

74720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 12 · ZESZYT 2

PW⁴

WARSZAWA 1974

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

SPIS TREŚCI

| | |
|---|-----|
| Wspomnienie pośmiertne o profesorze Zbigniewie BUDZIANOWSKIM | 109 |
| R. KRZYWIĘC, Wielkie systemy procesów nieodwracalnych termodynamiki | 111 |
| Большие системы необратимых термодинамических процессов | |
| Great systems of irreversible processes of thermodynamics | |
| W. SZYMAŃSKI, Nieustalone przewodzenie ciepła ciał o dużej przewodności cieplnej w warunkach konsekwencji swobodnej w powietrzu | 129 |
| Нестационарный режим теплопроводности тел с большой теплопроводностью в условиях свободной конвекции воздуха | |
| Unsteady heat transfer in bodies of high thermal conductivity in the conditions of free convection in the air | |
| K. J. ВОЈДА, Analogia tarczowo-plytowa w teorii dźwigarów siatkowych | 137 |
| Пластиночная аналогия в теории поверхностных сетчатых несущих сооружений | |
| Plate analogy in the theory of surface lattice structures | |
| A. MITZEL i J. ДУЧКОВСКИ, Reologia płyt żelbetowych pod wpływem pola temperatury | 147 |
| Реология железобетонных плит под влиянием температурного поля | |
| Rheology of reinforced concrete plates in the temperature field | |
| Z. BUDZIANOWSKI, F. ANDERMAN i J. WRANIK, Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych | 159 |
| Метод итерационного определения напряжений в многосвязных дисках | |
| Method of an iterational solution of multiply connected discs | |
| K. RAJSKI, Odkształcenia części roboczych manometru obciążnikowo-tłokowego | 175 |
| Деформация рабочих деталей манометра с неуплотненным поршнем | |
| Deformation of working parts of a deadweight-piston pressure gauge | |
| G. JEMELITA, Zginanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym | 187 |
| Изгиб квадратной плиты с центрально расположенным квадратным отверстием | |
| Bending of a square plate with a centrally located square hole | |
| BIULETYN INFORMACYJNY | 205 |

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A
T E O R E T Y C Z N A
I S T O S O W A N A

T O M 1 2 • Z E S Z Y T 2

W A R S Z A W A 1 9 7 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

КОМИТЕТ РЕДАКЦЫ

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR,
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

РЕДАКЦЯ

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 680 (564+116) egz. Ark. wydawn. 7,5. Ark. drukarskich 6,5. Papier druk. sat. III kl., 80 g 70×100. Oddano do składania 29.I.74 r. Druk ukończono w maju 1974 r. Zam. 192/74. W-99. Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

WSPOMNIENIE POŚMIERTNE O PROFESORZE ZBIGNIEWIE BUDZIANOWSKIM

W dniu 31 lipca 1973 r. zmarł profesor zwyczajny Politechniki Śląskiej w Gliwicach, doktor nauk technicznych, inżynier dróg i mostów Zbigniew Budzianowski. Wspominając tego wybitnego i szlachetnego człowieka należy wymienić na pierwszym miejscu Jego głęboką wiedzę i rzetelność naukową, duże doświadczenie zawodowe i wysoką kulturę osobistą, a także życzliwość i koleżeństwo.



Zbigniew Budzianowski urodził się 25 czerwca 1914 r. w Tłumaczu koło Stanisławowa. Studiował na Politechnice Lwowskiej i w 1939 r. otrzymał dyplom inżyniera dróg i mostów. Już w czasie studiów objął asystenturę w II Katedrze Budowy Mostów, w której pełnił po wojnie obowiązki docenta do 1945 r.

W 1945 r. podjął pracę na Politechnice Śląskiej w Gliwicach początkowo na stanowisku adiunkta, a po doktoracie w 1951 r. na stanowisku zastępcy profesora w Katedrze Budownictwa Żelbetowego. Był długoletnim kierownikiem Katedry Konstrukcji Prefabrykowanych, a od 1959 r. Katedry Mechaniki Budowli. W latach 1952–1955 r. był prodziekanem, w latach zaś 1962–64 dziekanem Wydziału Budownictwa Przemysłowego i Ogólnego. Po reorganizacji uczelni w roku akademickim 1971/72 objął kierownictwo Zespołu Mechaniki Budowli w Instytucie Konstrukcji Budowlanych. Zespołem tym kierował czynnie do ostatnich chwil swego życia, mimo ciężkiej choroby.

W 1954 r. został mianowany docentem, w 1962 r. profesorem nadzwyczajnym, a w 1971 r. profesorem zwyczajnym.

Był nauczycielem i wychowawcą wielu pokoleń inżynierów.

Promował sześciu doktorów nauk technicznych, kolejnej siódmej promocji niestety nie dożył. Trzech pracowników kierowanej przez prof. Budzianowskiego Katedry uzyskało stopień docenta.

Jako nader utalentowany i dalekowzroczny organizator zasłużył się wielce dla rozwoju kierowanych przez Niego katedr, Wydziału i wszystkich podjętych zadań, doprowadzając je z największą rzetelnością, do stanu godnego naśladowania.

Obok pełnej poświęcenia pracy pedagogicznej działał niestrudzenie na polu nauki — Jego pasji życiowej. Jest autorem względnie współautorem kilkudziesięciu publikacji naukowych z szeregu dziedzin teorii konstrukcji, w szczególności teorii konstrukcji budowlanych poddanych wpływom eksploatacji górniczej. Na tym też polu należy podkreślić wybitny udział profesora Budzianowskiego w podejmowaniu zagadnień, ich rozwiązywaniu, badaniach doświadczalnych i teoretycznych oraz pionierskie osiągnięcia o doniosłym znaczeniu dla gospodarki narodowej, wysoko oceniane i wykorzystywane również za granicą, zwłaszcza w Czechosłowacji i Związku Radzieckim.

Wszystkie prace profesora Budzianowskiego odznaczają się nadzwyczajną wnikliwością, ścisłością naukową i powiązaniem z zastosowaniami w praktyce inżynierskiej.

Profesor Budzianowski działał w wielu stowarzyszeniach naukowych. Był członkiem założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, sekretarzem pierwszego Zarządu Oddziału PTMTS w Gliwicach w latach 1958/59, a następnie przez wiele lat członkiem Zarządu tegoż Oddziału. Bardzo cenny jest Jego wkład w prace Sekcji Mechaniki Konstrukcji — Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN. W ramach Komitetu Nauki Polskiego Związku Inżynierów i Techników Budownictwa był przewodniczącym Komitetu Organizacyjnego Ogólnokrajowej Konferencji pod hasłem «Problemy przewodów doktorskich i habilitacyjnych z zakresu budownictwa», odbytej w 1967 r., z wysoko notowanymi efektami merytorycznymi. Jako przewodniczący Komisji Nauki przy Oddziale PZITB w Gliwicach zasłużył się wielce dla powiązania nauki z przemysłem.

Profesor Budzianowski brał konstruktywny udział w pracach wielu rad naukowych i komisji.

W uznaniu Jego zasług został odznaczony Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski, Złotym Krzyżem Zasługi, Medalem XXV-lecia Politechniki Śląskiej oraz wyróżniony innymi odznaczeniami i nagrodami.

Pamięć o Nim, Jego wybitnej osobowości, jest zachowana i będzie przekazywana przyszłym pokoleniom wraz z nader cennym Jego dorobkiem naukowym.

WIELKIE SYSTEMY PROCESÓW NIEODWRACALNYCH TERMODYNAMIKI

ROBERT KRZYWIEC (WARSZAWA)

1. Wprowadzenie

Autor w swoich pracach [1 i 2] sformułował algebrę wielociągów czyli ciągów wielowskaźnikowych jako wielkich systemów ciągów i rozważał elementy analizy wielociągowej. Prace [3–6] dotyczą systemowego sformułowania praw Hooke'a, Ohma, Newtona, natomiast w pracach [7–12] są sformułowane wielociągowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju w zastosowaniu do konkretnych wielkich systemów mechanicznych, stereomechanicznych, elektrycznych. Okazuje się, że algebraiczny formalizm przestrzeni liniowej o elementach wielociągowych, jako pojęciach ogólniejszych od wektora i macierzy, można zastosować do sformułowania systemu wielkiego procesów nieodwracalnych termodynamiki.

W pracy niniejszej omówiono następujące zagadnienia:

- 1) ujęcie systemowe procesów nieodwracalnych termodynamiki;
- 2) zastosowanie ciągów wielowskaźnikowych — w szczególności przekształceń wieloliniowych — do przedstawienia tak pojmowanych procesów jako systemów wielkich;
- 3) wykorzystanie sformalizowanego pojęcia układu — systemu przepływowego wielowskaźnikowego do rozważania tych procesów;
- 4) podanie wielowskaźnikowych schematów blokowych jako ilustracji przekształceń wieloliniowych;
- 5) interpretację zmiennych stanu procesów termodynamicznych za pomocą grafów wielowskaźnikowych wielopoziomowych;
- 6) sformułowanie problemu optymalizacji wielkich systemów termodynamicznych procesów nieodwracalnych;
- 7) omówienie i uzasadnienie analogii termodynamiczno-mechaniczno-stereomechaniczno-elektryczno-ekonomicznej w klasie przekształceń wieloliniowych.

Praca niniejsza jest jednocześnie wstępem do rozważań ogólniejszych na temat systemowego traktowania zagadnień termosprężystości. Autor sformułował tę problematykę w kolejnej pracy pod tytułem «O termosprężystych systemach wielkich», która jest przygotowana do druku. Wykorzystano w niej wprowadzone tu systemy wielkie równań fenomenologicznych — równania fenomenologiczne wielociągowe.

Rozważmy układ¹⁾ termodynamiczny²⁾ spełniający drugą zasadę termodynamiki

$$Tds - Q \geq 0,$$

¹⁾ W dalszych rozważaniach okaże się, że jest to układ przepływowy [14], którego pierwszym przybliżeniem jest przekształcenie liniowe (wieloliniowe).

²⁾ Ściślej mówiąc termostatyczny.

gdzie S oznacza entropię układu, T — temperaturę absolutną, Q — ciepło wymienione z otoczeniem podczas przemiany nieskończenie małej, natomiast d jest symbolem różniczki. Przypadek znaku równości dotyczy procesów (zjawisk) quasi-stacjonarnych, znak nierówności stosuje się w przypadku procesów nieodwracalnych.

Zgodnie z terminologią termodynamiczną [13] rozróżniamy dwa rodzaje wielkości charakteryzujących procesy nieodwracalne, mianowicie:

1) wielkości intensywne, takie jak temperatura absolutna T , p — ciśnienie, μ_i — gromowy potencjał chemiczny i -tego składnika niezależnego, F_a — siły wykonujące pracę przy zmianie parametrów f_a ;

2) wielkości ekstensywne, takie jak np. masa, energia.

Z analizy wyrażen określających szybkość reakcji tworzenia entropii lub źródła entropii wynika, że wielkości te są podane za pomocą sum iloczynów różnic lub gradientów pewnych wielkości intensywnych i szybkości zmian pewnych wielkości ekstensywnych.

Wiadomo z pracy [13], że przyczynami przemian nieodwracalnych są różnice bądź gradienty wielkości intensywnych.

DEFINICJA 1.0. *Bodźcami termodynamicznymi X (silami termodynamicznymi) nazywamy różnice i gradienty wielkości intensywnych, występujących w wyrażeniach określających źródła entropii [13].*

Procesy nieodwracalne charakteryzują się zmianami lub przepływami określonych wielkości intensywnych bądź też powstawaniem jednych lub znikaniem innych substancji w reakcjach chemicznych. Spowodowane to jest bodźcami termodynamicznymi.

DEFINICJA 2.0. *Przepływami termodynamicznymi nazywa się szybkość zjawisk spowodowanych bodźcami termodynamicznymi.*

Pojęcia te umożliwiają scharakteryzowanie źródła entropii.

DEFINICJA 3.0. *Zródło entropii \mathcal{S} jest sumą iloczynów bodźców termodynamicznych i przepływów termodynamicznych,*

$$\mathcal{S} = \sum_1^n \bar{X}_j \bar{J}_j = \bar{X}_1 \bar{J}_1 + \dots + \bar{X}_n \bar{J}_n,$$

gdzie

$$\bar{X} = [X_j],$$

$$\bar{J} = [J_j], \quad j = 1, \dots, n$$

są ciągami jednowskaźnikowymi, przy czym n jest liczbą bodźców lub przepływów.

W sformułowaniu tym mogą też wystąpić ciągi zerowskaźnikowe, mianowicie wtedy, gdy

$$\mathcal{S} = {}^0\bar{X} \cdot {}^0\bar{J} = XJ,$$

czyli w przypadku jednego bodźca i jednego przepływu.

Istota uogólnienia rozważanych pojęć i procesu termodynamicznego nieodwracalnego na wielkie systemy takich zjawisk polega na wprowadzeniu ciągów wielowskaźnikowych zmiennych stanu, to jest na stosowaniu bodźców i przepływów termodynamicznych wielowskaźnikowych. W konsekwencji źródło entropii \mathcal{S} wyrazi się odpowiednią sumą «skalarną» iloczynów takich ciągów.

Inaczej mówiąc, ciągi wielowskaźnikowe [1 i 2] umożliwiają rozpatrzenie procesów termodynamicznych nieodwracalnych jako systemów wielkich. W związku z tym okaże się przydatna następująca

DEFINICJA 4. *Układ konkretny [14] nazywa się systemem wielkim,, gdy jego funkcja stanu*

$${}^w\bar{F}({}^w\bar{x}, {}^w\bar{x}) = {}^w\bar{0}$$

jest określona na przestrzeniach ciągów wielowskaźnikowych

$${}^w\bar{x} = [x_{\bar{j}}] = [x_{j_1 \dots j_w}], \quad j_k = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, w,$$

przy czym rozróżniamy dwa przypadki: (a), gdy $w = 1$ wtedy liczba n elementów (pewnego ciała) ciągu jednowskaźnikowego zmiennych jest odpowiednio duża; oraz (b), gdy $w > 1$, czyli zmienne stanu przedstawione są ciągami więcej niż jednowskaźnikowymi.

Określenie to nie precyzuje bliżej wielkiego systemu, ale wyjaśnia wystarczająco, iż wtedy mówimy o takim układzie, gdy mamy do czynienia z dużą liczbą zmiennych jednowskaźnikowych lub gdy zmienne są co najmniej dwuwskaźnikowe.

Strukturę takich zmiennych oraz zdefiniowane na nich przekształcenia wieloliniowe wyjaśniają wprowadzone dalej grafy wielowskaźnikowe i schematy blokowe wielowskaźnikowe.

2. Równania fenomenologiczne wielowskaźnikowe jako pierwsze przybliżenie zależności przepływów wielowskaźnikowych od bodźców wielowskaźnikowych

DEFINICJA 1. w. *Bodźcem wielowskaźnikowym nazywamy ciąg w-wskaźnikowy*

$${}^w\bar{X} = [X_{\bar{j}}] = [X_{j_1 \dots j_w}], \quad j_k = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, w.$$

DEFINICJA 2. w. *Przepływem wielowskaźnikowym nazywamy ciąg w-wskaźnikowy*

$${}^w\bar{J} = [J_{\bar{j}}] = [J_{j_1 \dots j_w}].$$

DEFINICJA 5. *Funkcją stanu procesu termodynamicznego nieodwracalnego nazywamy przekształcenie*

$${}^w\bar{F}({}^w\bar{X}, {}^w\bar{J}) = {}^w\bar{0},$$

przy czym ${}^w\bar{X}$ i ${}^w\bar{J}$ nazywamy *zmiennymi stanu*, a parę ${}^w\bar{X}, {}^w\bar{J}$ — *stanem* zjawiska, natomiast zbiór stanów tworzących w przypadku ogólnym pewne rodziny hiperpowierzchni nazywamy *obrazem* zjawiska.

Przekształcenia te nazywa się też równaniami fenomenologicznymi procesów termodynamicznych nieodwracalnych wielowskaźnikowych.

Definicje bodźców i przepływów w postaci w-wskaźnikowej dają możliwość określenia źródła entropii w postaci formy liniowej wielowskaźnikowej, zwanej formą k -krotną liniową.

DEFINICJA 3. w. *Źródło entropii \mathcal{S} jest (w-1)-krotną formą liniową bodźców termodynamicznych i przepływów termodynamicznych*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \underbrace{{}^w\bar{X}}_{w-1} \underbrace{{}^w\bar{J}}_{w-2} = \underbrace{{}^{w-1}\bar{X}}_{w-2} \underbrace{{}^{w-1}\bar{J}_1}_{w-1} + \dots + \underbrace{{}^{w-1}\bar{X}_n}_{w-2} \underbrace{{}^{w-1}\bar{J}_n}_{w-1} = \\ &= \dots = \underbrace{\bar{X}_{1 \dots 1}}_{w-1 \text{ razy}} \underbrace{\bar{J}_{1 \dots 1}}_{w-1} + \dots + \underbrace{\bar{X}_{n \dots n}}_{w-1 \text{ razy}} \underbrace{\bar{J}_{n \dots n}}_{w-1}. \end{aligned}$$

U w a g a. W rzeczywistości mamy tu do czynienia z w -krotną formą liniową wspomnianych ciągów, gdyż należy jeszcze rozwinąć iloczyny skalarowe ciągów jednowskaźnikowych $\bar{X}\bar{J}$.

Tym samym przekształcenie

$$\pi(\mathfrak{E}, {}^w\bar{X}, {}^w\bar{J}) = 0$$

jest niejako warunkiem optymalizacji («funkcją celu») wielowskaźnikowej funkcji stanu. Okazuje się bowiem, że procesy nieodwracalne dążą do stanu minimum źródła entropii

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}({}^w\bar{X}, {}^w\bar{J})$$

przy danym przekształceniu ().

Wyniki doświadczeń (prawo Fouriera przewodzenia energii, zjawisko prądu elektrycznego, transportu energii, masy, zjawiska mechaniczne, prawo dyfuzji Ficka, przepływ substancji w termodyfuzji i inne) umożliwiają, przy bardzo małych bodźcach, przyjęcie liniowej zależności przepływów od bodźców.

Założenie liniowości w odniesieniu do reakcji chemicznych oddalonych od stanu równowagi jest przybliżeniem niewystarczającym.

2.1. Równania fenomenologiczne liniowe zero- i jednowskaźnikowe.

DEFINICJA 6.1. *Proces termodynamiczny nieodwracalny jest liniowy, gdy opisuje go przekształcenie liniowe [15 i 16] (jednoliniowe [1 i 2])*

$$\bar{J} = {}^2\bar{L}\bar{X},$$

czyli

$$\begin{aligned} J_1 &= L_{11} X_1 + \dots + L_{1n} X_n, \\ &\vdots \\ J_n &= L_{n1} X_1 + \dots + L_{nn} X_n, \end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{J}_j = [J_{j_i}], \quad j_i = 1, \dots, n_1$$

jest ciągiem jednowskaźnikowym przepływów, natomiast

$$\bar{X} = [X_{j_2}], \quad j_2 = 1, \dots, n_2; \quad n_1 = n_2 = n$$

stanowi ciąg jednowskaźnikowych bodźców termodynamicznych, przy czym

$${}^2\bar{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & \dots & L_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & \dots & L_{nn} \end{bmatrix} = [L_{j_1 j_2}]$$

jest ciągiem dwuwskaźnikowym stałych współczynników («proporcjonalności», «sprężystości») niezależnych od bodźców i przepływów.

Przekształcenie to nosi nazwę równań fenomenologicznych, przy czym $L_{j_1 j_2}$ są współczynnikami fenomenologicznymi.

Zauważmy, że każda współrzędna J_{k_1} , $k_1 = 1, \dots, n_1 = n$ jako ciąg zerowskaźnikowy — element ciągu jednowskaźnikowego \bar{J} — jest kombinacją liniową współrzędnych jednowskaźnikowych \bar{X} , czyli

$$J_{k_1} = \underbrace{\bar{L}_{k_1}}_1 \bar{X} = L_{k_1 1} X_1 + \dots + L_{k_1 n} X_n.$$

W związku z tym przekształcenie $L_{k_1 k_2} X_{k_2}$ nazywamy *przekształceniem zeroliniowym* ciągów zerowskaźnikowych.

2.2. Równania fenomenologiczne dwuliniowe. Przekształcenie liniowe ciągów dwuwskaźnikowych nazywamy *przekształceniem dwuliniowym* [1, 2].

DEFINICJA 6.2. *Proces termodynamiczny nieodwracalny jest dwuliniowy, gdy opisuje go przekształcenie dwuliniowe*

$${}^2\bar{J} = {}^4\bar{L} {}^2\bar{X},$$

czyli

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= {}^2\bar{L}_{11} \bar{X}_1 + \dots + {}^2\bar{L}_{1n} \bar{X}_n, \\ &\vdots \\ \bar{J}_n &= {}^2\bar{L}_{n1} \bar{X}_1 + \dots + {}^2\bar{L}_{nn} \bar{X}_n \end{aligned}$$

lub przy uwzględnieniu ciągów zerowskaźnikowych

$$\begin{aligned} J_{11} &= L_{1111} X_{11} + \dots + L_{1n11} X_{n1} + \dots + L_{111n} X_{1n} + \dots + L_{1n1n} X_{nn}, \\ &\vdots \\ J_{nn} &= L_{n1n1} X_{11} + \dots + L_{nnn1} X_{n1} + \dots + L_{n1nn} X_{1n} + \dots + L_{nnnn} X_{nn}, \end{aligned}$$

gdzie

$${}^2\bar{J} = [J_{j_1 j_3}] = \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \vdots \\ \bar{J}_n \end{bmatrix}, \quad j_1 = j_3 = 1, \dots, n$$

jest ciągiem dwuwskaźnikowym przepływów, a

$${}^2\bar{X} = [X_{j_2 j_4}] = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{bmatrix}, \quad j_2 = j_4 = 1, \dots, n$$

jest ciągiem dwuwskaźnikowym bodźców termodynamicznych, natomiast

$${}^4\bar{L} = [L_{j_1 j_2 j_3 j_4}] = \begin{bmatrix} {}^2\bar{L}_{11} & \dots & {}^2\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{L}_{n1} & \dots & {}^2\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}$$

stanowi ciąg czterowskaźnikowy stałych współczynników fenomenologicznych, przy czym każdy składnik sum stron prawych ${}^2\bar{L}_{k_3 k_4} \bar{X}_{k_4}$, $k_3 = k_4 = 1, \dots, n$, dany jest iloczynem «macierzowym» [1, 2] ciągu dwuwskaźnikowego przez ciąg jednowskaźnikowy.

2.3. Równania fenomenologiczne trójliniowe. Przekształcenie liniowe ciągów trójwskaźnikowych nazywamy *przekształceniem trójliniowym* [1, 2].

DEFINICJA 6.3. *Proces termodynamiczny nieodwracalny jest trójliniowy, gdy opisuje go przekształcenie trójliniowe*

$${}^3\bar{J} = {}^6\bar{L} {}^3\bar{X},$$

czyli

$$\begin{aligned} {}^2\bar{J}_1 &= {}^4\bar{L}_{11} {}^2\bar{X}_1 + \dots + {}^4\bar{L}_{1n} {}^2\bar{X}_n, \\ &\vdots \\ {}^2\bar{J}_n &= {}^4\bar{L}_{n1} {}^2\bar{X}_1 + \dots + {}^4\bar{L}_{nn} {}^2\bar{X}_n, \end{aligned}$$

gdzie poszczególne składniki sum stron prawych można przedstawić według definicji 6.2, jeśli

$${}^3\bar{J} = [J_{j_1 j_3 j_5}] = \begin{bmatrix} {}^2\bar{J}_1 \\ \vdots \\ {}^2\bar{J}_n \end{bmatrix}, \quad j_1 = j_3 = j_5 = 1, \dots, n$$

jest ciągiem trójwskaźnikowym przepływów, a

$${}^3\bar{X} = [X_{j_2 j_4 j_6}] = \begin{bmatrix} {}^2\bar{X}_1 \\ \vdots \\ {}^2\bar{X}_n \end{bmatrix}, \quad j_2 = j_4 = j_6 = 1, \dots, n$$

jest ciągiem trójwskaźnikowych bodźców termodynamicznych, natomiast

$${}^6\bar{L} = [L_{j_1 \dots j_6}] = \begin{bmatrix} {}^4\bar{L}_{11} & \dots & {}^4\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^4\bar{L}_{n1} & \dots & {}^4\bar{L}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2\bar{L}_{11} & \dots & {}^2\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{L}_{n1} & \dots & {}^2\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{11}, \dots, \begin{bmatrix} {}^2\bar{L}_{11} & \dots & {}^2\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{L}_{n1} & \dots & {}^2\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{1n} \\ \begin{bmatrix} {}^2\bar{L}_{11} & \dots & {}^2\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{L}_{n1} & \dots & {}^2\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{n1}, \dots, \begin{bmatrix} {}^2\bar{L}_{11} & \dots & {}^2\bar{L}_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ {}^2\bar{L}_{n1} & \dots & {}^2\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{nn} \end{bmatrix}$$

stanowi ciąg sześciowskaźnikowy stałych współczynników fenomenologicznych.

2.4. Równania fenomenologiczne w -liniowe. Przekształcenie liniowe ciągów w -wskaźnikowych nazywamy przekształceniem w -liniowym [1, 2].

DEFINICJA 6. w . Proces termodynamiczny nieodwracalny jest w -liniowy, gdy opisuje go przekształcenie w -liniowe

$${}^w\bar{J} = {}^{2w}\bar{L} {}^w\bar{X},$$

czyli

$$\begin{aligned} {}^{w-1}\bar{J}_1 &= {}^{2w-2}\bar{L}_{11} {}^{w-1}\bar{X}_1 + \dots + {}^{2w-2}\bar{L}_{1n} {}^{w-1}\bar{X}_n, \\ &\vdots \\ {}^{w-1}\bar{J}_n &= {}^{2w-2}\bar{L}_{n1} {}^{w-1}\bar{X}_1 + \dots + {}^{2w-2}\bar{L}_{nn} {}^{w-1}\bar{X}_n, \end{aligned}$$

gdzie poszczególne składniki sum stron prawych można rozwinąć według definicji 6 $w-1, \dots, 6.3, 6.1, 6.0$, jeśli

$${}^w\bar{J} = [J_{j_1 \dots j_{2k+1}}] = \begin{bmatrix} {}^{w-1}\bar{J}_1 \\ \vdots \\ {}^{w-1}\bar{J}_n \end{bmatrix}, \quad j_1 = \dots = j_{2k+1} = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, w-1$$

jest ciągiem w -wskaźnikowym przepływów,

$${}^w\bar{X} = [X_{j_2 \dots j_{2k}}] = \begin{bmatrix} {}^{w-1}\bar{X}_1 \\ \vdots \\ {}^{w-1}\bar{X}_n \end{bmatrix}, \quad j_2 = \dots = j_{2k} = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, w$$

jest ciągiem w -wskaźnikowym bodźców termodynamicznych, natomiast

$${}^{2w}\bar{L} = [L_{j_1 \dots j_{2w}}] = \begin{bmatrix} 2^{w-2}\bar{L}_{11} & \dots & 2^{w-2}\bar{L}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{w-2}\bar{L}_{n1} & \dots & 2^{w-2}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{w-4}\bar{L}_{11} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{11} & \dots & \begin{bmatrix} 2^{w-4}\bar{L}_{11} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} 2^{w-4}\bar{L}_{11} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{n1} & \dots & \begin{bmatrix} 2^{w-4}\bar{L}_{11} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{w-4}\bar{L}_{n1} & \dots & 2^{w-4}\bar{L}_{nn} \end{bmatrix}_{nn} \end{bmatrix}$$

stanowi ciąg $2w$ -wskaźnikowy stałych współczynników fenomenologicznych, przy czym poszczególne składniki sum stron prawych są odpowiednio zdefiniowanymi iloczynami «macierzowymi» ciągów $(2w-2)$ -wskaźnikowych i $(w-1)$ -wskaźnikowych.

W ten sposób przez wprowadzenie ciągów wielowskaźnikowych zmiennych stanu uogólniliśmy równania fenomenologiczne liniowe termodynamicznych procesów nieodwracalnych na przypadek równań w -liniowych (wieloliniowych), gdzie w jest dowolną liczbą naturalną. Tym samym mamy możliwość rozważania wielkiego systemu³⁾ procesów termodynamicznych nieodwracalnych. Wprowadzony tu fenomenologiczny system wielki jest wykorzystany do wyprowadzenia systemu wielkich równań — równania wielociągowego termosprężystości [17].

Ze względu na wielokrotną złożoność (w sensie ciągów wielowskaźnikowych) takich systemów-procesów dążymy do podania poglądowych interpretacji rozważanych pojęć. Okazuje się, że przekształcenia w -liniowe traktowane jako równania zwane w -równaniami liniowymi lub równaniami w -liniowymi fenomenologicznymi można zilustrować za pomocą:

- 1) wielowskaźnikowego schematu blokowego nazywanego też wieloschematem blokowym lub wieloblokiem,
- 2) grafów wielowskaźnikowych z interpretacją (2a)-zmiennych wielowskaźnikowych (stanu zjawiska), albo (2b)-przekształceń wieloliniowych.

W związku z tym w punktach 3 i 4 omówimy:

- 1) wielowskaźnikowe schematy blokowe przekształceń wieloliniowych,
- 2) grafy wielowskaźnikowe przekształceń wieloliniowych.

3. Wielowskaźnikowe schematy blokowe równań fenomenologicznych w -liniowych

Przekształcenie w -liniowe stanowi [1, 2, 14] najprostszą transmitancję układu konkretnego przepływowego w -wskaźnikowego. Można w związku z tym przenieść formalizm takiego układu w -liniowego na systemy — procesy termodynamiczne nieodwracalne i sformułować kilka twierdzeń łatwych do udowodnienia.

³⁾ W rozumieniu definicji 4.

Formalizm ten [14] przy wykorzystaniu pojęcia transmitancji wielowskaźnikowej 0T , w -grafu (grafu w -wskaźnikowego) oraz wieloboku jest nie tylko przejrzysty, ale umożliwia rozważanie wspomnianych procesów w kategoriach automatyki i programowania w -liniowego z poszukiwaniem rozwiązań optymalnych danych w -równań femonemologicznych przy istnieniu ograniczeń przedstawionych za pomocą źródeł entropii. Ku takim rozwiązaniom (minimum entropii) steruje — jak wiadomo — sama natura w procesach termodynamicznych nieodwracalnych, które można nazwać zjawiskami autoregulacyjnymi.

3.1. Schemat blokowy zerowskaźnikowy równania zeroliniowego. Przekształcenie zeroliniowe

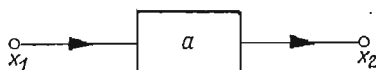
$$j = LX$$

jest najprostszą transmitancją zerowskaźnikową 0T , czyli

$${}_1x = {}^0T_2x,$$

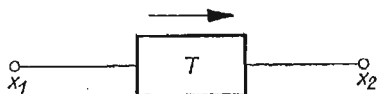
jeśli ${}_1x$ — sygnał wyjścia, a ${}_2x$ — sygnał wejścia układu termodynamicznego zerowskaźnikowego jako układu przepływowego.

Przedstawiamy go symbolicznie na rys. 1



Rys. 1

czyli wobec liniowości 0T mamy schemat przyjęty na rys. 2.



Rys. 2

3.2. Schemat blokowy jednowskaźnikowy równania jednoliniowego.

TWIERDZENIE. *Układ termodynamiczny nieodwracalny jednowskaźnikowy jest układem przepływowym jednowskaźnikowym.*

Dowód wynika z porównania definicji układu termodynamicznego jednowskaźnikowego i układu przepływowego jednowskaźnikowego [14].

Układ przepływowo jednowskaźnikowy o transmitancji 1T , czyli

$${}_1x = {}^1T_2\bar{x}, \quad {}_1\bar{x} = \bar{y}, \quad {}_2\bar{x} = \bar{x},$$

którego funkcja stanu wobec liniowości 1T w przyjętych oznaczeniach dana jest przekształceniem

$$\bar{J} = {}^2L\bar{X}$$

przedstawiono na rys. 3.

Widzimy, że każdy zerowskaźnikowy sygnał wyjścia y_{k_1} , $k_1 = 1, \dots, n_1$ jest kombinacją liniową zerowskaźnikowych sygnałów wejścia x_{k_2} , $k_2 = 1, \dots, n_2$. Tym samym układ jednowskaźnikowy jest wyrażony przez ciąg jednowskaźnikowy kombinacji liniowych układów zerowskaźnikowych.

3.3. Schemat blokowy dwuwskaźnikowy równania dwuliniowego.

TWIERDZENIE. *Układ termodynamiczny nieodwracalny dwuwskaźnikowy jest układem przeplywowym dwuwskaźnikowym.*

Dowód wynika z porównania definicji układu termodynamicznego dwuwskaźnikowego i układu przeplywowego dwuwskaźnikowego [14].

Układ przeplywowy dwuwskaźnikowy o transmitancji 2T , czyli

$${}^2_1\bar{x} = {}^2T {}^2_2\bar{x}, \quad {}^2_1\bar{x} = {}^2\bar{y}, \quad {}^2_2\bar{x} = {}^2\bar{x},$$

którego funkcja stanu wobec liniowości 2T w przyjętych oznaczeniach dana jest przekształceniem

$${}^2\bar{J} = {}^4L {}^2\bar{X}$$

przedstawiono na rys. 4.

Każdy jednowskaźnikowy sygnał wyjścia \bar{y}_{k_1} , $k_1 = 1, \dots, n_1$, jest kombinacją liniową jednowskaźnikowych sygnałów wejścia \bar{x}_{k_2} , $k_2 = 1, \dots, n_2$. Tym samym układ dwuwskaźnikowy jest wyrażony przez ciąg jednowskaźnikowy kombinacji liniowych ciągów jednowskaźnikowych (rys. 4) lub ciąg dwuwskaźnikowy kombinacji liniowych układów zerowskaźnikowych, co pokazano na rys. 5.

Widzimy, że każdy z podschematów blokowych, czyli podsystemu $\bar{y}_{k_1} = {}^2a_{k_1 k_2} \bar{x}_{k_2}$, $a = L$, jest systemem podobnym do podanego na rys. 3.

