

g II 720

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

KWARTALNIK

TOM 13 • ZESZYT 3

Pw

WARSZAWA 1975

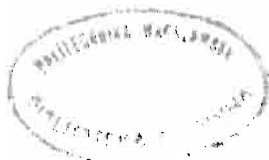
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

531

## SPIS TREŚCI

<p>S. KOSAŃDA, Badania i obliczenia prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych          Исследование и расчёт скорости распространения усталостных трещин          Investigation and evaluation of fatigue cracks growth rate</p>	307
<p>S. KOSAŃDA, J. KOZUBOWSKI, O możliwości rozszerzenia metodyki badań powierzchni pęknięć zmęczeniowych          О возможностях расширения методов исследования поверхности усталостных трещин          On the possibility of widening the range of methods of investigation of fatigue crack surface</p>	329
<p>E. WALICKI, Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między powierzchniami obrotowymi: nieruchomą i drgającą skrętnie          Течение вязкой жидкости в щели между двумя поверхностями вращения из которых одна неподвижна а вторая совершает крутильные колебания          Viscous fluid flow through in a slot between two surfaces of revolution: one of them fixed and the other one — torsionally oscillating</p>	341
<p>H. OLESIAK, A. P. WILCZYŃSKI, O pewnych możliwościach zastosowania tarcz ściskanych w badaniach materiałowych          О некоторых возможностях применения сжимаемых дисков для определения механических констант материала          On possibilities of applications of compressed disc in material testing</p>	353
<p>A. TROJNACKI, Wpływ tarcia w przegubach na przebieg wyboczenia pręta ściskanego          Влияние трения в шарнирах на процесс продольного изгиба сжатого стержня          The influence of friction in the hinges on the buckling process of a column</p>	363
<p>Z. KUROWSKI, S. OSZEŃSKI, Ekstrapolacyjna metoda opisu prób pełzania przy obciążeniach wielostopniowych          Экстраполяционный метод описания испытаний на ползучесть при многоступенчатых нагрузках          Extrapolation method of description of creep tests at multi-step loadings</p>	373
<p>A. GOŁĘBIEWSKA-LASOTA, A. P. WILCZYŃSKI, Izotropia jako przypadek graniczny wieloskładnikowego ośrodka ortotropowego          Изотропия, как предельный случай многокомпонентной ортотропной среды          Isotropy as the limiting case of orthotropic multiphase media</p>	383
<p>F. TWARDOSZ, T. WEGNER, Obrotowo-symetryczne drgania własne powłoki stożkowej z materiału ściśliwego nieliniowo sprężystego          Собственные круглосимметрические колебания конической оболочки из сжимаемого нелинейно-упругого материала          Rotationally symmetric free vibrations of a conical shell made of compressible, non-linear elastic material</p>	393
<p>J. ŁUCZKO, Wpływ dodatkowych nieliniowych zaburzeń na charakterystyki probabilistyczne klasycznych równań opisujących drgania samowzbudne          Влияние дополнительных нелинейных возмущений на вероятностные характеристики классических уравнений описывающих колебания самовозбуждающихся систем          Influence of additional non-linear perturbations on the probabilistic characteristics of classical equations describing self-excited vibrations</p>	413

P O L S K I E T O W A R Z Y S T W O  
M E C H A N I K I T E O R E T Y C Z N E J I S T O S O W A N E J



M E C H A N I K A  
T E O R E T Y C Z N A  
I S T O S O W A N A

T O M 1 3 · Z E S Z Y T 3

W A R S Z A W A 1 9 7 5

P A Ń S T W O W E W Y D A W N I C T W O N A U K O W E

## MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

poświęcona jest pracom przeglądowym, oryginalnym naukowym pracom teoretycznym i doświadczalnym, komunikatom naukowym i bibliografii najważniejszych pozycji wydawniczych. Zawiera również sprawozdania z działalności Towarzystwa, kongresów, konferencji i sympozjów naukowych

\*

## THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS

is devoted to surveys, original theoretical and experimental papers, scientific information and bibliography of important current editions. It contains also reports on the Polish Society for Theoretical and Applied Mechanics activities, on Congresses, Conferences and Symposia

\*

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

содержит обзорные работы, оригинальные теоретические и экспериментальные работы, краткие научные сообщения, библиографические обзоры новых печатных работ, отчеты о деятельности Польского Общества Теоретической и Прикладной Механики, сведения о научных конгрессах и конференциях

## КОМИТЕТ РЕДАКЦИЙ

ZBIGNIEW OSIŃSKI — PRZEWODNICZĄCY, WŁADYSŁAW BOGUSZ, IGOR KISIEL, WITOLD NOWACKI, JAN SZARGUT, JÓZEF WIĘCKOWSKI  
LECH DIETRICH — REDAKTOR  
JAN ANDRZEJ KÖNIG — REDAKTOR  
JULIA ROBAKIEWICZ — SEKRETARZ  
BARBARA SKARŻYŃSKA — REDAKTOR  
TADEUSZ SZOPA — REDAKTOR  
STEFAN ZAHORSKI — REDAKTOR NACZELNY

## РЕДАКЦИЯ

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, tel. 26-12-81, wewn. 219

Nakład 710 (600+110) egz. Arkuszy wydawn. 15,5. Arkuszy drukarskich 13,5. Papier druk. sat. III kl. 70 g. 70×100. Oddano do składania 6.V.1975 r. Druk ukończono we wrześniu 1975 r. Zam. 638/75. B-56 Cena zł 30.—

Drukarnia im. Rewolucji Październikowej, Warszawa

## BADANIA I OBLICZENIA PRĘDKOŚCI ROZWOJU PĘKNIĘĆ ZMĘCZENIOWYCH\*)

STANISŁAW KOCANĀDA (WARSZAWA)

Badania prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych należą do wyjątkowo prężnie rozwijającej się grupy badań zmęczeniowych. Wiązą się one z bardzo szybkim postępowaniem w budowie nie tylko statków latających, statków morskich czy zbiorników ciśnieniowych, lecz również innych urządzeń i maszyn obliczanych na ograniczoną trwałość. Jednym z celów tych badań jest poszukiwanie materiałów o dużej odporności na rozwój pęknięcia, która nie zawsze pokrywa się z wysokimi wartościami wytrzymałości statycznej. Fakty te zmusiły do gromadzenia informacji przede wszystkim pożytecznych w praktyce. Tym poszukiwaniom towarzyszą nieodstępnie poszukiwania poznawcze, wzbogacające stan wiedzy o mechanizmie rozwoju pęknięć zmęczeniowych. Jednak głównie tym pierwszym poświęcono niniejsze opracowanie, zawierające przegląd badań prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych w metalach na podstawie wybranych publikacji z lat 1971 - 74. W niektórych tylko przypadkach sięgnięto do 1970 r. Przeglądu prac wcześniejszych dokonano w książce [1]. Omawiane problemy były, również w latach 1971 - 73, tematem wielu konferencji specjalistycznych. Dla przykładu można wymienić międzynarodowe konferencje w Kyoto [2], w Waszyngtonie [3] i w Monachium [4]. Problemom pęknięć poświęcono konferencję szkoleniową w Jabłonie w grudniu 1973 r. [5], zorganizowaną przez Zespół Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN. Przewijały się one często w sześciu kolejnych seminariach tego zespołu w latach 1971 - 74 i w I Sympozjum Zespołu w Lublinie w 1973 r. Wyniki badań krajowych są dostępne w opublikowanych materiałach seminaryjnych i sympozyjalnych, dlatego pominięto ich omówienie.

W zdecydowanej większości prac badano i analizowano prędkość pęknięcia na podstawie współczynnika intensywności naprężeń. Powraca się stale do wzoru zaproponowanego przez P. C. PARISA (1957 r.), a omówionego w [1]

$$(1) \quad \frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^m,$$

gdzie  $\Delta K$  jest zakresem współczynnika intensywności naprężeń ( $\Delta K = \Delta\sigma\sqrt{l}$ , przy czym  $\Delta\sigma$  odpowiada podwójnej amplitudzie naprężenia  $2\sigma_a$ , a  $l$  jest długością pęknięcia), a  $C$  i  $m$  są wielkościami zależnymi głównie od materiału. W ogólności wzory wywodzące się

---

\*) Referat problemowy wygłoszony na VI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego zorganizowanym przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej oraz Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej w Warszawie, we wrześniu 1974 r.

×1000×22 mm) i modeli spawanych elementów kadłuba statku (również o dużych wymiarach) wykonanych ze stali węglowej o zawartości 0,15% C ( $R_e = 27 \text{ kG/mm}^2$ ) i ze stali o podwyższonej wytrzymałości ( $R_e = 57 \text{ kG/mm}^2$ ) [13]. Wykładnik  $m$  dla obydwóch stali wynosił 3, jednak zbliżał się do 4 w zakresie małej liczby cykli.

Tablica 1. Zmiana wykładnika  $m$  we wzorze (1) dla stopów aluminium i stali w zależności od rozpiętości zakresu współczynnika intensywności naprężeń  $\Delta K$  [10]

Materiał	Granica plastyczności $R_e$	$\Delta K$	$m$	$\Delta K$	$m$	Źródło
	[kG/mm <sup>2</sup> ]			[kG/mm <sup>3/2</sup> ]		
Stopy aluminium						
2024-T3 <sup>1)</sup>	35	25 - 103	2,6 - 3	103 - 250	6,8	D. R. Donaldson, W. E. Anderson, 1962
2024-T3 ( $R = 0,25$ )	35	20 - 57	2,9	57 - 142	4,5	D. Broek, J. Schijve, 1965
2024-T351	35	14 - 42	2,6	42 - 71	4	H. W. Liu, N. Iino, 1969
7075 - T6 <sup>2)</sup>	49	20 - 85	2,4	85 - 230	5,7	C. M. Hudson, H. F. Hardraht, 1961 R. G. Forman, V. E. Kearney, R. M. Eagle, 1966
7079-T6	48	20 - 46	2,7	46 - 71	7	S. R. Swanson, F. Ciccì, 1967
Stale						
4340 (normalizowana) <sup>3)</sup>	42	53 - 90	2,2 - 2,6	90 - 124	4	H. W. Liu, N. Iino, 1969
12Ni5Cr3Mo	136	117 - 280	2,3	280 - 372	5	R. C. Schwab, 1968
10NiCrMoCo	134	20 - 300	2,25	300 - 496	3,8	J. M. Barsom, E. J. Imhof, S. T. Rolfe, 1968
HY-130 <sup>4)</sup>	58	142 - 330	2,1	330 - 530	6 - 8	j.w.

1) 3,8÷4,9% Cu, 1,2÷1,8% Mg, T3 — przesycające utwardzanie zgniotem na zimno, starzenie naturalne (odpowiedniki stopów krajowych — PA6, PA7)

2) 1,2÷2% Cu, 2,1÷2,9% Mg; 5,1÷6,1% Zn; T6 — przesycające i sztuczne starzenie

3) 0,4% C; 0,80% Cr; 0,25% Mo; 1,70% Ni

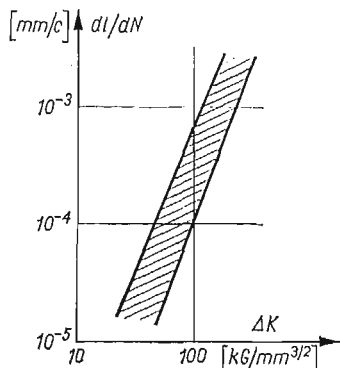
4) 0,11% C; 4,95% Ni; 0,57% Cr; 0,5% Mo; 0,07% V

Różne własności stali niskostopowych 17Г1С (według GOST) w stanie normalizowanym i pochodzących z różnych wytopów oraz stali 2H2GN po cieplnym ulepszeniu praktycznie nie wpłynęły na przebieg wykresu  $dl/dN = f(\Delta K)$  (rys. 2) [14], przy czym amplitudę naprężenia  $\sigma_n$  w symetrycznym rozciąganiu-ściskaniu zmieniano od 18,5 do 28,5 kG/mm<sup>2</sup>.

W pracy [15] zebrano z różnych źródeł dane wiążące wykładnik  $m$  z odpornością na pękanie  $K_{Ic}$  dla różnych gatunków stali i różnych współczynników amplitudy cyklu  $R$

(rys. 3). Krzywa na rys. 3 jest krzywą interpolowaną. Niezależność  $m$  od  $K_{Ic}$  występuje, jak widać z wykresu, powyżej 250  $\text{kG/mm}^{3/2}$ . Wykres ten należy jednak traktować jako sygnałny, o orientacyjnie przewidywanej zmianie wykładnika  $m$ .

Gwałtowną zmianę wykładnika  $m$  (bo z  $m = 13$  do  $m = 3$ ) w trzech stopach AlZnMgCu po różnej obróbce cieplnej (stopy 7079, 7075 i 7178, różniące się głównie zawartością miedzi — od 0,8 do 2,4% i zawartością cynku — od 3,8 do 7,3%) stwierdzono poniżej prędkości pękania  $2,5 \cdot 10^{-4}$  mm/c i dla zakresu  $\Delta K = 25$  do  $28 \text{ kG/mm}^{3/2}$  [16].



Rys. 2. Prędkość zmęczeniowego pękania w stali 14H2GM jako niezależna od różnych amplitud naprężenia; punkty pomiarowe woryginalie zastąpiono zakreskowanym pasmem ich rozrzutu.

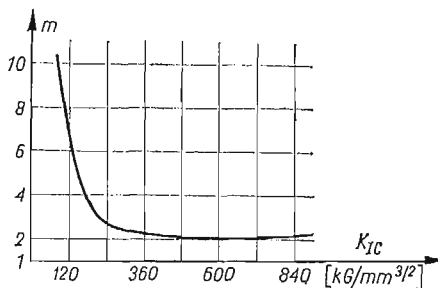
A. A. Gudkow, W. S. Zotiejew [14]

Są to tylko przykłady świadczące o niepełnej informacji o wielkościach wchodzących we wzór (1).

Pęknięcie rozwijać się może od określonej, progowej wartości współczynnika intensywności naprężeń  $K_{th}$ , jak to przedstawiono na rys. 1. Spowodowało to konieczność uzupełnienia wzoru (1) do następującej postaci omówionej już w kilku pracach, np. [17, 18, 19]:

$$(2) \quad \frac{dl}{dN} = C_0(K_a^m - K_{th}^m),$$

przy czym  $K_a = \sigma_a \sqrt{l}$ .



Rys. 3. Orientacyjna zmiana wykładnika  $m$  we wzorze (1) w zależności od odporności materiału na pęknięcie  $K_{Ic}$  (pominięto punkty pomiarowe zaznaczone woryginalie pracy). R. O. Ritchie, J. F. Knott [15]

W pracy [20], wykorzystując zależność pomiędzy  $dl/dN$  a wielkością otwarcia pęknięcia COD (*crack opening displacement*), ujęto wzór (2) jako

$$(3) \quad \frac{dl}{dN} = \frac{4A}{\pi R_e E} (K^2 - K_{th}^2),$$

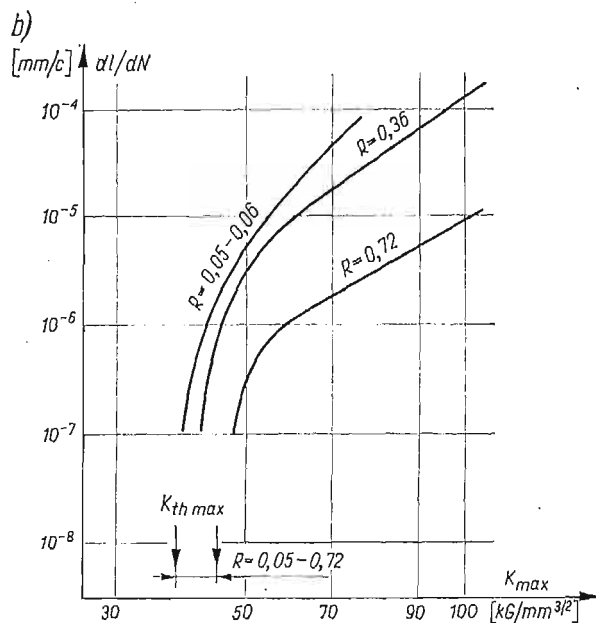
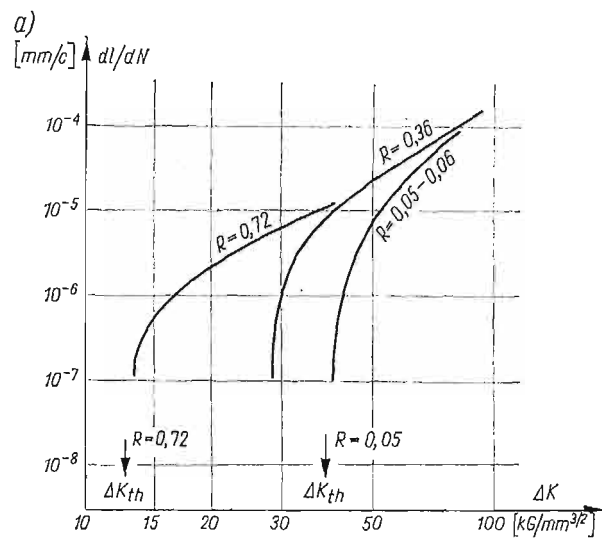
$A$  — stała.

Ważność wzoru (3) potwierdzono sześćdziesięcioma pięcioma wynikami badań prędkości pęknięcia przy  $R = 0$  w zakresie od  $10^{-6}$  do  $10^{-3}$  mm/c w stopach aluminium i tytanu w różnych ośrodkach oraz w różnych gatunkach stali i w stopach miedzi w warunkach normalnych. W pracy [20] nie zdefiniowano bliżej wielkości  $K$  we wzorze (3), ale sądząc po wykresach w tej pracy — wielkość  $K$  odpowiada  $K_{\max}$ .

Hipoteza, że pęknięcie rozwija się od pewnej wartości progowej  $K_{th}$  nie jest nowa (np. A. J. McEVILY i W. ILLG, 1958; D. R. DONALDSON, W. E. ANDERSON, P. C. PARIS, 1961; A. HARTMAN i J. SCHIJVE, 1963), ale w latach siedemdziesiątych zastanawiano się nad uwzględnieniem tych wartości we wzorach na  $dl/dN$ . Wartości  $K_{th}$  zależą bardzo silnie od ośrodka — są największe w próżni i maleją wraz z agresywnością ośrodka; wartości te rosną wraz z modułem sprężystości podłużnej  $E$ ; na ogół rosną ze wzrostem granicy plastyczności i ze spadkiem współczynnika  $R$ ; wydają się nie zależeć od grubości elementu [19]. Zależą one natomiast od historii obciążenia [18] i od naprężenia średniego  $\sigma_m$ . Silną zależność  $K_{th}$  od współczynnika  $R$  stwierdzono w pracy [21], badając stal węglową o zawartości 0,55% C i stal manganową o zawartości 0,55% C i 2,23% Mn;  $\Delta K_{th}$  zmieniło się od 41 kG/mm<sup>3/2</sup> dla  $R = 0,05$  do około 12 kG/mm<sup>3/2</sup> dla  $R = 0,72$  (rys. 4a), natomiast  $K_{th\max}$  odpowiadające  $\sigma_{th\max}$  zmieniło się przy tych wartościach  $R$  tylko od 38 do 44 kG/mm<sup>3/2</sup> (rys. 4b). Orientacyjnie średnie wartości  $K_{th}$  wynoszą: dla stali węglowych i stopowych oraz dla stopów tytanu — od 20 do 50 kG/mm<sup>3/2</sup>, dla stopów aluminium — od 10 do 30 kG/mm<sup>3/2</sup>, dla stopów miedzi — 20 kG/mm<sup>3/2</sup> [20]. Przy zginaniu wartość  $K_{th}$  jest w przybliżeniu dwukrotnie większa, aniżeli przy rozciąganiu [22] ( $K_{thr} \cong 0,42 R_e$ ,  $K_{thg} \cong 0,85 R_e$ ). W pracy [23] wyznaczono wartość  $K_{th}$  dla stali, stopów aluminium, magnezu i miedzi metodą schodkowego obniżania  $\Delta K$  i zaproponowano określone równanie dla celów praktycznych, które jednak niezbyt zgadza się z wynikami doświadczeń innych autorów. W publikacji [24] wykazano podobnie, że  $K_{th}$  można określić w sposób przybliżony z krzywej  $\Delta K = f(N)$ , analogicznie do krzywej zmęczenia  $\sigma = f(N)$ . Jednak w tej ostatniej pracy większą uwagę zwrócono na parametr  $\sigma_a^3 l$  jako parametr decydujący o rozwoju pęknięcia. Badano próbki z małymi pęknięciami rozwijającymi się od korbów — na różnym poziomie naprężeń i wyznaczono krzywą  $\sigma_a^3 l = f(N)$  aż do poziomu, przy którym pęknięcia nie rozwijają się [dla danego materiału i stosunku  $\sigma_m/\sigma_a$ ]. Uzyskano w ten sposób pewną stałą  $C_F = (\sigma_a^3 l)_F$ , służącą do obliczenia wartości naprężenia krytycznego. Wartość  $C_F$  jest największa przy  $R = -1$  i maleje wraz ze wzrostem  $R$  (np.  $C_F$  dla miękkiej stali jest 30 razy mniejsze przy  $R = 0,75$  w porównaniu z  $R = -1$ , dla aluminium — 5 razy mniejsze przy  $R = 0,53$  w porównaniu z  $R = -1$ ). Odpowiednie wartości dla stali węglowych i stopowych, dla aluminium i jego stopów oraz dla mosiądzu zestawiono w [24], dla stopów MgZr i MgMn — w pracy [25]. Na podstawie wyników badań stali 09G2S i 09G2 wydaje się jednak, że współczynnik  $C_F$  i wykładnik przy  $\sigma_a$  są nie tylko określonymi stałymi (materiałowymi), lecz zależą również od wartości naprężeń (wykładnik może być różny od 3) [26].

Kolejnym uzupełnieniem wzoru (1) było uwzględnienie zjawiska zamykania się pęknięcia, dostrzeżonego przez W. ELBERA [27]. Nie wdając się w szczegóły zjawiska, którego wpływ na prędkości pęknięcia jest bardzo różnie interpretowany, nadmienimy, że zamykanie czy też zaciskanie się pęknięcia jest spowodowane układem własnych naprężeń ściskających w plastycznej strefie pęknięcia. Zamykanie się pęknięcia ma miejsce w «rozciąga-





Rys. 4. Prędkość zmęczeniowego pęknięcia w stali 55 dla różnych współczynników amplitudy cyklu  $R$  w zależności od  $\Delta K$  (a) i  $K_{max}$  (b). Punkty pomiarowe w oryginale zastąpiono krzywymi średnimi.  
R. J. Cooke, C. J. Beevers [21]

jącej» części cyklu (jeszcze przed osiągnięciem  $\sigma_{\min} = 0$ ); dla stali pojawia się przy  $(0,15 \div 0,30) \sigma_{\max}$ , dla stopów aluminium i dla  $R = \text{const}$  — przy  $0,5 \sigma_{\max}$ . W związku z tym zaproponowano, aby wprowadzić tzw. efektywny współczynnik intensywności naprężeń  $K_{eff}$ , który uwzględnia naprężenie  $\sigma_{ot}$  konieczne do «otwarcia» pęknięcia:

$$(4) \quad \Delta K_{eff} = U(\Delta K),$$

przy czym

$$U = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{ot}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}.$$

Zatem

$$(5) \quad \frac{dl}{dN} = C(\Delta K_{eff})^m = C(U\Delta K)^m.$$

Opierając się na tego rodzaju lub podobnych przesłankach, rozpatrzono zatrzymywanie się i opóźniony wzrost pęknięcia [28] i [29], aczkolwiek w pracy [30] ustosunkowano się dość krytycznie do tych przesłanek. Efekt zamykania pęknięcia zależy od współczynnika  $R$ , chociaż wpływ ten nie jest sprecyzowany [28], [31]; zgodnie z postulatami W. ELBERA dla stopu 2024 - T3,  $U = 0,5 + 0,4 R$ . Wzrost  $\sigma_{\max}$  przy  $R = \text{const}$  pociągać ma za sobą wzrost  $\sigma_{ot}$  [28]. W stopie Ti6Al4V nie obserwowano zamykania się pęknięcia, jeśli  $R > 0,3$ . W publikacji [21] informowano, że omawiany efekt nie wywiera wpływu przy małych prędkościach pęknięcia, a w pracy [32] — o braku wpływu naprężenia średniego  $\sigma_m$  na prędkość pęknięcia, jeśli efekt ten istnieje (zależny zresztą silnie od ośrodka [33]). Ograniczona jak dotychczas liczba badań nie pozwala na zajęcie sprecyzowanego stanowiska wobec koncepcji Elbera. Jednak zaciskanie się pęknięcia jest faktem doświadczalnie potwierdzonym.

Po scałkowaniu omówionych wzorów można obliczyć liczbę cykli, przy której pęknięcie osiągnie wielkość krytyczną lub określoną wymiarami kontrolnymi. Są to wzory bez współczynników korekcyjnych dotyczących wymiarów elementu oraz kształtu pęknięcia, a które należy uwzględnić dla konkretnych warunków obliczeń. Różnorodność form zapisu wzorów na  $\Delta K$  nakazuje pewną ostrożność w posługiwaniu się tymi wzorami. Chodzi o zwrócenie uwagi na rodzaj zapisu danych źródłowych i sposobu ich obliczania. Notuje się bowiem dość duże rozbieżności tych danych. Propozycje uzupełniania scałkowanego wzoru (1) współczynnikami korekcyjnymi pociągają za sobą pewne uproszczenia. Polegają one przede wszystkim na pominięciu zmienności wielkości wchodzących w skład tych współczynników. Wielkości te przyjmuje się na ogół jako średnie i niezmiennie. Wykorzystano je jednak z powodzeniem do obliczeń układów konstrukcyjnych czy doświadczalnych zbiorników ciśnieniowych [34].

Do następnej grupy dość często spotykanych i rozwijanych wzorów można zaliczyć wzory, w których bezpośrednio wykorzystano wielkości strefy plastycznego odkształcenia  $r_p$  lub całkowitego odkształcenia w obszarze pęknięcia. Jest oczywiste, że wielkości te w różnych zależnościach wyrażane są za pośrednictwem różnych wielkości. Ustalane są związki pomiędzy prędkością pęknięcia a wspomnianymi wielkościami oraz wielkością subziaren i gęstością dyslokacji na czole pęknięcia. Na podstawie tego rodzaju badań stwierdzono, że strefa plastycznych odkształceń w stalach węglowych jest znacznie mniejsza od obli-

czony według modelu Dugdale'a. Dalsza analiza w pracach [35] i [36], w których badano elementy ze stali węglowej o zawartości węgla od 0,001 do 0,31%, pozwoliła na przedstawienie propozycji wzoru

$$(6) \quad \frac{dl}{dN} = C_1 r_p^{m_1},$$

przy czym  $r_p/l = C_2 [\sec(\pi\sigma/2C_3 R_e) - 1]$ .

Współczynniki  $m_1$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  i  $C_3$  są stałymi materiałowymi. Np. dla stali o zawartości 0,16% C  $m_1 = 1,48$ ;  $C_1 = 6,08 \cdot 10^{-4}$ ;  $C_2 = 0,032$ ;  $C_3 = 0,77$ . Wzór (6) został potwierdzony doświadczalnie w dużym zakresie prędkości pęknięcia, również w zakresie poniżej  $2 \cdot 10^{-5}$  mm/c, w którym zawodził wzór (1). Podobne rozważania w publikacjach [37] i [38] doprowadziły do wzorów o postaci wzoru (6). Historię odkształcenia na czole pęknięcia ujmuje wzór O. E. WHEELERA (1970 r.) przewidziany głównie do obliczeń prędkości pęknięcia od długości początkowej pęknięcia  $l_0$  do końcowej  $l_n$  po  $n$  obciążeniach przy złożonych widmach

$$l_n = l_0 + \sum_{i=1}^n [C_p f(\Delta K)].$$

Współczynnik  $C_p$  jest współczynnikiem opóźnienia pęknięcia obliczanym na podstawie wielkości stref plastycznego odkształcenia. Szczegóły tego wzoru dostępne są w kilku pracach, np. [6] i [39]. B. TOMKINS, który jest autorem kilku przemawiających do przekonania wzorów, w kolejnej swej pracy [40] na podstawie analizy wzoru McClintocka (dotyczącego otwarcia czoła pęknięcia CTOD) postulował związek

$$(7) \quad \frac{dl}{dN} = \frac{CTOD}{2} = \alpha \left[ \frac{(\Delta K)^2}{ER_e} + \frac{4\pi\Delta\sigma\Delta\varepsilon_{pl}l}{R_e(1+\beta)} \right],$$

przy czym  $\alpha$  zależy od rodzaju obciążenia, a  $\beta$  jest wykładnikiem w równaniu Mansona-Coffina  $\Delta\sigma = k(\Delta\varepsilon_{pl})^\beta$ , najczęściej równym 0,5. Mówi się o uniwersalności tego wyrażenia, obowiązującego dla małych i dla dużych odkształceń.

Postać wzoru (1) nasunęła już wielokrotnie myśl, ażeby w warunkach większych odkształceń plastycznych zakres naprężeń zastąpić zakresem tych odkształceń. W ten sposób otrzymujemy współczynnik intensywności odkształceń  $\Delta K_e = \Delta\varepsilon/\sqrt{l}$ . Zatem najogólniej powinna obowiązywać zależność

$$(8) \quad \frac{dl}{dN} = C_e (\Delta K_e)^n.$$

Okazało się, że wykładnik  $n$  jest około dwa razy mniejszy od wykładnika  $m$  we wzorze (1) i najczęściej wynosi 2. Do tej postaci wzoru doszli S. W. SERENSEN i N. A. MACHUTOW [41] na podstawie dokładniejszej analizy powstawania i rozwoju pęknięć w elementach z karami w zakresie małej liczby cykli. Współczynnik  $K_e$  powiązano z największym odkształceniem w strefie spiętrzenia naprężeń i z odkształceniem nominalnym, obliczonym ze zmodyfikowanych zależności H. NEUBERA. Rozważania analityczne zostały całkowicie potwierdzone eksperymentem dla stali węglowej o zawartości 0,21% C i dla stali stopowej CrMoV (próbki z karbem o różnych współczynnikach kształtu, w różnym zakresie  $R$  od -1,2 do 0,6). Podobny związek okazał się ważny dla: aluminium, stali austenitycznej

i mosiądzu [42], [43]. Do wyjaśnienia rozwoju pęknięcia włączono w tych pracach zjawiska fizyczne przebiegające na czole pęknięcia (powstawanie wakansów z pętli dyslokacyjnych, których liczba jest proporcjonalna do odkształcenia plastycznego na dnie pęknięcia).

Ten przegląd ostatniej grupy wyrażeń służących do opisu prędkości pęknięcia zamknijemy wzorami praktycznymi, informującymi o rzędzie wielkości prędkości zmęczeniowego pęknięcia na podstawie łatwo dostępnych danych o własnościach materiału (np. ze statycznego rozciągania). Jako przykład posłużą wzory podane przez K. H. SCHWALBEGO [44]. Za podstawę swych obliczeń przyjął on modele stref plastycznego odkształcenia na czole pęknięcia (sporządzone przez J. R. RICE'A i współpracowników w latach 1966 - 1971), w których uwzględniono umocnienie materiału w płaskim stanie odkształcenia. Pomijając niezłożone przekształcenia i upraszczające założenia, omówione w [44], otrzymano na podstawie rozważań dotyczących przemieszczania się czoła pęknięcia

$$(9) \quad \frac{dl}{dN} = \frac{(1-2\nu)^2}{\pi(1+n)R_c^2} \left[ \frac{2R_c(1+\nu)}{E} \right]^{1+n} (\Delta K)^2.$$

Przyjęcie z kolei krytycznej wartości przemieszczenia pęknięcia, przy której przekracza się tzw. rzeczywiste wydłużenie po rozerwaniu  $\varepsilon_R$ , doprowadziło do uzyskania wzoru

$$(10) \quad \frac{dl}{dN} = \frac{(1-2\nu)^2}{\pi(1+n)4R_c^2} \left( \frac{2R_c}{E\varepsilon_R} \right)^{1+n} (\Delta K)^2.$$

Wykładnik umocnienia  $n$  z równania  $\sigma = R_c(\varepsilon/\varepsilon_c)^n = A\varepsilon^n$  można obliczyć, znając dwie pary odpowiadających sobie wartości:  $R_c$  i  $\varepsilon_c$ ,  $\sigma_R$  i  $\varepsilon_R$  oraz przewężenie w miejscu zerwania próbki  $Z$ , albowiem  $\varepsilon_R = \ln 1/(1-Z)$ ,  $\sigma_R = R_m/(1-Z)$ ,  $\varepsilon_c \cong R_c/E$ . Tzw. normowane wykresy  $dl/dN \cdot E^{n+1} = f(\Delta K)$  potwierdziły praktyczną zgodność wzorów [9] i [10].

Badania teoretyczne z zakresu prędkości pęknięcia zdążają w kierunku powiązania wielkości modelowanych z opisem fizycznym. Spośród niezbyt dużej liczby prac wymienimy prace T. YOKOBORIEGO i współpracowników [45] i [46], które należy uznać za kontynuację i pogłębienie prac wcześniejszych. Do tych rozważań wprowadzono również współczynnik intensywności naprężeń.

Kolejna bardzo obszerna grupa badań dotyczy wpływu najróżnorodniejszych czynników na prędkości pęknięcia. Do przeglądu starano się wybrać najważniejsze z tych badań.

Współczynnik amplitudy cyklu  $R$  i naprężenie średnie  $\sigma_m$  wpływają bardzo różnie na prędkość pęknięcia zależnie od ich wartości, od zakresu prędkości pęknięcia i od rodzaju materiału. Wpływ ten opisywano różnymi wzorami o prostej i o złożonej budowie, które również były przedmiotem już kilku prac przeglądowych (np. [47]). Najogólniej mówiąc, różne materiały są różnie wrażliwe na  $\sigma_m$  czy asymetrię cyklu. Bardzo małe oddziaływanie tego naprężenia na rozwój pęknięcia w niskowęglowych stalach, w aluminium, w miedzi i w tytanie potwierdzono w pracy [24] na przykładzie wykresów  $dl/dN = f(\Delta K)$ , z tym że w tytanie zaznaczyła się nieciągłość wykresu w okolicy  $5 \cdot 10^{-5}$  mm/c. W stopie MgAl oddziałują wyższe wartości  $R$ , pociągając za sobą wzrost  $dl/dN$  przy wyższych wartościach  $\Delta K$ . Zależność prędkości pęknięcia od  $R$  wykazały stopy aluminium, CuAl, ZnAl, MoTi, powiększa się ona wraz ze wzrostem  $R$  (wykładnik  $m$  we wzorze (1) zmieniał się od 3,7 do 4,8). Na zmianę prędkości pęknięcia w tych stopach powinny wpływać wydzielienia

faz wtórnych. Podobnie zachowuje się niskowęglowa stal, ale o określonej wielkości ziarna [48]. Z kolei w pracy [49] pokazano, że prędkość pęknięcia w stopie 7075-T6 przy różnym  $R$  (od 0 do 0,7) i przy zmianie  $\sigma_{\max}$  od 38 do 50 kG/mm<sup>2</sup> daje się opisać równaniem (1) niezależnie od modyfikacji  $\Delta K$ . To samo stwierdzono dla stopu 2024-T3 ( $\sigma_{\max}$  od 12 do 36 kG/mm<sup>2</sup>), ale do  $dl/dN = 3 \cdot 10^{-3}$  mm/c; powyżej tej wartości prędkość rośnie wraz z  $\sigma_{\max}$ . Posługując się wzorem (1) do obliczeń prędkości pęknięcia w stali St52 [50], stwierdzono, że zmiana  $R$  od +0,5 do -2 powoduje zmianę  $m$  od 2,96 do 3,38 i odpowiednio zmianę stałej  $C$  od  $3,04 \cdot 10^{-10}$  do  $2,82 \cdot 10^{-12}$ . W pracy [21] badano normalizowaną stal węglową o zawartości 0,55% C (28% ferrytu, reszta perlit) i stal manganową o zawartości 0,55% C i 2,23% Mn (2% ferrytu) przy zmianie  $R$  od 0,05 do 0,72 w zakresie prędkości pęknięcia od  $10^{-7}$  do  $10^{-4}$  mm/c. Silny wpływ  $R$  wystąpił w zakresie mniejszych wartości  $dl/dN$  (rys. 4a); punkty pomiarowe na wysokości około  $10^{-5}$  mm/c zaczynają zbiegać się we wspólne pasmo, a poniżej tej wartości stają się bardzo rozbieżne dla różnych  $R$  i to tym silniej, im mniejsza jest wartość  $\Delta K$ . Odwrotne przebiegi obserwujemy na wykresach  $dl/dN = f(K_{\max})$ ; punkty pomiarowe zbiegają się na wysokości około  $10^{-6}$  mm/c, a rozchodzą się coraz silniej w miarę wzrostu prędkości pęknięcia (rys. 4b). Im większa jest wartość  $R$ , tym mniejsza jest prędkość pęknięcia (dla tej samej wartości  $K_{\max}$ ). Dlatego chętniej buduje się wykresy  $dl/dN = f(K_{\max})$ . Pamiętać bowiem należy, że na wykresie  $dl/dN = f(\Delta K)$  nie dostrzeże się różnicy np. dla  $R = 0$  i  $R = -1$ , gdyż  $\Delta K$  jest jednakowe (np. w stopie 2024-T3 pęknięcia rosną szybciej przy  $R = -1$ , aniżeli przy  $R = 0$  przy tym samym  $K_{\max}$ , [51]). Stąd ogólniejsza hipoteza, że  $dl/dN = f(K, K_{\max})$ . W publikacji [52] na podstawie badań prędkości pęknięcia w stalach o zawartości 0,04, 0,12 i 0,65% C zaproponowano następujące wyrażenie opisujące wpływ asymetrii cyklu

$$(11) \quad \frac{d(2l)}{dN} = A[(K_a P r)^\beta - (K_a P r)_t^\beta],$$

przy czym  $A$  i  $\beta$  są stałymi materiałowymi zależnymi od wytrzymałości, a wykładnik  $\gamma$  jest niezależny od wytrzymałości;  $P = K_{\max}/K = \sigma_{\max}/\sigma_a$ ; wskaźnik  $t$  odnosi się do wartości progowej;  $K_a$  jest współczynnikiem amplitudy intensywności naprężeń. Uzyskano dużą zgodność z doświadczeniem. Uwzględnienie wielkości COD w opisie prędkości pęknięcia przy różnych współczynnikach  $R$  [47] doprowadziło do wzoru o budowie

$$(12) \quad \frac{dl}{dN} = \frac{16A}{\pi R_e E} \left[ K_a - K_{ath} \left( \frac{1-R}{1+R} \right)^{1/2} \right] \left( \frac{1-R}{1+R} \right).$$

Wzór ten jest modyfikacją nieco innego wzoru, ale dobrze pokrywa się z eksperymentem.  $K_{ath}$  w tym wzorze odnosi się do wartości progowej. Na podstawie kryteriów energetycznych postulowanych w pracy [53] otrzymano zależność ważną zarówno dla metali, jak i dla polimerów

$$(13) \quad \frac{d(2l)}{dN} = \beta \lambda^n,$$

przy czym  $\beta$  jest współczynnikiem zależnym od charakterystyk materiałowych i od warunków obciążenia,  $\lambda = K_{\max}^2 - K_{\min}^2 = 2\Delta K \cdot K_m$  ( $K_m$  odpowiada naprężeniu średniemu  $\sigma_m$ ). Wykładnik  $n$  dla metali waha się od 2 do 2,4 i wynosi średnio 2,2. Podaną zależność zwery-

fikowano doświadczalnie dla stopów aluminium, dla stali niskowęglowych i dla stali stopowej.

Podane przykładowo wyrażenia są ilustracją tendencji, jakie zarysowują się w uwzględnieniu współczynnika  $R$  czy naprężenia średniego  $\sigma_m$ . Jednak dość powszechnie zastosowanie znalazł wzór R. G. FORMANA z 1967 r. (omówiony szczegółowiej w [1])

$$(14) \quad \frac{dl}{dN} = \frac{C(\Delta K)^m}{(1-R)K_c - \Delta K}$$

Jego ogólną ważność potwierdzono w bardzo wielu pracach. Sprawdzono go w szerokim zakresie wartości naprężeń, np. dla stopu 7075-T6 (którego zmęczeniowe zachowanie się zwykle nieco odbiega od innych stopów aluminium) — przy współczynnikach  $R$  od  $-1$  do  $0,8$ , chociaż spotyka się ograniczenia stosowalności tego wzoru do zakresu  $0 \leq R \leq 0,8$ . W pracy [54] wykazano zgodność wzoru (14) dla tego samego stopu dla całej możliwej zmiany  $\sigma_{\max}$  i dla stopu 2024-T3, jeśli odniesie się naprężenia do przekroju netto i uwzględni się, że  $\sigma_{\max} < R_e$ . Z kolei w pracy [39] zwrócono uwagę na niezgodność wzoru (14) z rzeczywistością w przypadku stopu aluminium 2219 - T851 i stopu Ti6Al4V dla prędkości pękania poniżej  $2,5 \cdot 10^{-4}$  mm/c, jak i na różnice wynikające przy stałej amplitudzie badania, ale dla różnych współczynników  $R$ . Równanie Formana najlepiej odpowiadało wynikom doświadczeń nad prędkością pękania w stali na szyny kolejowe (0,56% C, 1,02%Mn) przy zmiennym rozciąganiu od  $R = 0,05$  do  $R = 0,50$  i w zakresie  $\Delta\sigma$  od 20,7 do 27,6 kG/mm<sup>2</sup> [55]. Prędkość pękania wzrastała znacznie wraz z powiększaniem się  $\sigma_m$ , a krytyczna prędkość pękania zmieniała się liniowo wraz z  $\sigma_{\max}$ . Na podstawie równania (14) przewidywano katastrofalne zniszczenia, obliczając liczbę cykli do zniszczenia.

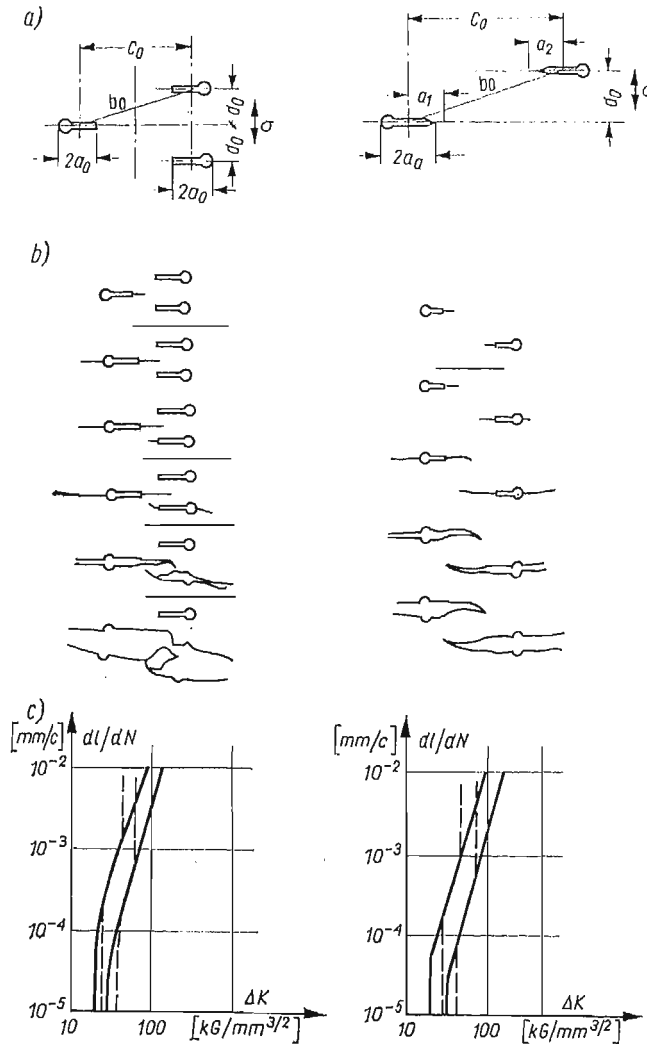
Wpływ kolejności i « szerokości » bloków naprężeń w widmie programowanym oraz widm przypadkowych na prędkość rozwoju pęknięcia w stopie 2024-T3 badano w pracy [56]. Np. większe szerokości bloków ( $4 \cdot 10^4$  cykli) przyczyniały się do obniżenia prędkości pękania w przeciwieństwie do bloków krótszych (40 cykli). Jeżeli tzw. międzycykle zastosuje się w górnym zakresie naprężeń, to należy oczekiwać przyśpieszenia pękania, a jeśli w dolnym zakresie — opóźnienia pękania [57]. Przy obciążeniu programowanym, w którym stosowano pojedyncze cykle przeciążeniowe, prędkość pękania była wyższa, jeśli cykl przeciążeniowy zaczynał się od części wzrastającej, i powiększała się w miarę wzrostu długości pęknięcia [58]. W tej samej publikacji dyskutowano zależność pomiędzy prędkością pękania a COD. Jest oczywiste, że korzystny efekt działania pojedynczych czy wielokrotnych cykli przeciążeniowych zależy od stosunku wartości naprężeń tych cykli do wartości naprężeń cyklu podstawowego i od ich włączenia do widma po określonych liczbach cykli; od tego zależy bowiem efekt umocnienia materiału. Wykazano to na przykładzie badań prędkości pękania w stali SAE 1020 [59]. Stąd powstały również wspomniane już propozycje O.E. WHEELERA ilościowego ujęcia opóźnienia pękania przez wprowadzenie współczynnika opóźnienia; w pracy [60] sprawdzono je w stopie Ti6Al4V. Na przykładzie badań tego stopu (sygnalizowanych również w pracy [61]) wprowadzono tzw. współczynnik zdrowienia, w celu uwzględnienia w obliczeniach prędkości pękania efektu opóźnienia [29]. W tej pracy badano koncepcję W. ELBERA i O. E. WHEELERA i podano wartości cykli przeciążeniowych, przy których pęknięcie opóźnia się, zatrzymuje się lub nie występują żadne zmiany w prędkości pękania. Omawiane efekty wpływu układów bloków obciążeń

w stalach węglowych wydają się zależeć od wytrzymałości tych stali. Przy przypadkowych widmach obciążenia o różnym zakresie częstości potwierdzono liniową zależność  $dl/dN = f(\Delta K)$  dla stali węglowych o zawartości 0,19 i 0,33% C [62]; wykładnik  $m$  zmieniał się od 4 do 3 w miarę wzrostu szerokości bloków naprężeń we widmie. Podobną zależność uzyskano dla próbek stali o zawartości 0,31% C, stosując widma obciążeń występujące w osiach wagonów kolejowych [63]. Prędkość pęknięcia w stali niskostopowej (0,39% C, 0,74% Mn, 1,06% Cr, 0,17% Mn — próbki z karbem) była większa przy widmie przypadkowym, aniżeli programowanym [64]. W przypadku widma dwustopniowego przejście od niższych do wyższych wartości naprężeń (od 8,06 do 12,35 kG/mm<sup>2</sup>) w badaniach dużych elementów [13] pociągało za sobą przyśpieszenie pęknięcia, w przeciwieństwie do odwrotnej kolejności bloków obciążeń. Nie zawsze zatem następuje silniejsze niejako umocnienie materiału wraz ze wzrostem naprężenia w widmie, ale możemy także oczekiwać efektów osłabienia czy szybszej kumulacji uszkodzeń. Okresowo przykładowe obciążenia ściskające podczas jednostronnie zmiennego obciążenia rozciągającego powodują wzrost prędkości pęknięcia w stopach aluminium [65]; przypisać to można własnym naprężeniom rozciągającym, wywołanym nierównomiernym, plastycznym odkształceniem próbek w strefie karbu. Wpływ ściskającej części cyklu w ogólności odbija się we wzroście prędkości pęknięcia nie tylko w stalach stopowych, ale również w stopach Ti6Al4V. Prędkość pęknięcia w cyklu wahadłowym była o około 50% wyższa aniżeli w cyklu odzerowo-tętniącym [66]. W pracy [67] pokazano, że w warunkach dwuosioowego rozciągania wielkości strefy plastycznej i COD są znacznie mniejsze w porównaniu z przypadkiem obciążenia jednoosowego tej samej wartości. Prędkość pęknięcia zmniejsza się zatem, ale osiąga minimum zależne od stosunku stosowanego naprężenia do granicy plastyczności.

Wpływ dwóch układów szczelin, jak na rys. 5a, w próbkach ze stali niskowęglowej i o podwyższonej wytrzymałości ( $R_e = 25$  i  $40$  kG/mm<sup>2</sup>) badano w pracy [68]. Na rys. 5b pokazano jednocześnie kolejność rozwijania się pęknięć, a na rys. 5c pasma rozrzutu wyników pomiarów. Linie ciągle obejmują pasma dla próbek z pojedynczymi szczelinami, a kreskowe — z kilkoma szczelinami. Istotniejsze zmiany zachodzą zatem przy wysokich wartościach  $\Delta K$  i przy wyższych prędkościach pęknięcia. Należy zaznaczyć, że  $\Delta K$  zmieniało się w zależności od stosunku  $c_0/d_0$ . W pracy [69] nie stwierdzono wpływu kształtu szczelin w postaci otworów, otworów z bocznymi nacięciami i wąskich szczelin (współczynnik kształtu  $\alpha_k = 2,36$  do  $11,0$ ) na prędkość rozwoju pęknięcia w próbkach ze stali St52-3U (0,19% C, 0,42% Si, 1,1% Mn) badanych przy różnej wartości stosunku  $R(0,5; 0; -1; -3; +20)$ . Wpływ rodzaju próbki (pełnej i ze środkową szczeliną) nie zaznaczył się w prędkości pęknięcia w stali odpornej na działanie korozji (18% Ni) [70]. Różne rodzaje próbek ze stali stopowej o zawartości 0,38% C, 1,8% Cr, 3,82% Ni, 0,46% Mo o różnym stosunku grubości do szerokości nie wpłynęły na przebiegi wykresów  $dl/dN = f(\Delta K)$  przy zginaniu i przy rozciąganiu — ściskaniu, przy różnej asymetrii cyklu [9].

Mikrostruktura i różne zabiegi technologiczne powodują istotne zmiany prędkości pęknięcia. Systematyczne różnice w prędkości rozwoju pęknięć zmęczeniowych stwierdzono w próbkach ze stopu 2024-T3 wytwarzanego przez siedmiu różnych producentów [71]. Różnice sięgały 100% przy obciążeniu o stałej amplitudzie i 50% — przy obciążeniu programowanym (uwypuklił się także wpływ kierunku walcowania). Ich przyczyn można doszukiwać się w charakterze zabiegów cieplnych przed starzeniem. Mała zawartość

wtrąceń polepszała własności ze względu na rozwój pęknięcia. W pracy [72], w której analizowano wyniki dwudziestu dwóch badań prędkości rozwoju pęknięcia w stopach aluminium, a zwłaszcza w stopach 2024-T3 i 7075-T6, nadmieniono o dwukrotnym przyspieszaniu pęknięcia przez wydzielenia kruchych faz i wtrąceń, jeśli prędkość pęknięcia



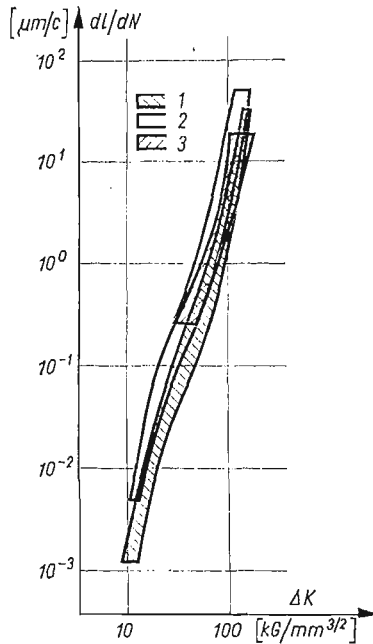
Rys. 5. Wpływ dwóch różnych układów szczelin (a) na obraz rozwoju pęknięć (b) i prędkość ich propagacji (c); objaśnienia w tekście. H. Kitagawa i inni [68]

$dl/dN > 1 \mu\text{m/cykl}$ . Wykres na rys. 6, zaczerpnięty z tej pracy, ilustruje rozrzuty wartości prędkości pęknięcia w stopach aluminium.

W stali węglowej o zawartości 1% C, 1,35% Mn, 0,5% Cr i 0,5% W zaobserwowano dziesięciokrotnie wyższą prędkość pęknięcia w przypadku struktury perlitycznej płytkowej w porównaniu ze strukturą perlityczną sferoidalną (na poziomie  $\Delta K = 140 \text{ kG/mm}^{3/2}$ ) [73]. Spowodowane to było pękaniem łupliwym płytek cementytu. Prędkości pęknięcia w tej stali

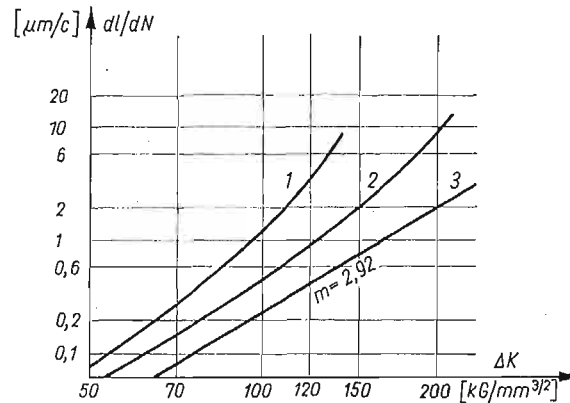


nie udało się opisać wzorem (1); podano wzór, w którym dodatkowo uwzględniono  $K_c$ ,  $K_{max}$  i  $R_m$ . Zwróćmy uwagę (rys. 7) na fakt, że stal o strukturze perlitu sferoidalno-płytkowego wykazała najlepsze własności wytrzymałościowe, ale nie najlepszą prędkość pęknięcia



Rys. 6. Pasma rozrzutu wyników badań prędkości zmęczeniowego pęknięcia w stopach aluminium: 1 — 2024-T3 (z 8 różnych źródeł), 2 — 7075-T6 (z 9 różnych źródeł), 3 — dla innych stopów AlCu i AlZn używanych w budowie statków latających. C. T. Hahn, R. Simon [72]

(krzywa 2). Najmniejszą prędkość pęknięcia w stali 4340 (0,4% C, 0,84% Cr, 0,23% Mo, 1,72% Ni) uzyskano po odpuszczaniu tej stali w temperaturze 523°C, a w stali 4330 (0,34% C, 1,15% Cr, 0,58% Mo, 0,13% V, 3,08% Ni) — po odpuszczeniu w temperaturze 580°C [74]. Ponadto wpływ obróbki cieplnej tych stali zaznacza się istotnie powyżej  $\Delta K = 140$  kg/



Rys. 7. Prędkość zmęczeniowego pęknięcia w stali węglowej o 1% C o strukturze perlitycznej płytkowej (1), mieszanej płytkowo-sferoidalnej (2) i sferoidalnej (3); wykładnik  $m = 2,92$  dotyczy wzoru(1). Na wykresie pominięto punkty pomiarowe zaznaczone w oryginale pracy. P. T. Heald, T. C. Lindley, C. E. Richards [73]

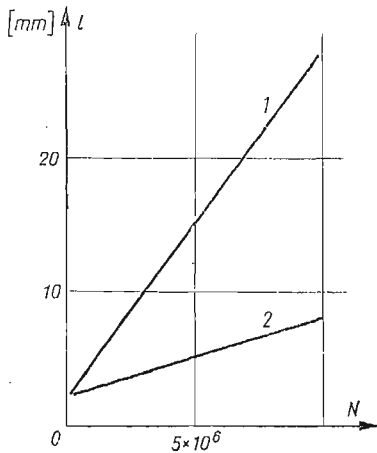
/mm<sup>3/2</sup>. W podobnych stalach niskostopowych, zawierających Cr, Ni i Mo, najlepszą ze względów na prędkość pęknięcia okazała się temperatura odpuszczania 300°C — najmniejszy wykładnik  $m$  we wzorze (1),  $m = 1,5$  [75]. Molibden polepsza znacznie odporność tych stali na rozwój pęknięć zmęczeniowych, a wielkość ziarn pierwotnego austenitu nie uwypukliła się wyraźniej w prędkości pęknięcia. Wpływ różnych struktur perlityczno-ferrytycznych i martenzytyczno-ferrytycznych w stali niskostopowej o zawartości 0,23% C, 1,43% Mn, 0,11% Ni, 0,12% Cr na prędkość pęknięcia powiązано z kierunkiem walcowania [76]. Stwierdzono zmianę wykładnika  $m$  we wzorze (1) od 2 do 5,3 przy czym zmiana zależała również od orientacji składników mikrostrukturalnych (wydzielań, wtrąceń) w stosunku do kierunku i płaszczyzny walcowania. Wyraźniejsze różnice zanotowano przy wyższych wartościach  $\Delta K$ . Różne wielkości ziarn ferrytu (od 0,012 do 0,206  $\mu\text{m}$ ) w stali o zawartości 0,05% C praktycznie nie zmieniały prędkości pęknięcia przy jednostronnie zmiennym rozciąganiu, aczkolwiek wykładnik we wzorze (1) zmniejszał się nieregularnie od 4,3 do 3,0 wraz ze zmniejszaniem się ziarn; jednocześnie systematycznie wzrastała stała  $C$  [77]. Najmniejszą prędkość pęknięcia spośród stali NiMoV, NiCrMoV i CrMoV, używanych w budowie wirników, stwierdzono w stali CoMoV dla wszystkich zakresów  $\Delta K$  [78]. Prędkość pęknięcia w wysokowytrzymałych stalach NiCrMo o wysokiej czystości obniża się w porównaniu ze stalami o czystości konwencjonalnej zależnie od  $\Delta K$ , od współczynnika  $R$  i od temperatury odpuszczania [79]; najlepsze rezultaty uzyskano po odpuszczeniu w niższych temperaturach (np. wpływ czystości nie zaznaczył się w prędkości pęknięcia próbek badanych w próżni, ale odpuszczanych w 405°C).

Bardzo istotne różnice w prędkości pęknięcia wywołuje obróbka cieplna stopów tytanu. W pracy [80] — z pięciu różnych zabiegów cieplnych uzyskano najlepsze własności stopu Ti6Al6V2Sn przez wyżarzenie w zakresie fazy  $\beta$  (988°C) i otrzymanie drobnoziarnistej fazy o strukturze podobnej do struktury Widmannstättena. Sądzi się, że granice pierwotnych ziarn są przyczyną hamowania pęknięcia. Ciekawe jest to, że o stosunkowo niskiej prędkości pęknięcia nie decydowały wyższe wartości  $R_e$  czy  $R_m$ . Ponadto żaden z powszechniejszych wzorów na prędkości pęknięcia nie dostarczył wyników zgodnych z doświadczeniem. Rodzaj mikrostruktury i wielkość strefy plastycznego odkształcenia w porównaniu z wielkością ziarna zaznacza się w prędkości pęknięcia w stopie Ti6Al4V(Ti318) i w jednofazowym stopie Ti115 o zawartości 0,1% O<sub>2</sub> [81]. Prędkość ta była najniższa w stopie o strukturze gruboziarnistej. Szybszy rozwój pęknięć miał miejsce w stopie Ti318 zawierającym martenzyt, co wyjaśniono większym udziałem pęknięcia w fazie martenzytycznej i znacznie większą strefą plastyczną przed czołem pęknięcia w porównaniu z wielkością ziarn struktury martenzytycznej. Wielokrotną zmianę prędkości pęknięcia w stopie Ti6Al4V, spowodowaną różną mikrostrukturą i związaną ze współczynnikiem  $R$ , stwierdzono w pracy [82]. Wykazano, że powyżej pewnej krytycznej wartości  $\Delta K$  wpływ mikrostruktury zanika i że określenia pęknięcia zależnego lub niezależnego od mikrostruktury można było dokonać na podstawie wielkości strefy odwracalnych odkształceń plastycznych. W mosiądzu M70 nie stwierdzono wpływu wielkości ziarn na prędkość pęknięcia [83].

Słonność do kruchego pęknięcia musi się zaznaczyć w prędkości pęknięcia. Wykazały to, między innymi, badania niskostopowej stali o zawartości 0,35% C, 4,23% Ni, 1,43% Cr przy zmiennym zginaniu, którą poddawano różnym zabiegom cieplnym w celu uzyskania stanu umownie kruchego i umownie niekruchego [15]. W tym ostatnim nie zanotowano

wpływu  $\sigma_m$  i zmiany wykładnika  $m$  we wzorze (1) (wynosił 2,4). Natomiast w stanie kruchym wykładnik ten zwiększał się od 2,7 do 5,8 w miarę wzrostu  $R$  (pęknięcia rozwijały się częściowo po granicach ziarn).

Powierzchniowe umocnienie czy lokalny zgniot nie zawsze prowadzą do polepszenia własności ze względu na rozwój pęknięcia, jak to opisano w [1] i wykazano między innymi w bardzo interesującej pracy W. BŁAŻEWICZA [84]. Przykładem tego niech będzie także praca [85], w której stwierdzono większą prędkość pęknięcia w łopatkach turbinowych ze stopu niklowego EI 437 B po powierzchniowym zgniocie (symetryczne zginanie przy 20°C; rys.8).



Rys. 8. Długość zmęczeniowych pęknięć w stopie EI437B w zależności od liczby cykli  $N$  w elementach przed (2) i po powierzchniowym zgnioście (1).

B. F. Bałaszow, A. N. Pietuchow [85]

W podwyższonych temperaturach, w których na ogół wzrasta prędkość pęknięcia, stosowana jest zależność (1). Jednak dość często następuje załamanie wykresów  $dl/dN = f(\Delta K)$ , a zatem zmiana wykładnika  $m$  w zależności od zakresu temperatury i stanu materiału. Pokazano to w pracy [86], badając stale 304 (0,05% C, 18% Cr, 9,5% Ni) i 316 (0,06% C, 17,3% Cr, 13,3 Ni, 2,3% Mo) w stanie przesyconym. Próbkę z tych stali poddawano zmiennemu rozciąganiu przy  $R = 0 \div 0,05$  w temperaturach 24, 37, 316, 538 i 649°C. Prędkość pęknięcia stali 304 była około 12 razy większa w 649°C, aniżeli w 24°C, a w stali 316 jeszcze większa, natomiast zgniot tej stali (walcowanie na zimno do 20% zmniejszenia grubości) przyczynił się do obniżenia prędkości pęknięcia. Interesujące jest, że pęknięcie przebiegało transkryystalicznie. Stosowalność wzoru (1) również dla stali 316 potwierdzono w [87], wskazując na zależność  $C$  i  $m$  nie tylko od temperatury, ale również od częstości obciążenia i współczynnika  $R$ . Wstępne obciążenie cykliczne o odpowiedniej wartości może opóźniać rozwój pęknięcia, także w podwyższonych temperaturach, [88]; w pracy tej badano niskostopową stal CrMoV przy różnych rodzajach obciążenia w zakresie małej liczby cykli. W publikacji [89] wzór (1) zaproponowano uzupełnić wartością temperatury. Prędkość pęknięcia stali 22NiMoCr37, używanej w budowie reaktorów, jest praktycznie niezależna od czynników konstrukcyjnych i eksploatacyjnych (grubość elementów, ośrodek woda-powietrze, częstość od 10 do 100 Hz, współczynniki  $R$ ) w zakresie do 300°C [90]. Zaznacza się natomiast wpływ strefy cieplnej w połączeniach spawanych, nie zmieniający jednak wykładnika  $m$  we wzorze (1), lecz powodujący tylko wzrost stałej  $C$ . Ciekawe rezultaty badań stopu kobaltowego HS 188 (22% Cr, 14% W, 22% Ni, 1,4% Fe, 0,1% C,

40% Co) w temperaturach do 920°C i częstości od 0,01 do 10 Hz zawiera praca [91]. Prędkość rozwoju pęknięcia, opisywana wzorem (1) jest niezależna od częstości, jeśli pęknięcie miało charakter transkrystaliczny — to znaczy przy wyższych częstościach. Natomiast w zakresie małych częstości prędkość znacznie rosła wraz z obniżaniem się częstości, a pęknięcie przebiegało międzykrystalicznie. Wysłunięto wnioszek, że dla każdej temperatury istnieje określona częstość krytyczna, powyżej której wielkość  $dl/dN$  jest więcej lub mniej zależna od częstości.

W obniżonych temperaturach prędkość pęknięcia w zasadzie obniża się, chociaż istotny wpływ mogą wywierać warunki badania i geometria próbek. Pokazano to na przykładzie badań stali niskostopowej (0,23% C, 3,4% Ni, 0,3% Mo, 0,07% V) o strukturze bainityczno-ferrytycznej w temperaturze do -24°C [92]. Ogólnie można stwierdzić, że  $dl/dN$  obniżało się dla danego poziomu  $\Delta K$  wraz z obniżaniem się temperatury i ze wzrostem grubości elementu.

Ośrodki różne od otoczenia laboratoryjnego wpływają istotnie na prędkość pęknięcia zależnie od własności tych ośrodków, a zwłaszcza od wrażliwości materiału na działanie ośrodka, zaznaczającej się również w odporności na pęknięcie w tym ośrodku  $K_{cor}$ . Jednak omawiany wpływ wyraźnie maleje w zakresie wysokich wartości  $\Delta K$ . Nakładanie się zjawisk adsorpcji, dyfuzji i korozji na zjawiska zmęczeniowe czyni przebieg zmęczenia bardzo złożony. Stąd podejmowano próby wyznaczenia prędkości pęknięcia w ośrodkach za pomocą wyrażeń dwuczłonowych, w których do prędkości pęknięcia w zwykłych warunkach dodawano człon zależny od czasu działania ośrodka i ujmujący jego charakterystyczne własności (np. [93]). Przeglądu prac o wpływie ośrodków na prędkości pęknięcia dokonano już w wielu publikacjach; jako przykład wymieńmy prace [72, 93, 94]. Obszerność i liczba prac na ten temat nie pozwala na ich omówienie w ramach niniejszego referatu.

Z przeglądu przedstawionych badań wynika ich określony kierunek: dążenie do możliwie prostego opisu prędkości pęknięcia w różnych warunkach eksploatacyjnych. Taki opis umożliwiałby w dalszym ciągu wzór (1) z różnymi uzupełnieniami. W tym też kierunku powinny być wytyczone badania materiałów krajowych prowadzone obecnie w bardzo skromnym zasięgu. Nie znamy charakterystyk tej ważnej własności materiałowej, jaką jest prędkość zmęczeniowego pęknięcia. Istnieje zatem pilna konieczność intensyfikacji takich badań, również w ramach problemu węzłowego « Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych ». Badania te muszą objąć w pierwszym rzędzie elementy ze stopów aluminium i stopów tytanu, ze stali o podwyższonej wytrzymałości i ze stopów używanych w technice reaktorowej.

