

75720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 12 • ZESZYT 3



Pw^a

WARSZAWA 1974

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

K. PĘKARSKI, Struktura i własności mechaniczne tkanek organicznych (Wprowadzenie) Структура и механические свойства органических тканей (Введение) The structure and mechanical properties of organic tissues (Introduction)	213
R. KRZYWIĘC, O modelowaniu wału wielopodporowego z wieloma tarczami za pomocą wielkiego systemu bioscyfatorów. Cz. I. Uwagi ogólne. Oscylatory wielowskaźnikowe О моделировании с помощью большой системы биосцилляторов многоподшипникового вала со многими дисками. Часть I. Общие замечания. Осцилляторы со многими индексами Modelling of a multi-span shaft with several disks by means of a great system of bi-oscillators. Part I. General remarks. Multi-indicial oscillators	231
R. WOJCIANOWSKA, Optymalne kształtowanie ustrojów kratowych w warunkach pełzania w nawiązaniu do teorii wybożenia Rabortnowa-Szestierikowa Оптимальное конструирование ферм работающих в условиях ползучести в отнесении к теории продольного изгиба Работнова-Шестерикова Optimal design of truss structures in creep conditions with reference to the Rabotnov-Shestirikov theory of buckling	245
S. BIELAK, Kształt równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych Вид дифференциального уравнения в частных производных решающего класс линейчатых развертывающихся оболочек The partial differential equation solving a class of ruled developable shells	265
B. WOSIEWICZ, Otrzymywanie macierzy elementu płyty zginanej dla modelu mieszanego metodą ortogonalizacji Построение матрицы жесткости элемента изгибаемой плиты для смешанной модели с помощью метода Бубнова-Галеркина Determination of the element matrix of a plate of bending, for a mixed model by the orthogonalization method	279
M. GRZYMKOWSKI, Wybrane osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali Избранные осесимметрические проблемы пластической обработки металлов Some axi-symmetric problems of plastic working of metals	293
S. MAJ, Wymiana masy, pędu i energii między cząstką kulistą a otoczeniem gazowym Обмен массы, импульса и энергии между шаровидной частицей и газовой средой Mass, momentum and energy exchange between a spherical particle and gaseous medium	313
K. MAJORKOWSKA-KNAP, Niektóre zagadnienia termouprężystości w tarczach mikropolarnych Некоторые вопросы термоупругости микрополярных дисков Certain problems of thermoelasticity in micropolar plates	327
J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, A. PEER-KASPERSKA, J. MAKOWSKI, Zastosowanie iteracji Seidla w metodzie elementów skończonych na przykładzie obliczeń statycznych płyt Применение итерации Зейделя к методу конечных элементов на примере статических расчетов плит Application of Seidel's iteration to the finite element method, in the sample of static plate analysis	341
J. MARYNIAK, B. KRASNOWSKI, Równowaga i stateczność podłużna skoczka narciarskiego w locie Равновесие и продольная устойчивость лыжника-прыгуна в полете Balance and longitudinal stability of a ski-jumper in flight	353
S. MAZURKIEWICZ, Badanie procesów relaksacyjnych w poliamidzie Исследование процессов релаксации в полиамиде Investigation of relaxation processes in polyamid	375
M. ŚLIWOWSKI, K. TURSKI, Wpływ cyklicznej plastycznej deformacji na powierzchnię plastyczności Влияние циклической пластической деформации на поверхность текучести Influence of cyclic plastic straining on the yield surface	389
J. WRANK, Macierz sztywności i wektor obciążeń superелементу Матрица жесткости и вектор нагрузки суперэлемента Stiffness matrix and a load vector of a superelement	401
BIULETYN INFORMACYJNY	407

Ju 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 2 · Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 7 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIAK, MAREK SOKOŁOWSKI,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI
LECH DIETRICH — REDAKTOR
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 690 (574+116) egz. Arkuszy wydawn. 16,25. Arkuszy drukarskich 12,75. Papier druk. sat. III kl. 90 g. 70×100. Oddano do składania 3.V.1974 r. Druk ukończono w październiku 1974 r. W-121 Zam. 748/74. Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

STRUKTURA I WŁASNOŚCI MECHANICZNE TKANEK ORGANICZNYCH
(WPROWADZENIE)

KAZIMIERZ PIEKARSKI (WATERLOO, CANADA)*

Od Tłumacza**

Artykuł niniejszy stanowi drugą część opracowania pt. *Własności biomateriałów i tkanek organicznych* — wprowadzenie w problematykę zgodności biomateriałów i tkanek przygotowanego przez Autora w związku z cyklem wykładów w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN w pierwszym półroczu 1973 r.

Publikowana część zawiera podstawowe wiadomości dotyczące mikrostruktury tkanek i ich własności mechanicznych, w powiązaniu z zadaniem, jakie dany typ tkanki pełni w organizmie. Omawia się oddzielnie cechy tkanek twardych (głównie kości) oraz tkanek miękkich (głównie na przykładzie kolagenu).

Artykuł zamyka zwięzły zarys mechanizmu reakcji żywych tkanek na czynniki obce wprowadzane do organizmu w celu rekonstrukcji tkanki uszkodzonej.

Wprowadzenie powyższej tematyki na łamy MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ wiąże się z koniecznością rozwoju biomechaniki, jako istotnie ważnej i potrzebnej gałęzi mechaniki stosowanej. W tym celu konieczne jest poznanie układów tkanek od strony ich funkcji mechanicznych w organizmie. Szczególnie zaś istotnym problemem jest współdziałanie żywej tkanki ze sztucznymi układami mechanicznymi wprowadzonymi do organizmu jako protezy, wkładki, sztuczne naczynia krwionośne etc.

1. Własności fizyczne tkanek twardych

Układ kostny stanowi rusztowanie (szkielet) całego ustroju, tworząc oparcie dla niego, określając jego wielkość i kształt. Poszczególne kości jako elementy tej struktury przenoszą różne obciążenia; pracują głównie na ściskanie, skręcanie i zginanie. Dzięki względnie małej odkształcalności, chronią wiele organów, podatnych na zranienia przed uszkodzeniem. Projektując układ mechaniczny chcemy, by był on maksymalnie efektywny przy minimalnym ciężarze własnym, zużyciu materiałów etc. Układ kostny spełnia tak ogólnie sformułowane kryterium. Dopiero niedawno stwierdzono, że substancje porowate o porach wypełnionych cieczą należą do ciał, które pochłaniają maksymalne ilości energii. Kości czaszki chronią mózgowie przed uderzeniami i wstrząsami na tej właśnie zasadzie. Ciecze zawarte w kościach pełnią, oczywiście, jeszcze inne funkcje: jak od dawna wiadomo przenoszą one środki odżywcze do elementów komórkowych «zamurowanych» w kości i usuwają z nich produkty zbędne. Mięśnie, ścięgna, więzadła przytwierdzone do kości prze-

* Biomedical Engineering Research Group, University of Waterloo.

** Tłum. A. Dragon

noszą naprężenia rozciągające, przekazując jako oddziaływania obciążenia ściskające na kość.

Kość składa się z dość ścisłej, twardej masy, zwanej istotą zbitą (*substantia compacta*) i z części zwanej istotą gąbczastą (*substantia spongiosa*). Na powierzchni kości znajdujemy na ogół substancję zbitą, wewnątrz większości kości — substancję gąbczastą. Trzon kości długiej jest zbudowany wyłącznie z masy zbitej, oba jej końce są podszyte tylko cienką warstwą istoty zbitej, natomiast wewnątrz tworzy ją istota gąbczasta.



Rys. 1.1. Rozkład materiału zwanego w kości udowej

Istota gąbczasta, służąca głównie do pochłaniania energii, przenosi także naprężenia ściskające. Wytrzymałość na ściskanie substancji gąbczastej jest niższa od wytrzymałości części zwartej (*substantia compacta*), dlatego kość gąbczasta musi być grubsza. Końce kości długiej, których istotnym zadaniem jest absorpcja energii, przekazują również naprężenia ściskające na trzon kości: ze względu jednak na pierwszą funkcję, zbudowane są z masy gąbczastej.

Faktem istotnym z punktu widzenia mechaniki kości jest rozkład materiału na długości kości. Kości długie są cieńsze w środku, zachowując tę samą wytrzymałość co w pozostałych przekrojach. Wynika to ze wspomnianej wyżej własności, że trzon kości długiej tworzy masa zbita. W ogólności *rozkład materiału nośnego* w kościach długich, na przykład, w kości udowej jest taki, że naprężenia ściskające są jednakowe w każdym przekroju (rys. 1.1). Przy tym, dzięki niniejszej wysokości przekroju w środkowej części kości mniejsze są tam odkształcenia przy zginaniu, rośnie więc zdolność kości do przenoszenia momentu zginającego przy redukcji zagrożenia kruchej zniszczenia.

Z wiekiem zawartość materiału zbitego (*substantia compacta*) obniża się. Ścianki kości długich robią się cieńsze, maleje nośność kości. Proces ten jest kompensowany przez wzrost zewnętrznej średnicy kości, co zwiększa ich sztywność jako prętowych elementów konstrukcyjnych. Powoduje to jednak wzrost odkształceń zewnętrznych włókien prętów przy zginaniu, a ponieważ kość jest materiałem czułym na wielkość odkształceń, starzeniu się kości towarzyszy spadek odporności na zniszczenie kruche.

Interesujące jest zbadanie kształtu przekroju poprzecznego kości. W zastosowaniach inżynierskich często stosuje się przekroje złożone, również typu skrzynkowego, puste w środku. Kształt takich przekrojów zależy od tego, jakim obciążeniem będzie poddany element konstrukcyjny. Na przykład, przekrój cylindryczny jest najbardziej odpowiedni przy skręcaniu prętów; przy zginaniu optymalny jest przekrój kwadratowy (pusty w środku!) — przy wektorach naprężeń od zginania równoległych do ścianek. Kształt trzonu



Rys. 1.2a. Przekrój poprzeczny trzonu kości korowej. Mikroskop optyczny X 400



Rys. 1.2b. Trzon kości korowej rozszczepiony podłużnie. Mikroskop elektronowy (skanningowy) X 4000

kości udowej jest trójkątny, z zaokrąglonymi wierzchołkami, przy czym jeden wierzchołek jest skierowany do tyłu. Jest to kształt przekroju będący z punktu widzenia wytrzymałości optymalnym kompromisem między wspomnianymi wyżej przekrojami, ze względu na konieczność przenoszenia naprężeń od skręcania i od zginania.

Mikrostruktura kości długich. Rysunki 1.2a i 1.2b obrazują mikrostrukturę trzonu kości długiej.

Na rys. 1.2a pokazano przekrój poprzeczny kości, wypolerowany tak, jak poleruje się metale, w celu zbadania ich struktury; zdjęcie przedstawia obraz widziany przez mikroskop optyczny — kontrastowy, powiększający 400 razy.

Widać wyraźnie, że nawet istota zbita trzonu kości nie posiada rzeczywiście zwartej, jednorodnej struktury. Brzeg zewnętrzny zwany *okostną* nie zawiera naczyń krwionośnych w kanałach Haversa, jak to ma miejsce wewnątrz masy zwartej, a wobec tego jego własności są także inne.

Masa zwarta (zbita) zbudowana jest z blaszek kostnych mających różny kształt i układ. Blaszkę kostną tworzące zewnętrzną (okostną) i wewnętrzną warstwę kości zbitej, tzw. blaszki podstawowe zewnętrzne i wewnętrzne mają przebieg ciągły.

Blaszki położone między blaszkami podstawowymi mają kształt walców ułożonych koncentrycznie wokół wspomnianych już kanałów Haversa, w których przebiegają naczynia krwionośne i limfatyczne. Kanał Haversa z koncentrycznie ułożonymi — blaszkami kostnymi (od kilku do kilkudziesięciu warstw) tworzy układ Haversa, zwany też osteonem. Rys. 1.2a pokazuje końce osteonów, które wyrastają jakby ponad pozostały materiał kostny leżący między osteonami. Są to tzw. blaszki międzyukładowe o kształcie i ułożeniu bardzo różnorodnym.

Odporność osteonów na ścieranie jest większa niż odporność materiału znajdującego się między układami Haversa; materiał osteonów cechuje też wyższa wytrzymałość.

Wykazano, że propagujące się pęknięcia i szczeliny omijają osteony, a jeśli kierunek naprężeń rozciągających jest równoległy do osi osteonów (oś długa osteonu przebiega równoległe do osi długiej kości) to są one wyciągane z otaczających je blaszek międzyukładowych.

W całej masie kostnej rozmieszczone są komórki kostne, mieszczące się w niewielkich punktach o kształcie elipsoidalnym. Kanały Haversa połączone są siecią cienkich kanałków (o średnicy około $1\ \mu$) z tymi jamkami, w celu umożliwienia krążenia substancji odżywczych.

Fazy materiałowe w kości. Masa zwarta (zbita) nie jest materiałem jednorodnym; niezależnie od szeregu nieciągłości, sam szkielet materiałowy zbudowany jest z substancji o bardzo zróżnicowanych własnościach. Składniki wywierające wpływ na cechy mechaniczne kości można podzielić na następujące grupy:

1. Faza minerałów krystalicznych — hydroxyapatyt.
2. Faza minerałów bezpostaciowych — materiał złożony, zbliżony do hydroxyapatytu.
3. Faza krystaliczna materiałów organicznych — kolagen.

4. Faza bezpostaciowych materiałów organicznych — cząsteczki białka w formie żeli i zoli.

5. Faza ciekła.

Wpływ tych faz na sumaryczne właściwości kości zależy od ilości danej fazy, jej własności oraz rozkładu w masie kostnej. Przy niewielkich prędkościach deformacji wpływ zoli i cieczy może być pominięty, wolno założyć, że mogą one swobodnie wypłynąć z porów, z części, na którą wywierane są naciski.

Założenie powyższe usprawiedliwia zastąpienie cieczy i roztworów na liście składników strukturalnych przez pory. Dalszym uproszczeniem może być przyjęcie jako jednej — krystalicznej i bezpostaciowej fazy mineralnej, przynajmniej na etapie oznaczania modułu sprężystości materiału złożonego, o którym zakładamy, że nie zależy od struktury wewnętrznej materiału. Przyjmuje się więc, że moduł ten ma tę samą wartość dla danego materiału niezależnie od stopnia krystalizacji.

Z kolei zawartość bezpostaciowych materiałów organicznych jest bardzo mała; można przyjąć, że w tej grupie (materiały organiczne) wpływ dominujący ma kolagen.

W ten sposób zredukowano listę składników kości do trzech:

1. Faza mineralna.
2. Faza materiałów organicznych.
3. Pory (wypełnione cieczą).

Uproszczenie to pozwala traktować kość jako materiał złożony, bliższy niektórym materiałom znanym i stosowanym przez inżynierów. Własności takiego materiału złożonego (kości) zależą zarówno od ilości składników, jak i od ich indywidualnych własności.

Faza mineralna. Powiedziano wyżej, że składnikiem mineralnym kości jest apatyt, ściślej hydroxyapatyt $\text{Ca}_{10}(\text{PO}_4)_6(\text{OH})_2$. Ma on strukturę heksagonalną; wymiary komórki elementarnej są następujące: $a = b = 9,47 \text{ \AA}$, $c = 6,88 \text{ \AA}$. Najnowsze badania [2, 3] wykazały, że kryształy stanowią pręty o średnicy od 20 do 70 \AA i długości od 50 do 1000 \AA .

Fakt, że kość stanowi jedną całość, a nawet wykazuje bardzo dobrą wytrzymałość po usunięciu części organicznych [4, 5], dowodzi, że faza mineralna zachowuje ciągłość w materiale (spójność). Przyjmuje się, że kryształy mineralne połączone są na końcach tworząc sieć długich, bardzo cienkich, silnie złączonych ze sobą włókien.

Utworzone zarodki kryształów mają orientację taką, że ich osie c są równoległe do osi podłużnych włókien kolagenu; taki sam jest preferowany kierunek wzrostu. Nadaje to w sumie właśnie prętowy charakter struktury fazy nieorganicznej. Przy zaawansowanym wroście bardzo trudno rozróżnić poszczególne kryształy, ponieważ łącząc się ze sobą zaciemniają one pierwotną geometrię struktury. Własności mechaniczne hydroxyapatytu są mało znane; konieczne jest zatem przyjęcie szeregu założeń wstępnych i uproszczeń. BHIMASENACHER [6] podał moduł sprężystości apatytu $E = 14,2 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, CURREY [7] oszacował wartość $E = 22,2 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2$, SWEENEY [5] i MACK [4] badali własności kości, pozbawionych części organicznych. Charakterystyczne wyniki tych eksperymentów pokazano w tablicy 1.1.

Wartości w tablicy 1.1 dotyczą materiału porowatego. Można na tej podstawie określić parametry samego szkieletu mineralnego, przyjmując porowatość rzędu ok. 60% i zakładając, że zachodzą tu relacje podobne jak dla porowatych materiałów ceramicznych.

RYSKEWITCH [8] przyjmuje, że wytrzymałość maleje ze wzrostem porowatości według wzoru

$$(1.1) \quad \sigma = \sigma_0 \exp(-nV),$$

gdzie n przyjmuje wartości od 4 do 7, a V jest objętościowym współczynnikiem porowatości. COBLE i KINGERY [13] badali zmianę modułu sprężystości w zależności od porowatości. Podają oni następującą zależność

$$(1.2) \quad E = E_0(1 + 1,9V + 0,9V^2).$$

Pory. Pory żywej kości wypełnione są substancjami organicznymi: stanowią układ odżywczy komórek kostnych (osteocytów) jako kanały Haversa połączone z jamkami siecią kanalików. Według FROSTA [9] zajmują one 13,3% objętości ciała ludzkiego. Jednak objętość cieczy, którą można usunąć z kości wskazuje na porowatość wyższą — rzędu 18%. Trzeba sobie przy tym zdać sprawę, że nie da się usunąć całkowicie cieczy z porów kostnych. W płynach kostnych znajdują się bowiem jony substancji mineralnych i organicznych oraz duże ilości różnych cząsteczek białka, które nie muszą zostać wyparte w całości z cieczą, w której się znajdują. Tak więc porowatość rzeczywista jest wyższa od 18%, ale dokładna liczba nie została jeszcze ustalona.

Na podstawie powyższych oszacowań można w przybliżeniu podać parametry mechaniczne hydroksyapatytu (przy rozciąganiu) $\sigma_r = 1380 \text{ kG/cm}^2$; $E = 5,2 \times 10^5 \text{ kG/cm}^2$. Dokładne parametry wytrzymałościowe hydroksyapatytu powinny zostać wyznaczone, jeśli nie chcemy operować zbyt grubymi przybliżeniami. Dla naszych celów przyjmijmy orientacyjną wartość modułu sprężystości $E = 9 \times 10^5 \text{ kG/cm}^2$.

Faza organiczna. Kolagen w 99% tworzy fazę organiczną kości. Jest on produktem polimeryzacji aminokwasów, głównie hydroksylizyny i hydroksyproliny.

Pojedyncza cząsteczka polipeptydu ma kształt spirali lewoskrętnej, łańcuch cząsteczkowy z kolei tworzy prawoskrętną superspiralę. Trzy spirale wyższego rzędu tworzą elementarną jednostkę strukturalną — włókienko kolagenu. Włókienka kolagenu¹⁾ rosną tworząc stałą strukturę przypominającą strukturę fazy mineralnej.

Tablica 1.1. Wytrzymałość i moduł sprężystości kości z usuniętym materiałem organicznym

Autor badań	Rozciąganie		Ściskanie	
	$\sigma_r \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]; E \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$		$\sigma_c \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]; E \left[\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$	
Sweeney [5]	88		477	$9,8 \times 10^4$
Mack [4]	76	$2,2 \times 10^5$	610	$8,7 \times 10^4$

Własności mechaniczne (statyczne) kolagenu oszacowano na podstawie eksperymentów prowadzonych na ścięgnach. Niżej podaje się trzy parametry:

¹⁾ Własności kolagenu są omówione bardziej szczegółowo w dalszej części pracy dotyczącej tkanki miękkiej (przyp. tłum.)

Wytrzymałość graniczna na rozciąganie 570 - 760 kG/cm²,

Całkowite wydłużenie (maksymalne) 20 - 30%

Moduł sprężystości (mierzony w najbardziej stromej części krzywej) 18 000 kG/cm².

Materiał wykazuje własności reologiczne. W doświadczeniach, w których wymuszano stałe odkształcenie obserwowano asymptotyczną relaksację obciążenia do pewnej wartości pośredniej między zerem a wartością początkową.

Próba obciążenia i odciążenia wykazuje, że odkształcenia są odwracalne całkowicie, jedynie przy bardzo małych naprężeniach. Już przy obciążeniach większych niż 1% granicznej wytrzymałości ścięgni występują odkształcenia trwale. Odkształcenia odwracalne realizują się z opóźnieniem.

Własności kości jako materiału złożonego. Do wyrażenia modułu sprężystości kości przez moduły składników najbardziej odpowiedni wydaje się być model HIRSCHA [10]

$$(1.3) \quad \frac{1}{E} = 0,9 \frac{1}{V_m E_m + V_o E_o} + 0,1 \left(\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_o}{E_o} \right).$$

Przyjmując dla uproszczenia, że objętościowe zawartości faz mineralnej i organicznej są równe, otrzymamy, że wartość modułu kości jest $E = 2,17 \cdot 10^5$ kG/cm².

Wartość ta jest poprawna, potwierdzona przez doświadczenia przeprowadzone w warunkach małych prędkości odkształcenia.

Inne podejście do kości jako materiału złożonego zakłada, że kość jest materiałem dwufazowym z fazą stałą i ciekłą. Przyjmuje się jednocześnie, że materiał organiczny znajdujący się w kości wraz z płynami reprezentuje fazę ciekłą. Rzeczywiście, znaczna odkształcalność fazy organicznej powoduje, że jej udział w nośności materiału złożonego (kości) nie jest duży, chyba że szkielet mineralny kości stwarza ograniczenia wielkości przemieszczeń materiału organicznego. Takie zachowanie jest bliższe mechanice zoli, żeli i cieczy niż ciałom stałym.

Przy dużych prędkościach deformacji faza organiczna (podobnie jak ciecz w materiale dwufazowym) przejmuje ciśnienie hydrostatyczne, natomiast przy niewielkich prędkościach deformacji następuje jej przepływ z partii korowej do naczyń krwionośnych (jest dość czasu, by to mogło nastąpić); towarzyszy temu redystrybucja naprężeń, które przejmuje prawie w całości szkielet mineralny. Faza organiczna zachowuje się jak ciecz lepka.

Zakładając, że podejście powyższe jest słuszne (tzn., że opis ten jest bliski rzeczywistemu zachowaniu się faz kości pod obciążeniem), można ocenić wyniki badań МАСКА dotyczące modułu sprężystości porowatego hydroksyapatytu jako prawidłowe (por. tabl. 1.1). Są one zbliżone do wyników badań na kościach przy niewielkich szybkościach deformacji. Zgodność ta potwierdza zarysowany wyżej mechanizm dwufazowy.

Zaobserwowano [11, 12] wzrost modułu sprężystości ze wzrostem prędkości deformacji, co tłumaczy się efektem wzrostu ciśnienia hydrostatycznego w płynach i materiale organicznym (w ogólności udziałem fazy «ciekłej» w przenoszeniu obciążeń).

Aby ilościowo opisać wpływ szybkości deformacji na przyrost modułu sprężystości należy uczynić dalsze założenia. Nie są bowiem znane wartości modułu sprężystości objętościowej płynów, żeli, roztworów i części organicznych zawartych w kości. Wzrost ciśnienia hydrostatycznego w cieczy zawartej w porach ciała stałego zależy od współczyn-

nika Poissona ciała stałego — w tym przypadku fazy mineralnej kości; jego dokładna wartość również nie jest znana.

Dla celów dość grubego oszacowania można np. przyjąć, że moduł sprężystości objętościowej wszystkich substancji, które zaliczamy do fazy ciekłej jest równy modułowi wody, $K = 27\,000 \text{ kG/cm}^2$, współczynnik Poissona fazy mineralnej jest $\nu = 0,4$, a zawartości objętościowe fazy mineralnej i organicznej są odpowiednio równe 0,4, i 0,6. Można wykazać, że przy tych założeniach nośność materiału złożonego, porowatego będzie o ok. 4% wyższa w przypadku porów wypełnionych cieczą (płynami rzeczywistymi i materiałem organicznym) w porównaniu z materiałem o porach pustych. Wzrostowi nośności towarzyszy wzrost modułu sprężystości, co wykazano eksperymentalnie.

Wnioski. Studium mikrostruktury i własności kości ma znaczenie dla zrozumienia natury i zachowania się żywych kości w organizmie. Kość nie jest materiałem jednorodnym; często próbki do badań pobrane z tego samego miejsca w ciele dają znaczne rozrzuty danych dotyczących cech mechanicznych. Dlatego parametry opisujące wytrzymałość, odkształcalność etc. materiałów konstrukcyjnych wytworzonych przez człowieka są daleko bardziej precyzyjne niż analogiczne dane dla kości.

Niemniej badania dotyczące mechaniki kości są potrzebne, otwierają one często pole do dalszych hipotez i wniosków, cennych dla głębszego zrozumienia struktury i funkcji tkanki. Takie znaczenie mają na przykład badania typów deformacji kości. Fakt, że tkanka kostna jest materiałem czułym na wielkość odkształceń wskazuje na ciągłość (spójność) rozkładu szkieletu mineralnego w kości, choć sugestie biologów są odmienne. Zachowanie kości w pewnym względzie jest bardzo podobne do pracy belek wykonanych z polimeru, zbrojonych włóknami, w których o zniszczeniu materiału złożonego decyduje największe, możliwe odkształcenie włókien. Z kolei własności lepkosprężyste dowodzą istnienia mechanizmu tłumiącego, związanego z ruchem płynów zawartych w kości (cieczy, żeli i zoli). Mechanizm tego rodzaju pozwala na doskonałą absorpcję energii; mikrostruktura kości może więc służyć jako model dla technologów projektujących podobne układy.

Problemem nie związanym z mechaniką jest mechanizm krążenia substancji odżywczych w kościach, w szczególności odżywianie komórek kostnych. Niemniej badanie deformacji kości i odpowiadającego im ruchu płynów sugeruje istnienie ściślej zależności mechanizmu ruchu i odżywiania.

Istnienie odkształceń opóźnionych przy obciążeniach cyklicznych wskazuje na przykład na fakt, że płyny są wypierane z części korowej do naczyń krwionośnych. Odwrotne zjawisko towarzyszy odciążeniu lepkosprężystemu: odkształcenia odwracalne (lepkosprężyste) są efektem wyciskania cieczy z powrotem do kości korowej. Ciecz ta zawiera świeże substancje odżywcze, rozprowadzane następnie do komórek kostnych.

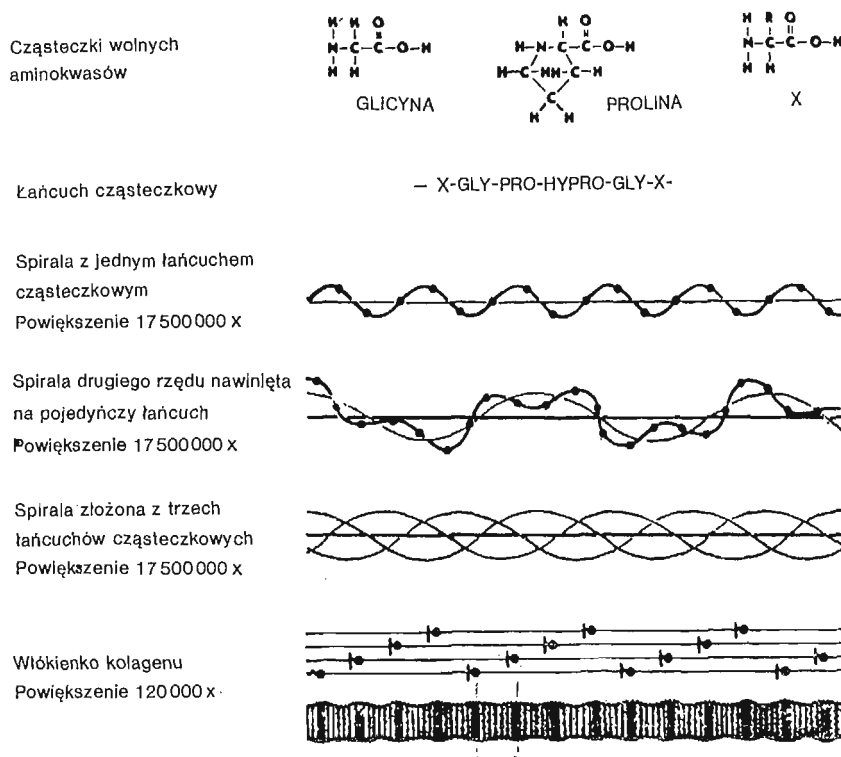
2. Własności fizyczne tkanki miękkiej

Najbardziej podstawową cechą żywej tkanki jest trwający nieustannie proces odnawiania się i adaptacji. Żadna sztuczna synteza nie jest w stanie odtworzyć całości tych przemian w ich pełnej dynamice i złożoności.

W biomechanice organizmu ważną rolę spełnia tkanka łączna, do której zaliczamy wielką grupę tkanek, różniących się nieraz znacznie budową i czynnościami. Łączy je jednak wspólne pochodzenie z tzw. tkanki zarodkowej (*mezenchyma*) i wspólne funkcje odżywcze i mechaniczne. Tkanka łączna wytwarza substancję międzykomórkową, w której obok masy bezpostaciowej znajdują się elementy włókniste (w tym włókna kolagenowe) spełniające ważną rolę w mechanice ustroju. Tkanka szkieletowa (kość i chrząstka) jest grupą tkanek należącą do tkanki łącznej.

Tkanka łączna reaguje na obciążenia mechaniczne: orientacja włókien kształtuje się jako reakcja tkanki na siły rozciągające. Skóra staje się szorstka i gruba na skutek powtarzanych wielokrotnie bodźców, m.in. mechanicznych. Dzięki systematycznym ćwiczeniom wzrasta wielkość mięśni (tkanka mięśniowa stanowi odrębny rodzaj tkanki, obok tkanki nabłonkowej, łącznej i nerwowej).

Narządy żywego organizmu stanowią układy o wysokim stopniu złożoności struktury i funkcji. Takie zjawiska, jak na przykład znaczne rozszerzenie macicy i ścian brzucha towarzyszące rozwojowi ciąży obrazują jak trudno przenosić pewne dane dotyczące własności mechanicznych materiałów na tkanki funkcjonujące w żywym ciele. Jednak potrzeby zastępowania chorych lub zużytych tkanek przez materiały syntetyczne wymagają zbadania samych tkanek i orzeczenia, które materiały syntetyczne mają właściwości (np. właściwości mechaniczne) najbardziej zbliżone do materiału naturalnego. Niektóre właściwości



Rys. 2.1. Schemat struktury kolagenu (za Grosse, 1961)

tkanki miękkiej omówimy na przykładzie kolagenu, który jest jednym z jej podstawowych składników.

Budowa kolagenu. Jak już wspomniano wyżej, kolagen jest produktem polimeryzacji aminokwasów, głównie hydroxyproliny i hydroxylizyny (rys. 2.1). Pojedyncza cząsteczka polipeptydu posiada kształt lewoskrętnej spirali, z kolei łańcuch polimeru tworzy spiralę wyższego rzędu, prawoskrętną. Trzy takie spirale skręcone w jedną tworzą podstawową jednostkę strukturalną kolagenu, zwaną prokolagenem [1]. Włókienko kolagenu składa się z podłużnie uszeregowanych jednostek prokolagenu. Ułożenie to cechuje okresowość wynikająca ze zmiennego rozłożenia ładunków elektronowych po długości (długość okresu jest równa 640 - 700 Å). Własność tę można sprawdzić doświadczalnie przez strącenie włókienek kolagenu w kwasie octowym lub przez analizę, przy pomocy promieni X [2].

Pewna regularność i symetria struktury kolagenu w pełni usprawiedliwiają stosowność terminologii zwykle używanej dla ciał o budowie krystalicznej, do opisu np. własności części organicznych kości (w większości materiałem organicznym jest tu kolagen). Trzeba stwierdzić, że rozkład włókienek w materiale nie jest jednak całkowicie symetryczny. Najgrubsze włókna stanowiące pewnego rodzaju «kręgosłup» całej struktury, przebiegają w określonym kierunku i są odpowiedzialne za anizotropowe własności materiału. Cieńsze i delikatniejsze włókna tworzą siatkę, która przenika i łączy główne gałęzie i posiada mniej uporządkowaną strukturę kierunkową. Nie ma specjalnych ograniczeń na długość włókien; siatka włókien jest ciągła tak, że po usunięciu z kości fazy nieorganicznej (mineralnej) kość zachowuje nadal swój pierwotny kształt.

LITTLE [3] wykazał istnienie włókien kolagenu o przekroju zbliżonym do rury; prowadził on obserwacje pojedynczych włókien pod mikroskopem elektronowym, stereoskopowym. Zmienność grubości włókien kolagenu przypisuje się właściwościom mukopolisacharydów bezpostaciowych, które stanowią spoiwo dla włókienek kolagenu.

Odkształcalność kolagenu. Wiadomo, że właściwości sprężyste ciał krystalicznych spowodowane są działaniem sił międzyatomowych bliskiego zasięgu. Można wykazać, że moduł sprężystości otrzymuje się wychodząc z następującej relacji:

$$(2.1) \quad f = \frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{d^2\Phi}{du^2} u,$$

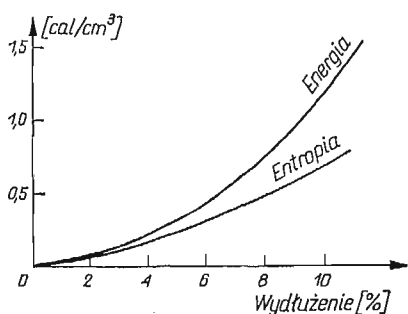
gdzie $\Phi(u)$ jest energią wiązania, u jest przemieszczeniem, zaś f — oznacza siłę międzyatomową.

Powyższe dowodzi, że czynnikiem podstawowym jest zmienność energii. Przy braku obciążeń zewnętrznych atomy w sieci krystalicznej zajmują pozycję odpowiadającą minimum energii; przyłożenie obciążenia powoduje przemieszczenie atomów, co odpowiada podwyższonemu stanowi energetycznemu, odciążenie zaś oznacza powrót do stanu pierwotnego, tzn. stanu minimalnej energii, przez przemieszczenie do położenia początkowego.

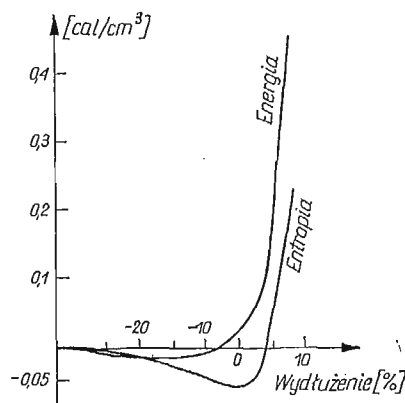
Dawniejsze teorie, które wyjaśniały sprężystość gumy w oparciu o właściwości molekularne zakładały, że kształt cząsteczki jest podobny do kształtu sprężyny.

Tymczasem charakter zwoju cząsteczkowego długich cząsteczek zależy od ich morfologii. Na przykład skład chemiczny kauczuku naturalnego i gutaperki jest identyczny; cząsteczki te różnią się tylko pozycją zajmowaną przez jeden atom wodoru. Ta niewielka zmiana struktury ma podstawowe znaczenie: kauczuk naturalny jest miękki i podatny na znaczne wydłużenia, a gutaperka jest materiałem twardym i kruchym.

Cząsteczka kauczuku naturalnego (podobnie jak cząsteczka kolagenu) wykazuje asymetrię rozkładu atomów (więcej atomów z jednej strony) i dzięki temu tendencję do związania się w zwoje spiralne. Struktura spiralna wyjaśnia jakościowy charakter krzywej naprę-



Rys. 2.2. Zmiana energii i entropii w trakcie deformacji (rozciągania) ściętna zwierzęcego przy pH = 7 i 35°C (Hall, 1952)



Rys. 2.3. Zmiana energii i entropii w trakcie deformacji (rozciągania) ściętna zwierzęcego przy pH = 1,75 i 35°C (Hall, 1952)

zenie-odkształcenie całej rodziny elastomerów, ale trudno na tej podstawie sformułować kompletną i spójną teorię. Z jednej strony obserwuje się wzrost modułu sprężystości elastomeru ze wzrostem temperatury, z drugiej zaś strony współczynnik rozszerzalności termicznej jest dodatni do pewnej wartości wydłużenia, zaś po jej przekroczeniu — ujemny. Tę rzeczywistą sprzeczność interpretuje się analizując zmianę entropii w procesie tj. zmianę stopnia uporządkowania struktury cząsteczkowej. Kauczuk odróżnia od innych, podobnych materiałów, fakt, że przy rozciąganiu wzrasta stopień uporządkowania i symetria jego cząsteczek. W innych materiałach obserwuje się wzrost entropii (a więc redukcję regularności i symetrii struktur cząsteczkowych) zarówno przy ściskaniu, jak i przy rozciąganiu. Zarówno struktura molekularna włókienek kolagenu, jak i własności termodynamiczne są zbliżone do własności gumy kauczuku. KARRER [4] wykazał podobieństwo termodynamiczne badając pracę mięśni. HALL [5] przeprowadził serię doświadczeń i podał zmienność energii i entropii towarzyszącą odkształceniom ściętnych zwierzęcych. Rezultaty uzyskane przez HALLA podane są na rys. 2.2. Dane HALLA dotyczące doświadczeń przeprowadzonych w temperaturze 35°C i w środowisku o wartości czynnika pH = 7 nie potwierdzają podobieństwa kolagenu w ściętnach do gumy. Natomiast te same eksperymenty powtórzone przy pH = 1,75, kiedy włókna kolagenu doznały skrócenia o 25% wykazały, że rozciąganiu ściętn aż do długości odpowiadającej długości naturalnej przy pH = 7 towarzyszył spadek entropii, a więc zachowanie się kolagenu było podobne do gumy (rys. 4.3). Obserwowano też efekt pęcznienia w roztworze kwasu octowego. Oznaczał on cofnięcie

się do stanu mniejszego uporządkowania struktury cząsteczkowej, Dalsze rozciąganie przynosiło uporządkowanie tej struktury (a więc spadek entropii) aż do osiągnięcia wspomnianej długości (odpowiadającej $\text{pH} = 7$). Rozciąganie powyżej tej długości dało efekt jak w pierwszym doświadczeniu: wzrost energii i entropii.

Pęcznienie cząsteczek białka pochodzącego ze ścięgien szczurów i myszy obserwowali również LLOYD i GARROTT [6].

Przy działaniu kwasu następuje reakcja kolagenu z jonami wodorowymi, co powoduje rozbitcie niektórych wiązań chemicznych. Rozbitcie tych połączeń pozwala na uwolnienie się łańcuchów kolagenu z więzów strukturalnych i wzrost entropii. Rozciąganie włókien wyjętych z kwasu, zgrubiałych i wybrzuszonych na skutek powyższych procesów, z powrotem porządkuje strukturę, czemu towarzyszy spadek entropii.

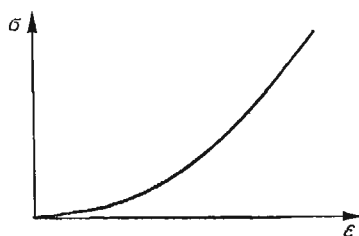
Mechaniczne (statyczne) własności kolagenu. Pomiaru bezpośrednie wytrzymałości kolagenu są trudne do zrealizowania z przyczyn technicznych (włókna są zbyt cienkie, aby mogła je uchwycić maszyna wytrzymałościowa). Badania wykonano na ścięgnach, których głównym składnikiem jest kolagen. Rezultaty uzyskane przez różnych autorów podaje tabela 2.1.

Tablica 2.1. Niektóre dane dotyczące kolagenu w ścięgnach

	Gęstość ρ (g/cm^3)	Wytrzymałość σ_r (kG/mm^2)	Wydłużenie ε (%)	Moduł sprężystości E (kG/mm^2)
Hall (1951)	1,08	—	25	151
Viidik (1966)	—	4,5—6,0	—	—
Piekarski (1967)	—	4,4	30	56

Charakterystyczne krzywe naprężenie-odkształcenie dla ścięgna zwierzęcego pokazano na rys. 2.4. Jak widać, zależność między naprężeniem a odkształceniem jest nieliniowa (wykres dotyczy rozciągania). Moduł sprężystości podany w tablicy został wyznaczony

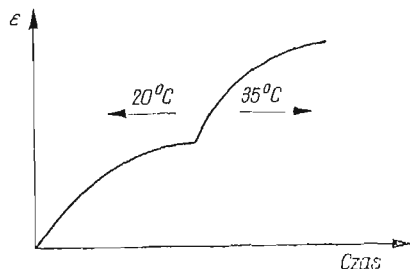
Rys. 2.4. Krzywa naprężenie—odkształcenie ścięgna



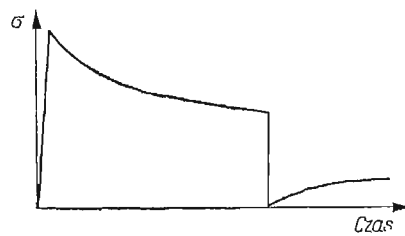
z części krzywej, najbardziej bliskiej zależności liniowej (mniej więcej dla odkształceń 10 - 20%). Doświadczenia dla różnych prędkości deformacji nie przyniosły specjalnych efektów, choć materiał ma w istocie własności reologiczne. Być może znaczny rozrzut wyników doświadczeń zatuszował wpływ różnych prędkości odkształcenia. Wpływ tem-

peratury też nie jest dokładnie znany, chociaż HALL [7] podał, że pod wpływem zmiany temperatury od 20°C do 35°C (por. rys. 2.5) nastąpiła zmiana szybkości pelzania ścięgna. Inne własności: odkształcenia opóźnione przy odciążaniu, relaksacja naprężeń potwierdzają lepkosprężyste własności ścięgien i podobieństwo do polimerów termoplastycznych.

Na rys. 2.6 pokazano typowe krzywe doświadczalne dla ścięgien. W ścięgnach występują również pewne odkształcenia plastyczne. Ich mechanizm polega na wzajemnym przeslizgu łańcuchów cząsteczkowych względem siebie, podobnie jak to ma miejsce w gu-



Rys. 2.5. Wpływ zmiany temperatury na pelzanie kolagenu (Hall, 1951)



Rys. 2.6. Krzywa relaksacji i odciążenia ścięgna

mach. Obserwuje się też rzeczywiste płynięcie plastyczne w części bezpostaciowej materiału organicznego (aminokwasy i mukopolisacharydy). Bezpostaciowy materiał organiczny otacza i przenika włókna kolagenu. Dokładny mechanizm deformacji plastycznych nie został jeszcze dobrze zbadany.

Pewne kontrowersje budzą własności elektryczne kolagenu. Niektórzy np. BASSETT [8], BECKER [9] i FUKUDA [10] przypisują mu efekty piezoelektryczne. ANDERSON i ERIKSSON [11] szczegółowo badali kolagen pod tym kątem stwierdzając, że jedynie kolagen suchy ma własności piezoelektryczne. Kolagen wilgotny zmienia typ symetrii krystalicznej i traci właściwości piezoelektryczne.

3. Zgodność biomateriałów i tkanek

Jak już stwierdzono, zgodność biomateriału zastosowanego do implantacji z organizmem jest sprawą podstawową; stanowi jedno z najważniejszych kryteriów przydatności protezy. Trzeba z naciskiem podkreślić, że każdy materiał obcy, nie wytworzony w sposób naturalny przez organizm, wywołuje zespół złożonych reakcji, w rezultacie których może zostać odrzucony.

Celem niniejszych rozważań nie jest przedstawienie całego dorobku immunologii i innych nauk medycznych opisujących różne reakcje organizmu. Niemniej podanie podstawowych mechanizmów reakcji żywych tkanek na czynniki obce może okazać się przydatne dla projektanta biomechanizmów. Chodzi tutaj o maksymalne uwrażliwienie czytelnika na ten problem; nie tylko bowiem własności mechaniczne, chemiczne, elektryczne, dotyczące promieniowania etc. muszą być przedmiotem wnikliwej analizy, ale nawet kształt implantytu i inne cechy fizyczne są ważne, ze względu na kontakt z tkanką. Według HULBERTA i innych [1] reakcje organizmu można podzielić na osiem typów, działających osobno lub czasem łącznie.

Fagocytoza. Fagocytoza stanowi zwykle pierwszą podstawową reakcję na obecność substancji obcych. Polega ona na mobilizacji i działaniu fagocytów (komórek żernych), które niszczą obce komórki i tkanki oraz mikroorganizmy, które przedostają się do narządów. Fagocyty mogą się poruszać samodzielnie ruchem pełzakowatym i wędrować poprzez tkanki (np. przez ściany naczyń krwionośnych), mogą też być transportowane przez krew do miejsc, gdzie znajdują się drobnoustroje lub inne zbędne ciała, np. produkty wydalone przez tkanki, tkanki obumarłe etc. Ciała te zostają przez fagocyty wchłonięte i unieszkodliwione. Do fagocytów należą białe ciała krwi i niektóre komórki tkanki łącznej. Jeśli komórki fagocytu nie mogą strawić pewnych substancji, wówczas izolują je od otaczającej zdrowej tkanki. Dobrym miejscem obserwacji komórek żernych są rany, skaleczenia i inne zakażone miejsca w ciele.

Ruch komórek fagocytowych w kierunku danej substancji jest częścią chemotaktyzmu. Chemotaktyzm dodatni oznacza ruch do bodźca chemicznego: ruch przeciwny nazywa się chemotaktyzmem ujemnym. Niektóre materiały, na przykład węgiel, krzem nie przyciągają ani nie odpychają fagocytów. Jednak wchodząc w kontakt z nimi są przez nie wchłaniane. W przypadku, gdy implantyt wykonany jest z materiału chemotaktycznie ujemnego (odrzucającego komórki żerne), w otoczeniu implantytu może powstać infekcja, na skutek niepowstrzymanego rozwoju flory bakteryjnej. Hamowana jest też w tym wypadku regeneracja tkanki po przejściu stanu zapalnego.

Także zastosowanie materiału o cechach chemotaktycznych silnie dodatnich, gromadząc nadmiar komórek żernych, może niekiedy przeszkadzać w normalnej regeneracji.

Fagocytoza jest zbyt słabym mechanizmem obronnym, jeśli substancje obce występują w zbyt dużych ilościach; w tych przypadkach organizm mobilizuje inne środki neutralizacji ciał zbędnych.

Ropnie i wrzody. Wystąpienie ropni oznacza intensywną akcję wydalania ciał szkodliwych przez organizm. Obserwuje się lokalne nagromadzenie dużej ilości ropy — żółtawej cieczy złożonej z surowicy, białych ciałek krwi, bakterii i odpadów tkankowych.

Zwykle ropnie występują w bardziej zbitych tkankach, gdzie działanie krwi jest niedostateczne, aby szybko usunąć wydzieliny i uszkodzone komórki. Po pewnym czasie wrzody i ropnie zostają otoczone przez błonę łącznotkankową, która zabezpiecza żywą i zdrową tkankę przed rozprzestrzenianiem się ogniska ropnego. Ropień rozprzestrzenia się w kierunku powierzchni tkanki lub narządu, rozpraszając swą zawartość. Wystąpienie ogniska ropnego w pobliżu protezy stwarza możliwości dalszego podrażnienia, zwłaszcza gdy implantyt jest w ruchu. Regeneracja tkanki ulega wówczas przedłużeniu.

Nowotwory. W niektórych przypadkach implantacja może spowodować reakcję nowotworową. Mogą ją spowodować pewne niekorzystne reakcje chemiczne albo długotrwałe działanie mechaniczne drażniące tkankę i wywołujące intensywny mechanizm obrony. Niektórzy badacze są zdania, że nowotwory powstają wtedy, gdy implantyty wykonane z polimerów, metali i szkła mają postać nieprzepuszczalnych, pełnych płytek, blaszek etc.

Zastosowanie układów perforowanych zmniejsza prawdopodobieństwo reakcji nowotworowej. Dlatego zaleca się różne materiały gąbczaste, włókniste etc.

Istnieje też opinia, że kształt implantytu jest ważniejszym czynnikiem niż skład chemiczny biomateriału [2]. Opinia ta nie jest jednak podzielana powszechnie. Niemniej trzeba zwrócić uwagę, aby implantyt zawierał jak najmniej ostrych zakończeń, krawędzi i miał kształt pozwalający na dobre przyleganie do ciała, szkieletu etc.

Stany zapalne. Stan zapalny poznajemy po rozszerzeniu naczyń krwionośnych, nadmiarze płynów w tkance i wzroście liczby białych ciałek krwi. Reakcja tego typu jest zwykle intensywna i długotrwała. Wywołuje niekiedy ból i powoduje utratę sprawności przez tkanki, nieraz nieodwracalną. Stany zapalne można rozpatrywać raczej jako procesy patologiczne niż reakcje odrzucania ciał obcych.

Rany i skaleczenia. Normalny proces gojenia się ran składa się z faz początkowego, a potem ostrego stanu zapalnego, po którym następuje intensywny wzrost zdrowej tkanki.

Po wykonaniu wycięcia, nacięcia lub innej operacji na tkance, w celu dokonania implantacji, krew z uszkodzonej tkanki spływa do wycięcia i do protezy, jeśli ta jest dość porowata. Następuje krzepnięcie krwi.

Proces krzepnięcia krwi jest skomplikowany. Jego istota polega na przemianie fibrynogenu, znajdującego się w osoczu w stanie zolu, na włóknistą w stanie żelu fibrynę, w której gęsto splecionych włóknach więzną ciałka krwi hamując jej wypływ z rany. Równocześnie siatka ta pozwala na przepływ niektórych substancji chemicznych przez powierzchnię.

Powłoki izolujące. Badania wykazały, że implantyt bywa często izolowany od żywych tkanek przy pomocy włóknistej, odpornej powłoki tworzącej rodzaj cysty (pęcherza), zbudowanej z dużych, spłaszczonych komórek. Pęcherz ten spowija materiał; jedynie znaczne ruchy implantytu mogą spowodować jego uszkodzenie i ewentualne infekcje lub stany zapalne.

Trucizny. Trucizny wywołują bardzo silne reakcje obronne. Słowo «trucizna» oznacza substancję pochodzenia zewnętrznego, która może wywołać schorzenie lub śmierć przez wejście w reakcję chemiczną z protoplazmą, podstawową formą materii żywej. Protoplazma jest szarawą, półprzezroczystą, półciekłą substancją o złożonym składzie chemicznym. Zachodzą w niej podstawowe dla życia przemiany fizyczne, elektryczne, chemiczne etc. Działanie trucizny zależy od następujących cech:

1. Stężenia trucizny,
2. Wrażliwości tkanek.
3. Sposobu działania czynnika trującego.

Trucizny wchodzą przeważnie w skład substancji, które dostają się do organizmu drogami oddechowymi albo przez przewód pokarmowy; nie jest to jednak regułą. Substancje takie mogą również przedostać się do organizmu przez łągowanie różnych dodatków wchodzących w skład implantytu; np. plastyfikatorów dodawanych do polimerów.

Są w użyciu terminy takie, jak trucizna, toksyna. Nazwę «toksyna» rezerwujemy jako zbiorowe określenie dla nie dość jeszcze zbadanych jądów organicznych (białkowych), wytwarzanych przez bakterie, wyższe rośliny i zwierzęta.

Pewne organy są szczególnie wrażliwe na trucizny, m.in. wątroba, nerki i płuca (ze względu na funkcje filtracyjne), również serce, tkanka nerwowa i szpik kostny są wrażliwsze od innych tkanek. Szczególnie podatne na działanie trucizn są enzymy.

Sole i glukoza są toksyczne, kiedy występują w znacznych stężeniach, natomiast metale takie, jak arsen, ołów, rtęć i cyjanki — nawet w niewielkich ilościach, zwłaszcza jako składniki nietrwałych soli i tlenków. Mniej trujące od wyżej wymienionych metali są: beryl, fosfor, bizmut, chrom, kobalt, kadm i uran, jeszcze mniej: żelazo, miedź, cyna, cynk, srebro, wanad i aluminium. Substancje umiarkowanie toksyczne, w których występują jednak wolne jony, łatwo przedostające się do tkanki, nie powinny być używane do implantacji.

Są substancje powodujące uszkodzenia lokalne na powierzchni kontaktu z tkanką. Inne działają na zasadzie absorpcji. Objawy niektórych zatruc mogą być trudne do zauważenia. Jeśli objawy zatrucia zlokalizowane są w otoczeniu implantyту, mogą one być nie do odróżnienia od podrażnienia tkanki spowodowanego przez inne czynniki (np. mechaniczne, stany zapalne etc.).

Czyste polimery na ogół nie szkodzą tkankom. Natomiast niektóre dodatki używane do poprawy pewnych właściwości polimerów są przeważnie wysoce toksyczne. Fosforan arylowy, czasem stosowany jako plastyfikator do polistyrenu i polichlorku winylu, działa toksycznie na system nerwowy [5]. Szczególnie ostrożnie należy dozować dodatki ulegające ługowaniu.

Tkanki na ogół dobrze przyjmują polimery wielocząsteczkowe, gorzej zaś polimery o niskim ciężarze cząsteczkowym. Reduktory przeważnie mają własności toksyczne, niemniej polietylen nie wykazuje niezgodności z tkankami. Trujące są natomiast żywice epoksydowe, fenolowe i aminowe.

Uodpornienie organizmu. Mechanizm immunologiczny jest najbardziej złożonym mechanizmem reakcji obronnej organizmu. Stosunkowo najlepiej poznany jest system wytwarzania przeciwciał (antytoksyn). Chronią one organizm trwale lub czasowo przed określonymi zakażeniami bakteriologicznymi lub wirusowymi. Można wzmóc produkcję przeciwciał przez wprowadzenie do organizmu antygenów: są to związki chemiczne (głównie białkowe) występujące w tkankach i jadach zwierząt i niektórych roślin; także w ciałkach krwi i bakteriach. Wchodzą one w reakcje z przeciwciałami, w pewnym stopniu neutralizując ich działanie.

Wnioski. Podsumowując można stwierdzić, że wszystkie substancje, nie wytworzone samorzutnie przez organizm, mają pewne działania niekorzystne dla tkanki i w różnym stopniu mobilizują reakcje obronne.

Projektant implantyту winien dobrać materiał, który spełnia w sposób optymalny żądane funkcje przy minimalnym działaniu niszczącym na tkanki. Należy zwrócić uwagę na kształt implantyту i dokładność jego wbudowania w organizm ludzki.

Celem powyższych rozważań było postawienie problemu zgodności biomateriałów i tkanek organicznych, aby w praktyce stosowanie wszelkich biomechanizmów przynosiło efekty pozytywne w sensie przystosowania organizmu i przy minimum cierpień pacjentów.

Literatura cytowana w tekście

[do części 1]:

1. K. PIEKARSKI, *Fracture of bone*, J. Appl. Phys. **41**, (1970) 215.
2. M. I. KAY, R. A. YONG and A. S. POSNER, *Crystal structure of hydroxyapatite*, Nature, **204**, (1964), 1050—1052.
3. A. ASCENZI, E. BONUCCI and D. S. BIOCCHIARELLI, *An electron microscope study of osteon calcification*, J. Ultrastr. Res., **12**, (1965), 287—303.
4. R. W. MACK, *Bone a natural two phase material*, Technical memorandum, San Francisco, Univ. of California, Biomechanics Lab., 36 str., 1964.
5. A. W. SWEENEY et al., *Mechanical properties of bone and its constituents*, ASME 65-WA/HUF7, N.Y. ASME, (1965).
6. J. BHIMASENACHER, *Elastic constants of apatite*, Proc. Indian Acad. Scien., **A22**, A (1945), 209.
7. J. D. CURREY, *Three analogies to explain the mechanical properties of bone*, Bio-Rheology, **2**, (1964), 1—10.
8. E. RYSKEWITCH, *Compression strength of porous sintered alumina and zirconia*, J. Am. Ceram. Soc., **36** (2), (1953), 65—68.
9. H. M. FROST, *Specific surface and specific volume of normal human lamellar bone*, Henry Ford Hosp. Med. Bull., **10** (1962) 35—41.
10. K. PIEKARSKI, *Analysis of bone as a composite material*, Int. J. Eng. Sc., (1973).
11. E. D. SEDLIN, *Rheological model for cortical bone*, Acta Orthop. Scan. Suppl., **83** (1965).
12. J. H. MCELHANEY and E. F. BYARS, *Dynamic response of biological materials*, ASME Rep., 1965.
13. R. L. COBLE and W. D. KINGERY, *Effect of porosity on physical properties of sintered alumina*, J. Am. Ceram. Soc., **39** (11) (1956) 377—385.

[do części 2]:

1. J. GROSS, Sc. Am. **204**, (1961), 121—130.
2. M. J. GLIMCHER, Rev. of Mod. Phys., **31**, 2, (1959), 359—393.
3. K. LITTLE, M. KELLY and A. COURTS, *Bone and Joint Surg.*, **44B**, (1962), 503—519.
4. E. KARRER, Phys. Rev., **39** (1932), 857.
5. R. H. HALL, J. Soc. Leather Tr. Chem., **36** (1952), 137—148.
6. D. J. LLOYD and M. BARROD, Soc. Dyers and Col., Symp. on Fibrous Proteins, str. 24—29, 1964.
7. R. H. HALL, Soc. J. Leather Tr. Chem., **35** (1951), 195—210.
8. C. A. L. BASSETT, Sc. Am., **213** (1965) 18—25.
9. R. O. BECKER and C. H. BACHMAN, Clin. Orthop., **43**, (1964), 251—253.
10. E. FUKUDA and YASUDA, Jap. J. Appl. Phys., **3**, (1964), 117—121.
11. J. C. ANDERSON and C. ERIKSSON, Nature, **218**, (1968), 166—168.

[do części 3]:

1. S. F. HULBERT, S. J. MORRISON and J. J. KLAWITTER, *Problems Associated with Determining Compatibility of Biomaterials*. Proc. Symposium — Workshop on Research Techniques in Biomaterials Evaluation, Clemson University, S. Carolina, March 1971.
2. E. T. OPPENHEIMER, M. WILLHITE, I. DANISHEFSKI and A. P. STOUT, *Observations of the Effects of Powdered Polymers in the Carcinogenic Process*, Cancer Res., **21** (1961), 132.
3. W. C. HEUPER, *Carcinogenic Studies on Water Soluble Polymers*, Pathol. Microbiol., **24**, (1961) 77.
4. W. C. HEUPER, *Experimental Production of Cancer by means of implanted Polyurethane Plastic*, Am. J. of Clin. Pathol., **34** (1960) 328.
5. D. F. WILLIAMS, *The Reactions of Tissue to Materials*, Biom. Eng. (1971), 152.

UNIVERSITY OF WATERLOO, CANADA

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1974 r.

O MODELOWANIU WAŁU WIELOPODPOROWEGO Z WIELOMA TARCZAMI ZA POMOCĄ
WIELKIEGO SYSTEMU BIOSCYLATORÓW

Część I. Uwagi ogólne. Oscylatory wielowskaźnikowe

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

1. Wstęp

W literaturze technicznej istnieje wiele prac na temat dynamiki wałów obciążonych tarczami. Nie można jednak do tej pory zauważyć jednolitej koncepcji modelowania tych układów mechanicznych, ponieważ autorzy prac zajmują się raczej określonymi przypadkami szczególnymi zjawiska ruchu układów wirujących.

Praca niniejsza stanowi próbę ogólnego sformułowania równania (stanu) ruchu sprężystego wału wielopodporowego z wieloma tarczami. Stosuje się w tym celu następujące założenia.

1. Przyjęcie na ogół dowolnego sprężystego modelu konstrukcyjnego.
2. Traktowanie tego modelu jako systemu wielkiego.
3. Przedstawienie wielowskaźnikowego modelu algebraicznego.
4. Podanie równań (stanu) ruchu dyskretnego układu mechanicznego wielokrotnego dzięki wyprowadzeniu równań różniczkowych zwyczajnych wielociągowych opisujących badane zjawisko przy założeniach: (a) sześciu stopni swobody — trzech w ruchu postępowym i trzech w ruchu obrotowym, (b) dowolnej liczby naturalnej przekrojów podporowych wału, (c) — dowolnej liczby naturalnej przekrojów wału obciążonego tarczami, (d) — dowolnej liczby naturalnej przekrojów mas zredukowanych wału; (e) — małych ugięć konstrukcji, (f) — dopuszczenia dowolnej liczby naturalnej obciążeń konstrukcji za pomocą: (g) — sił o wartościach danych ciągami wielowskaźnikowymi, (h) — momentów sił o wartościach danych ciągami wielowskaźnikowymi, (i) — oraz przy uwzględnieniu wynikających z (a) sił i momentów sił oporów (tłumienia) ośrodka o wartościach danych ciągami wielowskaźnikowymi.

W taki sposób, zgodnie z wielociągowym prawem Hooke'a, został skonstruowany bioscylator wielowymiarowy wielowskaźnikowy, gdyż funkcja stanu ruchu rozważanego systemu wielkiego (wał, trzy rodzaje jego przekrojów ponumerowanych za pomocą wielowskaźnika i o parametrach podanych za pomocą ciągów wielowskaźnikowych) jest ciągiem wielowskaźnikowym funkcji określonych na zbiorze ciągów wielowskaźnikowych.

Stanowi on jednolity model fizykalno-matematyczny rozważanej konstrukcji, ponieważ: (1) — istnieje jej model fizykalny. (2) — istnieje model matematyczny (zarówno algebraiczny, jak i dany w postaci równań różniczkowych zwyczajnych wielociągowych)

Wykorzystano tutaj prace własne [1, 2] i przygotowaną do druku pracę pod tytułem *Uogólnione prawo wielowskaźnikowe dynamiki układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*.

Znając równania różniczkowe zwyczajne wielociągowe (ciągi wielowskaźnikowe równań) wielowymiarowego bioscyłatora wielowskaźnikowego możemy także sformułować problem stabilności ruchu rozpatrywanej konstrukcji wielowskaźnikowej. Uczyniono to w pracy pod tytułem *O stabilności ruchu wału wielopodporowego z wieloma tarczami modelowanego za pomocą wielkiego systemu bioscyłatorów* zreferowanej dnia 22.V.1970 r. na konferencji naukowej w Warszawie na temat «Zagadnienia stateczności w teorii układów dyskretnych».

Przyjęty model konstrukcji można zbadać na analogu elektrycznym, co wynika ze znanej analogii elektromechanicznej po uzasadnieniu jej w klasie równań bioscyłatorów wielowskaźnikowych.

2. Uwagi o konstrukcji i jej elementach

Niech będą dane następujące elementy konstrukcyjne k_1 — łożyska (podpory), k_2 — wał oraz k_3 — tarcze, połączone ze sobą w pewien sposób (na wale tarcze, wał w łożyskach) i tworzące zbiór uporządkowany — ciąg jednowskaźnikowy elementów

$$\bar{k} = [k_1, k_2, k_3],$$

zwany konstrukcją \bar{k} .

2.1. Uwagi o geometrii k_j i konstrukcji \bar{k} . Wał jest na ogół (lecz niekoniecznie) walcem o długości skończonej. W sposób uproszczony przedstawiamy go schematycznie odcinkiem jako tworem jednowymiarowym. Przy założeniach: (1) małych krzywizn oraz (2) płaskich przekrojów poprzecznych otrzymujemy [4] linię ugięcia pręta w postaci równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu, liniowego i niejednorodnego, o współczynnikach stałych. Może ono też być słuszne w przypadkach (3) — prętów posiadających wymiary poprzeczne skończone, małe w porównaniu z długościami.

Tarcza jest wykuła wspólnie z wałem bądź osadzona na nim stanowiąc na ogół twór dwuwymiarowy — koło z wyciętym współśrodkowo kołem mniejszym o średnicy wału. Środek tarczy może pokrywać się ze środkiem przekroju wału lub nie. Tarcza może być prostopadła do osi wału lub nie.

Łożyska są płacami powierzchni walcowymi lub kulistymi. Wał styka się z nimi na pewnym płacie lub linii. Zakładamy dla uproszczenia, że styk ten jest punktowy.

2.2. Uwagi o konstrukcji \bar{k} i jej elementach w układzie odniesienia. Ilość stopni swobody elementów. Konstrukcja \bar{k} istnieje w przestrzeni euklidesowej trójwymiarowej. Przyjmujemy więc taki ortokartezjański układ odniesienia $(0, x_{11}, x_{21}, x_{31})$, aby można było w nim tę konstrukcję opisać.

Wał o długości $l = AB$ usytuowany jest tak, że punkt A stanowi początek 0 osi Ox_{11} (a tym samym początek układu odniesienia) stycznej do jego osi nieodkształconej, na której leży odcinek AB .

Linia ugięcia wału jest na ogół krzywą przestrzenną, ale często można przyjąć ją jako płaską. Wtedy jest ona interpretacją graficzną rozwiązania $y = y(x)$, czyli $x_{21} = x_{21}(x_{11})$ równania różniczkowego

$$P(x_{11}, x_{21}'(x_{11}), E, J) = 0,$$

gdzie E, J są pewnymi stałymi fizykalnymi.

Podpora pierwsza ma w stanie nieodkształconym współrzędne $A_0 = (0, 0, 0)_0 = A$. Podpora ta styka się z przekrojem początkowym wału. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że właśnie dzięki temu podpora może posiadać sześć stopni swobody opisanych ciągami współrzędnych niezależnych

$$\bar{x}_1 = [x_1, x_2, x_3]_1$$

o charakterze przemieszczeń wzdłuż osi przyjętego układu odniesienia, oraz ciągami współrzędnych

$$\bar{x}_2 = [x_1, x_2, x_3]_2$$

o charakterze obrotów dookoła osi przyjętego układu odniesienia.

Rozważania dotyczące konstrukcji \bar{k} są różnie uproszczone z powodu zastąpienia ciągłej konstrukcji trójwymiarowej wyidealizowanym układem dyskretnym punktów, które mają przedstawiać trojaki charakter elementów k_j , $j = 1, 2, 3$, mianowicie:

- 1) punkty — podpory z przekrojami podporowymi, jako elementy sprężyste w przestrzeni trójwymiarowej posiadające sześć stopni swobody,
- 2) punkty — tarcze, jako elementy sprężyste w przestrzeni trójwymiarowej posiadające sześć stopni swobody,
- 3) punkty — masy zredukowane, jako elementy sprężyste w przestrzeni trójwymiarowej posiadające sześć stopni swobody.

Omówimy oddzielnie każdy element k_j konstrukcji \bar{k} . Mimo ich różnorodności przyjmujemy wspomniane wyżej jednolity schemat tak modelu elementów k_j , jak też konstrukcji \bar{k} za pomocą bioscyłatora wielowskaźnikowego. Pojęcie to wprowadzimy w dalszych rozważaniach i uogólnimy je korzystając z ciągów wielowskaźnikowych [1, 2].

Reasumując stwierdzamy, że chociaż wał w idealizacji za pomocą pręta jest tworem jednowymiarowym, to dzięki założeniu przekrojów płaskich (dwuwymiarowych) uwzględniamy w pewien sposób jego trójwymiarowość — chociaż przyjmujemy, że ma on wymiary poprzeczne małe w porównaniu z długością.

Jeśli nawet mówimy o płaskim przekroju podporowym jako o elemencie granicznym tworzącego trójwymiarowego, biorąc pod uwagę tylko jego środek geometryczny (później środek masy), to przez przyporządkowanie mu sześciu stopni swobody uwzględniamy w rozpatrywanych przekrojach wszystkie możliwe ruchy takiego elementu wału jako granicznej bryły elementarnej.

Idealizacja taka umożliwia zastąpienie ważkiego sprężystego wału trójwymiarowego ciągłego — układem dyskretnym wyróżnionych punktów, w których w taki sposób skupiamy masę wału, podpór, tarcz, ażeby ruch przyjętego w ten sposób modelu dyskretnego konstrukcji \bar{k} (o masach skupionych wałów, tarcz, podpór — zredukowanych do punktów) z wystarczającym przybliżeniem aproksymował ruch układu rzeczywistego \bar{k} . Tym samym, zamiast równań różniczkowych cząstkowych opisujących drgania continuum punktów, mamy równania różniczkowe zwyczajne opisujące drgania wybranej ilości punktów przekrojowych poddanym utwierdzeniu na podporach lub obciążonych tarczami lub masami zredukowanymi pręta.

Nie będziemy się przy tym zajmowali redukcją masy wału do pewnych wybranych na nim punktów, ani też redukcją mas tarczy lub mas podpór. W dynamice elementów

wirujących jest to problem najważniejszy. W literaturze technicznej istnieje dużo publikacji na ten temat, ale nie można stwierdzić, że istnieją zadowalające rozwiązania ogólne.

Chociaż więc nie zajmujemy się redukcją mas i momentów bezwładności konstrukcji \bar{k} , to postaramy się przedstawić tutaj propozycję formułowania dostatecznie ogólnego jej modelu dyskretnego.

1. Przyjmijmy, że wał jest podparty w n_3 przekrojach. Każda podpora (łożysko) posiada współrzędne

$$A_{q_3} = \left[[x_1, x_2, x_3]_{q_3} \right], \quad q = 1, \dots, n_3,$$

gdzie n_3 — ilość podpór, przy czym

$$A_{n_3} = \left[[x_1, x_2, x_3]_{n_3} \right] = B.$$

O ilości stopni swobody każdej podpory (z odpowiednim przekrojem) przyjmujemy takie samo założenie, jak i w przypadku podpory pierwszej zapisanej symbolicznie w postaci $A = A_1$.

Tak więc każda podpora posiadająca masę skupioną w punkcie z odpowiednim przekrojem, jako elementarny twór trójwymiarowy o znikomych wymiarach poprzecznych i długości dążącej do zera, jest pod względem możliwości wykonywania ruchów scharakteryzowana:

1° — jednowskaźnikowym trójelementowym ciągiem stopni swobody wynikającym z możliwości zmian (o charakterze przemieszczeń wzdłuż osi układu odniesienia) jednowskaźnikowego ciągu współrzędnych — położeń

$$\begin{aligned} [{}^2\bar{x}_1]_1 &= \left[[x_1, x_2, x_3]_{j_1}, \dots, [x_1, x_2, x_3]_{j_3} \right]_1 = \\ &= \left[[x_{j_1}]_{j_3} \right]_1 = \left[[x_{j_1}]_{j_3} \right]_1, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_3 = 1, \dots, n_3; \end{aligned}$$

2° — jednowskaźnikowym trójelementowym ciągiem stopni swobody wynikającym z możliwości zmian (o charakterze obrotów dookoła osi układu odniesienia) ciągu współrzędnych — kątów

$$[{}^2\bar{x}_2]_1 = \left[[x_1, x_2, x_3]_{j_1}, \dots, [x_1, x_2, x_3]_{j_3} \right]_1 = \left[[x_{j_1}]_{j_3} \right]_1 = \left[[x_{j_1}]_{j_3} \right]_2.$$

W ten sposób n_3 — elementowy ciąg jednowskaźnikowy podpór jest scharakteryzowany ciągiem trójwskaźnikowym stopni swobody wynikającym z przyjęcia ciągu trójwskaźnikowego współrzędnych niezależnych

$${}^3\bar{x}_1 = [x_{j_1 j_2 j_3}]_1, \quad j_{q_1} = 1, \dots, n_{q_1}; \quad q_1 = 1, 2, 3$$

opisującego n_3 utwierdzonych przekrojów łożysk.

2. Załóżmy następnie, że na wale mamy n_4 tarcz, których środki znajdują się w odległościach

$$\bar{l} = [l_{j_4}] = [l_1, \dots, l_{n_4}]$$

od początku układu odniesienia przy założeniu wału jednowymiarowego. Środki tarcz O_{k_4} , $k_4 = 1, \dots, n_4$ na ogół nie pokrywają się ze środkami tych przekrojów wału, na których są one osadzone.

Oznaczmy współrzędne tych środków za pomocą ciągów dwuwskaznikowych w sposób następujący:

$$O_{k_4} = [[x_1, x_2, x_3]_{k_4}], \quad k_4 = 1, \dots, n_4.$$

Gdy traktujemy tarczę jako wycinek (najczęściej pierścieniowy) płaszczyzny, to czynimy pewne uproszczenie. Działanie tarczy na wał uwzględnia się w ten sposób, że jej środek masy opisuje się na ogół dwiema współrzędnymi, skąd wynikają równania ruchów postępowych. Tarcza posiada ponadto moment bezwładności względem osi obrotu, ewentualnie momenty bezwładności względem osi lokalnego układu odniesienia, co umożliwia rozważanie jej ruchów obrotowych.

Najczęściej przyjmuje się, że ruchy tarczy są płaskie, gdy jest ona nieodkształcalna i prostopadła do osi wału. Jest to bardzo optymistyczne założenie, z którego musimy zrezygnować przyjmując dowolne odchylenia (ale o małych kątach) początkowego usytuowania tarczy na wale.

W celu ujednoczenia i zachowania możliwej ogólności rozważań przyjmujemy, że każda tarcza (wraz z ewentualnym przekrojem wału, na którym jest zawieszona), jako elementarny twór trójwymiarowy o znikomych wymiarach poprzecznych¹⁾ i długości dążącej do zera jest (pod względem możliwości wykonywania ruchów) opisana podobnie do każdej podpory z odpowiadającym jej przekrojem, to znaczy przez:

1° n_4 -elementowy ciąg jednowskaznikowy trójelementowych ciągów jednowskaznikowych położeń

$$[{}^2\bar{x}_1]_2 = [[x_{j_1}]_{j_4}]_2 = [[x_{j_1}]_{j_4}]_1, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_4 = 1, \dots, n_4;$$

2° n_4 -elementowy ciąg jednowskaznikowy trójelementowych ciągów jednowskaznikowych kątów

$$[{}^2\bar{x}_2]_2 = [[x_{j_1}]_{j_4}]_2 = [[x_{j_1}]_{j_4}]_2.$$

W ten sposób n_4 -elementowy ciąg jednowskaznikowy tarcz jest scharakteryzowany ciągiem trójwskaznikowym stopni swobody wynikającym z przyjęcia ciągu trójwskaznikowego współrzędnych niezależnych

$${}^3\bar{x}_2 = [x_{j_1 j_2 j_4}]_2, \quad j_{q_2} = 1, \dots, n_{q_2}, \quad q_2 = 1, 2, 4$$

opisującego n_4 tarcz.

