POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 13 • ZESZYT 4

WARSZAWA 1975
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

SPIS TREŚCI

WYDANO Z ZASIŁKU POLSKIEJ AKADEMII NAUK

POLSKIE TOWARZYSTWO
MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

TOM 13 · ZESZYT 4

WARSZAWA 1975
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

*

THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

*

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

REDAKCJA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 710 (600+110) egz. Arkuszy wydawn. 6,75. Arkuszy drukarskich 5,5. Papier druk. sat. III kl. 80 g. 70×100. Oddano do składania 31.VII.1975 r. Druk ukończono w grudniu 1975 r. Zam. 989/75.
B-58 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 13 (1975)

O WARUNKU PLASTYCZNOŚCI HUBERA-MISESA

ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

Warunek, czyli kryterium plastyczności, należy do podstawowych pojęć teorii plastyczności. Rozważania dotyczące warunków plastyczności znajdziemy w każdym bez wyjątku podręczniku poświęconym tej teorii. Jednym z najprostszych kryteriów osiągnięcia stanu uplastycznienia, a równocześnie od wielu lat cieszącym się uznaniem i najpowszechniej wykorzystywanym, jest warunek energii odkształcenia postaciowego. Autorzy podręczników i prac z tej dziedziny nazywają go różnie, np.: warunkiem HUBERA, MISESA, LEVY'EGO, HENCKY'EGO, H—M—H itp. Również w sposób niejednolity traktowane są zasługi uczonych, których prace są fundamentalne dla rozwoju teorii plastyczności. Kryterium energii odkształcenia postaciowego sformułował M. T. HUBER, niestety do obecnej chwili jego zasługi są często pomijane milczeniem, pomniejszane lub przeinaczane.

Dlatego przeanalizujmy, co piszą najwybitniejsi autorzy monografii i podręczników z dziedziny teorii plastyczności, uczeni o światowej sławie, i porównajmy z prawdą historyczną.

W świetnej monografii W. W. SOKOŁOWSKIEGO [27] znajdziemy na ss. 43 i 44 stwierdzenia, że warunek stałej intensywności dewiatora naprężenia został podany przez M. T. HUBERA i R. MISESA, a interesującą, energetyczną interpretację podał H. HENCKY. Zarówno pierwsze, jak i drugie zdanie nie jest ścisłe. M. T. HUBER nie podał warunku stałej intensywności dewiatora naprężenia, a interpretacja HENCKY'EGO nie była pierwsza. Tytuł pracy HUBERA został podany w tłumaczeniu niemieckim, wynika z niego zresztą wyraźnie, o jaką hipotezę chodzi (właściwej pracy odkształcenia postaciowego). Również przypisywanie F. SCHLEICHEROWI [26], że wprowadził naprężenia ośmiościenne mija się z prawdą.

W znanym podręczniku L. M. KACZANOWA [17] znajdziemy w omówieniu «warunku stałości intensywności naprężeń stycznych (warunek Misesa)» uwagę następującą: «*okazało się później, że jeszcze w roku 1904 Huber zaproponował warunek, bliski warunkowi (10.1)*». L. M. KACZANOW pisze również, że pewne trudności matematyczne związane z warunkiem TRESCI doprowadziły von MISESA do myśli zastąpienia sześciobocznego graniastosłupa opisanym walcem kołowym (było tak istotnie).

W. S. LENSKIJ [19] kryterium energii odkształcenia postaciowego nazywa warunkiem MISESA-HENCKY'EGO (np. s. 58 część I). Podobną nazwę stosują HOFFMANN i SACKS [11]. Autorzy polscy nazywają kryterium, o którym mowa, na ogół warunkiem HUBERA-MISESA-HENCKY'EGO (np. [18, 23]). W Encyklopedii Techniki, tom I, s. 270 [24], znajdziemy stwierdzenie, że «*koncepcję wykorzystania pojęcia energii odkształcenia postaciowego jako* *kryterium plastyczności przedstawili później R. von Mises i H. Hencky»*. Otóż MISES nie rozpatrywał energii odkształcenia postaciowego. Przy omawianiu hipotezy niezmienników nazwisko MISESA jest natomiast pominięte, mimo że był pierwszy, który wykorzystał niezmiennik dewiatora naprężenia do sformułowania warunku plastyczności. Mijałoby się z celem wyliczanie wszystkich prac i książek, w których z różnych względów pomija się nazwisko HUBERA. W dalszej części tego artykułu postaramy się wyjaśnić, na czym polegają zasługi poszczególnych autorów podstawowych prac, które doprowadziły do sformułowania warunku plastyczności energii odkształcenia postaciowego i innych warunków, matematycznie równoważnych.

R. von MISES wprowadził warunek plastyczności, starając się zastąpić «dokładny» warunek TRESCI warunkiem przybliżonym i nie wykazującym niedogodności wynikających z nieciągłości pierwszej pochodnej w wierzchołkach sześcioboku TRESCI. Największa różnica przybliżenia sześcioboku TRESCI elipsą MISESA nie przekracza 15%. Dopiero wyniki doświadczeń utwierdziły MISESA w przekonaniu, że jego «przybliżony» warunek może być bliższy danym eksperymentalnym i może być traktowany jako samodzielne kryterium. R. von MISES sformułował warunek plastyczności w postaci równania $J_2 = k^2$, gdzie J_2 jest drugim niezmiennikiem dewiatora naprężenia. Jak pisze W. PRAGER i Ph. G. HODGE [25], wydawało się wtedy, że warunek ten ma charakter abstrakcyjny i starano się odkryć fizyczne znaczenie niezmiennika. Ponieważ drugi niezmiennik dewiatora naprężenia ma wymiar kwadratu naprężenia, A. NADAI [22] założył, że fizyczne znaczenie musi mieć pierwiastek kwadratowy drugiego niezmiennika. Wychodząc z tego założenia, A. NADAI znalazł taką płaszczyznę i takie naprężenia w ośrodku poddanym działaniu naprężeń, że z dokładnością do stałej, pierwiastek kwadratowy drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia jest równy tym naprężeniom. Okazało się, że płaszczyzna taka jest symetrycznie nachylona do kierunków głównych, a ponieważ płaszczyzn takich jest osiem, powstaje symetryczny ośmiościan złożony z trójkątów równobocznych. Kwadrat całkowitego naprężenia działającego na powierzchnię ośmiościanu, czyli naprężenia ośmiościennego*⁾, jest równy kwadratowi średniej wartości naprężeń głównych, kwadrat ośmiościennego naprężenia stycznego natomiast równa się 4/9 sumy kwadratów głównych naprężeń stycznych. Ponadto naprężenia normalne na płaszczyźnie ośmiościanu są średnią wartością naprężeń głównych, a styczne naprężenia ośmiościenne są dokładnie równe intensywności dewiatora naprężenia, gdzie pod tym terminem rozumie się kwadratowy pierwiastek średniej wartości kwadratów składowych głównych dewiatora naprężenia

$$\tau_{\text{ośm}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{s_1^2+s_2^2+s_3^2}.$$

H. HENCKY, nie znając prac M. T. HUBERA [12] i [13], podał inną interpretację fizyczną [9], stwierdzając, że praca powodująca zmianę postaci, czyli energia odkształcenia postaciowego, jest proporcjonalna do drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia pomnożonego przez odwrotność podwojonego modułu odkształcenia postaciowego (inaczej mo-

*⁾ Pod wpływem, zapewne, dosłownego tłumaczenia z literatury rosyjskiej przeniknęła ostatnio do piśmiennictwa polskiego nazwa «oktaedr», zamiast ustalonego terminu ośmiościan i «naprężenia oktaedryczne», zamiast naprężenia ośmiościenne.

dułu KIRCHHOFFA). Interpretacja HENCKY'EGO pochodzi z 1924 r., a praca A. NADAI'EGO z 1937 r.

R. HILL, w swojej monografii [10], podaje chyba najprecyzyjniejsze omówienie historii kryterium, pisząc: «*fizyczną interpretację warunku Misesa podał Hencky (1924), wykazując, że płynięcie zaczyna się wtedy, gdy energia odkształcenia postaciowego osiąga wartość krytyczną*». I dalej: «*kryterium Misesa zostało w pewnym stopniu poprzedzone przez Hubera (1904 r.) w Polsce, w pracy, która nie wzbudziła zainteresowania przez prawie dwadzieścia lat po jej opublikowaniu. Huber rozróżniał dwa przypadki w zależności od tego czy hydrostatyczna składowa naprężenia jest rozciągająca, czy też ściskająca. W drugim przypadku przyjmował, że płynięcie określone jest sprężystą energią odkształcenia postaciowego; w pierwszym natomiast, że zależy od całkowitej energii sprężystej (tak, jak to przyjmowali E. Beltrami* [1] *i B. G. Haigh* [7]». «*Nie jest jasne czy Huber myślał o plastycznym płynięciu, czy o kruchym pękaniu*» (koniec cytatu). Powyższy cytat z monografii R. HILLA należy skomentować następująco: otóż pomysł polegający na rozróżnieniu dwóch przypadków w zależności od znaku hydrostatycznej składowej naprężenia rzeczywiście pochodzi od M. T. HUBERA, nie był jednak przez niego opublikowany. W oryginalnych pracach z lat 1903 i 1904 jest mowa tylko o hipotezie energii odkształcenia postaciowego ([12, 13]). Modyfikacja kryterium, o której pisze R. HILL, została prawdopodobnie zaczerpnięta z książki A. FÖPPLA [5], który opublikował ją, jak wspomina HUBER, pod tytułem „*Die Annahme von Huber*", na podstawie korespondencji prywatnej z HUBEREM. Z kolei o tym, czy HUBER myślał o plastycznym płynięciu czy o kruchym pękaniu jasno wynika z opublikowanych prac.

F. SCHLEICHER w pracy [26], cytowanej przez wielu autorów, rozróżnia wyraźnie (w 1926 r.), w punkcie 8 pracy, warunek HUBERA (i tak go nazywa) od hipotezy BELTRAMIEGO i pewnej wersji podanej przez B. P. HAIGHA.

Warunek R. von MISESA niektórzy autorzy, np. H. GEIRINGER [4], nazywają warunkiem «kwadratowym», w odróżnieniu od «liniowego» warunku TRESCI. Jak wspomnieliśmy powyżej, celem MISESA było znalezienie takiego warunku, który aproksymowałby warunek TRESCI, usuwając zarazem nieciągłości pochodnej. Podobny sposób myślenia MISES zademonstrował jeszcze raz, wiele lat później w pracy z 1948 r. Okazało się bowiem w przypadku dwuwymiarowym, że w zależności od położenia punktu na krzywej przedstawiającej «kwadratowy» warunek plastyczności zagadnienie sprowadza się do hiperbolicznego, parabolicznego bądź też eliptycznego. Ponieważ powoduje to trudności matematyczne, R. von MISES zaproponował po raz drugi przybliżenie warunku TRESCI, tym razem dwoma parabolami, z których każda przechodzi przez dwa wierzchołki sześcioboku TRESCI leżące na osiach naprężeń głównych. Zaletą tak ustawionego kryterium plastyczności dla przypadku dwuwymiarowego jest hiperboliczność rozwiązania we wszystkich punktach krzywej.

M. T. HUBER zajmuje się, w swoich podstawowych pracach [12] i [13], wytężeniem materiału i hipotezami pozwalającymi określić jego osiągnięcie. Autor utożsamia wytężenie materiału z niebezpieczeństwem pękania i stwierdza: «*wytężenie materiału mierzy się właściwą pracą odkształcenia*». Rozpatrując następnie potencjał sprężystości M. T. HUBER pisze wyraźnie w p. 7 swojej pracy z 1904 r.: «*w praktyce technicznej nie dopuszczamy z reguły odkształceń poza granicą sprężystości, chodzi nam przeto nie tyle o niebezpie-*

czeństwo pęknięcia, ile o niebezpieczeństwo przekroczenia granicy sprężystości, które według wszelkiego prawdopodobieństwa mierzy również właściwa praca odkształcenia», i dalej: «*Używając wyrażenia granica sprężystości, mam obecnie i w dalszym ciągu na myśli granicę stanu napięcia, przy którym rozpoczyna się płynięcie ciał ciągliwych (plastycznych), a więc to, co Niemcy nazywają «Streckgrenze»*.

Przegląd prac źródłowych pozwala stwierdzić zatem co następuje:

1. Pomysł zastosowania potencjału sprężystego jako miary wytężenia pochodzi od E. BELTRAMIEGO [1].

Okazało się później z listów do W. THOMSONA, że J. C. MAXWELL [30] zasugerował w nich wykorzystanie wyrażenia na energię sprężystą przy wyznaczaniu krytycznej wartości naprężeń złożonych. Wykazał on (patrz [29]), że energię sprężystą można rozłożyć na energię objętościową i energię odkształcenia postaciowego i stwierdził: «*mam poważne podstawy do przekonania, że gdy (energia odkształcenia postaciowego) osiągnie pewną granicę to element ulegnie zniszczeniu. Jestem pierwszym, który pisze na ten temat, nigdy nie widziałem żadnych badań dotyczących następującego problemu: znamy odkształcenia mechaniczne elementu w trzech kierunkach, kiedy ulegnie on zniszczeniu?*». Do zagadnienia tego MAXWELL już nie powrócił, a jego idee stały się znane dopiero po opublikowaniu listów. Fakt ten przypomniał mi p. doc. dr Stanisław STANISŁAWSKI z Politechniki Poznańskiej na zebraniu naukowym PTMTS.

2. H. von HELMHOLTZ [8] wydzielił pracę odkształcenia objętościowego ze wzoru na potencjał sprężysty.

3. M. T. HUBER pierwszy sformułował kryterium odkształcenia postaciowego jako miarę wytężenia, utożsamiając je (w zależności od badanego materiału) z osiągnięciem granicy plastyczności. Nie odpowiada więc prawdzie, że jest niejasne, czy HUBER myślał o plastycznym płynięciu, czy też nie. Priorytet HUBERA był znany jeszcze w latach dwudziestych, zwłaszcza w Niemczech, a prawdopodobnie znacznie wcześniej kilku wybitnym uczonym, z którymi M. T. HUBER utrzymywał kontakt korespondencyjny.

Według świadectwa M. T. HUBERA również praca R. von MISESA z 1913 r. została zapomniana aż do prac H. HENCKY'EGO z 1924 r. i I Kongresu Mechaniki Technicznej w Delft, również w 1924 r. Zarówno na I, jak i II Kongresie (w Zurychu, 12 - 17 IX 1926) odbyła się dyskusja na temat hipotez wytężenia z udziałem M. T. HUBERA. Na III Kongresie w Sztokholmie (24 - 29 VIII 1930) R. von MISES wygłosił referat generalny, w którym stwierdził, że jego warunek plastyczności różni się od warunku HUBERA. Nieporozumienie polegało znowu na tym, że MISES oparł się na wspomnianej powyżej książce A. FÖPPLA [5], nie znając tekstu prac Hubera w języku polskim. Wypowiedź MISESA została sprostowana przez M. T. HUBERA, gdyż liczbowo i w postaci wzoru warunki się nie różnią.

4. R. von MISES, wychodząc z przesłanek natury matematycznej, nie znał interpretacji fizycznej, a może po prostu o nią się nie troszczył. Zauważył ją dopiero H. HENCKY [9]. Interesujące jest, że M. T. HUBER wyszedł właśnie z przesłanek natury fizycznej pokrywających się dokładnie z późniejszą o 21 lat interpretacją H. HENCKY'EGO. Oryginalnym osiągnięciem MISESA jest wprowadzenie do rozważań dotyczących warunku plastyczności drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia. Zarówno R. von MISES, jak i H. HENCKY wywarli duży wpływ na rozwój teorii plastyczności, podając rozwiązania szeregu zagadnień szczegółowych. M. T. HUBER reprezentował powszechny wtedy pogląd, że osiągnięcie

granicy plastyczności jest, poza wyjątkowymi przypadkami, tak samo niedopuszczalne, jak popękanie części konstrukcyjnej. Fakt ten zaważył zapewne na braku prac, jego autorstwa, z dziedziny teorii plastyczności i częstym pomijaniu jego priorytetu.

5. Mimo że wzór matematyczny wyrażający warunek plastyczności jest taki sam, jego interpretacja fizyczna może być różna. Jeżeli go nazwać kryterium energii odkształcenia postaciowego, to zarówno priorytet, jak i interpretacja fizyczna należą do M. T. HUBERA. Kryterium drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia należy do R. von MISESA. Warto tu wspomnieć, że W. BURZYŃSKI [2] rozwinął w Polsce podejście MISESA w swojej hipotezie niezmienników.

Interpretacja A. NADAI'EGO upoważnia do nazwania warunku — kryterium intensywności naprężeń stycznych lub kryterium stycznego naprężenia ośmiościennego.

Ponieważ dwa najważniejsze i różne podejścia przy sformułowaniu warunku należały do M. T. HUBERA i R. von MISESA, wybraliśmy nazwę w tytule niniejszej pracy: warunek HUBERA-MISESA.

Fakt, że wszystkie powyżej wymienione interpretacje prowadzą do tego samego wzoru matematycznego świadczy o bogactwie teorii i jej pięknie.

Literatura cytowana w tekście

1. E. BELTRAMI, Rend. Inst. Lomb., **18** (1885), 704.
2. W. BURZYŃSKI, *Studium nad hypotezami wytężenia*, Lwów 1928.
3. A. C. ERINGEN, *Nonlinear theory of continuum media*, McGraw-Hill, 1962.
4. A. M. FREUDENTHAL, H. GEIRINGER, *The mathematical theories of the inelastic continuum*, Handbuch der Physik, tom VI, Springer-Verlag, 1958; także Moskwa 1962.
5. A. FÖPPL, *Vorlesungen über Technische Mechanik*.
6. Y. C. FUNG, *Foundations of solid mechanics*, Prentice Hall Inc. 1965; PWN, Warszawa 1969.
7. B. P. HAIGH, Brit. Ass. Reports, Section G. 1919.
8. H. von HELMHOLTZ, *Dynamik continuierlich verbreiteten Massen*, Lipsk 1902.
9. H. HENCKY, Zeits. ang. Math. u. Mech., **4** (1924), 323.
10. R. HILL, *The mathematical theory of placticity*, Clarendon Press, 1950; Techizdat, Moskwa 1956.
11. O. HOFFMANN, G. SACKS, *Introduction to the theory of plasticity for engineers*, McGraw-Hill, 1953; Maszgiz, Moskwa 1957.
12. M. T. HUBER, *O podstawach teorii wytrzymałości*, Prace matematyczno-fizyczne, tom XV, Warszawa 1903.
13. M. T. HUBER, *Właściwa praca odkształcenia jako miara wytężenia materiału*, Czasopismo Techniczne, Lwów 1904; także Pisma, tom II, PWN, Warszawa 1956.
14. M. T. HUBER, III Kongres Międzynarodowy Mechaniki Technicznej w Sztokholmie 24—29 VIII 1930, Przegląd Techniczny, Warszawa 1931.
15. M. T. HUBER, *Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej*, SIMP, Warszawa 1948.
16. А. А. Ильюшин, *Пластичность*, Гостехиздат 1948.
17. Л. М. Качанов, *Основы теории пластичности*, Наука, Москва 1969.
18. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność, wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
19. В. С. Ленский, *Введение в теорию пластичности*, т. I, 1968, т. II, 1969, Изд. Моск. Ун. М. В. Ломоносова.
20. H. LIPPMANN, *Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens*, Acta Mechanica, 8 (1969), 255—284.
21. R. von MISES, Göttinger Nachrichten, Math-Phys. Klasse, 582 - 592, 1913.
22. A. NADAI, Journ. Applied Physics, 8 (1937), 205 - 213.

23. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK, *Teoria Plastyczności*, praca zbiorowa, PWN, Warszawa. 1965
24. *Podstawy Techniki*, tom I z serii Encyklopedia Techniki, WNT, Warszawa 1974.
25. W. PRAGER, Ph. G. HODGE, *Theory of perfectly plastic solids*, John Wiley & Sons, 1951; także I. L. Moskwa 1956.
26. F. SCHLEICHER, *Der Spannungzustand an der Fließgrenze* (*Plastizitätsbedingug*), VDI Verlag, ZaMM, **6** (1926), 199-216.
27. В. В. СОКОЛОВСКИЙ, *Теория пластичности*, Москва 1968.
28. T. Y. THOMAS, *Plastic flow and fracture in solids*, Academic Press, 1961; także Mir, Moskwa 1964.
29. S. P. TIMOSHENKO, *Historia wytrzymałości materiałów* (tłum. z ang. Z. i H. OLESIAKOWIE), Arkady, 1966, s. 389 i 390.
30. Proceedings of Cambridge Phil. Soc., część 5, tom 32, listy J. C. Maxwella do W. Thomsona.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI
INSTYTUT MECHANIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 maja 1975 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 13 (1975)

PRZESTRZENNE DRGANIA ELEMENTU PRĘTOWO-BRYŁOWEGO

WACŁAW PRZYBYŁO (KRAKÓW)

1. Wstęp

W pracy [7] podano definicję układu prętowo-bryłowego, jako wspólnego modelu fizycznego do obliczeń nietłumionych, ustalonych, harmonicznych drgań, trzech rodzajów prefabrykowanych, szkieletowych konstrukcji inżynierskich — budynków szkieletowych, ramowych fundamentów pod maszyny o ruchu obrotowym i kopalnianych wież wyciągowych. Wprowadzono pojęcia elementu prętowego, tj. pręta wraz z przestrzennymi, nieważkimi, liniowymi i kątowymi więzami sprężystymi na końcach, oraz elementu prętowo-bryłowego, tj. układu złożonego z elementu prętowego wraz z dwoma bryłami sztywnymi przyłączonymi do jego końców.

W pracy [8], na podstawie [7], wyprowadzono macierzowe, niejednorodne równanie transformacyjne elementu prętowego.

W niniejszej pracy rozważono przestrzenne, nietłumione, własne i wymuszone, ustalone harmoniczne drgania elementu prętowo-bryłowego. Obciążenie przyjęto w postaci układu harmonicznych wektorów stanu (wektorów kąta obrotu, przemieszczenia, momentu i siły) o jednakowych częstościach i fazach drgań. Na podstawie [7] i [8] dla elementu prętowo-bryłowego wyprowadzono macierzowe, niejednorodne równanie transformacyjne metody przemieszczeń.

Przedstawiony w pracy sposób wyprowadzenia powyższego równania transformacyjnego był dla autora podstawą do prostego sformułowania równań drgań układu prętowo-bryłowego [10] oraz równań drgań sprężystego, tłumionego układu bryłowego [9] (tzw. metoda sztywnych elementów skończonych, por. np. [3, 4, 2]).

Wyniki niniejszej pracy mogą być również wykorzystane do znacznego uproszczenia opisanego w [1] algorytmu analizy tzw. ram krępych oraz opracowania algorytmu statycznej i dynamicznej analizy przestrzennych ram krępych.

W pracy stosujemy następujący sposób oznaczeń. Macierze oznaczamy dużymi literami pisanymi tłustym drukiem, przy czym litery bez kresek poziomych ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$) oznaczają macierze o wymiarze 3×3 lub innym określonym w tekście, litery z jedną kreską poziomą ($\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{B}}$) — macierze o wymiarze 6×6, a z dwiema kreskami poziomymi ($\bar{\bar{\mathbf{A}}}$, $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$) — macierze o wymiarze 12×12. Wektory (macierze kolumnowe) oznaczamy małymi literami pisanymi tłustym drukiem. Litery bez kreski ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) oznaczają wektory o trzech współrzędnych lub o liczbie współrzędnych określonej w tekście, litery z jedną kreską ($\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$) oznaczają wektory o sześciu współrzędnych, a z dwiema kreskami ($\bar{\bar{\mathbf{a}}}$, $\bar{\bar{\mathbf{b}}}$) — wektory o dwunastu współrzędnych. Zbiory elementów oznaczamy dużymi literami pisanymi.

W szczególności wektory przemieszczeń liniowych i kątów obrotu mają następujące współrzędne:

$$\Delta_C = \begin{Bmatrix} \Delta_C^x \\ \Delta_C^y \\ \Delta_C^z \end{Bmatrix}, \quad \varphi_C = \begin{Bmatrix} \varphi_C^x \\ \varphi_C^y \\ \varphi_C^z \end{Bmatrix}. \tag{1.1}$$

Wektor przemieszczeń uogólnionych punktu C wyraża się następująco:

$$\bar{\mathbf{u}}_C = \begin{Bmatrix} \varphi_C \\ \Delta_C \end{Bmatrix}. \tag{1.2}$$

Wektory siły i momentu w punkcie C mają współrzędne

$$\mathbf{p}_C = \begin{Bmatrix} p_C^x \\ p_C^y \\ p_C^z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m}_C = \begin{Bmatrix} m_C^x \\ m_C^y \\ m_C^z \end{Bmatrix}. \tag{1.3}$$

Wektor sił uogólnionych w punkcie C ma postać

$$\bar{\mathbf{p}}_C = \begin{Bmatrix} \mathbf{m}_C \\ \mathbf{p}_C \end{Bmatrix}. \tag{1.4}$$

Wektory przemieszczeń i sił uogólnionych pręta w punktach C_{ij} i C_{ji} określamy następująco:

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}_C = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{C_{ij}} \\ \bar{\mathbf{u}}_{C_{ji}} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{p}}}_C = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{C_{ij}} \\ \bar{\mathbf{p}}_{C_{ji}} \end{Bmatrix}. \tag{1.5}$$

Wektor stanu w punkcie C określamy relacją

$$\bar{\bar{\mathbf{z}}}_C = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_C \\ \bar{\mathbf{p}}_C \end{Bmatrix}. \tag{1.6}$$

2. Definicje elementów układu prętowo-bryłowego

Rozważamy ustrój złożony ze zbioru ważkich brył sztywnych, połączonych między sobą za pomocą dowolnej liczby jednorodnych, izotropowych, liniowo sprężystych, bisymetrycznych prętów pryzmatycznych o przekroju zwartym. Pręty oraz bryły węzłów są dowolnie położone w przestrzeni. Końce prętów połączone są z bryłami węzłów przestrzennymi, nieważkimi, liniowymi i kątowymi więzami sprężystymi. Pełną definicję układu prętowo-bryłowego podano w [7]. Tutaj przytoczymy tylko niezbędne pojęcia.

Układ prętowo-bryłowy $\mathscr{U} = \langle \mathscr{V}, \mathscr{F} \rangle$ jest parą uporządkowaną, w której $\mathscr{V}$ jest ustrojem prętowo-bryłowym, a $\mathscr{F}$ jest zbiorem sił zewnętrznych działających na ustrój $\mathscr{V}$.

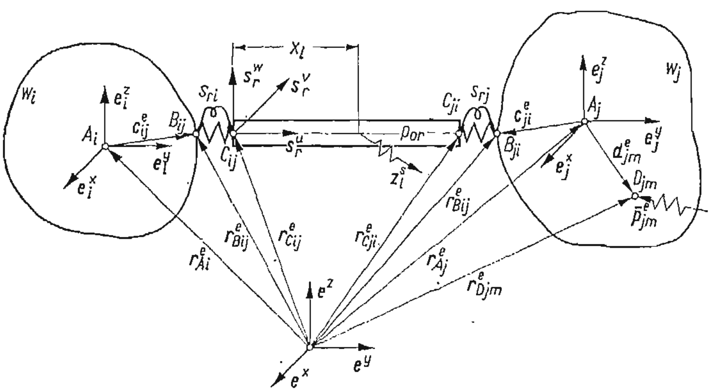
Ustrój prętowo-bryłowy $\mathscr{V} = \langle \mathscr{W}, \mathscr{P}, \mathrm{H}_0 \rangle$ jest trójką uporządkowaną, w której $\mathscr{W} = \langle w_i\colon \mathrm{i} \in \mathscr{I} \rangle$ jest zbiorem ważkich brył sztywnych, $\mathscr{P} = \langle p_r\colon r \in \mathscr{J} \rangle$ jest zbiorem elementów prętowych, $\mathbf{H}_0 = [h_{p,q}]$ jest macierzą przekrojów przywęzłowych, opisującą topologiczne własności połączeń elementów ustroju $\mathscr{V}$. Element macierzy

$$(2.1)\qquad h_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{dla } p = 2r-1 \text{ i } q = i, \\ 0 & \text{dla } p = 2r-1 \text{ i } q \neq i, \\ 1 & \text{dla } p = 2r \text{ i } q = j, \\ 0 & \text{dla } p = 2r \text{ i } q \neq j. \end{cases}$$

Wskaźnik $r \in \mathscr{J}$ jest numerem elementu prętowego p_r o początku połączonym z bryłą w_i i końcu połączonym z bryłą w_j. Zbiory $\mathscr{I}$ i $\mathscr{J}$ są skończonymi zbiorami wskaźników.

Zbiór sił zewnętrznych $\mathscr{F}$ składa się z dwu rozłącznych podzbiorów $\mathscr{F}_z$ i $\mathscr{F}_p$. Do zbioru $\mathscr{F}_z$ zaliczamy wymuszenia tzw. harmonicznymi wektorami stanu $\bar{\bar{\mathbf{z}}}$ [8], przyłożonymi na długości prętów. Do zbioru $\mathscr{F}_p$ zaliczamy harmoniczne wektory momentów i sił skupionych $\bar{\mathbf{p}}$ przyłożone do brył węzłów.

Wybierzmy pręt p_{0r}, którego końce C_{ij} i C_{ji} połączone są z punktami B_{ij} i B_{ji} brył w_i i $w_j \in \mathscr{W}$ za pomocą więzów sprężystych s_{ri} i s_{rj} (rys. 1).



Rys. 1

Łańcuch $p_r = \langle s_{ri}, p_{0r}, s_{rj} \rangle$, złożony z elementów sprężystych s_{ri} i s_{rj} oraz zawartego między nimi pręta p_{0r} nazywamy elementem prętowym. Element prętowy $p_r \in \mathscr{P}$ określony jest ciągiem parametrów

$$(2.2)\qquad p_r = \langle \mathbf{r}^e_{Cji}, \mathbf{r}^e_{Cji}, \mathbf{A}_r, F_r, I^u_r, C^u_r, I^v_r, I^w_r, E_r, \nu_r, \gamma_r, \bar{\mathbf{S}}_{ri}, \bar{\mathbf{S}}_{rj} \rangle,$$

w którym $\mathbf{r}^e_{Cij}$ i $\mathbf{r}^e_{Cji}$ są wektorami wodzącymi początku i końca pręta p_{0r} względem przyjętego w przestrzeni globalnego, ortogonalnego układu współrzędnych (e), $\mathbf{A}_r$ jest macierzą cosinusów kierunkowych wersorów przyjętego na pręcie lokalnego ortogonalnego układu współrzędnych (s_r) (możemy ją określić np. za pomocą wektorów $\mathbf{r}^e_{Cij}$ i $\mathbf{r}^e_{Cji}$ oraz kąta obrotu przekroju poprzecznego pręta wokół jego osi [11]), F_r, I^u_r, C^u_r, I^v_r, I^w_r oznaczają pole oraz momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta względem układu (s_r) [5], E_r, ν_r, γ_r oznaczają stałe materiałowe pręta, $\bar{\mathbf{S}}_{ri}(\bar{\mathbf{S}}_{rj})$ jest diagonalną macierzą sztywności więzów sprężystych $s_{ri}(s_{rj})$:

$$(2.3)\qquad \bar{\mathbf{S}}_{ri} = \operatorname{diag}[\varkappa^u_i, \varkappa^v_i, \varkappa^w_i, c^u_i, c^v_i, c^w_i],$$

względem układu współrzędnych (s_r).

Bryła węzła $w_i \in \mathscr{W}^k \subset \mathscr{W}$ (rys. 1) określona jest następującym ciągiem parametrów

$$w_i = \langle \mathbf{r}^e_{Ai}, v_i, \mathbf{T}_{Gi}, \gamma_i \rangle, \tag{2.4}$$

w którym $\mathbf{r}^e_{Ai}$ jest wektorem wodzącym środka ciężkości A_i bryły w_i względem układu współrzędnych (e), v_i jest objętością bryły w_i, $\mathbf{T}_{Gi}$ jest macierzą centralnych, geometrycznych momentów bezwładności bryły w_i względem układu współrzędnych (e_i) o początku w punkcie A_i i osiach równoległych do osi układu globalnego (e), γ_i jest ciężarem właściwym bryły w_i.

Element prętowo-bryłowy $s_r = \langle w_i, p_r, w_j \rangle$ jest łańcuchem, złożonym z brył w_i i $w_j \in \mathscr{W}$ połączonych elementem prętowym p_r (rys. 1). Układ prętowo-bryłowy $\mathscr{U}$ jest układem Clapeyrona ([5]). Ustrój prętowo-bryłowy $\mathscr{V}$ jest kinematycznie niezmienny.

Rozważamy drgania ustalone, zatem dalej będziemy rozważać amplitudy poszczególnych wielkości fizycznych.

3. Transformacje przemieszczeń i sił w elemencie prętowo-bryłowym

Rozważmy element prętowo-bryłowy $s_r = \langle w_i, p_r, w_j \rangle$ (rys. 1). Obecnie określimy wektorowe pole przemieszczeń w bryłach węzłów w_i i w_j, sposób transformacji wektorów przemieszczeń z punktów A_i i A_j do punktów B_{ij} i B_{ji} oraz transformacje wektorów sił z punktów B_{ij} i B_{ji} do punktów A_i i A_j.

