

ju 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 12 • ZESZYT 4

Pw

WARSZAWA 1974

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

Prof. dr Zb. Wasiutyński — Wspomnienie pośmiertne	417
R. KAŁUŻA, Ocena przydatności żywicy epoksydowej «Epidian 5» do modelowania konstrukcji Оценка пригодности эпоксидной смолы «Эпидиан 5» для моделирования конструкций Estimation of suitability of «Epidian 5» epoxy resin for structure modelling	421
R. KAŁUŻA, Badania modelowe powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej poddanej wymuszonym przemieszczeniom Модельные исследования гиперболоидной оболочки градирни, подверженной вынужденным перемещениям Model tests of hyperboloidal cooling tower shell subjected to forced displacements	439
A. GARSTECKI, Zwichrzenie sprężyste cienkościennej belki dwuprzęsłowej Изгибно-крутильная потеря устойчивости тонкостенной двухпролетной балки Elastic stability of two-span thin-walled continuous beams	459
M. WASZYŃSKA, Wpływ niejednorodności stanu naprężenia w przekroju poprzecznym połączenia na obciążenie zwojów gwintu Влияние неоднородности напряженного состояния в поперечном сечении соединения на нагрузку витков резьбы Influence of nonhomogeneity of the state of stress in transverse cross-section of a connection on the load of screw threads	473
E. ŚWITOŃSKI, Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych Применение метода матриц переноса для динамического анализа тонкостенных стержней Appliance of the transfer matrix method to the dynamic analysis of thin-walled rods	487
E. TOMASIAK, Model matematyczny zaworu przelewowego w świetle badań przebiegów analogowych i rzeczywistych Математическая модель перепускного клапана с точки зрения аналоговых и действительных процессов Mathematical simulation of an overflow valve considered according to analogue and direct tests	497
J. MARYŃIAK, Z. GORAJ, Stateczność pojazdów jednośladowych na kołach pneumatycznych Устойчивость велосипеда на пневматических шинах Stability problems of a bicycle equipped with pneumatic wheels	513
E. WACHNICKI, Konstrukcja funkcji Greena dla równania biharmonicznego w obszarze koła lub wycinka kołowego Построение функции Грина бигармонического уравнения для области круга и кругового сектора The construction of the Green function for biharmonic equation for the circular domain or circular sector	541
K. DEMS, J. LIPIŃSKI, Zastosowanie różnic skończonych do tworzenia macierzy sztywności w metodzie elementów skończonych na przykładzie zginanej płyty Применение конечных разностей для построения матриц жесткости по методу конечных элементов на примере изгибаемой пластины Application of finite-differences to the determination of the stiffness matrix of finite elements method, exemplified by the plate bending	547
S. ZANORSKI, Powolne przepływy cieczy lepkosprężystych w obszarach wejściowych rur i kanałów Медленное течение вязкоупругих жидкостей в областях входа труб и каналов Slow flows of viscoelastic fluids at the entries to tubes and channels	561
K. MAJORKOWSKA-KNAP, Statyka tarcz mikropolarnych Статика микрополярных дисков Statics of micropolar plates	577
BIULETYN INFORMACYJNY	595

7-1720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 2 · Z E S Z Y T 4

W A R S Z A W A 1 9 7 4
P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych.

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIAK, MAREK SOKOŁOWSKI,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

РЕДАКЦИЯ

00-049 W a r s z a w a, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 690 (575+115) egz. Arkuszy wydawn. 14,5. Arkuszy drukarskich 11,75. Papier druk. sat. III kl., 70 g. 70×100. Oddano do składania 26.VII.1974 r. Druk ukończono w grudniu 1974 r. Zam. 1130/74.
W-99 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

PROFESOR DOKTOR ZBIGNIEW WASIUTYŃSKI (1902—1974)

Profesor ZBIGNIEW WASIUTYŃSKI urodził się 7 października 1902 r. Studia na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej ukończył w 1926 r., a następnie pracował w Dziale Mostów w Województwie Łódzkim, w Laboratorium Wytrzymałości Tworzyw i w Katedrze Budowy Mostów Politechniki Warszawskiej. W latach 1934—1939 wykładał statykę budowli w Szkole Podchorążych Saperów i matematykę na Wydziale Architektury PW.

Pracę doktorską obronił profesor WASIUTYŃSKI w 1928 r.; obejmowała ona analizę zjawiska wyboczenia na podstawie badania prętów stalowych.

Podstawą habilitacji była praca o kształtowaniu wytrzymałościowym, opublikowana przed samą wojną w 1939 r., kolokwium habilitacyjne odbyło się w 1942 r. w ramach tajnej działalności PW. W tym czasie profesor WASIUTYŃSKI prowadził zajęcia na Wydziale Architektury PW i pracował w Społecznym Przedsiębiorstwie Budowlanym.

Po wojnie profesor WASIUTYŃSKI wykładał matematykę na Wydziale Architektury PW w latach 1945—1948, a następnie od 1949 do 1969 r. kierował Katedrą Budowy Mostów PW, zaś od 1953 do 1972 był kierownikiem Pracowni w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN.

Obok tych głównych zajęć, Profesor uczestniczył w wielu technicznych i organizacyjnych pracach w dziedzinie budowy mostów i konstrukcji inżynierskich w Polsce. Trzeba tu wspomnieć Jego udział m.in. w projektach licznych mostów, w budowie gmachu Sejmu, Domu Słowa Polskiego i Gmachu GUS w Warszawie, w pracach badawczych podejmowanych przy budowie metra. W latach 1950—1952 Profesor był doradcą w Metrobudowie i Ministerstwie Gospodarki Komunalnej.

W latach 1954—1955 profesor WASIUTYŃSKI kierował projektowaniem i czuwał nad realizacją największej ówczesnej konstrukcji z betonu sprężonego w Polsce — ciągłej płyty przekrywającej Dworzec Śródmieście w Warszawie.

W latach 1956—1957 Profesor kierował projektowaniem wariantów betonowych mostów i dojazdów na trasie im. Starzyńskiego w Warszawie, a Jego śmiała koncepcja wykorzystania starych i wąskich filarów przez wybudowanie mostu dwupoziomowego pozwoliła na uzyskanie rozwiązania o niewątpliwych technicznych i ekonomicznych zaletach.



Za zasługi naukowe w dziedzinie konstrukcji sprężonych profesor WASIUTYŃSKI otrzymał Nagrodę Państwową I stopnia w 1956 r.

Zainteresowania naukowe Profesora były bardzo szerokie. Prowadził badania doświadczalne prętów ściskanych, modeli ustrojów mostowych i tuneli metra. Opracował oryginalne metody pomiaru odkształceń wewnątrz elementów betonowych oraz w gruntach i uzyskał patenty na odpowiednie urządzenia pomiarowe. Zainicjował następnie badania przebiegu fal uderzeniowych w elementach betonowych i starał się stymulować prace w dziedzinie dynamiki mostów.

W ciągu wielu lat prowadził prace w dziedzinie optymalizacji konstrukcji, mające na celu sformułowanie obiektywnych metod określania kształtów konstrukcji na podstawie obieranego *a priori* kryterium; kryterium opracowane i rozwijane przez profesora WASIUTYŃSKIEGO to minimum potencjału sprężystego. Pierwsze prace Profesora miały wpływ na dalszy ogromny wzrost zainteresowania zagadnieniami optymalizacji konstrukcji; w 1939 r., gdy On opublikował swoje dzieło *O kształtowaniu wytrzymałościowym* tematyka ta nie była w ogóle uprawiana ani w Polsce, ani niemal w innych krajach. Obecnie zagadnienia optymalizacji konstrukcji są prowadzone przez kilka ośrodków w kraju i kilkadziesiąt ośrodków zagranicą, a rocznie ukazuje się na świecie około sto poważniejszych publikacji na ten temat.

Profesor WASIUTYŃSKI twórczo przetransponował metody stosowane w optymalizacji konstrukcji do projektowania układów komunikacyjnych, publikując szereg prac na ten temat, m.in. w 1959 r. książkę „O kształtowaniu układów komunikacyjnych”

Zainteresowania Profesora architekturą i jej teorią doprowadziły do wydania w 1970 r. monumentalnego dzieła „O architekturze mostów”.

Wymienione kierunki zainteresowań technicznych, to tylko część prac badawczych i twórczego wkładu do nauki profesora WASIUTYŃSKIEGO, który od szeregu lat zajmował się czynnie zagadnieniami ekonomii i filozofii. Sformułowane i rozwinięte pojęcia efektywności użytkowej stworzyły racjonalne podstawy oceny ekonomicznej elementów budownictwa komunikacyjnego, jak drogi i mosty. W pracach w dziedzinie naukoznawstwa i prakseologii starał się wskazywać właściwe kierunki i metody badań oraz analizować rozwój współczesnej nauki.

Profesor WASIUTYŃSKI brał żywy udział w organizowaniu życia naukowego w Polsce. Był członkiem — założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, a w ciągu kilku kadencji pełnił funkcję przewodniczącego Głównej Komisji Rewizyjnej. W 1965 był współautorem pracy eksperymentalnej z dziedziny analizy odkształceń, nagrodzonej na konkursie PTMTS. Profesor był także pierwszym przewodniczącym Komitetu Nauki Polskiego Związku Inżynierów i Techników Budownictwa.

W uznaniu zasług naukowych profesor WASIUTYŃSKI został powołany na członka-korrespondenta Polskiej Akademii Nauk w 1958 r., w 1966 r. — na członka rzeczywistego, przyznano Mu także szereg najwyższych oznaczeń państwowych.

W latach 1969—1972 profesor WASIUTYŃSKI był przewodniczącym Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN.

Powyższy przegląd działalności i osiągnięć profesora ZBIGNIEWA WASIUTYŃSKIEGO, z konieczności krótki i niepełny, pozwala jednak na zorientowanie się w skali i zasięgu Jego zainteresowań oraz w wpływie jaki miał na wszystkich, którzy mieli okazję z Nim

współpracować. Głęboka i wszechstronna wiedza, poświęcenie się pracy dla kraju i dla nauki, a przy tym niezachwiane zasady moralne, to główne cechy Profesora. Oddany sprawom budownictwa i mostownictwa, nauczania i rozwoju wiedzy, pracował niemal bez odpoczynku. Pozostało po Nim szereg konstrukcji, kilkaset publikacji i referatów, wiele książek i podręczników, liczni współpracownicy w kraju i zagranicą.

Polska nauka i technika poniosły niepowetowaną stratę wskutek przedwczesnej śmierci profesora ZBIGNIEWA WASIUTYŃSKIEGO w dniu 27 stycznia 1974 r.

A. M. Brandt (Warszawa)

OCENA PRZYDATNOŚCI
ŻYWICY EPOKSYDOWEJ «EPIDIAN 5» DO MODELOWANIA
KONSTRUKCJI*

REINHOLD KAŁUŻA (OPOLE)

1. Wstęp

Materiały używane do modelowania konstrukcji powinny charakteryzować się własnościami umożliwiającymi spełnienie kryteriów podobieństwa fizycznego oraz łatwością modelowania różnych skomplikowanych elementów [1, 2, 3].

Materiały, których cechy fizyczne odpowiadają wymienionym wymogom, podzielić można na [2, 3, 4]: materiały wiążące (gips, mikrobetony, zaprawy specjalne), metale oraz tworzywa sztuczne (termo- i chemoutwardzalne żywice syntetyczne).

W badaniach modelowych konstrukcji, poza badaniami metodą elastooptyki, najszersze zastosowanie do wykonywania modeli znajduje gips, podobnie jak inne materiały wiążące charakteryzuje się stosunkowo małymi wydłużeniami granicznymi [4, 5], wynikającymi z jego kruchości, co uniemożliwia przeprowadzenie badań w zakresie znacznych przemieszczeń. Ponadto gips, ze względu na swą kruchość, na ogół nie nadaje się do wykonywania modeli geometrycznie podobnych do cienkościennych konstrukcji powłokowych, stosowanych np. w budownictwie.

Zamiar wykonania modeli hiperboloidalnych chłodni kominowych podyktował konieczność przeprowadzenia badań materiałowych tworzywa otrzymanego na bazie żywicy epoksydowej «epidian 5» z napełniaczem i z dodatkiem plastyfikatora.

Celem badań, których wyniki zostaną omówione w niniejszej publikacji, było ustalenie wpływu ilości napełniacza mineralnego (cement portlandzki 350), utwardzacza «TECZA» i plastyfikatora (ftalan dwubutyłu), dodanych do żywicy epoksydowej «epidian 5» na takie własności otrzymanego tworzywa, jak:

- jednorodność,
- wytrzymałość na zginanie,
- moduł Younga i współczynnik Poissona,
- zależność naprężenie-odkształcenie,
- wartość współczynnika dysypacji energii sprężystości przy statycznej pętli histerezy.

Ustalono również wpływ cyklicznie zmiennych i długotrwałych obciążeń na odkształcalność tworzywa.

* Praca została nagrodzona na konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej — zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Krakowie w 1973.

2. Program badań oraz wykonane próbki

Składniki badanego tworzywa dobierano w następujących ilościach w odniesieniu do 100 części żywicy («epidian 5»):

- utwardzacz (trójetyloczteroamina — TECZA) — 7, 8, 9, 10, 12,5, 15 i 10 ns,
- napełniacz (cement portlandzki 350) — 0, 50, 100, 150, 200 i 250 ns,
- plastyfikator (ftalan dwubutyłu) — 0, 7, 15 i 24 ns, gdzie ns oznacza «na 100 części żywicy».

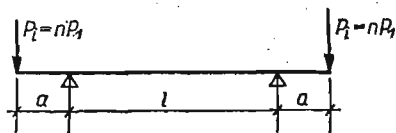
Łącznie wykonano 168 różnych kompozycji tworzywa. Z każdej kompozycji wykonano po 6 próbek pasmowych o grubości $h = 5$ mm, szerokości 40 mm oraz długości 300 mm. Przyjęte grubości próbek, dochodzące do $h = 5$ mm, odpowiadają grubości modeli konstrukcji powłokowych. Proces utwardzania tworzywa próbki przebiega wtedy w podobnych warunkach, jak proces utwardzania tworzywa modelu (przede wszystkim występują podobne warunki termiczne).

Badania dla określenia jednorodności tworzywa przeprowadzono na próbkach pasmowych o wymiarach $5 \times 40 \times 300$ i $10 \times 40 \times 300$ mm oraz na beleczkach $20 \times 40 \times 300$ mm.

3. Technika badań oraz metodyka opracowania wyników

3.1. Uwagi wstępne. Określenie zależności naprężenie-ugięcie, naprężenie-odkształcenie oraz wytrzymałości na zginanie dla badanego tworzywa przeprowadzono na próbkach pasmowych poddanych czystemu zginaniu, skokowo zwiększanym momentem $M = P_1 a$ (rys. 1).

Pomiar ugięć prowadzono czujnikiem mechanicznym 0,01, odkształcenia zaś rejestrowano tensometrami elektrooporowymi RL-20/120. Każdą z próbek pasmowych poddano



Rys. 1. Schemat obciążenia próbki

dwóm cyklom obciążenia w zakresie $1/3$ naprężeń niszczących, rejestrując strzałkę ugięcia oraz odkształcenia podłużne i poprzeczne skrajnych włókien strefy ściskanej i rozciąganej.

Wstępna graficzna analiza zależności naprężenie-ugięcie oraz naprężenie-odkształcenie nasunęła przypuszczenie, że zależności te dla większości badanego tworzywa są liniowe.

Celem zweryfikowania tego przypuszczenia przeprowadzono statystyczną analizę wyników, otrzymanych z pomiarów, określając dla równań zastępczych prostych następujące parametry wyznaczone według metody najmniejszych kwadratów [6, 7, 8, 9]:

- współczynnik regresji naprężenia względem odkształcenia lub ugięcia próbki,
- współczynnik korelacji naprężenia względem odkształcenia i ugięcia próbki oraz
- odchylenie standardowe współczynnika regresji naprężenia względem odkształcenia lub ugięcia próbki.

Poziom istotności korelacji liniowej' zmierzonych zależności naprężenie-ugięcie i naprężenie-odkształcenie, określono przez porównanie obliczonego dla tych zależności współczynnika korelacji z wartościami ujętymi w tablicy korelacji FISCHERA [7].

3.2. Określenie modułu Younga oraz naprężeń niszczących. Moduł Younga E tworzywa określono ze zmierzonej zależności moment-ugięcie oraz naprężenie-odkształcenie, uzyskanej dla dwuwspornikowej próbki obciążonej symetrycznie siłami skupionymi na końcach wsporników (rys. 1), według wzorów [6, 7, 10, 11]:

$$(3.1) \quad E = b \frac{M_1 l^2}{8I} \quad \text{lub} \quad E = b_0 \frac{M_1}{W},$$

gdzie

- M_1 oznacza moment wywołany siłą P_1 ,
- b — współczynnik regresji naprężenia względem ugięcia,
- l — rozpiętość przęsła badanej próbki,
- I — moment bezwładności przekroju poprzecznego próbki,
- b_0 — współczynnik regresji naprężenia względem odkształcenia,
- W — wskaźnik zginania przekroju próbki.

Przedział ufności modułu Younga określono według następujących wzorów [6, 7]:

$$(3.2) \quad (b \pm \bar{t} s_{(b)}) \frac{M_1 l^2}{8I} \quad \text{lub} \quad (b_0 \pm \bar{t} s_{(b_0)}) \frac{M_1}{W},$$

gdzie \bar{t} oznacza bezwzględną wartość rozkładu t przy danych stopniach swobody i żądanym prawdopodobieństwie wystąpienia wartości E .

Naprężenia niszczące R_{zg} określono według zależności [10, 11]

przy $\varepsilon \leq \frac{R_e}{E}$

$$(3.3) \quad R_{zg} = \frac{M_n}{W}$$

oraz przy $\varepsilon > \frac{R_e}{E}$

$$R_{zg} = R_e + E_u \left(\varepsilon - \frac{R_e}{E} \right),$$

gdzie M_n oznacza moment niszczący,

- ε — wydłużenie jednostkowe skrajnych włókien próbki,
- R_e — granica proporcjonalności tworzywa próbki,
- E_u — moduł umocnienia tworzywa.

3.3. Określenie współczynnika Poissona. Współczynnik Poissona wyznaczono dla każdej próbki poddanej dwóm cyklom obciążenia i odciążenia w zakresie do $1/3 R_{zg}$ (naprężeń niszczących).

Współczynniki te obliczono z wyznaczonych współczynników regresji dla zależności naprężenie-odkształcenie, określonej dla kierunku podłużnego (wzdłuż dłuższego boku

próbki) i poprzecznego, oddzielnie dla strefy ściskanej i rozciąganej, według zależności (rys. 2)

$$(3.4) \quad \nu = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{b_1}{b_2},$$

gdzie ε_1 oznacza wydłużenie jednostkowe strefy ściskanej lub rozciąganej w kierunku podłużnym,

ε_2 — wydłużenie jednostkowe strefy ściskanej lub rozciąganej w kierunku poprzecznym,

b_1 — współczynnik regresji dla zależności $\sigma - \varepsilon_1$,

b_2 — współczynnik regresji dla zależności $\sigma - \varepsilon_2$.

Przedział ufności dla wyznaczonych współczynników Poissona określono według zależności

$$(3.5) \quad \frac{b_1 + tS(b_1)}{b_2 - tS(b_2)} \geq \nu \geq \frac{b_1 - tS(b_1)}{b_2 + tS(b_2)},$$

gdzie $S(b_1)$, $S(b_2)$ oznacza odchylenie standardowe dla współczynników b_1 i b_2 .

3.4. Określenie współczynnika dysypacji θ energii sprężystości przy statycznej pętli histerezy. Współczynnik dysypacji energii sprężystości dla poszczególnych cykli obciążenie-odciążenie określono na podstawie pomiarów odkształceń ze wzoru

$$(3.6) \quad \theta_i = \frac{\Delta W_i}{W_i},$$

gdzie ΔW_i oznacza energię sprężystości utraconą w i -tym cyklu obciążenie-odciążenie (pole pętli i -tej histerezy),

W_i — maksymalna energia sprężystości próbki w i -tym cyklu obciążenie-odciążenie.

Przyjmując naprężenie za zmienną niezależną a odkształcenie za zmienną zależną, energię sprężystości utraconą w poszczególnym cyklu obciążenie-odciążenie dla kierunku podłużnego próbki ΔW_{li} , można przedstawić w postaci [12]

$$(3.7) \quad \Delta W_{li} = \int_0^{\sigma_w} F_{li}(\sigma) d\sigma,$$

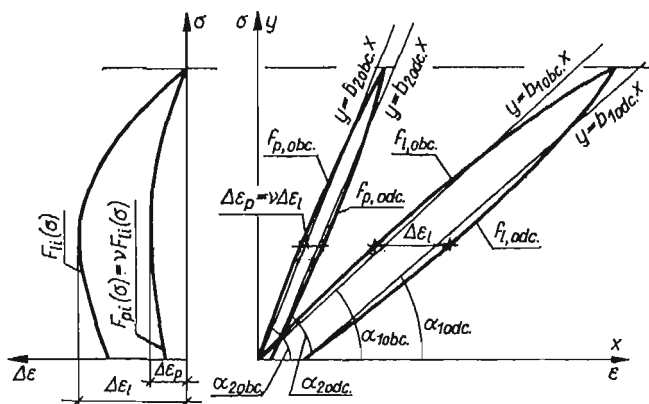
gdzie indeks l oznacza kierunek wzdłuż dłuższego boku próbki, σ_w — maksymalne naprężenie zginające w i -tym cyklu obciążenia (rys. 2), $F_{li}(\sigma)$ — różnica funkcji f_{li} odciążenia i f_{li} obciążenia (rys. 2), przedstawiająca «szerokość» pętli histerezy dla odkształceń jednostkowych w kierunku podłużnym próbki.

Utratę energii sprężystości w kierunku poprzecznym próbki $\Delta W_{pi} = \nu \Delta W_{li}$ przedstawiono według wzoru (3.7) zastępując funkcję podcałkową $F_{li}(\sigma)$ przez funkcję $F_{pi}(\sigma)$, która przedstawia «szerokość» pętli histerezy dla odkształceń jednostkowych w kierunku poprzecznym próbki.

Wykresy funkcji $F_{ii}(\sigma)$ i $F_{pi}(\sigma)$ podano na rys. 2, przy czym wyrażenia $\Delta\epsilon_i$ i $\Delta\epsilon_p = \nu\Delta\epsilon_i$ oznaczają «szerokość» pętli histerezy.

Znając wartość utraconej energii sprężystości ΔW_{ii} i ΔW_{pi} dla strefy ściskanej i rozciąganej tworzywa próbki, można obliczyć wartość współczynnika Poissona również z zależności

$$(3.8) \quad \nu = \frac{\Delta W_{pi}}{\Delta W_{ii}}$$



Rys 2. Schematyczne przedstawienie pętli histerezy oraz funkcji jej szerokości $\Delta\epsilon = F(\sigma)$

Maksymalną oraz utraconą energię sprężystości tworzywa próbki w i -tym cyklu obciążenie-odciążenie obliczono dla każdej próbki stosując uproszczony sposób całkowania, polegający na sumowaniu powierzchni trapezów.

4. Wyniki badań oraz ich omówienie

4.1. Uwagi wstępne. Czysta żywica epoksydowa «epidian 5» utwardzona stechiometryczną ilością aminy alifatycznej «TECZA», jest — jak wiadomo — w temperaturze pokojowej (15–25°C) tworzywem stosunkowo kruchym, o dużej wytrzymałości na zginanie, ściskanie i rozciąganie. Charakteryzuje się ponadto stosunkowo niedużą wartością modułu Younga (około 35 000 kG/cm²) oraz stosunkowo niedużym wydłużeniem względnym przy zniszczeniu (około 5%) [13, 14].

Wprowadzenie do żywicy epoksydowej mineralnego napełniacza, przy jednoczesnym zastosowaniu zewnętrznej plastyfikacji, pozwala na uzyskanie tworzywa o własnościach mechanicznych, zmieniających się w dość znacznych przedziałach. Na rys. 3–6 przedstawiono wpływ utwardzacza («TECZA»), plastyfikatora (ftalan dwubutyli) oraz napełniacza (cement portlandzki 350) na wartości modułu Younga E dla badanego tworzywa. Np. moduł Younga dla utwardzonego tworzywa zależnie od stopnia uplastycznienia, napełnienia i utwardzenia przyjmował wartości od 5000 do 160 000 kG/cm². Natomiast naprężenia niszczące R_{zg} w zależności od składu tworzywa przyjmowały wartości od 50 do 1200 kG/cm².

Wprowadzenie do żywicy epoksydowej «epidian 5» napełniacza (cement portlandzki 350) wpływa na poprawienie własności cieplnych utwardzonego tworzywa, gdyż w miarę zwiększania ilości napełniacza w żywicy epoksydowej wzrasta przewodnictwo cieplne utwardzonego tworzywa, przy jednoczesnym spadku rozszerzalności cieplnej tego tworzywa. Dodanie do żywicy epoksydowej «epidian 5» napełniacza oraz plastyfikatora ma również dodatni wpływ na własności utwardzonego tworzywa z tego względu, że dodatki te wywołują spadek stężenia żywicy i utwardzacza, co wpływa na przedłużenie czasu żelowania i czasu życia kompozycji, jak również na zmniejszenie efektu cieplnego reakcji utwardzania.

4.2. Wpływ stopnia utwardzenia, napełnienia oraz uplastycznienia na wartość modułu Younga badanego tworzywa. Badane tworzywo w zależności od ilości plastyfikatora — ftalan dwubutyli, przy zmiennych ilościach utwardzacza — «TECZA» (7 do 20 ns) oraz napełniacza — cement portlandzki 350 (0 do 250 ns), charakteryzowało się następującymi skrajnymi wartościami modułu Younga $E = 20\ 000$ do $160\ 000$ kG/cm² (przy 0 ns ftalanu dwubutyli), $E = 18\ 000$ do $80\ 000$ kG/cm² (7 ns ftalanu dwubutyli), $E = 5000$ do $60\ 000$ kG/cm² (15 ns ftalanu dwubutyli) oraz $E = 0$ do $40\ 000$ kG/cm² (24 ns ftalanu dwubutyli).

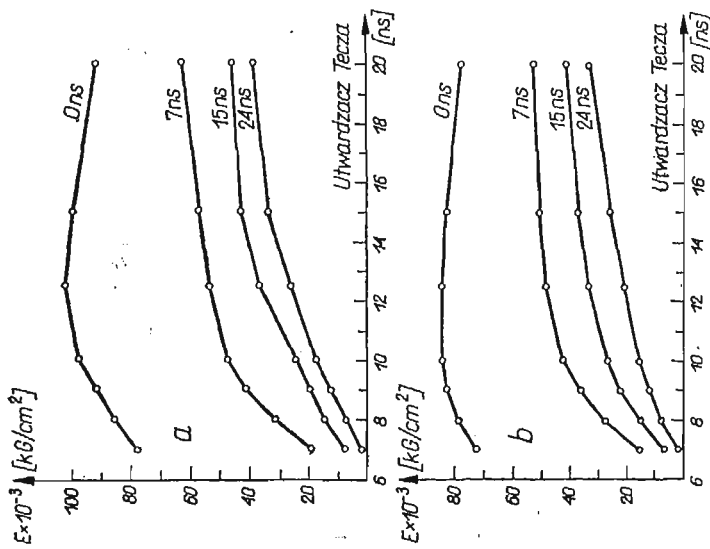
Na rys. 3–6 przedstawiono wpływ utwardzacza «TECZA» oraz plastyfikatora, «ftalan dwubutyli», na wartość modułu Younga przy dodaniu do żywicy epoksydowej «epidian 5» cementu portlandzkiego 350 w ilości 0 ns (rys. 3b), 50 ns (rys. 3a), 100 ns (rys. 4b), 150 ns (rys. 4a), 200 ns (rys. 5) i 250 ns (rys. 6).

Ustalono, że stopniując «ftalan dwubutyli» w ilościach od 7 do 20 ns, można przy stałych stopniach napełnienia żywicy epoksydowej «epidian 5» uzyskać tworzywo o następujących wartościach modułu Younga:

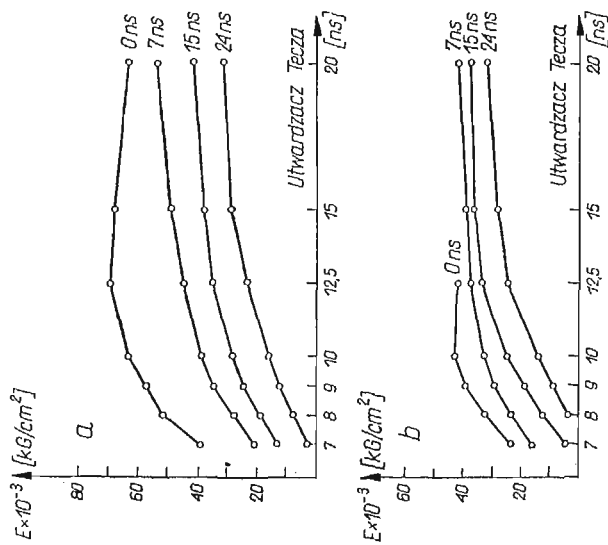
- od ok. 2000 do 40 000 kG/cm² przy 0 ns cementu portlandzkiego 350,
- od ok. 2000 do 70 000 kG/cm² przy 50 ns cementu portlandzkiego 350,
- od ok. 3000 do 80 000 kG/cm² przy 100 ns cementu portlandzkiego 350,
- od ok. 3000 do 100 000 kG/cm² przy 150 ns cementu portlandzkiego 350,
- od ok. 5000 do 130 000 kG/cm² przy 200 ns cementu portlandzkiego 350,
- od ok. 5000 do 160 000 kG/cm² przy 250 ns cementu portlandzkiego 350.

Analizując wpływ utwardzacza «TECZA» na wartość modułu Younga utwardzonego tworzywa należy podkreślić, że zbyt mała ilość aminy, w wyniku słabego usieciowania tworzywa, wpływa niekorzystnie na własności mechaniczne utwardzonego tworzywa, gdyż w bardzo znacznym stopniu zmniejsza sztywność otrzymanego tworzywa.

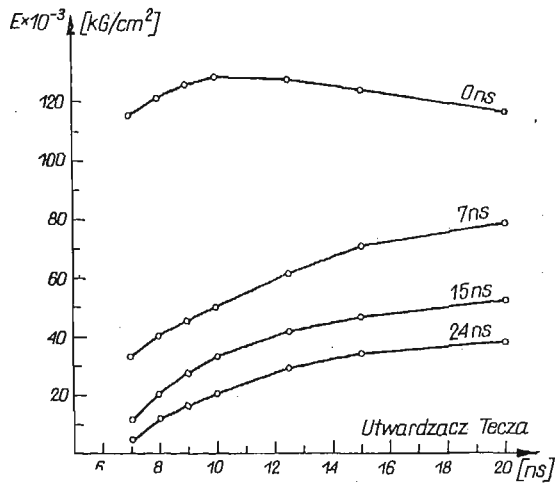
Tworzywo utwardzone utwardzaczem w ilości 0,6 do 0,9 ilości stechiometrycznej jest tworzywem o cechach mechanicznych zmiennych w czasie. Dlatego też podane dolne granice modułów Younga, dla badanego tworzywa, wyznaczone po upływie 21 dni od czasu zmieszania kompozycji żywicy epoksydowej z utwardzaczem, należy traktować jako wartości orientacyjne. Prowadzone obecnie badania potwierdzają dla tego materiału (utwardzacz w ilości mniejszej od ilości stechiometrycznej) tendencje wzrostowe modułu Younga, naprężeń niszczących, jak również zmniejszenia się odkształcalności w miarę upływu czasu. Nadmiar aminy («TECZA») w czystej żywicy, jak również napełnionej



Rys 4. Wpływ dodatku 0, 7, 15 i 24 ns ftalanu dwubutyliu na wartość modułu Younga dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 100 i 150 ns; a) napełnienie w ilości 100 ns, b) napełnienie w ilości 150 ns

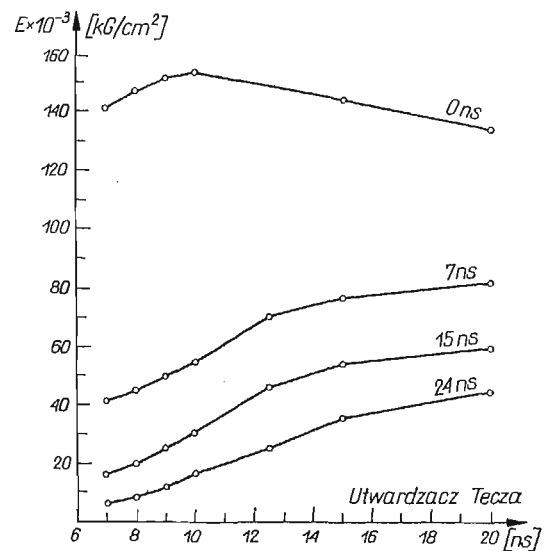


Rys 3. Wpływ dodatku 0, 7, 15 i 24 ns ftalanu dwubutyliu na wartość modułu Younga dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 50 i 0 ns; a) przy napełnieniu cementem w ilości 50 ns, b) bez dodatku cementu



Rys. 5. Wpływ dodatku 0, 7, 15 i 24 ns ftalanu dwubutylnego na wartości modułu Younga dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 200 ns

bez dodatku plastyfikatora (ftalanu dwubutylnego) działa na utwardzone tworzywo plastyfikująco (rys. 3-6). Natomiast w żywicy epoksydowej plastyfikowanej ftalanem dwubutylnym, nadmiar aminy przyspiesza proces utwardzania żywicy, podwyższając między innymi wartość modułu Younga (rys. 3-6).



Rys. 6. Wpływ dodatku 0, 7, 15 i 24 ns ftalanu dwubutylnego na wartości modułu Younga dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 250 ns

4.3. Wpływ stopnia utwardzenia, napełnienia oraz uplastycznienia na wartość naprężeń niszczących badanego tworzywa. Naprężenia niszczące przy zginaniu R_{zg} dla badanego tworzywa w zależności od stopnia uplastycznienia, napełnienia i utwardzenia przyjmowały wartości od 20 do 1200 kG/cm². Na wielkość naprężeń niszczących przy zginaniu dla badanego tworzywa wpływają przede wszystkim stopień napełnienia, stopień uplastycznienia oraz stopień utwardzenia.

Naprężenia niszczące R_{zg} dla badanego tworzywa w zależności od stopnia uplastycznienia (0 do 24 ns ftalanu dwubutyłu) oraz stopnia utwardzenia (7 do 20 ns «TECZA»), określono na poziomie:

- od 350 do 1200 kG/cm² przy 0 ns cementu portlandzkiego 350,
- od 150 do 840 kG/cm² przy 50 ns cementu portlandzkiego 350,
- od 80 do 670 kG/cm² przy 100 ns cementu portlandzkiego 350,
- od 60 do 430 kG/cm² przy 150 ns cementu portlandzkiego 350,
- od 110 do 420 kG/cm² przy 200 ns cementu portlandzkiego 350,
- od 50 do 400 kG/cm² przy 250 ns cementu portlandzkiego 350.

Ogólnie można stwierdzić, że większemu napełnieniu oraz uplastycznieniu żywicy epoksydowej «epidian 5» odpowiadają mniejsze wartości naprężeń niszczących. Utwardzacz «TECZA» dodany do żywicy epoksydowej «epidian 5» w ilości mniejszej od stechiometrycznej w znacznym stopniu obniża wartość naprężeń niszczących R_{zg} utwardzonego tworzywa. Zjawisko to należy tłumaczyć przede wszystkim słabym usieciowaniem tworzywa. Tworzywo utwardzone przy tej ilości utwardzacza charakteryzuje się ponadto tendencjami wzrostowymi naprężeń niszczących w czasie. Z tego względu podane dolne wartości naprężeń niszczących R_{zg} , uzyskane dla badanego tworzywa, po upływie 21 dni od czasu zmieszania kompozycji z utwardzaczem, należy traktować jako wartości orientacyjne.

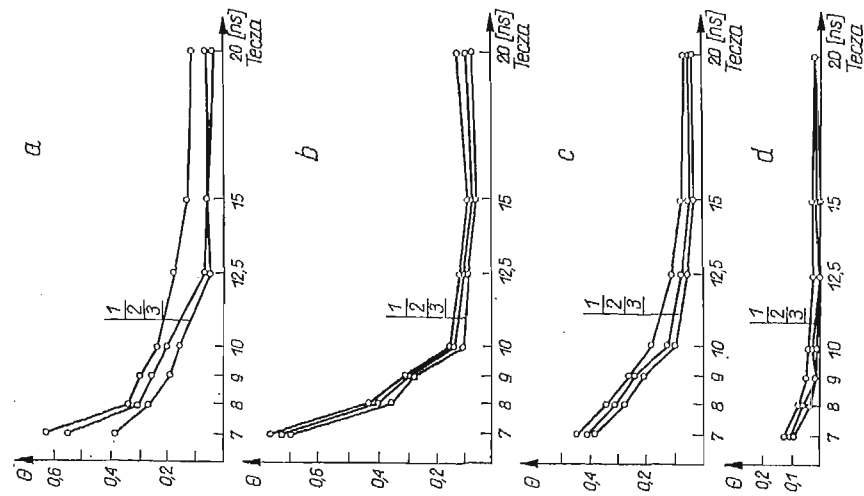
Dodanie do tworzywa utwardzacza «TECZA» w ilości większej od stechiometrycznej wpływa zmniejszająco na wartości naprężeń niszczących R_{zg} dla tworzywa bez dodatku ftalanu dwubutyłu. Natomiast dodanie utwardzacza «TECZA» do tworzywa (plastyfikowanego ftalanem dwubutyłu) w ilości większej od stechiometrycznej, przyspiesza proces utwardzania tego tworzywa, podwyższając jednocześnie wartości naprężeń niszczących R_{zg} .

4.4. Wpływ stopnia uplastycznienia, napełnienia i utwardzenia na odkształcalność badanego tworzywa. Dodany do żywicy epoksydowej «epidian 5» lub tworzywa epoksydowo-cementowego ftalan dwubutyłu wpływa na własności materiałowe utwardzonego tworzywa, zwiększając przede wszystkim jego własności odkształceniowe.

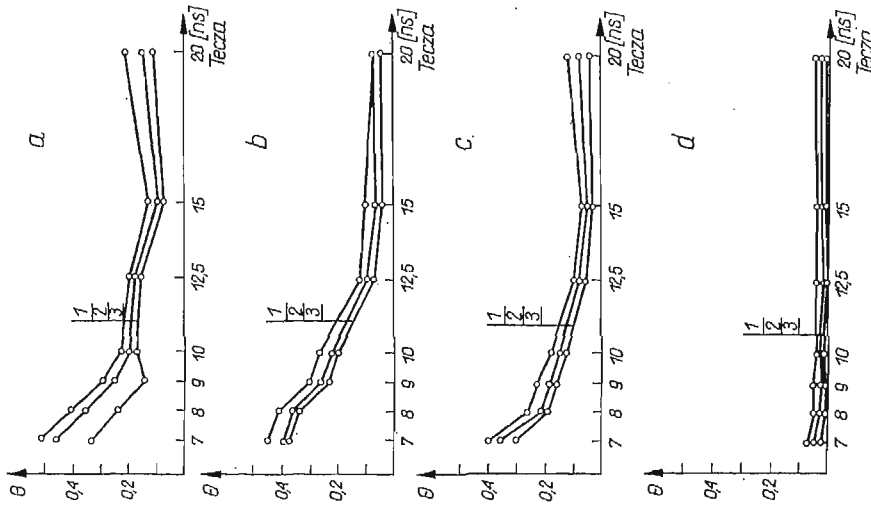
Na podstawie przeprowadzonych pomiarów odkształceń można, dla badanego tworzywa (utwardzonego utwardzaczem w ilości większej lub równej ilości stechiometrycznej), ustalić zakres liniowej zależności naprężenie-odkształcenie do około 0,5 R_{zg} . Dla tworzywa utwardzonego utwardzaczem w ilości mniejszej od stechiometrycznej zakres liniowej zależności naprężenie-odkształcenie jest znacznie mniejszy i wynosi od ok. 0,0 R_{zg} (przy 6 ns utwardzacza «TECZA») do około 0,3–0,4 R_{zg} (przy 0,9 stechiometrycznej ilości utwardzacza «TECZA»).

Na rys. 7 i 8 przedstawiono wpływ ftalanu dwubutyłu oraz utwardzacza «TECZA» na wartość współczynników dysypacji energii sprężystości dla badanego tworzywa o napełnieniu 250 ns cementem portlandzkim 350. Współczynniki te dla przebadanego tworzywa (przy obciążeniu do 1/3 R_{zg}) przyjmowały wartości zawarte w przedziale od 0 do 0,9. Na wartość współczynników dysypacji energii sprężystości wpływa przede wszystkim ilość utwardzacza oraz ftalanu dwubutyłu dodana do żywicy epoksydowej «epidian 5».

Z przeprowadzonych badań tworzywa na próbkach pasmowych poddanych wpływom cyklicznie zmiennych obciążeń wynika, że obciążenia te zasadniczo nie wpływają na

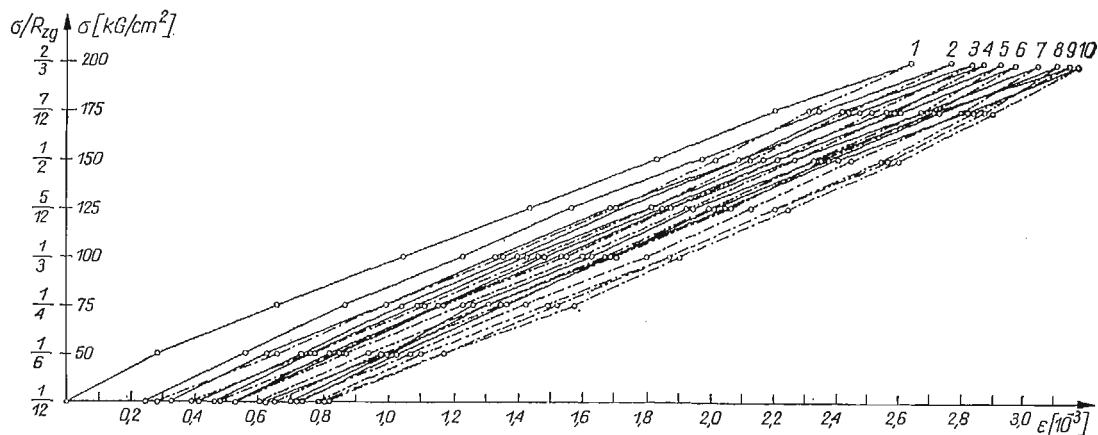


Rys. 7. Wpływ ftalanu dwubutyli oraz utwardzacza «TECZA» na wartość współczynnika dysypacji energii sprężystości tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 200 ns; a) przy 24 ns ftalanu dwubutyli, b) przy 15 ns ftalanu dwubutyli, c) przy 7 ns ftalanu dwubutyli, d) bez dodatku ftalanu dwubutyli (1, 2, 3 oznacza dla 1, 2, 3 pięci histerezy)

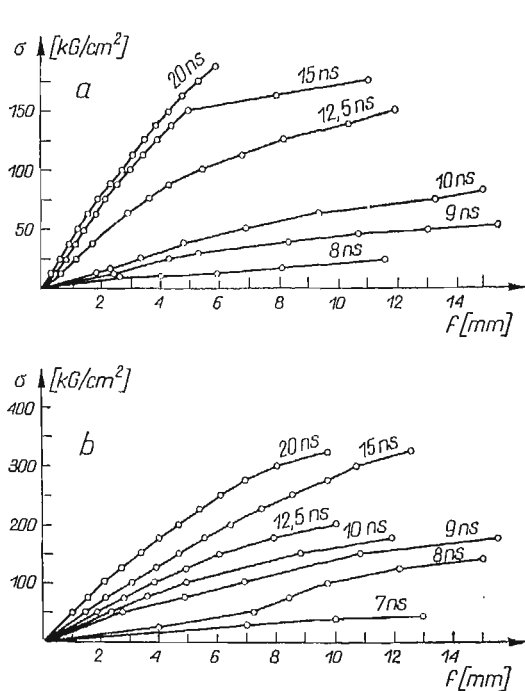


Rys. 8. Wpływ ftalanu dwubutyli oraz utwardzacza «TECZA» na wartość współczynnika dysypacji energii sprężystości tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 250 ns; a) przy 24 ns ftalanu dwubutyli, b) przy 15 ns ftalanu dwubutyli, c) przy 7 ns ftalanu dwubutyli, d) bez dodatku ftalanu dwubutyli; (1, 2, 3 oznacza dla 1, 2, 3 pięci histerezy)

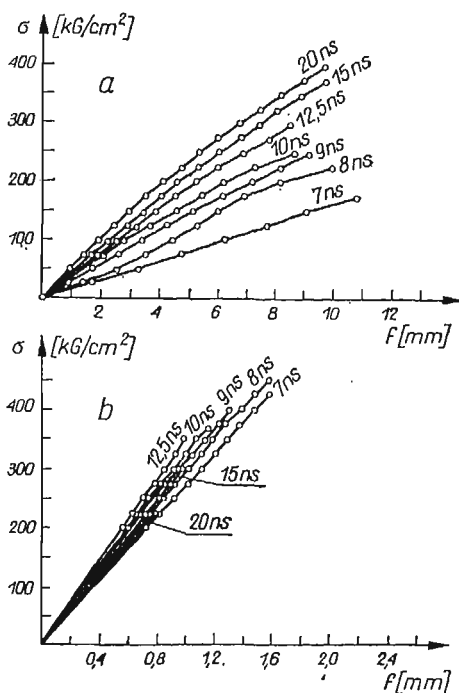
zmianę modułu Younga dla badanego tworzywa. Przykładowy wykres zależności $\sigma - \varepsilon$ dla próbki wykonanej z tworzywa o napełnieniu 250 ns, utwardzonego utwardzaczem «TECZA» w ilości 15 ns z dodatkiem ftalanu dwubutyłu w ilości 15 ns, poddanej 10 cyklom obciążenia-odciążenia podano na rys. 9.



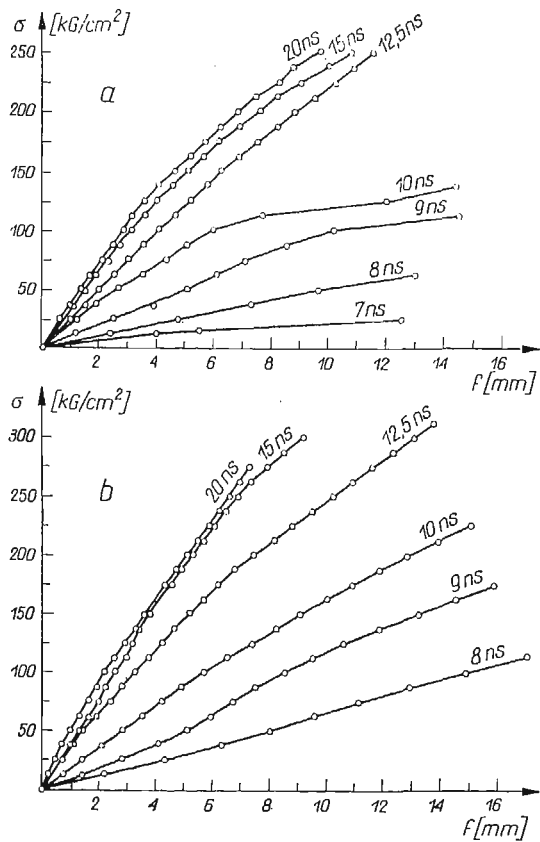
Rys. 9. Wykres $\sigma - \varepsilon$ dla próbki pasmowej poddanej 10 cyklom obciążenia-odciążenia w zakresie do $2/3$ naprężeń niszczących



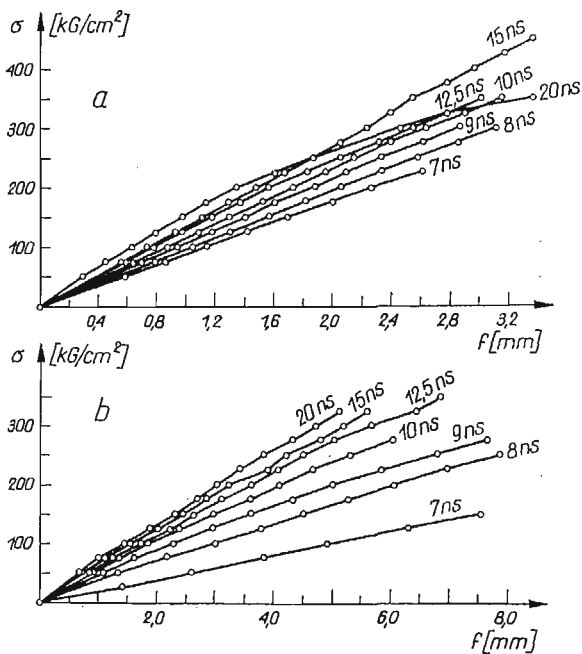
Rys. 10. Wykres $\sigma - f$ dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 250 ns; a) z dodatkiem 24 ns ftalanu dwubutyłu, b) z dodatkiem 15 ns ftalanu dwubutyłu



Rys. 11. Wykres $\sigma - f$ dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 250 ns; a) z dodatkiem 7 ns ftalanu dwubutyłu, b) bez dodatku ftalanu dwubutyłu



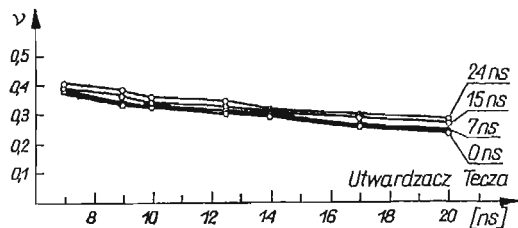
Rys. 12 Wykres $\sigma - f$ dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 200 ns; a) z dodatkiem 24 ns ftalanu dwubutyli, b) z dodatkiem 15 ns ftalanu dwubutyli



Rys. 13. Wykres $\sigma - f$ dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 200 ns; a) z dodatkiem 7 ns ftalanu dwubutyli, b) bez dodatku ftalanu dwubutyli

Przykładowe wykresy zależności naprężenie-ugięcie uzyskane na próbkach wykonanych z tworzywa o napełnieniu 200 i 250 ns, przy różnych stopniach utwardzenia i uplastycznienia przedstawiono na rys. 10–13.

Przeprowadzone badania wykazały, że współczynnik Poissona dla badanego tworzywa posiada wartości stałe niezależne od poziomu naprężeń. Współczynnik ten dla badanego tworzywa w zależności od składu przyjmował wartości od 0,26 do 0,45. Wpływ ilości utwardzacza oraz plastyfikatora na wartość współczynnika Poissona dla tworzywa napełnionego cementem portlandzkim w ilości 250 ns przedstawiono na rys. 14. Z prze-



Rys. 14. Wpływ utwardzacza i plastyfikatora na wartość współczynnika Poissona dla tworzywa o napełnieniu cementem portlandzkim w ilości 250 ns

prowadzonych badań wynika, że na wartość współczynnika Poissona utwardzonego tworzywa zasadniczo wpływa ilość napełniacza oraz plastyfikatora, a w mniejszym stopniu ilość utwardzacza.

Nadmienić należy, że prowadzone badania tworzywa poddanego wpływom obciążeń długotrwałych wykazują, że tworzywo o napełnieniu większym od 100 ns przy zastosowaniu ftalanu dwubutyłu w ilości mniejszej od 15 ns, można stosować w badaniach modelowych, jeżeli do utwardzenia tego tworzywa zastosowano utwardzacz «TECZA» w ilości większej lub równej ilości stechiometrycznej.

Uzyskane w przeprowadzonych badaniach wartości odchylenia standardowego $s_{(b)}$ dla współczynników regresji b zależności naprężenie-ugięcie oraz naprężenie-odkształcenie zawarte były w przedziale $0,005b \leq s_b \leq 0,02b$.

5. Wnioski i zakończenie

Tworzywo otrzymane poprzez utwardzenie utwardzaczem «TECZA» napełnionej cementem portlandzkim 350, zewnątrznie plastyfikowanej ftalanem dwubutyłu żywicy epoksydowej «epidian 5», charakteryzuje się różnymi własnościami fizyczno-mechanicznymi.

Badane tworzywo w zależności od składu (utwardzacz, napełniacz i plastyfikator) oraz poziomu obciążenia zachowywało się jak materiał liniowo sprężysty ($\theta = 0$), a głównie jako materiał sprężysto-plastyczny względnie nawet plastyczny ($\theta = 1$). Określone w wyniku badań współczynniki dysypacji energii sprężystości dla pasmowych próbek (wykonanych z tworzywa o przyjętych składach), poddanych cyklicznie zmiennym obciążeniom w zakresie do $1/3 R_{zg}$ przyjmowały wartości zawarte w przedziale od 0 do 0,9. Najniższe wartości współczynników dysypacji energii sprężystości otrzymano dla próbek pasmowych wykonanych z tworzywa otrzymanego przez utwardzenie stechiometryczną ilością utwardzacza «TECZA» czystej względnie napełnionej (bez dodatku ftalanu dwubutyłu) żywicy

epoksydowej «epidian 5». Przy zastosowaniu utwardzacza «TECZA» w ilości większej lub mniejszej od stechiometrycznej do utwardzenia czystej względnie napełnionej żywicy epoksydowej «epidian 5» przy jednoczesnym zastosowaniu plastyfikacji zewnętrznej współczynnik ten przyjmował większe wartości i zmieniał się od około 0,1 do 0,9.

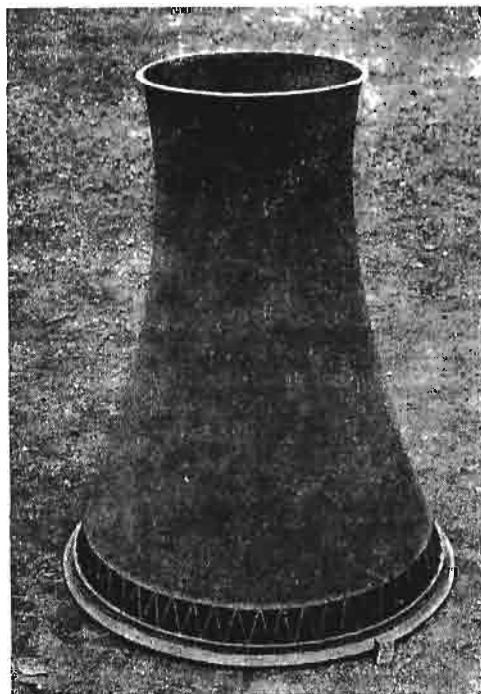
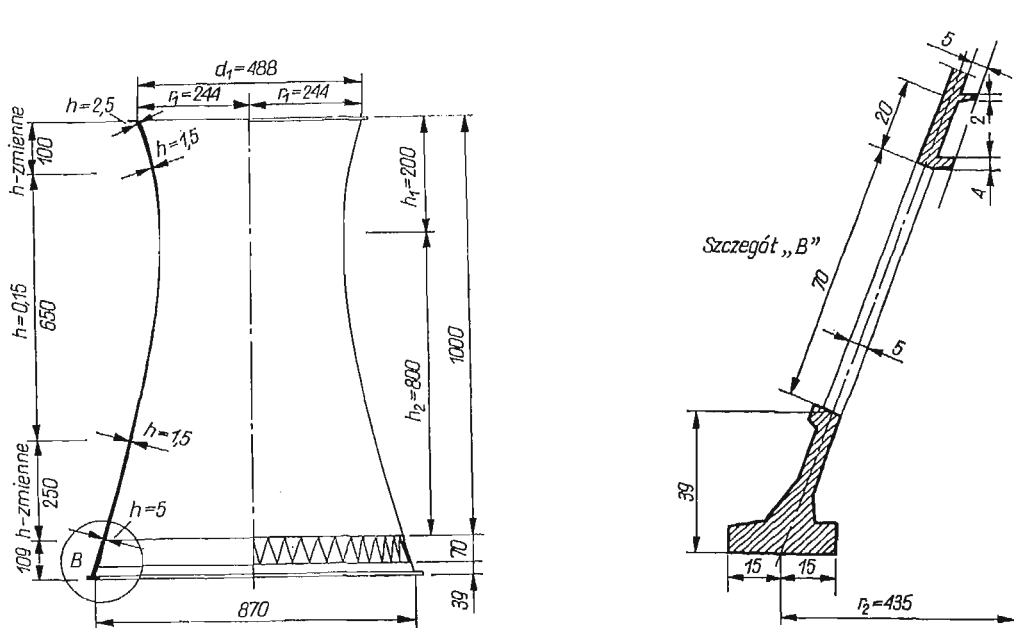
Moduł Younga dla badanego tworzywa w zależności od stopnia uplastycznienia, napełnienia i utwardzenia przyjmował wartości od 5000 do 160 000 kG/cm². Natomiast naprężenia niszczące R_{zg} w zależności od składu tworzywa zmieniały się od 50 do 1200 kG/cm². Stwierdzony w wyniku przeprowadzonych badań wysoki stosunek wytrzymałości na zginanie R_{zg} do modułu Younga E dowodzi dużej odkształcalności tego tworzywa. Badane tworzywo w zależności od przyjętych proporcji składników wykazywało liniową zależność $\sigma - \varepsilon$ praktycznie w zakresie od 0,1 do 0,5 R_{zg} . Materiał «epoksydowo-cementowy» wykazywał liniową zależność naprężenie-odkształcenie w zakresie do 0,3–0,5 R_{zg} , jeżeli do jego utwardzenia zastosowano utwardzacz w ilości większej od 10 ns. Wyznaczone współczynniki korelacji liniowej dla zależności naprężenie-odkształcenie podłużne przy $\sigma \leq 1/3 R_{zg}$, dla próbek wykonanych z tworzywa utwardzonego utwardzaczem «TECZA» w ilości większej od 10 ns, zmieniały się w granicach od 0,9682 do 1,0. Dla wyznaczonych zależności naprężenie-odkształcenie podłużne oraz poprzeczne, próbek wykonanych z tworzywa utwardzonego utwardzaczem «TECZA» w ilości większej od 10 ns, uzyskano bardzo wysokie i zbliżone wartości współczynników korelacji liniowej. Współczynniki te w zależności od składu tworzywa, uzyskane przy obciążeniu próbek pasmowych do $1/3 R_{zg}$, przyjmowały wartości od 0,9668 do 0,999. Tak wysokie współczynniki korelacji liniowej zależności naprężenie-odkształcenie podłużne oraz naprężenie-odkształcenie poprzeczne świadczą o liniowej zmienności tych zależnych. Stwierdzenie to upoważnia do wysunięcia wniosku, że współczynnik Poissona badanego tworzywa nie zależy od poziomu naprężeń i posiada wartość stałą. Współczynnik ten dla badanego tworzywa w zależności od składu przyjmował wartości od 0,26 do 0,45.

Przeprowadzone badania materiałowe modyfikowanej żywicy epoksydowej «epidian 5» wykazały pełną przydatność tego tworzywa do wykonywania modeli obiektów przemysłowych, a w szczególności do konstrukcji powłokowych, poddanych badaniom bezpośrednim, jeżeli do utwardzenia tego tworzywa zastosowano utwardzacz «TECZA» w ilości większej od 10 ns i plastyfikator (ftalan dwubutyłu) w ilości nie większej od 15 ns.

Za możliwością stosowania tego tworzywa do wykonywania modeli obiektów przemysłowych przemawiają między innymi takie cechy mechaniczno-fizyczne, stwierdzone w czasie przeprowadzonych badań, jak: jednorodność, izotropowość, niewysoki moduł Younga, dość duża odkształcalność, stała wartość współczynnika Poissona oraz łatwość formowania dowolnych kształtów, obrabiania i łączenia poszczególnych elementów modelu przy zastosowaniu tego samego tworzywa.

Na rys. 15 pokazano wykonany model kompletnej chłodni kominowej, którego powłokę o zmiennej grubości w granicach od 1,5 do 5,0 mm oraz pierścień i słupki o średnicy 5 mm wykonano z napełnionej plastyfikowanej żywicy epoksydowej (cement portlandzki 350–250 ns, ftalan dwubutyłu — 15 ns, utwardzacz «TECZA» — 15 ns).

Podkreślić należy, że własności fizyczno-mechaniczne plastyfikowanego tworzywa «epoksydowo-cementowego» można dość znacznie regulować, przy czym najlepsze efekty daje łączne zastosowanie napełniacza i plastyfikatora. W ten sposób można uzyskać two-



Rys. 15. Model hiperboloidalnej chłodni kominowej; a) podstawowe wymiary modelu, b) wykonany model

rzywo, które będzie odpowiadać własnościami przyjętej technologii wykonywania modelu, jak również w pewnym stopniu zoptymalizować własności materiałowe utwardzonego tworzywa.

Literatura cytowana w tekście

1. L. MULLER, *Teoria podobieństwa mechanicznego*, WNT, Warszawa 1961.
2. E. SZULC, *Z zagadnień podobieństwa modelowego elementów zbrojonych*, Arkady, Warszawa 1963.
3. O. DĄBROWSKI, T. KOLENDOWICZ, *Badania modelowe metodą Begęsa układów prętowych, cienkosciennych, płyt i powłok*, Prace naukowe Instytutu Inż. Łąd. Pol. Wrocław, Nr 7. Monografie 1, 1972.
4. J. DENKIEWICZ, *Analiza cech fizycznych tworzywa gipsowego jako materiału modelu do badań konstrukcji z betonu*, praca doktorska, Pol. Śląska w Gliwicach, 1970.
5. E. SZYMAŃSKI, *Wpływ wody na cechy techniczne tworzyw gipsowych*, Cement, Wapno, Gips, 7-8 (1962).
6. L. Z. RUMSZYŃSKI, *Matematyczne opracowanie wyników eksperymentu*, tłum. z j. rosyjskiego, WNT, Warszawa 1973.
7. W. VOLK, *Statystyka stosowana dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1965.
8. N. W. SMIRNOW, I. W. DUDIN-BARKOWSKI, *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa 1969.
9. A. STRZAŁKOWSKI, A. ŚLIŻYŃSKI, *Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów*, PWN, Warszawa 1973.
10. A. JAKUBOWICZ, Z. ORŁOŚ, *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa 1973.
11. Z. BRZOSKA, *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1972.
12. J. KŁEPACZKO, J. LITOŃSKI, *Statyczna pętla histerezy sprężystej niektórych metali wywołana odkształceniem plastycznym*, Rozprawy Inżynierskie, 4, 12 (1964).
13. Z. BROJER, Z. HERTZ, P. PENCZAK, *Żywice epoksydowe*, WNT, Warszawa 1972.
14. M. IRZYK, J. POGORZELSKI, E. KUKLIŃSKI, *Tworzywa sztuczne w budownictwie*, Arkady, Warszawa 1968.

Р е з ю м е

ОЦЕНКА ПРИГОДНОСТИ ЭПОКСИДНОЙ СМОЛЫ ЭПИДИАН 5 ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ

В работе определено влияние количества минерального наполнителя (портланд цемент 350), отвердителя (триэтилентетрамин) и пластификатора (дибутилфталат), добавляемых к эпоксидной смоле (Эпидиан 5) на такие свойства компаунда, как однородность, модуль Юнга, коэффициент Пуассона, прочность на изгиб, а также на кривую напряжение—деформация и на значение коэффициента рассеяния упругой энергии при статической петле гистерезиса.

Состав компаунда подбирался в следующих соотношениях (на 100 частей смолы Эпидиан 5): наполнитель — 0, 50, 100, 150, 200, 250 частей, пластификатор — 0, 7, 15, 24 ч., отвердитель — 7, 8, 9, 10, 12,5, 15, 20 ч.

Компаунд исследовался на планочных образцах, подвергаемых чистому изгибу путем наложения скачкообразно меняющегося изгибающего момента. Каждый из планочных образцов исследовался при двух циклах нагрузки—разгрузки в пределах 1/3 разрушающих напряжений.

Деформации измерялись с помощью тензометрических датчиков РЛ-20/120, а прогибы с помощью стрелочного щупового индикатора с ценой деления 0,01 мм.

Исследуемый материал характеризуется различными физико-механическими свойствами. В зависимости от состава (наполнитель, отвердитель, пластификатор) и от уровня нагрузки он ведет себя как линейно-упругий, упруго-пластический (главным образом) или даже как пластический материал.

Исследования показали полную пригодность исследуемого материала для изготовления моделей промышленных объектов, а в частности оболочковых конструкций, если только применялся для отверждения компаунда отвердитель ТЭТА (триэтилентетрамин) в количестве более, чем 10 частей и пластификатор (дибутилфталат) не более, чем 15 ч. на сто частей смолы.

Summary

ESTIMATION OF SUITABILITY OF «EPIDIAN 5» EPOXY RESIN FOR STRUCTURE MODELLING

Influence of amount of mineral filler (portland cement 350), hardener («TECZA») and plasticizer (dibutyl phthalate) added to epoxy resin «Epidian 5» on homogeneity, bending strength, modulus of elasticity, Poisson modulus, stress-strain relation, coefficient of dissipation of potential energy of elastic deformation (for static hysteresis loop) of tested material is analysed. Ingredients of material are as follows (for 100 parts of «Epidian» 5 epoxy resin) filler: 0, 50, 100, 150, 200, 250 ns; plasticizer: 0, 7, 15, 24 ns; hardener: 7, 8, 9, 10, 12.5, 15, 20 ns;

Tests were carried out using samples subjected to bending. Every sample was subjected to two loading-unloading cycles in range of one-third of ultimate stress. Strains and deflections were measured with tensometer gauges and dial indicators respectively. Tested material has various physical and mechanical properties. These properties are similar to linearly-elastic and (mainly) to elasto-plastic materials, or even to plastic ones.

Tests have proved complete usefulness of this material for making models of industrial objects, especially for shell structures, providing following amounts of ingredients: «TECZA» hardener greater than 10 ns, dibutyl phthalate plasticizer less than 15 ns.

ZESPÓŁ BUDOWNICTWA OGÓLNEGO I PRZEMYSŁOWEGO WSI, OPOLE

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lutego 1974 r.

BADANIA MODELOWE POWŁOKI HIPERBOLOIDALNEJ CHŁODNI KOMINOWEJ
PODDANEJ WYMUSZONYM PRZEMIESZCZENIOM

REINHOLD K A Ł U Ż A (OPOLE)

1. Wstęp

Cienka powłoka o kształcie hiperboloidy jednopowłokowej stanowi między innymi podstawowy element konstrukcyjny chłodni kominowych.

Grubość powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej w stosunku do jej promieni jest niewielka, co sprawia, że ma małą sztywność. Może więc ulegać dość dużym przemieszczeniom pod wpływem obciążenia wiatrem oraz nierównomiernego osiadania fundamentu (może wystąpić zagadnienie nieliniowo geometryczne). W ostatnich latach ukazały się dwie prace [1, 2] poświęcone tej tematyce, w których uwzględniono w sposób przybliżony nieliniowość, w sensie geometrycznym, teorię cienkich powłok. Rozwiązanie problemu dla powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej obciążonej wiatrem uzyskano metodą elementów skończonych.

W pracy [1] stwierdzono, że uwzględnienie geometrycznej nieliniowości przy przyjętym obciążeniu wiatrem nie ma istotnego wpływu na rozkład sił południkowych i równoleżnikowych w powłoce. Wpływa natomiast na wielkości momentów zginających, a różnice wynikające z uwzględnienia nieliniowej, w sensie geometrycznym, teorii powłok są największe w górnych partiach powłoki i w przewężeniu (wynoszą około 40%). Warto dodać, że w pracy [1] otrzymano przemieszczenia prostopadłe do środkowej powierzchni powłoki rzędu jej grubości.

W pracy [2] stwierdzono natomiast, że uwzględnienie nieliniowej, w sensie geometrycznym, teorii powłok wpływa zarówno na rozkład sił, jak i momentów zginających w hiperboloidalnej powłoce, a wynikające stąd różnice między rozwiązaniami uzyskanymi na podstawie teorii liniowej i nieliniowej dla przyjętych obciążeń rozłożonych na powierzchni powłoki (uwzględniono obciążenie rozłożone wzdłuż obwodu powłoki według funkcji $p = p_0(1 + \cos \beta)$, gdzie β — kąt środkowy), są niewielkie (maksymalnie 15%). W pracy tej stwierdzono ponadto, że największe różnice między rozwiązaniami liniowymi a nieliniowymi występują w strefie przypodporowej powłoki.