3. Przyjmijmy ponadto, że masa wału może być skupiona w n_5 jego przekrojach, przy czym nie będziemy zajmowali się realizacją «skupiania» — redukcji jego mas częściowych. Dodamy tylko, że masę wału można redukować do: (a) przekrojów podporowych, (b) przekrojów zawieszenia tarcz, (c) przekrojów innych.

Podobnie jak w rozważaniach poprzednich, także i tu przyjmujemy, że każdy przekrój, do którego redukujemy masę częściową wału jako elementarny twór trójwymiarowy o znikomych wymiarach poprzecznych i długości dążącej do zera, jest pod względem możliwości wykonywania ruchów opisany podobnie do każdej podpory z odpowiadającym jej przekrojem lub tarczy, to znaczy przez

¹⁾ Większych jednak od wymiarów poprzecznych przekroju wału.

1° n_5 -elementowy ciąg jednowskaźnikowy trójelementowych ciągów jednowskaźnikowych położeń

$${}^2\bar{x}_1]_3 = [[x_{j_1}]_1]_{j_3}]_3 = [[x_{j_1}]_{j_3}]_1]_3, \quad j_1 = 1, 2, 3; \quad j_3 = 1, \dots, n_5;$$

2° n_5 -elementowy ciąg jednowskaźnikowy trójelementowych ciągów jednowskaźnikowych kątów

$${}^2\bar{x}_2]_3 = [[x_{j_1}]_2]_{j_3}]_3 = [[x_{j_1}]_{j_3}]_2]_3.$$

W ten sposób n_5 -elementowy ciąg jednowskaźnikowy przekrojów, do których redukujeśmy masy częściowe wału, jest scharakteryzowany ciągiem trójwskaźnikowym współrzędnych niezależnych

$${}^3\bar{x}_3 = [x_{j_1 j_2 j_3}], \quad j_{q_3} = 1, \dots, n_{q_3}; \quad q_3 = 1, 2, 3$$

opisujących n_5 mas.

Zauważmy, że korzystając z ciągów wielowskaźnikowych [1, 2] wszystkie trzy rodzaje przekrojów:

1) podporowych (z masami skupionymi podpór i ewentualnymi momentami bezwładności względem osi układu odniesienia),

2) osadzenia tarcz (z masami skupionymi tarcz i momentami bezwładności względem osi układu odniesienia),

3) mas zredukowanych (z masami częściowymi skupionymi i ewentualnymi momentami bezwładności względem osi układu odniesienia)

możemy opisać ciągiem czterowskaźnikowym współrzędnych niezależnych

$${}^4\bar{x} = [{}^3\bar{x}_1, {}^3\bar{x}_2, {}^3\bar{x}_3].$$

Pamiętamy jednak, że w każdym ciągu trójwskaźnikowym występuje inna liczba ciągów dwuwskaźnikowych: podpór, tarcz oraz mas zredukowanych.

2.3. Uwagi o własnościach fizykalnych tworzywa elementów k_j i konstrukcji \bar{k} oraz o jej funkcji stanu. Każdy element k_q , $q = 1, 2, 3$ posiada pewną liczbę własności mechanicznych, na przykład jest izotropowy lub anizotropowy, ma przekrój stały lub zmienny, postać jednorodną (stałą) lub niejednorodną (zmienną), momenty bezwładności stałe lub zmienne, współczynniki sprężystości, współczynniki tłumienia, siły i momenty obciążające stałe lub zmienne.

Przypuśćmy, że u_1 tych własności zapisujemy ciągiem jednowskaźnikowym

$$\bar{w}_q = [w_1, \dots, w_{u_1}] = [w_{i_1}], \quad i_1 = 1, \dots, u_1,$$

przy czym zmieniają się one na ogół ze zmianą punktów p konstrukcji \bar{k} i w czasie t , co zapisujemy symbolicznie $\bar{w}_q = \bar{w}_q(p, t)$, czyli

$${}^2\bar{w} = [w_{i_1 i_2}] = {}^2\bar{w}(p, t), \quad i_1 = 1, \dots, u_1; \quad i_2 = 1, 2, 3,$$

gdzie p jest punktem przestrzeni trójwymiarowej $p = (x_1, x_2, x_3) = (\bar{x})$.

Można więc powiedzieć, że istnieje takie przekształcenie, które przeprowadza konstrukcję \bar{k} w ciąg (tu dwuwskaźnikowy) zmiennych jej stanu $\bar{k} = \bar{k}({}^2\bar{w})$.

Jeśli przyjmiemy ortokartezjański układ odniesienia umożliwiający opis konstrukcji \bar{k} , to mamy $\bar{k} = \bar{k}(\bar{x}, t)$.

Konstrukcja \bar{k} o własnościach ${}^2\bar{w}$ spełnia pewną liczbę u_3 praw fizyki F_{i_3} , gdzie

$$\bar{F} = [F_{i_3}] = F_1, \dots, F_{u_3}.$$

Znaczy to, że dana jest rodzina przekształceń

$$\bar{F}[k\{{}^2\bar{w}(\bar{x}, t)\}] = \bar{0} \quad \text{lub} \quad \bar{F}[{}^2\bar{w}(\bar{x}, t)] = \bar{0}$$

określona na zbiorach wielowymiarowych zmiennych ${}^2\bar{w}$, przy czym poszukujemy rozwiązań takich układów przekształceń ze względu na wyróżnione, interesujące nas cechy — własności mechaniczne. Ciąg jednowskaźnikowy \bar{F} nazywamy funkcją stanu konstrukcji \bar{k} .

Zauważmy, że konstrukcja \bar{k} tworzy układ — system w sensie sformalizowanym tego pojęcia [4]. Odpowiada mu układ — ciąg jednowskaźnikowy opisu przekształceń jako model matematyczny zjawiska.

2.4. Uwagi o sposobach opisu konstrukcji. Przekształcenie \bar{F} w dynamice konstrukcji może mieć zasadniczo charakter dwojaki.

1° Jeśli badany układ wirujący posiada model dyskretny, to funkcja stanu zjawiska jest układem równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\bar{F}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t), \ddot{\bar{x}}(t), \bar{w}(\bar{x}, t)) = \bar{0},$$

gdzie

$$\dot{\bar{x}} = \frac{d}{dt}\bar{x}(t), \quad \ddot{\bar{x}} = \frac{d^2}{dt^2}\bar{x}(t)$$

są odpowiednio wektorami prędkości i przyspieszeń układu, zaś

$$\bar{w} = \bar{w}(\bar{x}, t)$$

przedstawia ciąg (tu jednowskaźnikowy) parametrów układu \bar{k} zmiennych w czasie i przestrzeni, ale przy pewnych założeniach co do redukcji (skupienia) parametrów w określonych i wyróżnionych punktach konstrukcji.

Analogicznie do założenia ciągłości czasu przyjąć jednak należy ciągłość konstrukcji \bar{k} , czyli wału ważkiego obciążonego wieloma tarczami ciągłymi i podpartego w wielu łożyskach przy traktowaniu go jako układu mechanicznego trójwymiarowego ze względu na geometrię. Trzeba przy tym również poczynić założenia co do uproszczeń kształtu, wymiarów, własności konstrukcji itp., aby uzyskać jej model ciągły.

2° Jeśli badany układ wirujący posiada model ciągły, to funkcja stanu zjawiska jest układem równań różniczkowych cząstkowych postaci:

$$\bar{F}\left(t, \bar{w}(\bar{x}, t), \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\bar{w}(\bar{x}, t), \frac{\partial}{\partial t}\bar{w}(\bar{x}, t), \dots, \frac{\partial^n}{\partial \bar{x}^n}\bar{w}(\bar{x}, t), \frac{\partial^n}{\partial t^n}\bar{w}(\bar{x}, t)\right) = \bar{0},$$

gdzie $\bar{w}(\bar{x}, t)$ jest ciągiem (tu jednowskaźnikowym) funkcji parametrów charakteryzujących pod określonym względem stan konstrukcji w czasie i przestrzeni. W równaniu tym pominęliśmy niektóre pochodne zaznaczając tylko symbolicznie pochodne ciągu jednowskaźnikowego funkcji względem zmiennych \bar{x} i oddzielnie pochodne względem czasu, aby odróżniać zmiany w przestrzeni geometrycznej od zmian w przestrzeni czasu.

2.5. Uwagi o numeracji wielowskaźnikowej zmiennych stanu i funkcji stanu zjawiska. Przyjmiemy jednolitą nazwę zmiennych stanu zjawiska dla zmiennych, parametrów i stałych, charakteryzujących (opisujących) stan zjawiska, gdzie przez stan rozumiemy wyróżniony podzbiór zbioru zmiennych.

Numeracja własności \bar{w} i punktów \bar{x} układu-konstrukcji \bar{k} jako zmiennych stanu określonego zjawiska (na przykład ruchu) nie musi być dokonana tylko za pomocą ciągów jednowskaźnikowych. Często jest korzystniej, szczególnie w systemach wielkich (przede wszystkim ze względu na przejrzystość opisu zjawiska, czyli jego funkcji stanu), wprowadzić ciągi wielowskaźnikowe tak zmiennych stanu jak i funkcji stanu, a tym samym przyjąć model wielowskaźnikowy zjawiska.

Widzimy to na przykładzie modelu wielowskaźnikowego układu wirującego jako systemu wielkiego przekrojów podpartych, tarcz i mas skupionych. Przygotowujemy mianowicie jego opis wielowskaźnikowy w postaci oscylatora wielkiego charakteryzując elementy k_j konstrukcji \bar{k} jednolicie za pomocą ciągu czterowskaźnikowego współrzędnych niezależnych ${}^4\bar{x}$. Należy przy tym podać ciągi stałych o podwójnej ilości wskaźników [1, 2], aby zdefiniować najprostsze przekształcenie liniowe (tu czteroliniowe, zgodnie z pracą [1, 2]) jako funkcję stanu zjawiska.

Dla napisania natomiast równania dynamiki musimy wprowadzić [1, 2] równanie różniczkowe zwyczajne wielowskaźnikowe:

$${}^4\bar{F}(t, {}^4\bar{x}(t), {}^4\dot{\bar{x}}(t), {}^4\ddot{\bar{x}}(t), {}^8\bar{m}({}^4\bar{x}, {}^4\dot{\bar{x}}, t), {}^8\bar{r}({}^4\bar{x}, {}^4\dot{\bar{x}}, t), {}^8\bar{s}({}^4\bar{x}, {}^4\dot{\bar{x}}, t), {}^4\bar{f}({}^4\bar{x}, {}^4\dot{\bar{x}}, t)) = {}^4\bar{0},$$

gdzie ${}^8\bar{m}$ ciąg wielowskaźnikowy współczynników bezwładności,

${}^8\bar{r}$ ciąg wielowskaźnikowy współczynników tłumienia,

${}^8\bar{s}$ ciąg wielowskaźnikowy współczynników sprężystości,

${}^4\bar{f}$ ciąg wielowskaźnikowy obciążeń wymuszających (sił i momentów sił).

Uwzględniając przyjęty poprzednio symbol w , mamy

$${}^9\bar{w} = [{}^8\bar{w}_1, {}^8\bar{w}_2, {}^8\bar{w}_3],$$

gdzie $m = w_1$, $r = w_2$, $s = w_3$.

W przypadku najprostszym jest

$${}^9\bar{w} = {}^9\text{const}, \quad {}^8\bar{f} = {}^8\bar{f}(t).$$

Wtedy równanie różniczkowe wielowskaźnikowe [1, 2], mianowicie

$${}^8\bar{m} \cdot {}^4\ddot{\bar{x}} + {}^8\bar{r} \cdot {}^4\dot{\bar{x}} + {}^8\bar{s} \cdot {}^4\bar{x} = {}^8\bar{f}(t)$$

opisuje przyjęty model drgań układu wirującego — konstrukcji \bar{k} . Jest ono uogólnieniem — za pomocą przestrzeni liniowej ciągów wielowskaźnikowych — równania różniczkowego:

$${}^2\bar{m} \cdot \ddot{\bar{x}} + {}^2\bar{r} \cdot \dot{\bar{x}} + {}^2\bar{s} \cdot \bar{x} = \bar{f}(t),$$

czyli

$$m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + r_{11}\dot{x}_1 + r_{12}\dot{x}_2 + s_{11}x_1 + s_{12}x_2 = f_1(t),$$

$$m_{21}\ddot{x}_1 + m_{22}\ddot{x}_2 + r_{21}\dot{x}_1 + r_{22}\dot{x}_2 + s_{21}x_1 + s_{22}x_2 = f_2(t)$$

nazwanego równaniem bioscyłatora jednowskaźnikowego lub krótko: bioscyłatorem jednowskaźnikowym o dwóch stopniach swobody.

Sens fizykalny bioscyłatora wyjaśniamy niżej przy formułowaniu bioscyłatora o sześciu stopniach swobody wyprowadzając odpowiednie równanie różniczkowe wielowskaźnikowe.

2.6. Uwagi o łączeniu elementów k_j oraz o ich odkształcalności. Łączenie ogniw (wał, łożysko) w pary kinematyczne dla uzyskania mechanizmu, na przykład przekładni zębatej lub masyżyny, jest bardzo różnorodne. Przy idealizacji tego ważnego zagadnienia zakłada się sztywne lub sprężyste połączenie ogniw wzdłuż linii lub w pewnych punktach. Punkty, a właściwie płaty powierzchniowe, czyli wycinki powierzchni, w których łączą się lub stykają elementy k_j konstrukcji \bar{k} , posiadają odmienne własności aniżeli same elementy. Spowodowane to jest «przeptywaniami» bądź też «wymianą» pewnych własności, albo na przykład smarowaniem.

I tak, elementy k_j tak jak i ich połączenia mogą być sztywne, sprężyste, mieszane.

Przyjęty tutaj model dyskretny konstrukcji \bar{k} jest całkowicie sprężysty (w odniesieniu do ogniw i ich połączeń) przy stosowalności prawa Hooke'a uogólnionego [5] na wielkie systemy mechaniczne za pomocą ciągów wielowskaźnikowych. W tym właśnie celu przyporządkowano poprzednio każdemu elementowi k_j konstrukcji \bar{k} po sześć stopni swobody, z możliwościami sprężystych działań i oddziaływań w postaci sił oraz momentów sił.

2.7. Uwagi o działaniu otoczenia na konstrukcję \bar{k} . Otoczeniem konstrukcji jest przestrzeń fizykalna. Istniejące w niej pola fizykalne działają na konstrukcję \bar{k} . Prócz tego konstrukcja jest pod działaniem obciążeń (sił i momentów sił) wynikających z określonych założeń co do jej przydatności. Charakter działania otoczenia na konstrukcję \bar{k} jest najczęściej przypadkowy. W rozważaniach wstępnych omawiamy charakter deterministyczny zjawiska, jest więc oczywiste, że czynimy założenia eliminujące wpływy losowe.

Losowość konstrukcji \bar{k} jest jednak nieunikniona i wywołana między innymi przez obróbkę, montaż, eksploatację i obciążenia będące przyczyną drgań wymuszonych. Współczynniki bezwładności charakteryzują materialną przestrzeń fizykalną, w której istnieją różne siły hamujące ruch konstrukcji \bar{k} przy działaniu sił sprężystych zgodnych z prawem Hooke'a.

4. Oscylatory harmoniczne o n stopniach swobody

Przyjmujemy oznaczenia: $0x_1, \dots, x_n$ — układ ortokartezjański n -wymiarowy,

$$\bar{x}_1 = [x_1, \dots, x_n]_1 = [x_j]_1, \quad j = 1, \dots, n$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przemieszczeń w kierunkach osi przyjętego układu odniesienia,

$$\bar{x}_2 = [x_2, \dots, x_n]_2 = [\dot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości kątów obrotu dookoła poszczególnych osi przyjętego układu odniesienia,

$$\bar{x}_3 = [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]_3 = [\dot{x}_j]_3$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości prędkości postępowych,

$$\dot{\bar{x}}_2 = [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]_2 = [\dot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości prędkości obrotowych,

$$\dot{\bar{x}}_1 = [\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n]_2 = [\dot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przyspieszeń liniowych, w ruchach postępowych

$$\ddot{\bar{x}}_2 = [\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_n]_2 = [\ddot{x}_j]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy wartości przyspieszeń kątowych w ruchach obrotowych

t — czas absolutny,

$${}^2\bar{m}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}_1 = [m_{j_1 j_2}]_1,$$

$$j_1, j_2 = 1, \dots, n$$

— ciąg dwuwskaźnikowy współczynników bezwładności (mas) w ruchach postępowych,

$${}^2\bar{m}_2 = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix}_2 = [m_{j_1 j_2}]_2$$

— ciąg dwuwskaźnikowy współczynników bezwładności (momentów bezwładności) w ruchach obrotowych względem odpowiednich osi obrotu,

$${}^2\bar{r}_1 = [r_{j_1 j_2}]_1,$$

$${}^2\bar{r}_2 = [r_{j_1 j_2}]_2$$

— ciągi dwuwskaźnikowe współczynników tłumienia w ruchach postępowych i obrotowych,

$${}^2\bar{s}_1 = [s_{j_1 j_2}]_1,$$

$${}^2\bar{s}_2 = [s_{j_1 j_2}]_2$$

— ciągi dwuwskaźnikowe współczynników sprężystości w ruchach postępowych i obrotowych,

$$\bar{f}_1(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]_1 = [f_j(t)]_1$$

— ciąg jednowskaźnikowy sił wymuszających w ruchach postępowych,

$$\bar{f}_2(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]_2 = [f_j(t)]_2$$

— ciąg jednowskaźnikowy momentów wymuszających w ruchach obrotowych.

Stosownie do oznaczeń przekształcenie

$$\bar{P}_1(t, \bar{x}_1(t), \dot{\bar{x}}_1, {}^2\bar{m}_1, {}^2\bar{r}_1, {}^2\bar{s}_1, \bar{f}_1(t)) = \bar{0},$$

gdzie $\bar{P}_1 = [P_1, \dots, P_n]_1 = [P_j]_1$

w postaci (a):

$${}^2\bar{m}_1 \cdot \ddot{\bar{x}}_1 + {}^2\bar{r}_1 \cdot \dot{\bar{x}}_1 + {}^2\bar{s}_1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{f}_1(t)$$

będziemy nazywali równaniem oscylatora harmonicznego postępowego wymuszonego w ośrodku z oporami i o n stopniach swobody wyrażonych ciągiem jednowskaźnikowym zmiennych \bar{x}_1 ;

w postaci (b)

$${}^2\bar{m}_1 \cdot \ddot{\bar{x}}_1 + {}^2\bar{r}_1 \cdot \dot{\bar{x}}_1 + {}^2\bar{s}_1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{0}$$

— nazwiemy równaniem n -wymiarowego oscylatora harmonicznego postępowego swobodnego w ośrodku z oporami;

w postaci (c)

$${}^2\bar{m}_1 \cdot \ddot{\bar{x}}_1 + {}^2\bar{s}_1 \cdot \bar{x}_1 = \bar{0}$$

— nazywamy równaniem n -wymiarowego oscylatora harmonicznego postępowego swobodnego.

Korzystając z pracy [1, 2] napiszemy powyższe równania za pomocą ciągów zerowskajnikowych (utożsamianych ze skalarami) podając przy tym regułę mnożenia «macierzowego» ciągów dwuwskaznikowych przez ciągi jednowskajnikowe.

$$\begin{cases} m_{111}\ddot{x}_{11} + \dots + m_{1n1}\ddot{x}_{n1} + r_{111}\dot{x}_{11} + \dots + r_{1n1}\dot{x}_{n1} + s_{111}x_{11} + \dots + s_{1n1}x_{n1} = f_{11}(t), \\ \vdots \\ m_{n11}\ddot{x}_{11} + \dots + m_{nn1}\ddot{x}_{n1} + r_{n11}\dot{x}_{11} + \dots + r_{nn1}\dot{x}_{n1} + s_{n11}x_{11} + \dots + s_{nn1}x_{n1} = f_{n1}(t); \\ \begin{cases} m_{111}\ddot{x}_{11} + \dots + m_{1n1}\ddot{x}_{n1} + r_{111}\dot{x}_{11} + \dots + r_{1n1}\dot{x}_{n1} + s_{111}x_{11} + \dots + s_{1n1}x_{n1} = 0, \\ \vdots \\ m_{n11}\ddot{x}_{11} + \dots + m_{nn1}\ddot{x}_{n1} + r_{n11}\dot{x}_{11} + \dots + r_{nn1}\dot{x}_{n1} + s_{n11}x_{11} + \dots + s_{nn1}x_{n1} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} m_{111}\ddot{x}_{11} + \dots + m_{1n1}\ddot{x}_{n1} + s_{111}x_{11} + \dots + s_{1n1}x_{n1} = 0, \\ \vdots \\ m_{n11}\ddot{x}_{11} + \dots + m_{nn1}\ddot{x}_{n1} + s_{n11}x_{11} + \dots + s_{nn1}x_{n1} = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Są to układy równań liniowych o współczynnikach stałych. Stanowią one uogólnienie równania oscylatora postępowego o jednym stopniu swobody. Można je otrzymać z drugiego prawa Newtona układów mechanicznych wielokrotnych postępowych jako systemów wielkich lub za pomocą wielowskajnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju [8].

W przypadku $n = 3$ mamy oscylator harmoniczny postępowy o trzech «postępowych» stopniach swobody w przestrzeni ortokartezjańskiej trójwymiarowej. Interpretujemy go za pomocą:

- 1) trzech prostopadłych sprężynek postępowych, z których każda jest podatna tylko na odkształcenie liniowe kierunku jednej osi, gdy ruch jest swobodny;
- 2) trzech prostopadłych tłumików postępowych, z których każdy przedstawia siłę oporu w ruchu postępowym wzdłuż danej osi;
- 3) pary trzech prostopadłych sprężynek postępowych i trzech tłumików postępowych, gdy występują siły sprężyste i siły oporu.

Zauważmy, że w przypadku szczególnym układ — ciąg równań sprowadza się do ciągu jednowskajnikowego równań:

$$\begin{aligned} m_{11}\ddot{x}_{11} + r_{11}\dot{x}_{11} + s_{11}x_{11} &= f_{11}(t), \\ &\vdots \\ m_{n1}\ddot{x}_{n1} + r_{n1}\dot{x}_{n1} + s_{n1}x_{n1} &= f_{n1}(t). \end{aligned}$$

Otrzymujemy wtedy tak zwane drgania rozprzężone, podczas gdy w przypadku ogólnym są one sprzężone. Mogą również wystąpić różne inne przypadki «sprzężenia częściowego».

Stosownie do oznaczeń, przekształcenie

$$\bar{P}_2[(t, \bar{x}_2(t), \dot{\bar{x}}_2, \ddot{\bar{x}}_2, {}^2\bar{m}_2, {}^2\bar{r}_2, {}^2\bar{s}_2, \bar{f}_2(t)] = \bar{0},$$

gdzie $\bar{P}_2 = [P_1, \dots, P_n]_2$,

w postaci (d)

$${}^2\bar{m}_2 \cdot \ddot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{r}_2 \cdot \dot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{s}_2 \cdot \bar{x}_2 = \bar{f}_2(t),$$

będziemy nazywali równaniem oscylatora harmonicznego obrotowego wymuszonego w ośrodku z oporami i o n stopniach swobody, wyrażonych ciągiem jednowskaźnikowym zmiennych \bar{x}_2 ;

w postaci (e)

$${}^2\bar{m}_2 \cdot \ddot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{r}_2 \cdot \dot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{s}_2 \cdot \bar{x}_2 = \bar{0},$$

nazwiemy równaniem n -wymiarowego oscylatora harmonicznego obrotowego swobodnego w ośrodku z oporami;

w postaci (f)

$${}^2\bar{m}_2 \cdot \ddot{\bar{x}}_2 + {}^2\bar{s}_2 \cdot \bar{x}_2 = \bar{0},$$

nazywamy równaniem n -wymiarowego oscylatora harmonicznego obrotowego swobodnego

Korzystając z prac [1, 2] napiszemy powyższe równania za pomocą ciągów zero-wskaźnikowych podając przy tym regułę mnożenia «macierzowego» ciągów dwuwskaźnikowych przez ciągi jednowskaźnikowe.

Równania te stanowią uogólnienie równania oscylatora obrotowego o jednym stopniu swobody. Można je otrzymać z drugiego prawa Newtona układów mechanicznych wielokrotnych obrotowych jako systemów wielkich [9] lub za pomocą wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju [8].

W przypadku $n = 3$ otrzymamy oscylator harmoniczny obrotowy o trzech «obrotowych» stopniach swobody w przestrzeni ortokartezjańskiej trójwymiarowej. Interpretujemy go za pomocą:

- 1) trzech prostopadłych sprężynek obrotowych, z których każda jest podatna tylko na odkształcenia kątowe w ruchu dookoła jednej osi, gdy ruch jest swobodny;
- 2) trzech prostopadłych tłumików obrotowych, z których każdy przedstawia moment oporu w ruchu obrotowym dookoła danej osi;
- 3) pary trzech prostopadłych sprężynek obrotowych i trzech tłumików obrotowych, gdy występują momenty sprzężyste i momenty oporu.

Także i tu mogą wystąpić drgania sprzężone, częściowo sprzężone i rozsprężone.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KRZYWIEC, *Wielociągi*, Praca doktorska.
2. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe, Zagadnienia Drgań Nieliniowych*, 1971.
3. M. T. HUBER, *Stereomechanika Techniczna*, (1951).
4. R. KRZYWIEC, *O formalizowaniu pojęcia układu*, Arch. Bud. Masz., (1971).
5. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Hooke'a układów stereomechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zesz. Nauk. Polít. Częst., (1972).

6. L. S. PONTRIAGIN, *Równania różniczkowe zwyczajne*, Warszawa 1964.
7. W. W. STEPANOW, *Równania różniczkowe*, Warszawa 1956.
8. R. KRZYWIĘC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Zagadnienia Drgań Nieliniowych, 1971.
9. R. KRZYWIĘC, *Wielowskaźnikowe uogólnione prawo dynamiki układów wielokrotnych — wielkich systemów mechanicznych*, Zesz. Nauk. Polit. Częst., 1972.

Р е з ю м е

О МОДЕЛИРОВАНИИ С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШОЙ СИСТЕМЫ БИОСЦИЛЛЯТОРОВ
МНОГОПОДШИПНИКОВОГО ВАЛА СО МНОГИМИ ДИСКАМИ. ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ
ЗАМЕЧАНИЯ. ОСЦИЛЛЯТОРЫ СО МНОГИМИ ИНДЕКСАМИ

В первой части работы о моделировании упругого, многоподшипникового, нагруженного многими дисками вала представлены:

- (1) Общие рассуждения относительно построения дифференциальных уравнений движения.
- (2) Линейные осцилляторы (поступательного и вращательного движения) со многими индексами, с помощью которых, во второй части работы, вводятся биосцилляторы со многими индексами предназначенные для моделирования вала.

Работа написана на языке многократных последовательностей, т. е. последовательностей со многими индексами при использовании их алгебры и элементов анализа взятых из диссертации автора.

S u m m a r y

MODELLING OF A MULTI-SPAN SHAFT WITH SEVERAL DISKS BY MEANS OF A GREAT
SYSTEM OF BI-OSCILLATORS. PART I. GENERAL REMARKS. MULTI-INDICIAL
OSCILLATORS

Part one of the paper on shaft modelling (elastic shaft with several supports and loaded by several disks) presents:

- (1) General considerations concerning the method of constructing the differential equations of motion;
- (2) Multi-indicial linear oscillators (progressive and rotational), which will be used (in the second part of the paper) to introduce multi-indicial bi-oscillators for shaft modelling.

The paper is formulated in the multi-series language, i.e. in the language of multi-indicial series and the corresponding algebra and elements of analysis as presented in author's doctoral dissertation.

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1972 r.; w wersji ostatecznej dnia 20 lutego 1974 r.

OPTYMALNE KSZTAŁTOWANIE USTROJÓW KRATOWYCH W WARUNKACH PEŁZANIA
W NAWIĄZANIU DO TEORII WYBOCZENIA RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA

RENATA WOJDANOWSKA (KRAKÓW)

1. Uwagi wstępne

W ustrojach kratowych można uzyskać bardzo wysoki stopień wykorzystania materiału z punktu widzenia wytrzymałościowego. Można przede wszystkim, na drodze odpowiedniego doboru przekroju poszczególnych prętów dla każdej z góry zadanej konfiguracji kratownicy i zadanych stałych obciążeń skupionych w węzłach, uzyskać jednakowe naprężenia w prętach (kratownica równej wytrzymałości). Ponadto, na drodze doboru konfiguracji można spośród kratownic równej wytrzymałości wybrać konstrukcję najlepszą. Problem taki został sformułowany już w 1904 r. przez MICHELLA [12]. HEGEMIER i PRAGER [4] wykazali, że kratownice MICHELLA wykazują jednocześnie największą sztywność przy ustalonym pełzaniu. Przegląd problematyki optymalnego kształtowania kratownic podają prace WASIUTYŃSKIEGO i BRANDTA [22], REJTMANA i SZAPIRO [17] oraz SHEU i PRAGERA [20].

Warunek wytrzymałościowy nie jest jednak z reguły jedynym warunkiem pobocznym przy problemie kształtowania ustrojów kratowych. Ściskane pręty kratownicy mogą bowiem podlegać utracie stateczności i odpowiednie warunki powinny również być brane pod uwagę. Ujęcie takie zapoczątkował KIRSTE [9], [10], który określił optymalny kształt kilku prostych układów kratowych w nawiązaniu do wzorów Eulera i Johnsona-Ostenfelda dla prętów ściskanych. Obszerniejsza praca WOJDANOWSKIEJ-ZAJĄC i ŻYCKOWSKIEGO [23] dotyczyła kształtowania w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym w nawiązaniu do wzorów Ylinena, zezwalających na jednolite ujęcie całego badanego zakresu. Autorami dalszych prac są ACHMADALIEW [1] (numeryczne metody obliczeń), FIEDOROW [2] (uwzględnienie wstępnego sprężenia), RADCIG i ARSLAMOW [15], RAJEWSKI [16], SCHMIT i MORROW [21]. Optymalne kształtowanie kratownic przy uwzględnieniu warunków stateczności znalazło zastosowanie np. przy projektowaniu słupów linii wysokiego napięcia (MARTINI [11]). Ogólną problematykę optymalnego kształtowania przy uwzględnieniu warunków stateczności omawia praca ŻYCKOWSKIEGO [27].

W przypadku konstrukcji pracujących w podwyższonej temperaturze lub w przypadku konstrukcji wykonanych z materiałów, wykazujących własności reologiczne już w temperaturze pokojowej, niezbędne jest uwzględnienie tych własności przy optymalnym kształtowaniu. Klasyfikację problematyki optymalnego kształtowania w reologii i kilka prostych przykładów kształtowania podaje praca ŻYCKOWSKIEGO [26]; istotne różnice w stosunku do optymalizacji w zakresie sprężystym lub sprężysto-plastycznym polegają tu na odmiennym sformułowaniu warunków pobocznych. Dla elementów rozciąganych muszą to być z reguły warunki zabezpieczające przed pękaniem w warunkach pełzania, natomiast dla elementów ściskanych — warunki zabezpieczające przed wyboczeniem pełzającym. Istnieją obecnie dość liczne teorie zarówno zniszczenia przy pełzaniu

(zniszczenie ciągłe, kruche pękanie, model kombinowany), jak i wyboczenia pełzającego, tak że problematyka optymalnego kształtowania w reologii jest niezwykle bogata. Szczegółowych rozwiązań i ich wdrożeń do zagadnień przemysłowych jak dotąd jest bardzo niewiele.

Na zjawisko wyboczenia pełzającego zwrócono uwagę po raz pierwszy w 1946 r. w niemal jednocześnie opublikowanych pracach FREUDENTHALA [3], RŻANICYNA [19] i ROSSA [18]. Przegląd prac nad wyboczeniem pełzającym podają HULT [6], HOFF [5] i ŻYCKOWSKI [25]. Dwa zasadnicze kierunki teorii wyboczenia pełzającego przyjmują za kryterium nieograniczony wzrost ugięć lub prędkości ugięć pręta pierwotnie słabo zakrzywionego (KEMPNER-HOFF) oraz utratę stateczności pręta prostego, którego własności zmieniają się w czasie w wyniku pełzania (RABOTNOW-SZESTIERIKOW).

W obecnej pracy określimy optymalne konfiguracje kilku prostych ustrojów kratowych przy uwzględnieniu reologicznych własności materiału. Będą to ustroje, których kształtowanie w zakresie sprężysto-plastycznym omówiono w pracy [23], a kształtowanie w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu teorii Kempnera-Hoffa — w pracy [30]. Jako kryterium kształtowania przyjmujemy, jak zwykle, minimalną objętość (minimalny ciężar) kratownicy. Warunki poboczne dla prętów ściskanych będą warunkami stateczności w nawiązaniu do teorii RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA [14], natomiast dla prętów rozciąganych — warunkami wytrzymałościowymi w nawiązaniu do teorii kruchego pękania przy pełzaniu, sformułowanej przez KACZANOWA [7, 8]. Przyjmujemy przy tym pewien ustalony czas pracy konstrukcji, w zasadzie jednakowy zarówno dla prętów rozciąganych, jak i ściskanych; rozróżnienie tych czasów nie stworzyłoby istotnych trudności. Przy efektywnym przeprowadzaniu optymalizacji będziemy przy tym z reguły korzystali ze sformułowania dualnego, prowadzącego do prostych obliczeń; będziemy mianowicie szukali kresu górnego czasu pracy konstrukcji przy jej ustalonej objętości i przy przyjętych warunkach pobocznych (wytrzymałości i stateczności).

Oprócz optymalizacji konfiguracji kratownicy można sformułować problem optymalnej zmienności przekroju poszczególnych prętów. Dla prętów rozciąganych optymalny jest tu zawsze stały przekrój (pręty pryzmatyczne), natomiast optymalne pręty ściskane, narażone na wyboczenie, są z reguły prętami niepryzmatycznymi. Problem taki był rozważany w pracy ŻYCKOWSKIEGO i WOJDANOWSKIEJ-ZAJĄC [23]. W obecnej pracy ograniczymy się, dla uproszczenia, do rozpatrywania wyłącznie prętów pryzmatycznych o zadanym kształcie przekroju poprzecznego.

2. Sformułowanie warunków pobocznych optymalizacji

RABOTNOW i SZESTIERIKOW [14] badają stateczność pręta ściskanego, wykonanego z materiału podlegającego równaniu stanu o postaci ogólnej

$$(2.1) \quad \Phi(p, \dot{p}, \sigma) = 0,$$

gdzie

$$(2.2) \quad p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$$

oznacza odkształcenie niesprężyste, kropki u góry — różniczkowanie względem czasu t .

Naprężenia i odkształcenia przy ściskaniu przyjęto tu za dodatnie. Autorzy ograniczają się przy tym do następującej formy funkcji Φ

$$(2.3) \quad \Phi = \dot{p}p^\alpha - A\sigma^n = 0,$$

gdzie A , n i α są stałymi materiałowymi, zależnymi od temperatury.

Przy czystym ściskaniu, gdy $\sigma = \text{const}$, po scałkowaniu równania (2.3) i uwzględnieniu warunku początkowego $\sigma = E\varepsilon$, czyli $p = 0$ dla $t = 0$ otrzymujemy

$$(2.4) \quad p = (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha+1}} A^{\frac{1}{\alpha+1}} \sigma^{\frac{n}{\alpha+1}} t^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

W dalszym ciągu bada się możliwość istnienia równowagi w położeniu sąsiednim, nieskończenie mało wychylonym. RABOTNOW-SZESTIERIKOW stosowali w pracy [14] ogólne kinetyczne kryterium stateczności, które jednak w efekcie końcowym sprowadziło się do kryterium statycznego. Zmiany (wariacje) naprężeń i niesprężystych odkształceń można powiązać wynikającym z (2.1) równaniem

$$(2.5) \quad \lambda \delta\sigma + \mu \delta p + \nu \delta \dot{p} = 0,$$

gdzie

$$(2.6) \quad \lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad \mu = \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \nu = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{p}}.$$

Wyrażając p w funkcji σ i ε , po wykorzystaniu hipotezy płaskich przekrojów Bernoulliego, $\varepsilon = \kappa z$, pomnożeniu przez z i scałkowaniu tego równania po powierzchni przekroju F otrzymuje się

$$(2.7) \quad (E\lambda - \mu)M - \nu \dot{M} + EJ(\mu\kappa + \nu\dot{\kappa}) = 0.$$

Warunkiem równowagi w położeniu sąsiednim jest $\dot{M} = \dot{\kappa} = 0$; przy uwzględnieniu warunków brzegowych swobodnego podparcia pręta po scałkowaniu równania (2.7) względem zmiennej x , otrzymuje się ostatecznie związek

$$(2.8) \quad \frac{P}{P_E} = \frac{1}{1 - E \frac{\lambda}{\mu}},$$

gdzie P_E oznacza siłę eulerowską dla pręta. Współczynniki λ i μ należy tu obliczyć ze wzorów (2.6). Równanie (2.8) z podstawieniem (2.3) oraz podstawieniem $t = t_*$, (t_* oznacza czas utraty stateczności pręta) określa związek między siłą P , a czasem t_* . Nie daje się on efektywnie rozwiązać z uwagi na P (bowiem λ i μ zależą również od P poprzez $\sigma = P/F$), natomiast daje się rozwiązać względem t_* :

$$(2.9) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left[\frac{\alpha(P_E - P)}{nPE} \right]^{\alpha+1} \left(\frac{F}{P} \right)^{n-\alpha-1}.$$

Wzór ten przy podstawieniu $P = Nj_w$, gdzie N oznacza siłę podłużną w ściskanym pręcie kratownicy, a j_w — stopień bezpieczeństwa z uwagi na wyboczenie, będzie stanowił zasadniczy warunek poboczny dla prętów ściskanych przy optymalizacji; w sformułowaniu dualnym będziemy poszukiwali maksimum t_* przy ustalonej objętości kratownicy V .

KACZANOW [7], [8] proces zniszczenia pręta narażonego na rozciąganie w warunkach pełzania rozpatruje jako proces rozprzestrzeniania się mikroszczelin, powstających na tle

rosnących odkształceń pełzania. Wprowadza pewną funkcję skalarową $\Omega = F/F_0$, gdzie F oznacza aktualnie pracujący przekrój, $\Omega = 1$ w momencie początkowym, funkcja ta z upływem czasu maleje i w momencie kruchego zniszczenia $\Omega = 0$.

Podstawą teorii KACZANOWA jest hipoteza, iż zmiana tej funkcji w czasie opisana jest równaniem

$$(2.10) \quad \frac{d\Omega}{dt} = -A_1 \left(\frac{\sigma}{\Omega} \right)^m,$$

w którym $A_1 > 0$ i $m > 0$ — pewne stałe.

W wyniku całkowania powyższego równania przy $\sigma = \text{const}$, oraz warunku początkowym: $\Omega = 1$, $F = F_0$, KACZANOW otrzymał wyrażenie na czas zniszczenia kruchego

$$(2.11) \quad t_{**} = \frac{1}{(m+1)A_1 \sigma_0^m},$$

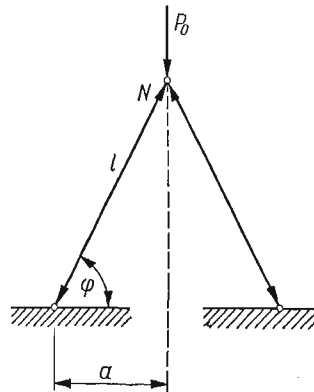
gdzie $\sigma_0 = \frac{P}{F_0}$.

Czas wyrażony wzorem (2.11) przyjmiemy za czas zniszczenia rozciąganych prętów układu kratowego, a więc za odpowiedni warunek poboczny przy problemie kształtowania.

W dalszym ciągu pracy przyjmiemy, że oba czasy t_* i t_{**} są sobie równe i określają czas pracy całej konstrukcji, gdyż projektowanie poszczególnych elementów na różne czasy wydawałoby się nieuzasadnione.

3. Optymalne kształtowanie ustroju kratowego, statycznie wyznaczalnego, dwuprętowego, przedstawionego na rys. 1

Rozstęp podpór $2a$ przyjęto za ustalony; poszukiwać będziemy optymalnego kąta φ w funkcji pewnego parametru smukłości ustroju kratowego β . Sformułowanie problemu «wprost» polega na poszukiwaniu takiego kąta φ , który zapewnia minimum objętości



Rys. 1.

kratownicy przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji t_* (czasie, po upływie którego siła P_0 wywołałaby utratę stateczności konstrukcji). Możliwe są tu dwa sformułowania dualne: poszukiwanie maksymalnego czasu t_* przy danej objętości V i przy danej

sile P_0 lub poszukiwanie maksimum siły P_0 przy danej objętości V i danym czasie t_* . Pierwsze z tych sformułowań dualnych okazuje się najprostsze i wykorzystamy je w niniejszym paragrafie. Wzór na siłę P w danym przypadku ma postać

$$(3.1) \quad P = j_w N = \frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi};$$

objętość ustroju kratowego wyrazi się wzorem

$$(3.2) \quad V = 2Fl = 2F \frac{a}{\cos \varphi},$$

skąd

$$(3.3) \quad F = \frac{V \cos \varphi}{2a}.$$

Siła eulerowska przy uwzględnieniu wzoru (3.3) wyrazi się następująco:

$$(3.4) \quad P_E = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EV^2 \cos^4 \varphi}{4\xi a^2},$$

gdzie $\xi = \frac{F^2}{J}$ jest bezwymiarowym współczynnikiem kształtu przekroju. Podstawiając (3.2) i (3.3) do wyrażenia na czas pracy konstrukcji (2.9) otrzymujemy

$$(3.5) \quad t_* = \frac{\alpha^{\alpha+1}}{A(\alpha+1)(En)^{\alpha+1}} \left[\frac{\pi^2 EV^2 \cos^4 \varphi}{4\xi a^4} - \frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi} \right]^{\alpha+1} \frac{1}{\left(\frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi} \right)^n} \left(\frac{V \cos \varphi}{2a} \right)^{n-\alpha-1}.$$

Dla uproszczenia zapisu związku (3.5) wprowadzimy oznaczenia

$$(3.6) \quad \beta = \frac{2P_0 j_w \xi a^4}{\pi^2 EV^2},$$

$$(3.7) \quad \gamma = \frac{\alpha^{\alpha+1} \pi^{2(\alpha+1)} V^{n+\alpha+1}}{A(\alpha+1) (\xi n)^{\alpha+1} P_0^n j_w^n a^{n+3(\alpha+1)} 2^{\alpha+1}}$$

i wtedy (3.5) zapiszemy następująco:

$$(3.8) \quad t_* = \gamma (1 - \beta \sin^{-1} \varphi \cos^{-4} \varphi)^{\alpha+1} \sin^n \varphi (\cos \varphi)^{n+3\alpha+3}.$$

Rozpatrując przedział zmienności kąta φ , $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, stwierdzamy, że $t_*(0) = t_*\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ oraz $t_* \geq 0$; zakładając zgodnie z przyjętym sformułowaniem dualnym jak najdłuższy czas pracy konstrukcji, wykorzystamy warunek analitycznego maksimum

$$(3.9) \quad \frac{dt_*}{d\varphi} = 0.$$

Prowadzi on do równania określającego optymalny kąt φ w funkcji parametru smukłości β . Jest to dość złożone równanie trygonometryczne z uwagi na niewiadomą $\varphi = \varphi(\beta)$, natomiast z łatwością określimy funkcję odwrotną $\beta = \beta(\varphi)$

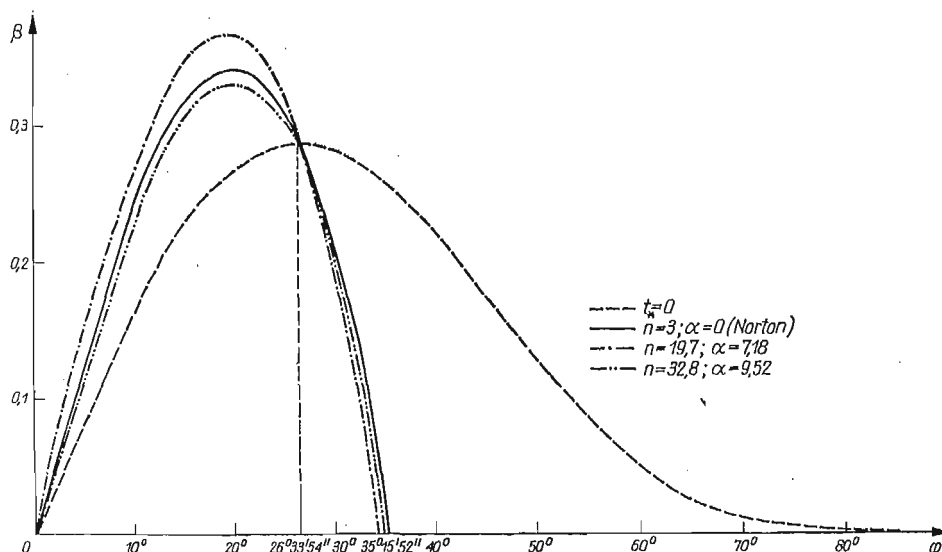
$$(3.10) \quad \beta = \frac{n \operatorname{ctg} \varphi - (n+3\alpha+3) \operatorname{tg} \varphi}{\sin^{-1} \varphi \cos^{-4} \varphi / n \operatorname{ctg} \varphi - (n+3\alpha+3) \operatorname{tg} \varphi / - (\sin^{-2} \varphi \cos^{-3} \varphi - 4 \cos^{-5} \varphi) (\alpha+1)}.$$

Zależność powyższą dla różnych współczynników n i α ilustruje rys. 2. Współczynniki n i α zaczerpnięto z pracy RABOTNOWA, ŻUKOWA, CZURIKOWA [24] i zebrano w tablicy 1.

Tablica 1

Temperatura	Materiał: miedź	
	n	α
165°C	46,1	14,20
200°C	32,8	9,52
235°C	32,2	9,92
270°C	19,7	7,18

Na rys. 2 nakreślono również krzywą $\beta = \beta(\varphi)$ dla $n = 3$ i $\alpha = 0$. Jest to przypadek graniczny, $\alpha \rightarrow 0$; prawo pełzania (2.3) przechodzi w prawo Nortona. Teoria RABOTNOWA-



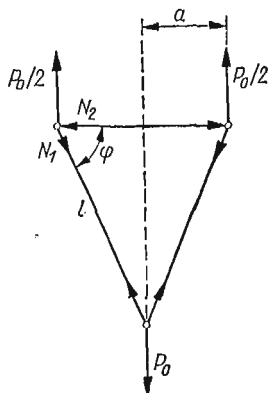
Rys. 2.

SZESTIERIKOWA nie prowadzi wtedy do efektywnych wyników, ponieważ czas krytyczny w każdym razie zmierza do zera. Tym niemniej na drodze przejścia granicznego można określić optymalną graniczną konfigurację ustroju kratowego.

4. Optymalne kształtowanie trójprętowego, symetrycznego, statycznie wyznaczalnego ustroju kratowego, przedstawionego na rys. 3

Odległość a , podobnie jak poprzednio, przyjmijmy za ustaloną. W rozpatrywanym przypadku poszukiwać będziemy takiego kąta φ , który zapewnia minimum objętości kratownicy, przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji (czasie, po którym siła

$P_0 j_w$ wywołuje utratę stateczności konstrukcji). Przyjmujemy, że czas t_* , po upływie którego następuje utrata stateczności kratownicy spowodowana utratą stateczności pręta narażonego na wyoboczenie jest równy czasowi t_{**} , po którym nastąpi kruche pęknięcie prętów narażonych na rozciąganie.



Rys. 3

Objętość kratownicy określi tu wzór

$$(4.1) \quad V = 2F_1 \frac{a}{\cos \varphi} + 2F_2 a.$$

Siły podłużne w prętach kratownicy są równe

$$(4.2) \quad N_1 = \frac{P_0}{2 \sin \varphi}, \quad N_2 = \frac{F_0}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Wskaźnikiem „1” oznaczono wszystkie wielkości charakteryzujące pręty narażone na rozciąganie, a wskaźnikiem „2”, wielkości charakteryzujące pręty narażone na wyoboczenie.

Siła eulerowska i siła podłużna w pręcie (przy współczynniku bezpieczeństwa j_w) wyrażają się następująco:

$$(4.3) \quad P_E = \frac{\pi^2 E F_2^2}{4 \xi a^2}, \quad P = \frac{j_w P_0}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Czas pracy kratownicy (2.9) będzie miał postać

$$(4.4) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left(\frac{\alpha}{nE} \right)^{\alpha+1} \left[\frac{\pi^2 E}{2P_0 j_w \xi a^2} F_2^2 \operatorname{tg} \varphi - 1 \right]^{\alpha+1} \left[\frac{2F_2 \operatorname{tg} \varphi}{j_w P_0} \right]^{n-\alpha-1}.$$

Zajmiemy się obecnie obliczeniami pręta narażonego na rozciąganie. Wykorzystamy wzór na czas zniszczenia przy rozciąganiu (2.11) podany przez KACZANOWA [7];

$$(4.5) \quad t_{**} = \frac{1}{(m+1) A_1 \sigma_0^m},$$

gdzie m jest pewnym wykładnikiem potęgowym; A_1 — pewną stałą, σ_0 jest naprężeniem w prętach rozciąganych, odpowiadającym sile działającej mnożonej przez współczynnik bezpieczeństwa z uwagi na pęknięcie j_p

$$(4.6) \quad \sigma_0 = \frac{j_p N_1}{F_1} = \frac{j_p P_0}{2F_1 \sin \varphi}.$$

Wprowadzimy nowe oznaczenie

$$(4.7) \quad \beta_1 = \frac{2^m}{(m+1)A_1 j_p^m P_0^m}.$$

Wtedy (4.5) zapiszemy krótko

$$(4.8) \quad t_{**} = \beta_1 F_1^m \sin^m \varphi.$$

Ze związku (4.8) obliczymy F_1 i wprowadzimy do (4.1); otrzymamy wyrażenie na objętość

$$(4.9) \quad V = V(\varphi, F_2) = 2a \left[\left(\frac{t_{**}}{\beta} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi} + F_2 \right].$$

Poszukujemy minimum tej funkcji z warunkiem pobocznym (4.4). Rugowanie warunku pobocznego uzyskamy przez stosowną parametryzację. Wprowadzamy mianowicie bezwymiarowy parametr:

$$(4.10) \quad u = \frac{\pi^2 E}{2P_0 j_w \xi a^2} F_2^2 \operatorname{tg} \varphi - 1$$

i wstawiamy go do (4.4), skąd obliczamy $\operatorname{tg} \varphi$

$$(4.11) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{S}{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}},$$

gdzie stała S jest określona wzorem

$$(4.12) \quad S = \frac{P_0 j_w \pi^2}{2a^2 \xi} \left[\frac{n}{\alpha} \right]^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} [A(\alpha+1)]^{\frac{2}{n-\alpha-1}} E^{\frac{n+\alpha+1}{n-\alpha-1}} t_*^{\frac{2}{n-\alpha-1}}$$

i ma znaczenie bezwymiarowej siły.

Wstawiamy $\operatorname{tg} \varphi$ określony wzorem (4.11) i obliczony przekrój F_2 z (4.10) do wyrażenia na objętość (4.9); dzielimy równanie przez $2a \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{1/m}$ i otrzymujemy bezwymiarową objętość

$$(4.13) \quad \tilde{V} = \tilde{V}(S, u) = (u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} \left[1 + \frac{S^2}{(u+1)^2 u^{\frac{4(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}} + \frac{1}{Bu^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}} \right],$$

gdzie B jest pewną stałą, zależną od stałych materiałowych i czasu pracy konstrukcji, określoną następująco:

$$(4.14) \quad B = \left[\frac{En}{\alpha} \right]^{\frac{\alpha+1}{\alpha+1-n}} [A(\alpha+1)]^{\frac{1}{\alpha+1-n}} [A_1(m+1)]^{\frac{1}{m}} t_*^{\frac{1}{\alpha+1-n} + \frac{1}{m}}.$$

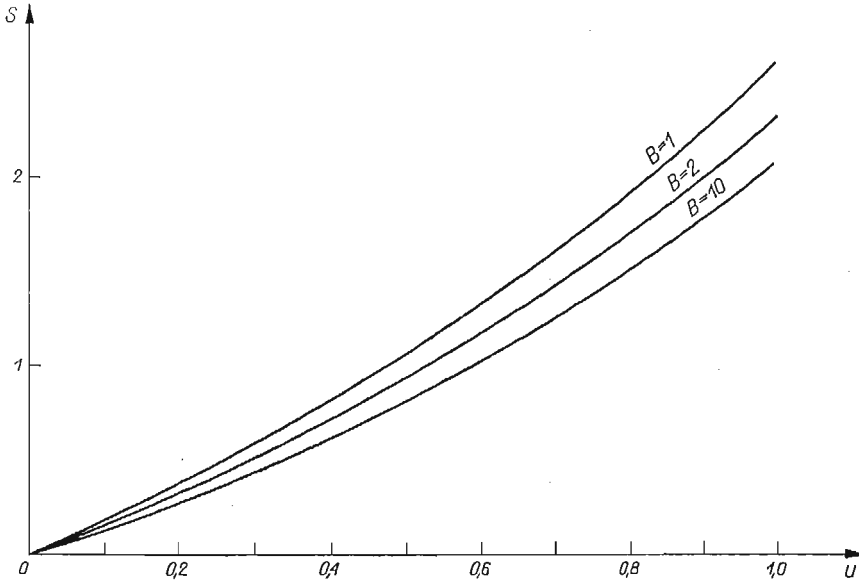
Poszukujemy teraz minimum objętości \tilde{V} jako funkcji jednej zmiennej u bez warunku pobocznego

$$(4.15) \quad \frac{d\tilde{V}}{du} = 0,$$

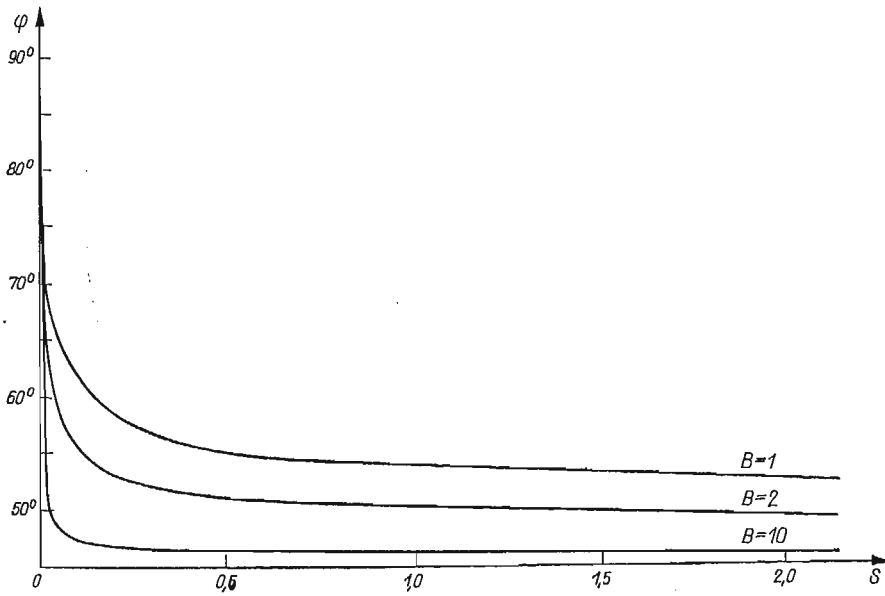
co prowadzi do równania

$$(4.16) \quad S^2 = (u+1)^2 \frac{1}{\frac{4(\alpha+1)}{\alpha+1-n}} \left[1 + \frac{1}{B} u^{\frac{\alpha+1}{\alpha+1-n}} \frac{(\alpha+1)(u+1) + u(n-\alpha-1)}{2(\alpha+1)(u+1) + u(n-\alpha-1)} \right]$$

Ogólne rozwiązanie równania (4.16) ze względu na poszukiwany parametr u nie jest możliwe. Wyniki przedstawimy jednak graficznie, dysponując funkcją odwrotną $S = S(u)$.



Rys. 4.

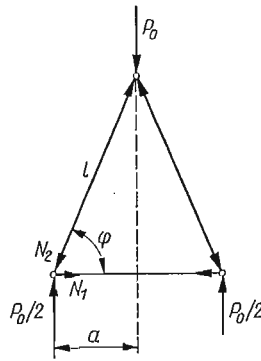


Rys. 5.

Zależność $S = S(u)$ dla ustalonej wartości parametru B ujęto na rys. 4. Zależność $\varphi = \varphi(S)$ dla ustalonego parametru B przedstawiono na rys. 5. Zależność $\varphi = \varphi(S)$ jest zależnością optymalnego kąta φ w funkcji parametru S dla ustalonego B . Wykresy wykonano dla $n = 32, 8$; $\alpha = 9,52$ (tablica 1).

5. Optymalne kształtowanie trójprętowego, symetrycznego, statycznie wyznaczalnego układu kratowego, przedstawionego na rys. 6

Obecnie zajmiemy się optymalnym kształtowaniem kratownicy, omówionej w rozdz. 4, ale poddanej działaniu sił o przeciwnym zwrocie. Tym razem pręt poziomy jest rozciągany, a pręty ukośne — ściskane. Podobnie jak w poprzednio rozpatrywanym problemie,



Rys. 6.

postaramy się określić optymalny kąt φ , tj. taki, który zapewni minimum objętości kratownicy V przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji t_* . Siły działające w prętach kratownicy zapiszemy

$$(5.1) \quad N_1 = \frac{P_0}{2} \operatorname{ctg} \varphi, \quad N_2 = \frac{P_0}{2 \sin \varphi}.$$

Objętość kratownicy określi tu wzór

$$(5.2) \quad V = 2F_2 \frac{a}{\cos \varphi} + 2F_1 a.$$

Siła eulerowska i siła podłużna w pręcie (przy współczynniku bezpieczeństwa j_w) wyrażają się tutaj wzorem

$$(5.3) \quad P_E = \frac{\pi^2 E F_2^2}{\xi a^2} \cos^2 \varphi; \quad P = \frac{j_w P_0}{2 \sin \varphi}.$$

Tok obliczeń jest podobny, jak w przypadku poprzednim. Wzór na czas pracy kratownicy (2.9) będzie miał postać

$$(5.4) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left[\frac{\alpha}{En} \right]^{\alpha+1} \left[\frac{2\pi^2 E}{\xi a^2 j_w P_0} F_2^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 1 \right]^{\alpha+1} \left[\frac{2F_2 \sin \varphi}{j_w P_0} \right]^{n-\alpha-1}$$

W przypadku pręta rozciąganego wykorzystamy wzór (2.11), w którym σ_0 wyrazi się następująco:

$$(5.5) \quad \sigma_0 = \frac{j_p N_1}{F_1} = \frac{j_p P_0}{2F_1} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Po obliczeniu F_1 z (2.11) i wprowadzeniu do (5.2) otrzymujemy wyrażenie na objętość kratownicy

$$(5.6) \quad V = V(\varphi, F_2) = 2a \left[\left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{m}} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{F_2}{\cos \varphi} \right].$$

Poszukujemy minimum tej funkcji z warunkiem pobocznym (5.4). Wprowadzimy, podobnie jak poprzednio, bezwymiarowy parametr

$$(5.7) \quad u = \frac{2\pi^2 F}{\xi a^2 j_w P_0} F_2^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi - 1,$$

uzyskując w ten sposób wyrugowanie warunku pobocznego.

W dalszym ciągu obliczamy F_2 z (5.7), wprowadzamy obliczone $F_2 = F_2(u, \varphi)$, oraz u określone związkiem (5.7) do wyrażenia (5.4) i otrzymujemy równanie

$$(5.8) \quad \frac{\sin \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{4S}{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}}.$$

Z równania (5.8) możemy obliczyć $\sin \varphi$ jako funkcje S i u

$$(5.9) \quad \sin \varphi = \frac{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}}{8S} \left[\sqrt{1 + \frac{64S^2}{u^{\frac{4(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} (u+1)^2}} - 1 \right].$$

Równanie (5.6) dzielimy stronami przez $2a \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{1/m}$ i do niego wprowadzamy (5.9), otrzymując ostatecznie wyrażenie na bezwymiarową objętość \tilde{V}

$$(5.10) \quad \tilde{V} = \frac{1}{2B\sqrt{S}} \frac{\sqrt{u+1}}{(1 - \sin^2 \varphi)\sqrt{\sin \varphi}} + \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{\sin \varphi},$$

gdzie $\sin \varphi$ określony jest przez (5.9), a S i B podane są przez (4.12) i (4.14).

Poszukujemy minimum objętości \tilde{V} już jako funkcji (złożonej) tylko jednej zmiennej,

$$\tilde{V} = \tilde{V}(u, \varphi(u)) : \frac{d\tilde{V}}{du} = 0.$$

Otrzymujemy w konsekwencji równanie:

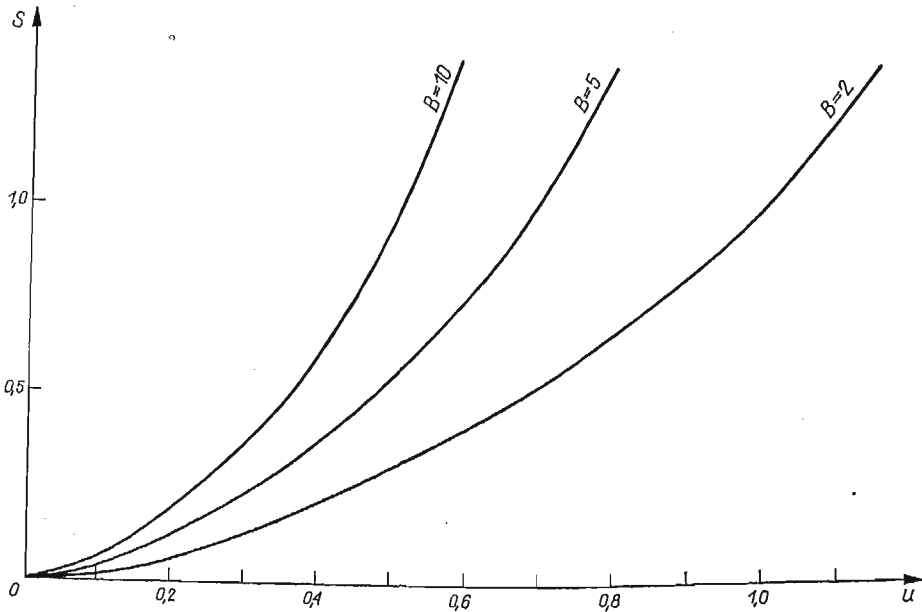
$B =$

$$\sin^2 \varphi - \frac{(\alpha+1)(u+1)}{2(\alpha+1)(u+1) + u(n-\alpha-1)} (1 - 3\sin^2 \varphi) - \frac{(n-\alpha-1)u}{2(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u} (1 - \sin^2 \varphi) \cdot \frac{u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{(1 - \sin^2 \varphi)},$$

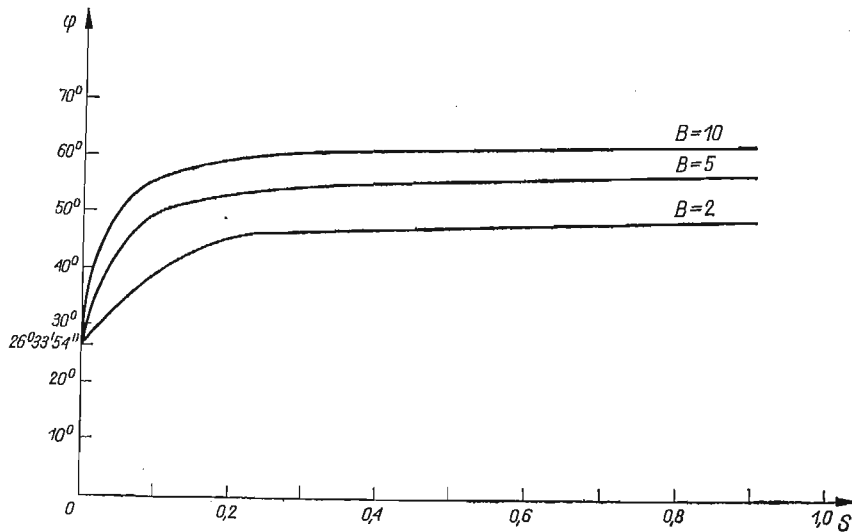
w którym $\sin \varphi$ określony jest przez (5.9).

Podobnie, jak poprzednio, równanie to nie daje się rozwiązać względem u , lecz korzystając z funkcji odwrotnej względem poszukiwanej sporządzono wykresy: $S = S(u)$, rys. 7 i $\varphi = \varphi(S)$, rys. 8.

Obliczenia wykonano, podobnie jak poprzednio dla $n = 32,8$; $\alpha = 9,52$. Zależność $\varphi = \varphi(S)$ dla ustalonego B jest zależnością optymalną kąta φ w funkcji parametru S .



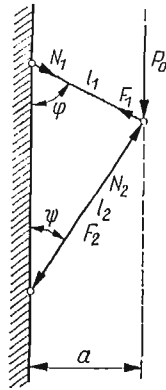
Rys. 7.



Rys. 8.

6. Optymalne kształtowanie dwuprętowego, statycznie wyznaczalnego układu kratowego, przedstawionego na rys. 9

Odległość a przyjmijmy za ustaloną, optymalne kształtowanie sprowadza się do doboru kątów φ i ψ oraz powierzchni przekrojów F_1 i F_2 . Problem jest o tyle trudniejszy od poprzednio rozważonych, że układ nie jest symetryczny i mamy tu o jedną niewiadomą



Rys. 9.

więcej (kształtowanie parametryczne o dwóch stopniach swobody). Postaramy się określić optymalne kąty φ i ψ , takie, które zapewnią minimum objętości kratownicy V przy danej sile P_0 i danym czasie pracy konstrukcji t_* . Siły podłużne w prętach kratownicy wyrażają się następująco:

$$(6.1) \quad N_1 = \frac{P_0}{\sin \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}, \quad N_2 = \frac{P_0}{\sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}.$$

Objętość V można wyrazić wzorem

$$(6.2) \quad V = F_1 \frac{a}{\sin \varphi} + F_2 \frac{a}{\sin \psi}.$$

Siłę eulerowską i siłę podłużną w pręcie (przy współczynniku bezpieczeństwa j_w) zapiszemy następująco:

$$(6.3) \quad P_E = \frac{\pi^2 E F_2^2}{\xi a^2} \sin \psi; \quad P = j_w N_2 = \frac{j_w P_0}{\sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}.$$

Podobnie jak poprzednio, wprowadzimy (6.3) do (2.9) i czas pracy konstrukcji związany z wyboczeniem pelzającym prętów ściskanych zapiszemy

$$(6.4) \quad t_* = \frac{1}{A(\alpha+1)} \left(\frac{\alpha}{En} \right)^{\alpha+1} \left[\frac{\pi^2 E}{j_w P_0 \xi a^2} F_2^2 \sin^3 \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi) - 1 \right]^{\alpha+1} \left[\frac{F_2 \sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}{j_w P_0} \right]^{n-\alpha-1}.$$

W przypadku pręta rozciąganego aktualny jest wzór (2.11), ale σ_0 wyraża się teraz przez

$$(6.5) \quad \sigma_0 = \frac{j_p N_1}{F_1} = \frac{j_w P_0}{F_1 \sin \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}.$$

Obliczone F_1 z (2.11) wprowadzamy do (6.2):

$$(6.6) \quad V = a \left[2 \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)} + \frac{F_2}{\sin \psi} \right] = V(\varphi, \psi, F_2).$$

Poszukujemy minimum tej funkcji trzech zmiennych z jednym warunkiem pobocznym (6.4). Podobnie jak poprzednio, wprowadzimy bezwymiarowy parametr u :

$$(6.7) \quad u = \frac{\pi^2 E F_2^2 \sin^3 \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}{a^2 j_w P_0 \xi} - 1$$

i z (6.7) obliczamy F_2 , a następnie obliczone F_2 i (6.7) wstawiamy do (6.4) otrzymując związek

$$(6.8) \quad \frac{\sin \psi}{\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi} = \frac{u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} (u+1)}{8S},$$

w którym S podane jest przez (4.12).

Obliczony przekrój F_2 z (6.7) wstawiamy do (6.6) i po podzieleniu równania przez $a \left(\frac{t_{**}}{\beta_1} \right)^{\frac{1}{m}}$ otrzymujemy bezwymiarową objętość kratownicy \tilde{V}

$$(6.9) \quad \tilde{V} = \tilde{V}(\varphi, \psi, u) = \frac{2}{\sin^2 \varphi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)} + \frac{1}{B \sqrt{2S}} \frac{1}{\sin^2 \psi} \sqrt{\frac{u+1}{\sin \psi (\operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{ctg} \psi)}}.$$

Równanie (6.8) pozwala obliczyć $\sin \varphi$ i $\operatorname{ctg} \varphi$ jako funkcje ψ i u , a więc wyrugować φ ; po wprowadzeniu obliczonych z (6.8) $\sin \varphi$ i $\operatorname{ctg} \varphi$ do (6.9) otrzymujemy $\tilde{V} = \tilde{V}(u, \psi)$:

$$(6.10) \quad \tilde{V} = \frac{16S \sin \psi}{(u+1)u} \frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1} - 4 \operatorname{ctg} \psi + \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{4S \sin^3 \psi} \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right].$$

Poszukujemy $\tilde{V} = \tilde{V}_{\min}$, przy czym \tilde{V} jest teraz funkcją dwu zmiennych niezależnych ψ i u . Obliczamy zatem

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u} = 0,$$

co zapiszemy następująco:

$$(6.11) \quad \frac{16S \cos \psi}{(u+1)u} \frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1} + \frac{4}{\sin^2 \psi} + \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{4S} \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right] (-3) \frac{\cos \psi}{\sin^4 \psi} = 0,$$

$$(6.12) \quad 16S \sin \psi (-1) \left[u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} (u+1) \right]^{-2} \left[\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1} (u+1) u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}-1} + u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} \right] + \\ + \frac{1}{4S \sin^3 \psi} \left\{ \left[\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1} (u+1) u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}-1} + u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \right] \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right] + \right. \\ \left. + (u+1) u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \frac{\alpha+1}{n-\alpha-1} u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}-1} \right\} = 0.$$

Równanie (6.12) pozwala wyrazić $\sin^2\psi$ jako funkcję zmiennej u , parametrów S i B

$$(6.13) \quad \sin^2\psi = \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{8S} \left[u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \frac{(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u}{2(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u} \right]^{1/2}.$$

Równania (6.12) i (6.13) pozwalają określić parametr smukłości S i funkcję kąta ψ jako funkcje zmiennej u i parametru B

$$(6.14) \quad S(u, B) = \frac{4(WU^2 - Z)^2}{(WU^2 - Z)^2 - 16U^2},$$

$$(6.15) \quad \sin\psi = 1 - \frac{16U^2}{(WU^2 - Z)^2}.$$

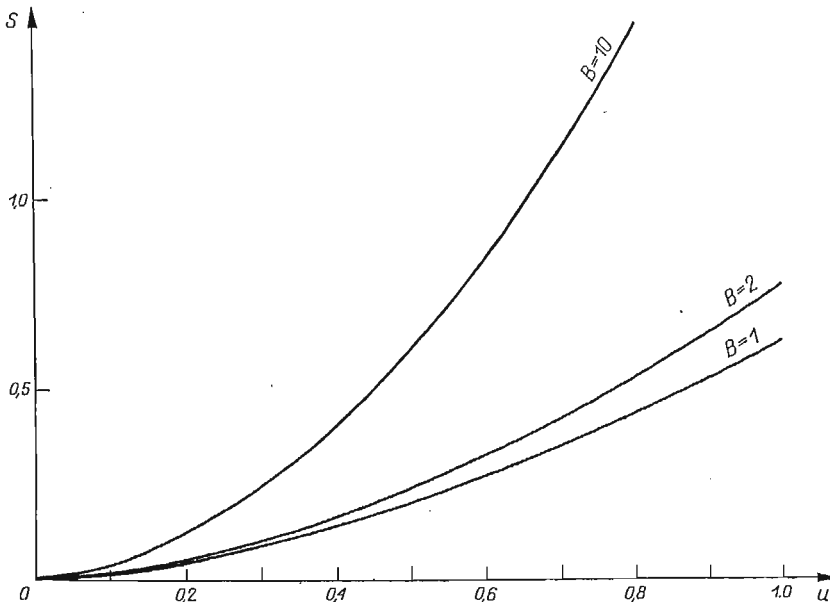
w których U , W i Z określane są następująco:

$$U = U(u, B) = \frac{(u+1)u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}}{8} \left[u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} \frac{(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u}{2(\alpha+1)(u+1) + (n-\alpha-1)u} \right]^{1/2},$$

$$(6.16) \quad W = W(u) = \frac{16}{(u+1)u^{\frac{2(\alpha+1)}{n-\alpha-1}}},$$

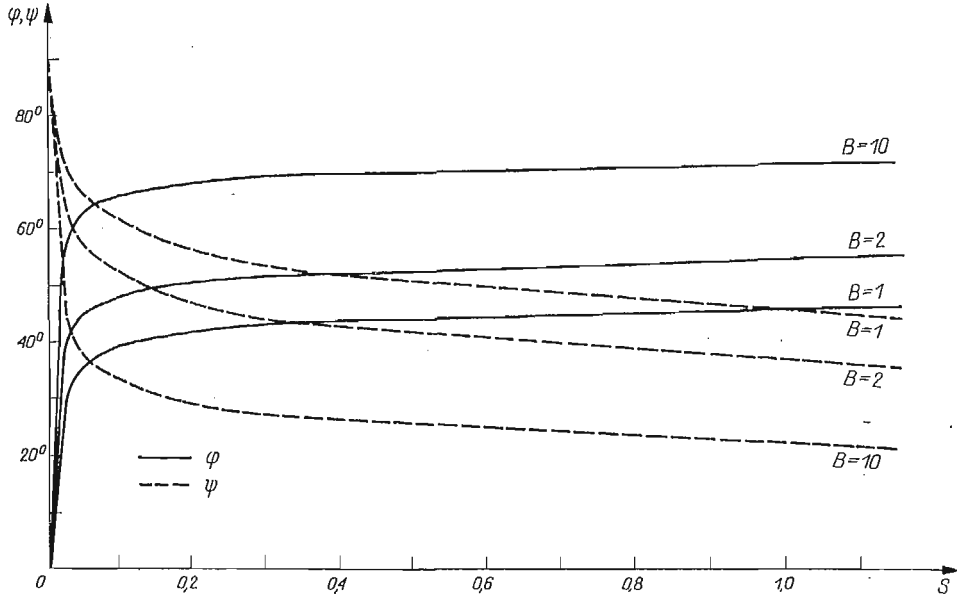
$$Z = Z(u, B) = \frac{3u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}}(u+1)}{4} \left[u^{\frac{\alpha+1}{n-\alpha-1}} + \frac{1}{B} \right].$$

Są to wielkości stałe, zależne od stałych materiałowych i geometrii układu.