3.1. Wektorowe pole przemieszczeń punktów bryły węzła. W bryle węzła w_i (rys. 1) określamy wektorowe pole przemieszczeń wywołane wektorem przemieszczeń uogólnionych $\bar{\mathbf{u}}^e_{Ai}$ jej środka ciężkości A_i. Dowolny punkt bryły węzła o wektorze wodzącym (mimośrodzie) względem punktu A_i

$$\mathbf{c}^e_{ij} = \begin{Bmatrix} c^x_{ij} \\ c^y_{ij} \\ c^z_{ij} \end{Bmatrix} = \mathbf{r}^e_{Bij} - \mathbf{r}^e_{Ai} \tag{3.1}$$

ma wektor przemieszczenia

$$\bar{\mathbf{u}}^e_{Bij}(t) = \bar{\mathbf{C}}_{ij} \bar{\mathbf{u}}^e_{Ai}(t). \tag{3.2}$$

W powyższym wzorze macierz $\bar{\mathbf{C}}_{ij}$ mimośrodu punktu B_{ij} względem punktu A_i ma postać:

$$\bar{\mathbf{C}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}, & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{ij}, & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{C}_{ij} = \begin{bmatrix} 0\ , & +c^z_{ij}, & -c^y_{ij} \\ -c^z_{ij}, & 0\ , & +c^x_{ij} \\ +c^y_{ij}, & -c^x_{ij}, & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

3.2. Transformacje przemieszczeń w bryle węzła. Korzystając z relacji (3.2) transformację wektora $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_A$ na wektor $\bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_B$ przedstawiamy w formie

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_B = \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_A, \tag{3.4}$$

w której

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{ij}, & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}\ , & \bar{\mathbf{C}}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_B = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^e_{Bij} \\ \bar{\mathbf{u}}^e_{Bji} \end{Bmatrix}, \quad \bar{\bar{\mathbf{u}}}^e_A = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^e_{Ai} \\ \bar{\mathbf{u}}^e_{Aj} \end{Bmatrix}. \tag{3.5}$$

Transformację wektora $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^e$ na wektor $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^s$ zapiszemy teraz w postaci

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^s = \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^e, \tag{3.6}$$

w której

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}}_r = \mathrm{diag}[\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_r, \mathbf{A}_r, \mathbf{A}_r] \tag{3.7}$$

oznacza blokowo-diagonalną macierz o wymiarze 12×12, a blok $\mathbf{A}_r$ o wymiarze 3×3 jest macierzą cosinusów kierunkowych układu lokalnego (s_r) względem układu globalnego (e).

Na podstawie relacji (3.4) i (3.6) łączną transformację wektora $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_A^e$ na wektor $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^s$ przedstawiamy wzorem ([6])

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^s = \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}_A^e = \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}_A^e, \tag{3.8}$$

w którym macierz

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}}_r = \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r, \tag{3.9}$$

czyli

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}}_r = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_{ri}, & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & , \bar{\mathbf{D}}_{rj} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}}_{ri} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & , \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_r \mathbf{C}_{ij}, & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{D}}_{rj} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r & , \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_r \mathbf{C}_{ji}, & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

3.3. Transformacja sił w bryle węzła. Transformację wektorów sił w punktach B_{ij} i B_j z układu lokalnego (s_r) do układu globalnego (e) przedstawiamy w postaci

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^e = \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^s. \tag{3.11}$$

Z kolei transformujemy $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^e$ na $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^e$, mianowicie

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^e = \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^e. \tag{3.12}$$

Na podstawie powyższych relacji pełną transformację wektora $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^s$ na wektor $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^e$ przedstawiamy relacją ([6])

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^e = \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^s = \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^s. \tag{3.13}$$

4. Równanie transformacyjne elementu prętowo-bryłowego

Dla elementu prętowego w pracy [8] wyprowadzono następujące niejednorodne, macierzowe równanie transformacyjne amplitud

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^s = \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x \bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^s + \bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^{0s}. \tag{4.1}$$

W powyższym równaniu $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^s$ jest wektorem sił brzegowych w punktach B_{ij} i B_{ji}, $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^s$ jest wektorem przemieszczeń brzegowych, $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^{0s}$ jest wektorem wyjściowych sił brzegowych (wywołanych obciążeniem przyłożonym na długości pręta), $\bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x$ jest macierzą sztywności dynamicznej elementu prętowego p_r. Na podstawie [8] wielkości te przedstawiamy następującymi wzorami:

$$\bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x = \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r(\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\beta} + \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\alpha}\bar{\bar{\mathbf{K}}}_r)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\beta}, \quad \text{lub} \quad \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x = \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_r^x, \tag{4.2}$$

gdzie macierz

$$\bar{\bar{\mathbf{Q}}}_r^x = (\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\beta} + \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\alpha}\bar{\bar{\mathbf{K}}}_r)^{-1}\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\beta}. \tag{4.3}$$

W powyższych relacjach $\bar{\bar{\mathbf{K}}}_r$ jest macierzą sztywności dynamicznej pręta o obu końcach sztywno połączonych z węzłami,

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\alpha} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{r\alpha i}, \bar{0} \\ \bar{0} \quad, \bar{\mathbf{S}}_{r\alpha j} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \bar{\bar{\mathbf{S}}}_{r\beta} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{S}}_{r\beta i}, \bar{0} \\ \bar{0} \quad, \bar{\mathbf{S}}_{r\beta j} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

są macierzami uwzględniającymi sztywności więzów sprężystych s_{rl} i s_{rj}.

Macierze $\bar{\mathbf{S}}_{r\alpha i}$ i $\bar{\mathbf{S}}_{r\beta i}$ ($\bar{\mathbf{S}}_{r\alpha j}$ i $\bar{\mathbf{S}}_{r\beta j}$), występujące w powyższych zależnościach określone są przez

$$\bar{\mathbf{S}}_{r\alpha i} = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{\varkappa_i^u + \frac{GC^u}{l}}, \frac{1}{\varkappa_i^v + \frac{EI^y}{l}}, \frac{1}{\varkappa_i^w + \frac{EI^w}{l}}, \frac{1}{c_i^u + \frac{EF}{l}}, \frac{1}{c_i^v + \frac{EI^w}{l^3}}, \frac{1}{c_i^w + \frac{EI^v}{l^3}}\right], \tag{4.5}$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{r\beta i} = \operatorname{diag}\left[\frac{\varkappa_i^u}{\varkappa_i^u + \frac{GC^u}{l}}, \frac{\varkappa_i^v}{\varkappa_i^v + \frac{EI^v}{l}}, \frac{\varkappa_i^w}{\varkappa_i^w + \frac{EI^w}{l}}, \frac{c_i^u}{c_i^u + \frac{EF}{l}}, \frac{c_i^v}{c_i^v + \frac{EI^w}{l^3}}, \frac{c_i^w}{c_i^w + \frac{EI^v}{l^3}}\right], \tag{4.6}$$

Wektor $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^{0s}$ wyjściowych sił brzegowych w punktach węzłowych wyraża się wzorem

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^{0s} = \sum_{l=1}^{p} \bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s}, \tag{4.7}$$

gdzie wektor $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s}$ jest wektorem wyjściowych sił brzegowych, wywołanym przez wymuszający wektor stanu $\bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s$ ($l = 1, 2, \ldots, p$) według relacji

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_{Bij,l}^{0s} \\ \bar{\mathbf{p}}_{Bji,l}^{0s} \end{Bmatrix} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}^x \bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s. \tag{4.8}$$

Macierz $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}^x$ transformacji wymuszającego wektora stanu $\bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s$ na wektor $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Bl}^{0s}$ jest określona relacją [8]

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}^x = \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_r^x \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^{-1} \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}, \tag{4.9}$$

w której macierz $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}$ jest macierzą transformacji wymuszającego wektora stanu $\bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s$ na wektor wyjściowych sił brzegowych $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Cl}^{0s}$ pręta o obu końcach sztywno połączonych z węzłami (por. [8]).

Do wyprowadzenia równania transformacyjnego elementu prętowo-bryłowego wykorzystamy teraz wzory (3.8), (3.13) i (4.1). Wstawiając $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_B^s$ z (3.8) do (4.1), a następnie $\bar{\bar{\mathbf{p}}}_B^s$ z (4.1) do (3.13), przy wykorzystaniu równości (3.10) mamy relację

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^e = \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}_A^e + \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}^x \bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s. \tag{4.10}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_r = \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r^x \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r = \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{K}}}_r \bar{\bar{\mathbf{Q}}}_r^x \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r, \tag{4.11}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{L}}}_{rl} = \bar{\bar{\mathbf{D}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}^x = \bar{\bar{\mathbf{C}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{A}}}_r^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}_{rl}^x, \tag{4.12}$$

równanie transformacyjne (4.10) elementu prętowo-bryłowego przedstawiamy w formie

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_A^e = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}_A^e + \bar{\bar{\mathbf{L}}}_{rl} \bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_r \bar{\bar{\mathbf{u}}}_A^e + \bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Al}^{0e}, \tag{4.13}$$

gdzie

$$\bar{\bar{\mathbf{p}}}_{Al}^{0e} = \bar{\bar{\mathbf{L}}}_{rl} \bar{\bar{\mathbf{z}}}_l^s. \tag{4.14}$$

Relację (4.14), określającą wektor wyjściowych sił brzegowych wyprowadzono dla przypadku, gdy pręt p_{0r} poddany jest działaniu tylko jednego wymuszającego wektora stanu $\overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s$ w punkcie o współrzędnej $x = x_l$. Gdy na pręt p_{0r} działa układ wektorów stanu $\overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s$ $(l = 1, 2, \ldots, p)$, wówczas, korzystając z zasady superpozycji, wektor wyjściowych sił brzegowych wyrazimy równością

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^{0e} = \begin{Bmatrix} \overline{\mathbf{p}}_{Ai}^{0e} \\ \overline{\mathbf{p}}_{Aj}^{0e} \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{p} \overline{\overline{\mathbf{p}}}_{Al}^{0e} = \sum_{l=1}^{p} \overline{\overline{\mathbf{L}}}_{rl} \overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s = \overline{\overline{\mathbf{D}}}_r^T \sum_{l=1}^{p} \overline{\overline{\mathbf{F}}}_l^x \overline{\overline{\mathbf{z}}}_l^s. \tag{4.15}$$

Gdy pręt p_{0r} nie jest obciążony wymuszającym wektorem stanu, równanie (4.13) zredukuje się do postaci

$$\overline{\overline{\mathbf{p}}}_A^e = \overline{\overline{\mathbf{G}}}_r \overline{\overline{\mathbf{u}}}_A^e. \tag{4.16}$$

Powyższe równanie podaje transformację przemieszczeń punktów A_i i A_j na siły w tych punktach. Transformacja ta odbywa się w bryłach w_i i w_j, połączonych elementem prętowym p_r. Równanie (4.16) nazwiemy równaniem fizycznym elementu prętowo-bryłowego. Możemy je rozpisać następująco:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{p}}_{Ai}^e &= \overline{\mathbf{G}}_{ij,i} \overline{\mathbf{u}}_{Ai}^e + \overline{\mathbf{G}}_{ij,j} \overline{\mathbf{u}}_{Aj}^e, \\ \overline{\mathbf{p}}_{Aj}^e &= \overline{\mathbf{G}}_{ji,i} \overline{\mathbf{u}}_{Ai}^e + \overline{\mathbf{G}}_{ji,j} \overline{\mathbf{u}}_{Aj}^e. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Macierze $\overline{\mathbf{G}}_{ij,i}$, $\overline{\mathbf{G}}_{ij,j}$, $\overline{\mathbf{G}}_{ji,i}$, $\overline{\mathbf{G}}_{ji,j}$ (6×6) są blokami macierzy $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_r$ według równości

$$\overline{\overline{\mathbf{G}}}_r = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}_{ij,i}, & \overline{\mathbf{G}}_{ij,j} \\ \overline{\mathbf{G}}_{ji,i}, & \overline{\mathbf{G}}_{ji,j} \end{bmatrix}. \tag{4.18}$$

Korzystając z relacji (4.11) powyższe bloki przedstawiamy w postaci następujących iloczynów macierzy:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{G}}_{ij,i} &= \overline{\mathbf{D}}_{ri}^T \overline{\mathbf{K}}_{ii}^x \overline{\mathbf{D}}_{ri}, & \overline{\mathbf{G}}_{ij,j} &= \overline{\mathbf{D}}_{ri}^T \overline{\mathbf{K}}_{ij}^x \overline{\mathbf{D}}_{rj}, \\ \overline{\mathbf{G}}_{ji,i} &= \overline{\mathbf{D}}_{rj}^T \overline{\mathbf{K}}_{ij}^x \overline{\mathbf{D}}_{ri}, & \overline{\mathbf{G}}_{ji,j} &= \overline{\mathbf{D}}_{rj}^T \overline{\mathbf{K}}_{jj}^x \overline{\mathbf{D}}_{rj}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

W powyższych wyrażeniach $\overline{\mathbf{K}}_{ii}^x$, $\overline{\mathbf{K}}_{ij}^x$, $\overline{\mathbf{K}}_{ji}^x$, $\overline{\mathbf{K}}_{jj}^x$ są blokami (6×6) macierzy $\overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x$ według równości

$$\overline{\overline{\mathbf{K}}}_r^x = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}_{ii}^x, & \overline{\mathbf{K}}_{ij}^x \\ \overline{\mathbf{K}}_{ji}^x, & \overline{\mathbf{K}}_{jj}^x \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Zauważmy jeszcze, że na podstawie wzoru (4.11) macierz $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_r$ jest symetryczna.

5. Równania układu prętowo-bryłowego

Do analizy nietłumionych, ustalonych, własnych i wymuszonych, harmonicznych drgań układu prętowo-bryłowego, w pracy [10] sformułowano macierzowe równania ciągłości przemieszczeń, fizyczne i równowagi kinetostatycznej. W równaniach uwzględniono geometryczne i mechaniczne własności elementów, a także topologiczne własności ich wzajemnych połączeń. Na podstawie powyższych równań wyprowadzono ostateczne macierzowe równanie kanoniczne metody przemieszczeń układu prętowo-bryłowego, które przedstawia się następująco:

$$(5.1)\qquad (\mathbf{H}^T\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{K}(\omega)\mathbf{Q}^x\mathbf{ACH}-\omega^2\mathbf{B})\mathbf{u}_A^e = \mathbf{C}^{0T}\mathbf{p}_D^e-\mathbf{H}^T\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T\mathbf{q}_B^{0s}.$$

Poniżej podajemy znaczenie poszczególnych symboli. $\mathbf{H}$ jest macierzą, otrzymaną z macierzy przekrojów przywęzłowych $\mathbf{H}_0$, po wstawieniu do niej na miejsce zer i jedynek bloków zerowych i jednostkowych o wymiarze 6×6.

$$(5.2)\qquad \mathbf{C} = \mathrm{diag}[\overline{\overline{\mathbf{C}}}_r], \quad (r \in \mathscr{J})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą mimośrodów.

$$(5.3)\qquad \mathbf{A} = \mathrm{diag}\ [\overline{\overline{\mathbf{A}}}_r], \quad (r \in \mathscr{J})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą transformacji z układu globalnego (e) do układów lokalnych (s_r), $(r \in \mathscr{J})$.

$$(5.4)\qquad \mathbf{K} = \mathrm{diag}[\overline{\overline{\mathbf{K}}}_r], \quad (r \in \mathscr{J})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą sztywności.

$$(5.5)\qquad \mathbf{Q}^x = \mathrm{diag}[\overline{\overline{\mathbf{Q}}}{}_r^x], \quad (\mathbf{r} \in \mathscr{J}).$$

jest blokowo-diagonalną macierzą więzów sprężystych.

$$(5.6)\qquad \mathbf{B} = \mathrm{diag}[\overline{\mathbf{B}}_i], \quad (i \in \mathscr{J})$$

jest blokowo-diagonalną macierzą bezwładności brył węzłów. $\mathbf{p}_D^e$ jest wektorem sił wymuszających przyłożonych do brył węzłów. $\mathbf{C}^0$ jest macierzą redukcji wektorów sił wymuszających do środków ciężkości brył węzłów. $\mathbf{q}_B^{0s}$ jest wektorem wyjściowych sił brzegowych, wywołanych obciążeniami przyłożonymi na długości prętów.

Równanie (5.1) przedstawiamy teraz w postaci

$$(5.7)\qquad \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{u}_A^e = \mathbf{p}_A^e,$$

w której $\mathbf{Z}(\omega)$ jest macierzą dynamicznej sztywności układu prętowo-bryłowego, $\mathbf{u}_A^e$ jest wektorem przemieszczeń uogólnionych układu, $\mathbf{p}_A^e$ jest wektorem sił uogólnionych układu.

Po narzuceniu na część przemieszczeń uogólnionych zerowych warunków kinematycznych, równanie (5.7) przedstawiamy w formie blokowej

$$(5.8)\qquad \begin{bmatrix} \mathbf{z}^{kk} & \vdots & \mathbf{z}^{kp} \\ \cdots & & \cdots \\ \mathbf{z}^{pk} & \vdots & \mathbf{z}^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A^{ke} \\ \cdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_A^{ke} \\ \cdots \\ \mathbf{r}_A^{ke} \end{Bmatrix},$$

z której otrzymamy układ dwu równań macierzowych

$$(5.9)\qquad \mathbf{z}^{kk}(\omega)\mathbf{u}_A^{ke} = \mathbf{p}_A^{ke},$$

$$(5.10)\qquad \mathbf{z}^{pk}(\omega)\mathbf{u}_A^{ke} = \mathbf{r}_A^{ke}.$$

W powyższych równaniach niewiadomymi są wektory $\mathbf{u}_A^{ke}$ — niezerowych przemieszczeń uogólnionych i $\mathbf{r}_A^{ke}$ — reakcji podłoża na układ. Wektor $\mathbf{u}_A^{ke}$ wyznaczamy z równania (5.9), a następnie obliczamy wektor $\mathbf{r}_A^{ke}$ z relacji (5.10).

Dla przypadku drgań własnych musimy rozwiązać równanie jednorodne

$$(5.11)\qquad \mathbf{z}^{kk}(\omega)\mathbf{u}_A^{ke} = 0.$$

Jak wiadomo, warunkiem istnienia niezerowego rozwiązania powyższego równania jest spełnienie relacji

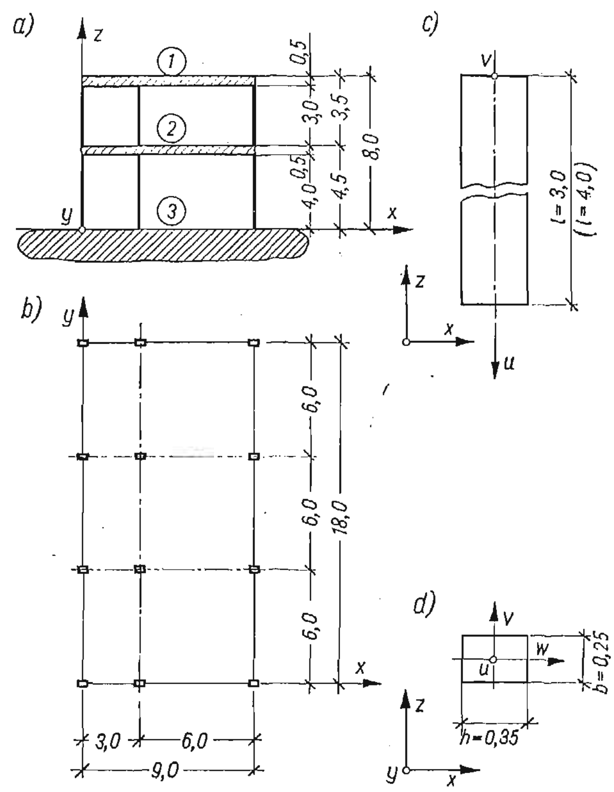
$$\det\left(z^{kk}(\omega)\right) = 0. \tag{5.12}$$

Równanie (5.12) jest równaniem przestępnym. Najprostszą i równocześnie skuteczną metodą numerycznego rozwiązania tego równania jest metoda bisekcji.

Do powyższych obliczeń autor wykonał pakiet programów na EMC ODRA 1204 w językach MOST i ALGOL 1204.

6. Przykład liczbowy

Rozważmy drgania własne ustroju prętowo-bryłowego, przedstawionego na rys. 2. Ustrój składa się z dwu jednakowych, ruchomych brył węzłów, jednej nieruchomej bryły tworzącej podłoże, oraz 24 prętów — po 12 między każdymi dwoma bryłami. Jako materiał



Rys. 2

przyjęto żelbet z betonu marki Rw 200, o module sprężystości podłużnej $E = 2{,}9\times 10^{2}\,\mathrm{Tm^{-2}}$, współczynniku Poissona $\nu = 1/6$ i ciężarze właściwym $\gamma = 2{,}4\ \mathrm{Tm^{-3}}$. W układzie SI powyższe stałe materiałowe mają wartości $E = 28{,}4393\times 10^{6}\ \mathrm{kNm^{-2}}$, $\nu = 1/6$, $\gamma = 23{,}5360\ \mathrm{kNm^{-3}}$. Przyśpieszenie ziemskie $g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}}$.

Wszystkie pręty mają taki sam przekrój o wymiarach: $b = 0{,}25$ m, $h = 0{,}35$ m (rys. 2c i 2d). Współczynniki charakteryzujące przekrój pręta mają następujące wartości: pole przekroju poprzecznego

$$F = b\times h = 0{,}25\times 0{,}35 = 0{,}0875 \text{ m}^2,$$

momenty bezwładności względem układu lokalnego (rys. 2c i 2d)

$$I^v = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}25\times 0{,}35^3}{12} = 8{,}9323\times 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$I^w = \frac{hb^3}{12} = \frac{0{,}35\times 0{,}25^3}{12} = 4{,}5573\times 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$I^u = I^v + I^w = 13{,}4896\times 10^{-4} \text{ m}^4,$$

współczynnik charakteryzujący sztywność pręta na skręcanie [5]

$$C^u = \frac{b^4}{3}\left(\frac{h}{b} - 0{,}630 + 0{,}052\times\left(\frac{b}{h}\right)^4\right) =$$

$$= \frac{0{,}25^4}{3}\left(\frac{0{,}35}{0{,}25} - 0{,}630 + 0{,}052\times\left(\frac{0{,}25}{0{,}35}\right)^4\right) = 10{,}2018\times 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Współczynniki charakteryzujące własności geometryczne brył ruchomych mają następujące wartości: objętość bryły

$$v = a\times c\times d = 9\times 0{,}5\times 18 = 81 \text{ m}^3,$$

geometryczne momenty bezwładności

$$I^x = \frac{v(d^2+c^2)}{12} = \frac{81(18^2+0{,}5^2)}{12} = 2188{,}7 \text{ m}^4,$$

$$I^y = \frac{v(c^2+a^2)}{12} = \frac{81(0{,}5^2+9^2)}{12} = 548{,}4 \text{ m}^4,$$

$$I^z = \frac{v(a^2+d^2)}{12} = \frac{81(9^2+18^2)}{12} = 2733{,}8 \text{ m}^4,$$

geometryczne momenty dewiacji

$$D^{xy} = D^{yz} = D^{zx} = 0.$$

Macierz przekrojów przywęzłowych $\mathbf{H}_0$ przedstawiamy równością

$$\mathbf{H}_0^T = [\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2],$$

w której

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz tę w sposób skrócony możemy zapisać w postaci macierzy $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U}^T = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2],$$

w której

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 2, & 2, & 2, & 2 \\ 3, & 3, & 3, & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ 2, & 2, & 2, & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład nr 1

Obliczenia częstosci drgan własnych. Iteracje:

t= .000000000000$_{10}$+00	w= .546618811749$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .100000000001$_{10}$+01	w= .530418011105$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .200000000003$_{10}$+01	w= .483705960124$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .300000000008$_{10}$+01	w= .411929680243$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .400000000006$_{10}$+01	w= .323440541518$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .500000000007$_{10}$+01	w= .228471772351$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .600000000013$_{10}$+01	w= .137838720648$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .700000000004$_{10}$+01	w= .614838189088$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .799999999995$_{10}$+01	w= .700947045414$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .900000000001$_{10}$+01	w=-.216461159255$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .849999999998$_{10}$+01	w=-.106179339456$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .825000000004$_{10}$+01	w=-.263198900558$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .812500000007$_{10}$+01	w= .198252216424$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .818749999998$_{10}$+01	w=-.376425203399$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .815624999995$_{10}$+01	w= .790139785538$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .817187500004$_{10}$+01	w= .203628143192$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .817968750001$_{10}$+01	w=-.872060559624$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817578124995$_{10}$+01	w= .580092121097$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817773437498$_{10}$+01	w=-.146488796303$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001

l= 1 omega[1]= .817675781254$_{10}$ 01
wspolczynnik redukcji= .100$_{10}$ 001

t= .100000000001$_{10}$+02	w=-.252340868666$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .110000000000$_{10}$+02	w=-.977565771267$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .120000000002$_{10}$+02	w= .134244455940$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .115000000002$_{10}$+02	w= .175679820661$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .112500000002$_{10}$+02	w=-.415001799132$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .113750000001$_{10}$+02	w=-.121694724897$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .114375000002$_{10}$+02	w= .266751282970$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .114062500002$_{10}$+02	w=-.476132861118$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .114218750002$_{10}$+02	w=-.104919502649$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .114296875000$_{10}$+02	w= .808624823614$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .114257812501$_{10}$+02	w=-.120423334788$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .114277343752$_{10}$+02	w= .344066740462$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001

l= 2 omega[2]= .114267578127$_{10}$ 02
wspolczynnik redukcji= .100$_{10}$ 001

Koniec obliczen czestosci drgan wlasnych

Liczba czestosci= 2

Omega[1]= .817675781254$_{10}$ 01
Omega[2]= .114267578127$_{10}$ 02

Obliczenia czestosci drgan wlasnych. Iteracje:

t= .817578124995$_{10}$+01	w= .580092121097$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817773437498$_{10}$+01	w=-.146488796303$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817675781254$_{10}$+01	w= .216675418733$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817724609376$_{10}$+01	w= .350615500230$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817749023444$_{10}$+01	w=-.557214971653$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817736816410$_{10}$+01	w=-.103318540757$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817730712886$_{10}$+01	w= .123646212846$_{10}$+075	x= .100$_{10}$+001
t= .817733764655$_{10}$+01	w= .101631601326$_{10}$+074	x= .100$_{10}$+001
t= .817735290525$_{10}$+01	w=-.465776368486$_{10}$+074	x= .100$_{10}$+001
t= .817734527583$_{10}$+01	w=-.182077792595$_{10}$+074	x= .100$_{10}$+001
t= .817734146119$_{10}$+01	w=-.402365914049$_{10}$+073	x= .100$_{10}$+001
t= .817733955387$_{10}$+01	w= .307107168582$_{10}$+073	x= .100$_{10}$+001
t= .817734050746$_{10}$+01	w=-.476296979597$_{10}$+072	x= .100$_{10}$+001
t= .817734003074$_{10}$+01	w= .129738309106$_{10}$+073	x= .100$_{10}$+001
t= .817734026910$_{10}$+01	w= .410549426580$_{10}$+072	x= .100$_{10}$+001
t= .817734038828$_{10}$+01	w=-.324362532575$_{10}$+071	x= .100$_{10}$+001
t= .817734032876$_{10}$+01	w= .189057442842$_{10}$+072	x= .100$_{10}$+001
t= .817734035845$_{10}$+01	w= .783084378977$_{10}$+071	x= .100$_{10}$+001
t= .817734037344$_{10}$+01	w= .242638212100$_{10}$+071	x= .100$_{10}$+001
t= .817734038086$_{10}$+01	w=-.496950094091$_{10}$+070	x= .100$_{10}$+001
t= .817734037707$_{10}$+01	w= .832158625278$_{10}$+070	x= .100$_{10}$+001
t= .817734037897$_{10}$+01	w= .123289145594$_{10}$+070	x= .100$_{10}$+001

l= 1 omega[1]= .817734037998$_{10}$ 01
wspolczynnik redukcji= .100$_{10}$ 001

Koniec obliczen czestosci drgan wlasnych

Liczba czestosci= 1

Omega[1]= .817734037998$_{10}$ 01

Tablica 3

Obliczenia czestosci drgan wlasnych. Iteracje:

t= .000000000000$_{10}$+00	w= .546618811749$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .500000000007$_{10}$+00	w= .542538631190$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .100000000001$_{10}$+01	w= .530418011105$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .150000000004$_{10}$+01	w= .510613156955$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .200000000003$_{10}$+01	w= .483705960124$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .250000000005$_{10}$+01	w= .450486591818$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .300000000008$_{10}$+01	w= .411929680243$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .350000000003$_{10}$+01	w= .369164599496$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .400000000006$_{10}$+01	w= .323440541518$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .450000000009$_{10}$+01	w= .276087170355$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .500000000007$_{10}$+01	w= .228471772351$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .550000000010$_{10}$+01	w= .181953915663$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .600000000013$_{10}$+01	w= .137838720648$_{10}$+080	x= .100$_{10}$+001
t= .650000000001$_{10}$+01	w= .973299049241$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .700000000004$_{10}$+01	w= .614838189088$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .750000000007$_{10}$+01	w= .311657115073$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .799999999995$_{10}$+01	w= .700947045414$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .849999999998$_{10}$+01	w=-.106179339456$_{10}$+079	x= .100$_{10}$+001
t= .825000000004$_{10}$+01	w=-.263198900558 +078	x= .100$_{10}$+001
t= .812500000007$_{10}$+01	w= .198252216424$_{10}$+078	x= .100$_{10}$+001
t= .818749999998$_{10}$+01	w=-.376425203399$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .815624999995$_{10}$+01	w= .790139785538$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .817187500004$_{10}$+01	w= .203628143192$_{10}$+077	x= .100$_{10}$+001
t= .817968750001$_{10}$+01	w=-.872060559624$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817578124995$_{10}$+01	w= .580092121097$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001
t= .817773437498$_{10}$+01	w=-.146488796303$_{10}$+076	x= .100$_{10}$+001

l= 1 omega[1]= .817675781254$_{10}$ 01
wspolczynnik redukcji= .100$_{10}$ 001

Koniec obliczen czestosci drgan wlasnych

Liczba czestosci= 1

Omega[1]= .817675781254$_{10}$ 01

Wyniki obliczeń na EMC ODRA-1204 dwu najniższych częstości drgań własnych przedstawiono w tablicach 1, 2 i 3. Wszystkie obliczenia wykonano dla wielkości wymiarowych określonych w układzie SI.

W tablicy 1 przedstawiono iteracje z początkowymi wartościami częstości drgań $\omega_0 = 0\ s^{-1}$ i kroku $kr = 1\ s^{-1}$. Częstotliwości odpowiadające częstościom drgań, obliczonym z dokładnością $10^{-3}\ s^{-1}$, wynoszą

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{8,176}{6,283} = 1,301\ \mathrm{Hz},$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{11,427}{6,283} = 1,819\ \mathrm{Hz}.$$

Dla porównania w tablicy 2 przedstawiono obliczenia najniższej częstości drgań własnych z dokładnością do $10^{-9}\ s^{-1}$, a w tablicy 3 przedstawiono obliczenie najniższej częstości drgań własnych z dokładnością do $10^{-3}\ s^{-1}$ z początkowymi wartościami częstości $\omega_0 = 0\ s^{-1}$ i kroku $kr = 0,5\ s^{-1}$.

Ponieważ w powyższych obliczeniach wartość $w = \det[\mathbf{z}(\omega)]$ nie przekraczała zakresu liczb zmiennoprzecinkowych, nie stosowano redukcji współczynników macierzy sztywności $\mathbf{z}$, zatem współczynnik redukcji $x = 1$.

Czas obliczeń jednej iteracji wynosił około 14 s.

7. Uwagi końcowe

Dla elementu prętowo-bryłowego pręta wraz z dwoma bryłami węzłów przyłączonymi do jego końców za pomocą nieważkich, przestrzennych, punktowych, liniowych i kątowych więzów sprężystych — w pracy wyprowadzono dynamiczne, macierzowe, niejednorodne równanie transformacyjne metody przemieszczeń. Określono dwie macierze: macierz $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_r$ sztywności dynamicznej elementu prętowo-bryłowego i macierz $\overline{\overline{\mathbf{L}}}_{r1}$ transformacji wymuszającego wektora stanu na wektor wyjściowych sił brzegowych, przyłożonych w środkach ciężkości brył. Przytoczono równanie metody przemieszczeń układu prętowo-bryłowego. Dla przykładowego ustroju prętowo-bryłowego obliczono dwie najniższe częstości drgań własnych.

Pełny algorytm numerycznej analizy drgań układu prętowo-bryłowego, problemy stabilności numerycznej oraz opis pakietu programów zostaną przedstawione w oddzielnych opracowaniach.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. BOROWIEC, *Obliczanie sił przywęzłowych w elementach krępej ramy przestrzennej*, Arch. Inż. Ląd., 1, **18** (1972) 87 - 101.
2. W. GAWROŃSKI, J. KRUSZEWSKI, *Analiza drgań wymuszonych złożonych układów liniowych metodą sztywnych elementów skończonych*, Arch. Bud. Masz., 4, **19** (1972), 623 - 641.
3. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, nr 165, Mechanika XII, 1970.

4. J. KRUSZEWSKI, *Zastosowanie metody sztywnych elementów skończonych do obliczeń częstości drgań własnych ustrojów okrętowych*, Mech. Teoret. i Stos., 4, 9 (1971) 499 - 516.
5. W. NOWACKI, *Mechanika Budowli*, PWN, Warszawa t. 1, wyd. 1, 1957, t. 2, wyd. 1, 1960.
6. W. PRZYBYŁO, *Algorytm blokowy obliczeń drgań harmonicznych przestrzennych ustrojów prętowych o niecentrycznych węzlach*, Dynamika Maszyn, Zbiór prac II Konferencji PAN i RzTPN (Rzeszów, VI. 1969), Rzeszów 1972, 35 - 43.
7. W. PRZYBYŁO, *Układ prętowo-bryłowy jako model fizyczny do analizy drgań przestrzennych konstrukcji szkieletowych*, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Komunikat nr 145, 1974.
8. W. PRZYBYŁO, *Przestrzenne drgania pręta o sprężystych podparciach końców*, Arch. Inż. Ląd., 2, 20 (1974) 265 - 278.
9. W. PRZYBYŁO, *Automatyzacja obliczeń drgań sprężystych, tłumionych układów bryłowych*, Arch. Bud. Masz., 3, 21 (1974) 419 - 433.
10. W. PRZYBYŁO, *Ustalone drgania układu prętowo-bryłowego*, Arch. Inż. Ląd. (w przygotowaniu do druku).
11. J. SZMELTER, M. DACKO, S. DOBROCIŃSKI, M. WIECZOREK, *Programy metody elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1973.

Резюме

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕМЕНТА СИСТЕМЫ СОСТОЯЩЕЙ ИЗ СТЕРЖНОЙ И НЕДЕФОРМИРУЕМЫХ МАСС

В работе рассматриваются пространственные недемфированные собственные и вынужденные установившиеся гармонические колебания элемента системы состоящей из бисимметрического упругого призматического стержня, концы которого соединены с помощью невесомых линейных и угловых упругих связей с двумя жесткими массами. Нагрузка принималась в виде системы гармонических векторов состояния с одинаковыми частотами и фазами колебаний. Для состоящего из стержня и масс элемента выводятся матричные неоднородные трансформационные уравнения метода перемещений.

