $\mu_{\theta}$  dla  $\theta = \pi/2$ ) spełniające warunki brzegowe tylko w postaci całkowitej, a więc podobnie jak i w klasycznej teorii prętów. Nie będziemy rozwiązywali układu (2.20) w postaci ogólnej przechodząc od razu do przykładów liczbowych.

### 3. Przykłady liczbowe

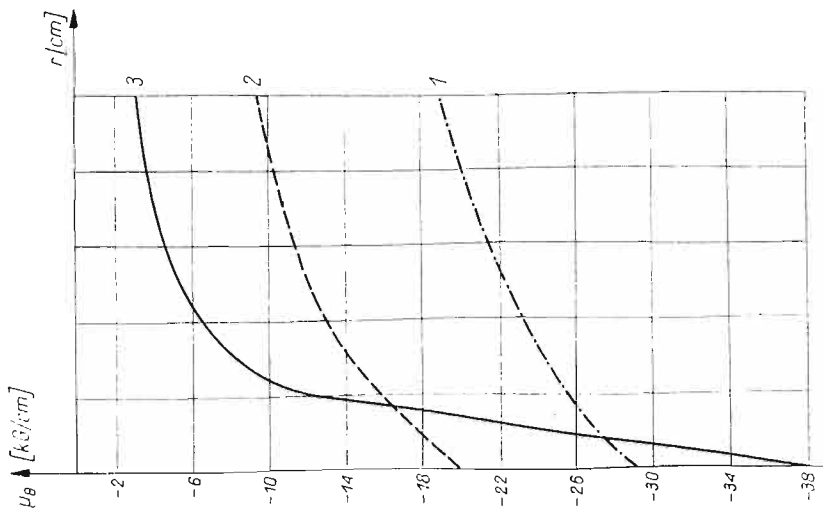
Dla ilościowego zobrazowania rozkładu naprężeń przeprowadzono obliczenia dla różnych wymiarów pręta. Z braku odpowiednich danych dotyczących stałych  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  (jak wiadomo, brak w tym zakresie odpowiedniego materiału doświadczalnego) przyjęto



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

stałą  $A$  tak jak dla ośrodka Cosseratów ze związanymi obrotami. Jest wówczas  $A = 2l^2 / (1 + \nu)$ , a wszystkie pozostałe wywody pozostają bez zmian.

Rozpatrzono trzy przykłady liczbowe dla następujących danych:

- 1)  $a = 10$  cm,                      2)  $a = 5$  cm,                      3)  $a = 1$  cm,  
 $b = 15$  cm;                       $b = 10$  cm;                       $b = 6$  cm.

We wszystkich przypadkach przyjęto  $P = 1000$  kG,  $l = 0,1$  cm,  $\nu = 1/6$ .

Na podstawie (2.20) otrzymano stałe, zestawione w tablicy 1.

Tablica 1

Przykład \ Stałe	$A_2$ [kG/cm]	$A_3$ [kG/cm]	$A_4$ [kG/cm]	$C_1$ [kG]	$C_2$ [kG]
1	523243	17817000	-817,07	$-0,723046 \cdot 10^{-63}$	$-0,141968 \cdot 10^{46}$
2	10740	107163	-42,9	$-0,205 \cdot 10^{-42}$	$-0,23349 \cdot 10^{23}$
3	1161	545,9	-15,6	$-0,179 \cdot 10^{-25}$	$-0,19019 \cdot 10^6$

Odpowiednie wykresy naprężeń i naprężeń momentowych dla przekroju  $\theta = \pi/2$  wraz z odpowiednimi wartościami dla teorii klasycznej podają rys. 2, 3, 4.

Udział naprężeń momentowych w momencie całkowitym przekroju wynosi 0,92% w przykładzie 1, 0,86% w przykładzie 2 oraz 1,34% w przykładzie 3.

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. BARAŃSKI, K. WILMAŃSKI, Cz. WOŹNIAK, *Mechanika ośrodków ciągłych typu Cosseratów*, Mech. Teoret. i Stos., 2 (1967).
2. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN, Warszawa 1964.
3. R. D. MINDLIN, *Influence of couple-stresses on stress concentrations*, Experimental Mechanics, 1 (1963).
4. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
5. S. TIMOSHENKO, J. N. GOODIER, *Teoria sprężystości*, Arkady, Warszawa 1962.

#### Резюме

#### ИЗГИБ СИЛЬНО ИСКРИВЛЕННОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ МОМЕНТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В работе дано решение задачи об изгибе сильно искривленного стержня с учетом влияния моментных напряжений. Применяется функция напряжений Эри-Миндлина. Задача решена в рамках общей теории со связанными вращениями. Дано точное и замкнутое решение задачи. Даны три численных примера для различных размеров стержня.

## S u m m a r y

## BENDING OF A STRONGLY CURVED BEAM WITH THE INFLUENCE OF COUPLE-STRESSES

In order to solve the problem outlined in the title, the Airy-Mindlin stress function is applied; the problem is solved within the general couple-stress theory with independent rotations. An exact, closed-form solution is derived. Numerical examples concerning various dimensions of the beam are presented. In absence of any information concerning the values of elastic constants in the Cosserat media considered in the paper, the corresponding values for the media with constrained rotations have to be used.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 sierpnia 1972 r.*

---



PEWIEN SPOŚÓB ROZWIĄZANIA STATYCZNYCH ZAGADNIENŃ LINIOWEJ  
NIESYMETRYCZNEJ SPRĘŻYSTOŚCI

JANUSZ DYSZLEWICZ (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

W liniowym ośrodku mikropolarnym stan naprężenia opisują dwa niesymetryczne tensory: tensor naprężeń siłowych  $\sigma_{ji}$  oraz tensor naprężeń momentowych  $\mu_{ji}$ . Składowe tych tensorów spełniają różniczkowe równania równowagi, które — dla zagadnienia statycznego bez uwzględnienia wektora sił i wektora momentów masowych i w układzie kartezjańskim  $x_i$  — mają postać [1], [2], [3]:

$$(1.1) \quad \sigma_{ji,j} = 0, \quad \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3)^1).$$

Symbol  $\epsilon_{ijk}$  oznacza alternator Levi-Civita. Pole przemieszczeń w ośrodku opisuje wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}$ , pole obrotów — wektor obrotu  $\boldsymbol{\varphi}$ . Przy pomocy wektorów  $\mathbf{u}$  i  $\boldsymbol{\varphi}$  definiuje się następujące tensory:

$$(1.2) \quad \gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji} \varphi_k, \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j},$$

gdzie  $\gamma_{ji}$  jest niesymetrycznym tensorem odkształcenia, natomiast  $\kappa_{ji}$  — niesymetrycznym tensorem skrętno-giętnym. Tensory  $\gamma_{ji}$ ,  $\kappa_{ji}$  wiążą się z tensorami  $\sigma_{ji}$ ,  $\mu_{ji}$  poprzez równania konstytutywne, które (bez uwzględnienia temperatury) mają postać:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ij} + \beta \kappa_{kk} \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Symbol  $\delta_{ij}$  oznacza deltę Kroneckera, wielkości  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  są stałymi materiałowymi.

Funkcje  $\gamma_{ji}$ ,  $\kappa_{ji}$  nie są dowolne i powinny spełniać warunki geometrycznej zgodności

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \gamma_{ii,h} - \gamma_{hi,l} - \epsilon_{khi} \kappa_{lk} + \epsilon_{kli} \kappa_{hk} &= 0, \\ \kappa_{ii,h} &= \kappa_{hi,l}. \end{aligned}$$

Jeżeli na powierzchni ograniczającej ciało dane mamy obciążenia w postaci siły  $\mathbf{p}$  i momentu  $\mathbf{m}$ , to możemy zanotować warunki brzegowe w następujący sposób:

$$(1.5) \quad p_i = \sigma_{ji} n_j, \quad m_i = \mu_{ji} n_j,$$

gdzie  $n_j$  są składowymi jednostkowego wektora  $\mathbf{n}$  normalnego do powierzchni ciała.

<sup>1)</sup> Będziemy przyjmowali dla indeksów łacińskich wartości 1, 2, 3, natomiast dla greckich 1, 2.

Wyrażając związki (1.4) poprzez tensory  $\sigma_{ji}$ ,  $\mu_{ji}$  przy pomocy równań (1.3) otrzymujemy warunki geometrycznej zgodności wyrażone w naprężeniach. Te ostatnie w połączeniu z równaniami równowagi (1.1) i warunkami brzegowymi (1.5) stanowią naprężeniowe sformułowanie statycznego problemu mikropolarnej sprężystości [4], [5]. Podstawiając do równań równowagi (1.1) związki (1.3) i wykorzystując definicję (1.2) otrzymujemy w połączeniu z warunkami (1.5) sformułowanie w przemieszczeniach — obrotach dla statycznego zagadnienia mikropolarnej sprężystości (por. [1]):

$$(1.6) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha)u_{i,jj} + (\lambda + \mu - \alpha)u_{j,ji} + 2\alpha\epsilon_{ijk}\varphi_{k,j} &= 0, \\ (\gamma + \varepsilon)\varphi_{i,jj} - 4\alpha\varphi_i + (\beta + \gamma - \varepsilon)\varphi_{j,ji} + 2\alpha\epsilon_{ijk}u_{k,j} &= 0. \end{aligned}$$

W pracy [6] pokazane jest, że układ równań (1.6) można zastąpić dwoma niezależnymi od siebie układami równań, z których jeden identyczny jest z równaniami przemieszczeniowymi klasycznej elastostatyki. Wówczas rozwiązanie układu równań (1.6) z warunkami brzegowymi (1.5) można złożyć z rozwiązania klasycznej teorii sprężystości z warunkami brzegowymi

$$(1.7) \quad p_i = \sigma'_{ji}n_j,$$

uzupełnionego rozwiązaniem typowego problemu mikropolarnej sprężystości.

W niniejszej pracy powyższy rezultat uzyskamy na innej drodze wychodząc ze sformułowania naprężeniowego problemu. Ograniczymy się jednak do prześledzenia toku postępowania dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia. Niemniej jednak sposób rozwiązania pozostaje poprawny dla przestrzennego zagadnienia statycznego z uwzględnieniem temperatury i «obciążeń» masowych.

Za podstawę rozważań przyjmujemy komplet równań naprężeniowych odpowiadający wektorowi  $\mathbf{u}(u_1, u_2, 0)$  i  $\boldsymbol{\varphi}(0, 0, \varphi_3)$  z pracy [7].

## 2. Płaski stan odkształcenia

Przyjmujemy płaski stan odkształcenia (wszelkie przyczyny i skutki zależą tylko od  $x_\alpha$ ) reprezentowany przez wektory  $\mathbf{u}$  i  $\boldsymbol{\varphi}$  postaci:

$$(2.1) \quad \mathbf{u}(x_1, x_2) \equiv (u_1, u_2, 0), \quad \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2) \equiv (0, 0, \varphi_3).$$

Prowadzi to do następującego zestawu związków dla płaskiego zagadnienia uzyskanego z (1.1) ÷ (1.4):

niezerowe składowe stanu odkształcenia

$$(2.2) \quad \gamma_{ji} \equiv \gamma_{\alpha\beta}, \quad \kappa_{ji} \equiv \kappa_{\alpha 3};$$

niezerowe składowe stanu naprężenia

$$(2.3) \quad \sigma_{ji} \equiv (\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{33}), \quad \mu_{ji} \equiv (\mu_{\alpha 3}, \mu_{3\alpha});$$

warunki równowagi

$$(2.4) \quad \sigma_{\alpha\beta, \alpha} = 0, \quad \epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha 3, \alpha} = 0,$$

gdzie  $\epsilon_{\alpha\beta}$  jest symbolem Ricciego;

związki konstytutywne

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= (\mu + \alpha)\gamma_{\alpha\beta} + (\mu - \alpha)\gamma_{\beta\alpha} + \lambda\gamma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}, \\ \mu_{\alpha 3} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{\alpha 3}, \end{aligned}$$

oraz

$$(2.5') \quad \sigma_{33} = \lambda \gamma_{\gamma\gamma} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{\alpha\alpha},$$

$$\mu_{3\alpha} = (\gamma - \varepsilon) \kappa_{\alpha 3} = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \mu_{\alpha 3};$$

związki geometrycznej zgodności

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \gamma_{21,1} - \gamma_{11,2} - \kappa_{13} &= 0, \\ \gamma_{22,1} - \gamma_{12,2} - \kappa_{23} &= 0, \\ \kappa_{23,1} - \kappa_{13,2} &= 0. \end{aligned}$$

Równania (2.6) można przekształcić do postaci:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \gamma_{22,11} + \gamma_{11,22} &= (\gamma_{12} + \gamma_{21})_{,12}, \\ \gamma_{12,22} - \gamma_{21,11} &= (\gamma_{22} - \gamma_{11})_{,12} - (\kappa_{13,1} + \kappa_{23,2}), \\ \kappa_{23,1} - \kappa_{13,2} &= 0. \end{aligned}$$

Te ostatnie wyrażone w naprężeniach mają postać:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{22,11} + \sigma_{11,22} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma_{\alpha\alpha, \beta\beta} &= (\sigma_{12} + \sigma_{21})_{,12}, \\ (\sigma_{12} + \sigma_{21})_{,22} - (\sigma_{12} + \sigma_{21})_{,11} + \frac{\mu}{\alpha} (\sigma_{12} - \sigma_{21})_{,\alpha\alpha} + \\ &+ 2(\sigma_{11} - \sigma_{22})_{,12} + \frac{4\mu}{\gamma + \varepsilon} \mu_{\alpha 3, \alpha} = 0, \\ \mu_{23,1} &= \mu_{13,2}. \end{aligned}$$

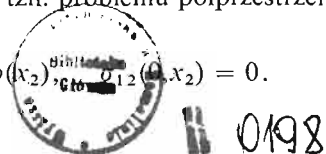
### 3. Zagadnienie półprzestrzeni

Rozpatrzmy problem jednorodnej, izotropowej półprzestrzeni mikropolarnej w płaskim stanie odkształcenia. Półprzestrzeń orientujemy przy pomocy kartezjańskiego układu współrzędnych, przy czym  $x_1 \in (0, \infty)$ ,  $x_2 \in (-\infty, +\infty)$ . Przyjmujemy, że na brzegu półprzestrzeni (w płaszczyźnie  $x_1 = 0$ ) działa obciążenie  $p(x_2)$  zgodnie skierowane z osią  $0x_1$ .

$$(3.1) \quad \sigma_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0.$$

Poszukujemy takiego rozkładu naprężeń i stanu odkształcenia w półprzestrzeni, aby były spełnione równania równowagi (2.4), równania geometrycznej zgodności (2.6), związki konstytutywne (2.5) i warunki brzegowe (3.1). Przy czym będziemy chcieli poszukiwane rozwiązanie złożyć z dwóch części w taki sposób, aby pierwsza jego część była formalnym przeniesieniem rozwiązania klasycznego problemu ( $\sigma'_{12} = \sigma'_{21}$ ,  $\gamma'_{12} = \gamma'_{21}$ ), analogicznego do wyżej sformułowanego, tzn. problemu półprzestrzeni z warunkami brzegowymi postaci

$$(3.2) \quad \sigma'_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma'_{12}(0, x_2) = 0.$$



Przyjmujemy zatem

$$(3.3) \quad \sigma_{\alpha\beta} = \sigma'_{\alpha\beta} + \sigma'_{\alpha\beta}, \quad \mu_{\alpha 3} = \mu'_{\alpha 3} + \mu'_{\alpha 3}$$

oraz warunek symetrii tensora naprężeń

$$(3.4) \quad \sigma'_{\alpha\beta} = \sigma'_{\beta\alpha}.$$

Równania (2.4) ÷ (2.8) zapisane dla części « primowanej » zagadnienia, wobec założenia (3.3) i (3.4), przyjmują następującą postać:

warunki równowagi

$$(3.5) \quad \sigma'_{\alpha\beta, \alpha} = 0,$$

$$(3.5') \quad \mu'_{\alpha 3, \alpha} = 0;$$

związki konstytutywne

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \sigma'_{\alpha\beta} &= 2\mu \gamma'_{\alpha\beta} + \lambda \gamma'_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \\ \mu'_{\alpha 3} &= (\gamma + \varepsilon) \kappa'_{\alpha 3} \end{aligned}$$

lub te ostatnie rozwiązane względem odkształceń

$$(3.6') \quad \gamma'_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma'_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma'_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right],$$

$$\kappa'_{\alpha 3} = \frac{1}{\gamma + \varepsilon} \mu'_{\alpha 3};$$

równania geometrycznej zgodności

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \gamma'_{12,1} - \gamma'_{11,2} - \kappa'_{13} &= 0, \\ \gamma'_{22,1} - \gamma'_{12,2} - \kappa'_{23} &= 0, \\ \kappa'_{23,1} - \kappa'_{13,2} &= 0. \end{aligned}$$

Przekształcone równania (3.7) po wykorzystaniu zależności (3.6')<sub>2</sub> i równania równowagi (3.5') oraz zależności (3.4) i (3.6')<sub>1</sub> (co prowadzi do równości  $\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma'_{\beta\alpha}$ ) przyjmą postać

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \gamma'_{22,11} + \gamma'_{11,22} &= 2\gamma'_{12,12}, \\ \gamma'_{12,22} - \gamma'_{12,11} &= (\gamma'_{22} - \gamma'_{11})_{,12}, \\ \kappa'_{23,1} - \kappa'_{13,2} &= 0 \end{aligned}$$

lub

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \sigma'_{22,11} + \sigma'_{11,22} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma'_{\alpha\alpha, \beta\beta} &= 2\sigma'_{12,12}, \\ \sigma'_{12,22} - \sigma'_{12,11} + (\sigma'_{11} - \sigma'_{22})_{,12} &= 0 \end{aligned}$$

oraz

$$(3.9') \quad \mu'_{23,1} = \mu'_{13,2}.$$

Różniczkując równania równowagi (3.5) (dla  $\beta = 1$ ) po  $x_2$  oraz (3.5) (dla  $\beta = 2$ ) po  $x_1$  i odejmując otrzymane równania stronami, uzyskujemy zależność (3.9)<sub>2</sub>. Dlatego w dalszych rozważaniach zależność tę, a co za tym idzie i (3.8)<sub>2</sub>, będziemy pomijali. Zauważmy,

że w równaniach równowagi (2.4) i związkach (2.8) nie było rozseparowania naprężeń siłowych i naprężeń momentowych; teraz równania (3.5) i (3.5') oraz (3.9)<sub>1</sub> i (3.9') są rozseparowane. Ponadto funkcje  $\sigma'_{\alpha\beta}$  są funkcjami biharmonicznymi, a  $\sigma'_{\alpha\alpha}$  (zatem i  $\sigma'_{33}$ ) jest funkcją harmoniczną (rozpatrujemy zagadnienie statyczne bez temperatury i sił masowych):

$$(3.10) \quad \sigma'_{\alpha\beta, \delta\delta\gamma\gamma} = 0, \quad \sigma'_{33, \alpha\alpha} = 0$$

oraz

$$(3.10') \quad \sigma'_{\alpha\alpha, \beta\beta} = 0.$$

Przy uwzględnieniu (3.10') równanie (3.9)<sub>1</sub> możemy przepisać w postaci

$$(3.11) \quad \sigma'_{22,11} + \sigma'_{11,22} = 2\sigma'_{12,12}.$$

Uzyskaliśmy więc dla «primowanej» części szukanego rozwiązania sformułowanie naprężeniowe, na które składają się równania równowagi (3.5), równanie geometrycznej zgodności w odkształceniach (3.8)<sub>1</sub> lub w naprężeniach (3.9)<sub>1</sub> [bądź (3.11) w połączeniu z (3.10')], warunki brzegowe (3.2), prawo konstytutywne (3.6)<sub>1</sub> lub (3.6')<sub>1</sub> oraz warunki konieczne, jakie muszą spełniać składowe  $\sigma'_{\alpha\beta}$  i  $\sigma'_{33}$ , tzn. warunki (3.10).

Wyżej wymienione sformułowanie jest identyczne z naprężeniowym sformulowaniem z klasycznej teorii sprężystości dla płaskiego zagadnienia bez udziału temperatury i sił masowych (por. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości* [8] ss. 285 ÷ 287).