3.4. Schemat blokowy trójwskaźnikowy równania trójliniowego.

TWIERDZENIE. *Układ termodynamiczny nieodwracalny trójwskaźnikowy jest układem przeplywowym trójwskaźnikowym.*

Układ przeplywowy trójwskaźnikowy o transmitancji 3T , czyli

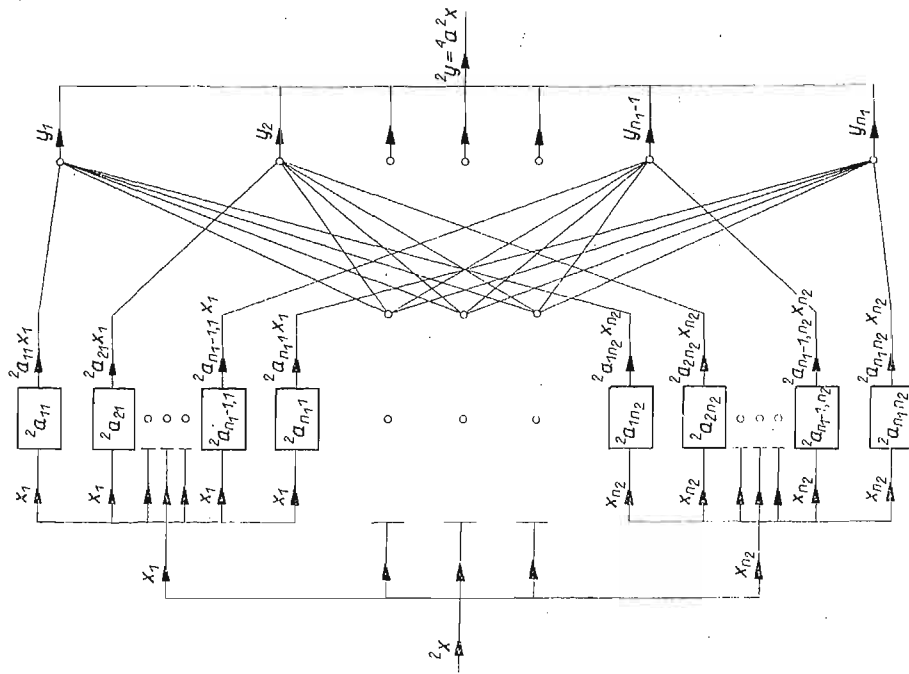
$${}^3_1\bar{x} = {}^3T {}^3_2\bar{x}, \quad {}^3_1\bar{x} = {}^3\bar{y}, \quad {}^3_2\bar{x} = {}^3\bar{x},$$

którego funkcja stanu wobec liniowości 3T w przyjętych oznaczeniach jest dana przekształceniem

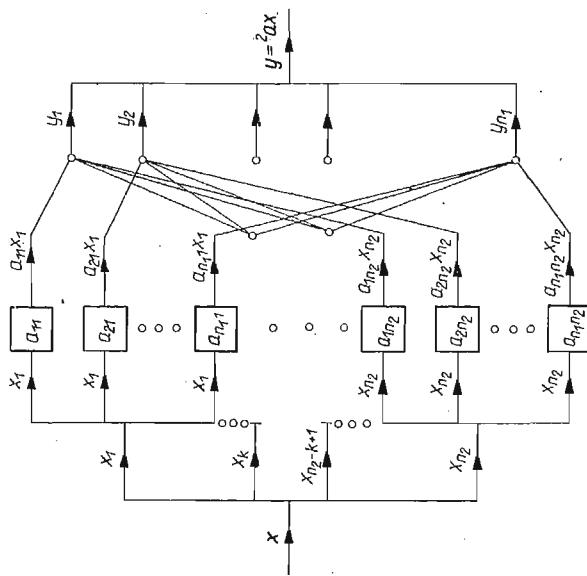
$${}^3\bar{J} = {}^6L {}^3\bar{X}$$

przedstawiono na rys. 6.

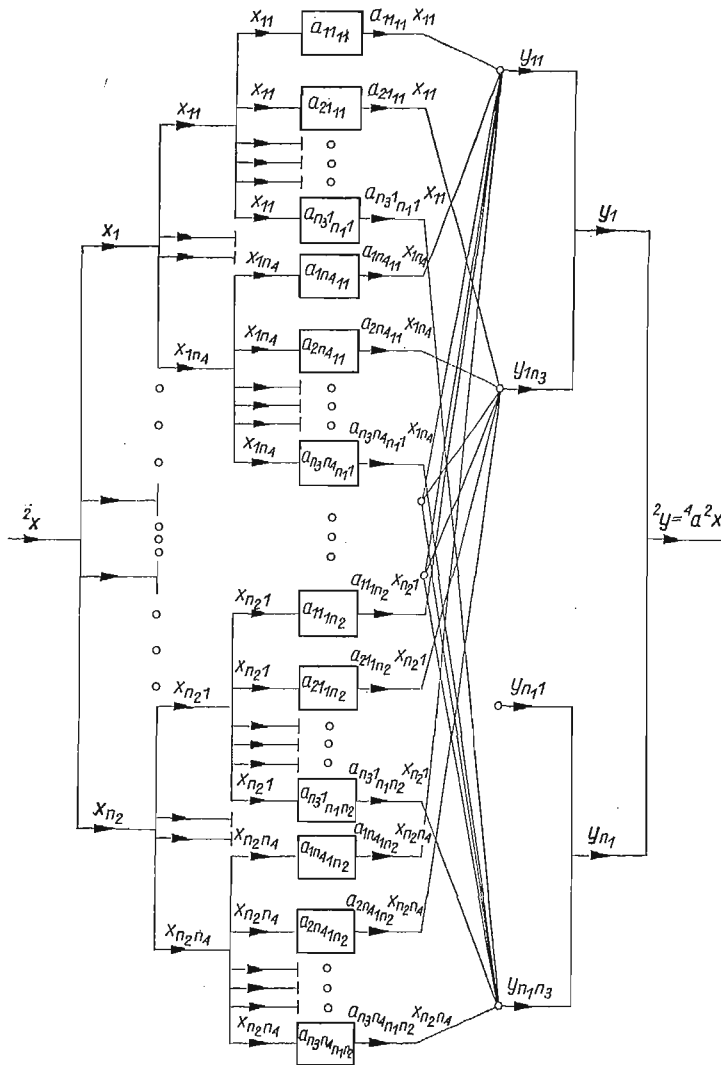
Każdy dwuwskaźnikowy sygnał wyjścia ${}^2\bar{y}_{k_1}$, $k_1 = 1, \dots, n_1$, jest kombinacją liniową jednowskaźnikowych sygnałów wejścia ${}^2\bar{x}_{k_2}$, $k_2 = 1, \dots, n_2$. W ten sposób każdy z podschematów blokowych, czyli podsystem $\bar{y}_{k_1} = {}^2a_{k_1 k_2} \bar{x}_{k_2}$, $a = L$, jest systemem podobnym do pokazanego na rys. 5, a każdy podsystem tego systemu (podpodsystem) jest systemem podobnym do pokazanego na rys. 5. Tym samym układ trójwskaźnikowy jest wyrażony przez ciąg dwuwskaźnikowy kombinacji liniowych ciągów jednowskaźnikowych lub ciąg trójwskaźnikowy kombinacji liniowych układów zerowskaźnikowych. Można



Rys. 4



Rys. 3



Rys. 5

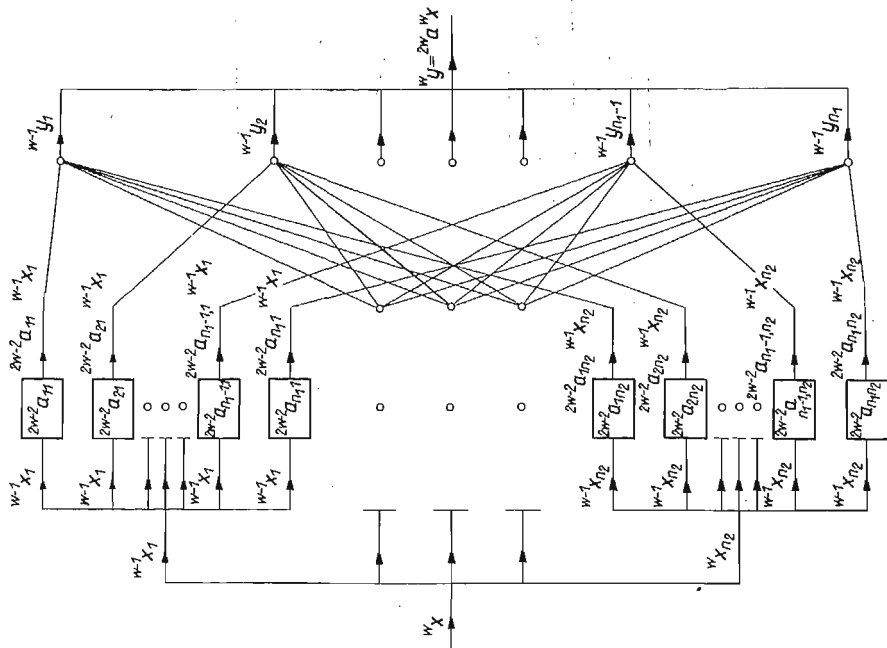
więc każdy system trójwskaźnikowy przedstawić za pomocą podsystemów zerowskaźnikowych.

Każdy podsystem jednowskaźnikowy takiego systemu jest systemem złożonym z podsystemów zerowskaźnikowych, podobnym do systemu jednowskaźnikowego przedstawionego na rys. 3.

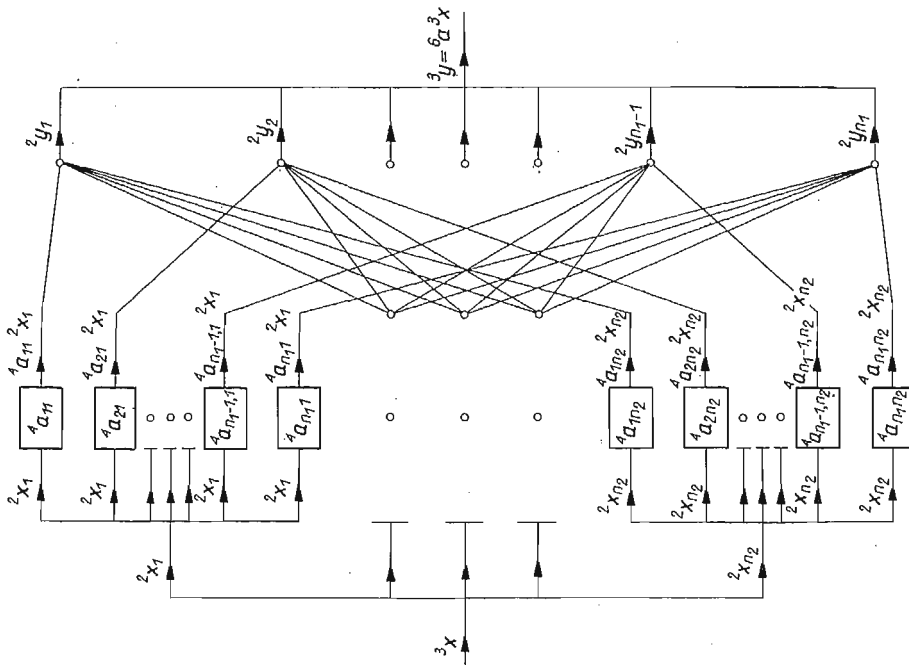
3.5. Schemat blokowy w -wskaźnikowy równania w -liniowego.

TWIERDZENIE. Układ termodynamiczny nieodwracalny w -wskaźnikowy jest układem przepływowym w -wskaźnikowym.

Dowód wynika z porównania definicji układu termodynamicznego w -wskaźnikowego i układu przepływowego w -wskaźnikowego [14].



Rys. 6



Rys. 7

Układ przepływowo w -wskaźnikowy o transmitancji ${}^w T$, czyli

$${}^w_1 \bar{x} = {}^w T {}^w_2 \bar{x}, \quad {}^w_1 \bar{x} = {}^w \bar{y}, \quad {}^w_2 \bar{x} = {}^w \bar{x},$$

którego funkcja stanu wobec liniowości ${}^w T$ w przyjętych oznaczeniach jest dana przekształceniem

$${}^w \bar{J} = {}^{2w} \bar{J} {}^w \bar{X}$$

przedstawiono na rys. 7.

Każdy z podschematów blokowych, czyli podsystem

$${}^{w-1} \bar{y}_{k_1} = {}^{2w-2} \bar{a}_{k_1 k_2} {}^{w-1} \bar{x}_{k_2}, \quad a = L, \quad k_1 = 1, \dots, n_{w-1}, \quad k_2 = 1, \dots, n_w,$$

jest systemem $(w-1)$ -wskaźnikowym, który można sprowadzić do systemów $(w-2)$ -wskaźnikowych, ..., 3, 2, 1, 0-wskaźnikowych.

4. Grafy ciągów wielowskaźnikowych

4.1. Grafem ciągu zerowskaźnikowego

$${}^0 \bar{x} = x$$

jako elementu pewnego ciała jest odcinek pokazany na rys. 8.

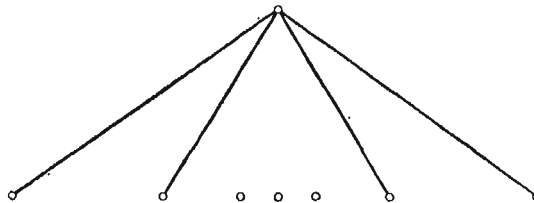


Rys. 8

4.2. Grafem ciągu jednowskaźnikowego

$${}^1 \bar{x} = \bar{x} = [x_j], \quad j = 1, \dots, n, \quad x_j \text{ — elementy ciała liczbowego,}$$

jest wychodzący z jednego punktu n -elementowy ciąg odcinków, czyli grafów zerowskaźnikowych, pokazany na rys. 9. Nazywamy go grafem jednopoziomowym.



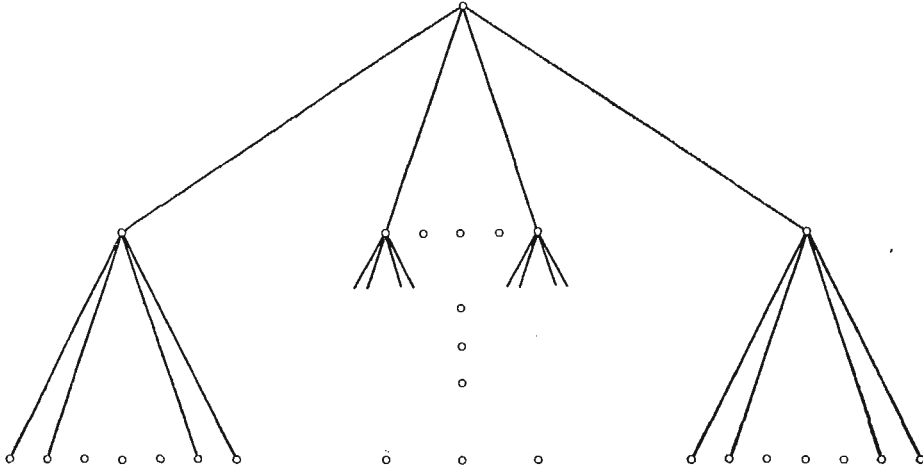
Rys. 9

4.3. Grafem ciągu dwuwskaznikowego

$${}^2\bar{x} = [x_{\bar{j}}] = [x_{j_1 j_2}], \quad j_1 = 1, \dots, n_1; \\ j_2 = 1, \dots, n_2,$$

$x_{\bar{j}}$ — elementy ciała liczbowego,

jest graf jednowskaznikowy, z którego n_1 końców poprowadzono po n_2 grafów jednowskaznikowych. Pokazano go na rys. 10. Jest on inaczej nazywany grafem dwupoziomym albo grafem grafu.

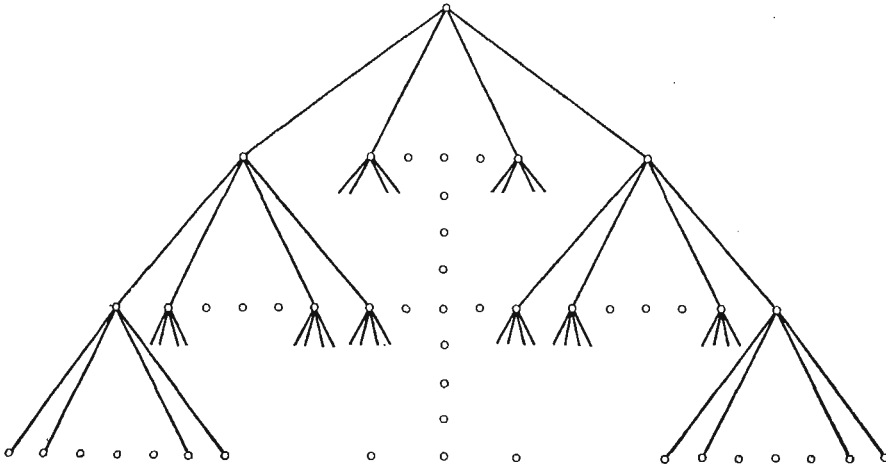


Rys. 10

4.4. Grafem ciągu trójwskaznikowego

$${}^3\bar{x} = [x_{\bar{j}}] = [x_{j_1 j_2 j_3}], \quad j_k = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, 2, 3, \\ x_{\bar{j}} \text{ — elementy ciała liczbowego,}$$

jest graf dwuwskaznikowy, z którego $n_1 n_2$ końców poprowadzono po n_3 grafów jednowskaznikowych. Pokazano go na rys. 11. Jest on inaczej nazywany grafem trójpoziomym, albo grafem grafu dwuwskaznikowego.



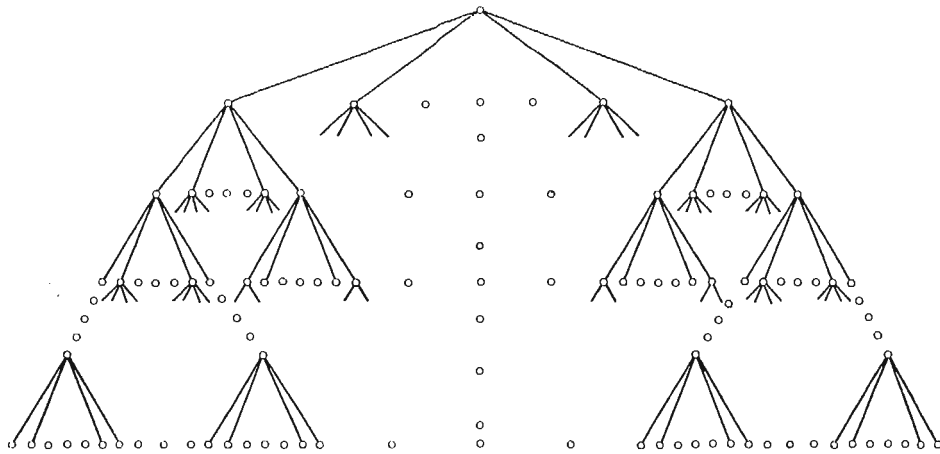
Rys. 11

4.5. Grafem ciągu w -wskaźnikowego

$${}^w\bar{x} = [x_j] = [x_{j_1 \dots j_w}], \quad j_k = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, w,$$

x_j — elementy ciała liczbowego,

jest graf $(w-1)$ -wskaźnikowy, z którego $n_1 n_2 \dots n_{w-1}$ końców poprowadzono po n_w grafów jednowskaźnikowych. Pokazano go symbolicznie na rys. 12. Nazywany go grafem w -poziomym albo grafem grafu $(w-1)$ -wskaźnikowego, bądź też grafem dwuwskaźnikowym grafu $(w-2)$ -wskaźnikowego lub ... $(w-1)$ -wskaźnikowym grafem grafu jednowskaźnikowego.



Rys. 12

Podane w rozważaniach niniejszych przekształcenia wielociągowe mogą być także zilustrowane za pomocą pewnych par grafów [14]. Poniechamy tu tej ilustracji ze względu na przytoczone wielowskaźnikowe schematy blokowe.

5. Zagadnienie optymalizacji układu wieloliniowego

Przedstawiony wyżej opis zjawiska za pomocą operatora wieloliniowego, zwanego równaniem fenomenologicznym w -wskaźnikowym, umożliwi sformułowanie zagadnienia jego optymalizacji.

5.1. Optymalizacja układu zerowskaźnikowego. Wprowadzamy formę liniową (zeroliniową)

$${}^0\pi = \pi(c, X) = cX$$

zwaną funkcją celu zerowskaźnikowego, gdzie $x \geq 0$, oraz żądamy spełnienia tego warunku przez operator

$$J = LX.$$

5.2. Optymalizacja układu jednowskaźnikowego. Wprowadźmy formę liniową

$${}^1\pi = {}^1\pi(\bar{c}, \bar{X}) = \underbrace{\bar{c}\bar{X}}_1 = c_1X_1 + \dots + c_nX_n,$$

zwaną funkcją celu jednowskaźnikowego, gdzie

$$\bar{X} = \bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze liniowym

$$\bar{J} = {}^2L\bar{X}.$$

Jest to powszechnie znany problem programowania liniowego, czyli programowania przy zastosowaniu ciągów jednowskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

5.3. Optymalizacja układu dwuwskaźnikowego. Wprowadzamy formę dwuliniową

$${}^2\pi = {}^2\pi({}^2\bar{c}, {}^2\bar{X}) = \underbrace{{}^2\bar{c}{}^2\bar{X}}_2 = \underbrace{\bar{c}_1\bar{X}_1}_1 + \dots + \underbrace{\bar{c}_n\bar{X}_n}_1 = c_{11}X_{11} + \dots + c_{nn}X_{nn},$$

zwaną funkcją celu dwuwskaźnikowego, gdzie

$${}^2\bar{X} \geqslant {}^2\bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze dwuliniowym

$${}^2\bar{J} = {}^4L{}^2\bar{X}.$$

Należy tu zdefiniować problem programowania dwuliniowego, czyli z użyciem ciągów dwuwskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

5.4. Optymalizacja układu trójwskaźnikowego. Wprowadzamy formę trójliniową

$${}^3\pi = {}^3\pi({}^3\bar{c}, {}^3\bar{X}) = \underbrace{{}^3\bar{c}{}^3\bar{X}}_1 = \underbrace{{}^2\bar{c}_1{}^2\bar{X}_1}_2 + \dots + \underbrace{{}^2\bar{c}_n{}^2\bar{X}_n}_2 = c_{111}X_{111} + \dots + c_{nnn}X_{nnn},$$

zwaną funkcją celu trójwskaźnikowego, gdzie

$${}^3\bar{X} = {}^3\bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze trójliniowym

$${}^3\bar{J} \geqslant {}^6L{}^3\bar{X}.$$

Należy tu zdefiniować problem programowania trójliniowego, czyli z użyciem ciągów trójwskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

5.5. Optymalizacja układu w -wskaźnikowego Wprowadzamy formę w -liniową

$$\begin{aligned} {}^w\pi &= {}^w\pi({}^w\bar{c}, {}^w\bar{X}) = \underbrace{{}^w\bar{c}{}^w\bar{X}}_w = \underbrace{{}^{w-1}\bar{c}_1{}^{w-1}\bar{X}_1}_{w-1} + \dots + \underbrace{{}^{w-1}\bar{c}_n{}^{w-1}\bar{X}_n}_{w-1} = \\ &= \dots = c_1 \dots_1 X_1 \dots_1 + \dots + c_n \dots_n X_n \dots_n \end{aligned}$$

zwaną funkcją celu w -wskaźnikowego, gdzie

$${}^w\bar{X} \geqslant {}^w\bar{0}.$$

Poszukujemy ekstremum tej formy przy danym operatorze w -liniowym

$${}^w\bar{J} = {}^2w\bar{L} {}^w\bar{X}.$$

Należy tu zdefiniować problem programowania w -liniowego, czyli programowania z użyciem ciągów w -wskaźnikowych zmiennych (niewiadomych) stanu zjawiska.

Literatura cytowana w tekście

1. R. KRZYWIEC, *Wielociągi (ciągi wielowskaźnikowe)*, praca doktorska, nie publikowana.
2. R. KRZYWIEC, *Ciągi wielowskaźnikowe*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1970.
3. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe prawo Hooke'a wielkich systemów stereomechanicznych*, Arch. Bud. Maszyn (w druku).
4. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Hooke'a układów stereomechanicznych jako systemów wielkich*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1971.
5. R. KRZYWIEC, *O uogólnieniu wielowskaźnikowym prawa dynamiki układów mechanicznych wielokrotnych systemów wielkich*, Z. Nauk. Pol. Częst., 1971.
6. R. KRZYWIEC, *O wielowskaźnikowym uogólnieniu prawa Ohma układów elektrycznych wielokrotnych jako systemów wielkich*, Z. Nauk. Pol. Częst. (w druku).
7. R. KRZYWIEC, *Formułowanie zagadnień układu elektrycznego o jednym stopniu swobody w klasie równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Arch. Elek., PWN, Warszawa 1968.
8. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie dwuwskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mech. Teor. Stos., PWN, Warszawa 1970.
9. R. KRZYWIEC, *Wielowskaźnikowe równania Lagrange'a drugiego rodzaju układów mechanicznych wielokrotnych*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1971.
10. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Zagad. Drgań Niel., PWN, Warszawa 1971.
11. R. KRZYWIEC, *Analogia elektromechaniczna w klasie jednowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Z. Nauk. Pol. Częst., 1971.
12. R. KRZYWIEC, *Analogia mechaniczno-stereomechaniczna w klasie wielowskaźnikowych równań Lagrange'a drugiego rodzaju*, Mech. Teor. Stos., PWN, Warszawa 1971.
13. K. GUMIŃSKI, *Termodynamika procesów nieodwracalnych*, PWN, Warszawa 1962.
14. R. KRZYWIEC, *O formalizowaniu pojęcia układu*, Arch. Bud. Maszyn, PWN, Warszawa 1971.
15. A. MOSTOWSKI, M. STARK, *Algebra liniowa*, PWN, Warszawa 1953.
16. Z. OPIAŁ, *Algebra wyższa*, Wydanie II, PWN, Warszawa 1964.
17. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

Резюме

БОЛЬШИЕ СИСТЕМЫ НЕОБРАТИМЫХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В работе рассматривается большая система необратимых термодинамических процессов. Система описывается с помощью линейных преобразований линейных пространств, элементами которых являются последовательности со многими индексами. Приводится интерпретация этих рассуждений с помощью блок-схемы и большой системы графов.

Такое обобщение термодинамической системы используется автором в другой работе содержащей постановку вопроса большой термоупругой системы.

S u m m a r y

GREAT SYSTEMS OF IRREVERSIBLE PROCESSES OF THERMODYNAMICS

The great system of irreversible thermodynamical processes is investigated by means of linear transformation of linear spaces the elements of which are multi-indicial sequences. The considerations are interpreted by a block diagram and a great system of graphs.

Such a generalization of thermodynamical systems is applied by the author in another paper aimed at the formulation of a great thermoelastic system.

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 marca 1973 r.

NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA
CIAŁ O DUŻEJ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ W WARUNKACH
KONWEKCYI SWOBODNEJ W POWIETRZU

WŁADYSŁAW SZYMAŃSKI (RZESZÓW)

Oznaczenia

- λ przewodność cieplna ciała,
 λ_p przewodność cieplna powietrza,
 α współczynnik przejmowania ciepła,
 a dyfuzyjność cieplna,
 t czas,
 T temperatura chwilowa ciała,
 T_f temperatura powietrza,
 θ temperatura bezwymiarowa ciała,
 a indeks wskazujący wartości dla temperatury $T_a = 273^\circ\text{K}$,
 o indeks wskazujący wartości dla temperatury początkowej ciała
 c właściwa pojemność cieplna,
 ρ gęstość ciała,
 β_p współczynnik rozszerzalności objętościowej powietrza,
 ν_p lepkość kinematyczna powietrza,
 μ_p lepkość dynamiczna powietrza,
 p ciśnienie,
 R indywidualna stała gazowa powietrza,
 g przyspieszenie ziemskie,
 l wymiar charakterystyczny ciała,
 l_1 wymiar charakterystyczny w liczbie Nusselta i Grashofa,
 A powierzchnia ciała,
 V objętość ciała,
 C, C_1, C_2 stałe,
 n wykładnik iloczynu liczb Grashofa i Prandtla,
- $(\text{Bi}) = \frac{\alpha l}{\lambda}$ liczba Biota,
 $(\text{Fo}) = \frac{at}{l^2}$ liczba Fouriera,
 $(\text{Nu}) = \frac{\alpha l_1}{\lambda_p}$ liczba Nusselta,
 $(\text{Pr}) = \frac{\nu_p}{a_p}$ liczba Prandtla,
 $(\text{Gr}) = \frac{g\beta_p l_1^3}{\nu_p^2} (T - T_f)$ liczba Grashofa.

1. Wstęp

Rozwiązania nieustalonego przewodzenia ciepła podawane są najczęściej przy założeniu warunków brzegowych III rodzaju, w tym stałego współczynnika przejmowania ciepła α . Założenie stałej wartości α jest jednak spełnione tylko podczas konwekcji wymuszonej. Podczas konwekcji swobodnej natomiast α jest w istotny sposób zależne od temperatury i stąd przyjęcie w takim przypadku $\alpha = \text{const}$ powoduje znaczne błędy. Uwzględnienie zmienności α stwarza natomiast znaczne trudności w rozwiązaniu problemu i stąd brak rozwiązań ogólnych tego rodzaju przypadków. Rozwiązania szczególne np. dla płyty płaskiej są na tyle złożone, że nie nadają się do bezpośredniego stosowania w praktyce. Dla częściowego przynajmniej wypełnienia tej luki w niniejszym opracowaniu rozpatrzono nieustalone przewodzenie ciepła w jednym z przypadków, mianowicie ciał o dużej przewodności w warunkach konwekcji swobodnej powietrza. Ograniczenie rozwiązania tylko do ciał o dużej przewodności cieplnej pozwala na założenie jednakowej temperatury w całym ciele i wymaga, aby $Bi < 0,1$. Takie przypadki w czasie ogrzewania lub chłodzenia w powietrzu mają często miejsce, gdy wymiary ciała są niezbyt duże, szczególnie dla metali.

2. Zależność współczynnika przejmowania ciepła od temperatury bezwymiarowej ciała

Dla ciała o małym oporze cieplnym, umieszczonego w ośrodku o stałej temperaturze T_f , podczas jego chłodzenia można napisać:

$$(2.1) \quad -c\rho V dT = \alpha A(T - T_f) dt.$$

Po wprowadzeniu temperatury bezwymiarowej

$$(2.2) \quad \theta = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{\Delta T}{\Delta T_0}$$

równanie (2.1) przybiera postać:

$$(2.3) \quad -c\rho V d\theta = \alpha A \theta dt.$$

Założenie stałej wartości $\alpha = \alpha_0$ prowadzi do rozwiązania [1]:

$$(2.4) \quad \ln \theta' = -\frac{l}{L} (Bi)_0 (Fo),$$

gdzie $L = V/A$.

Dla konwekcji swobodnej α oblicza się z równania [2]:

$$(2.5) \quad (Nu) = C[(Gr)(Pr)]^n.$$

Stałe C i n są zależne od iloczynu liczb Grashofa i Prandtla. Po podstawieniu wyrażeń opisujących liczby podobieństwa otrzymujemy:

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{\lambda_p}{l_1} C \left(\frac{g\beta_p l_1^3}{\nu_p^2} \Delta T \right)^n (Pr)^n.$$

W równaniu tym dla konkretnego przypadku można przyjąć jako stałe wielkości C , n , l_1 , g , a dla powietrza w szerokim zakresie temperatur również (Pr). Można więc zapisać:

$$(2.7) \quad \alpha = C_1 \lambda_p \left(\frac{\beta_p}{\nu_p^2} \right)^n \Delta T^n$$

oraz odpowiednio dla początkowej różnicy temperatur ΔT_0 :

$$(2.8) \quad \alpha_0 = C_1 \lambda_{p0} \left(\frac{\beta_{p0}}{\nu_{p0}^2} \right)^n \Delta T_0^n.$$

Uzależnijmy następnie chwilową wartość α od jej wartości początkowej α_0 . Otrzymujemy:

$$(2.9) \quad \alpha = \alpha_0 \frac{\lambda_p}{\lambda_{p0}} \left(\frac{\beta_p}{\beta_{p0}} \right)^n \left(\frac{\nu_{p0}}{\nu_p} \right)^{2n} \theta^n.$$

Występujące w tym wzorze własności powietrza bierze się dla jego średniej temperatury

$$(2.10) \quad T_m = \frac{T + T_f}{2}.$$

Przyjęto następujące zależności własności powietrza od temperatury:

$$(2.11) \quad \lambda_p = \lambda_{pa} + b(T_m - T_a),$$

$$(2.12) \quad \beta_p = \frac{1}{T_m},$$

$$(2.13) \quad \nu_p = \frac{\mu_p}{\varrho_p},$$

$$(2.14) \quad \mu_p = \mu_{pa} \frac{1 + \frac{C_2}{T_a}}{1 + \frac{C_2}{T_m}} \sqrt{\frac{T_m}{T_a}},$$

$$(2.15) \quad \varrho_p = \frac{p}{RT_m}.$$

Wprowadzenie tych zależności oraz temperatury bezwymiarowej do równania (2.9) prowadzi do zależności:

$$(2.16) \quad \alpha = \alpha_0 \frac{2 \left(\frac{\lambda_{pa}}{b} + T_f - T_a \right) + \Delta T_0 \theta}{2 \left(\frac{\lambda_{pa}}{b} + T_f - T_a \right) + \Delta T_0} \left[\frac{2(T_f + C_2) + \Delta T_0 \theta}{2(T_f + C_2) + \Delta T_0} \right]^{2n} \times \left(\frac{2T + \Delta T_0}{2T_f + \Delta T_0 \theta} \right)^{6n} \theta^n.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$(2.17) \quad z_1 = 2 \left(\frac{\lambda_{pa}}{b} + T_f - T_a \right),$$

$$(2.18) \quad z_2 = 2(T_f + C_2),$$

$$(2.19) \quad z_3 = 2T_f,$$

$$(2.20) \quad z_4 = \Delta T_0.$$

Wówczas

$$(2.21) \quad \alpha = \alpha_0 \frac{z_1 + z_4 \theta}{z_1 + z_4} \left(\frac{z_2 + z_4 \theta}{z_2 + z_4} \right)^{2n} \left(\frac{z_3 + z_4}{z_3 + z_4 \theta} \right)^{6n} \theta^n,$$

lub oznaczając:

$$(2.22) \quad f_1(\theta) = \frac{z_1 + z_4 \theta}{z_1 + z_4} \left(\frac{z_2 + z_4 \theta}{z_2 + z_4} \right)^{2n} \left(\frac{z_3 + z_4}{z_3 + z_4 \theta} \right)^{6n} \theta^n,$$

$$(2.23) \quad \alpha = \alpha_0 f_1(\theta).$$

W ten sposób współczynnik przyjmowania ciepła został uzależniony od temperatury bezwymiarowej ciała, temperatury ośrodka i początkowej różnicy temperatur.