Rys. 10.

Związek pomiędzy kątem ψ i φ podany jest przez (6.8). Na podstawie uzyskanych wzorów i zależności sporządzono wykresy: $S = S(u)$ przy ustalonej wartości parametru B (rys. 10) oraz $\varphi = \varphi(S)$ i $\psi = \psi(S)$ też przy ustalonej wartości B (rys. 11).



Rys. 11.

Uzyskane wartości φ i ψ w funkcji smukłości S dla ustalonego parametru B są wartościami optymalnymi. Na podstawie obliczeń i wykresu (rys. 11) zauważamy, że dla małych smukłości S optymalny kąt ψ zmierza bardzo szybko do 90° , a optymalny kąt φ do 0. Ze wzrostem smukłości kąt ψ maleje, a kąt φ rośnie.

8. Uwagi końcowe

Rozpatrzone układy kratowe są najprostsze z możliwych. Stanowią one jednak podstawę do optymalnego kształtowania z uwzględnieniem pełzania bardziej złożonych układów kratowych. Można przypuszczać, iż otrzymamy bardziej skomplikowane równania, których rozwiązanie będzie wymagało stosowania metod numerycznych.

Analizę otrzymanych wyników można przeprowadzić na drodze porównania optymalnych wartości kątów w funkcji parametru smukłości w przypadku, gdy dany układ kratowy jest kształtowany w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego [23] i w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu teorii pełzania KEMPNERA-HOFFA [30] i przy wykorzystaniu «teorii wzmocnienia».

I tak w przypadku najprostszego, dwuprętowego układu kratowego, przedstawionego na rys. 1, optymalny kąt φ w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu «teorii wzmocnienia» rys. 2, zawiera się w granicach

$$26^\circ 33' 54'' \leq \varphi \leq 35^\circ 15' 52''$$

(Norton).

W przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego przy wykorzystaniu teorii KEMPNERA-HOFFA (rys. 3 [30]) optymalny kąt φ zawiera się w przedziale

$$0 \leq \varphi \leq 35^{\circ}15'52'',$$

a w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego (rys. 3 [23])

$$26^{\circ}33'54'' \leq \varphi \leq 45^{\circ}.$$

Z powyższego porównania wynika, że dolne ograniczenie kąta φ jest to samo w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego i w warunkach wyboczenia pełzającego typu RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA, natomiast górne ograniczenie kąta φ jest to samo w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego obu typów.

Celem dokładnego porównania otrzymanych wyników wykonano w przypadku najprostszego układu kratowego obliczenia numeryczne.

Przyjęto następujące dane: $P_0 = 40\,000$ kG; $j_w = 1,5$; $\xi = 10$ (przekrój dwuteowy); $\eta = 0,4$; $\gamma = 8,94 \cdot 10^3$ kG/m³; $E = 12\,400 \cdot 10^6$ kG/m²; $a = 7$ m; $V = 0,4$ m³; $Q = 3,5$ kG/m³ (granica plastyczności).

Wartości parametru $\beta = 0,146$, $n = 3$, $\alpha = 0$ odpowiada optymalny kąt $\varphi = 32^{\circ}30'$; wartościom parametrów $\mu_1 = 0,172$ i $\lambda = 0,146$ odpowiada optymalny kąt $\varphi \cong 26^{\circ}$ (wzory (3.12) i (3.13), rys. 5. [30]), i wartości $\Lambda = 0,815$ (wzór (3.11) str. 354 [23]) odpowiada optymalny kąt $\varphi \cong 31^{\circ}50'$ (rys. 3, str. 355 [23]).

Podobną analizę uzyskanych wyników można by przeprowadzić w przypadku pozostałych układów kratowych w przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia sprężysto-plastycznego i w warunkach wyboczenia pełzającego typu RABOTNOWA-SZESTIERIKOWA. W przypadku kształtowania w warunkach wyboczenia pełzającego typu KEMPNERA-HOFFA [30] dla dalszych typów urządzeń kratowych nie przeprowadzono obliczeń numerycznych ze względu na trudności matematyczne jakie napotykamy przy rozwiązywaniu równań.

Literatura cytowana w tekście

1. М. АХМАДАЛИЕВ, Алгоритм расчёта статически неопределимых ферм наименьшего объёма на РСВМ методом последовательных приближений, Изв. АН УССР, серия Техн. Наук, 1966, 3, 39—40.
2. И. А. ФЕДОРОВ, К вопросу о ферме наименьшего веса, Строит. Мех. и Расч. Сооруж., 1967, 6, 11—14.
3. А. М. FREUDENTHAL, Some time effects in structural analysis, Rep. Sixth, Int. Congr. Appl. Mech., Paris 1946 (nie opublikowane).
4. G. A. HEGEMIER, W. PRAGER, On Michell trusses, Int. J. Mech. Sci., 11, (1969), 209.
5. N. J. HOFF, A survey of the theories of creep buckling, Proc. of third US nat. Congr. of Appl. Mech. Brown Univ. 1958, Pergamon Press, 1958, 29—49.
6. J. A. HULT, Creep buckling, Inst. Halfasthetslara Kungl., Tekniska Hogskolan, Publ. nr 111, Stockholm 1955.
7. Л. М. КАЧАНОВ, О времени разрушения в условиях ползучести, Изв. АН УРСР, ОТН, Мех. и Маш., 8 (1958), 26—31.
8. Л. М. КАЧАНОВ, О времени разрушения в условиях ползучести, Изв. АН УССР, ОТН, Мех. и Маш. (1960), 88—92.

9. L. KIRSTE, *Beitrag zum Problem des Tragwerks-Mindestgewichts*, Z. Flugwiss, 8, 12, (1960), 352—359.
10. L. KIRSTE, *Ein weiterer Beitrag zum Problem des Tragwerks-Mindestgewichts*, Z. Flugwiss, 9, II, (1961), 343—347.
11. L. MARTINI, *Slupy linii energetycznych z elementów iglicowych*, Arch. Inż. Łąd., 3 (1969), 541.
12. A. G. MICHELL, *The limits of economy in frame-structures*, Phil. Mag., 8 (1904), 589.
13. P. PEDERSEN, *On the optimal layout of multi-purpose trusses*, Int. Journ. Comp. Struct., 2, 5/6 (1972).
14. И. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРИКОВ, *Устойчивость стержневой и пластинок в условиях ползучести*, Прикл. мат. и мех., ОТН АН УССР, 3, 21 (1957), 406—412.
15. Ю. А. РАДЦИГ, А. Ш. АРСЛАМОВ, *Расчёт статически неопределённых ферм наименьшего веса с учётом устойчивости стержневой*, Сборник Всесоюз. Конф. по проблемам Устойчивости, Вильнюс 1967, 120.
16. А. Н. РАВЕСКИЙ, *Расчёт металлических ферм с обеспечением равноустойчивости всех сжатых элементов*, Сборник Всесоюз. Конф. по Пробл. Устойч., Вильнюс, 1961, 120—121.
17. М. И. РЕЙТМАН, Г. С. ШАПИРО, *Теория оптимального проектирования в строительной механике*, Теории упругости и пластичности, Итоги Науки, Механика, Упругость и Пластичность, 1964, Москва 1966, 8—24.
18. A. D. ROSS, *The effects of creep on instability and indeterminacy investigated by plastic models*, Struct. Eng., 24 (1946) 413; 25 (1947), 179.
19. А. Р. РЖАНИЦЫН, *Некоторые вопросы механических систем деформирующихся по времени*, Гостехиздат, Москва—Ленинград 1949.
20. C. J. SHEU, W. PRAGER, *Recent developments in optimal structural design*, Applied Mechanics, Reviews, 10, 21 (1968), 985—992.
21. L. A. SCHMIDT, Jr, W. M. MORROW, *Structural synthesis with buckling constraints*, Proc. ASCE, 89 (1963), 107—126.
22. Z. WASIUTYŃSKI, A. BRANDT, *Aktualny stan wiedzy o kształtowaniu wytrzymałościowym konstrukcji*, Rozpr. Inż. 2, 10 (1962), 309—332.
23. R. WOJDANOWSKA-ZAJĄC, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie kratownic przy uwzględnieniu warunków stateczności*. Rozpr. Inż. 2, 17, (1969).
24. А. М. ЖУКОВ, И. Н. РАБОТНОВ, Ф. С. ЧУРИКОВ, *Экспериментальная проверка некоторых теорий ползучести*. Инж. Сборник 21 (1953).
25. M. ŻYCZKOWSKI, *Przegląd i klasyfikacja prac nad wyboczeniem pełzającym*, Czasopismo Techniczne 1, 65 (1960), 1—7.
26. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design in rheology*, Praca zreferowana na Kongresie Mechaniki w Stanford, sierpień 1968.
27. M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie wytrzymałościowe przy uwzględnieniu warunków stateczności. Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych*, cz. I. Wyd. PAN, Wrocław—Warszawa—Kra-ków 1968.
28. M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal structural design in rheology*, J. Appl. Mech., 38 (1971).
29. M. ŻYCZKOWSKI, R. WOJDANOWSKA-ZAJĄC, *Optimal structural design with respect to creep buckling*, Proc. Symp. IUTAM Creep in structures, II, Geteborg 1970.
30. R. WOJDANOWSKA, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie w warunkach pełzania w nawiązaniu do teorii wyboczenia Kempnera-Hoffa*, Arch. Inż. Łąd., 4, 18 (1972).

Р е з ю м е

ОПТИМАЛЬНОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ФЕРМ РАБОТАЮЩИХ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ В ОТНЕСЕНИИ К ТЕОРИИ ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА РАБОТНОВА-ШЕСТЕРИКОВА

В работе рассматривается оптимальное конструирование ферм работающих в условиях ползучести. Определена оптимальная конфигурация четырех простых ферм, приведенных на рис. 1, 3, 6 и 9. В качестве критерия оптимизации принят минимальный объем фермы. Для сжимаемых

стержней краевые условия сформулированы на основе теории продольного изгиба ползучести Работнова-Шестерикова, а для растягиваемых стержней на основе теории растрескивания при ползучести (Качанов). Диаграмма показывает зависимость оптимального угла φ в функции безразмерного коэффициента гибкости S . Вычисления проведены для простейшей фермы. Результаты сравнены с полученными прежде для продольного упруго-пластического изгиба в работе [22] и продольного изгиба при ползучести на основе теории Кемпнера-Гоффа (работа [29]).

S u m m a r y

OPTIMAL DESIGN OF TRUSS STRUCTURES IN CREEP CONDITIONS WITH REFERENCE TO THE RABOTNOW-SHESTERIKOW THEORY OF BUCKLING

In this paper are considered the optimal truss structures under the conditions of creep. Optimal configurations are determined for the four simple trusses (see Fig. 1, 3, 6 and 9). Minimal volume of the truss structures is taken as the criterion.

For the compression bars the constraint is given on the basis of the creep buckling theory. The Kachanow theory of creep rupture is used for bars in tension. The results are represented in the form of diagrams showing the optimal angle φ in terms of the dimensionless slenderness coefficient. Numerical calculations are given for the simplest lattice structure. Results are compared with the results of papers [22] concerning elastic-plastic buckling and of [29], concerning the creep buckling on the basis of the Kempner—Hoff theory.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYŃ POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 lipca 1973 r.

KSZTAŁT RÓWNANIA RÓŻNICZKOWEGO CZĄSTKOWEGO ROZWIĄZUJĄCEGO KLASĘ POWŁOK PROSTOKREŚLNYCH ROZWIJALNYCH

STANISŁAW BIELAK (GLIWICE)

1. Wstęp

Podawane w literaturze technicznej równania rozwiązujące powłoki dotyczą jedynie powłok walcowych i stożkowych, których powierzchnie środkowe są utworzone przez proste przecinające okręgi pod kątem prostym, na przykład [2, 3]. Równania różniczkowe cząstkowe, rozwiązujące te powłoki, posiadają różną budowę, zarówno w odniesieniu do ich rzędu, jak i kształtu niektórych członów. Występujące różnice w rozpatrywanych równaniach rozwiązujących tego samego rzędu uwidaczniają się w kształcie członów wewnętrznych tych równań, to znaczy członów zawierających niższe pochodne cząstkowe od stopnia określającego rząd równania różniczkowego z jednej strony i wyższe pochodne cząstkowe od wyrazu skrajnego prawego o najniższej pochodnej, z drugiej strony.

Przeprowadzona analiza wykazała, że o ile różnica dotycząca rzędu równania ma swoje uzasadnienie we wprowadzonych przez poszczególnych badaczy założeniach upraszczających, to kształt członów wewnętrznych równania rozwiązującego zależy od sposobu przeprowadzania rachunku i odrzucania w trakcie rugowania zmiennych wielkości małych wyższego rzędu. Mała stabilność kształtu członów wewnętrznych równania rozwiązującego nasunęła wniosek, że członowie te nie mają istotnego wpływu na rozwiązania w ramach teorii uproszczonej.

Treścią pracy będzie między innymi wykazanie słuszności wysuniętego wniosku dającego istotne uproszczenie równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych. Problem ten nabiera szczególnego znaczenia w numerycznym sposobie rozwiązania, prowadzonym przy użyciu maszyn cyfrowych, a tylko taki możemy brać pod uwagę, bo jak się okazuje, źle pojęta dokładność prowadząca do równań rozwiązujących niestabilnych daje w niektórych przypadkach macierz rozwiązującą równanie różniczkowe, która jest macierzą osobliwą z uwagi na występujące «zera maszynowe». Rozwiązanie numeryczne równania różniczkowego niestabilnego, przy użyciu określonej maszyny cyfrowej, staje się więc czasem niemożliwe.

Odrzucenie w równaniu różniczkowym rozwiązującym członów mało stabilnych, nie mających istotnego wpływu na wyniki, prowadzi do równania różniczkowego stabilnego, dającego rozwiązanie numerycznie poprawne również w tych przypadkach, gdzie uprzednio było to niemożliwe.

2. Ogólny układ równań

Ogólny układ równań powłok prostokreślnych rozwijalnych, podany w tym rozdziale, jest napisany dla parametryzacji naturalnej w oparciu o pracę [1].

2.1. Opis geometryczny powierzchni środkowej powłoki. Równanie wektorowe powierzchni prostokreślnej

$$(2.1) \quad \vec{r} = \vec{p}(u^2) + u^1 \vec{l}(u^2),$$

u^1, u^2 — współrzędne krzywoliniowe na powierzchni; u^1 określa położenie punktu na tworzącej, u^2 wskazuje tworzącą, na której leży punkt.

Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej oraz ich wyróżniki

$$(2.2) \quad \begin{aligned} g_{11} &= 1, \\ g_{12} &= g_{21} = \sqrt{g_{22}} \vec{t} \vec{l}, \\ g_{22} &= |\vec{p}_2 + u^1 \vec{l}_2|^2 \\ g &= g_{22} [1 - (\vec{l} \vec{l})^2], \\ b_{11} &= 0, \\ b_{12} &= b_{21} = 0, \\ b_{22} &= g_{22} \vec{n} \vec{m}, \\ b &= 0. \end{aligned}$$

2.2. Związki geometryczne powłoki. Współczynniki pierwszej i drugiej formy różniczkowej powierzchni odkształconej

$$(2.3) \quad \begin{aligned} g_{ij}^* &= g_{ij} + 2\gamma_{ij}, \\ b_{ij}^* &= b_{ij} + 2\varrho_{ij}. \end{aligned}$$

Związek składowych przemieszczenia z tensorem odkształcenia błonowego

$$(2.4) \quad \gamma_{ij} = \frac{1}{2} (w_{|j}^k g_{ik} + w_{|i}^k g_{jk}) - w^3 b_{ij}.$$

2.3. Związki fizyczne. Związki fizyczne wiążące naprężenia z odkształceniami, dla wersji uproszczonej mogą być zadane w postaci

$$(2.5) \quad \begin{aligned} N^{ij} &= \bar{N}^{ij} + 6H \hat{M}^{ij}, \\ M^{ij} &= \hat{M}^{ij} + \xi h^2 H \bar{N}^{ij}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{ij} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\gamma^{ij} + \nu g^{ij} A], \\ \hat{M}^{ij} &= -\frac{4Eh^3}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)\varrho^{ij} + \nu g^{ij} B] \end{aligned}$$

oraz ξ — parametr stały.

Niezmienniki A i B występujące w (2.6) są sumami

$$(2.7) \quad \begin{aligned} A &= g^{ij} \gamma_{ij}, \\ B &= g^{ij} \varrho_{ij}. \end{aligned}$$

2.4. Równania równowagi. Układ równań równowagi dla powłok w zapisie tensorowym:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} N^{ij}|_i - Q^i b_i^j + P^j &= 0, \\ N^{ij} b_{ij} + Q^j|_j + P^3 &= 0, \\ M^{ij}|_i - Q_i^j &= 0. \end{aligned}$$

Przejdźcie do współrzędnych fizycznych, to znaczy odniesionych do bazy jednostkowej, wygląda następująco:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \bar{N}_{ij} &= \sqrt{\frac{g_{jj}}{g^{ii}}} N_{ij}^{\bar{ij}}, & \bar{Q}_i &= \sqrt{\frac{1}{g^{ii}}} Q^i, \\ \bar{M}_{i1} &= -\sqrt{\frac{g g^{11}}{g^{ii}}} M_i^{12}, & \bar{M}_{i2} &= \sqrt{\frac{g g^{22}}{g^{ii}}} M^{i1}, \\ \bar{P}_i &= \sqrt{g_{ii}} P^i, & \bar{P}_3 &= P^3. \end{aligned}$$

Uwaga: po i, j nie sumować.

Symbol „ $\bar{\quad}$ ” oznacza współrzędną fizyczną.

2.5. Równania nierozdzielności. Równania nierozdzielności dla wersji uproszczonej, przy założeniu $2hH \ll 1$ — ($2hH$ małe w porównaniu z jednością) — przyjmują postać:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \varrho_{11}|_2 - \varrho_{12}|_1 &= 0, \\ \varrho_{22}|_1 - \varrho_{21}|_2 &= 0, \\ 2b\bar{b}^{ij} &= 2\gamma_{12}|_{12} - \gamma_{11}|_{22} - \gamma_{22}|_{11}. \end{aligned}$$

3. Rozwiązanie ogólnego układu równań

Jeśli do pierwszych dwóch równań układu (2.8) podstawimy N^{ij} z (2.5), to wówczas otrzymamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{ij}|_i + \bar{P}^j &= 0, \\ \bar{N}^{ij} b_{ij} + \bar{P}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Występujące w (3.1) wielkości \bar{P}^j, \bar{P}^3 są funkcjami obciążeń, wymuszającymi stan błonowy, jeśli układ równań równowagi (3.1) potraktujemy jako układ równań stanu błonowego. Wyjaśnienie takiego postępowania zostało podane w pracy [1]. Funkcje \bar{P}^j, \bar{P}^3 opisują wzory:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{P}^j &= 6(H\hat{M}^{ij})|_i - Q^i b_i^j + P^j, \\ \bar{P}^3 &= 6H\hat{M}^{ij} b_{ij} + Q^j|_j + P^3. \end{aligned}$$

Rozpisany układ równań (3.1) dla powłok prostokreślnych — rozwijalnych, przyjmuje postać

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \bar{N}^{11}|_1 + \bar{N}^{12}|_2 + \bar{P}^1 &= 0, \\ \bar{N}^{12}|_1 + \bar{N}^{22}|_2 + \bar{P}^2 &= 0, \\ \bar{N}^{22}b_{22} + \bar{P}^3 &= 0. \end{aligned}$$

Z trzeciego równania układu (3.3) obliczymy \bar{N}^{22} ;

$$(3.4) \quad \bar{N}^{22} = -\frac{\bar{P}^3}{b_{22}},$$

a następnie podstawimy (3.4) do drugiego równania (3.3) i wyznaczmy

$$(3.5) \quad \bar{N}^{12}|_1 = \left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_2 - \bar{P}^2.$$

Rugując z pierwszych dwóch równań (3.3) wielkość \bar{N}^{12} otrzymamy

$$\bar{N}^{11}|_{11} - \bar{N}^{22}|_{22} + \bar{P}^1|_1 - \bar{P}^2|_2 = 0,$$

skąd po wykorzystaniu (3.4) uzyskamy

$$(3.6) \quad \bar{N}^{11}|_{11} = -\left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{22} - \bar{P}^1|_1 + \bar{P}^2|_2.$$

Zróżniczkujmy kowariantnie wyrażenia (3.4) i (3.5) względem zmiennej u^1 , pierwsze dwukrotnie, a drugie jednokrotnie, a następnie utwórzmy sumę

$$(3.7) \quad (g_{ij}\bar{N}^{ij})|_{11} = -gg^{ij}\left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{ij} - 2g_{1k}\bar{P}^k|_1 + \bar{P}^j|_j.$$

Sumę $g_{ij}\bar{N}^{ij}$ możemy obliczyć z pierwszego wyrażenia (2.6)

$$(3.8) \quad g_{ij}\bar{N}^{ij} = \frac{2Eh}{1-\nu}A,$$

a wówczas wyrażenie (3.7) przyjmie postać

$$(3.7') \quad \frac{2Eh}{1-\nu}A|_{11} = -gg^{ij}\left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{ij} - 2g_{1k}\bar{P}^k|_1 + \bar{P}^j|_j.$$

Zróżniczkujmy kowariantnie pierwsze równanie (3.1) względem u^j

$$(3.9) \quad \bar{N}^{ij}|_{ij} + \bar{P}^j|_j = 0.$$

Obliczone odpowiednie pochodne kowariantne tensora kontrawariantnego γ^{ij} , uzyskane-go z (2.4), przy wykorzystaniu zależności [1];

$$(3.10) \quad A = w_{\square}^k|_k - 2Hw^3,$$

podstawione do pierwszego związku (2.5), dadzą

$$\bar{N}^{ij}|_{ij} = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \{ (1-\nu)[(2Hg^{ij} - b^{ij})w^3]|_{ij} + g^{ij}A|_{ij} \}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie do (3.9), otrzymamy;

$$(3.9') \quad \frac{2Eh}{1-\nu^2} \{ (1-\nu)[(2Hg^{IJ}-b^{IJ})w^3]_{|ij} + g^{IJ}A_{|ij} \} + \bar{P}^J_{|j} = 0.$$

Jeśli teraz zróżniczkujemy kowariantnie powyższe równanie względem zmiennej u^1 , a następnie w miejsce $A_{|11}$ podstawimy (3.7'), to wówczas będzie:

$$(3.11) \quad -g^{ij} \left[g^{kl} g \left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \right]_{|kl} + 2g_{1k} \bar{P}^k_{|1} - \bar{P}^k_{|k} \Big|_{ij} + \{ 2Eh[(2Hg^{IJ}-b^{IJ})w^3]_{|ij} + (1+\nu)\bar{P}^J_{|j} \}_{|11} = 0.$$

Występujące w (3.11) funkcje \bar{P}^J , \bar{P}^3 , jak to zostanie wykazane, są funkcjami zależnymi od zadanych obciążeń P^J , P^3 i tylko przemieszczenia w^3 . Tak więc równanie (3.11) jest równaniem różniczkowym zawierającym jedynie niewiadomą funkcję w^3 , czyli jest równaniem rozwiązującym klasę powłok prostokreślnych — rozwijalnych.

Pierwsze dwa równania nierozdzielności będą spełnione, jeśli przyjmiemy

$$\varrho_{ij} = \Phi_{|ij},$$

gdzie $\Phi = \Phi(u^1, u^2)$ jest funkcją zmiennych u^1, u^2 .

Wychodząc ze związku tensora ϱ_{ij} z przemieszczeniami w^i, w^3 — patrz praca [1], możemy powyższą równość, w ramach uproszczonej teorii, zastąpić związkiem

$$(3.12) \quad \varrho_{ij} = \frac{1}{2} w^3_{|ij}.$$

Wtedy momenty \hat{M}^{ij} opisane wyrażeniem (2.6) będą równe

$$(3.13) \quad \hat{M}^{ij} = -\frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)} [(1-\nu)g^{ij}g^{JK}w^3_{|ik} + \nu g^{ij}W],$$

gdzie

$$(3.14) \quad W = 2B = g^{ij}w^3_{|ij}.$$

Podstawiając do trzeciego równania (2.8) drugi związek (2.5) z obliczonymi pochodnymi kowariantnymi w oparciu o wyrażenia (3.13) i (3.14) uzyskamy

$$(3.15) \quad Q^J = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} g^{ij}W_{|i} + \xi h^2 (H\bar{N}^{ij})_{|i}.$$

Mając \hat{M}^{ij} i Q^J określone wyrażeniem (3.13) i (3.15), możemy po odrzuceniu wielkości małej rzędu wyższego występującej w (3.15) opisać funkcje obciążeń wymuszających (3.2) za pomocą funkcji w^3

$$(3.2') \quad \bar{P}^J = 6H_{|i} \hat{M}^{ij} - \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} (6Hg^{IJ}-b^{IJ})W_{|i} + P^J,$$

$$\bar{P}^3 = 6H\hat{M}^{ij}b_{ij} - \frac{2Eh^2}{3(1-\nu^2)} g^{ij}W_{|ij} + P^3.$$

Korzystając z (3.9) wprowadzimy dalsze uproszczenia w równaniach (3.7') i (3.11), bo dla celów porównawczych, określających rząd wielkości, można przyjąć w oparciu o równanie (3.9'), że: $\frac{3}{h^2} W$ jest porównywalne z $g^{ij}W_{|ij}$, natomiast W odniesione do

$g^{ij}W|_{ij}$ jest wielkością małą rzędu wyższego dla powłok cienkich spełniających warunek $2hH \ll 1$.

Dowód wysuniętego stwierdzenia o pomijalności pewnych wyrazów jako wielkości małych wyższego rzędu można przeprowadzić następująco: wielkość $\frac{3}{h^2}W$ jest porównywalna z wielkością $g^{ij}W|_{ij}$ z założenia, gdyż obie wielkości są tego samego rzędu, czyli możemy napisać

$$g^{ij}W|_{ij} = \frac{3}{h^2}W.$$

Powyższa równość jest słuszna jedynie dla określenia rzędu wielkości W i dlatego nie można się nią posłużyć do wyznaczenia samej wielkości W .

Utwórzmy wyrażenie

$$F = g^{ij}W|_{ij} \pm W,$$

w którym następnie człon $g^{ij}W|_{ij}$ zastąpimy wielkością $\frac{3}{h^2}W$ na podstawie pierwszej równości, czyli otrzymamy

$$F = \left(\frac{3}{h^2} \pm 1 \right) W.$$

Dla powłok cienkich wielkość $\frac{3}{h^2}$ jest wielkością dużą rzędu wyższego w stosunku do 1, bo na przykład dla powłoki żelbetowej o grubości $2h = 0,2$ m, będzie $\frac{3}{h^2} = 300$, a dla powłoki stalowej o grubości $2h = 0,02$ m, będzie $\frac{3}{h^2} = 30\,000$.

W ramach liniowej teorii, pomijając wielkości małe wyższego rzędu, napiszemy

$$F = \frac{3}{h^2}W = g^{ij}W|_{ij},$$

czyli wielkość W odniesiona do $g^{ij}W|_{ij}$ jest wielkością małą wyższego rzędu, czego należało dowieść.

Procentowy błąd odrzucenia wyrazu małego, dla powłoki stosunkowo grubej, dla której $\frac{3}{h^2} = 300$, nie przekracza więc 0,5%.

Powyższe analityczne obliczenie błędu wynikającego z odrzucenia członów mało-stabilnych zostało potwierdzone numerycznie przeliczonymi przykładami. Przeliczona powłoka walcowa żelbetowa, dla której $h = 0,1$ m, wzorami ścisłymi i uproszczonymi, (patrz załączone tablice) wykazuje również różnice nie przekraczające 0,5%.

Wersja uproszczona równań (3.7') i (3.11) może więc przyjąć postać

$$(3.16) \quad \frac{2Eh}{1-\nu} A|_{11} = -gg^{ij} \left(\frac{P^3}{b_{22}} \right) \Big|_{ij} - 2g_{1k} P^k|_1 + P^j|_j, \\ -gg^{ij}g_{2k} \left(\frac{\bar{P}^3}{b_{22}} \right) \Big|_{kij} + 2Eh[(2Hg^{ij} - b^{ij})w^3]|_{11ij} = g^{ij}(2g_{1k}P^k|_1 - P^k|_k)|_{ij} - (1+\nu)P^j|_{j11}.$$

Jeśli do drugiego równania (3.16) wprowadzimy funkcję \bar{P}^3 z układu (3.2') z odrzuconym członem $6HM^ijb_{ij}$ jako wielkością małą w porównaniu z $g^{ij}W|_{ij}$, to wówczas otrzymamy następujące równanie różniczkowe cząstkowe rzędu ósmego, rozwiązujące powłoki prostokątne rozwijalne

$$(3.17) \quad g^{ij}g^{kl} \left(\frac{1}{b_{22}} g^{mn} W|_{mn} \right) \Big|_{kl ij} + \frac{3(1-\nu^2)}{gh^2} [(2Hg^{ij} - b^{ij})w^3]_{|ij} = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3g} P,$$

gdzie

$$P = gg^{ij}g^{kl} \left(\frac{P^3}{b_{22}} \right) \Big|_{kl ij} + g^{ij}(2g_{ik}P^k|_i - P^k|_k)|_{ij} - (1+\nu)P^k|_{k11}.$$

Dla przykładu napiszemy równanie (3.17) dla powłoki walcowej, sparametryzowanej w układzie ortogonalnym naturalnym.

Jeśli a będzie promieniem walca, powierzchni środkowej powłoki, to jej wielkości geometryczne przyjęte z pracy [1] będą równe

$$(3.18) \quad \begin{aligned} g_{11} &= 1, & g_{12} &= g_{21} = 0, & g_{22} &= g = a^2, \\ b_{11} &= b_{12} = b_{21} = 0, & b_{22} &= a, & b &= 0, \\ 2H &= \frac{1}{a}, & \Gamma_{ij}^k &= 0. \end{aligned}$$

Pochodne kowariantne dla powłoki walcowej w parametryzacji naturalnej, przejdą w pochodne zwykłe, ponieważ symbole Christoffela drugiego rodzaju są równe zeru.

Równanie różniczkowe (3.17), rozwiązujące powłoki walcowe dowolnie obciążone i podparte, przyjmie postać

$$(3.19) \quad g^{ii}g^{jj}g^{kk}W_{,kkjj} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} w^3_{,1111} = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} P,$$

przecinek «,» oznacza pochodną zwykłą.

Osiowa symetria odkształceń, występująca przy obciążeniu i podparciu powłoki osiowo-symetrycznym, obniża rząd równania (3.19) i powoduje jego przejście w równanie zwyczajne rzędu czwartego

$$(3.20) \quad W_{,1111} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} W = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} \bar{P},$$

gdzie

$$W = w^3_{,11}; \quad \bar{P} = aP^3_{,11} - \nu P^1_{,1}.$$

Dla porównania wpływu wprowadzonych do równań (3.7') i (3.11) uproszczeń, dających uproszczony układ równań (3.16) rozwiązujący powłoki prostokątne rozwijalne, zostanie przeliczony przykład liczbowy wzorami uproszczonymi i uściślonymi. W przykładzie rozpatrzona zostanie powłoka walcowa odkształcająca się osiowo-symetrycznie. Odpowiednikiem równania rozwiązującego uproszczonego (3.20), dla tego przykładu, będzie równanie różniczkowe uściślone otrzymane z (3.11), po wykorzystaniu odpowiednich wielkości geometrycznych (3.18). Równanie uściślone rozwiązujące powłoki walcowe, odkształcalne osiowo-symetrycznie, przyjmie kształt

$$(3.21) \quad W_{,1111} + \frac{1}{a^2} W_{,11} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} W = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} \bar{P}.$$

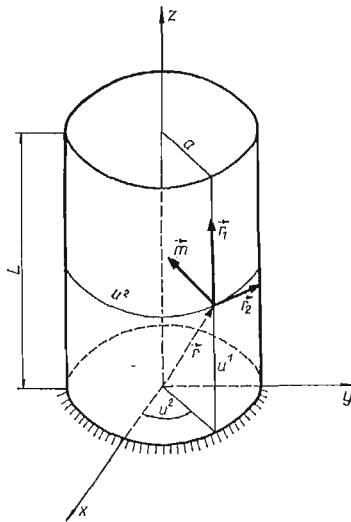
Inna droga postępowania podana w pracy [1] doprowadzi do równania rozwiązującego (3.21) różniącego się jedynie parametrem przy pochodnej wewnętrznej $W_{,11}$. Wprowadzając w równaniu (3.21) parametr λ jako wielkość zależną od sposobu upraszczania, to znaczy odrzucania wielkości małych wyższego rzędu w trakcie rugowania zmiennych, możemy ogólnie napisać

$$(3.22) \quad W_{,1111} + \frac{\lambda}{a^2} W_{,11} + \frac{3(1-\nu^2)}{(ah)^2} W = \frac{3(1-\nu^2)}{2Eh^3a} \bar{P}.$$

Niestabilność członu wewnętrznego, lewej strony równania (3.22), nasunęła przypuszczenie, że człon ten nie ma istotnego wpływu na rozwiązanie. Bliższe badanie tego zagadnienia pozwoliło wprowadzić uproszczenia, w ramach przedstawionej teorii, dające układ równań (3.16), z którego uzyskano równanie stabilne (3.17), rozwiązujące powłoki prostokreślne rozwijalne.

4. Przykłady

Dana jest powłoka walcowa zamknięta o promieniu a i wysokości l (rys. 1), zamocowana u swej podstawy i obciążona parciem cieczy znajdującej się wewnątrz \vec{p} . Wielkości sił wewnętrznych i przemieszczeń występujących w powłoce, dla różnych rodzajów ma-



Rys. 1.

teriałów, z których są utworzone powłoki, i różnych sposobów obciążenia, wyznaczono wzorami podanymi w pracy [1]. Obliczenie przykładów liczbowych przeprowadzono w oparciu o program realizujący równanie różniczkowe (3.22) przy założeniu $\lambda = 0$, lub $\lambda \neq 0$. Podane w tablicach wyniki uwzględniają $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$ dla żelbetu.

Wydrukowane w nagłówkach tablic symbole oznaczają:

- $A = a$ promień walca,
- $H = h$ połowa grubości powłoki,
- $NI = \nu$ współczynnik Poissona,

- E stała sprężystości,
- N obciążenie stałe brzegu górnego,
- $P1$ składowa obciążenia wzdłuż prostej tworzącej,
- $P3$ składowa obciążenia wzdłuż prostej normalnej,
- $M12$ moment zginający w kierunku tworzącej,
- $M21$ moment zginający w kierunku łuku,
- $Q1$ siła tnąca działająca w kierunku normalnym do powłoki,
- $N11$ siła osiowa działająca w kierunku prostej tworzącej,
- $N22$ siła osiowa działająca w kierunku łuku,
- $W1$ przemieszczenie w kierunku tworzącej powłoki,
- $W3$ przemieszczenie w kierunku normalnym do powłoki.

Tablice 1 i 2 podają wartości sił, momentów i przemieszczeń obliczone przy założeniu $\lambda = 1$, dla zbiorników napełnionych wodą o wymiarach: pierwszy o promieniu $A = 2,0$ m i wysokości $L = 50,0$ m i drugi o promieniu $A = 10,0$ m i wysokości $L = 20,0$ m.

Tablice 3 i 4 podają wartości poszczególnych wielkości fizycznych dla tych samych zbiorników przy założeniu $\lambda = 0$. Porównanie wyników obliczonych wzorami uściślonymi i uproszczonymi, potwierdza słuszność wprowadzonych uproszczeń, ponieważ odchyłki są bardzo małe i nie przekraczają 0,5% wartości uzyskanych wzorami uproszczonymi.

Literatura cytowana w tekście

1. St. BIELAK, *Ogólna teoria powłok prostokreślnych pracujących w stanie zgięciowym*, Politechnika Śląska, Budownictwo z. 33. Gliwice 1973.
2. В. М. ДАРИЕВСКИЙ, *Сборник статей, Прочность цилиндрических оболочек*, Москва 1959.
3. H. LUNDGREN, *Powłoki walcowe*, Arkady, 1963.

Tablica 1

DANE: $A = 200,00$ $H = 10,00$ $NI = 0,18$ $E = 2,10$ 5

$U1$ (cm)	$M12$ (KG cm/cm)	$M21$ (KG cm/cm)	$Q1$ (KG/cm)	$N11$ (KG/cm)	$N22$ (KG/cm)	$W1$ (cm)	$W3$ (cm)
0	5,812900	3	-2,393440	2	0,00	0,000000	0
10	3,662490	3	-1,909900	2	0,00	-5,431150	-3
20	1,982930	3	-1,456370	2	0,00	-3,908710	-5
30	7,324930	2	-1,054240	2	0,00	-1,185090	-4
40	-1,463070	2	-7,141280	1	0,00	-2,521080	-4
50	-7,174160	2	-4,387940	1	0,00	-4,416440	-4
60	-1,044630	3	-2,255700	1	0,00	-6,843480	-4
70	-1,187250	3	-6,837520	0	0,00	-9,746300	-4
80	-1,197420	3	4,071680	0	0,00	-1,305410	-3
90	-1,118980	3	1,103050	1	0,00	-1,669140	-3
100	-9,871600	2	1,488410	1	0,00	-2,058450	-3
200	6,132130	1	2,103280	0	0,00	-6,331390	-3
300	4,209530	1	-5,182610	-1	0,00	-1,042450	-2
400	2,637510	1	2,297650	-2	0,00	-1,440560	-2
500	2,795840	1	-1,351480	-3	0,00	-1,830580	-2
600	2,731280	1	-7,294090	-3	0,00	-2,212020	-2
700	2,665930	1	-6,144360	-3	0,00	-2,584870	-2
800	2,604390	1	-6,189830	-3	0,00	-2,949160	-2
900	2,542370	1	-6,203230	-3	0,00	-3,304870	-2
1000	2,480360	1	-6,200800	-3	0,00	-3,652020	-2
1500	2,170310	1	-6,200900	-3	0,00	-5,259160	-2
2000	1,860270	1	-6,200900	-3	0,00	-6,652020	-2
2500	1,550220	1	-6,200900	-3	0,00	-7,830590	-2
3000	1,240180	1	-6,200900	-3	0,00	-8,794870	-2
3500	9,301360	0	-6,200900	-3	0,00	-9,544870	-2
4000	6,200900	0	-6,200900	-3	0,00	-1,008050	-1
4500	3,100460	0	-6,200850	-3	0,00	-1,040200	-1
5000	0,000000	0	0,000000	0	0,00	-1,050910	-1
						0,000000	0

Tablica 2

DANE: $A = 1000,00$		$H = 10,00$		$NI = 0,18$		$E = 2,10^5$			
$U1$ (cm)	$M12$ (KG cm/cm)	$M21$ (KG cm/cm)	$Q1$ (KG/cm)	$N11$ (KG/cm)	$N22$ (KG/cm)	$W1$ (cm)	$W3$ (cm)		
0	1.110370	4	-2.105370	2	0.00	0.000000	0	0.000000	0
10	9.097650	3	-1.638080	3	0.00	-3.600340	-3	-3.600340	-3
20	7.288070	3	-1.313740	3	0.00	-1.673790	-2	-1.673790	-2
30	5.670040	3	-1.024590	3	0.00	-5.382020	-5	-5.382020	-5
40	4.236460	3	-1.344160	2	0.00	-1.215010	-4	-4.732310	-2
50	2.978560	3	-5.458200	2	0.00	-2.259430	-4	-6.913650	-2
60	1.886300	3	-3.525570	2	0.00	-3.716310	-4	-9.301690	-2
70	9.487770	2	-1.873290	2	0.00	-5.615880	-4	-1.182080	-1
80	1.545010	2	-4.797880	1	0.00	-7.975760	-4	-1.440610	-1
90	-5.082970	2	6.768980	1	0.00	-1.080270	-3	-1.700260	-1
100	-1.051450	3	1.618710	2	0.00	-1.409460	-3	-1.956430	-1
200	-2.254290	3	3.524480	2	0.00	-6.830080	-3	-3.808900	-1
300	-9.070600	2	1.041140	2	0.00	-1.422770	-2	-4.225490	-1
400	-7.128810	1	-4.275180	1	0.00	2.164710	-2	-3.970260	-1
500	1.156340	2	1.296910	-1	0.00	-2.847300	-2	-3.620320	-1
600	7.250670	1	-6.391350	-1	0.00	-3.471990	-2	-3.331320	-1
700	2.182200	1	-4.713940	1	0.00	-4.049230	-2	-3.086530	-1
800	3.933340	0	-4.065400	1	0.00	-4.583790	-2	-2.853280	-1
900	2.961220	0	-3.719310	1	0.00	-5.076300	-2	-2.618570	-1
1000	4.906040	0	-3.422180	1	0.00	-5.526320	-2	-2.381330	-1
1500	3.098880	0	-1.722430	1	0.00	-7.133550	-2	-1.190470	-1
2000	0.000000	0	0.000000	0	0.00	-7.669240	-2	0.000000	0

Tablica 3

D A N E:		A = 200,00		H = 10,00		NI = 0,18		E = 2,10		5	
U1 (cm)	M12 (KG cm/cm)	M21 (KG cm/cm)	Q1 (KG/cm)	N11 (KG/cm)	N22 (KG/cm)	W1 (cm)	W3 (cm)				
0	5.812490	3	-1.046240	3	-2.410930	2	0.000000	0	0.000000	0	0.000000
10	3.650900	3	-6.632710	2	-1.915660	2	0.00	0.00	-5.426880	-6	-1.745260
20	1.969430	3	-3.756400	2	-1.455120	2	0.00	0.00	-3.903210	-5	-6.040680
30	7.222440	2	-1.710220	2	-1.049480	2	0.00	0.00	-1.182790	-4	-1.171950
40	-1.511070	2	-3.549900	1	-7.083050	1	0.00	0.00	-2.515040	-4	-1.791380
50	-7.165230	2	4.492740	1	-4.335210	1	0.00	0.00	-4.404220	-4	-2.401330
60	-1.038960	3	8.334020	1	-2.214660	1	0.00	0.00	-6.822510	-4	-2.962080
70	-1.178250	3	9.130920	1	-6.584670	0	0.00	0.00	-9.714220	-4	-3.450740
80	-1.186680	3	7.860170	1	4.170400	0	0.00	0.00	-1.300910	-3	-3.857180
90	-1.107930	3	5.311470	1	1.099880	1	0.00	0.00	-1.663210	-3	-4.180360
100	-9.769380	2	2.096010	1	1.475530	1	0.00	0.00	-2.051020	-3	-4.425390
200	5.763100	1	-1.740750	2	2.106100	0	0.00	0.00	-6.315220	-3	-4.677190
300	4.203360	1	-1.639230	2	-4.980360	-1	0.00	0.00	-1.040910	-2	-4.467390
400	2.652580	1	-1.580850	2	-1.885980	-2	0.00	0.00	-1.439040	-2	-4.380300
500	2.793640	1	-1.550360	2	-1.284250	-3	0.00	0.00	-1.829050	-2	-4.285930
600	2.731230	1	-1.515820	2	-7.195820	-3	0.00	0.00	-2.210490	-2	-4.190460
700	2.665990	1	-1.481320	2	-6.160590	-3	0.00	0.00	-2.583340	-2	-4.095230
800	2.604380	1	-1.446870	2	-6.189710	-3	0.00	0.00	-2.947630	-2	-4.000000
900	2.542370	1	-1.412420	2	-6.202900	-3	0.00	0.00	-3.303340	-2	-3.904760
1000	2.480360	1	-1.377970	2	-6.200850	-3	0.00	0.00	-3.650490	-2	-3.809520
1500	2.170310	1	-1.205730	2	-6.200900	-3	0.00	0.00	-5.257630	-2	-3.333330
2000	1.860270	1	-1.033480	2	-6.200900	-3	0.00	0.00	-6.650490	-2	-2.857140
2500	1.550220	1	-8.612370	1	-6.200900	-3	0.00	0.00	-7.829060	-2	-2.380950
3000	1.240180	1	-6.889890	1	-6.200900	-3	0.00	0.00	-8.793340	-2	-1.904760
3500	9.301360	0	-5.167420	1	-6.200900	-3	0.00	0.00	-9.543340	-2	-1.428570
4000	6.200900	0	-3.444940	1	-6.200900	-3	0.00	0.00	-1.007900	-1	-9.523810
4500	3.100460	0	-1.722470	1	-6.200870	-3	0.00	0.00	-1.040040	-1	-4.761900
5000	0.000000	0	0.000000	0	0.000000	0	0.00	0.00	-1.050760	-1	0.000000

Tablica 4

DANE: $A = 1000,00$ $H = 10,00$ $NI = 0,18$ $E = 2,10$ 5

$U1$ (cm)	$M12$ (KG cm/cm)	$M21$ (KG cm/cm)	$Q1$ (KG/cm)	$N11$ (KG/cm)	$N22$ (KG/cm)	$W1$ (cm)	$W3$ (cm)
0	1.110280	4	-2.108210	2	0.00	0.000000	0
10	9.094400	3	-1.909040	2	0.00	-2.194880	-3.599720
20	7.283410	3	-1.713790	2	0.00	-1.673430	-2.843750
30	5.664710	3	-1.524820	2	0.00	-5.380560	-4.730400
40	4.231030	3	-1.344020	2	0.00	-1.214620	-6.910410
50	2.973460	3	-1.172810	2	0.00	-2.258580	-9.296760
60	1.881850	3	-1.012250	2	0.00	-3.714720	-1.181390
70	9.451820	2	-8.630240	1	0.00	-5.613240	-1.439690
80	1.518860	2	-7.255440	1	0.00	-7.971670	-1.699100
90	-5.098770	2	-5.999670	1	0.00	-1.079670	-1.955020
100	-1.052000	3	-4.862380	1	0.00	-1.408630	-3.805650
200	-2.249870	3	9.962040	0	0.00	-6.824730	-4.222950
300	-9.057850	2	1.244950	1	0.00	-1.421680	-3.969390
400	-7.253600	1	4.393160	0	0.00	-2.163320	-3.620410
500	1.442400	2	1.370350	-1	0.00	-2.845850	-3.331580
600	7.211090	1	-6.320660	-1	0.00	-3.470580	-3.086660
700	2.188210	1	-3.289450	-1	0.00	-4.047860	-2.853300
800	4.054880	0	-6.216270	-2	0.00	-5.524960	-2.618560
900	3.015170	0	1.791630	-2	0.00	-7.132190	-2.381320
1000	4.910420	0	1.419870	-2	0.00	-5.524960	-1.190470
1500	3.099250	0	-6.199110	-3	0.00	-7.132190	0.000000
2000	0.000000	0	0.000000	0	0.00	-7.667880	0.000000

Резюме

ВИД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШАЮЩЕГО КЛАССА ЛИНЕЙЧАТЫХ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ОБОЛОЧЕК

В работе предпринята попытка сформулировать единое решение общей системы уравнений линейчатых развертывающихся оболочек, работающих при изгибающих напряжениях, выполненных из однородного изотропного материала. Принята математическая модель, описывающая работу оболочки при изгибе, основана на линейной теории оболочек отнесенной к среде Гука.

Приводимые в технической литературе решения, относятся лишь к цилиндрическим и коническим оболочкам, срединные поверхности которых образованы прямыми пересекающимися окружности под прямым углом, при чем дифференциальные уравнения, решающие эти оболочки, различны по строению, как в отношении их порядка, так и вида отдельных членов.

Проводимое в настоящей работе решение этого класса оболочек сведено к одному дифференциальному уравнению восьмого порядка в частных производных на неизвестную функцию перемещений w^3 . Полученным уравнение охватываются произвольного вида нагрузки и виды опирания оболочек.

Summary

THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION SOLVING A CLASS OF RULED DEVELOPABLE SHELLS

An attempt is made to determine a uniform solution of the general system of equations governing the theory of bending of ruled developable shells made of isotropic material. The mathematical model assumed which describes the state of bending of shells is based on the linear shell theory referred to Hooke's medium.

The corresponding solutions quoted in the literature concern the cylindrical and conical shells in which the middle surfaces are generated by straight lines intersecting the circles at right angles; the corresponding differential equations have various forms, differing by their order and the form of individual terms.

The solution given in this paper is reduced to a single eighth order differential equation in the unknown displacement function w^3 . The differential equation applies to arbitrary loading and support conditions of the shell.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1973 r.

OTRZYMYWANIE MACIERZY ELEMENTU PŁYTY ZGINANEJ DLA MODELU MIESZANEGO METODĄ ORTOGONALIZACJI

BOGDAN WOSIEWICZ (POZNAŃ)

1. Wstęp

Ogólne sformułowanie modelu mieszanego metody elementów skończonych w oparciu o twierdzenia wariacyjne można znaleźć w pracach PIANA i TONGA [1] oraz HANSTENA [2]. W modelu mieszanym aproksymuje się w elemencie w sposób niezależny zarówno przemieszczenia, jak i naprężenia. W teorii konstrukcji uzyskano szereg interesujących wyników za pomocą tego modelu. Wymienić tu można pracę DUNHAMA i PISTERA [3] dotyczącą zagadnień płaskich, prace HERRMANNNA [4] [5], HELLANA [6], BÄCKLUNDA [7], CRISFILDA [8], COOKA [9], BRONA i DHATTA [10], VISSERA [11] oraz CHATTERJEE i SETLURA [12] poświęcone różnym zagadnieniom teorii płyt i różnym elementom, a także artykuły HERRMANNNA i CAMPBELLA [13] oraz HERRMANNNA i MASONA [14] dotyczące analizy statycznej powłok. W większości cytowanych prac, przy wyprowadzeniu macierzy elementu korzystano z twierdzenia wariacyjnego REISSNERA [15]. Natomiast w pracach [6] i [7] zasadnicze związki wyprowadzono korzystając z metody bezpośredniej.

W pracy niniejszej wyprowadzono macierz elementu w postaci ogólnej dla problemu zginania cienkich płyt izotropowych wychodząc z układu równań różniczkowych zagadnienia i stosując metodę ortogonalizacji [16, 17]. Dalej pokazano zastosowanie otrzymanych wzorów do tworzenia macierzy różnych elementów.

2. Zależności podstawowe

Problem zginania cienkich płyt izotropowych można opisać poniższym układem równań różniczkowych cząstkowych (2.1), z których trzy pierwsze wyrażają zależności pomiędzy momentami płytowymi (m_x , m_y , m_{xy}) a krzywiznami ($w_{,xx}$, $w_{,yy}$, $w_{,xy}$), ostatnie jest równaniem równowagi

$$\begin{aligned} w_{,xx} + K(m_x - \nu m_y) &= 0 \\ w_{,yy} + K(m_y - \nu m_x) &= 0 \\ w_{,xy} + K(1 + \nu)m_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

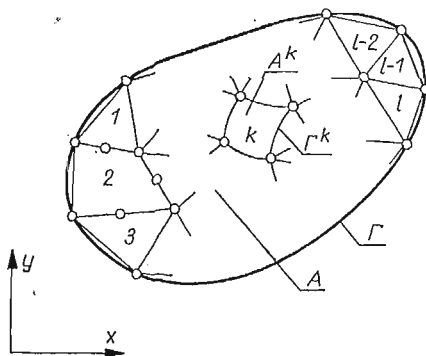
$$m_{x,xx} + m_{y,yy} + 2m_{xy,xy} + q = 0, \quad \text{gdzie } K = \frac{12}{Eh^3}.$$

Przez E , h , ν oznaczono odpowiednio moduł sprężystości, grubość płyty i liczbę Poissona.

Równania (2.1) muszą być tożsamościowo spełnione przez funkcje w , m_x , m_y , m_{xy} w obszarze płyty A ograniczonym brzegiem Γ .

Do dalszych rozważań obszar płyty podzielimy na l podobszarów A^k o brzegach Γ^k , gdzie $k = 1, 2, \dots, l$ (rys. 1). Podobszary te nazywane są elementami skończonymi płyty. W każdym elemencie aproksymować będziemy ugięcia (w) i momenty płytowe (m_x, m_y, m_{xy}) przez poniższe wyrażenia macierzowe (zapisane dla k -tego elementu):

$$(2.2) \quad \begin{aligned} m_x^k &= \Phi^1 M_x^1 + \Phi^2 M_x^2 + \dots + \Phi^\kappa M_x^\kappa + \dots + \Phi^m M_x^m = [\Phi] \{M_x\} & \kappa &= 1, 2, \dots, m, \\ m_y^k &= \Psi^1 M_y^1 + \Psi^2 M_y^2 + \dots + \Psi^\lambda M_y^\lambda + \dots + \Psi^n M_y^n = [\Psi] \{M_y\} & \lambda &= 1, 2, \dots, n, \\ m_{xy}^k &= X^1 M_{xy}^1 + X^2 M_{xy}^2 + \dots + X^\mu M_{xy}^\mu + \dots + X^r M_{xy}^r = [X] \{M_{xy}\} & \mu &= 1, 2, \dots, r, \\ w^k &= \Omega^1 W^1 + \Omega^2 W^2 + \dots + \Omega^\iota W^\iota + \dots + \Omega^s W^s = [\Omega] \{W\} & \iota &= 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$



Rys. 1.

W wyrażeniach (2.2) $M_x^\kappa, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu, W^\iota$ oznaczają odpowiednio m parametrów związanych z momentami m_x , n parametrów związanych z momentami m_y , r parametrów związanych z momentami skręcającymi m_{xy} oraz s parametrów związanych z ugięciami w płyty. Parametry te oznaczać mogą np. wartości funkcji momentów i ugięć w wyróżnionych punktach elementu (w węzłach), wartości pochodnych tych funkcji w węzłach itp.

Funkcje $\Phi^\kappa = \Phi_{(x,y)}^\kappa, \Psi^\lambda = \Psi_{(x,y)}^\lambda, X^\mu = X_{(x,y)}^\mu$ oraz $\Omega^\iota = \Omega_{(x,y)}^\iota$ określają w jaki sposób m_x, m_y, m_{xy} oraz w zależą od współrzędnych x, y i parametrów węzłowych $M_x^\kappa, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu, W^\iota$. Funkcje te nazywane są funkcjami kształtu. Sposoby tworzenia funkcji kształtu dla różnych elementów opisane są np. w pracach ZIENKIEWICZA [18], KOLARA i innych [19] itp.

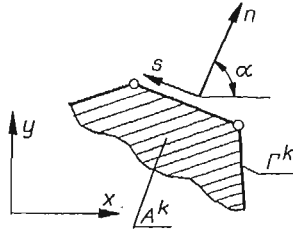
3. Macierz elementu

Rozważmy k -ty element wyodrębniony z badanej płyty. Podstawiając zależności (2.2) do (2.1) otrzymamy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} [\Omega_{,xx}] \{W\} + K([\Phi] \{M_x\} - \nu[\Psi] \{M_y\}) &= f_1(x, y, M_x^\kappa, M_y^\lambda, W^\iota), \\ [\Omega_{,yy}] \{W\} + K([\Psi] \{M_y\} - \nu[\Phi] \{M_x\}) &= f_2(x, y, M_x^\kappa, M_y^\lambda, W^\iota), \\ [\Omega_{,xy}] \{W\} + K(1 + \nu)[X] \{M_{xy}\} &= f_3(x, y, M_{xy}^\mu, W^\iota), \\ [\Phi_{,xx}] \{M_x\} + [\Psi_{,yy}] \{M_y\} + 2[X_{,xy}] \{M_{xy}\} + q &= f_4(x, y, M_x^\kappa, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu). \end{aligned}$$

Równania (3.1) nie są tożsamościowo równe zero, gdyż funkcje aproksymujące momenty i ugięcia (2.2) są funkcjami przybliżonymi. Dokładność przybliżenia równań (2.1) przez (3.1) zależy od dokładności opisu rzeczywistych momentów i ugięć przez związki (2.2). Funkcje f_1, f_2, f_3, f_4 oznaczają błąd aproksymacji.

W naszym przypadku zminimalizujemy błąd aproksymacji przez ortogonalizację funkcji f_1, f_2, f_3, f_4 z układem funkcji $\Phi^\alpha, \Psi^\lambda, X^\mu, \Omega^\iota$ (metoda Galerkina). Sposób ten był poprzednio z powodzeniem stosowany w metodzie przemieszczeń metody elementów skończonych. Dla przykładu SZABO i LEE [16] uzyskali na tej drodze macierz sztywności elementu dla zagadnienia płaskiego, a MIKOŁAJCZAK i WOSIEWICZ [17] dla problemu zginania płyt trójwarstwowych.



Rys. 2.

Do równań (3.1) zastosujemy postępowanie Galerkina w postaci przedstawionej przez związki:

$$\begin{aligned}
 \int \int_{A^k} \Phi^\alpha f_1 dA^k &= 0 & \alpha &= 1, 2, \dots, m, \\
 \int \int_{A^k} \Psi^\lambda f_2 dA^k &= 0 & \lambda &= 1, 2, \dots, n, \\
 \int \int_{A^k} X^\mu f_3 dA^k &= 0 & \mu &= 1, 2, \dots, r, \\
 \int \int_{A^k} \Omega^\iota f_4 dA^k &= 0 & \iota &= 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Podstawiając (3.1) do (3.2) otrzymamy układ $(m+n+r+s)$ równań liniowych na wyznaczenie parametrów $M_x^\alpha, M_y^\lambda, M_{xy}^\mu, W^\iota$:

$$\begin{aligned}
 \int \int_{A^k} (\Phi^\alpha [\Omega_{,xx}] \{W\} + K \Phi^\alpha [\Phi] \{M_x\} - K \nu \Phi^\alpha [\Psi] \{M_y\}) dA^k &= 0, & \alpha &= 1, 2, \dots, m, \\
 \int \int_{A^k} (\Psi^\lambda [\Omega_{,yy}] \{W\} + K \Psi^\lambda [\Psi] \{M_y\} - K \nu \Psi^\lambda [\Phi] \{M_x\}) dA^k &= 0, & \lambda &= 1, 2, \dots, n, \\
 \int \int_{A^k} (X^\mu [\Omega_{,xy}] \{W\} + K(1+\nu) X^\mu [X] \{M_{xy}\}) dA^k &= 0, & \mu &= 1, 2, \dots, r, \\
 \int \int_{A^k} (\Omega^\iota [\Phi_{,xx}] \{M_x\} + \Omega^\iota [\Psi_{,yy}] \{M_y\} + 2\Omega^\iota [X_{,xy}] \{M_{xy}\} + \Omega^\iota q) dA^k &= 0, & \iota &= 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Związki (3.3) przekształcimy korzystając z twierdzenia Greena, które dla funkcji P i Q w układzie współrzędnych jak na rys. 2 ma postać

$$\int \int_{A^k} (P_{,y} + Q_{,x}) dA^k = \oint_{\Gamma^k} (P \sin \alpha + Q \cos \alpha) d\Gamma^k.
 \tag{3.4}$$

Otrzymamy ostatecznie układ $(m+n+r+s)$ równań w postaci:

$$\begin{aligned}
 & K \int \int_{A^k} \Phi^\alpha [\Phi] \{M_x\} dA^k - K\nu \int \int_{A^k} \Phi^\alpha [\Psi] \{M_y\} dA^k - \int \int_{A^k} \Phi_{,x}^\alpha [\Omega_{,x}] \{W\} dA^k = \\
 & \quad - \oint_{\Gamma^k} \Phi^\alpha w_{,n} \cos^2 \alpha d\Gamma^k + \oint_{\Gamma^k} \Phi^\alpha w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \\
 & - K\nu \int \int_{A^k} \Psi^\lambda [\Phi] \{M_x\} dA^k + K \int \int_{A^k} \Psi^\lambda [\Psi] \{M_y\} dA^k - \int \int_{A^k} \Psi_{,y}^\lambda [\Omega_{,y}] \{W\} dA^k = \\
 & \quad - \oint_{\Gamma^k} \Psi^\lambda w_{,n} \sin^2 \alpha d\Gamma^k - \oint_{\Gamma^k} \Psi^\lambda w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k, \quad \lambda = 1, 2, \dots, n, \\
 & 2K \int \int_{A^k} X^\mu [X] \{M_{xy}\} dA^k - \int \int_{A^k} (X_{,x}^\mu [\Omega_{,y}] + X_{,y}^\mu [\Omega_{,x}]) \{W\} dA^k = \\
 & \quad - \oint_{\Gamma^k} X^\mu (2w_{,n} \sin \alpha \cos \alpha + w_{,s} \cos 2\alpha) d\Gamma^k, \quad \mu = 1, 2, \dots, r, \\
 & - \int \int_{A^k} \Omega_{,x}^i [\Phi_{,x}] \{M_x\} dA^k - \int \int_{A^k} \Omega_{,x}^i [\Psi_{,y}] \{M_y\} dA^k - \int \int_{A^k} (\Omega_{,x}^i [X_{,y}] + \\
 & + \Omega_{,y}^i [X_{,x}]) \{M_{xy}\} dA^k + \int \int_{A^k} \Omega^i q dA^k = - \oint_{\Gamma^k} \Omega^i (m_{,n,n} + m_{,n,s}) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Układ (3.5) można zapisać w postaci macierzowej typowej dla metody elementów skończonych

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \mathbf{0} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & \mathbf{0} & k_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ p_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Macierz współczynników przy niewiadomych parametrach węzłowych M_x^α , M_y^λ , M_{xy}^μ , W^i jest poszukiwaną macierzą elementu.

Poszczególne wyrazy podmacierzy k_{ij} , p_4 , b_i ($i, j = 1, 2, 3, 4$) z zależności (3.6) należy wyznaczyć ze wzorów:

$$\begin{aligned}
 & k_{11}^{ij} = K \int \int_{A^k} \Phi^i \Phi^j dA^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \\
 & k_{12}^{ij} = -K\nu \int \int_{A^k} \Phi^i \Psi^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & k_{21}^{ij} = -K\nu \int \int_{A^k} \Psi^i \Phi^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\
 & k_{22}^{ij} = K \int \int_{A^k} \Psi^i \Psi^j dA^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\
 & k_{33}^{ij} = 2K(1+\nu) \int \int_{A^k} X^i X^j dA^k, \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \\
 & k_{14}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Phi_{,x}^i \Omega_{,x}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\
 & k_{24}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Psi_{,y}^i \Omega_{,y}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\
 & k_{34}^{ij} = - \int \int_{A^k} (X_{,x}^i \Omega_{,y}^j + X_{,y}^i \Omega_{,x}^j) dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\
 & k_{41}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Omega_{,x}^i \Phi_{,x}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, m, \\
 & k_{42}^{ij} = - \int \int_{A^k} \Omega_{,y}^i \Psi_{,y}^j dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & k_{43}^{ij} = - \int \int_{A^k} (\Omega_{,x}^i X_{,y}^j + \Omega_{,y}^i X_{,x}^j) dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad j = 1, 2, \dots, r, \\
 & k_{13}^{ij} = k_{23}^{ij} = k_{31}^{ij} = k_{32}^{ij} = k_{44}^{ij} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad p_4^i &= \int_{A^k} \Omega^i q dA^k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\
 b_1^i &= \oint_{\Gamma^k} \Phi^i (w_{,n} \cos^2 \alpha - w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 b_2^i &= \oint_{\Gamma^k} \Psi^i (w_{,n} \sin^2 \alpha + w_{,s} \sin \alpha \cos \alpha) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\
 (3.9) \quad b_3^i &= \oint_{\Gamma^k} X^i (2w_{,n} \sin \alpha \cos \alpha + w_{,s} \cos 2\alpha) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\
 b_4^i &= \oint_{\Gamma^k} \Omega^i (m_{n,n} + m_{n,s}) d\Gamma^k, \quad i = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}$$

Otrzymane ogólne formuły na poszczególne wyrazy macierzy elementu pozwalają na wyznaczenie macierzy dowolnego elementu, jeżeli funkcje kształtu są określone. Nadto wyrażenia te służyć mogą jako podstawa do napisania procedury dla EMC na budowanie macierzy elementu.

Macierz globalną uzyskuje się przez sumowanie wyrażen (3.6) po wszystkich elementach.

Na koniec zauważymy, że przekształcenie (3.4) nakłada na wybór funkcji kształtu Ω^i , Φ^x , Ψ^λ , X^μ pewne ograniczenia. Mianowicie, funkcje Ω^i winny być ciągłe wraz z pochodnymi drugiego rzędu w obszarze elementu A^k oraz ciągłe wraz z pochodnymi pierwszego rzędu na brzegu Γ^k . Funkcje Φ^x , Ψ^λ , X^μ winny być ciągłe wraz z pochodnymi pierwszego rzędu w A^k oraz ciągłe na brzegu Γ^k . Dalsza uwaga dotyczy całek po konturze elementu. W macierzy globalnej całki te sumowane są z analogicznymi całkami dla sąsiednich elementów. Suma będzie równa zeru w przypadku doboru «odpowiednio gładkich» funkcji kształtu, to znaczy zapewniających ciągłość przemieszczeń i ich pochodnych oraz naprężeń (momentów) pomiędzy elementami [16, 17]. W praktyce korzysta się często także z funkcji kształtu, które takiej ciągłości nie zapewniają [5, 7].

Poniżej pokażemy zastosowanie wyprowadzonych formuł do tworzenia macierzy różnych elementów.

4. Element o stałych momentach i inne elementy trójkątne

HERRMANN [5] i HELLAN [6] wyprowadzili macierz elementu trójkątnego uzależniając ugięcia w elemencie od ugięć wierzchołków trójkąta, a momenty od momentów normalnych do boków trójkąta w jego środku. Przyjęcie takich parametrów węzłowych zapewnia liniową zmienność ugięć i stałe wartości momentów wewnątrz elementu.

HERRMANN korzystał z twierdzenia wariacyjnego REISSNERA, HELLAN natomiast z metody bezpośredniej. W pracy [7] BÄCKLUND wykazał, że otrzymane macierze są identyczne.

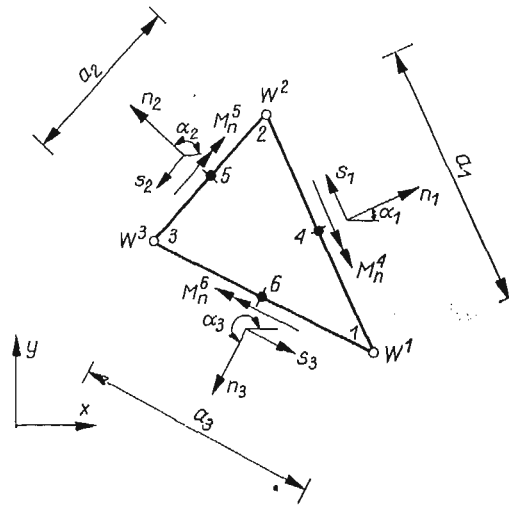
Korzystając z wyprowadzonych wzorów i przyjmując funkcje kształtu jak w [5] wyznaczmy poszczególne wyrazy macierzy elementu, które okazują się identyczne z otrzymanymi przez HERRMANN i HELLANA. Na rys. 3 pokazano rozważany element. Przyjmując, że momenty m_x , m_y , m_{xy} są stałe w elemencie można wyznaczyć momenty normalne do brzegów korzystając z poniższego wyrażenia:

$$(4.1) \quad \begin{Bmatrix} M_n^4 \\ M_n^5 \\ M_n^6 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_1 & \sin^2 \alpha_1 & \sin 2\alpha_1 \\ \cos^2 \alpha_2 & \sin^2 \alpha_2 & \sin 2\alpha_2 \\ \cos^2 \alpha_3 & \sin^2 \alpha_3 & \sin 2\alpha_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Przez odwrócenie (4.1.) wyrazimy momenty płytowe wewnątrz elementu przez momenty normalne do brzegów

$$(4.2) \quad \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} M_n^4 \\ M_n^5 \\ M_n^6 \end{Bmatrix}, \quad [B] = [A]^{-1}.$$

W ten sposób określiliśmy funkcje kształtu Φ^κ , Ψ^λ , X^μ .



Rys. 3.

Mają one postać

$$(4.3) \quad \Phi^\kappa = B_{1\kappa}, \quad \Psi^\lambda = B_{2\lambda}, \quad X^\mu = B_{3\mu}, \quad \text{gdzie } \kappa, \lambda, \mu = 1, 2, 3.$$

Parametry węzłowe spełniają relację

$$(4.4) \quad M_x^\kappa = M_y^\kappa = M_{xy}^\kappa = M_n^{\kappa+3}.$$

Przyjmując, że ugięcie wewnątrz elementu można opisać wielomianem

$$(4.5) \quad w = a_1 + a_2 x + a_3 y,$$

funkcje kształtu Ω^i ($i = 1, 2, 3$) otrzymać można przez podstawienie do (4.5) współrzędnych wierzchołków trójkąta i odwrócenie tak otrzymanej zależności macierzowej

$$(4.6) \quad \begin{Bmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}.$$

Po odwróceniu otrzymamy

$$(4.7) \quad \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} W^1 \\ W^2 \\ W^3 \end{Bmatrix}, \quad [D] = [C]^{-1},$$

a funkcje kształtu mają postać

$$(4.8) \quad \Omega^i = D_{1i} + D_{2i}x + D_{3i}y, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dla przykładu Ω^1 wyraża się poniższym wzorem

$$\Omega^1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y].$$

Przyjęte funkcje kształtu (4.8) nie zapewniają ciągłości $w_{,n}$ pomiędzy dwoma elementami. Zachowana jest ciągłość pochodnej stycznej. Przy tworzeniu macierzy elementu pominiemy całki liniowe zawierające $w_{,n}$ jako nieokreślone, natomiast całki z $w_{,s}$ włączymy do macierzy elementu.

Wobec (4.4) zmniejszy się wymiar macierzy elementu, momenty płytowe zależą bowiem od trzech tych samych parametrów. Stąd w wyrażeniu (3.6) należy zsumować pewne wyrazy.

Przepiszemy (3.6) w postaci:

$$(4.9) \quad \begin{bmatrix} G & H \\ H^T & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_n \\ W \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{O} \\ p \end{Bmatrix},$$

gdzie $[M_n \ W]^T = [M_n^4 \ M_n^5 \ M_n^6 \ W^1 \ W^2 \ W^3]^T$.

Poszczególne wyrazy (4.9) będą sumami odpowiednich wyrazów (3.6):

$$(4.10) \quad G^{ij} = K \left\{ \int_{A^k} \Phi^i \Phi^j dA^k + \int_{A^k} \Psi^i \Psi^j dA^k + 2(1+\nu) \int \int_{A^k} X^i X^j dA_{\frac{k}{2}}^k + \right. \\ \left. - \nu \left(\int \int_{A_{\frac{k}{2}}^k} \Phi^i \Psi^j dA_{\frac{k}{2}}^k + \int \int_{A^k} \Phi^j \Psi^i dA_{\frac{k}{2}}^k \right) \right\}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$(4.11) \quad H^{ij} = - \left\{ \int \int_{A_{\frac{k}{2}}^k} \Phi_{,x}^i \Omega_{,x}^j dA_{\frac{k}{2}}^k + \int \int_{A^k} \Psi_{,y}^i \Omega_{,y}^j dA^k + \int \int_{A^k} (X_{,x}^i \Omega_{,y}^j + X_{,y}^i \Omega_{,x}^j) dA^k + \right. \\ \left. + \oint_{\Gamma^k} \Phi^i \Omega_{,s}^j \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k - \oint_{\Gamma^k} \Psi^i \Omega_{,s}^j \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k - \oint_{\Gamma^k} X^i \Omega_{,s}^j \cos 2\alpha d\Gamma^k \right\},$$

$$i, j = 1, 2, 3.$$

Ponadto w wyrażeniach (4.11) pozostaną tylko całki liniowe ponieważ funkcje Φ^x, Ψ^x, X^x są stałe, a w całkach powierzchniowych występują ich pochodne.

Wykorzystując (4.3) i biorąc pod uwagę, że

$$\int \int_{A^k} \Phi^i \Phi^j dA_{\frac{k}{2}}^k = \int \int_{A^k} B_{1i} B_{1j} dA^k = B_{1i} B_{1j} \int \int_{A^k} dA^k = \Delta^k B_{1i} B_{1j} \text{ itd.},$$

gdzie Δ^k oznacza pole elementu, otrzymamy wyrażenie na G^{ij} w postaci identycznej, jak w [5]

$$(4.12) \quad G^{ij} = K \Delta^k [B_{1i} B_{1j} + B_{2i} B_{2j} + 2(1+\nu) B_{3i} B_{3j} - \nu (B_{1i} B_{2j} + B_{1j} B_{2i})].$$

Wyrażenie (4.11) przekształcimy korzystając z zależności

$$\Omega_{,s}^i = -\Omega_{,x}^i \sin \alpha + \Omega_{,y}^i \cos \alpha, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie $\Omega_{,x}^i = D_{2i}$, $\Omega_{,y}^i = D_{3i}$ oraz biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^k} \Phi^i \Omega_{,s}^j \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k &= \oint_{\Gamma^k} B_{1i} (-D_{2j} \sin \alpha + D_{3j} \cos \alpha) \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k = \\ &= \sum_{k=1}^3 B_{1i} (-D_{2j} \sin \alpha_k + D_{3j} \cos \alpha_k) \sin \alpha_k \cos \alpha_k a_k. \end{aligned}$$

Otrzymamy ostatecznie wyrażenie identyczne, jak w pracy [5]

$$(4.13) \quad H^{ij} = \sum_{k=1}^3 a_k P_{kj} F_{ki},$$

gdzie

$$P_{kj} = -D_{2j} \sin \alpha_k + D_{3j} \cos \alpha_k,$$

$$F_{ki} = \sum_{l=1}^3 E_{kl} B_{li},$$

$$E_{i1} = -E_{i2} = -\sin \alpha_i \cos \alpha_i,$$

$$E_{i3} = \cos 2\alpha_i.$$

Należy tutaj zaznaczyć, że za pomocą elementu trójkątnego o stałych momentach uzyskano szereg dobrych rezultatów w analizie statycznej płyt [5, 6, 7], pomimo że funkcje kształtu nie spełniają kryteriów ciągłości.

