

711720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

**M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A**

K W A R T A L N I K

T O M 1 2 • Z E S Z Y T 1



W A R S Z A W A 1 9 7 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

531

## SPIS TREŚCI

EDMUND KARASIKIEWICZ — wspomnienie pośmiertne	3
E. WALICKI, Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi Течение вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения Flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution	7
B. GAJ, Analiza nieliniowych samowzbudnych cykli granicznych drgań powłoki o małym wzniosie w nieliniowym opływie naddźwiękowym Анализ нелинейных автоколебательных предельных циклов пологой оболочки в нелинейно-сверхзвуковом потоке Analysis of nonlinear selfexcited limit cycles of vibrations of shallow shells in a non-linear supersonic flow	17
A. BAR, J. NIZIOŁ, Wyznaczenie sztywności na zginanie przewodu AFL-8-525 Определение жёсткости изгиба кабеля АФЛ-8-525 Determination of the bending rigidity of a AFL-8-525 conductor	35
A. ZIĄBICKI, Molekularne modele skondensowanych układów polimerowych. Krytyka rozszerzania teorii rozcieńczonych roztworów na układy sieciowe Молекулярные модели конденсированных систем полимеров. Критика распространения теории слабых растворов на сеточные системы Molecular models of condensed polimer systems. Criticism of the extensions of dilute solution theory onto network systems	49
Z. ONISZCZUK, Drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych elementem sprężystym Поперечные колебания системы двух балок, связанных упругим элементом Transversal vibration of the system of two beams connected by means of an elastic element	71
W. BABUŁ, H. DERENTOWICZ, M. FRUCZEK, E. WŁODARCZYK, Z. ZIÓLKOWSKI, O metodach pomiarów parametrów ruchu zewnętrznej powierzchni ścianki rury rozpęcza wybuchowo О методах измерений параметров движения внешней поверхности стенки трубы, расширяемой взрывом заряда в. в. On measurement methods of kinematic parameters of external wall surface of a tube subject to explosive expansion	85
J. GRABACKI, G. SZEFER, Przykłady ultradystrybucyjnych rozwiązań pasma płytowego Примеры обобщённых решений для полосы Examples of ultradistribution solutions for plate strips	97
BIULETYN INFORMACYJNY	101

75720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J

M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 2 • Z E S Z Y T 1

W A R S Z A W A 1 9 7 4

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## K O M I T E T   R E D A K C Y J N Y

BOGUMIŁ STANISZEWSKI — PRZEWODNICZĄCY,  
WŁADYSŁAW BOGUSZ, CZESŁAW EIMER,  
IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI,  
ZBIGNIEW OLESIAK — REDAKTOR,  
BARBARA SKARZYŃSKA — REDAKTOR,  
MAREK SOKOŁOWSKI — REDAKTOR,  
WOJCIECH SZCZEPIŃSKI — REDAKTOR,  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

---

Nakład 680 (557+123) egz. Ark. wydawn. 7,75. Ark. drukarskich 8,75. Papier druk. sat. III kl., 80 g 70×100. Oddano do składania 24.X.1973 r. Druk ukończono w marcu 1974 r. Zam. 1493/73. W-122. Cena zł 30.—

---

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej. Warszawa

## EDMUND KARAŚKIEWICZ WSPOMNIENIE POŚMIERTNE

Dnia 10 kwietnia 1973 r. zmarł w Poznaniu po nieuleczalnej chorobie dr Edmund Karaśkiewicz, emerytowany profesor zwyczajny Politechniki Poznańskiej.

Prof. dr Edmund Karaśkiewicz urodził się 20.XI.1899 r. w Lipie pow. Oborniki woj. Poznańskie. Po ukończeniu seminarium nauczycielskiego w 1920 roku w Poznaniu rozpoczął pracę w szkolnictwie podstawowym i średnim. W 1926 roku zdaje jako eksternista egzamin dojrzałości i podejmuje studia matematyczne na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Poznańskiego. Po ukończeniu studiów podjął pracę nauczyciela w Gimnazjum im. Kopernika w Bydgoszczy.

Jako oficer rezerwy brał udział w kampanii wrześniowej. W niewoli prowadził żywą działalność dydaktyczną wykładając matematykę oraz rachunek wektorowy i tensorowy. Tam też rozpoczął pisanie skryptu z teorii wektorów i tensorów.

Po zakończeniu wojny wraca do kraju i wiąże się z wyższym szkolnictwem w Poznaniu. Prowadzi wykłady z matematyki w ówczesnej Szkole Inżynierskiej oraz wykłada mechanikę i rachunek wektorowy i tensorowy dla matematyków i fizyków na Uniwersytecie Poznańskim. W 1950 r. obronił na Wydziale Matematyczno-Przyrodniczym Uniwersytetu Poznańskiego pracę doktorską z zagadnień drgań nieliniowych. Od tego czasu zaczął zajmować się akustyką i teorią drgań. Ostatecznie skupił swe zainteresowania na akustyce przemysłowej i zagadnieniach drgań nieliniowych. Tytuł profesora nadzwyczajnego otrzymuje w 1957 r., a profesora zwyczajnego w 1965 r. Krótco po przekształceniu Szkoły Inżynierskiej w Poznaniu w Politechnikę Poznańską obejmuje kierownictwo Katedry Mechaniki Technicznej na Wydziale Budowy Maszyn. Przez dwie kadencje jest dziekanem tegoż Wydziału. Jest to okres intensywnego rozwoju Wydziału, czego dowodem jest uzyskanie przez Wydział, jako pierwszy w Politechnice Poznańskiej, praw doktoryzowania.

Prof. Karaśkiewicz współpracuje ściśle w zakresie akustyki i drgań z prof. M. Kwiekim z Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu. W latach 1959/60–1961/62 pełni funkcję kierownika Katedry Akustyki Drgań UAM niezależnie od normalnych obowiązków naukowych i dydaktycznych w Politechnice. Ma szereg osiągnięć naukowych w zakresie akustyki. Wykonuje również nowatorskie w tym okresie prace dla przemysłu związane z minimalizacją hałasu i drgań. Niezależnie od działalności naukowej w zakresie akustyki,



którą uprawia początkowo głównie we współpracy z Uniwersytetem im. A. Mickiewicza, tworzy na Politechnice Poznańskiej Zespół zajmujący się zagadnieniami drgań. Był inicjatorem odbywających się co dwa lata w Poznaniu krajowych Konferencji Drgań Nieliniowych. Był również współorganizatorem pierwszych dorocznych Seminariów Otwartych z Akustyki.

Działalność naukowa prof. Karaśkiewicza nie ograniczała się do prac prowadzonych na wyższych uczelniach Poznania. Był aktywnym członkiem wielu towarzystw naukowych. Przez szereg lat był przewodniczącym Oddziału Poznańskiego Polskiego Towarzystwa Fizycznego oraz przewodniczącym Komisji Nauk Podstawowych Stosowanych Polskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk. Był członkiem założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej i nieprzerwanie pełnił funkcję przewodniczącego Oddziału Poznańskiego Towarzystwa. Był również członkiem założycielem i pierwszym przewodniczącym Polskiego Towarzystwa Akustycznego. Obydwa Towarzystwa w uznaniu zasług nadały prof. Karaśkiewiczowi godność członka honorowego. W 1964 r. zostaje odznaczony Krzyżem Kawalerskim Orderu Odrodzenia Polski. Ponadto posiadał Srebrny Krzyż Zasługi, Złotą Odznakę Miasta Poznania, Order X-lecia PRL oraz Odznakę „Za zasługi dla rozwoju Województwa Poznańskiego”.

Odszedł od nas Człowiek pełen zapału i inicjatywy, zarówno w zakresie pracy naukowej jak i wychowawczej oraz społecznej. Zawsze pozostanie w naszej pamięci Jego szlachetność, prostolinijność i życzliwość dla otoczenia.

### Spis prac

1. *Ciśnienie promieniowania akustycznej fali płaskiej*, Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 1955.
2. *Równania akustyki i hydrodynamiki w ujęciu Eulera i Lagrange'a*, Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 1955.
3. oraz M. KWIEK, *Zasada zachowania energii w falach o amplitudzie skończonej oraz konieczność molekularnego traktowania zagadnienia*, Prace II Sem. Otwartego z Akustyki, Olsztyn 1955.
4. *Podstawowe twierdzenia o funkcjach kulistych i ich zastosowanie w teorii fal*, Prace III Sem. Otwartego z Akustyki, Olsztyn 1956.
5. *Drgania struny o zmiennej gęstości*, Zesz. Nauk. UAM, Zesz. 2, 1957.
6. oraz M. KWIEK, *Zagadnienia menzurowania strun basowych w fortepianie*, Prace PTPN, Podst. Akust., Zesz. 2, 1958.
7. oraz M. KWIEK i K. FLATAU, *Widma dźwięku klawesynu i fortepianu*, Zesz. Nauk. UAM, Akustyka, Zesz. 2, 1947.
8. oraz M. KWIEK, *Untersuchungen über die optimale Nachhallzeit*, Acta Physica Hungarica, 1957.
9. *The radiation pressure of an acoustic wave*, Biul. Zagr. PTPN, Seria B, Livraison XIV, 1958.
10. *The equations of acoustic as formulated by Euler and Lagrange*, Biul. Zagr. PTPN, Série B. Livraison XIV, 1958.
11. oraz M. KWIEK, *Równania nad optymalnym czasem pogłosu*, Prace IV Sem. z Akustyki, Olsztyn 1957
12. oraz M. KWIEK, M. RYFFERT, A. ŚLIWIŃSKI i W. MAŁECKI, *Studia nad słyszalnością pojedynczego echa w stosunku do głosu pierwotnego*, Prace V Sem. z Akustyki, Olsztyn 1958.

13. oraz M. KWIEK, H. RYFFERT, A. ŚLIWIŃSKI i W. MAŁECKI, *Studia nad słyszalnością pojedynczego echa o zwężonym widmie*. Zesz. Nauk. UAM, Zesz. 2, 1958.
14. oraz M. KWIEK, A. ŚLIWIŃSKI, W. MAŁECKI, *Światłne modele akustyczne*, Prace V Sem. z Akustyki, Olsztyn 1958.
15. oraz M. KWIEK, A. ŚLIWIŃSKI, *Modele światłne fal akustycznych*, Zesz. Nauk. UAM, Akustyka, Zesz. 2, 1958.
16. *Funkcje sferoidalne i ich zastosowanie do zagadnień akustyki*, Prace V Sem. z Akustyki, Olsztyn 1958.
17. *O pewnych drganiach relaksacyjnych*, Prace Sesji Nauk. Polit. Pozn. Wydział Budowy Maszyn, 1961.
18. *Teoria nieliniowa rezonatora akustycznego dla niskich częstotliwości*, Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 1962.
19. oraz M. KWIEK, *Étude de salles de concert sur des modèles par la méthode de impulsions*, Acustica, 1962.
20. *Badania sal koncertowych metodą impulsów na modelach*, Prace fizyko-chem. PTPN Wydz. Mat.-Przyrodn., Prace Kom. Mat. Przyrodn. t. CX, Zesz. 3, Poznań 1962.
21. *Nonlinear theory of the acoustic resonator for low frequencies*, Prace II Konf. Międz. dotyczącej drgań nieliniowych, 1962.
22. *Badania własności sali operowej na modelu ultradźwiękowym*, Zesz. Nauk. UAM, Akustyka 3, 1963.
23. *Les bases d'une acoustique des salles et le phenomene de Has*-Acustica, 1963.
24. *Dorobek naukowy Wydziału Budowy Maszyn Politechniki Poznańskiej w okresie 20-lecia*, Pol. Pozn., Sesja Naukowa, 1964.
25. *Tony kombinacyjne nieliniowego rezonatora akustycznego*, Polit. Pozn., Sesja Naukowa, 1964.
26. *Korzyści wynikające ze stosowania układu miar Giergiego (S.I.)*, Polit. Pozn., Sesja Naukowa, 1964.
27. *Die nichtlineare Theorie des akustischen Resonators für niedrige Frequenzen*, Budapest, Hungarien Soc. Opt. Acout. and Filmtechn., 1964.
28. *Rezonans subharmoniczny rezonatora akustycznego dla niskich częstotliwości (metoda stroboskopowa)*, Prace II Konf. Drgań Nielin., 1965.
29. *Drgania kombinacyjne rezonatora akustycznego*, Pozn. Tow. Przyj. Nauk, 1965.
30. *Wielokrotne echo powierzchni kulistej*, Pozn. Tow. Przyj. Nauk., 1965.
31. *Subharmonic resonance of an acoustical resonator for low frequencies by the stroboscopic method*, 1966. Bull. Soc. Sci. Lettres de Poznań.
32. oraz S. AUGUSTYNIAK i J. POLLAK, *Wstępne wyniki badań nad możliwością zmniejszenia ujemnego wpływu drgań, pochodzącego od narzędzi pneumatycznych na ustrój ludzki*, Biul. Techn., Zakłady Metal. Pomet w Poznaniu, 1966.
33. oraz S. AUGUSTYNIAK i Cz. CEMPEL, *Badania nad wyborem metody zmierzającej do zmniejszenia drgań uchwytu ścinaka pneumatycznego*, Biul. Techn. Zakłady Metal. Pomet w Poznaniu, 1968.
34. oraz W. BOGUSZ, S. WIŚNIEWSKI, *Rozwój mechaniki układów dyskretnych w ostatnim dziesięcioleciu w Polsce*, Mech. Teoret. i Stos. Z. 3, 6, 1968.
35. oraz S. AUGUSTYNIAK, Cz. CEMPEL, J. DMOCHOWSKI i T. HOFFMAN, *Przenoszenie drgań na ustrój ludzki*, Biul. Techn. Zakładów Metal. Pomet w Poznaniu, 1969.
36. *The Fourth All-Poland Conference du- Linear, Nonlinear and Random Vibrations*, Poznań 1968 r.; Zagadn. Drgań Nieliniowych, 1969.
37. oraz S. AUGUSTYNIAK, Cz. CEMPEL i J. STEFANIAK, *Możliwości zmniejszenia drgań kanałów powietrznych i obniżenie poziomu hałasu w kotłowni*, Energetyka, 2, 24, 1970.
38. *Drgania własne pewnego układu wibrouderzeniowego o dwóch stopniach swobody* (w druku).
39. *Wymuszone drgania uderzeniowe układu dwumasowego* (w druku).

### Skrypty i książki

1. *Zarys teorii wektorów i tensorów ze zbiorem zadań*, skrypt. wyd. I, PWN, 1953.
2. *Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej*, wyd. I, skrypt, PWN, 1954.
3. *Momenty bezwładności w ujęciu tensorowym*, PWN, 1960.
4. *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, 1964.



PRZEPIY W CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE MIĘDZY WIRUJĄCYMI  
POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI

EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

Wstęp

Laminarny przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi tarczami [1–8, 12], stożkami [9, 10] oraz powierzchniami obrotowymi [11] od dawna zwracał uwagę ze względu na możliwości szerokich zastosowań praktycznych zarówno w badaniach przepływowych maszyn wirnikowych, jak i w teorii łożysk wzdlużnych. Autorzy większości cytowanych prac ujmują zagadnienie przepływu w szczelinie między wirującymi tarczami w oparciu o równania warstwy przyściennej (lub o równania zbliżone do równań warstwy przyściennej) dopuszczające istnienie rozwiązań samopodobnych. W pracach [10, 12] rozwiązano zagadnienie przepływu w szczelinie między wirującymi powierzchniami stożkowymi i wirującymi płaskimi tarczami wychodząc z uproszczonych zlinearyzowanych równań ruchu cieczy lepkiej. W pracy [11] rozwiązano zagadnienie przepływu w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi, których kształt opisany jest funkcjami spełniającymi pewne warunki, dopuszczające istnienie rozwiązań samopodobnych dla równań warstwy przyściennej.

Celem tej pracy jest podanie w postaci ogólnej rozwiązania zlinearyzowanych równań ruchu ustalonego cieczy lepkiej o stałej lepkości w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi o dowolnym kształcie.

1. Równania ruchu

Rozpatrzmy przepływ ustalony cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi o poziomej osi symetrii (rys. 1), z których wewnętrzna wiruje z prędkością kątową  $\omega_1$  a zewnętrzna — z prędkością kątową  $\omega_2$ . Wprowadźmy krzywoliniowy układ współrzędnych  $x, \theta, y$ , przy czym oś  $x$  niech będzie skierowana wzdluż linii symetrii południkowego przekroju szczeliny, oś  $y$  prostopadłe do linii symetrii szczeliny. Element długości łuku w przyjętym układzie współrzędnych określa wzór [1]:

$$ds^2 = dx^2 + R^2(x)d\theta^2 + dy^2,$$

gdzie  $R(x)$  jest odległością od osi obrotu. Zatem współczynniki Lamégo będą równe:  $H_x = 1, H_\theta = R(x), H_y = 1$ . Posługując się nimi możemy — przy założeniu, że grubość  $h$  szczeliny jest mała w porównaniu do promienia  $R$ , co wyrazi się zależnością

$$h(x) \ll R(x),$$

przedstawić równania ruchu cieczy lepkiej w układzie współrzędnych krzywoliniowych [13] dla osiowej symetrii w postaci:

$$(1.1) \quad v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{R'}{R} v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{R''}{R} v_x - \frac{R'^2}{R^2} v_x \right),$$

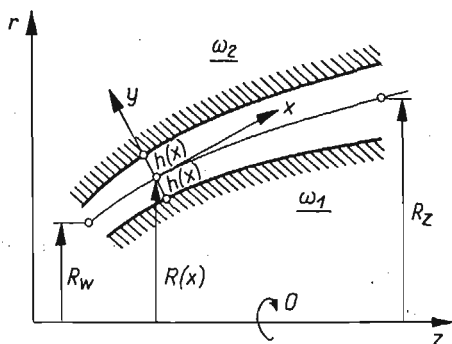
$$(1.2) \quad v_x \frac{\partial v_\theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_\theta}{\partial y} + \frac{R'}{R} v_x v_\theta = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial x} - \frac{R''}{R} v_\theta - \frac{R'^2}{R^2} v_\theta \right),$$

$$(1.3) \quad v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)$$

oraz równanie ciągłości

$$(1.4) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

gdzie primem oznaczono pochodną względem zmiennej  $x$ .



Rys. 1

Przyjęte wcześniej założenie, że  $h(x) \ll R(x)$  pozwala po dokonaniu odpowiednich przejść asymptotycznych [10, 12], wynikających z oszacowania poszczególnych składników, sprowadzić równania ruchu (1.1)–(1.3) do układu równań liniowych:

$$(1.5) \quad -\frac{R'}{R} v_\theta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$(1.6) \quad 0 = \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial y^2},$$

$$(1.7) \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Równań tych użyjemy do zbadania przepływu cieczy w szczelinie.

## 2. Całki równań ruchu

Rozwiązania równań ruchu powinny spełniać warunki brzegowe:

$$(2.1) \quad v_x(x, \pm h) = 0,$$

$$(2.2) \quad v_\theta(x, -h) = R(x)\omega_1, \quad v_\theta(x, +h) = R(x)\omega_2,$$

$$(2.3) \quad v_y(x, \pm h) = 0.$$

Ponadto na wlocie i wylocie ze szczeliny powinny być spełnione warunki brzegowe dotyczące ciśnienia:

$$(2.4) \quad p = p_w \quad \text{dla} \quad x = x_w,$$

$$(2.5) \quad p = p_z \quad \text{dla} \quad x = x_z,$$

gdzie przez  $x_w$  oznaczono współrzędną wlotu na linii symetrii przekroju południkowego szczeliny, a przez  $x_z$  — współrzędną wylotu na tej linii.

Całkując równanie (1.6) względem zmiennej  $y$  i wyznaczając stałe całkowania z warunków brzegowych (2.2) otrzymamy

$$(2.6) \quad v_\theta = \frac{R}{2} \left[ (\omega_1 + \omega_2) - (\omega_1 - \omega_2) \frac{y}{h} \right].$$

Z równania (1.7) wynika, że

$$(2.7) \quad p = p(x).$$

Następnie całkując równanie ciągłości (1.4) w poprzek szczeliny i uwzględniając warunki brzegowe dostaniemy

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} R \int_{-h}^h v_x dy + v_y \Big|_{-h}^h = 0,$$

a stąd wynika

$$(2.8) \quad \int_{-h}^h v_x dy = \frac{C_1}{R(x)}.$$

Podstawiając wartość składowej prędkości  $v_\theta$  ze wzoru (2.6) do równania (1.5) otrzymamy po scałkowaniu i uwzględnieniu warunku brzegowego (2.1) oraz zależności (2.7):

$$(2.9) \quad v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h^2) - \frac{RR'}{4\mu} \left[ \frac{y^4 - h^4}{12h^2} (\omega_1 - \omega_2)^2 - \frac{y^3 - h^2y}{3h} (\omega_1^2 - \omega_2^2) + \frac{y^2 - h^2}{2} (\omega_1 + \omega_2)^2 \right].$$

Po uwzględnieniu powyższej zależności w (2.8) i po wykonaniu całkowania znajdziemy

$$(2.10) \quad p = \frac{\rho R^2 \Omega^2}{8} + \frac{[A(x) - A_z] B_w - [A(x) - A_w] B_z}{A_w - A_z},$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \int \frac{dx}{h^3(x)R(x)}, \\
 A_w &= A(x_w), \quad A_z = A(x_z); \\
 (2.11) \quad B_w &= p_w - \rho \frac{\Omega^2 R_w^2}{8}, \quad B_z = p_z - \rho \frac{\Omega^2}{8} R_z^2, \\
 R_w &= R(x_w), \quad R_z = R(x_z); \\
 \Omega^2 &= \frac{1}{5}(\omega_1 - \omega_2)^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2.
 \end{aligned}$$

Wprowadzając (2.10) do (2.9) wyznaczymy

$$(2.12) \quad v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{B_w - B_z}{A_w - A_z} \frac{y^2 - h^2}{h^3 R} - \frac{RR'}{4\nu} \left[ \frac{5y^4 - 6h^2 y^2 + h^4}{60h^2} (\omega_1 - \omega_2)^2 - \frac{y^3 - h^2 y}{3h} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \right].$$

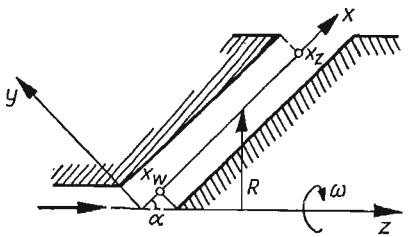
Składową prędkości  $v_y$  wyznaczymy podstawiając (2.12) do (1.4) i całkując otrzymane wyrażenie względem zmiennej  $y$ :

$$(2.13) \quad v_y = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{6\mu} \frac{B_w - B_z}{A_w - A_z} \frac{y^3 - 3h^2 y}{h^3} - \frac{R^2 R'}{4\nu} \left[ \frac{y(y^2 - h^2)^2}{60h^2} (\omega_1 - \omega_2)^2 - \frac{(y^2 - h^2)^2}{12h} (\omega_1^2 - \omega_2^2) \right] \right\}.$$

Równania (2.6), (2.10), (2.12) oraz (2.13) pozwalają określić składowe prędkości i rozkład ciśnienia w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi.

### 3. Przykłady zastosowań

Wyprowadzone wyżej równania zostaną użyte do określenia parametrów przepływu w szczelinach między wirującymi powierzchniami stożkowymi i kulistymi. Dla uproszczenia



Rys. 2

założymy, że wiruje tylko powierzchnia wewnętrzna, co wyrazi się zależnościami:

$$(3.1) \quad \omega_1 = \omega \neq 0, \quad \omega_2 = 0.$$

3.1. Przepływ między powierzchniami stożkowymi o równych kątach rozwarcia. Rozważmy dwie równoległe powierzchnie stożkowe; z rys. 2 wynikają zależności:

$$(3.2) \quad R = x \sin \alpha, \quad R_w = x_w \sin \alpha, \quad R_z = x_z \sin \alpha, \quad h = \text{const.}$$

Uwzględniając (3.1) oraz (3.2) we wzorach określających składowe prędkości i rozkład ciśnienia otrzymamy:

$$(3.3) \quad v_\theta = \frac{\omega \sin \alpha}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right) x,$$

$$(3.4) \quad v_x = \frac{p_w - p_z + 0,15 \rho \omega^2 (R_z^2 - R_w^2)}{2\mu \ln \frac{R_w}{R_z}} \frac{y^2 - h^2}{x} - \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{4\nu h^2} \left[ \frac{1}{60} (5y^4 - 6h^2 y^2 + h^4) - \frac{h}{3} (y^3 - h^2 y) \right] x,$$

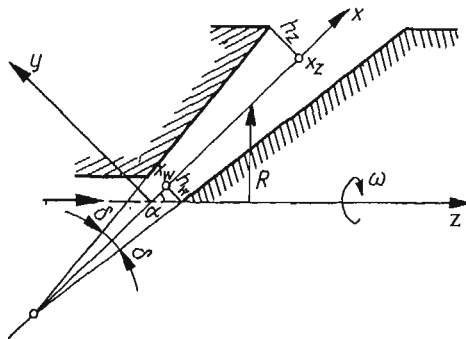
$$(3.5) \quad v_y = \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{2\nu h^2} \left( \frac{y - 5h}{60} \right) (y^2 - h^2)^2,$$

$$(3.6) \quad p = 0,15 \rho \omega^2 x^2 \sin^2 \alpha + \frac{(p_w - 0,15 \rho \omega^2 R_w^2) \ln \frac{x \sin \alpha}{R_z} - (p_z - 0,15 \rho \omega^2 R_z^2) \ln \frac{x \sin \alpha}{R_w}}{\ln \frac{R_w}{R_z}}.$$

Otrzymane tutaj zależności dla składowych prędkości i ciśnienia są identyczne z zależnościami wyprowadzonymi w pracy [10].

3.2. Przepływ między powierzchniami stożkowymi o różnych kątach rozwarcia. Dla szczeliny między powierzchniami stożkowymi o różnych kątach rozwarcia mają miejsce zależności geometryczne (rys. 3):

$$(3.7) \quad R = x \sin \alpha, \quad h = h_w + (x - x_w) \delta, \quad h' = \delta, \quad \delta \ll 1.$$



Rys. 3

Podstawiając (3.1) i (3.7) do wzorów określających parametry przepływu dostaniemy:

$$(3.8) \quad v_\theta = \frac{\omega \sin \alpha}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right) x,$$

$$(3.9) \quad v_x = - \frac{[\rho_w - \rho_z + 0,15\rho\omega^2(R_z^2 - R_w^2)](y^2 - h^2)}{\frac{2\mu x h^3}{(h_w - x_w \delta)^3} \left[ \ln \frac{x_z h_w}{x_w h_z} + 2\delta \left( \frac{x_w}{h_w} - \frac{x_z}{h_z} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{x_w^2}{h_w^2} - \frac{x_z^2}{h_z^2} \right) \right]} - \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{4\nu h^2} \left[ \frac{1}{60} (5y^4 - 6h^2 y^2 + h^4) - \frac{h}{3} (y^3 - h^2 y) \right] x,$$

$$(3.10) \quad v_y = - \frac{\delta[\rho_w - \rho_z + 0,15\rho\omega^2(R_z^2 - R_w^2)](y^2 - h^2)y}{\frac{2\mu x h^3}{(h_w - x_w \delta)^3} \left[ \ln \frac{x_z h_w}{x_w h_z} + 2\delta \left( \frac{x_w}{h_w} - \frac{x_z}{h_z} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{x_w^2}{h_w^2} - \frac{x_z^2}{h_z^2} \right) \right]} + \frac{\omega^2 \sin^2 \alpha}{2\nu h^2} \left( \frac{y - 5h}{60} \right) (y^2 - h^2)^2 - \frac{\delta \omega^2 \sin^2 \alpha}{4\nu} \frac{x(y^2 - h^2)}{h^3} \frac{[5h(y^2 - h^2) - 2(y^2 + h^2)(5h - y)]}{60},$$

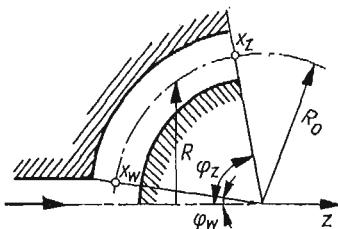
$$(3.11) \quad p = 0,15\rho\omega^2 x^2 \sin^2 \alpha +$$

$$+ \frac{(\rho_w - 0,15\rho\omega^2 R_w^2) \left[ \ln \frac{x_z h}{x h_z} + 2\delta \left( \frac{x}{h} - \frac{x_z}{h_z} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{x^2}{h^2} - \frac{x_z^2}{h_z^2} \right) \right]}{\ln \frac{x_z h_w}{x_w h_z} + 2\delta \left( \frac{x_w}{h_w} - \frac{x_z}{h_z} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{x_w^2}{h_w^2} - \frac{x_z^2}{h_z^2} \right)} - \frac{(\rho_z - 0,15\rho\omega^2 R_z^2) \left[ \ln \frac{x_w h}{x h_w} + 2\delta \left( \frac{x}{h} - \frac{x_w}{h_w} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{x^2}{h^2} - \frac{x_w^2}{h_w^2} \right) \right]}{\ln \frac{x_z h_w}{x_w h_z} + 2\delta \left( \frac{x_w}{h_w} - \frac{x_z}{h_z} \right) - \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{x_w^2}{h_w^2} - \frac{x_z^2}{h_z^2} \right)}.$$

Dla  $\delta = 0$  (co odpowiada szczelinie o stałej grubości) powyższe wzory pokrywają się ze wzorami dla poprzedniego przypadku.

3.3. Przepływ między powierzchniami kulistymi. Zależności geometryczne prowadzą do związków (rys. 4):

$$(3.12) \quad R = R_0 \sin \varphi, \quad \varphi = x/R_0, \quad R' = \cos \varphi, \quad h = \text{const.}$$



Rys. 4

Uwzględniając (3.1) oraz (3.12) we wzorach określających parametry przepływu wyznaczamy:

$$(3.13) \quad v_{\theta} = \frac{\omega R_0}{2} \left(1 - \frac{y}{h}\right) \sin \varphi,$$

$$(3.14) \quad v_x = \frac{p_w - p_z + 0,15 \rho \omega^2 R_0^2 (\sin^2 \varphi_z - \sin^2 \varphi_w)}{2\mu \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_w}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_z}{2} \right)} \frac{y^2 - h^2}{R_0 \sin \varphi} - \frac{\omega^2 R_0 \sin 2\varphi}{8\gamma h^2} \left[ \frac{1}{60} (5y^4 - 6h^2 y^2 + h^4) - \frac{h}{3} (y^3 - h^2 y) \right],$$

$$(3.15) \quad v_y = \frac{(2 - 3 \sin^2 \varphi) \omega^2}{4\gamma h^2} \left( \frac{y - 5h}{60} \right) (y^2 - h^2)^2,$$

$$(3.16) \quad p = 0,15 \rho \omega^2 R_0^2 \sin^2 \varphi + \frac{(p_w - 0,15 \rho \omega^2 R_0^2 \sin^2 \varphi_w) \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_z}{2} \right)}{\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_w}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_z}{2}} - \frac{(p_z - 0,15 \rho \omega^2 R_0^2 \sin^2 \varphi_z) \left( \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_w}{2} \right)}{\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_w}{2} - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_z}{2}}.$$

#### 4. Uwagi końcowe

Wzory odnoszące się do składowych prędkości, otrzymane w p. 3 pracy, dla stałej grubości szczeliny można przedstawić w uproszczonej postaci niezależnie od kształtu powierzchni ograniczających przepływ:

$$(4.1) \quad v_{\theta} = D_1^s f_1(\eta),$$

$$(4.2) \quad v_x = D_2^s f_2(\eta) + D_3^s f_3(\eta),$$

$$(4.3) \quad v_y = D_4^s f_4(\eta);$$

dla szczeliny zaś o zmiennej grubości w postaci:

$$(4.4) \quad v_{\theta} = D_1^z f_1(\eta),$$

$$(4.5) \quad v_x = D_2^z f_2(\eta) + D_3^z f_3(\eta),$$

$$(4.6) \quad v_y = D_4^z f_4(\eta) + D_5^z f_5(\eta) + D_6^z f_6(\eta);$$

gdzie oznaczono dla uproszczenia:

$$f_1(\eta) = 1 - \eta, \quad f_2(\eta) = 1 - \eta^2,$$

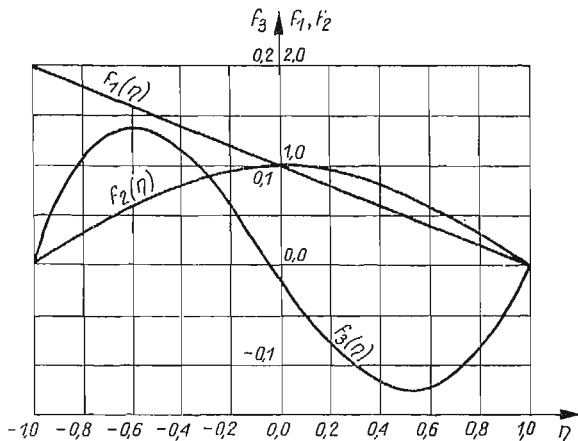
$$f_3(\eta) = \frac{1}{60} (5\eta^4 - 6\eta^2 + 1) - \frac{\eta}{3} (\eta^2 - 1),$$

$$f_4(\eta) = \frac{\eta - 5}{60} (\eta^2 - 1)^2, \quad f_5(\eta) = \eta(\eta^2 - 1),$$

$$f_6(\eta) = [5(\eta^2 - 1) - 2(\eta^2 + 1)(5 - \eta)](\eta^2 - 1), \quad \eta = \frac{y}{h}.$$

Tutaj  $D_1^*$ ,  $D_2^*$  oznaczają współczynniki zależne od lokalnego położenia przekroju poprzecznego szczeliny. Górny wskaźnik oznacza odpowiednio stałą lub zmienną grubość szczeliny.

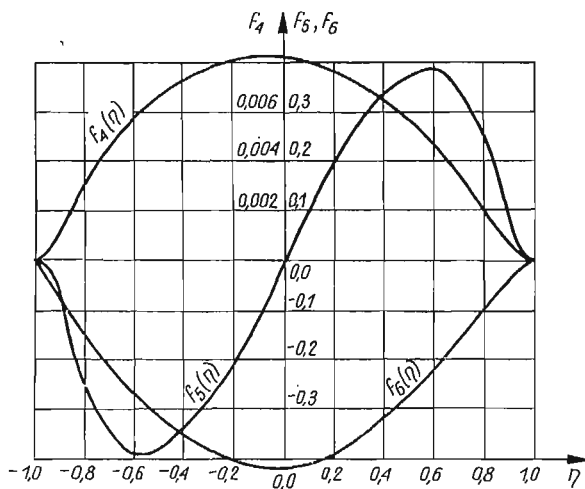
Z analizy otrzymanych wzorów wynika, że przepływ w szczelinie jest wywołany przez dwa czynniki: ruch wirowy powierzchni ograniczających szczelinę (w przypadkach szcze-



Rys. 5

gólnych — przez ruch wirowy powierzchni wewnętrznej) oraz przez różnicę ciśnień między wlotem i wylotem szczeliny.

Wzory charakteryzujące składowe prędkości przepływu dla przypadków szczególnych omówionych w p. 3 pozwalają stwierdzić, że profil prędkości obwodowej  $v_\theta$  dla ustalonej



Rys. 6

wartości współrzędnej  $x$  jest liniowy (funkcja  $f_1(\eta)$  na rys. 5) niezależnie od kształtu szczeliny. Profil ten jest identyczny z profilem przepływu Couette'a między dwiema płaszczyznami, z których jedna jest nieruchoma, a druga posiada lokalną prędkość równą  $\omega R(x)$ .



Z postaci wzorów opisujących składową wzdłużną prędkość  $v_x$  wynika, że główną jej częścią jest paraboliczny profil płaskiego przepływu Poiseuille'a (funkcja  $f_2(\eta)$  na rys. 5) uwarunkowany istnieniem wspomnianej wyżej różnicy ciśnień i ruchem wirowym powierzchni wewnętrznej.

Na główną część składowej prędkości wzdłużnej nakłada się przepływ wtórny, wywołany ssącym działaniem wirującej powierzchni wewnętrznej. Powierzchnia wewnętrzna zasysa w swoim sąsiedztwie ciecz wywołując jej ruch wzdłużny odśrodkowy. Ruch ten musi być równoważony ruchem wzdłużnym dośrodkowym przy powierzchni zewnętrznej i ruchem poprzecznym określonym składową  $v_y$  prędkości. Przepływ wtórny opisany jest drugim składnikiem prędkości  $v_x$  i prędkością  $v_y$ ; profile przepływu wtórnego reprezentowane funkcjami  $f_3(\eta)$  oraz  $f_4(\eta)$  pokazano na rys. 5 i rys. 6.

Dla szczeliny o zmiennej grubości profil prędkości  $v_y$ , związanej z omówionym wyżej przepływem wtórnym, ulega zmianom określonym funkcjami  $f_5(\eta)$  i  $f_6(\eta)$  pokazanymi na rys. 6.

Rozkład ciśnień wzdłuż tworzącej powierzchni symetrii szczeliny — niezależnie od rodzaju i kształtu szczeliny — daje się przedstawić w postaci sumy dwóch składowych: pierwszej — wywołanej ssącym działaniem wirującej powierzchni i drugiej — będącej skutkiem istnienia przepływu wzdłużnego. Wynikiem dodawania tych składowych może być istnienie podciśnień wewnątrz szczeliny.

Wnioski o podobnym charakterze jakościowym wynikają z analizy wzorów wyprowadzonych w p. 2 pracy.

#### Literatura cytowana w tekście

1. W. RICE, *An Analytical and Experimental Investigation of Multiple Disk Pumps and Compressors*, J. Eng. for Power, Trans. ASME, Series A, 3, **85** (1963), 191–200.
2. T. VANNERUS, *Rotierende Scheiben für Luftvorwärmer mit geblasen-wirkung*, Allg. Wärmetechn., 6 (1955), 251–262.
3. W. RICE, *An Analytical and Experimental Investigation of Multiple Disk Turbines*, J. Eng. for Power, Trans. ASME, Series A, 1, **87** (1965), 29–36.
4. J.-L. PEUBE, F. KREITH, *Écoulement permanent d'un fluide visqueux incompressible entre deux disques parallèles en rotation*, J. Mécanique, 2, **5** (1966), 260–281.
5. F. KREITH, H. VIVIAND, *Laminar Source Flow Between Two Parallel Coaxial Disks Rotating at Different Speeds*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 3, **34** (1967), 541–547.
6. L. MATSCH, W. RICE, *An Asymptotic Solution for Laminar Flow of an Incompressible Fluid Between Rotating Disks*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 1, **35** (1968), 155–159.
7. K. E. BOYD, W. RICE, *Laminar Inward Flow of an Incompressible Fluid Between Rotating Disks with Full Peripheral Admission*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 2, **35** (1968), 229–237.
8. R. G. ADAMS, W. RICE, *Experimental Investigation of the Flow Between Corotating Disks*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 3, **37** (1970), 844–849.
9. W. RICE, K. W. MCALISTER, *Laminar Throughflow of Newtonian Fluid Between Coaxial Rotating Cones*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 1, **37** (1970), 210–212.
10. A. SZANIAWSKI, *Przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego*, Prace IPPT PAN 15 (1970).
11. K. W. MCALISTER, W. RICE, *Throughflows Between Rotating Surfaces of Revolution, Having Similarity Solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 4, **37** (1970), 924–930.
12. А. И. ГОЛУБЕВ, *Современные уплотнения вращающихся валов*, Москва 1963.

13. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, В. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика*, ч. II, Москва 1963.  
 14. Л. А. Дорфман, *Гидродинамическое сопротивление и теплодача вращающихся тел*, Москва 1960.

## Р е з ю м е

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ  
ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ

В работе выведены формулы определяющие такие параметры ламинарного стационарного течения вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения, как составляющие скорости  $v_x, v_\theta, v_y$  и давление  $p$ .

Применяются линеаризованные уравнения движения вязкой жидкости для осе-симметричного течения в системе криволинейных координат  $x, \theta, y$ .

Полученные решения уравнений движения проиллюстрированы примерами течения в зазоре постоянной толщины между вращающейся и неподвижной конусными поверхностями, а также между вращающейся и неподвижной сферическими поверхностями. Рассмотрено также течение в зазоре переменной толщины, образуемом между конусными поверхностями с разными углами наклона.

## S u m m a r y

## FLOW OF VISCOUS FLUID BETWEEN ROTATING SURFACES OF REVOLUTION

This paper contains formulae which define such parameters of the steady laminar flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution as the velocity components  $v_x, v_\theta, v_y$  and pressure  $p$ .

The linearized equations of motion of the viscous fluid flow for axial symmetry in the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system  $x, \theta, y$  are used.

The solutions of the equations of motion have been illustrated by examples of fluid flow through the slot of stable thickness between rotating and fixed conical surfaces, and between rotating and fixed spherical surfaces.

The flow through the slot of variable thickness formed by conical surfaces with various angles of divergence has also been examined.

WYŻSZA SZKOŁA INŻYNIERSKA  
BYDGOSZCZ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 23 marca 1973 r.*

ANALIZA NIELINIOWYCH SAMOWZBUDNYCH CYKLÓW GRANICZNYCH  
DRGAŃ POWŁOKI O MAŁYM WZNIOSIE W NIELINIOWYM OPŁYWIE  
NADDŹWIĘKOWYM

BARBARA GAJL (WARSZAWA)

1. Wstęp

W dotychczasowej literaturze, zajmującej się zagadnieniami aerosprężystości układów powierzchniowych w opływach naddźwiękowych, zajmowano się wyznaczaniem krytycznych wartości parametrów, określających granice stateczności drgań samowzbudzonych — były to badania układów zlinearyzowanych; rozpatrywano także cykle graniczne w problemach nieliniowych dla płaskich płyt przy założeniu liniowości sił aerodynamicznych i bez uwzględnienia tłumienia materiałowego [3].