Summary

SPATIAL VIBRATIONS OF ROD-BODY ELEMENT

In the paper are considered spatial, undamped, free and forced, steady-state harmonic vibrations of a rod-body element — the system composed of a bisymmetric, elastic rod the ends of which are connected with two rigid bodies by means of spatial, weightless supports of both the displacement and rotation types. The loading is assumed to form a system of harmonic state vectors with identical frequencies and phases of vibrations. A matrix-type nonhomogeneous transformation equation is derived, based on the displacement method.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 3 lipca 1974 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 13 (1975)

ZASTOSOWANIE GRAFÓW I LICZB STRUKTURALNYCH DO WYZNACZANIA RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO I WIDMA CZĘSTOŚCI

JÓZEF WOJNAROWSKI, ANDRZEJ BUCHACZ (GLIWICE)

1. Wstęp

Jednym z głównych celów analizy układów mechanicznych jest określenie równania charakterystycznego i widma częstości. Znane klasyczne metody dotyczące tego problemu [7, 13, 14, 21, 60] oparte są na ustaleniu równań różniczkowych ruchu układu i przez to wymagają szeregu przekształceń. Wykorzystanie grafów biegunowych i liczb strukturalnych umożliwia pominięcie tego etapu, a więc znacznie upraszcza samą analizę. W takim przypadku układ opisujemy funkcjonalnym modelem i grafem biegunowym [20, 24, 52, 53]. Wprowadzając pojęcie węzła i krawędzi jako reprezentację zmiennej i zależności funkcyjnej, MASON zapoczątkował teorię grafów przepływu sygnałów [28]. Od tego czasu szereg autorów zajmowało się rozwijaniem twierdzeń i reguł metody grafów [46, 47, 34, 41, 6, 19, 61]. Zastosowania grafów do opisu układów elektrycznych i elektromechanicznych zawarte są w pracach [43, 27, 42, 24, 20]. Związek między grafem przepływu sygnałów i grafem biegunowym można znaleźć w [29]. Warto podkreślić, że ostatnio pojawiają się też prace, w których omawiane są nowe zastosowania grafów [15, 40, 49, 18, 51, 58, 57], a także wprowadzane są inne typy grafów, jak np. graf sprzężeń (*bond graph*, *граф связей*) [22, 26].

Zauważmy, że szczególne miejsce w teorii grafów zajmuje pojęcie drzewa i zbioru drzew [6, 19]. Jeśli bowiem przypomnimy, że zbiór drzew zawiera pełną informację o wyznaczniku grafu, to modelowanie liniowych układów fizycznych grafami determinuje poszukiwanie metod i algorytmów generowania drzew.

Już w pracach KIRCHHOFFA [23][1] i CAYLEYA [8][1] sformułowano metody wyznaczania drzew sieci elektrycznej. Rozwijane w ostatnim dwudziestoleciu zastosowania grafów w analizie i syntezie układów fizycznych, a głównie w sieciach elektrycznych i elektronicznych, wpłynęły na opracowywanie różnorodnych algorytmów wyznaczania zbioru drzew [2, 5, 10, 11, 12, 16, 17, 25, 30, 31, 32, 35, 37, 39, 48].

W ostatnich latach zaczęto również algebraizować metody dotyczące przekształceń grafów poprzez zastosowanie liczb strukturalnych [3, 59]. W szczególności należy wyróżnić pracę BELLERTA i WOŹNIACKIEGO [4], w której podano podstawy algebry liczb strukturalnych w zastosowaniu do analizy i syntezy układów elektrycznych.

Rozwinięcie metod liczb strukturalnych i wykorzystanie maszyn cyfrowych do ich generowania podano w pracach [44, 45, 33, 38, 55]. W pracy [1] zastosowano liczby strukturalne do wyznaczania reakcji układu mechanicznego na wymuszenie kinematyczne.

[1] Cytujemy za [18].

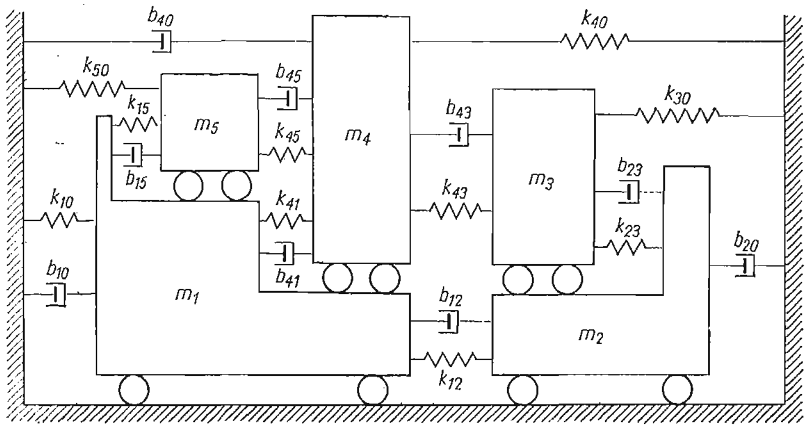
Algorytm analizy w sensie wyznaczania widma częstości oraz zastosowanie liczb strukturalnych do syntezy układów mechanicznych z elementami VOIGTA można znaleźć w pracach [50, 54, 55]. Zastosowanie liczb strukturalnych do modyfikacji własności dynamicznych liniowych układów mechanicznych podano w pracach [56, 57].

W niniejszej pracy przedstawiono zastosowania grafów i liczb strukturalnych do wyznaczania równania charakterystycznego. U podstaw metod topologicznych leży związek między zbiorem drzew grafu a jego wyznacznikiem [36, 43, 9]. W tym sensie zastosowano niektóre elementy przekształceń grafów i generowania drzew. Prezentowane metody zilustrowano na przykładach dyskretnych liniowych układów mechanicznych.

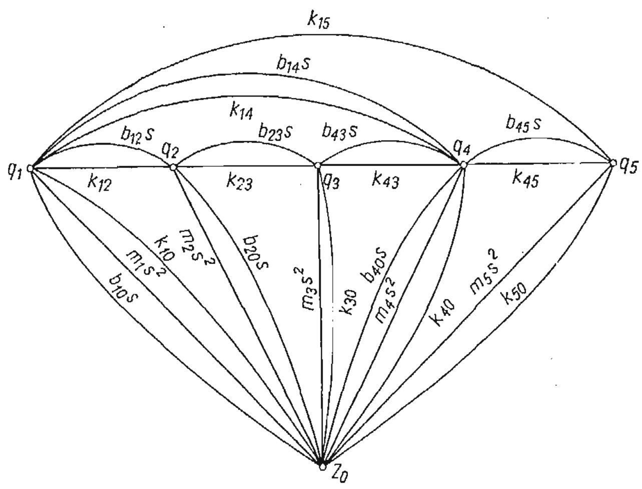
2. Wprowadzenie

Rozważmy dyskretny układ mechaniczny o 5 stopniach swobody (rys. 1).

Napisanie równań różniczkowych ruchu rozważanego układu a następnie otrzymanie równania charakterystycznego jest dość pracochłonne. Natomiast graf biegunowy (rys. 2),



Rys. 1



Rys. 2

który można otrzymać wprost z układu mechanicznego upraszcza ten proces i stanowi punkt wyjścia do analizy postawionego problemu [20, 24, 52, 53]. Ponadto w sposób wyraźny uwidacznia relacje pomiędzy poszczególnymi członami. Należy podkreślić, że przy konstruowaniu grafu biegunowego wykorzystujemy sformalizowane pojęcie członu, które jednoznacznie prowadzi do matematycznego modelu układu dynamicznego jako pewnego operatora przekształcającego dane wejściowe w wyjściowe.

3. Wyznaczenie równania charakterystycznego metodą grafów i liczb strukturalnych

Zgodnie z zasadą MAXWELLA [43] równanie charakterystyczne przyjmuje postać

$$\Delta(s^2) = \Delta G = \sum_{k=1}^{t} Z_k = 0, \tag{1}$$

gdzie $\Delta(s^2) = \Delta G$ oznacza wyznacznik grafu, $Z_k = \prod_{i=1}^{m_k} z_{ki}$ — impedancję drzewa grafu, m_k — liczbę krawędzi k-tego drzewa, z_{ki} — impedancję przyporządkowaną i-tej krawędzi drzewa k, t — liczbę wszystkich drzew grafu, s — argument przekształcenia Laplace'a. Ponieważ impedancje, czyli ilorazy zmiennych symetrycznych, są stałe w dowolnej chwili czasowej, więc równanie charakterystyczne (1) jako suma iloczynów tych stałych wielkości jest niezmiennikiem dla analizowanego układu dynamicznego.

W rozumieniu równania (1) zagadnienie wyznaczania równania charakterystycznego sprowadza się do obliczenia wyznacznika grafu, który można otrzymać:

— metodą redukcji grafu według drzewa napinającego,

— metodą rozwinięcia według elementarnych łańcuchów,

— metodą przecięć grafu,

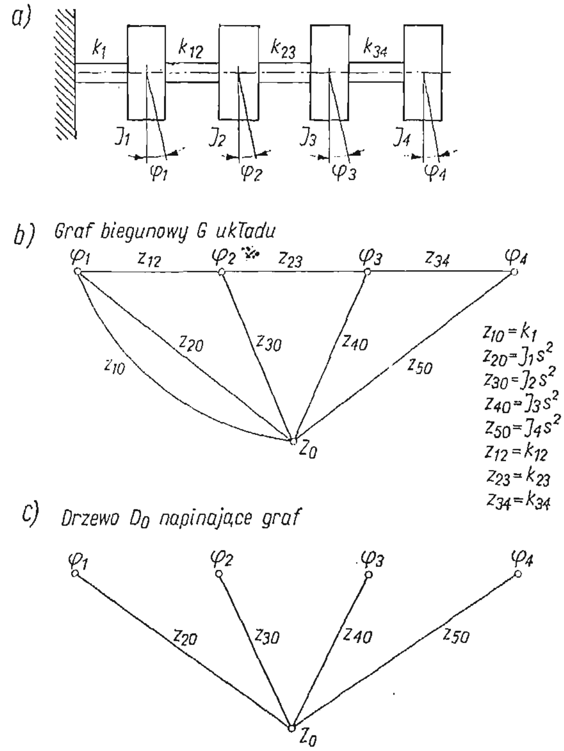
— metodą liczb strukturalnych.

3.1. Otrzymanie równania charakterystycznego metodą redukcji grafu według drzewa napinającego. Algorytm redukcji grafu przy wykorzystaniu rozwinięcia według drzewa D_0 napinającego graf [41, 43, 52] prowadzi do równania charakterystycznego o następującej postaci:

$$\Delta(s^2) = \Delta G(D_0) + \sum_{1\leqslant i\leqslant k} z_{ki}\Delta G(D_0, s_i) + \\ + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} z_{kj} z_{ki} \Delta G(D_0, s_i, s_j) + \ldots + \prod_{1\leqslant i\leqslant k} z_{ki}, \tag{2}$$

gdzie $\Delta G(D_0)$ oznacza wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_0, $z_{ki}, z_{kj}, \ldots, z_{kr}$ — impedancję krawędzi $s_i, s_j \ldots$ drzewa D_0, $r = n-1$ — liczbę wierzchołków bez ogólnego bieguna Z_0, $\Delta G(D_0, s_i)$ — wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_0 i krawędzią s_i po koincydencji wierzchołka, który ta krawędź łączyła z biegunem Z_0, $\Delta G(D_0, s_i, s_j)$ — wyznacznik podgrafu z usuniętym drzewem D_0 i krawędziami s_i, s_j po koincydencji wierzchołków, które te krawędzie łączyły z biegunem Z_0 itd., $\Delta G(D_0, s_i \ldots s_r) = 1$ — wyznacznik podgrafu zredukowanego do punktu.

Zastosowanie tej metody zilustrujemy na przykładzie układu drgającego o 4 stopniach swobody (rys. 3a). W tablicy 1 przedstawiono algorytm redukcji grafu [równanie (2)] dla przykładu pokazanego na rys. 3.



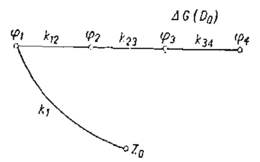
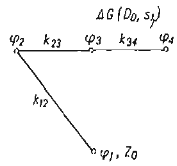
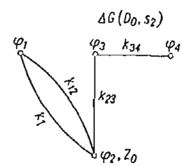
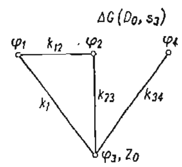
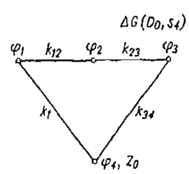
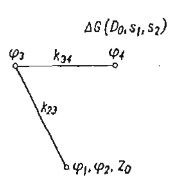
Rys. 3

Zgodnie z tablicą 1 równanie charakterystyczne będące wprost równaniem częstości jest następujące:

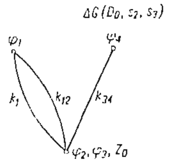
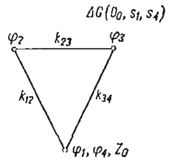
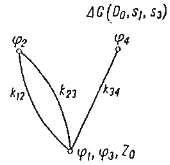
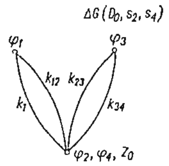
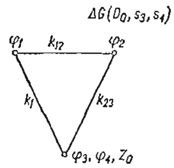
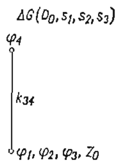
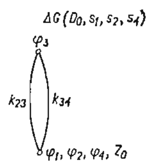
$$
\begin{aligned}
(3) \quad & J_1 J_2 J_3 J_4 \omega^8 - \omega^6 [J_2 J_3 J_4 (k_1 + k_{12}) + J_1 J_3 J_4 (k_{12} + k_{23}) + \\
& + J_1 J_2 J_4 (k_{23} + k_{34}) + J_1 J_2 J_3 k_{34}] + \omega^4 [J_3 J_4 (k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} + k_{23} k_1) + \\
& + J_2 J_4 (k_1 + k_{12})(k_{23} + k_{34}) + J_2 J_3 (k_1 + k_{12}) k_{34} + \\
& + J_1 J_4 (k_{12} k_{23} + k_{23} k_{34} + k_{34} k_{12}) + J_1 J_3 (k_{12} + k_{23}) k_{34} + \\
& + J_1 J_2 k_{23} k_{34}] - \omega^2 [J_4 (k_1 k_{12} k_{23} + k_{12} k_{23} k_{34} + k_{23} k_{34} k_1 + k_{34} k_1 k_{12}) + \\
& + J_3 (k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} + k_{23} k_1) k_{34} + J_2 (k_1 + k_{12}) k_{23} k_{34} + \\
& + J_1 k_{12} k_{23} k_{34}] + k_1 k_{12} k_{23} k_{34} = 0.
\end{aligned}
$$

Warto zauważyć, że przedstawiony algorytm pozwala uzyskać równanie charakterystyczne wprost według rosnących potęg częstości.

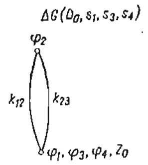
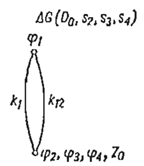
Tablica 1

Iloczyn impedancji gałęzi drzewa $D_0 \cdot z_{kl}$	Numery koincydentnych wierzchołków φ_l, Z_0	Podgraf po usunięciu drzewa D_0 i krawędzi $s_l, \ldots, s_r$ $G_l(D_0, s_l, \ldots, s_r)$	Wyznacznik podgrafu $\Delta G_l(D_0, s_l, \ldots, s_r)$
1	2	3	4
—	—		$k_1 k_{12} k_{23} k_{34}$
$J_1 s^2$	φ_1, Z_0		$k_{12} k_{23} k_{34}$
$J_2 s^2$	φ_2, Z_0		$(k_1 + k_{12}) k_{23} k_{34}$
$J_3 s^2$	φ_3, Z_0		$(k_1 k_{12} + k_{12} k_{23} +$ $+ k_{23} k_1) k_{34}$
$J_4 s^2$	φ_4, Z_0		$k_1 k_{12} k_{23} +$ $+ k_{12} k_{23} k_{34} +$ $+ k_{23} k_{34} k_1 +$ $+ k_{34} k_1 k_{12}$
$J_1 J_2 s^4$	$\varphi_1, \varphi_2, Z_0$		$k_{23} k_{34}$

c.d. tablicy 1

1	2	3	4
$J_1J_3s^4$	$\varphi_1, \varphi_3, Z_0$		$(k_{12}+k_{23})k_{34}$
$J_1J_4s^4$	$\varphi_1, \varphi_4, Z_0$		$k_{12}k_{23}+k_{23}k_{34}+$ $+k_{34}k_{12}$
$J_2J_3s^4$	$\varphi_2, \varphi_3, Z_0$		$(k_1+k_{12})k_{34}$
$J_2J_4s^4$	$\varphi_2, \varphi_4, Z_0$		$(k_1+k_{12})(k_{23}+k_{34})$
$J_3J_4s^4$	$\varphi_3, \varphi_4, Z_0$		$k_1k_{12}+k_{12}k_{23}+$ $+k_{23}k_1$
$J_1J_2J_3s^6$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3,$ Z_0		k_{34}
$J_1J_2J_4s^6$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, Z_0$		$k_{23}+k_{34}$

c.d. tablicy 1

1	2	3	4
$J_1 J_3 J_4 s^6$	$\varphi_1, \varphi_3, \varphi_0, \varphi_4, Z_0$		$k_{12}+k_{23}$
$J_2 J_3 J_4 s^6$	$\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, Z_0$		k_1+k_{12}
$J_1 J_2 J_3 J_0 s^8$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, Z_0$		1

3.2. Otrzymanie równania charakterystycznego metodą rozwinięcia według elementarnych łańcuchów. Rozwijając graf na elementarne łańcuchy [43] wyznacznik grafu przyjmie postać

$$\Delta G = \sum_{i=1}^{v} Z_i \Delta G(Z_i), \tag{4}$$

gdzie Z_i oznacza impedancję i-tego elementarnego łańcucha łączącego dwa dowolnie wybrane wierzchołki φ_r, φ_s[2], $\Delta G(Z_i)$ — wyznacznik podgrafu otrzymanego przez koincydencję wszystkich wierzchołków i-tego elementarnego łańcucha, v — wszystkie elementarne łańcuchy grafu.

W tablicy 2 pokazano zastosowanie metody rozwinięcia na elementarne łańcuchy dla układu mechanicznego przedstawionego na rys. 3. Wykonując sumowanie zgodnie ze wzorem (4) uzyskujemy równanie częstości (3).

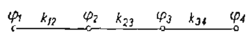
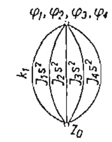
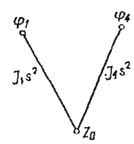
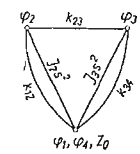
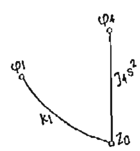
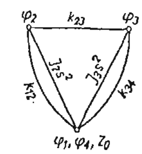
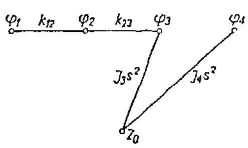
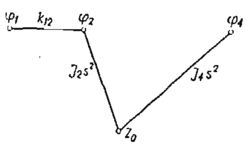
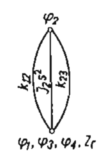
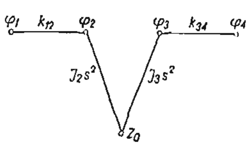
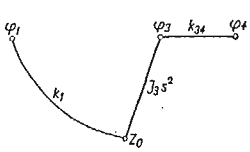
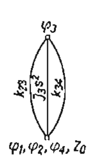
3.3. Wyznaczenie równania charakterystycznego metodą przecięć grafu. W przypadku bardziej złożonych układów efektywną staje się metoda przecięć grafu [17, 53]. Skończony zbiór impedancji Z wszystkich t drzew grafu m_k — argumentowych impedancji k-tego drzewa określa zależność

$$\{Z\} = \frac{\partial^{j-1}(Z' \times Z'')_t}{\partial(z'_{12} \cup z''_{12})\partial(z'_{23} \cup z''_{23}) \ldots \partial(z'_{j-1,j} \cup z''_{j-1,j})}, \tag{5}$$

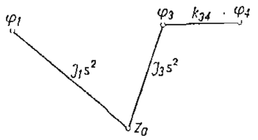
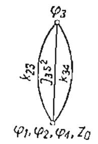
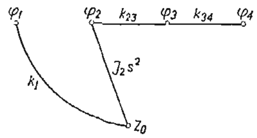
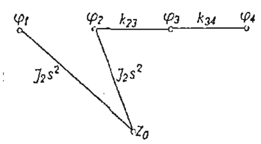
gdzie $Z' \times Z''$ oznacza iloczyn kartezjański zbiorów impedancji gałęzi drzew podgrafów G' i G'', $z'_{rs} \cup z''_{rs}$ — zbiór impedancji podgrafu, otrzymanego jako suma zbiorów impedancji

[2] Najlepiej tak wybierać wierzchołki φ_r, φ_s, aby w zbiorze elementarnych łańcuchów było jak najwięcej drzew grafu G.

Tablica 2

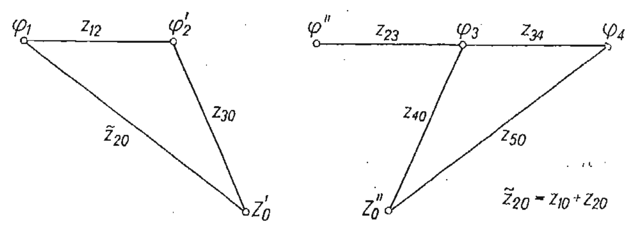
Elementarny łańcuch (φ_r, φ_s) rozpięty na wierzchołkach φ_1 i φ_4	Impedancja elementarnego łańcucha	Podgraf otrzymany po koincydencji wierzchołków i-tego łańcucha $G(Z_i)$	Wyznacznik podgrafu $\Delta G(Z_i)$
1	2	3	4
	$k_{12}k_{23}k_{34}$		$k_1+J_1s^2+J_2s^2+$ $+J_3s^2+J_4s^2$
	$J_1J_4s^4$		$(k_{12}+J_2s^2)k_{23}+$ $+k_{23}(J_3s^2+$ $k_{34})+$ $+(J_3s^2+k_{34})\times$ $\times(J_2s^2+k_{12})$
	$k_1J_4s^2$		$(k_{12}+J_2s^2)k_{23}+$ $+k_{23}J_3s^2)+$ $+k_{34})+$ $+(J_3s^2+k_{34})\times$ $\times(J_2s^2+k_{12})$
	$k_{12}k_{23}J_3J_4s^4$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, Z_0$	1
	$J_2J_4s^4k_{12}$		$k_{23}+J_3s^2+k_{34}$
	$k_{12}J_2J_3s^4k_{34}$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, Z_0$	1
	$k_1J_3s^2k_{34}$		$k_{12}+J_2s^2+k_{23}$

c.d. tablicy 2

1	2	3	4
	$J_1 J_3 s^4 k_{34}$		$k_{12}+J_2s^2+k_{23}$
	$k_1 J_2 s^2 k_{23} k_{34}$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, z_0$	1
	$J_1 J_2 s^4 k_{23} k_{34}$	$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, z_0$	1

krawędzi łańcuchów z'_{rs} i z''_{rs} pomiędzy rozciętymi wierzchołkami, j — liczbę wierzchołków, poprzez które dokonano rozcięcia grafu G.

W celu zilustrowania podanych wyżej rozważań wyznaczymy równanie charakterystyczne omawianego już układu.



Rys. 4

1° Rozcinamy graf G (rys. 3b) na dwa podgrafy (rys. 4).

2° Znajdujemy bezpośrednio[3)] zbiory impedancji gałęzi drzew w podgrafach G' i G''

$$Z' = \left\{\{z_{12}, z_{30}\}, \{z_{12}, \tilde{z}_{20}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{30}\}\right\},$$

$$Z'' = \left\{\{z_{23}, z_{34}, z_{50}\}, \{z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, \{z_{40}, z_{50}, z_{23}\}\right\}.$$

3° Dla tak rozciętego grafu G wyznaczamy zbiory impedancji z'_{rs}, z''_{rs} pomiędzy rozciętymi wierzchołkami. W rozważanym przypadku mamy

$$z'_{12} = \{z_{30}\}, \quad z''_{12} = \{z_{23}, z_{40}\},$$

[3)] Gdy podgrafy G' i G'' są bardziej złożone wówczas rozcinamy je dalej na G'_1 i G''_2 itd., a zbiory impedancji drzew dla nich wyznaczamy ze wzoru (5).

wobec czego

$$z'_{12} \cup z''_{12} = \{z_{30}, z_{23}, z_{40}\},$$

gdzie $\cup$ jest sumą zbiorów. Ponieważ $j = 2$, to

$$\{Z\} = \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial\{z_{30}, z_{23}, z_{40}\}}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{\partial Z^*}{\partial\{z_{rs}\}} = \frac{\partial Z^*}{\partial z_{r1}} \oplus \frac{\partial Z^*}{\partial z_{r2}} \oplus \ldots \oplus \frac{\partial Z^*}{\partial z_{rp}},$$

gdzie $\{z_{rs}\} = \{z_{r1}, z_{r2}, \ldots, z_{rp}\}$, r — numer łańcucha, Z^* — zbiór impedancji gałęzi drzew Z' lub Z'' dla rozciętego grafu G, $\oplus$ — symbol sumy pierścieniowej zbiorów[4)], wtedy

$$\{Z\} = \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{30}} \oplus \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{23}} \oplus \frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{40}}.$$

Różniczkowanie iloczynu kartezjańskiego zbiorów względem impedancji z_{ij} rozumiemy jako

$$\frac{\partial(Z' \times Z'')}{\partial z_{ij}} = \begin{cases} \dfrac{\partial Z'}{\partial z_{ij}} \times Z'' & \text{gdy } z_{ij} \in Z', \\[2ex] \dfrac{\partial Z''}{\partial z_{ij}} \times Z' & \text{gdy } z_{ij} \in Z''. \end{cases}$$

Natomiast operację różniczkowania zbioru określamy następująco:

$$\frac{\partial Z^*}{\partial z_{ij}} = \begin{cases} Z^* \oplus z_{ij} & \text{gdy } z_{ij} \in Z^* \\ 0 \quad - & \text{gdy } z_{ij} \notin Z^*. \end{cases}$$

Wobec tego

$$\{Z\} = \frac{\partial Z'}{\partial z_{30}} \times Z'' \oplus \frac{\partial Z''}{\partial z_{23}} \times Z' \oplus \frac{\partial Z''}{\partial z_{40}} \times Z' =$$

$$= \big\{\{z_{12}\}, \{\tilde{z}_{20}\}\big\} \times Z'' \oplus \left\{\frac{\partial Z''}{\partial z_{23}} \oplus \frac{\partial Z''}{\partial z_{40}}\right\} \times Z' =$$

$$= \big\{\{z_{12}\}, \{\tilde{z}_{20}\}\big\} \times \big\{\{z_{23}, z_{34}, z_{50}\}, \{z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, \{z_{40}, z_{50}, z_{23}\}\big\} \oplus$$

$$\oplus \Big[\big\{\{z_{34}, z_{50}\}, \{z_{34}, z_{40}\}, \{z_{40}, z_{50}\}\big\} \oplus \big\{\{z_{34}, z_{23}\}, \{z_{50}, z_{23}\}\big\}\Big] \times$$

$$\times \big\{\{z_{12}, z_{30}\}, \{z_{12}, \tilde{z}_{20}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{30}\}\big\} = \big\{\{z_{12}, z_{23}, z_{34}, z_{50}\},$$

$$\{z_{12}, z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, (z_{12}, z_{40}, z_{50}, z_{23}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{23}, z_{34}, z_{50}\},$$

$$\{\tilde{z}_{20}, z_{34}, z_{40}, z_{23}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{40}, z_{50}, z_{23}\}, \{z_{12}, z_{30}, z_{34}, z_{50}\},$$

$$\{z_{12}, \tilde{z}_{20}, z_{34}, z_{40}\}, \{z_{12}, z_{30}, z_{40}, z_{50}\}, \{z_{12}, z_{30}, z_{34}, z_{23}\},$$

[4)] Dla dwóch niepustych zbiorów $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots A_p\}$ $(A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im}\})$ i $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_j, \ldots, B_r\}$ $(B_j = \{b_{j1}, b_{2j}, \ldots, b_{jm}\})$, $A \oplus B = A \cup B - A \cap B$, gdzie „$-$" oznacza różnicę zbiorów, zaś $\cap$ — przekrój zbiorów.

$$\{z_{12}, z_{30}, z_{50}, z_{23}\}, \{z_{12}, \tilde{z}_{20}, z_{34}, z_{50}\}, \{z_{12}, z_{30}, z_{34}, z_{40}\},$$
$$\{z_{12}, \tilde{z}_{20}, z_{40}, z_{50}\}, \{z_{12}, \tilde{z}_{20}, z_{34}, z_{23}\}, \{z_{12}, \tilde{z}_{20}, z_{50}, z_{23}\},$$
$$\{\tilde{z}_{20}, z_{30}, z_{34}, z_{50}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{30}, z_{34}, z_{40}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{30}, z_{40}, z_{50}\},$$
$$\{\tilde{z}_{20}, z_{30}, z_{34}, z_{23}\}, \{\tilde{z}_{20}, z_{30}, z_{50}, z_{23}\}\}.$$

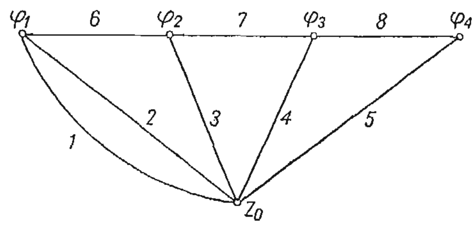
W ten sposób, korzystając ze wzoru (1), wyznaczamy równanie charakterystyczne (3) zastępując oznaczenia impedancji z_{ij} przez odpowiadające im wartości momentów bezwładności i sztywności, a następnie s przez $j\omega$.

3.4. Wyznaczenie równania charakterystycznego przy użyciu liczb strukturalnych. Wykorzystując związki liczb strukturalnych z grafami i twierdzenia o wyznaczaniu liczb strukturalnych na podstawie grafów można zauważyć, że funkcja wyznacznikowa liczby strukturalnej $\det_{Z} A[4, 1, 54]$ jest identyczna z wyznacznikiem grafu ΔG. A więc równanie charakterystyczne otrzymujemy po przyrównaniu jej do zera

$$\det_{Z} A = \sum_{k=1}^{t} \prod_{i=1}^{m_k} z_{aik} = 0, \tag{6}$$

gdzie $z_{aik} \in Z$ oznacza zbiór impedancji krawędzi grafu G.

Praktyczne zastosowanie tej metody pokażemy na omawianym przykładzie i w tym celu krawędziom grafu (rys. 3b) przyporządkujemy liczby zbioru $\alpha \in N$ (rys. 5).



Rys. 5

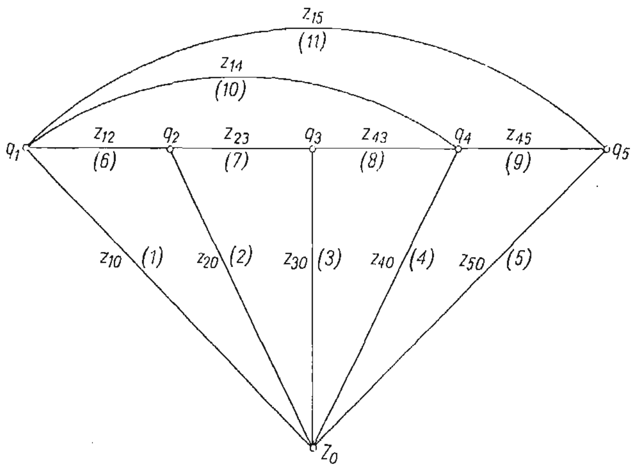
Zgodnie z twierdzeniem o obrazie geometrycznym wyznaczamy liczbę strukturalną A, której czynniki pierwsze wynoszą odpowiednio

$$P_1 = [1, 2, 6], \quad P_2 = [6, 3, 7], \quad P_3 = [7, 4, 8], \quad P_4 = [8, 5].$$

Liczba strukturalna równa iloczynowi czynników pierwszych jest następująca:

$$A = P_1 P_2 P_3 P_4 = \left[\begin{matrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2&2 \\ 6&6&6&6&6&3&3&3&3&3&7&7&7&6&6&6&6&6&3&3&3&3&3&7&7 \\ 7&7&4&4&8&7&7&4&4&8&4&4&8&7&7&4&4&8&7&7&4&4&8&4&4 \\ 8&5&8&5&5&8&5&8&5&5&8&5&5&8&5&8&5&5&8&5&8&5&5&8&5 \end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix} 2&6&6&6&6&6&6&6&6 \\ 7&3&3&3&3&3&7&7&7 \\ 8&7&7&4&4&8&4&4&8 \\ 5&8&5&8&5&5&8&5&5 \end{matrix}\right].$$

Zastępując oznaczenia elementów liczby strukturalnej α_{ik} odpowiadającymi im impedancjami $z_{\alpha ik}$ otrzymujemy funkcję wyznacznikową, która przyrównywana do zera daje równanie charakterystyczne (3). Dla pokazania prostoty metody liczb strukturalnych skorzystajmy jeszcze raz z przykładu pokazanego na wstępie artykułu.



Rys. 6

Dokonując redukcji grafu (rys. 2) uzyskujemy graf uproszczony (rys. 6). Na rys. 6 w nawiasach podano elementy zbioru $\alpha \in N$, które przyporządkowano krawędziom grafu, natomiast poszczególne impedancje wynoszą

$$\begin{aligned}
z_{10} &= k_{10}+b_{10}s+m_1 s^2, & z_{20} &= b_{20}s+m_2 s^2,\\
z_{30} &= k_{30}+m_3 s^2, & z_{40} &= b_{40}s+k_{40}+m_4 s^2,\\
z_{50} &= m_5 s^2+k_{50}, & z_{12} &= k_{12}+b_{12}s,\\
z_{23} &= b_{23}s+k_{23}, & z_{43} &= k_{43}+b_{43}s,\\
z_{45} &= k_{45}+b_{44}s, & z_{14} &= k_{14}+b_{14}s,\\
z_{15} &= k_{15}.
\end{aligned}$$

Liczba strukturalna grafu (rys. 6) wynosi

$$A = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
P_1 &= [1,\ 6,\ 10,\ 11], \quad P_2 = [6,\ 2,\ 7], \quad P_3 = [7,\ 3,\ 8],\\
P_4 &= [8,\ 4,\ 9,\ 10], \quad P_5 = [9,\ 5,\ 11].
\end{aligned}$$

Tworząc funkcję wyznacznikową otrzymanej liczby strukturalnej i przyrównując ją do zera możemy już łatwo otrzymać równanie charakterystyczne.