Brak natomiast rozwiązań uwzględniających nieliniowość, w sensie geometrycznym, teorię cienkich powłok, dotyczących wpływu znacznie większych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki (np. rzędu grubości powłoki) na rozkład sił w powłoce chłodni kominowej.

Wprawdzie w pracach [3, 4, 5, 6] podano rozwiązania dotyczące wpływu przemieszczeń dolnego brzegu powłoki na rozkład sił w powłoce chłodni kominowej, jednakże problem rozwiązano według liniowej, w sensie geometrycznym, teorii powłok cienkich.

Teoria ta, jak wiadomo, stosowana jest w zakresie małych przemieszczeń, a granice jej stosowalności mają charakter konwencjonalny. Oznaczając przez $|w|$ moduł przemieszczenia cienkiej powłoki przyjmuje się [7, 8, 9], że dla $|w|/h \leq 0,2$, gdzie h oznacza grubość powłoki, można stosować teorię geometrycznie liniową, a dla $|w|/h \geq 5$ pełną teorię nieliniową. W przypadkach, gdy $|w|/h \cong 1$ w równaniach geometrycznych zachowuje się na ogół wyrazy nieliniowe względem składowej wektora przemieszczenia, normalnej do powierzchni środkowej, a pomija pozostałe wyrazy nieliniowe.

Ustalenie granicy słuszności stosowania liniowej, w sensie geometrycznym, teorii cienkich powłok na drodze analitycznej, względnie bezpośrednich badań prowadzonych na obiektach w naturze jest, jak wiadomo, trudne, a czasem wręcz niemożliwe. Dlatego też autor podjął z tego zakresu badania modelowe, które są tematem niniejszej pracy.

Celem pracy jest przedstawienie wyników z badań przeprowadzonych na powłoce modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej, której dolny brzeg poddano wpływom pionowych oraz poziomych przemieszczeń. Pionowe przemieszczenia dolnego brzegu powłoki modelu wymuszano według funkcji $u = \Delta_p \cos 2\beta$, przemieszczenia zaś poziome według funkcji $w = \Delta_h \cos 2\beta$, gdzie Δ_p i Δ_h oznaczają maksymalne przemieszczenia wywołane dla kąta środkowego $\beta = n \cdot 90^\circ$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$). Przy pionowych przemieszczeniach dolnego brzegu powłoki modelu narzucono wzdłuż tego brzegu obwodowe odkształcenia, które określono według funkcji $\varepsilon_m = \varepsilon_p \cos 2\beta$, gdzie ε_m i ε_p oznaczają obwodowe odkształcenia dolnego brzegu modelu i górnego pierścienia układu deformującego, wynikłe z giętej pracy tego pierścienia.

2. Modele powłok hiperboloidalnych chłodni kominowych oraz układ deformujący dolny brzeg powłoki modelu

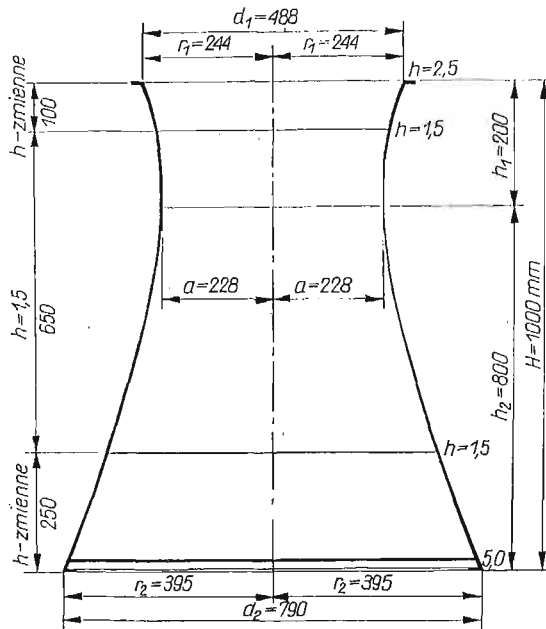
Modele powłok hiperboloidalnych chłodni kominowych wykonano w skali 1:120 z modyfikowanej żywicy epoksydowej, zachowując pełne podobieństwo geometryczne modelu do obiektu. Modele te wykonano według techniki modelowania cienkich powłok podanej w pracy [10], przy wprowadzeniu zmian polegających przede wszystkim na zastosowaniu innego tworzywa modelowego — modyfikowana żywica epoksydowa «epidian 5», innej technice wykonania powłoki o zmiennej grubości oraz innej technice zdejmowania wykonanego modelu powłoki z urządzenia do modelowania osiowo-symetrycznych powłok.

Zastosowane tworzywo modelowe, uzyskane przez dodanie do żywicy epoksydowej «epidian 5» wypełniacza (cement portlandzki 350) w ilości 250 ns, plastyfikatora (ftalan dwubutyłu) w ilości 15 ns i utwardzacza («TECZA») w ilości 15 ns (gdzie ns oznacza «na sto części żywicy»), charakteryzuje się następującymi cechami mechaniczno-wytrzymałościowymi: moduł Younga $E = 70\,000$ kG/cm², moduł Kirchhoffa $G = 26\,200$ kG/cm², współczynnik Poissona $\nu = 0,34$, oraz wytrzymałością na zginanie $R_{zg} = 302$ kG/cm².

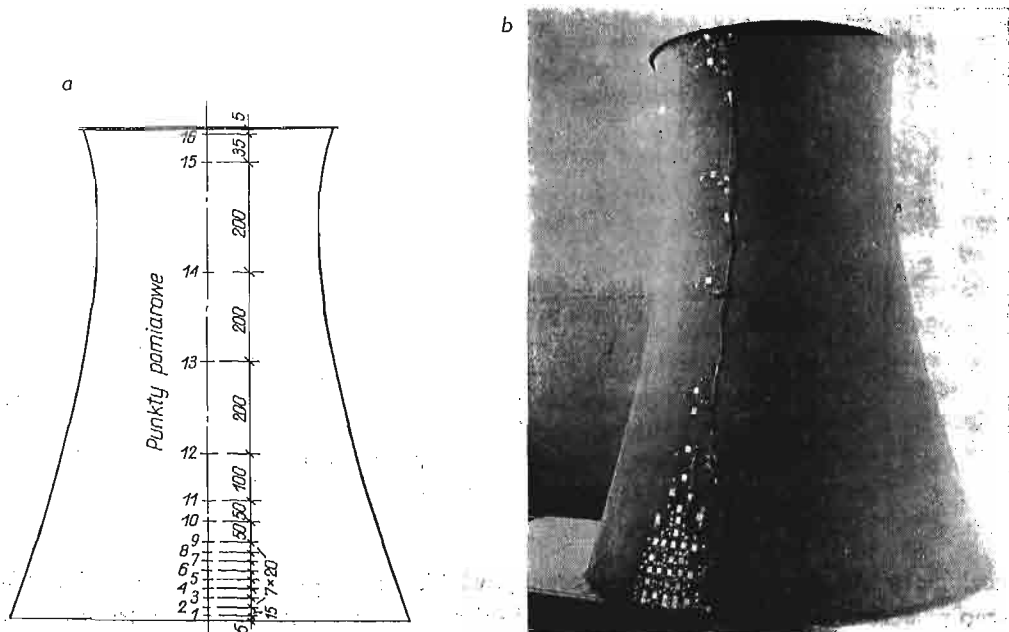
Podstawowe wymiary powłoki modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej podano na rys. 1, natomiast model powłoki przygotowanej do badań z naklejonymi tensometrami elektrooporowymi RL-5,5/120 przedstawiono na rys. 2.

Tolerancje wykonania powłoki były następujące: wymiary średnic ± 2 mm, odchylenia środków średnic od osi powłoki max. 0,5 mm, grubość ścianki $\pm 0,2$ mm.

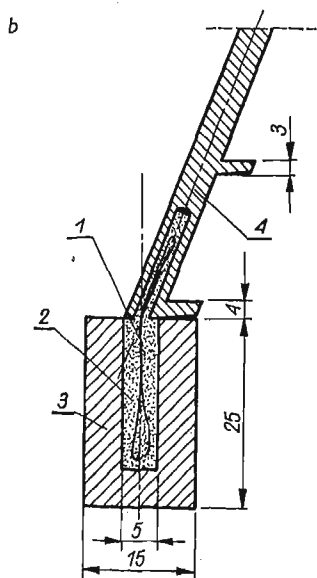
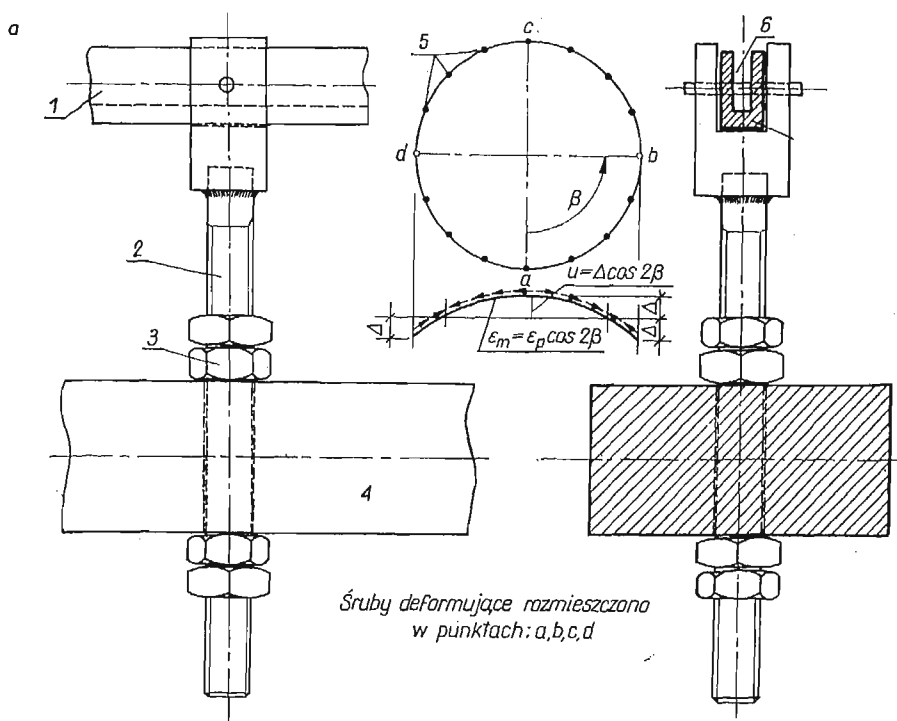
Dla określenia wpływu poziomych oraz pionowych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki na rozkład sił w powłoce skonstruowano układ deformujący, którego schemat pokazano na rys. 3 i 4. Rysunek 3 przedstawia deformator zastosowany do wymuszania przemieszczeń pionowych, natomiast rys. 4 — deformator pozwalający wymuszać



Rys. 1. Podstawowe wymiary powłoki o kształcie hiperboloidy jednowłokowej



Rys. 2. Model hiperboloidalnej chłodni kominowej a) schemat rozmieszczenia tensometrów; b) model z naklejonymi tensometrami

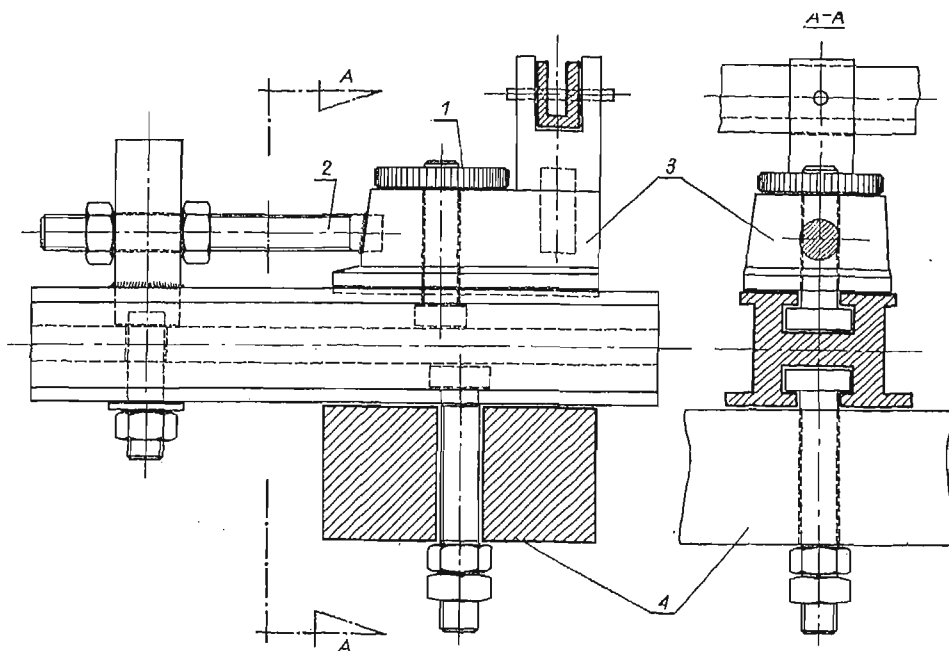


Rys. 3. Schemat deformatora zastosowanego do wymuszania pionowych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki modelu; a) deformator: 1 — górny pierścień; 2 — śruby wymuszające przemieszczenia; 3 — nakrętki blokujące; 4 — pierścień dolny; 5 — śruby korygujące wymuszane przemieszczenia; 6 — rowek w górnym pierścieniu do wklejania powłoki; b) szczegół połączenia powłoki z pierścieniem: 1 — spirala stalowa; 2 — żywica epoksydowa; 3 — górny pierścień; 4 — powłoki modelu; 5 — śruby korygujące wymuszane przemieszczenia

poziome przemieszczenia dolnego brzegu powłoki. Górny pierścień układu deformującego połączono z dolnym brzegiem powłoki spiralą wykonaną ze stalowego drutu o średnicy 0,2 mm, którą wklejono w dolny brzeg modelu oraz wykonany wzdłuż obwodu tego pierścienia rowek (rys. 3). Zastosowanie spirali łączącej dolny brzeg modelu z pier-

ścieniem układu deformującego pozwoliło na uzyskanie ciągłego podparcia dolnego brzegu powłoki. Wklejoną spiralę w dolny brzeg modelu powłoki pokazano na rys. 2b.

Żądane przemieszczenia dolnego brzegu modelu powłoki wymuszano mechanicznie poprzez dokręcanie śrub a i c względnie b i d układu deformującego (rys. 3 i 4). Przy pionowych przemieszczeniach dolnego brzegu powłoki, według funkcji $u = \Delta_p \cos 2\beta$



Rys. 4. Schemat deformatora zastosowanego do wymuszenia poziomych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki modelu

1—śruba blokująca; 2—śruba deformująca; 3—deformator; 4—pierścień dolny

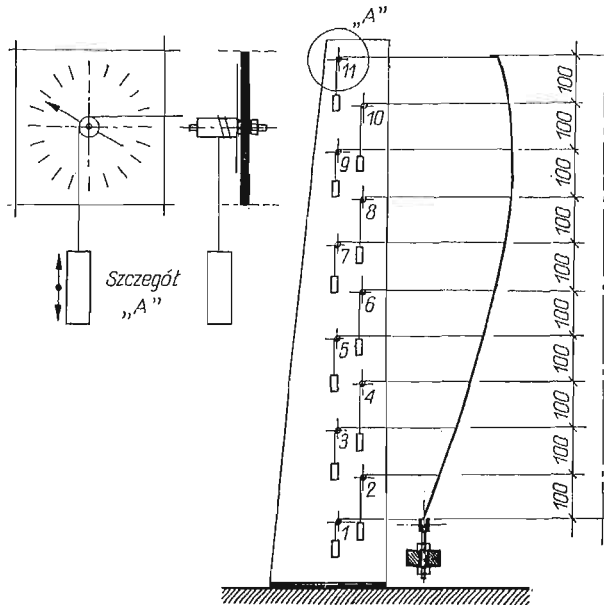
wprowadzono na ten brzeg dodatkowo odkształcenia wynikające z giętej pracy górnego pierścienia układu deformującego, których wartość określono funkcją $\varepsilon_m = \varepsilon_p \cos 2\beta$, gdzie ε_p oznacza maksymalne obwodowe odkształcenie pierścienia deformującego zmierzone w miejscu sklejenia tego pierścienia z dolnym brzegiem powłoki, przy kącie środkowym $\beta = n \cdot 90^\circ$ ($n = 0, 1, 2, 3, 4$). Kontrolny pomiar rzędnych przemieszczeń, wynikających z funkcji $u = \Delta_p \cos 2\beta$ lub $w = \Delta_h \cos 2\beta$, prowadzono czujnikami 0,01 rozmieszczonymi wzdłuż obwodu modelu, korekcję zaś tych rzędnych przeprowadzano dodatkowymi śrubami rozmieszczonymi wzdłuż obwodu dolnego brzegu powłoki. Po obwodzie powłoki modelu rozmieszczonych było 16 śrub, których położenie określono wielokrotnością środkowego kąta $\beta = 1/16 \cdot 360^\circ$ (rys. 3a).

3. Metodyka badań

Spośród metod ilościowych eksperymentalnej analizy naprężeń wybrano, jako podstawową, metodę tensometrii, co w przypadku badania konstrukcji powłokowych poddanych wpływom dużych przemieszczeń jest rzeczą dość istotną, gdyż — jak wiadomo — dużym przemieszczeniom powłoki mogą towarzyszyć małe wartości głównych odkształceń.

Ponadto o wyborze metody tensometrii zdecydowała możliwość przyjęcia dla zastosowanego tworzywa prawa zmiany naprężeń na grubości powłoki według funkcji liniowej. W tym przypadku znajomość naprężeń na powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej powłoki modelu pozwala na ustalenie wszystkich innych naprężeń.

Tensometryczny pomiar naprężeń w prowadzonych badaniach uzupełniono pomiarem przemieszczeń mechanicznymi czujnikami, których konstrukcję przedstawia rys. 5. Pomiar przemieszczeń mechanicznymi czujnikami prowadzono w celu określenia postaci zdeformowanych południków, ulegających największym przemieszczeniom (dla $\beta = n \cdot 90^\circ$, gdzie $n = 0, 1, 2, 3, 4$), wywołanych wpływami poziomych oraz pionowych przemieszczeń dolnego brzegu modelu.

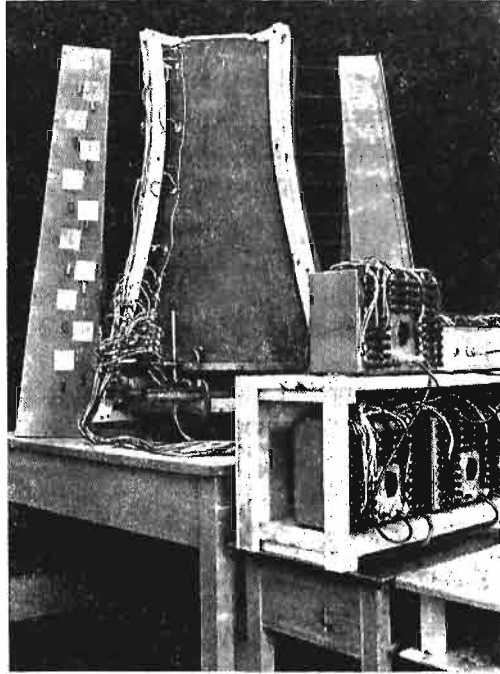


Rys. 5. Schemat rozmieszczenia czujników mechanicznych

Przy wymuszaniu pionowych ($u = \Delta_p \cos 2\beta$) i poziomych ($w = \Delta_h \cos 2\beta$) przemieszczeń dolnego brzegu modelu powłoki przemieszczenie Δ wymuszano, dla $\beta = n \cdot 90^\circ$, mechanicznie śrubami deformatorów (rys. 3 i 4), stopniując je co 0,25 mm w zakresie od 0 do 3,5 mm (przemieszczenia pionowe) oraz co 0,5 mm w granicach od 0 do 7 mm (przemieszczenia poziome). Wywołane tymi przemieszczeniami odkształcenia na wewnętrznej oraz zewnętrznej powierzchni modelu powłoki rejestrowano aparaturą tensometryczną, poziome zaś przemieszczenia w południków ulegających największym przemieszczeniom mierzono czujnikami mechanicznymi. Schemat rozmieszczenia tensometrów elektrooporowych na powłoce modelu przedstawiono na rys. 2a, natomiast czujników mechanicznych na rys. 5. Ostateczny wygląd modelu powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej, po naklejeniu tensometrów elektrooporowych i przyłutowaniu końcówek, pokazano na rys. 6.

Do pomiaru odkształceń zastosowano mostek tensometryczny typu T-2 oraz skrzynki rozdzielcze SR-24.

Pomiary prowadzono w układzie półmostkowym, stosując na 10 czynnych tensometrów 1 tensometr kompensacyjny (włączany w co 10 pomiarze). Tensometry kompensacyjne przyklejono na płytkach «kompensacyjnych» wykonanych z tego samego tworzywa co model.



Rys. 6. Stanowisko badawcze

4. Opracowanie oraz omówienie wyników badań modelu powłoki

Dla dowolnego punktu modelu powłoki, o współrzędnych krzywoliniowych α, β , zewnętrzne oraz wewnętrzne powierzchniowe odkształcenia $\varepsilon_i = \varepsilon(\alpha, \beta, \gamma = \pm 0,5h)$ można przedstawić według zależności [8, 11, 12]:

$$(4.1) \quad \varepsilon_1^{\gamma} = \varepsilon_1 + \gamma \kappa_1; \quad \varepsilon_2^{\gamma} = \varepsilon_2 + \gamma \kappa_2; \quad \varepsilon_{12}^{\gamma} = \varepsilon_{12} + 2\gamma \kappa_{12},$$

gdzie 1, 2 oznaczają kierunki pomiarów odkształceń,
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ i ε_{12} — przyrosty odkształceń jednostkowych powierzchni środkowej powłoki dla punktu o współrzędnych α, β ,
 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ — zmiany krzywizn w rozpatrywanym punkcie,
 $\gamma = \pm 0,5h$ — połowa grubości powłoki w rozpatrywanym punkcie.

Dla zmierzonych w pewnym miejscu na zewnętrznej lub wewnętrznej powierzchni powłoki dwu odkształceń głównych ε_1^{γ} i ε_2^{γ} możemy obliczyć naprężenia prawa Hooke'a występujące w tych kierunkach [8, 11, 12]:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1^\gamma + \nu \varepsilon_2^\gamma) = \sigma_1^{bl} + \sigma_1^{\pi g}, \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2^\gamma + \nu \varepsilon_1^\gamma) = \sigma_2^{bl} + \sigma_2^{\pi g}, \end{aligned}$$

gdzie E oznacza moduł Younga dla materiału modelu, ν — współczynnik Poissona dla materiału modelu, ε_1^γ ; ε_2^γ — odkształcenia główne.

Oznaczając przez σ_2^z i σ_1^z naprężenia główne w dowolnym miejscu na powierzchni zewnętrznej powłoki modelu, a przez σ_1^w i σ_2^w naprężenia w tymże samym miejscu, ale na powierzchni wewnętrznej powłoki modelu, możemy nie znając zmian krzywizn κ_1 i κ_2 wyznaczyć naprężenia błonowe σ_1^{bl} i σ_2^{bl} oraz naprężenia zginające $\sigma_1^{\pi g}$ $\sigma_2^{\pi g}$:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma_1^{bl} &= \frac{1}{2} (\sigma_1^z + \sigma_1^w); & \sigma_1^{\pi g} &= \frac{1}{2} (\sigma_1^z - \sigma_1^w), \\ \sigma_2^{bl} &= \frac{1}{2} (\sigma_2^z + \sigma_2^w); & \sigma_2^{\pi g} &= \frac{1}{2} (\sigma_2^z - \sigma_2^w). \end{aligned}$$

Dla tak określonych wartości naprężeń błonowych i naprężeń zginających, interesujące nas wartości sił $N_{1(\alpha, \beta)}$ i $N_{2(\alpha, \beta)}$ oraz momentów zginających $M_{1(\alpha, \beta)}$ i $M_{2(\alpha, \beta)}$ wyznaczono według wzorów:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N_{1(\alpha, \beta)} &= h_{(\alpha, \beta)} \sigma_1^{bl}; & M_{1(\alpha, \beta)} &= \frac{h_{(\alpha, \beta)}^2}{6} \sigma_1^{\pi g}; \\ N_{2(\alpha, \beta)} &= h_{(\alpha, \beta)} \sigma_2^{bl}; & M_{2(\alpha, \beta)} &= \frac{h_{(\alpha, \beta)}^2}{6} \sigma_2^{\pi g}, \end{aligned}$$

gdzie $h_{(\alpha, \beta)}$ oznacza grubość powłoki w rozpatrywanym przekroju.

Poszukiwany przebieg sił oraz momentów zginających w powłoce modelu, poddanego wpływowi poziomych oraz pionowych przemieszczeń dolnego brzegu, określono dla południków ulegających największym przemieszczeniom. Wstępna graficzna analiza zależności: parametr Δ — przemieszczenie w oraz parametr Δ — odkształcenie, uzyskanych dla przemieszczeń pionowych i poziomych wykazała, że zależności te w badanych granicach są liniowe. Dla potwierdzenia tego przypuszczenia przeprowadzono statystyczną analizę wyników uzyskanych z pomiaru przemieszczeń w oraz odkształceń ε_1^z , ε_1^w , ε_2^z i ε_2^w dla przebadanego modelu. W tym celu dla uzyskanych w poszczególnych punktach pomiarowych zależności parametr Δ — przemieszczenie oraz parametr Δ — odkształcenie, ustalono według metody najmniejszych kwadratów [13, 14, 15, 16] następujące parametry:

— współczynnik regresji parametru Δ względem przemieszczenia w oraz parametru Δ względem odkształceń ε_1^z , ε_2^z , ε_1^w i ε_2^w ,

— współczynnik korelacji liniowej parametru Δ względem przemieszczenia w oraz parametru Δ względem odkształceń ε_1^z , ε_2^z , ε_1^w i ε_2^w .

Poziom istotności korelacji liniowej zmierzonych zależności parametr Δ — przemieszczenie w oraz parametr Δ — odkształcenie ε_1^z ; ε_2^z ; ε_1^w , ε_2^w określono przez porównanie obliczonych dla tych zależności współczynników korelacji liniowej z wartościami podanymi w tablicy korelacji FISCHERA [13].

Opracowanie uzyskanych z pomiarów tensometrycznych odkształceń oraz ich statystyczną analizę przeprowadzono na EMC Odra 1204.

W analizie uwzględniono jedynie te wyniki pomiarów, które nie były obciążone błędem grubym, tzn. wyniki pomiarów spełniające zależność [13, 15, 16]

$$(4.5) \quad k = \frac{|x_i - \bar{x}|}{s} \leq \bar{k}_{\alpha, n},$$

gdzie x_i oznacza wyniki pomiaru odkształceń ε lub poziomych przemieszczeń powierzchni środkowej powłoki w ,

\bar{x} — średnia arytmetyczna wyników pomiarów ε lub w ,

s — średnie odchylenie kwadratowe wyników pomiaru ε lub w ,

$\bar{k}_{\alpha, n}$ — wartość rozkładu parametru $k_{\alpha, n}$ służącego do eliminacji wyników odstających, określona dla ilości pomiarów n i wybranego poziomu istotności α .

Zastosowanie kryterium (4.5) do eliminacji odstających wyników pomiarów w rozpatrywanym przypadku było możliwe jedynie ze względu na uzyskiwane wysokie wartości współczynników korelacji liniowej dla badanych zależności parametr Δ — odkształcenia ε i parametr Δ — przemieszczenia w .

Przedział ufności przy przyjętym poziomie istotności dla zmierzonych wielkości odkształceń oraz przemieszczeń określono według zależności [13, 15, 16]

$$(4.6) \quad \bar{x} - \frac{\bar{st}_{\alpha, (n-1)}}{\sqrt{n-1}} \leq x \leq \bar{x} + \frac{\bar{st}_{\alpha, (n-1)}}{\sqrt{n-1}},$$

gdzie $\bar{t}_{\alpha, (n-1)}$ oznacza wielkość parametru $t_{\alpha, (n-1)}$ rozkładu STUDENTA.

Przedział ufności współczynników regresji b zastępczych prostych, zależności parametr Δ — odkształcenie ε oraz parametr Δ — przemieszczenie w określono z zależności [13, 15, 16]

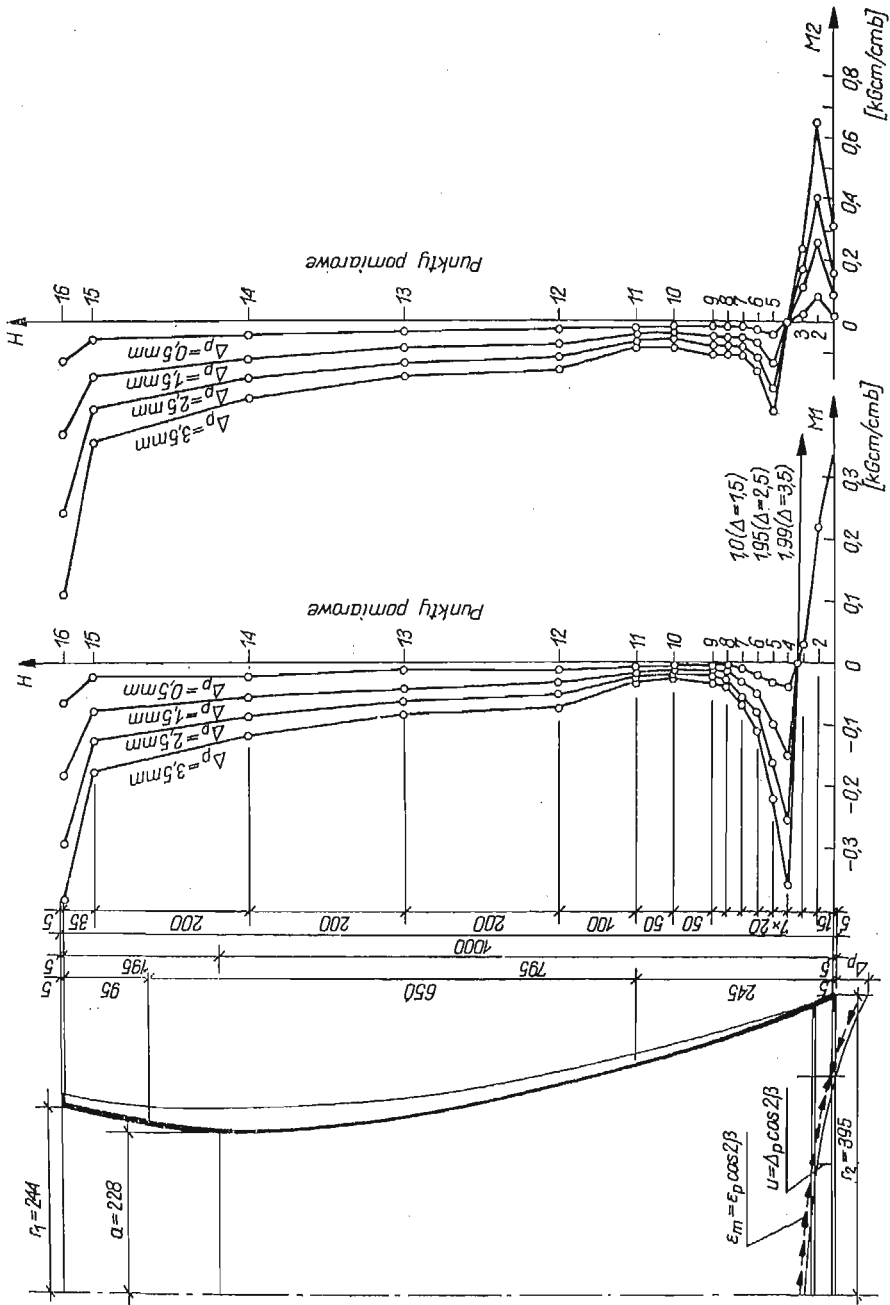
$$(4.7) \quad b \pm \bar{t} s_{(b)},$$

gdzie \bar{t} oznacza bezwzględną wartość rozkładu STUDENTA przy danych stopniach swobody i żądanym prawdopodobieństwie wystąpienia wartości b ,

$s_{(b)}$ — odchylenie standardowe dla współczynników regresji b .

Poszukiwany przebieg sił oraz momentów zginających w powłoce modelu poddanego wpływom pionowych ($u = \Delta_p \cos 2\beta$) oraz poziomych ($w = \Delta_h \cos 2\beta$) przemieszczeń dolnego brzegu określono dla południka a (rys. 3).

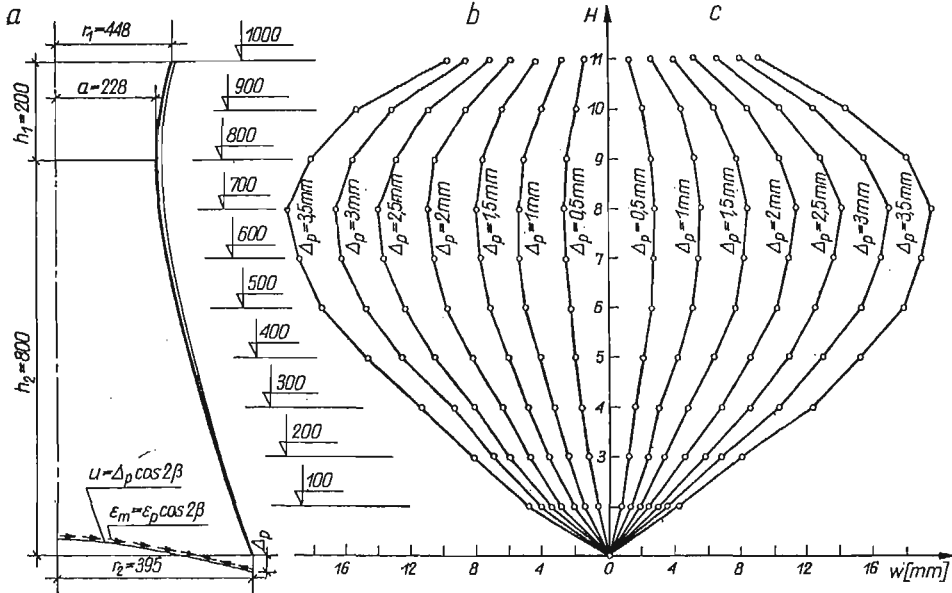
Uzyskane przebiegi sił południkowych oraz równoleżnikowych dla badanego modelu, przy poddaniu jego dolnego brzegu wpływom pionowych przemieszczeń $u = \Delta_p \cos 2\beta$ przy równoczesnych danych dla tego brzegu odkształceniach $\varepsilon_m = \varepsilon_p \cos 2\beta$ przedstawiono na rys. 7. Natomiast uzyskane przebiegi momentów zginających południkowych oraz równoleżnikowych dla $u = \Delta_p \cos 2\beta$ i $\varepsilon_m = \varepsilon_p \cos 2\beta$ podano na rys. 8. Wywołane wpływem pionowych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki, poziome przemieszczenia południków c i d dla wartości zmiennego parametru $\Delta_p = 0,5, 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0$ i $3,5$ mm zobrazowano na rys. 9. Na rys. 10 dla punktów pomiarowych nr 1 do 6 południków c i d (rys. 3.) przedstawiono zależność przemieszczeń w od zmiennego parametru Δ_p , nato-



Rys. 8. Powłoka modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej, której dolny brzeg poddano wymuszonym przemieszczeniom $u = \Delta_p \cos 2\beta$ i odkształceniom $\varepsilon_m = \varepsilon_p \cos 2\beta$; a) wymiary powłoki; b) i c) wykresy ekstremalnych momentów zginających południkowych M-1 i równoleżnikowych M-2

miast na rys. 11 podano zależności parametr Δ_p — odkształcenie ε_1^z , ε_2^z , ε_1^w i ε_2^w dla punktów pomiarowych nr 5 do 10 południka a .

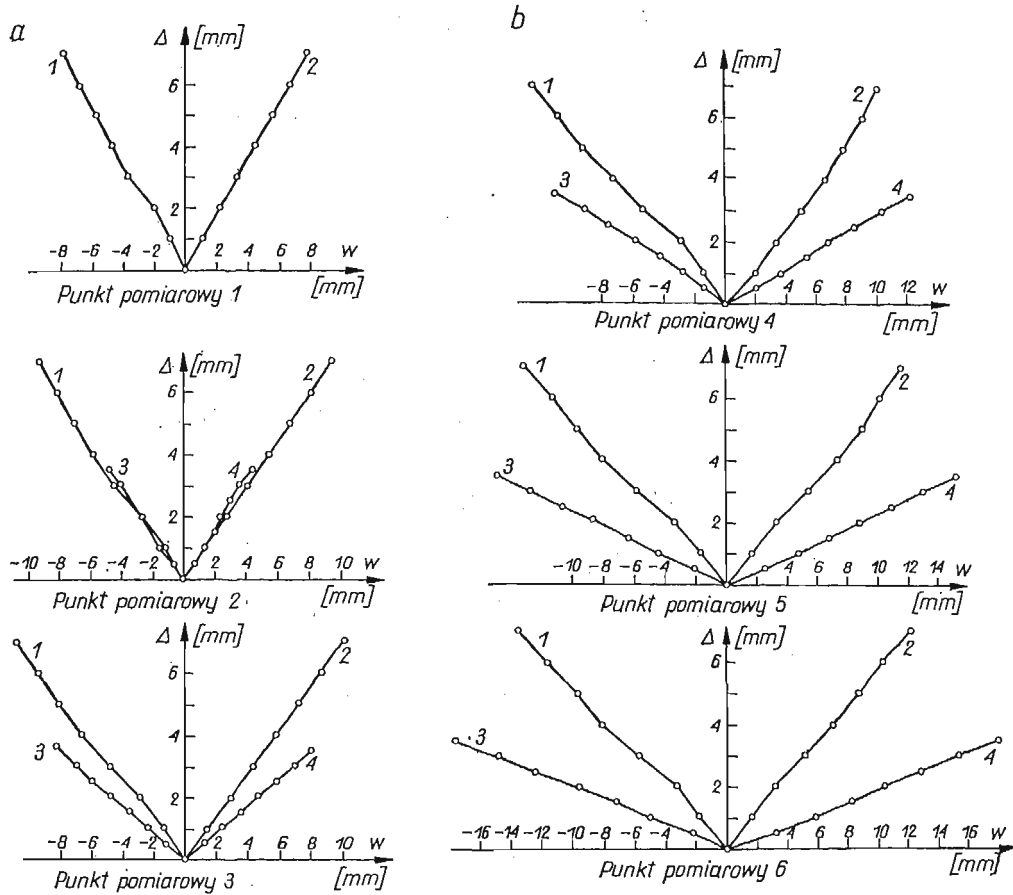
Z uzyskanych wartości momentów zginających, sił południkowych i równoleżnikowych a przede wszystkim odkształceń i przemieszczeń w powłoce modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej, której dolny brzeg poddano wpływom wymuszonych pionowych przemieszczeń $u = \Delta_p \cos 2\beta$ oraz odkształceń $\varepsilon_m = \varepsilon_p \cos 2\beta$ wynika, że stosowalność liniowej



Rys. 9. Poziome przemieszczenia dla południków 3 i 4, wywołane wpływem pionowych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki; a) wymiary powłoki; b) i c) wykresy ekstremalnych poziomych przemieszczeń w dla południków 4 i 3

w sensie geometrycznym teorii powłok jest słuszna w większym zakresie aniżeli wynika to z konwencjonalnej granicy $0,2h$, gdzie h grubość powłoki. W przeprowadzonej statystycznej analizie zależności: odkształcenie ε_1^z , ε_2^z , ε_1^w i ε_2^w — parametr Δ_p oraz przemieszczenie w_1 — parametr Δ_p otrzymano bardzo wysokie wartości współczynnika korelacji liniowej, który przyjmował wartości bardzo bliskie jedności. Tak wysokie wartości współczynników korelacji liniowej dla tych zależności świadczą o liniowej zależności przemieszczeń w względem parametru Δ_p oraz odkształceń ε_1^z , ε_2^z , ε_1^w i ε_2^w względem przemieszczeń w , jak również parametru Δ_p .

Wartości sił południkowych oraz równoleżnikowych uzyskanych z przebadania modelu, przy poddaniu jego dolnego brzegu wpływom wymuszonych poziomych przemieszczeń $w = \Delta_h \cos 2\beta$, dla południka a przedstawiono na rys. 12, wartości zaś momentów zginających południkowych oraz równoleżnikowych dla tego samego południka, wywołanych wpływami poziomych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki modelu, podano na rys. 13. Wartości przemieszczeń w dla poszczególnych punktów pomiarowych południków P_c i d , wywołanych wpływem poziomych przemieszczeń dolnego brzegu $w = \Delta_h \cos 2\beta$, dla $\Delta_h = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i 7 mm, podano na rys. 14. Na rys. 10 dla punktów

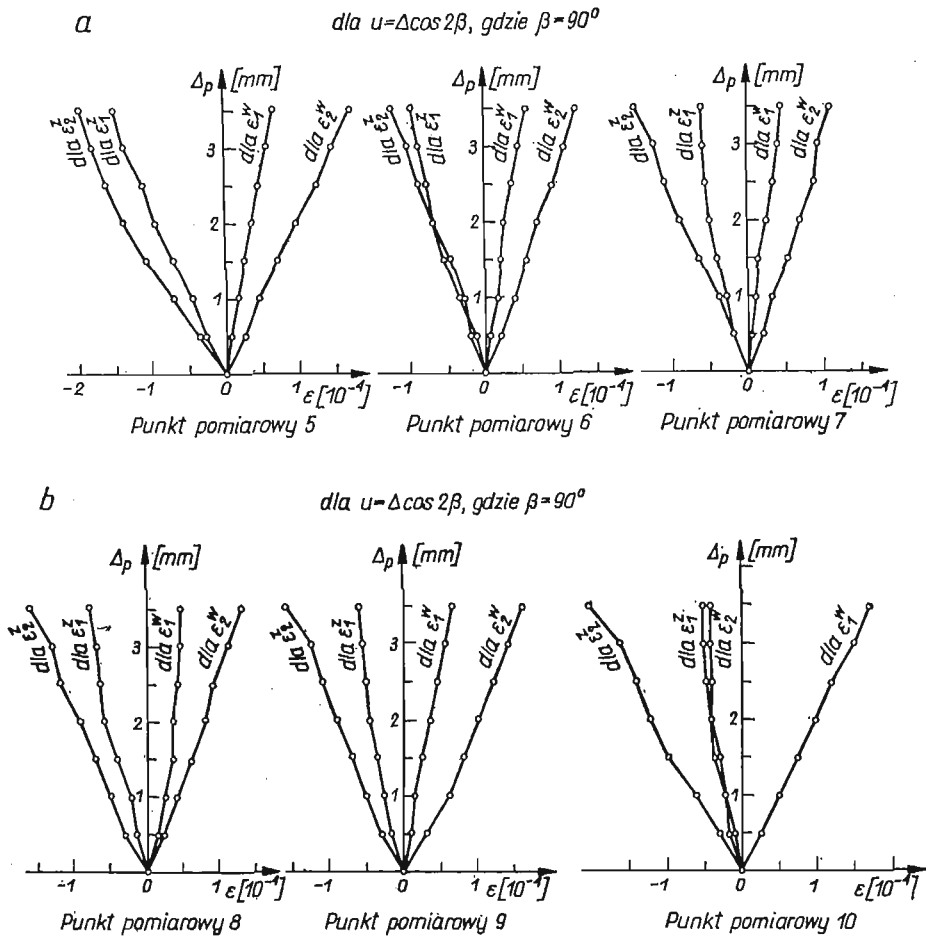


Rys. 10. Wykresy zależności przemieszczeń w od parametru Δ_h i Δ_p dla południków c i d ; a) dla punktów pomiarowych nr 1, 2 i 3; b) dla punktów pomiarowych nr 4, 5 i 6

1, 2, — odpowiednio dla południków d i c przy poddaniu dolnego brzegu powłoki wymuszonym przemieszczeniom $w = \Delta_h \cos 2\beta$; 3, 4 — odpowiednio dla południków d i c przy poddaniu dolnego brzegu powłoki wymuszonym przemieszczeniom $u = \Delta_p \cos 2\beta$ i odkształceniem $\epsilon_m = \epsilon_p \cos 2\beta$.

pomiarowych nr 1 do 6 południka c i d (rys. 3), podano graficzną zależność przemieszczeń w od zmiennego parametru Δ_h funkcji $w = \Delta_h \cos 2\beta$, określającej rzędne przemieszczeń dolnego brzegu powłoki modelu. Graficzny obraz zależności odkształceń $\epsilon_1^z, \epsilon_2^z, \epsilon_1^w$ i ϵ_2^w od parametru Δ_h funkcji $w = \Delta_h \cos 2\beta$ dla punktów pomiarowych nr 8, 10, 11 i 12 południka a przedstawiono na rys. 15.

Z przeprowadzonej analizy przyrostów sił południkowych, równoleżnikowych oraz momentów zginających, dla południka a , wywołanych wpływami poziomych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki modelu $w = \Delta_h \cos 2\beta$ wynika, że przyrosty te w odniesieniu do parametru Δ_h wykazują liniową zależność w dość dużym zakresie wymuszanych przemieszczeń w . Przeprowadzona statystyczna analiza zależności odkształceń $\epsilon_1^z, \epsilon_2^z, \epsilon_1^w$ i ϵ_2^w od parametru Δ_h oraz przemieszczeń w od parametru Δ_h , wykazała, że zależności te dla wymuszonych przemieszczeń są liniowe. Wyznaczone dla wszystkich punktów



Rys. 11. Wykresy zależności odkształceń ε_1^z , ε_2^z ; ε_1^w i ε_2^w od parametru Δ_p dla punktów pomiarowych nr 5 do 10 południka a powłoki modelu, której dolny brzeg poddano wpływom wymuszonych przemieszczeń $u = \Delta_p \cos 2\beta$ i odkształceń $\varepsilon_m = \varepsilon_p \cos 2\beta$; a) dla punktów pomiarowych 5, 6, 7; b) dla punktów pomiarowych nr 8, 9 i 10

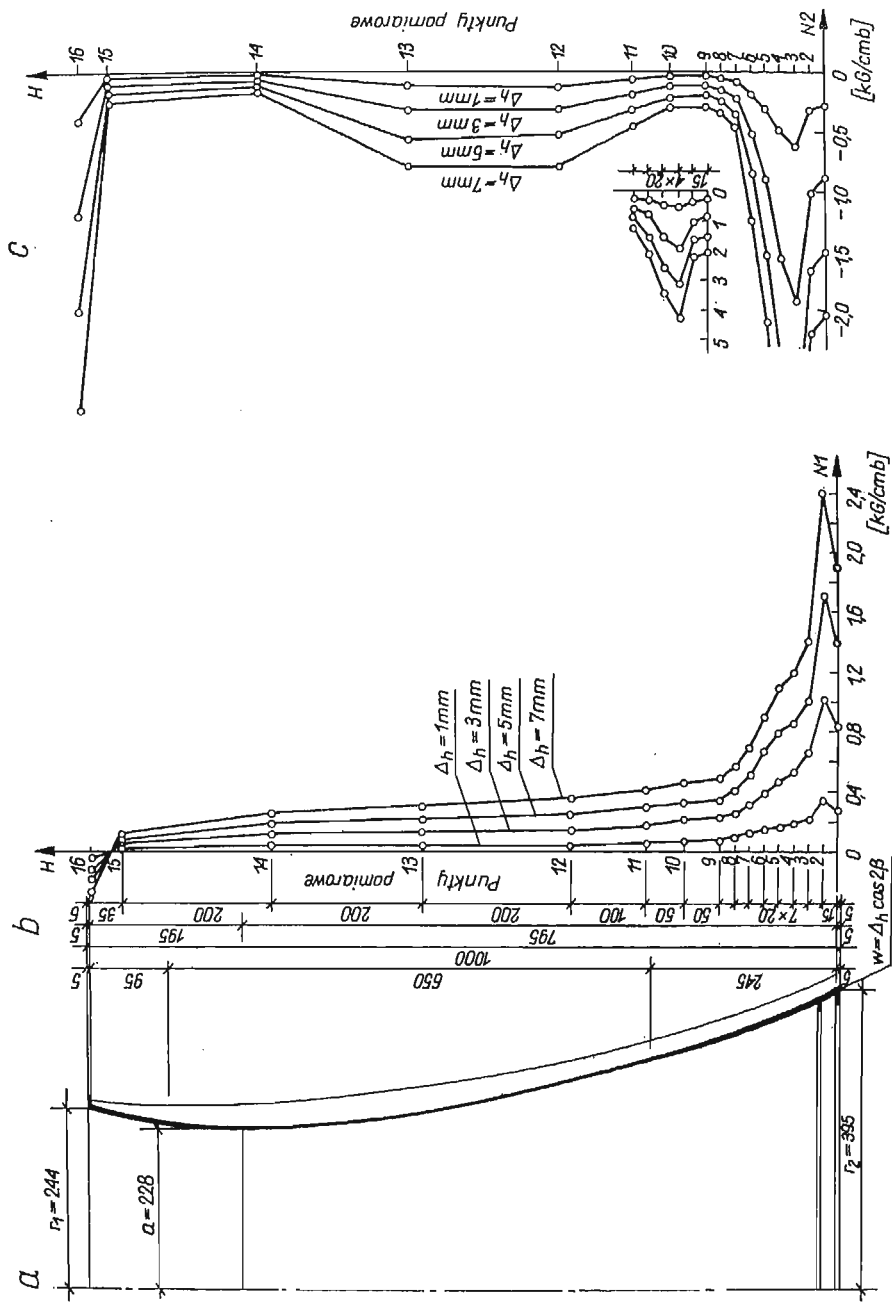
ε_1^z i ε_1^w — odkształcenia powierzchniowe zewnętrzne i wewnętrzne w kierunku południkowym,

ε_2^z i ε_2^w — odkształcenia powierzchniowe zewnętrzne i wewnętrzne w kierunku równoleżnikowym

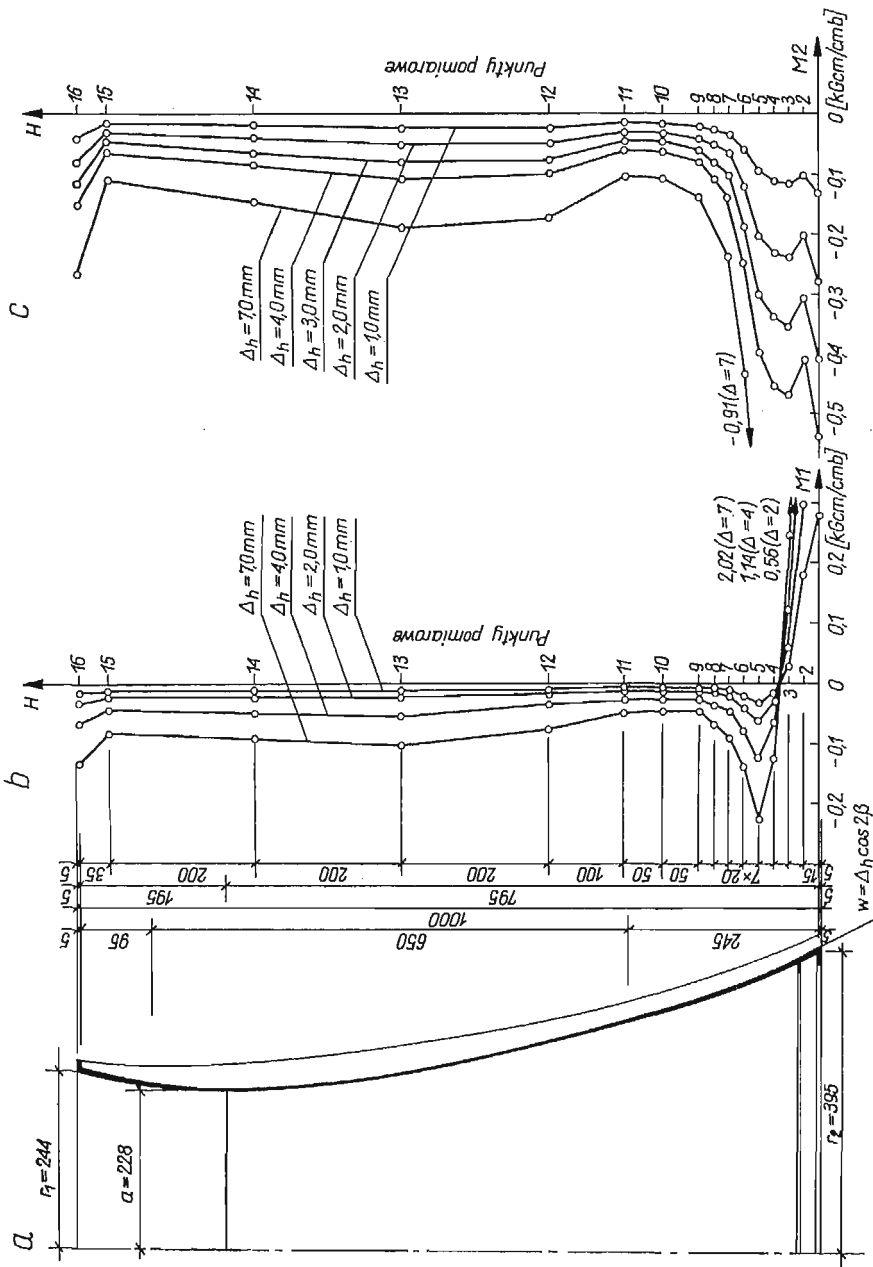
pomiarowych współczynniki korelacji liniowej zależności przemieszczeń w — parametr Δ_h oraz odkształceń ε_1^z , ε_1^w , ε_2^z i ε_2^w — parametr Δ_h przyjmowały wartości bliskie jedności, co świadczy o liniowej zależności przemieszczeń i odkształceń od parametru Δ_h funkcji $w = \Delta_h \cos 2\beta$.

6. Wnioski i zakończenie

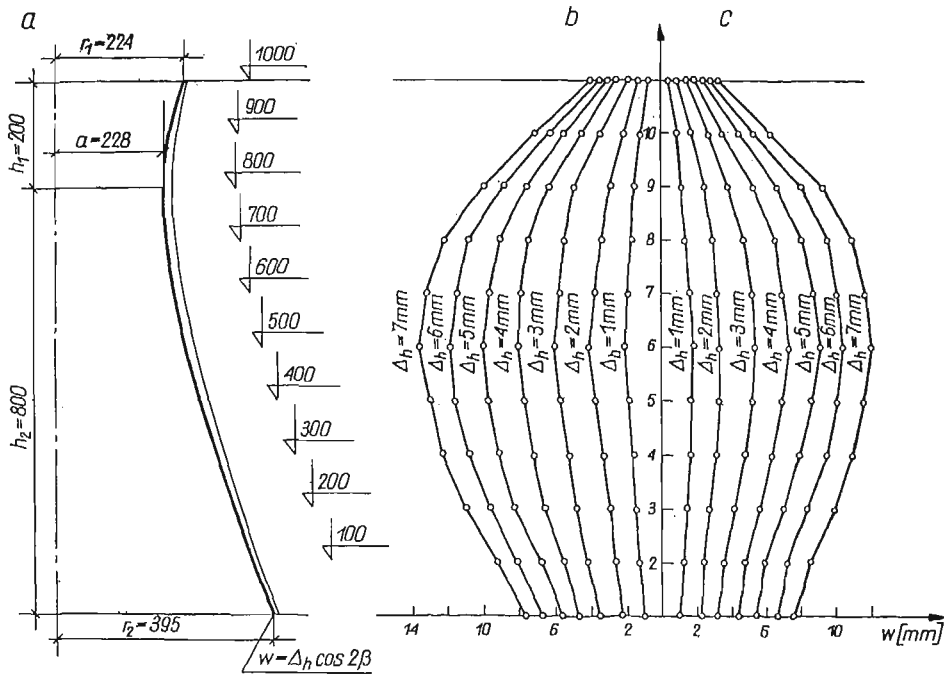
Przeprowadzone badania powłoki modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej poddanej wpływom danych pionowych ($u = \Delta_p \cos 2\beta$) oraz poziomych ($w = \Delta_h \cos 2\beta$)



Rys. 12. Powłoka modelu hiperboloidealnej chłodni kominowej, której dolny brzeg poddano wpływom wymuszonych przemieszczeń poziomych $w = \Delta h \cos 2\beta$; a) wymiary powłoki; b) i c) wykresy ekstremalnych sił południkowych N_1 i równoleżnikowych N_2



Rys. 13. Powłoka modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej, której dolny brzeg poddano wymuszonym
 przemieszczeniom poziomym $w = \Delta h \cos 2\beta$; a) wymiary powłoki; b) i c) wykresy ekstremalnych momen-
 tów zginających południkowych M_1 i równoleżnikowych M_2

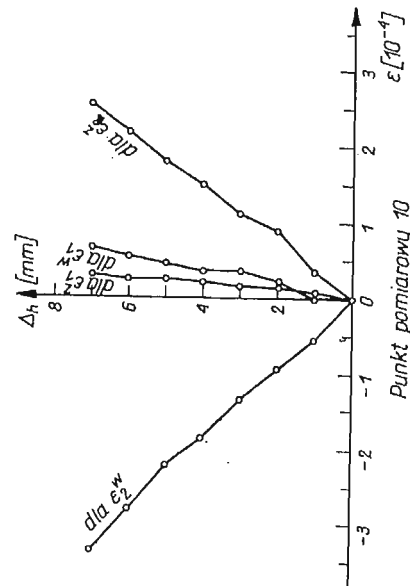
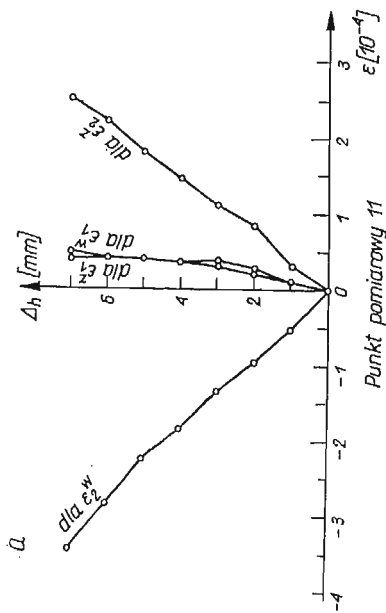
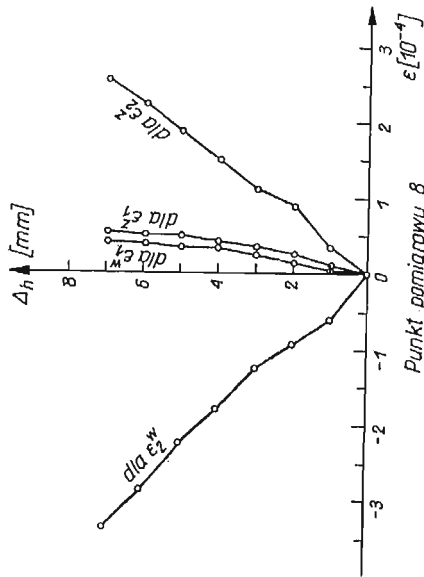
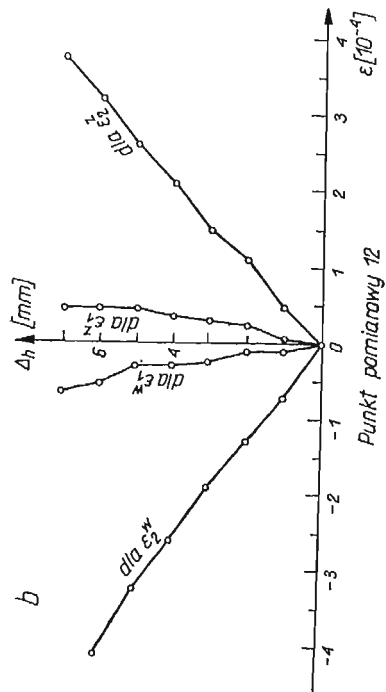


Rys. 14. Poziome przemieszczenia dla południków *c* i *d*, wywołane wpływem poziomych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki; a) wymiary powłoki; b) i c) wykresy ekstremalnych poziomych przemieszczeń *w* dla południków *d* i *c*

przemieszczeń jej dolnego brzegu, pozwoliły wykazać, że przy tak danych warunkach brzegowych dolnego brzegu modelu powłoki, przemieszczenia *w* oraz odkształcenia ϵ_1^z , ϵ_1^w , ϵ_2^z i ϵ_2^w dla południków powłoki ulegających największym przemieszczeniom są liniowo zależne od parametru Δ , funkcji $u = \Delta_p \cos 2\beta$ oraz $w = \Delta_h \cos 2\beta$. Doświadczalne stwierdzenie liniowych zależności przemieszczeń oraz odkształceń od wymuszonych przemieszczeń dolnego brzegu powłoki modelu pozwala wysunąć wniosek, że stosowność w rozpatrywanym przypadku liniowej, w sensie geometrycznym, teorii cienkich powłok jest słuszna w większych granicach, aniżeli wynika to z konwencjonalnej granicy stosowności tej teorii $|w| \leq 0,2h$, gdzie *h* grubość powłoki a $|w|$ moduł przemieszczenia powłoki. Potwierdzeniem tych spostrzeżeń są wyznaczone współczynniki korelacji liniowej dla zależności: przemieszczenie *w*, odkształcenia oraz wartości sił i momentów zginających — parametr Δ , funkcji przemieszczeń $u = \Delta_p \cos 2\beta$ i $w = \Delta_h \cos 2\beta$.

Współczynniki korelacji dla tych zależności przyjmowały wartości bliskie jedności, co świadczy o liniowej zależności sił, momentów zginających, przemieszczeń oraz odkształceń względem zmiennego parametru Δ , który w prowadzonych badaniach stopniowano co 0,5 mm w zakresie od 0 do 7 mm (przemieszczenia poziome) oraz co 0,25 mm w granicach od 0 do 3,5 mm (przemieszczenia pionowe).

Warto podkreślić, że w przeprowadzonych badaniach powłoki modelu hiperboloidalnej chłodni kominowej uzyskano dla południków *c* i *d* następujące maksymalne poziome przemieszczenia:



Rys. 15. Wykresy zależności odkształceń ε_1^z , ε_2^z , ε_1^w i ε_2^w od parametru Δh dla punktów pomiarowych nr 8, 10, 11 i 12 południka I powłoki modelu, której dolny brzeg poddano wpływom wymuszonych przemieszczeń $w = \Delta \cos 2\beta$; a) dla punktów pomiarowych nr 10 i 11; b) dla punktów pomiarowych nr 8 i 12

ε_1^z i ε_1^w — odkształcenia powierzchniowe zewnętrzne i wewnętrzne w kierunku południkowym,
 ε_2^z i ε_2^w — odkształcenia powierzchniowe zewnętrzne i wewnętrzne w kierunku równoleżnikowym

— dla punktu pomiarowego nr 8 $w_8 = 19,84$ mm (dla $\Delta = 3,5$ mm) przy pionowych przemieszczeniach dolnego brzegu powłoki, co stanowi około trzynastokrotne przekroczenie grubości ścianki modelu w tym punkcie, oraz

— dla punktu pomiarowego nr 6 $w_6 = 13,90$ mm (dla $\Delta = 7$ mm) przy poziomych przemieszczeniach dolnego brzegu powłoki, co stanowi około 9-krotne przekroczenie grubości ścianki modelu w tym punkcie.

Literatura cytowana w tekście

1. A. S. L. CHAN, A. FIRMIN, *The analysis of cooling towers by the matrix finite element method part II, Large displacements*, Aeronautical Journal, Vol. 74, December 1970.
2. P. KONDERLA, *Statyka powłoki o kształcie hiperboloidy jednowłokowej przy uwzględnieniu nieliniowości geometrycznej* (Rozprawa doktorska — Politechnika Wrocławska — Wrocław, 1973).
3. I. NIEWIADOMSKI, *Praca statyczna powłokowych chłodni kominowych z uwzględnieniem stanu zgięciowego*, Zesz. Nauk. Pol. Śl. — Budownictwo 15, 1965.
4. W. WUNDERLICH, *Der Kühlturm als biegesteife Schale, Naturzugkühltürme — Festigkeitsberechnung und Konstruktion*, Vulkan Verlag, Essen 1968.
5. W. WUNDERLICH, *Zur Biegebeanspruchung von Kühlturm Schalen bei Fundamentsetzungen*, Konstr. Ingenieurbau — Berichte, 7, 1970.
6. H. L. PETERS, *Der Vollständige Spannungs — und Verformungszustand grosser Naturzugkühltürme in Schalenbauweise*, Beton — und Stahlbetonbau, 8 (1972) 175—182.
7. Cz. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN Warszawa 1966.
8. A. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, „Наука”, М., 1967.
9. Б. Я. КАНОР, *Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек*, „Наукова Думка”, Киев 1971.
10. O. MATEJA, L. ZARZYCKI, *O pewnym sposobie modelowania cienkich powłok*, Inż. i Bud., 12 (1963).
11. Z. BRZOSKA, *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa 1972.
12. A. JAKUBOWICZ, Z. ORŁOŚ, *Wytrzymałość materiałów*, WNT, Warszawa 1973.
13. W. VOLK, *Statystyka stosowana dla inżynierów*, WNT, Warszawa 1965.
14. N. W. SMIRNOW, I. W. DUNIN-BARKOWSKI, *Kurs rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla zastosowań technicznych*, PWN, Warszawa 1969.
15. A. STRZAŁKOWSKI, A. ŚLIŻYŃSKI, *Matematyczne metody opracowywania wyników pomiarów*, PWN, Warszawa 1973.
16. L. Z. RUMSZYŃSKI, *Matematyczne opracowywanie wyników eksperymentu*, WNT, Warszawa 1973.

Резюме

МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ГИПЕРБОЛОИДНОЙ ОБОЛОЧКИ ГРАДИРНИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВЫНУЖДЕННЫМ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМ

В работе представлены результаты модельных исследований влияния перемещений нижней кромки гиперболоидной оболочки градирни на распределение усилий.

Исследования проводились на моделях, выполненных в масштабе 1 : 120 из эпоксидной смолы Эпидиан 5 с наполнителем.

Перемещения нижней кромки оболочки модели вынуждались в вертикальном (параллельно оси сооружения) и горизонтальном направлениях с помощью соответствующих деформирующих приспособлений. Вынужденные перемещения в обоих направлениях имели вид $u = \Delta \cos 2\beta$.

Амплитуда перемещений Δ принималась в широких пределах, простирающихся вне областей, для которых считается справедливой линейная, в геометрическом смысле, теория тонких оболочек.

При исследованиях регистрировались деформации наружных слоев оболочки и перемещения ее срединной поверхности.

На многочисленных графиках представлены зависимости усилий, деформаций и перемещений срединной поверхности оболочки от значений перемещений кромки.

Установлено, что при заданных перемещениях нижней кромки эти зависимости линейны в широком диапазоне.

S u m m a r y

MODEL TESTS OF HYPERBOLOIDAL COOLING TOWER SHELL SUBJECTED TO FORCED DISPLACEMENTS

Influence of vertical displacements of lower edge of hyperboloidal cooling tower on internal forces on base of model tests is presented.

Tests were carried out using models 1:120 made of «Epidian 5» epoxy resin. Displacements of model lower edge were realized in vertical (parallel to shell axis of symmetry) and horizontal direction using special arrangement. Displacements in both directions were realized according to formula: $u = \Delta \cos 2\beta$.

Displacement amplitudes were realized in wider range than those assumed as limits of linear thin-shell theory, from geometrical point of view.

Extreme fibre strains and shell mean surface displacements were recorded.

Diagrams of forces, strains and shell mean surface displacements as functions of lower edge displacement are presented.

It occurs that these parameters are in wide range linearly dependent on the value of forced displacement of lower edge.

ZESPÓŁ BUDOWNICTWA PRZEMYSŁOWEGO I OGÓLNEGO WSI, OPOLE

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lutego 1974 r.

ZWICHRZENIE SPRĘŻYSTE CIENKOŚCIENNEJ BELKI DWUPRZĘSŁOWEJ*

ANDRZEJ G A R S T E C K I (POZNAŃ)

1. Wprowadzenie

Zagadnienie zwicchrzenia cienkościennych belek jednoprzęsłowych o różnych typach podpór zostało już dostatecznie zbadane zarówno od strony teoretycznej, jak i doświadczalnej i istnieje szereg efektywnych metod obliczania obciążenia krytycznego. W znacznie mniejszym stopniu zbadano dotąd zagadnienie zwicchrzenia belek ciągłych. Ze względu na trudności matematyczne, w większości dotychczasowych prac analizowano tylko wybrane przypadki, a w szczególności belki o wąskim, prostokątnym przekroju poprzecznym.