#### Literatura cytowana w tekście

1. S. KOCANĀDA, *Zmęczeniowe niszczenie metali*, WNT, Warszawa 1972.
2. *Mechanical Behavior of Materials*. Proceedings of the International Conference on Mechanical Behavior of Materials, Kyoto 1971, Vol. I - V. The Society of Materials Science, Japan 1972.
3. Symposium on Fracture and Fatigue at the School Engineering and Applied Science George Washington University, Washington 1972. *Engineering Fracture Mechanics*, 5 (1973).
4. International Congress on Fracture. Dritte Internationale Tagung über den Bruch, München 1973, VDE, I - IX.

5. S. KOCANĀDA, *Problemy rozwoju pęknień zmęczeniowych*, Materiały pomocnicze na konferencję szkoleniową na temat: «Wybrane problemy pęknień zmęczeniowych», Jabłonna, grudzień 1973.
6. P. M. TOOR, *A review of some damage tolerance design approaches for aircraft structures*, Eng., Fracture Mech., 5' (1973) 837 - 880.
7. P. RABBE, *Application de la mecanique de la rupture a l'etude de la fissuration en fatigue*, Rev. Francaise de Mecanique, 38 (1971) 11 - 27.
8. D. W. HOEPPNER, W. E. KRUPP, *Prediction of component life by application of fatigue crack growth knowledge*, Eng. Fracture Mech., 1, 6 (1974) 47 - 70.
9. H. P. LIEURADE, P. RABBE, *Etude, a l'aide de la mecanique de la rupture, de la vitesse de fissuration en fatigue d'une gamme etendue d'acier*, Institut des Recherches de la Siderurgie Francaise, P 139, Mars 1972.
10. G. T. HAHN, M. SARRATE, A. R. ROSENFELD, *Experiments on the nature of fatigue crack plastic zone*, Proc. A. F. Cong. on Fatigue and Fracture of Aircraft Structures and Materials, AFFDL TR-70-144, September 1970.
11. H. TAKASHIMA, T. URASHIMA, Y. YAZAKI, *Crack propagation properties in low alloy carbon steels and their microfractographic analysis*, W [4], Teil IV, Ref. III - 431.
12. J. M. BARSOM, *Fatigue crack propagation in steels of various yield strength*, Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry, Ser. B 93, 4 (1971) 1190 - 1196.
13. M. KINOSHITA, K. KONO, E. SHINGAI, *Estimation of fatigue crack propagation life of steels plates and of structural member model of ship hull*, Eng. Fracture Mech., 3, 5 (1973) 563 - 584.
14. А. А. ГУДКОВ, В. С. ЗОТЪВВ, *К изучению закономерностей распространения усталостной трещины*, Проблемы прочности, 4 (1974) 91-95.
15. R. O. RITCHIE, J. F. KNOTT, *Brittle cracking processes during fatigue crack propagation*, W [4], T. VI, Ref. 434/A.
16. R. E. ZINKHAM, H. LIEBOWITZ, D. L. JONES, *Fracture toughness-strength relationship in aluminium zinc-magnesium-copper alloys*. W [2], Vol. I, s. 370 - 393.
17. R. J. DONAHUE, H. CLARK, P. ATANMO, R. KUMBLE, A. J. McEVILY, *Crack opening displacement and the rate of fatigue-crack growth*, University of Connecticut, Institute of Materials of Science Report 1971.
18. M. KLESNIL, P. LUKAS, *Influence of strength and stress history on growth and stabilisation of fatigue cracks*, CSAV, Brno 1971.
19. R. J. COOKE, C. J. BEEVERS, *The effect of load ratio on the threshold stresses for fatigue crack growth in medium carbon steels*, Eng. Fracture Mech., 4, 5 (1973) 1061 - 1071.
20. jak poz. [17], Intern. Jour. of Fracture Mech., 2 (1972) 209 - 219.
21. R. J. COOKE, C. J. BEEVERS, *Slow fatigue crack propagation in pearlitic steels*, Materials Science and Engineering, 13 (1974) 201 - 210.
22. T. MATSUMOTO, H. KITAGAWA, *Estimation of threshold stress intensity factors of fatigue-crack growth*, W [2], Vol. II, s. 218 - 224.
23. H. KITAGAWA, H. NISHITANI, T. MATSUMOTO, *Fracture mechanics approach to threshold condition for fatigue crack growth*. W [4], T. VI, Ref. V - 444/A.
24. N. E. FROST, L. P. POOK, K. DENTON, *A fracture mechanics analysis of fatigue crack growth data for various materials*, Eng. Fracture Mech., 2, 3 (1971) 109 - 126.
25. L. P. POOK, A. F. GREENAN, *Fatigue crack-growth characteristics of two magnesium alloys*, Eng. Fracture Mech., 4, 5 (1973) 935 - 946.
26. В. М. ВИГДОРЧИК, Г. А. ЧЕКУРОВА, *О критическом напряжении развития трещины*, Проблемы прочности, 5 (1974) 73—75.
27. W. ELBER, *Fatigue crack closure under cyclic tension*, Eng. Fracture Mech., 2 (1970) 37 - 45. Materialprüfung, 6 (1970) 189 - 193.
28. O. BUCK, C. L. HO, H. L. MARCUS, *Plasticity effects in crack propagation*, Eng. Fracture Mech., 5 (1973) 23 - 34.
29. R. E. JONES, *Fatigue crack growth retardation after single-cycle peak overload in Ti-6Al-4V titanium alloy*, Ibidem, s. 585 - 604.
30. T. T. SHIH, R. P. WEI, *A study of crack closure in fatigue*, Ibidem, 16 (1974) 19 - 32.

31. T. C. LINDLEY, C. E. RICHARDS, *The relevance of crack closure to fatigue crack propagation*, Materials Science a. Eng., 3 (1974) 281 - 293.
32. T. C. LINDLEY, C. E. RICHARDS, *The influence of crack closure and plastic zone geometry on fatigue crack propagation*, W [4], T. VI, Ref. V-431/A.
33. O. BUCK, J. D. FRONDSSEN, C. L. HO, H. L. MARCUS, *The effect of gaseous environments on crack tip closure, The microstructure and design of alloys*, Proceedings of the Third Intern. Conf. the Strength of Metals and Alloys, Cambridge 1973, Paper 94.
34. J. IMAMASA, T. MIKI, *Experimental verification for application of fracture mechanics to failure of pressure vessel*. W [4], T. IX, Ref. VIII-441.
35. S. TAIRA, K. TANAKA, *Microscopic study of fatigue crack propagation in carbon steels*, W [2], Vol. II, s. 48 - 58.
36. S. TAIRA, K. TANAKA, *Stress-strain distribution near crack tips and fracture mechanisms in fatigue of metals*, W [4], Vol. VI, Ref. V-61.
37. H. OHUCHIDA, A. NISHIOKA, S. ASAMI, *Elastic-plastic approach to fatigue crack propagation and fatigue limit of material with crack*, W [4], Ref. V-442/A.
38. T. MATSUMOTO, H. KITAGAWA, *X-ray investigation of fatigue-growth-on critical strain for fracture at the crack tip*, W [2], Vol. II, s. 59 - 66.
39. M. KATCHER, *Crack growth retardation under aircraft spectrum loads*, Eng. Fracture Mech., 4, 5 (1973), 793 - 818.
40. B. TOMKINS, J. WAREING, G. SUMMER, *Fatigue crack propagation under mode II conditions*, W [4], T. VI, Ref. V-422.
41. S. V. SERENSEN, N. A. MAKHUTOV, *The conditions low cycle crack initiation and propagation in stress concentration zones*, Ibidem, Ref. V-334.
42. V. M. RADHAKRISHNAN, *On the crack propagation in low cycle fatigue*, Ibidem, Ref. -331.
43. V. M. RADHAKRISHNAN, *Damge accumulation in low cycle-fatigue*, Zeitschrift f. Metallkunde, 10 (1973) 705 - 710.
44. K. H. SCHWALBE, *Zur Abschätzung der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Ermüdungsrissen*, Ibidem, 6 (1973) 453 - 457.
45. T. YOKOBORI, M. YOSHIDA, *Kinetic theory approach to fatigue crack propagation*. W [4], T. II, Ref. I-332.
46. T. YOKOBORI, T. AIZAWA, *Some notes to the kinetic theory of fatigue crack propagation*, Rep. Res. Inst. Strength a. Fracture of Materials Tohoku University, 2, 9 (1973) 65 - 67.
47. A. J. McEVILY, R. KUMBLE, R. J. DONAHUE, *On the influence of the R-ratio on fatigue crack propagation*. W [4], T. VI, Ref. V-424.
48. R. O. RITCHIE, J. E. KNOTT, *Micro-cleavage cracking during fatigue crack propagation in low strength steel*, Materials Science and Eng., 1, 14 (1974) 7 - 14.
49. H. NOWACK, *Fatigue crack propagation under consecutive load cycles with varying mean loads and amplitudes*, W [4], T. VI, Ref. V-324.
50. J. J. HANEL, *Schwingfestigkeit und Rissfortschreitung von eigenspannungsbehafteten Risstäben aus St 5 unter Einstufenbelastung*, Veröffentlichungen des Institutes für Statik und Stahlbau der Technischen Hochschule Darmstadt, H. 19, 1972.
51. C. M. HUDSON, J. T. SCARDINA, *Effect of stress ratio on fatigue crack growth in 7075-T6 aluminium alloy sheet*, NASA TN-D-5390, 1069.
52. M. KLESNIL, P. LUKAŠ, P. RYS, *Effect of stress cycle asymetry on fatigue crack growth*, CSAV Institute of Physical Metallurgy, Brno 1971.
53. J. C. RADON, S. ARAD, L. E. CULVER, *Growth of fatigue cracks in metals and polymers*, Eng. Fracture Mech., 1, 6 (1974) 195 - 208.
54. R. DUBENSKY, *A study of fatigue crack propagation in high strength aluminium alloys at high stresses*, W [2], Vol. II, s. 175 - 186.
55. P. R. V. EVANS, N. B. OWEN, L. N. McCARTNEY, *Mean stress effects on fatigue crack growth and failure in a rail steel*, Eng. Fracture Mech. 1, 6 (1974) 183 - 193.
56. J. SCHIJVE, F. A. JACOBS, P. J. TROMP, *The effect of load sequence or fatigue crack propagation under random loading and program loading*, NLR TR, 1971.

57. H. NOWACK, *Ein Beitrag zur Untersuchung der Schadensakkumulation auf der Grundlage biharmonischer Belastungsabläufe*, Deutsche Forschungs- u. Versuchsanstalt für Luft- u. Raumfahrt. DLR FB 71 - 23, 1971.
58. J. C. McMILLAN, R. M. PELLOUX, *Fatigue crack propagation under programmed loads and crack tip opening displacements*, Eng. Fracture Mech., 2 (1970) 81 - 84.
59. L. G. VARGAS, R. I. STEPHENS, *Subcritical crack growth under intermittent overloading in cold-rolled steel*, W [4], T. VI, Ref. V-325.
60. O. E. WHEELER, *Spectrum loading and crack growth*, Trans. ASME, Jour. of Basic Eng., Ser. D 94 (1972) 182 - 186.
61. O. JONAS, R. P. WEI, *An exploratory study of delay in fatigue crack-growth*, Intern. Jour. of Fracture Mech., 7 (1971) 116 - 118.
62. H. KITAGAWA, S. FUKUDA, A. NISHIYAMA, *Fatigue crack growth in steels under random loading considering threshold condition*, W [2], Vol. II, s. 508 - 515.
63. S. KOTANI, K. KOIBUCHI, *The effect of varying mean stress on the fatigue strength of sharp notched specimens*, Ibidem, s. 451 - 457.
64. H. KISHIMOTO, T. YOSHIMURA, *Random and program fatigue tests of Cr-Mo steel specimen with V-grooved notch*, Ibidem, s. 352 - 364.
65. А. М. ДОЩЕНКО, *Влияние редких элсимающихся нагрузок на развитие усталостной трещины*, заводская Лаборатория, 3 (1971) 350-352.
66. T. W. CROOKER, *Effects in tension-compression cycling on fatigue crack growth in high strength alloys*, Jour. of Eng. for Industry, Trans. ASME, ser. B 93, 4 (1971) 893 - 896.
67. N. J. I. ADAMS, *Some comments on the effect of biaxial stress on fatigue crack growth and fracture*, Eng. Fracture Mech., 4, 1, 5 (1973) 983 - 991.
68. H. KITAGAWA, M. ISHIDA, T. OHIRA, M. KURODA, *Growth of distributed cracks under fatigue loading*, W [4], T. II, Ref. I-521.
69. H. SAAL, *Der Einfluss von Formzahl und Spannungsverhältnis auf die Zeit- und Dauerfestigkeiten und Rissfortschreitungen bei Flachstäben aus St52*, Jak poz. [50], H. 17, 1971.
70. H. G. MUNRO, N. J. L. ADAMS, *Fatigue and fracture of a 200 ksi grade maraging steel proposed for use in military bridging*, Eng. Fracture Mech., 4 (1972) 705 - 715.
71. J. SCHIIVE, P. DE RIJK, *The fatigue crack propagation in 2024-T3 alclad sheet materials from seven different manufactures*, NLR RT M. 2162, 1968.
72. C. T. HAHN, R. SIMON, *A review of fatigue crack growth in high strength aluminium alloys and the relevant metallurgical factors*, Eng. Fracture Mech., 3, 5 (1973) 523 - 540.
73. P. T. HEALD, T. C. LINDLEY, C. E. RICHARDS, *The influence of stress intensity and microstructure on fatigue crack propagation in a 1% carbon steel*, Materials Science Eng., 10 (1972) 235 - 240.
74. J. F. THROPP, G. A. MILLER, *Optimum fatigue crack resistance*, ASTM Fatigue Symposium at Atlantic City 1969.
75. T. ARAKI, T. Y. SHIH, *The fatigue behaviors and metallurgical factors of alloyed high strength steels*, W [4], T. VI, Ref. V-443/B.
76. F. A. HEISER, R. W. HERTZBERG, *Anisotropy of fatigue crack propagation*, Trans. ASME, Jour. of Basic Eng., 93, Ser. D, (1971) 211 - 217.
77. T. YOKOBORI, I. KAWADA, H. HATA, *The effects of ferrite grain size on the stage II fatigue crack propagation in plain carbon steel*, Jak poz. [46], 2, 9, (1973) 35 - 64.
78. W. G. JR. CLARK, *Fatigue crack growth characteristics of rotor steels*, Eng. Fracture Mech., 4, 2 (1971) 287 - 299.
79. P. R. V. EVANS, N. B. OWEN, B. E. HOPKINS, *The effect of purity on fatigue crack growth in a high-strength steel*, Ibidem, 4, 3 (1971) 463 - 473.
80. M. F. AMATEBAU, W. D. HANNA, E. G. KENDALL, *The effect of microstructure on fatigue crack propagation in Ti-6Al-6V-2Sn alloy*, W [2], Vol. II, s. 77 - 89.
81. J. L. ROBINSON, P. E. IRVING, C. J. BEEVERS, *An analitic approach to low stress fatigue crack growth in titanium*, W [4], T. VI, Ref. V-343.
82. P. E. IRVING, C. J. BEEVERS, *Microstructural influences on fatigue crack growth in Ti-6Al-4V*, Materials Science Eng., 3, 14 (1974) 229 - 238.

83. A. W. THOMPSON, R. J. BUCCI, *The dependence of fatigue crack growth rate on grain size*, Sandia Laboratories, SCL-DC-720067, September 1972.
84. W. BŁAŻEWICZ, *The effect of residual stress on crack rate in 2024-T3 alclad material under constant and programmed load sequences*, Arch. Bud. Masz., 2, 20 (1973) 191 - 218.
85. Б. Ф. БАЛАШОВ, А. Н. ПЕТУХОВ, *Усталостная прочность жаропрочных сплавов в связи с концентрацией напряжений, асимметрией цикла и поверхностным наклепом*, Проблемы прочности, 4 (1974) 82-86.
86. L. A. JAMES, *The effect of elevated temperature upon fatigue-crack propagation behavior of two austenitic stainless steels*, W [2], Vol. III, s. 341 - 352.
87. P. SHAHINIAN, H. H. SMITH, H. E. WATSON, *Fatigue crack growth in type 316 stainless steel in high temperature*, Trans. ASME, Jour. of Eng. for Industry, Ser. B 93, 4 (1971) 976 - 980.
88. C. B. HARRISON, G. N. SANDOR, *High-temperature crack growth in low cycle fatigue*, Eng. Fracture Mech., 4, 4 (1971) 403 - 420.
89. B. MUKHERJEE, *Fatigue crack growth in metals and polymers*, W [4], T. VI, Ref. V-423.
90. A. GERSCHA, *Einflussgrößen auf das Risswachstum des Schmiedestahles 22 NiMoCr37*, Ibidem, Ref. V-421.
91. T. OHMURA, R. M. PELLOUX, N. J. GRANT, *High temperature fatigue crack growth in a cobalt base superalloy*, Eng. Fracture Mech., 4, 5 (1973) 909 - 922.
92. W. G. CLARK, H. E. TROUT, *Influence of temperature and section size on fatigue crack growth behavior in Ni-Co-V alloy steel*, Ibidem, 2 (1970) 107 - 123.
93. A. J. McEVILY, R. P. WEI, *Fracture mechanics and corrosion fatigue*, Institute of Materials Science, University of Connecticut, AFOSR-TR-72-0408.
94. R. P. WEI, *Some aspects of environment-enhanced fatigue-crack growth*, Eng. Fracture Mech., I (1970) 633 - 651.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA, WARSZAWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1974 r.





O MOŻLIWOŚCI ROZSZERZENIA METODYKI BADAŃ POWIERZCHNI PĘKNIĘĆ  
ZMĘCZENIOWYCH\*)

STANISŁAW KOCĄDA, JAN KOZUBOWSKI (WARSZAWA)

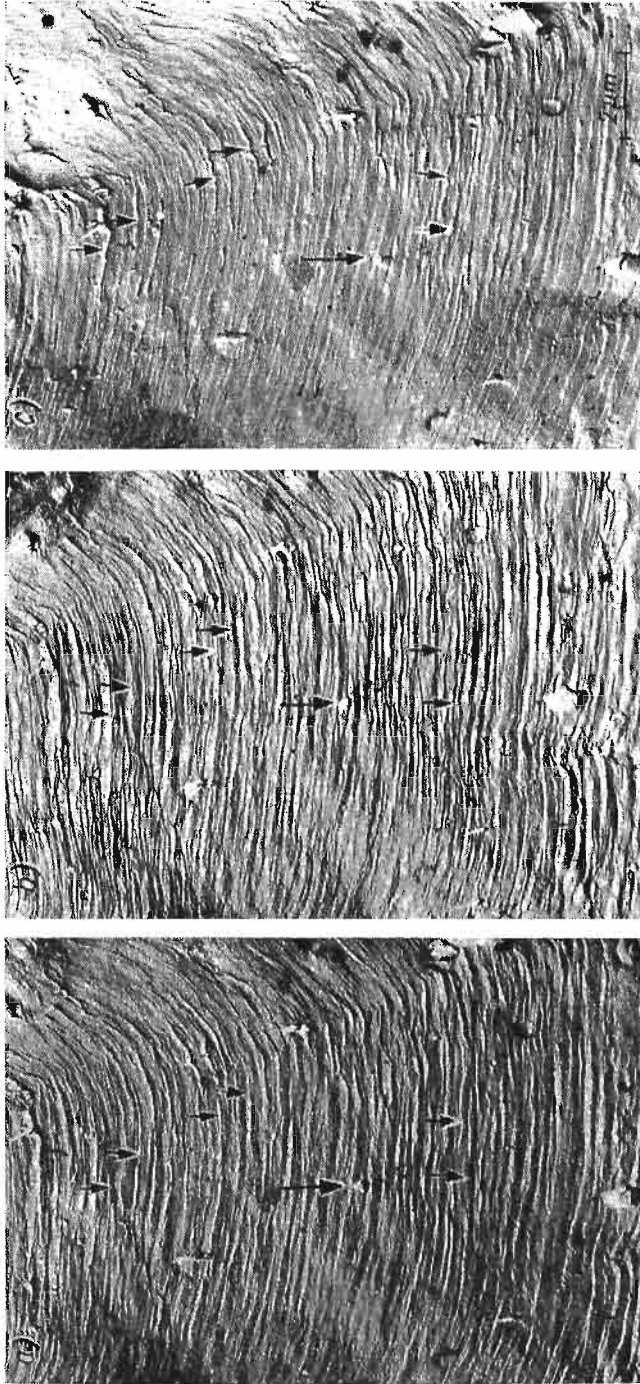
Badania mikrobudowy złomów zmęczeniowych stwarzają dobre podstawy do fizycznej i praktycznej interpretacji przebiegu zmęczeniowego pęknięcia. Najwięcej informacji dostarczają prążki, jako wspólna cecha większości złomów zmęczeniowych, umożliwiające dość pełne odtworzenie historii obciążenia (liczba cykli rozwoju pęknięcia; orientacyjna, całkowita liczba cykli obciążenia; średnie prędkości pęknięcia; przybliżone wartości naprężeń eksploatacyjnych). Za pomocą badań elektrooptycznych możemy wykryć i scharakteryzować pierwotne i wtórne ogniska pęknięć; opisać rozwój pęknięcia w poszczególnych strefach złomu; określić udział pęknięć plastycznych i kruchych; dowiedzieć się o pękaniu wydzieleni i stref do nich przylegających; o lokalnym przyspieszaniu lub opóźnianiu pęknięcia; o rozmieszczeniu, gęstości i zasięgu pęknięć wtórnych; o stopniu oddziaływania różnych ośrodków. Rejestrujemy różne informacje dodatkowe, jak sam przebieg i budowę prążków, pęknięcia wtórne wzdłuż ścianek prążków, pasma poślizgów na powierzchniach pęknięć, budowę strefy resztkowej i charakter pęknięcia w tej strefie. Do opisywanych badań wykorzystujemy głównie mikroskopy elektronowe transmisyjne, prześwietleniowe (oznaczane skrótem TEM) i mikroskopy elektronowe skaningowe (SEM). Badanie powierzchni pęknięć zmęczeniowych metodą replik w TEM jest dość żmudne. Dostarcza jednak najwierniejszych obrazów mikrorzeźby złomu, do czego przyczynia się wysoka zdolność rozdzielcza i przede wszystkim duża głębokość ostrości (około 1000 razy większa niż w mikroskopie optycznym). Równie duża głębokość ostrości i wystarczająca zdolność rozdzielcza w SEM umożliwiają śledzenie charakterystycznych cech powierzchni pęknięć, bez konieczności sporządzania replik; wycinki powierzchni ogląda się bezpośrednio. Ceną zaletą SEM jest możliwość ciągłej obserwacji powierzchni złomu przy stopniowo narastających powiększeniach (na przykład od 1 do 10 000 razy), a zatem możliwość badania interesujących nas szczegółów mikrobudowy. Podobieństwo obrazów oglądanych w obydwóch mikroskopach TEM i SEM jest na ogół dobre; obrazy uzyskiwane z TEM są jednak szczegółowsze, a z SEM — jakby « głębsze », sprawiające wrażenie obrazów przestrzennych. Połączenie badań mikrofraktograficznych z badaniami prześwietleniowymi cienkich folii, mające na celu powiązanie cech mikrobudowy złomów z substrukturą warstwy wierzchniej pęknięcia, ułatwia wnikanie w istotę mechanizmu pęknięcia. Ilościowe określenie tych cech morfologicznych przekształciło mikrofraktografię jakościową w ilościową.

\*) II część referatu problemowego wygłoszonego na VI Sympozjum Doświadczalnych Badań w Mechanice Ciała Stałego, zorganizowanym przez Oddział Warszawski Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej oraz Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Warszawskiej w Warszawie, we wrześniu 1974 r.

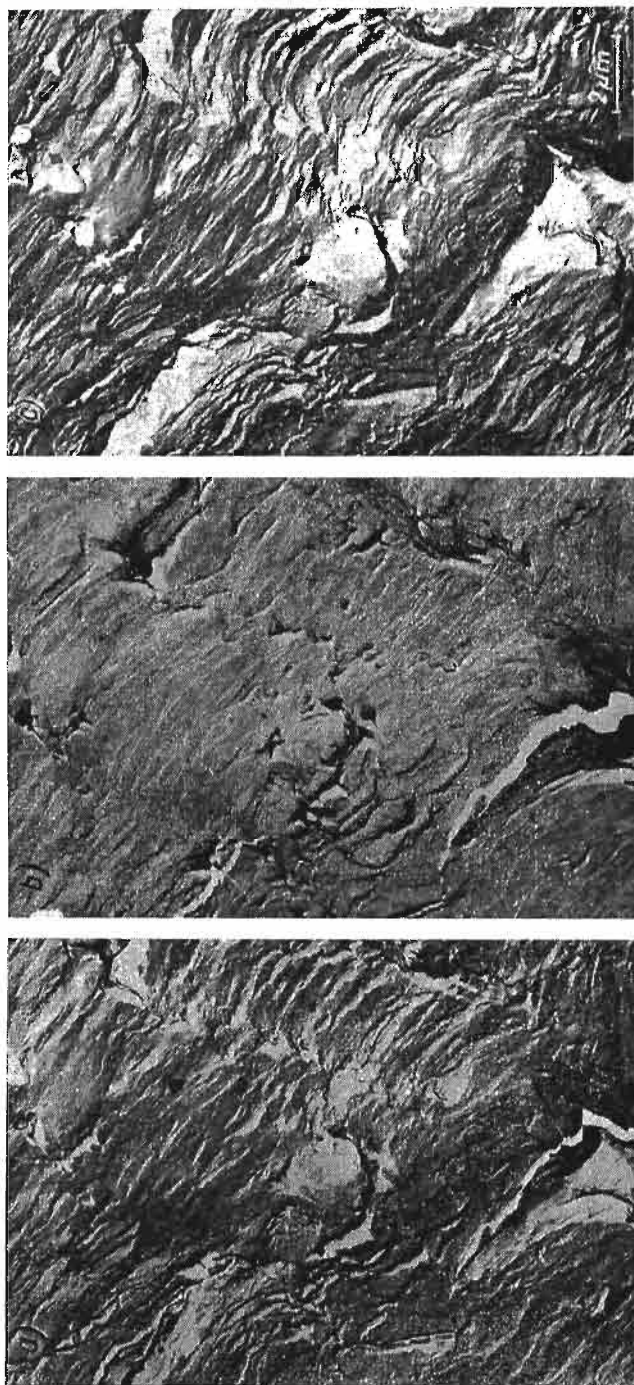
Do obserwacji w TEM używa się najczęściej konwencjonalnych replik jedno- lub dwustopniowych, cieniowanych parami różnych metali. Istnieje jednak możliwość błędów odwzorowania i uszkodzenia replik podczas ich zdejmowania z bardzo rozwiniętych powierzchni pęknięć, zawierających zwłaszcza ostre krawędzie czy pęknięcia wtórne. Uzupełnienie TEM urządzeniem do nachylania replik pod różnym kątem w zakresie  $\pm 60^\circ$  pomogło w wyjaśnieniu nie zawsze czytelnych, a stąd trudnych do interpretacji obrazów. Zwrócił na to szczególną uwagę D. BROEK [1].

Celem niniejszej pracy jest właśnie pokazanie na podstawie wybranych przykładów, jak może się zmieniać elektronooptyczny obraz powierzchni pęknięć przez nachylanie repliki. Badania wykonywano na mikroskopie transmisyjnym Philips EM 300. Wykorzystano dwustopniowe repliki acetylocelulozowo-węglowe cieniowane platyną w kierunku przeciwnym do rozwoju pęknięć, które we wcześniejszych badaniach własnych obserwowano w mikroskopie JEM-6A.

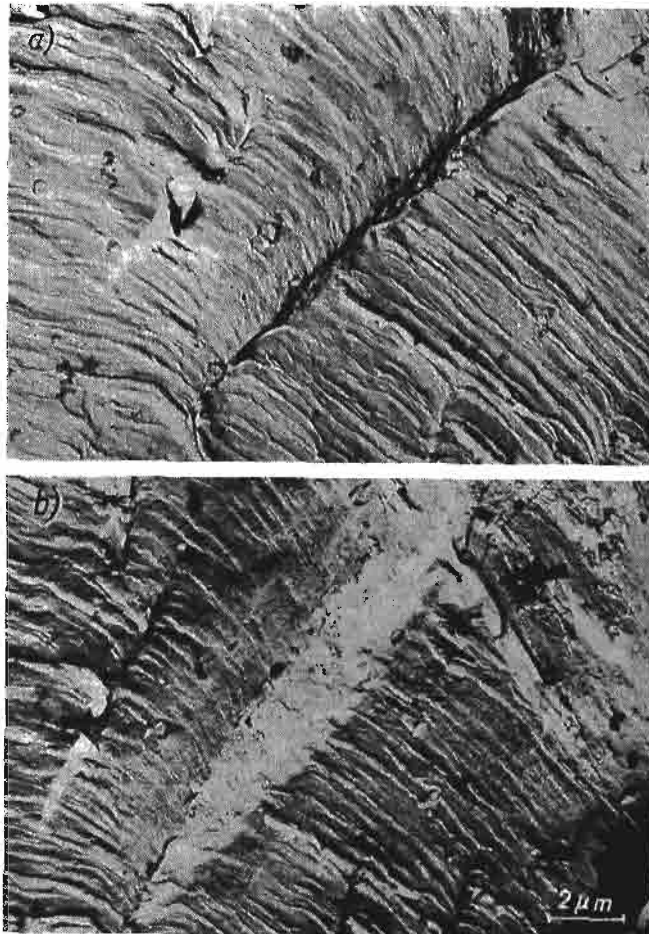
Plastyczne prążki zmęczeniowe na powierzchni pęknięcia wyżarzanej stali węglowej St2 oglądamy na rys. 1. Pęknięcie zostało wywołane płaskim zginaniem przy współczynniku amplitudy cyklu  $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = 0,25$ , a badania elektronooptyczne tych pęknięć opisano w [2] (stosowano mikroskop JEM-6A). Warto przypomnieć, że prążki są śladami przemieszczającego się w każdym cyklu pęknięcia. Jeden prążek odpowiada zatem jednemu cyklowi obciążenia (na ogół). Są one prostopadłe lub prawie prostopadłe do kierunku rozwoju pęknięcia. Z odstępów między prążkami (które szczegółowo przeanalizowano w [3]) oblicza się prędkość zmęczeniowego pęknięcia. Uwypuklone na rys. 1a prążki stają się wyraźniejsze po nachyleniu repliki o kąt  $+30^\circ$  (rys. 1b); obrócenie o kąt  $-30^\circ$  czyni układy prążków mniej wyraźne, ale wykazuje istnienie licznych pęknięć wtórnych, których ślady pokrywają się z krawędziami prążków (strzałki na rys. 1c). Nie były one wyraźnie widoczne na rys. 1a i 1b. Obserwacje innego wycinka tego samego złomu, którego obraz przedstawiono na rys. 2a, ale pod kątem  $-30^\circ$ , doprowadziły do zaniknięcia obrazu typowych prążków (rys. 2b). Ujawniły się one najlepiej po nachyleniu repliki o kąt  $+30^\circ$  (rys. 2c). Istnieje zatem prawdopodobieństwo niewykrycia istniejących prążków w określonych warunkach doświadczalnych. Ostatnie zdjęcie (na rys. 2c) jest jednocześnie dowodem licznych uskoków i nieregularnej mikrorzeźby powierzchni pęknięcia, czego nie można było dostrzec na dwóch poprzednich zdjęciach (rys. 2a i 2b). Jeszcze inny przykład z badań strefy zmęczeniowej stali St2 pokazano na rys. 3. Na rys. 3a widoczna jest ciemna linia — jakby przekątna zdjęcia, oddzielająca dwa układy prążków. Taka linia jest zwykle właściwa pęknięciom wtórnym, biegnącym od powierzchni głównego pęknięcia w głąb materiału. Nachylenie repliki pod kątem  $40^\circ$  wykazało jednak, że linia ta jest śladem uskoku (spowodowanego pęknięciem wtórnym typu ścięcia — rys. 3b). Zatem sąsiadujące ze sobą układy nie leżą ściśle w jednej płaszczyźnie pęknięcia, jak to można było sądzić na podstawie zdjęcia na rys. 3a. Również nie w jednej płaszczyźnie znajduje się wycinek z plastycznymi prążkami i przejściowa strefa ścięcia do przełomu kruchego, wywołanego obciążeniem udarowym (szczegóły w [2]). Do odwrotnego przypuszczenia skłaniałoby nas zdjęcie na rys. 4a. Nachylenie strefy przejściowej, tworzącej uskok, jest dobrze widoczne na rys. 4c. Zwraca również uwagę zmiana wyrazistości obrazu prążków na poszczególnych zdjęciach. Nadmienmy, że tego rodzaju badania stref przejściowych zyskują na znaczeniu przy poszukiwaniu relacji pomiędzy tzw. strefą wydłużoną (będącą jak gdyby przedłużeniem pęknięcia



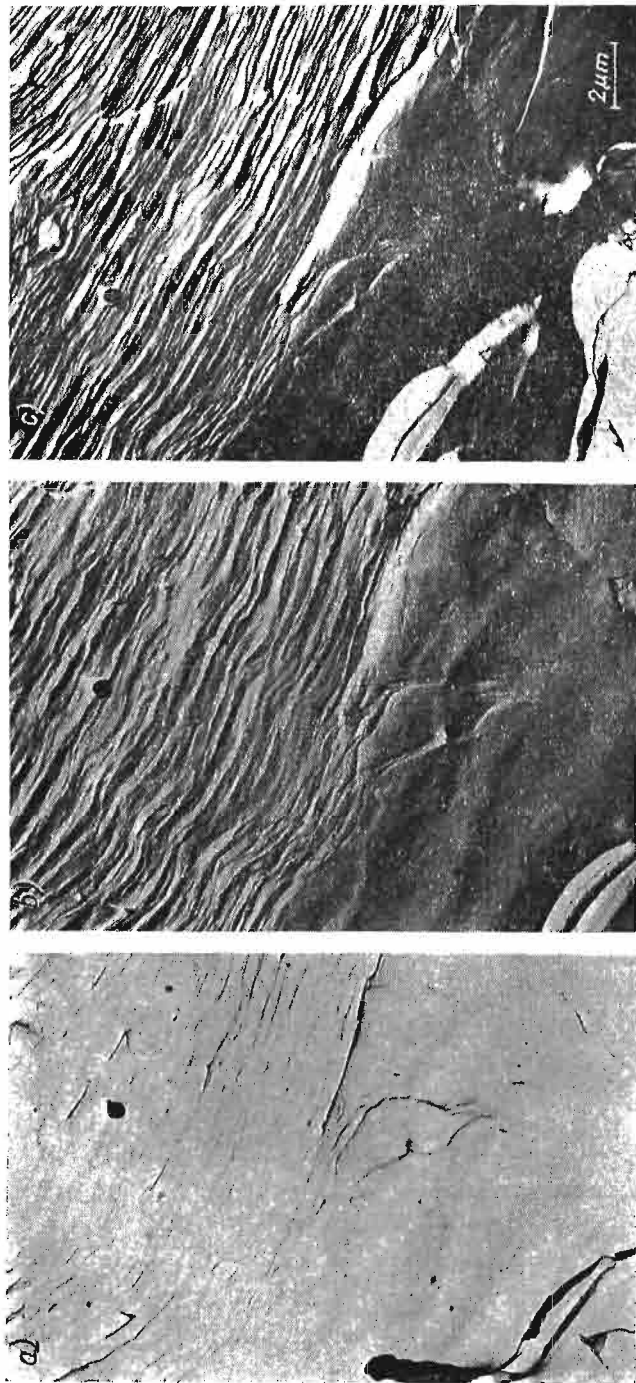
Rys. 1. Prażki na powierzchni zmęczeniowego pęknięcia w stali St2 oglądane przy nachyleniu repliki  $0^\circ$  (a),  $+30^\circ$  (b) i  $-30^\circ$  (c). Większa strzałka wskazuje na kierunek rozwoju pęknięcia, a strzałki mniejsze na pęknięcia wtórne



Rys. 2. Zmiana obrazu prążków zmęczeniowych na złomach stali Si2 przy nachyleniu repliki 0° (a), -30° (b) i +30° (c)



Rys. 3. Wycinek powierzchni zmęczeniowego pęknięcia w stali St2 (a) z uskokiem ujawnionym przez nachylenie repliki o  $40^\circ$  (b)



Rys. 4. Obraz strefy przejściowej od złomu zmęczeniowego do złomu wywołanego udarowym zginaniem w stali S2 przy nachyleniu repliki  $+38^\circ$  (a),  $0^\circ$  (b) i  $-38^\circ$  (c)

zmęczeniowego) i wielkością następującego po niej uskoku a odpornością na pękanie  $K_c$  i wielkością otwarcia pęknięcia.

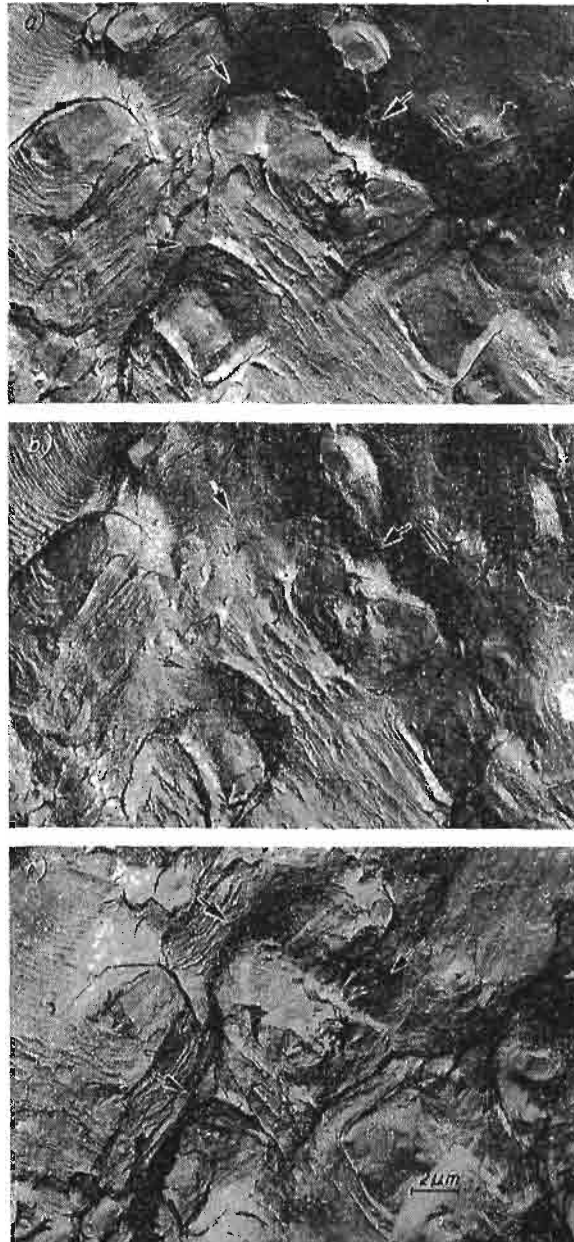
Dalsze przykłady pochodzą z badań powierzchni pęknięć zmęczeniowych w elementach z przesyconego i naturalnie starzonego stopu aluminium PA6, poddawanych wahadłowemu zginaniu przy  $\sigma_a = 8 \text{ kG/mm}^2$ . Uległy one zniszczeniu po  $1,02 \cdot 10^6$  cyklach obciążenia. Obrazy mikrofraktograficzne tych pęknięć (oglądane w mikroskopie JEM-6A) przeanalizowano w [3] oraz w publikacjach [4] i [5]. Kolejno opisywane zdjęcia wycinków tej samej powierzchni pęknięcia pochodzą z obserwacji w mikroskopie Philips EM 300 — podobnie jak zdjęcia przelomów stali St2. Pęknięcia łupliwe wydzieleni faz wtórnych oraz plastyczne prążki w osnowie widać na rys. 5a. Wygląd powierzchni pęknięcia w wydzieleniu w środkowej części zdjęcia sugeruje prawie doskonałe pęknięcie w płaszczyźnie łupliwości. Jednak nachylenie repliki pod kątem  $-30^\circ$  (rys. 4b) i  $+30^\circ$  (rys. 4c) wskazuje na liczne, drobne uskoki rozchodzące się promieniście z ogniska na granicy fazowej wydzielenia i osnowy. Ponadto na rys. 5c uwypuklił się większy uskok niewidoczny na rys. 5a i 5b. Pamiętajmy, że powstawanie wszelkiego rodzaju uskoków na powierzchni pęknięcia przyczynia się do hamowania jego rozwoju. Podobnie, większe uskoki zaznaczają się na zdjęciach na rys. 6. Faliście biegnący uskok na rys. 6c przez całą szerokość zdjęcia jest zupełnie niewidoczny na rys. 6b, a tylko częściowo na rys. 6a. Odzwierciedla się ponadto złożoność i przestrzenność mikrorzeźby powierzchni pęknięcia, wywołana różnymi mechanizmami pęknięcia wydzieleni i osnowy oraz stref do nich przylgających. Uzyskanie takich obrazów ułatwia wyjaśnienie lokalnych zmian kierunku pęknięcia, wskazywanych przez układy prążków. Na podstawie szczególnych oznak na zdjęciach na rys. 7a i 7b można przypuszczać, że powierzchnia pęknięcia w wydzieleniu fazy wtórnej nie pokrywa się z powierzchnią pęknięcia w osnowie, ale dopiero oczywistym dowodem tego jest zdjęcie na rys. 7c, otrzymane przez odpowiednie nachylenie repliki. Zniszczone wydzielenie wystaje ponad otaczającą go strefę, a tzw. ślady wgniecia (opisane w [3]) na poboczu wydzieleni w strefie granicy międzyfazowej stanowią świadectwo « wyciągania » osnowy wokół wydzielenia. Zatem wystająca kolumienka wydzielenia, jak gdyby łącząca obie, przylgające do siebie powierzchnie pęknięcia, sprzyja hamowaniu pęknięcia. Zaznaczmy jednak wyraźnie, że przy innym usytuowaniu powierzchni pęknięcia w wydzieleniu, pokrywającej się na ogół z powierzchnią pęknięcia głównego, to ostatnie jest zwykle przyspieszane przez pękanie wydzieleni faz wtórnych.

Kierunki dalszych badań powierzchni pęknięć wytyczają dotychczasowe niepełne wiadomości o relacji: prążki a prędkość pęknięcia w warunkach obciążeń eksploatacyjnych, a więc — obciążeń o widmach złożonych, przypadkowych, z różnego rodzaju przeciążeniami i różną kolejnością ich występowania; nie znamy również dokładniej tej relacji w strefach inicjacji pęknięć czy w elementach z naprężeniami własnymi. Interesujące byłoby też uchwycenie wpływu naprężenia średniego na układ prążków. Nie dysponujemy wystarczającymi wiadomościami o rozwoju pęknięcia w próżni, które pozwoliłoby wyjaśnić sugestie prawdopodobnej, jak gdyby «wtórnej kohezji» ścianek pęknięć, w różnych ośrodkach i przy wysokich ciśnieniach. Kontynuacja badań zjawisk zachodzących w warstwie wierzchniej pęknięć ułatwi ich sprzężenie z budową prążków. Istnieje pytanie, czy tzw. zaciskanie się pęknięcia zaznacza się wyraźnie w mikrobudowie złomu. Badania powinny zdążać w kierunku odtwarzania budowy prążków uszkodzonych w warunkach atmosferycznych.

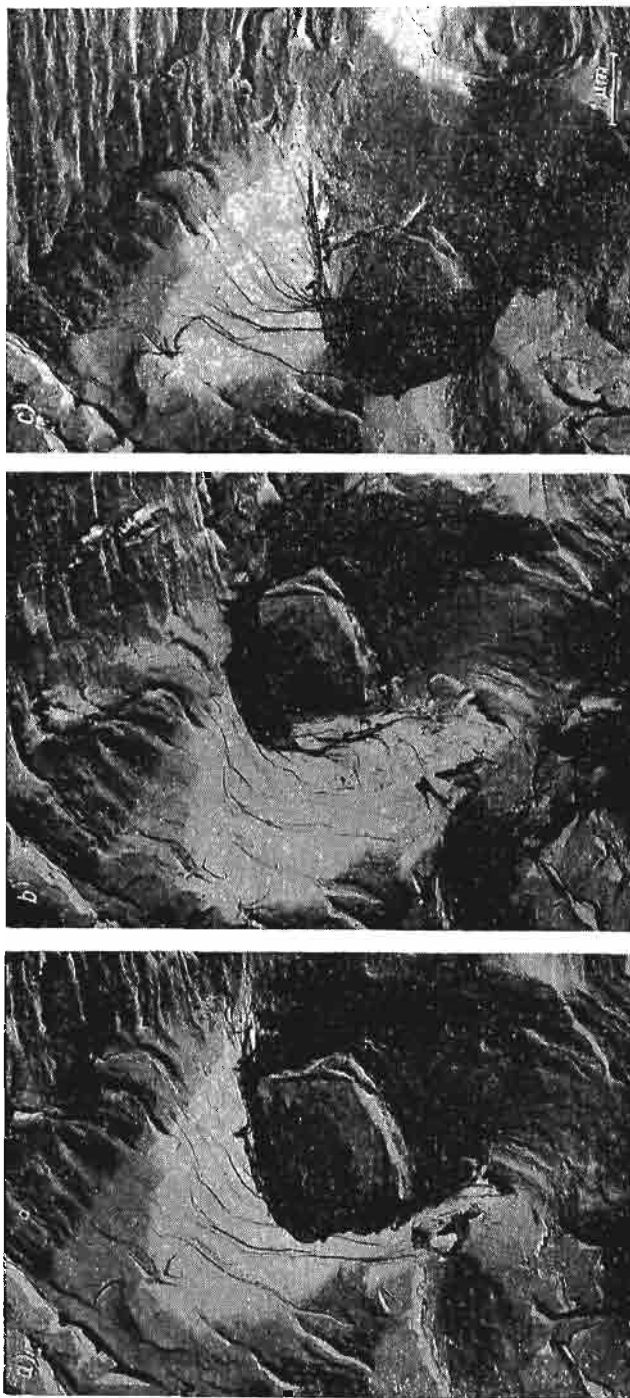




Rys. 5. Wycinek powierzchni złomu zmęczeniowego stopu PA6 z pęknięciami łupliwymi w wydzieleniach faz wtórnych, oglądany przy nachyleniu repliki  $0^\circ$  (a),  $-30^\circ$  (b) i  $+30^\circ$  (c). Strzałki na rys. 5c wskazują na większy uskoki



Rys. 6. Wycinek powierzchni złomu zmęczeniowego stopu PA6 z różnie usytuowanymi układami prążków przy nachyleniu repliki  $0^\circ$  (a),  $+30^\circ$  (b) i  $-30^\circ$  (c). Strzałki wskazują na falisty, większy uskok, widoczny najlepiej na rys. 6c



Rys. 7. Powierzchnia złomu zmęczeniowego stopu PA6 z pęknięciem łupliwym w wydzieleniu fazy wtórnej przy nachyleniu replik  $0^\circ$  (a),  $-30^\circ$  (b) i  $+30^\circ$  (c); na ostatnim zdjęciu widać wystającą kolumnkę wydzielenia ponad powierzchnię głównego pęknięcia

rycznych (czy w innych ośrodkach); w kierunku polepszenia obrazu skutków zmęczeniowego działania w zahartowanych elementach stalowych. W tych właśnie problemowo nakreślonych badaniach, stosowanie uzupełniających metod badawczych, jak przedstawione nachylanie replik w TEM, przyczyni się do bardzo istotnego wzbogacenia tak bardzo poszukiwanych informacji dla rekonstruowania historii obciążenia — na podstawie mikrobudowy powierzchni pęknięć zmęczeniowych.

#### Literatura cytowana w tekście

1. D. BROEK, *Some contributions of electron fractography to the theory of fracture*, National Aerospace Laboratory NLR the Netherlands. NLR TR 72029, 1973.
2. A. KOCAŃDA, S. KOCAŃDA, J. KOZUBOWSKI, *Mikrofraktografia strefy przejściowej pęknięcia w stali węglowej wywołanego zmiennym i udarowym zginaniem*, Biuletyn WAT, 9 (1972) 33 - 39.
3. S. KOCAŃDA, *Zmęczeniowe niszczenie metali*, WNT, Warszawa 1972.
4. S. KOCAŃDA, J. KOZUBOWSKI, *Ermüdungsrisserverlauf und Fraktographie von Ermüdungsbrüchen in Aluminium — und Kupferlegierungen*, 3 International Congress on Fracture, München 1973, T. IV, Ref. III-225.
5. S. KOCAŃDA, J. KOZUBOWSKI, *Ermüdungsbrüche von Ausscheidungen in Aluminiumlegierungen*, Zeitschrift f. Metallkunde, 6 (1974) 453 - 456.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA, WARSZAWA  
POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 listopada 1974 r.*



PRZEPIŹY W CIECZY LEPKIEJ W SZCZELINIE  
MIĘDZY POWIERZCHNIAMI OBROTOWYMI: NIERUCHOMĄ  
I DRGAJĄCĄ SKRĘTNIE

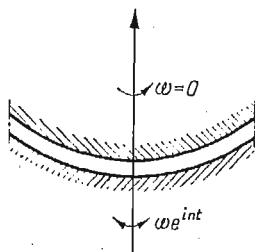
EDWARD WALICKI (BYDGOSZCZ)

1. Wstę p

Laminarny ustalony przepły w cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi tarczami, stożkami oraz powierzchniami obrotowymi od dawna zwracał uwagę ze względu na możliwości wielorakich zastosowań praktycznych; w pracach [1, 13, 14] szerzej omówiono literaturę dotyczącą tego rodzaju ustalonych przepły wów.

Ustalone przepły wy między wirującymi powierzchniami krzywoliniowymi były badane w pracach [4, 13, 14].

W pracach [2, 3, 7 - 12, 15] zbadano przepły wy wywołane drganiami skrętnymi; prace [2, 3, 7, 9, 10, 12] zawierają badania przepły wów między płaskimi tarczami; praca [15] daje opis przepły wu między równoległymi powierzchniami stożkowymi. Prace [8, 11]



Rys. 1

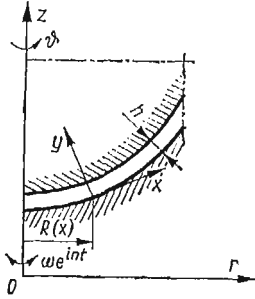
przedstawiają opisy badań przepły wów w szczelinach między współosiowymi powierzchniami kulistymi, z których jedna wykonuje drgania skrętnie. Celem niniejszej pracy jest zbadanie nieustalonego przepły wu cieczy lepkiej w szczelinie o stałej grubości między równoległymi, nieograniczonymi powierzchniami, z których górna jest nieruchoma (rys. 1), a dolna wykonuje drgania skrętnie dookoła wspólnej osi symetrii obu tych powierzchni.

2. Równania ruchu

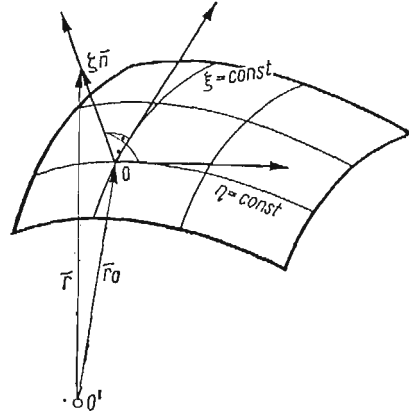
Obszar przepły wu cieczy pokazany jest na rys. 2. Dolna, ruchoma powierzchnia opisana jest funkcją  $R(x)$  oznaczającą promień tej powierzchni. Grubość szczeliny  $h$ , tj. odległość między zakrzywionymi powierzchniami mierzona wzdłuż normalnej do ruchomej

powierzchni, jest wielkością stałą. Do rozważań użyjemy krzywoliniowego ortogonalnego układu współrzędnych  $x, \vartheta, y$ , związanego z dolną powierzchnią. Parametrami przepływu są składowe prędkości  $v_x, v_\vartheta, v_y$  oraz ciśnienie  $p$ . Ze względu na istniejącą osiową symetrię parametry przepływu nie zależą od kąta  $\vartheta$ .

Równaniami opisującymi przepływ cieczy są równanie ciągłości oraz równanie Naviera i Stokesa wyrażone w przyjętym układzie współrzędnych [5].



Rys. 2



Rys. 3

Aby otrzymać odpowiednią postać tych równań rozważmy przedstawiony na rys. 3 element powierzchni ograniczającej przepływ z zaznaczonymi liniami  $\xi = \text{const}$  oraz  $\eta = \text{const}$  tworzącymi ortogonalną siatkę. Wektorowe równanie rozważanej powierzchni można przedstawić w postaci:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_0(\xi, \eta).$$

Położenie dowolnego punktu przestrzeni — leżącego w odległości  $\zeta$  mierzonej wzdłuż normalnej — określa wektor

$$\bar{r} = \bar{r}_0(\xi, \eta) + \zeta \bar{n}(\xi, \eta).$$

Kwadrat elementu długości łuku w ortogonalnym układzie współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$  jest równy

$$ds^2 = (dr)^2 = \left( \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi} + \zeta \frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial \bar{n}}{\partial \eta} \right)^2 d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Zakładając, że współrzędne  $\xi$  i  $\eta$  pokrywają się z liniami krzywiznowymi powierzchni oraz stosując wzory Rodrigues'a [17]:

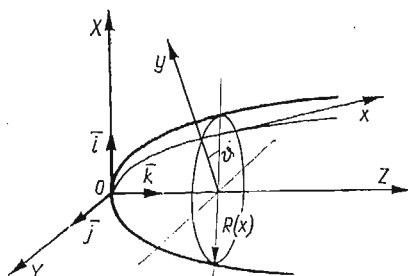
$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \xi} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \bar{n}}{\partial \eta} = \frac{1}{R_2} \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \eta}$$

mamy

$$(2.1) \quad ds^2 = \left( \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \xi} \right)^2 \left( 1 + \frac{\zeta}{R_1} \right)^2 d\xi^2 + \left( \frac{\partial \bar{r}_0}{\partial \eta} \right)^2 \left( 1 + \frac{\zeta}{R_2} \right)^2 d\eta^2 + d\zeta^2;$$

gdzie  $R_1, R_2$  oznaczają odpowiednie promienie krzywizny powierzchni. Dla powierzchni obrotowej przedstawionej na rys. 4 w układzie współrzędnych  $X, Y, Z$  równanie wektorowe przyjmuje postać [16]

$$(2.2) \quad \bar{r}_0 = \bar{i}R(x)\cos\vartheta + \bar{j}R(x)\sin\vartheta + \bar{k}Z(x).$$



Rys. 4

Podstawiając (2.2) do (2.1) i przyjmując

$$\xi = x, \quad \eta = \vartheta, \quad \zeta = y,$$

otrzymamy po prostych wyliczeniach

$$(2.3) \quad ds^2 = \left(1 + \frac{y'}{R_1}\right)^2 dx^2 + R^2 \left(1 + \frac{y'}{R_2}\right)^2 d\vartheta^2 + dy^2,$$

przy czym  $R_1, R_2 \geq R$ .

Wracając do przepływu stanowiącego temat pracy zauważmy, że  $y \leq h$ ; przy założeniu, że  $h \ll R$  wyrażenie określające kwadrat elementu liniowego w układzie współrzędnych  $x, \vartheta, y$  można zapisać w postaci:

$$(2.4) \quad ds^2 = dx^2 + R^2 d\vartheta^2 + dy^2.$$

Zatem współczynniki Lamégo będą równe\*)

$$H_x = 1, \quad H_\vartheta = R(x), \quad H_y = 1.$$

Posługując się nimi można przedstawić równania ruchu cieczy lepkiej w przyjętym do rozważań układzie współrzędnych krzywoliniowych dla osiowej symetrii w postaci

$$(2.5) \quad \frac{\partial \vartheta_x}{\partial t} + \vartheta_x \frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \vartheta_y \frac{\partial \vartheta_x}{\partial y} - \frac{R'}{R} \vartheta_\vartheta^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{R''}{R} v_x - \frac{R'^2}{R^2} v_x \right),$$

\*) W przypadku, gdy równanie (2.2) dane jest w postaci

$$\bar{r}_0 = \bar{i}R\cos\vartheta + \bar{j}R\sin\vartheta + \bar{k}Z(R),$$

współczynniki Lamégo są równe

$$H_x = \left[1 + \left(\frac{dZ}{dR}\right)^2\right]^{1/2}, \quad H_\vartheta = R, \quad H_y = 1.$$



$$(2.6) \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{R'}{R} v_x v_0 = \\ = \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{R''}{R} v_0 - \frac{R'^2}{R^2} v_0 \right),$$

$$(2.7) \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{R'}{R} \frac{\partial v_y}{\partial x} \right),$$

$$(2.8) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial(Rv_x)}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

gdzie przecinkiem oznaczono operację różniczkowania względem zmiennej  $x$ .

Warunki brzegowe dla składowych prędkości są następujące:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} v_x = v_y = 0, \quad v_0 = R\omega e^{int}; \quad \text{dla } y = 0, \\ v_x = v_y = v_0 = 0 \quad \text{dla } y = h. \end{aligned}$$

Poczynione wyżej założenia, że  $h \ll R(x)$  można wykorzystać do oszacowania wielkości poszczególnych składników równań (2.5) - (2.7). W tym celu rozważmy pewien przekrój szczeliny określony współrzędną  $x = L$  (przy czym zakładamy, że  $R(L) \gg h$ ). Prędkość obwodowa w tym przekroju jest  $v_0 = O(V_0)$ , a prędkość promieniowa jest  $v_x = O\left(V_0 \frac{h}{R}\right)$  [18], gdzie oznaczono dla uproszczenia  $V_0 = \omega R(L)$ .

Z równania ciągłości wynika, że  $v_y = O\left(V_0 \frac{h^2}{R^2}\right)$ . Wprowadzając powyższe oszacowania do równań (2.5) - (2.7) i pomijając w każdym z nich człony małe wyższego rzędu sprowadzimy je do postaci

$$(2.10) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{R'}{R} v_0^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2},$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}.$$

### 3. Całki równań ruchu

Rozwiązań równań ruchu (2.10) - (2.12), przy założeniu  $h = \text{const}$ , będziemy poszukiwać w postaci zależności funkcyjnych spełniających równanie ciągłości (2.8), mianowicie:

$$(3.1) \quad v_0 = R\omega e^{i\tau} G(\eta),$$

$$(3.2) \quad v_x = \frac{RR'\omega^2}{n} \frac{\partial F(\eta, \tau)}{\partial \eta},$$

$$(3.3) \quad v_y = -\frac{(2R'^2 + RR'')\omega^2 h}{n} F(\eta, \tau);$$

dla rozkładu ciśnień przyjmujemy

$$(3.4) \quad \frac{p}{\rho} = (2R'^2 + RR'')\omega^2 h^2 P(\eta, \tau) + \frac{1}{2}R^2\omega^2 K(\tau),$$

gdzie dla uproszczenia oznaczono

$$(3.5) \quad \eta = \frac{y}{h}; \quad \tau = nt.$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równań ruchu (2.10) - (2.12) otrzymamy odpowiednio:

$$(3.6) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \tau} - (Ge^{i\tau})^2 = -K(\tau) + \frac{1}{N} \frac{\partial^3 F}{\partial \eta^3},$$

$$(3.7) \quad \frac{d^2 G}{d\eta^2} - iNG = 0,$$

$$(3.8) \quad -\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{1}{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}.$$

W powyższych równaniach symbolem  $N$  oznaczono liczbę Reynoldsa

$$N = \frac{nh^2}{\nu}.$$

Warunki brzegowe (2.9) przyjmują teraz postać

$$(3.9) \quad \begin{aligned} F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad G = 1 & \quad \text{dla } \eta = 0, \\ F = \frac{\partial F}{\partial \eta} = G = 0 & \quad \text{dla } \eta = 1. \end{aligned}$$

Rozwiązanie równania (3.7) można przedstawić wzorem

$$(3.10) \quad G = \lambda_1 - i\lambda_2,$$

gdzie:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\operatorname{ch} \alpha(2-\eta) \cos \alpha \eta - \operatorname{ch} \alpha \eta \cos \alpha(2-\eta)}{\Phi}, \\ \lambda_2 &= \frac{\operatorname{sh} \alpha(2-\eta) \sin \alpha \eta - \operatorname{sh} \alpha \eta \sin \alpha(2-\eta)}{\Phi} \end{aligned}$$

oraz

$$\Phi = \operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\alpha, \quad \alpha^2 = \frac{N}{2}.$$

Wzór (3.1) po uwzględnieniu (3.10) prowadzi w zapisie rzeczywistym do zależności:

$$(3.12) \quad v_0 = R\omega \operatorname{Re}[G(\eta)e^{i\tau}] = R\omega(\lambda_1 \cos \tau + \lambda_2 \sin \tau).$$

Dla małych liczb Reynoldsa mamy

$$(3.13) \quad v_0 \approx R\omega(1-\eta) \left\{ \left[ 1 - \frac{N^2}{360} \eta(8+8\eta-12\eta^2+3\eta^3) \right] \cos \tau + \frac{N\eta(2-\eta)}{6} \left( 1 - \frac{4+6\eta-3\eta^2}{30} \right) \sin \tau \right\},$$

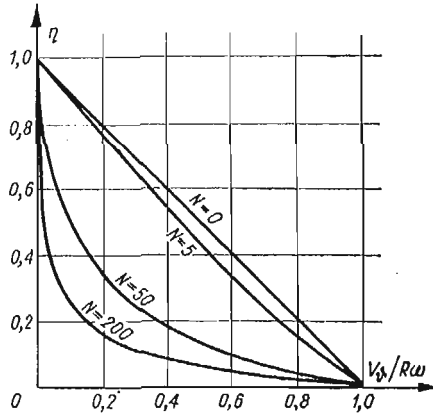
natomiast dla dużych liczb Reynoldsa otrzymamy

$$(3.14) \quad v_0 \approx R\omega e^{-\alpha\eta} \cos(\tau - \alpha\eta).$$

Gdy  $N = 0$  profil prędkości obwodowej jest prostoliniowy i określony zależnością

$$(3.15) \quad v_0 = R\omega(1 - \eta).$$

Wynik ten pokrywa się z rezultatami wcześniejszych badań [13, 14] dotyczących przepływu ustalonego w szczelinie między wirującymi powierzchniami obwodowymi. Profile prędkości  $v_0$  dla różnych wartości liczby Reynoldsa pokazano na rys. 5.



Rys. 5

Naprężenia tarcia na zakrzywionych powierzchniach dla małych liczb Reynoldsa są odpowiednio równe:

na dolnej powierzchni

$$\sigma_0 = \mu \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)_{y=0} = - \frac{\mu R\omega}{h} \left[ \left( 1 + \frac{N^2}{45} \right) \cos \tau - \frac{N}{3} \sin \tau \right],$$

na górnej powierzchni

$$\sigma_h = \mu \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)_{y=h} = - \frac{\mu R\omega}{h} \left[ \left( 1 - \frac{7N^2}{360} \right) \cos \tau + \frac{N}{6} \sin \tau \right].$$

Dla dużych zaś liczb Reynoldsa otrzymamy

$$\sigma_0 = - \frac{\mu R\omega}{h} \alpha (\cos \tau - \sin \tau),$$

$$\sigma_h = - \frac{\mu R\omega}{h} \alpha [\cos(\tau - \alpha) - \sin(\tau - \alpha)].$$

Profile naprężeń panujących na obu powierzchniach dla różnych liczb Reynoldsa przedstawiono (dla dolnej powierzchni) na rys. 6 i (dla górnej powierzchni) na rys. 7.

Wyrażenie

$$[\operatorname{Re}(Ge^{i\tau})]^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\lambda_1 - i\lambda_2]^2 e^{2i\tau}$$

sugeruje istnienie rozwiązania równania (3.6) w postaci sum funkcji

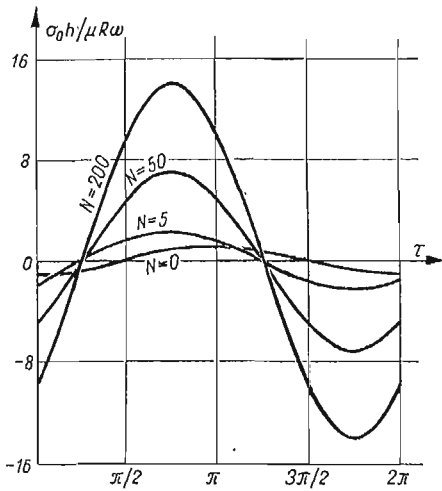
$$(3.16) \quad F(\eta, \tau) = \Psi(\eta) + H(\eta)e^{2i\tau}, \quad K(\tau) = K_0 + K_1 e^{2i\tau}.$$

Podstawiając powyższe wyrażenia do równania (3.6) otrzymamy dla wyznaczenia  $\Psi(\eta)$  oraz  $H(\eta)$  następujące równania różniczkowe:

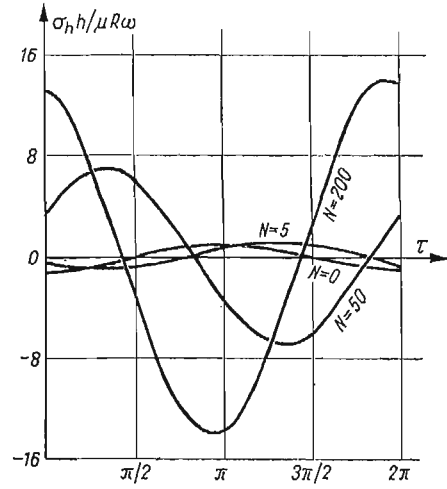
$$(3.17) \quad \Psi'''' = NK_0 - \frac{N}{2} \frac{\operatorname{ch} 2\alpha(1-\eta) - \cos 2\alpha(1-\eta)}{\Phi},$$

$$(3.18) \quad H'''' - 2iNH' = NK_1 - N \frac{\operatorname{sh} 2\alpha(1-i)[\operatorname{ch} 2\alpha(1+i)(1-\eta) - 1]}{\Phi},$$

utaj przecinkiem oznaczono operację różniczkowania względem zmiennej  $\eta$ .