3. Uwzględnienie zmienności α w rozwiązaniu nieustalonego przewodzenia ciepła

Wyznaczoną wartość α według (2.23) można wstawić do (2.3) otrzymując

$$(3.1) \quad -c\rho V d\theta = A \alpha_0 f_1(\theta) \theta dt.$$

Wprowadzając następujące przekształcenia:

$$(3.2) \quad \frac{\alpha_0}{c\rho} \frac{A}{V} = \frac{\alpha_0 l}{\lambda} \frac{\lambda}{c\rho} \frac{1}{l^2} \frac{l}{V/A} = \frac{l}{L} (\text{Bi})_0 \frac{a}{l^2}$$

i oznaczając:

$$(3.3) \quad f(\theta) = \frac{1}{\theta f_1(\theta)}$$

mamy:

$$(3.4) \quad f(\theta) d\theta = -\frac{l}{L} (\text{Bi})_0 \frac{a}{l^2} dt.$$

Ostatnie równanie daje po scałkowaniu zależność bezwymiarowej temperatury ciała od liczby Fouriera. Otrzymuje więc:

$$(3.5) \quad \int f(\theta) d(\theta) = -\frac{l}{L} (\text{Bi})_0 (\text{Fo}).$$

Całki $f(\theta) d\theta$ nie można wyznaczyć analitycznie, natomiast w prosty sposób można ją obliczyć na maszynie cyfrowej.

4. Wyniki obliczeń

Dokonano obliczeń na maszynie cyfrowej dla dwóch charakterystycznych najczęściej spotykanych przypadków:

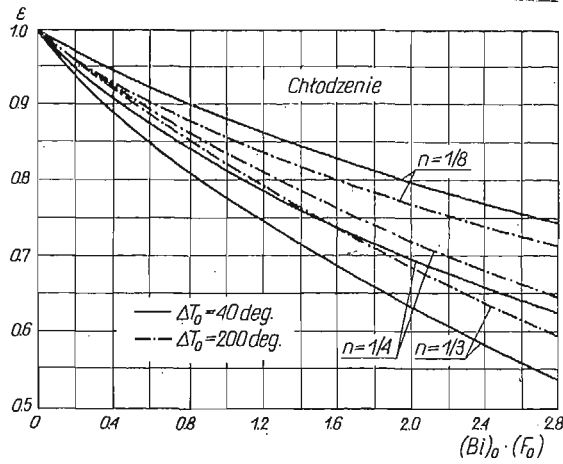
a) chłodzenia ciał o temperaturze początkowej $T_0 = T_f + \Delta T_0$ w powietrzu o stałej temperaturze $T_f = 20^\circ\text{C}$,

b) ogrzewania ciał o temperaturze początkowej $T_0 = 20^\circ\text{C}$ w powietrzu o stałej temperaturze $T_f = T_0 + \Delta T_0$.

W obu tych przypadkach wykonano obliczenia dla $\Delta T_0 = 40, 80, 120, 160, 200$ deg oraz wykładnika $n = 1/8, 1/4, 1/3$. Obliczono przy tym nie wartość temperatury bezwymiarowej, lecz stosunek logarytmu naturalnego tej temperatury ($\ln \theta$) otrzymanej z (3.5), do logarytmu naturalnego temperatury bezwymiarowej ($\ln \theta'$) otrzymanej ze wzoru (2.4) (tzn. przy stałej wartości α) dla tej samej liczby Fouriera.

Oznaczono:

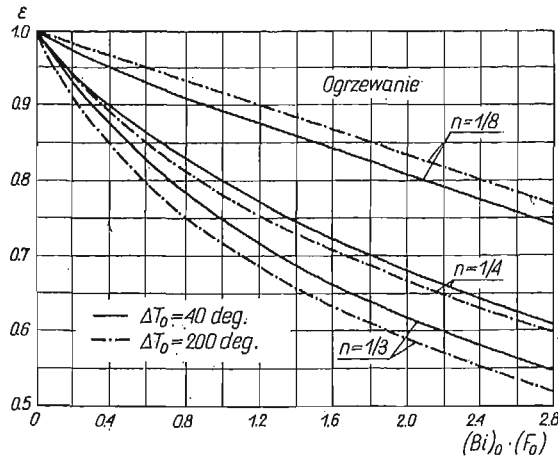
$$(4.1) \quad \varepsilon = \frac{\ln \theta}{\ln \theta'}$$



Rys. 1

Zależność $\varepsilon = f[(Bi)_0(Fo)]$ dla chłodzenia przedstawiono na rys. 1, natomiast dla ogrzewania na rys. 2. Podane na wykresach krzywe można aproksymować równaniem:

$$(4.2) \quad \varepsilon = X[(Bi)_0(Fo)]^Y$$



Rys. 2

Popęlniony przy tym błąd jest mniejszy od 1% w przypadku chłodzenia i mniejszy od 2% w przypadku ogrzewania. Wielkości X i Y są funkcją ΔT_0 i dla danej wartości n mogą być wyrażone wzorami:

$$(4.3) \quad X = X_1 + X_2 \Delta T_0,$$

$$(4.4) \quad Y = Y_1 + Y_2 \Delta T_0.$$

Stałe X_1, X_2, Y_1, Y_2 podano w tablicy 1.

Tablica 1

| | Jedn. | Chłodzenie | | | Ogrzewanie | | |
|------------------|------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | | $n = \frac{1}{8}$ | $n = \frac{1}{4}$ | $n = \frac{1}{3}$ | $n = \frac{1}{8}$ | $n = \frac{1}{4}$ | $n = \frac{1}{3}$ |
| X_1 | — | 0,888 | 0,810 | 0,767 | 0,888 | 0,803 | 0,757 |
| $X_2 \cdot 10^4$ | $\frac{1}{\text{deg}}$ | -1,50 | 1,50 | 3,00 | 1,90 | -0,95 | -2,00 |
| Y_1 | — | 0,905 | 0,817 | 0,829 | 0,895 | 0,775 | 0,747 |
| $Y_2 \cdot 10^4$ | $\frac{1}{\text{deg}}$ | -7,63 | 2,81 | 6,31 | 6,75 | -1,65 | -3,90 |

5. Zastosowanie wyników obliczeń

Wyznaczone wartości poprawek pozwalają na obliczenie w prosty sposób rzeczywistej temperatury bezwymiarowej ciała dla podanych poprzednio warunków z wykorzystaniem równania (4.1). Podstawiając w tym równaniu zależność (2.4) otrzymujemy:

$$(5.1) \quad \ln \theta = -\varepsilon \frac{l}{L} (\text{Bi})_0 (\text{Fo}).$$

W równaniu powyższym liczbę Biota należy liczyć dla warunków w chwili początkowej. Wartość ε należy wziąć dla ΔT_0 oraz n wynikającego z początkowej wartości $[(\text{Gr}) (\text{Pr})]$.

Jeżeli podczas wymiany ciepła występuje taka temperatura średnia powietrza, że przy obliczaniu α następuje zmiana C i n , cały proces należy podzielić na części w granicach stosowania danej wartości C i n . Dla każdej części procesu należy stosować procedurę podaną w niniejszej pracy.

Graniczną temperaturę bezwymiarową θ_g , do której można stosować początkową wartość C i n , można obliczyć z przybliżonego wzoru:

$$(5.2) \quad \theta_g = \left(\frac{\lambda_{pa}}{\alpha_0 l_1} C \right)^{\frac{1}{n}} [(\text{Gr}) (\text{Pr})]_g.$$

$[(\text{Gr}) (\text{Pr})]_g$ jest wartością graniczną, przy której należy dokonać zmiany C i n .

6. Wymieniane ciepło

Przy obliczaniu ciepła wymienianego pomiędzy chłodzonym lub ogrzewanym ciałem i otoczeniem w dowolnym czasie należy korzystać ze wzoru:

$$(6.1) \quad Q = cQV\Delta T_0(\theta_1 - \theta_2),$$

który wynika bezpośrednio z bilansu energii. θ_1 jest średnią bezwymiarową temperaturą ciała w chwili początkowej, θ_2 odpowiednio w chwili końcowej. Przy poczynionych założeniach są to równocześnie temperatury rzeczywiste obliczone z (5.1).

7. Wnioski

Wprowadzenie zmiennej wartości współczynnika przejmowania ciepła w warunkach brzegowych III rodzaju do równań nieustalonego przewodzenia ciepła ciał o małym oporze cieplnym daje równanie, którego nie można rozwiązać analitycznie. Rozwiązanie na maszynie cyfrowej pozwala na wprowadzenie wykresów lub zastępczych wzorów poprawek, których uwzględnienie w obliczeniach uproszczonych daje temperatury rzeczywiste. Przeprowadzone obliczenia nie uwzględniają wprawdzie promieniowania, jednakże wynikający stąd błąd jest stosunkowo niewielki dla przyjętych temperatur. Nawet dla $\Delta T_0 = 200$ deg nie przekracza 5% i dlatego obliczenia ograniczono do tej właśnie różnicy temperatur. Przy temperaturach wyższych promieniowania pominąć nie można.

Temperatura ciała zmienia się wolniej niż to wynika z zależności nie uwzględniającej zmienności współczynnika przejmowania ciepła. Różnice rosną wraz ze wzrostem liczby Fouriera i mogą dochodzić do 50%. Wykorzystując więc przedstawione wyniki można znacznie dokładniej określić temperaturę ciała o dużej przewodności cieplnej chłodzonego lub ogrzewanego w powietrzu. Podane zależności mogą być stosowane również przy temperaturach odbiegających od założonej temperatury bazowej 20°C o ± 10 deg przy zachowaniu dokładności wynikającej z odczytu ε .

Literatura cytowana w tekście

1. B. STANISZEWSKI, *Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne*, PWN, Warszawa 1963.
2. W. GOGÓŁ, *Wymiana ciepła. Tablice i wykresy*, wyd. 2, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.

Резюме

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕЛ С БОЛЬШОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ В УСЛОВИЯХ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ВОЗДУХА

В работе приводится решение нестационарной теплопроводности тел с большой теплопроводностью в присутствии теплоотвода на поверхности путем свободной конвекции. Проведены вычисления для свободной конвекции воздуха. Полученные результаты сравниваются с результатами расчетов при сохранении постоянного значения коэффициента теплоотвода.

S u m m a r y

UNSTEADY HEAT TRANSFER IN BODIES OF HIGH THERMAL CONDUCTIVITY
IN THE CONDITIONS OF FREE CONVECTION IN THE AIR

The paper presents a solution of the problem of unsteady heat transfer in bodies of high thermal conductivity; at the surface of the body the heat is exchanged under the conditions of free convection. Calculations are made in the case of air convection. The results obtained are compared with those evaluated under the assumption of a constant heat transfer coefficient.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA, RZESZÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lipca 1973 r.

ANALOGIA TARCZOWO-PŁYTOWA W TEORII DŹWIGARÓW SIATKOWYCH

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

Wstęp

W pracy [6] sformułowano analogię statyczno-geometryczną w teorii powłok siatkowych, opisanych za pomocą równań dyskretnego ośrodka Cosseratów. Istnienie analogii statyczno-geometrycznej w liniowej teorii dyskretnych ośrodków Cosseratów wykazano również w pracy [2].

Tę samą analogię dla powłok siatkowych, opisanych za pomocą równań różniczkowych w przypadku, w którym modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy włóknisty ośrodek Cosseratów, sformułowano w pracy [4].

W cytowanych pracach nie analizowano jednak równań opisujących stan tarczowy i płytowy; w pracy [2] ograniczono się jedynie do podania równań przemieszczeniowych dla wymienionych przypadków. Analizę taką przeprowadzono w niniejszej pracy. Pozwoliła ona sformułować inną analogię o pewnym znaczeniu praktycznym. Jest nią analogia tarczowo-płytowa. Zachodzi tu formalne podobieństwo do znanej analogii w klasycznej teorii tarcz i płyt, obciążonych tylko wzdłuż brzegów, a polegającej na podobieństwie równania naprężeniowego tarczy

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0$$

i równania przemieszczeniowego płyty

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0.$$

Ta klasyczna analogia, jak wiadomo, znalazła zastosowanie w eksperymentalnych badaniach stanu naprężenia tarcz.

Przedstawioną w tej pracy analogię prawdopodobnie będzie można w podobny sposób wykorzystać w zagadnieniach dźwigarów siatkowych. W punktach 1–3 omówiono tę analogię oraz równania regularnych tarcz i płyt siatkowych, utworzonych z dwóch rodzin prętów sztywno ze sobą połączonych w węzłach i opisanych za pomocą równań dyskretniej teorii sprężystości [1]. Oprócz tego założono, że wszystkie oczka siatki mają jednakowe kształty i wymiary. W punkcie 4 omówiona jest analogia tarczowo-płytowa w kontynualnej teorii dźwigarów siatkowych. Modelem obliczeniowym jest w tym przypadku dwuwymiarowy ośrodek włóknisty Cosseratów [3].

W pracy stosowana jest konwencja sumacyjna. Wskaźniki k, l, m, n, \dots oraz K, L, M, N, \dots przebiegają ciąg 1, 2, wskaźniki A, Φ, \dots przebiegają ciąg I, II. Symbole $\Delta_A \varphi(d)$ oraz $\bar{\Delta}_A \varphi(d)$ oznaczają prawe i lewe różnice funkcji $\varphi(d)$ [1]. Pochodną kowariantną

oznaczono kreską pionową. Symbole a_{KL} i e_{KL} oznaczają składowe tensora metrycznego i dwuwektora Ricciego. Natomiast ε_{kl} , $\varepsilon_{A\Phi}$ i δ_{kl} oznaczają symbole Ricciego oraz symbol Kroneckera. Ujęcie wskaźników w nawias prostokątny oznacza ich alternację, a ujęcie wskaźnika w dwie pionowe kreski oznacza, że wskaźnik ten w operacji alternacji udziału nie bierze.

1. Równania przemieszczeniowe tarcz i płyt siatkowych opisanych za pomocą równań dyskretnej teorii sprężystości

Dla stanu tarczowego jednorodnie równania równowagi, związki geometryczne oraz równania konstytutywne wyrażają się wzorami:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_A T_k^A &= 0, \\ \bar{\Delta}_A M^A + \varepsilon_k^l l_A^k T_l^A &= 0, \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \eta_A^k &= \Delta_A u^k + \varepsilon_k^l l_A^l v, \\ \varkappa_A &= \Delta_A v, \end{aligned}$$

$$(1.3) \quad \begin{aligned} T_k^A &= A_{kl}^{A\Phi} \eta_\Phi^l + B_k^{A\Phi} \varkappa_\Phi, \\ M^A &= F^{A\Phi} \varkappa_\Phi + B_l^{\Phi A} \eta_\Phi^l, \end{aligned}$$

dla zagadnienia zaś płytowego mają postać następującą [5]:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_A T^A &= 0, \\ \bar{\Delta}_A M_k^A + \varepsilon_{kl} l_A^l T^A &= 0, \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} \eta_A &= \Delta_A u + \varepsilon_{kl} l_A^k v^l, \\ \varkappa_A^k &= \Delta_A v^k, \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} T^A &= A^{A\Phi} \eta_\Phi + B_l^{A\Phi} \varkappa_\Phi^l, \\ M_k^A &= F_{kl}^{A\Phi} \varkappa_\Phi^l + B_k^{\Phi A} \eta_\Phi, \end{aligned}$$

gdzie T_k^A i M^A , η_A^k i \varkappa_A , u^k i v są kolejno składowymi tarczowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, a T^A i M_k^A , η_A i \varkappa_A^k , u i v^k są składowymi płytowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, l_A^k są składowymi wektora łączącego środek węzła d ze środkiem węzła $f_A d$, natomiast wielkości $A^{A\Phi}$, $A_{kl}^{A\Phi}$, $B_k^{A\Phi}$, $B_k^{\Phi A}$, $F_{kl}^{A\Phi}$, $F^{A\Phi}$ charakteryzują własności sprężyste rozważanych ustrojów. Wzory dla wielkości $A^{A\Phi}$, $A_{kl}^{A\Phi}$, $B_k^{A\Phi}$, $B_k^{\Phi A}$, $F_{kl}^{A\Phi}$, $F^{A\Phi}$ podano w [5]. Podstawiając (1.2) do (1.3) oraz wykorzystując równania (1.1), otrzymamy

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_A [A_{kl}^{A\Phi} (\Delta_\Phi u^l + \varepsilon_m^l l_\Phi^m v) + B_k^{A\Phi} \Delta_\Phi v] &= 0, \\ \bar{\Delta}_A [F^{A\Phi} \Delta_\Phi v + B_l^{\Phi A} (\Delta_\Phi u^l + \varepsilon_m^l l_\Phi^m v)] + \varepsilon_k^l l_A^k [A_{lm}^{A\Phi} (\Delta_\Phi u^m + \varepsilon_n^m l_\Phi^n v) + B_l^{A\Phi} \Delta_\Phi v] &= 0. \end{aligned}$$

Równania (1.7) stanowią przemieszczeniowy układ równań rozpatrywanych tarcz siatkowych.

Podobnie uzyskamy równania przemieszczeniowe dla stanu płytowego, mianowicie

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & \bar{\Delta}_A [A^{A\phi} (\Delta_\phi u + \varepsilon_{kl} l_\phi^k v^l) + B^{A\phi} \Delta_\phi v^l] + \\ & \bar{\Delta}_A [F_{kl}^{A\phi} \Delta_\phi v^l + B_k^{A\phi} (\Delta_\phi u + \varepsilon_{im} l_\phi^i v^m)] + \\ & + \varepsilon_{kl} l_\phi^l [A^{A\phi} (\Delta_\phi u + \varepsilon_{nm} l_\phi^m v^n) + B_m^{A\phi} \Delta_\phi v^m] = 0. \end{aligned}$$

2. Równania naprężeniowe tarcz i płyt siatkowych

Wprowadźmy nowe składowe stanu naprężenia za pomocą związków

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tilde{T}_A^k &= \varepsilon_{\phi A} \delta^{kl} T_\phi^l, \\ \tilde{M}_A &= \varepsilon_{\phi A} M^\phi, \\ \tilde{M}_A^k &= \varepsilon_{\phi A} \delta^{kl} M_\phi^l, \\ \tilde{T}_A &= \varepsilon_{\phi A} T^\phi. \end{aligned}$$

Można teraz równania (1.1) i (1.4) przedstawić w następującej postaci:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_{[A} \tilde{T}_{\phi]}^k &= 0, \\ \bar{\Delta}_{[A} \tilde{M}_{\phi]} + \varepsilon_{kl} l_{[A}^k \tilde{T}_{\phi]}^l &= 0, \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \bar{\Delta}_{[A} \tilde{T}_{\phi]} &= 0, \\ \bar{\Delta}_{[A} \tilde{M}_{\phi]}^k + \varepsilon^k l_{[A}^l \tilde{T}_{\phi]} &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli z kolei wielkości \tilde{T}_A^k , \tilde{T}_A , \tilde{M}_A^k , \tilde{M}_A wyrazimy przez dowolne funkcje φ^k , φ , ψ^k , ψ w następujący sposób:

$$(2.4) \quad \tilde{T}_A^k = \bar{\Delta}_A \varphi^k,$$

$$\tilde{M}_A = \bar{\Delta}_A \psi + \varepsilon_{kl} l_A^k \varphi^l,$$

$$(2.5) \quad \tilde{M}_A^k = \bar{\Delta}_A \psi^k + \varepsilon^k l_A^l \varphi,$$

$$\tilde{T}_A = \bar{\Delta}_A \varphi,$$

to łatwo sprawdzić, że równania (2.2) i (2.3) będą spełnione tożsamościowo. Zatem funkcje φ^k i ψ są funkcjami naprężeń dla zagadnienia tarczowego, funkcje zaś ψ^k i φ dla zagadnienia płytowego. Korzystając z (2.4), (2.5) oraz (2.1) otrzymamy związki pomiędzy T_k^A , M^A , M_k^A , T^A a funkcjami φ^k , ψ , ψ^k , φ :

$$(2.6) \quad T_k^A = \varepsilon^{A\phi} \delta_{kl} \bar{\Delta}_\phi \varphi^l,$$

$$M^A = \varepsilon^{A\phi} (\bar{\Delta}_\phi \psi + \varepsilon_{kl} l_\phi^k \varphi^l),$$

$$(2.7) \quad M_k^A = \varepsilon^{A\phi} \delta_{kl} (\bar{\Delta}_\phi \psi^l + \varepsilon^l m_\phi^m \varphi),$$

$$T^A = \varepsilon^{A\phi} \bar{\Delta}_\phi \varphi.$$

Składowe stanu odkształcenia nie są od siebie niezależne, lecz muszą spełniać warunki nierozdzielności.

Dla zagadnienia tarczowego warunki te mają postać następującą:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \Delta_{[A} \eta_{\phi]}^k + \varepsilon^k l_{[A}^l \varkappa_{\phi]} &= 0, \\ \Delta_{[A} \varkappa_{\phi]} &= 0, \end{aligned}$$

dla zagadnienia zaś płytowego mają postać

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \Delta_{[\Lambda} \eta_{\Phi]} + \varepsilon_{kl} l_{[\Lambda}^k \varkappa_{\Phi]}^l &= 0, \\ \Delta_{[\Lambda} \varkappa_{\Phi]}^k &= 0. \end{aligned}$$

Warunki (2.8) i (2.9) można wyprowadzić ze wzorów podanych w pracy [2].

Wprowadzając nowe składowe stanu odkształcenia $\tilde{\eta}_k^{\Lambda}$, $\tilde{\eta}^{\Lambda}$, $\tilde{\varkappa}_k^{\Lambda}$, $\tilde{\varkappa}^{\Lambda}$ za pomocą wzorów

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_k^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} \delta_{kl} \eta_{\Phi}^l, & \tilde{\varkappa}^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} \varkappa_{\Phi}, \\ \tilde{\varkappa}_k^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} \delta_{kl} \varkappa_{\Phi}^l, & \tilde{\eta}^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} \eta_{\Phi}, \end{aligned}$$

warunki (2.8) i (2.9) przedstawimy w następującej postaci:

$$(2.11) \quad \Delta_{\Lambda} \tilde{\eta}_k^{\Lambda} + \varepsilon_{kl} l_{\Lambda}^l \tilde{\varkappa}^{\Lambda} = 0, \quad \Delta_{\Lambda} \tilde{\varkappa}^{\Lambda} = 0,$$

$$(2.12) \quad \Delta_{\Lambda} \tilde{\eta}^{\Lambda} + \varepsilon_{\Lambda}^k l_{\Lambda}^k \tilde{\varkappa}_k^{\Lambda} = 0, \quad \Delta_{\Lambda} \tilde{\varkappa}_k^{\Lambda} = 0.$$

Związki geometryczne dla składowych $\tilde{\eta}_k^{\Lambda}$, $\tilde{\eta}^{\Lambda}$, $\tilde{\varkappa}_k^{\Lambda}$, $\tilde{\varkappa}^{\Lambda}$ uzyskamy podstawiając do (2.10) prawe strony (1.2) i (1.5),

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_k^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} \delta_{kl} (\Delta_{\Phi} u^l + \varepsilon^l_{\ m} l_{\Phi}^m v), \\ \tilde{\varkappa}^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} \Delta_{\Phi} v, \end{aligned}$$

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} (\Delta_{\Phi} u + \varepsilon_{kl} l_{\Phi}^k v^l), \\ \tilde{\varkappa}_k^{\Lambda} &= \varepsilon^{\Lambda\Phi} \delta_{kl} \Delta_{\Phi} v^l. \end{aligned}$$

Związki odwrotne do (1.3) i (1.6) mają postać

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \eta_{\Lambda}^k &= a_{\Lambda\Phi}^{kl} T_{\Phi}^{\Phi} + b_{\Phi\Lambda}^k M^{\Phi}, \\ \varkappa_{\Lambda} &= f_{\Lambda\Phi} M^{\Phi} + b_{\Lambda\Phi}^l T_{\Phi}^{\Phi}, \end{aligned}$$

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \eta_{\Lambda} &= a_{\Lambda\Phi} T^{\Phi} + b_{\Phi\Lambda}^l M_{\Phi}^l, \\ \varkappa_{\Lambda}^k &= f_{\Lambda\Phi}^{kl} M_{\Phi}^{\Phi} + b_{\Lambda\Phi}^k T^{\Phi}. \end{aligned}$$

Wielkości $a_{\Lambda\Phi}^{kl}$, $a_{\Lambda\Phi}$, $b_{\Lambda\Phi}^k$, $b_{\Lambda\Phi}^l$, $f_{\Lambda\Phi}^{kl}$, $f_{\Lambda\Phi}$ można jednoznacznie określić korzystając ze wzorów podanych w [5].

Korzystając z (2.15), (2.16), (2.10) i (2.1) otrzymamy związki pomiędzy składowymi $\tilde{\eta}_k^{\Lambda}$, $\tilde{\eta}^{\Lambda}$, $\tilde{\varkappa}_k^{\Lambda}$, $\tilde{\varkappa}^{\Lambda}$ i \tilde{T}_{Λ}^k , \tilde{T}_{Λ} , \tilde{M}_{Λ}^k , \tilde{M}_{Λ} , mianowicie

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}_k^{\Lambda} &= \tilde{a}_{kl}^{\Lambda\Phi} \tilde{T}_{\Phi}^l + b_k^{\Lambda\Phi} \tilde{M}_{\Phi}, \\ \tilde{\varkappa}^{\Lambda} &= \tilde{f}^{\Lambda\Phi} \tilde{M}_{\Phi} + \tilde{b}_l^{\Phi\Lambda} \tilde{T}_{\Phi}^l, \end{aligned}$$

$$(2.18) \quad \begin{aligned} \tilde{\eta}^{\Lambda} &= \tilde{a}^{\Lambda\Phi} \tilde{T}_{\Phi} + \tilde{b}^{\Lambda\Phi} \tilde{M}_{\Phi}^l, \\ \tilde{\varkappa}_k^{\Lambda} &= \tilde{f}_{kl}^{\Lambda\Phi} \tilde{M}_{\Phi}^l + \tilde{b}_k^{\Phi\Lambda} \tilde{T}_{\Phi}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{kl}^{\Lambda\Phi} &= \delta_{km} \delta_{ln} \varepsilon^{\Omega\Lambda} \varepsilon^{\Gamma\Phi} a_{\Omega\Gamma}^{mn}, \\ \tilde{f}_{kl}^{\Lambda\Phi} &= \delta_{km} \delta_{ln} \varepsilon^{\Omega\Lambda} \varepsilon^{\Gamma\Phi} f_{\Omega\Gamma}^{mn}, \\ \tilde{b}_k^{\Lambda\Phi} &= \delta_{kl} \varepsilon^{\Omega\Lambda} \varepsilon^{\Gamma\Phi} b_{\Omega\Gamma}^l, \\ \tilde{b}_l^{\Lambda\Phi} &= \delta_{lm} \varepsilon^{\Omega\Lambda} \varepsilon^{\Gamma\Phi} b_{\Omega\Gamma}^m, \\ \tilde{a}^{\Lambda\Phi} &= \varepsilon^{\Omega\Lambda} \varepsilon^{\Gamma\Phi} a_{\Omega\Gamma}, \\ \tilde{f}^{\Lambda\Phi} &= \varepsilon^{\Omega\Lambda} \varepsilon^{\Gamma\Phi} f_{\Omega\Gamma}. \end{aligned}$$

Związki (2.4), (2.17) oraz równania (2.11) stanowią układ równań naprężeniowych tarcz siatkowych.

Podstawowymi niewiadomymi są trzy funkcje naprężeń. Równania dla tych funkcji mają postać

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \Delta_A [\tilde{a}_{kl}^{A\Phi} \bar{\Delta}_\Phi \varphi^l + \tilde{b}_k^{A\Phi} (\bar{\Delta}_\Phi \psi + \varepsilon_{lm} l_\Phi^l \varphi^m)] + \varepsilon_{kl} l_\Phi^l [f_{kl}^{A\Phi} (\bar{\Delta}_\Phi \psi + \varepsilon_{mn} l_\Phi^m \varphi^n) + \tilde{b}_m^{\Phi A} \bar{\Delta}_\Phi \varphi^m] &= 0, \\ \Delta_A [f_{kl}^{A\Phi} (\bar{\Delta}_\Phi \psi + \varepsilon_{kl} l_\Phi^k \varphi^l) + \tilde{b}_k^{\Phi A} \bar{\Delta}_\Phi \varphi^k] &= 0. \end{aligned}$$

Natomiast równania (2.5), (2.18) i (2.12) stanowią układ równań naprężeniowych płyt siatkowych. Równania dla funkcji naprężeń mają w tym przypadku postać następującą:

$$(2.20) \quad \begin{aligned} \Delta_A [\tilde{a}^{A\Phi} \bar{\Delta}_\Phi \varphi + \tilde{b}_i^{A\Phi} (\bar{\Delta}_\Phi \psi^i + \varepsilon^i_m l_\Phi^m \varphi)] + \varepsilon_k^i l_\Phi^i [\tilde{f}_{lm}^{A\Phi} (\bar{\Delta}_\Phi \psi^m + \varepsilon^m_n l_\Phi^n \varphi) + \tilde{b}_i^{\Phi A} \bar{\Delta}_\Phi \varphi] &= 0, \\ \Delta_A [\tilde{f}_{kl}^{A\Phi} (\bar{\Delta}_\Phi \psi^l + \varepsilon^l_m l_\Phi^m \varphi) + \tilde{b}_i^{\Phi A} \bar{\Delta}_\Phi \varphi] &= 0. \end{aligned}$$

3. Analogia tarczowo-płytowa

Między równaniami stanu tarczowego i stanu płytowego rozważanych siatek zachodzi pełna analogia. Można ją sformułować następująco: Jeżeli w równaniach przemieszczeniowych (1.1), (1.2), (1.3), (1.7) dokonamy zamiany występujących tam symboli według schematu

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_A &\leftrightarrow \Delta_A, & T_k^A &\leftrightarrow \tilde{\kappa}_k^A, & M^A &\leftrightarrow \tilde{\eta}^A, \\ u^k &\leftrightarrow \psi^k, & v &\leftrightarrow \varphi, & \eta_A^k &\leftrightarrow \tilde{M}_A^k, \\ \kappa_A &\leftrightarrow \tilde{T}_A, & A_{kl}^{A\Phi} &\leftrightarrow \tilde{f}_{kl}^{A\Phi}, & B_k^{A\Phi} &\leftrightarrow \tilde{b}_k^{\Phi A}, \\ & & F^{A\Phi} &\leftrightarrow \tilde{a}^{A\Phi}, & & \end{aligned}$$

to otrzymamy równania naprężeniowe płyt (2.5), (2.12), (2.18) (2.20). Podobnie, jeżeli w równaniach naprężeniowych tarcz (2.4), (2.11), (2.17), (2.19) zamienimy symbole według schematu

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_A &\leftrightarrow \Delta_A, & \tilde{T}_A^k &\leftrightarrow \kappa_A^k, & \tilde{M}_A &\leftrightarrow \eta_A, \\ \varphi^k &\leftrightarrow \psi^k, & \psi &\leftrightarrow u, & \tilde{\eta}_k^A &\leftrightarrow M_k^A, \\ \tilde{\kappa}^A &\leftrightarrow T^A, & \tilde{a}_{kl}^{A\Phi} &\leftrightarrow F_{kl}^{A\Phi}, & \tilde{b}_k^{A\Phi} &\leftrightarrow B_k^{\Phi A}, \\ & & \tilde{f}^{\Phi A} &\leftrightarrow A^{A\Phi}, & & \end{aligned}$$

to otrzymamy równania przemieszczeniowe płyt (1.4), (1.5), (1.6), (1.8).

Analogia ta obejmuje również pozostałe równania, mianowicie (2.6), (2.7) i (2.13), (2.14); (2.2), (2.3) i (2.8), (2.9). Ogólnie można więc powiedzieć, że zamieniając odpowiednio symbole w dowolnym równaniu zagadnienia tarczowego, otrzymamy odpowiadające mu równanie zagadnienia płytowego i odwrotnie, dokonując takiej zamiany w dowolnym równaniu zagadnienia płytowego otrzymamy odpowiednie równanie zagadnienia tarczowego.

4. Analogia tarczowo-plytowa dla dźwigarów, których modelem obliczeniowym jest dwuwymiarowy włóknisty ośrodek Cosseratów

W poprzednim punkcie pracy omówiono analogię tarczowo-plytową dla regularnych siatek prętowych, opisanych równaniami dyskretnej teorii sprężystości. W tym punkcie wykażemy istnienie takiej samej analogii w kontynualnej teorii dźwigarów siatkowych.

Korzystając z reguł aproksymacyjnych podanych w [1] i w [5] można przejść od równań modelu dyskretyzowanego do równań modelu ciągłego. Równania dla modelu ciągłego przedstawimy od razu w krzywoliniowym układzie współrzędnych x^K , stosując takie same oznaczenia jak w pracy [3].

