POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 11 · ZESZYT 1

WARSZAWA 1973
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

TOM 11 • ZESZYT 1

WARSZAWA 1973
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

•

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 700 (582+118) egz. Ark. wydawn. 9,5. Ark. drukarskich 8,0. Papier druk. sat. III kl., 90 g, 70×100. Oddano do składania 31.X.1972 r. Druk ukończono w marcu 1973 r. Zam. 1510/72. R-30 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH UKŁADÓW ANHOLONOMICZNYCH TYPU CZETAJEWA-PRZEBORSKIEGO

N. J. CYGANOWA (WOŁGOGRAD)

1. Ekstremalne własności reakcji więzów w anholonomicznych układach typu Czetajewa—Przeborskiego

W pracy [1] KOGAN sformułował pewną własność reakcji więzów, analogiczną do zasady Gaussa, mianowicie: siły reakcji więzów w rzeczywistym ruchu układu holonomicznego o więzach idealnych minimalizują skrępowanie układu, rozpatrywane jako funkcja reakcji możliwych.

W niniejszej pracy bada się ekstremalne własności reakcji w układach o nieliniowych więzach anholonomicznych, idealnych i nieidealnych pierwszego rzędu, jak również w układach o więzach anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem przyśpieszeń.

1.1. Rozważmy układ n punktów materialnych o nieliniowych anholonomicznych więzach idealnych rzędu pierwszego

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., k;\ i = 1, 2, ..., n). \tag{1.1}$$

Możliwe przemieszczenia układu określa się według CZETAJEWA i PRZEBORSKIEGO [3] zgodnie ze wzorami

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., k). \tag{1.2}$$

Oznaczmy przez $\overline{N}_i$ wypadkową reakcji danych więzów idealnych (1.1), działających na i-ty punkt układu. Zgodnie z definicją więzów idealnych suma prac elementarnych reakcji na dowolnych przemieszczeniach możliwych układu równa się zeru

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i\,\delta\bar{r}_i = 0. \tag{1.3}$$

Rozważmy sumę

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i)^2, \tag{1.4}$$

gdzie m_i oznacza masę i-tego punktu układu; $\overline{w}_i$ — przyśpieszenia tego punktu w określonej chwili czasu t w trakcie ruchu rzeczywistego pod działaniem zadanej siły $\overline{F}_i$ i reakcji

$\overline{N}_i$; γ_i — jedno z możliwych przyśpieszeń punktu dla zadanych więzów, przy stałych położeniach i prędkości punktów układu w określonej chwili czasu.

Suma $A_{d\delta}$ określa miarę odchylenia rzeczywistego ruchu (d) danego układu punktów materialnych od ruchu możliwego (δ).

Niech $A_{\partial\delta}$ oznacza odchylenie ruchu (∂) wyzwolonego (częściowo lub całkowicie) z więzów od tegoż ruchu możliwego (δ). W pracy [2] CZETAJEW podał twierdzenie wyrażające się nierównością

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}. \tag{1.5}$$

Stwierdza ono, że odchylenie ruchu rzeczywistego od możliwego jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od ruchu wyzwolonego.

Analogiczne twierdzenie można uzyskać porównując odchylenie ruchu rzeczywistego (d) od ruchu możliwego δ z odchyleniem od niego ruchu (d'), przy tych samych zadanych siłach $\overline{F}_i$ i dowolnych reakcjach $\overline{N}_i$, różniących się od rzeczywistych reakcji $\overline{N}_i$, ale spełniających warunek (1.3). Ostatni z tych ruchów nie będzie na ogół ruchem możliwym przy zadanych więzach.

Tak więc ruch (d') jest rzeczywistym ruchem układu pod działaniem zadanych sił $\overline{F}_i$, ale przy nowych więzach. Załóżmy, że przemieszczenia możliwe układu z tymi więzami równają się $\delta\overline{r}_i'$. Wobec tego więzy idealne spełniają równanie

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i' \delta\overline{r}_i' = 0,$$

a ponieważ reakcje $\overline{N}_i'$ spełniają warunek (1.3), tzn.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{N}_i' \delta\overline{r}_i = 0,$$

otrzymujemy, że przemieszczenia możliwe $\delta\overline{r}_i$ przy zadanych więzach zawierają się w przemieszczeniach możliwych $\delta\overline{r}_i'$ przy nowych więzach. Możemy więc uważać, że nowe więzy odpowiadają układowi częściowo wyzwolonemu. Przyśpieszenie punktu m_i ruchu (d') oznaczmy literą $\overline{w}_i'$.

Miarą odchylenia ruchu (d') od ruchu możliwego δ jest wielkość

$$A_{d'\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_i' - \overline{\gamma}_i)^2, \tag{1.6}$$

przyrost zaś odchylenia przy przejściu od ruchu rzeczywistego (d) do ruchu (d') wynosi

$$\Delta A = \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i)\Delta\overline{w}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\Delta\overline{w}_i)^2, \quad \Delta\overline{w}_i = \overline{w}_i' - \overline{w}_i. \tag{1.7}$$

Dla rozpatrywanych w pracy układów typu Czetajewa-Przeborskiego istnieją przemieszczenia możliwe punktów układu proporcjonalne do różnic między przyśpieszeniami tych punktów w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym, przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów w ruchu rzeczywistym i możliwym w zadanej chwili czasu t.

Wynika stąd, że różnice $\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i$ we wzorze (1.7) są przemieszczeniami możliwymi. Przyrost przyśpieszeń w porównywanych ruchach wynosi

$$\Delta\overline{w}_i = \frac{\overline{N}_i' - \overline{N}_i}{m_i}.$$

W związku z tym, że dla dowolnych przemieszczeń możliwych wielkości $\overline{N}_i'$ oraz $\overline{N}_i$ spełniają warunek (1.3), to warunek ten oczywiście spełniają również ich różnice $\overline{N}_i' - \overline{N}_i$, wobec tego pierwszą sumę we wzorze (1.7) można przyrównać do zera

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\overline{w}_i(\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{N}_i' - \overline{N}_i)(\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i) = 0.$$

Tak więc mamy

$$\Delta A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\Delta\overline{w}_i)^2 > 0,$$

skąd wynika nierówność $A_{d\delta} < A_{d'\delta}$.

Innymi słowy, w przypadku rzeczywistych reakcji więzów $\overline{N}_i$ suma (1.4), traktowana jako funkcja reakcji dla ustalonych sił $\overline{F}_i$, przyjmuje wartość minimalną.

1.2. Udowodnione twierdzenie można uogólnić również na układy o idealnych więzach anholonomicznych drugiego rzędu, liniowych względem przyśpieszeń, opisane wzorem

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda i}\ddot{x}_i + b_{\lambda i}\ddot{y}_i + c_{\lambda i}\ddot{z}_i) = a_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, k), \tag{1.8}$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}$, $b_{\lambda i}$, $c_{\lambda i}$ oraz a_λ zależą od czasu, współrzędnych i prędkości ruchu punktów układu.

W pracy [3] Przeborski wprowadził, po raz pierwszy dla rozważanych układów definicję przemieszczeń możliwych, uogólniającą definicję (1.2); mianowicie, że przemieszczenia możliwe są definiowane związkami

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{\lambda i}\delta x_i + b_{\lambda i}\delta y_i + c_{\lambda i}\delta z_i) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots k). \tag{1.9}$$

Zagadnienie to zostało rozwinięte w pracy Kirgetowa [4].

Łatwo spostrzec, że przemieszczeniem możliwym jest różnica przyśpieszeń punktów układu w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym, przy jednakowych wartościach współrzędnych oraz jednakowych prędkościach w obydwu ruchach w ustalonej chwili czasu. Jeżeli zdefiniujemy więzy idealne jako takie, przy których dla dowolnego przemieszczenia możliwego, spełniającego warunek (1.9), jest spełnione równanie $\sum_{i=1}^{n}\overline{N}_i\delta\overline{r}_i = 0$ oraz jeśli powtórzymy rozważania dotyczące układów typu Czetajewa-Przeborskiego, to możemy udowodnić, że dla układów o więzach idealnych (1.8) słuszne jest twierdzenie, wyrażone nierównością $A_{d\delta} < A_{d'\delta}$.

1.3. Rozważmy układ punktów materialnych z więzami anholonomicznymi pierwszego lub drugiego rzędu (w ostatnim przypadku — liniowymi względem przyśpieszeń) z tarciem. W zbiorze przemieszczeń możliwych układu wyróżnimy podzbiór takich przemieszczeń, na których siły tarcia nie wykonują pracy. Są to tak zwane (c) — przemieszczenia, które rozpatrują PRZEBORSKI [5] i CZETAJEW [6]. Dla (c) — przemieszczeń zachodzi równanie

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i \delta \overline{r}_i^c = 0, \tag{1.10}$$

gdzie $\overline{R}_i$ są reakcjami więzów, zaś $\delta \overline{r}_i^c$ (c) — przemieszczeniami.

Rozpatrzmy ruch (d') układu, zachodzący przy tych samych zadanych siłach $\overline{F}_i$ i dowolnych reakcjach $\overline{R}_i'$, różnych od rzeczywistych, ale spełniających warunek (1.10). Ruch (d') jest ruchem możliwym, na ogół przy innych więzach. Załóżmy, że przemieszczenia możliwe dla tych więzów równają się $\delta \overline{r}_i'$. Wydzielmy z rodziny tych przemieszczeń zbiór (c) — przemieszczeń, na których siły reakcji $\overline{R}_i'$ nie wykonują pracy, to znaczy spełniony jest związek

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i' \delta \overline{r}_i'^c = 0. \tag{1.11}$$

Spośród wektorów przyśpieszeń γ_i w ruchach możliwych przy zadanych więzach obierzemy takie $\overline{\gamma}_i^c$, by wektory różnic $\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i^c$ zawierały się w zbiorze (c) — przemieszczeń. Takie ruchy możliwe są nazywane (c) — ruchami [7].

Ograniczając się do (c) — ruchów otrzymujemy zależność

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{R}_i (\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i^c) = 0. \tag{1.12}$$

Przyrost przyśpieszeń w porównywanych ruchach wynosi

$$\Delta \overline{w}_i = \frac{\overline{R}_i' - \overline{R}_i}{m_i}.$$

Wobec tego, że wielkości $\overline{R}_i$ oraz R_i' spełniają warunek (1.9) mamy równanie

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta \overline{w}_i (\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i^c) = \sum_{i=1}^{n} (\overline{R}_i' - \overline{R}_i)(\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i^c) = 0. \tag{1.13}$$

Z równań (1.7) i (1.12) otrzymujemy wzór

$$\Delta A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\Delta \overline{w}_i)^2,$$

z którego wynika, że $A_{d\delta} < A_{d'\delta}$.

Tak więc dla rzeczywistych reakcji $\overline{R}_i$ więzów z tarciem suma

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i (\overline{w}_i - \overline{\gamma}_i^c)^2$$

traktowana jako funkcja reakcji przy ustalonych siłach przyjmuje wartość minimalną.

2. Uogólniona zasada najmniejszego skrępowania dla układów z tarciem

Zasada najmniejszego skrępowania w swej zwykłej postaci została sformułowana przez Gaussa [8] dla układów o więzach idealnych. Uogólnienie tej zasady na układy z więzami nieidealnymi było dziełem Przeborskiego [5], Rumiancewa [7] i Pożarickiego [9].

W pracy Bołotowa [10] zasada ta została uogólniona zgodnie z nowymi poglądami na wyzwalanie układów materialnych. O ile Gauss rozważał pełne wyzwolenie ze wszystkich więzów, to Bołotow rozpatrzył wyzwolenie częściowe, polegające na wyzwoleniu układu ze wszystkich więzów niepowstrzymujących oraz z części więzów powstrzymujących. W sformułowaniu Bołotowa uogólniona zasada Gaussa brzmi następująco: *odchylenie rzeczywistego ruchu układu od rzeczywistego ruchu tegoż układu zachodzącego przy odrzuceniu wszystkich więzów niepowstrzymujących oraz dowolnej liczby więzów powstrzymujących jest mniejsze od odchylenia dowolnego ruchu możliwego.*

Już w *Mechanice* Macha [11] wypowiedziana została myśl, że można porównywać odchylenia rzeczywistego i możliwego ruchu układu punktów materialnych nie od ruchu swobodnego, lecz od ruchu, w którym układ jest wyzwolony z części więzów. Jednak myśl ta nie została sformułowana w postaci analitycznej, poza tym Mach ograniczył się tylko do układów holonomicznych, Bołotow natomiast rozważa również liniowe układy anholonomiczne.

Za podstawę dowodu uogólnionej zasady najmniejszego skrępowania służy u Bołotowa zasada możliwych przemieszczeń w połączeniu z zasadą D'Alemberta (inaczej zasada D'Alemberta-Langrange'a) oraz następujące dwa założenia:

1° Przemieszczenia możliwe układu o zadanych więzach zawarte są w zbiorze przemieszczeń możliwych układu, wyzwolonego ze wszystkich więzów niepowstrzymujących oraz z dowolnej liczby więzów powstrzymujących.

2° Istnieje przemieszczenie możliwe, proporcjonalne do różnicy przyśpieszeń w ruchu możliwym i rzeczywistym.

Powyższe dwa założenia sformułowane przez Bołotowa posłużyły również do dalszych uogólnień zasady Gaussa, dokonanych przez uczonych rosyjskich i radzieckich.

W pracy Czetajewa [2] rozważane są układy o więzach idealnych nieliniowych anholonomicznych pierwszego rzędu. Dla układów tych wprowadza się pojęcie przemieszczenia możliwego w taki sposób, że słuszna jest jednocześnie zasada D'Alemberta-Lagrange'a i zasada Gaussa w uogólnionej (w szczególności — w zwykłej) postaci: odchylenie ruchu rzeczywistego (d) układu o zadanych więzach od ruchu rzeczywistego (∂) układu częściowo wyzwolonego z więzów jest mniejsze od odchylenia dowolnego ruchu możliwego (δ) od tegoż ruchu częściowo wyzwolonego (∂), tzn.

$$A_{d\partial} < A_{\delta\partial}. \tag{2.1}$$

Aminow [12] zbadał stosowalność uogólnionej postaci zasady Gaussa (2.1) do układów o więzach nieidealnych. W pracy Aminowa rozważano układy o więzach nieidealnych holonomicznych, na ogół niestacjonarnych. Stwierdzono, że dla rozważanych układów nie jest słuszna zasada, wyrażona nierównością (2.1); wyprowadzono uogólnioną postać tej zasady, słuszną również i dla układów z anholonomicznymi więzami nieidealnymi.

Wyraża ją nierówność (2.2)

$$A_{d\partial} < \frac{1}{2}(A_{\delta\partial} + A_{\delta-d,d-\partial}).$$

Jeżeli więzy są idealne, to z nierówności (2.2) wynika nierówność (2.1). W tej samej pracy podano uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania w postaci (2.1) dla układów z tarciem, przy ograniczeniu zbioru przemieszczeń możliwych do (c) — przemieszczeń.

W pracy [6] CZETAJEW wyprowadził ogólną zasadę dynamiki dla układów z tarciem, nie zawierającą w jawnej postaci sił reakcji więzów dla przemieszczeń możliwych, ortogonalnych do rzeczywistych prędkości punktów układu, to znaczy spełniających warunki

$$\dot{x}_i \delta x_i + \dot{y}_i \delta y_i + \dot{z}_i \delta z_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Zbiór takich przemieszczeń nazywa CZETAJEW (c) — przemieszczeniami.

Dla najczęściej spotykanych więzów z tarciem praca sił reakcji, działających na punkty materialne układu w danej chwili czasu, wykonana na (c) — przemieszczeniach, równa się zeru

$$\sum_{i=1}^{n} (R_{ix}\delta x_i^c + R_{iy}\delta y_i^c + R_{iz}\delta z_i^c) = 0.$$

Rugując z tego warunku, za pomocą równań ruchu, reakcje więzów R_{ix}, R_{iy}, R_{iz}, otrzymuje CZETAJEW związek

$$\sum_{i=1}^{n} [(m_i\ddot{x}_i - X_i)\delta x_i^c + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)\delta y_i^c + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)\delta z_i^c] = 0 \tag{2.3}$$

słuszny dla (c) — przemieszczeń. Związek ten można rozpatrywać jako uogólnienie zasady D'Alemberta-Lagrange'a na układy z tarciem.

Zasada (2.3) została dalej rozwinięta w pracach RUMIANCEWA [7]. Wychodząc z niej RUMIANCEW wyprowadził zwykłą postać zasady Gaussa, nie zawierającą jawnie sił reakcji.

Ograniczenie zbioru przemieszczeń możliwych w zasadzie (2.3) do (c) — przemieszczeń powoduje odpowiednie ograniczenie zbioru ruchów możliwych, z którymi porównywany jest w zasadzie Gaussa ruch rzeczywisty.

Rozważa się tylko ruchy możliwe, w których przyśpieszenia punktów układu $\bar{\gamma}_i^c$ spełniają następujący warunek: różnice między nimi i przyśpieszeniami punktów w ruchu rzeczywistym $\bar{w}_i$ są (c) — przemieszczeniami.

Takie ruchy możliwe nazywa RUMIANCEW (c) — ruchami. Dla nich zasada (2.3) przybiera postać

$$\sum_{i=1}^{n} [(m_i\ddot{x}_i - X_i)(\ddot{x}_i - \gamma_{ix}^c) + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)(\ddot{y}_i - \gamma_{iy}^c) + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)(\ddot{z}_i - \gamma_{iz}^c)] = 0. \tag{2.4}$$

Z równania (2.4) wynika zwykła postać zasady Gaussa.

1. Niech dany będzie układ n punktów materialnych o więzach nieliniowych anholonomicznych pierwszego rzędu z tarciem

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k;\ i = 1, 2, \ldots).$$

Dla rozważanego układu typu Czetajewa-Przeborskiego przemieszczenia możliwe określone są związkami

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial \dot{x}_i}\delta x_i+\frac{\partial f_j}{\partial \dot{y}_i}\delta y_i+\frac{\partial f_j}{\partial \dot{z}_i}\delta z_i\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Z definicji tej wynika, że istnieją przemieszczenia możliwe punktów układu proporcjonalne do różnic między przyśpieszeniami tych punktów w ruchu rzeczywistym (d) i w ruchu możliwym (δ), przy jednakowych współrzędnych i prędkościach punktów w ruchu rzeczywistym i możliwym w rozpatrywanej chwili czasu t. Ograniczmy ruchy wirtualne do zbioru (c) — ruchów. Zgodnie z zasadą Czetajewa dla układów z tarciem w postaci (2.4) w ruchu rzeczywistym danego układu będzie spełniony warunek

$$\sum_{i=1}^{n}[(m_i\ddot{x}_{id}-X_i)(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{y}_{id}-Y_i)(\ddot{y}_{id}-\ddot{y}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{z}_{id}-Z_i)(\ddot{z}_{id}-\ddot{z}^c_{i\delta})] = 0. \tag{2.5}$$

Wyzwólmy układ z części więzów i niech $\partial\bar{r}_i$ oznacza przemieszczenia możliwe układu częściowo wyzwolonego. Dla układów typu Czetajewa-Przeborskiego przemieszczenia możliwe danego układu znajdują się wśród przemieszczeń możliwych układu częściowo wyzwolonego. Jest oczywiste, że również (c) — przemieszczenia danego układu powinny znajdować się wśród (c) — przemieszczeń układu częściowo wyzwolonego. Wobec tego zasadę (2.4) dla układu częściowo wyzwolonego (∂) można zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{n}[(m_i\ddot{x}_{i\partial}-X_i)(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{y}_{i\partial}-Y_i)(\ddot{y}_{id}-\ddot{y}^c_{i\delta})+(m_i\ddot{z}_{i\partial}-Z_i)(\ddot{z}_{id}-\ddot{z}^c_{i\delta})] = 0. \tag{2.6}$$

Odejmując równanie (2.6) od równania (2.5) otrzymujemy związek

$$A_{d\delta}+A_{d\partial}-A_{\delta\partial} = 0, \tag{2.7}$$

gdzie wielkość

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i[(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}^c_{i\delta})^2+(\ddot{y}_{id}-\ddot{y}^c_{i\delta})^2+(\ddot{z}_{id}-\ddot{z}^c_{i\delta})^2]$$

oznacza odchylenie rzeczywistego ruchu (d) układu z tarciem od ruchu możliwego (δ) tego układu.

Analogicznie zdefiniowane są wielkości $A_{d\partial}$ oraz $A_{\delta\partial}$. Z równania (2.7) bezpośrednio wynikają dwie nierówności

$$A_{d\partial} < A_{\delta\partial}, \tag{2.8}$$

$$A_{d\delta} < A_{\delta\partial}. \tag{2.9}$$

Pierwsza z nich stanowi wyrażenie uogólnionej zasady Gaussa dla rozważanych układów z tarciem: odchylenie rzeczywistego ruchu (d) układu z tarciem od rzeczywistego ruchu (∂) układu częściowo wyzwolonego jest mniejsze niż odchylenie ostatniego z tych ruchów od możliwego (c) — ruchu (δ).

2. Uogólnioną zasadę najmniejszego skrępowania można rozszerzyć również i na układy o więzach liniowych anholonomicznych drugiego rzędu z tarciem.

Równania więzów są postaci

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{\lambda i}\ddot{x}_i+b_{\lambda i}\ddot{y}_i+c_{\lambda i}\ddot{z}_i) = a_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k),$$

gdzie współczynniki $a_{\lambda i}$, $b_{\lambda i}$, $c_{\lambda i}$ oraz a_λ zależą od czasu, współrzędnych i prędkości układu. Przemieszczenia możliwe w takich układach [3], [4] określone są przez związki

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{\lambda i}\delta x_i+b_{\lambda i}\delta y_i+c_{\lambda i}\delta z_i) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

Dla tego rodzaju definicji przemieszczeń możliwych pozostają słuszne dwa założenia, na których opiera się dowód uogólnionej zasady Gaussa. Tak więc, wychodząc z zasady Czetajewa dla układów z tarciem i powtarzając te same rozważania, co dla układów o więzach anholonomicznych rzędu pierwszego z tarciem, dojdziemy znów do nierówności (2.8), wyrażającej uogólnioną zasadę Gaussa dla układów z tarciem.

3. Związek między energią przyśpieszeń w ruchu rzeczywistym i częściowo lub całkowicie wyzwolonym

W pracy [2] CZETAJEW wyprowadził uogólnioną postać zasady najmniejszego skrępowania w układach o więzach idealnych nieliniowych (w szczególnym przypadku liniowych) anholonomicznych pierwszego rzędu. Opisuje ją nierówność

$$A_{d\partial} < A_{\delta\partial} \tag{3.1}$$

wyrażająca następującą treść: odchylenie ruchu rzeczywistego (d) układu o zadanych więzach od ruchu rzeczywistego (∂) układu częściowo z nich wyzwolonego jest mniejsze niż odchylenie dowolnego ruchu możliwego (δ) od tego samego ruchu (∂) układu, lecz częściowo wyzwolonego. Oprócz nierówności (3.1) CZETAJEW wyprowadził w swojej pracy jeszcze jedną nierówność

$$A_{d\delta} < A_{\delta\partial} \tag{3.2}$$

wyrażającą twierdzenie, które nazwiemy twierdzeniem Czetajewa: odchylenie ruchu rzeczywistego (d) układu od ruchu możliwego (δ) jest mniejsze, niż odchylenie tego ostatniego od ruchu częściowo wyzwolonego (∂).

W omawianej pracy wyprowadza się z nierówności (3.1) i (3.2) związek pomiędzy energiami przyśpieszeń w ruchach (d), (δ) oraz (∂).

Dodając nierówności (3.1) i (3.2) otrzymujemy nierówność

$$\frac{A_{d\delta}+A_{d\partial}}{2} < A_{\delta\partial}. \tag{3.3}$$

Podstawmy do nierówności (3.3) wyrażenia na wielkości $A_{d\delta}$, $A_{d\partial}$, $A_{\delta\partial}$:[1])

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta})^2,$$

[1]) Dla skrócenia zapisu oznaczamy współrzędne punktów układu jedną literą x z odpowiednim indeksem.

gdzie $\ddot{x}_{id}$, $\ddot{x}_{i\delta}$ są przyśpieszeniami odpowiednio w ruchu rzeczywistym i możliwym, przy jednakowych wartościach współrzędnych i prędkości punktów układu w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym w rozpatrywanej chwili czasu t. Wielkości $A_{d\partial}$ oraz $A_{\delta\partial}$ są określone w sposób analogiczny.

Z nierówności (3.3) po podstawieniu otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta})^2+\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial})^2 < 2\sum_{i=1}^{3n} m_i(\ddot{x}_{i\delta}-\ddot{x}_{i\partial})^2. \tag{3.4}$$

Wprowadzając energię przyśpieszeń dla ruchu rzeczywistego (d), możliwego (δ) i wyzwolonego (∂), oznaczając je odpowiednio jako S_d, S_δ oraz S_∂ możemy zapisać (3.4) w postaci:

$$2S_d+\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}(\ddot{x}_{i\delta}-\ddot{x}_{id})+\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\delta}(\ddot{x}_{i\partial}-\ddot{x}_{id}) < S_\delta+S_\partial,$$

względnie

$$S_d < \frac{S_\delta+S_\partial}{2}+\frac{\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta})+\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\delta}(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial})}{2}. \tag{3.5}$$

Ostatnia z nierówności stwierdza, że energia przyśpieszeń w ruchu rzeczywistym jest mniejsza od połowy sumy energii przyśpieszeń w ruchu wyzwolonym i możliwym, zwiększonej o połowę sumy iloczynów przyśpieszeń w jednym z ostatnich dwu ruchów, pomnożonych przez różnice między przyśpieszeniami w drugim z tych ruchów i w ruchu rzeczywistym (sumowanie odnosi się do wszystkich punktów układu).

Sumy wchodzące do prawej strony ostatniej nierówności mają określony sens mechaniczny.

Rozważmy pierwszą sumę

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta}). \tag{3.6}$$

Zawarte w niej różnice $\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta}$ między przyśpieszeniami w ruchu rzeczywistym i w ruchu możliwym można traktować jako przemieszczenia możliwe $\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\delta} = \delta x_i$. Wówczas sumę (3.6) możemy zapisać w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}\,\delta x_i. \tag{3.7}$$

Zgodnie z drugim prawem Newtona mamy dla ruchu częściowo wyzwolonego związek

$$m_i\ddot{x}_{i\partial} = F_{ix}+N_{ix},$$

gdzie N_{ix} są reakcjami więzów, zachowanych przy częściowym wyzwoleniu układu. Uwzględnijmy również to, że przemieszczenia możliwe danego układu (δx_i) zawierają się w zbiorze przemieszczeń możliwych (∂x_i) układu częściowo wyzwolonego. Tak więc suma (3.7) przyjmuje postać

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i\ddot{x}_{i\partial}\,\delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} (F_{ix}+N_{ix})\,\partial x_i.$$

Jeżeli więzy są idealne, to mamy

$$\sum_{i=1}^{3n} N_{ix} \partial x_i = 0.$$

Wobec tego suma (3.7) równa jest pracy wirtualnej sił aktywnych

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_{i\partial} \delta x_i = \sum_{i=1}^{3n} F_{ix} \delta x_i .$$

Zbadajmy z kolei drugą sumę zawartą w prawej części nierówności (3.5)

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i \ddot{x}_{i\delta} (\ddot{x}_{id} - \ddot{x}_{i\partial}). \tag{3.8}$$

Z drugiego prawa Newtona mamy

$$m_i (\ddot{x}_{id} - \ddot{x}_{i\partial}) = N'_{ix},$$

gdzie N'_{ix} to reakcje więzów odrzuconych przy częściowym wyzwoleniu układu.

W takim razie suma (3.8) przedstawia sobą pracę sił reakcji odrzuconych więzów na przyśpieszeniach ruchu możliwego.

Dzięki temu nierówność (3.5) możemy zinterpretować w sposób następujący: energia przyśpieszeń w ruchu rzeczywistym jest mniejsza od połowy sumy energii przyśpieszeń ruchu wyzwolonego i ruchu możliwego, zwiększonej o połowę sumy pracy wirtualnej sił aktywnych oraz pracy sił reakcji więzów odrzuconych przy wyzwoleniu układu wykonanej na przyśpieszeniach ruchu możliwego.

4. O sensie energetycznym pewnego twierdzenia Czetajewa

W rozdziale tym zbadamy sens energetyczny twierdzenia Czetajewa, wyrażającego jedną z ogólnych własności ruchu nieliniowych układów anholonomicznych. Wykażemy, że twierdzenie Czetajewa można rozpatrywać jako uogólnienie na nieliniowe układy anholonomiczne twierdzenia Bertranda o energii kinetycznej.

Oprócz zależności, wyrażającej uogólnioną zasadę Gaussa dla nieliniowych układów anholonomicznych pierwszego rzędu, CZETAJEW uzyskał w pracy [2] jeszcze jeden związek, odpowiadający następującemu twierdzeniu: odchylenie rzeczywistego ruchu układu o więzach idealnych od dowolnego ruchu możliwego jest mniejsze od odchylenia tego ostatniego od ruchu częściowo wyzwolonego

$$A_{d\delta} < A_{\partial\delta}, \tag{4.1}$$

gdzie wielkość

$$A_{d\delta} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i (d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2 \tag{4.2}$$

oznacza odchylenie ruchu rzeczywistego od ruchu możliwego w czasie dt; wielkość

$$A_{\partial\delta} = \sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2 \tag{4.3}$$

oznacza odchylenie ruchu częściowo wyzwolonego od tego samego ruchu możliwego w czasie dt; wielkości $d\dot{x}_i$, $\delta\dot{x}_i$, $\partial\dot{x}_i$ oznaczają zmiany prędkości punktu m_i w czasie dt odpowiednio w ruchu rzeczywistym, możliwym i częściowo wyzwolonym; prędkość $\dot{x}_i$ punktu w chwili t jest we wszystkich trzech ruchach jednakowa, przy czym w ruchu częściowo wyzwolonym punkt m_i jest pod działaniem tej samej siły $\overline{F}_i$, co w ruchu rzeczywistym.

Dla układów holonomicznych i liniowych anholonomicznych nierówności (4.1) można nadać pewien sens geometryczny. Przyrosty energii kinetycznej układu w czasie dt w ruchu rzeczywistym i częściowo wyzwolonym można przedstawić z dokładnością do wielkości rzędu trzeciego względem dt przy pomocy wzorów:

$$\Delta T = \sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i d\dot{x}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i)^2, \tag{4.4}$$

$$\Delta' T = \sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i \partial\dot{x}_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i)^2. \tag{4.5}$$

Różnica przyrostów energii kinetycznej w obydwu wymienionych ruchach wynosi

$$\Delta T - \Delta' T = \sum_{i=1}^{3n} m_i\dot{x}_i(d\dot{x}_i - \partial\dot{x}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i)^2. \tag{4.6}$$

Z nierówności (4.1) zapisanej w postaci

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2 < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i - \delta\dot{x}_i)^2$$

otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i(d\dot{x}_i)^2 - \sum_{i=1}^{3n} m_i(\partial\dot{x}_i)^2 < \sum_{i=1}^{3n} 2m_i\delta\dot{x}_i(d\dot{x}_i - \partial\dot{x}_i). \tag{4.7}$$

Ostatnią nierówność można zapisać na podstawie (4.6) jako

$$\Delta T - \Delta' T < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_i + \delta\dot{x}_i)(d\dot{x}_i - \partial\dot{x}_i), \tag{4.8}$$

skąd

$$\frac{\Delta T}{dt} - \frac{\Delta' T}{dt} < \sum_{i=1}^{3n} m_i(\dot{x}_i + \delta\dot{x}_i)(\ddot{x}_{id} - \ddot{x}_{i\partial}), \tag{4.9}$$

gdzie $\ddot{x}_{id}$ jest przyśpieszeniem punktu m_i w ruchu rzeczywistym, zaś $\ddot{x}_{i\partial}$ — przyśpieszeniem tegoż punktu w ruchu wyzwolonym.

Z równań ruchu dla danego układu i układu częściowo wyzwolonego mamy związek

$$m_i(\ddot{x}_{id}-\ddot{x}_{i\partial}) = N_{ix}^{(d)}-N_{ix}^{(\partial)},$$

gdzie $N_{ix}^{(d)}$ oznacza siły reakcji więzów danego układu, zaś $N_{ix}^{(\partial)}$ — siły reakcji więzów w układzie częściowo wyzwolonym. Różnica tych wielkości

$$N_{ix}^{(d)}-N_{ix}^{(\partial)} = N_{ix}^{(d-\partial)}$$

jest reakcją więzów odrzuconych przy częściowym wyzwoleniu układu.

Nierówność (4.9) możemy więc zapisać w postaci

$$\frac{\Delta T}{dt}\,\frac{\Delta' T}{dt} < \sum_{i=1}^{3n}(\dot{x}_i+\delta\dot{x}_i)N_{ix}^{(d-\partial)}, \tag{4.10}$$

gdzie $\dot{x}_i+\delta\dot{x}_i$ jest prędkością w dowolnym ruchu możliwym w chwili $t+dt$.

Prędkości punktów w możliwym ruchu układu o zadanych więzach są jak widać prędkościami możliwymi w ruchu układu o reakcjach więzów równych $N_{ix}^{(d-\partial)}$. W przypadku więzów stacjonarnych suma z prawej strony nierówności (4.10) jest proporcjonalna do sumy elementarnych prac sił reakcji więzów $N_{ix}^{(d-\partial)}$, wykonanych na przemieszczeniach wirtualnych układu i wobec tego dla więzów idealnych równa się zeru

$$\sum_{i=1}^{3n}(\dot{x}_i+\delta\dot{x}_i)N_{ix}^{(d-\partial)} = 0.$$

W ten sposób z relacji (4.10) mamy

$$\frac{\Delta T}{dt}-\frac{\Delta' T}{dt} < 0$$

względnie

$$\frac{\Delta T}{dt} < \frac{\Delta' T}{dt},$$

co oznacza, że przyrost energii kinetycznej w jednostce czasu w ruchu rzeczywistym jest mniejszy, niż w ruchu częściowo wyzwolonym. Ten wynik jest analogiczny do twierdzenia Bertrada [13].

Literatura cytowana w tekście

1. Ю. Б. Коган, *Об одном экстремальном свойстве реакций связей*, ПММ, **28**, 5 (1964).
2. Н. Г. Четаев, *О принципе Гаусса*, Изв. физ-мат. общ. при Казанском университете, сер. 3, **6**, 1932–1933 г. г.
3. A. Przeborski, *Die allgemeinsten Gleichungen der klassischen Dynamik*, Math. Zeitschrift, B. **36**, Berlin 1933, 184–194.
4. В. И. Киргетов, *О возможных перемещениях, материальных систем с линейными дифференциальными связями второго порядка*, ПММ, **23**, 4 (1959).
5. A. Przeborski, *Wykłady mechaniki teoretycznej*, t. II, W., 1935.
6. Н. Г. Четаев, *О некоторых связях с Трением*, ПММ, т. , **24**, 1 (1960).

7. В. В. Румянцев, *О системах с трением*, ПММ, **25**, 6 (1961), 969-977.
В. В. Румянцев, *О движении некоторых систем с неидеальными связями*, Вестник МГУ, 5 (1961).
8. К. Ф. Гаусс, *Об одном новом общем принципе механики*, Сб. Вариационные принципы механики, М. Физматгиз, 1959, 170–172.
9. Г. К. Пожарицкий, *Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением*, ПММ, **25**, 3 (1961).
10. Е. А. Болотов, *О принципе Гаусса*, Изв. физ-мат, общ-ва при Казанском университете, серия 2, **21**, 3 (1916).
11. Э. Мах, *Механика. Историко-критическиё очерк её разбития*, Спб., 1909, 306.
12. М. Ш. Аминов, *К принципу Гаусса*, Ученые записки авиационного института, 4 (1935).
13. Е. Т. Уиттекер, *Аналитическая динамика*, МЛ, 1937, 290–291.

POLITECHNIKA WOŁGOGRADZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 marca 1972 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

WSPÓŁRZĘDNE NORMALNE W ANALIZIE REZONANSÓW GŁÓWNYCH NIELINIOWYCH UKŁADÓW DRGAJĄCYCH O WIELU STOPNIACH SWOBODY

WANDA SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA (WARSZAWA)

W liniowych układach drgających o wielu stopniach swobody pojęcie postaci własnych i związanych z nimi współrzędnych normalnych gra istotną rolę przy badaniu drgań wymuszonych i samowzbudnych. Jak wiadomo, przy użyciu tych współrzędnych równania ruchu układu konserwatywnego o skończonej lub nieskończonej ilości stopni swobody dadzą się przedstawić w postaci równań wzajemnie niezależnych

$$M_{0j}\cdot\ddot{\xi}_{0j}+M_{0j}\cdot\omega_{0j}^2\cdot\xi_{0j} = Q_j(t),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie ω_{0j} — częstość własna, M_{0j} — uogólniona masa, $Q_j(t)$ — uogólniona siła j-tej postaci drgań, n — liczba stopni swobody układu, ξ_{0j} — j-ta współrzędna normalna związana ze współrzędnymi x_i (x_i — wychylenie masy m_i od położenia równowagi) za pomocą liniowej transformacji

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{0ij}\xi_{0j},$$

gdzie: b_{0ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$ — j-ta postać własna.

Współrzędne ξ_{0j} umożliwiają posługiwanie się rozprzężonymi równaniami ruchu, a przede wszystkim umożliwiają operowanie układem o zredukowanej liczbie stopni swobody przy zapewnieniu dużej dokładności obliczeń. Jest to szczególnie korzystne przy badaniu drgań samowzbudnych układów ciągłych, np. wiszących mostów, powierzchni nośnych samolotów itp., gdyż wyniki doświadczeń i obliczeń pozwoliły stwierdzić, że w drganiach tych «bierze udział» tylko kilka pierwszych postaci drgań. Tak więc układ ciągły zastępujemy układem zredukowanym do kilku, najczęściej dwóch stopni swobody, to jest do dwóch równań. Podobne uproszczenie polegające na odrzuceniu współrzędnych ξ_{0j} odpowiadających wyższym częstościom własnym daje bardzo dobre rezultaty przy badaniu drgań wymuszonych.

Wobec dużych trudności pojawiających się przy analizie drgań układów z charakterystyką nieliniową powstało pytanie, jak z możliwie dużą dokładnością przenieść zastosowanie tego rodzaju uproszczeń na te układy.

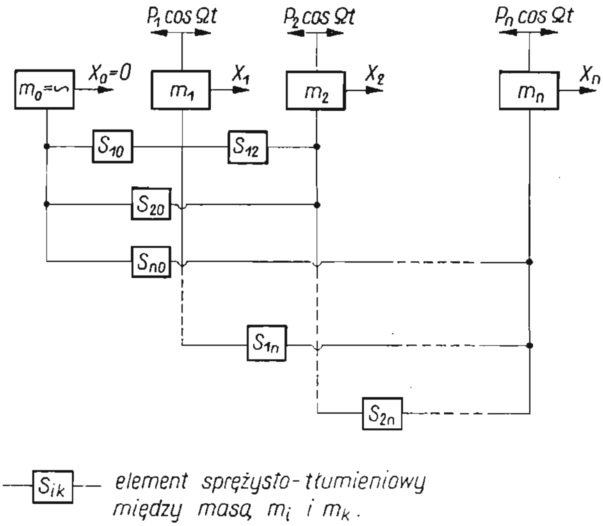
W niniejszej pracy zbadamy dwie drogi podejścia do tego zagadnienia:

1) przez zastosowanie liniowych współrzędnych normalnych i zaniedbanie ich sprzężenia,

2) przez zastosowanie tzw. nieliniowych współrzędnych normalnych zdefiniowanych w pracy [1].

1. Model mechaniczny i równania ruchu układu

Niech modelem rozważanego układu będzie n skupionych mas połączonych ze sobą i z masą $m_0 = \infty$ za pomocą nieważkich sprężyn i elementów rozpraszających energię (rys. 1).



Rys. 1. Model mechaniczny układu o n stopniach swobody

Równania ruchu we współrzędnych x_i, gdzie x_i — wychylenie masy m_i od położenia równowagi, mogą być zapisane następująco:

$$m_i\ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{n} S_{ik}(x_i - x_k, \dot{x}_i - \dot{x}_k) - \overline{P}_i \cos\overline{\Omega} t = 0, \tag{1.1}$$

$$i = 1, 2, \ldots n,$$

S_{ik} — siła oddziaływania między masą m_i i m_k.

Po wydzieleniu z siły sprężystej części liniowo zależnej od odkształcenia sprężyny równania (1.1) przybiorą postać

$$\varepsilon_i \equiv m_i\ddot{x}_i + \sum_{k=1}^{n} K_{ik}(x_i - x_k) + \mu f_i(x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_i, \ldots, \dot{x}_n) - \overline{P}_i \cos\overline{\Omega} t = 0. \tag{1.2}$$

O funkcji f_i założymy, że dla rozwiązania harmonicznego

$$x_i = r_i \cos(\overline{\Omega} t - \varphi_i) \tag{1.3}$$

można ją przedstawić w postaci szeregu Fouriera

$$f_i = p_0^{(i)} + \sum_{\nu=1}^{R} (p_\nu^{(i)} \cos\nu\theta + g_\nu^{(i)} \sin\nu\theta). \tag{1.4}$$

Oznaczając przez $\omega_{0j}, j = 1, 2, \ldots, n$ częstości własne, a przez $b_{0ij}, i, j = 1, 2, \ldots, n$ — postacie własne układu zlinearyzowanego, liniowe współrzędne normalne ξ_{0j} wprowadzimy za pomocą transformacji

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{0ij} \xi_{0j}. \tag{1.5}$$

Dzięki własności ortogonalności postaci własnych równania (1.2) przekształcimy do postaci

$$\check{\varepsilon}_j \equiv M_{0j} \ddot{\xi}_{0j} + M_{0j} \omega_{0j}^2 \xi_{0j} + \mu F_j(\xi_{01}, \ldots \xi_{0n}, \dot{\xi}_{01}, \ldots \dot{\xi}_{0n}) - \bar{Q}_{0j} \cos\bar{\Omega} t = 0, \tag{1.6}$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

gdzie

$$M_{0j} = \sum_{i=1}^{n} m_i b_{0ij}^2, \quad \bar{Q}_{0j} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i b_{0ij}, \quad F_j = \sum_{i=1}^{n} f_i b_{0ij}. \tag{1.7}$$

Funkcje F_j, podobnie jak f_i dla rozwiązania harmonicznego, przedstawimy w postaci szeregu Fouriera

$$F_j = P_0^{(j)} + \sum_{\nu=1}^{R} (P_\nu^{(j)} \cos\nu\theta + G_\nu^{(j)} \sin\nu\theta). \tag{1.8}$$

Równania ruchu we współrzędnych normalnych ξ_{0j} dla układu nieliniowego są więc nadal sprzężone przez nieliniową funkcję F_j.

Przypomnijmy najpierw podstawowe cechy układu zlinearyzowanego konserwatywnego ($F_j = 0$). Rozwiązanie równań ruchu (1.6) dla $F_j = 0$ daje nam od razu

$$\xi_{0j} = a_{0j} \cos\bar{\Omega} t, \quad a_{0j} = \frac{\bar{Q}_{0j}}{M_{0j}(\omega_{0j}^2 - \bar{\Omega}^2)}; \tag{1.9}$$

a stąd otrzymujemy współrzędne x_i za pomocą (1.5)

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{b_{0ij} \bar{Q}_{0j} \cos\bar{\Omega} t}{M_{0j}(\omega_{0j}^2 - \bar{\Omega}^2)} = \sum_{j=1}^{n} b_{0ij} \xi_{0j}. \tag{1.10}$$

Rozwiązanie w tej postaci doskonale ilustruje zjawisko rezonansu i rolę współrzędnych normalnych. Widzimy, że gdy $\Omega \to \omega_{0s}$, to amplituda drgań układu dąży do nieskończoności, ale spośród współrzędnych ξ_{0j} tylko jedna ξ_{0s} dąży do nieskończoności, a amplitudy wszystkich pozostałych «nierezonansowych» współrzędnych przybierają pewne ograniczone wartości. Zatem w pobliżu rezonansu można pominąć współrzędne «nierezonansowe» i rozpatrywać tylko jeden stopień swobody związany ze współrzędną «rezonansową»

$$x_i \underset{\Omega \to \omega_{0s}}{\to} b_{0is} \xi_{0s}. \tag{1.11}$$

Postać drgań układu w pobliżu rezonansu dąży zatem do postaci własnej b_{0is}. Rozważania te są w przybliżeniu słuszne i dla układu tłumionego, jeśli tylko tłumienie jest na tyle małe, że maksymalna amplituda a_{0s} jest dostatecznie duża w porównaniu z $a_{0j}, j \neq s$.

Postać równań ruchu układu nieliniowego (1.6), w którym sprzężenie jest tylko poprzez «mały» nieliniowy człon μF_j nasuwa zrozumiałą chęć zastosowania uproszczenia polegającego na zaniedbaniu tego sprzężenia i rozpatrywaniu równań ruchu w postaci

$$M_{0j}\ddot{\xi}_{0j}+M_{0j}\omega_{0j}^2\xi_{0j}+\mu F_j(\xi_{0j}, \dot{\xi}_{0j})-\overline{Q}_{0j}\cos\overline{\Omega}t = 0. \tag{1.12}$$

Uproszczenie to wynika również z samej procedury szeroko stosowanej w literaturze metody uśrednienia [4].

We wcześniejszej pracy [2] analizowany był efekt sprzężenia współrzędnych ξ_{01}, ξ_{02} na przykładzie układu o dwóch stopniach swobody za pomocą metod teoretycznych oraz za pomocą maszyny analogowej. Ponadto w pracy [3] badane były analityczne metody przybliżone stosowane przy analizie drgań ustalonych układów nieliniowych o n stopniach swobody, a w pracy [1] wprowadzono i zdefiniowano pojęcie nieliniowych współrzędnych normalnych i zbadano zachowanie się tych współrzędnych w pobliżu rezonansu.

Podsumowując rezultaty tych prac należy stwierdzić, że w pobliżu rezonansów głównych dominują drgania harmoniczne o częstości siły wymuszającej $\overline{\Omega}$, a więc przybliżone rozwiązanie można założyć w postaci

$$x_i = r_i(\cos\overline{\Omega}t-\varphi_i),$$

przy czym największą dokładność przy stosunkowo dużych wartościach amplitud uzyskamy, gdy współczynniki r_i, φ_i określimy za pomocą metody Ritza.

2. Liniowe współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych układu nieliniowego

W oparciu o rozwiązania harmoniczne uzyskane metodą Ritza zbadajmy zachowanie się współrzędnych ξ_{0j} przy uwzględnieniu ich sprzężenia w równaniach (1.6) oraz przy zaniedbaniu tego sprzężenia (1.12).