Stateczność belek cienkościennych o przekroju dwuteowym bisymetrycznym, badał TRAHAIR analitycznie [7, 8] i doświadczalnie [9]. Analizował on belki dwuprzęsłowe oraz trójprzęsłowe o symetrycznych przęsłach skrajnych, obciążone siłami skupionymi w środkach rozpiętości. Zaproponował przybliżoną metodę obliczania obciążenia krytycznego. Celem weryfikacji przeprowadził on serię doświadczeń na belkach dwuteowych, walcowanych ze stopu aluminium AA 51 S-T5.

Efektywną metodę obliczania obciążenia krytycznego wieloprzęsłowych belek o stałym przekroju bisymetrycznym za pomocą e.m.c. opracował WISZNAKOW [10, 11]. Nietety prace WISZNAKOWA są na razie w Polsce niedostępne.

Autor niniejszej pracy podał metodę obliczania obciążenia krytycznego cienkościennych belek wieloprzęsłowych w przypadku ogólniejszym [3]. Przekrój poprzeczny belki może być dowolny i stały jedynie w przedziałach przęsł. Metodę tę zastosowano do przypadku belki dwuprzęsłowej o przekroju monosymetrycznym i dowolnej rozpiętości przęsł oraz dowolnego obciążenia, co pozwoliło na opracowanie programu obliczeń na maszynie ODRA 1204 [4].

Celem niniejszej pracy było doświadczalne sprawdzenie wartości sił krytycznych obliczonych numerycznie. Dodatkowym celem było sprawdzenie i porównanie różnych metod pomiarowych, niekrępujących swobody przemieszczeń modelu. Cel ten był o tyle ważny, że wielu badaczy w doświadczalnych badaniach stateczności stosuje pomiar przemieszczeń za pomocą czujników zegarowych, lub podobnych, podwyższających obciążenie krytyczne w sposób czasami istotny.

* Praca została nagrodzona na konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej — zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Krakowie w 1973 r.

Badania doświadczalne przeprowadzono w trzech grupach:

a) Badania wstępne zwichrzenia dwóch belek jednoprzęsłowych i jednej belki dwuprzęsłowej o numerze 1. Celem ich było sprawdzenie i ewentualne udoskonalenie stanowiska badawczego, metody obciążania i pomiarów.

b) Badania główne zwichrzenia belek dwuprzęsłowych, w trakcie których wykonano pięć prób, oznaczonych numerami 1a, 2, 2a, 3, 3a. Do prób 1a, 2a, 3a użyto powtórnie modeli 1, 2, 3.

c) Badania cechujące dla wyznaczenia sztywności belek.

2. Oznaczenia stosowane w pracy

x, y, z prawoskrętny, kartezjański układ osi współrzędnych (x, y — główne środkowe osie bezwładności przekroju poprzecznego belki),

I_x, I_y, I_d, I_w momenty bezwładności przekroju, kolejno: względem osi x , względem osi y , skręcania swobodnego oraz wycinkowy,

N, M_x, M_y, B siły przekrojowe: siła normalna, momenty zginające i bimoment,

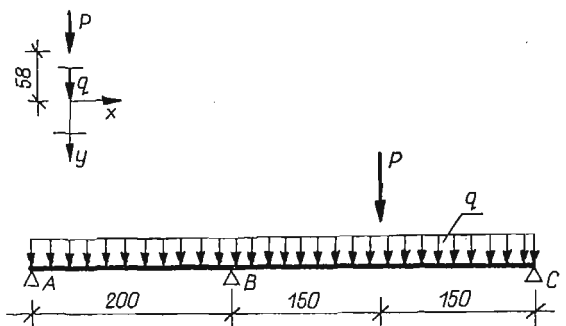
ξ, η, θ przemieszczenia w kierunkach osi x, y i kąt obrotu względem osi skręcania belki,

E, G stałe sprężystości.

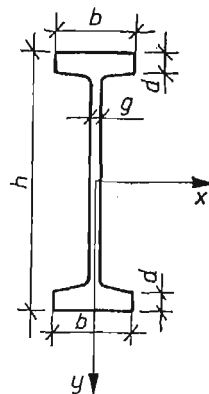
Pozostałe oznaczenia wynikają z rysunków.

3. Opis badań

3.1. Modele belek. Modele belek wykonano z dwuteownika stalowego, walcowanego, I NP 80 (stal St 3S). Szerokość stopek zmniejszono poprzez struganie z 42 mm do 25 mm dlatego, by zwichrzenie nastąpiło przy mniejszym obciążeniu i miało charakter sprężysty.



Rys. 1



Rys. 2

Średnie wymiary przekroju poprzecznego, określone na podstawie pomiarów wykonanych w miejscach co 50 cm, przedstawiono na rys. 1 oraz w tabelicy 1. Długość belek wynosiła 3060 mm.

Tablica 1. Średnie wymiary przekroju poprzecznego belek [mm]

Lp.	Wymiar	Modele do prób o numerach		
		1a	2 i 2a	3 i 3a
1	Wysokość h	79,1	78,8	78,9
2	Szerokość pólek b	25,10	25,01	25,01
3	Grubość pólek d	6,27	6,25	6,33
4	Grubość środka g	4,4	4,3	4,3

Modele belek wykazywały niestety pewne odchylenia od założeń teoretycznych. Stwierdzono, że przekrój poprzeczny był symetryczny jedynie w przybliżeniu, tzn. w zakresie tolerancji wymiarów wyrobów walcowanych. Poza tym obróbka skrawaniem wywołała pewien wewnętrzny stan naprężeń i krzywiznę. Krzywiznę tę częściowo usunięto przez prostowanie «na zimno». Dopuszczone do badań modele, w stanie podparcia w dwóch przekrojach, wykazywały maksymalne kąty skręcenia $\max\theta = (2 \div 15)10^{-3}$ rad oraz maksymalne strzałki ugięcia poziomego $\max\xi = (0,8 \div 3,7)$ mm, a po zamontowaniu na trzech podporach stanowiska badawczego: $\max\theta = (0,7 \div 8,1)10^{-3}$ rad, $\max\xi = (0,5 \div 1,4)$ mm¹.

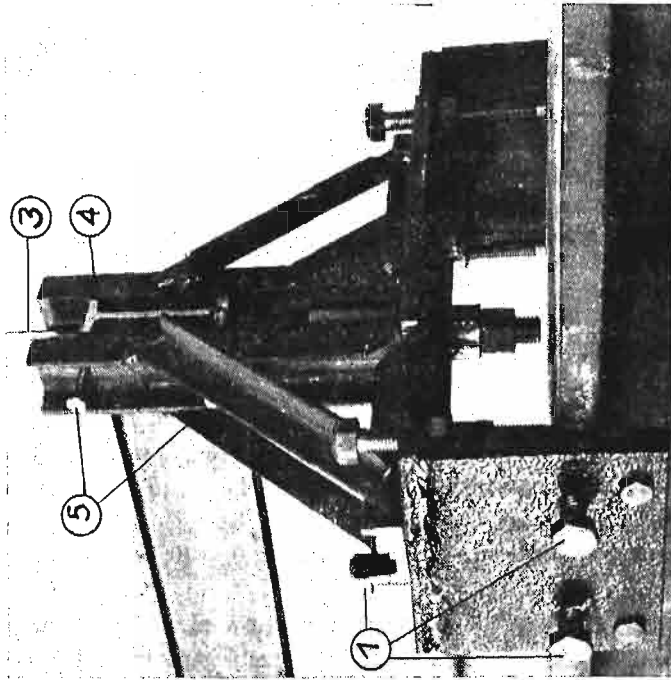
Naprężenia wstępne wywołane obróbką i prostowaniem były typu samorównoważącego się, które jak wiadomo nie wpływają na przebieg próby stateczności w zakresie prawa Hooke'a. Ze względu na nieznanne wartości tych naprężeń, fakt ich istnienia uznać można jednak za niekorzystny.

3.2. Schemat statyczny belek i stanowisko badawcze. Schemat statyczny przedstawiono na rys. 2. Obciążenie ciągle pochodziło tylko od ciężaru własnego belki. Obciążenie skupione realizowano za pomocą szalki i odważników talerzowych o ciężarze 17 kG, a w końcowej fazie prób: 5 kG, 2 kG, 1 kG oraz śrutu ołowianego. Przekazywane było ono na belkę za pośrednictwem stalowego ostrza (rys. 6), ustawionego na górnej półce belki i przymocowanego klejem epidianowym. Ostrze usytuowane było w płaszczyźnie symetrii środka belki z dokładnością $\pm 0,1$ mm. W ostatnich dwóch próbach (tzn. 2a i 3a) zastosowano korektę usytuowania ostrza. Wykonano próbne obciążenie do około 100 kG, i tak przesunięto poprzecznie ostrze (max. do 0,3 mm), by wychylenie modelu z płaszczyzny pionowej było jak najmniejsze.

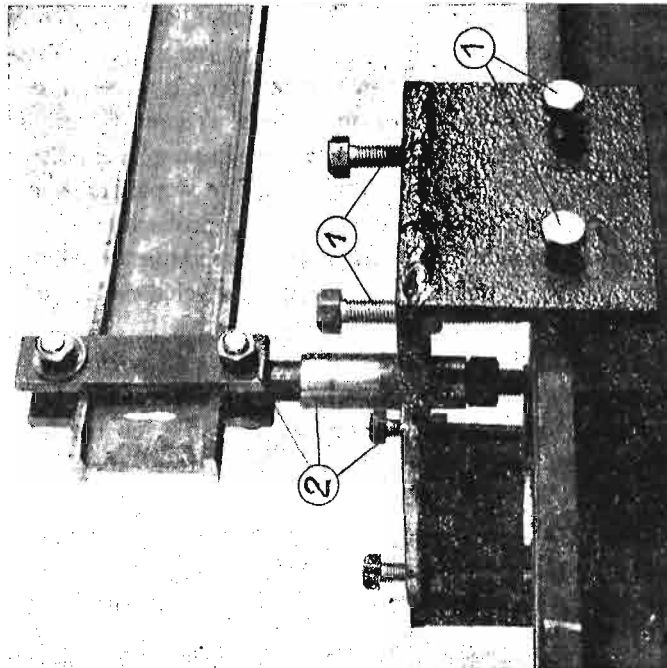
Podpory były typu widelkowego, tzn. takie, które uniemożliwiały przemieszczenia poprzeczne ξ , η oraz obrót θ wokół podłużnej osi belki. Były one zamocowane do dwuteownika szerokostopowego $h = 260$ mm, opartego na blokach betonowych. Na rys. 3 przedstawiono podporę A , która przenosiła reakcję ujemną, podpory B , C pokazano na rys. 4.

Podpora A wyposażona była w łożyska ślizgowe (2) z tulejami z brązu. Swobodę deplanacji przekroju i swobodę obrotów wokół osi x , y w podporach B i C zapewniono przez umieszczenie rolek stalowych (3) pomiędzy stopkami belki a ceownikiem (4) oraz

¹ Kąt θ mierzono poziomą precyzyjną o dokładności odczytu $0,15 \cdot 10^{-3}$ rad (dokładność pomiaru $(0,2 \div 0,3) \cdot 10^{-3}$ rad), przemieszczenie ξ mierzono teodolitem precyzyjnym Theo 010 (dokładność pomiaru 0,2 mm).



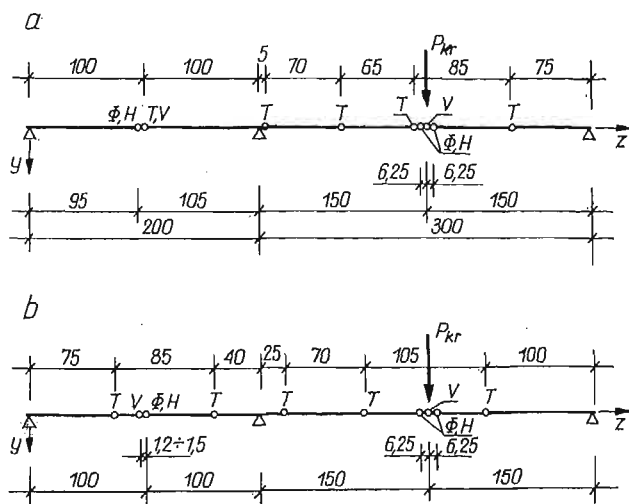
Rys. 4



Rys. 3

przez wygładzenie i pokrycie smarem powierzchni toczenia się rolek i powierzchni ślizgania się wkrętów (5) wybierających luz między belką a drugim ceownikiem. Wszystkie podpory miały śruby (1) służące do regulacji położenia. Dokładność ustawienia podpór i modelu była następująca: przemieszczenie $\eta \pm 0,5$ mm (niwelator), $\xi \pm 0,2$ mm (teodolit), kąt $\theta \pm 3 \cdot 10^{-4}$ rad (poziomica precyzyjna).

3.3. Metody pomiarowe i aparatura. Dla każdego stanu obciążenia modelu mierzone: przemieszczenia pionowe η , poziome ξ , kąty skręcenia θ belki oraz odkształcenia podłużne ε_x czterech skrajnych włókien belki (rys. 5). Starano się dobrać takie metody pomiarowe, ażeby każdą ze składowych przemieszczenia mierzyć oddzielnie.



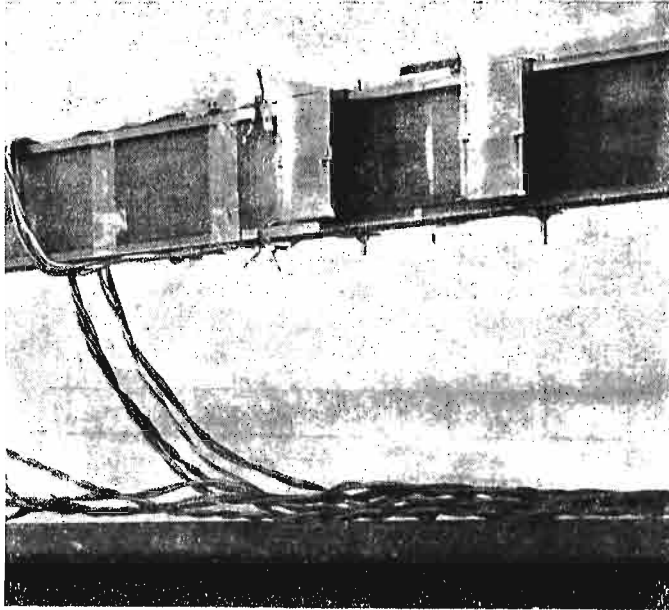
Rys. 5. H — punkt pomiarowy przemieszczeń poziomych ξ ; V — punkt pomiarowy przemieszczeń pionowych η ; Φ — punkt pomiarowy kąta skręcenia θ ; T — punkt pomiarowy tensometrii oporowej

Warto wspomnieć, że TRAHAIR [9] mierzył tylko jedno przemieszczenie poziome górnej półki belki, używając do tego specjalnego czujnika o bardzo małej sile oddziaływania na belkę. Przemieszczenie to było sumą wpływu dwóch przemieszczeń ξ i θ .

Przemieszczenia pionowe η mierzone katetometrem produkcji Wilda o dokładności odczytu 0,02 mm. Przemieszczenia poziome ξ mierzone teodolitem precyzyjnym Theo 010 prod. Zeissa (Jena), o dokładności odczytu 1'' i najkrótszej celowej 2,3 m. Punktami pomiarowymi były znaki na pręcikach aluminiowych przyklejonych pod stopką dolną, wzdłuż osi y (pomiar η) oraz do środka, wzdłuż osi x (pomiar ξ). O dokładności pomiaru decydowała czytelność znaku na pręciku. Wielokrotnie powtarzane odczyty próbne pozwoliły dokładność tę określić jako równą $\pm 0,02$ mm.

Kąt skręcenia θ mierzone metodą lusterkową. Lusterka były przytwierdzone do modelu za pośrednictwem takiej oprawki i obejm, że możliwa była płynna regulacja ich kątów kierunkowych (rys. 6). Przed rozpoczęciem próby lusterka ustawiono w pozycji pionowej. Przed lusterkami, w przęśle o rozpiętości 3,0 m ustawiono lunetki ekstensometru Martensa, prod. Zeissa (Jena). Dokładność pomiaru kąta wynosiła $\pm 1 \cdot 10^{-4}$ rad = 20''. Z braku drugiego ekstensometru Martensa, w przęśle o rozpiętości 2,0 m używano niwelatora technicznego Ni 025, Zeiss (Jena), osiągając podobną dokładność.

Przemieszczenie poziome ξ jest małe w stosunku do odległości linijki od lusterka, wynoszącej 1000 mm, dlatego wpływ jego na odczyt θ można pominąć. (Gdy $\xi = 10$ mm błąd wynosi 5%). Przemieszczenie pionowe η tylko wtedy nie wywierałoby wpływu na odczyt θ , gdyby lusterka były dokładnie płaskie. Badania lusterek przeprowadzone za pomocą katetometru z linijką wykazały, że lusterka były wypukłe, a kąt między prostymi normalnymi, wyprowadzonymi z punktów odległych o 1 cm, był równy $(1,5 \div \div 2,0) \cdot 10^{-4}$ rad. Uznano więc, że nie zachodzi konieczność uwzględnienia wpływu wypukłości lusterka na odczyt kąta θ .



Rys. 6

Poza wyżej opisanymi metodami optycznymi zastosowano tensometrię elektrooporową do pomiaru odkształceń ε_z czterech skrajnych włókien belki. Stosowano czujniki indywidualne o długości 20 mm (Nr 1-4 na rys. 7). Głównym celem pomiarów tensometrycznych była kontrola maksymalnych naprężeń w belce, dodatkowym celem było zbadanie przydatności tensometrii oporowej do badań zwichrzenia. To ostatnie wymagało rozłożenia odkształceń na stany odpowiadające siłom przekrojowym M_x , M_y , B i N (rys. 6) oraz wzory (1)

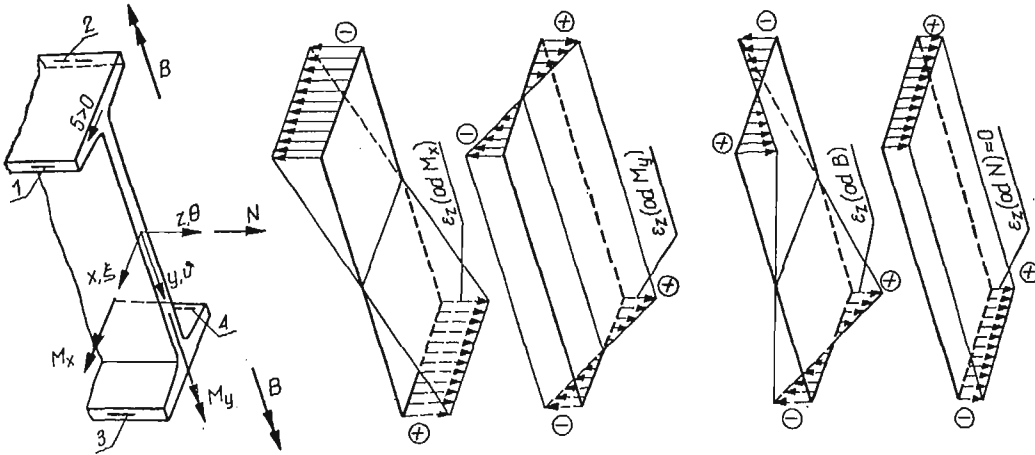
$$(1a) \quad \varepsilon_z(\text{od } M_x) = \varepsilon_{z,x} = \frac{1}{4} (-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4),$$

$$(1b) \quad \varepsilon_z(\text{od } M_y) = \varepsilon_{z,y} = \frac{1}{4} (-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4),$$

$$(1c) \quad \varepsilon_z(\text{od } B) = \varepsilon_{z,\omega} = \frac{1}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4),$$

$$(1d) \quad \varepsilon_z(\text{od } N) = \varepsilon_{z,z} = \frac{1}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4).$$

Rozmieszczenie tensometrów na belkach 1, 2 i 3 (rys. 5a) było inne niż na belkach 1a, 2a i 3a (rys. 5b). Wynikało to z faktu, że do prób 1a, 2a, 3a użyto powtórnie belek 1, 2, 3 z ich czujnikami, przy czym modele obracano końcami, celem zmniejszenia wpływu ewentualnych krzywizn wywołanych pierwszą próbą.



Rys. 7

3.4. Przebieg doświadczeń. Wstępne próby, przeprowadzone na belkach jednoprzęsłowych i na modelu 1 belki dwuprzęsłowej oraz próbę 2, należącą do serii głównej, kontynuowano aż do chwili wyczerpania nośności. Próby 3, 1a, 2a, 3a przerwano w stanie dużych przemieszczeń $\xi = 30$ mm i $\theta = 75$ mrad. Pomiaru przemieszczeń dokonywano po upływie 1 minuty od ułożenia obciążnika na szalce. Wyniki przedstawiono na wykresach, z których trzy pokazano na rys. 8, 9, 10. Przy opisie osi odciętych stosowano zasady znakowania wynikające z prawoskrętnego układu osi współrzędnych (por. rys. 2, 5, 7). Ponieważ pewne przemieszczenia (np. kąt skręcenia θ) przez długi czas były bardzo małe, a w końcowej fazie próby wzrastały bardzo szybko, na wykresach zastosowano taką podziałkę by czytelna była początkowa i środkowa część wykresu, nie zamieszczając tym samym ostatnich odczytów.

Do opisu osi rzędnych użyto jednostek siły układu technicznego (kG) i układu SI (daN). Ponadto na osi tej zaznaczono następujące punkty:

H — obciążenie, przy którym naprężenia, wyznaczone z pomiaru tensometrycznego, przekroczyły 2000 at,

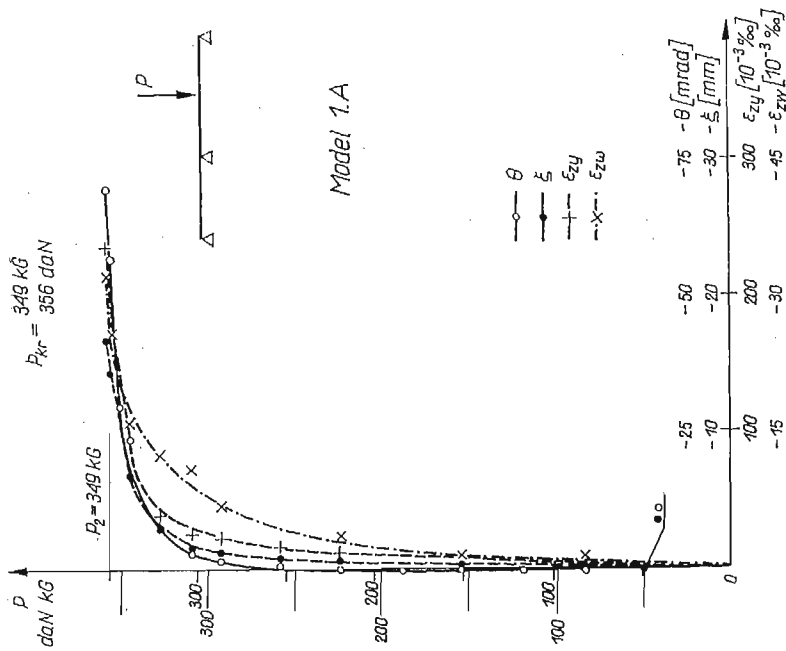
P_2 — przerwanie próby w przypadku prób 1a, 3a,

P_3 — granicę nośności w przypadku próby 2.

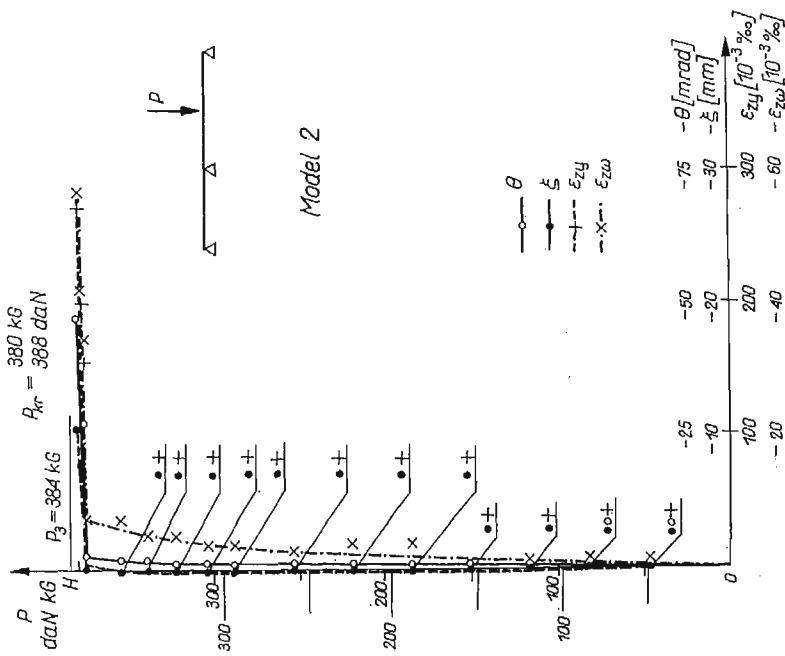
Na rys. 9 punktu H nie zaznaczono, gdyż naprężenia nie osiągnęły wartości 2000 at.

Na wykresie przemieszczeń modelu nr 2 (rys. 8) występuje wyraźne «załamanie się» krzywych przy obciążeniu $P = 375$ kG, co tłumaczy się prawdopodobnym, lekkim potrąceniem modelu w chwili dodawania obciążenia. Wyniki badań wszystkich pozostałych modeli tworzą krzywe regularne.

Poza wykresem dla modelu nr 2, w pracy zamieszczono wykres dla modelu 3A — jako najlepszy i dla modelu 1A — jako najgorszy.



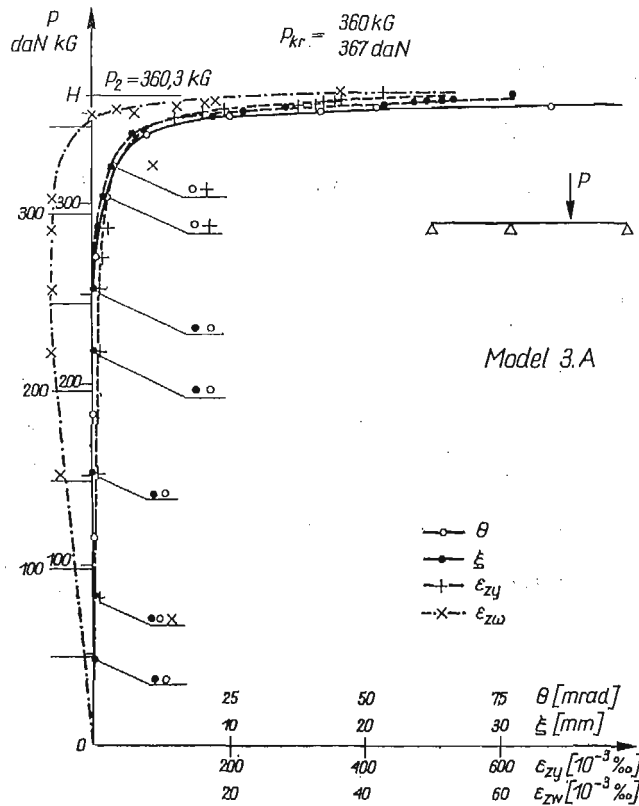
Rys. 9



Rys. 8

Przy wyznaczaniu siły krytycznej z wykresu napotyka się zwykle pewne trudności. Jak wiadomo, nie zostało dotąd rozwiązane teoretycznie zagadnienie nośności nadkrytycznej oraz zagadnienie zwiczenia belki ciągłej z małymi mimośrodami. Nieliczne prace doświadczalne nie dały odpowiedzi ostatecznej odnośnie istnienia nadkrytycznego wzrostu nośności, stąd zdania badaczy są podzielone [5, 7].

Podczas badań stwierdzono, że wyczerpanie nośności belek następuje dopiero przy dużych przemieszczeniach powodujących nawet lokalne wystąpienie odkształceń plastycznych. Utrata nośności poprzedzona była pewnym zakresem prawie liniowej zależności



Rys. 10

między obciążeniem a przemieszczeniami. Ten quasi-liniowy wzrost nośności, wynoszący około 3÷5% obciążenia, można by uważać za wzrost nośności nadkrytycznej. Do jednoznacznych wniosków potrzebne byłyby jednak dalsze badania, poświęcone specjalnie temu zagadnieniu.

W opisywanych badaniach za szacowaną wartość siły krytycznej przyjęto średnią z obciążenia P , odpowiadającego początkowi quasi-liniowego wzrostu nośności i z obciążenia niszczącego. W przypadku, gdy próbę przerwano wcześniej, wartość obciążenia niszczącego ekstrapolowano na podstawie zmierzonych przemieszczeń. Należy to traktować jako sposób przybliżony, jednak błędy wynikające stąd nie są duże.

Szacowane wartości P_{kr} zestawiono w tablicy 3. Granice maksymalnego błędu przyjęto równe zakresowi procesu quasi-liniowego bądź większe od niego, w zależności od przebiegu krzywych.

3.5. Badania cechujące. Sztywności EI_y i GI_d wyznaczono na podstawie pomiarów ugięć i kątów skręcenia dokonanych podczas prób zginania i skręcania swobodnego belek o długości 1,5 m, wyciętych z modeli badanych wcześniej na zwichrzenie. Każdą belkę obciążano czterokrotnie, mierząc przemieszczenia zarówno przy obciążaniu jak i odciążaniu.

Sztywność EI_ω obliczono mnożąc I_ω przez E . I_ω a także I_x , I_y , określono na podstawie wyników inwentaryzacji belek (tablica 1). Do obliczenia E wykorzystano wyznaczone uprzednio sztywności EI_y i EI_x , gdzie EI_x wynikało z ugięć η zmierzonych w czasie prób stateczności. Wyniki zamieszczono w tablicy 2.

Tablica 2. Wyniki badań cechujących*

Model	Układ jedn.	EI_x	EI_y	GI_d	EI_ω
		10 ⁶ · kG · cm ² kN · m ²			10 ⁶ · kGcm ⁴ Nm ⁴
1 i 1a	Tech.	108,31	3,509 ± 0,121 3,45%	0,5891 ± 0,0049 0,83%	43,40
	SI	106,22	3,441 ± 0,118	0,5777 ± 0,0048	4,256
2 i 2a	Tech.	108,77	3,4675 ± 0,113 3,26%	0,5934 ± 0,0045 0,76%	42,81
	SI	106,67	3,400 ± 0,111	0,5819 ± 0,0044	4,198
3 i 3a	Tech.	109,17	3,410 ± 0,147 4,31%	0,5829 ± 0,0064 1,10%	43,40
	SI	107,06	3,344 ± 0,144	0,5716 ± 0,0063	4,256

* Błędy pomiarów obliczono według rozkładu Studenta i Fishera przy trzech stopniach swobody i poziomie ufności 0,99.

Wartości błędu wskazują na to, że najdokładniejszy był pomiar sztywności skręcania, wykonany metodą lusterkową (baza pomiarowa równa 100 cm).

Z badań cechujących oraz przeprowadzonego dodatkowo rozciągania sześciu próbek wyciętych ze środka i półek belek wyciągnięto wniosek, że próby stateczności w zakresie naprężeń do 2000 at można uważać za sprężyste.

4. Porównanie wyników doświadczalnych z wynikami numerycznymi

Wyniki badań zestawiono w tablicy 3 i porównano je z wynikami numerycznymi, obliczonymi metodą zaproponowaną przez autora [3, 4]. W metodzie tej rozwiązanie równań stateczności Własowa przedstawiono w postaci szeregu skończonego o wyrazach złożonych z członów trygonometrycznych i wielomianowych. Minimalizację błędu przeprowadzono metodą ortogonalizacji, co doprowadziło do uogólnionego zagadnienia wartości własnych. Całość obliczeń wykonuje się na maszynie cyfrowej.

Szczegółowy opis omawianej metody zawarto w pracy [3]. Z przeanalizowanych tam przykładów wynika, że granicę błędu wyników numerycznych zawartych w tablicy 3 oszacować można jako równą $\pm 1\%$. Szacowanie to nie uwzględnia błędu spowodowanego upraszczającymi założeniami Własowa, a także błędów inwentaryzacji i badań cechujących.

Tablica 3. Porównanie wyników

Seria	Próba	Siły krytyczne			$\frac{P_{kr}^{dośw.} - P_{kr}^{num.}}{P_{kr}^{dośw.}} \cdot 100$ %
		Wartości górne w kG		Wyniki doświadczeń	
		Wartości dolne w daN.			
		Wyniki numeryczne P_{kr}	P_{kr}	Maks. możliwy rozrzut wyników (w przybliżeniu)	
Główna (weryfikacyjna)	2	357,7	380	375 ÷ 385	5,9
		350,8	372,7		
	3	351,7	370	360 ÷ 380	5,0
		344,9	362,8		
	1a	358,3	349	341 ÷ 360	-2,7
2a	357,7	370	362 ÷ 380	3,3	
	350,8	362,8			
3a	351,7	360	352 ÷ 368	2,3	
	344,9	353,0			
Średni błąd pojedynczego pomiaru					3,2
Średni błąd pojedynczego pomiaru z wykluczeniem próby 1a					3,9

Wyniki doświadczalne we wszystkich przypadkach, z wyjątkiem próby 1a, są wyższe od wyników numerycznych. Wyniki prób 2a i 3a są niższe od wyników prób 2, 3, co tłumaczyć można pewnymi krzywiznami modeli wynikającymi z uprzedniego ich użycia. Model 1 użyty był wcześniej do wstępnej serii badań, kontynuowanej do całkowitej utraty nośności, dlatego krzywizny modelu w próbie 1a były większe niż w pozostałych próbach, co mogło być przyczyną zaniżenia wyniku próby 1a.

Fakt, że wyznaczone doświadczalnie siły krytyczne wypadły większe od wartości określonych numerycznie jest zgodny z przewidywaniami. W metodzie numerycznej wykorzystano bowiem równania stateczności Własowa [10], wyprowadzone, jak wiadomo, z warunku równowagi pręta prostego doznającego jedynie nieskończone małych przemieszczeń i odkształceń. W rzeczywistości, w chwili utraty stateczności belka jest już ugięta pod obciążeniem, przez co punkt przyłożenia siły P obniża się, czyniąc układ bardziej statecznym. Zgodnie z analizą teoretyczną i badaniami doświadczalnymi [1, 2, 4, 5, 11]

założenie, że oś belki jest prosta, powoduje obniżenie wartości siły krytycznej o około 3÷5%. Procent ten zależy oczywiście od schematu statycznego belki i wymiarów przekroju poprzecznego.

5. Wnioski

1. Wyniki przeprowadzonych doświadczeń zwichrzenia sprężystego belek dwuprzęsłowych potwierdziły poprawność zaproponowanej przez autora metody numerycznej obliczania siły krytycznej.

2. Zastosowanie i wzajemne porównanie różnych metod pomiarowych pozwala na następujące uszeregowanie ich pod względem przydatności do omawianego typu doświadczeń: lusterkowy pomiar kąta skręcenia θ , optyczny pomiar przemieszczenia poziomego ξ (teodolitem lub katetometrem), pomiar tensometrią elektrooporową wydłużeń ε_z wywołanych zginaniem poziomym, pomiar jw. lecz wydłużeń ε_z wywołanych bimoto-mentem.

Zaletami metody lusterkowej jest bardzo duża dokładność, łatwość i szybkość odczytu. Dodatkową zaletą jest zaobserwowane we wszystkich próbach zjawisko wolnego wzrastania kąta skręcenia w początkowej fazie próby i gwałtownego przyrostu w fazie końcowej, co bardzo ułatwia określenie siły krytycznej. Charakterystyczne jest, że we wszystkich próbach kąt skręcenia wzrastał monotonicznie, podczas gdy przemieszczenie poziome ξ i odkształcenia ε_z w czasie pewnych prób zmieniały nawet znak.

Zmniejszenie błędu pomiaru ε_z metodą tensometrii oporowej można by osiągnąć przez zmostkowanie czujników w układy samokompensacyjne zgodnie z wzorami (1b) i (1c).

Literatura cytowana w tekście

1. А. Н. ДУННИК, *Известия Донского Политехнического Института*, т. 2, 1913.
2. K. FEDERHOFER, *Sitzberichte Akad. Wiss., Wien* 1931, B. 140, s. 237.
3. A. GARSTECKI, *Pewne przypadki przestrzennej utraty stateczności prętów cienkościennych. Stateczność sprężysta prętów ciągłych*. Rozprawa doktorska. Politechnika Poznańska, 1973.
4. A. GARSTECKI, *Zastosowanie e.m.c. do analizy przestrzennej utraty stateczności cienkościennych belek I- i 2-przęsłowych*, Sympozjum Met. Komputerowe w Mech. Bud., Poznań 17—18. V. 1973.
5. E. F. MASUR, K. P. MILBRADT, *Collapse strength of redundant beams after lateral buckling*, *J. of Applied Mechanics*, ASME, 24, 2 (1957), 283.
6. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill Book Company, New York-London-Toronto 1961. Polskie tłumaczenie: *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
7. N. S. ТРАНАИР, *Stability of I-beams with elastic end restraints*, *J. of the Institution of Engineers of Australia*, 37, 6 (1965), 157.
8. N. S. ТРАНАИР, *Elastic stability of I-beams elements in rigid-jointed frames*, *J. of the Institution of Engineers of Australia*, 38, 7/8 (1966), 171.
9. N. S. ТРАНАИР, *Elastic stability of continuous beams*, *J. Struct. Div. Proc. ASCE*, 95, 6 (1969), 1295—1312.
10. Г. Ф. Вишняков, *Применение матриц влияния к расчёту неразрезных тонкостенных стержней открытого профиля на устойчивость групповым способом Вялелло*, Тр. Ташк. Инст. Инж. Жель-дорож. Трансп., 1969, вып. 62, с. 84—96.

11. Г. Ф. Вишняков, *Решение задач устойчивости неразрезных тонкостенных балок постоянно поперечного сечения с применением ЕСВМ*, Тр. Ташк. Инст. Инж. Жель.-дорож. Трансп., 1970, вып. 68, с. 113—128.
12. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Физматгиз, Москва 1959.
13. S. WEISS, *Uwagi w sprawie kryteriów stateczności w przypadku zgięcia pręta cienkościennego*, Arch. Inż. Łąd., 15, 3 (1969).

Р е з ю м е

ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНАЯ ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ
ТОНКОСТЕННОЙ ДВУХПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ

В работе описаны эксперименты, проведенные на сплошных двухпролетных стальных балках двутаврового сечения, нагруженных сосредоточенной нагрузкой, приложенной по середине одного из пролетов.

Основной целью работы являлось определение значения критического усилия и проверка численного метода расчета критической нагрузки многопролетных сплошных балок, предложенного автором.

Приводятся заключения относительно согласуемости экспериментальных и вычислительных результатов и пригодности различных измерительных методов, применяемых при описываемых исследованиях.

S u m m a r y

ELASTIC STABILITY OF TWO-SPAN THIN-WALLED CONTINUOUS BEAMS

The tests carried out on steel I-beams loaded with a concentrated force are described in the paper. The main aim of the experimental investigation was to verify the numerical method given by the author and serving to the evaluation of the critical loads of multi-span continuous beams.

Several conclusions have been drawn concerning the agreement of the theoretical and experimental results and the accuracy of various measuring methods applied to the tests.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lutego 1974 r.

WPLYW NIEJEDNORODNOŚCI STANU NAPRĘŻENIA W PRZEKROJU POPRZECZNYM
POŁĄCZENIA NA OBCIĄŻENIE ZWOJÓW GWINTU*

MARIA BACZYŃSKA (KRAKÓW)

1. Wstęp

W analizie rozkładu obciążeń w zwojach gwintu połączeń śrubowych ogólnie przyjmowane jest założenie o równomierności rozkładu siły w przekroju poprzecznym śruby i nakrętki [1, 2, 4, 5, 6, 7, 9]. W rzeczywistości rozkłady są nierównomierne, a podane rozwiązania obarczone wynikającym stąd błędem. Obecnie podejmiemy próbę oceny tego błędu, w nawiązaniu do rzeczywistych stanów naprężenia w trzpieniu śruby i korpusie nakrętki. Ze względu na trudności teoretyczne i doświadczalne nie analizowano obiektu kołowsymetrycznego, jakim jest rozpatrywane połączenie śrubowe, zastępując go modelem płaskim, dla którego dysponowano niemal gotowym rozwiązaniem teoretycznym, łatwym do weryfikacji doświadczalnej. Można oczekiwać, że rozkłady naprężeń w przekroju wzdłużnym połączenia (σ_x , σ_r , τ_{xr}) i naprężeń w modelu płaskim o tym samym konturze (σ_x , σ_y , τ_{xy}) są jakościowo identyczne. Pozwala to na wyciąganie interesujących nas wniosków dla połączenia śrubowego na podstawie wyników analizy stosowanego modelu płaskiego.

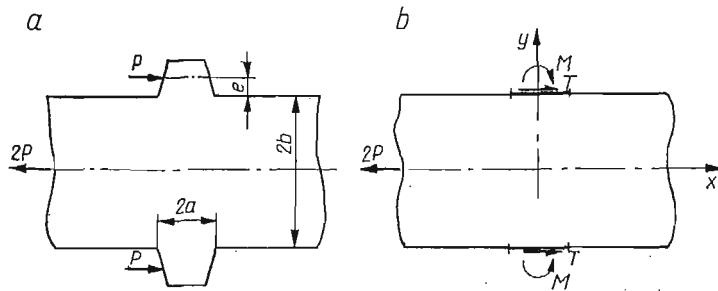
W praktycznie realizowanych połączeniach śrubowych na długości skręcania pracuje wiele zwojów, a naprężenia pochodzące od obciążenia poszczególnych zwojów nakładają się na siebie. Analiza takiego złożonego pola naprężeń nastęrczałaby w naszym przypadku duże trudności związane z koniecznością wyodrębnienia skutków obciążenia poszczególnych zwojów, tym większe, że rozkład tych obciążeń nie jest z góry znany. Trudność tę ominięto przez zastosowanie modelu z jednym zwojem pracującym. Przyjęto go w postaci płaskiej płytki z symetrycznie względem jej osi rozmieszczonymi występami, modelującymi zwój. Symetria ułatwia tu analizę zarówno teoretyczną, jak i doświadczalną, nie powodując dodatkowych trudności w interpretacji wyników. Wspomniana płytka modeluje zasadniczo tylko śrubę. Ponieważ jednak charakter współpracy zwoju z trzpieniem śruby i korpusem nakrętki jest analogiczny, wnioski uzyskane z analizy jednego z tych elementów można bez trudności rozszerzyć na całe połączenie.

Stan naprężenia w omówionym modelu określono niezależnie od siebie teoretycznie i doświadczalnie, konfrontując otrzymane w obu przypadkach wyniki.

* Praca została wyróżniona na konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej — zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Krakowie w 1973 r.

2. Teoretyczna analiza stanu naprężenia w płaskim modelu śruby obciążonej na jednym zwoju

Model śruby przyjęto tu w postaci nieskończenie długiego pasma z symetrycznie rozmieszczonymi występami (rys. 1a). Pomijając, jako nieistotną w obecnej analizie, składową promieniową obciążenia śruby, przyjęto obciążenie występów siłami P równoległymi do pasma. Po myślowym odcięciu występów, otrzymujemy pasmo gładkie, obciążone

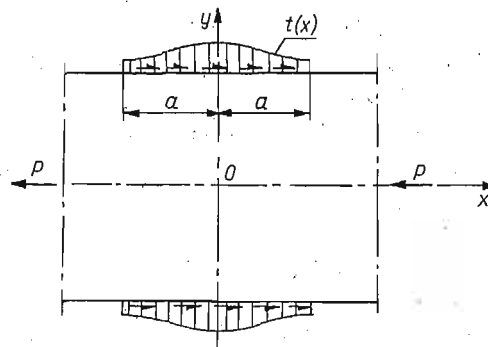


Rys. 1

żone symetrycznie na odcinkach $2a$ siłami stycznymi $T = P$ i momentami $M = Pe$ (rys. 1b). Przyjęto następnie, że siły T rozkładają się równomiernie na odcinkach $2a$, oraz moment M realizowany jest przez liniowo rozłożone na tych odcinkach obciążenia normalne

$$(2.1) \quad t = \frac{T}{2a}, \quad p = \frac{3}{2} \cdot \frac{M}{a^3} x.$$

Dla obu powyższych rodzajów obciążenia podano oddzielnie rozwiązania, adaptując odpowiednie wzory z monografii [8] TEODORESCU. Interesujące nas wzory na naprężenia podane są tam w formie całek Fouriera, a funkcje podcałkowe — stabelatryzowane.



Rys. 2

Niestety musiano zrezygnować z korzystania z tablic, gdyż nie pozwalały one na uzyskanie wymaganych dokładności. Spowodowało to konieczność określenia wyrażeń podcałkowych w formie jawnych funkcji zmiennych przestrzennych (x, y) i parametru rozwinięcia (α) i w konsekwencji dokonania odpowiednich podstawień i przekształceń.

Dla pasma obciążonego symetrycznie na brzegach siłami stycznymi $t(x)$, rys. 2, po wykorzystaniu wzorów (7.354) TEODORESCU i dokonaniu przekształceń omówionych bliżej w pracy doktorskiej BACZYŃSKIEJ [3] otrzymano:

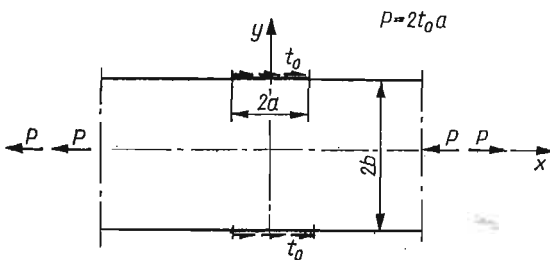
$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2t_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda \beta}{\beta} \frac{\operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta} (\beta \operatorname{th} \beta \operatorname{ch} \eta \beta - \eta \beta \operatorname{sh} \eta \beta - 2 \operatorname{ch} \eta \beta) \sin \lambda \beta \xi d\beta, \\ \sigma_y &= -\frac{2t_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda \beta}{\beta} \frac{\operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta} (\beta \operatorname{th} \beta \operatorname{ch} \eta \beta - \eta \beta \operatorname{sh} \eta \beta) \sin \lambda \beta \xi d\beta, \\ \tau_{xy} &= \frac{2t_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda \beta}{\beta} \frac{\operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta} [(1 - \beta \operatorname{th} \beta) \operatorname{sh} \eta \beta + \eta \beta \operatorname{ch} \eta \beta] \cos \lambda \beta \xi d\beta, \end{aligned}$$

w których

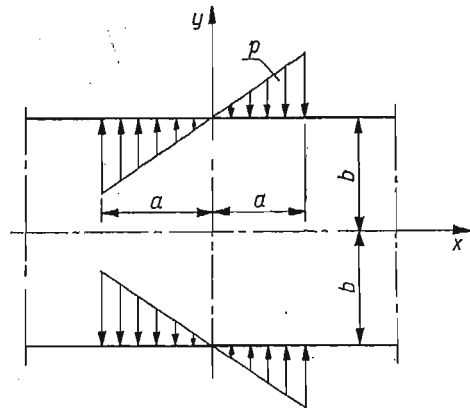
$$(2.3) \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad \beta = ab, \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}.$$

W interesującym nas przypadku (rys. 1) pasmo podparte jest jednostronnie. Przypadek ten otrzymamy nakładając na stan naprężeń opisany funkcjami (2.2) jednorodne, jednoosiowe rozciąganie w kierunku osi x naprężeniem $\frac{a}{b} t_0$ (rys. 3), skąd

$$(2.4) \quad \sigma_x = \frac{2t_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda \beta}{\beta} \frac{\operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta + \beta} (\beta \operatorname{th} \beta \operatorname{ch} \eta \beta - \eta \beta \operatorname{sh} \eta \beta - 2 \operatorname{ch} \eta \beta) \sin \lambda \beta \xi d\beta + \lambda t_0.$$



Rys. 3



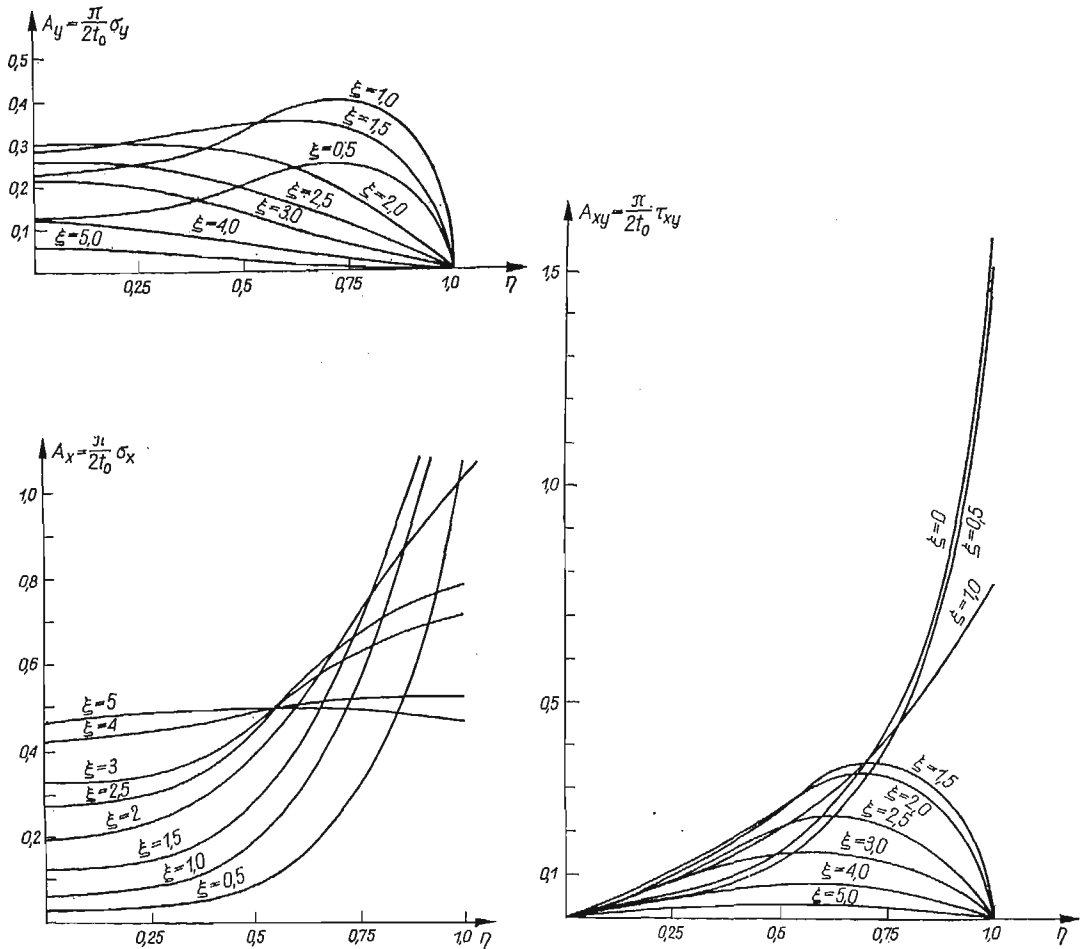
Rys. 4

Obciążenie momentowe sprowadzono do liniowo rozłożonego obciążenia normalnego, antysymetrycznego względem osi y (rys. 4). Po stosowanych przekształceniach [3] otrzymano:

$$\sigma_x = -\frac{3M}{\pi a^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \beta - \beta \cos \lambda \beta}{\lambda \beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta [(1 - \beta \operatorname{cth} \beta) \operatorname{ch} \beta \eta + \beta \eta \operatorname{sh} \beta \eta]}{\beta + \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta} \sin \lambda \beta \xi d \beta,$$

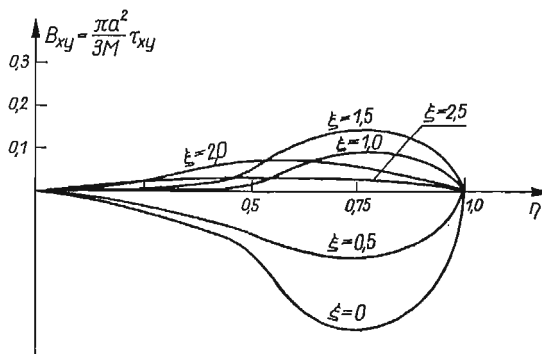
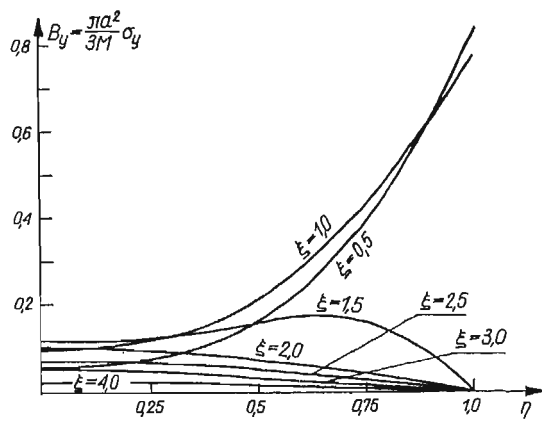
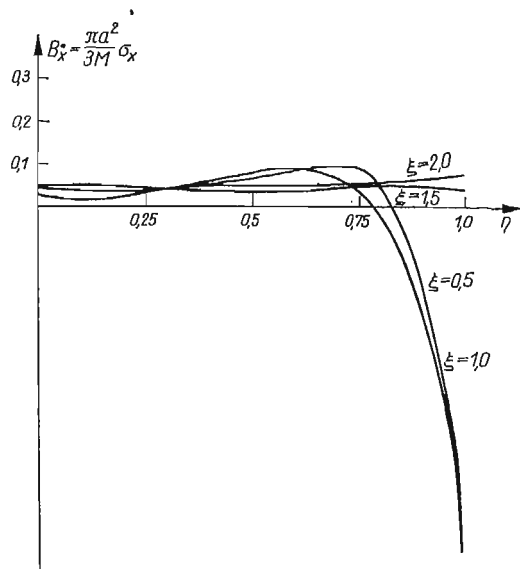
$$(2.5) \quad \sigma_y = -\frac{3M}{\pi a^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \beta - \beta \cos \lambda \beta}{\lambda \beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta [(1 + \beta \operatorname{cth} \beta) \operatorname{ch} \beta \eta - \beta \eta \operatorname{sh} \beta \eta]}{\beta + \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta} \sin \lambda \beta \xi d \beta,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3M}{\pi a^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda \beta - \beta \cos \lambda \beta}{\lambda \beta^2} \frac{\operatorname{sh} \beta (\beta \operatorname{cth} \beta \operatorname{sh} \beta \eta - \beta \eta \operatorname{ch} \beta \eta)}{\beta + \operatorname{sh} \beta \operatorname{ch} \beta} \cos \lambda \beta \xi d \beta.$$



Rys. 5

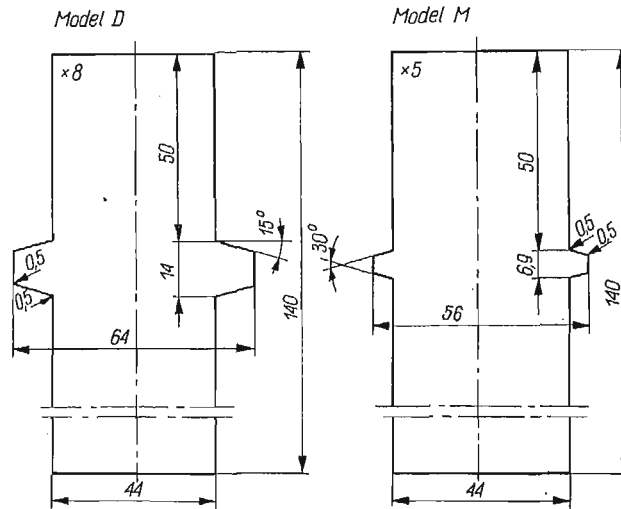
Obliczenia numeryczne wartości naprężeń wykonano w Ośrodku Elektronicznej Techniki Obliczeniowej Politechniki Krakowskiej na maszynie cyfrowej Odra 1204, dla $\lambda = 1/3, 2$. Otrzymane rozkłady naprężeń zilustrowano wykresami na rys. 5 i 6.



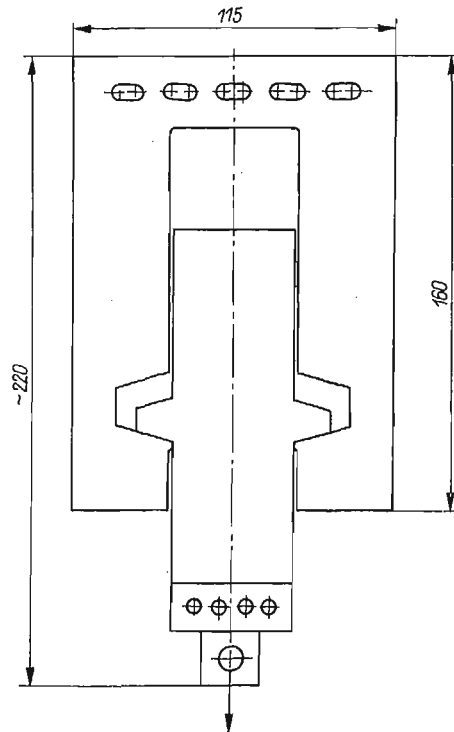
Rys. 6

3. Weryfikacja doświadczalna stanu naprężenia w modelu płaskim

Określony w rozdziale poprzednim stan naprężeń w modelu płaskim zweryfikowano doświadczalnie badaniami elastoptycznymi. Wykonano je na modelach o konturach pokazanych na rys. 7, stosując technikę światła przechodzącego. Model *D*, o dwukrotnie



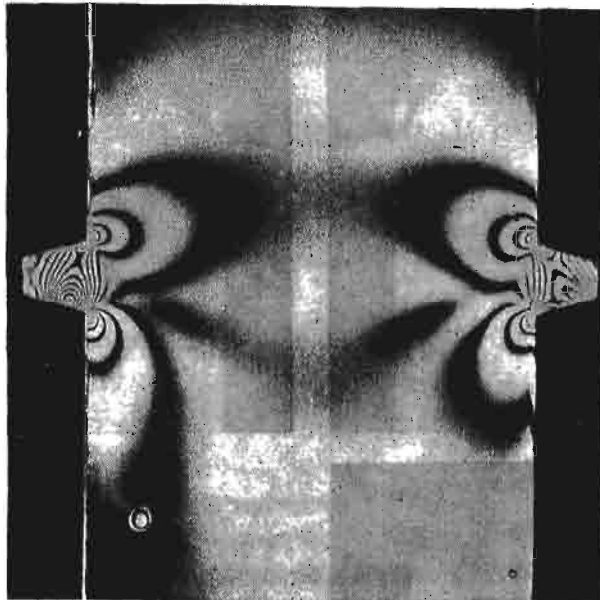
Rys. 7



Rys. 8



Model D

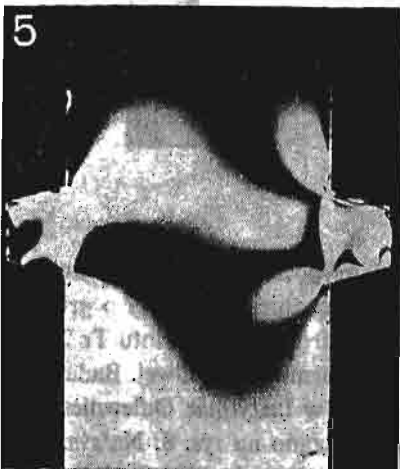
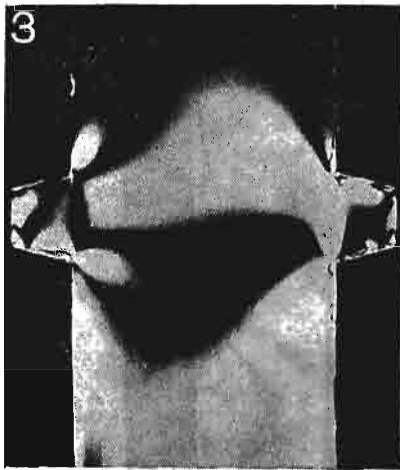
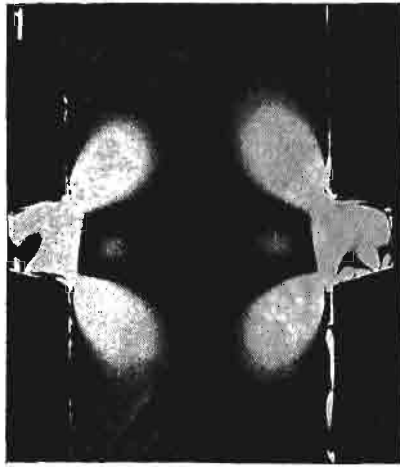


Model M

Rys. 9

powiększonym występie w stosunku do średnicy w porównaniu z proporcjami gwintu trapezowego Tr 28 × 5, wykonano drogą obróbki mechanicznej z płyty o grubości 8 mm odlanej z żywicy poliestrowej. Model *M* odpowiada proporcjom gwintu Tr 28 × 5; wykonany został z żywicy epoksydowej przez odlanie w formie kształtowej. Badania elastooptyczne przeprowadzono na polaryskopie Firmy Zeiss w Instytucie Odlewnictwa.

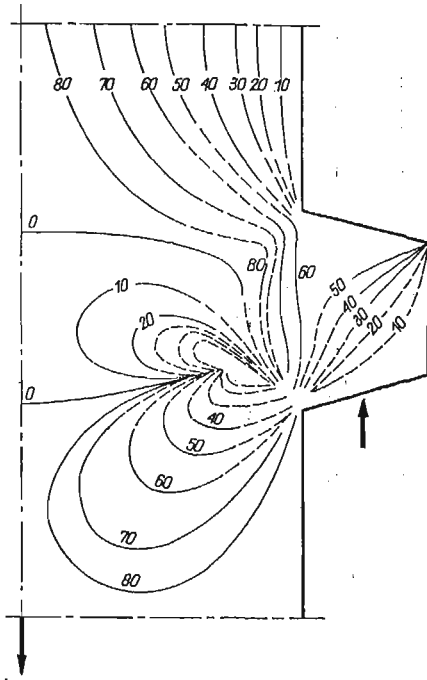
Sposób zamocowania modelu *D* w uchwycie pokazano na rys. 8. Na rys. 9 pokazano fotografie izochrom wykonane dla modelu *D* przy obciążeniu 96 kG, dla modelu *M* — przy obciążeniu 45 kG.



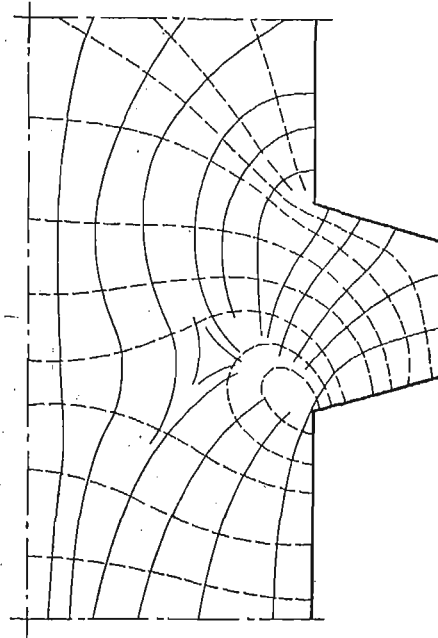
Rys. 10

Fotografie izoklin wykonano co 10°. Część z nich dla modelu *D*, kątów 0°, 20°, 40°, 60°, 80° i obciążenia 24 kG pokazano na rys. 10. Na ich podstawie wykonano (rys. 11) izokliny i wyznaczono trajektorie naprężeń głównych (rys. 12). Linie ciągłe oznaczają przewagę naprężeń rozciągających, linie przerywane przewagę naprężeń ściskających.

Ze względu na ukierunkowany charakter omawianych badań nie zachodziła potrzeba pełnego ich opracowania. Zastosowano tu postępowanie odwrotne, sprowadzając wyniki analizy teoretycznej do postaci wyników doświadczalnych, co pozwoliło ominąć żmudne



Rys. 11



Rys. 12

i mało dokładne operacje obliczania wartości naprężeń głównych na podstawie izochrom i trajektorii naprężeń głównych. Pierwszą czynnością w tym postępowaniu było dostosowanie obciążeń modelu teoretycznego do doświadczalnego.

Oznaczmy odsunięcie sił *P* od krawędzi modelu (rys. 1) przez

$$(3.1) \quad e = ka.$$

Wówczas

$$(3.2) \quad M = 2kt_0a^2.$$

Na podstawie rys. 9 oszacowano $k = 1,33$. Superponując naprężenia od sił stycznych *T* i momentów *M* otrzymujemy

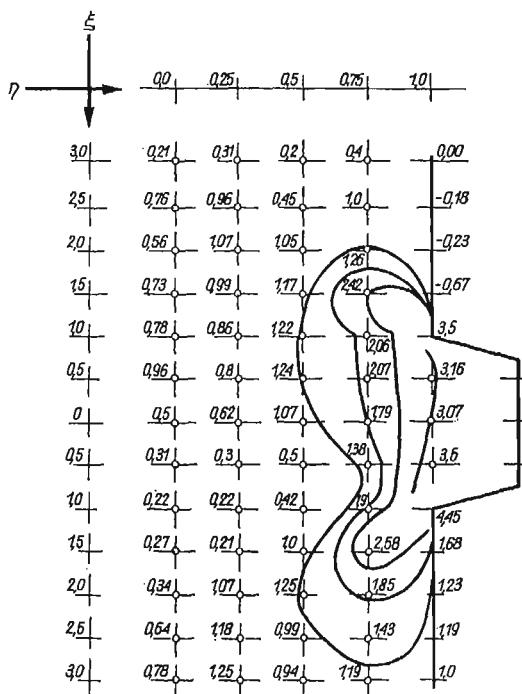
$$(3.3) \quad \sigma_x = \frac{2t_0}{\pi} \left(A_x + 3kB_x + \frac{\pi\lambda}{2} \right), \quad \sigma_y = \frac{2t_0}{\pi} (A_y + 3kB_y), \quad \tau_{xy} = \frac{2t_0}{\pi} (A_{xy} + 3kB_{xy}),$$

gdzie przez wyrażenia *A* i *B* oznaczono odpowiednie całki we wzorach (2.2) i (2.5).

Obliczono bezwymiarowe wartości naprężeń

$$(3.4) \quad s_x = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_x}{t_0}, \quad s_y = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_y}{t_0}, \quad t_{xy} = \frac{\pi}{2} \frac{\tau_{xy}}{t_0}$$

dla modelu teoretycznego i $k = 1,33$ oraz wartości izochrom $(s_1 - s_2) = \sqrt{(s_x + s_y)^2 + 4t_{xy}^2}$.



Rys. 13

Na rys. 13 na tle siatki przestrzennej (ξ, η) wpisano wartości $(s_1 - s_2)$ i wykreślono izochromy. Widoczna jest dobra zgodność przebiegów izochrom wyznaczonych teoretycznie i otrzymanych doświadczalnie (rys. 9) dla modeli o tych samych proporcjach wymiarowych.