Rys. 6



Rys. 7

Warunki brzegowe (3.9) w odniesieniu do funkcji  $\Psi$  oraz  $H$  można wyrazić w postaci

$$\Psi(0) = \Psi'(0) = \Psi(1) = \Psi'(1) = 0,$$

$$H(0) = H'(0) = H(1) = H'(1) = 0.$$

Rozwiązania równań (3.17) oraz (3.18) określone są wyrażeniami

$$(3.19) \quad \Psi'(\eta) = -\frac{NK_0}{2} \eta(1-\eta) - \frac{N}{8\alpha^2\Phi} [\operatorname{ch} 2\alpha(1-\eta) + \cos 2\alpha(1-\eta)] + \\ + \frac{N}{8\alpha^2\Phi} [(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha)(1-\eta) + 2\eta],$$

$$(3.20) \quad \Psi(\eta) = -\frac{NK_0}{12} \eta^2(3-2\eta) + \frac{N}{16\alpha^3\Phi} [\operatorname{sh} 2\alpha(1-\eta) - \operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha(1-\eta) - \\ - \sin 2\alpha] + \frac{N}{16\alpha^2\Phi} \eta [(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha)(2-\eta) + 2\eta],$$

$$(3.21) \quad K_0 = \frac{3}{4\alpha^2\Phi} (\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha + 2) - \frac{3}{4\alpha^3\Phi} (\operatorname{sh} 2\alpha + \sin 2\alpha)$$

oraz

$$(3.22) \quad H'(\eta) = \frac{K_1 + A}{2i} \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - 1 \right] + \\ + \frac{A}{2i} \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{ch} 2\beta \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - \operatorname{ch} 2\beta (1 - \eta) \right],$$

$$(3.23) \quad H(\eta) = \frac{K_1 + A}{2\sqrt{2} \beta i} \left[ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta \eta - 1 + \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - \sqrt{2} \beta \eta \right] + \\ + \frac{A}{2\sqrt{2} \beta i} \left\{ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta \eta - 1 + \operatorname{ch} 2\beta [\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)]}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}}{2} [\operatorname{sh} 2\beta (1 - \eta) - \operatorname{sh} 2\beta] \right\},$$

$$(3.24) \quad K_1 = A \left[ \frac{(\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - 1)(\operatorname{ch} 2\beta + 1) - \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \operatorname{sh} 2\beta}{2(\operatorname{ch} \sqrt{2} \beta - 1) - \sqrt{2} \beta \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - 1 \right],$$

gdzie oznaczono

$$A = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha (1 - i)}{\Phi^2}, \quad \beta = \alpha (1 + i).$$

Rozwijając powyższe zależności w szereg potęgowy i pomijając wyrazy zawierające wielkości małe wyższego rzędu, otrzymamy dla małych liczb Reynoldsa następujące wyrażenia:

$$K_0 \approx \frac{3}{20},$$

$$\Psi'(\eta) \approx \frac{N\eta(1-\eta)(6-15\eta+5\eta^2)}{120},$$

$$\Psi(\eta) \approx \frac{N\eta^2(1-\eta)^2(3-\eta)}{120}$$

oraz

$$K_1 \approx \frac{3}{20} - \frac{109Ni}{4200},$$

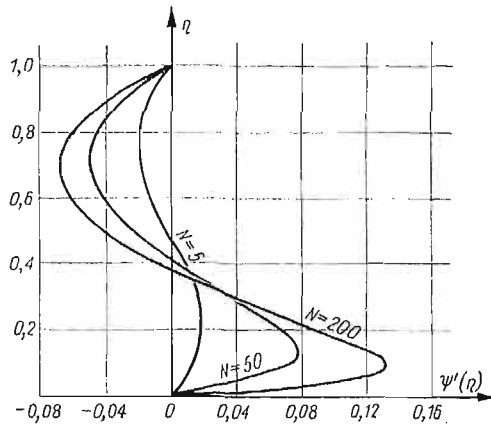
$$H'(\eta) \approx \frac{N\eta(1-\eta)(6-15\eta+5\eta^2)}{120},$$

$$H(\eta) = \frac{N\eta^2(1-\eta)^2(3-\eta)}{120}.$$

Na rys. 8 przedstawiono graficznie przebieg zmienności funkcji  $\Psi'(\eta)$  dla różnych wartości liczby Reynoldsa; funkcja ta, jak wynika z wzorów (3.2) i (3.16), określa ustaloną część składową prędkości  $v_x$ .

Aby wyznaczyć rozkład ciśnień w poprzek szczeliny, wróćmy do równania (3.8), które przepiszemy w postaci

$$(3.25) \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{1}{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{\partial F}{\partial \tau}.$$



Rys. 8

Uwzględniając pierwszą z zależności (3.16) możemy przedstawić rozwiązanie równania (3.25) w formie sumy

$$(3.26) \quad P(\eta, \tau) = P_1(\eta) + P_2(\eta)e^{2i\tau}.$$

Po podstawieniu (3.26) do (3.25) otrzymamy

$$(3.27) \quad P_1' = \frac{1}{N} \Psi''',$$

$$(3.28) \quad P_2' = \frac{1}{N} H'' - 2iH.$$

Całkując te równania przy spełnieniu warunków brzegowych:

$$P_1(0) = II_1, \quad P_2(0) = II_2,$$

wyznamy zależności:

$$(3.29) \quad P_1(\eta) = II_1 - \frac{K_0}{2} \eta(1-\eta) - \frac{1}{8\alpha^2 \Phi} [\operatorname{ch} 2\alpha(1-\eta) + \cos 2\alpha(1-\eta)] + \\ + \frac{1}{8\alpha^2 \Phi} [(\operatorname{ch} 2\alpha + \cos 2\alpha)(1-\eta) + 2\eta],$$

$$\begin{aligned}
 (3.30) \quad P_2(\eta) = & \Pi_2 + \frac{K_1 + A}{2iN} \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - 1 \right] + \\
 & + \frac{A}{2iN} \left[ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{ch} 2\beta \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} - \operatorname{ch} 2\beta (1 - \eta) \right] - \\
 & - \frac{K_1 + 2A}{2\beta^2} \left\{ \frac{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta \eta - \sqrt{2} \beta \eta + \operatorname{ch} 2\beta [\sqrt{2} \beta \eta \operatorname{ch} \sqrt{2} \beta + \operatorname{sh} \sqrt{2} \beta (1 - \eta)]}{\operatorname{sh} \sqrt{2} \beta} \right\} + \\
 & + \frac{K_1 + A}{2\sqrt{2}} \eta^2 + \frac{A}{2\beta} \left[ \frac{1}{2\beta} \operatorname{ch} 2\beta (1 - \eta) + \eta \operatorname{sh} 2\beta \right] + \frac{K_1 + A}{2\beta^2} \operatorname{ctgh} \sqrt{2} \beta + \frac{A}{4\beta^2} \operatorname{ch} 2\beta.
 \end{aligned}$$

#### 4. Uwagi końcowe

Wzory wprowadzone w poprzednim punkcie pracy określają pole prędkości i pole ciśnień w szczelinie o stałej grubości  $h = \text{const}$ , między powierzchniami o dowolnym kształcie.

Przedstawione tutaj wyniki są zgodne z wynikami cytowanych wcześniej prac. Podstawiając we wzorach (3.1) - (3.4) odpowiednie zależności dla  $R(x)$  otrzymać możemy przepływy w szczelinie między tarczami, stożkami, bądź też powierzchniami kulistymi.

Z postaci otrzymanych rozwiązań wynika, że dla przyjętego modelu przepływu profile prędkości i ciśnień w dowolnym przekroju poprzecznym szczeliny są niezależne od kształtu powierzchni wywołujących ruch cieczy.

Z przytoczonych wykresów dla składowych prędkości  $v_\theta$  oraz  $v_x$  wynika, że ze wzrostem liczby Reynoldsa przepływ «zbliża» się do drgającej powierzchni, na której zaczyna się pojawiać warstwa przyścienna.

Otrzymane w pracy rozwiązania — zgodnie z założeniem, że  $h \ll R$  — zachowują swoją ważność dla dowolnego kształtu szczeliny jedynie w dużych odległościach od osi obrotu. W przypadku szczególnym, gdy — począwszy od pewnej wartości  $x = l$  — takiej, że jeszcze  $h \ll R(l)$  zachodzą zależności  $R(x) \approx x$ ,  $R'(x) \approx 1$ , tzn. gdy dla  $0 \leq x \leq l$  powierzchnie tworzące szczelinę tylko nieznacznie różnią się od płaszczyzn, rozwiązanie zachowuje swoją ważność również w pobliżu osi obrotu. Bowiem dla  $R(x) = x$ ,  $R'(x) = 1$ , a rozwiązanie pokrywa się z wynikami uzyskanymi w pracy [2] dla przepływu między drgającymi skrajnie płaskimi tarczami.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Л. А. Дорфман, *Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел*, Москва 1960.
2. S. ROSENBLAT, *Flow between torsionally oscillating disks*, J. Fluid. Mech, 2, 8 (1960).
3. S. DATTA, *Hydromagnetic flow between torsionally oscillating discs*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci techn., 11 - 12, 12 (1965).
4. K. W. Mc ALISTER, W. RICE, *Throughflows between rotating surfaces of revolution, having similitartiy solutions*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Series E, 4, 37, (1970).
5. W. J. PROSNAK, *Mechanika płynów*, PWN, Warszawa 1970.

6. A. SZANIAWSKI, *Przepływ lepkiej cieczy nieściśliwej w szczelinie stożkowego łożyska ślizgowego*, Prace IPPT 15/1970.
7. R. C. CHANAUD, *Observations of oscillatory radial flow between a fixed disk and a free disk*, J. Acoust. Soc. Amer., 47 5, (1970) 2.
8. H. F. KORMAN, L. R. KOVAL, *Energy dissipation in an oscillating spherical annulus filled with a viscous fluid*, AIAA Journal, 7, 9 (1971).
9. C. JACOBS, *Transient motions produced by disks oscillating torsionally about a state of rigid rotation*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., 2, 24 (1971).
10. J.-M. PIAU, *Ecoulement radial non stationnaire entre une paroi fixe et une paroi oscillante; stabilité des paliers à air*, C. R. Acad. Sci., 22, 273 (1971).
11. С. Г. ДАДАЕВ, *Статистические характеристики гибридного сферического газового подшипника с vibrating surface*, Сб. науч. тр. Челябинск. политехн. ин-та, 1971, вып. 101.
12. ABDUL ALEEM KHAN MOHD, *Hydromagnetic flow of an electrically conducting fluid due to unsteady rotation of a porous disk over a fixed disk*, Indian J. Pure and Appl. Math., 4, 3 (1972).
13. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Mech. Teor. i Stos., 1, 12 (1974).
14. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej — o zmiennej lepkości — w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi*, Zeszyty Naukowe AT-R w Bydgoszczy, Mechanika 8 (1975).
15. E. WALICKI, *Przepływ cieczy lepkiej między drgającymi skrętnie powierzchniami stożkowymi*, Zeszyty Naukowe AT-R w Bydgoszczy, Mechanika, 8 (1975).
16. E. KARAŚKIEWICZ, *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Warszawa 1971.
17. А. П. НОРДЕН, *Теория поверхностей*, Москва 1956.
18. Н. А. СЛЕЗКИН, *Динамика вязкой жидкости*, Москва 1955.

Резюме

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВРАЩЕНИЯ ИЗ КОТОРЫХ ОДНА НЕПОДВИЖНА А ВТОРАЯ СОВЕРШАЕТ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В работе рассматривается течение вязкой жидкости в щели между параллельными криволинейными поверхностями вращения с вертикальной осью симметрии, причем, верхняя поверхность неподвижна а нижняя совершает крутильные колебания.

Для решения задачи применяются линеаризованные уравнения движения вязкой жидкости для осесимметрического течения в системе криволинейных координат  $x, \vartheta, y$  связанных с нижней поверхностью.

Получены формулы определяющие такие параметры течения как компоненты скорости  $v_x, v_\vartheta, v_y$  и давление  $p$ .

Summary

VISCOUS FLUID FLOW THROUGH IN A SLOT BETWEEN TWO SURFACES OF REVOLUTION: ONE OF THEM FIXED AND THE OTHER ONE — TORSIONALLY OSCILLATING

Laminar flow of an incompressible viscous fluid is considered in a slot between two parallel surfaces of revolution having vertical axis of symmetry: the upper one is fixed and the lower one — torsionally oscillating. The linearized equations of motion of the viscous fluid flow for axial symmetry are written in the intrinsic curvilinear orthogonal coordinate system  $x, \vartheta, y$  linked with the lower surface. As a result, the formulae defining the velocity components  $v_x, v_\vartheta, v_y$  and pressure  $p$  have been obtained.

AKADEMIA TECHNICZNO-ROLNICZA, BYDGOSZCZ

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1974 r.; w wersji ostatecznej — dnia 5 stycznia 1975 r.





O PEWNYCH MOŻLIWOŚCIACH ZASTOSOWANIA  
TARCZ ŚCISKANYCH W BADANIACH MATERIAŁOWYCH

HANNA OLESIAK, ANDRZEJ P. WILCZYŃSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

W niektórych przypadkach badania własności mechanicznych materiałów konstrukcyjnych stosowanie ogólnie znanych metod pomiarowych jest bardzo utrudnione i niewygodne. Dotyczy to szczególnie badań statycznych tworzyw sztucznych, gdzie czas pomiaru i warunki otoczenia ingerują w sposób o wiele bardziej wyraźny niż w przypadku metali. Pociąga to za sobą konieczność zamykania układów pomiarowych w komorach klimatycznych i związane z tym dążenie do miniaturyzacji próbek i stanowisk. Z tego powodu rozważymy możliwość zastosowania prostej metody pomiarowej, pozwalającej na wyznaczenie dwóch stałych materiałowych. Dodatkowym wymaganiem, rzadko dającym się spełnić w praktyce, jest użycie jednego i tego samego urządzenia pomiarowego do wyznaczania obu stałych sprężystości materiałów izotropowych. Wykażemy, że wymaganie to może być uwzględnione przy proponowanej metodzie pomiarowej. Dla dostatecznie długiego, w porównaniu z czasem przykładania obciążenia, okresu próby, obciążenie można przyjąć w postaci  $P = P_0 H(t)$  (gdzie  $H(t)$  jest funkcją Heavinde'a) i stosując transformację Laplace'a-Carsona wykorzystać istnienie analogii sprężysto-lepkosprężystej pozwalającej bezpośrednio użyć rozwiązanie do wyznaczenia funkcji pełzania  $\varphi(t) = \frac{1}{E(t)}$ .

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważamy izotropową tarczę sprężystą o promieniu  $R$  i grubości  $b$  ściskaną siłą  $P$ , między dwoma nieodkształcalnymi płytkami. Wielkościami, które nas interesują są zmiany średnic tarczy z otworem (promień otworu  $r = a$ ), oraz tarczy pełnej. Podamy rozwiązanie dla tarczy z otworem, drugi przypadek otrzymamy przez przejście graniczne.

W celu uproszczenia rozwiązania przyjmujemy na powierzchni styku eliptyczny rozkład nacisków dla zagadnienia kontaktu sprężystego walca z nieodkształcalną płaszczyzną, znane jako zadanie Hertza (rys. 1).

Rozkład ten można przedstawić w postaci

$$(1) \quad p(\varphi) = p_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2}, \quad \varphi \leq \alpha,$$

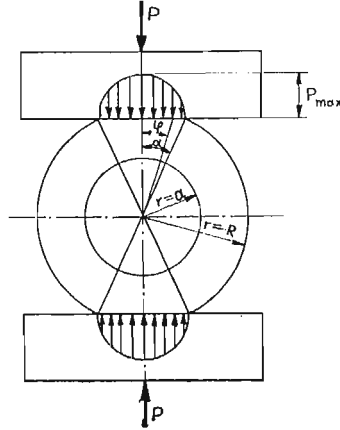
gdzie  $\alpha$  jest kątem ograniczającym obszar styku tarczy z płytą i zgodnie z rozwiązaniem

zadania Herta wynosi

$$\alpha = \sqrt{\frac{4P}{\pi b R E}},$$

$$P_{\max} = \frac{2P}{\pi \alpha R b},$$

$$P = \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\varphi) b R d\varphi.$$



Rys. 1

Do dalszych rozważań wprowadzimy współrzędne bezwymiarowe

$$(2) \quad x = \frac{r}{R}, \quad f = \left(\frac{a}{R}\right)^2.$$

Funkcja naprężeń dla rozpatrywanego przypadku ma postać [1]

$$(3) \quad \Phi = R^2 \left\{ A_0 x^2 + B_0 \ln x + \sum_{246}^{\infty} [A x^n + B x^{-n} + C x^{n+2} + D x^{-n+2}] \cos n\varphi \right\},$$

gdzie  $A, B, C, D, A_0, B_0$  oznaczają stałe dowolne. Prowadzi to do następujących wyrażań na naprężenie i przemieszczenie:

$$(4) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2A_0 + B_0 x^{-2} - \sum_{2,4}^{\infty} [n(n-1)Ax^{n-2} + n(n+1)Bx^{-n-2} + \\ &\quad + (n+1)(n-2)Cx^n + (n-1)(n+2)Dx^{-n}] \cos n\varphi, \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2A_0 - B_0 x^{-2} + \sum [n(n-1)Ax^{n-2} + n(n+1)Bx^{-n-2} + \\ &\quad + (n+1)(n+2)Cx^n + (n+1)(n-2)Dx^{-n}] \cos n\varphi, \\ u_r &= \sum_{2,4,\dots}^{\infty} n[(n-1)Ax^{n-2} + (n+1)Cx^n - (n+1)Bx^{-n-2} - (n-1)Dx^{-n}] \sin n\varphi, \\ u_\varphi &= \frac{R}{E} \left\{ 2(1-\nu)A_0 x - (1+\nu)B_0 x^{-1} + \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \left[ 4x^{n+1}(C + Dx^{-2n}) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+\nu)[nAx^{-2} - nBx^{-2n-2} + (n+2)C - (n-2)Dx^{-2n}]x^{n+1} \right] \cos n\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Wartości stałych wyznaczamy z następujących warunków brzegowych:

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr}(a, \varphi) &= 0, \\ \sigma_{ri}(a, \varphi) &= 0, \\ \sigma_{ri}(R, \varphi) &= 0, \\ \sigma_{rr}(R, \varphi) &= P_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi}{\alpha}\right)^2} \quad \text{dla} \quad \begin{cases} -\alpha < \varphi < \alpha \\ \pi - \alpha < \varphi < \pi + \alpha \end{cases}, \\ \sigma_{rr}(R, \varphi) & \quad \text{dla} \quad \begin{cases} \alpha < \varphi < \pi - \alpha \\ \pi + \alpha < \varphi < 2\pi - \alpha \end{cases}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie. Rozkład nacisków na powierzchni zewnętrznej  $r = R$  realizujemy przedstawiając obciążenie w postaci szeregu Fouriera

$$(6) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= - \left[ \frac{1}{2} P_{\max} \alpha + 2p_{\max} \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} J_1(n\alpha) \cos n\varphi \right] = \\ &= - \left[ \frac{1}{4} E\alpha^2 + E\alpha \sum_{2,4}^{\infty} \frac{1}{n} J_1(n\alpha) \cos n\varphi \right], \end{aligned}$$

gdzie  $J_1(n\alpha)$  jest funkcją Besela pierwszego rodzaju.

Powyższa postać obciążenia spełnia warunki (5). Uwzględniając warunki brzegowe otrzymujemy układ równań pozwalający na wyznaczenie niezbędnych stałych:

$$(7) \quad \begin{aligned} 2A_0 + B_0 f^{-1} &= 0, \\ 2A_0 + B_0 &= -\frac{1}{4} E\alpha^2, \\ (n-1)A - (n+1)B + (n+1)C - (n-1)D &= 0, \\ (n-1)A f^{n-1} - (n+1)B f^{-1} + (n+1)C f^n - (n-1)D &= 0, \\ n(n-1)A f^{n-1} + n(n+1)B f^{-1} + (n-2)(n+1)C f^n + (n-1)(n+2)D &= 0, \\ n(n-1)A + n(n+1)B + (n-1)(n+1)C + (n-1)(n+2)D &= E\alpha \frac{1}{n} I_1(n\alpha). \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy następujące wyrażenia określające stałe całkowania:

$$(8) \quad \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n-1)} \cdot \frac{(1-f^n) + n f^n (1-f)}{[(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2]}, \\ B &= \frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)} \cdot \frac{(1-f^n) + n(1-f)}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2} f^n, \\ C &= -\frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)} \cdot \frac{(1-f^n) + n f^{n-1} (1-f)}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2}, \\ D &= -\frac{1}{2} E\alpha \frac{J_1(n\alpha)}{n(n-1)} \cdot \frac{f(1-f^n) + n(1-f)}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1} (1-f)^2} f^{n-1}, \\ A_0 &= -\frac{\alpha^2}{8} \frac{1}{1-f} E, \quad B_0 = \frac{\alpha}{4} \frac{f}{1-f} E. \end{aligned}$$

Interesujące nas zmiany długości średnic dla  $\varphi = 0$  i  $\varphi = \frac{1}{2}\pi$  przyjmują postać:

$$(9) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= 2u_r(R, 0) = R[A_1(\alpha) + (1+\nu)B_1(\alpha)], \\ \delta_2 &= 2u_r\left(R, \frac{\pi}{2}\right) = R[A_2(\alpha) + (1+\nu)B_2(\alpha)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(10) \quad \begin{aligned} A_1(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{1-f} + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)} F(f), \\ B_1(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}, \\ A_2(\alpha) &= \frac{\alpha^2}{1-f} + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)} F(f), \\ B_2(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}, \\ F(f) &= \frac{2n^2f^{n-1}(1-f) + n(1-f^{2n}) - (1-f^n)^2}{(1-f^n)^2 - n^2f^{n-1}(1-f)^2}. \end{aligned}$$

Stosując przejście graniczne  $f = \left(\frac{a}{R}\right)^2 \rightarrow 0$  otrzymujemy rozwiązanie dla tarczy pełnej

$$(11) \quad \begin{aligned} \delta'_1 &= R[A'_1(\alpha) + (1+\nu)B_1(\alpha)], \\ \delta'_2 &= R[A'_2(\alpha) + (1+\nu)B'_2(\alpha)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(12) \quad \begin{aligned} A'_1(\alpha) &= \alpha^2 + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)}, \\ B'_1(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}, \\ A'_2(\alpha) &= \alpha^2 + 4\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n+1)}, \\ B'_2(\alpha) &= -\frac{\alpha^2}{2} + 2\alpha \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{1/2n} \frac{J_1(n\alpha)}{n(n^2-1)}. \end{aligned}$$

Dla wyznaczenia stałych materiałowych będziemy rozpatrywać zwiększenie średnicy prostopadłej do kierunku działania obciążenia  $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ . W tym przypadku wielkości  $A_2$  i  $B_2$  są tego samego rzędu. Rozważanie zbliżenia powierzchni styku nie prowadzi do celu ze względu na zbyt duże stosunki wartości  $A_1$  i  $B_1$  dochodzące do  $10^4$  oraz niekorzystny na dokładność pomiaru wpływ koncentracji naprężeń w miejscu kontaktu.

Obliczenia numeryczne zestawione w tablicy 1 wskazują, że otrzymane wyniki ze wzorów (10) i (12) są identyczne (lub pomijalnie różniące się dla większych wartości  $\alpha$ ) z wynikami dla tarczy obciążonej siłą skupioną [2, 3], które można zapisać w postaci

$$(13) \quad \delta = R[A_2(\alpha, f) + (1+\nu)B_2(\alpha)],$$

gdzie

$$A_2(\alpha, f) = \frac{\alpha}{1-f} + 2\alpha^2 \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{F(f)}{n^2-1},$$

$$B_2 = -\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha^2 \sum_{2,4,\dots}^{\infty} (-1)^{n/2} \frac{1}{n^2-1},$$

$$F(f) = \frac{2n^2 f^{n-1}(1-f) + n(1-f^{2n}) - (1-f^n)^2}{(1-f^n)^2 - n^2 f^{n-1}(1-f)^2}.$$

Związki (13) można uzyskać także przez przejście graniczne  $\alpha \rightarrow 0$  we wzorach (12). Przyjmując

$$I_1(n\alpha) = \frac{1}{2}n\alpha$$

można sprawdzić, że wyrażenie  $A'_1$  układu (12) traci sens, jednak pozostałe wyrażenia pozostają w mocy. W dalszych rozważaniach będziemy więc korzystać z tych wzorów.

### 3. Możliwości zastosowań

Zapisując wyrażenie (13) w postaci

$$\delta = \alpha^2 R \left[ \frac{A_2(\alpha, f)}{\alpha^2} + (1+\nu) \frac{B_2(\alpha)}{\alpha^2} \right],$$

a następnie przekształcając pierwszy wyraz w nawiasie

$$\frac{A_2(\alpha, f)}{\alpha^2} = \frac{A_2(\alpha, 0)}{\alpha^2} \left[ \frac{A_2(\alpha, f)}{A_2(\alpha, 0)} + 1 - 1 \right]$$

i oznaczając

$$\frac{B_2(\alpha)}{\alpha^2} = B, \quad \frac{A_2(\alpha, 0)}{\alpha^2} = A, \quad \left[ \frac{A_2(\alpha, f)}{A_2(\alpha, 0)} + 1 \right] = \beta(f)$$

otrzymamy

$$\delta = \alpha^2 R \{ A[\beta(f) - 1] + (1+\nu)B \},$$

gdzie

$$(14) \quad \begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{4P}{\pi R b E}, \\ f &= \left(\frac{a}{R}\right)^2, \\ A &= 0,570796, \\ B &= -0,785398, \end{aligned}$$

zauważmy, że dla  $\beta(f) = 1$  wielkość  $\delta$  zależy od stosunku  $(1+\nu)/E$ . Stan ten można otrzymać przez odpowiednie dobranie stosunku promieni  $a/R$ .

Przeprowadzone obliczenia numeryczne wykazują, że przypadek  $\beta(f) = 1$  zachodzi dla

$$(15) \quad f = 0,065556,$$

czyli

$$\frac{a}{R} = 0,25604.$$

Badanie próbki o takim stosunku promieni pozwala na bezpośrednie wyznaczenie modułu Kirchhoffa. Podobnie możemy wyznaczyć moduł Younga odejmując od wydłużenia średnicy tarczy pełnej wydłużenie średnicy tarczy z otworem, co ze względu na te same współczynniki przy wyrażeniu  $(1+\nu)$  sprowadza się do:

$$(16) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{\delta'_1 - \delta_1}{R} = A'_1 - A_1, \\ C_2 &= \frac{\delta'_2 - \delta_2}{R} = A'_2 - A_2. \end{aligned}$$

Wartości liczbowe stałych  $A, B, C$  jako funkcji  $\alpha$  i  $F = f^{1/2}$  podano w tablicy 1.

Do celów praktycznych dla stosunku  $a/R = 0,256$  końcowe wzory na wyznaczenie stałych materiałowych można zapisać w postaci:

$$(17) \quad \begin{aligned} E &= 2,2832 \frac{P}{\pi b (\delta - \delta')}, \\ G &= 1,5708 \frac{P}{\pi b \delta} \end{aligned}$$

lub

$$(18) \quad \begin{aligned} E &= 2,2832 \frac{P}{\pi b (\delta - \delta')}, \\ \nu &= 0,7268 \frac{\delta}{\delta - \delta'} - 1 \end{aligned}$$

w zależności od aktualnych potrzeb, gdzie  $\delta$  i  $\delta'$  oznaczają powiększenie średnicy tarczy z otworem i tarczy pełnej.

W celu skontrolowania podanej metody przeprowadzono badania na próbkach wykonanych z technicznego metaplexu (polimetakrylanu metylu), o stosunku  $a/R = 0,25604$  (średnica zewnętrzna 29,3 mm) oraz dla tarczy pełnej o tej samej średnicy. Próbki ścisniano siłą  $P = 90$  kG i 140 kG. Otrzymane wyniki podane są w tablicy 1.

Tablica 1

P[kG]	$\delta\mu$			
	tarcza z otworem		tarcza pełna	
90	27	$\delta_{sr} = 22,8$	11	$\delta_{sr} = 12,2$
	29		11	
	30		10	
	28		11	
140	44	$\delta_{sr} = 44,8$	18	$\delta_{sr} = 19,04$
	47		21	
	44		19	
	45		22	

Do wyznaczenia średnich przemieszczeń zastosowano metodę najmniejszych kwadratów. Korzystając ze wzoru (14) dla tarczy z otworem oraz pełnej wyznaczono stałe materiałowe

$$E = 39,4978 \cdot 10^3 \cong 39\,400 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\nu = 0,2639297 \cong 0,264.$$

Otrzymane wyniki są zgodne, z dokładnością do kilkunastu procent, z danymi literaturowymi dla tego typu materiałów.

## Zagadnienie kontaktowe tarczy

$$F = \frac{a}{R} = 0,00$$

$\alpha$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$
0,0010	0,779235E-05	-,333419E-09	0,000000E+00	0,570796E-06	-,785398E-06	0,000000E+00
0,0020	0,283995E-04	-,266735E-08	0,000000E+00	0,228319E-05	-,314159E-05	0,000000E+00
0,0030	0,602895E-04	-,399887E-08	0,000000E+00	0,513717E-05	-,706858E-05	0,000000E+00
0,0040	0,102589E-03	-,213306E-07	0,000000E+00	0,913276E-05	-,125663E-04	0,000000E+00
0,0050	0,154733E-03	-,416614E-07	0,000000E+00	0,142699E-04	-,196349E-04	0,000000E+00
0,0060	0,216276E-03	-,719908E-07	0,000000E+00	0,205487E-04	-,282742E-04	0,000000E+00
0,0070	0,286855E-03	-,114319E-06	0,000000E+00	0,279692E-04	-,384843E-04	0,000000E+00
0,0080	0,366163E-03	-,170645E-06	0,000000E+00	0,365312E-04	-,502651E-04	0,000000E+00
0,0090	0,453938E-03	-,242968E-06	0,000000E+00	0,462348E-04	-,636166E-04	0,000000E+00
0,0100	0,549947E-03	-,333289E-06	0,000000E+00	0,570801E-04	-,785388E-04	0,000000E-00



$$F = \frac{a}{R} = 0,25$$

$\alpha$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$
0,0010	0,846901E-05	-,333419E-09	0,676662E-06	0,322205E-07	-,785398E-06	-,538576E-06
0,0020	0,311061E-04	-,266735E-08	0,270661E-05	0,128886E-06	-,314159E-05	-,215430E-05
0,0030	0,663455E-04	-,900231E-08	0,605602E-05	0,290009E-06	-,706858E-05	-,484716E-05
0,0040	0,113355E-03	-,213388E-07	0,107662E-04	0,515614E-06	-,125663E-04	-,861715E-05
0,0050	0,171650E-03	-,416614E-07	0,169166E-04	0,805721E-06	-,196349E-04	-,134642E-04
0,0060	0,240635E-03	-,719908E-07	0,243594E-04	0,116039E-05	-,282742E-04	-,193883E-04
0,0070	0,320010E-03	-,114319E-06	0,331551E-04	0,157964E-05	-,384843E-04	-,263896E-04
0,0080	0,409468E-03	-,170645E-06	0,433051E-04	0,206352E-05	-,502651E-04	-,344677E-04
0,0090	0,508745E-03	-,242968E-06	0,548072E-04	0,261212E-05	-,636166E-04	-,436227E-04
0,0100	0,617609E-03	-,333289E-06	0,676623E-04	0,322551E-05	-,785388E-04	-,538546E-04

$$F = \frac{a}{R} = 0,50$$

$\alpha$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$
0,0010	0,131046E-04	-,333419E-09	0,531224E-05	-,381411E-05	-,785398E-06	-,438491E-05
0,0020	0,496484E-04	-,266735E-08	0,212489E-04	-,152564E-04	-,314159E-05	-,175396E-04
0,0030	0,108066E-03	-,900231E-08	0,477760E-04	-,343268E-04	-,706858E-05	-,394640E-04
0,0040	0,187524E-03	-,213388E-07	0,849348E-04	-,610252E-04	-,125663E-04	-,701580E-04
0,0050	0,287443E-03	-,416773E-07	0,132710E-03	-,953514E-04	-,196349E-04	-,109621E-03
0,0060	0,407377E-03	-,720183E-07	0,191101E-03	-,137305E-03	-,282742E-04	-,157854E-03
0,0070	0,546963E-03	-,114362E-06	0,260108E-03	-,186886E-03	-,384843E-04	-,214855E-03
0,0080	0,705894E-03	-,170710E-06	0,339731E-03	-,244094E-03	-,502651E-04	-,280625E-03
0,0090	0,883906E-03	-,243061E-06	0,429968E-03	-,308928E-03	-,636166E-04	-,355163E-03
0,0100	0,108077E-02	-,333417E-06	0,530819E-03	-,381389E-03	-,785388E-04	-,438469E-03

$$F = \frac{a}{R} = 0,75$$

$\alpha$	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$A_2$	$B_2$	$C_2$
0,0010	0,715136E-04	-,333419E-09	0,637213E-04	-,554460E-04	-,785398E-06	-,560168E-04
0,0020	0,283284E-03	-,266735E-08	0,254885E-03	-,221784E-03	-,314159E-05	-,224067E-03
0,0030	0,633744E-03	-,900231E-08	0,573455E-03	-,499012E-03	-,706858E-05	-,504149E-03
0,0040	0,112206E-02	-,213388E-07	0,101947E-02	-,887129E-03	-,125663E-04	-,896262E-03
0,0050	0,174765E-02	-,416773E-07	0,159291E-02	-,128613E-02	-,196349E-04	-,140040E-02
0,0060	0,251006E-02	-,720183E-07	0,229378E-02	-,199602E-02	-,282742E-04	-,201657E-02
0,0070	0,340892E-02	-,114362E-06	0,312207E-02	-,271679E-02	-,384843E-04	-,274476E-02
0,0080	0,444393E-02	-,170710E-06	0,407777E-02	-,354844E-02	-,502651E-04	-,358497E-02
0,0090	0,561481E-02	-,243061E-06	0,516087E-02	-,449095E-02	-,636166E-04	-,453719E-02
0,0100	0,692132E-02	-,333417E-06	0,637137E-02	-,554434E-02	-,785388E-04	-,560142E-02

#### 4. Wnioski

Obliczenia numeryczne wskazują, że zgodnie ze wzorami Hertza zbliżenie dwóch ciał ściskanych z dużą dokładnością nie zależy od dwóch lecz od jednej stałej materiałowej. Sytuacja zmienia się, gdy pomiarowi podlega zwiększenie średnicy ściskanej tarczy. Tak mierzona wielkość tylko w jednym szczególnym przypadku wyraża się przez jedną ze stałych materiałowych. To zjawisko umożliwia dokonanie pomiaru wartości dwóch stałych materiałowych w jednym i tym samym urządzeniu, mierząc powiększenie średnicy tarczy i tarczy z otworem. Szczególnie wygodny jest przypadek, gdy stosunek wymiarów  $a/R = 0,25604$ .

Można też zauważyć, że z błędem rzędu  $1^\circ/\infty$  rozwiązanie dokładne można zastąpić przez rozwiązanie przyjmujące obciążenie siłą skupioną w miejsce rzeczywistego rozkładu nacisków. Wynika to z analizy danych tablicy 1 i w pewien sposób potwierdza stosowność w tym przypadku zasady de Saint Venanta.

#### Literatura cytowana w tekście

1. K. GIRKMAN, *Dźwigary powierzchniowe*, Atkady, 1957.
2. П. Ф. Папкович, *Теория упругости*, Оборонгиз, Москва 1939.
3. В. Г. Рекач, *Руководство и решения задач по теории упругости*, Москва 1966.

#### Резюме

#### О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ СЖИМАЕМЫХ ДИСКОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ КОНСТАНТ МАТЕРИАЛА

В работе приводится простой метод определения материальных констант синтетических материалов. Рассуждения проводятся для упругого материала а с целью определения функций используется упруго-вязкоупругая аналогия. Рассматривается модельная задача для круглого диска сжимаемого двумя жесткими плитами. Определено изменение диаметров сплошного и полого дисков. С целью определения материальных констант рассмотрено увеличение перпендикулярного к направлению действия силы диаметра (в обоих случаях). Проводилась экспериментальная проверка метода с использованием образцов из органического стекла (метаплекса).

#### Summary

#### ON POSSIBILITIES OF APPLICATIONS OF COMPRESSED DISCS IN MATERIAL TESTING

A simple method enabling to determine the material constants of plastics has been given. The discussion refers to an elastic material while the elastic-visco-elastic analogy can be employed in order to determine the creep function.

An elastic disc compressed by two rigid plates serves as a model for discussion. The changes of diameters of that disc and of a hollow disc have been determined. To obtain material constants, increase of the diameter perpendicular to the direction of loading has been considered in both cases. In order to verify the method, tests have been performed on specimens made of metaplex [poly-(methyl metacrylate)].

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 1 lipca 1974 r.; w wersji ostatecznej — 5 stycznia 1975 r.



## WPLYW TARCIA W PRZEGUBACH NA PRZEBIEG WYBOCZENIA PRĘTA ŚCISKANEGO

ANDRZEJ TROJNACKI (KRAKÓW)

### 1. Wstęp

Doświadczalne badania prętów na wyboczenie przeprowadza się najczęściej dla dwuprzegubowego sposobu zamocowania. W konstrukcyjnych rozwiązaniach przegubów niemożliwe jest całkowite wyeliminowanie tarcia, a jak się okazuje, ma ono duży wpływ na przebieg i wynik eksperymentu. W niektórych przypadkach tarcie może spowodować nawet przekroczenie siły eulerowskiej, rozumianej jako siła krytyczna dla pręta idealnego, zamocowanego dwuprzegubowo. Na zjawisko to zwraca uwagę WASIUTYŃSKI [9], doszukując się w nim przyczyny nagłości procesu wyboczenia: „...Przed wygięciem pręta, siły tarcia, wzrastając stopniowo do wartości rozwiniętych, dają w przegubach pewne momenty opierające się wygięciu pręta, a więc działające podobnie jak częściowe zamocowanie jego końców, i pozwalające na doprowadzenie obciążenia do wartości nieco większej od tej, którą by można było osiągnąć w razie zmniejszenia sil tarcia. W chwili powstania ruchu, rozwinięte siły tarcia w przegubach zmniejszają się nagle do wartości tarć posuwistych, wskutek czego obciążenie pręta nagle staje się większe o skończoną nadwyżkę od siły, odpowiadającej stanowi równowagi.” Tej nadwyżce obciążenia WASIUTYŃSKI przypisuje dynamiczny charakter większości prób na wyboczenie.

Tarcie w przegubach z jednej strony, a podatność utwierdzenia z drugiej powodują, że rzeczywiste warunki zamocowania ściskanych prętów odbiegają od idealnych i są zawarte między idealnymi przegubami a idealnym utwierdzeniem. Z zagadnieniem tym wiążą się również inne nieuniknione odstępstwa od teoretycznego schematu: pierwotna krzywizna osi pręta i mimośrodowe przyłożenie obciążenia. Wpływ tych czynników na przebieg wyboczenia jest szeroko omówiony w monografiach BLEICHA [1], TIMOSHENKI [8] i WOLMIRA [11]. Oprócz rozważań teoretycznych, autorzy przytaczają wyniki licznych doświadczeń oraz proponują metody uwzględniania wymienionych wyżej nieprawidłowości w obliczeniach wytrzymałościowych rzeczywistych elementów konstrukcyjnych.

Doświadczalny sposób określenia warunków brzegowych na końcach ściskanego pręta, a w konsekwencji wielkości obciążenia krytycznego, podają HORTON, CRAIG i STRUBLE [3]. Przy klasycznych badaniach na ściskanie siłą osiową, obciążenie musi być doprowadzone do bliskiego krytycznemu. Wiążą się z tym jednak niepożądane odkształcenia trwałe, zatem autorzy proponują badać pręt na zginanie siłą prostopadłą do osi. W pracy zamieszczone są wyniki badań prętów aluminiowych i stalowych, których końce zamocowane były na spiralnych sprężynach o różnej sztywności. Podobnym zagadnieniem

zajmowali się LAZARD i MOUTY [5]. Badali oni na zginanie pręt z utwierdzonymi sprężystymi końcami, wyliczając siłę krytyczną z wyprowadzonej zależności między giętą sztywnością elementu i osiowym obciążeniem pręta.

Metoda doświadczalnego określenia początkowego ugięcia i mimośrodowość obciążenia ściskanego osiowo pręta przedstawiona jest w pracach [2] i [4]. Zakładając pierwotną krzywiznę w postaci półfali sinusoidy i wykorzystując znane równanie różniczkowe osi pręta dla małych przemieszczeń, autorzy otrzymują zależność ugięć pręta od ugięcia pierwotnego i mimośrodowość. Przy jej pomocy opracowano wyniki badań, z których wynika, że wpływ mimośrodowość wypadkowej siły zewnętrznej jest w porównaniu z wpływem krzywizny początkowej niewielki i daje efekty rzędu 10%. Ten sam problem jest celem rozważań SHINGO [7].

Niniejsza praca zajmuje się teoretycznym opisem przebiegu wyboczenia sprężystego pręta, zamocowanego w dwóch rzeczywistych przegubach z tarciami. Wyboczenie rozumie się tu w sensie technicznym (WIERZBICKI [10]), jako silny wzrost ugięć ściskanego pręta o niewielkich niedokładnościach wstępnych, które w pracy będą reprezentowane stałą krzywizną pierwotną pręta  $\kappa_0$ . Wpływ mimośrodowości obciążenia i niejednorodności materiału pręta ma zbliżony charakter i zazwyczaj może być ujęty pewną zastępczą krzywizną pierwotną (ŻYCZKOWSKI [12]). Takie podejście umożliwi zbliżenie teorii do realnych warunków doświadczalnych, gdzie całkowite wyeliminowanie niedokładności wstępnych nie jest możliwe. Praca pozostaje w związku z eksperymentalnymi badaniami wyboczenia, wykonanymi dla prętów z tworzywa sztucznego. Obciążenie realizowano przy stałej prędkości przesuwu półek maszyny, równej 0,5 cm/min. Dla serii sześciu prób, w czterech przypadkach nagły wzrost ugięć pręta wystąpił wyraźnie powyżej teoretycznej siły krytycznej (eulerowskiej) dla zamocowania dwuprzegubowego, przekraczając ją odpowiednio o 5, 3, 1 i 5%. Ponieważ reologiczne własności materiału powodować mogą jedynie zmniejszenie siły krytycznej badanych prętów (RABOTNOW, SZESTIERIKOW [6]), wyniki doświadczeń można wytłumaczyć przede wszystkim istnieniem tarcia w przegubach i temu zagadnieniu jest poświęcona obecna praca.

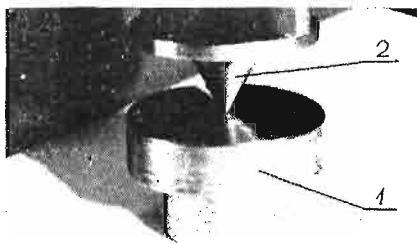
## 2. Opis budowy zastosowanego przegubu i określenie momentu tarcia

Pręt zamocowany był w maszynie wytrzymałościowej w dwóch jednakowych przegubach (rys. 1). Każdy z nich składał się z płytki oporowej 1, z wydrążonym wgłębieniem w kształcie stożka o kącie rozwarcia  $2\varphi$ . We wgłębieniu osadzona była końcówka 2, zamocowana w badanym pręcie. Miała ona również kształt stożka, lecz o mniejszym kącie rozwarcia i wierzchołku zaokrąglonym promieniem  $r$ . Oba elementy były wykonane ze stali. Moment tarcia  $M_T$  w przegubie (przy założeniu, że w przegubie tym występuje ruch) można określić, analizując jego budowę i współpracę końcówki z płytką podczas obciążania pręta. W dalszym ciągu założono, że styk obu tych części następuje jedynie w dwóch punktach  $A$  i  $B$ , leżących w płaszczyźnie osi wstępnie wygiętego pręta (rys. 2). Zgodnie z prawem tarcia Coulomba pojawią się w nich reakcje normalne  $P_A$  i  $P_B$  oraz proporcjonalne do nich reakcje styczne. Ich zwrot jest przeciwny do założonego kierunku obrotu końcówki,

zaznaczonego na rys. 2 strzałką. Reakcje  $P_A$  i  $P_B$  można wyliczyć z warunku równowagi sił w przegubie, a moment tarcia ostatecznie wynosi

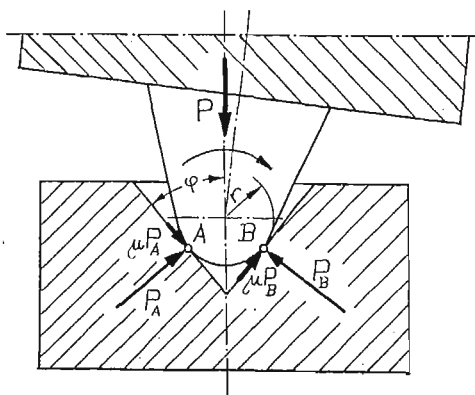
$$(2.1) \quad M_T = \frac{Pr\mu}{(1+\mu^2)\sin\varphi},$$

gdzie  $\mu$  jest współczynnikiem tarcia dla materiałów końcówki i płytki, a  $P$  aktualną siłą osiową. Wzór (2.1) można stosować w powyższej formie (ze znakiem równości), gdy obrót w przegubie jest możliwy od samego początku obciążania, to jest w układach o dużych niedokładnościach wstępnych i małym współczynniku tarcia  $\mu$ . W przeciwnym przypadku,



Rys. 1

Przegub zastosowany w próbie stateczności



Rys. 2. Rozkład sił w uruchomionym przegubie

tarcie w przegubach da zauważalny efekt, w postaci początkowego utwardzenia końców pręta. Pojawią się momenty utwardzenia, zwiększające się ze wzrostem siły ściskającej. Przegub będzie unieruchomiony aż do chwili, gdy momenty utwardzenia pokonają momenty tarcia (2.1) i w przegubie rozpocznie się obrót. Wymienione warianty będą poddane analizie w dalszej części pracy.

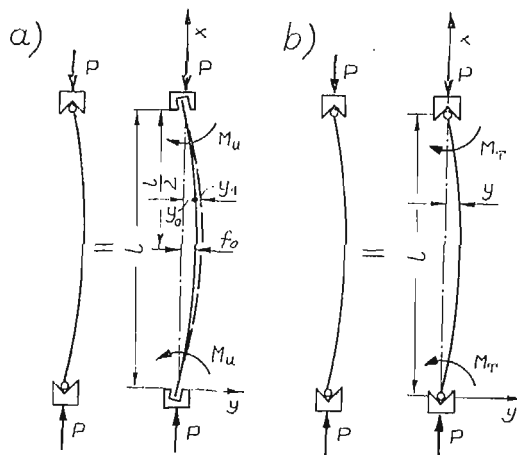
### 3. Analiza procesu obciążania pręta

Proces utraty stateczności można najogólniej rozpatrywać w dwóch etapach. Początkowo pręt zachowuje się jak utwardzony (rys. 3a) aż do chwili, gdy w przegubach zostaną przekroczone momenty tarcia (2.1) o wartości wynikającej z wymiarów przegubu, współczynnika tarcia  $\mu$  i aktualnej siły osiowej  $P$ . Następnie rozpocznie się ruch elementów przegubu i ten sam pręt należy potraktować jak dwuprzegubowy, lecz obciążony oprócz siły ściskającej dodatkowo momentami tarcia  $M_T$  (rys. 3b). Granicę tych etapów wyznaczy siła  $P$ , przy której zachodzi równość  $M_U = M_T$ . W rozdziale 4 zostaną zbadane również warunki, w których etap I nie występuje i zjawisko od początku przebiega zgodnie z założeniami II etapu.

**3.1. Etap I, utwardzenie w wyniku tarcia w przegubach.** W pierwszym etapie rozważano obustronnie utwardzony pręt o długości  $l$ , z krzywizną pierwotną o stałej wartości  $\kappa_0 = \text{const}$  (rys. 3a). Jedynym obciążeniem zewnętrznym jest osiowa siła ściskająca  $P$ . Całkowite ugięcie

osi pręta  $y$  jest sumą ugięcia pierwotnego  $y_0$  i przyrostu tego ugięcia  $y_1$ . W ramach teorii małych przemieszczeń pierwotna linia ugięcia jest parabolą o równaniu  $y_0 = \kappa_0 (lx - x^2)/2$ . Funkcję  $y_1$  można podobnie wyznaczyć ze znanego równania różniczkowego osi pręta

$$(3.1) \quad EIy_1'' = -P(y_1 + y_0) + M_U,$$



Rys. 3. Przyjęty schemat zamocowania pręta: a) I etap — utwierdzenie w wyniku tarcia, b) II etap — zamocowanie przegubowe z tarcie

gdzie  $M_U$  oznacza moment utwierdzenia w wyniku tarcia w przegubach. Do dyspozycji są po dwa warunki brzegowe na każdym końcu pręta

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \text{dla } x = 0 \quad & y_1 = 0, \\ & y_1' = 0 \text{ lub } y_1' = \frac{\kappa_0 l}{2}, \\ \text{dla } x = l \quad & y_1 = 0, \\ & y_1' = 0 \text{ lub } y_1' = -\frac{\kappa_0 l}{2}. \end{aligned}$$

Stałe całkowania w rozwiązaniu równania (3.1) dają się wyznaczyć przy pomocy pierwszego i trzeciego z nich, a całkowite ugięcie osi pręta wynosi

$$(3.3) \quad y = \frac{(EI\kappa_0 - M_U)l^2}{m\pi^2 EI} \left\{ \frac{\cos \left[ \left(1 - \frac{2x}{l}\right) \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right]}{\cos \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)} - 1 \right\},$$

gdzie  $m$  jest bezwymiarową siłą zdefiniowaną następująco

$$(3.4) \quad m = \frac{P}{P_E} = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI}.$$

Do określenia zależności momentów utwierdzenia  $M_U$  od siły osiowej  $P$ , można wykorzystać pozostałe dwa warunki brzegowe (3.2). Przyjęcie, że ze względu na symetrię momenty  $M_U$  są na obu końcach równe, pozwoli ograniczyć się tylko do jednego z nich, np. drugiego

$$(3.5) \quad M_U = EI\kappa_0 \left[ 1 - \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) \right].$$

Uwzględniając ten związek w równaniu (3.3), otrzymamy równanie linii ugięcia pręta w I etapie, gdy końce pręta są utwierdzone w przegubach w wyniku działania tarcia

$$(3.6) \quad y_I = \frac{\kappa_0 l^2}{2\pi \sqrt{m}} \frac{\cos \left[ \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right] - \cos \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)}.$$

**3.2. Ograniczenia I etapu, początek ruchu w przegubach.** Pierwszy etap obciążania kończy się w chwili, gdy momenty utwierdzenia pokonują ruchowe momenty tarcia. Porównanie wzorów na  $M_T$  (2.1) i  $M_U$  (3.5) oraz wykorzystanie podstawienia (3.4) daje

$$(3.7) \quad \alpha m + \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) - 1 = 0,$$

gdzie  $\alpha$  jest pewnym «uogólnionym» współczynnikiem tarcia, zdefiniowanym następująco

$$(3.8) \quad \alpha = \frac{\pi^2 r \mu}{(1 + \mu^2) \kappa_0 l^2 \sin \varphi}.$$

Graniczną bezwymiarową siłę, przy której rozpocznie się obrót końcówki względem płytki i przejście do II etapu, określa pierwiastek  $m^*$  równania (3.7).

**3.3. Etap II, uruchomione przeguby z tarcie.** Analizę zachowania się pręta w II etapie wykonano w oparciu o rys. 3b. Obecnie pręt jest zamocowany przegubowo, obciążony siłą osiową  $P$  i momentami tarcia  $M_T$  w przegubach. Równanie linii ugięcia można otrzymać z (3.3), wstawiając, wobec  $M_U = M_T$ , zamiast  $M_U$  zależność (2.1)

$$(3.9) \quad y_{II} = \frac{\kappa_0 l^2}{\pi^2 m} (1 - m\alpha) \left\{ \frac{\cos \left[ \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right] - 1}{\cos \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right)} \right\}.$$

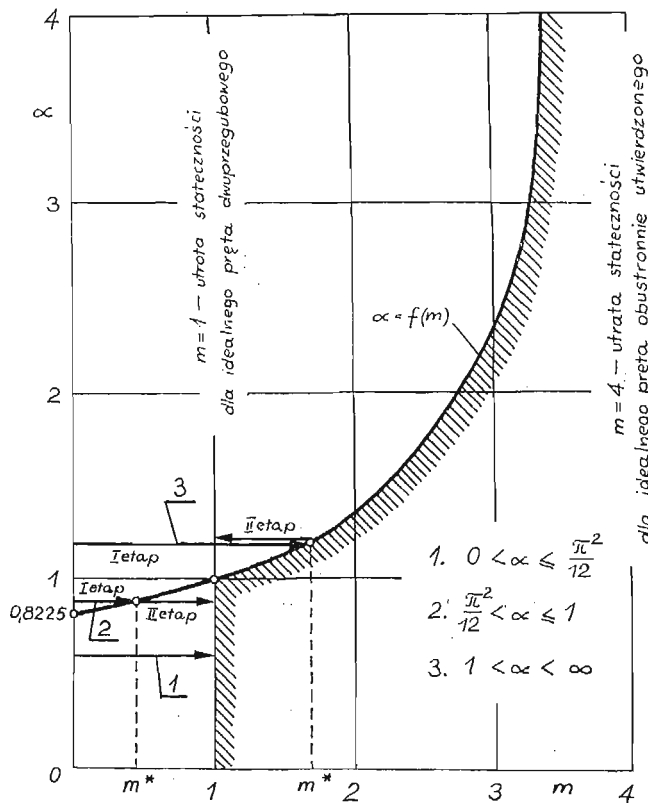
#### 4. Dyskusja wyników i wnioski

Okazuje się, że pierwiastek  $m^*$  równania (3.7) nie zawsze istnieje. Zależy to od współczynnika  $\alpha$  i oznacza, że dla pewnych jego wartości nie może dojść do wstępnego utwierdzenia końców pręta, wskutek zbyt małego współczynnika tarcia  $\mu$  lub zbyt dużej krzywizny  $\kappa_0$ . Równanie (3.7) jest przestępne ze względu na  $m$ , lecz daje się łatwo rozwiązać ze względu na  $\alpha$ . W przedziale  $0 \leq m \leq 4$  funkcja  $\alpha = f(m)$ , przedstawiona na rys. 4, posiada kres dolny

$$\inf_{0 \leq m \leq 4} \alpha = \pi^2/12 = 0,8225,$$



oraz przechodzi przez punkt o współrzędnych (1,1). Prosta  $m = 1$  i krzywa  $\alpha = f(m)$  dzielą płaszczyznę na dwa obszary. Obszar zakreskowany jest, w świetle zastosowanej tu teorii małych ugięć, nieosiągalny dla rozpatrywanego układu. W pozostałym obszarze przebieg wyboczenia zależy w zasadniczy sposób od współczynnika  $\alpha$ , przy czym istnieją jego dwie graniczne wartości:  $\alpha'_{gr} = \pi^2/12$  i  $\alpha''_{gr} = 1$ . Dla pręta zakrzywionego ( $\alpha_0 \neq 0$ ) można rozróżnić trzy przypadki (rys. 4):



Rys. 4. Wykres zależności współczynnika  $\alpha$  od bezwymiarowej siły  $m$

1. Jeżeli  $0 < \alpha \leq \pi^2/12$ , równanie (3.7) nie ma pierwiastków, co oznacza, że moment utwierdzenia od samego początku musiałyby być większy od momentu tarcia i nie może dojść do skutku I etap. Proces przebiega jednoetapowo, zgodnie z założeniami II etapu (schemat «b» z rys. 3), a ugięcia pręta opisuje wzór (3.9).

2. Gdy  $\pi^2/12 < \alpha \leq 1$ , równanie (3.7) daje się rozwiązać i, jak wynika z rys. 4, ma pierwiastek  $m^* \leq 1$ . Tarcie w przegubach jest wystarczająco duże, aby spowodować wstępne utwierdzenie końców pręta ( $M_T > M_U$ ). Obciążenie pręta odbywa się w dwóch etapach, według schematów «a» i «b» (rys. 3). W I etapie zależność linii ugięcia od siły opisuje równanie (3.6), a w II etapie równanie (3.9). Siła  $P$  jest w obu etapach rosnącą funkcją ugięcia, co odpowiada równowadze statecznej.

3. Wreszcie, gdy  $1 < \alpha < \infty$ , istnieje również rozwiązanie równania (3.7) —  $m^* > 1$ . Ugięcia w obu etapach wyrażają się tymi samymi wzorami co poprzednio, przy czym siła  $P$  w drugim etapie maleje (równowaga niestateczna).

Przypadek pręta prostego ( $\alpha_0 = 0$  lub  $\alpha \rightarrow \infty$ ) ma niewielkie znaczenie, gdyż jest praktycznie nieosiągalny. Przy braku mimośrodowości siły  $P$ , nawet niewielkie momenty tarcia w przegubach dają teoretyczną możliwość doprowadzenia obciążania do wartości  $m = 4$ , jak dla idealnego utwierdzenia. Można rozróżnić trzy etapy procesu obciążania. Początkowo, przy narastaniu siły od zera do  $m = 4$ , pręt zachowuje prostoliniową postać równowagi statecznej. Osiągnięcie siły  $m = 4$  powoduje przejście do II etapu, w którym układ jest w stanie równowagi obojętnej. Równowaga pręta (z utwierdzonymi nadal w wyniku tarcia końcami) pod tym obciążeniem, jest możliwa dla różnych postaci linii ugięcia, jednak z pewnym ograniczeniem. Istnieje graniczna linia ugięcia  $y_{gr}$ , stanowiąca przejście z etapu II do III. Można ją otrzymać ze wzoru (3.6)

$$(4.1) \quad y_{gr} = \lim_{\substack{\alpha_0 \rightarrow 0 \\ m \rightarrow 4}} y_I,$$

przy warunku pobocznym, którym jest równanie (3.7). W efekcie mamy

$$(4.2) \quad y_{gr} = \frac{r\mu}{(1+\mu^2)\sin\varphi} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

Gdy ugięcia pręta przekroczą wartości wynikające z (4.2), momenty utwierdzenia w przegubach pokonają momenty tarcia i przeguby zostaną uruchomione. Obecnie, w III etapie, wystąpi gwałtowny wzrost ugięć przy spadku siły, zgodnie z odpowiednio przekształconym równaniem (3.9).

Graficzną interpretację wyników, otrzymanych dla pręta z krzywizną pierwotną, jest najwygodniej przedstawić w układzie: bezwymiarowa strzałka ugięcia w połowie pręta  $f/f_0$  — bezwymiarowa siła  $m$  (rys. 5). Odpowiednie wzory można otrzymać z (3.6) i (3.9), podstawiając  $x = l/2$ . W przypadku 1 utrata stateczności odbywa się jednoetapowo i w całym zakresie obowiązuje zależność

$$(4.3) \quad \frac{f}{f_0} = \frac{8}{\pi^2 m} (1 - m\alpha) \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) - 1 \right].$$

Dla przypadków 2 i 3 mamy

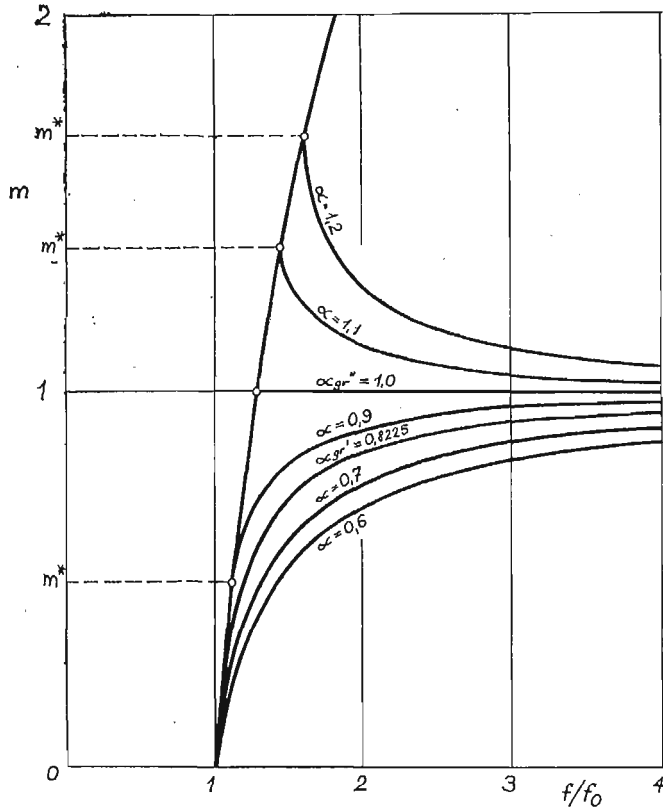
$$(4.4) \quad \left( \frac{f}{f_0} \right)_I = \frac{4}{\pi \sqrt{m}} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} \sqrt{m} \right),$$

$$(4.5) \quad \left( \frac{f}{f_0} \right)_{II} = \frac{8}{\pi^2 m} (1 - m\alpha) \left[ \sec \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{m} \right) - 1 \right].$$

W równaniu (4.4) dla I etapu współczynnik  $\alpha$  nie interweniuje; wpływa on jedynie na wartość siły  $m^*$ . Po jej osiągnięciu następuje przejście do II etapu i prawie natychmiastowe wyboczenie.

Z przedstawionych na rys. 5 zależności między siłą i ugięciem wynika, że gdy  $\alpha > 1$  (przyp. 3), można — w pewnych warunkach — przekroczyć pod koniec I etapu procesu obciążania krytyczną siłę eulerowską  $m = 1$  dla idealnego pręta dwuprzegubowego, bez

utrąty stateczności. Równanie (3.7), które rozgranicza I etap od II, ma wtedy pierwiastek  $m^* > 1$ . W zakresie obciążenia  $1 \leq m \leq m^*$  pręt jest nadal stateczny (wzrostowi siły towarzyszy wzrost ugięć) w wyniku tarcia w przegubach, które daje momenty utwierdzające. Gwałtowny wzrost ugięć, połączony ze spadkiem siły, rozpoczyna się dopiero po osiągnięciu



Rys. 5. Wykres zależności siły  $m$  od bezwymiarowej strzałki ugięcia  $f/f_0$  dla różnych wartości współczynnika  $\alpha$

siły  $m^*$ , uruchomieniu przegubów i przejściu do II etapu. Z takim przebiegiem zjawiska należy się liczyć przy badaniu prętów krępych (ale pozostających jeszcze w zakresie sprężystym), z małymi niedokładnościami wstępnymi i dla znacznych wartości współczynnika tarcia  $\mu$ .

#### Literatura cytowana w tekście

1. F. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, McGraw-Hill, 1952.
2. C. HAYASHI, A. KOBAYASHI, *Nihon koku gakkayshi*, J. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., 157, 15 (1967), 47 - 51.
3. W. H. HORTON, J. I. CRAIG, D. E. STRUBLE, *A simple, practical method for the experimental determination of the end fixity of a column*, Proc. 8th Int. Symp. Space Technol. and Sci., Tokyo 1969, Tokyo 1969, 269 - 280.

4. A. KOBAYASHI, C. HAYASHI, *Tokio daigaku utiu koku kenkiushio hokoku*, Bull. Inst. Space and Aeron. Sci. Univ. Tokyo, 3, A2 (1966), 907 - 917.
5. A. LAZARD, J. MOUTY, *Détermination expérimentale de la charge de flambement et des souplesses d'encastrement d'un élément*, Mém. Assoc. int. ponts et charp., 27 (1967), 31 - 42.
6. Ю. Н. РАБОТНОВ, С. А. ШЕСТЕРНИКОВ, *Устойчивость стержневой и пластинок в условиях ползучести*, Прикл. мат. и мех., 3, 21 (1957) 406-412.
7. T. SHINGO, *Influences of initial eccentricities of columns while testing*, Mem. Def. Acad., 2, 8 (1968), 595 - 603.
8. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
9. Z. WASIUTYŃSKI, *O wyboczeniu stalowych prętów prostych*, Warsz. Tow. Politech., Warszawa 1933.
10. W. WIERZBICKI, *O powstawaniu wyboczenia prętów prostych*, Rozpr. Inż., 12 (1954), 1 - 65.
11. А. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость деформируемых систем*, Изд. Наука, Москва 1967.
12. M. ŻYCZKOWSKI, *Skończone ugięcia mimośrodowo ściskanych prętów o krzywiznie pierwotnej*, Księga jubileuszowa Witolda Wierzbickiego, PWN, Warszawa 1959, 479 - 518.

## Резюме

ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ В ШАРНИРАХ НА ПРОЦЕСС ПРОДОЛЬНОГО ИЗГИБА  
СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

В работе исследуется влияние трения в шарнирах на продольный изгиб шарнирно закрепленного на концах стержня с небольшим начальным изгибом. Указывается, что для реальных, используемых в экспериментах шарниров трение может вызвать эффект начального защемления концов стержня. Таким образом, процесс продольного изгиба происходит двумя этапами. Первый этап (стержень с защемленными концами) заканчивается тогда, когда моменты в защемлении превышают моменты трения в шарнирах. На втором этапе этот же стержень следует рассматривать в качестве шарнирно закрепленного стержня с добавочной нагрузкой от моментов трения в шарнирах. На конце первого этапа может наблюдаться равновесие при нагрузке превосходящей эйлеровскую критическую силу для идеального свободно опертого стержня.

## Summary

THE INFLUENCE OF FRICTION IN THE HINGES ON THE BUCKLING PROCESS OF  
A COLUMN

The paper presents the problem of the influence of friction occurring in the hinges on the buckling process of a simply supported column with a small initial curvature. It has been found, that the initial clamping of the ends of the bar is possible for the type of the hinge actually used in the experiments. Thus the buckling process runs in two stages. The first stage (bar with fixed ends) terminates, when the clamping moments exceed the friction moments. In the second stage the same bar is analyzed with two hinges at the ends, but it is additionally loaded with the friction moments at these hinges. At the end of the first period, the column may be stable even under the loading, exceeding the critical Euler force at the simply supported rod.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 września 1974 r.*



## EKSTRAPOLACYJNA METODA OPISU PRÓB PEŁZANIA PRZY OBCIĄŻENIACH WIELOSTOPNIOWYCH

ZDZISŁAW KUROWSKI, STANISŁAW OCHELSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Metoda ekstrapolacji danych z prób pełzania przy obciążeniu stacjonarnym na próby przy obciążeniach wielostopniowych jest, obok metody reprezentacji całkowych, najczęściej spotykaną w literaturze dotyczącej opisu pełzania materiałów.

Różne metody ekstrapolacyjne stosowano głównie do opisu efektów pełzania tworzyw sztucznych [1, 2]. W poprzedniej pracy [3] zbadano możliwość zastosowania znanych metod ekstrapolacyjnych do opisu pełzania metali. Autorzy stwierdzili konieczność dalszej analizy metod ekstrapolacyjnych, gdyż dotychczasowe metody dały na ogół wyniki niezadowalające.

Alternatywną metodą opisu pełzania metali jest teoria parametru umocnienia RABOTNOVA, NAMIESTNIKOWA i innych [4, 5].