Zagadnienie powyższe można rozwiązać w sposób bezpośredni przy użyciu wykładniczej transformacji Fouriera

$$(3.12) \quad \tilde{f}(x_1, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{i\xi x_2} dx_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x_1, \xi) e^{-i\xi x_2} d\xi,$$

co prowadzi do rezultatu:

$$(3.13) \quad \sigma'_{11}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi) (1 + |\xi| x_1) e^{-|\xi| x_1 - i\xi x_2} d\xi,$$

$$\sigma'_{22}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi) (1 - |\xi| x_1) e^{-|\xi| x_1 - i\xi x_2} d\xi,$$

$$\sigma'_{12}(x_1, x_2) = \sigma'_{21}(x_1, x_2) = -\frac{i x_1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi) \xi e^{-|\xi| x_1 - i\xi x_2} d\xi,$$

$$(3.13') \quad \sigma'_{33}(x_1, x_2) = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi) e^{-|\xi| x_1 - i\xi x_2} d\xi.$$

Pamiętać należy, że rozpatrywany stan równowagi w zakresie «primowanej» części tensora naprężeń siłowych jest stanem równowagi w ośrodku mikropolarnym, w którym oprócz stałych Lamégo  $\lambda, \mu$  występują stałe  $\alpha, \gamma, \varepsilon$  (stała  $\beta$  w rozpatrywanym płaskim zagadnieniu nie występuje). Wiąże się z tym występowanie tensora naprężeń momentowych, przy czym «primowana» jego część spełniać musi równanie równowagi (3.5') i równanie zgodności odkształceń (3.8)<sub>3</sub> wyrażone w naprężeniach (3.9'). Prawo konstytutywne określa się wzorem (3.6)<sub>2</sub> lub (3.6')<sub>2</sub>. Składowe  $\mu'_{\alpha 3}$  (również  $\mu'_{3\alpha}$ ) są tu funkcjami harmonicznymi, otrzymujemy bowiem z (3.5') i (3.9') równanie Laplace'a

$$(3.14) \quad \mu'_{\alpha 3, \beta\beta} = 0.$$

Przejdźmy do wyznaczenia «primowanych» składowych tensora naprężeń momentowych. W tym celu do równań (3.7)<sub>1,2</sub> podstawiamy związki (3.6') i uwzględniamy zależność (2.5')<sub>1</sub>, otrzymując odpowiednio

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \mu'_{13} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{2\mu} (\sigma'_{12,1} - \sigma'_{11,2} + \sigma'_{33,2}), \\ \mu'_{23} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{2\mu} (\sigma'_{22,1} - \sigma'_{33,1} - \sigma'_{11,2}). \end{aligned}$$

Bezpośrednim podstawieniem do (3.14) sprawdzamy, że  $\mu'_{\alpha 3}$  są funkcjami harmonicznymi i że spełniają równanie równowagi (3.5') oraz równanie zgodności odkształceń w naprężeniach (3.9'). Uwzględniając (3.13) i (3.13') wyznaczamy

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \mu'_{13}(x_1, x_2) &= -\frac{2ia_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi) \xi e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \\ \mu'_{23}(x_1, x_2) &= -\frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(\xi) |\xi| e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \end{aligned}$$

wprowadziliśmy oznaczenie:  $a_0 = (\gamma + \varepsilon)(2\mu + \lambda)/4\mu(\lambda + \mu)$ .

Dla  $x_1 = 0$  otrzymujemy z (3.16)<sub>1</sub> wartość  $\mu'_{13}$  na brzegu półprzestrzeni

$$(3.17) \quad \mu'_{13}(0, x_2) = 2a_0 \frac{d}{dx_2} p(x_2).$$

Przejdźmy teraz do wyznaczenia drugiej części rozwiązania. Zależności, którymi tu dysponujemy, są identyczne w swej postaci ze związkami (2.1) ÷ (2.8). W celu ustalenia uwagi częściowo je tu przepiszemy.

Równania równowagi

$$(3.18) \quad \sigma''_{\alpha\beta, \alpha} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma''_{\alpha\beta} + \mu''_{\alpha 3, \alpha} = 0.$$

Związki konstytutywne

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \sigma''_{\alpha\beta} &= (\mu + \alpha)\gamma''_{\alpha\beta} + (\mu - \alpha)\gamma''_{\beta\alpha} + \lambda\gamma''_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta}, \\ \mu''_{\alpha 3} &= (\gamma + \varepsilon)\mu''_{\alpha 3} \end{aligned}$$

lub te ostatnie rozwiązanie względem odkształceń

$$(3.19') \quad \begin{aligned} \gamma''_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma''_{\alpha\alpha} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma''_{\beta\beta} \right] \quad (\alpha \text{ nie sumować}), \\ \gamma''_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2\mu} \sigma''_{[\alpha\beta]} + \frac{1}{2\alpha} \sigma''_{\{\alpha\beta\}}, \quad \alpha \neq \beta, \\ \kappa''_{\alpha 3} &= \frac{1}{\gamma + \varepsilon} \mu''_{\alpha 3}. \end{aligned}$$

Symbole ( ) i [ ] oznaczają odpowiednio część symetryczną i antysymetryczną tensora  $\sigma''_{\alpha\beta}$ . Równania geometrycznej zgodności

$$(3.20) \quad \begin{aligned} \gamma'_{21,1} - \gamma'_{11,2} - \kappa'_{13} &= 0, \\ \gamma'_{22,1} - \gamma'_{12,2} - \kappa'_{23} &= 0, \\ \kappa'_{23,1} - \kappa'_{13,2} &= 0, \end{aligned}$$

po przekształceniach i uwzględnieniu związków (3.19'), przyjmują postać

$$(3.21) \quad \begin{aligned} \sigma''_{22,11} + \sigma''_{11,22} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \sigma''_{\alpha\alpha, \beta\beta} &= 2\sigma''_{(12),12}, \\ 2[\sigma''_{(12),22} - \sigma''_{(12),11}] + \frac{2\mu}{\alpha} \sigma''_{[12],\alpha\alpha} + 2(\sigma''_{11} - \sigma''_{22}),_{12} + \frac{4\mu}{\gamma + \varepsilon} \mu''_{\alpha 3, \alpha} &= 0, \\ \mu''_{23,1} &= \mu''_{13,2}. \end{aligned}$$

Zagadnienie należy rozwiązać z warunkami brzegowymi, które otrzymamy z wyjściowych warunków brzegowych (3.1) po uwzględnieniu podstawienia (3.3), warunków brzegowych dla «primowanego» zagadnienia (3.2) oraz zależności (3.17):

$$(3.22) \quad \sigma'_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma'_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu'_{13}(0, x_2) = -2a_0 \frac{d}{dx_2} p(x_2).$$

Poszukując rozwiązania wyjdziemy z rozseparowanych równań różniczkowych, jakie spełniają składowe  $\sigma''_{\alpha\beta}$  i  $\mu''_{\alpha 3}$  (por. [7])

$$(3.23) \quad \begin{aligned} (l^2 \sigma''_{\alpha\beta, \varepsilon\varepsilon} - \sigma''_{\alpha\beta}),_{\delta\delta\gamma\gamma} &= 0, \\ (l^2 \mu''_{\alpha 3, \varepsilon\varepsilon} - \mu''_{\alpha 3})_{\beta\beta} &= 0. \end{aligned}$$

Ponadto zachodzą związki

$$(3.24) \quad \begin{aligned} \sigma''_{\alpha\alpha, \beta\beta} &= 0, \\ l^2 \sigma''_{[12], \alpha\alpha} - \sigma''_{[12]} &= 0. \end{aligned}$$

Wielkość  $l^2$  jest stałą i wynosi  $l^2 = (\mu + \alpha)(\gamma + \varepsilon)/4\mu\alpha$ . Po transformacji równań (3.23) otrzymujemy równania różniczkowe zwyczajne postaci:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \left( \frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2 \right)^2 \left( \frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2 \right) \tilde{\sigma}''_{\alpha\beta} &= 0, \\ \left( \frac{d^2}{dx_1^2} - \xi^2 \right) \left( \frac{d^2}{dx_1^2} - \varrho^2 \right) \tilde{\mu}''_{\alpha 3} &= 0, \quad \varrho = \left( \xi^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ogólną postać rozwiązania równań (3.25) z warunkami fizycznymi dla półprzestrzeni ( $\sigma''_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ ,  $\mu''_{\alpha 3} \rightarrow 0$  dla  $\sqrt{x_\alpha x_\alpha} \rightarrow 0$ ) przyjmujemy następująco:

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \tilde{\sigma}''_{\alpha\beta} &= (A''_{\alpha\beta} + B''_{\alpha\beta} |\xi| x_1) e^{-|\xi| x_1} + C''_{\alpha\beta} e^{-\varrho x_1}, \\ \tilde{\mu}''_{\alpha 3} &= a''_{\alpha 3} e^{-|\xi| x_1} + b''_{\alpha 3} e^{-\varrho x_1}. \end{aligned}$$

Wielkości  $A''_{\alpha\beta}$ ,  $B''_{\alpha\beta}$ ,  $C''_{\alpha\beta}$ ,  $a''_{\alpha\beta}$ ,  $b''_{\alpha\beta}$  jako funkcje parametru  $\xi$  wyznaczamy spełniając kolejno transformowane warunki (3.24), (3.21)<sub>3</sub>, (3.22), (3.18), (3.20)<sub>1</sub>. Przystępując teraz w poszczególnych równaniach współczynniki przy odpowiednich wyrażeniach postaci  $e^{-|\xi|x_1}$ ,  $x_1 e^{-|\xi|x_1}$ ,  $e^{-\rho x_1}$ , otrzymujemy proste układy liniowych równań algebraicznych do wyznaczenia wyżej wymienionych wielkości.

W ten sposób uzyskujemy rozwiązanie dla  $\sigma''_{\alpha\beta}$ ,  $\mu''_{\alpha\beta}$  spełniające wszystkie równania wyszczególnione w sformułowaniu problemu. Ma ono postać:

$$\begin{aligned}
 \sigma''_{11}(x_\alpha; l) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[ (1-\Delta_0)(1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \left( e^{-\rho x_1} - \frac{|\xi|}{\rho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \sigma''_{22}(x_\alpha; l) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[ (1-\Delta_0)(-1+|\xi|x_1)e^{-|\xi|x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \left( e^{-\rho x_1} - \frac{|\xi|}{\rho} e^{-|\xi|x_1} \right) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \sigma''_{12}(x_\alpha; l) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[ (1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-|\xi|x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-|\xi|x_1}) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \sigma''_{21}(x_\alpha; l) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \left[ (1-\Delta_0)\xi x_1 e^{-|\xi|x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + 2a_0 \xi^2 \frac{\xi}{\rho} (e^{-\rho x_1} - e^{-|\xi|x_1}) \right] e^{-i\xi x_2} d\xi,
 \end{aligned}$$

$$(3.27') \quad \sigma''_{33}(x_\alpha; l) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} (1-\Delta_0) e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi,$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mu''_{13}(x_\alpha; l) &= -\frac{2ia_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} \xi [(1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1} - e^{-\rho x_1}] e^{-i\xi x_2} d\xi, \\
 \mu''_{23}(x_\alpha; l) &= \frac{2a_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{p}}{\Delta_0} |\xi| \left[ (1-\Delta_0)e^{-|\xi|x_1} - \frac{|\xi|}{\rho} e^{-\rho x_1} \right] e^{-i\xi x_2} d\xi.
 \end{aligned}$$

Oznaczyliśmy tu:  $\tilde{p} = \tilde{p}(\xi)$ ,  $\Delta_0 = \Delta_0(\xi) = 1 + 2a_0 \xi^2 \left( 1 - \frac{|\xi|}{\rho} \right)$ .



Ostatecznie rozkład naprężeń w półprzestrzeni uzyskujemy sumując  $\sigma'_{\alpha\beta}$  z (3.13) i  $\sigma''_{\alpha\beta}$  z (3.27) oraz  $\mu'_{\alpha 3}$  z (3.16) i  $\mu''_{\alpha 3}$  z (3.28).

Dla przypadku szczególnego  $[\alpha = 0]$  otrzymujemy rozwiązanie z klasycznej teorii sprężystości dane wzorami (3.13), (3.13'). Uzyskaliśmy zatem rozwiązanie złożone z dwóch części i spełniające nałożone na nie w punkcie 3 warunki, przy czym jest to rezultat zgodny z wynikami pracy W. NOWACKIEGO por. [7].

#### 4. Równania przemieszczeniowe

Przejdźmy do równań przemieszczeniowych odpowiadających poszczególnym zagadnieniom (z «jedną» i «dwoma kreskami»). Dla «primowanego» zagadnienia z (1.2) po uwzględnieniu (2.1) i (3.3) uzyskujemy

$$(4.1) \quad \gamma'_{\alpha\beta} = u'_{\beta,\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta} \varphi'_3, \quad \varkappa'_{\alpha 3} = \varphi'_{3,\alpha}.$$

Z założenia (3.4) wynika (3.6')<sub>1</sub> (tzn.  $\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma'_{\beta\alpha}$ ) i dalej z (4.1) zależność

$$(4.2) \quad \varphi'_3 = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha}.$$

Widzimy, że  $\varphi'_3$  pokrywa się teraz ze składową  $\omega_3$  wektora obrotu  $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$  dla płaskiego zagadnienia klasycznej teorii sprężystości. Podstawiając (3.6)<sub>1</sub> do równań równowagi (3.5) i uwzględniając pierwszą grupę związków z (4.1) oraz (4.2), uzyskujemy następujący układ równań różniczkowych w przemieszczeniach:

$$(4.3) \quad \mu u'_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu) e'_{,\alpha} = 0, \quad e' = u'_{\beta,\beta}$$

oraz

$$(4.3') \quad \epsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha\alpha} = 0.$$

Warunki brzegowe (3.2) pozostają bez zmiany, tzn.

$$(4.4) \quad \sigma'_{11}(0, x_2) = -p(x_2), \quad \sigma'_{12}(0, x_2) = 0.$$

Równanie (4.3') wynika z równań (4.3), natomiast te ostatnie w połączeniu z (4.4) formułują problem klasycznej sprężystości (równania zgodności (3.7) po wprowadzeniu do nich związków (4.1) spełnione są tożsamościowo (por. [8]).

Przejdźmy do zagadnienia z «dwoma kreskami». Podstawiając związki (3.19) do równań równowagi (3.18) i uwzględniając

$$(4.5) \quad \gamma''_{\alpha\beta} = u''_{\beta,\alpha} - \epsilon_{\alpha\beta} \varphi''_3, \quad \varkappa''_{\alpha 3} = \varphi''_{3,\alpha}$$

otrzymujemy układ równań różniczkowych w przemieszczeniach — obrotach w postaci (związki (3.20) spełnione są tożsamościowo):

$$(4.6) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha) u''_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda + \mu - \alpha) e''_{,\beta} + 2\alpha \epsilon_{\beta\gamma} \varphi''_{3,\gamma} &= 0, \\ (\gamma + \epsilon) \varphi''_{3,\alpha\alpha} - 4\alpha \varphi''_3 + 2\alpha \epsilon_{\alpha\beta} u''_{\beta,\alpha} &= 0, \quad e'' = u''_{\alpha,\alpha}, \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi jak w (3.22), tzn.

$$(4.7) \quad \sigma''_{11}(0, x_2) = 0, \quad \sigma''_{12}(0, x_2) = 0, \quad \mu''_{13}(0, x_2) = -2a_0 \frac{d}{dx_2} p(x_2).$$

Rezultat końcowy w przemieszczeniach i obrotach uzyskujemy zestawiając

$$(4.8) \quad u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha, \quad \varphi_3 = \varphi'_3 + \varphi''_3.$$

Ostatecznie więc uzyskaliśmy sformułowanie problemu przedstawionego na początku [zarówno w naprężeniach, jak i w przemieszczeniach — obrotach], które składa się ze sformułowania (analogicznego problemu do rozpatrywanego) wynikającego z klasycznej teorii sprężystości oraz sformułowania uzupełniającego.

Rozpatrzmy pokrótce zagadnienie termosprężyste. W tym przypadku należy wyjść z podstawowych równań mikropolarnej termosprężystości dla zagadnienia stacjonarnego (por. [1] lub prace źródłowe [9]). Dla zagadnienia płaskiego równania równowagi i związku geometrycznej zgodności pokrywają się odpowiednio z (2.4) i (2.6), natomiast prawo konstytutywne określają zależności

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= (\mu + \alpha)\gamma_{\alpha\beta} + (\mu - \alpha)\gamma_{\beta\alpha} + (\lambda\gamma_{\gamma\gamma} - \nu\theta)\delta_{\alpha\beta}, \\ \mu_{\alpha 3} &= (\gamma + \varepsilon)\varkappa_{\alpha 3}, \quad \sigma_{33} = \lambda\gamma_{\gamma\gamma} - \nu\theta. \end{aligned}$$

Postępowanie analogiczne do przeprowadzonego w punkcie 3 pracy prowadzi do układu równań w przemieszczeniach — obrotach, które kolejno omówimy.

Dla zagadnienia klasycznej termosprężystości [por. [8]]

$$(4.10) \quad \mu u'_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda + \mu)e'_{,\beta} = \nu\theta_{,\beta},$$

$$(4.10') \quad \varepsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha\alpha\alpha} = 0.$$

W (4.9) i (4.10)  $\nu = (3\lambda + 2\mu)\alpha_i$ , natomiast  $\alpha_i$  jest termicznym współczynnikiem liniowej rozszerzalności ośrodka. Temperaturę  $\theta$  wyznaczamy z równania przewodnictwa cieplnego

$$(4.11) \quad \theta_{,\alpha\alpha} = -\frac{W}{\lambda_0},$$

gdzie  $W$  oznacza intensywność źródeł ciepła,  $\lambda_0$  — współczynnik przewodnictwa cieplnego. Dla wyznaczenia wielkości  $u''_\alpha$  i  $\varphi''_3$  otrzymujemy jednorodny układ równań różniczkowych identyczny z układem (4.6).

Jeżeli wyjściowe warunki brzegowe mają postać:

$$(4.12) \quad \sigma_{1\alpha}(0, x_2) = -p_\alpha(x_2), \quad \mu_{13}(0, x_2) = 0,$$

dla obciążeń mechanicznych oraz

$$(4.12') \quad \theta(0, x_2) = f(x_2),$$

dla temperatury, to wówczas rozwiązujemy równanie przewodnictwa cieplnego (4.11) z warunkiem (4.12'), a następnie znaną funkcję  $\theta$  wprowadzamy do układu równań (4.10) i układ ten rozwiązujemy z warunkami brzegowymi

$$(4.13) \quad \sigma'_{1\alpha}(0, x_2) = -p_\alpha(x_2).$$

Dla układu równań z  $u''_\alpha$  i  $\varphi''_3$ , tzn. dla (4.6) otrzymujemy warunki brzegowe typu (4.7) (tylko  $\mu'_{13}(0, x_2) \neq 0$ ) i teraz wystarczy, w celu uzyskania pełnego rozwiązania, dodać do uzyskanego rozwiązania klasycznego rozwiązanie problemu brzegowego mikropolarnej sprężystości danego wzorami (3.27), zastępując tam jednak  $p(x_2)$  odpowiednio dobranym  $p^*(x_2)$ .

Rozpatrzmy przykładowo półprzestrzeń ograniczoną na brzegu [warunek (4.12')] i wolną od obciążeń mechanicznych. Załóżmy ponadto brak źródeł ciepła w półprzestrzeni. Wówczas rozkład temperatury określa całka

$$(4.14) \quad \theta(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi,$$

natomiast rozkład naprężeń w przestrzeni uzyskujemy sumując rozwiązanie klasyczne

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \sigma'_{\alpha\beta}(x_1, x_2) &= 0, \\ \sigma'_{33}(x_1, x_2) &= -\frac{\nu\mu}{\lambda + \mu} \theta(x_1, x_2), \end{aligned}$$

z rozwiązaniem danym wzorami (3.27) i (3.27') oraz sumując

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \mu'_{13}(x_1, x_2) &= 2\mu m a_0 i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) \xi e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \\ \mu'_{23}(x_1, x_2) &= -2\mu m a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi) |\xi| e^{-|\xi|x_1 - i\xi x_2} d\xi, \end{aligned}$$

z rozwiązaniem danym wzorami (3.28), przy czym za obciążenie  $p(x_2)$  w (3.27), (3.27') i (3.28) podstawiamy teraz

$$(4.17) \quad p(x_2) = p^*(x_2) = -\mu m f(x_2), \quad m = \frac{\nu}{\lambda + 2\mu},$$

otrzymując rezultat zgodny z rozwiązaniem tego zagadnienia w pracach [7], [10].

Dla przypadku, gdy w zagadnieniu występują «obciążenia» masowe, tzn.

$$(4.18) \quad \mathbf{X}(X_1, X_2, 0), \mathbf{Y}(0, 0, Y_3),$$

gdzie  $\mathbf{X}$  jest wektorem sił masowych,  $\dot{\mathbf{Y}}$  — wektorem momentów masowych, pozostaje w mocy komplet równań z punktu 2 [(2.1) ÷ (2.8)], z wyjątkiem równań równowagi (2.4), które teraz mają postać:

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta, \alpha} + X_\beta &= 0, \\ \epsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \mu_{\alpha 3, \alpha} + Y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Uzyskujemy stąd klasyczne sformułowanie naprężeniowe (por. [8]), tj. związki (3.6)<sub>1</sub>, (3.8)<sub>1</sub> i równania równowagi

$$(4.20) \quad \sigma'_{\alpha\beta, \alpha} + X_\beta = 0.$$

Także

$$(4.20') \quad \mu'_{\alpha 3, \alpha} + \frac{\gamma + \epsilon}{2\mu} \epsilon_{\alpha\beta} X_{\beta, \alpha} = 0$$

w połączeniu ze związkami (3.6)<sub>2</sub> i (3.8)<sub>3</sub>. Natomiast dla  $\sigma''_{\alpha\beta}$  i  $\mu''_{\alpha 3}$  uzyskujemy tu niejednorodny układ równań różniczkowych w postaci:

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \sigma''_{\alpha\beta, \alpha} &= 0, \\ \epsilon_{\alpha\beta} \sigma''_{\alpha\beta} + \mu''_{\alpha 3, \alpha} + Y_3 - \frac{\gamma + \epsilon}{2\mu} \epsilon_{\alpha\beta} X_{\beta, \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

który łączymy ze związkami (3.19), (3.20) i odpowiednimi warunkami brzegowymi.