4. Wnioski z analizy modelu

W analizie pracy połączeń śrubowych warunkiem wyjściowym jest warunek odkształceń

$$(4.1) \quad \varepsilon_s - \varepsilon_n + \frac{df}{dx} = 0,$$

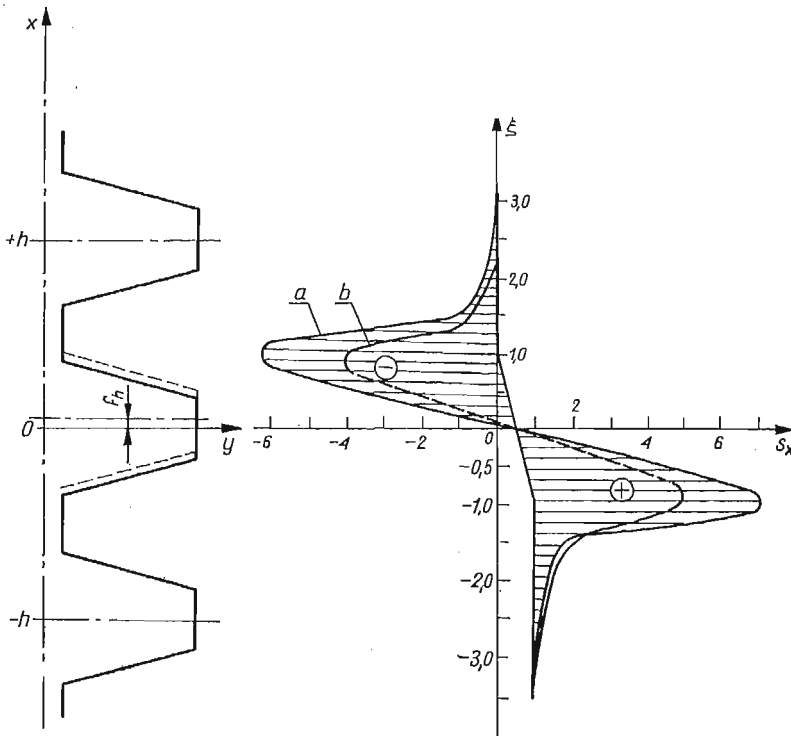
w którym $\varepsilon_s, \varepsilon_n$ — odkształcenia odcinkowe odpowiednio rdzenia śruby i korpusu nakrętki, f — ugięcie zwojów, x — zmienna wzdłuż osi połączenia [3].

Odkształcenia $\varepsilon_s, \varepsilon_n$ określone są przy założeniu równomiernego rozkładu siły rozcią-

gającej śrubę N_s , względnie ściskającej korpus nakrętki N_n w przekroju poprzecznym połączenia

$$(4.2) \quad \epsilon_s = \frac{N_s}{E_s F_s}, \quad \epsilon_n = \frac{N_n}{E_n F_n}.$$

Przeanalizujemy wyniki badań w aspekcie równania (4.1).



Rys. 14

Rozpatrzmy w tym celu rozkład naprężeń $\sigma_x(s_x)$ wzdłuż brzegu modelu. Na rys. 14 pokazano rozkład tych naprężeń otrzymanych teoretycznie (krzywa *a*) i doświadczalnie

(krzywa *b*) na tle naprężeń średnich $s_{x sr} = \frac{P}{b} \frac{\pi}{2t_0}$.

Różnica ich wywołuje odkształcenia dodatkowe

$$(4.3) \quad \epsilon_x = \frac{\sigma_x - \sigma_{x sr}}{E},$$

rozłożone antysymetrycznie względem osi zarysu obciążonego zwoju i w konsekwencji dodatkowe przemieszczenia obciążonego zwoju względem sąsiednich. Wynoszą one

$$(4.4) \quad f_{-h} = \int_{-h}^0 \epsilon_x dx, \quad f_h = \int_0^h \epsilon_x dx,$$

odpowiednio względem zwoju poprzedniego i następnego.

W rozpatrywanym przypadku według rozwiązania teoretycznego jest

$$(4.5) \quad f_h = f_{-h} = -f_h > 0,$$

co oznacza, że zwoje sąsiadujące z obciążonymi nie zmieniły wzajemnej odległości. Dotyczy to oczywiście tylko przemieszczeń wynikających z różnicy naprężeń na brzegu i naprężeń średnich. Okazuje się, że obszar niezgodności naprężeń na brzegach ze średnimi ogranicza się do bezpośredniego sąsiedztwa z odcinkiem obciążonym. Stąd wyciągnięto wniosek, że nierównomierność ta powoduje dodatkowe przemieszczenia zwoju obciążonego, a nie ma istotnego wpływu na zwoje pozostałe. To dodatkowe przemieszczenie możemy włączyć do ugięcia zwojów i przyjąć odpowiednią charakterystykę (podatność) warstwy gwintowej.

W świetle tych badań nierównomierność rozkładu naprężeń w przekroju poprzecznym połączenia nie wpływa na charakter rozwiązania.

Literatura cytowana w tekście

1. M. BACZYŃSKA, W. KRZYŚ, *Analiza rozkładu sił w złączu śrubowym z gwintem jako warstwą podatną*, Czasopismo Techniczne, 6 (1971).
2. M. BACZYŃSKA, W. KRZYŚ, *Wpływ wstępnego odstawiania zwojów i luzu osiowego na rozkład sił w złączu śrubowym*, Czasopismo Techniczne, 6-M (159) (1972).
3. M. BACZYŃSKA, Praca doktorska. Politechnika Krakowska, 1973.
4. И. А. БИРГЕР, *Распределение нагрузки между витками резьбы*, Вестник машиностроения, 7, 11 (1964).
5. Б. КУКЛИН, *Уточнение расчётов резьбовых соединений*, Вестник машиностроения, 7 (1957).
6. L. MADUSCHKA, *Beanspruchung von Schraubenverbindungen und zweckmässige Gestaltung der Gewinderträger*, Forsch. Ing-Wes., 7 (1936).
7. A. POBCZA, *Krafverteilung in axial belasteten Gewindeverbindungen*, Technische Rundschau, 44 (1966).
8. P. P. TEODORESCU, *Probleme Plane in Teoria Elasticitatii*, EA RPR, 1960.
9. Н. Е. ЖУКОВСКИЙ, *Распределение давлений на нарезках винта и гайки*, Полное собрание сочинений, ОНТИ, 1937.

Резюме

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ СОЕДИНЕНИЯ НА НАГРУЗКУ ВИТКОВ РЕЗЬБЫ

Анализируется распределение нагрузки в витках резьбовых соединений с целью проверки общепринятого предположения о равномерности распределения усилий в поперечном сечении болта и гайки, и одновременно предпринимается попытка оценки погрешности. Анализ производится для плоской модели болта, нагруженного на одном витке. Теоретическое решение подкрепляется результатами поляризационно-оптических экспериментов. Автор приходит к выводу, что область, для которой напряжения по периферии отличаются от средних напряжений, ограничена к непосредственной окрестности нагруженного отрезка, что вызывает добавочное перемещение нагруженного витка и не влияет на остальные витки. Добавочные перемещения могут учитываться совместно с прогибом витков путем принятия соответствующей характеристики резьбовой зоны. Ввиду приведенных результатов исследований автор приходит к заключению, что неравномерность распределения напряжений в поперечном сечении не влияет на вид решения.

S u m m a r y

INFLUENCE OF NONHOMOGENEITY OF THE STATE OF STRESS
IN TRANSVERSE CROSS-SECTION OF A CONNECTION ON THE
LOAD OF SCREW THREADS

An assumption of uniform stresses in cross-section of a screw and body of a nut is generally applied in analysis of the distribution of loads on the threads. The influence of this assumption on the solution's accuracy was not as yet considered. Analysis of the distributions of stresses and strains in screw threads applied to the flat model and verified by photoelastic tests, is presented in this paper. The results obtained show that on the loaded thread exist additional (to uniformly distributed) strains, distributed on short distance and antisymmetric to the loaded thread. The additional displacement of the loaded thread caused by these strains has no influence on the displacements of the neighbour threads and can therefore be treated as a component of the thread deflection (by means of suitable characteristic of the thread layer). In conclusion it is stated that the solutions now obtained based on the above mentioned assumption are correct in their character.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lutego 1974 r.

ZASTOSOWANIE METODY MACIERZY PRZENIESIENIA DO ANALIZY
DYNAMICZNEJ PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

EUGENIUSZ ŚWITOŃSKI (GLIWICE)

Oznaczenia

- η przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi Y ,
 ξ przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi Z ,
 ζ przemieszczenie punktów osi środków zginania w kierunku osi X ,
 φ kąt obrotu przekroju,
 x, y, z główne centralne osie bezwładności przekroju,
 y_α współrzędna środka zginania w kierunku osi Y ,
 z_α współrzędna środka zginania w kierunku osi Z ,
 E moduł sprężystości podłużnej,
 G moduł sprężystości poprzecznej,
 γ ciężar objętościowy materiału, z którego wykonano pręt,
 A powierzchnia przekroju pręta,
 g przyspieszenie ziemskie,
 J_y moment bezwładności przekroju względem osi y , $J_y = \int_A z^2 dA$,
 J_z moment bezwładności przekroju względem osi z , $J_z = \int_A y^2 dA$,
 J_ω wycinkowy moment bezwładności przekroju $J_\omega = \int_A \omega^2 dA$,
 J_s moment bezwładności przekroju przy czystym skręcaniu.

1. Wstęp

Zagadnieniom dynamiki i stateczności prętów cienkościennych o profilu otwartym poświęcono wiele prac. W większości dotyczą one prętów o stałym i charakterystycznym przekroju, dla pewnych szczególnych warunków brzegowych [1, 2, 3, 4].

W przypadku prętów o zmiennym przekroju zagadnienie dynamiki i stateczności sprowadza się do rozwiązania układu równań różniczkowych o współczynnikach funkcyjnych, przy czym funkcje tych współczynników zależą od charakteru zmiany przekroju. Rozwiązanie tego problemu można uzyskać w wyniku pracochłonnych obliczeń stosując jedną z metod przybliżonych [5, 6]. Każdorazowy inny charakter zmiany przekroju wymaga w ogólnym przypadku ponownego rozwiązania.

Zastępując pręt o dowolnie zmiennym przekroju, prętem o przekroju odcinkowo stałym (skokowo zmiennym) i stosując metodę macierzy przeniesienia, możemy otrzymać rozwiązanie powyższego problemu w znacznie prostszej postaci, nadającej się stosunkowo łatwo zaprogramować na elektroniczną maszynę cyfrową [7, 8, 9]. Dodatkową zaletą

metody macierzy przeniesienia jest możliwość każdorazowego określenia granic, w jakich powinno zawierać się rozwiązanie ściśle, a więc można otrzymać rozwiązanie o żądanej dokładności.

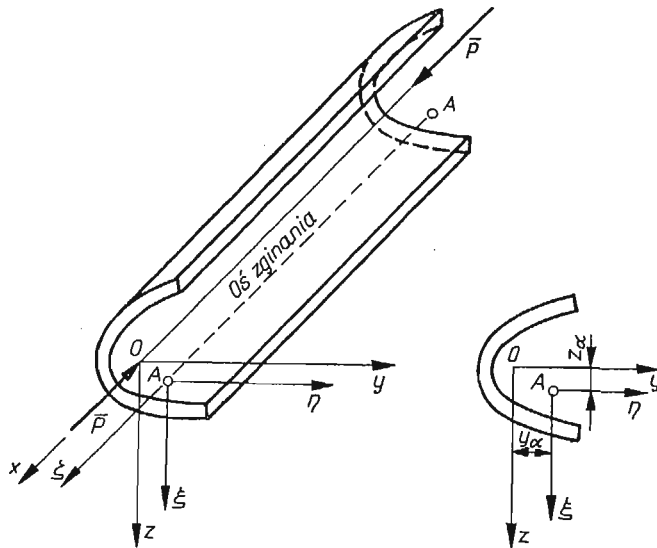
Metoda macierzy przeniesienia polega na określeniu macierzy zwanej *macierzą przeniesienia*, którą otrzymuje się w wyniku iloczynu macierzy przęsła i macierzy przekroju. Macierz przęsła buduje się na podstawie rozwiązania danego problemu dla pręta o stałym przekroju. Natomiast macierz przekroju otrzymuje się z warunków statycznych bądź kinetostatycznych i z warunków nierozdzielności przemieszczeń [10].

Celem pracy jest rozwiązanie zagadnienia drgań swobodnych i stateczności prostych jednoprzęsłowych prętów cienkościennych za pomocą metody macierzy przeniesienia, programując ją na elektroniczną maszynę cyfrową.

Zagadnienie rozpatrzono w ujęciu liniowo-sprężystym przy założeniach tzw. *technicznej teorii prętów cienkościennych* [4]. Rozwiązanie zagadnienia stateczności otrzymano jako szczególny przypadek rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych (gdy $P \rightarrow P_{kr}$ to $\omega_n \rightarrow 0$).

2. Określenie macierzy przęsła

Macierz przęsła określa się na podstawie rozwiązania równań różniczkowych danego problemu dla pręta o stałym przekroju, przy czym musi to być rozwiązanie, w którym



Rys. 1

stałymi całkowania są wartości funkcji w przekroju początkowym oraz wartości proporcjonalne do kilku pierwszych pochodnych tej funkcji również w przekroju początkowym.

Podstawowe równania różniczkowe zagadnienia drgań swobodnych pręta cienkościennego o profilu otwartym i stałym przekroju, obciążonego siłą P działającą centralnie (rys. 1) mają postać [4]:

$$\begin{aligned}
 & EA \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0, \\
 & EJ_z \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_z}{g} \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\gamma Az_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + Pz_\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \\
 & EJ_z \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^4} - \frac{\gamma J_y}{g} \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + P \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\gamma Ay_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - Py_\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \\
 & \frac{\gamma Az_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + Pz_\alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \frac{\gamma Ay_\alpha}{g} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - Py_\alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + EJ_\omega \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \\
 & \quad - \frac{\gamma J_\omega}{g} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\gamma Ar^2}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - GJ_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + Pr^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

gdzie

$$r^2 = \frac{J_0}{A} + y_\alpha^2 + z_\alpha^2, \quad J_0 = J_z + J_y.$$

Pierwsze równanie wyrażenia (2.1) przedstawia równanie różniczkowe swobodnych drgań podłużnych pręta i jest niezależne od pozostałych trzech. Rozwiązanie jego można znaleźć w każdym podstawowym podręczniku dotyczącym dynamiki o ciągłym rozkładzie mas. Dalsze więc rozważania dotyczyć będą tylko swobodnych drgań giętno-skrętnych, określonych pozostałymi trzema równaniami różniczkowymi.

Stosując metodę rozdziału zmiennych przedstawioną przez Poissona, możemy w przypadku drgań swobodnych funkcje $\eta(x, t)$, $\xi(x, t)$, $\varphi(x, t)$ wyrazić w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \eta(x, t) &= \sum_{n=1,2,3} \theta_n(x) \sin \omega_n t, \\
 \xi(x, t) &= \sum_{n=1,2,3} \Psi_n(x) \sin \omega_n t, \\
 \varphi(x, t) &= \sum_{n=1,2,3} \kappa_n(x) \sin \omega_n t,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

gdzie ω_n — n -ta częstość kątowa drgań swobodnych pręta.

Podstawiając zależności (2.2) do równań (2.1) otrzymamy

$$\begin{aligned}
 & EJ_z \theta_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_z}{g} \omega_n^2 + P \right) \theta_n'' - \frac{\gamma A}{g} \omega_n^2 \theta_n - \frac{\gamma Az_\alpha}{g} \omega_n^2 \kappa_n + Pz_\alpha \kappa_n'' = 0, \\
 & EJ_y \Psi_n^{IV} + \left(\frac{\gamma J_y}{g} \omega_n^2 + P \right) \Psi_n'' - \frac{\gamma A}{g} \omega_n^2 \Psi_n + \frac{\gamma Ay_\alpha}{g} \omega_n^2 \kappa_n - Py_\alpha \kappa_n'' = 0, \\
 & EJ_\omega \kappa_n^{IV} + \left(Pr^2 + \frac{\gamma J_\omega}{g} \omega_n^2 - GJ_x \right) \kappa_n'' - \frac{\gamma Ar^2}{g} \omega_n^2 \kappa_n - \frac{\gamma Az_\alpha}{g} \omega_n^2 \theta_n + \\
 & \quad + Pz_\alpha \theta_n'' + \frac{\gamma Ay_\alpha}{g} \omega_n^2 \Psi_n - Py_\alpha \Psi_n'' = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Wprowadźmy do równań (2.3) następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} a_1 &= EJ_x, & a_2 &= \left(\frac{\gamma J_z}{g} \omega_n^2 + P \right), & a_3 &= -\frac{\gamma A}{g} \omega_n^2, \\ a_4 &= -\frac{\gamma Az_\alpha}{g} \omega_n^2, & a_5 &= Pz_\alpha, \\ b_1 &= EJ_y, & b_2 &= \left(\frac{\gamma J_y}{g} \omega_n^2 + P \right), & b_3 &= -\frac{\gamma A}{g} \omega_n^2, \\ b_4 &= \frac{\gamma Ay_\alpha}{g} \omega_n^2, & b_5 &= -Py_\alpha, \\ c_1 &= EJ_\omega, & c_2 &= \left(Pr^2 + \frac{\gamma J_\omega}{g} \omega_n^2 - GJ_x \right), & c_3 &= -\frac{\gamma Ar^2}{g} \omega_n^2, \\ c_4 &= -\frac{\gamma Az_\alpha}{g} \omega_n^2, & c_5 &= Pz_\alpha, & c_6 &= \frac{\gamma Ay_\alpha}{g} \omega_n^2, & c_7 &= -Py_\alpha. \end{aligned}$$

Wówczas równania (2.3) przyjmą postać

$$(2.4) \quad \begin{aligned} a_1 \theta_n^{IV} + a_2 \theta_n'' + a_3 \theta_n + a_4 \varkappa_n + a_5 \varkappa_n'' &= 0, \\ b_1 \Psi_n^{IV} + b_2 \Psi_n'' + b_3 \Psi_n + b_4 \varkappa_n + b_5 \varkappa_n'' &= 0, \\ c_1 \varkappa_n^{IV} + c_2 \varkappa_n'' + c_3 \varkappa_n + c_4 \theta_n + c_5 \theta_n'' + c_6 \Psi_n + c_7 \Psi_n'' &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie w postaci zamkniętej, np. transformacji Laplace'a, równań różniczkowych (2.4) prowadzi do bardzo pracochłonnych obliczeń i jest z praktycznego punktu widzenia niemalże nieosiągalne. Dlatego, podobnie jak w pracach [11, 12, 13], do rozwiązania równań (2.4) zastosowano rozwinięcie funkcji θ_n , Ψ_n , \varkappa_n w szeregi potęgowe w postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \theta_n &= \theta_0^s + \theta_1^s x + \theta_2^s x^2 + \theta_3^s x^3 + \dots + \theta_r^s x^r, \\ \Psi_n &= \Psi_0^s + \Psi_1^s x + \Psi_2^s x^2 + \Psi_3^s x^3 + \dots + \Psi_r^s x^r, \\ \varkappa_n &= \varkappa_0^s + \varkappa_1^s x + \varkappa_2^s x^2 + \varkappa_3^s x^3 + \dots + \varkappa_r^s x^r. \end{aligned}$$

Pierwsze cztery współczynniki każdego z szeregów są wartościami brzegowymi odpowiednich funkcji θ_n , Ψ_n , \varkappa_n dla $x = 0$, pomnożonymi przez liczbę jeden, dwa lub sześć.

Wstawiając funkcje (2.5) do równań różniczkowych (2.4) i przyrównując odpowiednie współczynniki do zera otrzymamy następujące wzory rekurencyjne:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \theta_r^s &= a_2(r) \theta_{r-2}^s + a_3(r) \theta_{r-4}^s + a_4(r) \varkappa_{r-4}^s + a_5(r) \varkappa_{r-2}^s, \\ \Psi_r^s &= b_2(r) \Psi_{r-2}^s + b_3(r) \Psi_{r-4}^s + b_4(r) \varkappa_{r-4}^s + b_5(r) \varkappa_{r-2}^s, \\ \varkappa_r^s &= c_2(r) \varkappa_{r-2}^s + c_3(r) \varkappa_{r-4}^s + c_4(r) \theta_{r-4}^s + c_5(r) \theta_{r-2}^s + c_6(r) \Psi_{r-4}^s + c_7(r) \Psi_{r-2}^s, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_2(r) &= -\frac{a_2}{r(r-1)a_1}, & a_3(r) &= -\frac{a_3}{r(r-1)(r-2)(r-3)a_1}, \\ a_4(r) &= -\frac{a_4}{r(r-1)(r-2)(r-3)a_1}, & a_5(r) &= -\frac{a_5}{r(r-1)a_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(r) &= -\frac{b_2}{r(r-1)b_1}, & b_3(r) &= -\frac{b_3}{r(r-1)(r-2)(r-3)b_1}, \\
 b_4(r) &= -\frac{b_4}{r(r-1)(r-2)(r-3)b_1}, & b_5(r) &= -\frac{b_5}{r(r-1)b_1}, \\
 c_2(r) &= -\frac{c_2}{r(r-1)c_1}, & c_3(r) &= -\frac{c_3}{r(r-1)(r-2)(r-3)c_1}, \\
 c_4(r) &= -\frac{c_4}{r(r-1)(r-2)(r-3)c_1}, & c_5(r) &= -\frac{c_5}{r(r-1)c_1}, \\
 c_6(r) &= -\frac{c_6}{r(r-1)(r-2)(r-3)c_1}, & c_7(r) &= -\frac{c_7}{r(r-1)c_1}.
 \end{aligned}$$

Po dokonaniu przekształceń otrzymamy następujące wyrażenia na funkcje θ_n , Ψ_n , κ_n i ich pochodne:

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} \theta_n \\ \theta'_n \\ \theta''_n \\ \theta'''_n \\ \Psi_n \\ \Psi'_n \\ \Psi''_n \\ \Psi'''_n \\ \kappa_n \\ \kappa'_n \\ \kappa''_n \\ \kappa'''_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 & s_6 & s_7 & s_8 & s_9 & s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ s'_1 & s'_2 & s'_3 & s'_4 & s'_5 & s'_6 & s'_7 & s'_8 & s'_9 & s'_{10} & s'_{11} & s'_{12} \\ s''_1 & s''_2 & s''_3 & s''_4 & s''_5 & s''_6 & s''_7 & s''_8 & s''_9 & s''_{10} & s''_{11} & s''_{12} \\ s'''_1 & s'''_2 & s'''_3 & s'''_4 & s'''_5 & s'''_6 & s'''_7 & s'''_8 & s'''_9 & s'''_{10} & s'''_{11} & s'''_{12} \\ s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} & s_{17} & s_{18} & s_{19} & s_{20} & s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s'_{13} & s'_{14} & s'_{15} & s'_{16} & s'_{17} & s'_{18} & s'_{19} & s'_{20} & s'_{21} & s'_{22} & s'_{23} & s'_{24} \\ s''_{13} & s''_{14} & s''_{15} & s''_{16} & s''_{17} & s''_{18} & s''_{19} & s''_{20} & s''_{21} & s''_{22} & s''_{23} & s''_{24} \\ s'''_{13} & s'''_{14} & s'''_{15} & s'''_{16} & s'''_{17} & s'''_{18} & s'''_{19} & s'''_{20} & s'''_{21} & s'''_{22} & s'''_{23} & s'''_{24} \\ s_{25} & s_{26} & s_{27} & s_{28} & s_{29} & s_{30} & s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s'_{25} & s'_{26} & s'_{27} & s'_{28} & s'_{29} & s'_{30} & s'_{31} & s'_{32} & s'_{33} & s'_{34} & s'_{35} & s'_{36} \\ s''_{25} & s''_{26} & s''_{27} & s''_{28} & s''_{29} & s''_{30} & s''_{31} & s''_{32} & s''_{33} & s''_{34} & s''_{35} & s''_{36} \\ s'''_{25} & s'''_{26} & s'''_{27} & s'''_{28} & s'''_{29} & s'''_{30} & s'''_{31} & s'''_{32} & s'''_{33} & s'''_{34} & s'''_{35} & s'''_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0^s \\ \theta_1^s \\ \theta_2^s \\ \theta_3^s \\ \Psi_0^s \\ \Psi_1^s \\ \Psi_2^s \\ \Psi_3^s \\ \kappa_0^s \\ \kappa_1^s \\ \kappa_2^s \\ \kappa_3^s \end{bmatrix},$$

gdzie $(\)' = \frac{d}{dx}$.

Macierz kwadratową utworzoną ze współczynników $s_1 - s_{36}$ nazywamy macierzą przęśłą. Poszczególne elementy macierzy przęśłą są określone przez następujące funkcje:

$$(2.8) \quad \begin{aligned}
 s_1 &= 1 + \sum_{r=1}^m A_{2r}^1 x^{2r}, & s_2 &= x + \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^1 x^{2r+1}, & s_3 &= x^2 + \sum_{r=2}^m A_{2r}^2 x^{2r}, \\
 s_4 &= x^3 + \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^2 x^{2r+1}, & s_5 &= \sum_{r=2}^m A_{2r}^3 x^{2r}, & s_6 &= \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^3 x^{2r+1}, \\
 s_7 &= \sum_{r=2}^m A_{2r}^4 x^{2r}, & s_8 &= \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^4 x^{2r+1}, & s_9 &= \sum_{r=2}^m A_{2r}^5 x^{2r},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad & s_{10} = \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^5 x^{2r+1}, \quad s_{11} = \sum_{r=2}^m A_{2r}^6 x^{2r}, \quad s_{12} = \sum_{r=2}^m A_{2r+1}^6 x^{2r+1}, \\
 [c.d.] \quad & s_{13} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^1 x^{2r}, \quad s_{14} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^1 x^{2r+1}, \quad s_{15} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^2 x^{2r}, \\
 & s_{16} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^2 x^{2r+1}, \quad s_{17} = 1 + \sum_{r=2}^m B_{2r}^3 x^{2r}, \quad s_{18} = x + \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^3 x^{2r+1}, \\
 & s_{19} = x^2 + \sum_{r=2}^m B_{2r}^4 x^{2r}, \quad s_{20} = x^3 + \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^4 x^{2r+1}, \quad s_{21} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^5 x^{2r}, \\
 & s_{22} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^5 x^{2r+1}, \quad s_{23} = \sum_{r=2}^m B_{2r}^6 x^{2r}, \quad s_{24} = \sum_{r=2}^m B_{2r+1}^6 x^{2r+1}, \\
 & s_{25} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^1 x^{2r}, \quad s_{26} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^1 x^{2r+1}, \quad s_{27} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^2 x^{2r}, \\
 & s_{28} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^2 x^{2r+1}, \quad s_{29} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^3 x^{2r}, \quad s_{30} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^3 x^{2r+1}, \\
 & s_{31} = \sum_{r=2}^m C_{2r}^4 x^{2r}, \quad s_{32} = \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^4 x^{2r+1}, \quad s_{33} = 1 + \sum_{r=2}^m C_{2r}^5 x^{2r}, \\
 & s_{34} = x + \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^5 x^{2r+1}, \quad s_{35} = x^2 + \sum_{r=2}^m C_{2r}^6 x^{2r}, \quad s_{36} = x^3 + \sum_{r=2}^m C_{2r+1}^6 x^{2r+1}.
 \end{aligned}$$

Funkcje (2.8) zostały wyprowadzone na podstawie zależności (2.5) i (2.6).

Współczynniki $A_{2r}^k, A_{2r+1}^k, B_{2r}^k, B_{2r+1}^k, C_{2r}^k, C_{2r+1}^k$, dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $r = 2, 3, 4, 5, \dots, m$ obliczone na podstawie wzorów rekurencyjnych (2.6) wyrażają się w postaci

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad & A_{2r}^k = a_2(2r)A_{2r-2}^k + a_3(2r)A_{2r-4}^k + a_4(2r)C_{2r-4}^k + a_5(2r)C_{2r-2}^k, \\
 & A_{2r+1}^k = a_2(2r+1)A_{2r-1}^k + a_3(2r+1)A_{2r-3}^k + a_4(2r+1)C_{2r-3}^k + a_5(2r+1)C_{2r-1}^k, \\
 & B_{2r}^k = b_2(2r)B_{2r-2}^k + b_3(2r)B_{2r-4}^k + b_4(2r)C_{2r-4}^k + b_5(2r)C_{2r-2}^k, \\
 & B_{2r+1}^k = b_2(2r+1)B_{2r-1}^k + b_3(2r+1)B_{2r-3}^k + b_4(2r+1)C_{2r-3}^k + b_5(2r+1)C_{2r-1}^k, \\
 & C_{2r}^k = c_2(2r)C_{2r-2}^k + c_3(2r)C_{2r-4}^k + c_5(2r)A_{2r-2}^k + c_6(2r)B_{2r-4}^k + c_7(2r)B_{2r-2}^k, \\
 & C_{2r+1}^k = c_2(2r+1)C_{2r-1}^k + c_3(2r+1)C_{2r-3}^k + c_5(2r+1)A_{2r-1}^k \\
 & \quad + c_6(2r+1)B_{2r-3}^k + c_7(2r+1)B_{2r-1}^k.
 \end{aligned}$$

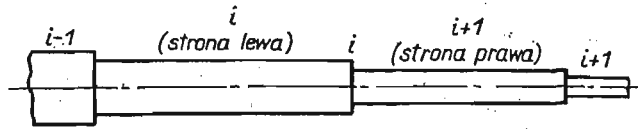
Dla $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ i $r = 0, 1$ współczynniki $A_{2r}^k, A_{2r+1}^k, B_{2r}^k, B_{2r+1}^k, C_{2r}^k, C_{2r+1}^k$ są równe zeru z wyjątkiem następujących:

$$\begin{aligned}
 A_0^1 = 1, \quad A_1^1 = 1, \quad A_2^2 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad B_0^3 = 1, \quad B_1^3 = 1, \quad B_2^4 = 1, \quad B_3^4 = 1, \\
 C_0^5 = 1, \quad C_1^5 = 1, \quad C_2^6 = 1, \quad C_3^6 = 1.
 \end{aligned}$$

3. Określenie macierzy przekroju i macierzy przeniesienia

Macierz przekroju ułożymy dla pręta, którego główne centralne osie bezwładności przekroju poszczególnych odcinków leżą w jednej płaszczyźnie, a oś pręta jest linią prostą.

Wykorzystując warunki statyczne i warunki nierozdzielności przemieszczeń otrzymamy zależności pomiędzy wartościami funkcji $\theta_n, \Psi_n, \kappa_n$ oraz ich pochodnymi z lewej i prawej strony miejsca (rys. 2), w którym następuje skokowa zmiana przekroju.



Rys. 2

Na podstawie tych zależności otrzymamy następującą postać macierzy przekroju

$$(3.1) \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{J_{z1}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{J_{z1}}{J_{zp}} & 0 & 0 & 0 & 0 & w_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & w_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{J_{y1}}{J_{yp}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{J_{y1}}{J_{yp}} & w_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_{s1}}{J_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{J_{\omega 1}}{J_{\omega p}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \frac{J_{\omega 1}}{J_{\omega p}} \end{bmatrix}$$

gdzie $w_1 = -(z_{\alpha p} - z_{\alpha l})$, $w_2 = (y_{\alpha p} - y_{\alpha l})$, $w_3 = \frac{Pz_{\alpha}}{EJ_{zp}} \cdot \frac{J_{s1}}{J_{sp}} - \frac{Pz_{\alpha l}}{EJ_{zp}}$, $w_4 = \frac{Py_{\alpha l}}{EJ_{yp}} - \frac{Py_{\alpha p}}{EJ_{yp}} \cdot \frac{J_{s1}}{J_{sp}}$.

Symbole z indeksem „l” dotyczą lewej strony pręta, natomiast symbole z indeksem „p” prawej strony.

Jeżeli przez D_i oznaczymy macierz przesła i -tego, a przez F_i macierz przekroju i -tego (skokowa zmiana), wówczas macierz przeniesienia H dla danego pręta o podziale na W odcinków wyrazi się w postaci

$$(3.2) \quad H = D_W F_{W-1} D_{W-1} F_{W-2} \dots F_1 D_1 \dots F_1 D_1$$

4. Określenie częstości drgań swobodnych i siły krytycznej

Częstości drgań swobodnych określimy przyrównując odpowiedni minor macierzy przeniesienia H (3.2), tzw. wyznacznik charakterystyczny, do zera. Wartości własne tego wyznacznika są częstotliwościami drgań swobodnych. Postać wyznacznika charakterystycznego zależy od warunków brzegowych.

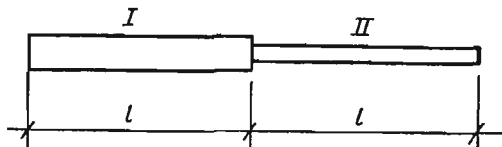
Zagadnienie drgań swobodnych rozwiązano dla pręta obciążonego siłą P działającą centralnie. Jeżeli wielkość siły P obciążającej pręt będzie dążyć do wielkości krytycznej, to częstotliwości drgań swobodnych będą dążyć do zera.

W związku z powyższym otrzymane rozwiązanie dla zagadnienia drgań swobodnych można wykorzystać do określenia obciążenia krytycznego tego pręta, wstawiając tam $\omega_n = 0$. Wówczas wartościami własnymi wyznacznika charakterystycznego będą wartości obciążenia krytycznego.

Całość obliczeń została zaprogramowana w języku ODRA-ALGOL na elektroniczną maszynę cyfrową ODRA-1204.

5. Przykłady liczbowe

Dla ilustracji przedstawionego rozwiązania obliczono częstotliwości drgań swobodnych i siły krytyczne dla pręta składającego się z dwóch odcinków o stałym przekroju (rys. 3).



Rys. 3

Odcinek I ma przekrój przedstawiony na rys. 4a, a odcinek II przekrój przedstawiony na rys. 4b.

Obliczenia przeprowadzono dla długości odcinków $l = 200$ cm, $l = 400$ cm, $l = 600$ cm.

Rozpatrzono następujące warunki brzegowe:

$$(5.1) \quad \begin{array}{ll} x = 0 & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0, \\ & \eta' = 0, \xi' = 0, \varphi' = 0; \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = l & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0, \\ & \eta' = 0, \xi' = 0, \varphi' = 0; \end{array}$$

$$(5.2) \quad \begin{array}{ll} x = 0 & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0, \\ & \eta' = 0, \xi' = 0, \varphi' = 0; \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = l & \eta = 0, \xi = 0, \varphi = 0 \\ & \eta'' = 0, \xi'' = 0, \varphi'' = 0. \end{array}$$

Wartości obciążenia krytycznego obliczane na podstawie przedstawionego rozwiązania porównano z wartościami obciążenia krytycznego obliczanego przy zastosowaniu transformacji Laplace'a do wyznaczania macierzy przęśła [14]. Otrzymano

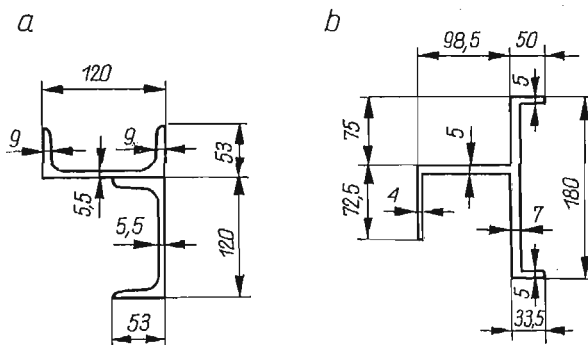
a) dla przekrojów podanych na rys. 4 i warunków brzegowych (5.1):

$$l = 200 \text{ cm}, \quad l = 400 \text{ cm}, \quad l = 600 \text{ cm},$$

$$\omega_{\min} 35,5s^{-1}, \quad 9,9s^{-1}, \quad 3,6s^{-1},$$

$$P_{\min} 776 \text{ kN}, \quad 381 \text{ kN}, \quad 195 \text{ kN},$$

$$P_{\min}^L 776 \text{ kN}, \quad 381 \text{ kN}, \quad 195 \text{ kN};$$



Rys. 4

b) dla przekrojów podanych na rys. 4 i warunków brzegowych (5.2):

$$l = 200 \text{ cm}, \quad l = 400 \text{ cm}, \quad l = 600 \text{ cm},$$

$$\omega_{\min} 26,1s^{-1}, \quad 7,9s^{-1}, \quad 3,6s^{-1},$$

$$P_{\min} 536 \text{ kN}, \quad 213 \text{ kN}, \quad 103 \text{ kN},$$

$$P_{\min}^L 536 \text{ kN}, \quad 213 \text{ kN}, \quad 102 \text{ kN},$$

gdzie P_{\min}^L — macierz przęsta obliczona według [14].

6. Wnioski

Analizując przedstawiony algorytm obliczeń i przykłady liczbowe, można wyciągnąć następujące wnioski.

1. Zastosowany w pracy sposób rozwiązania pozwala określić częstotliwości drgań swobodnych i obciążenia krytyczne dla prętów cienkościennych o profilu otwartym i zmiennym przekroju przy dowolnych warunkach brzegowych.

2. Całość bardzo dobrze nadaje się do zaprogramowania i przeprowadzenia obliczeń na elektronicznej maszynie cyfrowej.

3. Porównanie wartości obciążenia krytycznego obliczonego na podstawie rozwiązania zagadnienia drgań swobodnych (40 wyrazów szeregu potęgowego) z wartościami obciążenia krytycznego, obliczonego przy wykorzystaniu transformacji Laplace'a, wskazuje na wystarczającą zbieżność przyjętych funkcji przemieszczeń.

Literatura cytowana w tekście

1. T. PEKÓZ, G. WINTER, *Torsional-flexural buckling of thin-walled sections under eccentric load*, J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng., 1969.
2. J. RUTECKI, *Cienkościenne konstrukcje nośne*, PWN, Warszawa 1969.
3. В. Л. КУЗЬМИН, П. А. ЛУКАШ, Э. Е. МИЛЕЁВСКИЙ, *Расчёт конструкции из тонкостенных стержней и оболочек*, ГИЗЛСА, Москва 1960.
4. В. З. ВЛАСОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, Москва 1959.
5. С. М. МУЛИН, *Исследование пространственной устойчивости тонкостенных стержней при нецентральной сжатии с двухосным эксцентризмом*, Науч. Труды Омский Инст. Инж. Трансп., 1969.
6. Г. Ш. ПОДОЛЬСКИЙ, *Применение вариационного метода Бубнова-Галеркина к деформационному расчёту нецентрально сжатых тонкостенных стержней*, Сб. трудов, Москва 1965.
7. Ф. П. ЛУКИЯНОВ, *Деформационный расчёт и устойчивость плоской формы изгиба ступенчатых тонкостенных стержней*, Труды Новочеркаского Политехн. Института, 1969.
8. В. А. ШМАТКОВ, *О расчёте тонкостенных стержней ступенчатого переменного сечения*, Изд. Вышш. Учебн. Завед. Строит. и Архит., 4 (1965).
9. В. А. ИВОВИЧ, *Переходные матрицы в динамике упругих систем*, Киев 1969.
10. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Расчёт тонкостенных стержней ступенчатого переменного сечения*, Исследования по теории сооруж., Вып. V (1951).
11. О. МАТЕЈА, *Problemy statyki i dynamiki płyt pierścieniowych oraz powłok obrotowych*, Zeszyty Naukowe WSI w Opolu, 4 (1972).
12. F. HAMAYOSHI, *On torsion of I-beam with a web of variable height*, Mem. Fac. Eng. Hokkaido Univ., 2, 11 (1961).
13. L. H. N. LEE, *Non-uniform torsion of plate girders*, Proc. ASCE, 449, 80 (1954) 1—28.
14. E. ŚWITOŃSKI, *Stateczność prętów cienkościennych o profilu otwartym i stałym przekroju*, Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, Mechanika, 40 (1970).

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В работе представлен метод решения задачи о свободных колебаниях и устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля и переменного сечения для произвольных краевых условий.

Для решения применялся метод матриц переноса, который программировался на ЭЦВМ.

В завершении работы приводятся примеры расчетов, указывающие на хорошую сходимость принятых функций.

Summary

APPLIANCE OF THE TRANSFER MATRIX METHOD TO THE DYNAMIC
ANALYSIS OF THIN-WALLED RODS

In the paper the problem of a proper vibration and stability of thin-walled rods with the open shape and variable section for arbitrary boundary conditions was presented. For solving the transfer matrix programmed on digital computer was applied. At the end, numerical examples are presented and the results show a good convergence of the assumed functions.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w redakcji dnia 27 marca 1974 r.

MODEL MATEMATYCZNY
ZAWORU PRZELEWOWEGO W ŚWIETLE BADAŃ PRZEBIEGÓW
ANALOGOWYCH I RZECZYWISTYCH

EDWARD T O M A S I A K (GLIWICE)

1. Wprowadzenie

Zawory przelewowe stanowią jedną z ważniejszych grup elementów hydraulicznych i są stosowane prawie w każdym układzie napędowym. Zadaniem ich jest utrzymanie stałej wartości ciśnienia (sygnału regulowanego) w układzie hydraulicznym przez odprowadzenie nadmiaru czynnika na przelew.

Jak wykazały badania własne autora [5], zawory przelewowe nie nadążają za wzrostem ciśnienia w układzie, reagują z pewnym opóźnieniem oraz w pewnych warunkach pracy wpadają w drgania. Powyższe nieprawidłowe reagowanie zaworów występuje przeważnie w okresie stanu przejściowego. Stąd wyniknęła konieczność przeprowadzenia badań modelowych zaworów w okresie stanu przejściowego i przeanalizowania parametrów bezpośrednio wpływających na ich dynamikę.

Badania modelowe nabierają szczególnie znaczenia przy projektowaniu nowych zaworów. Te parametry konstrukcyjne, które w istotny sposób wpływają na dynamikę zaworów nie mogą być dobierane w sposób przypadkowy (w zależności od wyczucia i doświadczenia konstruktora), lecz ich wartości powinny być ściśle powiązane z dopuszczalnym szczytowym przesterowaniem sygnału regulowanego, szybkością działania, stałą czasową oraz tłumieniem drgań.

Sens badań modelowych będzie tym większy, im wierniej zostanie opisany zawór w okresie stanu przejściowego. Tak więc zbudowanie poprawnego i w miarę wiernego równania analitycznego, opisującego zawór w przebiegu dynamicznym, warunkuje sens rozważań teoretycznych.

2. Przepływy i siły uwzględniane w okresie stanu przejściowego

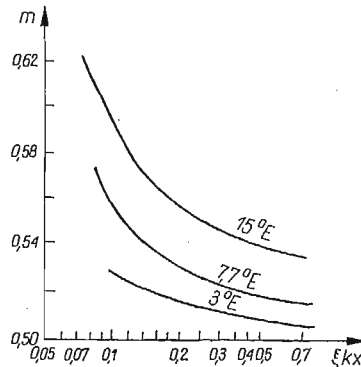
Przepływowi cieczy rzeczywistej w zaworach, które z punktu widzenia oporów przepływu są typowymi elementami oporowymi (ograniczają wartość ciśnienia), towarzyszą zjawiska bezpośrednio wpływające na stan przejściowy. Ich ilościowe i jakościowe ujęcie decyduje o wartości objętościowego przepływu, jak również o ogólnym układzie sił występujących w zaworze w okresie stanu przejściowego.

2.1. Przepływ przez zawór. Charakter przepływu przez zawór w przeważającej większości przypadków jest burzliwy [1, 2, 3]. Rozpatrując dynamikę stanu przejściowego w zaworze

przelewowym należy przyjmować burzliwy charakter przepływu, którego wartość jest określona zależnością

$$(1) \quad Q_{zp} = \sqrt{\frac{2}{\zeta \rho}} kx (\Delta p)^m,$$

gdzie Q_{zp} — objętościowa wartość przepływu [m^3/s], k — długość szczeliny dławiącej [m], x — otwarcie zaworu [m], m — wykładnik potęgowy (teoretycznie $m = 0,5$ i jest wartością stałą), Δp — spadek ciśnienia na zaworze [N/m^2], tj. $\Delta p = p_z - p_0$, p_z — ciśnienie przed zaworem [N/m^2], p_0 — ciśnienie za zaworem [N/m^2], ρ — gęstość [kg/m^3], ζ — współczynnik strat (straty dysypacji przy przepływie przez zawór i wpływ pola prędkości strugi).



Rys. 1. Zmienność wykładnika potęgowego m

Praktycznie stwierdzono [3], że zależność (1) zawiera zmienny wykładnik potęgowy m w funkcji otwarcia i współczynnika strat. Zmienność tego współczynnika ilustruje rys. 1.

Przyjęcie zmiennej wartości wykładnika potęgowego m w znacznym stopniu komplikuje teoretyczne rozwiązanie. Dla zobrazowania tej trudności zmodelowano wyrażenie

$$(2) \quad y = (\Delta p)^m,$$

a po zróżniczkowaniu

$$(2a) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{my}{\Delta p} \frac{d(\Delta p)}{dt}.$$

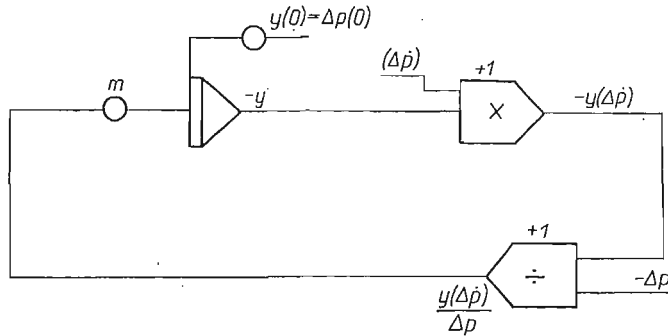
Schemat analogowy zależności (2a) przedstawia rys. 2.

Modelując zależność (2a) nietrudno zauważyć, że istnieją związki logiczne pomiędzy warunkiem początkowym $y(0)$ a wartością wykładnika potęgowego m . Każdorazowa zmiana $\Delta p(0)$ pociąga za sobą zmianę m i odwrotnie. Ponieważ ciśnienie w stanie ustalonym zaworu [5] wraz ze zmianą przepływu nie zachowuje wartości stałej (wynika to z charakterystyki statycznej), dlatego przy takim ujęciu zachodzi konieczność generowania warunku początkowego $y(0)$ w funkcji zmiany wykładnika m lub odwrotnie. Praktycznie znalezienie tej zależności nastęrcza wiele trudności, a przy projektowaniu nowego zaworu jest niemożliwe, dlatego przyjęto wykładnik potęgowy $m = 0,5$.

Omawiając przepływ przez zawór należy również wyjaśnić wpływ i znaczenie współczynnika ζ . Z teoretycznego punktu widzenia, współczynnik strat jest funkcją liczby

Reynoldsa [1, 3], jednak w praktyce cytowani autorzy stosują uproszczenia, przyjmując wartość współczynnika strat jako stałą w granicach $\zeta = 2 \div 4$.

Jak wykazały badania autora, przyjmowana w dotychczasowych opracowaniach stała wartość współczynnika ζ znacznie różni się od wartości wyliczonej z badań nad rzeczywistym zaworem (rys. 3). Nietrudno zauważyć, że wartość ζ zależy w dużym stopniu od



Rys. 2. Schemat analogowy zależności (2a)

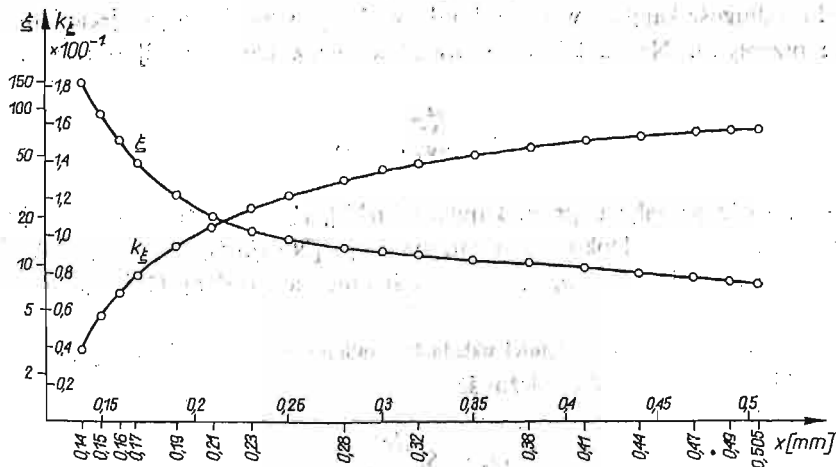
otwarcia zaworu x , na skutek czego uproszczenia przyjmowane w dotychczasowych opracowaniach nie mają praktycznego uzasadnienia, gdyż rzeczywisty przepływ przez zawór nie spełnia równości (1).

W celu ułatwienia teoretycznego rozwiązania stanu przejściowego, przy zachowaniu zmienności współczynnika strat w funkcji otwarcia zaworu, proponuje się inne ujęcie zależności (1), mianowicie

$$(1a) \quad Q_{zp} = k k_{\zeta}(x) x \sqrt{\Delta p},$$

a dla ułatwienia zapisu $k_{\zeta}(x) = k_{\zeta}$.

Wartość zastępczą współczynnika strat k_{ζ} przedstawiono na rys. 3.

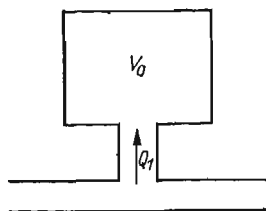


Rys. 3. Zależność współczynnika strat ζ oraz zastępczego współczynnika strat k_{ζ} w funkcji otwarcia zaworu

W ujęciu analogowym wyrażenie $k_f x$ jest wzmacniaczem, w którym każdej wielkości x odpowiada sygnał wyjściowy $k_f x$; będzie on realizowany generatorem funkcji nieliniowej.

2.2. Wpływ ściśliwości oleju. Ściśliwość oleju w układach hydraulicznych wpływa na procesy falowe i jest źródłem prawie wszystkich niestabilności dynamicznych [2].

Każdy układ hydrauliczny, na skutek ściśliwości medium roboczego, akumuluje energię ciśnienia w objętości wypełniającej ten układ. Spadek ciśnienia występujący w czasie



Rys. 4. Schematyczne ujęcie przepływu spowodowanego wpływem ściśliwości

pracy układu powoduje oddawanie zmagazynowanej energii, a zatem występuje przepływ spowodowany wpływem ściśliwości medium. Przepływ ten schematycznie ujęto na rys. 4, a jego wartość [2] określa zależność

$$(3) \quad Q_i = \frac{V_0}{B} \frac{dp}{dt},$$

gdzie V_0 — objętość układu [m^3], B — moduł sprężystości objętościowej oleju [N/m^2].

2.3. Przepływ przez element tłumiący (kapilarę) w zaworze. W praktyce dla tłumienia pulsacji ciśnienia, występującej w czasie pracy zaworu, stosuje się tłumiki w postaci kalibrowanych otworów — kapilar. W kapilarze występuje spadek ciśnienia, który działa hamująco na drgania tłoczka zaworowego. Przepływająca przez kapilarę mała ilość oleju oraz stosunkowo duża długość kapilary w stosunku do średnicy pozwala na przejście laminarnego charakteru przepływu. Na skutek tego przepływ przez kapilarę [2] określa zależność

$$(4) \quad Q_k = \frac{d_k^4 \pi}{128 \mu l_k} \Delta p_k,$$

gdzie Q_k — wartość przepływu przez kapilarę [m^3/s], d_k — średnica kapilary [m], l_k — długość kapilary [m], μ — lepkość dynamiczna oleju [$N \cdot s/m^2$], Δp_k — spadek ciśnienia na kapilarze [N/m^2], tj. $\Delta p_k = p_z - p_s$, p_s — ciśnienie za kapilarą [N/m^2].

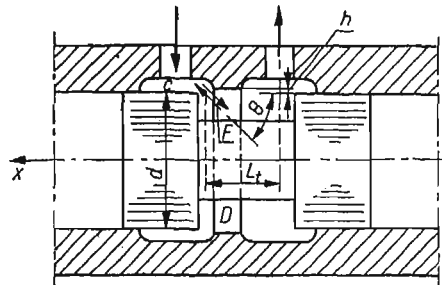
2.4. Przepływ wywołany zmianą objętości układu hydraulicznego. Wartość przepływu wywołaną zmianą objętości [2] określa zależność

$$(5) \quad Q_z = S_i \frac{dx}{dt},$$

gdzie S_i — powierzchnia czynna elementu ruchowego [m^2].

Zmiana objętości układu hydraulicznego może ponadto wystąpić na skutek odkształceń sprężystych wszystkich elementów od sił spowodowanych ciśnieniem. Ponieważ sprężystość obudowy zaworu wraz z przewodami (jeżeli zawór nie zawiera elementów elastycznych, przewodów giętkich) jest nieporównywalnie większa niż czynnika, dlatego też w dalszych rozważaniach ten wpływ nie będzie uwzględniany.

2.5. Siła hydrodynamiczna. Podczas przepływu przez zawór strumień czynnika, odrywając się od elementu ruchowego, oddziałuje na niego z siłą wynikającą z ilości ruchu [1, 2, 3]. Zjawisko to ilustruje rys. 5.



Rys. 5. Element ruchomy z siłą hydrodynamiczną

Rzeczywista siła dynamiczna przeniesiona na kierunek ruchu elementu przesuwanego wynosi

$$(6) \quad F_R = \frac{2k\lambda \cos\theta}{m} \sqrt{\frac{\rho}{2}} k_r x \Delta p,$$

gdzie m — masa elementu ruchomego [kg], λ — współczynnik kształtu pary gniazdo-element ruchowy, θ — kąt utworzony między kierunkiem wypływu a osią tłoczka.

2.6. Siła tarcia lepkiego. Z teoretycznego punktu widzenia siła tarcia lepkiego przy opływach jest spowodowana warstwą przyścienną, która oddziałuje hamująco na element ruchowy. Ponieważ zagadnienie to do tej pory nie jest w pełni rozwiązane dla opływów ciśnieniowych, a dotyczy wyłącznie swobodnych, to konieczne jest wprowadzenie pewnego uproszczenia. Polegać ono będzie na tym, że w dalszych rozważaniach uwzględniane będą siły tarcia lepkiego pomiędzy elementami pasowanymi, opory zaś wynikające z hamującego oddziaływania warstwy przyściennej zostaną pominięte. Zgodnie z powszechną praktyką przyjęto liniową zależność tarcia lepkiego od prędkości [1], mianowicie

$$(7) \quad F_{tl} = \frac{\mu A_{st}}{h} \frac{dx}{dt},$$

gdzie A_{st} — powierzchnia styku elementów pasowanych [m²], h — średni luz promieniowy pomiędzy tłoczkiem a korpusem [m].

2.7. Siła potrzebna do przyspieszenia medium w zaworze przy wypływie na drodze «wlot-wylot». Wielkość tej siły przyjęto według [1], a jej wartość określono zależnością

$$(8) \quad F_a = \rho L_t \frac{dQ_{zp}}{dt},$$

gdzie L_t — długość drogi na odcinku «wlot-wylot» w zaworze [m].

Po zróżniczkowaniu zależności (1) i wstawieniu do zależności (8) otrzymano

$$(8a) \quad F_a = \rho L_t k k_c \left[\sqrt{\Delta p} \frac{dx}{dt} + \frac{x}{2\sqrt{\Delta p}} \frac{d(\Delta p)}{dt} \right].$$

EZEKIEL [1] przyjmuje w stanie przejściowym stały spadek ciśnienia na zaworze, a zatem nie uwzględnia członu nieliniowego przy pochodnej spadku ciśnienia. W świetle obecnie przeprowadzonych badań powyższe założenie jest nieuzasadnione.

2.8. Inne siły działające na element ruchomy. W równowadze dynamicznej należy ponadto uwzględnić:

- siły bezwładności elementu ruchomego,
- siły pochodzące od działania ciśnienia na powierzchnie czołowe,
- sztywność sprężyn,
- siły grawitacyjne.

3. Założenia i ogólne przyjęcia

1. Mając na uwadze badania laboratoryjne zaworu przelewowego przyjęto wielkość wejściową w postaci objętościowej wartości przepływu i stan przejściowy będzie rozpatrywany przez wprowadzenie tego wymuszenia. Wielkością wyjściową jest ciśnienie utrzymywane przez zawór (regulowana wartość sygnału).

2. Aby zmniejszyć do minimum oddziaływanie dynamiki procesów falowych zachodzących w przewodach instalacji hydraulicznej na dynamikę zaworu, przyjęto możliwie najkrótszą linię zasilania.

3. Badania laboratoryjne przeprowadzono z zachowaniem możliwie stałej wartości temperatury (niezmienne własności fizyczne oleju). Do badań przyjęto olej hydrauliczny Hydrol 30.

4. Zakładając, że wartość ciśnienia za zaworem jest nieporównywalnie mała w stosunku do ciśnienia przed zaworem, w dalszych rozważaniach została ona pominięta.

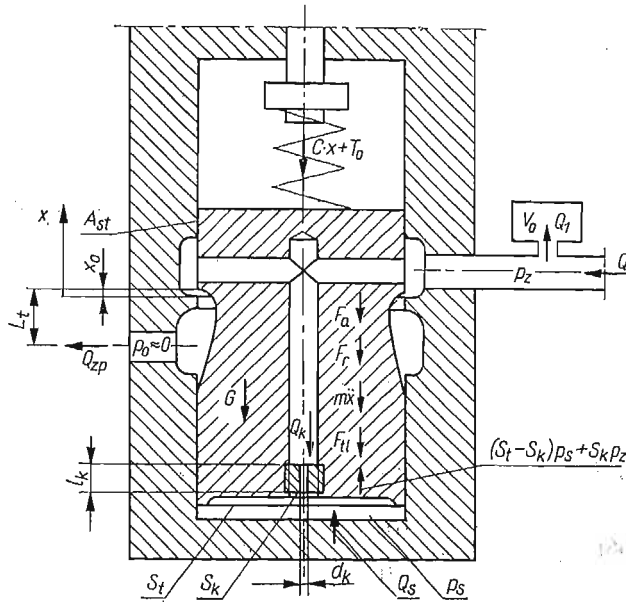
5. Utrzymywanie przez zawór przelewowy stałej wartości ciśnienia w układzie odbywa się przy ciągłym przepływie czynnika. Założono, że wszelkie nieszczelności jakie wystąpią w samym zaworze w stosunku do ilości przepływającego oleju są znikomo małe przez co w dalszych rozważaniach będą pominięte.

6. Badania przeprowadzono w oparciu o typowy zawór przelewowy jednostopniowy UZPX-16.

4. Model matematyczny zaworu

Dla analitycznego opisu pracy zaworu w stanie przejściowym, należy wpierw sprecyzować warunki. Założono, że zawór znajduje się w określonym stanie ustalonym, a więc ciągle przepływa przez niego medium. Wprowadzając wymuszenie, zawór wytrącony zostaje ze stanu równowagi i w dowolnym punkcie pracy stanu przejściowego rozpatruje się przebieg dynamiczny.

Schemat zaworu UZPX-16 przedstawia rys. 6.



Rys. 6. Schemat zaworu UZPX-16

Uwzględniając przytoczone powyżej zależności podstawowe, napisać można równania dynamicznej równowagi tłoczka (9), bilansu przepływu (10) i wydatku przepływającego przez kapilarę (11) w czasie ruchu tłoczka:

$$(9) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{A_{st}\mu}{h} \frac{dx}{dt} + \rho L_t \frac{dQ_{zp}}{dt} + \frac{2k\lambda(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}{\sqrt{\frac{2}{\rho}}} k_r x p_z + cx + T_0 + G = (S_t - S_k)p_s + S_k p_z$$

$$(10) \quad Q_0 - k k_r x \sqrt{p_z} = S_t \frac{dx}{dt} + \frac{V_0}{B} \frac{dp_z}{dt}$$

$$(11) \quad \frac{d_k^4 \pi}{128 \mu l_k} (p_z - p_s) = S_t \frac{dx}{dt}$$

Nieliniowe równania różniczkowe (9) i (10) nie można zastąpić równaniami liniowymi, ponieważ przedział słuszności takiego postępowania jest zbyt mały w stosunku do rzeczywistych warunków pracy zaworu przelewowego (zmiana wartości przepływu w całym zakresie). Tak więc rozważania teoretyczne należy przeprowadzić na modelu opisanym nieliniowymi równaniami różniczkowymi.

Z równania (11) wyznaczono p_s , a następnie wstawiono do (9). Wprowadzając wartość współczynników stałych [5] oraz stosując podstawienie podane w [4], otrzymano równania wyjściowe modelowe w postaci:

$$(12) \quad \frac{dx_1}{dt} = x_2,$$

$$(13) \quad \frac{dx_2}{dt} = -7216,76x_2 - 0,0529x_2\sqrt{x_3} - 2,4019 \cdot 10^7 \frac{k_\zeta x_1}{\sqrt{x_3}} + 6,5305 \cdot 10^7 (k_\zeta x_1)^2 + \\ + 2,2108 \cdot 10^7 \frac{k_\zeta x_1}{\sqrt{x_3}} x_2 - 0,0369k_\zeta x_1 x_3 - 272399x_1 + 14,3542 \cdot 10^{-4}x_3 - 3552,66,$$

$$(14) \quad \frac{dx_3}{dt} = 90,9842 \cdot 10^7 - 247,37 \cdot 10^7 k_\zeta x_1 \sqrt{x_3} - 83,7456x_2.$$

Wprowadzając do równań (12) do (14) współczynniki skalowe [5], a także uwzględniając warunki [4], uzyskano równania maszynowe:

$$(15) \quad \frac{dX_1}{d\tau} = 8X_2,$$

$$(16) \quad \frac{dX_2}{d\tau} = 6,59X_2 + (0,01X_2)U_1 + (0,01k_\zeta X_1)U_2 + U_3 + 28,7X_3 - 704,5,$$

$$(17) \quad \frac{dX_3}{d\tau} = 36,39 - 3,19(0,01k_\zeta X_1)(10\sqrt{X_3}) - 0,67X_2,$$

$$(18) \quad U_1 = 0,66(10\sqrt{X_3}) + 0,27 \frac{10k_\zeta X_1}{10\sqrt{X_3}},$$

$$(19) \quad U_2 = 0,13X_1 - 0,73X_3,$$

$$(20) \quad U_3 = -0,54X_1 - 0,15 \frac{10k_\zeta X_1}{10\sqrt{X_3}}.$$

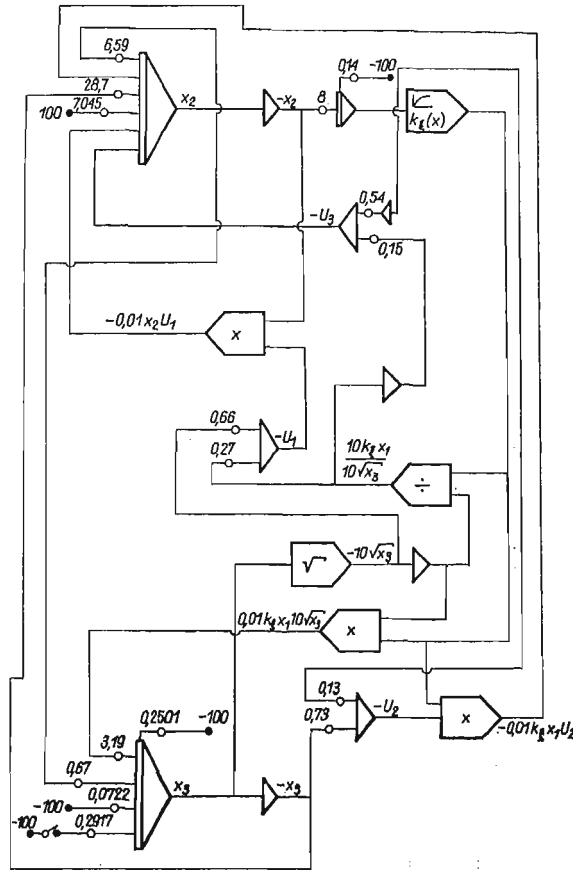
Warunki początkowe są następujące

$$X_1(0) = 14, \quad X_2(0) = 0, \quad X_3(0) = 25,01.$$

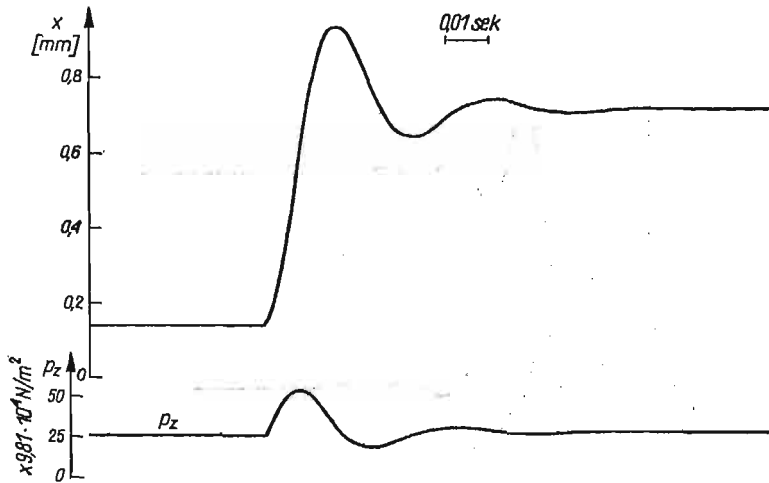
5. Badania modelowe

Równania maszynowe (15) do (20) modelowano na maszynie analogowej MA-3, a model maszynowy ilustruje rys. 7. Wprowadzając wymuszenie skokowe wartości przepływu na integrator generujący sygnał X_3 (ciśnienie p_z) uzyskano rozwiązanie równań w postaci przebiegu ciśnienia i otwarcia zaworu.

Przy wprowadzonym wymuszeniu z $4,23 \cdot 10^{-5}/22,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ i stałej wartości ζ (według [1, 2]) integrator generujący sygnał X_3 wchodzi w obszar nasycenia i można by przypuszczać, że model analogowy jest niestabilny. Wspomniane «nasycenie» integratora wynikało na skutek braku równowagi statycznej sygnałów wprowadzonych do niego, a ściślej niespełnienia równania (1).

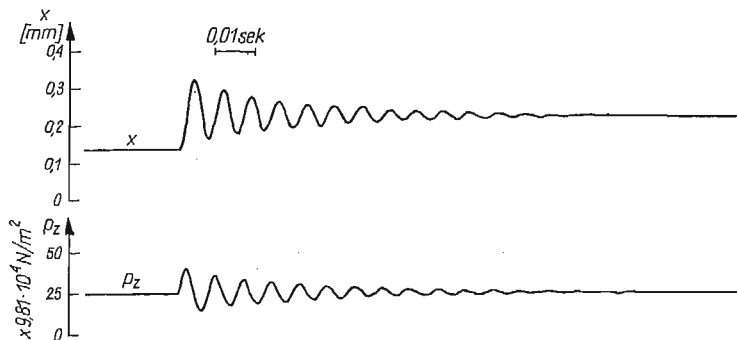


Rys. 7. Model maszynowy zaworu jednostopniowego UZPX-16



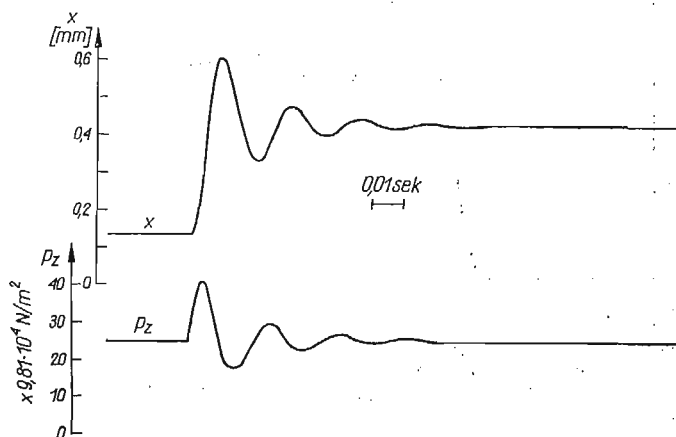
Rys. 8. Zawór UZPX-16. Stan przejściowy przebiegu modelowego na wymuszenie skokowe przepływu $Q_0 = 22,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ z założeniem stałej wartości współczynnika strat ζ . Przepływ początkowy $Q_{0p} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

Wyliczając wartość współczynnika ζ dla założonych warunków początkowych uzyskano rozwiązanie zamieszczone na rys. 8, przy zmiennym zaś współczynniku strat w funkcji otwarcia zaworu na rys. 9. Powyższe przebiegi wykazują około 200% różnicy w otwieraniu się zaworu w stanie przejściowym, jak i ustalonym.