Zakładamy rozwiązanie w postaci

$$\xi_{0j} = a_{0j}(\cos\overline{\Omega}t-\vartheta_j). \tag{2.1}$$

Równania Ritza, z których wyznaczymy nieznane współczynniki a_{0j}, ϑ_j zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \check{\varepsilon}_j(t)\cdot\cos\overline{\Omega}t d(\overline{\Omega}t) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,\\ &\int_0^{2\pi} \check{\varepsilon}_j(t)\cdot\sin\overline{\Omega}t d(\overline{\Omega}t) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

gdzie $\check{\varepsilon}_j(t)$ — «pozostałości» równań (1.6) po podstawieniu do nich przybliżonego rozwiązania (2.1). W przypadku układu zachowawczego możemy od razu przyjąć $\vartheta_j = 0$ i równania (2.2) przybierają postać

$$a_{0j}M_{0j}(\omega_{0j}^2-\overline{\Omega}^2)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu F_j(a_{01}\cos\overline{\Omega}t, \ldots\, a_{0n}\cos\overline{\Omega}t)\cos\overline{\Omega}t d(\overline{\Omega}t)-\overline{Q}_{0j} = 0, \tag{2.3}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n$$

lub, uwzględniając oznaczenia wzoru (1.8),

$$a_{0j}M_{0j}(\omega_{0j}^2-\bar{\Omega}^2)+P_1^{(j)}(a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n})-\bar{Q}_{0j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Rozważmy teraz rezonans, przy którym $a_{0s} \to \infty$:

$$\begin{aligned} &M_{0s}(\omega_{0s}^2-\bar{\Omega}^2)+\frac{\mu}{a_{0s}} P_1^{(s)}(a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n}) = \frac{\bar{Q}_{0j}}{a_{0s}}, \\ (2.4) \qquad &M_{0j}\frac{a_{0j}}{a_{0s}}(\omega_{0j}^2-\Omega^2)+\frac{\mu}{a_{0s}} P_1^{(j)}(a_{01}, a_{02}, \dots a_{0n}) = \frac{\bar{Q}_{0j}}{a_{0s}}, \\ &j = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Przyjmując $Q_{0j}/a_{0s} = 0$ otrzymujemy układ równań jednorodnych z niewiadomymi $a_{01}, a_{02}, \dots a_{0s-1}, a_{0s+1}, \dots a_{0n}$ i Ω. Można wykazać, że w ogólnym przypadku wszystkie amplitudy współrzędnych normalnych dążą do nieskończoności tak, że dla $a_{0s} \to \infty$

$$a_{0j}/a_{0s} \to \text{const}, \tag{2.5}$$

a zatem postać drgań układu przy rezonansie dąży do pewnej wartości b_{is} różnej od liniowej postaci własnej

$$\frac{x_i}{x_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_{0ij}a_{0j}}{\sum_{j=1}^{n} b_{01j}a_{0j}} \xrightarrow[a_{0s}\to\infty]{} b_{is} \neq b_{0is}. \tag{2.6}$$

Natomiast przy zaniedbaniu sprzężenia między $\xi_{01}, \dots, \xi_{0n}$, czyli przy posługiwaniu się uproszczonymi równaniami (1.12), otrzymamy wynik podobny do wyniku dla układu liniowego

$$\xi_{0s} = a_{0s}\cos\bar{\Omega}t = \frac{\bar{Q}_{0s}\cos\bar{\Omega}t}{M_{0s}[\omega_s^2(a_{0s})-\bar{\Omega}^2]}, \tag{2.7}$$

$$x_i \xrightarrow[a_{0s}\to\infty]{} b_{0is}\xi_{0s},$$

gdzie

$$\omega_s(a_{0s}) = \omega_{0s}+\mu A_1(a_{0s}) = \omega_{0s}+\frac{\mu P_s^{(s)}(a_{0s})}{2a_{0s}M_{0s}} \tag{2.8}$$

i w rezultacie postać drgań przy rezonansie nie ulega zmianie

$$x_i/x_1 \xrightarrow[a_{0s}\to\infty]{} b_{0is}.$$

3. Nieliniowe współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych

Rozszerzmy teraz pojęcie częstości i postaci własnych na układ nieliniowy. Drgania główne nieliniowego układu autonomicznego zakładamy w postaci funkcji harmonicznej

$$\begin{aligned} &x_i = a_{ij}\cos\omega_j t = a_j b_{ij}\cos\omega_j t, \\ &i, j = 1, 2, \dots, n, \quad b_{1j} = 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Podobnie jak w układzie liniowym, wielkości ω_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, nazywamy częstościami własnymi, a współczynniki b_{ij}, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ — postaciami własnymi układu. Wielkości te są funkcjami amplitudy

$$\omega_j = \omega_j(a_j), \qquad b_{ij} = b_{ij}(a_j),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

a określimy je z równań Ritza

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon_i(t)\cos\omega t\, d(\omega t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.2}$$

gdzie $\varepsilon_i(t)$ — «pozostałości» równań ruchu (1.2) po podstawieniu do nich przybliżonego rozwiązania (3.1). Uczynimy założenie, że w rozpatrywanym zakresie parametrów wszystkie częstości ω_j i postacie własne b_{ij} przybierają różne wartości.

Zbadajmy teraz zachowanie się układu nieliniowego zachowawczego przy rezonansie zakładając, że częstość siły wymuszającej może zbliżyć się nieograniczenie do częstości własnej ω_s.

Podstawiając do równań ruchu rozwiązanie w postaci $x_i = r_i\cos\overline{\Omega}t$ i stosując metodę Ritza otrzymujemy równanie z niewiadomymi $r_1, r_2, \ldots, r_n$,

$$-m_i\Omega^2 r_i + \sum_{k=0}^{n} K_{ik}(r_i - r_k) +$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu f_i(r_1\cos\overline{\Omega}t, \ldots r_n\cos\overline{\Omega}t)\cos\overline{\Omega}t\, d(\overline{\Omega}t) = \overline{P}_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Po podzieleniu stronami przez r_s otrzymujemy

$$-m_i\overline{\Omega}^2\frac{r_i}{r_s} + \sum_{k=0}^{n} K_{ik}\frac{r_i - r_k}{r_s} + \frac{1}{\pi r_s}\int_0^{2\pi} \mu f_i\cos\overline{\Omega}t\, d(\overline{\Omega}t) = \frac{P_i}{r_s}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Zakładając, że przy rezonansie r_s przybiera wartości tak duże, że P_i/r_s możemy traktować jako bliskie zeru, otrzymujemy układ równań jednorodnych jak dla układu autonomicznego. Jedynymi rozwiązaniami harmonicznymi układu autonomicznego są rozwiązania (3.1) przedstawiające drgania główne o częstościach własnych ω_j i postaciach własnych b_{ij}. Zatem przy rezonansie, gdy $r_s \to \infty$, układ drga w pobliżu nieliniowych drgań głównych $\overline{\Omega} \to \omega_s$ i postać drgań układu dąży do b_{is}, $i = 2, 3, \ldots, n$.

Widzimy więc, że drgania układu w pobliżu rezonansu możemy opisać za pomocą jednej współrzędnej związanej z nieliniową postacią własną

$$x_i \approx b_{is}(a_s)\xi_s. \tag{3.4}$$

Jeżeli to rozwiązanie podstawimy do równań ruchu (1.2), a następnie pomnożymy każde z równań przez odpowiednie b_{ij} i dodamy wszystkie razem, otrzymamy

$$\ddot{\xi}_s\sum_{i=1}^{n} m_i b_{is}^2 + \xi_s\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{n} K_{ik}(b_{is} - b_{ks})\Big]b_{is} + \sum_{i=1}^{n} b_{is}\mu f_i - \sum_{i=1}^{n} b_{is}\overline{P}_i\cos\overline{\Omega}t = 0. \tag{3.5}$$

Opierając się na rozwiązaniu harmonicznym $\xi_s = a_s \cos\bar{\Omega}t$, co przy drganiach swobodnych sprowadza się do $\xi_s = a_s \cos\omega_s t$, dochodzimy za pomocą równań Ritza do wniosku, że spełniona jest zależność

$$\xi_s \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} K_{ik}(b_{is}-b_{ks})b_{is} + \sum_{i=1}^{n} b_{is}\mu f_i = \xi_s M_s \omega_s^2,$$

gdzie ω_s — częstość własna układu nieliniowego będąca funkcją amplitudy, a $M_s = \sum_{i=1}^{n} m_i b_{is}^2$ — uogólniona masa s-tej postaci, będąca również funkcją amplitudy.

Równanie (3.5) przybiera zatem postać

$$M_s \ddot{\xi}_s + \omega_s^2 M_s \xi_s = Q_s \cos\bar{\Omega}t, \tag{3.6}$$

a stąd rozwiązanie

$$\xi_s = a_s \cos\bar{\Omega}t = \frac{\bar{Q}_s \cos\bar{\Omega}t}{M_s(\omega_s^2-\Omega^2)}. \tag{3.7}$$

Równanie (3.7) opisuje «odpowiedź» układu na działanie sił wymuszających $\bar{P}_l \cos\bar{\Omega}t$ pod warunkiem, że występuje tylko jedna s-ta postać ruchu. Współrzędne ξ_s spełniające te równania nazywać będziemy nieliniowymi współrzędnymi normalnymi. Spełniają one warunek, że przy rezonansie dominuje tylko jedna, rezonansowa współrzędna, a pozostałe przybierają ograniczone wartości. Nie wiemy jednak jak wyraża się ogólne rozwiązane x_i w funkcji tak zdefiniowanych współrzędnych, gdyż jak wiadomo, w układzie nieliniowym nie jest słuszne prawo superpozycji. Skoro w układach liniowych między x_i i ξ_{0j} zachodziła zależność liniowa (1.5), w układzie nieliniowym może to być jakaś zależność nieliniowa

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n).$$

Zagadnienie to zostało rozwiązane w pracy [1] dla pewnego szczególnego układu o n stopniach swobody posiadającego tzw. graniczne częstości własne. Wykazano między innymi, że wielkość błędu wynikająca z odrzucenia współrzędnych «nierezonansowych» $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \dots \xi_n$ przy $\Omega \to \omega_s$ jest większa niż w układach liniowych, mianowicie, że człon odrzucany dąży do nieskończoności, lecz do nieskończoności niższego rzędu niż współrzędna rezonansowa:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\xi_j + \Delta x_i(\xi_1, \xi_2 \dots \xi_n);$$

$$x_i \underset{\bar{\Omega}\to\omega_s}{\to} b_{is}a_s \cos\bar{\Omega}t + \alpha_i \cos\Omega t \tag{3.8}$$

$$\text{oraz} \quad \alpha_i \to \infty, \quad \text{lecz} \ \frac{\alpha_i}{a_s b_{is}} \underset{\bar{\Omega}\to\omega_s}{\to} 0,$$

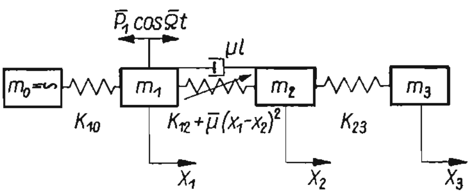
a więc ostatecznie

$$x_i \underset{\bar{\Omega}\to\omega_s}{\to} b_{is}\xi_s.$$

W niniejszej pracy przedstawiony jest jeden z praktycznych aspektów powyższych rozważań, mianowicie sprawa oceny maksymalnej amplitudy przy rezonansach i wpływania na charakterystykę tłumienia przez odpowiednie umieszczenie elementu tłumiącego. Zauważmy bowiem, że gdy element tłumiący znajduje się między masą m_i i m_k, to siła tłumienia zależy od różnicy amplitud tych mas, a więc od amplitudy jednej z nich i postaci drgań. Jeżeli w wyniku nieliniowej charakterystyki sprężyn postać drgań ulega zmianie ze wzrostem amplitudy, ulegnie również zmianie efektywność elementu tłumiącego, co szczególnie rzutuje na maksymalne amplitudy przy rezonansach. Stąd nasuwa się przypuszczenie, że metoda obliczeń nie uwzględniająca zmian postaci drgań, a więc i metoda polegająca na pominięciu sprzężenia między liniowymi współrzędnymi normalnymi, może dawać niedokładne wyniki.

4. Badanie rezonansów głównych układu o trzech stopniach swobody

Zagadnienie rozpatrzmy szczegółowo na przykładzie układu drgającego o trzech stopniach swobody przedstawionego na rys. 2. Dla uproszczenia obliczeń przyjęto, że tylko jedna sprężyna ma charakterystykę nieliniową sztywniejącą typu x^3. Układ zaopatrzony jest w jeden element tłumiący o charakterystyce liniowej i jest wzbudzany siłą harmoniczną $\bar{P}_1 \cos \bar{\Omega} t$.



Rys. 2. Model mechaniczny układu o trzech stopniach swobody

Równania ruchu układu przy umieszczeniu tłumika między masą m_1 i m_2 są następujące:

$$
\begin{aligned}
&m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + K_{10}x_1 + K_{12}(x_1-x_2) + \bar{\mu}(x_1-x_2)^3 + \bar{\mu} l\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = \bar{P}_1 \cos \bar{\Omega} t,\\
(4.1)\quad &m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + K_{12}(x_2-x_1) + K_{23}(x_2-x_3) - \bar{\mu}(x_1-x_2)^3 - \bar{\mu} l\left(\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt}\right) = 0,\\
&m_3 \frac{d^2x_3}{dt^2} + K_{23}(x_3-x_2) = 0,
\end{aligned}
$$

lub w postaci bezwymiarowej:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_1 \frac{d^2x_1}{d\tau^2} + C_{10}x_1 + C_{12}(x_1-x_2) + \mu(x_1-x_2)^3 + \mu l\left(\frac{dx_1}{d\tau} - \frac{dx_2}{d\tau}\right) = P_1 \cos \Omega \tau,\\
(4.2)\quad &\gamma_2 \frac{d^2x_2}{d\tau^2} + C_{12}(x_2-x_1) + C_{23}(x_2-x_3) - \mu(x_1-x_2)^3 - \mu l\left(\frac{dx_1}{d\tau} - \frac{dx_2}{d\tau}\right) = 0,\\
&\gamma_3 \frac{d^2x_3}{d\tau^2} + C_{23}(x_3-x_2) = 0,
\end{aligned}
$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$\gamma_i = \frac{m_i}{m_1}, \qquad C_{ik} = \frac{K_{ik}}{K_{10}}, \qquad \Omega = \bar{\Omega}\sqrt{\frac{m_1}{K_{10}}},$$

$$\tau = t\sqrt{\frac{K_{10}}{m_1}}, \qquad P_1 = \frac{\bar{P}_1}{K_{10}}, \qquad \mu = \frac{\bar{\mu}}{K_{10}}.$$

Zastępując drugie równanie przez sumę równania pierwszego i drugiego otrzymamy układ, w którym wyraz nieliniowy występuje tylko w jednym równaniu:

$$\gamma_1\frac{d^2x_1}{d^2} + C_{10}x_1 + C_{12}(x_1 - x_2) + \mu(x_1 - x_2)^3 + \mu l\left(\frac{dx_1}{d\tau} - \frac{dx_2}{d\tau}\right) = P_1\cos\Omega\tau,$$

$$\gamma_1\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + \gamma_2\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + C_{10}x_1 + C_{23}(x_2 - x_3) = P_1\cos\Omega\tau, \tag{4.3}$$

$$\gamma_3\frac{d^2x_3}{d\tau^2} + C_{23}(x_3 - x_2) = 0.$$

Zakładając dla układu autonomicznego rozwiązanie

$$\begin{aligned} x_1 &= a\cos\omega t,\\ x_2 &= ab_2\cos\omega t,\\ x_3 &= ab_3\cos\omega t, \end{aligned} \tag{4.4}$$

częstości własne w funkcji amplitudy a znajdziemy z wyznacznika charakterystycznego

$$D(\omega^2, a^2) = \begin{vmatrix} -\gamma_1\omega^2 + C_{10} + C_{12} + \varkappa(a^2), & -C_{12}, & 0 \\ -\gamma_1\omega^2 + C_{10}, & -\gamma_2\omega^2 + C_{23}, & -C_{23} \\ 0, & -C_{23}, & -\gamma_3\omega^2 + C_{23} \end{vmatrix} = 0, \tag{4.5}$$

gdzie:

$$\varkappa(a^2) = \frac{3}{4}\mu a^2(1 - b_2)^3.$$

Postacie własne znajdziemy za pomocą dopełnień algebraicznych wyznacznika $D(\omega^2, a^2)$,

$$b_{ij} = \left(\frac{D_{si}}{D_{s1}}\right)_{\omega=\omega_j}.$$

Wybierając $s = 1$ otrzymamy b_{ij} jako funkcje częstości ω_j

$$b_{2j} = \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1\omega_j^2 - C_{10}, & -C_{23} \\ 0 & -\gamma_3\omega_j^2 + C_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma_2\omega_j^2 + C_{23}, & -C_{23} \\ -C_{23}, & -\gamma_3\omega_j^2 + C_{23} \end{vmatrix}}; \qquad b_{3j} = \frac{b_{2j}C_{23}}{-\gamma_3\omega_j^2 + C_{23}}. \tag{4.6}$$

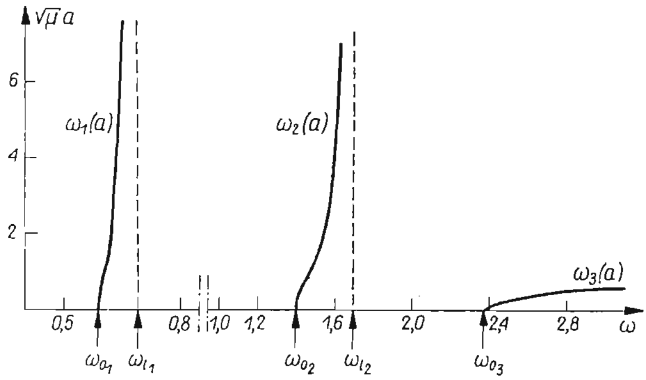
Przy amplitudzie a dążącej do nieskończoności, dwie niższe częstości własne dążą do pewnych wartości granicznych $\omega_{\text{lim}\,1}$, $\omega_{\text{lim}\,2}$ równych częstościom własnym układu, w którym masy m_1 i m_2 są ze sobą sztywno połączone. Częstości te obliczymy z wyznacznika

$$
(4.7) \qquad D_{\text{lim}} = \begin{vmatrix} -\omega^2(\gamma_1+\gamma_2)+C_{10}+C_{23} & -C_{23} \\ -C_{23} & -\gamma_3\omega^2+C_{23} \end{vmatrix} = 0 .
$$

Spełniają one warunek

$$
\omega_{01} < \omega_{\text{lim}\,1} < \omega_{02} < \omega_{\text{lim}\,2} < \omega_{03} .
$$

Trzecia, najwyższa częstość własna dąży do nieskończoności ze wzrostem amplitudy (rys. 3). Dla obliczonych z (4.7) częstości granicznych za pomocą wzorów (4.6) obliczamy odpowiednie graniczne postacie własne.



Rys. 3. Krzywe częstości własnych w funkcji amplitudy

Dla przykładu liczbowego scharakteryzowanego parametrami

$$
\gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0{,}5, \quad \gamma_3 = 0{,}5,
$$
$$
C_{10} = 1, \quad C_{12} = 1, \quad C_{23} = 1,
$$

częstości i postacie własne są następujące:

1. postać	2. postać	3. postać
$\omega_{01} = 0{,}592$,	$\omega_{02} = 1{,}41$,	$\omega_{03} = 2{,}38$,
$b_{021} = 1{,}65$,	$b_{022} = 0{,}0$,	$b_{023} = -3{,}64$,
$b_{031} = 2{,}0$,	$b_{032} = -1{,}0$,	$b_{033} = 2{,}0$,
$\omega_{\text{lim}\,1} = 0{,}685$,	$\omega_{\text{lim}\,2} = 1{,}70$,	$\omega_{l3} \to \infty$
$b_{l21} = 1{,}0$,	$b_{l22} = 1{,}0$,	$b_{l23} = -\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = -2{,}0$,
$b_{l31} = 1{,}3$,	$b_{l32} = -2{,}3$,	$b_{l33} = 0$.

Zbadajmy pierwszy rezonans posługując się dwiema metodami:

1) metodą nieliniowych współrzędnych normalnych redukujących układ w pobliżu rezonansu do jednego stopnia swobody określonego przez nieliniową postać własną b_{l1};

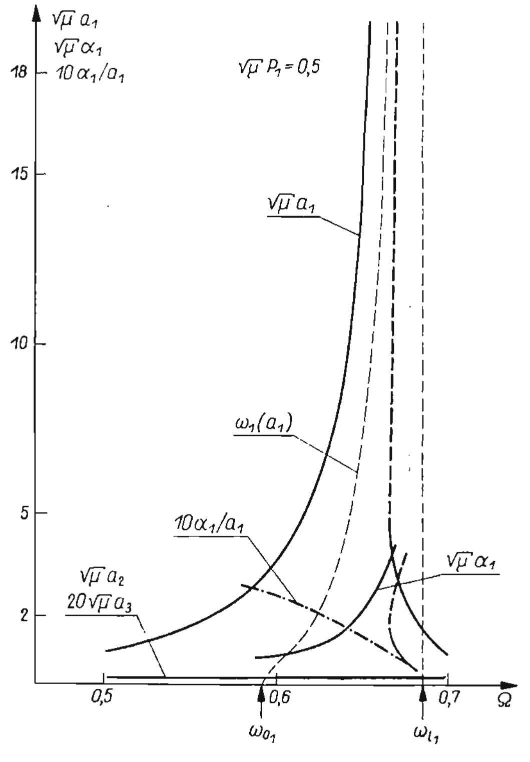
2) metodą zaniedbania sprzężenia między współrzędnymi normalnymi ξ_{01}, ξ_{02}, ξ_{03}, tj. metodą redukującą układ do jednego stopnia swobody określonego przez liniową postać własną b_{0i1}.

4.1. Analiza pierwszego rezonansu za pomocą nieliniowych współrzędnych normalnych. Zgodnie z (3.6) nieliniowe współrzędne normalne spełniają rozprzężone równania ruchu i dla układu nietłumionego amplitudę a_1 obliczamy z zależności

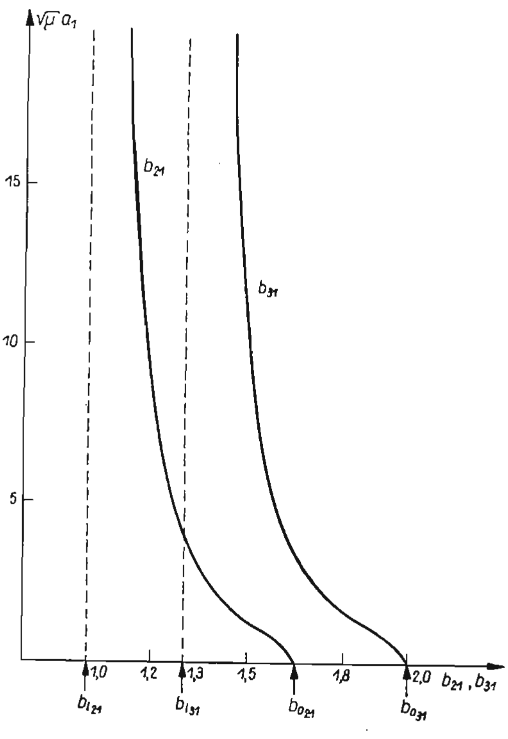
$$a_1 = \frac{P_1}{M_1[\omega_1^2(a_1)-\Omega^2]}, \tag{4.8}$$

gdzie $M_1 = 1+\gamma_2 b_{21}^2+\gamma_3 b_{31}^2$.

Częstość własną $\omega_1(a_1)$ i współczynniki postaci własnej $b_{21}(a_1)$ i $b_{31}(a_1)$ znajdujemy za pomocą wzorów (4.5) i (4.6).



Rys. 4. Krzywe rezonansowe nieliniowych współrzędnych normalnych w pobliżu pierwszego rezonansu



Rys. 5. Współczynniki pierwszej postaci własnej b_{21}, b_{31} w funkcji amplitudy

Amplitudy współrzędnych «nierezonansowych» a_2 i a_3 są na tyle małe, że obliczymy je jak dla układu liniowego

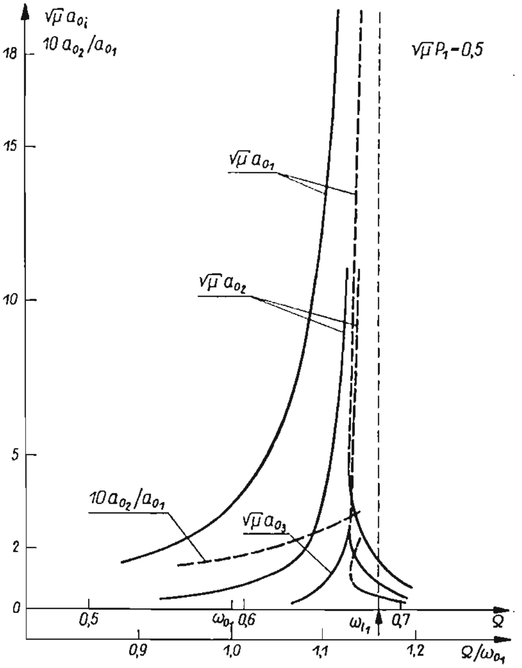
$$a_2 = \frac{P_1}{M_{02}(\omega_{02}^2-\Omega^2)}, \quad a_3 = \frac{P_1}{M_{03}(\omega_{03}^2-\Omega^2)}. \tag{4.9}$$

Ponadto za pomocą wzorów wyprowadzonych w pracy [1] obliczymy wielkość członu nieliniowego w transformacji (3.8), czyli wielkość $\alpha_i = \alpha_i(\Omega)$. Wyniki naniesiono na rys. 4 w formie wykresów $a_1 = a_1(\Omega)$, $a_2 = a_2(\Omega)$, $a_3 = a_3(\Omega)$, $\alpha_1 = \alpha_1(\Omega)$ oraz na rys. 5 $b_{21} = b_{21}(a_1)$ i $b_{31} = b_{31}(a_1)$.

Całkowita amplituda masy m_1 wynosi

$$r_1 = a_1 + \alpha_1 + a_2 + a_3.$$

Dwa ostatnie wyrazy a_2 i a_3 przybierają bardzo małe wartości, natomiast a_1 i α_1 dążą do nieskończoności, gdy $\Omega \to \omega_1(a_1)$. Naniesiono również krzywą $\frac{\alpha_1}{a_1} = \frac{\alpha_1}{a_1}(\Omega)$ pokazując, że zgodnie z ogólną analizą przeprowadzoną w pracy [1] przy rezonansie $\alpha_1/a_1 \to 0$ uzasadnione jest ograniczenie rozważań do współrzędnej rezonansowej $\xi_1 = a_1 \cos \Omega\tau$.



Rys. 6. Krzywe rezonansowe liniowych współrzędnych normalnych w pobliżu pierwszego rezonansu

Przy umieszczeniu tłumika między masą m_1 i m_2 współrzędną ξ_1 określimy z równania

$$M_1 \ddot{\xi}_1 + M_1 \omega_1^2(a_1)\xi_1 + \mu l(1-b_{21})^2 \dot{\xi}_1 = P_1 \cos \Omega\tau. \tag{4.10}$$

Zakładając rozwiązanie $\xi_1 = a_1 \cos(\Omega t - \vartheta_1)$ i stosując metodę Ritza otrzymamy

$$a_1 \equiv \frac{P_1}{M_1(a_1)\sqrt{[\omega_1^2(a_1)-\Omega^2]^2 + \left[\frac{\mu l(1-b_{21})^2}{M_1(a_1)}\right]^2 \Omega^2}}. \tag{4.11}$$

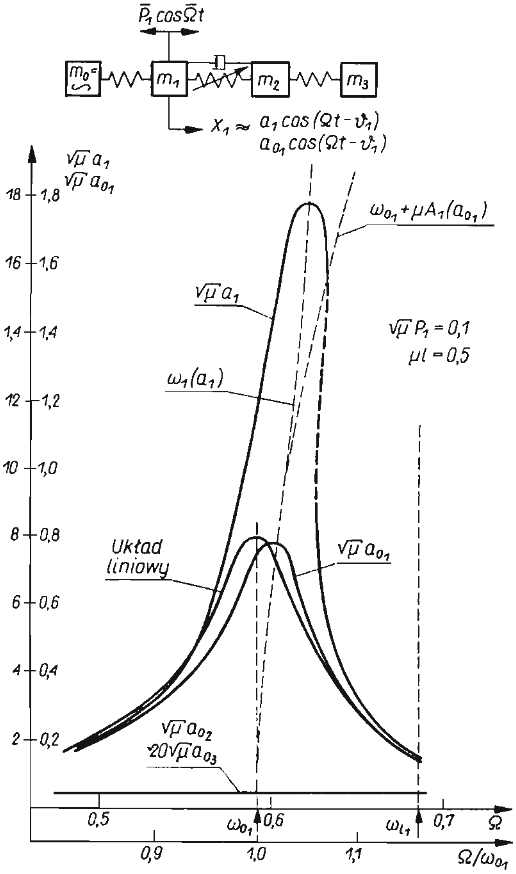
Przy umieszczeniu tłumika między m_2 i m_3 otrzymamy odpowiednio

$$a_1 = \frac{P_1}{M_1(a_1)\sqrt{[\omega_1^2(a_1)-\Omega^2]^2+\left[\frac{\mu l(b_{21}-b_{31})^2}{M_1(a_1)}\right]^2\Omega^2}}. \tag{4.12}$$

Krzywe rezonansowe układu tłumionego w pobliżu pierwszego rezonansu przedstawione są na rys. 7 i 10. Zauważmy, że odpowiednik współczynnika tłumienia

$$\frac{\mu l[1-b_{21}(a_1)]^2}{2M_1(a_1)} = h_{1,2}, \quad \frac{\mu l(b_{21}-b_{31})^2}{2M_1(a_1)} = h_{2,3} \tag{4.13}$$

jest tutaj funkcją amplitudy, mimo że tłumik ma charakterystykę liniową.



Rys. 7. Krzywe rezonansowe układu tłumionego — tłumik między masą m_1 i m_2

4.2. Analiza pierwszego rezonansu za pomocą liniowych współrzędnych normalnych. Równania ruchu układu we współrzędnych normalnych ξ_{01}, ξ_{02}, ξ_{03} przybierają dla układu nietłumionego postać (2.3)

$$M_{0j}\ddot{\xi}_{0j}+M_{0j}\omega_{0j}^2\xi_{0j}+\mu(1-b_{02j})\left[\sum_{s=1}^{3}\xi_{0s}(1-b_{02s})\right]^3 = P_1\cos\Omega\tau, \qquad j=1,2,3. \tag{4.14}$$

Zbadajmy zachowanie się tych współrzędnych przy pierwszym rezonansie z uwzględnieniem ich sprzężenia. Równania (2.4), z których wyznaczymy ξ_{02}/ξ_{01} i ξ_{03}/ξ_{01} przybierają postać:

$$\omega_{01}^2-\Omega^2+$$
$$+\frac{3}{4}\frac{\mu(1-b_{021})}{M_{01}}a_{01}^2\left[(1-b_{021})+\frac{a_{02}}{a_{01}}(1-b_{022})+\frac{a_{03}}{a_{01}}(1-b_{023})\right]^3=\frac{P_1}{M_{01}a_{01}},$$

$$\frac{a_{02}}{a_{01}}(\omega_{02}^2-\Omega^2)+$$
(4.15)
$$+\frac{3}{4}\frac{\mu(1-b_{022})}{M_{02}}a_{01}^2\left[1-b_{021}+\frac{a_{02}}{a_{01}}(1-b_{022})+\frac{a_{03}}{a_{01}}(1-b_{023})\right]^3=\frac{P_1}{M_{02}a_{01}},$$

$$\frac{a_{03}}{a_{01}}(\omega_{03}^2-\Omega^2)+$$
$$+\frac{3}{4}\frac{\mu(1-b_{023})}{M_{03}}a_{01}^2\left[1-b_{021}+\frac{a_{02}}{a_{01}}(1-b_{022})+\frac{a_{03}}{a_{01}}(1-b_{023})\right]^3=\frac{P_1}{M_{03}a_{01}}.$$

Zakładając, że $a_{01}\to\infty$ tak, że $\dfrac{P_1}{M_{0j}a_{01}}\to 0$, otrzymamy z (4.15)

$$\frac{a_{02}}{a_{01}}\underset{\Omega\to\omega_1}{\to}0{,}34,\qquad \frac{a_{03}}{a_{01}}\underset{\Omega\to\omega_1}{\to}0{,}0735.$$

Równania (4.15) pozwalają również wykreślić przebieg krzywych rezonansowych. Wyniki obliczeń w postaci wykresów $a_{01}=a_{01}(\Omega)$, $a_{02}=a_{02}(\Omega)$, $a_{03}=a_{03}(\Omega)$ przedstawione są na rys. 6.

Dla układu tłumionego zbadamy współrzędną rezonansową ξ_{01} bez uwzględnienia sprzężenia. Gdy tłumik umieszczony jest między masą m_1 i m_2, współrzędną tę określimy z równania

(4.16) $$M_{01}\ddot{\xi}_{01}+M_{01}\omega_{01}^2\xi_{01}+\mu(1-b_{021})^4\xi_{01}^3+(1-b_{021})^2\mu l\dot{\xi}_{01}=P_1\cos\Omega\tau.$$

Rozwiązując (4.16) otrzymamy (2.7)

(4.17) $$\xi_{01}=a_{01}\cos(\Omega t-\vartheta_1)=\frac{P_1\cos(\Omega\tau-\vartheta_1)}{M_{01}\sqrt{[(\omega_{01}+\mu A_1)^2-\Omega^2]^2+\left[\dfrac{\mu l(1-b_{021})^2}{M_{01}}\right]^2\Omega^2}},$$

gdzie

(4.18) $$A_1=\frac{3}{8}\mu a_{01}^2\frac{(1-b_{021})^4}{M_{01}}.$$

Gdy tłumik umieszczony jest między masą m_2 i m_3, otrzymamy

(4.19) $$\xi_{01}=a_{01}(\cos\Omega t-\vartheta_1)=\frac{P_1\cos(\Omega\tau-\vartheta_1)}{M_{01}\sqrt{[(\omega_{01}+\mu A_1)^2-\Omega^2]^2+\left[\dfrac{\mu l(b_{021}-b_{031})^2}{M_{01}}\right]^2\Omega^2}}.$$

Wyrażenie $\omega_{01}+\mu A_1(a_{01})$ jest tu częstością własną określoną z dokładnością do wyrazów małych rzędu μ^1

$$\omega_{01}+\mu A_1(a_{01}) = \omega_1(a_{01}).$$

Zatem metoda ta może dać prawidłowe wyniki tylko wtedy, jeżeli $\omega_1(a_{01})$ mało różni się od ω_{01}.

Współczynnik tłumienia h_0

$$\frac{\mu l(b_{0j1}-b_{0i1})^2}{2M_{01}} = h_{0_{j,i}}$$

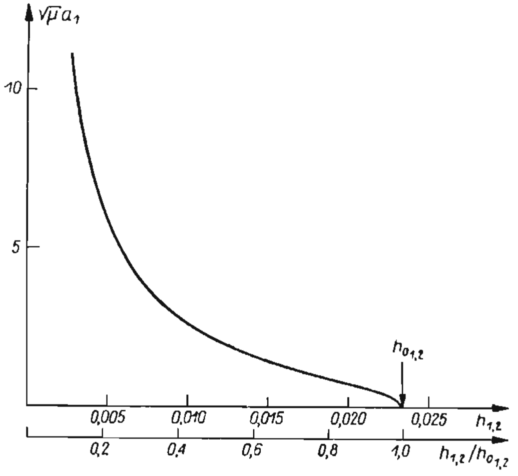
jest w tym przypadku stały, niezależny od amplitudy. Współrzędne «nierezonansowe» ξ_{02}, ξ_{03} bez uwzględnienia sprzężenia pozostają przy rezonansie na tyle małe, że obliczymy je jak dla układu liniowego (4.9).

Krzywe rezonansowe obliczone według (4.17) i (4.18) oraz (4.19) naniesiono na rys. 7 i 10 obok krzywych rezonansowych współrzędnej a_1. Dla porównania wykreślono również krzywe rezonansowe układu liniowego.

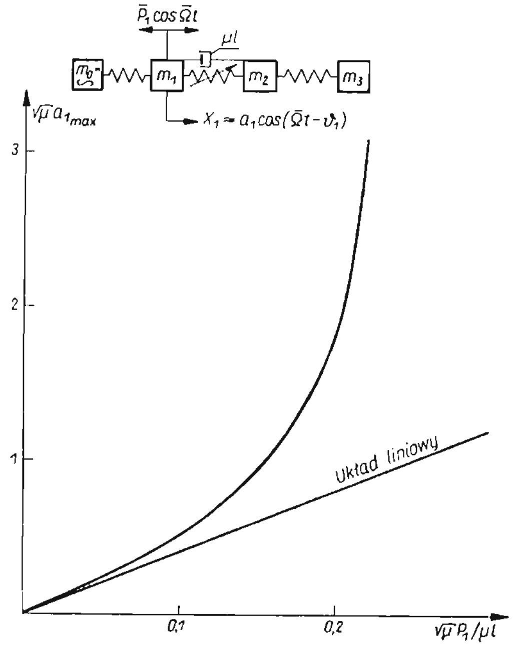
5. Analiza wyników i wnioski

Badanie rezonansów za pomocą równań (1.12), (4.14), a więc za pomocą liniowych współrzędnych normalnych przy zaniedbaniu ich sprzężenia, jest bardzo proste obliczeniowo lecz niesie ze sobą możliwości dużych błędów. Szczególnie jaskrawo jest to widoczne na przykładzie przedstawionym na rys. 7 przy umieszczeniu tłumika równolegle z nieliniową sprężyną między masą m_1 i m_2. Porównanie krzywych rezonansowych układu liniowego i $a_{01} = a_{01}(\Omega)$ układu nieliniowego sugeruje, że w rozpatrywanym zakresie parametrów układ mało odbiega od liniowego, gdyż $(\omega_{01}+\mu A_1)$ mało różni się od ω_{01}, a więc, że wynik ten powinien być bliski rozwiązaniu dokładnemu. W przykładzie tym jednak małym zmianom częstości własnej towarzyszy szybka zmiana postaci własnej b_{21}, b_{31} w funkcji amplitudy, co przy tej metodzie nie jest zupełnie uwzględniane (rys. 5). Te zmiany postaci własnej znajdują odbicie przy metodzie nieliniowej współrzędnej normalnej, tj. krzywej $a_1 = a_1(\Omega)$. Krzywa ta wykazuje około 2,3 razy większą amplitudę przy rezonansie niż to przewiduje wynik poprzedni. Ten wzrost amplitudy jest wywołany zmianą efektywnego współczynnika tłumienia $h_{1,2}$ we wzorach (4.11) i (4.13). Przy metodzie liniowej współrzędnej normalnej [wzór (4.17)] współczynnik $h_{01,2}$ jest stały i niezależny od amplitudy. Przy metodzie nieliniowej współrzędnej normalnej [wzór (4.13)] efektywny współczynnik tłumienia $h_{1,2}$ jest funkcją amplitudy. W rezultacie, mimo że sam tłumik jest liniowy, otrzymujemy nieliniową charakterystykę tłumienia. Dla ilustracji na rys. 8 wykreślono przebieg zmian współczynnika $h_{1,2}$ w funkcji amplitudy a_1, a na rys. 9 — maksymalne amplitudy przy rezonansie w funkcji stosunku siły wymuszającej do parametru tłumienia μl.

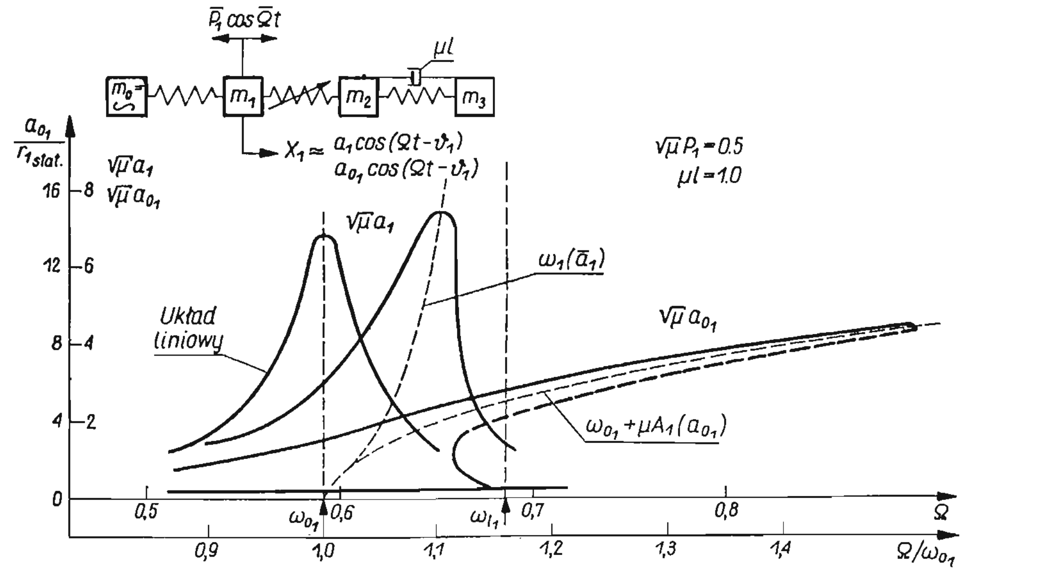
W rezultacie krzywa rezonansowa $a_{01} = a_{01}(\Omega)$ daje błędną ocenę maksymalnej amplitudy przy rezonansie, mimo że jej przebieg (małe odchylenie od ω_{01}) daje podstawy do przypuszczeń, że powinna ona być bliską rozwiązania dokładnego. Nasuwa się tu wniosek, że zakres stosowalności tej metody powinien być kontrolowany nie tylko miarą odchylenia częstości własnej, ale i postaci własnej od odpowiednich wartości liniowych.



Rys. 8. Zmiany efektywnego współczynnika tłumienia $h_{1,2}$ w funkcji amplitudy



Rys. 9. Maksymalna amplituda przy pierwszym rezonansie w funkcji stosunku siły wymuszającej do parametru tłumika μl



Rys. 10. Krzywe rezonansowe układu tłumionego — tłumik między masą m_2 i m_3

Wyniki otrzymane przy umieszczeniu tłumika między masą m_2 i m_3 są przykładem zupełnie odwrotnej sytuacji: przebieg krzywej rezonansowej $a_{01} = a_{01}(\Omega)$ sugeruje, że układ znacznie odbiega od liniowego, gdyż częstość $(\omega_{01}+\mu A_1)$ różni się znacznie od ω_{01}. Wnioskujemy więc od razu, że krzywa ta nie daje prawidłowych rezultatów. Mimo to krzywa rezonansowa nieliniowej współrzędnej normalnej $a_1 = a_1(\Omega)$ daje wyniki nie odbiegające silnie od układu liniowego: zarówno częstość rezonansowa, jak i maksymalna amplituda nie różnią się znacznie od odpowiednich wartości układu liniowego. Wynika to z faktu, że różnica współczynników postaci własnej $(b_{21}-b_{31})$ decydująca o wielkości efektywnego współczynnika tłumienia $h_{2,3}$ (4.11), (4.13) zachowuje wartość prawie stałą w dużym zakresie amplitud, mimo że wartości b_{21} i b_{31} ulegają silnym zmianom (rys. 5).

Przypadek umieszczenia tłumika między m_0 i m_1 nie jest rozpatrywany, gdyż jest od razu jasne, że efektywny współczynnik tłumienia $h_{0,1}$ jest wtedy stały.

Reasumując wady i zalety obu metod należy stwierdzić:

1. Zaniedbanie zmian postaci drgań w funkcji amplitudy poprzez zaniedbanie sprzężenia między liniowymi współrzędnymi normalnymi daje metodę bardzo prostą, ale stwarza duże możliwości otrzymania rezultatów zupełnie błędnych. Stosować ją można tylko w takim zakresie amplitud, w którym i częstości własne i postacie własne ulegają nieznacznym odchyleniom od odpowiednim wartości liniowych.

2. Badanie rezonansu za pomocą nieliniowej współrzędnej normalnej nie stawia ograniczenia na wielkość odchylenia częstości i postaci od wartości liniowych, jest więc słuszne w znacznie większym zakresie amplitud. Metoda ta jest nieco bardziej pracochłonna, ma jednak tę dużą zaletę, że jej dokładność wzrasta nawet ze wzrostem amplitudy (pod warunkiem, że istotnie tylko pierwsza harmoniczna dominuje w rozwiązaniu).

Literatura cytowana w tekście

1. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the normal coordinates in an analysis of steady-state forced vibrations of a nonlinear multiple-degree-of-freedom system*, Arch. Mech. Stos., **21**, 5 (1969).
2. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *Postacie drgań przy rezonansie nieliniowego układu o dwóch stopniach swobody*, Arch. Budowy Maszyn, 1 (1962).
3. W. SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, *On the asymptotic, averaging and Ritz method in the theory of steady-state vibrations of nonlinear systems with many degrees of freedom*, Arch. Mech. Stos., **22**, 2 (1970)
4. И. И. Боголюбов, Я. А. Митропольски, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Г.Н.Ф-М Л., Москва 1963.

Резюме

НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В АНАЛИЗЕ ГЛАВНЫХ РЕЗОНАНСОВ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматриваются стационарные колебания в окрестности главных резонансов диссипативной системы с n степенями свободы, обладающей нелинейными характеристиками упругости и демпфирования. Решение предполагается в виде гармонической функции, а для определения неизвестных коэффициентов применяется метод Ритца.

Целью исследования является анализ точности и пригодности двух вариантов упрощенных процедур, приводящих к разделению уравнений движения. Первая процедура состоит во введении нормальных координат линеаризованной системы и в пренебрежении сопряженностью; вторая — основана на применении тнзв. нелинейных нормальных координат.

Summary

NORMAL COORDINATES IN THE ANALYSIS OF PRINCIPAL RESONANCES OF NON-LINEAR VIBRATING SYSTEMS WITH MANY DEGREES OF FREEDOM

The considerations concern steady-state vibrations of dissipative multiple-degree-of-freedom nonlinear systems. Theoretical investigations are based on a single term harmonic solution and the W. Ritz method. The purpose of the paper is the analysis of accuracy and applicability of two approximate procedures leading to uncoupling of the equations of motion: 1) a procedure consisting in introducing normal coordinates of linearized system and neglecting the coupling terms; 2) a procedure based on the concept of non-linear normal coordinates.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lutego 1972 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

PODSTAWY TEORII KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH NA OŚRODKU GÓRNICZYM

JAN KUBIK (GLIWICE)

1. Wstęp

Wzrastające ciągle wydobycie węgla na terenie Górnośląskiego Okręgu Przemysłowego stwarza nieznane w innych regionach kraju zagadnienia teorii konstrukcji, które urastają do problemu wymagającego szybkiego rozwiązania. Odmienność sformułowań zagadnień i metod zabezpieczeń stawia nowe zadania przed mechaniką, które są tym bardziej palące, że sytuacja ulega ciągłemu pogorszeniu, następuje bowiem wzmożenie eksploatacji pod terenami zabudowy miejskiej i skupiskami wielkiego przemysłu. W tej sytuacji prawidłowe rozeznanie zagadnień, oparcie ich na sensownych założeniach, zgodnych z rzeczywistą naturą tych problemów, musi być właściwą podstawą do rozwijania teorii zabezpieczeń konstrukcji przed wpływem szkód górniczych.

Po pierwsze, większość zagadnień mechaniki, związanych z teorią tych konstrukcji, wymaga kompleksowego podejścia, które uwzględni złożone zależności zachodzące między ruchem i siłami w górotworze z jednej strony oraz siłami występującymi w konstrukcji z drugiej. Jednak kompleksowość podejścia, uwzględniająca całą złożoność problemu, nie wyklucza rozwiązań częściowych, które jako prostsze łatwiej uzyskać, a na ich podstawie można budować rozwiązania zagadnień bardziej skomplikowanych. Z tej to też przyczyny wybrano do analizy układy prętowe, jako prostsze od powierzchniowych, i zagadnienie niesprzężone, jako łatwiejsze od sprzężonego. Po wtóre, należy przyjąć jako obowiązującą zasadę, że czynnik czasu nie może być pomijany przy analizie wzajemnych wpływów ruchów górotworu i konstrukcji.

Prosty eksperyment uczy, że konstrukcja poddana dwom jednakowym programom przemieszczeń, przesuniętym w czasie, nie będzie się zachowywała identycznie, różnice będą znaczne (por. [4, 5]), tym bardziej, że procesy wymuszania przemieszczeń nie są krótkie. Niewystarczające są zatem rozwiązania uzyskane w zakresie sprężystym, trzeba się odwołać do teorii ujmujących wpływ czasu w związkach konstytutywnych. Najprostszymi takimi teoriami są: liniowa lepkosprężystość i teoria starzenia się[1]. Obie też leżą u podstaw

[1]) Analiza konstrukcji w zakresie teorii starzenia napotyka jednak pewne trudności związane z rozwiązywaniem samych równań zagadnienia (por. [5] rozdz. 4.2). Zaproponowana w tej pracy metoda dąży do rozsprzężenia układu równań całkowych odpowiadających materiałom starzejącym się.

analizowanych w pracy zagadnień. Trzeba tutaj zaznaczyć, że wprowadzenie lepkosprężystości do obliczeń nie jest krokiem czynionym w stronę teorii z niekorzyścią na rzecz obliczeń inżynierskich, które powinny być z natury proste. Kompromis uzyskano łatwo, na wyjątkowych warunkach, zupełnie bez ustępstw żadnej ze stron. Okazało się mianowicie, że rozwiązania lepkosprężystych układów prętowych dają się sprowadzić, po pewnych modyfikacjach wpływów zewnętrznych, do rozwiązań zagadnień sprężystych, wykonalnych dla inżyniera.