Metoda ta staje się efektywniejsza, gdy wykorzystamy algorytm iloczynu liczb strukturalnych [38], względnie generowanie drzew grafu metodą liczb strukturalnych binarnych [44, 45, 33].

W przypadku wyznaczania równania charakterystycznego metodą liczb strukturalnych w postaci naturalnej, ustalamy na podstawie grafu układu mechanicznego jej czynniki $P_i(i = 1, \ldots, n-1)$ i wczytujemy do programu GENEROWANIE DRZEW [55]. Uzyskana w ten sposób liczba strukturalna, a tym samym jej funkcja wyznacznikowa, rozwiązuje problem wyznaczania równania charakterystycznego.

4. Wniosek

Przedstawione metody wyznaczania widma częstości drgań własnych pozwalają na pełną algebraizację, a przez to umożliwiają stosowanie elektronicznej techniki obliczeniowej.

Literatura cytowana w tekście

1. K. Arczewski, *Topologiczna analiza mechanicznych drgających układów liniowych metodą liczb strukturalnych*, Arch. Bud. Masz., 4, **19** (1972) 589 - 605.
2. S. D. Bedrosian, *Trees of a Full Graph as an Occupancy Problem*, IEEE, Trans. on Citc. Theory, CT-**11** (1964) 290 - 291.
3. S. Bellert, *Topological analysis and synthesis of linear systems*, J. Franklin Inst., December (1962) 425 - 443.
4. S. Bellert, H. Woźniacki, *Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*, WNT, Warszawa 1968.
5. I. Berger, A. Nathan, *The algebra of sets of trees, k — trees and other configurations*, IEEE Trans. Circ. Theory, CT-**15** (1968) 221 - 228.
6. К. Берж, *Теория графов и ее применения*, Изд. Иностр. Лит., Москва 1962 (tłum. książki Claude Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris 1958).
7. R. H. Cannon Jr., *Dynamika układów fizycznych*, WNT, Warszawa 1973 (przekł. książki — *Dynamics of Physical Systems*, McGraw-Hill, Inc. 1967).
8. A. Cayley, *A theorem on trees*, Quart. J. Math., **23** (1889) 376 - 378.
9. I. Cederbaum, *On network determinant*, Proc. JRE, **44** (1956) 258 - 259.
10. S. G. Chan, W. T. Chang, *Efficient tree — listing algorithm*, Elektr. Letters, 9 (1970) 271 - 272.
11. J. P. Char, *Generation of trees, 2-trees and storage of master forestes*, IEEE Trans. CT., CT-**15** (1968) 228 - 238.
12. L. E. Clarke, *On Cayley's formula for countign trees*, J. London Math. Soc., **33** (1958) 471 - 473.
13. Ф. С. Цзе, И. Е. Морзе, Р. Т. Хинкл, *Механические колебания*, Изд. Машиностроение, Москва 1966 (przekł. książki Francis S. Tse, Ivan E. Morse, Rolland T. Hinkle, *Mechanical vibrations*, Allyn and Bacon, Inc. Boston 1963).
14. Den Hartog J. P., *Drgania mechaniczne*, PWN, Warszawa 1971, (tłum. książki — *Mechanical vibrations*, McGraw-Hill Inc., New York 1956).
15. А. С. Григанов, А. В. Синев, *Программирование задач динамики пневматических машин ударного действия для аналоговых электронновычислительных машин методами теории графов*, Сборник — Нелинейные Колебания и Переходные процессы в Машинах, Изд. «Наука», Москва 1972, 242 - 252.
16. S. L. Hakimi, *On trees of a graph and their generation*, J. Franklin Inst., **270**, (1961) 347 - 359.
17. S. L. Hakimi, D. G. Green, *Generation and realisation of trees and k-tree*, IEEE Trans. on Circ. Theory, CT-**11**, (1964) 247 - 255.
18. F. Harary, *New direction in the theory of graphs*, Academic Press, New York and London, 1973.

19. Ф. ХАРАРИ, *Теория графов*, Изд. «Мир», Москва 1973 (przekł. książki Frank HARARY, *Graph theory*, Reading, Massachusetts 1969).
20. Н. Ф. ИЛИНСКИЙ, В. К. ЦАЦЕНКИН, *Приложение теории графов к задачам электромеханики*, Энергия, Москва 1968.
21. S. KALISKI i in., *Drgania i fale w cialach stalych*, PWN, Warszawa 1966.
22. D. C. KARNOPP, *Power — conserving transformations*, Physical Journal of the Franklin Institute, **288**, 3 (1969) 175 - 201.
23. G. KIRCHHOFF, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer ströme gefuhrt wird*, Ann. Fhys. Chem., 72 (1847) 497 - 508.
24. H. E. KOENIG, *Elektromechanical system theory*, McGraw-Hill Inc., New York 1961.
25. K. KONKOL, *Generacja drzew kompletnych*, Arch. Elektrot., 4 (1973) 843 - 860.
26. Д. Кэрноп, Р. РОЗЕНБЕРГ, *Применение графов связей в механике*, Москва 1974 (tłum. z jęz. ang.: *Bond graph modeling for engineering systems*, Ed. by D. KARNOPP and R. ROSENBERG, New York, USA, 1972).
27. J. LAGASSE, *Metoda wykresu przeplywu sygnalów w zastosowaniu do analizy obwodów elektrycznych*, ZN. Pol. Śl., Automatyka, 3 (1963).
28. S. J. MASON, *Feedback theory: Some properties of signal flow graphs*, Proc. IRE., **41** (1953) 1144 - 1156.
29. С. МЕЗОН, Г. ЦИММЕРМАН, *Электронные цепи, сигналы и системы*, Издательство Иностр. Литературы, 1963 (tłum. książki S. MASON, H. ZIMMERMAN: *Electronic circuits, signals and systems*, New York 1960).
30. W. MAYEDA, S. L. HAHIMI, W. K. CHEN, N. DEO, *Generation of complete trees*, IEEE Trans. CT., CT-**15** (1968) 101 - 105.
31. W. MAYEDA, S. SESHU, *Generation of trees without duplication*, IEEE Trans. CT, CT-**12** (1965) 181 - 185.
32. G. J. MINTY, *A simple algorithm for listing all the trees of a graph*, IEEE Trans. CT, CT-**12** (1965) 120.
33. J. NADRATOWSKI, *Wyznaczanie drzew grafów niezorientowanych w oparciu o algebrę liczb strukturalnych*, Arch. Elektrot., 2 (1970) 325 - 341.
34. O. ORE, *Wstęp do teorii grafów*, PWN, Warszawa 1966 (tłum. książki — *Graphs and their uses*, New York, Randon House 1963).
35. A. J. PAUL, *Generation of directed trees and 2-trees without duplication*, IEEE Trans. CT, CT-**14** (1967) 354 - 356.
36. W. S. PERCIVAL, *Solution of passive electrical networks by means of mathematical trees*, J. IEEE, Part III, **100** (1953) 143 - 150.
37. M. PIEKARSKI, *Listing of all possible trees of linear graph*, IEEE Trans. CT, CT-**12** (1965) 124 - 125.
38. M. PSTROKOŃSKI, *Iloczyn liczb strukturalnych*, Rozprawy Elektrot., 1 (1968) 3 - 8.
39. V. V. B. RAO, V. G. K. MURTI, *Enumeration of trees a graph*, Elektr. Letters, 4 (1970) 103 - 104.
40. R. C. READ, *Graph theory and computing*, Academic Press, New York and London 1972.
41. L. ROBICHAUD, M. BOISVERT, J. ROBERT, *Grafy przeplywu sygnalów*, PWN, Warszawa 1968 (przekład książki — *Graphes de fluence*, Applications á l'elektrotechnique et á l'elektronique. Calculateurs analogiques et digitaux Eyrolles, Paris 1961).
42. S. SESHU, M. B. REED, *Linear graphs and electrical networks*, Addison — Wesley Reading, Massachusetts 1961.
43. С. СЕШУ, Н. БАЛАБАНЯН, *Анализ линейных цепей*, Изд. Гос. Энерг., Москва 1963 (przekł. książki S. SESHU, N. BALABANIAN, *Linear network analysis*, New York 1959).
44. Cz. SYC, *Wyznaczanie drzew i wielodrzew grafów opisanych metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych*, Biul. WAT, 10 (1968) 73 - 98.
45. Cz. SYC, *Generowanie drzew i multidrzew multigrafów metodą liczb strukturalnych binarnych za pomocą maszyn cyfrowych*, Rozpr. Elektrot., 3 (1969) 495 - 513.
46. H. TRENT, *Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped phisical system*, J. Acoust. Soc. Amer., **27**, (1955), 500 - 527.
47. J. G. TRUXAL, *Control systems synthesis*, McGraw-Hill, New York 1955.
48. O. WING, *Enumeration of trees*, IEEE Trans. CT., CT-**10** (1963) 127 - 128.

49. J. WOJNAROWSKI, *Metoda «graf» wyznaczania obciążenia w założonych przekładniach zębatych*, ZN Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Pol. Śl., 17/51, Gliwice 1973.
50. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *Zastosowanie grafów i liczb strukturalnych do wyznaczania widma częstości drgań własnych*, VI Sympozjum — Drgania w układach fizycznych. Zbiór streszczeń, Poznań 1974, 45 - 46.
51. J. WOJNAROWSKI, A. LIDWIN, *The application of signal flow graphs for the kinematic analysis of planetary gear trains*, J. Mech. and Mach. Theory, 10 (1975) 17 - 31.
52. J. WOJNAROWSKI, *Analiza dyskretnych liniowych układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody metodą grafów*, Proc. Polish-Czechoslovak Conf. on Machine Dynamics, 2, (1971) 567 - 581.
53. J. WOJNAROWSKI, *Graf jako język struktury układu*, ZN Pol. Śl. Mechanika, 52 (1973) 3 - 21.
54. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *O możliwości optymalizacji układów mechanicznych przy użyciu liczb strukturalnych*, Sympozjon — Optymalizacja w Mechanice, Zbiór referatów, PTMTiS Oddział Gliwice (1974), 303 - 315.
55. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *Analiza i synteza liniowych układów mechanicznych metodą liczb strukturalnych*, Materiały Konferencji Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, 21/55, 2 (1974) 63 - 89.
56. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *O sposobie modyfikacji własności dynamicznych metodą liczb strukturalnych*, Sympozjon — Optymalizacja w Mechanice, Zbiór referatów, PTMTiS Oddział Gliwice, 1975, s. 253 - 260.
57. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *Grafy i liczby strukturalne wyższej kategorii jako efektywny sposób modyfikacji własności dynamicznych układów liniowych*, ZN Pol. Śl., Mechanika, 53 (1975) 8 - 13.
58. J. WOJNAROWSKI, *Про новый метод определения нагрузки в сложных зубчатых передачах*, Proc. IX Conference on Dynamics of Machines, Smolenice 1974, 231 - 241.
59. H. WOŹNIACKI, *Analiza blokowych układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych*, Arch. Elektrot., 2(1966) 347 - 365; 3 (1966) 619 - 631.
60. S. ZIEMBA, *Analiza drgań*, PWN, Warszawa 1959.
61. A. A. Зыков, *Теория конечных графов*, т. I Изд. «Наука», Новосибирск 1969.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ И СТРУКТУРНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И СПЕКТРА ЧАСТОТ

В работе рассматриваются некоторые топологические методы определения характеристического уравнения и спектра частот для дискретных линейных механических систем. При описании вибрации системы с помощью функциональной модели и полюсного графа приводятся методы построения этого уравнения. Связь между графом и определительной функцией структурного числа используется для того чтобы показать, что можно значительно проще получить характеристическое уравнение без составления дифференциальных уравнений движения системы. Практическое применение описываемых методов демонстрируется на примерах.

Summary

THE APPLICATION OF GRAPHS AND STRUCTURAL NUMBERS FOR DETERMINING THE EQUATION OF STATE AND THE SPECTRUM OF FREQUENCY

In the paper the authors discussed topological methods of determining the equation of state and the spectrum of frequency for linear discrete mechanical systems. Describing a vibrating system by a functional model and a therminal graph, the methods of creation of such equation were shown.

Utilizing the relation between a graph and a determinant function of a structural number, the authors proved that the characteristic equation and the frequency spectrum can be found by a simpler procedure, without setting the differential equations of motion.

Practical applications of methods described were demonstrated on examples.

INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca zostala złożona w Redakcji dnia 9 sierpnia 1974 r.; w wersji ostatecznej dnia 12 lutego 1975 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 13 (1975)

WPŁYW WSTĘPNYCH UGIĘĆ NA PRACĘ TARCZY PROSTOKĄTNEJ PODDANEJ NIELINIOWEMU ROZKŁADOWI OBCIĄŻEŃ

TEOFIL SIEGMÜLLER (GDAŃSK)

1. Wstęp

W procesie budowy konstrukcji stalowych, przy powszechnym stosowaniu spawania, odkształcenia wstępne tarcz nie dadzą się praktycznie wyeliminować, przy czym dochodzą one nawet do 50% grubości tarcz.

Wstępne ugięcia odgrywają znaczną rolę w zagadnieniach stateczności tarcz prostokątnych i mają poważny wpływ na pracę tych tarcz w warunkach obciążeń ponadkrytycznych. Dotyczy to tych przypadków obciążenia, gdy oprócz obciążenia poprzecznego działają również siły w płaszczyźnie środkowej tarczy, bądź też gdy stanowią one jedyne obciążenie tych tarcz. Wpływ tych sił na końcowy stan naprężenia i odkształcenia zależy bowiem nie tylko od ugięcia w_1 wywołanego przyłożonym obciążeniem, lecz również od ugięcia wstępnego w_0. Dlatego też przeprowadzenie w przypadku takiego obciążenia analizy wpływu wstępnych ugięć na stan naprężenia i odkształcenia tarczy wydaje się niezbędne.

Praca cienkościennej tarczy prostokątnej po utracie stateczności, przy nieliniowym rozkładzie obciążeń, została szczegółowo przeanalizowana w pracy [7] przy założeniu płaskiej postaci tej tarczy w stanie początkowym.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie wpływu wstępnego ugięcia takiej tarczy poddanej nieliniowemu rozkładowi obciążeń na jej stan końcowy.

2. Podstawy teoretyczne oraz przyjęte założenia

Przedmiotem rozważań jest cienka, prostokątna, izotropowa tarcza o stałej grubości h, swobodnie podparta na całym obwodzie.

Zagadnienie wpływu wstępnych ugięć na pracę tarczy prostokątnej poddanej nieliniowemu rozkładowi obciążeń na brzegach $x = \pm a$, działających w jej płaszczyźnie środkowej i zmieniających się według równania

$$\sigma = K_0 \left[\alpha\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \beta\right] \tag{2.1}$$

związane jest z koniecznością rozwiązania równania biharmonicznego

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0. \tag{2.2}$$

Rozwiązania równania (2.2) będziemy poszukiwali w postaci

$$\Phi(x,y) = \Phi_0(x,y) + \sum_n A_n \Phi_n(x,y). \tag{2.3}$$

Funkcja naprężeń $\Phi(x,y)$ powinna spełniać następujące warunki brzegowe:

(2.4)

dla $x = \pm a$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = K_0\left(\alpha\frac{y^2}{b^2} - \beta\right),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0,$$

dla $y = \pm b$

$$\sigma y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Funkcja $\Phi_0(x,y)$ powinna również spełniać warunki brzegowe podane w wyrażeniu (2.4). $\Phi_n(x,y)$ jest to funkcja spełniająca jednorodne warunki brzegowe:

(2.5)

dla $x = \pm a$

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x \partial y} = 0,$$

dla $y = \pm b$

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x \partial y} = 0.$$

Funkcję naprężeń przyjęto w postaci

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}K_0 y^2\left(\frac{1}{6}\alpha\frac{y^2}{b^2} - \beta\right) + (x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2(A_1 + A_2x^2 + A_3y^2 + \ldots). \tag{2.6}$$

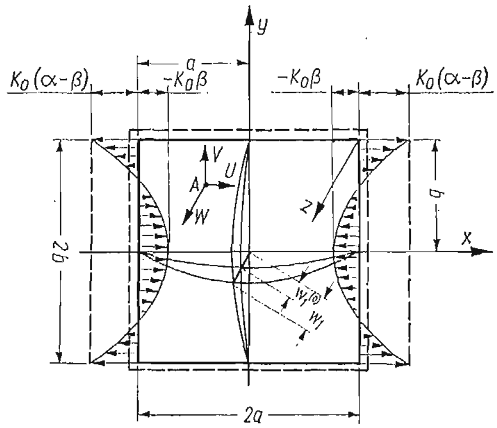
Do przybliżonego rozwiązania równania biharmonicznego (2.2) zastosowano zasadę minimum energii.

W oparciu o funkcję naprężeń (2.6), ograniczając się do pierwszego składnika szeregu, otrzymano wyrażenie określające naprężenie

$$\sigma_x = K_0\left(\alpha\frac{y^2}{b^2} - \beta\right) + 4A_1(x^2-a^2)^2(3y^2-b^2). \tag{2.7}$$

Dla parametru K_0 przyjęto założenie, że jest on liczbowo większy od wartości odpowiadającej obciążeniu krytycznemu. Założono, że powierzchnia środkowa tarczy nie jest powierzchnią idealnie płaską, lecz ma początkową krzywiznę. W każdym jej punkcie istnieje zatem pewne wstępne ugięcie w_0. Przyjęto, że jest ono małe w porównaniu z grubością tarczy.

Najmniej korzystna — z punktu widzenia pracy tarczy przy obciążeniach ponadkrytycznych — jest taka postać wstępnego ugięcia, jaką pierwotnie płaska tarcza przyjmuje po utracie stateczności.



Rys. 1

W rozpatrywanym przypadku podparcia i obciążenia postać taką można przedstawić jako wynik nałożenia się jednej półfali cosinusoidy w kierunku osi 0_x z trzema półfalami wzdłuż osi 0_y, w drugim przybliżeniu jednej półfali wzdłuż osi 0_x z pięcioma półfalami osi 0_y itd. [7].

W rozpatrywanym zagadnieniu założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej tarczy w postaci odpowiadającej pierwszemu przybliżeniu

$$w_0 = \cos\frac{m\pi x}{2a}\left(w_{m,1}^{(0)}\cos\frac{\pi y}{2b}+w_{m,3}^{(0)}\cos\frac{3\pi y}{2b}\right). \tag{2.8}$$

Jak wiadomo [2], składowe stanu odkształcenia powierzchni środkowej mają następującą postać:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial w_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

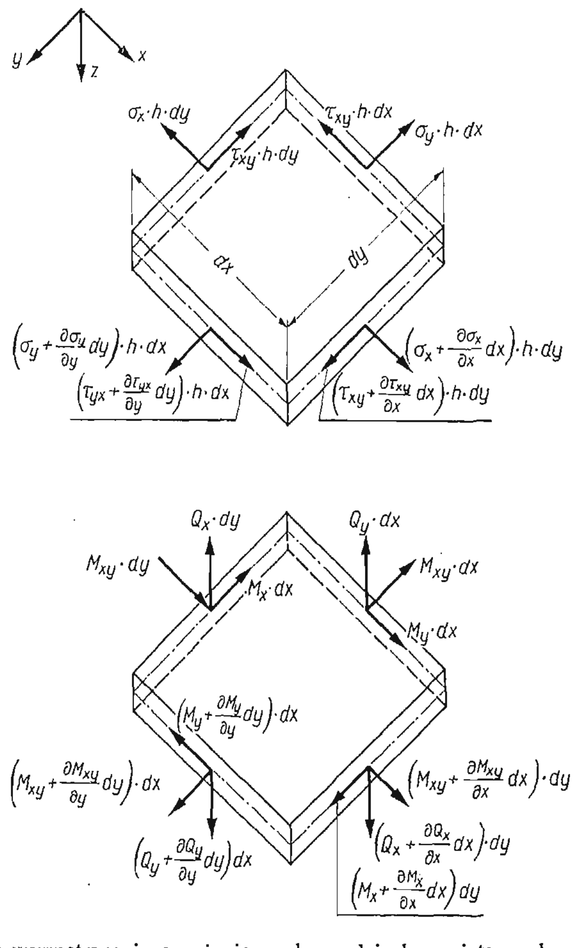
Rozkład sił wewnętrznych i naprężeń podany jest na rys. 2.

Momenty gnące i skręcające oraz siły poprzeczne zależą od przyrostu ugięcia tarczy i wyrażają się następującymi wzorami:

$$
\begin{aligned}
M_x &= -D\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w-w_0)+\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}(w-w_0)\right],\\
M_y &= -D\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}(w-w_0)+\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}(w-w_0)\right],\\
M_{xy} &= M_{yx} = -(1-\nu)D\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(w-w_0)
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
Q_x &= -D\frac{\partial}{\partial x}[\nabla^2(w-w_0)],\\
Q_y &= -D\frac{\partial}{\partial y}[\nabla^2(w-w_0)].
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$



Rys. 2. Siły wewnętrzne i naprężenia na krawędziach wyciętego elementu tarczy

We wzorach tych D oznacza płytową sztywność zginania

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{2.12}$$

Błonowe siły wewnętrzne N_x, N_y i τ określono za pomocą funkcji naprężeń Airy'ego $\Phi = \Phi(x, y)$ następującymi wzorami:

$$N_x = h\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = h\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}; \quad \tau = -h\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}. \tag{2.13}$$

W ten sposób wszystkie siły wewnętrzne wyrażają się za pomocą bądź funkcji naprężeń Airy'ego $\Phi = \Phi(x, y)$, bądź funkcji $(w-w_0)$ przyrostu ugięcia tarczy, wywołanego przyłożonym obciążeniem. Funkcje te związane są ze sobą układem dwóch nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych noszących nazwę równań Kármána. Dla rozpatrywanego zagadnienia równania te mają postać:

$$\frac{D}{h}\nabla^2\nabla^2(w-w_0) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}, \tag{2.14}$$

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = -\frac{E}{2}[U(w, w) - U(w_0, w_0)]. \tag{2.15}$$

W równaniach powyższych symbolem $\nabla^2\nabla^2$ oznaczono podwójny operator różniczkowy Laplace'a.

$$\nabla^2\nabla^2(\ldots) = \frac{\partial^4(\ldots)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4(\ldots)}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4(\ldots)}{\partial y^4}. \tag{2.16}$$

Symbol zaś U w równaniu (2.15) jest operatorem różniczkowym drugiego rzędu o postaci

$$U(\ldots) = 2\left\{\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial x^2}\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2(\ldots)}{\partial x\partial y}\right]^2\right\}. \tag{2.17}$$

3. Rozwiązanie zagadnienia

W celu uzyskania rozwiązania postawionego zagadnienia w oparciu o równania (2.14) i (2.15) założono taką postać funkcji $w = w(x, y)$ określającą końcowe ugięcie tarczy w stosunku do płaszczyzny xy, aby opisywała ona z możliwie dobrym przybliżeniem kształt, jaki przyjmie tarcza pod wpływem danego obciążenia. W oparciu o wstępne uwagi dla funkcji tej przyjęto postać, jak dla funkcji ugięcia wstępnego w_0

$$w(x, y) = \cos\frac{m\pi x}{2a}\left(w_{m,1}\cos\frac{\pi y}{2b} + w_{m,3}\cos\frac{3\pi y}{2b}\right). \tag{3.1}$$

Współczynniki $w_{m,1}$ i $w_{m,3}$ występujące w powyższym wyrażeniu, są nieznanymi parametrami ugięcia. Przyjęta funkcja wstępnego ugięcia $w_0 = w_0(x, y)$, jak i funkcja końcowego ugięcia tarczy $w = w(x, y)$ spełniają założone warunki swobodnego podparcia krawędzi tarczy. Jak wynika bowiem z wyrażeń (2.8) i (3.1)

$$\begin{aligned} (w_0)_{x=\pm a} &= (w_0)_{y=\pm b} = 0, \\ (w)_{x=\pm a} &= (w)_{y=\pm b} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Na podstawie zaś związku (2.4) zachodzi:

$$(3.3)\qquad (M_x)_{x=\pm a} = 0 \quad \text{i} \quad (M_y)_{y=\pm b} = 0.$$

Dla wyznaczenia przybliżonej postaci funkcji naprężeń $\Phi = \Phi(x, y)$, za pomocą której określone są błonowe siły przekrojowe N_x, N_y i τ, wykorzystano równanie (2.15), które przy uwzględnieniu wyrażeń (2.8) i (3.1) przyjmie postać:

$$(3.4)\qquad \nabla^2\nabla^2\Phi = -E\frac{m^2\pi^4}{32\cdot a^2b^2}\left\{(w_{m,1}^2 - w_{m,1}^{(0)2})\left(\cos\frac{\pi y}{b} + \cos\frac{m\pi x}{a}\right) + \right.$$
$$+2(w_{m,1}w_{m,3} - w_{m,1}^{(0)}w_{m,3}^{(0)})\left[\cos\frac{\pi y}{b} + 4\cos\frac{2\pi y}{b} + \left(4\cos\frac{\pi y}{b} + \cos\frac{2\pi y}{b}\right)\cos\frac{m\pi x}{a}\right] +$$
$$\left. +9(w_{m,3}^2 - w_{m,3}^{(0)2})\left(\cos\frac{3\pi y}{b} + \cos\frac{m\pi x}{a}\right)\right\}.$$

Jeżeli do powyższego równania wprowadzić następujące współczynniki bezwymiarowe:

(3.5)
- $\lambda = a/b$ współczynnik kształtu tarczy;
- $\xi_0 = w_{m,1}^{(0)}/h$ stosunek wstępnego ugięcia tarczy do jej grubości;
- $\xi = w_{m,1}/h$ stosunek końcowego ugięcia tarczy do jej grubości;
- $\Psi_0 = w_{m,3}^{(0)}/w_{m,1}^{(0)}$,
- $\Psi = w_{m,3}/w_{m,1}$,

to funkcja naprężeń $\Phi = \Phi(x, y)$, która jest ogólnym rozwiązaniem tego równania, będzie miała postać:

$$(3.6)\qquad \Phi(x, y) = -\frac{Em^2h^2}{16\lambda^2}\left\{\frac{1}{2}\left[(\xi^2 - \xi_0^2)\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{9}(\xi^2\Psi^2 - \xi_0^2\Psi_0^2)\cos\frac{3\pi y}{b}\right] + \right.$$
$$+\frac{1}{2m^4}\lambda^4[(\xi^2 - \xi_0^2) + 9(\xi^2\Psi^2 - \xi_0^2\Psi_0^2)]\cos\frac{m\pi x}{a} + (\xi^2\Psi - \xi^2\Psi_0)\left(\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi y}{b}\right) +$$
$$\left. +\lambda^4(\xi^2\Psi - \xi_0^2\Psi_0)\left[\frac{4}{(\lambda^2 + m^2)^2}\cos\frac{\pi y}{b} + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\right\} -$$
$$-\frac{1}{2}k_0y^2\left(\frac{1}{6}\alpha\frac{y^2}{b^2} - \beta\right) - A_1^*(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2.$$

Ostatni człon powyższego wyrażenia jest rozwiązaniem równania jednorodnego

$$(3.7)\qquad \nabla^2\nabla^2\Phi = \frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} = 0.$$

Błonowe siły przekrojowe N_x, N_y i τ wyrażają się za pomocą funkcji naprężeń $\Phi(x, y)$ związkami (2.13). Wykorzystując zatem wyrażenie (3.6), otrzymujemy:

$$(3.8)\qquad N_x = \frac{E\pi^2m^2h^3}{16b^2\lambda^2}\left\{\frac{1}{2}\left[(\xi^2 - \xi_0^2)\cos\frac{\pi y}{b} + \xi^2\Psi^2 + \xi_0^2\Psi_0^2)\cos\frac{3\pi y}{b}\right] - \right.$$
$$-(\xi^2\Psi - \xi_0^2\Psi_0)\left(\cos\frac{\pi y}{b} + \cos\frac{2\pi y}{b}\right) - 4\lambda^4((\xi^2\Psi - \xi_0^{22}\Psi_0)\left[\frac{1}{(\lambda^2 + m^2)^2}\cos\frac{\pi y}{b} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{(4\lambda^2 + m^2)^2}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\right\} - k_0h\left[\alpha\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \beta\right] - 4A_1h(x^2 - a^2)^2(3y^2 - b^2),$$

(3.8)
[c.d.]

$$N_y = \frac{Em^2h^3\pi^2\lambda^2}{16a^2}\left\{\frac{1}{2m^2}[(\xi^2-\xi_0^2)+9(\xi^2\Psi^2-\xi_0^2\Psi_0^2)]\cos\frac{m\pi x}{a}+\right.$$

$$+m^2(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left[\frac{4}{(\lambda^2+m^2)^2}\cos\frac{\pi y}{b}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{(4\lambda^2+m^2)^2}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\right\}-4A_1(3x^2-a^2)(y^2-b^2)^2h,$$

$$\tau = \frac{Em^3h^3\pi^2\lambda^2}{8ab}(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left[\frac{2}{(\lambda^2+m^2)^2}\sin\frac{\pi y}{b}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(4\lambda^2+m^2)^2}\sin\frac{2\pi y}{b}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}+16A_1hxy(x^2-a^2)(y^2-b^2).$$

Trzecie z otrzymanych powyżej wyrażeń staje się równe zeru dla $x = \pm a$ i $y = \pm b$. Stąd wynika, że na obwodzie tarczy nie ma sił stycznych τ zgodnie z przyjętymi założeniami dotyczącymi jej podparcia i obciążenia.

Dla stanu początkowego, to znaczy, gdy $\xi = \xi_0$ oraz $\Psi = \Psi_0$, jest

(3.9)
$$N_x = -K_0h\left[\alpha\left(\frac{y}{b}\right)^2-\beta\right]-4A_1h(x^2-a^2)^2(3y^2-b^2),$$

$$N_y = 0.$$

Obciążenie krawędzi tarczy siłami N_x i N_y sprowadza się zatem do pierwotnego, nieliniowo zmiennego rozkładu sił przyłożonych jedynie do krawędzi $x = \pm a$ (rys. 1). Natomiast po utracie stateczności, gdy wartość liczbowa parametru K_0, obciążenia tych krawędzi, przekroczy wartość krytyczną, stan obciążenia wszystkich krawędzi tarczy ulega zmianie [7].