Niniejsza praca przedstawi propozycję nowej metody ekstrapolacyjnej. Metodę tę zastosowano do opisu pełzania niektórych materiałów: ortotropowego tworzywa poliestrowo-szklanego, poliamidu i stali, uzyskując dobry opis prób pełzania przy obciążeniu jedno-stopniowym. W omawianej metodzie wykorzystuje się funkcję pamięci materiału, określającą wrażliwość materiału na wartości naprężeń i czasy, w których następują skoki naprężeń dla złożonej, skokowej historii obciążenia. Opisano sposób wyznaczania tej funkcji dla prób pełzania przy jedno-stopniowym obciążeniu oraz przedstawiono ją dla kilku materiałów.

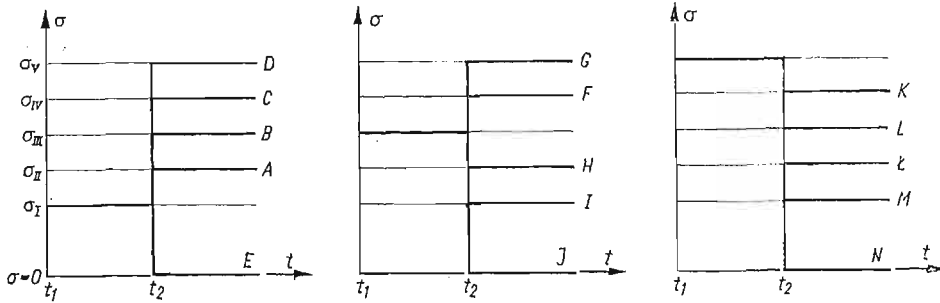
### 2. Opis doświadczeń i wyniki badań

Przeprowadzone izotermiczne badania doświadczalne jednoosiowego rozciągania przy danej historii naprężenia dotyczyły tworzywa warstwowego poliestrowo-szklanego, poliamidu T27 i stali 50H21G9N4.

Tworzywo warstwowe otrzymano z żywicy poliestrowej Polimal-109 i tkaniny szklanej rovingowej marki 19-S4. Tworzywo wykonano w postaci płyt w taki sposób, by kierunki osnowy wszystkich warstw tkanin w tworzywie pokrywały się. Z płyty wycięto próbki w kształcie wiosełek, których osie pokrywały się z kierunkiem osnowy ( $\varphi = 0^\circ$ ) i drugą serię próbek, których kąt zawarty między osią próbki a kierunkiem osnowy wynosił  $45^\circ$  ( $\varphi = 45^\circ$ ). Długość części pomiarowej próbki wynosiła 70 mm, a jej przekrój  $10 \times 3$  mm.

Próbki z poliamidu o kształcie wiosełek, otrzymane metodą wtryskową, posiadały długość pomiarową 60 mm i przekrój  $10 \times 4$  mm. Badania tworzywa warstwowego i polia-

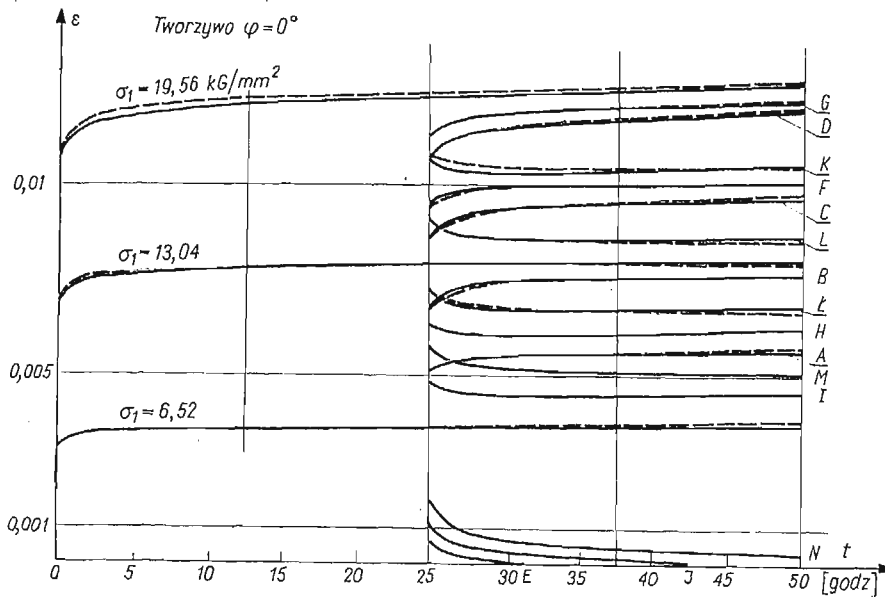
midu przeprowadzono na pełzarce, której budowę opisano w pracy [6]. Wydłużenia próbek mierzono za pomocą tensometru zegarowego Schoppera o bazie pomiarowej 50 mm i działce elementarnej 1/100 mm. Badania przeprowadzono w temperaturze  $23 \pm 0,2^\circ\text{C}$  i względnej wilgotności powietrza (40 - 52%).



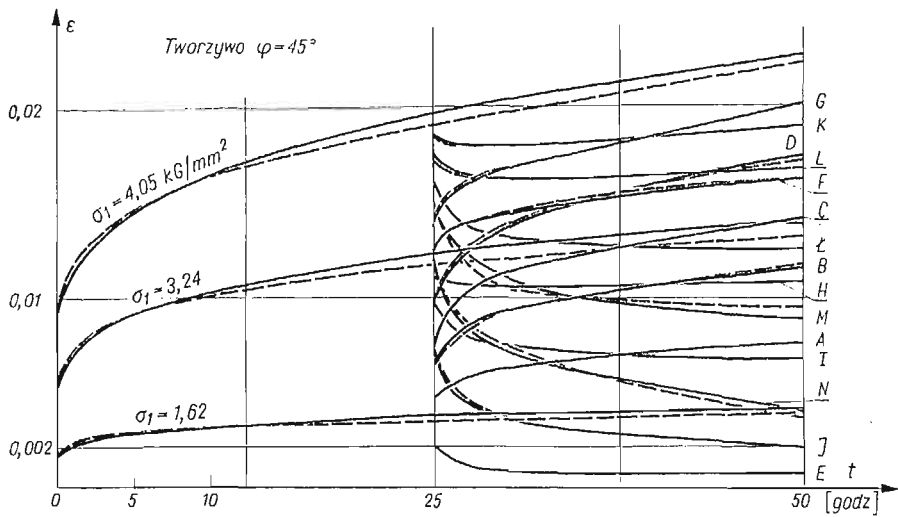
Rys. 1. Jednostopniowe programy obciążenia

Badania próbek ze stali 50H21G9N4 przeprowadzono na pełzarkach typu DST-5000 firmy L. Schopper w temperaturze  $700^\circ\text{C}$ . Próbki posiadały kształt znormalizowany. Dokładność utrzymania temperatury w piecu wynosiła  $\pm 3^\circ\text{C}$ , a wydłużenie przy pełzaniu mierzono z dokładnością 0,002 mm.

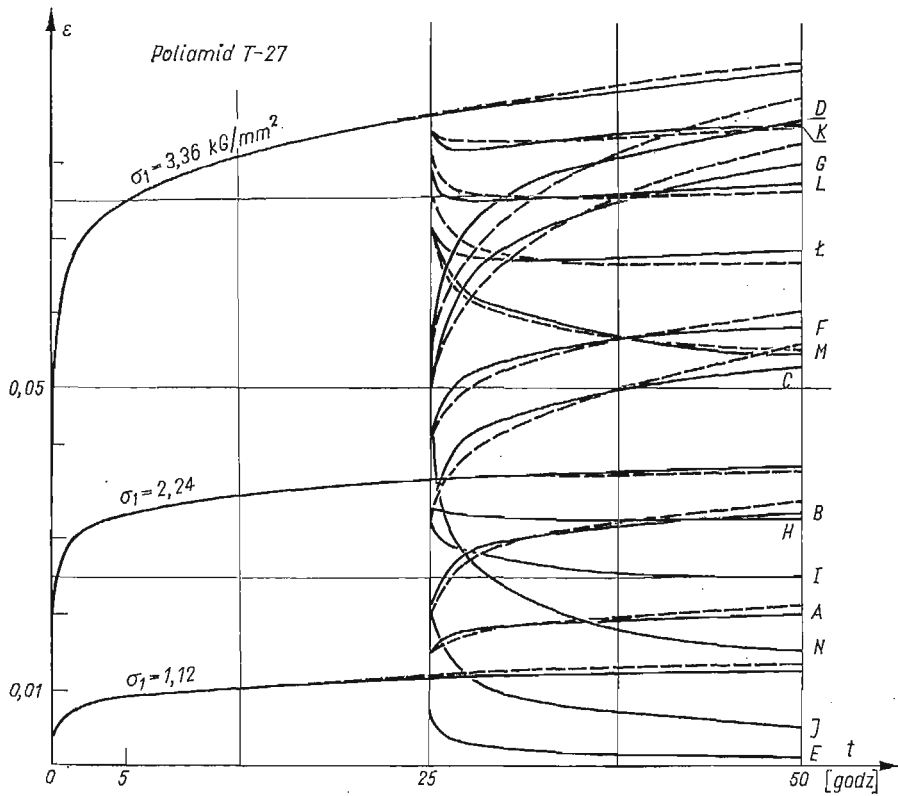
Złożone programy obciążenia obejmowały próby przy obciążeniach stacjonarnych dla trzech stałych naprężeń i piętnaście jednostopniowych programów obciążenia przedstawionych na rys. 1. Zmiany obciążenia w programach dwustopniowych dokonywano po czasie  $t_2 = 2,5; 25$  i 100 godzin. Maksymalne naprężenia w badaniach przyjęto równe



Rys. 2. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla tworzywa warstwowego  $\varphi = 0^\circ$

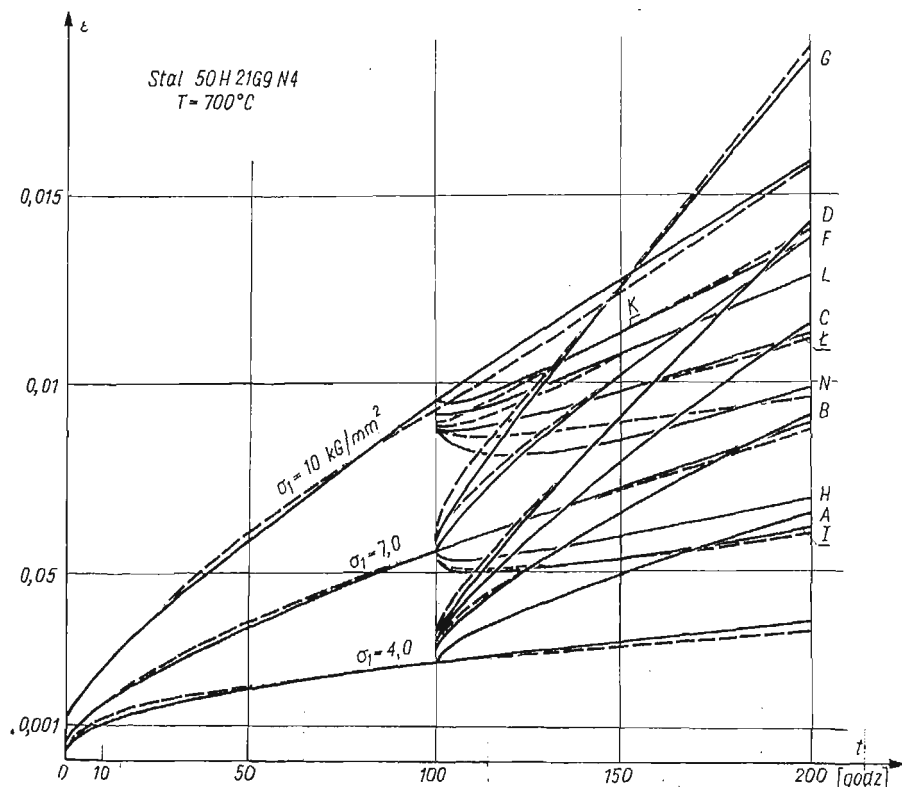


Rys. 3. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla tworzywa warstwowego  $\varphi = 45^\circ$



Rys. 4. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla poliamidu





Rys. 5. Odształcenia doświadczalne (linia przerywana) i obliczone ze wzoru (10) (linia ciągła) dla stali

60% wartości naprężeń niszczących przy rozciąganiu. Zmiany naprężenia odbywały się między wartościami naprężeń równymi:  $\sigma_I = 6,52$ ;  $\sigma_{II} = 9,78$ ;  $\sigma_{III} = 13,04$ ;  $\sigma_{IV} = 16,3$ ;  $\sigma_V = 19,56$  kG/mm<sup>2</sup> dla tworzywa warstwowego  $\varphi = 0^\circ$ , i analogicznie 1,62; 2,43; 3,24; 3,645; 4,05 dla tworzywa warstwowego  $\varphi = 45^\circ$ ; 1,12; 1,68; 2,24; 2,8; 3,36 dla poliamidu oraz dla stali 4,0; 5,5; 7,0; 8,5 i 10 kG/mm<sup>2</sup>.

Średnie wartości wydłużeń względnych uzyskane z 3 - 5 prób posłużyły do zbudowania wykresów pełzania, otrzymanych z realizacji poszczególnych programów badań. Na rys. 2 przedstawiono przykładowo linią przerywaną zależności pełzania dla czasu zmiany obciążenia  $t_2 = 25$  godz. uzyskane z badań tworzywa warstwowego  $\varphi = 0^\circ$ , na rys. 3 — tworzywa warstwowego  $\varphi = 45^\circ$ , na rys. 4 — poliamidu i na rys. 5 — stali. Wyniki badań doświadczalnych wykazały, że badane tworzywa zachowują się nieliniowo w zależności od wartości i historii naprężenia.

### 3. Opis prób pełzania przy obciążeniach stacjonarnych

Do opisu prób pełzania przy obciążeniach stacjonarnych zastosowano następującą zależność między naprężeniami i odształceniami, wielokrotnie stosowaną przez różnych autorów m. in. [7, 8] do opisu pełzania różnorodnych materiałów,

$$(1) \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + a(\sigma)t^{m(\sigma)}.$$

Wartości funkcji  $a(\sigma)$  i  $m(\sigma)$  wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów w sposób opisany przez autorów w [3]. Wartości tych funkcji dla stali przyjęto z tej samej pracy. Metoda ta pozwoliła na dobre opisanie pelzania przy obciążeniu stacjonarnym. Maksymalne wartości błędów w stosunku do wartości doświadczalnych odkształcenia całkowitego wynosiły: dla tworzywa poliestrowo-szklanego (próbki wycięte pod kątem  $0^\circ$  do kierunku osnowy):  $-5,77\%$  i  $+6,25\%$ ; dla tworzywa poliestrowo-szklanego (próbki wycięte pod kątem  $45^\circ$  do kierunku osnowy):  $-1,69\%$  i  $+2,11\%$ ; dla poliamidu:  $-4,16\%$  i  $+3\%$ . Dla kilku prób osiągnięto bardzo dobre wyniki, gdyż błąd wyniósł mniej niż  $1\%$ .

Wartości funkcji  $a(\sigma)$  i  $m(\sigma)$  podano w tablicy 1.

Tablica 1

Tworzywo poliestrowo-szklane $\varphi = 45^\circ$	$\sigma$ [kG/mm <sup>2</sup> ]	1,62	2,44	3,24	3,65	4,05	
	$a \cdot 10^5$	82,353	225,0	388,625	500,0	694,347	
	$m$	0,313	0,28	0,267	0,26	0,259	
Tworzywo poliestrowo-szklane $\varphi = 0^\circ$	$\sigma$ [kG/mm <sup>2</sup> ]	6,52	9,78	13,04	16,3	19,56	22,82
	$a \cdot 10^5$	13,089	44,0	84,159	119,0	153,605	217,441
	$m$	0,278	0,13	0,109	0,105	0,128	0,122
Poliamid	$\sigma$ [kG/mm <sup>2</sup> ]	1,12	1,68	2,24	2,8	3,36	
	$a \cdot 10^5$	327,892	950,0	2144,951	3200,0	5344,929	
	$m$	0,2496	0,09	0,0993	0,099	0,0986	
Stal 50H21G9N4	$\sigma$ [kG/mm <sup>2</sup> ]	3	4	5,5	7	8,5	10
	$a \cdot 10^5$	10,756	13,332	12,411	16,243	16,945	17,227
	$m$	0,577	0,605	0,713	0,732	0,786	0,844

#### 4. Proponowana metoda ekstrapolacyjna

Przedstawioną w niniejszej pracy metodę ekstrapolacyjną otrzymuje się jako szczególny przypadek ogólnego równania konstytutywnego dla tzw. materiałów lepkich. W pracy [9] przedstawiono propozycję uściślenia pojęcia lepkości oraz zaproponowano sposób podziału materiałów wrażliwych na zamiany dróg deformacji na szereg grup drogą analizy postaci funkcjonu konstytutywnego przy narzuceniu jego niezmienniczości względem pewnych klas zamian dróg deformacji. Jedną z takich grup stanowią materiały zupełnie lepkie. Materiały te w przypadku skokowych historii odkształcenia (próba relaksacji) zapamiętują pełną informację o tej historii, tzn. wartości kolejnych gradientów odkształcenia oraz chwile czasowe, w których nastąpiły skoki gradientów odkształcenia.

Korzystając z wyników tej pracy i dokonując — jak to się często stosuje w praktyce w teorii pełzania — formalnej zamiany naprężeń z odkształceniami, możemy ogólne prawo stanu dla materiału całkowicie lepkiego dla  $(n-1)$ -stopniowej historii obciążenia

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_{i-1}) H(t - t_i),$$

gdzie  $\sigma_0 = 0$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$ , zapisać w postaci (dla procesów izotermicznych):

$$(2) \quad \varepsilon_p(t) = C_n(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; t_1, t_2, \dots, t_n; t),$$

gdzie  $\varepsilon_p$  — odkształcenie czystego pełzania,  $C_n$  — funkcjonal konstytutywny.

Zakładamy, że odkształcenie natychmiastowe jest liniowo sprężyste. Materiał o prawie stanu (2) zapamiętuje pełną informację o skokowej historii naprężenia.

Poniżej przedstawiono propozycję metody ekstrapolacyjnej. Opiera się ona na następującym postulatcie, który był przyjmowany przez PIPKINA i ROGERSA w [2].

Jeśli

$$\begin{aligned} \sigma_{j_1} &= \sigma_{j_1-1}, \dots, \sigma_{j_k} = \sigma_{j_k-1}, \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k < n, \quad 1 < k \leq n, \end{aligned}$$

to wówczas

$$(3) \quad C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n; t_1, \dots, t_n; t) \equiv C_{n-k}(\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \dots, \sigma_{i_{n-k}}; t_{i_1}, \dots, t_{i_{n-k}}; t),$$

gdzie w ciągu  $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$  znajdują się liczby  $1, 2, \dots, n$  z pominięciem  $j_1, \dots, j_k$ .

Postulat powyższy można spełnić przyjmując następującą postać równania konstytutywnego:

$$(4) \quad C_n(\sigma_1, \dots, \sigma_n; t_1, \dots, t_n; t) \equiv \sum_{i=1}^n w_i C_1(\sigma_i; t_i; t),$$

gdzie w ogólnym przypadku

$$(5) \quad w_i = w_i(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i; t_1, t_2, \dots, t_i),$$

przy czym

$$(6) \quad w_1 \equiv 1.$$

Jeśli zachodzi  $\sigma_{k-1} = \sigma_k$  ( $1 < k \leq i$ ), to musi być

$$(7) \quad w_k(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k-1}; t_1, \dots, t_{k-1}, t_k) \equiv 0$$

oraz dla  $k < j \leq i$

$$(8) \quad \begin{aligned} w_j(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_j; t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_j) \equiv \\ \equiv w_{j-1}(\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_j; t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_j). \end{aligned}$$

Funkcje  $w_i$  spełniające warunki (5), (6), (7) i (8) są funkcjami pamięci materiału, określającymi jego wrażliwość na wartości i czasy skoków naprężenia.

Przyjmując konkretne prawo pełzania dla danego materiału otrzymamy dla niego odpowiednią postać wzoru (4).

Ograniczmy się obecnie do prób pęzania przy obciążeniu jednostopniowym i przyjmiemy prawo pęzania dane wzorem (1), tzn. przyjmiemy

$$C_1(\sigma; t_1; t) = a(\sigma)(t-t_1)^{m(\sigma)}.$$

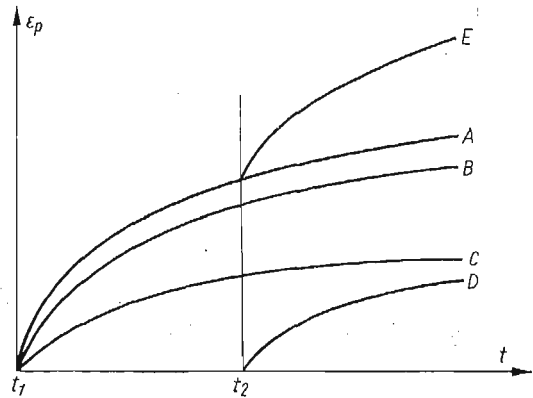
Wzór (4) przyjmie postać

$$(9) \quad \varepsilon_p(t) = \sum_{i=1}^n w_i a(\sigma_i) (t-t_i)^{m(\sigma_i)}.$$

Dla próby przy obciążeniu jednostopniowym wzór ten przedstawia się (przyjmując  $t_1 = 0$ )

$$(10) \quad \varepsilon_p(t) = a(\sigma_1)t^{m(\sigma_1)} + w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2) a(\sigma_2) (t-t_2)^{m(\sigma_2)}.$$

Przedstawioną powyżej metodę ekstrapolacyjną można zilustrować graficznie w sposób przedstawiony na rys. 6. Dla próby  $\sigma(t) = \sigma_1 + (\sigma_2 - \sigma_1)H(t-t_2)$  bierzemy krzywe pęzania



Rys. 6. Graficzna interpretacja proponowanej metody ekstrapolacji

odpowiadające  $\sigma_1$  (krzywa A) i  $\sigma_2$  (krzywa B). Rzędne punktów krzywej B mnożymy przez  $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$  otrzymując krzywą C, którą przesuujemy następnie równolegle po osi  $t$ , tak aby jej początek znajdował się w  $t_2$  (krzywa D). Następnie dla czasów  $t > t_2$  superponujemy krzywe A i D otrzymując ostateczną krzywą E.

Przedstawiona powyżej metoda lepiej opisała wyniki doświadczalne pęzania stali przy obciążeniu jednostopniowym niż metody ekstrapolacyjne zaproponowane w [1, 2].

Na rys. 2 - 5 linią ciągłą zaznaczono krzywe pęzania obliczone ze wzoru (10), a linią przerywaną — wartości doświadczalne. Dla przedstawionych prób maksymalne błędy opisu wyników doświadczalnych wynosiły (w %): tworzywo  $\varphi = 0^\circ$ : -1,3 do +4,1; tworzywo  $\varphi = 45^\circ$ : -6,3 do +8,9; poliamid: -12,8 do +16,8; stal -8,3 do +6,0.

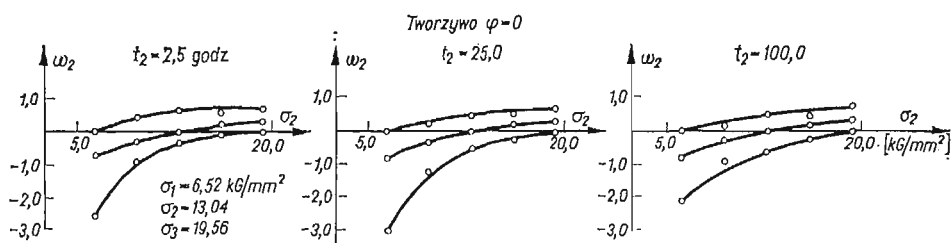
##### 5. Wyznaczanie i własności funkcji pamięci $w_2$

Funkcję  $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$  dla przedziału naprężeń  $[\sigma_p, \sigma_k]$  i przedziału czasowego  $[t_p, t_k]$  wyznaczamy w następujący sposób. Przyjmujemy trzy wartości naprężeń  $\sigma_p < \sigma_s < \sigma_k$  i czasu  $t_p < t_s < t_k$ . Dla każdej wartości czasu  $t_p, t_s$  i  $t_k$  wystarczy przeprowadzić 9 prób pęzania przy obciążeniu jednostopniowym. Znając wartości doświadczalne odkształcenia w  $n$  chwilach czasu  $\tau_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $t_2 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots < \tau_n \leq t_k$ , wartość

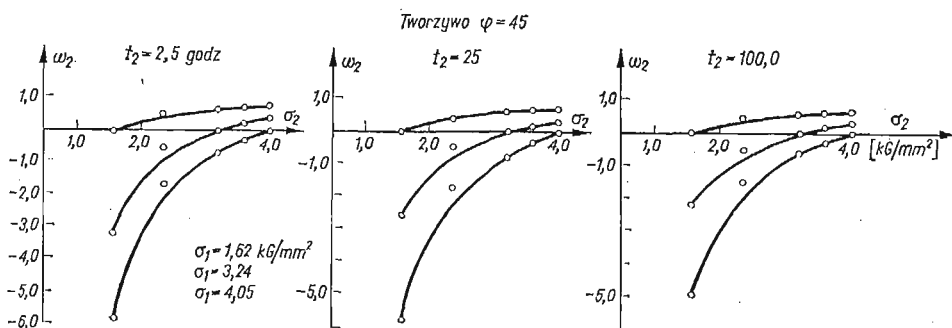
funkcji wyznaczono metodą najmniejszych kwadratów. Funkcję  $w_2$  opisano następnie przy pomocy funkcji kwadratowej

$$w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2) = a_2(\sigma_1, t_2)\sigma_2^2 + a_1(\sigma_1, t_2)\sigma_2 + a_0(\sigma_1, t_2).$$

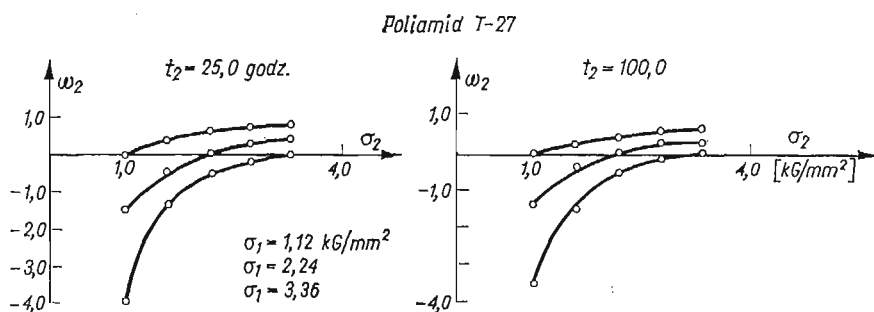
Współczynniki  $a_2$ ,  $a_1$  i  $a_0$  wyznaczono z warunku, aby krzywa  $w_2$  przechodziła przez 3 punkty doświadczalne. Stwierdzono wyraźną zmienność wartości tych współczynników, w zależności od obu ich argumentów. Na rys. 7 - 10 przedstawiono wykresy funkcji  $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$  dla różnych materiałów i różnych wartości argumentów  $\sigma_1$  i  $t_2$ . Znajomość wartości  $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$  dla trzech wartości  $t_2$  z przedziału  $[t_p, t_k]$  i trzech wartości naprężeń  $\sigma_1$  z przedziału  $[\sigma_p, \sigma_k]$  pozwala opisywać dowolne próby pełzania przy obciążeniu jedno-



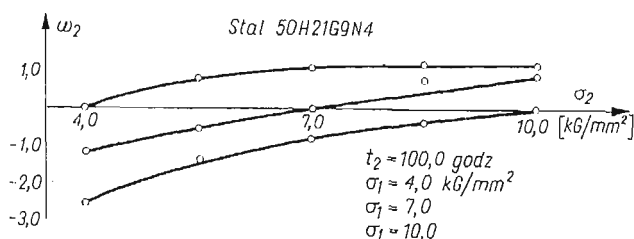
Rys. 7. Wykresy funkcji pamięci materiału  $w_2$  dla tworzywa warstwowego  $\varphi = 0^\circ$



Rys. 8. Wykresy funkcji pamięci materiału  $w_2$  dla tworzywa warstwowego  $\varphi = 45^\circ$



Rys. 9. Wykresy funkcji pamięci materiału  $w_2$  dla poliamidu

Rys. 10. Wykresy funkcji pamięci materiału  $w_2$  dla stali

stopniowym, w których wartości naprężeń oraz chwila skoku znajdują się w powyższych przedziałach. Wartości funkcji można otrzymać poprzez interpolację wartości podanych na wykresach.

Porównując wykresy funkcji pamięci materiału  $w_2$  na rysunkach (7 - 10), można spostrzec ich jakościowe podobieństwo dla różnych materiałów. Obserwuje się znacznie większe (co do wartości bezwzględnej) wartości funkcji  $w_2$  przy odciążeniu niż przy dociążeniu. Stwierdzono niezbyt dużą zmienność funkcji  $w_2$  względem parametru czasowego  $t_2$ . Zmienność ta jest wyraźna jedynie przy dużych zmianach naprężenia. W większości przypadków zmienność ta jest nieznaczna i z dobrym przybliżeniem do celów praktycznych można przyjmować  $w_2(\sigma_1, \sigma_2; t_2)$  jako niezależne od  $t_2$ . Powyższe stwierdzenie dotyczy zakresów przyjętych w badaniach przedziałów czasu  $t_2$  i naprężeń.

## 6. Wnioski końcowe

1. Zastosowanie metody ekstrapolacyjnej opartej na funkcji pamięci materiału, przy prostym opisie matematycznym, pozwoliło na dobre opisanie prób pełzania różnych materiałów przy obciążeniu jednostopniowym.

2. Do wyznaczenia funkcji pamięci, dla wymienionych w pracy materiałów w określonym przedziale czasu i naprężeń, okazuje się wystarczające przeprowadzenie maksymalnie 27 prób pełzania przy obciążeniu jednostopniowym.

3. Dalszym kierunkiem badań nad przedstawioną metodą ekstrapolacyjną powinna być analiza opisu prób więcej niż jednostopniowych. Zastosowanie przedstawionej metody do kilku prób przy obciążeniu dwustopniowym pozwoliło zauważyć, że metoda ta daje opis równie dobry jak dla prób przy obciążeniu jednostopniowym.

## Literatura cytowana w tekście

1. R. O. STAFFORD, *On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 17 (1969).
2. A. C. PIPKIN, T. G. ROGERS, *A non-linear integral representation for viscoelastic behaviour*, J. Mech. Phys. Solids, 16 (1968).
3. Z. KUROWSKI, S. OCHELSKI, *Zastosowanie metod reprezentacji całkowych i ekstrapolacji do matematycznego opisu pełzania metali*, Biul. WAT, 3, 23 (1974).
4. В. С. НАМЕСТНИКОВ, Ю. Н. РАБОТНОВ, *О гипотезе уравнения состояния при ползучести*, ПМТФ, 3 (1961).

5. Ju. N. RABOTNOW, *Redistribution of Reactions at Transient Power — Law Creep, Creep in Structures*, Springer, 1972.
6. S. OCHELSKI, *Analiza pełzania ortotropowego tworzywa warstwowego w jednoosiowym stanie naprężenia*, Biul. WAT, 1, 18 (1969).
7. J. de LACOMBE, *Une mode de représentation des courbes des fluages*, Rev, mét., 36 (1939).
8. I. FINNIE, W. R. HELLER, *Pełzanie materiałów konstrukcyjnych*, Warszawa 1962.
9. J. RYCHLEWSKI, *Niewrażliwość materiałów na zamiany dróg deformacji*, Prace IPPT PAN, 1973.

## Р е з ю м е

## ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ИСПЫТАНИЙ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ НАГРУЗКАХ

В работе предложен экстраполяционный метод описания многоступенчатых изотермических испытаний некоторых материалов на ползучесть. При описании с помощью этого метода многоступенчатых испытаний на ползучесть используются лишь: закон ползучести при постоянной нагрузке и, определенные в работе, функции памяти материала. Предложенный метод проверен экспериментально для одноступенчатой ползучести полиэфирного стеклопластика, полиамида и стали. Получено хорошее описание экспериментальных кривых.

## S u m m a r y

## EXTRAPOLATION METHOD OF DESCRIPTION OF CREEP TESTS AT MULTI-STEP LOADINGS

An extrapolation method for the description isothermal creeping of several materials under multi-step loads is proposed in this paper. For the description of multistep creeping, the method makes use only of the one-step creep law, and the material memory functions defined in the paper. The method proposed was verified experimentally for two-step creeping of fibre-reinforced polyester resin, polyamide and steel, providing a good description of experimental curves.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA, WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 października 1974 r.*

---

## IZOTROPIA JAKO PRZYPADEK GRANICZNY WIELOSKŁADNIKOWEGO OŚRODKA ORTOTROPOWEGO

ALICJA GOŁĘBIEWSKA-LASOTA, ANDRZEJ P. WILCZYŃSKI  
(WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Ośrodki rzeczywiste, w większości przypadków dobrze opisywane przez przyjęcie założenia continuum materialnego, w rzeczywistości stanowią zazwyczaj zbiór spójnych elementów przestrzennych, z których każdy daje się opisywać przy pomocy anizotropowych związków konstytutywnych. Takimi przypadkami są w szczególności materiały polikrystaliczne czy nawet monokrystały rzeczywiste. Szczególnym zainteresowaniem cieszą się jednak obecnie kompozycje materiałowe, a wśród nich coraz to większe zastosowanie znajdują wzmacniane tworzywa sztuczne, laminaty, kompozycje wzmacniane whiskersami i betony zbrojone szkłem. Materiały te, w przypadku uporządkowanego ułożenia wzmacnień są opisywane z zadowalającą dokładnością przy użyciu jednej z wielu obecnie istniejących teorii wzmacnienia. Problem staje się jednak nierozwiązalny w sposób ścisły, jeżeli elementy wzmacniające rozłożone są beładnie w przestrzeni. Przypadek taki zachodzi przy stosowaniu termoplastycznych tworzyw sztucznych, wzmacnianych krótkimi włóknami, znajdujących coraz to szersze zastosowanie w technice.

Jedyną znaną autorom pracę na temat własności ośrodka o takiej strukturze podano w spisie literatury [1]. Tematem niniejszego artykułu jest propozycja metody wyznaczania stałych materiałowych kompozycji, wzmacnianych beładnie ułożonymi wtrąceniami. Rozważono tu przypadek szczególny ciała, składającego się ze spójnych elementów monotropowych, ułożonych beładnie w przestrzeni. Zakładając, że znane są własności elementów ciała, identyczne w każdym jego punkcie, lecz różnie ukierunkowane, postawiono problem wyznaczenia własności makroskopowych ciała jako całości. Do tego celu przyjęto, że określona własność mierzona  $\bar{X}$  związana jest z odpowiednią własnością  $X$  w elemencie ciała zależnością

$$\bar{X} = C \int \dots \int_n X \prod_1^n p(\varphi_i) d\varphi_i,$$

gdzie stałą  $C$  wyznacza się z warunku normalizacji, a  $p(\varphi_i)$  są rozkładami zmiennych  $\varphi$  w przestrzeni. Można oczekiwać, zgodnie z podstawowym twierdzeniem fizyki statystycznej, że tak otrzymany wynik powinien być zbliżony do wielkości mierzonej.

W przypadku przestrzeni dwuwymiarowej wykonanie powyższej operacji nie nastęrcza specjalnych trudności i zostało to dokonane uprzednio [2]. Podejście to jednak w przypadku



przestrzeni trójwymiarowej nastęrcza poważne trudności obliczeniowe. Poniżej zaproponowano nieco inną metodę podejścia, jak się wydaje o wiele prostszą i prowadzącą do wyników w postaci zamkniętej.

Można dodać, że szczególny, rozważany tu rodzaj anizotropii jest zbliżony do anizotropii układów heksagonalnych i powinien z dobrym przybliżeniem opisywać własności polikryształów tak zbudowanych. Należy wyraźnie zaznaczyć, że proponowana metoda postępowania nie może być stosowana w takich przypadkach jak ocena własności wytrzymałościowych, odporności na pękanie czy podobnych, gdzie wartości średnie nie mają sensu fizycznego.

## 2. Sformułowanie zagadnienia

Rozważmy szczególny przypadek ośrodka anizotropowego, w którym istnieje oś monotropii skierowana wzdłuż osi  $OZ$  układu współrzędnych; tak więc każda płaszczyzna równoległa do płaszczyzny  $OXY$  jest płaszczyzną izotropii. W takim ośrodku związki między składowymi tensora naprężeń  $\sigma$  i tensorem odkształceń  $\varepsilon$  mają postać:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= a_{11} \sigma_{xx} + a_{12} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz}, \\
 \varepsilon_{yy} &= a_{12} \sigma_{xx} + a_{11} \sigma_{yy} + a_{13} \sigma_{zz}, \\
 \varepsilon_{zz} &= a_{13} \sigma_{xx} + a_{13} \sigma_{yy} + a_{33} \sigma_{zz}, \\
 \varepsilon_{yz} &= a_{44} \sigma_{yz}, \\
 \varepsilon_{xz} &= a_{44} \sigma_{xz}, \\
 \varepsilon_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12}) \sigma_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

lub używając stałych technicznych:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E_0} (\sigma_{xx} - \nu_0 \sigma_{yy}) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{zz}, \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E_0} (\sigma_{yy} - \nu_0 \sigma_{xx}) - \frac{\nu_1}{E_1} \sigma_{zz}, \\
 \varepsilon_{zz} &= -\frac{\nu_1}{E_1} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{E_1} \sigma_{zz}, \\
 \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{G_1} \sigma_{yz}, \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{G_1} \sigma_{xz}, \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G_0} \sigma_{xy} = \frac{1 + \nu_0}{E_0} \sigma_{xy}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

W ogólnym przypadku, dla dowolnego ośrodka anizotropowego, związek między  $\sigma$  i  $\varepsilon$  ma postać

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.
 \tag{3}$$

$c_{ijkl}$  jest tensorem czwartego rzędu w przestrzeni trójwymiarowej, tak więc wzór (3) jest wyjątkowo wygodny w sytuacjach, w których mamy do czynienia z transformacjami obiektów do nowych układów współrzędnych. Oczywiście, porównanie wzorów (1), (2) i (3) ustala natychmiast jednoznaczne zależności między współczynnikami  $a_{ij}$ , stałymi technicznymi i składowymi tensora  $c_{ijkl}$ . Rozpatrywany ośrodek jest scharakteryzowany przez 5 niezależnych stałych. Związki między współczynnikami  $a_{ij}$  i niezerowymi składowymi tensora  $c_{ijkl}$  mają postać:

$$(4) \quad \begin{aligned} c_{1111} &= c_{2222} = a_{11}; & c_{3333} &= a_{33}; \\ c_{1122} &= c_{2211} = a_{12}; & c_{1133} &= c_{3311} = a_{13}; \\ c_{1313} &= c_{3113} = c_{3131} = c_{1331} = c_{2323} = c_{3232} = c_{2332} = c_{3223} = 1/4 a_{44}. \end{aligned}$$

Analogiczne związki między współczynnikami  $a_{ij}$  i stałymi technicznymi otrzymuje się bezpośrednio ze wzorów (1) i (2).

Dowolną transformację tensora  $c$  można zapisać w postaci:

$$(5) \quad c_{i'j'k'l'} = A_{i'}^i, A_{j'}^j, A_{k'}^k, A_{l'}^l, c_{ijkl},$$

gdzie  $A_{i'}^i$ , oznaczają odpowiednie macierze transformacyjne. Jeśli żadaną transformacją jest obrót o kąt  $\varphi$  wokół którejś osi układu współrzędnych, to macierze transformacyjne są funkcjami tylko tego kąta, a składowe obróconego tensora  $c$  wyrażają się przez stare składowe  $c$  i tenże kąt  $\varphi$ . Po uśrednieniu nowych składowych względem kąta  $\varphi$ , otrzymamy składowe nowego tensora, zależne liniowo od wyjściowych składowych. Tak więc obrót uśredniony jest zdefiniowany wzorem

$$(6) \quad c_{i'j'k'l'}^{(L)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{i'}^i(\varphi) A_{j'}^j(\varphi) A_{k'}^k(\varphi) A_{l'}^l(\varphi) c_{ijkl} d\varphi.$$

Litera w nawiasie u góry oznacza oś, wokół której dokonywane są obroty. Sam obrót może być interpretowany na dwa sposoby: jako obrót tensora o kąt  $\varphi$  lub jako przejście do nowego układu współrzędnych, w którym jedna z osi pokrywa się z odpowiednią osią starego układu, a dwie pozostałe powstały przez obrót odpowiednich starych osi o kąt  $\varphi$  wokół niezmięnionej osi. Wiąże się to także z interpretacją uśredniania, albo względem wszystkich dopuszczalnych obróconych układów współrzędnych, albo dla każdej składowej tensora względem wszystkich możliwych wartości danej składowej, otrzymanych w wyniku jej obrotu o dowolne kąty, w przedziale od 0 do  $\pi$ .

Trzy kolejno po sobie następujące obroty uśrednione wokół osi  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  będziemy nazywać obrotem uogólnionym, dopiero bowiem po wprowadzeniu takiego obrotu będzie można otrzymać odpowiednie wzory rekurencyjne dla składowych tensora  $c_{ijkl}$  (a co się z tym wiąże, dla stałych technicznych); a z nich, za pomocą pewnych przekształceń, wartości graniczne przy dążącej do nieskończoności liczby obrotów uogólnionych.

### 3. Obroty uśrednione i uogólnione

Zajmijmy się obrotem wokół osi  $OX$ . Macierz  $A_{j'}^i$ , ma postać:

$$(7) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

a niezerowe składowe tensora  $c_{ijkl}$  obliczone na podstawie wzoru (5) są następujące:

$$\begin{aligned}
 c_{1'1'1'1'} &= c_{1111}, \\
 c_{1'1'2'2'} &= \cos^2\varphi c_{1122} + \sin^2\varphi c_{1133}, \\
 c_{1'1'3'3'} &= \sin^2\varphi c_{1122} + \cos^2\varphi c_{1133}, \\
 c_{1'1'2'3'} &= \sin\varphi \cos\varphi [c_{1122} - c_{1133}], \\
 c_{2'2'2'2'} &= \cos^4\varphi c_{2222} + \sin^4\varphi c_{3333} + 2\sin^2\varphi \cos^2\varphi (c_{2233} + 2c_{2323}), \\
 c_{2'2'3'3'} &= (\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) c_{2233} + \sin^2\varphi \cos^2\varphi (c_{2222} + c_{3333} - 4c_{2323}), \\
 (8) \quad c_{2'2'2'3'} &= \sin\varphi \cos\varphi [\cos^2\varphi c_{2222} - \sin^2\varphi c_{3333} + (\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)(c_{2233} + 2c_{2323})], \\
 c_{3'3'3'3'} &= \cos^4\varphi c_{3333} + \sin^4\varphi c_{2222} + 2\sin^2\varphi \cos^2\varphi (c_{2233} + 2c_{2323}), \\
 c_{3'3'2'2'} &= \sin\varphi \cos\varphi [\sin^2\varphi c_{2222} - \cos^2\varphi c_{3333} + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(c_{2233} + 2c_{2323})], \\
 c_{1'2'1'2'} &= \cos^2\varphi c_{1212} + \sin^2\varphi c_{1313}, \\
 c_{1'2'1'3'} &= \sin\varphi \cos\varphi (c_{1212} - c_{1313}), \\
 c_{1'3'1'3'} &= \sin^2\varphi c_{1212} + \cos^2\varphi c_{1313}, \\
 c_{2'3'2'3'} &= \sin^2\varphi \cos^2\varphi (c_{2222} + c_{3333} - 2c_{2233}) + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)^2 c_{2323}.
 \end{aligned}$$

Uśredniając te składowe względem kąta  $\varphi$ , otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 c_{1'1'1'1'}^{(x)} &= c_{1111}, \\
 c_{1'1'2'2'}^{(x)} &= c_{1'1'3'3'}^{(x)} = \frac{1}{2} (c_{1122} + c_{1133}), \\
 c_{2'2'2'2'}^{(x)} &= c_{3'3'3'3'}^{(x)} = \frac{3}{8} (c_{2222} + c_{3333}) + \frac{1}{4} c_{2233} + \frac{1}{2} c_{2323}, \\
 (9) \quad c_{2'2'2'3'}^{(x)} &= \frac{1}{8} (c_{2222} + c_{3333}) + \frac{3}{4} c_{2233} - \frac{1}{2} c_{2323}, \\
 c_{1'2'1'2'}^{(x)} &= c_{1'3'1'3'}^{(x)} = \frac{1}{2} (c_{1212} + c_{1313}), \\
 c_{2'3'2'3'}^{(x)} &= \frac{1}{2} (c_{2'2'2'2'}^{(x)} - c_{2'2'3'3'}^{(x)}) = \frac{1}{3} (c_{2222} + c_{3333}) - \frac{1}{4} c_{2233} + \frac{1}{2} c_{2323}.
 \end{aligned}$$

Jak widać, w wyniku obrotu uśrednionego wokół osi  $OX$ , otrzymaliśmy znowu pięć niezerowych niezależnych składowych wyrażających się przez odpowiednie składowe początkowe. Dopiero po uśrednieniu wystąpiły pewne symetrie i liczba niezależnych składowych zredukowała się do pięciu: np.  $c_{2'2'2'2'} \neq c_{3'3'3'3'}$ , ale  $c_{2'2'2'2'}^{(x)} = c_{2'3'3'3'}^{(x)}$ . Co więcej, także dopiero po uśrednieniu, wartości pewnych niezerowych składowych są równe zeru, np.  $c_{1'1'2'3'}$ . Analogiczne uwagi dotyczą obrotów uśrednionych wokół osi  $OY$  i  $OZ$ .

Podobnie jak w przypadku osi  $OX$ , dokonamy następnie obrotów uśrednionych wokół osi  $OY$ , a potem  $OZ$ , tzn. najpierw składowe  $c_{i'j'k'l'}$  zostaną przekształcone przy pomocy macierzy

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

a następnie uśrednione. W wyniku otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
 c_{1''1''1''1''}^{(y)} &= c_{3''3''3''3''}^{(y)} = \frac{3}{8}(c_{1''1''1''1''}^{(x)} + c_{2''2''2''2''}^{(x)}) + \frac{1}{4}c_{1''1''2''2''}^{(x)} + \frac{1}{2}c_{1''2''1''2''}^{(x)}, \\
 c_{2''2''2''2''}^{(y)} &= c_{2''2''2''2''}^{(x)}, \\
 c_{1''1''2''2''}^{(y)} &= c_{2''2''3''3''}^{(y)} = \frac{1}{2}(c_{1''1''2''2''}^{(x)} + c_{2''2''3''3''}^{(x)}), \\
 (10) \quad c_{1''1''3''3''}^{(y)} &= \frac{1}{8}(c_{1''1''1''1''}^{(x)} + c_{3''3''3''3''}^{(x)}) + \frac{3}{4}c_{1''1''3''3''}^{(x)} - \frac{1}{2}c_{1''3''1''3''}^{(x)}, \\
 c_{1''2''1''2''}^{(y)} &= c_{2''3''2''3''}^{(y)} = \frac{1}{2}(c_{1''2''1''2''}^{(x)} + c_{2''3''2''3''}^{(x)}), \\
 c_{1''3''1''3''}^{(y)} &= \frac{1}{2}(c_{1''1''1''1''}^{(y)} - c_{1''1''3''3''}^{(y)}) = \frac{1}{8}c_{1111}^{(x)} + c_{3''3''3''3''}^{(x)} - \\
 &\quad - \frac{1}{4}c_{1''1''3''3''}^{(x)} + \frac{1}{2}c_{1''3''1''3''}^{(x)}.
 \end{aligned}$$

Z kolei obrót uśredniony wokół osi  $OZ$  daje:

$$\begin{aligned}
 c_{1''1''1''1''}^{(z)} &= c_{2''2''2''2''}^{(z)} = \frac{3}{8}(c_{1''1''1''1''}^{(y)} + c_{2''2''2''2''}^{(y)}) + \\
 &\quad + \frac{1}{4}c_{1''1''2''2''}^{(y)} + \frac{1}{1}c_{1''2''1''2''}^{(y)}, \\
 c_{3''3''3''3''}^{(z)} &= c_{3''3''3''3''}^{(y)}, \\
 c_{1''1''2''2''}^{(z)} &= \frac{1}{8}(c_{1''1''1''1''}^{(y)} + c_{2''2''2''2''}^{(y)}) + \frac{3}{4}c_{1''1''2''2''}^{(y)} - \frac{1}{2}c_{1''2''1''2''}^{(y)}, \\
 (11) \quad c_{1''1''3''3''}^{(z)} &= c_{2''2''3''3''}^{(z)} = \frac{1}{2}(c_{1''1''3''3''}^{(y)} + c_{2''2''3''3''}^{(y)}), \\
 c_{1''2''1''2''}^{(z)} &= \frac{1}{2}(c_{1''1''1''1''}^{(z)} - c_{1''1''2''2''}^{(z)}) = \frac{1}{8}(c_{1''1''1''1''}^{(y)} + c_{2''2''2''2''}^{(y)}) - \\
 &\quad - \frac{1}{4}c_{1''1''2''2''}^{(y)} + \frac{1}{4}c_{1''2''1''2''}^{(y)}, \\
 c_{1''3''1''3''}^{(z)} &= c_{2''3''2''3''}^{(z)} = \frac{1}{2}(c_{1''3''1''3''}^{(y)} + c_{2''3''2''3''}^{(y)}).
 \end{aligned}$$

Widać, że pewne prawidłowości wystąpią dopiero po trzech kolejnych obrotach; jeśli początkowe składowe  $c_{ijkl}$  oznaczmy przez  $c_{ijkl}^{(0)}$ , a otrzymane po tych trzech obrotach  $c_{ijkl}^{(1)}$  i wyrazimy je poprzez początkowe  $c_{ijkl}^{(0)}$ , to po następnych trzech obrotach wokół osi  $OX, OY, OZ$  (uśrednionych), postać zależności  $c_{ijkl}^{(z)} = f(c_{mnpq}^{(1)})$  będzie taka sama, jak  $c_{ijkl}^{(1)} = f(c_{mnpq}^{(0)})$ . Dlatego wprowadzamy pojęcie obrotu uogólnionego, jako operacji będącej złożeniem trzech kolejnych obrotów uśrednionych wokół osi  $OX, OY, OZ$ . A więc utożsa-

miamy składowe  $c_{i,j,k,l,\dots}^{(z)}$ , ze składowymi otrzymanymi po jednym obrocie uogólnionym:

$$c_{i,j,k,l,\dots}^{(z)} \approx c_{ijkl,\dots}^{(1)}.$$

Korzystając ze wzorów (11), (10), (9) wyrażamy je poprzez początkowe składowe  $c_{ijkl,\dots}^{(0)}$ :

$$(12) \quad \begin{aligned} c_{1111}^{(1)} &= \frac{1}{64} \left[ 31 \frac{3}{8} c_{1111}^{(0)} + 15 \frac{3}{8} c_{3333}^{(0)} + 17 \frac{1}{4} (c_{1133}^{(0)} + 2c_{1313}^{(0)}) \right], \\ c_{2222}^{(1)} &= c_{1111}^{(0)}, \\ c_{3333}^{(1)} &= \frac{1}{64} [41c_{1111}^{(0)} + 9c_{3333}^{(0)} + 14(c_{1133}^{(0)} + 2c_{1313}^{(0)})], \\ c_{1122}^{(1)} &= \frac{1}{64} \left[ 5 \frac{1}{8} (c_{1111}^{(0)} + c_{3333}^{(0)} - 4c_{1313}^{(0)}) + 16c_{1122}^{(0)} + 37 \frac{3}{4} c_{1133}^{(0)} \right], \\ c_{1133}^{(1)} &= \frac{1}{64} \left[ 3 \frac{1}{2} (c_{1111}^{(0)} + c_{3333}^{(0)} - 4c_{1313}^{(0)}) + 24c_{1122}^{(0)} + 33c_{1133}^{(0)} \right], \\ c_{1313}^{(1)} &= \frac{1}{64} \left[ 15 \frac{1}{2} c_{1111}^{(0)} + 3 \frac{1}{2} c_{3333}^{(0)} + 26c_{1313}^{(0)} - 12c_{1122}^{(0)} - 7c_{1133}^{(0)} \right]. \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (12) można napisać ogólne wzory rekurencyjne: wskaźnik (1) wystarczy zastąpić przez  $(n)$  a (0) przez  $(n-1)$ . Interesują nas jednak wartości stałych technicznych. Wzory rekurencyjne można dla nich napisać korzystając ze wzorów (1), (2) i (4) oraz wzorów rekurencyjnych dla składowych tensora  $c_{ijkl}$ :

$$(13a) \quad \frac{1}{E_0^{(n)}} = \frac{1}{64} \left\{ 31 \frac{3}{8} \frac{1}{E_0^{(n-1)}} + 15 \frac{3}{8} \frac{1}{E_1^{(n-1)}} + 17 \frac{1}{4} \left[ - \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{G_1^{(n-1)}} \right] \right\},$$

$$(13b) \quad \frac{1}{E_1^{(n)}} = \frac{1}{64} \left\{ 41 \frac{1}{E_1^{(n-1)}} + 9 \frac{1}{E_1^{(n-1)}} + 14 \left[ - \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n-1)} + \frac{1}{2} \frac{1}{G_1^{(n-1)}} \right] \right\},$$

$$(13c) \quad \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n)} = \frac{1}{64} \left\{ 5 \frac{1}{8} \left[ \frac{1}{G_1^{(n-1)}} - \frac{1}{E_0^{(n-1)}} - \frac{1}{E_1^{(n-1)}} \right] + 16 \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n-1)} + 37 \frac{3}{4} \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n-1)} \right\},$$

$$(13d) \quad \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)} = \frac{1}{64} \left\{ 3 \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{G_1^{(n-1)}} - \frac{1}{E_0^{(n-1)}} - \frac{1}{E_1^{(n-1)}} \right] + 24 \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n-1)} + 33 \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n-1)} \right\},$$

$$(13e) \quad \frac{1}{G_1^{(n)}} = \frac{1}{16} \left\{ 15 \frac{1}{2} \frac{1}{E_0^{(n-1)}} + 3 \frac{1}{2} \frac{1}{E_1^{(n-1)}} + 12 \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n-1)} + 7 \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n-1)} + 6 \frac{1}{2} \frac{1}{G_1^{(n-1)}} \right\}.$$

Jak widać, postać wzorów jest raczej skomplikowana, ponieważ każda z wielkości ze wskaźnikiem  $n$  zależy od czterech lub pięciu wielkości ze wskaźnikiem  $(n-1)$ . Szukamy więc takich kombinacji tych wielkości, aby dla nich wzory rekurencyjne miały postać

$$(14) \quad \alpha_n = f(\alpha_{n-1}).$$

Wprowadzamy oznaczenia

$$(15) \quad \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{E_0^{(n)}} - \frac{1}{E_1^{(n)}}, & k_n &= \frac{1}{E_0^{(n)}} + \frac{1}{E_1^{(n)}}, \\ b_n &= \frac{1}{E_1^{(n)}} + \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)} - \frac{1}{2} \frac{1}{G_1^{(n)}}. \end{aligned}$$

Kombinacja wzorów (13c), (13b) i (13e) daje

$$(16) \quad b_n = \frac{13}{128}a_{n-1} + \frac{5}{64}b_{n-1}.$$

Odejmując zaś stronami (13d) od (13a) otrzymujemy

$$(17) \quad a_n = -\frac{77}{8 \cdot 64}a_{n-1} - \frac{13}{4 \cdot 64}b_{n-1}.$$

Odpowiednie kombinacje dwóch ostatnich zależności pozwalają napisać dwa proste związki rekurencyjne

$$(18) \quad a_n + 2b_n = \frac{27}{8 \cdot 64}(a_{n-1} + 2b_{n-1}),$$

$$(19) \quad a_n + \frac{1}{4}b_n = -\frac{1}{8}\left(a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1}\right).$$

Oba ciągi  $\{a_n + 2b_n\}$  i  $\left\{a_n + \frac{1}{4}b_n\right\}$  są zbieżne do zera. Można także podać ich sumy (które będą dalej potrzebne) korzystając z odpowiednich wzorów dla postępów geometrycznych:

$$(20) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + 2b_n) = \frac{8 \cdot 64}{485} (a_0 + 2b_0),$$

$$(21) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{4}b_n\right) = \frac{8}{9} \left(a_0 + \frac{1}{4}b_0\right).$$

Same ciągi  $\{a_n\}$  i  $\{b_n\}$  również są zbieżne do zera. Np:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= -\frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n - 8a_n - 2b_n) = -\frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) + \\ &+ \frac{8}{7} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{1}{4}b_n\right) = -\frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{8}{7} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dla ciągu  $\{b_n\}$  dowód jest analogiczny.

Aby obliczyć granice interesujących nas wielkości fizycznych, dodajemy jeszcze stronami (13a) i (13b), skąd otrzymamy:

$$(22) \quad \begin{aligned} k_n &= k_{n-1} + \frac{67}{8 \cdot 64}a_{n-1} - \frac{125}{4 \cdot 64}b_{n-1} = k_{n-2} + \frac{67}{8 \cdot 64}(a_{n-1} + a_{n-2}) - \\ &- \frac{125}{4 \cdot 64}(b_{n-1} + b_{n-2}) = \dots = k_0 + \frac{67}{8 \cdot 64} \sum_{i=0}^{n-1} a_i - \frac{125}{4 \cdot 64} \sum_{i=0}^{n-1} b_i. \end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów (20) i (21) możemy obliczyć granicę tego ciągu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k_0 + \frac{1}{15}a_0 - \frac{8}{15}b_0.$$

Zauważmy, że zgodnie z oznaczeniami (15)  $\frac{1}{2}(a_n + k_n) = \frac{1}{E_0^{(n)}}$ . Teraz już łatwo możemy obliczyć granicę dla  $n \rightarrow \infty$ , ponieważ istnieją granice ciągów  $\{a_n\}$  i  $\{k_n\}$ . Zauważmy także, że z tych samych powodów istnieje granica  $\left\{ \frac{1}{E_1^{(n)}} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}(k_n - a_n) \right\}$  i co więcej, obie te granice są równe, gdyż jak wykazaliśmy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Wobec tego

$$(23a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E_0^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(a_n + k_n) = \frac{1}{2} [\lim_{n \rightarrow \infty} k_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a] = \frac{1}{2} \left( k_0 + \frac{1}{15} a_0 - \frac{8}{15} b_0 \right),$$

$$(23b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{E_1^{(n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(a_n - k_n) = \frac{1}{2} [\lim_{n \rightarrow \infty} k - \lim_{n \rightarrow \infty} a] = \frac{1}{2} \left( k_0 + \frac{1}{15} a_0 - \frac{8}{15} b_0 \right).$$

Tę wspólną granicę oznaczamy  $\frac{1}{E}$  i korzystając z oznaczeń (15), otrzymujemy:

$$(24) \quad \frac{1}{E} = \frac{8}{15} \frac{1}{E_0} + \frac{1}{5} \frac{1}{E_1} - \frac{4}{15} \frac{\nu_1}{E_1} + \frac{2}{15} \frac{1}{G_1}.$$

Odnotujmy jeszcze, że udowodniliśmy także, iż  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , co oznacza:

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{E_1^{(n)}} + \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)} - \frac{1}{2G_1^{(n)}} \right] = 0.$$

Widać, że w granicy  $E_1^{(n)}$ ,  $\nu^{(n)}$  i  $G_1^{(n)}$  spełniają związek charakterystyczny dla stałych sprężystych ośrodka izotropowego.

Znajdziemy teraz wartości graniczne  $\nu_1^{(n)}$  i  $\nu_0^{(n)}$ . Wprowadzimy dodatkowe oznaczenia

$$(26) \quad \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n)} - \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)} = c_n, \quad \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n)} + \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)} = d_n.$$

Używając tych oznaczeń oraz wprowadzonych uprzednio [wzór (15)], możemy różnice wyrażeń (13c) i (13d) zapisać następująco:

$$(27) \quad c_n = -\frac{1}{8} c_{n-1} - \frac{13}{4 \cdot 64} b_{n-1} - \frac{13}{8 \cdot 64} a_{n-1}.$$

Odejmując od ostatniego wyrażenia wyrażenie (17) otrzymujemy wzór rekurencyjny dla różnicy  $c_n - a_n$

$$(28) \quad c_n - a_n = -\frac{1}{8} (c_{n-1} - a_{n-1}).$$

Drugi wzór rekurencyjny znajdujemy ze wzorów (16) i (27)

$$(29) \quad c_n + \frac{1}{4} b_n = -\frac{1}{8} \left( c_{n-1} + \frac{1}{4} b_{n-1} \right).$$

Sumy odpowiednich szeregów wynoszą

$$(30) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - a_n) = \frac{8}{9} (c - a_0),$$

$$(31) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( c_n + \frac{1}{4} b_n \right) = \frac{8}{9} \left( c_0 + \frac{1}{4} b_0 \right),$$

natomiast granica ciągu  $\{c_n\}$  wynosi

$$(32) \quad \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -c_n + a_n + 2 \left( c_n + \frac{1}{4} b_n \right) - \frac{1}{7} (a_n + 2b_n) - \frac{6}{7} \left( a_n + \frac{1}{4} b_n \right) \right] = \\ &= -\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ -c_n + a_n + 2 \left( c_n + \frac{1}{4} b_n \right) - \frac{1}{7} (a_n + 2b_n) - \frac{6}{7} \left( a_n + \frac{1}{4} b_n \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Aby obliczyć granicę ciągu  $\{d_n\}$ , dodajemy stronami równania (13c) i (13d) i korzystamy z sum (30), (31) oraz (20) i (21):

$$(33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d_0 - \frac{1}{3} c_0 - \frac{2}{15} a_0 - \frac{4}{15} b_0.$$

Zauważmy teraz, że

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n)} &= \frac{1}{2} (d_n + c_n), \\ \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)} &= \frac{1}{2} (d_n - c_n). \end{aligned}$$

Znów więc, znając granice ciągów  $\{d_n\}$  i  $\{c_n\}$ , możemy znaleźć granice  $\left\{ \left( \frac{\nu_0}{E_0} \right)^{(n)} \right\}$  i  $\left\{ \left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)} \right\}$  i ponieważ  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , są one sobie równe. Wspólną granicę oznaczamy  $\frac{\nu}{E}$ , wynosi ona:

$$\frac{\nu}{E} = \frac{1}{2} \frac{\nu_0}{E_0} + \frac{8}{15} \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{15} \frac{1}{E_0} - \frac{1}{15} \frac{1}{E_1} + \frac{1}{15} \frac{1}{G_1}.$$

Wróćmy do wzoru (25): ponieważ istnieją granice ciągów  $\frac{1}{E_1^{(n)}}$  i  $\left( \frac{\nu_1}{E_1} \right)^{(n)}$ , to ze wzoru (25) wynika, że istnieje także skończona granica  $\left\{ \frac{1}{G^{(n)}} \right\}$ ; oznaczmy ją przez  $\frac{1}{G}$ ; wówczas wzór (25) można przepisać następująco:

$$\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} - \frac{1}{2G} = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{1}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}.$$

Ostatecznie ośrodek jest scharakteryzowany przez dwie stałe niezależne  $\nu$ ,  $E$  i jest ośrodkiem izotropowym.



#### 4. Zakończenie

Przybliżone rozwiązanie, pomijające oddziaływanie drugiego rzędu, określone wynikami (24) i (29) jest dość odporne na oszacowanie jego błędu. Tym niemniej jest pewnym rozszerzeniem rozwiązań otrzymanych w pracy [1]. Wydaje się, że oszacowanie błędu można by uzyskać na drodze doświadczalnej, porównując stałe sprężystości określonych mono- i polikryształów lub też odpowiednie wartości np. dla tworzyw sztucznych jednokierunkowo zbrojonych z takim samym laminatem zbrojonym matą powierzchniową.

Pozostaje pytanie, czy tak otrzymany ośrodek izotropowy posiada te same własności co ośrodek izotropowy, otrzymany w wyniku innej procedury uśredniania. Zagadnieniem tym autorzy zamierzają się zająć w przyszłości.

#### Literatura cytowana w tekście

1. L. H. Cox, *The elasticity and strength of paper and other fibrous materials*, Brit. Jour. Appl. Phys., 72 - 79, 3 (1952).
2. A. P. WILCZYŃSKI, *Teoria wzmocnienia kompozycji. Rozważania ogólne* (praca nie publikowana).

#### Резюме

#### ИЗОТРОПИЯ, КАК ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ОРТОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Такие многофазные среды как реальные кристаллы или армированные пластмассы в общем случае состоят из ортотропных компонентов. В случае когда они ориентированы вдоль одного направления, механические свойства таких композиционных сред описываются с достаточной точностью с помощью некоторых из теорий упрочнения. В работе рассматривается однородное случайное распределение армирующих элементов в материале. Доказано, что применение закона смеси приводит к простым алгебраическим зависимостям описывающим механические свойства рассматриваемых сред.

#### Summary

#### ISOTROPY AS THE LIMITING CASE OF ORTHOTROPIC MULTIPHASE MEDIA

Multiphase media, such as real crystals or reinforced plastics consist, in general, of orthotropic components. In the case of their unidirectional arrangement some of the reinforcement theories describe mechanical properties of such a composite with sufficient accuracy. The paper deals with a case of homogeneous random distribution of directional elements in a composite. It is shown that the law of mixtures leads to a simple finite algebraic relation describing the mechanical properties of such media.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 4 listopada 1974 r.*

OBROTOWO-SYMETRYCZNE DRGANIA WŁASNE POWŁOKI STOŻKOWEJ Z MATERIAŁU  
ŚCISLIWEGO NIELINIOWO SPRĘŻYSTEGO

FERDYNAND TWARDOSZ, TADEUSZ WEGNER (POZNAŃ)

W pracy poddano analizie drgania własne cienkiej powłoki stożkowej wykonanej z materiału jednorodnego, izotropowego i ściśliwego, dla którego zależność pomiędzy naprężeniami i odkształceniami jest nieliniowa, ale odwracalna.

Ograniczając się do analizy małych drgań przyjęto związki geometryczne w postaci liniowej, zakładając przy tym prawdziwość hipotezy Kirchhoffa-Love'a.

1. Podstawowe równania i związki

Równania opisujące swobodne obrotowo-symetryczne drgania podłużne i poprzeczne powłoki stożkowej mają postać [4]

$$(1.1) \quad \begin{cases} N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial s} s - N_2 = 2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} s, \\ 2 \frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} s - \frac{\partial M_2}{\partial s} + N_2 \operatorname{tg} \alpha = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} s, \end{cases}$$

gdzie  $N_1, N_2, M_1, M_2$  oznaczają siły normalne i momenty zginające odniesione do jednostki długości powierzchni środkowej,  $u(s, t), w(s, t)$  — składowe przemieszczenia punktów powierzchni środkowej odpowiednio w kierunkach stycznym i normalnym,  $s$  — odległość dowolnego punktu powłoki od wierzchołka stożka,  $\alpha$  — kąt pomiędzy normalną do powierzchni środkowej i osią powłoki,  $2h$  — grubość powłoki,  $\rho$  — gęstość materiału powłoki.