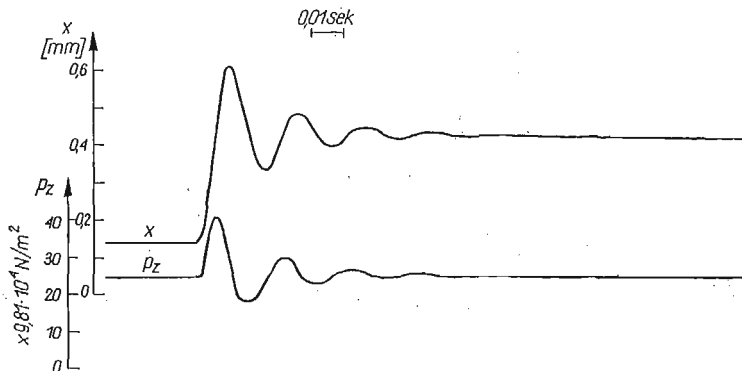
Rys. 9. Zawór UZPX-16. Stan przejściowy przebiegu modelowego na wymuszenie skokowe przepływu $Q_0 = 22,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ z uwzględnieniem zmienności współczynnika strat ζ w funkcji otwarcia zaworu. Przepływ początkowy $Q_{0p} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

Analiza wartości poszczególnych sygnałów wchodzących na integrator opisany równaniem (16) — generujący sygnał X_2 — nasuwała pytanie, czy celowe jest wprowadzenie wszystkich sygnałów i czy w ogóle niektóre sygnały będą w wyraźnym stopniu oddziaływać na charakter przebiegu dynamicznego. Ponieważ równania opisujące stan przejściowy mają silne nieliniowości, dlatego nie można było pominąć członów nieliniowych, gdyż w układzie takim trudno z góry przewidzieć, czy nawet małe sygnały członów nieliniowych nie będą silnie oddziaływać w którymś sprzężeniu zwrotnym. Przeprowadzone badania



Rys. 10. Zawór UZPX-16. Stan przejściowy przebiegu modelowego na wymuszenie skokowe przepływu $Q_0 = 51,479 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ z uwzględnieniem siły potrzebnej do przyspieszenia medium w zaworze na drodze «wlot — wylot». Przepływ początkowy $Q_{0p} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

modelowe wykazały, że człony nieliniowe w równaniu (16) — pochodzące od zależności (8a) — praktycznie nie mają żadnego wpływu na dynamikę zaworu i w związku z tym można by tej zależności w ogóle nie uwzględniać. Powyższe rozważania ilustrują rys. 10 i 11.



Rys. 11. Zawór UZPX-16. Stan przejściowy przebiegu modelowego na wymuszenie skokowe przepływu $Q_0 = 51,479 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$ z pominięciem siły potrzebnej do przyspieszenia medium w zaworze na drodze «wlot — wylot». Przepływ początkowy $Q_{op} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

6. Przebiegi rzeczywiste oraz porównanie ich z przebiegami analogowymi

Przebiegi zaworu jednostopniowego UZPX-16 zarejestrowano podczas badań laboratoryjnych [5] i przedstawiono na rys. 12, 13 i 14;

Analizując wyniki można stwierdzić, że:

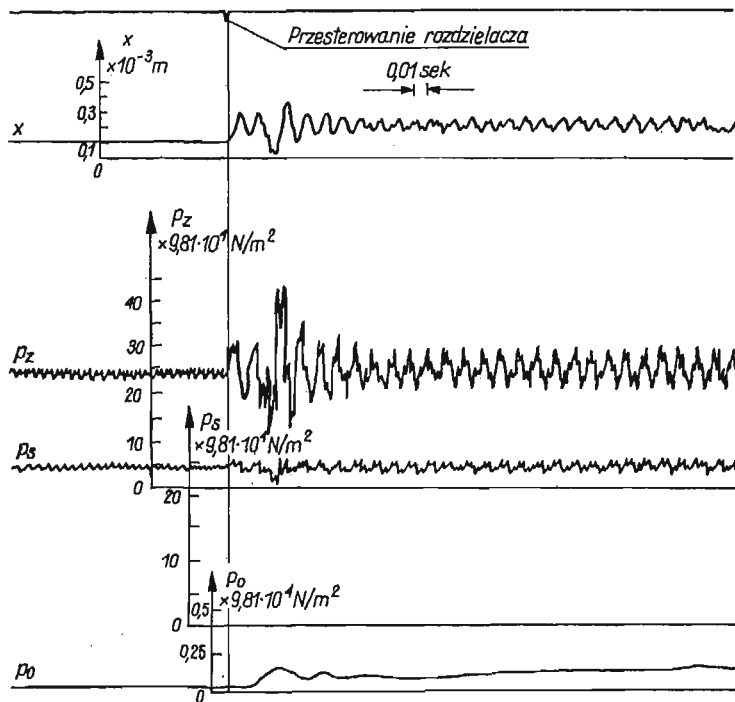
a) w przebiegu ciśnienia p_z od momentu wprowadzenia wymuszenia zauważyć można gwałtowny wzrost ciśnienia przechodzący stopniowo do oscylacji; przyjmowanie stałej wartości ciśnienia w stanie przejściowym jest nieuzasadnione (rys. 12, 13 i 14);

b) w stanach ustalonych występują oscylacje przebiegu p_z , które — jak należy przypuszczać — są spowodowane nierównomiernością tłoczenia zastosowanej pompy wielotłoczkowej (rys. 12, 13 i 14);

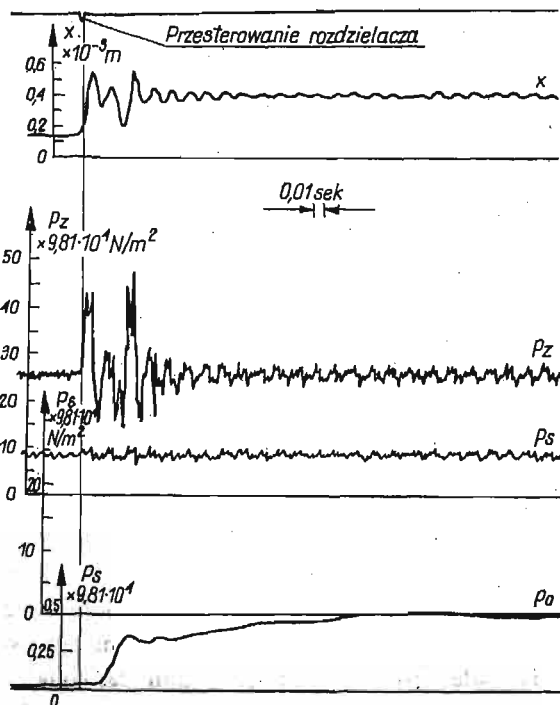
c) ciśnienie w komorze tłumiącej p_s zachowuje przebieg nieporównywalny ilościowo i jakościowo do przebiegu p_z , a zatem potwierdza się charakter tłumiący kapilary (rys. 12, 13 i 14);

d) maksymalna wartość ciśnienia za zaworem (przebieg p_0) nie przekracza 3% wartości ciśnienia p_z ustawionego na zaworze (rys. 14).

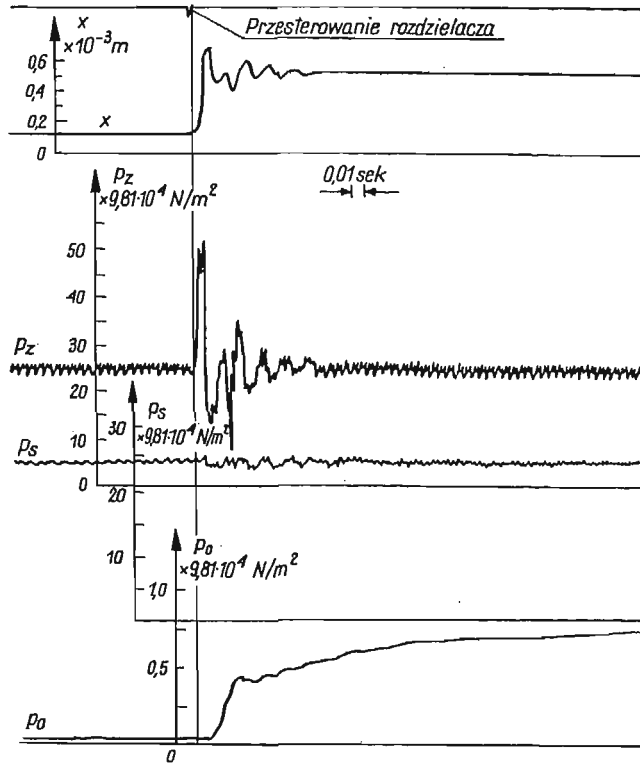
Przebiegi analogowe i rzeczywiste zaworu przelewowego, wykonane dla tych samych wymuszeń (rys. 8, 9 i 12 oraz rys. 10 i 13), ujawniają istnienie drgań własnych o jednakowych częstościach. Pewne odchylenia pod względem jakościowym, w przebiegach rzeczywistych stanu przejściowego, spowodowane mogły być pulsacją pompy oraz chwilowych zatrzymań tłoczka. Zjawisko to — należy przypuszczać — było następstwem «uderzeniowego» działania fali ciśnienia (właściwości dynamiczne linii zasilania). Przebieg analogowy (rys. 8) nie może być porównywalny z przebiegiem rzeczywistym (rys. 12), zatem w modelu matematycznym nie można przyjmować stałej wartości współczynnika strat ζ .



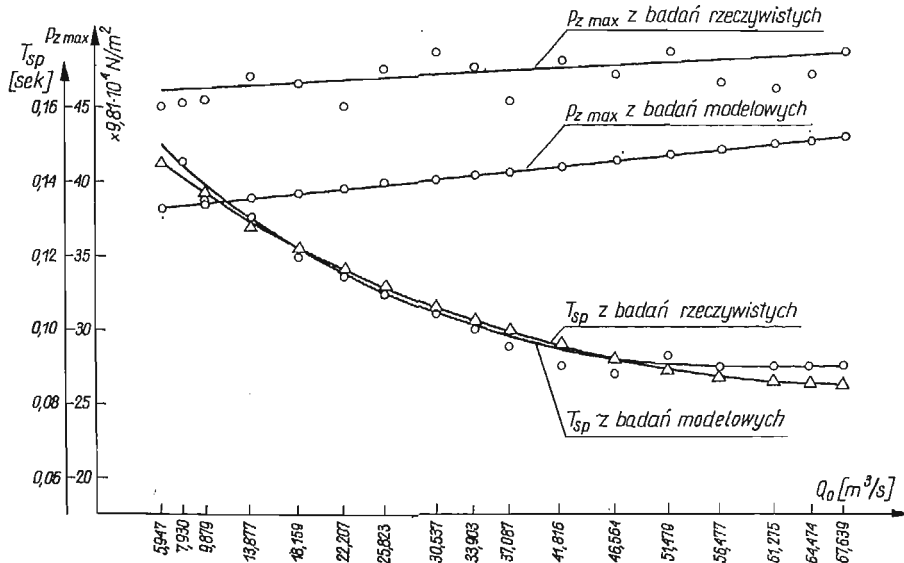
Rys. 12. Zawór UZPX-16. Stan przejściowy przebiegu rzeczywistego na wymuszenie skokowe przepływu $Q_0 = 22,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. Przepływ początkowy $Q_{op} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$



Rys. 13. Zawór UZPX-16. Stan przejściowy przebiegu rzeczywistego na wymuszenie skokowe przepływu $Q_0 = 51,479 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. Przepływ początkowy $Q_{op} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$



Rys. 14. Zawór UZPX-16. Stan przejściowy przebiegu rzeczywistego na wymuszenie skokowe $Q_0 = 69,305 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$. Przepływ początkowy $Q_{0p} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$



Rys. 15. Zawór UZPX-16. Porównanie przebiegów rzeczywistych oraz modelowych T_{sp} i $p_{z \max}$ w funkcji różnych wymuszeń skokowych przepływu. Przepływ początkowy $Q_{0p} = 4,23 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$

Dla ilościowego porównania stanu przejściowego zaworu przyjęto maksymalną wartość ciśnienia oraz czas trwania stanu przejściowego (stałą czasową).

Z porównań przebiegów ciśnień przedstawionych na rys. 15 wynika pewne przesunięcie. Przebiegi z badań modelowych przyjmują niższe wartości w stosunku do przebiegów rzeczywistych, a zatem można by sądzić, że model matematyczny nie uwzględnił wystarczająco dokładnie jakiegoś wpływu. Wartość ciśnienia szczytowego z przebiegów modelowych jest niższa średnio o 15% w stosunku do przebiegów rzeczywistych.

Przebiegi czasu trwania przejściowego w obu rodzajach badań prawie pokrywają się, co świadczy o stosunkowo dużej zgodności badań modelowych i rzeczywistych.

7. Wnioski

1. Zbudowanie poprawnego modelu matematycznego zaworu przelewowego wymaga uwzględnienia zmienności współczynnika strat ζ .

2. W równaniach dynamicznych można nie uwzględniać wartości siły przyspieszającej medium w zaworze przy przepływie na drodze wlot — wylot, gdyż jej wpływ na stan przejściowy jest znikomo mały.

3. Badania modelowe zaworów przelewowych w całym obszarze objętościowej wartości przepływu — wychodząc każdorazowo od przepływu minimalnego — nie dopuszczają stosowania liniowych równań równoważnych.

4. W równaniach dynamicznych można pominąć wartość ciśnienia za zaworem (spadek ciśnienia na zaworze $\Delta p = p_z$), gdyż jego wartość jest nieporównywalnie mała w stosunku do wartości ciśnienia p_z ustawionego na zaworze (3%).

Literatura cytowana w tekście

1. J. F. BLACKBURN, G. REETHOF, S. SHEARER, *Fluid power control*, Kranskopf Verlag, Wiesbaden 1962.
2. M. GUILLON, *Teoria i obliczanie układów hydraulicznych*, WNT, Warszawa 1967.
3. E. M. Хаймович, *Гидроприводы и гидроавтоматика станков*, Машгиз, Москва 1959.
4. Praca zbiorowa pod red. O. PALUSIŃSKIEGO, *Maszyna analogowa MA-48*, Wyd. Pol. Śl., 1967.
5. E. TOMASIAK, Praca doktorska, Pol. Śl., 1973.

Резюме

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕПУСКНОГО КЛАПАНА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ АНАЛОГОВЫХ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

Предметом работы является анализ корректности построенной математической модели стандартного перепускного клапана в переходном состоянии. При построении модели автором дается критика упрощений принимаемых в существующих работах. Математическая модель клапана описывается с помощью нелинейных дифференциальных уравнений с определенными коэффициентами. Уравнения решались с помощью аналоговой вычислительной машины без применения классических упрощений (линеаризации исходных уравнений).

Summary

MATHEMATICAL SIMULATION OF AN OVERFLOW VALVE CONSIDERED
ACCORDING TO ANALOGUE AND DIRECT TESTS

This work refers to the analysis of mathematical simulation for a standard type overflow valve in a transient state of operation. When arranging an analogue model of this valve, the author considered carefully any simplification used before in electronic simulation of this valve. An analogue computer was used to describe the modelling mathematics by means of nonlinear determined differential equations, wherein none common simplification of linear output functions was used.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 marca 1974 r.

STATECZNOŚĆ POJAZDÓW JEDNOŚLADOWYCH
NA KOŁACH PNEUMATYCZNYCH*

JERZY MARYNIAK, ZDOBYSŁAW GORAJ (WARSZAWA)

1. Wstęp

Na przykładzie roweru przeprowadzono badanie stateczności bocznej pojazdów jednośladowych, z uwzględnieniem podatności poprzecznej pneumatyków. Rower pod względem kinematycznym jest jednym z bardziej skomplikowanych pojazdów. Jest pojazdem niestatecznym, wymagającym ciąglego sterowania ze strony rowerzysty.

ŁOJCJAŃSKI i ŁURIE [19], przy daleko idących uproszczeniach, wyprowadzili równania ruchu i sformułowali prawo jazdy na rowerze. Traktowali koła roweru jako idealnie sztywne dyski, pomijając równocześnie kąt pochylenia kolumny kierowniczej i momenty dewiacyjne pojazdu.

Najpełniejszą analizę stateczności roweru przeprowadzili NEJMARK i FUFAJEW [23] i [24], uwzględniając wpływ podatności pneumatyków według teorii KIEDYSZA [18]. W pracach swych NEJMARK i FUFAJEW, przy wyprowadzeniu pełnych równań ruchu, przeprowadzili rozwiązania i analizy przy daleko idących uproszczeniach, pomijając kolejno poszczególne ruchy roweru. Takie postępowanie rzutuje nie tylko na wyniki ilościowe, ale ma decydujący wpływ na wyniki jakościowe. Autorzy ci przyjęli rower jako układ mechaniczny o dwóch masach, traktując łącznie jako wspólne masy: kierownicę z kolumną i kołem przednim oraz jako drugą masę ramę, rowerzystę i tylne koło. Niewydzielenie wirujących mas kół przedniego i tylnego powoduje pominięcie efektów żyroskopowych, co ma wpływ na stateczność.

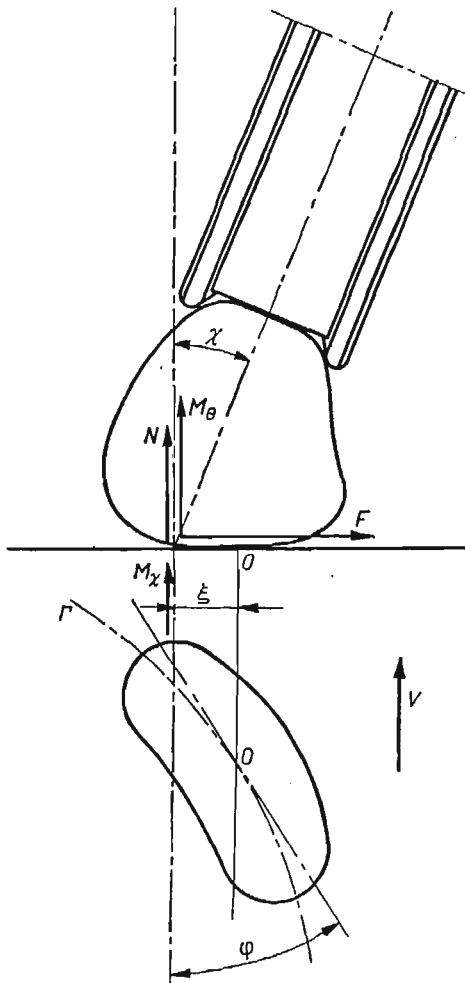
W przedstawionej pracy rower z rowerzystą i bagażem traktowano jako układ mechaniczny o więzach nieholonomicznych, złożony z czterech mas. Uwzględniono cztery stopnie swobody roweru w postaci: przechylenia χ , odchylenia θ , obrotów układu kierownicy ψ i przemieszczeń poprzecznych x . Dodatkowo przyjęto cztery stopnie swobody, wynikające z podatności poprzecznej i skrętnej pneumatyków: tylnego koła ξ_1, φ_1 i przedniego ξ_2, φ_2 . Obliczenia numeryczne wykonano przykładowo dla polskiego roweru turystycznego «Ambasador». Zbadano jaki wpływ na stateczność roweru mają parametry konstrukcyjne, kinematyczne i podatność pneumatyków.

* Fragment pracy był przedstawiony na VI International Conference on Nonlinear Oscillations, Poznań 1972.

2. Dynamika koła z pneumatykiem

Zagadnieniami dynamiki toczącego się pneumatyka zajmowali się: DOHRING [2], ROCARD [25], KIEŁDYSZ [18]. Obecnie zajmuje się tym zagadnieniem szereg badaczy i ośrodków doświadczalnych. Dotychczas najogólniejsza jest teoria KIEŁDYSZA [18], mimo pewnych zastrzeżeń omówionych w dalszej części pracy.

Rozważono zachowanie toczącego się pneumatyka pod działaniem stałego, pionowego obciążenia N . Pneumatyk toczy się bez poślizgu z małymi deformacjami, które charakteryzują się trzema parametrami (rys. 1). Parametr ξ określa boczne znoszenie centrum



Rys. 1. Przemieszczenia, siły i momenty opisujące odkształcenie pneumatyka toczącego się koła w teorii Kiełdysza

pola kontaktu względem śladu średnicowej płaszczyzny koła na płaszczyźnie drogi, kąt χ przechylenia płaszczyzny średnicowej koła względem płaszczyzny pionowej a , kąt skręcenia pneumatyka φ . Siły i momenty, które powodują odkształcenia pneumatyka są funkcjami stanu odkształcenia w postaci:

$$(1) \quad \begin{aligned} F &= F(\xi, \varphi, \chi), \\ M_x &= M_x(\xi, \varphi, \chi), \\ M_\theta &= M_\theta(\xi, \varphi, \chi). \end{aligned}$$

Dla małych odkształceń ξ , φ , χ można funkcje (1) rozwinąć w szereg Maclarena i ograniczyć się tylko do członów liniowych:

$$(2) \quad \begin{aligned} F &= a_{11}\xi + a_{12}\chi + a_{13}\varphi, \\ M_x &= a_{21}\xi + a_{22}\chi + a_{23}\varphi, \\ M_\theta &= a_{31}\xi + a_{32}\chi + a_{33}\varphi. \end{aligned}$$

Korzystając z (2) zgodnie z teorią KIEŁDYSZA [18], układ sił i momentów działających na toczący się pneumatyk (rys. 1) przedstawiono w postaci:

— siła boczna znoszenia F

$$(3) \quad F = a\xi + \sigma N\chi,$$

— moment przechylający M_x

$$(4) \quad M_x = -\sigma N\xi - \varrho_1 N\chi,$$

— moment skręcający M_θ

$$(5) \quad M_\theta = b\varphi,$$

gdzie a , b , ϱ_1 , σ — odpowiednie współczynniki wyznaczone doświadczalnie, N — normalna siła reakcji podłoża.

Siły i momenty (3), (4) i (5) można przedstawić jako pochodne cząstkowe funkcji U_2 względem odpowiednich odkształceń:

$$F = \frac{\partial U_2}{\partial \xi}, \quad M_x = -\frac{\partial U_2}{\partial \chi}, \quad M_\theta = \frac{\partial U_2}{\partial \varphi},$$

gdzie funkcja U_2 jest energią potencjalną pneumatyka i ma postać:

$$(6) \quad U_2(\xi, \chi, \varphi) = \frac{1}{2}(a\xi^2 + b\varphi^2 + \varrho_1 N\chi^2 + 2\sigma N\xi\chi),$$

tak określona energia pneumatyka może być wykorzystana przy obliczaniu całkowitej energii pojazdu.

3. Więzy kinematyczne toczącego się pneumatyka

Z analizy zjawisk toczenia się bez poślizgu KIEŁDYSZ sformułował dwa twierdzenia:

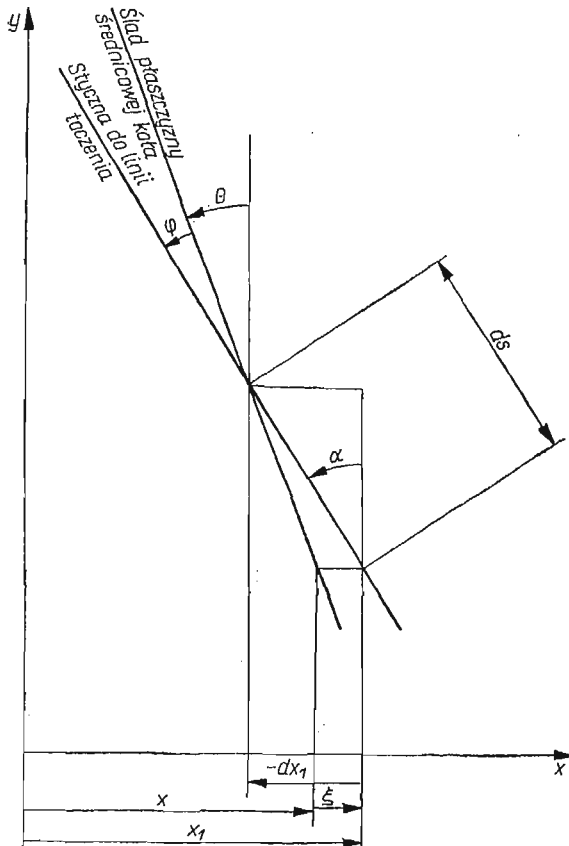
1. Styczna do linii toczenia Γ (rys. 1) pokrywa się z osią powierzchni kontaktu.
2. Krzywizna K linii toczenia Γ jest jednoznacznie określona funkcją $K(\xi, \varphi, \chi)$. Linia toczenia jest miejscem geometrycznym punktów 0 (rys. 1), będących środkiem linii średnicowej leżącej na powierzchni kontaktu z nawierzchnią. Dla małych odkształceń ξ , φ , χ KIEŁDYSZ określił krzywiznę toru zależnością

$$(7) \quad K = \frac{1}{r} = \alpha\xi - \beta\varphi - \gamma\chi,$$

gdzie α, β, γ są to odpowiednio wyznaczone parametry kinematyczne. W konsekwencji twierdzeń KIELDYSZA odnośnie zjawiska toczenia się bez poślizgu pneumatyka (rys. 2), otrzymano równania więzów w postaci:

$$(8) \quad \varphi + \theta = -\frac{dx_1}{ds},$$

$$(9) \quad K = \frac{1}{r} = -\frac{d^2x_1}{ds^2},$$



Rys. 2. Parametry geometryczne określające ruch pneumatyka toczącego się koła

gdzie zgodnie z rys. 2

$$(10) \quad x_1 = x + \xi.$$

Po wprowadzeniu (10) do (8) oraz uwzględnieniu (8) w (9) i przyrównaniu do (7) otrzymano

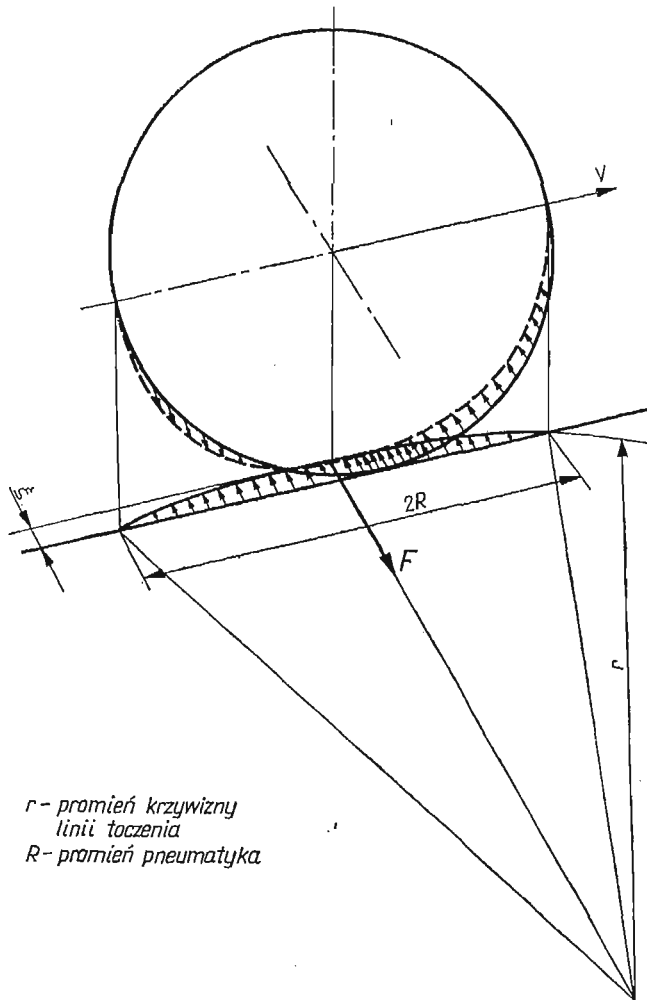
$$(11) \quad \varphi + \theta + \frac{dx}{ds} + \frac{d\xi}{ds} = 0,$$

$$(12) \quad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\theta}{ds} - \alpha\xi + \beta\varphi + \gamma\chi = 0.$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu (11) i (12) oraz uwzględnieniu, że prędkość toczenia się pneumatyka $V = ds/dt$, otrzymano ostatecznie równania więzów nieholonomicznych dla pneumatyków, w postaci:

$$(13) \quad \dot{x} + \dot{\xi} + V\theta + V\varphi = 0,$$

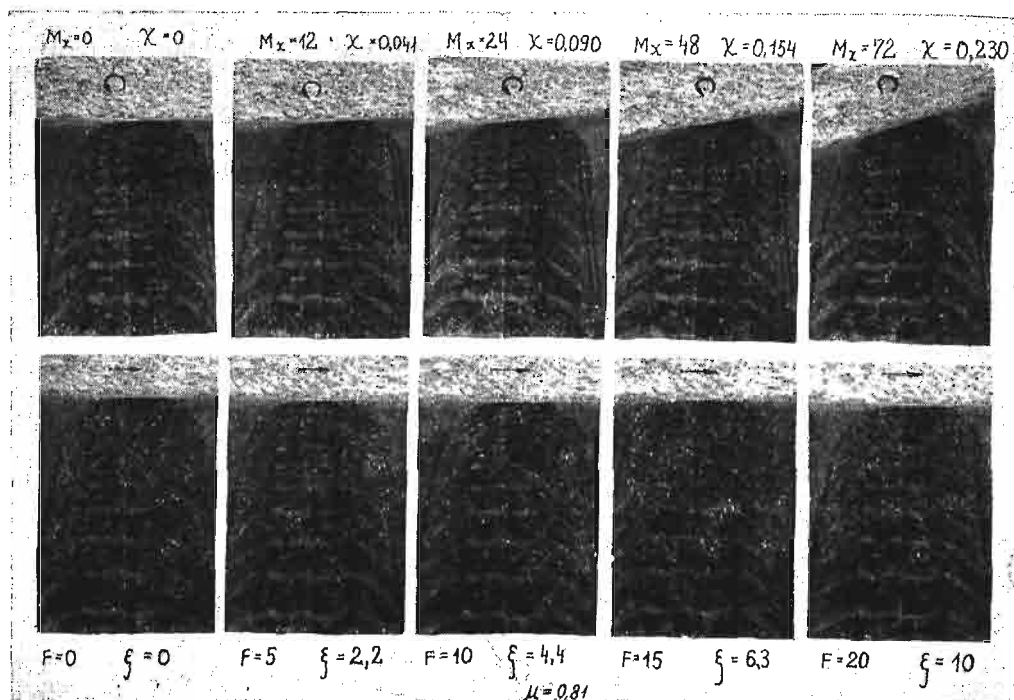
$$(14) \quad \dot{\theta} + \dot{\varphi} - \alpha V\xi + \beta V\varphi + \gamma V\chi = 0.$$



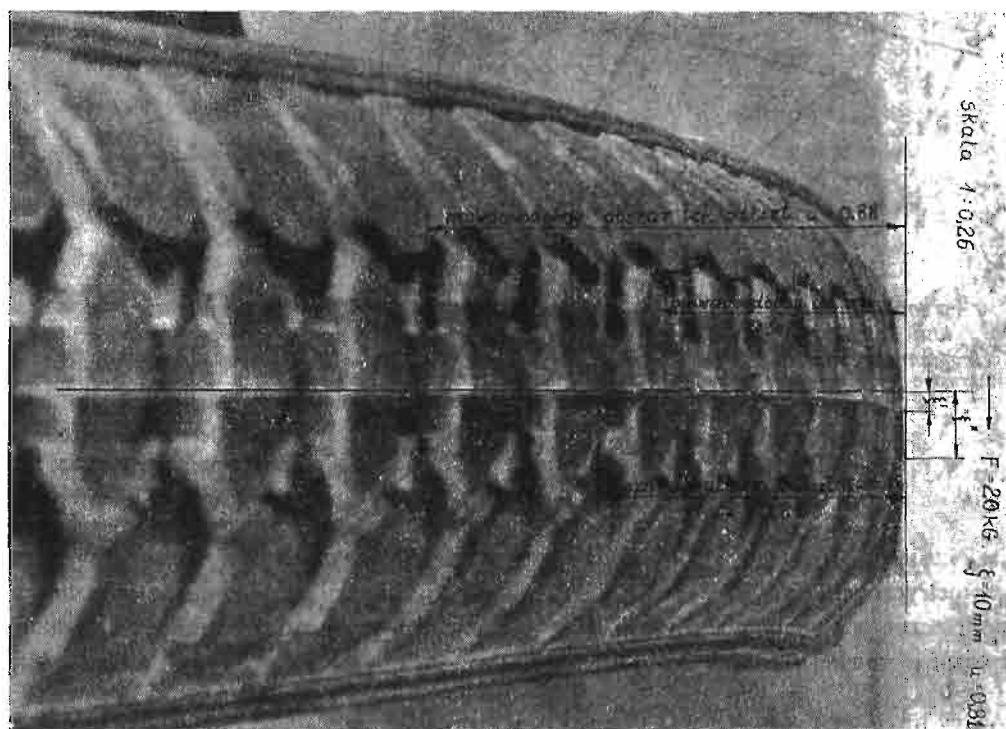
Rys. 3. Geometria toczenia się odkształconego pneumatyka, zgodnie z teorią Kiełdysza

NEJMARK i FUF AJEW [23] zgodnie z KIEŁDYSZEM [18] wyznaczyli z zależności wyłącznie geometrycznych (rys. 3) parametry kinematyczne α , β i γ . Założono, że odkształcenie poprzeczne pneumatyka ξ stanowi wysokość odcinka kołowego o promieniu krzywizny r i cięciwie równej średnicy $2R$

$$(15) \quad \xi = r \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2} \right],$$



Fot. 1. Odształcenie pneumatyka koła rowerowego pod wpływem momentu przechylającego M_x i siły F bocznej znoszenia



Fot. 2. Lokalne odształcenie pneumatyka koła rowerowego pod wpływem siły F bocznej znoszenia

ponieważ $\frac{R}{r} \ll 1$ z (15) otrzymano w przybliżeniu

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{R^2}{r},$$

skąd po porównaniu z równaniem (7), przy założeniu, że $\varphi = \chi = 0$ otrzymano

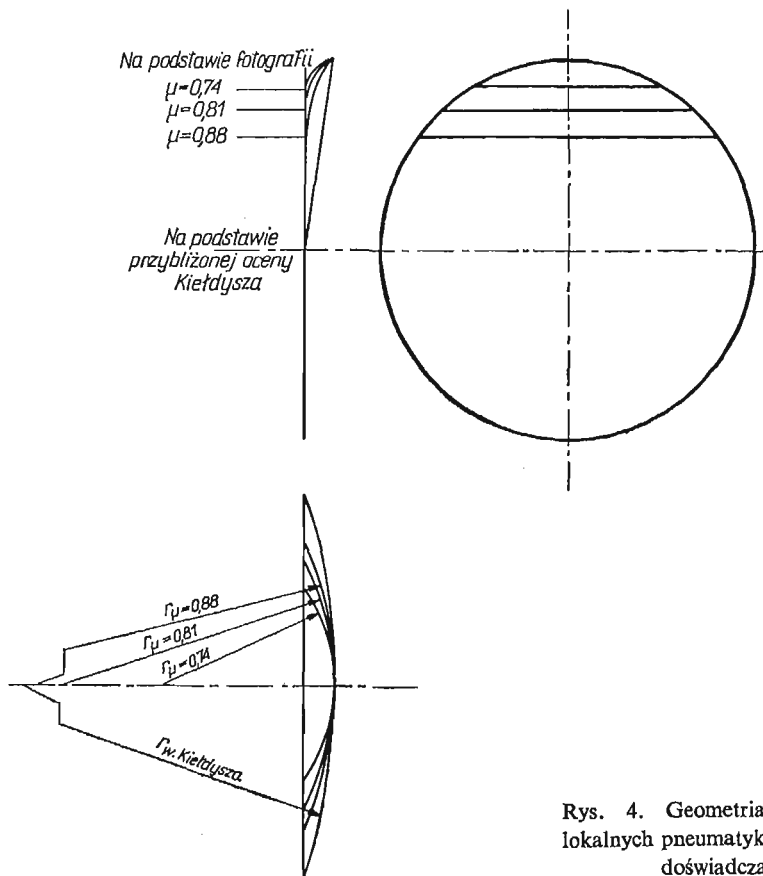
$$(16) \quad \alpha = \frac{2}{R^2}.$$

Analogicznie przy założeniach podanych w [23] wyznaczono pozostałe współczynniki kinematyczne:

$$(17) \quad \beta = \frac{2}{R},$$

$$(18) \quad \gamma = \frac{1}{R}.$$

Tak określone przez NEJMARKA i FUFAJEWA zgodnie z KIEŁDYSZEM i GREJDANUSEM [23] parametry kinematyczne α , β i γ można traktować jako pierwsze przybliżenie.



Rys. 4. Geometria odkształceń lokalnych pneumatyka wyznaczona doświadczalnie

Wykonano pomiary koła z pneumatykiem przy różnych ciśnieniach w pneumatykach. Pneumatyk był obciążony momentem przechylającym i siłą boczną F (fot. 1 i 2). Jak wynika z fotografii odkształcenie pneumatyka jest odkształceniem lokalnym (rys. 4), i nie obejmuje koła aż do średnicy jak przyjęto w [23]. Odkształcenie lokalne i jego obszar zależy od sztywności pneumatyka i ma wpływ na parametry kinematyczne α , β i γ .

Dokładne badania przeprowadzone na kołach rowerowych, z uwzględnieniem zmiany ciśnienia, wykazały znaczne różnice w wartościach współczynników (tablica 1).

Tablica 1

μ	$a \left[\frac{N}{m} \right]$	$b \left[\frac{N}{m} \right]$	σ	$q_1 [m]$	$\gamma \left[\frac{1}{m} \right]$	$\alpha \left[\frac{1}{m^2} \right]$	$\beta \left[\frac{1}{m} \right]$	
0,74	2060	383	2,15	0,042	2,8	16	5,6	K
						164	18	E
0,81	2354	363	2,48	0,042	2,8	16	5,6	K
						125	15	E
0,88	2720	245	2,45	0,042	2,8	16	5,6	K
						74	12,2	E

K — zgodnie z teorią Kiełdysza,

E — wyznaczone doświadczalnie.

W powyższej tablicy μ jest stosunkiem średnicy pneumatyka ugiętego do średnicy pneumatyka swobodnego; w przypadku idealnie sztywnych pneumatyków $\mu = 1$.

Wartości współczynników α i β mają znaczny wpływ na otrzymane wyniki, określające własności dynamiczne pojazdów. Współczynniki te w dużym stopniu zależą od sztywności pneumatyka, a nie są wyłącznie zależne od promienia koła sztywnego (16), (17) i (18) jak wyznaczono w [23].

4. Dynamiczne równania ruchu

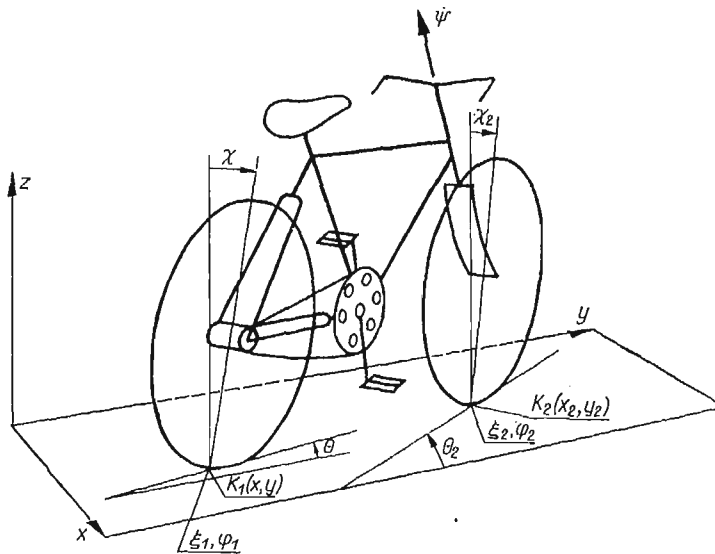
Położenie roweru z rowerzystą określono ośmioma współrzędnymi uogólnionymi (rys. 5):

- x — przemieszczenie poprzeczne, współrzędna punktu przecięcia płaszczyzny średnicowej tylnego koła z płaszczyzną drogi;
- θ — kąt odchylenia roweru, kąt zawarty między osią y przyjętego układu współrzędnych, a śladem płaszczyzny średnicowej tylnego koła;
- χ — kąt przechylenia roweru, kąt zawarty między płaszczyzną średnicową tylnego koła a płaszczyzną pionową yz ;
- ψ — kąt obrotu osi kierownicy;
- ξ_1, ξ_2 — przemieszczenie poprzeczne środków pola kontaktów, odpowiednio tylnego i przedniego koła;

φ_1, φ_2 — skręcanie osi powierzchni kontaktów względem śladu płaszczyzny średnicowej koła tylnego i przedniego.

Równania ruchu roweru toczącego się bez poślizgu na sprężystych pneumatykach, z uwzględnieniem więzów nieholonomicznych, wyprowadzono stosując równania MAGGIEGO [4, 9, 15], w postaci

$$(19) \quad \sum_{\sigma=1}^k C_{i\sigma} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} \right] = \sum_{\sigma=1}^k C_{i\sigma} Q_\sigma,$$



Rys. 5. Przyjęty układ odniesienia oraz przemieszczenia kątowe i liniowe roweru na kołach z odkształcalnymi pneumatykami

i równania więzów w postaci

$$(20) \quad \dot{q}_\sigma = \sum_{i=1}^l C_{i\sigma} \dot{e}_i + C_\sigma,$$

gdzie

$$C_{i\sigma} = \frac{\partial \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{e}_i},$$

$$Q_\sigma = - \frac{\partial (U_1 + U_2 + F_R)}{\partial q_\sigma},$$

dla $\sigma = 1, 2, k, i = 1, 2, \dots, l,$

przy czym

- q_σ — współrzędne uogólnione,
 \dot{e}_i — kinematyczne charakterystyki układu,
 T — kinetyczna energia układu,
 Q_σ — siły uogólnione potencjalne i niepotencjalne,
 U_1 — potencjalna energia pojazdu bez pneumatyków,
 U_2 — potencjalna energia pneumatyków,
 F_R — dysypacyjna funkcja Rayleigha.

Jeżeli liczbę przyjętych współrzędnych uogólnionych, opisujących jednoznacznie zmiany położenia pojazdu, oznaczymy przez k i jeżeli mamy b równań więzów nieholonomicznych, to liczba niezależnych prędkości uogólnionych równa jest różnicy $l = k - b$ określającej liczbę niezależnych charakterystyk kinematycznych układu \dot{e}_i .

Po obliczeniu energii kinetycznej i potencjalnej układu, wyznaczeniu odpowiednich związków kinematycznych i linearyzacji równań ruchu (19) i więzów (20) z wykorzystaniem (13) i (14), otrzymano układ ośmiu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego ze stałymi współczynnikami.

$$(21) \quad m\ddot{x} - S_y\ddot{\theta} + S_x\ddot{\chi} - \sigma N\chi - S_\psi\ddot{\psi} + \sigma N_2 \sin \lambda \psi - a\xi_1 - a\xi_2 = 0;$$

$$(22) \quad -S_y\ddot{x} + J_y\ddot{\theta} - J_{xy}\ddot{\chi} + V(G_1 + G_3)\dot{\chi} + c\sigma N_2\chi + J_4\ddot{\psi} - VG_3 \sin \lambda \dot{\psi} - c\sigma N_2 \sin \lambda \psi + \\ + ca\xi_2 - b\varphi_1 - b\varphi_2 = 0;$$

$$(23) \quad S_x\ddot{x} - J_{xy}\ddot{\theta} - V(G_1 + G_3)\dot{\theta} + J_x\ddot{\chi} - (gS_x - \rho_1 N)\chi - J_3\ddot{\psi} - VG_3 \cos \lambda \dot{\psi} + \\ + (gS_\psi - \rho_1 N_2 \sin \lambda)\psi + \sigma N_1 \xi_1 + \sigma N_2 \xi_2 = 0;$$

$$(24) \quad -S_\psi\ddot{x} + J_4\ddot{\theta} + VG_3 \sin \lambda \dot{\theta} - J_3\ddot{\chi} + VG_3 \cos \lambda \dot{\chi} + (gS_\psi - \rho_1 N_2 \sin \lambda - c_1 \sigma N_2)\chi + \\ + J_\psi\ddot{\psi} + \delta\dot{\psi} + (gS_0 \sin \lambda + \rho_1 N_2 \sin^2 \lambda + c_1 \sigma N_2 \sin \lambda)\psi - \\ - (\sigma N_2 \sin \lambda + ac_1)\xi_2 - b \cos \lambda \varphi_2 = 0;$$

$$(25) \quad \dot{x} + \xi_1 + V\theta + V\varphi_1 = 0,$$

$$(26) \quad \dot{\theta} + \varphi_1 - \alpha V\xi_1 + \beta V\varphi_1 + \gamma V\chi = 0,$$

$$(27) \quad \dot{x} - c\dot{\theta} + c_1\dot{\psi} + \xi_2 + V\theta + V\psi \cos \lambda + V\varphi_2 = 0,$$

$$(28) \quad \dot{\theta} + \dot{\psi} \cos \lambda + \dot{\varphi}_2 - \alpha V\xi_2 + \beta V\varphi_2 + \gamma V\chi - \gamma V \sin \lambda \psi = 0.$$

Równania (21)–(24) są równaniami ruchu roweru, natomiast pozostałe cztery równania (25)–(28) są równaniami więzów nieholonomicznych toczącego się roweru na pneumatykach.

Wielkości geometryczne i rozkłady mas podano na rys. 6, natomiast:

m — masa całego układu,

S_x, S_y, S_ψ, S_0 — momenty statyczne,

$J_x, J_y, J_3, J_4, G_1, G_3$ — momenty bezwładności,

N_1, N_2 — reakcje normalne działające na tylne i przednie koła.

Układ równań (21)–(28) można przedstawić w zapisie macierzowym w postaci:

$$(29) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{x} = \text{col}[x, \theta, \chi, \psi, \xi_1, \xi_2, \varphi_1, \varphi_2]$,

A — macierz kwadratowa współczynników bezwładności,

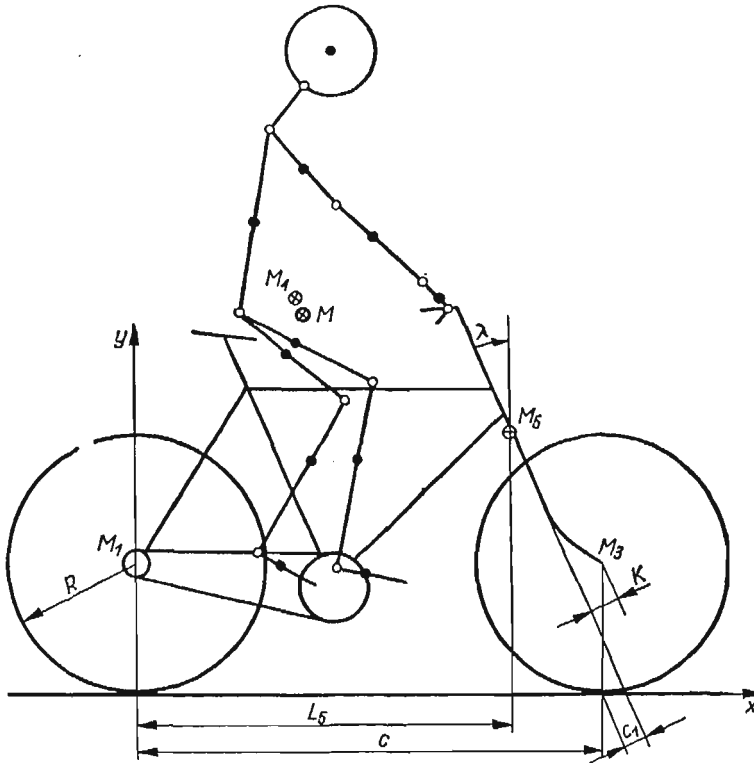
B — macierz kwadratowa współczynników tłumienia,

C — macierz kwadratowa współczynników sztywności.

Po wprowadzeniu dodatkowych funkcji:

$$y_1 = \dot{x}, \quad y_2 = \dot{\theta},$$

$$y_3 = \dot{\chi}, \quad y_4 = \dot{\psi},$$



Rys. 6. Geometria roweru oraz przyjęty rozkład mas rowerzysty i roweru

układ równań (29) sprowadzono do następującej postaci:

$$(30) \quad \mathbf{P}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{y} i $\dot{\mathbf{y}}$ są to następujące macierze kolumnowe:

$$\mathbf{y} = \text{col}[y_1, y_2, y_3, y_4, x, \theta, \chi, \psi, \xi_1, \xi_2, \varphi_1, \varphi_2],$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \text{col}[\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dot{y}_3, \dot{y}_4, \dot{x}, \dot{\theta}, \dot{\chi}, \dot{\psi}, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2].$$

Po przekształceniu i pomnożeniu lewostronnie przez macierz odwrotną \mathbf{P}^{-1} otrzymano:

$$(31) \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\mathbf{y},$$

gdzie macierz stanu \mathbf{R} ma postać:

$$(32) \quad \mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}(-\mathbf{Q}).$$

Rozwiązanie układu (31) przewiduje się w postaci:

$$(33) \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \exp \lambda t,$$

gdzie \mathbf{y}_0 jest macierzą kolumnową wartości początkowych.

Podstawiając (33) do układu (31) otrzymano:

$$(34) \quad [\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{y}_0 = \mathbf{0},$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową.

Aby układ równań miał rozwiązanie niezerowe, wartości własne macierzy \mathbf{R} są tymi wartościami parametru λ , dla których

$$(35) \quad \det[\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}] = 0.$$

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy stanu \mathbf{R} .

Wyznaczenie wektorów własnych, odpowiadających ściśle określonym wartościom własnym, pozwala na identyfikację odpowiednich ruchów roweru.

Rozwiązanie ogólne układu równań jest liniową kombinacją wszystkich rozwiązań szczególnych i ma postać:

$$(36) \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{y}_j \exp \lambda_j t,$$

gdzie

\mathbf{y}_j — jest wektorem własnym, odpowiadającym wartości własnej,

C_j — stałe wyznaczone z warunków początkowych, będących wartościami zakłóceń od ruchu ustalonego dla chwili $t = 0$,

$\lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1}$ — wartości własne macierzy stanu \mathbf{R} ,

$\eta_{j,j+1}$ — częstość oscylacji o okresie $T_j = \frac{2\pi}{\eta_j}$,

$\xi_{j,j+1}$ — współczynnik tłumienia, jeżeli wszystkie $\xi_j < 0$, wahania są tłumione, tzn. ruch pojazdu jest stateczny, czas stłumienia amplitudy do połowy $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\xi_j}$,

przy czym liczba własności własnych λ_j i odpowiadających im wektorów własnych \mathbf{y}_j jest równa $n = 2\sigma - b$, tzn. liczbie równań różniczkowych (30) rzędu pierwszego, otrzymanych z przekształcenia układu równań (29).

5. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej roweru

W celu wyjaśnienia wpływu liczby przyjętych stopni swobody i uproszczeń wynikających z pominięcia podatności pneumatyków, wyprowadzono równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej roweru.

Koła roweru traktowano jako cienkie tarcze, idealnie sztywne [9, 23]. Kontakt kół z powierzchnią drogi sprowadza się do styku punktowego. Na koła działają wyłącznie reakcje normalne N , natomiast nie mogą wystąpić siły styczne F , momenty przechylające M_x i momenty odchylające M_θ .

Równania ruchu wyprowadzono z równań Lagrange'a I rodzaju [4] w postaci

$$(37) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\sigma} = Q_\sigma + \sum_{\beta=1}^b \mu_\beta a_{\beta\sigma},$$

dla $\sigma = 1, 2, 3, 4$; $\beta = 1, 2$; gdzie

T — energia kinetyczna układu, wyrażona we współrzędnych uogólnionych q_σ ,

Q_σ — siły odpowiadające współrzędnym uogólnionym,

μ_β — mnożniki Lagrange'a,

$a_{\beta\sigma}$ — współczynniki więzów nieholonomicznych,

przy czym

$$(38) \quad \sum_{\sigma=1}^k a_{\beta\sigma} \dot{q}_\sigma + a_{\beta 0} = 0.$$

Równania więzów nieholonomicznych dla roweru o idealnie sztywnych kołach otrzymano, po przekształceniu równań zgodnie z [23], w postaci

$$(39) \quad \begin{aligned} \dot{x} + V\theta &= 0, \\ c\dot{\theta} - c_1\dot{\psi} - V\psi \cos \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Na podstawie (38) z równań (39) otrzymano macierz współczynników więzów nieholonomicznych w postaci:

$$(40) \quad [a_{\beta\sigma}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & -c_1 \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu energii kinetycznej i sił uogólnionych, jak w rozdziale 4, i wprowadzeniu do równań (37) mnożników μ_1, μ_2 i współczynników (40), otrzymano następujący układ różniczkowych równań ruchu:

$$(41) \quad m\ddot{x} - S_y\ddot{\theta} + S_x\ddot{\chi} - S_\psi\ddot{\psi} = \mu_1,$$

$$(42) \quad -S_y\ddot{x} + J_y\ddot{\theta} - J_{xy}\ddot{\chi} + V(G_1 + G_3)\dot{\chi} + J_4\ddot{\psi} - VG_3\dot{\psi} \sin \lambda = \mu_2 c,$$

$$(43) \quad S_x\ddot{x} - J_{xy}\ddot{\theta} - V(G_1 + G_3)\dot{\theta} + J_x\ddot{\chi} - J_3\ddot{\psi} - VG_3\dot{\psi} \cos \lambda = gS_x\chi - gS_\psi\psi,$$

$$(44) \quad \begin{aligned} -S_\psi\ddot{x} + J_4\ddot{\theta} + VG_3\dot{\theta} \sin \lambda - J_3\ddot{\chi} + VG_3\dot{\chi} \cos \lambda + J_\psi\ddot{\psi} = \\ = -gS_0\psi \sin \lambda - gS_\psi\chi - \delta\dot{\psi} - \mu_2 c_1. \end{aligned}$$

Powyższe równania ruchu wraz z równaniami więzów nieholonomicznych (39) opisują ruch roweru na sztywnych kołach.

5.1. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej z uwzględnieniem przechylania i obrotów kierownicy. Eliminując z równań ruchu (41)–(44) mnożniki Lagrange'a i wyznaczając z rów-

nań więzów x i θ otrzymano równania uproszczonej stateczności bocznej, sprzęgające ruchy przechylające roweru χ z obrotami kierownicy ψ .

$$(45) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \text{col}[\chi, \psi],$$

przy czym wyrazy macierzy współczynników \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} są następujące:

$$a_{11} = cJ_x,$$

$$a_{12} = a_{21} = -cJ_3 - c_1 J_{xy},$$

$$a_{22} = c_1 J_4 + cJ_\psi + c_1 J_y \frac{c_1}{c} + cJ_4,$$

$$b_{11} = 0,$$

$$b_{12} = -V[c_1 S_x + J_{xy} \cos \lambda + (G_1 + G_3)c_1 + cG_3 \cos \lambda],$$

$$b_{21} = V[cG_3 \cos \lambda + c_1(G_1 + G_3)],$$

$$b_{22} = V\left[c_1 S_\psi + J_4 \cos \lambda + c_1 S_y \frac{c_1}{c} + J_y \frac{c_1}{c} \cos \lambda\right] + c\delta,$$

$$c_{11} = -cgS_x,$$

$$c_{12} = V^2 S_x \cos \lambda + (G_1 + G_3)V \cos \lambda - cgS_\psi,$$

$$c_{21} = gS_\psi,$$

$$c_{22} = V^2 \left(S_\psi \cos \lambda + G_3 \sin \lambda \cos \lambda + S_y \frac{c_1}{c} \cos \lambda \right) + cgS_0 \sin \lambda.$$

5.2. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej z uwzględnieniem odchylenia i obrotów kierownicy. Założono, że zmiany przemieszczeń bocznych x i przechylania χ są małe i pomijalne w stosunku do ruchów odchylenia roweru θ i towarzyszących im obrotów kierownicy ψ . Eliminując z równań ruchu (41)–(44) i równań więzów (39) składniki odpowiadające pomijanym zmianom otrzymano różniczkowe równania ruchu roweru, opisujące wężykowanie.

Macierz kolumnowa składowych wektora \mathbf{x} równania (45) ma postać

$$\mathbf{x} = \text{col}[\theta, \psi],$$

przy czym wyrazy macierzy współczynników bezwładności \mathbf{A} , tłumienia \mathbf{B} i sztywności \mathbf{C} mają postać:

$$a_{11} = cJ_4 + c_1 J_y,$$

$$a_{12} = cJ_\psi + c_1 J_4,$$

$$a_{21} = a_{22} = c_{11} = c_{21} = 0,$$

$$b_{11} = V[c(S_\psi + G_3 \sin \lambda) - c_1 S_y],$$

$$b_{12} = c\delta - c_1 V G_3 \sin \lambda,$$

$$b_{21} = c,$$

$$b_{22} = -c_1,$$

$$c_{12} = cgS_0 \sin \lambda,$$

$$c_{22} = -V \cos \lambda.$$

5.3. Równania ruchu uproszczonej stateczności bocznej z uwzględnieniem odchylenia, przechylenia i obrotów kierownicy. Pominęto przemieszczenia boczne x przy założeniu, że pozostałe trzy ruchy, tj.: odchylenie θ , przechylenie χ i obroty kierownicy ψ , są ruchami decydującymi i wzajemnie sprzężonymi. Z równań ruchu (41)–(44) i równań więzów (39) otrzymano równania opisujące tak zmodelowany rower w postaci (45), którego wektor \mathbf{x} posiada następujące składowe:

$$\mathbf{x} = \text{col}[\theta, \chi, \psi],$$

a wyrazy współczynników \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} mają następującą postać:

$$a_{12} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = b_{22} = b_{32} = c_{21} = c_{31} = c_{32} = 0,$$

$$a_{11} = J_4 + J_y \frac{c_1}{c},$$

$$a_{13} = J_\psi + \frac{c_1}{c} J_4,$$

$$a_{21} = -J_{xy},$$

$$a_{22} = J_x,$$

$$a_{23} = -J_3,$$

$$b_{11} = VG_3 \sin \lambda,$$

$$b_{12} = V \left[G_3 \cos \lambda + \frac{c_1}{c} (G_1 + G_3) \right],$$

$$b_{13} = \delta - \frac{c_1}{c} VG_3 \sin \lambda,$$

$$b_{21} = -V(G_1 + G_3),$$

$$b_{23} = -VG_3 \cos \lambda,$$

$$b_{31} = 1,$$

$$b_{33} = -\frac{c_1}{c},$$

$$c_{11} = -J_3 - \frac{c_1}{c} J_{xy},$$

$$c_{12} = gS_\psi,$$

$$c_{13} = gS_\psi \sin \lambda,$$

$$c_{22} = -gS_x,$$

$$c_{23} = gS_\psi,$$

$$c_{33} = -\frac{V}{c} \cos \lambda.$$

Wykonanie obliczeń numerycznych dla uproszczonych modeli roweru i dla modelu przyjętego w rozdziale 4 pozwala na porównanie wyników i ich analizę. Pozwala to wyciągnąć wnioski odnośnie słuszności stosowanych modeli roweru przez szereg badaczy, jak ŁOJCJAŃSKI, ŁURIE, NEJMARK i FUFAJEW, jak również umożliwia określenie wpływu założeń upraszczających na poprawności wyników.

6. Wyniki obliczeń numerycznych i wnioski

Obliczenia przykładowe wykonano dla roweru turystycznego «Ambasador». Rozwiązano pełny układ równań (21)–(28), jak również równania stateczności uproszczonej wprowadzone w punktach 5.1, 5.2 i 5.3.

Wszystkie obliczenia wykonano według własnych programów na EMC GIER w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego.

Jako parametry zmienne traktowano:

- δ — tłumienie w kolumnie kierowniczej,
- k — odsadzenie przedniego koła względem osi obrotu,
- R — promień kół roweru,
- L_5 — długość roweru,
- λ — kąt pochylenia osi kierownicy,
- V — prędkość jazdy roweru,
- μ — współczynnik określający ciśnienie w pneumatykach.

Wyniki przedstawiono w postaci wykresów, na których linią ciągłą naniesiono zmiany współczynników tłumienia ξ_j , a przerywaną częstości oscylacji η_j . Jednakowymi indeksami oznaczono na wszystkich wykresach odpowiadające sobie wartości własne, charakteryzujące te same ruchy roweru:

$\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$ — oscylacje lub ruchy aperiodyczne odpowiadające obrotom kierownicy ψ ,

lub

$$\lambda_1 = \xi_1$$

$$\lambda_2 = \xi_2$$

$$\lambda_3 = \xi_3$$

$$\lambda_4 = \xi_4$$

$\lambda_{5,6} = \xi_{5,6} \pm i\eta_{5,6}$ — szybkie oscylacje odpowiadające ruchom odchyłającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_1 pneumatyka tylnego koła,

$\lambda_{7,8} = \xi_{7,8} \pm i\eta_{7,8}$ — szybkie oscylacje odpowiadające ruchom odchyłającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_2 pneumatyka przedniego koła,

$\lambda_9 = \xi_9$ — aperiodyczne ruchy odchyłające roweru θ lub ruchy harmoniczne, odpowiadające obrotom kierownicy ψ , sprzężonym z odchyłaniem roweru θ ,

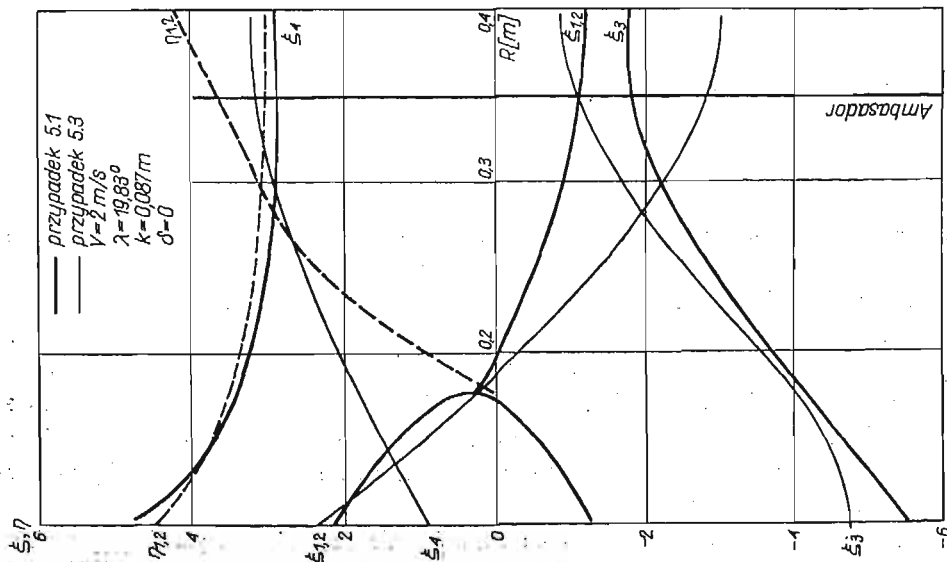
$$\lambda_{3,9} = \xi_{3,9} \pm i\eta_{3,9}$$

$$\lambda_{10} = \xi_{10}$$

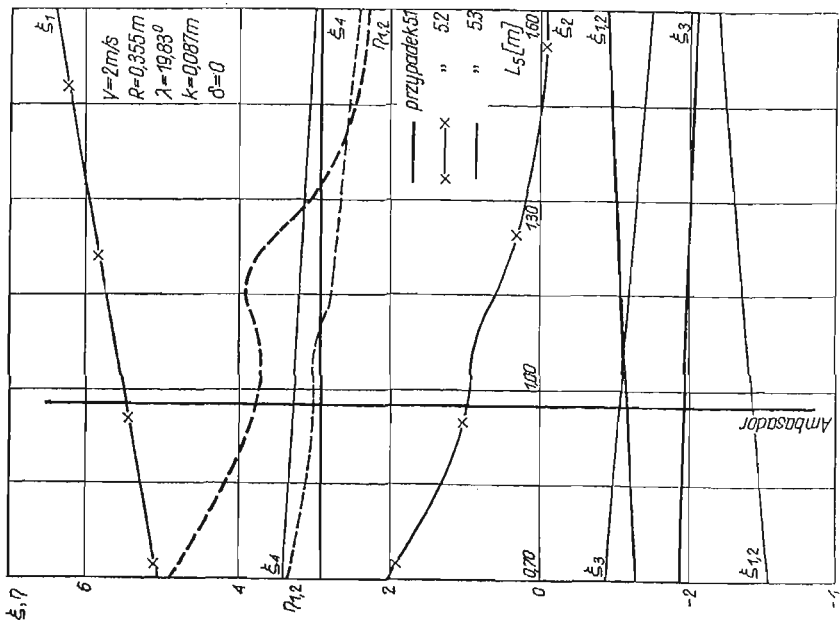
— aperiodyczne ruchy odchyłające roweru θ lub oscylacji, odpowiadające ruchom przechylającym roweru χ sprzężonym z odchyłaniem θ .

Ruch roweru niekierowanego jest ruchem niestatecznym ze względu na przechyłanie χ . Wartość własna λ_4 i $\lambda_{4,10}$ charakteryzująca przechyłanie posiada część rzeczywistą — współczynnik tłumienia zawsze dodatni $\xi_4 > 0$ i $\xi_{4,10} > 0$ (rys. 7–13 i rys. 15).

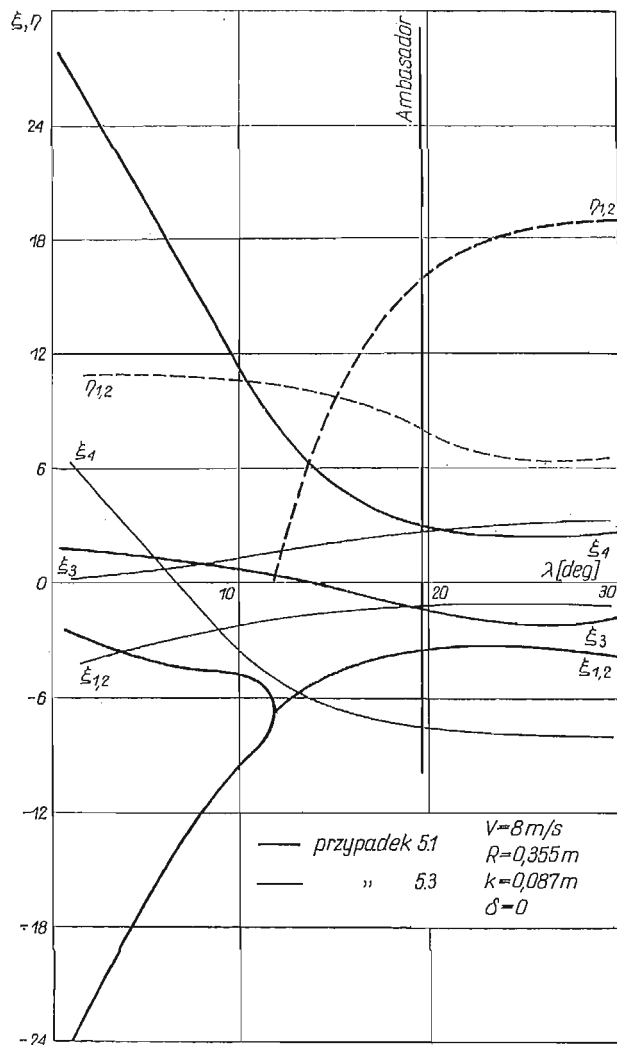
6.1. Wpływ parametrów konstrukcyjnych na stateczność. Jako zmienne parametry konstrukcyjne zgodnie z rys. 6 przyjęto: promień koła R , długość roweru L_5 , kąt pochylenia kolumny kierowniczej λ , wyprzedzenie przedniego koła k i tarcie w kolumnie kierownicy δ .