Składowe σ_x, σ_y i τ_{xy} stanu naprężenia w powierzchni środkowej tarczy można wyrazić za pomocą następujących bezwymiarowych współczynników [7]:

(3.10)
$$\sigma_x^* = \sigma_x\frac{a^2}{Eh^2} = \frac{N_xa^2}{Eh^3},$$

$$\sigma_y^* = \sigma_y\frac{b^2}{Eh^2} = \frac{N_yb^2}{Eh^3},$$

$$\tau_{xy}^* = \tau_{xy}\frac{b^2}{Eh^2} = \frac{\tau b^2}{Eh^3}.$$

Jeśli ponadto dla parametru obciążenia K_0 przyjąć również bezwymiarowy współczynnik o postaci [7]

(3.11)
$$K_0^* = K_0\frac{a^2}{Eh^2},$$

to bezwymiarowe współczynniki (3.10) błonowego stanu naprężenia będą, przy wykorzystaniu związków (3.8), określone następującymi wzorami:

$$\sigma_x^* = \frac{\pi^2 m^2}{16}\left\{\frac{1}{2}\left[(\xi^2-\xi_0^2)\cos\frac{\pi y}{b}+(\xi^2\Psi^2-\xi_0^2\Psi_0^2)\cos\frac{3\pi y}{b}\right]-\right.$$
$$-(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left(\cos\frac{\pi y}{b}+\cos\frac{2\pi y}{b}\right)-4\lambda^4(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left[\frac{1}{(\lambda^2+m^2)^2}\cos\frac{\pi y}{b}+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{(4\lambda^2+m^2)^2}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\right\}-K_0^*\left[\alpha\left(\frac{y}{b}\right)^2-\beta\right]-$$
$$-4A_1\frac{a^2}{Eh^2}(x^2-a^2)^2(3y^2-b^2),$$

$$\sigma_y^* = \frac{n^2\pi^2}{16}\left\{\frac{1}{2m^2}\left[(\xi^2-\xi_0^2)+9(\xi^2\Psi^2-\xi_0^2\Psi_0^2)\right]\cos\frac{m\pi x}{a}+\right.\tag{3.12}$$
$$\left.+m^2(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left[\frac{4}{(\lambda^2+m^2)^2}\cos\frac{\pi y}{b}+\frac{1}{(4\lambda^2+m^2)^2}\cos\frac{2\pi y}{b}\right]\cos\frac{m\pi x}{a}\right\}-$$
$$-4A_1\frac{b^2}{Eh^2}(3x^2-a^2)(y^2-b^2)^2,$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{m^3\pi^2\lambda}{8}(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left[\frac{2}{(\lambda^2+m^2)^2}\sin\frac{\pi y}{b}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{(4\lambda^2+m^2)^2}\sin\frac{2\pi y}{b}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}+16A_1xy\frac{b^2}{Eh^2}(x^2-a^2)(y^2-b^2).$$

Momenty gnące M_x i M_y oraz moment skręcający M_{xy}, powstające w wyniku zmiany krzywizny tarczy wywołanej przyłożonym obciążeniem, dadzą się również wyrazić za pomocą wielkości bezwymiarowych o postaci, [7]:

$$M_x^* = \frac{M_x}{Eh^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2;\quad M_y^* = \frac{M_y}{Eh^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2;\quad M_{xy}^* = \frac{M_{xy}}{Eh^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2.\tag{3.13}$$

Na podstawie wzorów (2.10) oraz wyrażeń (2.8), (3.1) i (3.5) powyższe współczynniki określone będą, po wprowadzeniu do nich współczynników zdefiniowanych wyrażeniami (3.5), następującymi wzorami:

$$M_x^* = \frac{\pi^2}{48(1-\nu^2)}\left[(\xi-\xi_0)(m^2+\nu\lambda^2)\cos\frac{\pi y}{2b}+\right.$$
$$\left.+(\xi\Psi-\xi_0\Psi_0)(n^2+9\nu\lambda^2)\cos\frac{3\pi y}{2b}\right]\cos\frac{m\pi x}{2a},$$

$$M_y^* = \frac{\pi^2}{48(1-\nu^2)}\left[(\xi-\xi_0)(\lambda^2+\nu m^2)\cos\frac{\pi y}{2b}+\right.\tag{3.14}$$
$$\left.+(\xi\Psi-\xi_0\Psi_0)(9\lambda^2+\nu m^2)\cos\frac{3\pi y}{2b}\right]\cos\frac{m\pi x}{2a},$$

$$M_{xy}^* = -\frac{\pi^2 m}{48(1+\nu)}\lambda\left[(\xi-\xi_0)\sin\frac{\pi y}{2b}+3(\xi\Psi-\xi_0\Psi_0)\sin\frac{3\pi y}{2b}\right]\sin\frac{m\pi x}{2a}.$$

Maksymalne wartości momentów M_x, M_y i M_{xy}, będących wypadkowymi odpowiednich składowych dodatkowego zgięciowego stanu naprężenia, określone są za pomocą wzorów:

$$(\sigma_{xg})_{\max} = \frac{6M_x}{h^2}, \quad (\sigma_{yg})_{\max} = \frac{6M_y}{h^2}, \quad (\tau_g)_{\max} = \frac{6M_{xy}}{h^2}. \tag{3.15}$$

Dla powyższych wielkości można również wprowadzić bezwymiarowe współczynniki o postaci, [7]:

$$\begin{aligned} \sigma^*_{xg} &= \frac{(\sigma_{xg})_{\max}}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2, \\ \sigma^*_{yg} &= \frac{(\sigma_{yg})_{\max}}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2, \\ \tau^*_g &= \frac{(\tau_{g\max})}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.16}$$

które, przy wykorzystaniu wyrażeń (3.13), określone będą następująco, [7]:

$$\begin{aligned} \sigma^*_{xg} &= \frac{6M_x}{Eh^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2 = 6M^*_x, \\ \sigma^*_{yg} &= \frac{6M_y}{Eh^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2 = 6M^*_y, \\ \tau^*_g &= \frac{6M_{xy}}{Eh^2}\left(\frac{a}{h}\right)^2 = 6M^*_{xy}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Wprowadzając współczynniki ξ_0, Ψ_0, ξ i Ψ do wyrażeń (2.8) i (3.1), można funkcje w_0 i w, zarówno wstępnego, jak i końcowego ugięcia tarczy, wyrazić również bezwymiarowymi współczynnikami postaci, [7]:

$$w^* = \frac{w}{h} = \xi\left(\cos\frac{\pi y}{2b} + \Psi\cos\frac{3\pi y}{2b}\right)\cos\frac{m\pi x}{2a}, \tag{3.18}$$

$$w^*_0 = \frac{w_0}{h} = \xi_0\left(\cos\frac{\pi y}{2b} + \Psi_0\cos\frac{3\pi y}{2b}\right)\cos\frac{m\pi x}{2a}. \tag{3.19}$$

Dla określenia stanu naprężenia i odkształcenia tarczy konieczne jest wyznaczenie bezwymiarowych współczynników Ψ i K^*_0 w zależności od współczynników wstępnego ugięcia ξ_0 i Ψ_0 — dla różnych wartości współczynnika ξ ugięcia końcowego tarczy. Wykorzystamy w tym celu równanie (2.14), które rozwiążemy stosując metodę GALERKINA. W rozpatrywanym przypadku muszą być spełnione następujące dwa równania:

$$\begin{aligned} &\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} F(w, w_0, \Phi)\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}\,dx\,dy = 0, \\ &\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} F(w, w_0, \Phi)\cos\frac{m\pi x}{2a}\cos\frac{3\pi y}{2b}\,dx\,dy = 0, \end{aligned} \tag{3.20}$$

w których symbolem $F(w, w_0, \Phi)$ oznaczono wyrażenie

$$(3.21)\quad F(w, w_0, \Phi) = D\cdot\nabla^2\nabla^2(w-w_0)-h\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right].$$

Po wstawieniu do równań (3.20) odpowiednich pochodnych funkcji ugięcia w_0 i w oraz funkcji naprężeń Φ i wprowadzeniu do nich bezwymiarowych współczynników ξ_0, Ψ_0, ξ, Ψ i K_0^* przyjmą one następującą postać:

$$(3.22)\quad \frac{\pi^2(m^2+\lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)}(\xi-\xi_0)+\frac{\pi^2m^4}{32}\xi\left\{(\xi^2-\xi_0^2)\left(1+\frac{\lambda^4}{m^4}\right)+\right.$$
$$+(\xi^2\Psi^2-\xi_0^2\Psi_0^2)\frac{9\lambda^4}{m^4}+2(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left[1+\frac{4\lambda^4}{(\lambda^2+m^2)^2}\right]\right\}-$$
$$-K_0^*\xi\left\{\frac{m^2}{4\pi^2}\left[\frac{1}{3}(\pi^2-6)\alpha-\frac{1}{2}(2\pi^2\beta+5\alpha\Psi)\right]-\right.$$
$$\left.-A_1^*\frac{1}{\pi^6\lambda^2m^3}\left[\frac{8}{3}(m^4\pi^2+15)+\frac{49}{2}m^4\pi^2\Psi\right]\right\}=0,$$

$$(3.23)\quad \frac{\pi^2(m^2+9\lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)}(\xi\Psi-\xi_0\Psi_0)+\frac{\pi^2m^4}{32}\xi\left[(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\frac{9\lambda^4}{m^4}+\right.$$
$$\left.+\Psi(\xi^2\Psi^2-\xi_0^2\Psi_0^2)\left(1+\frac{81\lambda^4}{m^4}\right)\right]-K_0^*\xi\left\{m^2\left[\frac{2}{9\pi^2}(3\pi^2+2)\alpha\Psi-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{\pi^2}(2\pi^2\beta\Psi+5\alpha)\right]-\frac{8A_1^*}{\pi^2\lambda^2}\left[\frac{49m^2}{2}+\frac{16}{45}\left(1+\frac{15}{m^2\pi^2}\right)\Psi\right]\right\}=0.$$

Po wyrugowaniu z równań (3.22) i (3.23) bezwymiarowego współczynnika obciążenia K_0^* otrzymuje się następujące równanie czwartego stopnia względem współczynnika Ψ:

$$(3.24)\quad z_1\Psi^4+z_2\Psi^3+z_3\Psi^2+z_4\Psi+z_5=0,$$

gdzie:

$$z_1=\frac{1}{256\pi^2}\xi^2m^2\left(15876\lambda^2A_1^*+405\pi^2\lambda^4\alpha+196A_1^*m^4\frac{1}{\lambda^2}+5\pi^2m^4\alpha\right),$$

$$z_2=\xi^2\left\{\frac{81\lambda^2}{10m^2\pi^4}A_1^*(m^4\pi^2+15)-\frac{27}{128}m^2\lambda^4(\pi^2-6)\alpha+\right.$$
$$+\frac{m^2A_1^*(m^2\pi^2+15)}{10\pi^4\lambda^2}-\frac{m^6}{128}\left[\frac{1}{3}(\pi^2-6)\alpha-\pi^2\beta\right]-\frac{4}{5}\lambda^2A_1^*\left(1+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{15}{m^2\pi^2}\right)-\frac{9}{16}\lambda^4m^2\pi^2\beta+\frac{1}{16}\lambda^4m^2(3\pi^2-2)\alpha\right\},$$

$$z_3 = \frac{441}{64} m^2 \lambda^2 \xi^2 A_1^* \frac{1}{\pi^2} + \frac{45}{256} \xi^2 \lambda^4 m^4 \alpha + \frac{49(m^2+9\lambda^2)^2}{48(1-\nu^2)} A_1^* \frac{m^2}{\pi^4 \lambda^2} +$$

$$+ \frac{5(m^2+9\lambda^2)^2}{192(1-\nu^2)} m^2 \alpha - \frac{8}{45} \xi^2 A_1^* m^4 \frac{1}{\lambda^2} \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right) -$$

$$- \frac{1}{8} \pi^2 \beta m^6 \xi^2 \left[1 + \frac{4}{\left(1+\frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2}\right] + \frac{1}{72} m^6 \xi^2 \left[1 + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{\left(1+\frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2}\right] (3\pi^2 - 2)\alpha - \frac{441}{8} \lambda^2 \xi^2 m^2 A_1^* -$$

$$- \frac{45}{32} \xi^2 \lambda^4 m^2 \alpha - \frac{1}{64} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 \lambda^2 m \left(\frac{405}{4} \alpha \lambda^2 m + 3969 A_1^* \frac{1}{\pi^2}\right),$$

$$z_4 = \frac{9}{10} \xi^2 A_1^* \lambda^2 \frac{(m^4\pi^2+15)}{\pi^4 m^2} - \frac{3}{128} \xi^2 \lambda^4 m^4 (\pi^2 - 6)\alpha + \frac{2}{15} A_1^* \frac{(m^4\pi^2+15)}{\pi^4 \lambda^2 m^2} \frac{(m^2+9\lambda^2)^2}{1-\nu^2} -$$

$$- \frac{m^2(m^2+9\lambda^2)}{96(1-\nu^2)} \left[\frac{1}{3}(\pi^2-6)\alpha - \pi^2 \beta\right] - \frac{49}{4} m^6 \xi^2 A_1^* \left[1 + \frac{4}{\left(1+\frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2}\right] \frac{1}{\lambda^2} -$$

$$- \frac{5}{16} \xi^2 m^6 \left[1 + \frac{4}{\left(1+\frac{m^2}{\lambda^2}\right)^2}\right] \alpha - \frac{4}{15} \xi^2 A_1^* \lambda^2 \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right) - \frac{1}{16} \xi^2 m^2 \lambda^4 \pi^4 \beta +$$

$$+ \frac{\lambda^4}{144} \xi^2 m^2 (3\pi^2 - 2)\alpha - \frac{4}{45} \xi^2 A_1^* \frac{m^4}{\lambda^2} \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right) - \frac{1}{16} \xi^2 m^6 \pi^2 \beta +$$

$$+ \frac{m^6}{144} \xi^2 (3\pi^2 - 2)\alpha - \frac{16}{135} \frac{(m^2+\lambda^2)^2}{1-\nu^2} A_1^* \frac{1}{\lambda^2} \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right) - \frac{m^2 \pi^2 \beta (m^2+\lambda^2)^2}{12(1-\nu^2)} +$$

$$+ m^2 (3\pi^2 - 2) \frac{(m^2+\lambda)^2}{108} \alpha + \xi \xi_0 \frac{(m^2+\lambda^2)^2}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\pi^2}{12} m^2 \beta - \frac{1}{108} (3\pi^2 - 2)\alpha m^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{16}{135} \frac{A_1^*}{\lambda^2} \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right)\right] + \xi^2 \xi_0^2 \left(1 + \frac{\lambda^4}{m^4}\right) \left[\frac{\pi^2 m^6}{16} \beta + \frac{4}{45} \frac{A_1^*}{\lambda^2} m^4 \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{m^6}{144} (3\pi^2 - 2)\alpha\right] + \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 \left[\frac{4}{5} \lambda^2 \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right) A_1^* + \frac{9}{16} \pi^2 m^2 \lambda^4 \beta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{16} m^2 \lambda^4 (3\pi^2 - 2)\right] + \frac{1}{72} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 m^6 [9\pi^2 \beta - (3\pi^2 - 2)\alpha] \left[1 + 4 \frac{\lambda^4}{(\lambda^2+m^2)^2}\right] +$$

$$+ \frac{8}{45} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 \left(1 + \frac{15}{m^2\pi^2}\right) \frac{m^4}{\lambda^4} (A_1^* + 1) - \frac{m\lambda^2}{256} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0 \left(45 m \lambda^2 \alpha + \right.$$

$$\left. + 1764 A_1^* \frac{1}{\pi^2}\right) + \frac{1}{384} \xi^2 \xi_0^2 \Psi_0^2 (m^4 + 81\lambda^4) m^2 [\alpha(\pi^2 - 6) - 3\pi^2 \beta] -$$

$$-\frac{1}{12}\xi^2\xi_0^2\Psi_0^2A_1^*\frac{(m^4\pi^2+15)}{\pi^4}\left(\frac{m^2}{\lambda^2}+81\frac{\lambda^2}{m^3}\right)-$$

$$-\frac{1}{192}\xi\xi_0\Psi_0\frac{(m^2+9\lambda^2)^2}{(1-\nu^2)}\left(5\alpha+196A_1^*\frac{m}{\pi^2\lambda^2}\right),$$

$$z_5 = -\frac{49}{8}\xi^2A_1^*\lambda^2m^2-\frac{5}{32}\xi^2m^2\lambda^4\alpha-\frac{49}{8}\xi^2A_1^*\frac{m^6}{\lambda^2}-$$

$$-\frac{5}{32}\xi^2m^6\alpha-\frac{49}{6}\frac{(m^2+\lambda^2)^2}{1-\nu^2}A_1^*m^2\frac{1}{\lambda^2}-\frac{5(m^2+\lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)}m^2\alpha+$$

$$+\left(5\alpha+\frac{196A_1^*}{\lambda^2}\right)\left\{\frac{9}{32}m^2\xi^2\xi_0^2\Psi_0^2\lambda^4+\frac{1}{16}m^6\xi^2\xi_0^2\Psi_0\left[1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{4\lambda^4}{(\lambda^2+m^2)^2}\right]+\frac{(m^2+\lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)}m^2\xi\xi_0+\frac{m^6}{32}\left(1+\frac{\lambda^4}{m^4}\right)\xi^2\xi_0^2\right\}+$$

$$+\left[\pi^2\beta-\frac{(\pi^2-6)}{3}\alpha\right]\left[\frac{(m^2+9\lambda^2)^2}{96(1-\nu^2)}m^2\xi\xi_0\Psi_0+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{128}m^2\xi^2\xi_0^2\Psi_0\lambda^4\right]+\frac{3}{4}\frac{(m^4\pi^2+15)}{m^3\pi^4}\lambda^2\xi_0^2\xi^2\Psi_0A_1^*+$$

$$+\frac{1}{9}\frac{(m^2+9\lambda^2)^2}{(1-\nu^2)}\frac{(m^4\pi^2+15)}{\pi^4\lambda^2m^3}\xi\xi_0\Psi_0A_1^*.$$

Bezwymiarowy współczynnik obciążenia K_0^*, w zależności od współczynników bezwymiarowych (3.5), wyraża się następującym wzorem:

$$K_0^* = \frac{\Gamma_{11}+\Gamma_{12}+\Gamma_{13}+\Gamma_{14}}{\Gamma_{15}-\Gamma_{16}}, \tag{3.25}$$

gdzie:

$$\Gamma_{11} = \frac{\pi^2(m^2+\lambda^2)^2}{24(1-\nu^2)}(\xi-\xi_0),$$

$$\Gamma_{12} = \frac{\pi^2m^4}{32}\xi(\xi^2-\xi_0^2)\left(1+\frac{\lambda^4}{m^4}\right),$$

$$\Gamma_{13} = \frac{9\lambda^4\pi^2}{32}\xi(\xi^2\Psi^2-\xi_0^2\Psi_0^2),$$

$$\Gamma_{14} = \frac{\pi^2m^4}{16}\xi(\xi^2\Psi-\xi_0^2\Psi_0)\left[1+\frac{4\lambda^2}{(\lambda^2+m^2)^2}\right],$$

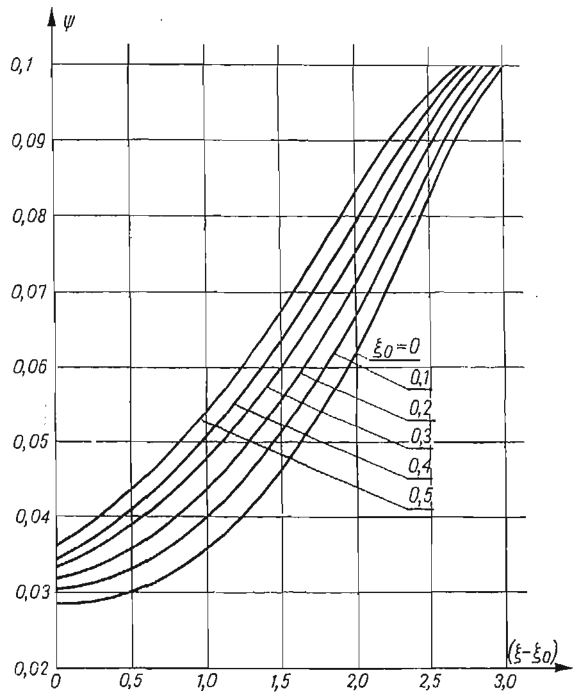
$$\Gamma_{15} = \frac{m^2}{4\pi^2}\xi\left[\frac{1}{3}(\pi^2-6)\alpha-\frac{1}{2}(2\pi^2\beta+5\alpha\Psi)\right],$$

$$\Gamma_{16} = \frac{1}{\pi^6\lambda^2m^3}A_1^*\xi\left[\frac{8}{3}(m^4\pi^2+15)+\frac{49}{2}m^4\pi^2\Psi\right].$$

Zakładając w równaniach (3.24) i (3.25) $\xi_0 = 0$ oraz $\Psi_0 = 0$ otrzymamy związki, mające zastosowanie dla tarczy obciążonej nieliniowo, lecz pozbawionej wstępnego ugięcia w_0. Wzory te odpowiadają przypadkowi rozpatrzonemu w pracy [7] dla pierwszego przybliżenia.

4. Obliczenia liczbowe

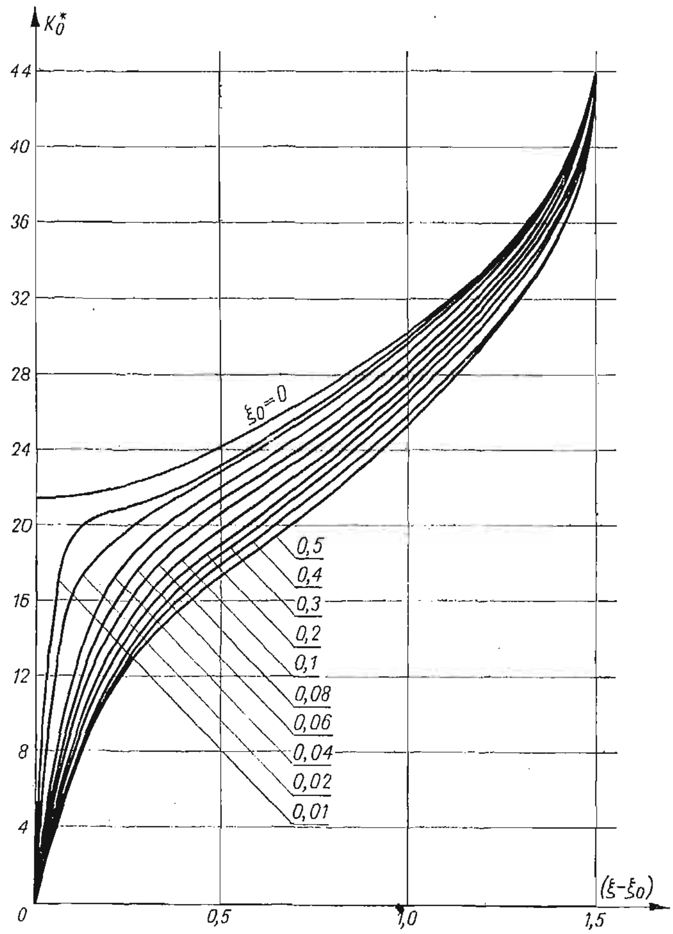
Szczegółowe obliczenia liczbowe dotyczą tarczy o współczynniku kształtu $\lambda = a/b = 2$. Dla materiału tarczy przyjęto liczbę Poissona $\nu = 0,3$. Obliczenia przeprowadzono zakładając szereg wartości dla współczynnika ξ (od $\xi = 0,1$ do $3,0$), a następnie przyjmując dla każdej z nich kilka kolejnych wartości współczynnika ξ_0 ugięcia wstępnego (od $\xi_0 = 0,01$ do $0,5$) oraz odpowiadających im wartości współczynnika Ψ_0.



Rys. 3. Wykresy zależności $\Psi = \Psi(\xi - \xi_0)$ dla różnych wartości współczynnika ξ_0 wstępnego ugięcia tarczy

Dla przyjmowanych wartości współczynników ξ_0 zachowano warunek $\xi_0 \leqslant \xi$, wartości zaś współczynników Ψ_0 wyznaczono z równania (3.26) odpowiadającego przypadkowi tarczy bez ugięcia wstępnego. Przyjęto zatem, że $\Psi_0 = (\Psi)_{\substack{\xi_0=0\\ \Psi_0=0}}$. Takie przyjęcie odpowiada najniekorzystniejszemu przypadkowi, w którym wstępne ugięcie powierzchni środkowej tarczy ma taką postać, jaką początkowo płaska tarcza przyjmuje po utracie stateczności. Wartości liczbowe współczynników Ψ, w zależności od założonych wartości współczynnika ξ, wyznaczone zostały na podstawie równania (3.24) dla różnych wartości współczynników ξ_0 ugięcia wstępnego. Następnie w taki sam sposób wyznaczono wartości bezwymiarowego współczynnika K_0^* na podstawie równania (3.25). Obliczenia liczbowe wykonane zostały na EMC Odra — 1204, a wyniki przedstawiono na wykresach.

Na rys. 3 podano wykresy funkcji $\Psi = \Psi(\xi-\xi_0)$ dla różnych wartości współczynników ξ_0 ugięcia wstępnego. Dla każdej wartości tej odciętej rzędne krzywych rosną wraz ze wzrostem współczynnika ξ_0 wstępnego ugięcia tarczy, podobnie jak w [3]. Oznacza to, że im większe jest wstępne ugięcie tarczy, tym odpowiednio większa jest amplituda trzech półfal cosinusoidy nałożonych na ugiętą powierzchnię środkową tarczy wzdłuż osi 0_y, reprezentowanych drugim członem wyrażenia (3.1). Amplituda ta jest najmniejsza wówczas, gdy tarcza jest początkowo płaska. Przebieg krzywych $K_0^* = K_0^*(\xi-\xi_0)$ dla różnych wartości współczynnika ξ_0 ugięcia wstępnego przedstawiono na rys. 4. Krzywa górna przedstawia krytyczne wartości współczynnika obciążenia $(K_0^*)_{\xi_0=0}$ odpowiadające tarczy bez ugięcia wstępnego. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika $\xi_0 = 0{,}01, \ldots, 0{,}5$, odbiegają znacznie od siebie aż do wartości odciętej $(\xi-\xi_0) =$



Rys. 4. Wykresy zależności współczynnika obciążenia $K_0^* = K_0^*(\xi-\xi_0)$ dla różnych wartości współczynnika ξ_0 wstępnego ugięcia tarczy

$= 1, 2$. Powyżej tej wartości wszystkie krzywe asymptotycznie dążą do krzywej $\xi_0 = 0$. Wynika stąd, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia wstępnego, wpływ tego ugięcia praktycznie zanika, gdy całkowite ugięcie tarczy wynosi około 1,6 grubości tarczy.

5. Analiza porównawcza z tarczą o wstępnym jednostronnym wybrzuszeniu

W celu porównania otrzymanych wyników rozpatrzono przypadek tarczy podpartej i obciążonej identycznie, jak tarcza dotychczas rozpatrywana, dla której założono kształt wstępnego ugięcia powierzchni środkowej w postaci jednostronnego wybrzuszenia, najczęściej występującego w praktyce. Dla tego przypadku ugiętą wstępnie powierzchnię środkową tarczy można opisać wyrażeniem przedstawiającym nałożenie się jednej półfali cosinusoidy zarówno wzdłuż osi x, jak i osi y przyjętego (rys. 1) układu współrzędnych. Funkcję w_0, określającą kształt ugiętej powierzchni środkowej tarczy przed jej obciążeniem, można zapisać w postaci

$$w_0 = w_0^{(0)} \cos\frac{m\pi x}{2a} \cos\frac{\pi y}{2b}, \tag{5.1}$$

gdzie $w_0^{(0)}$ jest parametrem równym wstępnemu wychyleniu środka tarczy z płaszczyzny xy. Funkcja ta ma postać identyczną z wyrażeniem (2.8) po przyjęciu $w_{m,3}^{(0)} = 0$.

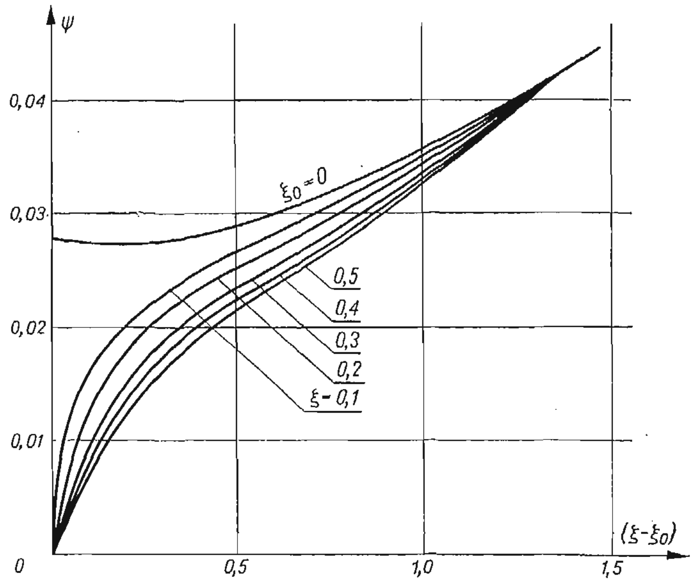
Do dalszych rozważań przyjęto, że pod wpływem przyłożonego obciążenia powierzchnia środkowa tarczy przyjmie kształt opisany równaniem (3.1). Wówczas odpowiednie związki równania dla rozważanego obecnie przypadku można uzyskać z odpowiadających związków i równań, otrzymanych dla przypadku poprzednio rozpatrzonego, przyjmując w nich, że parametr $w_{m,3}^{(0)}$ lub odpowiadający mu współczynnik bezwymiarowy $\Psi_0 = w_{m,3}^{(0)}/w_{m,1}^{(0)}$ są równe zeru.

Obliczenia liczbowe przeprowadzono zakładając te same jak poprzednio wartości współczynnika kształtu tarczy λ oraz liczby Poissona ν. Dla bezwymiarowego współczynnika ugięcia wstępnego ξ_0 przyjęto wartości zmieniające się w granicach od $\xi_0 = 0{,}1$ do 0,5. Dla współczynnika ξ końcowego ugięcia tarczy przyjęto wartości $\xi = 0{,}1, \ldots, 2{,}5$.

Obliczenia przeprowadzono przy zachowaniu warunku $\xi_0 \leqslant \xi$. Otrzymane wyniki zilustrowano na następujących dwóch wykresach: pierwszy z nich, podany na rys. 5, przedstawia zależność współczynnika $\Psi = \Psi(\xi-\xi_0)$. Górna krzywa, dla $\xi_0 = 0$, odpowiada wstępnie płaskiej postaci tarczy. Pozostałe krzywe, odpowiadające kolejnym wartościom współczynnika ξ_0 ugięcia wstępnego (dla $\xi_0 = 0{,}1, \ldots, 0{,}5$), przebiegają poniżej tej krzywej. Wynika stąd, że w przeciwieństwie do poprzedniego rozpatrywanego przypadku — gdy tarcza ma ugięcie wstępne w postaci jednostronnego wybrzuszenia — amplituda trzech półfal cosinusoidy określonych drugim członem funkcji (3.1) końcowego ugięcia tarczy jest mniejsza niż w tym przypadku, gdy tarcza jest początkowo idealnie płaska.

Wszystkie omawiane krzywe dla $\xi_0 \neq 0$ zbliżają się asymptotycznie do krzywej dla $\xi_0 = 0$, przy czym różnice rzędnych między nimi praktycznie znikają począwszy od wartości $(\xi-\xi_0) \approx 1{,}2$.

Na rys. 6 przedstawiono przebieg zmian bezwymiarowego współczynnika obciążenia K_0^* w zależności od przyrostu ugięcia $(\xi-\xi_0)$ dla kolejnych wartości współczynnika ξ_0 ugięcia wstępnego (linie przerywane). Krzywe te przebiegają podobnie, jak krzywe $\Psi = \Psi(\xi-\xi_0)$ na rys. 5. Przy małych wartościach przyrostu ugięcia tarczy różnice rzędnych między tymi krzywymi a krzywą górną są znaczne. Ze wzrostem zaś ugięcia tarczy różnice te maleją, a wszystkie krzywe zbliżają się do krzywej górnej. Dla mniej więcej tej samej wartości odciętej, co na wykresie poprzednim dla funkcji $\Psi = \Psi(\xi-\xi_0)$, różnice rzęd-



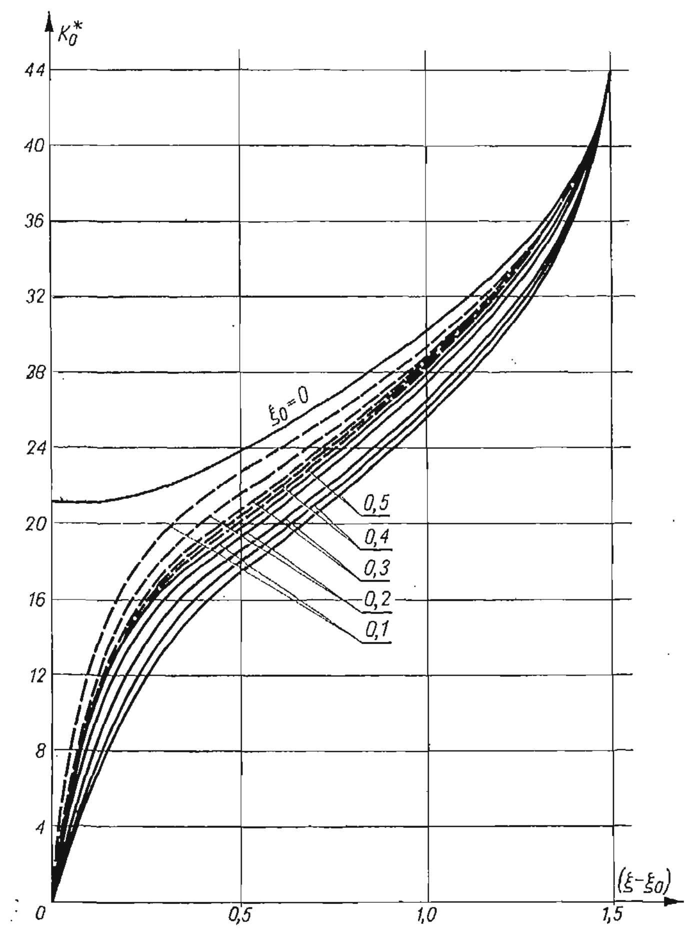
Rys. 5. Wykres zależności $\Psi = \Psi(\xi-\xi_0)$ dla różnych wartości współczynnika ξ i dla przypadku tarczy z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

nych między wszystkimi krzywymi $K_0^* = K_0^*(\xi-\xi_0)$ stają się pomijalnie małe. Stąd wynika, że w zakresie zbadanej zmienności ugięcia wstępnego wpływ tego ugięcia również i w rozpatrywanym przypadku zanika mniej więcej dla tej samej wartości całkowitego ugięcia tarczy, co w przypadku poprzednio rozpatrzonym.

Dla zilustrowania powyższego faktu na rys. 6 naniesiono dodatkowe krzywe $K_0^* = K_0^*(\xi-\xi_0)$ z rys. 4 (linie ciągłe). Jak widać, wszystkie krzywe ciągłe leżą poniżej odpowiadających im krzywych przerywanych (dla tych samych wartości ξ_0). A zatem osiągnięcie określonego ugięcia końcowego tarczy następuje przy mniejszej wartości obciążenia wówczas, gdy postać wstępnego ugięcia powierzchni środkowej tarczy jest bliższa tej postaci, jaką pierwotnie płaska tarcza przyjmuje po utracie stateczności.

Na podstawie przeprowadzonej analizy można wnioskować, że w zakresie zbadanych wartości ugięcia wstępnego, wpływ tego ugięcia praktycznie zanika, gdy końcowe ugięcie tarczy wynosi około 1,7 jej grubości. Wówczas stan naprężenia i odkształcenia różni się pomijalnie mało od stanu, jaki (przy danym obciążeniu) panuje w tarczy początkowo płaskiej. W praktyce początkowe ugięcie tarczy wynika na ogół z przypadkowego, mniej, lub więcej nieregularnego pofalowania powierzchni. Temu pofalowaniu mogą odpowiadać zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości współczynnika Ψ_0.

Z punktu widzenia pracy tarczy w warunkach obciążenia ponadkrytycznego najbardziej niekorzystne są takie przypadki, gdy pofalowanie związane jest z jednostronnym wybrzuszeniem powierzchni środkowej tarczy; zachodzi to dla $\Psi_0 \geqslant 0$. Taki rzeczywisty kształt wstępnego ugięcia tarczy jednakże tylko w pewnym przybliżeniu odpowiada omówionym w pracy przypadkom. Z tego też względu wydaje się właściwe, by stan naprężenia odkształcenia tarczy, przy uwzględnieniu jej wstępnego ugięcia, określać na podstawie wzorów odpowiadających przypadkowi najbardziej niekorzystnemu.



Rys. 6. Wykresy zależności współczynnika obciążenia $K_0^* = K_0^*(\xi-\xi_0)$ dla różnych wartości współczynnika ξ_0 i dla przypadku tarczy z jednostronnym wstępnym wybrzuszeniem

Jak wynika z przeprowadzonej analizy, należy zatem preferować wzory mające zastosowanie w przypadku, gdy kształt ugiętej wstępnie powierzchni środkowej tarczy odpowiada postaci, jaką tarcza przyjmuje po utracie stateczności.

Literatura cytowana w tekście

1. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, Warszawa 1961.
2. А. Ц. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
3. W. WALCZAK, *Wpływ wstępnych ugięć na pracę płyty prostokątnej, zginanej w swej płaszczyźnie*, Mech. Teoret. Stos., 3, 11 (1973).
4. M. KMIECIK, *Wpływ odkształceń wstępnych na wytrzymałość osiowo-ściskanych płyt prostokątnych* (praca doktorska), Politechnika Gdańska, 1970.
5. А. Ц. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, ГИТТЛ, Москва 1956.
6. S. TIMOSHENKO, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill Company, 1961.
7. T. SIEGMÜLLER, *Analiza stateczności i stanu nadkrytycznego tarczy prostokątnej poddanej nieliniowemu rozkładowi obciążeń*, (w druku, Arch. Bud. Masz.).