Zgodnie z hipotezą Kirchhoffa-Love'a składowe obrotowo-symetrycznego stanu odkształcenia dla elementu warstewki odległej o  $z$  od powierzchni środkowej wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \varepsilon_1 + z\kappa_1, \\ \varepsilon_{2z} &= \varepsilon_2 + z\kappa_2, \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.2) \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{s}(u + w \operatorname{tg} \alpha)$$

są składowymi stanu odkształcenia powierzchni środkowej powłoki, a wyrażenia

$$(1.3) \quad \kappa_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s}$$

charakteryzują zmianę głównych krzywizn.

Zajmiemy się z kolei określeniem składowych stanu naprężenia. Potencjał sprężystości ciała izotropowego przedstawia wyrażenie [1]:

$$V(\varepsilon_0, \gamma_0^2) = \Phi_V(\varepsilon_0) + \Phi_I(\gamma_0^2),$$

gdzie

$$\Phi_V(\varepsilon_0) = 9K \int_0^{\varepsilon_0} \varepsilon_0 \kappa(\varepsilon_0) d\varepsilon_0$$

jest pracą odkształcenia objętościowego,

$$\Phi_I(\gamma_0^2) = \frac{3}{2} G \int_0^{\gamma_0} \gamma_0 \gamma(\gamma_0^2) d\gamma_0$$

— pracą odkształcenia postaciowego,

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z} + \varepsilon_{3z}}{3}$$

— średnim wydłużeniem,

$$\gamma_0 = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{1z} - \varepsilon_{2z})^2 + (\varepsilon_{2z} - \varepsilon_{3z})^2 + (\varepsilon_{3z} - \varepsilon_{1z})^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{12z}^2 + \gamma_{23z}^2 + \gamma_{31z}^2)}$$

— intensywnością odkształceń stycznych,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

— modułem ściśliwości i modułem odkształcenia postaciowego.

Moduł Younga  $E$  i liczby Poissona  $\nu$  są stałymi materiałowymi wyznaczonymi przy małych odkształceniach.

Załóżmy, że funkcja wydłużenia  $\kappa(\varepsilon_0)$  oraz funkcja odkształcenia postaciowego  $\gamma(\gamma_0^2)$  mogą być przedstawione z dostateczną dokładnością w postaci [1]:

$$\kappa(\varepsilon_0) = 1, \quad \gamma(\gamma_0^2) = 1 - g_2 \gamma_0^2,$$

gdzie stałą  $g_2$  wyznacza się doświadczalnie.

Niech dla jednoosiowego rozciągania-ściskania między naprężeniem  $\sigma$  a podłużnym odkształceniem  $\varepsilon$  zachodzi związek

$$(1.4) \quad \varepsilon = \frac{1}{E} (1 + a_3 \sigma^2) \sigma,$$

wtedy zależność między współczynnikiem  $a_3$  a stałą  $g_2$  ma postać

$$g_2 = \frac{9}{2} G^2 \left( 1 + \frac{G}{3K} \right) a_3,$$

lub wyrażając moduły  $K$  i  $G$  za pomocą stałych  $E$  i  $\nu$  otrzymamy

$$g_2 = \frac{E^2 \nu_0^3}{2} a_3, \quad \text{gdzie} \quad \nu_0 = \frac{3}{2(1+\nu)}.$$

Założone powyżej związki bardzo dobrze aproksymują rzeczywiście zachodzące zależności dla wielu ważnych w zastosowaniach technicznych materiałów (np. miedź, aluminium, stopy miedzi i inne). Stosując oznaczenia

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{\nu_0}{2}} \gamma_0, \quad \theta = 3\varepsilon_0,$$

potencjał sprężystości wymienionych materiałów można wyrazić w postaci

$$V = \frac{1}{2} K \theta^2 + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i,$$

gdzie

$$\sigma_i = E(1 - b\varepsilon_i^2)\varepsilon_i, \quad b = a_3 E^2 \nu_0^2.$$

Wielkość  $\theta$  jest względną zmianą objętości, wielkości  $\sigma_i$ ,  $\varepsilon_i$  są odpowiednio intensywnością naprężeń i intensywnością odkształceń.

Założenie cienkościenności powłoki pozwala, tak samo jak w teorii płyt cienkich, traktować elementy powłoki, jako będące w dwuwymiarowym stanie naprężenia, stąd z uogólnionego prawa Hooke'a, przyjmując  $\sigma_{3z} = 0$ , otrzymamy

$$\varepsilon_{3z} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z}) \quad \theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{1z} + \varepsilon_{2z}),$$

$$\varepsilon_i^2 = \frac{4}{3} \left[ \nu_1(\varepsilon_{1z}^2 + \varepsilon_{2z}^2) + \nu_2 \varepsilon_{1z} \varepsilon_{2z} + \frac{1}{4} \nu_0 \gamma_{12z}^2 \right],$$

gdzie oznaczono

$$\nu_1 = \frac{1}{3} \left[ \frac{\nu}{(1-\nu)^2} + 1 \right] \nu_0, \quad \nu_2 = \frac{1}{3} \left[ \frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1 \right] \nu_0.$$

Ponieważ w przypadku drgań obrotowo-symetrycznych podłużnych i poprzecznych  $\gamma_{12z} = 0$ , to

$$\varepsilon_i^2 = \frac{4}{3} (a_0 + z a_1 + z^2 a_2),$$

gdzie

$$a_0 = \nu_1(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \nu_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2,$$

$$a_1 = 2\nu_1(\varepsilon_1 \kappa_1 + \varepsilon_2 \kappa_2) + \nu_2(\varepsilon_1 \kappa_2 + \varepsilon_2 \kappa_1),$$

$$a_2 = \nu_1(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) + \nu_2 \kappa_1 \kappa_2.$$

Pochodne cząstkowe funkcji  $V(\varepsilon_{1z}, \varepsilon_{2z})$  określają składowe stanu naprężenia

$$\sigma_{1z} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{1z}}, \quad \sigma_{2z} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{2z}},$$

stąd

$$\begin{aligned}\sigma_{1z} &= \frac{4}{3}E[\nu_3\varepsilon_1 + \nu_4\varepsilon_2 + z(\nu_3\kappa_1 + \nu_4\kappa_2)] - \frac{16}{9}Eb \left\{ a_0 \left( \nu_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + z \left[ a_0 \left( \nu_1\kappa_1 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_2 \right) + a_1 \left( \nu_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2 \right) \right] + z^2 \left[ a_1 \left( \nu_1\kappa_1 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_2 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_2 \left( \nu_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2 \right) \right] + z^3 a_2 \left( \nu_1\kappa_1 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_2 \right) \right\}, \\ \sigma_{2z} &= \frac{4}{3}E[\nu_3\varepsilon_3 + \nu_4\varepsilon_1 + z(\nu_3\kappa_2 + \nu_4\kappa_1)] - \frac{16}{9}Eb \left\{ a_0 \left( \nu_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + z \left[ a_0 \left( \nu_1\kappa_2 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_1 \right) + a_1 \left( \nu_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1 \right) \right] + z^2 \left[ a_1 \left( \nu_1\kappa_2 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_1 \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + a_2 \left( \nu_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1 \right) \right] + z^3 a_2 \left( \nu_1\kappa_2 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_1 \right) \right\},\end{aligned}$$

natomiast

$$\nu_3 = \nu_1 + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)^2}, \quad \nu_4 = \frac{1}{2}\nu_2 + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)^2}.$$

Dla cienkich powłok siły i momenty działające w przekrojach powłoki na jednostkę długości powierzchni środkowej związane są (w przybliżeniu) z naprężeniami zależnościami

$$\begin{aligned}N_1 &= \int_{-h}^h \sigma_{1z} dz, & N_2 &= \int_{-h}^h \sigma_{2z} dz, \\ M_1 &= - \int_{-h}^h \sigma_{1z} z dz, & M_2 &= - \int_{-h}^h \sigma_{2z} z dz,\end{aligned}$$

stąd po wykonaniu całkowania mamy:

$$\begin{aligned}N_1 &= \bar{B}(\nu_3\varepsilon_1 + \nu_4\varepsilon_2) - \bar{B}_1 a_0 \left( \nu_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2 \right) - \bar{B}_2 \left[ a_1 \left( \nu_1\kappa_1 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_2 \right) + a_2 \left( \nu_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2 \right) \right], \\ N_2 &= \bar{B}(\nu_3\varepsilon_3 + \nu_4\varepsilon_1) - \bar{B}_1 a_0 \left( \nu_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1 \right) - \bar{B}_2 \left[ a_1 \left( \nu_1\kappa_2 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_1 \right) + a_2 \left( \nu_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1 \right) \right], \\ M_1 &= -\bar{D}(\nu_3\kappa_1 + \nu_4\kappa_2) + \bar{B}_2 \left[ a_0 \left( \nu_1\kappa_1 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_2 \right) + a_1 \left( \nu_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_2 \right) \right] + \\ &\quad + \bar{B}_3 a_2 \left( \nu_1\kappa_1 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_2 \right), \\ M_2 &= -\bar{D}(\nu_3\kappa_2 + \nu_4\kappa_1) + \bar{B}_2 \left[ a_0 \left( \nu_1\kappa_2 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_1 \right) + a_1 \left( \nu_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\nu_2\varepsilon_1 \right) \right] + \\ &\quad + \bar{B}_3 a_2 \left( \nu_1\kappa_2 + \frac{1}{2}\nu_2\kappa_1 \right),\end{aligned}$$

gdzie

$$\bar{B} = \frac{8}{3} Eh, \quad \bar{D} = \frac{8}{9} Eh^3, \quad \bar{B}_1 = \frac{32}{9} Ebh, \quad \bar{B}_2 = \frac{32}{77} Ebh^3, \quad \bar{B}_3 = \frac{32}{45} Ebh^5.$$

Jeżeli podstawimy powyższe zależności do układu równań (1.1), a występujące w nich wielkości  $a_0, a_1, a_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \nu_1, \nu_2$  wyrazimy przez  $u$  i  $w$  za pomocą związków (1.5), (1.2) i (1.3), otrzymamy poszukiwane równania obrotowo-symetrycznych drgań powłoki stożkowej w następującej postaci:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} & \bar{B} \left[ \nu_3 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \left( \nu_3 \frac{\partial u}{\partial s} + \nu_4 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \frac{1}{s^2} \nu_3 (u + \operatorname{tg} \alpha w) \right] - \bar{B}_1 \left\{ 3\nu_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{1}{s} \left[ 3\nu_1 \nu_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial u}{\partial s} u + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial u}{\partial s} w + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \nu_1 (\nu_1 + \nu_2) \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^3 \right] + \\ & + \frac{1}{s^2} \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} u^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} u w + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} w^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 u + \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 w + \right. \\ & + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} u \frac{\partial w}{\partial s} + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} w \left. \right) + \frac{1}{s^3} \left[ \frac{3}{2} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \alpha \left( u^2 \frac{\partial w}{\partial s} + 2 \operatorname{tg} \alpha u \frac{\partial w}{\partial s} w + \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial s} w^2 \right) - \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( \frac{\partial u}{\partial s} u^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} u w + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial s} w^2 \right) \right] - \\ & - \frac{1}{s^4} \nu_1 (\nu_1 + \nu_2) (u^3 + 3 \operatorname{tg} \alpha u^2 w + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha u w^2 + \operatorname{tg}^3 \alpha w^3) \left. \right\} - \bar{B}_2 \left\{ 3\nu_1^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + \right. \right. \\ & + 2 \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left. \right) + \frac{3}{5} \left[ \nu_1 \nu_2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial w}{\partial s} + u \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \right. \right. \\ & + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} w + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial s} \left. \right) + \nu_1 (\nu_1 + \nu_2) \frac{\partial u}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \left. \right] + \\ & + \frac{1}{s^2} \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + 2u \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial s}{\partial w} + u \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + \right. \\ & + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial w}{\partial s} w + \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 w + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{s^3} \left[ \frac{3}{2} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^3 - \right. \\ & \left. - \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( \frac{\partial u}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} w \right) \right] - \\ & \left. - \frac{3}{s^4} \nu_1 (\nu_1 + \nu_2) \left( u \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 w \right) \right\} = 2 \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ & \bar{B} \operatorname{tg} \alpha \left[ \frac{1}{s} \nu_4 \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \nu_3 (u + \operatorname{tg} \alpha w) \right] + \bar{D} \nu_3 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \\ & - \bar{B}_1 \operatorname{tg} \alpha \left[ \frac{1}{2s} \nu_1 \nu_2 \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^3 + \frac{1}{s^2} \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 u + \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 w \right) + \right. \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \frac{3}{2s^3} \nu_1 \nu_2 \left( \frac{\partial u}{\partial s} u^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} u w + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial u}{\partial s} w^2 \right) + \frac{1}{s^4} \nu_1^2 (u^3 + 3 \operatorname{tg} \alpha u^2 w + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha u w^2 + \\
& + \operatorname{tg}^3 \alpha w^3) \left. \right] - \bar{B}_2 \left\{ 3 \nu_1^2 \left[ 2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \right. \right. \\
& + \left. \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \right] + \frac{3}{s} \left[ \nu_1 \nu_2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} u \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} w + \right. \right. \\
& + \left. \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial s} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} u \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} w + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \right. \\
& + \left. \frac{\partial u}{\partial s} u \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} w + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{3}{2} \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \right] + \\
& + 2 \nu_1 (\nu_1 + \nu_2) \left( 2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right) \left. \right] + \frac{1}{s^2} \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( 2 \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} u \frac{\partial w}{\partial s} + \right. \\
& + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} \frac{\partial w}{\partial s} w + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} u \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 4 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} w + \\
& + 4 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial s} u \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + 4 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} w + \\
& + 10 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + u^2 \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + 2 \operatorname{tg} \alpha u \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} w + 4 \operatorname{tg} \alpha u \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial w}{\partial s} + 3 \operatorname{tg} \alpha u \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + \\
& + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} w^2 + 4 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial w}{\partial s} w + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 w + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \left. \right) + \\
& + \frac{1}{s^3} \left[ (9 \nu_1 \nu_2 - 4 \nu_1^2 - 2 \nu_2^2) \operatorname{tg} \alpha \left( u \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} w \right) + \right. \\
& + \left. \left( \frac{9}{2} \nu_1 \nu_2 - 4 \nu_1^2 - 2 \nu_2^2 \right) \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + 3 \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^3 - \right. \\
& - \left. \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( 4 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} u \frac{\partial w}{\partial s} + 4 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} w + 3 \left( \frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial s} + 6 \frac{\partial u}{\partial s} u \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \right. \right. \\
& + \left. \left. 6 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} w + 2 \nu_1 u^2 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + 4 \operatorname{tg} \alpha u \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} w + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} w^2 \right) \right] - \\
& - \frac{1}{s^4} \left[ (3 \nu_1 \nu_2 + \nu_1^2 - \nu_2^2) \left( 2 \frac{\partial u}{\partial s} u \frac{\partial w}{\partial s} + 2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} w + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + 2 \operatorname{tg} \alpha u \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} w + \right. \right. \\
& + \left. \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} w^2 \right) + 3 \nu_1 (\nu_1 + 4 \nu_2) \operatorname{tg} \alpha \left( u \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \operatorname{tg} \alpha \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 w \right) \left. \right] + \\
& + \frac{9}{s^5} \nu_1 (\nu_1 + \nu_2) \left( u^2 \frac{\partial w}{\partial s} + 2 \operatorname{tg} \alpha u \frac{\partial w}{\partial s} w + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial s} w^2 \right) \left. \right\} - \bar{B}_3 \left\{ 3 \nu_1^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 + \right. \right. \\
& + \left. \left. 2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + \frac{3}{s} \left[ \nu_1 \nu_2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \left( \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial s} \right) + \right. \right.
\end{aligned}
\end{aligned}$$

(1.6)  
[cd.]

$$(1.6) \left\{ \begin{aligned} & + 2\nu_1(\nu_1 + \nu_2) \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \right] + \frac{1}{s^2} \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + 4 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \frac{\partial w}{\partial s} + \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^3 \right) - \frac{1}{s^3} \left( \nu_1^2 + \frac{1}{2} \nu_2^2 \right) \left( 2 \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + 3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial s} \right) - \\ & \quad \left. - \frac{1}{s^4} (3\nu_1\nu_2 + \nu_1^2 - \nu_2^2) \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{3}{s^5} \nu_1(\nu_1 + \nu_2) \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^3 \right\} = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \right. \quad [\text{cd.}]$$

## 2. Przybliżone całkowanie równań ruchu

Układ równań (1.6) scałkujemy w sposób przybliżony metodą Bubnowa-Galerkina. W przypadku powłoki stożkowej z wierzchołkiem ściętym, o swobodnie podpartych krawędziach, zakładamy funkcje  $u$ ,  $w$  w postaci sumy

$$(2.1) \quad \begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t) f_m(s), \\ w(s, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} W_m(t) g_m(s), \end{aligned}$$

gdzie  $U_m(t)$ ,  $W_m(t)$  są nieznanymi funkcjami czasu, natomiast  $f_m(s)$  i  $g_m(s)$  przyjmujemy w postaci

$$(2.2) \quad f_m(s) = \cos m\pi \frac{s-s_1}{l}, \quad g_m(s) = \sin m\pi \frac{s-s_1}{l}.$$

Funkcje (2.2) spełniają tylko kinematyczne warunki na brzegach powłoki, natomiast warunki statyczne są spełnione w przybliżeniu [3].

Po wykonaniu całkowań i uporządkowaniu oraz wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych

$$(2.3) \quad X = \frac{U_m}{l}, \quad Z = \frac{W_m}{l}, \quad \tau = \omega t, \quad \theta = \frac{\omega}{\omega_0},$$

gdzie  $\omega$  jest pulsacją podstawową drgań rozważanego układu,  $\omega_0^2 = \frac{E}{\rho l^2}$ , a  $\theta$  bezwymiarową częstotliwością drgań, otrzymamy dla każdego  $m$  dwa nieliniowe równania różniczkowe zwyczajne względem funkcji  $X, Z$

$$(2.4) \quad \begin{cases} \theta^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \beta_0 X - \beta_1 Z = b(\beta_2 X^3 - \beta_3 X^2 Z + \beta_4 X Z^2 - \beta_5 Z^3), \\ \theta^2 \frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \gamma_0 Z - \gamma_1 X = b(-\gamma_2 X^3 + \gamma_3 X^2 Z - \gamma_4 X Z^2 + \gamma_5 Z^3). \end{cases}$$

Poszczególne współczynniki układu (2.4) mają następujące wartości:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{c_2}{c_1}, & \gamma_0 &= \frac{d_2 r^2 + g d_3}{d_1}, \\ \beta_1 &= \frac{c_3 r}{c_1}, & \gamma_1 &= \frac{d_4 r}{d_1}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{c_4}{c_1}, & \gamma_2 &= \frac{d_5 r}{d_1}, \\ \beta_3 &= \frac{c_5 r}{c_1}, & \gamma_3 &= \frac{d_6 r^2 + g d_7}{d_1}, \\ \beta_4 &= \frac{c_6 r^2 + g c_7}{c_1}, & \gamma_4 &= \frac{d_8 r^3 + g d_9 r}{d_1}, \\ \beta_5 &= \frac{c_8 r^3 + g c_9 r}{c_1}, & \gamma_5 &= \frac{d_{10} r^4 + g d_{11} r^2 + g^2 d_{12}}{d_1},\end{aligned}$$

tu 
$$r = \frac{1}{\mu}, \quad g = \left(\frac{\chi}{2}\right)^2, \quad \mu = \frac{R_1}{l}, \quad \chi = \frac{2h}{l},$$

$$c_1 = 1 + 2k + 2\left(1 + \frac{3}{2p^2}\right)k^2 + \left(1 + \frac{3}{p^2}\right)k^3 + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{5}{p^2} - \frac{15}{2p^4}\right)k^4,$$

$$c_2 = v_3 \frac{4p^2}{3} \left[1 + 2k + 2\left(1 + \frac{5}{4p^2}\right)k^2 + \left(1 + \frac{5}{2p^2}\right)k^3 + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{25}{6p^2} - \frac{5}{4p^4}\right)k^4\right],$$

$$c_3 = v_3 \frac{4}{3p} k^2 \left(1 + \frac{1}{2}k\right) + v_4 \frac{4p}{3} \left[1 + \frac{3}{2}k + \left(1 + \frac{3}{2p^2}\right)k^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{p^2}\right)k^3\right],$$

$$\begin{aligned}c_4 &= v_1 v_2 4p^2 k^2 \left[1 + k + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{8p^2}\right)k^2\right] + v_1^2 \frac{4p^4}{3} \left[1 + 2k + 2\left(1 - \frac{5}{12p^2}\right)k^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{5}{6p^2}\right)k^3 + \frac{1}{5}\left(1 - \frac{25}{18p^2} + \frac{655}{49p^4}\right)k^4\right] + v_2^2 \frac{4p^2}{9} k^2 \left[1 + k + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{21}{4p^2}\right)k^2\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_5 &= v_1 v_2 2p^3 \left[1 + \frac{3}{2}k + \left(1 + \frac{5}{8p^2}\right)k^2 + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{5}{4p^2}\right)k^3\right] + v_1^2 \frac{14p}{3} k^2 \left(1 + \frac{1}{2}k\right) + \\ &\quad + v_2^2 \frac{7p}{3} k^2 \left(1 + \frac{1}{2}k\right),\end{aligned}$$

$$c_6 = v_1 v_2 3k^2 + v_1^2 \frac{4p^2}{3} \left[1 + k + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{27}{8p^2}\right)k^2\right] + v_2^2 \frac{2p^2}{3} \left[1 + k + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{8p^2}\right)k^2\right],$$

$$c_7 = p^2 c_4, \quad c_8 = v_1 v_2 \frac{2p}{3} \left(1 + \frac{1}{2}k\right), \quad c_9 = \frac{p^2}{3} c_5,$$

$$\begin{aligned}d_1 &= 1 + \frac{5}{2}k + \frac{10}{3}\left(1 - \frac{3}{2p^2}\right)k^2 + \frac{5}{2}\left(1 - \frac{3}{p^2}\right)k^3 + \left(1 - \frac{5}{p^2} + \frac{15}{2p^4}\right)k^4 + \\ &\quad + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{15}{2p^2} + \frac{45}{2p^4}\right)k^5,\end{aligned}$$

$$d_2 = v_3 \frac{4}{3} \left[1 + \frac{3}{2}k + \left(1 - \frac{3}{2p^2}\right)k^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{3}{2p^2}\right)k^3\right],$$

$$d_3 = v_3 \frac{4p^4}{9} \left[1 + \frac{5}{2}k + \frac{10}{3}k^2 + \frac{5}{2}k^3 + \left(1 - \frac{1}{p^4}\right)k^4 + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{3}{p^4}\right)k^5\right],$$

$$d_4 = \nu_3 \frac{2}{p} k^2 \left[ 1 + k + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3}{2p^2} \right) k^2 \right] + \nu_4 \frac{4p}{3} \left[ 1 + 2k + 2 \left( 1 - \frac{3}{2p^3} \right) k^2 + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{3}{p^2} \right) k^3 + \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{5}{p^2} + \frac{15}{2p^4} \right) k^4 \right],$$

$$d_5 = \nu_1 \nu_2 \frac{2p^3}{3} \left[ 1 + 2k + 2 \left( 1 - \frac{11}{8p^2} \right) k^2 + \left( 1 - \frac{11}{4p^2} \right) k^3 + \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{55}{12p^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{295}{32p^4} \right) k^4 \right] + \nu_1^2 p k^2 \left[ 1 + k + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{5}{24p^2} \right) k^2 \right] + \nu_2^2 \frac{p}{2} k^2 \left[ 1 + k + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{15}{8p^2} \right) k^2 \right],$$

$$d_6 = \nu_1 \nu_2 2k^2 \left( 1 + \frac{1}{2} k \right) + \nu_1^2 \frac{4p^2}{3} \left[ 1 + \frac{3}{2} k + \left( 1 - \frac{7}{8p^2} \right) k^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{7}{4p^2} \right) k^3 \right] + \\ + \nu_2^2 \frac{2p^2}{3} \left[ 1 + \frac{3}{2} k + \left( 1 - \frac{15}{8p^2} \right) k^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{15}{4p^2} \right) k^3 \right],$$

$$d_7 = \nu_1 \nu_2 \frac{16p^4}{3} k^3 \left[ 1 + \frac{3}{2} k + \left( 1 - \frac{19}{8p^2} \right) k^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{19}{4p^2} \right) k^3 \right] + \nu_1^2 \frac{4p^6}{3} \left[ 1 + \frac{5}{2} k + \right. \\ \left. + \frac{10}{3} \left( 1 - \frac{23}{8p^2} \right) k^2 + \frac{5}{2} \left( 1 - \frac{23}{4p^2} \right) k^3 + \left( 1 - \frac{115}{12p^5} + \frac{1801}{96p^4} \right) k^4 + \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{115}{8p^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1801}{32p^4} \right) k^5 \right] + \nu_2^2 \frac{4p^4}{9} k \left[ 1 + \frac{3}{2} k + \left( 1 + \frac{5}{8p^2} k^2 + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{5}{4p^2} \right) k^3 \right) \right],$$

$$d_8 = \nu_1 \nu_2 2pk^2 \left[ 1 + k + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{15}{8p^2} \right) k^2 \right] + \nu_1^2 \frac{1}{p} k^2,$$

$$d_9 = \nu_1 \nu_2 2p^5 \left[ 1 + 2k + 2 \left( 1 - \frac{27}{8p^2} \right) k^2 + \left( 1 - \frac{27}{4p^2} \right) k^3 + \frac{1}{5} \left( 1 - \frac{45}{4p^2} + \frac{3695}{288p^4} \right) k^4 \right] + \\ + \nu_1^2 \frac{113p^3}{27} k^2 \left[ 1 + k + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{4839}{904p^2} \right) k^2 \right] + \nu_2^2 \frac{113p^3}{54} k^2 \left[ 1 + k + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{3615}{904p^2} \right) k^2 \right],$$

$$d_{10} = \nu_1^2 \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} k \right),$$

$$d_{11} = \nu_1 \nu_2 \frac{20p^2}{9} k^2 \left( 1 + \frac{1}{2} k \right) + \nu_1^2 \frac{8p^4}{9} \left[ 1 + \frac{3}{2} k + \left( 1 - \frac{39}{8p^2} \right) k^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{39}{4p^2} \right) k^3 \right] + \\ + \nu_2^2 \frac{4p^4}{9} \left[ 1 + \frac{3}{2} k + \left( 1 - \frac{47}{8p^2} \right) k^2 + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{47}{4p^2} \right) k^3 \right],$$

$$d_{12} = \frac{p^2}{5} d_7,$$

przy czym

$$p = m\pi, \quad k = \operatorname{rtg}\beta, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

W układzie równań (2.4) wyrazy nieliniowe są małe w porównaniu z liniowymi. W związku z tym możemy dany układ traktować jako słabo nieliniowy. Zastosujemy zatem do rozwiązania metodę małego parametru [2]. Aby wyznaczyć przybliżone rozwiązanie okresowe wykorzystujemy fakt, że nieliniowość układu wpływa na wielkość okresu drgań swobodnych. W związku z tym poszukujemy rozwiązania w postaci rozwinięć

$$(2.5) \quad \begin{cases} X = X_0 + bX_1 + b^2X_2 + \dots, \\ Z = Z_0 + bZ_1 + b^2Z_2 + \dots, \\ \theta^2 = \theta_0^2 + b\theta_1 + b^2\theta_2 + \dots. \end{cases}$$

Rozwinięcie poszukiwanej częstości drgań w szereg względem potęg parametru  $b$  pozwala wyeliminować z rozwiązania człony sekularne i uzyskać przybliżone rozwiązanie okresowe.

Po podstawieniu zależności (2.5) do układu (2.4) i rozwinięciu lewej i prawej strony równań w szeregi względem potęg parametru  $b$  oraz przyrównaniu do siebie wyrazów stojących przy tych samych potęgach  $b$ , uzyskamy rekurencyjne układy równań różniczkowych:

$$(2.6) \quad \begin{cases} \theta_0^2 \frac{d^2 X_0}{d\tau^2} + \beta_0 X_0 - \beta_1 Z_0 = 0, \\ \theta_0^2 \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_0 - \gamma_1 X_0 = 0, \end{cases}$$

$$(2.7) \quad \begin{cases} \theta_0^2 \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \beta_0 X_1 - \beta_1 Z_1 = -\theta_1 \frac{d^2 X_0}{d\tau^2} + \beta_2 X_0^3 - \beta_3 X_0^2 Z_0 + \beta_4 X_0 Z_0^2 - \beta_5 Z_0^3, \\ \theta_0^2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_1 - \gamma_1 X_1 = -\theta_1 \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} - \gamma_2 X_0^3 + \gamma_3 X_0^2 Z_0 - \gamma_4 X_0 Z_0^2 + \gamma_5 Z_0^3, \end{cases}$$

$$(2.8) \quad \begin{cases} \theta_0^2 \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + \beta_0 X_2 - \beta_1 Z_2 = -\theta_2 \frac{d^2 X_0}{d\tau^2} - \theta_1 \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + 3\beta_2 X_0^2 X_1 - \beta_3 (X_0^2 Z_1 + \\ + 2X_0 Z_0 X_1) + \beta_4 (Z_0^2 X_1 + 2X_0 Z_0 Z_1) - 3\beta_5 Z_0^2 Z_1, \\ \theta_0^2 \frac{d^2 Z_2}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_2 - \gamma_1 X_2 = -\theta_2 \frac{d^2 Z_0}{d\tau^2} - \theta_1 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} - 3\gamma_2 X_0^2 X_1 + \\ + \gamma_3 (X_0^2 Z_1 + 2X_0 Z_0 X_1) - \gamma_4 (Z_0^2 X_1 + 2X_0 Z_0 Z_1) + 3\gamma_5 Z_0^2 Z_1, \\ \dots \end{cases}$$

Niech funkcja  $Z(\tau)$  spełnia warunki początkowe

$$(2.9) \quad Z(0) = B, \quad \dot{Z}(0) = 0,$$

wtedy

$$(2.10) \quad \begin{aligned} Z_0(0) = B, \quad Z_1(0) = 0, \quad Z_2(0) = 0, \dots, \\ \dot{Z}_0(0) = 0, \quad \dot{Z}_1(0) = 0, \quad \dot{Z}_2(0) = 0, \dots, \end{aligned}$$

gdzie kropka oznacza pochodną względem czasu.

Rozwiązanie nasze ograniczymy do drgań swobodnych jednoczęściowych. W tym przypadku warunki początkowe dla funkcji  $X(\tau)$  zależą od warunków początkowych dla  $Z(\tau)$  i wynikają z rozwiązania zagadnienia jako warunek konieczny drgań jednoczęściowych.

Rozwiązania szczególnego układu równań (2.6) poszukujemy w postaci

$$\begin{cases} X_0 = A_1 \cos \tau + A_2 \sin \tau, \\ Z_0 = B_1 \cos \tau + B_2 \sin \tau. \end{cases}$$

Podstawiając założoną postać rozwiązania do (2.6) uzyskamy dwa algebraiczne układy równań

$$\begin{cases} (\beta_0 - \theta_0^2) A_1 - \beta_1 B_1 = 0, & (\beta_0 - \theta_0^2) A_2 - \beta_1 B_2 = 0, \\ -\gamma_1 A_1 + (\gamma_0 - \theta_0^2) B_1 = 0, & -\gamma_1 A_2 + (\gamma_0 - \theta_0^2) B_2 = 0; \end{cases}$$

stąd warunek istnienia niezerowego rozwiązania ma postać

$$\begin{vmatrix} \beta_0 - \theta_0^2 & -\beta_1 \\ -\gamma_1 & \gamma_0 - \theta_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwinięcie wyznacznika daje równanie dwukwadratowe na częstość drgań własnych układu zlinearyzowanego ( $b = 0$ ), mianowicie

$$(\theta_0^2)^2 - (\beta_0 + \gamma_0)\theta_0^2 + \beta_0\gamma_0 - \beta_1\gamma_1 = 0,$$

skąd

$$(2.11) \quad \theta_0^2 = \frac{\beta_0 + \gamma_0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta_0 - \gamma_0}{2}\right)^2 + \beta_1\gamma_1}.$$

Układ zlinearyzowany ma dwa szczególne rozwiązania harmoniczne o częstościach określonych wzorem (2.11). Pierwsza wyższa częstość (znak +) odpowiada drganiom podłużnym, druga niższa częstość (znak -) drganiom poprzecznym powłoki. Drgania te zachodzą dla ściśle określonych wartości współczynnika postaci drgań własnych

$$\lambda = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}.$$

Wartości te wyznaczamy ze związku

$$(2.12) \quad \lambda = \frac{\beta_1}{\beta_0 - \theta_0^2} = \frac{\gamma_0 - \theta_0^2}{\gamma_1}.$$

Ponieważ  $A_1 = \lambda B_1$ ,  $A_2 = \lambda B_2$ , więc dla warunków początkowych  $Z_0(0) = B$ ,  $\dot{Z}_0(0) = 0$ , mamy  $B_1 = B$ ,  $A_1 = \lambda B$ ,  $B_2 = 0$ ,  $A_2 = 0$ . Ostatecznie rozwiązanie szczególne układu zlinearyzowanego (2.6) ma postać

$$(2.13) \quad X_0 = \lambda B \cos \tau, \quad Z_0 = B \cos \tau.$$

Po podstawieniu powyższego rozwiązania do układu (2.7) uzyskujemy układ równań

$$(2.14) \quad \begin{cases} \theta_0^2 \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + \beta_0 X_1 - \beta_1 Z_1 = P_1 \cos \tau + P_2 \cos 3\tau, \\ \theta_0^2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + \gamma_0 Z_1 - \gamma_1 X_1 = R_1 \cos \tau + R_2 \cos 3\tau, \end{cases}$$

gdzie  $P_1 = \lambda B \theta_1 + 3B^3 p_1$ ,  $P_2 = B^3 p_1$ ,  $R_1 = B \theta_1 + 3B^3 r_1$ ,  $R_2 = B^3 r_1$ ,

zaś

$$p_1 = \frac{1}{4}(\beta_2 \lambda^3 - \beta_3 \lambda^2 + \beta_4 \lambda - \beta_5),$$

$$r_1 = \frac{1}{4}(-\gamma_2 \lambda^3 + \gamma_3 \lambda^2 - \gamma_4 \lambda + \gamma_5).$$

Aby uzyskać periodyczne rozwiązanie powyższego układu, zakładamy rozwiązanie szczególne w postaci

$$X_1 = C_1 \cos \tau + C_2 \cos 3\tau + C_3 \sin \tau + C_4 \sin 3\tau,$$

$$Z_1 = D_1 \cos \tau + D_2 \cos 3\tau + D_3 \sin \tau + D_4 \sin 3\tau,$$

które po podstawieniu do (2.14) dają cztery algebraiczne układy równań:

$$(2.15) \quad \begin{aligned} (\beta_0 - \theta_0^2)C_1 - \beta_1 D_1 &= P_1, & (\beta_0 - 9\theta_0^2)C_2 - \beta_1 D_2 &= P_2, \\ -\gamma_1 C_1 + (\gamma_0 - \theta_0^2)D_1 &= R_1, & -\gamma_1 C_2 + (\gamma_0 - 9\theta_0^2)D_2 &= R_2, \\ (\beta_0 - \theta_0^2)C_3 - \beta_1 D_3 &= 0, & (\beta_0 - 9\theta_0^2)C_4 - \beta_1 D_4 &= 0, \\ -\gamma_1 C_3 + (\gamma_0 - \theta_0^2)D_3 &= 0, & -\gamma_1 C_4 + (\gamma_0 - 9\theta_0^2)D_4 &= 0. \end{aligned}$$

Wyznaczniki charakterystyczne układów równań (2.15)<sub>1</sub> i (2.15)<sub>3</sub> są równe zeru. Warunek istnienia rozwiązań układu (2.15)<sub>1</sub> ma więc postać

$$\begin{vmatrix} P_1 & -\beta_1 \\ R_1 & \gamma_0 - \theta_0^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_0 - \theta_0^2 & P_1 \\ -\gamma_1 & R_1 \end{vmatrix} = 0,$$

stąd wykorzystując związek (2.12) mamy

$$P_1 \lambda \gamma_1 + R_1 \beta_1 = 0.$$

Po podstawieniu  $P_1$  i  $R_1$  uzyskujemy warunek

$$(\lambda B \theta_1 + 3B^3 p_1) \lambda \gamma_1 + (B \theta_1 + 3B^3 r_1) \beta_1 = 0,$$

z którego wyznaczamy

$$(2.16) \quad \theta_1 = -B^2 \vartheta_1,$$

gdzie

$$\vartheta_1 = \frac{3(\lambda \gamma_1 p_1 + \beta_1 r_1)}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}.$$

Dla wyznaczonej wartości  $\theta_1$  równania układu (2.15)<sub>1</sub> są liniowo zależne. Między stałymi  $C_1$  i  $D_1$  zachodzi związek

$$C_1 = \lambda \left( \frac{3(p_1 - \lambda r_1)}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1} B^3 + D_1 \right).$$

Podobnie równania układu (2.15)<sub>3</sub> są liniowo zależne, stąd związek między stałymi

$$C_3 = \lambda D_3.$$

Z układu równań (2.15)<sub>2</sub> wyznaczamy stałe  $C_2$  i  $D_2$ , otrzymując

$$C_2 = B^3 x_2, \quad D_2 = B^3 z_1,$$

gdzie

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{e_2 p_1 + \beta_1 r_1}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, & e_1 &= \beta_0 - 9\theta_0^2, \\ & & e_2 &= \gamma_0 - 9\theta_0^2, \\ z_1 &= \frac{\gamma_1 p_1 + e_1 r_1}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}. \end{aligned}$$

Analogicznie z równań (2.15)<sub>4</sub> mamy

$$C_4 = D_4 = 0.$$

Wykorzystując warunki początkowe  $Z_1(0) = 0$ ,  $\dot{Z}_1(0) = 0$  dostaniemy

$$D_1 + D_2 = 0, \quad D_3 + 3D_4 = 0,$$

stąd

$$D_1 = -D_2 = -B^3 z_1 \quad \text{oraz} \quad D_3 = -3D_4 = 0.$$

Posługując się wyznaczonymi wartościami stałych  $D_1$  i  $D_3$  uzyskujemy

$$\begin{aligned} C_1 &= B^3 x_1 \quad \text{tu} \quad x_1 = \lambda \left( \frac{3(p_1 - \lambda r_1)}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1} - z_1 \right), \\ C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie szczególne układu (2.14) ma więc postać

$$(2.17) \quad \begin{cases} X_1 = B^3(x_1 \cos \tau + x_2 \cos 3\tau), \\ Z_1 = B^3 z_1 (\cos 3\tau - \cos \tau). \end{cases}$$

Podobnie postępując uzyskujemy

$$(2.18) \quad \begin{cases} X_2 = B^5(x_3 \cos \tau + x_4 \cos 3\tau + x_5 \cos 5\tau), \\ Z_2 = B^5[z_2(\cos 3\tau - \cos \tau) + z_3(\cos 5\tau - \cos \tau)], \end{cases}$$

dla  $\theta_2 = -B^4 \vartheta_2$ , gdzie

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \vartheta_2 &= \frac{\lambda \gamma_1 p_2 + \beta_1 r_2}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1}, & x_3 &= \lambda \left( \frac{p_2 - \lambda r_2}{\lambda^2 \gamma_1 + \beta_1} - z_2 - z_3 \right), \\ z_2 &= \frac{\gamma_1 p_3 + e_1 r_3}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, & x_4 &= \frac{e_2 p_3 + \beta_1 r_3}{e_1 e_2 - \beta_1 \gamma_1}, \\ z_3 &= \frac{\gamma_1 p_4 + e_3 r_4}{e_3 e_4 - \beta_1 \gamma_1}, & x_5 &= \frac{e_4 p_4 + \beta_1 r_4}{e_3 e_4 - \beta_1 \gamma_1}, \end{aligned}$$

przy czym

$$e_3 = \beta_0 - 25\theta_0^2,$$

$$e_4 = \gamma_0 - 25\theta_0^2,$$

$$p_2 = -x_1 \vartheta_1 + (3x_1 + x_2)p_5 - 2z_1 p_6, \quad r_2 = z_1 \vartheta_1 + (3x_1 + x_2)r_5 - 2z_1 r_6,$$

$$p_3 = -9x_2 \vartheta_1 + (x_1 + 2x_2)p_5 + z_1 p_6, \quad r_3 = -9z_1 \vartheta_1 + (x_1 + 2x_2)r_5 + z_1 r_6,$$

$$p_4 = x_2 p_5 + z_1 p_6, \quad r_4 = x_2 r_5 + z_1 r_6,$$

$$p_5 = \frac{1}{4}(3\beta_2 \lambda^2 - 2\beta_3 \lambda + \beta_4), \quad r_5 = \frac{1}{4}(-3\gamma_2 \lambda^2 + 2\gamma_3 \lambda - \gamma_4),$$

$$p_6 = \frac{1}{4}(-\beta_3 \lambda^2 + 2\beta_4 \lambda - 3\beta_5), \quad r_6 = \frac{1}{4}(\gamma_3 \lambda^2 - 2\gamma_4 \lambda + 3\gamma_5).$$

Ograniczając się do drugiego przybliżenia uzyskamy poszukiwane rozwiązanie w postaci

$$(2.20) \quad \begin{cases} X = \lambda B \cos \tau + bB^3(x_1 \cos \tau + x_2 \cos 3\tau) + b^2B^5(x_3 \cos \tau + x_4 \cos 3\tau + \\ \phantom{X = } + x_5 \cos 5\tau) + \dots, \\ Z = B \cos \tau + bB^3z_1(\cos 3\tau - \cos \tau) + b^2B^5[z_2(\cos 3\tau - \cos \tau) + \\ \phantom{Z = } + z_3(\cos 5\tau - \cos \tau)] + \dots, \\ \theta^2 = \theta_0^2 - bB^2\vartheta_1 - b^2B^4\vartheta_2 - \dots \end{cases}$$

Powyższe rozwiązanie jest szeregiem potęgowym ze względu na wielkość  $bB^2$ . Aby szereg był szybko zbieżny, co umożliwia korzystanie tylko z kilku jego pierwszych składników, wartość  $bB^2$  musi być mała.

Na podstawie prób rozciągania [1] przy naprężeniach nie przewyższających wartości  $1000 \text{ kG/cm}^2$  uzyskano dla czystej miedzi następujące wielkości stałych:

$$K = 1,37 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \quad G = 0,46 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \quad g_2 = 0,18 \cdot 10^6,$$

$$\text{stad} \quad b = 0,323 \cdot 10^6.$$

Ponieważ przyjęto związki geometryczne w postaci liniowej ograniczając analizę do małych drgań, więc wielkość  $bB^2$  może odgrywać rolę małego parametru, a uzyskane rozwiązanie ma charakter asymptotyczny dla małych wartości parametru  $bB^2$ .

Na skutek nieliniowości układu ( $b \neq 0$ ) w rozwiązaniu pojawiły się wyższe harmoniczne, a częstość drgań własnych ulega zmianie i zależy od amplitudy.

### 3. Analiza wyników

W celu zbadania wpływu nieliniowości sprężystej materiału na drgania powłoki przeanalizowano następujące funkcje:

$$\begin{aligned} A_I(A) &= \lambda + Av_0^2(x_1 + x_2), & A_{II}(A) &= \lambda + Av_0^2(x_1 + x_2) + A^2v_0^4(x_3 + x_4 + x_5), \\ \theta_I^2(A) &= \theta_0^2 - Av_0^2\vartheta_1, & \theta_{II}^2(A) &= \theta_0^2 - Av_0^2\vartheta_1 - A^2v_0^4\vartheta_2. \end{aligned}$$

Indeksy I, II oznaczają tu odpowiednio pierwsze i drugie przybliżenie. Bezwymiarowy argument  $A = a_3 E^2 B^2$  jest iloczynem stałej materiałowej  $a_3$  określającej nieliniowość sprężystą materiału [wyznaczonej przy jednoosiowym rozciąganiu — ścisaniu (1.4)], kwadratu modułu Younga  $E$  i kwadratu bezwymiarowej amplitudy drgań poprzecznych  $B$ . Współczynnik postaci drgań własnych  $A$  określa stosunek amplitudy drgań podłużnych do amplitudy drgań poprzecznych, dla którego zachodzą analizowane drgania własne powłoki,

$$A = \frac{X(0)}{Z(0)},$$

$\theta^2$  zaś jest kwadratem bezwymiarowej częstości drgań własnych powłoki.

W układzie współrzędnych  $A - A$  oraz  $\theta^2 - A$  wykresy pierwszego przybliżenia analizowanych funkcji są liniami prostymi, drugiego przybliżenia — parabolami. Krzywe te cha-

rakteryzujące drgania jednego rodzaju (podłużne lub poprzeczne) zależą od następujących pięciu parametrów:

$m$  oznacza liczbę określającą ilość półfal na długości powłoki,  $\mu$  — stosunek najmniejszego promienia krzywizny powłoki do jej długości,  $\beta$  — połowę kąta wierzchołkowego stożka,  $\chi$  — stosunek grubości powłoki do jej długości,  $\nu$  — liczbę Poissona.

Pozostałe parametry:

$a_3$  — współczynnik określający nieliniowość materiału (1.4),  $E$  — moduł Younga,  $\rho$  — gęstość materiału powłoki,  $l$  — długość powłoki mierzona wzdłuż tworzącej — zawarte są w bezwymiarowych współrzędnych

$$A = a_3 E^2 \left( \frac{W_{\max}}{l} \right)^2, \quad \theta^2 = \frac{\rho l^2 \omega^2}{E},$$

gdzie  $W_{\max}$  jest amplitudą drgań poprzecznych (giętych),  $\omega$  — pulsacją podstawową drgań rozważanej powłoki.

Materiałom o «miękkich» charakterystykach ( $a_3 > 0$ ) odpowiada część wykresu dla  $A > 0$ , materiałom liniowo sprężystym ( $a_3 = 0$ ) odpowiada  $A = 0$ , materiałom o «sztywnych» charakterystykach ( $a_3 < 0$ ) odpowiada część wykresu dla  $A < 0$ .

Jako przykład naszych rozważań przeanalizujemy drgania własne powłok stożkowych (przy  $m = 1$ ) o następujących wartościach parametrów:

$$\mu = 0,5, \quad \operatorname{tg} \beta = 0,2, \quad \chi = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \nu = 0,3.$$

Na rys. 1 przedstawiono wykresy funkcji  $A(A)$  oraz  $\theta^2(A)$  dla drgań podłużnych, na rys. 2 dla drgań poprzecznych. Drgania podłużne charakteryzują się znacznie wyższą częstotliwością drgań od drgań poprzecznych. Oczywiście dla drgań podłużnych zachodzi związek  $|A| > 1$ , natomiast dla drgań poprzecznych  $|A| < 1$ . Jak wynika z przytoczonego przykładu dla charakterystyk «miękkich» ze wzrostem amplitudy częstość maleje, dla «sztywnych» — rośnie. Cecha ta jest silniejsza dla materiałów o większym współczynniku  $|a_3|$ .

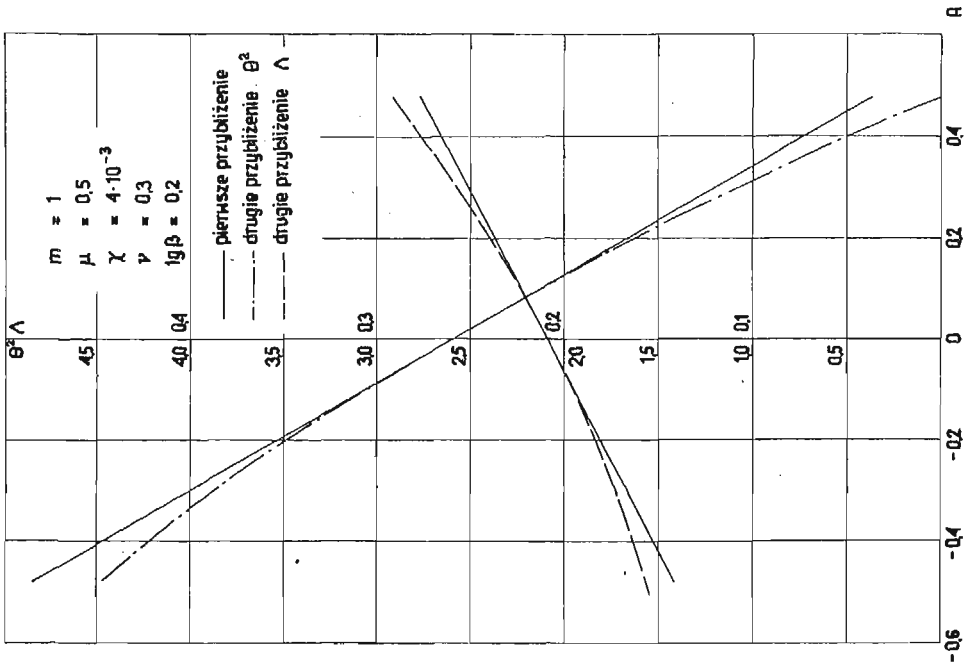
Wpływ parametrów  $\mu$  oraz  $\beta$  na drgania poprzeczne przy niezmiennych wartościach pozostałych parametrów ilustrują odpowiednio rys. 3 i 4. Przy  $\beta = 0$  uzyskujemy charakterystyki dla powłoki walcowej.

Zmiany parametru  $\chi$  w zakresie od  $2 \cdot 10^{-3}$  do  $8 \cdot 10^{-3}$  nie wpływają na zmianę wartości analizowanych funkcji.

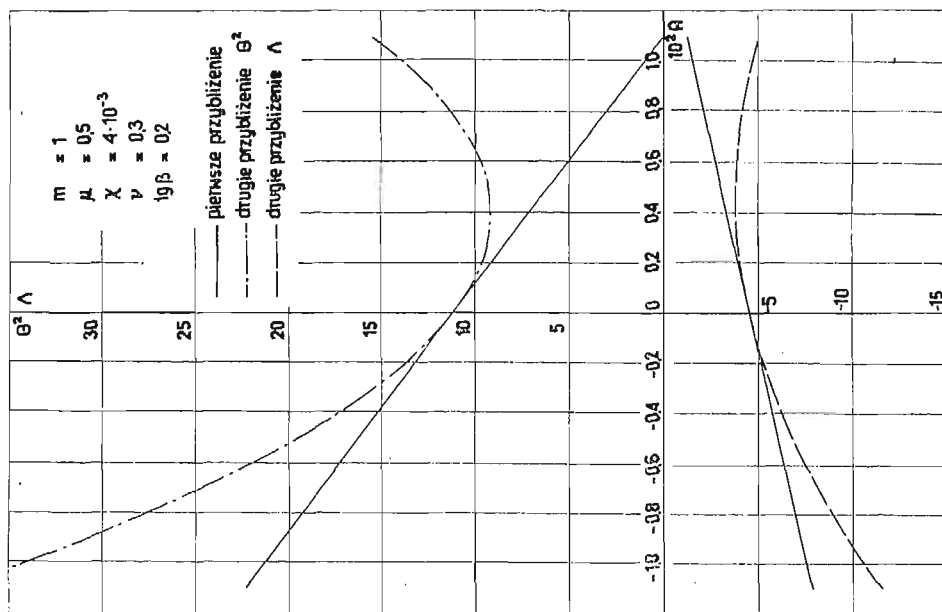
Ścisłość materiału dość znacznie wpływa na częstość drgań własnych oraz na współczynnik postaci drgań własnych, w przypadku materiału nieliniowo sprężystego. W przypadku materiału podlegającego prawu Hooke'a ścisłość materiału wpływa w małym stopniu na częstość drgań własnych. Wpływ ścisłości na analizowane funkcje w przypadku drgań poprzecznych przedstawia rys. 5. Przyjmowanie założenia upraszczającego, iż materiał powłoki jest nieściśliwy, może być przyczyną dużych błędów w przypadku zastosowania uproszczonej teorii do analizy drgań powłok wykonanych z materiałów nieliniowo sprężystych.

Zjawisko zmiany częstości drgań własnych ze zmianą amplitudy ma duże znaczenie w przypadku drgań wymuszonych, a w szczególności w przypadku rezonansu.

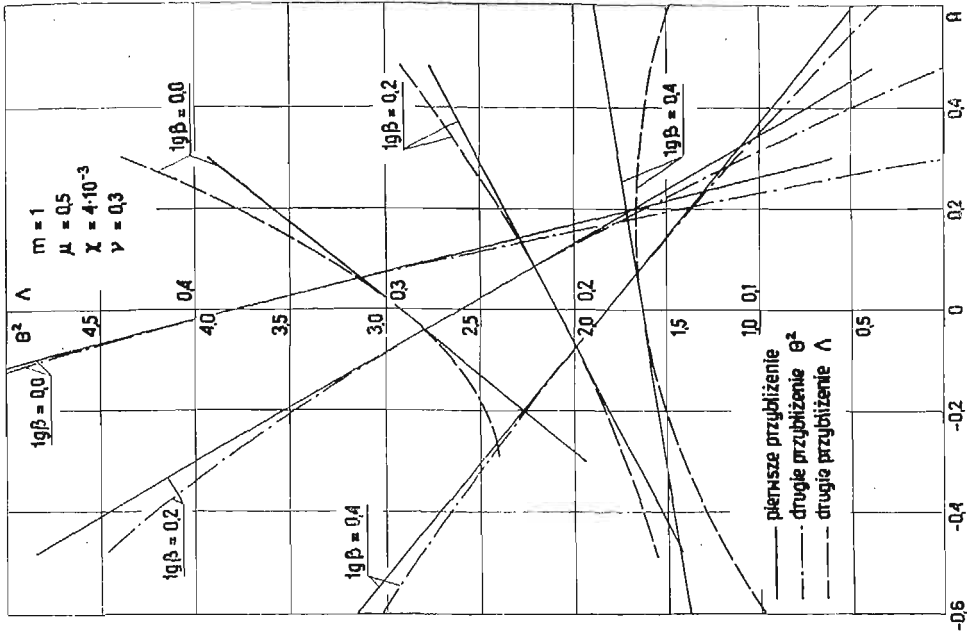




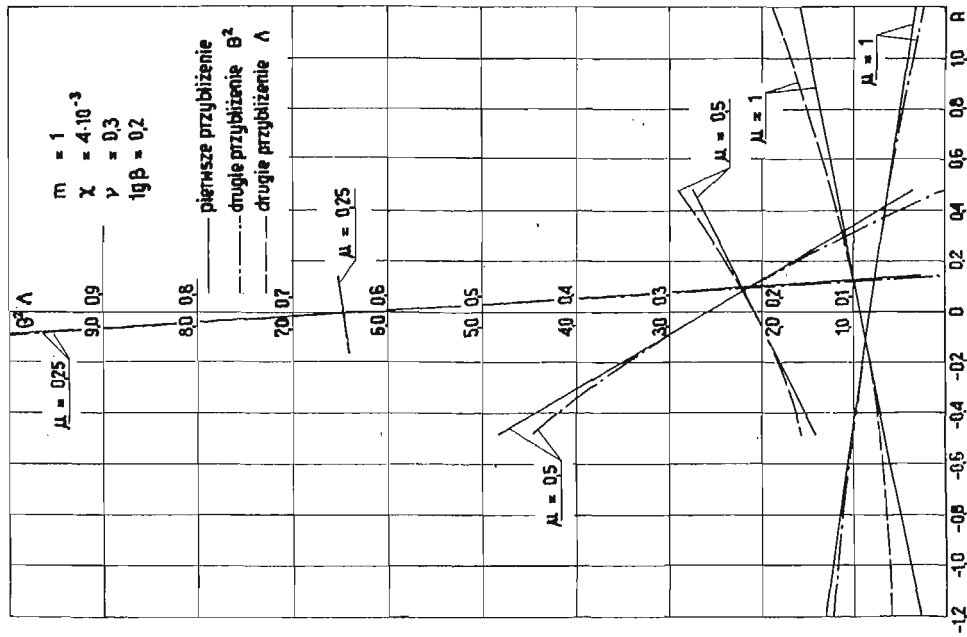
Rys. 2



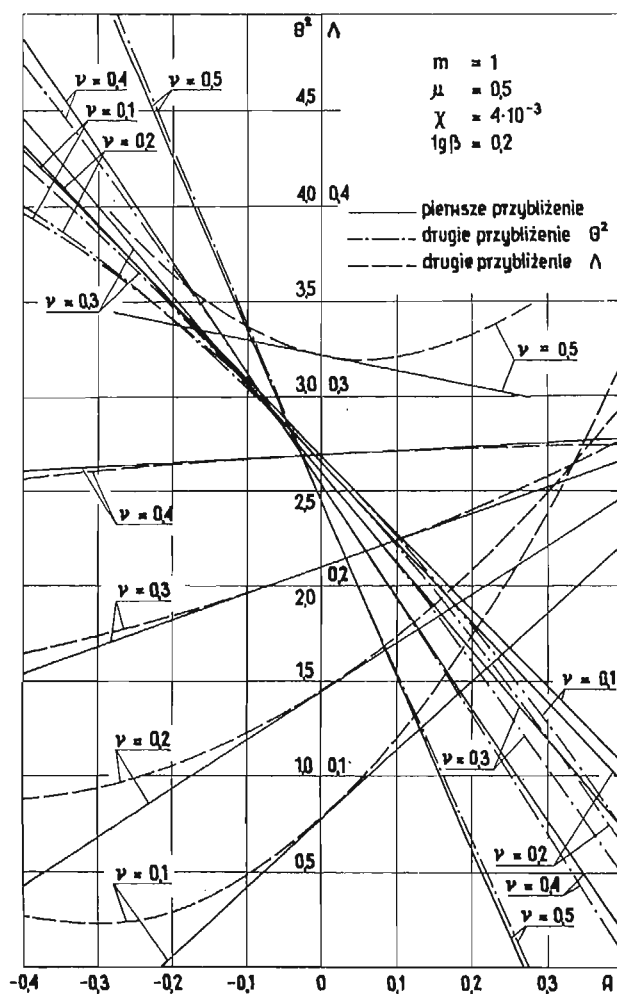
Rys. 1



Rys. 4



Rys. 3



Rys. 5

## Literatura cytowana w tekście

1. H. KAUDERER, *Nichtlineare Mechanik*, Berlin 1958.
2. N. MINORSKI, *Drgania nieliniowe*, Warszawa 1967.
3. Ю. Ю. ТРАПЕЗИН, *О малых колебаниях круговой тонкостенной конической оболочки*, Расчеты на прочность, в. 2, Москва 1958.
4. P. TWARDOSZ, *Osiowo-symetryczne drgania nieliniowo-sprężystej powłoki stożkowej*, Poznańskie Towarzystwo Przyjaciół Nauk, zeszyt 8, Poznań 1971.
5. В. С. ВЛАСОВ, *Общая теория оболочек*, Москва 1949.

## Резюме

 СОБСТВЕННЫЕ КРУГОСИММЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОЙ  
 ОБОЛОЧКИ ИЗ СЖИМАЕМОГО НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО МАТЕРИАЛА

В работе исследуются собственные колебания (с круговой симметрией) свободно опертой по краям тонкой оболочки в виде усеченного конуса из однородного, изотропного, линейно упругого, сжимаемого материала. При ограничении анализа к случаю малых колебаний, допустимо исполь-

зование геометрически линейных зависимостей. Получена система двух нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка, определяющих продольные и поперечные колебания. Уравнения сведены методом Бубнова-Галеркина к обыкновенным дифференциальным уравнениям. При предложении о слабой нелинейности, уравнения решены с помощью метода малого параметра. Решения ограничивались ко второму приближению. Полученные решения, иллюстрирующие влияние упругой нелинейности на колебания оболочки, представлены графически.

#### Summary

#### ROTATIONALLY SYMMETRIC FREE VIBRATIONS OF A CONICAL SHELL MADE OF COMPRESSIBLE, NON-LINEAR ELASTIC MATERIAL

The paper deals with the analysis of rotationally free vibrations of a thin truncated conical shell, simply supported on both edges. The material of the shell is assumed to be homogeneous, isotropic, non-linear elastic and compressible. The problem is limited to the analysis of small vibrations what makes it possible to use the linear geometric relations. As a result, the system of partial differential equations of fourth order is obtained describing the longitudinal and transverse vibrations. By applying the variational Bubnov-Galerkin method, partial equations are reduced to the ordinary differential equations. Assuming weak non-linearity, the equations are then solved by the perturbation method, the solution being limited only to second approximation. The equations obtained describing the influence of elastic non-linearity of the material on the vibrations of the shell have been presented graphically.

**POLITECHNIKA POZNAŃSKA, POZNAŃ**

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 listopada 1974 r.*

---



WPLYW DODATKOWYCH NIELINIOWYCH ZABURZEŃ NA CHARAKTERYSTYKI  
PROBABILISTYCZNE KLASYCZNYCH RÓWNAŃ OPISUJĄCYCH DRGANIA  
SAMOWZBUDNE

JAN ŁUCZKO (KRAKÓW)

W pracy zbadano wpływ zaburzeń przypadkowych na amplitudę i częstość drgań samowzbudnych układów o jednym stopniu swobody. Rozpatrzono równania typu van der Pola i Rayleigha z nieliniowymi siłami sprężystości i tłumienia. Założono przy tym, że wymuszenie zewnętrzne jest stacjonarnym, normalnym procesem stochastycznym o wartości średniej równej zeru typu „biały szum”.

Analizowane w pracy równania mogą opisywać zachowanie się znanych klasycznych układów samowzbudnych, ale o bardziej złożonej strukturze.

Sposób rozwiązania zagadnienia oparty jest na przybliżonej metodzie, przedstawionej w pracy PISZCZKA [1] i polega na stosowaniu do równania różniczkowego, opisującego drgania układu, kolejno linearyzacji harmonicznej i statystycznej. Podobne podejście do zagadnienia drgań samowzbudnych można znaleźć w pracach CAUGHHEYA [2] i POPOWA, PALTOWA [3]. Idea linearyzacji statystycznej została przedstawiona w pracy KAZAKOWA [4].

1. Równanie typu van der Pola

Rozważmy następujące równanie różniczkowe

$$(1.1) \quad \ddot{z} - (a^2 - b^2 z^2 - cz^4) \dot{z} + \omega_0^2 z = f(t),$$

przy czym  $S_f(\omega) = S_0$  jest stałą gęstością widmową wymuszenia. Równanie to można sprowadzić do postaci bezwymiarowej przez podstawienie

$$z(t) = \frac{a}{b} x(\tau), \quad \tau = \omega_0 t.$$

Otrzymamy

$$(1.2) \quad \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2 - \mu x^4) \dot{x} + x = p(\tau),$$

gdzie oznaczono

$$(1.3) \quad \varepsilon = \frac{a^2}{\omega_0}, \quad \mu = \frac{a^2 c}{b^4},$$

gęstość zaś widmowa procesu  $p(\tau)$  jest związana z gęstością  $S_f(\omega)$  następującą zależnością:

$$(1.4) \quad S_p(\omega) = \bar{S}_0 = \frac{b^2}{a^2 \omega_0^3} S_0.$$

Rozwiązanie równania (1.2) przyjmujemy w postaci

$$(1.5) \quad x = x_p + A \sin \alpha \tau, \quad \alpha = \frac{\omega}{\omega_0},$$

gdzie  $x_p$  oznacza składową przypadkową rozwiązania, zależną od wymuszenia zewnętrznego  $p(\tau)$ .

Jako wynik linearyzacji harmoniczej otrzymamy układ równań na amplitudę i częstość drgań, który po odrzuceniu rozwiązania trywialnego ma postać

$$\frac{1}{2} \mu A^4 + (1 - 6\mu x_p^2) A^2 - 4(1 - x_p^2 - \mu x_p^4) = 0,$$

$$\alpha^2 = 1 + 2\varepsilon(x_p + 2\mu x_p^3) \dot{x}_p + 3\varepsilon \mu x_p \dot{x}_p A^2$$

oraz równanie różniczkowe określające  $x_p(\tau)$ :

$$\ddot{x}_p - \varepsilon(1 - x_p^2 - \mu x_p^4) \dot{x}_p + x_p + \frac{1}{2} \varepsilon(1 + 6\mu x_p^2) \dot{x}_p A^2 + \frac{3}{8} \varepsilon \mu \dot{x}_p A^4 = p(\tau).$$

Pierwsze z tych równań określa amplitudę drgań. Rozwiązanie stabilne otrzymamy dla wartości amplitudy równej

$$A^2 = \frac{1 + 6\mu x_p^2}{\mu} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{8(1 - x_p^2 - \mu x_p^4)}{(1 + 6\mu x_p^2)^2}} \right].$$

Zakładając  $\mu \ll 1$  i rozwijając  $A^2(\mu)$  w szereg Taylora dostaniemy w pierwszym przybliżeniu

$$(1.6) \quad \begin{aligned} A^2 &\approx 4(1 - 2\mu) - 4(1 + 2\mu)x_p^2 + 12\mu x_p^4, \\ \alpha^2 &\approx 1 + 2\varepsilon(1 + 6\mu)x_p \dot{x}_p - 8\varepsilon \mu x_p^3 \dot{x}_p \end{aligned}$$

oraz

$$(1.7) \quad \ddot{x}_p + \varepsilon[(1 + 2\mu) - (1 + 4\mu)x_p^2 + \mu x_p^4] \dot{x}_p + x_p = p(\tau).$$

Przeprowadzając teraz linearyzację statystyczną równania (1.7) otrzymamy równanie liniowe

$$(1.8) \quad \ddot{x}_p + k \dot{x}_p + \Omega^2 x_p = p(\tau),$$

gdzie

$$(1.9) \quad k = \varepsilon[(1 + 2\mu) - (1 + 4\mu)\langle x_p^2 \rangle + 3\mu(\langle x_p^2 \rangle)^2], \quad \Omega^2 = 1$$

zaś  $\langle x_p \rangle = 0$ .