Rys. 7. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji promienia kół roweru R



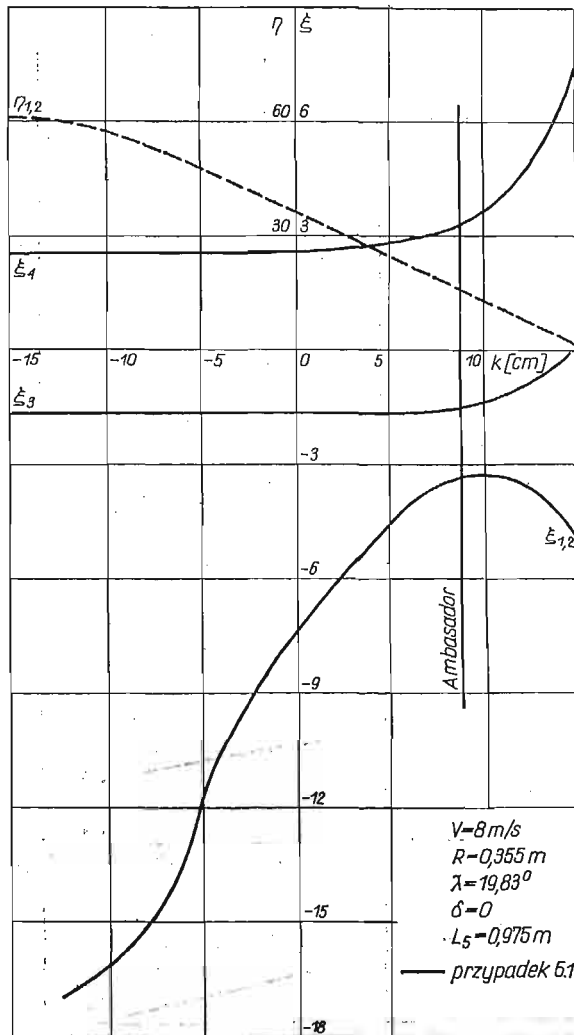
Rys. 8. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji długości roweru L_s



Rys. 9. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji kąta pochylenia λ kolumny kierownicy

Wzrost promieni kół roweru R wpływa równocześnie na zwiększenie jego wysokości, powoduje ustatecznienie ruchów roweru (rys. 7). Powoduje przejście z nietłumionych aperiodycznych ruchów kierownicy $\xi_1 > 0$ i $\xi_2 < 0$ do tłumionych oscylacji $\xi_{1,2} < 0$ o wzrastającej częstości ($\eta_{1,2}$ rośnie). Równocześnie następuje ustatecznienie przechylenia (ξ_4 maleje) i zmniejszenie tłumienia aperiodycznych obrotów kierownicy (ξ_3 rośnie). Koła o małych promieniach powodują niestateczność roweru, co potwierdzają również doświadczenia.

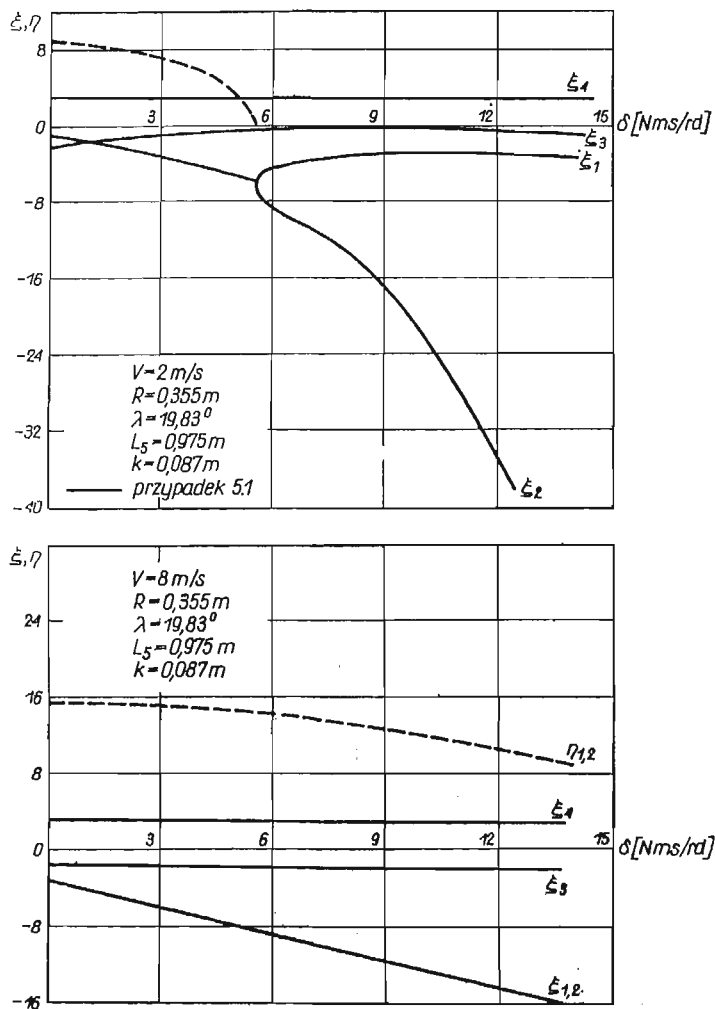
Wzrost długości roweru L_5 wpływa na zmniejszenie częstości oscylacji $\eta_{1,2}$ ruchów obrotowych kierownicy przy niewielkim spadku tłumienia $\xi_{1,2}$ (rys. 8). Na pozostałe ruchy nie ma istotnego wpływu.



Rys. 10. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji odsadzenia k przedniego koła względem osi kierownicy

Kąt pochylenia kolumny kierowniczej λ (rys. 6) ma decydujący wpływ na stateczność roweru. Wzrost kąta λ powoduje ustatecznienie roweru. Aperiodyczne ruchy kierownicy z rozbieżnych przechodzą w tłumione ξ_3 (rys. 9), a aperiodyczne obroty kierownicy roweru $\xi_1 < 0$ i $\xi_2 < 0$ na tłumione oscylacje $\xi_{1,2} < 0$ o ustalającej się częstości wahań $\eta_{1,2}$. Wzrost kąta λ wpływa silnie ustateczniająco na ruchy przechylające roweru, współczynnik tłumienia ξ_4 maleje. Widać wyraźnie rysujący się zakres optymalnych kątów pochylenia, stosowany właśnie przy współczesnych rowerach, określony na drodze eksperymentu.

Wyprzedzenie koła przedniego k (rys. 6) jest stosowane w celu zmniejszenia stateczności aby polepszyć sterowność pojazdów kołowych. Jak wynika z rys. 10 cel ten został



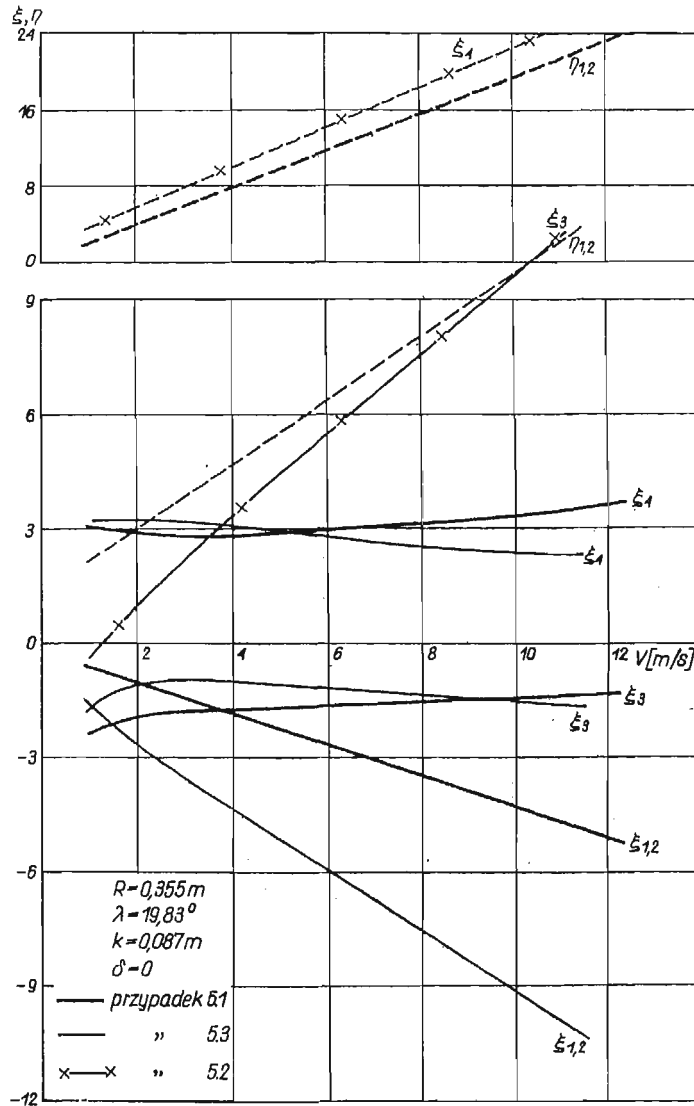
Rys. 11. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji tłumienia wiskotycznego δ w kolumnie kierownicy

osiągnięty, bowiem dodatnie wyprzedzenie, tzn. do przodu, zmniejsza tłumienie oscylacji kierownicy (współczynnik tłumienia $\xi_{1,2}$) przy równoczesnym spadku częstości ($\eta_{1,2}$). Wielkości odsadzeń stosowane przy rowerach są w zakresie odsadzeń optymalnych.

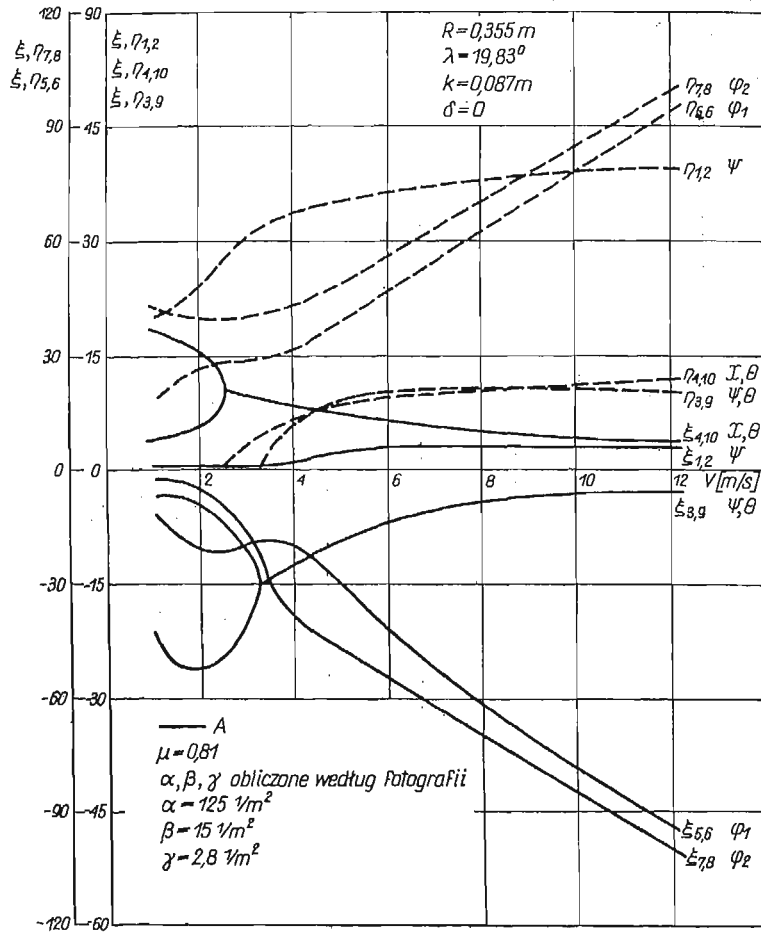
Wpływ tarcia wiskotycznego w kolumnie kierownicy na stateczność przedstawiono na rys. 11. Wzrost tarcia wyraźnie ustaje ruchy obrotowe kierownicy i zależy również od prędkości jazdy. Nie ma natomiast wpływu na ruchy przechylające ξ_4 i aperiodyczne ruchy kierownicy ξ_3 . Przy małych prędkościach jazdy tłumione ($\xi_{1,2} < 0$) oscylacje $\eta_{1,2}$ przechodzą w ruchy aperiodyczne $\xi_1 < 0$ i $\xi_2 < 0$ bardzo silnie tłumione. Natomiast przy prędkościach większych występują wyłącznie oscylacje układu kierowniczego $\eta_{1,2}$ charakteryzujące się wzrostem tłumienia $\xi_{1,2}$.

6.2. Wpływ parametrów kinematycznych na stateczność. Rozpatrywano wpływ prędkości jazdy V na stateczność roweru, dokonując obliczeń trzech przypadków stateczności uproszczonej (rys. 12) i pełnej z uwzględnieniem podatności pneumatyków (rys. 13).

Wzrost prędkości jazdy wpływa ustateczniająco na ruchy roweru jako układu idealnie sztywnego (rys. 12), jak również z uwzględnieniem podatności pneumatyków (rys. 13). Szczególnie zaznacza się silny wpływ na szybkie oscylacje roweru, odpowiadające ruchom odchyłającym na przednim pneumatyku $\xi_{7,8}$, $\eta_{7,8}$ i tylnym pneumatyku $\xi_{5,6}$ i $\eta_{5,6}$. Wzrost prędkości powoduje zwiększenie tłumienia ($\xi_{5,6}$ i $\xi_{7,8}$ silnie maleją) przy równoczesnym wzroście częstości oscylacji ($\eta_{5,6}$ i $\eta_{7,8}$ rosną). Szybka jazda jest korzystniejsza.

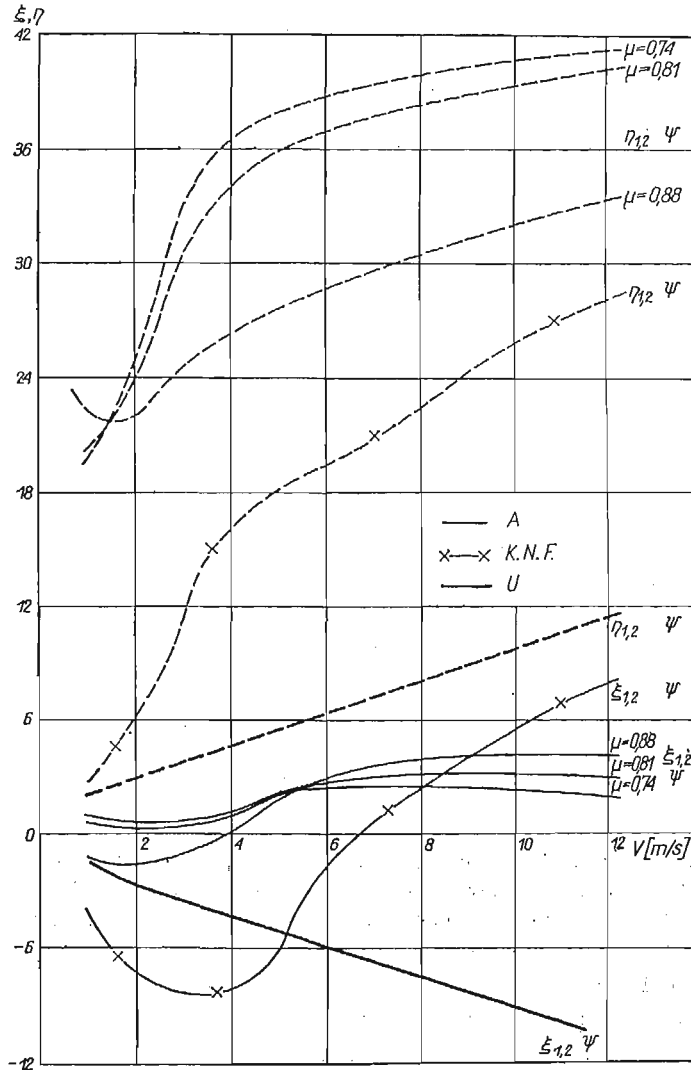


Rys. 12. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji prędkości jazdy V i ich porównanie przy różnych uproszczeniach modelu fizycznego sztywnego roweru

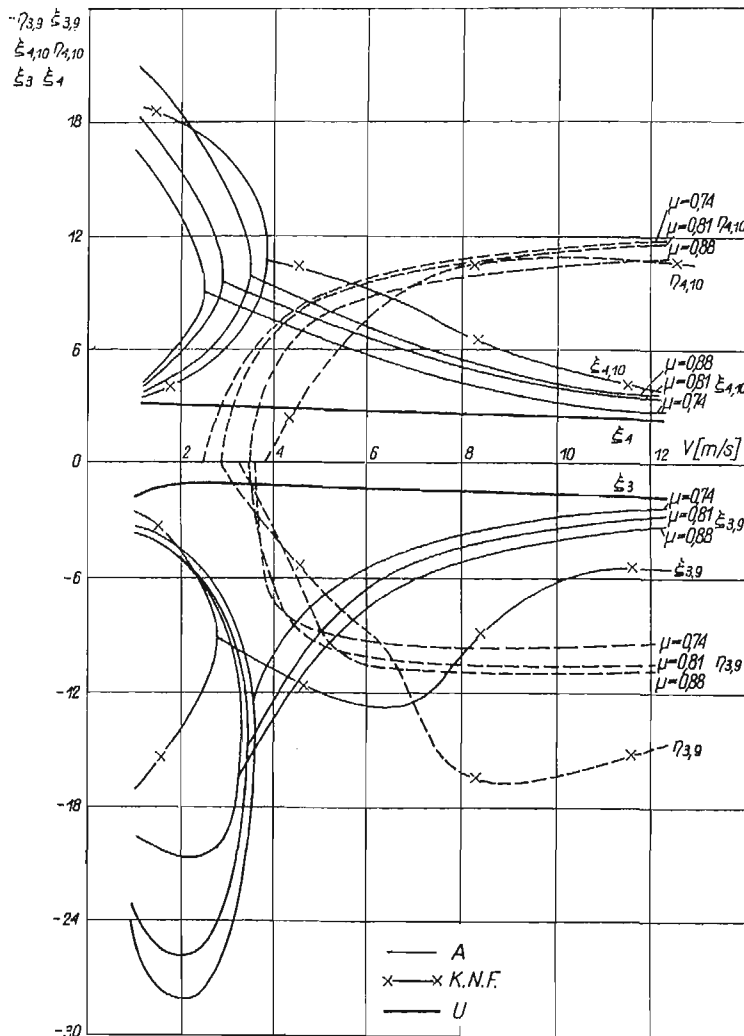


Rys. 13. Współczynniki tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji prędkości jazdy V dla roweru na odkształcalnych pneumatykach

6.3. Wpływ podatności pneumatyków na stateczność. Uwzględnienie podatności poprzecznej pneumatyków daje w rozwiązaniu pełnym oprócz wartości własnych charakteryzujących układ sztywny $\lambda_{1,2}$, λ_3 i λ_4 , dwie nowe pary wartości własnych zespolonych sprzężonych $\lambda_{5,6}$ i $\lambda_{7,8}$ (rys. 13, 16, 17) charakteryzujące szybkie oscylacje $\eta_{5,6}$ i $\eta_{7,8}$ zawsze silnie tłumione $\xi_{5,6} < 0$ i $\xi_{7,8} < 0$, odpowiadające ruchom wywołanym skręcaniem pneumatyków tylnego φ_1 i przedniego φ_2 .



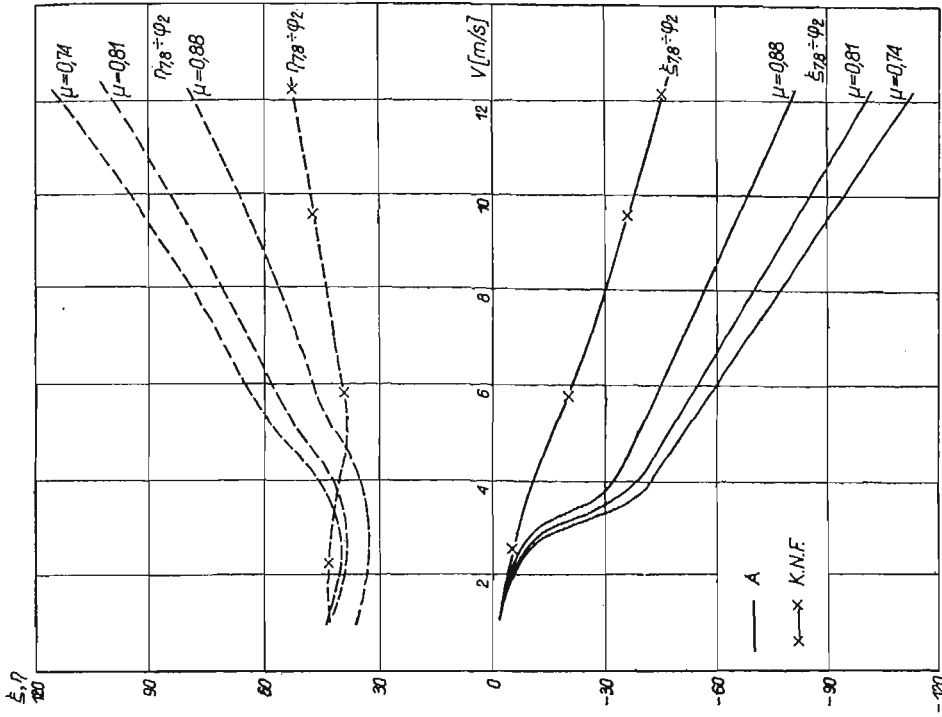
Rys. 14. Porównanie tłumienia $\xi_{1,2}$ i częstości oscylacji $\eta_{1,2}$ w funkcji prędkości V , odpowiadających ruchom obrotowym kierownicy ψ



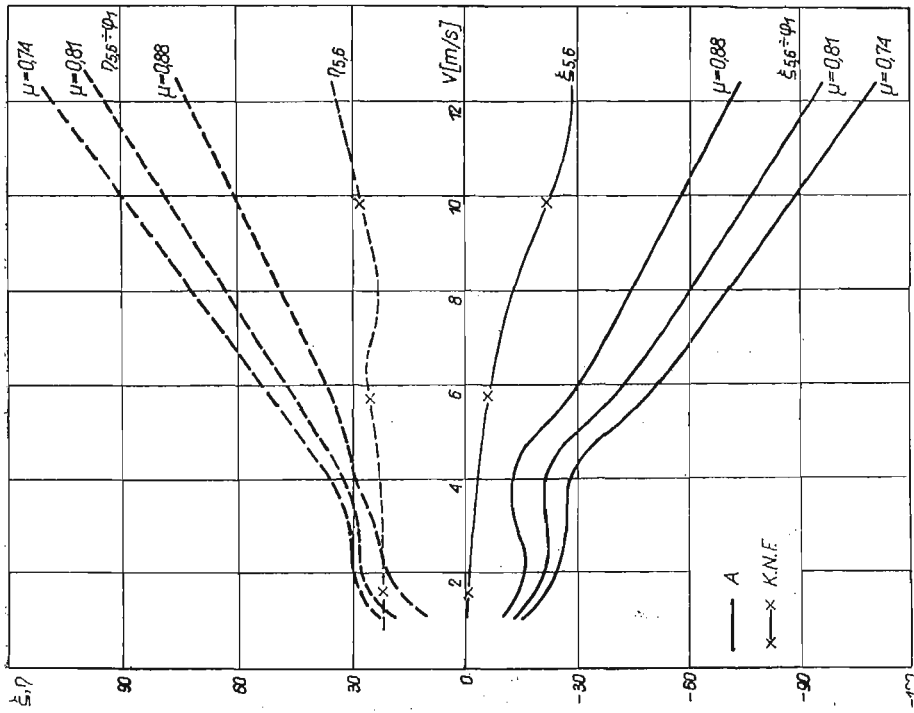
Rys. 15. Porównanie tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji prędkości jazdy V , odpowiadających ruchom harmonicznym kierownicy ψ sprzężonym z odchyleniem roweru θ ($\eta_{3,3}$, $\xi_{3,3}$) oraz ruchom przechylającym roweru χ sprzężonym z odchyleniem θ ($\eta_{4,10}$, $\xi_{4,10}$)

Stopnie swobody, wynikające z podatności pneumatyków, wprowadzają dodatkowe sprzężenia między kinematycznymi stopniami swobody $\lambda_{3,9}$ i $\lambda_{4,10}$ (rys. 12, 13, i 15), co nie tylko ma wpływ na wyniki ilościowe ale również wpływa na charakter obliczonego ruchu.

Wyniki rozwiązań, uwzględniające wpływ deformacji pneumatyka, przedstawiono na rys. 14–15 dla współczynników kinematycznych α , β i γ , obliczonych według teorii KIELDYSZA i zgodnie z NEJMARKIEM i FUFAJEWEM «K–N–F» oraz porównano z wynikami otrzymanymi po zmodyfikowaniu obliczeń przez autorów «A» w oparciu o doświadczenia, jak również podano wyniki stateczności uproszczonej «U».



Rys. 17. Porównanie tłumienia $\xi_{7,8}$ i częstości oscylacji $\eta_{7,8}$ w funkcji prędkości jazdy V , odpowiadających szybkim oscylacjom odchylającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_2 pneumatyka przedniego koła



Rys. 16. Porównanie tłumienia $\xi_{5,6}$ i częstości oscylacji $\eta_{5,6}$ w funkcji prędkości jazdy V , odpowiadających szybkim oscylacjom odchylającym roweru, wywołanym skręcaniem φ_1 pneumatyka tylnego koła

7. Wnioski ogólne

Jak wynika z przedstawionej pracy, stosowane przez wielu autorów (ŁOJCJAŃSKI, ŁURIE, KIBLDYSZ, NEJMARK, FUFAJEW) uproszczenia modeli fizycznych lub równań ruchu w celu ułatwienia obliczeń przez obniżenie stopnia równania charakterystycznego nie zawsze mogą być stosowane. Uproszczenia takie mogą prowadzić do błędnych rozwiązań i błędnej interpretacji wyników, charakteryzujących przyjęty model fizyczny, a niejednokrotnie utożsamiany z rzeczywistym pojazdem.

Współczynniki kinematyczne α i β wyznaczone zgodnie z «K-N-F» zależą wyłącznie od promienia nieodkształcalnego koła

$$\alpha = \frac{2}{R^2}, \quad \beta = \frac{2}{R}$$

i nie uwzględniają podatności pneumatyka — teoria półsztywnego koła (określenie autorów). Natomiast uwzględnienie podatności pneumatyka poprzez przyjęty współczynnik μ i wyznaczenie doświadczalnie lokalnej deformacji pneumatyka ma wpływ na współczynniki kinematyczne (tablica 1), a tym samym na tłumienie i częstości oscylacji drgań pojazdu (rys. 14-17).

Z powyższego wynika, że: przy wyznaczaniu współczynników kinematycznych, należy określić lokalny obszar deformacji pneumatyka.

Z obliczeń wynika, że dla przykładowo obranego roweru «Ambasador» przyjęte parametry konstrukcyjne są wielkościami optymalnymi, np.: promień kół R (rys. 7), kąt pochylenia osi kierownicy λ (rys. 9), odsadzenie przedniego koła względem osi kierownicy k (rys. 10).

Przeprowadzone badania i opracowane programy na EMC mogą mieć praktyczne zastosowanie dla ośrodków konstrukcyjnych, bowiem już w fazie konstruowania można obliczyć efekty nowych rozwiązań lub zmian.

Literatura cytowana w tekście

1. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
2. E. DOHRING, *Die Stabilität von Einspurfahrzeugen*, Forsch. Geb. Ingenieurwesens, B. 24. N2, 50—62, 1955.
3. J. R. ELLIS, *Vehicle dynamics*, Businers Books Limited, London 1969.
4. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
5. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
6. A. VAN LUNTEREN, H. G. STASSEN, *Annual Report 1969 of the Man-Machine Systems Group*, Laboratorium Voor Meet — En Regeltechnik, Delft 21, April 1970.
7. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowanym*, Mech. Teoret. i Stos., 3, 5 (1967).
8. J. MARYNIAK, M. LECH, A. NAŁĘCZ, *Identyfikacja dynamiczna pojazdów na pneumatykach*, Proceedings of the VIII-th Conference on Dynamic of Machines, Praha, Liblice 1973.

9. J. MARYNIAK, *Analiza dynamiczna modeli pojazdów na pneumatykach*, Zeszyty Naukowe Przemysłowego Instytutu Motoryzacji, Nr 1, 1974.
10. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Bionika ruchu*, PWN, Warszawa 1971.
11. *Nowoczesne metody numeryczne*, opracowane przez National Physical Laboratory Teddington Middlesex, PWN, Warszawa 1965.
12. H. B. PASEJKA, *The wheel shimmy phenomenon*, Rotterdam 1966.
13. L. A. PARS, *A treatise on analytical dynamics*, Heinemann, London 1964.
14. Z. GORAJ, *Stateczność boczna roweru z uwzględnieniem odkształcalności poprzecznej pneumatyków*, praca magisterska. Zakład Mechaniki IMS PW, 1972 (nie publikowana).
15. J. MARYNIAK, Z. GORAJ, *Вопросы устойчивости велосипеда*, Загадnienia Drgań Nieliniowych, Nr 15/1973.
16. Ф. Р. ГАНТМАХЕР, *Теория матриц*, Изд. Наука, Москва 1966.
17. И. И. КАЛЖЕР, А. Д. де ПАТЕР, *Обзор теории локального скольжения в области упругого контакта с сухим трением*, Прикладная механика, т. VII, в. 5, 1971.
18. М. В. КЕЛДЫШ, *Шимми переднего колеса трехколесного шасси*, Гр. ЦАГИ, 1945.
19. А. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ, А. И. ЛУРЬЕ, *Курс теоретической механики*, Гостехиздат 1955.
20. Л. Г. ЛОВАС, *Анализ развития и современного состояния динамики колесных машин*, Прикладная механика, т. VIII, в. 5, 1972.
21. Л. Г. ЛОВАС, *До теорії шиммі літака*, Доповіді Академії Наук Української РСР, 3 серія А 1973.
22. Л. Г. ЛОВАС, *Шляхова стійкість рівномірного прямиolinійного кочення колеса*, Доповіді АН УРСР, 4 серія А, Київ 1973.
23. Ю. И. НЕЙМАРК, Н. А. ФУФЛЕВ, *Динамика неавтономных систем*, Изд. Наука, Москва 1967.
24. Ю. И. НЕЙМАРК, Н. А. ФУФЛЕВ, *Устойчивость криволинейного движения экипажа на балонных колесах*, Прикладная математика и механика, т. 35, 1971.
25. И. РОКАР, *Неустойчивость в механике*, И. Л. Москва 1959.
26. И. В. СТРАЖЕВА, В. С. МЕЛКУМОВ, *Векторно-матричные методы в механике полета*, Машиностроение, Москва 1973.

R e z y m e

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕЛОСИПЕДА НА ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИНАХ

В работе рассматривается, на примере велосипеда, устойчивость двухколесных транспортных средств с учетом податливости пневматических шин. Поперечная и крутильная податливости шин определялись экспериментальным путем.

Велосипед рассматривается как механическая система с англономными связями, состоящая из жестких элементов. Уравнения движения выводились на основании уравнений Маджи для англономных связей, а уравнения движения для исследования упрощенной устойчивости выводились из уравнений Лагранжа первого рода с сомножителями и с коэффициентами англономных связей.

Пример численного расчета проделан для туристического велосипеда „Амбасадор”. Исследовалось при этом влияние на устойчивость таких параметров конструкции, как радиус колеса, угол наклона руля, опережение переднего колеса, длина велосипеда и трение в рулевой колонке.

Исследовалось также влияние на устойчивость кинематического параметра т. е. скорости и податливости шин.

Сравнивались и анализировались результаты, полученные при упрощениях разного вида а также рассматривалось влияние предположений, содержащихся в модели пневматической шины Келдыша на правильность полученных результатов.

S u m m a r y

STABILITY PROBLEMS OF A BICYCLE EQUIPPED
WITH PNEUMATIC WHEELS

The problem under consideration concerns the side stability of a bicycle equipped with pneumatic wheels. The bicycle and the cyclist constitute a mechanical system with nonholonomic constraints with eight degrees of freedom. Experiments are performed to determine the moments of inertia and side deviation of racing an „Ambasador” bicycle with the cyclist riding on. Calculations are accomplished for the complete set of equations as well as for a simplified model with reduced degrees of freedom. The simplification of the set of equations which reduces the degree of the characteristic equation is not always applicable since it may cause false solutions and their erroneous interpretation.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 kwietnia 1974 r.

KONSTRUKCJA FUNKCJI GREENA DLA RÓWNIANIA BIHARMONICZNEGO
W OBSZARZE KOŁA LUB WYCINKA KOŁOWEGO

EUGENIUSZ WACHNICKI (KRAKÓW)

Celem pracy jest efektywna konstrukcja funkcji Greena dla koła i pewnych obszarów kątowych dla równania $\Delta^2 u = 0$ z warunkami brzegowymi $u|_C = 0$, $\Delta u|_C = 0$, gdzie C jest brzegiem obszaru. Zagadnienie to znane jest pod nazwą zagadnienie Riquiera [1].

1. Konstrukcja funkcji Greena dla koła

Znane jest rozwiązanie problemu Riquiera dla koła [1]. Rozwiązanie to uzyskane zostało bez znajomości funkcji Greena. Podamy jednak konstrukcję funkcji Greena dla koła ze względu na jej znaczenie przy konstrukcji funkcji Greena dla pewnych obszarów kątowych.

Niech K oznacza obszar kołowy $x^2 + y^2 < R^2$. Niech P i Q będą dwoma dowolnymi punktami tego obszaru oraz niech $r = |PQ|$. Oznaczmy przez $G(P, Q)$ szukaną funkcję Greena z biegunem w punkcie P , tzn. funkcję taką, że

$$(1) \quad G(P, Q) = -2r^2 \ln r + H(P, Q),$$

gdzie $H(P, Q)$ jest funkcją biharmoniczną punktu Q w obszarze K dla $P \in K$, oraz

$$(2) \quad G(P, Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C \quad \text{i} \quad P \in K,$$

$$(3) \quad \Delta_Q G(P, Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C \quad \text{i} \quad P \in K,$$

gdzie C jest brzegiem K .

W dalszym ciągu rozważymy dwa przypadki:

- a) punkt P jest dowolnym punktem K , różnym od początku układu współrzędnych,
- b) punkt P jest środkiem K .

Rozważmy najpierw przypadek a) i założmy, że punkty P, Q mają w biegunowym układzie odpowiednio współrzędne $P = (r_0, t_0)$, $Q = (\varrho, s)$. Wtedy funkcja $G(P, Q) = G(r_0, t_0, \varrho, s)$ spełnia warunki:

$$(2') \quad G(r_0, t_0, \varrho, s) = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = R, \quad r_0 \in (0, R), \quad t_0, s \in [0, 2\pi),$$

$$(3') \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial G}{\partial \varrho} = 0 \quad \text{dla} \quad \varrho = R, \quad r_0 \in (0, R), \quad t_0, s \in [0, 2\pi).$$

Prawdziwe jest następujące:

Twierdzenie 1 [2]. *Jeżeli funkcje $u_0(Q), u_1(Q)$ są funkcjami harmonicznymi w kole K , to funkcja $u(Q) = u_0(Q) + \varrho^2 u_1(Q)$ jest funkcją biharmoniczną w K .*

Przyjmijmy $p = \varrho/R$. Szeregi

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k (a_k \cos ks + b_k \sin ks), \quad \sum_{k=0}^{\infty} p^k (c_k \cos ks + d_k \sin ks)$$

przy odpowiednich współczynnikach a_k, b_k, c_k, d_k są funkcjami harmonicznymi w K , zatem w oparciu o twierdzenie 1 widzimy, że funkcja

$$(4) \quad G(P, Q) = 2r^2 \ln \frac{\bar{r}r_0}{rR} + \sum_{k=0}^{\infty} p^k (a_k \cos ks + b_k \sin ks) + p^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^k (c_k \cos ks + d_k \sin ks),$$

gdzie $\bar{r} = |\bar{P}Q|$, \bar{P} oznacza obraz punktu P w inwersji względem okręgu $C: x^2 + y^2 = R^2$, ma postać (1). Dobierzemy z kolei współczynniki $a_k, b_k, c_k, d_k, k = 0, 1, 2, \dots$ we wzorze (4) tak, by spełnione były warunki (2'), (3').

Dla $\varrho = R$ z własności inwersji mamy

$$(5) \quad \frac{\bar{r}r_0}{rR} = 1,$$

zatem warunek (2') równoważny jest równości

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos ks + b_k \sin ks) + \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \cos ks + d_k \sin ks) = 0.$$

Stąd otrzymujemy układ równań

$$(6) \quad a_k + c_k = 0, \quad b_k + d_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Przejdziemy z kolei do warunku (3'). Mianowicie, przez proste przeliczenie otrzymujemy

$$\Delta_Q \left(r^2 \ln \frac{\bar{r}r_0}{rR} \right) = 4 \ln \frac{\bar{r}r_0}{rR} + 2 \frac{\bar{r}^2 + r^2 - (\bar{r}_0 - r_0)^2}{\bar{r}^2} - 4,$$

gdzie \bar{r}_0 oznacza odległość punktu \bar{P} od początku układu.

Z (5) wynika, że przy $\varrho = R$

$$\Delta_Q \left(2r^2 \ln \frac{\bar{r}r_0}{rR} \right) = 8 \frac{r_0^2 - R^2}{R^2} \frac{1 - p_1 \cos(s - t_0)}{p_1^2 + 1 - 2p_1 \cos(s - t_0)},$$

gdzie $p_1 = \frac{r_0}{R}$.

Biorąc pod uwagę wzór (por. [3])

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_1^k \cos k(s - t_0) = \frac{1 - p_1 \cos(s - t_0)}{p_1^2 + 1 - 2p_1 \cos(s - t_0)}, \quad |p_1| < 1,$$

otrzymujemy

$$\Delta_Q \left(2r^2 \ln \frac{\bar{r}r_0}{rR} \right) \Big|_{\varrho=R} = 8 \frac{r_0^2 - R^2}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_1^k \cos k(s - t_0).$$

Ponadto

$$\Delta_Q \left[\sum_{k=0}^{\infty} p^k (a_k \cos ks + b_k \sin ks) \right] = 0$$

oraz

$$\Delta_Q \left(p^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^k (c_k \cos ks + d_k \sin ks) \right) = \frac{4}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) p^k (c_k \cos ks + d_k \sin ks).$$

Ostatecznie dla $Q \in C$, tzn. dla $\varrho = R$, mamy

$$\Delta_Q G(P, Q) = 8 \frac{r_0^2 - R^2}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_1^k \cos k(s-t_0) + \frac{4}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (c_k \cos ks + d_k \sin ks).$$

Z (3') mamy

$$2(r_0^2 - R^2) \sum_{k=0}^{\infty} p_1^k \cos k(s-t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) (c_k \cos ks + d_k \sin ks) = 0,$$

więc

$$(7) \quad \begin{cases} 2(r_0^2 - R^2) p_1^k \cos kt_0 + (k+1) c_k = 0, \\ 2(r_0^2 - R^2) p_1^k \sin kt_0 + (k+1) d_k = 0. \end{cases}$$

Z równości (6) i (7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_k &= 2 \frac{r_0^2 - R^2}{k+1} p_1^k \cos kt_0, & b_k &= 2 \frac{r_0^2 - R^2}{k+1} p_1^k \sin kt_0, \\ c_k &= -2 \frac{r_0^2 - R^2}{k+1} p_1^k \cos kt_0, & d_k &= -2 \frac{r_0^2 - R^2}{k+1} p_1^k \sin kt_0 \end{aligned}$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Stąd ostatecznie

$$G(P, Q) = 2r^2 \ln \frac{\bar{r} r_0}{rR} - 2 \frac{(R^2 - r_0^2)(R^2 - \varrho^2)}{R^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho r_0}{R^2} \right)^k \frac{\cos k(s-t_0)}{k+1}.$$

Przejdźmy obecnie do przypadku b), gdy punkt P jest środkiem koła K . Wtedy funkcję $G(P, Q)$ przewidujemy w postaci

$$(8) \quad G(P, Q) = 2\varrho^2 \ln p + \sum_{k=0}^{\infty} p^k (a_k \cos ks + b_k \sin ks) + \sum_{k=0}^{\infty} p^{k+2} (c_k \cos ks + d_k \sin ks).$$

Przeprowadzając rozumowanie podobnie jak w przypadku a) otrzymujemy

$$(9) \quad G(P, Q) = 2\varrho^2 \ln \frac{\varrho}{R} - 2(R^2 - \varrho^2).$$

2. Funkcja Greena dla obszaru kąowego

Podamy konstrukcję funkcji Greena dla zagadnienia Riquiera dla obszaru kąowego $D = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < ax, x^2 + y^2 < R^2\}$; $a = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$, $n = 1, 2, \dots$

Niech $l_1 = \{(x, y) : 0 \leq x < R, y = 0\}$, $l_2 = \left\{ (x, y) : 0 < x < \frac{R}{\sqrt{1+a^2}}, y = ax \right\}$ oraz $l_3 = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 = R^2, \frac{R}{\sqrt{1+a^2}} \leq x < R \right\}$.

Zbiór $l_1 \cup l_2 \cup l_3$ jest brzegiem obszaru D . Niech punkty $P_0 \in D, Q \in D \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3$. Współrzędne biegunowe tych punktów oznaczmy odpowiednio $P_0 = (R_0, t_0), Q = (\varrho, s)$. Niech $r_0 = |P_0 Q|$.

Odbijając punkt P_0 kolejno względem prostych $y = \alpha_k x$, gdzie $\alpha_k = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}$, $k = 1, 2, \dots, 2n-1$, otrzymujemy $2n-1$ punktów, które oznaczmy odpowiednio przez P_k . Niech $r_k = |P_k Q|$. Przyjmijmy, że punkt P_k ma współrzędne biegunowe $P_k = (R_0, t_k)$. Obrazy punktów P_k w inwersji względem okręgu $x^2 + y^2 = R^2$ oznaczmy przez \bar{P}_k dla $k = 0, 1, \dots, 2n-1$. Niech $\bar{r}_k = |\bar{P}_k Q|$.

Lemat 1. Dla $k = 1, 2, \dots, 2n-1$

$$(10) \quad t_k = \frac{2\pi}{n} E\left(\frac{k+1}{2}\right) + (-1)^k t_0,$$

gdzie $E\left(\frac{k+1}{2}\right)$ oznacza część całkowitą liczby $\frac{k+1}{2}$.

Dowód. Gdy k jest liczbą parzystą, to punkt P_k powstaje z punktu P_0 jako obraz w złożeniu k symetrii o osiach $y = \alpha_m x$, $m = 1, 2, \dots, k$. Złożenie k symetrii możemy zastąpić złożeniem $\frac{k}{2}$ obrotów o kącie obrotu $\frac{2\pi}{n}$. Stąd $t_k = t_0 + \frac{2\pi}{n} \frac{k}{2}$. Jeżeli k jest liczbą parzystą, to $E\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{k}{2}$, zatem w tym przypadku zachodzi związek (10).

Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to punkt P_k powstaje z punktu P_{k-1} przez obrót o kąt $2\left(\frac{k\pi}{n} - t_{k-1}\right)$, więc $t_k = \frac{2k\pi}{n} - t_{k-1}$. Korzystając z pierwszej części dowodu oraz z faktu, że $E\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{k+1}{2}$, gdy k jest liczbą nieparzystą, mamy związek (10).

Lemat 2. Zachodzą równości:

$$t_k = 2\pi - t_{2n-1-k} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$t_k = 2\pi + \frac{2\pi}{n} - t_{2n+1-k} \quad \text{dla } k = 2, 3, \dots, n.$$

Dowód. Zauważmy, że $E\left(n - \frac{k}{2}\right) = n - E\left(\frac{k+1}{2}\right)$, zatem

$$t_{2n-1-k} = \frac{2\pi}{n} E\left(\frac{2n-k}{2}\right) + (-1)^{-k-1} t_0 = 2\pi - t_k.$$

Podobnie

$$t_{2n+1-k} = \frac{2\pi}{n} E\left(\frac{2n+2-k}{2}\right) + (-1)^{-k+1} t_0 = 2\pi + \frac{2\pi}{n} - t_k.$$

Niech dla $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$

$$G_k(P_k, Q) = 2r_k^2 \ln \frac{\bar{r}_k R_0}{r_k R} - 2 \frac{(R^2 - R_0^2)(R^2 - \varrho^2)}{R^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho R_0}{R^2}\right)^i \frac{\cos i(s-t_k)}{i+1}.$$

Przyjmijmy

$$(11) \quad G(P_0, Q) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q).$$

Twierdzenie 2. Funkcja $G(P_0, Q)$ określona wzorem (11) jest funkcją Greena z biegunem w punkcie P_0 dla zagadnienia Riquiera w obszarze D .

Dowód. Należy wykazać, że

$$(12) \quad G(P_0, Q) = -2r_0^2 \ln r_0 + H(P_0, Q),$$

gdzie funkcja $H(P_0, Q)$ jest funkcją biharmoniczną punktu Q w obszarze D , gdy $P_0 \in D$,

$$(13) \quad G(P_0, Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C = l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad P_0 \in D,$$

$$(14) \quad \Delta G(P_0, Q) = 0 \quad \text{dla} \quad Q \in C = l_1 \cup l_2 \cup l_3, \quad P_0 \in D.$$

Skoro każda z funkcji $G_k(P_k, Q)$ jest funkcją Greena dla koła $x^2 + y^2 < R^2$ z biegunem odpowiednio w punkcie P_k , więc funkcja $G(P_0, Q)$ jest postaci (12). Dla dowodu (13) rozpatrzmy trzy przypadki:

a) $Q \in l_1$, wtedy $s = 0$. Z pierwszej części lematu 2 wynika, że

$$G_k(P_k, Q) = G_{2n-1-k}(P_{2n-1-k}, Q); \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

więc

$$\begin{aligned} G(P_0, Q) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q) + \sum_{k=n}^{2n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_k(P_k, Q) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k G_{2n-1-k}(P_{2n-1-k}, Q) = 0. \end{aligned}$$

b) $Q \in l_2$, wtedy $s = \frac{\pi}{n}$. Z drugiej części lematu 2 wynika, że $\cos\left(\frac{\pi}{n} - t_{2n+1-k}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n} - t_k\right)$; $k = 2, 3, \dots, n$ oraz $\cos\left(\frac{\pi}{n} - t_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n} - t_0\right)$, zatem

$$G_0(P_0, Q) = G_1(P_1, Q) \quad \text{i} \quad G_k(P_k, Q) = G_{2n+1-k}(P_{2n+1-k}, Q); \quad k = 2, 3, \dots, n.$$

Stąd, podobnie jak w przypadku a), otrzymujemy $G(P_0, Q) = 0$.

c) $Q \in l_3$, wtedy $\varrho = R$, zatem $G_k(P_k, Q) = 0$ dla $k = 1, 2, \dots, 2n-1$. Zatem również $G(P_0, Q) = 0$, co kończy dowód równości (13).

Dla dowodu równości (14) zauważmy, że

$$\Delta_Q G_k(P_k, Q) = 8 \ln \frac{\bar{r}_k R_0}{r_k R} + 4 \frac{\bar{r}_k^2 + r_k^2 - (\bar{R}_0 - R_0)^2}{\bar{r}_k^2} - 8 +$$

$$+ 8 \frac{R^2 - R_0^2}{R^2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\rho R_0}{R^2} \right)^i \cos i(s - t_k).$$

Postępując podobnie jak przy dowodzie równości (13), otrzymujemy równość (14).

Niech funkcje f_1, f_2 będą funkcjami określonymi na brzegu C obszaru D . Wtedy, przy pewnych założeniach o funkcjach f_1, f_2 , można udowodnić, że funkcja

$$u(x, y) = u(P_0) = \frac{1}{8\pi} \left(\int_C \left[f_1(Q) \frac{d\Delta_Q G(P_0, Q)}{dn_Q} + f_2(Q) \frac{dG(P_0, Q)}{dn_Q} \right] ds_Q \right)$$

jest funkcją biharmoniczną w obszarze D oraz $u(P_0)|_C = f_1(P_0)$, $u(P_0)|_C = f_2(P_0)$, gdzie n jest normalną do brzegu C skierowaną do wnętrza obszaru D .

Literatura cytowana w tekście

1. M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques*, Paris 1936.
2. M. KRZYŻAŃSKI, *Partial differential equation of second order*, Vol I, Warszawa 1972.
3. И. С. ГРАДШТЕЙН, Ю. М. РИЖИК, *Таблицы интегралов, сум, рядов и произведений*, Москва 1963.

Резюме

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОБЛАСТИ КРУГА И КРУГОВОГО СЕКТОРА

В работе показано построение функции Грина для двумерного бигармонического уравнения в случае круга и кругового сектора с центральным углом π/n удовлетворяющей на ограничивающем контуре C следующим краевым условиям $u(x, y)|_C = 0$, $\Delta u(x, y)|_C = 0$.

Summary

THE CONSTRUCTION OF THE GREEN FUNCTION FOR BIHARMONIC EQUATION FOR THE CIRCULAR DOMAIN OR CIRCULAR SECTOR

In the paper the Green function for equation $\Delta^2 u(x, y) = 0$ and circular domain and circular sector with boundary data of Riquier type, i.e. $u(x, y)|_C = 0$, $\Delta u(x, y)|_C = 0$, is effectively constructed. C denotes the boundary of the convenient domain.

WYŻSZA SZKOŁA PEDAGOGICZNA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1974 r.

ZASTOSOWANIE RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO TWORZENIA MACIERZY SZTYWNOŚCI
W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH NA PRZYKŁADZIE ZGINANEJ PŁYTY

KRZYSZTOF DEMS, JANUSZ LIPIŃSKI (ŁÓDŹ)

1. Wstęp

Stosowanie metody elementów skończonych prowadzi w efekcie do rozwiązania układu równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych. Ilość tych niewiadomych zależy od liczby węzłów wprowadzonych w ciele oraz od ilości stopni swobody wprowadzonych w każdym węźle i jest ona równa iloczynowi liczby węzłów i ilości stopni swobody w węźle. Przyjęta ilość stopni swobody w węźle decyduje o własnościach wprowadzonej funkcji przemieszczeń wewnątrz elementu, a przede wszystkim na krawędziach elementów stykających się.

W zagadnieniu zginania płyty przyjęcie w węźle elementu krzywoliniowego trzech stopni swobody zapewnia jedynie ciągłość ugięć na granicy elementów [4]. Wprowadzając natomiast cztery lub więcej stopni swobody w węźle można uzyskać ciągłość funkcji ugięcia wraz z jej pochodnymi nie tylko w obszarze jednego elementu, ale w obszarze całej płyty. Odbywa się to jednak kosztem znacznego zwiększenia liczby niewiadomych w rozwiązywanym układzie równań [2].

W pracy podjęto próbę zachowania ciągłości funkcji ugięcia i jej pochodnych przy równoczesnym zmniejszeniu ilości stopni swobody każdego węzła. Jako stopnie swobody węzła przyjęto jedynie jego ugięcie, a odpowiednie pochodne tego ugięcia zastąpiono ilorazami różnicowymi. Prowadzi to w efekcie do układu równań, w którym liczba niewiadomych równa jest liczbie węzłów. Metodę opartą na takich założeniach przedstawiono na przykładzie wyznaczania macierzy sztywności krzywoliniowego elementu cienkiej, izotropowej zginanej płyty.

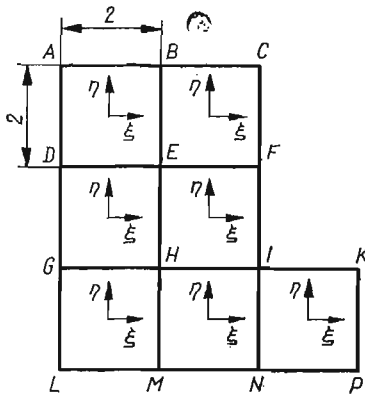
2. Funkcje jednostkowe w elemencie

Rozpatrzmy obszar składający się z kwadratowych elementów o wymiarze boków 2×2 , leżących w jednej płaszczyźnie (rys. 1). Z każdym elementem związany jest lokalny układ współrzędnych ξ, η o początku leżącym w środku ciężkości elementu i osiach równoległych do boków elementu. Wierzchołki każdego elementu nazywać będziemy dalej węzłami. Rozpatrzmy jeden z elementów tego obszaru (rys. 2). Przyjmijmy, że w obszarze tego elementu istnieje ciągła i różniczkowalna funkcja dwóch zmiennych

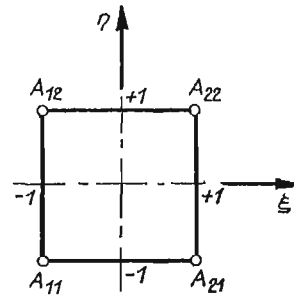
$F(\xi, \eta)$, której postać nie jest znana. Zgodnie z przyjętym w metodzie elementów skończonych postępowaniem, funkcję tę można zastąpić jej przybliżeniem w postaci [8]

$$(2.1) \quad F(\xi, \eta) = [Q^{ik}] \cdot \{f_{ik}\},$$

gdzie $\{f_{ik}\}$ jest zbiorem wartości w węzłach przybliżanej funkcji oraz jej pochodnych. $[Q^{ik}]$ jest natomiast macierzą funkcyjną tzw. funkcji jednostkowych, tak obranych, aby dawały odpowiednie wartości funkcji lub jej pochodnych w węzłach, gdy do (2.1) wstawiane będą współrzędne odnośnych węzłów.



Rys. 1



Rys. 2

W dalszej części pracy przyjmować będziemy dwa rodzaje zbioru $\{f_{ik}\}$:

- zbiór wartości węzłowych zawiera jedynie wartości funkcji w każdym węźle,
- zbiór wartości węzłowych zawiera wartości funkcji oraz wartości obu jej pierwszych pochodnych i drugiej pochodnej mieszanej względem ξ, η w każdym węźle.

W przypadku pierwszym funkcje jednostkowe Q^{ik} przedstawimy jako iloczyny wielomianów Lagrange'a w postaci

$$(2.2) \quad Q^{ik}(\xi, \eta) = L^i(\xi)L^k(\eta), \quad i, k = 1, 2;$$

L jest tu funkcją jednej zmiennej o własności

$$L^i(z_j) = \delta_{ik},$$

gdzie

- i — indeks węzła dla którego opisana jest funkcja,
- j — indeks węzła w którym obliczana jest wartość funkcji,
- δ_{ij} — symbol Kroneckera.

Dla elementu z rys. 2 funkcje te mają *explicité* postać:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} L^1 &= \frac{1}{2}(-z+1), \\ L^2 &= \frac{1}{2}(z-1). \end{aligned}$$

W przypadku drugim funkcje jednostkowe Q^{ik} przedstawimy jako iloczyn wielomianów Hermite'a w postaci [2]:

$$(2.4) \quad Q^{ikpq} = H^{ip}(\xi)H^{kq}(\eta), \quad i, k, p, q = 1, 2;$$

H jest tu funkcją jednej zmiennej o własności

$$\frac{d^j H^{ip}(z_k)}{dz^j} = \delta_{ik} \delta_{jp},$$

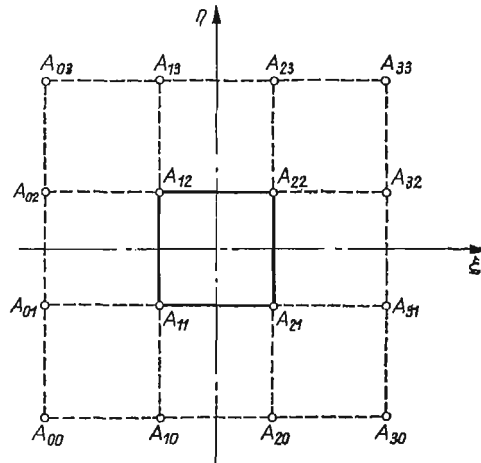
gdzie

- i — indeks węzła dla którego opisana jest funkcja,
- k — indeks węzła, w którym obliczana jest wartość funkcji,
- p — rząd wielomianu Hermite'a,
- j — rząd pochodnej względem zmiennej z .

Tak opisana funkcja (2.1) wymaga znajomości w węźle czterech parametrów. Zbiór wartości węzłowych dla rozpatrywanego elementu (rys. 2) przyjmuje zatem postać

$$(2.5) \quad \{f_{ik}\}^T = \{f_{11}, f_{11,\xi}, f_{11,\eta}, f_{11,\xi\eta}, f_{12}, f_{12,\xi}, \dots, f_{22,\xi\eta}\}^T.$$

W celu zmniejszenia ilości parametrów w węźle zastąpmy odpowiednie pochodne węzłowe ilorazami różnicowymi. Dołączamy w tym celu do rozpatrywanego elementu



Rys. 3

elementy sąsiednie (rys. 3). Odpowiednie pochodne funkcji w węzłach rozpatrywanego elementu można teraz wyrazić w postaci:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f_{ik,\xi} &= \frac{1}{4}(f_{i+1,k} - f_{i-1,k}), \\ f_{ik,\eta} &= \frac{1}{4}(f_{i,k+1} - f_{i,k-1}), \\ f_{ik,\xi\eta} &= \frac{1}{16}(f_{i+1,k+1} + f_{i-1,k-1} - f_{i+1,k-1} - f_{i-1,k+1}). \end{aligned}$$

Wykorzystując (2.6) w (2.5) i przekształcając następnie prawą stronę (2.1), funkcje jednostkowe (2.4) wyrazimy w formie

$$(2.7) \quad Q^{ik} = F^i(\xi)F^k(\eta), \quad i, k = 0, 1, 2, 3,$$

gdzie funkcje F są wyrażone przez wielomiany Hermite'a

$$F^0 = \frac{1}{4}H^{12}, \quad F^2 = -\frac{1}{4}H^{12} - H^{21},$$

$$F^1 = \frac{1}{4}H^{22} - H^{11}, \quad F^3 = -\frac{1}{4}H^{22}.$$

Dla elementu z rys. 3 funkcje te mają *explicité* postać:

$$(2.8) \quad F^0 = \frac{1}{16}(z^3 - z^2 - z + 1), \quad F^2 = \frac{1}{16}(3z^3 + z^2 - 11z - 9),$$

$$F^1 = \frac{1}{16}(-3z^3 + z^2 + 11z - 9), \quad F^3 = \frac{1}{16}(-z^3 - z^2 + z - 1).$$

Zauważmy, że określona w ten sposób funkcja (2.1), w której funkcje jednostkowe wyrażone są przez (2.7), zależy w dalszym ciągu od 16 parametrów węzłowych węzłów danego elementu i elementów sąsiednich (rys. 3), ale liczba parametrów węzłowych została zmniejszona do jednego — wartości funkcji w węźle.

Postać funkcji jednostkowych wpływa w decydujący sposób na własności funkcji (2.1) przy przejściu z elementu do elementu. Jeżeli funkcje jednostkowe opisane są przez (2.2), to na wspólnym brzegu dwóch sąsiednich elementów (rys. 1) zachowana jest równość jedynie wartości funkcji określonych w każdym elemencie. Jeżeli natomiast funkcje jednostkowe określimy przez (2.7), to podobnie jak przy stosowaniu wielomianów Hermite'a i czterech parametrów w węźle [2], zachowana jest na wspólnym brzegu równość wartości funkcji, jej obu pierwszych pochodnych i drugiej pochodnej mieszanej, przy stosowaniu tylko jednego parametru węzłowego.

3. Transformacja układu współrzędnych

Jeżeli rozpatrywać będziemy płytę dowolnego kształtu, to odwzorowanie jej poprzez zbiór elementów kwadratowych wymagać będzie z jednej strony dużej liczby elementów, a z drugiej — mogą wystąpić trudności z dokładnym odwzorowaniem brzegu płyty.

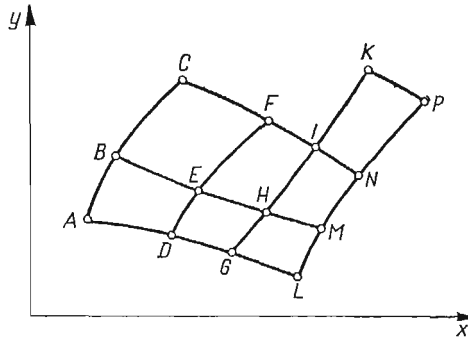
Dla stworzenia możliwości wprowadzania dostatecznie małej liczby elementów, przy równoczesnym dokładnym odwzorowaniu brzegu płyty, stosuje się przekształcenie elementu kwadratowego na inny, o bardziej dowolnym kształcie. Przekształcenie to polega na transformacji lokalnego układu współrzędnych ξ, η w elemencie do układu globalnego x, y . Wzajemna odpowiedniość między układem lokalnym i globalnym ma postać:

$$(3.1) \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta).$$

Najbardziej wygodny sposób przeprowadzenia transformacji (3.1) polega na wykorzystaniu w niej omówionych w pkt. 2 funkcji jednostkowych. Wzory transformacyjne (3.1) można przedstawić w postaci podobnej do (2.1):

$$(3.2) \quad x = [Q^{ik}] \cdot \{x_{ik}\}, \quad y = [Q^{ik}] \cdot \{y_{ik}\},$$

gdzie zbiory $\{x_{ik}\}$ oraz $\{y_{ik}\}$ są współrzędnymi węzłów elementu w układzie globalnym x, y . Przy tego rodzaju transformacji obszar przedstawiony na rys. 1 staje się odwzorowaniem płyty dowolnego kształtu przedstawionej na rys. 4. Elementy kwadratowe na rys. 1 są odwzorowaniem krzywoliniowych elementów czworokątnych z rys. 4, na które podzielona została płyta. Taki sposób odwzorowania obszaru w metodzie elementów skończonych wprowadził po raz pierwszy TAIG [5], a uogólnili ten pomysł IRONS [3], COONS [1] i inni.



Rys. 4

Jako funkcje jednostkowe w (3.2) wykorzystać można zarówno funkcje (2.2) jak i funkcje (2.7), uzyskując odpowiednio na wspólnym brzegu sąsiednich elementów w układzie lokalnym równość współrzędnych globalnych krzywoliniowego brzegu elementów lub też równość współrzędnych i ich pierwszych pochodnych oraz pochodnej mieszanej względem ξ, η .

4. Funkcja ugięcia w elemencie krzywoliniowym

Ugięcia wewnątrz elementu płyty określać będziemy w lokalnym układzie współrzędnych. Funkcję ugięcia środkowej powierzchni elementu przyjmiemy zatem w postaci podobnej do (2.1)

$$(4.1) \quad w(\xi, \eta) = [Q^{ik}] \cdot \{w_{ik}\}.$$

Jako funkcje jednostkowe przyjmiemy funkcje (2.7), a za zbiór parametrów węzłowych $\{w_{ik}\}$ przyjmiemy ugięcia węzłów danego elementu i elementów sąsiednich (rys. 3). Tak określona funkcja (4.1) przy przejściu z elementu do elementu zachowuje ciągłość ugięcia, obu pierwszych pochodnych i pochodnej mieszanej w układach lokalnych.

Przechodząc z kolei do układu globalnego, w zależności od postaci wzorów transformacyjnych (3.2) rozpatrywać będziemy dwa typy elementów [8]:

- elementy subparametryczne,
- elementy izoparametryczne.

W elemencie subparametrycznym jako funkcje jednostkowe transformacji (3.2) wykorzystuje się funkcje (2.2), w wyniku czego geometria elementu określana jest jedynie przez współrzędne węzłów rozpatrywanego elementu. W funkcji ugięcia natomiast funkcje

jednostkowe określone są przez (2.7), co powoduje, że ugięcie wewnątrz elementu zależy od ugięć węzłów danego elementu i jego sąsiadów. Tak przyjęte funkcje jednostkowe w (3.2) i (4.1) zapewniają w układzie globalnym jedynie ciągłość ugięć wzdłuż krzywoliniowego brzegu sąsiednich elementów.

W elemencie izoparametrycznym funkcje jednostkowe w (3.2) i (4.1) są przyjęte w tej samej postaci (2.7). W wyniku tego geometria elementu i ugięcia określane są przy pomocy tych samych węzłów. Powoduje to zachowanie na wspólnym brzegu ciągłości nie tylko ugięć ale również ich pierwszych pochodnych względem współrzędnych globalnych x, y .

W obu omówionych typach elementu przyjęte wzory transformacyjne (3.2) i funkcja ugięcia (4.1) zapewniają ściśle odwzorowanie przemieszczeń jednorodnych, co stanowi kryterium przydatności proponowanych funkcji jednostkowych [8].

5. Macierz sztywności elementu

Macierz sztywności elementu przedstawić można w znanej postaci [8]

$$(5.1) \quad [\mathbf{K}] = \int \int [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dx dy,$$

gdzie $[\mathbf{D}]$ jest macierzą stałych sprężystych, a $[\mathbf{B}]$ jest macierzą określającą związek między odkształceniami w dowolnym punkcie elementu a ugięciami węzłów elementu.

W przypadku zginania cienkiej płyty izotropowej macierz stałych sprężystych $[\mathbf{D}]$ przyjmuje postać:

$$(5.2) \quad [\mathbf{D}] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

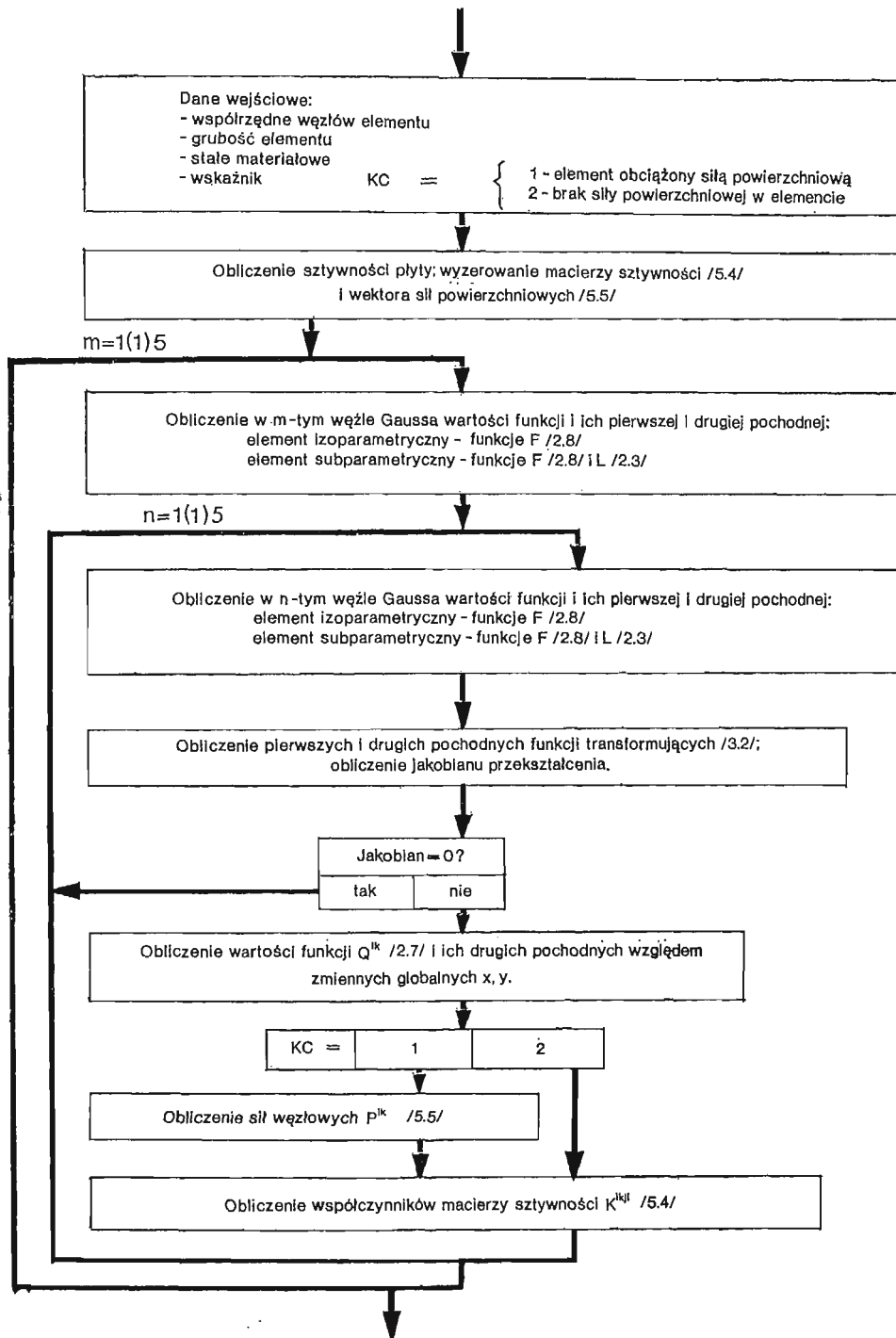
gdzie D jest sztywnością płyty. Natomiast macierz $[\mathbf{B}]$ przedstawimy w postaci

$$(5.3) \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [Q^{ik}]_{,xx} \\ [Q^{ik}]_{,yy} \\ [Q^{ik}]_{,xy} \end{bmatrix},$$

gdzie Q^{ik} są funkcjami jednostkowymi (2.7). Uwzględniając (5.2) i (5.3) w (5.1) i dokonując zamiany zmiennych globalnych na lokalne, uzyskujemy macierz sztywności elementu płyty, której współczynniki określone są wzorem:

$$(5.4) \quad K^{ijkl} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 D [(Q^{ik}_{,xx} + Q^{ik}_{,yy})(Q^{jl}_{,xx} + Q^{jl}_{,yy}) - (1-\nu)(Q^{ik}_{,xx} Q^{jl}_{,yy} + \\ + Q^{ik}_{,yy} Q^{jl}_{,xx} - 2Q^{ik}_{,xy} Q^{jl}_{,xy})] J d\xi d\eta,$$

gdzie J jest jakobianem przekształcenia. Występujące w (5.4) drugie pochodne funkcji jednostkowych względem współrzędnych globalnych x, y wyznacza się w oparciu o drugie pochodne tych funkcji względem współrzędnych lokalnych ξ, η i wzorów transformacyjnych (3.2).