Klasa zagadnień związana z uzyskaniem pełnego rozeznania stanu naprężeń i przemieszczeń konstrukcji położonych na górotworze generuje następny problem: ustalanie i kształtowanie dopuszczalnych ruchów górotworu. Dopuszczalnych oczywiście z punktu widzenia prawidłowej eksploatacji konstrukcji. Ten problem, łącznie z próbą odpowiedzi, jest również dalej formułowany. Każdy z tych generalnych problemów stawia przed mechaniką nowe zadania wymagające rozwiązania. Oto przykłady. Dotychczas nie został do końca wyjaśniony problem narastania wpływu deformacji powierzchni górotworu na strukturę i właściwości fizyczne gruntu pod fundamentami. W tym zakresie nie są również znane w pełni zagadnienia kontaktowe styku fundamentu z ośrodkiem. W dalszej kolejności wyłaniają się zagadnienia wpływu ruchów górotworu na samą konstrukcję. Zauważmy, że charakter konstrukcji, jej obciążenie i kształt determinują wzajemne relacje między górotworem ($\mathscr{V}$) a konstrukcją $\mathscr{B}$. Wyłaniają się więc tutaj problemy sprzężenia.

I. Zagadnienie niesprzężone określa warunek, aby ruch konstrukcji był bez wpływu na stan przemieszczeń i naprężeń w górotworze.

II. Zagadnienie sprzężone, w którym istnieje wzajemny wpływ ruchów konstrukcji i górotworu na siebie.

Jak to najczęściej w rzeczywistości bywa, oba przypadki są celowo czynioną idealizacją rzeczywistości, mającą jednak duże znaczenie praktyczne. W rzeczywistości bowiem będzie istniała zawsze pewna warstwa na styku, w której wzajemny wpływ obu ośrodków będzie nie do pominięcia.

W drugiej grupie zagadnień należałoby zwrócić uwagę, że jest celowe określać indywidualnie, dla każdej konstrukcji, dopuszczalne zmiany parametrów górotworu określające ruch tych konstrukcji. Również proponuje się analizować łącznie z ruchem także szybkości zmian ruchu jako mające również istotny wpływ na pracę konstrukcji.

Rozpoczniemy badanie zjawisk w zakresie lepkosprężystym (ew. starzenia się) od przypadku najprostszego, a więc konstrukcji prętowych w zakresie teorii niesprzężonej, zakładając brak wpływu ruchu konstrukcji na górotwór, nawet w obszarach bezpośredniego styku. Trudności jakie się przy tych badaniach wyłonią zostaną spotęgowane jeszcze bardziej przy ustrojach powierzchniowych opisanych równaniami o znacznie bardziej skomplikowanej strukturze formalnej.

Większość konstrukcji przemysłowych to właśnie ustroje prętowe, stąd też znaczna przydatność przeprowadzonych w pracy rozważań. Rozważania te z konieczności opierały się na niewielkiej ilości faktów łatwych do zaobserwowania. Wymagają one jednak weryfikacji doświadczalnej, której do chwili obecnej nie przeprowadzono.

2. Ogólne uwagi dotyczące zabezpieczeń

Z punktu widzenia eksploatacji konstrukcji dopuszczalne są wszelkie ruchy górotworu, które nie wywołują dodatkowych stanów naprężeń i przemieszczeń w konstrukcji. Do ruchów tych należą m.in. ruchy sztywne powierzchni górotworu. Istnieje jednak jeszcze inna grupa ruchów górotworu, wyznaczona przez właściwości mechaniczne konstrukcji, która jest także bez wpływu na stan naprężeń konstrukcji. Podobnie można dobrać również funkcje obciążeń zapewniające niezmienność przemieszczeń konstrukcji wskutek ruchów górotworu. Te przypadki wynikają z niezmienniczych właściwości równań opisujących zachowanie się konstrukcji na górotworze (por. problem 4). Każdy z nich ma podstawowe znaczenie dla zabezpieczeń konstrukcji przed wpływami szkód górniczych. Przy analizie ruchu powierzchni górotworu istotny okazuje się tylko opis lokalny, w pewnym otoczeniu posadowienia konstrukcji. Będziemy również wymagali, aby lokalnie ruch górotworu spełniał ograniczenia odpowiadające trzem przedstawionym poprzednio przypadkom. Tym samym zostaną sprecyzowane wymagania w stosunku do ruchu górotworu. Z drugiej strony podobne rezerwy istnieją w samej konstrukcji, dokładniej w sposobie przejmowania przemieszczeń i sił poruszającego się górotworu. Może okazać się celowe w tym zakresie wymodelowanie takiego elementu konstrukcji, pracującego samodzielnie i przejmującego ruchy górotworu, w taki sposób, aby były one bez wpływu na całą resztę konstrukcji. Również możemy zabezpieczać się przed skutkami ruchów górotworu przez świadomy dobór sił w konstrukcji, np. przez wstępne sprężenie, w taki sposób, aby został zniwelowany wpływ ruchu górotworu. Tym samym zostały ustalone z grubsza problemy, którymi powinna zajmować się statyka konstrukcji prętowych w górotworze.

W zakończeniu tej części sformułujemy jeszcze dokładnie problemy, które będą analizowane w pracy.

Dany jest układ prętowy lepkosprężysty $\mathscr{B}$, spełniający wszelkie założenia klasycznej statyki układów prętowych, którego materiał opisywany jest przez teorię lepkosprężystości lub przez liniowe teorie starzenia się. Układ ten jest posadowiony na powierzchni przemieszczającego się górotworu. Ruch powierzchni górotworu opisany jest funkcjami, w których jako zmienne niezależne występują współrzędne miejsca i czas. Ruch ten determinuje przemieszczenia podpór układu $\mathscr{B}$. Problem analizowany jest w zakresie niesprzężonym.

Należy:

1. Określić stan naprężeń i przemieszczeń w konstrukcji $\mathscr{B}$.
2. Ustalić klasę dopuszczalnych ruchów konstrukcji.
3. Znaleźć grupę ruchów górotworu, które nie będą zmieniały stanu naprężenia w konstrukcji (lub też obciążenia, które nie zmienią stanu przemieszczeń konstrukcji).

Przed podaniem efektywnego rozwiązania wymienionych problemów należy przeanalizować zagadnienia ogólne występujące w statyce lepkosprężystych układów prętowych. Tym zagadnieniom poświęcony jest następny rozdział. Zwrócimy tutaj jeszcze tylko uwagę na metody przydatne przy analizie równań lepkosprężystych układów prętowych. Są to metody rachunku operatorów i rachunku macierzowego łącznie z wykorzystaniem elementów analizy funkcjonalnej i teorii grup, które okazują się w tych wypadkach najbardziej sposobnym narzędziem rozważań.

3. Problemy statyki układów lepkosprężystych

W pracach [4] i [5] podano równania metody sił i przemieszczeń dla lepkosprężystych układów prętowych (równania: (2.11) z [4] i (3.6) z [5]), które mają następujące ogólne postacie:[2)]

$$(1)\qquad \int_0^t \frac{\partial \mathbf{X}_i}{\partial \tau}\delta_{ij}(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \frac{\partial \mathbf{q}_r}{\partial \tau}\delta_{rj}(t-\tau)\,d\tau = \mathbf{u}_j(t),$$

$$X_i\delta_{ij} \equiv X_1\delta_{1j}+X_2\delta_{2j}+\ldots+X_N\delta_{Nj},$$

$$(2)\qquad \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial \tau}M_{ij}(t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_r}{\partial \tau}M_{rj}(t-\tau)\,d\tau = \mathbf{P}_j(t),$$

$$x_i = (X_{1i}, X_{2i}, X_{3i}), \qquad i,j = 1,2,\ldots,N, \qquad r = 1,2,\ldots,M,$$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i(x_i, t), \qquad \delta_{ij} = \delta_{ij}(x_j, t).$$

W układach równań (1) i (2) oznaczono przez $\mathbf{X}_i(t)$, $\boldsymbol{\varphi}_i(t)$ nieznane siły i przemieszczenia uogólnione; δ_{ij}, M_{ij} są, odpowiadającymi siłom $\mathbf{X}_i$ i przemieszczeniom $\boldsymbol{\varphi}_i$, uogólnionymi wpływami w punkcie x_j od wymuszeń jednostkowych (stałych w czasie!) w punkcie x_i układu lepkosprężystego $\mathscr{B}$. Natomiast $\mathbf{q}_r, \boldsymbol{\varphi}_r$, $\mathbf{u}_j$, $\mathbf{P}_j$ są danymi wpływami zewnętrznymi opisanymi jako znane funkcje czasu.

Naturalnym uogólnieniem układów równań (1) i (2) jest równanie macierzowe

$$(3)\qquad \mathbf{A} \ast \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B} \ast \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C},$$

$$(4)\qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11}\,A_{12}\,\ldots\,A_{1N} \\ \vdots \\ A_{NN} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_N \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11}\,B_{12}\,\ldots\,B_{1M} \\ \vdots \\ B_{NM} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_r \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{bmatrix}$$

opisujące wszelkie zagadnienia statyki lepkosprężystych układów prętowych w ramach liniowej lepkosprężystości oraz teorii małych odkształceń.

Macierze występujące w równaniu (3) mogą być utożsamiane z macierzami w równaniach (1) i (2) według relacji:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \mathbf{Y} &= ([\mathbf{X}_1], [\boldsymbol{\varphi}_i], & \mathbf{A} &= ([\delta_{ij}], [M_{ij}]),\\ \mathbf{P} &= ([\mathbf{q}_r], [\boldsymbol{\varphi}_r]), & \mathbf{B} &= ([\delta_{rj}], [M_{rj}]).\\ \mathbf{C} &= ([\mathbf{u}_j], [\mathbf{P}_j]) \end{aligned}$$

W równaniu (3) symbol $\ast$ oznacza mnożenie splotowe macierzy o elementach funkcyjnych

$$(6)\qquad \mathbf{J}_1 \ast \mathbf{J}_2 \equiv \int_0^t \mathbf{J}_1(\tau)\mathbf{J}_2(t-\tau)\,d\tau = \mathbf{J}_2 \ast \mathbf{J}_1$$

[2)] W równaniach teorii starzenia jądra $\delta_{ij}(t-\tau)$, $\delta_{rj}(t-\tau)$, $M_{ij}(t-\tau)$, $M_{rj}(t-\tau)$ należy zastąpić przez $\delta_{ij}(t,\tau)$, $\delta_{rj}(t,\tau)$, $M_{ij}(t,\tau)$, $M_{ri}(t,\tau)$.

określone wtedy, jeżeli istnieje iloczyn zwykły takich macierzy. Dla teorii starzenia się symbol $\ast$ w równaniach (3) i (6) należy zastąpić symbolem $\square$ oznaczającym splot uogólniony macierzy $\mathbf{J}_1$ i $\mathbf{J}_2$ określony następująco:

$$\mathbf{J}_1 \square \mathbf{J}_2 \equiv \int_0^t \mathbf{J}_1(\tau)\mathbf{J}_2(t, \tau)d\tau. \tag{6'}$$

Splot ten jest łączny ale nieprzemienny. Obejmuje on szerszą klasę zagadnień niż lepkosprężyste, lecz jest znacznie mniej efektywny w zastosowaniach [5].

Przytoczymy tutaj jeszcze, analogiczne do równania (3), znane macierzowe równanie słuszne dla prętowych układów sprężystych $\mathscr{B}'$

$$\mathring{\mathbf{A}}\mathbf{Y} + \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P} = \mathring{\mathbf{C}}. \tag{7}$$

Wykorzystując twierdzenia i metody rachunku operatorowego — który okazuje się najbardziej przydatnym narzędziem przy analizie prętowych układów lepkosprężystych — możemy równanie (3) przekształcić do postaci[3)]

$$\mathbf{A} \ast \mathbf{Y} + \mathbf{B} \ast \mathbf{P} = \mathbf{C} \ast H(t), \tag{8}$$

przy założeniach, że $\mathbf{P}(0) \equiv \mathbf{0}$ i $\mathbf{Y}(0) \equiv \mathbf{0}$. Tutaj $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Równania (3) i (8) są najogólniejszymi postaciami równań statyki lepkosprężystych układów prętowych. Z równań tych wynikają jako przypadki szczególne wszelkie możliwe sposoby zastosowań do rozwiązywania zadań szczegółowych, np. ram lub łuków lepkosprężystych.

Nadmieniamy, że macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ występujące w równaniu (3) mają postać $\mathbf{A} = R(t)\mathring{\mathbf{A}}$, $\mathbf{B} = R(t)\mathring{\mathbf{B}}$, gdzie funkcja $R(t) = (R, F)$ zależy od właściwości fizycznych materiału ośrodka $\mathscr{B}$ (por. [11] s. 68 i 69).

Ogólność równań (3) lub (8) implikuje również znaczną wszechstronność zastosowań o ciekawych właściwościach, które przedstawimy w postaci problemów obejmujących istotne z punktu widzenia zastosowań zagadnienia.

Problem 1. *Rozwiązanie równania zagadnienia*

Rozwiązanie to uzyskujemy wykorzystując przekształcenie Laplace'a i twierdzenie o splocie.

Oznaczmy transformaty $\left(f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} f(p)\right)$

$$\mathbf{A}(t) \to \overline{\mathbf{A}}(p), \quad \mathbf{B}(t) \to \overline{\mathbf{B}}(p), \quad \mathbf{C}(t) \to \overline{\mathbf{C}}(p),$$
$$\mathbf{P}(t) \to \overline{\mathbf{P}}(p), \quad \mathbf{Y}(t) \to \overline{\mathbf{Y}}(p). \tag{9}$$

[3)] Równania (3) w teorii starzenia mają postać następującą

$$\mathbf{A} \square \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{B} \square \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{C}, \tag{3'}$$

z której po transformacji Laplace'a ($\mathbf{A}(t, \tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} \bar{\mathbf{a}}(p)e^{-\tau\bar{q}(p)}$, $\mathbf{B}(t, \tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} \bar{\mathbf{b}}(p)e^{-\tau q(p)}$, $\mathbf{A}, \mathbf{Y}, \mathbf{P}, \mathbf{C} \xrightarrow{\mathscr{L}} \overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{Y}}, \overline{\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{C}}$, uzyskujemy $\bar{\mathbf{a}}(p)\bar{q}(p)\overline{\mathbf{Y}}(\bar{q}(p)) + \bar{\mathbf{b}}(p)\bar{q}(p)\overline{\mathbf{P}}(\bar{q}(p)) = \overline{\mathbf{C}}(p)$, $(\mathbf{Y}(0) = \mathbf{P}(0) = \mathbf{0})$, natomiast po retransformacie otrzymujemy prostszą postać układu równań podlegających starzeniu się

$$\mathbf{A} \square \mathbf{Y} + \mathbf{B} \square \mathbf{P} = \mathscr{L}^{-1}[\bar{q}(p)^{-1}] \ast \mathbf{C}. \tag{8'}$$

Wtedy z (8) otrzymujemy

$$\bar{A}\bar{Y} = \frac{1}{p}\bar{C} - \bar{B}\bar{P}. \tag{10}$$

Po przemnożeniu z lewej przez macierz odwrotną $[\bar{A}]^{-1}$ i retransformacji mamy:

$$Y(t) = A^{-1} \ast (C \ast H - B \ast P). \tag{11}$$

Nieznana macierz A^{-1} razem z macierzą lepkosprężystości A muszą spełniać relację:

$$[\bar{A}(p)]^{-1}\bar{A}(p) = I \quad (I \text{ — macierz jednostkowa}), \tag{12}$$

z której po przekształceniach uzyskujemy użyteczne kryterium sprawdzenia poprawności obliczeń:

$$A^{-1} \ast A \ast H = I,$$

$$\left(\int_0^t A^{-1}(t-\tau) \int_0^\tau A(\tau')d\tau' d\tau = I\right). \tag{13}$$

Problem 2. *Rozwiązania identyczne w układach sprężystych i lepkosprężystych*

Z wszelkich możliwych macierzy wpływów zewnętrznych (P, C) można wydzielić taką klasę wpływów, która zapewni identyczność stanów naprężeń (przemieszczeń) w układach sprężystym $\mathscr{B}'$ i lepkosprężystym $\mathscr{B}$ znajdujących się w tych samych konfiguracjach. Odpowiednie równania w zagadnieniach sprężystych (s) i lepkosprężystych $(l-s)$ mają postać:

$$\mathring{A}Y + \mathring{B}P = C \quad \ldots (s) \ldots . \tag{14}$$

$$A_{(l-s)} \ast Y + B_{(l-s)} \ast P = C_{(l-s)} \ast H \ldots (l-s) \ldots . \tag{15}$$

Wtedy z porównania równań (14) i (15) wynika następujące:

Twierdzenie 1. Jeżeli elementy macierzy $P_{(l-s)}$ i $C_{(l-s)}$ są funkcjami ciągłymi klasy $\mathring{C}_{(0,\infty)}$ oraz $P_{(l-s)} \equiv P_{(s)}$, $C_{(l-s)} = \dot{C}_{(s)} \ast R + C_{(s)}(0)R$, to stany naprężeń (przemieszczeń) w układach sprężystym i lepkosprężystym o tej samej konfiguracji są takie same.

Wprowadzimy teraz normę różnicy rozwiązań

$$||\Delta|| = ||Y_{(l-s)} - Y_{(s)}||, \tag{16}$$

która dla $A_{(l-s)} = \mathring{A}R(t)$ ma postać:

$$||Y_{(l-s)} - Y_{(s)}|| = ||\mathring{A}^{-1}\{R^{-1} \ast (C_{(l-s)} - B \ast \dot{P}_{(l-s)}) + \mathring{B}P_{(s)} - C_{(s)}\}||. \tag{17}$$

Twierdzenie 2. Rozwiązania w układach sprężystych i lepkosprężystych są identyczne, jeżeli zostanie spełniona równość

$$C_{(s)} \ast R(t) - \mathring{B}P_{(s)} \ast R(t) = C_{(l-s)} - B \ast \dot{P}_{(l-s)}. \tag{18}$$

Dowód wynika z analizy normy $\|\mathbf{\Delta}\|$ różnicy rozwiązań

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{Y}_{(l-s)} - \mathbf{Y}_{(s)},$$

(19) $$(\|\mathbf{\Delta}\| = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{\Delta} = \mathbf{0}), \text{ czyli}$$

$$R^{-1}(t) \ast (\mathbf{C}_{(l-s)} - \mathbf{B} \ast \dot{\mathbf{P}}_{(l-s)}) - \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P}_{(s)} - \mathbf{C}_{(s)} = \mathbf{0}, \quad R^{-1}(t) \equiv \mathscr{L}^{-1}[\overline{R}(p)^{-1}],$$

a stąd już wynika natychmiast słuszność równości (18).

Problem 3. *Sprowadzenie zagadnień lepkosprężystych do sprężystych*

Pokażemy teraz, jak można ominąć rozwiązywanie równania macierzowego zagadnienia lepkosprężystego (8) zastępując go równaniem (14), jak w zagadnieniu sprężystym. Takie postawienie problematyki ma zasadnicze znaczenie dla inżyniera, gdyż zezwala na stosowanie w praktyce projektowej rozwiązań uwzględniających pełzanie ośrodka, bez układania i rozwiązywania równań w zakresie lepkosprężystym, które są trudniejsze w realizacji tak pod względem ilościowym, jak i jakościowym z uwagi na nowy aparat formalny nieznany na ogół konstruktorowi. Reasumując, podana zostanie metoda, która «w sposób sprężysty» znajdzie siły i przemieszczenia w układzie lepkosprężystym.

Twierdzenie 3. Jeżeli układy $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ znajdują się w tej samej konfiguracji oraz zachodzi następujący związek między macierzami $\mathbf{C}_{(l-s)}$, $\mathbf{C}_{(s)}$, $\mathbf{P}_{(l-s)}$, $\mathbf{P}_{(s)}$,

(20) $$R(t)^{-1} \ast (\mathbf{C}_{(l-s)} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}_{(l-s)}) = \mathbf{C}_{(s)} - \mathring{\mathbf{B}}\mathbf{P}_{(s)},$$

to rozwiązania $\mathbf{Y}_{(l-s)}$, $\mathbf{Y}_{(s)}$ w układach $\mathscr{B}$ i $\mathscr{B}'$ są identyczne.

Analiza równości (20) zezwala na zastępowanie wpływów lepkosprężystych sprężystymi, np. według relacji

(21) $$\mathbf{C}_{(s)} = R(t)^{-1} \ast \mathbf{C}_{(l-s)} \ast H(t), \qquad \mathbf{P}_{(s)} = \mathring{\mathbf{B}}^{-1} R(t)^{-1} \ast \mathbf{B} \ast \mathbf{P}_{(l-s)}.$$

Problem 4. *Grupowe właściwości równań statyki lepkosprężystych układów prętowych*

A. Rozpatrywać będziemy przekształcenia $\mathring{\varphi}$ macierzy wpływów zewnętrznych $(\mathbf{C}, \mathbf{P})$

(22) $$[\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}] \xrightarrow{\mathring{\varphi}} [\tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}}].$$

Przekształcenia postaci (22) wyznaczają ciągłą grupę $\mathscr{G}$ $(\mathring{\varphi} \in \mathscr{G})$ przekształceń macierzy $(\mathbf{C}, \mathbf{P})$ oraz generują przekształcenia

(23) $$\psi : \mathbf{Y} \to \tilde{\mathbf{Y}},$$

które wyznaczają izomorficzną z $\mathscr{G}$ grupę $\mathscr{H}$ $(\psi \in \mathscr{H})$. Należy znaleźć taką podgrupę $\overline{\mathscr{G}}$ grupy $\mathscr{G}$ $(\overline{\mathscr{G}} \subset \mathscr{G})$, aby odpowiadające przekształceniom φ $(\varphi \in \overline{\mathscr{G}})$ przekształcenia ψ były tożsamościowymi.

Jedną z takich podgrup grupy $\overline{\mathscr{G}}$ skonstruujemy wykorzystując właściwości macierzy ortogonalnych.

Twierdzenie 4. Jeżeli przekształcenie φ macierzy $(\mathbf{C}, \mathbf{P})$ jest postaci

$$
\begin{gathered}
\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P} \rightarrow \tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} \\
\mathbf{C}' \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}' = \mathbf{D} \ast (\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}), \\
[\mathbf{D} \ast \mathbf{B} \ast \mathbf{P} - \mathbf{B} \ast \mathbf{P} = \mathbf{C}'' \ast H = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}'']^{*}, \\
[\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{D} \ast \mathbf{C} - \mathbf{C}'', \quad \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}]^{*},
\end{gathered}
\tag{24}
$$

gdzie $\mathbf{D}$ jest dowolną macierzą ortogonalną, to przekształcenia ψ generowane przez φ są przekształceniami tożsamościowymi. Słuszność tego twierdzenia łatwo wykazać po wykonaniu transformacji Laplace'a na związku (24) i analizie otrzymanych macierzy.

Ogólniej warunek, że ψ jest przekształceniem tożsamościowym zapiszemy następująco

$$
\begin{gathered}
\|\tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{C} \ast H + \mathbf{B} \ast \mathbf{P}\| = 0, \\
[\mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} - \mathbf{B} \ast \mathbf{P} = \mathbf{C}' \ast H = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}'' H(t-a), \ \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{B} \ast \mathbf{P}]^{*4)}, \quad a > 0.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

Jeżeli natomiast $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$ są dowolnymi macierzami

$$
\tilde{\mathbf{C}} \ast H - \mathbf{B} \ast \tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{E} \ast (\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}) + \mathbf{F}, \tag{26}
$$

to

$$
\|\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{E} \ast \mathbf{A} - \mathbf{I} H\| \rightarrow 0 \ \text{i} \ \|\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{F}\| \rightarrow 0.
$$

B. Zbadajmy teraz przekształcenia postaci

$$
u : t \rightarrow \alpha t, \qquad v : \mathbf{Y} \rightarrow \tilde{\mathbf{Y}}, \tag{27}
$$

na równości (11), które tak dobierzemy, aby $\tilde{\mathbf{Y}}$ było także rozwiązaniem równania (8). Mamy

$$
\begin{gathered}
\mathbf{Y}(t) = \mathring{\mathbf{A}}^{-1} R^{-1} \ast (\mathbf{C} \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}), \\
\tilde{\mathbf{Y}}(t) = \mathring{\mathbf{A}}^{-1} R^{-1} \ast \big(\mathbf{C}(\alpha t) \ast H - \mathbf{B} \ast \mathbf{P}(\alpha t)\big).
\end{gathered}
\tag{28}
$$

Jeżeli teraz $\mathbf{C}(\alpha t) = q(\alpha)\mathbf{C}(t)$ i $\mathbf{P}(\alpha t) = q(\tilde{\alpha})\mathbf{P}(t)$, to

$$
\mathbf{Y}(t) = q(\tilde{\alpha})^{-1} \mathbf{Y}(t). \tag{29}
$$

Przedstawione tutaj właściwości grupowe równań statyki układów prętowych lepkosprężystych wykorzystamy przy analizie sposobów zabezpieczeń konstrukcji przed wpływem ruchów górotworu.

Z tego niekompletnego przeglądu podstawowych problemów lepkosprężystych układów prętowych wynikają dosyć jasno podobieństwa i różnice tych układów do sprężystych. W niektórych przypadkach to podobieństwo pozwala na natychmiastowe wyrokowanie o zachowaniu się konstrukcji lepkosprężystej.

Wydaje się również oczywiste, że przedstawione tu właściwości powinny być podane w postaci jasno sformułowanych twierdzeń o znacznej ogólności tak, by były przydatnymi w zastosowaniach.

---

4) Wyrażenia w nawiasach [ ]* są warunkami na niezmienność stanów naprężenia w $\mathscr{B}$, mimo że $\varphi \neq \mathbf{I}$. Wtedy równania (8) będziemy uważali za równania metody sił.

4. Wyznaczenie wpływu ruchów górotworu na konstrukcję

W tej części wykorzystamy ogólne rezultaty, uzyskane w części poprzedniej, do analizy stanu naprężeń i przemieszczeń konstrukcji od wpływu ruchów powierzchni górotworu. Mimo, że dla prostoty rozważania części poprzedniej są prowadzone w zakresie lepkosprężystym, to jednak można je przetransponować na odpowiadający im problem sprężysty (problem 3, rozdz. 3) i w takim zakresie praktycznie wykorzystać.

Podamy teraz odpowiedzi na zadanie postawione w zakończeniu części 2.

Ad.1.

Określenie stanu naprężenia i przemieszczenia w konstrukcji $\mathscr{B}$.

Ruch górotworu, wobec braku sprzężenia, określa jednoznacznie ruch podpór konstrukcji. Jak wiadomo, na stan naprężenia w konstrukcji mają wpływ tylko różnice przemieszczeń podpór. Różnice te wydzielić można z całego ruchu konstrukcji poprzez odrzucenie ruchu sztywnego. Powstaje pytanie jak dokonać tej operacji. Odpowiedź uzyskujemy w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 5. Równania (3) są niezmiennicze wobec dowolnego sztywnego ruchu, nie są natomiast niezmiennicze wobec zmian skali czasowej.

W zakresie sprężystym obowiązuje oczywiście niezmienniczość wobec ruchu sztywnego i zmiany skali czasowej. Twierdzenie 5 pozwala wyznaczyć przyrosty przemieszczeń podpór konstrukcji podobnie jak w zakresie sprężystym.

Stan naprężenia w konstrukcji określimy znając przyrosty ruchów podpór i obciążenia z równania (3) lub (8) interpretując je jako równanie metody sił, w którym $\mathbf{Y}$ jest macierzą nieznanych sił hiperstatycznych, $\mathbf{P}$ obciążeniem zewnętrznym a $\mathbf{C}$ przyrostami przemieszczeń podpór. Stan odkształcenia uzyskamy analogicznie, traktując równania (3), (8) jako równania metody przemieszczeń. Wtedy $\mathbf{Y}$ jest macierzą nieznanych przemieszczeń, $\mathbf{P}$ — to macierz znanych przemieszczeń, a $\mathbf{C}$ jest macierzą sił w węzłach. Rozwiązanie możemy uzyskać na «drodze sprężystej» wykorzystując zależności (21).

Ad.2.

Wyznaczenie dopuszczalnych ruchów konstrukcji $\mathscr{B}$.

a) Równanie (3) będziemy interpretować jako równanie metody sił. Wtedy rozwiązania $\mathbf{Y}$ możemy traktować jako sumę macierzy $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_1+\mathbf{Y}_2$, które są rozwiązaniami równań

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A} \ast \dot{\mathbf{Y}}_1 + \mathbf{B} \ast \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{0}, \\
&\mathbf{A} \dot{\ast} \mathbf{Y}_2 - \mathbf{C} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Pierwsza macierz $\mathbf{Y}_1$ sumy jest niezależna od ruchów górotworu, natomiast druga $\mathbf{Y}_2$ od nich zależy.

Ponadto stan naprężenia w konstrukcji zależy addytywnie od $\mathbf{Y}_1$ i $\mathbf{P}$ oraz $\mathbf{Y}_2$ i $\mathbf{C}$ czyli ruchów górotworu. Istnieje zatem możliwość sformułowania warunku ograniczającego macierz $\mathbf{Y}_2$

$$
||\mathbf{K}_1 \mathbf{Y}_2|| \leqslant L^1_{\text{dop}} \tag{31}
$$

oraz dla pewnych procesów deformacji ograniczenia na prędkości deformacji ($\dot{\mathbf{C}}$) i prędkości zmian stanu naprężenia

$$\|\mathbf{K}_2\dot{\mathbf{Y}}_2\| \leqslant L^2_{\mathrm{dop}}. \tag{32}$$

Ponadto zachodzą relacje

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{K}_1\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{C} \ast H\| \leqslant L^1_{\mathrm{dop}}, \\ &\|\mathbf{K}_2\mathbf{A}^{-1} \ast \mathbf{C} \qquad \| \leqslant L^2_{\mathrm{dop}}. \end{aligned} \tag{33}$$

Z relacji tych można wyznaczyć dopuszczalną klasę ruchów podpór konstrukcji. W relacjach (31), (32) i (33) macierz $\mathbf{K}_{(v)1,2}\,\mathbf{Y}_2$ odpowiada wielkościom wewnętrznym w konstrukcji $\mathscr{B}$.

b) Założymy teraz, że możemy «przyspieszać» lub «opóźniać» pewien określony proces deformacji górotworu, który wywołuje ruchy podpór określone zmianami macierzy **C**

$$\mathbf{C}(t) \to \mathbf{C}(\alpha t).$$

W tym przypadku wykorzystamy przekształcenia u, v [(równania (27, (28), (29)] do wyznaczenia granicznej wartości zmian parametru α określającego ruch górotworu. Uzyskujemy zależności

$$\begin{aligned} &[\|q(\tilde{\alpha})^{-1}\mathbf{K}_1\mathbf{Y}_2\| \leqslant L^1_{\mathrm{dop}}] \Leftrightarrow \alpha_{1\mathrm{gr}}, \\ &[\|q(\tilde{\alpha})^{-1}\mathbf{K}_2\dot{\mathbf{Y}}_2\| \leqslant L^2_{\mathrm{dop}}] \Leftrightarrow \alpha_{2\mathrm{gr}}, \\ &\alpha_{\mathrm{graniczne}} = \max\ [\alpha_{1\mathrm{gr}}, \alpha_{2\mathrm{gr}}], \end{aligned} \tag{34}$$

które pozwolą wyznaczyć dopuszczalne przemieszczenia podpór konstrukcji, określone darametrem α.

Podkreślimy tutaj fakt, że rozważań podobnych do przeprowadzonych wyżej (p. b) nie można przeprowadzić w zakresie sprężystym. W tym istotnym zagadnieniu podejście sprężyste jest zupełnie niemożliwe.

Ad.3.

Wyznaczenie ruchów górotworu, które nie zmieniają stanu naprężenia w konstrukcji $\mathscr{B}$.

W tym przypadku wykorzystamy wyniki zawarte w problemie 4, poprzedniej części. Jeżeli znowu równania (3) będą interpretowane jako równania metody sił, to twierdzenie 4 daje nam odpowiedź na pytanie: jaka musi być wzajemna współzależność ruchów górotworu i sił w konstrukcji, aby stan naprężenia pozostał bez zmian? Podobną odpowiedź uzyskamy wykorzystując równość (25).

Świadome ingerowanie w stan naprężeń konstrukcji możemy uzyskać np. przez jej wstępne sprężenie. Przy tym stan naprężeń powinien być tak zrealizowany, aby spełnić jeden z warunków (24), (25).

Reasumując można stwierdzić, że każdy ruch $\tilde{\mathbf{u}}$, który jest sumą ruchu sztywnego $\mathring{\mathbf{u}}$ i ruchu $\mathbf{u}'$ spełniającego warunki (24), (25), nie wpłynie na zmianę stanu naprężenia w konstrukcji. Stąd też należy wymagać, aby prawidłowe zabezpieczenie konstrukcji przed wpływami ruchów górotworu spełniało warunek

$$\|\mathbf{u}_r - \tilde{\mathbf{u}}\| = \min\ (\tilde{\mathbf{u}} = \mathring{\mathbf{u}} + \mathbf{u}',\ \tilde{\mathbf{u}} \sim \mathbf{C}), \tag{35}$$

w którym $\mathbf{u}_r$ jest macierzą rzeczywistych ruchów.

Przedstawione propozycje sformułowania i rozwiązania tego ważnego zagadnienia teorii konstrukcji nie mogą pretendować do zupełności. Podjęta w pracy problematyka jest zupełnie nowa. W literaturze obejmującej szeroko pojęta zagadnienie brak podejścia podobnego do przedstawionego tutaj, tym bardziej, że już podstawy, czyli statyka układów lepkosprężystych, są oryginalne [6]. Konfrontacja z danymi doświadczalnymi może wprowadzić pewne zmiany, lecz wydaje się, iż zasadniczej struktury poruszanych w pracy problemów nie zmieni.

Literatura cytowana w tekście

1. D. R. BLAND, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Pergamon Press, Oxford 1960.
2. R. BELLMAN, Kl. COOKE, *Differential — Difference Equations*, Academic Press, New York 1963.
3. I. KISIEL, *Rozwój reologii w Polsce w pierwszym dziesięcioleciu istnienia PTMTS*, Mech. Teor. i Stos., **6**, 3 (1968), 269–298.
4. J. KUBIK, *Metoda sil dla układów lepkosprężystych*, Rozpr. Inż., **18**, **4** (1970).
5. J. KUBIK, *Metoda przemieszczeń dla układów lepkosprężystych*, Rozpr. Inż., **19**, 1 (1971).
6. J. KUBIK, *Sprzężone zagadnienie w teorii konstrukcji współdziałającej z górotworem*, Arch. Górn. (w redakcji)
7. J. KUBIK, *Odpowiedniość między rozwiązaniami sprężystymi a lepkosprężystymi w statyce układów* prętowych, A.I.L. (w redakcji).
8. J. KWIATEK, *Obliczanie sił rozciągających fundamenty budowli na podłożu rozpełzającym*, Inż. i Bud., **24**, 6 (1967), 214–217.
9. J. KWIATEK, *Wpływ rozpełzania podłoża pod budowlami na jego krzywiznę*, Inż. i Bud, **24**, 9 (1967), 360–363.
10. J. KWIATEK, *Wpływ rozpełzania podłoża na siły rozciągające w fundamentach budowli*, Rozpr. dokt. GIG, Katowice 1965.
11. W. NOWACKI, *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa 1963.
12. W. NOWACKI, *Mechanika budowli*, PWN, Warszawa 1960.
13. J. MIKUSIŃSKI, *Rachunek operatorów*, PWN, Warszawa 1957.
14. T. TRAJDOS-WRÓBEL, *Matematyka dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1965.
15. L. COLLATZ, *Funktionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin 1964.
16. М. Н. ГОЛЬДШТЕЙН, *Механические свойства грунтов*, Москва 1971.
17. А. Г. КУРОШ, *Теория групп*, Москва 1967.
18. А. А. ИЛЬЮШИН, Б. Е. ПОБЕДРЯ, *Основы математической теории термовязко-упругости*, Москва 1971.

Резюме

ОСНОВЫ ТЕОРИИ СТЕРЖНЕВЫХ СООРУЖЕНИЙ УСТАНОВЛЕННЫХ НА ГОРНЫХ МАССИВАХ

В работе формулируются основы статики вязкоупругих стержневых систем, установленных на деформирующемся горном массиве. Определяются основные типы задач и методы их решения. Особое внимание уделено анализу общих свойств матричных уравнений, описывающих эти задачи [уравнение (3)], а также вопросам взаимосвязи движений горного массива и сооружения. Рассматривается вопрос о нахождении для данной конструкции допустимых движений горного массива (задача 4). Задача решается путём использования группы преобразований, отражающих влияние скорости возрастания процессов деформации горного массива на напряженное состояние конструкции $\mathscr{B}$.

Summary

FOUNDATIONS OF THE THEORY OF ROD STRUCTURES BUILT IN MINING AREAS

In the paper are formulated the foundations of statics of viscoelastic rod systems founded on the ground deforming due to mining exploitation. The principal types of problems and methods of their solution are presented. Particular attention is paid to the analysis of general properties of the matrix equations of the problem (Eqs. 3) and to the problem of coupling of orogenic motions with the structure. Other problems considered concern the admissible motions of the foundation for a given structure (Problem 4). The problem is solved by introducing a group of transformations which take account of the influence of theincreasing deformation rates of the rock foundation upon the state of stress within the structure.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca zostala zlożona w Redakcji dnia 29 marca 1972 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

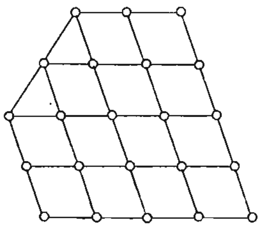
PODSTAWY MECHANIKI CIAŁ DYSKRETYZOWANYCH

CZESŁAW WOŹNIAK (WARSZAWA)

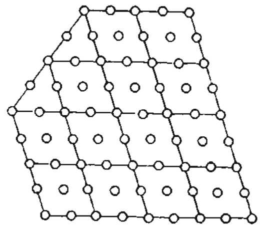
1. Ciała dyskretyzowane

Spotykane w przyrodzie odkształcalne ciała stałe opisujemy w ramach mechaniki klasycznej najczęściej przez zastosowanie jednego z dwóch następujących podejść: strukturalnego, zwanego też dyskretnym, oraz kontynualnego. W podejściu strukturalnym, typowym dla fizyki ciała stałego, uwzględniamy rzeczywistą, nieciągłą strukturę materii. Podejście kontynualne polega na wprowadzeniu ośrodka ciągłego jako modelu ciała, a samo ciało występuje pod postacią materiału, którego własności są określone w infinitezymalnym otoczeniu każdej cząstki wprowadzonego kontinuum. Oprócz obu tych podejść warto także zwrócić uwagę na trzecie, które nazwijmy dyskretyzowanym. W podejściu dyskretyzowanym ciało stałe występuje pod postacią zbioru elementów materialnych o wymiarach skończonych, przy czym każdy element ma skończoną liczbę stopni swobody. To ostatnie podejście jest typowe np. dla zagadnień mechaniki konstrukcji, gdzie mniej jesteśmy zainteresowani własnościami ciała w infinitezymalnych otoczeniach jego cząstek (podejście kontynualne, materiałowe), nie wspominając już o niecelowości wnikania w jego strukturę atomową, lecz raczej interesują nas własności globalne pewnych skończonych części ciała. Celowość wprowadzenia podejścia dyskretyzowanego do mechaniki uzasadnimy w punkcie 6. Ciało dyskretyzowane otrzymuje się zwykle w wyniku procesu dyskretyzacji, jako pewien uproszczony model ośrodka ciągłego, jak to ma miejsce np. w znanej metodzie elementów skończonych [7], w zagadnieniach statyki budowli lub dynamiki konstrukcji (zastąpienie ciągłego rozkładu masy — masami skupionymi). Jednakże w rozważaniach, w których będzie nas interesować nie sam proces dyskretyzacji, lecz to, co w jego wyniku otrzymujemy, dogodniej pojęcie ciała dyskretyzowanego wprowadzić a priori (w sposób zupełnie niezależny od pojęcia ośrodka ciągłego), jako model rzeczywistego ciała stałego. Postępować możemy więc podobnie, jak w mechanice kontinuum, gdzie pojęcie ośrodka ciągłego wprowadzamy niezależnie od podejścia strukturalnego.

Celem uczynienia wykładu bardziej poglądowym, za punkt wyjścia przyjmijmy tutaj kontinuum materialne. Uogólniając nieco proces dyskretyzacji kontinuum materialnego omówiony np. w [7] (s. 11), podzielmy umownie to kontinuum przy pomocy pewnych powierzchni materialnych (lub krzywych w przypadku kontinuum dwuwymiarowego) na co najwyżej przeliczalny zbiór otwartych i rozłącznych części zwanych elementami skończonymi. Przyjmijmy następnie, że elementy skończone są powiązane wyłącznie przy pomocy pewnych, dodatkowo przez nas wprowadzonych, układów materialnych. Każdy z tych układów nazwijmy cząstką ciała dyskretyzowanego. Zakładamy jednocześnie, że ciągły rozkład masy w kontinuum jest aproksymowany masami zaczepionymi tylko w cząstkach oraz że każda cząstka jest niezależnym[1]) układem dynamicznym, holonomicznym, o tej samej, skończonej, liczbie stopni swobody (tj. cząstka może być swobodnym punktem materialnym, ich układem lub układem punktów materialnych poddanych całkowalnym więzom). Zbiór wszystkich cząstek, które łączą dany element z innymi elementami skończonymi, nazwijmy elementem dyskretnym, odpowiadającym danemu elementowi skończonemu. Podobnie, jak w [7] zakładamy, że ruch każdego elementu skończonego jest jednoznacznie określony przez ruch odpowiadającego elementu dyskretnego. Ponadto przyjmijmy, że przestrzenią konfiguracyjną [3] dla każdej cząstki jest n-wymiarowa przestrzeń wektorowa.

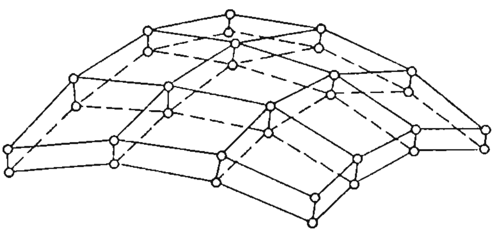


Rys. 1



Rys. 2

Prosty przykład ciała (dyskretyzowanego płaskiego) przedstawia rys. 1. Elementami skończonymi są zaznaczone (otwarte) trójkąty i równoległoboki; ruch każdego z tych elementów skończonych jest opisany (w ramach mechaniki ciał dyskretyzowanych) przy pomocy ruchu odpowiedniego elementu dyskretnego, będącego zbiorem wierzchołków



Rys. 3

danego trójkąta lub równoległoboku. Jako cząstki dyskretyzowanego ciała należy tu przyjąć swobodne punkty materialne, będące wierzchołkami tych figur, po zaczepieniu w nich mas skupionych aproksymujących bezwładność ciała. Każdy element dyskretny składa się więc z trzech lub czterech cząstek. Ciało dyskretyzowane zaznaczone na rys. 2 uwzględnia te same elementy skończone, jak na rys. 1, lecz poszczególne elementy dyskretne zawierają teraz 6 lub 9 cząstek, z których każda jest, jak poprzednio, swobodnym punktem materialnym; niektóre z cząstek należą tu tylko do jednego elementu dyskretnego. Inny przykład ciała dyskretyzowanego pokazano na rys. 3, gdzie mamy do czynienia z powłoką złożoną z czworokątnych płytek, które przyjmijmy jako elementy skończone.

---

[1]) Dwa układy dynamiczne nazywamy niezależnymi, gdy nie zawierają ani jednego wspólnego punktu materialnego oraz gdy ruch punktów należących do różnych układów nie jest poddany wspólnym więzom.

Stosując założenia Love'a–Kirchhoffa, jako cząstki ciała dyskretyzowanego możemy przyjąć zaznaczone na rysunku pary punktów materialnych (wraz z przyporządkowanymi im masami) o stałej odległości, którą jest grubość powłoki. Liczba stopni swobody każdej cząstki wynosi 5, a każdy element dyskretny jest zbiorem czterech cząstek (czterech par wierzchołków czworokątnego elementu skończonego).

Z punktu widzenia powyższych rozważań ciało dyskretyzowane jest parą $(D, \mathscr{E})$, gdzie D jest skończonym lub przeliczalnym zbiorem cząstek d, $d \in D$, $\overline{\overline{D}} > 1$, oraz $\mathscr{E}$ jest pokryciem zbioru D elementami dyskretnymi E, $D \supset E \in \mathscr{E}$. Zakładamy, że cząstki oddziaływują wyłącznie w podzbiorach $E \in \mathscr{E}$[2]. Przyjmiemy jednocześnie, że każdy element dyskretny zawiera skończoną i nie mniejszą od dwóch liczbę cząstek oraz że dowolna cząstka może należeć do przecięcia najwyżej skończonej liczby elementów dyskretnych. Liczbę stopni swobody dowolnej cząstki oznaczymy przez n i nazwiemy liczbą lokalnych stopni swobody ciała dyskretyzowanego. Uogólnione współrzędne cząstki d oznaczamy przez $q^a(d, \tau)$, $a = 1, 2, \ldots, n$ (τ jest współrzędną czasową) oraz zakładamy, że są one współrzędnymi wektora w n-wymiarowej przestrzeni wektorowej V^n, tej same dla każdego $d \in D$. Postulujemy więc, że istnieje przestrzeń V^n, która jest przestrzenią konfiguracyjną dla każdej cząstki $d \in D$[3]. Ponieważ cząstki $d \in D$ oddziaływują tylko w podzbiorach $E \subset D$, (tj. w poszczególnych elementach dyskretnych), dlatego siły wewnętrzne w ciele dyskretyzowanym możemy określić dla każdego elementu dyskretnego niezależnie. Zgodnie z zasadą przyczynowości, siły w elemencie dyskretnym E i w chwili τ zależą od historii ruchu tego elementu aż do chwili τ, a zależność tę nazwiemy równaniem konstytutywnym danego elementu dyskretnego (por. pkt 3 tej pracy). Celem otrzymania równań ruchu dowolnej cząstki d należy natomiast uwzględnić siły wewnętrzne działające na tę cząstkę ze wszystkich elementów dyskretnych, do których cząstka ta należy. Równania ruchu cząstki d otrzymujemy więc rozpatrując parę $(D_d, \mathscr{E}_d)$, gdzie $\mathscr{E}_d \subset \mathscr{E}$ jest zbiorem wszystkich elementów dyskretnych zawierających cząstkę d, $\overline{\overline{\mathscr{E}}} \geqslant 1$, oraz D_d jest zbiorem cząstek, dla którego $\mathscr{E}_d$ jest pokryciem (por. pkt 4). Należy tu pamiętać, że własności bezwładne ciała dyskretyzowanego, jako modelu ciała rzeczywistego, nie są rozdzielone na poszczególne elementy dyskretne, lecz są charakteryzowane masami poszczególnych cząstek. Jednocześnie widzimy, że nie zachodzi konieczność rozpatrywania całego ciała dyskretyzowanego w ramach rozważań teoretycznych, lecz wystarczy się ograniczyć w równaniach konstytutywnych do dowolnego elementu dyskretnego E, $E \in \mathscr{E}$, a w równaniach ruchu do dowolnej pary $(D_d, \mathscr{E}_d)$, $d \in D$. Z powyższych uwag wynika, że mechanikę ciała dyskretyzowanego możemy scharakteryzować jako teorię ciała odkształcalnego opisaną na podstawie założeń i równań mechaniki analitycznej, przy wykorzystaniu zasady determinizmu. Związek mechaniki ciał dyskretyzowanych z mechaniką

[2] Mówimy, że cząstki $d \in D$ oddziaływują wyłącznie w podzbiorach $E \in \mathscr{E}$, gdy siły wzajemnego oddziaływania między cząstkami należącymi do każdego podzbioru E, nie zależą od ruchu (od położenia, prędkości, przyspieszenia itp.) cząstek nie należących do E, oraz gdy siły te zależą od ruchu wszystkich cząstek należących do E.