Jednorodne równania równowagi, związki geometryczne oraz równania konstytutywne dla zagadnienia tarczowego mają postać [3]:

$$(4.1) \quad p^{KL}|_K = 0, \quad m^K|_K + e_{KL}p^{KL} = 0,$$

$$(4.2) \quad \gamma_{KL} = u_L|_K + e_{LK}v, \quad \varkappa_K = v|_K,$$

$$(4.3) \quad p^{KL} = A^{KLMN}\gamma_{MN}, \quad m^K = C^{KL}\varkappa_L,$$

dla zagadnienia zaś plytowego postać następującą [3]:

$$(4.4) \quad p^K|_K = 0, \quad m^{KL}|_K + e^L_{KL}p^K = 0,$$

$$(4.5) \quad \gamma_K = u|_K + e_{KM}v^M, \quad \varkappa_{KL} = v_L|_K,$$

$$(4.6) \quad p^K = A^{KL}\gamma_L, \quad m^{KL} = C^{KLMN}\varkappa_{MN},$$

gdzie p^{KL} i m^K , γ_{KL} i \varkappa_K , u_K i v są kolejno składowymi tarczowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, a p^K , m^{KL} , γ_K i \varkappa_{KL} , u i v_K — składowymi plytowego stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia, zaś A^{KLMN} , C^{KL} , C^{KLMN} i A^{KL} są składowymi tensorów sztywności sprężystej.

Równania dla składowych stanu przemieszczenia mają odpowiednio postać [3]:

$$(4.7) \quad [A^{KLMN}(u_N|_M + e_{NM}v)]|_K = 0, \\ (C^{KM}v|_M)|_K + e_{KL}A^{KLMN}(u_N|_M + e_{NM}v) = 0$$

dla tarczy oraz

$$(4.8) \quad [A^{KL}(u|_L + e_{LM}v^M)]|_K = 0, \\ (C^{KLMN}v_N|_M)|_K + e^L_{KL}A^{KM}(u|_M + e_{MN}v^N) = 0$$

dla płyty.

Równania naprężeniowe tarcz siatkowych zostały szeroko omówione w pracy [3], gdzie jako podstawowe niewiadome przyjęto dwie składowe stanu naprężenia m^K oraz jedną funkcję naprężeń. Pomiedzy tymi równaniami i równaniami przemieszczeniowymi płyt nie zachodzi jednak analogia. Dlatego też obecnie przedstawimy równania, które odpowiadają swojej budową równaniom podanym w drugim punkcie pracy.

Związkom (2.1) odpowiadają wzory:

$$(4.9) \quad \tilde{p}_{KL} = e_{MK}a_{NL}p^{MN}, \quad \tilde{m}_K = e_{MK}m^M, \\ \tilde{m}_{KL} = e_{MK}a_{NL}m^{MN}, \quad \tilde{p}_K = e_{MK}p^M,$$

równaniom zaś (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5) równania następujące:

$$(4.10) \quad \tilde{p}_{[M|N]|K_1} = 0, \quad \tilde{m}_{[M|K_1]} + e_{[K}^N \tilde{p}_{M]N} = 0,$$

$$(4.11) \quad \tilde{p}_{[M|K_1]} = 0, \quad \tilde{m}_{[M|N]|K_1} + e_{N[K} \tilde{p}_{M]} = 0,$$

$$(4.12) \quad \tilde{p}_{KL} = \varphi_L|_K, \quad \tilde{m}_K = \psi_K + e_{KL} \varphi^L,$$

$$(4.13) \quad \tilde{m}_{KL} = \psi_L|_K + e_{LK} \varphi, \quad \tilde{p}_K = \varphi|_K.$$

A zatem funkcje φ_K i ψ są funkcjami naprężeń dla zagadnienia tarczowego, a funkcje φ i ψ_K dla zagadnienia płytowego. Związki pomiędzy składowymi p^{KL} , m^K , m^{KL} , p^K a funkcjami φ_K , ψ , ψ_K , φ mają postać:

$$(4.14) \quad p^{KL} = e^{KM} \varphi^L|_M, \quad m^K = e^{KM} (\psi|_M + e_{ML} \varphi^L),$$

$$(4.15) \quad m^{KL} = e^{KN} (\psi^L|_N + e^L_N \varphi), \quad p^K = e^{KL} \varphi|_L.$$

Warunki nierozdzielności odkształcenia odpowiadające warunkom (2.8) i (2.9) mają postać:

$$(4.16) \quad \gamma_{[M|N]|K_1} + e_{N[K} \varkappa_{M]} = 0, \quad \varkappa_{[M|N]} = 0,$$

$$(4.17) \quad \gamma_{[M|K_1]} + e_{[K}^N \varkappa_{M]N} = 0, \quad \varkappa_{[M|N]|K_1} = 0,$$

a odpowiadające warunkom (2.11) i (2.12) postać następującą:

$$(4.18) \quad \tilde{\gamma}^{KL}|_K + e_K^L \tilde{\varkappa}^K = 0, \quad \tilde{\varkappa}^K|_K = 0,$$

$$(4.19) \quad \tilde{\gamma}^K|_K + e_{KL} \tilde{\varkappa}^{KL} = 0, \quad \tilde{\varkappa}^{KL}|_K = 0,$$

gdzie

$$\tilde{\gamma}^{KL} = e^{KM} a^{LN} \gamma_{MN}, \quad \tilde{\varkappa}^K = e^{KL} \varkappa_L,$$

$$\tilde{\varkappa}^{KL} = e^{KM} a^{LN} \varkappa_{MN}, \quad \tilde{\gamma}^K = e^{KL} \gamma_L.$$

Ostatnie zależności są odpowiednikami wzorów (2.10).

Równania geometryczne odpowiadające związkom (2.13) i (2.14) są następujące:

$$(4.20) \quad \tilde{\gamma}^{KL} = e^{KM} (u^L|_M + e^L_M v), \quad \tilde{\varkappa}^K = e^{KL} v|_L,$$

$$(4.21) \quad \tilde{\gamma}^K = e^{KM} (u|_M + e_{ML} v^L), \quad \tilde{\varkappa}^{KL} = e^{KM} v^L|_M.$$

Związki odwrotne do (4.3) i (4.6) mają postać

$$(4.22) \quad \gamma_{KL} = B_{KLMN} p^{MN}, \quad \varkappa_K = D_{KL} m^L,$$

$$(4.23) \quad \gamma_K = B_{KL} p^L, \quad \varkappa_{KL} = D_{KLMN} m^{MN},$$

natomiast równania odpowiadające związkom (2.17) i (2.18) postać następującą:

$$(4.24) \quad \tilde{\gamma}^{KL} = \tilde{B}^{KLMN} \tilde{p}_{MN}, \quad \tilde{\varkappa}^K = \tilde{D}^{KL} \tilde{m}_L,$$

$$(4.25) \quad \tilde{\gamma}^K = \tilde{B}^{KL} \tilde{p}_L, \quad \tilde{\varkappa}^{KL} = \tilde{D}^{KLMN} \tilde{m}_{MN},$$

gdzie

$$\tilde{B}^{KPRT} = e^{LK} a^{NP} e^{MR} a^{ST} B_{LNMS}, \quad \tilde{D}^{KS} = e^{LK} e^{MS} D_{LM},$$

$$\tilde{D}^{KPRT} = e^{LK} a^{NP} e^{MR} a^{ST} D_{LNMS}, \quad \tilde{B}^{KS} = e^{LK} e^{MS} B_{LM}.$$

Korzystając z (4.12), (4.24) i (4.18) otrzymamy równania na funkcje naprężeń dla zagadnienia tarczowego

$$(4.26) \quad \begin{aligned} [\tilde{D}^{KL}(\psi|_L + e_{LM}\varphi^M)]|_K &= 0, \\ (\tilde{B}^{KLMN}\varphi_N|_M)|_K + e^L{}_K \tilde{D}^{KM}(\psi|_M + e_{MN}\varphi^N) &= 0. \end{aligned}$$

Korzystając zaś z (4.13), (4.25) i (4.19) otrzymamy odpowiednie równania dla zagadnienia płytowego, mianowicie

$$(4.27) \quad \begin{aligned} [\tilde{D}^{KLMN}(\psi_N|_M + e_{NM}\varphi)]|_K &= 0, \\ (\tilde{B}^{KM}\varphi|_M)|_K + e_{KL} \tilde{D}^{KLMN}(\psi_N|_M + e_{NM}\varphi) &= 0. \end{aligned}$$

A zatem również w tym przypadku można stwierdzić, że jeżeli w równaniach przemieniowych tarcz (4.1), (4.2), (4.3), (4.7) dokonamy zamiany symboli według schematu:

$$\begin{aligned} p^{KL} &\leftrightarrow \tilde{\varkappa}^{KL}, & m^K &\leftrightarrow \tilde{\gamma}^K, & u_K &\leftrightarrow \psi_K, \\ v &\leftrightarrow \varphi, & \gamma_{KL} &\leftrightarrow \tilde{m}_{KL}, & \varkappa_K &\leftrightarrow \tilde{p}_K, \\ A^{KLMN} &\leftrightarrow \tilde{D}^{KLMN}, & C^{KM} &\leftrightarrow \tilde{B}^{KM}, \end{aligned}$$

to otrzymamy równania naprężeniowe płyt (4.13), (4.19), (4.25), (4.27) oraz że jeżeli w równaniach naprężeniowych tarcz (4.12) (4.18), (4.24), (4.26) dokonamy zamiany symboli według schematu:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{KL} &\leftrightarrow \varkappa_{KL}, & \tilde{m}_K &\leftrightarrow \gamma_K, & \varphi_K &\leftrightarrow v_K, \\ \psi &\leftrightarrow u, & \tilde{\gamma}^{KL} &\leftrightarrow m^{KL}, & \tilde{\varkappa}^K &\leftrightarrow p^K, \\ \tilde{D}^{KL} &\leftrightarrow A^{KL}, & \tilde{B}^{KLMN} &\leftrightarrow C^{KLMN}, \end{aligned}$$

to otrzymamy równania przemieszczeniowe płyt (4.4), (4.5), (4.6), (4.8).

Wydaje się, że najistotniejsze znaczenie ma analogia pomiędzy równaniami (4.26) i (4.8).

Funkcje naprężeń tarczy siatkowej muszą spełniać równania identyczne z równaniami dla składowych stanu przemieszczenia odpowiednio dobranej płyty siatkowej. A zatem będzie można mierząc składowe stanu przemieszczenia płyty jednoznacznie wyznaczyć wartości funkcji naprężeń dla tarczy. W ten sposób można eksperymentalnie badać stany naprężenia tarcz siatkowych. Może to mieć znaczenie dla tarcz o nietypowych kształtach.

5. Uwagi końcowe

W pracy [6] rozważono powłoki siatkowe zbudowane z trzech rodzin prętów przy założeniu, że różnice między długościami prętów sąsiednich są wielkościami «małymi» w porównaniu z długością pręta. Przy takim założeniu dokładność równań przemieszczeniowych i naprężeniowych jest różna w ramach tej samej teorii. Trudno zatem mówić w takim przypadku o pełnej analogii. Z tego też powodu w punktach 1–3 niniejszej pracy rozważania ograniczono do siatek, których wszystkie oczka mają jednakowy kształt i wymiary. Jednak znacznie istotniejsze jest założenie, że siatka prętowa utworzona jest z dwóch rodzin prętów. Modelem obliczeniowym jest wtedy dyskretny ośrodek Cosseratów, którego rząd struktury różnicowej m wynosi 2.

Wydaje się, że tylko dla tego przypadku możliwe jest sformułowanie nie tylko analogii tarczowo-plytowej, lecz również analogii statyczno-geometrycznej. Co prawda w pracach [2] i [6] dopuszczono do rozważań dyskretne ośrodki Cosseratów, dla których $m > 2$, lecz nie wyjaśniono istotnych problemów z tym związanych. Między innymi nie wyjaśniono redukcji liczby warunków nierozdzielności. Na przykład w pracy [2] wzór (3.2)₂ na str. 122 ma postać

$$(5.1) \quad \Delta_{[\Phi] \mathcal{K}_{\Lambda}^k} = 0.$$

Dla $m = 3$ układ ten zawiera dziewięć niezależnych warunków nierozdzielności, podany zaś na tej samej stronie układ (3.3)₂ w postaci

$$(5.2) \quad \epsilon^{\Lambda\Phi} \Delta_{\Lambda} \mathcal{K}_{\Phi}^k = 0$$

dla $m = 3$ zawiera już tylko trzy warunki nierozdzielności.

Ta sama uwaga odnosi się także do pozostałych warunków nierozdzielności. Powstaje zatem pytanie, czy rozwiązania otrzymane na podstawie równań naprężeniowych, podanych w [2] i proponowanych w [6], w przypadku gdy $m > 2$, będą poprawne, tzn. czy uzyskane na ich podstawie składowe stanu odkształcenia będą spełniały właściwe warunki nierozdzielności. Pytanie jest o tyle istotne, że można określić fikcyjny stan odkształcenia o składowych spełniających warunki (5.2), a nie spełniających koniecznych warunków nierozdzielności (5.1), gdyż równania (5.2) są sumami odpowiednich równań (5.1).

Gdy $m = 2$ symbol $\epsilon^{\Lambda\Phi}$ przechodzi w symbol $\epsilon^{\Lambda\Phi}$ i równoważność odpowiednich układów jest oczywista. Natomiast w przypadku modelu ciągłego rozważania są poprawne dla siatek utworzonych zarówno z dwóch, jak i z trzech rodzin prętów.

Literatura cytowana w tekście

1. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elasticity*, Arch. Mech. Stos., 6, 23 (1971).
2. Cz. WOŹNIAK, *Discrete elastic Cosserat media*, Arch. Mech. Stos., 2, 25 (1973).
3. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1970.
4. M. KLEIBER, Cz. WOŹNIAK, *On equations of the linear theory of elastic lattice shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 3, 19 (1971).
5. S. KONIECZNY, F. PIETRAS, Cz. WOŹNIAK, *O liniowych zagadnieniach dyskretnej teorii sprężystości*, Rozpr. Inż., 2, 20 (1972).
6. M. KLEIBER, *Statics of elastic lattice-type shells*, Arch. Mech. Stos., 2, 25 (1973).

Р е з ю м е

ПЛАСТИНОЧНАЯ АНАЛОГИЯ В ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ СЕТЧАТЫХ НЕСУЩИХ СООРУЖЕНИЙ

В работе представлена пластиночная аналогия для дискретизованной модели и для непрерывной модели сетчатых пластин.

Аналогия состоит в сходстве уравнений в перемещениях описывающих состояние, вызванное нагрузкой, действующей в плоскости системы и уравнений в напряжениях, описывающих состояние, вызванное нагрузкой действующей перпендикулярно плоскости пластинки, а также

в сходстве уравнений в напряжениях для первого случая и уравнений в перемещениях для второго случая.

Представленная аналогия может быть использована для экспериментального исследования напряженного состояния в сетчатых пластинках.

S u m m a r y

PLATE ANALOGY IN THE THEORY OF SURFACE LATTICE STRUCTURES

The paper discusses the plate analogy for a discretized model as well as for a continuous model of plane surface lattice structures.

Such an analogy consists in the similarity of displacement equations describing the state due to the loading acting in the plane of the system, and the stress equations describing the state produced by the loading acting perpendicularly to the plate, as well as in the similarity between the stress equations for the second case.

The analogy discussed in the paper may be applied in experimental investigations of stresses occurring in lattice plates.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 sierpnia 1973 r.

REOLOGIA PŁYT ŻELBETOWYCH POD WPLYWEM POŁA TEMPERATURY

ADAM MITZEL I JACEK DYCZKOWSKI (WROCLAW)

1. Wstęp

W niektórych zakładach przemysłowych, jak np. w hutach stali lub miedzi, żelbetowe elementy konstrukcyjne pomostów i innych urządzeń wewnętrznych hal produkcyjnych poddawane są dużym obciążeniom długotrwałym. Wskutek odbywającego się procesu technologicznego wytopu metali występują stosunkowo wysokie temperatury. W takich przypadkach wpływ własności reologicznych betonu — skurczu i pełzania — na stan naprężenia i odkształcenia żelbetowych elementów konstrukcyjnych, przy równoczesnym występowaniu podwyższonej temperatury, nie jest bez znaczenia dla wymiarowania tych elementów.

W niniejszej pracy zanalizowano stan naprężenia w prostokątnych płytach żelbetowych z uwzględnieniem pełzania betonu oraz pola temperatury.

2. Równania podstawowe

Ogólne zależności wyrażające momenty w płycie anizotropowej z uwzględnieniem wpływu temperatury mają postać [1 i 2]:

$$\begin{aligned}
 M_x &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - (D_{11} \alpha_x + D_{12} \alpha_y + D_{16} \alpha_{xy}) \frac{\Delta T}{h}, \\
 (1) \quad M_y &= - \left(D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - (D_{21} \alpha_x + D_{22} \alpha_y + D_{26} \alpha_{xy}) \frac{\Delta T}{h}, \\
 M_{xy} &= - \left(D_{61} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{62} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - (D_{61} \alpha_x + D_{62} \alpha_y + D_{66} \alpha_{xy}) \frac{\Delta T}{h},
 \end{aligned}$$

gdzie w oznacza ugięcie płyty w dowolnym punkcie o współrzędnych x, y , D_{ik} — sztywność płyty anizotropowej, $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ — współczynniki rozszerzalności termicznej, ΔT — różnicę temperatur powierzchni płyty, h — grubość płyty, q — obciążenie pionowe.

Funkcja $w(x, y)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego powierzchni ugięcia

$$\begin{aligned}
 (2) \quad D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= q - (D_{11} \alpha_x + \\
 &+ D_{12} \alpha_y) \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} - (D_{21} \alpha_x + D_{22} \alpha_y) \frac{1}{h} \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial y^2}.
 \end{aligned}$$

Dla wstępnego wymiarowania przekrojów zginanych płyty przyjęto sztywności według HUBERA [2] jak dla płyty ortotropowej:

$$\begin{aligned}
 D_{11} = D_x &= \frac{E_b}{1-\nu_b^2} \left[\frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_x}{1+n\mu_x} h e_x^2 \right], \\
 D_{22} = D_y &= \frac{E_b}{1-\nu_b^2} \left[\frac{h^3}{12} + \frac{n\mu_y}{1+n\mu_y} h e_y^2 \right], \\
 (3) \quad D_{12} = D_{21} &= \nu_b \sqrt{D_x D_y}, \\
 D_{66} &= \frac{1}{2} (1-\nu_b) \sqrt{D_x D_y}, \\
 D_{16} = D_{61} = D_{26} = D_{62} &= 0.
 \end{aligned}$$

Przy założeniu jednorodnego pola temperatury względem x, y ($\Delta T = \text{const}$), $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ oraz $\alpha_{xy} = 0$, powierzchnia ugięcia płyty (2) opisana jest następującym równaniem:

$$(4) \quad D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q,$$

a momenty zależnościami:

$$\begin{aligned}
 M_x &= - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_b \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (D_x + \nu_b \sqrt{D_x D_y}) \alpha \frac{\Delta T}{h}, \\
 (5) \quad M_y &= - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_b \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (D_y + \nu_b \sqrt{D_x D_y}) \alpha \frac{\Delta T}{h}, \\
 M_{xy} &= - (1-\nu_b) \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned}$$

3. Wpływ pełzania betonu

Odształcenia płyty żelbetowej przy obciążeniu doraźnym bez uwzględnienia współpracy betonu strefy rozciąganej (faza II) wyrażają się następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \varepsilon_{zx} &= \frac{\sigma_{zx} \psi_x}{E_z}, & \varepsilon_{zy} &= \frac{\sigma_{zy} \psi_y}{E_z}, \\
 \varepsilon_{bx} &= \frac{\sigma_{bx} - \nu \sigma_{by}}{E_b}, & \varepsilon_{by} &= \frac{\sigma_{by} - \nu \sigma_{bx}}{E_b},
 \end{aligned}$$

gdzie E_b, E_z oznacza moduły sprężystości betonu i stali, ψ_x, ψ_y — współczynniki mniejsze od jedności uwzględniające pracę betonu między rysami, σ_{zx}, σ_{zy} — naprężenia w stali, σ_{bx}, σ_{by} — naprężenia w górnym włóknie betonu, $\varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{bx}, \varepsilon_{by}$ — odkształcenia w stali i w betonie, ν — współczynnik Poissona dla betonu.

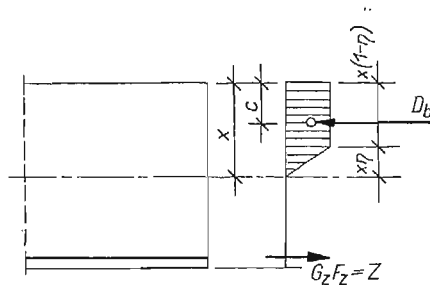
Z warunków równowagi przekrojów w kierunku x i y uzyskuje się

$$(7a) \quad \sigma_{bi} = \frac{\sigma_{zi} F_{zi} \psi_i}{x_i (1 - 0,5\eta)},$$

$$(7b) \quad M_i = \sigma_{zi} F_{zi} (h_{1i} - c_i),$$

przy czym i przyjmuje wartości x lub y .

Współczynnik η zależy od postaci wykresu naprężeń w betonie. Dla wykresu trójkątnego $\eta = 1$, dla wykresu prostokątnego $\eta = 0$. Przez c_i oznaczono odległości środka ciężkości wykresu naprężeń w betonie od górnej krawędzi płyty (rys. 1).



Rys. 1. Wykres naprężeń w płycie zginanej

Po podstawieniu wyrażenia (7a) do zależności (6) na ε_{bx} , ε_{by} , otrzymamy

$$(8) \quad \varepsilon_{bx} = \frac{\sigma_{zx} F_{zx} \psi_x}{x_x (1 - 0,5\eta) E_b} - \nu \frac{\sigma_{zy} F_{zy} \psi_y}{x_y (1 - 0,5\eta) E_b},$$

$$\varepsilon_{by} = \frac{\sigma_{zy} F_{zy} \psi_y}{x_y (1 - 0,5\eta) E_b} - \nu \frac{\sigma_{zx} F_{zx} \psi_x}{x_x (1 - 0,5\eta) E_b}.$$

Całkowite odkształcenie jednostkowe betonu $\varepsilon_b(t)$ bez uwzględnienia odkształcenia skurczu składa się z odkształcenia doraźnego i z odkształcenia wywołanego pełzaniem betonu, czyli

$$(9) \quad \varepsilon_b(t) = \varepsilon_b + \varepsilon_p(t).$$

Charakterystyka pełzania betonu $\varphi(t) = \varphi_t$ zgodnie z teorią starzenia Whitneya-Dischinera wyraża się przez

$$(10) \quad \varphi_t = \frac{\varepsilon_p(t)}{\varepsilon_b}.$$

Po uwzględnieniu (10) wyrażenie (9) przyjmuje postać

$$(11) \quad \varepsilon_b(t) = \varepsilon_b (1 + \varphi_t).$$

Krzywizna zginanej płyty żelbetowej w fazie drugiej może być wyrażona wzorem [3]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_b(t)}{h_1}$$

lub też po uwzględnieniu (11)

$$(12) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_b (1 + \varphi_t)}{h_1},$$

gdzie ρ oznacza promień krzywizny w kierunku x lub y , h_1 — wysokość użytkową przekroju.

Krzywizna płyty w układzie współrzędnych x i y wyraża się następująco:

$$(13) \quad \frac{1}{\rho_x} = -\frac{dw^2}{dx^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{dw^2}{dy^2}.$$

Wykorzystując zależności (6) na ε_{zx} i ε_{zy} , (8) i (13) można na podstawie (12) krzywizny $1/\rho_x$ i $1/\rho_y$ wyrazić w następujący sposób:

$$(14) \quad \frac{1}{\rho_x} = \sigma_{zx}a_1 - \nu\sigma_{zy}b_2, \quad \frac{1}{\rho_y} = \sigma_{zy}a_2 - \nu\sigma_{zx}b_1.$$

Po wyznaczeniu σ_{zx} lub σ_{zy} z układu równań (14) i podstawieniu do (7b) otrzymuje się

$$(15) \quad \begin{aligned} M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(16) \quad \begin{aligned} D_x &= \frac{a_2 F_{zx}(h_{1x} - c_x)}{a_1 a_2 - \nu^2 b_1 b_2}, & D_y &= \frac{a_1 F_{zy}(h_{1y} - c_y)}{a_1 a_2 - \nu^2 b_1 b_2}, \\ (17) \quad a_1 &= \frac{\psi_x}{h_{1x}} \left[\frac{1}{E_z} + \frac{F_{zx}(1 + \varphi_t)}{x_x(1 - 0,5\eta)E_b} \right], & a_2 &= \frac{\psi_y}{h_{1y}} \left[\frac{1}{E_z} + \frac{F_{zy}(1 + \varphi_t)}{x_y(1 - 0,5\eta)E_b} \right], \\ b_1 &= \frac{\psi_x F_{zx}(1 + \varphi_t)}{h_{1y} x_x(1 - 0,5\eta)E_b}, & b_2 &= \frac{\psi_y F_{zy}(1 + \varphi_t)}{h_{1x} x_y(1 - 0,5\eta)E_b}. \end{aligned}$$

Wzory (15) wyrażające momenty zginające w kierunkach x i y nie są zupełnie ściśle dla płyt ortotropowych. Nieściśłość dotyczy drugiego składnika wyrażenia w nawiasie, który dla M_x ma postać $\frac{b_2}{a_2} \nu_y w_y''$ zamiast $\nu_y w_y''$, a dla M_y — $\frac{b_1}{a_1} \nu_x w_x''$ zamiast $\nu_x w_x''$. Przykładowo dla płyt stosowanych w budownictwie przemysłowym o grubościach od 10 cm do 25 cm błąd wynosi od 11% do 4,5% i jest dodatkowo wydatnie zmniejszony przez współczynnik Poissona.

Momenty zginające i momenty skręcające w płycie pod wpływem pola temperatury i pełzania betonu wyrażają się zależnościami (5):

$$\begin{aligned} M_x &= - \left(D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_b \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - (D_x + \nu_b \sqrt{D_x D_y}) \alpha \frac{\Delta T}{h}, \\ M_y &= - \left(D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_b \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (D_y + \nu_b \sqrt{D_x D_y}) \alpha \frac{\Delta T}{h}, \\ M_{xy} &= - (1 - \nu_b) \sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

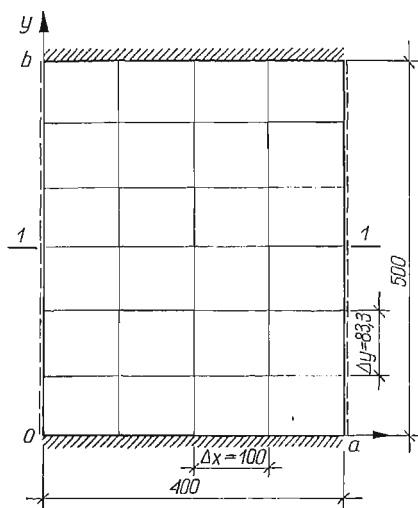
w których sztywności D_x , D_y określone są wzorami (16).

Występująca w zależnościach (5) średnia geometryczna wartość sztywności D_x , D_y zmniejsza dodatkowo omówiony wyżej błąd.

4. Przykłady liczbowe

Dla przykładu rozważono płytę występującą w hutnictwie miedzi według schematu pokazanego na rys. 2. Przyjęto płytę o rozmiarach $4,00 \times 5,00$ m i grubości 25 cm. Cechy materiałów:

$$\begin{aligned} \text{beton} & - R_w = 200 \text{ kG/cm}^2, \quad R_m = 180 \text{ kG/cm}^2, \quad R_r = 17,5 \text{ kG/cm}^2, \\ & E_b = 180\,000 \text{ kG/cm}^2, \quad \alpha = 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}, \quad \nu_b = 1/6; \\ \text{stal} & - Q_r = 3600 \text{ kG/cm}^2, \quad E_z = 2\,100\,000 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$



Rys. 2. Schemat płyty żelbetowej. Krawędzie równoległe do osi x zamocowane, równoległe do osi y przegubowo podparte

Obciążenie płyty wynosi: ciężar własny $g = 0,06 \text{ kG/cm}^2$, obciążenie użytkowe $p = 0,2 \text{ kG/cm}^2$. Współczynnik pewności $s = 1,8$. Temperatury powierzchni płyty wynoszą odpowiednio 25°C i 100°C , gradient temperatury $\Delta T = 75^\circ\text{C}$. Dla obliczenia sztywności D_x , D_y przyjęto $\mu_x = \mu_y = 0,50\%$ oraz $e_x = e_y = 10 \text{ cm}$. Za pomocą (3) uzyskano $D_x = D_y = 288,06 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}$. Wykorzystując wyżej przyjęte dane obliczono za pomocą wzorów (5) momenty zginające M_x i M_y (wywołane obciążeniem pionowym i gradientem temperatury): w dwóch charakterystycznych punktach, mianowicie w połowie długości krawędzi zamocowanej:

$$M_x = -8398 \text{ kGcm/cm}, \quad M_y = -20432 \text{ kGcm/cm}$$

oraz w środku rozpiętości:

$$M_x = 1143 \text{ kGcm/cm}, \quad M_y = 1817 \text{ kGcm/cm}.$$

Obliczony przekrój zbrojenia wynosi w połowie długości krawędzi zamocowanej:

$$F_{zx} = 23,01 \text{ cm}^2, \quad F_{zy} = 58,80 \text{ cm}^2$$

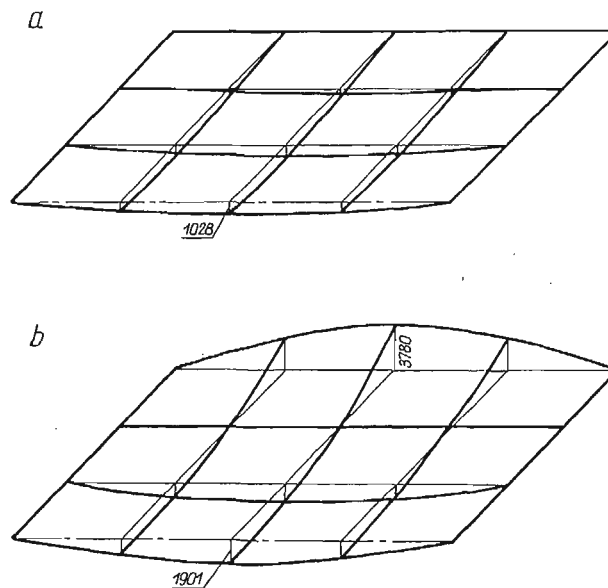
oraz w środku rozpiętości

$$F_{zx} = 2,16 \text{ cm}^2, \quad F_{zy} = 4,33 \text{ cm}^2.$$

Przechodząc do obliczenia momentów z uwzględnieniem pełzania betonu, przyjęto dodatkowo założenia: $c = 400 \text{ kG/m}^3$, $w/c = 0,50$, wilgotność względna powietrza 50%, wiek betonu w chwili obciążenia płyty $\tau = 28$ dni. Obliczono momenty dla $t = 28, 60, 180$ i 360 dni. Obliczenia charakterystyki pełzania dokonano za pomocą wzorów CEB [3]. Uwzględniając przyjęty przekrój zbrojenia obliczono następujące wartości:

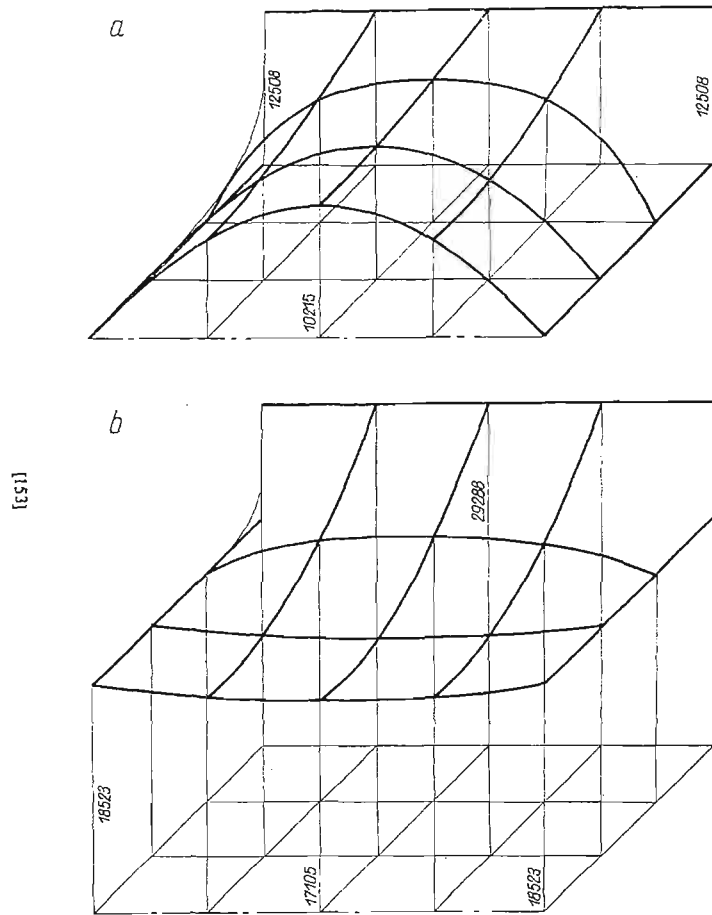
$$\begin{aligned} F_{zx} &= 23,01 \text{ cm}^2, & F_{zy} &= 58,80 \text{ cm}^2, \\ x_x &= 4,60 \text{ cm}, & x_y &= 11,76 \text{ cm}, \\ h_{1x} &= 19,8 \text{ cm}, & h_{1y} &= 22,1 \text{ cm}, \\ c_x &= 1,79 \text{ cm}, & c_y &= 4,58 \text{ cm}, \\ \psi_x &= 0,71, & \psi_y &= 0,91. \end{aligned}$$

Otrzymane wartości miary pełzania i sztywności płyty przedstawiono w tabelicy 1. Na rys. 3 do 10 podano wykresy momentów M_x , M_y , M_{xy} dla różnych wartości t i maksymalnego

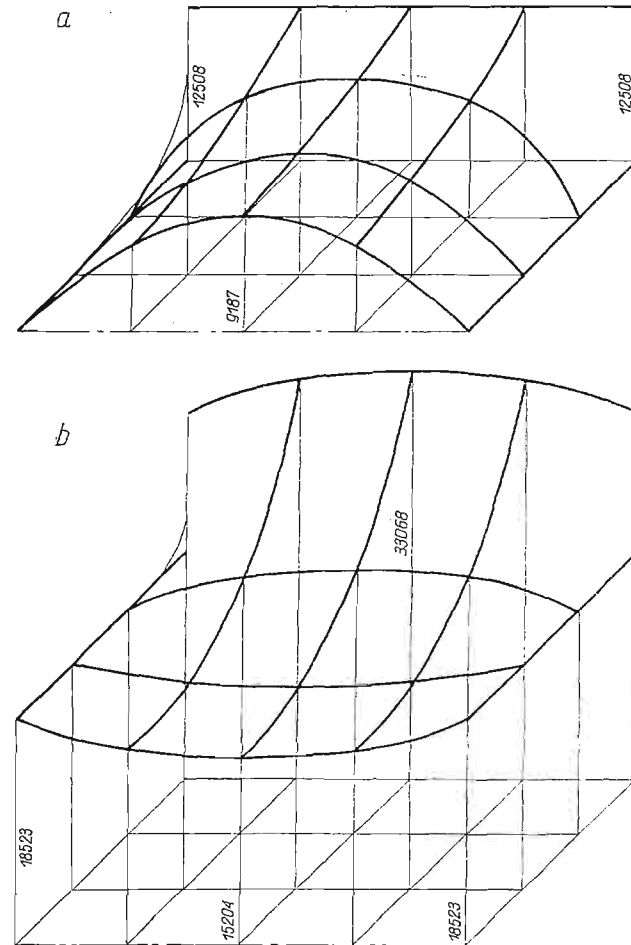


Rys. 3. Wykres momentów w kGcm/cm dla $q = 0,26 \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$, $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, $t = 28$ dni; a) M_x , b) M_y

gradientu temperatury $\Delta T = 75^\circ\text{C}$. Na rys. 3 do 7 przedstawiono zmienność momentów w ujęciu aksonometrycznym dla określonych wartości t , na rys. 8 do 10 zmienność momentów w zależności od t . Obliczenia wykonano metodą różnic skończonych za pomocą



Rys. 4. Wykres momentów w kGcm/cm dla $q = 0$, $\Delta T = 75^\circ\text{C}$, $t = 28$ dni; a) M_x , b) M_y



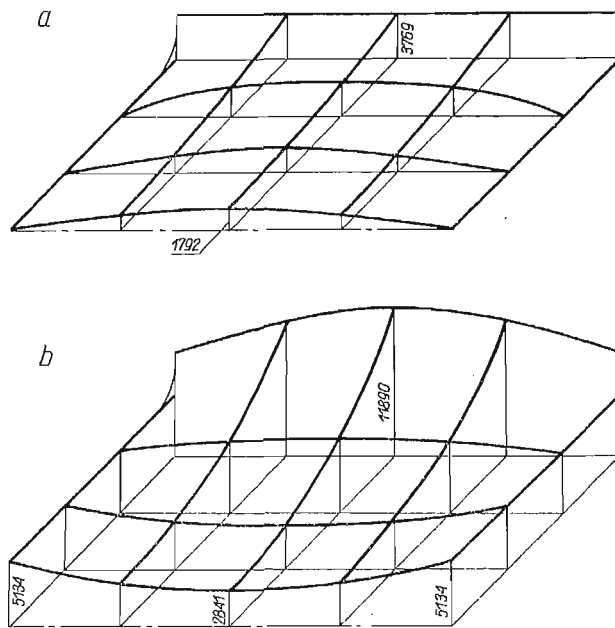
Rys. 5. Wykres momentów w kGcm/cm dla $q = 0,26 \text{ kG/cm}^2$, $\Delta T = 75^\circ\text{C}$, $t = 28$ dni; a) M_x , b) M_y

EMC przy rozstawieniu punktów $\Delta_x = 100$ cm, $\Delta_y = 83,33$ cm, z dokładnością 10^{-3} kGcm/cm.