Zupełnie podobnie uzyskać można macierze dla innych elementów trójkątnych. Poniżej krótko naszkicowano kilka takich elementów.

Na początek rozpatrzmy element trójkątny (rys. 4) o stałych momentach, którego ugięcia opisane są zupełnym wielomianem stopnia drugiego

$$(4.14) \quad w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2.$$

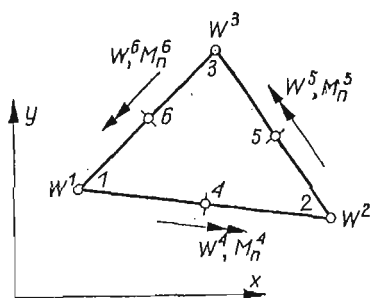
Funkcje kształtu dla ugięcia otrzymamy przyjmując jako parametry węzłowe ugięcia w sześciu punktach elementu (rys. 4).

Wyrażenie (4.12) pozostaje nadal ważne, gdyż funkcje Φ^* , Ψ^λ , X^μ są identyczne, jak poprzednio. Jednakże całki liniowe w (4.11) nie są teraz łatwe do obliczenia, gdyż po zróżniczkowaniu pozostają jeszcze człony liniowe. Przez całkowanie numeryczne można w konkretnych przypadkach ominąć te trudności.

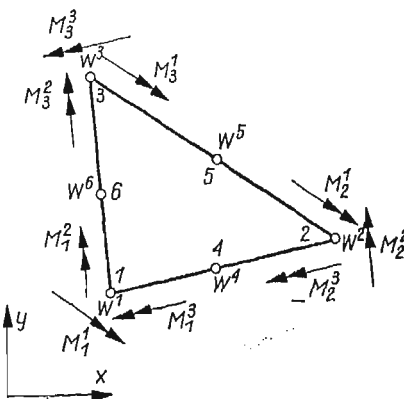
Inne, bardziej złożone elementy trójkątne dla modelu mieszanego proponują BRON i DHATT [10]. Element nazywany przez nich T11 powstaje przez przyjęcie jako parametrów węzłowych ugięć i momentów w wierzchołkach trójkąta. Stąd Φ^* , Ψ^λ , X^μ , Ω^i opisane są wielomianami stopnia pierwszego. W elemencie T22 dla funkcji kształtu przyjęto zupełny wielomian stopnia drugiego, zarówno dla momentów, jak i ugięć.

VISSER w pracy [11] wprowadził element trójkątny o liniowo zmiennych momentach i parabolicznie zmiennych ugięciach. Ugięcia uzależnione są w sposób typowy od sześciu

parametrów (jak w T22), natomiast momenty płytowe od dziewięciu momentów normalnych, do linii równoległych do boków trójkąta (rys. 5). Wyniki uzyskane za pomocą tego elementu są szczególnie dobre [11].



Rys. 4.



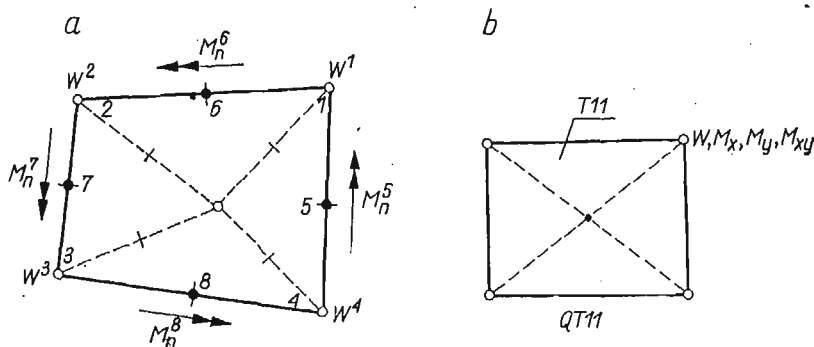
Rys. 5.

Oczywiste jest, że można tworzyć elementy jeszcze bardziej złożone, podobnie jak dla metody przemieszczeń, uzyskując ciągłość nawet drugich pochodnych funkcji Φ^* , Ψ^* , X^* , Ω^* [20].

Macierze tych elementów można także uzyskać za pomocą związków (3.6).

5. Elementy prostokątne

Najprostszy sposób tworzenia elementów prostokątnych (czworokątnych) polega na połączeniu dwóch lub czterech elementów trójkątnych i wyeliminowaniu z otrzymanej w ten sposób macierzy elementu wszystkich parametrów wewnętrznych. Na rys. 6 poka-



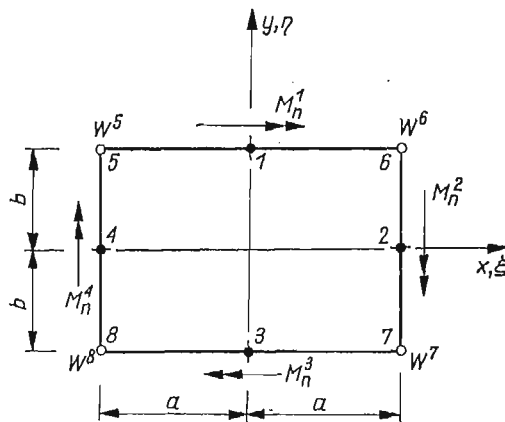
Rys. 6.

zano element czworokątny HERRMANNA [5] i element prostokątny QT11 BRONA i DHATTA [10].

Alternatywnie można wyznaczyć macierze elementów prostokątnych przez określenie wyrażeń aproksymujących w , m_x , m_y , m_{xy} i wykorzystanie związków (3.6).

Pokażemy to na przykładzie elementu prostokątnego o liniowo zmiennych momentach m_x i m_y , stałym, zależnym od ugięć wierzchołków elementu momencie skręcającym m_{xy} oraz ugięciach opisanych wielomianem

$$(5.1) \quad w = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy.$$



Rys. 7.

Element ten zaproponował BÄCKLUND w pracy [7] (rys. 7). Wyrażenia aproksymujące mają postać [7]:

$$(5.2) \quad m_x = \frac{1}{4b} [(1 + \xi)(1 - \xi)] \begin{Bmatrix} M_n^2 \\ M_n^4 \end{Bmatrix},$$

$$m_y = \frac{1}{4a} [(1 + \eta)(1 - \eta)] \begin{Bmatrix} M_n^1 \\ M_n^3 \end{Bmatrix},$$

$$m_{xy} = \frac{1}{4K(1 + \nu)ab} [1 - 1 \quad 1 \quad -1] \begin{Bmatrix} W^5 \\ W^6 \\ W^7 \\ W^8 \end{Bmatrix},$$

$$w = \frac{1}{4} [(1 - \xi + \eta - \xi\eta)(1 + \xi + \eta + \xi\eta)(1 + \xi - \eta - \xi\eta)(1 - \xi - \eta + \xi\eta)] \begin{Bmatrix} W^5 \\ W^6 \\ W^7 \\ W^8 \end{Bmatrix},$$

gdzie $\xi = x/a$, $\eta = y/b$.

Ponieważ związki (5.2) określają w sposób jednoznaczny funkcje kształtu, możemy bez trudności określić współczynniki macierzy elementu. Z uwagi na to, że ugięcia i momenty skręcające uzależnione są od tych samych parametrów — ugięć wierzchołków — macierz elementu będzie miała teraz wymiar 8×8 i postać

$$(5.3) \quad \left[\frac{G}{H^T} \mid \frac{H}{L} \right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} k_{11} & k_{12} & & k_{14} & \\ k_{21} & k_{22} & & k_{24} & \\ \hline k_{41} & k_{42} & k_{33} + k_{34} + k_{43} & & \end{array} \right].$$

Ponadto funkcje X^u są teraz stałe w elemencie stąd $k_{34}^{ij} = k_{43}^{ij} = 0$.

Poniżej przykładowo wyznaczymy kilka wyrazów tej macierzy. Całą macierz nieco w innej postaci można znaleźć w cytowanej pracy BÄCKLUNDA [7]

$$\begin{aligned} k_{11}^1 &= K \int \int_{A^k} \Phi^1 \Phi^1 dA^k = K \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi^1 \Phi^1 ab d\xi d\eta = \\ &= Kab \int_{-1}^1 d\xi \int_{-1}^1 \frac{1}{4b} (1+\xi) \frac{1}{4b} (1+\xi) d\xi = \frac{Ka}{3b}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{14}^{23} &= - \int \int_{A^k} \Phi_{,x}^2 \Omega_{,x}^3 dA^k - \oint_{\Gamma^k} \Omega_{,s}^3 \sin \alpha \cos \alpha d\Gamma^k = \\ &= -ab \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{4ab} \right) \frac{1}{4a} (1-\eta) d\xi d\eta = \frac{1}{4a}. \end{aligned}$$

Podobnie, jak dla elementów trójkątnych można tworzyć elementy prostokątne o bardziej skomplikowanej budowie.

6. Podsumowanie

Na zakończenie należy zwrócić uwagę, że wyrażenie (3.6) ma postać ogólniejszą od analogicznych równań tego typu uzyskanych metodami wariacyjnymi. Postać funkcjonału Reissnera dla metody elementów skończonych zależy bowiem od charakteru ciągłości funkcji w , m_x , m_y , m_{xy} pomiędzy elementami [1].

Metoda ortogonalizacyjna okazuje się dobrym narzędziem budowania macierzy elementu dla modelu mieszanego metody elementów skończonych i można ją wykorzystać do innych problemów (pręty, tarcze, powłoki).

Otrzymane wzory są niezależne od kształtu elementu i pozwalają na łatwe i szybkie wyznaczenie poszczególnych wyrazów macierzy dla konkretnych elementów. Wzory nadają się do napisania uniwersalnej procedury dla EMC na tworzenie macierzy elementu.

Literatura cytowana w tekście

1. T. H. H. PIAN, P. TONG, *Basis of finite element methods for solid continua*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969), 3—28.
2. O. E. HANSTEN, *Finite element methods as applications of variational principles*, roz. 15 *Finite element methods in stress analysis*, (ed. I. HOLAND, K. BELL), TAPPIR, Thronheim, Norway, 1970.
3. R. S. DUNHAM, K. S. PISTER, *A finite element application of the Hallinger — Reissner variational theorem*, 2nd Conference on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio 1968.
4. L. R. HERRMANN, *A bending analysis for plates*, Proc. Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 1965.
5. L. R. HERRMANN, *Finite-element bending analysis of plates*, J. Eng. Mech. Div., 93 (1967) 13—26]
6. K. HELLAN, *Analysis of elastic plates in flexure by a simplified finite element method*, Acta Politechnica Scandinavica, Civil Eng. Series 46, Thronheim 1967.

7. J. BÄCKLUND, *Mixed finite element analysis of plates in bending*, Chalmers Tekniska Högskola, Inst. f. byggnadsstatik, Publ. 71: 4, Göteborg 1972.
8. M. A. CRISFILD, dyskusja do pracy [5], J. Eng. Mech. Div., 94 (1968) 706—707.
9. R. D. COOK, dyskusja do pracy [5], J. Eng. Mech. Div., 94 (1969) 859—898.
10. J. BRON, G. DHATT, *Mixed quadrilateral element for bending*, AIAA Journal, 10 (1972) 1359—1361.
11. W. VISSER, *A refined mixed-type plate bending element*, AIAA Journal, 7 (1968) 1801—1803.
12. A. CHATTERJEE, A. V. SETLUR, *A mixed finite element formulation for plate problems*, Int. J. Num. Meth. Eng., 4 (1972) 67—84.
13. L. R. HERRMANN, D. M. CAMPBELL, *A finite-element analysis for thin shells*, AIAA Journal, 6 (1968) 1842—1847.
14. L. R. HERRMANN, W. E. MASON, *Mixed formulation for finite element shell analysis*, University of California.
15. E. REISSNER, *On variational theorem in elasticity*, J. Math. Physics, 29 (1950) 90—95.
16. B. A. SZABO, G. C. LEE, *Derevation of stiffness matrices for problems in plane elasticity by Galerkin's method*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1 (1969) 301—310.
17. H. MIKOŁAJCZAK, B. WOSIEWICZ, *Macierz sztywności elementu zginanej płyty trójwarstwowej*, Mech. Teoret. Stos., 11 (1973) 473—485.
18. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
19. V. KOLAR, J. KRAROVIL, M. ZLAMAL, A. ŽENIŠEK, *Technical, phisical and mathematical principles of the finite element methods*, Rozpr. ČSAV, 81 (1971).
20. A. ŽENIŠEK *Některé typy prvků a náhradních funkci v metode konečných prvku*, Staveb. Časopis, 18 (1970) 48—62.

Р е з ю м е

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ ЭЛЕМЕНТА ИЗГИБАЕМОЙ ПЛИТЫ
ДЛЯ СМЕШАННОЙ МОДЕЛИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Методом Бубнова-Галеркина ([16, 17]) выводятся общие выражения на матрицу элемента применительно к анализу изгиба тонких изотропных плит с помощью смешанного метода конечных элементов. Область плиты разделяется на элементы, для каждого элемента прогибы w и моменты m_x , m_y , m_{xy} аппроксимировались с помощью зависимостей (2.2). После подстановки (2.2) в дифференциальные уравнения задачи (2.1), и последующей ортогонализации полученных таким образом выражений на ошибку аппроксимации f_1, f_2, f_3, f_4 относительно системы функций вида $\Phi^\alpha, \Psi^\lambda, X^\mu, \Omega^i$, согласно зависимости (3.2), получена система уравнений (3.5). Матрица коэффициентов, при неизвестных является искомой матрицей элемента.

Применение полученных формул показано на примере треугольного элемента с постоянными моментами (Геррманн [5], Геллан [6]) и прямоугольного элемента с линейно изменяющимися моментами m_x и m_y и с постоянными m_{xy} (Баклунд [7]). Проведен краткий обзор различного вида элементов.

S u m m a r y

DETERMINATION OF THE ELEMENT MATRIX OF A PLATE OF BENDING, FOR A MIXED
MODEL BY THE ORTHOGONALIZATION METHOD

The method of orthogonalization [16, 17] is used to derive a general expression for the element matrix used in bending problems of thin isotropic plates solved by means of the mixed finite element model. The plate is divided into elements. In each of the elements deflections w and moments m_x , m_y , m_{xy} are approximated by Eqs. (2.2). Inserting Eqs. (2.2) into the differential Eqs. (2.1) and orthogonalizing the expressions obtained for f_1, f_2, f_3, f_4 with the functions $\Phi^\alpha, \Psi^\lambda, X^\mu, \Omega^i$, we obtain the set of Eqs. (3.5). The matrix of coefficients at the unknowns is the element matrix sought for.

The method is illustrated by the example of a triangular with constant moments (Herrmann [5], Hellan [6]) and of a rectangular element with linearly variable moments m_x , m_y and constant m_{xy} (Bäcklund [7]). Short review of various elements is presented.

INSTYTUT BUDOWNICTWA WODNO-MELIORACYJNEGO AKADEMII ROLNICZEJ, POZNAŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 grudnia 1973 r.

WYBRANE OSIOWO-SYMETRYCZNE ZAGADNIENIA OBRÓBKI
PLASTYCZNEJ METALI*

MARIAN GRZYMKOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali posiadają duże znaczenie praktyczne. Prawie wszystkie procesy kucia na młotach, prasach, kuźniarkach oraz prasowanie na zimno i gorąco, ciągnięcie prętów, wytłaczanie i przetłaczanie przebiegają w warunkach osiowej symetrii.

Ważnym i często stosowanym procesem jest kucie swobodne pierścieni i krążków będących odkuwkami wstępnymi do kucia matrycowego lub gotowymi półfabrykatami. Procesy obróbki plastycznej metali są bardzo ważne dla technologii obróbki części maszyn i urządzeń, ponieważ obniżają one koszt ich wytwarzania i wpływają na wzrost wytrzymałości mechanicznej poprzez zjawisko umocnienia materiału.

Procesy przebiegające w warunkach osiowej symetrii są, z praktycznego punktu widzenia, szczególnie istotne. Niewiele z nich doczekało się jednak analizy teoretycznej opartej na teorii plastyczności. Analiza tych procesów jest znacznie trudniejsza niż procesów będących w płaskim stanie odkształcenia. Ważność zagadnień osiowo-symetrycznych dla technologii wytwarzania skłoniła autora do podjęcia rozważań nad nimi.

W analizie procesów obróbki plastycznej metali podstawowym zagadnieniem jest określenie nacisków pomiędzy narzędziem formującym a materiałem, energii zużytej w czasie procesu oraz mechanizmu płynięcia. Traktując materiał jako sztywno-plastyczny, izotropowy, nieściśliwy i pomijając efekt wzmocnienia oraz lepkości, możemy znacznie uprościć analizę. Zagadnienie płynięcia plastycznego możemy rozwiązywać metodami teorii plastyczności, poszukując:

1) rozwiązań ścisłych,

2) ocen nośności:

a) oceny górnej na podstawie pól kinematycznie dopuszczalnych (pól charakterystyk prędkości, zadanych analitycznych rozkładów prędkości lub ruchu sztywnych bloków),

b) oceny dolnej na podstawie pól statycznie dopuszczalnych (pól charakterystyk naprężeń lub zadanych analitycznych rozkładów naprężenia),

3) rozwiązań uproszczonych.

Dla celów praktycznych większe znaczenie mają metody uproszczone.

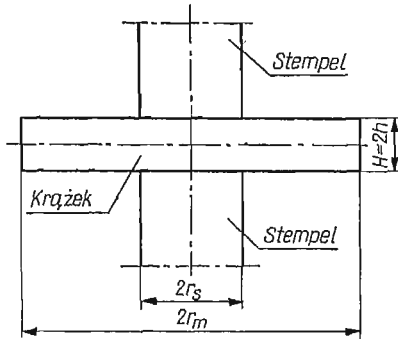
W pracy podano rozwiązania dwóch, praktycznie ważnych, zagadnień obróbki plastycznej metali:

1. Wciskanie dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek (rys. 1).

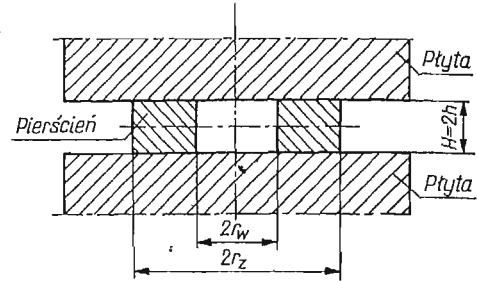
2. Ściskanie pierścieni między sztywnymi płytami (rys. 2).

* Streszczenie pracy doktorskiej pt. *Osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali*, obronionej w czeńwcu 1973 r. [9].

Do znalezienia nacisków jednostkowych i mechanizmu płynięcia zastosowano metodę charakterystyk, metodę założenia funkcji rozkładu prędkości oraz metodę uproszczoną. Wyniki teoretyczne porównano z wynikami doświadczalnymi.



Rys. 1. Schemat wciskania dwóch przeciwnych cylindrycznych stempelów w krążek



Rys. 2. Schemat ściskania pierścienia między czterema płytami

Pole statyczne znajdziemy wychodząc z równań równowagi dla osiowej symetrii, warunku plastyczności Treski i postulatu pełnej plastyczności. Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy równania różniczkowe charakterystyk i związków wzdłuż charakterystyk [23, 26]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \vartheta; & dp - 2k d\vartheta &= \frac{k}{r} (dz \pm dr) \text{ dla linii } \alpha, \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{ctg} \vartheta; & dp + 2k d\vartheta &= -\frac{k}{r} (dz \mp dr) \text{ dla linii } \beta. \end{aligned}$$

Górne znaki dotyczą płynięcia materiału na zewnątrz, dolne natomiast — do środka przyjętego układu osi współrzędnych. Pole kinematyczne znajdziemy wychodząc z warunku nieściśliwości i warunku izotropii. Równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości i związków wzdłuż charakterystyk dla prędkości przyjmują postać

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \operatorname{tg} \vartheta; & dv_r \cos \vartheta + dv_z \sin \vartheta &= -\frac{vr}{2r} (dr \cos \vartheta + dz \sin \vartheta) \text{ dla linii } \alpha, \\ \frac{dz}{dr} &= -\operatorname{ctg} \vartheta; & dv_r \sin \vartheta - dv_z \cos \vartheta &= \frac{vr}{2r} (dz \cos \vartheta - dr \sin \vartheta) \text{ dla linii } \beta. \end{aligned}$$

Równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości (1.2) są takie same, jak równania różniczkowe charakterystyk dla naprężeń (1.1), a więc charakterystyki dla prędkości pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń.

Wzdłuż linii nieciągłości prędkości α skok prędkości jest określony wzorem

$$(1.3) \quad |\Delta v_\alpha| = \frac{|v_\alpha| \cdot \sqrt{R}}{\sqrt{r}},$$

w którym R jest promieniem punktu przecięcia rozpatrywanej linii z osią r , v_α jest składową prędkości w tym punkcie, r jest współrzędną punktu, w którym wartość skoku

składowej prędkości Δv_α jest obliczona. Analogiczny wzór obowiązuje, gdy linią nieciągłości prędkości jest linia β .

Nacisk jednostkowy \bar{p} potrzebny do odkształcenia plastycznego oblicza się z bilansu energii dysypacji w elementach objętości, na powierzchniach kontaktu z narzędziem i na liniach nieciągłości. Nacisk ten oblicza się z równania [1, 14]

$$(1.4) \quad \int_{F_0} \bar{p} v_0 dF_0 = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{F_s} \tau_s v_s dF_s,$$

a w przypadku przyjęcia warunku plastyczności Hubera-Misesa z równania

$$(1.5) \quad \int_{F_0} p v_0 dF_0 = \int_V \sigma_p \dot{\epsilon}_i dV + \int_{F_s} \tau_s v_s dF_s.$$

Z równań (1.4) i (1.5) oblicza się górną ocenę nośności granicznej.

2. Wciskanie dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek

Zagadnienie wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek występuje w procesie kucia odkuwek swobodnie kutych z otworem w środku oraz w pierwszej fazie kucia matrycowego wszelkiego rodzaju kół, pierścieni i krążków również z otworem w środku. Zagadnienie to zostanie rozwiązane metodą charakterystyk i metodą założenia funkcji rozkładu prędkości płynięcia.

2.1. Obliczenie średniego nacisku jednostkowego metodą charakterystyk. Zadanie wciskania dwóch przeciwległych cylindrycznych stempli w krążek można rozwiązać metodą charakterystyk przez rozbitcie go na dwa zagadnienia:

1) rozłaczanie pierścienia o promieniu $r_s \leq r \leq r_m$ ciśnieniem q wynikającym ze ściskania walca o promieniu r_s stemplami ($v_r > 0$, $\dot{\epsilon}_\theta > 0$, $\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta = 0$),

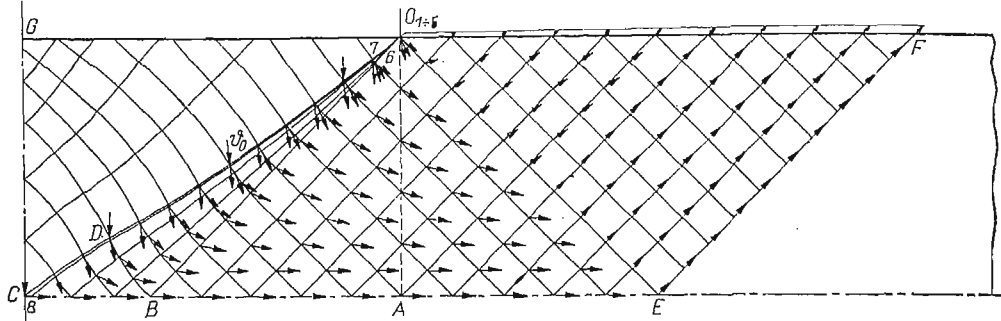
2) ściskanie walca o średnicy $2r_s$ między stemplami z uwzględnieniem działania bocznego ciśnienia q .

Ciśnienie q rozłaczania pierścienia może przyjmować wartości od zera do $2k$. Maksymalny promień pierścienia r_m , który będzie zależny od przyjętego ciśnienia q można znaleźć z równania

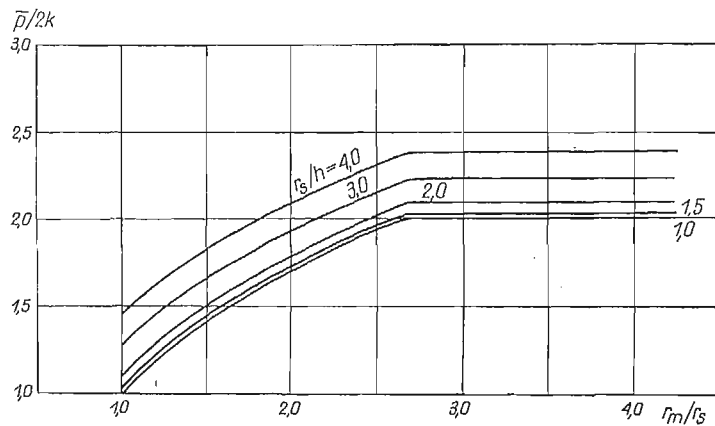
$$(2.1) \quad r_m = r_s e^{\frac{q}{2k}}.$$

Jeśli przyjmiemy, że ciśnienie q rozłaczania pierścienia działa na pobocznice walca ściskanego stemplami ($q = -\sigma_r$), to wówczas na brzegu walca mamy jednorodny stan naprężenia $\sigma_r = -q$, $\sigma_z = -(2k + q)$. Przyjmując taki stan naprężenia zamiast stanu naprężenia dla ściskania walca $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -2k$ uwzględnimy oddziaływanie pierścienia na walec, a tym samym rozwiążemy zadanie wciskania stempli w krążek.

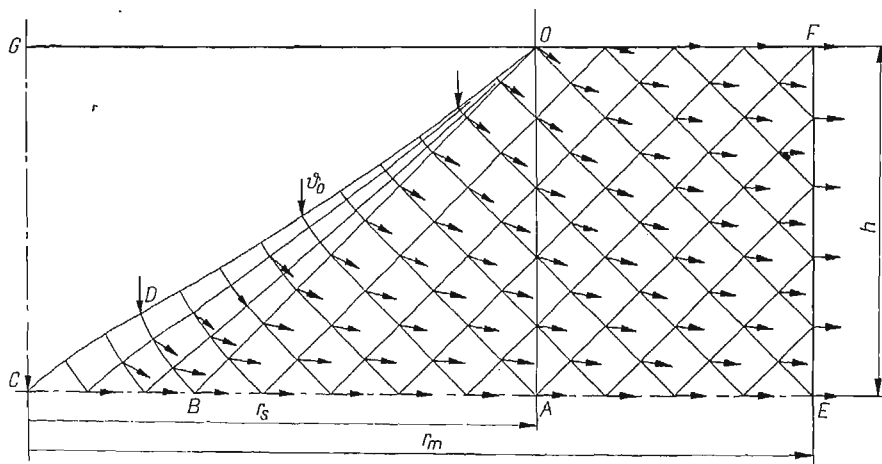
Rozwiązanie statyczne krążka pod stemplami znajdziemy rozwiązując równania (1.1) dla przyjętych warunków brzegowych. Pole charakterystyk wraz z polem kinematycznym pokazano na rys. 3. Dolną ocenę nośności zadania obliczono ze stanu naprężenia na ostatniej charakterystyce ODC (rys. 3) i przedstawiono na rys. 4.



Rys. 3. Pole naprężeń i pole prędkości płynięcia dla $r_s/h = 1,5$

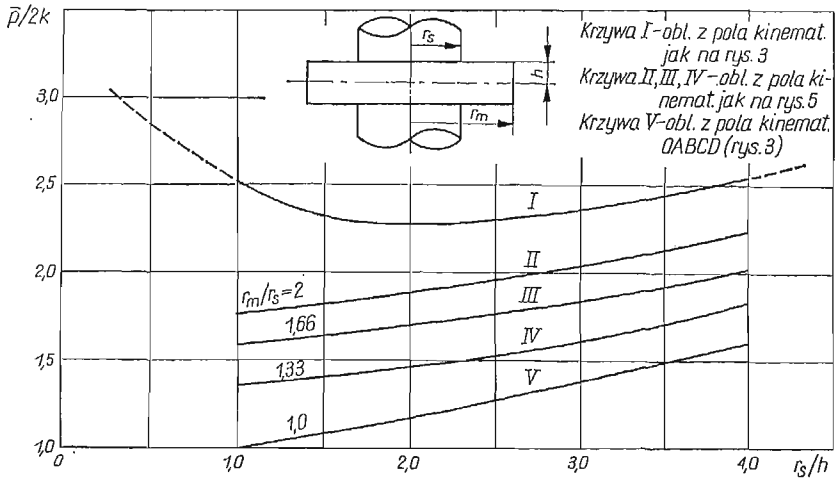


Rys. 4. Dolna ocena nośności krążków

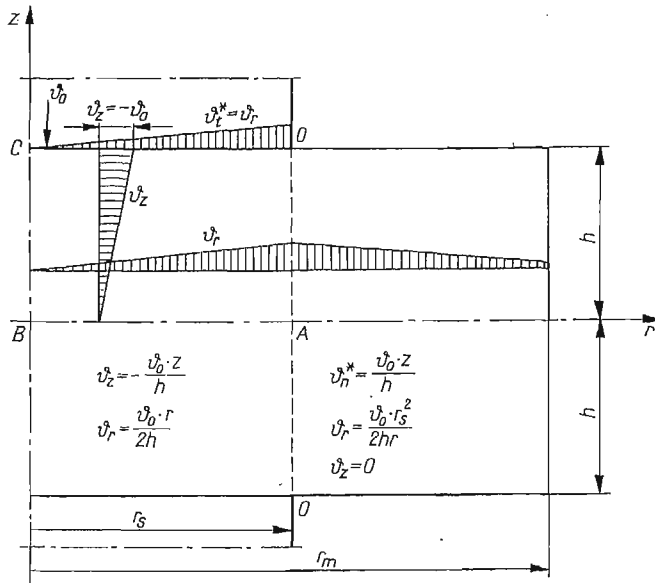


Rys. 5. Pole naprężeń i prędkości płynięcia dla krążków o promieniu $r_m < r_s + 2h$ ($\frac{r_s}{h} = 1,5$)

Rozwiązanie kinematyczne krążka (rys. 3), w części pod stemplem, jest zbudowane na polu sątaczynym, natomiast w pierścieniu przyjmujemy dowolne pole o prostoliniowych charakterystykach. Rozwiązanie znajdujemy z równań (1.2). Na rys. 5 przedstawiono pole naprężeń i prędkości płynięcia dla krążków o promieniu $r_m < r_s + 2h$. Górną ocenę nośności oblicza się z pola kinematycznego wykorzystując równanie (1.4). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6. Krzywa I nacisków jednostkowych przechodzi przez punkt obliczony przez EASONA i SHIELDSA [7] ($r_s/h = 0,274$, $\mu = 0,139$, $\bar{p} = 3,02 \cdot 2k$).



Rys. 6. Górną oceną nośności krążków obliczona metodą charakterystyk

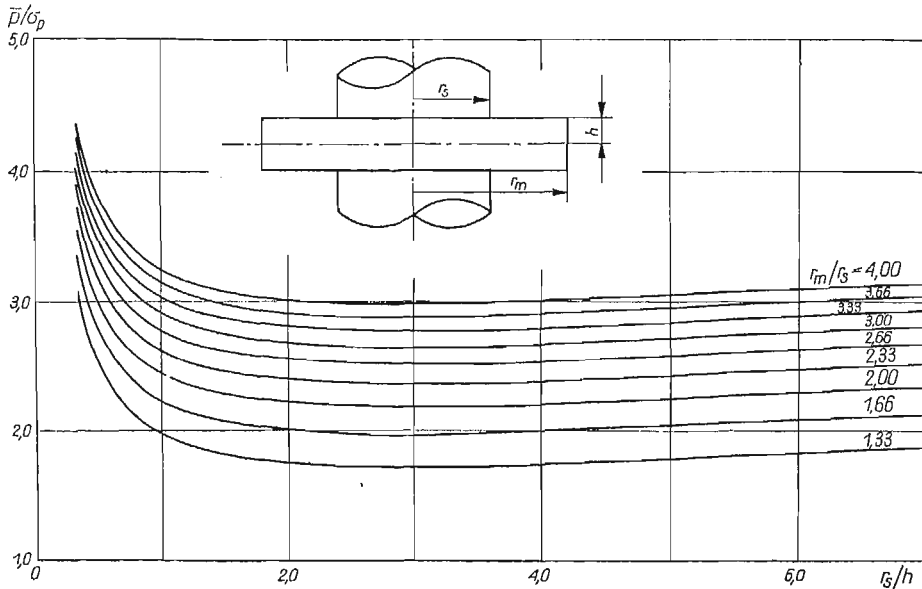


Rys. 7. Rozkład prędkości płynięcia

2.2. Obliczenie górnej oceny nacisku jednostkowego metodą założenia funkcji rozkładu prędkości płynięcia. Górną ocenę nośności granicznej dla osiowo-symetrycznych zadań można znaleźć z kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości utworzonego z przyjęcia funkcji opisującej promieniową v_r lub osiową v_z składową prędkości płynięcia. Funkcje te muszą spełniać warunki pola kinematycznie dopuszczalnego. Do rozwiązania zadania wciskania dwóch przeciwnych cylindrycznych stempli w krążek przyjmujemy liniową zmianę prędkości wzdłuż osi z w postaci

$$(2.2) \quad v_z = -\frac{v_0 z}{h}.$$

Rozkład prędkości płynięcia w krążku pokazano na rys. 7. Wykorzystując warunek nieściśliwości obliczamy składowe prędkości odkształceń i intensywność prędkości odkształceń. Z równania (1.5) obliczamy średni nacisk jednostkowy, którego zależność od parametrów geometrycznych pokazano przykładowo dla współczynnika tarcia $c = 0,35$ na rys. 8.

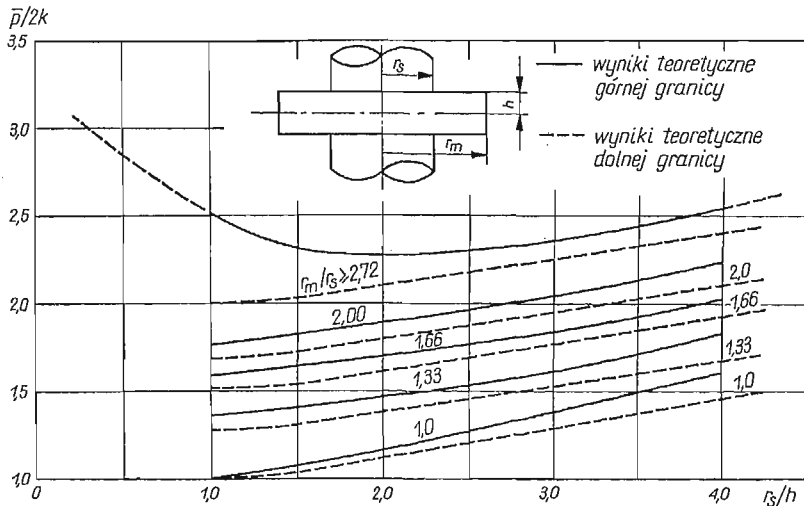


Rys. 8. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów krążka i średnicy stempli dla tarcia suchego ($c = 0,35$)

2.3. Analiza wyników obliczeń i ich porównanie. Dolna ocena nacisku jednostkowego krążków (rys. 4) rośnie wraz ze wzrostem stosunków wymiarów krążka r_s/h i r_m/r_s . Dla krążków o promieniu $r_m \geq 2,72 \cdot r_s$ nacisk zależy tylko od wysokości h , a nie zależy od promienia r_m , a zatem zewnętrzna część krążka o promieniu $r_m > 2,72 \cdot r_s$ jest sztywna i nie wpływa na nośność graniczną. Na rys. 6 przedstawiono górną ocenę nośności krążków obliczoną metodą charakterystyk. Krzywa I przedstawia nacisk dla krążków o dużej średnicy ($r_m > r_s + 2h$), krzywe II, III i IV określają naciski dla krążków o promieniu $r_m < r_s + 2h$ (według rozwiązania z rys. 5), natomiast krzywa V pokazuje naciski przy ściskaniu walca. Naciski obliczone metodą założenia funkcji rozkładu prędkości (rys. 8)

zależą od geometrii krążków i od przyjętego tarcia na kontakcie (współczynnika c). Nacisk jednostkowy rośnie wraz ze wzrostem współczynnika c i stosunku promieni krążka r_m/r_s .

Na rys. 9 przedstawiono górną i dolną ocenę nacisków obliczoną metodą charakterystyk. Wyników metody założenia funkcji rozkładu prędkości nie porównywano z wy-



Rys. 9. Porównanie wyników teoretycznych metody charakterystyk

nikami uzyskanymi metodą charakterystyk, ponieważ metoda ta opiera się na innych założeniach i w związku z tym krzywe nacisków mają zupełnie inny charakter wznoszenia i opadania.

3. Ściskanie pierścieni między dwiema sztywnymi płytami

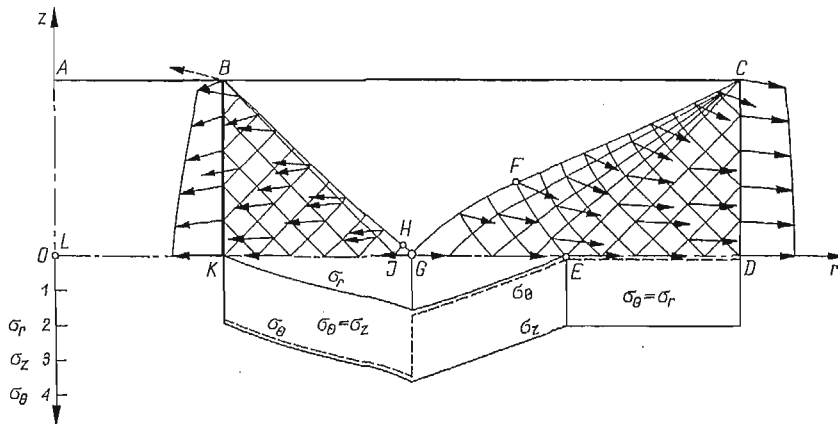
3.1. Obliczenie średniego nacisku jednostkowego metodą charakterystyk. Rozwiązanie zagadnienia ściskania pierścieni (rys. 2) polega na znalezieniu dopuszczalnego pola naprężeń i dopuszczalnego pola prędkości płynięcia dla przyjętych warunków brzegowych. Przyjmujemy statyczne warunki brzegowe na swobodnej powierzchni bocznej zewnętrznej i wewnętrznej pierścienia, $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -2k$. Na kontakcie pierścienia z płytami przyjmujemy tarcie poślizgowe scharakteryzowane współczynnikiem tarcia $\mu = \tau_{rz}/\sigma_z$ wynikającym z ostatniej charakterystyki rozwiązania statycznego zadania. Dla rozwiązania kinematyki przyjmuje się warunek brzegowy na powierzchniach czołowych pierścienia, które poruszają się ruchem pionowym ze znaną prędkością narzędzia v_0 . Oczywiście z taką samą prędkością v_0 poruszają się obszary sztywne przylegające do płyt.

Z doświadczeń ściskania pierścieni wiemy, że pewna część materiału pierścienia płynie na zewnątrz, czyli zgodnie z dodatnim kierunkiem osi r , a pewna (wewnętrzna) część materiału płynie do środka przyjętego układu osi współrzędnych r, z . Istnieje zatem pro-

mień neutralny r_n rozdzielający pierścień na wspomniane strefy ruchu materiału. Warunkiem poprawnego rozwiązania statycznego jest, aby naprężenie promieniowe σ_r , obliczone dla wypływu na zewnątrz i dla wpływu materiału do środka pierścienia, było ciągłe. Nieciągłe mogą być natomiast naprężenia σ_θ i σ_z .

Ze względu na osiową symetrię zadania (geometria pierścienia i warunki brzegowe) poszukiwane pole naprężeń, jak i pole prędkości jest symetryczne względem osi z i płaszczyzny środkowej pierścienia. Wystarczy zatem rozważyć tylko jedną czwartą część przekroju.

Budowę rozwiązania oraz analizę poszczególnych obszarów wygodnie jest przedstawić na konkretnym przykładzie przedstawionym na rys. 10, w którym przyjęto $r_z/h = 4,0$, $r_z/r_w = 4,0$. Najpierw zostanie przedstawione rozwiązanie statyczne dla wypływu materiału na zewnątrz, a następnie dla wpływu materiału do wewnątrz pierścienia. Polu statycznemu zostanie przyporządkowane rozwiązanie kinematyczne.



Rys. 10. Pole naprężeń i pole prędkości dla pierścienia o wymiarach $r_z/h = 4$ i $r_z/r_w = 4$

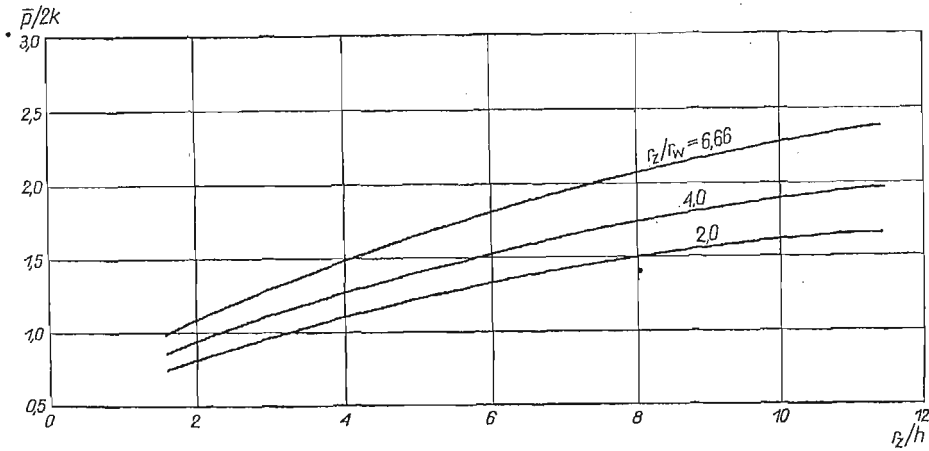
Przy wypływie materiału na zewnątrz pierścienia czyli w kierunku dodatnim osi r , prędkość wypływu $v_r > 0$, a tym samym i prędkość odkształcenia obwodowego $\dot{\epsilon}_\theta = v_r/r > 0$. Z analizy stanu prędkości odkształcenia ze stanem naprężenia wynika, że $\sigma_3 = \sigma_1$, a główne prędkości odkształceń mają następujące znaki: $\dot{\epsilon}_1 > 0$, $\dot{\epsilon}_2 < 0$, $\dot{\epsilon}_3 > 0$. Na swobodnej powierzchni bocznej CD pierścienia (rys. 10) znane są naprężenia $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -2k$. Linia CD nie jest charakterystyką i rodzina linii α podchodzi do niej pod kątem $\vartheta = 3/4\pi$. Rozwiązując równania różniczkowe (1.1) dla odpowiednich zagadnień (Cauchy'ego, charakterystycznego, zdegenerowanego zagadnienia charakterystycznego i mieszanego) otrzymamy rozwiązanie dla naprężeń w polu $CDEGF$ dla wypływu materiału na zewnątrz pierścienia. Z rozwiązania tego wynika, że w obszarze CDE istnieje jednorodny stan naprężenia i charakterystyki są prostoliniowe.

Przy wpływie materiału do środka pierścienia, w kierunku ujemnym osi r , prędkości płynięcia $v_r < 0$ i prędkość odkształcenia obwodowego $\dot{\epsilon}_\theta < 0$. Wynika stąd, że $\sigma_3 = \sigma_2$,

a główne prędkości odkształcenia spełniają następujące nierówności: $\dot{\epsilon}_1 > 0$, $\dot{\epsilon}_2 < 0$, $\dot{\epsilon}_3 < 0$. Na swobodnej, wewnętrznej powierzchni bocznej (linia BK) pierścienia (rys. 10) znane są również naprężenia $\sigma_r = 0$, $\sigma_z = -2k$. Pole naprężeń znajdujemy rozwiązując równania (1.1) ze znakami dolnymi.

Z równań tych wynika, że w całym polu BJK kąt nachylenia charakterystyk α (linie równoległe do BJ) wynosi $\vartheta = 3/4\pi$, a ciśnienie p jest zmienne. W polu BJK mamy charakterystyki prostoliniowe, ale niejednorodny stan naprężenia. Linia BHG i linia CFG wyprowadzane są tak daleko, aż będzie spełniony warunek równości naprężeń promieniodowych σ_r otrzymanych z rozwiązania dla wpływu materiału do środka i dla wypływu materiału na zewnątrz pierścienia.

Z rozwiązania statycznego ściskania pierścieni (rys. 10) obliczamy dolną ocenę nośności granicznej, którą pokazano na rys. 11.

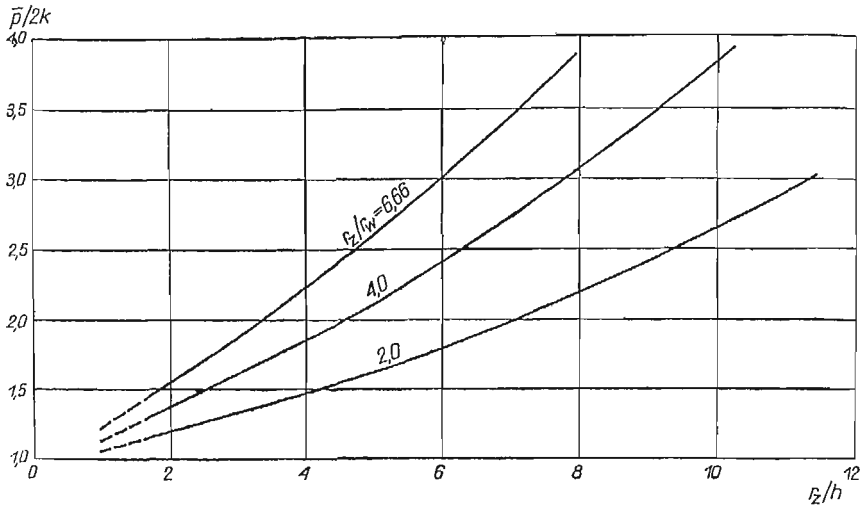


Rys. 11. Dolna ocena nośności granicznej pierścieni

Poniżej zostanie przedstawione rozwiązanie kinematyczne ściskania pierścieni. Ponieważ równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości (1.2) są takie same, jak równania różniczkowe charakterystyk dla naprężeń (1.1), to do pełnego wyznaczenia pola kinematycznego pozostaje jedynie wyznaczenie wektorów prędkości we wszystkich punktach siatki charakterystyk dla naprężeń. Inaczej mówiąc, na polu statycznym zostanie zbudowane pole kinematyczne.

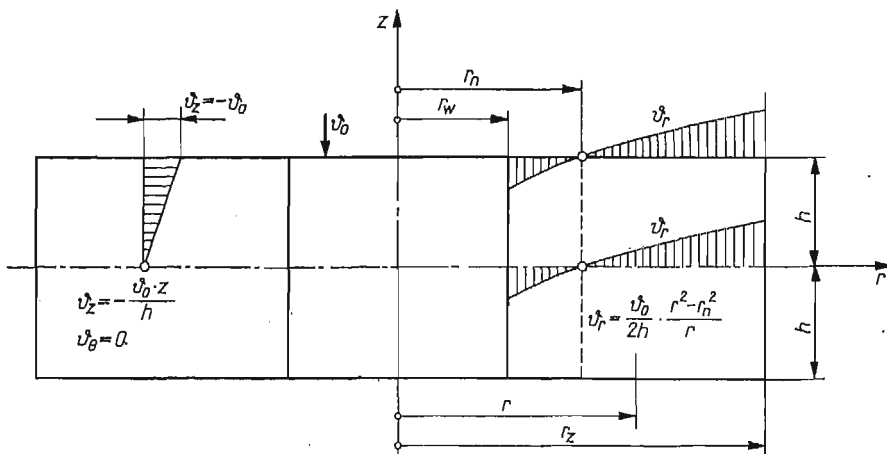
Pole kinematyczne zostaje zbudowane przy założeniu, że obszar $BCFHG$ (rys. 10) jest sztywny i porusza się pionowo w dół z prędkością v_0 tak jak narzędzie. Obszary $CDEGF$ i $BKJGH$ są plastyczne. Linia BHG jest charakterystyką α , a linia CFG — charakterystyką β . Linie te są liniami nieciągłości dla prędkości. Najpierw należy wyznaczyć kinematykę dla wypływu materiału na zewnątrz, a następnie — do środka pierścienia posługując się równaniami (1.3) i (1.2). Z pola prędkości płynięcia wyznacza się pole prędkości odkształceń i następnie oblicza się górną ocenę nacisku jednostkowego [z równania (1.4)], którą pokazano na rys. 12.

Nacisk jednostkowy obliczony z pola statycznego (rys. 11), jak i z pola kinematycznego (rys. 12) wzrasta wraz ze wzrostem stosunków wymiarów pierścienia r_z/h i r_z/r_w . Inaczej mówiąc, nacisk ten jest tym większy, im pierścień jest cieńszy i im większą posiada powierzchnię kontaktową z płytami.



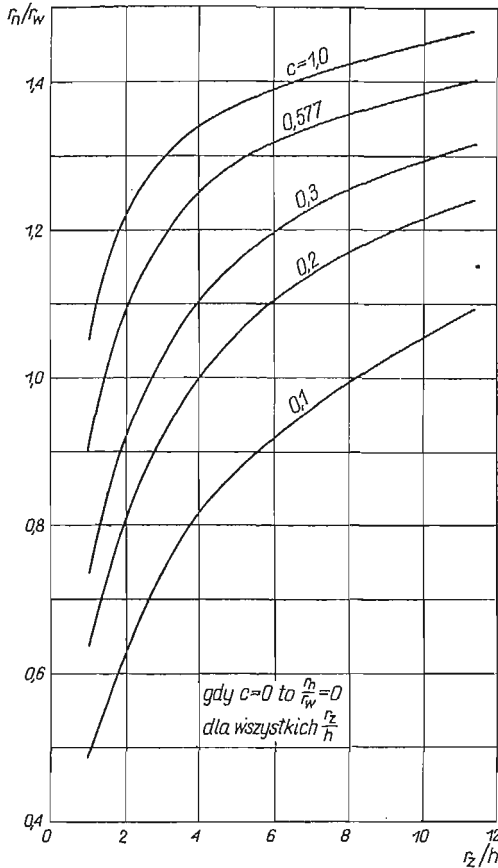
Rys. 12. Górna ocena nośności granicznej pierścienia

3.2. Obliczenie nacisku jednostkowego metodą założenia funkcji rozkładu prędkości. Podobnie jak w punkcie 2.2, przyjmijmy również liniową zmianę prędkości płynięcia wzdłuż osi z pierścienia. Rozkład prędkości płynięcia w pierścieniu pokazano na rys. 13. Z tak utworzonego pola prędkości płynięcia oblicza się górną ocenę nośności granicznej pierścienia. Z najmniejszej mocy dysypowanej ($\partial D_w / \partial r_n = 0$) w pierścieniu znajduje się

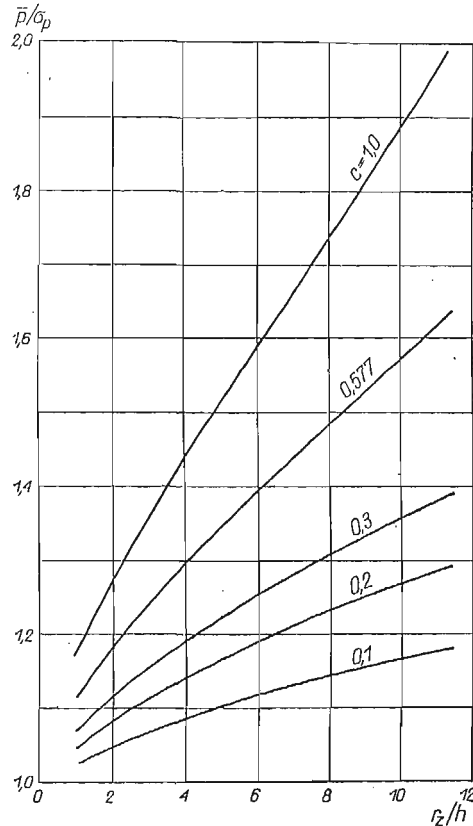


Rys. 13. Rozkład prędkości płynięcia w pierścieniu

promień neutralny r_n , przy pomocy którego oblicza się następnie najmniejszy nacisk jednostkowy będący górną oceną nośności. Zależność promienia neutralnego od geometrii pierścienia i współczynnika c uwzględniającego tarcie pokazano na rys. 14, a odpowiadającą mu nacisk jednostkowy — na rys. 15.



Rys. 14. Zależność r_n/r_w od r_z/h i współczynnika c dla $r_z/r_w = 2,0$

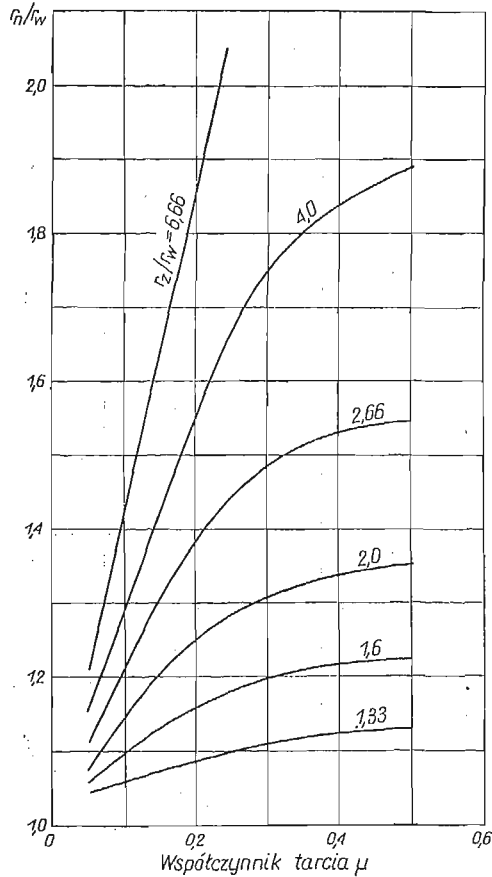


Rys. 15. Zależność nacisku jednostkowego \bar{p}/σ_p od r_z/h i współczynnika c dla $r_z/r_w = 2,0$

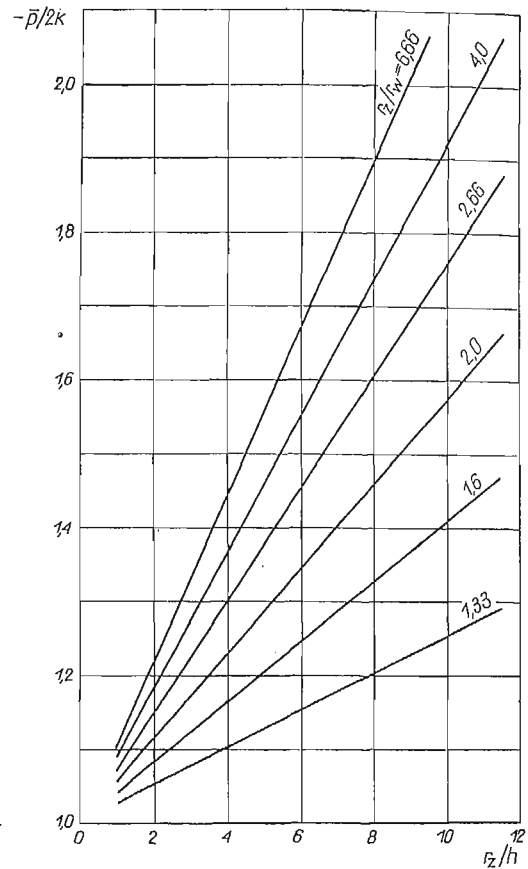
3.3. Uproszczona metoda obliczania średniego nacisku jednostkowego ściskania pierścieni. W tym punkcie zostanie przedstawiona uproszczona metoda obliczania nacisku jednostkowego ściskania pierścieni pomiędzy dwiema sztywnymi płytami z prędkością v_0 . Metoda ta opiera się na następujących założeniach:

- 1) stan naprężenia w ściskanym pierścieniu zależy jedynie od promienia r ,
- 2) naprężenie w kierunku osi z , σ_z jest na całej wysokości pierścienia H stałe i równe naciskowi jednostkowemu płyty,
- 3) naprężenie styczne $\tau_{rz} = 0$ powoduje, że naprężenie σ_r , σ_θ , σ_z są głównymi,

4) przyjęcie hipotezy Haara-Kármána o pełnym uplastycznieniu materiału ($\sigma_\theta = \sigma_r$ przy wypływie materiału na zewnątrz, $\sigma_\theta = \sigma_z$ przy wpływie materiału do środka pierścienia).



Rys. 16. Zależność promienia neutralnego od współczynnika tarcia μ i stosunku promieni pierścienia r_z/r_w dla $r_z/h = 4$



Rys. 17. Zależność średniego nacisku jednostkowego od wymiarów pierścienia (r_z/h , r_z/r_w) dla $\mu = 0,3$

Rozwiązanie zagadnienia ściskania pierścienia polega na rozwiązaniu równań równowagi pierścienia dla płynięcia materiału na zewnątrz i dla płynięcia materiału do środka pierścienia

$$(3.1) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \pm \frac{2t}{H} = 0,$$

przy przyjęciu hipotezy Haara-Kármána o pełnym uplastycznieniu materiału

$$(3.2) \quad \sigma_\theta = \sigma_r \quad \text{lub} \quad \sigma_\theta = \sigma_z,$$

warunku plastyczności Treski

$$(3.3) \quad \sigma_r - \sigma_z = 2k$$

oraz jednostkowej siły tarcia na powierzchni kontaktu

$$(3.4) \quad t = -\mu\sigma_z$$

w przypadku tarcia poślizgowego i

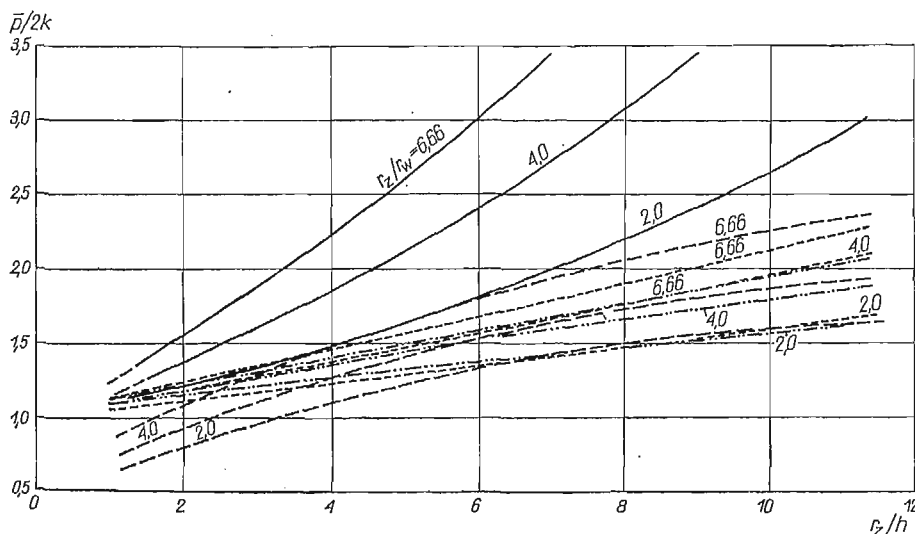
$$(3.5) \quad t = k$$

w przypadku tarcia przylgowego.

Na kontakcie pierścienia z płytą występuje tarcie poślizgowe tylko wtedy, gdy spełniona jest nierówność $\sigma_z/2k < 1/2\mu$, dla $\sigma_z/2k \geq 1/2\mu$ występuje tarcie przylgowe.

Z rozwiązania równań [(3.1) do (3.5)] otrzymujemy po dwa zestawy równań dla naprężeń σ_r , σ_z (jeden dla płynięcia materiału na zewnątrz pierścienia, a drugi — do środka pierścienia) dla tarcia poślizgowego, mieszanego i przylgowego. Z przyrównania naprężeń promieniowych σ_r otrzymanych dla wpływu materiału do środka pierścienia z naprężeniami dla wypływu materiału na zewnątrz pierścienia otrzymujemy promień neutralny r_n/r_w rozdzielający te dwie strefy płynięcia. Na rys. 16 pokazano zależność promienia neutralnego od geometrii pierścienia i warunków tarcia na kontakcie. Z całkowania naprężeń normalnych σ_z po powierzchni pierścienia otrzymujemy nacisk jednostkowy, który przykładowo pokazano na rys. 17.

3.4. Analiza wyników obliczeń i ich porównanie. Wyniki obliczeń teoretycznych przedstawione na rysunkach od 11 do 17 układają się w sposób przewidywany i zgodny z doświadczeniem. Nacisk jednostkowy wzrasta wraz ze wzrostem stosunków wymiarów pierścienia (r_z/r_w) i (r_z/h) i tarcia na kontakcie. Nacisk ten maleje, gdy powierzchnie czołowe pierścienia maleją, maleje również gdy wysokość pierścienia wzrasta. Na rys. 18 pokaza-



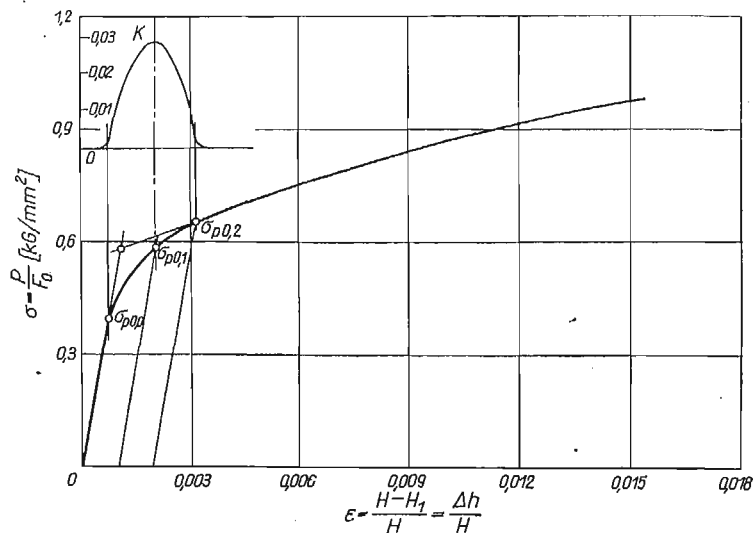
Rys. 18. Porównanie wyników obliczeń

— górną oceną obliczoną metodą charakterystyk, --- dolną oceną obliczoną metodą charakterystyk, -.-.- ocena obliczona metodą przybliżoną, ····· ocena obliczona metodą założenia funkcji

no porównanie wyników teoretycznych dla ściskania pierścieni. Jedynie górna ocena nośności obliczona metodą charakterystyk wykazuje większą rozbieżność wyników. Naciski obliczone metodą założenia funkcji i metodą uproszczoną w całym zakresie badanych stosunków wymiarów pierścieni są prawie identyczne.

4. Wyniki doświadczeń

Przeprowadzone doświadczenia miały na celu z jednej strony zweryfikowanie założeń o postaci deformacji metalu próbki, z drugiej — porównanie ilościowej zgodności wyników doświadczalnych nacisków jednostkowych z wynikami teoretycznymi.



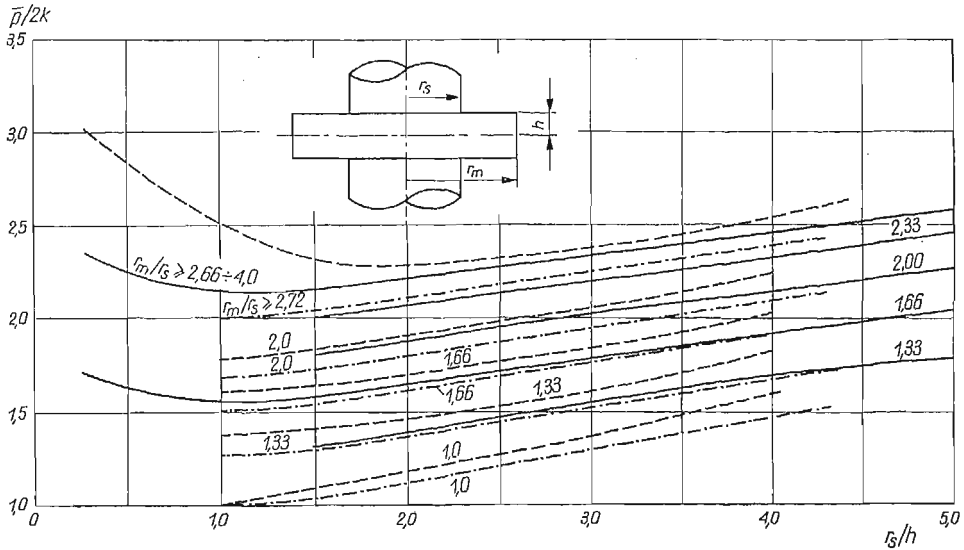
Rys. 19. Zależność $\sigma-\epsilon$ dla badanego ołowiu; $\dot{\epsilon} = 6 \cdot 10^{-4} \text{sec}^{-1}$

Doświadczenia przeprowadzono na próbkach wykonanych z ołowiu Pb2 o charakterystyce pokazanej na rys. 19. Jak wiadomo, ołów jest jednym z metali technicznych o najlepszych własnościach plastycznych. Trzeba jednak pamiętać, że posiada on własności sprężyste, jest czuły na prędkość odkształcenia i wykazuje wzmocnienie. Właściwości plastyczne próbek zależą od technologii ich odlewania i wykonania i od stopnia zanieczyszczenia materiału. Z tych powodów wyniki doświadczalne mogą nawet znacznie różnić się od wyników teoretycznych.

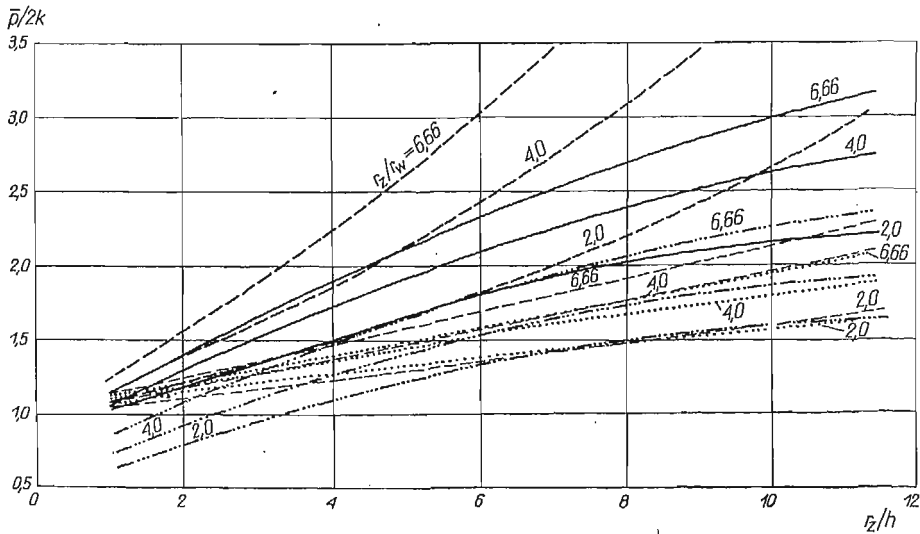
Jako kryterium uplastycznienia przyjęto naprężenie σ_p odpowiadające trwałemu odkształceniu $\epsilon = 0,1\%$. Otrzymane w ten sposób wartości pokrywają się z naprężeniami wyznaczonymi metodą przedłużenia prostych do przecięcia i z metodą największej krzywizny wykresu $\sigma-\epsilon$ (rys. 19). Na rys. 20 pokazano porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi dla zadania wciskania stempla w krążek, a na rys. 21 pokazano po-

równanie dla ściskania pierścieni. Wyniki przedstawione na tych rysunkach są zgodne z twierdzeniami o nośności granicznej.

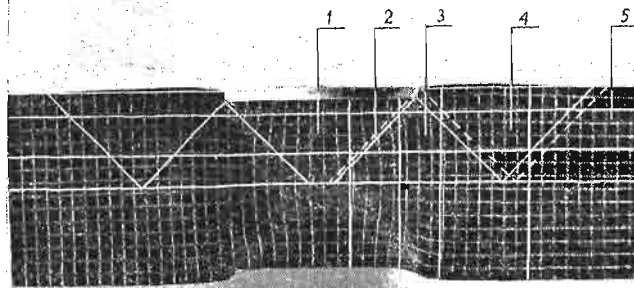
Jak wykazały doświadczenia, próbki deformują się w sposób podobny do założonego teoretycznie. Na rys. 22 pokazano deformację siatki kwadratowej przez wciśnięcie cylindrycznych stempli w krążek (prawie identyczna do założonej teoretycznie, rys. 3), natomiast



Rys. 20. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi dla wciśnięcia stempli w krążek
 ————— wyniki doświadczalne, ———— górna granica obliczona metodą charakterystyk, - - - - - dolna granica obliczona metodą charakterystyk



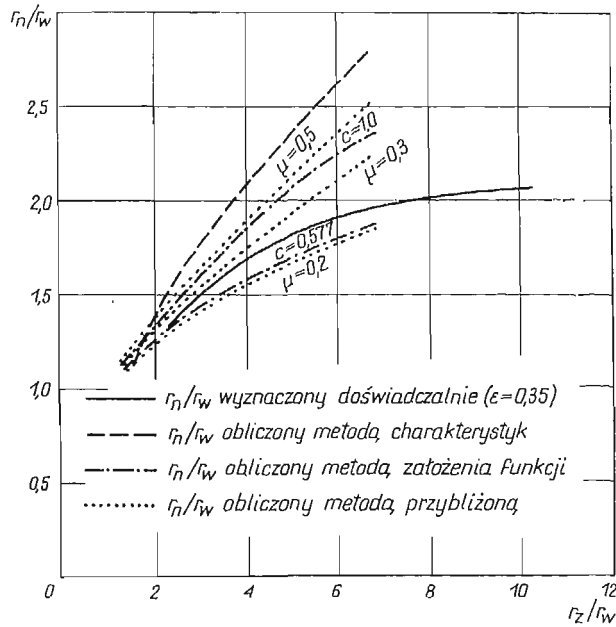
Rys. 21. Porównanie wyników teoretycznych z doświadczalnymi dla ściskania pierścieni
 ————— wyniki doświadczalne, ———— górna ocena obliczenia metodą charakterystyk, - - - - - dolna ocena obliczenia metodą charakterystyk, ———— ocena obliczenia metodą przybliżoną, ocena obliczenia metodą założenia funkcji



Rys. 22. Siatka kwadratowa po odkształceniu na próbce o wysokości $H = 30$ mm



Rys. 23. Pierścienie z naniesioną siatką kwadratową po odkształceniu $\varepsilon_{gr} = 0,35$



Rys. 24. Porównanie teoretycznych promieni neutralnych z doświadczalnymi

na rys. 23 pokazano zdeformowaną siatkę ściskanych pierścieni, przy pomocy której można ocenić położenie promienia neutralnego. Jak wyniki doświadczalne korelują z wynikami teoretycznymi obliczonymi różnymi metodami pokazano na rys. 24.

5. Wnioski

W świetle przytoczonych wyników zarówno teoretycznych, jak i doświadczalnych należy stwierdzić, że metody teorii plastyczności obliczania nacisku jednostkowego oraz mechanizmu początkowego płynięcia metalu różnych procesów obróbki plastycznej dają wyniki dość dobrze potwierdzone przez doświadczenie. Najlepsze wyniki daje metoda charakterystyk, co wydaje się być spowodowane mniejszą liczbą założeń upraszczających w porównaniu z metodą założenia funkcji i metodą uproszczenia. Metoda charakterystyk powinna być stosowana do obliczeń procesów plastycznych, ponieważ nie jest ona pracochłonna, a jednak daje dużo informacji odnośnie nacisków jednostkowych i mechanizmu płynięcia metalu.

Wykaz oznaczeń

- σ_{ij} tensor naprężenia,
- r, θ, z współrzędne walcowe punktu,
- $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ naprężenia w układzie współrzędnych walcowych,
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ naprężenia główne,
- σ_p naprężenie uplastyczniające,
- k granica plastyczności na ścianie,

p	średnie naprężenie,
\bar{p}	średni nacisk jednostkowy,
q	ciśnienie wewnętrzne,
τ_s	naprężenie styczne na linii nieciągłości lub na kontakcie materiału z narzędziem,
v_r, v_z	prędkość płynięcia w układzie współrzędnych walcowych,
v_0	prędkość ruchu narzędzia,
v_α, v_β	prędkości płynięcia wzdłuż charakterystyk α i β ,
v_s	prędkość styczna na linii nieciągłości lub na kontakcie materiału z narzędziem,
e_{ij}	tensor prędkości odkształcenia,
$\dot{e}_r, \dot{e}_\theta, \dot{e}_z, \dot{e}_{rz}$	prędkości odkształceń w układzie współrzędnych walcowych,
$\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3$	główne prędkości odkształceń,
\dot{e}_i	intensywność prędkości odkształceń,
P	siła zewnętrzna,
D_w	moc sił wewnętrznych,
F_0	powierzchnia czołowa narzędzia lub powierzchnia początkowa próbki,
F_s	powierzchnia nieciągłości lub powierzchnia kontaktu materiału z narzędziem,
ϑ	kąt, jaki tworzy charakterystyka α z osią r w płaszczyźnie r, z ,
c	współczynnik tarcia,
μ	współczynnik tarcia suchego Coulomba,
t	jednostkowa siła tarcia,
r	promień bieżący,
r_s	promień stempla,
r_m	promień zewnętrzny krążka,
h	połowa wysokości H krążka lub pierścienia ($H = 2h$),
r_n	promień neutralny w pierścieniu,
r_w	promień wewnętrzny pierścienia,
r_z	promień zewnętrzny pierścienia.