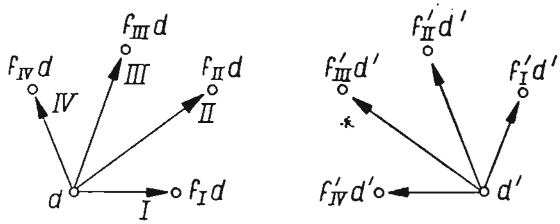
[3] W przypadku bardziej ogólnym, którym nie będziemy się tu zajmować, dla każdej cząstki postulujemy istnienie osobnej przestrzeni konfiguracyjnej V^n_d, wprowadzając jednocześnie koneksję w wiązce takich przestrzeni nad zbiorem D, osobno dla każdego elementu dyskretnego E (por. [5]).

ośrodków ciągłych oraz uzasadnienie celowości wprowadzenia pojęcia ciała dyskretyzowanego podamy w punkcie 6.

2. Układy współrzędnych i struktury różnicowe

W celu napisania równań konstytutywnych ciała dyskretyzowanego należy uprzednio wprowadzić pojęcie układu współrzędnych w dowolnym elemencie dyskretnym E, natomiast w celu napisania równań ruchu należy wprowadzić pojęcie struktury różnicowej dla dowolnej pary $(D_d, \mathcal{E}_d)$. Pojęcia te pełnią podobną rolę, jak pojęcie współrzędnych materialnych w mechanice ośrodków ciągłych.

Oznaczmy $s = s(E) = \overline{\overline{E}}-1$. Układem współrzędnych w elemencie dyskretnym E nazywamy dowolne wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $\varkappa: E \to \{0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\} \subset \mathcal{N}, \Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots < \Lambda_s$. Oznaczmy $d = \varkappa^{-1}(0), f_\Lambda d = \varkappa^{-1}(\Lambda)$. Sens symbolu f_Λ, $\Lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$ wyjaśnimy poniżej omawiając pojęcie struktury różnicowej. W każdym elemencie dyskretnym istnieje więc nieskończenie wiele różnych układów współrzędnych; dla każdej pary $\varkappa: E \to \{0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\}$, $\varkappa': E \to \{0, \Lambda'_1, \ldots, \Lambda'_s\}$ takich układów istnieje założenie $T' = \varkappa' \circ \varkappa^{-1}: \{0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\} \to \{0, \Lambda'_1, \ldots, \Lambda'_s\}$, które nazwiemy transformacją układu współrzędnych. Zbiór transformacji dla każdego E tworzy grupę, co umożliwia wprowadzenie takich pojęć, jak obiekt w elemencie dyskretnym, obiekt geometryczny, komitanta obiektu itp. Każdy układ współrzędnych w E dogodnie



Rys. 4

przedstawić przy pomocy grafu zorientowanego, przyporządkowując każdej z s par cząstek d, $f_\Lambda d$, $\Lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$, wektor o początku w d oraz końcu w $f_\Lambda d$. Na rys. 4 podano przykład dwóch różnych układów współrzędnych dla elementu dyskretnego o pięciu cząstkach, oznaczając wektor łączący cząstkę d z cząstką $f_\Lambda d$ symbolem Λ, gdzie $\Lambda = I, II, III, IV$.

Niech $\varphi: E \to R$ będzie dowolną daną funkcją na E. Każdemu układowi współrzędnych w E można wtedy przyporządkować ciąg $s+1$ liczb $\varphi_0 = \varphi(d)$, $\Delta_{\Lambda_1}\varphi = \varphi(f_{\Lambda_1}d) - \varphi(d), \ldots, \Delta_{\Lambda_s}\varphi = \varphi(f_{\Lambda_s}d) - \varphi(d)$. Jednocześnie każdej transformacji układu współrzędnych $T' = \varkappa' \circ \varkappa^{-1}$ możemy przyporządkować macierz $(s+1)\times(s+1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 'a^{\Lambda_i} \\ 0 & B^{\Lambda_i}_{\Lambda'_j} \end{pmatrix}, \quad 'a^\Lambda = \begin{cases} 1 \text{ gdy } T(\Lambda) = 0, \\ 0 \text{ gdy } T(\Lambda) \neq 0, \end{cases} \quad B^\Lambda_{\Lambda'} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } T(\Lambda) = \Lambda', \\ -1 \text{ gdy } T(\Lambda) = 0, \\ 0 \text{ gdy } T(\Lambda) \neq \Lambda' \text{ i } T(\Lambda) \neq 0, \end{cases}$$
$$i, j = 1, 2, \ldots, s,$$

przy czym można wykazać, że zbiór tych macierzy tworzy grupę. Podobnie łatwo zauważyć, że

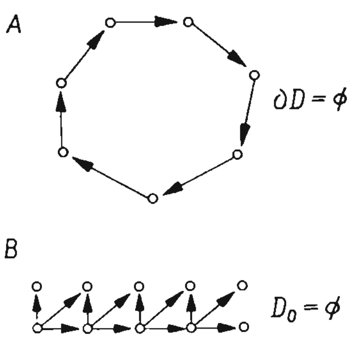
$$\begin{pmatrix}\varphi_0' \\ \Delta_{\Lambda_j'}\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 'a^{\Lambda_i} \\ 0 & B^{\Lambda_i}_{\Lambda_j'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_0 \\ \Delta_{\Lambda_i}\varphi\end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l}\varphi_0' = \varphi(d'), \quad d' = '\varkappa^{-1}(0), \\ \Delta_{\Lambda'}\varphi = \varphi(f_\Lambda d') - \varphi(d'), \quad f_\Lambda d' = '\varkappa^{-1}(\Lambda),\end{array} \tag{2.1}$$

tj. ciąg liczb $\varphi_0, \Delta_{\Lambda_1}\varphi, \ldots, \Delta_{\Lambda_s}\varphi$ jest ciągiem składowych obiektu geometrycznego w E, który nazwijmy kowektorem w E. Przyporządkujmy teraz elementowi dyskretnemu E w każdym układzie współrzędnych $s+1$ liczb $\psi^0, \psi^{\Lambda_1}, \psi^{\Lambda_2}, \ldots, \psi^{\Lambda_s}$, które przy zmianie układu współrzędnych transformują się zgodnie z wzorem

$$\begin{pmatrix}\psi^{0'} \\ \psi^{\Lambda_j'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ a^{\Lambda_j'} & B^{\Lambda_j'}_{\Lambda_i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi^0 \\ \psi^{\Lambda_i}\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 \\ a^{\Lambda_i} & B^{\Lambda_j'}_{\Lambda_i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 'a^{\Lambda_i} \\ 0 & B^{\Lambda_k}_{\Lambda_j'}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \delta^{\Lambda_k}_{\Lambda_i}\end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Ciąg liczb $\psi^0, \psi^{\Lambda_1}, \psi^{\Lambda_2}, \ldots, \psi^{\Lambda_s}$ nazwiemy składowymi wektora w elemencie dyskretnym E. Wzory transformacyjne (2.1) oraz (2.2) wykorzystamy przy wprowadzaniu pojęcia grupy izotropii w p. 4.

Rozpatrzmy teraz parę $(D_d, \mathscr{E}_d)$, gdzie d jest dowolną, lecz ustaloną cząstką zbioru D, oraz oznaczmy $m_d = \max(\overline{\overline{E}}, \overline{\overline{\mathscr{E}_d}}) - 1$, gdzie E przebiega cały zbiór $\mathscr{E}_d$. Dopuszczalną strukturą różnicową na $(D_d, \mathscr{E}_d)$ nazywamy ciąg m_d wzajemnie jednoznacznych odwzo-



Rys. 5

rowań $f_\Lambda\colon D_d^\Lambda \to D_d^{-\Lambda}$; $D_d^\Lambda \subset D_d$, $D_d^{-\Lambda} \subset D_d$; $\Lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots, m_d$, jednoznacznie określających w każdym $E \subset \mathscr{E}_d$ układ współrzędnych $\varkappa\colon E \to \{0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \ldots, \Lambda_s\}$, $s = \overline{\overline{E}} - 1 \leqslant m_d$, gdzie $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \ldots, \Lambda_s$ jest podciągiem ciągu $I, II, III, \ldots, m_d$; przyjmujemy tutaj $f_\Lambda d \equiv f_\Lambda(d)$. Przykład pary $(D_d, \mathscr{E}_d)$ oraz dopuszczalnej struktury różnicowej na $(D_d, \mathscr{E}_d)$ podano na rys. 5 przy pomocy grafu; obowiązują tu oznaczenia podobne, jak na rys. 4, tj. wektor zaopatrzony wskaźnikiem Λ łączy cząstkę podzbioru D_d^Λ z jej obrazem należącym do podzbioru $D_d^{-\Lambda}$; zbiór wszystkich wektorów zaopatrzonych wskaźnikiem Λ przedstawia więc funkcję $f_\Lambda\colon D_d^\Lambda \to D_d^{-\Lambda}$.

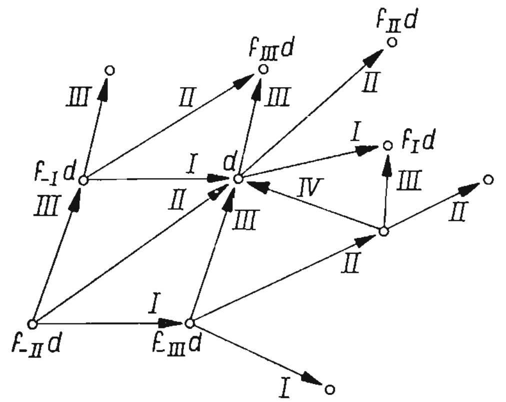
Oznaczmy przez $f_{-\Lambda}\colon D_d^{-\Lambda} \to D_d^\Lambda$ funkcje odwrotne do f_Λ oraz połóżmy $f_{-\Lambda}d' = f_{-\Lambda}(d')$ dla każdego $d' \in D_d^{-\Lambda}$ i każdego Λ. Dla dowolnej funkcji rzeczywistej $\varphi\colon D_d \to R$ i każdego

Λ możemy wtedy zdefiniować dwie funkcje $\Delta_\Lambda\varphi\colon D_d^\Lambda \to R$, $\overline{\Delta}^\Lambda\varphi\colon D_d^{-\Lambda} \to R$ definiując ich wartości jako

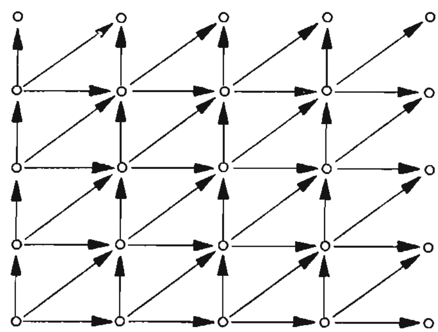
$$
(2.3)\qquad
\begin{aligned}
\Delta_\Lambda\varphi(d') &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(f_\Lambda d') - \varphi(d') \quad \text{gdy} \quad d' \in D_d^\Lambda,\\
\overline{\Delta}_\Lambda\varphi(d') &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(d') - \varphi(f_{-\Lambda} d') \quad \text{gdy} \quad d' \in D_d^{-\Lambda}.
\end{aligned}
$$

Wskaźnik Λ przebiega w (2.3) ciąg $I, II, \ldots, m_d$, a funkcje $\Delta_\Lambda\varphi$ i $\overline{\Delta}_\Lambda\varphi$ nazywamy odpowiednio prawymi i lewymi różnicami funkcji φ. Celem otrzymania grafu funkcji $f_{-\Lambda}$ dla przypadku pokazanego na rys. 5, należy zmienić zwroty wektorów oznaczonych przez Λ.

Dla niektórych ciał dyskretyzowanych dopuszczalną strukturę różnicową można wprowadzić dla całego $(D, \mathscr{E})$. W przeciwieństwie do struktury różnicowej na $(D_d, \mathscr{E}_d)$, którą można nazwać strukturą lokalną, dopuszczalną strukturę różnicową na $(D, \mathscr{E})$ nazwiemy globalną. Oznaczając $m = \max m_d$, $d \in D$, dopuszczalną strukturą różnicową na $(D, \mathscr{E})$ nazwiemy ciąg m wzajemnie jednoznacznych odwzorowań $f_\Lambda\colon D_\Lambda \to D_{-\Lambda}$; $D_\Lambda \subset D$, $D_{-\Lambda} \subset D$, $\Lambda = I, II, \ldots, m$, jednoznacznie określających w każdym $E \in \mathscr{E}$ układ współrzędnych $\varkappa\colon E \to \{0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\}$, $s = \overline{\overline{E}} - 1 \leqslant m$, gdzie $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$ jest podciągiem ciągu $I, II, \ldots, m$.



Rys. 6



Rys. 7

Każda struktura globalna indukuje dla dowolnego $(D_d, \mathscr{E}_d)$, $d \in D$, strukturę lokalną; zależność odwrotna oczywiście nie zawsze musi zachodzić. Strukturę różnicową globalną można wprowadzić, między innymi, gdy dla każdego $E \in \mathscr{E}$ mamy $\overline{\overline{E}} = m+1 = \text{const}$ oraz gdy każda cząstka $d \in D$ należy najwyżej do $m+1$ różnych elementów dyskretnych. Przypadek ten występuje często w praktyce. Jeżeli ponadto każdy element dyskretny zawiera co najmniej jedną cząstkę wspólną z m innymi elementami dyskretnymi, to warto dodatkowo zdefiniować pojęcie brzegu i wnętrza pary $(D, \mathscr{E})$. Wnętrzem pary $(D, \mathscr{E})$ nazywamy podzbiór $D_0 \subset D$ taki, że $d \in D_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\overline{\mathscr{E}}}_d = m+1$, tj. gdy cząstka d należy równocześnie do $m+1$ różnych elementów dyskretnych. Brzegiem pary $(D, \mathscr{E})$ nazywamy podzbiór $\partial D \subset D$ zdefiniowany przez $\partial D = D - D_0$. W przypadkach szczególnych $\partial D = \Phi$ (por. rys. 5A, gdzie $m = 1$) lub $D_0 = \Phi$ (por. rys. 5B, gdzie $m = 3$). Przykład globalnej struktury różnicowej na parze $(D, \mathscr{E})$, dla której $\overline{\overline{E}} = 4$ (tj. $m = 3$) podano na rys. 7 w postaci grafu, na którym wektory «poziome» reprezentują funkcję f_I, wektory «pionowe» reprezentują funkcję f_{II} oraz pozostałe wektory reprezentują funkcję f_{III}. Można wykazać, że $D_0 = \bigcap_{\Lambda=I}^{m} (D_\Lambda \cap D_{-\Lambda})$ w każdej dopuszczalnej strukturze różnicowej na $(D, \mathscr{E})$.

3. Siły wewnętrzne

Siły wewnętrzne w elemencie dyskretnym $E \in \mathscr{E}$ są to siły działające między cząstkami $d \in E$. Są one przenoszone przez element skończony ciała stałego przy założeniu, że element dyskretny E jest modelem tego elementu skończonego (por. pkt 1), a sam element skończony można traktować niezależnie od reszty ciała[4]. Celem przedstawienia ruchu i sił wewnętrznych elementu dyskretnego E w postaci analitycznej, wprowadzimy w E układ współrzędnych $\varkappa\colon E \to \{0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s\}$, $s = \overline{\overline{E}}-1$. Ruch elementu dyskretnego wyznaczają wektory $\mathfrak{q}(d, \tau) \in V^n$, $\mathfrak{q}(f_\Lambda d, \tau) \in V^n$, $\Lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$, o składowych odpowiednio $q^a_*(d, \tau)$, $q^a(f_\Lambda d, \tau)$, $a = 1, 2, \ldots, n$. Korzystając z układu współrzędnych $\varkappa$ ruch ten dogodnie zlokalizować w cząstce $d \in E$, określając go $s+1$ funkcjami wektorowymi $\mathfrak{q}(d, \tau)$, $\Delta_\Lambda\mathfrak{q}(d, \tau)$, $\Lambda = \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$. Siły wewnętrzne w elemencie dyskretnym możemy określić, w przyjętym układzie współrzędnych $\varkappa$, funkcjami $T_a(d, \tau)$, $T^\Lambda_a(d, \tau)$, gdzie $T_a(d, \tau)$ są uogólnionymi siłami działającymi na cząstkę d w danym elemencie dyskretnym $E = \{d, f_\Lambda, d, \ldots, f_{\Lambda_s} d\}$ oraz $-T^\Lambda_a(d, \tau)$ są uogólnionymi siłami działającymi na cząstkę $f_\Lambda d$ w tymże elemencie dyskretnym E[5]. Dogodniej jednak wprowadzić na miejsce sił uogólnionych $T_a(d, \tau)$, siły uogólnione $t_a(d, \tau)$ dane przez

$$t_a(d, \tau) = T_a(d, \tau) - \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T^\Lambda_a(d, \tau). \tag{3.1}$$

Siły $t_a(d, \tau)$ są, zgodnie z definicją (3.1), uogólnionymi wypadkowymi wszystkich sił wewnętrznych w E działających na element dyskretny E. Należy pamiętać, że wszystkie wprowadzone wielkości są określone tylko w dowolnym lecz przyjętym uprzednio układzie współrzędnych $\varkappa$.

Oznaczmy przez $\delta L = \delta L(E)$ wariację pracy sił wewnętrznych w na E dowolnych przemieszczeniach wirtualnych $\delta q^a(d, \tau)$, $\delta q^a(f_\Lambda d, \tau)$ elementu dyskretnego E. Zgodnie ze znaną definicją sił uogólnionych mamy

$$\begin{aligned} \delta L &= -T_a(d, \tau)\delta q^a_*(d, \tau) + \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T^\Lambda_a(d, \tau)\delta q^a(f_\Lambda d, \tau) = \\ &= -T_a(d, \tau)\delta q^a_*(d, \tau) + \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T^\Lambda_a(d, \tau)\delta q^a(d, \tau) + \sum_{\Lambda=\Lambda_1}^{\Lambda_s} T^\Lambda_a(d, \tau)\,\delta\Delta_\Lambda q^a(d, \tau), \end{aligned} \tag{3.2}$$

co zgodnie z (3.1) prowadzi do

$$\delta L = T^\Lambda_a(d, \tau)\delta\big(\Delta_\Lambda q^a(d, \tau)\big) - t_a(d, \tau)\delta q^a(d, \tau) \tag{3.3}$$

przy założeniu, że obowiązuje konwencja sumacyjna względem wszystkich wskaźników.

---

[4] Współdziałanie danego elementu skończonego z resztą ciała dyskretyzowanego wyraża się wyłącznie przez fakt istnienia cząstek wspólnych dla różnych elementów dyskretnych.

[5] Wskaźniki Λ, Φ, ... przebiegają w tym punkcie pracy ciąg $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s$; $s = s(E) = \overline{\overline{E}}-1$, natomiast wskaźniki $a, b, \ldots$ przebiegają w całej pracy ciąg $1, 2, \ldots, n$.

Z równania (3.3) wynika, że $T_a^A(d, \tau)$ są, dla każdego ustalonego A, d, τ, składowymi kowektora w przestrzeni V^{*n}, dualnej do przestrzeni konfiguracyjnej. Jednocześnie z (2.1) wynika, że $s+1$ liczb $q^a(d, \tau)$, $\Delta_A q^a(d, \tau)$ dla każdego ustalonego a, τ, można traktować jako składowe pewnego $s+1$ wymiarowego kowektora, gdyż

$$(3.4)\qquad \begin{pmatrix} 'q^a \\ \Delta_{A_i} q^a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 'a^{A_j} \\ 0 & B_{A_i}^{A_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^a \\ \Delta_{A_j} q^a \end{pmatrix}; \quad i,j = 1,2,\ldots,s.$$

Korzystając z (3.3) możemy wykazać, że $s+1$ liczb $T_{a}^{A_i}(d, \tau)$, $t_a(d, \tau)$ (dla każdego ustalonego a, d, τ), to składowe $s+1$ wymiarowego wektora o regule transformacji

$$(3.5)\qquad \begin{pmatrix} -'t_a \\ 'T_a^{A_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{A_j} & B_{A_i}^{A_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t_a \\ T_a^{A_i} \end{pmatrix}; \qquad i,j = 1,2,\ldots,s,$$

gdzie macierz $(s+1)\times(s+1)$ występująca w (3.5) jest odwrotna (po transpozycji) względem odpowiedniej macierzy występującej w (3.4). Wielkości «primowane» odnoszą się do układu współrzędnych $\varkappa' \colon E \to \{0, A_1', A_2', \ldots, A_s'\}$, a wielkość δL jest niezmiennikiem tak względem zmiany układu współrzędnych w E, jak i zmiany bazy w przestrzeni konfiguracyjnej V^n i przestrzeni dualnej V^{*n}.

Wprowadzimy teraz dla dowolnego elementu dyskretnego E i dowolnego układu współrzędnych w E, ciąg złożony z $K = K(E)$ (K jest liczbą całkowitą dodatnią oraz $E \in \mathscr{E}$) różniczkowalnych funkcji

$$(3.6)\qquad \gamma_A = \varphi_A(d, \mathbf{q}(d, \tau), \quad \Delta_A \mathbf{q}(d, \tau)), \quad A = 1,2,\ldots,K,$$

których postać jest taka sama w każdym układzie współrzędnych w E. Jednocześnie żądamy, by rozwiązaniem równań $\varphi_A(d, \ldots) = 0$ były wszystkie ruchy sztywne elementu dyskretnego E (tj. ruchy nie wywołujące zmiany sił wewnętrznych w tym elemencie, por. pkt 4) oraz by każdemu ruchowi elementu E odpowiadały funkcje $\gamma_A = \gamma_A(d, \tau)$ określające ten ruch z dokładnością do dowolnego ruchu sztywnego. Wprowadzimy następnie $K = K(E), E \in \mathscr{E}$, funkcji $q^A = p^A(d, \tau)$ w ten sposób, by wyrażenie $\delta L = p^A \delta\gamma_A$ (obowiązuje konwencja sumacyjna) określało dowolną wariację pracy sił wewnętrznych w elemencie dyskretnym E. Tym samym związek

$$(3.7)\qquad \delta L = p^A \delta\gamma_A = p^A(\Phi_{Aa}^A \delta\Delta_A q^a + \Phi_{Aa}\delta q^a) = T_a^A \delta\Delta_A q^a - t_a \delta q^a,$$

w którym oznaczono

$$(3.8)\qquad \Phi_{Aa}^A = \frac{\partial\varphi_A}{\partial\Delta_A q^a}, \qquad \Phi_{Aa} = \frac{\partial\varphi_A}{\partial q^a},$$

winien zachodzić dla dowolnych $\delta\Delta_A q^a$ oraz δq^a. Wynika stąd, że

$$(3.9)\qquad T_a^A = p^A \Phi_{Aa}^A, \qquad t_a = -p^A \Phi_{Aa}.$$

Funkcje $p^A(d, \tau)$, $A = 1,2,\ldots,K$, spełniające związki (3.9), nazwiemy napięciami w elemencie dyskretnym E, natomiast funkcje $\gamma_A = \gamma_A(d, \tau)$ nazwiemy odkształceniami tego elementu. Zarówno napięcia, jak i odkształcenia określone są w danym układzie współrzędnych.

4. Równania konstytutywne

Równania konstytutywne dla dowolnego elementu dyskretnego wyrażają związek między siłami wewnętrznymi w tym elemencie a jego ruchem (tj. ruchem wszystkich jego cząstek). Równania te napiszemy postulując dla każdego $E \in \mathscr{E}$ zasadę determinizmu, [4], tj. przyjmując, że siły wewnętrzne w elemencie dyskretnym E (siły działające pomiędzy cząstkami tego elementu) w dowolnej chwili τ są określone historią ruchu elementu E aż do chwili τ włącznie. Nie uwzględniamy więc tutaj żadnych czynników działających na element skończony innych od sił między cząstkami odpowiedniego elementu dyskretnego. W dowolnym układzie współrzędnych $\varkappa: E \to \{0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\}$ zasadę determinizmu dla ciał dyskretyzowanych wyrażają więc następujące równania konstytutywne

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
T_a^{\Lambda}(d, \tau) &= \mathop{S_a^{\Lambda}}_{\sigma=-\infty}^{\tau} [d, \mathbf{q}(d, \sigma), \Delta_{\Phi}\mathbf{q}(d, \sigma)],\\
t_a(d, \tau) &= \mathop{S_a}_{\sigma=-\infty}^{\tau} [d, \mathbf{q}(d, \sigma), \Delta_{\Phi}\mathbf{q}(d, \sigma)],
\end{aligned}
$$

gdzie argument d oznacza, że ruch elementu dyskretnego jest zlokalizowany w cząstce d oraz gdzie S_a^{Λ}, S_a nazywamy funkcjonałami konstytutywnymi elementu dyskretnego E. Funkcjonały te opisują jednoznacznie pewne globalne własności materiałowe i strukturalne odpowiedniego elementu skończonego. Postać funkcjonałów konstytutywnych zależy od wyboru układu współrzędnyc h$\varkappa$ w elemencie dyskretnym E. Niech $\varkappa: E \to \{0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s\}$ oraz $\varkappa': E \to \{0, \Lambda_1', \Lambda_2', \ldots, \Lambda_s'\}$ będą dowolnymi dwoma takimi układami. Funkcjonały konstytutywne w obu tych układach współrzędnych oznaczmy przez $S_a^{\Lambda}(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Lambda}\mathbf{q})$, $S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Lambda}\mathbf{q})$ oraz $'S_a^{\Lambda'}(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Lambda'}\mathbf{q}')$, $S_a'(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Lambda'}\mathbf{q}')$, gdzie argumenty d oraz d' oznaczają lokalizację ruchów odpowiednio w cząstkach d lub d'. Korzystając ze związków transformacyjnych (3.5) i (3.4) napiszemy

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
S_a^{\Lambda}(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi}\mathbf{q}) &= B_{\Lambda'}^{\Lambda}\, 'S_a^{\Lambda'}(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Phi'}\mathbf{q}') + 'a^{\Lambda} S_a'(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Phi'}\mathbf{q}') =\\
&= B_{\Lambda'}^{\Lambda}\, 'S_a^{\Lambda'}(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}) + 'a^{\Lambda} S_a'(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}),\\
S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi}\mathbf{q}) &= S_a'(d', \mathbf{q}', \Delta_{\Phi'}\mathbf{q}') = S_a'(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q});\\
\Lambda, \Phi &= \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s;\ \Lambda', \Phi' = \Lambda_1', \Lambda_2', \ldots, \Lambda_s'.
\end{aligned}
$$

oraz równości (4.2) będziemy interpretować nie jako transformację $'T = \varkappa' \circ \varkappa^{-1}: \{0, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_s\} \to \{0, \Lambda_1', \Lambda_2', \ldots, \Lambda_s'\}$ układu współrzędnych w E, lecz jako przekształcenie zbioru E, w którym obrazem cząstki $d = \varkappa^{-1}(0)$ jest cząstka $d' = '\varkappa^{-1}(0)$, a obrazem cząstki $f_{\Lambda_i}d = \varkappa^{-1}(\Lambda_i)$ jest cząstka $f_{\Lambda_i'}d' = '\varkappa^{-1}(\Lambda_i')$ dla $i = 1, 2, \ldots, s$. Cząstka d w tej interpretacji zmienia swój ruch z $\mathbf{q}(d, \tau)$ na $\mathbf{q}(d, \tau) + 'a^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}(d, \tau)$, a ruch cząstki $f_{\Lambda_i}d$ względem cząstki d ulega zmianie z $\Delta_{\Lambda_i}\mathbf{q}(d, \tau)$ na $B_{\Lambda_i'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}(d, \tau)$. Zauważmy, że zawsze istnieje podgrupa grupy przekształceń (3.4), która nie zmienia postaci funkcjonałów konstytutywnych, tj. dla której $'S_a^{\Lambda'} = S_a^{\Lambda'}$, $S_a = S_a'$. Zgodnie z (4.2) istnieją więc zawsze takie $'a^{\Phi}$ oraz $B_{\Phi'}^{\Phi}$, dla których

$$
(4.3)\qquad
\begin{aligned}
S_a^{\Lambda}(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi}\mathbf{q}) &= B_{\Lambda'}^{\Lambda} S_a^{\Lambda'}(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}) + 'a^{\Lambda} S_a(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi}\Delta\mathbf{q}),\\
S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi}\mathbf{q}) &= S_a(d, \mathbf{q} + 'a^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}, B_{\Phi'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}).
\end{aligned}
$$

W szczególności związki (4.3) mogą zachodzić tylko gdy odpowiednia podgrupa grupy przekształceń zawiera tylko element jednostkowy $'a^{\Phi} = 0$, $B\Phi_i'^{\Phi j} = \delta_i^j$. Podgrupę grupy przekształceń (3.4), która spełnia (4.3), nazwiemy grupą izotropii funkcjonałów konstytutywnych (4.1). Grupa izotropii w mechanice ciał dyskretyzowanych nie zależy od żadnej «konfiguracji odniesienia» ciała (jak to ma miejsce w mechanice ośrodków ciągłych), lecz może zależeć od wyboru układu współrzędnych, a ściślej mówiąc od sposobu lokalizacji ruchu w elemencie dyskretnym E. Jeżeli grupa izotropii zawiera wszystkie przekształcenia (3.4), dla których $'a^{\Phi} = 0$, wtedy element dyskretny nazwiemy izotropowym w cząstce d; wszystkie s wektorów $\Delta_A^{\prime}\mathbf{q}$, $A = A_1, A_2, \ldots, A_s$, w przestrzeni konfiguracji są, mówiąc obrazowo, jednakowo uprzywilejowane z punktu widzenia własności elementu dyskretnego. Interpretując bowiem (4.3) jako zmianę ruchu elementu dyskretnego łatwo zauważyć, że dla elementu E izotropowego w cząstce d, zamiana miejscami cząstek $f_{A_1}d$, $f_{A_2}d, \ldots, f_{A_s}d$ nie zmienia sił wewnętrznych w elemencie dyskretnym. Element dyskretny izotropowy w każdej cząstce nazwiemy izotropowym. Można wykazać, że dla elementu izotropowego w cząstce d równania (4.3) sprowadzają się do postaci

$$
\begin{aligned}
S_a^A(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi}\mathbf{q}) &= Q_{A'}^{A} S^{A'}(d, \mathbf{q}, Q_{\Phi'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}), \\
S_a(d, \mathbf{q}, \Delta_{\Phi}\mathbf{q}) &= S_a(d, \mathbf{q}, Q_{\Phi'}^{\Phi}\Delta_{\Phi}\mathbf{q}),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

gdzie $(Q_{\Phi'}^{\Phi})$ jest macierzą $s \times s$, która w każdym wierszu i w każdej kolumnie ma $s-1$ zer oraz jedynkę (macierz permutacji). Zbiór tych macierzy tworzy podgrupę grupy ortogonalnej.

Jeżeli dla każdego elementu dyskretnego w ciele dyskretyzowanym istnieje taki układ współrzędnych, że funkcjonały konstytutywne tych elementów są identyczne, to ciało nazwiemy równomiernym. Gdy ponadto wszystkie te układy są indukowane przez jedną globalną strukturę różnicową, omówioną na końcu p. 2, to ciało dyskretyzowane nazwiemy jednorodnym. Podane definicje są wzorowane na odpowiednich definicjach mechaniki ośrodków ciągłych [4].

Rozpatrzmy teraz przypadek szczególny, w którym dla danego elementu dyskretnego E istnieje potencjał sprężysty. Wprowadzając w E układ współrzędnych $\varkappa\colon E \to \{0, A_1, A_2, \ldots, A_s\}$, potencjał ten przedstawimy w postaci $e[d, (d, \mathbf{q}\ \tau), \mathbf{q}(f_A d, \tau)]$, a zgodnie z definicją sił T_a, T_a^A otrzymamy

$$
T_a(d, \tau) = -\frac{\partial e(d, \ldots)}{\partial \mathbf{q}^a(d, \tau)}, \quad T_a^A(d, \tau) = \frac{\partial e(d, \ldots)}{\partial \mathbf{q}^a(d, \tau)}; \quad A = A_1, A_2, \ldots, A_s.
\tag{4.5}
$$

Zdefiniujmy następnie funkcję $\varepsilon(d, \ldots)$, zwaną potencjałem sprężystym, kładąc

$$
\varepsilon[d, \mathbf{q}(d, \tau), \Delta\mathbf{q}(d, \tau)] \equiv e[d, \mathbf{q}(d, \tau), \mathbf{q}(d, \tau) + \Delta_A\mathbf{q}(d, \tau)],
\tag{4.6}
$$

tj. lokalizując ruch elementu dyskretnego w cząstce d. Z uwagi na

$$
\frac{\partial e(d, \ldots)}{\partial q^a(f_A d, \tau)} = \frac{\partial \varepsilon(d, \ldots)}{\partial \Delta_A q^a(d, \tau)}, \quad \frac{\partial e(d, \ldots)}{\partial q^a(d, \tau)} = \frac{\partial \varepsilon(d, \ldots)}{\partial q^a(d, \tau)} + \sum_{A=A_1}^{A_s} \frac{\partial \varepsilon(d, \ldots)}{\partial \Delta_A q^a(d, \tau)},
\tag{4.7}
$$

otrzymamy ostatecznie

$$
T_a^A(d, \tau) = \frac{\partial \varepsilon(d, \ldots)}{\partial \Delta_A q^a(d, \tau)}, \quad t_a(d, \tau) = -\frac{\partial \varepsilon(d, \ldots)}{\partial q^a(d, \tau)}.
\tag{4.8}
$$

Równania (4.8) są przypadkiem szczególnym równań konstytutywnych (4.1); element dyskretny, dla którego one obowiązują, nazwiemy sprężystym. Jeżeli wszystkie elementy dyskretne ciała dyskretyzowanego są sprężyste, wtedy ciało to nazwiemy sprężystym, a odpowiednie równania dla takiego ciała — równaniami dyskretnej teorii sprężystości [6]. Podobnie można sformułować podstawowe równania dyskretyzowanych ciał sprężysto-plastycznych [1].

Korzystając ze składowych stanu napięcia $p^A(d, \tau)$ oraz składowych stanu odkształcenia $\gamma_A(d, \tau)$, $A = 1, 2, \ldots, K$, można przedstawić alternatywną postać równań konstytutywnych

$$p^A(d, \tau) = \mathop{P^A}_{\sigma=-\infty}^{\tau} \left(d, \gamma_B(d, \sigma)\right), \qquad A, B = 1, 2, \ldots, K, \tag{4.9}$$

gdzie P^A są funkcjonałami konstytutywnymi. Dla sprężystego elementu dyskretnego istnieje potencjał

$$\varepsilon = \varepsilon(d, \gamma_B(d, \tau)), \tag{4.10}$$

a równania konstytutywne mają postać

$$p^A(d, \tau) = \frac{\partial\varepsilon(d, \gamma_B(d, \tau))}{\partial\gamma_A(d, \tau)} . \tag{4.11}$$

Przykłady równań konstytutywnych dla niektórych dyskretyzowanych ciał sprężystych podano w [2].

5. Równania ruchu

Niech $d \in D$ będzie dowolną cząstką ciała dyskretyzowanego, $Q_a(d, \tau)$ niech oznacza uogólnione siły działające na tę cząstkę oraz niech

$$T = T(d, \ldots) = \frac{1}{2} a_{ab}(d)\dot{q}^a(d, \tau)\dot{q}^b(d, \tau) \tag{5.1}$$

będzie jej energią kinetyczną (wskaźniki a, b przebiegają ciąg $1, 2, \ldots, n$; obowiązuje konwencja sumacyjna). W (5.1) założyliśmy, dla uproszczenia, że cząstka d jest układem dynamicznym skleronomicznym. Równania Lagrange'a II rodzaju dla cząstki d mają znaną postać

$$Q_a(d, \tau) = a_{ab}(d)\ddot{q}^b(d, \tau). \tag{5.2}$$

Celem wyrażenia sił $Q_a(d, \tau)$ przez siły wewnętrzne należy rozważyć parę $(D_d, \mathscr{E}_d)$ i przyjąć na niej daną dopuszczalną strukturę różnicową (por. p. 1 i 2). Przyjmujemy, że wskaźniki Λ, Φ przebiegają teraz ciąg $I, II, \ldots, m_d$ oraz wprowadzamy następujące pomocnicze oznaczenia:

$$T_a(d', \tau) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0, \qquad T_a^{\Lambda}(d', \tau) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0,$$

gdy w d' nie jest zlokalizowany ruch żadnego elementu dyskretnego,

$$T_a^{\Lambda}(d', \tau) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0 \quad \text{gdy} \quad d' \sim \in D_d^{\Lambda},$$

$$T_a^{\Lambda}(f_{-\Lambda}d', \tau) \stackrel{\mathrm{df}}{=} 0 \quad \text{gdy} \quad d' \sim \in D_d^{-\Lambda}.$$

Tym samym wielkości $T_a^A(d', \tau)$, $T_a^A(f_{-A}d', \tau)$, $T_a(d', \tau)$ są określone dla każdego $d' \in \in D_d$ oraz dla $A = I, II, \ldots, m_d$ (por. p. 3). Także wielkość $t_a(d, \tau)$ można teraz zdefiniować wzorem

$$(5.3) \qquad t_a(d, \tau) \stackrel{\text{df}}{=} T_a(d, \tau) - \sum_{A=I}^{m_d} T_a^A(d, \tau),$$

wynikającym z (3.1) oraz wyprowadzonych tu pomocniczych definicji. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy

$$(5.4) \qquad Q_a(d, \tau) = T_a(d, \tau) - \sum_{A=I}^{m_d} T_a^A(f_{-A}d, \tau) + f_a(d, \tau),$$

gdzie $f_a(d, \tau)$ są uogólnionymi siłami zewnętrznymi działającymi na cząstkę d, oraz $T_a(d, \tau)$ i $-T_a^A(f_{-A}d, \tau)$ są siłami wewnętrznymi działającymi na cząstkę d we wszystkich elementach dyskretnych $E \in \mathscr{E}_d$ zawierających tę cząstkę. Rugując z (5.3) i (5.4) siły uogólnione $T_a(d, \tau)$ oraz korzystając z (5.2), otrzymamy ostatecznie równania

$$(5.5) \qquad \bar{\Delta}_A T_a^A(d, \tau) + t_a(d, \tau) + f_a(d, \tau) = a_{ab}(d)\ddot{q}^b(d, \tau),$$

w których obowiązuje konwencja sumacyjna podług wskaźników $A = I, II, III, \ldots, m_d$, oraz $b = 1, 2, \ldots, n$. Równania (5.5) są niezależne od własności elementów dyskretnych i w związku z tym możemy je nazwać równaniami ruchu ciała dyskretyzowanego. Równania te powinny być spełnione dla każdego $d \in D$, a celem ich napisania należy wprowadzić dopuszczalną strukturę różnicową dla każdego $(D_d, \mathscr{E}_d)$, $d \in D$, lub, gdy to jest możliwe, globalną strukturę różnicową na $(D, \mathscr{E})$. W szczególnym przypadku, gdy spełnione są warunki podane na końcu p.2, równania ruchu w postaci (5.5) dotyczą każdego $d \in D_0$ (nie zachodzi wtedy potrzeba definiowania dodatkowych «zerowych» sił wewnętrznych, a wskaźnik A przebiega ciąg $I, II, III, \ldots, m$), natomiast dla $d \in \partial D$ równania ruchu mają postać [6]

$$(5.6) \qquad \sum_{A \in R_d} T_a^A(d, \tau) - \sum_{A \in L_d} T_a^A(f_{-A}d, \tau) + t_a(d, \tau) + f_a(d, \tau) = a_{ab}\ddot{q}^b(d, \tau),$$

gdzie $R_d \subset (I, II, \ldots, m)$, $L_d \subset (I, II, m)$ są podciągami ciągu $I, II, \ldots, m$ takimi, że $(A \in R_d) \Leftrightarrow (d \in D_A)$ oraz $(A \in L_d) \Leftrightarrow (d \in D_{-A})$. W pracy [6] związki postaci (5.6) nazwano umownie «warunkami brzegowymi»; należy jednak zaznaczyć, że w mechanice ciał dyskretyzowanych warunki brzegowe w ścisłym tego pojęcia znaczeniu nie występują («warunki brzegowe» podane np. w [6] są tylko inną postacią równań ruchu).

Alternatywną postać równań ruchu otrzymamy korzystając z (3.9), tj. po wprowadzeniu składowych stanu napięcia p^A. Zgodnie z (5.5) i (3.9) napiszemy

$$(5.7) \qquad \bar{\Delta}_A(\Phi_{Aa}^A p^A) - \Phi_{Aa} p^A + f_a = a_{ab}\ddot{q}^b,$$

pomijając argumenty poszczególnych funkcji; obowiązuje tu konwencja sumacyjna podług wskaźników $A = I, II, \ldots, m_d$, $A = 1, 2, \ldots, K$, oraz $b = 1, 2, \ldots, n$.

Równania ruchu (5.5) oraz równania konstytutywne (4.1) stanowią podstawowy układ równań mechaniki ciał dyskretyzowanych; alternatywna postać tego układu wyraża się wzorami (5.7), (3.6) i (4.9). Podstawowymi niewiadomymi są najczęściej funkcje $q^a(d, \tau)$,

$d \in D$, których liczba jest równa n-krotnej liczbie cząstek w układzie, oraz przez które wyrażamy wszystkie pozostałe niewiadome funkcje (siły wewnętrzne lub napięcia i odkształcenia). W przypadkach szczególnych niektóre z funkcji $q^a(d, \tau)$ mogą być dane z góry; wtedy ich miejsce jako niewiadomych zajmują odpowiednie funkcje $f_a(d, \tau)$, a liczba poszukiwanych funkcji nie ulega zmianie. Łatwo sprawdzić, że liczba niewiadomych funkcji jest równa liczbie równań, którymi dysponujemy w mechanice ciał dyskretyzowanych. Należy podkreślić, że jedyną lecz zasadniczą trudnością przy formułowaniu równań danego ciała dyskretyzowanego jest wyznaczenie prawych stron równań konstytutywnych. Trudność tę można pokonać albo korzystając z równań mechaniki ośrodków ciągłych (co dokonano dla pewnych dyskretyzowanych ciał sprężystych, [2] i sprężysto-plastycznych [1]) lub też ewentualnie na drodze doświadczalnej.

6. Uwagi końcowe

Dokonajmy krótkiego porównania mechaniki ciał dyskretyzowanych z mechaniką ośrodków ciągłych. Zaznaczmy od razu, że problemy dające się rozwiązać przy pomocy równań mechaniki ośrodków ciągłych nie są z reguły interesujące jako zagadnienia mechaniki ciał dyskretyzowanych, a rozpatrywanie ich w oparciu o równania tej ostatniej jest po prostu niecelowe. Jednakże mechanika ośrodków ciągłych, w której podstawowe równania są najczęściej równaniami różniczkowymi cząstkowymi, praktycznie umożliwia wyczerpującą analizę i rozwiązanie jedynie stosunkowo prostych zagadnień, w których mamy do czynienia z obszarami o nieskomplikowanych kształtach i regularnych brzegach, z obciążeniami o niewielkiej liczbie nieciągłości i osobliwości oraz z materiałami o własnościach nie charakteryzujących się wieloma nieciągłościami lub defektami. Warunki te nie zachodzą jednak w zdecydowanej większości zagadnień współczesnej techniki, w których mamy do czynienia z konstrukcjami o złożonych kształtach, o nieciągłych i skupionych obciążeniach oraz o materiałach, których własności doznają wielu skokowych nieciągłości (materiały zbrojone). Korzystanie w tych przypadkach z równań różniczkowych cząstkowych mechaniki ośrodków ciągłych ogranicza się wtedy praktycznie do zapisania odpowiedniego zagadnienia granicznego bez możliwości sformułowania nawet najbardziej ogólnych wniosków jakościowych. Również zastąpienie równań różniczkowych cząstkowych równaniami różnicowymi, przy dużej liczbie osobliwości (związanych np. z działaniem sił skupionych, koncentracją naprężeń, nieciągłościami etc.) prowadzi do trudności numerycznych (bardzo wielka liczba równań) uniemożliwiających często uzyskanie rozwiązania ilościowego. W zagadnieniach takich zastosowanie równań mechaniki ciał dyskretyzowanych wydaje się być obecnie jedną teoretyczną drogą, na której można uzyskać tak jakościową, jak i ilościową analizę problemu. Powyższe stwierdzenie wynika, między innymi, z następujących przesłanek. Przede wszystkim w mechanice ciał dyskretyzowanych nie występują warunki brzegowe (por. uwagi po wzorze (5.6)), a tym samym nawet najbardziej złożony kształt ciała nie utrudnia analizy zagadnienia. Po drugie, przy odpowiedniej dyskretyzacji także nieciągłość obciążeń oraz nieciągłość materiału nie prowadzą do bardziej złożonej postaci równań, bowiem równania konstytutywne opisują niezależnie własności poszczególnych elementów skończonych, które zawsze można traktować w przybliżeniu jako jednorodne i nieobciążone. Wreszcie w mechanice ciał dyskretyzowanych nie występują osobliwości, które w mechanice ośrodków ciągłych są związane z np. z występowaniem sił skupionych i które często komplikują problem. Z drugiej strony należy jednak pamiętać, że rozwiązania, których dostarcza mechanika ciał dyskretyzowanych, zależą od rodzaju dyskretyzacji i są różnymi przybliżeniami w opisie tego samego zagadnienia. Zauważmy także, że równania mechaniki ciał dyskretyzowanych, przy numerycznym rozwiązywaniu poszczególnych zagadnień dotyczących statyki, drgań harmonicznych, rozchodzenie się pewnych fal etc., prowadzą od razu do równań algebraicznych znanej metody elementów skończonych, a więc dają się rozwiązywać na EMC. Tym samym mechanikę ciał dyskretyzowanych można w pewnym stopniu traktować jako fizyczną nadbudowę nad metodą elementów skończonych w zakresie mechaniki ciał odkształcalnych.

Na zakończenie zaznaczmy, że przedstawione w tej pracy ogólne równania mechaniki ciał dyskretyzowanych [równania ruchu (5.5) i równania konstytutywne (4.1)] stanowią tylko punkt wyjścia do analizy różnych problemów mechaniki ciał dyskretyzowanych (ciała sprężyste i plastyczne, teoria liniowa i teoria małych odkształceń, ciała izotropowe, zagadnienia stateczności, drgań etc.) oraz do rozwiązywania różnych zagadnień szczególnych. Możliwe jest także uogólnienie równań mechaniki ciał dyskretyzowanych celem objęcia nimi także zagadnień termodynamicznych. Wszystkie te problemy są tematem osobnych publikacji.

Literatura cytowana w tekście

1. M. KLEIBER, *Note on the discrete plastic bodies*, Arch. Mech. Stos. (w przygotowaniu).
2. W. KUFEL, *O liniowych zagadnieniach teorii sprężystości cial dyskretyzowanych*, Mech. Teoret. i Stos., 1, **11** (1973).
3. J. L. SYNGE, *Classical dynamics*, Handbuch der Physik, III/1, Springer Verlag, 1960.
4. C. TRUSDELL, W. NOLL, *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, III/3, Springer Verlag 1965.
5. CZ. WOŹNIAK, *Basic concepts of the difference geometry*, Annales Polon. Math., **28** (1972).
6. CZ. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., **6**, **23** (1971).
7. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method*, McGraw Hill, 1967.

Резюме

ОСНОВЫ МЕХАНИКИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ ТЕЛ

Темой работы является приближенное описание деформируемого тела, построенное в рамках предположений теории сплошной среды, но с использованием системы с конечным или счетным числом степеней свободы. Такая система названа дискретизированным телом.