Uzyskano również wyniki dla dalszych dwóch gradientów temperatury (50°C , 25°C) nie przedstawione w niniejszej pracy z powodu szczupłości miejsca.

Tablica 1. Miary pełzania i sztywności płyty

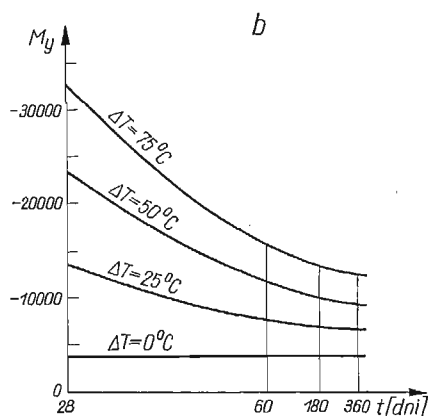
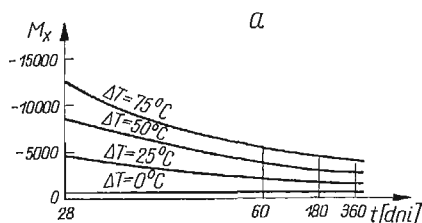
| t [dni] | φ_t [I] | D_x [kGcm] | D_y [kGcm] |
|-----------|-----------------|---------------------|---------------------|
| 28 | 0 | $301,13 \cdot 10^6$ | $635,08 \cdot 10^6$ |
| 60 | 1,592 | $125,32 \cdot 10^6$ | $267,65 \cdot 10^6$ |
| 180 | 2,075 | $108,46 \cdot 10^6$ | $220,18 \cdot 10^6$ |
| 360 | 2,330 | $82,83 \cdot 10^6$ | $176,04 \cdot 10^6$ |



Rys. 6. Wykres momentów w kGcm/cm dla $q = 0,26$ kG/cm², $\Delta T = 75^\circ\text{C}$, $t = 360$ dni; a) M_x , b) M_y

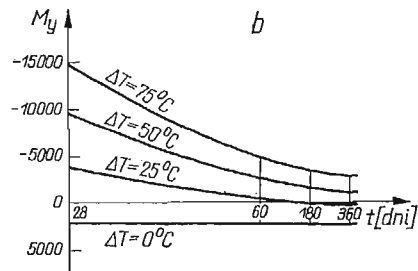
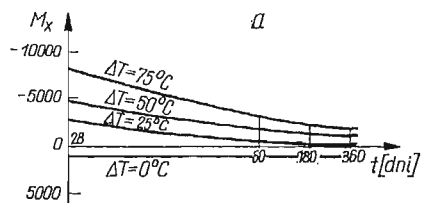


Rys. 7. Wykres momentów M_{xy} w kGcm/cm dla $q = 0,26$ kG/cm², $\Delta T = 75^\circ\text{C}$, $t = 28$ dni

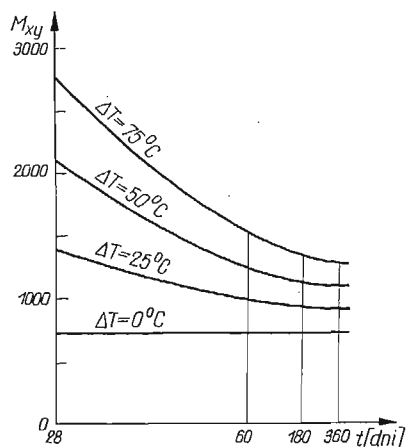


Rys. 8. Wykres zmienności w czasie największych momentów w kGcm/cm na krawędzi zamocowanej dla $q = 0,26$ kGm/cm i różnych ΔT ; a) M_x , b) M_y

Rys. 10. Wykres zmienności w czasie największych momentów M_{xy} w kGcm/cm na krawędzi podpartej przegubowo dla $q = 0,26$ kG/cm² i różnych ΔT



Rys. 9. Wykres zmienności w czasie największych momentów w kGcm/cm, w połowie rozpiętości płyty dla $q = 0,26$ kG/cm² i różnych ΔT ; a) M_x , b) M_y



5. Omówienie wyników

Rysunki 3, 4, 5 i 7 przedstawiają w ujęciu aksometrycznym wykresy momentów M_x , M_y i M_{xy} wywołane obciążeniem pionowym oraz działaniem temperatury przy gradencie temperatury 75°C . Podobne wyniki uzyskał THRUN w pracy [4]; dotyczyły one tylko zagadnień temperaturowych. Wpływ pełzania betonu przy $t = 360$ dni na wielkość momentów przedstawiony jest na rys. 6. Na rys. 8 i 9 pokazano zmienność momentów M_x i M_y jako funkcję czasu dla dwóch wybranych punktów: w środku płyty oraz w połowie krawędzi zamocowanej. Rysunek 10 przedstawia zmienność momentu skręcającego.

Przechodząc do analizy uzyskanych wykresów można stwierdzić, że pełzanie betonu znacznie zmniejsza rzędne maksymalnych momentów. Wynika to z porównania rys. 5 i 6. Tak np. moment M_x wzdłuż krawędzi maleje o około 69%, a moment M_y w połowie krawędzi zamocowanej o około 64%. Z rys. 8 i 9 wynika, że wartości momentów M_x i M_y maleją przy wzroście t ; zmniejszenie wartości tych momentów jest tym większe, im gradient temperatury jest większy. Uwagi te dotyczą zarówno rys. 8 jak i rys. 9. Rysunki 8, 9 i 10 zostały wykonane w skali logarytmicznej, jeśli chodzi o oś t ; z obliczeń na EMC wynika pewien spadek wartości momentów na rys. 8b, 9b i 10 dla $\Delta T = 0^\circ\text{C}$, co nie zostało uwidocznione na rysunkach z powodu ich małej skali. Z zestawionych wykresów wynika, że wymiarowanie tego rodzaju płyt żelbetowych przy znacznych gradientach temperatury i dużych obciążeniach jest nieekonomiczne, albowiem maksymalne momenty występują przy $t = 28$ dni i maleją ze wzrostem t . Stąd wynika celowość odpowiedniego izolowania powierzchni płyty od strony źródła ciepła lub oddalenie płyty od źródła ciepła tak, aby nie dopuścić do dużych gradientów temperatury. Potwierdzeniem, że obliczone wielkości momentów zginających wywołanych polem temperatury osiągają duże wartości są wyniki eksperymentalnych badań elementów zginanych pod wpływem pola temperatury [5].

Literatura cytowana w tekście

1. W. NOWACKI, *Zagadnienia termosprężystości*, Warszawa 1956.
2. Z. KĄCZKOWSKI, *Teoria płyt*, Warszawa 1968.
3. A. MITZEL, *Reologia betonu*, Warszawa 1972.
4. Z. THRUN, *Termiczne stany odkształcenia i naprężenia w cienkich płytach*, Arch. Mech. Stos., 6, (1954).
5. В. Н. САМОЙЛЕНКО, А. А. БОРОДИН, Н. А. РАЗРЕНОВА, *Исследование работы двух- и трехпролетных железобетонных балок на совместное действие нагрузки и неравномерного нагрева*. В «Работа железобетонных конструкций при высоких температурах» ред. А. Милобанова, Москва, 1972, стр. 88—98.

Резюме

РЕОЛОГИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ ПОД ВЛИЯНИЕМ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

В работе прееанализированы значения и распределения внутренних сил в железобетонных плитах подвергнутых действию высокой температуры и большим длительным нагрузкам. Выведены формулы жесткости железобетонных плит с учетом влияния ползучести бетона. Метод использования приведенных формул иллюстрируется на примере прямоугольной плиты, свободно лежащей на двух противоположных краях и закрепленной на двух. Сделан анализ изгибающих и крутящих моментов в функции времени для разных градиентов температуры. Представлены также практические рекомендации предохранения плит от воздействия высоких температур.

S u m m a r y

RHEOLOGY OF REINFORCED CONCRETE PLATES IN THE TEMPERATURE FIELD

The paper presents an analysis of the magnitude and distribution of internal forces arising in reinforced concrete plates subject to high temperatures and large long-lasting loads. Formulae for orthotropic concrete plate rigidity are derived, creep of the concrete being taken into consideration.

Applications of the formulae derived are illustrated on the example of a rectangular plate simply supported on two opposite edges and clamped at the remaining edges. Time-variation of the bending and twisting moments is analyzed at various temperature gradients. Practical recommendations concerning the protection of plates against high temperature influences are given.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 września 1973 r.

PEWIEN ITERACYJNY SPOSÓB WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ W TARCZACH
WIELOSPÓJNYCH

ZBIGNIEW BUDZIANOWSKI FELIKS ANDERMANN,
JÓZEF WRANIK (GLIWICE)

1. Wstęp

W niniejszej pracy przedstawiono sposób obliczania tarcz wielospójnych (o skokowo zmiennej grubości lub z otworami) polegający na wielokrotnym rozwiązywaniu odpowiednio dobranej tarczy jednospójnej i pozwalający określić stan naprężenia w tarczy wielospójnej metodą iteracyjną.

Sposób ten pozwala zatem na rozwiązanie problemu trudniejszego przez wielokrotne rozwiązanie problemu łatwiejszego. Obliczenie tarczy jednospójnej, mimo że stanowi problem łatwiejszy, nie jest zadaniem prostym i wymaga w większości przypadków bądź korzystania z gotowych rozwiązań, np. podanych w [3], lub z elektronicznych maszyn cyfrowych. W przypadku korzystania z maszyn przedstawiony sposób pozwala obliczyć tarcze wielospójne na podstawie programów opracowanych dla tarcz jednospójnych.

Zgodnie z powszechnie przyjętymi założeniami w przypadku tarcz o skokowo zmiennej grubości pomija się fakt występowania w strefie przyuskokowej przestrzennego stanu naprężeń. W pracy [1] wykazano na drodze doświadczalnej, że w strefie tej naprężenia równoległe do środkowej płaszczyzny tarczy różnią się nieznacznie od analogicznych naprężeń obliczonych dla płaskiego stanu naprężenia, mimo występowania dodatkowych naprężeń skierowanych prostopadle do tej płaszczyzny.

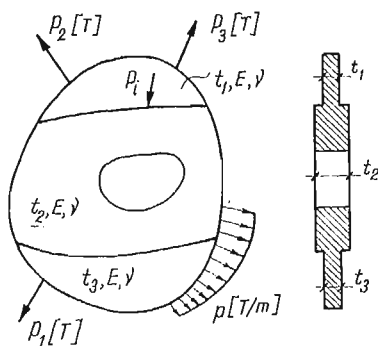
Sposób postępowania opisano na przykładzie prostokątnej tarczy bezotworowej z jedną skokową zmianą grubości i na tarczy perforowanej. Na zakończenie podano dwa przykłady liczbowe.

2. Przedstawienie problemu

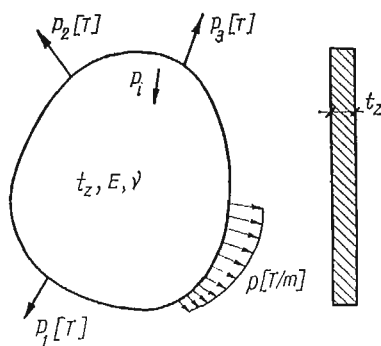
Stan naprężenia w jednorodnej tarczy wielospójnej (rys. 1) będzie poszukiwany przez obliczanie tarczy jednospójnej (rys. 2), której kontur zewnętrzny przystaje do konturu tarczy wielospójnej. Tarczę jednospójną o dowolnej grubości będziemy w dalszym ciągu nazywali tarczą zastępczą. Rozwiązanie dla tarczy wielospójnej otrzymamy jako sumę kolejnych rozwiązań tarczy zastępczej dla kolejnych składowych obciążeń, z których pierwsze obciążenie składowe jest identyczne z obciążeniem tarczy wielospójnej (rys. 2),

następne zaś wynikają z rozwiązań tarczy zastępczej w poprzedzających etapach postępowania.

Metodę rozwiązania zadania przedstawimy na przykładzie prostokątnej tarczy bezotwornej z jedną zmianą grubości, obciążonej siłami $p(x)$, $Y(x)$, $X(x)$ (rys. 3). Niech tarcza z tym obciążeniem tworzy układ wyjściowy U_0 , dla którego poszukuje się rozwiązania.

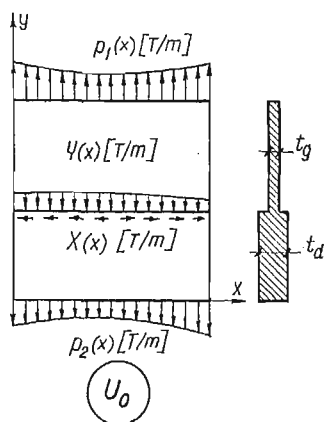


Rys. 1

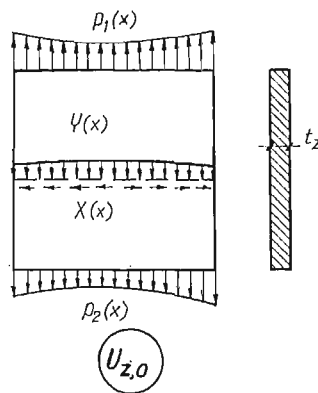


Rys. 2

Wprowadzimy do obliczeń zastępczą tarczę gładką o grubości t_z , która wraz z obciążeniem tarczy rzeczywistej tworzy układ zastępczy $U_{z,0}$ (rys. 4). Załóżmy, że układ ten można rozwiązać i że znane są tym samym stany naprężenia w górnej i dolnej części tarczy ($\sigma_x^g, \sigma_y^g, \tau^g$ oraz $\sigma_x^d, \sigma_y^d, \tau^d$). Występujący w tarczy zastępczej stan naprężenia wymuszamy



Rys. 3



Rys. 4

obecnie na tarczy rzeczywistej (rys. 5a), zapewniając w ten sposób ciągłość odkształcenia wzdłuż linii skokowej zmiany grubości, co prowadzi do układu \bar{U}_0 z rys. 5b, dla którego stan naprężenia jest określony w układzie $U_{z,0}$.

Wprowadzamy obecnie układ U_1 (rys. 6a) utworzony przez rzeczywistą tarczę obciążoną różnicą sił działających na tarczy układu U_0 oraz \bar{U}_0 , czyli

$$(1) \quad U_1 = U_0 - \bar{U}_0.$$

W linii zmiany grubości wystąpią w tym układzie obciążenia

$$(2) \quad \Delta_1 Y = Y - (\sigma_y^g t_g - \sigma_y^d t_d), \quad \Delta_1 X = X - (\tau^g t_g - \tau^d t_d);$$

wzdłuż brzegów poziomych zaś

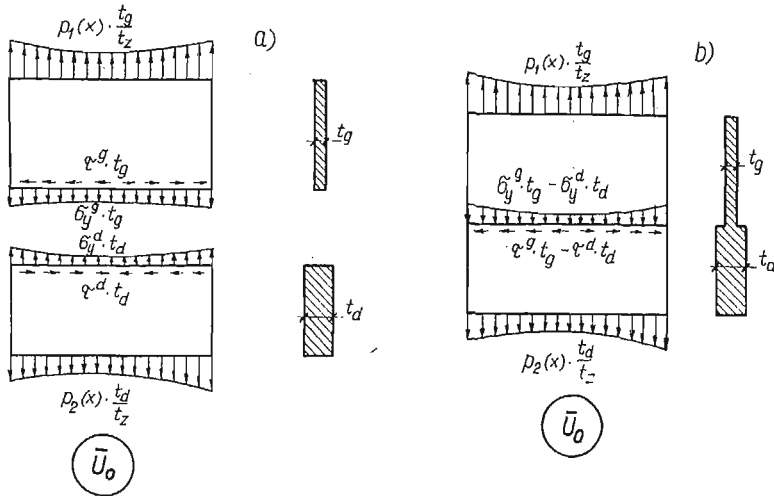
$$(3) \quad \Delta_1 p_1(x) = \mu_1 p_1(x), \quad \Delta_1 p_2(x) = \mu_2 p_2(x),$$

gdzie

$$(4) \quad \mu_1 = \frac{t_z - t_g}{t_z}, \quad \mu_2 = \frac{t_z - t_d}{t_z}.$$

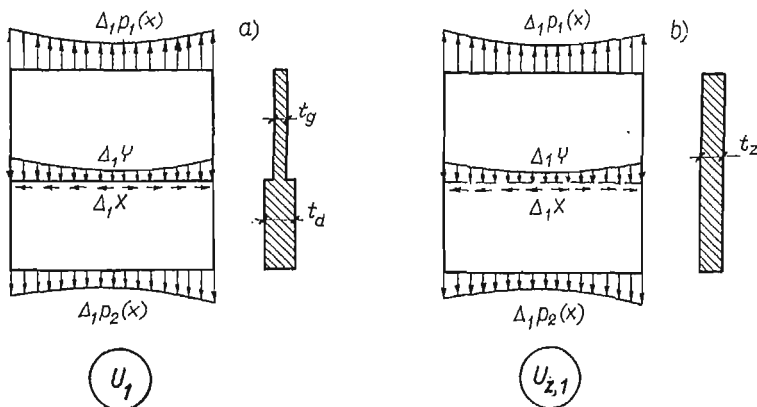
Ze wzoru (1) wynika, że

$$(5) \quad U_0 = \bar{U}_0 + U_1,$$



Rys. 5

czyli rozwiązanie tarczy w układzie U_0 zostało uwarunkowane rozwiązaniem układu U_1 . Sposób rozwiązania tego ostatniego będzie podobny do poprzedniego, zastosowanego do układu U_0 , tzn. rozwiązujemy tarczę gładką, obciążoną siłami (2) i (3), (rys. 6b), tworzącą

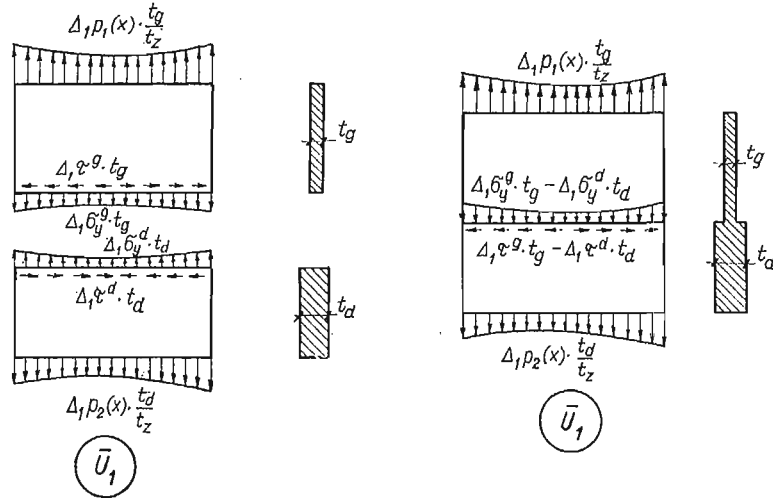


Rys. 6

układ $U_{z,1}$. Wymuszamy określony dla tej tarczy stan naprężenia ($\Delta_1 \sigma_x^g, \Delta_1 \sigma_y^g, \Delta_1 \tau^g$ oraz $\Delta_1 \sigma_x^d, \Delta_1 \sigma_y^d, \Delta_1 \tau^d$) na tarczy rzeczywistej układ \bar{U}_1 (rys. 7).

W następnym etapie wprowadzamy nowy układ U_2 , związany z poprzednimi relacją

$$(6) \quad U_2 = U_1 - \bar{U}_1.$$



Rys. 7

Obciążenie w linii zmiany grubości tarczy tego układu wyniesie

$$(7) \quad \begin{aligned} \Delta_2 Y &= \Delta_1 Y - (\Delta_1 \sigma_y^g t_g - \Delta_1 \sigma_y^d t_d), \\ \Delta_2 X &= \Delta_1 X - (\Delta_1 \tau^g t_g - \Delta_1 \tau^d t_d), \end{aligned}$$

natomiast wzdłuż brzegów

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta_2 p_1(x) &= \mu_1 p_1(x) - \mu_1 p_1(x) \frac{t_g}{t_z} = \mu_1^2 p_1(x), \\ \Delta_2 p_2(x) &= \mu_2 p_2(x) - \mu_2 p_2(x) \frac{t_d}{t_z} = \mu_2^2 p_2(x). \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu U_2 , stanowiące trzeci etap przybliżenia, przeprowadza się w sposób przedstawiony uprzednio dla układu U_1 .

Ze wzorów (5) oraz (6) otrzymamy

$$(9) \quad U_0 = \bar{U}_0 + \bar{U}_1 + U_2.$$

Ostateczne rozwiązanie układu U_0 tworzyć będzie przy przedstawionym sposobie iteracyjnym sumę kolejno wyznaczonych stanów naprężeń \bar{U}_n i tym samym identycznych z nimi stanów $U_{z,n}$:

$$(10) \quad U_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{U}_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_{z,n}.$$

O zbieżności szeregu (10) świadczy zbieżność sumy wartości obciążeń, działających na gładką tarczę zastępczą w układach $U_{z,n}$. Dla górnego i dolnego brzegu tarczy sumę tę wyznacza szereg geometryczny

$$(11) \quad p_{z,i}(x) = p_i(x) + \mu_i p_i(x) + \mu_i^2 p_i(x) + \dots = \frac{p_i(x)}{1 - \mu_i}, \quad i = 1, 2,$$

zbieżny pod warunkiem

$$(12) \quad |\mu_1| = \left| \frac{t_z - t_g}{t_z} \right| < 1, \quad |\mu_2| = \left| \frac{t_z - t_d}{t_z} \right| < 1.$$

Z kolei obciążenia tarczy zastępczej w linii zmiany grubości tarczy rzeczywistej wynoszą

$$(13) \quad \begin{aligned} Y_z &= Y + \Delta_1 Y + \Delta_2 Y + \dots + \Delta_k Y + \dots, \\ X_z &= X + \Delta_1 X + \Delta_2 X + \dots + \Delta_k X + \dots, \end{aligned}$$

gdzie

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta_k Y &= \Delta_{k-1} Y - (\Delta_{k-1} \sigma_y^g t_g - \Delta_{k-1} \sigma_y^d t_d), \\ \Delta_k X &= \Delta_{k-1} X - (\Delta_{k-1} \tau^g t_g - \Delta_{k-1} \tau^d t_d). \end{aligned}$$

Składowe obciążenia (13) stanowią również ciąg zbieżny, gdyż zbieżny ciąg tworzą obciążenia brzegowe (11).

Jednakową zbieżność dla obciążenia na górnym i dolnym brzegu uzyska się dla $|t_z - t_g| = |t_z - t_d|$ czyli

$$(15) \quad t_z = \frac{t_g + t_d}{2}.$$

W praktyce obliczeniowej ograniczamy się przy wyznaczaniu naprężeń w tarczy według (10) do kilku tylko przybliżeń. O dokładności wyniku otrzymanego dla r wyrazów orientować może reszta szeregu (11)

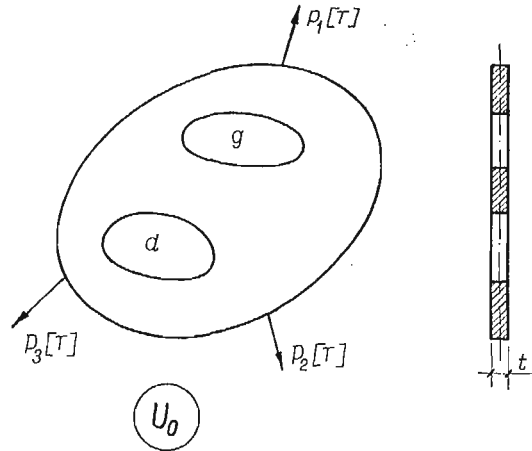
$$(16) \quad R_i = \frac{\mu_i^r}{1 - \mu_i} p_i(x).$$

Przedstawiona droga postępowania nie ulega zmianie w przypadku rozpatrywania tarczy o kilku skokowych zmianach grubości.

3. Tarcze perforowane o stałej grubości

Zasady obliczania takich tarcz (rys. 8) są podobne do stosowanych przy obliczaniu tarcz o skokowo zmiennej grubości. Wprowadzamy zastępczą tarczę bezotworową o grubości t_z , która wraz z obciążeniem układu rzeczywistego U_0 tworzy układ $U_{z,0}$ (rys. 9). Rozwiązując ją, otrzymujemy wzdłuż linii odpowiadających brzegom otworów w tarczy rzeczywistej siły przekrojowe W_0^g, W_0^d . Określony dla stanu $U_{z,0}$ stan naprężenia wymuszamy w tarczy rzeczywistej o grubości t , co wymaga zmiany obciążeń brzegowych zewnętrz-

nych i wewnętrznych do wartości $P \frac{l}{t_z}$ oraz $W_0 \frac{l}{t_z}$. Siły te tworzą wraz z tarczą rzeczywistą układ \bar{U}_0 (rys. 10).



Rys. 8

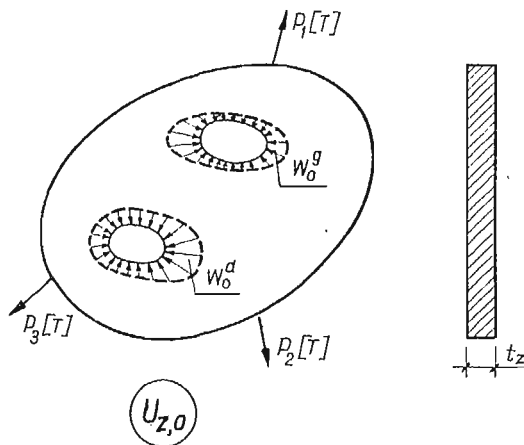
Między tym układem a układem wyjściowym zachodzi stosunek

$$(17) \quad U_0 = \bar{U}_0 + U_1,$$

gdzie nowo wprowadzony układ U_1 (rys. 11) otrzymuje się przez przyłożenie do tarczy rzeczywistej obciążeń, będących różnicą obciążeń układów U_0 i \bar{U}_0 , tzn. na brzegach zewnętrznych sił μP na brzegach zaś wewnętrznych sił ΔZ , gdzie

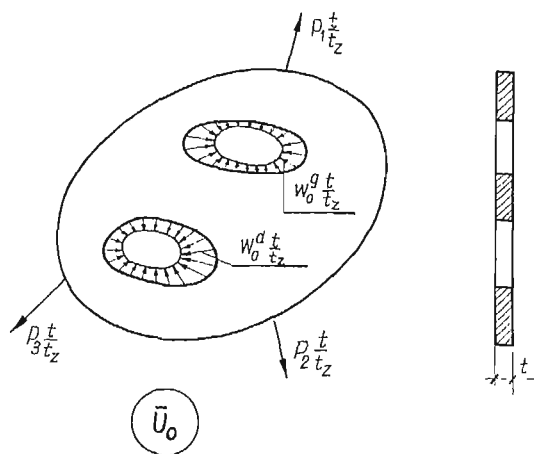
$$(18) \quad \mu = \frac{t_z - t}{t_z},$$

$$(19) \quad \Delta_1 Z_g = 0 - W_0^g \frac{t}{t_z}, \quad \Delta_1 Z_d = 0 - W_0^d \frac{t}{t_z}.$$



Rys. 9

W drugim cyklu obliczeń traktuje się układ U_1 , jak w cyklu pierwszym układ U_0 . Rozwiązuje się mianowicie tarczę zastępczą układu $U_{z,1}$ dla obciążeń układu U_1 (rys. 12) i otrzymuje się nowe wartości sił przekrojowych wzdłuż linii brzegów otworów tarczy



Rys 10

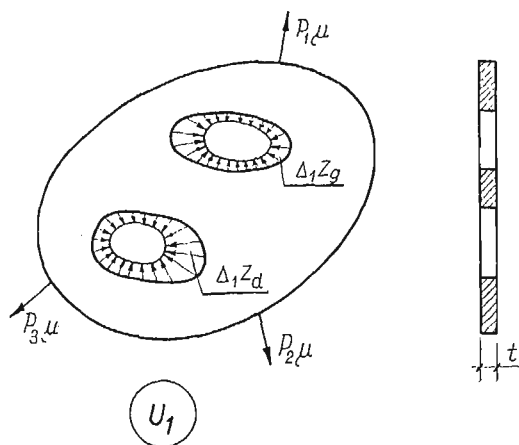
rzeczywistej — W_1 . Wymuszenie stanu naprężenia i odkształcenia tarczy układu $U_{z,1}$ na tarczy rzeczywistej prowadzi do układu \bar{U}_1 (rys. 13). Zachodzi znów związek analogiczny do (17)

$$(20) \quad U_1 = \bar{U}_1 + U_2,$$

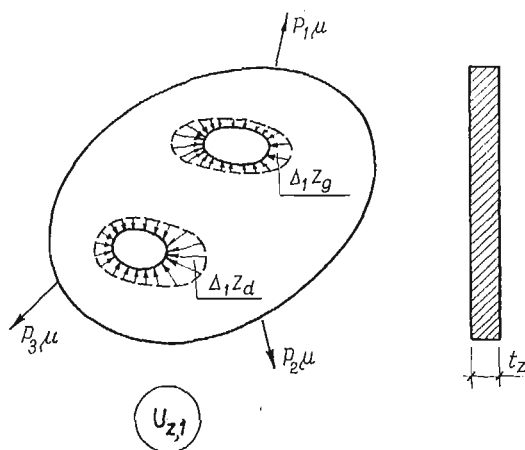
gdzie układ U_2 utworzony jest z tarczy rzeczywistej i obciążeń będących różnicą obciążeń układów U_1 i \bar{U}_1 , czyli z sił $\mu^2 P$ oraz

$$(21) \quad \Delta_2 Z_g = \Delta_1 Z_g - W_1^g \frac{t}{t_z}, \quad \Delta_2 Z_d = \Delta_1 Z_d - W_1^d \frac{t}{t_z}.$$

Układ U_2 jest wyjściowy dla trzeciego cyklu obliczeń.

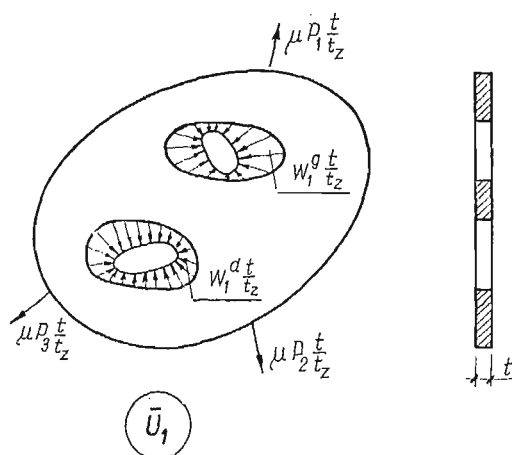


Rys. 11



Rys. 12

Przy opisanym postępowaniu iteracyjnym stan naprężeń w układzie rzeczywistym U_0 oblicza się jako sumę wyrażoną wzorem (10). Zauważa się, że dla $t_z = t$ jest $\mu = 0$, czyli w cyklu drugim i następnych jako obciążenia zewnętrzne występują jedynie siły wzdłuż brzegu otworów $\Delta_k Z$.