Przechodząc do sformułowania w przemieszczeniach i obrotach otrzymujemy odpowiednio:

$$(4.22) \quad \mu u'_{\beta, \alpha\alpha} + (\lambda + \mu) e'_{, \beta} + X_\beta = 0,$$

$$(4.22') \quad \epsilon_{\alpha\beta} (\mu u'_{\beta, \alpha\alpha} + X_{\beta, \alpha}) = 0,$$

jak dla teorii klasycznej (por. [8]) [przy czym równanie (4.22') wynika z równań (4.22)] oraz niejednorodny układ równań dla  $u''_{\alpha}$  i  $\varphi''_3$

$$(4.23) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha) u''_{\beta, \alpha\alpha} + (\lambda + \mu - \alpha) e''_{, \beta} + 2\alpha \epsilon_{\beta\gamma} \varphi''_{3, \gamma} &= 0, \\ (\gamma + \epsilon) \varphi''_{3, \alpha\alpha} - 4\alpha \varphi''_3 + 2\alpha \epsilon_{\alpha\beta} u''_{\beta, \alpha} + Y_3 - \frac{\gamma + \epsilon}{2\mu} \epsilon_{\alpha\beta} X_{\beta, \alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy przykładowo działanie «obciążeń» masowych w postaci siły skupionej umieszczonej w początku układu współrzędnych (w przestrzeni nieskończonej — zagadnienie płaskie). Wówczas

$$(4.24) \quad X_1 = P \delta(x_1) \delta(x_2), \quad X_2 = Y_3 = 0,$$

gdzie  $\delta(\dots)$  jest funkcją Diraca.

Z równań (4.22) wyznaczamy równanie dla dylatacji

$$(4.25) \quad e'_{, \alpha\alpha} = -\frac{1}{2\mu + \lambda} X_{1,1},$$

oraz rozseparowane równania dla  $u'_1$  i  $u'_2$ :

$$(4.26) \quad \begin{aligned} u'_{1, \alpha\alpha\beta\beta} &= -\frac{1}{2\mu + \lambda} X_{1,11} - \frac{1}{\mu} X_{1,22}, \\ u'_{2, \alpha\alpha\beta\beta} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(2\mu + \lambda)} X_{1,12}. \end{aligned}$$

Z (4.22') przy uwzględnieniu (4.2) otrzymujemy równanie dla  $\varphi'_3 = \omega_3$ , mianowicie

$$(4.27) \quad \varphi'_{3, \alpha\alpha} = \frac{1}{2\mu} X_{1,2}.$$

Wprowadźmy podwójną transformację Fouriera

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) e^{i\xi_\alpha x_\alpha} dx_1 dx_2, \\ f(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\xi_1, \xi_2) e^{-i\xi_\alpha x_\alpha} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

oraz przepiszmy z pracy [7] oznaczenia i wartości dla następujących całek:

$$(4.29) \quad \begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi_\alpha x_\alpha}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} d\xi_1 d\xi_2 = -(C + \ln r), \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi_\alpha x_\alpha}}{\left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{l^2}\right)} d\xi_1 d\xi_2 = K_0\left(\frac{r}{l}\right), \\ I_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi_\alpha x_\alpha}}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{r^2}{4}(C + \ln r), \end{aligned}$$

gdzie  $r = \sqrt{x_\alpha x_\alpha}$ ,  $C$  jest stałą Eulera,  $K_0(z)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela trzeciego rodzaju (funkcja Mac Donalda). Całka  $I_3$  obliczona jest w sensie wartości głównej Cauchy'ego. Całki  $I_1, I_2$  obliczono według prac [11], [12].

Wykonując transformacje (4.28)<sub>1</sub> na równaniach (4.26), (4.27) oraz na warunku (4.24), otrzymujemy:

$$(4.30) \quad \begin{aligned} \tilde{u}'_1 &= \frac{1}{2\mu + \lambda} \frac{\xi_1^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \tilde{X}_1 + \frac{1}{\mu} \frac{\xi_2^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \tilde{X}_1, \\ \tilde{u}'_2 &= -\frac{\lambda + \mu}{\mu(2\mu + \lambda)} \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \tilde{X}_1, \end{aligned}$$

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}'_3 &= \frac{i}{2\mu} \frac{\xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} \tilde{X}_1, \\ \tilde{X}_1 &= \frac{P}{2\pi}. \end{aligned}$$

Podstawiając (4.31) do (4.30) i wykonując transformację odwrotną, wyrażamy  $u'_1, u'_2, \varphi'_3$  poprzez całki  $I_1, I_2, I_3$  z (4.29), mianowicie

$$(4.32) \quad \begin{aligned} u'_1 &= -\frac{P}{2\pi(2\mu + \lambda)} I_{3,11} - \frac{P}{2\pi\mu} I_{3,22}, \\ u'_2 &= \frac{P(\lambda + \mu)}{2\pi\mu(2\mu + \lambda)} I_{3,12}, \\ \varphi'_3 &= -\frac{P}{4\pi\mu} I_{1,2}. \end{aligned}$$

Z równań (4.23) otrzymujemy odpowiednio dla dylatacji równanie Laplace'a

$$(4.33) \quad e'_{,\alpha\alpha} = 0,$$

zaś dla  $u''_1, u''_2$  i  $\varphi''_3$  równania w postaci:

$$(4.34) \quad \begin{aligned} (l^2 u''_{1,\alpha\alpha} - u''_1)_{,\delta\delta\gamma\gamma} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu^2} X_{1,22\beta\beta}, \\ (l^2 u''_{2,\alpha\alpha} - u''_2)_{,\delta\delta\gamma\gamma} &= -\frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu^2} X_{1,12\beta\beta}, \\ (l^2 \varphi''_{3,\alpha\alpha} - \varphi''_3)_{,\delta\delta} &= -\frac{l^2}{2\mu} X_{1,2\beta\beta}. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia  $u''_1, u''_2, \varphi''_3$  w przestrzeni nieskończonej wystarczy wyznaczyć rozwiązanie szczególne równań (4.34), tzn. znaleźć rozwiązanie dla równań:

$$(4.35) \quad \begin{aligned} (l^2 u''_{1,\alpha\alpha} - u''_1)_{,\delta\delta} &= \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu^2} X_{1,22}, \\ (l^2 u''_{2,\alpha\alpha} - u''_2)_{,\delta\delta} &= -\frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu^2} X_{1,12}, \\ l^2 \varphi''_{3,\alpha\alpha} - \varphi''_3 &= -\frac{l^2}{2\mu} X_{1,2}. \end{aligned}$$

Transformujemy równania (4.35) otrzymując odpowiednio:

$$(4.36) \quad \begin{aligned} \tilde{u}''_1 &= -\frac{\alpha}{\mu(\mu + \alpha)} \frac{\xi_2^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left( \xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{l^2} \right)} \tilde{X}_1, \\ \tilde{u}''_2 &= \frac{\alpha}{\mu(\mu + \alpha)} \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left( \xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{l^2} \right)} \tilde{X}_1, \\ \tilde{\varphi}''_3 &= -\frac{i}{2\mu} \frac{\xi_2}{\left( \xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{l^2} \right)} \tilde{X}_1. \end{aligned}$$

Podstawiamy do zależności (4.36) wartość  $\tilde{X}_1$  z (4.31), a następnie wyrażenia

$$\frac{\xi_2^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left( \xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{l^2} \right)}, \quad \frac{\xi_1 \xi_2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2) \left( \xi_1^2 + \xi_2^2 + \frac{1}{l^2} \right)}$$

rozkładamy na ułamki proste i po wykonaniu transformacji odwrotnej otrzymujemy:

$$(4.37) \quad \begin{aligned} u''_1 &= \frac{P}{2\pi} \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu^2} (I_1 - I_2)_{,22}, \\ u''_2 &= -\frac{P}{2\pi} \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu^2} (I_1 - I_2)_{,12}, \\ \varphi''_3 &= \frac{P}{4\pi\mu} I_{2,2}. \end{aligned}$$

Rezultat klasyczny przedstawiają wzory (4.32), natomiast dla ośrodka mikropolarnego otrzymujemy rozwiązanie w postaci

$$(4.38) \quad u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha, \quad \varphi_3 = \varphi'_3 + \varphi''_3,$$

co prowadzi do rezultatu:

$$(4.39) \quad \begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= -\frac{P}{2\pi\mu} \left[ \frac{\mu}{2\mu + \lambda} I_{3,11} + I_{3,22} - \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu} (I_1 - I_2)_{,22} \right], \\ \mu_2(x_1, x_2) &= \frac{P}{2\pi\mu} \left[ \frac{\lambda + \mu}{2\mu + \lambda} I_3 - \frac{\gamma + \varepsilon}{4\mu} (I_1 - I_2) \right]_{,12}, \\ \varphi_3(x_1, x_2) &= -\frac{P}{4\pi\mu} (I_1 - I_2)_{,2}. \end{aligned}$$

W powyższy sposób uzyskujemy również rozwiązania dla siły masowej w postaci  $X_2 = S\delta(x_1)\delta(x_2)$  oraz dla skupionego momentu masowego w postaci  $Y_3 = M\delta(x_1)\delta(x_2)$ , przy czym otrzymane rezultaty zgodne są z wynikami cytowanej pracy [7].

W pracy [6] do równań równowagi w przemieszczeniach i obrotach (1.6) wprowadza się wektor  $\zeta$  za pomocą następującego podstawienia:

$$(4.40) \quad \zeta = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} - \varphi,$$

co dla przypadku płaskiego prowadzi do

$$(4.40') \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\beta\alpha} u_{\beta,\alpha} - \zeta_3.$$

Wówczas układ równań (1.6) przechodzi w układ

$$(4.41) \quad \begin{aligned} \mu u_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda + \mu) e_{,\beta} &= 2\alpha \varepsilon_{\beta\gamma} \zeta_{3,\gamma}, \\ \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \varepsilon_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha\alpha\alpha} &= (\gamma + \varepsilon) \zeta_{3,\alpha\alpha} - 4\alpha \zeta_3. \end{aligned}$$

Przyjmując następnie rozwiązanie w postaci

$$(4.42) \quad u_\alpha = u'_\alpha + u''_\alpha, \quad \zeta_3 = \zeta'_3 + \zeta''_3 \quad \text{oraz} \quad \zeta'_3 = 0,$$

otrzymujemy z (4.41) dwa następujące układy równań:

$$(4.43) \quad \begin{aligned} \mu u'_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda + \mu) e'_{,\beta} &= 0, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} u'_{\beta,\alpha\alpha\alpha} &= 0. \end{aligned}$$

oraz

$$(4.44) \quad \begin{aligned} \mu u''_{\beta,\alpha\alpha} + (\lambda + \mu) e''_{,\beta} &= 2\alpha \varepsilon_{\beta\gamma} \zeta''_{3,\gamma}, \\ \frac{1}{2} (\gamma + \varepsilon) \varepsilon_{\alpha\beta} u''_{\beta,\alpha\alpha\alpha} &= (\gamma + \varepsilon) \zeta''_{3,\alpha\alpha} - 4\alpha \zeta''_3. \end{aligned}$$

Układ (4.43) związany jest z klasyczną teorią sprężystości, natomiast układ (4.44) daje nam rozwiązanie uzupełniające uwzględniające efekty brzegowe.

Zauważmy, że układy równań w przemieszczeniach i w przemieszczeniach — obrotach, które uzyskaliśmy w tej pracy z równań naprężeniowych, tzn. układ (4.3) i (4.6), pokrywają się odpowiednio z układami (4.43)<sub>1</sub> i (4.44). Wystarczy tylko w (4.44) podstawić

$$(4.45) \quad \zeta_3'' = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} u_{\beta,\alpha}'' - \varphi_3''.$$

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Theory of non-symmetric elasticity* [in Polish], PWN, Warszawa 1971.
2. E. V. KUVSHINSKI, E. L. AERO, *Continuum theory of asymmetric elasticity* [in Russian], Phis. Tverd. Tela, **5** (1963).
3. M. A. PALMOV, *Fundamental equations of asymmetric elasticity* [in Russian], Prikl. Mat. Mekh., **28** (1964).
4. N. SANDRU, *On some problems of the linear theory of asymmetric elasticity*, Int. J. Engng. Sci., **4**, 1 (1966).
5. Z. OLESIAK, *Stress differential equations of the micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., **18**, 5 (1970).
6. H. SCHAEFER, *Das Cosserat-Kontinuum*, ZAMM, **8**, 47 (1967).
7. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. of Mech., **23**, 5 (1971).
8. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
9. W. NOWACKI, *Couples-stresses in the theory of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Techn., Part I, II, **14**, 3 (1966): Part III, **14**, 8 (1966).
10. W. NOWACKI, *The plane problem of micropolar thermoelasticity*, Arch. of Mech., **22**, 1 (1970).
11. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
12. J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in partial differential equations*, Yale Univeristy Press, 1923.

#### Р е з ю м е

#### О НЕКОТОРОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

На примере плоской задачи, описываемой векторами  $\mathbf{u}(u_1, u_2, 0)$ ,  $\varphi(0, 0, \varphi_3)$  (см. работу [7]), рассмотрен некоторый способ решения статических задач линейной несимметричной теории упругости, состоящий в наложении решения для аналогичной классической задачи и дополняющего решения. В качестве исходных зависимостей приняты формулы для напряжений в плоской задаче, приведенные в работе [7].

#### S u m m a r y

#### ON A CERTAIN METHOD OF SOLUTION OF STATIC PROBLEMS OF THE LINEAR THEORY OF NON-SYMMETRIC ELASTICITY

The plane strain problem represented by the vectors  $\mathbf{u}(u_1, u_2, 0)$ ,  $\varphi(0, 0, \varphi_3)$  serves as an example to demonstrate the method of solution of static problems of the linear theory of non-symmetric elasticity. The method consists in assuming the solution in a form of a sum of the classical solution and a complementary solution. The considerations are based on the stress equations of the two-dimensional problem presented in [7].

INSTYTUT MECHANIKI  
UNIwersytetu Warszawskiego

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 listopada 1972 r.



## RZECZYWISTY UKŁAD SIŁ DZIAŁAJĄCYCH U PODSTAWY PĘCHERZYKA PAROWEGO

BOGUMIŁ BIENIASZ (RZESZÓW)

### 1. Oznaczenia

$a$  stała w równaniu Van der Waalsa,

$b$  jak wyżej,

$B_1$  współczynnik wirialny w termicznym równaniu stanu gazu Van der Waalsa,

$T$  temperatura,

$T_s$  temperatura nasycenia,

$\beta$  średni kąt przylegania,

$\delta_s$  napięcie powierzchniowe na granicy fazy ciekłej i gazowej substancji wrzącej w temperaturze  $T_s$ ,

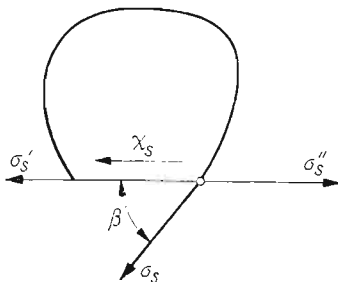
$\delta'_s$  napięcie powierzchniowe na granicy cieczy wyżej wrzącej i niżej wrzącej w temperaturze  $T_s$ ,

$\delta''_s$  napięcie powierzchniowe na granicy cieczy wyżej wrzącej i pary cieczy niżej wrzącej w temperaturze  $T_s$ ,

$\kappa_s$  naprężenie zwilżające w temperaturze  $T_s$ .

### 2. Sformułowanie problemu

W pracy zajęto się układem sił działających u podstawy pęcherzyka parowego w czasie nasyczonego wrzenia w zbiorniku cieczy niżej wrzącej na powierzchni cieczy wyżej wrzącej. Rysunek 1 przedstawia pęcherzyk parowy w momencie wzrostu przy powierzchni grzejnej



Rys. 1

z zaznaczeniem sił działających na jednostkę długości obwodu styku trzech faz. Prócz napięć powierzchniowych  $\sigma_s$ ,  $\sigma'_s$ ,  $\sigma''_s$  w grę wchodzi jeszcze naprężenie zwilżające  $\kappa_s$ .

Pojęcie naprężenia zwilżającego występuje po raz pierwszy u RUCKENSTEINA [1], który posłużył się nim celem wyjaśnienia ruchu cienkiej warstwy cieczy przy powierzchni grzejnej pod kolumnami pary, które tworzą się przy dużych strumieniach ciepłych. Ruch ten ma miejsce dzięki naprężeniom stycznym wywołanym działaniem międzycząsteczkowych sił

zwilżania powierzchniowego w warunkach istnienia «suchego» miejsca na powierzchni grzejnej pod kolumną pary. Jakkolwiek geometria wrzenia pęcherzykowego odbiega od geometrii wrzenia przy występowaniu kolumn pary, to z punktu widzenia działania sił międzycząsteczkowych przypadek jest analogiczny, co pozwala na użycie pojęcia naprężenia zwilżającego i w tym przypadku. Przyjmując, że naprężenie zwilżające działa w kierunku i ze zwrotem jak na rysunku otrzymuje się

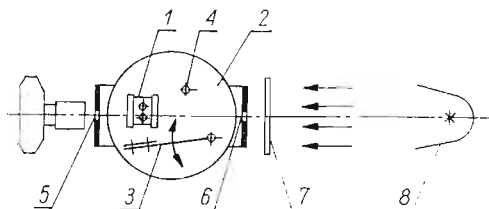
$$(1) \quad \chi_s = \sigma'_s - \sigma'_s - \sigma_s \cos \beta.$$

W poprzedniej pracy [2] autor wyznaczył przybliżone wartości  $\chi$  dla cykloheksanu, n-heksanu, 1-ehlorku butylu i cis-2-pentenu wrzących na wodnym roztworze  $\text{CaCl}_2$  o gęstości  $1390 \text{ kg/m}^3$  w temperaturze  $20^\circ\text{C}$  oraz dla n-pentanu wrzącego na wodzie destylowanej. Obliczenia przeprowadzono w oparciu o wartości  $\sigma$ ,  $\sigma'$  i  $\sigma''$  w temperaturze  $20^\circ\text{C}$ , podczas gdy kąty przylegania dotyczyły konkretnych przypadków wrzenia. Otrzymane w ten sposób wyniki poddano w obecnej pracy weryfikacji, wyznaczając doświadczalnie wartości  $\sigma$  oraz  $\sigma'_s$ . Wartości  $\sigma_s$  oraz  $\beta$  wzięto z pracy [2], gdzie między innymi zamieszczono opis instalacji do realizacji wrzenia jak również opisano pomiary kątów przylegania.

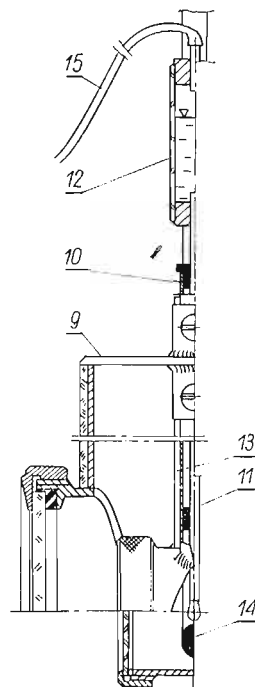
### 3. Przebieg i wyniki pomiarów napięć powierzchniowych

Celem określenia  $\sigma'_s$  i  $\sigma'_s$  wyznaczono doświadczalnie korelacje  $\sigma'(T)$  i  $\sigma''(T)$ , stosując metodę zwisającej kropli i procedurę opisaną w [2]. W skład układu pomiarowego wchodził zbiorniczek pomiarowy 1 (rys. 2) umieszczony w cieczy naczynia termostatowego 2 z grzejnikiem, mieszałem 3 i termometrem 4. Obraz wiszącej kropli fotografowano przez otwory wziernikowe 5 i 6 na tle matowej szyby 7, podświetlonej prostopadłą wiązką światła z lampy paraboloidalnej 8. Użyto aparatu fotograficznego Zenit 3M z pierścieniami dystansowymi.