Исходя из общей схемы дискретизации сплошной среды вводится понятие дискретизированного тела, а затем выводятся для этого тела уравнения движения и определяющие соотношения. Особым свойством этих уравнений следует считать их простую и одновременно весьма общую форму, а также формальное сходство с соответствующими уравнениями механики сплошных сред.

Рассмотрены пределы практической применимости уравнений механики дискретизированных тел.

Summary

BASIC CONCEPTS OF THE MECHANICS OF DISCRETIZED BODIES

The paper dels with an approximate description of the deformable body within the known assumptions of the continuous media theory and using the additional assertion that the body under consideration has only finite or countable number of degrees of freedom. Such body is said to be a discretized body. Starting from the general scheme of discretization of continuous media we arrive at the concept of discretized body and then we obtain the equations of motion and the constitutive equations of such a body. The characteristic feature of the equations obtained is their simple and general form and their formal resemblance to the known equations of the continuous media theory. At the end of the paper the problem of applications of the mechanics of discretized bodies is also widely discussed.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I MECHANIKI

Praca została złożona w redakcji dnia 26 kwietnia 1972 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

O LINIOWYCH ZAGADNIENIACH TEORII SPRĘŻYSTOŚCI CIAŁ DYSKRETYZOWANYCH

WIESŁAW KUFEL (WARSZAWA)

Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych sformułowano w [1]. W niniejszej pracy definiuje się jednobiegunowe ciała sprężyste jako szczególny przypadek ciał dyskretyzowanych. Przyjmując za punkt wyjścia podstawowy układ równań opisujący ruch ciał dyskretyzowanych, wyprowadza się równania ruchu oraz równania konstytutywne liniowej teorii sprężystych jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych. Na gruncie tej teorii formułuje się prawa zachowania, zasadę prac wirtualnych, twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań oraz twierdzenie o wzajemności Bettiego. W pracy podano także prosty przykład jednobiegunowego ciała dyskretyzowanego.

1. Sprężyste jednobiegunowe ciała dyskretyzowane. Przypadek ogólny

Ciało dyskretyzowane $(D, \mathscr{E})$ zdefiniowane w [1] nazwiemy jednobiegunowym ciałem dyskretyzowanym wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór D będzie przeliczalnym zbiorem punktów materialnych $d \in D$. Ruch takiego punktu opisuje wektor wodzący, który w ortogonalnym układzie kartezjańskim przestrzeni fizycznej ma współrzędne $z^k = \psi^k(d, \tau)$. Tym samym funkcje $q^a(d, \tau)$ określone w punkcie 1 pracy [1] będą miały postać $q^a(d, \tau) = \delta^a_k \psi^k(d, \tau)$, $a = 1, 2, 3$, a wymiar przestrzeni wektorowej V^n będzie $n = 3$. Wprowadzając w każdym elemencie dyskretnym $E \in \mathscr{E}$ układ współrzędnych [1] $f_E : E \rightarrow (d, f_A d)$, $A = I, II, \ldots, m$,[1] możemy opisać ruch takiego elementu funkcjami $\psi^k(d, \tau)$ $\Delta_A \psi^k(d, \tau)$. W dalszym ciągu założymy, że jednobiegunowe ciało dyskretyzowane jest dyskretyzowanym ciałem sprężystym. Oznacza to, zgodnie z definicją podaną w [1], p. 4, że dla każdego elementu dyskretnego $E \in \mathscr{E}$ istnieje funkcja energii sprężystej $\varepsilon[d, \psi^k(d, \tau), \Delta_A \psi^k(d, \tau)]$. Wykorzystując niezmienniczość funkcji ε względem przesunięć w czasoprzestrzeni możemy pominąć zależność $\varepsilon(d, \psi^k, \Delta_A \psi^k)$ od ψ^k przyjmując $\varepsilon = \varepsilon(d, \Delta_A \psi^k)$.

W związku z tym równania konstytutywne (wzór (4.8) w pracy [1]) sprowadza się do postaci

$$T^A_k = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \Delta_A \psi^k}, \tag{1.1}$$

natomiast z równań ruchu (4.5) otrzymamy

$$\bar{\Delta}_A T^A_k + f_k = m \ddot{u}_k, \tag{1.2}$$

1) Wskaźniki $A, \Phi, \ldots$ przebiegają ciąg $I, II, \ldots, m$, a wskaźniki $k, l, \ldots$ ciąg $1, 2, 3$. Obowiązuje konwencja sumacyjna.

gdzie $m = m(d)$ jest masą punktu, a $f_k = f_k(d, \tau)$ są siłami zewnętrznymi działającymi na ten punkt. Postać równań ruchu (1.2) oraz równań konstytutywnych (1.1) wykazuje dużą analogię do odpowiednich równań ruchu ośrodka sprężystego w klasycznej teorii sprężystości. W szczególnym przypadku, gdy spełnione są warunki podane na końcu p.2 [1], jednobiegunowe ciało dyskretyzowane posiada wnętrze $D_0 \subset D$ oraz brzeg $\partial D = D/D_0$. Równania ruchu (1.2) dotyczą wtedy każdego $d \in D_0$. Równania te dla $d \in \partial D$ trzeba zastąpić odpowiednimi warunkami brzegowymi (5.6) [1], które przyjmą postać

$$\sum_{\Lambda \in R_d} T_k^\Lambda(d, \tau) - \sum_{\Lambda \in L_d} T_k^\Lambda(f_{-\Lambda}d, \tau) + f_k(d, \tau) = m(d)\ddot{\psi}_k(d, \tau), \tag{1.3}$$

gdzie R_d i L_d są odpowiednimi podciągami ciągu $I, II, \ldots, m$. Zauważmy, że dla wielkości $T_k^\Lambda(d, \tau)$, $T_k^\Lambda(f_{-\Lambda}d, \tau)$ zachodzi wzór

$$-\sum_{\partial D}\Big[\sum_{\Lambda \in R_d} T_k^\Lambda(d, \tau) - \sum_{\Lambda \in L_d} T_k^\Lambda(f_{-\Lambda}d, \tau)\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_k^\Lambda(f_{-\Lambda}d, \tau) N_\Lambda, \tag{1.4}$$

gdzie $d \in \Delta D_0 \Leftrightarrow [(d \in D_0) \wedge (\bigvee_\Lambda f_{-\Lambda}d \sim \in D_0)] \vee [(d \sim \in D_0) \wedge (\bigvee_\Lambda f_{-\Lambda}d \in D_0)]$

oraz

$$N_\Lambda = N_\Lambda(d) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} 1 \text{ dla } (d \sim \in D_0) \wedge (\bigvee_\Lambda f_{-\Lambda}d \in D_0), \\ -1 \text{ dla } (d \in D_0) \wedge (\bigvee_\Lambda f_{-\Lambda}d \sim \in D_0), \\ 0 \text{ w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{1.5}$$

Warunek (1.3) po wykorzystaniu (1.4) można zapisać w postaci

$$\sum_{\partial D} (f_k - m\ddot{\psi}_k) = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}, \tag{1.6}$$

gdzie $T_k^{(N)} = T_k^{(N)}(d, \tau) \overset{\text{df}}{=} T_k^\Lambda(f_{-\Lambda}d, \tau)N_\Lambda$.

2. Równania liniowe

Niech dla pewnej chwili τ_0 istnieje stan naturalny dyskretyzowanego jednobiegunowego ciała sprężystego, tj. stan, w którym $\varepsilon = 0$ i $T_k^\Lambda = 0$. Oznaczając $l_k = \psi_k(d, \tau_0)$, a składowe wektora przemieszczenia $u_k = \psi_k - l_k$ oraz wykorzystując niezmienniczość funkcji energii sprężystej ε względem obrotów układu współrzędnych możemy przyjąć

$$\varepsilon = \frac{1}{2} A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta} \gamma_{\Lambda\Phi} \gamma_{\Gamma\Delta}, \tag{2.1}$$

gdzie

$$\gamma_{\Lambda\Phi} = \Delta_{(\Lambda} u^k l_{\Phi)k} \tag{2.2}$$

oraz $l_{\Phi k} \overset{\text{df}}{=} \Delta_\Phi l_k$. Uwzględniając (2.1) wykażemy, że wzór (2.2) dotyczy przypadków, w których ruchy sztywne dyskretnego elementu E są jedynymi ruchami nie wywołującymi sił wewnętrznych, tym samym $T_k^\Lambda = 0$ wtedy, gdy $\gamma_{\Lambda\Phi} = 0$. Istotnie, niech wektor $\mathbf{l}_\Lambda$, $\Lambda =$

$= I, II, \ldots, m$, łączy w przestrzeni fizycznej w chwili τ_0 cząstki $d, f_A d$, a wektory $\mathbf{u}(d, \tau)$ i $\mathbf{u}(f_A d, \tau)$ będą przemieszczeniami tych cząstek w chwili τ. Przemieszczenia $\mathbf{u}(d, \tau)$, $\mathbf{u}(f_A d, \tau)$ opisują ruch sztywny d i $f_A d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mathbf{l}_A| = |\mathbf{l}_A + \Delta_A \mathbf{u}|$. Odrzucając człony nieliniowe względem $\mathbf{u}$ ostatnia równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{l}_A = 0$. Rozpatrzmy następnie przypadek trzech cząstek $d, f_A d, f_\Phi d$, $A \neq \Phi$ połączonych w chwili τ_0 wektorami $\mathbf{l}_A, \mathbf{l}_\Phi$. Wektory $\mathbf{l}_A$ i $\mathbf{l}_\Phi$ tworzą kąt opisany iloczynem skalarnym $\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{l}_\Phi$. Kąt ten nie ulegnie zmianie wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{l}_\Phi = (\mathbf{l}_A + \Delta_A \mathbf{u})(\mathbf{l}_\Phi + \Delta_\Phi \mathbf{u})$, tj. gdy $\Delta_{(A}\mathbf{u}\mathbf{l}_{\Phi)} = 0$, gdzie także pominięto człony nieliniowe względem $\mathbf{u}$. Wobec (2.1) widzimy więc, że $T_k^A = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\gamma_{A\Phi} = 0$, tj. gdy ciało dyskretyzowane dozna ruchu sztywnego. W przypadku funkcji energii sprężystej (2.1) równania konstytutywne (1.2) przyjmą postać $T_k^A = p^{A\Phi} l_{\Phi k}$, gdzie

$$p^{A\Phi} = A^{A\Phi\Gamma\Delta}\gamma_{\Gamma\Delta}. \tag{2.3}$$

Wielkość $p^{A\Phi}$ nazywamy składowymi napięcia (4.11), [1]. Podstawiając związki geometryczne (2.2) do (2.3) oraz wykorzystując równania ruchu (1.2) otrzymamy

$$\bar{\Delta}_A(a_{kl}^{A\Phi}\Delta_\Phi u^l) + f_k = m\ddot{u}, \tag{2.4}$$

gdzie $a_{kl}^{A\Phi} = A^{A\Gamma\Phi\Delta} l_{\Gamma k} l_{\Delta l}$. Równania (2.4) stanowią przemieszczeniową postać równań ruchu liniowej teorii sprężystości jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych. W szczególnym przypadku, gdy $\bar{\Delta}_A a_{kl}^{A\Phi} \approx 0$ z równań (2.4) otrzymamy

$$a_{kl}^{A\Phi}\bar{\Delta}_A\Delta_\Phi u^l + f_k = m\ddot{u}_k.$$

Rozpatrując ciała dyskretyzowane, dla których określony jest brzeg ∂D podstawowy układ równań (2.2)–(2.4) opisujący liniowe problemy teorii sprężystych ciał jednobiegunowych uzupełnić trzeba warunkami brzegowymi (1.6) w postaci

$$\sum_{\partial D}(f_k - m\ddot{u}_k) = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}. \tag{2.5}$$

Na zakończenie tego punktu rozpatrzmy przypadek, gdy struktura różnicowa ciała dyskretyzowanego $(D, \mathscr{E})$ jest regularna, tj. $f_A f_\Phi d = f_\Phi f_A d$ dla każdego $d \in D_{A,\Phi} \cap D_{\Phi,A}$; [2], wtedy dla dowolnej funkcji $\varphi\colon D \to R$ zachodzi związek $\Delta_{[A}\Delta_{\Phi]}\varphi = 0$. W przypadku, gdy $l_{A\Phi k} \approx 0$, gdzie $l_{A\Phi k} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \Delta_A l_{\Phi k}$ łatwo sprawdzić, że prawdziwa jest równość

$$\Delta_{[A}\Delta_{[\Phi}\gamma_{\Gamma]\Delta]} = 0. \tag{2.6}$$

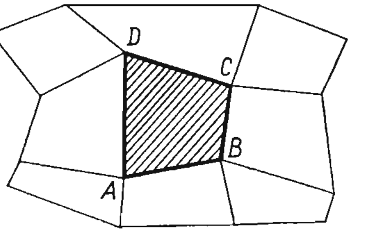
Związki (2.6) są równaniami nierozdzielności w liniowej teorii jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych.

3. Przykład

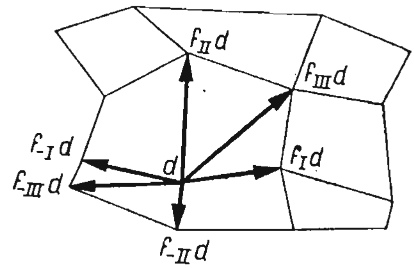
W celu zilustrowania opisanych w punkcie 2 pojęć liniowej teorii sprężystości jednobiegunowych ciał dyskretyzowanych rozpatrzmy niejednorodną tarczę złożoną z czworokątnych elementów sprężystych $ABCD$ (rys. 1).

Dyskretyzację tarczy przeprowadzimy przyporządkowując jednorodnemu elementowi sprężystemu $ABCD$ punkt materialny d, natomiast elementom sąsiednim do $ABCD$ punkty $f_\Lambda d$, gdzie $\Lambda = I, II, III$ (rys. 2).

Przyjmiemy więc, że w strukturze różnicowej tego zbioru $m = 3$. Załóżmy dalej, że jedynymi zmiennymi dynamicznymi opisującymi ruch punktów materialnych d i $f_\Lambda d$ są wektory przemieszczenia $u^K(d, \tau)$, $u^K(f_\Lambda d, \tau)$, $K = 1, 2$, tym samym przyjmiemy, że ruch elementu $ABCD$ jest określony całkowicie przez przemieszczenia jego wierzchołków. Masa punktu d równa będzie masie elementu $ABCD$.



Rys. 1



Rys. 2

W celu określenia funkcji energii sprężystej ε zastosujemy podejście podobne jak w metodzie elementów skończonych. Dzieląc czworokątny element sprężysty $ABCD$ na dwa trójkątne elementy skończone ABC i ACD wyliczymy najpierw energię dla elementu ABC. Przyjmiemy, że wektor przemieszczenia $\mathbf{w}$ dowolnej cząstki elementu skończonego o współrzędnych Lagrange'a x^1, x^2, aproksymuje się funkcją liniową

$$
\begin{aligned}
(3.1)\qquad w^K(d, x^1, x^2, \tau) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2\Delta} \{&(a+bx^1+cx^2)u^K(d, \tau)+ \\
&+(a_I+b_I x^1+c_I x^2)u^K(f_I d, \tau)+(a_{III}+b_{III}x^1+c_{III}x^2)u^K(f_{III}d, \tau)\},
\end{aligned}
$$

gdzie
$$
\begin{aligned}
a &= (l^1+l^1_I)(l^2+l^2_{III})-(l^1+l^1_{III})(l^2+l^2_I),\\
b &= l^2_I-l^2_{III},\\
c &= l^1_{III}-l^1_I,\\
a_I &= l^2(l^1+l^1_{III})-l^1(l^2+l^2_{III}),\\
b_I &= l^2_{III},\\
c_I &= -l^1_{III},\\
a_{III} &= l^1(l^2+l^2_I)+l^2(l^1+l^1_I),\\
b_{III} &= -l^2_I,\\
c_{III} &= l^1_I
\end{aligned}
$$

oraz gdzie
$$
2\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & l^1 & l^2 \\ 1 & l^1+l^1_I & l^2+l^2_I \\ 1 & l^1+l^1_{III} & l^2+l^2_{III} \end{bmatrix}.
$$

Wektor $w(d, x^K, \tau)$ dla $x^K = l^K$, $x^K = l^K + l_I^K$, $x^K = l^K + l_{III}^K$, przyjmuje odpowiednio wartości $u^K(d, \tau)$, $u^K(f_I d, \tau)$, $u^K(f_{III} d, \tau)$. Składowe odkształcenia $\gamma_{KL} = w_{(K,L)}$ w dowolnej cząstce elementu skończonego ABC o współrzędnych Lagrange'a x^1, x^2 mają postać

$$
\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{1}{2\Delta}(\Delta_I u^1 l_{III}^2 - \Delta_{III} u^1 l_I^2),\\
\gamma_{22} &= \frac{1}{2\Delta}(\Delta_{III} u^2 l_I^1 - \Delta_I u^2 l_{III}^1),\\
\gamma_{12} &= \frac{1}{2\Delta}(\Delta_{III} u^1 l_I^1 - \Delta_{III} u^2 l_I^2 + \Delta_I u^2 l_{III}^2 - \Delta_I u^1 l_{III}^1).
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Energia elementu skończonego ABC, po scałkowaniu po obszarze trójkąta wynosi

$$
\varepsilon = \frac{1}{2}\Delta[(\lambda+2\mu)\gamma_{11}\gamma_{11} + 2\lambda\gamma_{11}\gamma_{22} + 4\mu\gamma_{12}\gamma_{12} + (\lambda+2\mu)\gamma_{22}\gamma_{22}],
\tag{3.3}
$$

gdzie Δ jest polem ABC. Podstawiając do (3.3) związki (3.2) otrzymuje się występującą w (2.4) macierz $a_{KL}^{\Lambda\Phi}$, gdzie Λ, $\Phi = I, III$; $K, L = 1, 2$, o składowych:

$$
\begin{aligned}
a_{1\,1}^{I\,I} &= \frac{\mu(l_{III}^1)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_{III}^2)^2}{4\Delta},\\
a_{2\,2}^{I\,I} &= \frac{\mu(l_{III}^2)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_{III}^1)^2}{4\Delta},\\
a_{1\,2}^{I\,I} &= -l_{III}^1 l_{III}^2\left(\frac{\lambda}{4\Delta} + \frac{\mu}{4\Delta}\right),\\
a_{2\,1}^{I\,I} &= a_{1\,2}^{I\,I},\\
a_{1\,1}^{I\,III} &= -\left(\frac{\mu l_I^1 l_{III}^1}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu) l_{III}^2 l_I^2}{4\Delta}\right),\\
a_{2\,2}^{I\,III} &= -\left(\frac{\mu l_I^2 l_{III}^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu) l_I^1 l_{III}^1}{4\Delta}\right),\\
a_{1\,2}^{I\,III} &= \frac{\lambda l_{III}^2 l_I^1}{2\Delta} + \frac{\mu l_I^2 l_{III}^1}{2\Delta},\\
a_{2\,1}^{I\,III} &= \frac{2\mu l_I^1 l_{III}^2}{2\Delta} + \frac{\lambda l_I^2 l_{III}^1}{2\Delta},\\
a_{1\,1}^{III\,III} &= \frac{\mu(l_I^1)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_I^2)^2}{4\Delta},\\
a_{2\,2}^{III\,III} &= \frac{\mu(l_I^2)^2}{4\Delta} + \frac{(\lambda+2\mu)(l_I^1)^2}{4\Delta},\\
a_{1\,2}^{III\,III} &= -l_I^1 l_I^2\left(\frac{\lambda}{4\Delta} + \frac{\mu}{4\Delta}\right),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

$$a_{2}^{III}{}_{1}^{III} = a_{1}^{III}{}_{2}^{III},$$

(3.4) [c.d.]

$$a_{1}^{III}{}_{1}^{I} = a_{1}^{I}{}_{1}^{III},$$

$$a_{2}^{III}{}_{2}^{I} = a_{2}^{I}{}_{2}^{III},$$

$$a_{1}^{III}{}_{2}^{I} = \frac{\lambda l_I^2 l_{III}^1}{2\Delta} + \frac{\mu l_I^1 l_{III}^2}{2\Delta},$$

$$a_{2}^{III}{}_{1}^{I} = a_{2}^{I}{}_{1}^{III}.$$

Aby otrzymać dla trójkąta ACD odpowiednią macierz $a_{KL}^{\Lambda\Phi}$, $\Lambda, \Phi = III, II$; $K, L = 1, 2$, wystarczy w (3.4) zmienić wskaźniki I na III i III na II oraz Δ na Δ^*m, gdzie Δ^* jest polem trójkąta ACD. W szczególnym przypadku, gdy czworokątnymi elementami sprężystymi są kwadraty o boku a, równoległym do jednej z osi układu współrzędnym, mamy $l_I^1 = a$, $l_I^2 = 0$, $l_{II}^1 = 0$, $l_{II}^2 = a$, $l_{III}^1 = a$, $l_{III}^2 = a$ oraz $\Delta = \Delta^*$. W tym przypadku wzory (3.4) zapiszą się w postaci:

$$a_{1}^{I}{}_{1}^{I} = a_{2}^{I}{}_{2}^{I} = a_{1}^{II}{}_{1}^{II} = a_{2}^{II}{}_{2}^{II} = a_{1}^{III}{}_{1}^{III} = a_{2}^{III}{}_{2}^{III} = \frac{3}{2}\mu + \frac{\lambda}{2},$$

$$a_{1}^{I}{}_{2}^{I} = a_{2}^{I}{}_{1}^{I} = a_{1}^{II}{}_{2}^{II} = a_{2}^{II}{}_{1}^{II} = -\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{\lambda}{2}\right),$$

$$a_{1}^{III}{}_{1}^{III} = a_{2}^{III}{}_{1}^{III} = 0,$$

$$a_{2}^{I}{}_{2}^{III} = a_{2}^{III}{}_{2}^{I} = a_{1}^{III}{}_{1}^{II} = a_{1}^{II}{}_{1}^{III} = -\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right),$$

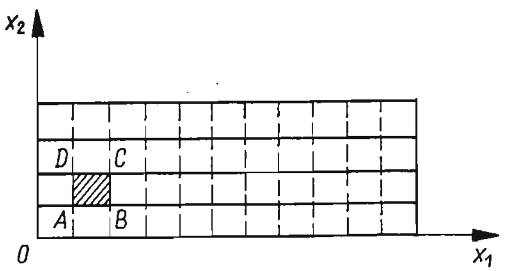
(3.5)

$$a_{1}^{I}{}_{2}^{III} = a_{1}^{III}{}_{2}^{I} = a_{2}^{II}{}_{1}^{III} = a_{2}^{III}{}_{1}^{II} = \frac{\lambda}{2},$$

$$a_{2}^{I}{}_{1}^{III} = a_{2}^{III}{}_{1}^{II} = a_{1}^{II}{}_{2}^{III} = a_{1}^{III}{}_{2}^{II} = \frac{\mu}{2},$$

$$a_{2}^{III}{}_{2}^{II} = a_{2}^{II}{}_{2}^{III} = a_{1}^{I}{}_{1}^{III} = a_{1}^{III}{}_{1}^{I} = -\frac{1}{2}\mu,$$

$$a_{K}^{I}{}_{L}^{II} = a_{K}^{II}{}_{L}^{I} = 0.$$



Rys. 3

W celu wypisania równań ruchu (2.4) rozpatrzmy skończoną tarczę wielowarstwową. Obierając układ współrzędnych tak, aby jedna z osi była równoległa do warstw tarczy, dzielimy tarczę na elementy $ABCD$ pękiem prostych prostopadłych do warstw (rys. 3) w ten sposób, by czworokąt $ABCD$ był kwadratem o boku 1.

Przyjmując, że warstwy są jednorodne mamy $\Delta_I \mu = 0$ i $\Delta_I \lambda = 0$. Wykorzystując wzory (3.5) otrzymamy z (2.4) następujące równania równowagi:

$$
\begin{aligned}
&(3\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^1 - \mu\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^1 + \bar{\Delta}_{II}[(3\mu+\lambda)\Delta_{II} u^1 - (2\mu+\lambda)\Delta_{III} u^1] + \\
&\quad + \bar{\Delta}_{III}[-\mu\Delta_I u^1 - (\mu+\lambda)\Delta_{II} u^1 + (3\mu+\lambda)\Delta_{III} u^1] - (2\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^2 + \\
&\quad + 2\lambda\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^2 - \bar{\Delta}_{II}[(\mu+\lambda)\Delta_{II} u^2] + \bar{\Delta}\lambda_{III}\Delta_{II} u^2 + \bar{\Delta}_{II}(\mu\Delta_{III} u^2) + \bar{\Delta}_{III}(\mu\Delta_I u^2) = 0, \\
&-(\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^1 + \mu\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^1 - \bar{\Delta}_{II}[(\mu+\lambda)\Delta_{II} u^1] + \mu\bar{\Delta}_{III}\Delta_{II} u^1 + \\
&\quad + (3\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_I u^2 - (\mu+\lambda)\bar{\Delta}_I \Delta_{III} u^2 + \bar{\Delta}_{II}[(3\mu+\lambda)\Delta_{II} u^2 - \mu\Delta_{III} u^2] - \\
&\quad - \bar{\Delta}_{III}[(\mu+\lambda)\Delta_I u^2 + \mu\Delta_{II} u^2 - (3\mu+\lambda)\Delta_{III} u^2] + \bar{\Delta}_{III}(\lambda\Delta_I u^1) + \bar{\Delta}_{II}(\lambda\Delta_{III} u^2) = 0.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Zbadajmy, kiedy układ równań (3.6) dopuszcza rozwiązanie postaci

$$
\begin{aligned}
u^1 &= ax+by, \\
u^2 &= cx+dy.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Podstawiając (3.7) do (3.6) otrzymamy

$$
\begin{aligned}
(b+c)\bar{\Delta}_{II}\mu &= 0, \\
-3c\bar{\Delta}_{II}\mu + a\bar{\Delta}_{II}\lambda &= 0.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Związki (3.8) stanowią układ równań jednorodnych na $\bar{\Delta}_{II}\mu$ i $\bar{\Delta}_{II}\lambda$. Układ ten będzie miał rozwiązania $\bar{\Delta}_{II}\mu \neq 0$, $\bar{\Delta}_{II}\lambda \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyznacznik będzie równy zeru, czyli

$$a(b+c) = 0. \tag{3.9}$$

Równanie (3.9) spełnione jest tylko przez $b = -c$ i $a = 0$. Widać stąd, że tylko te spośród przemieszczeń (3.7) spełniają układ równań (3.6), dla których $b = -c$ lub $a = 0$.

4. Sformułowanie wariacyjne — prawa zachowania

Określmy w D_0 funkcjonał działania następującej postaci:

$$W(D_0) = \sum_{D_0} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\frac{1}{2} m\dot{u}^k \dot{u}_k - \varepsilon\right) d\tau. \tag{4.1}$$

Niech $\delta_0 W$ będzie wariacją funkcjonału działania spowodowaną wariacją postaci $\delta_0 \psi^k$, a $\delta_\tau W$ wariacją spowodowaną wariacją czasu $\delta\tau$. Nasuwając operator δ_0 na (4.1) otrzymamy

$$\delta_0 W(D_0) = \sum_{D_0} \left\{ [m\dot{u}^k \delta_0 \psi_k]_{\tau_0}^{\tau_1} - \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\ddot{u}^k \delta_0 \psi_k - \delta_0 \varepsilon) d\tau \right\}.$$

Wyliczając $\delta_0 \varepsilon$ otrzymamy

$$\sum_{D_0} \delta_0 \varepsilon = \sum_{D_0} A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta} \gamma_{\Lambda\Phi} \delta_0 \gamma_{\Gamma\Delta} = \sum_{D_0} T_k^\Lambda \Delta_\Lambda \delta_0 \psi^k = \sum_{D_0} [\Delta_\Lambda (\bar{T}_k^\Lambda \delta_0 \psi^k) - \bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda \delta_0 \psi^k],$$

gdyż łatwo wykazać, że

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} \Delta_A(\bar{\varphi}^A\xi) &= \varphi^A\Delta_A\xi+\xi\Delta_A\bar{\varphi}^A,\\ \Delta_A\bar{\varphi}^A &= \bar{\Delta}_A\varphi^A,\end{aligned}$$

dla dowolnych φ^A i $\xi\colon D\to R$ oraz $\varphi^{-A} = \varphi^A(f_{-A}d)$. Wyliczając z kolei $\delta_\tau W(D_0)$ mamy

$$\delta_\tau W(D_0) = \sum_{D_0}\left[\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k\,\delta\tau-\varepsilon\delta\tau\right]_{\tau_0}^{\tau_1}.$$

Całkowita wariacja funkcjonału (4.1) przyjmuje postać

$$\delta W(D_0) = \sum_{D_0}\Bigg\{\int_{\tau_0}^{\tau_1}(\bar{\Delta}_A T_k^A-m\ddot{u}_k)\delta_0\psi^k d\tau+\Bigg[m\dot{u}^k\delta_0\psi_k+ +\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k\,\delta\tau-\varepsilon\delta\tau\Bigg]_{\tau_0}^{\tau_1}-\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Delta_A(\bar{T}_k^A\delta_0\psi^k)d\tau\Bigg\}.$$

Łatwo wykazać, że dla dowolnych funkcji φ^A i $\xi\colon D\to R$ jest

$$(4.3)\qquad \sum_{D_0}\Delta_A(\varphi^A\xi) = \sum_{\Delta D_0}\bar{\varphi}^A N_A\xi.$$

Wykorzystując ten związek i oznaczając

$$\bar{T}_k^A N_A \overset{\mathrm{df}}{=} T_k^{(N)}$$

mamy

$$\sum_{D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1}\Delta_A(\bar{T}_k^A\delta_0\psi^k)d\tau = \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1}T_k^{(N)}\delta_0\psi^k d\tau.$$

Ostatecznie więc wariacja funkcjonału (4.1) ma postać

$$(4.4)\qquad \delta W(D_0) = \sum_{D_0}\Bigg\{\int_{\tau_0}^{\tau_1}(\bar{\Delta}_A T_k^A-m\ddot{u}_k)\,\delta_0\psi^k d\tau+\Bigg[m\dot{u}^k\delta_0\psi_k+ +\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k\,\delta\tau-\varepsilon\delta\tau\Bigg]_{\tau_0}^{\tau_1}\Bigg\}-\sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1}T_k^{(N)}\delta_0\psi^k d\tau.$$

Korzystając z zasady stacjonarności działania [3] otrzymujemy po wprowadzeniu sił $f_k = f_k(d,\tau)$ równania ruchu

$$(4.5)\qquad \bar{\Delta}_A T_k^A+f_k = m\ddot{u}_k.$$

Wykorzystując równania ruchu (4.5) oraz uwzględniając niezmienniczość funkcjonału działania względem infinitezymalnej grupy przesunięć i obrotów w czasoprzestrzeni

$$\begin{aligned}\delta_0\psi^k &= \varepsilon^k+\varepsilon^{kl}\psi_l-\delta\dot{\psi}^k,\\ \delta\tau = 0,&\quad \varepsilon^{kl} = -\varepsilon^{lk},\end{aligned}$$

mamy

$$\begin{aligned}(4.6)\qquad \delta W(D_0) = & \Big\{\sum_{D_0}\Big([m\dot{u}_k]_{\tau_0}^{\tau_1} - \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_k d\tau\Big) - \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1} T_k^{(N)} d\tau\Big\}\varepsilon^k + \\ & + \Big\{\sum_{D_0}\Big([m\dot{u}_{[k}\psi_{l]}]_{\tau_0}^{\tau_1} - \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_{[k}\psi_{l]} d\tau\Big) - \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1} T_{[k}^{(N)}\psi_{l]} d\tau\Big\}\varepsilon^{kl} + \\ & + \Big\{\sum_{D_0}\Big(\Big[\frac{1}{2} m\dot{u}_k\dot{u}^k - m\dot{u}^k\dot{\psi}_k - \varepsilon\Big]_{\tau_0}^{\tau_1} + \int_{\tau_0}^{\tau_1} f_k\dot{\psi}^k d\tau\Big) + \sum_{\Delta D_0}\int_{\tau_0}^{\tau_1} T_k^{(N)}\dot{\psi}^k d\tau\Big\}\sigma.\end{aligned}$$

Uwzględniając dalej dowolność stałych ε^k, ε^{kl}, σ i zastępując $\dot{\psi}^k$ przez $\dot{u}^k$ otrzymujemy z (4.6) następujące prawa zachowania

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\tau}\Big[\sum_{D_0} m\dot{u}_k\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)} + \sum_{D_0} f_k, \\ (4.7)\qquad & \frac{d}{d\tau}\Big[\sum_{D_0} m\dot{u}_{[k}\psi_{l]}\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_{[k}^{(N)}\psi_{l]} + \sum_{D_0} f_{[k}\psi_{l]}, \\ & \frac{d}{d\tau}\Big[\sum_{D_0}\Big(\frac{1}{2}m\dot{u}^k\dot{u}_k + \varepsilon\Big)\Big] = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}\dot{u}^k + \sum_{D_0} f_k\dot{u}^k. \end{aligned}$$

Są to odpowiednio prawa zachowania pędu, momentu pędu i energii. Wykorzystując związek (4.3) i (4.2) prawa zachowania możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} & \sum_{D_0} (\bar{\Delta}_A T_k^A + f_k - m\ddot{u}_k) = 0, \\ (4.8)\qquad & \sum_{D_0} [(\bar{\Delta}_A T_{[k}^A + f_{k]} - m\ddot{u}_{[k})\psi_{l]} + T_{[k}^A \Delta_A\psi_{l]}] = 0, \\ & \sum_{D_0} [(\bar{\Delta}_A T_k^A + f_k - m\ddot{u}_k)\dot{u}^k - \dot{\varepsilon} + T_k^A\Delta_A\dot{u}^k] = 0. \end{aligned}$$

Związki (4.8) są prawdziwe, gdy zbiór D_0 zastąpimy jego dowolnym podzbiorem K z brzegiem ∂K. Ze związków (4.8) otrzymujemy wtedy następującą lokalną postać praw zachowania

$$\begin{aligned} & \bar{\Delta}_A T_k^A + f_k = m\ddot{u}_k, \\ (4.9)\qquad & T_{[k}^A \Delta_A\psi_{l]} = 0, \\ & \dot{\varepsilon} = T_k^A\Delta_A\dot{u}^k. \end{aligned}$$

Prawa zachowania (4.7) i (4.9) wykazują analogię do odpowiednich związków z klasycznej teorii sprężystości.

5. Zasada prac wirtualnych

Niech $\delta_0 u^k$ będą wariacjami postaci funkcji u^k. Wariacje $\delta_0 u^k$ powodują zmianę $\delta_0 \varepsilon$ postaci energii wewnętrznej. W celu otrzymania zasady prac wirtualnych zauważmy, że

$$\delta_0 \varepsilon = p^{\Lambda\Phi}\delta_0 \gamma_{\Lambda\Phi} = T_k^{\Lambda}\delta_0 \Delta_\Lambda u^k = \bar{\Delta}_\Lambda (T_k^{\Lambda}\delta_0 u^k) - \bar{\Delta}_\Lambda T_k^{\Lambda}\delta_0 u^k, \tag{5.1}$$

gdzie wykorzystano wzór (4.2). Oznaczając $\sum\limits_{D_0} \varepsilon = E(D_0)$ oraz stosując równania ruchu i wykorzystując związek (4.3), z równości (5.1) otrzymujemy

$$\delta_0 E(D_0) = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)}\delta_0 u^k + \sum_{D_0} (f_k - m\ddot{u}_k)\delta_0 u^k. \tag{5.2}$$

Prawa strona równości (5.2) jest pracą sił $f_k - m\ddot{u}_k$ oraz sił $T_k^{(N)}$ na wirtualnych przemieszczeniach $\delta_0 u^k$. Natomiast wielkość $\delta_0 E(D_0) = \sum\limits_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\delta_0 \gamma_{\Lambda\Phi}$ przedstawia pracę wirtualną sił wewnętrznych, tj. pracę składowych napięcia $p^{\Lambda\Phi}$ na wariacjach składowych odkształcenia $\delta_0 \gamma_{\Lambda\Phi}$. Równanie (5.2) stanowi treść zasady prac wirtualnych. Ma ona analogiczną treść jak odpowiednia zasada w klasycznej teorii sprężystości.

6. Twierdzenie o jednoznaczności

Wykażemy, że równania (2.4) rozpatrywane w przypadku quasi-statycznym, jeśli mają rozwiązanie, to rozwiązanie to jest jednoznaczne, tj. dwa rozwiązania tego samego problemu brzegowego różnią się tylko o dowolne ruchy sztywne. Dla dowodu załóżmy, że rozwiązanie nie jest jednoznaczne, tj. że istnieją dwa różne od siebie pola przemieszczeń $\overset{*}{u}{}^k$ i $\tilde{u}^k$, które spełniają równanie (2.4) oraz warunki (2.5). Niech więc przemieszczenia $\overset{*}{u}{}^k$ spełniają związki:

$$\bar{\Delta}_\Lambda (a_{kl}^{\Lambda\Phi}\Delta_\Phi \overset{*}{u}{}^l) + f_k = 0, \tag{6.1}$$

$$\sum_{\partial D} f_k = \sum_{\Delta D_0} \overset{*}{T}{}_k^{(N)}, \tag{6.2}$$

a pole przemieszczeń $\tilde{u}^k$ spełnia ten sam układ równań

$$\bar{\Delta}_\Lambda (a_{kl}^{\Lambda\Phi}\Delta_\Phi \tilde{u}^l) + f_k = 0, \tag{6.3}$$

$$\sum_{\partial D} f_k = \sum_{\Delta D_0} \tilde{T}_k^{(N)}. \tag{6.4}$$

Wprowadzając oznaczenia $u^k = \overset{*}{u}{}^k - \tilde{u}^k$, $T_k^{(N)} = \overset{*}{T}{}_k^{(N)} - \tilde{T}_k^{(N)}$ i odejmując stronami (6.1) i (6.3) oraz (6.2) i (6.4) stwierdzamy, że przemieszczenia u^k spełniają jednorodny układ równań przemieszczeniowych

$$\bar{\Delta}_\Lambda (a_{kl}^{\Lambda\Phi}\Delta_\Phi u^l) = 0, \tag{6.5}$$

$$\sum_{\partial\Delta D} T_k^{(N)} = 0. \tag{6.6}$$

Równania (6.5) odnoszą się do ciała dyskretyzowanego $(D, \mathscr{E})$, w którego wnętrzu brak sił f_k i na którego brzegu występują jednorodne warunki (6.6). Należy wykazać, że we wnętrzu ciała znikają odkształcenia $\gamma_{\Lambda\Phi}$ i napięcia $p^{\Lambda\Phi}$. Rozpatrzmy w tym celu pracę odkształcenia $\sum\limits_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi} = \sum\limits_{D_0} T_k^\Lambda \Delta_\Lambda u^k$. Wykorzystując związki (4.2) oraz (4.3) otrzymujemy

$$\sum_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi} = \sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)} u^k - \sum_{D_0} \bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda u^k. \tag{6.7}$$

Wykorzystując następnie (6.5) i (6.6) z równości (6.7) mamy

$$\sum_{D_0} p^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi} = \sum_{D_0} A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\gamma_{\Lambda\Phi}\gamma_{\Gamma\Delta} = 0.$$

Skoro $A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}$ tworzą funkcję dodatnio określoną, przeto powyższy związek zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $d \in D_0$ $A^{\Lambda\Phi\Gamma\Delta}\gamma_{\Lambda\Phi}\gamma_{\Gamma\Delta} = 0$. Po prawej stronie ostatniego związku występuje energia sprężysta elementu $E \in \mathscr{E}$. Jest ona równa zeru wtedy tylko wtedy, gdy $\gamma_{\Lambda\Phi} = 0$, a to oznacza, że wektory przemieszczenia $\mathbf{u}(d), \mathbf{u}(f_\Lambda d)$ są ruchami sztywnymi (por. 2). W takim razie na mocy oznaczenia $\mathbf{u} = \overset{*}{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}$ przemieszczenia $\overset{*}{\mathbf{u}}$ i $\tilde{\mathbf{u}}$ różnia się tylko o ruchy sztywne.

7. Twierdzenie o wzajemności. Wzory Somigliany

Rozważmy teraz dyskretyzowane ciało jednobiegunowe, które poddano działaniu dwu grup sił f_k i f_k^*. Przemieszczenia oraz składowe napięcia i odkształcenia indukowane przez te grupy oznaczymy odpowiednio $u^k, p^{\Lambda\Phi}, \gamma_{\Lambda\Phi}, \overset{*}{u}{}^k, \overset{*}{p}{}^{\Lambda\Phi}, \overset{*}{\gamma}_{\Lambda\Phi}$. Wykorzystując równania konstytutywne (2.3) mamy $p^{\Lambda\Phi}\overset{*}{\gamma}_{\Lambda\Phi} = \overset{*}{p}{}^{\Lambda\Phi}\gamma_{\Lambda\Phi}$. Podstawiając związki geometryczne (2.2) i wykorzystując (4.2) mamy:

$$\Delta_\Lambda(T_k^\Lambda \overset{*}{u}{}^k) - \overset{*}{u}{}^k \bar{\Delta}_\Lambda T_k^\Lambda = \Delta_\Lambda(T_k^{*\Lambda} u^k) - u^k \bar{\Delta}_\Lambda T_k^{*\Lambda}. \tag{7.1}$$

Sumując następnie wielkości występujące w (7.1) po zbiorze D_0 oraz wykorzystując równania ruchu (4.5) w przypadku quasi-statycznym otrzymamy

$$\sum_{\Delta D_0} T_k^{(N)} \overset{*}{u}{}^k + \sum_{D_0} f_k \overset{*}{u}{}^k = \sum_{\Delta D_0} T_k^{*(N)} u^k + \sum_{D_0} f_k^* u^k. \tag{7.2}$$

Związek (7.2) stanosi treść zasady Bettiego. Wprowadzając siły $f_k^*(d_0) = \delta_{kl}$, gdzie l jest ustalone oraz oznaczając $\overset{*}{u}{}^k = u_{(l)}^k(d_0, d)$ mamy

$$u^l(d_0) = \sum_{D_0} f_k u^{(l)k} + \sum_{\Delta D_0} (T_k^{(N)} u^{(l)k} - T_k^{*(N)} u^k), \tag{7.3}$$

gdzie $T_k^{*(N)}(d_0, d)$ są spowodowane siłą $f_k^*(d_0)$. Wzory (7.3) są wzorami Somigliany w dyskretnej teorii ciał jednobiegunowych. Widzimy także i tutaj pełną analogię do klasycznej teorii sprężystości.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Podstawy mechaniki ciał dyskretyzowanych*, Mech. Teor. i Stos., 1, **11** (1973).
2. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, **23** (1971), 801–816.
3. Cz. WOŹNIAK, *Podstawy dynamiki ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa 1969.

Резюме

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ ТЕЛ

В работе дано определение однополюсного упругого тела, являщегося частным случаем дискретизированного тела. Исходя из основной системы уравнений, описывающих движение дискретизированных тел, выведены уравнения движения и определяющие уравнения линейной теории упругости однополюсных дискретизированных тел. В рамках этой теории сформулированы принципы сохранения, принцип виртуальных перемещений, теорема единственности решений и теорема взаимности Бетти. Дается также простой пример однополюсного дискретизированного тела.

Summary

ON THE LINEAR PROBLEMS OF ELASTICITY OF DISCRETIZED BODIES

Monopolar elastic bodies are defined in the paper as a particular example of discretized bodies. Basing upon the fundamental system of equations describing the motion of discretized bodies, the paper presents the derivation of equations of motion and the constitutive relations of the linear theory of monopolar discretized media. On the basis of that theory are formulated the conservation laws, the virtual work principle, the theorem of uniqueness of solution and the Betti reciprocal theorem. A simple example of a monopolar discretized body is given.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
WYDZIAŁ MATEMATYKI I MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 kwietnia 1972 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

UOGÓLNIONA FUNKCJA GREENA DLA NIESKOŃCZONEGO PASMA PŁYTOWEGO

JAN GRABACKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy podamy efektywną konstrukcję funkcji Greena dla nieskończonego pasma płytowego o brzegach swobodnych.

Jak wiadomo, własności funkcji Greena pozwalają w prosty sposób budować rozwiązania (co najmniej formalne) szeregu technicznie ważnych zadań klasycznej teorii płyt.

Przedstawiona metoda konstrukcji stanowi przykład zastosowania teorii ultradystrybucji [2], [3], [6] dostarczającej niezwykle mocnego narzędzia rozwiązywania problemów brzegowych.

Funkcji Greena poszukiwać będziemy nie w klasie funkcji zwykłych, co wymagałoby założeń odpowiedniej regularności i zachowania się w nieskończoności, lecz w klasie funkcji uogólnionych, tzw. ultradystrybucji, dzięki czemu uzyskane rozwiązanie jest ogólniejsze od klasycznego, a ponadto zezwala na zręczne stosowanie szeregu pozbawionych klasycznego sensu operacji. Zaletą metody jest także i to, że obok ogólności zezwala ona na stosunkowo łatwe obliczenie wszystkich nieelementarnych wyrażeń i prostą interpretację fizyczną.

Praca jest fragmentem obszerniejszego studium autorów w zakresie nieklasycznych rozwiązań klasycznej teorii sprężystości.

Niżej podano podstawowe określenia i definicje, z których korzystać będziemy w dalszym ciągu:

$\mathscr{D}$ — przestrzeń funkcji próbnych klasy C_0^∞ o nośnikach zwartych

$$\mathscr{D} = \bigcup_{\Omega} \mathscr{D}(\Omega),$$

gdzie

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C_0^\infty \wedge \operatorname{supp} \varphi(x) \subset \Omega\},$$

przy czym $\operatorname{supp} \varphi(x)$ — oznacza tutaj nośnik funkcji $\varphi(x)$;

$\mathscr{D}^*$ — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych $\mathscr{D}$, czyli przestrzeń liniowych, ciągłych funkcjonałów określonych na $\mathscr{D}$, dalej nazywana również przestrzenią dystrybucji;

$\mathscr{S}$ — przestrzeń funkcji próbnych «szybko malejących»,

$$\mathscr{S} = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C_0^\infty \wedge \bigwedge_{m,k} \bigvee_{Cm,k} |x^m||\varphi(x)^{(k)}| \leqslant C\,m,k\};$$

$\mathcal{S}^*$ — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych $\mathcal{S}$, dalej nazywana również przestrzenią dystrybucji temperowanych;

$\mathcal{Z}$ — przestrzeń analitycznych funkcji próbnych, całkowitych

$$\mathcal{Z} = \bigcup_a \mathcal{Z}_a,$$

gdzie

$$\mathcal{Z}_a = \{\psi(z)\colon \psi(z)-\text{analit} \wedge \bigwedge_k \bigvee_{C_k} |z^k||\psi(z)| \leqslant C_k e^{a|\beta|}\},$$

$\mathcal{Z}^*$ — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych $\mathcal{Z}$, nazywana również przestrzenią ultradystrybucji.

Uogólniony operator Fouriera

$$\mathcal{F}_0 \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{izx} dx$$

na mocy twierdzenia Paleya - Wienera odwzorowuje bijektywnie

$$\mathcal{D} \underset{\mathcal{F}_0}{\rightarrowtail\!\!\!\rightarrow} \mathcal{Z}.$$

Przyjmując definicję uogólnionej transformaty Fouriera dystrybucji

$$\langle \mathcal{F}_0[f], \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f, \mathcal{F}_0[\varphi]\rangle; \qquad \varphi \in \mathcal{D};\ \mathcal{F}_0[\varphi] \in \mathcal{Z},$$

przestrzeń $\mathcal{Z}^*$ można traktować jak przestrzeń $\mathcal{F}_0$ — obrazu przestrzeni dystrybucji.