Nieliniowe zagadnienie drgań samowzbudnych powłok o małym wzniosie i skończonej długości wymaga zastosowania nieliniowej aerodynamiki z uwzględnieniem wpływu opływu stacjonarnego na opływ niestacjonarny. Jak wykazały analizy przeprowadzone w pracach [11 i 12], wartość poprawek wynikłych z uwzględnienia kształtu powłoki i nieliniowości drgań jest niepomijalna.

W niniejszej pracy określono cykl graniczny dla pewnych warunków początkowych, pokazano zmienność w czasie przemieszczeń punktów powłoki i zmienność w czasie funkcji  $A_n(t)$ , będących składowymi szeregu określającego wielkości przemieszczeń normalnych powierzchni powłoki. Uwzględniono tłumienie materiałowe wg modelu Voigta oraz nieliniową zależność ciśnienia od drgań powierzchni powłoki i wpływ opływu stacjonarnego na opływ niestacjonarny. Przyjęto stałe krzywizny w kierunku podłużnym i poprzecznym. Zastosowano techniczną nieliniową teorię powłok.

Rozwiązanie na przemieszczenia normalne powierzchni powłoki przedstawiono w postaci podwójnego szeregu funkcji własnych i zastosowano ortogonalizacyjną metodę Galerkiną w celu sprowadzenia nieliniowego równania różniczkowego cząstkowego czwartego rzędu do układu równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu.

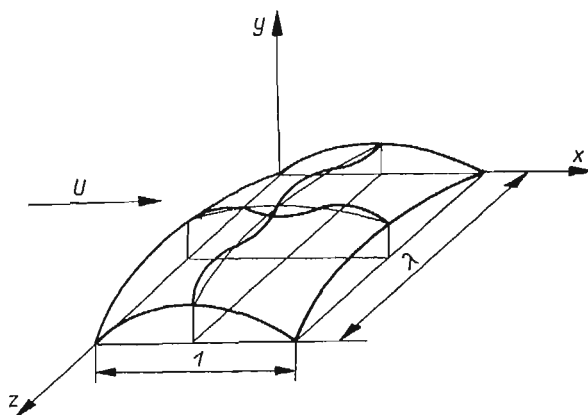
Układ równań różniczkowych zwyczajnych przedstawiony w postaci bezwymiarowej rozwiązano numerycznie. Obliczenia zostały wykonane na elektronicznej maszynie cyfrowej GIER. Do programu włączono duńską procedurę Mersno opartą na znanej metodzie numerycznej Rungego-Kutta.

Przykład obliczono dla następujących parametrów: liczba Macha  $M = 3$ ;  $L/h$  oznacza stosunek długości powłoki do jej grubości  $= 240$ ; dla wartości krzywizny poprzecznej i podłużnej  $k_x = k_z = 0,08$  oraz dla wzniosu  $\varepsilon = 0,08$ . W oparciu o wcześniej przeprowadzone rozważania przyjęto ilość fal podłużnych  $n = 4$  i ilość fal poprzecznych  $m = 1$ ,

czyli rozwiązywano w przykładzie układ czterech równań. Program dla maszyny liczącej napisano w ten sposób, iż możemy dowolnie zmieniać warunki początkowe, liczbę równań w układzie oraz parametry przepływu i powłoki. Liczenie jest bardzo pracochłonne, gdyż obliczanie jednego punktu płaszczyzny fazowej trwa dla maszyny GIER około 3 min. Z tego względu ograniczono się do jednego przykładu.

## 2. Równania problemu

Rozpatrujemy powłokę o małym wzniosie i skończonej długości, której rzut na płaszczyznę  $xz$  ma długość  $b$  i szerokość  $L$ . Przyjmujemy, że na krawędziach powłoki są spełnione warunki podparcia przegubowo-przesuwne. Przyjmujemy ponadto, że powłoka stanowi część nieograniczonej płaszczyzny, która poza powłoką jest nieodkształcalna. Powłoka jest opływana z jednej strony naddźwiękowym strumieniem gazu idealnego o prędkości  $U$  w kierunku równoległym do osi  $x$ . Niesprężystość materiału powłoki uwzględniono przez wprowadzenie modelu Voigta.



Rys. 1

Zagadnienie przedstawiamy w postaci bezwymiarowej. Wprowadzamy następujące oznaczenia:  $\rho_0$  oznacza gęstość powietrza w nieskończoności, współrzędne  $\bar{x}$ ,  $\bar{z}$  i przemieszczenie środkowej powierzchni powłoki w kierunku normalnym  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t})$  odnosimy do szerokości powłoki  $L$  i oznaczamy odpowiednio  $x$ ,  $z$ ,  $w(x, z, t)$ . Główne krzywizny  $\bar{k}_x$  i  $\bar{k}_z$  odnosimy do  $1/L$  i oznaczamy przez  $k_x$  i  $k_z$ . Funkcję naprężeń Airy'ego  $\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t})$  odnosimy do  $\frac{1}{2}\rho_0 U^2 L^3$  i oznaczamy przez  $\Phi(x, z, t)$ , ciśnienie zaś  $\Delta\bar{p}(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t})$  odnosimy do ciśnienia dynamicznego  $\frac{1}{2}\rho_0 U^2$  i oznaczamy przez  $\Delta p(x, z, t)$ . Przez  $N$  oznaczamy siły działające na jednostkę długości przekroju powłoki, odnosimy je do  $\frac{1}{2}\rho_0 U^2 L$  i oznaczamy w zależności od kierunku działania odpowiednio  $N_x$  i  $N_z$ . Czas  $\bar{t}$  odniesiony jest do ilorazu  $L/U$  i oznaczony przez  $t$ , współczynnik zaś tłumienia materiałowego do  $L/a_0$  i oznaczony przez  $\theta$ ;  $a_0$  oznacza prędkość dźwięku.

Stosujemy techniczną nieliniową teorię powłok, która jest szczególnym przypadkiem nieliniowej teorii małych odkształceń (zlinearyzowanej względem składowych wektora przemieszczenia, stycznych do powierzchni podstawowej powłoki) i mieści się ponadto w ramach założeń Kirchhoffa-Love'a. Za powierzchnię podstawową przyjmujemy środkową powierzchnię powłoki.

Równania ruchu powłoki w układzie bezwymiarowym mają następującą postać:

$$(2.1) \quad \left(1 + \theta \frac{\partial}{\partial t}\right) \nabla^2 \nabla^2 w + \lambda_1 M^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \lambda_2 M^2 \left[ \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left(k_z + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} + \Delta p \right],$$

$$(2.2) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \lambda_3 \frac{1}{M^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - k_z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right],$$

gdzie  $\theta$  oznacza tłumienie materiałowe,

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 12(1-\nu^2)(L/h)^2 \rho_s a_0^2 / E, \\ \lambda_2 &= 12(1-\nu^2)(L/h)^3 \rho_0 a_0^2 / 2E, \\ \lambda_3 &= 2E / \rho_0 a_0^2 (h/L); \end{aligned}$$

$M$  oznacza liczbę Macha,  $\nu$  — współczynnik Poissona,  $E$  — moduł sprężystości Younga,  $\rho_s$  — gęstość materiału powłoki,  $h$  — grubość powłoki, zaś  $\Delta p$  jest różnicą ciśnień działającą na powierzchnię powłoki i wyraża się wzorem

$$(2.4) \quad \Delta p = \varepsilon(p_1^{(1)} + p_1^{(2)}) + \varepsilon^2 p_2^{(1)} + \delta(p_3^{(1)} + p_3^{(2)}) + \delta \varepsilon p_4^{(1)} + \delta^2 p_5^{(1)};$$

$\varepsilon$  i  $\delta$  są małymi parametrami i mają ten sam sens co w [11 i 12], wyrażenia zaś na składowe ciśnienia są podane w [12].

### 3. Określenie funkcji naprężeń

Rozwiązania układu równań (2.1) i (2.2) będziemy poszukiwali w postaci podwójnego szeregu funkcji własnych

$$(3.1) \quad w(x, z, t) = \sum_n \sum_m A_{nm}(t) \sin n\pi x \sin \frac{m\pi}{\lambda} z,$$

gdzie  $n$  i  $m$  są liczbą fal w kierunku podłużnym i poprzecznym, a  $\lambda = b/L$  — wydłużeniem powłoki.

Rozwiązanie równania (2.2) przedstawiamy jako sumę rozwiązań

$$(3.2) \quad \Phi(x, z, t) = \Phi_1(x, z, t) + \Phi_2(x, z, t),$$

gdzie  $\Phi_1(x, z, t)$  jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego, natomiast  $\Phi_2(x, z, t)$  jest rozwiązaniem szczególnym równania pełnego.

Rozwiązanie ogólne przedstawiamy za pomocą wzoru [1]

$$(3.3) \quad \Phi_1(x, z, t) = \frac{1}{2}(\tilde{N}_x z^2 + \tilde{N}_z x^2 - 2N_{xz}xz),$$

gdzie  $\tilde{N}_x, \tilde{N}_z, \tilde{N}_{xz}$  są pewnymi stałymi, uzyskanymi z całkowania; zakładamy mianowicie, że średnie przemieszczenie powierzchni w kierunkach  $x$  i  $z$  jest równe zeru i zapisujemy to w postaci

$$(3.4) \quad \int_0^1 dx \int_0^\lambda \frac{\partial u}{\partial x} dz = 0, \quad \int_0^1 dx \int_0^\lambda \frac{\partial v}{\partial z} dz = 0,$$

gdzie  $u(x, z, t), v(x, z, t)$  oznaczają bezwymiarowe przemieszczenia w kierunkach osi  $x$  i  $z$ .

Zależność między pochodnymi  $u$  i  $v$  a funkcją Airy'ego jest następująca [1]:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\lambda_3} M^2(N_x - \nu N_z) + k_x w - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{1}{\lambda_3} M^2(N_z - \nu N_x) + k_z w - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.6) \quad N_x = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2}, \quad N_z = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}, \quad N_{xz} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z}.$$

Po podstawieniu (3.1) do (3.5), a następnie do (3.4) i wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \tilde{N}_x - \nu \tilde{N}_z &= \frac{\lambda_3}{M^2} \left\{ \frac{\pi^2}{8} \sum_n \sum_m n^2 A_{nm}^2(t) - \frac{k_x}{\pi^2} \sum_n \sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t) [1 - (1)^n] [1 - (1)^m] \right\}, \\ \tilde{N}_z - \nu \tilde{N}_x &= \frac{\lambda_3}{M^2} \left\{ \frac{\pi^2}{8\lambda^2} \sum_n \sum_m m^2 A_{nm}^2(t) - \frac{k_z}{\pi^2} \sum_n \sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t) [1 - (1)^n] [1 - (1)^m] \right\}. \end{aligned}$$

Z (3.1) drogą prostych przekształceń otrzymujemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \tilde{N}_x &= \frac{\lambda_3}{M^2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\pi^2}{8} \sum_n \sum_m \left( n^2 + \frac{m^2\nu}{\lambda^2} \right) A_{nm}(t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi^2} (k_x + \nu k_z) \sum_n \sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t) [1 - (1)^n] [1 - (1)^m] \right\}; \end{aligned}$$

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \tilde{N}_z &= \frac{\lambda_3}{M^2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\pi^2}{8} \sum_n \sum_m \left( \nu m^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right) A_{nm}^2(t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi^2} (k_z + \nu k_x) \sum_n \sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t) [1 - (1)^n] [1 - (1)^m] \right\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{N}_{xz} \equiv 0.$$

Podstawiając (3.7), (3.8) i (3.9) do (3.3) otrzymujemy następujące wyrażenia na pochodne funkcji naprężeń:

$$(3.10) \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = \tilde{N}_x, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = \tilde{N}_z, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial z} = 0.$$

Rozwiązanie szczególne równania (2.2), a tym samym i wartości funkcji  $\Phi_2(x, z, t)$ , określamy w sposób następujący. Podstawiamy (3.1) do równania (2.2) i otrzymujemy

$$(3.11) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi_2(x, z, t) = \frac{\lambda_3}{M^2} \left\{ \frac{\pi^4}{\lambda^2} \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t) A_{sq}(t) n m s q \cos \pi n x \cos \pi s x \times \right. \\ \times \cos \frac{m\pi}{\lambda} z \cos \frac{q\pi}{\lambda} z - \frac{\pi^2}{M^2} \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q n^2 q^2 A_{nm}(t) A_{sq}(t) \sin \pi n x \sin \pi s x \times \\ \left. \sin \frac{m\pi}{\lambda} z \sin \frac{q\pi}{\lambda} z + \pi^2 \sum_n \sum_m \left[ k_x \left( \frac{m}{\lambda} \right)^2 + k_z n^2 \right] A_{nm}(t) \sin \pi n x \sin \frac{m\pi}{\lambda} z \right\}.$$

Poszukujemy rozwiązania równania (3.11) z warunkami brzegowymi

$$(3.12) \quad \int_0^\lambda \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} dz = 0, \quad \int_0^\lambda \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} dz = 0, \quad \text{dla } x = 0 \quad \text{oraz } x = 1; \\ \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} dx = 0, \quad \int_0^1 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial z} dx = 0, \quad \text{dla } z = 0 \quad \text{oraz } z = \lambda.$$

Równanie (3.11) przekształcamy do postaci

$$(3.13) \quad \nabla^2 \nabla^2 \Phi_2(x, z, t) = \frac{\lambda_3}{M^2} \left\{ \frac{\pi^4}{4\lambda^2} \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t) A_{sq}(t) \times \right. \\ \times \left[ \cos \frac{\pi}{\lambda} (m-q) z [nq(ms+nq) \cos \pi(n+s)x + nq(ms-nq) \cos \pi(n-s)x] + \right. \\ \left. + \cos \frac{\pi}{\lambda} (m+q) z [nq(ms-nq) \cos \pi(n+s)x + nq(ms+nq) \cos \pi(n-s)x] \right] + \\ \left. + \pi^2 \sum_n \sum_m \left[ k_x \left( \frac{m}{\lambda} \right)^2 + k_z n^2 \right] A_{nm}(t) \sin \pi n x \sin \frac{m\pi}{\lambda} z \right\}.$$

Zakładamy rozwiązanie (spełniające warunki brzegowe (3.12)) w następującej postaci:

$$(3.14) \quad \Phi_2(x, z, t) = \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t) A_{sq}(t) \left\{ \cos \frac{\pi}{\lambda} (m-q) z [A_1 \cos \pi(n+s)x + \right. \\ \left. + B_1 \cos \pi(n-s)x] + \cos \frac{\pi}{\lambda} (m+q) z [C_1 \cos \pi(n+s)x + D_1 \cos \pi(n-s)x] \right\} + \\ + E_1 \sum_n \sum_m A_{nm}(t) \sin \pi n x \sin \frac{m\pi}{\lambda} z.$$

Przewidywane rozwiązanie (3.14) podstawiamy do (3.13) i otrzymujemy równanie na współczynniki. Z tego równania określamy

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{\lambda_3 nq(ms+nq)}{4M^2 \lambda^2 \left[ (n+s)^2 + \left( \frac{m-q}{\lambda} \right)^2 \right]^2}, \\
 B_1 &= \frac{\lambda_3 nq(ms-nq)}{4M^2 \lambda^2 \left[ (n-s)^2 + \left( \frac{m-q}{\lambda} \right)^2 \right]^2}, \\
 C_1 &= \frac{\lambda_3 nq(ms-nq)}{4M^2 \lambda^2 \left[ (n+s)^2 + \left( \frac{m+q}{\lambda} \right)^2 \right]^2}, \\
 D_1 &= \frac{\lambda_3 nq(ms+nq)}{4M^2 \lambda^2 \left[ (n-s)^2 + \left( \frac{m+q}{\lambda} \right)^2 \right]^2}, \\
 E_1 &= \frac{\lambda_3 \left[ k_x \left( \frac{m}{\lambda} \right)^2 + k_z n^2 \right]}{M^2 \pi^2 \left[ n^2 + \left( \frac{m}{\lambda} \right)^2 \right]^2}.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Podstawiając (3.15) do (3.14) otrzymujemy rozwiązanie szczególne dla  $\Phi_2(x, z, t)$ .

#### 4. Redukcja równań

Mając określoną funkcję naprężeń  $\Phi(x, z, t)$  możemy sprowadzić różniczkowe cząstkowe równanie ruchu powłoki (2.1) do równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu (względem czasu  $t$ ) podstawiając uprzednio do (2.1) rozwiązanie założone w postaci szeregu funkcji własnych (3.1) i odpowiednie pochodne funkcji naprężeń  $\Phi(x, z, t)$ .

Zapisujemy równanie (2.1) w postaci

$$\mathcal{L}[w(x, z, t)] = 0.
 \tag{4.1}$$

Po zastosowaniu ortogonalizacyjnej metody Galerkina otrzymamy układ równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu

$$\int_0^1 \int_0^\lambda \mathcal{L}[w(x, z, t)] w_{lr}(x, z) dx dz = 0,
 \tag{4.2}$$

gdzie  $l, r = 1, 2, 3, \dots$ , zaś

$$w_{lr}(x, z) = \sin l\pi x \sin \frac{r\pi}{\lambda} z
 \tag{4.3}$$

jest funkcją ortogonalizującą.



Jeżeli założymy, że funkcja opisująca powierzchnię  $f(x, z) = \sin \pi x \sin(\pi/\lambda)z$  i podstawimy ją do (2.1), to układ równań opisujący drgania powłoki przybierze postać

$$(4.4) \quad \frac{d^2}{dt^2} A_{lr}(t) = -\frac{1}{\lambda M^2} \left[ \pi^4 \left( l^2 + \frac{r^2}{\lambda^2} \right)^2 \theta - \frac{2(M^2-2)}{\beta^3} \right] \frac{d}{dt} A_{lr}(t) + \frac{2\varepsilon(\gamma+1)\pi^2}{\lambda_1 M^2} \times \\ \times \sum_n \frac{d}{dt} A_{nr}(t) \alpha_{1nl}^{(1)} + \frac{4\pi(\gamma+1)}{\lambda_1 \lambda M^2} L_{lr} + \frac{2(\gamma+1)}{\lambda_1 \lambda M^2} M_{lr} + \frac{4}{\lambda \lambda_1 M^2} H_{lr} - \frac{1}{\lambda_1 M^2} \times \\ \times \left[ \pi^4 \left( l^2 + \frac{r^2}{\lambda^2} \right)^2 + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda} \frac{\left[ k_x \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 + k_z l \right]^2}{\left[ l^2 + \left( \frac{r}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \right] A_{lr}(t) + \frac{4}{\lambda_1 M^2} \sum_n A_{nr}(t) \left[ \frac{\pi}{\beta} \alpha_{(l+n)(l-n)} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon(\gamma+1)\pi^2}{2} \alpha_{1nl} \right] - \frac{4\lambda_4}{\pi^2 \lambda_1 \lambda M^2} \frac{1}{lr} [1 - (-1)^l][1 - (-1)^r] C + \frac{\lambda_4 \pi^2}{\lambda_1 \lambda M^2} \left( A l^2 + B \frac{r^2}{\lambda^2} \right) A_{lr}(t) + \\ + \frac{4\lambda_4}{\pi^2 \lambda_1 \lambda M^2} \frac{1}{lr} [1 - (-1)^l][1 - (-1)^r] C^{(1)} - \frac{\lambda_2 \lambda_3 \pi^2}{\lambda^3 \lambda_1 M^2} D_{lr} + \frac{4\lambda_2 \lambda_3 \pi^2}{\lambda^3 \lambda_1 M^2} F_{lr} + \\ + \frac{2(\gamma+1)\pi^2}{\lambda \lambda_1 M^2} K_{lr} - \frac{\lambda_4 \pi^2}{\lambda_1 \lambda M^2} \left( A^{(1)} l^2 + B^{(1)} \frac{r^2}{\lambda^2} \right) A_{lr}(t) + \frac{\lambda_2 \lambda_3 \pi^4}{\lambda^5 \lambda_1 M^2} E_{lr}.$$

Podajemy teraz listę oznaczeń symboli wprowadzonych w tym równaniu.  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ , oraz  $M$  są określone wzorami (2.3) i (3.1). Ponadto

$$(4.5) \quad \beta = \sqrt{M^2 - 1},$$

$\gamma$  — wykładnik adiabaty,  $\varepsilon$  jest określone wzorem (2.3),  $\lambda_4 = 12\lambda(L/h)^2$ ,

$$\alpha_{1nl}^{(1)} = \gamma_{1(l-n)}^{(1)} - \gamma_{1(l+n)}^{(1)},$$

$$\gamma_{1(l \mp n)}^{(1)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l \mp n)^2 \neq 1,$$

$$\gamma_{1(l \mp n)}^{(1)} = 1/4 \quad \text{dla} \quad (l \mp n)^2 = 1,$$

$$\gamma_{1(l \mp n)}^{(1)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l \mp n)^2 = 0.$$

$$(4.6) \quad L_{lr} = \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t) \frac{d}{dt} A_{sq}(t) n \alpha_{nsl}^{(2)} \beta_{mqr},$$

gdzie

$$\alpha_{nsl}^{(2)} = \gamma_{n(l-s)}^{(2)} - \gamma_{n(l+s)}^{(2)},$$

$$\gamma_{n(l \mp s)}^{(2)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l \mp s)^2 \neq n^2,$$

$$\gamma_{n(l \mp s)}^{(2)} = 1/4 \quad \text{dla} \quad (l \mp s)^2 = n^2,$$

$$\gamma_{n(l \mp s)}^{(2)} = 0 \quad \text{dla} \quad (l \mp s)^2 = 0;$$

$$\beta_{mqr} = \varkappa_{m(q-r)} - \varkappa_{m(q+r)},$$

$$\kappa_{m(q\mp r)} = \frac{\lambda}{4\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{m-(q\mp r)}}{m - (q\mp r)} + \frac{1 - (-1)^{m+(q\mp r)}}{m + (q\mp r)} \right] \quad \text{dla } (q\mp r)^2 \neq m^2,$$

$$\kappa_{m(q\mp r)} = \frac{\lambda}{4} \quad \text{dla } (q\mp r)^2 = m^2 \neq 0,$$

$$\kappa_{m(q\mp r)} = \frac{1 - (-1)^m}{2} \frac{\lambda}{\pi m} \quad \text{dla } (q\mp r) = 0.$$

$$(4.7) \quad M_{lr} = \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q \frac{d}{dt} A_{nm}(t) \frac{d}{dt} A_{sq}(t) \alpha_{nsl}^{(3)} \beta_{mqr},$$

gdzie

$$\alpha_{nsl}^{(3)} = \gamma_{n(l-s)}^{(3)} - \gamma_{n(l+s)}^{(3)},$$

$$\gamma_{n(l\pm s)}^{(3)} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{n-(l\mp s)}}{n - (l\mp s)} + \frac{1 - (-1)^{n+(l\mp s)}}{n + (l\mp s)} \right] \quad \text{dla } (l\mp s)^2 \neq n^2,$$

$$\gamma_{n(l\mp s)}^{(3)} = \frac{1}{4} \quad \text{dla } (l\mp s)^2 = n^2 \neq 0,$$

$$\gamma_{n(l\mp s)}^{(3)} = \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{1}{\pi n} \quad \text{dla } (l\mp s) = 0,$$

$\beta_{mqr}$  określono wzorem (4.6).

$$(4.8) \quad H_{lr} = \varepsilon \left[ \frac{2\pi}{\beta} H_{lr}^{(1)} + \frac{\pi}{\beta^3 \lambda^2} H_{lr}^{(2)} \right] + \varepsilon^2 \frac{(\gamma+1)\pi^2}{2} H_{lr}^{(3)},$$

gdzie

$$H_{lr}^{(1)} = \alpha_{(l+1)(l-1)} \beta_{(r+1)(r-1)},$$

$$H_{lr}^{(2)} = (\alpha_{(l+1)(l-1)} - \alpha_l) \beta_{(r+1)(r-1)}, \quad H_{lr}^{(3)} = \alpha \beta',$$

$$\alpha_{(l+1)(l-1)} = \gamma_{(l+1)} - \gamma_{(l-1)},$$

$$\gamma_{(l\pm 1)} = \frac{1 - (-1)^{l\pm r}}{2\pi(l\pm 1)} \quad \text{dla } l^2 \neq 1,$$

$$\gamma_{(l\pm r)} = 0 \quad \text{dla } l^2 = 1,$$

$$\beta_{(r+1)(r-1)} = \kappa_{(r-1)} - \kappa_{(r+1)},$$

$$\kappa_{(r\pm 1)} = 0 \quad \text{dla } r^2 \neq 1,$$

$$\kappa_{(r-1)} = \frac{\lambda}{2} \quad \text{dla } r = 1,$$

$$\kappa_{(r+1)} = 0 \quad \text{dla } r = 1,$$

$$\alpha_l = \frac{1 - (-1)^l}{\pi l} \quad \text{dla każdego } l.$$

$$\alpha = \gamma_{1(l+1)} + \gamma_{1(l-1)},$$

$$\gamma_{1(l\pm 1)} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1 - (-1)_l}{l} + \frac{1 - (-1)^{l\mp 2}}{l\mp 2} \right] \quad \text{dla } (l\pm 1)^2 \neq 1,$$

$$\gamma_{1(l\pm 1)} = 0 \quad \text{dla } (l\pm 1)^2 = 1,$$

$$\gamma_{1(l\pm 1)} = 0 \quad \text{dla } (l\pm 1) = 0,$$

$$\beta' = \varkappa_{1(r-1)} - \varkappa_{1(r+1)},$$

$$\varkappa_{1(r\pm 1)} = \frac{\lambda}{4\pi} \left[ \mp \left( \frac{1 - (-1)^r}{r} \right) \pm \left( \frac{1 - (-1)^{r\pm 2}}{r\pm 2} \right) \right] \quad \text{dla } (r\pm 1)^2 \neq 1,$$

$$\varkappa_{1(r\pm 1)} = 0 \quad \text{dla } (r\pm 1)^2 = 1,$$

$$\varkappa_{1(r\pm 1)} = \frac{\lambda}{\pi} \quad \text{dla } (r\pm 1) = 0.$$

(4.9)

$$\alpha_{(l+n)(l-n)} = \gamma_{1(l+n)} - \gamma_{1(l-n)},$$

$$\gamma_{1(n\pm 1)} = \frac{1 - (-1)^{l\pm n}}{2\pi(l\pm n)} \quad \text{dla } n^2 \neq l^2,$$

$$\gamma_{1(n\pm 1)} = 0 \quad \text{dla } n^2 = l^2,$$

$$\alpha_{1nl} = \gamma_{1(l-n)} + \gamma_{1(l+n)},$$

$$\gamma_{1(l\mp n)} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{l\mp n-1}}{l\mp n-1} + \frac{1 - (-1)^{l\mp n+1}}{l\mp n+1} \right] \quad \text{dla } (l\mp n)^2 \neq 1,$$

$$\gamma_{1(l\mp n)} = 0 \quad \text{dla } (l\mp n)^2 = 1,$$

$$\gamma_{1(l\mp n)} = 0 \quad \text{dla } (l\mp n) = 0.$$

(4.10)

$$C = Ak_x + Bk_x,$$

gdzie

$$A = \frac{1}{\pi^2} (k_x + \nu k_z) \sum_n \sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t) [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m],$$

$$B = \frac{1}{\pi^2} (k_z + \nu k_x) \sum_n \sum_m \frac{1}{nm} A_{nm}(t) [1 - (-1)^n] [1 - (-1)^m].$$

(4.11)

$$C^{(1)} = A^{(1)}k_x + B^{(1)}k_z,$$

gdzie

$$A^{(1)} = \frac{\pi^2}{8} \sum_n \sum_m \left( n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} \nu \right) A_{nm}^2(t),$$

$$B^{(1)} = \frac{\pi^2}{8} \sum_n \sum_m \left( \nu n^2 + \frac{m^2}{\lambda^2} \right) A_{nm}^2(t),$$

$$\begin{aligned}
(4.12) \quad D_{lr} = & \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t) A_{sq}(t) \left\| \left\| \left[ \left[ k_z(n+s)^2 + k_x \left( \frac{m-q}{\lambda} \right)^2 \right] \times \right. \right. \right. \\
& \times A_1 \alpha_{(n+s+l)(n+s-l)} + \left. \left. \left[ k_z(n-s)^2 + k_x \left( \frac{m-q}{\lambda} \right)^2 \right] B_1 \alpha_{(n-s+l)(n-s-l)} \right\} \beta_{(m-q+r)(m-q-r)} + \right. \\
& + \left. \left\{ \left[ k_z(n+s)^2 + k_x \left( \frac{m+q}{\lambda} \right)^2 \right] C_1 \alpha_{(n+s+l)(n+s-l)} + \left[ k_z(n-s)^2 + k_x \left( \frac{m+q}{\lambda} \right)^2 \right] \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times D_1 \alpha_{(n-s+l)(n-s-l)} \right\} \beta_{(m+q+r)(m+q-r)} \right\| \right\|,
\end{aligned}$$

gdzie  $A_1, B_1, C_1, D_1$  określono wzorem (3.15),

$$\begin{aligned}
\alpha_{(n+s+l)(n+s-l)} &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{-(n+s)+l}}{-(n+s)+l} + \frac{1 - (-1)^{n+s+l}}{n+s+l} \right] & \text{dla } (n+s) \neq l, \\
\alpha_{(n+s+l)(n+s-l)} &= 0 & \text{dla } (n+s) = l, \\
\beta_{(m+q+r)(m+q-r)} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{r-(m+q)}}{r-(m+q)} + \frac{1 - (-1)^{r+m+q}}{r+m+q} \right] & \text{dla } (m+q) \neq r, \\
\beta_{(m+q+r)(m+q-r)} &= 0 & \text{dla } (m+q) = r, \\
\alpha_{[l-(n-s)][l+(n+s)]} &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{l-(n-s)}}{l-(n-s)} + \frac{1 - (-1)^{l+(n+s)}}{l+n+s} \right] & \text{dla } (n-s)^2 \neq l^2, \\
\alpha_{[l-(n-s)][l+(n+s)]} &= 0 & \text{dla } (n-s)^2 = l^2, \\
\beta_{[r+(m-q)][r-(m-q)]} &= \frac{\lambda}{2\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{r-(m-q)}}{r-(m-q)} + \frac{1 - (-1)^{r+(m-q)}}{r+(m-q)} \right] & \text{dla } (m-q)^2 \neq r^2, \\
\beta_{[r+(m-q)][r-(m-q)]} &= 0 & \text{dla } (m-q)^2 = r^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4.13) \quad F_{lr} = & \sum_i \sum_j \sum_n \sum_m A_{ij}(t) A_{nm}(t) \{[(jn)^2 + (im)^2] \times \\
& \times \alpha_{inl} \beta_{jmr} - 2ijnm \alpha_{inl}^1 \beta_{jmr}^1\} E_1,
\end{aligned}$$

gdzie  $E_1$  określono w (3.15)

$$\begin{aligned}
\alpha_{inl} &= \gamma_{l(l-n)} - \gamma_{l(l+n)}, \\
\gamma_{l(i \mp n)} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{l(i \mp n)}}{l - (i \mp n)} + \frac{1 - (-1)^{l+(i \mp n)}}{l + (i \mp n)} \right] & \text{dla } l^2 \neq (i \mp n)^2, \\
\gamma_{l(i \mp n)} &= 0 & \text{dla } l^2 = (i \mp n)^2 \neq 0, \\
\gamma_{l(j \mp m)} &= 0 & \text{dla } l = (i \mp n) = 0, \\
\beta_{jmr} &= \varkappa_{r(j-m)} - \varkappa_{r(j+m)}, \\
\varkappa_{r(j \mp m)} &= \frac{\lambda}{4\pi} \left[ \frac{[1 - (-1)^{r-(j \mp m)}]}{r - (j \mp m)} + \frac{1 - (-1)^{r+(j \mp m)}}{r + (j \mp m)} \right] & \text{dla } r^2 \neq (j \mp m)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varkappa_{r(j\mp m)} &= 0 & \text{dla } r^2 &= (j\mp m)^2 \neq 0, \\ \varkappa_{r(j\mp m)} &= 0 & \text{dla } r &= (j\mp m) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{inl}^1 &= \gamma_{l(i+n)}^1 + \gamma_{l(i-n)}^1, & \gamma_{l(i\pm n)}^1 &= \gamma_{l(i\pm n)}, \\ \beta_{jmr}^1 &= \varkappa_{r(j+m)}^1 + \varkappa_{r(j-m)}^1, & \varkappa_{r(j\pm m)}^1 &= \varkappa_{r(j\pm m)}. \end{aligned}$$

$$(4.14) \quad K_{lr} = \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{nm}(t) A_{sq}(t) s n \alpha_{nsl}^{(1)} \beta_{mqr},$$

gdzie

$$\begin{aligned} \alpha_{nsl}^{(1)} &= \gamma_{n(l-s)}^{(1)} + \gamma_{n(l+s)}^{(1)}, \\ \gamma_{n(l\mp s)} &= \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1 - (-1)^{l\pm s-n}}{l\mp s-n} + \frac{1 - (-1)^{l\mp s+n}}{l\mp s+n} \right] & \text{dla } n^2 &\neq (l\mp s)^2, \\ \gamma_{n(l\mp s)} &= 0 & \text{dla } n^2 &= (l\mp s)^2 \neq 0, \\ \gamma_{n(l\mp s)} &= 0 & \text{dla } n &= (l\mp s) = 0, \end{aligned}$$

$\beta_{mqr}$  określono wzorem (4.6).

$$(4.15) \quad \begin{aligned} E_{lr} &= \sum_i \sum_j \sum_n \sum_m \sum_s \sum_q A_{ij}(t) A_{nm}(t) A_{sq}(t) \times \\ &\times \left[ \{ [j^2(n+s)^2 + i^2(m-q)^2] \alpha_{(n+s)il} \beta_{(m-q)jr} - 2ij(m-q) \times \right. \\ &\times (n+s) \alpha_{(n+s)il}^1 \beta_{(m-q)jr}^1 \} A_1 + \{ [j^2(n-s)^2 + i^2(m-q)^2] \times \\ &\times \alpha_{(n-s)il} \beta_{(m-q)jr} - 2ij(n-s)(m-q) \alpha_{(n-s)il}^1 \beta_{(m-q)jr}^1 \} B_1 + \\ &+ \{ [j^2(n+s)^2 + i^2(m+q)^2] \alpha_{(n+s)il} \beta_{(m+q)jr} - 2ij(n+s)(m+q) \times \\ &\times \alpha_{(n+s)il}^1 \beta_{(m+q)jr}^1 \} C_1 + \{ [j^2(n-s)^2 + i^2(m+q)^2] \alpha_{(n-s)il} \times \\ &\times \beta_{(m+q)jr} - 2ij(n-s)(m+q) \alpha_{(n-s)il}^1 \beta_{(m+q)jr}^1 \} D_1 \left. \right], \end{aligned}$$

gdzie  $A_1, B_1, C_1, D_1$  określono wzorami (3.15),

$$\begin{aligned} \alpha_{(n+s)il} &= \gamma_{(n+s)(i-l)} - \gamma_{(n+s)(i+l)}, \\ \gamma_{(n+s)(i\mp l)} &= 0 & \text{dla } (n+s)^2 &\neq (i\mp l)^2, \\ \gamma_{(n+s)(i\mp l)} &= \frac{1}{4} & \text{dla } (n+s)^2 &= (i\mp l)^2 \neq 0, \\ \gamma_{(n+s)(i\mp l)} &= \frac{1}{2} & \text{dla } (n+s) &= (i\mp l) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{(m+q)jr} &= \varkappa_{(m+q)(r-j)} - \varkappa_{(m+q)(r+j)}, \\ \varkappa_{(m+q)(r\mp j)} &= 0 & \text{dla } (m+q)^2 &\neq (r\mp j)^2, \\ \varkappa_{(m+q)(r\mp j)} &= \frac{\lambda}{4} & \text{dla } (m+q)^2 &= (r\mp j)^2 \neq 0, \\ \varkappa_{(m+q)(r\mp j)} &= \frac{\lambda}{2} & \text{dla } (m+q) &= (r\mp j) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{(n-s)il} &= \gamma_{(n-s)(i-l)} - \gamma_{(n-s)(i+l)}, \\ \gamma_{(n-s)(i \mp l)} &= 0 \quad \text{dla} \quad (n-s)^2 \neq (i \mp l)^2, \\ \gamma_{(n-s)(i \mp l)} &= \frac{1}{4} \quad \text{dla} \quad (n-s)^2 = (i \mp l)^2 \neq 0, \\ \gamma_{(n-s)(i \mp l)} &= \frac{1}{2} \quad \text{dla} \quad (n-s) = (i \mp l) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{(m-q)jr} &= \varkappa_{(m-q)(r-j)} - \varkappa_{(m-q)(r+j)}, \\ \varkappa_{(m-q)(r \mp j)} &= 0 \quad \text{dla} \quad (m-q)^2 \neq (r \mp j)^2, \\ \varkappa_{(m-q)(r \mp j)} &= \frac{\lambda}{4} \quad \text{dla} \quad (m-q)^2 = (r \mp j)^2 \neq 0, \\ \varkappa_{(m-q)(r \mp j)} &= \frac{\lambda}{2} \quad \text{dla} \quad (m-q) = (r \mp j) = 0.\end{aligned}$$

### 5. Obliczenia numeryczne i wnioski końcowe

W celu określenia zmienności przemieszczeń drgającej powłoki w czasie i zbadania cyklu granicznego rozwiązano numerycznie układ równań różniczkowych nieliniowych (4.4).

Zastosowano metodę Rungego-Kutta jako bardzo dokładną i dającą się stosunkowo łatwo zaprogramować dla elektronowych maszyn liczących. Oprócz tego ważną zaletą tej metody jest możliwość zastosowania zmiennego odstepu, co jest szczególnie ważne przy poszukiwaniu cyklu granicznego.

Numeryczne obliczenia wykonano na cyfrowej maszynie matematycznej GIER dla powłok duralowych ( $E = 7,2 \cdot 10^9 \text{ kG/m}^2$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho_s = 285 \text{ kG/sek}^2/\text{m}^4$ ).

W opływie na poziomie morza  $a_0 = 340 \text{ m/sek}$ ,  $\rho_0 = 0,125 \text{ kG/sek}^2/\text{m}^4$ . Przyjęto do obliczeń wydłużenie  $\lambda = 1$ , maksymalny wznios  $\varepsilon = 0,08$  i stałe krzywizny w kierunku podłużnym i poprzecznym  $k_x = k_z = 0,08$ . Ponadto uwzględniono tłumienie materiałowe i przyjęto wartość  $\theta = 0,2$ . Obliczenia wykonano dla liczby Macha  $M = 3$  i dla wartości  $L/h$  przyjmowanych w konstrukcjach lotniczych.

Wyznaczono cykl graniczny dla ilości fal poprzecznych  $m = 1$  oraz liczby fal podłużnych (w kierunku przepływu)  $n = 4$ . Wybór parametrów  $\varepsilon = 0,08$  i  $M = 3$  jest podyktowany tym, że dla tego zestawu możemy stosować teorię potencjalnego przepływu w drugim przybliżeniu, nie wprowadzając błędu w stosunku do teorii skośnej fali uderzeniowej. Tłumienie materiałowe  $\theta = 0,2$  jest typowym tłumieniem dla konstrukcji lotniczych, a poza tym nie można go pominąć ze względu na to, że wprowadza destabilizację układu w zakresie badanych parametrów. Obliczenie przeprowadzono dla wielkości typowych dla konstrukcji lotniczych, ponieważ w tej dziedzinie istnieje najwięcej ustaleń dotyczących drgań samowzbudnych typu flutteru.

Badanie przeprowadzono dla liczby fal podłużnych  $n = 4$ , gdyż za pomocą czterech wyrazów szeregu Fouriera można z dużą dokładnością aproksymować szeroką klasę

funkcji gładkich. Wartości rozwiązań niewiele zmieniają się, jeżeli wprowadzimy liczbę funkcji własnych większą od czterech.

Program napisany jest w języku GIER — Algol 4.

Rozwiązujemy  $n$  równań różniczkowych drugiego rzędu. Do programu włączona jest duńska procedura Mersno rozwiązująca z dowolną dokładnością  $n$  równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu.

Program przystosowany jest do działania na pamięci szybkiej (operacyjna plus bęben).

Realizacja programu wymaga wprowadzenia z taśmy ośmiokanałowej następujących danych w kolejności:

- $n$  liczba równań drugiego rzędu,
- $y[1:2n]$  warunki początkowe na zmienne, a następnie na pochodne,
- $x$  wartość początkowa czasu,
- $x^2$  wartość czasu, od którego liczymy,
- $x^3$  długość kroku,
- $x^4$  końcowa wartość czasu,
- $M$  liczba Macha,
- $L/h$  stosunek długości powłoki do jej grubości,
- $k_x$  krzywizna w kierunku podłużnym,
- $k_z$  krzywizna w kierunku poprzecznym,
- dok dana dokładność.