Literatura cytowana w tekście

1. I. F. ADIE, I. M. ALEXANDER, *A graphical method of obtaining hodographs for upper-bound solutions to axi-symmetric problems*, Int. J. of Mech. Sci., 9, 6, (1967).
2. B. AVITZUR, *Forging of hollow discs*, Israel Jour. of Techn. 2, 3 (1964).
3. G. L. BARAYA, W. JOHNSON and R. A. SKATER, *The dynamic compression of circular cylinders of super-pure aluminium at elevated temperatures*, Appendix I. Int. J. of Mech. Sci., 9 (1965).
4. M. BURGODORF, *Über die Ermittlung des Reibwertes für Verfahren der Massivumformung durch den Ringstauchversuch*, Industrie Anzeiger, 89, 39 (1967) 799.
5. R. L. CARLSON, *Compression of viscoplastic disk*, Jour. of Basic Engin., December 1964.
6. L. DIETRICH, K. TURSKI, *Nośność graniczna rozciąganych osiowo-symetrycznych prętów osłabionych szeregiem karbów kątowych*, Mech. Teor. i Stos., 4, 6, (1968).
7. G. EASON and R. T. SHIELD, *The plastic indentation of a semi-infinite solid by a perfectly rough circular punch*. Zeits. Ang. Mat. Phys., XI, (1960) 33—43.
8. M. GRZYMKOWSKI, Z. MRÓZ, *Metoda równowagi przy górnej ocenie sił w płaskich zagadnieniach obróbki plastycznej z uwzględnieniem tarcia Coulomba*, Arch. Hutn., XVII, 1, (1972).
9. M. GRZYMKOWSKI, *Osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali*, IPPT. Praca doktorska. 1973.
10. J. B. HADDOW, *On the compression of a thin disk*, Int. J. Mech. Sci., 7, 10, (1965).
11. I. HALLING, L. A. MITCHELL, *An upper-bound solution for axi-symmetric extrusion*, Int. J. Mech. Sci., 7, 4 (1965).
12. O. HOFFMAN, G. SACHS, *Wprowadzenie do teorii plastyczności*, PWT, Warszawa 1969.
13. Л. М. КАЧАНОВ, *Основы теории пластичности*, Изд. „Наука”, Москва 1969.

14. S. KOBAYASHI and E. G. THOMSEN, *Upper and lower bound solutions to axi-symmetric compression and extrusion problems*, Int. J. Mech. Sci., 7, 2 (1965).
15. H. KUDO, *Some analytical and experimental studies of axi-symmetric cold forging and extrusion I*, Int. J. Mech. Sci., 2, 1/2 (1960).
16. H. KUDO, *Some analytical and experimental studies of axi-symmetric cold forging and extrusion II*, Int. J. Mech. Sci., 3, 1/2 (1961).
17. K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, *A theoretical analysis of plastic compression of short circular cylinders*, Arch. Mech. Stos., 5, 19 (1967).
18. K. KWASZCZYŃSKA, Z. MRÓZ, A. DRESCHER, *Analiza ściskania krótkich walców z materiału Conlomba*, Prace IPPT, 29, 1968. Także Int. J. Mech. Sci., (1971).
19. E. LEVIN, *Indentation pressure of a smooth circular punch*, Quart. Appl. Math., 13 (1955) 133—137.
20. Z. MRÓZ, *Graphical solution of axially symmetric problems of plastic flow*, Jour. of Appl. Mathem., and Phys. (ZAMP), 18, 2 (1967).
21. S. K. SAMANTA, *The application of the upper bound theorem to the prediction of indenting and compressing loads for circular and rectangular discs*, Acta Polytechnica Scandinavica, Mechanical Engineering Series, Nr 38, 1968.
22. W. SCHROEDER, D. A. WEBSTER, *Press forging thin sections effect of friction, area and thickness on pressures required*, J. Appl. Mech., 16 (1949) 289—294.
23. R. T. SHIELD, *On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry*, Proceedings of the Royal Society, A, 233 (1955) 267—286.
24. E. SIEBEL, *Stahl und Eisen*, 43 (1925) 1295.
25. W. SZCZEPIŃSKI, L. DIETRICH, E. DRESCHER, J. MIASTKOWSKI, *Plastic flow of axially-symmetric notched bars pulled in tension*, Int. J. Solids Struct. 2 (1966), 543—554.
26. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
27. E. THOMSEN, C. T. YANG, S. KOBAYASHI, *Mechanics of plastic deformation in metal processing*, The Macmillan Company, New York 1965.

Р е з ю м е

ИЗБРАННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ

В работе проводится теоретический и экспериментальный анализ двух практически важных вопросов пластической обработки металлов: вдавливания в круглый диск двух противоположно расположенных пуансонов и сдавливания колец. Теоретический анализ проводился с применением соответственно двух и трех методов, причем определялись: удельный нажим и вид деформации при пластическом течении. Для теоретического анализа принята модель жестко-идельно-пластического материала и ассоциированный закон пластического течения. По ходу экспериментального анализа проверен механизм течения и сравнены полученные на свинцовых образцах результаты с теоретическими и определена их взаимозависимость.

В работе показано, что метод характеристик достаточно точен в отношении значений удельного нажима и вида деформации образца и может применяться для анализа процессов пластической обработки металлов.

S u m m a r y

SOME AXI-SYMMETRIC PROBLEMS OF PLASTIC WORKING OF METALS

In the paper theoretical and experimental analysis is given for two problems of practical importance, namely the indentation of two opposite punches into a disc and the ring compression. Theoretical analysis is developed using two or three different methods. Specific pressure and deformation mode of the plastic

process are found. The analysis is based on the model of rigid-perfectly plastic body and the associated flow rule. In the experiments flow patterns for lead specimens were investigated and compared with the theory.

In the paper it is shown that the characteristics method is sufficiently accurate for the evaluation of specific pressure and deformation modes of the specimen and it may be applied for the analysis of working processes of metals.

INSTYTUT PODSTAW BUDOWY MASZYN POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 grudnia 1973 r.

WYMIANA MASY, PĘDU I ENERGII MIĘDZY CZĄSTKĄ
KULISTĄ A OTOCZENIEM GAZOWYM

STANISŁAW M A Y (WARSZAWA)

1. Wstęp

Jednym z istotnych problemów pojawiających się w badaniach przepływów w ośrodkach wielofazowych jest problem wymiany masy, pędu i energii między poszczególnymi fazami. Opis matematyczny takiej wymiany w przypadku ogólnym jest niezwykle złożony. Zadanie przyjmuje jednak znacznie prostszą postać, gdy poszczególne fazy występują w postaci regularnych geometrycznie skupień, np. w postaci cząstek kulistych, oraz gdy rozpatrywać zagadnienie w postaci zlinearyzowanej.

W ostatnich latach literatura dotycząca przepływów wielofazowych rozwija się szczególnie gwałtownie. Powstało wiele modeli ruchu ośrodka wielofazowego. Z samej tylko literatury monograficznej poświęconej przepływowi wielofazowemu wymienić można m.in. prace [4, 6, 8, 14, 17, 22, 27]. Jedną z nowszych jest praca SZANIAWSKIEGO [25], w której dla dość ogólnego przypadku podano układ równań rządzący przepływem ośrodka wielofazowego. Przyjęto, że ośrodek składa się z jednej fazy spójnej i pewnej liczby faz rozproszonych, przy czym w każdej fazie może występować jeden lub większa liczba składników chemicznych. Ponadto założono, że fazy rozproszone występują w postaci pewnej liczby frakcji — każda frakcja składa się z kulistych cząstek o identycznych parametrach (w danym miejscu przepływu i w danej chwili). Układ równań dla przepływu takiej mieszaniny zawiera równania opisujące zachowanie mieszaniny jako całości, jak również równania opisujące zjawiska transportu między poszczególnymi frakcjami a fazą spójną (oddziaływania bezpośrednie między fazami rozproszonymi zostały we wspomnianym modelu pominięte).

Rozpatrywanie zjawisk transportu upraszcza się istotnie, jeżeli badać zjawiska, w których występują tylko niewielkie odchylenia od stanu równowagi termodynamicznej i mechanicznej. Szukane strumienie termodynamiczne są wtedy funkcjami liniowymi jednorodnymi odpowiednich sił termodynamicznych i zadanie wyznaczenia takich funkcji sprowadza się do znalezienia odpowiednich współczynników. Wartości tych współczynników zależą od składu mieszaniny, wachlarza uwzględnianych zjawisk fizycznych (lepkość, przewodnictwo cieplne, dyfuzja, termodyfuzja itp.), geometrii przepływu, zakresu zmienności parametrów (zwłaszcza liczby Knudsen).

Zagadnieniom parowania i kondensacji na kroplach (dla ustalenia uwagi będziemy używać terminu «kropla» zamiast «cząstka kulista», aczkolwiek wszystko, co zostanie powiedziane o kroplach, odnosić się będzie także do cząstek kulistych ciała stałego, na których zachodzi sublimacja lub kondensacja) poświęcono już wiele prac. Celem niniejszej pracy jest krótkie lecz systematyczne przedstawienie istniejących wyników w zakresie teorii zlinearyzowanej, a także — tam; gdzie to będzie niezbędne — ich rozszerzenie i adapt-

towanie do takiej postaci, która stanowiłaby uzupełnienie układu równań przepływu mieszaniny podanego w [25].

W dalszym ciągu będziemy zajmować się zadaniem, w którym pojedyncza kulista kropla porusza się w nieskończonym ośrodku gazowym jednoskładnikowym (para) lub dwuskładnikowym (para + gaz, nie biorący udziału w przemianie fazowej). Ograniczymy się do przypadku ustalonego, ponieważ przy niewielkich odchyleniach od stanu równowagi termodynamicznej i niewielkich prędkościach względnych kropeł, szybkości parowania i kondensacji są także małe, co pozwala traktować zjawiska nieustalone jako quasi-ustalone.

2. Podstawowe zależności ogólne

Jak już wspomnieliśmy, istotnym parametrem od którego zależy obraz zjawiska, jest liczba Knudsen $Kn = l/r_0$, gdzie l jest średnią drogą swobodną cząsteczek, r_0 zaś promieniem kropli. Drogę swobodną określimy za pomocą kinematycznego współczynnika lepkości ν (p. np. [5])

$$l = \frac{2\nu}{v},$$

gdzie v jest prędkością średnią cząsteczek

$$v = \sqrt{\frac{8R_v T}{\pi}}.$$

Zatem dla ośrodka składającego się tylko z pary, liczba Knudsen wyraża się w postaci

$$Kn_v = \frac{\nu_v}{r_0} \sqrt{\frac{\pi}{2R_v T}}.$$

Można za pomocą analogicznego wzoru określić liczbę Knudsen dla mieszaniny

$$Kn_m = \frac{\nu_m}{r_0} \sqrt{\frac{\pi}{2R_m T}},$$

należy jednak pamiętać, że wprowadzona przez ten wzór «droga swobodna» cząsteczek w mieszaninie ma charakter umowny. W powyższych wzorach i niżej wskaźnik v występuje przy wielkościach dotyczących pary, wskaźnik m przy odpowiednio uśrednionych wielkościach odpowiadających gazowi dwuskładnikowemu. Pominięcie wskaźników v lub m we wzorze wskazuje, że odpowiedni wzór odnosi się do gazu zarówno jedno-, jak i dwuskładnikowego.

W dalszym ciągu będziemy rozważać bezwymiarowe siły i strumienie termodynamiczne. Jako wielkości odniesienia dla strumieni termodynamicznych przyjmiemy strumienie przenoszone przez padające na powierzchnię cząsteczki o rozkładzie prędkości Maxwella. Tak określone jednostkowe strumienie masy, energii i pędu mają odpowiednio postać następującą (p. np. [11]):

$$\bar{J} = \frac{p}{\sqrt{2\pi R_v T}}, \quad \bar{E} = \frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} R_v T \bar{J}, \quad \bar{P} = \frac{4}{3} v \bar{J},$$

gdzie p oznacza ciśnienie, T — temperaturę, R — stałą gazową, κ — wykładnik adiabaty.

Zastępując w powyższych wzorach wskaźnik v przez m otrzymamy odpowiednie wyrażenia dla mieszaniny. Bezwymiarowe strumienie termodynamiczne możemy teraz określić wzorami

$$i = \frac{J}{4\pi r_0^2 \bar{J}}, \quad e = \frac{E}{4\pi r_0^2 \bar{E}}, \quad \Pi = \frac{P}{4\pi r_0^2 \bar{P}}.$$

Strumień energii w gazie można przedstawić jako sumę 2 składników: strumienia ciepła Q (tzn. strumienia energii w układzie środka masy) i konwekcyjnego strumienia energii

$$(1) \quad E = Q + c_p T J.$$

Wprowadzimy także bezwymiarowy strumień ciepła q

$$q = \frac{Q}{4\pi r_0^2 \bar{E}}.$$

Jako siły termodynamiczne przyjmiemy 3 niezależne wielkości:

$$\Delta T = \frac{T_v - T_l}{T_v}, \quad \Delta p = \frac{p_v - p_s(T_l)}{p_v}, \quad \Delta U = \frac{\Delta u}{v}.$$

Wskaźniki v i l odnoszą się odpowiednio do pary i cieczy, $p_s(T_l)$ oznacza prężność pary nasyconej w temperaturze powierzchni kropki, Δu — prędkość kropki względem gazu w nieskończoności. Wszystkie 3 wprowadzone wyżej wielkości są w myśl przyjętych założeń dużo mniejsze od 1.

Z termodynamiki wiadomo, że przy niewielkich odchyleniach od stanu równowagi strumienie termodynamiczne wyrażają się liniowo przez odpowiednie siły termodynamiczne, przy czym (w ośrodku izotropowym) siły termodynamiczne będące tensorami różnych rzędów nie mogą występować w tym samym wyrażeniu liniowym. Otrzymujemy więc związki:

$$i = \bar{A}\Delta T + \bar{B}\Delta p, \quad e = \bar{C}\Delta T + \bar{D}\Delta p, \quad \Pi = \bar{H}\Delta U.$$

Korzystając z równości (1) można zamiast strumienia energii wprowadzić strumień ciepła

$$q = \bar{K}\Delta T + \bar{L}\Delta p.$$

Tak więc w przybliżeniu liniowym wymiana masy i energii (lub ciepła) z jednej strony, a wymiana pędu z drugiej strony nie są ze sobą sprzężone (zależą od różnych sił termodynamicznych). Znaczy to, że dla kropki poruszającej się z niewielką (względem prędkości termicznej cząsteczek), prędkością, strumienie masy i energii są identyczne, jak dla kropki spoczywającej, jednocześnie zaś siła oporu przy ruchu kropki parującej jest identyczna z oporem, jaki doznaje cząstka nie wymieniająca masy i energii.

Z ogólnych rozważań termodynamicznych wynika, że współczynniki w związkach liniowych między siłami i strumieniami termodynamicznymi są powiązane przez pewne zależności. Zależności te przybierają szczególnie prostą postać (zależności symetrii Onsagera), gdy siły i strumienie termodynamiczne są odpowiednio dobrane (sprzężone); taka sytuacja zachodzi np. wtedy, gdy dla sił termodynamicznych ΔT i Δp jako strumienie termodynamiczne przyjąć J oraz Q . Związki między siłami i strumieniami termodynamicznymi oraz zależności Onsagera dla zjawisk transportu w ośrodku wielofazowym omówio-

no bliżej w [25]. W naszych oznaczeniach zależności między współczynnikami fenomenologicznymi przyjmują postać

$$\frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \bar{D} = \bar{A} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \bar{B}$$

i

$$\bar{A} = \frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \bar{L}.$$

W następnych rozdziałach rozpatrzmy bliżej współczynniki fenomenologiczne dla kropli w różnych zakresach liczb Knudsena.

3. Krople małe ($\text{Kn} \gg 1$)

W tym przypadku zjawiska transportu przebiegają w warunkach swobodnie molekularnych, co znacznie upraszcza analizę zagadnienia. Pierwsze próby rozpatrywania zjawisk w tym zakresie znane są już od dawna (LANGMUIR, HERZ, KNUDSEN, EPSTEIN; por. [7, 9, 10]), jednakże pełniejszą analizę procesów wymiany między kroplą małą a otoczeniem zawierają dopiero stosunkowo niedawne prace BROCKA [1, 2] (dla ośrodka wieloskładnikowego), a także KONORSKIEGO [12] i SZANIAWSKIEGO [24] (dla ośrodka jednoskładnikowego).

Dla dużych liczb Knudsena o intensywności wymiany międzyfazowej decydują wyłącznie zjawiska zachodzące na powierzchni rozdziału faz. Do ujęcia tych zjawisk służą współczynniki kondensacji α , akomodacji energii β_e i akomodacji pędu β_p . Przyjmuje się że część (α) cząsteczek padających na powierzchnię zostaje pochłonięta przez ciecz, pozostała zaś część ulega odbiciu od powierzchni. Ponieważ dysponujemy tylko ograniczonymi informacjami o energii i pędzie cząsteczek odbitych od powierzchni, przyjmuje się zazwyczaj, że ich wartości są zawarte między wartościami skrajnymi odpowiadającymi odbiciu zwierciadlanemu i dyfuzyjnemu, przy czym zmiana wartości poszczególnych strumieni przy odbiciu scharakteryzowana jest przez odpowiedni współczynnik adaptacji zawarty między 0 a 1. Współczynniki te określone są następującymi równościami:

$$\beta_e = \frac{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_r}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_s}, \quad \beta_p = \frac{\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i - \mathcal{P}_s}.$$

W powyższych wzorach \mathcal{E} oznacza średnią energię, \mathcal{P} średni moduł pędu przypadające na jedną cząsteczkę, wskaźnik i dotyczy cząsteczek padających na powierzchnię, wskaźnik r — cząsteczek odbitych, wskaźnik s charakteryzuje strumień będący w równowadze z powierzchnią. Niekiedy czyni się rozróżnienie między współczynnikami akomodacji β_τ składowej stycznej pędu i β_n składowej normalnej pędu

$$\beta_\tau = \frac{\mathcal{P}_{\tau i} - \mathcal{P}_{\tau r}}{\mathcal{P}_{\tau i}}, \quad \beta_n = \frac{\mathcal{P}_{n i} - \mathcal{P}_{n r}}{\mathcal{P}_{n i} - \mathcal{P}_{n s}},$$

a także między współczynnikami akomodacji β_w wewnętrznych stopni swobody i β_{tr} energii ruchu postępowego

$$\beta_w = \frac{\mathcal{E}_{w i} - \mathcal{E}_{w r}}{\mathcal{E}_{w i} - \mathcal{E}_{w s}}, \quad \beta_{tr} = \frac{\mathcal{E}_{tr i} - \mathcal{E}_{tr r}}{\mathcal{E}_{tr i} - \mathcal{E}_{tr s}}.$$

Wśród cząsteczek poruszających się od powierzchni kropli, oprócz cząsteczek odbitych, wyróżnia się także cząsteczki emitowane przez ciecz. Własności cząsteczek emitowanych zależą wyłącznie od parametrów powierzchni cieczy, nie zależą natomiast od parametrów cząsteczek padających na powierzchnię cieczy (w szczególności emisja z powierzchni zachodzi także i wtedy, gdy na powierzchnię nie padają żadne cząsteczki). Strumienie masy, energii i składowych pędu przenoszone przez cząsteczki emitowane są równe co do modułu odpowiednim strumieniom przenoszonym przez cząsteczki padające w warunkach równowagi.

Tablica 1

	Brock [1], [2]	Konorski [12]	Szaniawski [24]
Strumień masy i	$-\alpha \Delta p + \frac{\alpha}{2} \Delta T$	$-\alpha \Delta p + \frac{\alpha}{2} \Delta T$	$-\alpha \Delta p + \frac{\alpha}{2} \Delta T$
Strumień energii e	—	$-\alpha \Delta p - \left[\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha)\beta_e \right] \Delta T$	$-\alpha \Delta p - \left[\frac{\alpha}{2} + (1-\alpha) \left(\frac{4}{4+f_w} \beta_{tr} + \frac{f_w}{4+f_w} \beta_w \right) \right] \Delta T$
Strumień pędu Π	$\left(1 + \frac{\pi}{8} (1-\alpha)\beta_e \right) \Delta U$	$\left\{ 1 + \frac{\pi}{8} [\alpha + (1-\alpha)\beta_{pl}] \right\} \Delta U$	$\left[1 + \frac{(1-\alpha)(\beta_n - \beta_v)}{2} + \frac{\pi}{8} \beta_e (1-\alpha) \right] \Delta U$

W tabelicy 1 podano w ujednocionym zapisie wyrażenia dla strumieni otrzymane w [1, 2, 12, 24] dla małych różnic ciśnień i temperatur i dla małych prędkości (wyniki BROCKA zlinearyzowano na użytek tej pracy). Przyrosty Δp i ΔT są bezwymiarowymi różnicami ciśnień i temperatur

$$\Delta p = \frac{p_v - p_s(T_l)}{p_v}, \quad \Delta T = \frac{T_v - T_l}{T_v}.$$

Wskaźniki v i l odnoszą się odpowiednio do pary i powierzchni cieczy, $p_s(T_l)$ oznacza prężność pary nasyconej odpowiadającą temperaturze T_l , zaś prędkość bezwymiarowa $\Delta U = \frac{3}{4} \frac{\Delta u}{v}$, gdzie Δu oznacza prędkość kropli względem pary, jest dużo mniejsza od 1.

Porównując wyniki różnych autorów zawarte w tabl. 1 należy stwierdzić co następuje:

1. Wyrażenie dla strumieni masy są we wszystkich przypadkach identyczne i stanowią zlinearyzowaną postać znanego wzoru Herza-Knudsen.

2. Dla $\beta_w = \beta_{tr}$, wyrażenia dla strumienia energii także są identyczne.

3. Dla $\beta_n = \beta_v$, wyrażenie dla strumienia pędu z [12] różni się od odpowiednich wyrażeń z [2] i [24]. Ponieważ między omawianymi pracami brak różnic modelowych usprawiedliwiających podobną rozbieżność, za źródło rozbieżności uznać należy — zdaniem autora — błędy rachunkowe w [12].

4. Krople duże ($Kn \ll 1$)

Ze względu na istotną rolę mechanizmów kinetycznych w procesach wymiany, zachodzących na powierzchni kropli, nawet dla $Kn \ll 1$ nie zawsze możliwy jest opis procesów towarzyszących przemianie fazowej, oparty wyłącznie na równaniach ośrodka ciągłego. Można wtedy 1° opisywać zjawiska transportu w całym obszarze otaczającym kroplę za pomocą równań kinetycznych, bądź też 2° przyjąć istnienie przy powierzchni kropli cienkiej — o grubości rzędu kilku dróg swobodnych — warstwy, rządzonej przez mechanizmy kinetyczne (warstwa Knudsena), a w obszarze poza warstwą stosować równania ośrodka ciągłego.

Sytuacja jest odmienna w ośrodku jednoskładnikowym i wieloskładnikowym. W ośrodku wieloskładnikowym czynnikiem ograniczającym strumień masy jest dyfuzja, procesy kinetyczne przy powierzchni dużej kropli nie mają wpływu na strumień masy. Wpływ tych procesów pojawia się dopiero wtedy, gdy rozmiary kropli są porównywalne ze średnią drogą cząsteczek w gazie. Inaczej jest w ośrodku jednoskładnikowym, warstwa kinetyczna może mieć tam istotne znaczenie nawet w przypadku powierzchni płaskiej.

Rozpatrzmy najpierw ośrodek jednoskładnikowy. Pomijając wpływ niewielkiej krzywizny można traktować warstwę Knudsena przy powierzchni dużej kropli analogicznie do warstwy przy powierzchni płaskiej. Mechanizmy rządzące warstwą płaską badali SCHRAGE [18], KUCZEROW i RIKIENGLAZ [13], MURATOWA i ŁABUNCOW [16]. Metody stosowane przez poszczególnych autorów są z konieczności uproszczone, oparte na mniej lub więcej arbitralnych założeniach; nie też dziwnego, że i wyniki nie są identyczne.

SCHRAGE przyjmuje, że funkcja rozkładu prędkości cząsteczek bezpośrednio przy powierzchni ma postać maxwellowską o prędkości makroskopowej prostopadłej do powierzchni. Zwrot wektora prędkości zależy od rodzaju procesu fizycznego — parowania lub kondensacji. Na podstawie przyjętej funkcji rozkładu w [18] znaleziono strumień masy cząsteczek padających na powierzchnię od strony pary. Znając strumień masy cząsteczek emitowanych przez powierzchnię (zależny tylko od własności powierzchni) wyznaczono wypadkowy strumień masy. W tablicy 2 podano zależność strumienia masy od małych różnic ciśnienia i temperatury na warstwie:

$$\Delta_{1P} = \frac{p_{v1} - p_s(T_1)}{p_{v\infty}}, \quad \Delta_{1T} = \frac{T_{v1} - T_1}{T_{v\infty}}.$$

Wielkości p_{v1} i T_{v1} oznaczają ciśnienie i temperaturę na brzegu warstwy Knudsena. Różnica między przemianą fazową na powierzchni kropli w warunkach swobodnie molekularnych a przemianą fazową na powierzchni płaskiej polega m.in. na tym, że w przypadku pierwszym funkcja rozkładu prędkości cząsteczek odpowiada spoczynkowi (cząsteczki padają na powierzchnię z nieskończoności), w drugim natomiast cząsteczki padające na powierzchnię uczestniczą w ruchu makroskopowym o prędkości prostopadłej do powierzchni. Wskutek tego odpowiednie współczynniki w wyrażeniu dla strumienia masy są w przypadku drugim większe niż w przypadku pierwszym (dla $\alpha = 1$ — dwukrotnie większe).

Podobną metodę zastosowano w pracy [13]. Autorzy przyjęli tu funkcję rozkładu prędkości cząsteczek w przybliżeniu 13 momentów i wyznaczyli strumień masy i energii. Jednakże w przybliżeniu liniowym rozkład taki sprowadza się do maxwellowskiego i wyniki (we wspólnym zakresie) są identyczne jak w [18].

Inny, nie tak uproszczony, sposób postępowania przyjęli autorzy [16]. Zamiast zakładać gotową funkcję rozkładu prędkości cząsteczek przy powierzchni kropli, zastosowali oni metodę momentów do rozwiązywania równania Boltzmanna (a także równania modelowego Krooka) w przybliżeniu liniowym. Zadanie to rozwiązano w wielu wersjach w przybliżeniu 6 i 8 momentów, dobierając różne kombinacje momentów. Jako funkcję rozkładu przyjęto w przybliżeniu 6 momentów «dwustronny maxwellian» (o różnych parametrach w 2 różnych półprzestrzeniach prędkości, odpowiadających ruchowi czą-

Tablica 2

	Schrage [18]	Kuczerow, Rikiengłaz [13]	Muratowa, Łabuncow [16]
Strumień masy i	$-\frac{2\alpha}{2-\alpha}\Delta_1 p +$ $+\frac{\alpha}{2-\alpha}\Delta_1 T$	dla $\alpha = 1$ $-2\Delta_1 p + \Delta_1 T$	$-\frac{2,21\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 p + \frac{0,91\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 T;$ $-1,83\Delta_1 p + 0,75\Delta_1 T$ dla $\alpha = 1$
Strumień energii e dla $\kappa = \frac{5}{3}, \beta_e = 1$	—	dla $\alpha = 1$ $-2\Delta_1 p - \Delta_1 T$	$-\frac{2,30\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 p - \frac{3,65-2,59\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 T;$ $-1,90\Delta_1 p - 0,88\Delta_1 T$ dla $\alpha = 1$
Strumień ciepła q dla $\kappa = \frac{5}{3}, \beta_e = 1$	—	dla $\alpha = 1$ $\frac{1}{2}\Delta_1 p - \frac{9}{4}\Delta_1 T$	$\frac{0,47\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 p - \frac{3,65-1,45\alpha}{2,21-\alpha}\Delta_1 T;$ $0,39\Delta_1 p - 1,81\Delta_1 T$ dla $\alpha = 1$

steczek ku powierzchni i od powierzchni), w przybliżeniu 8 momentów także maxwellian mnożony przez pewien wielomian składowych i/lub modułu prędkości. Przyjęto także maxwellowski potencjał oddziaływania wzajemnego cząsteczek.

Najlepsze z otrzymanych w [16] wartości współczynników (rekomendowane przez autorów) podano we wzorach w tabl. 2. Ogólnie stwierdzić należy, że rozbieżności między poszczególnymi wersjami (odpowiadającymi różnym zestawom momentów i różnym równaniom — Boltzmanna i Krooka) są niezbyt duże — mniejsze niż rozbieżności między wynikami [16] i [13].

Otrzymane w wymienionych pracach zależności liniowe między strumieniami masy i ciepła (lub energii) a różnicami ciśnienia i temperatury na warstwie Knudsenowa można przedstawić w postaci ogólnej

$$(2) \quad \Delta_1 p = Ai + Bq, \quad \Delta_1 T = Ci + Dq.$$

Stosując zależności tego typu dla warstwy przy powierzchni dużej kropli spróbujemy wyznaczyć w sposób uproszczony liniowe zależności strumieni masy i ciepła od różnic ciśnienia i temperatury między nieskończonością a powierzchnią kropli

$$\Delta p = \frac{p_{v\infty} - p_s(T_l)}{p_{v\infty}}, \quad \Delta T = \frac{T_{v\infty} - T_l}{T_{v\infty}}.$$

Na zewnątrz warstwy przyjmiemy równania ośrodka ciągłego w postaci

$$(3) \quad \begin{cases} \rho u r^2 = \text{const}, & \frac{dp}{dr} + \rho u \frac{du}{dr} = 0, \\ \rho u \frac{d}{dr} \left(c_p T - \frac{u^2}{2} \right) + \text{div} Q = 0. \end{cases}$$

Rozwiązując układ tych 3 równań wraz z równaniami Clapeyrona i Fouriera znajdujemy dla małych różnic ciśnienia i temperatury

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta_2 p = \frac{1}{4\pi} i^2, \\ \Delta_2 T = -\frac{1}{\varepsilon} \left(q + \frac{1}{10\pi} i^3 \right), \end{cases}$$

gdzie

$$\Delta_2 p = \frac{p_{v\infty} - p_{v1}}{p_{v\infty}}, \quad \Delta_2 T = \frac{T_\infty - T_1}{T_\infty},$$

$$\varepsilon = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{\pi K \eta}{\text{Pr}} \ll 1.$$

Liczbę Prandtla można wyrazić w sposób przybliżony przez wykładnik adiabaty

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{k} \simeq \frac{4\kappa}{9\kappa - 5},$$

gdzie k oznacza współczynnik przewodzenia temperatury.

Różnice (bezwymiarowe) ciśnienia Δp i temperatury ΔT między nieskończonością a powierzchnią kropli otrzymujemy dodając odpowiednie przyrosty wyznaczone przez (2) i (4). Jeśli pominąć w otrzymanych wyrażeniach wielkości małe wyższego rzędu, to otrzymujemy układ równań liniowych względem i oraz q , którego rozwiązanie ma postać

$$(5) \quad i = \frac{\Delta p}{A} + \frac{B\varepsilon}{A} \Delta T, \quad q = -\varepsilon \left(\Delta T - \frac{C}{A} \Delta p \right).$$

Należy zauważyć, że pominięcie wyrazów małych wyższego rzędu doprowadziło do wyniku (5), który można otrzymać także prostszą drogą, zastępując układ (3) przez samo tylko równanie przewodzenia ciepła.

Ponieważ współczynniki A , B , C są rzędu 1, zaś $\varepsilon \ll 1$, przeto z (5) wynikają 2 przypadki szczególne:

1. $\varepsilon \Delta T$ jest małą rzędu wyższego niż Δp , wtedy

$$(6) \quad i = \frac{\Delta p}{A}, \quad q = -\varepsilon \left(\Delta T - \frac{C}{A} \Delta p \right).$$

Strumień masy i zależy tylko od różnicy ciśnień i jest dużo większy od strumienia ciepła q .

2. Δp i $\varepsilon \Delta T$ są tego samego rzędu ($\Delta T \gg \Delta p$), wtedy

$$(7) \quad i = \frac{\Delta p}{A} + \frac{B\varepsilon}{A} \Delta T, \quad q = -\varepsilon \Delta T.$$

Strumień ciepła jest wyznaczony wyłącznie przez przewodnictwo w obszarze zewnętrznym. Przyrosty ciśnienia i temperatury w warstwie powierzchniowej są małymi rzędu wyższego niż przyrost temperatury poza warstwą.

Dotychczas była mowa o transporcie masy i ciepła w ośrodku jednoskładnikowym. Prostszy i mniej kontrowersyjny jest opis zjawisk transportu w ośrodku dwuskładnikowym. Strumień ciepła jest wtedy dany przez równanie przewodnictwa i ma postać identyczną jak w (7), strumień masy natomiast jest określony przez wzór Stefana (p. [9]):

$$J = -4\pi r_0 N D m_v \left[\ln \left(1 - \frac{N_{v0}}{N} \right) - \ln \left(1 - \frac{N_{v\infty}}{N} \right) \right],$$

gdzie m oznacza masę molową, D — współczynnik dyfuzji, N — zaś stężenie molowe, przy czym $N_v + N_g = N = \text{const}$, wskaźnik 0 przy N_v i ρ_v odpowiada wartościom tych wielkości przy powierzchni kropli. Wzór Stefana dla $\frac{N_v}{N_g} \rightarrow 0$ przechodzi w znany wzór Maxwella

$$J = -4\pi r_0 D (\rho_\infty - \rho_{v0}).$$

Należy jednak zauważyć, że wzór Stefana nie zapewnia poprawnego przejścia granicznego dla $\frac{N_g}{N_v} \rightarrow 0$.

Strumień pędu niezależnie od liczby składników w ośrodku jest dla $\text{Kn} \ll 1$ określony przez wzór Stokesa

$$P = 6\pi r_0 \rho v \Delta u.$$

Jeżeli zamiast J i P wprowadzić strumienie bezwymiarowe i oraz Π , to wzory Stefana i Stokesa przyjmują postać:

$$i = -2\text{Kn} \frac{D}{\nu} \frac{m_v}{m} \left[\ln \left(1 - \frac{N_{v0}}{N} \right) - \ln \left(1 - \frac{N_{v\infty}}{N} \right) \right],$$

$$\Pi = \frac{9}{4} \text{Kn} \Delta U.$$

5. Zakres pośredni

Zadanie opisu zjawisk transportu wokół parującej kropli jest najbardziej złożone w zakresie pośrednich liczb Knudsen, gdzie zawodzi zarówno model swobodnie molekularny, jak i model ośrodka ciągłego. Wachlarz metod analitycznych stosowanych w tym zakresie jest bardzo rozległy. Jednym z bardzo prostych, a zarazem dość uniwersalnym sposobem jest zastosowanie tzw. uniwersalnego wzoru SHERMANA [21], który w wielu przypadkach daje zadowalające wyniki. Zgodnie z tym wzorem pewną wielkość Φ opisującą zjawiska transportu w gazie można przedstawić w postaci

$$(8) \quad \Phi = \frac{\Phi_c \cdot \Phi_k}{\Phi_c + \Phi_k},$$

gdzie wskaźniki c i k odnoszą się odpowiednio do modelu ciągłego i swobodnie molekularnego. Wzór ten zawiera pośrednio liczbę Knudsen i zapewnia przejście ciągłe od warunków swobodnie molekularnych do ośrodka ciągłego.

Niżej rozpatrzmy kolejno różne metody i otrzymane za ich pomocą wyniki dla strumienia masy, ciepła i pędu.

Strumień masy. SHANKAR [19] wyznaczył strumień masy przy parowaniu (kondensacji) kropli w ośrodku jedno- lub dwuskładnikowym w szerokim zakresie liczb Knudsen. Przyjęta przez niego metoda polega na zastosowaniu ujęcia kinetycznego w całym obszarze otaczającym kroplę, a nie tylko w cienkiej warstwie przy powierzchni cieczy. SHANKAR rozwiązuje równanie Boltzmanna metodą momentów Leesa. Funkcja rozkładu dla każdego ze składników ma postać rozważanego już poprzednio «dwustronnego maxwellianu», którego jeden człon obowiązuje wewnątrz pewnego obszaru przestrzeni prędkości zwanego «stożkiem widzenia», drugi zaś na zewnątrz tego obszaru. Dla każdego ze składników występują 4 niewiadome (wielkości typu gęstości i temperatury w każdej z 2 części przestrzeni prędkości). Odpowiedni układ 4 (dla każdego ze składników równań) zawiera oprócz trzech momentów podstawowych także strumień ciepła jako moment rzędu wyższego. Równania rozwiązywane są w przybliżeniu liniowym. Przyjmuje się, że przy oddziaływaniu z powierzchnią kropli cząsteczki gazu nie biorącego udziału w przemianie fazowej ulegają odbiciu dyfuzyjnemu, natomiast dla cząsteczek pary istnieje pewien nieokreślony współczynnik kondensacji i współczynnik akomodacji energii. Zakłada się maxwellowski model oddziaływania wzajemnego cząsteczek. Ponadto przyjmuje się, że temperatury obu składników są jednakowe, co pozwala na pominięcie jednego z 8 równań.

Dla strumienia masy SHANKAR otrzymuje zależność

$$(9) \quad i = \frac{\frac{1}{2} \Delta T - (1 + c_5 W_v + c_6 W_{vg}) \Delta p}{1 + c_1 W_v + c_2 W_{vg} + c_3 W_v W_{vg} + c_4 W_{vg}^2} \alpha,$$

gdzie

$$\Delta p = \frac{p_{v\infty} - p_s(T_1)}{p_{v\infty}}, \quad \Delta T = \frac{T_\infty - T_1}{T_\infty},$$

$$W_v = \frac{r}{l}, \quad W_{vg} = \frac{r_0 \sqrt{2R_v T}}{\pi D} \frac{n_g}{n_v + n_g},$$

$$b_1 = -\frac{2}{5} \left[\frac{5m_v}{m_v + m_g} - 10 \frac{m_v}{m_g} \frac{mg^2}{m_v + m_g} + 10 \frac{m_v m_g}{(m_v + m_g)^2} \right],$$

$$b_2 = -\frac{2}{5} \left[-6 + \frac{12m_g}{m_v + m_g} - 8 \frac{A_2}{A_1} \frac{m_g}{m_g + m_v} - 8 \frac{m_g^2}{(m_g + m_v)^2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \right],$$

$$b_3 = -\frac{16}{5} \frac{m_v \sqrt{m_g m_v}}{(m_v + m_g)^2} \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right),$$

$$c_1 = \frac{1}{6} \alpha + \frac{2}{15} \beta \epsilon,$$

$$c_2 = b_3 - \frac{1}{4} \alpha (b_1 + b_3 - 3) + \frac{1}{4} \beta (b_2 - b_3),$$

$$c_3 = \frac{2}{15} \alpha \beta \epsilon,$$

$$c_4 = \frac{\alpha}{2} \left[b_3 + \frac{1}{2} \beta_e (b_2 - b_3) \right],$$

$$c_4 = \frac{4}{15} \beta_e,$$

$$c_6 = b_3 + \frac{1}{2} \beta_e (b_2 - b_3).$$

W powyższych wzorach l oznacza średnią drogę cząsteczek pary w nieobecności drugiego składnika gazowego, n — gęstość liczbowa, D — współczynnik dyfuzji, m — masę cząsteczkową. Stałe A_1 i A_2 są wyznaczone z całek zderzeń, wartości tych stałych nie zostały podane w pracy [19]. Autor odsyła czytelnika do swej wcześniejszej, trudno dostępnej pracy [20].

Zbadajmy w co przechodzi wzór (9) w przypadkach asymptotycznych. W warunkach swobodnie molekularnych ($W_v \rightarrow 0$, $W_{vg} \rightarrow 0$) otrzymujemy zależność identyczną z odpowiednim wzorem w tabl. 1. Obecność dodatkowego składnika gazowego nie ma zatem wpływu na strumień masy.

Dla kropeł dużych w ośrodku dwuskładnikowym ($W_v \rightarrow \infty$, $W_{vg} \rightarrow \infty$) wzór (9) przechodzi we wzór Maxwella z poprawką hydrodynamiczną. W przeciwieństwie do wzoru Słefana, wzór (9) zapewnia sensowne przejście od ośrodka dwuskładnikowego do jednoskładnikowego.

Dla kropeł dużych w ośrodku jednoskładnikowym ($W_v \rightarrow \infty$, $W_{vg} \rightarrow 0$) wzór (9) upraszcza się do postaci

$$i = -\frac{8\alpha\beta_e}{5\alpha + 4\beta_e} \Delta p.$$

Strumień masy nie zależy w tym przypadku od różnicy temperatur. Podobną zależność

$$i = \frac{\Delta p}{A}$$

otrzymaliśmy już poprzednio (p. (6)). Jeżeli ze związków (2) i tabl. 2 wyznaczyć wartość A , to okazuje się, że dla $\alpha = \beta_e = 1$ otrzymujemy $1/A = -2,9$ na podstawie [16] oraz $1/A = -4$ na podstawie [13]. Wartość analogicznego współczynnika wyznaczona za pomocą wzoru (9) wynosi $-8/9$.

Należy zauważyć, że w przyjętej przez SHANKARA funkcji rozkładu każdy człon «dwustronnego maxwellianu» odpowiada warunkom gazu spoczywającego (co jednak nie znaczy, że gaz jako całość pozostaje w spoczynku), tzn. zależy tylko od 2 parametrów typu gęstości i temperatury. W odpowiednich członach przyjmowanych w [16] występował co najmniej jeszcze 1 parametr typu prędkości makroskopowej. Dzięki temu uproszczeniu SHANKAR otrzymuje układ równań, który potrafi rozwiązać analitycznie. Dla ośrodka jednoskładnikowego układ taki zawiera 4 równania. Dodanie dodatkowej zmiennej w istotny sposób komplikuje równania; w [16] dla prostszego geometrycznie przypadku wyniki otrzymano na drodze numerycznej.

Skutki przyjęcia uproszczonej funkcji rozkładu uwidaczniają się przy analizie przypadku asymptotycznego, odpowiadającego parowaniu dużych kropeł w ośrodku jednoskładniko-

wym. W modelu Shankara (o 4 parametrach swobodnych) nie tworzy się bowiem przy powierzchni kropli warstwa Knudsena, co jest prawdopodobną przyczyną otrzymania za niżonych wartości strumienia masy, o czym była mowa poprzednio.

Strumień ciepła. W pracach, w których obliczano strumień ciepła w zakresie pośrednich liczb Knudsena z reguły nie uwzględniano przemiany fazowej ($\alpha = 0$). W przypadkach asymptotycznych mamy wtedy dla $\text{Kn} \rightarrow \infty$

$$q_k = \beta_e \Delta T,$$

i dla $\text{Kn} \rightarrow 0$

$$q_c = \frac{4\kappa}{\kappa+1} \frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} \Delta T.$$

Na podstawie uniwersalnego wzoru SHERMANA (8), otrzymujemy dla dowolnego Kn

$$\frac{q_c}{q} = 1 + \frac{4\kappa}{\kappa+1} \frac{\text{Kn}}{\beta_e \text{Pr}}.$$

Nieco inną zależność podają SPRINGER i TSAI [23], mianowicie

$$\frac{q_c}{q} = \frac{1}{1+\text{Kn}} + \frac{4\kappa}{\kappa+1} \frac{\text{Kn}}{\beta_e \text{Pr}}.$$

Wyniki doświadczalne zawiera praca TAKAO [26]. Najlepszą zgodność z doświadczeniem zapewnia metoda wariacyjna Cercignaniego i współpracowników [3]. Metoda ta dostarcza wyników numerycznych, które zostały obliczone przez autorów dla $\beta_e = 1$.

Ze względu na sprzężenie występujące między strumieniami masy i ciepła (energii) wymienione tu wyniki mogą mieć jedynie ograniczone zastosowanie do przypadku parujących kropelek.

Strumień pędu. Wymianę pędu między kroplą a gazem dla małych Re badał MILLIKAN [15]. Na podstawie doświadczeń z kropelkami oleju w powietrzu, MILLIKAN podał wzór empiryczny na siłę oporu kropli w szerokim zakresie Kn . W naszych oznaczeniach wzór ten przyjmuje postać

$$\Pi = \frac{\Pi_c}{1 + a \cdot \text{Kn} + b \cdot \text{Kn} \exp\left(-\frac{c}{\text{Kn}}\right)},$$

gdzie $a = 1,234$, $b = 0,414$, $c = 0,876$.

Dla $\text{Kn} \rightarrow \infty$ otrzymujemy zależność asymptotyczną

$$(10) \quad \Pi_k = \frac{\Pi_c}{(a+b)\text{Kn}}.$$

Uniwersalny wzór Shermana, po uwzględnieniu (10), przyjmuje postać

$$\Pi = \frac{\Pi_c}{1 + (a+b)\text{Kn}}.$$

CERCIGNANI i PAGANI [3] stosując opracowaną przez siebie metodę wariacyjną obliczyli numerycznie siłę oporu sfery przyjmując, że współczynniki adaptacji składowych pędu są równe 1. Otrzymane przez nich wyniki nie różnią się więcej niż o 2% od wzoru doświadczalnego Millikana. Nieco większe (sięgające 10%) odchylenia daje wzór Shermana.

6. Współczynniki kondensacji i adaptacji

W wielu z przedstawionych wyżej wzorów dla strumieni termodynamicznych występują współczynniki kondensacji i adaptacji energii i pędu, które charakteryzują oddziaływanie cząsteczek z powierzchnią cieczy. Wyznaczenie doświadczalne tych współczynników nie zawsze jest łatwe. Porównanie wyników doświadczalnych (np. MILLIKAN, TAKAO) z teorią sugeruje, że współczynniki adaptacji energii i pędu są bliskie 1. Większe trudności powstają przy wyznaczaniu współczynnika kondensacji (por. np. [17]). Pomiar dokonywane przez różnych autorów prowadzą częstokroć do bardzo różnych wyników. Szczególnie wielkie rozbieżności wykazują pomiary współczynnika kondensacji wody, który według różnych autorów wynosi od 0,002 do 1. Wydaje się, że istotny wpływ na wartość współczynnika kondensacji mogą wywierać różne trudno poddające się kontroli czynniki uboczne, zwłaszcza czystość powierzchni cieczy. W tych warunkach dla uzyskania większej jasności w tej sprawie potrzebne jest prowadzenie dalszych badań zarówno doświadczalnych, jak i teoretycznych.

Literatura cytowana w tekście

1. J. R. BROCK, *Evaporation and condensation of spherical bodies in non-continuum regimes*, J. Phys. Chemistry, **68**, 10 (1964).
2. J. R. BROCK, *Molecule drag on evaporating or condensating spheres*, J. Phys. Chemistry, **68**, 10 (1964).
3. C. CERCIGNANI, *Mathematical methods in kinetic theory*, London 1969.
4. Г. В. ЦИКЛАУРИ, В. С. ДАНИЛИН, Л. И. СЕЛЕЗНЕВ, *Адиабатные двухфазные течения*, Москва 1973.
5. S. CHAPMAN, T. G. COWLING, *The mathematical theory of nonuniform gases*, Cambridge 1952.
6. М. Ю. ДЕЙЧ, Г. А. ФИЛИППОВ, *Газодинамика двухфазных сред*, Москва 1968.
7. P. S. EPSTEIN, *On the resistance experienced by spheres in their motion through gases*, Phys. Rev., **23**, 6 (1924).
8. A. FORTIER, *Mécanique des suspensions*, Paris 1967.
9. Н. А. ФУКС, *Испарение и рост капель в газообразной среде*, Москва 1958.
10. Н. А. ФУКС, А. Г. СУТУГИН, *Высокодисперсные аэрозоли*, Москва 1969.
11. М. Н. КОГАН, *Динамика разреженного газа*, Москва 1967.
12. A. KONORSKI, *Zjawiska wymiany masy i energii w przepływie czynnika 2-fazowego*, Prace IMP, z. 29—31, 1966.
13. Р. Ю. КУЧЕРОВ, Л. Е. РИЦЕНГЛАЗ, *О гидродинамических условиях при испарении и конденсации*, Ж. exper. и теор. физ., **37**, 1 (1959).
14. В. А. МАМАЕВ, Г. Э. ОДИЩАРИЯ, Н. И. СЕМЕНОВ, А. А. ТОЧИГИН, *Газодинамика газожидкостных смесей в трубах*, Москва 1969.
15. R. A. MILLIKAN, *The general law of fall of a small spherical body through a gas...*, Phys. Rev., **22**, 1 (1923).
16. Т. М. МУРАТОВА, Д. А. ЛАБУНЦОВ, *Кинетический анализ процессов испарения и конденсации*, Теплофиз. выс. темп., **4**, 5 (1969).
17. Г. А. САЛТАНОВ, *Сверхзвуковые двухфазные течения*, Минск 1972.
18. R. W. SCHRAGE, *A theoretical study of interphase mass transfer*, New York 1953.
19. P. N. SHANKAR, *A kinetic theory of steady condensation*, J. Fluid Mech., **40**, 2 (1970).
20. P. N. SHANKAR, G. E. Co. R. and D. Center Report, n. 69-C-174, 1969.
21. F. S. SHERMAN, *A survey of experimental results and methods for the transition regime of rarefied gas dynamics*; artykuł w zbiorze Rarefied Gas Dynamics (red. J. A. Laurman), v. 2, New York 1963.

22. S. L. SOO, *Fluid dynamics of multiphase systems*, Urbana 1967.
23. G. SPRINGER, S. TSAI, *Phys. Fluids*, **8**, (1965) 1361.
24. A. SZANIAWSKI, *Rozchodzenie się fal akustycznych w kropelkowym modelu pary wilgotnej*, *Biuletyn IMP* 40/668(72).
25. A. SZANIAWSKI, *Flow of multiphase mixture with one coherent liquid or gaseous phase*, *AMS*, **24**, 4 (1972).
26. K. TAKAO, *Heat transfer from a sphere in a rarefied gas*; artykuł w zbiorze *Rarefied Gas Dynamics* (red. A. Laurman), v. 2, New York 1963.
27. G. B. WALLIS, *One-dimensional two-phase flow*, New York.

Резюме

ОБМЕН МАССЫ, ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ МЕЖДУ ШАРОВИДНОЙ ЧАСТИЦЕЙ И ГАЗОВОЙ СРЕДОЙ

В уравнениях течения многофазных смесей (см. напр. [25]) имеются зависимости между термодинамическими силами генерирующими фазовые переходы и потоками массы, энергии и количества движения. Для небольших отклонений от равновесия эти зависимости имеют линейный характер. Применяя уравнения для конкретного вида многофазной среды, необходимо знать коэффициенты при соответствующих линейных зависимостях. Эти коэффициенты зависят в частности от геометрической структуры многофазной среды и от пределов изменения числа Кнудсена.

В данной статье собраны и систематически приведены литературные данные, относящиеся к линейным зависимостям между термодинамическими силами и термодинамическими потоками для шаровой частицы движущейся с малой скоростью в условиях близких к термодинамическому равновесию. Представленные результаты были получены для различных моделей среды и относятся к полному диапазону чисел Кнудсена.

Summary

MASS, MOMENTUM AND ENERGY EXCHANGE BETWEEN A SPHERICAL PARTICLE AND GASEOUS MEDIUM

To the equations of flow of multiphase mixture (see f.e. [25]) enter the relations between thermodynamic forces generating the phase change, and the mass, energy and momentum fluxes. For the mixture near the equilibrium state these relations are linear. Before applying the flow equations to any specific medium, one should know the coefficients in these relations. The coefficients depend on the geometrical structure of the multiphase medium and on the range of Knudsen number.

In the paper such coefficients, obtained by different authors for the spherical particle moving with small velocity in the gas medium near the thermodynamic equilibrium, are reviewed in a systematical manner. The results were obtained on the basis of different models and cover the full range of the Knudsen number.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI POLSKIEJ AKADEMII NAUK, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1973 r.

NIEKTÓRE ZAGADNIENIA TERMOSPŁĘŻYSTOŚCI W TARCZACH MIKROPOLARNYCH

KRYSTYNA MAJORKOWSKA-KNAP (PŁOCK)

1. Wprowadzenie

W niniejszej pracy rozważać będziemy liniowy termosprężysty ośrodek mikropolarny poddany działaniu temperatury.

Na podstawowe równania niesymetrycznej termosprężystości dla zagadnień statycznych składają się: równania równowagi, równania konstytutywne oraz równanie przewodnictwa cieplnego [1].

Równania równowagi, przy pominięciu sił i momentów masowych mają postać

$$(1.1) \quad \sigma_{ji,j} = 0, \quad \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \mu_{ji,j} = 0, \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

gdzie symbol ε_{ijk} oznacza alternator Levi-Civité.

Równania konstytutywne

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + (\lambda\gamma_{kk} - \bar{\nu}\theta)\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} &= (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij} + \beta\kappa_{kk}\delta_{ij}, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.3) \quad \gamma_{ji} = u_{i,j} - \varepsilon_{kji}\varphi_k, \quad \kappa_{ji} = \varphi_{i,j}$$

zawierają sześć stałych materiałowych mechanicznych $\mu, \lambda, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ oraz stałą $\bar{\nu} = \alpha_t(3\lambda + 2\mu)$ zależną od własności mechanicznych i termicznych (α_t — współczynnik liniowej rozszerzalności cieplnej).

W równaniach (1.2) $\theta = T - T_0$ oznacza wzrost temperatury (w stosunku do temperatury stanu naturalnego T_0). Symbol δ_{ij} oznacza deltę Kroneckera.

Postać zlinearyzowana równania przewodnictwa cieplnego w przypadku stacjonarnego przepływu ciepła jest następująca

$$(1.4) \quad \nabla^2\theta = \frac{-W}{k},$$

gdzie W — ilość ciepła wydzielana przez umieszczone w ciele źródła ciepła, odniesiona do jednostki objętości, zaś k — współczynnik przewodnictwa cieplnego.

Eliminując z równań (1.1) naprężenia δ_{ji} i μ_{ji} przy wykorzystaniu związków (1.2) i (1.3) otrzymamy sprzężony ze sobą układ równań różniczkowych [1]

$$(1.5) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha)\nabla^2\underline{u} + (\lambda + \mu - \alpha)\text{grad div}\underline{u} + 2\alpha\text{rot}\underline{\varphi} &= \bar{\nu}\text{grad}\theta, \\ (\gamma + \varepsilon)\nabla^2\underline{\varphi} - 4\alpha\underline{\varphi} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\text{grad div}\underline{\varphi} + 2\alpha\text{rot}\underline{u} &= 0. \end{aligned}$$

Mamy układ siedmiu równań (1.5), (1.4) z siedmioma niewiadomymi: trzema składowymi przemieszczenia \underline{u} , trzema składowymi obrotu $\underline{\varphi}$ i temperaturą θ .

Warunki brzegowe związane z równaniami (1.5) i (1.4) przyjmujemy w postaci

$$(1.6) \quad p_i = \sigma_{ji}n_j = 0, \quad m_i = \mu_{ji}n_j = 0, \quad \theta = \gamma(\underline{x}), \quad \underline{x} \in A.$$

2. Uogólniony płaski stan naprężenia

W tarczy o grubości $2h$ uogólniony płaski stan naprężenia jest wywołany temperaturą $\theta(x_1, x_2, x_3)$ o rozkładzie symetrycznym względem płaszczyzny środkowej.

Stan przemieszczenia i obrotów jest scharakteryzowany przez średnie wartości wektorów

$$(2.1) \quad \underline{u}^* \equiv (u_1^*, u_2^*, 0), \quad \underline{\varphi}^* \equiv (0, 0, \varphi_3^*).$$

Stan odkształcenia reprezentują tensory $\underline{\sigma}^*$ i $\underline{\kappa}^*$ o składowych

$$(2.2) \quad \gamma_{ji}^* \equiv (\gamma_{\alpha\beta}^*, \gamma_{33}^*), \quad \kappa_{ji}^* \equiv \kappa_{\alpha 3}^*, \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Stan naprężenia opisują tensory $\underline{\sigma}^*$ i $\underline{\mu}^*$ o składowych

$$(2.3) \quad \sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{\alpha\beta}^*, \quad \mu_{ji}^* \equiv (\mu_{\alpha 3}^*, \mu_{3\alpha}^*), \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

które spełniają równania równowagi

$$(2.4) \quad \sigma_{\alpha\beta, \alpha}^* = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^* + \mu_{\alpha 3, \alpha}^* = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

symbol $\varepsilon_{\alpha\beta}$ oznacza symbol Ricciego.

Związki konstytutywne przyjmują postać

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \sigma_{ji}^* &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji}^* + (\mu - \alpha)\gamma_{ij}^* + (\lambda\gamma_{kk}^* - \bar{\nu}\theta^*)\delta_{ji}, \\ \mu_{ji}^* &\equiv (\gamma + \varepsilon)\kappa_{ji}^* + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ij}^* + \beta\kappa_{kk}^*\delta_{ji}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

gdzie $\theta^*(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \theta(x_1, x_2, x_3) dx_3$ jest średnią wartościową temperatury wzdłuż grubości tarczy.

Związki geometrycznej zgodności mają postać

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \gamma_{21,1}^* - \gamma_{11,2}^* - \kappa_{13}^* &= 0, \\ \gamma_{22,1}^* - \gamma_{12,2}^* - \kappa_{23}^* &= 0, \\ \kappa_{23,1}^* - \kappa_{13,2}^* &= 0. \end{aligned}$$

Równania (2.6) można przekształcić do postaci

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \gamma_{22,11}^* + \gamma_{11,22}^* &= (\gamma_{12}^* + \gamma_{21}^*)_{,12}, \\ \gamma_{12,22}^* - \gamma_{21,11}^* &= (\gamma_{22}^* - \gamma_{11}^*)_{,12} - (\kappa_{13,1}^* + \kappa_{23,2}^*), \\ \kappa_{23,1}^* - \kappa_{13,2}^* &= 0. \end{aligned}$$

Wyrażając związki (2.7) poprzez tensory σ_{ji}^* , μ_{ji}^* przy pomocy równań (2.5) otrzymujemy warunki geometrycznej zgodności wyrażone w naprężeniach. Te ostatnie w połączeniu z równaniami równowagi (2.4) oraz z równaniem przewodnictwa cieplnego (2.8)

$$(2.8) \quad \nabla_1^2 \theta^* = - \frac{W^*}{k}$$

i z warunkami brzegowymi (1.6) stanowią naprężeniowe sformułowanie problemu mikropolarnej termosprężystości.

Wprowadzając reprezentację naprężeń za pomocą funkcji F, Ψ [1] w postaci

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^* &= \partial_2^2 F - \partial_1 \partial_2 \Psi, & \sigma_{22}^* &= \partial_1^2 F + \partial_1 \partial_2 \Psi, \\ \sigma_{12}^* &= -\partial_1 \partial_2 F - \partial_2^2 \Psi, & \sigma_{21}^* &= -\partial_1 \partial_2 F + \partial_1^2 \Psi, \\ \mu_{13}^* &= \partial_1 \Psi, & \mu_{23}^* &= \partial_2 \Psi, \end{aligned}$$

rozwiązanie problemu w naprężeniach sprowadza się do rozwiązania równań (2.10) i (2.8) z odpowiednimi warunkami brzegowymi.

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 F + 2\mu \bar{m} \nabla_1^2 \theta^* &= 0, \\ \nabla_1^2 (1 - I^2 \nabla_1^2) \Psi &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{m} = \frac{\bar{v}}{2(\lambda + \mu)}, \quad I^2 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\mu + \alpha)}{4\mu\alpha}, \quad \nabla_1^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2.$$

Funkcje F i Ψ oraz θ^* związane są zależnościami

$$(2.11) \quad \begin{aligned} -\partial_1 (1 - I^2 \nabla_1^2) \Psi &= A \partial_2 \nabla_1^2 F + B \partial_2 \theta^*, \\ \partial_2 (1 - I^2 \nabla_1^2) \Psi &= A \partial_1 \nabla_1^2 F + B \partial_1 \theta^*, \end{aligned}$$

gdzie

$$A = \frac{(\lambda + \mu)(\gamma + \varepsilon)}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad B = \frac{\bar{v}(\gamma + \varepsilon)}{3\lambda + 2\mu}.$$

Inny sposób rozwiązania zagadnienia płaskiego to rozwiązanie w przemieszczeniach-obrotach. Podstawiając do równań równowagi (2.4) związki (2.5) i wykorzystując definicję (1.3) otrzymujemy układ równań różniczkowych

$$(2.12) \quad \begin{aligned} (\mu + \alpha) \nabla_1^2 u_1^* + \beta_0 \partial_1 e^* + 2\alpha \partial_2 \varphi_3^* &= 2\mu m \partial_1 \theta^*, \\ (\mu + \alpha) \nabla_1^2 u_2^* + \beta_0 \partial_2 e^* - 2\alpha \partial_1 \varphi_3^* &= 2\mu m \partial_2 \theta^*, \\ [(\gamma + \varepsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha] \varphi_3^* + 2\alpha (\partial_1 u_2^* - \partial_2 u_1^*) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$\beta_0 = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu) - \alpha(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad m = \frac{\bar{v}}{\lambda + 2\mu}.$$

Rozwiązanie problemu w przemieszczeniach-obrotach sprowadza się do rozwiązania równań (2.12) i (2.8) z warunkami brzegowymi.

3. Zagadnienie tarczy półnieskończonej

Rozpatrzymy zagadnienie tarczy półnieskończonej $x_1 \geq 0$ ograniczonej prostą $x_1 = 0$. Przyjmujemy, że na brzegu $x_1 = 0$ działa pole temperatur $\theta_{(x_2)}^*$, które można traktować jako superpozycję dwóch stanów obciążeń zgodnie z rys. 1.

Działanie stałej temperatury $\frac{a}{a} \frac{c}{a}$ zgodnie z rys. 1a nie wywołuje w ciele naprężeń, rozpatrzymy zatem tylko drugi składowy stan obciążenia zgodnie z rys. 1b.

Rozwinięcie temperatury $\theta_{(x_2)}^*$ w szereg Fouriera ma postać

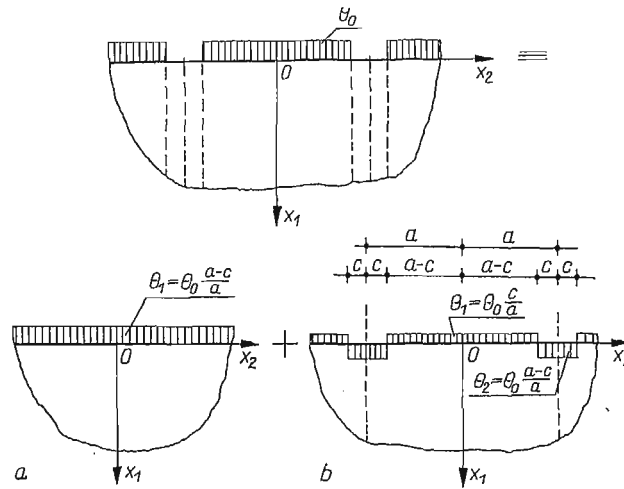
$$(3.1) \quad \theta_{(x_2)}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos \alpha_n x_2, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3 \dots,$$

gdzie

$$\theta_n = -\frac{2\theta_0}{n\pi} \cos n\pi \sin \frac{\pi n c}{a}.$$

Na brzegu $x_1 = 0$ mamy warunki brzegowe

$$(3.2) \quad \sigma_{11}^*(0, x_2) = 0, \quad \sigma_{12}^*(0, x_2) = 0, \quad \mu_{13}^*(0, x_2) = 0.$$



Rys. 1.

W pierwszej kolejności rozwiązujemy równanie Laplace'a, którym staje się równanie przewodnictwa cieplnego dla omawianego zagadnienia

$$(3.3) \quad \nabla_1^2 \theta^* = 0$$

z warunkiem brzegowym

$$(3.4) \quad \theta^*(0, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos \alpha_n x_2$$

i warunkiem regularności dla $|x_1^2 + x_2^2| \rightarrow \infty$.

Z (3.3) wyznaczmy temperaturę $\theta^*(x_1, x_2)$ w postaci

$$(3.5) \quad \theta^*(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2.$$

Dla wyznaczenia stanu naprężenia wprowadzamy funkcje F i Ψ , które winny spełniać równania (2.10). Rozwiązanie tych równań przyjmujemy w postaci

$$(3.6) \quad F = F' + F'', \quad \Psi = \Psi' + \Psi''.$$

Zakładamy, że $\Psi' = 0$, a funkcja F' jest całką szczególną równania

$$(3.7) \quad \nabla_1^2 F' + 2\mu\bar{m}\theta^* = 0$$

z warunkiem brzegowym $F' = 0$ dla $x_1 = 0$ i warunkiem regularności dla $(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \infty$.

Temperatura $\theta^*(x_1, x_2)$ występująca w równaniu (3.7) dana jest wzorem (3.5). Wobec tego (3.7) przyjmuje postać

$$(3.8) \quad \nabla_1^2 F' = -2\mu\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2.$$

Z rozwiązania powyższego równania różniczkowego cząstkowego niejednorodnego otrzymujemy

$$(3.9) \quad F'_{(x_1, x_2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu\bar{m}\theta_n}{\alpha_n} x_1 e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2.$$

Funkcje F' , Ψ' związane z symetrycznym tensorem naprężeń prowadzą do następujących wzorów na naprężenia:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \sigma'_{11} &= -\mu\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \theta_n x_1 e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2, \\ \sigma'_{22} &= -\mu\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n (2 - \alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2, \\ \sigma'_{12} = \sigma'_{21} &= \mu\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n (1 - \alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \sin \alpha_n x_2, \\ \mu'_{13} = \mu'_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Funkcje F'' , Ψ'' powinny spełniać równania

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 F'' &= 0, \\ \nabla_1^2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi'' &= 0, \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(3.12) \quad \sigma'_{11} + \sigma'_{11}' = 0, \quad \sigma'_{12} + \sigma'_{12}' = 0, \quad \mu'_{13} = 0, \quad \text{dla } x_1 = 0$$

oraz z warunkami regularności dla $(x_1^2 + x_2^2) \rightarrow \infty$.

Jednocześnie powinny być spełnione zależności

$$(3.13) \quad \begin{aligned} -\partial_1 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi'' &= A \partial_2 \nabla_1^2 F'', \\ \partial_2 (1 - l^2 \nabla_1^2) \Psi'' &= A \partial_1 \nabla_1^2 F''. \end{aligned}$$

Przy przyjęciu $\Psi' = 0$ i spełnieniu zależności (3.13) spełnimy związki zachodzące między funkcjami F i Ψ (2.11), gdyż

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \partial_2 (A \nabla_1^2 F + B\theta) &= 0, \\ \partial_1 (A \nabla_1^2 F + B\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Zastosowanie pojedynczych szeregów Fouriera prowadzi do następujących wzorów na funkcje

$$(3.15) \quad \begin{aligned} F''_{(x_1, x_2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n \alpha_n x_1) e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2, \\ \Psi''_{(x_1, x_2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{-\alpha_n x_1} + D_n e^{-\rho_n x_1}) \sin \alpha_n x_2, \quad \varrho_n = \left(\alpha_n^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Powyższe wzory zawierają nieskończenie wiele stałych A_n, B_n, C_n, D_n , które wyznaczymy z warunków brzegowych (3.12) oraz ze związków (3.13).

Z warunku brzegowego $\mu'_{13}|_{x_1=0} = 0$ mamy

$$(3.16) \quad \alpha_n C_n + \varrho_n D_n = 0.$$

Z warunku brzegowego $\sigma'_{11} + \sigma'_{11}|_{x_1=0} = 0$, po uwzględnieniu (3.16) mamy

$$(3.17) \quad A_n = 0,$$

a z warunku brzegowego $\sigma'_{12} + \sigma'_{12}|_{x_1=0} = 0$ otrzymamy

$$(3.18) \quad \mu \bar{m} \theta_n + \alpha_n^2 (B_n - A_n + C_n + D_n) = 0.$$

Związki (3.13) po uwzględnieniu (3.15) prowadzą do

$$(3.19) \quad C_n - 2A\alpha_n^2 B_n = 0.$$

Z czterech równań (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) wyznaczymy cztery stałe całkowania

$$(3.20) \quad A_n = 0, \quad B_n = -\frac{\mu \bar{m} \theta_n}{\alpha_n^2 \Delta_0}, \quad C_n = -\frac{2A}{\Delta_0} \mu \bar{m} \theta_n, \quad D_n = -\frac{\alpha_n}{\varrho_n} C_n,$$

gdzie

$$\Delta_0 = 1 + 2A\alpha_n^2 \left(1 - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} \right).$$

Po uwzględnieniu (3.20) funkcje F'' i Ψ'' przyjmują postać

$$(3.21) \quad \begin{aligned} F''_{(x_1, x_2)} &= -\mu \bar{m} x_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\alpha_n \Delta_0} e^{-\alpha_n x_1} \cos \alpha_n x_2, \\ \Psi''_{(x_1, x_2)} &= -2A\mu \bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\Delta_0} \left(e^{-\alpha_n x_1} - \frac{\alpha_n}{\varrho_n} e^{-\rho_n x_1} \right) \sin \alpha_n x_2. \end{aligned}$$

Wzory na naprężenia będą następujące:

$$(3.22) \quad \sigma^*_{11} = -\mu \bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[\alpha_n x_1 \left(1 - \frac{1}{\Delta_0} \right) e^{-\alpha_n x_1} + \frac{2A\alpha_n^2}{\Delta_0} (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \right] \cos \alpha_n x_2,$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{22}^* &= -\mu\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[(2 - \alpha_n x_1) \left(1 - \frac{1}{\Delta_0} \right) e^{-\alpha_n x_1} - \frac{2A\alpha_n^2}{\Delta_0} (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \right] \cos \alpha_n x_2, \\
 \sigma_{12}^* &= \mu\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[(1 - \alpha_n x_1) \left(1 - \frac{1}{\Delta_0} \right) e^{-\alpha_n x_1} - \frac{2A\alpha_n^2}{\Delta_0} \left(e^{-\alpha_n x_1} - \frac{\alpha_n}{\rho_n} e^{-\rho_n x_1} \right) \right] \sin \alpha_n x_2, \\
 (3.22) \quad \sigma_{21}^* &= \mu\bar{m} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \left[(1 - \alpha_n x_1) \left(1 - \frac{1}{\Delta_0} \right) e^{-\alpha_n x_1} - \frac{2A\alpha_n}{\Delta_0} (\alpha_n e^{-\alpha_n x_1} - \rho_n e^{-\rho_n x_1}) \right] \sin \alpha_n x_2, \\
 \mu_{13}^* &= 2\mu\bar{m}A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\Delta_0} \alpha_n (e^{-\alpha_n x_1} - e^{-\rho_n x_1}) \sin \alpha_n x_2, \\
 \mu_{23}^* &= -2\mu\bar{m}A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{\Delta_0} \alpha_n \left(e^{-\alpha_n x_1} - \frac{\alpha_n}{\rho_n} e^{-\rho_n x_1} \right) \cos \alpha_n x_2.
 \end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że w przypadku szczególnym ciała Hooke'a, gdy $\alpha = 0$ ($\rho_n = \alpha_n, \Delta_0 = 1$), naprężenia dążą do zera.

Analiza naprężeń σ_{22}^* dla teorii mikropolarnej. Zbadano zmienność naprężeń σ_{22}^* dla punktów tarczy o współrzędnych $x_1 = 0 \div 2a, x_2 = 0$ i o współrzędnych $x_1 = 0 \div 2a, x_2 = 3a$. Obliczenia szczegółowe przeprowadzono na elektronowej maszynie cyfrowej «ODRA-1204».

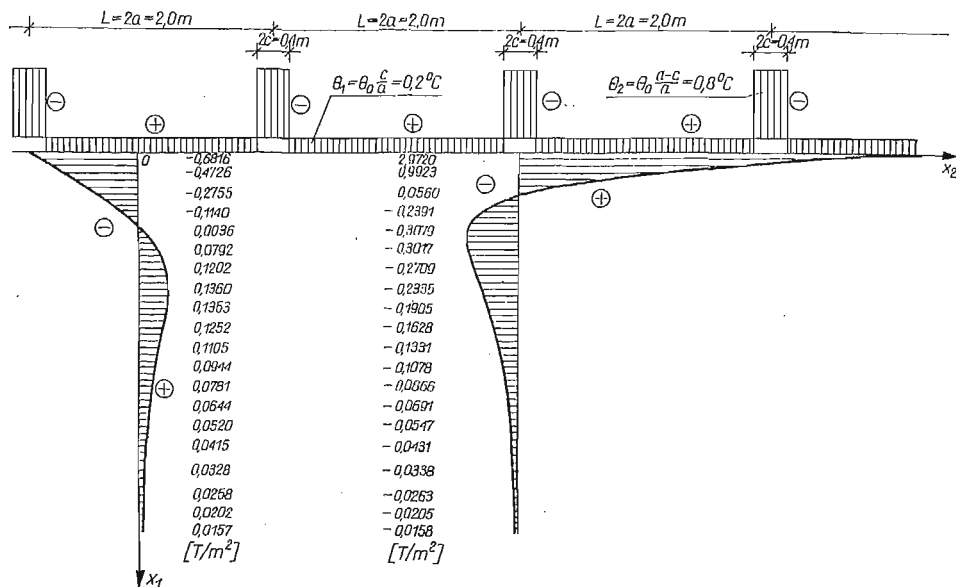
Z uwagi na brak dokładnych wartości stałych materiałowych przyjęto do obliczeń:
 a) dane z klasycznej teorii sprężystości (dla betonu)

$$\left. \begin{aligned}
 \nu &= 0,16 \\
 E &= 0,18 \cdot 10^6 \text{ [kG/cm}^2\text{]} \\
 \alpha_t &= 1 \cdot 10^{-5} \text{ [1/}^\circ\text{C]}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned}
 \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} = 0,077 \cdot 10^7 \text{ [T/m}^2\text{]}, \\
 \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0,036 \cdot 10^7 \text{ [T/m}^2\text{]}, \\
 \mu\bar{m} &= \mu \frac{\alpha_t(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} = 8,924 \text{ [T/}^\circ\text{C} \cdot \text{m}^2\text{]};
 \end{aligned}$$

b) liczbowe stosunki stałych sprężystości wzorując się na pracy [5]

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{5} \mu = 0,0154 \cdot 10^7 \text{ [T/m}^2\text{]} \\
 \gamma &= \varepsilon = 0,0154 \cdot 10^7 \text{ [T]}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 A &= \frac{(\lambda+\mu)(\gamma+\varepsilon)}{\mu(3\lambda+2\mu)} = 0,172 \text{ [m}^2\text{]}, \\
 I^2 &= \frac{(\gamma+\varepsilon)(\mu+\alpha)}{4\mu\alpha} = 0,600 \text{ [m}^2\text{]}.
 \end{aligned}$$

Zmienność naprężeń przedstawiono graficznie na rys. 2. Dla uproszczenia przyjęto grubość tarczy równą jedności. W innym przypadku należałoby podzielić otrzymane wyniki przez grubość tarczy.