Wszelkie operacje na elementach wprowadzonych wyżej przestrzeni funkcji uogólnionych[1)] rozumieć należy dystrybucyjnie — w szczególności różniczkowanie jest operacją uogólnioną w sensie Sobolewa,

$$\langle f^{(1)}, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f, -\varphi^{(1)}\rangle.$$

Ponieważ tradycyjnie przyjęto oznaczać parametr transformacji Fouriera przez α — w dalszym ciągu używamy oznaczenia

$$\mathcal{F}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{i\alpha x} dx,$$

$$\mathcal{F}_0^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{-i\alpha x} d\alpha, \qquad \alpha \in \mathbf{Z},$$

skąd wynika równoważność

$$\underset{z}{\mathcal{Z}} \equiv \underset{\alpha}{\mathcal{Z}}; \qquad \underset{z}{\mathcal{Z}^*} \equiv \underset{\alpha}{\mathcal{Z}^*}.$$

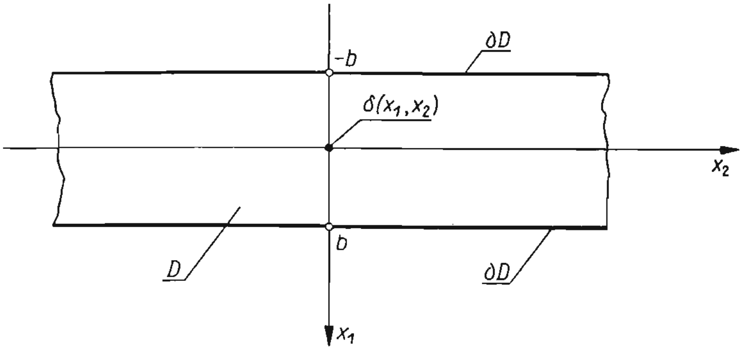
Używamy również tradycyjnego oznaczenia $\mathcal{F}_0[f] = \tilde{f}$.

---

1) przez funkcję uogólnioną rozumie się tutaj element $\mathcal{S}^*$ lub $\mathcal{D}^*$ lub $\mathcal{Z}^*$

2. Sformułowanie i rozwiązanie zadania

Pasmo płytowe traktuje się jak rozmaitość różniczkowalną w E_2 określoną następująco (rys. 1):



Rys. 1

$$D = \{x_1, x_2 \colon x_1 \in (-b, b) \wedge x_2 \in (-\infty, \infty)\};$$
$$\partial D = \{x_1, x_2 \colon |x_1| = b \wedge x_2 \in (-\infty, \infty)\}.$$

Znalezienie funkcji Greena sprowadza się do rozwiązania problemu brzegowego

$$\nabla^2\nabla^2 w = \delta(x_1, x_2) \tag{2.1}$$

(przy przyjęciu sztywności płytowej $K = 1$);

$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right|_{\partial D} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\right|_{\partial D} = 0, \tag{2.2}$$

gdzie $\delta(x_1, x_2) = \delta(x_1) \times \delta(x_2)$ — dystrybucja δ — Diraca (iloczyn tensorowy).

W celu rozwiązania zadania zakładamy, że $w \in \mathscr{Z}^*$. Z założenia tego wynika, że operator $\nabla^2\nabla^2$ działa w przestrzeni ultradystrybucji, czyli różniczkowanie należy rozumieć w sensie Sobolewa.

Działając na (2.1) oraz (2.2) operatorem $\mathscr{F}_0$ względem zmiennej x_2 otrzymujemy

$$[d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w} = \delta(x_1) \cdot 1(\alpha), \tag{2.3}$$

$$\tilde{w}^{(2)} - \alpha^2 \nu \tilde{w}|_{\partial D} = 0, \qquad \tilde{w}^{(3)} - \alpha^2(2-\nu)\tilde{w}^{(1)}|_{\partial D} = 0, \tag{2.4}$$

gdzie

$$[d^2 - \alpha^2]^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{d^4}{dx_1^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + \alpha^4,$$

$1(\alpha) = H(\alpha) + H(-\alpha)$,

$H(\alpha)$ — funkcjonał Heaviside'a.

Zadaniu (2.1), (2.2) odpowiada więc w przestrzeni $\mathscr{F}_0$ — obrazu zadanie (2.3), (2.4) co oznacza, że $\tilde{w}$ jest elementem przestrzeni $\mathscr{D}_T^* \times \mathscr{Z}^*$; tutaj $\mathscr{D}_T^*$ — przestrzeń dystrybucji transponowana. Rozwiązaniem równania (2.3) będzie funkcja ultradystrybucyjna zależna (dystrybucyjnie) od parametru α (ściśle biorąc przez $\tilde{w}$ rozumieć należy rodzinę rozwiązań ze względu na α), gdzie α-argument $\mathscr{F}_0$-transformacji. Do jego wyznaczenia wykorzystamy twierdzenie [2], [6], na mocy którego rozwiązaniem równania

$$L^m[f] = \delta(x_1), \quad x_1 \in \mathbf{R}_1,$$

w którym

$$L^m \stackrel{\text{def}}{=} a_m \frac{d^m}{dx_1^m} + \ldots + a_1 \frac{d}{dx_1} + a_0,$$

jest funkcja $f = f_0 H(x_1)$, gdzie f_0 — rozwiązanie równania jednorodnego $L^m[f] = 0$ spełniające warunki początkowe

$$f_0(0) = f_0^{(1)}(0) = \ldots = f_0^{(m-2)}(0) = 0,$$

$$f_0^{(m-1)}(0) = \frac{1}{a_m}.$$

Korzystamy ponadto z twierdzenia [2], [6], zgodnie z którym ultradystrybucyjne rozwiązania równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach są (z dokładnością do mnożnika $i = \sqrt{-1}$) identyczne z rozwiązaniami klasycznymi. Przyjmując więc

$$\tilde{w}_0 = C_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh} \alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1$$

oraz wykorzystując warunki:

$$\tilde{w}_0(0) = \tilde{w}_0^{(1)}(0) = \tilde{w}_{(0)}^{(2)} = 0; \quad \tilde{w}_0^{(3)}(0) = 1,$$

otrzymuje się

$$C_1 = C_4 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2\alpha^3}, \quad C_3 = -\frac{1}{2\alpha^3},$$

a stąd

$$\tilde{w}_0 = \frac{1}{4\alpha^3} \operatorname{sgn} x_1 (\alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 - \operatorname{sh} \alpha x_1). \tag{2.5}$$

Aby spełnić warunki (2.4), do rozwiązania (2.5) dodajemy rozwiązanie równania jednorodnego. Jest zatem

$$\tilde{w} = \frac{1}{4\alpha^3} \operatorname{sgn} x_1 (\alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 - \operatorname{sh} \alpha x_1) + A(\alpha) \operatorname{ch} \alpha x_1 + B(\alpha) \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + \\ + C(\alpha) \operatorname{sh} \alpha x_1 + D(\alpha) \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1, \tag{2.6}$$

przy czym stałe $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$, wyznaczyć należy z warunków (2.4).

Wykonując niezbędne przekształcenia otrzymujemy układ równań, którego rozwiązanie daje wynik

$$B = C = 0,$$

$$A = \frac{-1}{4\alpha^3} \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \beta - 4 \operatorname{ch}^2 \beta - (1-\nu)^2 \beta^2}{(1-\nu)[(3+\nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1-\nu)]}, \tag{2.7}$$

$$D = \frac{-1}{4\alpha^3} \frac{(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \beta + 2 \operatorname{ch}^2 \beta}{(3+\nu) \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta - \beta(1-\nu)},$$

gdzie $\beta = \alpha b$.

Ostatecznie więc rozwiązanie zadania (2.3), (2.4) ma postać

$$\tilde{w} = \frac{1}{4\alpha^3}\left\{\left[\frac{1+\alpha x_1}{2}e^{-\alpha x_1} - \frac{1-\alpha x_1}{2}e^{\alpha x_1}\right]\operatorname{sgn} x_1 - \right. \tag{2.8}$$

$$\left. - \frac{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\beta - 4\operatorname{ch}^2\beta - (1-\nu)^2\beta^2}{(1-\nu)[(3+\nu)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta - \beta(1-\nu)]}\operatorname{ch}\alpha x_1 - \frac{(1+\nu)\operatorname{sh}^2\beta + 2\operatorname{ch}^2\beta}{(3+\nu)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta - \beta(1-\nu)}\alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1\right\}.$$

Wykonując transformację odwrotną, otrzymamy

$$w = \mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}] = \mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] - \mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_1 \operatorname{ch}\alpha x_1] - \mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1], \tag{2.9}$$

gdzie dla zwięzłości oznaczono

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\alpha^3}\frac{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\beta - 4\operatorname{ch}^2\beta - (1-\nu)^2\beta^2}{(1-\nu)[(3+\nu)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta - \beta(1-\nu)]}, \tag{2.10}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\alpha^3}\frac{(1+\nu)\operatorname{sh}^2\beta + 2\operatorname{ch}^2\beta}{(3+\nu)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta - \beta(1-\nu)}.$$

Pierwszy składnik można napisać w postaci

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{-\alpha x_1}\right] + \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{8\alpha^2}e^{-\alpha x_1}\right] - \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{\alpha x_1}\right] + \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{8\alpha^2}e^{\alpha x_1}\right],$$

a następnie

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}\right] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[e^{-\alpha x_1}] + \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{8\alpha^2}\right] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[e^{-\alpha x_1}] - \tag{2.11}$$

$$- \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}\right] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[e^{\alpha x_1}] + \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{8\alpha^2}\right] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[e^{\alpha x_1}].$$

Wykorzystując twierdzenie o splocie [2], [1] dostaniemy dla poszczególnych retransformat wyrażenia [4]

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{-\alpha x_1}\right] = \frac{1}{16\pi}[c_0 z^2 - c_1 z^2 \ln|z|] \ast \delta(z - ix_1),$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{\alpha x_1}\right] = \frac{1}{16\pi}[c_0 z^2 - c_1 z^2 \ln|z|] \ast \delta(z + ix_1),$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{8\alpha^2}e^{-\alpha x_1}\right] = \frac{1}{16\pi}x_1|z| \ast \delta(z - ix_1), \tag{2.12}$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{8\alpha^2}e^{\alpha x_1}\right] = \frac{1}{16\pi}x_1|z| \ast \delta(z + ix_1),$$

gdzie

$$c_1 = \frac{2(-1)^3}{2!}\cos 2\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$c_0 = 1.$$

Funkcjonały δ są tu retransformatami odpowiednich funkcji wykładniczych.

Uwzględniając w dalszym ciągu własności splotu z δ — funkcjonałem i traktując otrzymane retransformaty jak analityczne funkcjonały zdefiniowane na przestrzeni funkcji próbnych $\mathscr{Z}$, czyli

$$\int_{\Gamma} f(z)\varphi(z)dz,$$

gdzie Γ — droga całkowania w płaszczyźnie zespolonej rozciągająca się od $+\infty$ do $-\infty$ oraz przyjmując, że $\operatorname{Im} z = x_1$, a droga całkowania określona jest prostą

$$\arg z = \frac{\pi}{4}, \qquad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

otrzymamy (z dokładnością do mnożnika i)

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \frac{1}{16\pi} r^2 \ln r^2 = \frac{1}{16\pi}(x_1^2+x_2^2)\ln(x_1^2+x_2^2). \tag{2.13}$$

Uzyskany rezultat pozostaje w zgodzie z faktem, że przestrzeń dystrybucji temperowanych $\mathscr{S}^*$ jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni $\mathscr{Z}^*$. Należy poza tym zauważyć, że występujący w równaniu (2.1) operator biharmoniczny działa w przestrzeni $\mathscr{S}^* \cap \mathscr{Z}^*$. Ponieważ przestrzeń $\mathscr{S}^*$ jest zamknięta ze względu na różniczkowanie, więc i w tym kontekście otrzymany wynik jest poprawny.

Znalezienie retransformat pozostałych dwóch składników (2.9) nastręcza znacznie więcej trudności. Można je obejść przez łączne zastosowanie twierdzenia o splocie i metody KRYŁOWA [5] przybliżonego obliczania całek Fouriera. W tym celu biorąc

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_1 \operatorname{ch}\alpha x_1] &= \mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_1] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{ch}\alpha x_1], \\ \mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1] &= x_1 \mathscr{F}_0^{-1}[\alpha\Phi_2] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{sh}\alpha x_1] \end{aligned} \tag{2.14}$$

zauważymy, że wystarczy skupić uwagę na obliczeniu retransformat funkcji Φ_1 i $\alpha\Phi_2$, bowiem transformacje odwrotne funkcji hiperbolicznych daje się z łatwością wyznaczyć podobnie jak w (2.12)

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{ch}\alpha x_1] = \delta(z+ix_1)+\delta(z-ix_1), \qquad \mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{sh}\alpha x_1] = \delta(z+ix_1)-\delta(z-ix_1). \tag{2.15}$$

Dla zastosowania metody Kryłowa funkcje Φ_1 oraz $\alpha\Phi_2$ przekształcamy do postaci

$$\Phi_1 = \frac{\overline{\Phi}_1}{(1+\alpha)^2}, \qquad \alpha\Phi_2 = \frac{\overline{\Phi}_2}{(1+\alpha)^2}, \tag{2.16}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_1 &= \frac{[(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\beta - 4\operatorname{ch}^2\beta - (1-\nu)^2\beta^2](1+\alpha)^2}{4\alpha^3(1-\nu)[(3+\nu)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta - \beta(1-\nu)]}, \\ \overline{\Phi}_2 &= \frac{[(1+\nu)\operatorname{sh}^2\beta + 2\operatorname{ch}^2\beta](1+\alpha)^2}{4\alpha^2[(3+\nu)\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\beta - \beta(1-\nu)]}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dzięki temu, aproksymując funkcje $\overline{\Phi}_1$ oraz $\overline{\Phi}_2$ wielomianami Legendre'a możemy napisać

$$
(2.18)\qquad
\begin{aligned}
\mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_1] &= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\Phi}_1(\alpha_k b)\sum_{k=0}^{n-1}A_{lk}\int_0^\infty \cos\alpha z(1+\alpha)^{-l-2}d\alpha,\\
\mathscr{F}_0^{-1}[\alpha\Phi_2] &= \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{\Phi}_2(\alpha_k b)\sum_{l=0}^{n-1}A_{lk}\int_0^\infty \sin\alpha z(1+\alpha)^{-l-2}d\alpha.
\end{aligned}
$$

Należy tutaj zaznaczyć, że w oryginale [5] procedura Kryłowa dotyczy zwykłej transformacji Fouriera. Jednakże dystrybucja temperowana istnieje jako ultradystrybucja (droga całkowania może być przesunięta do dowolnej prostej $\operatorname{Im} z = \text{const}$), adaptacja metody sprowadza się więc do formalnego zastąpienia zmiennej rzeczywistej x zmienną zespoloną z.

We wzorach (2.17) $\overline{\Phi}_1(\alpha_k b)$ oraz $\overline{\Phi}_2(\alpha_k b)$ oznaczają wartości funkcji odpowiednio $\overline{\Phi}_1$ oraz $\overline{\Phi}_2$ w węzłach interpolacji, zaś A_{lk} są stabelaryzowanymi współczynnikami, n oznacza ilość węzłów interpolacji, która może być przyjęta dowolnie w zależności od założonej z góry dokładności.

Przyjmując $n = 9$, a następnie wykonując całkowanie przez części otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
(2.19)\qquad \mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_1] = \frac{1}{b}\Big\{&B_0+\frac{1}{2}B_1+\frac{1}{3}B_2+\frac{1}{4}B_3+\frac{1}{5}B_4+\frac{1}{6}B_5+\frac{1}{7}B_6+\frac{1}{8}B_7+\frac{1}{9}B_8+\\
&+\frac{1}{10}B_9-\frac{z^2}{b^2}\left[\frac{1}{6}B_2+\frac{1}{24}B_3+\frac{1}{60}B_4+\frac{1}{120}B_5+\frac{1}{210}B_6+\frac{1}{336}B_7+\right.\\
&\left.+\frac{1}{540}B_8+\frac{1}{720}B_9\right]+\frac{z^4}{b^4}\left[\frac{1}{120}B_4+\frac{1}{720}B_5+\frac{1}{2520}B_6+\frac{1}{6720}B_7+\right.\\
&\left.+\frac{1}{15120}B_8+\frac{1}{30240}B_9\right]+\frac{z^6}{b^6}\left[\frac{1}{5040}B_6+\frac{1}{40320}B_7+\frac{1}{181440}B_8+\right.\\
&\left.+\frac{1}{604880}B_9\right]+\frac{z^8}{b^8}\left[\frac{1}{362880}B_8+\frac{1}{3628800}B_9\right]+\left[\sin\frac{z}{b}\operatorname{ci}\frac{z}{b}-\right.\\
&\left.-\cos\frac{z}{b}\operatorname{si}\frac{z}{b}\right]\left[-\frac{z}{b}B_0+\frac{z^3}{b^3}B_2\frac{1}{6}+\frac{z^5}{b^5}\frac{1}{120}B_4+\frac{z^7}{b^7}\frac{1}{5040}B_6-\frac{z^9}{b^9}\times\right.\\
&\left.\times\frac{1}{362880}B_8\right]+\left[\sin\frac{z}{b}\operatorname{si}\frac{z}{b}+\cos\frac{z}{b}\operatorname{ci}\frac{z}{b}\right]\left[\frac{z^2}{b^2}\frac{1}{2}B_1-\frac{z^4}{b^4}\frac{1}{24}B_3+\right.\\
&\left.+\frac{z^6}{b^6}\frac{1}{720}B_5-\frac{z^8}{b^8}\frac{1}{40320}B_7+\frac{z^{10}}{b^{10}}\frac{1}{362880}B_9\right]\Big\};
\end{aligned}
$$

(2.19) [c.d.]
$$\mathscr{F}_0^{-1}[\alpha\Phi_2] = \frac{1}{b}\Bigg\{\frac{z}{b}\left[\frac{1}{2}B_1+\frac{1}{6}B_2+\frac{1}{12}B_3+\frac{1}{20}B_4+\frac{1}{30}B_5+\frac{1}{42}B_6+\frac{1}{56}B_7+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{72}B_8+\frac{1}{90}B_9\right]-\frac{z^3}{b^3}\left[\frac{1}{24}B_3+\frac{1}{120}B_4+\frac{1}{360}B_5+\frac{1}{840}B_6+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1680}B_7+\frac{1}{3024}B_8+\frac{1}{5040}B_9\right]+\frac{z^5}{b^5}\left[\frac{1}{720}B_5+\frac{1}{5040}B_6+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{20160}B_7+\frac{1}{60480}B_8+\frac{1}{151200}B_9\right]-\frac{z^7}{b^7}\left[\frac{1}{40320}B_7+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{362880}B_8+\frac{1}{1814400}B_9\right]+\frac{z^9}{b^9}\frac{1}{3628800}B_9+\left[\sin\frac{z}{b}\operatorname{ci}\frac{z}{b}-\cos\frac{z}{b}\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{si}\frac{z}{b}\right]\left[-\frac{z^2}{b^2}\frac{1}{2}B_1+\frac{z^4}{b^4}\frac{1}{24}B_3-\frac{z^6}{b^6}\frac{1}{720}B_5+\frac{z^8}{b^8}\frac{1}{40320}B_7-\right.$$
$$\left.-\frac{z^{10}}{b^{10}}\frac{1}{3628800}B_9\right]+\left[\sin\frac{z}{b}\operatorname{si}\frac{z}{b}+\cos\frac{z}{b}\operatorname{ci}\frac{z}{b}\right]\cdot\left[-\frac{z}{b}B_0+\frac{z^2}{b^2}B_2\frac{1}{6}-\right.$$
$$\left.-\frac{z^5}{b^5}\frac{1}{120}B_4+\frac{z^7}{b^7}\frac{1}{5040}B_6-\frac{z^9}{b^9}\frac{1}{3628800}B_8\right]\Bigg\}.$$

Tutaj $B_k = \sum_{l=0}^{9} A_{lk}\overline{\Phi}_{(1)2}(\alpha_1 b)$, przy oznaczeniu $\overline{\Phi}_{(1)2} = \overline{\Phi}_1 \vee \overline{\Phi}_2$.

Wzory (2.14) z uwzględnieniem (2.15) i (2.19) dają łącznie postać poszukiwanych retransformat.

Uwzględniając jak poprzednio własności splotu z δ - funkcjonałem i wybierając tę samą co poprzednio drogę całkowania otrzymamy w efekcie funkcję zmiennych rzeczywistych x_1, x_2 jako wynik ostateczny.

Suma (2.13) oraz (2.14) przy uwzględnieniu (2.15) i (2.19) jest poszukiwaną funkcją Greena dla nieskończonego pasma płytowego, postawione więc na wstępie zadanie uznać należy za rozwiązane.

Zauważmy, że wyrażenie (2.13) jest znanym rozwiązaniem podstawowym operatora biharmonicznego, zgodnie więc z określeniem funkcji Greena stanowi jej część osobliwą. Wzory (2.14), (2.15) dają jej część regularną.

3. Zakończenie

Jak wynika z przytoczonych rozwiązań, zastosowanie elementów teorii ultradystrybucji okazało się trafnym i zręcznym sposobem konstrukcji rozwiązania problemu (2.1), (2.2). Nasuwa się pytanie czy stosowanie tego aparatu było konieczne?

By w pełni udzielić odpowiedzi zauważmy, że retransformaty poszczególnych członów wyrażenia (2.8) nie istnieją w zwykłym sensie, a nawet jako dystrybucje. Można je znaleźć jedynie w przestrzeni $\mathscr{Z}^*$, a więc istnieją tylko jako ultradystrybucje. Uogólniona w sensie przestrzeni $\mathscr{Z}^*$ postać funkcji Greena ma, jak to pokazano [wzory (2.13), (2.14), (2.15) i (2.18)] kształt

$$(3.1)\quad w = \frac{1}{16\pi}[c_0 z^2 - z^2 \ln|z|] \ast [\delta(z-ix_1)+\delta(z+ix_1)+\frac{1}{16\pi}x_1|z| \ast [\delta(z-ix_1)+ + \delta(z+ix_1)] - \frac{1}{8\pi}\left\{\left[\sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathscr{I}^c_{k-2}\right] \ast [\delta(z+ix_1)+\delta(z-ix_1)] + \left[\sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathscr{I}^s_{k-2}\right] \ast \ast [\delta(z+ix_1)-\delta(z-ix_1)]\right\},$$

gdzie $\mathscr{I}^c_{k-2}$, $\mathscr{I}^s_{k-2}$ są odpowiednimi całkami w (2.18). Odsiewające własności δ-funkcjonału pozwalają stąd otrzymać rzeczywistą postać funkcji Greena

$$(3.2)\quad w = \frac{1}{16\pi}[(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2] \ln [(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2] + R(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2),$$

gdzie część regularna $R(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2)$ określona jest związkami (2.19) przy podstawieniu

$$\operatorname{Im} z = x_1; \quad \arg z = \frac{\pi}{4} \quad \text{oraz} \quad x_1 \equiv x_1 - \xi_1; \; x_2 \equiv x_2 - \xi_2.$$

Warto w tym miejscu jeszcze pokazać, że otrzymane rozwiązanie spełnia warunki równowagi. W tym celu wykorzystamy następującą wałasność $\mathscr{F}_0$ — transformacji:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx\right]_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \mathscr{F}_0[f]_{\alpha=0}.$$

Spełnienie warunków równowagi oznacza, że zachodzi równość

$$(3.3)\quad \bigwedge_{\Omega \subset D} \int_{\partial\Omega} Q_n\Big|_{\partial\Omega} d[\partial\Omega] + \int_{\Omega} \delta(x_1, x_2) d\Omega = 0,$$

gdzie Q_n oznacza siłę poprzeczną.

Jako kontur całkowania wybrać można (bez szkody dla ogólności) kontur $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, gdzie

$$\Gamma_1 = \{x_2 \in (-\infty, \infty);\ x_1 = 0_+\},$$
$$\Gamma_2 = \{x_2 \in (-\infty, \infty);\ x_1 = 0_-\}.$$

Warunek (3.3) przybiera wtedy postać

$$\int_{\Gamma_1} Q_1(0_+, x_2) dx_2 + \int_{\Gamma_2} Q_1(0_-, x_2) dx_2 + 1 = 0;$$

uwzględniając związek

$$Q_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1} \nabla^2 w$$

otrzymamy po transformacji

$$\tilde{Q}_1 = -\tilde{w}^{(3)} + \alpha^2 \tilde{w}^{(1)}.$$

Stąd po podstawieniu (2.8)

$$\tilde{Q}_1 = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 - \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)\operatorname{sh}^2 \alpha b + 2\operatorname{ch}^2 \alpha b}{(3+\nu)\operatorname{sh} \alpha b \operatorname{ch} \alpha b - \alpha b(1-\nu)} \operatorname{sh} \alpha x_1,$$

a po przejściu do granicy $\alpha \to 0$, $x_1 \to 0_\pm$,

$$\tilde{Q}_1 \bigg|_{\substack{\alpha=0 \\ x_1=0_+}} = -\frac{1}{2}; \quad \tilde{Q}_1 \bigg|_{\substack{\alpha=0 \\ x_1=0_-}} = -\frac{1}{2}.$$

Warunek równowagi przybiera teraz postać

$$\int_{\Gamma_1} Q_1 \Big|_{x_1=0_+} dx_2 + \int_{\Gamma_2} Q_1 \Big|_{x_1=0_-} dx_2 + 1 = -1+1 = 0.$$

Uzyskane rozwiązanie (3.2) spełnia więc warunek równowagi, co zamierzano pokazać.

Literatura cytowana w tekście

1. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ, теория и приложения*, Изд. Мир, Москва 1969.
2. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, вып. 1. *Обобщенные функции и действия над ними*, Гос. Издат. Физ.-Мат. лит., Москва 1961.
3. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, вып. 2. *Пространства основных и обобщенных функции*, Гос. Издат. Физ.-Мат. лит. Москва 1961.
4. S. G. Krejn i in., *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 1967.
5. В. Я Крылов, Л. Г. Кругликова, *Справочная книга по численному гармоническому анализй*, Изд. Наука и Техн., Минск 1968
6. A. Zemanian, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.

Р е з ю м е

ОБОБЩЁННАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

В работе дан метод конструкции обобщённых функций Грина для бесконечной полосы со свободными краями. Решение получено путем применения обобщённых функции (так называемых «ультра-распределений»). На этой основе удалось значительно ослабить предположения о регулярности решения, расширить возможности введения многих операций, не имеющих классического смысла и др. Данный метод оказывается эффективным, а окончательные вычисления, после применения метода Крылова — элементарны. Работа является примером применения ультра-распределений к граничным задачам теории упругости.

S u m m a r y

GENERALIZED GREEN'S FUNCTION FOR AN INFINITE PLATE STRIP

In the paper is constructed the generalized Green function for an infinite plate strip with free edges. The solution is found by means of ultradistributions what makes it possible to weaken the assumptions, to increase the possibility of performing certain operations which are not applicable in the classical sense, and to make the considerations more compact. It should be stressed that the method presented is effective, and the final results — after application of the Krylov method of approximate evaluation of Fourier integrals — are elementary.

The paper represents an example of application of the theory of ultradistributions to the boundary value problems of elasticity.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1972 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

WYZNACZANIE ZMIAN STAŁYCH SPRĘŻYSTOŚCI MATERIAŁU WYSTĘPUJĄCYCH NA GRUBOŚCI MODELU GIPSOWEGO

JÓZEF WRANIK (GLIWICE)

1. Wstęp

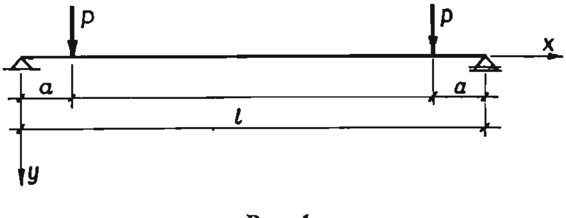
Wartości naprężeń w elementach konstrukcji budowlanych znajdowane na drodze pomiarów odkształceń modeli gipsowych, przy niewystarczającej znajomości cech sprężystych materiału modelowego mogą mieć znaczne błędy. Zauważono to w pracach doświadczalnych na modelach gipsowych swobodnie podpartych tarcz prostokątnych o skokowej zmianie grubości. Wyniki badań znacznie różniły się od wyników otrzymywanych sposobami: analitycznym i elastooptycznym.

W celu wyjaśnienia przyczyny tych rozbieżności przeprowadzono badania zmiany stałych sprężystości E i ν na grubości płyt gipsowych. Badania wykazały, że płyty gipsowe wykonywane sposobem opisanym w dalszej części pracy są niejednorodne.

Na fakt zmiany modułu sprężystości zwrócono już uwagę w pracach [1] i [2], jednakże zjawisko to nie zostało ujęte ilościowo. W pracy niniejszej podany jest sposób ustalania zmiany modułu sprężystości E, zachodzącej wzdłuż wysokości przekroju płyty gipsowej.

2. Sposób określania zmiany wartości modułu sprężystości E na grubości elementu modelu gipsowego

Do odlewania płyt gipsowych zastosowano zaczyn o wysokim stosunku wagowym wody do gipsu, a więc zupełnie płynny. Zaczyn ten wylewano na poziomą płytę szklaną. W czasie wiązania opóźnionego przez dodany inhibitor, następuje sedymentacja cząstek.

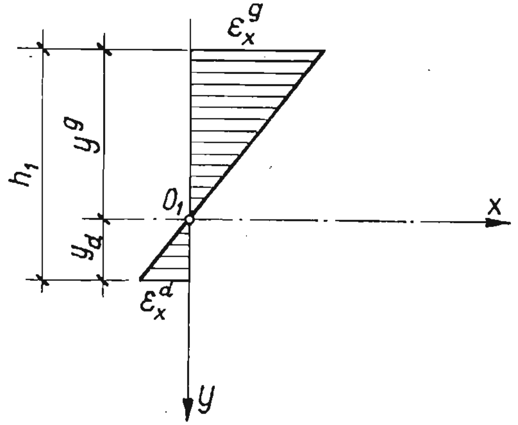


Rys. 1

Sedymentacja ta oraz różne warunki wiązania na powierzchni płyty gipsowej i od strony dna formy powodują, że moduł sprężystości E nie jest jednakowy na całej grubości płyty i zmienia się według pewnej funkcji.

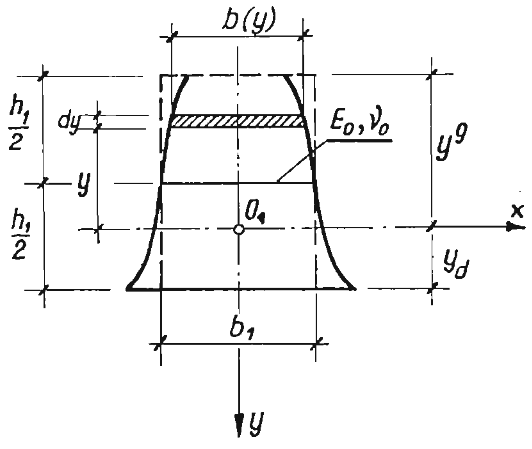
Określenia zróżnicowania modułu sprężystości E na grubości płyty gipsowej dokonamy na wyciętej z tej płyty belce, poddanej czystemu zginaniu momentem $M = Pa$ (rys. 1).

W przekrojach dostatecznie odległych od strefy przyłożenia sił zachowana jest zasada płaskich przekrojów. Wykres odkształceń ε_x jest więc liniowy (rys. 2). W związku ze zmianą cech sprężystości na wysokości przekroju poprzecznego belki oś obojętna nie leży w połowie wysokości h_1.



Rys. 2

Zmianę modułu sprężystości $E(y)$ gipsu wzdłuż wysokości belki o szerokości b_1 można zastąpić w obliczeniach zmianą szerokości $b(y)$ belki o stałej wartości E_0 (rys. 3). Porównawczy moduł sprężystości E_0 musi mieć wartość dowolnie wybraną spośród rzeczywistych wartości, występujących w przekroju. Do dalszych rozważań wybieramy wartość modułu sprężystości E_0 w połowie wysokości przekroju.



Rys. 3

Zależność między modułem sprężystości $E(y)$ a zastępczą szerokością $b(y)$ opisuje wzór

$$b(y) = \frac{b_1}{E_0} E(y). \tag{1.1}$$

Naprężenia występujące w belce o szerokości b_1 i zmiennej wartości modułu $E(y)$ równają się

$$\sigma_x(y) = \frac{My}{J_1}\cdot\frac{b(y)}{b_1}, \tag{1.2}$$

lub

$$\sigma_x(y) = \frac{My}{J_1}\cdot\frac{E(y)}{E_0}, \tag{1.2a}$$

gdzie wprowadzono zastępczy moment bezwładności

$$J_1 = \int_{y_d}^{y_g} b(y)y^2dy = \frac{b_1}{E_0}\int_{y_d}^{y_g} E(y)y^2dy. \tag{1.3}$$

Odkształcenie $\varepsilon_x(y)$ wyraża się następująco

$$\varepsilon_x(y) = \frac{\sigma_x(y)}{E(y)} = \frac{My}{J_1}\cdot\frac{E(y)}{E_0}\cdot\frac{1}{E(y)} = \frac{My}{E_0 J_1}. \tag{1.4}$$

Odkształcenia $\varepsilon_x(y)$ są liniowe i osiągają zero dla $y = 0$. Otrzymać je możemy z pomiarów tensometrycznych, przeprowadzonych dla określonego momentu zginającego M. We wzorze (1.4) nieznane są zatem wielkości E_0 oraz J_1.

Aby je wyznaczyć przeprowadzimy kilka pomiarów belek o coraz mniejszych wysokościach, otrzymywanych przez zdejmowanie zewnętrznych warstw badanej belki.

Z pierwszego pomiaru odkształceń $\varepsilon_{x,1}$ belki o pełnej wysokości h_1 otrzymujemy jej rzeczywistą sztywność na zginanie

$$E_0 J_1 = \frac{My}{\varepsilon_{x,1}}, \tag{1.5}$$

przy czym E_0 i J_1 są w dalszym ciągu nieznane. Ponadto ustalamy przy pierwszym pomiarze punkt (0_1) osi obojętnej czyli zerowych odkształceń.

Następnie zdejmujemy cienkie warstwy o jednakowych grubościach δ_1, z góry i z dołu belki. Otrzymujemy w ten sposób belkę o zmienionej wysokości $h_2 = h_1 - 2\delta_1$ i pewnej sztywności $E_0 J_2$.

Dla belki tej dokonujemy pomiaru odkształceń, uzyskując wartości $\varepsilon_{x,2}$ oraz położenie punktu (0_2) o zerowej wartości odkształcenia. Jeżeli punkt 0_2 nie znajduje się w połowie wysokości h_2, ponownie zmniejszamy wysokość belki, mierzymy odkształcenia i ustalamy położenie punktu o zerowej wartości odkształcenia.

Postępujemy tak do chwili, gdy oś obojętna znajdzie się w połowie wysokości belki.

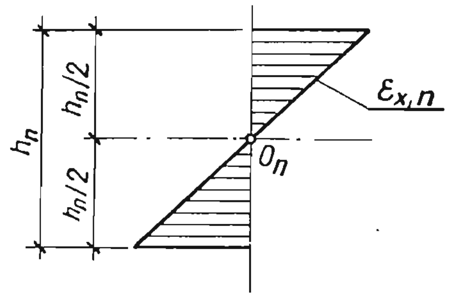
Załóżmy w dalszym ciągu, że w ostatnim n-tym pomiarze wykres odkształceń przedstawia się, jak na rys. 4, tzn. odkształcenia osiągają wartość zerową w połowie zredukowanej wysokości (h_n) belki. Możemy wówczas obliczyć wartość momentu bezwładności J_n, jak dla belki prostokątnej o stałej wartości E_0

$$J_n = \frac{h_n^3 b_1}{12}, \tag{1.6}$$

a następnie ze wzoru (1.4) obliczyć

$$E_0 = \frac{My}{\varepsilon_{x,n} J_n} = \frac{M}{\varepsilon^g_{x,n} J_n} \cdot \frac{h_n}{2}, \tag{1.7}$$

gdzie M — moment zginający, jakim obciążono belkę o wysokości zredukowanej z wartości h_1 do h_n, $\varepsilon^g_{x,n}$ — zmierzone odkształcenie w odległości $y^g = \frac{h_n}{2}$ od środka, odpowiadające momentowi M.

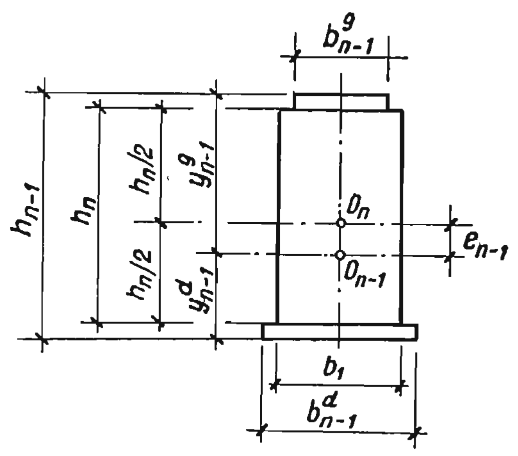


Rys. 4

Ze wzoru (1.7) obliczyć możemy moduł E_0, a tym samym dla poprzedzającego $(n-1)$-szego pomiaru, możemy obliczyć J_{n-1} według wzoru

$$J_{n-1} = \frac{1}{E_0} \frac{My^g_{n-1}}{\varepsilon^g_{x,n-1}} = \frac{1}{E_0} \cdot \frac{My^d_{n-1}}{\varepsilon^d_{x,n-1}}. \tag{1.8}$$

Wielkości ze wskaźnikami g lub d dotyczą odpowiednio górnych i dolnych skrajnych włókien belki.



Rys. 5

Jeżeli ciągłą funkcję $b(y)$ przedstawioną na rys. 3 zastąpimy wykresem zmieniającym się w sposób skokowy (rys. 5 i 6), wtedy przekrój belki użytej do $(n-1)$-szego pomiaru obliczymy z dwu następujących warunków:

a) moment statyczny przekroju belki względem osi przechodzącej przez punkt 0_{n-1} jest równy zeru,

b) moment bezwładności przekroju belki względem punktu 0_{n-1} jest równy obliczonemu ze wzoru (1.8) momentowi bezwładności J_{n-1}.

Z obu warunków otrzymujemy układ równań (1.9).

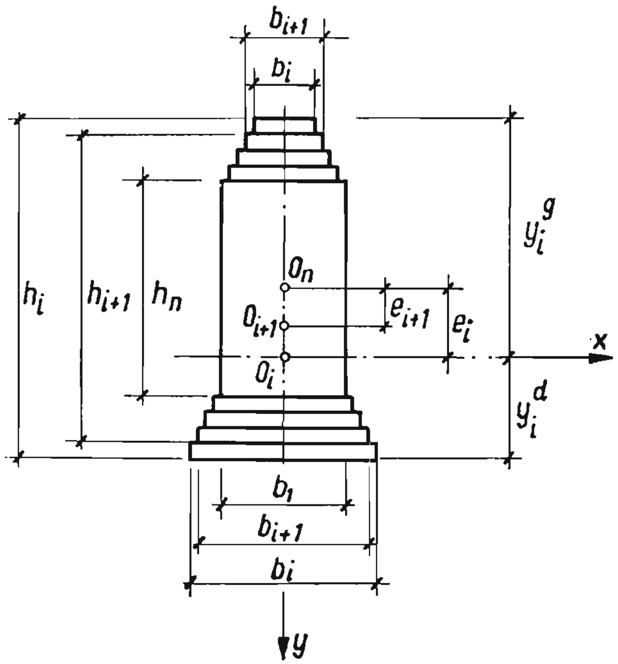
$$\left(y^g_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)b^g_{n-1}-\left(y^d_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)b^d_{n-1} = -\frac{1}{\delta_{n-1}}F_n\cdot e_{n-1}, \tag{1.9a}$$

$$\left[\frac{\delta^2_{n-1}}{12}+\left(y^g_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)^2\right]b^g_{n-1}+\left[\frac{\delta^2_{n-1}}{12}+\left(y^d_{n-1}-\frac{1}{2}\delta_{n-1}\right)^2\right]b^d_{n-1} = \tag{1.9b}$$

$$= (J_{n-1}-J_n-F_n\cdot e^2_{n-1})\frac{1}{\delta_{n-1}},$$

gdzie $F_n = b_1\cdot h_n$

Z układu równań (1.9) obliczyć można b^g_{n-1} i b^d_{n-1}.



Rys. 6

Wartości odkształceń belki użytej do i-tego pomiaru pozwolą obliczyć wartości b_i^g i b_i^d według wzorów (1.10).

Otrzymany w ten sposób i-ty zastępczy przekrój przedstawiono na rys. 6. Występujące we wzorach (10) wielkości J_{i+1}, F_{i+1} otrzymano z obliczeń belki dla $(i+1)$-szego pomiaru.

$$\left(y_i^g-\frac{1}{2}\delta_i\right)b_i^g-\left(y_i^d-\frac{1}{2}\delta_i\right)b_i^d = -F_{i+1}(e_i-e_{i+1})\frac{1}{\delta_i}, \tag{1.10a}$$

$$\left[\frac{\delta_i^2}{12}+\left(y_i^g-\frac{1}{2}\delta_i\right)^2\right]b_i^g+\left[\frac{\delta_i^2}{12}+\left(y_i^d-\frac{1}{2}\delta_i\right)^2\right]b_i^d = \tag{1.10b}$$

$$= [J_i-J_{i+1}-F_{i+1}(e_i-e_{i+1})^2]\frac{1}{\delta_i},$$

gdzie $J_i = \frac{1}{E_0}\cdot\frac{My_i^g}{\varepsilon_{x,i}^g}$ — moment bezwładności przekroju belki dla i-tego pomiaru,

$J_{i+1} = \frac{1}{E_0}\cdot\frac{My_{i+1}^g}{\varepsilon_{x,i+1}^g}$ — moment bezwładności przekroju, belki dla $(i+1)$-szego pomiaru,

δ_i — grubości kolejno zdejmowanych warstw,

F_{i+1} — pole przekroju poprzecznego belki dla $(i+1)$-szego pomiaru.

Przejścia od szerokości zastępczej $b(y)$ do modułu sprężystości $E(y)$ dokonujemy za pomocą wzoru (1.1).

Zmiany wartości współczynnika Poissona ν określamy na podstawie kolejnych pomiarów odkształceń jako

$$\nu_i^g = \frac{\varepsilon_{z,i}^g}{\varepsilon_{x,i}^g}, \qquad \nu_i^d = \frac{\varepsilon_{z,i}^d}{\varepsilon_{x,i}^d}, \tag{1.11}$$

gdzie $\varepsilon_{z,i}^g$, $\varepsilon_{z,i}^d$ — odkształcenia mierzone w kierunku prostopadłym do płaszczyzny x, y na górnej i dolnej powierzchni belki.

3. Przykład liczbowy wyznaczania zmiany modułu sprężystości E w płycie gipsowej

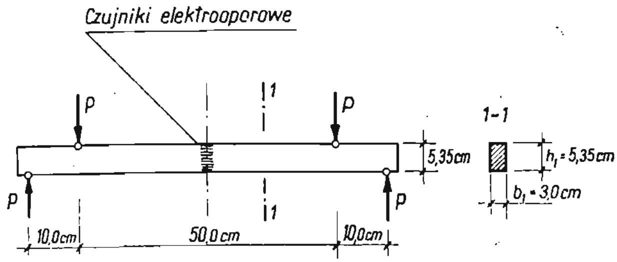
Dla ilustracji omówionego sposobu przeprowadzono pomiary na belce wyciętej z płyty gipsowej, przechowywanej w suchym pomieszczeniu przez okres około 6 miesięcy.

Płyty gipsowe wykonano z zaczynu gipsowego o stosunku wagowym $w:g = 0{,}6$ z dodatkiem cytrynianu sodowego w ilości 0,04%. Składniki te wymieszano za pomocą mieszarki elektrycznej i wlewano przez sito o oczkach 1 mm^2 do formy otwartej górą, ułożonej poziomo na płycie szklanej. Około pół godziny po napełnieniu formy, kiedy woda stojąca na powierzchni zaczynała gwałtownie wsiąkać w płytę, rozbierano formę, a płytę po paru godzinach przenoszono do suchego pomieszczenia. Na skutek powstawania menisku wypukłego w wypełnionej po brzegi zaczynem formie oraz pęcznienia zaczynu gipsowego w czasie wiązania, płyty uzyskiwały grubości większe od wysokości formy. Płyty miały grubość 5,35 cm.

Pomiarów odkształceń ε_x belki gipsowej wyciętej z płyty dokonywano dla trzech różnych wartości momentu zginającego. Dla każdej wartości momentu zginającego wykonywano trzy serie odczytów. Uzyskano w ten sposób 9 serii odczytów, z których obliczono średnią wartość odkształcenia w każdym punkcie pomiarowym.

W celu ustalenia zmian modułu $E(y)$ oraz współczynnika Poissona $\nu(y)$ przeprowadzono metodą tensometrii elektrooporowej pomiary na belce gipsowej przedstawionej na rys. 7.

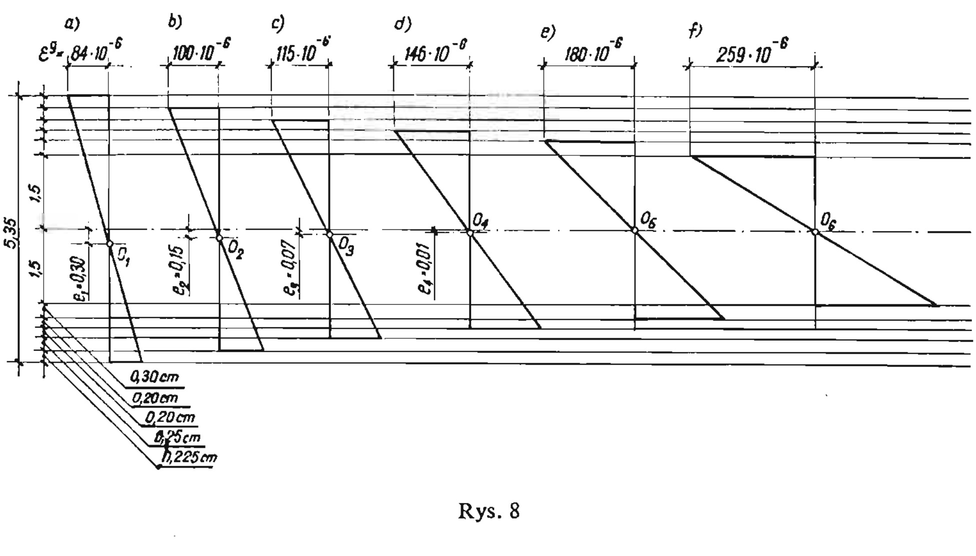
Na każdej z bocznych ścian belki naklejono wzdłuż pionowej osi symetrii 9 czujników, na jej górnej zaś i dolnej powierzchni po dwa czujniki, prostopadle względem siebie usytuowane. Czujniki na bocznych ścianach służyły do kontroli prostoliniości przebiegu odkształceń.



Rys. 7

Wyniki pomiarów odkształceń dla przekroju w stanie początkowym przedstawiono na wykresie (rys. 8a).

Następnie zdjęto z góry i z dołu warstwę o grubości $\delta_1 = 2{,}25$ mm, naklejono ponownie czujniki i dokonano pomiarów odkształceń, uzyskując ich wykres (rys. 8b). Dla następnych kolejno zdejmowanych warstw o grubościach $\delta_i = 2{,}5$ mm, 2 mm i 2 mm dokonano pomiarów i sporządzono wykresy odkształceń. Przedstawiono to na rysunkach 8c, 8d i 8e.



Rys. 8

Przy piątym pomiarze odkształcenia osiągnęły wartość zerową w połowie wysokości belki. Dla kontroli przeprowadzono jeszcze pomiar szósty, którego wyniki pokrywały się z wynikami pomiaru piątego.