Резюме

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРОГИБА НА РАБОТУ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ДИСКА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕЛИНЕЙНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

В работе приводится теоретический анализ влияния начального прогиба на напряженное состояние и деформацию после потери устойчивости прямоугольного диска свободно опертого по контуру и подверженного нагрузке с нелинейным распределением. Рассуждения ведутся с применением функции напряжений Эри $\Phi(x, y)$. Принимаются удовлетворяющие краевым условиям задачи представления функций прогиба серединной поверхности диска — исходного $w_0(x, y)$ и конечного $w(x, y)$.

Для определения этих функций использовалось дифференциальное уравнение Кармана нелинейной теории пластинок, а неизвестные параметры содержащиеся в принятых функциях прогиба находились с применением метода Галеркина.

Полученные выражения для напряжений и деформаций в закритическом состоянии были выражены посредством безразмерных величин. Численные примеры решены для двух видов исходного прогиба серединной поверхности диска, для этих случаев найдены условия при которых можно пренебречь влиянием исходного прогиба.

Summary

INFLUENCE OF INITIAL DEFLECTIONS ON THE WORK OF A RECTANGULAR PLATE SUBJECT TO THE NON-LINEAR LOAD

This paper presents a theoretical analysis of the influence of initial deflections on the state of stress and strain in an isotropic, rectangular plate simply supported along the edges and subject to the non-linear load — after the stability loss. The Airy stress function $\Phi(x, y)$ is introduced, and the form of initial deflection $w_0(x, y)$ and final deflection $w(x, y)$ is assumed to satisfy the boundary conditions.

These functions are then determined by means of the Kármán equations of the non-linear plate theory, the unknown parameters appearing in the function of deflection being found by means of the Galerkin method.

The final formulas determining the stresses and strains in the post-critical state of the plate are written in terms of dimensionless coefficients.

Numerical calculations are performed for two different forms of the initial deflection of the middle surface of the plate; conditions are also derived under which the influence of initial deflections may be disregarded.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 grudnia 1974 r.

MECHANIKA
TEORETYCZNA
I STOSOWANA
4, 13 (1975)

NIELINIOWE DRGANIA ELASTYCZNIE POSADOWIONYCH SILNIKÓW TŁOKOWYCH Z CYLINDRAMI W UKŁADZIE V

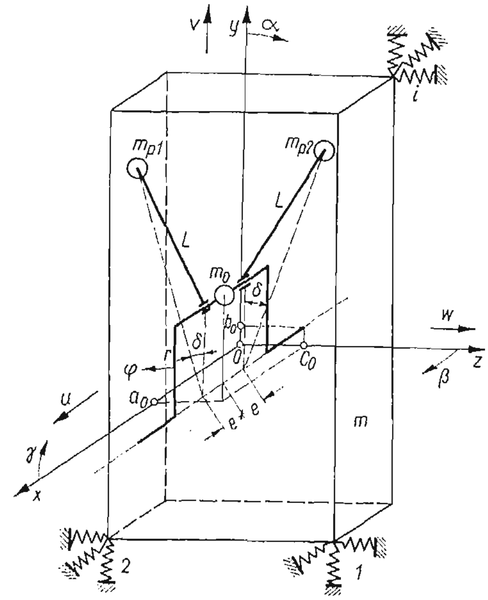
JANUSZ KOLENDA (GDAŃSK)

1. Wstęp

Elastyczne posadowienie silników tłokowych stosuje się w celu zmniejszenia poziomu drgań i hałasów przenoszonych drogą strukturalną na fundament i dalsze elementy konstrukcji. W wyniku drgań elastycznie posadowionych silników powstają w nich dodatkowe siły i momenty masowe, powodujące obciążenie poszczególnych elementów silnika, a także samego silnika, jako nieidealnego źródła energii. Jak wykazały badania PFLAUMA [1] i szacunkowe obliczenia HEMPELA [2], siły i momenty te nie są duże, jednakże celowe byłoby ich uwzględnianie, przede wszystkim w przypadkach, gdy pożądana jest dokładniejsza analiza drgań i skuteczniejsza z nimi walka. Jest to szczególnie istotne z punktu widzenia ochrony zdrowia człowieka, zwłaszcza wobec obserwowanego w ostatnich latach wzrostu mocy z cylindra, pociągającego za sobą wzrost sił i momentów wymuszających drgania. Jest to istotne także z powodu strat energetycznych wynikających z elastycznego posadowienia, zwłaszcza wobec znacznego wzrostu cen paliwa na światowych rynkach. Minimalizacja tych strat mogłaby być w uzasadnionych przypadkach stosowana jako dodatkowe kryterium doboru systemu amortyzacji. Dokładniejszą analizę drgań i wyznaczenie dodatkowych sił i momentów masowych oraz strat energetycznych umożliwia uwzględnienie nieidealnego źródła energii i potraktowanie prędkości kątowej silnika jako wielkości zmiennej. Wpływ nieidealnego źródła energii i jego sprzężenie z układem drgającym były po raz pierwszy analizowane przez ROCARDA [3] (dla przypadku wirującej masy niewyrównoważonej, napędzanej silnikiem elektrycznym), a później także przez KONONIENKĘ [4] i GOŁOSKOKOWA [5]. Zagadnienia te były rozpatrywane przez autora dla przypadków układu wibracyjno-uderzeniowego [6] oraz silników tłokowych o pionowym układzie cylindrów [7]. Niniejsza praca dotyczy silników tłokowych z cylindrami w układzie V.

2. Zależności kinematyczne

Rozpatrywać będziemy układ dyskretny; elementy silnika i odbiornika mocy, sprzęgło i fundament, na którym elastycznie posadowiony jest silnik wraz z odbiornikiem mocy, potraktujemy jako sztywne. Schemat obliczeniowy układu przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1

Wprowadzimy oznaczenia:

$a_0, b_0, c_0;\ a_1, b_0, c_0; \ldots\ a_n, b_0, c_0; \ldots\ a_{c-1}, b_0, c_0$ — współrzędne punktów przecięcia z osią wału prostych prostopadłych do osi wału, poprowadzonych ze środków ciężkości kolejnych mas m_0, w stanie spoczynkowym i przy $\varphi = 0$,

c — ilość wykorbień,

c_{xi}, c_{yi}, c_{zi} — współczynniki sztywności i-tej podkładki elastycznej przy ugięciach w kierunkach osi $0x, 0y$ i $0z$,

e — odległość osi korbowodu od środka ciężkości masy m_0,

g — przyspieszenie ziemskie,

h_{xi}, h_{yi}, h_{zi} — współczynniki wiskotycznego tłumienia i-tej podkładki elastycznej przy obrotach jej poprzecznych przekrojów względem osi $0'x', 0'y'$ i $0'z'$,

k_{xi}, k_{yi}, k_{zi} — współczynniki sztywności i-tej podkładki elastycznej przy obrotach, jak wyżej,

l_{xi}, l_{yi}, l_{zi} — współczynniki wiskotycznego tłumienia i-tej podkładki elastycznej przy ugięciach w kierunkach osi $0x$, $0y$ i $0z$,

L — długość korbowodu,

m — łączna masa układu drgającego,

m_0 — masa niewyrównoważona, odpowiadająca jednemu wykorbieniu i skupiona na osi czopa korbowego,

$m_{p1/2}$ — masa niewyrównoważona w ruchu postępowo-zwrotnym, odpowiadająca jednemu cylindrowi i skupiona na osi sworznia tłokowego,

O — położenie środka ciężkości układu w położeniu spoczynkowym układu drgającego i przy $\varphi = 0$,

r — długość ramienia korby,

u, v, w przemieszczenia środka ciężkości układu drgającego w kierunkach osi $0x, 0y, 0z$,

u_i, v_i, w_i przemieszczenia punktów zamocowania i-tej podkładki elastycznej do układu drgającego w kierunkach osi $0x, 0y$ i $0z$,

$0x, 0y, 0z$ nieruchome osie, pokrywające się z głównymi osiami bezwładności $0'x'$, $0'y'$, $0'z'$ układu drgającego w stanie spoczynkowym i przy $\varphi = 0$,

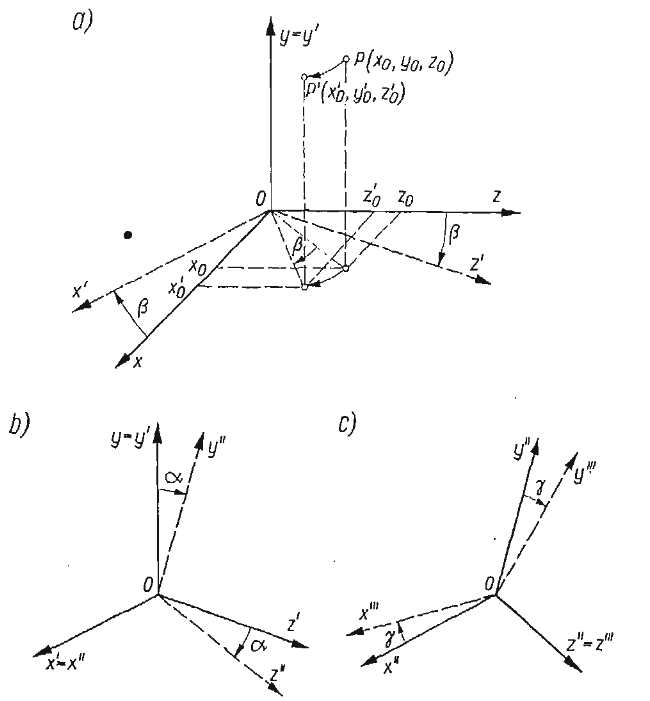
x_i, y_i, z_i współrzędne punktu zamocowania i-tej podkładki elastycznej do układu drgającego w stanie spoczynkowym i przy $\varphi = 0$,

α, β, γ kąty obrotu układu drgającego wokół osi $0'x'$, $0'y'$ i $0'z'$,

2δ kąt pomiędzy płaszczyznami dwóch rzędów cylindrowych,

ξ, η, ζ przemieszczenia mas niewyrównoważonych w kierunkach osi $0x, 0y$ i $0z$,

$\varphi, \varphi+d_1\pi, \varphi+2d_2\pi, \ldots \varphi+nd_n\pi, \ldots \varphi+(c-1)d_{c-1}\pi$ kąty obrotu kolejnych wykorbień.



Rys. 2

W celu wyznaczenia przemieszczeń poszczególnych punktów układu przy jego drganiach rozpatrzymy przemieszczenia względem nieruchomego układu współrzędnych x, y, z punktu P ciała obracającego się o kąty α, β i γ wokół trzech wzajemnie prostopadłych osi, związanych z tym ciałem (rys. 2). Niech osie związane z ciałem pokrywają się w stanie spoczynku z osiami x, y, z, a współrzędne punktu P w układzie x, y, z w stanie spoczynku będą x_0, y_0, z_0. Po dokonaniu obrotu ciała o kąt β wokół osi y (rys. 2a) osie związane z ciałem zajmą położenia $x', y' = y, z'$, a punkt P zajmie położenie P' o współrzędnych w układzie x, y, z:

$$x_0' = x_0\cos\beta + z_0\sin\beta, \quad y_0' = y_0, \quad z_0' = z_0\cos\beta - x_0\sin\beta. \tag{2.1}$$

W układzie x', y', z' punkt P' ma współrzędne x_0, y_0, z_0, zatem po obrocie ciała o kąt α względem osi x' (rys. 2b) punkt P' zajmie położenie o współrzędnych w układzie x', y', z':

$$x_0, \quad y_0\cos\alpha - z_0\sin\alpha, \quad z_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha. \tag{2.2}$$

Jeśli punkt o współrzędnych x_0, y_0, z_0 w układzie x', y', z' ma względem układu x, y, z współrzędne (2.1), to punkt o współrzędnych (2.2) ma względem układu x, y, z współrzędne:

$$\begin{aligned} x_0'' &= x_0\cos\beta + (z_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)\sin\beta, \\ y_0'' &= y_0\cos\alpha - z_0\sin\alpha, \\ z_0'' &= (z_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)\cos\beta - x_0\sin\beta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Analogicznie po obrocie ciała o kąt γ wokół osi z'' (rys. 2c) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x_0''' &= (x_0\cos\gamma - y_0\sin\gamma)\cos\beta + [z_0\cos\alpha + (y_0\cos\gamma + x_0\sin\gamma)\sin\alpha]\sin\beta, \\ y_0''' &= (y_0\cos\gamma + x_0\sin\gamma)\cos\alpha - z_0\sin\alpha, \\ z_0''' &= [z_0\cos\alpha + (y_0\cos\gamma - x_0\sin\gamma)\sin\alpha]\cos\beta - (x_0\cos\gamma - y_0\sin\gamma)\sin\beta. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wyznaczymy teraz odpowiednie przemieszczenia poszczególnych punktów silnika. Dla $\delta = 0$ przemieszczenia mas m_{p1} i m_{p2} wywołane obrotem korby o kąt φ wynoszą [8]

$$(\eta)_{m_{p1/2}} = -r\left(1 - \cos\varphi + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2\varphi + \frac{3}{64}\lambda^3 + \ldots\right), \quad \lambda = \frac{r}{L}. \tag{2.5}$$

Dla $\delta > 0$ przemieszczenia mas m_{p1} i m_{p2} w kierunkach osi cylindrów odpowiadających tym masom, wywołane obrotem korby o kąt φ, wyniosą z pominięciem członów zawierających λ w potęgach trzeciej i wyższych

$$(\eta)^0_{m_{p1/2}} = -r\left[1 - \cos(\varphi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(\varphi \mp \delta)\right]. \tag{2.6}$$

W wyrażeniu tym i następnych w przypadkach podwójnych znaków „+" i „−" górny znak dotyczy masy m_{p1}, a dolny — m_{p2}.

Współrzędne niewyrównoważonych mas odpowiadających n-temu wykorbieniu w położeniu spoczynkowym układu dla $\varphi = 0$ wynoszą:

$$\begin{aligned} (x_n)_{m_{p1/2}} &= a_n \pm e, \\ (y_n)_{m_{p1/2}} &= b_1 - r\left[1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\right]\cos\delta, \\ (z_n)_{m_{p1/2}} &= c_1 \pm r\left[1 - \cos(nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi \mp \delta)\right]\sin\delta, \\ (x_n)_{m_0} &= a_n, \quad (y_n)_{m_0} = b_0 + r\cos nd_n\pi, \quad (z_n)_{m_0} = c_0 - r\sin nd_n\pi, \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie oznaczono:

$$b_1 = b_0 + (r+L)\cos\delta, \quad c_1 = c_0 \mp (r+L)\sin\delta.$$

Na skutek przemieszczeń u, v, w i odchyleń silnika o kąty β, α, γ niewyrównoważone masy n-tego wykorbienia osiągają przy $\varphi = 0$ zgodnie z (2.4) i (2.7) położenia o współrzędnych:

$$
\begin{aligned}
(x_n)_{m_{p1/2}} = {} & u+\Bigg[(a_n \pm e)\cos\gamma - \Bigg\{b_1 - r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda - \\
& -\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\cos\delta\Bigg\}\sin\gamma\Bigg]\cos\beta + \Bigg[\Bigg\{c_1 \pm r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)+ \\
& +\frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\sin\delta\Bigg\}\cos\alpha + \Bigg\{b_1 - r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)+ \\
& +\frac{1}{4}\lambda - \frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\cos\delta\Bigg\}\sin\alpha\cos\gamma + (a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\Bigg]\sin\beta, \\
(y_n)_{m_{p1/2}} = {} & v+\Bigg[\Bigg\{b_1 - r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\cos\delta\Bigg\}\times \\
& \times\cos\gamma + (a_n\pm e)\sin\gamma\Bigg]\cos\alpha - \Bigg\{c_1 \pm r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)\pm\frac{1}{4}\lambda - \\
& -\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\sin\delta\Bigg\}\sin\alpha, \\
(z_n)_{m_{p1/2}} = {} & w+\Bigg[\Bigg\{c_1 \pm r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\sin\delta\Bigg\}\times \\
& \times\cos\alpha + \Bigg\{b_1 - r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\cos\delta\Bigg\}\times \\
& \times\cos\gamma\sin\alpha - (a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\Bigg]\cos\beta - \Bigg[(a_n\pm e)\cos\gamma - \Bigg\{b_1 - \\
& - r\Bigg[1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\cos\delta\Bigg\}\sin\gamma\Bigg]\sin\beta,
\end{aligned} \tag{2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
(x_n)_{m_0} = {} & u+[a_n\cos\gamma - (b_0 + r\cos nd_n\pi)\sin\gamma]\cos\beta + \{(c_0 - r\sin nd_n\pi)\cos\alpha + \\
& + [(b_0 + r\cos nd_n\pi)\cos\gamma + a_n\sin\gamma]\sin\alpha\}\sin\beta, \\
(y_n)_{m_0} = {} & v+[(b_0+r\cos nd_n\pi)\cos\gamma + a_n\sin\gamma]\cos\alpha - (c_0 - r\sin nd_n\pi)\sin\alpha, \\
(z_n)_{m_0} = {} & w+\{(c_0 - r\sin nd_n\pi)\cos\alpha + [(b_0+r\cos nd_n\pi)\cos\gamma - \\
& - a_n\sin\gamma]\sin\alpha\}\cos\beta - [a_n\cos\gamma - (b_0 + r\cos nd_n\pi)\sin\gamma]\sin\beta.
\end{aligned}
$$

Różnica współrzędnych (2.8) i (2.7) stanowi przemieszczenia niewyrównoważonych mas w kierunkach osi $0x$, $0y$ i $0z$ na skutek ruchów silnika przy $\varphi = 0$.

Współrzędne niewyrównoważonych mas w położeniu spoczynkowym układu przy $\varphi \neq 0$ są:

$$
\begin{aligned}
& (x_n)_{m_{p1/2}} = a_n \pm e, \quad (y_n)_{m_{p1/2}} = b_1 - r\left(1+\frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\cos\delta, \\
& \qquad\qquad (z_n)_{m_{p1/2}} = c_1 \pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda - f_1\right)\sin\delta,
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

$$
(x_n)_{m_0} = a_n, \quad (y_n)_{m_0} = b_0 + r\cos(\varphi + nd_n\pi), \quad (z_n)_{m_0} = c_0 - r\sin(\varphi+nd_n\pi),
$$

gdzie

$$f_1 = \cos(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta).$$

W wyniku ruchów silnika niewyrównoważone masy zajmą przy $\varphi \neq 0$ położenia o współrzędnych:

$$\begin{aligned}
(x_n)_{m_{p1/2}} &= u+\left\{(a_n\pm e)\cos\gamma-\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\sin\gamma\right\}\cos\beta-\\
&-\left\{\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right]\cos\alpha+\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\times\right.\\
&\left.\times\cos\gamma\sin\alpha+(a_n\pm e)\sin\gamma\sin\alpha\right\}\sin\beta,\\
(y_n)_{m_{p1/2}} &= v+\left\{\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\cos\gamma+(a_n\pm e)\sin\gamma\right\}\cos\alpha-\\
&-\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right]\sin\alpha,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(z_n)_{m_{p1/2}} &= w+\left\{\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right]\cos\alpha+\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\times\right.\right.\\
&\left.\left.\times\cos\delta\right]\cos\gamma\sin\alpha-(a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\right\}\cos\beta-\left\{(a_n\pm e)\cos\gamma-\right.\\
&\left.-\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\sin\gamma\right\}\sin\beta,\\
(x_n)_{m_0} &= u+\{a_n\cos\gamma-[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\sin\gamma\}\cos\beta+[[c_0-r\sin(\varphi+\\
&+nd_n\pi)]\cos\alpha+\{[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\cos\gamma+a_n\sin\gamma\}\sin\alpha]\sin\beta,\\
(y_n)_{m_0} &= v+\{[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\cos\gamma+a_n\sin\gamma\}\cos\alpha-\\
&-[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\sin\alpha,\\
(z_n)_{m_0} &= w+[[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha+\{[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\cos\gamma-\\
&-a_n\sin\gamma\}\sin\alpha]\cos\beta-\{a_n\cos\gamma-[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\sin\gamma\}\sin\beta.
\end{aligned}\tag{2.10}$$

Różnica współrzędnych (2.10) i (2.8) stanowi przemieszczenia niewyrównoważonych mas n-tego wykorbienia wywołane obrotem wału o kąt φ:

$$\begin{aligned}
(\xi_n^\varphi)_{m_{p1/2}} &= r\left[f_1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\right](\cos\delta\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\\
&-\cos\delta\cos\beta\sin\gamma\mp\sin\delta\cos\alpha\sin\beta),\\
(\eta_n^\varphi)_{m_{p1/2}} &= r\left[f_1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\right](\cos\delta\cos\alpha\cos\gamma\mp\\
&\mp\sin\delta\sin\alpha),\\
(\zeta_n^\varphi)_{m_{p1/2}} &= r\left[f_1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\right](\cos\delta\sin\beta\sin\gamma+\\
&+\cos\delta\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma\mp\sin\delta\cos\alpha\cos\beta),
\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$(\xi_n^\varphi)_{m_0} = r[\cos(\varphi+nd_n\pi)-\cos nd_n\pi](\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+ \tag{2.11 [c.d.]}$$

$$+r[\sin nd_n\pi-\sin(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\sin\beta,$$

$$(\eta_n^\varphi)_{m_0} = r[\cos(\varphi+nd_n\pi)-\cos nd_n\pi]\cos\alpha\cos\gamma+r[\sin(\varphi+nd_n\pi)-\sin nd_n\pi]\sin\alpha.$$

$$(\zeta_n^\varphi)_{m_0} = r[\cos(\varphi+nd_n\pi)-\cos nd_n\pi](\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)-$$

$$-r[\sin(\varphi+nd_n\pi)-\sin nd_n\pi]\cos\alpha\cos\beta.$$

Wypadkowe przemieszczenia niewyrównoważonych mas n-tego wykorbienia są sumą przemieszczeń wynikających z różnicy współrzędnych (2.8) i (2.7) oraz przemieszczeń (2.11):

$$(\xi_n)_{m_{p1/2}} = u+(a_n\mp e)(\cos\beta\cos\gamma-1)-\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\cos\beta\sin\gamma+$$

$$+\left\{\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right]\cos\alpha+\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sin\alpha\cos\gamma+(a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\right\}\sin\beta,$$

$$(\eta_n)_{m_{p1/2}} = v+\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right](\cos\alpha\cos\gamma-1)+(a_n\pm e)\cos\alpha\sin\gamma-$$

$$-\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right]\sin\alpha+r\left[f_1-\cos(nd_n\pi\mp\delta)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\right]\cos\delta\cos\alpha\cos\gamma,$$

$$(\zeta_n)_{m_{p1/2}} = w\left[c_1\pm r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\sin\delta\right](\cos\alpha\cos\beta-1)+ \tag{2.12}$$

$$+\left\{\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\cos\gamma\sin\alpha-(a_n\pm e)\sin\alpha\sin\gamma\right\}\cos\beta-$$

$$-\left\{(a_n\pm e)\cos\gamma-\left[b_1-r\left(1+\frac{1}{4}\lambda-f_1\right)\cos\delta\right]\sin\gamma\right\}\sin\beta\mp r\left[f_1-\right.$$

$$\left.-\cos(nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\right]\sin\delta\cos\alpha\cos\beta,$$

$$(\xi_n)_{m_0} = u+a_n(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\beta\cos\gamma-1)+[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\times$$

$$\times(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)+[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\sin\beta,$$

$$(\eta_n)_{m_0} = v+a_n\cos\alpha\sin\gamma+[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\cos\gamma-(b_0+r\cos nd_n\pi)-$$

$$-[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\sin\alpha,$$

$$(\zeta_n)_{m_0} = w-a_n(\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\sin\beta\cos\gamma)+[b_0+r\cos(\varphi+nd_n\pi)](\sin\alpha\cos\beta\times$$

$$\times\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma)+[c_0-r\sin(\varphi+nd_n\pi)]\cos\alpha\cos\beta-(c_0-r\sin nd_n\pi).$$

Przemieszczenia punktu zamocowania i-tej podkładki elastycznej do układu drgającego wyniosą na podstawie (2.4):

$$u_i = u-x_i+(x_i\cos\gamma-y_i\sin\gamma)\cos\beta+[z_i\cos\alpha+(y_i\cos\gamma+x_i\sin\gamma)\sin\alpha]\sin\beta,$$

$$v_i = v-y_i+(y_i\cos\gamma+x_i\sin\gamma)\cos\alpha-z_i\sin\alpha, \tag{2.13}$$

$$w_i = w-z_i+[z_i\cos\alpha+(y_i\cos\gamma-x_i\sin\gamma)\sin\alpha]\cos\beta-(x_i\cos\gamma-y_i\sin\gamma)\sin\beta.$$

Energię kinetyczną układu drgającego wyrazić można następująco:

$$T_0 = \frac{1}{2}[m-c(m_{p1}+m_{p2}+m_0)](\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2)+\frac{1}{2}I'_x\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}I'_y\dot{\beta}^2+\frac{1}{2}I'_z\dot{\gamma}^2+ \tag{2.14}$$

$$+\frac{1}{2}I'\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{c-1}\{m_{p1}[(\dot{\xi}_n)^2_{mp1}+(\dot{\eta}_n)^2_{mp1}+(\dot{\zeta}_n)^2_{mp1}]+m_{p2}[(\dot{\xi}_n)^2_{mp2}+(\dot{\eta}_n)^2_{mp2}+$$

$$+(\dot{\zeta}_n)^2_{mp2}]+m_0[(\dot{\xi}_n)^2_{m0}+(\dot{\eta}_n)^2_{m0}+(\dot{\zeta}_n)^2_{m0}]\},$$

gdzie I'_x, I'_y, I'_z oznaczają główne momenty bezwładności układu drgającego bez mas niewyrównoważonych, I' — moment bezwładności wirujących mas wyrównoważonych względem osi wału.

Przyjmiemy, że w położeniu spoczynkowym i przy $\varphi = 0$ energia potencjalna układu drgającego jest równa zeru. W czasie drgań układu energię potencjalną określimy jako sumę przyrostu energii potencjalnej podkładek elastycznych na skutek ich odkształceń i przyrostu energii potencjalnej niewyrównoważonych mas wynikającego z pionowych przemieszczeń tych mas na skutek obrotu wału korbowego

$$V = \frac{1}{2}\sum_i (c_{xi}u_i^2+c_{yi}v_i^2+c_{zi}w_i^2+k_{xi}\alpha^2+k_{yi}\beta^2+k_{zi}\gamma^2)+ \tag{2.15}$$

$$+g\sum_{n=0}^{c-1}[m_{p1}(\eta_n^{\varphi})_{mp1}+m_{p2}(\eta_n^{\varphi})_{mp2}+m_0(\eta_n^{\varphi})_{m0}].$$

Opór tłumienia przy obracaniu wału korbowego możemy zastąpić równoważnym oporem wiskotycznym o współczynniku h i przedstawić funkcję rozproszenia energii (Rayleigha) w postaci

$$D = \frac{1}{2}\sum_i (l_{xi}\dot{u}_i^2+l_{yi}\dot{v}^2+l_{zi}\dot{w}_i^2+h_{xi}\dot{\alpha}^2+h_{yi}\dot{\beta}^2+h_{zi}\dot{\gamma}^2)+\frac{1}{2}h\dot{\varphi}^2. \tag{2.16}$$

Powyższe zależności mogą być wykorzystane do analizy układów drgających z silnikami o dowolnej ilości cylindrów i stopni swobody oraz o dowolnych układach wykorbień i podkładek elastycznych, przy czym zestawione na ich podstawie równania ruchu zawierają dokładne zależności określające wszystkie siły i momenty działające na silnik.

3. Analiza pionowych drgań silnika dwucylindrowego

Moment napędowy silnika od sił gazowych wyrazić można w postaci [8]

$$M_s = crT+\sum_k C_k^{(c)}\sin(\xi k\varphi+\vartheta_k^{(c)}), \tag{3.1}$$

gdzie T oznacza średnią wartość siły gazowej działającej prostopadle do jednego wykorbienia na promieniu r, będącą nieliniową funkcją prędkości kątowej o postaci [9]: $T = A_0+A_1\dot{\varphi}+A_2\dot{\varphi}^2+A_3\dot{\varphi}^3+\ldots$, $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — stałe; $C_k^{(c)}$, $\vartheta_k^{(c)}$ — amplitudę i fazę k-tej harmonicznej silnika o c wykorbieniach, traktowane w pierwszym przybliżeniu jako stałe i odpowiadające średniej prędkości kątowej; ξ — ilość cykli pracy przypadającą na jeden obrót wału, tj. $\xi = 1/2$ dla 4-suwów i $\xi = 1$ dla 2-suwów.

Analogicznie przedstawimy moment oporowy odbiornika mocy

$$M_B = B + \sum_l B_l \sin(\eta l \varphi + \sigma_l). \tag{3.2}$$

Analizując drgania pionowe silnika przyjmiemy jako współrzędne uogólnione v i φ. Na podstawie równania Lagrange'a drugiego rodzaju i zależności wyprowadzonych w rozdziale 2 otrzymujemy następujące równania ruchu dla silnika o c wykorbieniach:

$$\begin{aligned} m\ddot{v} + \dot{v}\sum_i l_{yi} + v\sum_i c_{yi} = \sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & m_{p1} r\dot{\varphi}^2[\cos(\varphi + nd_n\pi - \delta) + \lambda\cos 2(\varphi + \\ & + nd_n\pi - \delta)]\cos\delta + m_{p1} r\ddot{\varphi}\left[\sin(\varphi + nd_n\pi - \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi - \delta)\right]\cos\delta + \\ & + m_{p2} r\dot{\varphi}^2[\cos(\varphi + nd_n\pi + \delta) + \lambda\cos 2(\varphi + nd_n\pi + \delta)]\cos\delta + m_{p2} r\ddot{\varphi}\Big[\sin(\varphi + \\ & + nd_n\pi + \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi + \delta)\Big]\cos\delta + m_0 r\dot{\varphi}^2\cos(\varphi + nd_n\pi) + \\ & + m_0 r\ddot{\varphi}\sin(\varphi + nd_n\pi)\Big\}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$I\ddot{\varphi} + \varDelta M - m_{p1}(K_1 + L_1) - m_{p2}(K_2 + L_2) - m_0 Q_0 = R_0^{(c)}, \tag{3.4}$$

gdzie:

$$I = I' + cr^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\lambda^2\right)(m_{p1} + m_{p2}) + cm_0 r^2,$$

$$\begin{aligned} \varDelta M = -r\ddot{v}\sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & m_{p1}\cos\delta\left[\sin(\varphi + nd_n\pi - \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi - \delta)\right] + \\ & + m_{p2}\cos\delta\left[\sin(\varphi + nd_n\pi + \delta) + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi + \delta)\right] + m_0\sin(\varphi + nd_n\pi)\Big\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{1/2} = \sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & \frac{1}{2} r^2\dot{\varphi}^2\Big[\frac{1}{2}\lambda\sin(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) - \sin 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) - \frac{3}{2}\lambda\sin 3(\varphi + \\ & + nd_n\pi \mp \delta) - \frac{1}{2}\lambda^2\sin 4(\varphi + nd_n\pi \mp \delta)\Big] + gr\Big[\sin(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \\ & + \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta)\Big]\cos\delta\Big\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} L_{1/2} = \sum_{n=0}^{c-1}\Big\{ & \frac{1}{2} r^2\ddot{\varphi}\Big[-\lambda\cos(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \cos 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \\ & + \lambda\cos 3(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \frac{1}{4}\lambda^2\cos 4(\varphi + nd_n\pi \mp \delta)\Big]\Big\}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&Q_0 = \sum_{n=0}^{c-1} gr\sin(\varphi+nd_n\pi), \\
&R_0^{(c)} = crT-B+\sum_k C_k^{(c)}\sin(\xi k\varphi+\nu_k^{(c)})-\sum_l B_l\sin(\eta l\varphi+\sigma_l)-h\dot{\varphi}.
\end{aligned}
\tag{3.5 [c.d.]}
$$

Występujący w równaniu (3.4) człon ΔM nazwiemy dodatkowym momentem oporowym. W równaniu momentów na wale silnika w przypadku sztywnego posadowienia człon ten jest równy zeru.