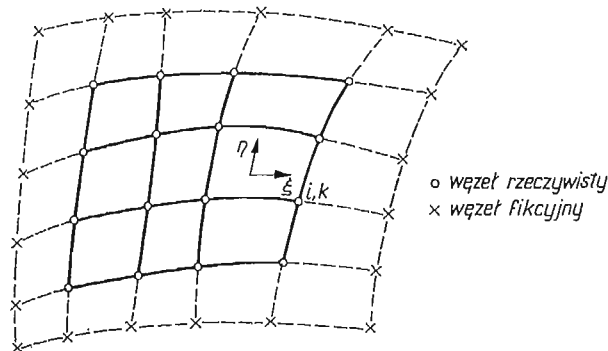
Rys. 5

Jeżeli element płyty obciążony jest siłami rozłożonymi na jego powierzchni, przy wyznaczaniu macierzy sztywności korzystnie jest znaleźć siły węzłowe wywołane tym obciążeniem. Siły te określone są zależnościami [8]:

$$(5.5) \quad P^{ik} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q^{ik} p(\xi, \eta) J d\xi d\eta,$$

gdzie $p(\xi, \eta)$ jest funkcją rozkładu obciążenia na powierzchni elementu.

Wyznaczanie współczynników (5.4) oraz sił (5.5) najwygodniej przeprowadzić jest na drodze numerycznej, wykorzystując do całkowania metodę Gaussa. Algorytm wyzna-



Rys. 6

czenia współczynników macierzy sztywności oraz sił węzłowych przedstawiono na rys. 5. Algorytm ten został zrealizowany w formie podprogramu napisanego w języku FORTRAN-1900.

6. Warunki brzegowe

Przyjęta postać (4.1) funkcji ugięcia wewnątrz elementu narzuca określony sposób realizacji warunków brzegowych na krawędziach płyty. Ponieważ funkcja ta zależy od ugięć węzłów elementu i jego sąsiadów koniecznym staje się wprowadzenie dla elementów brzegowych dodatkowych węzłów fikcyjnych leżących poza obszarem płyty, podobnie jak w metodzie różnic skończonych (rys. 6). Siatka linii parametrycznych lokalnego układu współrzędnych wprowadzonego w elemencie pokrywa się na jego krawędziach z kierunkiem stycznym i normalnym do tych krawędzi. Na krawędzi $\xi = \text{const}$ kierunek ξ jest kierunkiem normalnym (n) do krawędzi, a kierunek η jest kierunkiem stycznym (t). Na krawędziach $\eta = \text{const}$ jest odwrotnie. Rozpatrzmy zatem typowe sposoby podparcia krawędzi płyty.

Na brzegu swobodnie podpartym ugięcie w , jak również moment zginający w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi muszą być równe zero. Zerowanie się tego momentu prowadzi do warunku $w_{,nn} = 0$ [6]. Realizację pierwszego warunku (zerowe ugięcia) zapewnia się przez założenie zerowych ugięć węzłów leżących na krawędzi elementu. Warunek zerowania się momentu zginającego wynika w sposób przybliżony z rozwiąza-

nia. Dokładność spełnienia tego warunku rośnie wraz z zagęszczaniem siatki podziału płyty na elementy.

W przypadku brzegu utwierdzonego żądamy aby na krawędzi elementu ugięcie i jego pochodna normalna były równe zeru. Warunek pierwszy realizujemy identycznie jak w przypadku brzegu swobodnie podpartego; natomiast spełnienie warunku na pochodną normalną zapewnia się przez założenie równości ugięć węzła fikcyjnego i odpowiedniego węzła wewnętrznego najbliższego krawędzi elementu. Na przykład dla węzła brzegowego i, k (rys. 6) warunek ten ma postać $w_{i+1, k} = w_{i-1, k}$.

Spełnienie warunków brzegowych na brzegu swobodnym wynika w sposób przybliżony z rozwiązania. Dokładność spełnienia tego warunku zwiększa się wraz z zagęszczeniem siatki podziału płyty na elementy.

Przedstawiony sposób realizacji warunków brzegowych zapewnia dokładne ich spełnienie jedynie dla brzegu utwierdzonego. Istnieją metody, które zapewniają dokładne spełnienie warunków brzegowych dla pozostałych dwóch przypadków. Polegają one na zapewnieniu zerowania się pochodnych ugięcia na drodze iteracyjnej bądź też przez nałożenie na funkcję ugięcia pewnych dodatkowych ograniczeń. To ostatnie wymaga wprowadzenia do zbioru wartości węzłowych $\{w_{ik}\}$ dodatkowych zmiennych pozawęzłowych w postaci mnożników Lagrange'a [7]. Niech ograniczenie nałożone na funkcję ugięcia ma postać:

$$(6.1) \quad [G] \cdot \{w_{ik}\} = 0,$$

gdzie $[G]$ jest macierzą stałych. Wprowadzając mnożniki Lagrange'a $\{\lambda\}$ jako dodatkowe zmienne pozawęzłowe, energię potencjalną elementu płyty przedstawimy w postaci [8]

$$U = \frac{1}{2} \{w_{ik}\}^T [K] \{w_{ik}\} - \{w_{ik}\}^T \{R\} + ([G] \cdot \{w_{ik}\})^T \{\lambda\} = \text{extremum},$$

co prowadzi do układu równań:

$$(6.2) \quad \begin{bmatrix} [K] & [G]^T \\ [G] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{w_{ik}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\} \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Pierwszy składnik (6.2) stanowi teraz nową macierz sztywności elementu, uwzględniającą dodatkowe ograniczenia nałożone na ugięcia. Przykładowo, nałożmy na ugięcia wewnątrz elementu dodatkowe ograniczenie w postaci:

$$(6.3) \quad (w_{, \xi \xi})_{\xi=1} = 0.$$

Ograniczenie to zapewnia zerowanie się momentu M_n na krawędzi $\xi = 1$, co powoduje dokładne spełnienie warunków brzegowych na krawędzi swobodnie podpartej. Proces wyznaczania macierzy $[G]$ z (6.1) jest wtedy następujący: drugą pochodną w kierunku normalnym funkcji ugięcia uzyskamy przez dwukrotne zróżniczkowanie względem ξ wzoru (4.1). Jeżeli podstawimy następnie w miejsce ξ wartość 1, to pochodna ta wyrazi się zależnością:

$$(6.4) \quad (w_{, \xi \xi})_{\xi=1} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 F^{(k)}(\eta) (w_{0k} - 4w_{1k} + 5w_{2k} - 2w_{3k}).$$

Z kolei żądanie, aby pochodna ta była równa zero wzdłuż całej krawędzi $\xi = 1$, wymaga spełnienia układu równań:

$$(6.5) \quad w_{0k} - 4w_{1k} + 5w_{2k} - 2w_{3k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Macierz $[G]$ przyjmie więc postać:

$$(6.6) \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

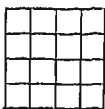
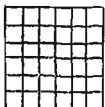
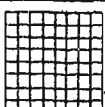
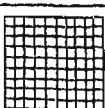
W podobny sposób można uzyskać macierz $[G]$ dla warunków na pozostałych krawędziach.

7. Przykłady liczbowe

Wykorzystując macierz sztywności opisaną w pkt. 5 obliczono ugięcia oraz momenty zginające w płycie kwadratowej przy różnych sposobach podparcia i przy stosowaniu różnej liczby elementów.

W tabelicy 1 przedstawiono wartości ugięć oraz momentów zginających dla kwadratowej płyty podpartej swobodnie na krawędziach (rys. 7) obciążonej siłą skupioną w środ-

TABLICA 1

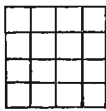
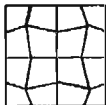
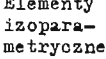
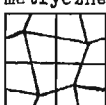
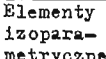
Podział płyty	Siła skupiona			Obciążenie ciągłe			
	$w_1 / \frac{Pa^2}{D}$	M_{x2}/P	M_{y2}/P	$w_1 / \frac{qa^4}{D}$	M_{x1}/qa^2	M_{x2}/qa^2	M_{y2}/qa^2
	0.01091	-0.00393	-0.00118	0.003960	0.05084	0.00329	0.00099
	0.01103	-0.00036	-0.00011	0.003985	0.04946	0.00169	0.00051
	0.01115	-0.00011	-0.00003	0.004009	0.04887	0.00102	0.00031
	0.01125	-0.00006	-0.00002	0.004026	0.04856	0.00068	0.00020
Dokładne	0.01160	0.0	0.0	0.004062	0.04790	0.0	0.0

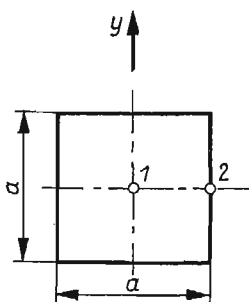
ku płyty oraz równomiernym obciążeniem ciągłym, przy podziale jej na różną ilość regularnych elementów izoparametrycznych.

Tablica 2 przedstawia wartości ugięć i momentów zginających dla tej samej płyty przy dwóch wersjach jej podziału na tę samą ilość elementów izoparametrycznych oraz subparametrycznych.

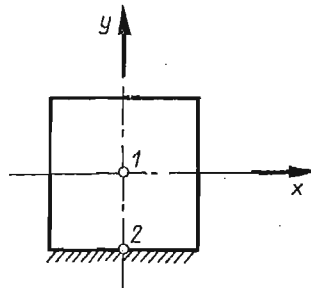
W tablicy 3 przedstawiono wartości momentów zginających wzdłuż krawędzi $x = a/2$ (rys. 7) oraz ugięć wzdłuż linii $y = 0$, dla jednej wersji jej podziału na elementy z uwzględ-

TABLICA 2

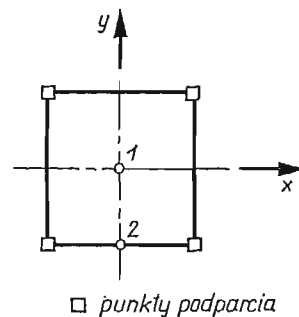
Podział płyty	Siła skupiona			Obciążenie ciągłe			
	$w_1/Pa^2/D$	M_{x2}/P	M_{y2}/P	$w_1/qa^4/D$	M_{x1}/qa^2	M_{x2}/qa^2	M_{y2}/qa^2
	0.01091	-0.00393	-0.00118	0.003960	0.05084	0.00329	0.00099
Elementy subparametryczne 	0.00926	-0.00023	-0.00007	0.003561	0.04425	-0.00247	-0.00074
Elementy izoparametryczne 	0.01069	-0.00004	-0.00001	0.003872	0.05471	0.00270	0.00081
Elementy subparametryczne 	0.00940	0.00031	0.00009	0.003334	0.04740	0.01210	0.00364
Elementy izoparametryczne 	0.00905	0.00070	0.00021	0.003225	0.04532	0.02360	0.00703



Rys. 7



Rys. 8



□ punkty podparcia

Rys. 9

TABLICA 3

	bez dodatkowych zmiennych poza-węzłowych	z dodatkowymi zmiennymi poza-węzłowymi	
M_{x1}/qa^2	0.0	0.0	
M_{y1}/qa^2	0.0	0.0	
M_{xy1}/qa^2	-0.03386	-0.03192	
M_{x2}/qa^2	0.00312	0.0	
M_{y2}/qa^2	0.00094	0.0	
M_{xy2}/qa^2	-0.01904	-0.01876	
M_{x3}/qa^2	0.00329	0.0	
M_{y3}/qa^2	0.00099	0.0	
M_{xy3}/qa^2	0.0	0.0	
$w_3/\frac{qa^4}{D}$	0.0	0.0	
$w_4/\frac{qa^4}{D}$	0.002892	0.002894	
$w_5/\frac{qa^4}{D}$	0.003960	0.003962	

TABLICA 4

Podział płyty	trzy krawędzie podparte swobodnie, jedna utwierdzona			podparcie w narożach		
	$w_1/\frac{qa^4}{D}$	M_{x1}/qa^2	M_{y1}/qa^2	$w_1/\frac{qa^4}{D}$	M_{x1}/qa^2	M_{x2}/qa^2
	0.0024	0.0321	0.0429	0.0238	0.1181	0.1548
	0.0025	0.0323	0.0407	0.0242	0.1148	0.1527
	0.00254	0.0325	0.0399	0.0245	0.1135	0.1516
	0.0026	0.0326	0.0395	0.0248	0.1129	0.1512
Dokładne	0.0028	0.034	0.039	0.0249	0.1090	0.1404

nieniem oraz bez uwzględnienia dodatkowych ograniczeń nałożonych na funkcję ugięcia, a gwarantujących dokładne spełnienie warunków brzegowych. Wymagało to wprowadzenia dodatkowych zmiennych pozawęzłowych w postaci mnożników Lagrange'a.

Wartości ugięć i momentów zginających dla płyty kwadratowej obciążonej równomiernie na całej powierzchni o trzech krawędziach swobodnie podpartych i jednej utwierdzonej (rys. 8) oraz takiej samej płyty podpartej tylko w narożach (rys. 9) przedstawiono w tablicy 4.

8. Wnioski końcowe

Przedstawione w tablicach 1, 2 i 4 wyniki wskazują na zbieżność przyjętej metody obliczeń, dla różnych sposobów podparcia płyty, wraz ze wzrostem liczby elementów, na które dzieli się rozpatrywany obszar. Elementy o kształtach regularnych zapewniają dokładniejsze odwzorowanie rzeczywistego stanu naprężeń i odkształceń wewnątrz obszaru płyty, niż elementy kształtu dowolnego (tablica 2). Tłumaczy się to z jednej strony faktem, że w elementach regularnych zapewniona jest w sposób automatyczny ciągłość wyższych pochodnych funkcji przemieszczeń, a z drugiej strony równomiernym rozmieszczeniem węzłów wewnątrz rozpatrywanego obszaru. Wskazuje to na celowość stosowania regularnego podziału wszędzie tam gdzie jest to możliwe. Elementy krzywoliniowe należy stosować przede wszystkim przy odwzorowywaniu krzywoliniowego brzegu obszaru. Na dokładność odwzorowania stanu naprężeń i odkształceń istotny wpływ ma również dokładność spełniania założonych warunków brzegowych. Wyniki przedstawione w tablicy 3 wskazują na celowość wprowadzania dodatkowych zmiennych pozawęzłowych umożliwiających dokładne spełnienie założonych warunków brzegowych w sposób opisany w pkt. 7.

Stosowanie metody elementów skończonych prowadzi w efekcie do rozwiązywania układu równań liniowych o dużej liczbie niewiadomych, zależnej od ilości stopni swobody w każdym węźle rozpatrywanego obszaru. Dążąc do zapewnienia ciągłości funkcji przemieszczeń w całym rozpatrywanym obszarze należy w każdym węźle wprowadzić dużą liczbę stopni swobody (przemieszczenia i ich pochodne). W przedstawionej pracy podjęto próbę zachowania wspomnianej ciągłości przy równoczesnym ograniczeniu liczby stopni swobody węzła. Zastąpienie pochodnych przemieszczenia w węźle ilorazami różnicowymi przemieszczeń węzłów sąsiednich pozwoliło, w przypadku płyty, ograniczyć liczbę stopni swobody węzła do jednego. Zatem zaletą proponowanej metody jest ograniczenie wielkości rozwiązywanego układu równań w porównaniu z tzw. prostą metodą elementów skończonych [4], [8], przy równoczesnym zachowaniu ciągłości przemieszczeń w całym rozpatrywanym obszarze. Pamiętając, że dokładność odwzorowania rzeczywistego stanu naprężeń i odkształceń jest przede wszystkim funkcją gęstości podziału ciała na elementy, przedstawiony powyżej sposób postępowania ma więc również i tę zaletę, że pozwala na wprowadzenie w rozpatrywanym obszarze dużej liczby elementów bez nadmiernego rozbudowywania rozwiązywanego układu równań, którego maksymalna wielkość może być z drugiej strony ograniczona parametrami technicznymi będącej do dyspozycji maszyny cyfrowej.

Literatura cytowana w tekście

1. S. A. COONS, *Surfaces for computer aided design of space form*, M.I.T. Project MAC MAC-TR-41, 1967.
2. K. DEMS, *Wielostopniowa synteza i wielomiany Hermite'a w metodzie elementów skończonych*, Rozprawa doktorska, Łódź 1971.
3. B. M. IRONS, *Engineering application of numerical integration in stiffness method*, J.A.I.A.A., 14, 2035—37, 1966.
4. J. SZMELTER, S. DOBROCIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty*, Biuletyn WAT, 4, 100, 1969.
5. I. C. TAIG, *Structural analysis by the matrix displacement method*, Engl. Electric Aviation Report, SO 17, 1961.
6. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, 1962.
7. R. WEINSTOCK, *Calculus of variations*, McGraw-Hill, 1952.
8. O. C. ZIENKIEWICZ, *The finite element method in engineering science*, McGraw-Hill, 1971.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦ
ЖЕСТКОСТИ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ
ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ

В работе представлена, на примере изгибаемой пластины, попытка применения метода конечных разностей для определения матрицы жесткости элемента. В качестве степеней свободы приняты лишь только их перемещения в перпендикулярном к недеформированной поверхности пластины направлении. Выведены соответствующие зависимости и приведен алгоритм определения матрицы жесткости. В работе представлены примеры численных расчетов.

Summary

APPLICATION OF FINITE-DIFFERENCES TO THE DETERMINATION
OF THE STIFFNESS MATRIX OF FINITE ELEMENTS METHOD
EXEMPLIFIED BY THE PLATE BENDING

The present paper deals with the application of finite-difference method to the determination of the stiffness matrix of element, exemplified by the plate bending. The displacements of nodes in the normal direction to the undeformed surface of the plate are the only degrees of freedom. The proper formulae have been derived and the algorithm of the determination of the stiffness matrix has also been presented. The paper is illustrated by the numerical examples.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 kwietnia 1974 r.

POWOLNE PRZEPŁYWY CIECZY LEPKOSPĘŻYSTYCH W OBSZARACH WEJŚCIOWYCH RUR I KANAŁÓW

STEFAN ZAHORSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Znajomość zjawisk występujących w obszarach wejściowych przewodów o różnych kształtach posiada istotne znaczenie dla badania przepływów technologicznych, a zwłaszcza przepływów spotykanych w przetwórstwie polimerów.

W przypadku cieczy newtonowskich lub cieczy czysto lepkich, opisywanych potęgowymi równaniami konstytutywnymi, najczęściej stosowano metody opierające się na sformułowanej przez PRANDTLA i von KÁRMÁNA teorii warstwy przyściennej (por. [1, 2, 3, 4, 5]). Szeroko również wykorzystywano podejścia polegające na numerycznym całkowaniu zlinearyzowanych równań Naviera-Stokesa; pozwalały one ocenić przybliżenia i ograniczenia wynikające ze stosowania koncepcji warstwy przyściennej. Należy podkreślić, że wyniki uzyskiwane dla lepkich cieczy nienewtonowskich nie wniosły wiele nowego do jakościowego opisu przepływów w porównaniu z wcześniejszymi wynikami uzyskanymi dla cieczy newtonowskich przy umiarkowanie dużych liczbach Reynoldsa. Z drugiej strony, zachowanie się cieczy newtonowskich w obszarach wejściowych nie wydaje się być charakterystyczne dla cieczy lepkospężystych.

Niewiele opublikowano prac dotyczących analizy lepkospężystych warstw przyściennych (np. [6, 7]), jak również rozważań związanych z lepkospężystymi przepływami w obszarach wejściowych przewodów płaskich oraz kołowsymetrycznych (np. [8, 5]). Taki stan rzeczy spowodowany został przede wszystkim trudnościami spotykanymi przy próbach rozwiązania zagadnień dla bardziej ogólnych równań konstytutywnych. Nie bez znaczenia pozostaje również kwestionowana słuszność innych założeń, zwykle przyjmowanych w przybliżeniach warstwy przyściennej.

Dotychczasowe wyniki, uzyskiwane głównie dla cieczy typu Rivlina-Ericksena (por. [9]), nie wyjaśniają zadowalająco stosunkowo długich obszarów wejściowych oraz dużych strat ciśnienia, obserwowanych doświadczalnie dla roztworów i stopów polimerów charakteryzujących się dużą lepkospężystością [10, 11, 8].

Niektórzy autorzy, na przykład METZNER i WHITE [8], donieśli o możliwości występowania dodatkowych podobszarów w części wejściowej, w których zachowanie się cieczy przypomina bardziej zachowanie się ośrodków «półsztywnych» lub «ciała stałego», jeśli tylko charakterystyczny czas cieczy (np. reprezentatywny czas relaksacji) jest większy od czasu potrzebnego na przepływ. W takiej sytuacji nie są ogólnie słuszne ani przybliżenia przyjmowane dla warstwy przyściennej, ani też równania konstytutywne typu cieczy Rivlina-Ericksena.

W niniejszej pracy rozważono zagadnienia przepływów lepkosprężystych w obszarach wejściowych rur lub płaskich kanałów, bez korzystania z koncepcji warstwy przyściennej. Założono przy tym, że liczby Reynoldsa charakteryzujące przepływy są małe, co uzasadnia stosowanie przybliżenia quasi-statycznego, oraz że stosunek poprzecznych wymiarów przewodu do długości obszaru wejściowego jest również mały, co może mieć miejsce przy przepływach przez stosunkowo wąskie szczeliny lub kapilary. Przedstawiony sposób podejścia stanowi rozszerzenie rozważań zaproponowanych przez nas dla płaskich przepływów w kanałach [12].

Przy statycznej analizie zagadnień nie zakładano żadnych istotnych ograniczeń na równania konstytutywne cieczy lepkosprężystej; są to równania opisujące zachowanie się nieściśliwej cieczy prostej (por. [9, 13]).

Przy kinematycznej analizie przepływów, prowadzącej do przybliżonego określenia pól prędkości w obszarach wejściowych, dla poprzednio określonych rozkładów naprężeń ścinających i normalnych, ograniczono się do modelu nieściśliwej cieczy prostej stopnia drugiego. Wykorzystano przy tym fakt, że dla takich cieczy w quasi-statycznych przepływach przez wąskie rury lub płaskie kanały, pola prędkości są takie same lub zbliżone do cieczy newtonowskich (por. [14]).

Należy podkreślić, że w niniejszych rozważaniach rozkłady naprężeń uzyskano w sposób czysto formalny. Ogólnie rzecz biorąc, nie można rozróżnić efektów naprężeń normalnych od rozkładów ciśnienia na ściankach przewodu w obszarze wejściowym. Analizą tych zagadnień w częściach przewodów, w których przepływy są ustalone i wiskozymetryczne zajmuje się praca DAVIESA, HUTTONA i WALTERSA [15].

2. Ustalone przepływy ścinające

Będziemy najpierw rozważać ustalone i laminarne przepływy nieściśliwej cieczy prostej przez kołowsymetryczne rury lub płaskie kanały (uogólniony przepływ Poiseuille'a i uogólniony płaski przepływ Poiseuille'a), pod wpływem stałego gradientu ciśnienia $f = \Delta P/L$, gdzie L określa długość całego przewodu. Niech D oznacza odpowiednio średnicę rury, d zaś wysokość płaskiego kanału (odległość między ściankami). Początek układu współrzędnych będziemy przyjmować na początku przewodu, na jego osi. W walcowym układzie współrzędnych oś z pokrywa się z osią rury, w układzie zaś kartezjańskim oś płaskiego kanału skierowaną w kierunku przepływu oznaczymy przez x .

Można pokazać, że ogólne rozwiązanie równań dynamicznych

$$(2.1) \quad \text{Div } \mathbf{T} - \rho \text{ grad } \psi = \rho \dot{\mathbf{v}},$$

gdzie \mathbf{T} jest tensorem naprężenia, ρ — gęstością cieczy, zaś ψ — potencjałem zachowawczych sił masowych, przyjmuje, dla ustalonego i laminarnego przepływu cieczy prostej w rurze, postać następującą (por. COLEMAN, MARKOVITZ i NOLL [13]):

$$(2.2) \quad T^{(rz)} = -\frac{1}{2}fr, \quad T^{(rr)} = -h - k(r) + \rho\psi + fz, \\ T^{(zz)} = T^{(rr)} + \hat{\sigma}_1(S) - \hat{\sigma}_2(S),$$

gdzie indeksy w nawiasach trójkątnych oznaczają składowe fizyczne, zaś

$$(2.3) \quad \frac{dk}{dr} = \frac{1}{r} (T^{\langle rr \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle}), \quad k(r) = \int_0^r \frac{1}{\xi} \hat{\sigma}_2 \left(\frac{f\xi}{2} \right) d\xi.$$

Wielkości $\hat{\sigma}_i(S)$ oznaczają zmodyfikowane funkcje naprężeń normalnych, mianowicie

$$(2.4) \quad \hat{\sigma}_1(S) = T^{\langle zz \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle}, \quad \hat{\sigma}_2(S) = T^{\langle rr \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle},$$

gdzie $S = \frac{1}{2} fr$.

Zupełnie podobnie, rozwiązanie równań (2.1) dla ustalonego i laminarnego przepływu przez płaski kanał przyjmuje postać (por. [12, 13])

$$(2.5) \quad \begin{aligned} T^{\langle xy \rangle} &= -fy, & T^{\langle yy \rangle} &= -h + \varrho\psi + fx, \\ T^{\langle xx \rangle} &= T^{\langle yy \rangle} + \sigma_1(\kappa) - \sigma_2(\kappa), \end{aligned}$$

gdzie κ oznacza gradient ścinania, zaś $\sigma_i(\kappa)$ — funkcje naprężeń normalnych, mianowicie

$$(2.6) \quad \sigma_1(\kappa) = T^{\langle xx \rangle} - T^{\langle zz \rangle}, \quad \sigma_2(\kappa) = T^{\langle yy \rangle} - T^{\langle zz \rangle}.$$

Związek między funkcjami (2.4) i (2.6) jest następujący:

$$(2.7) \quad \hat{\sigma}_i(S) = \sigma_i(\kappa(S)), \quad i = 1, 2.$$

Zależności (2.2) i (2.5) pozostają w mocy dla jakiegokolwiek cieczy prostej, niezależnie od jej własności lepkospężystych. Chcąc określić odpowiednie profile prędkości lub objętościowe wydatki cieczy na jednostkę czasu, należy znać funkcje szybkości ścinania $\kappa = \kappa(S)$ lub $\kappa = \kappa(T^{\langle xy \rangle})$.

3. Przepływy w obszarach wejściowych

Przy małych liczbach Reynoldsa, tj. dla przybliżenia quasi-statycznego, w równaniach (2.1) można pominąć czony inercyjne. Oznacza to, że dla stosunkowo powolnych przepływów cieczy o dużej lepkości, jakimi są niewątpliwie liczne stopy i skondensowane roztwory polimerów, wpływ efektów lepkościowych jest znacznie większy niż wpływ inercji cieczy.

Dla ustalonych, quasi-statycznych przepływów w obszarach wejściowych kołowsymetrycznych rur równania (2.1) przyjmują postać

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \partial_r T^{\langle rr \rangle} + \partial_z T^{\langle rz \rangle} + \frac{1}{r} (T^{\langle rr \rangle} - T^{\langle \theta\theta \rangle}) - \varrho \partial_r \psi &= 0, \\ \partial_r T^{\langle rz \rangle} + \frac{1}{r} T^{\langle rz \rangle} + \partial_z T^{\langle zz \rangle} - \varrho \partial_z \psi &= 0. \end{aligned}$$

Podobnie, dla ustalonych quasi-statycznych przepływów w obszarach wejściowych płaskich kanałów, mamy

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \partial_x T^{\langle xx \rangle} + \partial_y T^{\langle xy \rangle} - \varrho \partial_x \psi &= 0, \\ \partial_x T^{\langle xy \rangle} + \partial_y T^{\langle yy \rangle} - \varrho \partial_y \psi &= 0. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę postać zależności (2.2), (2.3), obowiązujących dla przepływów ścinających (wiskozymetrycznych), będziemy poszukiwać rozwiązań równań (3.1) w postaci następujących ciągów:

$$\begin{aligned}
 T^{(rz)} &= \frac{1}{2} cr + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i-1)!} g^{(2i-1)}(z) r^{2i-1} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{k!} M^{(k)}(z) r^k + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{\beta_k}{k!} N^{(k)}(z) r^k, \\
 T^{(rr)} &= -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - M(z) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)!} g^{(2i)}(z) r^{2i} - \\
 (3.3) \quad &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{k!} M^{(k)}(z) r^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{k!} N^{(k)}(z) r^k, \\
 T^{(zz)} &= -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - N(z) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(2i)!} g^{(2i)}(z) r^{2i} - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k!} M^{(k)}(z) r^k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\zeta_k}{k!} N^{(k)}(z) r^k,
 \end{aligned}$$

gdzie c, h są stałymi, $g(z), M(z), N(z)$ — trzema dowolnymi funkcjami spełniającymi wymagane warunki brzegowe (por. p. 4), funkcja $k(r)$ zaś określona jest wyrażeniami (2.3). Wskaźniki w nawiasach oznaczają odpowiednie pochodne funkcji względem zmiennej z . Z uwagi na postać równań równowagi (3.1), nie wszystkie pochodne funkcji $M(z)$ i $N(z)$ występują w (3.3). W tym celu należy przyjąć, że współczynniki α_k, \dots, ζ_k równe są zeru, z wyjątkiem następujących:

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad \alpha_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-3, \quad 6m-1, & \beta_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-5, \quad 6m-3, \\
 \gamma_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-4, \quad 6m-2, & \delta_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-6, \quad 6m-4, \\
 \varepsilon_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-6, \quad 6m-2, & \zeta_k &= 1 \quad \text{dla} \quad k = 6m-4, \quad 6m-2,
 \end{aligned}$$

gdzie $m = 1, 2, 3, \dots$

Można bezpośrednio sprawdzić, że wyrażenia (3.3) łącznie z warunkami (3.4) spełniają równania (3.1) z dokładnością do członów pomijalnych jako małe wyższego rzędu, jeśli tylko stosunek średnicy rury D do długości części wejściowej l jest wystarczająco mały. Bliższa analiza wymiarowa wyrażen zawierających pochodne funkcji $g(z), M(z), N(z)$ dowodzi, że pominięte człony są proporcjonalne do ε^n , przy czym $\varepsilon = D/l$. Łatwo również zauważyć, że $T^{(rz)}$ zawiera wyłącznie pochodne nieparzystych rzędów, podczas gdy $T^{(rr)}$ i $T^{(zz)}$ zawierają pochodne rzędów parzystych. Pochodne rzędu k funkcji $g(z), M(z), N(z)$ określają człony rzędu ε^{k-1} .

Wyrażenia (3.3) i (3.4) pozostają również w mocy dla układu równań (3.2), jeśli pominać funkcję $k(r)$, mnożniki $1/2$ występujące przy c w (3.3)₁ i przy wszystkich znakach sum

w (3.3) oraz zastąpić formalnie z przez x , zaś r przez y . Wówczas $\epsilon = d/l$, gdzie d oznacza odległość między ściankami płaskiego kanału.

Przedstawiony wyżej sposób podejścia pozwala na formalną budowę wyrażeń określających naprężenia w obszarach wejściowych rur lub płaskich kanałów, z dokładnością do członów dowolnego rzędu względem ϵ .

Z uwagi na uproszczenie zapisów oraz możliwość przeprowadzenia analizy kinematycznej, ograniczymy się w dalszych rozważaniach do przypadku wąskich rurek (kapilar), lub szczelin, dla których pominięcie członów rzędu $O(\epsilon^2)$ wydaje się wystarczająco uzasadnione.

Otrzymamy wówczas dla obszaru wejściowego kapilary następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned}
 T^{(rz)} &= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}g'(z)r + \frac{1}{2}N'(z)r, \\
 (3.5) \quad T^{(rr)} &= -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - M(z) - \frac{1}{4}r^2(g''(z) + N''(z)), \\
 T^{(zz)} &= -h - k(r) + \varrho\psi - cz - g(z) - N(z) - \frac{1}{4}r^2(g''(z) + M''(z) + N''(z)), \\
 (3.6) \quad T^{(zz)} - T^{(rr)} &\equiv \hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2 = M(z) - N(z) - \frac{1}{4}r^2M''(z).
 \end{aligned}$$

Podobnie, dla obszaru wejściowego płaskiej szczeliny otrzymamy (por. [12]):

$$\begin{aligned}
 T^{(xy)} &= cy + g'(x)y + N'(x)y, \\
 (3.7) \quad T^{(xx)} &= -h + \varrho\psi - cx - g(x) - N(x) - \frac{1}{2}y^2(g''(x) + M''(x) + N''(x)), \\
 T^{(yy)} &= -h + \varrho\psi - cx - g(x) - M(x) - \frac{1}{2}y^2(g''(x) + N''(x)); \\
 (3.8) \quad T^{(xx)} - T^{(yy)} &\equiv \sigma_1 - \sigma_2 = M(x) - N(x) - \frac{1}{2}y^2M''(x).
 \end{aligned}$$

Dalsze informacje dotyczące funkcji g , M i N wynikają z warunków brzegowych, które muszą być spełnione na początku i końcu obszarów wejściowych, tj. dla $z = 0$ lub $x = 0$ oraz dla $z = l$ lub $x = l$.

4. Ograniczenia wynikające z warunków brzegowych

Jeśli rozważany przewód skierowany jest pionowo i siły masowe są wyłącznie siłami grawitacji, to

$$(4.1) \quad \psi(z) = -gz \quad \text{lub} \quad \psi(x) = -gx,$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie.

Funkcje $g(z)$ lub $g(x)$ są całkowicie dowolne, lecz dla ustalenia uwagi można przyjąć, że

$$(4.2) \quad g'(0) = g(0) = 0, \quad g'(l) = q, \quad g(l) = \frac{1}{m}ql,$$

gdzie q i m są stałymi parametrami.

Formułując warunki na końcu obszarów wejściowych, tj. na granicach przejścia z tych obszarów do obszarów w pełni rozwiniętych, ustalonych przepływów ścinających, należy pamiętać o ciągłości odpowiednich naprężeń i ich pochodnych. Innymi słowy naprężenia powinny zmieniać się w sposób ciągły od rozkładów określonych w obszarach wejściowych do wartości wynikających z (2.2) i (2.5).

Wydaje się również rzeczą rozsądną założyć w pierwszym przybliżeniu, że na początku obszarów wejściowych, tj. dla $z = 0$ lub $x = 0$, znikają zarówno naprężenia ścinające (por. (4.4)₁), jak i odpowiednie różnice naprężeń normalnych. Oznacza to, że na podstawie (3.6) i (3.8) mamy

$$(4.3) \quad M''(0) = 0, \quad M(0) = N(0).$$

Założenie powyższe nie jest konieczne; można również rozpatrywać inne wartości brzegowe dla naprężeń.

Zatrzymajmy się na moment nad przypadkiem przepływu w obszarze wejściowym do kapilary. Z zależności (3.5), (4.1), (4.2), przy znikających dla $z = 0$ naprężeniach ścinających i normalnych, wynika że

$$(4.4) \quad c = -N'(0), \quad g''(0) + N''(0) = 0.$$

Z porównania odpowiednich wyrażeń (2.2) i (3.5) oraz ich pochodnych dla $z = l$, mamy również

$$(4.5) \quad N'(0) - q = f, \quad M'(l) = N'(l) = 0, \quad g''(l) + N''(l) = 0, \quad M(l) = N(l)$$

przy czym założono, że $T^{(zz)} - T^{(rr)}$ znika dla $r = 0$, $z = l$ oraz pominięto człony rzędu $O(\epsilon^2)$. Na podstawie (3.6) otrzymamy także

$$(4.6) \quad (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w = T^{(zz)} - T^{(rr)} = -\frac{D^2}{16} M''(l) \quad \text{dla} \quad z = l,$$

gdzie wskaźnik w oznacza, że dana wartość jest określona na ścianie kapilary, tj. dla $r = D/2$.

Rozważając przypadek przepływu w płaskiej szczelinie, dla którego słuszne są zależności (2.5), (3.7), (4.1) i (4.2), otrzymamy warunki identyczne jak w (4.4) i (4.5). Zamiast określonej na ścianie różnicy naprężeń normalnych (4.6), otrzymamy na podstawie (3.8)

$$(4.7) \quad (\sigma_1 - \sigma_2)_w = T^{(xx)} - T^{(yy)} = -\frac{d^2}{8} M''(l) \quad \text{dla} \quad x = l, \quad y = \pm d/2.$$

Powyższe warunki wystarczają do przewidywania realistycznych rozkładów funkcji M i N w obszarach wejściowych przewodów płaskich i kołowsymetrycznych. Z uwagi na zależności następujące:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \partial_z T^{(rr)}|_{z=0} &= N'(0) - M'(0) - \rho g \geq 0, \\ \partial_x T^{(rr)}|_{x=l} &= N'(0) - q - \rho g = f - \rho g > 0, \end{aligned}$$

oraz wymaganą dodatnią wartość różnicy naprężeń normalnych dla $z = l$, łatwo zauważyć, że musi istnieć w otoczeniu $z = 0$ przynajmniej niewielki obszar, w którym $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w$ przybiera wartości ujemne. Fakt ten nie posiada żadnego fizycznego znaczenia będąc prostą konsekwencją zastosowanego przybliżenia, tj. pominięcia wyrazów rzędu $O(\epsilon^2)$ oraz przyjętych warunków brzegowych dla $z = 0$.

5. Rozkłady nacisków normalnych oraz długości obszarów wejściowych

Rozkłady nacisków normalnych lub ciśnień na ściankach przewodów wynikają z poprzednich rozważań.

Dla przepływu kołowsymetrycznego, na podstawie (3.5)₂ i warunków brzegowych omówionych w p. 4, otrzymamy

$$(5.1) \quad -T_w^{\langle rr \rangle} |_{z=0} = h + k \left(\frac{D}{2} \right) + M(0) = P_w,$$

$$(5.2) \quad -T_w^{\langle rr \rangle} |_{z=l} = h + k \left(\frac{D}{2} \right) + \rho g l - N'(0)l + \frac{1}{m} g l + M(l),$$

gdzie P_w jest ciśnieniem na początku przewodu dla $z = 0$.

Z drugiej strony ciśnienie na końcu obszaru wejściowego musi być równe wartości wynikającej z rozwiązania ustalonego przepływu ścinającego (2.2)₂. W części, w której przepływ jest wiskozymetryczny rozkład nacisków na ściance jest liniowy, a ich wartość na końcu całego przewodu, tj. dla $z = L$, wyraża się następującym wzorem (por. [15]):

$$(5.3) \quad Q_w = (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w - \frac{1}{2} T_w^{\langle rz \rangle} \frac{\partial}{\partial T_w^{\langle rz \rangle}} p(0, L) - \frac{2}{\pi D^2 T_w^{\langle rz \rangle}} \frac{\partial}{\partial T_w^{\langle rz \rangle}} [(T_w^{\langle rz \rangle})^2 T_L],$$

gdzie $T_w^{\langle rz \rangle}$ oznacza naprężenie ścinające, $p(0, L)$ — ciśnienie na osi rury dla $z = L$, zaś T_L zdefiniowano jako

$$(5.4) \quad T_L = \int_0^{D/2} T^{\langle zz \rangle}(r, L) d(\pi r^2).$$

Porównując zatem nacisk (5.2) z wartością początkową wynikającą z (2.2)₂ dla ustalonego przepływu ścinającego, otrzymamy

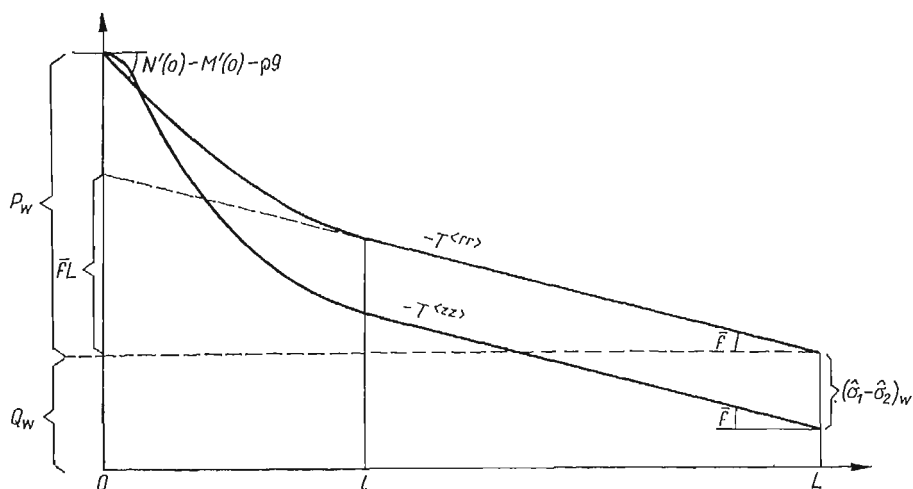
$$(5.5) \quad h + k \left(\frac{D}{2} \right) + \rho g l - N'(0)l + \frac{1}{m} q l + M(l) = (f - \rho g)(L - l) + Q_w.$$

Ponieważ poziom odniesienia dla stałej h jest w gruncie rzeczy dowolny, można uniknąć korzystania ze złożonego wyrażenia na Q_w , licząc wartość P_w jako nadwyżkę ciśnienia na początku przewodu ($z = 0$), w stosunku do jego wartości końcowej Q_w ($z = L$). Jest to równoznaczne z pominięciem wyrazu Q_w w wyrażeniu (5.5). Odpowiednie rozkłady nacisków normalnych pokazano schematycznie na rys. 1.

Wykorzystując (4.5)₁, mamy w dalszym ciągu

$$(5.6) \quad P_w - fL + M(l) - M(0) = ql \left(1 - \frac{1}{m} \right) - \rho g L,$$

a po uwzględnieniu (4.6)



Rys. 1

$$(5.7) \quad P_w - (f - \rho g)L + (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w = ql \left(1 - \frac{1}{m} \right),$$

przy czym musi być spełniona następująca równość:

$$(5.8) \quad M(0) = N(l) + \frac{D^2}{16} M''(l).$$

Ostatnie wymaganie nie zmniejsza w żadnym stopniu ogólności rozważań ($N(l)$ i $M(0)$ są w dalszym ciągu dowolne) oraz nie jest sprzeczne z żadnym z warunków dyskusowanych w p. 4.

Na podstawie (5.7) otrzymujemy wyrażenie na długość obszaru wejściowego:

$$(5.9) \quad l = \frac{m}{q(m-1)} [P_w - \bar{f}L + (\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w],$$

gdzie $\bar{f} = f - \rho g$ oznacza zredukowany gradient ciśnienia dla ustalonego przepływu ścinającego.

Zależność (5.9) można zapisać w bardziej użytecznej postaci

$$(5.10) \quad l = l_v \left[\frac{P_w - \bar{f}L}{(P_w - \bar{f}L)_v} + \frac{(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w}{(P_w - \bar{f}L)_v} \right],$$

gdzie

$$(5.11) \quad l_v = \frac{m}{q(m-1)} (P_w - \bar{f}L)_v$$

oznacza długość obszaru wejściowego dla czysto lepkiej cieczy, dla której $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w \equiv 0$, przepływającej przez przewód o identycznej geometrii.

Wzór (5.10) umożliwia określenie długości obszaru wejściowego dla cieczy lepkospężystej, jeśli znana jest odpowiednia długość l_0 dla cieczy czysto lepkiej oraz spadki ciśnienia $P_w - \bar{f}L$ dla cieczy lepkospężystej i $(P_w - \bar{f}L)_0$ dla cieczy lepkiej. Ponieważ znane są dobrze metody doświadczalne prowadzące do określenia l_0 (por. [16, 17, 5]), pozostaje wyłącznie problem wyznaczenia P_w i \bar{f} w dwóch niezależnych doświadczeniach. Potrzebna jest również znajomość pierwszej różnicy naprężeń normalnych $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$ wyznaczana na podstawie pomiarów wypływającej strugi lub innych metod wiskozymetrycznych (por. np. [13, 15])¹⁾.

Warto również nadmienić, że w wyrażeniu (5.10) nie występują żadne funkcje lub parametry opisujące zachowanie się cieczy lepkospężystej, z wyjątkiem różnicy naprężeń normalnych $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w$. Na istotną rolę jaką odgrywają naprężenia normalne w różnych przepływach cieczy lepkospężystych, a w szczególności w przepływach ze stałą historią deformacji, zwrócono uwagę m.in. w naszej pracy [18].

Rozważania dla kołowsymetrycznego przepływu w kapilarze, przedstawione w niniejszym punkcie, można bez trudu przenieść na przypadek przepływu w szczelinie lub płaskim kanale. Podobne rozumowanie prowadzi do wzoru niemal identycznego z (5.10), z tą tylko różnicą, że zamiast $(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)_w$ należy wstawić $(\sigma_1 - \sigma_2)_w$ (por. [12]).

6. Uproszczona analiza kinematyczna

Dokładna analiza kinematyczna rozważanych przepływów wymaga stosowania złożonych równań konstytutywnych, co komplikuje znacznie całe zagadnienie. Kiedy korzysta się z metod warstwy przyściennej, nawet stosunkowo proste równania konstytutywne mogą prowadzić do bardzo żmudnych obliczeń (por. np. [8]).

W niniejszych rozważaniach, nie pretendując do ścisłego rozwiązania zagadnienia, będziemy starali się określić przybliżone pole prędkości w obszarach wejściowych, wynikające z poprzednio wyznaczonych rozkładów naprężeń ścinających i normalnych. Nasza uproszczona analiza kinematyczna bazuje na założeniu, że stosunkowo powolne przepływy cieczy lepkospężystych mogą być opisane równaniami konstytutywnymi nieściślejszej cieczy stopnia drugiego w postaci następującej (por. [14, 9]):

$$(6.1) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \eta_0 \mathbf{A}_1 - \eta_0 \theta \mathbf{A}_2 + \eta_0 (\theta + \theta^*) \mathbf{A}_1^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_1 = 0,$$

gdzie p jest ciśnieniem hydrostatycznym, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ oznaczają dwa kolejne tensory kinematyczne Rivlina-Ericksena (por. [9, 13]), zaś η_0, θ, θ^* są stałymi materiałowymi. Stała η_0 ma wymiar lepkości (lepkość newtonowska), zaś stałe θ i θ^* wymiar czasu (czas charakterystyczny cieczy).

Z drugiej strony można stwierdzić, że z przyjętego założenia małego stosunku średnicy kapilary do długości obszaru wejściowego, tj. $\epsilon = D/l$, wynikają następujące relacje dla pól prędkości i ich gradientów:

¹⁾ Korelację między spadkami ciśnienia a naprężeniami normalnymi badano w [19]. Stwierdzono m.in., że «spężysty» spadek ciśnienia jest proporcjonalny do $\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2$.

$$(6.2) \quad \begin{aligned} w = O(1), \quad \frac{\partial w}{\partial r} = O(1), \quad u = O(\epsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial r} = O(\epsilon), \\ \frac{\partial w}{\partial z} = O(\epsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = O(\epsilon^2), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = O(\epsilon^2), \text{ itp.}, \end{aligned}$$

gdzie $u(r, z)$, $w(r, z)$ oznaczają składowe prędkości odpowiednio w kierunku r i z . Analogiczne relacje można również zapisać dla przepływów przez wąskie kanały lub szczeliny (por. [12]). Zależności (6.2) przypominają założenia zwykle przyjmowane w przybliżonych metodach warstwy przyściennej.

Traktując równania nieściśliwej cieczy stopnia drugiego jako perturbowaną postać równań cieczy newtonowskiej (por. [14, 9]) oraz przyjmując pole prędkości w postaci $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots$, gdzie \mathbf{v}_1 odpowiada przepływowi newtonowskiemu, można równania dynamiczne (równania pędu) dla przepływu quasi-statycznego zapisać w postaci następującej:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \nabla p_1 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_1 &= \mathbf{0}, \\ \nabla p_2 - \eta_0 \nabla^2 \mathbf{v}_2 &= \text{Div} \mathbf{S}_2(\mathbf{v}_1), \end{aligned}$$

gdzie

$$(6.4) \quad \mathbf{S}_2(\mathbf{v}_1) = -\eta_0 \theta (\mathbf{B} - \mathbf{A}^2) + \eta_0 \theta^* \mathbf{A}^2,$$

przy czym $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_2(\mathbf{v}_1)$ są tensorami kinematycznymi Rivlina-Ericksena określonymi dla newtonowskiego pola prędkości \mathbf{v}_1 .

Jeśli prawa strona równania (6.3) jest wektorem bezwirowym, tzn. wyraża się przez gradient pewnego potencjału skalarne, to równanie równowagi drugiego rzędu (6.3)₂ może być spełnione przy $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Oznacza to, że w celu rozwiązania quasi-statycznego zagadnienia przepływu nieściśliwej cieczy stopnia drugiego, z określonymi w prędkościach warunkami brzegowymi, wystarczy znać odpowiednie pole prędkości dla cieczy newtonowskiej.

PIPKIN [14] dowiódł, że jeśli $\text{Div} \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{v}_1$ jest wektorem bezwirowym oraz $\text{div} \mathbf{v}_1 = 0$ ($\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0$), to $\text{Div}(\mathbf{B} - \mathbf{A}^2)$ jest również wektorem bezwirowym. Zatem o równoważności pola prędkości dla cieczy stopnia drugiego i cieczy newtonowskiej decydować będzie zachowanie się $\text{Div} \mathbf{A}^2$.

Dla płaskich przepływów quasi-statycznych, dla których ponadto $\text{div} \mathbf{v}_1 = \text{tr} \mathbf{A} = 0$ (przepływy izochoryczne), tensor \mathbf{A}^2 wyraża się w postaci

$$(6.5) \quad \mathbf{A}^2 = \gamma^2 (\mathbf{1} - \mathbf{k}\mathbf{k}), \quad \gamma^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{A}^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{B},$$

gdzie \mathbf{k} oznacza wektor jednostkowy, prostopadły do płaszczyzny przepływu. Wówczas zawsze $\text{Div} \mathbf{A}^2 = \nabla \gamma^2$ i odpowiednie pole prędkości cieczy stopnia drugiego jest identyczne jak pole prędkości cieczy newtonowskiej (twierdzenie Tannera, por. [14]). Oznacza to, że człony drugiego rzędu w równaniu (6.1) wnoszą wkład wyłącznie do naprężeń normalnych, a zatem mogą być pominięte przy obliczaniu naprężeń ścinających.

Dla kołowsymetrycznych przepływów quasi-statycznych, takich jakie rozważamy

w obszarach wejściowych, równoważność pól prędkości dla cieczy drugiego stopnia i cieczy newtonowskiej nie obowiązuje nawet wtedy, gdy zaniedbujemy wyrazy rzędu $O(\epsilon^2)$. W tym przypadku mamy (por. (6.2))

$$(6.6) \quad [\mathbf{A}^2] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 & 0 & -2\frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\frac{u}{r}\frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \end{bmatrix} + [\mathbf{O}(\epsilon^2)];$$

zatem warunek bezwirowości wektora $\text{Div } \mathbf{A}^2$ nie jest spełniony. Tylko po zaniedbaniu wyrazów rzędu $O(\epsilon)$, a więc w konsekwencji dla wiskozymetrycznego przepływu przez kapilarę, otrzymamy

$$(6.7) \quad \text{Div } \mathbf{A}^2 = \nabla \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \mathbf{O}(\epsilon).$$

Przejdziemy obecnie do określenia pola prędkości cieczy drugiego stopnia przepływającej przez obszar wejściowy płaskiej szczeliny. Zachowując wyrazy rzędu ϵ , równanie (3.7)₁ zapisujemy w postaci

$$(6.8) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta_0} (g'(x) - N'(0) + N'(x))y,$$

gdzie u oznacza składową prędkości w kierunku osi kanału.

Całka równania (6.8) spełnia następujące warunki brzegowe na początku i końcu obszaru wejściowego:

$$(6.9) \quad u(0, y) = \text{const}, \quad u(l, y) = \frac{f}{2\eta_0} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right),$$

gdzie f jest gradientem ciśnienia dla przepływu wiskozymetrycznego poza obszarem wejściowym. Założenie płaskiego profilu prędkości dla $x = 0$ nie jest konieczne; wynika ono z przyjęcia $g'(0) = 0$ [por. (4.2)].

Wykorzystując równanie ciągłości, mianowicie

$$(6.10) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

otrzymamy po scałkowaniu (6.8):

$$(6.11) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\eta_0} (g'(x) - N'(0) + N'(x)) \left(y^2 - \frac{d^2}{12} \right) + \frac{fd^2}{12\eta_0} + O(\epsilon^2), \\ v(x, y) &= \frac{1}{6\eta_0} (g''(x) + N''(x)) \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) y + O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Na podstawie (4.4)₂ i (4.5)₃ mamy również

$$(6.12) \quad v(0, y) = 0, \quad v(l, y) = 0, \quad v \left(x, \pm \frac{d}{2} \right) = 0.$$

Z drugiej strony widać, że składowa prędkości $u(x, y)$ nie znika na ściance kanału dla $0 < x < l$, prowadząc do zależności:

$$(6.13) \quad u\left(x, \pm \frac{d}{2}\right) = \frac{fd^2}{12\eta_0} + (g'(x) - N'(0) + N'(x)) \frac{d^2}{12\eta_0}.$$

Wyrażenie to określa «efektywny poślizg» na ściankach kanału, konieczny do zmiany profilu prędkości dla $x = 0$, w profil paraboliczny dla $x = l$. Fakt powyższy nie posiada żadnego fizycznego znaczenia. Jest on prostą konsekwencją przybliżonego (liniowego względem y) rozkładu naprężeń ścinających we wzorze (3.7)₁. Zjawisko poślizgu nie miałoby miejsca, gdyby brać pod uwagę człony wyższego rzędu względem ϵ .

Warto również podkreślić, że przy obecnej uproszczonej analizie kinematycznej, zachowanie się cieczy w obszarze wejściowym należy traktować jako przybliżony schemat tego, co ma miejsce w rzeczywistości. Dyskutowany schemat przepływu nie wydaje się być mniej realistyczny niż schemat «przepływu rdzeniowego» z płaskim profilem prędkości w części środkowej, przyjmowany przy stosowaniu przybliżonych metod warstwy przyściennej.

Jeśli dla kołowsymetrycznych przepływów quasi-statycznych założymy newtonowski związek między naprężeniami ścinającymi i odpowiednią szybkością deformacji, to na podstawie (3.5)₁ mamy następujące wyrażenie przybliżone:

$$(6.14) \quad \frac{\partial w}{\partial r} \approx \frac{1}{2\eta_0} (g'(z) - N'(0) + N'(z))r.$$

Biorąc pod uwagę równanie ciągłości, mianowicie

$$(6.15) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

otrzymamy po scałkowaniu

$$(6.16) \quad w(r, z) \approx \frac{1}{4\eta_0} (g'(z) - N'(0) + N'(z)) \left(r^2 - \frac{D^2}{8} \right) + \frac{fD^2}{32\eta_0},$$

$$u(r, z) \approx \frac{1}{16\eta_0} (g''(z) + N''(z)) \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) r,$$

przy czym obowiązują takie same jak poprzednio warunki brzegowe dla $z = 0$ i $z = l$. Również na ściance przewodu mamy zależność

$$(6.17) \quad w\left(\frac{D}{2}, z\right) = \frac{fD^2}{32\eta_0} + (g'(z) - N'(0) + N'(z)) \frac{D^2}{32\eta_0},$$

określającą «efektywny poślizg» w obszarze wejściowym.

7. Przykłady profili prędkości w obszarach wejściowych

Więcej informacji o profilach prędkości w obszarach wejściowych można uzyskać, specyfikując funkcje g i N zgodnie z poprzednio przedyskutowanymi warunkami brzegowymi i rozkładami nacisków na ściankach. W tym celu zastosowanie wielomianów lub innych szczególnie wybranych funkcji zapewnia pożądaną stopień dokładności.

Założmy dla ilustracji, że rozkład nacisków w obszarze wejściowym szczeliny da się dobrze opisać następującymi funkcjami:

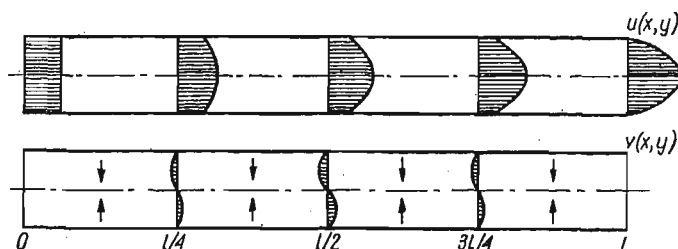
$$(7.1) \quad g(x) = -\frac{q}{2l^3}(x-2l)x^3, \quad g'(l) = q, \quad g'(0) = g''(0) = g''(l) = 0,$$

$$(7.2) \quad N(x) = b(qx-g(x)), \quad f = (b-1)q,$$

gdzie $b > 1$ oznacza stały parametr. Funkcje powyższe spełniają wszystkie warunki (4.4), (4.5), a zatem zależności (6.11) można przedstawić w postaci:

$$(7.3) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{1}{2\eta_0}(b-1)g'(x)\left(y^2 - \frac{d^2}{12}\right) + \frac{fd^2}{12\eta_0}, \\ v(x, y) &= -\frac{1}{6\eta_0}(b-1)g''(x)\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)y, \\ g'(x) &= -\frac{2q}{l^3}x^2\left(x - \frac{3}{2}l\right), \quad g''(x) = -\frac{6q}{l^3}x(x-l). \end{aligned}$$

Profile prędkości odpowiadające wyrażeniom (7.3) przedstawiono schematycznie na rys. 2. W tym przypadku składowa prędkości prostopadła do osi kanału, $v(x, y)$, jest zawsze ujemna dla $0 < x < l$, co oznacza, że prędkość ta jest skierowana ku osi oraz maleje wraz ze zmniejszaniem się «efektywnego poślizgu» wzdłuż obszaru wejściowego.



Rys. 2

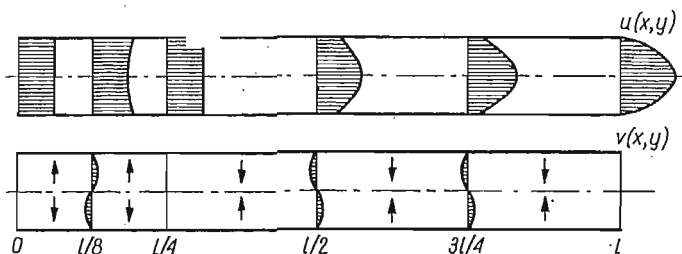
Ponieważ istnieje dość duża dowolność w doborze funkcji g i N , można wyobrazić sobie sytuacje, w których zmiana profili prędkości wzdłuż obszaru wejściowego zachodzi w sposób dość nietypowy. Jako następny przykład, rozważmy funkcję następującą:

$$(7.4) \quad g(x) = -\frac{6}{5}\frac{q}{l^4}x^3\left(x^2 - \frac{25}{12}lx + \frac{5}{6}l^2\right), \quad g'(l) = q, \quad g'(0) = g''(0) = g''(l) = 0,$$

podczas gdy N zmienia się według zależności (7.2). Łatwo również zauważyć, że $g''(l/4) = 0$, co oznacza, że składowa prędkości w kierunku osi kanału przyjmuje wartość stałą w odległości $x = l/4$ od początku obszaru wejściowego. Odpowiednie profile prędkości zilustrowano na rys. 3.

Jak widać, składowa prędkości w kierunku poprzecznym do osi kanału $v(x, y)$ zmienia swój znak przy $x = l/4$. Dla $0 < x < l/4$ prędkość ta skierowana jest ku ściankom kanału, podczas gdy dla $l/4 < x < l$ ku jego osi. Oznacza to, że w pewnym podobszarze

znajdującym się na początku obszaru wejściowego, ciecz może zachowywać się jak ośrodek «półsztywny» lub «ciało stałe». Wybierając odpowiednie postacie funkcji g , można otrzymać podobszary o różnej długości, a w szczególności — równej całej długości obszaru wejściowego.



Rys. 3

Możliwość występowania podobnego zjawiska przy przepływach cieczy lepkosprężystych przewidzieli na drodze teoretycznej METZNER i WHITE [8]. Stwierdzili oni również, że przy pewnych szczególnych warunkach takie «półsztywne» obszary mogą rozciągać się wzdłuż całego przewodu, powodując zamykanie wejścia oraz ewentualne hamowanie całego przepływu. Wówczas przepływ przez przewód jest możliwy tylko w przypadku rzeczywistego poślizgu na ściankach lub nieciągłości występujących w samej cieczy. Istnieją pewne dane doświadczalne potwierdzające możliwość opisanego wyżej zachowania się cieczy lepkosprężystych. Zjawiska tego typu prowadzą zwykle do wyjątkowo dużych spadków ciśnień obserwowanych w obszarach wejściowych.

Rozważania przedstawione w niniejszej części pracy nie wyczerpują oczywiście innych sposobów dokładniejszego opisu zjawisk występujących przy przepływach cieczy lepkosprężystych w rurach i kanałach. Uproszczona analiza kinematyczna dla nieściśliwej cieczy prostej stopnia drugiego ma na celu zwrócenie uwagi na możliwość występowania przepływów o różnej kinematyce. Należy również podkreślić, że rozważania statyczne, prowadzące do określenia odpowiednich długości obszarów wejściowych, są niezależne od rozważanych dalej schematów kinematycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, 4 Wyd., New York 1960.
2. E. B. CHRISTIANSEN, H. E. LEMMON, *Entrance Region Flow*, A.I.Ch.E.J., **11** (1965) 95.
3. M. COLLINS, W. R. SCHOWALTER, *Behavior of Non-Newtonian Fluids in the Inlet Region of a Channel*, A.I.Ch.E.J., **9** (1963) 98.
4. M. COLLINS, W. R. SCHOWALTER, *Behavior of Non-Newtonian Fluids in the Entry Region of a Pipe*, A.I.Ch.E.J., **9** (1963) 804.
5. J. L. WHITE, *Elastomer Rheology and Processing*, Rubber Chem. Technol., **42** (1969) 257.
6. G. K. RAJESWARI, S. L. RATHNA, *Flow of a Particular Class of Non-Newtonian Visco-Elastic and Visco-Inelastic Fluids near a Stagnation Point*, ZAMP, **13** (1962) 43.

7. D. W. BEARD, K. WALTERS, *Elastico-Viscous Boundary-Layer Flows*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60** (1964) 667.
8. A. B. METZNER, J. L. WHITE, *Flow Behavior of Viscoelastic Fluids in the Inlet Region of a Channel*, A.I.Ch.E.J., **11** (1965) 989.
9. C. TRUESDELL, W. NOLL, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Encycl. of Physics vol III/3,3 Berlin-Heidelberg-New York 1965.
10. F. H. GARNER, A. H. NISSAN, G. F. WOOD, *Thermodynamic and Rheological Behaviour of Elasto-Viscous Systems under Stress*, Proc. Roy. Soc., A **243** (1950) 37.
11. A. B. METZNER, W. T. HOUGHTON, R. A. SAILOR, J. L. WHITE, *A Method for the Measurement of Normal Stresses in Simple Shearing Flow*, Trans. Soc. Rheol., **5** (1961) 133.
12. S. ZAHORSKI, *On Plane Flows of Viscoelastic Fluids in the Inlet Region of a Channel*, Symp. Franco-Polonais de Rhéologie, Nice 1974 (w druku).
13. B. D. COLEMAN, H. MARKOVITZ, W. NOLL, *Viscometric Flows of Non-Newtonian Fluids*, Berlin-Heidelberg-New York 1966.
14. A. C. PIPKIN, *Lectures on Viscoelasticity Theory*, New York-Heidelberg-Berlin 1972.
15. J. M. DAVIES, J. F. HUTTON, K. WALTERS, *Theory for Normal Stresses in Slits and Capillaries*, J. Phys. D: Appl. Phys., **6** (1973) 2259.
16. A. H. P. SKELLAND, *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, New York-London-Sydney 1967.
17. J. M. MCKELVEY, *Polymer Processing*, New York-London 1964.
18. S. ZAHORSKI, *Flows with Constant Stretch History and Extensional Viscosity*, Arch. Mech., **23** (1971). 433.
19. H. L. LA NIEVE, III, D. C. BOGUE, *Correlation of Capillary Entrance Pressure Drops with Normal Stress Data*, J. Appl. Polymer Sci., **12** (1968) 353.

Р е з ю м е

МЕДЛЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГИХ ЖИДКОСТЕЙ В ОБЛАСТЯХ
ВХОДА ТРУБ И КАНАЛОВ

Рассматривались вязкоупругие течения в областях входа труб и плоских каналов при предположении, что числа Рейнольдса малы (квазистатическое приближение), а также, что диаметры труб (или высота каналов) малы по сравнению с длинами областей входа. При статическом анализе задачи не принимались какие-либо частные предположения относительно определяющих уравнений жидкости, с помощью которых может описываться какая угодно несжимаемая простая жидкость. Некоторые решения для напряжений или напора на стенки были получены в виде, содержащем три производные функции, удовлетворяющее крайевым условиям. Длины областей входа зависят от первой разности нормальных напряжений, а также от соответствующих длин областей входа и перепадов давления для чисто вязкой жидкости, протекающей по каналу или трубе с той же геометрией. Упрощенный кинематический анализ задачи для ранее определенных распределений касательных и нормальных напряжений представлен при предположении, что рассматриваемая жидкость является несжимаемой жидкостью второго порядка. Показано, что в областях входа могут появиться некоторые подобласти, в которых жидкость ведет себя подобно «твердому телу» или «полужесткой» среде. Такими областями может охватываться вся длина канала или трубы, и тогда для поддержания течения неизбежно должно выступить явление «разрыва» жидкости или же должно происходить проскальзывание вдоль стенок.

S u m m a r y

SLOW FLOWS OF VISCOELASTIC FLUIDS
AT THE ENTRIES TO TUBES AND CHANNELS

Viscoelastic flows in the inlet regions of tubes and plane channels are discussed under the assumption of small Reynolds numbers (quasi-static approximation) and small ratios of the tube diameter or the channel

height to the entrance lengths. In a static analysis of the problem, nothing specific is assumed about the constitutive equations, which may be those describing an incompressible simple fluid. Certain solutions for stresses or normal thrusts on the walls are obtained in the form involving three arbitrary functions subjected to boundary conditions. The entrance lengths can be determined if, apart from the first normal stress difference, the corresponding entrance lengths and pressure drops are known for a purely viscous fluid flowing under the same geometry. A simplified kinematic analysis for previously determined distributions of shear and normal stresses is presented under the assumption of an incompressible second grade fluid. It is shown, among other properties, that certain subregions of «solid-like» or «semi-rigid» behaviour may appear just at the entries. These subregions may extend across the entire duct, requiring either fluid fracture or slip at the walls for continued flow.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 maja 1974 r.

STATYKA TARCZ MIKROPOLARNYCH

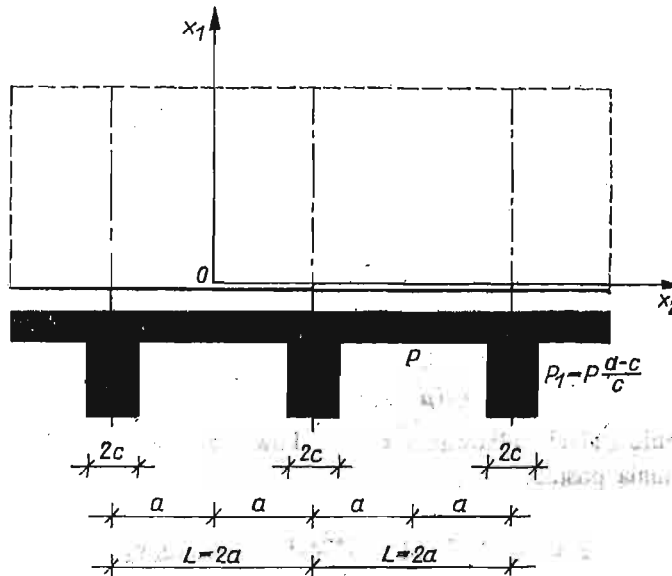
KRYSTYNA MAJORKOWSKA-KNAP (PŁOCK)

1. Wprowadzenie

W niniejszej pracy rozważać będziemy zagadnienie płaskiego stanu naprężenia mikropolarnej elastostatyki na przykładzie tarczy półnieskończonej, pasma tarczowego i tarczy prostokątnej, na podstawie teorii podanej w [1].