Na podstawie pomiaru piątego obliczono

$$J_5 = \frac{3{,}6^3 \cdot 3}{12} = 11{,}65 \text{ cm}^4 \quad \text{według (1.7)},$$

$$E_0 = \frac{100 \cdot 1{,}8}{11{,}65} \cdot \frac{1}{180 \cdot 10^{-6}} = 85{,}8 \cdot 10^3 \text{ kG/cm}^2,$$

$$F_5 = 3{,}6 \cdot 3 = 10{,}8 \text{ cm}^2.$$

Wartość momentu bezwładności J_4 w pomiarze czwartym obliczono na podstawie znalezionych wartości J_5, E_0 i F_5 ze wzoru (1.8)

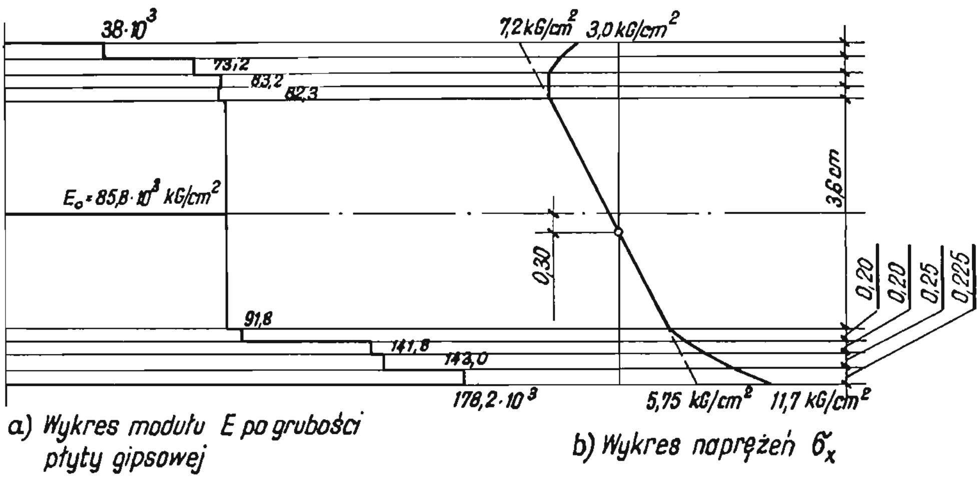
$$J_4 = \frac{1}{85{,}5 \cdot 10^3} \cdot \frac{100 \cdot 2{,}01}{146 \cdot 10^{-6}} = 16{,}05 \text{ cm}^4.$$

Na podstawie wzorów (1.10a) i (1.10b) otrzymano układ równań

$$1{,}91\, b_4^g - 1{,}89\, b_4^d = -0{,}54,$$
$$3{,}65\, b_4^g - 3{,}58\, b_4^d = 22{,}0,$$

z których obliczono $b_4^g = 2{,}88$ cm; $b_4^d = 3{,}21$ cm; $F_4 = 12{,}02$ cm^2.

Wartości J_4, b_4 i F_4 stanowią podstawę do obliczania wartości J_3, b_3^g, b_3^d i F_3.



Rys. 9

Otrzymuje się $J_3 = 23{,}0$ cm^4 oraz układ równań

$$2{,}17\, b_3^g - 2{,}03\, b_3^d = -3{,}61,$$
$$4{,}71\, b_3^g - 4{,}12\, b_3^d = 34{,}4,$$

z których obliczono $b_3^g = 2{,}91$ cm; $b_3^d = 4{,}96$ cm; $F_3 = 13{,}60$ cm^2.

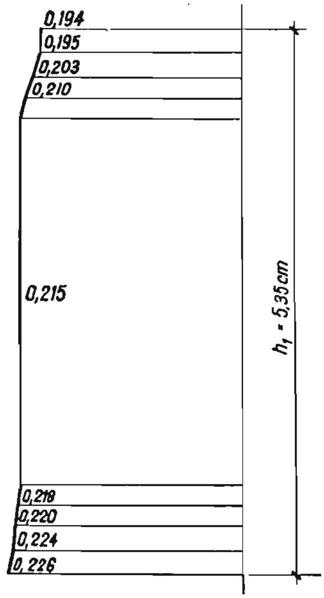
W podobny sposób obliczono pozostałe wartości:

$$b_2^g = 2{,}56 \text{ cm}; \quad b_2^d = 5{,}00 \text{ cm},$$
$$b_1^g = 1{,}33 \text{ cm}; \quad b_1^d = 6{,}23 \text{ cm}.$$

Na podstawie wartości b_i^g i b_i^d obliczono według (1.1) odpowiednie wartości rzeczywistych modułów sprężystości podłużnej E_i^g i E_i^d.

Wykres zmiany modułu E w badanej płycie na jej grubości przedstawiono na rys. 9a. Odpowiada temu wykres σ_x w rozpatrywanej belce o zmiennym module sprężystości $E(y)$, przedstawiony na rys. 9b, dla $M = 100$ kGcm.

Na rys. 10 przedstawiono wykres zmiany współczynnika Poissona $\nu(y)$.



Rys. 10

Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że po zdjęciu zewnętrznych warstw płyty gipsowej, otrzymuje się płytę o strukturze zbliżonej do jednorodnej. W wykonywanym doświadczeniu aby otrzymać płytę jednorodną trzeba było z płyty o grubości 5,35 cm zdjąć z każdej strony warstwę grubości ok. 0,88 cm.

Orientacyjnie można przyjąć, że płyty gipsowe przeznaczone na elementy modelu jednorodnego powinno się wykonać o grubości około 1,5-krotnie większej od wymaganej grubości elementów modelu gipsowego. Wniosek ten dotyczy płyt o znacznych grubościach.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Starosolski, A. Ajdukiewicz, J. Denkiewicz, *Współczynnik sprężystości i odkształcenia graniczne przy zginaniu w zależności od inhibitorów i ilości wody zarobowej dla gipsu modelowego*, Cement, Wapno, Gips, 6 (1965).
2. W. Starosolski, A. Ajdukiewicz, J. Denkiewicz, *Badanie własności gipsu jako materiału do modelowania konstrukcji*, Archiwum Inżynierii Lądowej, 8, 1 (1967).

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ УПРУГИХ ПОСТОЯННЫХ МАТЕРИАЛА ПО ТОЛЩИНЕ ГИПСОВОЙ МОДЕЛИ

В работе рассмотрено опытное определение упругих постоянных E и ν в толще гипсовой пластинки, получаемой путем сливания жидкого гипсового раствора на горизонтальную стеклянную пластину. Структура получаемого таким образом гипса неоднородна.

Предлагается метод определения упругих постоянных E и ν по толщине пластинки, состоящий в измерении деформаций изгиба балки, вырезанной из этой пластинки.

Summary

DETERMINATION OF CHANGES OF ELASTIC MATERIAL CONSTANTS OCCURING ACROSS THE THICKNESS OF A PLASTER MODEL

The paper is dealing with experimental determination of elastic constants E and ν in a plaster plate produced by pouring the liquid plaster paste over a horizontal glass panel. The structure of such a plate is non-homogeneous. On the basis of strain measurements of a plaster beam cut out of such a plate and subjected to bending, the variation of elastic moduli E and ν across the thickness of the plaster plate can be determined.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 maja 1972 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
1, 11 (1973)

PRZYKŁADY ULTRADYSTRYBUCYJNYCH ROZWIĄZAŃ PASMA PŁYTOWEGO

JAN GRABACKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy przedstawione będą rozwiązania wybranych zadań klasycznej teorii płyt, uzyskane przy użyciu transformacji Fouriera w przestrzeni ultradystrybucji. Transformację tego typu nazywać będziemy dalej $\mathscr{F}_0$ — transformacją.

Znaczenie teorii dystrybucji w problemach brzegowych mechaniki jest powszechnie znane; uogólnienie rozwiązań na przestrzeń dystrybucji temperowanych i ultradystrybucji niesie ze sobą dalsze korzyści.

W pracy chcemy pokazać, że zastosowanie aparatu ultradystrybucji ma nie tylko cechy zabiegu formalnego i matematycznej elegancji, ale również znamiona zręcznego i wygodnego algorytmu praktycznego. Istotnym elementem stanowiącym o przewadze omawianej metody nad klasyczną transformacją Fouriera jest to, że zastosowany aparat nie wymaga żadnych założeń dotyczących regularności, zachowania w nieskończoności itp. Fizyczne znaczenie tak otrzymanych rozwiązań podkreśla przy tym twierdzenie, które orzeka, że ultradystrybucyjne rozwiązania problemów brzegowych są identyczne z rozwiązaniami klasycznymi, o ile te ostatnie istnieją. Wynika stąd, że nawet wtedy, gdy zadanie można rozwiązać metodami tradycyjnymi, stosowanie ultradystrybucji prowadzi do wyników identycznych. Jeśli zatem uda się pokazać, że operowanie tymi uogólnionymi pojęciami prowadzi poza wspomnianą ogólnością również do wygodnych, łatwych i efektywnych obliczeń — to korzyści wynikające ze stosowania tych środków będą bezsporne. Te ostatnie walory łatwo zademonstrować na prostym przykładzie. Mianowicie, w wielu zadaniach płaskiej teorii sprężystości (tarcze, płyty) przy zastosowaniu transformacji Fouriera napotykamy wyrażenia typu $g(\alpha)h(\alpha x)$, których retransformaty $\mathscr{F}^{-1}[g(\alpha)h(\alpha x)]$ istnieją (w zwykłym sensie), lecz obliczenie których nastręcza duże trudności rachunkowe (zazwyczaj są to złożone całki nieelementarne). Zastosowanie twierdzenia o splocie mogłoby tu ułatwić obliczenie, ale zazwyczaj bywa tak, że o ile wykonanie operacji $\mathscr{F}^{-1}[g(\alpha)]$ nie sprawia większych trudności (w ostateczności można skorzystać z efektywnych metod przybliżonych) — to retransformata $\mathscr{F}^{-1}[h(\alpha x)]$ nie istnieje. Typowym przykładem takiej sytuacji może być funkcja $h(\alpha x) = \operatorname{ch} \alpha x$, której retransformata nie istnieje nawet w sensie dystrybucji Schwarza (temperowanych). Można jednak pokazać, że retransformata tej funkcji istnieje w przestrzeni ultradystrybucji. Dzięki temu można tu stosować twierdzenie o splocie (uogólnionym), a wynik operacji uzyskuje się łatwiej, niż w przypadku transformacji odwrotnej całego iloczynu.

W pracy niniejszej zetkniemy się z podobnym przypadkiem niejednokrotnie.

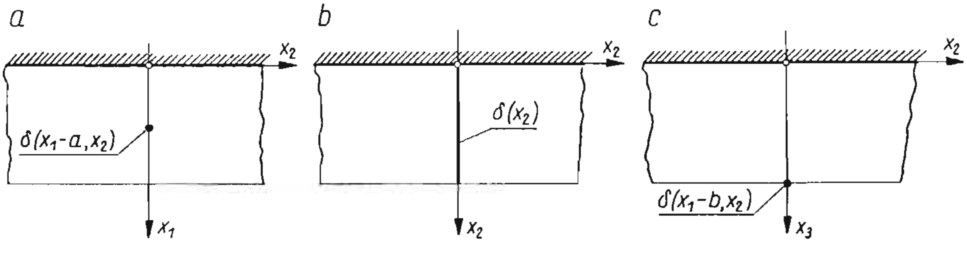
Celowo ograniczyliśmy przy tym temat do takich zadań, które można by rozwiązać metodami klasycznymi, względnie których rozwiązania są wprost znane. Pragniemy tu bowiem podać nie tyle rozwiązania nowych zagadnień, ile zilustrować możliwości i zastosowania teorii ultradystrybucji.

Rozwiązano więc w pracy następujące zadania:

zadanie I — pasmo płytowe z jednym brzegiem utwierdzonym, a drugim swobodnym obciążone siłą skupioną (rys. 2a);

zadanie II — pasmo płytowe jak wyżej, lecz z obciążeniem liniowym (rys. 2b);

zadanie III — pasmo płytowe jak wyżej, obciążone siłą skupioną na brzegu swobodnym (rys. 2c).



Rys. 1

W dalszym ciągu podamy definicje i określenia pojęć użytych w pracy.

$\mathscr{D}$ — przestrzeń funkcji próbnych klasy C_0^∞ o nośnikach zwartych, czyli

$$\mathscr{D} = \bigcup_{\Omega} \mathscr{D}(\Omega),$$

gdzie $\Omega \in \mathbf{R}_1$ oraz

$$\mathscr{D}(\Omega) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C_0^\infty \wedge \operatorname{supp}\varphi(x) \subset \Omega\},$$

przy czym supp $\varphi(x)$ oznacza tutaj nośnik funkcji $\varphi(x)$;

$\mathscr{D}^*$ — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych $\mathscr{D}$, czyli przestrzeń ciągłych funkcjonałów liniowych określonych na $\mathscr{D}$, dalej nazywana również przestrzenią dystrybucji;

$\mathscr{S}$ — przestrzeń funkcji próbnych «szybko malejących»

$$\mathscr{S} = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in C^\infty \wedge \bigwedge_{m,k} \bigvee_{Cm,k} |x^m||\varphi^{(k)}_{(x)}| \leqslant C_{m,k}\};$$

$\mathscr{S}^*$ — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych $\mathscr{S}$, dalej nazywaną również przestrzenią «dystrybucji temperowanych»;

$\mathscr{Z}$ — przestrzeń analitycznych funkcji próbnych i całkowitych

$$\mathscr{Z} = \bigcup_{a} \mathscr{Z}_a,$$

gdzie

$$\mathscr{Z}_a = \left\{\psi(z) : \psi(z) \text{ analit} \wedge \bigwedge_k \bigvee_{Ck} |z^k||\psi(z)| \leqslant C_k e^{a|\beta|}\right\},$$

$$\beta = \mathrm{Jm}\, z, \quad a \in \mathbf{R}_1;$$

$\mathscr{Z}^*$ — przestrzeń sprzężona z przestrzenią funkcji próbnych $\mathscr{Z}$, nazywana również przestrzenią ultradystrybucji.

Elementy którejkolwiek z określonych wyżej przestrzeni sprzężonych (bez bliższego określenia o którą z nich chodzi) noszą wspólną nazwę funkcji uogólnionych.

Definiując uogólniony operator Fouriera

$$\mathscr{F}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots e^{iax}dx,$$

$$\mathscr{F}_0^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots e^{-iax}d\alpha,$$

gdzie $\alpha \in \mathbf{Z}$ (przestrzeń zespolona), można dowieść, że przestrzeń $\mathscr{Z}$ jest $\mathscr{F}_0$ — obrazem przestrzeni $\mathscr{D}$, czyli

$$\mathscr{F}_0[\mathscr{D}] = \mathscr{Z} \text{ lub inaczej } \mathscr{D} \underset{\mathscr{F}_0}{\rightarrowtail\!\!\!\rightarrow} \mathscr{Z}.$$

Przekształcenie Fouriera w przestrzeni dystrybucji określa definicja

$$\langle \mathscr{F}_0[f], \varphi\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mathscr{F}_0[\varphi]\rangle,$$

operacja $\mathscr{F}_0$ jest więc bijektywnym odwzorowaniem

$$\mathscr{F}_0[\mathscr{D}^*] = \mathscr{Z}^* \text{ lub } \mathscr{D}^* \underset{\mathscr{F}_0}{\rightarrowtail\!\!\!\rightarrow} \mathscr{Z}^*.$$

Każda dystrybucja ma więc swoją $\mathscr{F}_0$ — transformatę, która jest ultradystrybucją.

Różniczkowanie

$$\frac{d^k}{dx} kf = f^{(k)}_{(x)}, \quad k \text{ — liczba naturalna},$$

rozumieć należy w przestrzeni funkcji uogólnionych w sensie Sobolewa jako operację

$$\langle f^{(k)}_{(x)}, \varphi(x)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(x), (-1)^k \varphi^{(k)}_{(x)}\rangle.$$

2. Zadanie I

Pasmo płytowe traktuje się jak rozmaitość różniczkowalną w E_2 określoną następująco:

$$D = \{x_1, x_2 : x_1 \in (0, \mathrm{b}) \wedge x_2 \in (-\infty, +\infty)\},$$
$$\Gamma_1 = \{x_1, x_2 : x_1 = b \wedge x_2 \in (-\infty, +\infty)\},$$
$$\Gamma_0 = \{x_1, x_2 : x_1 = 0 \wedge x_2 \in (-\infty, +\infty)\}.$$

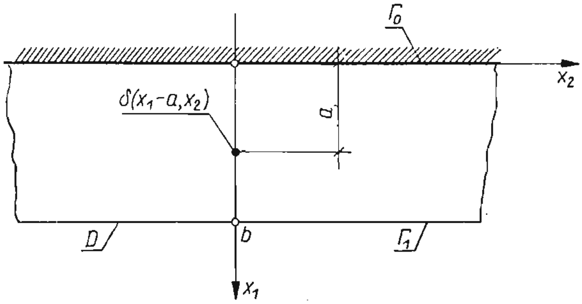
Formalnie zadanie sprowadza się do rozwiązania problemu brzegowego

$$\nabla^2\nabla^2 w = \delta(x_1 - a, x_2) \tag{2.1}$$

(przyjęto sztywność płytową $K = 1$),

$$\begin{gathered} w\Big|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\Big|_{\Gamma_1} = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Tutaj $w(x_1, x_1)$ jest ugięciem powierzchni środkowej płyty, ν — liczbą Poissona, a $\delta(x_1 - a, x_2) = \delta(x_1 - a) \times \delta(x_2)$ jest dystrybucją δ Diraca (iloczyn tensorowy).



Rys. 2

W celu rozwiązania zadania zakładamy, że w jest elementem przestrzeni ultradystrybucji (konsekwencją tego założenia jest, że różniczkowanie przepisane operatorami w równaniach (2.1) oraz (2.2) rozumieć teraz należy w sensie Sobolewa). Wykonując na równaniu (2.1) oraz na warunkach brzegowych (2.2), $\mathcal{F}_0$ — operację względem zmiennej x_2, otrzymujemy równoważny problem w przestrzeni $\mathcal{F}_0$ — obrazu.

$$[d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w} = \delta(x_1 - a); \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \tilde{w}|_{\Gamma_0} = \tilde{w}^{(1)}|_{\Gamma_0} = 0, \\ \tilde{w}^{(2)} - \nu\alpha^2 \tilde{w}|_{\Gamma_1} = 0, \\ \tilde{w}^{(3)} - (2-\nu)\alpha^2 \tilde{w}^{(1)}|_{\Gamma_1} = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Tutaj
$$[d^2 - \alpha^2]^2 \overset{\text{def}}{=} \frac{d^4}{dx_1^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2}{dx_1^2} + \alpha^4,$$

$$\tilde{w} = \mathcal{F}_0[w], \quad \tilde{w}(x_1, \alpha) \in \underset{x_1}{\mathcal{Z}^*} \times \underset{\alpha}{\mathcal{D}^*};$$

oznaczono tu ponadto

$\underset{x_1}{\mathcal{Z}^*}$ — przestrzeń ultradystrybucji ze względu na zmienną x_1;

$\underset{\alpha}{\mathcal{D}^*}$ — przestrzeń dystrybucji ze względu na zmienną α.

Rozwiązaniem problemu (2.3), (2.4) będzie więc rodzina ultradystrybucji zależnych dystrybucyjnie od parametru α.

Poszukując tego rozwiązania wykorzystano następujące twierdzenia [7, 2]:

(a) rozwiązania ultradystrybucyjne liniowych równań różniczkowych zwyczajnych są (z dokładnością do stałego czynnika) identyczne z rozwiązaniami klasycznymi;

(b) rozwiązaniem równania $L^n(u) = \delta(x)$, w którym

$$L^n = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

jest funkcja $u = h(x)H(x)$, gdzie $H(x)$ — funkcja Heaviside'a, $h(x)$ — spełnia równanie jednorodne $L^n[h] = 0$ oraz warunki początkowe

$$h|_{x=0} = h^{(1)}|_{x=0} = \dots = h^{(n-2)}|_{x=0} = 0, \qquad h^{n-1}|_{x=0} = 1/a_n.$$

Rozwiązanie to wyznaczone jest z dokładnością do dowolnej całki ogólnej równania jednorodnego $L^n[u] = 0$.

Wykorzystując przytoczone twierdzenie przyjmiemy

$$\tilde{w}_1(x_1, \alpha) = A \operatorname{ch} \alpha x_1 + B \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1 + C \operatorname{sh} \alpha x_1 + D \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1, \tag{2.5}$$

a stałe $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ wyznaczymy z równań

$$\tilde{w}_1|_{x_1=a} = \tilde{w}_1^{(1)}|_{x_1=a} \,|= w_1^{(2)}|_{x_1=a} = 0,$$
$$\tilde{w}_1^{(3)}|_{x_1=a} = 1,$$

otrzymując przy oznaczeniu $\lambda = \alpha a$

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2\alpha^3}[\lambda \operatorname{ch} \lambda - \operatorname{sh} \lambda], \\ B &= \frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{ch} \lambda, \\ C &= -\frac{1}{2\alpha^3}[\operatorname{ch} \lambda - \lambda \operatorname{sh} \lambda], \\ D &= -\frac{1}{2\alpha^3} \operatorname{sh} \lambda. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Zatem rozwiązanie problemu (2.3), (2.4) będzie miało postać

$$\begin{aligned} \tilde{w} = \frac{1}{4\alpha^3}\{&(\operatorname{sh}\lambda - \lambda \operatorname{ch}\lambda)\operatorname{ch}\alpha x_1 + (\operatorname{ch}\lambda)\alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + \\ &+ (\lambda \operatorname{sh}\lambda - \operatorname{ch}\lambda)\operatorname{sh}\alpha x_1 - (\operatorname{sh}\lambda)\alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1\}[H(x_1 - a) - H(a - x_1)] + \\ &+ C_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh}\alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Wyrażenie

$$\tilde{w}_0 = C_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + C_2 \alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh}\alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1$$

oznacza tutaj (zgodnie z twierdzeniem) całkę ogólną równania

$$[d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w}_0 = 0.$$

Wyznaczając stałe C_1, C_2, C_3, C_4 z warunków (2.4) otrzymuje się przy oznaczeniach

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(\alpha) &= \operatorname{sh}\lambda - \lambda \operatorname{ch}\lambda,\\
\varphi_2(\alpha) &= \lambda \operatorname{sh}\lambda,\\
\varphi_3(\alpha) &= (1-\nu)(\varkappa-\lambda)(\operatorname{ch}\lambda \operatorname{ch}\varkappa - \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\varkappa) + (1+\nu)(\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\varkappa - \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\varkappa),\\
\varphi_4(\alpha) &= (\lambda-\varkappa)(1-\nu)(\operatorname{ch}\lambda \operatorname{sh}\varkappa - \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\varkappa) - 2\operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\varkappa + 2\operatorname{ch}\lambda \operatorname{ch}\varkappa,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

gdzie $\varkappa = \alpha b$, wielkości

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\varphi_1}{4\alpha^3},\\
C_2 &= \frac{1}{4\alpha^3}\left\{\frac{\varphi_3[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa - (1-\nu)\varkappa \operatorname{ch}\varkappa] - \varphi_4(2\operatorname{ch}\varkappa + (1-\nu)\varkappa \operatorname{sh}\varkappa]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2\varkappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2\varkappa^2} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{\varphi_2[2(1-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2\varkappa] + \varphi_1(1-\nu)[(3+\nu)\operatorname{sh}\varkappa \operatorname{ch}\varkappa - \varkappa(1-\nu)]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2\varkappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2\varkappa^2}\right\},\\
C_3 &= \frac{-1}{4\alpha^3}\left\{\frac{\varphi_3[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa - (1-\nu)\varkappa \operatorname{ch}\varkappa] - \varphi_4[2\operatorname{ch}\varkappa + (1-\nu)\varkappa \operatorname{sh}\varkappa] - \varphi_2[2(1+\nu) - \varkappa^2(1-\nu^2)]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2\varkappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2\varkappa^2} + \right.\\
&\quad \left. + \frac{\varphi_1(1-\nu)[(3+\nu)\operatorname{sh}\varkappa \operatorname{ch}\varkappa - (1-\nu)\varkappa]}{2(1-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa + (1-\nu^2)\operatorname{sh}^2\varkappa + 2(1+\nu) + (1-\nu)^2\varkappa^2}\right\},\\
C_4 &= \frac{-1}{4\alpha^3}\left\{\frac{\varphi_3 \operatorname{ch}\varkappa + \varphi_4 \operatorname{sh}\varkappa + \varphi_1}{2\operatorname{ch}^2\varkappa + (1+\nu)\operatorname{sh}^2\varkappa} - C_2\frac{(3+\nu)\operatorname{sh}\varkappa \operatorname{ch}\varkappa + (1-\nu)\varkappa}{2\operatorname{ch}^2\varkappa + (1-\nu)\operatorname{sh}^2\varkappa}\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

W ten sposób uzyskano rozwiązania dla transformaty.

Aby efektywnie znaleźć funkcję $w(x_1, x_2)$ należy na wyrażeniu (2.7) wykonać transformację odwrotną $\mathscr{F}_0^{-1}$.

Ze względu na złożoną budowę stałych $C_1, \ldots, C_0$, wykonanie tej operacji jest uciążliwe. Pomocna jest tutaj przybliżona procedura KRYŁOWA [6] obliczania całek Fouriera. Pozwala ona, z dowolną w zasadzie dokładnością, wyznaczyć poszukiwaną funkcję.

Zauważmy przed tym, że wyrażenie

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}_1 = \frac{1}{4\alpha^3}\{&(\operatorname{sh}\lambda - \lambda \operatorname{ch}\lambda)\operatorname{ch}\alpha x_1 + \operatorname{ch}\lambda \alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 +\\
&+ (\lambda \operatorname{sh}\lambda - \operatorname{ch}\lambda)\operatorname{sh}\alpha x_1 - \operatorname{sh}\lambda \alpha x_1\}[H(x_1-a) - H(a-x_1)]
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

po prostych przekształceniach może być doprowadzone do postaci

$$
\tilde{w}_1 = \frac{1}{4\alpha^3}\{\operatorname{sh}\alpha(a-x_1) - \alpha(a-x_1)\operatorname{ch}\alpha(a-x_1)\}[H(x_1-a) - H(a-x_1)].
\tag{2.11}
$$

Retransformatę tej funkcji wyznaczyć można w sposób ścisły. Mianowicie, zapisując najpierw

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1] = \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{-\alpha(a-x_1)}\right]+\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{a-x_1}{8\alpha^2}e^{-\alpha(a-x_1)}\right]-$$

$$-\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{\alpha(a-x_1)}\right]+\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{a-x_1}{8\alpha^2}e^{\alpha(a-x_1)}\right],$$

a następnie wykorzystując twierdzenie o splocie i przyjmując oznaczenie $a-x_1 = \xi_1$, można znaleźć [5] retransformaty składników

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{-\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi}[c_0 z^2\cdot\ln|z|] \ast \delta(z-i\xi_1),$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{8\alpha^3}e^{\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi}[c_0 z^2 - c_1 z^2\cdot\ln|z|] \ast \delta(z+i\xi_1),$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{\xi_1}{8\alpha^2}\cdot e^{-\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi}\xi_1|z| \ast \delta(z-i\xi_1),$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{\xi_1}{8\alpha^2}e^{\alpha\xi_1}\right] = \frac{1}{16\pi}\xi_1|z| \ast \delta(z+i\xi_1),$$

gdzie $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{2(-1)^3}{2!}\cos 2\frac{\pi}{2} = 1$. Funkcjonały δ są tutaj retransformatami odpowiednich funkcji wykładniczych.

Uwzględniając w dalszym ciągu własności splotu z δ-funkcjonałem i traktując otrzymane retransformaty jak analityczne funkcjonały zdefiniowane na przestrzeni funkcji próbnych $\mathscr{Z}$, a więc jak całki

$$\int_\Gamma f(z)\varphi(z)\alpha z; \qquad \varphi(z)\in\mathscr{Z}$$

(tutaj Γ jest drogą całkowania w płaszczyźnie zespolonej rozciągającą się od $-\infty$ do $+\infty$) oraz przyjmując $\operatorname{Im} z = \xi_1$ otrzymamy drogę całkowania określoną prostą $\psi = \arg z = \frac{\pi}{4}$; $z = r(\cos\psi + i\sin\psi)$ otrzymamy (z dokładnością do mnożnika i)

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1] = \frac{1}{16\pi}r^2\ln r^2 = \frac{1}{16\pi}(\xi_1^2+x_2^2)\ln(\xi_1^2+x_2^2).$$

Po podstawieniu w miejsce ξ^1 różnicy $a-x_1$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1] = \frac{1}{16\pi}[(a-x_1)^2+x_2^2]\ln[(a-x_1)^2+x_2^2]. \tag{2.12}$$

Tak więc pozostaje do wyznaczenia retransformata funkcji $\tilde{w}_0(\alpha_1\, x_1)$.

Stosując twierdzenie o splocie można napisać

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0] = \mathscr{F}_0^{-1}[C_1(\alpha)\operatorname{ch}\alpha x_1]+\mathscr{F}_0^{-1}[C_2(\alpha)\alpha x_1]\ast\mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{ch}\alpha x_1]+$$

$$+\mathscr{F}_0^{-1}[C_3(\alpha)]\ast\mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{sh}\alpha x_1]+\mathscr{F}_0^{-1}[C_4(\alpha)\alpha x_1]\ast\mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{sh}\alpha x_1].$$

Retransformatę stanowiącą pierwszy składnik sumy można znaleźć w sposób ścisły. Zauważmy w tym celu, że wyrażenie $C_1(\alpha)\text{ch}\alpha x_1$ można przekształcić do postaci

$$C_1(\alpha)\operatorname{ch}\alpha x_1 = \frac{1}{4\alpha^3}(\operatorname{sh}\lambda - \lambda\operatorname{ch}\lambda)\operatorname{ch}\alpha x_1 = \frac{-a}{4\alpha^2}\operatorname{ch}\alpha(a-x_1).$$

Wobec tego (przy $\xi_1 = a - x_1$)

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_1(\alpha)\operatorname{ch}\alpha x_1] = \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{-a}{8\alpha^2}\right] \ast \{\mathscr{F}_0^{-1}[e^{-\alpha\xi_1}] + \mathscr{F}_0^{-1}[e^{\alpha\xi_1}]\},$$

a stąd wykorzystując podane retransformaty oraz postępując w sposób opisany przy znajdowaniu retransformaty $\mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}_1]$ otrzymamy

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_1(\alpha)\operatorname{ch}\alpha x_1] = \frac{-a}{8\pi}\sqrt{x_2^2 + (a-x_1)^2}. \tag{2.13}$$

Do wyznaczenia pozostają więc retransformaty stanowiące trzy pozostałe składniki sumy. Uwzględniając, że

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{ch}\alpha x_1] = \frac{1}{2}[\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)],$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{sh}\alpha x_1] = \frac{1}{2}[\delta(z - ix_1) - \delta(z + ix_1)],$$

pozostaje znaleźć retransformaty funkcji C_2, C_3, C_4 i tutaj wykorzystać można metodę KRYŁOWA [6].

Trzeba w tym miejscu zaznaczyć, że oryginalna metoda Kryłowa dotyczy funkcji zmiennej rzeczywistej; inaczej mówiąc, retransformaty otrzymane w wyniku zastosowania tej metody będą dystrybucjami temperowanymi.

Korzystając z faktu, że przestrzeń dystrybucji temperowanych jest podprzestrzenią właściwą przestrzeni ultradystrybucji, dystrybucje temperowane mogą być rozszerzone do przestrzeni ultradystrybucji przez formalne zastąpienie zmiennej rzeczywistej zmienną zespoloną. W ten sposób w wyniku przeprowadzenia $\mathscr{F}_0^{-1}$ — operacji otrzymamy sumę splotów retransformat C_2, C_3, C_4 z przesuniętym δ -funkcjonałem. Wykorzystując własności odsiewające tego rodzaju splotów otrzymamy poszukiwane retransformaty, a zatem [uwzględniając (2.13)] funkcję $w_1(x_1, x_2)$.

W celu zastosowania metody Kryłowa przedstawimy funkcje C_2, C_3, C_4 w postaci

$$\alpha x_1 C_2 = \frac{\alpha x_1 C_2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{x_1 C_2^*}{(1+\alpha)^2},$$

$$C_3 = \frac{C_3(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{C_3^*}{(1+\alpha)^2},$$

$$\alpha x_1 C_4 = \frac{\alpha x_1 C_4(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{x_1 C_4^*}{(1+\alpha)^2}.$$

Następnie aproksymując funkcje C_2^*, C_3^*, C_4^* wielomianami Legendre'a otrzymamy

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\alpha x_1 C_2] \cong \frac{x_1}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1} C_2^*(\alpha_k)\sum_{l=0}^{n-1} A_{k,l}\int_0^\infty \cos\alpha z\cdot(1+\alpha)^{-l-2}d\alpha,$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_3] \cong \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1} C_3^*(\alpha_k)\sum_{l=0}^{n-1} A_{k,l}\int_0^\infty \sin\alpha z\cdot(1+\alpha)^{-l-2}d\alpha,$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\alpha x_1 C_4] \cong \frac{x_1}{4\pi}\sum_{k=0}^{n-1} C_4^*(\alpha_k)\sum_{l=0}^{n-1} A_{k,l}\int_0^\infty \sin\alpha z\cdot(1+\alpha)^{-l-2}d\alpha,$$

gdzie $A_{k,l}$ są współczynnikami stabelaryzowanymi w [6].

Przy oznaczeniach

$$B_l^i = \sum_{k=0}^{n-1} C_i^* A_{k,l},$$

$$\mathscr{I}^c_{-l-2} = \int_0^\infty (1+\alpha)^{-l-2}\cos\alpha z\,dx, \qquad \mathscr{I}^s_{-l-2} = \int_0^\infty (1+\alpha)^{-l-2}\sin\alpha z\,d\alpha,$$

otrzymujemy

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_2\alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi}\sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathscr{I}^c_{-l-2},$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_3] \cong \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{n-1} B_l^3 \mathscr{I}^s_{-l-2}, \tag{2.14}$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_4\alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi}\sum_{l=0}^{n-1} B_l^4 \mathscr{I}^s_{-l-2}.$$

Można więc napisać

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_2\alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1]^2 \cong \frac{x_1}{4\pi}\sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathscr{I}^c_{-l-2}(z) * [\delta(z-ix_1)+\delta(z+ix_1)],$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_3 \operatorname{sh}\alpha x_1] \cong \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{n-1} B_l^3 \mathscr{I}^s_{-l-2}(z) * [\delta(z-ix_1)-\delta(z+ix_1)], \tag{2.15}$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[C_4\alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi}\sum_{l=0}^{n-1} B_l^4 \mathscr{I}^s_{-l-2}(z) * [\delta(z-ix_1)-\delta(z+ix_1)].$$

Całki $\mathscr{I}^{s}_{-l-2}$ oraz $\mathscr{I}^{c}_{-l-2}$ obliczyć można efektywnie; całkując bowiem przez części otrzymujemy w końcu

$$\mathscr{I}^{c}_{-1} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos \alpha z}{(1+\alpha)} d\alpha = -\sin z \operatorname{si} z - \cos z \operatorname{ci} z,$$

$$\mathscr{I}^{s}_{-1} = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin \alpha z}{(1+\alpha)} d\alpha = \sin z \operatorname{ci} z - \cos z \operatorname{si} z.$$

Jak widać, poza całkowaniem wszystkie pozostałe czynności wykonać można na maszynie cyfrowej, co znacznie poprawia efektywność metody.

Po znalezieniu retransformat (2.14), traktując je jak funkcjonały analityczne i wybierając drogę całkowania $\arg z = \pi/4$ otrzymamy w wyniku funkcje zmiennej rzeczywistej, podobnie jak w przypadku poszukiwania funkcji $w_0(x_1, x_2)$. Ostatecznie będzie więc

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{16\pi} [(a-x_1)^2 + x_2^2] \ln[(a-x_1)^2 + x_2^2] - \\ - \frac{a}{8\pi} \sqrt{(a-x_1)^2 + x_2^2} + R(x_1, x_2, a, b). \tag{2.16}$$

Przez $R(x_1, x_2, a, b)$ oznaczono tu sumę retransformat (2.15) przy uwzględnieniu własności splotu z δ — funkcjonałem.

3. Zadanie II

Zachowując poprzednie oznaczenia, zadanie sprowadza się formalnie do problemu brzegowego

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \delta(x_2), \tag{3.1}$$

$$w\Big|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (z-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\Big|_{\Gamma_1} = 0.$$

W celu znalezienia rozwiązania zastosowano postępowanie analogiczne do opisanego w punkcie 2, a więc zakładając $w \in \mathscr{Z}^*$ i wykonując na równaniu (3.1) oraz na warunkach brzegowych (3.2) uogólnioną transformację Fouriera, problem równoważny w przestrzeni $\mathscr{F}_0$ — obrazu będzie miał postać

$$[d^2 - \alpha^2]^2 \tilde{w} = 1, \tag{3.3}$$

$$\tilde{w}|_{\Gamma_0} = \tilde{w}^{(1)}|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$\tilde{w}^{(2)} - \alpha^2 \nu \tilde{w}|_{\Gamma_1} = 0, \tag{3.4}$$

$$\tilde{w}^{(3)} - (2-\nu)\alpha^2 \tilde{w}^{(1)}|_{\Gamma_1} = 0.$$

Wykorzystując pierwsze z przytoczonych w punkcie 2 twierdzeń, przyjęto całkę równania (3.3) w postaci

$$\tilde{w} = A\operatorname{ch}\alpha x_1 + B\alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + C\operatorname{sh}\alpha x_1 + D\alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1. \tag{3.5}$$

Wyznaczając następnie stałe metodą wariacji otrzymuje się

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2\alpha^4}[\alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1 - 2\operatorname{ch}\alpha x_1] + C_1, \\ B &= \frac{1}{2\alpha^4}\operatorname{sh}\alpha x_1 + C_2, \\ C &= \frac{-1}{2\alpha^4}[2\operatorname{sh}\alpha x_1 - \alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1] + C_3, \\ D &= \frac{-1}{2\alpha^4}\operatorname{ch}\alpha x_1 + C_4. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Podstawiając znalezione funkcje do (3.5) stwierdzimy, że całka szczególna ma postać

$$\tilde{w}_1(x_1, \alpha) = \frac{1}{\alpha^4}, \tag{3.7}$$

skąd całka równania (3.3) wyraża się wzorem

$$\tilde{w} = \frac{1}{\alpha^4} + C_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + C_2\alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 + C_3 \operatorname{sh}\alpha x_1 + C_4 \alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1. \tag{3.8}$$

Stałe C_1, C_2, C_3, C_4 — wyznaczyć należy z warunków brzegowych (3.4). Otrzymuje się wtedy

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\alpha^4}, \\ C_2 &= \frac{(3-\nu^2)\operatorname{sh}\varkappa\operatorname{ch}\varkappa + \nu[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa - (1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa] - (1-\nu)\varkappa[(2-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa - 1]}{\alpha^4[(3-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa - (1-\nu)^2\varkappa^2 + (1+\nu)]}, \\ C_3 &= \frac{-1}{\alpha^4}, \\ C_4 &= \frac{1}{\alpha^4}\left\{\frac{(1-\nu)\operatorname{sh}\varkappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa - (1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa} - \right. \\ &\quad - \frac{(3-\nu^2)\operatorname{sh}\varkappa\operatorname{ch}\varkappa + \nu[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa - (1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa] - (1-\nu)[(2-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa - 1]}{(3-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa - (1-\nu)\varkappa^2 + (1+\nu)} \times \\ &\quad \left. \times \frac{2\operatorname{ch}\varkappa - (1-\nu)\varkappa\operatorname{sh}\varkappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa - (1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa}\right\}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdzie oznaczono $\varkappa = \alpha b$.

Ostatecznie więc transformata rozwiązania ma postać

$$\tilde{w}(x_1, \alpha) = \frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^4}[\operatorname{ch}\alpha x_1 - \operatorname{sh}\alpha x_1] + \tag{3.10}$$

$$+\frac{1}{\alpha^4}\left\{\frac{(3-\nu^2)\operatorname{sh}\varkappa\operatorname{ch}\varkappa+\nu[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa]-(1-\nu)\varkappa[(2-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-1]}{(3-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-(1-\nu)^2\varkappa^2+(1+\nu)}\alpha x_1\operatorname{ch}\alpha x_1+\right.$$

$$+\left[\frac{(1-\nu)\operatorname{sh}\varkappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa}-\right.$$

$$-\frac{(3-\nu^2)\operatorname{sh}\varkappa\operatorname{ch}\varkappa+\nu[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa]-(1-\nu)[(2-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-1]}{(3-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-(1-\nu)^2\varkappa^2+(1+\nu)}\times$$

$$\left.\left.\times\frac{2\operatorname{ch}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{sh}\varkappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa}\right]\alpha x_1\operatorname{sh}\alpha x_1\right\}.$$

Transformatę tej funkcji znajdziemy w sposób podobny jak w zadaniu I; zauważmy przy tym, że drugi składnik sumy można zapisać w postaci

$$\frac{1}{\alpha^4}[\operatorname{ch}\alpha x_1 - \operatorname{sh}\alpha x_1] = \frac{1}{\alpha^4}e^{-\alpha x_1}, \qquad \alpha\in(+\infty, -\infty).$$

Mamy więc

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^4}\right] = \frac{1}{12}z^3\operatorname{sgn}z,$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^4}e^{-\alpha x_1}\right] = \frac{1}{12}z^3\operatorname{sgn}z \divideontimes \delta(z-ix_1).$$

Podobnie jak poprzednio, traktując retransformaty jak funkcjonały analityczne, otrzymamy

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^4}\right] &= \frac{1}{12}x_2^3\operatorname{sgn}x_2,\\ \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^4}e^{-\alpha x_1}\right] &= \frac{1}{12}(x_1^2+x_2^2)^{3/2}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Oznaczając dla uproszczenia

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{\alpha^3}\frac{(3-\nu^2)\operatorname{sh}\varkappa\operatorname{ch}\varkappa+\nu[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa]-(1-\nu)\varkappa[(2-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-1]}{(3-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-(1-\nu)^2\varkappa^2+(1+\nu)},\\ \Phi_2 &= \frac{1}{\alpha^3}\left\{\frac{(1-\nu)\operatorname{sh}\varkappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa}-\right.\\ &-\frac{(3-\nu^2)\operatorname{sh}\varkappa\operatorname{ch}\varkappa+\nu[(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa]-(1-\nu)[(2-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-1]}{(3-\nu)\operatorname{ch}^2\varkappa-(1-\nu)^2\varkappa^2+(1+\nu)}\times\\ &\left.\times\frac{2\operatorname{ch}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{sh}\varkappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\varkappa-(1-\nu)\varkappa\operatorname{ch}\varkappa}\right\},\end{aligned}\tag{3.12}$$

a następnie (w celu zastosowania metody Kryłowa)

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_1(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_1^*}{(1+\alpha)^2},$$

$$\Phi_2 = \frac{\Phi_2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_2^*}{(1+\alpha)^2},$$

dostaniemy (przy zachowaniu oznaczeń p. 2.)

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_1 \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^1 \mathscr{I}_{-l-2}^c(z),$$

$$\mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathscr{I}_{-l-2}^s(z),$$

czyli:

$$\begin{aligned} &\mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_1 \alpha x_1 \operatorname{ch} \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^1 \mathscr{I}_{-l-2}^c(z) \ast [\delta(z+ix_1)+\delta(z-ix_1)], \\ (3.13) \qquad &\\ &\mathscr{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1 \operatorname{sh} \alpha x_1] \cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathscr{I}_{-l-2}^s(z) \ast [\delta(z+ix_1)-\delta(z-ix_1)]. \end{aligned}$$

Ostatecznie więc retransformata funkcji będąca rozwiązaniem problemu (3.1), (3.2) ma postać

$$(3.14) \qquad w(x_1 x_2) = \frac{1}{12} x_2^3 \operatorname{sgn} x_2 + \frac{1}{12}(x_1^2+x_2^2)^{3/2} + R(x_1, x_2, b),$$

gdzie przez $R(x_1, x_2, b)$ oznaczono sumę retransformat (3.13) (po uwzględnieniu własności splotu).

4. Zadanie III

Zachowując poprzednie oznaczenia, przy przyjęciu sztywności płytowej $K = 1$ zadanie sprowadza się do rozwiązania problemu brzegowego

$$(4.1) \qquad \nabla^2\nabla^2 w = 0,$$

$$\begin{aligned} & w\Big|_{\Gamma_0} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\Big|_{\Gamma_0} = 0, \\ (4.2) \qquad & \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\Big|_{\Gamma_1} = 0, \\ & \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2}\Big|_{\Gamma_1} = -\delta(x_2). \end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania może być skonstruowane również metodami klasycznymi (patrz np. [4]). Tym niemniej utrzymano w mocy wszystkie założenia czynione przy rozwiązywaniu poprzednich zadań. Postępowanie to ma na celu wykazanie zupełnego podobieństwa formalnego samego toku postępowania oraz stwierdzenie, że otrzymany wynik jest identyczny z wynikiem znanym z literatury, a otrzymanym przy innych założeniach.

Zakładając, podobnie jak poprzednio, $w \in \mathscr{X}^*$ i wykonując na równaniu (4.1) oraz na warunkach brzegowych (4.2) uogólnioną transformację, otrzymuje się równoważne zadanie w przestrzeni $\mathscr{F}_0$ — obrazu,

$$[d^2-\alpha^2]^2\tilde{w} = 0, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}|_{\Gamma_0} &= \tilde{w}^{(1)}|_{\Gamma_0} = 0,\\ \tilde{w}^{(2)}-\alpha^2\nu\tilde{w}|_{\Gamma_1} &= 0,\\ \tilde{w}^{(3)}-(2-\nu)\alpha^2\tilde{w}^{(1)}|_{\Gamma_1} &= -1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Wykorzystując znowu pierwsze z twierdzeń cytowanych w punkcie 2 i przyjmując całkę równania (4.3) w postaci

$$\tilde{w}(x_1, \alpha) = A\operatorname{ch}\alpha x_1 + B\alpha x_1\operatorname{ch}\alpha x_1 + C\operatorname{sh}\alpha x_1 + D\alpha x_1\operatorname{sh}\alpha x_1, \tag{4.5}$$

następnie wyznaczając stałe w zwykły sposób z warunków (4.4) otrzymuje się

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= 0,\\ B(\alpha) &= \frac{-1}{\alpha^3}\,\frac{2\operatorname{ch}\lambda+(1-\nu)\lambda\operatorname{sh}\lambda}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\lambda-(1-\nu)^2\lambda^2-4\operatorname{ch}^2\lambda},\\ C(\alpha) &= -B(\alpha),\\ D(\alpha) &= \frac{1}{\alpha^3}\,\frac{(1+\nu)\operatorname{sh}\lambda-(1-\nu)\lambda\operatorname{ch}\lambda}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\lambda-(1-\nu)^2\lambda^2-4\operatorname{ch}^2\lambda},\\ \lambda &= \alpha b. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Transformata rozwiązania wyraża się więc wzorem

$$\tilde{w}(x_1\ \alpha) = \frac{1}{\alpha^3}\left\{\frac{2\operatorname{ch}\lambda+(1-\nu)\lambda\operatorname{sh}\lambda}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\lambda-(1-\nu)^2\lambda^2-4\operatorname{ch}^2\lambda}[\operatorname{sh}\alpha x_1-\alpha x_1\operatorname{ch}\alpha x_1]+\right.$$
$$\left.+\frac{(1+\nu)\operatorname{sh}\lambda-(1-\nu)\lambda\operatorname{ch}\lambda}{(1+\nu)\operatorname{sh}^2\lambda-(1-\nu)^2\lambda^2-4\operatorname{ch}^2\lambda}\,\alpha x_1\operatorname{sh}\alpha x_1\right\}. \tag{4.7}$$

I w tym przypadku retransformatę znaleźć można metodą Kryłowa, z tym jednak, że może być ona tutaj stosowana w postaci oryginalnej, ponieważ funkcja jako całość (a nie jeden tylko z czynników iloczynów) spełnia warunki dopuszczające stosowanie metody; oznacza to, że rozwiązanie (4.7) jest dystrybucją temperowaną. Jeżeli jednak mimo to pozostaniemy przy dotychczasowym trybie postępowania, otrzymamy

$$w(x_1, x_2) = \mathscr{F}_0^{-1}[\tilde{w}] = \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^3}\Phi_1\right] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{sh}\alpha x_1]-$$
$$-\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{\alpha^2}\Phi_1\right] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{ch}\alpha x_1]+\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{\alpha^2}\Phi_2\right] \ast \mathscr{F}_0^{-1}[\operatorname{sh}\alpha x_1]$$

i dalej

$$w(x_1, x_2) = \mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{1}{\alpha^3}\Phi_1\right] \ast \frac{1}{4\pi}[\delta(z-ix_1)-\delta(z+ix_1)]- \tag{4.8}$$

$$-\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{\alpha^2}\Phi_1\right] \ast \frac{1}{4\pi}[\delta(z-ix_1)+\delta(z+ix_1)]+$$

$$+\mathscr{F}_0^{-1}\left[\frac{x_1}{\alpha^2}\Phi_2\right] \ast \frac{1}{4\pi}[\delta(z-ix_1)-\delta(z+ix_1)],$$

gdzie

$$\Phi_1 = \frac{2\operatorname{ch}\lambda+(1-\nu)\lambda\operatorname{sh}\lambda}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\lambda-(1-\nu)^2\lambda^2-4\operatorname{ch}^2\lambda},$$

$$\Phi_2 = \frac{(1+\nu)\operatorname{sh}\lambda-(1-\nu)\lambda\operatorname{ch}\lambda}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\lambda-(1-\nu)^2\lambda^2-4\operatorname{ch}^2\lambda}.$$

Kładąc

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{\Phi_1(1+\alpha)^2}{(1+\alpha_1)^2} = \frac{\Phi_1^*}{(1+\alpha)^2},\\ \Phi_2 &= \frac{\Phi_2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_2^*}{(1+\alpha)^2},\end{aligned} \tag{4.9}$$

będzie ostatecznie

$$w(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi}\left\{\sum_{l=0}^{n-1} B_l^1 \mathscr{I}^s_{-l-2}(z) \ast [\delta(z-ix_1)-\delta[z+ix_1)]- \right. \tag{4.10}$$

$$-x_1\sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathscr{I}^c_{-l-2}(z) \ast [\delta(z-ix_1)+\delta(z+ix_1)]+$$

$$\left. +x_1\sum_{l=0}^{n-1} B_l^3 \mathscr{I}^s_{-l-2}(z) \ast [\delta(z-ix_1)-\delta(z+ix_1)]\right\}.$$

Tutaj oznaczono

$$B_l^1 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Phi_1^*(\alpha_k)}{\alpha_k^3}\cdot A_{k,l},$$

$$B_l^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Phi_1^*(\alpha_k)}{\alpha_k^2}\cdot A_{k,l},$$

$$B_l^3 = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Phi_2^*(\alpha_k)}{\alpha_k^2}\cdot A_{k,l}.$$

5. Zakończenie

Podsumowując wyniki przeprowadzonych rozważań pragniemy uczynić kilka uwag. Podkreślimy wyraźnie przede wszystkim te miejsca, w których stosowanie ultradystrybucji okazało się istotne.