W przypadku «białego szumu» z równania (1.8) mamy

$$(1.10) \quad \langle x_p^2 \rangle = \frac{\pi \bar{S}_0}{k \Omega^2}.$$

Z równań (1.9) i (1.10) otrzymamy z dokładnością do  $\mu$  równanie algebraiczne 3 stopnia na dyspersję  $\langle x_p^2 \rangle$

$$(1.11) \quad 3\mu(\langle x_p^2 \rangle)^3 - (1 + 4\mu)(\langle x_p^2 \rangle)^2 + (1 + 2\mu)\langle x_p^2 \rangle - \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon} = 0,$$

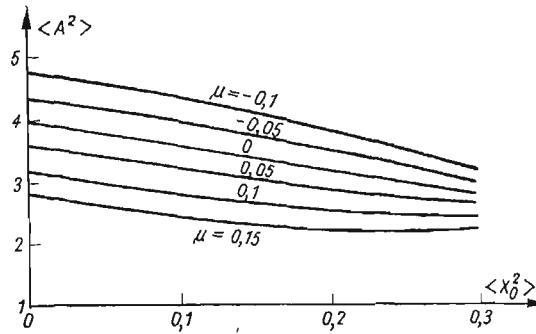
które można rozwiązać w sposób przybliżony metodą małego parametru przyjmując

$$(1.12) \quad \langle x_p^2 \rangle = \langle x_0^2 \rangle + \mu \langle x_1^2 \rangle + \mu^2 \langle x_2^2 \rangle + \dots$$

Przy ograniczeniu się do pierwszego przybliżenia dostaniemy

$$(1.13) \quad \langle x_p^2 \rangle = \langle x_0^2 \rangle \left[ 1 - \frac{3(\langle x_0^2 \rangle)^2 - 4\langle x_0^2 \rangle + 2}{1 - 2\langle x_0^2 \rangle} \mu \right],$$

$$\langle x_0^2 \rangle = 0,5 \left[ 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right].$$



Rys. 1

Wartości średnie  $\langle \alpha^2 \rangle$  lub  $\langle \omega^2 \rangle$  i  $\langle A^2 \rangle$  są równe odpowiednio:  $\langle \alpha^2 \rangle = 1$ , skąd  $\langle \omega^2 \rangle = \omega_0^2$ ,

$$(1.14) \quad \langle A^2 \rangle = \langle A_0^2 \rangle \left[ 1 - \frac{2 - 4\langle x_0^2 \rangle - 9(\langle x_0^2 \rangle)^2 + 15(\langle x_0^2 \rangle)^3}{(1 - 2\langle x_0^2 \rangle)(1 - \langle x_0^2 \rangle)} \mu \right],$$

przy czym

$$\langle A_0^2 \rangle = 2 \left[ 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]$$

przedstawia zależność amplitudy drgań od zaburzenia zewnętrznego w przypadku oscylatora van der Pola ( $\mu = 0$ ).

Na rys. 1 przedstawiono zależność wartości średniej kwadratu amplitudy od  $\langle x_0^2 \rangle$  przy ustalonych wartościach  $\mu$ . Wartość  $\langle x_0^2 \rangle$  może być tu miarą wielkości zaburzenia [ze wzoru (1.13) wynika, że  $\langle x_0^2 \rangle$  rośnie ze wzrostem gęstości widmowej  $\bar{S}_0$  zaburzenia]. Wykres ilustruje wzór (1.14) w niecałym zakresie zmian  $\langle x_0^2 \rangle$ . Wartości  $\langle A^2 \rangle$  są wyznaczone mniej dokładnie dla większych wartości  $\langle x_0^2 \rangle$  [ze względu na przybliżony sposób znalezienia dyspersji  $\langle x_p^2 \rangle$  z równania (1.11)] i dlatego też ograniczono się do pokazania związku (1.14) dla  $\langle x_0^2 \rangle < 0,3$ .

Z wykresu widać, że wzrost zaburzeń powoduje zmniejszanie się amplitudy drgań. Współczynnik  $\mu$  stojący przy  $x^4$  w członie van der Pola zmniejsza dodatkowo amplitudę, gdy  $\mu > 0$ , lub też ją zwiększa dla  $\mu < 0$ . Ze wzoru (1.13a) wynika, że częstość drgań jest niezależna zarówno od zaburzenia zewnętrznego, jak i wartości  $\mu$ .



## 2. Równanie typu van der Pola z nieliniową siłą sprężystości

Rozpatrzmy obecnie równanie van der Pola z sześcienną sztywną charakterystyką siły sprężystości

$$(2.1) \quad \ddot{z} - (a^2 - b^2 z^2) \dot{z} + \omega_0^2 z + \delta z^3 = f(t), \quad \delta \geq 0,$$

które po przejściu do wielkości bezwymiarowych ma postać

$$(2.2) \quad \ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2) \dot{x} + x + \mu x^3 = p(\tau),$$

przy czym  $S_p(\omega)$  i  $\varepsilon$  wyrażają się wzorami (1.3) i (1.4), a  $\mu = \frac{a^2 \delta}{b^2 \omega_0^2}$ .

W sposób podobny do wcześniejszego otrzymamy dla rozwiązania (1.5) następujący układ równań na amplitudę  $A$  i częstość  $\alpha$  oraz składową przypadkową  $x_p$ :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} A^2 &= 4(1 - x_p^2), \\ \alpha^2 &= 1 + 3\mu + 2\varepsilon x_p \dot{x}_p, \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \ddot{x}_p + \varepsilon(1 - x_p^2) \dot{x}_p + [(1 + 6\mu) - 5\mu x_p^2] x_p = p(\tau).$$

Współczynniki zlinearyzowanego statystycznie równania (2.4) są teraz równe

$$(2.5) \quad k = \varepsilon(1 - \langle x_p^2 \rangle), \quad \Omega^2 = 1 + 6\mu - 15\mu \langle x_p^2 \rangle,$$

a wartość średnia  $\langle x_p \rangle$  jest równa zeru. Wartość  $\langle x_p^2 \rangle$  można wyznaczyć z równania

$$15\mu \langle x_p^2 \rangle^3 - (1 + 21\mu) \langle x_p^2 \rangle^2 + (1 + 6\mu) \langle x_p^2 \rangle - \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon} = 0.$$

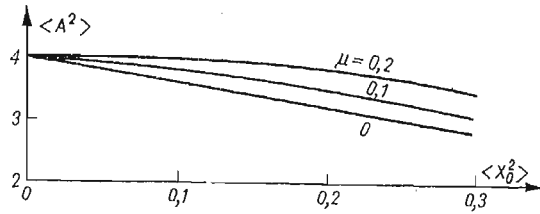
Przyjmując rozwiązanie w postaci szeregu (1.12) otrzymamy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \langle x_p^2 \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \left[ 1 - \frac{15 \langle x_0^2 \rangle^2 - 21 \langle x_0^2 \rangle + 6}{1 - 2 \langle x_0^2 \rangle} \mu \right], \\ \langle x_0^2 \rangle &= 0,5 \left[ 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Wartości średnie kwadratu częstości i amplitudy określają wzory

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &= 1 + 3\mu, \quad \langle \omega^2 \rangle = \omega_0^2 (1 + 3\mu), \\ \langle A^2 \rangle &= \langle A_0^2 \rangle \left[ 1 + \frac{6 \langle x_0^2 \rangle - 21 \langle x_0^2 \rangle^2 + 15 \langle x_0^2 \rangle^3}{(1 - 2 \langle x_0^2 \rangle)(1 - \langle x_0^2 \rangle)} \mu \right], \\ \langle A_0^2 \rangle &= 2 \left[ 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Z wykresu (rys. 2) przedstawiającego funkcję  $\langle A^2 \rangle = f(\langle x_0^2 \rangle)$  dla różnych  $\mu > 0$  wynika, że wpływ zaburzeń przypadkowych jest tu podobny, jak w przykładzie poprzednim. Amplituda maleje ze wzrostem  $\langle x_0^2 \rangle$ , osiągając np. dla  $\mu = 0$  wartość minimalną przy  $\langle x_0^2 \rangle = 0,5$ , równą połowie wartości maksymalnej ( $\langle x_0^2 \rangle = 0$ ). Ciekawy jest fakt, że wartość średnia  $\langle A^2 \rangle$  w przypadku zdeterminowanym jest niezależna od  $\mu$ ; wpływ nieliniowości



Rys. 2

siły sprężystości uwidacznia się dopiero w przypadku występowania przypadkowych zaburzeń. Częstość jest teraz dalej niezależna od wymuszenia  $p(\tau)$ , ma natomiast na nią wpływ współczynnik  $\mu$ ; częstość rośnie ze wzrostem tego współczynnika.

### 3. Równanie typu Rayleigha z nieliniową siłą sprężystości

Przyjmijmy podobną jak w p. 2. charakterystykę siły sprężystości. Równanie różniczkowe Rayleigha

$$(3.1) \quad \ddot{z} - \left( a^2 - \frac{1}{3} b^2 z^2 \right) \dot{z} + \omega_0^2 z + \delta z^3 = f(t), \quad \delta \geq 0,$$

można po wprowadzeniu nowej zmiennej  $x(\tau)$  doprowadzić do postaci

$$(3.2) \quad \ddot{x} - \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{3} \dot{x}^2 \right) \dot{x} + x + \mu x^3 = p(\tau),$$

gdzie

$$(3.3) \quad \begin{aligned} z(t) &= \frac{a}{b\omega_0} x(\tau), \quad \tau = \omega_0 t, \\ \varepsilon &= \frac{a^2}{\omega_0}, \quad \mu = \frac{a^2 \delta}{b^2 \omega_0^4}, \\ S_p(\omega) &= \bar{S}_0 = \frac{b^2}{a^2 \omega_0} S_0. \end{aligned}$$

Linearyzacja harmoniczna równania (3.2) prowadzi do równań:

$$\alpha^2 A^2 = 4(1 - x_p^2),$$

$$\alpha^2 = 1 + 3\mu x_p^2 + \frac{3}{4} \mu A^2$$

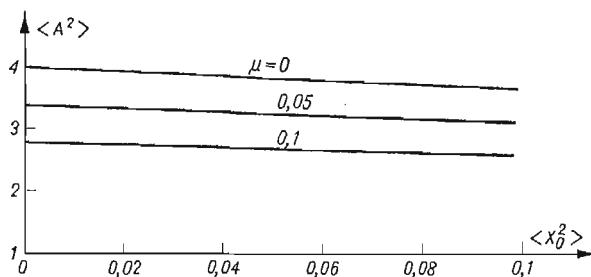
oraz

$$\ddot{x}_p - \varepsilon \left( 1 - \frac{1}{3} \dot{x}_p^2 \right) \dot{x}_p + x_p + \mu x_p^3 + \frac{1}{2} \varepsilon \dot{x}_p (A\alpha)^2 + \frac{3}{2} \mu x_p A^2 = p(\tau).$$

Przy założeniu, że charakterystyka siły sprężystej jest słabo nieliniowa ( $\mu \ll 1$ ), przyjmą one postać

$$(3.4) \quad \begin{aligned} A^2 &= 4(1-3\mu) - 4(1-6\mu)\dot{x}_p^2 + 12\mu\dot{x}_p^2\dot{x}_p^2 - 12\mu\dot{x}_p^4 - 12\mu x_p^2, \\ \alpha^2 &= (1+3\mu) + 3\mu x_p^2 - 3\mu\dot{x}_p^2, \end{aligned}$$

$$(3.5) \quad \ddot{x}_p + \varepsilon \left(1 - \frac{5}{3}\dot{x}_p^2\right)\dot{x}_p + [(1+6\mu) + \mu x_p^2 - 6\mu\dot{x}_p^2]x_p = p(\tau).$$



Rys. 3

W wyniku linearyzacji statystycznej otrzymamy równanie liniowe, gdzie  $k$  i  $\Omega^2$  są równe

$$(3.6) \quad \begin{aligned} k &= (1 - 5\Omega^2 \langle x_p^2 \rangle), \\ \Omega^2 &= [(1+6\mu) + 3\mu \langle x_p^2 \rangle][1 + 6\mu \langle x_p^2 \rangle]^{-1} \end{aligned}$$

oraz  $\langle x_p \rangle = 0$ . Dyspersję  $\langle x_p^2 \rangle$  można wyznaczyć z równań (3.6) i (1.10), mianowicie

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \langle x_p^2 \rangle &= \langle x_0^2 \rangle \left[ 1 - \frac{30(\langle x_0^2 \rangle)^2 - 63\langle x_0^2 \rangle + 6}{1 - 10\langle x_0^2 \rangle} \mu \right], \\ \langle x_0^2 \rangle &= 0,1 \left[ 1 - \sqrt{1 - 20 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Wartości  $\langle \alpha^2 \rangle$ ,  $\langle \omega^2 \rangle$  i  $\langle A^2 \rangle$  są równe:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \langle \alpha^2 \rangle &= 1 + 3\mu, & \langle \omega^2 \rangle &= \omega_0^2(1 + 3\mu), \\ \langle A^2 \rangle &= \langle A_0^2 \rangle \left[ 1 - 3 \frac{1 - 11\langle x_0^2 \rangle + 12(\langle x_0^2 \rangle)^2 - 20(\langle x_0^2 \rangle)^3}{(1 - 10\langle x_0^2 \rangle)(1 - \langle x_0^2 \rangle)} \mu \right], \\ \langle A_0^2 \rangle &= 4 \left[ 0,9 + 0,1 \sqrt{1 - 20 \frac{\pi \bar{S}_0}{\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Z analizy wzoru (3.8b) lub z wykresu (rys. 3) wynika, że zarówno wzrost zaburzenia (co związane jest ze wzrostem  $\langle x_0^2 \rangle$ ), jak i zwiększenie sztywności siły sprężystej powodują zmniejszanie amplitudy drgań samowzbudnych, natomiast ze wzoru (3.8a) widać, że częstość kątowna drgań rośnie ze zwiększeniem współczynnika  $\mu$ .

Ogólnie z analizy wybranych powyżej układów samowzbudnych można wyciągnąć następujące wnioski:

— średnia wartość kwadratu amplitudy maleje ze wzrostem zaburzenia przypadkowego,

- wpływ członów nieliniowych na wartość amplitudy jest różny i zależy od typu równania różniczkowego, opisującego proces drgań,
- średnia wartość kwadratu częstości nie zależy od zewnętrznych zaburzeń przypadkowych,
- nieliniowość siły sprężystej (charakterystyka sztywna) powoduje wzrost częstości kątowej drgań.

#### Literatura cytowana w tekście

1. K. PISZCZEK, *Influence of random perturbations on self-excited vibrations of a system with one degree of freedom*, Arch. Mech. Stos., 25, 5 (1973).
2. T. K. CAUGHEY, *Response of Van der Pol's oscillator to random excitation*, J. Appl. Mech., (1959), 345 - 348.
3. E. P. POPOW, I. P. PALTOW, *Przybliżone metody badań nieliniowych układów automatycznych*, WNT, Warszawa 1964.
4. И. Е. КАЗАКОВ, *Статические методы проектирования систем управления*, Машиностроение, Москва 1969.

#### Резюме

#### ВЛИЯНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОПИСЫВАЮЩИХ КОЛЕБАНИЯ САМОВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ СИСТЕМ

В работе исследуется влияние нелинейных членов на амплитуду и частоту систем с одной степенью свободы. Примеры относятся к системам, допускающим описание с помощью уравнений типа ван дер Поля и Релея, подверженным случайному вынуждению в виде стационарного нормального стохастического процесса типа „белый шум”. Анализ проводится при использовании метода гармонической и статической линеаризации. Полученные результаты показаны на диаграммах.

#### Summary

#### INFLUENCE OF ADDITIONAL NON-LINEAR PERTURBATIONS ON THE PROBABILISTIC CHARACTERISTICS OF CLASSICAL EQUATIONS DESCRIBING SELF-EXCITED VIBRATIONS

In the paper is considered the influence of non-linear terms on the amplitude and frequency of systems with one degree of freedom. The examples presented concern systems which can be described by Van der Pol's and Rayleigh's equations. These systems are forced by stationary, normal stochastic "white — noise" excitations. The analysis is done by means of the methods of harmonic and stochastic linearizations. The results are illustrated by graphs.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA, KRAKÓW

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 grudnia 1974 r.



## O STRUKTURZE ROZWIĄZAŃ W ZAGADNIENIACH PŁYT ORTOTROPOWYCH

BOGDAN ROGOWSKI (ŁÓDŹ)

Metodą asymptotycznego całkowania równań teorii sprężystości badano wewnętrzny stan naprężenia w problemie zginania płyt ortotropowych w pracach [1, 2] oraz stan naprężenia w warstwie przybrzegowej w [3]. W niniejszej pracy buduje się rozwiązania ogólne dla płyty ortotropowej, przy dowolnym obciążeniu płaszczyzn ograniczających  $|x_3| = h$  oraz rozwiązania jednorodne, tj. takie, które spełniają jednorodne naprężeniowe warunki brzegowe na tych płaszczyznach, a na pozostałych brzegach (na konturze) mogą przyjmować z góry dane wartości naprężeń lub przemieszczeń. Posłużono się przy tym metodą symbolicznego operatorowego zapisu rozwiązań [4] oraz zastosowano wprowadzone na wstępie pracy funkcje przemieszczeń dla rozpatrywanej klasy materiałów.

### 1. Równania podstawowe zagadnienia

Rozpatrzmy jednorodne, sprężyste ciało z prostoliniową ortotropią właściwości sprężystych. Przyjmiemy kartezjański, prostokątny układ współrzędnych  $X_i$ .

Równania równowagi

$$(1.1) \quad \sigma_{ij,j} + X_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3,$$

po uwzględnieniu związków fizycznych

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= c_{11}u_{1,1} + c_{12}u_{2,2} + c_{13}u_{3,3}, & \sigma_{12} &= G_{12}(u_{1,2} + u_{2,1}), \\ \sigma_{22} &= c_{12}u_{1,1} + c_{22}u_{2,2} + c_{23}u_{3,3}, & \sigma_{13} &= G_{13}(u_{1,3} + u_{3,1}), \\ \sigma_{33} &= c_{13}u_{1,1} + c_{23}u_{2,2} + c_{33}u_{3,3}, & \sigma_{23} &= G_{23}(u_{2,3} + u_{3,2}) \end{aligned}$$

przyjmą postać równań przemieszczeniowych (pominięto siły masowe  $X_i$ )

$$(1.3) \quad \begin{aligned} c_{11}u_{1,11} + G_{12}u_{1,22} + G_{13}u_{1,33} + (c_{12} + G_{12})u_{2,12} + (c_{13} + G_{13})u_{3,13} &= 0, \\ G_{12}u_{2,11} + c_{22}u_{2,22} + G_{23}u_{2,33} + (c_{12} + G_{12})u_{1,12} + (c_{23} + G_{23})u_{3,23} &= 0, \\ G_{13}u_{3,11} + G_{23}u_{3,22} + c_{33}u_{3,33} + (c_{13} + G_{13})u_{1,13} + (c_{23} + G_{23})u_{2,23} &= 0. \end{aligned}$$

Rozpatrzmy klasę materiałów ortotropowych, których odpowiednie stałe sprężystości w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach symetrii sprężystej  $x_1 \text{ O } x_3$ ,  $x_2 \text{ O } x_3$  są proporcjonalne

$$(1.4) \quad \frac{G_{23}}{G_{13}} = \frac{c_{23}}{c_{13}} = \frac{\sqrt{c_{22}}}{\sqrt{c_{11}}} = \frac{c_{12} + 2G_{12}}{c_{11}} = \lambda,$$

czyli te materiały, których właściwości sprężyste charakteryzuje sześć niezależnych stałych. Związek (1.4.) spełniony jest w przypadku materiałów poprzecznie izotropowych ( $\lambda = 1$ ), izotropowych, a w niektórych materiałach konstrukcyjnych ortotropowych proporcjonalność ta może mieć miejsce (np. laminaty, czy pewne przypadki anizotropii konstrukcyjnej).

Dla rozpatrywanej klasy materiałów przemieszczeniowe równania równowagi przyjmują postać

$$\begin{aligned} G_{12}(\lambda^{-1}u_{1,11} + u_{1,22}) + G_{13}u_{1,33} + (c_{12} + G_{12})(\lambda^{-1}u_{1,11} + u_{2,12}) + (c_{13} + G_{13})u_{3,13} &= 0, \\ (1.5) G_{12}(\lambda^{-1}u_{2,11} + u_{2,22}) + G_{13}u_{2,33} + (c_{12} + G_{12})(\lambda^{-1}u_{1,12} + u_{2,22}) + (c_{13} + G_{13})u_{3,23} &= 0, \\ G_{13}(\lambda^{-1}u_{3,11} + u_{3,22}) + c_{33}\lambda^{-1}u_{3,33} + (c_{13} + G_{13})(\lambda^{-1}u_{1,13} + u_{2,32}) &= 0. \end{aligned}$$

Równania (1.5) uzupełnione warunkami brzegowymi na płaszczyznach ograniczających opisują zagadnienia równowagi rozpatrywanego ośrodka.

## 2. Funkcje przemieszczeń

Równania (1.5.) mają budowę podobną do równań przemieszczeniowych ośrodka poprzecznie izotropowego i dlatego możliwe jest rozdzielenie tych równań przez wprowadzenie trzech funkcji przemieszczeń [6]. Postępując analogicznie jak w [6] otrzymuje się

$$\begin{aligned} (2.1) \quad u_1 &= a\varphi_{1,1} + \varphi_{2,1} + \lambda\varphi_{3,2}, \\ u_2 &= a\varphi_{1,2} + \varphi_{2,2} - \varphi_{3,1}, \\ u_3 &= \varphi_{1,3} + a\varphi_{2,3}, \end{aligned}$$

przy czym funkcje przemieszczeń  $\varphi_i(x_i)$  spełniają równania różniczkowe o takiej samej budowie

$$(2.2) \quad \left( \lambda^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + s_i^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Występujące tu parametry  $s_i$  oraz  $a$  zależą od stałych sprężystości ośrodka i oblicza się je ze wzorów

$$(2.3) \quad \begin{Bmatrix} s_1^2 \\ s_2^2 \end{Bmatrix} = \alpha \lambda \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha^2}} \right),$$

$$(2.3') \quad \alpha = \frac{c_{11}}{2G_{13}} - \frac{(c_{13} + 2G_{13})c_{13}}{2G_{13}c_{33}}, \quad \beta = \frac{c_{11}}{c_{33}},$$

$$(2.4) \quad s_3^2 = \frac{G_{12}}{G_{13}},$$

$$(2.5) \quad a = \frac{c_{33}}{(c_{13} + G_{13})\lambda} s_1^2 - \frac{G_{13}}{c_{13} + G_{13}}.$$

Parametry te mają analogiczne właściwości jak parametry dla ośrodka poprzecznie izotropowego omówione w [6].

Uwzględniając (2.1) w (1.2.) i wykorzystując (2.2.) otrzymuje się wyrażenie składowych tensora naprężenia w omawianym ośrodku przez pochodne cząstkowe wprowadzonych funkcji przemieszczeń

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{11} &= -G_{13}(a+1)\partial_3^2(\varphi_1 + \varphi_2) - 2G_{12}\partial_2^2(a\varphi_1 + \varphi_2) + 2G_{12}\partial_{12}^2\varphi_3, \\ \sigma_{22} &= -G_{13}(a+1)\partial_3^2(\varphi_1 + \varphi_2) - 2G_{12}\partial_1^2(a\varphi_1 + \varphi_2) - 2G_{12}\lambda\partial_{12}^2\varphi_3, \\ \sigma_{33} &= G_{23}(a+1)\partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\varphi_1 + \frac{1}{s_2^2}\varphi_2\right), \\ \sigma_{12} &= 2G_{12}\partial_{12}^2(a\varphi_1 + \varphi_2) + G_{12}(\lambda\partial_2^2\varphi_3 - \partial_1^2\varphi_3), \\ \sigma_{13} &= G_{13}(a+1)\partial_{13}^2(\varphi_1 + \varphi_2) + G_{23}\partial_{23}^2\varphi_3, \\ \sigma_{23} &= G_{23}(a+1)\partial_{23}^2(\varphi_1 + \varphi_2) - G_{23}\partial_{13}^2\varphi_3. \end{aligned}$$

Związki (2.1.), (2.6.) oraz równania (2.2.) opisują zagadnienia równowagi trójwymiarowego ciała ortotropowego, którego parametry materiałowe spełniają zależności (1.4.). Sprowadzenie problemu do całkowania równań drugiego rzędu i otrzymanie stosunkowo prostych wyrażeń dla składowych wektora przemieszczenia i tensora naprężenia pozwalają na rozwiązanie szeregu zagadnień brzegowych teorii sprężystości ciała ortotropowego. Rozpatrzmy dwa z nich.

### 3. Warstwa ortotropowa z danymi naprężeniami na brzegach

Rozpatrzmy warstwę ograniczoną płaszczyznami  $|x_3| = h$ . Załóżmy, że na brzegach dane są dowolne siły powierzchniowe  $p_i^\pm$ , które rozłożymy na styczne  $p_i^\pm$  i normalne  $q^\pm$ .

Warunki brzegowe zapiszemy w postaci

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{33}|_{x_3=h} \pm \sigma_{33}|_{x_3=-h} &= q^+ \pm q^-, \\ \sigma_{13}|_{x_3=h} \pm \sigma_{13}|_{x_3=-h} &= p_1^+ \pm p_1^-, \\ \sigma_{23}|_{x_3=h} \pm \sigma_{23}|_{x_3=-h} &= p_2^+ \pm p_2^-. \end{aligned}$$

Wyrażając funkcje określające intensywność obciążeń stycznych przez nowe funkcje  $\tau^\pm(x_1, x_2)$ ,  $\chi^\pm(x_1, x_2)$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} p_1^\pm &= \lambda^{-1} \frac{\partial \tau^\pm}{\partial x_1} + \frac{\partial \chi^\pm}{\partial x_2}, \\ p_2^\pm &= \frac{\partial \tau^\pm}{\partial x_2} - \frac{\partial \chi^\pm}{\partial x_1} \end{aligned}$$

i wykorzystując odpowiednie związki (2.6.), otrzymuje się z (3.1.) warunki brzegowe dla funkcji przemieszczeń

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\varphi_1 + \frac{1}{s_2^2}\varphi_2\right)\Big|_{x_3=h} \pm \partial_3^2\left(\frac{1}{s_1^2}\varphi_1 + \frac{1}{s_2^2}\varphi_2\right)\Big|_{x_3=-h} &= \frac{q^+ \pm q^-}{(a+1)G_{23}}, \\ \partial_3(\varphi_1 + \varphi_2)\Big|_{x_3=h} \pm \partial_3(\varphi_1 + \varphi_2)\Big|_{x_3=-h} &= \frac{\tau^+ \pm \tau^-}{(a+1)G_{23}}, \\ \partial_3\varphi_3\Big|_{x_3=h} \pm \partial_3\varphi_3\Big|_{x_3=-h} &= \frac{\chi^+ \pm \chi^-}{G_{23}}. \end{aligned}$$



Z (3.2) wynikają związki

$$(3.4) \quad p_{\alpha, \alpha}^{\pm} = \Delta \tau^{\pm}, \quad \frac{\partial p_1^{\pm}}{\partial x_2} - \lambda^{-1} \frac{\partial p_2^{\pm}}{\partial x_1} = \Delta \chi^{\pm},$$

gdzie oznaczono

$$(3.4') \quad \Delta = \lambda^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Stosując symboliczny zapis rozwiązań, odpowiadających liniowym równaniom różniczkowym cząstkowym [4], zapiszemy rozwiązania równań (2.2) w postaci

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= \tilde{S}_1(w_1) + \tilde{C}_1(v_1), \\ \varphi_2 &= \tilde{S}_2(w_2) + \tilde{C}_2(v_2), \\ \varphi_3 &= \tilde{S}_3(\psi_3) + \tilde{C}_3(\psi_4), \end{aligned}$$

gdzie funkcje  $w_{\alpha}(x_{\alpha})$ ,  $v_{\alpha}(x_{\alpha})$  ( $\alpha = 1, 2$ ) oraz  $\psi_3(x_{\alpha})$ ,  $\psi_4(x_{\alpha})$  są funkcjami początkowymi określonymi w płaszczyźnie środkowej  $x_3 = 0$ , które wyznacza się z warunków brzegowych (3.3), a działające na te funkcje operatory  $\tilde{S}_i$ ,  $\tilde{C}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) są liniowymi operatorami nieskończonego rzędu, zależnymi parametrycznie od zmiennej  $x_3$

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \tilde{S}_i &= \frac{\sin s_i \sqrt{\Delta} x_3}{s_i \sqrt{\Delta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x_3^{2n+1} s_i^{2n} \Delta^n}{(2n+1)!}, \\ \tilde{C}_i &= \cos s_i \sqrt{\Delta} x_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x_3^{2n} s_i^{2n} \Delta^n}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Funkcje początkowe  $w_{\alpha}$  i  $\psi_3$  opisują, jak wynika z (2.1), i (3.5), pole przemieszczeń, w którym  $u_{\alpha}$  są antysymetryczne względem płaszczyzny środkowej, a  $u_3$  symetryczne względem tej płaszczyzny; opisują więc problem zginania płyty, czyli tzw. zagadnienie płytowe. Pozostałe funkcje początkowe, występujące w (3.5), opisują zagadnienie tarczowe w płycie.

Z warunków brzegowych (3.3) otrzymuje się

$$(3.7) \quad [S_1 C_2 - C_1 S_2] \Delta \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2(a+1)G_{23}} \begin{Bmatrix} C_2(q^- - q^+) - S_2(p_a^+ + p_a^-)_{,a} \\ -C_1(q^- - q^+) + S_1(p_a^+ + p_a^-)_{,a} \end{Bmatrix},$$

$$C_3(\psi_3) = \frac{1}{2G_{23}} (\chi^+ + \chi^-)$$

dla zagadnienia płytowego oraz

$$(3.8) \quad [s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1] \Delta \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2(a+1)G_{23}} \begin{Bmatrix} -s_2^2 S_2(q^+ + q^-) + C_2(\tau^+ - \tau^-) \\ s_1^2 S_1(q^+ + q^-) - C_1(\tau^+ - \tau^-) \end{Bmatrix},$$

$$s_3^2 \Delta S_3(\psi_4) = \frac{1}{2G_{23}} (\chi^- - \chi^+)$$

dla zagadnienia tarczowego.

Operatory  $S_i$ ,  $C_i$  otrzymuje się z operatorów  $\tilde{S}_i$ ,  $\tilde{C}_i$  danych wzorami (3.6), zamieniając formalnie  $x_3$  na  $h$ . Uwzględniając (3.7), (3.8) w (3.5), a te w (2.1), otrzymujemy rozwiązania w symbolicznym zapisie operatorowym

$$(3.9) \quad [S_1 C_2 - C_1 S_2] \Delta(u_a^P) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}} \{ [aC_2 \tilde{S}_1 - C_1 \tilde{S}_2] (q^- - q^+), a - \\ - [aS_2 \tilde{S}_1 - S_1 \tilde{S}_2] \partial_a (p_{\beta}^+ + p_{\beta}^-), \beta \},$$

$$[S_1 C_2 - C_1 S_2] \Delta(u_3) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}} \{ [C_2 \tilde{C}_1 - aC_1 \tilde{C}_2] (q^- - q^+) - \\ - [S_2 \tilde{C}_1 - aS_1 \tilde{C}_2] (p_{\beta}^+ + p_{\beta}^-), \beta \},$$

$$C_3(u_a^R) = \frac{1}{2G_{23}} \lambda_1 \varepsilon_a^\beta \tilde{S}_3 (\chi^+ + \chi^-), \beta,$$

$$u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R, \quad \lambda_1 = \begin{cases} \lambda & \text{dla } \alpha = 1, \\ 1 & \text{dla } \alpha = 2 \end{cases}$$

dla zagadnienia płytowego oraz

$$(3.10) \quad [s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1] \Delta(u_a^P) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}} \{ [s_1^2 S_1 \tilde{C}_2 - a s_2^2 S_2 \tilde{C}_1] (q^+ + q^-), a - \\ - [C_1 \tilde{C}_2 - aC_2 \tilde{C}_1] (\tau^+ - \tau^-), a \},$$

$$[s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1] \Delta(u_3) = \frac{1}{2(a+1)G_{23}} \{ s_1^2 s_2^2 [S_2 \tilde{S}_1 - aS_1 \tilde{S}_2] (q^+ + q^-) - \\ - [s_1^2 C_2 \tilde{S}_1 - a s_2^2 C_1 \tilde{S}_2] (\tau^+ - \tau^-) \},$$

$$\Delta S_3(u_a^R) = \frac{1}{2G_{12} \lambda} \lambda_1 \varepsilon_a^\beta \tilde{C}_3 (\chi^- - \chi^+), \beta,$$

$$u_\alpha = u_\alpha^P + u_\alpha^R$$

dla zagadnienia tarczowego.

Związki (3.9), (3.10), stanowiące rozdzielone przemieszczeniowe równania równowagi omawianego ośrodka, uwzględniają obciążenia na płaszczyznach ograniczających  $|x_3| = h$ . Po lewej stronie działają na składowe wektora przemieszczenia  $u_i(x_i)$  operatory różniczkowe zależące od dwóch zmiennych  $x_a$ , a po prawej na funkcje obciążeń (dwóch zmiennych  $x_a$ ) działają operatory różniczkowe zmiennych  $x_a$ , parametrycznie zależące od zmiennej  $x_3$ . W przypadku, gdy na konturze płyty występują warunki brzegowe typu antysymetrii, z równań tych można otrzymać ściśle rozwiązanie. W tym bowiem przypadku można posłużyć się metodą podwójnych szeregów Fouriera i wówczas działanie operatorów występujących w tych rozwiązaniach na funkcje obciążeń i przemieszczenia  $u_i$  będzie znane [5]. Przy innych typach warunków brzegowych, dla spełnienia warunków brzegowych, niezbędne są rozwiązania jednorodne, tj. takie rozwiązania, przy których znikają naprężenia na płaszczyznach ograniczających  $|x_3| = h$ , natomiast na pozostałych powierzchniach brzegowych płyty pole przemieszczeń i naprężeń przyjmuje z góry dane wartości.

## 4. Rozwiązania jednorodne

Wyznamy pole przemieszczeń odpowiadające nicobciążonym płaszczyznom ograniczającym  $|x_3| = h$ . Trzeba zatem znaleźć taką klasę funkcji początkowych  $w_\alpha(x_\alpha)$ ,  $v_\alpha(x_\alpha)$ ,  $\psi_3(x_\alpha)$ ,  $\psi_4(x_\alpha)$ , które zgodnie z (3.3) i (3.5) spełniają równania

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \Delta[S_1(w_1) + S_2(w_2)] &= 0, \\ C_1(w_1) + C_2(w_2) &= 0, \\ C_3(\psi_3) &= 0 \end{aligned}$$

w zagadnieniu płytowym oraz

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Delta[C_1(v_1) + C_2(v_2)] &= 0, \\ \Delta[s_1^2 S_1(v_1) + s_2^2 S_2(v_2)] &= 0, \\ \Delta S_3(\psi_4) &= 0 \end{aligned}$$

w zagadnieniu tarczowym.

W zagadnieniu płytowym funkcja  $\psi_1(x_\alpha)$  taka, że

$$(4.3) \quad w_1 = C_2(\psi_1), \quad w_2 = -C_1(\psi_1)$$

spełnia równania (4.1)<sub>1</sub> i (4.1)<sub>2</sub>, jeśli jest rozwiązaniem równania

$$(4.4) \quad \Delta[S_1 C_2 - C_1 S_2] \psi_1 = 0.$$

Funkcja ta opisuje zgodnie z (3.5) i (2.1) potencjalne pole przemieszczeń w zagadnieniu płytowym

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u_\alpha^p &= [a \tilde{S}_1 C_2 - \tilde{S}_2 C_1] \psi_{1,\alpha}, \\ u_3 &= [\tilde{C}_1 C_2 - a \tilde{C}_2 C_1] \psi_1. \end{aligned}$$

Funkcja  $\psi_3$ , spełniająca równanie (4.1)<sub>3</sub>, opisuje rotacyjną część pola przemieszczenia wzorem

$$(4.6) \quad u_\alpha^R = \lambda_1 \tilde{S}_3 \varepsilon_\alpha^\beta \psi_{3,\beta}, \quad u_\alpha = u_\alpha^p + u_\alpha^R,$$

przy czym

$$(4.6') \quad \lambda_1 = \begin{cases} \lambda & \text{dla } \alpha = 1, \\ 1 & \text{dla } \alpha = 2. \end{cases}$$

W zagadnieniu tarczowym otrzymuje się

$$(4.7) \quad u_\alpha^p = [s_2^2 a S_2 \tilde{C}_1 - s_1^2 S_1 \tilde{C}_2] \psi_{2,\alpha},$$

$$u_3 = s_1^2 s_2^2 [S_2 \tilde{S}_1 - a S_1 \tilde{S}_2] \Delta \psi_2,$$

$$(4.8) \quad u_\alpha^R = \lambda_1 \tilde{C}_3 \varepsilon_\alpha^\beta \psi_{4,\beta}, \quad u_\alpha = u_\alpha^p + u_\alpha^R,$$

przy czym funkcja  $\psi_2(x_\alpha)$  spełnia równanie

$$(4.9) \quad [s_2^2 C_1 S_2 - s_1^2 C_2 S_1] \Delta \psi_2 = 0,$$

a funkcja  $\psi_4(x_\alpha)$  jest rozwiązaniem równania (4.2)<sub>3</sub>.

Symboliczna postać równań (4.1)<sub>3</sub>, (4.4) oraz (4.2)<sub>3</sub>, (4.9) dla funkcji  $\psi_1(x_a)$ ,  $\psi_3(x_a)$  oraz  $\psi_2(x_a)$ ,  $\psi_4(x_a)$ , opisujących jednorodnie rozwiązania w zagadnieniu płytowym oraz tarczowym, prowadzi do całkowania równań różniczkowych nieskończenie wysokiego rzędu [4].

### 5. Struktura rozwiązań jednorodnych

Aby zastąpić symboliczną formę zapisu równań (4.1)<sub>3</sub>, (4.4) oraz (4.2)<sub>3</sub>, (4.9) formą różniczkową, przedstawimy funkcje argumentów operatorowych w postaci iloczynów nieskończonych względem ich miejsc zerowych.

Otrzymuje się

$$(5.1) \quad \Delta^2 \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\Delta h^2}{\varrho_k^2} \right] \left[ 1 - \frac{\Delta h^2}{\bar{\varrho}_k^2} \right] \psi_1 = 0,$$

$$(5.2) \quad \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{4\Delta s_3^2 h^2}{\pi^2 (2k-1)^2} \right] \psi_3 = 0,$$

$$(5.3) \quad \Delta \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\Delta h^2}{\varrho_k^{*2}} \right] \left[ 1 - \frac{\Delta h^2}{\bar{\varrho}_k^{*2}} \right] \psi_2 = 0,$$

$$(5.4) \quad \Delta \prod_{k=1}^{\infty} \left[ 1 - \frac{\Delta s_3^2 h^2}{k^2 \pi^2} \right] \psi_4 = 0,$$

gdzie  $\varrho_k$ ,  $\bar{\varrho}_k$ ,  $\varrho_k^*$ ,  $\bar{\varrho}_k^*$  są zespolonymi pierwiastkami równań

$$(5.5) \quad \frac{\sin(s_1 - s_2)\varrho}{(s_1 - s_2)\varrho} - \frac{\sin(s_1 + s_2)\varrho}{(s_1 + s_2)\varrho} = 0,$$

$$(5.6) \quad \frac{\sin(s_1 - s_2)\varrho^*}{(s_1 - s_2)\varrho^*} + \frac{\sin(s_1 + s_2)\varrho^*}{(s_1 + s_2)\varrho^*} = 0,$$

przy czym  $\bar{\varrho}_k$ ,  $\bar{\varrho}_k^*$  są liczbami sprzężonymi z  $\varrho_k$ ,  $\varrho_k^*$  (por. [5]). Ogólne rozwiązania równań (5.1) - (5.4) przedstawimy w postaci

$$(5.7) \quad \psi_1 = \Phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{1k} + \bar{\psi}_{1k}),$$

$$(5.8) \quad \psi_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{3k},$$

$$(5.9) \quad \psi_2 = \Phi_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{2k} + \bar{\psi}_{2k}),$$

$$(5.10) \quad \psi_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{4k},$$

gdzie poszczególne składniki tych sum są rozwiązaniami równań

$$(5.11) \quad \Delta^2 \Phi_1 = 0,$$

$$(5.12) \quad [\Delta - \varrho_k^2 h^{-2}] \psi_{1k} = 0,$$

$$(5.13) \quad [\Delta - \bar{\varrho}_k^2 h^{-2}] \bar{\psi}_{1k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(5.14) \quad \left[ \Delta - \frac{G_{13}}{G_{12}} \pi^2 \left( k - \frac{1}{2} \right)^2 h^{-2} \right] \psi_{3k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(5.15) \quad \Delta \Phi_2 = 0,$$

$$(5.16) \quad [\Delta - \varrho_k^{*2} h^{-2}] \psi_{2k} = 0,$$

$$(5.17) \quad [\Delta - \bar{\varrho}_k^{*2} h^{-2}] \bar{\psi}_{2k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(5.18) \quad \left[ \Delta - \frac{G_{13}}{G_{12}} \pi^2 k^2 h^{-2} \right] \psi_{4k} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Uwzględniając w związkach (4.5) — (4.8) zależności (5.7) (5.18) otrzymujemy rozwiązania jednorodne.

W zagadnieniu płytowym mamy

$$(5.19) \quad u_a^{\text{I}} = -a_0 z \Phi_{1,a} - \frac{a_1}{2} h^2 z \Delta \Phi_{1,a} + \frac{1-a_1}{6} z^3 \Delta \Phi_{1,a} + h \sum_{k=1}^{\infty} (H_{1k} \psi_{1k} + \bar{H}_{1k} \bar{\psi}_{1k}),_a^{\text{I}} + \\ + \lambda_1 \varepsilon_a^{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \left[ \pi \left( k - \frac{1}{2} \right) \zeta \right] \psi_{3k,\beta},$$

$$u_3 = a_0 \Phi_1 + \frac{a_1}{2} z^2 \Delta \Phi_1 - \frac{1-a_1}{2} h^2 \Delta \Phi_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (F_{1k} \psi_{1k} + \bar{F}_{1k} \bar{\psi}_{1k}),$$

gdzie

$$(5.20) \quad H_{1k}(\zeta) = a \frac{\sin s_1 \varrho_k \zeta}{s_1 \varrho_k} \cos s_2 \varrho_k - \frac{\sin s_2 \varrho_k \zeta}{s_2 \varrho_k} \cos s_1 \varrho_k,$$

$$F_{1k}(\zeta) = \cos s_1 \varrho_k \zeta \cos s_2 \varrho_k - a \cos s_2 \varrho_k \zeta \cos s_1 \varrho_k, \quad \zeta = \frac{x_3}{h},$$

$\bar{H}_{1k}(\zeta)$ ,  $\bar{F}_{1k}(\zeta)$  są zespolonymi sprzężonymi funkcjami z  $H_{1k}(\zeta)$ ,  $F_{1k}(\zeta)$ , natomiast  $a_0$ ,  $a_1$  są rzeczywistymi liczbami, które oblicza się ze wzorów

$$(5.21) \quad a_0 = \frac{G_{13} c_{33}}{(c_{11} c_{33} - c_{13}^2) \lambda}, \quad a_1 = \frac{G_{13} c_{13}}{c_{11} c_{33} - c_{13}^2}.$$

W zagadnieniu tarczowym jest

$$(5.22) \quad u_a = \Phi_{2,a}^{\text{II}} + h \sum_{k=1}^{\infty} (H_{2k} \psi_{2k} + \bar{H}_{2k} \bar{\psi}_{2k}),_a + \lambda_1 \varepsilon_a^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi\zeta) \psi_{4k,\beta},$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{\infty} (F_{2k} \psi_{2k} + \bar{F}_{2k} \bar{\psi}_{2k}),$$

$$\begin{aligned}
 (5.23) \quad H_{2k}(\zeta) &= as_2 \frac{\sin s_2 \varrho_k^*}{\varrho_k^*} \cos s_1 \varrho_k^* \zeta - s_1 \frac{\sin s_1 \varrho_k^*}{\varrho_k^*} \cos s_2 \varrho_k^* \zeta, \\
 F_{2k}(\zeta) &= s_1 s_2 \left[ \frac{\sin s_2 \varrho_k^*}{\varrho_k^*} \cdot \frac{\sin s_1 \varrho_k^* \zeta}{\varrho_k^*} - a \frac{\sin s_1 \varrho_k^*}{\varrho_k^*} \cdot \frac{\sin s_2 \varrho_k^* \zeta}{\varrho_k^*} \right],
 \end{aligned}$$

a  $\bar{H}_{2k}(\zeta)$ ,  $\bar{F}_{2k}(\zeta)$  są sprzężonymi funkcjami z  $H_{2k}(\zeta)$ ,  $F_{2k}(\zeta)$ . Otrzymane rozwiązania jednorodne wraz z rozwiązaniami szczególnymi, uwzględniającymi obciążenia na płaszczyznach  $|x_3| = h$ , które można wyznaczyć z równań (3.9) lub (3.10), opisują problem statyczny płyt ortotropowych lub poprzecznie izotropowych ( $\lambda = 1$ ), czy też płyt wykonanych z materiału izotropowego ( $a = \lambda = s_1 = s_2 = 1$ ). Podane rozwiązania mogą być wyjściowymi do analizy stanu naprężenia i przemieszczenia w dowolnie grubych płytach ortotropowych, gdyż stwarzają możliwość spełnienia z dowolną dokładnością warunków brzegowych występujących na konturze płyty, a w granicznym przypadku ścisłego ich spełnienia. Podstawowy (wewnętrzny) stan naprężenia opisywany jest funkcjami  $\Phi_1(x_a)$  i  $\Phi_2(x_a)$  będącymi rozwiązaniami równań (5.11) i (5.15). Rozwiązania opisywane funkcjami  $\psi_{1k}(x_a)$ ,  $\psi_{2k}(x_a)$ , określone na zbiorze pierwiastków zespolonych równań transcendentnych (5.5) i (5.6), opisują efekt brzegowy. Natomiast pole przemieszczeń przedstawione funkcjami  $\psi_{3k}(x_a)$ ,  $\psi_{4k}(x_a)$ , określone na zbiorze wartości własnych danych w postaci jawnej, jest rotacyjnym polem przemieszczenia w płycie. Ograniczając się w rozwiązaniach jednorodnych do skończonych sum otrzymamy rozwiązania aproksymujące ściśle rozwiązania i w tym przypadku warunki brzegowe na konturze będzie można spełnić w sposób przybliżony.

Równanie (5.11), określające funkcję opisującą wewnętrzny stan naprężenia w problemie zginania, ma po wykorzystaniu oznaczenia (3.4') i zależności (1.4) postać

$$(5.24) \quad \left[ c_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(c_{12} + 2G_{12}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + c_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right] \Phi_1 = 0.$$

W klasycznej teorii zginania płyt ortotropowych stan naprężenia opisywany jest funkcją ugięcia powierzchni środkowej, spełniającą równanie (por. [7] s. 332)

$$(5.25) \quad \left[ D_{x_1} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2(D_1 + 2D_{x_1 x_2}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{x_2} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right] w = q,$$

w którym stałe współczynniki zależą jedynie od parametrów sprężystych w płaszczyźnie płyty, podczas gdy współczynniki występujące w równaniu (5.24) zależą od właściwości sprężystych materiału w trzech kierunkach. Stwarza to możliwości uwzględnienia wpływu parametrów materiałowych w kierunku poprzecznym na stany przemieszczenia i naprężenia, co w przypadku płyt anizotropowych nie jest bez znaczenia [8].

Jeśli odstąpić od ścisłego spełnienia warunków brzegowych na konturze płyty i zastąpić je przybliżonymi, całkowymi lub uśrednionymi, to stan naprężenia i przemieszczenia można opisać funkcjami  $\bar{\Phi}_1(x_a)$ ,  $\bar{\Phi}_2(x_a)$  oraz  $\psi_{31}$  i  $\psi_{40}$ , przy czym można wówczas spełnić pięć warunków na każdym brzegu. Równania służące do obliczenia całki szczegól-

nej, uwzględniającej obciążenia płaszczyzn ograniczających, wyznaczmy z równań przybliżonych, jakie otrzymuje się z (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_3 &= \frac{3}{2h^3 G_{23}} \left\{ \left[ a_0 + \frac{a_1}{2} z^2 \Delta - \frac{1-a_1}{2} h^2 \Delta \right] (q^+ - q^-) + \right. \\ &\quad \left. + h \left[ a_0 + \frac{a_1}{2} z^2 \Delta - \frac{1-a_1}{6} h^2 \Delta \right] (p_\beta^+ + p_\beta^-)_{,\beta} \right\}, \\ \Delta^2 u_\alpha^p &= \frac{3z}{2h^3 G_{23}} \left\{ \left[ -a_0 - \frac{a_1}{2} h^2 \Delta + \frac{1-a_1}{6} z^2 \Delta \right] (q^+ - q^-)_{,\alpha} + \right. \\ (5.26) \quad &\quad \left. + h \left[ -a_0 - \frac{a_1}{6} h^2 \Delta + \frac{1-a_1}{6} z^2 \Delta \right] \partial_\alpha (p_\beta^+ + p_\beta^-)_{,\beta} \right\}, \\ &\quad \left[ \Delta - \frac{G_{13}}{G_{12}} \frac{\pi^2}{4} h^{-2} \right] u_\alpha^R = - \frac{\pi^2 \lambda_1}{2G_{12} \lambda h} \frac{z}{h} e_\alpha^\beta (\chi^+ + \chi^-)_{,\beta}, \\ &\quad u_\alpha = u_\alpha^p + u_\alpha^R \end{aligned}$$

w zagadnieniu płytowym oraz

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{z}{2G_{23}} [a_2 a_0 (q^+ + q^-) + h^{-1} a_1 (\tau^+ - \tau^-)], \\ (5.27) \quad \Delta u_\alpha^p &= \frac{1}{2G_{23}} \left\{ \left[ -a_1 + \frac{a_3}{6} h^2 \Delta - \frac{1}{2} a_2 a_0 z^2 \Delta \right] (q^+ + q^-)_{,\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ -a_0 - \frac{a_1}{2} h^2 \Delta + \frac{1-a_1}{2} z^2 \Delta \right] h^{-1} (\tau^+ - \tau^-)_{,\alpha} \right\}, \\ \Delta u_\alpha^R &= \frac{\lambda_1}{2G_{12} \lambda h} e_\alpha^\beta (\chi^- - \chi^+)_{,\beta}, \\ u_\alpha &= u_\alpha^p + u_\alpha^R \end{aligned}$$

w problemie rozciągania (ściskania) płyty.

W związkach (5.27) oznaczono

$$(5.28) \quad a_3 = \left( \frac{c_{13} + G_{13}}{c_{33}} \frac{G_{13} c_{13}^2}{c_{33} (c_{11} c_{33} - c_{13}^2)} \right) \lambda, \quad a_2 = \frac{c_{11}}{c_{33}} \lambda^2.$$

Tak zbudowana „teoria uściślona”, oparta na założeniu stosowalności zasady de Saint Venanta, może służyć do wyznaczenia wewnętrznego stanu naprężenia i z punktu widzenia zastosowań technicznych będzie to dobre przybliżenie ścisłych rozwiązań. Wyjaśnienie innych sprężystych zjawisk w płycie, w szczególności efektu brzegowego, możliwe jest przy wykorzystaniu ogólnych rozwiązań podanych w pracy.

#### Literatura cytowana w tekście

1. Л. А. Агаловян, *Об уточнении классической теории изгиба анизотропных пластин*, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVIII, 5 (1965).
2. Л. А. Агаловян, *К теории изгиба ортотропных пластин МТТ*, 6 (1966).

3. Л. А. АГАЛОВЯН, *О погранслое ортотропных пластинок*, Изв. АН Арм. ССР, механика, т. XXVI, 2 (1973).
4. А. И. ЛУРЬБ, *Пространственные задачи теории упругости*, Гостехиздат, Москва 1955.
5. В. ROGOWSKI, *Zagadnienia równowagi grubej płyty poprzecznie izotropowej*, Rozpr. Inż., 22, 3 (1974) 445 - 467.
6. В. ROGOWSKI, *Funkcje przemieszczeń dla ośrodka poprzecznie izotropowego*, Mech. Teor. Stos., 1, 13 (1975), 69 - 83.
7. S. ТИМОШЕНКО, S. ВОИНОВСКИЙ-КРИЕГЕР, *Теория плит и оболочек*, Arkady, 1962.
8. В. ROGOWSKI, *Zginanie płyty poprzecznie izotropowej*, AIL, 4 (1974).

## Резюме

## О СТРУКТУРЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОБ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИНАХ

Введены функции перемещений для тела с прямолинейной ортотропией и шестью независимыми упругими константами. Функция использовалась для решения статической задачи об ортотропной плите произвольно нагруженной на ограничивающих плоскостях, а также для случая, когда эти плоскости свободны от напряжений. Для составляющих вектора перемещения было получено, независимо для задачи о диске и для задачи о плите, разделенное уравнение в символической операторной записи, соответствующее дифференциальным уравнениям бесконечного порядка. Однородные решения содержат: удовлетворяющие соответственно уравнениям четвертого и второго порядков функции описывающие внутреннее напряженное состояние, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца, определенные на множестве корней соответствующих трансцендентных уравнений, функции, которые описывают краевые эффекты и, наконец, определенные на множестве данных в явном виде действительных собственных значений, функции которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца и описывают поле вращательных перемещений в плите. Проводятся уравнения «уточненной теории».

## Summary

## ON THE STRUCTURE OF SOLUTIONS IN THE PROBLEMS OF ORTHOTROPIC PLATES

Displacement potentials are introduced in the case of rectilinear orthotropy characterized by six independent elastic constants. The potentials are used to solve the static case of an orthotropic plate either arbitrarily loaded on the bounding planes or free from loads. Two independent equations for the displacement components are obtained, corresponding to the plane stress and plate bending problems, respectively; the equations are written in a symbolic, operator form and are equivalent to differential equations of infinite order. The homogeneous equations contain: the functions describing the internal state of stress and satisfying the 4th and 2nd order equations, respectively; the functions defined in the set of roots of the corresponding transcendental equations satisfying the Helmholtz equations and describing the boundary effect, and the functions defined in the set of real-valued eigenvalues, given in an explicit form, which satisfy the Helmholtz equations and describe the rotational field of displacements in the plate. Equations of the «more accurate» theory are presented.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA, ŁÓDŹ

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 grudnia 1974 r.*



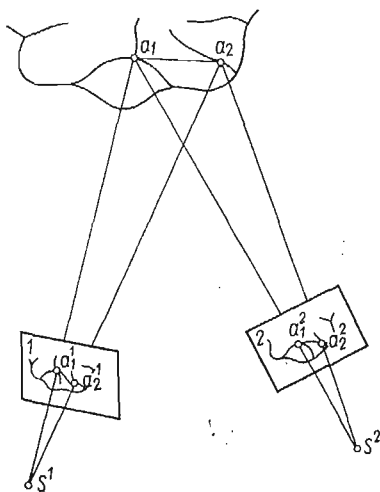


WYZNACZANIE KINEMATYKI PROCESÓW DEFORMACJI METODĄ  
STEREOFOTOGRAFICZNO-RZUTOWĄ\*)

TADEUSZ BEDNARSKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Pomiary wielkości kinematycznych procesów mechanicznych, szczególnie procesów deformacji, zachodzących w przestrzeni trój- lub czterowymiarowej (czasoprzestrzeni) sprawiają na ogół wiele trudności. Jedną z metod pomiaru tych wielkości jest metoda fotografii lub filmu stereoskopowego, która pozwala na wyznaczenie elementów kinema-



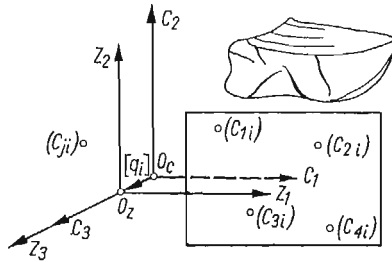
Rys. 1

tyki procesu lub jego chwilowego stanu kinematycznego na podstawie dowolnej pary zdjęć obszaru przestrzennego, w którym ten proces zachodzi lub znajduje się obserwowany model, a wykonanych z dwu różnych punktów  $s^m$ , dla  $m = 1, 2$  tej przestrzeni (rys. 1). Przez dowolną parę zdjęć rozumiemy parę zdjęć o nieznanych elementach orientacji, a wykonanych w tym samym momencie. W pracach [1, 2, 3] opisana została klasyczna metoda opracowywania pary zdjęć przy znanych elementach orientacji, a stosowana w fotogrametrii, z tym, że dostosowana została do opracowywania filmowych zdjęć stereoskopowych na przykładzie deformacji powłoki. Znajomość elementów orientacji zdjęć

\*) Praca została nagrodzona na Ogólnopolskim Konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej — zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Częstochowie, w 1974 r.



cowej w zmaterializowanym układzie odniesienia  $c_i$  może być w zasadzie dowolny, byleby nie zawierały osi optycznych układu stereoskopowego i środków rzutów. Dla uproszczenia rachunków przyjmujemy za płaszczyznę wzorcową płaszczyznę prostopadłą do jednej z osi, np.  $c_{w,3} = \alpha = \text{const}$ . Nie ogranicza to ogólności rozważań, ponieważ poprzez

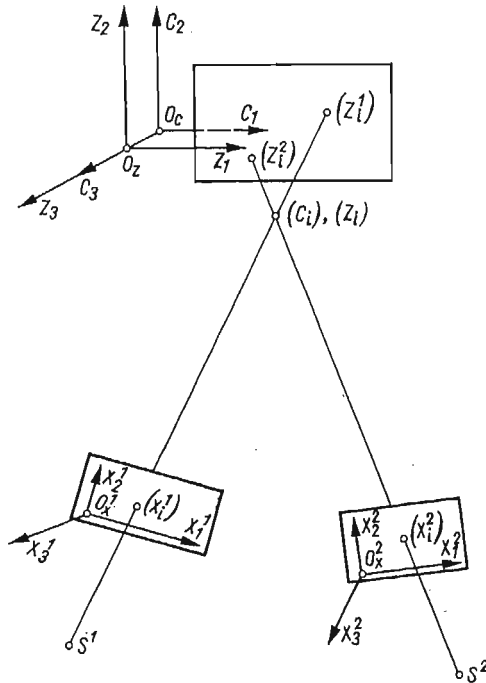


Rys. 3

transformację układu odniesienia postawiony warunek możemy spełnić. W celu uniknięcia nieporozumień wprowadzimy nowy układ odniesienia  $z_i$  dla  $i = 1, 2, 3$  związany bezpośrednio z płaszczyzną wzorcową (rys. 3) powstały przez translację

$$(1) \quad z_i = c_i - q_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3,$$

gdzie wektor translacji  $q_i = [0, 0, \alpha]$ .



Rys. 4

## 4. Układy odniesienia

Proces badany rozpatrywać będziemy w kartezjańskim układzie odniesienia  $c_i$  dla  $i = 1, 2, 3$ , bezpośrednio związanym z otoczeniem badanego procesu poprzez punkty wzorcowe (rys. 1 i 3). Natomiast wyniki pomiarów otrzymujemy w dwóch układach współrzędnych instrumentu  $x_i^m$  dla  $m = 1, 2, i = 1, 2, 3$ , bezpośrednio związanych z płaszczyznami par zdjęć warunkiem  $x_3^m = 0$ . Dodatkowo wprowadziliśmy już pomocniczy układ współrzędnych przestrzennych  $z_i$  związany układem  $c_i$  poprzez translację (1). Natomiast współrzędne  $x_i^m$  i  $z_i^m$  są ze sobą związane poprzez rzuty środkowe (rys. 4).

## 5. Przekształcenia rzutowe płaszczyzn zdjęć na płaszczyznę wzorcową

Wprowadzimy na płaszczyznach obu zdjęć i na płaszczyźnie wzorcowej współrzędne jednorodne  $\{\bar{x}_i^m\}$  i  $\{\bar{z}_i\}$  dla  $m = 1, 2, i = 0, 1, 2$ , punktów o współrzędnych kartezjańskich  $(x_i^m)$  i  $(z_i)$  dla  $i, m = 1, 2$ , [5, 7]. Wtedy wzajemnie jednoznaczne przekształcenie jednej płaszczyzny na drugą zapisać można w postaci

$$(2) \quad \bar{z}_i = \sum_{j=0}^2 \bar{a}_{ij}^m \bar{x}_j^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 0, 1, 2,$$

gdzie wyznacznik współczynników macierzy przekształcenia  $(\bar{a}_{ij}^m) \neq 0$ . Dla punktów właściwych rozpatrywanych płaszczyzn  $\bar{c}_0 \neq 0$  i  $\bar{x}_0^m \neq 0$  dla  $m = 1, 2$ , a ponieważ współrzędne kartezjańskie określone są wzorami

$$(3) \quad x_i^m = \frac{\bar{x}_i^m}{\bar{x}_0^m}, \quad z_i = \frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_0} \quad \text{dla } i, m = 1, 2,$$

możemy przekształcenie (2) zapisać dla współrzędnych kartezjańskich w postaci

$$(4) \quad z_i = \frac{\sum_{j=0}^2 \bar{a}_{ij}^m x_j^m}{\sum_{j=0}^2 \bar{a}_{0j}^m x_j^m}, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 1, 2.$$

Mając na uwadze, iż  $x_0^m = 1$ , możemy dzieląc licznik i mianownik przez  $\bar{a}_{00}^m \neq 0$  zapisać przekształcenie (4) w postaci

$$(5) \quad z_i = \frac{a_i^m + \sum_{j=1}^2 A_{ij}^m x_j^m}{1 + \sum_{j=1}^2 b_j^m x_j^m}, \quad \text{dla } i, m = 1, 2,$$

gdzie  $a_i^m, b_j^m, A_{ij}^m$  są macierzami przekształcenia współrzędnych  $x_i^m$  punktów  $(x_i^m)$  płaszczyzn par zdjęć dla  $m = 1, 2$  na współrzędne  $z_i$  punktów  $(z_i)$  płaszczyzny wzorcowej.

**5.1. Macierze przekształcenia.** Dla określenia przekształcenia rzutowego (5) wymagana jest znajomość macierzy tego przekształcenia  $a_i^m, b_j^m, A_{ij}^m$  dla  $i, j, m = 1, 2$ . Macierze te możemy wyznaczyć ze znajomości współrzędnych kartezjańskich  $c_j$   $i = z_{ji}$  dla  $i = 1, 2$  i  $j = 1, 2, \dots, J$  punktów wzorcowych, oraz współrzędnych instrumentu  $x_j^m$  obrazów tych punktów na obu zdjęciach, czyli dla  $m = 1, 2$ .

Punkty wzorcowe ( $c_{ji}$ ) leżące na płaszczyźnie wzorcowej (a ściślej — ją wyznaczające) oznaczamy dodatkowo literą  $w$ , czyli ( $c_{w_{w,i}}$ ) dla  $w = 1, 2, \dots, W$ , dla odróżnienia od pozostałych punktów wzorcowych, które nadal oznaczamy przez ( $c_{ji}$ ). Wtedy przekształcenie rzutowe (5) dla punktów wzorcowych zapiszemy w postaci:

$$(6) \quad z_{w_{w,i}} = \frac{a_i^m + \sum_{l=1}^2 A_{il}^m x_{w_{w,l}}^m}{1 + \sum_{l=1}^2 b_l^m x_{w_{w,l}}^m}, \quad \text{dla } i, m = 1, 2, \quad w = 1, 2, \dots, W.$$

W przekształceniu tym  $z_{w_{w,i}}$  i  $x_{w_{w,i}}^m$  są znane, więc przy dostatecznej ilości punktów wzorcowych  $W \geq 4$  macierze przekształcenia  $a_i^m$ ,  $b_l^m$  i  $A_{il}^m$  możemy wyznaczyć.

Przekształcenie (6) zapisujemy w postaci:

$$(7) \quad a_i^m + \sum_{l=1}^2 A_{il}^m x_{w_{w,l}}^m - z_{w_{w,i}} \sum_{l=1}^2 b_l^m x_{w_{w,l}}^m = z_{w_{w,i}}$$

dla  $i, m = 1, 2, w = 1, 2, \dots, W$ , które przedstawia układ  $4W$  równań z 16 niewiadomymi wyrazami macierzy przekształcenia (6). Układ ten jest rozłączny ze względu na wskaźnik  $m$  i możemy go rozbić na dwa układy dla  $m = 1, 2$ , po  $2W$  równań z ośmioma niewiadomymi każdy. Po uporządkowaniu układy równań (7) możemy zapisać w postaci

$$(8) \quad \sum_{p=1}^8 E_{n,p}^m u_p^m = e_n^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, 2W.$$

Należy zwrócić uwagę, że w ogólnym przypadku możemy macierze przekształcenia określać na podstawie jednej grupy punktów kontrolnych dla zdjęcia lewego ( $m = 1$ ), a na podstawie drugiej grupy punktów dla zdjęcia prawego ( $m = 2$ ). Możemy wykorzystać niektóre punkty wspólne, lub też wyznaczyć te macierze na podstawie wspólnych dla obu zdjęć punktów kontrolnych. Wtedy układ (8) możemy zapisać w postaci

$$(9) \quad \sum_{p=1}^8 E_{n,p}^m u_p^m = e_n, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad n = 1, 2, \dots, 2J(W).$$

Wektor wyrazów wolnych  $e_n$  ma postać:

$$(10) \quad e_n = \begin{cases} z_{w_{n,1}}, & \text{dla } n = 1, 2, \dots, W, \\ z_{w_{n-W,2}}, & \text{dla } n = W+1, \dots, 2W. \end{cases}$$

Natomiast macierze współczynników przy niewiadomych mają postać:

$$(11) \quad E_{n,p}^m = \begin{cases} \left. \begin{array}{ll} 1, & \text{dla } p = 1, \\ 0, & \text{dla } p = 2, 5, 6, \\ x_{w_{n,p-2}}^m, & \text{dla } p = 3, 4, \\ -z_{w_{n,1}} x_{w_{n,p-6}}^m, & \text{dla } p = 7, 8, \end{array} \right\} \text{dla } n = 1, 2, \dots, W, \\ \left. \begin{array}{ll} 0, & \text{dla } p = 1, 3, 4, \\ 1, & \text{dla } p = 2, \\ x_{w_{n-W,p-4}}^m, & \text{dla } p = 5, 6, \\ -z_{w_{n-W,2}} x_{w_{n-W,p-6}}^m, & \text{dla } p = 7, 8, \end{array} \right\} \text{dla } n = W+1, \dots, 2W. \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układów równań (9) otrzymujemy macierz  $u_p^m$ , dla  $m = 1, 2$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots, 8$ , która określa macierze przekształcenia rzutowego (7) następująco:

$$(12) \quad a_j^m = u_j^m, \quad \text{dla } j, m = 1, 2,$$

$$(13) \quad b_l^m = u_{l+6}^m, \quad \text{dla } l, m = 1, 2,$$

$$(14) \quad A_{i,l}^m = \begin{cases} u_{i+1}^m, & \text{dla } i = 1, \\ u_{i+2}^m, & \text{dla } i = 2, \end{cases} \quad l, m = 1, 2.$$

W przypadku  $W > 4$  sprawdzamy, korzystając z metody najmniejszych kwadratów, układy (9) do postaci

$$(15) \quad \sum_{l=1}^8 G_{p,l}^m u_l^m = g_p^m, \quad \text{dla } p = 1, 2, \dots, 8, \quad m = 1, 2,$$

gdzie:

$$(16) \quad G_{p,l}^m = \sum_{n=1}^{2W} E_{n,p}^m E_{n,l}^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad p, l = 1, 2, \dots, 8,$$

$$(17) \quad g_p^m = \sum_{n=1}^{2W} e_n E_{n,p}^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad p = 1, 2, \dots, 8,$$

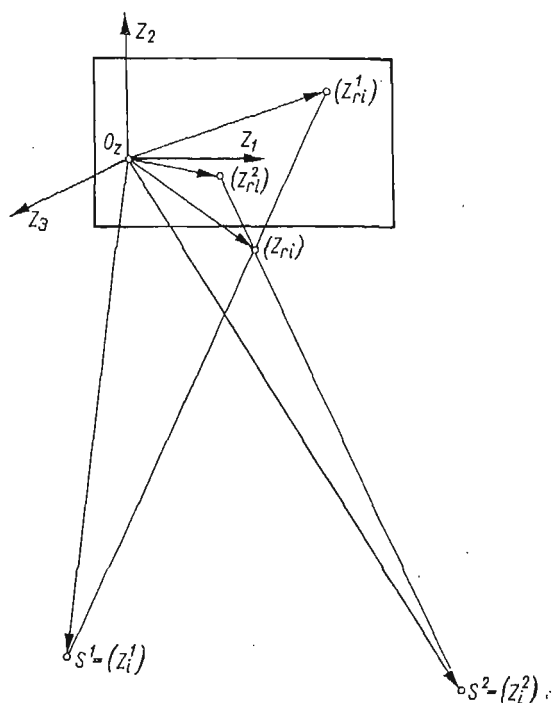
macierze przekształcenia (6) zaś określane są zależnościami (12), (13), (14).