Wyniki otrzymujemy na drukarce wierszowej w następującej kolejności:  $A_1(t) \dots A_n(t)$ ,  $\dot{A}_1(t) \dots \dot{A}_n(t)$ . Są one punktem wyjściowym do obliczenia przemieszczenia  $W(t)$  i prędkości przemieszczenia  $\dot{W}(t)$  w każdym punkcie badanego obszaru powłoki. Na tej podstawie sporządzono wykresy na płaszczyźnie fazowej dla punktów o współrzędnych  $x = 0,75$ ;  $z = 0,5\lambda$  oraz  $x = 0,25$ ;  $z = 0,5\lambda$  (rys. 2, rys. 8) oraz wykresy zmienności funkcji  $A_n(t)$  (rys. 4, 5, 6, 7).

Pokazano zmienność przemieszczeń w czasie na rys. 3 i rys. 9 dla wyżej wymienionych punktów.

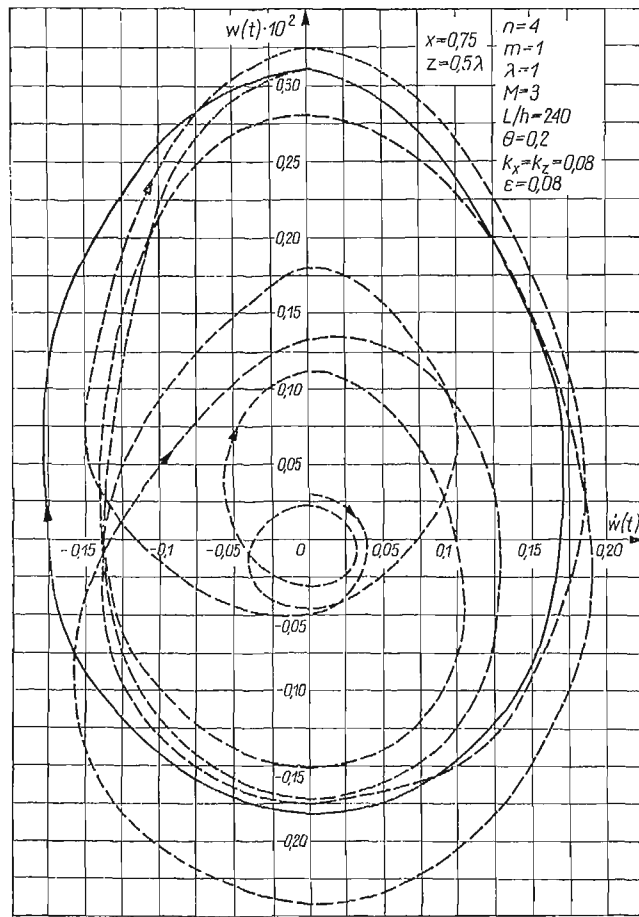
Z podanych przebiegów należałoby wnioskować, że ustalenie się drgań samowzbudzonych następuje między siódmym a dziewiątym cyklem i dla danych parametrów, np. dla punktu  $x = 0,75$ ,  $z = 0,5$ , maksymalne wychylenie przyjmuje wartość dziesięciokrotnie wyższą od danych wychyleń początkowych.

Obliczenia w zakresie rozważanego tematu wykonano dla założonych następujących warunków początkowych:

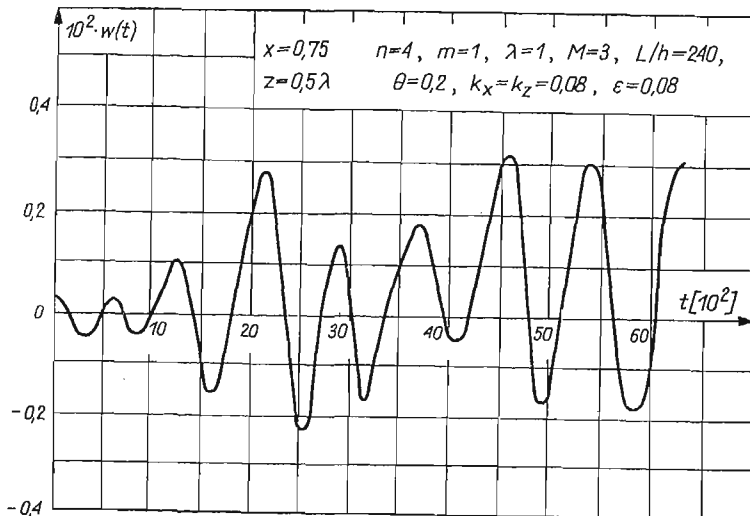
$$\begin{aligned} A_1(0) &= 0,1 \cdot 10^{-2}, & A_2(0) &= 0,08 \cdot 10^{-2}, \\ A_3(0) &= 0,06 \cdot 10^{-2}, & A_4(0) &= 0,04 \cdot 10^{-2}, \\ \dot{A}_n(0) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie  $n = 1, 2, 3, 4$ , co daje dla punktu  $x = 0,75$ ,  $z = 0,5$  wartość wychylenia  $W(0) = 0,03 \cdot 10^{-2}$ ,  $\dot{W}(0) = 0$ .

Obliczenia te mają na celu ustalenie charakteru zmian zachodzących w okresie ustalania się drgań samowzbudzonych.

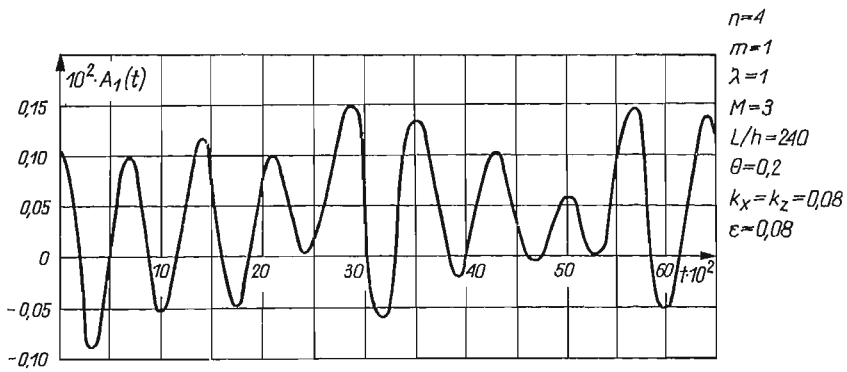


Rys. 2

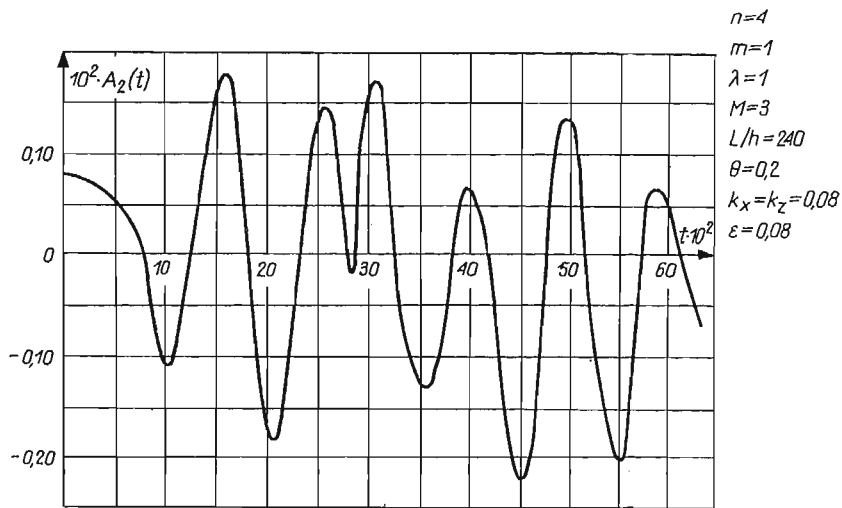


Rys. 3

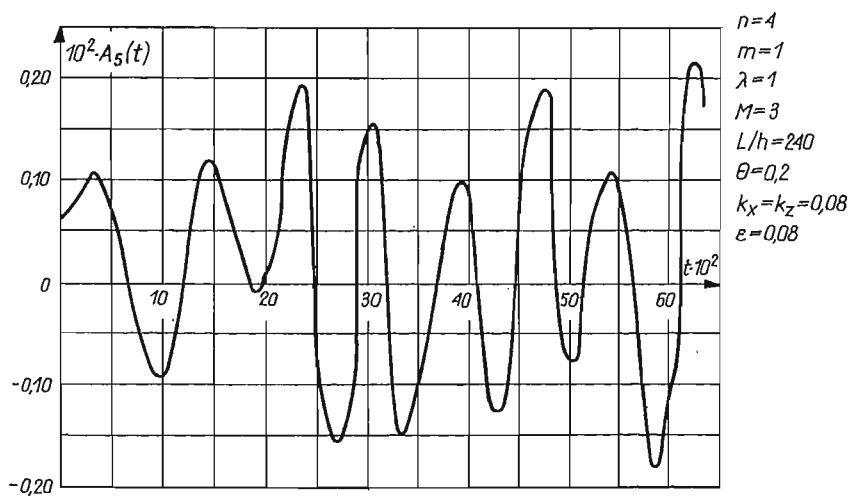




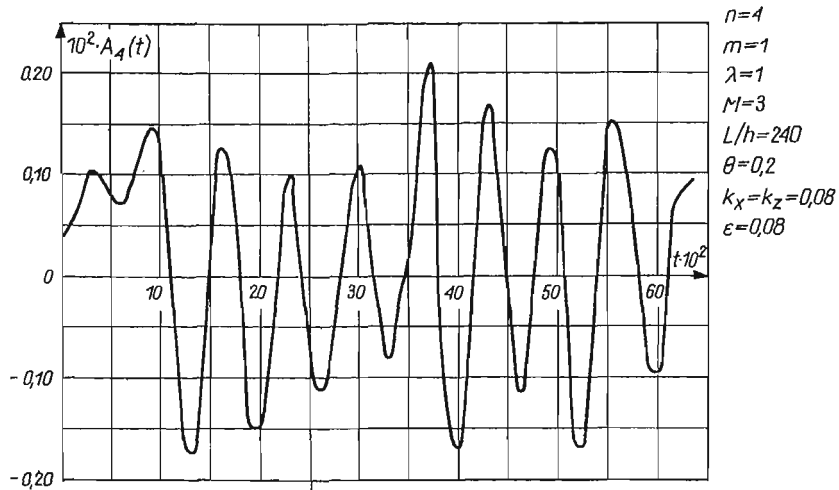
Rys. 4



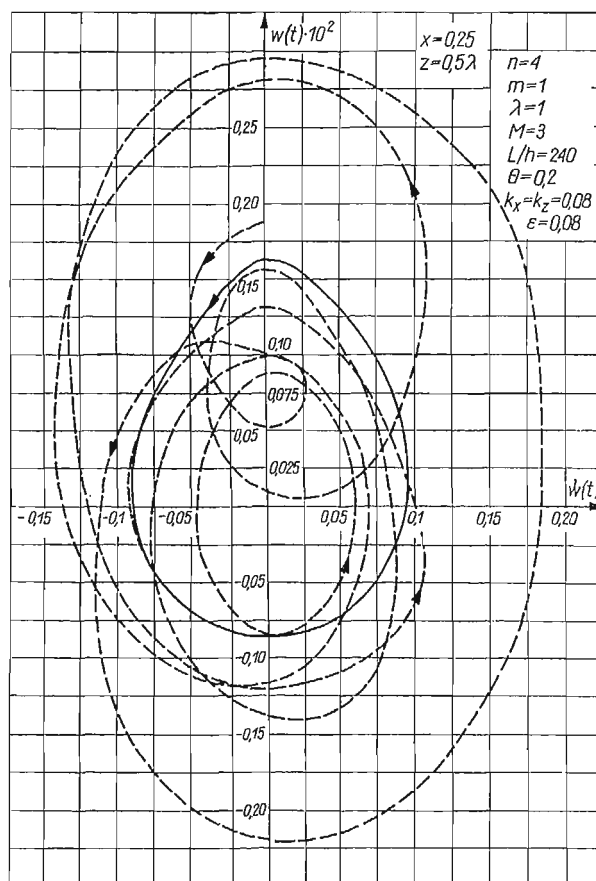
Rys. 5



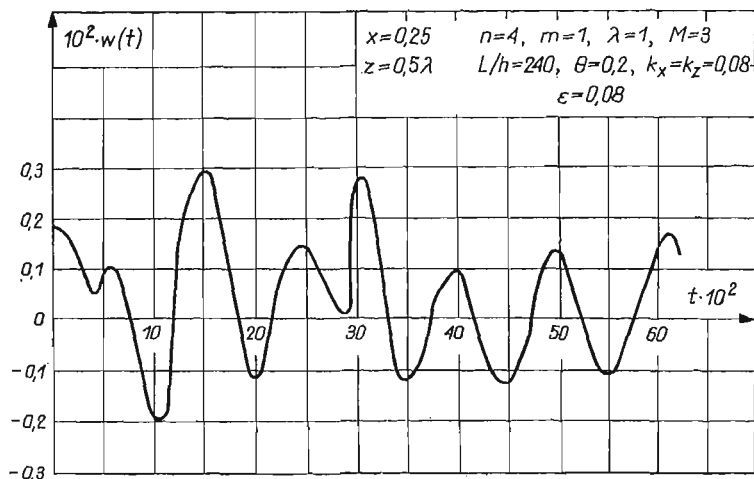
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

## Literatura cytowana w tekście

1. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Москва 1961.
2. CZ. WOŹNIAK, *Nieliniowa teoria powłok*, PWN, Warszawa 1966.
3. EARL H. DOWELL, *Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate*, AJAA J., 4, No. 7, 1966. — AJAA J. No. 10, 1967.
4. Z. DŹYGADŁO, *Analiza drgań nieautonomicznych układów powierzchniowych w opływie nadźźwiękowym*, Dodatek do Biul. WAT Nr 7 (191), Warszawa 1968.
5. M. HOLT, S. L. STRACK, *Supersonic Panel Flutter of a Cylindrical Shell of Finite Length*, J.A.S., No. 3, 1961.
6. M. D. OLSON, Y. C. FUNG, *Comparing Theory and Experiment for the Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shells*, AYAA J., No. 10, 1967.
7. L. L. CARTER, R. O. STEARMAN, *Some Aspects of Cylindrical Shell Panel Flutter*, AYAA J., No. 1, 1968.
8. Z. DŹYGADŁO, S. KALISKI, L. SOLARZ, E. WŁODARCZYK, *Drgania i fale*, PWN, Warszawa 1966.
9. N. W. MCLACHLAN, *Równanie różniczkowe zwyczajne nieliniowe w fizyce i naukach technicznych*, PWN, Warszawa 1964.
10. B. P. DEMIDOWICZ, Y. A. MARON, E. Z. SZUWAŁOWA, *Metody numeryczne*, cz. II, PWN, Warszawa 1965.
11. B. GAJL, *Pressure Acting on the Oscillating Surface of an Airfoil in Nonlinear Supersonic Potential Flow*, Proc. Vibr. Probl., Warsaw, 1, 9, 1968.
12. B. GAJL, *La pression sur la surface vibrante de l'aile dans l'écoulement supersonique la deuxième approximator*, Fluid Dynamics Transactions, 4, 191-201, 1969.

## Р е з ю м е

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ  
ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ В НЕЛИНЕЙНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В работе рассмотрены нелинейные задачи автоколебаний пологих оболочек конечной длины, в которых учитываются нелинейные аэродинамические явления и зависимость нестационарного

обтекания от параметров стационарного течения. Кроме того учитывается демпфирование, связанное с физическими свойствами материала оболочки, описываемого моделью Фойгта.

Решение для нормальных перемещений срединной поверхности оболочки представлено в виде двойного ряда по собственным функциям, для которого применен ортогонализационный метод Галеркина.

Дается численное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сведенной к безразмерному виду.

Вычисления выполнены на ЭЦВМ. Найден предельный цикл для некоторых начальных условий. Показана зависимость от времени перемещений точек поверхности оболочки.

#### S u m m a r y

#### ANALYSIS OF NON-LINEAR SELFEXCITED LIMIT CYCLES OF VIBRATIONS OF SHALLOW SHELLS IN A NON-LINEAR SUPERSONIC FLOW

The subject of the present paper is the problem of nonlinear selfexcited vibrations of a shallow shell of finite length. Nonlinear aerodynamics is applied, the influence of stationary flow on the nonstationary flow as also material damping is taken into account.

Normal displacement of the shell is presented as a double series of eigenfunctions. To obtain the set of ordinary differential equations, Galerkin's orthogonalization method is applied. The set written in a non-dimensional form is solved numerically. Using a digital computer, the limit cycle under certain initial conditions is found. Variation of the displacements of the shell in time is also shown.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 9 maja 1973 r.*

---

## WYZNACZENIE SZTYWNOŚCI NA ZGINANIE PRZEWODU AFL-8-525

ADAM BAR, JÓZEF NIZIOŁ (KRAKÓW)

Jednym z ważnych zagadnień zarówno przy projektowaniu, jak i montażu linii elektroenergetycznych jest znajomość naprężeń statycznych i dynamicznych w poszczególnych warstwach przewodu. Obydwa te naprężenia decydują o zmęczeniu przewodu, a zatem o «żywołności» danej linii. Na szczególne niebezpieczeństwo narażone są odcinki przewodów tuż przy uchwycie przelotowym, gdzie występuje stan giętny. Na skutek drgań przewodu, wywołanych wiatrem, występują zmienne naprężenia dynamiczne w przewodzie, które w sposób istotny wpływają na jego zmęczenie. Ze względu na ich charakter rozważa się drgania zwane «tańcem przewodów» oraz drgania «eolskie». Stwierdzono, że w warunkach polskich częściej występują drgania typu drgań «eolskich» i na nie jest zwrócona główna uwaga. O ważności problemu drgań przewodów w liniach najwyższych napięć może świadczyć fakt, że w krajach wysoko uprzemysłowionych powołane są instytuty i specjalne grupy robocze, prowadzące od wielu lat doświadczalne i teoretyczne badania, mające na celu ustalenie kryterium zmęczeniowego.

Na podstawie prowadzonych przez wiele lat badań przez Institute of Electrical and Electronics Engineers [1], ustalono jako kryterium trwałej wytrzymałości zmęczeniowej podwójną względną amplitudę przewodu w stosunku do uchwytu przelotowego równą  $a = 0,2$  mm, mierzoną w odległości  $x = 89$  mm od ostatniego punktu styczności przewodu z uchwytem (łódką).

Na intensywność drgań wpływa bardzo wiele czynników, jak warunki klimatyczne i terenowe, dane znamionowe linii, jak konstrukcja i rodzaj przewodu, rodzaj uchwytu, jego masa, kształt, moment bezwładności itp. Z tego też powodu kryterium amerykańskie okazało się zbyt surowe i w wielu krajach niemożliwe do przyjęcia. Od szeregu lat prowadzi się więc badania nad własnymi przewodami w Japonii, NRF, Francji i innych krajach zachodnich. Wyniki badań doświadczalnych zarówno laboratoryjnych, jak i przeprowadzanych na liniach rzeczywistych w różnych krajach były dość różne, rozważania zaś teoretyczne bądź nie były publikowane, bądź przyjmowały modele, które niezbyt właściwie odzwierciedlały stan faktyczny.

W Polsce od kilku lat badania prowadzi Biuro Projektów Energetycznych «Energoprojekt» Oddział w Krakowie, a pomiary drgań na liniach rzeczywistych w terenie «Energopomiar» w Gliwicach. Pomiary drgań na krajowych liniach rzeczywistych wykazały występowanie dużych podwójnych amplitud względnych osiągających wartości  $a = 1,2$  mm, a więc sześciokrotnie przekraczających amplitudy dopuszczalne według kryterium amerykańskiego.

kańskiego. Świadczyłyby to o bardzo dużym zagrożeniu wszystkich linii najwyższych napięć i nakazywałyoby szybką ich wymianę. Biorąc pod uwagę fakt, że koszt jednego kilometra linii wynosi około miliona złotych, widzimy jak ważnym problemem jest ustalenie prawidłowego kryterium zmęczeniowego dla linii krajowych.

Od trzech lat do współpracy z Energoprojektem w Krakowie przystąpił Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Krakowskiej, ustalając programy badań doświadczalnych, czuwając nad ich realizacją oraz dając odpowiednie opracowania teoretyczne. Przedmiotem badań był przewód stalowo-aluminiowy typu ALF-8-525. Oprócz badań mających na celu ustalenie kryterium zmęczeniowego, prowadzono wiele badań dotyczących samotłumienia przewodu, sposobu wymuszania drgań mających na celu uzyskanie dużych amplitud względnych, doboru odpowiednich tłumików drgań itp.

Niniejsza praca ma na celu wyznaczenie sztywności przewodu oraz stanowi pierwszą część ogólniejszego opracowania, którego celem jest wyznaczenie naprężeń statycznych i dynamicznych przewodu w pobliżu uchwytu przelotowego i na tej podstawie ustalenie kryterium zmęczeniowego przewodu.

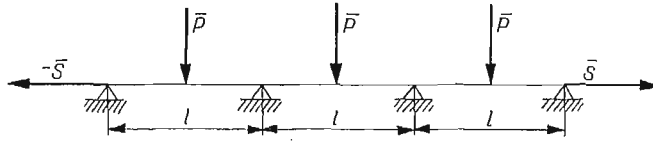
### 1. Wyznaczenie sztywności $EJ$ na zginanie przewodu AFL-8-525 — metoda statyczna

W obliczeniach stosowanych w technice traktowanie liny jako układu złożonego z poszczególnych drutów byłoby zbyt uczuźliwe, a w przypadku drgań poprzecznych liny — praktycznie niemożliwe. Potraktujemy więc przewód jako ekwiwalentną belkę i w związku z powyższym musimy wyznaczyć dla niej pewne wartości przeciętne niektórych wielkości wytrzymałościowych. Jedną z istotniejszych dla naszego celu wielkości jest sztywność  $EJ$  przewodu na zginanie. Sztywność przewodów na zginanie była badana przez wielu badaczy zagranicznych ale zarówno sposoby podejścia, jak i uzyskiwane wyniki, wykazujące duże rozbieżności, budzą poważne zastrzeżenia.

Według obliczeń amerykańskich sztywność przewodów jest sumą sztywności poszczególnych drutów pomnożonych przez współczynnik 1,4 (otrzymywany doświadczalnie) [1]. Według badań fińskich wymieniony wyżej współczynnik równy jest 1,6 [2], innym znów razem jest znacznie większy od 2 (sztywność dla przewodu IBIS 1CSR,  $EJ = 200 \text{ Nm}^2$ ). Warunki, w których bada się dany przewód, powinny odpowiadać warunkom, w jakich pracuje on w rzeczywistości.

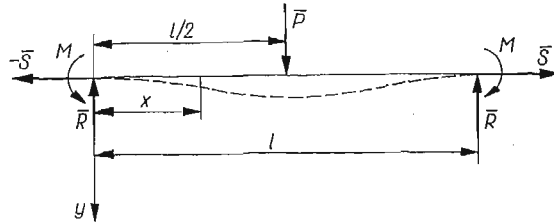
Wymienioną metodę statyczną oparto na prostej zależności między strzałką ugięcia belki poddanej pewnym obciążeniom a jej sztywnością na zginanie. Na odcinku pomiarowym o długości 20 m rozpięto poziomo usytuowany przewód poddany siłom rozciągającym, odpowiednio równym:  $S = 3000 \text{ kG}$ ,  $S = 3600 \text{ kG}$ ,  $S = 4000 \text{ kG}$ . Przewód ten podparty był na parzystej liczbie podpór (wypoziomowanych), symetrycznie rozmieszczonych względem jego środka. W środku między podporami obciążano każdy odcinek przewodu znaną siłą  $P$ . Rejestrowano strzałki ugięcia przewodu w środkowym przęśle  $f_1$  i w dwóch jego sąsiednich  $f_2$  i  $f_3$ . Pomiary powtarzano kilkakrotnie zmieniając dodatkowo wartości sił  $P$  (25 kG, 50 kG, 75 kG, 100 kG) oraz odległości między podporami  $l$  (0,7 m, 0,9 m, 1,4 m, 2 m, 3,1 m). Ideowy schemat stanowiska przedstawiono na rys. 1. Dość dużą długość przewodu  $l_1 = 20 \text{ m}$  przyjęto po to, aby wyeliminować wpływ zluźnienia drutów w przewodzie przy jego ucinaniu i zaprasowywaniu końcówek. Należy nadmienić,

że we wcześniejszych badaniach Energoprojektu, prowadzonych nieco inną metodą na przewodach bardzo krótkich, uzyskiwano duży rozrzut wyników. Złuznienia drutów były bardzo duże (zjawisko «pończochy») podobnie jak w badaniach zagranicznych. Wyniki te nie mogą być uważane za miarodajne.



Rys. 1

Ze względu na dużą liczbę podpór można przyjąć jako równoważny całemu przewodowi przedstawionemu na rys. 1 model belki przedstawiony na rys. 2, a obrazujący tylko środkowe przęsło układu. Pomiary strzałek \$f\_2\$ i \$f\_3\$ prowadzono w celu stwierdzenia słuszności przyjętego założenia. Wyniki pomiarów w zupełności potwierdziły to założenie.



Rys. 2

Ponieważ belka na podporach ułożona jest poziomo, więc

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dy}{dx} \Big|_{x=l} = 0,$$

a zatem belka spełnia warunki belki utwierdzonej. Równanie różniczkowe linii ugięcia belki przyjmuje postać:

$$(1.1) \quad EJ_s y'' = M + Sy - \frac{P}{2} x.$$

Rozwiązanie tego równania przy założeniu stałej sztywności \$EJ\$ jest następujące:

$$(1.2) \quad y = \frac{M}{a^2 EJ_s} \operatorname{ch}(ax) - \frac{P}{2a^3 EJ_s} \operatorname{sh}(ax) + \frac{P}{2a^3 EJ_s} x - \frac{D}{2a^3 EJ_s} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)},$$

gdzie

$$M = \frac{P}{2a} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)}, \quad a = \sqrt{\frac{S}{EJ_s}}.$$

Założenie stałej sztywności przewodu można uzasadnić w sposób następujący. Siły reakcji na podporach są nieduże w porównaniu z naciągiem  $S$  (wynika to z przyjętego modelu na rys. 2, gdzie maksymalna wartość siły  $P = 100$  kG, minimalny zaś naciąg  $S = 3600$  kG) i nie powodują dodatkowego zespolenia przewodu, a tym samym lokalnej zmiany sztywności  $EJ_s$ .

Strzałka ugięcia belki na podstawie (1.2) równa się

$$(1.3) \quad f_1 = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{P}{2a^3 EJ_s} \left[ \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)} \operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right) + \frac{al}{2} - \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{al}{2}\right) - 1}{\operatorname{sh}\left(\frac{al}{2}\right)} \right].$$

Po dokonaniu przekształceń dostaniemy

$$(1.4) \quad f_1 = \frac{P}{aS} \left[ \frac{al}{4} - \operatorname{th}\left(\frac{al}{4}\right) \right].$$

Wprowadzając oznaczenie  $al/4 = z$ , otrzymujemy również

$$(1.5) \quad f_1 = \frac{Pl}{4S} \frac{1}{z} (z - \operatorname{th} z).$$

Równanie (1.5) jest równaniem przestępnym i jego ściśle rozwiązanie może nastęrczać duże kłopoty. Łatwo jednak zauważyć, że dla odpowiednio dużych  $z$  można przyjąć  $\operatorname{th} z \approx 1$ .

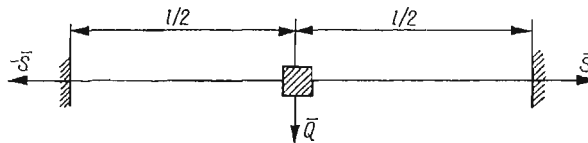
Przy założeniu  $\operatorname{th} z \approx 1$ , z równania (1.5) wyznaczamy

$$(1.6) \quad EJ_s = \frac{S}{16} \left( l - \frac{4S}{P} f_1 \right)^2.$$

Wzór powyższy może służyć do wyznaczania sztywności zastępczej przewodu na zginanie w przypadku, gdy nie występuje docisk pochodzący z zewnątrz, powodujący zespolenie przewodu.

## 2. Metoda dynamiczna

Metoda dynamiczna opiera się na zależności między częstością drgań belki a jej sztywnością na zginanie. Usytuowany poziomo przewód poddano jednemu z trzech wymienionych w p. 1 naciągów, a następnie za pomocą odpowiednich uchwytów przymocowano



Rys. 3

w dwu miejscach do fundamentu zapewniając warunki idealnego utwierdzenia. Przewód znajdujący się między uchwytami można było więc traktować jako belkę rozciąganą siłą osiową  $S$  obustronnie utwierdzoną. Ponieważ częstości drgań belki (dla małych jej dłu-



gości) były bardzo wysokie i przebiegi drgań bardzo trudne do zarejestrowania, w środku belki umocowano dodatkowy ciężar (rys. 3). Belkę wytrącono z położenia równowagi i rejestrowano przebiegi drgań. Pomiary powtarzano kilkakrotnie dla różnych długości przewodu zarówno z ciężarkiem jak i bez ciężarka. Na podstawie pomiarów wyznaczono średnie okresy drgań przewodu przy różnych jego długościach.

Przy metodzie dynamicznej sztywności na zginanie  $EJ$  nie można już traktować jako stałej, ponieważ w miejscach utwierdzenia i w miejscu zamocowania ciężarka  $Q$  przewód jest bardzo ściśnięty, wskutek czego druty mocno przylegają do siebie, co wpływa na bardzo duży lokalny wzrost sztywności. Warunki te jednak odpowiadają stanowi rzeczywistemu utwierdzenia przewodu w uchwycie przelotowym.

Równanie różniczkowe drgań belki przyjmuje w tym przypadku postać:

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EJ(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością liniową przewodu.

Rozwiązanie tego równania jest więc niemożliwe ze względu na nieznajomość funkcji  $EJ(x)$ . Jeżeli założymy w przybliżeniu, że  $EJ = EJ_{sr} = \text{const}$ , to równanie, z którego można uzyskać częstość drgań własnych belki, przyjmie postać:

$$(2.2) \quad r_1^2 \text{th} r_2 l + r_2^2 \text{th} r_1 l - \frac{r_2^3}{r_1} \text{th} r_1 l - r_1 r_2 \text{th} r_1 l = 0,$$

gdzie

$$(2.3) \quad r_1 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{S}{2EJ_{sr}}\right)^2 + \frac{\omega^2 \rho}{EJ_{sr}}} + \frac{S}{2EJ_{sr}}},$$

$$(2.4) \quad r_2 = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{S}{2EJ_{sr}}\right)^2 + \frac{\omega^2 \rho}{EJ_{sr}}} - \frac{S}{2EJ_{sr}}},$$

$\omega$  zaś oznacza częstość kołową drgań własnych przewodu.

Rozwiązanie równania (2.2) i otrzymanie sztywności  $EJ_{sr}$  w funkcji częstości drgań  $\omega$  jest dla ogólnych danych niemożliwe. Częstość drgań przewodu wyznaczymy w oparciu o metodę Ritz'a.

Linie ugięcia belki przyjmiemy w postaci:

$$(2.5) \quad y = (l-x)^2 x^2.$$

Funkcja ta spełnia warunki brzegowe dla belki obustronnie utwierdzonej. Maksymalna energia potencjalna układu równa się

$$(2.6) \quad U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(x) [y'']^2 dx + \frac{1}{2} S \int_0^l [y']^2 dx,$$

maksymalna zaś energia kinetyczna przyjmie wartość

$$(2.7) \quad E_{\max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho y^2 dx + \frac{1}{2} M \left[ y \left( \frac{l}{2} \right) \right]^2 \omega^2,$$

gdzie  $M$  jest masą ciężarka umocowanego na przewodzie. Przy obliczaniu całki (2.6) w miejsce  $EJ(x)$  podstawiamy  $EJ_{sr} = \text{const}$ .

Jeżeli odpowiednio dobrać sztywność średnią, to spełniony będzie warunek:

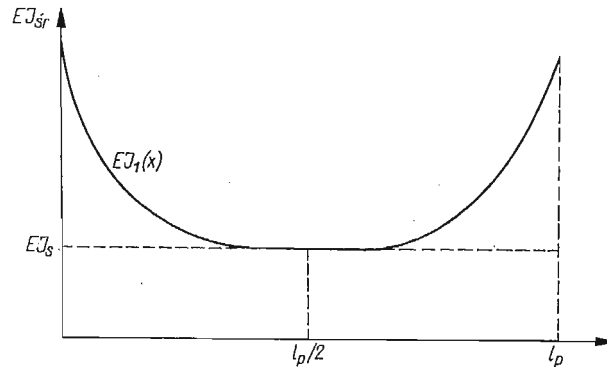
$$\int_0^l EJ(x)[y'']^2 dx = EJ_{sr} \int_0^l [y'']^2 dx.$$

Z zależności  $E_{\max} = U_{\max}$  przy znajomości  $\omega^2$  można obliczyć  $EJ_{sr}$  (integralną zastępczą sztywność przewodu przy danej jego długości  $l$ ). Sztywność ta jest równa

$$(2.8) \quad EJ_{sr} = \omega^2 \frac{\int_0^l \rho y^2 dx + M \left[ y \left( \frac{l}{2} \right) \right]^2}{\int_0^l [y'']^2 dx} - S \frac{\int_0^l [y'']^2 dx}{\int_0^l [y'']^2 dx}.$$

Sztywność  $EJ_{sr}$  przewodu będzie zmieniać się wraz ze zmianą długości  $l$  badanego odcinka przewodu. Wynika to z zamocowania końców przewodu, co powoduje ściśnięcie drutów i wzrost sztywności w pewnym otoczeniu uchwytu. Wniosek ten znajduje dobre potwierdzenie na drodze doświadczalnej, co zostanie wykazane w przykładzie liczbowym.

Wpływ utwierdzenia na sztywność przewodu może mieć tylko charakter lokalny. Dla przewodu o dużej długości największa sztywność będzie tuż przy utwierdzeniu, a następnie będzie malała i od pewnej długości  $l_s$  będzie już stała i równa wyznaczonej sztywności statycznej.



Rys. 4

W przewodach linii rzeczywistych wysokiego napięcia właśnie w ten sposób będzie zmieniać się ich sztywność na zginanie. Sztywność taką nazwiemy «naturalną» sztywnością przewodu i ogólnie możemy zapisać ją w postaci:

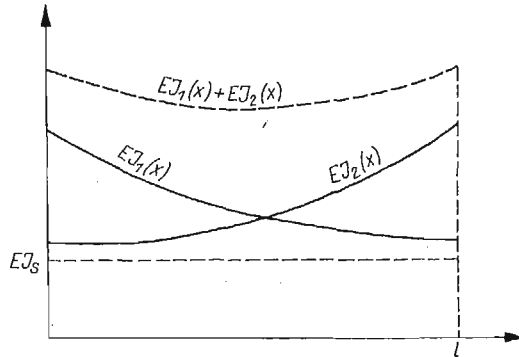
$$(2.9) \quad EJ(x) = \begin{cases} EJ_1(x) & \text{dla } 0 < x < l_s, \\ EJ_s & \text{dla } l_s < x < \frac{l_p}{2}, \end{cases}$$

gdzie przez  $l_p$  oznaczyliśmy rozpiętość pręśla (odległość między uchwytami przelotowymi).  $EJ(x)$  podana wzorem (2.9) jest funkcją symetryczną względem osi  $x = l_p/2$  (rys. 4).

Ze względu zarówno na wytrzymałość doraźną jak i zmęczeniową istotna jest dokładna znajomość charakterystyk wytrzymałościowych przewodu w pobliżu uchwytu przelotowego

czyli dla małych  $x$ . Z tego też powodu badania sztywności przewodu przeprowadzono przy małych odległościach między jego zamocowanymi końcami. Przy tak małych odcinkach, gdy  $l < 2l_s$ , pojawia się znowu dodatkowa trudność interpretacji uzyskanych wyników. Otóż na sztywność przewodu na całej jego długości wpływa równocześnie zamocowanie obydwu jego końców.

Weźmy pod uwagę  $l > 2l_s$ . Wówczas sztywność  $EJ(x)$  na odcinku  $0 < x < l_s$  nazwijmy przez  $EJ_1(x)$ , a sztywność na odcinku  $l-l_s \leq x < l$  — przez  $EJ_2(x)$  (rys. 4, w którym należałoby przyjąć  $l_p = l$ ). Oczywiście ze względu na jednakowy wpływ na sztywność przewodu utwierdzenia lewego i prawego brzegu, funkcja  $EJ_2(x)$  stanowi lustrzane odbicie funkcji  $EJ_1(x)$  względem prostej  $x = l/2$ .



Rys. 5

Jeżeli  $l < 2l_s$ , to nastąpi nakładanie się na siebie obu funkcji (rys. 5). Załóżmy, że sztywność  $EJ(x)$  wyraża się wzorem:

$$(2.10) \quad EJ(x) = EJ_1(x) + EJ_2(x).$$

W ogólnym przypadku  $EJ(x)$  jest jakąś funkcją  $EJ_1(x)$  oraz  $EJ_2(x)$ . Założenie (2.10) jest hipotetyczne i może być sprawdzone jedynie na drodze doświadczalnej.

Sztywność podaną wzorem (2.10) należy dobrać w ten sposób, aby spełniony był warunek:

$$(2.11) \quad \int_0^l EJ(x)[y''(x)]^2 dx = EJ_{sr} \int_0^l [y']^2 dx.$$

Warunek taki powinien zachodzić dla każdego  $l$ .

Ponieważ  $EJ_{sr}$  wyznaczone jest na drodze doświadczalnej, więc (2.11) nie może być spełnione ściśle.  $EJ(x)$  dobieramy posługując się metodą najmniejszych kwadratów.

Przedstawimy  $EJ_1(x)$  w postaci wielomianu drugiego stopnia:

$$(2.12) \quad EJ_1(x) = \frac{1}{l_s^2} [(\sqrt{EJ_{max}} - \sqrt{EJ_s})x - l_s \sqrt{EJ_{max}}]^2 \quad \text{dla } 0 < x < l_s.$$

Ze względu na symetryczny wpływ zamocowań obu końców  $EJ_2(x)$  przyjmie postać:

$$(2.13) \quad EJ_2(x) = \frac{1}{l_s^2} [(\sqrt{EJ_{max}} - \sqrt{EJ_s})x + l_s \sqrt{EJ_s}]^2 \quad \text{dla } 0 < x < l_s.$$

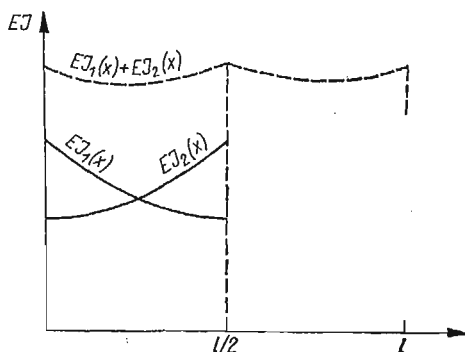
Po wstawieniu (2.12) do (2.11), otrzymamy

$$(2.14) \quad \int_0^l \left\{ \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) x - \sqrt{EJ_{\max}} \right]^2 + \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (x + l_s - l) + \sqrt{EJ_s} \right]^2 \right\} [y'']^2 dx = EJ_{sr} \int_0^l [y'']^2 dx.$$

Zależność ta jest słuszna przy  $l < l_s$ . Po scałkowaniu (2.14) i dokonaniu prostych przekształceń otrzymamy

$$(2.15) \quad -0,11905 \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 [\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}]^2 + EJ_{\max} \left[ 2 - 2 \frac{l}{l_s} + \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 \right] + \\ + 2\sqrt{EJ_{\max} EJ_s} \frac{l}{l_s} \left( 1 - \frac{l}{l_s} \right) + EJ_s \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 = EJ_{sr}(l).$$

W przypadku, gdy w środku przewodu znajduje się ciężarek, jego umocowanie powoduje mocne ściśnięcie przewodu, a zatem wpływa na zmianę sztywności podobnie jak uchwyt stały. Należy uważać, że  $EJ_1(x)$  oraz  $EJ_2(x)$  brane są z przedziału  $0 < x < l/2$  (rys. 6).



Rys. 6

Ze względu na symetrię linii ugięcia przewodu  $y = y(x)$ , należy więc w miejsce warunku (2.14) przyjąć warunek następujący:

$$(2.16) \quad 2 \int_0^{l/2} \left\{ \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) x - \sqrt{EJ_{\max}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{l_s} (\sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s}) \left( x + l_s - \frac{l}{2} \right) + \sqrt{EJ_s} \right]^2 \right\} [y'']^2 dx = 2EJ_{sr} \int_0^{l/2} [y'']^2 dx.$$

Stąd po scałkowaniu i dokonaniu prostych przekształceń dostaniemy

$$(2.17) \quad -0,0253 \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 \left[ \sqrt{EJ_{\max}} - \sqrt{EJ_s} \right]^2 + EJ_{\max} \left[ 2 - \frac{l}{l_s} + \frac{1}{4} \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 \right] + \\ + \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} \frac{l}{l_s} \left( 1 - \frac{l}{2l_s} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{l}{l_s} \right)^2 EJ_s = EJ_{sr}(l).$$

Zarówno  $EJ_{\max}$ , które równe jest sztywności przewodu dla  $x = 0$ , jak i  $l_s$  określające zasięg wpływu zamocowania na sztywność przewodu, nie można wyznaczyć na drodze doświadczalnej. Wielkości te potraktujemy jako parametry, które wyznaczymy za pomocą metody najmniejszych kwadratów.