Dla silnika dwucylindrowego ($c = 1$, $n = 0$) równania (3.3) i (3.4) przyjmują, dla $m_{p1} = m_{p2} = m_p$ i przy oznaczeniach $\sum_i l_{yi} = l_y$, $\sum_i c_{yi} = c_y$, postać:

$$
m\ddot{v}+l_y\dot{v}+c_y v = 2m_p r\Big[\dot{\varphi}^2(\cos\varphi\cos^2\delta+\lambda\cos 2\delta\cos\delta)+ +\ddot{\varphi}\Big(\sin\varphi\cos^2\delta+\frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\cos 2\delta\cos\delta\Big)\Big]+m_0 r(\dot{\varphi}^2\cos\varphi+\ddot{\varphi}\sin\varphi),
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
I\ddot{\varphi}-r\ddot{v}\Big[2m_p\Big(\sin\varphi\cos\delta+\frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\cos 2\delta\Big)+m_0\sin\varphi\Big]- \\
-m_p r\Big[r\dot{\varphi}^2\Big(\frac{1}{2}\lambda\sin\varphi\cos\delta-\sin 2\varphi\cos 2\delta-\frac{3}{2}\lambda\sin 3\varphi\cos 3\delta- \\
-\frac{1}{2}\lambda^2\sin 4\varphi\cos 4\delta\Big)+2g\Big(\sin\varphi\cos\delta+\frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi\cos 2\delta\Big)+r\ddot{\varphi}\Big(-\lambda\cos\varphi\cos\delta+ \\
+\cos 2\varphi\cos 2\delta+\lambda\cos 3\varphi\cos 3\delta+\frac{1}{4}\lambda^2\cos 4\varphi\cos 4\delta\Big)\Big]-m_0 gr\sin\varphi = R_0^{(1)}.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Uwzględniając, że niewyrównoważenie silnika i tłumienie w układzie amortyzacji mają w praktyce małe wartości, możemy do rozwiązania równań typu (3.3) i (3.4) zastosować asymptotyczną metodę KRYŁOWA-BOGOLUBOWA-MITROPOLSKIEGO [10, 11]. W celu umożliwienia analizowania zachowania się drgającego układu także w obszarze rezonansowym, w którym różnica faz pomiędzy drganiami własnymi i wymuszeniem okazuje istotny wpływ na zmiany amplitudy i fazy drgań, poszukiwać będziemy rozwiązań równań (3.6) i (3.7) w pierwszym przybliżeniu w postaci

$$
\begin{aligned}
v &= a\cos(\varphi+\psi)+\varepsilon u_1(a, \varphi, \varphi+\psi, \omega), \\
\dot{\varphi} &= \omega,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

gdzie ε oznacza mały parametr, u_1 jest małą funkcją okresową, natomiast a, ψ i ω są płynnie zmieniającymi się wielkościami, określonymi równaniami:

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= \varepsilon A_1(a, \psi, \omega), \\
\dot{\psi} &= b-\omega+\varepsilon B_1(a, \psi, \omega), \qquad b^2 = \frac{c_y}{m}, \\
\dot{\omega} &= \varepsilon D_1(a, \psi, \omega).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Z dokładnością do członów pierwszego rzędu małości możemy z uwzględnieniem zależności (3.8) i (3.9) napisać:

$$\dot{v} = -ab\sin(\varphi+\psi)+\varepsilon\left[A_1\cos(\varphi+\psi)-aB_1\sin(\varphi+\psi)+b\frac{\partial u_1}{\partial(\varphi+\psi)}+\omega\frac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right],$$

$$\text{(3.10)}\quad \ddot{v} = -ab^2\cos(\varphi+\psi)+\varepsilon\left\{\left[(b-\omega)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}-2abB_1\right]\cos(\varphi+\psi)-\left[a(b-\omega)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2bA_1\right]\sin(\varphi+\psi)+b^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)^2}+2b\omega\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)\partial\varphi}+\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

Po wprowadzeniu do równań (3.6) i (3.7) małego parametru i po podstawieniu zależności (3.10) otrzymujemy równania:

$$\text{(3.11)}\quad \omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}+2b\omega\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)\partial\varphi}+b^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)^2}+b^2u_1-\left[2bA_1+a(b-\omega)\frac{\partial B_1}{\partial\psi}\right]\times$$
$$\times\sin(\varphi+\psi)-\left[2abB_1-(b-\omega)\frac{\partial A_1}{\partial\psi}\right]\cos(\varphi+\psi) = \frac{1}{m}[abl_y\sin(\varphi+\psi)+$$
$$+2m_pr\omega^2(\cos\varphi\cos^2\delta+\lambda\cos2\varphi\cos2\delta\cos\delta)+m_0r\omega^2\cos\varphi],$$

$$\text{(3.12)}\quad \ddot{\varphi} = \frac{\varepsilon}{I}\left\{R_0^{(1)}-ab^2r\cos(\varphi+\psi)\left[2m_p\left(\sin\varphi\cos\delta+\frac{1}{2}\lambda\sin2\varphi\cos2\delta\right)+m_0\sin\varphi\right]+\right.$$
$$+m_pr^2\omega^2\left(\frac{1}{2}\lambda\sin\varphi\cos\delta-\sin2\varphi\cos2\delta-\frac{3}{2}\lambda\sin3\varphi\cos3\delta-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{2}\lambda^2\sin4\varphi\cos4\delta\right)+2m_pgr\left(\sin\varphi\cos\delta+\frac{1}{2}\lambda\sin2\varphi\cos2\delta\right)+m_0gr\sin\varphi\right\}.$$

Z równania (3.11) można wyznaczyć funkcje u_1, A_1 i B_1, przy czym w celu jednoznacznego ich wyznaczenia postawimy warunek, aby a była pełną amplitudą pierwszej harmoniki zmiennej $(\varphi+\psi)$, tzn. poszukiwać będziemy rozwiązań na u_1 w postaci

$$\text{(3.13)}\quad u_1 = \sum_{n_1,n_2=-\infty}^{\infty}\{g_{n_1,n_2}\cos[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]+h_{n_1,n_2}\sin[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]\},$$
$$n_1+n_2 \neq \pm1.$$

W wyniku otrzymujemy:

$$\text{(3.14)}\quad u_1 = \frac{2m_pr\lambda\omega^2}{m(b^2-4\omega^2)}\cos2\delta\cos\delta\cos2\varphi.$$

Porównując współczynniki stojące przed funkcjami $\sin(\varphi+\psi)$ i $\cos(\varphi+\psi)$ po obu stronach równania (3.11) z uwzględnieniem (3.14) otrzymujemy równania:

$$2bA_1+a(b-\omega)\frac{\partial B_1}{\partial\psi} = -\frac{1}{m}(2m_p\cos^2\delta+m_0)r\omega^2\sin\psi-\frac{1}{m}abl_y,$$

$$2abB_1-(b-\omega)\frac{\partial A_1}{\partial\psi} = -\frac{1}{m}(2m_p\cos^2\delta+m_0)r\omega^2\cos\psi,$$

skąd

$$(3.15)\qquad A_1 = -\frac{2m_p\cos^2\delta+m_0}{m(\omega+b)}r\omega^2\sin\psi-\frac{1}{2m}al_y,\qquad B_1 = -\frac{2m_p\cos^2\delta+m_0}{am(\omega+b)}r\omega^2\cos\psi.$$

Funkcję D_1 wyznaczamy z równania (3.12) przez uśrednienie prawej strony tego równania po $(\varphi+\psi)$ w okresie 2π

$$(3.16)\qquad D_1 = \frac{1}{I}\left[rT-B-h\omega+\frac{1}{2}(2m_p\cos^2\delta+m_0)ab^2r\sin\psi\right].$$

Na podstawie równań (3.9) i zależności (3.15), (3.16) wyznaczyć można wielkości a, ψ i ω. W stanach nieustalonych posłużyć się można metodą EULERA, zgodnie z którą proces rozpoczynający się w chwili t_0 od wartości a_0, ψ_0 i ω_0 określa się z zależności:

$$a_{t=t_0+\Delta t} = a_0+\Delta t(\dot{a})_{t=t_0},\qquad a_{t=t_0+2\Delta t} = a_{t=t_0+\Delta t}+\Delta t(\dot{a})_{t=t_0+\Delta t},\ \ldots$$

i z analogicznych zależności dla wielkości ψ i ω.

Dla stanów ustalonych równania (3.9) mają rozwiązania:

$$(3.17)\qquad a = \frac{(2m_p\cos^2\delta+m_0)r\omega^2}{m(\omega+b)\sqrt{(b-\omega)^2+\left(\frac{l_y}{2m}\right)^2}},\qquad \psi = \operatorname{arctg}\left[\frac{l_y}{2m(\omega-b)}\right],$$

a ω spełnia równanie:

$$(3.18)\qquad rT-B-h\omega-\frac{1}{4\omega^2}a^2b^2l_y(\omega+b) = 0,$$

w którym człon

$$(3.19)\qquad (\Delta M)_0 = \frac{1}{4\omega^2}a^2b^2l_y(\omega+b)$$

stanowi stały, w stanach ustalonych, składnik dodatkowego momentu oporowego, powodujący spadek prędkości kątowej silnika $\Delta\omega = \omega_0-\omega$ i stratę mocy w porównaniu ze sztywnym posadowieniem

$$(3.20)\qquad (\Delta N)_0 = (\Delta M)_0\omega,$$

gdzie ω_0 spełnia równanie:

$$(3.21)\qquad rT-B-h\omega_0 = 0.$$

Z uwzględnieniem zależności (3.17) otrzymujemy:

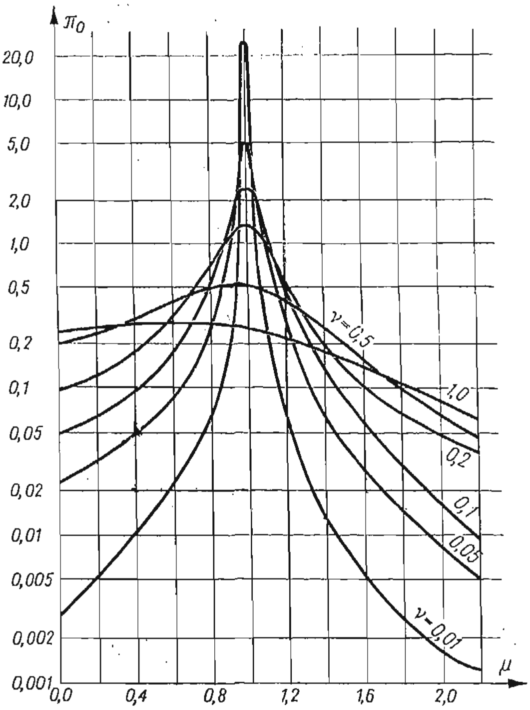
$$(3.22)\qquad (\Delta M)_0 = M_0\pi_0,\qquad (\Delta N)_0 = M_0\pi_0\omega,$$

gdzie

$$(3.23)\qquad M_0 = \frac{1}{m}(2m_p\cos^2\delta+m_0)^2r^2\omega^2,\qquad \pi_0 = \frac{\nu}{2(\mu+1)[(1-\mu)^2+\nu^2]},$$

$$\nu = \frac{l_y}{2mb},\qquad \mu = \frac{\omega}{b}.$$

Zależność wartości π_0 od wartości stosunku częstości μ dla różnych wartości bezwymiarowego współczynnika ν przedstawiono wykreślnie na rys. 3. Zależność ta umożliwia dobór systemu amortyzacji zapewniającego odpowiednio małe straty energetyczne. Wynika



Rys. 3

z niej, że w obszarze rezonansowym korzystne są duże współczynniki tłumienia podkładek elastycznych, a w warunkach nierezonansowych — małe.

4. Nieliniowe drgania silników wielocylindrowych o 6 stopniach swobody

Rozpatrzymy przypadek drgań silników wielocylindrowych o 6 stopniach swobody, przy czym uwzględnimy, że amlitudy drgań obrotowych α, β i γ są w praktyce małe i w rozkładach funkcji trygonometrycznych tych kątów w szeregi potęgowe zachowamy tylko pierwsze wyrazy. Ograniczymy się do analizy stanów ustalonych oraz bliskich ustalonym, w których $\ddot{\varphi}$ jest małą wielkością i pominiemy człony proporcjonalne do iloczynów $m_{p1/2}\ddot{\varphi}$ i $m_0\ddot{\varphi}$ jako człony drugiego rzędu małości. Otrzymujemy wtedy na podstawie równania Lagrange'a drugiego rodzaju oraz zależności (2.11)—(2.16) i (3.1), (3.2) następujące równania ruchu:

$$
(4.1)\qquad
\begin{aligned}
m\ddot{u}+c_x u-U_y\gamma+U_z\beta &= R_1+m_{p1}(F_1)_1+m_{p2}(F_1)_2+m_0 Q_1,\\
m\ddot{v}+c_y v-V_z\alpha+V_x\gamma &= R_2+m_{p1}(F_2)_1+m_{p2}(F_2)_2+m_0 Q_2,\\
m\ddot{w}+c_z w-W_x\beta+W_y\alpha &= R_3+m_{p1}(F_3)_1+m_{p2}(F_3)_2+m_0 Q_3,
\end{aligned}
$$

(4.1) [c.d.]
$$I_x\ddot{\alpha}+c_{xx}\alpha-V_zv+W_yw-c_{zx}\gamma-c_{xy}\beta-crT(\omega_0) = R_4+m_{p1}(F_4)_1+$$
$$+m_{p2}(F_4)_2+m_0Q_4,$$
$$I_y\ddot{\beta}+c_{yy}\beta-W_xw-U_zu+c_{xy}\alpha-c_{yz}\gamma = R_5+m_{p1}(F_5)_1+m_{p2}(F_5)_2+m_0Q_5,$$
$$I_z\ddot{\gamma}+c_{zz}\gamma-U_yu+V_xv-c_{yz}\beta-c_{zx}\alpha = R_6+m_{p1}(F_6)_1+m_{p2}(F_6)_2+m_0Q_6,$$
$$I\ddot{\varphi} = R_0^{(c)}+m_{p1}(F_7)_1+m_{p2}(F_7)_2+m_0Q_7,$$

gdzie:

$$c_x = \sum_i c_{xi},\quad c_y = \sum_i c_{yi},\quad c_z = \sum_i c_{zi},\quad U_y = \sum_i c_{xi}y_i,\quad V_z = \sum_i c_{yi}z_i,$$
$$W_x = \sum_i c_{zi}x_i,\quad V_x = \sum_i c_{yi}x_i,$$

$$W_y = \sum_i c_{zi}y_i,\quad U_z = \sum_i c_{xi}z_i,\quad c_{xx} = \sum_i (k_{xi}+c_{yi}z_i^2+c_{zi}y_i^2),$$
$$c_{yy} = \sum_i (k_{yi}+c_{xi}z_i^2+c_{zi}x_i^2),$$

$$c_{zz} = \sum_i (k_{zi}+c_{xi}y_i^2+c_{yi}x_i^2),\quad c_{xy} = c_{yx} = \sum_i c_{zi}x_iy_i,\quad c_{yz} = c_{zy} = \sum_i c_{xi}y_iz_i,$$
$$c_{zx} = c_{xz} = \sum_i c_{yi}z_ix_i,$$

$$l_x = \sum_i l_{xi},\quad l_y = \sum_i l_{yi},\quad l_z = \sum_i l_{zi},\quad U'_y = \sum_i l_{xi}y_i,\quad V'_z = \sum_i l_{yi}z_i,$$
$$W'_x = \sum_i l_{zi}x_i,\quad V'_x = \sum_i l_{yi}x_i,$$

$$W'_y = \sum_i l_{zi}y_i,\quad U'_z = \sum_i l_{xi}z_i,\quad l_{xx} = \sum_i (h_{xi}+l_{yi}z_i^2+l_{zi}y_i^2),\quad l_{yy} = \sum_i (h_{yi}+l_{xi}z_i^2+l_{zi}x_i^2),$$

$$l_{zz} = \sum_i (h_{zi}+l_{xi}y_i^2+l_{yi}x_i^2),\quad l_{xy} = l_{yx} = \sum_i l_{zi}x_iy_i,\quad l_{yz} = l_{zy} = \sum_i l_{xi}y_iz_i,$$
$$l_{zx} = l_{xz} = \sum_i l_{yi}z_ix_i,$$

$$R_1 = -l_x\dot{u}+U'_y\dot{\gamma}-U'_z\dot{\beta},\quad R_2 = -l_y\dot{v}+V'_z\dot{\alpha}-V'_x\dot{\gamma},\quad R_3 = -l_z\dot{w}+W'_x\dot{\beta}-W'_y\dot{\alpha},$$

$$R_4 = \sum_k C_k^{(c)}\sin(\xi k\varphi+\vartheta_k^{(c)})+\tau(\dot{\varphi})-l_{xx}\dot{\alpha}+V'_z\dot{v}-W'_y\dot{w}+l_{zx}\dot{\gamma}+l_{xy}\dot{\beta},$$
$$crT(\omega_0) = crT(\dot{\varphi})-\tau(\dot{\varphi}),$$

$$R_5 = -l_{yy}\dot{\beta}+W'_x\dot{w}-U'_z\dot{u}+l_{xy}\dot{\alpha}+l_{yz}\dot{\gamma},\quad R_6 = -l_{zz}\dot{\gamma}+U'_y\dot{u}-V'_x\dot{v}+l_{yz}\dot{\beta}+l_{zx}\dot{\alpha},$$

$$I_x = I'_x+cm_{p1}\left[c_0-\left(L-\frac{1}{4}r\lambda\right)\sin\delta\right]^2\ cm_{p2}\left[c_0+\left(L-\frac{1}{4}r\lambda\right)\sin\delta\right]^2+$$
$$c(m_{p1}+m_{p2})\left[b_1^2+r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)\right]+cm_0(b_0^2+c_0^2+r^2),$$

$$I_y = I'_y + cm_{p1}\left[c_0 - \left(L - \frac{1}{4}r\lambda\right)\sin\delta\right]^2 + cm_{p2}\left[c_0 + \left(L - \frac{1}{4}r\lambda\right)\sin\delta\right]^2 +$$
$$+ cr^2(m_{p1}+m_{p2})\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\lambda^2\right)\sin^2\delta + cm_0\left(c_0^2 + \frac{1}{2}r^2\right) + \sum_{n=0}^{c-1}[m_{p1}(a_n+e)^2 +$$
$$+ m_{p2}(a_n - e)^2 + m_0 a_n^2],$$

$$I_z = I'_z + c(m_{p1}+m_{p2})\left[b_1^2 + r^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{32}\lambda^2\right)\cos^2\delta\right] + cm_0\left(b_0^2 + \frac{1}{2}r^2\right) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{c-1}[m_{p1}(a_n+e)^2 + m_{p2}(a_n-e)^2 + m_0 a_n^2],$$

$$(F_1)_{1/2} = -\frac{1}{2}\Big\{-2cb_1\ddot{\gamma} + 2cc_1\ddot{\beta} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2rf_1(\ddot{\gamma}\cos\delta \pm \ddot{\beta}\sin\delta) +$$
$$+ 4rf_3(\dot{\gamma}\cos\delta \pm \dot{\beta}\sin\delta)\dot{\varphi} + 2rf_2(\gamma\cos\delta \pm \beta\sin\delta)\dot{\varphi}^2]\Big\},$$

$$f_2 = \cos(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) + \lambda\cos 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta), \qquad f_3 = \sin(\varphi + nd_n\pi \mp \delta) +$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda\sin 2(\varphi + nd_n\pi \mp \delta),$$

$$Q_1 = -\frac{1}{2}\Big\{-2cb_0\ddot{\gamma} + 2cc_0\ddot{\beta} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2r\ddot{\gamma}\cos(\varphi + nd_n\pi) + 4r\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin(\varphi + nd_n\pi) +$$
$$+ 2r\gamma\dot{\varphi}^2\cos(\varphi + nd_n\pi) - 2r\ddot{\beta}\sin(\varphi + nd_n\pi) - 4r\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos(\varphi + nd_n\pi) +$$
$$+ 2r\beta\dot{\varphi}^2\sin(\varphi + nd_n\pi)]\Big\},$$

$$(F_2)_{1/2} = -\frac{1}{2}\Big\{-2cc_1\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[2(a_n \pm e)\ddot{\gamma} \pm 2rf_1\ddot{\alpha}\sin\delta \mp 4rf_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\delta \mp$$
$$\mp 2rf_2(\alpha\sin\delta \pm \cos\delta)\dot{\varphi}^2]\Big\},$$

$$Q_2 = -\frac{1}{2}\Big\{-2cc_0\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[2a_n\ddot{\gamma} + 2r\ddot{\alpha}\sin(\varphi + nd_n\pi - \alpha) -$$
$$- 2r(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})^2\cos(\varphi + nd_n\pi - \alpha)]\Big\},$$

$$(F_3)_{1/2} = -\frac{1}{2}\Big\{2cb_1\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2\ddot{\beta}(a_n \pm e) + 2rf_1\ddot{\alpha}\cos\delta - 4rf_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\delta -$$
$$- 2rf_2(\alpha\cos\delta \mp \sin\delta)\dot{\varphi}^2]\Big\},$$

$$Q_3 = -\frac{1}{2}\Big\{2cb_0\ddot{\alpha} + \sum_{n=0}^{c-1}[-2a_n\ddot{\beta} + 2r\ddot{\alpha}\cos(\varphi + nd_n\pi - \alpha) +$$
$$+ 2r(\dot{\varphi} - \dot{\alpha})^2\sin(\varphi + nd_n\pi - \alpha)]\Big\},$$

$$(F_4)_{1/2} = -\frac{1}{2}\Bigg[-2cc_1\ddot{v}+2cb_1\ddot{w}+\sum_{n=0}^{c-1}\Bigg\{2r^2\ddot{\alpha}\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\cos(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{32}\lambda^2\cos 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]-$$

$$-2r^2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\sin(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{3}{4}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+$$

$$\frac{1}{8}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\pm 2rf_1\ddot{v}\sin\delta-2c_1(a_n\pm e)\ddot{\gamma}\pm 2rf_1(a_n\pm e)\ddot{\gamma}\sin\delta\mp$$

$$\mp 4rc_1f_1\ddot{\alpha}\sin\delta\pm 2rc_1f_2(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\dot{\varphi}^2-2r^2f_1f_2\alpha\dot{\varphi}^2+2rf_1\ddot{w}\cos\delta-$$

$$-2b_1(a_n\pm e)\ddot{\beta}-2r(a_n\pm e)f_1\ddot{\beta}\cos\delta+4rb_1f_1\ddot{\alpha}\cos\delta-4rb\_f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\delta-$$

$$-2rb_1f_2(\alpha\cos\mp\sin\delta)\dot{\varphi}^2\pm 2gr\Bigg[f_1-\cos nd_n\pi-\frac{1}{4}\lambda\cos 2(nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\sin\delta\pm$$

$$\pm 4rc_1f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\delta\Bigg\}\Bigg].$$

$$Q_4 = -\frac{1}{2}\Bigg\{-2cc_0\ddot{v}+2cb_0\ddot{w}+\sum_{n=0}^{c-1}[2r\ddot{v}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2a_nc_0\ddot{\gamma}-$$

$$-4rc_0\ddot{\alpha}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2rc_0(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+$$

$$+2a_nr\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2r\ddot{w}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2a_nb_0\ddot{\beta}-$$

$$-2ra_n\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+4b_0r\ddot{\alpha}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+$$

$$+2b_0r(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2gr\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)]\Bigg\},$$

$$(F_5)_{1/2} = -\frac{1}{2}\Bigg[2cc_1\ddot{u}\pm cr^2\ddot{\gamma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)\sin 2\delta+cr^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)(2\ddot{\beta}\sin^2\delta\pm$$

$$\pm\ddot{\gamma}\sin 2\delta)-2cb_1c_1\ddot{\gamma}+\sum_{n=0}^{c-1}\Bigg\{-2\ddot{w}(a_n\pm e)-2b_1(a_n\pm e)\ddot{\alpha}-r^2\dot{\varphi}\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\sin(\varphi+$$

$$+nd_n\pi\mp\delta)+\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{3}{4}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+$$

$$+\frac{1}{8}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg](2\dot{\beta}\sin^2\delta\pm\dot{\gamma}\sin 2\delta)+r^2\Bigg[\frac{1}{4}\lambda\cos(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+$$

$$+\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{32}\lambda^2\cos 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\Bigg]\times$$

$$\times(2\ddot{\beta}\sin^2\delta\pm\ddot{\gamma}\sin 2\delta)\mp 2rf_1\ddot{u}\sin\delta\pm 2rb_1f_1\ddot{\gamma}\sin\delta+4rc_1f_3\dot{\varphi}(\dot{\gamma}\cos\delta\pm\dot{\beta}\sin\delta)-$$

$$-2rc_1f_1(\ddot{\gamma}\cos\delta\pm 2\ddot{\beta}\sin\delta)+2rc_1f_2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\dot{\varphi}^2\pm 2r^2f_3^2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm$$

$$\pm\beta\sin\delta)\sin\delta\mp 2r^2f_1f_2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\sin\delta+4r(a_n\pm e)f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\cos\delta-$$

$$-2r(a_n\pm e)f_1\ddot{\alpha}\cos\delta+2r(a_n\pm e)f_2\dot{\varphi}^2(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)-r^2f_3^2(2\beta\sin^2\delta\pm\gamma\sin 2\delta)\dot{\varphi}^2\Bigg\}\Bigg],$$

$$Q_5 = -\frac{1}{2}\Big\{-cr^2\beta\dot{\varphi}^2+2cc_0\ddot{u}+2cb_0c_0\ddot{\gamma}-2cr^2\dot{\gamma}\dot{\varphi}+\sum_{n=0}^{c-1}[-r^2\ddot{\beta}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+$$

$$+2r^2\dot{\beta}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r\ddot{u}\sin(\varphi+nd_n\pi)+2rb_0\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi)-$$

$$-2c_0r\ddot{\gamma}\cos(\varphi+nd_n\pi)+4c_0r\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin(\varphi+nd_n\pi)+2c_0r\gamma\dot{\varphi}^2\cos(\varphi+nd_n\pi)-$$

$$-4c_0r\ddot{\beta}\sin(\varphi+nd_n\pi)-4c_0r\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos(\varphi+nd_n\pi)+2a_n\ddot{w}+2c_0r\beta\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+nd_n\pi)+$$

$$+r^2\ddot{\gamma}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2r^2\dot{\gamma}\dot{\varphi}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-2a_nb_0\ddot{\alpha}-r^2\gamma\dot{\varphi}^2\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+$$

$$+r^2\beta\dot{\varphi}^2\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-2ra_n\ddot{\alpha}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-$$

$$-2ra_n(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)]\Big\},$$

$$(F_6)_{1\,2} = -\frac{1}{2}\Bigg[\pm cr^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{32}\lambda^2\right)\ddot{\beta}\sin 2\delta-2cb_1\ddot{u}-2cb_1c_1\ddot{\beta}+\sum_{n=0}^{c-1}\Big\{2(a_n\pm e)\ddot{v}-$$

$$-2(a_n\pm e)c_1\ddot{\alpha}-r^2\dot{\varphi}\left[\frac{1}{4}\lambda\sin(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{8}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\right](2\dot{\gamma}\cos^2\delta\pm\dot{\beta}\sin 2\delta)+$$

$$+r^2\left[\frac{1}{4}\lambda\cos(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\frac{1}{4}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}\lambda^2\cos 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\right](2\ddot{\gamma}\cos^2\delta\pm\ddot{\beta}\sin 2\delta)-2rf_1\ddot{u}\cos\delta-$$

$$-4rb_1f_3\dot{\varphi}(\dot{\gamma}\cos\delta\pm\dot{\beta}\sin\delta)+2rb_1f_1\ddot{\gamma}\cos\delta-2rb_1f_2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-$$

$$-2rc_1f_1\ddot{\beta}\cos\delta+2r^2\dot{\varphi}^2f_3^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\cos\delta-2r^2f_1f_2\dot{\varphi}^2(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)\cos\delta+$$

$$+2rb_1f_1(\ddot{\gamma}\cos\delta\pm\ddot{\beta}\sin\delta)\mp 4r(a_n\pm e)f_3\dot{\alpha}\dot{\varphi}\sin\delta\pm 2r(a_n\pm e)f_1\ddot{\alpha}\sin\delta\mp$$

$$2r(a_n\pm e)f_2\dot{\varphi}^2(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)-r^2f_3^2(2\gamma\cos^2\delta\pm\beta\sin 2\delta)\dot{\varphi}^2\Big\}\Bigg],$$

$$Q_6 = -\frac{1}{2}\Big\{-cr^2\gamma\dot{\varphi}^2-2cb_0\ddot{u}-2cb_0c_0\ddot{\beta}+2cr^2\dot{\beta}\dot{\varphi}+\sum_{n=0}^{c-1}[r^2\ddot{\gamma}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-$$

$$-2r^2\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r\ddot{u}\cos(\varphi+nd_n\pi)+4rb_0\ddot{\gamma}\cos(\varphi+nd_n\pi)-$$

$$-4rb_0\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin(\varphi+nd_n\pi)-2rb_0\gamma\dot{\varphi}^2\cos(\varphi+nd_n\pi)+2rb_0\ddot{\beta}\sin(\varphi+nd_n\pi)+$$

$$+4rb_0\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos(\varphi+nd_n\pi)-2rb_0\beta\dot{\varphi}^2\sin(\varphi+nd_n\pi)-2c_0r\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi)-$$

$$-r^2\gamma\dot{\varphi}^2\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+r^2\ddot{\beta}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2r^2\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-$$

$$-r^2\beta\dot{\varphi}^2\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2a_n\ddot{v}-2a_nc_0\ddot{\alpha}+2a_nr\ddot{\alpha}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-$$

$$-2a_nr(\dot{\varphi}-\dot{\alpha})^2\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)]\Big\},$$

$$(F_7)_{1/2} = -\frac{1}{2}\left[4cr^2\alpha\dot{\alpha}\dot{\varphi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\lambda^2\right)+\sum_{n=0}^{c-1}\left\{2r^2f_2f_3\dot{\varphi}^2(\gamma^2\cos^2\delta\pm\beta\gamma\sin 2\delta+\beta^2\sin^2\delta)+\right.\right.$$
$$+2r^2f_3^2\dot{\varphi}(2\gamma\dot{\gamma}\cos^2\delta\pm\dot{\beta}\gamma\sin 2\delta\pm\beta\dot{\gamma}\sin 2\delta+2\beta\dot{\beta}\sin^2\delta)+2rf_3\ddot{u}(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-$$
$$-2rb_1f_3\ddot{\gamma}(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)+2rc_1f_3\ddot{\beta}(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-2r^2f_1f_3(\ddot{\gamma}\cos\delta\pm\ddot{\beta}\sin\delta)\times$$
$$\times(\gamma\cos\delta\pm\beta\sin\delta)-r^2\dot{\varphi}^2\left[\frac{1}{2}\lambda\sin(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\sin 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2}\lambda\sin 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{2}\lambda^2\sin 4(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)\right](\alpha^2+1)+4r^2\dot{\alpha}\dot{\varphi}\left[\frac{1}{2}\lambda\cos(\varphi+\right.$$
$$+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{2}\cos 2(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{2}\lambda\cos 3(\varphi+nd_n\pi\mp\delta)-\frac{1}{8}\lambda^2\cos 4(\varphi+$$
$$\left.+nd_n\pi\mp\delta)\right]\alpha\mp 2rf_3\ddot{v}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\mp 2r(a_n\pm e)f_3\ddot{\gamma}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\pm$$
$$\pm 2rc_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)-2r^2f_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\sin\delta\pm\cos\delta)\sin\delta-2rf_3\ddot{w}(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)+$$
$$+2r(a_n\pm e)f_3\ddot{\beta}(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)-2rb_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\cos\delta\mp\sin\delta)-2r^2f_1f_3\ddot{\alpha}(\alpha\cos\delta\mp$$
$$\left.\left.\mp\sin\delta)\cos\delta-2grf_3(\cos\delta\pm\alpha\sin\delta)\right\}\right],$$

$$Q_7 = -\frac{1}{2}\left\{2cr^2\gamma\dot{\gamma}\dot{\varphi}+2cr^2\beta\dot{\beta}\dot{\varphi}-2cr^2\ddot{\alpha}+cr^2\beta\ddot{\gamma}-cr^2\ddot{\beta}\gamma+\sum_{n=0}^{c-1}[-2r^2\gamma\dot{\gamma}\dot{\varphi}\cos 2\times\right.$$
$$\times(\varphi+nd_n\pi)+r^2\gamma^2\dot{\varphi}^2\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+2r^2\beta\dot{\beta}\dot{\varphi}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-r^2\beta^2\dot{\varphi}^2\sin 2\times$$
$$\times(\varphi+nd_n\pi)+2r\gamma\ddot{u}\sin(\varphi+nd_n\pi)-2r\beta\ddot{u}\cos(\varphi+nd_n\pi)-2rb_0\gamma\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi)+$$
$$+2rb_0\beta\ddot{\gamma}\cos(\varphi+nd_n\pi)+2rc_0\gamma\ddot{\beta}\sin(\varphi+nd_n\pi)-2c_0r\beta\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi)-$$
$$-r^2\gamma\ddot{\gamma}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)+r^2\beta\ddot{\gamma}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+r^2\gamma\ddot{\beta}\cos 2(\varphi+nd_n\pi)-$$
$$-2r^2\gamma\dot{\beta}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r^2\beta\dot{\gamma}\dot{\varphi}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r^2\beta\gamma\dot{\varphi}^2\cos 2(\varphi+nd_n\pi)+$$
$$+r^2\beta\ddot{\beta}\sin 2(\varphi+nd_n\pi)-2r\ddot{v}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2c_0r\ddot{\alpha}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-$$
$$-2a_nr\ddot{\gamma}\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2r\ddot{w}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)+2ra_n\ddot{\beta}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-$$
$$\left.-2b_0r\ddot{\alpha}\cos(\varphi+nd_n\pi-\alpha)-2gr\sin(\varphi+nd_n\pi-\alpha)]\right\}.$$

Człony zgrupowane na prawych stronach równań (4.1) mają w praktyce małe wartości. Gdy prawe strony równań (4.1) są równe zeru, mamy do czynienia z drganiami własnymi o rozwiązaniach:

$$(4.2)\qquad u = u_0+\varrho_1,\quad v = v_0+\varrho_2,\quad w = w_0+\varrho_3,\quad \alpha = \alpha_0+\varrho_4,\quad \beta = \beta_0+\varrho_5,$$
$$\gamma = \gamma_0+\varrho_6,\quad \dot{\varphi} = \text{const}.$$

W rozwiązaniach tych $u_0, \ldots, \gamma_0$ są stałymi składnikami wywołanymi stałą składową momentu reakcyjnego $crT(\omega_0)$, a $\varrho_s (s = 1, \ldots, 6)$ są sumą składników o postaci

$$(4.3)\qquad \varrho_s^{(k)} = \varphi_s^{(k)} a_k\cos(\lambda_k t+\delta_k),\quad s, k = 1, \ldots, 6,$$

gdzie: a_k, δ_k oznaczają stałe określane z warunków początkowych, λ_k są częstościami drgań własnych określanymi z równania charakterystycznego układu, zaś $\varphi_s^{(k)}$ są stałymi spełniającymi równania:

$$\sum_{s=1}^{6} (c_{js}-a_{js}\lambda_k^2)\varphi_s^{(k)} = 0, \quad j, k = 1, \ldots, 6 \tag{4.4}$$

i warunki ortogonalności:

$$\sum_{s=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} a_{sj}\varphi_s^{(k)}\varphi_j^{(l)} = 0, \quad \sum_{s=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} c_{js}\varphi_s^{(k)}\varphi_j^{(l)} = 0, \quad k \neq l; \tag{4.5}$$

$$[a_{js}] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}, \quad [c_{js}] = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 & 0 & U_z & -U_y \\ 0 & c_y & 0 & -V_z & 0 & V_x \\ 0 & 0 & c_z & W_y & -W_x & 0 \\ 0 & -V_z & W_y & c_{xx} & -c_{xy} & -c_{zx} \\ U_z & 0 & -W_x & -c_{xy} & c_{yy} & -c_{yz} \\ U_y & V_x & 0 & -c_{zx} & -c_{yz} & c_{zz} \end{bmatrix}.$$

W niniejszej pracy podamy rozwiązania równań (4.1) w pierwszym przybliżeniu. Wykorzystamy tu tę właściwość analizowanego układu, że na skutek istnienia tłumienia i wymuszeń związanych z obrotem wału korbowego ustalą się drgania określone przez częstość wymuszeń i tę spośród częstości drgań własnych, której wartość jest najbardziej zbliżona do wartości częstości wymuszeń. Drgania z innymi częstościami własnymi bądź wygasną, bądź mogą nie być rozpatrywane w pierwszym przybliżeniu [10, 11]. Założymy przy tym, że nie występuje rezonans wewnętrzny.