2. Zagadnienie tarczy półnieskończonej

W przypadku, gdy wysokość dźwigara tarczowego jest duża w stosunku do rozpiętości przęseł ($a/b \geq 1$), przebieg naprężeń wykazuje daleko idącą zgodność z rozkładem naprężeń w tak samo obciążonej tarczy półnieskończonej.



Rys. 1

Rozpatrzmy zagadnienie tarczy półnieskończonej o płaszczyźnie środkowej ograniczonej prostą $x_1 = 0$, która ciągnie się w nieskończoność w obszarze $x_1 \geq 0$. Tarcza jest obciążona równomiernie wzdłuż brzegu $x_1 = 0$ i podparta w odstępach $2a$, zgodnie z rys. 1.

Obciążenie brzegowe rozwijamy w szereg Fouriera

$$(2.1) \quad p(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie

$$a_n = -\frac{2pa(-1)^n}{cn\pi} \sin \alpha_n c.$$

Warunki brzegowe przy braku sił poprzecznych na brzegu $x_1 = 0$ są następujące:

$$(2.2) \quad \sigma_{11}^*(0, x_2) = p(x_2), \quad \sigma_{12}^*(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}^*(0, x_2) = 0.$$

Funkcje naprężeń Airy'ego-Mindlina przyjmujemy w postaci

$$(2.3) \quad F = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n \alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2,$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{-\alpha_n x_1} + D_n e^{-\alpha_n x_1}) \sin \alpha_n x_2, \quad \varrho_n = \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}.$$

Funkcje te spełniają równania

$$(2.4) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 F = 0,$$

$$\nabla_1^2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi = 0,$$

gdzie

$$\nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad l^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\mu\alpha},$$

oraz są związane związkami

$$(2.5) \quad -\partial_1 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi = A_0 \partial_2 \nabla_1^2 F,$$

$$\partial_2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi = A_0 \partial_1 \nabla_1^2 F,$$

gdzie

$$A_0 = \frac{(2\mu + \lambda_0)(\gamma + \varepsilon)}{4\mu(\mu + \lambda_0)}, \quad \lambda_0 = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}.$$

Po wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych (2.2) i związków (2.5), funkcje F i Ψ mają postać

$$(2.6) \quad F = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha_n} \left(1 + \frac{\alpha_n x_1}{\Delta_0} \right) e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2,$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A_0 a_n}{\Delta_0} \left(\frac{\alpha_n}{\varrho_n} e^{-\varrho_n x_1} - e^{-\alpha_n x_1} \right) \sin \alpha_n x_2,$$

gdzie

$$\Delta_0 = 1 + 2A_0 \alpha_n^2 \left(1 - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \right).$$

Składowe naprężenia wyrażone są wzorami:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 + \alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{\eta}{\Delta_0} \alpha_n x_1 e^{-\alpha_n x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2A_0 \alpha_n^2}{\Delta_0} (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \right] \cos \alpha_n x_2, \\
 \sigma_{12}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n x_1 e^{-\alpha_n x_1} \sin \alpha_n x_2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\eta \frac{\alpha_n x_1}{\Delta_0} e^{-\alpha_n x_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2A_0 \alpha_n^2}{\Delta_0} \frac{\alpha_n}{\rho_n} (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \right] \sin \alpha_n x_2, \\
 \sigma_{22}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (1 - \alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\eta \frac{1 - \alpha_n x_1}{\Delta_0} e^{-\alpha_n x_1} - \right. \\
 (2.7) \quad &\quad \left. - \frac{2A_0 \alpha_n^2}{\Delta_0} (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \right] \cos \alpha_n x_2, \\
 \mu_{13}^* &= 2A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \alpha_n}{\Delta_0} (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \sin \alpha_n x_2, \\
 \mu_{23}^* &= -2A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \alpha_n}{\Delta_0} \left(e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1} \frac{\alpha_n}{\rho_n} \right) \cos \alpha_n x_2, \\
 \mu_{31}^* &= \frac{(\gamma - \varepsilon)(\lambda_0 + 2\mu)}{2\mu(\lambda_0 + \mu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \alpha_n}{\Delta_0} (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \sin \alpha_n x_2, \\
 \mu_{32}^* &= -\frac{(\gamma - \varepsilon)(\lambda_0 + 2\mu)}{2\mu(\lambda_0 + \mu)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \alpha_n}{\Delta_0} \left(e^{-\alpha_n x_1} - \frac{\alpha_n}{\rho_n} e^{-\rho_n x_1} \right) \cos \alpha_n x_2,
 \end{aligned}$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $\eta = 2A_0 \alpha_n^2 \left(1 - \frac{\alpha_n}{\rho_n} \right)$.

Otrzymane rozwiązanie w teorii mikropolarnej jest sumą dwu rozwiązań: rozwiązania «klasycznego» i rozwiązania dodatkowego uwzględniającego wszystkie warunki brzegowe ośrodka Cosseratów.

Przyjmując $\alpha = 0$, $\rho_n = \alpha_n$, $\Delta_0 = 1$ wzory (2.7) stają się identyczne z klasycznym rozwiązaniem zadania [2].

2.1. Analiza porównawcza naprężeń σ_{22}^* dla teorii mikropolarnej i teorii klasycznej. Zbadano zmienność naprężeń σ_{22}^* dla punktów tarczy o współrzędnych $x_1 = 0 \div 2a$, $x_2 = 0$ i współrzędnych $x_1 = 0 \div 2a$, $x_2 = 3a$.

Obliczenia szczegółowo przeprowadzono na elektronicznej maszynie cyfrowej ODRA-1204.

Z uwagi na brak dokładnych wartości stałych materiałowych przyjęto do obliczeń:
a) dane z klasycznej teorii sprężystości (dla betonu)

$$\left. \begin{array}{l} \nu = 0,16 \\ E = 0,18 \cdot 10^5 \text{ [kG/cm}^2\text{]} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,077 \cdot 10^7 \text{ [T/m}^2\text{]}, \\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0,036 \cdot 10^7 \text{ [T/m}^2\text{]}, \\ \lambda_0 = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu} = 0,81\lambda; \end{array}$$

b) liczbowe stosunki stałych sprężystości wzorując się na pracy [3]

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{5}\mu = 0,0154 \cdot 10^7 \text{ [T/m}^2\text{]} \\ \gamma = \varepsilon = 0,0154 \cdot 10^7 \text{ [T]} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_0 = 0,172 \text{ [m}^2\text{]}, \\ I^2 = 0,600 \text{ [m}^2\text{]}. \end{array}$$

Zmienność naprężeń σ_{22}^* przedstawiono graficznie na rys. 2. Dla uproszczenia przyjęto grubość tarczy równą jedności. W innym przypadku otrzymane wyniki liczbowe należałoby podzielić przez grubość tarczy.

Analizując zmienność naprężeń σ_{22}^* dochodzimy do następujących wniosków:

a) dla punktów przekroju o współrzędnej $x_2 = 0$ różnica w wartości naprężeń dla obu porównywanych teorii ma największą wartość dla punktów brzegowych, zmniejsza się wraz z oddalaniem się od obciążonego brzożonu, dochodząc do wartości zerowej w punkcie o współrzędnej $x_1 = \text{około } 2a$;

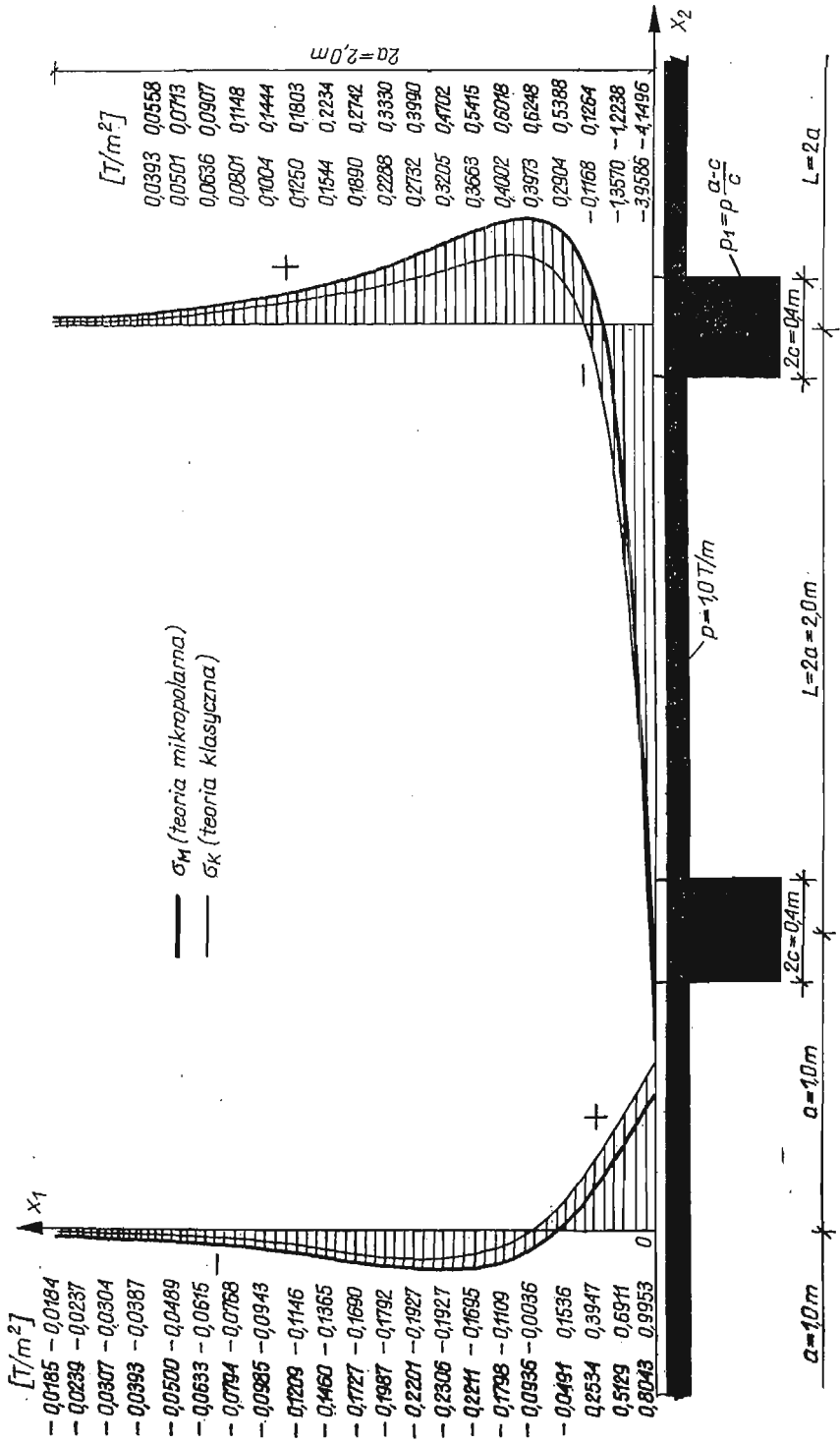
b) dla punktów przekroju o współrzędnej $x_2 = 3a$ różnica naprężeń dla teorii mikropolarnej i teorii klasycznej na brzegu $x_1 = 0$ wynosi zaledwie kilka procent, w przedziale $x_1 = 0 \div 0,2a$ rośnie, osiągając wartość największą dla $x_1 = 0,2a$, następnie w przedziale $x_1 = 0,3a \div 2a$, zmniejszając się stopniowo, jest w dalszym ciągu istotna.

Dokładne opracowanie niniejszego zagadnienia zawiera praca [4], w której przeprowadzono również analizę kilku przypadków, przyjmując inne stosunki stałych sprężystości i inne stosunki c/a (typowe dla konstrukcji budowlanych).

Uogólniając, można stwierdzić, że uwzględnienie naprężeń momentowych w teorii mikropolarnej prowadzi do zmian w stanie naprężenia tarczy. Z uwagi na dobór stałych materiałowych nie potwierdzony badaniami doświadczalnymi, uzyskane wyniki nie mogą służyć jako podstawa do ilościowej oceny różnic między obu teoriami, pozwalają jednak na wyciągnięcie wniosków natury jakościowej.

3. Pasma tarczowe poddane działaniu obciążenia brzegowego okresowego

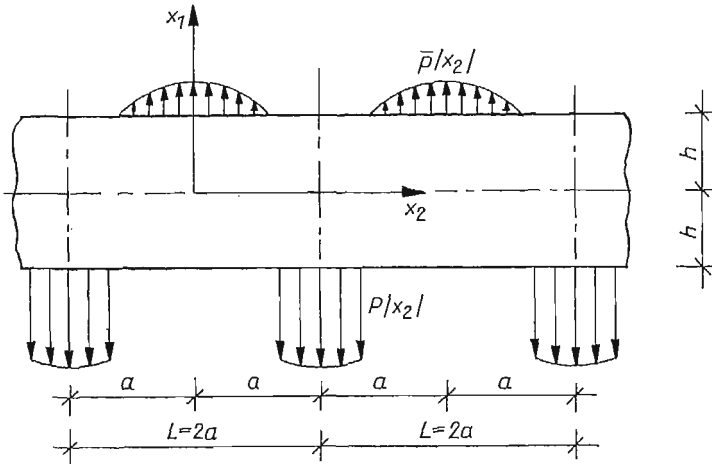
Rozważymy zagadnienie pasma tarczowego nieskończonego poddanego działaniu obciążenia normalnego do brzegu w postaci funkcji symetrycznej względem osi x_1 oraz w postaci funkcji antysymetrycznej względem osi x_1 . Otrzymane wyniki rozwiązania mogą znaleźć zastosowanie przy obliczaniu dźwigarów tarczowych ciągłych i przybliżonego rozwiązania tarcz prostokątnych. Prześla pośrednie dźwigara tarczowego ciągłe-



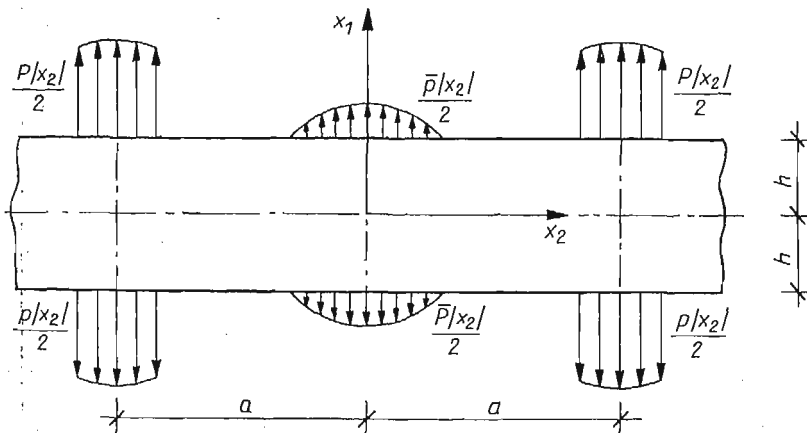
Rys. 2

go, składającego się z dużej ilości przęseł o jednakowej rozpiętości, można obliczać przy założeniu nieskończenie wielu przęseł. Dla tarczy prostokątnej o rozpiętości przęśla większej od podwójnej wysokości tarczy stan naprężenia środkowej części przęśla można określić za pomocą wyników rozwiązania dla tarczy w postaci pasma nieskończonego.

3.1. Rozwiązanie problemu dla obciążenia brzegowego symetrycznego względem $x_2 = 0$. Pasma tarczowe ograniczone brzegami $x_1 = (\pm)h$, rozciągające się w nieskończoność w kierunku osi $(\pm)x_2$, poddane jest działaniu okresowego obciążenia brzegowego $p(x_2)$ i $\bar{p}(x_2)$ symetrycznego względem $x_2 = 0$, zgodnie z rys. 3. W granicach każdego okresu ($L = 2a$) obciążenia te równoważą się.



Rys. 3



Rys. 4

Przy wykorzystaniu zasady superpozycji rozpatrzmy powyższy stan obciążenia jako sumę dwóch składowych stanów obciążeń: stanu $S-S$ (symetria względem osi x_1 i osi x_2) zgodnie z rys. 4 i stanu $S-A$ (symetria względem osi x_1 i antysymetria względem osi x_2) zgodnie z rys. 5.

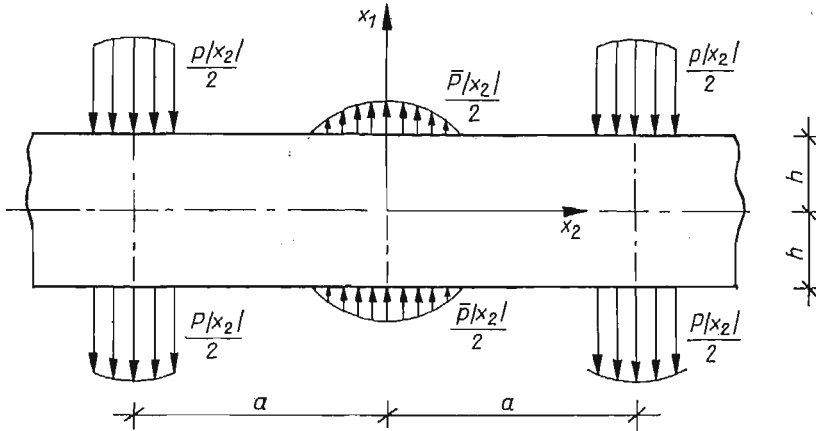
Stan S-S. Obciążenia brzegowe rozwijamy w szeregi Fouriera:

$$\frac{1}{2}\bar{p}(x_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \Delta_n \cos \alpha_n x_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n \cos \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a},$$

$$n = 1, 0, 2, \dots,$$

$$(3.1.1.) \quad \frac{1}{2}p(x_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta_n \cos \alpha_n x_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos \alpha_n x_2,$$

$$\Delta_n = 1 - \frac{1}{2} \delta_{0n}, \quad \delta_{0n} = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ 0 & \text{dla } n \neq 0. \end{cases}$$



Rys. 5

Warunki brzegowe na brzegach $x_1 = \pm h$

$$(3.1.2) \quad \sigma_{11}^*(\pm h, x_2) = \frac{1}{2} [\bar{p}(x_2) + p(x_2)], \quad \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) = 0, \quad \mu_{13}^*(\pm h, x_2) = 0.$$

Przyjęte funkcje naprężeń

$$(3.1.3) \quad F = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 \beta_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1) \cos \alpha_n x_2,$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + H_n \operatorname{sh} \varrho_n x_1) \sin \alpha_n x_2, \quad \varrho_n = \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}$$

po wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych (3.1.2) i ze związków (2.5) mają postać:

$$(3.1.4) \quad F = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{p}_n + p_n}{2\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n h} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] \cos \alpha_n x_2,$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{p}_n + p_n)}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\operatorname{ch} \alpha_n h} - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \frac{\operatorname{sh} \varrho_n x_1}{\operatorname{ch} \varrho_n h} \right) \sin \alpha_n x_2,$$

gdzie

$$\Delta_0 = 1 + 2A_0\alpha_n^2 \left(1 - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \operatorname{th} \varrho_n h \operatorname{cth} \alpha_n h \right) + \frac{2\alpha_n h}{\operatorname{sh} 2\alpha_n h}.$$

Stan S-A. Rozwinięcie obciążeń brzegowych w szeregi Fouriera ma postać:

$$\frac{1}{2}\bar{p}(x_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \Delta_n \cos \alpha_n x_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{p}_n \cos \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.1.5)$$

$$\frac{1}{2}p(x_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Delta_n \cos \alpha_n x_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos \alpha_n x_2.$$

Warunki brzegowe na brzegach $x_1 = \pm h$:

$$\sigma_{11}^*(+h, x_2) = \frac{1}{2} [\bar{p}(x_2) - p(x_2)], \quad \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) = 0, \quad (3.1.6)$$

$$\sigma_{11}^*(-h, x_2) = \frac{1}{2} [p(x_2) - \bar{p}(x_2)], \quad \mu_{13}^*(\pm h, x_2) = 0.$$

Przyjęte funkcje naprężeń

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 D_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1) \cos \alpha_n x_2, \quad (3.1.7)$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} (E_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + G_n \operatorname{ch} \varrho_n x_1) \sin \alpha_n x_2, \quad \varrho_n = \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2},$$

po wyznaczeniu stałych całkowania mają postać

$$F = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{p}_n - p_n}{2\alpha_n^2 \operatorname{sh} \alpha_n h} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \operatorname{cth} \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] \cos \alpha_n x_2, \quad (3.1.8)$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{p}_n - p_n)}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\operatorname{sh} \alpha_n h} - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \frac{\operatorname{ch} \varrho_n x_1}{\operatorname{sh} \varrho_n h} \right) \sin \alpha_n x_2,$$

gdzie

$$\bar{\Delta}_0 = 1 + 2A_0\alpha_n^2 \left(1 - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \operatorname{th} \alpha_n h \operatorname{cth} \varrho_n h \right) - \frac{2\alpha_n h}{\operatorname{sh} 2\alpha_n h}.$$

Uwzględniając wzory (3.1.4) i (3.1.8) otrzymujemy następujące wzory na składowe naprężeń:

$$\sigma_{11}^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{p}_n + p_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n h} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \operatorname{tg} \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] - \right.$$

$$(3.1.9) \quad -\frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\text{ch } \alpha_n x_1}{\text{ch } \alpha_n h} - \frac{\text{ch } \varrho_n x_1}{\text{ch } \varrho_n h} \right) \left\{ \cos \alpha_n x_2 + \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{p}_n - p_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \text{sh } \alpha_n h} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \text{cth } \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \text{sh } \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \text{ch } \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\text{sh } \alpha_n x_1}{\text{sh } \alpha_n h} - \frac{\text{sh } \varrho_n x_1}{\text{sh } \varrho_n h} \right) \right\} \cos \alpha_n x_2,$$

$$\sigma_{12}^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{p}_n + p_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \text{ch } \alpha_n h} \left[\left(\frac{1 - \alpha_n h \text{th } \alpha_n h}{\Delta_0} - 1 \right) \text{sh } \alpha_n x_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha_n x_1 \text{ch } \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] + \frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\text{sh } \alpha_n x_1}{\text{ch } \alpha_n h} - \frac{\alpha_n \text{sh } \varrho_n x_1}{\varrho_n \text{ch } \varrho_n h} \right) \right\} \sin \alpha_n x_2 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{p}_n - p_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \text{sh } \alpha_n h} \left[\left(\frac{1 - \alpha_n h \text{cth } \alpha_n h}{\Delta_0} - 1 \right) \text{ch } \alpha_n x_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\alpha_n x_1 \text{sh } \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] + \frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\text{ch } \alpha_n x_1}{\text{sh } \alpha_n h} - \frac{\alpha_n \text{ch } \varrho_n x_1}{\varrho_n \text{sh } \varrho_n h} \right) \right\} \sin \alpha_n x_2,$$

$$\mu_{13}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0}{\Delta_0} (\bar{p}_n + p_n) \alpha_n \left(\frac{\text{ch } \alpha_n x_1}{\text{ch } \alpha_n h} - \frac{\text{ch } \varrho_n x_1}{\text{ch } \varrho_n h} \right) \sin \alpha_n x_2 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0}{\Delta_0} (\bar{p}_n - p_n) \alpha_n \left(\frac{\text{sh } \alpha_n x_1}{\text{sh } \alpha_n h} - \frac{\text{sh } \varrho_n x_1}{\text{sh } \varrho_n h} \right) \sin \alpha_n x_2,$$

$$\sigma_{22}^* = \dots,$$

$$\sigma_{21}^* = \dots,$$

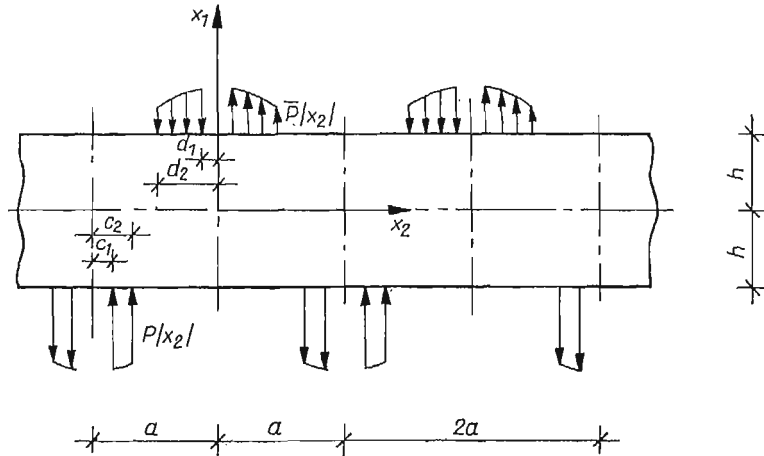
$$\mu_{23}^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0}{\Delta_0} (\bar{p}_n + p_n) \alpha_n \left(\frac{\text{sh } \alpha_n x_1}{\text{ch } \alpha_n h} - \frac{\alpha_n \text{sh } \varrho_n x_1}{\varrho_n \text{ch } \varrho_n h} \right) \cos \alpha_n x_2 + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0}{\Delta_0} (\bar{p}_n - p_n) \alpha_n \left(\frac{\text{ch } \alpha_n x_1}{\text{sh } \alpha_n h} - \frac{\alpha_n \text{ch } \varrho_n x_1}{\varrho_n \text{sh } \varrho_n h} \right) \cos \alpha_n x_2.$$

3.2. Rozwiązanie problemu dla obciążenia brzegowego antysymetrycznego względem $x_2 = 0$. Obciążenie brzegowe pasma tarczowego antysymetryczne względem osi x_1 ($L = 2a$) tworzy wewnątrz okresu układ zrównoważony (rys. 6). Stan naprężenia wywołany tym obciążeniem rozpatrzmy jako superpozycję stanu $A-S$ (antysymetria względem osi x_1 i symetria względem osi x_2) i stanu $A-A$ (antysymetria względem osi x_1 i x_2).

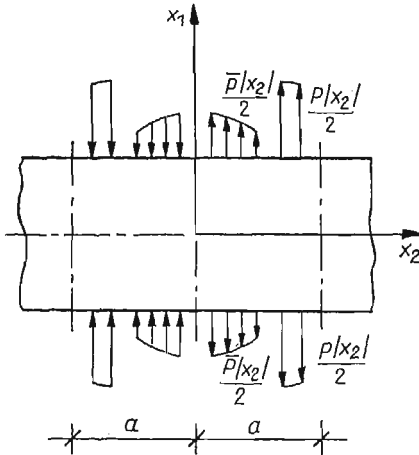
Stan A-S. Rozwinięcie obciążeń brzegowych w szeregi Fouriera ma postać

$$(3.2.1) \quad \frac{1}{2} \bar{p}(x_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \sin \alpha_n x_2,$$

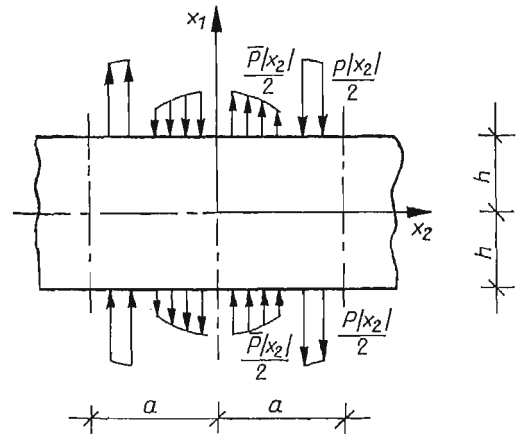
$$\frac{1}{2} p(x_2) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Warunki brzegowe na brzegach $x_1 = \pm h$:

$$(3.2.2) \quad \sigma_{11}^*(\pm h, x_2) = \frac{1}{2} [\bar{p}(x_2) + p(x_2)], \quad \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) = 0, \quad \mu_{13}^*(\pm h, x_2) = 0.$$

Funkcje naprężeń F, Ψ przyjmujemy w postaci:

$$(3.2.3) \quad \begin{aligned} F &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1) \sin \alpha_n x_2, \\ \Psi &= \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + H_n \operatorname{sh} \varrho_n x_1) \cos \alpha_n x_2, \end{aligned}$$

a po wyznaczeniu stałych całkowania mamy:

$$(3.2.4) \quad \begin{aligned} F &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n + a_n}{2\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n h} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] \sin \alpha_n x_2, \\ \Psi &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{a}_n + a_n)}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\operatorname{ch} \alpha_n h} - \frac{\alpha_n \operatorname{sh} \varrho_n x_1}{\varrho_n \operatorname{ch} \varrho_n h} \right) \cos \alpha_n x_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta_0 = 1 + 2A_0 \alpha_n^2 \left(1 - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \operatorname{th} \varrho_n h \operatorname{cth} \alpha_n h \right) + \frac{2\alpha_n h}{\operatorname{sh} 2\alpha_n h}.$$

Stan A-A. Rozwinięcie obciążeń brzegowych w szeregi Fouriera ma postać

$$(3.2.5) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{p}(x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \sin \alpha_n x_2, \\ \frac{1}{2} p(x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Warunki brzegowe na brzegach $x_1 = \pm h$:

$$(3.2.6) \quad \sigma_{11}^*(\pm h, x_2) = \frac{1}{2} [\bar{p}(x_2) + p(x_2)], \quad \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) = 0, \quad \mu_{13}^*(\pm h, x_2) = 0.$$

Przyjęta postać funkcji F i Ψ :

$$(3.2.7) \quad \begin{aligned} F &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 D_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1) \sin \alpha_n x_2, \\ \Psi &= \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + G_n \operatorname{ch} \varrho_n x_1) \cos \alpha_n x_2, \end{aligned}$$

po wyznaczeniu stałych całkowania jest następująca:

$$(3.2.8) \quad \begin{aligned} F &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n + a_n}{2\alpha_n^2 \operatorname{sh} \alpha_n h} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \operatorname{cth} \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] \sin \alpha_n x_2, \\ \Psi &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{a}_n + a_n)}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\operatorname{sh} \alpha_n h} - \frac{\alpha_n \operatorname{ch} \varrho_n x_1}{\varrho_n \operatorname{sh} \varrho_n h} \right) \cos \alpha_n x_2. \end{aligned}$$

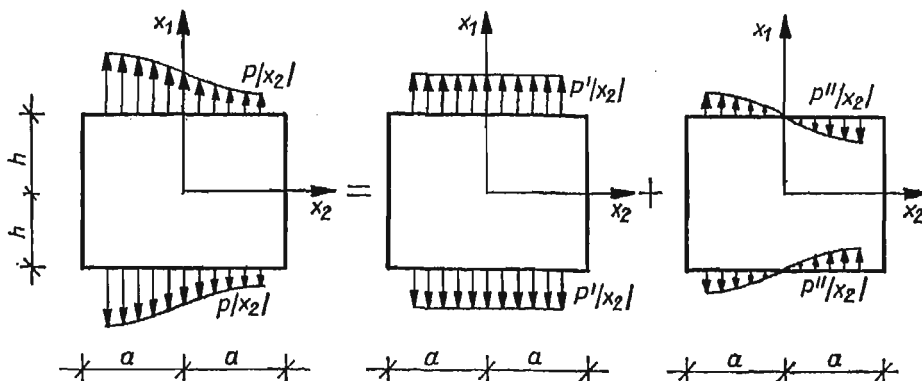
Po uwzględnieniu wzorów (3.2.4) i (3.2.8) otrzymujemy składowe naprężeń w postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n + a_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n h} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\operatorname{ch} \alpha_n h} - \frac{\operatorname{ch} \varrho_n x_1}{\operatorname{ch} \varrho_n h} \right) \right\} \sin \alpha_n x_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n + a_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \operatorname{sh} \alpha_n h} \left[\left(1 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_n h \operatorname{cth} \alpha_n h}{\Delta_0} \right) \operatorname{sh} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] - \frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\operatorname{sh} \alpha_n h} - \frac{\operatorname{sh} \varrho_n x_1}{\operatorname{sh} \varrho_n h} \right) \right\} \sin \alpha_n x_2, \\ \sigma_{12}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n + a_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n h} \left[\left(1 + \frac{\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h - 1}{\Delta_0} \right) \operatorname{sh} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\Delta_0} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\operatorname{ch} \alpha_n h} - \frac{\operatorname{sh} \varrho_n x_1}{\operatorname{ch} \varrho_n h} \right) \right] \right\} \cos \alpha_n x_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{a}_n + a_n) \alpha_n^2 \left\{ \frac{1}{2\alpha_n^2 \operatorname{sh} \alpha_n h} \left[\left(1 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_n h \operatorname{cth} \alpha_n h - 1}{\Delta_0} \right) \operatorname{ch} \alpha_n x_1 - \frac{\alpha_n x_1 \operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\Delta_0} \right] - \frac{A_0}{\Delta_0} \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\operatorname{sh} \alpha_n h} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \frac{\operatorname{ch} \varrho_n x_1}{\operatorname{sh} \varrho_n h} \right) \right\} \cos \alpha_n x_2, \\ (3.2.9) \quad \mu_{13}^* &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{a}_n + a_n)}{\Delta_0} \alpha_n \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\operatorname{ch} \alpha_n h} - \frac{\operatorname{ch} \varrho_n x_1}{\operatorname{ch} \varrho_n h} \right) \cos \alpha_n x_2 - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{a}_n + a_n)}{\Delta_0} \alpha_n \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\operatorname{sh} \alpha_n h} - \frac{\operatorname{sh} \varrho_n x_1}{\operatorname{sh} \varrho_n h} \right) \cos \alpha_n x_2, \\ \sigma_{22}^* &= \dots, \\ \sigma_{21}^* &= \dots, \\ \mu_{23}^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{a}_n + a_n)}{\Delta_0} \alpha_n \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha_n x_1}{\operatorname{ch} \alpha_n h} - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \frac{\operatorname{sh} \varrho_n x_1}{\operatorname{ch} \varrho_n h} \right) \sin \alpha_n x_2 + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_0 (\bar{a}_n + a_n)}{\Delta_0} \alpha_n \left(\frac{\operatorname{ch} \alpha_n x_1}{\operatorname{sh} \alpha_n h} - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \frac{\operatorname{ch} \varrho_n x_1}{\operatorname{sh} \varrho_n h} \right) \sin \alpha_n x_2. \end{aligned}$$

4. Tarcza prostokątna poddana działaniu obciążenia na dwóch przeciwległych brzegach

Rozpatrzmy zagadnienie tarczy prostokątnej obciążonej na brzegach $x_1 = \text{const}$. Powyższy stan obciążenia wygodnie jest rozpatrywać, wykorzystując zasadę superpozycji, jako sumę dwóch stanów: dla obciążenia brzegowego podwójnie symetrycznego i symetryczno-antysymetrycznego, zgodnie z rys. 9.

W ogólnym przypadku przy wyznaczeniu stanu naprężenia tarczy prostokątnej powinny być spełnione warunki dla czterech brzegów. W poniższym rozwiązaniu, które otrzymamy w postaci szeregu, warunki brzegowe dla naprężeń normalnych i naprężeń momentowych

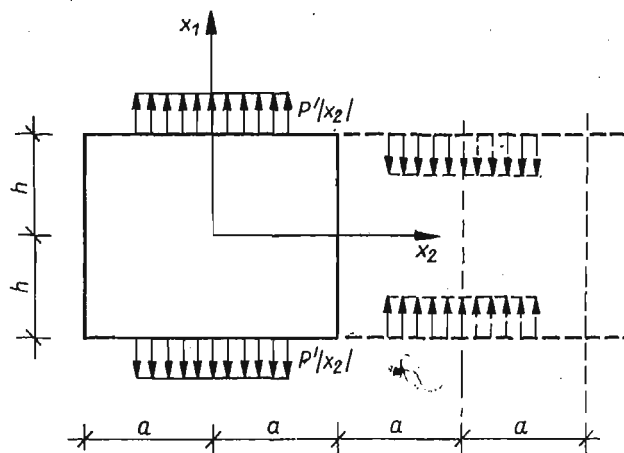


Rys. 9

będą spełnione wzdłuż każdego brzegu w sposób ścisły, natomiast warunki dla naprężeń stycznych — w sposób przybliżony (z uwagi na możliwość uwzględnienia tylko ograniczonej ilości wyrazów szeregu).

4.1. Rozwiązanie dla obciążenia brzegowego podwójnie symetrycznego. Przedstawiamy obciążenia brzegowe za pomocą szeregów Fouriera ($L = 4a$), przy założeniu, że ciągną się one dalej, poza długością brzegu

$$(4.1.1) \quad p'(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{2a}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$



Rys. 10

Warunki brzegowe na brzegach $x_1 = \pm h, x_2 = \pm a$

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^*(\pm h, x_2) &= p'(x_2), & \sigma_{22}^*(x_1, \pm a) &= 0, & \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) &= 0, \\ \sigma_{21}^*(x_1, \pm a) &= 0, & \mu_{13}^*(\pm h, x_2) &= 0, & \mu_{23}^*(x_1, \pm a) &= 0. \end{aligned}$$

Ze względu na dwuosiową symetrię stanu naprężenia przyjmujemy funkcje F i Ψ w postaci:

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1) \cos \alpha_n x_2 + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (K_m \operatorname{ch} \beta_m x_2 + \beta_m x_2 M_m \operatorname{sh} \beta_m x_2) \cos \beta_m x_1, \\
 (4.1.3) \quad \Psi &= \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + H_n \operatorname{sh} \varrho_n x_1) \sin \alpha_n x_2 + \\
 &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} (P_m \operatorname{sh} \beta_m x_2 + R_m \operatorname{sh} \gamma_m x_2) \sin \beta_m x_1,
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \frac{n\pi}{2a}, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{2a}, \quad m = 1, 3, 5, \dots \\
 \varrho_n &= \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}, \quad \gamma_m = \left(\beta_m^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

β_m — odpowiada okresowi $L = 2h$. Stałe $A_n, B_n, K_m, M_m, F_n, P_m, R_m, H_n$ tak ustalimy, żeby były spełnione warunki brzegowe (4.1.2) i związki (2.5).

Ponieważ obrane funkcje naprężeń odpowiadają warunkom symetrii, wystarczy uwzględnić tylko warunki brzegowe dla brzegów $x_2 = +a$ i $x_1 = +h$. Jeżeli będą one spełnione, to będą również spełnione podobne warunki dla brzegów $x_2 = -a$ i $x_1 = -h$.

Z warunków brzegowych dla naprężeń normalnych σ_{11}^* i σ_{22}^* i z warunków brzegowych dla naprężeń momentowych μ_{13}^* i μ_{23}^* otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 (4.1.4) \quad &\alpha_n F_n \operatorname{ch} \alpha_n h + \varrho_n H_n \operatorname{ch} \varrho_n h = 0, \\
 &\beta_m P_m \operatorname{ch} \beta_m a + \gamma_m R_m \operatorname{ch} \gamma_m a = 0, \\
 &A_n \operatorname{ch} \alpha_n h + \alpha_n h B_n \operatorname{sh} \alpha_n h = -\frac{a'_n}{\alpha_n^2}, \\
 &K_m \operatorname{ch} \beta_m a + \beta_m a M_m \operatorname{sh} \beta_m a = 0.
 \end{aligned}$$

Wykorzystanie związków wiążących funkcje F i Ψ [wzory (2.5)] prowadzi do nieskończonego układu równań

$$(4.1.5) \quad n(F_n - 2A_0 \alpha_n^2 B_n) \operatorname{ch} \alpha_n h \sin \frac{m\pi}{2} = m(-P_m - 2A_0 \beta_m^2 M_m) \operatorname{ch} \beta_m a \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Z równań (4.1.5) otrzymujemy dwa warunki

$$\begin{aligned}
 (4.1.6) \quad &F_n - 2A_0 \alpha_n^2 B_n = 0, \\
 &P_m + 2A_0 \beta_m^2 M_m = 0.
 \end{aligned}$$

Spełniając cztery warunki brzegowe (4.1.4) oraz równania (4.1.6) otrzymujemy stałe całkowania w postaci: $A_n = f(B_n)$, $H_n = f(B_n)$, $K_m = f(M_m)$, $R_m = f(M_m)$ jak poniżej:

$$(4.1.7) \quad \begin{aligned} A_n &= -\frac{\alpha'_n}{\alpha_n^2 \operatorname{ch} \alpha_n h} - \alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h B_n, & H_n &= -\frac{2A_0 \alpha_n^3}{\varrho_n} \frac{\operatorname{ch} \alpha_n h}{\operatorname{ch} \varrho_n h} B_n, \\ R_m &= -\frac{2A_0 \beta_m^3}{\gamma_m} \frac{\operatorname{ch} \beta_m a}{\operatorname{ch} \gamma_m a} M_m, & K_m &= -\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a M_m. \end{aligned}$$

Spełnienie pozostałych warunków brzegowych dla naprężeń σ_{12}^* , σ_{21}^* po uwzględnieniu (4.1.7) i przedstawieniu funkcji: $\operatorname{sh} \alpha_n x_1$, $x_1 \operatorname{ch} \alpha_n x_1 \dots$ itp. za pomocą szeregów Fouriera, prowadzi do algebraicznych równań w postaci:

$$(4.1.8) \quad \begin{aligned} &\alpha_n^2 \left[-\frac{\alpha'_n}{\alpha_n^2} \operatorname{th} \alpha_n h \sin \frac{m\pi}{2} + \operatorname{th} \alpha_n h (-\alpha_n h \operatorname{th} \alpha_n h + 1) B_{nm} + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_n h B_{nm} + 2A_0 \alpha_n^2 B_{nm} \left(\operatorname{th} \alpha_n h - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \operatorname{th} \varrho_n h \right) \right] + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m^2 \left[M_{mn} \frac{2\beta_m}{a} \frac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} - 2A_0 \beta_m^2 M_{mn} \frac{2\beta_m}{a} \left(\frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} + \frac{1}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2} \right) \right] = 0, \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \left[\frac{-2\alpha'_n}{\alpha_n h} \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} + B_{mn} \frac{2\alpha_n}{h} \frac{2\beta_m^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2A_0 \alpha_n^2 B_{mn} \frac{2\alpha_n}{h} \frac{\varrho_n^2 - \alpha_n^2}{(\alpha_n^2 + \beta_m^2)(\varrho_n^2 + \beta_m^2)} \right] + \beta_m^2 \left[\operatorname{th} \beta_m a (-\beta_m a \operatorname{th} \beta_m a + \right. \\ &\quad \left. + 1) M_{mn} + \beta_m a M_{mn} + 2A_0 \beta_m^2 M_{mn} \left(\operatorname{th} \beta_m a + \frac{\beta_m}{\gamma_m} \operatorname{th} \gamma_m a \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Wprowadzono tu oznaczenia:

$$B_{nm} = B_n \operatorname{ch} \alpha_n h \sin \frac{m\pi}{2}, \quad M_{mn} = M_m \operatorname{ch} \beta_m a \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Z nieskończonego układu równań (4.1.8) można określić poszukiwane stałe B_n , M_m .

4.2. Rozwiązanie dla obciążenia brzegowego symetryczno-antysymetrycznego. Postępując w podobny sposób jak w punkcie 4.1 przedstawiamy obciążenia brzegowe za pomocą szeregów Fouriera ($L = 2a$)

$$(4.2.1) \quad p''(x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \sin \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Warunki brzegowe na brzegach $x_1 = \pm h$, $x_2 = \pm a$:

$$(4.2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^*(\pm h, x_2) &= p''(x_2), & \sigma_{22}^*(x_2, \pm a) &= 0, & \sigma_{12}^*(\pm h, x_2) &= 0, \\ \sigma_{21}^*(x_1, \pm a) &= 0, & \mu_{13}^*(\pm h, x_2) &= 0, & \mu_{23}^*(x_1, \pm a) &= 0. \end{aligned}$$

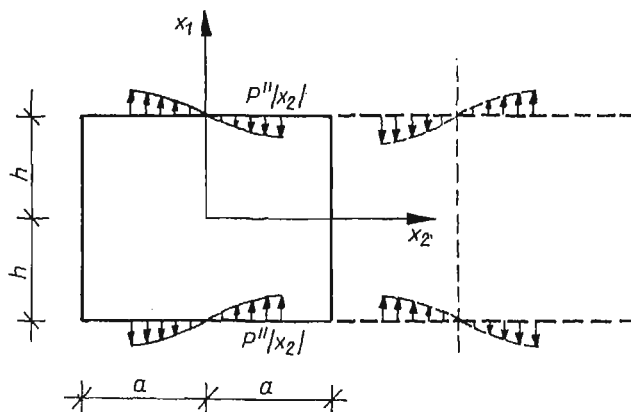
Funkcje naprężeń F i Ψ przyjmujemy w postaci:

$$\begin{aligned}
 F = & \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \operatorname{ch} \alpha_n x_1 + \alpha_n x_1 B_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1) \sin \alpha_n x_2 + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} (K_m \operatorname{sh} \beta_m x_2 + \beta_m x_2 M_m \operatorname{ch} \beta_m x_2) \cos \beta_m x_1, \\
 (4.2.3) \quad \Psi = & \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} \alpha_n x_1 + H_n \operatorname{sh} \varrho_n x_1) \cos \alpha_n x_2 + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} (P_m \operatorname{ch} \beta_m x_2 + R_m \operatorname{ch} \gamma_m x_2) \sin \beta_m x_1,
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{2h}, \quad m = 1, 3, 5, \dots, \\
 \varrho_n &= \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}, \quad \gamma_m = \left(\beta_m^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

β_m — odpowiada okresowi $L = 4h$, co umożliwia spełnienie w sposób ścisły warunków brzegowych dla składowych naprężenia σ_{11}^* , μ_{13}^* .



Rys. 11

Tok rozwiązania zagadnienia jest taki sam jak w punkcie (4.1). Biorąc pod uwagę wzory (4.2.3) spełniamy najpierw cztery warunki brzegowe (4.2.2)_{1,2,5,6} i równania wiążące funkcje F i Ψ (2.5), otrzymując stałe całkowania w postaci $A_n = f(B_n)$, $H_n = f(B_n)$, $K_m = f(M_m)$, $R_m = f(M_m)$. Następnie spełniając dwa ostatnie warunki brzegowe (4.2.2)_{3,4} dochodzimy do nieskończonego układu równań.

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. K. GIRKMAN, *Dźwigary powierzchniowe*, Arkady, Warszawa 1957.
3. S. KALISKI, J. KAPELEWSKI, S. RYMARZ, *Surface waves on an optical branch in a continuum with rotational degrees of freedom*, Proc. Vibr. Probl., 2, 9 (1968).
4. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Plaskie zagadnienia mikropolarnej sprężystości*, Praca doktorska złożona w Bibliotece Głównej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.

Р е з ю м е

СТАТИКА МИКРОПОЛЯРНЫХ ДИСКОВ

В работе рассматривается на примере диска, полубесконечного диска и дисковой полосы задача микрополярной упругости.

Задача решается с помощью функции Эри-Миндлина. Соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных решались с помощью одинарных и двойных рядов Фурье.

S u m m a r y

STATICS OF MICROPOLAR PLATES

In the paper the static problems of micropolar elasticity for a semi-infinite plate, a plate-strip and a right-angled plate in a plane state of stress are considered. Solved are the problems by means of the Airy-Mindlin function. The differential partial equations of the problems are solved using a single and double Fourier series.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA, FILIA W PŁOCKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 grudnia 1973 r.; w wersji ostatecznej — dnia 15 maja 1974 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

XVI ZJAZD DELEGATÓW POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

XVI Zjazd PTMTS odbył się w Warszawie 1 czerwca 1974 r. W Zjeździe uczestniczyło 60 osób, w tym 54 osoby z mandatami delegatów, reprezentujące 11 Oddziałów Towarzystwa. Otwarcia obrad dokonał przewodniczący ZG prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, który stwierdził, że Zjazd odbywa się w roku obchodów 30-lecia PRL, a najlepszym sposobem uczczenia tej rocznicy jest wcielanie w życie postulatów II Kongresu Nauki Polskiej. Przewodniczący ZG przypomniał, że w czasie obrad Kongresu odnośnie dziedziny mechaniki zwrócono uwagę na niedostateczną działalność w zakresie badań doświadczalnych i na niedostateczne powiązanie nauki z przemysłem.

Nauka polska poniosła w ostatnim roku poważne straty. Zmarli cenieni profesorowie, członkowie PTMTS: prof. dr Zbigniew BUDZIANOWSKI (z Gliwic), prof. Marian PIĄTEK (z Gdańska), prof. dr Jan TYSZOWIECKI (z Krakowa), prof. dr Zbigniew WASIUTYŃSKI (z Warszawy), prof. dr Celestyn STECKIEWICZ (z Warszawy), prof. dr Franciszek SZELĄGOWSKI (z Warszawy). Zebrani uczcili pamięć zmarłych minutą ciszy.

Na przewodniczącego obrad Zjazdu Delegatów powołano doc. dr Zenona WASZCZYŻYNA z Krakowa, na zastępców przewodniczącego — doc. dra Lecha KAMIŃSKIEGO z Bydgoszczy i doc. dra Czesława MIKIEWICZA ze Szczecina, na sekretarza — dr Piotra SUKIENNIKA z Krakowa.

Przyjęto następujący porządek obrad:

1. Otwarcie Zjazdu. Wybór przewodniczącego, zastępców przewodniczącego i sekretarza Zjazdu.
2. Przyjęcie protokołu XV Zjazdu Delegatów PTMTS.
3. Powołanie Komisji Matki i Skrutacyjnej.
4. Uchwalenie nadania godności członków honorowych PTMTS.
5. Złożenie sprawozdania z działalności Towarzystwa.
6. Złożenie sprawozdania finansowego.
7. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej.
8. Dyskusja nad sprawozdaniami, przyjęcie ich, postawienie wniosku o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium, głosowanie nad wnioskiem.
9. Wybory: a) przewodniczącego, b) członków Zarządu Głównego, c) Głównej Komisji Rewizyjnej.
10. Uchwalenie generalnych wytycznych działalności na następny okres.
11. Sprawy bieżące i wolne wnioski.

Ad 1. Pierwszy punkt porządku dziennego wyczerpano na wstępie.

Ad 2. Protokół poprzedniego Zjazdu Delegatów PTMTS odbytego 12 maja 1973 r. przyjęto bez zmian.

Ad 3. Komisję Matkę i Skrutacyjną powołano w składzie: prof. dr Gustaw RAKOWSKI, doc. dr Władysław WĄLCAK, prof. dr Józef FOLWARCZNY, prof. dr Stanisław WIŚNIEWSKI.

Ad 4. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI przedstawił zebranim wniosek, uchwalony przez plenarne zebranie Zarządu Głównego, o nadanie godności członka honorowego PTMTS prof. drowi Marianowi JANUSZOWI — członkowi założycielowi PTMTS, jednemu z organizatorów Oddziału w Gliwicach. Po zreferowaniu przez prof. KĄCZKOWSKIEGO działalności prof. JANUSZA i po dyskusji uchwalono jednogłośnie nadanie prof. drowi MARIANOWI JANUSZOWI godności członka honorowego PTMTS.

Ad 5. Sprawozdanie z działalności Towarzystwa w roku 1973 oraz w I kwartale roku 1974 złożył sekretarz generalny prof. dr J. SZMELTER.

Ad 6. Sprawozdanie finansowe za rok 1973 oraz za I kwartał roku 1974 złożył skarbnik prof. dr. Z. WESOŁOWSKI.

Ad 7. Sprawozdanie Głównej Komisji Rewizyjnej złożył jej przewodniczący prof. dr St. KOCĄNDA.

Ad 8. W dyskusji zabierali głos doc. dr Z. WASZCZYSZYN, prof. dr J. SZMELTER, prof. dr J. KOŁAKOWSKI, prof. A. CYBULSKI, prof. dr Z. BRZOSKA, prof. dr Z. WESOŁOWSKI, prof. dr Z. KĄCZKOWSKI. Wypowiedzi dyskutantów dotyczyły konieczności uatrakcyjnienia działalności Towarzystwa, kontynuowania współpracy z innymi stowarzyszeniami i instytucjami w organizowaniu pewnych imprez, zaległości w opłacaniu składek, form informacji o tematyce referatów wygłaszanych na zebraniach naukowych, spraw finansowych związanych z wystawianiem delegacji na sympozja Towarzystwa, niektórych danych zawartych w sprawozdaniu finansowym.

Po dyskusji przyjęto sprawozdania:

- a) z działalności PTMTS w roku 1973 oraz w I kwartale roku 1974,
- b) finansowe za rok 1973 oraz za I kwartał roku 1974,
- c) Głównej Komisji Rewizyjnej.

Wniosek o udzielenie Zarządowi Głównemu absolutorium przyjęto jednomyślnie.

Ad 9. Kandydatury na przewodniczącego Zarządu Głównego, członków Zarządu Głównego i członków Głównej Komisji Rewizyjnej zgłosił w imieniu Komisji Matki doc. dr W. WALCZAK.

W wyniku tajnego głosowania na przewodniczącego Zarządu Głównego PTMTS został wybrany jednomyślnie prof. dr Zbigniew KĄCZKOWSKI.

Wyniki głosowania na zgłoszonych przez Komisję Matkę kandydatów na członków Zarządu Głównego były następujące:

1) prof. dr J. Szmelter	49 głosów
2) prof. dr Z. Osiński	46 „
3) prof. dr Z. Parszewski (Łódź)	46 „
4) prof. dr Z. Wesółowski	46 „
5) prof. dr J. Antoniak (Gliwice)	45 „
6) prof. dr J. Murzewski (Kraków)	41 „
7) prof. dr G. Rakowski	41 „
8) prof. dr G. Bielewicz (Gdańsk)	40 „
9) prof. dr St. Dmitruk (Wrocław)	39 „
10) doc. dr M. Kwieciński	37 „
11) prof. dr J. Kołakowski (Częstochowa)	35 „
12) doc. dr H. Mikołajczak (Poznań)	34 głosy

Uprawnione do głosowania były 54 osoby, 9 pierwszych osób zostało członkami Zarządu Głównego a 3 pozostałe — zastępcami członków Zarządu Głównego.

Do Głównej Komisji Rewizyjnej wybrano zgodnie z propozycjami Komisji Matki:

1) prof. dra St. Kocańde	54 głosy
2) prof. dra R. Janiczka (Częstochowa)	45 głosów
3) prof. dra J. Sułockiego (Łódź)	45 głosów
4) dra K. Grudzińskiego (Szczeciń)	42 głosy
5) doc. dra Z. Bychawskiego (Kraków)	41 głosów
6) doc. dra J. Stupnickiego	41 głosów

Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI w serdecznych słowach podziękował zebranych za okazane mu zaufanie i ponowny wybór na przewodniczącego PTMTS.

Ad 10. Wytyczne kierunkowe działalności PTMTS na najbliższy okres zreferował przewodniczący ZG prof. dr Z. KĄCZKOWSKI. Przewodniczący ZG stwierdził, że należy kontynuować dotychczasowe formy działalności, jak zebrania naukowe, sympozja, konkursy naukowe ogólnokrajowe, zjazdy itd. Jednocześnie

jednak należy dążyć do ich uatrakcyjnienia. Nową, ciekawą formą działalności Towarzystwa mogą być zebrania okrągłego stołu, których celem są dyskusje na tematy budzące szerokie zainteresowanie. Pierwsze zebranie tego typu z powodzeniem przeprowadził Oddział Warszawski. Prof. KĄCZKOWSKI zaproponował również, by wyborcze zjazdy delegatów trwały 2 dni, co pozwoliłoby na połączenie ich z sesjami naukowymi. Wydaje się także celowe organizowanie tych zjazdów na terenie różnych Oddziałów.

W dyskusji nad wytycznymi działalności zabierali głos prof. dr M. DIETRICH, prof. dr Z. PARSEWSKI, prof. dr Z. OSIŃSKI, doc. dr E. RADWAŃSKI, prof. dr Z. KĄCZKOWSKI, doc. dr Z. WASZCZYŹYŃ i inni. Dyskusja skoncentrowała się głównie na temacie uatrakcyjnienia form działalności Towarzystwa. Poparto propozycje przewodniczącego ZG, a także przedstawiono kilka innych, np.: organizowanie spotkań towarzyskich połączonych z pewnymi hasłami naukowymi, poszukiwanie ściślejszych kontaktów między przedstawicielami różnych dziedzin mechaniki, specjalizowanie się Oddziałów w tematyce organizowanych sympozjów. Poruszono również sprawę powołania nowych Oddziałów PTMTS w Opolu i w Lublinie, sprawę włączenia się PTMTS do dyskusji nad projektem kodeksu etyki pracowników nauki itd.

Ad 11. Prof. dr Z. KĄCZKOWSKI podziękował Kolegom z Zarządu Głównego za współpracę w ubiegłej kadencji. Podziękował też doc. drowi Z. WASZCZYŹYŃOWI za sprawne przeprowadzenie obrad Zjazdu Delegatów. Dalsze podziękowania złożono Prezydium obrad oraz Komisji Matce i Skrutacyjnej. Podziękowano również Ob. H. ROSIŃSKIEJ za przygotowanie organizacyjnej strony Zjazdu.

Na tym obrady zakończono.

WŁADZE PTMTS W KADENCJI 1974/1975/1976

Zarząd Główny

Prof. dr Zbigniew Kączkowski — przewodniczący, prof. dr Zbigniew Osiniński — wiceprzewodniczący, prof. dr Zdzisław Parszewski (Łódź) — wiceprzewodniczący, prof. dr Jan Szmelter — sekretarz generalny, prof. dr Zbigniew Wesołowski — skarbnik, prof. dr hab. Jerzy Antoniak (Gliwice) — zast. sekr. generalnego, prof. dr Gustaw Rakowski — zast. skarbnika, prof. dr Eugeniusz Bielewicz (Gdańsk) — członek ZG, prof. dr hab. Stanisław Dmitruk (Wrocław) — członek ZG, prof. dr hab. Janusz Murzewski (Kraków) — członek ZG, prof. dr Jerzy Kołakowski (Częstochowa) — zast. czł. ZG, doc. dr hab. Marek Kwieciński — zast. czł. ZG, doc. dr Henryk Mikołajczak (Poznań) — zast. czł. ZG.

Główna Komisja Rewizyjna

Prof. dr Stanisław Kocańda — przewodniczący, doc. dr Zbigniew Bychawski (Kraków), doc. dr Karol Grudziński (Szczecin), doc. dr Roman Janiczek (Częstochowa), prof. dr Jerzy Sułocki (Łódź), doc. dr Jacek Stupnicki — członkowie.

Oddział w Bydgoszczy

Doc. dr Lech M. Kamiński — przewodniczący, dr Bronisław Siolkowski — sekretarz, mgr inż. Jerzy Cabański — skarbnik, doc. dr Krzysztof Wernerowski i dr Tadeusz Kabat — członkowie zarządu.

Oddział w Częstochowie

Prof. dr Jerzy Kołakowski — przewodniczący, prof. dr hab. Roman Janiczek — zast. przewodniczącego, doc. dr hab. Janusz Elsner — sekretarz, doc. dr Adolf Stuzalec — skarbnik, doc. dr Waldemar Bachmacz i dr Ryszard Parkitny — członkowie zarządu.

Oddział w Gdańsku

Prof. dr hab. Piotr Wilde — przewodniczący, dr hab. Zbigniew Cywiński — sekretarz, doc. dr Jan Kruszewski — skarbnik, dr Zbigniew Powierża — członek zarządu, doc. dr Wojciech Pietraszkiewicz — zast. czł. zarządu.

Oddział w Gliwicach

Doc. dr Józef Wojnarowski — przewodniczący, doc. dr hab. Szczepan Borkowski i doc. dr hab. Stanisław Gdula — zast. przewodniczącego, doc. dr Walery Szuścik — sekretarz, dr hab. Andrzej Tylikowski — skarbnik, dr Ernest Czogała — członek zarządu, dr Remigiusz Ćwik, dr Jan Orlacz i dr Eugeniusz Świ-toński — zast. czł. zarządu.

Oddział w Krakowie

Doc. dr Zenon Waszczyszyn — przewodniczący, doc. dr Stanisław Kasprzyk — zast. przewodniczącego, doc. dr Bogdan Olszowski — sekretarz, doc. dr Wiesław Krzyś — skarbnik, prof. dr Gwidon Szefer, doc. dr Zbigniew Kordecki i prof. dr Zbigniew Engel — czł. zarządu, doc. dr Antoni Czubak — zast. czł. zarządu.

Oddział w Łodzi

Prof. dr hab. Marian Suchar — przewodniczący, doc. dr Władysław Walczak — zast. przewodniczącego, doc. dr Janusz Ziółkowski — sekretarz, dr Waldemar Kobza — skarbnik.

Oddział w Poznaniu

Doc. dr hab. Jarosław Stefaniak — przewodniczący, doc. dr hab. Henryk Mikołajczak — zast. przewodniczącego, dr Zbigniew Magiera-Ullrich — sekretarz, dr Ryszard Dzieciela — skarbnik, doc. dr hab. Stanisław Stanisławski — czł. zarządu, doc. dr hab. Kazimierz Jasiewicz — zast. czł. zarządu.

Oddział w Rzeszowie

Doc. dr Henryk Kopecki — przewodniczący, mgr inż. Marian Kopkowicz — sekretarz, dr Andrzej Świder — skarbnik.

Oddział w Szczecinie

Doc. dr Czesław Mickiewicz — przewodniczący, mgr inż. Mieczysław Kosecki — zast. przewodniczącego, dr Bożena Tęczyńska — sekretarz, dr Halina Karpińska — skarbnik, doc. dr Leon Waśko — czł. zarządu.

Oddział w Warszawie

Prof. dr hab. Marek Dietrich — przewodniczący, prof. dr Jerzy Rutkowski — zast. przewodniczącego, doc. dr Andrzej Jaworski — sekretarz, doc. dr hab. Przenysław Jastrzębski — skarbnik, płk. dr hab. Stanisław Dubiel — zast. sekretarza, doc. dr Edward Radwański — zast. skarbnika, doc. dr Jacek Mączyński — zast. członka zarządu.

Oddział we Wrocławiu

Doc. dr Jeremi Sieczkowski — przewodniczący, doc. dr Barbara Gabryszewska — zast. przewodniczącego, dr Ryszard Izbiński — sekretarz, doc. dr Jacek Wojciechowski — skarbnik, dr Henryk Borocho — czł. zarządu, dr Jerzy Bauer i dr Jacek Stróżecki — zast. czł. zarządu.

WYKAZ ODDZIAŁÓW**PÓLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ**

1. Bydgoszcz — 85-225 Bydgoszcz, ul. Jana Olszewskiego 20, Wyższa Szkoła Inżynierska — Zespół Mechaniki Technicznej, tel. 394-28 wew. 73.
2. Częstochowa — 42-200 Częstochowa, ul. Zawadzkiego 60, Politechnika Częstochowska, Wydział Budowy Maszyn, Zakład Maszyn i Przeróbki Plastycznej.

3. Gdańsk — 80-952 Gdańsk-Wrzeszcz, ul. Majakowskiego 11/12, Politechnika Gdańska, pokój nr 166.
4. Gliwice — 44-100 Gliwice, ul. Powstańców 12, Politechnika Śląska, Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, pokój nr 24, tel. 91-10-01 do 03.
5. Kraków — 31-155 Kraków, ul. Warszawska 24, Politechnika Krakowska, Ośrodek ETO (doc. dr Z. Waszczyszyn).
6. Łódź — 90-924 Łódź, ul. Żeromskiego 116, Politechnika Łódzka, Instytut Maszyn i Urządzeń Włókienniczych (doc. dr Janusz Ziółkowski).
7. Poznań — 61-138 Poznań, ul. Piotrowo 3, Politechnika Poznańska, Instytut Mechaniki Technicznej, pokój nr 509.
8. Rzeszów — 35-041 Rzeszów, ul. Pstrowskiego, Wyższa Szkoła Inżynierska, Zespół Mechaniki Budowli, Wydział Budownictwa Lądowego i Komunalnego.
9. Szczecin — 70-311 Szczecin, Al. Piastów 50, Politechnika Szczecińska (doc. dr Czesław Mickiewicz).
10. Warszawa — 00-901 Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, pok. 1724.
11. Wrocław — 50-370 Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, Politechnika Wrocławska.

K O M U N I K A T

XIV MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

XIV Kongres IUTAM będzie obradował od poniedziałku 30 sierpnia do soboty 4 września 1976 r. na terenie Wydziału Mechanicznego Politechniki w Delft, Holandia.

Na Kongresie przewiduje się wygłoszenie 5 referatów generalnych, 10—15 referatów sekcyjnych przygotowanych na zaproszenie organizatorów, 10—15 referatów sekcyjnych wyłonionych z prac nadesłanych oraz około 200 półgodzinnych (łącznie z dyskusją) referatów szczegółowych. Na dodatkowe dyskusje zagadnień poruszonych w referatach sekcyjnych przeznaczają się specjalne sesje.

Selekcją prac zgłaszanych na kongres będzie zajmować się Międzynarodowy Komitet Programowy we współpracy z komitetami narodowymi IUTAM. Obszerne streszczenia referatów w języku angielskim, (około 500 słów) w ilości 5 egzemplarzy oraz 1 egzemplarz skróconego streszczenia (100—150 słów) należy nadsyłać do **1 marca 1976 r.** pod adresem:

IUTAM 1976 c/o K.I.v.I.
23 Prinsessegracht
The Hague
The Netherlands

Licząc na dużą ilość prac autorów polskich zgłoszonych na Kongres, uprzejmie prosimy o jednoczesne nadsyłanie 1 egzemplarza streszczenia referatu pod adresem prof. dr Stefana ZAHORSKIEGO, sekretarza Polskiej Grupy IUTAM przy Komitecie Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych:

Prof. dr S. Zahorski
IPPT PAN
ul. Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa

W następnym zeszycie ukażą się prace:

- J. STUPNICKI, Rola i metody doświadczalnej analizy naprężeń w rozwiązywaniu współczesnych problemów mechaniki ciała stałego
Роль и экспериментальные методы анализа напряжений в решении современных задач механики твердого тела
Role and experimental methods of stress analysis in solutions of contemporary solid mechanics problems
- J. GIERLIŃSKI, Przybliżone obliczanie płaskich węzłowych przekryć strukturalnych
Приближенный расчет плоских стержневых структурных перекрытий
Approximate calculations of a rod structural plate
- R. KRZYWIĘC, O modelowaniu wału wielopodporowego z wieloma tarczami za pomocą wielkiego systemu bioscylatorów. Cz. II. Bioscylatory wielowskaźnikowe. Modelowanie wału.
О моделировании многоподшипникового вала со многими дисками с помощью большой системы биосцилляторов. Часть II. Биосцилляторы со многими индексами. Моделирование вала
On modelling the multi-span shafts with several discs by means of a great system of bi-oscillators. Part II. Multi-indicial bi-oscillators. Modelling of a shaft
- J. SKŁADZIEŃ, Analiza konwekcyjnego rekuperatora pętlicowego z krzyżowym przepływem czynników
Анализ конвекционного петлевого рекуператора с перекрестными потоками теплоносителей
Analysis of the convective cross-flow loop recuperator
- B. ROGOWSKI, Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego
Функции перемещений для упругой трансверсально-изотропной среды
Displacement functions for transversally isotropic media
- J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, Numeryczne rozwiązanie problemu drgań własnych na przykładzie płyt
Численное решение задачи о собственных колебаниях на примере плит
Numerical solution to the problem of free vibrations using plates as the example
- T. KUŹMIŚCIEWICZ, Dynamika liny odwijającej się z ruchomego obiektu latającego
Динамика троса разматывающегося из подвижного объекта
Dynamics of a cable winding off from a moving flying object
- A. PIENIAŻEK, W. PIENIAŻEK, Stateczność techniczna drgań bocznych pojedynczego zestawu kołowego poruszającego się wzdłuż toru z nieliniową sprężystością poprzeczną
Техническая устойчивость боковых колебаний единичного подвижного состава, движущегося по рельсам с нелинейной поперечной упругостью
Technical stability of lateral vibrations of a single wheel set moving along the rail with non-linear lateral elasticity

Cena zł 30.—

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