Rys. 2

Analizując zmienność naprężeń σ_{22}^* dochodzimy do następujących wniosków:

a) dla punktów przekroju o współrzędnej $x_2 = 0$: naprężenie przyjmuje największą wartość ujemną w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0$, następnie zmienia znak w punkcie o współrzędnej $x_1 = \sim 0,4$ m, osiągając największą wartość dodatnią w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0,7$ m. Wraz z oddalaniem się od obciążonego brzegu wartość naprężeń zmniejsza się, dochodząc do wartości bliskiej zeru w punkcie o współrzędnej $x_1 = 2a$.

b) dla punktów przekroju o współrzędnej $x_2 = 3a$: naprężenie przyjmuje największą wartość dodatnią w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0$, zmienia znak w punkcie o współrzędnej $x_1 = \sim 0,2$ m i osiąga największą wartość ujemną w punkcie o współrzędnej $x_1 = 0,4$ m. Następnie wartość naprężeń zmniejsza się stopniowo, dochodząc do wartości bliskiej zeru w punkcie o współrzędnej $x_1 = 2a$.

Reasumując można stwierdzić, że uwzględnienie niesymetrycznych tensorów naprężeń i odkształceń w ośrodku mikropolarnym prowadzi do zmian w stanie naprężenia tarczy. Naprężenia σ_{11}^* , σ_{22}^* , σ_{12}^* , σ_{21}^* , μ_{13}^* , μ_{23}^* , μ_{31}^* , μ_{32}^* , nie występujące w ciele Hooke'a dla danego zagadnienia występują w ośrodku Cosseratów. Przedstawione wyniki rozwiązania numerycznego pozwalają na wyciągnięcie wniosków natury jakościowej (jedyne) z uwagi na dobór stałych materiałowych nie potwierdzony badaniami doświadczalnymi.

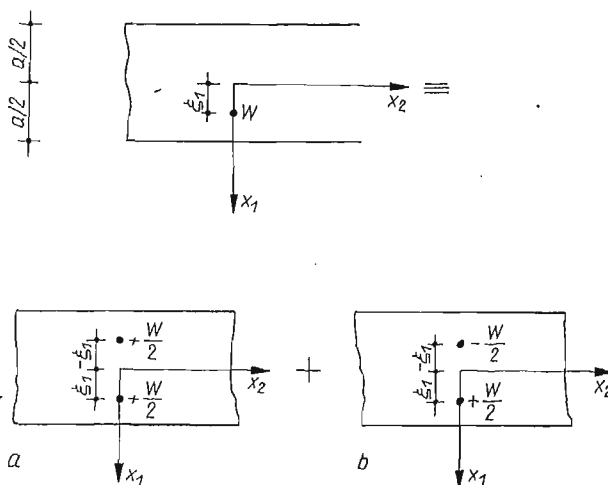
4. Działanie ustalonego źródła ciepła na pasmo tarczowe

W punkcie $(\xi_1, 0)$ pasma tarczowego działa ustalone źródło ciepła o intensywności $W^*(x_1, x_2, x_3) = W^*\delta(x_1 - \xi_1)\delta(x_2)$. Zakładamy, że w płaszczyznach ograniczających tarczę panuje temperatura zerowa oraz naprężenia są równe zero. Mamy

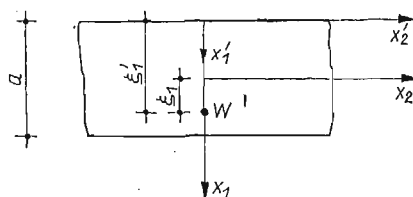
$$(4.1) \quad \sigma_{11}^* = 0, \quad \sigma_{12}^* = 0, \quad \mu_{13}^* = 0, \quad \theta^* = 0 \quad \text{dla } x_1 = \pm \frac{a}{2}$$

Stan obciążenia termicznego rozpatrujemy superponując dwa składowe stany obciążeń zgodnie z rys. 3.

W pierwszej kolejności rozwiążemy zagadnienie przedstawione na rys. 4 w układzie współrzędnych x'_1, x'_2 .



Rys. 3.



Rys. 4.

Z równania przewodnictwa cieplnego

$$(4.2) \quad \nabla_1^2 \theta^* = -\frac{W^*}{k}$$

Z warunkiem brzegowym $\theta^* = 0$ dla $x'_1 = 0, x'_1 = a$ wyznaczymy funkcję θ^* .

Stosując kombinację transformacji skończonej sinusowej i cosinusowej całkowej Fouriera do równania (4.2) mamy

$$(4.3) \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \int_0^a (\partial_1^2 + \partial_2^2) \theta^*(x'_1, x'_2) \sin \alpha_n x'_1 \cos \beta x'_2 dx'_1 dx'_2 = \\ = -\frac{W}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \delta(x'_2) \cos \beta x'_2 dx'_2 \int_0^a \delta(x'_1 - \xi_1) \sin \alpha_n x'_1 dx'_1.$$

Biorąc pod uwagę, że $\int_0^a \delta(x'_1 - \xi_1) \sin \alpha_n x'_1 dx'_1 = \sin \alpha_n \xi_1$, $\int_0^{\infty} \delta(x'_2) \cos \beta x'_2 dx'_2 = \frac{1}{2}$, otrzymujemy równanie (4.2) w członach transformacji

$$(4.4) \quad -(\alpha_n^2 + \beta^2) \tilde{\theta}_{(a_n, \beta)}^* = -\frac{W}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \alpha_n \xi'_1}{2},$$

skąd wyznaczmy

$$(4.5) \quad \tilde{\theta}^* = \frac{W \sin \alpha_n \xi'_1}{k \sqrt{2\pi} (\alpha_n^2 + \beta^2)}.$$

Po wykonaniu retransformacji otrzymujemy funkcję $\theta^*(x'_1, x'_2)$ w postaci

$$(4.6) \quad \theta^*(x'_1, x'_2) = \frac{2W}{k\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \xi'_1 \sin \alpha_n x'_1 \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x'_2}{\alpha_n^2 + \beta^2} d\beta, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{a}.$$

Zagadnienie rozwiązywać będziemy w przemieszczeniach i obrotach. Układ równań różniczkowych (2.12) można rozwiązać za pomocą potencjałów sprzężystych [3], korzystając z możliwości przedstawienia wektora $\underline{u}^* \equiv (u_1^*, u_2^*, 0)$ w postaci gradientu pewnego skalaru i rotacji pewnego wektora. Przyjęcie

$$(4.7) \quad u_1^* = \partial_1 \Phi + \partial_2 \Psi, \quad u_2^* = \partial_2 \Phi - \partial_1 \Psi$$

prowadzi do układu równań dla funkcji Φ , φ_3^*

$$(4.8) \quad \nabla_1^2 \nabla_1^2 \Phi - n \nabla_1^2 \theta^* = 0, \\ \nabla_1^2 (l^2 \nabla_1^2 - 1) \varphi_3^* = 0,$$

gdzie

$$n = \frac{2\mu m}{\mu + \alpha + \beta_0}.$$

Funkcja Ψ wyrażona jest przez φ_3^* zgodnie z równaniem

$$(4.9) \quad \nabla_1^2 \Psi = \frac{1}{2\alpha} [(\gamma + \epsilon) \nabla_1^2 - 4\alpha] \varphi_3^*.$$

Funkcje Φ i φ_3^* winny spełniać również związki Cauchy-Riemanna

$$(4.10) \quad \partial_1(\nabla_1^2 \Phi - n\theta^*) + \frac{n}{m} \partial_2(l^2 \nabla_1^2 - 1)\varphi_3^* = 0,$$

$$\partial_2(\nabla_1^2 \Phi - n\theta^*) - \frac{n}{m} \partial_1(l^2 \nabla_1^2 - 1)\varphi_3^* = 0.$$

Rozwiązanie układu równań (4.8) złożymy z dwu części

$$(4.11) \quad \Phi = \Phi' + \Phi'', \quad \varphi_3^* = \varphi_3^{*'} + \varphi_3^{*''}.$$

Zakładamy, że $\varphi_3^{*''} = 0$, a funkcja Φ' spełnia równanie

$$(4.12) \quad \nabla_1^2 \Phi' - n\theta^* = 0$$

z warunkiem brzegowym $\Phi' = 0$ dla $x'_1 = 0, x'_1 = a$. Z równania (4.12) otrzymujemy po uwzględnieniu (4.5)

$$(4.13) \quad \tilde{\Phi}' = -\frac{nW \sin \alpha_n \xi'_1}{k \sqrt{2\pi} (\alpha_n^2 + \beta^2)^2}.$$

Po wykonaniu retransformacji na powyższym równaniu otrzymamy

$$(4.14) \quad \Phi'(x'_1, x'_2) = -\frac{2nW}{k\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \xi'_1 \sin \alpha_n x'_1 \int_0^{\infty} \frac{\cos \beta x'_2}{(\alpha_n^2 + \beta^2)^2} d\beta.$$

Związane z funkcją Φ' naprężenia będą

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^{*'} &= -\frac{K}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n x'_2}}{\alpha_n} (1 - \alpha_n x'_2) \sin \alpha_n \xi'_1 \sin \alpha_n x'_1, \\ \sigma_{22}^{*'} &= -\frac{K}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n x'_2}}{\alpha_n} (1 + \alpha_n x'_2) \sin \alpha_n \xi'_1 \sin \alpha_n x'_1, \\ \sigma_{12}^{*'} &= \sigma_{21}^{*'} = \frac{K}{a} x'_2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n x'_2} \sin \alpha_n \xi'_1 \cos \alpha_n x'_1, \\ \mu_{13}^{*'} &= \mu_{23}^{*'} = 0, \end{aligned}$$

gdzie $K = \mu n W / k$. Na brzegach $x'_1 = 0, x'_1 = a$ otrzymaliśmy $\sigma_{11}^{*'} = 0, \sigma_{22}^{*'} \neq 0$, natomiast $\sigma_{12}^{*'} = \sigma_{21}^{*'} \neq 0$.

Dla dwu źródeł ciepła umieszczonych symetrycznie względem osi x_2 zgodnie z rys. 3a otrzymamy w układzie współrzędnych x_1, x_2 następujące wzory dla naprężeń $\bar{\sigma}_{12}^{*'}$ na brzegach

$$\bar{\sigma}_{12}^{*'} = \frac{Ka^2}{8\pi} \int_0^{\infty} \beta \bar{Q}(\omega, \xi_1) \sin \beta x_2 d\xi,$$

gdzie

$$\bar{Q}(\omega, \xi_1) = \frac{\beta \xi_1 \operatorname{ch} \omega \operatorname{sh} \beta \xi_1 - \omega \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \beta \xi_1}{\omega^2 \operatorname{ch}^2 \omega}, \quad \omega = \frac{\beta a}{2}.$$

Dla dwu źródeł ciepła umieszczonych zgodnie z rys. 3b otrzymamy analogicznie

$$\bar{\sigma}_{12}^* = \frac{Ka^2}{8\pi} \int_0^\infty \beta \bar{\varrho}(\omega, \xi_1) \sin \beta x_2 d\xi,$$

gdzie

$$\bar{\varrho}(\omega, \xi_1) = \frac{\beta \xi_1 \operatorname{ch} \omega \operatorname{ch} \beta \xi_1 - \omega \operatorname{ch} \omega \operatorname{sh} \beta \xi_1}{\omega^2 \operatorname{sh}^2 \omega}.$$

Dla usunięcia naprężeń $\sigma_{12}^* \neq 0$ na brzegach $x_1 = \pm a/2$ należy do stanu naprężeń $\sigma_{ji}^*, \mu_{ji}^*$ dodać stan naprężeń $\sigma_{ji}^{*'}, \mu_{ji}^{*'}$ określony funkcjami $\Phi'', \varphi_3^{*''}$.

Funkcje Φ'' i $\varphi_3^{*''}$ winny spełniać równania

$$(4.16) \quad \begin{aligned} \nabla_1^2 \nabla_1^2 \Phi'' &= 0, \\ \nabla_1^2 (l^2 \nabla_1^2 - 1) \varphi_3^{*''} &= 0, \end{aligned}$$

z warunkami brzegowymi

$$(4.17) \quad \sigma_{11}^{*'} = 0, \quad \sigma_{12}^* + \sigma_{12}^{*'} = 0, \quad \mu_{13}^{*'} = 0 \quad \text{dla } x_1 = \pm \frac{a}{2}.$$

Jednocześnie powinny być spełnione równania

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \partial_1 \nabla_1^2 \Phi'' + \frac{n}{m} \partial_2 (l^2 \nabla_1^2 - 1) \varphi_3^{*''} &= 0, \\ \partial_2 \nabla_1^2 \Phi'' - \frac{n}{m} \partial_1 (l^2 \nabla_1^2 - 1) \varphi_3^{*''} &= 0. \end{aligned}$$

Dla obciążenia zgodnie z rys. 3a przyjmujemy

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \bar{\Phi}'' &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\bar{M} \operatorname{ch} \beta x_1 + \beta x_1 \bar{N} \operatorname{sh} \beta x_1) \cos \beta x_2 d\beta, \\ \bar{\varphi}_3^{*''} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty (\bar{C} \operatorname{sh} \beta x_1 + \bar{D} \operatorname{sh} \eta x_1) \sin \beta x_2 d\beta, \quad \eta = \left(\beta^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe wyrażamy przez potencjały sprężyste Φ, Ψ i obrót φ_3^* [3]

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \sigma_{11}^* &= 2\mu(\partial_1 \partial_2 \Psi - \partial_2^2 \Phi) + (\lambda_0 + 2\mu) \nabla_1^2 \Phi, \\ \sigma_{12}^* &= 2\mu(\partial_1 \partial_2 \Phi + \partial_2^2 \Psi) - 2\mu(l^2 \nabla_1^2 - 1) \varphi_3^*, \\ \sigma_{21}^* &= 2\mu(\partial_1 \partial_2 \Phi - \partial_1^2 \Psi) + 2\mu(l^2 \nabla_1^2 - 1) \varphi_3^*, \\ &\dots \dots \text{itp.,} \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_0 = 2\mu\lambda/(\lambda + 2\mu)$.

Z warunków brzegowych (4.17) przy wykorzystaniu (4.20) i ze związków (4.18) można wyznaczyć cztery stałe całkowania $\bar{M}, \bar{N}, \bar{C}, \bar{D}$, a następnie obliczyć naprężenia $\bar{\sigma}_{ji}^{*''}, \bar{\mu}_{ji}^{*''}$ związane z funkcjami $\bar{\Phi}'', \bar{\varphi}_3^{*''}$.

Dla obciążenia zgodnie z rys. 3b przyjmujemy

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}'' &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\bar{M} \operatorname{sh} \beta x_1 + \beta x_1 \bar{N} \operatorname{ch} \beta x_1) \cos \beta x_2 d\beta, \\ \bar{\varphi}_{31}^{*''} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} (\bar{C} \operatorname{ch} \beta x_1 + \bar{D} \operatorname{ch} \eta x_1) \sin \beta x_2 d\beta, \quad \eta = \left(\beta^2 + \frac{1}{l^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Po obliczeniu stałych całkowania \bar{M} , \bar{N} , \bar{C} , \bar{D} z warunków brzegowych (4.17) i ze związków (4.18) wyznaczmy związane z funkcjami $\bar{\Phi}''$, $\bar{\varphi}_{31}^{*''}$ naprężenia $\bar{\sigma}_{ji}^{*''}$, $\bar{\mu}_{ji}^{*''}$.

Rozwiązaniem zagadnienia według rys. 3 będą naprężenia wyrażone za pomocą wzorów (4.22)

$$\begin{aligned} \sigma_{ji}^* &= \sigma_{ji}' + \bar{\sigma}_{ji}' + \bar{\sigma}_{ji}^{*''}, \\ \mu_{ji}^* &= \bar{\mu}_{ji}' + \bar{\mu}_{ji}^{*''}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Theory of non-symmetric elasticity* (in Polish), PWN, Warszawa 1971.
2. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
3. W. NOWACKI, *Plane problems of micropolar elasticity*, Arch. of Mech., 23, 5 (1971).
4. K. MAJORKOWSKA-KNAP, *Plaskie zagadnienia mikropolarnej sprężystości*, Praca doktorska złożona w Bibliotece Głównej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.
5. S. KALISKI, J. KAPELEWSKI, S. RYMARZ, *Surface waves on an optical branch in continuum with rotational degrees of freedom*. Proc. Vibr. Probl., 2, 9 (1968).

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ДИСКОВ

В работе рассматриваются вопросы термических напряжений в полубесконечном диске и в дисковой полосе. При решении задач вводятся функции напряжений Эри-Миндлина и упругие потенциалы. Решения дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих рассматриваемые задачи, получаются благодаря применению рядов Фурье и конечных синусовых и косинусовых преобразований Фурье.

Summary

CERTAIN PROBLEMS OF THERMOELASTICITY IN MICROPOLAR PLATES

Problems of thermal stresses in a semi-infinite plate and in a plate strip are considered in the paper. The solution is found by means of the Airy-Mindlin stress functions and elastic potentials. The partial differential equations are solved owing to the application of Fourier series and finite sine and cosine transforms.

FILIA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ W PŁOCKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 17 stycznia 1974 r.

ZASTOSOWANIE ITERACJI SEIDLA W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH NA PRZYKŁADZIE OBLICZEŃ STATYCZNYCH PŁYT

[JERZY GOŁAŚ, ZYGMUNT KASPERSKI, ANNA PEER-KASPERSKA,
JERZY MAKOWSKI (OPOLE)]

1. Wprowadzenie

W metodzie elementów skończonych, jak wiadomo, zasadniczymi czynnikami każdego programu są następujące podprogramy: podprogram do budowania macierzy sztywności poszczególnych elementów, podprogram do budowania układu algebraicznych równań liniowych oraz podprogram do rozwiązywania układu równań. Zbieżność wyników obliczeń numerycznych do rozwiązań dokładnych zależy głównie od wyboru kształtu elementu, postaci funkcji przemieszczeń oraz gęstości podziału ustroju ciągłego na elementy. Zwiększenie liczby punktów węzłowych co prawda lepiej aproksymuje ustrój ciągły, jednak prowadzi do dużego układu równań i zasadniczo limituje możliwość stosowania maszyn cyfrowych do obliczeń. Pojawia się zatem problem opracowywania programów wykorzystujących jak najoptymalniej pojemność pamięci maszyny cyfrowej. Dużą efektywność daje zastosowanie iteracji Seidla do rozwiązywania układu równań. Pozwala ona na wielostopniowe budowanie układu równań, bez pamiętania całej macierzy sztywności układu, oraz na etapowy charakter obliczeń, a ponadto pozwala na pełne wykorzystanie wszystkich własności macierzy sztywności, takich jak: pasmowość, symetria oraz regularny rozkład wyrazów zerowych występujących w paśmie. A zatem, każde równanie zapamiętywane jest w postaci zwartej, z pominięciem wyrazów zerowych.

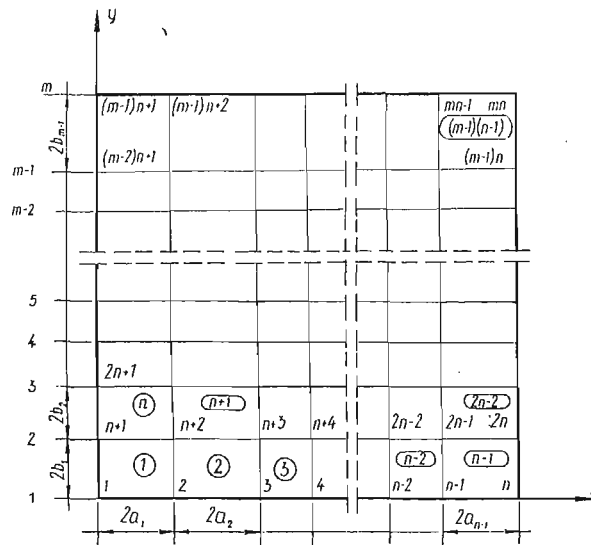
Zasadnicze procedury programu wykorzystującego wyżej wymienione możliwości przedstawione zostaną na przykładzie płyt izotropowych, przyjmując prostokątny element skończony o 12 parametrach węzłowych [1]. W przypadku przyjmowania większej liczby stopni swobody dla elementu prostokątnego, np. 16, czy też jak dla płyty z żebrami jednostronnymi i płyty trójwarstwowej minimum 20, podstawowa istota budowania odpowiednich podprogramów nie ulegnie zmianie. Jedynie wymiary podmacierzy sztywności elementu, zamiast wymiarów (3×3) , przyjmą odpowiednio wielkości (4×4) i (5×5) oraz większa będzie liczba warunków brzegowych, [2], [3].

Przedstawiony algorytm obliczeń numerycznych swą ogólnością obejmuje analizę statyczną płyt dowolnie obciążonych, płyt o kształtach złożonych z prostokątów, płyt o dowolnych warunkach brzegowych i podpartych w swoim obszarze oraz płyt osłabionych otworami prostokątnymi. Sztywność giętna płyt może być zmienna, lecz stała w obrębie elementu.

Niektóre elementy przedstawionego algorytmu mogą być rozszerzone na inne zagadnienia metody elementów skończonych.

2. Algorytm programu

2.1. Dyskretyzacja układu. Rysunek 1 przedstawia prostokątny obszar płyty, który podzielono na $z = (n-1)(m-1)$ elementów skończonych o dowolnych wymiarach oraz ilustruje przyjętą numerację punktów węzłowych i poszczególnych elementów. Przyjęty na rysunku kształt nie ogranicza zastosowań programu do płyt prostokątnych. W przypadku płyt o innych kształtach (ale dających się podzielić na elementy prostokątne) odpowiednim elementom należy nadać bardzo małą grubość w porównaniu do grubości



Rys. 1

płyty rzeczywistej. Dopelnienie obszaru płyty do prostokąta pozwala zachować ciągłość numeracji, a tym samym możliwe jest całkowite zautomatyzowanie obliczeń, przy prostym sposobie przygotowywania danych. Jedyne wielkościami określającymi podział płyty na elementy są: liczby n , m (liczby punktów węzłowych znajdujących się odpowiednio na poziomej i pionowej krawędzi), wymiary a_i , b_j ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$), szerokość i wysokość i -tego pionowego i j -tego poziomego pasa podziału płyty, grubość t_k ($k = 1, 2, \dots, z$) poszczególnych elementów.

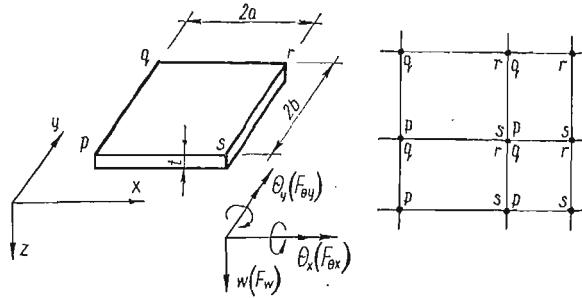
2.2. Sposób tworzenia macierzy sztywności układu. Warunki równowagi dla poszczególnych punktów węzłowych podziału konstrukcji prowadzą do układu równań

$$(2.2.1) \quad [K]\{\delta\} = \{F\},$$

gdzie $[K]$ macierz sztywności układu,
 $\{\delta\}$ wektor uogólnionych przemieszczeń,
 $\{F\}$ wektor obciążeń.

Macierz sztywności układu $[K]$ buduje się z odpowiednio składanych i sumowanych podmacierzy k_{pq} , będących elementami macierzy sztywności poszczególnych elementów. Dla płyty izotropowej macierz sztywności elementu prostokątnego (rys. 2) przyjmuje postać

$$(2.2.2) \quad [k] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k_{pp} & k_{pq} & k_{pr} & k_{ps} \\ k_{qp} & k_{qq} & k_{qr} & k_{qs} \\ k_{rp} & k_{rq} & k_{rr} & k_{rs} \\ k_{sp} & k_{sq} & k_{sr} & k_{ss} \end{bmatrix}$$



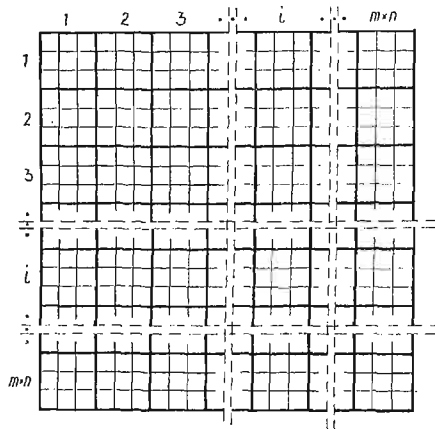
Rys. 2

gdzie elementy k_{qp} są podmacierzami kwadratowymi o wymiarach (3×3) . Podmacierze te wyznaczono w postaci jawnej i przykładowo wynoszą:

$$(2.2.3) \quad \begin{aligned} k_{pp} &= \begin{bmatrix} \frac{7-2\nu}{10ab} + \frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} & -\frac{(1+4\nu)}{10a} - \frac{a}{b^2} & \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} \\ -\frac{(1+4\nu)}{10a} - \frac{a}{b^2} & \frac{4b(1-\nu)}{15a} + \frac{4a}{3b} & -\nu \\ \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} & -\nu & \frac{4a(1-\nu)}{15b} + \frac{4b}{3a} \end{bmatrix}, \\ k_{pq} &= \begin{bmatrix} -\frac{(7-2\nu)}{10ab} + \frac{b}{2a^3} - \frac{a}{b^3} & -\frac{(1-\nu)}{10a} - \frac{a}{b^2} & -\frac{(1+4\nu)}{10b} + \frac{b}{2a^2} \\ \frac{(1-\nu)}{10a} + \frac{a}{b^2} & -\frac{b(1-\nu)}{15a} + \frac{2a}{3b} & 0 \\ -\frac{(1+4\nu)}{10b} + \frac{b}{2a^2} & 0 & -\frac{4a(1-\nu)}{15b} + \frac{2b}{3a} \end{bmatrix}, \\ k_{qq} &= \begin{bmatrix} \frac{7-2\nu}{10ab} + \frac{b}{a^3} + \frac{a}{b^3} & \frac{(1+4\nu)}{10a} + \frac{a}{b^2} & \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} \\ \frac{1+4\nu}{10a} + \frac{a}{b^2} & \frac{4b(1-\nu)}{15a} + \frac{4a}{3b} & \nu \\ \frac{1+4\nu}{10b} + \frac{b}{a^2} & \nu & \frac{4a(1-\nu)}{15b} + \frac{4b}{3a} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie $2a$, $2b$, t oznaczają odpowiednio: długość, szerokość i grubość elementu prostokątnego płyty.

W dalszym ciągu, gdziekolwiek będzie mowa o wierszu bądź kolumnie macierzy $[K]$, to będziemy rozumieli pod tym odpowiednią trójkę wierszy lub kolumn, jak to pokazano na rys. 3. Przez i oznaczono numer punktu węzłowego podziału płyty, $i = 1, 2, \dots, n \times m$.



Rys. 3

Objaśnienie zapisu. Zapis

$$(2.2.4) \quad d - k_{pq} \rightarrow (u, v) : (h)$$

będzie oznaczał: należy wziąć wymiary a, b, t elementu skończonego o numerze d , utworzyć macierz k_{pq} , dodać ją do wyrazów macierzy $[K]$ leżących w wierszu u i w kolumnie v . Z uwagi na symetrię macierzy $[K]$, będziemy budowali tylko jej wyrazy leżące na i nad przekątną, dlatego $u \leq v$. Symbol (h) będzie wyjaśniony w dalszej części pracy.

W zależności od położenia punktów węzłowych podziału płyty rozróżnia się następujące przypadki:

Przypadek I

$i = 1$ (węzeł leżący w lewym dolnym narożu)

$$1 - k_{pp} \rightarrow (1, 1) : (1),$$

$$1 - k_{pq} \rightarrow (1, n+1) : (4),$$

$$1 - k_{pr} \rightarrow (1, n+2) : (5),$$

$$1 - k_{ps} \rightarrow (1, 2) : (2).$$

Przypadek II

$i = 2, 3, \dots, n-1$ (węzły leżące na dolnej poziomej krawędzi płyty, nie licząc węzłów narożnych)

$$i-1 - k_{sq} \rightarrow (i, n+i-1) : (3),$$

$$i-1 - k_{sr} \rightarrow (i, n+i) : (4),$$

$$i-1 - k_{ss} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$i - k_{pp} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$i - k_{pq} \rightarrow (i, n+1) : (4),$$

$$i - k_{pr} \rightarrow (i, n+i+1) : (5),$$

$$i - k_{ps} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek III

$i = n$ (węzeł leżący w prawym dolnym narożu)

$$n-1 - k_{sq} \rightarrow (n, 2n-1) : (3),$$

$$n-1 - k_{sr} \rightarrow (n, 2n) : (4),$$

$$n-1 - k_{ss} \rightarrow (n, n) : (1).$$

Przypadek IV

$i = n+1, 2n+1, \dots, (m-2)n+1$ (węzły leżące na lewej krawędzi nie licząc węzłów narożnych).

Ogólnie: $i = jn+1$, gdzie $j = 1, 2, 3, \dots, m-2$

$$(j-1)n-j+2 - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j-1)n-j+2 - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2),$$

$$jn-j+1 - k_{pp} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$jn-j+1 - k_{pq} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$jn-j+1 - k_{pr} \rightarrow (i, i+n+1) : (5),$$

$$jn-j+1 - k_{ps} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek V

$i = jn+k$, gdzie $k = 2, 3, \dots, n-1$; $j = 1, 2, \dots, m-2$ (węzły leżące wewnątrz obszaru płyty)

$$(j-1)(n-1)+k-1 - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j-1)(n-1)+k - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j-1)(n-1)+k - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2),$$

$$j(n-1)+k-1 - k_{sq} \rightarrow (i, i+n-1) : (3),$$

$$j(n-1)+k-1 - k_{sr} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$j(n-1)+k-1 - k_{ss} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$j(n-1)+k - k_{pp} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$j(n-1)+k - k_{pq} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$j(n-1)+k - k_{pr} \rightarrow (i, i+n+1) : (5),$$

$$j(n-1)+k - k_{ps} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek VI

$i = (j+1)n$, gdzie $j = 1, 2, \dots, m-2$ (węzły leżące na prawej krawędzi nie licząc węzłów narożnych)

$$j(n-1) - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(j+1)(n-1) - k_{sq} \rightarrow (i, i+n-1) : (3),$$

$$(j+1)(n-1) - k_{sr} \rightarrow (i, i+n) : (4),$$

$$(j+1)(n-1) - k_{ss} \rightarrow (i, i) : (1).$$

Przypadek VII

$i = (m-1)n+1$ (węzeł leżący w lewym górnym narożu)

$$(m-2)(n-1)+1 - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(m-2)(n-1)+1 - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek VIII

$i = (m-1)n+k$, gdzie $k = 2, 3, \dots, n-1$ (węzły leżące na górnej krawędzi, nie licząc węzłów narożnych)

$$(m-2)(n-1)+k-1 - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1),$$

$$(m-2)(n-1)+k - k_{qq} \rightarrow (i, i) : (1),$$

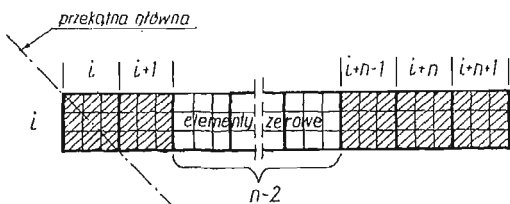
$$(m-2)(n-1)+k - k_{qr} \rightarrow (i, i+1) : (2).$$

Przypadek IX

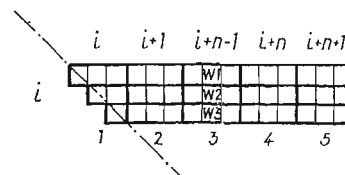
$i = m \times n$ (węzeł leżący w prawym górnym narożu)

$$(m-1)(n-1) - k_{rr} \rightarrow (i, i) : (1).$$

Macierz $[K]$ jest macierzą pasmową o dużej liczbie wyrazów zerowych. Przykładowo: i -ty wiersz macierzy $[K]$ ma postać przedstawioną na rys. 4, gdzie pola zakreskowane oznaczają wyrazy niezerowe. Przy dużych n liczba wyrazów zerowych wzrasta bardzo szyb-



Rys. 4



Rys. 5

ko. Łatwo zauważyć, że maksymalna liczba wyrazów niezerowych w każdym wierszu $[K]$ (po uwzględnieniu symetrii) wynosi 15. Dlatego też, każdy wiersz zapamiętywany jest w tablicach $W1, W2, W3$ o wymiarach $[1:15], [1:14], [1:13]$ (rys. 5), daje to oszczędność pamięci maszyny cyfrowej, a ponadto skraca czas obliczeń, ponieważ na elementach zerowych nie wykonuje się żadnych operacji arytmetycznych.

Zapamiętanie każdego wiersza $[K]$ w postaci zwartej powoduje zmianę indeksów poszczególnych wyrazów. Ujmuje to liczba h (zob. 2.2.4), oznaczająca numer pozycji, do której ściągnięto (przesunięto) odpowiedni wyraz i -tego wiersza. Wyrazem tym może być jedna, bądź suma dwóch i więcej podmacierzy (2.2.2).

2.3. Algorytm rozwiązywania układu równań liniowych z uwzględnieniem warunków brzegowych. Rozwiązanie układu równań (2.2.1), gdzie

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1t} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{r1} & K_{r2} & \dots & K_{rt} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{t1} & K_{t2} & \dots & K_{tt} \end{bmatrix}, \quad \{\delta\} = \begin{bmatrix} \delta^1 \\ \delta^2 \\ \vdots \\ \delta^r \\ \vdots \\ \delta^t \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_r \\ \vdots \\ F_t \end{bmatrix},$$

$t = 3m \times n$ jest liczbą stopni swobody układu, otrzymuje się metodą iteracyjną Seidla z czynnikiem nadrelaksacji ω . Odpowiedni wiersz macierzy $[K]$ umieszczony jest w tablicach $W1, W2, W3$.

Proces iteracyjny w metodzie Seidla odbywa się cyklicznie. Wpierw obiera się dowolne przybliżenie $\delta_0 = [\delta_0^1, \delta_0^2, \dots, \delta_0^t]^T$, a następnie w $(j+1)$ kroku iteracyjnym oblicza się wektor δ_{j+1} według wzoru

$$(2.3.1) \quad \delta_{j+1}^r = \delta_j^r - \frac{\omega}{K_{rr}} \left(\sum_{q=1}^{r-1} K_{rq} \delta_{j+1}^q + \sum_{q=r}^t K_{rq} \delta_j^q - F_r \right),$$

gdzie K_{ij} są wyrazami $[K]$.

Czynnik nadrelaksacji przyśpieszający zbieżność rozwiązania powinien spełniać nierówność $1 \leq \omega \leq 2$, [4].

Ze wzoru (2.3.1) wynika, że w przeciwieństwie do metod dokładnych rozwiązywania układu równań, elementy macierzy sztywności układu $[K]$ nie zmieniają się. Pozwala to, wykorzystać wszystkie własności tej macierzy, jak: symetrię, pasmowość oraz regularny rozkład dużej ilości elementów zerowych występujących w paśmie. Do obliczenia przybliżeń r -tej niewiadomej potrzebny jest tylko r -ty wiersz macierzy $[K]$.

Tok postępowania poszczególnych etapów przedstawionej metody w programie na maszynie cyfrową jest następujący (zob. schemat blokowy, rys. 6):

a) dla dowolnego punktu węzłowego i tworzy się tablice $W1$, $W2$, $W3$ według sposobu podanego w punkcie 2.2,

b) wyznacza się odpowiednią trójkę prawych stron równania (2.2.1),

c) sprawdza się, czy dany węzeł jest węzłem brzegowym, jeśli tak, to jakiego rodzaju warunek brzegowy występuje tam. W przypadku np. cienkich płyt izotropowych rozróżnia się następujące warunki brzegowe:

$$(2.3.2) \quad \begin{array}{lll} \text{I} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} = 0, & \delta^{r+2} = 0), \\ \text{II} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} = 0, & \delta^{r+2} \neq 0), \\ \text{III} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} \neq 0, & \delta^{r+2} = 0), \\ \text{IV} & (\delta^r = 0, & \delta^{r+1} \neq 0, & \delta^{r+2} \neq 0), \end{array}$$

gdzie: δ^r oznacza ugięcie, zaś δ^{r+1} i δ^{r+2} oznaczają kąty obrotów kolejno względem osi równoległych do osi x i y .

Warunki brzegowe do pamięci maszyny cyfrowej wprowadza się podając na taśmie kolejno: rodzaj warunku brzegowego, odpowiednią ich liczbę oraz numery węzłów, w którym dany warunek występuje. Wówczas w każdym kroku iteracyjnym za odpowiednią niewiadomą podstawia się wartość zerową;

d) oblicza się δ^r według wzoru (2.3.1) biorąc za k_{rq} odpowiedni wyraz tablic $W1$, $W2$, $W3$. Przy czym pamiętać należy równocześnie o tym, że w tablicach W wyrazy nie oznaczają kolejnych wyrazów r -tego wiersza macierzy $[K]$, lecz są to tylko niezerowe elementy tego wiersza. W związku z tym niewiadome δ_{j+1}^q oraz δ_j^q we wzorze (2.3.1) muszą występować w odpowiedniej kolejności.

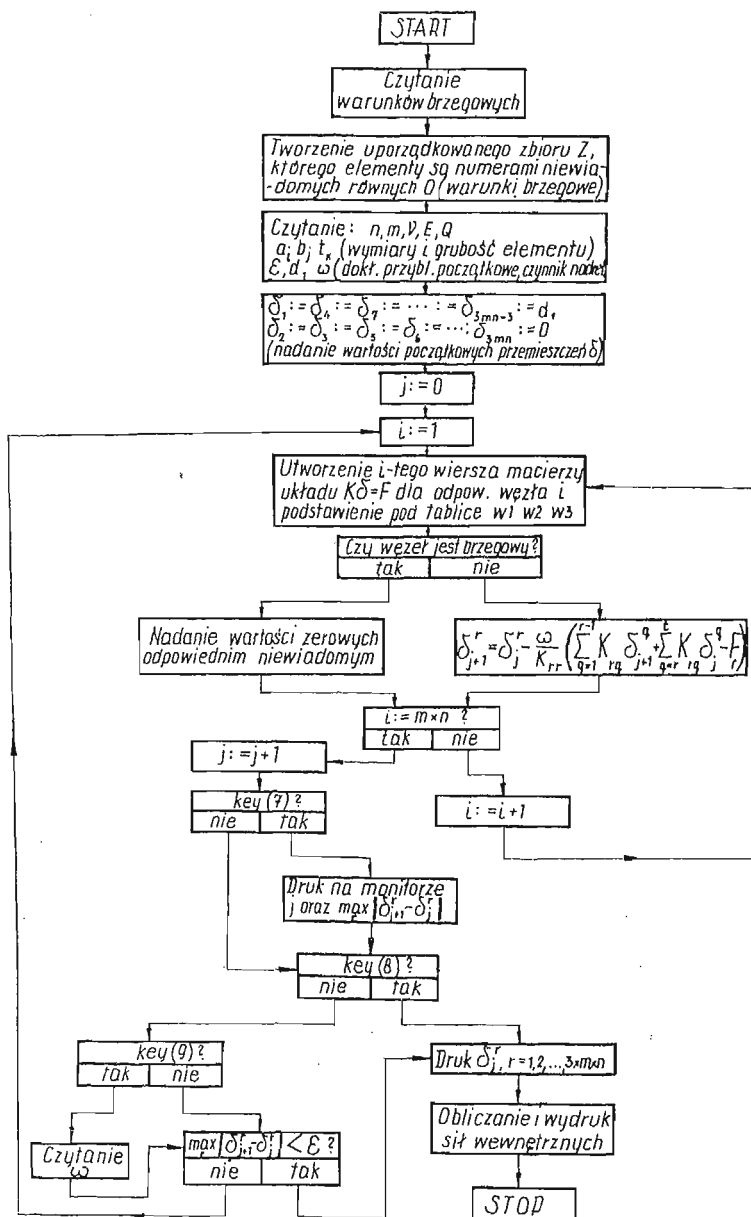
Po wykonaniu iteracji dla wszystkich niewiadomych układu bada się wartość wyrażenia

$$(2.3.3) \quad u = \max_{1 \leq r \leq t} |\delta_{j+1}^r - \delta_j^r|.$$

Wielkość powyższego wyrażenia charakteryzuje szybkość zbieżności do rozwiązania dokładnego oraz określa w pewnym sensie wielkość błędu bezwzględnego. Jeśli $u \leq \varepsilon$, gdzie ε jest zadaną małą wielkością, wówczas obliczanie przemieszczeń kończy się, przy

czym przemieszczenia przyjmują takie wielkości, jakie otrzymano w ostatnim kroku iteracji. Jeśli natomiast $u > \epsilon$, to zaczyna się tok postępowania od punktu a) do d), czyli wykonuje się następny krok iteracji aż do otrzymania $u \leq \epsilon$.

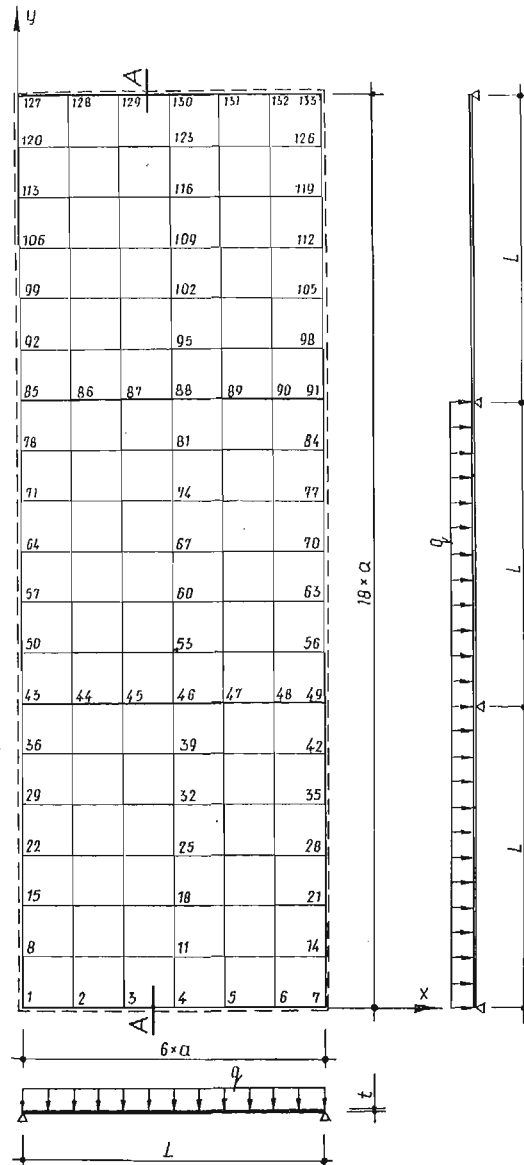
Po rozwiązaniu układu równań (2.2.1), czyli po wyliczeniu przemieszczeń δ , oblicza się wielkości sił wewnętrznych, co nie przedstawia już większych trudności i nie będzie omówione w niniejszej pracy.



Rys. 6. Ogólny schemat blokowy programu zrealizowanego na maszynie cyfrowej «ODRA 1204» Zapis key (i) oznacza pytanie, czy został wciśnięty klawisz o numerze i dla maszyny cyfrowej «ODRA 1204»

3. Uwagi końcowe

Autorzy sądzą, że przedstawiona metoda iteracji może być wykorzystana wszędzie tam, gdzie otrzymuje się dużą liczbę równań, których rozwiązanie metodą dokładną np. metodą eliminacji Gaussa przekracza możliwości pojemności pamięci maszyny cyfrowej.



Rys. 7

Wadą metody jest to, że oblicza się wielokrotnie te same wielkości tzn. powtarza się zawsze tok postępowania od punktu a) aż do d). Jest to jednak konieczne ze względu na ograniczone pojemności maszyn cyfrowych. Czas obliczeń zależy od gęstości podziału

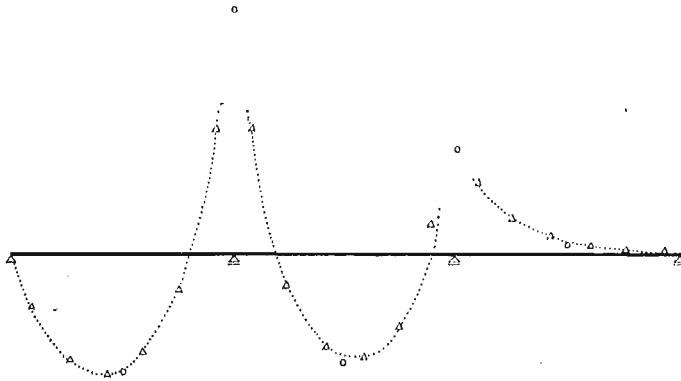
obszaru płyty na elementy i od odpowiedniego doboru czynnika nadrelaksacji ω . Przykładowo dla około 1000 stopni swobody i $\omega = 1,8$ czas obliczeń wynosił 2,5 godziny.

Można ponadto wysunąć następujące wnioski:

1. Metody iteracyjne posiadają ważną własność tzw. autokorekcji.
2. Przedstawiony program można rozszerzyć na zagadnienia statyki płyt trójwarstwowych, płyt z żebrami jednostronnymi itp.
3. Modyfikacja wektora obciążeń w każdym kroku iteracyjnym, przez wprowadzenie czynnika nadrelaksacji znacznie skraca czas obliczeń na maszynie cyfrowej.

4. Przykład liczbowy

Opracowany program sprawdzono na szeregu przykładów liczbowych. Dla płyty trójpolowej, (rys. 7), przy podziale na 108 elementów skończonych otrzymane wyniki momentów zginających w porównaniu z wynikami znanymi z literatury [5] różnią się o około $0,5\% \div 1,5\%$ (rys. 8).



Rys. 8. Wykres momentów zginających M w przekroju $A - A$; \circ — wyniki znane z literatury, $\dots \Delta \dots$ — wyniki otrzymane

Literatura cytowana w tekście

1. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa (1972).
2. R. GANOWICZ, J. GOŁAŚ, *Pewne problemy teorii płyt z żebrami jednostronnymi*, Rozpr. Inż., 3, 15, (1967).
3. J. GOŁAŚ, *Pewne rozwiązania dla kołowych płyt trójwarstwowych obciążonych na krawędzi*, Rozpr. Inż. 19, 2, (1971).
4. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, Warszawa 1971.
5. *Poradnik inżyniera i technika budowlanego*, Praca zbiorowa, Arkady, Warszawa 1968.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИИ ЗЕЙДЛЯ К МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПРИМЕРЕ СТАТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ ПЛИТ

В работе рассмотрена программа статического расчета, методом конечных элементов, прямоугольных плит со скачкообразно меняющейся жесткостью, при произвольных нагрузках и произвольных краевых условиях. Решение вытекающей из процедуры дискретизации, системы уравне-

ний получено с применением итерационного метода Зейделя со сверхрелаксацией. Применение метода Зейделя дало возможность многоступенчатого построения системы уравнений при одновременном ее решении. Программа проверена на ряде численных примеров. Рассматриваемый метод может использоваться для других задач решаемых методом конечных элементов.

Summary

APPLICATION OF SEIDEL'S ITERATION TO THE FINITE ELEMENT METHOD, ON THE SAMPLE OF STATIC PLATE ANALYSIS

The paper presents a program of the finite element method applied to the static analysis of rectangular plates with jumptype variable rigidity, under arbitrary boundary conditions and loads. The set of equations resulting from the discretization process is solved by the iterational Seidel method with super-relaxation. Application of the Seidel method enables the multi-step construction of the set of equations and its simultaneous solution. The program is verified on several numerical examples. The procedure discussed may be applied to other finite element problems.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, OPOLE

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 stycznia 1974 r.

RÓWNOWAGA I STATECZNOŚĆ PODŁUŻNA SKOCZKA NARCIARSKIEGO W LOCIE*

JERZY MARYNIAK I BOGDAN KRASNOWSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono zagadnienie równowagi i stateczności podłużnej skoczka narciarskiego na części toru stanowiącej swobodny lot. Skoczek narciarski stanowi swobodny obiekt latający, złożony z człowieka i nart, na który działają siły grawitacyjne oraz siły i momenty aerodynamiczne.

Porównując pierwsze skoki narciarskie wykonane w 1860 r. przez Norwega Nordheima o długości 19 m na skoczni Brukenberg z lotem Manfreda Wolfa (NRD) 165 m wykonanym w roku 1969 na skoczni mamuciej w Planicy, należy zdawać sobie sprawę z tego, że na współczesne osiągnięcia wpływ mają badania naukowe.

Pierwsze badania modeli skoczków w tunelu aerodynamicznym wykonał w 1924 r. Szwajcar Reinhardt STRAUMANN. Norwegowie wykorzystali praktycznie badania STRAUMANNA i na Olimpiadzie w Chamonix w 1924 r. wprowadzili styl «aerodynamiczny», nazwany później norweskim, z dużym wychyleniem do przodu (Bonna), a nawet z załamaniem w biodrach (Thains). Pozwoliło to Thamsowi, poza konkursem, ustanowić rekord świata 58,5 m [4]. Wyniki otrzymane w badaniach modelowych STRAUMANN potwierdził w roku 1955 badaniami aerodynamicznymi przeprowadzonymi na skoczkach narciarskich umieszczonych w tunelu aerodynamicznym [13].

Następnie badania aerodynamiczne narciarzy były i są prowadzone w szeregu krajów. W Polsce badania aerodynamiczne modeli skoczków narciarskich były wykonywane w Katedrze Aerodynamiki Wydziału Mechanicznego Energetyki i Lotnictwa Politechniki Warszawskiej oraz narciarzy w pozycji zjazdowej w Instytucie Lotnictwa [12]. Wyniki tych badań nie zawierały wszystkich charakterystyk potrzebnych do obliczeń dynamicznych skoczka, co było powodem przeprowadzenia przez autorów własnych badań aerodynamicznych przedstawionych w niniejszej pracy.

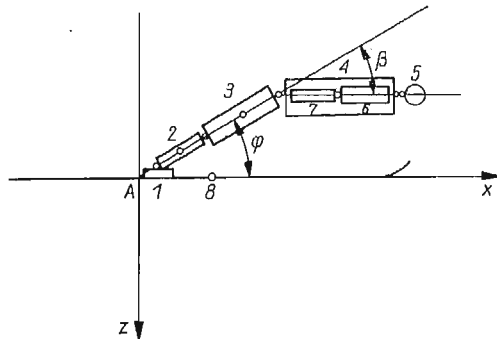
Dotychczas zwracano dużą uwagę na zagadnienia aerodynamiczne dążąc do opracowania idealnej sylwetki skoczka narciarskiego, wykazującej maksymalną doskonałość aerodynamiczną, tj. maksymalny stosunek siły nośnej do oporu aerodynamicznego. Skok narciarski i lot narciarski jest zjawiskiem dynamicznym i należy rozważać równowagę sił i momentów zarówno aerodynamicznych, jak i pochodzących od sił ciężkości. Oba powyższe czynniki decydują o sylwetce skoczka zapewniającej równowagę i stateczność względem położenia równowagi.

Przedstawiona praca stanowi potraktowanie skoczka narciarskiego jako obiektu latającego, szybującego w powietrzu jak klasyczny aparat latający — szybowiec, do którego badań mogą być zastosowane metody mechaniki lotu samolotów.

* Fragmenty pracy były przedstawione na I Krajowym Seminarium Biomechaniki, Warszawa AWF 1973 r. i I Ogólnopolskim Sympozjum «Systemy — Modelowanie — Sterowanie», Zakopane 1973 r.

W pracy przyjęto następujące założenia:

- człowiek traktowany jest jako sztywny układ dyskretny złożony z 12 mas (rys. 1),
- narty sztywne o stałym rozstawie,
- konfiguracja człowieka określona względem płaszczyzny nart kątami φ i β (rys. 1),
- powietrze stanowi ośrodek spokojny (bezwietrzny),
- wysokość skoczni nad poziomem morza stała, tzn. stała gęstość powietrza w czasie całego skoku $\rho = \text{const}$.



Rys. 1. Dyskretny model narciarza jako układ 12 mas oraz kąty określające konfigurację

W pracy rozpatrzono zagadnienia równowagi i stateczności podłużnej skoczka narciarskiego, tzn. rozważono ruchy zachodzące w płaszczyźnie symetrii zgodnej z kierunkiem sił grawitacyjnych. Skoczka narciarskiego traktowano jako układ mechaniczny o trzech stopniach swobody: zmiana prędkości podłużnej u , zmiana prędkości pionowej w , zmiana kąta pochylecia ϑ . Założono, że skoczek stanowi w danej chwili, dla określonej konfiguracji ciała, układ sztywny poruszający się w spokojnym powietrzu w pobliżu ziemi (rys. 1).

2. Siły i momenty aerodynamiczne

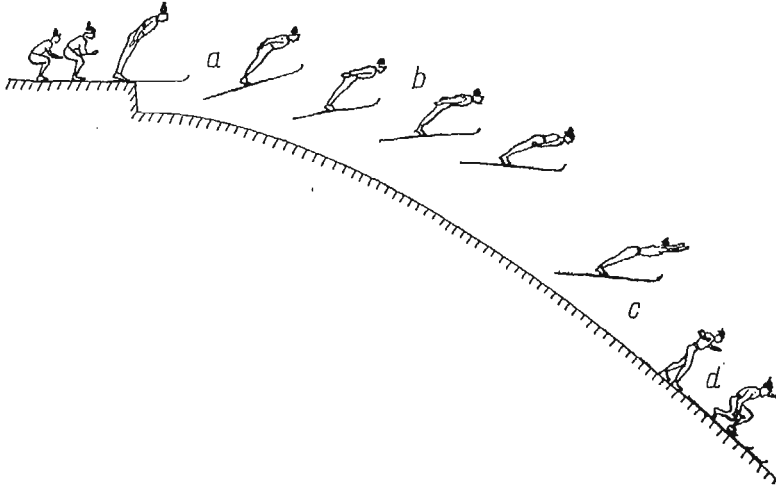
Na skoczka narciarskiego poruszającego się w powietrzu działają siły i momenty aerodynamiczne proporcjonalne do kwadratu prędkości i malejące wraz z wysokością proporcjonalnie do zmian gęstości powietrza. Dlatego w przypadku skoków i lotów narciarskich, przy których prędkości skoczków dochodzą do $30 \div 35$ m/s, celowe jest szczególowsze rozeznanie zachodzących przy tym zjawisk aerodynamicznych oraz ilościowe ujęcie ich skutków.

Skoczek narciarski jest szczególnym obiektem latającym, bowiem jest to człowiek nie osłonięty pojazdem. Konfiguracja ciała skoczka i jego usytuowanie względem nart ma szczególnie duże znaczenie nie tylko ze względu na poprawienie wyczynu sportowego, ale również zwiększenie bezpieczeństwa w tej dziedzinie sportu.

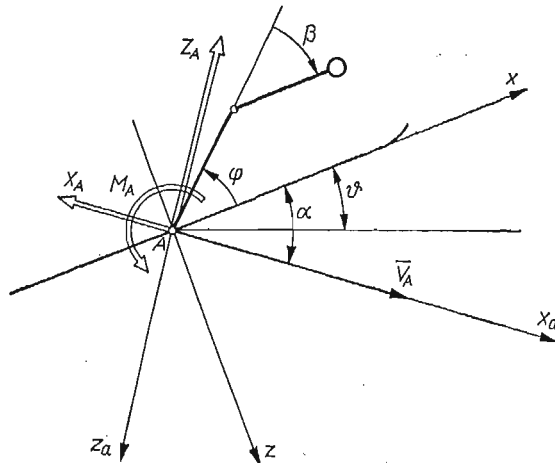
Konfiguracja ciała zmienia się w czasie jednego skoku, (rys. 2), jak również w zależności od prędkości i «stylu» skoczka. Z powyższych względów celowe jest przebadanie różnych sylwetek i przy różnych kątach natarcia.

W celu określenia sił i momentów aerodynamicznych wykonano model skoczka narciarskiego wraz z nartami. Sztywny model skoczka posiadał możliwości zmiany konfiguracji dzięki ruchomym stawom biodrowym i skokowym. Dzięki temu można było zbadać w tunelu aerodynamicznym kilka sylwetek skoczka.

Dla określenia położenia modelu skoczka względem nart obrano współrzędne kątowe φ i β (rys. 3).

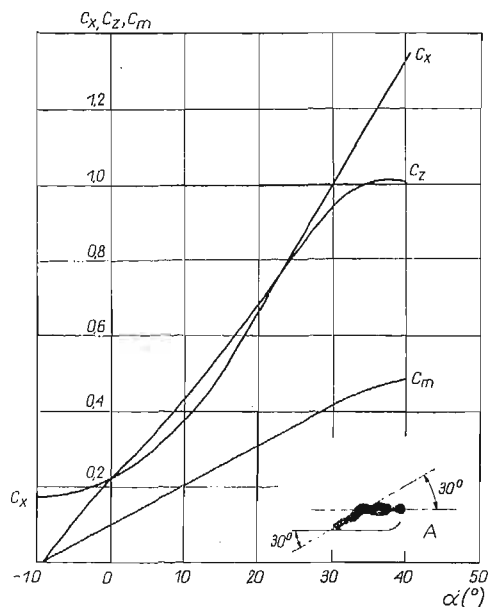


Rys. 2. Zmiana sylwetki skoczka w czasie lotu: *a* — faza odbicia i formowania odpowiedniej sylwetki, *b* — właściwy lot, *c* — przygotowanie do lądowania, *d* — lądowanie

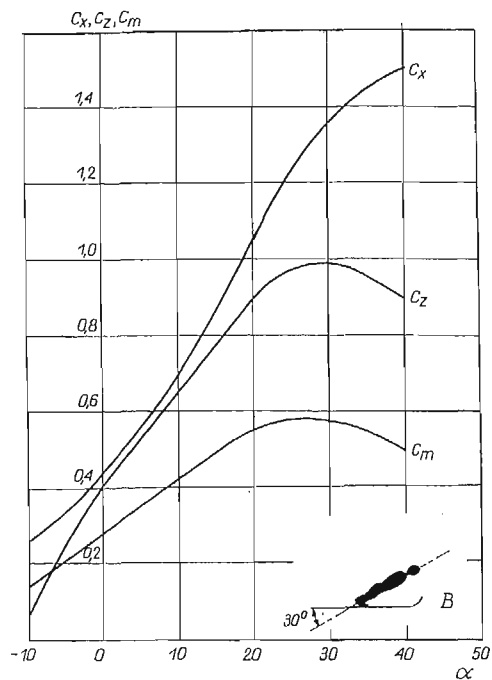


Rys. 3. Konfiguracja skoczka narciarskiego oraz siły i momenty aerodynamiczne, działające na skoczka w locie

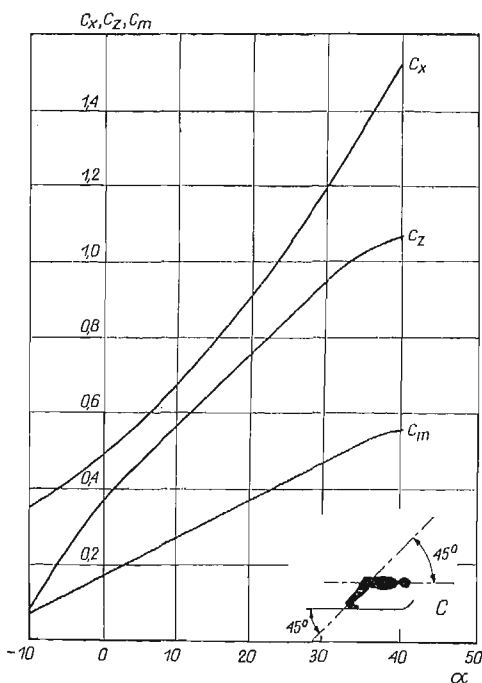
Bezwymiarowe współczynniki sił i momentów aerodynamicznych wyznaczono dla czterech konfiguracji ciała (φ , β) w funkcji kąta natarcia α (rys. 3) przy czym kąt θ określa położenie narciarza względem poziomu.



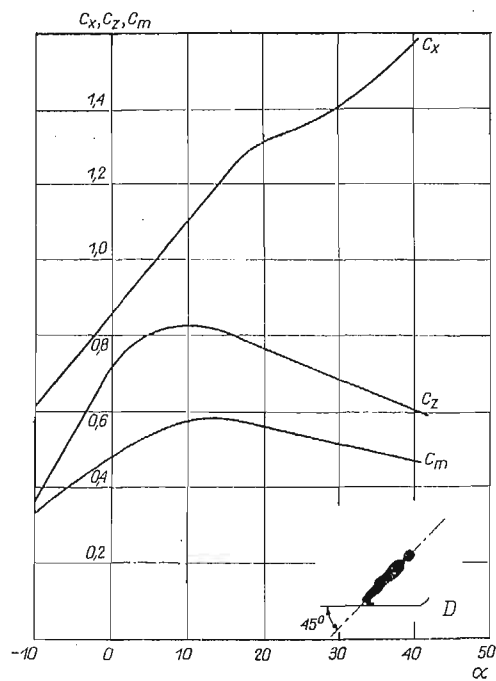
Rys. 4. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu C_x , siły nośnej C_z i momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji narciarza A, $\varphi = 30^\circ$ i $\beta = 30^\circ$



Rys. 5. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu C_x , siły nośnej C_z i momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji narciarza B, $\varphi = 30^\circ$ i $\beta = 0^\circ$



Rys. 6. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu C_x , siły nośnej C_z i momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji narciarza C, $\varphi = 45^\circ$ i $\beta = 45^\circ$



Rys. 7. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu C_x , siły nośnej C_z i momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji narciarza D, $\varphi = 45^\circ$ i $\beta = 0^\circ$

Siły i momenty aerodynamiczne opisane są następującymi zależnościami:
siła nośna

$$(1) \quad Z_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_z,$$

opór aerodynamiczny

$$(2) \quad X_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_x,$$

moment pochylający

$$(3) \quad M_a = \frac{1}{2} \rho V^2 S l C_m,$$

gdzie

C_x, C_z, C_m bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu, siły nośnej i momentu pochylającego,

V prędkość lotu, styczna do toru,

S powierzchnia odniesienia — powierzchnia nart,

l długość odniesienia — długość nart,

ρ gęstość powietrza na danej wysokości.

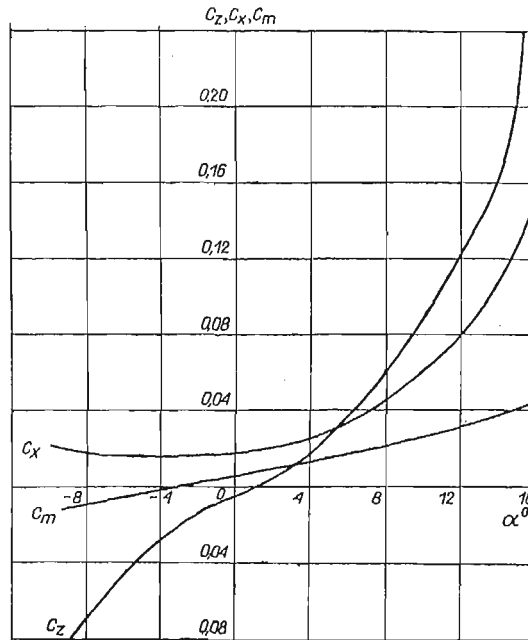
Doświadczalnie wyznaczono siły aerodynamiczne Z_a i X_a oraz moment aerodynamiczny M_a . Po przekształceniu wzorów (1), (2), (3) wyznaczono współczynniki aerodynamiczne C_x, C_z, C_m w funkcji kąta natarcia α dla czterech różnych konfiguracji ciała i nart (rys. 4÷7).

Dla porównania podano bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne (rys. 8) dla nart skokowych «Tatry», otrzymane z badań w Instytucie Lotnictwa w Warszawie [13].

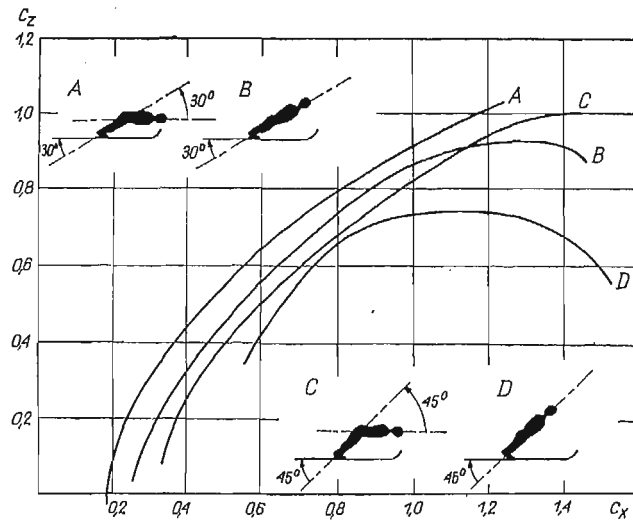
W celu porównania własności aerodynamicznych poszczególnych sylwetek, na rys. 9 przedstawiono biegunowe skoczków narciarskich $C_z = f(C_x)$ oraz zmiany doskonałości skoczka K w funkcji kąta natarcia α (rys. 10). Doskonałość skoczka K określono jako stosunek współczynnika siły nośnej C_z do współczynnika oporu C_x , tzn. tak jak dla obiektów latających

$$(4) \quad K = \frac{C_z}{C_x}.$$

Utrzymanie maksymalnej doskonałości w czasie lotu umożliwia osiągnięcie najdłuższego skoku. Z rys. 10 wynika, że najdogodniejszymi sylwetkami są konfiguracje A i B , co potwierdza wskazówki w [14]. Najmniej korzystna z punktu widzenia aerodynamiki jest sylwetka D , ze wzrostem kąta natarcia α powoduje znaczny wzrost współczynnika oporu C_x z równoczesnym spadkiem C_z (rys. 7), pociąga to za sobą gwałtowny spadek doskonałości K (rys. 10). Konfiguracja A umożliwia uzyskanie maksymalnych doskonałości $K > 1$ dla kątów natarcia $5^\circ < \alpha < 25^\circ$ (rys. 10), natomiast, praktycznie biorąc,

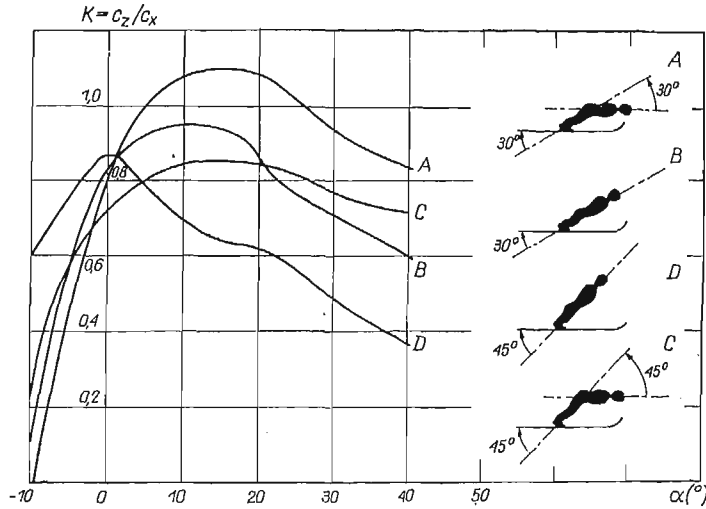


Rys. 8. Bezwymiarowe współczynniki aerodynamiczne oporu C_x , siły nośnej C_z i momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α dla nart skokowych «Tatry»



Rys. 9. Biegunowe skoczka narciarskiego $C_z = f(C_x)$ dla różnych konfiguracji nart i ciała A, B, C i D

stałą doskonałość $K \approx 0,8$ na pełnym zakresie kątów natarcia $0 < \alpha < 40^\circ$ zapewnia sylwetka C. Jednak wybór sylwetki jest uzależniony od warunków równowagi i stateczności dynamicznej skoczka.



Rys. 10. Doskonałość skoczka narciarskiego K w funkcji kąta natarcia α dla różnych konfiguracji nart i ciała A, B, C i D

3. Geometria mas

Skoczka narciarskiego zastąpiono modelem dyskretnym o 12 masach skupionych, wyznaczonych na podstawie danych statystycznych [8].

Znając masy poszczególnych części ciała ludzkiego i środki mas określone dla każdej konfiguracji, położenie środka ciężkości narciarza, jak również moment bezwładności i momenty statyczne względem układu odniesienia związanego ze stawem skokowym (rys. 1)

$$(5) \quad J_{Ay} = \sum_{i=1}^{12} [m_i(x_{ci}^2 + z_{ci}^2) + J_{ci}] + J_{yn},$$

gdzie

- m_i masa i -tej części ciała ludzkiego,
- x_{ci}, z_{ci} współrzędne środka masy i -tej części,
- J_{ci} moment bezwładności i -tej części ciała względem środka masy,
- J_{yn} moment bezwładności nart.

4. Równowaga podłużna skoczka

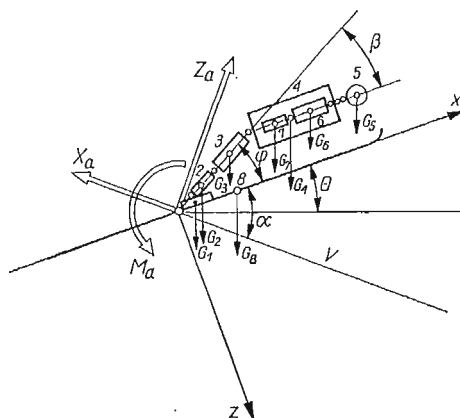
Warunki równowagi podłużnej skoczka ustalono rozpatrując równowagę momentów pochylających M_A pochodzących od sił aerodynamicznych $M_a(\alpha)$ zależnych od kąta natarcia α i sił masowych $M_m(\theta)$ zależnych od kąta położenia względem toru θ (rys. 11)

$$(6) \quad M_A = M_a(\alpha) + M_m(\theta).$$

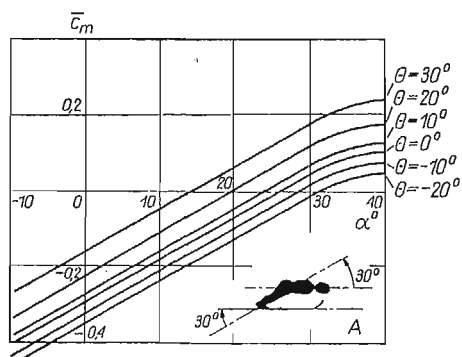
Bezwymiarowy współczynnik momentu pochylającego otrzymano w postaci

$$(7) \quad C_m = \frac{M_A}{\frac{1}{2} \rho V^2 S l} = C_m(\alpha) + C_m(\theta).$$

Dla tak obliczonych współczynników momentów pochylających wykonano wykresy $C_m = f(\alpha)$ przy różnych kątach położenia θ i dla różnych konfiguracji ciała (rys. 12÷15).



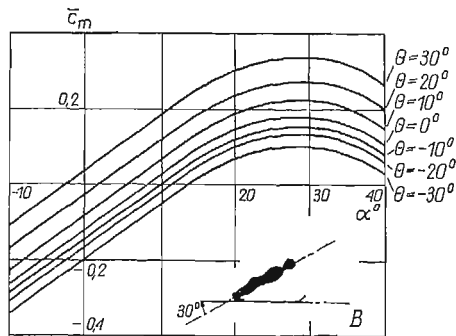
Rys. 11. Przyjęte układy odniesienia oraz układy sił i momentów działających na skoczka w locie



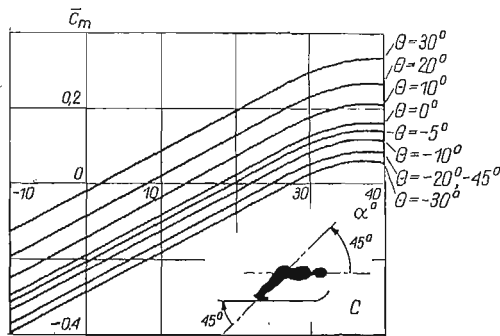
Rys. 12. Zmiana współczynnika momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α przy różnych kątach położenia θ dla konfiguracji A, $\varphi = 30^\circ$ i $\beta = 30^\circ$

Skoczek znajduje się tylko wówczas w stanie równowagi, gdy suma momentów pochylających jest równa zero $M_A = 0$, to znaczy, gdy $C_m = 0$.

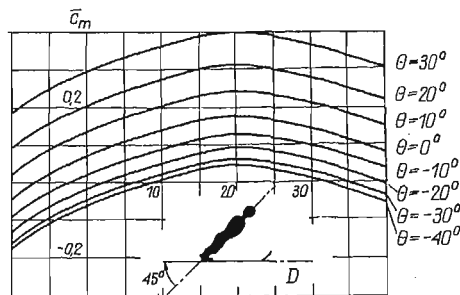
Korzystając z wykresów momentów (rys. 12÷15) wyznaczono położenie równowagi $C_m = 0$ określając ściśle dla danej konfiguracji ciała i nart kąty natarcia α i kąty położenia θ , co przedstawiono na rys. 16.



Rys. 13. Zmiana współczynnika momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α przy różnych kątach położenia θ dla konfiguracji B, $\varphi = 30^\circ$ i $\beta = 0^\circ$

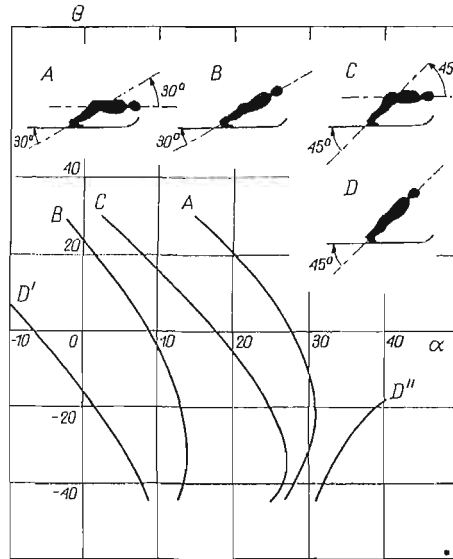


Rys. 14. Zmiana współczynnika momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α przy różnych kątach położenia θ dla konfiguracji C, $\varphi = 45^\circ$ i $\beta = 45^\circ$



Rys. 15. Zmiana współczynnika momentu pochylającego C_m w funkcji kąta natarcia α przy różnych kątach położenia θ dla konfiguracji D, $\varphi = 45^\circ$ i $\beta = 0^\circ$

Równowaga skoczka przy danej konfiguracji ciała i nart jest możliwa jedynie dla ściśle określonych kątów natarcia α i położenia θ . Dla tak ustalonych warunków równowagi przystąpiono do badania stateczności podłużnej skoczka, tzn. do zbadania, czy skoczek po wytrąceniu z położenia równowagi samoczynnie wraca do stanu ustalonego, czy też wymagana jest interwencja skoczka poprzez zmiany konfiguracji ciała lub nart.