Rys. 13

4. Przykłady liczbowe

4.1. Tarcza prostokątna o jednej zmianie grubości. Rozpatrzmy przypadek pokazany na rys. 14a, dla którego znane jest rozwiązanie ścisłe.

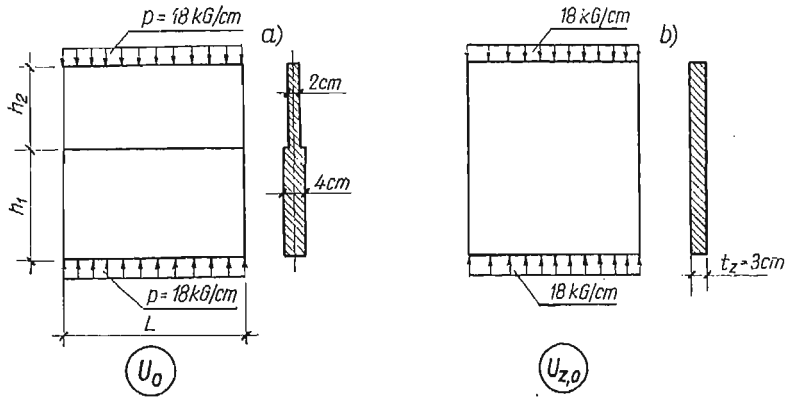
Zakładamy: $t_g = 2$ cm, $t_d = 4$ cm, $\nu = 0$.

Tarcza jest równomiernie ściskana obciążeniem $p = 18$ kG/cm.

Rozwiązanie ściśle badanego przypadku określa następujące wartości naprężeń:

dla części górnej: $\sigma_x^g = \tau^g = 0, \quad \sigma_y^g = \frac{p}{t_g} = -9 \text{ kG/cm}^2,$
 (22)

dla części dolnej: $\sigma_x^d = \tau^d = 0, \quad \sigma_y^d = \frac{p}{t_d} = -4,5 \text{ kG/cm}^2.$

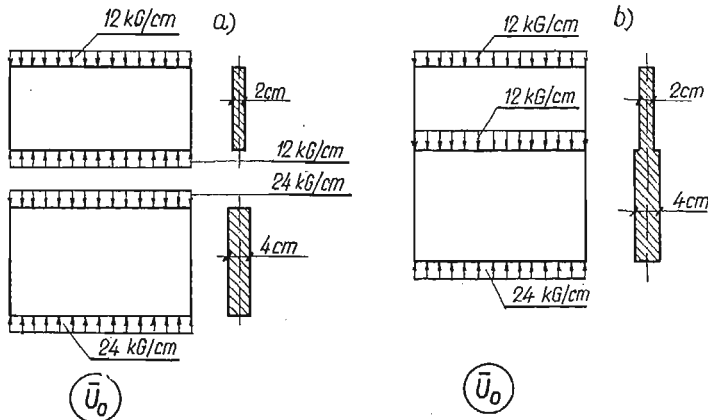


Rys. 14

Do wartości tych dojdziemy przy zastosowaniu przedstawionego sposobu. Przyjmujemy zgodnie z (15) grubość tarczy zastępczej

$$t_z = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ cm},$$

czyli zgodnie z (4): $\mu_1 = 1/3, \quad \mu_2 = -1/3.$



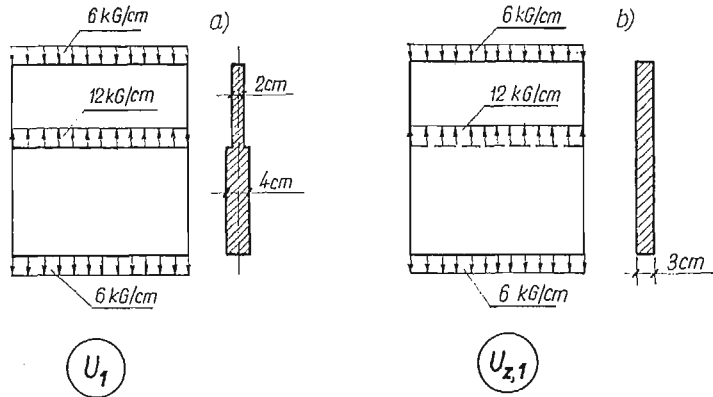
Rys. 15

Dla układu $U_{z,0}$, pokazanego na rys. 14b, otrzymuje się

$$\sigma_y^g = \sigma_y^d = -6 \text{ kG/cm}^2, \quad \tau^g = \tau^d = 0.$$

Wymuszenie tego stanu naprężenia na tarczy rzeczywistej prowadzi do układu \bar{U}_0 , przedstawionego na rys. 15.

Rysunek 16 pokazuje układ $U_1 = U_0 - \bar{U}_0$ oraz odpowiedni układ zastępczy $U_{z,1}$.



Rys. 16

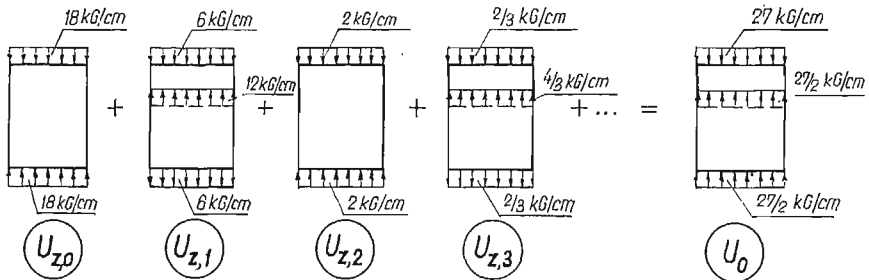
Dla tego ostatniego stanu naprężenia jest określony następująco:

część górna: $\Delta_1 \sigma_y^g = -2 \text{ kG/cm}^2$, $\Delta_1 \sigma_x^g = \Delta_1 \tau^g = 0$,

część dolna: $\Delta_1 \sigma_y^d = +2 \text{ kG/cm}^2$, $\Delta_1 \sigma_x^d = \Delta_1 \tau^d = 0$.

Można zatem utworzyć następne układy U_2 , $U_{z,2}$ itd.

Ciąg układów $U_{z,n}$ z relacji (10), prowadzący do układu U_0 , przedstawia rys. 17.



Rys. 17

Na podstawie (11) otrzymamy sumaryczne obciążenie

$$\text{dla górnej krawędzi} \quad p_{z,1}(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot 18 = 27 \text{ kG/cm},$$

$$\text{dla dolnej krawędzi} \quad p_{z,2}(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \cdot 18 = \frac{27}{2} \text{ kG/cm}.$$

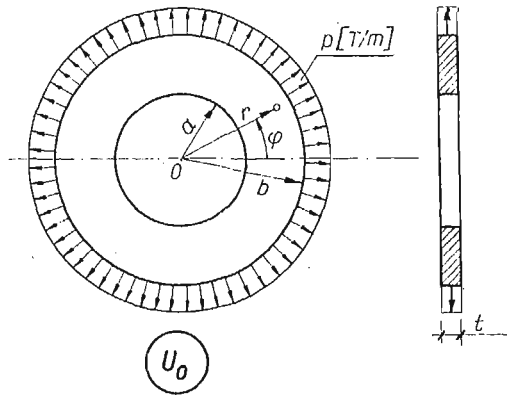
W miejscu zmiany grubości według (13)

$$Y_z = 0 + 12 + 0 + \frac{4}{3} + 0 + \frac{4}{27} + \dots = \frac{27}{2} \text{ kG/cm.}$$

Stan naprężenia w układzie U_0 z rys. 17 jest identyczny z (22).

4.2. Pierścień kołowy. Rozpatrzmy pierścień osiowo-symetrycznie równomiernie rozciągany (rys. 18), czyli tzw. zagadnienie Lamégo, dla którego znane jest rozwiązanie ścisłe (por. [2], str. 157)

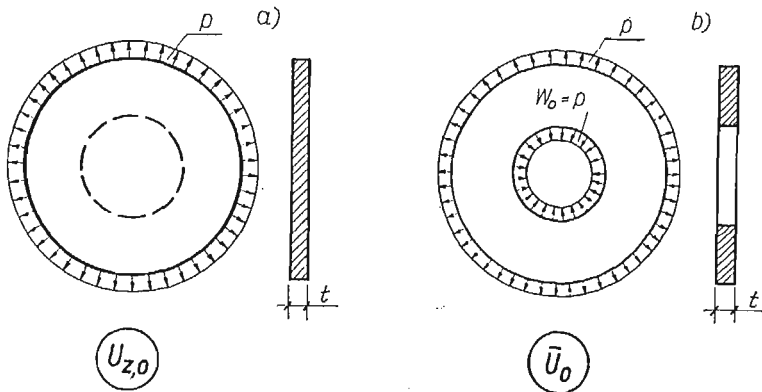
$$(23) \quad \sigma_r = \frac{p}{t} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{p}{t} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$



Rys. 18

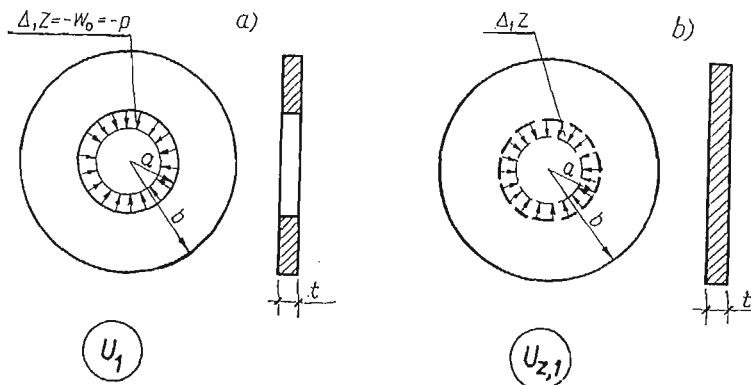
Wprowadzamy układ $U_{z,0}$ (rys. 19a) z kołową tarczą zastępczą o grubości $t_z = t$. Stan naprężenia w tej tarczy określony jest przez wyrażenie (por. [2], str. 161):

$$(24) \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{p}{t}.$$



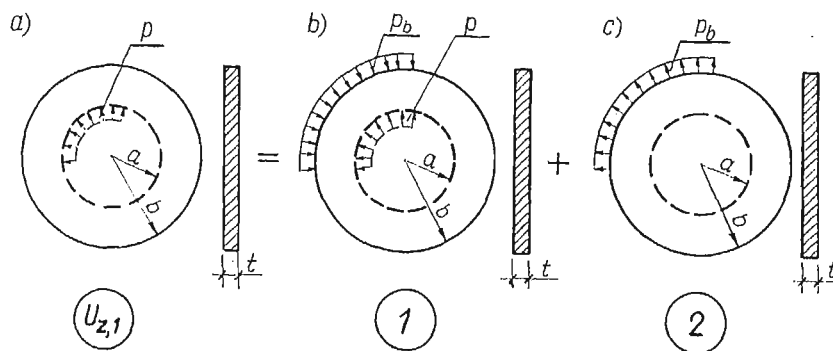
Rys. 19

Po wymuszeniu tego stanu naprężenia w tarczy rzeczywistej otrzymamy układ \bar{U}_0 z rys. 19b. Układ $U_1 = U_0 - \bar{U}_0$ pokazano na rys. 20a, odpowiedni układ zastępczy $U_{z,1}$ zaś na rys. 20b.



Rys. 20

Stan naprężenia dla tarczy układu $U_{z,1}$ otrzymamy przez nałożenie dwóch rozwiązań (rys. 21). Pierwszym z nich (rys. 21b) jest rozwiązanie kołowego wycinka tarczy nieograniczonej podane w [3], na str. 165, drugim zaś rozwiązanie tarczy kołowej osiowo-symetrycznie równomiernie rozciąganej (rys. 21c).



Rys. 21

Dla tarczy z rys. 21b stan naprężenia jest określony następująco:

$$\begin{aligned}
 & \text{dla } r < a & \sigma_r = \sigma_\varphi = \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{p}{t}, & \tau = 0; \\
 (25) & \text{dla } a < r \leq b & \sigma_r = -\sigma_\varphi = -\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{p}{t}\frac{a^2}{r^2}, & \tau = 0; \\
 & \text{dla } r = b & \sigma_r^b = -\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{p}{t}\frac{a^2}{b^2}, &
 \end{aligned}$$

Do kompletu wzorów niezbędnych do dalszych rachunków będą potrzebne wzory na odkształcenie wycinka pół-nieskończonego pod wpływem siły skupionej $P_0 > 0$ przyłożonej do wolnego końca, mianowicie

$$(1.18) \quad u_n = \frac{\sqrt{2} \beta P_0}{k \sin \frac{\theta}{2}} [\Theta(z) \sin \theta - \xi(z) \cos \theta],$$

oraz momentu $M_0 > 0$, tj. o zwrocie zgodnym ze zwrotem wskazówek zegara, również działającego na wolny koniec

$$(1.19) \quad u_n = \frac{M_0}{2\beta^2 D} \left[\xi(z) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \Theta(z) \right].$$

B. Tłok

W danym przypadku oprócz ciśnienia działającego na powierzchnię boczną do płaszczyzny przekroju przyłożone jest ciśnienie p_0 . Tym samym problem staje się trójwymiarowy i nie można oczekiwać, aby stosowane uprzednio zależności były całkowicie poprawne. Tok rozumowania jest następujący. Traktujemy tłok jako graniczny przypadek cylindra, tj. dla $R_0 \rightarrow 0$. Składowej promieniowej poszukujemy w postaci

$$(1.20) \quad -q = ku_n + C.$$

Naprężenia radialne i styczne wyrażą się wzorami:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[(1-\mu) \left(A' - \frac{B'}{r^2} \right) + \mu \left(A' + \frac{B'}{r^2} \right) + \frac{\mu p_0}{E} \right], \\ \sigma_t &= \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \left[\mu \left(A' - \frac{B'}{r^2} \right) + (1-\mu) \left(A' + \frac{B'}{r^2} \right) + \frac{\mu p_0}{E} \right]. \end{aligned}$$

Postępując w myśl opisanej już procedury, otrzymamy następujące wyrażenia na stałe dla tłoka:

$$(1.22) \quad \begin{aligned} k &= \frac{RE}{(1+\mu)(1-2\mu)R_n^2}, & C &= -\frac{\mu p_0 R}{(1+\mu)(1-2\mu)R_n}, \\ R_n &= \frac{2}{3}R, & I &= \frac{1}{24}R^3. \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe opisujące odkształcenie osi obojętnej tłoka przyjmuje postać:

$$(1.23) \quad D \frac{d^4 u_n}{dz^4} + \alpha^2 D \frac{d^2 u_n}{dz^2} + ku_n = -C.$$

Rozwiązaniem szczególnym powyższego równania jest wyrażenie

$$(1.24) \quad u_n^s = -\frac{\mu R_n}{E} p_0.$$

Natomiast wszystkie pozostałe rozwiązania są identyczne z rozwiązaniami dla cylindra.

2. Odształcenia tłoka i cylindra

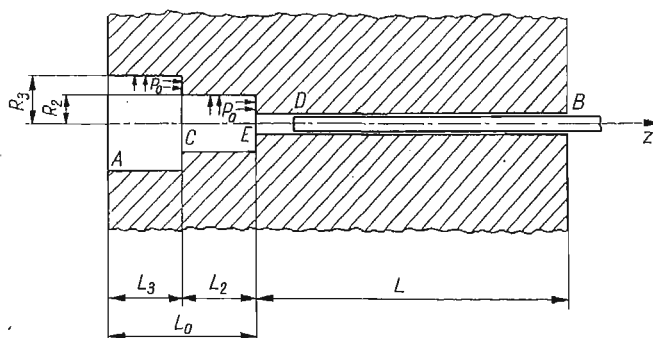
Dysponując wyrażeniami z p. 1. możemy przystąpić do określenia odkształceń tłoka i cylindra dla określonego przypadku. Ponieważ tłok może przyjmować względem cylindra dwa zasadnicze położenia, dla których rozwiązania będą się nieco różniły, rozdzielimy nasze obliczenia na te dwa przypadki. W obydwu przypadkach wartości λ określają podejście, w którym tłok może być traktowany jako pół-nieskończony, natomiast dla cylindra będziemy przyjmować, że jego końce znajdują się nieskończenie daleko od siebie.

Przypadek 1.

A. Tłok

Punkt o współrzędnej z jest miejscem, w którym badamy odkształcenie w obszarze DB . Siła skupiona P we wzorze (1.14) zostaje zastąpiona «elementem» $p(s)ds$. Element ten w punkcie o współrzędnej z wytworzy odkształcenie

$$\delta u_n(z) = \frac{\beta m}{2\sqrt{2}k} \left\{ \frac{1+2\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \Theta(s-z) + \frac{1-2\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \xi(s-z) \right\} p(s)ds.$$



Rys. 2. Przekrój komory oraz części roboczych manometru płaszczyzną $r = 0$

Całkowanie powyższego wyrażenia prowadzi do wzoru:

$$(2.1) \quad u_{n1} = \frac{\beta m}{2\sqrt{2}k} \left\{ \frac{1+2\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \int_0^z \Theta(z-s)p(s)ds + \frac{1-2\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \int_0^z \xi(z-s)p(s)ds + \right. \\ \left. + \frac{1+2\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \int_z^{l-d} \Theta(s-z)p(s)ds + \frac{1-2\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \int_z^{l-d} \xi(s-z)p(s)ds \right\}.$$

Wzór ten poprawnie opisuje odkształcenie belki nieskończonej. Obciążenie, symbolicznie oznaczone przez $p(s)$, wytworzy w punkcie D (rys. 2) moment gnący oraz siłę tnącą.

które zachowują ciągłość nieskończonego wycinka. Przechodząc do wycinka pół-nieskończonego, musimy przyłożyć odpowiedni moment M_{0D} oraz siłę V_{0D} ,

$$M_{0D} = \frac{m}{4\sqrt{2}\beta} \int_d^l \left\{ \frac{\Theta(s-d)}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{\xi(s-d)}{\sin \frac{\theta}{2}} \right\} p(s) ds,$$

$$V_{0D} = \frac{m}{2} \int_d^l \{ \Theta(s-d) - \xi(s-d) \operatorname{ctg} \theta \} p(s) ds.$$

Odkształcenia związane z ostatnimi wzorami wyrażą się następująco:

$$(2.2) \quad u_{n2} = \frac{m}{2\sqrt{2}k} \left[\Theta(z) - \xi(z) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right] \int_d^l \left\{ \frac{\Theta(s-d)}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{\xi(s-d)}{\sin \frac{\theta}{2}} \right\} p(s) ds \quad \text{dla } d \leq z \leq l-d,$$

$$(2.3) \quad u_{n3} = \frac{\beta m}{\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}} [\Theta(z) \sin \theta - \xi(z) \cos \theta] \int_d^l \{ \Theta(s-d) - \xi(s-d) \operatorname{ctg} \theta \} p(s) ds$$

dla $d \leq z \leq l-d$.

Całkowite odkształcenie osi obojętnej tłoka wyniesie

$$(2.4) \quad u_n = u_{n1} + u_{n2} + u_{n3} - \frac{\mu R_n}{E} p_0.$$

B. Cylinder

Interesuje nas wyłącznie odkształcenie na odcinku DB . Odcinek ten deformuje się pod wpływem tego samego ciśnienia co tłok, toteż odkształcenie, które oznaczymy u_{n1} ma identyczną postać ze wzorem (2.1). Dodatkowe odkształcenie w obszarze DB wytworzone przez obszar AD wyrazi się

$$(2.5) \quad u_{n2} = \frac{p_0 m}{2k} \{ \Theta(z-d-l_0) - \Theta(z) + [\xi(z) - \xi(z-d-l_0)] \operatorname{ctg} \theta \} \quad \text{dla } d+l_0 \leq z \leq l+l_0.$$

Aby poprawnie opisać interesującą nas deformację, musimy wziąć pod uwagę, że pręt nieskończony został przecięty w punkcie A i B oraz że w punktach C i E ma miejsce skokowa zmiana promienia cylindra, będąca źródłem dodatkowych odkształceń.

Ciągłość w punktach A i B przywracamy, przykładając odpowiednie siły tnące oraz momenty, a odkształcenia z nimi związane są następujące:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} u_{n3} &= \frac{\sqrt{2}\beta V_{0A}}{k \sin \frac{\theta}{2}} [\Theta(l_0+z) \sin \theta - \xi(l_0+z) \cos \theta], \\ u_{n4} &= \frac{M_{0A}}{2\beta^2 D} \left[\Theta(l_0+z) - \xi(l_0+z) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right], \\ u_{n5} &= \frac{\sqrt{2}\beta V_{0B}}{k \sin \frac{\theta}{2}} [\Theta(l-z) \sin \theta - \xi(l-z) \cos \theta], \\ u_{n6} &= \frac{M_{0B}}{2\beta^2 D} \left[\Theta(l-z) - \xi(l-z) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right], \quad \text{dla } d \leq z \leq l-d. \end{aligned}$$

Zasada obliczania V_{0A} , V_{0B} , M_{0A} , M_{0B} jest identyczna z opisaną w pkt. 2A.

Skutkiem skoku promienia w punktach C oraz E jest zmiana wartości modułu sztywności, kąta przesunięcia fazowego, sztywności na zginanie, itd. Wyobraźmy sobie, że przecięliśmy nasz wycinek w punktach C i E . Wtedy przesunięcia osi obojętnych rozdzielonych części będą różne. Celem przywrócenia ciągłości w tych punktach musimy «zszyć» wycinek, innymi słowy, przyłożyć takie wartości sił i momentów V_C^E , V_E^E , M_C^E , M_E^E , aby pokryły się osie obojętne. Układ równań określających te cztery wartości jest następujący:

$$(2.7) \quad \begin{aligned} V_E^P \delta_{E,C}^{V_E^P} + M_E^P \delta_{E,C}^{M_E^P} + V_C \left(\delta_{C,C}^{V_C^I} + \delta_{C,C}^{V_C^P} \right) + M_C \left(\delta_{C,C}^{M_C^I} + \delta_{C,C}^{M_C^P} \right) + \delta_{0C} &= 0, \\ V_E^P S_{E,C}^{V_E^P} + M_E^P S_{E,C}^{M_E^P} + V_C \left(S_{C,C}^{V_C^I} + S_{C,C}^{V_C^P} \right) + M_C \left(S_{C,C}^{M_C^I} + S_{C,C}^{M_C^P} \right) + S_{0C} &= 0, \\ V_C^I \delta_{C,E}^{V_C^I} + M_C^I \delta_{C,E}^{M_C^I} + V_E \left(\delta_{E,E}^{V_E^I} + \delta_{E,E}^{V_E^P} \right) + M_E \left(\delta_{E,E}^{M_E^I} + \delta_{E,E}^{M_E^P} \right) + \delta_{0E} &= 0, \\ V_C^I S_{C,E}^{V_C^I} + M_C^I S_{C,E}^{M_C^I} + V_E \left(S_{E,E}^{V_E^I} + S_{E,E}^{V_E^P} \right) + M_E \left(S_{E,E}^{M_E^I} + S_{E,E}^{M_E^P} \right) + S_{0E} &= 0, \end{aligned}$$

przy czym δ_{0C} , δ_{0E} oraz S_{0C} , S_{0E} oznaczają odpowiednio względne przesunięcia i nachylenia osi obojętnych, spowodowane obciążeniem, symbole typu np. V_E^P — siłą tnącą na prawo od punktu E (miejsca przecięcia). Zapis typu $\delta_{C,C}^{V_C^I}$ oznacza przesunięcie osi obojętnej, spowodowane siłą tnącą V_C^I (górny wskaźnik), a dolne wskaźniki oznaczają kolejno, gdzie odkształcenie występuje oraz gdzie jest mierzone.

Taki sam układ równań możemy napisać dla momentów i sił jednostkowych. Wartości δ i S spowodowane wartościami $V = 1$ oraz $M = 1$ można otrzymać w wyniku rachunku (por. [3], rozdz. III). Wykorzystując te wartości, układ równań (2.7) można rozwiązać metodą kolejnych przybliżeń. Siły i momenty działające po obu stronach przesunięć różnią się jedynie znakami:

$$\begin{aligned} |V_E^I| &= |V_E^P| = V_E, & |M_E^I| &= |M_E^P| = M_E, \\ |V_C^I| &= |V_C^E| = V_C, & |M_C^I| &= |M_C^E| = M_C. \end{aligned}$$

Odształcenia spowodowane powyższymi siłami oraz momentami będą następujące:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} u_{n7} &= \frac{\sqrt{2} \beta V_E^P}{k \sin \frac{\theta}{2}} [\Theta(z) \sin \theta - \xi(z) \cos \theta], \\ u_{n8} &= \frac{M_E^P}{2p^2 D} \left[\Theta(z) - \xi(z) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right], \\ u_{n9} &= \frac{\sqrt{2} \beta V_C^P}{k \sin \frac{\theta}{2}} \{ \Theta[(l_2 + z), z^*, \varphi] \sin \theta - \xi[(l_2 + z), z^*, \varphi] \cos \theta \}, \\ u_{n10} &= \frac{M_C^E}{2\beta^2 D} \left\{ \Theta[(l_2 + z), z^*, \varphi] - \xi[(l_2 + z), z^*, \varphi] \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right\}. \end{aligned}$$

W równaniach (2.8) zapis typu $\Theta[(l_2 + z), z, \varphi]$ należy rozumieć jako $e^{-\lambda(l_2 + z) + z^*} \cos[\lambda_0(l_2 + z) + \varphi]$. Wielkości z^* oraz φ są odpowiedzialne za zmianę amplitudy oraz przesunięcia fazowego, jakie mają miejsce w obszarze CE (względem obszaru EB) na skutek zmiany promienia wewnętrznego w punkcie E .

Drugim efektem «skoku» w punktach C i E jest odkształcenie związane z działaniem ciśnienia p_0 (o kierunku osiowym) na pierścieniu wykroju. Działanie to możemy zastąpić przyłożeniem odpowiednich sił oraz momentów do osi obojętnej. Siły tnące (zgodne z kierunkiem osi z) nie dają żadnego wkładu. Wkład pochodzący od momentów da się zapisać w postaci:

$$(2.9) \quad u_{n11} = -\frac{p_0}{4\beta^2 D \sin \theta} \left\{ \frac{R_2^2 - R_0^2}{2} - \frac{R_2^3 - R_0^3}{3R_n} \right\} \xi(z) \quad \text{dla} \quad d \leq z \leq l,$$

$$(2.10) \quad u_{n12} = -\frac{p_0}{4\beta^2 D \sin \theta} \left\{ \frac{R_3^2 - R_2^2}{2} - \frac{R_3^3 - R_2^3}{3R_n'} \right\} \xi[(l_2 + z), z^*, \varphi] \quad \text{dla} \quad d \leq z \leq l.$$

We wzorach (2.8), (2.9) i (2.10) efekty zmian promienia wewnętrznego zostały zastąpione odpowiednimi siłami oraz momentami przyłożonymi do promienia osi obojętnej. Wobec tego, że nie zachodzi tu obciążenie powierzchni zewnętrznej bądź wewnętrznej wycinka, jak to było rozpatrywane uprzednio, powstaje pytanie, które z dwóch par wzorów — (1.6) i (2.14) oraz (1.7) i (2.15) — mają być użyte w celu obliczenia deformacji cylindra. Właściwym miernikiem wydaje się być tu charakter krzywej odkształcenia osi obojętnej. Jeśli odpowiada on obciążeniu wewnętrznemu, należy korzystać ze wzorów (1.6) i (2.14), w przeciwnym przypadku z zależności (1.7) i (2.15).

Przypadek 2.

Sytuacja, którą teraz rozpatrujemy, różni się od poprzedniej tym, że czoło tłoka znajduje się w obszarze komory, tj. pomiędzy punktami C i E . Przyjmując, że punkt D związany jest z początkiem tłoka, mamy w dalszym ciągu $DE = d$. W celu uczynienia zapisu bardziej przejrzystym, rozbijmy obliczenia na dwie części:

dla obszaru DE

$$(2.11) \quad u_n(z) = \frac{p_0 m}{2k} \{2 - \Theta(z) - \Theta(d-z) + [\xi(z) + \xi(d-z)] \operatorname{ctg} \theta\} +$$

$$+ \frac{\beta m}{2\sqrt{2}k} \left\{ \frac{1 + 2\cos \theta}{\cos \frac{\theta}{2}} \int_d^{l+d} \Theta(s-z) p(s) ds + \frac{1 - 2\cos \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \int_d^{l+d} \xi(s-z) p(s) ds \right\} +$$

$$+ \frac{m}{2k} \left[\Theta(z) - \xi(z) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right] \left\{ \frac{p_0 \xi(d)}{\sin \theta} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \int_d^{l+d} \left[\frac{\Theta(s)}{\cos \frac{\theta}{2}} - \frac{\xi(s)}{\sin \frac{\theta}{2}} \right] p(s) ds \right\} +$$

$$+ \frac{m}{\sqrt{2}k} \left\{ \frac{p_0 \left[1 - \Theta(d) + \xi(d) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right]}{\sqrt{2} \sin \theta} + \frac{\beta}{\sin \frac{\theta}{2}} \int_d^{l+d} [\Theta(s) - \xi(s) \operatorname{ctg} \theta] p(s) ds \right\} \times$$

$$\times [\Theta(z) \sin \theta - \xi(z) \cos \theta] - \frac{\mu R_n}{E} p_0, \quad 0 \leq z \leq d;$$

dla obszaru EB

$$\begin{aligned}
 (2.12) \quad u_n(z) = & \frac{p_0 m}{2k} \{ \Theta(z-d) - \Theta(z) + [\xi(z) - \xi(z-d)] \operatorname{ctg} \theta \} + \\
 & + \frac{\beta m}{2\sqrt{2}k} \left\{ \frac{1+2\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \int_d^z \Theta(z-s)p(s) ds + \frac{1-2\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \int_d^z \xi(z-s)p(s) ds + \right. \\
 & \left. + \frac{1+2\cos\theta}{\cos\frac{\theta}{2}} \int_z^{l+d} \Theta(s-z)p(s) ds + \frac{1-2\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \int_z^{l+d} \xi(s-z)p(s) ds \right\} + \\
 & + \frac{m}{2k} \left\{ \frac{p_0 \xi(d)}{\sin\theta} + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \int_d^{l+d} \left[\frac{\Theta(s)}{\cos\frac{\theta}{2}} - \frac{\xi(s)}{\sin\frac{\theta}{2}} \right] p(s) ds \right\} \left[\Theta(z) - \xi(z) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right] + \\
 & + \frac{m}{\sqrt{2}k} \left\{ \frac{p_0 \left[1 - \Theta(d) + \xi(d) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right]}{\sqrt{2} \sin\theta} + \frac{\beta}{\sin\frac{\theta}{2}} \int_d^{l+d} [\Theta(s) - \xi(s) \operatorname{ctg} \theta] p(s) ds \right\} \times \\
 & \times [\Theta(z) \sin\theta - \xi(z) \cos\theta] - \frac{\mu R_n}{E} p_0, \quad d \leq z \leq l+d.
 \end{aligned}$$

Obydwa wzory określają odkształcenie tłoka. Porównując wzory (2.11) i (2.12) ze wzorami (2.1)–(2.3) nie jest rzeczą trudną dostrzec zmiany, jakie zaszły. Ponieważ charakter tych zmian dla cylindra jest zbliżony, wyrażeni na odkształcenie cylindra nie będziemy podawali.

Pozostaje jeszcze obliczyć zależności pozwalające znaleźć odkształcenie dla dowolnego r . Korzystając z równania (1.4) otrzymamy:

tłok

$$(2.13) \quad u(r, z) = u_n(z) \frac{r}{R_n},$$

cylinder

$$(2.14) \quad u(r, z) = \frac{u_n(z) k R_0}{E[(R_1/R_0)^2 - 1]} \left[(1-\mu) \frac{R_n}{R_0} \frac{r}{R_0} + (1+\mu) \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 \frac{R_n}{r} \right],$$

dla obciążenia wewnętrznego oraz

$$(2.15) \quad u(r, z) = \frac{u_n(z) k R_1}{E[(R_1/R_0)^2 - 1]} \left[(1-\mu) \frac{R_n}{R_0} \frac{r}{R_0} + (1+\mu) \frac{R_n}{r} \right]$$

dla obciążenia zewnętrznego.

3. Wyznaczanie kąta przesunięcia fazowego

Niewątpliwie najdogodniej jest wyznaczyć powyższą wielkość doświadczalnie. Należy więc wytworzyć w cylindrze pasek jednorodnego ciśnienia bądź też przyłożyć obciążenie pół-nie skończone, co w praktyce sprowadzi się do warunku, aby długość obciążenia była

duża w porównaniu z długością fali — $2\pi/\lambda_0$. Pomiaru naprężeń stycznych i osiowych można dokonać metodą tensometryczną, a następnie dobrać tak kąt θ , aby krzywe doświadczalne i teoretyczne były ze sobą zgodne.

4. Dyskusja oraz wnioski końcowe

Jak zaznaczono na początku, interesuje nas zarówno funkcja rozkładu ciśnienia $p(z)$ jak i funkcja szerokości szczeliny, tj. $h[p(z)] = R_0[p(z)] - R[p(z)]$. Wypada w tym miejscu wyjaśnić, że przybliżone równanie opisujące zasadę zachowania strumienia pola prędkości w szczelinie ma postać (jest to równanie Reynoldsa dla danego przypadku):

$$(4.1) \quad \frac{d}{dz} \left[\frac{\rho(p)h^3(p)}{\eta(p)} \frac{dp}{dz} \right] = 0,$$

przy czym funkcję gęstości $\rho(p)$ oraz funkcję lepkości $\eta(p)$ należy wyznaczyć doświadczalnie. Rozwiązując równanie (4.1) otrzymamy funkcję $p(z)$. Dodajmy jeszcze, że używana w pracy funkcja $p(s)$ jest rozwiązaniem równania:

$$(4.2) \quad \frac{d}{ds} \left[\frac{\rho(s)}{\eta(s)} \frac{dp(s)}{ds} \right] = 0.$$

Obliczenia teoretyczne wykonane przez ŻOCHOWSKIEGO [8] na bazie prostego modelu odkształceń tłoka i cylindra oraz badania doświadczalne sugerują, że największy wpływ na dokładność końcowych wyników mają dwa obszary: A) Obszar czoła tłoka, gdzie należy się spodziewać największego gradientu ciśnienia, z uwagi na przebieg funkcji $\rho(p)$ i $\eta(p)$. Stąd też powstała konieczność uwzględnienia wpływu, jaki wnosi kształt komory na rozkład ciśnienia w szczelinie. Należy jeszcze dodać, że na podstawie wzorów (1.22) oraz (2.13) należy się spodziewać, iż poprawka do ciśnienia mierzonego będzie mniejsza niż wynika to z pracy [8]. B) Obszar $p \rightarrow 0$, gdzie dominującym wydaje się być czynnik opisany wzorem (1.24). W modelu Żochowskiego powstała sytuacja, że przy pewnym ciśnieniu zachodziło $h = 0$, co z punktu poprawnego działania manometru jest niedopuszczalne.