Niektóre szczegóły zbiorniczka pomiarowego przedstawiono na rys. 3. Zbiorniczek o kształcie poziomego cylindryka był zawieszony u pokrywy 9 za pośrednictwem wlotowanej doń rurki 10 i wkrętów dociskowych. Rurka ta służyła jednocześnie do wprowadzenia do zbiorniczka rurki kapilarnej 11 o średnicy  $2,56 \text{ mm}$ , która swym górnym końcem wchodziła do zasobnika 12 cieczy wyżej wrzącej. Celem przeprowadzenia pomiarów  $\sigma'$ , zbiorniczek pomiarowy był napełniany za pomocą drugiej rurki 13 cieczą niżej wrzącą kilka milimetrów



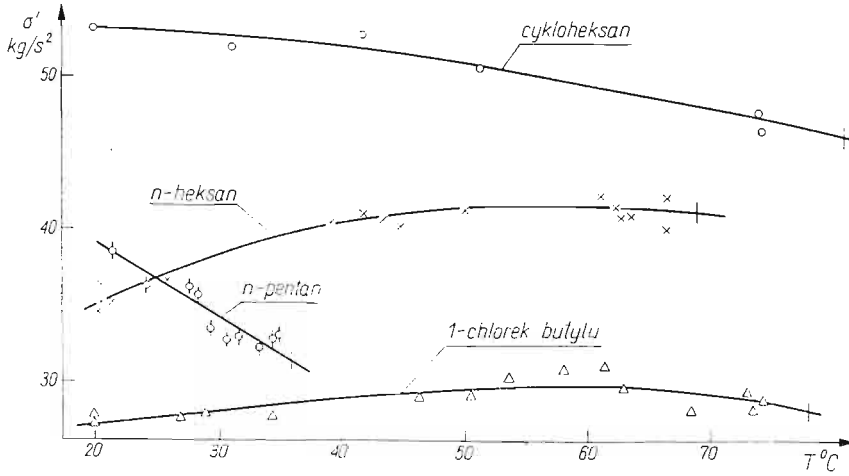
Rys. 2



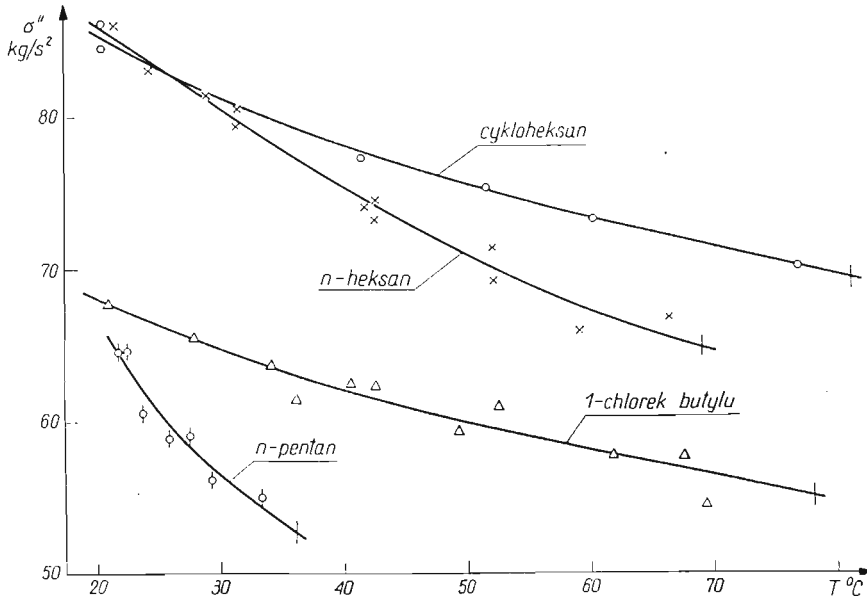
Rys. 3

powyżej dolnego końca kapilary. W czasie pomiarów  $\sigma''$  ciecz niżej wrząca wypełniała jedynie część przydenną zbiorniczka pomiarowego. Rurka 13 służyła też do umieszczenia termometru 14 w zbiorniczku pomiarowym.

Zdjęcia kropli wykonywano po ustaleniu się temperatury odczytywanej za pomocą termometru 14 oraz po osiągnięciu przez kroplę kształtu umożliwiającego wykorzystanie zdjęcia we wspomnianej metodzie. Szybkość tworzenia się kropli regulowano za pomocą zacisku na gumowej rurce 15. Czas tworzenia się kropli wynosił około 1 min.

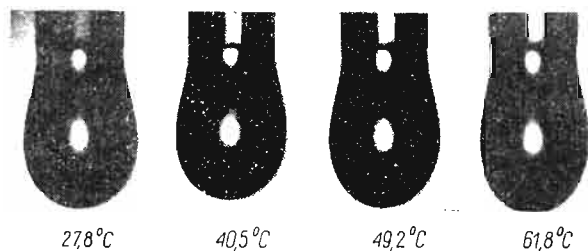


Rys. 4

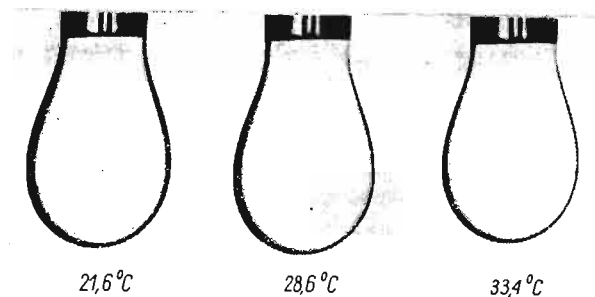


Rys. 5

Rysunek 4 przedstawia wyniki pomiarów  $\sigma'(T)$  rys. 5 zaś wyniki pomiarów  $\sigma''(T)$ . Wartości dla temperatury nasycenia otrzymano przez ekstrapolację. Dla cis-2-pentenu obliczono  $\sigma'_s$  i  $\sigma''_s$  na podstawie  $\sigma'$  i  $\sigma''$  przy temperaturze 20°C (por. [2]) przy założeniu  $d\sigma'/dT$  oraz  $d\sigma''/dT$  jak dla n-pentanu. Dla ilustracji przeprowadzonych pomiarów na rys. 6 zestawiono kilka zdjęć przedstawiających krople roztworu CaCl<sub>2</sub> zwisające u końca kapilary w powietrzu nasyconym parą 1-chloroku butylu, na rys. 7 zaś krople wody destylowanej w n-pentanie przy różnych temperaturach.



Rys. 6



Rys. 7

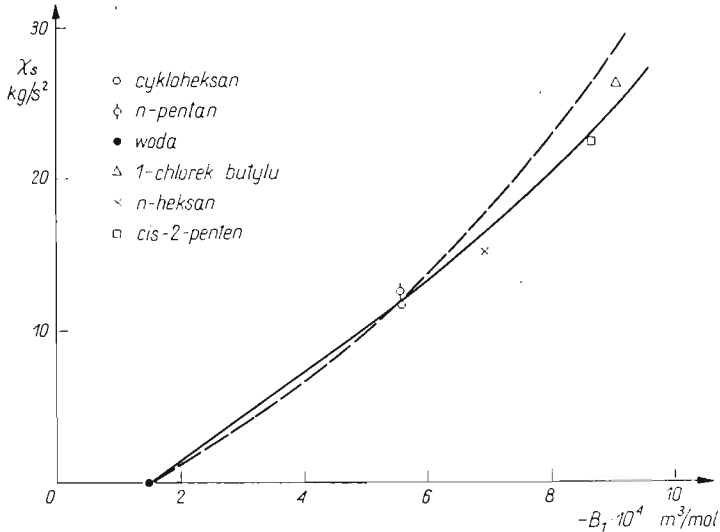
#### 4. Korelacja naprężenia zwilżającego

Naprężenie zwilżające, związane z siłami międzycząsteczkowymi, jest wspólną własnością cieczy wrzącej i substancji powierzchni grzejnej. Dla doświadczeń z tą samą powierzchnią grzejną wartość  $\chi_s$  musi zależeć od własności samej cieczy wrzącej i dlatego w tym przypadku musi istnieć zależność  $\chi_s$  od pewnych własności fizycznych cieczy. Ponieważ natura sił międzycząsteczkowych jest reprezentowana przez współczynnik wirialny w równaniu stanu, może on być wzięty jako miara. Dlatego na próbę sporządzono korelację na-

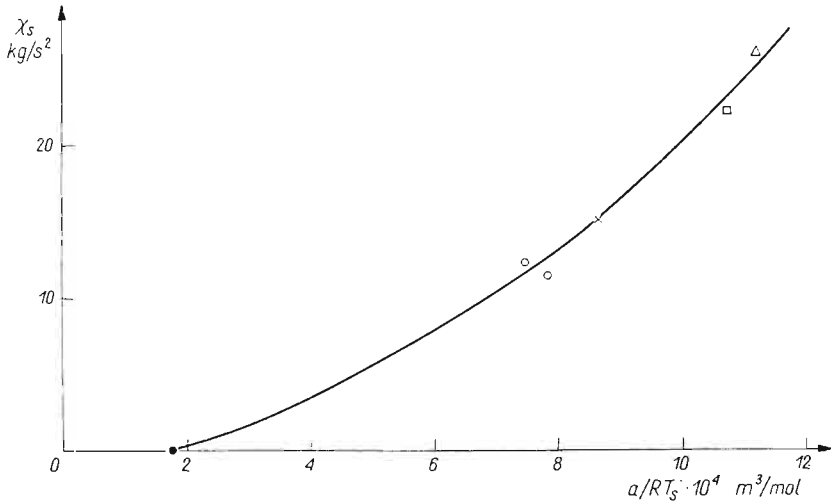
prężenia zwilżającego w stosunku do współczynnika wirialnego  $B_1(T)$  z najprostszego przypadku równania Van der Waalsa, przy czym

$$(2) \quad B_1 = b - \frac{a}{RT_s}$$

Korelacja ta jest przedstawiona na rys. 8. Linia kreskowana reprezentuje wyniki otrzymane przy użyciu wartości napięć powierzchniowych dla 20°C (por. [2]). Na rys. 9 przedstawiono



Rys. 8



Rys. 9

zależność  $\chi_s$  od  $a/(RT_s)$ . W obu przypadkach założono, że  $\chi_s$  zanika dla zwilżania substancji przez samą siebie, tak że dla wody na wodzie  $\chi_s = 0$ . Pozostaje jeszcze otwarta kwestia jaką jest zależność naprężenia zwilżającego od  $B_1$  dla cieczy wrzącej i  $B_1$  dla powierzchni grzejnej.

**Literatura cytowana w tekście**

1. E. RUCKENSTEIN, *Remarks on nucleate boiling heat transfer from a horizontal surface*, Int. J. Heat and Mass Transfer, 3, 9 (1966).
2. B. BIENIASZ, *Napężenie zwilżające działające na pęcherzyk parowy w czasie wrzenia*, Mech. Teoret. i Stos. 4, 9 (1971).

**Резюме****ДЕЙСТВИТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА СИЛ ДЕЙСТВУЮЩИХ  
НА ОСНОВАНИЕ ПАРОВОГО ПУЗЫРКА**

В работе проверена модель сил, действующих на основание парового пузырька во время насыщенного кипения в сосуде. Обнаружено, что в силовом балансе следует учитывать так называемое увлажняющее напряжение. Для пяти жидкостей, кипящих на жидкой нагревающей поверхности, измерены значения увлажняющих напряжений. Установлена зависимость между увлажняющим напряжением и первым вириальным коэффициентом.

**S u m m a r y****ACTUAL SYSTEM OF FORCES ACTING AT THE BASE OF A VAPOUR BUBBLE**

The paper presents a verification of a certain model of forces acting on the base of vapour bubble in saturated pool boiling. It is established that the so-called wetting tension must be taken into account in the balance of forces acting on the bubble. The values of the wetting forces are measured for five liquids boiling on the heating surface. The relationship between the wetting tension and the virial coefficient is established.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, RZESZÓW

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 listopada 1972 r.*

---

## ZASTOSOWANIE OPERATORÓW MIKUSIŃSKIEGO DO ZAGADNIEŃ TEORII KONSTRUKCJI NOŚNYCH

JERZY BOBLEWSKI, KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

Operatory Mikusińskiego są pożyteczne głównie tam, gdzie rozwiązuje się liniowe równania różniczkowe, zwyczajne lub cząstkowe, niejednorodne, o prawej stronie zawierającej funkcje Heaviside'a, Diraca oraz ich pochodne uogólnione.

Tego rodzaju równania pojawiają się stale w zagadnieniach teorii konstrukcji nośnych. Rozwiązywanie tych równań napotyka często poważne trudności rachunkowe, wynikające między innymi z konieczności rozważania, w wielu zagadnieniach praktycznych, obciążeń nieciągłych, skupionych oraz dyslokacji. Siły skupione rozważane w zagadnieniach dźwigarów sprężystych odpowiadają formalnie impulsom napięcia w zagadnieniach elektrotechnicznych.

Mimo tej formalnej analogii rachunek operatorowy powszechnie stosowany w literaturze elektrotechnicznej, w tym również w literaturze podręcznikowej, był rzadko stosowany do rozwiązywania zagadnień teorii konstrukcji. Wyjątek stanowi tu kilka zaledwie prac, w których jednak stosowano rachunek operatorowy oparty na transformacji Laplace'a. Są więc one dostępne dla czytelników znających teorię funkcji analitycznych. Poza tym rozważania ograniczono na ogół do zagadnień jednowymiarowych.

Chcąc w pełni wykorzystać rachunek oparty na transformacji Laplace'a, należy znać także teorię dystrybucji, aby móc stosować transformację dystrybucyjną, konieczną przy uwzględnianiu obciążeń skupionych oraz dyslokacji. Ponadto przy rozpatrywaniu zagadnień dwuwymiarowych zachodzi często konieczność stosowania wraz z dystrybucyjną transformacją Laplace'a dystrybucyjnej transformacji Fouriera. A zatem ujęcie takie jest skomplikowane zarówno pod względem teoretycznym, jak i w zastosowaniach praktycznych.

Na podstawie prac prowadzonych ostatnio w ośrodku śląskim można stwierdzić, że w szeregu zagadnień ważnych z punktu widzenia praktyki inżynierskiej, znacznie korzystniejsze jest stosowanie operatorów MIKUSIŃSKIEGO [1]. Stanowią one obok teorii dystrybucji alternatywną teorię funkcji uogólnionych, a oprócz tego dostarczają wygodnego podejścia do rozwiązywania równań różniczkowych tak zwyczajnych, jak i cząstkowych. Operatory te stosowane wraz z szeregami lub całkami Fouriera umożliwiają ogólne i przejrzyste formułowanie złożonych zadań teorii konstrukcji, a następnie ich proste rozwiązanie. Niektóre z tych możliwości zostaną omówione w dalszych punktach pracy.

## 1. Zagadnienia jednowymiarowe

Zagadnienia jednowymiarowe opisywane są zwyczajnymi równaniami różniczkowymi. Są to zagadnienia statyki belek, łuków, cienkościennych dźwigarów nośnych, zagadnienia obliczania ugięć walcowych płyt, ugięć powłok walcowych osiowo symetrycznie obciążonych itp. Opisujące je równania są z reguły równaniami liniowymi, o stałych współczynnikach, w postaci

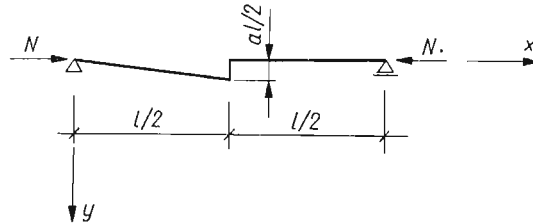
$$(1.1) \quad \sum_{i=0}^4 a_i y^{(i)}(x) = q.$$

Równanie (1.1) obejmuje jako przypadki szczególne, w zależności od wartości współczynników  $a_i$  oraz od wielkości  $q$ , prawie wszystkie praktycznie ważne zagadnienia jednowymiarowe teorii dźwigarów sprężystych.

Na przykład, gdy  $q$  zawiera obciążenie rozłożone, siły skupione, momenty skupione, dyslokacje kątowe oraz liniowe, to

$$(1.2) \quad q = \{q(x)\} + \sum_{i=1}^I P_i h^{x_i} + \sum_{j=1}^J M_j s h^{x_j} + EJ \sum_{k=1}^K \Delta_k s^2 h^{x_k} + EJ \sum_{l=1}^L \bar{\Delta}_l s^3 h^{x_l},$$

gdzie  $s$  jest operatorem różniczkowym.



Rys. 1

W innych przypadkach  $q$  może przedstawiać inne wielkości. Na przykład dla pręta ściskanego o małej wstępnej krzywiznie, w równaniu (1.1) współczynniki  $a_i$  przyjmują wartości

$$a_0 = k^2, \quad a_1 = a_3 = a_4 = 0, \quad a_2 = 1,$$

po prawej zaś stronie należy podstawić

$$q = -k^2 \{f(x)\},$$

przy czym

$$k = \sqrt{\frac{N}{EI}},$$

gdzie  $N$  jest siłą ściskającą pręt, a  $\{f(x)\}$  jest funkcją określającą początkowy kształt osi pręta.

Funkcja ta może przedstawiać także linię łamaną, na przykład

$$(1.3) \quad \{f(x)\} = a \left[ \frac{1}{s^2} - \left( \frac{l}{2s} + \frac{1}{s^2} \right) h^{1/2} \right], \quad 0 < a \ll 1.$$

Kształt pręta o osi danej wzorem (1.3) przedstawia rys. 1.



Stosowanie do omawianych równań operatorów Mikusińskiego daje duże korzyści. Nie wymaga ono poszukiwania osobnych sposobów rozwiązywania w przypadku dowolnych «obciążeń», sprowadzając je automatycznie w każdym przypadku do zwykłych równań algebraicznych. Tak więc, zalety metody operatorowej w porównaniu z metodami klasycznymi polegają na uproszczeniu obliczeń, często bardzo uciążliwych, a także na ich ujednoczeniu. Zalety te występują tym wyraźniej, im bardziej skomplikowane jest rozpatrywane zadanie.

Zastosowania operatorów Mikusińskiego do statyki belek podano w ósmym rozdziale pracy [1]. Rozdział ten z konieczności zawiera jednak zaledwie wstęp do możliwych zastosowań. Niektóre dalsze możliwości podano w pracach [2, 10].

## 2. Zagadnienia dwuwymiarowe

Rachunek operatorów Mikusińskiego można w zasadzie stosować bezpośrednio do wszelkich liniowych równań różniczkowych cząstkowych o stałych współczynnikach.

W zastosowaniu do dźwigarów powierzchniowych (głównie płyt) zasadniczą korzyścią jest to, że za pomocą pojedynczych szeregów lub całek Fouriera uwzględnia się prosto i jednolicie wszelkiego rodzaju obciążenia i dyslokacje.

Równanie liniowe o stałych współczynnikach

$$(2.1) \quad \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij} \frac{\partial^{i+j} w(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} = q$$

można przekształcić do następującej postaci operatorowej:

$$(2.2) \quad \sum_{i=0}^I a_i w^{(i)}(x) = \varphi(x),$$

gdzie

$$a_i = \sum_{j=0}^J a_{ij} s^j,$$

$$(2.3) \quad \varphi(x) = q + \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^J \sum_{l=0}^{j-1} a_{ij} s^{j-l-1} \frac{\partial^{i+l} w(x, 0)}{\partial x^i \partial y^l}, \quad w(x) = \{w(x, y)\}.$$

Jeżeli dane zagadnienie opisuje równanie (2.1) przy warunku brzegowym

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} w = 0$$

oraz dowolnych ciągłych warunkach brzegowych na prostych  $y = 0$  i  $y = b$ , a rozwiązanie ma być określone w obszarze

$$\Omega \begin{cases} -\infty < x < +\infty \\ 0 \leq y \leq b, \end{cases}$$

przy założeniu, że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} |q| dx$$

ma wartość ograniczoną oraz, że równanie charakterystyczne

$$(2.4) \quad \sum_{i=0}^I a_i u^i = 0$$

nie ma pierwiastków logarytmów, to można je łatwo otrzymać za pomocą operatorowych całek Fouriera, przedstawiając  $w(x)$  i  $\varphi(x)$  w postaci

$$w(x) = \int_0^{\infty} (w_{(\alpha)} \cos \alpha x + w_{[\alpha]} \sin \alpha x) d\alpha$$

oraz

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} (\varphi_{(\alpha)} \cos \alpha x + \varphi_{[\alpha]} \sin \alpha x) d\alpha.$$

Operatory  $w_{(\alpha)}$  i  $w_{[\alpha]}$  są wielkościami szukanymi, a operatory  $\varphi_{(\alpha)}$  i  $\varphi_{[\alpha]}$  traktujemy jako dane. Postać operatorów  $\varphi_{(\alpha)}$  i  $\varphi_{[\alpha]}$  zależy, jak to wynika z (2.3), nie tylko od znanej prawej strony równania (2.1), lecz również od warunków brzegowych na prostej  $y = 0$ . W skład operatorów  $\varphi_{(\alpha)}$  i  $\varphi_{[\alpha]}$  mogą zatem wchodzić także pewne na razie nieznanne operatory liczbowe, jednak przy poprawnie sformułowanych warunkach brzegowych rozpatrywanego zagadnienia można je łatwo wyznaczyć.

Gdy  $I+J = 4$  to między innymi szczególnym przypadkiem równania (2.1) jest równanie cienkiej, jednorodnej płyty anizotropowej o małych ugięciach [9].

Przy odpowiednio sformułowanych warunkach brzegowych wzdłuż linii  $y = 0$  i  $y = b$ , omawianym sposobem można wyznaczyć powierzchnię ugięcia anizotropowego pasma płytowego o szerokości  $b$ , dowolnie podpartego wzdłuż krawędzi  $y = 0$  i  $y = b$  oraz dowolnie poprzecznie obciążonego. Będzie to rozwiązanie dość ogólne obejmujące przypadek pasma wieloprzęsłowego podpartego wzdłuż linii  $y = y_r$ , a także przypadek pasma przegubowego podzielonego przegubami wzdłuż linii  $y = y_t$ .

W przypadku pasm wieloprzęsłowych dodatkowymi niewiadomymi są liniowo rozłożone oddziaływania podpór pośrednich, podatnych i niepodatnych.

W przypadku pasm przegubowych niewiadomymi są wzajemne kąty obrotu krawędzi połączonych przegubami sprężystymi lub beztarciowymi.