Oznaczamy lewą stronę równania (2.15) przez

$$\varphi(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l).$$

Ponieważ znamy  $EJ_{sr}$  dla różnych wartości  $l = l_i$  (na podstawie eksperymentu można wyznaczyć dowolną ich ilość), dobieramy  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$  w ten sposób, aby spełniony był warunek

$$(2.18) \quad \sum_i [EJ_{sr}(l_i) - \varphi_i(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_i)]^2 = \min.$$

Z warunku powyższego otrzymujemy układ równań:

$$(2.19) \quad \sum_i [EJ_{sr}(l_i) - \varphi_i(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_i)] \frac{\partial \varphi_i}{\partial EJ_{\max}} = 0, \\ \sum_i [EJ_{sr}(l_i) - \varphi_i(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_i)] \frac{\partial \varphi_i}{\partial l_s} = 0.$$

W powyższym układzie równań zarówno  $EJ_s$ ,  $l_i$  jak  $EJ_{sr}(l_i)$  są znane, możemy więc wyznaczyć  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$ .

Jeżeli lewą stronę (2.17) oznaczyć przez

$$f(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l),$$

to z warunku

$$\sum_k [EJ_{sr}(l_k) - f_k(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_k)]^2 = \min,$$

otrzymamy układ równań:

$$(2.20) \quad \sum_k [EJ_{sr}(l_k) - f_k(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_k)] \frac{\partial f_k}{\partial EJ_{\max}} = 0, \\ \sum_k [EJ_{sr}(l_k) - f_k(EJ_{\max}, l_s, EJ_s, l_k)] \frac{\partial f_k}{\partial l_s} = 0.$$

Z układu tego można obliczyć  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$ .

Pozornie może więc wydawać się, że mamy nadmiar równań (cztery równania — dwie niewiadome), co może prowadzić do sprzeczności. W rzeczywistości jednak tak nie jest.

Otóż jeżeli z układu równań (2.20) wyznaczmy  $EJ_{\max}$  oraz  $l_s$ , to wstawiając je do układu (2.19) powinniśmy ten układ równań zamienić w tożsamości.

Jeżeli parametry  $EJ_{\max}$  i  $l_s$  wyznaczone z (2.20) będą znacznie odbiegać od parametrów wyznaczonych z (2.19), świadczyć to będzie o niesłuszności wzorów (2.10) i (2.16), które zostały przyjęte hipotetycznie.

### 3. Przykład liczbowy

Szywność statyczna przewodu wyznaczona została przy naciągu  $S = 3600$  kG, gdyż takie naciągi występują najczęściej w rzeczywistych liniach wysokiego napięcia. Wartości średnie uzyskane z badań doświadczalnych przy różnych wartościach siły  $P$  (25, 50, 75 i 100 kG) kilkakrotnie powtarzanych dla przewodu AFL-8-525 zestawiono w tabelcy 1.

Tablica 1

$l$ [m]	0,7	0,9	1,4	3,1
$EJ_s$ kGm <sup>2</sup>	13,2	13,35	12,38	12,4

Dane przedstawione w tej tabelcy potwierdzają słuszność założenia co do stałej szywności przewodu.

Metoda dynamiczna, jak już stwierdziliśmy, pozwala uwzględnić wpływ ściśnięcia przewodu przez uchwyt przelotowy na zmianę szywności.

Przy przyjęciu danych liczbowych  $S = 3600$  kG,  $qg = 1,93$  kG/m na podstawie (2.8) otrzymujemy

$$(3.1) \quad EJ_{sr} = 2,5 \cdot 10^{-6} [(0,61588l^4 + 80,1654Ql^3)f^2 - 9523,83601^2] \text{ [kGcm}^2\text{]},$$

gdzie  $f = \frac{1}{2\pi}\omega$  jest częstotliwością drgań wyznaczoną doświadczalnie dla danej długości  $l$ ,

$Q$  jest ciężarem zawieszonym na przewodzie [do wzoru (3.1) należy podstawić  $l$  w cm,  $Q$  w kG,  $f$  w Hz]. Wyniki szywności  $EJ_{sr}$  przedstawiono w tabelcy 2.

Tablica 2

$l$ [m]	$Q$ [kG]	$f$ [Hz]	$EJ_{sr}$ [kGm <sup>2</sup> ]
0,9	10	32,8	98,65
1,4	10	16,7	90,49
2	10	15,1	83,815
1,4	0	64,8	80,46
2	0	41	71,27

Z wyników podanych w tabelcy 2 widać, że szywność  $EJ$  zmienia się wraz z długością belki. Należy to, jak już wspomnieliśmy, wytłumaczyć wpływem zamocowania końców przewodu, które powoduje ściśnięcie drutów.

Obecnie przystąpimy do wyznaczenia  $EJ_{\max}$  i  $l_s$  oraz sprawdzenia słuszności przyjętej hipotezy liniowej superpozycji sztywności [wzór (2.10)].

Pochodne cząstkowe występujące w równaniach (2.20) po odpowiednich przekształceniach równe są:

$$(3.2) \quad \frac{\partial f_k}{\partial EJ_{\max}} = 0,2247 \left( \frac{l_k}{l_s} \right)^2 \left( 1 + \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} \right) - \frac{l_k}{l_s} \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} \right) + 2,$$

$$(3.3) \quad \frac{\partial f_k}{\partial l_s} = \frac{l_k^2}{l_s^3} [0,8988 \sqrt{EJ_{\max} EJ_s}] - 0,4494 (EJ_{\max} + EJ_s) + \frac{l_k}{l_s^2} [EJ_{\max} - \sqrt{EJ_{\max} EJ_s}].$$

Po wykorzystaniu wzorów (2.17), (3.2) i (3.3), układ równań (2.20) przyjmie postać:

$$(3.4) \quad 1,038 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} - 1,0263 \frac{1}{l_s^4} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - 1,0263 \frac{1}{l_s^4} EJ_s +$$

$$+ 1,038 \frac{1}{l_s^4} EJ_s \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} - 4,1561 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} + 6,3454 \frac{1}{l_s^3} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - 2,5767 \frac{1}{l_s^3} EJ_s +$$

$$+ 1,2891 \frac{1}{l_s^3} EJ_s \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} + 12,8151 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max} - 14,2932 \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} + 6,4276 \frac{1}{l_s^2} EJ_s -$$

$$- \frac{1}{l_s^2} \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} [0,182 EJ_{sr}(0,9) + 0,4404 EJ_{sr}(1,4) + 0,8988 EJ_{sr}(2)] + 11,9 \frac{1}{l_s} \sqrt{EJ_s EJ_{\max}} -$$

$$- 7,6 \frac{1}{l_s} EJ_{\max} - \frac{1}{l_s} \sqrt{\frac{EJ_s}{EJ_{\max}}} [0,45 EJ_{sr}(0,9) + 0,7 EJ_{sr}(1,4) + EJ_{sr}(2)] - \frac{1}{l_s} [0,9 EJ_{sr}(0,9) +$$

$$+ 1,4 EJ_{sr}(1,4) + 2 EJ_{sr}(2)] - 2 [EJ_{sr}(0,9) + EJ_{sr}(1,4) + EJ_{sr}(2)] + 12 EJ_{\max} = 0,$$

$$(3.5) \quad - 2,07 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max}^2 + 7,2783 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} -$$

$$- 11,5521 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max} + 7,2801 \frac{1}{l_s^5} EJ_s \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} -$$

$$- 1,207 \frac{1}{l_s^5} EJ_s + 7,7441 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max}^2 - 23,2024 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} \times$$

$$\times \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} + 23,3485 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} EJ_s - 7,7441 \frac{1}{l_s^4} EJ_s \times$$

$$\times \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - 10,3292 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max}^2 + 23,7096 EJ_{\max} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} -$$

$$- 12,8548 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} EJ_s - \frac{1}{l_s^3} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} [0,728 EJ_{sr}(0,9) +$$

$$+ 1,7616 EJ_{sr}(1,4) + 3,5952 EJ_{sr}(2)] + \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times [0,364 EJ_{\dot{s}r}(0,9) + 0,8808 EJ_{\dot{s}r}(1,4) + 1,7976 EJ_{\dot{s}r}(2)] + \\
& + \frac{1}{l_s^3} EJ_s [0,364 EJ_{\dot{s}r}(0,9) + 0,8808 EJ_{\dot{s}r}(1,4) + 1,7976 EJ_{\dot{s}r}(2)] + \\
& + 8,6 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max}^2 - 8,6 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} - \frac{1}{l_s^2} EJ_s \times \\
& \quad \times [0,9 EJ_{\dot{s}r}(0,9) + 1,4 EJ_{\dot{s}r}(1,4) + 2 EJ_{\dot{s}r}(2)] + \\
& + \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\max} EJ_s} [0,9 EJ_{\dot{s}r}(0,9) + 1,4 EJ_{\dot{s}r}(1,4) + 2 EJ_{\dot{s}r}(2)] = 0.
\end{aligned}$$

Po podstawieniu do wzorów (3.4) i (3.5) danych liczbowych  $EJ_{\dot{s}r}(0,9) = 98,65$ ,  $EJ_{\dot{s}r}(1,4) = 90,49$ ,  $EJ_{\dot{s}r}(2) = 83,815$ ,  $EJ_s = 12,84$ , otrzymamy układ równań:

$$\begin{aligned}
(3.6) \quad & 1,038 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} - 3,6775 \frac{1}{l_s^4} \sqrt{EJ_{\max}} - 13,1775 \frac{1}{l_s^4} + \\
& + 47,7578 \frac{1}{l_s^4} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\max}}} - 4,1561 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} + 22,7374 \frac{1}{l_s^3} \times \\
& \quad \times \sqrt{EJ_{\max}} - 33,0848 \frac{1}{l_s^3} + 59,3107 \frac{1}{l_s^3} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\max}}} + \\
& + 12,8151 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max} - 51,2168 \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\max}} + 82,5303 \frac{1}{l_s^2} - \\
& - 475,6028 \frac{1}{l_s^2} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\max}}} + 42,6412 \frac{1}{l_s} \sqrt{EJ_{\max}} - 7,6 \frac{1}{l_s} EJ_{\max} - \\
& - 686,3827 \frac{1}{l_s} \frac{1}{\sqrt{EJ_{\max}}} + 383,1008 \frac{1}{l_s} - 545,91 + 12 EJ_{\max} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.7) \quad & -2,07 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max}^2 + 26,0803 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max}^{3/2} - 148,3289 \frac{1}{l_s^5} EJ_{\max} + \\
& + 358,295 \frac{1}{l_s^5} \sqrt{EJ_{\max}} - 198,9927 \frac{1}{l_s^5} + 7,7441 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max}^2 - \\
& - 83,1458 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max}^{3/2} + 299,7947 \frac{1}{l_s^4} EJ_{\max} - 356,3025 \frac{1}{l_s^4} \sqrt{EJ_{\max}} + \\
& - 10,3292 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max}^2 + 84,9586 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max}^{3/2} - 591,4437 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} - \\
& - 1908,2934 \frac{1}{l_s^3} \sqrt{EJ_{\max}} + 266,2759 \frac{1}{l_s^3} EJ_{\max} + 3418,9825 \frac{1}{l_s^3} + \\
& + 8,6 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max}^2 - 30,8163 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max}^{3/2} - 383,101 \frac{1}{l_s^2} EJ_{\max} + 1372,7658 \frac{1}{l_s^2} \sqrt{EJ_{\max}} = 0.
\end{aligned}$$



Po rozwiązaniu przy użyciu maszyny cyfrowej układu równań (3.6) i (3.7) dostaniemy:

$$EJ_{\max} \approx 51 \text{ [kGm}^2\text{]}, \quad l_s = 2,9 \text{ [m]}.$$

Powyższe wartości parametrów powinny spełniać układ równań (2.19). Ponieważ doprowadzenie powyższego układu do postaci zawierającej konkretne współczynniki liczbowe jest bardzo czasochłonne [por. doprowadzenie do (3.5) i (3.6)], postąpimy nieco inaczej.

Podstawmy do wzoru (2.15)  $EJ_{\max} = 51 \text{ kGm}^2$ ,  $l_s = 2,9 \text{ m}$  i przyjmijmy  $l = 1,4 \text{ m}$  oraz  $l = 2 \text{ m}$ . Po wykonaniu obliczeń dostaniemy

$$EJ_{sr}(1,4) = 79,692 \text{ kGm}^2, \quad EJ_{sr}(2) = 72,646 \text{ kGm}^2.$$

Wyznaczone doświadczalnie odpowiednie sztywności są równe:

$$EJ_{sr}(1,4) = 80,46 \text{ kGm}^2, \quad EJ_{sr}(2) = 71,27 \text{ kGm}^2.$$

Z powyższego wynika, że przyjęta aproksymacja sztywności przewodu jest poprawna. Ostatecznie można więc sztywność przewodu (mierzoną w  $\text{kGm}^2$ ) przyjąć w postaci:

$$EJ(x) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{2,9} (\sqrt{51} - \sqrt{12,84})x - \sqrt{51} \right]^2 & \text{dla } x < 2,9, \\ 12,84 & \text{dla } x \geq 2,9. \end{cases}$$

#### 4. Zakończenie

Sztywność przewodu AFL-8-525 jest znacznie większa od sumy sztywności poszczególnych drutów. Sztywność ta znacznie wzrasta przy zbliżaniu się do uchwytu przelotowego. Dzięki zaproponowanej metodzie można znaleźć sztywność przewodu tuż przy nakładce oraz zasięg wpływu zaciśnięcia przewodu w uchwycie na zmianę jego sztywności. Mając wyznaczoną sztywność  $EF$  przewodu na rozciąganie (wyznaczoną w r. 1971 metodą pomiaru prędkości rozchodzenia się fali) oraz sztywność  $EJ$  na zginanie, można przewód traktować jako ekwiwalentną belkę i stosunkowo prosto wyznaczyć naprężenia w zewnętrznej warstwie przewodu.

Szczególnie ważnym problemem jest wyznaczenie naprężeń w obszarze uchwytu przelotowego, gdzie jak wiadomo najczęściej występuje zniszczenie przewodu na skutek zmęczenia. Problem wyznaczenia naprężeń dynamicznych, wynikłych na skutek drgań, utrudnia fakt istnienia współpracy przewodu z łódką uchwytu przelotowego. Naprężenia te zostały wyznaczone przez autorów niniejszego opracowania i potwierdzone badaniami doświadczalnymi na przewodach rzeczywistych.

Metoda obliczania naprężeń w warstwie zewnętrznej przewodu z uwzględnieniem jego współpracy z łódką uchwytu przelotowego stanowić będzie, jak już wspomnieliśmy na wstępie, zasadniczą część ustalenia kryterium zmęczeniowego przewodu AFL-8-525.

#### Literatura cytowana w tekście

1. *Standardization of Conductor Vibration Measurements*, IEE Committee Report, 1966.
2. TAPANI SEPPÄ, *Effect of Various Factors on Vibration Fatigue Life of ACSR „IBIS”*, Helsinki 1969.
3. ROLF HELMS, *Zur Sicherheit der Hochspannungsfreileitungen bei hoher mechanischer Beanspruchung*, Berlin 1964.

4. *Sprawozdanie z laboratoryjnych badań drgań przewodu AFL-8-525*, «Energoprojekt» O/Kraków, X-40580, 1971 r.
5. *Wyniki badań zmęczeniowych przewodu AFL-8-525*, «Energoprojekt» O/Kraków X-44832, 1972.

## Р е з ю м е

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЖЁСТКОСТИ ИЗГИБА КАБЕЛЯ АФЛ-8-525

Представлен теоретико-экспериментальный метод определения жёсткости на изгиб энергетического кабеля. Кабель рассматривается как эквивалентная балка, для которой, по форме её изгиба, определяется статическая жёсткость при изгибе. Влияние закрепления каната в пролётной державке на изменение его жёсткости в области державки определено динамическим путём на основании измерений частот колебаний кабеля, закреплённого на некотором участке.

Дан способ оценки жёсткости в месте закрепления и рассмотрены пределы влияния закрепления на изменения жёсткости кабеля. Обнаружено, что изгибная жёсткость кабеля уменьшается вместе с увеличением расстояния от точки закрепления по параболическому закону и затем принимает постоянную величину, равную величине статической жёсткости.

## S u m m a r y

## DETERMINATION OF THE BENDING RIGIDITY OF A AFL-8-525 CONDUCTOR

In this paper is given the theoretical — experimental method of determining the bending rigidity of conductors of electrical lines. The conductor is replaced with an equivalent beam the deflection of which can easily be determined. On this basis, static rigidity of the conductor is determined. Influence of the conductor's clamping in a holder on the change of the stiffness (in the region of this holder) is determined by the dynamical method. Measurements data concerning beam's vibrations are given for the conductor clamped segment. The stiffness in the region of clamping and its influence on the change of the conductor rigidity is estimated. Bending stiffness of the conductor decreases parabolically with the distance from the region of clamping, and next it becomes constant and equal to the static stiffness.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 czerwca 1973 r.*

---

## MOLEKULARNE MODELE SKONDENSOWANYCH UKŁADÓW POLIMEROWYCH. KRYTYKA RO ZSZERZANIA TEORII ROZCIEŃCZONYCH ROZTWORÓW NA UKŁADY SIECIOWE

ANDRZEJ ZIABICKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Celem rozważań molekularnych jest *wyjaśnienie* źródeł, natury i mechanizmów stojących u podstaw zjawisk fizycznych, a nie *odtworzenie* stwierdzonych eksperymentalnie faktów i zależności. Dlatego też każda racjonalna teoria molekularna powinna być wyprowadzona z możliwie podstawowych praw fizyki lub oparta na niezależnie wyprowadzonych i wiarogodnych informacjach fizycznych. Teoria oparta na nieprawidłowych przesłankach lub zawierająca dowolne, nie uzasadnione założenia nie wyjaśnia niczego i jako taka jest bezwartościowa, nawet gdy zgadza się z jakimiś danymi eksperymentalnymi.

Istnieją obecnie molekularne teorie roztworów polimerów, które, choć oparte na prostym modelu molekularnym, tłumaczą naturę lepkosprężystości takich układów [1, 2]. Podobne teorie istnieją również dla permanentnych, idealnych sieci, które opisują równowagową sprężystość kauczuków [3–5]. Dla układów pośrednich — stężonych roztworów polimerów, stopów i nieusieciowanych polimerów stałych — brak dotychczas odpowiedniej teorii. Nieliczne konsekwentne rozwiązania teoretyczne [6–8] dotyczą modelu (sieć z rozpadającymi się w czasie i odtwarzającymi węzłami), który nie może opisać wielu podstawowych własności nieusieciowanych polimerów. Wiele innych prób stworzenia molekularnej teorii stężonych roztworów i stopów oparto na niejasnych i nieprawidłowych przesłankach lub dowolnych założeniach.

We wczesnych latach pięćdziesiątych wielu autorów wyrażało opinię, że teorie rozcieńczonych roztworów można, po pewnych modyfikacjach, zastosować do skondensowanych układów polimerowych [9–11]. Wczesne koncepcje modelowe jednak (np. «efektywny współczynnik tarcia» makrocząsteczki polimeru w stopie [10], dowolnie przyjęte założenia o kinematyce lub dynamice deformacji makrocząsteczek [12, 13]) były źle określone, niesprawdzalne i jako takie nie mogły służyć do poważnej analizy teoretycznej. Z drugiej strony, w czasie ostatnich dziesięciu lat ukazał się szereg artykułów, które miały wyjaśnić lepkosprężystość układów sieciowych (uważanych za najbardziej właściwy model stężonych roztworów i polimerów w stanie nierozcieńczonym) w oparciu o dobrze zdefiniowane pojęcia teorii rozcieńczonych roztworów [11, 14–17]. Większość tych teorii opierała się na rozważaniu kinematyki izolowanego łańcucha polimeru, wchodzącego w skład układu sieciowego. Takie ujęcie jest dopuszczalne dla rozcieńczonych roztworów składających się z praktycznie izolowanych łańcuchów, gdzie warunki brzegowe przenoszone są do poszczególnych łańcuchów przez lepkie continuum (rozpuszczalnik). W układach sieciowych

natomiast siły przyłożone do powierzchni układu przenoszone są przez poszczególne łańcuchy sieci i układ należy traktować jako całość, chyba że udowodni się dopuszczalność innego uproszczonego podejścia.

Kinematyka i dynamika łańcuchowych makrocząsteczek w układach sieciowych różni się zasadniczo od podobnego zachowania się w roztworach rozcieńczonych. W konsekwencji tego rozszerzanie teorii rozcieńczonych roztworów na sieci jest niewłaściwe i nieuzasadnione. Teoria sieci powinna być oparta na rozważaniach wyraźnie uwzględniających oddziaływania łańcuch-łańcuch w węzłach sieci i rzeczywiste warunki brzegowe, a nie tylko zmiany ruchliwości izolowanych makrocząsteczek.

W wielu próbach skonstruowania molekularnych teorii stężonych roztworów polimerów pewne pojęcia pochodzące z teorii rozcieńczonych roztworów są jakby «absolutyzowane» i traktowane jako ogólnie obowiązujące dla dowolnych układów molekularnych. W artykule przedyskutujemy podstawowe różnice w kinematyce i dynamice makrocząsteczek w rozcieńczonych roztworach z jednej strony i w układach sieciowych z drugiej. Pokażemy, że «macierze ruchliwości», występujące w teorii ROUSE'A [1] i ZIMMA [2], stosowane po pewnej modyfikacji jako źródło informacji o widmach relaksacji skondensowanych układów polimerowych nie mają sensu dla makrocząsteczek wchodzących w skład układów sieciowych. Pokażemy również, że język teoretyczny, obejmujący tylko położenia i prędkości centrów tarcia (lub węzłów sieci), jest niewystarczający do opisanie układów splecionych łańcuchów, jakie występują z reguły w stężonych roztworach i stopach.

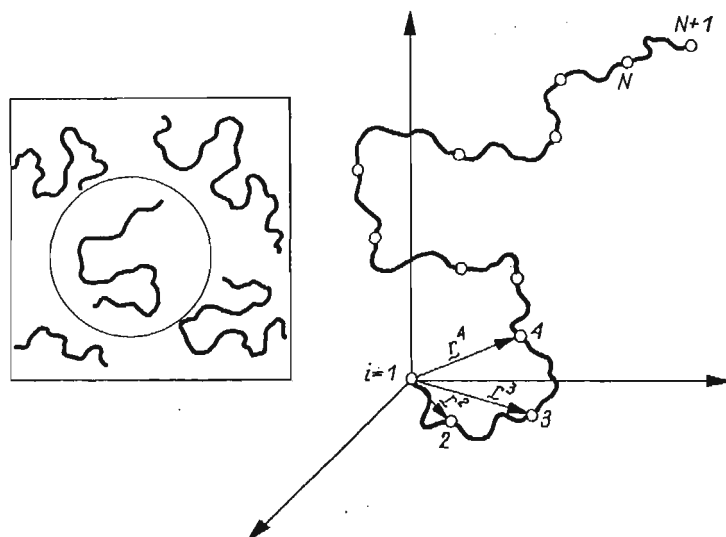
Wykażemy również, że metody «normalnych współrzędnych», tak przydatnej w teorii rozcieńczonych roztworów, nie można, ogólnie rzecz biorąc, stosować do układów sieciowych. Co więcej, można wykazać, że lepkosprężyste zachowanie się skondensowanych układów polimerowych nie zawsze jest liniowe i nie zawsze można je opisać w kategoriach widm relaksacji. Ponieważ konsekwentne ujęcie teoretyczne roztworów sieciowych z lokalizowanymi (trwałymi lub rozpadającymi się w czasie) węzłami w pierwszym przybliżeniu nie dopuszcza tarcia w kontaktach polimer-polimer lub polimer-rozpuszczalnik, to znaczy wyklucza mechanizm rozpraszania energii, decydujący o zachowaniu się roztworów rozcieńczonych, przeto aby wyjaśnić lepkosprężystość układów sieciowych należy rozważać inne mechanizmy molekularne. Krótki przegląd takich mechanizmów i odpowiednich modeli molekularnych podamy na końcu artykułu.

## 2. Kinematyka i dynamika makrocząsteczek w rozcieńczonych roztworach

Powtórzmy krótko podstawowe założenia i wyniki teorii rozcieńczonych roztworów giętkich makrocząsteczek. Teorie ROUSE'A [1] i ZIMMA [2] posługują się różnymi językami, lecz można wykazać, że są one całkowicie równoważne. Będziemy tu posługiwać się językiem hydrodynamicznym ZIMMA, pokażemy jednak jego odniesienie do termodynamicznego ujęcia ROUSE'A [1]. Dla prostoty pominiemy oddziaływania hydrodynamiczne pomiędzy poszczególnymi częściami makrocząsteczki, jak również efekty lepkości wewnętrznej łańcucha, wprowadzone do teorii przez innych autorów.

Makrocząsteczkę reprezentuje w tej teorii układ  $N$  gaussowskich podłańcuchów lub układ  $(N+1)$  punktów tarcia połączonych hookowskimi sprężynami (rys. 1). Makro-

cząsteczka jako całość unoszona jest przez otaczający ją ośrodek (rozpuszczalnik) i o jej zachowaniu się decyduje wyłącznie deformacja i rotacja pola prędkości. Do opisanego zachowania się wygodnie jest wybrać układ współrzędnych, zamocowany na końcu makrocząsteczki i poruszający się wraz z końcowym punktem makrocząsteczki (punkt  $i = 1$  na rys. 1) z prędkością równą prędkości rozpuszczalnika. W układzie współrzędnych, zwią-



Rys. 1. Model pojedynczej makrocząsteczki w rozcieńczonym roztworze  
Kółka oznaczają punkty tarcia

zanym z pierwszym punktem tarcia położenie dowolnego  $i$ -tego punktu opisane jest wektorem  $\mathbf{r}^i$ . Siły zewnętrzne, przyłożone do układu, przenoszone są do każdej makrocząsteczki w postaci siły tarcia przez lepkie continuum (rozpuszczalnik), w którym zanurzone są wszystkie elementy układu. Zakłada się również, że gradient prędkości w rozpuszczalniku opisany jest stałym tensorem  $\mathbf{a}$  i w nieobecności oddziaływań hydrodynamicznych pole prędkości w rozpuszczalniku jest identyczne w otoczeniu każdego centrum tarcia.

Decydującym krokiem w tej teorii jest sformułowanie równania ruchu. Rozważmy siły działające na dowolny  $i$ -ty punkt tarcia. Podstawowe koncepcje modelowe, prowadzące do pojawienia się niżej rozpatrywanych sił, omówiono we wcześniejszym artykule [23].

Sprężyste zachowanie się łańcuchowych makrocząsteczek warunkują dwa rodzaje sił:

1. Siły sprężyste  $\mathbf{f}_{ei}^{i+1,i}$  oraz  $\mathbf{f}_{ei}^{i,i-1}$  pochodzące z wewnątrzcząsteczkowych oddziaływań w łańcuchu i określone przez entropie konformacji pojedynczego łańcucha  $S_k$

$$\mathbf{f}_{ei} = -T\nabla S_k = -kT\nabla \ln \Psi_0,$$

gdzie  $\Psi_0$  oznacza funkcję rozkładu konformacji łańcucha. Przy założeniu niezbyt dużych deformacji łańcucha rozkład  $\Psi_0$  jest gaussowski i napięcie pomiędzy punktami  $i+1$  oraz  $i$  wynosi

$$(1) \quad \mathbf{f}_{ei}^{i+1,i} = (3kT/\langle h_0^2 \rangle)(\mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i);$$

$\langle h_0^2 \rangle$  oznacza średnią kwadratową odległość końców pojedynczego pod-łańcucha w spoczynku.

2. *Siła statystyczna* (dyfuzyjna)  $\mathbf{f}_{\text{dit}}^i$  związana z fluktuacjami termicznymi odległości końców podłańcucha i istnieniem określonego rozkładu  $\Psi$  w całym układzie podłańcuchów

$$(2) \quad \mathbf{f}_{\text{dit}}^i = -kT\nabla_i \ln \Psi = -kT(\partial \ln \Psi / \partial \mathbf{r}^i).$$

W układzie działa ponadto siła zewnętrzna przeniesiona od powierzchni układu do  $i$ -tego punktu makrocząsteczki przez rozpuszczalnik  $\mathbf{f}_f^i$ . Siłę oddziaływania makrocząsteczki z rozpuszczalnikiem opisuje się jako «siłę tarcia» i w pierwszym przybliżeniu (prawo Stokesa) traktuje jako proporcjonalną do różnicy prędkości punktu tarcia,  $\dot{\mathbf{r}}^i$  i ośrodka otaczającego ten punkt,  $\mathbf{v}(\mathbf{r}^i)$ :

$$(3) \quad \mathbf{f}_f^i = -\zeta[\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{v}(\mathbf{r}^i)],$$

gdzie  $\zeta$  oznacza molekularny współczynnik tarcia.

Przyjmując, że gradient prędkości  $\mathbf{a}$  jest stały,

$$(4) \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}^i) = \mathbf{a}\mathbf{r}^i,$$

otrzymujemy

$$(5) \quad \mathbf{f}_f^i = -\zeta(\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i).$$

Równanie ruchu w punkcie  $\mathbf{r}^i$  (tzn. dla  $i$ -tego punktu tarcia)

$$(6) \quad m\ddot{\mathbf{r}}^i = \sum \mathbf{f},$$

gdzie  $m$  oznacza masę, a  $\ddot{\mathbf{r}}^i$  przyspieszenie  $i$ -tego punktu, można przedstawić w postaci

$$(6') \quad m\ddot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{f}_{e1}^{i+1,i} - \mathbf{f}_{e1}^{i,i-1} + \mathbf{f}_{\text{dit}}^i + \mathbf{f}_f^i.$$

Gdy przyspieszenie  $\ddot{\mathbf{r}}^i$  jest wystarczająco małe, a wszystkie składniki siły wyrażone przez położenia i prędkości [równania (1), (2), (5)] to równanie (6) redukuje się do

$$(7) \quad (3kT/\langle h_0^2 \rangle)(\mathbf{r}^{i+1} - 2\mathbf{r}^i + \mathbf{r}^{i-1}) - kT(\partial \ln \Psi / \partial \mathbf{r}^i) - \zeta(\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i) = 0.$$

Jeżeli współczynnik tarcia lub różnica prędkości jest równa zero, [ $\zeta = 0$  lub  $(\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i) = 0$ ], jak to ma miejsce, gdy układ znajduje się w spoczynku, dwa pierwsze wyrazy w równaniu (7) wyznaczają gaussowski rozkład makrocząsteczki:

$$(8) \quad \Psi_0 = \text{const} \exp \left[ -(3/2\langle h_0^2 \rangle) \sum_i (\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^{i+1})^2 \right] = \text{const} \exp \left[ -(3/2\langle h_0^2 \rangle) \sum_i (\mathbf{h}^i)^2 \right].$$

Jeżeli współczynnik tarcia  $\zeta$  jest różny od zera, to równanie (7) można rozwiązać uzyskując różnicę prędkości  $(\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i)$ :

$$(9) \quad \dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i = -\frac{3kT}{\zeta\langle h_0^2 \rangle} (-\mathbf{r}^{i+1} + 2\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^{i-1}) - (kT/\zeta)\partial \ln \Psi / \partial \mathbf{r}^i.$$

ROUSE [1], stosując lokalne współrzędne związane z poszczególnymi podłańcuchami (wektory  $\mathbf{h}^i$  zamiast  $\mathbf{r}^i$ ) i gradienty potencjału chemicznego  $\mu$  zamiast sił sprężystych i dyfuzyjnych, otrzymał następujący wynik:

$$(9') \quad \dot{\mathbf{h}}^i - \mathbf{a}\mathbf{h}^i = -B[-\partial\mu/\partial\mathbf{h}^{i+1} + 2\partial\mu/\partial\mathbf{h}^i - \partial\mu/\partial\mathbf{h}^{i-1}],$$

gdzie  $B$  oznacza «współczynnik ruchliwości». Łatwo wykazać, że przekształcenie współrzędnych

$$\mathbf{h}^i = \mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i$$

i podstawienie

$$(10) \quad B = 1/\zeta, \\ \mu = kT \ln(\Psi/\Psi_0) = kT \left[ \ln \Psi + 3 \sum_i (\mathbf{h}^i)^2 / 2 \langle h_0^2 \rangle \right] + \text{const},$$

sprowadza wynik Rouse'a [równanie (9')] dokładnie do równania (9) wyprowadzonego przez Zimma. Mnożąc równanie (9') przez  $\zeta$  i wyrażając je w  $(N+1)$ -wymiarowej przestrzeni konfiguracyjnej, można napisać po prostu

$$(11) \quad \zeta(\dot{\mathbf{h}} - \mathbf{a}\mathbf{h}) = -\mathbf{A} \text{grad} \mu,$$

gdzie

$$\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^{N+1}), \quad \text{grad} = (\partial/\partial \mathbf{h}^1, \partial/\partial \mathbf{h}^2, \dots, \partial/\partial \mathbf{h}^{N+1})$$

są wektorami w przestrzeni  $(N+1)$ -wymiarowej, a  $\mathbf{A}$  oznacza macierz:

$$(12) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Równanie (12) przedstawia macierz  $\mathbf{A}$  wyprowadzoną przez ZIMMA dla łańcucha ze swobodnymi końcami; macierz założona przez ROUSE'A różniła się od wzoru (12) tym, że  $A_{11} = A_{N+1, N+1} = 2$  zamiast  $A_{11} = A_{N+1, N+1} = 1$  w równaniu Zimma (równanie 12).

Z powyższych rozważań wynikają dwa ważne wnioski dotyczące zachowania się rozcieńczonych roztworów polimerów:

$$(13) \quad \zeta = 0 \Rightarrow \text{grad} \mu = 0 \Leftrightarrow \Psi = \Psi_0, \\ \dot{\mathbf{h}} = \mathbf{a}\mathbf{h} \Rightarrow \text{grad} \mu = 0 \Leftrightarrow \Psi = \Psi_0.$$

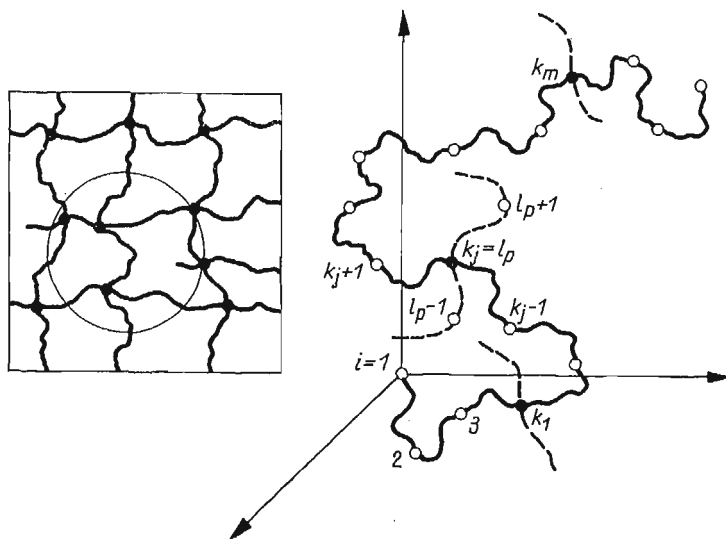
Jeżeli współczynnik tarcia  $\zeta$  jest równy zeru lub łańcuch deformuje się afinicznie (tak jak rozpuszczalnik), to rozkład konformacji  $\Psi$  osiąga podstawową formę  $\Psi_0$  (równanie 8) a naprężenia w poszczególnych pod-łańcuchach znikają. Ten wniosek odpowiada dobrze znanemu faktowi doświadczalnemu, że rozcieńczone roztwory nie mogą podtrzymywać naprężeń w stanie równowagi.

Modyfikacje teorii Rouse'a-Zimma w zastosowaniu do układów sieciowych dotyczyły przede wszystkim kształtu macierzy  $\mathbf{A}$  i/lub współczynnika ruchliwości  $B$  bez zmiany podstawowych równań (9)–(11). Postulowano, że dzięki obecności węzłów trwałych, czasowych lub splątań łańcuchów, współczynnik ruchliwości  $B$  i macierz  $\mathbf{A}$  dla każdej pojedynczej makrocząsteczki powinny być zmienione, a następnie rozwiązywano te zmodyfikowane macierze, aby uzyskać wartości własne określające jakoby widma czasów relaksacji [14, 15].

Wykażemy, że rzeczywiste macierze ruchliwości dla układów sieciowych są niewyznaczalne i nie mogą służyć jako źródło informacji o własnościach lepkosprężystych. Pokażemy też, że model materiałów kauczukowatych wprowadzony przez MOONEYA [11], stosowany również przez ILAVSKY'EGO i współpracowników [17], a oparty na równaniach (9)–(11) nie może być zrealizowany w układach sieciowych.

### 3. Kinematyka i dynamika liniowych makrocząsteczek wchodzących w skład sieci ze zlokalizowanymi węzłami

Rozpatrzmy model pokazany na rys. 2. Makrocząsteczka składająca się z  $(N+1)$  identycznych pod-łańcuchów (jak na rys. 1) połączona jest w  $m$  punktach (węzłach)  $i = k_1, k_2, \dots, k_m$ , z innymi makrocząsteczkami, tworząc ciągłą sieć. Położenia punktów wyznaczających węzły zaznaczono na rys. 2 czarnymi kółkami. Jasne kółka wyznaczają, podobnie jak na rys. 1, centra tarcia wynikające z kontaktów polimer-rozpuszczalnik



Rys. 2. Model makrocząsteczki w układzie sieciowym ze zlokalizowanymi węzłami  
Jasne kółka oznaczają punkty tarcia pomiędzy węzłami sieci, ciemne kółka — węzły

i polimer-polimer. Odległość węzłów mierzona wzdłuż łańcucha (tzn. różnica  $k_j - k_{j-1}$ ) nie musi być jednakowa dla wszystkich  $j$ . Należy podkreślić, że podczas gdy równanie (6) jest zupełnie ogólne (równanie zachowania pędu lub równanie bilansu sił), to równania (6')–(11) stanowią *szczególną postać* równania (6) słuszną jedynie dla rozcieńczonych rozтворów. Dlatego też teoria sieci nie powinna opierać się na równaniach (6')–(11), lecz należy sformułować równanie bilansu sił we wszystkich punktach łańcucha ( $i = 1, 2, \dots, N+1$ ) uwzględniając wszystkie składniki sił właściwe dla danego układu molekularnego.

Rozpatrzmy najpierw sytuację w punktach tarcia, które nie stanowią węzłów sieci, tzn. dla  $i \neq k_j$ . Siły występujące w takich punktach są identyczne jak siły dyskutowane w po-



przednim rozdziale w teorii rozcieńczonych roztworów. Pomijając wyraz inercyjny otrzymujemy:

$$(14) \quad \sum \mathbf{f} = \mathbf{f}_{el}^{i+1,i} - \mathbf{f}_{el}^{i,i-1} + \mathbf{f}_{dif}^i + \mathbf{f}_f^i = 0.$$

W pracy dotyczącej dynamiki deformacji sieci [18] pokazaliśmy, że siła tarcia  $\mathbf{f}_f$ , występująca w skondensowanym układzie w wyniku kontaktów polimer-polimer i polimer-rozpuszczalnik ma postać

$$(15) \quad \mathbf{f}_f^i = -K\Delta\mathbf{v}(\mathbf{r}^i) = -K[\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{v}(\mathbf{r}^i)],$$

gdzie

$$(16) \quad K = \zeta(1 - \mathbf{v}_p) + \xi p(\mathbf{v}_p)$$

oznacza całkowity współczynnik tarcia.  $\zeta$  w równaniu (16) oznacza podobnie jak w rozcieńczonych roztworach współczynnik tarcia polimer-rozpuszczalnik, a  $\xi$  współczynnik tarcia w kontaktach polimer-polimer;  $p$  oznacza liczbę kontaktów polimer-polimer na jedną makrocząsteczkę (pod-łańcuch). Dla nieskończone rozcieńczonych roztworów ( $\mathbf{v}_p = 0$ )  $p \rightarrow 0$ ,  $K \rightarrow \zeta$  i równanie (15) sprowadza się do równania (3). Gdy, z drugiej strony,  $\mathbf{v}_p \rightarrow 1$ , to pierwszy wyraz w równaniu (16) znika i współczynnik tarcia określony jest wyłącznie przez oddziaływania typu polimer-polimer ( $K \rightarrow \xi p$ ).

Stosując równanie (4) na  $\mathbf{v}(\mathbf{r}^i)$  otrzymujemy podobnie do równania (9) wyrażenie na różnicę prędkości w punktach tarcia:

$$(17) \quad K(\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i) = -(3kT/\langle h_0^2 \rangle)[- \mathbf{r}^{i+1} + 2\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^{i-1}] - kT\partial \ln \Psi / \partial \mathbf{r}^i.$$

Równanie (17) jest słuszne dla punktów tarcia położonych wewnątrz łańcucha, tzn. dla  $i \neq k_j$ ,  $i \neq 1$ ,  $i \neq N+1$ . Dla punktów końcowych otrzymujemy podobnie jak w rozcieńczonych roztworach

$$(17') \quad K(\dot{\mathbf{r}}^1 - \mathbf{a}\mathbf{r}^1) = -(3kT/\langle h_0^2 \rangle)[\mathbf{r}^1 - \mathbf{r}^2] - kT\partial \ln \Psi / \partial \mathbf{r}^1$$

oraz

$$(17'') \quad K(\dot{\mathbf{r}}^{N+1} - \mathbf{a}\mathbf{r}^{N+1}) = -(3kT/\langle h_0^2 \rangle)[\mathbf{r}^{N+1} - \mathbf{r}^N] - kT\partial \ln \Psi / \partial \mathbf{r}^{N+1}.$$

Równania (17) nie różnią się niczym od odpowiednich równań dla rozcieńczonych roztworów [równanie (7)] poza wartością współczynnika tarcia [ $K$  w równaniu (17),  $\zeta$  w równaniu (7)].