W rozpatrywanym modelu zwiększenie ciśnienia o Δp spowoduje przesunięcie się «środka ciężkości» ciśnienia w kierunku większych wartości z . Pociągnie to za sobą wzrost wartości wyrazów u_{n5} oraz u_{n6} [wzory (2.6)], tak więc, o ile tylko zajdzie sytuacja taka, że $h = 0$, będzie ona miała miejsce dla większego ciśnienia niż w modelu Żochowskiego

Autor pragnie podziękować p. dr. R. WIŚNIEWSKIEMU za twórczą inspirację oraz cenne wskazówki, które towarzyszyły pisaniu powyższej pracy.

Literatura cytowana w tekście

1. S. TIMOSHENKO, *Strength of Materials*, New York 1941.
2. S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, New York 1934.
3. M. HETÉNYI, *Beams on Elastic Foundation*, 1946.
4. J. P. DEN HARTOG, *Advanced Strength of Materials*, New York 1952.

5. L. F. COFFIN, C. W. MAC GREGOR, *Approximate Solutions for Symetrically Loaded Thick-Walled Cylinders*, Trans. A. S. M. E., J. Appl. Mech., 4, 14, (1947).
6. M. V. BARTON, *The Circular Cylinder with a Band of Uniform Pressure on a Finite Length of the Surface*, Trans. A.S.M.E., J. Appl. Mech., 63, (1941), A-97.
7. A. RANKIN, *Shrink Fit Stresses and Deformations*, Trans. A.S.M.E., J. Appl. Mech., 66, (1944), A-77.
8. М. К. Жоховский, *Теория манометров с неуплотненным поршнем*, Москва 1953.

Р е з ю м е

ДЕФОРМАЦИЯ РАБОЧИХ ДЕТАЛЕЙ МАНОМЕТРА
С НЕУПЛОТНЕННЫМ ПОРШНЕМ

В работе приводятся результаты теоретических расчетов деформаций рабочих деталей манометра с неуплотненным поршнем. Полученное решение является приближенным. Приближение опирается на теорию балки на упругом основании. В работе учтено влияние формы камеры на деформацию рабочих деталей.

S u m m a r y

DEFORMATION OF WORKING PARTS OF A DEADWEIGHT-PISTON PRESSURE GAUGE

The paper presents the theory of deflection of working parts of a deadweight-piston pressure gauge. The approximate solution obtained is based upon the extension of the theory of a beam resting on elastic foundation.

Influence of the form of one chamber on the deflections was taken into account.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT FIZYKI, ZESPÓŁ WYSOKICH CIŚNIEŃ

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1973 r.

ZGINANIE PŁYTY KWADRATOWEJ Z CENTRYCZNIE PÓŁOŻONYM OTWOREM KWADRATOWYM

GRZEGORZ JEMIELITA (WARSZAWA)

Wstęp

Zagadnienie zginania płyt z otworami badano głównie z uwagi na koncentrację naprężeń w pobliżu otworu. Najwięcej rozwiązań uzyskano stosując metodę funkcji zmiennej zespolonej (por. [1, 2], s. 573—590). Formalnie ściśle rozwiązanie płyty kwadratowej, swobodnie podpartej na obwodzie zewnętrznym, z centrycznie położonym otworem kwadratowym, swobodnie podpartym, podano w [3] (por. też [4] s. 358, [2] s. 483—488). Z powodu trudności w uzyskaniu rozwiązań zamkniętych lub formalnie ścisłych dla płyt prostokątnych z otworem w wielu przypadkach stosowano metody przybliżone, takie jak: metoda elementów skończonych ([5], s. 180), metoda różnic skończonych [6] i jej odmianę — metodę elementów podstawowych opracowaną przez REIPERTA [7]. W niniejszej pracy podamy formalnie ściśle rozwiązanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym. Rozwiązania zostały uzyskane za pomocą pojedynczych szeregów Fouriera.

W punkcie pierwszym podajemy metodę rozwiązania zagadnienia płyty kwadratowej swobodnie podpartej na obwodzie zewnętrznym; brzeg otworu, zwany dalej brzegiem wewnętrznym, może być utwierdzony, swobodnie podparty, utwierdzony przesuwnie lub swobodny.

W punkcie drugim szczegółowo rozpatrzono płyty, na które działa obciążenie $q = \text{const}$, symetryczne względem wszystkich osi symetrii płyty.

Przypadek graniczny — płyta pełna — został rozpatrzony w punkcie trzecim. Możliwości rozszerzenia proponowanej metody na płyty o innym kształcie i innych warunkach podparcia brzegu zewnętrznego podano w punkcie czwartym. Praca jest zakończona przykładami liczbowymi. W całej pracy zakładamy, że rozpatrywane płyty są izotropowe o stałej sztywności D .

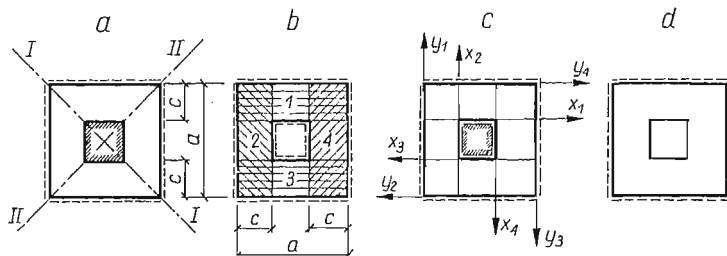
1. Metoda rozwiązania zagadnienia

Rozpatrujemy płyty pokazane na rys. 1. W rozważanych płytach wyróżniamy dwie osie symetrii pokazane na rys. 1a. Z płyty kwadratowej wyodrębniamy płyty prostokątne, każda o wymiarach $a \times c$ (rys. 1b). Wprowadza się cztery układy współrzędnych, pokazane na rys. 1c.

Korzystając z zasady superpozycji, dowolne obciążenie działające na płytę $q(x, y)$ można rozłożyć na cztery schematy, które kolejno oznaczymy: $S-S$, $S-A$, $A-S$, $A-A$ (rys. 2).

Funkcję ugięcia $W_1(x_1, y_1)$ pierwszej płyty prostokątnej możemy zapisać następującym wzorem

$$(1.1) \quad W_1(x_1, y_1) = W_1^{SS}(x_1, y_1) + W_1^{SA}(x_1, y_1) + W_1^{AS}(x_1, y_1) + W_1^{AA}(x_1, y_1).$$

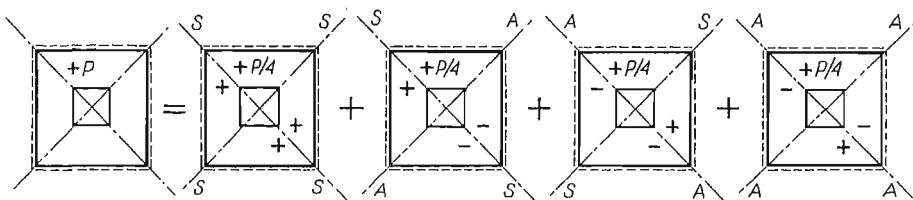


Rys. 1

Korzystając z symetrii zagadnienia, funkcję ugięcia dla płyt prostokątnych: drugiej, trzeciej i czwartej wyrażamy przez funkcje występujące w (1.1):

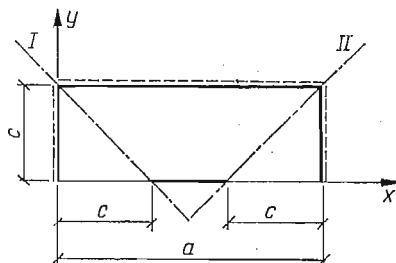
$$(1.2) \quad \begin{aligned} W_2(x_2, y_2) &= W_1^{SS}(a-x_2, y_2) + W_1^{SA}(a-x_2, y_2) - W_1^{AS}(a-x_2, y_2) - \\ &\quad - W_1^{AA}(a-x_2, y_2), \\ W_3(x_3, y_3) &= W_1^{SS}(x_3, y_3) - W_1^{SA}(x_3, y_3) - W_1^{AS}(x_3, y_3) + W_1^{AA}(x_3, y_3), \\ W_4(x_4, y_4) &= W_1^{SS}(a-x_4, y_4) - W_1^{SA}(a-x_4, y_4) + W_1^{AS}(a-x_4, y_4) - W_1^{AA}(a-x_4, y_4). \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, iż rozwiązanie zagadnienia płyty kwadratowej z otworem sprowadza się faktycznie do rozwiązania płyty prostokątnej oznaczonej na rys. 1b numerem



Rys. 2

pierwszym. Płyta ta jest podparta swobodnie na trzech brzegach, a na czwartym brzegu występują nieciągłe warunki brzegowe. Sposób podparcia oraz przyjęty w dalszych rozważaniach układ współrzędnych pokazano na rys. 3.



Rys. 3

Zależności między wielkościami geometrycznymi lub statycznymi na brzegu $y = 0$ a odpowiednimi im wielkościami wzdłuż linii $x = c$ i $x = a - c$ dla wszystkich schematów obciążeń zestawiono w tabelcy pierwszej.

Tablica 1

| Funkcja | Schemat znak funkcji | | | | Funkcja | Przedział | |
|---------------------|----------------------|-----|-----|-----|------------------------------|--------------------|---|
| | S-S | S-A | A-S | A-A | | | |
| $W(x, 0) =$ | + | + | - | - | $W(c, c-y) _{y=x}$ | $0 \leq x \leq c$ | 1 |
| | + | - | + | - | $W(c', y) _{y=x-c'}$ | $c' \leq x \leq a$ | 2 |
| $\varphi_y(x, 0) =$ | - | - | + | + | $\varphi_x(c, c-y) _{y=x}$ | 1 | |
| | + | - | + | - | $\varphi_x(c', y) _{y=x-c'}$ | 2 | |
| $M_y(x, 0) =$ | + | + | - | - | $M_x(c, c-y) _{y=x}$ | 1 | |
| | + | - | + | - | $M_x(c', y) _{y=x-c'}$ | 2 | |
| $V_y(x, 0) =$ | - | - | + | + | $V_x(c, c-y) _{y=x}$ | 1 | |
| | + | - | + | - | $V_x(c', y) _{y=x-c'}$ | 2 | |

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} W(x, y) &= \Phi_x^1(x, y) = \Phi_y^1(x, y) && \text{funkcja ugięcia,} \\ \varphi_y(x, y) &= \Phi_y^2(x, y), \quad \varphi_x(x, y) = \Phi_x^2(x, y) && \text{kąty obrotu,} \\ M_y(x, y) &= \Phi_y^3(x, y), \quad M_x(x, y) = \Phi_x^3(x, y) && \text{momenty zginające,} \\ V_y(x, y) &= \Phi_y^4(x, y), \quad V_x(x, y) = \Phi_x^4(x, y) && \text{zastępcze siły poprzeczne.} \end{aligned}$$

Korzystając z oznaczeń (1.3), zależności z tabelcy pierwszej można przedstawić ogólnie za pomocą funkcji:

$$(1.4) \quad \Phi_y^j(x, 0) = \begin{cases} (-1)^{k_I+J+1} \Phi_x^j(c, c-y)|_{y=x} & 0 < x < c, \\ \Phi_y^j(x, 0) & c < x < c', \\ (-1)^{k_{II}} \Phi_x^j(c', y)|_{y=x-c'} & c' < x < a, \end{cases}$$

gdzie $j = 1, 2, 3, 4$, $c' = a - c$,

$$k_I, k_{II} = \begin{cases} 0 & \text{gdy oś I, II — oś symetrii (S),} \\ 1 & \text{gdy oś I, II — oś antysymetrii (A).} \end{cases}$$

Aby spełnić warunki brzegowe dla $x = 0$ i $x = a$, funkcję ugięcia płyty $W(x, y)$ wyrażamy za pomocą pojedynczego szeregu Fouriera o postaci

$$(1.5) \quad W(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} W_m(y) \sin \alpha_m x,$$

gdzie $\alpha_m = m\pi/a$.

Podobnie wyrażamy obciążenie zewnętrzne

$$(1.6) \quad q(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} q_m(y) \sin \alpha_m x,$$

gdzie

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha_m x dx.$$

Po podstawieniu (1.5) i (1.6) do równania różniczkowego płyty o stałej sztywności D

$$(1.7) \quad D \nabla^2 \nabla^2 W = q$$

otrzymujemy układ rozdzielonych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach (por. [4], s. 315). Całka tak otrzymanego równania jest postaci (por. [4], s. 323)

$$(1.8) \quad W_m(y) = A_m \operatorname{ch} \alpha_m y + B_m \alpha_m y \operatorname{sh} \alpha_m y + C_m \operatorname{sh} \alpha_m y + D_m \alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m y + W_{mq}(y),$$

gdzie A_m, B_m, C_m, D_m są stałymi całkowania, W_{mq} jest całką szczególną o postaci (por. [4], s. 315)

$$(1.9) \quad W_{mq}(y) = \int_0^y \frac{\alpha_m(y-t) \operatorname{ch} \alpha_m(y-t) - \operatorname{sh} \alpha_m(y-t)}{2\alpha_m^3 D} q_m(t) dt.$$

Do wyznaczenia mamy cztery nieznanne grupy stałych. Eliminujemy dwie z nich wykorzystując warunki brzegowe na brzegu swobodnie podpartym $y = c$, gdzie mamy:

$$(1.10) \quad W(x, c) = M_y(x, c) = 0.$$

Wykorzystanie powyższych warunków prowadzi do następującego wyrażenia na funkcję $W(x, y)$:

$$(1.11) \quad W(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{\sin \alpha_m x}{\operatorname{ch} \theta_m} \left\{ D_m \left(\alpha_m y \operatorname{ch} \alpha_m(c-y) - \theta_m \frac{\operatorname{ch} \alpha_m y}{\operatorname{ch} \theta_m} \right) - \right. \\ \left. - C_m \operatorname{sh} \alpha_m(c-y) + W_{mq}(y) \operatorname{ch} \theta_m - W_{mq}(c) \operatorname{ch} \alpha_m y - \frac{1}{2} \left(W_{mq}(c) - \frac{1}{\alpha_m^2} \frac{d^2 W_{mq}(c)}{dy^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\theta_m \frac{\operatorname{sh} \alpha_m(c-y)}{\operatorname{ch} \theta_m} + \alpha_m(c-y) \operatorname{sh} \alpha_m y \right) \right\},$$

gdzie

$$\theta_m = \alpha_m c = m\pi \frac{c}{a}.$$

Na całym obszarze płyty prostokątnej obowiązuje postać funkcji ugięcia płyty (1.11). Aby otrzymać kąt obrotu φ_y , moment zginający M_y oraz zastępczą siłę poprzeczną V_y , należy na funkcji ugięcia (1.11) wykonać znane operacje różniczkowe. Korzystając z oznaczeń (1.3) zapisujemy wyżej wymienione wielkości w następującej postaci:

$$(1.12) \quad \Phi_y^j(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \Omega_m^j(y) \sin \alpha_m x, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$\begin{aligned}\Omega_m^1(y) &= W_m(y), & \Omega_m^2(y) &= \frac{dW_m(y)}{dy}, \\ \Omega_m^3(y) &= D \left[\nu \alpha_m^2 W_m(y) - \frac{d^2 W_m(y)}{dy^2} \right], \\ \Omega_m^4(y) &= D \left[(2-\nu) \alpha_m^2 \frac{dW_m(y)}{dy} - \frac{d^3 W_m(y)}{dy^3} \right],\end{aligned}$$

ν — oznacza współczynnik Poissona.

Na osi x występują pewne wielkości geometryczne i statyczne. Wielkości te na całym brzegu płyty $y = 0$ rozwijamy w pojedyncze sinusowe szeregi Fouriera o postaci

$$(1.13) \quad \Phi_y^j(x, 0) = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} A_m^j \sin \alpha_m x, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie

$$A_m^j = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi_y^j(x, 0) \sin \alpha_m x dx.$$

Wykorzystując zależności (1.4), wielkości A_m^j obliczamy z następujących równości:

$$(1.14) \quad A_m^j = R_m^j + S_m^j,$$

$$(1.15) \quad R_m^j = \frac{2}{a} \left\{ (-1)^{k_1+1+j} \int_0^c \Phi_x^j(c, c-x) \sin \alpha_m x dx + (-1)^{k_2} \int_c^a \Phi_x^j(c', x-c') \sin \alpha_m x dx \right\}.$$

$$(1.16) \quad S_m^j = \frac{2}{a} \int_c^{c'} \Phi_y^j(x, 0) \sin \alpha_m x dx,$$

$$j = 1, 2, 3, 4, \quad c' = a - c.$$

Występujące w (1.15) poszczególne wielkości geometryczne i statyczne Φ_x^j otrzymujemy wykonując pewne operacje różniczkowe na funkcji ugięcia (1.11). Ogólnie można to zapisać następująco:

$$(1.17) \quad \Phi_x^j(x, y) = L^j[W(x, y)], \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie L^j oznaczają operatory różniczkowe o postaci

$$\begin{aligned}L^1 &= 1, & L^2 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ L^3 &= -D \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \\ L^4 &= -D \left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Dla $y = 0$ szeregi (1.12) i (1.13) przedstawiają tę samą funkcję, więc dla każdego j spełnione są następujące równości:

$$(1.18) \quad A_m^j = R_m^j + S_m^j = \Omega_m^j(0), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Każda z powyższych równości przedstawia nieskończony układ równań, ponieważ wielkości A_m^j dane są w postaci nieskończonych szeregów, w których pod znakiem sumy występują nieznanne stałe C_i , D_i [por. (1.11), (1.15) i (1.17)].

Równości (1.18) będziemy kolejno nazywali:

- 1) dla $j = 1$ — warunkiem brzegowym na ugięcie,
- 2) dla $j = 2$ — warunkiem brzegowym na kąt obrotu,
- 3) dla $j = 3$ — warunkiem brzegowym na moment zginający,
- 4) dla $j = 4$ — warunkiem brzegowym na zastępczą siłę poprzeczną.

W przypadku gdy brzeg wewnętrzny nie doznaje ugięć lub obrotu, to na podstawie (1.16) mamy odpowiednio:

$$(1.19) \quad S_m^1 = 0, \quad S_m^2 = 0.$$

Jeżeli na brzeg wewnętrzny działają znane momenty $M(x)$ dla $c < x < c'$ lub znane obciążenie brzegowe $p(x)$, to wielkości S_m^3 i S_m^4 odpowiednio wynoszą:

$$(1.20) \quad S_m^3 = \frac{2}{a} \int_c^{c'} M(x) \sin \alpha_m x dx,$$

$$S_m^4 = \frac{2}{a} \int_c^{c'} p(x) \sin \alpha_m x dx.$$

W funkcji ugięcia (1.11) pozostają nieznanne dwie grupy stałych C_m i D_m . Stałe te wyznaczamy na podstawie (1.18), (1.19) i (1.20) z następujących nieskończonych układów równań:

- 1) dla płyty z otworem zamocowanym:

$$(1.21) \quad R_m^1 = \Omega_m^1(0), \quad R_m^2 = \Omega_m^2(0),$$

- 2) dla płyty z otworem swobodnie podpartym, obciążonym dodatkowo momentem zginającym $M(x)$:

$$(1.22) \quad R_m^1 = \Omega_m^1(0), \quad R_m^3 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} M(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^3(0),$$

- 3) dla płyty z otworem zamocowanym przesuwnie, obciążonym dodatkowo obciążeniem brzegowym $p(x)$:

$$(1.23) \quad R_m^2 = \Omega_m^2(0), \quad R_m^4 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} p(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^4(0),$$

4) dla płyty z otworem swobodnym, dodatkowo obciążonym momentem zginającym $M(x)$ oraz obciążeniem brzegowym $p(x)$:

$$(1.24) \quad R_m^3 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} M(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^3(0),$$

$$R_m^4 + \frac{2}{a} \int_c^{c'} p(x) \sin \alpha_m x dx = \Omega_m^4(0).$$

2. Schemat S-S

Rozpatrzmy teraz szczegółowo przypadek obciążenia symetrycznego względem wszystkich osi symetrii płyty. Niech na płycie pokazane na rys. 1 działa na całym obszarze płyty obciążenie $q = \text{const}$. Korzystając z rozważań podanych w punkcie pierwszym uzyskano następujące nieskończone układy równań dla poszczególnych warunków brzegowych:

1) warunek na ugięcie

$$(2.1) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \left\{ C_i (a_{im} \sin \theta_i + \delta_{im} \text{th} \theta_i) + D_i \left(b_{im} \sin \theta_i + \frac{\theta_i}{\text{ch}^2 \theta_i} \delta_{im} \right) \right\} = Q_m^1;$$

2) warunek na kąt obrotu

$$(2.2) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} i \{ C_i (a_{im} \cos \theta_i + \delta_{im}) + D_i (b_{im} \cos \theta_i + \delta_{im}) \} = Q_m^2;$$

3) warunek na moment zginający

$$(2.3) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} i^2 \left\{ C_i (1-\nu) (a_{im} \sin \theta_i - \delta_{im} \text{th} \theta_i) + D_i \left[\sin \theta_i ((1-\nu) b_{im} - 2\nu a_{im}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(2 \text{th} \theta_i + (1-\nu) \frac{\theta_i}{\text{ch}^2 \theta_i} \right) \delta_{im} \right] \right\} = Q_m^3;$$

4) warunek na zastępczą siłę poprzeczną

$$(2.4) \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} i^3 \{ C_i (1-\nu) (a_{im} \cos \theta_i - \delta_{im}) + D_i [\cos \theta_i ((1-\nu) b_{im} + 2(2-\nu) a_{im}) + \\ + (1+\nu) \delta_{im}] \} = Q_m^4,$$

gdzie $m = 1, 3, 5, \dots$

δ_{im} oznacza deltę Kroneckera,

$$\theta_i = i\pi\xi, \quad \xi = \frac{c}{a},$$

$$(2.5) \quad a_{im} = \frac{4}{\pi(i^2 + m^2)} (m \cos \theta_m \text{th} \theta_i - i \sin \theta_m),$$

$$b_{im} = \frac{4i}{\pi(i^2 + m^2)} \left[\cos \theta_m \left(\frac{\theta_m}{\text{ch}^2 \theta_i} - \frac{2im}{i^2 + m^2} \text{th} \theta_i \right) + \frac{i^2 - m^2}{i^2 + m^2} \sin \theta_m \right],$$

$$\begin{aligned}
Q_m^1 &= \frac{qa^4}{m\pi D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[\frac{\xi}{96} (1 - \xi) (1 + \xi - \xi^2) - \frac{m^2}{\pi^5} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_{im}}{i^3} \sin \theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{(m\pi)^4} \left[r_m + \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} (\theta_m - 2 \operatorname{th} \theta_m) \right] \right\}, \\
Q_m^2 &= \frac{qa^4}{m\pi^2 D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[\frac{1 - 2\xi}{96} (1 + 2\xi - 2\xi^2) - \frac{m^2}{\pi^4} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{f_{im}}{i^2} \cos \theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} (m\pi)^3} \left[p_m - \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi) \right] \right\}, \\
(2.6) \quad Q_m^3 &= \frac{qa^4}{m\pi^3 D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[\frac{\xi(1 - \xi)}{8} - \frac{m^2}{\pi^3} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (f_{im}(1 - \nu) + \nu g_{im}) \frac{\sin \theta_i}{i} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{(m\pi)^2} \left[(1 - \nu) r_m + \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} ((1 - \nu) \theta_m + 2\nu \operatorname{th} \theta_m) \right] \right\}, \\
Q_m^4 &= -\frac{qa^4}{m\pi^4 D} \left\{ 16 \cos \theta_m \left[\frac{1 - 2\xi}{8} + \frac{m^2}{\pi^2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (f_{im}(1 - \nu) - (2 - \nu) g_{im}) \cos \theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{m\pi \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \left[(1 - \nu) p_m - (3 - \nu) \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2.7) \quad g_{im} &= \frac{1}{i^2(i^2 + m^2) \operatorname{ch} \theta_i}, \\
f_{im} &= g_{im} \left(1 + \frac{i^2}{i^2 + m^2} + \frac{\theta_i}{2} \operatorname{th} \theta_i \right), \\
r_m &= \operatorname{sh} \theta_m \left(\frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} - \frac{\theta_m}{\operatorname{ch}^2 \theta_m} \right), \\
p_m &= \frac{m\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} \theta_m}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} - \theta_m \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} (1 - 2\xi).
\end{aligned}$$

Przy wyprowadzaniu wzorów na wyrazy wolne (2.6) wykorzystano następujące sumy szeregów:

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{i^2} = \frac{\pi^2}{8}(1-2\xi), \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{i^4} = \frac{\pi^4}{96}(1-2\xi)(1+2\xi-2\xi^2),$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{i^2+m^2} = \frac{\pi}{4m} \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}},$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos i\pi\xi}{(i^2+m^2)^2} = \frac{\pi}{8m^3 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \left(m\pi\xi \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) - \frac{m\pi}{2} \frac{\operatorname{ch} m\pi\xi}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \right),$$

(2.8)

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin i\pi\xi}{i^3} = \frac{\pi^3}{8}\xi(1-\xi), \quad \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin i\pi\xi}{i^5} = \frac{\pi^5}{96}\xi(1-\xi)(1+\xi-\xi^2),$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i \sin i\pi\xi}{(i^2+m^2)^2} = \frac{\pi^2}{16m \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \left(2\xi \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) + \operatorname{sh} m\pi\xi \right),$$

$$\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin i\pi\xi}{i(i^2+m^2)^2} = \frac{\pi}{4m^4 \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} \left[\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2} - \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) - \frac{m\pi}{4} \left(\frac{\operatorname{sh} m\pi\xi}{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{2}} + 2\xi \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2}(1-2\xi) \right) \right],$$

gdzie $\xi = c/a$, $0 \leq \xi \leq 1/2$.

Dla płyt pokazanych na rys. 1 należy kolejno rozwiązać następujące układy dwóch nieskończonych układów równań:

- 1) dla płyt pokazanych na rys. 1a układy (2.1) i (2.2),
- 2) dla płyt pokazanych na rys. 1b układy (2.1) i (2.3);
- 3) dla płyt pokazanych na rys. 1c układy (2.2) i (2.4);
- 4) dla płyt pokazanych na rys. 1d układy (2.3) i (2.4).

3. Płyta pełna — przejście graniczne

Rozpatrzmy szczegółowo przypadki szczególne dla $\xi = c/a = 1/2$ (tj. dla płyty pełnej) przy obciążeniu $q = \text{const}$. Przy $\xi = 1/2$ dla wszystkich rozpatrywanych podparć brzegu wewnętrznego nieskończone układy równań (2.1), (2.2), (2.3) i (2.4) są układami jednorodnymi. Powyższe stwierdzamy na podstawie (2.6) i (2.7), gdzie dla $\xi = 1/2$ mamy:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \cos \frac{m\pi}{2} = r_m = p_m = 0, \quad m = 1, 3, 5, \dots \\ Q_m^j = 0 \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

3.1. Płyta z brzegiem wewnętrznym utwierdzonym przesuwnie i brzegiem wewnętrznym swobodnym. Dla takich płyt przy $\xi = 1/2$ otrzymujemy następujące układy równań [por. (2.2), (2.3), (2.4) i (3.1)]:

1) dla brzegu wewnętrznego utwierdzonego przesuwnie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} C_m + D_m = 0, \\ -(1-\nu)C_m + (1+\nu)D_m = 0; \end{aligned}$$

2) dla brzegu wewnętrznego swobodnego

$$(3.3) \quad \begin{aligned} -C_m m^2 (1-\nu) \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - D_m m^2 \left(2 \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + (1-\nu) \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \\ - \frac{4(1-\nu)}{\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} C_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{i^2 + m^2} + \frac{4 \sin \frac{m\pi}{2}}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} D_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{i^2 + m^2} \times \\ \times \left(2\nu + (1-\nu) \frac{i^2 - m^2}{i^2 + m^2} \right) = 0, \\ -(1-\nu)C_m + (1+\nu)D_m = 0. \end{aligned}$$

Łatwo jest wykazać, że jedynymi rozwiązaniami tych układów są stałe

$$(3.4) \quad C_m = D_m = 0.$$

Wstawiając powyższe do (1.11) dla $W_{mq} = \frac{4qa^4}{D(m\pi)^5}$, otrzymujemy znane rozwiązanie dla płyty pełnej zginanej stałym obciążeniem $q = \text{const}$ (patrz [8] s. 118).

3.2. Płyta z brzegiem wewnętrznym utwierdzonym i swobodnie podpartym. Przypadek ten jest o wiele bardziej interesujący od poprzedniego, a to ze względu na to, że przy $\xi \rightarrow 1/2$ brzeg wewnętrzny sprowadza się do punktu.

Na podstawie (2.1), (2.2), (2.3) i (3.1) przy $\xi = 1/2$ otrzymujemy następujące układy równań:

1) dla brzegu wewnętrznego utwierdzonego

$$(3.5) \quad C_m \operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + D_m \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} - \frac{4 \sin \frac{m\pi}{2}}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} C_i \frac{i \sin \frac{i\pi}{2}}{i^2 + m^2} +$$

$$+ \frac{4 \sin \frac{m\pi}{2}}{\pi} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} D_i \frac{i(i^2 - m^2) \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} = 0,$$

$$C_m + D_m = 0;$$

2) dla brzegu wewnętrznego swobodnie podpartego

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \text{równania (3.5)}_1, \\ & \text{równania (3.3)}_1. \end{aligned}$$

Trywialnym rozwiązaniem układów (3.5) i (3.6) jest rozwiązanie (3.4), które odpowiada płycie pełnej niepodpartej wewnątrz obszaru płyty. Ponieważ w wyniku przejścia granicznego $\xi \rightarrow 1/2$ powinniśmy uzyskać rozwiązanie dla płyty pełnej podpartej w środku punktowo, przeto muszą istnieć niezerowe rozwiązania układów równań (3.5) i (3.6). Istnienie takich niezerowych rozwiązań wykażemy bezpośrednim rachunkiem.

Z drugiej grupy równań układu (3.5) otrzymujemy zależność między stałymi C_m i D_m postaci:

$$C_m = -D_m.$$

Wstawiając powyższe do pierwszej grupy układu (3.5) oraz do układu (3.6) otrzymujemy następujące różne nieskończone układy równań:

$$(3.8) \quad C_m \left(\operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \frac{8}{\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \sum_{i=1,3,5}^{\infty} C_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} = 0,$$

$$(3.9) \quad C_m m^2 \left[\operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} + \nu \left(\operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) \right] -$$

$$- \frac{8}{\pi} \sin \frac{m\pi}{2} \left(\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} C_i \frac{i^5 \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} + m^2 \nu \sum_{i=1,3,5}^{\infty} C_i \frac{i^3 \sin \frac{i\pi}{2}}{(i^2 + m^2)^2} \right) = 0.$$

Rozwiązania obu powyższych układów przewidujemy w postaci:

$$(3.10) \quad C_m = -D_m = A \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m^3},$$

gdzie A jest dowolną stałą.

Wstawiając (3.10) do (3.8) i (3.9) kolejno otrzymujemy:

$$(3.11) \quad \frac{1}{m^3} \left(\operatorname{th} \frac{m\pi}{2} - \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \frac{8}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{(i^2 + m^2)^2} = 0,$$

$$(3.12) \quad \frac{1}{m} \left(\operatorname{th} \frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{m\pi}{2}} \right) - \frac{8}{\pi} \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{i^2}{(i^2 + m^2)^2} = 0.$$

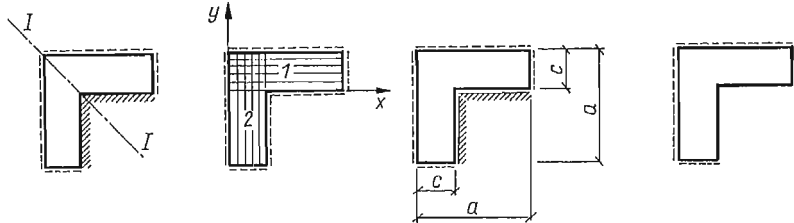
Jeżeli więc (3.10) jest rozwiązaniem układów (3.5) i (3.6) to muszą być spełnione równości (3.11) i (3.12). Na podstawie (2.8)₃ oraz (2.8)₂ stwierdzamy spełnienie powyższych równości. Rozwiązanie (3.10) ma prostą interpretację fizyczną. Jeżeli założymy, że $q = 0$, wtedy $W_{mq} = 0$, wstawiając teraz rozwiązanie (3.10) do (1.11) otrzymamy rozwiązanie dla płyty pełnej, obciążonej w środku siłą skupioną. W naszym przypadku przy $q = \text{const}$ rozwiązanie dla $\xi = 1/2$, tj. dla płyty podpartej punktowo, otrzymamy wstawiając (3.10) do (1.11).

Stałą A wyznaczamy wtedy z warunku

$$W\left(\frac{a}{2}, 0\right) = 0.$$

4. Płyty o innych kształtach i innych warunkach podparcia

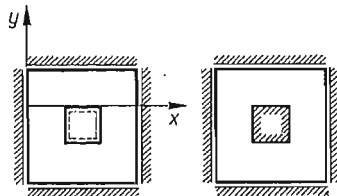
Sposobem opisanym w punkcie pierwszym można znajdować ugięcia dla płyt o nietypowych kształtach charakteryzujących się jedną osią symetrii (rys. 4).