We wszystkich przypadkach wyznaczenie powierzchni ugięcia sprowadza się do rozwiązania prostych układów liniowych równań algebraicznych. Dla zilustrowania powyższego rozpatrzmy dwuprzęsłowe izotropowe pasmo płytowe o szerokości  $b$  i o krawędziach sztywno utwierdzonych, obciążone siłą skupioną o wartości  $P$  w punkcie o współrzędnych  $x = 0$  i  $y = y_1$  oraz podparte sprężystością wzdłuż linii  $y = y_2$  podporą o współczynniku podatności równym  $K$ . W tym przypadku

$$q = \frac{Q}{D},$$

gdzie  $Q$  przedstawia obciążenie pasma siłą  $P$  oraz nie znanym na razie oddziaływaniem podpory pośredniej, a  $D$  jest sztywnością.

Współczynniki  $a_{ij}$  w równaniu (2.1) przyjmują następujące wartości

$$a_{04} = a_{22} = a_{40} = 1;$$

pozostałe współczynniki  $a_{ij}$  są równe zeru.

Warunki brzegowe na prostych  $y = 0$  i  $y = b$  mają postać

$$(2.5) \quad w(x, 0) = \frac{\partial}{\partial y} w(x, 0) = 0,$$

$$(2.6) \quad w(x, b) = \frac{\partial}{\partial y} w(x, b) = 0.$$

Ponieważ w tym przypadku równanie (2.2) zawiera tylko parzyste pochodne funkcji operatorowej  $w(x)$ , a obciążenie jest symetrycznie rozłożone względem osi  $y$ , należy przyjąć

$$w(x) = \int_0^{\infty} w_{(\alpha)} \cos \alpha x d\alpha, \quad w_{[\alpha]} = 0,$$

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} \varphi_{(\alpha)} \cos \alpha x d\alpha, \quad \varphi_{[\alpha]} = 0.$$

W rozpatrywanym przypadku po uwzględnieniu warunków (2.5) otrzymujemy

$$\varphi_{(\alpha)} = \frac{P}{\pi D} h^{y_1} - \frac{1}{D} q_{(\alpha)}^* h^{y_2} + A_{(\alpha)} s + B_{(\alpha)}.$$

Operatory liczbowe  $A_{(\alpha)}$  i  $B_{(\alpha)}$  są współczynnikami rozwinięcia w całki Fouriera następujących wielkości:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, 0) = \int_0^{\infty} A_{(\alpha)} \cos \alpha x d\alpha,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial y^3} w(x, 0) = \int_0^{\infty} B_{(\alpha)} \cos \alpha x d\alpha.$$

Zaś operator liczbowy  $q_{(\alpha)}^*$ , określa oddziaływanie podpory pośredniej

$$q^*(x) = \int_0^{\infty} q_{(\alpha)}^* \cos \alpha x d\alpha.$$

Na podstawie (2.2) otrzymujemy

$$w_{(\alpha)} = \frac{\varphi_{(\alpha)}}{(s^2 - \alpha^2)^2},$$

a stąd

$$w(x) = \int_0^{\infty} \frac{\varphi_{(\alpha)}}{(s^2 - \alpha^2)^2} 2 \cos \alpha x d\alpha.$$

Wartości  $A_{(\alpha)}$ ,  $B_{(\alpha)}$  i  $q_{(\alpha)}^*$  wyznacza się z warunków (2.6) oraz z dodatkowego warunku w postaci następującej:

$$q^*(x) = Kw(x, y_2).$$

W ten sposób całe zagadnienie sprowadza się do rozwiązywania trzech prostych liniowych równań algebraicznych.

Korzystając z równań przemieszczeniowych teorii sprężystości dla płaskiego stanu naprężenia, można za pomocą przedstawionego sposobu rozwiązać szereg zagadnień statyki anizotropowych pasm tarczowych oraz szereg dwuwymiarowych ustalonych zagadnień termosprężystości.

Gdy równanie (2.2) zawiera tylko parzyste pochodne szukanej funkcji operatorowej, to rozwiązanie otrzymuje się za pomocą całek tylko sinusowych lub cosinusowych. Można w ten sposób rozwiązać szereg zagadnień półpasm płytowych.

Jeżeli rozwiązanie pewnego zagadnienia opisanego równaniem (2.1) ma być określone w obszarze

$$\Omega \begin{cases} 0 \leq x \leq a, \\ 0 \leq y \leq b, \end{cases}$$

przy warunkach

$$\begin{aligned} w(0, y) = w(a, y) = 0, \\ \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w(0, y) = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} w(a, y) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

oraz dowolnych, poprawnie sformułowanych warunkach na prostych  $y = 0$  i  $y = b$ , to można otrzymać za pomocą pojedynczych operatorowych szeregów sinusowych, zaś przy warunkach

$$\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} w(0, y) = \frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} w(a, y) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m$$

za pomocą pojedynczych operatorowych szeregów cosinusowych, przy założeniu, że równanie charakterystyczne (2.4) nie ma pierwiastków logarytmów, a równanie operatorowe (2.2) zawiera tylko parzyste pochodne szukanej funkcji operatorowej. Wartość  $m$  zależy od najwyższego rzędu pochodnej cząstkowej względem  $x$ , występującej w równaniu (2.1)

Szczególnym przypadkiem równania (2.1) odpowiadającym przedstawionym warunkom jest równanie ortotropowej, jednorodnej, cienkiej płyty prostokątnej swobodnie podpartej na brzegach  $x = 0$  i  $x = a$  oraz o dowolnych warunkach podparcia na krawędzi  $y = 0$  i  $y = b$ . W tym przypadku mamy  $I+J = 4$ , zaś  $m = 1$ .

Rozwiązania należy poszukiwać w postaci

$$w(x) = \sum_{n \geq 1} w_n \sin \alpha_n x,$$

przyjmując

$$\varphi(x) = \sum_{n \geq 1} \varphi_n \sin \alpha_n x, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Tok postępowania jest tu analogiczny do opisanego poprzednio sposobu rozwiązywania zagadnień pasma płytowego. Również w omawianym przypadku można otrzymać w sposób jednolity rozwiązania obejmujące obszerną klasę zagadnień takich, jak zagadnienia

plyt ciągłych, przegubowych, spoczywających na jednorodnym sprężystym podłożu oraz płyt obciążonych pewnymi dużymi siłami w swej płaszczyźnie. We wszystkich przypadkach można uwzględnić w ten sam sposób poprzeczne obciążenia ciągłe, obciążenia skupione oraz dyslokacje. Operatorowe rozwiązania dla płyty izotropowej przedstawiono w pracy [3].

Jak zatem widać, za pomocą całek lub szeregów operatorowych nie rozwiązujemy bezpośrednio równania cząstkowego (2.1), lecz odpowiadające mu równanie operatorowe (2.2).

Analogicznie można otrzymać ogólne rozwiązania zagadnień dynamiki prętów w postaci szeregów pojedynczych. Rozwiązania te mogą obejmować obciążenia dowolnie rozłożone oraz dowolnie zmienne w czasie (siły skupione przyłożone w sposób nagły, impulsy itp.).

Operatory Mikusińskiego stosuje się również z powodzeniem do zagadnień trójwymiarowych, np. do zagadnień dynamiki płyt. Również łatwo można otrzymać za pomocą tych operatorów rozwiązania układów równań różniczkowych, na przykład układów opisujących płyty siatkowe, których modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy ośrodek Cosseratów z wyróżnioną włóknistą strukturą [8]. Rozwiązania takie przedstawiono w pracach [5, 7].

### 3. Zagadnienia opisane za pomocą równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach

W poprzednich punktach ograniczyliśmy rozważania do równań o stałych współczynnikach, opisujących między innymi dźwigary jednorodne (stała sztywność), spoczywające na jednorodnym podłożu sprężystym. Jednak wiele ważnych zagadnień teorii konstrukcji wymaga rozwiązania równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach. Jak wiadomo za pomocą operatorów nie da się sprowadzić takich równań do równań algebraicznych i może dlatego do tego typu równań operatorów prawie nie stosowano. Ale i tu również można, za pomocą omawianych operatorów, osiągnąć w niektórych przypadkach duże korzyści.

Rozpatrzmy zwyczajne liniowe równanie różniczkowe rzędu  $n$  o zmiennych współczynnikach

$$(3.1) \quad \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = q.$$

Jeżeli współczynniki  $a_i(x)$  dadzą się aproksymować wielomianami stopnia  $m$  (np. uwzględniając  $m$  pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji  $a_i(x)$  w szereg potęgowy lub stosując inne znane metody aproksymacji), a  $q$  wyraża się wzorem (1.2), to w wielu wypadkach udaje się rozwiązać równanie (3.1) za pomocą pochodnej algebraicznej  $P_A$  [1]. Uwzględniając, że

$$\bigwedge_{\{a(x)\} \in \mathcal{X}} [P_A^j \{a(x)\} = \{(-x)^j a(x)\}],$$

gdzie  $\mathcal{X}$  jest pewną klasą funkcji zdefiniowaną w pracy [1], równanie

$$(3.2) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^j y^{(i)}(x) = q,$$

można sprowadzić do następującej postaci operatorowej:

$$(3.3) \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} (-1)^j P_A^j s^i y = \varphi,$$

gdzie

$$(3.4) \quad \varphi = q + \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{i-1} a_{i0} s^{i-l-1} y^{(l)}(0) + \sum_{i=2}^n \sum_{l=0}^{i-2} \sum_{j=1}^{i-l-1} (-1)^j a_{ij} (i-l-1)(i-l-2) \dots \\ \dots (i-l-j) s^{i-l-j-1} y^{(l)}(0).$$

Jeżeli  $q$  dane jest wzorem (1.2), to  $y$  należy przyjąć w następującej postaci:

$$(3.5) \quad y = \sum_{k \geq 0} (C_{ok} + \sum_{l=1}^T C_{lk} h^{x_l}) \frac{1}{s^{k+1}},$$

gdzie  $T$  zależy od ilości punktów nieciągłości obciążenia. Podstawiając wyrażenie (3.5) do równania (3.3), a następnie uwzględniając, że

$$\bigwedge_{a \in W(s)} \left( P_A^j a = \frac{d^j}{ds^j} a \right)$$

oraz że (por. [4])

$$\bigwedge_{x_i \geq 0} (P_A^j h^{x_i} = (-x_i)^j h^{x_i}),$$

gdzie  $W(s)$  jest wyrażeniem wymiernym operatora różniczkowego, wartości  $C_{ok}$  i  $C_{lk}$  można wyznaczyć metodą współczynników nieoznaczonych, porównując wyrażenia przy takich samych potęgach operatora różniczkowego oraz przy tych samych operatorach przesunięcia.

Przedstawiony sposób jest szerokim uogólnieniem klasycznej metody szeregów potęgowych i nadaje się szczególnie dobrze do rozwiązywania zagadnień teorii dźwigarów nośnych, gdzie mamy stałe do czynienia z równaniami o prawej stronie równej (1.2). Uogólnienie tego sposobu na zagadnienia wielowymiarowe nie przedstawia większych trudności. W pracy [4] zastosowano przedstawioną metodę do obliczania ugięć płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach.

Jak wynika z kształtu wyrażenia (3.4) nie zawsze po prawej stronie równania (3.3) występuje  $n$  stałych  $y^{(l)}(0)$ , a zatem nie zawsze można tym sposobem otrzymać całą ogólną rozpatrywanego zagadnienia.

Jednak przy rozwiązywaniu omawianych równań najtrudniej znaleźć całą szczególną równania niejednorodnego. Całą ogólną równania jednorodnego można już na ogół łatwo wyznaczyć jakkolwiek znaną metodą klasyczną. Przy rozwiązywaniu konkretnego zagadnienia należy poza tym zwrócić uwagę na to, czy otrzymane szeregi wyrażające rozwiązanie są zbieżne w żądanym przedziale. Niektóre typy równań różniczkowych o zmiennych współczynnikach można rozwiązać także za pomocą operacji  $T^\alpha$  [1].

Jeżeli współczynniki  $a_i(x)$  równania (3.1) dadzą się aproksymować funkcjami wykładniczymi

$$(3.6) \quad a_i(x) = a_i \delta^{x/b},$$

gdzie  $x/b$  jest zmienną bezwymiarową określoną w przedziale  $0 \leq x/b \leq 1$ , a  $\delta$  odpowiednio dobraną stałą, to równanie (3.1) można przedstawić w postaci

$$(3.7) \quad \sum_{i=0}^n a_i \delta^{x/b} y^{(i)}(x) = q.$$

Uwzględniając, że

$$\bigwedge_{\{a(x)\} \in \mathcal{X}} [T^\alpha \{a(x)\} = \{e^{\alpha x} a(x)\}],$$

równanie (3.7) sprowadza się do następującej postaci operatorowej:

$$(3.8) \quad \sum_{i=0}^n a_i T^{b^{-1} \ln \delta} s^i y = \varphi,$$

gdzie

$$\varphi = q + \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{i-1} a_i \left( s - \frac{1}{b} \ln \delta \right)^{i-l-1} y^{(l)}(0).$$

Jeżeli  $q$  przedstawia obciążenie złożone tylko z sił skupionych, to  $y$  można przyjąć w postaci (3.5). Podstawiając wyrażenie (3.5) do równania (3.8) a następnie uwzględniając, że

$$\bigwedge_{aW \in (s)} [T^\alpha a(s) = a(s - \alpha)]$$

oraz że (por. [6])

$$\bigwedge_{x_i \geq 0} (T^{b^{-1} \ln \delta} h^{x_i} = \delta^{x_i/b} h^{x_i}),$$

wartości  $C_{ok}$  i  $C_{ik}$  wyznacza się metodą współczynników nieoznaczonych porównując współczynniki przy tych samych potęgach wyrażenia

$$(3.9) \quad \left( s - \frac{1}{b} \ln \delta \right)$$

oraz przy tych samych operatorach przesunięcia.

Jeżeli po prawej stronie równania (3.8) wystąpią operatory różniczkowe, w wyrazach których nie można przekształcić do potęg wyrażenia (3.9), to sposobem tym nie można otrzymać rozwiązania.

Jeżeli natomiast  $y$  przedstawiamy w postaci następującej:

$$y = \sum_{k \geq 0} \left( C_{ok} + \sum_{i=1}^T C_{ik} h^{x_i} \right) \frac{1}{\left( s + \frac{1}{b} \ln \delta \right)^{k+1}},$$

to można w każdym przypadku wyznaczyć wartości  $C_{ok}$  i  $C_{ik}$  porównując wyrażenia przy tych samych potęgach operatora różniczkowego oraz przy tych samych operatorach przesunięcia. Również i w tym przypadku uogólnienie omawianego sposobu na zagadnienie

nia wielowymiarowe nie przedstawia większych trudności. W pracy [6] zastosowano omawiany sposób do rozwiązania zagadnienia płyty o jednokierunkowo zmiennej sztywności.

W wielu przypadkach rozwiązanie można otrzymać w sposób prosty, wykonując po prawej i lewej stronie równania (3.8) operację  $T^{-b^{-1}\ln\delta}$ , otrzymujemy wtedy równanie następujące:

$$\sum_{i=0}^n a_i s^i y = \bar{q},$$

gdzie

$$\bar{q} = T^{-b^{-1}\ln\delta} q = T^{-b^{-1}\ln\delta} q + \sum_{i=1}^n \sum_{l=0}^{i-1} a_i s^{i-l-1} y^{(l)}(0).$$

Sposób ten nadaje się szczególnie dobrze do tych przypadków, w których  $q$  zawiera tylko siły skupione

$$q = \sum_{i=1}^I P_i h^{x_i},$$

gdyż wtedy

$$T^{-b^{-1}\ln\delta} q = \sum_{i=1}^I \delta^{-x_i/b} P_i h^{x_i}.$$

Widać więc, że rachunek operatorów Mikusińskiego stanowi skuteczne i nowoczesne narzędzie. Powinien zatem być powszechniej stosowany przez inżynierów oraz pracowników naukowych interesujących się zagadnieniami konstrukcji nośnych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
2. A. SŁOMKA, K.H. BOJDA, *O zastosowaniu operatorów Mikusińskiego do obliczania ugięć walcowych płyt ściskanych o małej wstępnej krzywiznie walcowej*, Prace Wydz. Tech. U. Śl. (w druku).
3. K. H. BOJDA, *Ugięcia płyt na sprężystym podłożu o zmiennym współczynniku podatności*, Rozpr. Inż., 3 (1971).
4. K. H. BOJDA, *Ugięcia płyt ortotropowych o zmiennych sztywnościach i pewnych nieciągłych warunkach brzegowych*, Rozpr. Inż., 4 (1971).
5. K. H. BOJDA, *Pewne problemy statyki płyt siatkowych*, Rozpr. Inż., 2 (1972).
6. K. H. BOJDA, *Płyty prostokątne o jednokierunkowo zmiennej sztywności*, Mech. Teoret. i Stosowana, 3 (1972).
7. K. H. BOJDA, *Obliczanie perforowanych płyt ciągłych*. Rozprawa doktorska, Pol. Śląska, Gliwice 1972.
8. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigiary powierzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
9. Z. KACZKOWSKI, *Płyty*, Arkady, Warszawa 1968.
10. K. H. BOJDA, *Analityczno-wykreslna metoda Mohra w ujęciu operatorowym*, Prace Wydz. Tech. U. Śl. (w druku).



## Р е з ю м е

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ МИКУСИНСКОГО В ЗАДАЧАХ  
ТЕОРИИ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе представлены приложения операторов Микусинского к решению задач теории несущих конструкций. Обсуждены применения этих операторов в одномерных и двумерных задачах, а также в задачах, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Представленные способы охватывают как классические методы в широком обобщении, так и новые методы теории несущих систем. Во всех рассмотренных случаях указана значительная польза, достигаемая применением рассматриваемых операторов.

## S u m m a r y

APPLICATION OF THE MIKUSIŃSKI OPERATORS TO THE PROBLEMS OF ENGINEERING  
STRUCTURES

The paper presents the application of the Mikusiński operators to one- and two-dimensional problems and to problems which may be reduced to the differential equations with variable coefficients. The methods presented contain broadly generalized classical methods as well as certain methods which have not been applied so far in the theory of structures. In all cases considerable advantages of the operators are demonstrated.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 1 grudnia 1972 r.*

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## XIII MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

Moskwa, 21—26 sierpnia 1972

Tradycje międzynarodowych kongresów mechaniki sięgają już niemal pół wieku, pierwszy kongres odbył się bowiem w r. 1924 w Delft w Holandii. Trzynasty kongres, który obradował w okresie 21—26 sierpnia 1972 r. w Moskwie, miał rozszerzoną nazwę w stosunku do tradycyjnej: «Kongres Mechaniki «Teoretycznej i Stosowanej», podczas gdy wszystkie poprzednie nosiły węższą nazwę «Kongres Mechaniki Stosowanej». W ten sposób usankcjonowano stan faktyczny, bowiem już na kilku ostatnich kongresach zagadnienia teoretyczne zaczęły co najmniej dorównywać, o ile nie przewyższać, liczbą zagadnienia stosowane.

Po raz pierwszy w historii Kongresów Mechaniki został on zorganizowany przez kraj socjalistyczny. Ogromny rozwój mechaniki w Kraju Rad niewątpliwie w dużym stopniu wpłynął na wybór miejsca XIII Kongresu, a stolica ZSRR stała się magnesem, który przyciągnął rekordową liczbę uczestników, znacznie przekraczającą wszystkie dotychczasowe. Podczas gdy największa dotychczasowa liczba uczestników, na XII Kongresie w Stanfordzie w r. 1968, wyniosła 1232 zarejestrowanych osób, to na Kongresie w Moskwie zarejestrowano 2540 uczestników, a więc ponad dwukrotnie więcej oraz około dziesięć razy więcej niż to było na Kongresie w Delft.

Na XIII Kongresie w Moskwie niemal wszystkie delegacje były większe w porównaniu z poprzednimi kongresami. Dotyczy to oczywiście w pierwszym rzędzie gospodarzy — w kongresie wzięło udział 1523 uczestników radzieckich, reprezentujących wszystkie większe ośrodki. Ale i liczba ponad 1000 gości zagranicznych jest znacznie większa niż w ubiegłych latach. Największą była tu delegacja USA 226 osób; (w Stanfordzie w r. 1968 — 815, w Monachium w r. 1964 — 130); w kolejności Wielka Brytania — 93 osoby (71), (w nawiasach podano dla porównania liczebność delegacji na Kongresie w Stanfordzie), Francja — 90 (56), Czechosłowacja — 81 (4), Polska — 75 (11), Bułgaria — 74 (5), NRF — 59 (49), Holandia i Szwecja po 32, Japonia i Jugosławia po 30, Kanada 28, NRD 27, Rumunia 25, Włochy 22. Ogółem delegacje reprezentowały 38 państw ze wszystkich pięciu części świata.

Delegacja polska składała się w większości z pracowników IPPT PAN, ponadto było kilkunastu przedstawicieli wyższych uczelni, przede wszystkim Uniwersytetu Warszawskiego, Politechniki Warszawskiej, Politechniki Krakowskiej i Wojskowej Akademii Technicznej. W obradach kongresu brała udział również grupa studentów UW, przebywających w tym czasie na praktyce zagranicznej w Moskwie.

Kongres Moskiewski został przygotowany przez 21-osobowy Komitet Kongresów Międzynarodowej Unii Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej (IUTAM) pod przewodnictwem prof. W. T. KOITERA (Polskę reprezentował w nim prof. W. RUBINOWICZ) i przez 20-osobowy Radziecki Komitet Organizacyjny pod kierownictwem prof. N. I. MUSCHELISZWILEGO. W pracach organizacyjnych uczestniczył również Instytut Problemów Mechaniki AN ZSRR, Instytut Matematyki AN ZSRR i Instytut Mechaniki Uniwersytetu Moskiewskiego. Kongres był częściowo finansowany przez Akademię Nauk ZSRR.