**5.2. Para zdjęć pośrednich.** Wyznaczone macierze (12), (13) i (14) określają przekształcenia rzutowe (5) płaszczyzn zdjęć rzeczywistych dla  $m = 1, 2$ , na płaszczyznę wzorcową ( $c_3 = \alpha$  lub  $z_3 = 0$ ) wyznaczoną przez podgrupę punktów wzorcowych  $(c_{j,l}) = (c_{W_w,i})$  dla  $w = 1, 2, 3, \dots, W$ , które spełniają warunki rzutu środkowego. W wyniku przekształcenia zdjęć rzeczywistych na płaszczyznę wzorcową otrzymamy z obu przekształceń identyczne współrzędne  $z_i$  dla  $i = 1, 2$ , tylko dla punktów przestrzeni  $c_i$  lub  $z_i$  należących do płaszczyzny wzorcowej. Natomiast dla punktów nie należących do płaszczyzny wzorcowej otrzymamy po dwa obrazy na płaszczyźnie wzorcowej (rys. 4). Te dwie grupy obrazów punktów badanego obszaru na płaszczyźnie wzorcowej tworzą nową parę zdjęć leżącą w płaszczyźnie wzorcowej, którą nazywać będziemy parą zdjęć pośrednich. Dla otrzymania tych par oddzielnie przekształcenie (5) zapiszemy w postaci:

$$(18) \quad z_i^m = \frac{a_i^m + \sum_{j=1}^2 A_{i,j}^m x_j^m}{1 + \sum_{j=1}^2 b_j^m x_j^m}, \quad \text{dla } i, m = 1, 2.$$

## 6. Elementy orientacji zdjęć pośrednich

W postawionym problemie elementami orientacji zarówno wewnętrznej jak i zewnętrznej są współrzędne środków rzutów  $s^m$  dla  $m = 1, 2$ , które w układzie odniesienia  $z_i$  dla  $i = 1, 2, 3$ , oznaczają będziemy przez  $z_i^m$ . Do wyznaczenia tych elementów wykorzystamy punkty wzorcowe leżące poza płaszczyzną wzorcową dla  $j = 1, 2, \dots, J$ .



Rys. 5

Z kolinearności wektorów  $z_i^m - z_{j,i}^m$  i  $z_{j,i} - z_{j,i}^m$  dla  $m = 1, 2, i = 1, 2, 3, \dots, J$  (rys. 5), mamy:

$$(19) \quad z_i^m - z_{j,i}^m = k_j^m (z_{j,i} - z_{j,i}^m),$$

gdzie  $k_j^m$  macierz wielkości skalarnych. Z definicji przyjętego układu odniesienia  $z_i$  mamy warunek  $z_{j,3}^m = 0$ , więc dla  $i = 3$  mamy

$$(20) \quad z_3^m = k_j^m z_{j,3},$$

a ponieważ z założenia  $z_{j,3} \neq 0$ , więc

$$(21) \quad k_j^m = \frac{z_3^m}{z_{j,3}}.$$

Podstawiając (12) do (13) po przekształceniu otrzymamy:

$$(22) \quad z_{j,3} z_i^m - (z_{ji} - z_{j,i}^m) z_3^m = z_{j,3} z_{j,i}^m, \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Są to dwa układy równań, dla  $m = 1, 2$ , z trzema niewiadomymi, przy czym z jednego punktu wzorcowego leżącego poza płaszczyzną wzorcową otrzymujemy tylko po dwa równania. Zatem dla wyznaczenia elementów orientacji musimy mieć co najmniej 2 punkty wzorcowe poza płaszczyzną wzorcową. Dla zwiększenia dokładności obliczeń powiększamy liczbę tych punktów wzorcowych, a otrzymane układy zawierające więcej równań niż niewiadomych rozwiązujemy metodą najmniejszych kwadratów.



Układy równań (22) zapiszemy w postaci:

$$(23) \quad \sum_{i=1}^3 F_{j,i}^m z_i^m = f_j^m \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, 2J,$$

gdzie macierz wyrazów wolnych:

$$(24) \quad f_j^m = \begin{cases} z_{j,3} z_{j,i}^m & \text{dla } j = 1, 2, \dots, J, \\ z_{j-J,3} z_{j-J,i}^m & \text{dla } j = J+1, \dots, 2J. \end{cases} \quad \text{dla } m = 1, 2,$$

Natomiast macierz współczynników przy niewiadomych:

$$(25) \quad F_{ji}^m = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} z_{j,3} & \text{dla } i = 1, \\ 0 & \text{dla } i = 2, \\ z_{j,1}^m - z_{j,1} & \text{dla } i = 3, \end{array} \right\} & \text{dla } j = 1, 2, \dots, J, \\ \left. \begin{array}{l} 0 & \text{dla } i = 1, \\ z_{j-J,3} & \text{dla } i = 2, \\ z_{j-J,2}^m - z_{j-J,2} & \text{dla } i = 3, \end{array} \right\} & \text{dla } j = J+1, \dots, 2J. \end{cases} \quad m = 1, 2,$$

Aby rozwiązać układy (23) metodą najmniejszych kwadratów sprowadzamy je do postaci

$$(26) \quad \sum_{i=1}^3 H_{i,l}^m z_i^m = h_l^m, \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$(27) \quad h_i^m = \sum_{j=1}^{2J} f_j^m F_{j,i}^m \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3,$$

oraz

$$(28) \quad H_{l,i}^m = \sum_{j=1}^{2J} F_{j,i}^m F_{j,l}^m \quad \text{dla } m = 1, 2, \quad i, l = 1, 2, 3.$$

W wyniku rozwiązania układu (26) otrzymujemy współrzędne  $z_i^m$  środków rzutów  $s^m$  dla  $m = 1, 2$ , i  $l = 1, 2, 3$ .

### 7. Współrzędne przestrzenne obserwowanych punktów

Położenie obserwowanych punktów  $r = 1, 2, \dots, R$  określone jest w kartezjańskim układzie odniesienia  $z_i$  przez współrzędne tych punktów  $(z_{r,i})$  dla  $i = 1, 2, 3$ , rys. 6. Przy znajomości elementów orientacji w postaci współrzędnych rzutów punktu  $(z_{r,i})$  na płaszczyznę kontrolną  $(z_{r,i}^n)$  wyznaczmy współrzędne  $z_{r,i}$  punktu  $(z_{r,i})$ . Ponieważ wektory  $[z_i^n - z_{r,i}^n]$  i  $[z_{r,i} - z_{r,i}^n]$  dla  $m = 1, 2$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$ , są wektorami współliniowymi (rys. 6), więc z warunku współliniowości otrzymujemy układ równań:

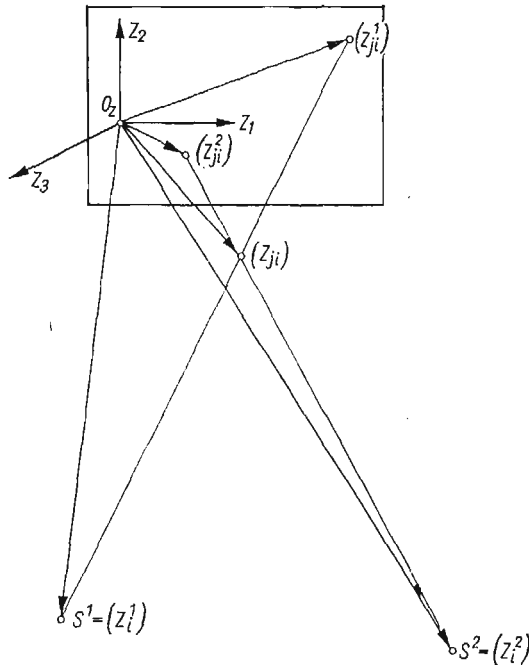
$$(29) \quad (z_{r,i} - z_{r,i}^m) = k_r^m (z_i^m - z_{r,i}^m),$$

gdzie  $k_r^m$  dla  $m = 1, 2, r = 1, 2, \dots, R$  jest macierzą współczynników skali. Z definicji współrzędnych  $z_{r,i}^m$  mamy warunek  $z_{r,3}^m = 0$ , zatem dla  $i = 3$  otrzymujemy

$$(30) \quad z_{r,3} = k_r^m z_3^m,$$

a stąd

$$(31) \quad k_r^m = \frac{z_{r,3}}{z_3^m}.$$



Rys. 6

Podstawiając (31) do (29) otrzymamy po przekształceniu

$$(32) \quad (z_{r,i} - z_{r,i}^m) z_i^m = (z_i^m - z_{r,i}^m) z_{r,3}, \quad \text{dla } m, i = 1, 2,$$

a po zgrupowaniu wyrazów otrzymamy

$$(33) \quad z_i^m z_{r,i} + (z_{r,i}^m - z_i^m) z_{r,3} = z_{r,i}^m z_i^m, \quad \text{dla } m, i = 1, 2.$$

Jest to układ 4 równań z 3 niewiadomymi  $z_{r,i}$  dla  $i = 1, 2, 3$ . Układ ten zapiszemy w postaci

$$(34) \quad \sum_{i=1}^3 Q_{r,k,i} z_{r,i} = q_{r,k}, \quad \text{dla } k = 1, 2, 3, 4,$$

gdzie macierz wyrazów wolnych:

$$(35) \quad q_{rk} = \begin{cases} z_{r,1}^k z_1^k, & \text{dla } k = 1, 2, \\ z_{r,2}^{k-2} z_2^{k-2}, & \text{dla } k = 3, 4, \end{cases}$$

i macierz współczynników przy niewiadomych:

$$(36) \quad Q_{rki} = \begin{cases} \begin{cases} z_i^k, & \text{dla } i = 1, \\ 0, & \text{dla } i = 2, \\ z_{r,i-2}^k - z_{i-2}^k, & \text{dla } i = 3, \end{cases} & \text{dla } k = 1, 2, \\ \begin{cases} 0, & \text{dla } i = 1, \\ z_i^{k-2}, & \text{dla } i = 2, \\ z_{r,i-1}^k z_{i-1}^{k-2}, & \text{dla } i = 3. \end{cases} & \text{dla } k = 3, 4. \end{cases}$$

Układ równań (34) sprowadzamy, korzystając z metody najmniejszych kwadratów, do układu 3 równań z trzema niewiadomymi postaci

$$(37) \quad \sum_{l=1}^3 P_{r,i,l} z_{r,l} = p_{r,i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

gdzie

$$(38) \quad P_{r,i,l} = \sum_{k=1}^4 q_{r,k} Q_{r,k,i}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \dots, R,$$

oraz

$$(39) \quad P_{r,i,l} = \sum_{k=1}^4 Q_{r,k,i} Q_{r,k,l},$$

dla  $i, l = 1, 2, 3, \quad r = 1, 2, \dots, R$ .

W wyniku rozwiązania układu równań (37) otrzymujemy macierz współrzędnych  $z_r$  obserwowanych punktów  $r = 1, 2, \dots, R$ . Współrzędne tych punktów w układzie  $c_i$  obliczamy z zależności

$$(40) \quad c_{r,i} = \begin{cases} z_{r,i}, & \text{dla } i = 1, 2, \\ z_{r,i} - \alpha, & \text{dla } i = 3. \end{cases}$$

### 8. Dokładność metody pomiarowej

Dokładność przedstawionej metody pomiarowej sprawdzimy porównując wartości liczbowe współrzędnych punktów wzorcowych obliczonych tą metodą z odpowiednimi wartościami liczbowymi współrzędnych tychże punktów wynikającymi z ich rzeczywistego rozmieszczenia. W tym celu ze współrzędnych  $xw_w^m$  i  $x_{j_r}^m$  dla  $w = 1, 2, \dots, W, j = 1, 2, \dots, J, i, m = 1, 2$ , obliczamy współrzędne zdjęć pośrednich  $zw_w^m$  i  $z_{j,i}^m$  posługując się przekształceniem rzutowym (18). Następnie obliczamy współrzędne przestrzenne  $zw_w$  i  $z_{j,i}$  oraz współrzędne  $cw_w$  i  $c_{j,i}$ . Mając dane współrzędne rzeczywiste  $Cw_w$  i  $C_{j,i}$  obliczamy różnice:

$$(41) \quad \left. \begin{aligned} \Delta c_{w,i} &= Cw_{w,i} - cw_{w,i}, & \text{dla } w = 1, 2, \dots, W, \\ \Delta c_{j,i} &= C_{j,i} - c_{j,i}, & \text{dla } j = 1, 2, \dots, J, \end{aligned} \right\} i = 1, 2, 3.$$

Skrajne wartości  $\max \Delta c_i$  i  $\min \Delta c_i$  świadczą o dokładności bezwzględnej metody pomiarowej.

9. Przeskalowanie przestrzeni  $z_i$ 

Przejścia z układu  $z_i$  do układu  $c_i$  dokonamy przy pomocy przekształcenia afinicznego w celu zwiększenia dokładności wyników pomiarowych. W przekształceniu postaci

$$(42) \quad c_{k,i} = z_{0,i} + \sum_{j=1}^3 Z_{i,j} z_{k,i} \quad \text{dla } i = 1, 2, 3$$

dla dowolnego punktu  $k = 1, 2, \dots, K$  nie znamy macierzy  $Z_{i,j}$  oraz  $z_{0,i}$ .

Wyznaczenia macierzy przekształcenia  $Z_{i,j}$  dokonamy za pomocą znajomości współrzędnych  $c_{k,i}$  i  $z_{k,i}$  punktów wzorcowych, natomiast wektor  $z_{0,i} = (0, 0, \alpha)$ . Zatem należy rozwiązać układ równań

$$(43) \quad \sum_{j=1}^9 R_{i,j} y_j = r_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, 3J,$$

gdzie  $J$  jest ilością punktów wzorcowych.

Wektor:

$$(44) \quad r_i = \begin{cases} c_{i,r}, & \text{dla } i = 1, 2, \dots, J, \\ c_{i-J,2}, & \text{dla } i = J+1, \dots, 2J, \\ c_{i-2J,3} - \alpha, & \text{dla } i = 2J+1, \dots, 3J, \end{cases}$$

natomiast macierz współczynników przy niewiadomych:

$$(45) \quad R_{i,j} = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} z_{i,j}, \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, \\ 0, \quad \text{dla } j = 4, 5, \dots, 9, \end{array} \right\} & i = 1, 2, \dots, J, \\ \left. \begin{array}{l} 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, 3, \\ z_{i,j-3}, \quad \text{dla } j = 4, 5, 6, \\ 0, \quad \text{dla } j = 7, 8, 9, \end{array} \right\} & i = J+1, \dots, 2J, \\ \left. \begin{array}{l} 0, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, 6, \\ z_{i,j-6}, \quad \text{dla } j = 7, 8, 9, \end{array} \right\} & i = 2J+1, \dots, 3J. \end{cases}$$

Ponieważ układ (43) dla  $J > 3$  zawiera więcej równań niż niewiadomych, więc przy rozwiązywaniu skorzystamy z metody najmniejszych kwadratów rozwiązując układ równań:

$$(46) \quad \sum_{k=1}^9 S_{j,k} j_k = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

gdzie

$$(47) \quad s_j = \sum_{i=1}^{3J} R_{i,j} r_i, \quad j = 1, 2, \dots, 9,$$

$$(48) \quad S_{j,k} = \sum_{i=1}^{3J} R_{i,j} R_{i,k}, \quad j = 1, 2, \dots, 9.$$

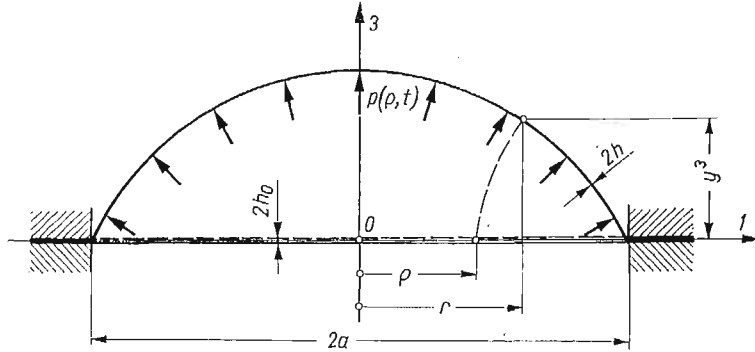
Po rozwiązaniu układu (46) otrzymujemy wektor  $y_k$  dla  $k = 1, 2, \dots, 9$ , a stąd macierz przekształcenia (42)

$$(49) \quad Z_{i,j} = \begin{cases} y_j, & \text{dla } i = 1, \\ y_{j+3}, & \text{dla } i = 2, \\ y_{j+6}, & \text{dla } i = 3. \end{cases} \quad j = 1, 2, 3,$$

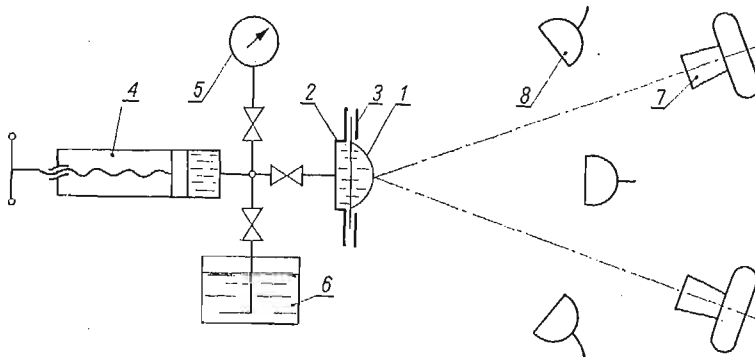
Następnie dokonujemy przekształcenia współrzędnych  $z_{l,i}$  na współrzędne  $c_{l,i}$  dla wszystkich obserwowanych punktów i dokonujemy sprawdzenia dokładności metody w sposób omówiony w rozdziale 8.

### 10. Przykład zastosowania metody

Zastosowanie i możliwości zaprezentowanej metody stereofotograficzno-rzutowej pokazane zostaną na przykładzie pomiarów kinematyki statycznie wypuklanej membrany kołowej obciążonej równomiernie ciśnieniem zgodnie ze schematem na rys. 7.



Rys. 7

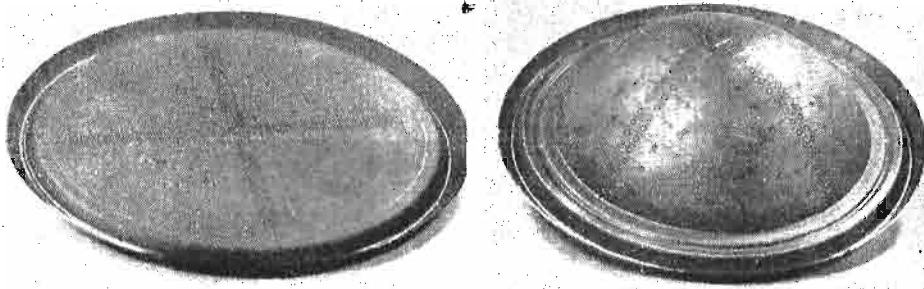


Rys. 8

Schemat procesu pokazany jest na rys. 8. Membrana 1 w postaci krążka blachy aluminiowej (gat. 99,5% w stanie miękkim) o grubości 1 mm jest utwierdzona na obwodzie za pomocą pierścienia 3, przykręcanego śrubami do komory ciśnieniowej 2, do której włącza się olej z pompy 4, powodujący plastyczne wypuklenie powłoki. Na pierścieniu naniesione są znaczki wzorcowe. Próbka oświetlona reflektorami 8 była fotografowana za pomocą dwu aparatów fotograficznych «Pentacon six TL» 7. Zdjęcia były robione w odstępach ciśnienia 1 kG/cm<sup>2</sup>, a do dalszej analizy wykorzystano zdjęcia wykonane w odstępach 3 kG/cm<sup>2</sup>.

Ogólny widok próbki i po zakończeniu procesu pokazany jest na rys. 9, pary zaś zdjęć wykonane w trakcie procesu i dalej opracowywane widoczne są na rys. 10.

Pomiarów otrzymanych negatywów dokonano na uniwersalnym mikroskopie warsztatowym z dokładnością odczytu 0,0002 mm, a uzyskane wyniki opracowano metodą stereofotogrametryczno-rzutową.



Rys. 9

### 11. Kinematyka procesu deformacji powłoki

**11.1. Kształt powłoki.** W wyniku obliczeń otrzymujemy współrzędne przestrzenne punktów materialnych powłoki  $c_{n,r,i}$  dla  $i = 1, 2, 3$ ,  $r = 0, 1, \dots, R$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , gdzie  $R$  jest liczbą punktów na promieniu. Ze względu na osiową symetrię procesu przechodzimy do współrzędnych walcowych obliczając macierze współrzędnych

$$(50) \quad R_{n,r} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (c_{n,r,i})^2},$$

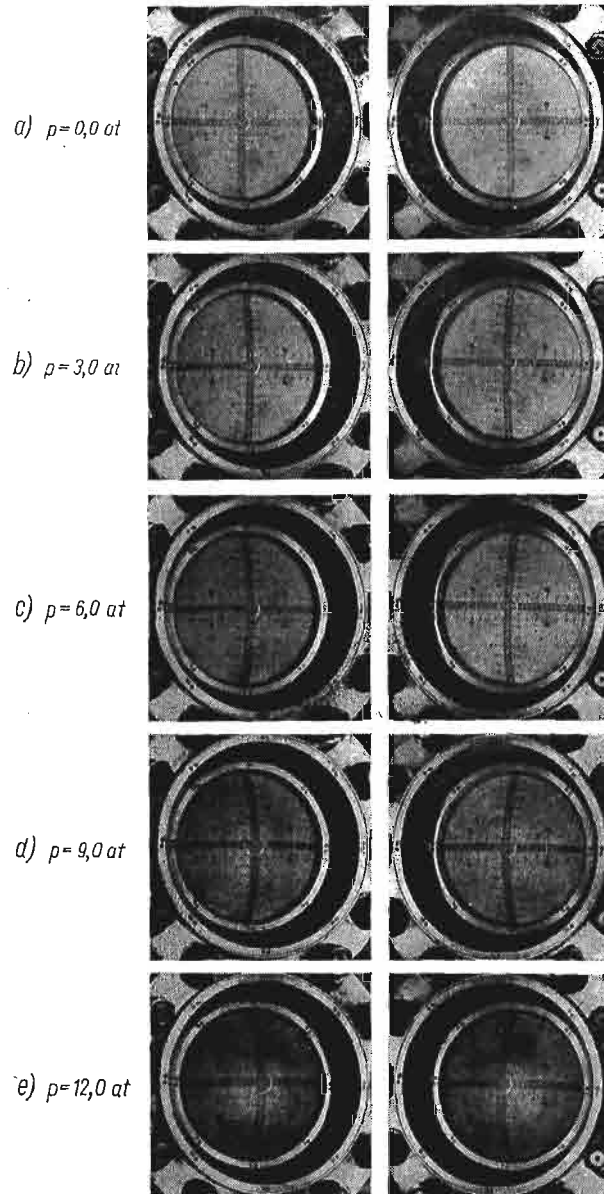
$$Y_{n,r} = c_{n,r,3}.$$

Otrzymane wyniki aproksymujemy wielomianami postaci:

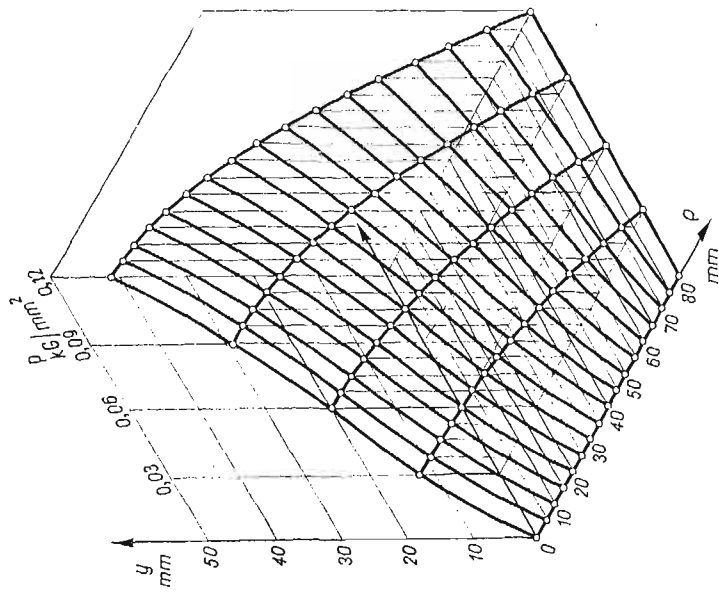
$$(51) \quad r_n = \sum_{k=1}^K A_{n,k} \varrho^k, \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K = 2p+1,$$

$$(52) \quad y_n = \sum_{j=1}^J B_{n,j} \varrho^j, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, J = 2q,$$

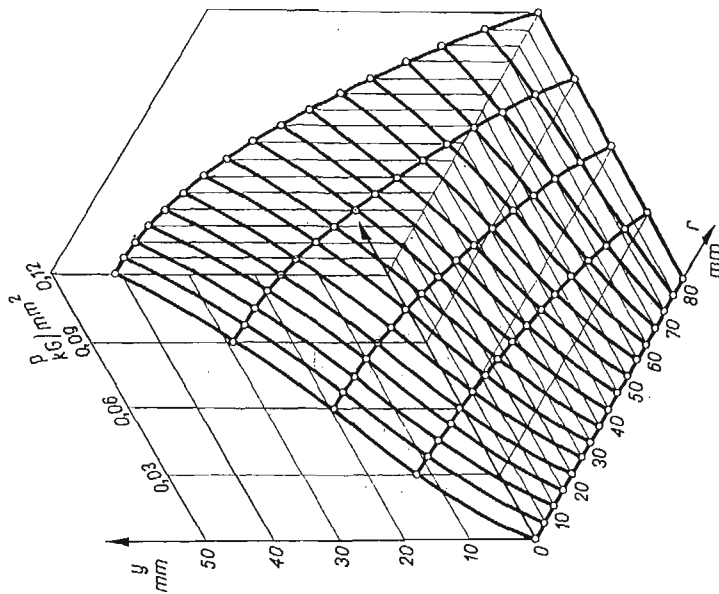
gdzie  $p, q$  są liczbami naturalnymi, zaś  $K, J$  rzędami wielomianów odpowiednich wielomianów, zaś  $\varrho$  jest współrzędną materialną (rys. 7). Macierze współczynników  $A_{n,k}$  i  $B_{n,j}$  wyznaczamy metodą najmniejszych kwadratów wykorzystując dane macierze  $R_{n,r}$  i  $Y_{n,r}$ . Wartości stopni wielomianów ustalone zostały na  $J = 8$  i  $K = 9$ . Podwyższanie stopni wielomianów (51) i (52) powodowało nieznaczne obniżenie wartości odchyłeń średniokwadratowych, zaś czas obliczeń wydłużał się dość znacznie. Wyniki obliczeń zestawiono w postaci tablic, które zilustrowano graficznie. Przebieg zmiany kształtu powłoki  $y(r, p)$



Rys. 10



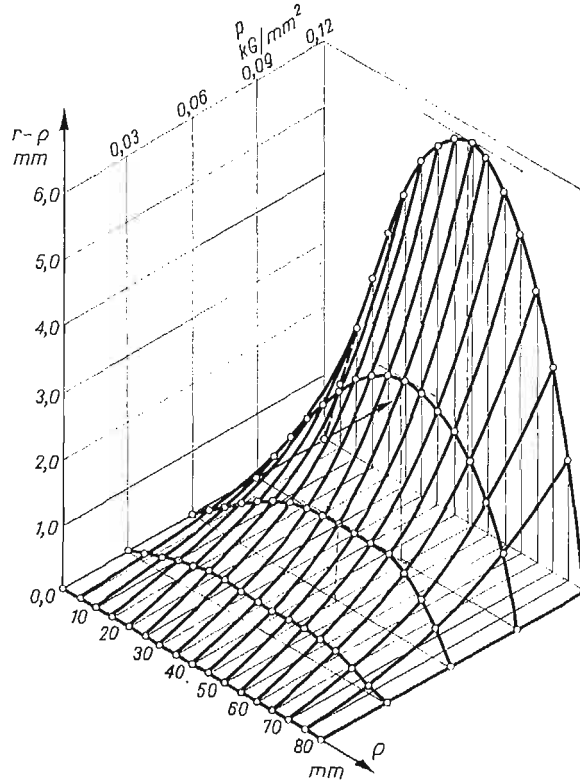
Rys. 12



Rys. 11



przedstawiono na rys. 11, zmianę zaś współrzędnych przestrzennej  $y$  w funkcji współrzędnej materialnej  $y(\varrho, \rho)$  przedstawiono na rys. 12. Przebieg drugiej współrzędnej przedstawiono w postaci jej przyrostu  $r(\varrho, \rho) - \varrho$  na rys. 13.



Rys. 13

11.2. Stan odkształceń deformowanej powłoki. Obliczając pochodne funkcji aproksymującej (51) i (52) możemy obliczyć rozciągnięcia w kierunkach głównych:

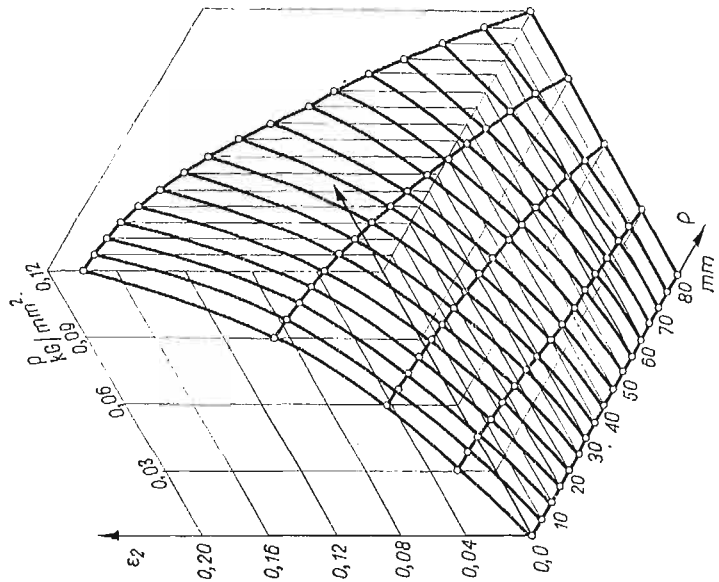
$$(53) \quad \begin{aligned} \lambda_{n,i,1} &= \sqrt{(r_{n,i})^2 + (y_{n,i})^2}, \\ \lambda_{n,i,2} &= \begin{cases} \lambda_{n,i,1}, & \text{dla } i = 0, \\ \frac{r_{n,i}}{\varrho_i}, & \text{dla } i = 0, \end{cases} \\ \lambda_{n,i,3} &= (\lambda_{n,i,1} \cdot \lambda_{n,i,2})^{-1}, \end{aligned}$$

gdzie przez  $i$  oznaczyliśmy punkty

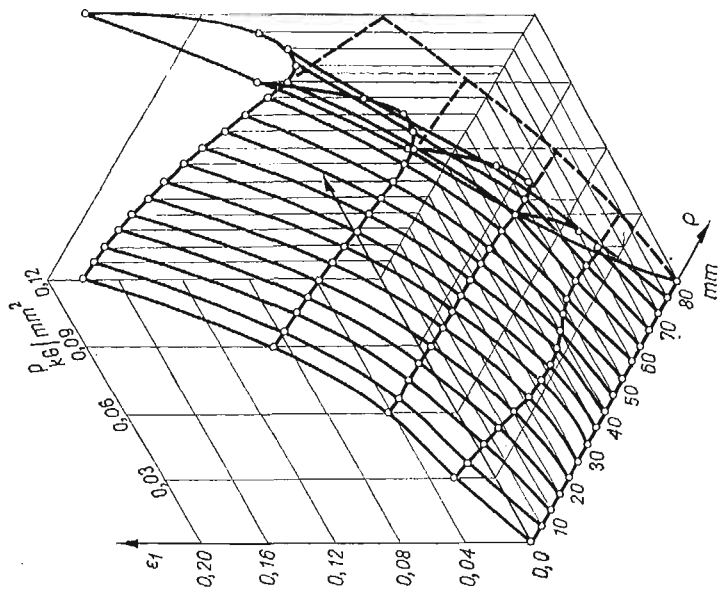
$$(54) \quad \varrho_i = i \cdot \Delta \varrho.$$

Wtedy składowe odkształceń w kierunkach głównych w mierze logarytmicznej obliczamy z zależności

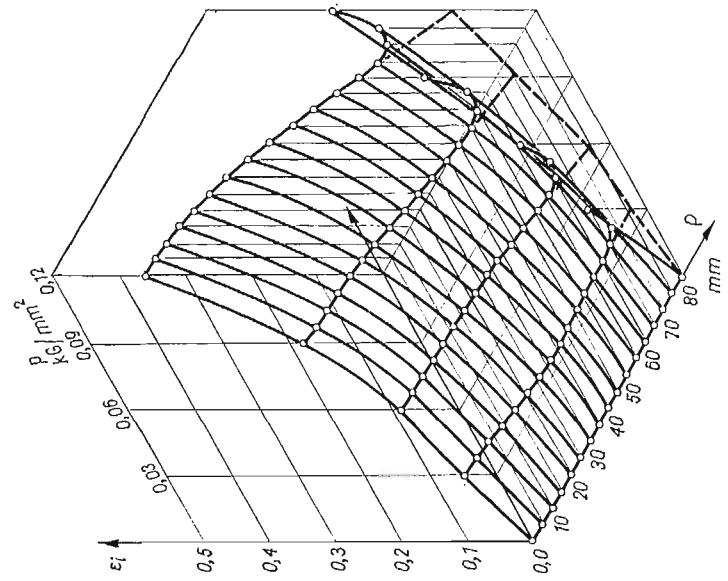
$$(55) \quad \varepsilon_{n,i,j} = \ln(\lambda_{n,i,j}), \quad \text{dla } j = 1, 2, 3.$$



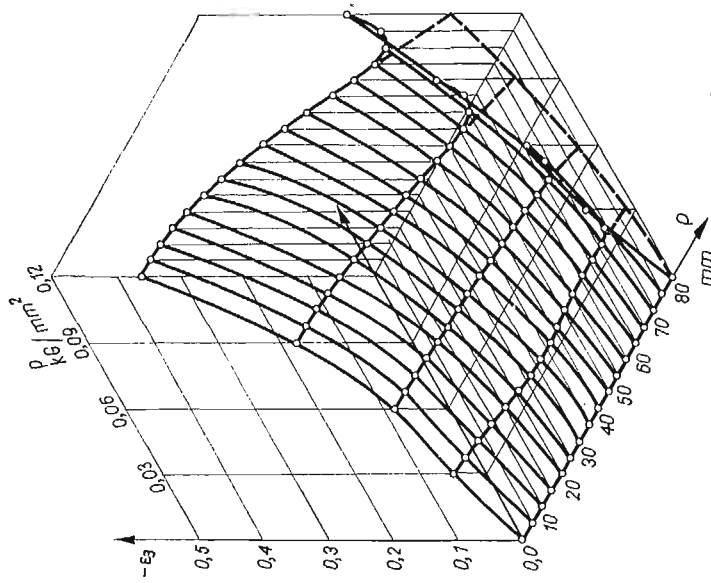
Rys. 15



Rys. 14



Rys. 17



Rys. 16

Otrzymane wyniki w postaci tablicy zilustrowane są graficznie na rys. 14, rys. 15 i rys. 16. Natomiast odkształcenie zastępcze obliczamy z zależności

$$(56) \quad \varepsilon_{n,i}^i = \sqrt{\frac{2}{3} \sum_{j=1}^2 (\varepsilon_{n,i,j})^2}.$$

Wyniki obliczeń otrzymane w postaci tablicy zilustrowane są graficznie na rys. 17.

Mając macierze  $r_{n,i}$  oraz  $y_{n,i}$  i ich pochodnych  $r'_{n,i}$  i  $y'_{n,i}$  możemy obliczyć przyrosty z definicji

$$(57) \quad dr_{n,i} = r_{n,i} - r_{n-1,i}, \quad dr'_{n,i} = r'_{n,i} - r'_{n-1,i}, \quad dy'_{n,i} = y'_{n,i} - y'_{n-1,i},$$

dla  $n = 1, 2, \dots, N$ , gdzie przez  $i$  oznaczono punkty określone przez zależność (54). Macierz przyrostów intensywności odkształceń obliczamy z zależności:

$$(58) \quad d\varepsilon_{n,i} = 2 \frac{dr'_{n,i}}{r_{n,i}}, \quad \text{dla } i = 0,$$

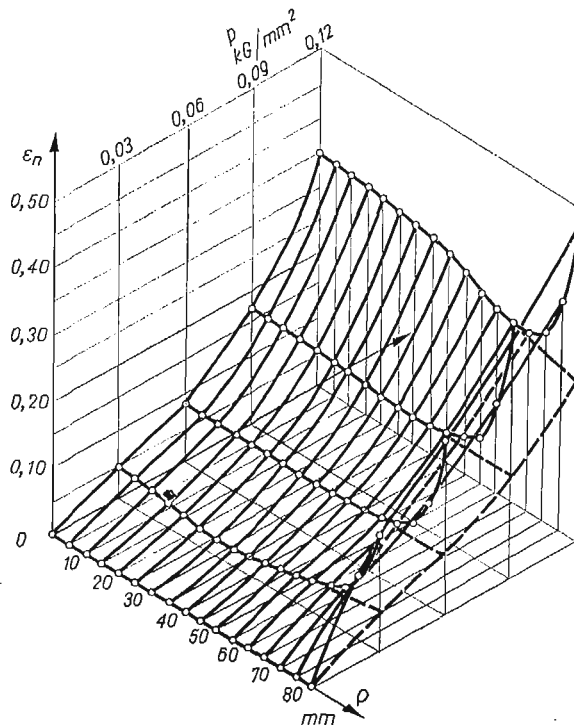
$$(58) \quad d\varepsilon_{n,i} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left[ \left( \frac{r'_{n,i} dr'_{n,i} + y'_{n,i} dy'_{n,i}}{(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2} \right)^2 + \left( \frac{dr_{n,i}}{r_{n,i}} \right)^2 + \frac{r'_{n,i} dr'_{n,i} + y'_{n,i} dy'_{n,i}}{(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2} \frac{dr_{n,i}}{r_{n,i}} \right]^{1/2},$$

dla  $i > 0$ .

Macierz intensywności odkształcenia obliczamy sumując kolejno przyrosty (58) dla ustalonego punktu  $i$

$$(59) \quad \varepsilon_{n,i} = \sum_{n=1}^n d\varepsilon_{n,i}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, N.$$

Otrzymane wyniki w postaci tablicy zilustrowane są graficznie na rys. 18.



Rys. 18

## 12. Dynamika deformowanej powłoki

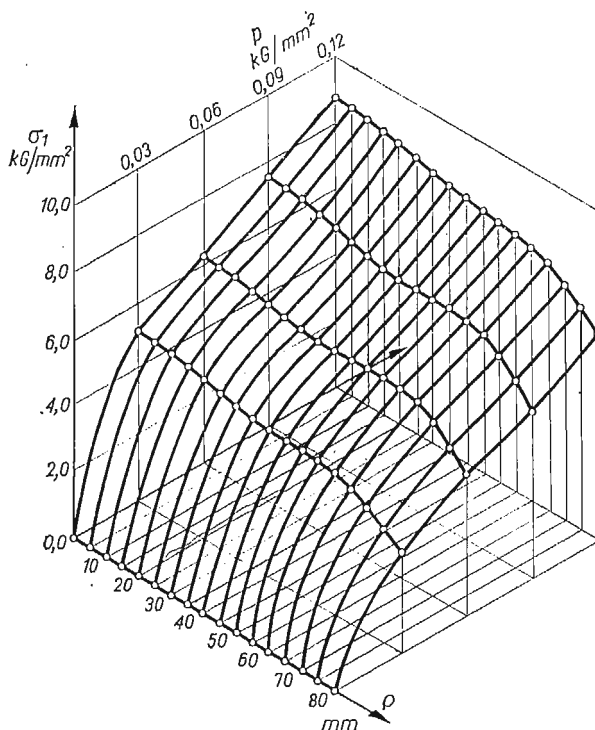
W postawionym zagadnieniu obciążenie jest równomiernie rozłożone na powierzchni wewnętrznej membrany i jest dane w postaci macierzy  $p_n$  dla  $n = 1, 2, \dots, N$ . Rozkład naprężeń wyznaczmy z równań równowagi. Pierwsze z równań jest równaniem różniczkowym, którego rozwiązanie numeryczne jest możliwe przy znajomości pełnej kinematyki deformowanej powłoki. Ma ono postać:

$$(60) \quad \sigma_{1,n,i} = -\frac{(r'_{n,i})^4}{4ho y'_{n,i}}, \quad \text{dla } i = 0,$$

$$\frac{d}{d\rho}(\sigma_{1,n,i}) = \left[ \frac{r'_{n,i} r''_{n,i} + y'_{n,i} y''_{n,i}}{(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2} - \frac{1}{\rho} - \frac{y''_{n,i}}{y'_{n,i}} \right] \sigma_{1,n,i} + \frac{r_{n,i} r'_{n,i}}{2ho y'_{n,i}} [(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2] p_n,$$

dla  $i > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

W wyniku rozwiązania otrzymujemy macierz naprężeń południkowych  $\sigma_{1,n,i}$  w postaci tablicy, której interpretacja graficzna przedstawiona jest na rys. 19.



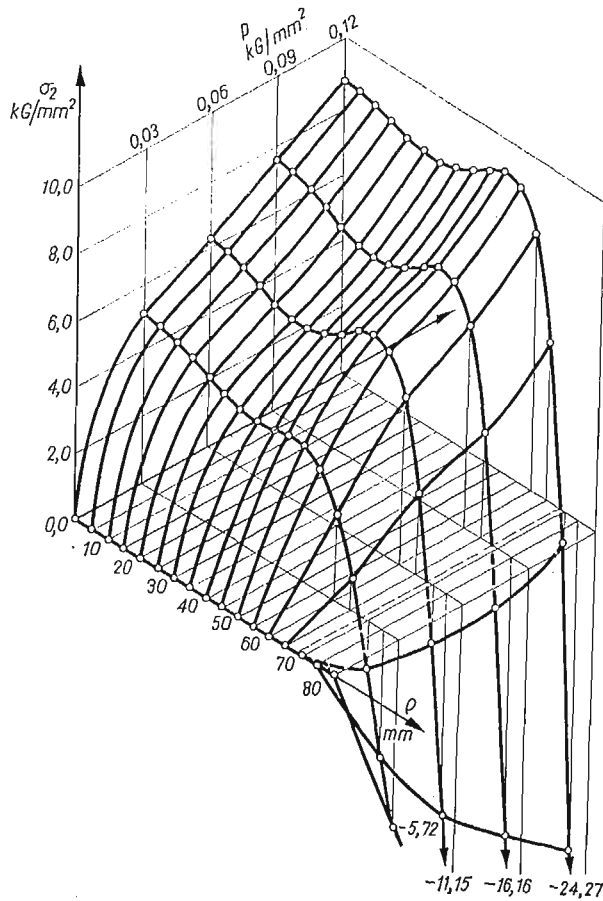
Rys. 19

Mając macierz naprężeń południkowych  $\sigma_{1,n,i}$  możemy z drugiego równania równowagi wyznaczyć naprężenie równoleżnikowe. Równanie to ma postać:

$$(61) \quad \sigma_{2,n,i} = \sigma_{1,n,i}, \quad \text{dla } i = 0,$$

$$\sigma_{2,n,i} = -\frac{r_{n,i}}{r'_{n,i}} \frac{y''_{n,i}}{y'_{n,i}} \sigma_{1,n,i} - \frac{r_{n,i}^2}{2ho y'_{n,i}} [(r'_{n,i})^2 + (y'_{n,i})^2] p_n, \quad \text{dla } i > 0,$$

dla  $n = 1, 2, \dots, N$ .



Rys. 20

W wyniku rozwiązania tego równania algebraicznego otrzymujemy macierz naprężeń południkowych  $\sigma_{2,n,i}$  w postaci tablicy, której interpretację graficzną przedstawia rys. 20.

Macierz zastępczych naprężeń obliczamy z zależności

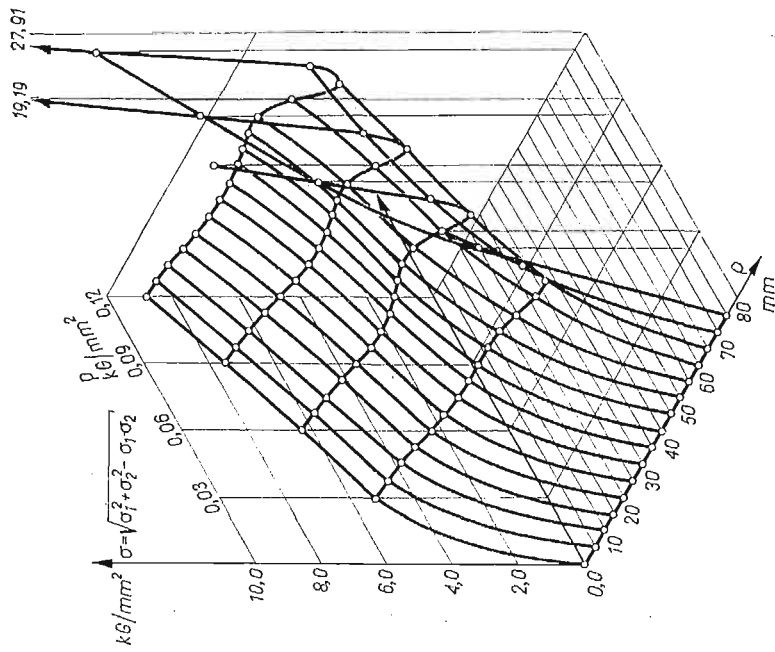
$$(62) \quad \sigma_{n,i} = \sqrt{(\sigma_{1,n,i})^2 + (\sigma_{2,n,i})^2} - \sigma_{1,n,i} \sigma_{2,n,i}$$

dla  $n = 1, 2, \dots, N$ , a wyniki otrzymujemy w postaci tablicy, której interpretację graficzną przedstawia rys. 21.

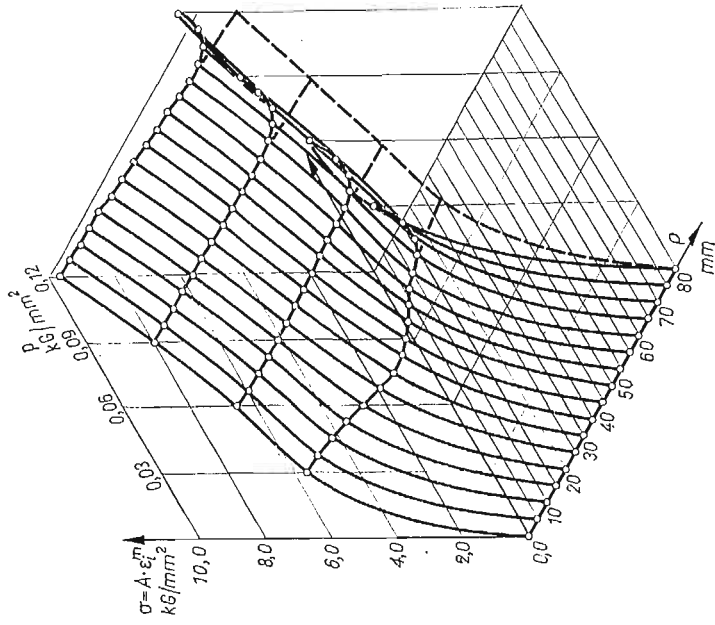
Macierz naprężeń zastępczych możemy obliczyć ze związku fizycznego w postaci wzoru wykładniczego postaci

$$\sigma_{n,i} = A(\varepsilon_{n,i})^m \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots, N,$$

gdzie  $A$  i  $m$  stałe materiałowe uzyskane z próby jednoosiowego rozciągania próbek płaskich, zaś  $\varepsilon_{n,i}$  jest macierzą intensywności odkształcenia (59), a sens wskaźnika  $i$  wyjaśnia zależność (54). Wyniki obliczeń otrzymujemy w postaci tablicy przedstawionej graficznie na rys. 22.



Rys. 21



Rys. 22

## 13. Wnioski

Fotogrametryczno-rzutowa metoda w porównaniu z klasycznymi metodami fotogrametrycznymi jest metodą dogodną w pomiarach wielkości kinematycznych, gdyż nie wymaga znajomości elementów orientacji układu stereoskopowego, a możliwość pomiaru filmu na uniwersalnym mikroskopie warsztatowym czyni tę metodę bardziej dostępną szerszemu gronu mechaników zajmujących się kinematycznymi pomiarami. Z przytoczonego przykładu zastosowania tej metody widać, że pozwala ona na uzyskanie pełnej informacji o kinematyce deformowanej powłoki. Znajomość tej kinematyki i obciążenia pozwala wyznaczyć stan naprężenia. Znany stan naprężenia i odkształcenia, a w przypadku procesów dynamicznych również stan prędkości odkształcenia, umożliwia zestawienie związków fizykalnych  $\sigma(\epsilon)$ , bądź  $\sigma(\epsilon, \dot{\epsilon})$  z próby wypuklania membran. Uzyskane wyniki wykazują w niektórych przypadkach znaczne zakłócenia na utwierdzonym obrzeżu. Wynika to z niemożności zapewnienia idealnych warunków brzegowych w procesie deformacji powłoki.

Przedstawiona metoda może służyć do badań innych procesów, szczególnie tam gdzie zastosowanie innych metod nie zapewnia dostatecznej dokładności, bezpieczeństwa aparatury pomiarowej, a nawet niekiedy bezpieczeństwa obsługi.

## Literatura cytowana w tekście

1. T. BEDNARSKI, *The dynamic deformation of a circular membrane*, Inter. J. Mech. Sci., 12, 11, (1969), 949 - 959.
2. T. BEDNARSKI, *Stereofotogrametryczna metoda pomiaru przemieszczeń i odkształceń przy pomocy szybko-bieżącej kamery filmowej*, Sprawozdanie dla IMP, Politechnika Warszawska, Warszawa 1969.
3. T. BEDNARSKI, *Pomiar odkształceń plastycznych membrany kołowej obciążonej impulsem ciśnienia*, Mech. Teoret. i Stos., 3, 8 (1970).
4. T. BEDNARSKI, A. MAJDE, *The spatial restitution of terrestrial photographs on the basis of projective transformations*, Societe Francaise de Photogrammetrie-Bulletin, 42 (1971), 55 - 62.
5. K. BORSUK, *Geometria analityczna wielowymiarowa*, PWN, Warszawa 1964.
6. А. Н. ЛОВАНОВ, *Фотомонография*, Издательство Недра, Москва 1968.
7. Е. ОТТО, *Nomografia*, PWN, Warszawa 1964.

## Р е з ю м е

СТЕРЕОФОТОГРАММЕТРИЧЕСКИЙ ПРОЕКТИВНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
КИНАМАТИКИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ

В работе представлен, основанный на проективных преобразованиях, метод измерения перемещений. Введение этих преобразований в фотограмметрическую обработку стереоснимков позволяет измерять перемещения с помощью стереоскопического фотографирования или же стереокиносъемки, не зная элементов ориентации снимков. Метод представлен в алгоритмическом виде облегчающим программирование на электронно-вычислительные машины. Представлен пример применения этого метода для определения кинематики деформации пластической круглой мембраны. Добавочные знание нагрузки, соответствующей кинематическому состоянию, позволяют определить поля напряжений в оболочке. Известность полей деформаций и напряжений позволяет определить физические соотношения  $\sigma(\varphi)$  при двухосном напряженном состоянии. Результаты представлены графически.



## S u m m a r y

DETERMINATION OF THE KINEMATICS OF DEFORMATION PROCESSES BY  
STEREOPHOTOGRAMMETRIC PROJECTIVE METHOD

The stereophotogrammetric method of measuring the displacements based on the projective transformations has been presented in this paper. These transformations are used for the photogrammetric elaboration of the stereoscopic photographs of the processes. It makes possible to measure the displacements by stereoscopic photographing or filming the processes without the knowledge of orientation elements of the stereophoto-frames. This method has been presented in algorithmic form suitable for computer programming. The example of application of this method for calculation the kinematic elements during the plastic deformation process in a circular membrane has been presented. Additional knowledge of pressure corresponding to the actual kinematic state has allowed for the determination of the stress field. The knowledge of the stress and strain fields enables the determination of constitutive equations  $\sigma(\varphi)$  in two-dimensional state of stress. The results obtained are presented graphically.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA, WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 16 grudnia 1974 r.*

---

## WYTRZYMAŁOŚCIOWE BADANIA MODELI ZBIORNIKÓW CIŚNIENIOWYCH\*)

STANISŁAW OCHELSKI, ZBIGNIEW ORŁOŚ, MANFRED SZOPA,  
KAZIMIERZ TOMASZEWSKI (WARSZAWA)

### 1. Wstęp

Problem racjonalnego kształtowania wytrzymałościowego naczyń ciśnieniowych jest przedmiotem coraz intensywniej rozwijanych prac badawczych teoretycznych i doświadczalnych. Badania te wiążą się w szczególności z budową dużych kotłów energetycznych, w których stosowane są elementy wysokociśnieniowe (wałczak, komory, rury), spełniające szczególnie odpowiedzialne zadanie.

Doprowadzenie i odprowadzenie nośnika energii cieplnej wymaga wykonania licznych otworów w naczyniach ciśnieniowych. Niektóre z tych otworów są wzmacniane króćcami. Okresowe przeglądy wielu kotłów ujawniły między innymi pęknięcia występujące w obszarach połączeń płaszcza walczaka z króćcami centralnych rur opadowych. Pęknięcia te spowodowały długotrwałe postoje bloków energetycznych i kosztowne naprawy walczaków.

Spośród różnych możliwości oceny wytrzymałości połączeń króćcowych na uwagę zasługują metody badań modelowych prowadzonych przy wykorzystaniu doświadczalnej analizy naprężeń (tensometria, elastooptyka). Cennym uzupełnieniem wymienionych sposobów może być również metoda badań niszczących modeli zbiorników ciśnieniowych. Wykonany z określonego tworzywa model badanego obiektu poddaje się wzrastającym obciążeniom aż do jego zniszczenia. W przypadku badań różnych rozwiązań konstrukcyjnych naczyń ciśnieniowych można wytypować kształt najpoprawniejszy pod względem wytrzymałościowym. Badania w omawianej dziedzinie uzasadniają zdaniem autorów wybór określonej wersji kształtu rozpatrywanego węzła konstrukcyjnego.

### 2. Zakres badań

Program prac związanych z oceną wytrzymałości zbiorników ciśnieniowych metodą modelową obejmował badania:

- materiałowe,
- elastooptyczne,
- tensometryczne,
- niszczące.

W dalszym ciągu omówiona zostanie charakterystyka wymienionych kierunków badań wraz z przedstawieniem niektórych uzyskanych wyników.

---

\*) Praca została wyróżniona na Ogólnopolskim Konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej, organizowanym przez Oddział PTMTS w Częstochowie w 1974 r.

## 3. Badania materiałowe

Do wykonywania modeli połączeń króćców z płaszczem walczaka używano krajową żywicę epoksydową Epidian 5 (100 cz. w.) z plastyfikatorem ftalanem dwu-*n*-butylowym (20 cz. w.) utwardzoną trójetyloczteroaminą Z-1 (10 cz. w.) oraz żywicę epoksydową firmy szwajcarskiej CIBA-GEIGY LY554 (100 cz.w.) z utwardzaczem HY554 (15 cz.w.).

Dla materiałów tych określono charakterystyki mechaniczne i optyczne w temperaturze pokojowej, zaś dla żywicy LY554 również i w temperaturze zamrażania.

Wyniki zestawiono w tablicy 1.

Tablica 1

Wielkość	Epidian 5 (100 cz.w.) Ftalan dwu- <i>n</i> -butylowy (20 cz.w.) Utwardzacz Z-1 (10 cz.w.)	LY554 (100 cz.w.) HY554 (15 cz.w.)	
		temp. 20°C	temp. zamraż. 85°C
Moduł sprężystości podłużnej $E$ [kG/cm <sup>2</sup> ]	28 500	29 000	105
Współczynnik Poissona $\nu$	0,36	0,36	~0,50
Elastoptyczna naprężeniowa stała materiałowa $K_{\sigma} \left[ \frac{\text{kG}}{\text{cm} \cdot \text{j} \cdot \text{rz} \cdot \text{iz}} \right]$	12 (dla $t = 1$ h)	15 (dla $t \approx 0$ )	0,30

Prowadzono ponadto badania reologiczne dotyczące własności mechanicznych i optycznych wymienionych materiałów modelowych.

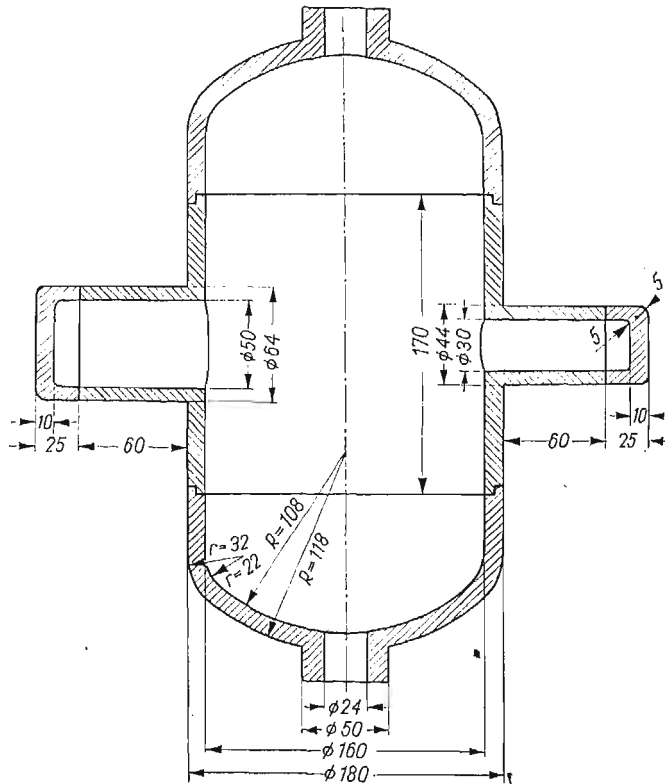
## 4. Badania elastoptyczne metodą zamrażania

Modele z żywic epoksydowych wykonywano metodą odlewania w formach z kauczuku silikonowego RTV130 utwardzanego katalizatorem C. Do odtworzenia kształtu modeli w formach wykorzystywano metalowe modele wzorcowe o dużej dokładności wykonania [1].

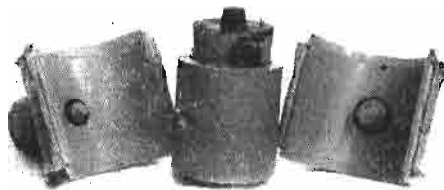
Forma części środkowej z króćcami była dzielona zewnętrznie i wewnętrznie. Dla usztywnienia części zewnętrznej zastosowano zbrojenie prętami metalowymi, ułożonymi równolegle do osi modelu. Dodatkowym usztywnieniem części zewnętrznych formy były powłoki gipsowe.

Formy modeli dennic składały się z jednolitej części zewnętrznej, podstawy oraz niedzielonego rdzenia.

Przedmiotem badań były niektóre typy połączeń króćcowych. Na rys. 1 pokazano przykładowo kształt i rozmiary modelu walczaka z dwoma króćcami nieprzytykanymi. Części formy płaszcza walczaka z króćcami przedstawiono na rys. 2, a widok całej formy —



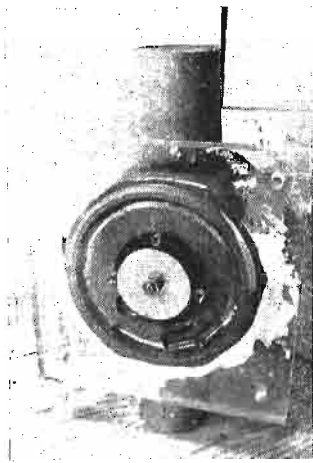
Rys. 1. Kształt i rozmiary modelu



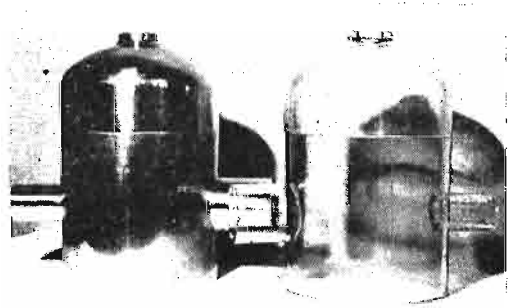
Rys. 2. Gumowe części formy płaszcza walczaka z króćcami

na rys. 3. Metalowe modele wzorcowe i odpowiednie odlewy z żywicy epoksydowej pokazano na rys. 4.

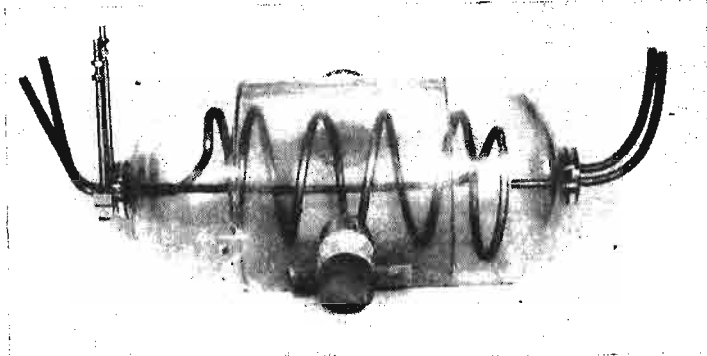
Na rys. 5 przedstawiono cały model walczaka wraz z wymiennikiem ciepła i układem rurek, które służą do realizowania obciążenia we wnętrzu walczaka. Na modelu naklejono kilkanaście termoelementów dla rejestracji temperatur w procesie zamrażania.



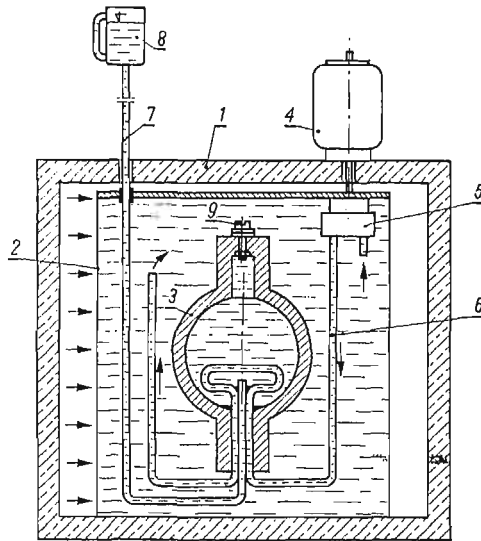
Rys. 3. Forma płaszcza walczaka z króćcami



Rys. 4. Modele metalowe wzorcowe i części modeli z żywicy epoksydowej



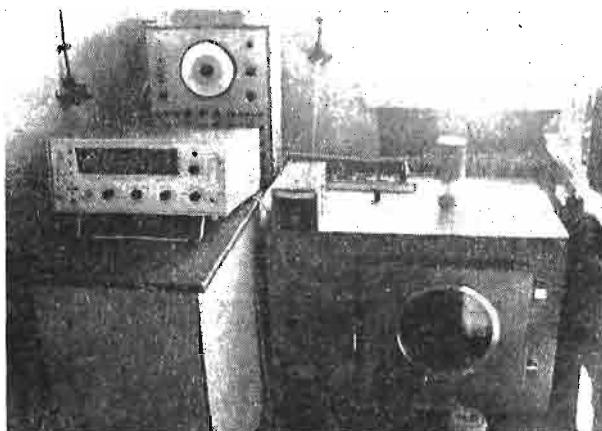
Rys. 5. Model walczaka z rurami wymiennika ciepła i układu obciążającego



Rys. 6. Schemat stanowiska do zamrażania modeli walczków

Stanowisko do zamrażania efektów optycznych (patrz rys. 6) obejmuje:

1. komorę cieplną typu KC-100,
2. pojemnik z gliceryną,
3. model zamrażany,
- 4 i 5. silnik elektryczny i pompę do wywołania krążenia czynnika grzewczego w wymienniku ciepła we wnętrzu modelu,
- 6 i 7. układ rurek obiegu cieczy i obciążenia hydrostatycznego,
8. zbiornik układu ciśnienia hydrostatycznego,
9. zawór odpowietrzający modelu.



Rys. 7. Stanowisko do zamrażania efektów optycznych

Ponadto stanowisko (rys. 7) posiada:

- regulator programujący i sterujący zmiany temperatury grzejników komory KC-100,
- skrzynkę rozdzielczą połączoną z woltomierzem cyfrowym dla rejestracji temperatur w punktach naklejenia termoelementów.