Rys. 4

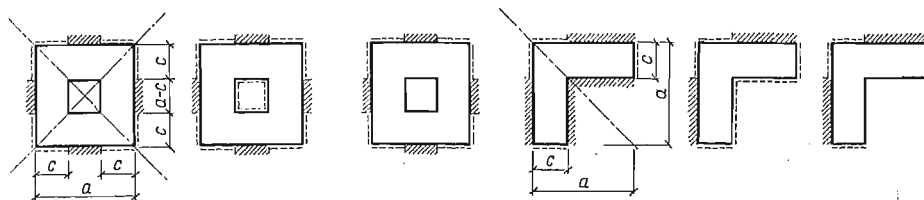
Przedstawiając funkcję ugięcia $W(x, y)$ pojedynczym szeregiem kosinusowym o postaci:

$$W(x, y) = \sum_{m=0,1,2,\dots}^{\infty} W_m(y) \cos \alpha_m x,$$



Rys. 5

możemy otrzymać rozwiązania dla płyt pokazanych na rys. 5. Korzystając z rozważań danych w punkcie pierwszym przy wykorzystaniu tylko pierwszego z warunków (1.10), zagadnienie znajdowania ugięć płyt pokazanych na rys. 6 sprowadzić można do zagadnienia rozwiązania układu trzech nieskończonych układów równań.



Rys. 6

5. Przykłady liczbowe. Wnioski

Na podstawie rozważań danych w punktach 1 i 2 ułożono program na EMC «Odra» 1204 pozwalający na obliczanie wielkości geometrycznych i statycznych dla płyt pokazanych na rys. 1 poddanych zginaniu obciążeniem $q = \text{const}$.

W tablicach 2, 3, 4 i 5 zestawiono wartości ugięć, kątów obrotu i momentów zginających dla płyt z brzegiem wewnętrznym utwierdzonym oraz brzegiem swobodnym przy rozwiązaniu układu $2 \times 50 = 100$ równań.

Przyjęto $\xi = c/a = 0,250$, $\nu = 0,3$.

5.1. Wnioski. Poprawność rozwiązań stwierdzono na podstawie:

- 1) badania stabilności układu nieskończonych układów równań,
- 2) stopnia spełnienia warunków brzegowych dla $y = 0$,
- 3) stopnia spełnienia symetrii względem osi I-I i II-II (rys. 1a) wielkości geometrycznych i statycznych.

Stabilność układu nieskończonych układów równań badano rozwiązując kolejno $2 \times 5 = 10$, $2 \times 10 = 20$, $2 \times 20 = 40$, $2 \times 50 = 100$ równań.

Większość uzyskanych rozwiązań jest stabilna, ale dla pewnych wartości współczynnika ξ w przypadku brzegu wewnętrznego utwierdzonego przesuwnie występuje niestabilność rozwiązań. Podobną numeryczną niestabilność rozwiązań zaobserwowano stosując metodę Levy'ego dla płyt o ciągłych warunkach brzegowych [9].

Wydaje się, że usunięcie pewnych niestabilności rozwiązań można uzyskać przez:

- 1) stosowanie EMC o dużej dokładności,
- 2) modyfikację układów (2.1)–(2.4) dla dużych wartości i oraz m ,
- 3) branie do rozwiązywanego układu równań większej liczby równań ze słabszego warunku brzegowego.

Stopień spełnienia warunków brzegowych zależy od danego warunku, współczynnika ξ i rozwiązywanej liczby równań. Ze wzrostem liczby równań wzrastał też stopień spełnienia danego warunku brzegowego i stopień spełnienia symetrii. Najlepiej spełnione są warunki geometryczne dla płyty z otworem utwierdzonym.

Tablica 2

| Brzeg otworu utwierdzony $\xi = \frac{c}{a} = 0,250$ | | | | | |
|--|-------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\frac{x}{a}$ | $W(x, 0) \frac{D}{qa^4} 10^5$ | $M_y(x, 0) \frac{D}{qa^2} 10^3$ | $M_x(x, 0) \frac{D}{qa^2} 10^3$ | $M_y(x, x) \frac{D}{qa^2} 10^3$ | $M_x(x, x) \frac{D}{qa^2} 10^3$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{20}$ | 1,715 | 1,081 | 3,586 | 1,550 | 1,551 |
| $\frac{2}{20}$ | 2,586 | 1,327 | 4,753 | 3,318 | 3,318 |
| $\frac{3}{20}$ | 2,298 | 0,088 | 3,580 | 3,538 | 3,538 |
| $\frac{4}{20}$ | 1,105 | -2,633 | -0,787 | 5,695 | 5,694 |
| $\frac{5}{20}$ | 0,0078 | -27,265 | -18,654 | -27,265 | -18,654 |
| $\frac{8}{20}$ | 0,0001 | -7,970 | -2,290 | | |
| $\frac{10}{20}$ | 0,00009 | -7,926 | -2,292 | | |

Tablica 3

| Brzeg otworu utwierdzony $\xi = 0,250$ | | | |
|--|--|--|--|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\frac{y}{c}$ | $W\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^4} 10^5$ | $\varphi_y\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^3} 10^4$ | $M_y\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^2} 10^3$ |
| 1 | 0 | -3,254 | 0 |
| $\frac{4}{5}$ | 1,457 | -2,288 | 3,434 |
| $\frac{3}{5}$ | 2,106 | -0,229 | 4,360 |
| $\frac{1}{2}$ | 2,030 | 0,818 | 3,884 |
| $\frac{2}{5}$ | 1,713 | 1,667 | 2,786 |
| $\frac{1}{5}$ | 0,674 | 2,153 | -1,260 |
| 0 | 0,00009 | -0,0045 | -7,926 |

Tablica 4

| Brzeg otworu swobodny $\xi = \frac{c}{a} = 0,250$ | | | | | |
|---|-------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $\frac{x}{a}$ | $W(x, 0) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^3$ | $M_y(x, 0) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$ | $M_x(x, 0) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$ | $M_y(x, x) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$ | $M_x(x, x) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^2$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{20}$ | 0,282 | 0,399 | 0,514 | 0,204 | 0,204 |
| $\frac{2}{20}$ | 0,554 | 0,714 | 0,804 | 0,529 | 0,530 |
| $\frac{3}{20}$ | 0,810 | 0,913 | 0,904 | 0,806 | 0,808 |
| $\frac{4}{20}$ | 1,049 | 0,999 | 0,804 | 0,921 | 0,925 |
| $\frac{5}{20}$ | 1,274 | 0,386 | 0,737 | 0,386 | 0,737 |
| $\frac{6}{20}$ | 1,478 | -0,018 | 1,441 | | |
| $\frac{7}{20}$ | 1,644 | 0,010 | 1,621 | | |
| $\frac{8}{20}$ | 1,765 | -0,008 | 1,735 | | |
| $\frac{9}{20}$ | 1,839 | 0,007 | 1,783 | | |
| $\frac{10}{20}$ | 1,864 | -0,007 | 1,806 | | |

Tablica 5

| Brzeg otworu swobodny $\xi = 0,250$ | | | |
|-------------------------------------|--|--|--|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| $\frac{y}{a}$ | $W\left(\frac{a}{4}, y\right) \frac{D}{qa^4} \cdot 10^3$ | $W\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^4} \cdot 10^3$ | $M_y\left(\frac{a}{2}, y\right) \frac{D}{qa^2} \cdot 10^3$ |
| $\frac{5}{20}$ | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{4}{20}$ | 0,282 | 0,391 | 4,966 |
| $\frac{3}{20}$ | 0,554 | 0,773 | 7,430 |
| $\frac{5}{40}$ | 0,684 | 0,960 | 7,724 |
| $\frac{2}{20}$ | 0,809 | 1,143 | 7,397 |
| $\frac{1}{20}$ | 1,048 | 1,503 | 4,897 |
| 0 | 1,274 | 1,864 | -0,067 |

Symetria wielkości geometrycznych i statycznych względem osi I-I i II-II zarysowała się już przy niewielkich układach równań. Dla układu $2 \times 50 = 100$ równań, symetria jest wystarczająca (por. tablice 2, 3, 4, 5) dla ugięć — we wszystkich punktach, dla momentów M_x i M_y — wszędzie z wyjątkiem otoczenia naroża wewnętrznego.

Rozwiązując układy równań (2.1)–(2.4) dla $\xi = 0,125, 0,250, 0,3333$, stwierdzono, że im mniejsza wartość ξ tym nieskończone układy równań są bardziej stabilne, wzrasta stopień spełnienia warunków brzegowych i stopień spełnienia symetrii.

Ogólnie można stwierdzić, iż metoda podana w niniejszej pracy nadaje się do realizacji numerycznej oraz że wymaga dalszego badania na EMC o większej dokładności i większej pojemności pamięci operacyjnej od EMC «Odra» 1204.

Pragnę w tym miejscu podziękować mgrowi inż. A. CZECHOWSKIEMU za sprawdzenie szeregu przekształceń oraz za pomoc w wykonaniu pewnych obliczeń na EMC.

Literatura cytowana w tekście

1. G. N. SAWIN, *Spannungserhöhung am Rande von Löchern*, Berlin 1956.
2. W. NOWACKI, *Mechanika Budowli*, t. 3, Warszawa 1966.
3. Z. REIPERT, *Application of simple functional series to the solution of problems concerning statics, stability and vibration of plates having nontypical forms*, Arch. Mech. Stos., **15**, 6, 1963.
4. Z. KĄCZKOWSKI, *Płyty. Obliczenia statyczne*. Warszawa 1968.
5. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Warszawa 1972.
6. H. MIKOŁAJCZYK, J. GOŁAŚ, W. BUCZKOWSKI, *Analiza statyczna kwadratowej płyty z otworem podpartym wzdłuż obwodu koła*, Inż. i Bud. **28**, 7, 1971, 274–277.
7. Z. REIPERT, *Rozwiązania płyty prostokątnej z otworem prostokątnym metodą elementów podstawowych*, XVIII Konferencja Naukowa w Krynicy, 1972, Księga Konferencyjna.
8. S. TIMOSHENKO, S. WOJNOWSKI-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Warszawa 1962.
9. M. WOLPE, Z. PAŃKOWSKI, *Obliczenia płyt prostokątnych przy zastosowaniu maszyn cyfrowych*, Arch. Inż. Łą., **16**, 4, 1970.

Р е з ю м е

ИЗГИБ КВАДРАТНОЙ ПЛИТЫ С ЦЕНТРАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМ КВАДРАТНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе дается формально точное решение задачи изгиба упругой квадратной плиты с центральным квадратным отверстием. Решение позволяет удовлетворить любым непрерывным краевым условиям по контуру отверстия для плиты свободно опирающейся по внешнему контуру (рис. 1). При использовании симметрии задача нахождения прогиба плиты с отверстием сведена к нахождению прогиба прямоугольной плиты с прерывными краевыми условиями (рис. 3). Применение одианных рядов Фурье (1.5) сводит задачу к решению двух бесконечных систем уравнений.

S u m m a r y

BENDING OF A SQUARE PLATE WITH A CENTRALLY LOCATED SQUARE HOLE

The paper presents a formally accurate solution of the problem of bending of an elastic square plate with a central square hole. The solution makes it possible to account for arbitrary continuous boundary conditions along the edge of the hole under the assumption that the outer edge of the plate is simply supported (Fig. 1). Due to the symmetry of the problem, the problem of determination of the deflections of a plate with a hole is reduced to the problem of bending of a rectangular plate under discontinuous boundary conditions (Fig. 3). Using simple Fourier series (1.5), the problem is reduced to the solution of a system of two infinite sets of equations.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1973 r.

BIULETYN INFORMACYJNY

SPRAWOZDANIE

Z DZIAŁALNOŚCI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ ZA IV KWARTAŁ 1973 ROKU

1. Zebrania naukowe

W okresie IV kwartału 1973 r. odbyło się 13 zebrań naukowych, na których wygłoszono 15 referatów o następującej tematyce:

| L.p. | Data | Prelegent | Temat | Liczba | |
|---|----------|--------------|---|------------------|------------------|
| | | | | uczest- ników | dysku- tantów |
| Oddział w Bydgoszczy | | | | | |
| 1. | 4.12.73 | T. Boenigk | Paradoks pierścienia w mechanice nieba | 12 | 5 |
| 2. | 4.12.73 | T. Jędryka | O ruchu heliocentrycznym | | 4 |
| 3. | 18.12.73 | M. Szymański | Zastosowanie teorii filtracji do obliczania wydajności sił cylindrycznych | 18 | 5 |
| 4. | „ „ „ | E. Walicki | Przepływ lepkiej cieczy w szczelinie krzywoliniowego wzdłużnego łożyska ślizgowego | | 4 |
| Oddział w Częstochowie | | | | | |
| 5. | 29.11.73 | J. Wojnar | Badanie płyt metodą rastrową | 23 | 3 |
| 6. | „ „ „ | J. Stupnicki | Doświadczalne badania elementów maszyn projektowanych metodą nośności granicznej | | 2 |
| Oddział w Gliwicach | | | | | |
| (zebranie naukowe poświęcone wygłoszeniu wybranych prac zgłoszonych na konkurs) | | | | | |
| 7. | 10.12.73 | E. Tomasiak | Model matematycznego zaworu przelewowego w świetle badań przebiegów analogowych i rzeczywistych | 41 | 27 (łącznie) |
| 8. | „ „ „ | J. Składzień | Analiza konwekcyjnego rekuperatora pętlicowego z krzyżowym przepływem czynników | | |
| 9. | 10.12.73 | P. Konderla | Nieliniowe rozwiązanie powłoki o kształcie hiperboloïdy jednopowłokowej | | |
| 10. | „ „ „ | J. Telega | O ośrodkach plastycznych opisywanych równaniem konstytutywnym | | |
| | | | $\sigma_{ij} = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 \epsilon_{ij} + \phi_2 \epsilon_{ik} \epsilon_{kj}$ | | |
| 11. | „ „ „ | B. Rogowski | Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego | | |
| 12. | „ „ „ | M. Kleiber | Kinematyka continuum sprężysto-plastycznego | | |
| 13. | „ „ „ | A. Sawicki | O pewnym przypadku drgań elastycznej płyty sprzężonej z ograniczonym obszarem cieczy idealnej | | |

| | | | | | |
|---|----------|---------------------------|--|-----|----|
| 14. | „ „ „ | W. Kosiński | Równanie ewolucji w teorii materiałów dysypatywnych | | |
| 15. | „ „ „ | St. Kosowski | Stacjonarne oddziaływanie kul spoczywających w ośrodku swobodno-molekularnym | | |
| 16. | „ „ „ | E. Wittbrodt | Metoda jednoczesnego zastosowania sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych do statycznych i dynamicznych obliczeń konstrukcji | | |
| 17. | „ „ „ | E. Światoński | Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych | | |
| 18. | „ „ „ | G. Jemielita | Zginanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym | | |
| 19. | „ „ „ | W. Wodzicki | Drgania maszyn o korpusach odkształcalnych podpartych elastycznie na podatnej konstrukcji | | |
| Oddział w Krakowie | | | | | |
| 20. | 24.10.73 | A. Sawczuk | Teoria przystosowania się konstrukcji | 26 | 6 |
| Oddział w Łodzi | | | | | |
| 21. | 22.11.73 | K. Pustelnik | Pewien przypadek budowy algorytmu obliczeniowego metodą elementów skończonych dla zagadnienia ciała zorientowanego modelującego ruszty płaskie i płyty perforowane | 19 | 5 |
| Oddział w Rzeszowie | | | | | |
| 22. | 24.10.73 | E. Kościelny | Badania drgań samowzbudnych przy przeciąganiu przeciągaczem śrubowym | 10 | — |
| 23. | „ „ „ | A. Świder | Drgania samowzbudne nieliniowego układu ciągłego | | |
| 24. | 22.11.73 | W. Żylski | Drgania samowzbudne w układzie wieża-przewód wiertniczy | 8 | |
| Oddział w Szczecinie | | | | | |
| 25. | 18.10.73 | J. Haurykiewicz | Niektóre tradycyjne metody oceny bezpieczeństwa budowli a propozycje wg metody przestrzeni | 15 | 3 |
| 26. | 14.10.73 | W. Kissing | Die Behandlung ebener Ausschnittprobleme mit der Methode der finiten Elemente | 14 | 4 |
| 27. | 20.12.73 | H. Priebe S. Kochański | Możliwość zastosowania teorii wsporników wielopasmowych do analizy sztywności przestrzennej budynków wielkopłytowych | 16 | 6 |
| Oddział w Warszawie | | | | | |
| (II część sesji na temat problemów drganiowo-przepływowych) | | | | | |
| 28. | 17.12.73 | J. Maryniak | Analiza dynamiczna pojazdów na pneumatykach | 17 | 2 |
| 29. | „ „ „ | M. Bossak | Zastosowanie elementów izoparametrycznych do wyznaczania częstości i postaci własnych drgań układów liniowo-sprężystych | | |
| 30. | „ „ „ | E. Mzyk | Wpływ podatności i zakrzywienia ścianki na stateczność warstwy przyściennej | | 2 |
| Oddział we Wrocławiu | | | | | |
| 31. | 26.11.73 | I. Kisiel | O podstawach reologicznych równań stanu | 17 | 5 |
| r a z e m | | | | 236 | 85 |

2. Seminaria i odczyty

Oddział w Gdańsku przeprowadził:

- 1) Seminarium na temat „Optymalizacji konstrukcji”, które prowadzili prof. dr Piotr WILDE i dr Czesław SZYMCZYK. Co tydzień odbywały się dwugodzinne wykłady, w których uczestniczyły 22 osoby;
- 2) Seminarium na temat „Metody sztywnych elementów skończonych”, które prowadzili doc. dr Jan KRUSZEWSKI, prof. Bohdan KOWALCZYK i dr Włodzimierz GAWROŃSKI. Co tydzień odbywały się dwugodzinne wykłady. Liczba uczestników wyniosła około 50 osób.

Oddział we Wrocławiu przeprowadził cykl odczytów w dniach 13 i 20 listopada oraz 4 i 11 grudnia 1973, podczas których doc. dr Bertold LYSIK omówił „Teorię równań interpretacyjnych ośrodka odkształcalnego”. Średnia frekwencja podczas odczytów wynosiła 10 do 20 osób, liczba dyskutantów wynosiła 3 do 5 osób.

3. Konferencje naukowe

Oddział w Krakowie przeprowadził w dniach 3 i 4 grudnia 1973 r. konferencję naukową na temat „Teorii konsolidacji”. Podczas konferencji z udziałem 56 osób wygłoszono następujące referaty:

1. W. Derski Stan aktualny i perspektywy teorii konsolidacji
2. J. Litwiniżyn (tytułu nie podano)
3. Z. Sobczyńska-Kończak Płaskie zagadnienie mikropolarnej teorii konsolidacji
4. P. Sukiennik O możliwości traktowania ośrodka porowatego jako układu szczelin trójwymiarowych
5. J. Gaszyński Nacisk stempla na konsolidującą półprzestrzeń lepkosprężystą
6. A. Zając Równania teorii konsolidacji przy zmiennej przepuszczalności stołu okrągłego
7. G. Szefer Optymalne sterowanie procesem konsolidacji
8. Z. Kończak Fala Rayleigha w ośrodku konsolidującym
9. R. Dziecielak Efekty dynamiczne działania źródeł cieczy w ośrodku konsolidującym
10. J. Gaszyńska Funkcja Greena dla konsolidującej półprzestrzeni lepkosprężystej
11. P. Sukiennik Zastosowanie metody mikrokalorymetrycznej w procesie konsolidacji gruntu
12. J. Mączka Belki na podłożu konsolidującym
13. J. Domski Analiza numeryczna stanu naprężenia w konsolidującej warstwie sprężystej
14. B. Lechowicz O funkcji Greena dla półpłaszczyzny w procesie konsolidacji
15. T. Strzelecki Działanie ruchomego obciążenia skupionego na półprzestrzeń konsolidującą

4. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje następująca tabela:

| L.p. | Oddział | Stan na koniec III kw. 1973 r. | Stan na koniec IV kw. 1973 r. | Przybyło lub ubyło w okre- sie sprawozdawczym |
|-------|-------------|-----------------------------------|----------------------------------|--|
| 1. | Bydgoszcz | 18 | 18 | — |
| 2. | Częstochowa | 26 | 31 | +5 |
| 3. | Gdańsk | 47 | 50 | +3 |
| 4. | Gliwice | 90 | 99 | +9 |
| 5. | Kraków | 65 | 67 | +2 |
| 6. | Łódź | 36 | 38 | +2 |
| 7. | Poznań | 51 | 52 | +1 |
| 8. | Rzeszów | 11 | 11 | — |
| 9. | Szczecin | 31 | 30 | -1 |
| 10. | Warszawa | 201 | 205 | +4 |
| 11. | Wrocław | 64 | 64 | — |
| Razem | | 640 | 665 | +25 |

W okresie sprawozdawczym odbyło się plenarne zebranie Zarządu Głównego oraz 25-zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

5. Wyniki konkursów naukowych

1. Konkurs na prace teoretyczne z mechaniki zorganizowany przez Oddział w Gliwicach.

Na konkurs wpłynęło 26 prac, z których 13 w oparciu o recenzje Sąd Konkursowy dopuścił do referowania w dniu 10.12.1973 r. na publicznym zebraniu naukowym. W wyniku decyzji Sądu Konkursowego przyznano następujące nagrody:

I — w wysokości 10.000 zł — dr. inż. Józefowi TELEDZE (Politechnika Śląska) za pracę pt. *O ośrodkach plastycznych opisywanych równaniem konstytutywnym* $\sigma_{ij} = \phi_0 \delta_{ij} + \phi_1 \varepsilon_{ij} + \phi_2 \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ji}$. II — w wysokości 8.000 zł — mgr. inż. Bohdanowi ROGOWSKIEMU (Politechnika Łódzka) za pracę pt. *Funkcja przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego*.

Dwie III — nagrody w wysokości 4.000 zł — dr. inż. Michałowi KLEIBEROWI (IPPT PAN) za pracę pt. *Kinematyka continuum sprężysto-plastycznego* oraz dr. inż. Piotrowi KONDERLI (Politechnika Wroclawska) za pracę pt. *Nieliniowe rozwiązanie powłoki o kształcie hiperboloïdy jednopowłokowej*.

Nagrodę specjalną JM Rektora Politechniki Śląskiej prof. dr inż. Jerzego SZUBY w wysokości 8.000 zł — przyznano dr. inż. Eugeniuszowi ŚWIROŃSKIEMU (Politechnika Śląska) za pracę pt. *Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych*.

Ponadto wyróżniono cztery prace przyznając nagrody w wysokości 1.000 zł następującym uczestnikom: mgr. inż. Grzegorzowi JEMIELICIE (Politechnika Warszawska) za pracę pt. *Zginanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym*; dr. inż. Witoldowi KOSIŃSKIEMU (IPPT PAN) za pracę pt. *Równanie ewolucji w teorii materiałów dysypatywnych*; mgr. inż. Andrzejowi SAWICKIEMU (Politechnika Gdańska) za pracę pt. *O pewnym przypadku drgań elastycznej płyty sprężonej z ograniczonym obszarem cieczy idealnej* oraz dr. inż. Janowi SKŁADZIENIOWI (Politechnika Śląska) za pracę pt. *Analiza konwekcyjnego rekuperatora pętlowego z krzyżowym przepływem czynników*.

2. Konkurs na prace doświadczalne z zakresu mechaniki technicznej zorganizowany przez Oddział w Krakowie.

Na konkurs wpłynęło 11 prac. Na wniosek Sądu Konkursowego Zarząd Oddziału postanowił:

I nagrody nie przyznać;

II nagrodę w kwocie 8.000 zł przyznać mgr. inż. Reinholdowi KAŁUŻY (z Opola) za pracę pt. *Określenie przydatności żywicy epoksydowej „Epidian 5” do modelowania konstrukcji*;

III nagrodę w wysokości 6.000 zł mgr. inż. Ryszardowi WOJNAROWI (z Warszawy) za pracę pt. *Zastosowanie wewnętrznego odbicia pod kątem Brewstera do rozdzielania naprężeń w elastooptyce*;

dwie równorzędne IV nagrody po 4.500 zł każda przyznać doc. dr. Stanisławowi MAZURKIEWICZOWI (z Krakowa) za pracę pt. *Badania procesów relaksacyjnych w poliamidzie* oraz dr. Andrzejowi GARSTECKIEMU (z Poznania) za pracę pt. *Zwicherungie sprężyste cienkościennej belki dwuprzęsłowej*;

pierwsze wyróżnienie w wysokości 3.000 zł przyznać inż. Marii BACZYŃSKIEJ (z Krakowa) za pracę pt. *Wpływ niejednorodności stanu naprężenia w przekroju poprzecznym połączenia na obciążeniu zwojów gwintu*; drugie wyróżnienie w wysokości 2.500 zł dr. Karolowi TURSKIEMU i mgr inż. Markowi ŚLIWOWSKIEMU (z Warszawy) za pracę pt. *Wpływ cyklicznej plastycznej deformacji na powierzchnię plastyczności*.

Ponadto postanowiono przyznać bony książkowe wartości po 500 zł dr. Michałowi CZECHOWI (z Białegostoku) za pracę pt. *Badania wpływu warunków otoczenia na procesy pełzania i relaksacji preszpanu i papieru transformatorowego o różnych warunkach otoczenia*, dr. Jerzemu KOŁYBKOWI (z Białegostoku) za pracę pt. *Badania wpływu parametrów wymuszenia dynamicznego na moduł kompleksowy Younga i jego składowe preszpanu transformatorowego*, doc. dr. hab. Janowi ORLACZOWI (z Gliwic) za pracę pt. *Wypadkowa siła tarcia hamilca mechanicznego wieloszczękowego*.

OGÓLNOKRAJOWY KONKURS NA PRACE DOŚWIADCZALNE Z MECHANIKI TECHNICZNEJ

Częstochowski Oddział PTMTS w porozumieniu z Zarządem Głównym PTMTS w Warszawie organizuje w 1974 r. Ogólnokrajowy Konkurs na prace z zakresu badań doświadczalnych z mechaniki technicznej.

Prace konkursowe, zawierające elementy nowości w stosunku do obecnego stanu wiedzy, należy przesłać do Sekretariatu Oddziału Częstochowskiego PTMTS w Częstochowie, Aleja Zawadzkiego nr 21, Instytut Obróbki Plastycznej i Spawalnictwa, w terminie do dnia 31 października 1974 r. (w przypadkach wyjątkowych do 15 listopada 1974 r.).

Objętość pracy nie powinna przekraczać 20 stron maszynopisu.

Prosimy o przesłanie prac w 3 egzemplarzach, w formie nadającej się do druku, podpisane imieniem i nazwiskiem, z podaniem adresu.

Prace nie mogą być przed tym terminem opublikowane, ani złożone do druku.

Prace oceniać będzie Sąd Konkursowy powołany przez Zarząd Oddziału w porozumieniu z Zarządem Głównym.

Konkurs prowadzony będzie zgodnie z regulaminem Konkursów Naukowych PTMTS.

Konkurs jest ograniczony, dostępny tylko dla członków PTMTS.

NAGRODY

I — 12 000 zł

II — 8 000 zł

III — 5 000 zł

Nagrodzone prace mogą być opublikowane w kwartalniku MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA.

Sekretarz
Oddziału Częstochowskiego PTMTS
Doc. dr inż. J. Elsner

Przewodniczący
Oddziału Częstochowskiego PTMTS
Prof. dr inż. J. Kolakowski

Zawiadomienie wstępne

SYMPOZJUM «MODEL CIĄGŁY UKŁADÓW DYSKRETNÝCH»

Symposium odbędzie się w Polsce w dniach 19—27 czerwca 1975 r. Będzie dotyczyć zarówno ciał stałych, jak i cieczy. Celem Symposium jest dyskusja następujących problemów:

- zależność między matematycznym opisem układów dyskretnych i ich modeli ciągłych, ze specjalnym uwzględnieniem modeli ze strukturą wewnętrzną,
- budowa (statycznych i deterministycznych) modeli ciągłych układów materialnych, takich jak układy cząstek, zawiesiny, polimery,
- wyznaczanie makroskopowych funkcji materiałowych na podstawie własności układu dyskretnego i jego składników.

W Symposium wezmą udział osoby zaproszone przez Komitet Naukowy, działające czynnie w dziedzinach związanych z tematyką Symposium. Liczba referatów będzie ograniczona, aby zapewnić dużo czasu na dyskusję.

Komitet Naukowy ma następujący skład:

Przewodniczący: R. S. RIVLIN, USA
Członkowie: G. K. BATCHELOR, Anglia
W. FISZDON, Polska
E. KRÖNER, NRF
I. A. KUNIN, ZSRR
H. ZORSKI, Polska

Osoby zainteresowane udziałem w Symposium powinny zwracać się do sekretarza Symposium, pod adresem:

Dr inż. R. F. CZARNOTA-BOJARSKI
IPPT PAN, ZMOC, ul. Świętokrzyska 21,
00-049 Warszawa.

**ZBIORCZE ZESTAWIENIE DZIAŁALNOŚCI NAUKOWEJ POLSKIEGO TOWARZYSTWA
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ W ROKU 1973**

| Lp. | Organizator | Zebrania naukowe | | Sympozja i konfe- rencje naukowe | Zebrania odczy- towe | Kursy | Semi- naria nau- | Kon- kursy naukowe | Akcja wydaw- nicza (liczba pozycji wydaw- niczych) |
|-----|---------------|------------------|--------------------------|---|----------------------------|-------|------------------------|--------------------------|--|
| | | Liczba zebrań | Liczba refera- tów | | | | | | |
| 1 | O/Bydgoszcz | 6 | 10 | — | — | — | — | — | — |
| 2 | O/Częstochowa | 4 | 5 | — | — | — | — | — | — |
| 3 | O/Gdańsk | 4 | 4 | — | — | — | 4 | — | — |
| 4 | O/Gliwice | 4 | 16 | 1 | — | — | — | 1 | 1 |
| 5 | O/Kraków | 5 | 5 | 2 | — | — | — | 1 | 1 |
| 6 | O/Łódź | 6 | 6 | 1 | — | — | — | — | — |
| 7 | O/Poznań | 1 | 1 | — | — | 1 | — | — | — |
| 8 | O/Rzeszów | 2 | 3 | — | — | — | 1 | — | — |
| 9 | O/Szczecin | 8 | 8 | — | — | — | — | — | — |
| 10 | O/Warszawa | 3 | 10 | — | — | — | 1 | — | — |
| 11 | O/Wrocław | 4 | 4 | — | 4 | — | 1 | — | — |
| 12 | Zarząd Główny | — | — | — | — | — | — | — | 4 „MTiS” |
| | Razem | 47 | 72 | 4 | 4 | 1 | 7 | 2 | 6 |

W następnym numerze ukażą się prace:

- K. PIEKARSKI, Struktura i własności mechaniczne tkanek organicznych (Wprowadzenie)
Структура и механические свойства органических тканей (Введение)
The structure and mechanical properties of organic tissues (Introduction)
- R. KRZYWIEC, O modelowaniu wału wielopodporowego z wieloma tarczami za pomocą wielkiego systemu oscylatorów. Cz. I.
Uwagi ogólne. Oscylatory wielowskaźnikowe
О моделировании с помощью большой системы биосцилляторов многоподшипникового вала со многими дисками.
Часть I. Общие замечания. Осцилляторы со многими индексами
Modelling of a multi-span shaft with several disks by means of a great system of bi-oscillators. Part I. General remarks.
Multi-indicial oscillators
- R. WOJCIANOWSKA, Optymalne kształtowanie ustrojów kratowych w warunkach pełzania w nawiązaniu do teorii wyoboczenia Ra-
botnowa-Szestirikowa
Оптимальное конструирование ферм работающих в условиях ползучести в отношении к теории продольного
изгиба Работнова-Шестерикова
Optimal design of truss structures in creep conditions with reference to the Rabotnov-Shestirikov theory of buckling
- S. WIELAK, Kształt równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych
Вид дифференциального уравнения в частных производных решающего класс линейчатых развертывающихся
оболочек
The partial differential equation solving a class of ruled developable shells.
- B. WOSIEWICZ, Otrzymywanie macierzy elementu płyty zginanej dla modelu mieszanego metodą ortogonalizacji
Построение матрицы жесткости элемента изгибаемой плиты для смешанной модели с помощью метода Буб-
нова-Галеркина
Determination of the element matrix of a plate of bending, for a mixed model as the orthogonalization method
- M. GRZYMKOWSKI, Wybrane osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali
Избранные осесимметрические проблемы пластической обработки металлов
Some axi-symmetric problems of plastic working of metals
- S. MAJ, Wymiana masy, pędu i energii między cząstką kulistą a otoczeniem gazowym
Обмен массы, импульса и энергии между шаровидной частицей и газовой средой
Mass, momentum and energy exchange between a spherical particle and gaseous medium
- K. MAJORKOWSKA-KNAJ, Niektóre zagadnienia termosprężystości w tarczach mikropolarnych
Некоторые вопросы термоупругости микрополярных дисков
Certain problems of thermoelasticity in micropolar plates
- J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, A. PEER-KASPERSKA, J. MAKOWSKI, Zastosowanie iteracji Seidla w metodzie elementów skończonych
Применение итерации Зейделя к методу конечных элементов на примере статических расчетов плит
Application of Seidel's iteration to the finite element method, on the example of static plate analysis
- J. MARYNIAK, B. KRASNOWSKI, Równowaga i stateczność podłużna skoczka narciarskiego w locie
Равновесие и продольная устойчивость лыжника-прыгуна
Balance and longitudinal stability of a ski-jumper in flight
- S. MAZURKIEWICZ, Badanie procesów relaksacyjnych w poliamidzie
Исследование процессов релаксации в полиамиде
Investigation of relaxation processes in poliamid
- M. ŚLIWOWSKI, K. TURSKI, Wpływ cyklicznej plastycznej deformacji na powierzchnię plastyczności
Влияние циклической пластической деформации на поверхность текучести
Influence of cyclic plastic straining on the yield surface
- J. WRANIK, Macierz sztywności i wektor obciążeń superelementu
Матрица жесткости и вектор нагрузки суперэлемента
Stiffness matrix and a load vector of a superelement

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej
rocznie zł 120.—
półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”

Prenumeratorzy indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy, lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)