Na Kongres zgłoszono ponad tysiąc, a przyjęto do wygłoszenia 228 referatów dwudziestominutowych. Oprócz tego wygłoszono na zaproszenie Komitetu Organizacyjnego 5 referatów generalnych i 20 referatów sekeyjnych. W stosunku do liczby referatów na poprzednim kongresie w Stanfordzie (ogółem 291) oznacza to pewne ograniczenie, natomiast zwiększono czas na poszczególne referaty i dyskusję. Referaty generalne trwały godzinę, podobnie jak w Stanfordzie, natomiast referaty sekeyjne wydłużono również do godziny, podczas gdy poprzednio ograniczono je do 30 minut i 10 minut dyskusji. Referaty 15-minutowe ze Stan-

fordu wydłużono do 20 minut z pozostawieniem 10 minut na dyskusję, zorganizowano również trzy dwugodzinne spotkania, zwane dyskusjami okrągłego stołu.

Uległy również pewnej zmianie proporcje referatów z poszczególnych dziedzin. Podczas gdy w Monachium liczby prac z zakresu mechaniki ciał stałych i z zakresu mechaniki cieczy i gazów były niemal równe, a w Stanfordzie wyraźnie przeważała mechanika ciał stałych, to w Moskwie znowu powrócono do niemal równego podziału między te dwie zasadnicze gałęzie. Powną węższą klasyfikację tematyki referatów przeprowadzili już organizatorzy kongresu, grupując je po kilka lub kilkanaście i tytułując poszczególne sesje obrad sekcyjnych (podobnie jak w Stanfordzie). Sekcji było 35, referatów sekcyjnych 20, nie stanowiły one jednak wprowadzenia do obrad w sekcjach, jak mogłoby się wydawać, były natomiast dostępne dla większej liczby uczestników, ponieważ odbywały się w Dużej Auli. Na jedną sekcję przeznaczono od jednego do czterech posiedzeń (np. turbulencja). Po wyłączeniu referatów sekcyjnych możemy w następujący sposób zestawzić grupy tematyczne referatów:

### I. Mechanika ciał stałych i sztywnych

1. Dynamika budowli i dynamika ciał odkształcalnych	22
2. Dynamika ciał sztywnych, astrodynamika i giroskopy	18
3. Mechanika budowli, powłoki	13
4. Teoria plastyczności	12
5. Pękanie, szczeliny	12
6. Stateczność powłok	10
7. Teoria drgań, stateczność układów mechanicznych	10
8. Teoria sprężystości	9
9. Konstrukcje optymalne	7
10. Lepkosprężystość, pełzanie	6
11. Zagadnienia kontaktowe	5
12. Elastooptyka	5
	<hr/>
razem	129

### II. Mechanika cieczy i gazów

1. Turbulencja	26
2. Dynamika gazów	20
3. Stateczność hydrodynamiczna	11
4. Teoria profilu	10
5. Hydrodynamika cieczy idealnej	8
6. Przepływy dwufazowe	8
7. Fale powierzchniowe	7
8. Fale w gazach	6
9. Biomechanika	6
10. Przepływy z wymianą ciepła	5
11. Magneto hydrodynamika	5
12. Ciecze ze złożoną charakterystyką	5
13. Gazy rozrzedzone	3
	<hr/>
razem	120
	<hr/>
Aerosprężystość	4
	<hr/>
ogółem	253

Porównanie tych liczb z odpowiednimi liczbami na XII Kongresie w Stanfordzie jest trudne o tyle, że w kilku przypadkach zastosowano nieco inną klasyfikację. W zakresie mechaniki ciał stałych można jednak stwierdzić wyraźny wzrost liczby prac z zakresu dynamiki, zarówno ciał odkształcalnych, jak i sztywnych oraz wypada podkreślić wyodrębnienie grupy konstrukcji optymalnych. Mniej prac zakwalifikowano z zakresu teorii ogólnej i stateczności powłok (w Stanfordzie z zakresu powłok przyjęto ogółem 46 prac) i teorii pelzania; ten ostatni fakt można wiązać ze stosunkowo niedawnymi obradami sympozjum IUTAM w Göteborgu, poświęconym w całości problematyce pelzania. W zakresie mechaniki cieczy i gazów rzuca się w oczy znaczny wzrost liczby prac z zakresu turbulencji (w Stanfordzie było ich zaledwie 8) i wyraźnie zmniejszenie liczby prac z biomechaniki. Zagadnienia mechaniki ogólnej były omawiane na 5 sesjach (punkty 2 i 7 mechaniki ciał stałych i sztywnych), wiele referatów można by tutaj zaliczyć raczej do matematyki stosowanej. Pojawiły się zagadnienia związane z ruchem satelitów, ich sterowania i powrotu.

Według krajów pochodzenia referaty na XIII Kongresie przedstawiały się następująco:

	referaty generalne	referaty sekcyjne	referaty mech. ciała stałego	zwykle mech. cieczy i gazów	razem
ZSRR	1	6	33	24	64
USA	1	5	24	24½	54½
W. Brytania	1	2	9	12	24
Francja	—	1	9	9	19
NRF	1	1	9	7	18
Australia	—	1	1	3	5
Belgia	1	—	1½	½	3
Berlin Zach.	—	—	1	—	1
Bulgaria	—	—	2	—	2
Czechosłowacja	—	—	3	1	4
Dania	—	1	3	1	5
Ghana	—	—	½	—	½
Holandia	—	1	1	3	4
Indie	—	—	2	2	4
Japonia	—	—	4	4	8
Jugosławia	—	—	—	1	1
Kanada	—	1	4	5½	10½
Norwegia	—	—	—	½	½
NRD	—	—	2	1	3
Polska	—	—	6	3	9
Portugalia	—	—	1	—	1
Rumunia	—	—	1	1	2
Szwajcaria	—	—	—	1	1
Szwecja	—	1	2	1	4
Turcja	—	—	½	—	½
Węgry	—	—	1	—	1
Włochy	—	—	2½	—	2½
razem	5	20	122	106	253

Jak widać z powyższego zestawienia referaty wygłosili przedstawiciele 27 państw (w Stanfordzie również 27 państw). Siedem referatów było wynikiem współpracy międzynarodowej, celowali w tym przedstawiciele USA, którzy przedstawili referaty wspólne z przedstawicielami Belgii, Ghany, Turcji, W. Brytanii i Włoch.

Były jeszcze referaty belgijsko-norweski i kanadyjsko-angielski. Niestety nie zauważyliśmy wspólnych referatów w ramach krajów RWPG.

Interesujący jest wskaźnik liczby uczestników z poszczególnych krajów przypadającej na jeden wygłoszony referat przez przedstawiciela tego kraju. Z uwagi na miejsce obrad wskaźnik ten jest najwyższy dla państw socjalistycznych z Europy środkowej i wschodniej; gospodarze nie są tu jednak wcale na pierwszym miejscu. Najwyższy stosunek liczby uczestników do liczby wygłoszonych referatów wykazuje Bułgaria (37), dalej Jugosławia (30) i dopiero na trzecim miejscu ZSRR (24). W dalszej kolejności znajdują się: Węgry (22), Czechosłowacja (20), Rumunia (13), NRD (9) i Polska (8,5). To ostatnie miejsce Polski w grupie państw socjalistycznych wskazuje z jednej strony na słabe zainteresowanie naszego Kraju w wysyłaniu uczestników w charakterze obserwatorów i dyskutantów, ale z drugiej strony związane jest ze znaczną liczbą zakwalifikowanych do wygłoszenia referatów. Dalsze miejsca zajmują: Szwecja (8), Włochy (7,3), Holandia (6,4), Francja (4,7), USA (4) i Wielka Brytania (3,9). Oczywiście w wykazie tym pominięto kraje, których przedstawiciele nie wygłosili żadnego referatu.

Obrady Kongresu rozpoczęły się w poniedziałek, 21.VIII.1972 r, o godz. 10.00, uroczystym otwarciem w Kremłowskim Pałacu Zjazdów. Po licznych przemówieniach okolicznościowych referat generalny *O perspektywach podjęcia fenomenologicznego do problematyki pękania* wygłosił W. W. Nowożiłow (Leningrad). Autor omówił istniejące, możliwie proste podjęcia do zagadnień pękania i wyraził przekonanie, iż z czasem zostaną one ujęte w pewną teorię ogólną. Perspektywy zarysowano na tle porównania rozwoju teorii pękania ze znanym rozwojem fenomenologicznych teorii plastyczności. Po zakończeniu ceremonii otwarcia władze miejskie Moskwy zorganizowały — na górnym piętrze Kremłowskiego Pałacu Zjazdów — przyjęcie na cześć gości zagranicznych.

Dalsza część obrad odbywała się równolegle w sześciu salach Uniwersytetu Moskiewskiego im. Łomonosowa na Wzgórzach Leninowskich. Aula i sala klubowa były znakomicie klimatyzowane, natomiast w pozostałych salach panująca wysoka temperatura utrudniała obrady; trzeba jednak stwierdzić, że fala upałów była w Moskwie wyjątkowo silna. Obrady odbywały się codziennie od 9.00 do 12.40 i od 14.40 do 17.40. Popołudnie w środę wolne było od obrad, natomiast sobota była dniem obrad aż do godziny 18.00, co było pewnym zaskoczeniem dla uczestników tym bardziej, że dokładny program Kongresu został udostępniony dopiero na miejscu, a poprzednie kongresy tradycyjnie kończyły się w piątki lub soboty przed południem. Włączenie soboty do obrad dało jednak w wyniku zwiększenie limitów czasowych na referaty i dyskusje.

Nie mając możliwości omówienia, lub choćby nawet przytoczenia tytułów wszystkich 253 referatów, poprzestaniemy na krótkim omówieniu referatów generalnych i godzinnych referatów sekcyjnych, wyselekcjonowanych przez Komitet Organizacyjny Kongresu. Omówimy je w kolejności wygłaszania.

Pierwszy referat sekcyjny wygłosił w poniedziałek po południu G. F. CARRIER (Cambridge, Mass., USA) na temat *Dynamika wirów atmosferycznych*. Zjawiska typu *trąb powietrznych* opisał autor przy uwzględnieniu przewodnictwa cieplnego i innych efektów termodynamicznych. S. S. GRIGORIAN (Moskwa) w referacie *Pewne problemy mechaniki w przemyśle naftowym* rozważał następujące zagadnienia: procesy falowe w kolumnach rur wiertniczych; niestabilne przepływy ropy naftowej w pokładach; zjawiska kawitacji w rurociągach towarzyszące niestabilnemu pompowaniu cieczy; nowe prawo filtracji w ośrodku porowatym uwzględniające gradient początkowy; problemy tamowania wybuchów gazu; problemy związane z wierceniami podmorskimi.

We wtorek wygłoszony został jeden referat generalny i cztery sekcyjne. Referat generalny M. J. LIGHTHILLA (Cambridge, Anglia) *Poruszanie się zwierząt wodnych* wzbudził duże zainteresowanie, jednak autor niezbyt właściwie rozmieścił go w czasie: po 50 minutach wstępu poświęcono tylko 10 minut na treść zasadniczą. Uzależniono opis ruchu zwierzęcia od liczby Reynoldsa i poddano szczegółowej analizie mechanizm poruszania się ryb.

Referat sekcyjny M. LANDAHLA (Sztokholm, Szwecja) *Redukcja oporu czołowego przez dodatek polimerów* poświęcony był wyjaśnieniu zjawiska Toma, mianowicie zmniejszenia oporu czołowego przy ruchu burzliwym. Autor wykorzystał nowe osiągnięcia dynamiki zawieszin do wyjaśnienia nieoczekiwanych reologicznych własności cieczy z dodatkami polimerów. H. L. GOLDSMITH (Montreal, Kanada) wygłosił referat *Mikroreologia zawieszin erytrocytów ludzkich*. Zjawiska mikroreologiczne zilustrowano filmem i przedstawiono ich związek ze znanymi mikroskopowymi własnościami przepływu krwi u człowieka zdrowego i chorego. J. R. MELCHER (Cambridge, Mass., USA). W referacie *Elektrohydrodynamika* sklasyfikował

zjawiska makroskopowego sprzężenia pól elektrycznych i cieczy. Wyodrębniono mianowicie zjawiska czystej polaryzacji, współdziałania z warstwami pojedynczymi ładunków, siły ładunków bezobjętościowych i współdziałania z warstwami podwójnymi ładunków. Ostatni referat sekcyjny we wtorek, *Dynamika gazów z punktu widzenia teorii kinetycznej*, wygłosił J. P. GUIRAUD (Paryż). Pomimo iż równania Boltzmanna znane są od stu lat, teoria kinetyczna została zastosowana do dynamiki gazów rozrzedzonych dopiero w ostatnim dwudziestolecu; autor omówił osiągnięcia w tym zakresie i wskazał na występujące trudności.

W środę został wygłoszony jeden referat generalny i dwa sekcyjne. Referat generalny *Hydrodynamika okrętów* wygłosił K. WIEGHARDT (Hamburg, NRF). Zwrócono uwagę na specyfikę problemu, związaną ze swobodną powierzchnią cieczy wokół okrętu. Warstwa przyścienna okrętu musi przy tym uwzględniać lepkość cieczy i zjawiska turbulencji, a w niektórych przypadkach również ściśliwość, związaną z pęcherzykami powietrza w cieczy. Pierwszy referat sekcyjny L. I. SIEDOWA (Moskwa) *Nieustalone przyplawy wody o wysokich prędkościach* stanowił rozwinięcie referatu, wygłoszonego na sympozjum IUTAM w Leningradzie w r. 1971. Omówiono zjawiska kawitacji, a szczególną uwagę poświęcono przepływowi cieczy z pęcherzykami gazu. Drugi referat sekcyjny wygłosił M. S. LONGUET-HIGGINS (Cambridge, Anglia); tytuł referatu *Łamanie fal*. Nie istnieje dotychczas ogólna teoria łamania fal powierzchniowych; autor omówił jedynie trzy problemy *cząstkowe*, mianowicie fale o ograniczonej amplitudzie, badanie powierzchni swobodnej cieczy w pobliżu punktu łamania fali i badanie mieszanego laminarno-burzliwego przepływu następującego po utworzeniu się białych grzyw.

Obrady czwartkowe obejmowały jeden referat generalny i cztery sekcyjne. Referat generalny *Teoria sterowania w układach przypadkowych* wygłosił A. E. BRYSON (Stanford, California, USA). Stanowił on przegląd metod sterowania układów dynamicznych opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Autor stwierdził, że w wielu zagadnieniach proces stochastyczny typu Gaussa-Markowa lepiej odpowiada rzeczywistości, niż proces deterministyczny; przykłady dotyczyły sterowania pojazdów kosmicznych i samolotów.

Pierwszy referat sekcyjny *Dynamika układów związanych ciał sztywnych* został wygłoszony przez A. Ju. ISZLINSKIEGO (Moskwa). Autor poruszył problemy giroskopów o nieidealnych łożyskach, problemy synchronizacji, zagadnienia dynamiki układów przy tarcu suchym; zastosowania teorii dotyczyły nawigacji inercyjnej. F. I. NIORDSON i P. PEDERSEN (Lyngby, Dania) wygłosili referat przeglądowy *Optymalizacja układów mechanicznych (konstrukcji)*. Omówiono osiągnięcia ostatnich lat w zakresie optymalizacji prętów, belek, słupów, luków, płyt i powłok oraz układów złożonych. Autorzy omówili również podstawowe metody optymalizacji i tematykę czekającą na opracowanie. Obrady popołudniowe otworzył J. R. PHILIP (Canberra, Australia) referatem *Przepływy w ośrodkach porowatych*. Dokonano przeglądu osiągnięć pod kątem widzenia zastosowań w mechanice gruntów i hydrologii. J. C. ROTTA (Getynga, NRF) wygłosił referat *Obliczanie burzliwej warstwy przyściennej na bazie równań naprężeń Reynoldsa*. Autor położył nacisk na uzyskanie metod obliczeniowych, dających się zastosować do szerokiej klasy przepływów burzliwych, analizowanych w oparciu o równania Naviera-Stokesa.

Ostatni referat generalny został wygłoszony w piątek rano przez B. M. FRAELIS de VEUBEKE (Leodium, Belgia) *Numeryczna analiza konstrukcji*. Szczególną uwagę poświęcił autor metodzie elementów skończonych; w zakresie sprężystym pracy konstrukcji jej stosowanie jest ułatwione przy jednoczesnym wykorzystaniu zasad wariacyjnych. Omówiono również metody przestrzeni funkcyjnych Pragera-Synge'a. Ciekawe było intuicyjne uzasadnienie postępowania «dyskretyzacyjnych». Zaletą metody jest możliwość zaniebdywania wpływów nie mających dużego znaczenia oraz łatwość rozpatrywania złożonych struktur topologicznych i nieciągłości.

Obrady piątkowe obejmowały ponadto pięć referatów sekcyjnych. W. T. KOITER i J. G. SIMMONDS (Delft, Holandia) przedstawili pracę *Podstawy teorii powłok*. Wymienili oni pięć typowych podejść do ogólnej teorii powłok: podejście czysto dwuwymiarowe, przy traktowaniu powłoki jako powierzchni typu Cosseratów (Naghdi); asymptotyczne całkowanie równań liniowej teorii sprężystości (Goldenweizer); oszacowanie błędów nieliniowej teorii powłok (John); wykorzystanie twierdzenia Pragera-Synge'a o hiperokręgu w teorii sprężystości; punktowe oszacowanie błędu w teorii liniowej powłok obrotowych (Ho i Knowles). Bardziej szczegółowo omówiono osiągnięcia w zakresie teorii nieliniowych. Kolejny referat *O metodach wyprowadzenia i całkowania równań równowagi powłok cienkich* wygłosił I. N. WEKUA (Tbilisi, ZSRR). Omawiana metoda polega na przedstawieniu niewiadomych funkcji jako wielomianów względem odległości od powierzchni środkowej powłoki. W przypadku płyt występuje wtedy rozprężenie układu równań;

w ogólnym przypadku proponuje się wprowadzenie współrzędnych izometrycznych na powierzchni środkowej. L. E. SCRIVEN (Minneapolis, Minnesota, USA) przedstawił pracę *Molekuly i cząstki a ośrodek ciągły*, w której omówił perspektywy opisu realnych materiałów przy pomocy teorii ośrodków ciągłych z mikrostrukturą. H. W. LIEPMANN (Pasadena, California, USA) wygłosił referat *Doświadczalna mechanika płynów w aspekcie nowoczesnej aparatury*. Zwrócono szczególną uwagę na badania dynamiczne, na badania w temperaturach bliskich absolutnego zera i na zastosowanie laserów do pomiaru prędkości przepływu. Ostatni referat sekcyjny wygłosił w piątek A. A. DERIBAS (Nowosybirsk, ZSRR) *O pewnych zjawiskach przy zderzeniach ciał ze znacznymi prędkościami*. Badano zderzenia ciał z metalu przy prędkościach rzędu setek metrów na sekundę; autor rozważał tworzenie się procesów falowych i drgań samowzбудnych. Badano również efekt lepkości przy zderzeniach.

W ostatnim dniu obrad zostały wygłoszone trzy referaty sekcyjne. N. J. HOFF (Stanford, California, USA) wygłosił referat przeglądowy *Wyhoczenie pelzające płyty i powłok*. Autor zwrócił uwagę na podobieństwa i różnice w stosunku do wyboczenia sprężystego i sprężysto-plastycznego. Podano przegląd wyników teoretycznych i badań doświadczalnych. E. H. MANSFIELD (Farnborough, Anglia) przedstawił pracę *Metoda odwrotna w dwuwymiarowych zagadnieniach teorii sprężystości*; tytuł pracy nie odpowiada jej treści, bowiem autor miał na myśli nie tyle metodę odwrotną, ile zagadnienie odwrotne, mianowicie optymalne kształtowanie tarcz płaskich. Na marginesie warto wspomnieć, że równoległe do tego referatu na innej sali obradowała jedyna zresztą sesja poświęcona konstrukcjom optymalnym — takie ustawienie referatów w czasie niewątpliwie stanowi niedopatrzenie organizatorów. Ostatni referat sekcyjny *Zagadnienie niejednorodności i stateczności w nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych* wygłosił I. I. WOROWICZ (Rostow nad Donem, ZSRR). W ujęciu deterministycznym i probabilistycznym omówiono nieliniowe zagadnienia stateczności pod obciążeniami konserwatywnymi i niekonserwatywnymi, a także stateczności hydrodynamicznej.

Wymienimy jeszcze tytuły dziewięciu zakwalifikowanych i wygłoszonych na Kongresie prac polskich: M. K. DUSZEK *O zagadnieniu zasad minimalnych w teorii plastyczności przy uwzględnieniu zmian geometrii*; W. FISZDON, A. WORTMAN i Z. WALENTA *Doświadczalne i teoretyczne badania wpływu warstwy przysięennej na fale uderzeniowe*; W. KOSIŃSKI *Termomechaniczne sprzężenie w materiałach z pamięcią*; J. LITWINI-SZYN *Nieuustalone przepływy zawiesiny o zmiennej koncentracji*; W. OLSZAK i P. PERZYNA *Fizyczna teoria lepkoplastyczności dla małych odkształceń*; Z. PERADZYŃSKI *Zagadnienie nieliniowego współdziałania fal na przykładzie dynamiki gazów*; S. ZAHORSKI *Niewiskozymetryczne przepływy z proporcjonalną historią deformacji*; H. ZORSKI *Kontynuálny model układów dynamicznych*; M. ŻYCZKOWSKI i K. SZUWALSKI *Nedopuszczalne nieciągłości w teorii plastyczności*.