I tak w zadaniu I, przy obliczeniu retransformaty $\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{w}_0]$, należało obliczyć transformacje odwrotne funkcji hiperbolicznych. Retransformaty te nie istnieją w zwykłym sensie, ale jak pokazano z łatwością udało się je wyznaczyć jako kombinację δ — funkcjonałów. Do tego celu konieczne jednak było uciec się do przestrzeni funkcji próbnych $\mathcal{Z}$, a dla zwiększenia zakresu możliwości transformacji Fouriera — do przestrzeni ultradystrybucji $\mathcal{Z}^*$. Właśnie ta okoliczność okazała się tutaj bardzo użyteczna, a naszym zdaniem dla potrzeb obliczeń praktycznych — wręcz cenna. Otóż dzięki temu, że retransformaty funkcji zawierających zmienną x_1 dały się tak łatwo wyznaczyć i to w postaci zamkniętej, wystarczyło zastosować efektywną metodę przybliżonego całkowania tylko do czynników nie zawierających zmiennej x_1 jako parametru.

Ułatwia to znacznie obliczenia numeryczne, które w przeciwnym przypadku musiałyby być powtórzone dla każdej ustalonej wartości parametru.

Podobna sytuacja miała miejsce w zadaniu II oraz III. Analogiczne okoliczności dały się zaobserwować przy wyprowadzeniu wzorów (2.12) i (3.11).

Wykorzystanie teorii dystrybucji nie ogranicza się, rzecz jasna, do zadań o strukturze tak prostej jak te, które były analizowane w niniejszej pracy. Przy pomocy aparatu ultradystrybucji można dogodnie i zręcznie rozwiązać bardziej złożone zagadnienia. Niektóre rezultaty w tym zakresie będą przedmiotem oddzielnego opracowania autorów.

Literatura cytowana w tekście

1. Р. Эдвардс, *Функциональный анализ, теорня и придожения*, Изд. Мир, Москва 1969.
2. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, вып. I, *Пбобщенные фуикции и действия над ними*, Гос.-Издат., Физ.-Мат. Лит., Москва 1961.
3. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции*, вып. 2, *Пространства основных и обобщенных функции* Гос.-Изд., Физ.-Мат. Лит, Москва 1961.
4. K. Girkmann, *Dźwigary powierzchniowe* (tłum. z wyd. IV)., Arkady, Warszawa 1957.
5. S. G. Krejn i in., *Analiza funkcjonalna*, PWN, Warszawa 1967.
6. В. Я. Крылов, Л. Г. Кругликова, *Справочная книга по численному гармоническому анализу*, Изд. Наука и Техн., Минск 1968.
7. A. Zemanian, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, PWN, Warszawa 1969.

Резюме

ПРИМЕРЫ ОБОБЩЁННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ПОЛОСЫ

В работе дано применение обобщённого преобразования Фурье к граничным задачам теории плит. Предложенный метод характеризуется прежде всего большой универсальностью и оказывается удобным и в тех случаях, когда решение можно получить при помощи классических методов. Авторы стремились показать удобства, какие несёт применение обобщённого преобразования Фурье. В частности, как это показано на примерах, при данном подходе более удобно применять всякие приближённые методы вычисления интегралов Фурье путем применения теоремы о свертках в пространстве обобщённых функции.

Summary

EXAMPLES OF ULTRADISTRIBUTION SOLUTIONS FOR PLATE STRIPS

The paper presents the applications of Fourier transforms (generalized to the space of ultra-distributions) to the boundary value problems of the theory of plates. The approach presented is characterized, first of all, by a considerable generality and proves to be convenient even in the cases which may be solved by classical methods.

The paper is aimed at demonstrating the effectiveness of the method in such classical cases. In particular, the examples prove that all the approximate methods of evaluation of Fourier integrals may be used much more rationally by applying the convolution theorem in the space of ultradistributions.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 maja 1972 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

KOLOKWIA

Podajemy uzupełniający wykaz kolokwiów «EUROMECHU»:

1973 r.

40. Transonic Aerodynamics 3–6 września 1973 Stockholm	Dr. Drougge Aerodynamics Dept. FAA Bromma, Szwecja
41. Flows with Concentrated Vorticity wrzesień 1973 Norwich	Prof. N. Riley University of East Anglia Norwich, Anglia
42. Dynamics of Rarefied Gases 2–4 lipca 1973 Göttingen	Prof. W. Wuest DFVLR — AVA Göttingen, NRF
43. Heat Transfer in Turbulent Boundary Layers maj lub czerwiec 1973 Göttingen	Dr. J. Rotta, Dr H. U. Meier DFVLR — AVA Göttingen, NRF
44. The Dynamics of Machine Foundations wrzesień 1973 Bucuresti	Prof. Gh. Buzdugan Institutul Politechnic Bucuresti, Bucuresti, Rumunia
45. The Mathematical Properties of Interfaces between Two-Phase Fluids październik 1973 Palermo	Prof. G. Marrucci Facoltà di Ingegneria Università di Palermo Palermo, Włochy

1974 r.

46. Numerical and Experimental Investigations of the Stability of Boundary Layers 1974 Oberwolfach	Prof. R. Eppler Universität Stuttgart Inst. A für Mechanik Stuttgart, NRF
47. Kinetics in Shock Tubes 1974 Southampton	Prof. K.N.C. Bray The University Highfield Southampton, Anglia

Na 1974 rok przewiduje się również następujące kolokwia: Kolokwium na temat «Stability in Non-linear Elasticity» — Prof. dr Z. Wesołowski, Warszawa; Kolokwium na temat «Large Elastic Plastic Deformations» — Prof. dr A. Sawczuk, Warszawa; Kolokwium na temat «Thermoplasticity» — Prof. dr P. Perzyna, Warszawa.

Koledzy zainteresowani w uczestnictwie w tych kolokwiach proszeni są o poinformowanie o tym jednego z korespondentów krajowych Komitetu EUROMECH (W. Fiszdon, W. Nowacki, H. Zorski).

SPRAWOZDANIE Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W III I IV KWARTALE 1972 r.

W okresie sprawozdawczym zorganizowano 24 zebrania i sesje naukowe, na których wygłoszono 43 referaty o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba uczestników	Liczba dyskutantów
			Oddział w Bydgoszczy		
1	17.11	B. Siołkowski	Modelowanie dynamiczne wału z mieszadłem cieczy	11	6
2		W. Weiner	Badania porównawcze rozszerzalności liniowej tworzyw sztucznych	11	5
3	08.12	Z. Mróz (Warszawa)	II Kongres Nauki Polskiej, Sekcja Mechaniki	38	5
4		T. Kabat	Zastosowanie mechaniki w konstrukcjach		
5		K. Wernerowski	Zastosowanie mechaniki w budowie maszyn		
6		B. Szołkowski	Mechanika ciała stałego		
			Oddział w Częstochowie		
7	12.10	W. Nowacki (Warszawa)	Liniowa mikropolarna teoria sprężystości	56	6
8	22.11	J. Szargut (Gliwice)	Zagadnienia optymalizacji rekuperatorów i kotłów bezpaleniskowych	32	6
9	29.11	Z. Parszewski J. Stelmarczyk (Łódź)	Zebranie dyskusyjne nad referatami Sekcji Mechaniki na II Kongres Nauki Polskiej	30	7
10	20.12	K. Kleja	Metody badawcze w przemyśle motoryzacyjnym na tle prac specjalistycznych ośrodków brytyjskich	22	6
			Oddział w Gdańsku		
11	21.10	M. Skowronek	O rozwiązaniach dotyczących pewnej klasy powłok	12	4
12	08.11	W. Pietraszkiewicz	Problematyka naukowa w niektórych uniwersytetach USA	28	10
13	02.12	J. Więckowski P. Wilde R. Puzyrewski	Dyskusja nad referatami Sekcji Mechaniki Komitetu Organizacyjnego II Kongresu Nauki Polskiej	15	8
			Oddział w Gliwicach		
14	30.11	J. Wojnarowski J. Żmuda	Podstawowe problemy równowagi szczeliny w ośrodku sprężystym	25	5
15		W. Bogusz (Kraków)	Referat z zakresu mechaniki ciała stałego na II Kongres Nauki Polskiej	26	10
16		J. Antoniak	Referat z zakresu zastosowań mechaniki na II Kongres Nauki Polskiej	26	4
			Oddział w Krakowie		
17	07.7	G. Ludvig (Budapeszt)	Eliminacja drgań samowzbudnych tłumikiem Lanchestera	32	13

18	23.11	P. Ilgakojis (Kowno)	Ochrona obiektów przed wymuszeniami o niskiej częstotliwości	32	8
19	06.12	W. Bogusz	Mechanika ciała stałego (Omówienie referatu na II Kongres Nauki Polskiej)		
20		G. Szefer	Zastosowania mechaniki (II Kongres)		
21		B. Olszowski	Mechanika cieczy i gazów (II Kongres)	28	12
			Oddział w Łodzi		
22	12.10	M. Hincz	Prędkości krytyczne wałów podpartych podatnie	17	5
23	30.11	S. Konieczny	Równania dyskretnej teorii sprężystości dla siatek o prostej strukturze	10	4
24		P. Klem	Pewne zagadnienia statyki ustrojów siatkowych		3
25	07.12	Z. Parszewski	Informacja o przygotowaniach do II Kongresu Nauki Polskiej	42	11
26		M. Suchar	Omówienie referatu Podsekcji Mechaniki Ciała Stałego		
27		Z. Kazimierski	Omówienie referatu Podsekcji Mechaniki Cieczy i Gazów		
28		Z. Parszewski	Omówienie referatu Podsekcji Zastosowań Mechaniki		
			Oddział w Poznaniu		
29	28.11	St. Wiśniewski	Zastosowania mechaniki (skrót referatów na II Kongres Nauki Polskiej)	42	10
30	18.12	K. Piszczek	Wpływ zaburzeń przypadkowych na drgania samowzbudne	20	4
			Oddział w Rzeszowie		
31	14.4	A. Świder	Drgania samowzbudne w procesie przeciągania		
32		W. Żylski	Analiza drgań wieży i przewodu wiertniczego		
33		Z. Bychawski	O rozwoju i zadaniach mechaniki teoretycznej i stosowanej w świetle współczesnych możliwości analizy układu		
			Oddział w Szczecinie		
34	01.12	M. Kosecki	Praktyczne możliwości stosowania metody plastycznego wyrównania momentów do oceny nośności konstrukcji z betonu zbrojonego	21	4
			Oddział w Warszawie		
35	13.11	E. Olszewski	Jak z mechaniki teoretycznej wyodrębniła się stosowana	29	13
36		Z. Mazurkiewicz i D. Mazurkiewicz	Polskie tradycje w mechanice teoretycznej i stosowanej		
37		J. Mutermilch	Feliks Jasiński — inżynier i uczony		
38		Z. Olesiak	Stulecie urodzin Prof. M. T. Hubera i Prof. A. Przeborskiego		
39	18.12	P. Perzyna	Mechanika ciała stałego		
40		W. Fiszdon	Mechanika cieczy i gazów		
41		Z. Kączkowski	Zastosowania mechaniki (Zebranie w ramach dyskusji nad tezami na II Kongres Nauki Polskiej)	28	12

O d d z i a ł w e W r o c ł a w i u

42	13.11	H. Dąbrowski	Krystaliczne materiały modelowe w doświadczalnej analizie naprężeń na przykładzie chlorku srebra	15	3
43	18.12		Dyskusja nad tezami referatu podsesji zastosowań mechaniki na II Kongres Nauki Polskiej		

W ramach przygotowań do II Kongresu Nauki Polskiej PTMTS zorganizowało szeroko zakrojoną akcję dyskusyjną nad referatami z zakresu mechaniki opracowanymi przez Komitet Organizacyjny Kongresu. Podczas zebrań ustosunkowywano się do referatów Podsekcji wchodzących w skład Sekcji Mechaniki, mianowicie Podsekcji: mechaniki ciała stałego, mechaniki cieczy i gazów oraz zastosowań mechaniki.

Sympozja i konferencje naukowe

O d d z i a ł w P o z n a n i u był współorganizatorem Międzynarodowej Konferencji Drgań Nieliniowych, która odbyła się w Poznaniu w dniach 29.VIII—4.IX 1972 r. Sprawozdanie z konferencji zamieszczamy oddzielnie.

O d d z i a ł w G d a ń s k u zorganizował w dniach 24—25 listopada 1972 r. sympozjum pt. «Metody numeryczne w mechanice», w którym uczestniczyło 140 osób. Wygłoszono następujące referaty:

1. R. Rohatyński, J. Salamon, *Zagadnienie zbieżności procesu iteracyjnego przy projektowaniu wirników pomp metodą hydrodynamicznych punktów osobliwych,*
2. Z. Nowak, W. Prosnak, A. Styczek, *O automatycznym obliczaniu warstwy przyściennej wokół profilu dowolnego kształtu,*
3. A. Miller, *Modele matematyczne stopnia i grupy stopni turbinowych,*
4. Z. Rudnicki, *Zastosowanie metody Monte-Carlo do badania przepływu ciepła przez promieniowanie w komorach pieców ogrzewczych,*
5. K. Dems, *Zastosowanie wielomianów Hermite'a do wyznaczania macierzy sztywności w metodzie elementów skończonych,*
6. A. Styczek, *Numeryczne rozwiązania zagadnień brzegowo-początkowych dla pewnej klasy układów parabolicznych,*
7. E. Walicki, *Uogólnione zagadnienie brzegowe dla eliptycznego równania różniczkowego,*
8. B. Mochnacki, *Przybliżona metoda rozwiązywania równania przewodnictwa,*
9. K. Dems, *Wielostopniowa synteza macierzy sztywności,*
10. J. Pyzik, *Numeryczne rozwiązanie pewnych zagadnień brzegowo-początkowych dla równań typu parabolicznego,*
11. B. Olszowski, J. Orkisz, G. Szefer, Z. Waszczyszyn, *Dynamika układów linowo-prętowych przy obciążeniach wywołanych działaniem prądów zwarciowych,*
12. W. Kobza, *Zastosowanie twierdzenia Greena w metodzie elementów skończonych na przykładzie cienkiej zginanej płyty,*
13. W. Przybyło, *Algorytmizacja obliczeń drgań przestrzennych prefabrykowanych układów szkieletowych,*
14. A. Jabłoński, Z. Waszczyszyn, *Zastosowanie transformacji Laplace'a do obliczania powłok cylindrycznych dowolnie obciążonych,*
15. W. Kobza, J. Lipiński, *Metoda elementów skończonych rozwiązań osiowo-symetrycznych zadania termosprężystości,*
16. P. Wilde, M. Wizmur, R. Namysł, *Obliczenie drgań wymuszonych cieczy z uwzględnieniem odkształcalności powłoki stalowej zbiornika,*
17. E. Bielewicz, *O zastosowaniu metody elementów skończonych w mechanice statystycznej,*
18. Cz. Branicki, *Numeryczne metody problemu statyki powierzchniowych siatek cięgnowych,*
19. E. Męlerski, *Zastosowanie metody różnic skończonych do analizy pewnego probabilistycznego zagadnienia teorii powłok,*
20. Cz. Branicki, A. Bzowy, Sz. Wysiatycki, *Numeryczna analiza płaskich użebrowanych ustrojów sprężystych w oparciu o metodę elementów skończonych prostokątnego kształtu,*

21. J. SZMELTER, *Biblioteka podprogramów metody elementów skończonych,*
22. J. KRUSZEWSKI, *System obliczeń SFEM 72,*
23. J. MUSZKIET, *Elektroniczna technika obliczeniowa w wymiarowaniu konstrukcji okrętowych,*
24. J. SZMELTER, M. DACKO, ST. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Przyklady zastosowania programów metody elementów skończonych,*
25. J. KOZŁOWSKI, *Automatyzacja przygotowania danych do obliczeń ram plaskich metodą sztywną elementów skończonych,*
26. W. GAWROŃSKI, *Analiza drgań wymuszonych kinetycznie metodą sztywnych elementów skończonych*
27. A. JAWORSKI, *Stateczność powloki beczkowej pod dzialaniem ciśnienia normalnego,*
28. W. OSMÓLSKI, ST. JONIAK, *Analiza wytrzymalościowa przestrzennych konstrukcji statycznie niewyznaczalnych ramowych i pólskorupowych z zastosowaniem teorii prętów cienkościennych przy użyciu maszyny cyfrowej,*
29. CZ. CICHOŃ, Z. KĘPKA, Z. WASZCZYSZYN, *Numeryczna analiza stateczności sprężysto-plastycznego luku przegubowego poddanego dzialaniu ciśnienia zewnętrznego,*
30. A. JAWORSKI, *Wytrzymalość zbiornika kulistego przy różnych sposobach podparcia,*
31. W. OSMÓLSKI, J. ZIELENICA, *Analiza drgań pionowych tlumionych wymuszonych funkcją nieciągłą oraz dobór optymalnych parametrów dwustopniowego usprężynowania pojazdów z zastosowaniem maszyny cyfrowej,*
32. H. AURICH, *Tworzenie macierzy mas dla modeli o parametrach skupionych,*
33. Z. WALCZYK, *Wyznaczenie krytycznych obrotów oraz amplitud drgań wielopodporowego walu turbogeneratora z uwzględnieniem sprężystego powiązania podpór walu oraz wplywu filmu olejowego,*
34. J. SZMIDT, *Wykorzystanie metody elementów skończonych do analizy statycznej węzła ramy cienkościennej,*
35. J. TARNOWSKI, W. GAWROŃSKI, *Uwzględnienie efektów giroskopowych przy obliczaniu drgań giętnych okrętowych walów napędowych,*
36. ST. GRABOWSKI, *Zastosowanie macierzy pasmowych w obliczeniach drgań metodą elementów skończonych,*
37. E. BIELEWICZ, A. BZOWY, *Algorytm obliczeń statycznych suchego doku.*

Oddział we Wrocławiu zorganizowal w dniach 1 i 2 grudnia 1972 r. V Sympozjon Reologii. W Sympozjonie uczestniczyło 137 osób. Wydano b. starannie materiały zawierające pełne teksty referatów. Wygłoszono następujące referaty generalne:

Reologia metali i polimerów — referat wygłosił prof. dr. J. ZAWADZKI omawiając następujące prace:

1. M. CZECH, A. JAKOWLUK (Białystok), *Badanie relaksacji naprężeń preszpanu zanurzonego w oleju,*
2. Z. GABRYSZEWSKI, C. WITKOWSKI (Wrocław), *Mechaniczne własności żeliwa,*
3. A. JAKOWLUK, J. KAHANE, B. KRUPOWICZ, M. ANISIMOWICZ, *Badania wibropełzania przy ściskaniu laminatu epoksydowego,*
4. A. JAKOWLUK, *Pelzanie preszpanu transformatorowego zanurzonego w oleju przy niestacjonarnych warunkach obciążeń,*
5. A. JAKOWLUK, J. KOBYŁKO (Białystok), *Wpływ stabilizacji na przebieg funkcji naprężenie-odkształcenie dla preszpanu zanurzonego w oleju,*
6. A. JAKOWLUK, B. KRUPICZ, M. ANISIMOWICZ (Białystok), *Badania wibropełzania przy zginaniu laminatu epoksydowego,*
7. M. KOSIOREK (Warszawa), *Metody badań relaksacji naprężeń w metalach,*
8. M. KOSIOREK, W. ŁUKASIUK (Warszawa), *Badania pełzania i relaksacji naprężeń w stalach do konstrukcji sprężonych,*
9. S. OCHELSKI (Warszawa), *Pełzanie poliamidu w warunkach złożonej historii obciążenia,*
10. S. OCHELSKI, Z. ORŁOŚ (Warszawa), *Pełzanie stali żarowytrzymałej w podwyższonych temperaturach,*
11. A. P. WILCZYŃSKI, K. PUCIŁOWSKI (Warszawa), *Dlugość krytyczna włókna wzmacniającego ośrodek lepkosprężysty,*
12. A. WŁOCHOWICZ (Łódź), M. NOWAK (Wrocław), *Wplyw stabilizacji termicznej, starzenia i naprężeń zmiennych na strukturę submikroskopową poliamidu,*
13. J. ZAWADZKI, E. GROZIK (Wrocław), *Ocena «superpozycji» wplywu impulsów termicznych przy anizotermicznym pelzaniu poliamidu «Tarlon XB»,*

14. J. Zawadzki, J. Kałwak (Wrocław), *Oszacowanie parametru prognozującego intensywność rozwoju dekohezji zmęczeniowej polimerów przy wymuszeniach kinematycznych o stałej amplitudzie*,
15. J. Zawadzki, A. Kania, *Opis fenomenologiczny i ocena reoefektów wibropełzania belek równomiernej wytrzymałości na zginanie z metapleksu NO*,
16. J. Zawadzki, M. Nowak (Wrocław), *Analiza fizykalna fenomenologicznych aspektów zmęczenia poliamidu starzonego w różnych środowiskach*,
17. J. Zawadzki, E. Świątek (Wrocław), *Badania wstępne reostateczności prętów z tworzyw sztucznych zbrojonych WS*,

Reologia betonu — referat wygłosił prof. dr A. Mitzel omawiając prace:

18. L. Brunarski, W. Descours (Warszawa), *Pełzanie płyt żelbetowych o zmiennej sztywności*,
19. L. Brunarski, S. Żmigrodzki (Warszawa), *O obliczaniu ugięć żelbetowych płyt kołowo-symetrycznych przy obciążeniu długotrwałym*,
20. T. Hop (Gliwice), *Odkształcenia betonów polimerowych pod obciążeniem długotrwałym*,
21. M. Kłapoć (Wrocław), *Funkcje liniowego i nieliniowego pełzania betonu*,
22. M. Kosiorek, W. Łukasiuk (Warszawa), *Wpływ podwyższonej temperatury na pełzanie cięgien sprężających*,
23. A. Mitzel, R. Stus, M. Kłapoć (Wrocław), *Pełzanie betonu w świetle parametrów technologicznych*,
24. M. Persona (Wrocław), *Analityczne ujęcie odkształceń postaciowych betonu*,
25. M. Persona, A. Dziendziel (Wrocław), *Badania odkształceń betonu naparzanego przy obciążeniach długotrwałych*,
26. M. Persona, J. Różewicz (Wrocław), *Wykorzystanie matematycznych maszyn analogowych do identyfikacji i wyznaczania parametrów funkcji pełzania*,
27. I. Prokopowisz (Odessa), S. Jasman (Wrocław), *Uwzględnianie cech reologicznych betonu przy obliczaniu konstrukcji betonowych*,
28. R. Stus, A. Mitzel, M. Kłapoć, W. Rawa (Wrocław), *Kształtowanie skurczu betonu*,
29. J. Włodarczyk, A. Mitzel (Wrocław), *Współczynnik odkształcalności betonu przy zmiennych prędkościach obciążenia*.

Reologia gruntów — referat wygłosił doc. dr hab. S. Dmitruk omawiając prace:

30. K. Abramski (Gdańsk), *Wiskozymetryczne badania reologiczne osadów poprodukcyjnych przemysłu sodowego*,
31. A. Bolt, E. Dembicki (Gdańsk), *Nośność fundamentów blokowych poddanych działaniu momentu wywracającego w świetle badań modelowych*,
32. A. Borcz, J. Dubois (Wrocław), *Badania naporu gruntu na tymczasowe umocnienia ścian wykopu*,
33. E. Dembicki, W. Odrobiński (Gdańsk), *Nośność uwarstwionego podłoża fundamentowego*,
34. E. Dembicki, W. Odrobiński, D. Zadroga (Gdańsk), *Nośność podłoża fundamentowego, stanowiącego zbocze w świetle doświadczeń*,
35. J. Gaszyński, G. Szefer (Kraków), *Konsolidacja półprzestrzeni lepkosprężystej pod obciążeniem osiowo-symetrycznym*,
36. H. Glinko, *Wpływ prędkości odkształcenia na zmianę stanu naprężeń w gruncie na terenach górniczych*,
37. I. Kisiel (Wrocław), *Działanie obciążenia na ciało kruche*,
38. J. Kwiatek (Katowice), *Reologiczne aspekty współpracy z podłożem górniczym*,
39. B. Lechowicz, G. Szefer (Kraków), *Konsolidacja półprzestrzeni lepkosprężystej przy obciążeniu antysymetrycznym*,

Zagadnienia ogólne w reologii — referat wygłosił prof. dr O. Dąbrowski omawiając prace:

40. Z. Bychawski (Kraków), H. Kopecki (Rzeszów), *O stateczności reologicznej i reologicznym wyboczeniu*,
41. Z. Bychawski (Kraków), J. Ledziński (Rzeszów), *Deformacje pełzającej powłoki walcowej pod ciśnieniem wewnętrznym*,
42. R. Dzięcielak (Poznań), *O określeniu stałych ośrodka konsolidującego*,
43. Z. Kończak (Poznań), *Osiadanie powierzchni półprzestrzeni konsolidującej pod działaniem obciążenia stycznego*,
44. H. Kopecki, E. Rejman, J. Zacharzewski (Rzeszów), *Analityczne rozwiązania w zakresie reologii powłok kulistych a badania eksperymentalne*,

45. Z. Piekarski (Kraków), *Analogia sprężysto-lepkosprężysta*,
46. A. P. Wilczyński (Warszawa), *Funkcja wykładnicza ułamkowa i jej własności w zastosowaniu do opisu zjawisk lepkosprężystości.*

Oddział w Poznaniu przeprowadził w okresie 16.10—18.12.72 r. kurs na temat: zastosowanie metod stochastycznych w teorii drgań; termodynamika ośrodków ciągłych; teoria dystrybucji z zastosowaniem do równań fizyki matematycznej. Ogółem odbyło się 9 wykładów.

Seminaria

Oddział w Gdańsku przeprowadził w IV kwartale seminarium na temat wybranych zagadnień w teorii powłok. Dwugodzinne wykłady odbywały się raz w tygodniu.

W końcu 1972 r. do PTMTS należało 609 osób, w tym w poszczególnych Oddziałach: Bydgoszcz 17, Częstochowa 24, Gdańsk 43, Gliwice 62, Kraków 76, Łódź 36, Poznań 41, Rzeszów 11, Szczecin 30, Warszawa 196, Wrocław 63.

ROZSTRZYGNIĘCIE KONKURSÓW NAUKOWYCH PTMTS W ROKU 1972

Oddział w Częstochowie zorganizował konkurs na najlepszą pracę z zakresu badań doświadczalnych w dziedzinie mechaniki technicznej. Na konkurs wpłynęło 7 prac. Sąd konkursowy w składzie: doc. dr R. Janiczek (przewodniczący), prof. dr Z. Wesołowski (zast. przewodniczącego) i dr. inż. R. Parkitny przyznał następujące 4 nagrody i wyróżnienie:

Pierwszą nagrodę w wysokości 8.000 zł otrzymał dr R. Wojnar (Warszawa), za pracę *Badania odkształcenia płyt metodą rastrową (mory).*

Drugą nagrodę w wysokości 6.000 zł przyznano dr J. Kapkowskiemu i doc. dr J. Stupnickiemu za pracę *Doświadczalne badania elementów maszyn projektowanych metodą nośności granicznej.*

Dwie trzecie nagrody w wysokości 4.500 zł otrzymali: dr J. Miastkowski za pracę *Doświadczalna analiza efektu pamięci materiału po plastycznej deformacji* oraz doc. dr R. Doroszkiewicz, dr J. Lietz, dr B. Michalski za pracę *Zastosowanie elastooptyki do kształtowania głowicy zapory filarowej.*

Wyróżnienie w wysokości 2.000 zł przyznano doc. M. Lurskiemu (Rzeszów) za pracę *Wytrzymałość na obciążenia wahadłowe przy ścinaniu zakładkowego połączenia klejonego metali.*

Oddział w Łodzi przeprowadził ogólnokrajowy konkurs naukowy na najlepszą pracę z mechaniki teoretycznej i stosowanej. Na konkurs wpłynęło 14 prac. Sąd konkursowy w składzie: prof. dr J. Szmelter (przewodniczący) oraz doc. dr M. Suchar, prof. dr J. Sułocki i doc. dr Z. Kazimierski (członkowie) przyznał 4 nagrody i 3 wyróżnienia.

Pierwszą nagrodę w wysokości 12.000 zł otrzymali dr A. Drescher i mgr T. Hückel za pracę *Nieliniowy opis deformacji sprężysto-plastycznej ciał rozdrobnionych.*

Druga nagroda nie została przyznana.

Trzy równorzędne trzecie nagrody po 6.000 zł każda otrzymali: dr J. Krodkiewski za pracę *Stateczność i prędkości krytyczne wałów o niekołowym przekroju podpartych podatnie anizotropowo*; dr. M. Królak za pracę *Statyka i dynamika mało wyniosłych powłok*; dr. Wł. Nadolski za pracę *Model mechaniczny jednostopniowej przekładni zębatej o osiach równoległych w przypadku drgań giętno-skrętnych.*

Trzy równorzędne wyróżnienia w wysokości 3.000 zł każde otrzymali: dr W. Barański i mgr S. Furmańczyk za pracę *O rozwiązywaniu równań Lamégo przez rozdzielenie zmiennych w zagadnieniach równowagi płyt i tarcz*; dr J. Stelmarczyk za pracę *Charakterystyka dynamiczna maszyny wirnikowej i wykorzystanie jej do obliczania prędkości krytycznych*; dr W. Wojewódzki za pracę *Wyboczenie lepkoplastycznej powłoki kulistej obciążonej radialnym impulsem ciśnienia.*

KONFERENCJA SZKOLENIOWA «METODY STOCHASTYCZNE W MECHANICE KONSTRUKCJI» JABŁONNA, CZERWIEC 1972 R.

Przejście od metod deterministycznych do stochastycznych wymaga, w pewnym zakresie, przełomu w sposobie myślenia, w sposobie ujmowania zagadnień inżynierskich i ich rozwiązywania.

Różne działy mechaniki niedeterministycznej rozwijają się w Polsce od lat dzięki entuzjazmowi nielicznych osób. Prof. Witold WIERZBICKI już w 1935 r. sformułował zagadnienie bezpieczeństwa konstrukcji w kategoriach rachunku prawdopodobieństwa.

Pewne działy, jak np. stochastyczna mechanika konstrukcji budowlanych lub maszynowych, gdzie obciążenia, własności materiałów, warunki brzegowe przyjmowane są w postaci probabilistycznej, nie są może dostatecznie uprawiane. Nieznana jest dotąd w naszym kraju racjonalna teoria norm projektowania konstrukcji, oparta o rachunek prawdopodobieństwa i uwzględniająca skutki ekonomiczne i społeczne, jakie z tych norm i zaleceń wynikają. Powiązanie tego rodzaju teorii norm z teorią niezawodności i probabilistyczną mechaniką budowli miałoby duże znaczenie gospodarcze zwłaszcza dla rozwoju uprzemysłowionego budownictwa.

Komitet Inżynierii Polskiej Akademii Nauk, występując z inicjatywą konferencji poświęconej metodom stochastycznym w mechanice konstrukcji, miał na celu wprowadzenie w tę tematykę szerszego grona zainteresowanych pracowników nauki i specjalistów z biur projektów. Do wygłoszenia wykładów zaproszono reprezentantów nauki światowej, najbardziej kompetentnych i najaktywniej działających w tej dziedzinie. Wymieniając poniżej wykładowców zagranicznych i krajowych, charakteryzujemy pokrótce problematykę, jaką przedstawili.

Prof. W. W. BOŁOTIN (Moskwa) wyłożył podstawy naukowe i znaczenie gospodarcze wyników teorii niezawodności i zdefiniował pojęcia takie, jak: system konstrukcyjny i jego jakość, wymagania eksploatacyjne obiektu, awarie względnie stany graniczne konstrukcji.

BOŁOTIN stosuje aparat matematyczny teorii procesów losowych do opisu zachowania się konstrukcji oraz działania czynników wymuszających. Sprowadza problem niezawodności do znalezienia optymalnej funkcji przeżycia dla czasu służby obiektu. Objaśnia metody obliczeń na przykładach z dynamiki stochastycznej (drgania, zjawiska niestateczności urządzeń i maszyn).

Prof. A. C. CORNELL (Cambridge, Mass., USA) omówił sprawę statystycznego opisu obciążeń. Przedstawił możliwość redukcji obciążeń obliczeniowych w zależności od: wielkości obciążonej powierzchni i ilości kondygnacji, możliwych kombinacji obciążeń oraz ograniczonego czasu trwania obciążeń.

Jako matematyczną podstawę oceny niezawodności rozwija CORNELL tzw. probabilistyczną teorię pierwszego rzędu, która opiera się na związkach liniowych i uwzględnia tylko pierwsze dwa momenty rozkładów prawdopodobieństw. CORNELL porównuje zastosowane w różnych przepisach metody probabilistyczne i formacje częściowych współczynników bezpieczeństwa, w szczególności — najnowsze metody obliczeń z kanadyjskich i meksykańskich norm budowlanych. Dla dokładniejszych obliczeń stosuje CORNELL zasadę warunkowej niezawodności przy uwzględnieniu łącznych rozkładów prawdopodobieństwa, a także metodę liniowej analizy regresji, którą proponował też BOŁOTIN.

Prof. Cz. EIMER (Warszawa) zrelacjonował w skrócie metody probabilistyczne opisu wytrzymałości betonu, zmiennej w czasie pracy konstrukcji. Przedstawił model stochastyczny kumulacji mikrodefektów materiału — w ujęciu tensorowym.

Prof. N. C. LIND (Waterloo, Ont., Kanada) w swym ujęciu problemów niezawodności wziął pod uwagę aspekty ekonomiczne i społeczne. LIND precyzuje kryteria obliczeniowe i charakteryzuje błędy, jakie mogą dawać poszczególne fazy realizacji konstrukcji budowlanej: założenia projektowe, koncepcja konstrukcji, obliczenia i wymiarowanie, wykonanie i montaż, sprawdzenie wartości użytkowej.

Duże znaczenie przypisuje LIND odpowiedniemu sformułowaniu przepisów budowlanych. Stosuje optymalizację kosztów całkowitych budowli, prowadzącą do wyważenia nakładów na budowę i ryzyka awarii, i dąży do optymalnego wyspecyfikowania warunków normowych. Dużą rolę grają przy tym praktyczne i psychologiczne aspekty. Np. wyraźne oszczędności można uzyskać wprowadzając optymalne stopniowanie danych obliczeniowych (wymiarów profilów walcowanych, przekroi stali zbrojeniowej, klas wytrzymałości stali i betonu itp.)

Dla rozwiązania problemów teoretycznych niezawodności stosuje Lind modele termodynamiki.

Prof. J. Murzewski (Kraków) związał swą koncepcję bezpieczeństwa konstrukcji z postulatem rozgraniczenia odpowiedzialności użytkownika (za działanie zewnętrzne), wykonawcy (za jakość konstrukcji) i projektanta (za właściwe schematy statyczne i dokładność obliczeń). Przyjmując prawdopodobieństwo dyskwalifikacji budowli (w wyniku kontroli) jako miarę bezpieczeństwa, wyprowadza 3 częściowe współczynniki bezpieczeństwa. Formułuje przy tym 2 zadania optymalizacyjne. Pierwsze polega na optymalnym rozkładzie globalnego współczynnika bezpieczeństwa na współczynniki częściowe, a drugie — na dobraniu jego optymalnej wartości. Wprowadza przy tym klasyfikację bezpieczeństwa dogodną dla normalizacji.

Murzewski przedstawia szereg przykładowych obliczeń nośności elementów konstrukcyjnych, przy uwzględnieniu ich losowych własności mechanicznych i geometrycznych, a także przykładów obciążeń obliczeniowych konstrukcji, przy uwzględnieniu łącznych rozkładów prawdopodobieństwa dla układów niezależnych sił. Na tych przykładach wykazuje rolę efektu skali i efektu trwałości w zagadnieniach bezpieczeństwa budowli. Dyskutuje przy tym dopuszczalność uproszczeń w obliczeniach inżynierskich i porównuje wyniki obliczeń probabilistycznych z wynikami obliczeń metodą stanów granicznych.

Dr M. Tichý (Praga) przeciwstawił 3 kryteria obliczeniowe: naprężenia dopuszczalne, stany graniczne, warunek ekonomiczny (optymalizację) i 3 metody obliczeń: ekstremalnych wartości wejściowych, ekstremalnych wartości wynikowych, prawdopodobieństwa stanu bezawaryjnego.

Tichý zaleca udoskonalenie metody stanów granicznych (z ekstremalnymi wartościami wejściowymi) wprowadzaną w krajach RWPG. Jako pewien krok w tym kierunku widzi zastosowanie rozwiniętej przez siebie i M. Vorlička teorii powierzchni interakcji dla złożonych przypadków wytrzymałościowych. Tichý omawia ponadto źródła błędów w schematach obliczeniowych elementów żelbetowych w stanie zarysowania i odkształcenia.

Ponadto nie mogli przybyć, ale przygotowali wykłady: Prof. B. W. Gniedienko (Moskwa) na temat matematycznych podstaw teorii niezawodności i prof. M. Shinozuka (Nowy Jork) na temat teorii obciążeń próbnych i symulacji procesów losowych. Będą one, wraz z innymi wykładami, po przetłumaczeniu i przeredagowaniu, opublikowane w księdze pokonferencyjnej.

W czasie konferencji dr K. Sobczyk (Warszawa) prowadził zajęcia z podstaw rachunku prawdopodobieństwa i funkcji losowych, uzupełniając słabsze przygotowanie niektórych słuchaczy w tej dziedzinie.

Inicjatywa, przygotowanie i organizacja programu tej konferencji wyszła od prof. A. Sawczuka, przewodniczącego Sekcji Mechaniki Konstrukcji w Komitecie Inżynierii PAN oraz od prof. J. Murzewskiego, który w tym Komitecie prowadzi Zespół Zagadnień i Metod Niezawodności.

Janusz Murzewski (Kraków)

KOMUNIKAT

Colloquium Euromech 38 na temat «Gyrodynamiki»

Université Catholique de Louvain
Bâtiment Simon Stévin,
B-1348 Louvain-la-Neuve
Belgique

Colloquium odbędzie się w dniach 3—5 września 1973 r. w Louvain-la-Neuve, na nowych terenach Uniwersytetu w Louvain, 20 mil na wschód od Brukseli.

Tematem Colloquium będzie dynamika rotacyjna wraz z zastosowaniami do różnych praktycznych zagadnień.

Przewiduje się jako tematy sesji następujące zagadnienia:

— teoretyczna gyrodynamika,
— teoria systemów w zastosowaniu do dynamiki rotacyjnej (łącznie z analizą stateczności, kontroli, itp.),
— mechanizmy rotacyjne,

— żyroskopy (teoria i technologia),
— inercjalne systemy nawigacyjne,
— zagadnienia pojazdów kosmicznych.

Termin nadsyłania streszczeń prac (około 150 słów) upłynął w zasadzie 1 lutego 1973 r. Dodatkowe informacje można uzyskać zwracając się do prof. F. Buckensa pod adresem podanym na wstępie.

V MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA WYMIANY CIEPŁA TOKIO, 3—7 WRZEŚNIA 1974 R.

Na konferencji będzie przedstawionych 350 referatów z następujących dziedzin: promieniowanie cieplne, przewodzenie, konwekcja wymuszona i swobodna, wrzenie i kondensacja, kombinowana wymiana ciepła i masy, wymiana ciepła w systemach reologicznych, wymiana ciepła w biologii i otoczeniu, wymienniki ciepła, techniki pomiarowe i analogowe, ogólne problemy wymiany ciepła.

Referaty wyłącznie w języku angielskim będą przedstawione w grupach po 8—10 referatów generalnych. Referat nie może przekroczyć 6000 słów, wliczając w to tablice i rysunki. Referaty zostaną wydane w formie preprintów.

Termin zgłoszenia streszczeń referatów o objętości 1 strony upływa 1 marca 1973 r. Po przyjęciu referatu pełny tekst winien być dostarczony do 1 września 1973 r.

Zgłoszenia należy kierować pod adresem:

Prof. N. H. Afgan, Institute «Boris Kidrič»,
University of Beograd, P. O. Box 522, 11000 Beograd,
Yugoslavia

Na konferencji będą wygłoszone wykłady na wybrane tematy wymiany ciepła przez zaproszonych specjalistów. Przewiduje się również dyskusje panelowe, dyskusje okrągłego stołu, filmy naukowe oraz zwiedzanie wystaw.

SYMPOZJA MIEDZYNARODOWEJ UNII MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ (IUTAM)

1973

1. IUTAM/IUGG Symposium on Turbulent Diffusion in Environmental Pollution
   Miejsce: Charlottesville, Virginia, USA
   Data: 8—14 kwiecień 1973
   Przewodniczący: Dr. Francois N. Frenkiel
   Computation and Mathematics Department Naval Ship Research and Development Center
   BETHESDA, Maryland 20034, USA
2. IUTAM Symposium on Optimization in Structural Design
   Miejsce: Warszawa, Polska
   Data: 21—25 sierpień 1973
   Przewodniczący: Prof. A. Sawczuk
   Kopernika 8 M 62
   WARSZAWA, Polska
3. Joint IAU/IUTAM Symposium on the Stability of the Solar System and of Small Stellar Systems
   Miejsce: Warszawa, Polska
   Data: 5—8 wrzesień 1973

Przewodniczący: Prof. Y. Kozai
Tokyo Astronomical Observatory
Mitaka, TOKYO, Japan

4. IUTAM Symposium on Photoelastic Effect and its Applications
Miejsce: Université Libre de Bruxelles
Data: 10—16 wrzesień 1973
Przewodniczący: Prof. Jean Kestens
Laboratoire d'Analyse des Contraintes Université Libre de Bruxelles
87, avenue Ad. Buyl.
BRUXELLES 5, Belgium

1974

1. IUTAM Symposium on Buckling of Structures
Miejsce: Harvard University, Cambridge, U.S.A.
Data: 17—21 czerwiec 1974
Przewodniczący: Prof. B. Budiansky. Pierce Hall
CAMBRIDGE 38, Mass. 02138, U.S.A.

2. IUTAM Symposium on Dynamics of Rotors
Miejsce: TU, Lyngby, Denmark
Data: 12—16 sierpień 1974
Przewodniczący: Prof. F. Niordson,
TU, Building 404
2800 LYNGBY, Denmark

3. IUTAM Symposium on the Mechanics of the Contact between Deformable Bodies
Miejsce: Enshede, Netherlands
Data: 20—23 sierpień 1974
Przewodniczący: Prof. A. D. de Pater,
Mekelweg 2
DELFT, Netherlands

4. IUTAM Symposium on the Dynamics of Vehicle Roads and Railway Tracks
Miejsce: Delf, Netherlands
Data: 26—30 sierpień 1974
Przewodniczący: Dr inż. H. B. Pacejka
Mekewcg 2
DELF, Nethcrlands

5. IUTAM Symposium on the Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies
Miejsce: Moskwa, ZSRR
Data: Wrzesień 1974 (orientacyjnie)
Przewodniczący: Prof. A. A. Ilyushin
University of Moscow
MOSCOW B-234, USSR

1975

1. Second IUTAM Symposium Transsonicum
Miejsce: Göttingen, B.R.D.
Data: Wrzesień 1975
Przewodniczący: Prof. K. Oswatitsch,
Inst. für Strömungslehre Technische Hochschule Wien,
1040 WIEN Karlplatz 13, Austria

2. IUTAM Symposium on Stochastic Problems in Mechanics
3. Symposium on Fundamental Aspects of Biomechanics
4. Symposium on Application of Methods of Functional Analysis to Problems of Mechanics

ERRATA

W 3 numerze MTiS (1972), na s. 474 zostało opuszczone nazwisko Autora «Sprawozdania z VII Polsko-Czechosłowackiej konferencji dynamiki maszyn»; jest nim doc. dr Józef WOJANOWSKI (Gliwice). Przepraszamy Autora i Czytelników.

SPIS TREŚCI TOMU X/1972

Zeszyt 1

Zeszyt 2

Zeszyt 3

Zeszyt 4

W następnym zeszycie ukażą się prace:

Wadim Wasilewicz Sokołowski, Na 60-lecie urodzin
Вадим Васильевич Соколовский, К шестидесятилетию со дня рождения
Sixtieth Birthday of Professor Vadim V. Sokolowski

G. Szefer, M. Piszczyk, Zginanie pręta silnie zakrzywionego z uwzględnieniem naprężeń momentowych
Изгиб сильно искривленного стержня с учетом моментных напряжений
Bending of a strongly curved beam with the influence of couplestresses

J. Dyszlewicz, Pewien sposób rozwiązania statycznych zagadnień liniowej niesymetrycznej sprężystości
О некотором способе решения статических задач линейной несимметричной теории упругости
On a certain method of solution of static problems of the linear theory of non-symmetric elasticity

B. Bieniasz, Rzeczywisty układ sił działających u podstawy pęcherzyka parowego
Действительная система сил, действующих на основание парового пузырка
Actual system of forces acting at the base of a vapour bubble

J. Boblewski, K. H. Bojda, Zastosowanie operatorów Mikusińskiego do zagadnień teorii konstrukcji nośnych
Применение операторов Микусинского в задачах теории несущих конструкций
Application of the Mikusiński operators to the problems of engineering structures

Biuletyn Informacyjny

Cena zł 30.—

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechani Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszy z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pał. Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 11, z. 1, s. 1 — 128, Warszawa 1973, Indeks 36712