Sytuacja zmienia się zasadniczo, gdy rozpatrujemy bilans sił w węzle sieci ( $i = k_j$ ). W punktach węzłowych (ciemne kółka na rys. 2) siły sprężyste dwóch sąsiednich pod-łańcuchów pochodzących od rozpatrywanej makrocząsteczki ( $\mathbf{f}_{el}^{k_j+1,k_j}$  i  $\mathbf{f}_{el}^{k_j,k_j-1}$ ) zrównoważone są przez siły tarcia i siły dyfuzyjne (odpowiednio  $\mathbf{f}_f^{k_j}$  i  $\mathbf{f}_{dif}^{k_j}$ ) wraz z siłami sprężystymi i dyfuzyjnymi, związanymi z dwoma innymi pod-łańcuchami przyłączonymi do danego węzła i pochodzącymi od innej makrocząsteczki. Ta «obca» makrocząsteczka zaznaczona została linią przerywaną na rys. 2. Jeśli w układzie współrzędnych związanym z «obcą» makrocząsteczką punkt węzłowy  $k_j$  posiada wskaźnik  $l_p$  i położenie  $\tilde{\mathbf{r}}^{l_p}$ , to w równaniu bilansu sił pojawią się siły sprężyste  $\mathbf{f}_{el}^{l_p+1,l_p}$  i  $\mathbf{f}_{el}^{l_p,l_p-1}$  oraz siła dyfuzyjna  $\mathbf{f}_{dif}^{l_p}$  (wszystkie związane z «obcą» makrocząsteczką):

$$(18) \quad \sum \mathbf{f} = \mathbf{f}_{el}^{k_j+1,k_j} - \mathbf{f}_{el}^{k_j,k_j-1} + \mathbf{f}_{el}^{l_p+1,l_p} - \mathbf{f}_{el}^{l_p,l_p-1} + \mathbf{f}_f^{k_j} + \mathbf{f}_{dif}^{k_j} + \mathbf{f}_{dif}^{l_p} = 0.$$

Wypisując w równaniu bilansu sił wszystkie składniki w pełnej formie i rozwiązując je względem różnicy prędkości pomiędzy polimerem i rozpuszczalnikiem, otrzymujemy zamiast równań (17) i (7):

$$(18') \quad K(\dot{\mathbf{r}}^{k_j} - \mathbf{a}r^{k_j}) = -(3kT/\langle h_0^2 \rangle)[-r^{k_j+1} + 2r^{k_j} - r^{k_j-1} - \tilde{r}^{l_p+1} + 2\tilde{r}^{l_p} - \tilde{r}^{l_p-1}] - \\ - kT(\partial \ln \Psi / \partial r^{k_j} + \partial \ln \Psi / \partial \tilde{r}^{l_p}),$$

lub w języku Rouse'a (współrzędne  $\mathbf{h}^i$  i potencjały chemiczne  $\mu$ ):

$$(18'') \quad K(\dot{\mathbf{h}}^{k_j} - \mathbf{a}h^{k_j}) = -(-\partial\mu/\partial h^{k_j+1} + 2\partial\mu/\partial h^{k_j} - \partial\mu/\partial h^{k_j-1}) - \\ - (-\partial\mu/\partial \tilde{h}^{l_p+1} + 2\partial\mu/\partial \tilde{h}^{l_p} - \partial\mu/\partial \tilde{h}^{l_p-1}).$$

Porównując równania (18') i (18'') z odpowiednimi równaniami teorii rozcieńczonych roztworów [odpowiednio równania (9) i (9')] można zauważyć, że w kinematyce węzłów sieci występują nie tylko położenia i gradienty rozkładu rozpatrywanej makrocząsteczki (charakterystyki ze wskaźnikami  $k_j, k_j+1, k_j-1$ ), lecz również położenia i gradienty rozkładu odnoszące się do «obcej» makrocząsteczki biorącej udział w tworzeniu węzła (charakterystyki ze wskaźnikami  $l_p, l_p+1, l_p-1$ ). W równaniach (18') i (18'') pojawiają się więc położenia segmentów dwu różnych makrocząsteczek wyrażone w różnych układach współrzędnych (odpowiednio  $\mathbf{r}^i$  i  $\tilde{\mathbf{r}}^m$ ), oraz różne gradienty funkcji rozkładu  $\Psi$  i potencjału chemicznego  $\mu$ . Oczywiście charakterystyk związanych z «obcą» makrocząsteczką, biorącą udział w tworzeniu węzła, nie można wyrazić przez położenia w układzie pierwotnej rozpatrywanej makrocząsteczki. W konsekwencji tego równań (18') i (18'') nie można rozwiązać względem różnicy prędkości i uzyskać z nich jakiegokolwiek informacji o kinematyce węzłów sieci. Nie istnieje tu żadna jednoznaczna zależność pomiędzy położeniami poszczególnych punktów pierwotnej makrocząsteczki  $\mathbf{r}^i$  lub pomiędzy gradientami potencjału chemicznego  $\partial\mu/\partial h^i$  z jednej strony i prędkościami ( $\dot{\mathbf{r}}^i$  lub  $\dot{\mathbf{h}}^i$ ). Nie można również sformułować dla takiego układu «macierzy ruchliwości» dla pojedynczej makrocząsteczki biorącej udział w układzie sieciowym, a próby opisanie kinematyki sieci w kategoriach takich macierzy są błędne w samym założeniu.

Wykażemy obecnie, że wpływu jaki wywierają na węzły sieciowe podłańcuchy należące do «obcej» makrocząsteczki [w równaniach (18') i (18'') wszystkie wyrazy ze wskaźnikami  $l_p, l_p+1$ , i  $l_p-1$ ] nie można aproksymować modyfikacją ruchliwości punktu węzłowego, jak to sugerowali m.in. DUISER i CHÖMPFF [14, 15]. Aby to udowodnić, porównamy równanie (18'') ze zmodyfikowanym równaniem ROUSE'A [równanie (7)], w którym punkt węzłowy ( $i = k_j$ ) wykazuje ruchliwość zmienioną czynnikiem  $\delta$ :

$$(19) \quad K(\dot{\mathbf{h}}^{k_j} - \mathbf{a}h^{k_j}) = -\delta(-\partial\mu/\partial h^{k_j+1} + 2\partial\mu/\partial h^{k_j} - \partial\mu/\partial h^{k_j-1}).$$

Równanie (19) zdaje się prawidłowo odzwierciedlać myśl przewodnią ujęcia DUISERA i CHÖMPFFA («punkty powolne»). Załóżmy, że układ utrzymywany jest przy stałej deformacji, tak że  $\mathbf{a} = 0$  i wszystkie  $\dot{\mathbf{h}}^i = 0$ . Przy lewej stronie równej zeru, równanie (19) daje

$$(20) \quad \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \text{grad } \mu = 0 \Leftrightarrow \Psi = \Psi_0,$$

podczas gdy z równania (18'') wynika związek pomiędzy gradientami potencjału chemicznego  $\mu$ .

$$(21) \quad \partial\mu/\partial h^{k_j+1} - 2\partial\mu/\partial h^{k_j} + \partial\mu/\partial h^{k_j-1} = -(\partial\mu/\partial \tilde{h}^{l_p+1} - 2\partial\mu/\partial \tilde{h}^{l_p} + \partial\mu/\partial \tilde{h}^{l_p-1}).$$

W odróżnieniu od równania (20), z równania (21) nie wynika bynajmniej, że funkcja rozkładu  $\Psi$  jest równa równowagowej funkcji  $\Psi_0$  z równania (8). Jak wiadomo, zarówno z eksperymentów jak i z teorii układów sieciowych, układy takie są zdolne do podtrzymywania naprężeń przy stałej deformacji, a zatem dopuszczają nierównowagowe rozkłady wektorów łańcucha,  $\Psi \neq \Psi_0$ . Takie zachowanie się jest zgodne ze wzorem (21) lecz sprzeczne ze zmodyfikowanym równaniem Rouse'a [równanie (19)], które nie dopuszcza żadnych naprężeń (i żadnych rozkładów wektorów  $\mathbf{h}$  innych niż  $\Psi_0$ ), gdy układ znajduje się w stanie spoczynku. Zachowanie się odpowiadające równaniom (19) i (20) jest naturalne dla izolowanej makrocząsteczki w rozcieńczonym roztworze lecz pozbawione sensu fizycznego dla sieci.

Należy zauważyć, że oddziaływania molekularne w układach sieciowych ze zlokalizowanymi węzłami nie zanikają nawet na bardzo dużych odległościach. W konsekwencji problemu nie można zredukować do oddziaływań bliskiego zasięgu z najbliższymi tylko sąsiadami. Innymi słowy, sieci są układami nielokalnymi i ich dokładny opis teoretyczny wymaga znajomości oddziaływań dalekiego zasięgu. Aby otrzymać charakterystyki kinematyczne  $\dot{\mathbf{r}}^{kj}$  lub  $\dot{\mathbf{h}}^{kj}$  z równania bilansu sił [równania (18') i (18'')] należałoby rozważyć równoczesne położenia wszystkich węzłów sieci i równoczesne funkcje rozkładu wszystkich makrocząsteczek w całym układzie, tzn. rozpatrzyć system z praktycznie nieskończoną liczbą zmiennych. Dlatego też równania (18') i (18'') nie mogą służyć jako źródło informacji kinematycznej, a prędkości węzłów sieciowych (oraz innych punktów tarcia) należy otrzymać na innej drodze.

Model sieci pokazany na rys. 2 i opisany równaniami (17) i (18) nie wyklucza możliwości reakcji lepkością. Rozproszenie energii może być wywołane tarciami w kontaktach polimer-polimer i polimer-rozpuszczalnik pod warunkiem, że zarówno współczynnik  $K$  jak i różnica prędkości w równaniu (15),  $\Delta v$  są różne od zera.

Nie ma powodu oczekiwać, aby  $K$  zdefiniowane w równaniu (16) było równe zeru dla jakiegokolwiek stężenia polimeru w układzie. Z drugiej strony efekty tarcia zależą niewątpliwie od kinematyki deformacji przez różnicę prędkości. Zauważmy tu, że istnieje ważna różnica w kinematyce deformacji sieci i układów złożonych z izolowanych makrocząsteczek, jak to ma miejsce np. w rozcieńczonych roztworach. Ciągłość dowolnego układu sieciowego wymaga, aby wszystkie łańcuchy sieci deformowały się średnio tak jak bryła układu. Tego rodzaju ograniczenie nie występuje w układach złożonych z izolowanych cząstek. Rozcieńczone roztwory mogą przyjmować nieograniczone deformacje (i przyjmują takie deformacje przy ustalonym płynięciu), czemu towarzyszy mała lub nawet zerowa deformacja poszczególnych elementów strukturalnych, zawieszonych w kontinuum.

Informacje o kinematyce węzłów sieciowych można uzyskać z rozważań termodynamicznych. Można wykazać, że afiniczne przemieszczenie wszystkich węzłów sieciowych, tzn. zależność

$$(22) \quad \mathbf{r}^i = \mathbf{a} \mathbf{r}^i \text{ dla wszystkich } i,$$

minimalizuje jednocześnie energię sprężystą i energię rozproszoną sieci, jeśli spełnione są następujące warunki [19]:

- 1) łańcuchy są gaussowskie,
- 2) nie występuje lepkość wewnętrzna łańcuchów,
- 3) nie występuje splątanie łańcuchów sieci.

Równanie (22) opisuje termodynamicznie najbardziej prawdopodobną kinematykę deformacji dla dowolnego rozkładu węzłów sieciowych wzdłuż makrocząsteczki (tzn. dla dowolnego rozkładu  $k_j$ ) przy dowolnych współczynnikach tarcia  $K$ . Przy uwzględnieniu kinematyki węzłów opisanej równaniem (22) znikają efekty tarcia w kontaktach polimer-polimer i polimer-rozpuszczalnik i sieci zachowują się jak ciała idealnie sprężyste a nie lepkosprężyste. Dlatego też model lepkosprężystości rozważany przez MOONEY'A [11] oraz ILAVSKY'EGO i współpracowników [17] nie może być zrealizowany w rzeczywistości: nie można zdeformować gaussowskiej sieci lub pojedynczego gaussowskiego łańcucha z nieafinicznym przemieszczeniem centrów tarcia. Przemieszczenia nieafiniczne prowadziłyby do wyższych energii sprężystych i do pojawienia się energii rozproszonej, podczas gdy deformacje afiniczne [równanie (22)] odpowiadają minimum energii sprężystej i zerowemu poziomowi rozproszenia. Tak więc, aby wytłumaczyć lepkosprężystość układów sieciowych, należy rozważyć inne modele molekularne i inne mechanizmy rozproszenia energii. Krótki przegląd takich modeli podamy w następnym rozdziale.

#### 4. Molekularne modele skondensowanych układów polimerowych i mechanizmy lepkosprężystości

4.1. Sieci z trwałymi węzłami. Z rozważań termodynamicznych wspomnianych poprzednio [19] wynika, że sieci gaussowskie, zawierające kontakty typu polimer-polimer lecz nieuwzględniające splątania łańcuchów i wewnętrznej lepkości makrocząsteczek, deformują się afinicznie [por. równanie (22)], a zatem zachowują się jak ciała idealnie sprężyste a nie lepkosprężyste. Założenie statystyki gaussowskiej jest równoważne ograniczeniu analizy do małych deformacji. Wyższym deformacjom, związanym z *nie liniową sprężystością*, towarzyszyć może pewne tarcie kontaktowe zależne od lokalnych odchyłeń od afinicznej deformacji.

Innym źródłem lepkosprężystości, możliwym w niskich temperaturach lub przy szybkich deformacjach, jest tzw. *lepkość wewnętrzną* makrocząsteczek. To modelowe pojęcie wprowadzone zostało przez W. KUHNĄ i H. KUHNĄ [20] i związane jest z występowaniem barier potencjalnych, które musi pokonać makrocząsteczka w procesie deformacji. Wynikająca stąd siła  $\mathbf{f}_v$  dla łańcucha o długości konturowej  $l$ , wektorze od końca do końca  $\mathbf{h}$  i względnej prędkości końców  $\dot{\mathbf{h}}$  wynosi

$$(23) \quad \mathbf{f}_v = \gamma[(\dot{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{h})/l^2]\mathbf{h},$$

gdzie  $\gamma$  oznacza stałą materiałową niezależną od ciężaru cząsteczkowego. Można wykazać [19], że występowanie lepkości wewnętrznej w układzie łańcuchów gaussowskich prowadzi do nieafinicznych deformacji łańcucha i wiąże się z pojawieniem efektów lepkosprężystych. Lepkosprężystość związana jest wówczas zarówno z samą lepkością wewnętrzną [równanie (23)] jak i z tarciem kontaktowym łańcuch-łańcuch i łańcuch-rozpuszczalnik [równanie (15)].

Efekty *splątania łańcuchów* omówione będą osobno. Zauważymy tu tylko, że łańcuchy gaussowskie bez lepkości wewnętrznej, lecz połączone zamkniętymi pętlami splątań, deformują się nieafinicznie [19] i prowadzą do niezerowych różnic prędkości odpowiedzialnych za rozproszenie energii w kontaktach łańcuch-łańcuch i łańcuch-rozpuszczalnik.

Sieci trwałe nie mogą ulegać ustalonemu płynięciu i relaksacji naprężeń. Widma czasów opóźnienia wynikające z tarcia kontaktowego i lepkości wewnętrznej, nieliniowej sprężystości lub splątań, będą zależne od rozkładu długości konturowych łańcuchów sieci  $l$ . Dokładna teoria takich układów nie jest obecnie znana. Wydaje się jednak, że model sieci permanentnych (trwałych), uzupełniony omówionymi wyżej mechanizmami, jest właściwy dla układów chemicznie usieciowanych (wulkanizowane kauczuki), które wykazują pewną lepkośćsprężystość.

**4.2. Sieci «czasowe» ze zlokalizowanymi węzłami.** Model sieci «czasowej» z węzłami, które są ściśle zlokalizowane w określonych punktach łańcucha polimeru (grupy chemiczne zdolne do tworzenia mostków poprzecznych), lecz mogą ulegać dysocjacji i odtwarzaniu się, wprowadzony został do literatury przez GREENA i TOBOLSKY'EGO [6], a następnie analizowany przez YAMAMOTO [7] i LODGE'A [8]. Teoria nie uwzględnia tarcia kontaktowego i jedynym mechanizmem rozproszenia energii jest *dysocjacja i odtwarzanie się węzłów*. W konsekwencji tych założeń własności lepkośćsprężyste zależą wyłącznie od kinetyki rozpadu węzłów «czasowych». Teoria ta w najprostszej swej formie (łańcuchy gaussowskie, stała szybkość rozpadu węzłów) jest formalnie równoważna teorii rozcieńczonych roztworów zawierających sprężyste hantle (łańcuchy Kuhna) [21]. Ta równoważność jest jednak przypadkowa i przestaje obowiązywać, gdy uwzględni się bardziej złożoną kinetykę dysocjacji i/lub rozważa się bardziej pełny model makrocząsteczki (lepkość wewnętrzną, sprężystość nieliniowa itp.). Nie należy więc sądzić (jakby to wynikało z wymienionej analogii [21]), że zachowanie się skondensowanych układów polimerów można opisywać w kategoriach teorii rozcieńczonych roztworów. Przeciwnie, ze względu na podstawowe różnice kinematyczne i dynamiczne pomiędzy układami rozcieńczonymi i skondensowanymi, każda racjonalna teoria molekularna układów skondensowanych powinna uwzględniać mechanikę specyficzną dla takich układów, a nie modyfikować wyniki teoretyczne wyprowadzone dla układów rozcieńczonych.

Włączenie tarcia kontaktowego [równanie (15)] do sieci «czasowej» z łańcuchami gaussowskimi nie wnosi nic do rozproszenia energii, ponieważ deformacja węzłów pozostaje afiniczna. Z drugiej strony w sieciach «czasowych» zawierających łańcuchy nie-gaussowskie i/lub lepkość wewnętrzną deformacje są nieafiniczne i tarcie kontaktowe wpływa na efekty lepkośćsprężyste.

Model sieci «czasowych» ze zlokalizowanymi węzłami zaproponowany został początkowo dla układów chemicznie usieciowanych, których energia wiązań poprzecznych jest skończona («chemiczna relaksacja» kauczuków). Słuszność zastosowania tego modelu do podobnych układów wydaje się bezsporna. Późniejsze prace [7, 8] sugerują zastosowanie tego modelu również do stężonych roztworów polimerów i stopów. Model sieci «czasowej» z łańcuchami gaussowskimi i stałym współczynnikiem dysocjacji [8], jak również modele zawierające ogólniejsze założenia [7], mogą wytłumaczyć ustalone płynięcie, relaksację naprężeń i widma czasów relaksacji zależne od rozkładu długości konturowych (ciężaru cząsteczkowego) łańcuchów sieciowych. Jest jednak pewien czynnik, który wyklucza możliwość stosowania tego modelu do stężonych roztworów polimerów i stopów. W teorii «czasowych» sieci ze zlokalizowanymi węzłami nie występuje ciężar cząsteczkowy (lub długości konturowe) *pierwotnych*, nieusieciowanych makrocząsteczek i wszystkie charak-

terystyki fizyczne takich sieci zależą wyłącznie od ciężaru cząsteczkowego *łańcuchów sieciowych*, tzn. odcinków makrocząsteczek pomiędzy sąsiednimi węzłami sieci. Z drugiej strony wiadomo, że takie charakterystyki mechaniczne jak lepkość newtonowska czy czasy relaksacji stężonych roztworów polimerów i stopów są bardzo czułe na zmiany ciężaru cząsteczkowego pierwotnych makrocząsteczek. Przy dużych stężeniach i dostatecznie dużych ciężarach cząsteczkowych zależność ta przyjmuje postać «prawa 3, 4 potęgi». Zasadnicza niemożliwość wyjaśnienia zależności własności reologicznych od ciężaru cząsteczkowego wyklucza stosowanie teorii «sieci czasowych» do roztworów i stopów polimerów i ogranicza stosowalność tego modelu do układów chemicznie usieciowanych jak kauczuki i silnie polarne żele. Istotnie, mechaniczne własności takich układów nie są wrażliwe na ciężar cząsteczkowy pierwotnego (nieusieciowanego) polimeru.

**4.3. Sieci splątania.** Splątanie długich giętkich łańcuchów stanowi szczególny typ oddziaływań, które mogą wyjaśniać sprężystość i lepkosprężystość układów polimerowych. Można tu wyróżnić dwie klasy układów zawierających splątania [22]:

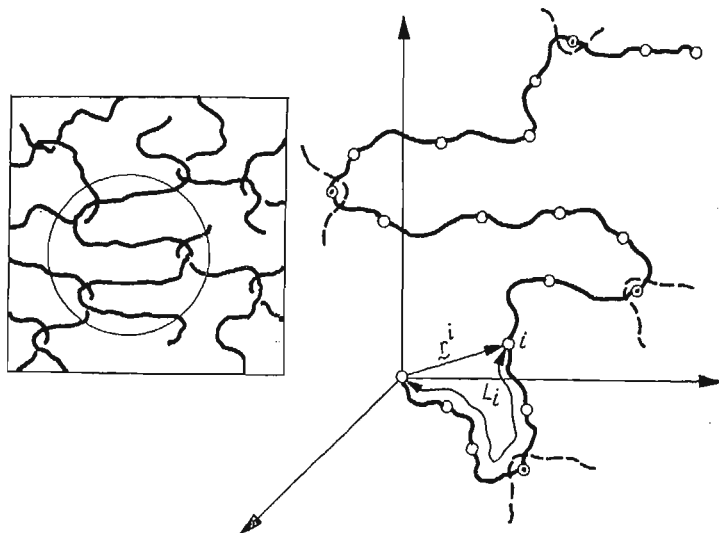
1) układy złożone z wzajemnie przenikających się zamkniętych pętli (sieci typu «kolczugi») lub układy chemicznie usieciowane (sieci permanentne), zawierające pewną ilość splątania unieruchomionych pomiędzy węzłami chemicznymi;

2) układy statystycznie splątane, złożone z liniowych łańcuchów ze swobodnymi końcami, które mogą ulegać splątaniu lub rozplątaniu w procesie deformacji.

Układy pierwszego rodzaju zachowują się jak lepkosprężyste ciała stałe. Deformacja jest ograniczona, a płynięcie niemożliwe. Ponieważ przemieszczenie węzłów w układach zawierających splątania jest nieafiniczne, również dla łańcuchów gaussowskich [19], różnica prędkości  $\Delta v$  w kontaktach polimer-polimer lub polimer-rozpuszczalnik jest różna od zera prowadząc do rozproszenia energii. W dodatku ślizganie się łańcuchów w punktach splątania również wnosi pewien wkład do rozproszenia na zasadzie tarcia. Te wszystkie efekty dają dość złożony obraz zachowania się lepkosprężystego. Wydaje się, że model sieci, zawierający wiązania chemiczne i splątania pomiędzy węzłami trwałymi, stanowi rozsądny model molekularny rzeczywistych wulkanizowanych kauczków. Teoria takich układów nie jest jeszcze kompletna, lecz widać obecnie, że model taki tłumaczy równowagą sprężystość jak również efekty lepkosprężyste przy dowolnie małych deformacjach (tzn. również w gaussowskim zakresie statystyki łańcuchów).

Z drugiej strony wydaje się, że układy splątania, złożone z liniowych makrocząsteczek ze swobodnymi końcami, stanowią dobry model stężonych roztworów polimerów i stopów, zwłaszcza gdy polimer nie zawiera grup silnie polarnych, zdolnych do tworzenia zlokalizowanych węzłów. Procesy kinetyczne splątania i rozplątania, polegające na wślizgiwaniu się swobodnych końców do pętli tworzonych przez inne makrocząsteczki lub wyszlizgiwania się z utworzonych uprzednio splątania, wyjaśniają możliwość nieograniczonej deformacji całego układu, ustalonego płynięcia i relaksacji naprężeń. W odróżnieniu od sieci ze zlokalizowanymi węzłami pierwotna makrocząsteczka biorąca udział w sieci splątania (rys. 3) nie traci swej indywidualności. Dlatego też własności mechaniczne sieci splątania zależą od pierwotnego ciężaru cząsteczkowego rozpuszczonego lub stopionego polimeru, co nie miało miejsca w przypadku modeli sieci ze zlokalizowanymi węzłami.

Należy podkreślić (o czym wspomiano już poprzednio [23, 24]), że kinematyka układów splecionych nie może być adekwatnie opisana w kategoriach położenia węzłów sieci w trójwymiarowej przestrzeni Euklidesowej, tak jak to się robi w teorii izolowanych makrocząsteczek i sieci ze zlokalizowanymi węzłami. Poza położeniami węzłów (lub punktów tarcia) w przestrzeni trójwymiarowej (wektory  $\mathbf{r}^i$ ,  $\mathbf{h}^i = \mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i$ ) należy rozważyć również inne charakterystyki konfiguracyjne, mianowicie *położenia węzłów w przestrzeni makro-*



Rys. 3. Model makrocząsteczki w układzie splecionia

Jasne kółka oznaczają punkty tarcia, kółka z plamką centralną — punkty splecionia

cząsteczki, tzn. odległości od swobodnego końca łańcucha  $L_i$  lub od sąsiedniego węzła  $l_i = L_{i+1} - L_i$ , mierzone wzdłuż konturu łańcucha (rys. 3). Tak więc kompletna charakterystyka punktu splecionia obejmuje cztery, a nie trzy współrzędne  $(x^i, y^i, z^i, L_i)$ . Trzy pierwsze współrzędne  $(x^i, y^i, z^i)$  wystarczały do opisu konfiguracji podłańcucha w rozcieńczonym roztworze lub w sieci ze zlokalizowanymi węzłami. Przestrzeń konfiguracyjna dla całej makrocząsteczki złożonej z  $N$  elementów jest zatem  $4N$ -wymiarowa, a nie  $3N$ -wymiarowa. Podobnie kinematykę układów splecionych opisują cztery składowe prędkości dla każdego punktu ( $\dot{\mathbf{r}}^i$  i  $\dot{L}_i$  lub  $\dot{\mathbf{h}}^i$  i  $\dot{l}_i$ ).

Wielu autorów używa terminu «splecionie» bez szczegółowego zdefiniowania jego znaczenia i bez wyraźnego sformułowania konfiguracji i kinematyki splecionia [12, 15, 25]. W niektórych pracach (np. [25, 26]) «splecionia» traktuje się jako po prostu inne węzły sieci równoważne węzłom zlokalizowanym. Z uwagi na zasadnicze różnice w kinematyce i dynamice splecionia w porównaniu z węzłami zlokalizowanymi podejście takie jest nieprawidłowe, a układy opisane w wyżej wymienionych pracach nie są układami splecionia w sensie przyjętym w naszej teorii dynamicznej [23, 24]. Jakąkolwiek byśmy przyjęli geometryczną definicję splecionia, jego opis teoretyczny nie może pomijać zmiennych długości konturowych ( $L$  lub  $l$ ) i ślizgania się łańcuchów.

Rysunek 3 przedstawia makrocząsteczkę składającą się z  $N+1$  podłańcuchów biorących udział w sieci splecionia. Położenia poszczególnych punktów tarcia zaznaczono otwar-

tymi kółkami, położenia  $m$  węzłów splątania — punktami z centralną plamką. Współrzędne końca  $i$ -tego pod-łańcucha wynoszą  $\mathbf{r}^i$  (odległość od początku układu współrzędnych umieszczonego na końcu łańcucha) oraz  $L_i = il_0$  (długość konturowa makrocząsteczki mierzona od końca łańcucha do  $i$ -tego punktu pod-łańcucha).  $l_0$  oznacza długość konturową jednakową dla wszystkich pod-łańcuchów.

Współzrędnymi dowolnego  $j$ -tego węzła ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) są  $\mathbf{r}^{k_j}$ ,  $L_{k_j} = k_j l_0$ , gdzie  $k_j$  nie muszą być równomiernie rozmieszczone wzdłuż łańcucha.

Szybkość ślizgania się łańcuchów, tzn. zmiana długości konturowych ( $\dot{L}$  lub  $\dot{l}$ ) wpływa na rzeczywistą różnicę prędkości  $\Delta v$  w kontaktach polimer-polimer lub polimer-rozpuszczalnik, a zatem i na efektywną siłę tarcia kontaktowego  $\mathbf{f}_f$ . Pokazano w pracy [18], że średnia różnica prędkości w punkcie tarcia zawartym pomiędzy  $j$ -tym i  $(j+1)$ -ym splątaniem o współrzędnych odpowiednio  $(\mathbf{r}^{k_j}, L_{k_j})$  i  $(\mathbf{r}^{k_{j+1}}, L_{k_{j+1}})$  wynosi:

$$(24) \quad \Delta v(\mathbf{r}^i) = \dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i - (L_{k_{j+1}} - L_{k_j})^{-1} [(\dot{L}_{k_{j+1}} - \dot{L}_{k_j})\mathbf{r}^i + 2\dot{L}_{k_j}(\mathbf{r}^{k_{j+1}} - \mathbf{r}^{k_j})],$$

gdzie

$$k_j < i < k_{j+1},$$

a różnice  $(\mathbf{r}^{k_{j+1}} - \mathbf{r}^{k_j}) = \mathbf{h}^j$  i  $(L_{k_{j+1}} - L_{k_j}) = l_j$  przedstawiają wektory łączące końce i długość konturową  $j$ -tego łańcucha sieci, tzn. odcinka pierwotnej makrocząsteczki, zawartego pomiędzy splątaniem  $j$  i  $j+1$ .

Siła tarcia odpowiadająca równaniu (24):

$$\mathbf{f}_f(\mathbf{r}^i) = -K\Delta v(\mathbf{r}^i)$$

różni się od siły podanej w równaniu (15). Dodatkowe człony w sieci splątania znikają, gdy wszystkie długości konturowe  $L_i$  są stałe w czasie lub gdy szybkości ślizgania się  $\dot{L}_i$  są równe zeru. W obecności ślizgania się łańcuchów ( $\dot{L}_i \neq 0$ ), różnica prędkości nie znika, nawet gdy deformacje są afiniczne, tzn. gdy  $\dot{\mathbf{r}}^i = \mathbf{a}\mathbf{r}^i$ .

Bilans sił dla dowolnego  $i$ -tego centrum tarcia (tzn. punktu nie biorącego udziału w żadnym splątaniu,  $i \neq k_j$ ) wynika, podobnie jak w modelach dyskutowanych poprzednio, z napięć sprężystych dwóch sąsiednich pod-łańcuchów, siły dyfuzyjnej oraz tarcia kontaktowego  $\mathbf{f}_f$ , przy czym ostatni wyraz musi być uzupełniony efektami ślizgania się łańcucha [równanie (24)]. Jednakże w odróżnieniu od układów ze zlokalizowanymi węzłami, z wypadkowego równania nie można obliczyć różnicy prędkości  $\dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i$ , ponieważ nie znamy szybkości ślizgania. Równanie analogiczne do równań (9) lub (17) przybiera dla sieci splątania postać:

$$(25) \quad \dot{\mathbf{r}}^i - \mathbf{a}\mathbf{r}^i = -(3kT/\langle h_0^2 \rangle K)[- \mathbf{r}^{i+1} + 2\mathbf{r}^i - \mathbf{r}^{i-1}] - \\ - (kT/K)(\partial \ln \Psi / \partial \mathbf{r}^i) + (L_{k_{j+1}} - L_{k_j})^{-1} [(\dot{L}_{k_{j+1}} - \dot{L}_{k_j})\mathbf{r}^i + 2\dot{L}_{k_j}(\mathbf{r}^{k_{j+1}} - \mathbf{r}^{k_j})].$$

Bilans sił w punkcie węzłowym ( $i = k_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ ) jest jeszcze bardziej skomplikowany, gdyż w dodatku do napięć elastycznych dwu różnych par pod-łańcuchów splątanych w punkcie  $k_j$  i odpowiednich sił dyfuzyjnych pojawia się również tarcie w punkcie splątania, zależne od szybkości ślizgania się obu makrocząsteczek. Widać stąd, że formalizm z powodzeniem stosowany w teorii rozcieńczonych roztworów i układów ze zlokalizowanymi węzłami jest niewystarczający do opisanie układów splątania. Zastosowanie macierzy ruchliwości Rouse'a-Zimma jest absolutnie wykluczone nawet dla odcinków makrocząsteczek pomiędzy splątaniem ( $i \neq k_j$ ).



Teoria sieci splątań naszkicowana w kilku wcześniejszych artykułach [18, 22-24] wciąż pozostaje w stanie opracowania. Niemniej, zasadnicze cechy układów sieciowych i różnice w ich zachowaniu się w stosunku do sieci ze zlokalizowanymi węzłami są obecnie zupełnie jasne.

### 5. Zagadnienie normalnych współrzędnych

Liniowe przekształcenia zmiennych prowadzące do tzw. «normalnych modów» deformacji łańcucha okazały się bardzo owocną metodą w teorii rozcieńczonych roztworów polimerów [1, 2]. Wykażemy tu, że zastosowanie tego sposobu do układów sieciowych jest ograniczone i w ogólnym wypadku niemożliwe.

Rozpatrzmy najpierw równanie ciągłości. Dla izolowanych makrocząsteczek (rozcieńczone roztwory) lub sieci ze zlokalizowanymi węzłami (permanentnymi lub czasowymi) przestrzeń konfiguracyjna jest  $3N$ -wymiarowa, a charakterystyki konfiguracyjne obejmują położenia  $\mathbf{r}^i$  (lub wektory łączące końce  $\mathbf{h}^i$ )  $N$  pod-łańcuchów (łańcuchów sieciowych). Przez

$$\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N)$$

będziemy rozumieli  $3N$ -wymiarowy wektor opisujący równoczesne położenia wszystkich  $N$  pod-łańcuchów makrocząsteczki. Równanie ciągłości w przestrzeni  $3N$ -wymiarowej można wówczas zapisać w postaci:

$$(26) \quad \partial\Psi/\partial t + \partial^T(\Psi\dot{\mathbf{h}})/\partial\mathbf{h} = \begin{cases} 0 & \text{rozcieńczone roztwory,} \\ & \text{sieci permanentne} \\ (26') \quad \dot{\Psi}_{\text{kin}}(\Psi, \dot{\mathbf{h}}, \mathbf{h}) & \text{sieci «czasowe»;} \end{cases}$$

$\Psi(\mathbf{h}, t)$  oznacza funkcję rozkładu gęstości w  $3N$ -wymiarowej przestrzeni, a  $\dot{\Psi}_{\text{kin}}$  jest wyrazem kinetycznym, tzn. szybkością netto tworzenia się makrocząsteczek o danej konfiguracji. Dla rozcieńczonych roztworów i sieci permanentnych, w których żadne węzły nie ulegają dysocjacji i nie są tworzone,  $\dot{\Psi}_{\text{kin}}$  jest równe zeru; dla sieci «czasowych» źródło tworzenia się i rozpadu cząsteczek należy wziąć pod uwagę w rozważaniach ciągłości.

Dla układów splątań charakterystyki konfiguracyjne obejmują wektory łańcuchów sieciowych  $\mathbf{h}$  oraz długości konturowe  $\mathbf{l}$ :

$$\mathbf{h} = (\mathbf{h}^1, \mathbf{h}^2, \dots, \mathbf{h}^N),$$

$$\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l^N),$$

a charakterystyki kinematyczne — prędkości węzłów  $\dot{\mathbf{h}}$  i szybkości ślizgania się łańcuchów  $\mathbf{l}$ . Konsekwentnie, zależna od czasu funkcja rozkładu  $\Psi^*(\mathbf{h}, \mathbf{l}, t)$  będzie zdefiniowana jako gęstość prawdopodobieństwa w przestrzeni  $4N$ -wymiarowej, a równanie ciągłości przybierze postać:

$$(27) \quad \partial\Psi^*/\partial t + \partial^T(\Psi^*\dot{\mathbf{h}})/\partial\mathbf{h} + \partial^T(\Psi^*\dot{\mathbf{l}})/\partial\mathbf{l} = \dot{\Psi}_{\text{kin}}^*(\Psi^*, \dot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{l}}, \mathbf{h}, \mathbf{l}).$$

W przypadku rozcieńczonych roztworów istnieje liniowe przekształcenie położeń  $\mathbf{h}$  na prędkości  $\dot{\mathbf{h}}$ . Z równania (9') otrzymujemy

$$(28) \quad \dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{a}\mathbf{h}^i - B A_{ij}(\partial\mu/\partial\mathbf{h}^j) = \mathbf{a}\mathbf{h}^i - B k T A_{ij}(3\mathbf{h}^j/\langle h_0^2 \rangle) - \partial \ln \Psi / \partial \mathbf{h}^j.$$

Korzystając z  $\dot{\mathbf{h}}$  z równania (28) i stosując ortogonalne przekształcenie współrzędnych  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{Q}\boldsymbol{\eta}$ , które diagonalizuje macierz  $\mathbf{A}$ , mianowicie

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{M}_{\text{diag}},$$

równanie (26) redukuje się do postaci «normalnej»:

$$(29) \quad \partial \mathcal{P} / \partial t + \partial^T [\mathcal{P} \mathbf{a} \boldsymbol{\eta} - (3kTB / \langle h_0^2 \rangle) \mathcal{P} \mathbf{M} \boldsymbol{\eta} - kTB \mathbf{M} (\partial \mathcal{P} / \partial \boldsymbol{\eta})] / \partial \boldsymbol{\eta} = 0.$$

Zbadamy możliwość zastosowania podobnej transformacji do równań (26') i (27). Pierwsza trudność wynika z wyrazów stojących na prawej stronie równania,  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}$  lub  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}^*$ . Ogólnie rzecz biorąc, wyraz kinetyczny jest funkcjonalem zależnym od samej funkcji rozkładu ( $\mathcal{P}$  lub  $\mathcal{P}^*$ ) oraz charakterystyk konfiguracyjnych i kinematycznych ( $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\dot{\mathbf{h}}$ ,  $\dot{\mathbf{I}}$ ). Bez szczegółowego określenia tego wyrazu trudno powiedzieć coś o jego niezmienniczości względem zmiany współrzędnych. Pewne zagadnienia dotyczące wyrazu kinetycznego omówimy w następnym rozdziale. Załóżmy obecnie, że  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}$  nie zmienia się przy ortogonalnej transformacji współrzędnych i założmy, że mamy do czynienia z siecią «czasową» o węzłach zlokalizowanych [równanie (26')]. W zakresie gaussowskiej statystyki i przy pominięciu lepkości wewnętrznej prędkość węzłów  $\dot{\mathbf{h}}$  jest afiniczna [19]:

$$\dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{a} \mathbf{h}^i, \text{ dla wszystkich } i,$$

a równanie (26') redukuje się automatycznie do postaci «normalnej»

$$(30) \quad \partial \mathcal{P} / \partial t + \partial^T (\mathcal{P} \mathbf{a} \mathbf{h}) / \partial \mathbf{h} = \dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}.$$

Tak więc równanie (30) nie określa żadnego widma czasów relaksacji. Jedynym mechanizmem rozproszenia energii jest powstawanie i rozpad węzłów (proces kinetyczny,  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}$ ), a czasy relaksacji zależą od rozkładu długości konturowej łańcuchów sieciowych.

Przejdźmy obecnie do sieci splątanych. Pomijając problem wyrazu kinetycznego  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}^*$  i jego niezmienniczości względem przekształcenia współrzędnych, założymy, że obie charakterystyki kinematyczne  $\dot{\mathbf{h}}$  i  $\dot{\mathbf{I}}$  można przedstawić jako liniowe transformacje współrzędnych  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{I}$ :

$$(31) \quad \dot{\mathbf{h}}^i = \mathbf{a} \mathbf{h}^i + C_{ij} \mathbf{h}^j, \quad \dot{I}_i = D^{ij} I_j.$$

Zakładając kinematykę opisaną równaniem (31), równanie ciągłości [równanie (27)] przybiera postać:

$$(32) \quad \partial \mathcal{P}^* / \partial t + \partial^T (\mathcal{P}^* \mathbf{a} \mathbf{h} + \mathcal{P}^* \mathbf{C} \mathbf{h}) / \partial \mathbf{h} + \partial^T (\mathcal{P}^* \mathbf{D} \mathbf{I}) / \partial \mathbf{I} = \dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}^*.$$

Ortogonalne przekształcenia współrzędnych  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{I}$ :

$$\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{Q} \boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{S} \boldsymbol{\lambda},$$

takie, które diagonalizują macierze  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$ , mianowicie

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{Q} = \mathbf{M}_{\text{diag}}, \quad \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} = \mathbf{N}_{\text{diag}},$$

doprowadzają równanie ciągłości do postaci «normalnej»:

$$(33) \quad \partial \mathcal{P}^* / \partial t + \partial^T [\mathcal{P}^* \mathbf{a} \boldsymbol{\eta} + \mathcal{P}^* \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}] / \partial \boldsymbol{\eta} + \partial^T [\mathcal{P}^* \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda}] / \partial \boldsymbol{\lambda} = \dot{\mathcal{P}}_{\text{kin}}^*.$$

Powyższa procedura jest efektywna, a normalizacja współrzędnych możliwa, gdy odpowiednie macierze ( $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ) są symetryczne i można je sprowadzić do postaci diagonalnej za pomocą przekształceń ortogonalnych ( $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{S}$ ). W rzeczywistości kinematyka sieci splątanych jest bardziej złożona; jak widać z równania (24) prędkość punktów tarcia  $\dot{\mathbf{r}}^i$  zależy nie tylko od położenia  $\mathbf{r}^i$ , lecz również od szybkości ślizgania się  $\dot{L}_j$  i długości konturowych  $L_j$

i nie można jej zredukować do liniowych zależności złożonych w równaniach (31). To samo można powiedzieć o innej charakterystyce kinematycznej,  $\dot{\mathbf{I}}$ . W konsekwencji tego nie można ogólnie wykazać, że liniowa transformacja współrzędnych pozwoli na sprawdzenie równania ciągłości do postaci «normalnej». Nie jest jednak wykluczone, że pewne szczególne lub asymptotyczne przypadki układów splątanych będą dopuszczały możliwość zastosowania metody współrzędnych normalnych.