W ramach Kongresu zorganizowane zostały trzy dyskusje «okrągłego stołu». Dotyczyły one: hydrodynamiki przemysłowej (przewodniczył P. R. OWEN, W. Brytania), procesów optymalizacji układów mechanicznych (przewodniczył N. N. KRASOWSKU, ZSRR) oraz teorii pękania (przewodniczył Ju. N. RABOTNOW, ZSRR). W istocie były to nie tyle dyskusje, lecz krótkie (nie zawsze) referaty zainteresowanych pracowników nauki zaproszonych przez przewodniczącego obrad do prezydium i zabrania głosu, oraz osób z sali.

Na prośbę redakcji skierowaną do polskich uczestników Kongresu w Moskwie wpłynęło szereg wypowiedzi. Wyróżniono kilka referatów, które szczególnie zainteresowały słuchaczy, jeżeli nie uwzględniać omówionych powyżej referatów sekcyjnych, były to referaty: K. A. ŁURIE *Optymalne projektowanie niejednorodnych ciał ciągłych* i F. L. CZERNOUSZKO *Zagadnienia optymalnego projektowania w układach o niepełnej informacji*, było to wystąpienie w dyskusji okrągłego stołu wykraczające poza ramy konwencjonalnych problemów rozpatrywanych w mechanice konstrukcji. Z dziedziny teorii pękania szczególnie interesujący był referat J. K. KNOWLESA i E. STERNBERGA pt. *Asymptotyczna analiza statycznych naprężeń i przemieszczeń w otoczeniu wierzchołka szczeliny w przypadku dużych odkształceń*, była to jak się wydaje pierwsza próba takiego potraktowania zagadnienia i zbadania, w ramach nieliniowej teorii sprężystości, osobliwości występujących w sąsiedztwie szczeliny. G. P. CZEREPANOW w pracy *O teorii elektrochemicznej korozji pod działaniem naprężeń* sformułował prosty model elektrochemicznego pękania na końcu makroszczeliny zapelnionej cieczą elektrolityczną i poddanej działaniu naprężeń. Referat R. I. CLIFTONA i J. C. C. HSU pt. *Podłużno skrętne fale plastyczne w materiałach silnie zależnych od szybkości zmian* wyróżniał się z szeregu podobnych prac oryginalną techniką eksperymentu pozwalającą wyraźnie odróżnić własności lepkoplastyczne badanego materiału i zweryfikować związki fizyczne. Praca Ch. RACHMATULINA i K. A. KERIMOWA *O rozprzestrzenianiu się scentrowanych fal poprzecznych wywołanych geometryczną i fizyczną nieliniowością* dotyczyła nowego sformułowania teorii poprzecznego uderzenia w membranę. Wykazano, że



przy uderzeniu centralnym fala poprzeczna nie ma charakteru fali uderzeniowej, mimo osobliwości kąta ugięcia membrany.

Na posiedzeniu IUTAM dnia 24 sierpnia 1972 został wybrany nowy skład organów IUTAM na okres czteroletniej kadencji. Przewodniczącym IUTAM został prof. H. GÖRTLER (NRF), wiceprzewodniczącym dotychczasowy przewodniczący prof. W. KOITER (Holandia), sekretarzem generalnym prof. F. NIORDSON (Dania), skarbnikiem prof. D. DRUCKER (USA), członkami prezydium profesorowie R. LEGENDRE (Francja), M. J. LIGHTHILL (W. Brytania), W. OLSZAK (Polska) i L. I. SJEDOW (ZSRR). Do Komitetu Wykonawczego XIV Kongresu IUTAM, Delft 1976 weszli: prof. E. BECKER (NRF) jako sekretarz i profesorowie B. A. BOLEY (USA), W. FISZDON (Polska), H. GÖRTLER (NRF), W. KOITER (Holandia) i N. I. MUSCHELSZWILI (ZSRR) jako członkowie.

Polska delegacja uczestniczyła aktywnie w pracach XIII Kongresu, jak wspomnieliśmy powyżej. Polacy wygłosili 9 referatów oraz dwaj polscy profesorowie weszli do Władz IUTAM na okres najbliższej kadencji. Ponadto prof. W. NOWACKI przewodniczył obradom sekcji teorii sprężystości, a prof. W. OLSZAK sekcji mechaniki ciał odkształcalnych. Zaproponowano władzom IUTAM, by organizacja XV Kongresu Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej w roku 1980 została powierzona Polsce, a Kongres żeby odbył się w Warszawie. Pewien niedosyt spowodował brak Polaka wśród prelegentów referatów generalnych bądź też sekcyjnych. Również nie została zakwalifikowana do wygłoszenia na Kongresie ani jedna z polskich prac doświadczalnych.

Językami Kongresu były rosyjski i angielski. W Sali Kongresowej, Dużej Auli i Sali Klubowej tłumaczono referaty z rosyjskiego na angielski i odwrotnie równoległe z referowaniem przez prelegenta. Niestety powtórzyły się tu błędy znane z poprzednich sympozjów czy kongresów. Przekład tłumaczy, którym prelegenci nie dostarczyli tekstu referatu, nie był wierny, czasami wręcz sprzeczny, mimo że nie można zarzucić im braku znajomości obu języków, nie byli jednak specjalistami w dziedzinie wygłaszanych referatów. Równoległe tłumaczenie przeszkadzało również w słuchaniu prelekcji. Selekcja referatów przyjętych do wygłoszenia na Kongresie wydawała się być bardzo ostra, z ponad tysiąca zgłoszonych referatów przyjęto do wygłoszenia tylko 228. Dlatego dziwi fakt, że zdarzały się referaty o bardzo małym stopniu oryginalności, nie wnoszące nic nowego ani w temacie, ani w metodzie. Słyszeliśmy liczne głosy, że system selekcji referatów powinien być ulepszony, oraz powątpiewania na ile celowe jest organizowanie takich olbrzymich kongresów.

Radzieccy Organizatorzy XIII Kongresu włożyli ogrom wysiłku i pracy, by zapewnić uczestnikom i osobom towarzyszącym jak najlepsze warunki oraz by obrady były pożyteczne i mogły zakończyć się sukcesem. Uczestnicy zamieszkali w największym hotelu moskiewskim «Rossija», na terenie Uniwersytetu Moskiewskiego i w kilku mniejszych hotelach. Dla potrzeb uczestników wydano Program Naukowy, Streszczenia Referatów, 3 Biuletyny Informacyjne. Po Kongresie ukaże się księga Kongresu. Działały punkty informacyjne, liczni przewodnicy i tłumacze, dwie duże stołówki na terenie Uniwersytetu wydzielono dla potrzeb gości. 45 wycieczek do 15 obiektów na terenie Moskwy umożliwiło zapoznanie się z zabytkami, muzeami i osobliwościami Stolicy Kraju Rad. Po Kongresie «Inturist» oferował kilka tras turystycznych.

*Zbigniew Olesiak (Warszawa)*

*Michał Życzkowski (Kraków)*

## KONFERENCJA DRGAŃ NIELINIOWYCH

Poznań, 29.VIII.—5.IX.1972 r.

W Poznaniu odbyła się VI Międzynarodowa Konferencja Drgań Nieliniowych, zorganizowana przez 4 Akademie Nauk: Polską, Czechosłowacką, Niemiecką (NRD) i Ukraińską. Brało w niej udział 204 uczestników, w tym 90 gości z 12 krajów. Wygłoszono 113 referatów, w tym 6 na dwóch zebraniach plenarnych.

Obrady odbywały się w trzech sekcjach.

W sekcji I referaty poświęcone były głównie metodom rozwiązywania równań różniczkowych, opisujących drgania nieliniowe. Przedstawiono też analizę jakościową tych równań, badając w szczególności cha-

rakter punktów osobliwych. Przedstawiono też analizę jakościową równań różnicowych. Liczne prace dotyczyły badań stateczności ruchu zarówno przy pomocy metody Lapunowa, jak i metody energetycznej. Przedstawiono też prace dotyczące układów o wielu stopniach swobody.

W sekcji II badano głównie układy drgań stochastycznych, gdzie w równaniach opisujących te zjawiska, zarówno współczynniki, jak i siły wymuszające miały charakter stochastyczny. Badano rozwiązania tych układów, stateczność stochastyczną oraz podano wyniki obliczeń numerycznych.

W sekcji III przedstawiono prace mające charakter zastosowań i to zarówno w układach mechanicznych, jak i elektrycznych. Badano tłumienie drgań maszyn przy pomocy tłumików dynamicznych i pneumatycznych. Omawiano też problemy tarcia wewnętrznego i konstrukcyjnego.

Prócz referatów programowych odbyła się konferencja okrągłego stołu poświęcona wyznaczaniu kierunku rozwoju badań naukowych w dziedzinie drgań nieliniowych. Na niej przedstawiciele poszczególnych krajów przedstawiali swoje propozycje, co dało pogląd na przyszły rozwój tej dziedziny badań. Dyskutowano też nad formą organizacyjną jaką powinna przybrać w przyszłości współpraca naukowa.

Zebrani uznali za celowe powołanie federacji o nazwie «International Federation of Oscillation of the Nonlinear Systems». W celu przygotowania organizacji tej federacji, przedstawiciele czterech krajów organizujących kolejne konferencje powołają grupę roboczą dla omówienia spraw związanych z utworzeniem federacji i organizacją współpracy.

Następna konferencja odbędzie się za 3 lata w Berlinie.

*E. Karaśkiewicz (Poznań)*

### SYMPOZJUM «METODY NUMERYCZNE W MECHANICE»

W dniach 24—25 listopada 1972 r. odbyło się w Gdańsku ogólnopolskie sympozjum na temat metod numerycznych w mechanice, zorganizowane przez Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej — Oddział w Gdańsku, Instytut Maszyn Przepływowych Polskiej Akademii Nauk i Politechnikę Gdańską. W skład Komitetu Organizacyjnego wchodził: doc. dr hab. inż. E. BIELEWICZ (przewodniczący), doc. dr hab. inż. J. KRUSZEWSKI (z-ca przewodniczącego) oraz mgr T. JANKOWSKI i mgr inż. M. SKOWRONEK.

Sympozjum było przeglądem i porównaniem najnowszych osiągnięć w dziedzinie metod numerycznych stosowanych w mechanice. Wśród referentów, którzy wygłosili 37 referatów, byli reprezentanci placówek naukowych, wyższych uczelni i biur projektowych Warszawy (8 referatów), Gdańska (12 referatów), Łodzi (5 referatów), Krakowa (3 referaty), Gliwic, Poznania, Wrocławia (po 2 referaty) oraz Kielc, Olsztyna i Szczecina (po 1 referacie). Ponadto jeden referat wygłoszony został przez przedstawiciela z Karl-Marks-Stadt, NRD.

Tematyka referatów dotyczyła teorii metod numerycznych, zastosowań w stereo, hydro i aeromechanice, zagadnień termicznych oraz rozwiązań praktycznych problemów konstrukcyjnych. Najliczniej reprezentowana grupa tematyczna, obejmująca 16 referatów, dotyczyła metod elementów skończonych. Większość rozwiązań numerycznych przedstawionych w referatach została doprowadzona do postaci programów na EMC.

W chronologicznej kolejności zostały wygłoszone następujące referaty:

1. R. ROHATYŃSKI, J. SALAMON (Wrocław), *Zagadnienie zbieżności procesu iteracyjnego przy projektowaniu wirników pomp metodą hydrodynamicznych punktów osobliwych;*
2. Z. NOWAK, W. J. PROSNAK, A. STYCZEK (Warszawa), *O automatycznym obliczaniu warstwy przyściennej wokół profilu dowolnego kształtu.*
3. A. MILLER (Warszawa), *Modele matematyczne stopnia i grupy stopni turbinowych;*
4. Z. RUDNICKI (Gliwice), *Zastosowanie metody Monte-Carlo do badania przepływu ciepła przez promieniowanie w komorach pieców grzewczych;*
5. K. DEMS (Łódź), *Zastosowanie wielomianów Hermite'a do wyznaczania macierzy sztywności w metodzie elementów skończonych;*

6. K. DEMS (Łódź), *Wielostopniowa synteza macierzy sztywności*,
7. A. STYCZEK (Warszawa), *Numeryczne rozwiązywanie zagadnień brzegowo-początkowych dla pewnej klasy układów parabolicznych*;
8. E. WALICKI (Łódź), *Uogólnione zagadnienie brzegowe dla eliptycznego równania różniczkowego*;
9. B. MOCHNACKI (Gliwice), *Przybliżona metoda rozwiązywania równania przewodnictwa*;
10. J. PYZIK, A. STYCZEK (Warszawa), *Numeryczne rozwiązania pewnych zagadnień brzegowo-początkowych dla równań typu parabolicznego*;
11. B. OLSZOWSKI, J. ORKISZ, G. SZEFER, Z. WASZCZYSZYN (Kraków), *Dynamika układów linowo-prętowych przy obciążeniach wywołanych działaniem prądów zwarciovych*;
12. W. KOBZA (Łódź), *Zastosowanie twierdzenia Greena w metodzie elementów skończonych na przykładzie cienkiej zginanej płyty*;
13. W. PRZYBYŁO (Wrocław), *Algorytmizacja obliczeń drgań przestrzennych prefabrykowanych układów szkieletowych*;
14. A. M. JABŁOŃSKI, Z. WASZCZYSZYN (Kraków), *Zastosowanie transformacji Laplace'a do obliczania powłok cylindrycznych dowolnie obciążonych*;
15. W. KOBZA, J. LIPIŃSKI (Łódź), *Metoda elementów skończonych rozwiązania osiowo-symetrycznego zadania termosprężystości*;
16. P. WILDE, M. WIZMUR, R. NAMYSŁ (Gdańsk), *Obliczenie drgań wymuszonych cieczy z uwzględnieniem odkształcalności powłoki stalowej zbiornika*;
17. E. BIELEWICZ (Gdańsk), *O zastosowaniu metody elementów skończonych w mechanice statystycznej*;
18. CZ. BRANICKI (Gdańsk), *Numeryczne metody problemu statyki powierzchniowych siatek ciągnowych*;
19. E. MELERSKI (Gdańsk), *Zastosowanie metody różnic skończonych do analizy pewnego probabilistycznego zagadnienia teorii powłok*;
20. CZ. BRANICKI, A. BZOWY, K. WYSIATYCKI (Gdańsk), *Numeryczna analiza płaskich uźebrowanych ustrojów sprężystych w oparciu o metodę elementów skończonych prostokątnego kształtu*;
21. J. SZMELTER (Warszawa), *Biblioteka podprogramów metody elementów skończonych*;
22. J. KRUSZEWSKI (Gdańsk), *System obliczeń SFEM 72*;
23. J. MUSZKIET (Gdańsk), *Elektroniczna technika obliczeniowa w wymiarowaniu konstrukcji okrętowych*;
24. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK (Warszawa), *Przykłady zastosowania programów metody elementów skończonych*;
25. J. A. KOZŁOWSKI (Gdańsk), *Automatyzacja przygotowania danych do obliczeń ram płaskich metodą sztywnych elementów skończonych*;
26. W. GAWROŃSKI (Gdańsk), *Analiza drgań wymuszonych kinematycznie metodą sztywnych elementów skończonych*;
27. A. JAWORSKI (Warszawa), *Stateczność powłoki beczkowej pod działaniem ciśnienia normalnego*;
28. W. OSMÓLSKI, S. JONIAK (Poznań), *Analiza wytrzymałościowa przestrzennych konstrukcji statycznie niewyznaczalnych ramowych i półskorupowych, z zastosowaniem teorii prętów cienkościennych przy użyciu maszyny cyfrowej*;
29. C. CICHON, Z. KĘPKA, Z. WASZCZYSZYN (Kraków, Kielce), *Numeryczna analiza stateczności sprężysto-plastycznego łuku bezprzegubowego poddanego działaniu ciśnienia zwnętrznego*;
30. A. JAWORSKI (Warszawa), *Wytrzymałość zbiornika kulistego przy różnych sposobach podparcia*;
31. W. OSMÓLSKI, J. ZIELNICA (Poznań), *Analiza drgań pionowych tłumionych wymuszonych funkcją nieciągłą oraz dobór optymalnych parametrów dwustopniowego usprężynowania pojazdów z zastosowaniem maszyny cyfrowej*<sup>12</sup>;
32. H. AURICH (Karl-Marks-Stadt, NRD), *Tworzenie macierzy mas dla modeli o skupionych parametrach*;
33. Z. WALCZYK (Gdańsk), *Wyznaczenie krytycznych obrotów oraz amplitud drgań wielopodporowego wału turbogeneratora z uwzględnieniem sprężystego powiązania podpór wału oraz wpływu filmu olejowego*;

34. J. K. SZMIDT (Szczecin), *Wykorzystanie metody elementów skończonych do analizy statycznej węzła ramy cienkościennej*;
35. J. TARNOWSKI, W. GAWROŃSKI (Gdańsk), *Uwzględnienie efektów gيروسkopowych przy obliczaniu drgań giętnych okrętowych wałów napędowych*;
36. S. GRABOWSKI (Olsztyn), *Zastosowanie macierzy pasmowych w obliczeniach drgań metodą elementów skończonych*;
37. E. BIELEWICZ, A. BZOWY (Gdańsk), *Algorytm obliczeń statycznych suchego doku*.

Poza tym zgłoszone były i umieszczone w materiałach Sympozjum następujące referaty:

1. W. J. PROSNAK (Warszawa), *Automatyzacja obliczeń w dziedzinie teorii profilu*;
2. J. SZARGUT, P. WEISS (Gliwice), *Numeryczny model matematyczny przepływu ciepła w piecu przewodowym*,

które nie zostały wygłoszone ze względu na nieobecność autorów.

Streszczenia zgłoszonych na sympozjum referatów wydane zostały, małą poligrafią w materiałachjazdowych.

W obradach sympozjum uczestniczyło 140 osób. W dyskusji wzięło udział około 50 uczestników.

Na zakończenie obrad w dyskusji ogólnej, między innymi, zabrali głos prof. J. SZMELTER i doc. J. ORKISZ podkreślając konieczność stworzenia możliwości wymiany doświadczeń i programów między poszczególnymi ośrodkami, oraz konieczność ujednoczenia metod i języków programowania na EMC, aby taka wymiana mogła być możliwa. Najlepiej nadającym się językiem do tego celu jest FORTRAN, niestety nie wszystkie maszyny cyfrowe istniejące w Polsce posiadają warunki techniczne do stosowania tego języka. Ponadto prof. J. SZMELTER podsumowując obrady podkreślił wysoki poziom wygłaszanych referatów, rzeczową i owocną dyskusję oraz wzorową organizację sympozjum.

*J. Kruszewski (Gdańsk)*

## V SYMPOZJUM Z ZAKRESU DOŚWIADCZALNYCH BADAŃ W MECHANICE CIAŁA STAŁEGO

W dniach 8.06—9.06. 1972 r. odbyło się V Sympozjum z zakresu doświadczalnych badań w Mechanice Ciała Stałego, zorganizowane przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej oraz Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Instytutu Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. Sympozja organizowane przez te dwa ośrodki mają już 10-letnią tradycję; dwa pierwsze z lat 1962 i 1965 miały nieco węższy zakres tematyczny i nosiły nazwę Sympozjów z Elastooptyki.

W Sympozjum uczestniczyli przedstawiciele ośrodków naukowych akademickich i Polskiej Akademii Nauk z całego kraju, jak również szereg osób z przemysłu i resortowych instytutów badawczych. Obrady otworzył przewodniczący komitetu organizacyjnego prof. dr inż. Zbigniew BRZOŃKA. W ramach VII sesji plenarnych wygłoszono 39 referatów w 5 grupach tematycznych: 7 prac z zakresu zmęczenia materiałów i konstrukcji, 5 — metod badawczych, 10 — elastooptyki, 15 — badań konstrukcji i 2 prace na temat badań materiałowych. W sumie na wygłoszenie referatów poświęcono 8,5 godz., 3,5 godz. zajęła dyskusja, w której głos zabrało około 60 osób.

Z uwagi na fakt, że w obradach obok przedstawicieli szeregu ośrodków naukowych brała udział tak w sensie czynnym (wygłaszane referaty i udział w dyskusji), jak i w charakterze słuchaczy liczna grupa osób pracujących w przemyśle, sympozjum było dobrym miejscem do wymiany poglądów, doświadczeń i na pewno także — wzajemnych oczekiwań — naukowców i praktyków. Na taki charakter tego spotkania wpłynął niewątpliwie również zakres tematyczny obrad — eksploracje doświadczalne bowiem są tą dziedziną działalności badawczej, w której ośrodki przemysłowe i resortowe z uwagi na charakter pracy, przy ich szerokich możliwościach wyposażenia w nowoczesną aparaturę mają szczególnie dużo do powiedzenia.