Rys. 16. Krzywe równowagi podłużnej skoczka $\theta = f(\alpha)$ przy $C_m = 0$ dla różnych konfiguracji ciała i nart A, B, C i D

5. Równania ruchu skoczka narciarskiego

Stosując metodę małych zakłóceń względem położenia równowagi wyprowadzono dynamiczne równania ruchu skoczka w ruchomym układzie współrzędnych związanych ze skoczkiem (rys. 11)

$$\begin{aligned}
 (8) \quad m\dot{u} + S_{Ax}\dot{q} + mW_1q &= X_u u + X_w w + X_q q - mg\vartheta \cos\theta_1, \\
 m\dot{v} - S_{Az}\dot{q} - mU_1q &= Z_u u + Z_w w + Z_q q - mg\vartheta \sin\theta_1, \\
 S_{Ax}\dot{u} - S_{Az}\dot{v} + J_{Ay}\dot{q} + (S_{Ax}W_1 + S_{Az}U_1)q &= \\
 &= M_u u + M_w w + M_q q + g(S_{Az}\sin\theta_1 - S_{Ax}\cos\theta_1)\vartheta, \\
 \dot{\vartheta} &= q,
 \end{aligned}$$

gdzie

- u, w zmiany prędkości liniowych podłużnej i pionowej,
- q zmiana prędkości kątowej pochylenia,
- J_{Ay}, S_{Ax}, A_{Az} moment bezwładności i odpowiednie momenty statyczne,
- m masa skoczka z nartami,
- U_1, W_1 składowe prędkości skoczka, podłużna i pionowa.

Dla ruchów nieustalonych skoczka przyjęto zgodnie z określeniami lotniczymi pochodne aerodynamiczne $X_u, X_w, X_q \dots M_w, M_q$, co wynika z przyjęcia założenia, że zmiany sił aerodynamicznych: oporu X siły nośnej Z i momentu pochyłającego M są liniowo zależne od zmian prędkości

$$(9) \quad X = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial w} dw + \frac{\partial X}{\partial q} dq,$$

analogicznie dla Z i M wprowadzając zapis zależności (9) przyjęty w dynamice lotu, otrzymano:

$$(10) \quad \begin{aligned} X &= X_u u + X_w w + X_q q, \\ Z &= U_u u + Z_w w + Z_q q, \\ M &= M_u u + M_w w + M_q q. \end{aligned}$$

Równania ruchu (8) sprowadzono do postaci bezwymiarowej dzieląc równania sił przez $\rho V^2 S$ i równanie momentów $\rho V^2 S l$ oraz wprowadzając zależności:

$$u = \frac{m}{\rho S l} \quad \text{względna gęstość skoczka,}$$

$$\hat{t} = \frac{m}{\rho U_1 S} \quad \text{czas aerodynamiczny,}$$

$$j_A = \frac{J_{Ay}}{m l^2} \quad \text{bezwymiarowy moment bezwładności,}$$

$$\bar{S}_{Ax} = \frac{S_{Ax}}{m l} \quad \text{bezwymiarowy moment statyczny,}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{U_1} \quad \text{bezwymiarowa zmiana prędkości liniowej,}$$

$$\bar{q} = q \hat{t} \quad \text{bezwymiarowa zmiana prędkości kątowej.}$$

Otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego w postaci

$$(11) \quad \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

gdzie

— macierz współczynników bezwładności

$$(12) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & \bar{S}_{Ax}/\mu \\ 0, & 1, & -\bar{S}_{Az}/\mu \\ \bar{S}_{Ax}, & -\bar{S}_{Az}, & j_A/\mu \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników tłumienia

$$(13) \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -x_u, & -x_w, & -x_q/\mu \\ -z_u, & -z_w, & -(1 + Z_q/\mu) \\ -m_u, & -m_w, & S_{Az} - m_q/\mu \end{bmatrix},$$

— macierz współczynników sztywności

$$(14) \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & x_\theta \\ 0, & 0, & x_\theta \operatorname{tg} \theta_1 \\ 0, & 0, & -x_\theta (\bar{S}_{Az} \operatorname{tg} \theta_1 - \bar{S}_{Ax}) \end{bmatrix},$$

Zakładając, że zmiany prędkości podłużnej u , pionowej w i prędkości pochylania q są małe i pomijając małe rzędu drugiego i wyższe, wyprowadzono teoretycznie zależności na pochodne aerodynamiczne występujące w (10) i postaci bezwymiarowej (12)÷(14). Pochodną aerodynamiczną zmiany oporu względem zmian prędkości podłużnej u obliczono korzystając z zależności na opór aerodynamiczny (15)

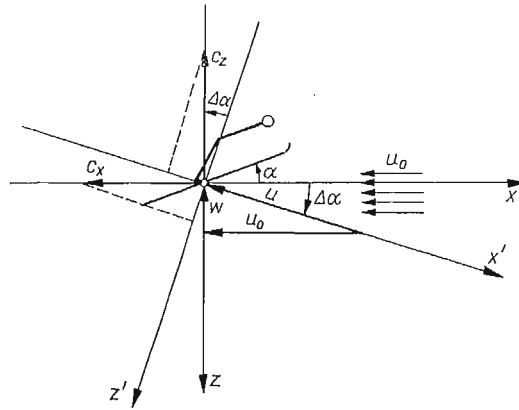
$$(15) \quad X = -\frac{1}{2} \rho U^2 S C_x,$$

gdzie

$$(16) \quad U = U_1 + u,$$

po podstawieniu do (15) i zróżniczkowaniu otrzymano

$$(17) \quad x_u = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial X}{\partial u} = -C_x.$$



Rys. 17. Zmiana kąta natarcia $\Delta\alpha$ wywołana zmianą prędkości pionowej w

Korzystając z zależności (1) i (3) po podstawieniu (16) i postępując analogicznie jak przy wyprowadzeniu x_u otrzymano:

— pochodną aerodynamiczną zmiany siły nośnej względem zmian prędkości podłużnej u

$$(18) \quad z_u = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial Z}{\partial u} = -C_z,$$

— pochodną aerodynamiczną zmiany momentu pochylającego względem zmian prędkości podłużnej u

$$(19) \quad m_u = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial M}{\partial u} = C_m.$$

Pochodne aerodynamiczne zmian: siły nośnej, oporu i momentu pochylającego względem zmiany prędkości pionowej w wyprowadzamy korzystając z zależności (1)÷(3) i wprowadzenia zależności (20) na zmiany kąta natarcia (rys. 17)

$$(20) \quad \Delta\alpha = \frac{w}{U_1}.$$

Zmiana oporu wywołana zmianą prędkości pionowej w wyraża się zależnością

$$(21) \quad (X)_w = -\frac{1}{2} \rho U_1^2 S \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{1}{2} \rho U_1^2 S C_z \Delta \alpha,$$

to

$$(22) \quad x_w = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial (X)_w}{\partial w} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} C_z.$$

Analogicznie otrzymano:

— pochodną aerodynamiczną zmian siły nośnej względem zmian prędkości pionowej w

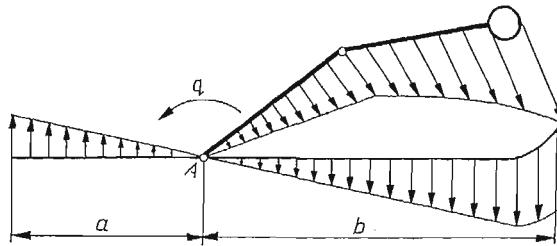
$$(23) \quad z_w = \frac{1}{\rho U_1 S} \frac{\partial (Z)_w}{\partial w} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} + \frac{1}{2} C_x,$$

— pochodną aerodynamiczną zmiany momentu pochylającego względem zmian prędkości pionowej w

$$(24) \quad m_w = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial (M)_w}{\partial w} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha}.$$

Zmiana prędkości kątowej pochylania q powoduje zmianę kąta natarcia $\Delta \alpha$ zmienną wzdłuż długości ciała skoczka i narty. Zmiana kąta natarcia zależy od odległości x od osi obrotu, którą przyjęto w początku układu współrzędnych (rys. 18)

$$(25) \quad \Delta \alpha = -\frac{qx}{U_1}.$$



Rys. 18. Zmiana kąta natarcia $\Delta \alpha$ wywołana zmianą prędkości kątowej pochylania q

Do obliczeń pochodnych aerodynamicznych wyznaczono średnią zmianę kąta natarcia, otrzymaną przez całkowanie zmiany zachodzącej na długości narty

$$(26) \quad \Delta \alpha_{sr} = -\frac{1}{l} \int_{-a}^b \frac{qx}{U_1} dx.$$

Zmianę oporu $(X)_q$ wywołaną zmianą prędkości kątowej pochylania q otrzymano w postaci

$$(27) \quad (X)_q = -\frac{1}{2} \rho U_1^2 S \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \Delta \alpha_{sr},$$

po wprowadzeniu zależności (26) i zróżniczkowaniu względem q otrzymano pochodną aerodynamiczną zmiany oporu względem zmian kątowej prędkości pochylenia w postaci bezwymiarowej

$$(28) \quad x_q = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial(X)_q}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_x}{\partial \alpha} \frac{1}{l^2} \int_{-a}^b x dx.$$

Analogicznie otrzymano:

— pochodną aerodynamiczną zmiany siły nośnej względem zmian kątowej prędkości pochylenia

$$(29) \quad z_q = \frac{1}{\rho U_1 S l} \frac{\partial(Z)_q}{\partial q} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_z}{\partial \alpha} \frac{1}{l^2} \int_{-a}^b x dx,$$

— pochodną aerodynamiczną zmiany momentu pochyłającego względem zmian kątowej prędkości pochylenia

$$m_q = \frac{1}{\rho U_1 S l^2} \frac{\partial(M)_q}{\partial q} = -\frac{1}{2} \frac{\partial C_m}{\partial \alpha} \frac{1}{l^2} \int_{-a}^b x dx. \quad (30)$$

W celu wyznaczenia pochodnych $\frac{\partial C_x}{\partial \alpha}$ korzystając z biegunowych skoczka narciarskiego (rys. 9) zastąpiono je odpowiednimi parabolami w postaci:

— dla konfiguracji *A*

$$C_x = 0,205 + 0,945 C_z^2,$$

— dla konfiguracji *B*

$$C_x = 0,285 + 0,950 C_z^2,$$

— dla konfiguracji *C*

$$C_x = 0,330 + C_z^2,$$

— dla konfiguracji *D*

$$C_x = 0,450 + 0,820 C_z^2.$$

Odpowiednie wartości $\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}$ określono z kąta pochylenia krzywych $C_z = f(\alpha)$ przedstawionych na rys. 4 ÷ 7.

6. Rozwiązania równań ruchu i wyniki

Układ równań (11) po przekształceniach sprowadzono do postaci

$$(31) \quad \dot{z} = \mathbf{R}z,$$

gdzie \mathbf{R} — macierz stanu,

$$(32) \quad \mathbf{R} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q},$$

przy czym

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C} & -\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

\mathbf{z} jest wektorem o składowych

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \\ \bar{\vartheta} \\ \bar{u} \\ \bar{w} \\ \dot{\bar{\vartheta}} \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie zagadnienia sprowadzono do wyznaczenia wartości własnych i wektorów własnych macierzy stanu \mathbf{R} (32).

Wartości własne macierzy \mathbf{R} otrzymano numerycznie w postaci:

$$(33) \quad \lambda_{j,j+1} = \xi_{j,j+1} \pm i\eta_{j,j+1},$$

co pozwoliło na określenie okresów wahań

$$(34) \quad T = \frac{2\pi}{\eta} \hat{t},$$

i czasu stłumienia amplitudy do połowy (ewentualnie podwojenia amplitudy)

$$(35) \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\xi} \hat{t} = \frac{0,693}{\xi} \hat{t},$$

gdzie $\eta_{j,j+1}$ częstości oscylacji, $\xi_{j,j+1}$ współczynniki tłumienia.

Rozwiązanie ogólne układu równań jest liniową kombinacją wszystkich rozwiązań szczególnych

$$(36) \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n C_j \mathbf{y}_j e^{\lambda_j t},$$

przy czym

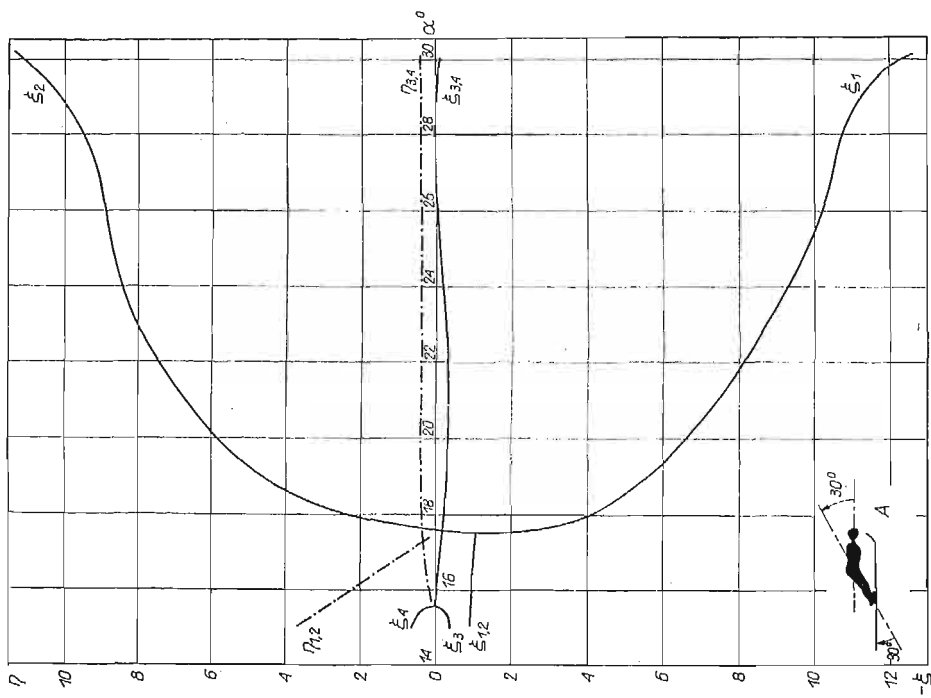
\mathbf{y}_j jest wektorem własnym, odpowiadającym wartości własnej,

C_j stałe wyznaczone z warunków początkowych, będących wartościami zakłóceń od ruchu ustalonego dla chwili $t = 0$.

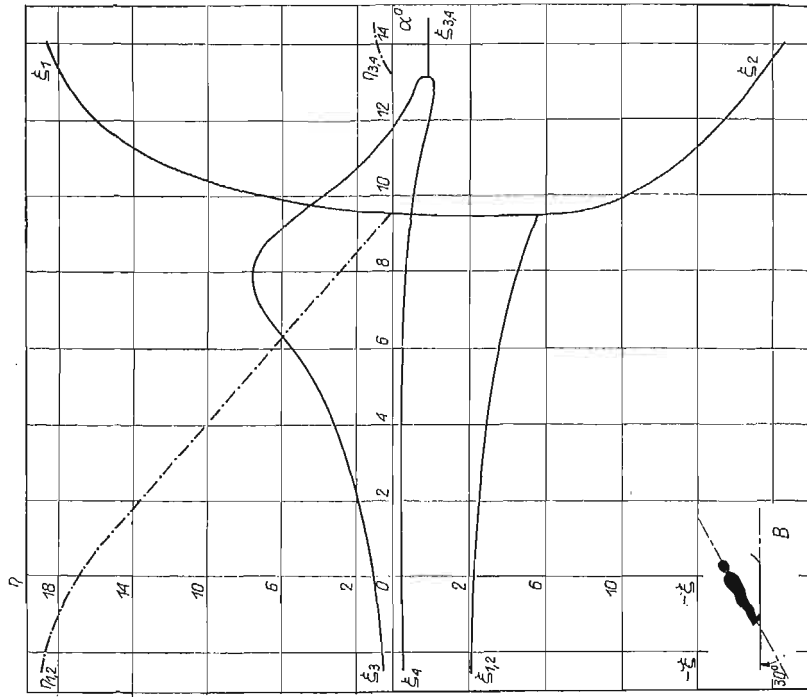
Zmiany współczynników tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji kąta natarcia α dla różnych konfiguracji ciała i nart A , B , C i D przedstawiono na wykresach rys. 19÷22.

Do obliczeń numerycznych przyjęto narciarza o ciężarze 70 kG i wzroście 1,80 m, narty skokowe «Tatry» o ciężarze 4,17 kG każda, długości $l = 2,6$ m i powierzchni nart $S = 0,65$ m².

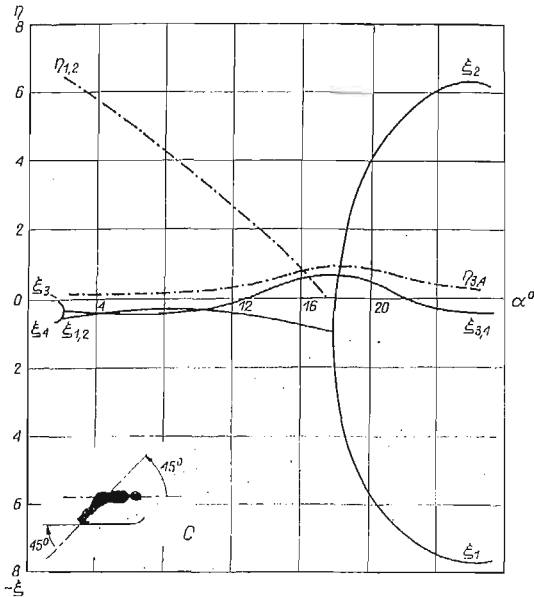
Położenie środka masy i momenty bezwładności nart określono doświadczalnie, natomiast dla narciarza rozkłady mas i położenie środków mas (rys. 1 i 11) według wzorca statystycznego [8].



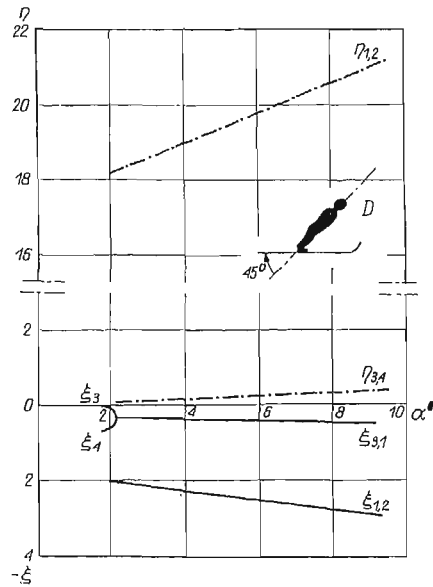
Rys. 19. Zmiany współczynników tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji ciała i nart A



Rys. 20. Zmiana współczynników tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji ciała i nart B



Rys. 21. Zmiana współczynników tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji ciała i nart C



Rys. 22. Zmiana współczynników tłumienia ξ i częstości oscylacji η w funkcji kąta natarcia α dla konfiguracji ciała i nart D

Obliczenia numeryczne wykonano według programów własnych w Zakładzie Obliczeń Numerycznych Uniwersytetu Warszawskiego przy wykorzystaniu procedur standardowych ZON UW.

Poszczególne wartości własne charakteryzują następujące ruchy:

$\lambda_{1,2} = \xi_{1,2} \pm i\eta_{1,2}$ szybkie oscylacje pochylające skoczka narciarskiego,

$\lambda_{3,4} = \xi_{3,4} \pm i\eta_{3,4}$ wahania fugoidalne charakteryzujące się długookresowymi ruchami pionowymi i poziomymi.

Na wykresach rys. 19÷22 liniami ciągłymi przedstawiono zmiany współczynników tłumienia ξ , natomiast linie przerywane pokazują zmiany częstości oscylacji η .

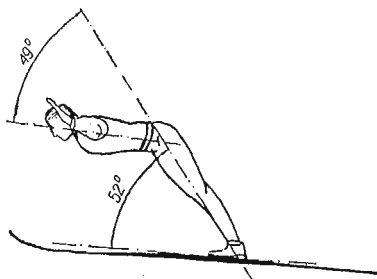
7. Analiza wyników i wnioski ogólne

Przeprowadzone badania aerodynamiczne w połączeniu z obliczeniami dynamicznych własności skoczka narciarskiego umożliwiają szerszą analizę wyników.

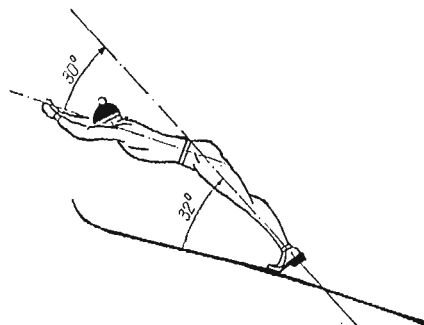
Badania aerodynamiczne modeli pomimo pewnych wad w stosunku do badań aerodynamicznych, przeprowadzanych na żywym człowieku, wykazują szereg zalet, jak: powtarzalność pomiarów, możliwość utrzymania określonej konfiguracji w czasie badań. W czasie badań aerodynamicznych narciarzy w pozycji zjazdowej [12] przeprowadzonych w Instytucie Lotnictwa w Warszawie stwierdzono: ... «Ujawnione w trakcie pomiarów trudności wiążą się z faktem dokonywania po raz pierwszy tunelowych badań aerodynamicznych na żywym człowieku jako modelu. Poza względami natury psychicznej i pewnym napięciem nerwowym towarzyszącym pomiarowi, szczególnie znaczenia nabiera fizyczne

zmęczenie modelu. Jego mimowolne ruchy w znacznym stopniu utrudniają określenie stanu równowagi na poszczególnych składowych, w efekcie czego uzyskujemy znaczny rozrzut punktów pomiarowych...» ([12] str. 18).

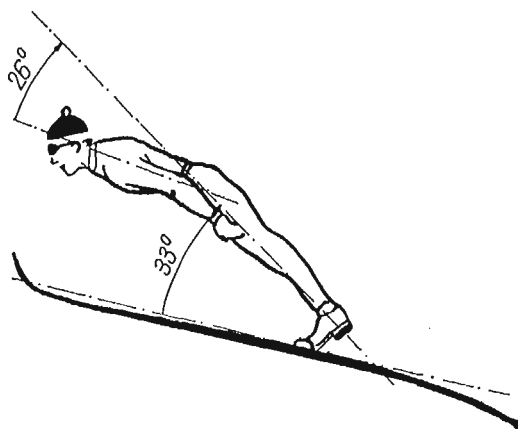
Z powyższego wynika, że badania tunelowe żywych skoczków narciarskich przy różnych konfiguracjach ciała i nart stanowiłyby tym bardziej zwiększone trudności, ze względu na stałe utrzymanie określonej sylwetki.



Rys. 23. Sylwetka mistrza świata — Stanisława Marusarza (Polska) Zakopane, 1939 r. (Polska) skocznia Krokiew, punkt krytyczny skoczni $L_p = 90$ m, długość skoku $L = 78,5$ m [4]



Rys. 24. Sylwetka mistrza świata i mistrza VIII Olimpiady — H. Recknagla (NRD), Squaw Valley 1960 r. (USA) [14] $L = 93,5$ m

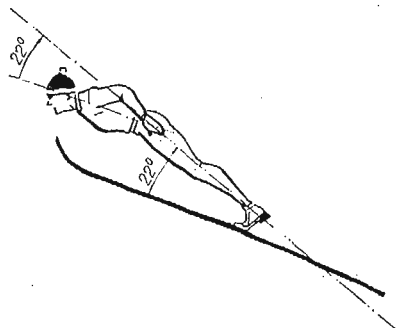


Rys. 25. Sylwetka mistrza X Olimpiady — W. Bielousowa (ZSRR), Grenoble 1968 r. (Francja) [14] $L_p = 90$ m, $L = 101,5$ m

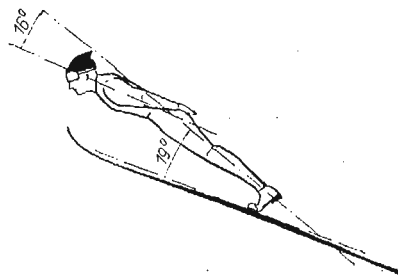
W Instytucie Lotnictwa w Warszawie przeprowadzono również badania aerodynamiczne nart skokowych [13] w celu wyjaśnienia zjawiska przepadania nart. «Zgodnie z uzyskanymi informacjami, skoczkowie wyczuwają „przepadanie” nart... w pierwszej fazie lotu zwanej fazą odbicia (tuż po odbiciu się z progu skoczni) oraz w czasie fazy lądowania (przyziemienia). Podczas, gdy w fazie odbicia wyczuwane przepadanie jest silne i występuje permanentnie przy każdym skoku, to w fazie lądowania jest znacznie słabsze i pojawia się sporadycznie» ([13] str. 9).

Powyższe zjawisko można wyjaśnić wyłącznie na drodze badania zjawisk dynamicznych, zachodzących w tej fazie lotu, biorąc pod uwagę badania aerodynamiczne, rozkłady mas nart, położenie środka masy, miejsce zamocowania okuć i sprężystość okuć.

W przedstawionej pracy rozważono cztery sylwetki skoczków narciarskich, wpływ ich na własności aerodynamiczne i dynamiczne skoczka przy różnych kątach natarcia α i położenia θ . Dla lepszego zilustrowania wyników podano przykładowo różne sylwetki skoczków klasy światowej (rys. 23 ÷ 27). Analizując poszczególne sylwetki można wyciągnąć szereg wniosków.



Rys. 26. Sylwetka mistrza świata — J. Kärkinena (Finlandia), Lahti 1958 r. (Finlandia) [14] $L = 74$ m



Rys. 27. Sylwetka mistrza XI Olimpiady — Wojciecha Fortuny (Polska), Sapporo 1972 r. (Japonia), punkt krytyczny skoczni $L_p = 90$ m, długość skoku $L = 111$ m

Sylwetka *A*, taka konfiguracja ciała i nart odpowiada właściwie sylwetce W. Bielousowa (rys. 25) i pod względem uzyskanych kątów załamania w stawie skokowym i biodrowym sylwetce H. Recknagla (rys. 24). Zbliżone do tej konfiguracji, lecz bardziej płaskie są sylwetki J. Kärkinena i W. Fortuny. Sylwetka ta odznacza się maksymalną doskonałością aerodynamiczną $K = 1,12$ w stosunku do pozostałych badanych konfiguracji (rys. 10), co umożliwia uzyskanie długich skoków (lotów), umożliwia utrzymanie równowagi w zakresie kątów natarcia $12^\circ < \alpha < 32^\circ$ (rys. 12 i 16), lecz posiada bardzo mały zakres kątów natarcia, zabezpieczających stateczność względem położenia równowagi $13^\circ < \alpha < 18^\circ$ (rys. 19). Wynika z powyższego, że w celu utrzymania położenia równowagi wymagana jest interwencja skoczka poprzez zmianę konfiguracji ciała lub nart.

Sylwetka *B* pod względem aerodynamicznym wykazuje gorsze własności, doskonałość $K = 0,95$ (rys. 10), lecz pozwala na utrzymanie równowagi w zakresie kątów natarcia $-4^\circ < \alpha < 15^\circ$ (rys. 13 i 16) zapewniając słabą niestateczność ruchów aperiodycznych dla $\alpha < 9^\circ$ (rys. 20) może być dobrym uzupełnieniem sylwetki *A* w pewnych fazach skoku.

Sylwetka *C*, taka konfiguracja ciała i nart w dużym stopniu odpowiada sylwetce S. Marusarza (rys. 23) (z wyjątkiem układu rąk). Jest to sylwetka dająca najbardziej płaską charakterystykę doskonałości $K \approx 0,8$ na pełnym zakresie kątów natarcia $0^\circ < \alpha < 40^\circ$ (rys. 10) przy równoczesnym zapewnieniu równowagi skoczka w zakresie $2^\circ < \alpha < 30^\circ$ (rys. 14 i 16) oraz wykazująca słabą niestateczność dla $\alpha < 18^\circ$ i ruch stateczny w zakresie $1^\circ < \alpha < 14^\circ$ (rys. 21). Jest to sylwetka o najlepszej charakterystyce równowagi, może być przydatna w okresie szkolenia dla skoczków o mniejszym doświadczeniu.

Sylwetka D jest sylwetką o najgorszej charakterystyce aerodynamicznej (rys. 10), dającej spadek doskonałości ze wzrostem kąta natarcia α , jednak sylwetka taka lub zbliżona występuje przejściowo w fazie odbicia dając silny wzrost oporu aerodynamicznego przy małej sile nośnej (rys. 7). Taka konfiguracja pozwala na utrzymanie równowagi w zakresie kątów natarcia $-10^\circ < \alpha < 10^\circ$ i $30^\circ < \alpha < 40^\circ$ (rys. 15 i 16), jak również zapewnia stateczność w zakresie $\alpha < 10^\circ$, co jest korzystne w pierwszej fazie lotu, tzn. w momencie formowania właściwej sylwetki.

Obecnie w dalszych badaniach i obliczeniach należałoby zwrócić uwagę na zbadanie bardziej «wychylonych» sylwetek, np. W. Fortuny (rys. 27) i innych skoczków z równoczesnym uwzględnieniem położenia rąk. Należałoby również zbadać wpływ miejsca i sztywności zawieszenia nart oraz wpływ wyważenia nart na ich przepadanie.

Przedstawiona praca jest pierwszą próbą badania dynamiki skoczka narciarskiego jako obiektu latającego. Dalsze badania modelowe, uzupełnione dodatkową dokumentacją skoków, poparte obliczeniami, mogą być wskazówką nie tylko do uzyskania sukcesu sportowego, lecz również zwiększyć bezpieczeństwo lotów.

Literatura cytowana w tekście

1. R. E. D. BISHOP, G. M. L. GLADWELL, S. MICHAELSON, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
2. W. FISZDON, *Mechanika lotu*, Cz. I, PWN, Warszawa—Łódź 1961.
3. R. GUTOWSKI, *Mechanika analityczna*, PWN, Warszawa 1971.
4. J. KAPENIAK, *Tairzańskie diabły*, Sport i Turystyka, Warszawa 1973.
5. J. MARYNIAK, *Uproszczona analiza stateczności podłużnej szybowca w locie holowanym*, Mech. Teoret i Stos., 5, 1 (1967).
6. J. MARYNIAK, *Stateczność dynamiczna podłużna szybowca w zespole holowniczym*, Mech. Teoret i Stos., 5, 3 (1967).
7. J. M. MORAWSKI, *Control systems approach to a ski-turn analysis*, J. Biomechanics, 6, 3-D (1973). Pergamon Press, Oxford—New York.
8. A. MORECKI, J. EKIEL, K. FIDELUS, *Bionika ruchu*, PWN, Warszawa 1971.
9. *Nowoczesne metody numeryczne*, Opracowane przez National Physical Laboratory Teddington Middlesex, PWN, Warszawa 1965.
10. J. THOMAS, *Mathematische Theorie der Aerodynamik des Ski-fluges*, Akademie Verlag, Berlin 1971.
11. B. KRASNOWSKI, *Stateczność podłużna skoczka narciarskiego*, Praca magisterska, Zakład Mechanik IMS PW, 1973, (nie publikowana).
12. *Sprawozdanie z badań aerodynamicznych narciarza w pozycji zjazdowej*, Instytut Lotnictwa, Zakład Aerodynamiki, Warszawa 1965 (nie publikowane).
13. *Sprawozdanie z badań aerodynamicznych nart skokowych*, Instytut Lotnictwa, Warszawa. Zakład Aerodynamiki, Sprawozdanie Nr 9/TA/72—1972 (nie publikowane).
14. Е. А. Грозин, *Прыжки на лыжах с трамплина*, Изд. Физкультура и спорт, Москва 1971.
15. *Прыжки на лыжах с трамплина*, под ред. Г. Р. Ниренберга. Изд. Физкультура и спорт, Москва 1964.

Резюме

РАВНОВЕСИЕ И ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛЫЖНИКА-ПРЫГУНА В ПОЛЕТЕ

В работе рассмотрены вопросы равновесия и продольной устойчивости прыгающего с трамплина лыжника, на участке траектории соответствующем свободному полету. Лыжник в полете является свободно летящим телом состоящим из человека и лыж. На него действуют силы тяжести, аэродинамические силы и аэродинамические моменты.

Аэродинамические силы и моменты системы „лыжник-лыжи” определены из опытов проведенных в аэродинамической трубе для четырех конфигураций системы.

Выведены уравнения равновесия и уравнения движения системы при симметрических движениях прыгуна. Определены условия равновесия и зависимости между углом наклона траектории и углом атаки (для рассматриваемых конфигураций тела прыгуна).

При исследовании устойчивости выведена основная матрица дифференциальных уравнений движения и вычислены собственные значения и собственные векторы. Вычислены коэффициенты затухания и частоты осцилляций, а также определено движение прыгуна. Результаты теоретических вычислений сопоставлены с силуэтами олимпийских и мировых чемпионов по прыжкам.

S u m m a r y

BALANCE AND LONGITUDINAL STABILITY OF A SKI-JUMPER IN FLIGHT

The problem is analyzed by considering the gravity and aerodynamic forces acting on the jumper and ski. The aerodynamic forces were measured by the authors on a model in a wind tunnel for the four configurations of the jumper and ski.

Equations of equilibrium and differential equations of motion are derived and the necessary conditions of equilibrium, as well as relations between angles of path and angles of attack for the few configurations are presented. The problem of stability is solved by the method of eigen-vectors. Theoretical results are compared with the silhouettes of world-known ski-jumpers.

INSTYTUT MECHANIKI STOSOWANEJ POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lutego 1974 r.

BADANIA PROCESÓW RELAKSACYJNYCH W POLIAMIDZIE*

STANISŁAW MAZURKIEWICZ (KRAKÓW)

1. Wstęp

Do opisu własności mechanicznych tworzyw sztucznych stosuje się często modele reologiczne lub funkcje empiryczne. Takie podejście nie pozwala na wyjaśnienie fizykalnych zjawisk występujących podczas działania obciążeń zewnętrznych. Poznanie tych zjawisk jest niezbędne dla zrozumienia obserwowanych własności w skali makroskopowej, na ich prognozowanie oraz na świadome konstituowanie tworzyw o określonych własnościach.

Na własności tworzyw w istotny sposób rzutują przebiegające w nich procesy relaksacyjne. Rozumiemy je w najogólniejszym znaczeniu jako przebiegające w czasie przejścia ze stanu nierównoważonego w stan równowagi.

Procesy te w tworzywach sztucznych mają sens fizyczny, ich miarą jest czas niezbędny w danych warunkach energetycznych, temperaturowych itp. do przejścia cząsteczki w położenie równowagi. Czasy te, zwane czasami relaksacji, opisane są wzorem Arreniusa

$$\tau = \tau_0 \cdot e^{\frac{\Delta E}{RT}},$$

gdzie τ_0 okres drgań atomów, wynoszący $10^{-10} - 10^{-14}$ [sek],

ΔE energetyczna bariera określająca cieplną aktywację procesu przejścia $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{mol}} \right]$,

R stała gazowa $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{deg} \cdot \text{mol}} \right]$,

T temperatura [°K].

Podczas działania naprężeń czasy relaksacji maleją w wyniku obniżenia bariery energetycznej aktywizującej proces relaksacji U_0 o wartości $\gamma\sigma$ i wówczas wzór na czas relaksacji zapisze się w postaci

$$\tau = \tau_0 \cdot e^{\frac{U_0 - \gamma\sigma}{RT}}.$$

Współczynnik γ w tym wzorze charakteryzuje zmniejszenie potencjalnej bariery ze wzrostem naprężenia i zależy od struktury, naprężeń własnych oraz charakteru i gęstości defektów występujących w materiale.

Procesy relaksacyjne, jak już podkreślono, decydują o własnościach tworzywa, jakie obserwujemy podczas przykładania zewnętrznych obciążeń. Zatem mogą one służyć do interpretacji i wyjaśnienia tych różnorodnych własności w oparciu o jednolitą, fizykalną koncepcję budowy tworzyw wielkocząsteczkowych.

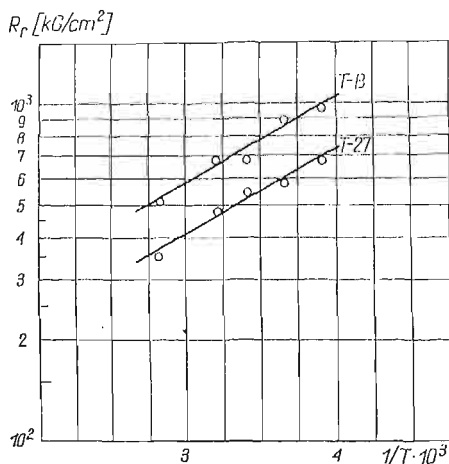
* Praca nagrodzona na konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej, zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Krakowie w 1973 r.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono wyniki badań doświadczalnych niektórych własności mechanicznych poliamidu, konstrukcyjnego tworzywa produkcji krajowej, oraz podjęto próbę interpretacji tych własności w oparciu o zjawiska relaksacyjne, zachodzące w tworzywie.

2. Statyczna próba rozciągania

Próbie rozciągania przeprowadzono dla dwóch gatunków poliamidu: T-27 i T-B (blokowy) w temperaturach od -20°C do $+80^{\circ}\text{C}$. Prędkość rozciągania wynosiła $0,5\text{ cm/min}$.

Zależność wytrzymałości na rozciąganie R od temperatury, w układzie: $\lg R_r - 1/T \cdot 10^3$ przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Zmiana wytrzymałości na rozciąganie w funkcji temperatury. Poliamid T-27 i T-B, próbki klimatyzowane

Zależność tę będziemy aproksymować funkcją

$$\sigma_r = Ae^{U/RT}$$

Obliczone wartości A i U wynoszą:

	A kG/cm ²	U kcal/mol
T-27	70	1,15 - 1,17
T-B	100	1,11 - 1,16

Wartość energii U w badanym zakresie temperatur zmienia się nieznacznie. Jeżeli przyjąć, że energia zrywania wiązań chemicznych U_0 dla poliamidu wynosi 45 kcal/mol [2], to uzyskana z naszych obliczeń wartość energii aktywacji, potrzebna do wystąpienia dekohezji w całym przekroju próbki jest przeszło 40-krotnie niższa. Obniżenie energii aktywacji jest spowodowane działaniem naprężeń według zależności

$$u = u_0 - \gamma\sigma$$

Współczynnik γ , jako wskaźnik lokalnych koncentracji naprężeń, może być zapisany w postaci

$$\gamma = \alpha\beta,$$

gdzie α — elementarna aktywna kinetycznie objętość, w której odbywa się akt przejścia potencjalnej energii mechanicznej w energię tworzenia nowych powierzchni i energię cieplną;

β — bezwymiarowy współczynnik koncentracji naprężeń.

Jeżeliby przyjąć, iż wartość energii U_0 w zakresie badanych temperatur jest stała, to dla temperatur niskich, w których naprężenie zrywające osiąga wysoką wartość, współczynnik γ winien być odpowiednio niski. Z drugiej strony koncentracja naprężeń lokalnych w niskich temperaturach winna być wyższa niż w temperaturach podwyższonych. Stąd współczynnik β winien przyjmować wyższe wartości. Ponadto, zgodnie z teorią BARTIENIEWA [1] w niskich temperaturach elementarne aktywne kinetycznie objętości α są większe niż w temperaturach podwyższonych, gdzie następuje zrywanie pojedynczych łańcuchów polimeru według teorii Żurkowa. Pogodzenie tych faktów jest możliwe jedynie przy przyjęciu, iż w niskich temperaturach wartość energii U_0 jest wyższa niż w temperaturach podwyższonych, gdzie odpowiada wartości energii zrywania wiązań chemicznych poliamidu wynoszącej 45 kcal/mol. Zjawisko takie zaobserwowano dla polimetakrylanu metylu [3], gdzie energia aktywacji rozrywania jednego łańcucha polimeru wynosiła 30–31 kcal/mol, zaś energia U_0 poniżej temperatury kruchości osiągała wartość 200 kcal/mol, co świadczy o grupowym rozrywaniu 6–7 łańcuchów polimeru równocześnie.

W miarę wzrostu temperatury, relaksacyjne procesy obniżają koncentrację naprężeń i zmniejszają objętość elementarnych jednostek kinetycznych. Mechanizm rozrywania, w wyniku rozchylania się mikroszczelin, staje się bardziej złożony, dążąc do przypadku, gdy odrywanie się łańcuchów odbywa się quasi-niezależnie. Zmniejszenie wytrzymałości ze wzrostem temperatury związane jest ze wzrostem częstości fluktuacji cieplnej energii.

Na opisany powyżej proces nakładają się efekty związane ze zmianami strukturalnymi (orientacja, rekrytalizacja itp.). Wzrost wartości współczynnika γ ze wzrostem temperatury wskazuje, iż zmiany te odgrywają istotną rolę w procesie deformacji i przejawiają się w postaci występowania przewężenia, propagującego się na całą długość próbki (tzw. efekt teleskopowy).

3. Badanie pętli histerezy przy obciążeniach cyklicznych

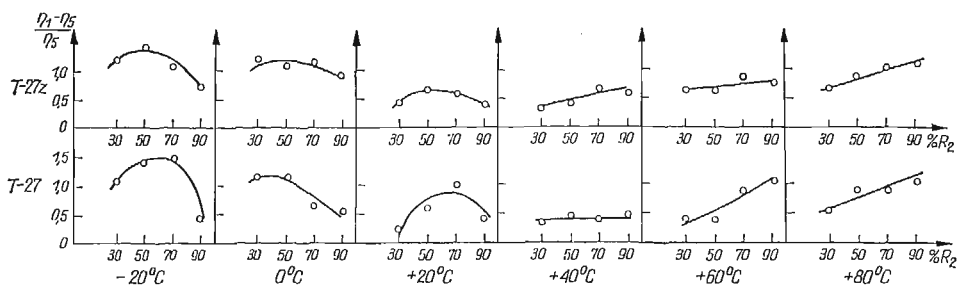
Badania przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej «Instron», z prędkością rozciągania 0,2 cm/min, w cyklu odzerowo-tętniącym, do poziomów naprężeń 30%, 50%, 70% i 90% granicy plastyczności.

Celem badań było wyznaczenie pętli histerezy, której powierzchnia jest jedną z miar tarcia wewnętrznego w tworzywie. Pomiaru powierzchni pętli dokonywano za pomocą integratora całkującego sprzężonego z posuwem ruchomej belki maszyny wytrzymałościowej.

Oznaczając przez L_i — wartość całkowitej energii potrzebnej do odkształcenia przy rozciąganiu, L_s — wartość energii dysypowanej, stosunek $\eta = \frac{L_s}{L_i}$ będziemy uważać za miarę rozproszonej energii w jednym cyklu.

W czasie wstępnych badań zaobserwowano, iż powierzchnie pętli histerezy przy kolejnych cyklach obciążenia maleją i ustalają się po około 4 - 5 cyklach.

Sporządzono wykres zależności «nadwyżki» dysypowanej energii, określonej stosunkiem $\frac{\eta_1 - \eta_5}{\eta_5} \cdot 100\%$ (numery pętli 1 i 5) w funkcji poziomu naprężenia, dla temperatur od -20°C do $+60^\circ\text{C}$, rys. 2.



Rys. 2. Zmiana różnicy dysypowanej energii między pierwszą i piątą pętlą histerezy w funkcji poziomu naprężenia dla temperatur od -20°C do $+80^\circ\text{C}$. Poliamid T-27 i T-27z klimatyzowany

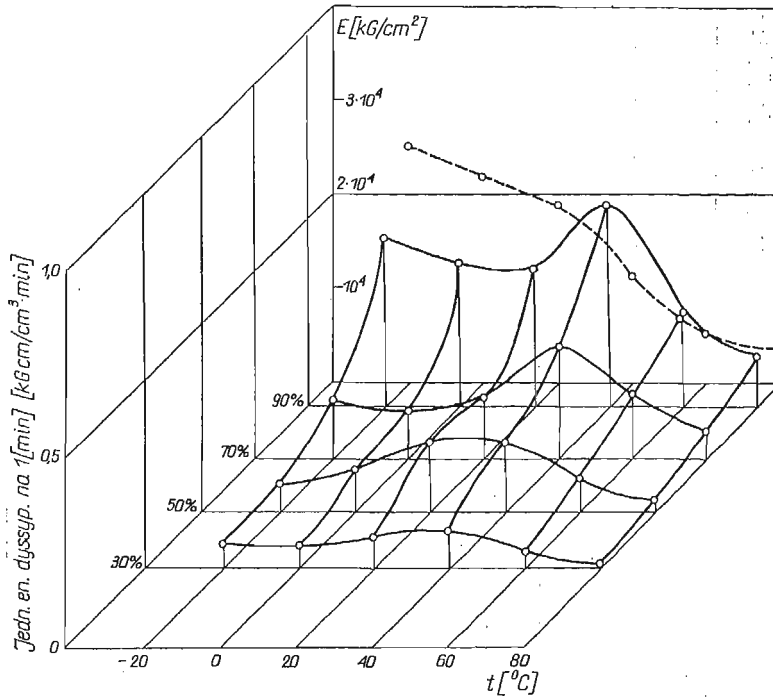
Przebieg tej zależności jest odmienny dla niskich i dla wysokich temperatur. W temperaturach niskich maksymalna «nadwyżka» występuje dla poziomu naprężeń około 50% granicy plastyczności. Natomiast w temperaturach wysokich — nadwyżka ta monotonicznie rośnie ze wzrostem obciążenia.

Zjawisko to będziemy interpretować jako wynik działania naprężeń własnych w tworzywie. W temperaturach poniżej temperatury przemiany T_g (dla poliamidów wynosi ona około $+40^\circ\text{C}$) następuje w tworzywie zamrożenie ruchów rotacyjnych łańcucha polimeru i skokowa zmiana rozszerzalności cieplnej. Powoduje to występowanie dużej liczby naprężonych łańcuchów polimeru, jak również tworzenie się mikrodefektów i mikronieciągłości w strukturze. Statystyczny rozkład tych naprężonych obszarów jest taki, że największa ich liczba ulega zerwaniu przy naprężeniach osiągających wartość około 50% granicy plastyczności.

W temperaturach powyżej T_g zwiększona ruchliwość cząsteczek powoduje przyspieszenie procesów relaksacyjnych, zmniejszając liczbę naprężonych łańcuchów. Natomiast mikrodefekty pozostają i ich ilość, uruchomiana podczas przykładania obciążenia rośnie wraz ze wzrostem jego wartości.

Tak więc w niskich temperaturach «trenowanie» tworzywa podczas pierwszych cykli obciążenia odbywa się głównie w wyniku zrywania wiązań chemicznych i energia aktywacji odpowiada energii zrywania wiązań chemicznych. W temperaturach podwyższonych natomiast — poprzez uruchomienie (rozchylanie) mikroszczelin — i energia aktywacji w tym przypadku odpowiada energii potrzebnej do przekroczenia bariery energetycznej przy wyjściu cząsteczki na swobodną powierzchnię. Zahamowanie procesu rozwoju mikroszczelin powodowane jest przyspieszonymi procesami relaksacyjnymi, które obniżają koncentrację naprężeń na dnie szczeliny.

Dalsze badania prowadzono przyjmując jako miarodajną (dla zakończenia procesu «trenowania») piątą pętlę histerezy. Wyznaczono zależność współczynnika dysypacji energii η od temperatury i poziomu naprężeń dla trzech gatunków poliamidu T-27, Z-27z i T-B. Z punktu widzenia konstruktora bardziej przydatna jest informacja o wartości współczynnika dysypacji, przypadającego na jednostkę objętości tworzywa w jednostce czasu. Charakterystyki dysypacji energii w takim ujęciu przedstawiono na rys. 3, 4, 5.

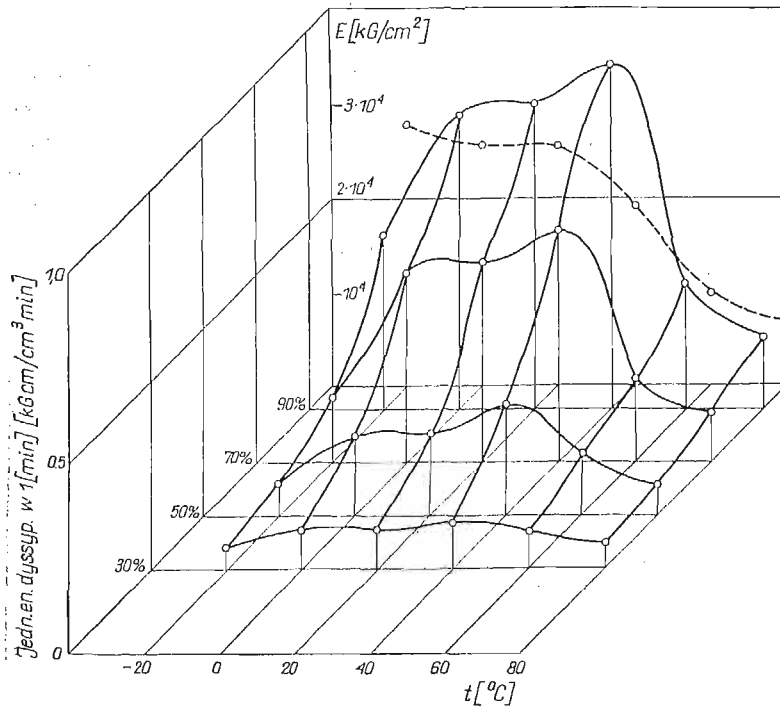


Rys. 3. Zmiana jednostkowej energii dysypowanej na minutę w funkcji temperatury i poziomu naprężeń — dla T-27 klimatyzowanego

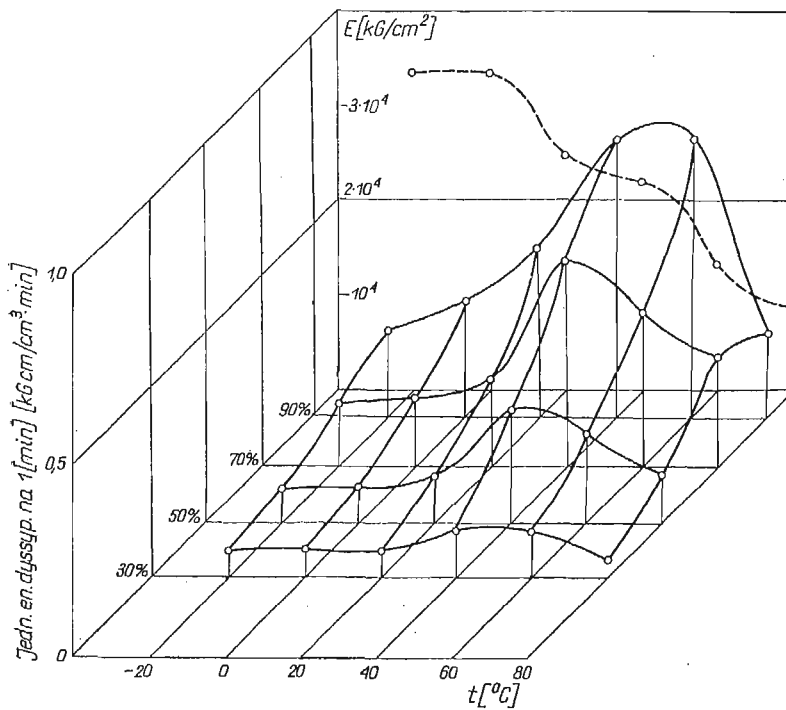
Dla wszystkich trzech badanych gatunków poliamidu dysypacja energii rośnie ze wzrostem poziomu naprężenia, natomiast w funkcji temperatury posiada maksimum odpowiadające obszarowi temperatur przejścia T_g . Podobne maksimum współczynnika η zaobserwowano badając dysypację energii w funkcji prędkości rozciągania — rys. 6.

Wyjaśnienie tego zjawiska może być następujące. Maksimum mechanicznych strat występuje wówczas, gdy w okresie jednego cyklu obciążenia energia deformacji początkowo gromadzi się w materiale, a następnie wydziela się w postaci ciepła.

Zamiana mechanicznej pracy realizuje się w tworzywie poprzez dysocjację kohezyjnych wiązań, jak również poprzez fluktuacyjny proces wychodzenia na powierzchnię cząsteczek przy rozwoju mikroszczelin.

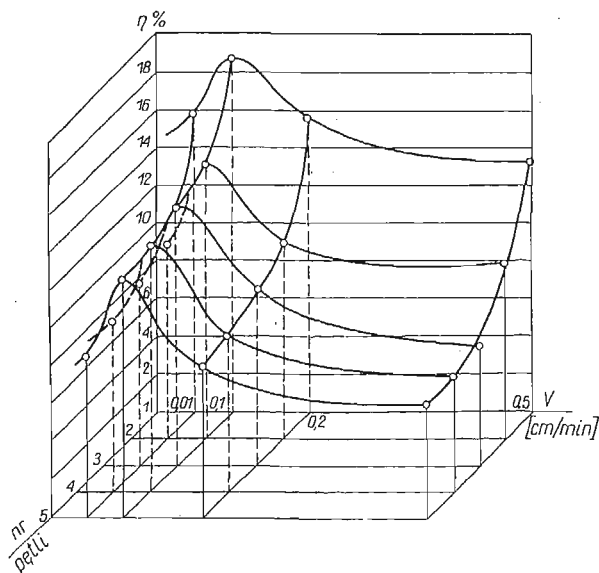


Rys. 4. Zmiana jednostkowej energii dysypowanej na minutę w funkcji temperatury i poziomu napiężeń dla T-27z klimatyzowanego



Rys. 5. Zmiana jednostkowej energii dysypowanej na minutę w funkcji temperatury i poziomu napiężeń dla T-B klimatyzowanego

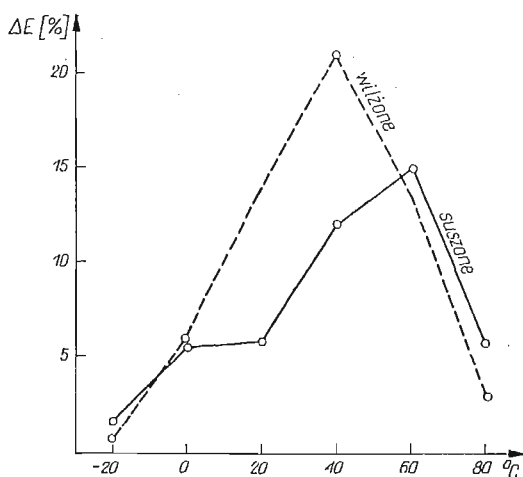
Przy temperaturze poniżej T_g następuje znacznie mniejsze ilościowo (w jednostce czasu) zrywanie wiązań chemicznych, jak również rozwój mikroszczelin. Energia aktywacji U_0 potrzebna do grupowego zrywania wiązań jest wyższa. Praca sił zewnętrznych kumuluje się zatem w postaci sprężystej deformacji i dysypacja energii jest niewielka. W temperaturach powyżej T_g energia sprężysta nie gromadzi się, zatem również się nie rozprasza.



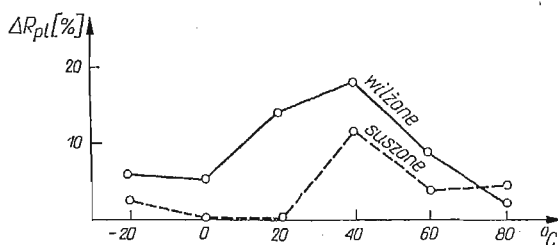
Rys. 6. Zmiana współczynnika dysypacji η w funkcji prędkości dla pięciu kolejnych pętli histerezy. Poliamid T-27 klimatyzowany, temp. $+20^{\circ}\text{C}$, poziom naprężeń 50% granicy plastyczności

Natomiast w temperaturze przejścia T_g , traktowanej jako zjawisko termodynamicznej równowagi procesu zniszczenia-odtworzenia międzymolekularnych wiązań, wpływ charakteru obciążeń (częstości) należy rozpatrywać jako ingerencję w kinetykę reakcji i może w określonych warunkach (prędkościach) ukierunkowywać tę reakcję w kierunku np. procesu zniszczenia. Maksimum dysypacji w temp. $+20^{\circ}\text{C}$ występuje dla prędkości $0,1\text{ cm/min}$ — rys. 6. Odpowiada to dla wyznaczonego modułu sprężystości $E = 18780\text{ kG/cm}^2$, oraz $\sigma = 242\text{ kG/cm}^2$ wydłużeniu $\Delta l = 0,13\text{ cm}$ w czasie $t = 0,77\text{ min}$, co można przyjąć jako wartość czasu relaksacji dla tych warunków obciążeń.

W temperaturze przejścia występują równocześnie obok siebie dwie struktury, jedna odpowiadająca temperaturom mniejszym od T_g , a druga — temperaturom większym od T_g . Tym stanem braku równowagi fazowej tłumaczy się fakt, iż w badaniach własności mechanicznych, w obszarze temperatury T_g , występuje największy rozrzut wyników. Podobnie w obszarze tym tworzywo jest najbardziej wrażliwe na wpływ zmiany czynników zewnętrznych. Ilustruje to przedstawiony na rys. 7 wzrost wartości modułu sprężystości E przy zmianie prędkości rozciągania z 5 mm/min do 50 mm/min , oraz przedstawiony na rys. 8 wzrost wartości granicy plastyczności przy zmianie prędkości rozciągania z 50 mm/min do 500 mm/min .



Rys. 7. Procentowy wzrost modułu sprężystości E przy zmianie prędkości rozciągania z 5 mm/min do 50 mm/min. Poliamid T-27



Rys. 8. Procentowy wzrost granicy plastyczności przy zmianie prędkości rozciągania z 50 mm/min do 500 mm/min

4. Pełzanie

Próby pełzania przeprowadzono dla temperatur -20°C , $+20^{\circ}\text{C}$ i $+60^{\circ}\text{C}$, przy zastosowaniu dźwigniowego układu obciążającego i pomiaru wydłużeń za pomocą ekstensoimetru mechanicznego z dokładnością $\pm 0,005$ mm.

Dla okresu ustalonego pełzania sporządzono wykresy zależności $\lg \dot{\epsilon}$ od naprężenia σ — rys. 9 oraz $\lg \dot{\epsilon}$ od $\frac{1}{T} \cdot 10^3$ — rys. 10.

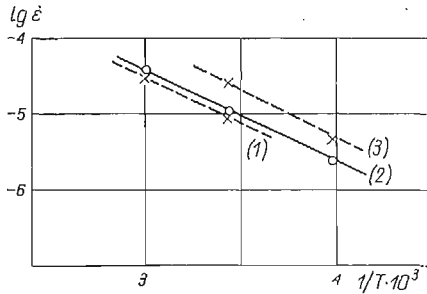
Przedstawione zależności są liniowe. Prędkość stacjonarnego pełzania będziemy aproksymować funkcją

$$\dot{\epsilon} = v = v_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta U - \gamma\sigma}{RT}\right),$$

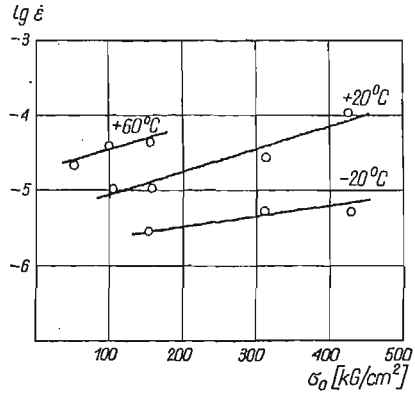
gdzie v_0 — stała $\left[\frac{1}{\text{sek}}\right]$,

ΔU — energia aktywacji [kcal/mol],

γ — współczynnik $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{mol}} \cdot \frac{\text{mm}^3}{\text{kG}} \right]$,
 σ — naprężenie $[\text{kG}/\text{mm}^2]$.



Rys. 9. Zmiana prędkości pełzania ustalonego w funkcji poziomu naprężeń dla temperatur: -20°C , $+20^{\circ}\text{C}$, $+60^{\circ}\text{C}$. Poliamid T-27 klimatyzowany. (1) — $106 \text{ kG}/\text{cm}^2$, (2) — $159 \text{ kG}/\text{cm}^2$, (3) — $318 \text{ kG}/\text{cm}^2$



Rys. 10. Zmiana prędkości pełzania ustalonego w funkcji $1/T$ dla trzech poziomów naprężeń. Poliamid T-27 klimatyzowany

Jeżeli przyjąć za [2] wyznaczoną dla kapronu wartość $v_0 = 3,3 \cdot 10^5$ [1/sek], to obliczone z naszych pomiarów wartości ΔU i γ przedstawiają się następująco:

temp. $^{\circ}\text{C}$	ΔU [kcal/mol]	γ $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{mol}} \cdot \frac{\text{mm}^3}{\text{kG}} \right]$
-20	11,8	0,182
+20	12,1	0,394
+60	14,0	0,437

Proporcjonalność prędkości pełzania ustalonego do mnożnika $\exp\left(-\frac{\Delta U}{RT}\right)$ wskazuje na fluktuacyjny charakter procesu pełzania poliamidu. Proces ten można przedstawić jako następujące po sobie elementarne akty przeskoków, zorientowanych w kierunku działania naprężenia i ułatwianych w wyniku obniżenia bariery energetycznej. Uzyskana z pomiarów wartość energii aktywacji ΔU jest w istotny sposób niższa od wartości energii zrywania wiązań chemicznych poliamidu wynoszącej $45 \text{ kcal}/\text{mol}$. Takie obniżenie energii aktywacji w realnym polimerze wynika prawdopodobnie z faktu, iż amorfne obszary częściowo krystalicznego poliamidu, tworzące aktywizujące proces kompleksy, mają osłabione międzymolekularne wiązania i odgrywają w związku z tym istotną rolę w rozwoju procesu pełzania. Wynika z tego, iż elementarne przemieszczanie segmentów może odbywać się nie tylko przez zrywanie wiązków, lecz również w wyniku ukierunkowanego pod wpływem działania naprężeń ruchu rotacyjnego sąsiadujących ze sobą ogniw łańcucha i w wyniku tworzenia defektów (miejsz naruszenia periodyczności w ułożeniu łańcuchów polimeru).

Ze wzrostem temperatury, zrywanie wiązań chemicznych może odbywać się również niezależnie. Nie może to jednak świadczyć o niezależności elementarnych aktów procesu

zniszczenia i określania wartości energii zrywania wiązań energii aktywacji tego procesu. Stąd też uzyskana w doświadczeniu wartość ΔU jest niższa od wartości energii U_0 wynoszącej 45 kcal/mol.

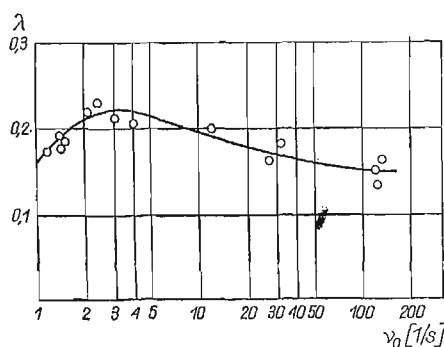
5. Drgania swobodne giętne

Badania przeprowadzono dla poliamidu T-27, klimatyzowanego, temperaturą $+20^\circ\text{C}$. Próbkę o przekroju prostokątnym, z zawieszoną masą na końcu, utwierdzono i wymuszono drgania swobodne giętne. Z przebiegu drgań gasnących rejestrowanych na oscylografie pętlicowym wyznaczono logarytmiczny dekrement drgań λ . Zmianę częstości drgań uzyskiwano poprzez zmianę masy zawieszanej na próbce.

Sporządzony wykres zależności λ od częstości ν (rys. 11) wykazuje maksimum dla częstości $\nu = 3$ 1/sek. Dla częstości, przy której $\text{tg } \delta$, a zatem i λ , przechodzi przez maksimum, jest słuszna zależność

$$\nu_0 \tau = 2\pi f_{0max} \tau = 1,$$

gdzie τ — czas relaksacji, f_{0max} — częstość liniowa, przy której λ przechodzi przez maksimum.



Rys. 11. Zmiana logarytmicznego dekrementu drgań funkcji częstości. Drgania swobodne giętne, poliamid T-27, temp. $+20^\circ\text{C}$, próbki klimatyzowane

Przyjmijmy na czas relaksacji wzór

$$\tau = \tau_0 e^{\Delta U/RT},$$

gdzie

$$\tau_0 \cong 10^{-13} \text{ [sek]},$$

po zlogarytmowaniu otrzymujemy

$$\lg \tau = \lg \tau_0 + \frac{\Delta U}{2,3 \cdot RT},$$

ponieważ

$$f_{0max} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi\tau_0 \cdot e^{\Delta U/RT}},$$

zatem

$$\lg f_{0max} = \lg \frac{1}{2\pi\tau_0} - \frac{\Delta U}{2,3 \cdot RT}$$

dla naszego przypadku

$$\lg \frac{3}{2\pi} = \lg \frac{1}{2\pi} 10^{-13} - \frac{\Delta U}{2,3 \cdot 1,96 \cdot 293}$$

Stąd otrzymujemy wartość energii aktywacji $\Delta U = 17,5$ kcal/mol.

W naszych badaniach maksymalne naprężenia zginające nie przekraczały wartości 300 kG/cm². Przyjmując zależność energii aktywacji od naprężenia w postaci

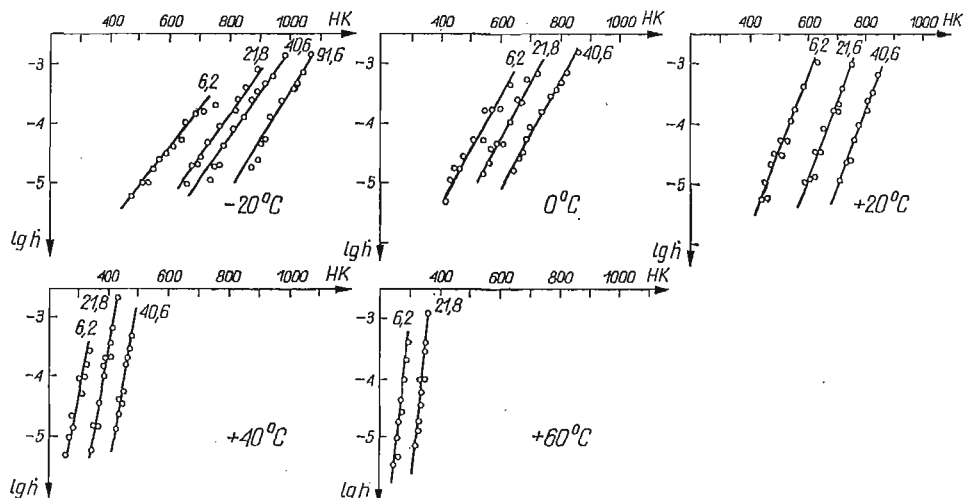
$$\Delta U = U_0 - \gamma \cdot \sigma$$

oraz podstawiając za U_0 wartość energii zrywania wiązań chemicznych w poliamidzie wynoszącą 45 kcal/mol, można wyciągnąć wniosek, iż przy zastosowanych naprężeniach energia aktywacji w stosunku do energii zrywania wiązań chemicznych została obniżona przeszło dwukrotnie.

6. Badanie twardości

Wyniki pomiarów twardości wiąże się często z takimi własnościami mechanicznymi jak wytrzymałość, granica plastyczności czy moduł sprężystości. W celu głębszego poznania fizycznej natury zjawisk występujących podczas wciskania węgelnika w badany materiał, należy poszukiwać nie zależności pomiędzy liczbą twardości (pojęciem wprowadzonym umownie) a granicznymi stanami badanego materiału, lecz rozpatrywać kinetykę procesu wciskania.

Wprowadzając jako charakterystykę tego procesu, prędkość wciskania węgelnika, będziemy poszukiwać zależności pomiędzy tą prędkością a termofluktuacyjnymi procesami zachodzącymi w materiale.



Rys. 12. Zależność prędkości zagłębienia \dot{h} od liczby twardości HK dla różnych obciążeń. Poliamid T-27 klimatyzowany, kulka \varnothing 5 mm

Przeprowadzono badania wciskania węgelnika w postaci kulki o średnicy 5 mm w próbki z Tarnamidu T-27, dla kilku obciążeń P , w temperaturach od -20°C do $+60^{\circ}\text{C}$. Na wykresach $\lg \dot{h} - HK$ — rys. 12, gdzie \dot{h} — prędkość zagłębiania się kulki, HK — twardość według Brinella, otrzymane z pomiarów punkty układają się wzdłuż linii prostych równoległych. Do opisu tej zależności przyjęto funkcję

$$\dot{h} = \dot{h}_0 \cdot \exp\left(-\frac{U(HK, P)}{RT}\right).$$

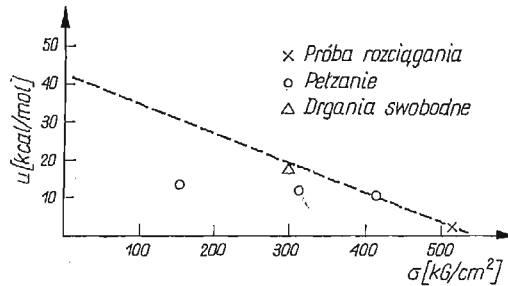
Prędkość rozwoju mikroszczeliny w materiale opisuje się zależnością [3]

$$V = V_0 \cdot \exp\left(-\frac{U_0 - \beta \cdot \sigma}{RT}\right).$$

Zbieżność obu tych funkcji wydaje się być nie tylko formalna. Można przypuszczać, iż proces wciskania węgelnika w materiał i proces rozwoju mikroszczeliny w tworzywie posiada ten sam fizyczny charakter. Różne nachylenia otrzymanych linii na rys. 12 w różnych temperaturach wskazują na zmianę z temperaturą wartości energii aktywacji procesu. Niepokrywanie się natomiast tych linii dla różnych obciążeń P jest wynikiem nakładania się na proces rozwoju mikroszczelin, kinetycznego procesu deformacji związanego z plastycznym wyciskaniem materiału spod węgelnika. Dalsze badania winny doprowadzić do rozdzielenia tych obu procesów i ilościowego określenia ich udziału.

7. Zakończenie

Przeprowadzone badania wskazują na możliwość zastosowania teorii procesów relaksacyjnych do opisu własności mechanicznych tworzyw sztucznych. O zachowaniu się tworzywa pod wpływem obciążeń zewnętrznych decydują zjawiska, polegające na zrywaniu wiązań chemicznych i fluktuacyjnych procesach tworzenia i rozwoju mikrodefektów w materiale.



Rys. 13. Zestawienie wartości energii aktywacji wyznaczonej w temp. $+20^{\circ}\text{C}$ z próby rozciągania, pełzania i drgań swobodnych

Energia aktywacji tych procesów zależna jest od wartości przyłożonego naprężenia. Na rys. 13 zestawiono wartości energii aktywacji wyznaczone z doświadczeń dla próby rozciągania, pełzania i drgań swobodnych.

Wartości te układają się wzdłuż linii prostej, której ekstrapolacja do poziomu naprężeń zerowych wyznacza wartość energii aktywacji U_0 zbliżoną do obliczonej dla poliamidów energii zrywania wiązań chemicznych.

Jedynie wyniki z prób pełzania wykazują dla niższych poziomów naprężeń odchylenia od tej zależności. Potwierdza to wnioski, które z próby pełzania zostały wyciągnięte.

Zarówno teoria Żurkowa, według której osłabienie wytrzymałości polimeru jest wynikiem pracy całej struktury przeciw działaniu cieplnych fluktuacji, jak i teoria Bartieniewa, gdzie proces dekohezji jest wynikiem nieodwracalnych procesów rozwoju mikroszczelin, opisują dwa, współistniejące i współdziałające zjawiska, jakie obserwujemy w procesie deformacji polimeru. Udział każdego z nich zależy od natury tworzywa, jak również od temperatury, w której proces deformacji się odbywa.

Literatura cytowana w tekście

1. Т. М. БАРТЕНЕВ, И. В. РАЗУМОВСКАЯ, *Фононная концепция хрупкого разрушения твердых тел*, в книге — физико-химическая механика материалов, 1.69, изд. Научная Думка.
2. О. З. ГОЛИК, Ю. Ф. ЗАБАЦКА, А. Я. ФРИДМАН, *Повзвичисть неорієнтованих кристалічних полімерів*, У.Ф.Ж., т. 13, Но 4, 1968.
3. В. Е. ГУЛЬ, В. Н. КУЛЕЗНЕВ, *Структура и механические свойства полимеров*, изд. Высшая Школа, Москва 1972.
4. М. С. КАЦ, В. Р. РЕГЕЛЬ, Т. П. САНФИРОВА, А. И. СЛУЦКЕР, *Кинетическая природа микротвердости полимеров*, Мех. полим., 1—192, 1973.

Резюме

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РЕЛАКСАЦИИ В ПОЛИАМИДЕ

В работе приведены результаты экспериментальных исследований некоторых механических свойств полиамида конструкционного материала отечественного производства. Предпринята попытка, объяснения полученных результатов через релаксационные процессы, протекающие в материале. Поведение материала под влиянием внешних нагрузок определяется явлением разрыва химических связей и флуктуационными процессами образования и развития микродефектов. Значение энергии активации этих процессов зависит от напряжений, их концентрации и от величины элементарных кинетически активных объемов. Вычисленные на основе данных испытаний на растяжение, ползучесть и свободные колебания значения энергии активации укладываются вдоль прямой, экстраполяция которой к уровню нулевых напряжений определяет значение энергии разрыва химических связей.

Summary

INVESTIGATION OF RELAXATION PROCESSES IN POLIAMID

In this work presented are the results of experimental investigation of some mechanical properties of a polyamid, a constructional plastic of home production, and an attempt is made to interpret the results obtained basing on the process of relaxation which occurs in the material.