### 6. Teoria molekularna i liniowość własności lepkosprężystych

Dobrze wiadomo, że ściśle liniowe własności lepkosprężyste układów polimerowych (stałe widma czasów relaksacji, lepkość newtonowska, itp.) ograniczają się do małych deformacji i/lub szybkości deformacji. Przy dużych deformacjach pojawiają się własności nieliniowe (lepkość nienewtonowska, naprężenia normalne w przepływach ścinających). Z molekularnego punktu widzenia można wyróżnić dwa różne źródła nieliniowej lepkosprężystości.

Pierwsze źródło związane jest z nieliniową kinematyką deformacji, która daje prędkości węzłów  $\dot{\mathbf{h}}$  i/lub szybkości ślizgania się  $\dot{\mathbf{I}}$  jako nieliniowe funkcje zmiennych konfiguracyjnych  $\mathbf{h}$  i  $\mathbf{l}$ . Tego rodzaju nieliniowość ma miejsce, gdy uwzględnia się np. niegaussowską statystykę konformacji, lepkość wewnętrzną łańcuchów polimeru lub tarcie kontaktowe w układzie splątanych łańcuchów [równanie (25)]. Nieliniowa kinematyka nie wpływa jednak na liniowość zależności czasowych i widma czasów relaksacji nie tracą sensu fizycznego.

Drugie źródło nieliniowego zachowania się związane jest z typem równania ciągłości [równania (26), (26') i (27)]. Jeśli równanie ciągłości, które wyznacza funkcję rozkładu  $\Psi$  lub  $\Psi^*$ , i w konsekwencji również wszystkie zależne od konfiguracji własności fizyczne, jest liniowe względem funkcji  $\Psi$  lub  $\Psi^*$ , pierwszego rzędu względem czasu oraz rozdzielne na funkcję czasu i funkcję zmiennych konfiguracyjnych, rozwiązanie można przedstawić jako szereg funkcji wykładniczych:

$$(34) \quad \Psi^*(\mathbf{h}, \mathbf{l}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_i(\mathbf{h}, \mathbf{l}) \exp(-\lambda_i t),$$

gdzie wartości własne  $\lambda_i$  wyznaczają widma czasów relaksacji.

Równanie (26) dla rozcieńczonych roztworów i sieci permanentnych jest liniowym równaniem parabolicznym, które spełnia wszystkie powyższe warunki. Widma czasów relaksacji, tzn. wartości własne w układzie znajdującym się w spoczynku ( $\mathbf{a} = 0$ ), wynikają bezpośrednio z normalizacji współrzędnych.

W układach z nieznikającym wyrazem kinetycznym sytuacja jest bardziej skomplikowana. Powstawanie lub dysocjacja (rozplątywanie) węzłów sieci jest procesem kooperatywnym, obejmującym dwie różne makrocząsteczki i cztery łańcuchy sieci. Zmiany jakie wnosi do układu utworzenie lub dysocjacja jednego wiązania dotyczą równocześnie dwu makrocząsteczek i zależą od konfiguracji dwu różnych makrocząsteczek. W wyniku tego wyraz kinetyczny zawiera spłoty całkowe funkcji rozkładu  $\Psi$  lub  $\Psi^*$  [23]:

$$(35) \quad \dot{\Psi}_{k1n}(\mathbf{h}, \mathbf{l}) = \sum_{k=1}^q \int \int F_k(\mathbf{h}, \mathbf{l}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{l}}) \Psi(\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{l}}) \Psi(\mathbf{h} + \tilde{\mathbf{h}}, \mathbf{l} + \tilde{\mathbf{l}}) d\tilde{\mathbf{h}} d\tilde{\mathbf{l}},$$

gdzie  $F_k$  oznacza czynniki szybkości, tzn. zależne od konfiguracji częstości tworzenia się lub dysocjacji węzłów, a sumowanie rozciąga się na  $q$  możliwych w danym układzie procesów tworzenia i dysocjacji. Kooperatywna natura procesów rozpadu i tworzenia się węzłów w sieciach została zauważona wiele lat temu przez SCOTTA i STEINA [27], którzy nie rozwiązywali równania ciągłości zawierającego spłaty całkowe, lecz założyli określoną postać funkcji rozkładu i wyliczyli czynnik kinetyczny drogą prostego całkowania. Z drugiej strony YAMAMOTO [7] i LODGE [8] w swojej teorii «czasowych» sieci z węzłami zlokalizowanymi przyjęli w sposób dowolny, że czynnik kinetyczny  $\dot{\Psi}_{kin}$  ma postać

$$(36) \quad \dot{\Psi}_{kin}(\mathbf{h}, \mathbf{l}) = G(\mathbf{h}, \mathbf{l}) - \Psi(\mathbf{h}, \mathbf{l}) \cdot \beta(\mathbf{h}, \mathbf{l}),$$

pomijając przy tym kooperatywną naturę procesów kinetycznych. Nawet przy założeniu tak prostej formy wyrazu kinetycznego równanie ciągłości (równanie 26') nie spełnia warunków liniowości i jego rozwiązanie nie może być przedstawione szeregiem funkcji wykładniczych jak w równaniu (34). Jedynie gdy współczynnik  $\beta$  reprezentujący szybkość dysocjacji przyjmie się jako stała, drugi moment funkcji rozkładu (średni iloczyn tensorowy  $\langle \mathbf{h}\mathbf{h}^T \rangle$  charakteryzujący tensor naprężeń w układzie) wykazuje liniową zależność czasową i widmo czasów relaksacji sprowadza się do pojedynczej wartości  $\tau = 1/\beta$  (por. [21]).

Jeżeli przyjąć, że prawdopodobieństwo dysocjacji  $\beta$  z prostego równania (36) jest zależne od konfiguracji, albo jeśli założyć kooperatywny charakter procesów kinetycznych [równanie (35)], równania ciągłości (26') i (27) stają się nieliniowe względem funkcji rozkładu. YAMAMOTO [7] uzyskał rozwiązanie takiego równania dla sieci «czasowych» otrzymując nieliniowe zależności czasowe na funkcję rozkładu  $\Psi$ .

Pojęcie widm czasów relaksacji pochodzi z liniowej teorii lepkosprężystości i jest ściśle zdefiniowane jedynie dla układów liniowych. Z dyskusji powyższych przykładów widać, że teorie molekularne niekoniecznie dają liniowe zależności lepkosprężyste i że dla pewnych układów molekularnych, jak sieci splątań, sieci «czasowe» ze zmienną szybkością dysocjacji itp. w ogóle nie można takich widm określić.

## 7. Wnioski

W pracy wykazano, że układy sieciowe powszechnie uważane za właściwe modele molekularne skondensowanych układów polimerowych (stężonych roztworów, stopów, polimerów w stanie stałym) różnią się kinematyką i dynamiką deformacji od rozcieńczonych roztworów złożonych z izolowanych makrocząstek. Te zasadnicze różnice powodują, że nie można skonstruować konsekwentnej teorii molekularnej skondensowanych układów w postaci rozszerzenia teorii rozcieńczonych roztworów. Rozszerzenia znanych teorii Rouse'a-Zimma oparte na modyfikacji tzw. «macierzy ruchliwości» [14–16] są błędne dla wszelkich układów sieciowych. Macierze ruchliwości, tzn. liniowe transformacje położeń na prędkości są dla układów sieciowych niewyznaczalne, ponieważ równanie bilansu sił [równania (18') i (18'')] zawiera charakterystyki, których nie można wyrazić przez konfigurację pojedynczej makrocząsteczki.

Z rozważań termodynamicznych, które będą przedmiotem osobnej publikacji [19] wynika, że najbardziej prawdopodobne przemieszczenia poszczególnych punktów makro-

cząstek w układach sieciowych ze zlokalizowanymi węzłami są afiniczne, jeśli łańcuchy opisuje się statystyką Gaussa (w zakresie małych deformacji) i gdy lepkość wewnętrzną łańcuchów można pominąć. W konsekwencji, rozproszenie energii na skutek tarcia w kontaktach polimer-polimer i polimer-rozpuszczalnik znika. W sieciach «czasowych» z węzłami zdolnymi do dysocjacji i odtwarzania się rozproszenie energii może być spowodowane procesami kinetycznymi, natomiast w sieciach trwałych w gaussowskim zakresie deformacji nie występują efekty lepkosprężyste. Występującej w rzeczywistości pewnej lepko-sprężystości w trwałych sieciach wulkanizowanych kauczuków nie można zatem tłumaczyć mechanizmami dyfuzyjnymi jak to robiono w niektórych pracach [11, 17]. Należałoby natomiast szukać innych mechanizmów molekularnych, odpowiedzialnych za rozproszenie energii w takich układach. Jednym z takich mechanizmów jest ślizganie się łańcuchów w splątaniach.

Kinematyki sieci splątań nie można opisać w kategoriach samych tylko położeń i prędkości węzłów. Konieczne jest wprowadzenie dodatkowego zbioru zmiennych konfiguracyjnych związanych z odległościami splątań mierzonymi wzdłuż konturów makrocząstek (*długości konturowe*). Odpowiednie charakterystyki kinematyczne nazwalibyśmy *szybkosciami ślizgania się* łańcuchów. Teorie sieci splątań, które pomijają ślizganie się łańcuchów, nie opisują w rzeczywistości układów splątań.

Spośród dyskutowanych w tej pracy modeli molekularnych skondensowanych układów polimerowych (sieci permanentne, sieci «czasowe» ze zlokalizowanymi węzłami, sieci splątań) tylko ostatni model może wytłumaczyć silną zależność własności mechanicznych od ciężaru cząsteczkowego pierwotnych, nieusieciowanych makrocząstek. Pokazano, że teoria sieci splątań wykazuje zasadnicze różnice w stosunku do teorii rozcieńczonych roztworów lub sieci z węzłami zlokalizowanymi i przewiduje w ogólnym przypadku nieliniowe własności lepkosprężyste.

#### Literatura cytowana w tekście

1. P. E. ROUSE, J. Chem. Phys., **21**, (1953), 1272.
2. B. H. ZIMM, *ibid.*, **24**, (1956), 269.
3. E. GUTH i H. MARK, Monatsh. Chem., **65**, (1934), 93.
4. W. KUHN, Kolloid Z., **68**, (1934), 2, *ibid.*, **76**, (1936), 258.
5. P. J. FLORY i J. REHNER, J. Chem. Phys., **11**, (1943), 512.
6. M. S. GREEN i A. V. TOBOLSKY, *ibid.*, **14**, (1946), 80.
7. M. YAMAMOTO, J. Phys. Soc. Japan, **11**, (1956), 413; *ibid.*, **12**, (1957), 1148; *ibid.*, **13**, (1958), 1200.
8. A. S. LODGE, Trans. Faraday Soc., **52**, (1956), 120.
9. J. D. FERRY, R. E. LANDEL i M. L. WILLIAMS, J. Appl. Phys., **26**, (1955), 359 por. również: J. D. FERRY, *Viscoelasticity of Polymers*, John Wiley, New York 1970 (wyd. polskie, WNT, 1965).
10. F. BUECHE, J. Chem. Phys., **20**, (1952), 1959.
11. M. MOONEY, J. Polymer Sci., **34**, (1959), 599.
12. F. BUECHE, J. Chem. Phys., **25**, (1956), 599.
13. F. BUECHE, *ibid.*, **22**, (1954), 1570.
14. J. A. DUISER i A. J. STAVERMAN, w «Physics of Non-Crystalline Solids», s. 376, North Holland Publ. Co., Amsterdam 1965; J. A. DUISER, *Thesis*, Leiden 1965.
15. A. J. CHÖMPFF, *Thesis*, Delft 1965; A. J. CHÖMPFF i J. A. DUISER, J. Chem. Phys., **45**, (1966), 1505.
16. H. C. BOOLJ i A. J. STAVERMAN, IUPAC Symposium on Macromolecules, Leiden 1970, Preprints, s. 255.

17. M. ILAVSKÝ, J. HASA i I. HAVLIČEK, *J. Polymer Sci., A-2*, **10**, (1972), 1775.
18. R. TAKSERMAN-KROZER i A. ZIABICKI, *ibid.*, A-2, **8**, (1970), 321.
19. A. ZIABICKI i T. ZAMBRZYCKI, (w przygotowaniu)
20. W. KUHN i H. KUHN, *Helv. Chim. Acta*, **26**, (1943); 1394; *ibid.*, **28**, (1945), 1533.
21. A. S. LODGE, *Proc. V-th Int. Congress on Rheology*, Kyoto 1968. University of Tokyo Press, 1970.
22. A. ZIABICKI, *Macromolecules*, (zgi. do druku).
23. A. ZIABICKI, *Mech. Teoret. Stos.*, **9**, (1971), 401.
24. A. ZIABICKI i R. TAKSERMAN-KROZER, *J. Polymer Sci., A-2*, **7**, (1969), 2005.
25. G. MARUCCI, G. TITOMANLIO i G. C. SARTI, *VI-th Int. Congress on Rheology*, Lyon 1972.
26. A. S. LODGE, *Rheol. Acta.*, **7**, (1968), 379.
27. K. W. SCOTT i R. S. STEIN, *J. Chem. Phys.*, **21**, (1953), 1281.

## Р е з ю м е

МОЛЕКУЛЯРНЫЕ МОДЕЛИ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПОЛИМЕРОВ.  
КРИТИКА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕОРИЙ РАЗБАВЛЕННЫХ РАСТВОРОВ  
НА СЕТОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

Проведён анализ молекулярных теорий конденсированных систем полимеров (концентрированные растворы, расплавы, твёрдые полимеры). Показано, что кинематика и динамика макромолекул в сеточных системах, рассматриваемых в литературе как наиболее правильные модели конденсированных систем, совершенно отличаются от соответствующих характеристик макромолекул в разбавленных растворах. Поэтому молекулярные теории конденсированных систем нельзя получить путём простого распространения на них теории разбавленных растворов, например, теории Рауза или Цимма. Матрицы подвижности в сеточных системах, определяющие вязкоупругое поведение разбавленных растворов полимеров, неопределимы, поэтому сеточные теории, основанные на модификациях таких матриц, неправильны в самых своих началах. Показано также, что вязкоупругие свойства сеток с локализованными узлами (перманентные или „временные“ сетки) не могут быть истолкованы при помощи механизмов диффузии или контактного трения, так как перемещение всех структурных элементов такой системы является в приближении аффинным, и разница скоростей, отвечающая за контактное трение, стремится к нулю. Обсуждаются некоторые другие молекулярные механизмы, которые могли бы объяснить вязкоупругое поведение сеток. Доказано, что теория систем с переплетениями не может быть сформулирована в категориях положений и скоростей узлов, как это делается в случаях изолированных макромолекул и сеток с локализованными узлами. Полная характеристика конфигураций в системах с переплетениями нуждается в определении, наряду с расположениями узлов в евклидовом пространстве, расстояний, измеряемых вдоль контура макромолекулы. Исследованы следствия такой формулировки с точки зрения вязкоупругих свойств сеток с переплетениями.

## S u m m a r y

MOLECULAR MODELS OF CONDENSED POLYMER SYSTEMS. CRITICISM OF THE  
EXTENSIONS OF DILUTE SOLUTION THEORY ONTO NETWORK SYSTEMS

Molecular theories of condensed polymer systems (concentrated solutions, melts, bulk polymers) have been analyzed and discussed. It has been shown that kinematics and dynamics of macromolecules in network systems (commonly recognized as appropriate models of condensed systems) are entirely different from those for isolated macromolecules in dilute solutions. Consequently, molecular theories of condensed systems can not be obtained by simple extension of dilute solution theory (e.g. the theory of Rouse or Zimm). In network systems the mobility matrices (which control viscoelastic behavior of dilute solutions) are indeterminate and network theories based on the modification of mobility matrices are incorrect in

principle. It has been shown that viscoelastic behavior of networks with localized junctions (temporary or permanent) cannot be explained by diffusion or contact friction mechanisms because the displacement of all structural elements in the systems is, in the first approximation, affine, and the corresponding velocity difference in polymer-polymer or polymer-solvent contacts is zero. Several other mechanisms which can be responsible for viscoelasticity of networks have been discussed. It has been shown that the theory of entanglement systems can not be formulated in terms of junction positions and junction velocities alone as it had been done for isolated macromolecules and networks with localized junctions. Complete characterization of configurations in entangled systems requires (in addition to junction positions in Euclidean space) the introduction of additional variables — distances measured along the contour of macromolecular chains. Some consequences of such a formulation for viscoelastic behavior of entanglement networks have been discussed.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 sierpnia 1973 r.*

---

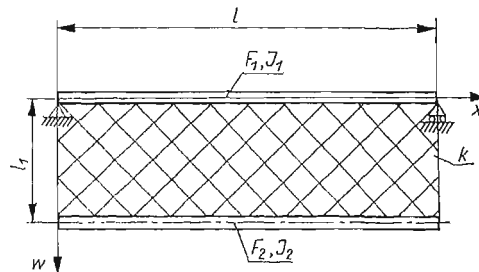




DRGANIA POPRZECZNE UKŁADU DWÓCH BELEK POŁĄCZONYCH  
ELEMENTEM SPRĘŻYSTYM

ZBIGNIEW ONISZCZUK (KRAKÓW)

W pracy rozpatrzono poprzeczne drgania układu złożonego z dwóch belek pryzmatycznych połączonych elementem sprężystym. Górna belka oparta jest końcami na sztywnych podporach, dolna zaś jest podwieszona na pierwszej za pomocą sprężystego elementu na całej długości belki (rys. 1).



Rys. 1. Model układu drgającego

W przybliżeniu model ten odpowiada niektórym typom suwnic względnie mostów, ponieważ w takich konstrukcjach dość rzadko spotyka się przypadek, aby dźwigary nośne miały stałe przekroje poprzeczne, a takie zostały przyjęte w modelu. Kratowe (lub inne) połączenie dźwigarów zostało zastąpione liniowym elementem sprężystym.

Dla tak zbudowanego modelu rozpatrzimy drgania swobodne belek oraz drgania wymuszone, wywołane harmonicznymi zmiennymi siłami skupionymi, przemieszczającymi się ze stałą prędkością po belce dolnej.

Pracę należy traktować jako wstępny krok do szerszej analizy postawionego problemu. Analiza ta będzie przeprowadzona dla różnych sposobów podparcia belki górnej i różnych rodzajów obciążeń.

### 1. Drgania swobodne

Przyjmujemy następujące założenia: a) układ nie jest tłumiony, b) belki mają stałe przekroje poprzeczne i stałe momenty bezwładności.

Oznaczenia:

- $l$  całkowita długość belki,  
 $F_1, F_2, J_1, J_2$  przekroje poprzeczne i momenty bezwładności belek,  
 $w_1 = w_1(x, t)$  przemieszczenie przekrojów górnej belki,  
 $w_2 = w_2(x, t)$  przemieszczenie przekrojów dolnej belki,  
 $x$  współrzędna określająca położenie danego przekroju,  
 $t$  czas,  
 $k$  współczynnik sprężystości elementu sprężystego,  
 $\rho$  gęstość materiału belek,  
 $E$  moduł Younga,  
 $l_1$  rozstaw belek.

Równania ruchu układu (rys. 1) mają następującą postać:

$$(1) \quad EJ_1 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \rho F_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - k(w_2 - w_1) = 0,$$

$$(2) \quad EJ_2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \rho F_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + k(w_2 - w_1) = 0.$$

Warunki brzegowe:

$$(3) \quad \begin{aligned} w_1(0, t) = w_1(l, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \Big|_{(0, t)} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \Big|_{(l, t)} = 0, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \Big|_{(0, t)} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \Big|_{(l, t)} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \Big|_{(0, t)} = \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} \Big|_{(l, t)} = 0. \end{aligned}$$

Warunki początkowe:

$$(4) \quad \begin{aligned} w_1(x, 0) = f_1(x), \quad w_2(x, 0) = f_2(x), \\ \frac{\partial w_1}{\partial t} \Big|_{(x, 0)} = g_1(x), \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} \Big|_{(x, 0)} = g_2(x). \end{aligned}$$

Układ równań (1), (2) sprowadzamy do postaci:

$$(5) \quad a_1^2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - b_1(w_2 - w_1) = 0,$$

$$(6) \quad a_2^2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + b_2(w_2 - w_1) = 0,$$

gdzie

$$(7) \quad a_i^2 = \frac{EJ_i}{\rho F_i}, \quad b_i = \frac{k}{\rho F_i}, \quad i = 1, 2.$$

Układ równań (5), (6) rozwiązujemy metodą Fouriera, przewidując rozwiązania w postaci:

$$(8) \quad w_i(x, t) = X_i(x)T(t), \quad i = 1, 2.$$

Podstawiając (8) do (5), (6) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{X_1^{(IV)}}{X_1} + \frac{b_1}{a_1^2} - \frac{b_1 X_2}{a_1^2 X_1} &= -\frac{T''}{a_1^2 T} = \lambda_1^4, \\ \frac{X_2^{(IV)}}{X_2} + \frac{b_2}{a_2^2} - \frac{b_2 X_1}{a_2^2 X_2} &= -\frac{T''}{a_2^2 T} = \lambda_2^4,\end{aligned}$$

gdzie  $\lambda_1^4, \lambda_2^4$  oznaczają stałe rozdzielania zmiennych.

Ostatecznie po rozdzielaniu równań mamy

$$(9) \quad T'' + a_1^2 \lambda_1^4 T = 0, \quad T'' + a_2^2 \lambda_2^4 T = 0$$

oraz

$$(10) \quad \begin{aligned}a_1^2 X_1^{(IV)} + (b_1 - a_1^2 \lambda_1^4) X_1 - b_1 X_2 &= 0, \\ a_2^2 X_2^{(IV)} + (b_2 - a_2^2 \lambda_2^4) X_2 - b_2 X_1 &= 0.\end{aligned}$$

Funkcja czasu (całka ogólna równań (9)) ma postać

$$(11) \quad T = C \cos \omega t + D \sin \omega t,$$

gdzie  $\omega = a_1 \lambda_1^2 = a_2 \lambda_2^2$  oznacza częstość drgań własnych układu.

Rozwiązania układu równań (10) poszukujemy w postaci

$$(12) \quad X_1 = A_1 e^{rx}, \quad X_2 = A_2 e^{rx}.$$

Po podstawieniu (12) do (10) i przyrównaniu do zera wyznacznika zbudowanego ze współczynników występujących przy stałych  $A_1, A_2$  otrzymujemy równanie

$$a_1^2 a_2^2 r^8 + [a_1^2 (b_2 - \omega^2) + a_2^2 (b_1 - \omega^2)] r^4 + (b_1 - \omega^2)(b_2 - \omega^2) - b_1 b_2 = 0,$$

które z uwagi na oznaczenia (7) przyjmuje postać

$$(13) \quad E^2 J_1 J_2 r^8 + [E J_1 (k - \omega^2 \rho F_2) + E J_2 (k - \omega^2 \rho F_1)] r^4 + (k - \omega^2 \rho F_1)(k - \omega^2 \rho F_2) - k^2 = 0.$$

Jest to równanie kwadratowe względem  $r^4$ .

A zatem

$$(14) \quad \begin{aligned}r_{1,2}^4 &= -\frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{E} \left( k \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) - \omega^2 \rho \left( \frac{F_1}{J_1} + \frac{F_2}{J_2} \right) \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. \mp \sqrt{\left[ \frac{1}{E} \left( k \left( \frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) - \omega^2 \rho \left( \frac{F_1}{J_1} + \frac{F_2}{J_2} \right) \right) \right]^2 - 4 \frac{\omega^2 \rho}{E^2 J_1 J_2} [\omega^2 \rho F_1 F_2 - k(F_1 + F_2)]} \right\}.\end{aligned}$$

Obydwa pierwiastki  $r_1^4$  i  $r_2^4$  są dodatnie, jeżeli zachodzi nierówność

$$(15) \quad \frac{\omega^2 \rho F_1 F_2}{F_1 + F_2} > k.$$

Warunek (15) eliminuje z rozważań mało interesujący przypadek drgań belek jako ciał sztywnych, połączonych elementem sprężystym, oraz przypadek, kiedy drgania belek nie są w ogóle możliwe.

Oznaczmy

$$r_1^4 = k_1^4, \quad r_2^4 = k_2^4.$$

Równanie charakterystyczne (13) ma osiem pierwiastków:

$$(16) \quad +k_1; -k_1; +ik_1; -ik_1; +k_2; -k_2; +ik_2; -ik_2,$$

gdzie

$$i = \sqrt{-1}.$$

Całkami ogólnymi równań (10) są funkcje:

$$(17) \quad \begin{aligned} X_1 &= C_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + C_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + C_3 \sin(k_1 x) + C_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + C_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + C_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + C_7 \sin(k_2 x) + C_8 \cos(k_2 x), \\ X_2 &= D_1 \operatorname{sh}(k_1 x) + D_2 \operatorname{ch}(k_1 x) + D_3 \sin(k_1 x) + D_4 \cos(k_1 x) + \\ &\quad + D_5 \operatorname{sh}(k_2 x) + D_6 \operatorname{ch}(k_2 x) + D_7 \sin(k_2 x) + D_8 \cos(k_2 x), \end{aligned}$$

gdzie stałe  $C_i, D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) są związane zależnościami wynikającymi z równań (10):

$$(18) \quad \begin{aligned} \frac{D_i}{C_i} &= \frac{EJ_1 k_1^4 + (k - \omega^2 \rho F_1)}{k} = \frac{k}{EJ_2 k_1^4 + (k - \omega^2 \rho F_2)} = \alpha, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \frac{D_j}{C_j} &= \frac{EJ_1 k_2^4 + (k - \omega^2 \rho F_1)}{k} = \frac{k}{EJ_2 k_2^4 + (k - \omega^2 \rho F_2)} = \beta, \quad j = 5, \dots, 8; \end{aligned}$$

$\alpha$  i  $\beta$  są liczbami rzeczywistymi. Mamy więc tylko osiem dowolnych stałych rzeczywistych. Stałe wyznaczamy wykorzystując warunki brzegowe (3). Otrzymujemy jednorodny układ ośmiu równań algebraicznych:

$$(19) \quad \begin{aligned} C_2 + C_4 + C_6 + C_8 &= 0, \\ k_1^2 C_2 - k_1^2 C_4 + k_2^2 C_6 - k_2^2 C_8 &= 0, \\ \alpha k_1^2 C_2 - \alpha k_1^2 C_4 + \beta k_2^2 C_6 - \beta k_2^2 C_8 &= 0, \\ \alpha k_1^3 C_1 - \alpha k_1^3 C_3 + \beta k_2^3 C_5 - \beta k_2^3 C_7 &= 0, \\ C_1 \operatorname{sh} z_1 + C_2 \operatorname{ch} z_1 + C_3 \sin z_1 + C_4 \cos z_1 + \\ + C_5 \operatorname{sh} z_2 + C_6 \operatorname{ch} z_2 + C_7 \sin z_2 + C_8 \cos z_2 &= 0, \\ k_1^2 C_1 \operatorname{sh} z_1 + k_1^2 C_2 \operatorname{ch} z_1 - k_1^2 C_3 \sin z_1 - k_1^2 C_4 \cos z_1 + \\ + k_2^2 C_5 \operatorname{sh} z_2 + k_2^2 C_6 \operatorname{ch} z_2 - k_2^2 C_7 \sin z_2 - k_2^2 C_8 \cos z_2 &= 0, \\ \alpha k_1^2 C_1 \operatorname{sh} z_1 + \alpha k_1^2 C_2 \operatorname{ch} z_1 - \alpha k_1^2 C_3 \sin z_1 - \alpha k_1^2 C_4 \cos z_1 + \\ + \beta k_2^2 C_5 \operatorname{sh} z_2 + \beta k_2^2 C_6 \operatorname{ch} z_2 - \beta k_2^2 C_7 \sin z_2 - \beta k_2^2 C_8 \cos z_2 &= 0, \\ \alpha k_1^3 C_1 \operatorname{ch} z_1 + \alpha k_1^3 C_2 \operatorname{sh} z_1 - \alpha k_1^3 C_3 \cos z_1 + \alpha k_1^3 C_4 \sin z_1 + \\ + \beta k_2^3 C_5 \operatorname{ch} z_2 + \beta k_2^3 C_6 \operatorname{sh} z_2 - \beta k_2^3 C_7 \cos z_2 + \beta k_2^3 C_8 \sin z_2 &= 0. \end{aligned}$$

Warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań tego układu jest zerowanie się wyznacznika utworzonego ze współczynników występujących przy poszukiwanych stałych:

$$(21) \quad \begin{aligned} d^2 \operatorname{sh} z_1 \sin z_1 (1 - \operatorname{ch} z_2 \cos z_2) - \operatorname{sh} z_2 \sin z_2 (1 - \operatorname{ch} z_1 \cos z_1) + \\ + d \operatorname{ch} z_2 [(\operatorname{sh} z_1 - \sin z_1)(\operatorname{sh} z_2 \cos z_2 - \operatorname{ch} z_2 \sin z_2) - (\operatorname{sh} z_2 - \\ - \sin z_2)(\operatorname{sh} z_1 \cos z_1 - \operatorname{ch} z_1 \sin z_1)] = 0, \end{aligned}$$

gdzie

$$z_1 = k_1 l, \quad z_2 = k_2 l, \quad d = \frac{\beta k_2^3}{\alpha k_1^3}.$$

Z powyższego równania otrzymamy ciąg rozwiązań na częstości drgań własnych  $\omega_n$  ( $k_1, k_2$  są funkcjami  $\omega$ ).

Z wyrażenia (14) obliczymy ciągi wartości dla  $k_{1n}, k_{2n}$ .

Z układu równań (19), (20) dla określonej częstości  $\omega_n$  wyznaczamy stałe  $C_{in}$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) w funkcji jednej ze stałych, np.  $C_{7n}$ :

$$C_{1n} = R_n C_{7n}, \quad C_{2n} = C_{4n} = -C_{6n} = -C_{8n} = G_n C_{7n}, \quad C_{3n} = N_n C_{7n}, \quad C_{5n} = K_n C_{7n},$$

gdzie współczynniki  $R_n, G_n, N_n, K_n$  są stałe dla określonej częstości  $\omega_n$ (<sup>1</sup>).

Ostatecznie mamy następujące postacie drgań głównych (17) dla określonej częstości  $\omega_n$ :

$$(22) \quad \begin{aligned} X_{1n} &= C_{7n} \{ [R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)] + \\ &\quad + [K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)] \}, \\ X_{2n} &= C_{7n} \{ \alpha_n ([R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)]) + \\ &\quad + \beta_n ([K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)]) \}, \end{aligned}$$

gdzie wolno przyjąć  $C_{7n} = 1$ .

Rozwiązania (8) rozpatrywanego problemu wyrażają się następującymi szeregami:

$$(23) \quad \begin{aligned} w_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n}(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \times \\ &\quad \times \{ [R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)] + \\ &\quad + [K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)] \}, \\ w_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \times \\ &\quad \times \{ \alpha_n ([R_n \operatorname{sh}(k_{1n} x) + N_n \sin(k_{1n} x)] + G_n [\operatorname{ch}(k_{1n} x) + \cos(k_{1n} x)]) + \\ &\quad + \beta_n ([K_n \operatorname{sh}(k_{2n} x) + \sin(k_{2n} x)] - G_n [\operatorname{ch}(k_{2n} x) + \cos(k_{2n} x)]) \}, \end{aligned}$$

gdzie stałe  $A_n, B_n$  wyznaczamy z warunków początkowych wykorzystując warunek ortogonalności postaci drgań głównych, który w tym przypadku ma postać

$$(24) \quad \int_0^l [F_1 X_{1i} X_{1j} + F_2 X_{2i} X_{2j}] dx = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Z warunków początkowych (4) mamy:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_{1n}, & f_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_{2n}, \\ g_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n X_{1n}, & g_2(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n X_{2n}. \end{aligned}$$

(<sup>1</sup>) Zgodnie z zasadami rozwiązywania układów równań jednorodnych należałoby sprawdzić z ilu rozwiązań liniowo niezależnych składa się podstawowy układ rozwiązań.

Po odpowiednich przekształceniach otrzymujemy wyrażenia na poszukiwane stałe:

$$(25) \quad A_n = \frac{\int_0^l [F_1 f_1(x) X_{1n} + F_2 f_2(x) X_{2n}] dx}{\int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx},$$

$$B_n = \frac{\int_0^l [F_1 g_1(x) X_{1n} + F_2 g_2(x) X_{2n}] dx}{\omega_n \int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx}.$$

#### Podsumowanie

1. W rozpatrzonym problemie drgań belek możemy doszukać się pewnej analogii z drganiami dwóch mas połączonych więzią sprężystą. Abstrahując od tego, że górna belka jest podparta (co zresztą nie jest konieczne, gdyż rozważania nasze przeprowadzimy w oparciu o wzory ogólne, w których warunki brzegowe jeszcze nie ingerują), układ o  $2n(n \rightarrow \infty)$  stopniach swobody możemy sprowadzić do układu o 2 stopniach swobody zakładając, że sztywność obu belek wzrasta nieskończenie.

Jeżeli  $EJ_1, EJ_2 \rightarrow \infty$ , to musi być  $r_{1n,2n}^4 = k_{1n,2n}^4 = 0$ . Wtedy z (14) wynika

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{k}{\varrho} \left( \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) = 0,$$

więc

$$\omega^2 = 0 \quad \text{oraz} \quad \omega^2 = \frac{k(F_1 + F_2)}{\varrho F_1 F_2}.$$

Przyjmując, że  $\kappa = kl$  oznacza całkowitą sztywność elementu sprężystego,  $m_1 = \varrho F_1 l$ ,  $m_2 = \varrho F_2 l$  — masy belek, otrzymujemy

$$\omega^2 = \kappa \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}.$$

Wyrażenie to określa częstość drgań dwóch mas połączonych jednym elementem sprężystym. Warunek (15) eliminuje ten mało interesujący przypadek drgań belek jako prętów nieskończenie sztywnych.

2. Na podstawie (14), (15) i (18) można wykazać, że

$$\alpha_n = \frac{EJ_1}{2k} (p_n + \sqrt{p_n^2 + q}) > 0; \quad \beta_n = \frac{EJ_1}{2k} (p_n - \sqrt{p_n^2 + q}) < 0,$$

gdzie

$$p_n = \frac{1}{EJ_1} (k - \omega_n^2 \varrho F_1) - \frac{1}{EJ_2} (k - \omega_n^2 \varrho F_2), \quad q = \frac{4k^2}{E^2 J_1 J_2}.$$

Wynika z tego, że składowe wychyleń postaci drgań  $X_{1n}, X_{2n}$  przyporządkowane współczynnikom  $k_{1n}$  mają kierunek zgodny, natomiast przyporządkowane współczynnikom  $k_{2n}$  kierunek przeciwny.

Jeżeli przejdziemy teraz do układu o dwóch stopniach swobody, to otrzymamy

$$\alpha = \beta = -\frac{F_1}{F_2} = -\frac{m_1}{m_2},$$

co rzeczywiście ma miejsce.

O pełnej analogii układu składającego się z dwóch belek i układu dwumasowego można jednak mówić dopiero w przypadku, gdy górna belka nie jest podparta.

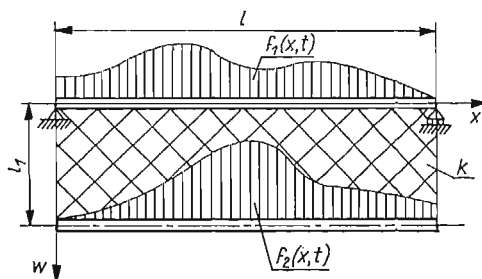
3. Z wyrażenia (14) wynika, że gdy sztywność górnej belki  $EJ_1 \rightarrow \infty$ , wtedy dolna belka drga jak belka na sprężystym podłożu z częstościami

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EJ_2 k_{2n}^4 + k}{\rho F_2}}.$$

4. Na zakończenie warto podkreślić, że w oparciu o przedstawiony sposób rozwiązania znalezienie swobodnych drgań belek przy różnych typach podparcia zarówno górnej, jak i dolnej belki nie przedstawia trudności.

## 2. Drgania wymuszone

**2.1. Ogólny przypadek drgań wymuszonych.** Przejdziemy obecnie do wyznaczenia wymuszonych drgań belek, wywołanych obciążeniami dowolnymi, przyłożonymi na górnej i dolnej belce (rys. 2);



Rys. 2

$f_1(x, t)$ ,  $f_2(x, t)$  oznaczają obciążenia w odpowiednich punktach górnej i dolnej belki.

Ruch układu drgającego (rys. 2) opisują równania:

$$(26) \quad EJ_1 \frac{\partial^4 w_I}{\partial x^4} + \rho F_1 \frac{\partial^2 w_I}{\partial t^2} - k(w_{II} - w_I) = f_1(x, t),$$

$$(27) \quad EJ_2 \frac{\partial^4 w_{II}}{\partial x^4} + \rho F_2 \frac{\partial^2 w_{II}}{\partial t^2} + k(w_{II} - w_I) = f_2(x, t).$$

Pełne rozwiązania tego układu równań są następujące:

$$(28) \quad w_I = w_1 + W_1, \quad w_{II} = w_2 + W_2,$$

gdzie  $w_1$ ,  $w_2$  oznaczają drgania swobodne belek, a  $W_1$  i  $W_2$  — drgania wymuszone.

Wobec tego funkcje  $W_1, W_2$  muszą spełniać równania

$$(29) \quad EJ_1 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x^4} + \varrho F_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2} - k(W_2 - W_1) = f_1(x, t),$$

$$(30) \quad EJ_2 \frac{\partial^4 W_2}{\partial x^4} + \varrho F_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2} + k(W_2 - W_1) = f_2(x, t),$$

z warunkami brzegowymi typu (3) oraz następującymi warunkami początkowymi:

$$(31) \quad W_1(x, 0) = W_2(x, 0) = \frac{\partial W_1}{\partial t} \Big|_{(x,0)} = \frac{\partial W_2}{\partial t} \Big|_{(x,0)} = 0.$$

Do znalezienia rozwiązań powyższego układu równań posłużymy się metodą *rozkladu w/g postaci drgań własnych*.

Szukane funkcje przedstawiamy w postaci szeregów:

$$(32) \quad W_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) X_{in}(x), \quad i = 1, 2,$$

gdzie  $S_n(t)$  oznacza nieznaną funkcję czasu,  $X_{1n}(x), X_{2n}(x)$  — postaci drgań własnych (znane).

Podstawiając (32) do (29) i (30) otrzymujemy

$$(33) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [EJ_1 S_n X_{1n}^{(IV)} + \varrho F_1 S_n'' X_{1n} - k S_n (X_{2n} - X_{1n})] = f_1(x, t),$$

$$(34) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [EJ_2 S_n X_{2n}^{(IV)} + \varrho F_2 S_n'' X_{2n} + k S_n (X_{2n} - X_{1n})] = f_2(x, t).$$

Równanie (33) mnożymy przez  $X_{1k}$ , (34) zaś przez  $X_{2k}$ .

Po zsumowaniu tych równań mamy

$$(35) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [E(J_1 X_{1k} X_{1n}^{(IV)} + J_2 X_{2k} X_{2n}^{(IV)}) S_n + \varrho (F_1 X_{1k} X_{1n} + F_2 X_{2k} X_{2n}) S_n'' + \\ + k(X_{2k} - X_{1k})(X_{2n} - X_{1n}) S_n] = f_1(x, t) X_{1k} + f_2(x, t) X_{2k}.$$

Wiemy, że funkcje  $X_{1n}, X_{2n}$  spełniają równania (10)

$$(36) \quad \begin{aligned} EJ_1 X_{1n}^{(IV)} &= \omega_n^2 \varrho F_1 X_{1n} + k(X_{2n} - X_{1n}), \\ EJ_2 X_{2n}^{(IV)} &= \omega_n^2 \varrho F_2 X_{2n} - k(X_{2n} - X_{1n}). \end{aligned}$$

Z równań (36) można otrzymać następującą zależność:

$$E(J_1 X_{1k} X_{1n}^{(IV)} + J_2 X_{2k} X_{2n}^{(IV)}) = \omega_n^2 \varrho (F_1 X_{1k} X_{1n} + F_2 X_{2k} X_{2n}) - k(X_{2k} - X_{1k})(X_{2n} - X_{1n}),$$



którą wprowadzamy do wyrażenia (35). Uzyskane w ten sposób równanie

$$\varrho \sum_{n=1}^{\infty} (F_1 X_{1k} X_{1n} + F_2 X_{2k} X_{2n}) [S_n'' + \omega_n^2 S_n] = f_1(x, t) X_{1k} + f_2(x, t) X_{2k}$$

całkujemy obustronnie po długości belki. Przyjmując teraz  $k = n$  i biorąc pod uwagę warunek ortogonalności (24), otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne na poszukiwaną funkcję czasu

$$(37) \quad S_n'' + \omega_n^2 S_n = \frac{1}{\varrho} H_n(t),$$

gdzie

$$(38) \quad H_n(t) = \frac{\int_0^l [f_1(x, t) X_{1n}(x) + f_2(x, t) X_{2n}(x)] dx}{\int_0^l (F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2) dx}.$$

Rozwiązanie równania (37) przy warunkach początkowych (31) ma postać

$$(39) \quad S_n(t) = \frac{1}{\varrho \omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau.$$

Zatem drgania wymuszone belek wyrażają się następującymi wzorami:

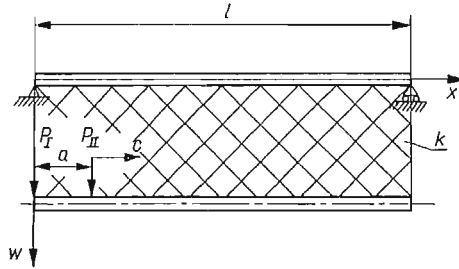
$$(40) \quad \begin{aligned} W_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho \omega_n} X_{1n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau, \\ W_2(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho \omega_n} X_{2n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Całkowite drgania belek mają postać

$$(41) \quad \begin{aligned} w_{1I} = w_1 + W_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n} (T_n + S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n} \left\{ A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varrho \omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \right\}, \\ w_{2I} = w_2 + W_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n} (T_n + S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n} \left\{ A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varrho \omega_n} \int_0^t H_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau \right\}. \end{aligned}$$

2.2. Drgania poprzeczne przy obciążeniu skupionymi siłami harmonicznymi przemieszczającymi się ze stałą prędkością po dolnej belce. Wyprowadzone wzory ogólne (38), (39), (40) wykorzystamy teraz do znalezienia drgań belek w przypadku sił przemieszczających się (rys. 3).