Omawiając przebieg obrad od strony merytorycznej, szczególną uwagę należy zwrócić, wydaje się, na ocenę prezentowanych metod badawczych, gdyż metody te w głównej mierze określają i możliwości poznania nowych zjawisk, i możliwości dokładniejszej, szybszej i bardziej ekonomicznej rejestracji faktów fizycznych w ogóle. Na podstawie przedstawionych prac stwierdzić można tutaj, że tendencje rozwojowe badań doświadczalnych z zakresu mechaniki ciała stałego w Polsce zgodne są z tendencjami ogólnosiatoowymi; coraz częściej badacze przedkładają pomiary typu polowego (elastoptyka, foto-stress, metoda rastrów) dające pełny i łatwiejszy do analizowania obraz przemieszczeń, odkształceń czy naprężeń nad metody dyskretne pomiaru w poszczególnych punktach. Niewątpliwie jednak zbyt rzadko prezentowane były prace z zakresu badań dynamicznych, co wskazuje na istniejące tu trudności aparaturowe i metodologiczne. Można było również odczuć wyraźny niedostatek eksploracji typu podstawowego — poza nielicznymi pracami dotyczącymi zmęczenia, stanów sprężysto-plastycznych i kinetostatycznych naprężeń kontaktowych, inne zajmowały się raczej opisem pomiarów konkretnych ustrojów.

Sumarycznie jednak, jak zamykając obrady stwierdził przewodniczący Zarządu Głównego PTMTS prof. dr inż. Z. KĄCZKOWSKI, obecne Sympozjum — w porównaniu z poprzednimi — wskazało, że coraz częściej badacze przeprowadzając prace doświadczalne stawiają sobie szersze cele, wybierają tematy o charakterze syntetyzującym, nie ograniczając się jedynie do rejestracji zjawisk.

## SPIS REFERATÓW WYGŁOSZONYCH NA SYMPOZJUM

- |  |  |
|--|--|
| 1. W. AMANOWICZ  | <i>Wskaźniki zmęczenia,</i>  |
| 2. J. BENDKOWSKI W. CUDNY, Z. DY-<br>ŁĄG, Z. ORŁOŚ (WAT)   | <i>Elastoptyczna analiza naprężeń modeli ściany kotła z rur<br/>opletwowanych,</i>   |
| 3. F. BIEDA (WAT),   | <i>Badania trwałości zmęczeniowej łożysk tocznych w warun-<br/>kach korozji kontaktowociernej,</i>   |
| 4. A. BUTT-HUSSAIM (IL),   | <i>Zastosowanie metody mory (rastrów) w badaniach tworzyw<br/>zbrojonych włóknem szklanym,</i>   |
| 5. M. DIETRICH W. GONTARZ, M. MA-<br>KSYMUK, W. MIERZEJEWSKI, W. O-<br>ZIMKOWSKI, Z. WALCZAK (PW), | <i>Obciążenia dynamiczne zębów kół zębatych przy dużych<br/>prędkościach obwodowych,</i>   |
| 6. R. S. DOROSZKIEWICZ (IPPT),   | <i>Możliwości modelowego badania metodami elastoptycznymi<br/>zapór sprężonych,</i>  |
| 7. K. GRABCZYŃSKI (ITB),   | <i>Badania modelowe szedowej lupiny sprężonej,</i>   |
| 8. K. GREŃ (Zamech),   | <i>Badania pól temperaturowych w elementach turbin metodą<br/>analogii elektrycznej na papierze przewodzącym,</i>                                |
| 9. K. GROSSMAN, M. NIEZGODZIŃSKI,<br>W. CHODOSKO (PŁ)  | <i>Badania nad korelacją między wynikami pomiaru modułu<br/>Younga dla pierścieni tłokowych w różnych stadiach obróbki,</i>                      |
| 10. B. JANCALEWICZ (PW)  | <i>Badania wpływu nitu nieobciążonego na trwałość zmęczeniową<br/>duralowej cienkościennej konstrukcji z karbem w postaci<br/>otworu na nit,</i> |
| 11. P. JASTRZĘBSKI, S. WICHNIEWICZ (PW),   | <i>Wpływ ukośnego osłabienia zewnętrznymi karbami na wytrzyma-<br/>łość pasm stalowych i ze stopów aluminium,</i>                                |
| 12. J. KAPKOWSKI, J. STUPNICKI (PW),   | <i>Badanie sprężysto-plastycznych stanów naprężeń w elementach<br/>maszyn projektowanych metodą nośności granicznej,</i>                         |
| 13. J. KAPKOWSKI, J. STUPNICKI, M. ŚLI-<br>WOWSKI (PW),  | <i>Rozwiązanie płaskich zagadnień sprężysto-plastycznych w opar-<br/>ciu o badania optyczne czulej warstwy powierzchniowej,</i>                  |

14. J. KAPUŚCIŃSKI (PW),  
15. J. KAWALER (Inst. Odlew., Kraków),  
16. J. KAWALER, J. KOSTARCZYK, W. STACHURSKI, Z. WÓJCKI (Inst. Odl. Kraków),  
17. S. KOCAŃDA, J. KOZUBOWSKI (WAT),  
18. B. KORYTKOWSKI (PW),  
19. Z. KOWAL, K. RYKALUK (P. Wrocl.),  
20. Z. KOWAL, E. KUBICA, L. WIŚNIEWSKI (P. Wrocl),  
21. K. KRZEMIŃSKI (PW),  
22. J. KUBISSA (PW),  
23. J. LIETZ (IPPT),  
24. M. LURSKI (WSP), Rzeszów),  
25. Z. MALINOWSKI, J. KLEPACZKO (IPPT),  
26. L. MARTINI (BSPE, Kraków),  
27. B. MICHAŁSKI (IPPT),  
28. M. NOWAK, J. ZAWADZKI (P. Wrocl.),  
29. T. ROBAKOWSKI (Inst. Spaw., Gliwice),  
30. A. RYMASZEWSKI (WAT)  
31. J. STUPNICKI, E. KWAŚNIAK, W. MIRSKI (PW),  
32. J. SUPEL, J. ZAWADA (PW),  
33. W. SZCZEPIŃSKI (IPPT),  
34. W. SZCZEPIŃSKI (IPPT),  
35. J. TUTAJ (WAT)  
36. Z. WALCZAK (PW),  
37. E. WOJNAR (IPPT),  
38. S. ZATAJ (CTO Gdańsk),
- Badania własności reologicznych tworzyw sztucznych, Jakościowa analiza niestacjonarnych przebiegów naprężeń cieplnych w modelu elastoptycznym,*  
*Zastosowanie powłok optycznie czynnych w trzech różnych przypadkach analizy pola odkształceń,*  
*Badania mikrobudowy złomów zmęczeniowych mosiądzów, Laboratoryjne badania własności ruchowych łożysk samosmarujących,*  
*Badania lokalnej utraty stateczności dźwigara rurowego,*  
*Badanie węzłów skrzynkowych, Nośność wolnoobrotowych samosmarujących łożysk ślizgowych w okresie docierania,*  
*Badanie stanu odkształcenia i naprężenia w płaskich połączeniach klejonych,*  
*Wyliczanie naprężeń na podstawie elastoptycznych badań dynamicznych,*  
*Szerokość współpracująca płyty wzmocnionych przyklejonymi żebrami,*  
*Szacowanie współczynnika tarcia na czołach ściskanej plastycznie próbki walcowej,*  
*Teoretyczna analiza oraz badania modelowe rozwidlonych słupów kratowych poddanych obciążeniu skręcającemu, Metodą elastoptycznej warstwy perforowanej w zagadnieniach trójwymiarowych,*  
*Wpływ obróbki termiczno-ciśnieniowej na wytrzymałość zmęczeniową polichlorku winylu,*  
*Wpływ wyżarzania odpężającego, przeciążenia i śrutowania na wytrzymałość zmęczeniową złączy doczołowych ze stali St3S,*  
*Zmęczeniowe niszczenie elementów przy jednoczesnym działaniu naprężeń kontaktowych i zmiennych naprężeń zginających,*  
*Wpływ warstwy oleju na naprężenia kontaktowe w warunkach dynamicznych,*  
*Wyznaczanie obwiedni stanu granicznego niektórych skal krajowych przy pomocy metody trójosiowego ściskania,*  
*Metoda rozdzielania naprężeń przy analizie naprężeń metodą pokryć optycznych czułych,*  
*Doświadczalne studium kinematyki ośrodka sypkiego dla pewnych problemów brzegowych,*  
*Badanie zjawisk występujących w połączeniach pierścieniowych przy zmiennym obciążeniu skręcającym*  
*Badania przyspieszeń i sił przy osiadaniu kabiny windy na zderzak,*  
*Pewne wyniki badania płyt metodą Ligtenberga,*  
*Automatyczny wielopunktowy system pomiarów tensometrycznych,*

NAUKOWO-TECHNICZNA KONFERENCJA  
«PROBLEMY WYTRZYMAŁOŚCI KONSTRUKCJI KLEJONYCH»

Szczecin, 26—27.XI.1972. r.

W dniach 26, 27 października 1972 r. odbyła się w Wyższej Szkole Morskiej w Szczecinie Naukowo-Techniczna Konferencja «Problemy Wytrzymałości Konstrukcji Klejonych». Podczas konferencji zorganizowanej przez PTMTS Oddział w Szczecinie i SIMP Oddział w Szczecinie wygłoszono 28 następujących referatów dotyczących badań podstawowych, teoretycznych i doświadczalnych własności połączeń klejonych, ze szczególnym uwzględnieniem ich wytrzymałości i prac nad zastosowaniem klejenia w technice.

1. J. LORKIEWICZ, K. GRUDZIŃSKI *Tendencje rozwojowe w dziedzinie klejenia metali,*
2. P. JASIULEK, *Przewodność elektryczna i wytrzymałość mechaniczna klejonych połączeń mechanicznych,*
3. J. LORKIEWICZ, *Klejenie brązu,*
4. M. WARSZYŃSKI, B. ONYSZKO, M. ZYCH-PORĘBSKA, *Badanie wpływu czynników zewnętrznych na dobór kleju przy łączeniu tworzywa sztucznego z metalem,*
5. M. WARSZYŃSKI, R. TYLEK, *Możliwości zastosowania powłok klejonych z wypełniaczami na niektóre pary cierne,*
6. FR. ROMANOW, L. STRICKER, *Wpływ chropowatości powierzchni na wytrzymałość połączeń klejonych,*
7. Z. WIĄCEK, *Wpływ przygotowania powierzchni metalu na jakość połączenia klejowego,*
8. J. MIERZEJEWSKI, J. LORKIEWICZ, *Starzenie się połączeń klejonych metali,*
9. K. GRUDZIŃSKI, *Badania własności mechanicznych klejów i połączeń klejonych przy czystym ścinaniu,*
10. B. ONYSZKO, *Próba interpretacji mechanizmu niszczenia połączenia klejonego.*
11. M. WARSZYŃSKI, B. ONYSZKO, M. ZYCH-PORĘBSKA, *Optymalizacja złączy klejonych,*
12. J. LORKIEWICZ, K. GRUDZIŃSKI, *Analiza naprężeń w walcowej spoinie klejowej,*
13. K. GRUDZIŃSKI, *Optymalizacja walcowego połączenia klejonego obciążonego momentem skręcającym,*
14. M. ZYCH-PORĘBSKA, *Analiza stanu naprężeń w warstwie kleju połączenia stożkowego,*
15. R. CICHOWICZ, *Wpływ temperatury i złożonego obciążenia na wytrzymałość klejonego połączenia,*
16. J. KIERKOWSKI, *Nośność klejonego połączenia płyta-nakładka przy obciążeniu normalnym,*
17. J. CZAPLICKI, *Współpraca klejonego połączenia zakładkowego laminatu epoksydowego z duralum w aspekcie możliwości wykorzystania go do napraw metalowych pokryć samolotów,*
18. M. LURSKI, *Wytrzymałość na obciążenie wahadłowe przy ścinaniu zakładkowego połączenia klejonego metali,*
19. T. MORAWSKI, *Możliwość oceny jakości połączeń klejonych za pomocą defektoskopii ultradźwiękowej,*
20. W. ŻÓLTOWSKI, *Badania połączeń stali z laminatami poliestrowymi przy zastosowaniu różnych łączników,*
21. J. DENKIEWICZ, R. KALUŻA, *Wytrzymałość próbek betonowych rekonstruowanych żywicami epoksydowymi,*

- |                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| 22. T. HOPP,                      | <i>Polączenia klejowe betonu, stali i szkła,</i>  |
| 23. T. SIEGMULLER                 | <i>Badania wytrzymałości oraz rozłączności klejonych połączeń rur stalowych,</i>                                      |
| 24. J. LORKIEWICZ, J. SZUMIELA,   | <i>Klejenie płytek narzędziowych,</i>   |
| 25. Z. ZACZEK,                    | <i>Zastosowania połączeń klejonych metali i laminatów szklanych do wykonywania awaryjnych uszczelnień pojemników.</i> |
| 26. Z. NIESZKOWSKA,               | <i>Zastosowanie żywic epoksydowych w remontach urządzeń okrętowych,</i>   |
| 27. J. PASTUSIAK,                 | <i>Nowoczesne procesy klejenia stosowane w seryjnej produkcji śmigłowców,</i>   |
| 28. J. LORKIEWICZ, K. GRUDZIŃSKI, | <i>Doświadczenia własne w stosowaniu klejenia metali,</i>   |

Wygłoszone referaty wydano drukiem w materiałach konferencji. W konferencji wzięło udział 140 osób, w tym 102 spoza Szczecina, około 45% uczestników stanowili pracownicy zakładów produkcyjnych i biur projektów.

W dyskusji nad referatami oraz na zakończenie konferencji zebrano głos 56 osób.

Do głównych osiągnięć konferencji należy zaliczyć:

1. Przedstawienie dorobku i podsumowanie dotychczas prowadzonych w kraju prac z dziedziny klejenia.

2. Nawiązanie bliższego kontaktu i wymiana informacji i doświadczeń między różnymi ośrodkami naukowymi prowadzącymi prace badawcze, oraz między ośrodkami badawczymi, a przemysłem.

3. Zapoznanie przedstawicieli producentów klejów z potrzebami i wymogami praktyki oraz z postulatami zwiększenia asortymentu i polepszenia własności wytrzymałościowych i technologicznych klejów krajowych.

4. Stwierdzono wyraźny brak organu koordynującego i inspirującego prace badawcze i wdrożeniowe z dziedziny klejenia. Instytut Spawalnictwa, który swego czasu był wytypowany, jako wiodący w tym zakresie, nie spełnia tego zadania. Zebranie zaleciło Komitetowi Organizacyjnemu Konferencji poczynienie odpowiednich w tej sprawie kroków przez Zarząd Główny PTMTS oraz SIMP.

5. Stwierdzono celowość i potrzebę organizowania w przyszłości podobnych konferencji z zakresu klejenia z ewentualnym podziałem na grupy tematyczne. Sugerowano, że następna konferencja winna się odbyć za 2 lub 3 lata. Ośrodek Szczeciński wyraził gotowość zorganizowania takiej konferencji.

Po zakończeniu obrad odbyła się wycieczka do Stoczni Szczecińskiej im. Warszawskiego, w której wzięło udział 32 osoby. Inni uczestnicy (około 20 osób) zwiedzili laboratorium siłowni okrętowej oraz planetarium Wyższej Szkoły Morskiej.

*Jerzy Mierzejewski (Szczecin)*

#### **KOLOKWIUM EUROMECH 49 «MECHANIKA ZAWIESIN I ROZTWORÓW POLIMERÓW»**

Kolokwium odbędzie się w dniach 2—5 kwietnia 1974 r. w Jabłonie, współprzewodniczącymi spotkania będą profesorowie G. K. BATCHELOR (Cambridge, Anglia) i S. ZAHORSKI (Warszawa).

Proponowana tematyka Kolokwium obejmie następujące zagadnienia:

1. Ruch jedno i dwucząsteczkowych zawiesin w płynach (w przepływach o małej liczbie Reynoldsa), wpływ wzajemnego oddziaływania.

2. Własności reologiczne zawiesin cząstek o znanej postaci, podejście strukturalne lub dedukcyjne.

3. Fenomenologiczne i ogólne rozważania.

4. Roztwory polimerów, mechaniczne i optyczne badania struktury i własności reologicznych.

5. Mechaniczne modele liniowych makromolekuł i ich hydrodynamiczne oddziaływanie.

6. Wpływ nie-newtonowskiego charakteru zawiesin i roztworów polimerów na pola przepływów.

Bliższe informacje można otrzymać od prof. S. ZAHORSKIEGO.



## SYMPOZJUM FRANCUSKO-POLSKIE

## «MECHANIKA OŚRODKÓW CIĄGŁYCH I JEJ ZASTOSOWANIA INŻYNIERSKIE»

W czerwcu lub we wrześniu 1974 r. odbędzie się Sympozjum Francusko-Polskie «Mechanika Ośrodków Ciągłych i jej Zastosowania Inżynierskie» będące kolejnym z serii spotkań mechaników polskich i francuskich.

Celem konferencji jest wzajemne przedstawienie wyników badań przeprowadzonych w Polsce i we Francji w ostatnich trzech latach w niektórych działach mechaniki, a w szczególności w zakresie badań zjawisk niesprężystych. Tematyka Sympozjum została ograniczona do problemów pęczana, zniszczenia i zmęczenia materiałów, reologii ośrodków wielofazowych, termomechaniki, anizotropii i niejednorodności oraz analizy stanów granicznych.

Po otrzymaniu wszystkich zgłoszeń uczestnictwa ze strony polskiej oraz francuskiej pozostaną utrzymane tylko te tematy, na które z obu stron będzie mogła być przedstawiona wystarczająca liczba referatów.

W Sympozjum weźmie udział piętnastu pracowników naukowych z Polski oraz trzydziestu z Francji. Koszty pobytu dwunastu uczestników polskich (hotele, diety, podróże na terenie Francji) zostaną pokryte przez stronę francuską. Pozostałych trzech uczestników Sympozjum będzie miało opłacony pobyt w ramach umowy pomiędzy PAN i CNRS oraz umów o współpracy naukowej. Koszty podróży na trasie Warszawa—Paryż—Warszawa powinna pokryć instytucja delegująca w kraju (PAN lub MNSWiT). Sympozjum będzie trwało pięć dni, zaś pobyt delegacji polskiej we Francji ogółem siedem dni, gdyż w planie przewidziane jest zwiedzanie francuskich laboratoriów naukowych.

Na Sympozjum zostanie wygłoszonych po piętnaście referatów ze strony polskiej i francuskiej (po jedenaście prac oryginalnych oraz po cztery referaty problemowe). Referaty problemowe prawdopodobnie dotyczyć będą równań konstytutywnych plastyczności, mechaniki ośrodków sypkich, teorii konstrukcji plastycznych i mechaniki polimerów. Prof. Dr W. NOWACKI przedstawi referat generalny.

## SPROSTOWANIE

W 3 zeszytcie MTiS (1972) na s. 474 zostało opuszczone nazwisko Autora «Sprawozdania z VII Polsko-Czechosłowackiej konferencji dynamiki maszyn»; jest nim doc. dr Józef WOJNAROWSKI (Gliwice). Przepraszamy Autora i Czytelników.

## INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowywaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronicie z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikąć zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2, itd.), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, 00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.



**W następnym zeszycie ukażą się prace:**

- J. J. TELEGA, Metoda elementów skończonych w mechanice gruntów i mechanice górotworu  
Метод конечных элементов в механике грунтов и в механике горных массивов  
Finite element method in soil and rock mechanics
- W. WALCZAK, Wpływ wstępnych ugięć za pracę płyty prostokątnej zginanej w swej płaszczyźnie  
Влияние начального прогиба на работу прямоугольной пластинки изгибаемой в своей плоскости  
Influence of initial deflections on the work of a rectangular plate subject to bending in its plane
- J. MARYNIAK, W. MIERZEJEWSKI, J. KRUTUL, Drgania łopat śmigła  
Колесания лопастей винта  
Propeller blade vibration problems
- N. JA. CYGANOWA, Związek między różniczkowymi i całkowymi zasadami mechaniki  
Связь между дифференциальными и интегральными принципами механики  
Relations between differential and integral principles of mechanics
- A. GAWĘSKI, Ugięcie osiowo-symetryczne płyty Reissnera o zmiennej grubości  
Осесимметрический изгиб пластинки типа Рейсснера переменной толщины  
The axially symmetrical bending of Reissner's plate of variable thickness
- S. ZANORSKI, Dynamiczne i stacjonarne własności cieczy lepkosprężystych w złożonych przepływach ścinających  
Динамические и стационарные свойства вязко-упругих жидкостей в сложных течениях со сдвигом  
Dynamic and steady-state properties of viscoelastic fluids in superposed shearing flows
- J. MIAŁGOWSKI, Doświadczalna analiza efektu pamięci materiału poddanego plastycznemu odkształceniu  
Экспериментальный анализ эффекта наследственности пластически деформированного материала  
Experimental analysis of the memory effect of a plastically prestrained material
- R. DOROSZKIEWICZ, J. LIETZ, B. MICHAŁSKI, Zastosowanie elastooptyki do kształtowania głowicy zapory filarowej  
Применение фотоупругости к оптимальному формированию массивного консольного оголовка плотины  
Application of photoelasticity to dam buttress optimum design

Cena zł 30.—

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA* jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

---

Mech. Teor., T. 11, z. 2, s. 131 — 191, Warszawa 1973, Indeks 36712