The behaviour of the material under the influence of external load is determined by the phenomenon of breaking chemical links and fluctuation processes, and by development of micro-defects. The value of activation energy of these processes depends on the stresses, their concentration and on the quantity of the kinetically active volume elements. The values of activation energy obtained from the tension, creep and free vibrations tests form a straight line. Extrapolation of that line to the zero stress level yields the value of energy of breaking the chemical links.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lutego 1974 r.

WPLYW CYKLICZNEJ PLASTYCZNEJ DEFORMACJI NA POWIERZCHNIĘ PLASTYCZNOŚCI*

MAREK ŚLIWOWSKI I KAROL TURSki (WARSZAWA)

W pracach eksperymentalnych, poświęconych badaniu własności materiałów przy cyklicznym deformowaniu, spotyka się dwa typowe programy obciążenia, które realizuje się utrzymując stałą amplitudę naprężeń, ewentualnie stałą amplitudę odkształceń. Każdemu z tych programów odpowiada inne zachowanie się materiału.

Cykliczne obciążenie jednoosiowe ze stałą amplitudą naprężeń może spowodować, zależnie od gatunku materiału, zmniejszenie lub wzrost maksymalnych odkształceń przy kolejnych cyklach [1]. Zjawiska te są przejawem, odpowiednio, umocnienia lub osłabienia się materiału. Jeżeli utrzymuje się stałą amplitudę odkształceń, to zależnie od własności umacniania, czy osłabiania materiału zarejestrujemy wzrost lub obniżenie naprężeń w każdym cyklu obciążania. Materiał może być również niewrażliwy na cykliczną deformację w pewnych warunkach.

Doświadczenia prowadzono głównie przy symetrycznym cyklu jednoosiowego obciążania przez rozciąganie i ściskanie, ewentualnie wahadłowe skręcanie próbki. Wyniki eksperymentów pozwoliły na opracowanie wzorów empirycznych opisujących zachowanie się różnych materiałów [2].

Badano również powierzchnię plastyczności stali 20H po kilku cyklach plastycznego skręcania ze stałą amplitudą naprężeń [3].

Problem ustatecznienia materiału wynikający z hipotezy wzmocnienia kinematycznego Shielda i Zieglera, był badany w pracy [4].

Doświadczeń w złożonym stanie naprężenia jest jednak mało, a są one obecnie bardzo potrzebne ze względu na znaczny rozwój teorii obliczania konstrukcji poddanych cyklicznym plastycznym procesom deformacji. Szczególnie interesujące jest, czy rodzaj programu cyklicznego obciążania wpływa na zachowanie się materiału w złożonym stanie naprężenia.

W niniejszej pracy porównano powierzchnię plastyczności mosiądzu odkształconego przy trzech programach jednoosiowego obciążania. Próbki były deformowane przez rozciąganie, cykliczne rozciąganie ze stałą amplitudą naprężeń oraz ze stałą wielkością odkształcenia. W tych trzech programach zachowano stałą wielkość maksymalnego naprężenia przy rozciąganiu, natomiast odkształcenia trwały różniły się znacznie.

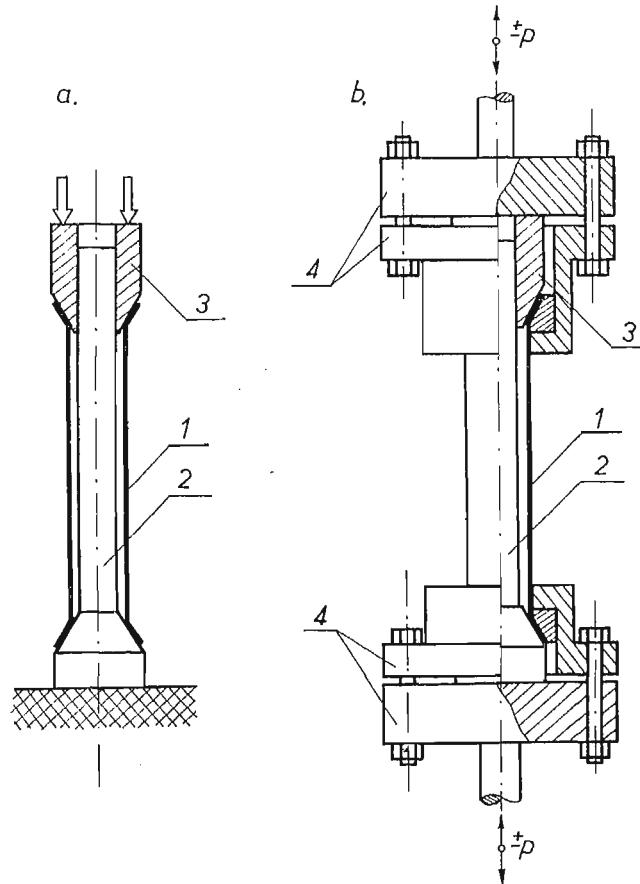
1. Technika doświadczalna

Badania przeprowadzono na próbkach ciętych z ciągnionej rury o średnicy wewnętrznej 30 mm i grubości ścianki 1 mm. Jako materiał stosowano mosiądz M63 w stanie wyżarzonym. Na końcach rurek wykonano kołnierze służące do umocowania próbki w uchwytach.

* Praca została wyróżniona na konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej — zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Krakowie w 1973 r.

W celu wykonania kołnierzy, rurkę ustawiano na stożku połączonym z trzpieniem 2, na który zakładano stożkowy śtępel 3 (rys. 1a). Całość ściskano pod prasą wykonując jednocześnie dwa kołnierze. Po tym zabiegu próbki wyżarzano przez 2 godziny w temperaturze 650°C.

Ponieważ duże odkształcenia próbek występowały tylko w kierunku osiowym przy wstępnym obciążaniu, dopuszczono do badań rurki o dosyć znacznym rozrzucie grubości



Rys. 1a). Roztłaczanie kołnierzy, b) mocowanie próbki do cyklicznego rozciągania i ściskania

ścianki wzdłuż obwodu wynoszącym $\pm 4\%$. Jak stwierdzono w czasie pomiarów, takie różnice grubości ścianki nie miały żadnego wpływu na odkształcenia próbek przy wstępnym obciążaniu.

W czasie cyklicznego odkształcania próbek zauważono, że początkowa granica plastyczności ma znaczny wpływ na maksymalne naprężenie w cyklu obciążania. Dlatego do badań używano tylko takie próbki, których granica plastyczności różniła się nie więcej niż $\pm 1\%$.

Próbki odkształcano wstępnie przez rozciąganie i ściskanie w specjalnie do tego celu wykonanych dwudzielnych uchwytach 4, dostosowanych do zrywarki o napędzie kinematycznym (rys. 1b). Uchwyty były montowane przy wykorzystaniu trzpienia służącego poprzednio do roztłaczania kołnierzy, co zapewniało osiowe ustawienie próbki.

W trakcie wstępnego obciążania, deformację osiową mierzono ekstensometrem z dwoma czujnikami zegarowymi typu MK-3 produkcji NRD.

Po wstępnym obciążaniu, próbki badano w złożonych stanach naprężenia obciążając je przez różne kombinacje siły osiowej i ciśnienia oleju wewnątrz rurki. Do tego celu służyła aparatura opisana szczegółowo w [5]. Odształcenia obwodowe ε_0 i osiowe ε_z mierzono za pomocą kratowych tensometrów oporowych naklejanych na powierzchni zewnętrznej, po dwa w kierunku obwodowym i osiowym, po przeciwnych stronach próbki. Odształcenia obliczano jako średnią ze wskazań dwóch tensometrów skierowanych w ten sam sposób. Odształcenia odczytywano z dokładnością 5×10^{-6} za pomocą mostka tensometrycznego T-2 produkcji Politechniki Warszawskiej.

Próbki oklejone tensometrami pozostawiano na 40 godzin w celu wyschnięcia kleju. Okres ten dla wszystkich próbek był jednakowy ze względu na możliwość starzenia się materiału. Ciśnienie wewnątrz rurki oraz ciśnienie w cylindrze obciążającym próbkę siłą osiową wytwarzane było przez manometry obciążnikowe. Pozwalają one na dokładny pomiar ciśnienia, ale zmiana obciążenia musi przebiegać skokowo. Aby złagodzić skoki obciążenia próbki, wypływ oleju z manometru obciążnikowego był dławiony przez odpowiednie ustawienie zaworu odcinającego w manometrze obciążnikowym, wobec czego proces deformacji próbki trwał od kilku sekund w zakresie sprężystym do około pięciu minut w zakresie plastycznym. Po zmianie obciążenia, nowe wskazania mostka tensometrycznego rejestrowano dopiero po ustaleniu się odształcenia.

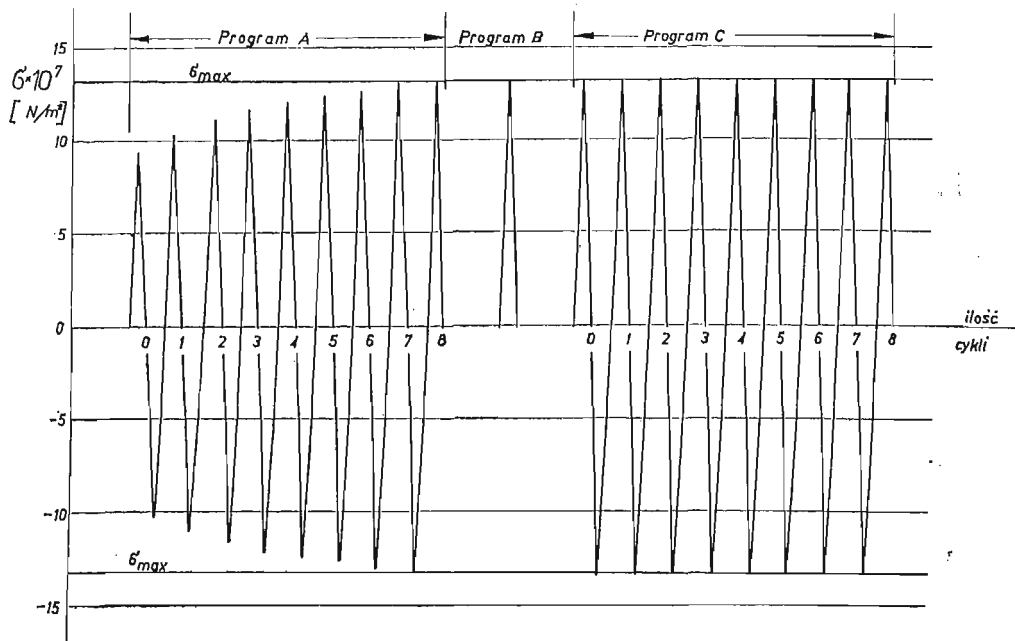
2. Program prób

Program prób obejmował zbadanie 21 próbek podzielonych na 3 serie po 7 próbek. Każdą serię próbek obciążano wstępnie siłą osiową według innego programu. We wszystkich programach końcowa wielkość naprężenia rozciągającego była jednakowa i wynosiła $(13,1 \pm 0,05)10^7 \text{ N/m}^2$.

Pierwszą serię próbek poddano cyklom rozciągania i ściskania zachowując stałą deformację około 0,62% (rys. 2, program *A*). Dodatkowym warunkiem, który postawiono w tym programie, była taka realizacja cyklicznej deformacji, żeby za każdym razem półcykl rozciągania rozpoczynał się od zerowego odształcenia. Pozwoliło to na osiągnięcie końcowego naprężenia przy znacznie mniejszych odształceniach trwałych w porównaniu z następnymi programami. Ze względu na nieliniowy wykres odciążania, nie udało się dokładnie utrzymać stałej szerokości pętli obciążania oraz trafić w początek układu współrzędnych, tym niemniej odstępstwa te są niewielkie. Po wstępnym obciążaniu przez rozciągnięcie, wykonano osiem cykli ściskania i rozciągania.

Druga seria próbek została odształcona przez jednokrotne rozciągnięcie (rys. 2, program *B*). Trwałe odształcenie próbek w części pomiarowej wynosiło 2,635%.

Próbki trzeciej serii zostały rozciągnięte tak samo, jak próbki drugiej serii, ale następnie przeprowadzono 8 cykli ściskania i rozciągania (rys. 2, program *C*). W rezultacie tego programu obciążania, końcowe odształcenie próbek wynosiło 1,978%.



Rys. 2. Program obciążeń wstępnych

Po wstępnej deformacji próbki oklejano tensometrami i deformowano wzdłuż prostoliniowych dróg obciążenia, które odpowiadają stałym proporcjom naprężeń głównych. Wyniki pomiarów służyły do określenia powierzchni plastyczności dla podanych trzech programów obciążeń wstępnych.

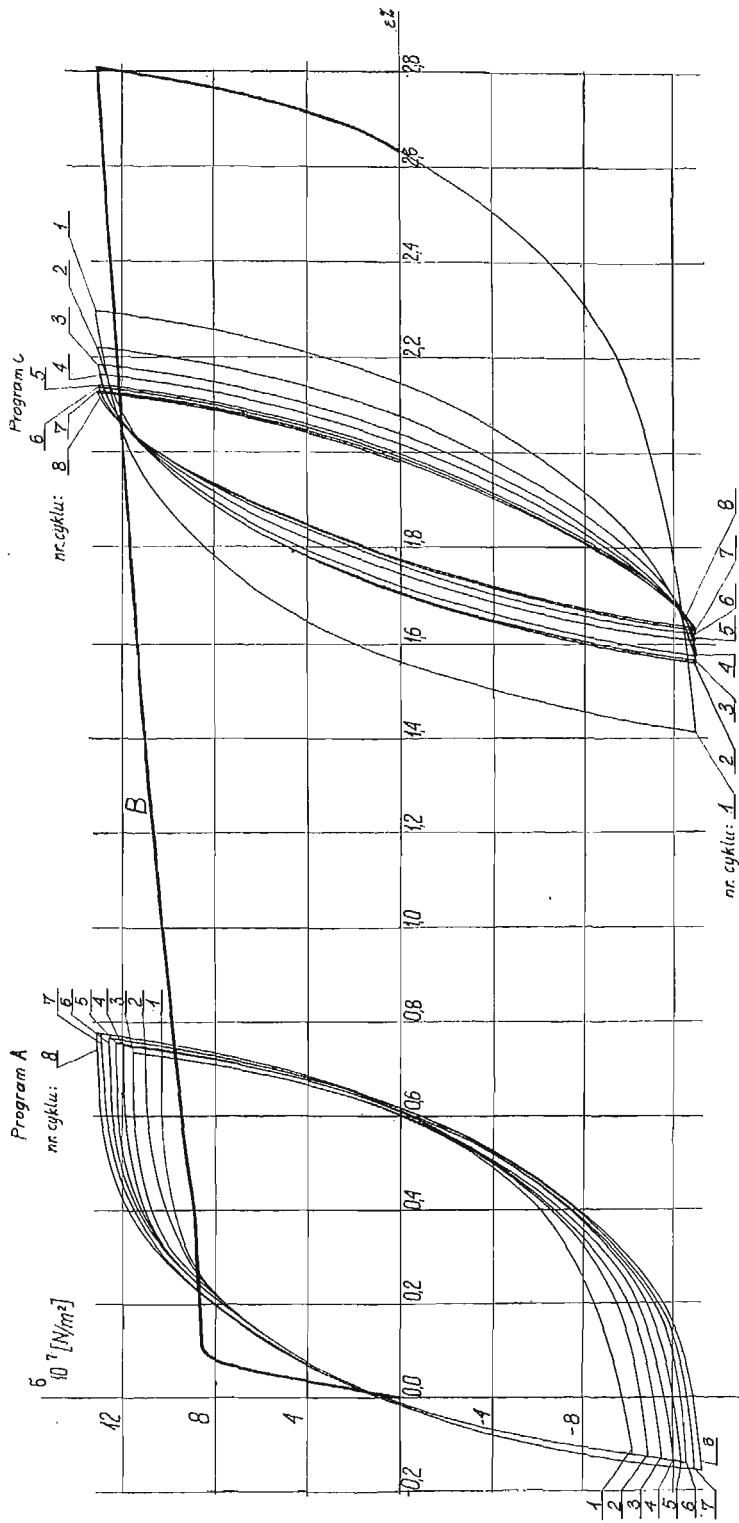
3. Wyniki doświadczeń przy obciążaniu wstępnym

Typowe wykresy naprężeń w funkcji odkształceń osiowych, przy wstępnym obciążaniu próbek, pokazano na rys. 3. W celu zademonstrowania różnic w trzech programach wstępnego obciążania odpowiadające im wykresy naniesiono na jednym rysunku.

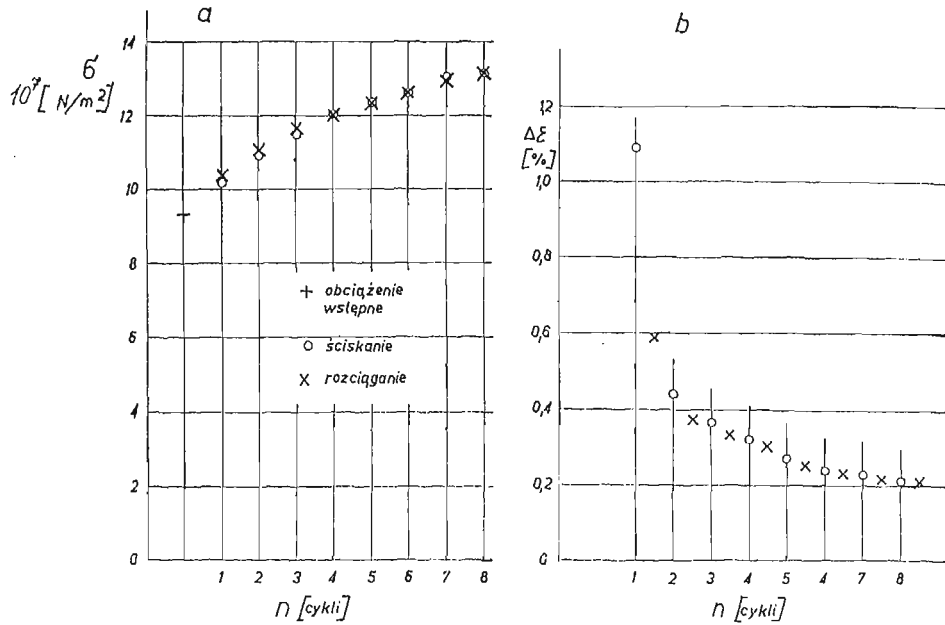
Przy deformowaniu pierwszej serii próbek otrzymano odkształcenie około 0,2%. W każdym cyklu obciążenia następował pewien przyrost maksymalnego naprężenia. Na rys. 4a przedstawiono na jednej osi współrzędnych maksymalne naprężenia przy rozciąganiu i ściskaniu, a na drugiej numer cyklu według oznaczeń z rys. 2. Okazuje się, że punkty odpowiadające temu samemu cyklowi praktycznie pokrywają się. Oznacza to, że ściskanie nie ma wpływu na maksymalne naprężenie w cyklu rozciągania, który po nim następuje. Materiał umacnia się tylko w czasie cykli rozciągania, a więc w kierunku pierwszego obciążenia.

Krzywa umocnienia przy rozciąganiu drugiej serii próbek oznaczona jest literą *B* na rys. 3. Odkształcenie trwałe wynosiło 2,635%.

Trzecia seria próbek po wstępnym rozciągnięciu poddana została cyklicznemu ściskaniu i rozciąganiu przy stałej wielkości naprężeń. Ilość cykli obciążenia w obu programach



Rys. 3. Krzywe umocnienia dla trzech programów wstępnych obciążeń: B — krzywa umocnienia przy rozciąganiu



Rys. 4a) Porównanie maksymalnych naprężeń w cyklu ściskania i rozciągania ze stałą wielkością odkształcenia; b) porównanie wielkości trwałego odkształcenia po cyklu ściskania ze stałą wielkością naprężenia maksymalnego

była taka sama. Szerokość pętli histerezy kolejnych cykli obciążania zmniejsza się stopniowo dążąc do pewnej ustalonej wartości (rys. 4b). W wyniku cyklicznego obciążania, końcowe trwałe odkształcenie zmniejszyło się w porównaniu do odkształcenia próbki rozciągniętej i wynosiło 1,978%.

4. Wyniki doświadczeń przy obciążaniu wtórnym

Odształcenie obwodowe ϵ_0 oraz odkształcenie osiowe mierzono za pomocą tensometrów oporowych. Nieznana wielkość trzeciego odkształcenia głównego obliczano z warunku nieściśliwości. Znając siłę osiową i ciśnienie p_0 wewnątrz rurki obliczano naprężenie osiowe i obwodowe. Trzecią składową tensora naprężenia przyjmowano jako $\sigma_r = 1/2p_0$. Dane te pozwalają obliczyć równoważne odkształcenie i naprężenie według wzorów:

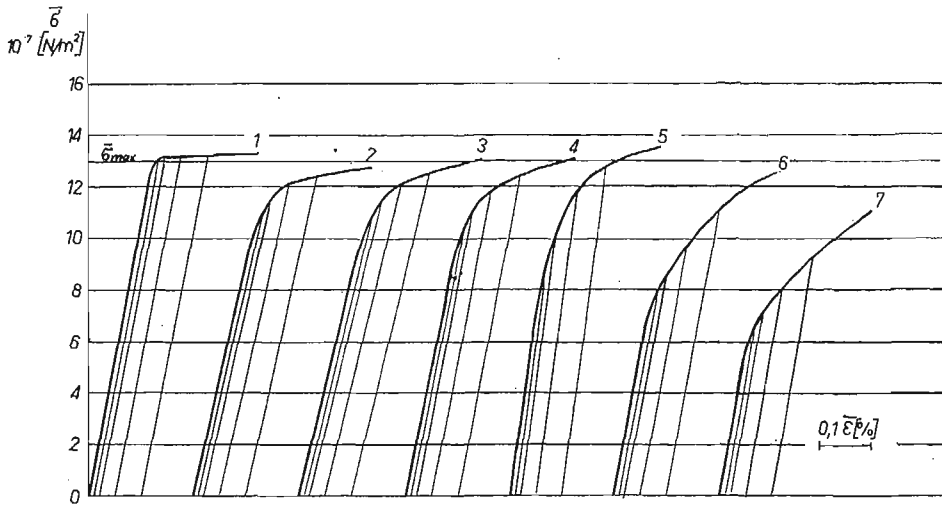
$$(4.1) \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_0 - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_0)^2},$$

$$(4.2) \quad \Delta \bar{\epsilon} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\Delta \epsilon_z)^2 + (\Delta \epsilon_0)^2 + (\Delta \epsilon_z)(\Delta \epsilon_0)},$$

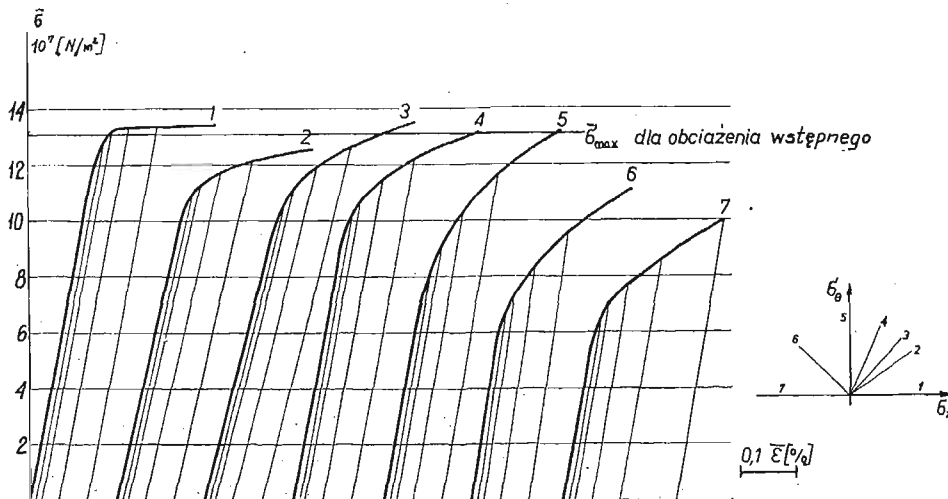
$$(4.3) \quad \bar{\epsilon} = \sum \Delta \bar{\epsilon}.$$

Korzystając z tych przeliczeń wykonywano wykresy $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$ (rys. 5, 6, 7), oddzielnie dla trzech programów obciążania wstępnego.

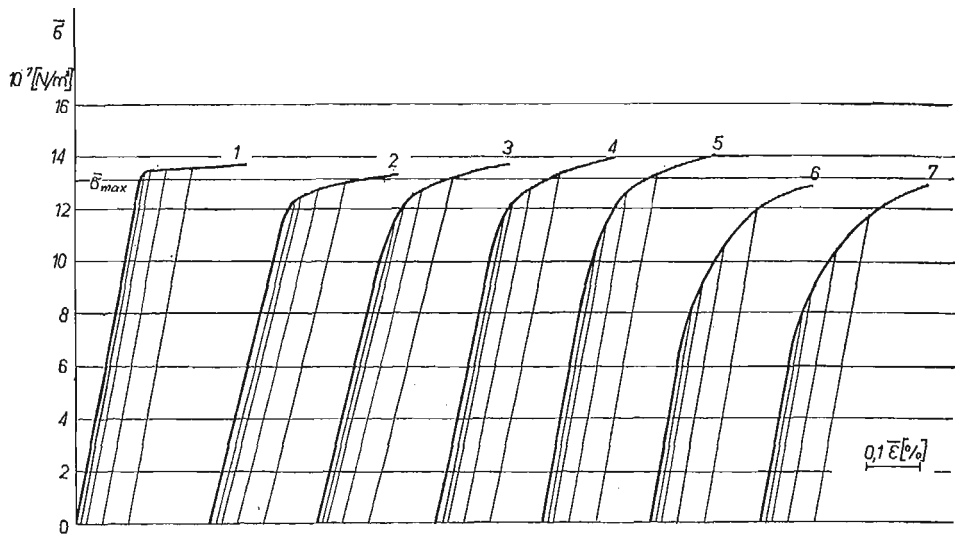
Wykresy $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ dla ściskania oznaczono numerem 7 na rys. 5, 6, 7. Porównując linie nr 7 na rys. 5 oraz 7 z tymi fragmentami programu *A* oraz *C* na rys. 3, które odpowiadają ostatniemu cyklowi ściskania, można zauważyć wpływ starzenia wskutek dwudniowej przerwy między wstępnym i wtórnym obciążeniem. Przerwa ta była potrzebna na wyschnięcie kleju pod tensometrami. Na rys. 3 wykresy $\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ przy ścisaniu mają przebieg krzywoliniowy przy małych naprężeniach. Natomiast po dwu dniach przerwy, przy ścisaniu otrzymujemy początkowy zakres sprężysty, a moduł styczny w punkcie $\varepsilon = 0$ jest taki sam, jak przy pierwszym obciążeniu.



Rys. 5. Krzywe umocnienia przy wtórnym obciążeniu. Wstępne cykliczne ściskanie i rozciąganie ze stałą wielkością odkształcenia



Rys. 6. Krzywe umocnienia przy wtórnym obciążeniu. Materiał wstępnie rozciągnięty plastycznie



Rys. 7. Krzywe umocnienia przy wtórnym obciążaniu. Wstępne cykliczne ściskanie i rozciąganie ze stałą wielkością maksymalnych naprężeń

Przy rozciąganiu następującym po cyklicznym umocnieniu, duże odkształcenie plastyczne występuje przy naprężeniach większych od obciążenia wstępnego. Szczególnie jest to widoczne, gdy próbka została wstępnie odkształcona przez cykle rozciągania i ściskania ze stałym naprężeniem.

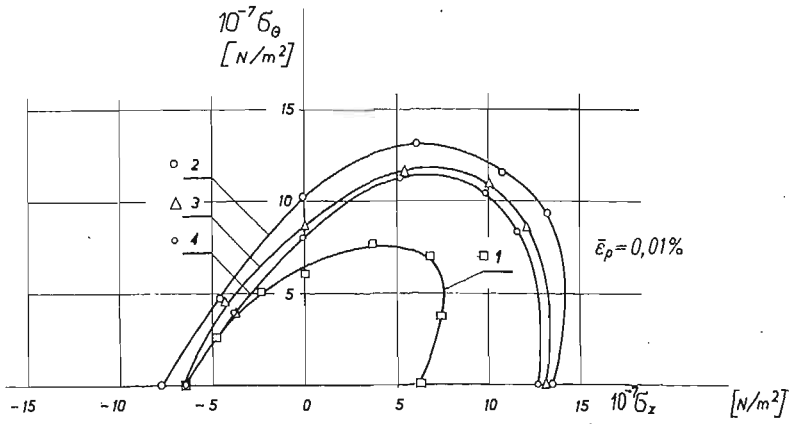
5. Analiza powierzchni plastyczności

Aby wyznaczyć punkty powierzchni plastyczności postępowano następująco. Znajdowano wartość $\bar{\sigma}$ odpowiadającą definicji uplastycznienia $\bar{\epsilon}_p = \text{const}$ prowadząc z odpowiedniego punktu na osi $\bar{\epsilon}$ prostą równoległą do początkowego liniowego zakresu krzywej $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon})$, aż do przecięcia z nią.

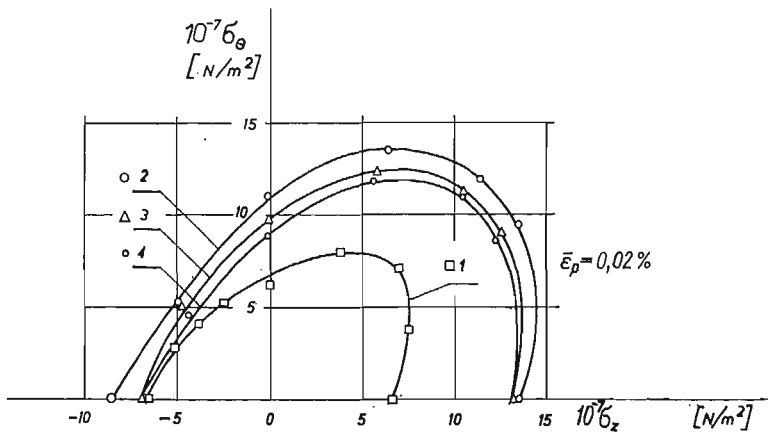
Dla danej proporcji naprężeń $\sigma_z = m\sigma_\theta$ ze wzoru (4.1) określano naprężenie σ_θ , a następnie σ_z . Punkty powierzchni plastyczności naniesiono we współrzędnych σ_θ σ_z oddzielnie dla pięciu wartości $\bar{\epsilon}_p = 0,01; 0,02; 0,05; 0,2; 0,5\%$ (rys. 8 - 12). Na podstawie punktów doświadczalnych określono przybliżony zarys powierzchni plastyczności.

Na jednym wykresie przedstawiono powierzchnię plastyczności materiału wyżarzonego oraz powierzchnię plastyczności materiału umocnionego w trakcie trzech różnych programów obciążeń wstępnych.

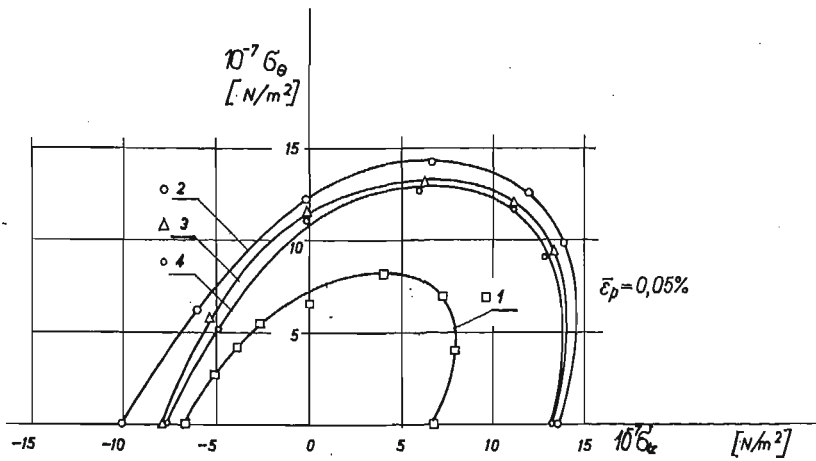
Najmniejsze umocnienie materiału otrzymano przez wstępne rozciąganie materiału. Największa powierzchnia plastyczności odpowiada cyklicznemu deformowaniu próbki przy wahadłowym cyklu obciążania. Cykliczne plastyczne deformowanie próbki przy stałym odkształceniu spowodowało umocnienie materiału nieco większe od umocnienia przez rozciąganie.



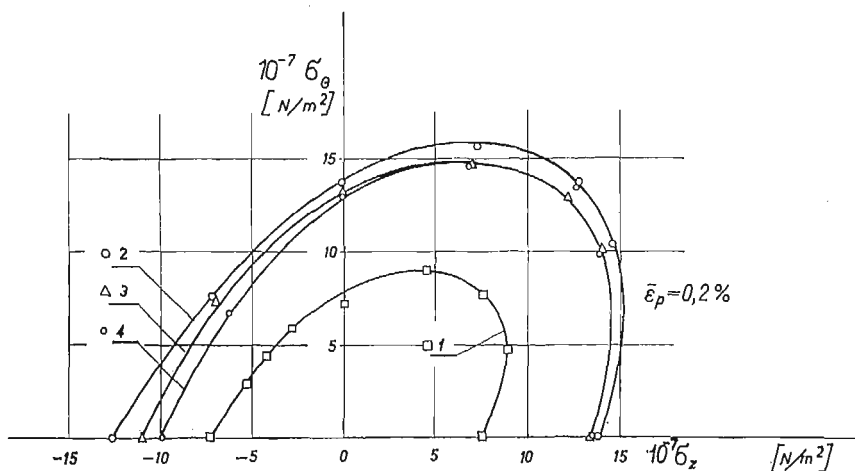
Rys. 8



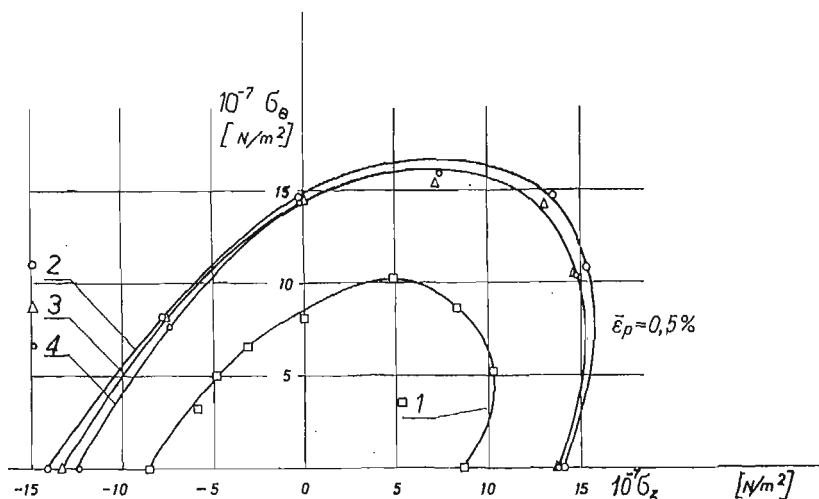
Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11



Rys. 12

Rys. 8 do 12. Porównanie powierzchni plastyczności materiału poddanego procesom wstępnej deformacji o programach: 1 — materiał w stanie wyżarzonym; 2 — cykliczne obciążanie ze stałą amplitudą naprężeń; 3 — cykliczne obciążanie ze stałą amplitudą odkształceń; 4 — rozciąganie; ϵ_p = trwale odkształcenie przyjęte do wyznaczenia naprężeń uplastyczniających

Najmniejszą powierzchnię plastyczności uzyskano dla największego osiowego odkształcenia wstępnego, które miało miejsce w przypadku jednokrotnego rozciągnięcia próbki. Odkształcenie to było 4,5 razy większe, niż przy cyklicznym deformowaniu ze stałą szerokością pętli histerezy, natomiast powierzchnie plastyczności dla obu programów wstępnej deformacji różnią się niewiele. Największa powierzchnia plastyczności odpowiada pośredniej wielkości odkształcenia, które uzyskano po obciążaniu wstępnym przy symetrycznym cyklu naprężeń. Wielkości wstępnego odkształcenia plastycznego nie są więc parametrem informującym o umocnieniu materiału.

Powierzchnie plastyczności materiału odkształconego są przesunięte w kierunku obciążenia wstępnego i żadna z nich nie przecina powierzchni plastyczności materiału wyższego. W skrajnym przypadku (rys. 8) otrzymano styczne powierzchnie plastyczności. Szczególnie na tym wykresie widać duży wpływ cyklicznego rozciągania i ściskania próbki, ponieważ materiał doznał umocnienia we wszystkich kierunkach obciążenia wtórnego.

6. Wnioski

Program obciążania materiału ma bardzo duży wpływ na jego własności plastyczne nawet wtedy, gdy końcowa wielkość naprężeń pozostaje niezmienną.

Trzy programy wstępnego obciążania: rozciąganie, cykliczne rozciąganie i ściskanie ze stałą wielkością odkształcenia oraz ze stałą wielkością naprężenia pokazały, że wielkość odkształcenia plastycznego nie jest parametrem informującym o umocnieniu materiału.

Przyjmując stałą wielkość końcowego naprężenia przy deformowaniu materiału, można dobrać optymalny program zapewniający uzyskanie największego umocnienia materiału. W danym przypadku był to program polegający na cyklicznym ściskaniu i rozciąganiu ze stałą amplitudą naprężeń.

Literatura cytowana w tekście

1. А. П. Гусенков, сб. *Сопротивление деформированию и разрушению при малом числе циклов нагружения*, изд. Наука, Москва 1967, 34÷63.
2. S. S. MANSON, *Fatigue a complex subject — some simple approximations*, Exp. Mech., 5 (1965) 193.
3. А. И. Чистяков, *Влияние циклического деформирования на эффект Баушингера и границу текучести ст. 20Х*, Исслед. по Упруг. Пласт., сб. 6 (1967) 145—149.
4. R. MARJANOVIĆ, W. SZCZEPIŃSKI, *Yield surfaces of the M-63 brass, prestrained by cyclic biaxial loading*, Arch. Mech. Stos., 26 (1974) 311-320.
5. K. TURSKI, *Badanie wpływu odkształcenia plastycznego na zachowanie się metali przy różnych drogach wtórnego obciążenia*, Mech. Teoret. Stos., 9, (1971) 155÷199.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ НА ПОВЕРХНОСТЬ ТЕКУЧЕСТИ

Предварительно деформированные тонкостенные трубчатые образцы испытывались в сложном напряженном состоянии. Исследованы три программы предварительного нагружения: растяжение и циклическое упруго-пластическое деформирование при жестком и мягком нагружении в условиях растяжения-сжатия. Величина последнего максимального растягивающего напряжения была одинаковой для всех программ нагружения. Программа предварительного циклического деформирования при мягком нагружении вызвала наибольшее упрочнение материала. Наименьшая поверхность текучести была получена при предварительном растяжении, которое соответствует наибольшему удлинению образца.

S u m m a r y

INFLUENCE OF CYCLIC PLASTIC STRAINING ON THE YIELD SURFACE

Initially deformed tubular brass specimens were tested under complex state of stress. Three programmes of initial prestraining were performed: tension, cyclic tension and compression under constant strain and constant stress. Maximum stresses in tension in each programme were equal. Third programme leads to the greatest strain-hardening of the material. The smallest surface of plasticity corresponds to the initial tension in spite of the fact that it leads to the greatest initial elongation of the specimen.

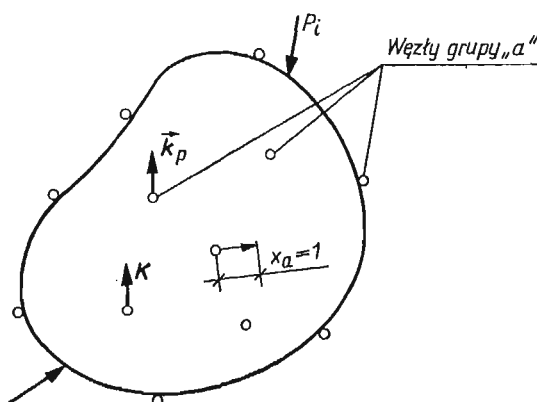
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI POLSKIEJ AKADEMII NAUK, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 lutego 1974 r.

MACIERZ SZTYWNOŚCI I WEKTOR OBCIĄŻEŃ SUPERELEMENTU

JÓZEF WRANIK (GLIWICE)

Przy obliczaniu dużych konstrukcji metodą elementów skończonych — przy żądanej dokładności obliczeń — mogą zachodzić przypadki otrzymywania równań o liczbie przekraczającej wielokrotnie liczbę równań możliwą do rozwiązania na maszynie cyfrowej. W takich przypadkach można zastosować sposób polegający na podziale ustroju na *superelementy* [1] stanowiące części składowe całej konstrukcji, obliczeniu macierzy sztywności tych superelementów i za ich pomocą obliczeniu macierzy sztywności całej konstrukcji.



Rys. 1

Różnica między elementem skończonym a superelementem polega na odmiennym sposobie obliczania ich macierzy sztywności. Macierz sztywności elementu skończonego oblicza się na podstawie funkcji kształtu [2], macierz sztywności superelementu zaś za pomocą macierzy sztywności elementów skończonych. Otrzymuje się ją poprzez eliminację pewnej liczby dowolnych węzłów z ich ogólnej liczby wynikającej z podziału superelementu na elementy skończone.

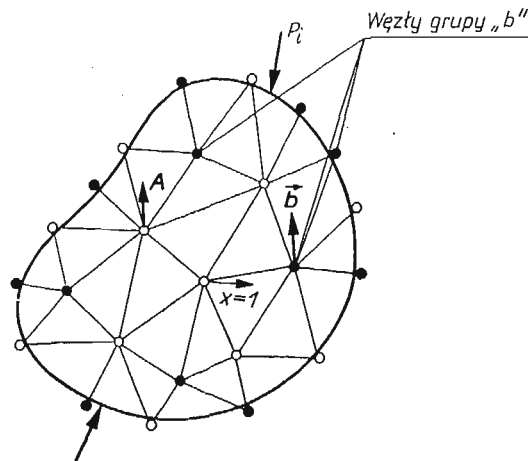
W pracy [2] wykazano możliwość eliminacji węzłów wewnętrznych przy zastosowaniu minimalizacji funkcjonału χ .

W pracy niniejszej sformułowano zadanie eliminacji dowolnych węzłów — odmiennie od ZIENKIEWICZA [2]. Zastosowano do tego celu metodę przemieszczeń. Wykazano, że macierz sztywności superelementu może być obliczona przez eliminację pewnej liczby niewiadomych z ogólnego układu równań, wynikającego ze stosowania metody elementów skończonych.

Macierz sztywności superelementu wyprowadzimy na przykładzie tarczy (rys. 1). Podany sposób jest również ważny dla dowolnego dwuwymiarowego lub trójwymiarowego superelementu. Liczba węzłów elementu przedstawionego na rys. 1 jest mała, toteż

obliczenie macierzy sztywności tego elementu przez bezpośrednie odpowiednie «zbieranie» macierzy sztywności elementów skończonych prowadziłoby do zbyt dużych błędów. Dodanie pewnej liczby węzłów (węzły czarne na rys. 2) zwiększa dokładność obliczeń, lecz również liczbę niewiadomych.

Założmy, że grupa węzłów oznaczona indeksem a (białe), łącznie z grupą węzłów oznaczona indeksem b (czarne) tworzą siatkę podziału na elementy skończone. Za pomocą wszystkich węzłów $a+b$ znajdziemy macierz sztywności elementu wyłącznie z węzłami a (rys. 1). Jeżeli macierz sztywności elementu skończonego trójkątnego (rys. 2) jest znana, to znana jest również macierz sztywności całego elementu tarczowego z węzłami $a+b$. Oznaczmy tę macierz przez A , a macierz sztywności z węzłami a , czyli poszukiwaną macierz sztywności superelementu przez K .



Rys. 2

Równanie metody przemieszczeń elementu tarczowego z węzłami $a+b$ można zapisać w postaci

$$(1) \quad A\vec{x} + \vec{b} = 0,$$

gdzie

\vec{x} wektor niewiadomych przemieszczeń

\vec{b} wektor obciążeń.

Jeżeli podzielimy macierz A na cztery bloki w ten sposób, by wektor przemieszczeń \vec{x} rozdzielić na dwie grupy: \vec{x}_a i \vec{x}_b tzn. tak, by wektor \vec{x}_a był wektorem przemieszczeń węzłów grupy a (rys. 1), a wektor \vec{x}_b był wektorem przemieszczeń węzłów grupy b , to układ równań możemy przedstawić w postaci

$$(2) \quad \begin{aligned} A_{aa}\vec{x}_a + A_{ab}\vec{x}_b + \vec{b}_a &= 0, \\ A_{ba}\vec{x}_a + A_{bb}\vec{x}_b + \vec{b}_b &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli liczba węzłów grupy a wynosi s , a liczba węzłów grupy b przy wymiarze macierzy \mathbf{A} $n \times n$ wynosi $n-s$, wówczas macierze z układu równań (2) przedstawiają się następująco:

$$\mathbf{A}_{aa} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,s} \\ a_{2,1} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ a_{s,1} & \dots & & a_{s,s} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_{ab} = \mathbf{A}_{ba}^T = \begin{bmatrix} a_{1,s+1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,s+1} & \dots & \\ \vdots & & \\ a_{s,s+1} & \dots & a_{s,n} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{bb} = \begin{bmatrix} a_{s+1,s+1} & \dots & a_{s+1,n} \\ \vdots & & \\ a_{n,s+1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}; \quad \vec{\mathbf{b}}_a = \begin{bmatrix} b_{1,a} \\ b_{2,a} \\ \vdots \\ b_{s,a} \end{bmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{b}}_b = \begin{bmatrix} b_{s+1,b} \\ b_{s+2,b} \\ \vdots \\ b_{n,b} \end{bmatrix}; \quad \vec{\mathbf{x}}_a = \begin{bmatrix} x_{1,a} \\ x_{2,a} \\ \vdots \\ x_{s,a} \end{bmatrix}; \quad \vec{\mathbf{x}}_b = \begin{bmatrix} x_{s+1,b} \\ x_{s+2,b} \\ \vdots \\ x_{n,b} \end{bmatrix}.$$

Mnożąc obie strony drugiego równania układu (2) przez \mathbf{A}_{bb}^{-1} i przekształcając je otrzymamy

$$(3) \quad \vec{\mathbf{x}}_b = -\mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba} \vec{\mathbf{x}}_a - \mathbf{A}_{bb}^{-1} \vec{\mathbf{b}}_b.$$

Podstawiając relację (3) do pierwszego równania (2) otrzymamy po przekształceniu

$$(4) \quad (\mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba}) \vec{\mathbf{x}}_a + (\vec{\mathbf{b}}_a - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \vec{\mathbf{b}}_b) = \mathbf{0}.$$

Jeżeli oznaczymy

$$\mathbf{K} = \mathbf{A}_{aa} - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \mathbf{A}_{ba},$$

$$\vec{\mathbf{k}}_p = \vec{\mathbf{b}}_a - \mathbf{A}_{ab} \mathbf{A}_{bb}^{-1} \vec{\mathbf{b}}_b,$$

wówczas równanie (4) można zapisać w postaci

$$(5) \quad \mathbf{K} \vec{\mathbf{x}}_a + \vec{\mathbf{k}}_p = \mathbf{0}.$$

W dalszym ciągu rozważań wykazemy, że macierze \mathbf{K} i $\vec{\mathbf{k}}_p$ są odpowiednio macierzą sztywności superelementu, tzn. elementu z węzłami grupy a , i wektorem obciążeń superelementu.

Jeżeli węzłom grupy b nadawać będziemy kolejno odpowiednie przemieszczenia $x_b = 1$ (rys. 3a), wówczas w każdym węzle grupy a wystąpią siły tworzące macierz \mathbf{A}_{ab} , a w każdym węzle grupy b , siły tworzące macierz \mathbf{A}_{bb} . Podobnie, nadając przemieszczenia jednostkowe węzłom grupy a (rys. 3b), otrzymamy macierz \mathbf{A}_{aa} utworzoną z sił występujących w węzłach grupy a , i macierz \mathbf{A}_{ba} utworzoną z sił występujących w węzłach grupy b .

Możemy więc zapisać następujące równanie metody przemieszczeń jako równanie równowagi sił w węzłach grupy b

$$(6) \quad \mathbf{A}_{bb} \mathbf{x}_{ba} + \mathbf{A}_{ba} = \mathbf{0},$$

gdzie

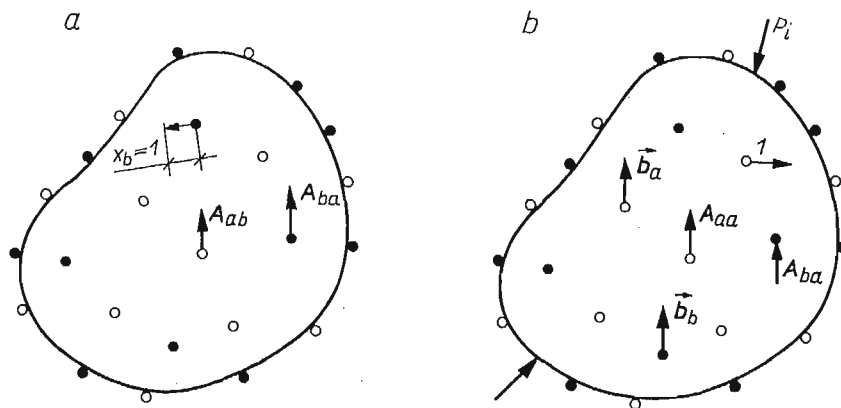
\mathbf{A}_{bb} macierz kwadratowa utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy b , kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy b ,

- A_{ba} macierz prostokątna utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy b , kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy a ,
 x_{ba} macierz prostokątna przemieszczeń węzłów grupy b dla kolejno wymuszanych przemieszczeń jednostkowych węzłów grupy a

$$x_{ba} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,s} \\ x_{2,1} & \dots & \dots & x_{2,s} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{p,1} & \dots & \dots & x_{p,s} \end{bmatrix},$$

Z równania (6) otrzymamy

$$(7) \quad x_{ba} = -A_{bb}^{-1} A_{ba}.$$



Rys. 3

Poszukiwana macierz sztywności K superelementu z węzłami a jest macierzą utworzoną z wartości sił w węzłach grupy a w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych węzłów grupy a , więc

$$(8) \quad K = A_{ab} x_{ba} + A_{aa},$$

gdzie

- A_{ab} macierz prostokątna utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy a kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy b ,
 A_{aa} macierz kwadratowa utworzona z wartości sił wywołanych w węzłach grupy a kolejnymi przemieszczeniami jednostkowymi węzłów grupy a .

Podstawiając do relacji (8) relację (7) otrzymamy macierz sztywności K superelementu

$$(9) \quad K = A_{aa} - A_{ab} A_{bb}^{-1} A_{ba}.$$

W podobny sposób otrzymać można wektor obciążeń \vec{k}_p w węzłach superelementu dla dowolnych obciążeń zewnętrznych P_i . Oznaczmy wektor obciążeń w węzłach grupy a przez \vec{b}_a , a w węzłach grupy b przez \vec{b}_b , wówczas

$$(10) \quad A_{bb} \vec{x}_b + \vec{b}_b = \mathbf{0},$$

stąd

$$(11) \quad \vec{x}_b = -A_{bb}^{-1} \vec{b}_b.$$

Wektor obciążeń \vec{k}_p otrzymamy w postaci

$$(12) \quad \vec{k}_p = A_{ab} \vec{x}_b + \vec{b}_a.$$

Podstawiając (11) do (12) otrzymamy wektor obciążeń superelementu

$$(13) \quad \vec{k}_p = \vec{b}_a - A_{ab} A_{bb}^{-1} \vec{b}_b.$$

Na podstawie znanych macierzy sztywności i wektorów obciążeń zespołu superelementów obliczyć można macierz sztywności i wektor obciążeń superelementu, na który składają się wszystkie elementy zespołu. Obliczenie przeprowadzić można według wzorów (12) i (13).

Macierz sztywności K jest zbiorem sił występujących w węzłach grupy a (rys. 1) w wyniku wymuszonych przemieszczeń jednostkowych $x_a = 1$, wektor \vec{k}_p zaś, zbiorem sił występujących w węzłach superelementu (rys. 1) wywołanych siłami zewnętrznymi P_i .

Równanie (5) może być traktowane również jako pewien sposób rozwiązywania równania (1).

Literatura cytowana w tekście

1. A. KOCIOŁEK, *Mechanika budowli w systemie automatyzacji projektowania. Zastosowanie elektronicznych maszyn cyfrowych w pracach inżynierskich*, Konferencja nauk.-techn. NOT, Katowice 1971.
2. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

МАТРИЦА ЖЕСТКОСТИ И ВЕКТОР НАГРУЗКИ СУПЕРЭЛЕМЕНТА

В работе указан метод построения матрицы жесткости и вектора нагрузок суперэлемента, т. е. большого, по сравнению с размерами конструкции, элемента с малым числом степеней свободы.

Доказывается, что матрицу жесткости суперэлемента и его вектор нагрузок можно найти путем соответствующего приведения общей системы уравнений для элемента с большим числом степеней свободы.

Summary

STIFFNESS MATRIX AND A LOAD VECTOR OF A SUPERELEMENT

The paper presents the method of forming the stiffness matrix and the load vector for a so-called super-element, that is for an element with a small number of degrees of freedom and of dimensions large in comparison with dimensions of the entire construction.

It is shown that the superelement stiffness and its load vector can be calculated by a suitable reduction of the general set of equations written for an element with many degrees of freedom.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA, FILIA W BIELSKU-BIAŁEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 15 lutego 1974 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANE ZA I KWARTAŁ 1974 ROKU

1. Zebrania naukowe

W I kwartale 1974 r. odbyło się 19 zebrań naukowych, na których wygłoszono 24 referaty o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczestników	dyskutantów
Oddział w Bydgoszczy					
1.	26.03.74	A.F. Budzyński	O działalności naukowej instytutów Politechnik w Tbilisi i Erewaniu	35	4
2.	—,—	L.M. Kamiński	Analogie zjawisk fizycznych równania Lagrange'a	28	5
Oddział w Częstochowie					
3.	28.02.74	R. Parkitny	Naprężenia w ciałach z ruchomymi granicami	23	4
4.	28.03.74	W. Szczepiński	Nowe rozwiązania i badania z zakresu równowagi granicznej i kinetyki ośrodków sypkich	33	3
5.	27.03.74	M. Sokołowski	Matematyczne metody opisu powstawania i rozwoju pęknięć zmęczeniowych	29	5
Oddział w Gdańsku					
6.	28.03.74	E. Wittbrodt	Hybrydowa metoda elementów skończonych	28	6
7.	—,—	Cz. Branicki M. Skowronek	Analiza statyczna powłok walcowych metodą elementów skończonych		
Oddział w Gliwicach					
8.	22.01.74	R. Krzywiec	Niektóre problemy systemów wielkości		
9.	28.02.74	J. Ledwoń	Obciążenie budynku szczelnego pierwszej polskiej elektrowni jądrowej	12	4
10.		J. Darlewski	Zagadnienie sił tarcia przy toczeniu laminatów epoksydowo-szlanych		4

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczestników	dyskutantów
Oddział w Krakowie					
11.		R. Kaluża	Określenie przydatności żywicy epoksydowej Epidian 5 do modelowania konstrukcji	18	7
12.		A. Garstecki	Zwichrzenie sprężyste cienkościennej belki dwuprzęsłowej		
13.		M. Śliwowski	Wpływ cyklicznej plastyczności i deformacji na powierzchnię plastyczności		
Oddział w Łodzi					
14.	24.01.74	B. Rogowski	Dynamiczne zagadnienia płyt grubych	9	5
Oddział w Poznaniu					
15.	04.02.74	R. Ganowicz	O pewnej metodzie otrzymywania podstawowych rozwiązań w teorii płyt i powłok	15	4
16.	19.02.74	R. Dziecielak	Efekty dynamiczne działania źródła cieczy w ośrodku konsolidującym	12	2
Oddział w Rzeszowie					
17.		J. Ledziński	Zagadnienie geometryczne nieliniowej membrany walcowej z materiału lepkosprężystego		
18.		A. Świder	Drgania samowzbudne nieliniowego układu ciągłego		
19.	03.04.74	Z. Stojek	Rozwój konstrukcji inżynierskich		
Oddział w Szczecinie					
20.	17.01.74	H. Pfan	Obliczanie częstości drgań własnych izotropowych płyt prostokątnych z otworami, przy zastosowaniu różnic skończonych	18	4
21.	28.02.74	M. Kmieciak B. Tęczyński	Badania drgań wymuszonych	27	4
22.	18.03.74	Z. Parszewski	Dynamika złożonych układów maszynowych	47	2
Oddział w Warszawie					
23.	25.03.74	P. Perzyna	O podstawach lepkoplastyczności	25	2
Oddział we Wrocławiu					
24.	08.01.74 i 15.02.74	B. Lysik	Teoria równań interpretacyjnych ośrodka odkształcalnego	16 20	3 5

2. Seminaria

Oddział w Gdańsku zorganizował 2 następujące seminaria: 1) na temat «Optymalizacji konstrukcji», które prowadzili prof. dr P. Wilde i dr Cz. Szymczyk. Dwugodzinne wykłady odbywały się co tydzień w okresie stycznia i lutego 1974 r. Liczba uczestników wynosiła 22 osoby; 2) na temat «Metody sztywnych elementów skończonych» prowadzone przez doc. J. Kruszewskiego i mgr inż. E. Wittbrodta. Dwugodzinne wykłady odbywały się co tydzień w okresie stycznia, lutego i marca 1974 r. W seminarium uczestniczyło 30 osób.

3. Sympozja

Oddział w Gliwicach zorganizował w dniach od 12 do 18 lutego 1974 r. Sympozjum na temat «Optymalizacja w mechanice». W ramach Sympozjum wygłoszono następujące referaty:

1. J. Baran, S. Żaboklicki, *Optymalizacja parametrów modelu napędu głównego frezarki przy użyciu zderminowanych i stochastycznych sygnałów,*
2. C. Cempel, *Zastosowanie podatności szerokopasmowej do optymalizacji parametrycznej obiektów mechanicznych,*
3. T. Chmielniak, G. Kosman, *Optymalny program zmiany mocy turbiny w czasie rozruchu,*
4. R. Ćwiek, *Optymalizacja wymiaru przekroju rurowego kołowego i kwadratowego prętów ściskanych,*
5. L. Dietrich, J. Miastkowski, *Nośność graniczna połączeń sworzniowych,*
6. J. Dietrich, *Konstrukcyjne kryteria jako podstawa optymalizacji,*
7. S. Dubiel, *Maximum prawdopodobieństwa realizacji zadania jako nowe kryterium optymalizacji procesów sterowania,*
8. W. Ferenc, M. Marcinowski, *Optymalna konstrukcja okresowych rozwiązań nieliniowego układu wibrodarowego,*
9. J. Gierliński, *Pewne zagadnienia optymalizacji rusztów,*
10. R. Janiczek, B. Kapica, *Optymalizacja pręta ściskanego złożonego z powłoki i osnowy niejednorodnej,*
11. E. Kamiński, *Możliwości doboru optymalnych amortyzatorów w układach mechanicznych,*
12. G. Kosman, T. Chmielniak, *Zastosowanie uogólnionego jednowymiarowego modelu nagrzewania turbin do wyboru optymalnych warunków rozruchu,*
13. J. Kropka, J. Wojnarowski, *Losowa optymalizacja wieloparametrowych układów mechanicznych,*
14. A. Kruszewski, A. Olędzki, *Próba konstrukcji bezstopniowej przekładni impulsowej o dużej równomierności biegu wału wyjściowego,*
15. R. Krzywiec, *Organizacja wielociągowa systemu wielkiego do jego optymalizacji,*
16. W. Kufel, *Sterowana dyskretyzacja ciał sprężystych z więzami,*
17. A. Niemierko, *O optymalizacji kratownic przy pomocy programowania nieliniowego,*
18. J. Oderfeld, W. Pogorzelski, *Optymalizacja teleskopowego wysięgnika żurawia samochodowego,*
19. W. Ozimowski, *Algorytm optymalizacji wielostopniowych przekładni zębatych,*
20. J. Podpora, E. Radwański, *Wybór wymiennika ciepła płaszczowo-rurowego do zadania energetycznego — jako problem optymalizacji dyskretnej,*
21. L. Runkiewicz, *Optymalizacją układów pomiarowych w badaniach radiograficznych konstrukcji inżynierskich,*
22. J. Szargut, J. Kozioł, *Optymalizacja rekupektorów konwekcyjnych,*
23. T. Wartanowicz, J. Drozdziel, *Próba optymalizacji geometrii generatora termoelektrycznego kaskadowego przy uzyskaniu maksymalnej sprawności konwersji,*
24. J. Wicher, *Zjawisko tłumienia dynamicznego w układzie znajdującym się pod działaniem wymuszenia losowego,*
25. J. Wojnarowski, A. Buchacz, *O możliwości optymalizacji układów mechanicznych przy użyciu liczb strukturalnych,*
26. J. Wojnarowski, *O nowej metodzie obliczania obciążeń w przekładniach z mocą krążącą,*

Ponadto zgłoszono na Sympozjum dwa referaty, które nie zostały wygłoszone, ale znalazły się w materiałach pokonferencyjnych:

1. W. Bogusz, *Optymalna charakterystyka sprzęgła w układzie elektromechanicznym,*
2. J.J. Telega, *Zastosowanie zasady maksimum Pontrlagina do zagadnień optymalizacji konstrukcji.*

Ogółem w Sympozjum wzięło udział 99 uczestników, liczba głosów w dyskusji wyniosła 112. Dyskusja nad referatami stała na wysokim poziomie naukowym, co podkreślano w zakończeniu obrad. Sugerowano również, aby Sympozjum «Optymalizacja w mechanice» stał się płaszczyzną wymiany wyników prac teoretycznych i doświadczalnych z dziedziny mechaniki rozumiejąc to w sensie mechaniki układów dyskretnych.

Ponadto równoległe z obradami Sympozjum odbywało się, pod patronatem przewodniczącego PTMTS O/Gliwice, Seminarium Studenckiego Koła Naukowego Mechaniki Stosowanej imienia prof. Wł. Burzyńskiego. W czasie obrad seminarium, w których brali udział również uczestnicy Sympozjum

wygotowano 8 referatów. Ta forma oddziaływania PTMTS na krzewienie mechaniki w ramach form studenckiego ruchu naukowego spotkała się z dużą aprobatą uczestników Sympozjum.

4. Konkursy

Ogłoszono na rok 1974 dwa następujące ogólnokrajowe konkursy naukowe: Oddział Częstochowa — na prace z zakresu badań doświadczalnych z mechaniki technicznej oraz Oddział Gliwice — na prace teoretyczne z dziedziny mechaniki.

5. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tabela:

Lp.	Oddział	Stan na koniec r. 1973	Stan na koniec I kw. 1974 r.	Przybyło lub ubyło w ok- resie sprawozdawczym
1.	Bydgoszcz	18	19	1
2.	Częstochowa	31	36	+5
3.	Gdańsk	50	49	-1
4.	Gliwice	99	114	+15
5.	Kraków	67	68	+1
6.	Łódź	38	39	+1
7.	Poznań	52	53	+1
8.	Rzeszów	11	11*	—
9.	Szczecin	30	31	+1
10.	Warszawa	205	229	+24
11.	Wrocław	64	64	—
Razem:		665	713	+48

* dane z poprzedniego okresu sprawozdawczego.

W okresie sprawozdawczym odbyło się zebranie Prezydium Zarządu Głównego z Komitetem Redakcyjnym «MTiS» oraz 17 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

SPRAWOZDANIE Z SYMPOZJONU «OPTIMALIZACJA W MECHANICE»

zorganizowanego przez Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej Oddział w Gliwicach w Wiśle-Jaworniku w dniach 12-18 lutego 1974 r.

Sympozjon przebiegł w zasadzie zgodnie z programem, za wyjątkiem nie wygłoszonych referatów prof. dr hab. inż. W. Bogusza i dr J. J. Telegi.

Dodatkowo wygłosili referat prof. J. Oderfeld i dr W. Pogorzelski pt. *Optimalizacja teleskopowego wysięgnika żurawia samojezdnego*.

Słowo wstępne wygłosił i otwarcia Sympozjonu dokonał przewodniczący Zarządu Oddziału Gliwickiego PTMTiS. Natomiast przewodniczącymi obrad w poszczególnych dniach byli:

	Dyskutantów	Obecnych
1 dzień obrad — prof. dr inż. Zb. Olesiak	7	63
2 dzień obrad — prof. dr inż. J. Szargut	18	66
3 dzień obrad — prof. dr hab. inż. Wł. Derski	23	60
4 dzień obrad — prof. dr hab. inż. R. Janiczek	25	59
5 dzień obrad — prof. dr inż. T. Opolski	27	67
6 dzień obrad — prof. dr hab. inż. A. Negrusz	12	43

Ogółem na 99 uczestników wygłoszono 26 referatów, nad którymi przeprowadzono ożywioną merytoryczną dyskusję. W dyskusji nad referatami brało udział 112 dyskutantów. Dyskusja stała na wysokim poziomie naukowym, co podkreślono w zakończeniu obrad. Sugerowano również, aby Sympozjon «Optymalizacja w mechanice» stał się płaszczyzną wymiany wyników prac teoretycznych i doświadczalnych z dziedziny mechaniki rozumiejąc to w sensie mechaniki układów dyskretnych.

Przeprowadzono również cały szereg spotkań dotyczących problematyki naukowej związanej z tematyką sympozjonu oraz zorganizowano ogólną dyskusję na temat «Samookreślenia pracowników nauki», którą poprowadził prof. dr inż. Janusz Dietrich. W dyskusji, która odbyła się w dniu 17.02.1974 r. zabrało głos 28 osób.

Należy podkreślić, że w czasie sympozjonu frekwencja na posiedzeniach była znaczna i wynosiła średnio 61 osób.

Ponadto równoległe z obradami Sympozjonu odbywało się, pod patronatem Przewodniczącego PTMTiS, O/Gliwice, Seminarium Studenckiego Koła Naukowego Mechaniki Stosowanej im. prof. Wł. Burzyńskiego. W czasie obrad seminarium, których brali udział również uczestnicy Sympozjonu wygłoszono 8 referatów. Ta forma oddziaływania PTMTiS na krzewienie mechaniki w ramach form studenckiego ruchu naukowego spotkała się z dużą aprobatą uczestników Sympozjonu.

J. Wojnarowski

SYMPOZJA PTMTS W 1975 ROKU

1. Oddział w Gliwicach organizuje w lutym 1975 r. 7-dniowe sympozjum na temat «Optymalizacja w mechanice». Przewiduje się udział 120 osób.

2. Oddział we Wrocławiu organizuje w listopadzie 1975 r. «VI Sympozjon poświęcony reologii». Przewiduje się udział 150 osób (w tym 5 uczestników zagranicznych).

3. Oddział w Gdańsku organizuje w listopadzie 1975 r. sympozjum na temat «Metody komputerowe w mechanice konstrukcji». Współorganizatorem jest Zespół Mechaniki Komputerowej przy Komitecie Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN. Przewiduje się udział 200 osób i wygłoszenie 40 referatów.

KOŁOKWIA EUROMECH W 1975 ROKU

Nazwa	Przewodniczący
58. The Method of Padé and its Application in Mechanics 24—26 luty 1975 Toulon	Prof. H. Cabannes, Université de Paris VI Mécanique Théorique, Tour 66, 4, Place Jussieu 75005 Paris, France.
57. Rarefied Gas Dynamics 19—21 marzec 1975 Glasgow	Prof. D.C. Pack, Department of Mathematics, University of Strathclyde 26 Richmond Street Glasgow G1 1XH, Scotland.
61. Viscous Flow past Rough Surfaces 7—10 kwiecień 1975 Liverpool	Dr J. Gibbins and Dr A. Lewkowicz Department of Mechanical Engineering University of Liverpool, PO Box 147 Liverpool L69 3BX, England.
59. Dynamic Problems in Non-Linear Elasticity 14—17 kwiecień 1975 Jabłonna	Prof. Z. Wesolowski IPPT PAN ul. Świętokrzyska 21 00-049 Warszawa, Poland.

60. Three-dimensional Turbulent Boundary Layers in External Flow
14—15 kwiecień 1975
Trondheim
Prof. T.K. Fanneløp
Division of Aero- and Gasdynamics and Prof. L. N. Persen
University of Trondheim
N-7034 Trondheim NTH, Norway.
56. Non-linear Processes in Rotating Fluids
15—18 kwiecień 1975
London
Dr L.M. Hocking
Department of Mathematics
University College London, Gower Street
London WC1E 6BT, England.
62. Laminar Duct Flow of Non-Newtonian Fluids
7—10 lipiec 1975
Toulouse
Dr J. Mauss
Université Paul Sabatier
U.E.R. de Mathématiques
118, Route de Narbonne, 118
Toulouse, France.
63. Design and Application of Hot-Wire Anemometers
20—22 sierpień 1975
Copenhagen
Dr P.S. Larsen
Fluid Mechanics Department
Technical University of Denmark
Bygning 404, 2800 Lyngby, Denmark
and Prof. H.H. Fernholz
West Berlin.
64. Energy Methods in Fracture Mechanics
26-29 sierpień 1975
Stockholm
Prof. A.J. Carlsson
Royal Institute of Technology
S-10044 Stockholm, Sweden
and Prof. M. Sokolowski
Warszawa, Poland.
65. The Response of a Boundary Layer to Fluctuations in the External Stream
9—13 wrzesień 1975
Liblice
Dr M. Pichal
Institute of Thermomechanics
Czechoslovak Academy of Sciences
Puskinovo nam. 9
Praha 6, Czechoslovakia.
66. Problems of Load Transfer in Plates and Shells
15—18 wrzesień 1975
Jablonna
Dr S. Łukasiewicz
Instytut Mechaniki Stosowanej P.W.
ul. Nowowiejska 24
00-665 Warszawa, Poland.
67. Cardiovascular and Respiratory Mechanics
15—18 wrzesień 1975
Aachen
Prof. Dr E. Krause
Aerodynamisches Institut der Technischen Hochschule Aachen
51 Aachen
Templergraben 55, BDR
and Dr D. Bergel
Oxford, England
and Prof. O. Mahrenholtz
Hannover, BDR
68. The Mechanics of Biological Solids
23—26 wrzesień 1975
Sofia
Prof. G. Brankov
Central Laboratory of Biomechanics
7 Noemvri Str.
Sofia, Bulgaria
69. Large Elastic Deformations of Discrete Systems
październik 1975
Mátrafüred
Prof. J. Szabó
Technical University of Budapest
Muegyetem rkp. 3. K. mf. 35.
Budapest XI, Hungary.

KOMUNIKAT

Komitet Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych PAN i Instytut Techniki Lotniczej i Hydroaerodynamiki Politechniki Warszawskiej organizują w dniach 3—7 grudnia 1974 roku w Jaszowcu I Krajową Konferencję MECHANIKI CIECZY I GAZÓW.

Przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego jest Prof. Dr Włodzimierz PROSNAK, Warszawa, Nowowiejska 24. Pod ten adres prosimy kierować ewentualną korespondencję.

W następnym zeszycie ukaza się prace:

- J. GIERLIŃSKI, Przybliżone obliczanie płaskich prętowych przekryć strukturalnych
Приближенный расчет плоских стержневых структурных перекрытий
Approximate calculations of a rod structural plate
- R. KAŁUŻA, Ocena przydatności żywicy epoksydowej Epidian 5 do modelowania konstrukcji
Оценка пригодности эпоксидной смолы Эпидиан 5 для моделирования конструкций
Estimation of suitability of Epidian 5 epoxy resin for structure modelling
- R. KAŁUŻA, Badania modelowe powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej poddanej wymuszonym przemieszczeniom
Модельные исследования гиперболической оболочки градирни, подверженной вынужденным перемещениям
Model tests of hyperboloidal cooling tower shell subjected to forced displacements
- A. GARSTECKI, Zwężenie sprężyste cienkościennej belki dwuprzęsłowej
Изгибно-крутильная потеря устойчивости тонкостенной двухпролетной балки
Elastic stability of two-span thin-walled continuous beams
- M. WACZYŃSKA, Wpływ niejednorodności stanu naprężenia w przekroju poprzecznym połączenia na obciążenie zwojów gwintu
Влияние неоднородности напряженного состояния в поперечном сечении соединения на нагрузку витков резьбы
Influence of nonhomogeneity of the state of stress in transverse cross-section of a connection on the load of screw threads
- E. ŚWITOŃSKI, Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych
Применение метода матриц переноса для динамического анализа тонкостенных стержней
Application of the transfer matrix method to the dynamic analysis of thin-walled rods
- E. TOMASIAK, Model matematyczny zaworu przelewowego w świetle badań przebiegów analogowych i rzeczywistych
Математическая модель перепускного клапана с точки зрения аналоговых и действительных процессов
Mathematical simulation of an overflow valve considered according to analogue and direct tests
- J. MARYŃIAK, Z. GORAJ, Stateczność pojazdów jednośladowych na kołach pneumatycznych
Устойчивость велосипеда на пневматических шинах
Stability problems of a bicycle equipped with pneumatic wheels
- E. WACHNICKI, Konstrukcja funkcji Greena dla równania biharmonicznego w obszarze koła lub wycinka kołowego
Построение функции Грина бигармонического уравнения для области круга и кругового сектора
The construction of the Green function for biharmonic equation for the circular domain or circular sector
- K. DEMS, J. LIPIŃSKI, Zastosowanie różnic skończonych do tworzenia macierzy sztywności w metodzie elementów skończonych na przykładzie zginanej płyty
Применение конечных разностей для построения матриц жесткости по методу конечных элементов на примере изгибаемой пластины
Application of finite-differences to the determination of the stiffness matrix of finite elements method, exemplified by the plate bending
- S. ZANORSKI, Powolne przepływy cieczy lepkosprężystych w obszarach wejściowych rur i kanałów
Медленное течение вязкоупругих жидкостей в областях входа труб и каналов
Slow flows of viscoelastic fluids at the entries to tubes and channels
- K. MAJORKOWSKA-KNAF, Statyka tarcz mikropolarnych
Статика микрополярных дисков
Statics of micropolar plates

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy, lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”; Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić w Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