Oznaczenia:  $P_I = P_1 \sin \omega t$ ,  $P_{II} = P_2 \sin \omega t$  oznaczają siły wymuszające,  $\omega$  — częstość wymuszenia,  $a$  — ustaloną odległość między siłami,  $c$  — stałą prędkość przemieszczania się sił (kierunek jej oznaczony jest na rys. 3).



Rys. 3

Zakładamy, że w chwili  $t = 0$  położenie sił jest takie jak na rys. 3.

Rozpoczniemy od obliczenia funkcji (38), która w tym przypadku ma postać:

$$(42) \quad H_n(t) = \frac{\int_0^l f_2(x, t) X_{2n} dx}{\int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx}.$$

Mianownik tego wyrażenia po wprowadzeniu  $X_{1n}$ ,  $X_{2n}$  z (22) daje:

$$\begin{aligned} M_n = \int_0^l [F_1 X_{1n}^2 + F_2 X_{2n}^2] dx = & \frac{c_{1n} l}{2} (N_n^2 + 2G_n^2 - R_n^2) + \frac{c_{2n} l}{2} (1 + 2G_n^2 - K_n^2) + \\ & + \frac{c_{1n}}{k_{1n}} \left\{ (N_n - R_n) G_n + \frac{1}{4} [(R_n^2 + G_n^2) \operatorname{sh} 2Z_{1n} - (N_n^2 - G_n^2) \sin 2Z_{1n}] + \right. \\ & + G_n [R_n \operatorname{sh}^2 Z_{1n} + N_n \sin^2 Z_{1n} + (N_n + R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \sin Z_{1n} + (R_n - N_n) \operatorname{ch} Z_{1n} \cos Z_{1n}] - \\ & \left. - (N_n R_n - G_n^2) \operatorname{sh} Z_{1n} \cos Z_{1n} + (N_n R_n + G_n^2) \operatorname{ch} Z_{1n} \sin Z_{1n} \right\} + \\ & + \frac{c_{2n}}{k_{2n}} \left\{ (K_n - 1) G_n + \frac{1}{4} [(K_n^2 + G_n^2) \operatorname{sh} 2Z_{2n} - (1 - G_n^2) \sin 2Z_{2n}] - \right. \\ & - G_n [K_n \operatorname{sh}^2 Z_{2n} + \sin^2 Z_{2n} + (K_n + 1) \operatorname{sh} Z_{2n} \sin Z_{2n} + (K_n - 1) \operatorname{ch} Z_{2n} \cos Z_{2n}] - \\ & \left. - (K_n - G_n^2) \operatorname{sh} Z_{2n} \cos Z_{2n} + (K_n + G_n^2) \operatorname{ch} Z_{2n} \sin Z_{2n} \right\} + \\ & + \frac{2c_{3n}}{k_{1n}^2 - k_{2n}^2} \left\{ G_n [k_{1n} (R_n + N_n) + k_{2n} (1 + K_n) + (k_{1n} K_n + k_{2n} R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} - \right. \\ & - (k_{1n} R_n + k_{2n} K_n) \operatorname{ch} Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n} + (k_{1n} + k_{2n} N_n) \sin Z_{1n} \sin Z_{2n} + \\ & \left. + (k_{1n} N_n + k_{2n}) \cos Z_{1n} \cos Z_{2n}] - (k_{1n} G_n^2 + k_{2n} K_n R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (k_{1n}K_nR_n + k_{2n}G_n^2) \operatorname{ch} Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} - (k_{1n}G_n^2 - k_{2n}N_n) \sin Z_{1n} \cos Z_{2n} - \\
& \quad - (k_{1n}N_n - k_{2n}G_n^2) \cos Z_{1n} \sin Z_{2n} \} + \\
& + \frac{2c_{3n}}{k_{1n}^2 + k_{2n}^2} \{ G_n [k_{1n}(R_n - N_n) + k_{2n}(1 - K_n)] + (k_{1n} - k_{2n}R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \sin Z_{2n} - \\
& \quad - (k_{1n}R_n + k_{2n}) \operatorname{ch} Z_{1n} \cos Z_{2n} \} - (k_{1n}G_n^2 + k_{2n}R_n) \operatorname{sh} Z_{1n} \cos Z_{2n} + \\
& \quad + (k_{1n}R_n + k_{2n}G_n^2) \operatorname{ch} Z_{1n} \sin Z_{2n} + (k_{1n}G_n^2 - k_{2n}K_nN_n) \sin Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n} - \\
& \quad - (k_{1n}K_nN_n + k_{2n}G_n^2) \cos Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} + \\
& \quad + G_n [(k_{1n}K_n - k_{2n}N_n) \sin Z_{1n} \operatorname{sh} Z_{2n} + (k_{1n}N_n + k_{2n}K_n) \cos Z_{1n} \operatorname{ch} Z_{2n}] \},
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
c_{1n} &= F_1 + \alpha_n^2 F_2, & Z_{1n} &= k_{1n}l, \\
c_{2n} &= F_1 + \beta_n^2 F_2, & Z_{2n} &= k_{2n}l, \\
c_{3n} &= F_1 + \alpha_n \beta_n F_2.
\end{aligned}$$

W liczniku wyrażenia (42) otrzymujemy następującą funkcję czasu:

$$\begin{aligned}
L_n(t) &= \int_0^l f_2(x, t) X_{2n} dx = \sin \omega t \int_0^l \{ P_1 X_{2n} \delta[x - ct] + P_2 X_{2n} \delta[x - (a + ct)] \} dx = \\
&= [Q_{1n} \operatorname{sh}(k_{1n}ct) + Q_{2n} \operatorname{ch}(k_{1n}ct) + Q_{3n} \sin(k_{1n}ct) + Q_{4n} \cos(k_{1n}ct) + \\
& \quad + Q_{5n} \operatorname{sh}(k_{2n}ct) + Q_{6n} \operatorname{ch}(k_{2n}ct) + Q_{7n} \sin(k_{2n}ct) + Q_{8n} \cos(k_{2n}ct)] \sin \omega t,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\delta[x - ct] &= \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq ct, \\ 1 & \text{dla } x = ct; \end{cases} & \delta[x - (a + ct)] &= \begin{cases} 0; & x \neq a + c, \\ 1; & x = a + c; \end{cases} \\
Q_{1n} &= +\alpha_n [R_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{1n}a)) + G_n P_2 \operatorname{sh}(k_{1n}a)], \\
Q_{2n} &= +\alpha_n [G_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{1n}a)) + R_n P_2 \operatorname{sh}(k_{1n}a)], \\
Q_{3n} &= +\alpha_n [N_n (P_1 + P_2 \cos(k_{1n}a)) - G_n P_2 \sin(k_{1n}a)], \\
Q_{4n} &= +\alpha_n [G_n (P_1 + P_2 \cos(k_{1n}a)) + N_n P_2 \sin(k_{1n}a)], \\
Q_{5n} &= +\beta_n [K_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{2n}a)) - G_n P_2 \operatorname{sh}(k_{2n}a)], \\
Q_{6n} &= -\beta_n [G_n (P_1 + P_2 \operatorname{ch}(k_{2n}a)) - K_n P_2 \operatorname{sh}(k_{2n}a)], \\
Q_{7n} &= +\beta_n [ (P_1 + P_2 \cos(k_{2n}a)) + G_n P_2 \sin(k_{2n}a)], \\
Q_{8n} &= -\beta_n [G_n (P_1 + P_2 \cos(k_{2n}a)) - P_2 \sin(k_{2n}a)].
\end{aligned}$$

Ostatecznie  $H_n(t) = L_n(t)/M_n$ . Wprowadzając to wyrażenie do wzoru (39) mamy

$$(43) \quad S_n(t) = \frac{1}{\rho \omega_n M_n} \int_0^t L_n(\tau) \sin[\omega_n(t - \tau)] d\tau = \frac{1}{\rho M_n} \frac{U_n(t)}{V_n},$$

gdzie

(44)

$$V_n = u_n v_n,$$

$$u_n = m_{1n} m_{2n} m_{3n} m_{4n}, \quad v_n = n_{1n} n_{2n} n_{3n} n_{4n},$$

$$m_{1n} = (k_{1n} c)^2 - (\omega + \omega_n)^2, \quad n_{1n} = (k_{2n} c)^2 - (\omega + \omega_n)^2,$$

$$m_{2n} = (k_{1n} c)^2 - (\omega - \omega_n)^2, \quad n_{2n} = (k_{2n} c)^2 - (\omega - \omega_n)^2,$$

$$m_{3n} = (k_{1n} c)^2 + (\omega + \omega_n)^2, \quad n_{3n} = (k_{2n} c)^2 + (\omega + \omega_n)^2,$$

$$m_{4n} = (k_{1n} c)^2 + (\omega - \omega_n)^2, \quad n_{4n} = (k_{2n} c)^2 + (\omega - \omega_n)^2,$$

$$m_{5n} = (k_{1n} c)^2 + (\omega^2 - \omega_n^2), \quad n_{5n} = (k_{2n} c)^2 + (\omega^2 - \omega_n^2),$$

$$m_{6n} = (k_{1n} c)^2 - (\omega^2 - \omega_n^2), \quad n_{6n} = (k_{2n} c)^2 - (\omega^2 - \omega_n^2),$$

$$(45) \quad U_n(t) = \sin \omega t \{v_n [m_{1n} m_{2n} m_{6n} (Q_{1n} \operatorname{sh}(k_{1n} ct) + Q_{2n} \operatorname{ch}(k_{1n} ct)) - \\ - m_{3n} m_{4n} m_{5n} (Q_{3n} \sin(k_{1n} ct) - Q_{4n} \cos(k_{1n} ct))] + u_n [n_{1n} n_{2n} n_{6n} (Q_{5n} \operatorname{sh}(k_{2n} ct) + \\ + Q_{6n} \operatorname{ch}(k_{2n} ct)) - n_{3n} n_{4n} n_{5n} (Q_{7n} \sin(k_{2n} ct) - Q_{8n} \cos(k_{2n} ct))]\} - \\ - 2\omega \cos \omega t \{ (k_{1n} c) v_n [m_{1n} m_{2n} (Q_{1n} \operatorname{ch}(k_{1n} ct) + Q_{2n} \operatorname{sh}(k_{1n} ct)) + \\ + m_{3n} m_{4n} (Q_{3n} \cos(k_{1n} ct) - Q_{4n} \sin(k_{1n} ct))] + (k_{2n} c) u_n [n_{1n} n_{2n} (Q_{5n} \operatorname{ch}(k_{2n} ct) + \\ + Q_{6n} \operatorname{sh}(k_{2n} ct)) + n_{3n} n_{4n} (Q_{7n} \cos(k_{2n} ct) - Q_{8n} \sin(k_{2n} ct))]\} + \\ + \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t [v_n (m_{1n} m_{2n} m_{5n} Q_{2n} - m_{3n} m_{4n} m_{6n} Q_{4n}) + u_n (n_{1n} n_{2n} n_{5n} Q_{6n} - n_{3n} n_{4n} n_{6n} Q_{8n})] + \\ + 2\omega \cos \omega_n t [(k_{1n} c) v_n (m_{1n} m_{2n} Q_{1n} - m_{3n} m_{4n} Q_{3n}) + (k_{2n} c) u_n (n_{1n} n_{2n} Q_{5n} - n_{3n} n_{4n} Q_{7n})].$$

Drgania wymuszone belek wywołane siłami przemieszczającymi się mają postać

$$(46) \quad W_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{1n}(x) S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho M_n V_n} X_{1n}(x) U_n(t),$$

$$W_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\varrho M_n V_n} X_{2n}(x) U_n(t).$$

#### Podsumowanie

1. Rozwiązania drgań wymuszonych (46) składają się, jak to wynika z funkcji czasu (45), z dwóch części:

a) czystych drgań wymuszonych (zawierają człony  $\sin \omega t$  i  $\cos \omega t$ ),

b) drgań swobodnych (zawierają człony  $\sin \omega_n t$  i  $\cos \omega_n t$ ), które powstają w chwili przyłożenia sił zewnętrznych. Należy je odróżnić od drgań swobodnych, które wynikają z odpowiednich warunków początkowych.

Jest rzeczą oczywistą, że wzory (46) są słuszne dopóki  $ct \leq (l-a)$ , to znaczy dopóki zachodzi ruch obciążenia. W momencie gdy  $t = \frac{1}{c}(l-a)$ , obciążenie zostaje zdjęte i pozostaną tylko drgania swobodne.

2. Zjawisko rezonansu może wystąpić dla każdego składnika sum (46) przy określonych wartościach prędkości przemieszczania się sił wymuszających. Wynika to z wyrażenia (44). Przystępując do zera

$V_n = [(k_{1n}c)^4 - (\omega + \omega_n)^4] [(k_{1n}c)^4 - (\omega - \omega_n)^4] [(k_{2n}c)^4 - (\omega + \omega_n)^4] [(k_{2n}c)^4 - (\omega - \omega_n)^4] = 0$ ,  
otrzymujemy cztery prędkości rezonansowe przy ustalonej częstotliwości wymuszenia  $\omega$

$$c_{1n} = \frac{\omega + \omega_n}{k_{1n}}, \quad c_{2n} = \frac{|\omega - \omega_n|}{k_{1n}}, \quad c_{3n} = \frac{\omega + \omega_n}{k_{2n}}, \quad c_{4n} = \frac{|\omega - \omega_n|}{k_{2n}},$$

z których podstawową prędkością rezonansową jest  $c_{2n}$ .

Podobnie możemy mówić o czterech częstotliwościach rezonansowych (przy ustalonej prędkości) wynikających bezpośrednio z tych zależności. Przypadek  $\omega = \omega_n$  nie prowadzi do rezonansu, chyba że  $c = 0$  lub gdy sama prędkość jest już rezonansowa.

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. D. PONOMARIEW, *Współczesne metody obliczeń wytrzymałościowych w budowie maszyn*, PWN, Warszawa 1957.
2. S. ЗЕМБА, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.
3. А. П. Филиппов, *Колебания деформируемых систем «Машиностроение»*, Москва 1970.
4. Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов, *Нестационарные колебания механических систем*, «Наукова думка», Киев 1966.
5. S. KALISKI, *Drgania i fale w ciałach stałych*, PWN, Warszawa 1966.

#### Резюме

#### ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ БАЛОК, СВЯЗАННЫХ УПРУГИМ ЭЛЕМЕНТОМ

В работе рассматриваются поперечные колебания системы, состоящей из двух призматических балок, связанных упругим элементом. Верхняя балка опирается концами на жестких опорах. Нижняя — подвешена на первой по всей длине балки при помощи упругого элемента. Анализированная система является некоторой упрощенной моделью крана или моста.

В работе приведены дифференциальные уравнения движения системы, а также найдены решения свободных колебаний и вынужденных колебаний при действии гармонических сил, движущихся с постоянной скоростью по нижней балке.

#### Summary

#### TRANSVERSAL VIBRATION OF THE SYSTEM OF TWO BEAMS CONNECTED BY MEANS OF AN ELASTIC ELEMENT

In this paper is discussed the transversal vibration of the system of two beams connected by means of an elastic element. The top beam's ends are supported on rigid supports. The lower beam is suspended by means of an elastic element on the first one. This system represents a certain simplified model of a gantry or a bridge. There are considered the free vibrations of the beams and forced vibrations caused by harmonic forces which move with a constant velocity on the lower beam.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 sierpnia 1973 r.*



## O METODACH POMIARÓW PARAMETRÓW RUCHU ZEWNĘTRZNEJ POWIERZCHNI ŚCIANKI RURY ROZPĘCZANEJ WYBUCHOWO

WIKTOR BABUŁ, HENRYK DERENTOWICZ, MAREK FRUCZEK, EDWARD  
WŁODARCZYK, ZBIGNIEW ZIÓŁKOWSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

W dziedzinie badań nad przemysłowym zastosowaniem energii materiału wybuchowego wiele prac poświęca się obecnie problemowi wybuchowego mocowania i zgrzewania rur w dnach oraz ścianach sitowych różnych urządzeń przemysłowych, a w szczególności urządzeń ciepłowniczych [1-4].

W każdym konkretnym przypadku otrzymanie właściwego zamocowania lub zgrzania rury w ścianie sitowej musi być poprzedzone wyznaczeniem parametrów ruchu ścianki rury w warunkach dynamicznych obciążeń. Wartości tych parametrów oraz ich zmianę w czasie wyznaczano teoretycznie w pracach [5-8] przyjmując, że masa inercyjna (osłona ładunku wybuchowego) i materiał rury są ośrodkami nieściśliwymi. Przybliżenie to w wielu praktycznych przypadkach nie zdaje egzaminu, otrzymuje się w rzeczywistości inny charakter zmian prędkości ścianki rury, szczególnie w początkowym okresie jej ruchu.

Lepsze przybliżenie do rzeczywistości daje model zaproponowany w pracy [9], w której zbadano procesy falowe w ośrodku wielowarstwowym z uwzględnieniem parametrów wytrzymałościowych poszczególnych warstw. Mimo to nie można jeszcze w chwili obecnej uwzględnić teoretycznie wiele czynników mających wpływ na charakter zmian prędkości i odkształcenia rozpęczanej wybuchowo rury, dlatego też równolegle prowadzone są prace nad odpowiednimi metodami pomiarowymi.

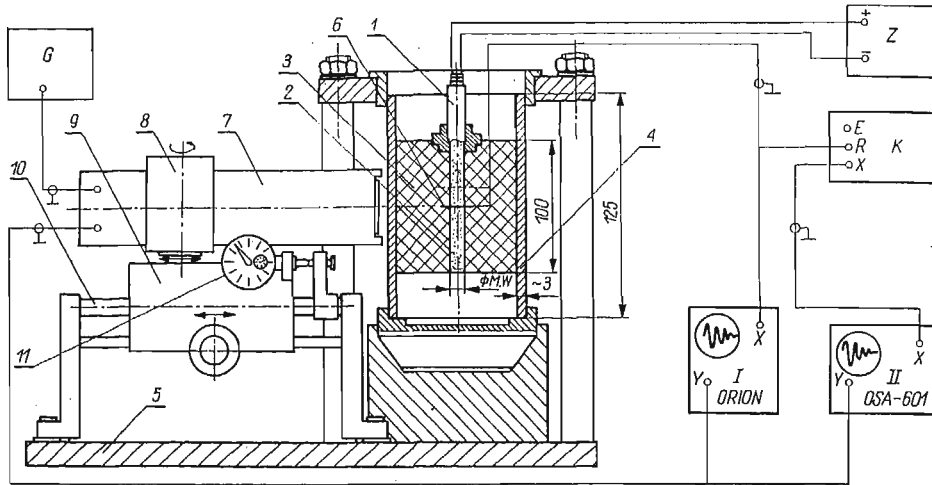
W pracy niniejszej przedstawiamy dwie metody pomiarów parametrów ruchu rury — pojemnościową i fotoelektryczną. Pierwsza z nich umożliwia dokładny pomiar ruchu ścianki rury w ograniczonym zakresie zmian parametrów ruchu. Druga natomiast nie ma ograniczeń ze względu na zakres pomiarów, jednak w porównaniu z pierwszą jest mniej dokładna.

Metodę pojemnościową stosujemy w przypadkach, kiedy chcemy mieć dokładną informację o poszczególnych fragmentach ruchu badanego obiektu, natomiast metodę fotoelektryczną stosujemy wtedy, kiedy interesuje nas całość ruchu bez wchodzenia w szczegóły poszczególnych jego faz.

W punkcie 2 dajemy opis metod, w trzecim omawiamy wyniki pomiarów. W punkcie 4 zamieszczamy wnioski dotyczące przedstawionych metod i otrzymanych za ich pomocą wyników pomiarowych.

## 2. Opis metod pomiarowych

**2.1. Metoda pojemnościowa.** Metoda pojemnościowa oparta jest na wykorzystaniu zjawiska zmiany pojemności końcowej głowicy w.cz. pod wpływem oddziaływania przemieszczającej się ścianki rury. Zmiana pojemności powoduje odstrojenie rezonatora od częstotliwości rezonansowej, wskutek tego zmienia się sygnał w.cz. podawany na detektor. Na wyjściu detektora otrzymuje się sygnał, którego amplituda jest funkcją odległości ścianki rury od czoła głowicy w.cz. Sygnał ten jest rejestrowany na lampie oscyloskopu.



Rys. 1

Schemat układu pomiarowego pokazano na rys. 1. Głowica w.cz. czujnika pojemnościowego 7, umieszczona jest w obszarze 8 zamontowanej obrotowo na karetkce 9, umożliwiającej jej płynne precyzyjne przesuwanie po prowadnicach statywu 10 w kierunku normalnym do tworzącej ścianki rury 4. Wartość zmian odległości czoła głowicy w.cz. od powierzchni rury wskazuje mikrometryczny czujnik zegarowy 11 o działce elementarnej  $e = 0,01$  mm.

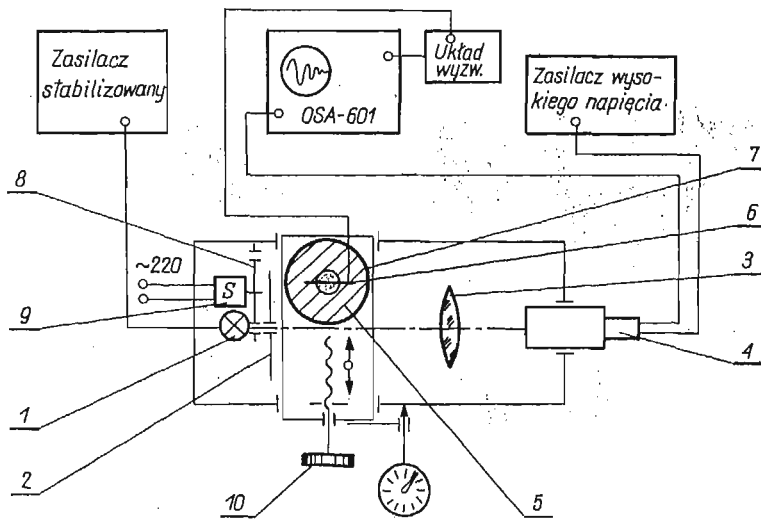
Statyw czujnika pojemnościowego umieszczony jest na płycie podstawowej przyrządu 5, służącej do sztywnego zamocowania badanej rury. Generator  $G$  o stabilizowanej częstotliwości i mocy wyjściowej generując falę ciągłą w pasmie 200 MHz zasila głowicę w.cz. Odległość czoła głowicy w.cz. od powierzchni rury 4 wpływa na pojemność jej obwodu rezonansowego ustalając w ten sposób poziom sygnału wyjściowego, który zostaje podany na wzmacniacze odchylenia pionowego oscyloskopów I i II. Zapalnik 1 inicjuje detonację ładunku wybuchowego 2 powodując zwarcie czujnika 6. Impuls czujnika wyzwala oscyloskop I oraz układ komenderujący  $K$ , który realizuje opóźnione wyzwolenie podstawy czasu oscyloskopu II, umożliwiając śledzenie wybranych fragmentów procesu rozpękania. Jednocześnie powierzchnia ścianki rozpękanej rury zbliżając się do czoła głowicy w.cz. powoduje zmianę jej pojemności modulując amplitudę napięcia wyjściowego. Rejestrowany na ekranie oscyloskopu sygnał jednoznacznie określa przemieszczenia ścianki rury w czasie.

Przed każdym pomiarem przeprowadzono skalowanie układu w warunkach statycznych zmieniając odległość między czołem głowicy w.cz. a ścianką rury na przewidywanym



zakresie pomiarowym. Skalowanie przeprowadzono w odcinkach co 0,02mm rejestrując spowodowane tym zmiany na ekranie lampy oscyloskopu. Wybranie tak małej bazy skalowania zapewni dokładność rejestracji około  $1 \div 2\%$ .

**2.2. Metoda fotoelektryczna.** Istota metody polega na zastosowaniu fotopowielacza przetwarzającego zmianę strumienia świetlnego, modulowanego odkształceniem ścianki rozpęczanej rury, na zmianę napięcia rejestrowanego na lampie oscyloskopu katodowego OSA-601.



Rys. 2

Schemat układu pomiarowego pokazano na rys. 2. Strumień świetlny z żarówki o liniowym włóknie 1, ( $U = 7V$  i  $I = 0,3A$ ), przechodzący przez szczelinę w diafragmie 2, skupiony w soczewce 3, skierowany jest na fotokatodę fotopowielacza 4 i powoduje powstanie na jego wyjściu odpowiedniego sygnału elektrycznego. Przy detonacji ładunku wybuchowego 5 czujnik 6 powoduje «start» oscyloskopu. Jednocześnie rozpęczana rura 7 powoduje przysłanianie szczeliny i zmianę strumienia świetlnego. W ten sposób uzyskuje się na wyjściu fotopowielacza i na lampie oscyloskopu zmianę napięcia odpowiadającą zmianie odkształcenia rozpęczanej rury.

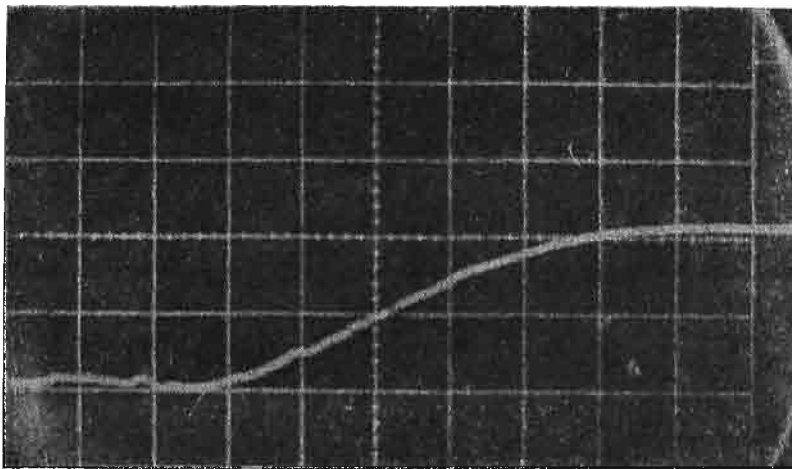
Przeprowadzone pomiary poprzedzono skalowaniem statycznym układu pomiarowego. W związku z zastosowaniem wzmacniacza prądu zmiennego strumień świetlny przy skalowaniu modulowano przy użyciu wirującej przesłony 8 umieszczonej na osi silniczka elektrycznego 9. Skalowanie przeprowadzono punktowo co 0,5mm przy użyciu mechanizmu 10, odczytując amplitudę impulsów na lampie oscyloskopu. Punkt pracy wybierano na prostoliniowym odcinku krzywej skalowania.

Dodatkowo opracowano metodę skalowania dynamicznego w trakcie właściwego pomiaru. W tym celu szczelinę w diafragmie 2 wykonano w postaci okienek o długości 0,3mm w odstępach co 0,2mm. Otrzymano schodkowy wykres przemieszczenia ścianki

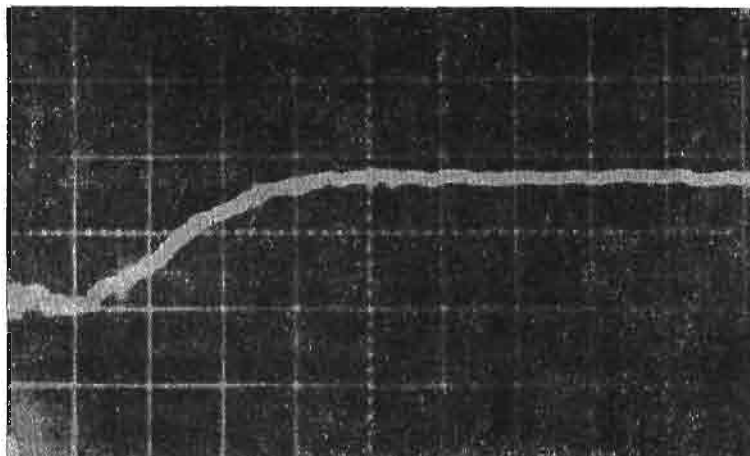
rury, pozwalający na bezpośredni odczyt rzeczywistej wartości tego przemieszczenia dla poszczególnych odcinków czasowych. Zastosowana metoda skalowania zapewnia dokładność odczytu około 10%.

### 3. Wyniki pomiarów

Za pomocą metody fotoelektrycznej przeprowadzono badania procesu wybuchowego rozpęczania rur o średnicy zewnętrznej  $d_2 = 51$  mm i grubości ścianki  $g = 3$  mm, wykonanych ze stali K10. Do badań użyto walcowych ładunków, w których obudowę stanowiły masy inercyjne o różnej gęstości, natomiast materiałem wybuchowym był heksogen flegmatyzowany o gęstości  $\rho_0 \approx 0,9$  g/cm<sup>3</sup>.



Rys. 3

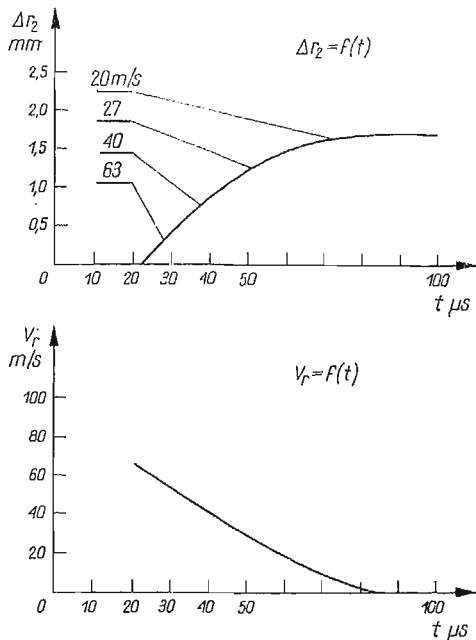


Rys. 4

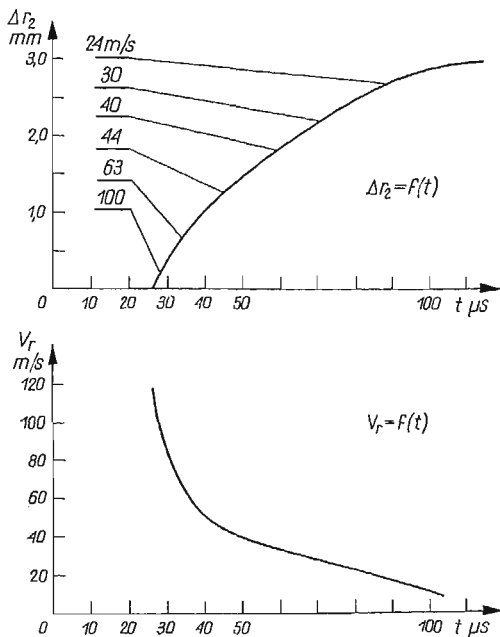
Przykładowe wyniki pomiarów pokazano na rys. 3 i 4. Przedstawiają one zmiany odkształcenia ścianki rury w czasie dla ładunków, w których masą inercyjną była parafina

o gęstości  $\rho_1 \approx 0,9 \text{ g/cm}^3$ , natomiast materiał wybuchowy posiadał średnicę  $d_0 = 5 \text{ mm}$  (rys. 4) i  $d_0 = 6,5 \text{ mm}$  (rys. 3).

Obliczone na podstawie przebiegów oscyloskopowych odpowiednie przebiegi zmian odkształcenia  $\Delta r_2 = f(t)$  i prędkości  $V_r = f(t)$  ścianki rury pokazano na rys. 5 i rys. 6.

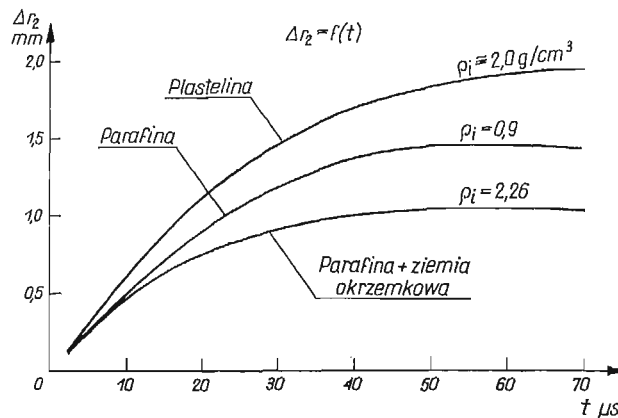


Rys. 5

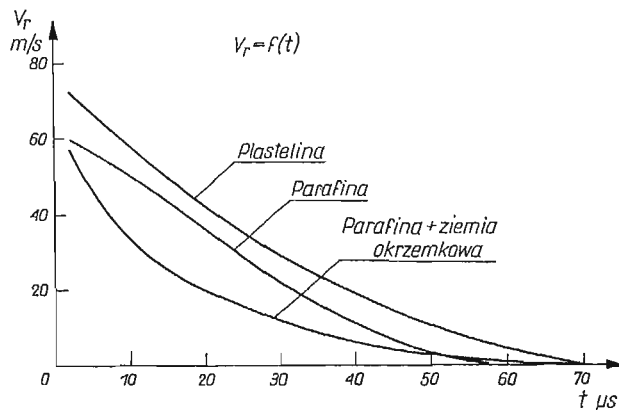


Rys. 6

Podobne wykresy zmian  $\Delta r_2 = f(t)$  i  $V_r = f(t)$  otrzymano dla różnych rodzajów mas inercyjnych przekonując się o dużym wpływie gęstości i ich struktury wewnętrznej na charakter dynamicznego odkształcenia ścianki rury. Przykład takiego oddziaływania ilustrują wykresy pokazane na rys. 7 i rys. 8. Podano na nich zmianę wartości odkształcenia i prędkości ścianki dla mas inercyjnych posiadających gęstość  $\rho_i \approx 0,9, 2,0$  i  $2,26 \text{ g/cm}^3$  (odpowiednio: parafina, plastelina i parafina z ziemią krzemkową) przy jednakowej średnicy materiału wybuchowego, wynoszącej  $d_0 = 5 \text{ mm}$ .



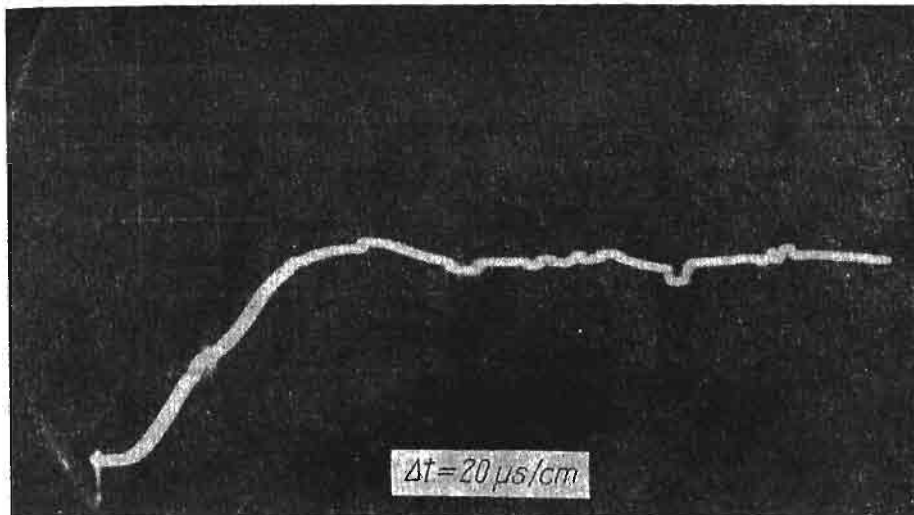
Rys. 7



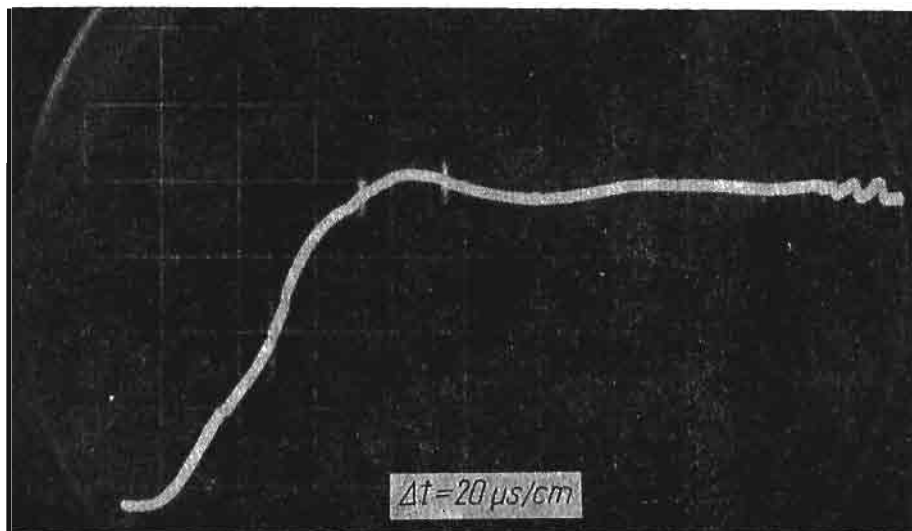
Rys. 8

Przedstawione wyniki pomiarów wykazują, że dla dwóch mas inercyjnych o zbliżonej gęstości można uzyskać różne wartości odkształceń i prędkości ścianki i odwrotnie dla mas o różnych gęstościach omawiane wartości równe. Wynika stąd, że zmiana prędkości i odkształcenia ścianki przy ustalonym ładunku materiału wybuchowego zależy od struktury masy inercyjnej i stopnia jej porowatości, a więc od zdolności tłumienia fali uderzeniowej, jej wytrzymałości, lepkości i innych własności decydujących o stopniu dysypacji energii wyzwolonej przy detonacji materiału wybuchowego.

Z kolei na rysunkach 9, 10, 11 pokazujemy oscylogramy uzyskane metodą pojemnościową dla ładunków wybuchowych o średnicach 4, 5 i 6 mm. Na oscylogramie przedsta-



Rys. 9

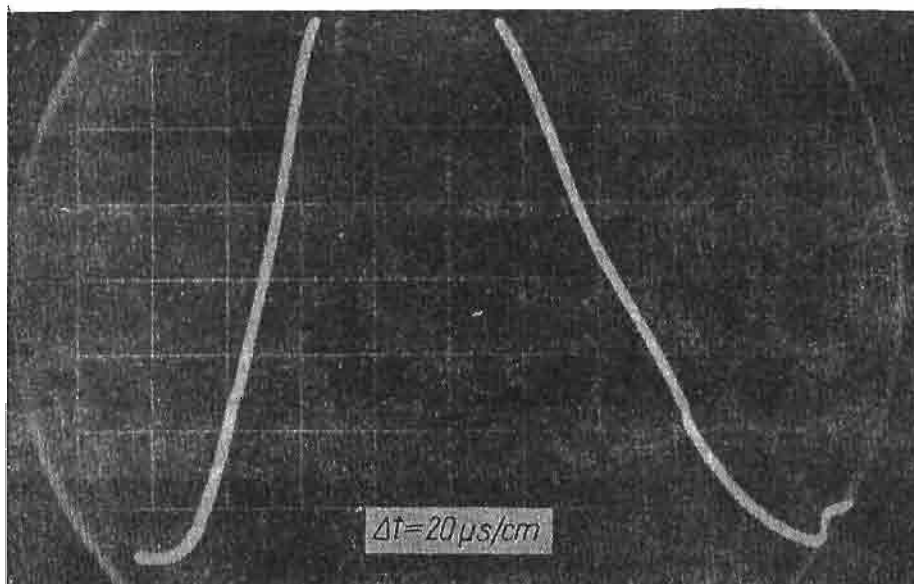


Rys. 10

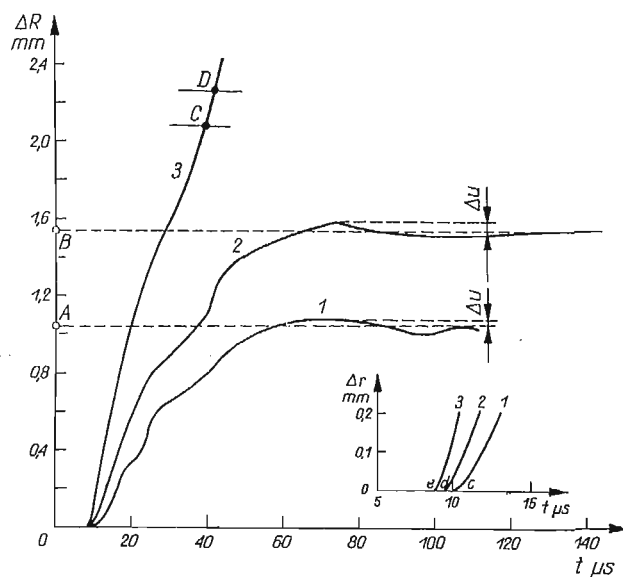
wionym na rys. 11 nie zarejestrowano maksymalnej wartości odkształcenia, co związane jest z ograniczonym zakresem pomiarowym czujnika. Opracowane wyniki pomiarów zmiany przyrostu promienia w funkcji czasu pokazane są na rys. 12. Punktami *A* i *B* zaznaczono tutaj trwałe maksymalne przyrosty promienia rury —  $\Delta R_{max}$ . Uzyskano bardzo dobrą zgodność wyników dotyczących trwałych odkształceń rury, zmierzonych za pomocą mikrometru i odczytanych z oscylogramów.