Po podstawieniu (4.2) do równań (4.1) i wprowadzeniu współrzędnych quasi-normalnych za pomocą podstawienia

$$\varrho_s(t) = \sum_{k=1}^{6} \varphi_s^{(k)} q_k(t), \quad s = 1, \ldots, 6 \tag{4.6}$$

otrzymujemy równania:

$$\ddot{q}_k + \lambda_k^2 q_k = \frac{1}{M_k}\sum_{j=1}^{6} \varphi_j^{(k)} [R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q_j], \quad k = 1, \ldots, 6, \tag{4.7}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J}[R_0^{(c)} + m_{p1}(F_7)_1 + m_{p2}(F_7)_2 + m_0 Q_7], \quad M_k = \sum_{s=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} a_{sj}\varphi_s^{(k)}\varphi_j^{(k)}. \tag{4.8}$$

Dla wyznaczenia drgań układu w pierwszym przybliżeniu wystarczy ograniczyć się do analizy dwóch równań: równania (4.8) uwzględniającego źródło energii i jednego z równań (4.7). Wybór jednego z równań (4.7) zależy od częstości λ_k, dla której wartość różnicy $|\lambda_k - \dot{\varphi}|$ jest najmniejsza. Jeśli taką częstością jest λ_m, należy rozpatrywać układ równań:

$$\ddot{q}_m + \lambda_m^2 q_m = \frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6} \varphi_j^{(m)} [R_j + m_{p1}(F_j)_1 + m_{p2}(F_j)_2 + m_0 Q], \tag{4.9}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J}[R_0^{(c)} + m_{p1}(F_7)_1 + m_{p2}(F_7)_2 + m_0 Q_7]. \tag{4.10}$$

Dla równań (4.9) i (4.10) przewidujemy w pierwszym przybliżeniu rozwiązanie w postaci:

$$
\begin{aligned}
q_m &= a\cos(\varphi+\psi)+\varepsilon u_1(a, \varphi, \varphi+\psi, \omega),\\
\dot{\varphi} &= \omega,\\
\dot{\omega} &= \varepsilon D(a, \psi, \omega),
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

gdzie a i ψ są funkcjami czasu i opisują się równaniami:

$$
\begin{aligned}
\dot{a} &= \varepsilon A(\psi, a, \omega),\\
\dot{\psi} &= \lambda_m-\omega+\varepsilon B(a, \psi, \omega).
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Podobnie jak w przypadku równania (3.6) otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_m^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial(\varphi+\psi)^2}+2\lambda_m\omega\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi\partial(\varphi+\psi)}+\omega^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\varphi^2}+\lambda_m^2 u_1+\\
&+\left[(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi}-2aB\lambda_m\right]\cos(\varphi+\psi)-\left[(\lambda_m-\omega)a\frac{\partial B}{\partial\psi}+2A\lambda_m\right]\sin(\varphi+\psi)=\\
&=\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}\left[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j\right].
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

W celu wyznaczenia wielkości A, B i u_1 przedstawimy prawą stronę równania (4.13) oraz u_1 w postaci podwójnych szeregów Fouriera:

$$
\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}\left[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j\right]=\sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty}F_{n_1, n_2}(a, \omega)e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]},
\tag{4.14}
$$

$$
u_1(a, \varphi, \varphi+\psi, \omega)=\sum_{n_1, n_2=-\infty}^{\infty}u_{n_1, n_2}(a, \omega)e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]},
\tag{4.15}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
F_{n_1, n_2}(a, \omega)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+\\
+m_0Q_j]e^{-i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}d\varphi d(\varphi+\psi),
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

i jest jednością urojoną.

Aby a była pełną amplitudą pierwszej harmoniki kąta $(\varphi+\psi)$ powinno zachodzić $u_{n1,n2}(a, \omega)\equiv 0$ dla wszystkich n_1 i n_2 spełniających równość $n_1+n_2=\pm 1$. Z uwzględnieniem tego warunku otrzymujemy na podstawie (4.13) - (4.16)

$$
u_{n_1, n_2}(a, \omega)=\frac{F_{n_1, n_2}(a, \omega)}{\lambda_m^2-(n_1\omega+n_2\lambda_m)^2}, \quad n_1+n_2\neq\pm 1,
\tag{4.17}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi}-2aB\lambda_m\right]\cos(\varphi+\psi)-\left[(\lambda_m-\omega)a\frac{\partial B}{\partial\psi}+2A\lambda_m\right]\sin(\varphi+\psi)=\\
&=\sum_{\substack{n_1, n_2=-\infty\\ n_1+n_2=\pm 1}}^{\infty}F_{n_1, n_2}(a, \omega)e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Z zależności (4.15) - (4.17) otrzymujemy

$$(4.19)\qquad u_1(a,\varphi,\varphi+\psi,\omega)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{\substack{n_1,n_2=-\infty\\ n_1+n_2\neq\pm1}}^{\infty}\frac{e^{i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}}{\lambda_m^2-(n_1\omega+n_2\lambda_m)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+$$
$$+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-i[n_1\varphi+n_2(\varphi+\psi)]}d\varphi\, d(\varphi+\psi).$$

W celu otrzymania równań do wyznaczenia funkcji A i B porównamy współczynniki stojące przy $\sin(\varphi+\psi)$ i $\cos(\varphi+\psi)$ w równaniu (4.18). Oznaczając $n_1=-p,\ n_2=p\pm1$ otrzymujemy:

$$\left[(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi}-2aB\lambda_m\right]\cos(\varphi+\psi)-\left[(\lambda_m-\omega)a\frac{\partial B}{\partial\psi}+2A\lambda_m\right]\sin(\varphi+\psi)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{ip\psi}[\cos(\varphi+\psi)\pm i\sin(\varphi+\psi)]\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+$$
$$+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}[\cos(\varphi+\psi)\mp i\sin(\varphi+\psi)]d\varphi\, d(\varphi+\psi),$$

skąd

$$(4.20)\qquad \begin{aligned}2A\lambda_m+a(\lambda_m-\omega)\frac{\partial B}{\partial\psi}&=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{ip\psi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+\\&\qquad+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}\sin(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi),\\2aB\lambda_m-(\lambda_m-\omega)\frac{\partial A}{\partial\psi}&=-\frac{1}{2\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}e^{ip\psi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+\\&\qquad+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}\cos(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi).\end{aligned}$$

Rozwiązań układu (4.20) poszukujemy w postaci szeregów:

$$(4.21)\qquad A(a,\psi,\omega)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}C_p(a,\omega)e^{ip\psi},\qquad B(a,\psi,\omega)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}G_p(a,\omega)e^{ip\psi}.$$

Po podstawieniu (4.21) do (4.20) otrzymujemy rozwiązania:

$$(4.22)\qquad A(a,\psi,\omega)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip\psi}}{4\lambda_m^2-p^2(\lambda_m-\omega)^2}\Bigg\{(\lambda_m-\omega)ip\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}\times$$
$$\times[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}\cos(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi)-$$
$$-2\lambda_m\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]\times$$
$$\times e^{-ip\psi}\sin(\varphi+\psi)\,d\varphi\, d(\varphi+\psi)\Bigg\},$$

$$B(a,\psi,\omega) = \frac{1}{2\pi^2 a}\sum_{p=-\infty}^{\infty}\frac{e^{ip\psi}}{4\lambda_m^2-p^2(\lambda_m-\omega)^2}\Bigg\{(\omega-\lambda)ip\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}\times \tag{4.22 [c.d.]}$$

$$\times[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]e^{-ip\psi}\sin(\varphi+\psi)d\varphi d(\varphi+\psi)-$$

$$-2\lambda_m\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{M_m}\sum_{j=1}^{6}\varphi_j^{(m)}[R_j+m_{p1}(F_j)_1+m_{p2}(F_j)_2+m_0Q_j]\times$$

$$\times e^{-ip\psi}\cos(\varphi+\psi)d\varphi d(\varphi+\psi)\Bigg\}.$$

Funkcję D wyznaczymy z równania (4.10) przez uśrednienie prawej strony tego równania po $(\varphi+\psi)$ w okresie 2π

$$D(a,\psi,\omega) = \frac{1}{2\pi J}\int_0^{2\pi}[R_0^{(c)}+m_{p1}(F_7)_1+m_{p2}(F_7)_2+m_0Q_7]d(\varphi+\psi). \tag{4.23}$$

Na podstawie (4.11), (4.12), (4.22), (4.23) wyznaczyć można wielkości a, ψ i ω oraz z uwzględnieniem (4.2), (4.6) i (4.19) drgania układu:

$$u = u_0+\phi_1^{(m)}[a\cos(\varphi+\psi)+u_1],\quad v = v_0+\phi_2^{(m)}[a\cos(\varphi+\psi)+u_1],\ \ldots,$$
$$\gamma = \gamma_0+\phi_6^{(m)}[a\cos(\varphi+\psi)+u_1]. \tag{4.24}$$

Z równania (4.10) wyznaczyć można wywołany drganiami silnika dodatkowy moment oporowy, jako sumę momentów na wale silnika, z jakimi oddziaływują masy $m_{p1/2}$ i m_0 przy drganiach $u, \ldots, \gamma$

$$\Delta M = -\{m_{p1}[(F_7)_1-K_1]+m_{p2}[(F_7)_2-K_2]+m_0(Q_7-Q_0)\}, \tag{4.25}$$

którego stały, w stanach ustalonych, składnik $(\Delta M)_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta M d(\varphi+\psi)$ powoduje trwały spadek prędkości kątowej silnika i stratę mocy $(\Delta N)_0 \doteq (\Delta M)_0\omega$, związaną z tłumieniem w podkładkach elastycznych.

Powyższe zależności pozwalają dokonać analizy drgań i obciążeń silnika oraz doboru układu amortyzacji, spełniającego wymogi stawiane elastycznemu posadowieniu i zapewniającego odpowiednio małe straty energetyczne, przy uwzględnieniu nieliniowych zjawisk i nieidealnego źródła energii. Przez podstawienie $\delta = 0$ lub $\delta = \pi/2$ zależności te mogą być wykorzystane także do analizy silników o pionowym układzie cylindrów lub silników typu bokser.

Literatura cytowana w tekście

1. W. PFLAUM, W. HEMPEL, *Untersuchung ueber den Verschleiss bei Motoren mit elastischer Lagerung*, MTZ, 23, 11 (1962).
2. W. HEMPEL, *Zusatzkraefte im Triebwerk von Kolbenmaschinen bei elastischer Lagerung und im Seegang*, Forschungsh., Schiffstechnik, April 1966.
3. Y. ROCARD, *Dinamique generale des vibrations*, Masson, Paris 1949.

4. В. О. Кононенко, *Колебательные системы с ограниченным возбуждением*, Изд. Наука, Москва 1964.
5. Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов, *Нестационарные колебания механических систем*, Наукова Думка, Киев 1966.
6. J. Kolenda, *Analiza wibracyjno-uderzeniowego układu z bezwładnościowym wzbudnikiem drgań*. Praca przyjęta do druku przez Redakcję Zeszytów Naukowych Politechniki Gdańskiej « Mechanika ».
7. J. Kolenda, *Nieliniowe drgania elastycznie posadowionych silników tłokowych z mimoosiowymi mechanizmami korbowymi z uwzględnieniem nieidealnego źródła energii*. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej « Budownictwo Okrętowe », (w druku).
8. J. Jędrzejowski, *Mechanika układów korbowych silników samochodowych*, WKŁ, Warszawa 1965.
9. M. Cichy, S. Wojciechowski, *Interpolacja charakterystyk silnikowych za pomocą wielomianów*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 189, Mechanika XVI, 1972.
10. Ю. А. Митропольский, *Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах*, Изд. АН УССР, Киев 1955.
11. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, Москва 1963.

Резюме

НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ АМОРТИЗИРОВАННЫХ V-ОБРАЗНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ С НЕИДЕАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ ЭНЕРГИИ

В работе рассматриваются колебания амортизированных V-образных двигателей с неуравновешенными массами и с возвратно-поступательным и вращательным движениями. Учитывается неидеальность источника энергии и угловая скорость двигателя принимается переменной. Поведение рассматриваемых систем описывается с помощью нелинейных дифференциальных уравнений, которые решаются с применением метода Крылова-Боголюбова-Митропольского.

Summary

NON-LINEAR VIBRATIONS OF ELASTICALLY MOUNTED V-TYPE PISTON ENGINES WITH NON-IDEAL POWER SOURCE

The paper deals with vibrations of elastically mounted V-type engines with reciprocating and rotating unweighted masses. The non-ideal power source and variable rotating speed of engine are taken into account. The behaviour of analysed systems is described by non-linear differential equations which are solved by means of the asymptotic method of Krylov-Bogolubov-Mitropolsky.

INSTYTUT OKRĘTOWY POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 stycznia 1975.

BIULETYN INFORMACYJNY

KOLOKWIUM EUROMECH 64
«METODY ENERGETYCZNE W MECHANICE PĘKANIA»

Kolokwium odbyło się w pięknie położonym, nadmorskim ośrodku konferencyjnym w Skepparholmen, Saltsjö-Boo, pod Sztokholmem w dniach 20—22 sierpnia 1975 r. Przewodniczącym i organizatorem Kolokwium był prof. Janne CARLSSON, współprzewodniczącym — prof. Marek SOKOŁOWSKI. Tematyka sympozjum została podzielona na 5 następujących sesji:

1. Kryteria wzrostu szczelin statecznych, inicjacja rozprzestrzeniania się szczelin niestatecznych. Dysypacja energii przy wzroście szczeliny.
2. Analityczne i numeryczne metody rozwiązywania zagadnień szczelin. Odnośne wyniki.
3. Metody doświadczalne i własności materiałów.
4. Aspekty mikromechaniczne.
5. Zagadnienia dynamicznego rozprzestrzeniania się szczelin.

W ramach pierwszej sesji wygłoszono osiem referatów. Prof. Bertram BROBERG (Lund, Szwecja) przedstawił referat o charakterze kryteriów dla różnych stadiów procesu pękania. W procesie pękania zostały wyróżnione trzy obszary: sprężysty, plastyczny i obszar «procesu», pod którym Autor określał mały obszar mikropęknięć będący zalążkiem rozprzestrzeniającej się szczeliny. W przedstawionych wynikach doświadczeń rozróżniono przypadki kontrolowanego obciążenia i kontrolowanego przemieszczenia (uchwytu próbki). Rozważania dotyczyły warunków niestateczności, autonomii procesu oraz uwzględniały wzmocnienie materiału. Praca została opublikowana w J. M. Ph. Solids, tom **23**, z. 3, 215—237 (1975).

Prof. Tokeo YOKOBORI (Japonia) przedstawił pracę, w której przedyskutował warunki konieczne do rozprzestrzeniania się szczeliny, mianowicie warunek energetyczny i naprężenia lokalnego. Rozważania teoretyczne zostały porównane z wynikami doświadczeń, w których uwzględniono również wpływ wielkości ziarna.

Prof. Kare HELLAN (Trondheim, Norwegia) przedyskutował fizyczne aspekty ekstrapolacji warunku Griffitha na obszar nieliniowy. Przypadek szczególny rozwiązano metodą elementów skończonych.

Dr A. De KONING (Amsterdam) mówił o powolnym wzroście szczeliny w arkuszu blachy. Z wyników osiągniętych również metodą elementów skończonych wynikało, że szybkość dysypacji energii w wierzchołku szczeliny znacznie przekracza przewidywania pewnych wzorów analitycznych.

Referat dr. H. STRIFORSA (Sztokholm) był poświęcony teoretycznym rozważaniom, z uwzględnieniem pojęć energii powierzchniowej i entropii powierzchniowej w opisie procesów pękania w materiałach termomechanicznych. Przedyskutowano ograniczenia, jakie wprowadzają warunki jednoznaczności i zasada dysypacji na równania konstytutywne.

Doc. Hans ANDERSSON (Lund, Szwecja) zastosował metodę elementów skończonych do analizy procesu pękania po zapoczątkowaniu wzrostu szczeliny oraz do obliczenia energii przechodzącej przez obszar plastycznej dysypacji do obszaru dekohezji.

Dr H. C. van ELST (Apeldorn, Holandia) rozpatrzył dwuwymiarowe zagadnienie szczeliny w ramach uproszczonej teorii plastyczności i obliczył energię w plastycznej strefie w wierzchołku szczeliny.

Zagadnienie geometrii, bilansu energii oraz ich znaczenie przy wzroście niestatecznej szczeliny rozpatrzyl dr G. C. ANGELINO (Mediolan). Badania dotyczyły stopu aluminiowego. Autor przedstawił liczne wykresy.

Przewodniczący Kolokwium prof. Janne CARLSSON wygłosił pierwszy referat drugiej sesji. W pracy przedstawione zostało zastosowanie twierdzenia o wzajemności Bettiego do ciał sprężystych ze szczelinami.

Posługując się tą metodą Autor podał wzory na współczynniki intensywności naprężeń dla różnych przypadków obciążeń.

Dr H. D. BUI (Paryż) podał przybliżone ograniczenie na całki niezależne od drogi w płaskich zagadnieniach szczelin dla stanu antypłaskiego.

W wielu pracach wygłoszonych na Kolokwium rozwiązanie postawionego zagadnienia otrzymano metodą elementów skończonych. Do tego cyklu należała praca dr. G. AAMODTA (Oslo), który przedstawił wyniki dotyczące zagadnienia szczeliny eliptycznej w ośrodku sprężysto-plastycznym. Rozpatrzono wzrost takiej szczeliny w arkuszu blachy pod działaniem obciążeń cyklicznych.

Zagadnieniom termicznym w ośrodkach ze szczelinami poświęcone były dwie prace. Doc. Klaus HERRMANN (Karlsruhe, RFN) przedstawił dwuwymiarowe zagadnienie w ośrodku z ochłodzoną inkluzją walcową i szczeliną w pewnej odległości w osi inkluzji. Niżej podpisany rozpatrzył uogólnienie statycznych zagadnień szczelin w ośrodku termosprężystym na przypadek wymuszeń okresowych przy niezmiennej geometrii szczelin. Przedyskutowano przypadki, w których zagadnienie pomocnicze nie musi odpowiadać wyjściowemu, oraz wyrażenie na energię oziębionej szczeliny.

Metody doświadczalne zostały przedstawione w 10 pracach. W trzech pracach (K. MARKSTRÖM, H. P. KELLER i D. MUNZ oraz B. ÖSTENSSON) Autorzy wyznaczyli wartość *J*-całki dla różnych stopów aluminium i próbek stalowych.

Prof. N. G. OHLSON przedstawił zastosowanie metod radiograficznych i holografii w studiach nad rozprzestrzenianiem się szczelin. Proponowana metoda, posługująca się cząstkami beta, jest szczególnie przydatna w materiałach magnetycznych. Wydaje się, że metoda ta, posługująca się cieczą o własnościach magnetycznych wypełniającą szczelinę i laserem, wprowadzała oryginalne i ciekawe pomysły i stanowi nowość w tej dziedzinie.

Prof. J. C. RADON przedstawił wyniki badań pękania próbek ze stopu aluminium, z bocznymi nacięciami (rowkami), na młocie Charpy'ego. Celem tych badań było określenie współczynników intensywności naprężeń. Młot Charpy'ego został w tym celu przerobiony przez dodanie czujników w specjalnie wykonanych wgłębieniach. W drugiej pracy tegoż Autora przedstawione zostały oszacowania wynikające z mechaniki pękania z uwzględnieniem pełzania.

W związku z mechaniką skał głównym punktem referatu G. A. COOPERA (Szwajcaria) była optymalizacja doświadczeń zginania belek celem pomiaru energii pękania. Zaproponowano kryteria określenia najlepszego kształtu i wymiaru próbek dla otrzymania statecznego pękania na maszynie wytrzymałościowej. Doświadczenia dotyczyły wielu skał.

Dr. S. K. BHANDARI przedstawił pewne kryteria dotyczące zmęczenia i pękania płyt, a dr P. H. HODKINSON i C. RUIZ zajęli się analizą pękania naczyń ciśnieniowych z defektami. W pracy określone zostały granice stosowalności liniowej mechaniki pękania i nośności granicznej.

Ostatnie trzy prace miały charakter wyraźnie aplikacyjny.

W drugim swoim referacie prof. T. YOKOBORI przedstawił obszerne wyniki badań wzrostu szczelin zmęczeniowych i dynamicznej teorii dyslokacji.

Do czwartej sesji (aspekty mikromechaniczne) zostały zaliczone tylko dwie prace, obie polskie, mianowicie: mgr. A. KACZYŃSKIEGO i prof. M. SOKOŁOWSKIEGO (*Wzajemne oddziaływanie szczelin, obciążeń zewnętrznych i inkluzji w ośrodku sprężystym*) oraz doc. J. KRZEMIŃSKIEGO (*Teoria zarodkowania wakansji i mikroszczelin w metalach*). W pierwszej z prac zanalizowano, w płaskim stanie odkształcenia, zagadnienie sił odpychania i przyciągania szczeliny przez inkluzje lub pustkę w przypadku poziomej siły. Autor drugiego referatu przedstawił rozwinięcie swoich poprzednich prac i hipotez i podał kontynualne podejście do kinetyki procesu zarodkowania dla pojedynczego kryształu.

W pierwszym referacie piątej, ostatniej sesji prof. F. NILSSON (Sztokholm) omówił pewne możliwości opisu rozprzestrzeniania się szczelin. Przedyskutowane zostały podstawowe związki energetyczne dla rosnącej szczeliny. Autor pracy stwierdził, że jeżeli znane są krzywe uplastycznienia małej skali, to szybki wzrost szczeliny może być opisany z dostateczną dokładnością w ramach teorii liniowej. Praca W. DÖLLA (Freiburg, RFN) pod tytułem *Zastosowanie równania bilansu energii i metody energetycznej do zagadnienia dynamicznego rozprzestrzeniania się szczelin* stanowiła ilustrację doświadczalną pracy F. NILSSONA.

Dr D. GROSS (Stuttgart, RFN) omówił wpływ mikrostruktury (ośrodek mikropolarny) na zachowanie się biegnącej szczeliny. W szczególności wpływ ten powoduje, że maksymalna prędkość szczeliny zależy od geometrii, obciążenia i struktury ośrodka.

Dr R. SCHIRRER (Strasbourg, Francja) przedstawił pracę dotyczącą związków między energią powierzchniową i prędkością poruszającej się szczeliny. Wyniki doświadczeń nie potwierdziły odpowiednich krzywych teoretycznych otrzymanych drogą obliczeń na komputerze.

Dr H. BERGKVIST zademonstrował wyniki doświadczeń poruszającej się osiowo-symetrycznej szczeliny. Szybkość wykonywanych zdjęć wynosiła 20 000—50 000 na minutę.

Z kolei dr Marek MATCZYŃSKI przedstawił wyniki pracy teoretycznej. Metodę Wienera-Hopfa zastosowano do rozwiązania zagadnienia szczeliny poruszającej się ze stałą prędkością w warstwie sprężystej złożonej z dwóch warstw o różnych własnościach materiałowych. Rozpatrzone zagadnienie dotyczyło stanu antypłaskiego.

W ostatniej pracy wygłoszonej na Kolokwium (autorzy: J. F. KALTHOFF, S. WINKLER i J. BEINERT, Freiburg, RFN) przedstawione zostały wyniki doświadczeń, które umożliwiły określenie dynamicznego współczynnika intensywności naprężeń dla zatrzymujących się szczelin.

Na Kolokwium Euromech 64 wygłoszono 30 referatów, a udział w nim wzięło 60 uczestników z 13 krajów, w tym 5 osób z Polski (profesorowie: S. BUTNICKI, M. SOKOŁOWSKI i Z. OLESIAK, doc. J. KRZEMIŃSKI, dr. M. MATCZYŃSKI). Organizatorzy zapewnili świetne warunki pobytu i obrad w specjalnym ośrodku konferencyjnym i zaprosili wszystkich uczestników Kolokwium na przejażdżkę statkiem po Archipelagu Sztokholmskim, połączoną z uroczystym obiadem.

Kolokwium było udaną imprezą, która zgromadziła pracowników nauki, teoretyków i eksperymentatorów oraz inżynierów zajmujących się bezpośrednimi zastosowaniami mechaniki pękania w praktyce. Dyskusje zarówno bezpośrednio po wygłoszeniu referatów, jak i w kuluarach były rzeczowe i liczne, mimo że dość często wygłaszano nawet przeciwstawne poglądy. Organizatorzy umożliwili uczestnikom Kolokwium zwiedzenie Szwedzkich Laboratoriów Energii Atomowej oraz laboratoriów Królewskiej Politechniki w Sztokholmie. Niestety dwa dni przerwy (sobota i niedziela) między zakończeniem obrad i proponowanym terminem zwiedzania laboratoriów uniemożliwiły większości uczestników skorzystanie z zaproszenia.

W czasie trwania Kolokwium dowiedziałem się, z rozdawanego prospektu, o istnieniu Połączonego Ośrodka Badawczego Krajów Wspólnego Rynku w miejscowości Ispra nad Lago Maggiore w północnych Włoszech. W tym roku zostaną tam zorganizowane trzy seminaria o następującej tematyce:

1. Wodór jako nośnik energii (29.IX—3.X.),
2. Zaawansowane seminarium mechaniki pękania (20—24.X),
3. Pewność konstrukcji (15—19.XII).

Zbigniew Olesiak (Warszawa)

KOLOKWIA EUROMECH W 1976 ROKU

70. Liquid-metal magnetohydrodynamics with strong magnetic fields 16—19 marca 1976 Grenoble	Prof. R. Moreau, Institut de Mecanique B.P. 53, Centre de Tri 38041 Grenoble-Cedex, France and Dr. J.C.R. Hunt, Cambridge, England
71. The bulk properties of composite materials 29 marca — 1 kwietnia 1976 Bath	Prof. N. Laws Department of Mathematics Cranfield Institute of Technology Cranfield, Bedford MK 43 OAL, England and Prof. J. R. Willis, Bath England

72. Boundary layers and turbulence in internal flows 30 marca — 1 kwietnia 1976 Salford	Prof. J. L. Livesey University of Salford Salford M5 4WT, England and Dr. J. H. Horlock, Salford, England
74. Lifting wings and bodies at supersonic and hypersonic speeds 12—14 kwietnia 1976 Cambridqe	Prof. J. L. Stollery Cranfield Institute of Technology Cranfield, Bedford MK 43 OAL, England and Dr. L. C. Squire, Cambridge, England
73. Oscillatory flows in ducts 13—15 kwietnia 1976 Aix-en Provence	Dr. E. Brocher Institut de Mécanique des Fluides 1, Rue Honnorat 13003 Marseille, France
75. The calculation of flow fields by means of panelmethods 10—13 maja 1976 Braunschweig	Dr.-Ing. H. Körner DFVLR-Institut für Aerodynamik D-33 Braunschweig/Flughafen BDR and Dr. E. H. Hirschel, Porz-Wahn, BDR
84. Mechanics of granular materials 13—17 lipca 1976 Jabłonna	Prof. Z. Mróz Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polska Akademia Nauk, ul. Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa, Polska
76. Creep rupture in structures 16—19 sierpnia 1976 Gothenburg	Prof. J. Hult Division of Solid Mechanics Chalmers University of Technology S-40220 Gothenburg, Sweden
77. Three-dimensional problems in fracture mechanics 68—8 września 1976 Paris	R. Labbens, Directeur Scientifique Creusot-Loire, 15 rue Pasquier 75383 Paris Cedex 08, France and Prof. D. Radenkovic, Paris, France
80. Separation phenomena in gasmixture flows 6—9 września 1976 Freiburg	Dr. K. Roesner Institut für Angewandte Mathematik Universität Freiburg, 78 Freiburg Hebelstrasse 40, BDR
78. Dynamics of the planetary boundary layer and ocean thermocline 7—9 września 1976 Paris	Prof. A. Berroir Laboratoire de Meteorologie Dynamique, E.N.S. 24, rue Lhomond 75 231 Paris Cedex 05, France Prof. P. Morel, Paris, France
79. Solutions to basic problems in nonlinear continua 7—10 września 1976 Darmstadt	Prof. W. Bürger Institut für Mechanik, Technische Hochschule D-61 Darmstadt Hochschulstrasse, 1, BDR and Dr. W. A. Green, Nottingham, England
81. Impact loading on bodies 13—17 września 1976 Liblice Castle	Dr. Ladislav Pust Institute of Thermomechanics Czechoslovak Academy of Sciences Praha 6, Pustinovo nam. 9, Czechoslovakia

82. Uncontrolled blast and explosions in industry and mining
18—21 października 1976
Jabłonna
Prof. S. Wójcicki
Politechnika Warszawska
00-665 Warszawa
ul. Nowowiejska 25, Polska

83. Dynamic response of plastic structures and continua
1—3 listopada 1976
Matrafüred
Prof. S. Kaliszky
Technical University Budapest
Müegyetem rkp 3. K. mf. 35
Budapest XI, Hungary

KOMUNIKAT

XIV MIĘDZYNARODOWY KONGRES MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ

XIV Kongres IUTAM będzie obradował od poniedziałku 30 sierpnia do soboty 4 września 1976 r. na terenie Wydziału Mechanicznego Politechniki w Delft, Holandia.

Na Kongresie przewiduje się wygłoszenie 5 referatów generalnych, 10—15 referatów sekcyjnych przygotowanych na zaproszenie organizatorów, 10—15 referatów sekcyjnych wyłonionych z prac nadesłanych oraz około 200 półgodzinnych (łącznie z dyskusją) referatów szczegółowych. Na dodatkowe dyskusje zagadnień poruszonych w referatach sekcyjnych przeznacza się specjalne sesje.

Selekcją prac zgłaszanych na Kongres będzie zajmować się Międzynarodowy Komitet Programowy we współpracy z komitetami narodowymi IUTAM. Obszerne streszczenia referatów w języku angielskim, (około 500 słów) w ilości 5 egzemplarzy oraz 1 egzemplarz skróconego streszczenia (100—150 słów) należy nadsyłać do **1 marca 1976 r.** pod adresem:

IUTAM 1976 c/o K.I.v.I.
23 Prinsessegracht
The Hague
The Netherlands

Licząc na dużą ilość prac autorów polskich zgloszonych na Kongres, uprzejmie prosimy o jednoczesne nadsyłanie 1 egzemplarza streszczenia referatu pod adresem prof. dr. Stefana ZAHORSKIEGO, sekretarza Polskiej Grupy IUTAM przy Komitecie Mechaniki i Fizyki Ośrodków Ciągłych:

Prof. dr S. Zahorski
IPPT PAN
ul. Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa

W następnym zeszycie ukażą się prace:

A. Sawicki, Z zagadnień hydrosprężystości płyt
Некоторые вопросы гидроупругости плит
Certain problems of hydroelasticity of plates

W. Kufel, Sterowana dyskretyzacja płyt i powłok
Управляемая дискретизация пластин и оболочек
Controlled discretization of plates and shells

R. Gryboś, Wyboczenie uderzeniowe pręta o dużej smukłości
Ударное выпучивание стержня с большой гибкостью
Impact buckling of a slender rod

M. Radwańska, Z. Waszczyszyn, Dynamika płaskiej wiązki przy prądach zwarciowych
Динамика плоской системы электропроводов при токах короткого замыкания
Dynamics of a plane group of conductors under short-circuit current

J. Maryniak, M. Złocka, Stateczność boczna samolotu i drgania lotek z uwzględnieniem odkształcalności giętnej skrzydeł i sprężystości układu sterowania
Боковая устойчивость самолета и колебания элеронов при изгибающей деформации крыльев при наличии упругости в системе управления
Lateral stability of a plane and aileron vibrations, flexibility and wings and elasticity of control system being taken into consideration

W. Mierzejewski, Rozwiązywanie problemów dynamiki płyt prostokątnych w oparciu o zmodyfikowaną metodę sił Nowackiego
Решение задач динамики прямоугольных пластин на основе модифицированного метода Новацкого
Solution of the vibration problem of rectangular plates based on a modification of Nowacki's method

W. Kosiński, Analiza jednowymiarowych fal uderzeniowych i przyśpieszenia w ośrodku niesprężystym
Анализ одномерных ударных волн и волн ускорения в неупругой среде
Analysis of one-dimensional shock and acceleration waves in inelastic medium

B. Bieniasz, Wpływ zastosowania kondensacji kroplowej w pojedynczym termosyfonie dwufazowym na współczynnik przenikania ciepła przez ściankę skraplacza
Влияние применения каплевидной конденсации в одинарном двухфазовом термосифоне на коэффициент теплопроводности стенки конденсатора
The effect of application of dropwise condensation in a single twophase thermosiphon on the heat transfer coefficient across the condenser wall

A. Pieniążek, W. Piniążek, O pewnej nowej metodzie analizy stateczności rozwiązań układów nieliniowych o jednym stopniu swobody
О некотором новом методе анализа устойчивости решений нелинейных систем с одной степенью свободы
On a certain new method of analyzing the stability of solutions for non-linear systems with one degree of freedom

E. Walicki, A. Topoliński, Powolny przepływ cieczy lepkiej w płaskim kanale o nagłym lokalnym rozszerzeniu
Медленное течение вязкой жидкости в плоском канале с внезапным местным расширением
Slow viscous fluid flow in the channel with a locally recessed walls

A. Wilczyński, Stateczność płaskiej postaci zginania belki o osi załamanej
Устойчивость плоской формы изгиба балки с переломленной осью
Stability of plane form ot bending of a beam with the deflected axis

B. Bieniasz, Graniczna moc dwufazowego termosyfonu rurowego ze względu na kryterium odrywania kondensatu
Предельная мощность двухфазового трубчатого термосифона из условия отрыва конденсата
Limit power of a two-phase pipe thermosiphon with respect to condensate liquid instability

Biuletyn Informacyjny

Cena zł 30.—

WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej

rocznie zł 120.—

półrocznie zł 60.—

Instytucje państwowe społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch".

Prenumeratorzy indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch", Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki".

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch", Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)

Mech. Teor., T. 13, z. 4, s. 521 — 608, Warszawa 1975, Indeks 36712/36523