Punktami *c*, *d* i *e* zaznaczono chwile rozpoczęcia ruchu ścianki rury. Wynoszą one odpowiednio: dla ładunku o średnicy 4mm —  $10 \mu s$ , dla 5mm —  $9 \mu s$  i dla 6mm —  $8 \mu s$ . Mikrosekundowe różnice w czasach rozpoczęcia ruchu ścianek rur związane są przede

wszystkim ze zmienną grubością masy inercyjnej spowodowaną rosnącą średnicą ładunków wybuchowych oraz w mniejszym stopniu spadkiem intensywności fali uderzeniowej w płastelinie.

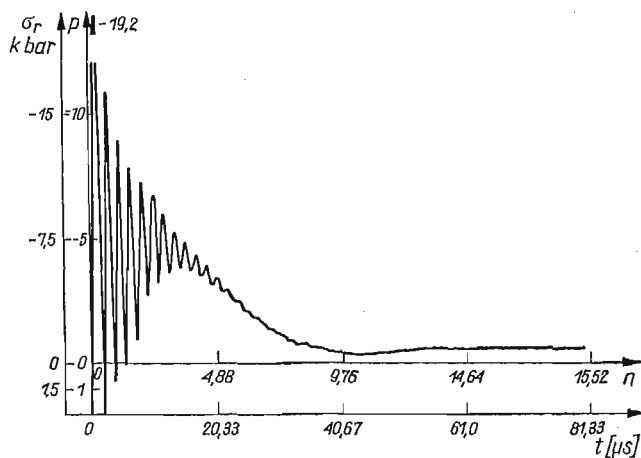


Rys. 11

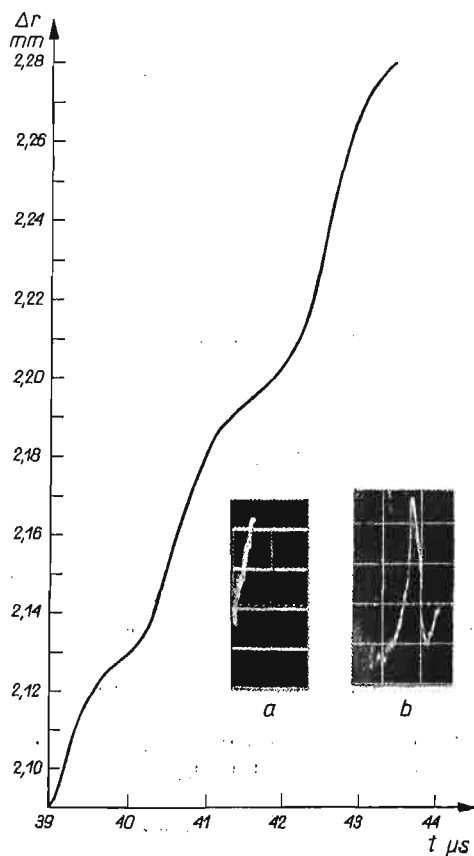


Rys. 12

Czułość metody pojemnościowej jest na tyle wysoka, że udaje się zarejestrować wartość powrotu sprężystego rury  $\Delta_u$  (por. rys. 12), który odgrywa istotną rolę w doborze parametrów rozłącznego mocowania rur w dnach sitowych wymienników ciepła. Poza tym



Rys. 13



Rys. 14

udaje się również zmierzyć drgający ruch powierzchni rury, spowodowany kolejnymi odbiciami od swobodnych ścianek rury fali naprężenia, pokazanej na rys. 13 (wykres

wykonano na podstawie teoretycznych obliczeń wg wzorów podanych w [9]). Tego typu pomiary wykonano na odcinku krzywej  $CD$  (rys. 12) i przedstawiono na rys. 14. Drgający charakter zmiany parametrów w całym zakresie zmiany parametrów można zbadać tylko w sposób numeryczny, co zrobiono w pracy [9].

#### 4. Wnioski końcowe

Przedstawione w niniejszej pracy metody pomiarów dynamiki rur rozpęczanych wybuchowo spełniają wymagania praktyki laboratoryjnej i inżynierskiej: są proste, łatwo dostępne i wygodne w praktycznych zastosowaniach. Metodą pojemnościową można mierzyć z bardzo dużą dokładnością poszczególne fragmenty ruchu badanego obiektu (ścianki rury). Metodę tę stosujemy w przypadkach, kiedy chcemy mieć dokładną informację o poszczególnych fragmentach ruchu lub też gdy zakres zmian parametrów ruchu badanego obiektu jest niewielki (rzędu kilku mm).

Metoda fotoelektryczna jest mniej dokładna w porównaniu do poprzedniej, ale za to nie ma praktycznie ograniczeń w zakresie pomiarowym. Stosujemy ją w przypadkach, kiedy interesuje nas całość ruchu bez wchodzenia w szczegóły poszczególnych jego fragmentów.

Przy okazji sprawdzania poprawności i efektywności metod stwierdzono bardzo istotny wpływ na parametry ruchu rury fizyko-mechanicznych własności masy inercyjnej w warunkach dynamicznych obciążeń.

#### Literatura cytowana w tekście

1. J. D. WILLIAMS and B. CROSSLAND, *Explosive Welding of Hard Drawn Copper Tubes to Tube-Plates*, Welding and Metal Fabrication, January 1969.
2. В. Г. СТЕПАНОВ, И. А. ШАВРОВ, *Экспериментальное исследование процесса взрывного деформирования труб в трубных досках теплообменных аппаратов*, Кузнечно-штамп. пр.-в. 10, 1969.
3. M. D. SNADWICK and al., *Explosive welding of tubes and tube-plates*, British Welding Journal, October 1968.
4. W. BABUL, H. DERENTOWICZ, J. CZECHOWSKI, J. BAGROWSKI, *Мосowanie rurek w dnach sitowych wymienników ciepła*, Sprawozd. 321(WAT)71, 1971.
5. В. ГАСК, Н. Е. НИКОТЧЕНКО, А. Н. СВИРИДЕНКО, Н. П. ЮРЧЕНКО, *Движение стенки трубы при осесимметричном взрывном нагружении*, Физ. Гор. и Взр., № 3, 1967.
6. Р. П. ДИДЬК, С. С. КРАСНОВСКИЙ, А. Г. ТЕСЛЕНКО, *Приближенный расчет осесимметричных движений стенки трубы при деформации взрывом*, Физ. Гор. и Взр., № 2, 1968.
7. А. В. КАШИРСКИЙ, Ю. В. КОРОВИН, В. А. ОДИНЦОВ, Л. А. ЧУДОВ, *Численное решение двумерной нестационарной задачи о движении оболочки под действием продуктов деформации*, ПМТФ, № 4, 1972.
8. А. В. КАШИРСКИЙ, Ю. В. КОРОВИН, В. А. ОДИНЦОВ, *Движение оболочки при осевой детонации*, ПМТФ, № 1, 1971.
9. W. BABUL, M. FRUCZEK, A. PAPLIŃSKI, E. WŁODARCZYK, *Propagation of a cylindrical wave in layered an elastic-viscoplastic medium*, Proc. Vibr. Probl. [w druku].

#### Резюме

#### О МЕТОДАХ ИЗМЕРЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ СТЕНКИ ТРУБЫ, РАШИРАЕМОЙ ВЗРЫВОМ ЗАРЯДА В.В.

В работе обсуждены два метода непрерывного измерения параметров движения внешней поверхности стенки трубы, рашираемой взрывом заряда В.В.



Первый метод — емкостный, дает возможность точно измерить движение стенки трубы в ограниченном диапазоне изменений параметров движения. Второй — фотоэлектрический метод, дает возможность измерений без ограничения диапазона параметров движения, однако результаты измерений в начальной стадии движения менее точны, чем для первого метода. Перечисленные методы дополняются взаимно, перекрывая весь диапазон измеряемых параметров движения трубы и будучи простыми и удобными для применений в эксперименте. Выполнение исследования свидетельствуют о значительном влиянии физико-механических свойств инерционного материала на кинематические параметры движения стенки трубы.

### S u m m a r y

#### ON MEASUREMENT METHODS OF KINEMATIC PARAMETERS OF EXTERNAL WALL SURFACE OF A TUBE SUBJECT TO EXPLOSIVE EXPANSION

*Both the capacitive and photoelectric methods of measurement of kinematic parameters of the outside wall of a tube subject to explosive expanding are discussed in this paper. The first method gives correct measurements of kinematic parameters of the inside surface, but the measuring range is limited. The second one gives a possibility of measurements without limitation in range, but the accuracy is less than that in the first method.*

Both methods mentioned above are complementary and cover all measuring ranges. They are simple and very useful in applications.

From the experiments performed a suggestion follows that properties of the intermediate material locked between the explosive charge and the tube significantly influences the kinematic parameters of a tube wall.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lipca 1973 r.*

---



PRZYKŁADY ULTRADYSTRYBUCYJNYCH ROZWIĄZAŃ PASMA PŁYTOWEGO

JAN GRABACKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

Errata

Już po ukazaniu się naszej pracy, zamieszczonej w z. 1/1973 MTiS pt. *Przykłady ultradystrybucyjnych rozwiązań pasma płytowego* stwierdziliśmy, że w zadaniu II przez przeoczenie popełniony został błąd, polegający na opuszczeniu całego czynnika przy wyznaczaniu jednej ze stałych całki ogólnej.

Zmianie ulegają równania poczynając od wzorów, oznaczonych numerem (3.9). Niżej podano ich poprawną postać w kolejności ich występowania w tekście wydrukowanym z zachowaniem kolejności (również w przypadku gdy nie są opatrzone numerem kolejnym)

str. 105

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -\frac{1}{\alpha^4}, \\
 C_2 &= \frac{1}{\alpha^4} \frac{\nu(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - \nu(1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa + (3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\kappa\operatorname{ch}\kappa - (1-\nu)^2\kappa}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\kappa + (1-\nu)^2\kappa^2 - 4\operatorname{ch}^2\kappa}, \\
 C_3 &= -C_2, \\
 C_4 &= -\frac{1}{\alpha^4} \left\{ \frac{(1-\nu)\operatorname{sh}\kappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - (1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa} + \right. \\
 &+ \left. \frac{2\operatorname{ch}\kappa - (1-\nu)\kappa\operatorname{sh}\kappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - (1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa} \cdot \frac{\nu(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - \nu(1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa + (3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\kappa\operatorname{ch}\kappa - (1-\nu)^2\kappa}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\kappa + (1-\nu)^2\kappa^2 - 4\operatorname{ch}^2\kappa} \right\}.
 \end{aligned}$$

str. 106

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad \tilde{w}(x_1, \alpha) &= \frac{1}{\alpha^4} - \frac{1}{\alpha^4} \operatorname{ch}\alpha x_1 + \\
 &+ \frac{1}{\alpha^4} \frac{\nu(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - \nu(1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa + (3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\kappa\operatorname{ch}\kappa - (1-\nu)^2\kappa}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\kappa + (1-\nu)^2\kappa^2 - 4\operatorname{ch}^2\kappa} \cdot [\alpha x_1 \operatorname{ch}\alpha x_1 - \operatorname{sh}\alpha x_1] - \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha^4} \left\{ \frac{(1-\nu)\operatorname{sh}\kappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - (1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa} + \right. \\
 &+ \left. \frac{2\operatorname{ch}\kappa - (1-\nu)\kappa\operatorname{sh}\kappa}{(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - (1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa} \cdot \frac{\nu(1+\nu)\operatorname{sh}\kappa - \nu(1-\nu)\kappa\operatorname{ch}\kappa + (3+\nu)(1-\nu)\operatorname{sh}\kappa\operatorname{ch}\kappa - (1-\nu)^2\kappa}{(1+\nu)^2\operatorname{sh}^2\kappa + (1-\nu)^2\kappa^2 - 4\operatorname{ch}^2\kappa} \right\} \times \\
 &\quad \times \alpha x_1 \operatorname{sh}\alpha x_1.
 \end{aligned}$$

str. 106

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\alpha^4} (e^{\alpha x_1} + e^{-\alpha x_1}), \quad \alpha \in (+\infty, -\infty), \\
& \mathcal{F}_0^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha^4} \right] = \frac{1}{12} z^3 \operatorname{sgn} z, \\
& \mathcal{F}_0^{-1} \left[ \frac{1}{2\alpha^4} (e^{\alpha x_1} + e^{-\alpha x_1}) \right] = \frac{1}{24} z^3 \operatorname{sgn} z * [\delta(z - ix_1) + \delta(z + ix_1)]; \\
& \mathcal{F}_0^{-1} \left[ \frac{1}{\alpha^4} \right] = \frac{1}{12} x_2^3 \operatorname{sgn} x_2; \\
(3.11) \quad & \mathcal{F}_0^{-1} \left[ \frac{1}{2\alpha^4} (e^{\alpha x_1} + e^{-\alpha x_1}) \right] = \frac{1}{12\sqrt{2}} (x_1^2 + x_2^2)^{3/2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3.12) \quad \Phi_1 &= \frac{1}{\alpha^3} \left\{ \frac{\nu(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - \nu(1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa - (1-\nu)^2 \kappa}{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \kappa + (1-\nu)^2 \kappa^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \kappa} \right\}, \\
\Phi_2 &= \frac{1}{\alpha^3} \left\{ \frac{(1-\nu) \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa} + \right. \\
& \left. + \frac{2 \operatorname{ch} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{sh} \kappa}{(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - (1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa} \cdot \frac{\nu(1+\nu) \operatorname{sh} \kappa - \nu(1-\nu) \kappa \operatorname{ch} \kappa + (3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa - (1-\nu)^2 \kappa}{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \kappa + (1-\nu)^2 \kappa^2 - 4 \operatorname{ch}^2 \kappa} \right\}, \\
\Phi_3 &= \frac{1}{\alpha} \Phi_1;
\end{aligned}$$

str. 107

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{\Phi_1(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_1^*}{(1+\alpha)^2}, \\
\Phi_2 &= \frac{\Phi_2(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^2} = \frac{\Phi_2^*}{(1+\alpha)^2}, \\
\Phi_3 &= \frac{\Phi_3(1+\alpha)^2}{(1+\alpha)^3} = \frac{\Phi_3^*}{(1+\alpha)^2}; \\
\mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_1 \alpha x_1] &\cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^1 \mathcal{J}_{-l-2}^c(z) * [\delta(z + ix_1) + \delta(z - ix_1)], \\
\mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_2 \alpha x_1] &\cong \frac{x_1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^2 \mathcal{J}_{-l-2}^s(z) * [\delta(z + ix_1) - \delta(z - ix_1)], \\
\mathcal{F}_0^{-1}[\Phi_3] &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{n-1} B_l^3 \mathcal{J}_{-l-2}^s(z) * [\delta(z + ix_1) - \delta(z - ix_1)];
\end{aligned}$$

$$(3.14) \quad w(x_1, x_2) = \frac{1}{12} x_2^3 \operatorname{sgn} x_2 - \frac{1}{12\sqrt{2}} (x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + R(x_1, x_2, b_1).$$

Jednocześnie autorzy uważają za swój obowiązek przeprosić zarówno Czytelników jak i Redakcję za godne ubolewania niedopatrzenie.

---



# BIULETYN INFORMACYJNY

## MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA «EQUA-DIFF 73»

W dniach 3—8 września 1973 r. odbyła się w Brukseli międzynarodowa konferencja „EQUA-DIFF 73” poświęcona zagadnieniom nieliniowych równań różniczkowych i funkcjonalnych, teorii stateczności i nieliniowej mechanice układów o skończonej liczbie stopni swobody. Była to druga z rzędu konferencja tego typu organizowana wspólnie przez Francję i Belgię. Pierwsza odbyła się w Marsylii pod hasłem „EQUA-DIFF 70”.

Gospodarzami konferencji byli prof. P. Janssens z Faculté des Sciences Appliquées, Université Libre de Bruxelles oraz prof. N. Rouche, kierownik Instytutu Matematyki, Université Catholique de Louvain.

Komitet organizacyjny zaprosił około 100 osób, przybyło na konferencję 90 osób z 14 krajów, w tym jedna osoba z Polski. Najliczniej reprezentowane były delegacje organizatorów — Belgii i Francji oraz delegacje Włoch i Stanów Zjednoczonych.

Do wygłoszenia referatów plenarnych zaproszeni byli specjaliści światowej sławy:

Prof. L. Cesari (USA) wygłosił referat p.t. „Zagadnienia warunków brzegowych dla hiperbolicznych, quasi-liniowych cząstkowych równań różniczkowych pierwszego rzędu”,

Prof. Ju. Mitropolski (ZSRR) — „Badania nieliniowych równań różniczkowych z odchylnym argumentem”,

Prof. M. Urabe (Japonia) — „Zmodyfikowana procedura Galerkin dla nieliniowych prawie-periodycznych układów różniczkowych,

Prof. L. Salvadori (Włochy) — „Teoria asymptotycznej stateczności”,

Prof. A. Halanay (Rumunia) — „Układy z opóźnionym argumentem; zastosowanie metody częstościowej”,

Prof. R. M. Rosenberg — „O mechanicznym modelu aktywności elektrycznej serca”,

Prof. N. P. Bathia (USA) — „Dynamika przepływu w otoczeniu niezmienniczego, zwartego zbioru”.

Oprócz referatów plenarnych wygłoszono 42 komunikaty, podzielone na 4 grupy tematyczne:

I — metody obliczeniowe w nieliniowej mechanice,

II — teoria stateczności,

III — równania i rozwiązania periodyczne,

IV — zagadnienia różne.

Pełne teksty referatów wydrukowane zostały 2 miesiące przed konferencją i rozesłane do wszystkich uczestników. Tytuł tego wydawnictwa: „Équations différentielles et fonctionnelles non-linéaires”, red. P. Janssens, J. Mawhin et N. Rouche, wyd. Hermann, Paryż 1973. W związku z tym czas wygłaszania komunikatów ograniczony był do 5—10 minut, a dyskusje były długie i ożywione.

Komunikaty należące do grupy tematycznej II, III i IV miały charakter teoretyczny i stanowiły przyczynki do tradycyjnie uprawianych dyscyplin matematyki stosowanej. Z nowszych zagadnień zwraca uwagę podjęcie trudnej tematyki równań i rozwiązań prawie-periodycznych oraz zagadnień stateczności układów stochastycznych. Mimo bogatej literatury, zagadnienia jakościowych badań stateczności, a w szczególności stateczności globalnej i różnych kryteriów stateczności układów nieliniowych, były w dalszym ciągu tematem licznych i żywo dyskutowanych prac.

Szereg prac poświęconych było matematycznym podstawom metod asymptotycznych, a w szczególności metodom uśrednienia, które znajdują coraz szersze zastosowania w wielu dziedzinach nieliniowej mechaniki. Wymienić tu należy przede wszystkim plenarny referat prof. Ju. Mitropolskiego oraz komunikaty:

J. H. Balbi (Francja) — „Zastosowanie uogólnionej metody uśrednienia do rozwinięć asymptotycznych pewnych funkcji”,

A. H. P. van der Burgh (Holandia) — „Metoda asymptotyczna dla pewnej klasy równań różniczkowych”.

W zakresie nieliniowej mechaniki o skończonej liczbie stopni swobody znaczna część prac poświęcona była przybliżonym metodom obliczeniowym. Oprócz plenarnego referatu prof. Urabe wymienić tu należy komunikaty:

T. D'Hont (Belgia) „Zastosowanie metody Newtona do nieliniowych periodycznych układów równań różniczkowych”,

R. Van Dooren (Belgia) „Badanie rozwiązań silnie nieliniowych równań różniczkowych”,

G. Schmit (NRD) „Dynamiczna stateczność układów o skończonej liczbie stopni swobody”,

W. Szemplińska-Stupnicka (Polska) „Przybliżona metoda badania stanów nieustalonych w nieliniowych układach drgających o wielu stopniach swobody”,

R. Chaleat, J. Balbi — „Wyższe przybliżenia w teorii synchronizacji pewnych oscylatorów słabo-nieliniowych”.

Różnorodność procedur i argumentacji w wymienionych wyżej pracach odzwierciedla trudności na jakie napotyka ilościowe badanie układów nieliniowych o wielu stopniach swobody, a stąd i trudności z rozwiązywaniem nieliniowych zagadnień związanych z drganiami maszyn, pojazdów i urządzeń. Szczególnie ostra polemika wywiązała się na temat komunikatu T. D'Honta, który zastosował bezpośrednią metodę numeryczną zamiast powszechnie aprobowanych metod przybliżonych, takich jak metoda Galerki, metoda uśrednienia i inne.

Referat prof. R. M. Rosenberga wymieniony wśród referatów plenarnych, nie był zgłaszany na konferencję i został wygłoszony na specjalną prośbę organizatorów, a spotkał się z ogromnym zainteresowaniem. Referat przeznaczony dla lekarzy-kardiologów, przedstawiał, bez wprowadzania formalizmu matematycznego, udaną próbę zbudowania modelu mechanicznego symulującego funkcjonowanie elektrycznej aktywności serca ludzkiego. Obecny etap prac podsumowany został porównaniem „odpowiedzi” modelu mechanicznego, otrzymanej na drodze obliczeń numerycznych, z oryginalnymi elektrokardiogramami serca. Operując tylko jednym parametrem w tym modelu, uzyskano bardzo obiecującą zgodność wyników przy różnych stanach niewydolności serca i stanów zawałowych.

Interesującym punktem programu konferencji było zwiedzanie nowobudowanego ośrodka uniwersyteckiego w odległości 30 km od Brukseli. Nowe osiedle, które otrzymało nazwę Louvain-la-Neuve, wznieszone z dala od terenów zabudowanych, daje niemal nieograniczone możliwości urzeczywistnienia marzeń i fantazji architektów i urbanistów o nowoczesnych i niezwykłych rozwiązaniach.

Następna konferencja „EQUA-DIFF” odbędzie się w r. 1976 we Francji.

*Wanda Szemplińska-Stupnicka (Warszawa)*

## DRUGA MIĘDZYNARODOWA KONFERENCJA

na temat

### MECHANIKA BUDOWLI W TECHNICIE REAKTOROWEJ

Berlin, 10—14 września 1973 r.

W dniach 10-14 września 1973 r. odbyła się w Berlinie druga z kolei (pierwsza miała miejsce w 1971 r. również w Berlinie) konferencja na temat zastosowań mechaniki budowli do obliczania i projektowania reaktorów i siłowni jądrowych. Zorganizowało ją Międzynarodowe Stowarzyszenie Mechaniki Konstrukcji Reaktorów (IASM i RT — International Association for Structural Mechanics in Reactor Technology) przy współudziale zawodowych i naukowo-technicznych instytucji europejskich i amerykańskich oraz innych organizacji (np. współorganizatorem pierwszej konferencji był Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN).

O zainteresowaniu konferencją świadczą liczby: ok. 800 uczestników z 25 krajów, 450 referatów.

Celem konferencji było, jak głosił program, skonfrontowanie inżynierów i naukowców pracujących przy rozwiązywaniu problemów mechaniki w technice reaktorowej i projektowaniu siłowni jądrowych z naukowcami zajmującymi się badaniami podstawowymi w celu wymiany poglądów i dyskusji rezultatów i ułatwienia przenikania najnowszych osiągnięć mechaniki w tej gałęzi współczesnej techniki, jaką jest technologia znana z wykorzystania energii jądrowej do celów pokojowych.



Energetyka jądrowa stanowi jeden z licznych działów technologii, gdzie ingerencja współczesnej mechaniki jest niezbędna, dział, który wiele rozwiązań oczekuje od mechaniki. Praktyczna realizacja w skali przemysłowej koncepcji fizyków jest możliwa jedynie przy wkroczeniu inżynierii i to inżynierii mocno opartej na mechanice materiałów i konstrukcji.

Wstęp do programu konferencji stwierdza: *technika reaktorowa* wymaga syntezy wielu różnych umiejętności. Zdolność do rozwiązywania wynikających problemów *mechaniki konstrukcji* jest niezbędnym warunkiem ekonomicznego, niezawodnego i bezpiecznego korzystania z energii jądrowej.

Gwałtowny rozwój techniki reaktorowej przyniósł różnorakie problemy w dziedzinie mechaniki konstrukcji, związane z zużyciem nowych materiałów stosowanych w elementach reaktorów różnych typów, pracujących w trudnych warunkach i przy wysokich obciążeniach.

Niespotykane dotychczas połączenie wymagań mechanicznych i konstrukcyjnych postawiło przed mechaniką niezwykle trudne zadania, ale stanowi zarazem silny bodziec dla jej rozwoju. Mechanika została zmuszona do gwałtownego postępu nie tylko w dziedzinach związanych ze złożonymi prawami stanu, ale również w dziedzinie metod komputerowych i kontroli jakości. W ciągu ostatnich lat zanotowano znaczny krok naprzód; jednakże wciąż jeszcze szereg problemów tak czysto mechanicznych jak i związanych z nimi nastęrcza poważne trudności w technice reaktorowej.

Równocześnie rozwiązywanie problemów techniki reaktorowej jest jednym z najważniejszych źródeł inspiracji współczesnej mechaniki konstrukcji.

Konferencja poświęcona była studiom teoretycznym i doświadczalnym oraz zagadnieniom projektowania konstrukcji nowych typów reaktorów na lekką wodę, powielających, chłodzonych ciekłym metalem, reaktorów dla pojazdów itp., a w szczególności obejmowała zagadnienia:

- 1) analizy naprężeń, odkształceń, stateczności i obciążeń krytycznych wszelkiego rodzaju elementów reaktora i wyposażenia, w oparciu o teorię termosprężystości, termoplastyczności, termolepkosprężystości i teorii nośności granicznej;
- 2) analizy naprężeń i odkształceń przy cyklach temperatury, np. w reaktorach chłodzonych ciekłym metalem, i obciążeń mechanicznych;
- 3) analizy rozprzestrzeniania się szczelin i pęknięć w elementach paliwowych i obudowie z uwzględnieniem zagadnień dyfuzji, nieliniowych równań przewodnictwa cieplnego itp.;
- 4) dynamicznej analizy konstrukcji reaktora w normalnych warunkach pracy i w warunkach awaryjnych, np. przy obciążeniach sejsmicznych, uderzeniach itp.;
- 5) analizy wpływu sprzężeń termomechanicznych, magnetomechanicznych i radiacyjnych, wpływu zjawiska turbulencji itp. z zakresu mechaniki cieczy na mechaniczne zachowanie się elementów reaktora jądrowego, różnych elementów jego obudowy, różnych typów konstrukcji jego obudowy;
- 6) analizy wytrzymałościowej nowych materiałów konstrukcyjnych obudowy reaktorów (beton sprężony, żeliwo sprężone) i problemów bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji. Reaktory jądrowe stanowią jeden z najbardziej starannie opracowywanych typów projektów konstrukcyjnych pod względem wykonawstwa i niezawodności.

W procesie projektowania i eksploatacji reaktora i urządzeń towarzyszących wynikają następujące problemy:

- 1) współdziałanie mechaniki materiałów i konstrukcji z inżynierią budowlaną (teoria żelbetu, konstrukcji sprężonych itp.);
- 2) matematyczno-fizyczny opis materiałów z uwzględnieniem wielorakich sprzężeń, napromieniowania, zmęczenia itp.;
- 3) specjalne zagadnienia graniczne przy sprzężonym działaniu różnych efektów;
- 4) metody obliczania wytrzymałościowego i termicznego rurociągów, paliwa, osłon paliwa, osłony reaktora, konstrukcji zabezpieczających — w szczególności metody komputerowe w zastosowaniu do tych zagadnień;
- 5) metody projektowania i niezawodności układów mechanicznych (paliwa, moderatorów, osłon, zbiorników ciśnieniowych, rurociągów ciśnieniowych, konstrukcji ochraniających żelbetowych, stalowych, sprężonych żeliwnych itp.).

Całość tematyki konferencji została podzielona na następujące działy:

*Zagadnienia ogólne techniki reaktorowej*

- A. Ekonomia, nowe technologie (analiza technologii wybranych w poszczególnych krajach), reaktory syntezy (wodorowe).
- B. Bezpieczeństwo i niezawodność, problemy społeczne związane z energią jądrową.

*Rdzeń reaktora*

- C. Mechanika paliwa (model materiału, współpraca z pokryciem).
- D. Mechanika jego pokrycia i osłon (współpraca, drgania elementu paliwowego itp.).

*Elementy reaktora*

- E. Analiza uderzeń i drgań (zagadnienia dynamiczne w szybkich reaktorach).
- F. Analiza konstrukcji i systemu chłodzenia (obliczenie i projektowanie, wymienniki ciepła, awarie przewodów).

*Obudowa rdzenia*

- G. Obliczanie obudowy stalowej (metody projektowania, charakterystyki materiału, mechanika pęknięć).
- H. Obliczanie obudowy z betonu sprężonego (obliczanie i projektowanie, mechanizmy zniszczenia, pelzanie betonu, pomiary).

*Konstrukcje w elektrowniach jądrowych*

- J. Warunki obciążeniowe i obliczenia konstrukcji.
- K. Analiza zachowania się konstrukcji przy obciążeniach sejsmicznych (wskazówki projektowe, współpraca z podłożem, pomiary).

*Mechanika budowli i projektowanie*

- L. Przewodnictwo ciepła, naprężenia cieplne, niesprężyste zachowanie się konstrukcji.
- M. Metody obliczeniowe, analiza niezawodności.

Jak widać z powyższego zestawienia, objęte nim zostały wszystkie właściwie zagadnienia związane z projektowaniem, wznoszeniem i eksploatacją reaktora, w rozwiązywaniu których mechanika mogłaby być pomocna.

Referaty szczegółowe przedstawione zostały w ośmiu równoległych sekcjach i ogłoszone w dziewięciu tomach materiałów. Materiały te są do wglądu w Bibliotece Instytutu Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21.

Istotnym elementem konferencji były generalne dyskusje na temat perspektyw energetyki jądrowej w Europie i zagadnień bezpieczeństwa przemysłowo pracujących siłowni «na lekką wodę» (np. preferencja w NRF dla reaktorów wysokotemperaturowych i związane z tym problemy mechaniczne; mechaniczne aspekty — w dalszej kolejności — reaktorów i paliw do «fast breeder reactors» i do reaktorów powielających, problemy konstrukcyjne reaktorów ze sprężonego żeliwa itd.).

Z zagadnień, które na bieżącej konferencji doczekały się szerszego omówienia niż na konferencji poprzedniej, wymienić należy problemy wytrzymałościowe w warunkach cykli zmian temperatury, cyklicznych zmian obciążeń mechanicznych i promieniowania. Problematyka ta ma duże znaczenie nie tylko w technice reaktorowej ale i w innych dziedzinach, jak przemysł chemiczny czy hutnictwo. Zagadnienia nośności konstrukcji przy obciążeniach cyklicznych znajdują się w centrum zainteresowania badaczy i inżynierów w wielu krajach i ośrodkach. Podstawom teorii oraz obliczeniom nośności konstrukcji niesprężystych przy obciążeniach zmiennych poświęcone były w całości sesje L.7 i L.8 oraz (w podejściu probabilistycznym) sesje M.6 i M.7.

Jeżeli chodzi o obliczenia numeryczne (nie tylko wytrzymałościowe ale również np. termiczne), to podkreślić należy «panowanie» metody elementów skończonych w różnych jej wariantach, wybór których podyktowany jest rodzajem rozwiązywanego problemu, dokładnością czy typem używanej maszyny liczącej. Dużo miejsca poświęcono metodom hybrydowym.

Obserwowane często w kraju trudności w porozumiewaniu się praktyków z badaczami widoczne były również w trakcie tego spotkania. Można było stwierdzić, że bardzo ważne konstrukcje obliczane są nie-

kiedy przy zastosowaniu znacznie uproszczonych modeli mechanicznych przy wykorzystaniu skomplikowanych technik obliczeniowych.

W dyskusji wiele uwagi poświęcono kwestii niezawodności działania reaktorów przede wszystkim od strony normujących tę sprawę przepisów, które obowiązują w krajach posiadających siłownie nuklearne. Wiele głosów w dyskusji wskazywało na fakt, że ze względu na wymagania tych przepisów, reaktory jądrowe są urządzeniami o najwyższym stopniu niezawodności również z mechanicznego punktu widzenia. Padły głosy nawet za ewentualnym częściowym złagodzeniem tych przepisów.

Rola, jaką w tej sprawie odgrywa wpływ opinii publicznej oraz posunięta do najwyższych granic odpowiedzialność, jakiej tego rodzaju decyzje wymagają, wskazują, że problematyka reaktorów jądrowych wykracza daleko poza szeroko nawet pojęte ramy techniki i wymaga bardzo całościowego ujmowania.

Z Polski przedstawione zostały na konferencji następujące prace:

*The Influence of Moisture Content on the Creep of Concrete at Elevated Temperatures*, J. ZIELIŃSKI i A. SADOWSKI (Politechnika Warszawska).

*On the Use of Orthotropic Yield Surfaces to Obtain Limit Loads for Perforated Plates*, J. POROWSKI (Prosynchron, Gliwice), A. SAWCZUK (IPPT PAN).

*Methods of Analysing Shakedown Behaviour of Elastic-Plastic Structures* (referat generalny), A. SAWCZUK (IPPT PAN).

*Large Deflection Analysis of Cylindrical Plastic Shells Subjected to Impact Loading*, Ang Phong, A. SAWCZUK (IPPT PAN).

*Plasticity of Irradiated Materials*, P. PERZYNA (IPPT PAN).

*Boundary Value Problems in Cyclic Plasticity*, Z. MRÓZ (IPPT PAN).

*Deflection Bounding at Shakedown under Thermal and Mechanical Loadings*, J. A. KÖNIG (IPPT PAN).

Poza tym w materiałach konferencji znalazły się prace:

*Some Problems of Rheological Stability in the Presence of Temperature Field* J. BYCHAWSKIEGO (Politechnika Krakowska) i *Buckling of Viscoplastic Cylindrical Shells Subjected to Radial Impulse and Temperature* W. WOJEWÓDZKIEGO (Politechnika Warszawska).

Prace te, jak można się zorientować z tytułów, koncentrowały się wokół zagadnień wytrzymałościowych pracy konstrukcji (głównie układów płyt i rur) w warunkach zmiennych obciążeń mechanicznych, cykli temperatury, napromieniowania oraz na zagadnieniu obudowy reaktorów.

W związku z projektowaniem polskich elektrowni jądrowych, rozwojem przemysłu chemicznego i energetyki udział referatów z Polski ma duże znaczenie nie tylko w technice reaktorowej, ale w wielu działach energetyki i przemysłu chemicznego (naczynia ciśnieniowe, obciążenia cykliczne itp.).

Z powyższego nasuwają się następujące wnioski odnośnie wachlarza kierunków badań zasługujących na rozwijanie:

1) badania nad plastycznością<sup>1</sup> i pęczaniem materiałów napromieniowanych oraz nad sprężeniami termo-radio-mechanicznymi;

2) rozwojowe studia nad wytrzymałością cykliczną, np. nad «cyclic plasticity» oraz nad adaptacją opracowanych u nas propozycji teoretycznych z dziedziny plastyczności do zagadnień deformacji materiałów moderujących i paliw jądrowych;

3) zainteresowanie się problematyką konstrukcji żeliwnych sprężonych i optymalizacją konstrukcji ochronnych reaktora;

4) kontynuowanie prac badawczych i wdrożeniowych nad wytrzymałością perforowanych elementów wymienników ciepła, nad kumulacją odkształceń plastycznych (ratchetting) oraz nad stochastyczną mechaniką konstrukcji;

5) zainteresowanie się problematyką silnych sprężeń magneto-mechanicznych, analizą konstrukcji w silnych polach magnetycznych;

6) kontynuowanie badań nad dynamiką konstrukcji niesprężystych i nad impulsowymi oddziaływaniami termicznymi.

Powyższy program zawiera sugestie przede wszystkim w zakresie badań podstawowych i adresowany jest przede wszystkim do pracowników naukowych. Ze względu na niewątpliwie korzyści tak dla zastosowań jak dla prowadzonych badań podstawowych jakie daje bezpośredni kontakt, konieczne jest włączenie się IPPT w prace przygotowawcze przyszłej konferencji SM i RT. Konferencja taka planowana jest na rok 1975 w Wielkiej Brytanii.

Na zakończenie wypada jeszcze podkreślić sprawną organizację samej konferencji i głęboko przemyślane jej wstępne przygotowanie. Jest to zasługa przede wszystkim profesora Th. Jaegera, Przewodniczącego Międzynarodowego Stowarzyszenia Mechaniki Konstrukcji Reaktorów.

*Jan A. König (Warszawa)*

**CZWARTA KONFERENCJA MIĘDZYNARODOWA**  
na temat  
**NUMERYCZNE METODY MECHANIKI PŁYNÓW**  
Boulder, Colorado, USA, czerwiec, 1974

Kolejna, czwarta Konferencja poświęcona numerycznym metodom mechaniki płynów odbędzie się w Uniwersytecie w Colorado, w Boulder, w okresie 24–29 czerwca 1974 r., pod ogólnym kierownictwem Międzynarodowego Komitetu, w którego skład wchodzi przedstawiciele Anglii, Francji, Holandii, Niemieckiej Republiki Federalnej, Polski, Stanów Zjednoczonych Ameryki Północnej oraz Związku Socjalistycznych Republik Radzieckich.

Przedmiotem Konferencji są numeryczne rozwiązania zagadnień przepływowych, występujących w takich dziedzinach, jak meteorologia, oceanografia, aerodynamika, biologia, fizyka plazmy, fizyka przestrzeni kosmicznej, energetyka jądrowa i astrofizyka. Problematyka Konferencji obejmuje wszystkie działy mechaniki płynów, z tym że preferowane są prace stanowiące wkład do rozwoju numerycznych metod rozwiązywania zagadnień przepływowych, a zwłaszcza prace poświęcone nowym metodom.

Przewiduje się wygłoszenie na Konferencji około 60 referatów, które zostaną zakwalifikowane na podstawie streszczeń. Jednogodzinne referaty wygłoszą na Konferencji, na zaproszenie Komitetu, profesorowie: Olga OLEJNIK (Moskwa), Heinz-Otto KREIS (Uppsala) i Herber KELLER (California Institute of Technology).

Materiały pokonferencyjne, zawierające pełne teksty wszystkich referatów przyjętych na Konferencję, zostaną opublikowane w postaci odrębnego tomu wydawnictwa Lecture Notes in Physics (Springer Verlag), podobnie jak to miało miejsce w przypadku dwu poprzednich Konferencji.

Dodatkowych informacji na temat Konferencji może udzielić prof. dr. Włodzimierz PROSNAK, Instytut Techniki Lotniczej i Hydroaerodynamiki Politechniki Warszawskiej, Warszawa, ul. Nowowiejska 24.

**W następnym zeszycie ukaza się prace:**

Wspomnienie pośmiertne o profesorze ZBIGNIEWIE BUDZIANOWSKIM

R. KRZYWIŃC, Wielkie systemy procesów nieodwracalnych termodynamiki

Большие системы необратимых термодинамических системов

Great systems of irreversible processes of thermodynamics

W. SZYMAŃSKI, Nieustalone przewodzenie ciepła ciał o dużej przewodności cieplnej w warunkach konwekcji swobodnej w powietrzu

Нестационарный режим теплопроводности тел с большой теплопроводностью в условиях свободной конвекции воздуха

Unsteady heat transfer in bodies of high thermal conductivity in the conditions of free convection in the air

K. J. ВОЛДА, Analogia tarczowo płytowa w teorii dźwigarów siatkowych

Пластическая аналогия в теории поверхностных сетчатых несущих сооружений

Plate analogy in the theory of surface lattice structures

A. MITZEL i J. DYCZKOWSKI, Reologia płyt żelbetowych pod wpływem pola temperatury

Реология железобетонных плит под влиянием температурного поля

Rheology of reinforced concrete plates in the temperature field

Z. BUDZIANOWSKI, F. ANDERMAN i J. WRANIK, Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych

Метод итерационного определения напряжений в многосвязных дисках

Method of an iterational solution of multiply connected discs

K. RAJSKI, Odształcenia części roboczych manometru obciążnikowo-tłokowego

Деформация пологих деталей манометра с неуплотненным поргинем

Deformation of working parts of a deadweight-piston pressure gauge

G. ЖЕМИЛТА, Zginanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym

Изгиб квадратной плиты с центрально расположенным квадратным отверстием

Bending of a square plate with a centrally located square hole

BIULETYN INFORMACYJNY

Cena zł 30.—

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy, lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter) 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*

---