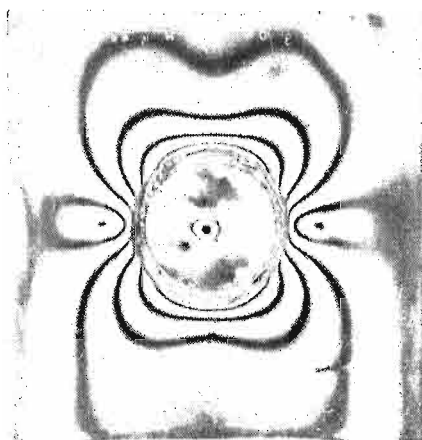
Zamrażanie modelu przeprowadzono według następującego programu:

- wzrost od temperatury otoczenia ( $20^{\circ}\text{C}$ ) do temperatury zamrażania  $-85^{\circ}\text{C}$  wynosi  $4\text{ deg/h}$ ,
- przetrzymanie w temperaturze zamrażania przez  $4\text{ h}$ ,
- spadek od temperatury zamrażania do temperatury pokojowej  $2\text{ deg/h}$ ,
- ciśnienie hydrostatyczne w walczaku  $p = 0,12\text{ kG/cm}^2$ .

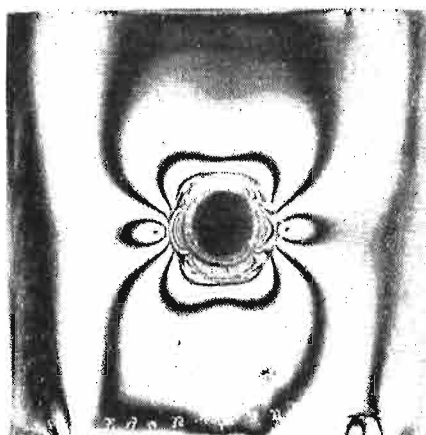
Równoległe z modelem walczaka zamrożono obciążone próbki wzorcujące w celu określenia naprężeniowej elastooptycznej stałej materiałowej  $K_{\sigma}$  i modułu sprężystości podłużnej  $E$  w temperaturze zamrażania.

Rysunki 8, 9 i 10 pokazują obrazy zamrożonych izochrom przy prześwietlaniu światłem sodowym kołowo spolaryzowanym. Obrazy te służą do oceny naprężeń błonowych w modelu.

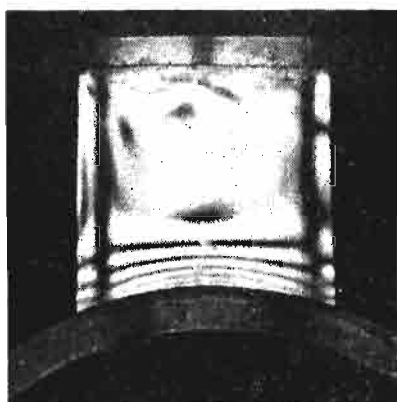
Dla określenia naprężeń w obszarze połączenia króćcowego wydzielono z modelu płytki i podpłytki. Z każdego badanego połączenia wycięto dwie płytki cienkie ( $\sim 3\text{ mm}$ ) w głównych płaszczyznach wzdłużnej i obwodowej walczaka. Analogiczne dwie płytki



Rys. 8. Izochromy całkowite w walczaku z króćcem  $\emptyset 64/\emptyset 50$  przy prześwietlaniu wzdłuż osi króćca



Rys. 9. Izochromy całkowite w walczaku z króćcem  $\emptyset 44/\emptyset 30$  przy prześwietlaniu wzdłuż osi króćca



Rys. 10. Izochromy całkowite w króćcu  $\emptyset 64/\emptyset 50$  przy prześwietlaniu wzdłuż osi walczaka

grubsze ( $\sim 5$  mm) posłużyły do pocięcia na podpłytki. Przykład podziału płytek na podpłytki w płaszczyźnie wzdłużnej pokazano na rys. 11.

Pomiary rzędów izochrom w płytkach i podpłytkach prowadzono przy użyciu mikropolaryskopu własnej konstrukcji o powiększeniu pola widzenia  $10\times$ ,  $15\times$  i  $30\times$ .

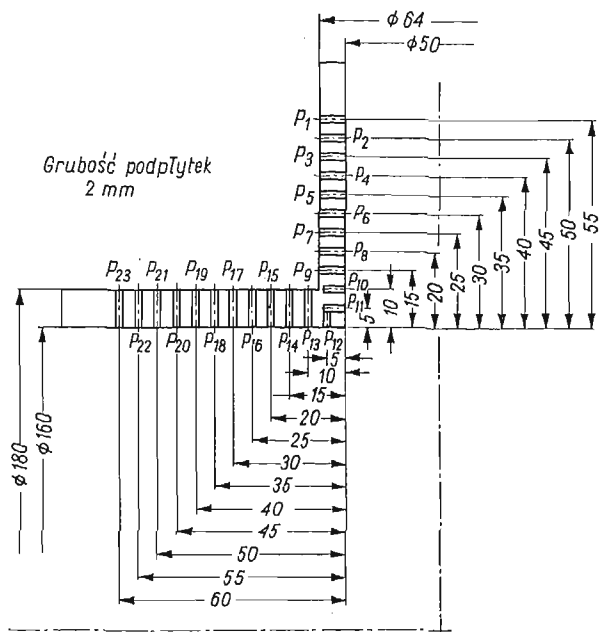
Obrazy izochrom w płytkach pokazano na rys. 12 i 13.

Na zewnętrznej powierzchni modelu walczaka naprężenia  $\sigma^z$  obliczono z zależności

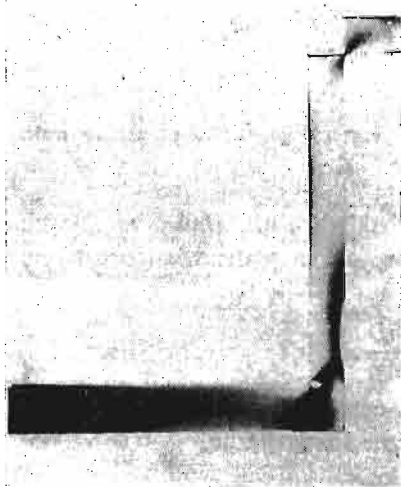
$$(1) \quad \sigma^z = K_{\sigma m} m,$$

natomiast na wewnętrznej powierzchni naprężenia  $\sigma^w$  wyznaczono z zależności

$$(2) \quad \sigma^w = K_{\sigma m} m - p.$$



Rys. 11. Podział płytki z głównej płaszczyzny podłużnej walczaka z króćcem  $\phi 64/\phi 50$  na podpłytki

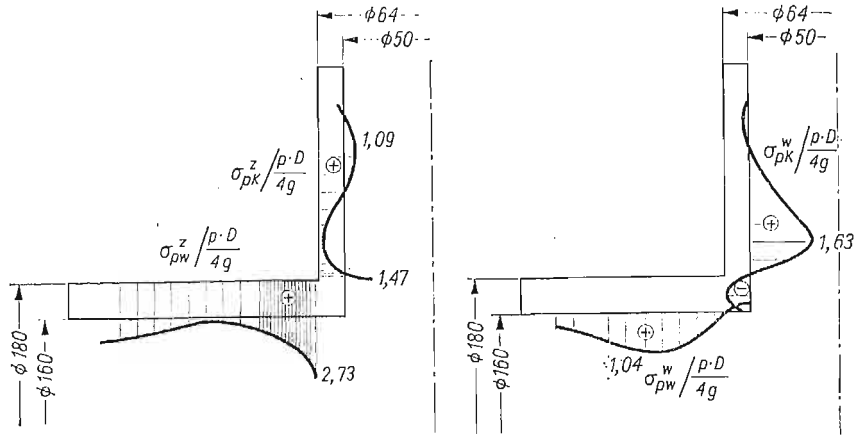


Rys. 12. Izochromy półkowe w płytce podłużnej walczaka z króćcem  $\phi 44/\phi 30$

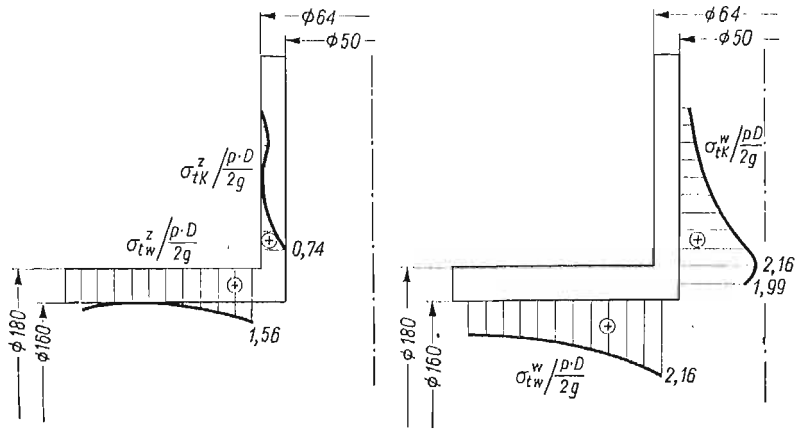


Rys. 13. Izochromy całkowite w płytce obwodowej walczaka z króćcem  $\phi 64/\phi 50$





Rys. 14. Rozkłady naprężeń wzdluznych  $\sigma_{pk}^z$ ,  $\sigma_{pw}^z$ ,  $\sigma_{pk}^w$ ,  $\sigma_{pw}^w$  w płaszczyźnie osiowej połączenia walczaka z króćcem  $\phi 64/\phi 50$



Rys. 15. Rozkłady naprężeń obwodowych  $\sigma_{tk}^z$ ,  $\sigma_{tw}^z$ ,  $\sigma_{tk}^w$ ,  $\sigma_{tw}^w$  w płaszczyźnie osiowej połączenia walczaka z króćcem  $\phi 64/\phi 50$

Na rys. 14, 15, 16 i 17 przedstawiono wyniki badań rozkładów naprężeń odniesionych do odpowiednich naprężeń głównych walczaka wyznaczonych na podstawie teorii błonowej powłok

$$(3) \quad \sigma_1 = \frac{pD}{2g}, \quad \sigma_2 = \frac{pD}{4g}.$$

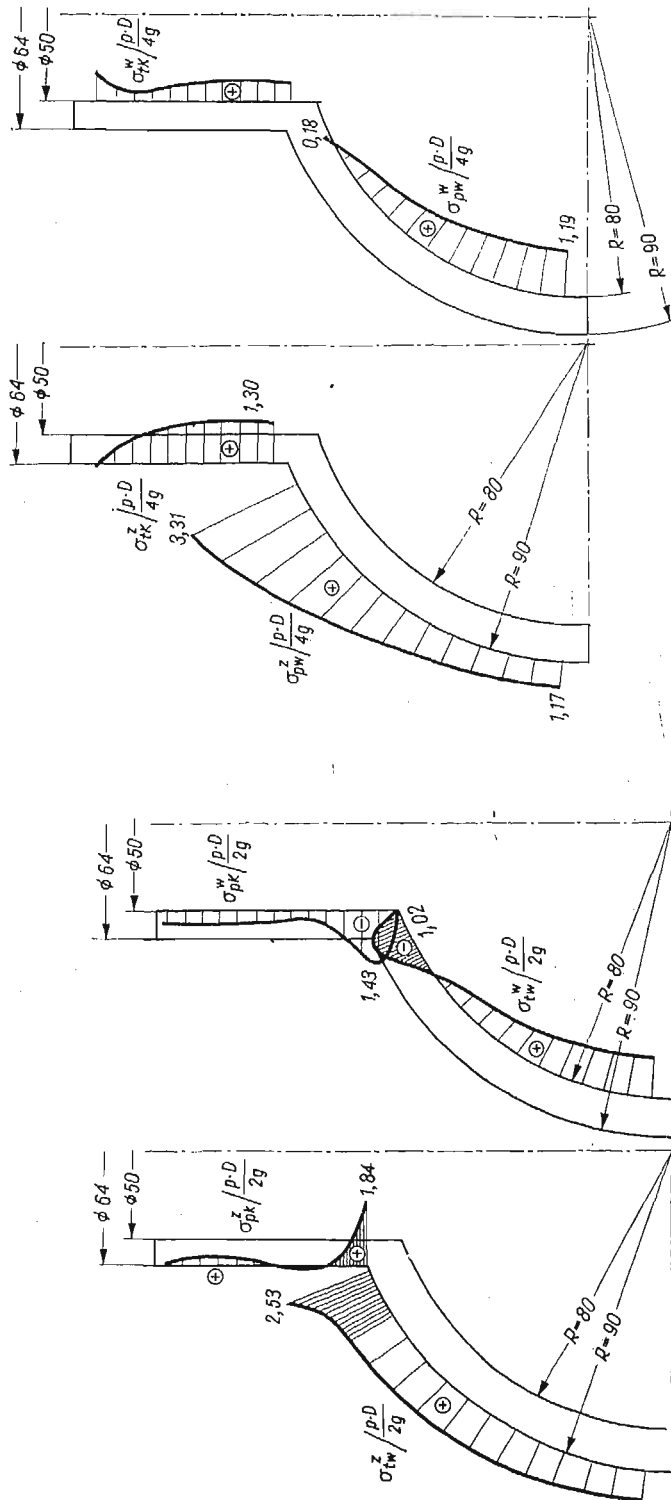
Do analizy wyników badań przyjęto następujące oznaczenia naprężeń:

$\sigma^w$ ,  $\sigma_d^z$  — odpowiadające sobie naprężenia wewnętrzne i zewnętrzne,

$\sigma_{pk}$ ,  $\sigma_{pw}$  — naprężenia wzdluzne w króćcu i walczaku,

$\sigma_{tk}$ ,  $\sigma_{tw}$  — naprężenia obwodowe w króćcu i walczaku.

Liczby podane na wykresach rozkładów naprężeń w płaszczyźnie walczaka charakteryzują współczynnik wzrostu naprężeń w płaszczyźnie w obszarze króćca.

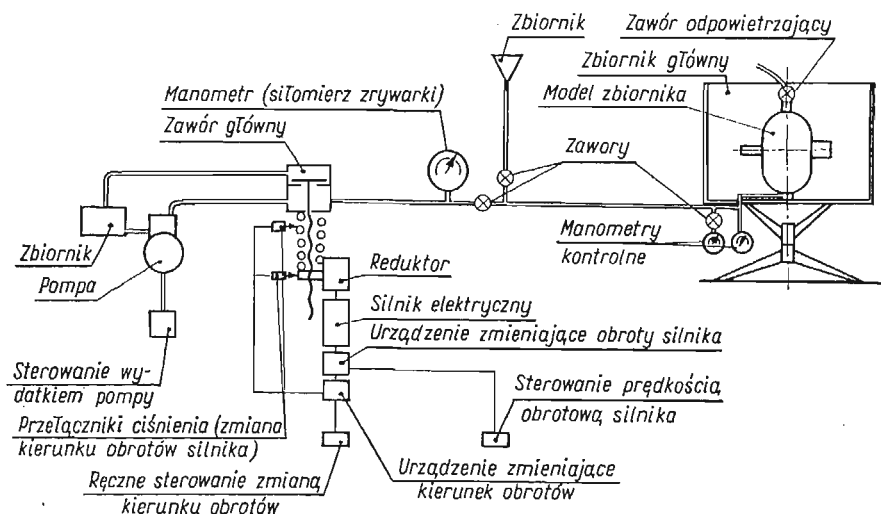


Rys. 16. Rozkłady naprężeń w płaszczyźnie obwodowej połączenia walczaka z króćcem  $\varnothing 64/\varnothing 50$ :  $\sigma_{pk}^z$ ,  $\sigma_{pk}^w$ ,  $\sigma_{tw}^z$ ,  $\sigma_{tw}^w$

Rys. 17. Rozkład naprężeń w płaszczyźnie obwodowej połączenia walczaka z króćcem  $\varnothing 64/\varnothing 50$ :  $\sigma_{ik}^z$ ,  $\sigma_{pw}^z$ ,  $\sigma_{ik}^w$ ,  $\sigma_{pw}^w$

## 5. Badania nieniszczące

Celem badań nieniszczących było określenie wpływu grubości ścianki króćca na stan naprężenia w niektórych punktach modelu walczaka. Grubość ścianki króćca zmieniano stopniowo przez powiększanie jego średnicy wewnętrznej. Odształcenia występujące podczas próby ciśnieniowej określano metodą tensometrii elektrooporowej. Równolegle stosowano elastooptyczną metodę warstwy odbłaskowej prowadząc obserwacje izochrom w ściance modelu. Badania nieniszczące prowadzono na specjalnie opracowanym stanowisku (rys. 18 i 19). W stanowisku do wytworzenia ciśnienia w modelu zbiornika wyko-

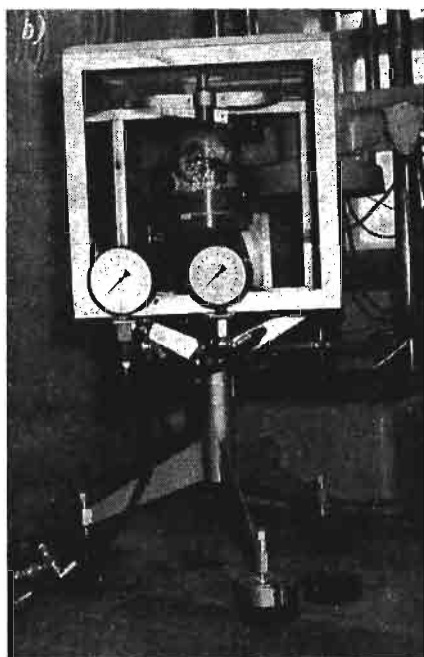
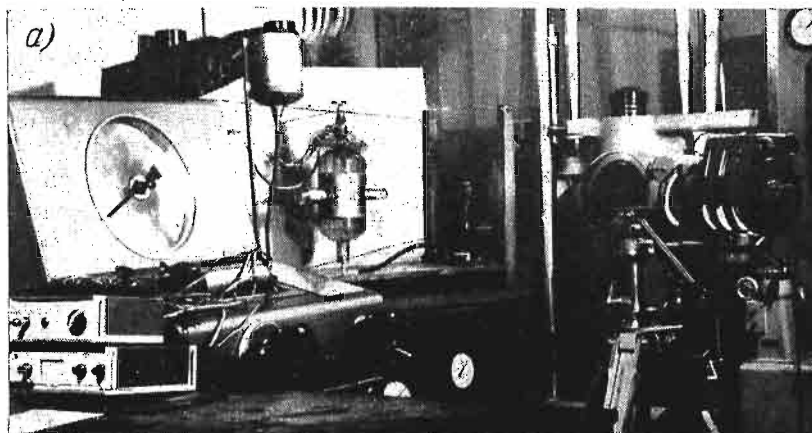


Rys. 18. Schemat stanowiska do badań modelowych walczaków

zystano maszynę wytrzymałościową typu ZD-10. Stanowisko to oprócz utrzymywania stałego ciśnienia w zakresie (0 - 200) kG/cm<sup>2</sup> zapewnia płynnie regulowany w czasie przyrost ciśnienia w przedziale (0,01 - 20,0) kG/cm<sup>2</sup> · s. Na stanowisku można również realizować cykliczną zmianę ciśnienia w podanym poprzednio zakresie, przy czym okres cyklu obciążenia ustala się w przedziale (5 - 500) s.

Zasadniczą rolę w utrzymaniu ciśnienia w modelu zbiornika, jak też w realizowaniu żądanego programu zmiany ciśnienia w czasie, spełnia zawór główny wraz z zaprojektowanymi dodatkowo urządzeniami. Urządzenia te umożliwiają zmianę prędkości i kierunku obrotów silnika elektrycznego, ściskającego sprężynę zaworu głównego. Napełnianie płynem modelu następuje ze zbiornika ustawionego powyżej poziomu modelu, przy otwartym zaworze odpowietrzającym.

Model zbiornika umieszczony jest w zbiorniku głównym o ściankach przezroczystych wykonanych z polimetakrylanu metylu o grubości 20 mm. W stanowisku zapewniona jest możliwość obrotu modelu względem własnej osi, jak też i obrót całego zbiornika głównego, co niezbędne jest do obserwacji izochrom za pomocą polaryskopu odbłaskowego. Dokładność pomiaru ciśnienia zwiększona została przez zastosowanie dodatkowych manometrów o zróżnicowanych zakresach pomiarowych.



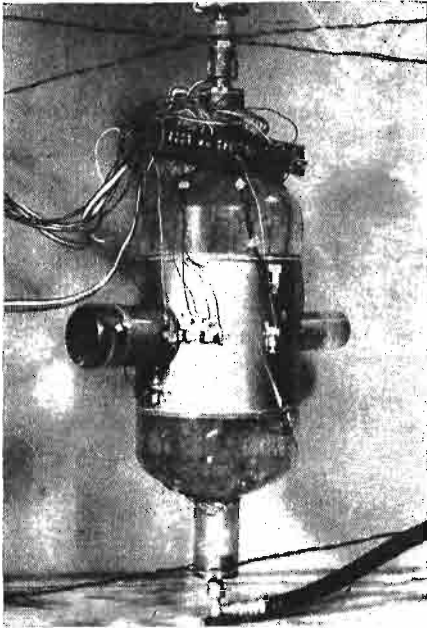
Rys. 19. Stanowisko do badań metodami tenso-  
metryczną i elastooptyczną za pomocą warstwy  
odblaskowej

Na rys. 20 przedstawiono przygotowany do badań model walczaka umieszczony w zbiorniku głównym stanowiska.

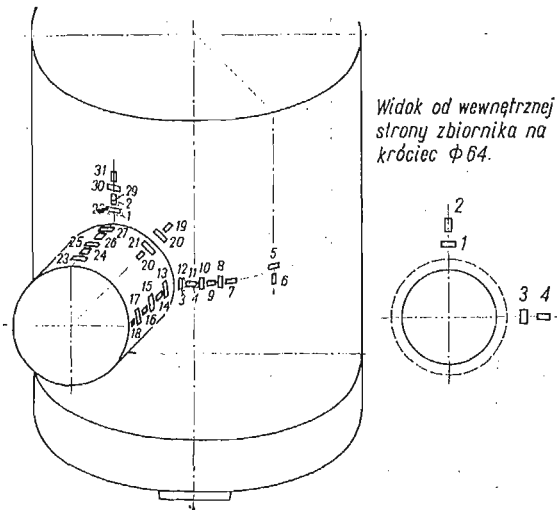
Przed sklejeniem modelu część środkową od strony wewnętrznej pokryto kompozycją odblaskową. Kompozycja ta składa się z dwóch części wagowych żywicy E-57 z odpowiednią ilością utwardzacza z dodatkiem jednej części proszku aluminiowego i pięciu części acetonu.

Do pomiaru odkształceń badanego modelu użyto 21 sztuk czujników elektrooporowych o długości pomiarowej 4,5 mm i oporności 60  $\Omega$ . Czujniki naklejane były na modelu w dwóch kierunkach — obwodowym i wzdłużnym w odległości 10 mm jeden od drugiego.

Obok czujnika mierzącego odkształcenie wzdłużne był umieszczony czujnik mierzący odkształcenie obwodowe. Rozmieszczenie tensometrów na modelu przedstawiono na rys. 21.



Rys. 20. Model walczaka przygotowany do badań



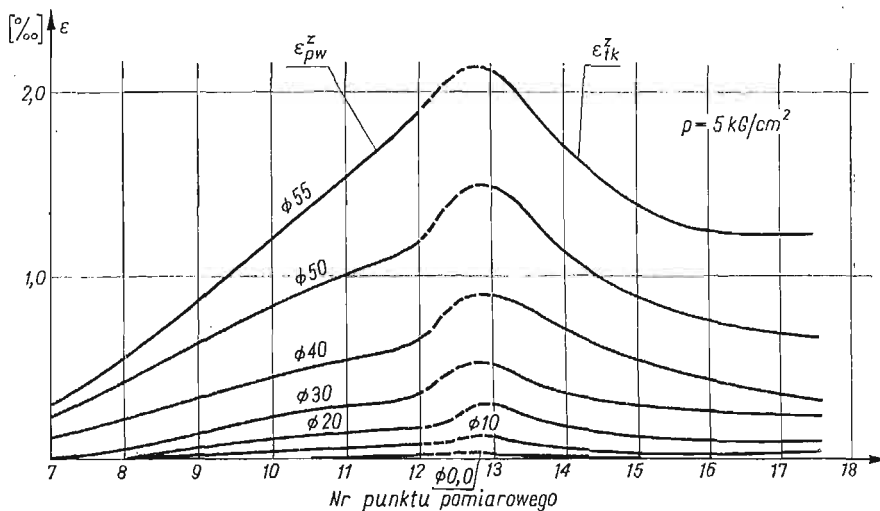
Rys. 21. Rozmieszczenie tensometrów na modelu

Aby uniknąć odkształceń cieplnych, model walczaka napełniany był wodą o temperaturze równej temperaturze otoczenia, a badania rozpoczynano po upływie czterech godzin od chwili napełnienia.

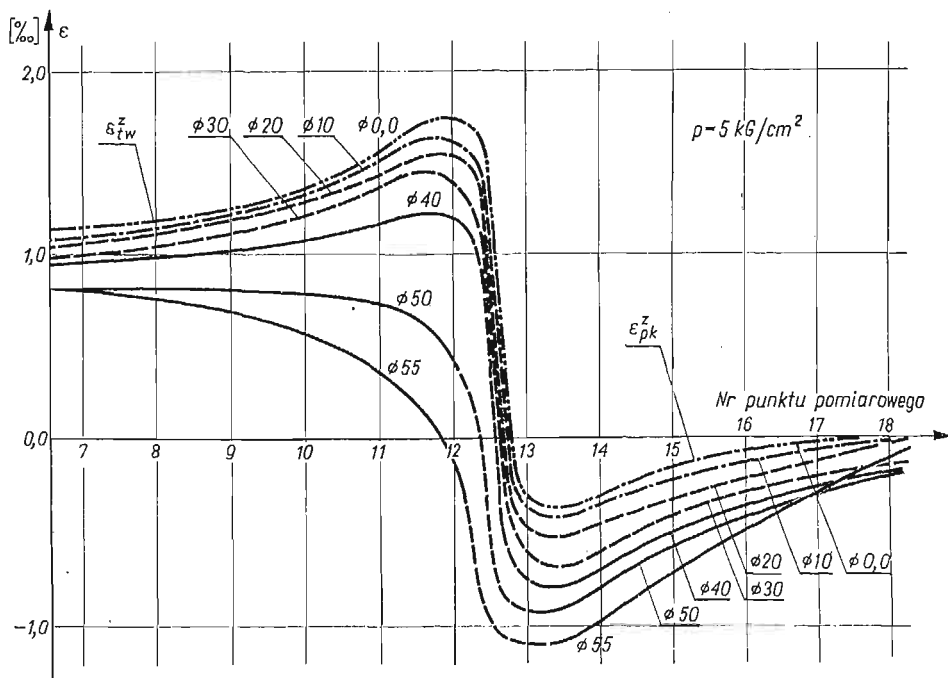
Program obejmował badania modeli przy skokowo zmieniającej się grubości ścianki króćca równej: 25,75; 20,75; 15,75; 10,75; 5,75 i 3,25 mm, co odpowiadało następującym

średnicom otworu króćca: 0,0; 10; 20; 30; 40; 50 i 55 mm. Model zbiornika obciążano kolejno ciśnieniami: 0,0; 2; 4; 5 i 10,0 kG/cm<sup>2</sup>. Między obciążeniami odczytywano wskazania czujników, jak też wykonywano zdjęcia izochrom.

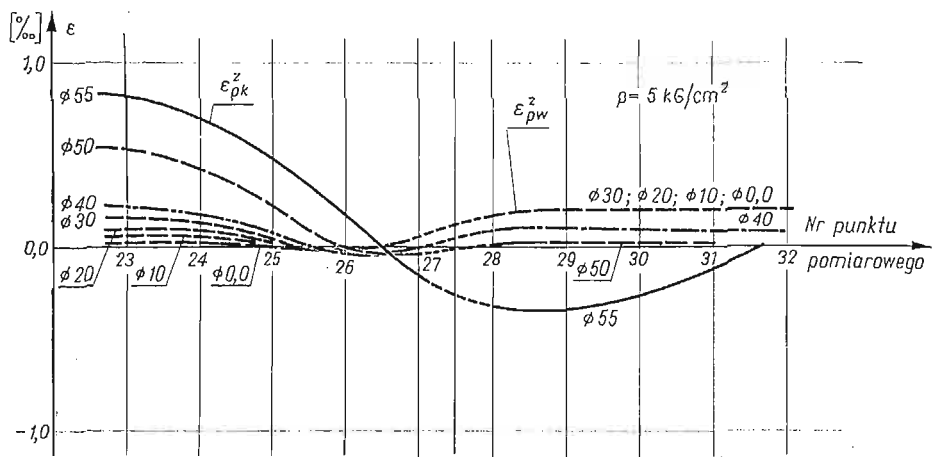
Wyniki badań tensometrycznych przy obciążeniu modelu ciśnieniem 5 kG/cm<sup>2</sup> przed-



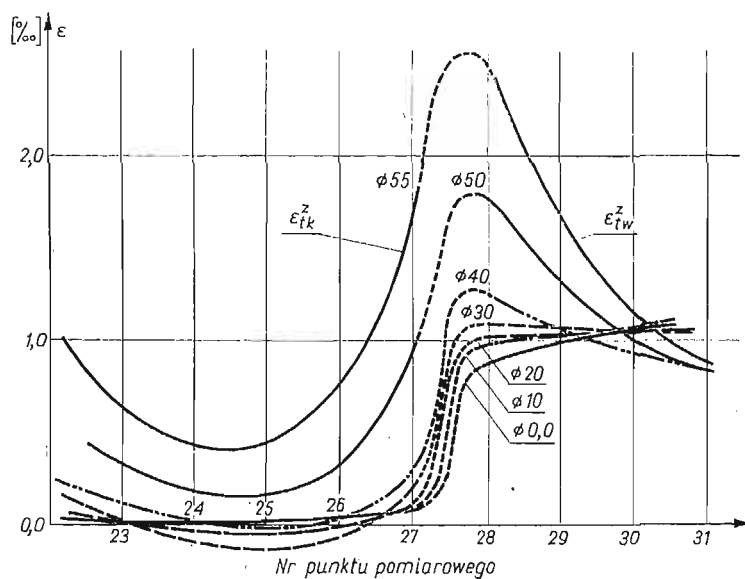
Rys. 22. Rozkład odkształceń wzdłużnych  $\varepsilon_{pw}^z$  warstwy zewnętrznej walczaka i odkształceń obwodowych  $\varepsilon_{tk}^z$  warstwy zewnętrznej króćca



Rys. 23. Rozkład odkształceń obwodowych  $\varepsilon_{tw}^z$  warstwy zewnętrznej walczaka i odkształceń wzdłużnych  $\varepsilon_{pk}^z$  warstwy zewnętrznej króćca



Rys. 24. Rozkłady odkształceń wzdłużnych  $\varepsilon_{pk}^z$  warstwy zewnętrznej króćca i  $\varepsilon_{pw}^z$  — warstwy zewnętrznej walczaka



Rys. 25. Rozkłady odkształceń obwodowych  $\varepsilon_{tk}^z$  warstwy zewnętrznej króćca i  $\varepsilon_{tw}^z$  warstwy zewnętrznej walczaka



Rys. 26. Rozkład izochrom uzyskany przy zastosowaniu warstwy odblaskowej

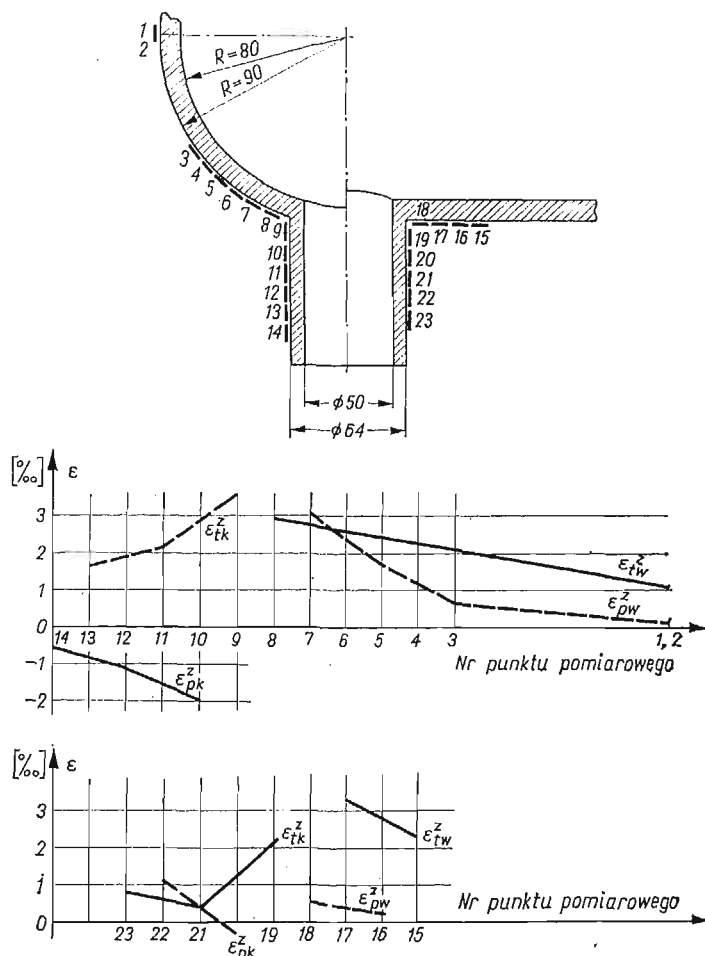
stawiono na rys. 22-25. Uzyskane podczas obciążeń odkształcenia miały w zasadzie charakter liniowo sprężysty.

Rozkład izochrom dla wyżej wspomnianego programu badań obserwowano w polaryskopie odbłaskowym.

Zarejestrowane fotograficznie rozkłady izochrom dla naprężeń membranowych mają kształt bardzo podobny do rozkładów uzyskanych w próbie zamrażania (rys. 8), co widać na pokazanym przykładowo (rys. 26) jednym ze zdjęć wykonanym dla króćca o średnicy  $\emptyset 64/\emptyset 50$  przy obciążeniu modelu ciśnieniem  $p = 2,5 \text{ kG/cm}^2$ .

### 6. Badania niszczące

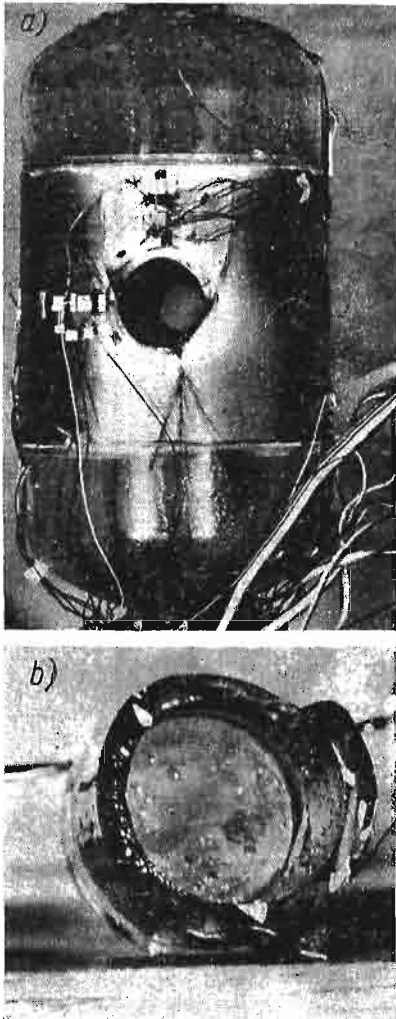
Celem badań niszczących było wyjaśnienie możliwości oceny postaci zniszczenia modelu zbiornika oraz określenie wartości odpowiedniego ciśnienia niszczącego. Do realizacji badań wykorzystano stanowisko pomiarowe opisane poprzednio w rozdziale 5.



Rys. 27. Odkształcenia wzdłużne i obwodowe w obszarze połączenia króćcowego w przekrojach osiowym i poprzecznym



Podobnie jak w badaniach nieniszczących, model zbiornika posiadał wewnętrzną warstwę odbłaskową oraz układ czujników elektrooporowych w obszarach połączeń króćcowych. Pomiarów odkształceń dokonywano przy ciśnieniu 2,5; 10,0 i 15,0 kG/cm<sup>2</sup>. Na rys. 27 przedstawiono odkształcenia obwodowe i wzdłużne w przekrojach poprzecznym i osiowym modelu przy ciśnieniu  $p = 15$  kG/cm<sup>2</sup>.



Rys. 28.a. Model po próbie niszczącej,  
b. Powierzchnia przełomu króćca  
Ø 64/Ø 50

Model uległ zniszczeniu przy ciśnieniu równym 18,5 kG/cm<sup>2</sup> wykazując w miejscach połączenia króćców z płaszczem walczaka przełomy o ukośnie nachylonych powierzchniach. Ponadto w płaszczu walczaka wystąpiły pęknięcia o liniach propagacji rozpoczynających się u nasady króćców i biegnących w kierunku wzdłużnym walczaka. Linie wymienionych pęknięć widoczne są na rys. 28a, powierzchnia przełomu króćca Ø 64/Ø 50 — na rys. 28b. Należy zauważyć, że opisywany przebieg próby niszczącej miał

w końcowej fazie charakter dynamiczny. Przyczyną powodującą powstanie pęknięcia będącego początkiem dynamicznego zniszczenia spójności połączenia były spiętrzenia naprężeń lokalizujące się u nasady króćców.

## 7. Wnioski

W wyniku opisanych doświadczeń uzyskano pomyślne rezultaty w prowadzonych pracach nad kompleksową metodą oceny wytrzymałości zbiorników ciśnieniowych w oparciu o eksperymentalną analizę naprężeń odpowiednich modeli fizycznych, geometrycznie podobnych do obiektów rzeczywistych.

Uzyskano wytyczne doboru materiału modelowego, opracowano sposoby wykonywania modeli przestrzennych o złożonym kształcie, opanowano odpowiednią technikę zamrażania, podziału na płytki i podpłytki oraz metodę prowadzenia pomiarów elastooptycznych zamrożonych efektów dwójłomności wymuszonej.

Potwierdzono przydatność sposobu realizacji zamierzonych badań nieniszczących i niszczących przy równoczesnym prowadzeniu pomiarów metodami tensometrii elektrooporowej i elastooptyki odblaskowej.

W świetle uzyskanych wyników wydaje się celowe dalsze rozwijanie i wdrażanie tego typu badań doświadczalnych złożonych przestrzennych układów konstrukcyjnych, w tym elementów wysokociśnieniowych kotłów.

## Literatura cytowana w tekście

1. W. JARZĘBOWSKI, Z. ORŁOŚ, K. TOMASZEWSKI, *Niektóre problemy technologii wykonywania modeli przestrzennych do badań elastooptycznych*, Materiały VI Sympozjum doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego, Warszawa, 19 - 20 września 1974.
2. W. KOWALSKI, Z. ORŁOŚ, M. SZOPA, K. TOMASZEWSKI, *Elastooptyczne badania modeli zbiorników ciśnieniowych*, Materiały VI Sympozjum doświadczalnych badań w mechanice ciała stałego, Warszawa 1974.

## Резюме

### ПРОЧНОСТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ СОСУДОВ ДАВЛЕНИЯ

В работе описываются, проведенные авторами, модельные испытания сосудов давления. Модели, сделанные из оптически чувствительного материала на основе эпоксидной смолы, представляли собой соединения корпуса сосуда с патрубками. Для исследований использовался поляризационно-оптический метод замораживания напряжений а также тензометрические измерения и разрушающее испытание. Приводятся некоторые подробности технологии изготовления моделей и описание испытательного стенда. Обсуждается метод оценки прочности сосудов давления по результатам модельных испытаний.

## S u m m a r y

## STRENGTH INVESTIGATIONS OF PRESSURE VESSEL MODELS

The authors describe model tests performed on pressure vessel models. The models made of an optically sensitive material, based on epoxy resins, represented the nozzle — thick valled cylinder joint.

The photoelastic stress — freezing method, the strain gauge measurements, and the destructive test were used in the experiments. Some details concerning the models fabrication method and description of test stands were given, and the method of the strength estimation of pressure vessels on the ground of model tests was discussed.

WOJSKOWA AKADEMIA TECHNICZNA, WARSZAWA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 21 stycznia 1975 r.*

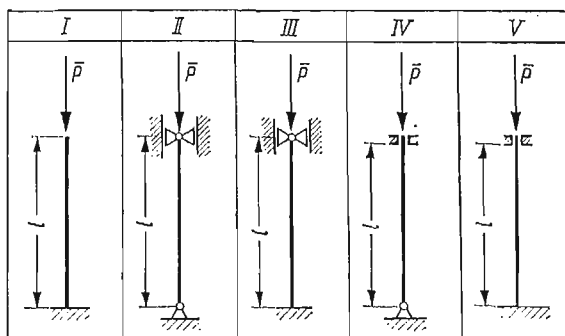
---

DYSKRETNY MODEL OBLICZANIA DRGAŃ WŁASNYCH I STATECZNOŚCI PRĘTÓW  
OSIOWO OBCIĄŻONYCH O DOWOLNIE ZMIENNYM PRZEKROJU\*)

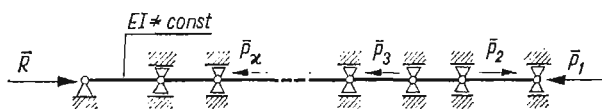
WIESŁAW OSTACHOWICZ (GDAŃSK)

1. Wstęp

Jednym z podstawowych zagadnień analizy dynamicznej prętów jest zagadnienie badania zachowania się ich pod działaniem skupionych sił osiowych. Zakładamy, że pręt jest prostoliniowy, o dowolnie zmiennym momencie bezwładności przekroju poprzecznego podparty na końcach, jak na rys. 1. Poza tym przyjmuje się, że na odcinku pomiędzy końcami pręt jest podparty w dowolnej liczbie punktów podporami przesuwными (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

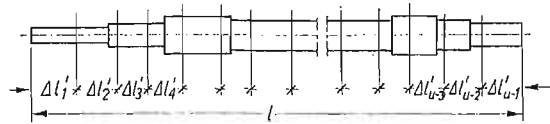
Powyższe zagadnienie opracowane jest w sposób analityczny dla stosunkowo prostych przypadków [6, 7] i dla prętów o bardziej złożonej geometrii przekroju poprzecznego nie jest użyteczne. Istnieją sposoby analizy tego zagadnienia w sposób numeryczny [1, 5], które przy wykorzystaniu maszyn cyfrowych są bardziej skuteczne.

\*) Praca została wyróżniona w Ogólnopolskim Konkursie na prace teoretyczne z dziedziny mechaniki zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Gdańsku w 1974 r.

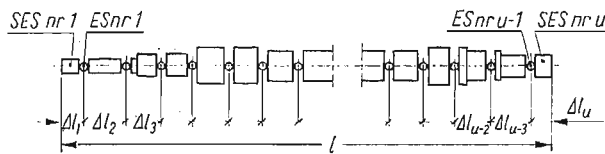
W pracy przedstawiono model analizy dynamicznej i stateczności prętów oparty o założenia metody sztywnych elementów skończonych [2, 3, 4]. Przedstawiona metoda pozwala obliczać częstości drgań własnych i postacie tych drgań oraz wielkość obciążeń krytycznych i postacie odkształceń pod działaniem skupionych sił osiowych (rys. 2) dla prętów o dowolnym przekroju poprzecznym, przy wykorzystaniu maszyny cyfrowej.

## 2. Opis modelu

Analizowany pręt przedstawiono na rys. 2. Pod wpływem działania sił  $\bar{P}_z$  ( $z = 1, 2, \dots, n$ ), które obciążają pręt w jego osi, zmieni się częstość drgań własnych pręta. W skrajnym przypadku częstość drgań własnych będzie równa zero (częstości tej odpowiada krytyczna wartość obciążenia).



Rys. 3

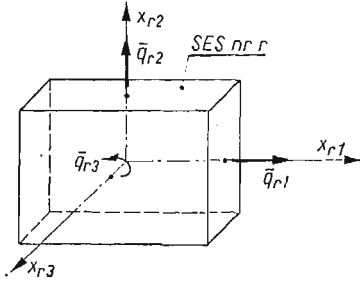


Rys. 4

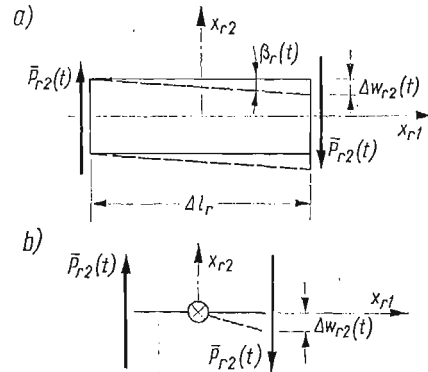
Do analizy dynamicznej pręta wykorzystano model dyskretnie rozłożonej sztywności [2, 3]. Związane z nim metody obliczeń nazwano metodą sztywnych elementów skończonych (SES). Dyskretyzacja modelu ciągłego (np. pręta) przebiega w dwóch etapach. W pierwszym etapie dzielimy pręt na  $u - 1$  odcinków (rys. 3). Własności sprężyste każdego odcinka skupiamy w środku jego długości, środku masy lub środku sztywności. Każdy z tych punktów jest miejscem podziału wtórnego na sztywne odcinki (zwane sztywnymi elementami skończonymi), które są połączone elementami sprężystymi (rys. 4). W ten sposób w drugim etapie podziału otrzymujemy układ  $u$  sztywnych elementów skończonych. Elementy sprężyste są nieważkie, bezwymiarowe i posiadają charakterystyki liniowe. Tak więc przy analizie dynamicznej i badaniu stateczności pomijamy nieliniowości materiałowe, uwzględniamy zaś nieliniowości geometryczne.

Przemieszczenie  $r$ -tego sztywnego elementu skończonego opisane jest przez trzy współrzędne: dwa przemieszczenia translacyjne  $\bar{q}_{r1}$  i  $\bar{q}_{r2}$  oraz jedno rotacyjne  $\bar{q}_{r3}$  (rys. 5). Przemieszczenie  $\bar{q}_{r1}$  odpowiada rozciąganiu (ściskaniu),  $\bar{q}_{r2}$  — ścinaniu, a  $\bar{q}_{r3}$  — zginaniu. Ponieważ wiadomo [6], że rozciąganie (ściskanie) ma mniejsze znaczenie przy wyznaczaniu obciążenia krytycznego, szczególnie dla niższych form, pomija się przemieszczenie translacyjne  $\bar{q}_{r1}$ . W ten sposób przemieszczenie sztywnego elementu skończonego  $nr$  opisane jest dwoma współrzędnymi:  $\bar{q}_{r2}$  i  $\bar{q}_{r3}$ , zaś element sprężysty jest opisany dwoma

współczynnikami sztywności — współczynnikiem sztywności na ścinanie i współczynnikiem sztywności na zginanie. Współczynniki sztywności ścinania elementu sprężystego wyznacza się przy założeniu, że naprężenia styczne są stałe nie tylko wzdłuż dowolnego odcinka  $\Delta l_r$ , ale również na całej powierzchni przekroju poprzecznego. Powyższe założenie



Rys. 5



Rys. 6

jest możliwe do przyjęcia, ponieważ wpływ naprężeń stycznych na drgania gięte jest stosunkowo niewielki. Zakłada się, że odkształcenia pod wpływem siły tnącej rzeczywistego odcinka belki i zastępującego go elementu sprężystego są jednakowe (rys. 6). Stąd

$$(2.1) \quad \tau_r(t) = G\beta_r(t),$$

gdzie  $\tau_r(t)$  oznacza naprężenia styczne,  $G$  — moduł odkształcenia postaciowego,  $\beta_r(t)$  — kąt odkształcenia postaciowego.

Podstawiając do (2.1) następujące związki

$$(2.2) \quad \tau_r(t) = \frac{P_{r2}(t)}{F_r}$$

oraz

$$(2.3) \quad \beta_r(t) = \frac{\Delta w_{r2}(t)}{\Delta l_r},$$

gdzie  $P_{r2}(t)$  oznacza siłę tnącą w rozpatrywanym elemencie,  $\Delta w_{r2}(t)$  — odkształcenie poprzeczne elementu,  $F_r$  — powierzchnia przekroju poprzecznego elementu,  $\Delta l_r$  — długość elementu, otrzymamy związek pomiędzy siłą styczną przenoszoną przez rzeczywisty odcinek belki i jego odkształceniem

$$(2.4) \quad P_{r2}(t) = \frac{GF_r}{\Delta l_r} \Delta w_{r2}(t).$$

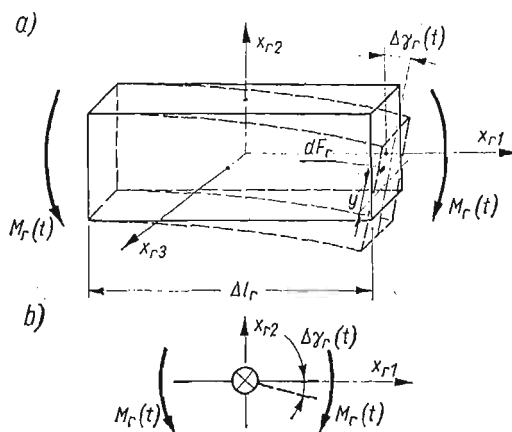
Z drugiej strony zależność siły stycznej od odkształcenia rzeczywistego odcinka pręta można przedstawić wzorem

$$(2.5) \quad P_{r2}(t) = c_{k2} \Delta w_{r2}(t).$$

Ponieważ w równaniach (2.4) i (2.5) lewe strony są równe, stąd

$$(2.6) \quad c_{k2} = \frac{GF_r}{\Delta l_r}.$$

Współczynniki sztywności zginania elementu sprężystego wyznacza się przy założeniu płaskiego rozkładu naprężeń w zastępowanym odcinku pręta. Rozpatrzmy pryzmatyczny odcinek pręta o długości  $\Delta l_r$  (rys. 7) zginany w płaszczyźnie  $x_{r1}, x_{r2}$  momentem  $M_r(t)$ .



Rys. 7

Moment  $M_r(t)$  jest równoważony przez naprężenia wewnętrzne. Naprężenia w elementarnym wycinku powierzchni przekroju poprzecznego  $dF_r$  (rys. 7) dają moment

$$dM_r(t) = \sigma_r(t) y dF_r,$$

a całkowity moment wynosi

$$(2.7) \quad M_r(t) = \int_{F_r} \sigma_r(t) y dF_r,$$

gdzie  $y$  oznacza odległość między obojętną osią zginania i powierzchnią  $dF_r$ ,  $\sigma_r(t)$  — naprężenie normalne w elementarnym wycinku powierzchni  $dF_r$ .

Ponieważ

$$(2.8) \quad \sigma_r(t) = E \varepsilon_r(t),$$

gdzie  $E$  oznacza moduł Younga,  $\varepsilon_r(t)$  — odkształcenie względne, które można wyrazić związkami

$$(2.9) \quad \varepsilon_r(t) = \frac{y \Delta \gamma_r(t)}{\Delta l_r},$$

gdzie  $\Delta \gamma_r$  oznacza kąt ugięcia belki, równanie (2.7), po uwzględnieniu (2.8) i (2.9), przyjmuje postać

$$M_r(t) = \int_{F_r} \frac{E y^2 \Delta \gamma_r(t)}{\Delta l_r}.$$

Wykonując całkowanie po prawej stronie ostatniego równania otrzymamy

$$(2.10) \quad M_r(t) = \frac{EJ_r}{\Delta l_r} \Delta \gamma_r(t),$$

gdzie  $J_r$  jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

Z drugiej strony, zależność pomiędzy momentem zginającym i kątem ugięcia belki ma postać

$$(2.11) \quad M_r(t) = c_{k3} \Delta \gamma_r(t).$$

Ponieważ przy tym samym obciążeniu  $M_r(t)$  odkształcenia muszą być takie same dla odcinka belki i dla elementu sprężystego, stąd po przyrównaniu prawych stron równań (2.10) i (2.11), otrzymuje się równanie sztywności na zginanie  $r$ -tego elementu sprężystego

$$(2.12) \quad c_{k3} = \frac{EJ_r}{\Delta l_r}.$$

### 3. Równania ruchu

Równania ruchu wyprowadza się w oparciu o równanie Lagrange'a drugiego rodzaju. W przypadku braku tłumienia przyjmują one postać

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial \bar{\mathbf{q}}_r} + \frac{\partial V}{\partial \bar{\mathbf{q}}_r} = 0,$$

gdzie  $T$  — oznacza energię kinetyczną układu,  $V$  — energię potencjalną układu,  $t$  — czas,  $\bar{\mathbf{q}}_r$  — wektor współrzędnych uogólnionych  $r$ -tego sztywnego elementu skończonego o postaci

$$\bar{\mathbf{q}}_r = \text{col} \{ \bar{q}_{r2}, \bar{q}_{r3} \}.$$

Ponieważ każdy element posiada dwa stopnie swobody, wobec tego każdemu SES można przyporządkować dwa równania (3.1), a dla całego układu można ułożyć  $2u$  tych równań. Tłumienie można pominąć z uwagi na znikomy jego wpływ na wartości częstości drgań własnych.

Energię kinetyczną układu oblicza się z następującego związku:

$$(3.2) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^u \mathbf{m}_r \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^2,$$

gdzie  $\mathbf{m}_r$  oznacza blok współczynników bezwładności. Blok  $\mathbf{m}_r$  zawiera dwa niezerowe wyrażenia

$$(3.3) \quad \mathbf{m}_r = \begin{bmatrix} m_{r2} & 0 \\ 0 & m_{r3} \end{bmatrix},$$

gdzie  $m_{r2}$  oznacza masę sztywnego elementu skończonego biorącą udział w ruchu translacyjnym wzdłuż osi  $x_{r2}$  (rys. 5),  $m_{r3}$  — masowy moment bezwładności SES względem osi  $x_{r3}$  (obrót wokół osi  $x_{r3}$ ).



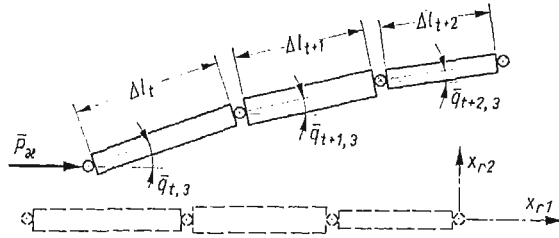
Energję kinetyczną układu można zapisać inaczej, w postaci macierzowej

$$(3.4) \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}},$$

gdzie  $\mathbf{M}$  oznacza macierz współczynników bezwładności składającą się z bloków  $\mathbf{m}_r$  (3.3),  $\dot{\mathbf{q}}$  — wektor prędkości uogólnionych układu. Wobec tego

$$(3.5) \quad \mathbf{M} = \text{diag} \{ \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_r, \dots, \mathbf{m}_n \},$$

$$(3.6) \quad \dot{\mathbf{q}} = \text{col} \{ \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2, \dots, \dot{\mathbf{q}}_r, \dots, \dot{\mathbf{q}}_n \}.$$



Rys. 8

Pochodna energii kinetycznej zapisanej w postaci (3.4) względem wektora prędkości uogólnionych przyjmuje postać

$$(3.7) \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}},$$

a pochodna

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}.$$

Drugi człon równania Lagrange'a (3.1) jest równy zeru.

Energia potencjalna układu jest funkcją odkształcenia pręta oraz sił obciążających  $\overline{P}_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ). Siła zewnętrzna  $\overline{P}_\kappa$  wykonuje pracę na odcinku  $\sum_{i=l_\kappa}^u \Delta S_i$  (rys. 8), gdzie  $\Delta S_i$  jest przemieszczeniem siły  $\overline{P}_\kappa$  przypadającym na jeden SES. Przemieszczenie  $\Delta S_i$  jest zależne od obrotu SES wokół osi  $x_{r3}$ . Wobec tego praca siły  $\overline{P}_\kappa$

$$(3.9) \quad \delta L_\kappa = P_\kappa \sum_{i=l_\kappa}^u \Delta S_i,$$

a ponieważ

$$(3.10) \quad \Delta S_i = \frac{1}{2} \Delta l_i \bar{q}_{i3}^2,$$

pracę siły  $\overline{P}_\kappa$  można wyrazić związkem

$$(3.11) \quad \delta L_\kappa = \frac{1}{2} \overline{P}_\kappa \sum_{i=l_\kappa}^u \Delta l_i \bar{q}_{i3}^2.$$

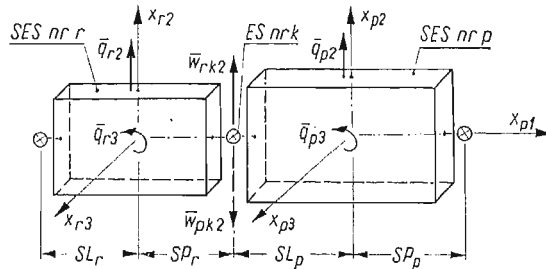
Praca wszystkich sił zewnętrznych  $\delta L$  jest sumą (z uwzględnieniem znaku) prac poszczególnych sił  $\bar{P}_x$ . Zakładamy, że siła wykonuje pracę dodatnią przy ściskaniu. Zatem

$$\delta L = \sum_{x=1}^n \delta L_x$$

lub

$$(3.12) \quad \delta L = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^n P_x \sum_{i=l_x}^u \Delta l_i \bar{q}_{i3}^2.$$

Uwzględnienie pracy sił osiowych  $\bar{P}_x$  stanowi nowość w metodzie SES z uwagi na uwzględnienie nieliniowości geometrycznych i pozwala na uchwycenie istotnych związków pomiędzy tymi siłami a drganiami i statecznością pręta.



Rys. 9

Odształcenie continuum w układzie dyskretnym zastępuje odształcenie elementów sprężystych (rys. 9). Ponieważ SES posiada dwa stopnie swobody element sprężysty odkształci się w kierunku osi  $x_{r2}$  oraz będzie zginany w płaszczyźnie  $x_{r1}, x_{r2}$ .

Wektor przemieszczeń punktu zamocowania elementu sprężystego numer  $k$  do SES o numerze  $r$  oznaczymy

$$(3.13) \quad \{\bar{w}_{rk}\} = \text{col} \{\bar{w}_{rk2}, \bar{w}_{rk3}\},$$

gdzie  $\bar{w}_{rk2}$  oznacza wektor przemieszczenia w/w punktu w kierunku osi  $x_{r2}$  (rys. 9),  $w_{rk3}$  — obrót w/w punktu w płaszczyźnie  $x_{r1}, x_{r2}$ . Wektor przemieszczeń punktu zamocowania elementu sprężystego o numerze  $k$  można uzależnić od współrzędnych uogólnionych SES o numerze  $r$  następująco:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \bar{w}_{rk2} &= \bar{q}_{r2} + \bar{q}_{r3} \cdot SP_r, \\ \bar{w}_{rk3} &= \bar{q}_{r3}, \end{aligned}$$

gdzie  $SP_r$  jest współrzędną zamocowania elementu sprężystego w układzie osi współrzędnych SES numer  $r$  (rys. 9). Wektor odształceń elementu sprężystego o numerze  $k$  jest funkcją przemieszczeń punktów jego zamocowania do SES numer  $r$  i  $p$

$$(3.15) \quad \{\Delta \bar{w}_k\} = \text{col} \{\Delta \bar{w}_{k2}, \Delta \bar{w}_{k3}\},$$

gdzie  $\Delta \bar{w}_{k2} = \bar{w}_{rk2} - \bar{w}_{pk2}$ ,  $\Delta \bar{w}_{k3} = \bar{w}_{rk3} - \bar{w}_{pk3}$ .

Wielkość odkształcenia elementu sprężystego zależy od współczynników sztywności  $c_{k2}$  [równanie (2.6)] oraz  $c_{k3}$  [równanie (2.12)]. Wobec tego energię potencjalną można zapisać jako

$$(3.16) \quad V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{u-1} (c_{k2} \Delta \bar{w}_{k2}^2 + c_{k3} \Delta \bar{w}_{k3}^2) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha} \sum_{l=l_{\alpha}}^u \Delta l_i \bar{q}_{i3}^2.$$

Ostatnie równanie można zapisać w postaci macierzowej. W tym celu przekształcimy równanie energii potencjalnej  $k$ -tego elementu sprężystego w ten sposób, aby uzyskać bezpośrednią zależność od współrzędnych uogólnionych sąsiadujących z nim SES

$$(3.17) \quad V_k = \frac{1}{2} \Delta \bar{w}_k^T C_k \Delta \bar{w}_k,$$

gdzie  $C_k = \text{diag} \{c_{k2}, c_{k3}\}$ , uwzględniając zaś związki (3.14) i (3.15), otrzymujemy

$$(3.18) \quad V_k = \frac{1}{2} (\bar{q}_r^T S_r^T C_k S_r \bar{q}_r - \bar{q}_p^T S_p^T C_k S_r \bar{q}_r - \bar{q}_r^T S_r^T C_k S_p \bar{q}_p + \bar{q}_p^T S_p^T C_k S_p \bar{q}_p),$$

gdzie

$$S_r = \begin{bmatrix} 1 & SP_r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_p = \begin{bmatrix} 1 & SL_p \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{q}_r = \text{col} \{\bar{q}_{r2}, \bar{q}_{r3}\}, \quad \bar{q}_p = \text{col} \{\bar{q}_{p2}, \bar{q}_{p3}\}.$$

Oznaczenia  $SP_r$  i  $SL_p$  podane są na rys. 9.

Wprowadzając związek (3.18) do równania (3.16) otrzymamy

$$(3.19) \quad V = \frac{1}{2} \bar{q}^T K \bar{q} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha} \bar{q}_i^T \Delta L_i \bar{q}_i,$$

gdzie

$$K = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} k_{rr} & k_{rp} \\ k_{pr} & k_{pp} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} k_{u-1, u-1} & k_{u-1, u} \\ k_{u, u-1} & k_{u, u} \end{bmatrix} \right\},$$

$$\Delta L_i = \text{diag} \{ \Delta l_{i\alpha}, \Delta l_{i\alpha+1}, \dots, \Delta l_i \},$$

$$\bar{q}_i = \text{col} \{ \bar{q}_{i\alpha, 3}, \bar{q}_{i\alpha+1, 3}, \dots, \bar{q}_{i, 3} \},$$

$\bar{q}$  — wektor współrzędnych uogólnionych układu.

Wyrazy bloków macierzy  $K$  mają następującą postać:

$$(3.20) \quad k_{rr} = S_r^T C_k S_r, \quad k_{rp} = -S_r^T C_k S_p, \quad k_{pp} = S_p^T C_k S_p, \quad k_{pr} = k_{rp}^T.$$

Celem dalszego uproszczenia równania (3.19) wprowadzimy nową macierz  $B^*$

$$(3.21) \quad B^* = \sum_{\alpha=1}^n P_{\alpha} \Delta L_i.$$

Macierz  $B^*$  ma maksymalny wymiar  $u \times u$ , a macierz  $K$  wymiar  $2u \times 2u$ . Doprowadzamy do zrównania stopni obydwu macierzy tworząc macierz  $B$  o wymiarze  $2u \times 2u$ . Dokonać tego można przez wprowadzenie zerowych wierszy i kolumn (począwszy od pierwszego co drugi wiersz i kolumnę).

Wprowadzone zmiany nie mają wpływu na rozwiązanie układu równań (3.19), a mają jedynie na celu uproszczenie zapisu wspomnianych równań. Łatwo zauważyć, że maksymalna liczba wyrazów  $\bar{\mathbf{q}}_i$  wynosi  $u$ , ponieważ praca sił  $\bar{P}_*$  jest tylko funkcją współrzędnych rotacyjnych  $\bar{q}_{r3}$ , a wektor  $\bar{\mathbf{q}}$  posiada maksymalny wymiar  $2u$ . Aby uprościć zapis równania (3.19) konieczne jest sprowadzenie obydwu wektorów do jednakowego wymiaru. Wobec tego równanie (3.19) przyjmuje postać

$$(3.22) \quad V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{q}}.$$

Pochodna energii potencjalnej zapisanej w postaci (3.22) względem wektora współrzędnych uogólnionych ma postać

$$(3.23) \quad \frac{\partial V}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{B} \bar{\mathbf{q}}.$$

Podstawiając związki (3.8) oraz (3.23) do równania (3.1) otrzymamy

$$(3.24) \quad \mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}} - \mathbf{B} \bar{\mathbf{q}} = 0.$$

Równanie (3.24) jest równaniem ruchu pręta prostego o dowolnie zmiennym przekroju poprzecznym obciążonego siłami osiowymi.

#### 4. Warunki brzegowe

Niektóre sposoby podparcia prętów prostych przedstawiono na rys. 1 i 2. Każdy z tych sposobów wprowadza ograniczenia w ruchu pręta, a więc muszą być narzucone określone warunki na równanie (3.24), które wyprowadzono dla układu dyskretnego złożonego z SES o dwóch stopniach swobody. Warunkami tymi są zerowe wartości niektórych składowych wektora współrzędnych uogólnionych  $\bar{\mathbf{q}}$ , tzn. tych składowych, które stanowią wektory przemieszczeń SES o ograniczonym ruchu. Przykłady wspomnianych ograniczeń podano na rys. 15.

Ograniczenie ruchu wprowadza również dodatkowe zmiany w macierzach bezwładności  $\mathbf{M}$  oraz sztywności  $\mathbf{K}$  i tak np. moment bezwładności SES zamocowanego do podpory przesuwnej (rys. 15, wariant V) należy obliczać względem osi obrotu, a nie względem osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu i przechodzącej przez środek masy, jak to ma miejsce w przypadku swobodnego SES. To samo dotyczy obliczeń momentów bezwładności skrajnych SES w przypadkach II i III. W przypadku IV SES ma ograniczone możliwości przemieszczenia się w kierunku poprzecznym, jak i obrotu i dlatego współczynniki bezwładności mają wartość zero. Z ograniczeniem ruchu wiąże się także zmiana współrzędnych zamocowania elementów sprężystych (w układzie osi współrzędnych SES — patrz rys. 9), a tym samym zmiana bloków macierzy  $\mathbf{K}$  ([3.19]), które są związane z tymi SES.

Zerowanie niektórych wyrazów wektora  $\bar{\mathbf{q}}$  zmniejsza wymiar macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{B}$  w równaniu (3.24) o liczbę tych wyrazów. Macierze mas, sztywności i macierz  $\mathbf{B}$  o zmniejszonym wymiarze oznaczymy przez  $\mathbf{M}'$ ,  $\mathbf{K}'$  i  $\mathbf{B}'$

## 5. Drgania własne, stateczność położenia równowagi

Weźmy pod uwagę układ równań ruchu (3.24) odpowiednio zmodyfikowany w związku z uwagami podanymi w rozdziale 4. Rozwiązania powyższego układu równań różniczkowych poszukujemy w postaci harmonicznej, tzn. zakładamy, że

$$(5.1) \quad \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}_0 \sin \omega t,$$

gdzie  $\bar{\mathbf{q}}_0$  — wektor amplitud drgań,  $\omega$  — częstość drgań własnych. Wprowadzając związek (5.1) do równania (3.24), otrzymamy

$$(5.2) \quad [(\mathbf{K}' - \mathbf{B}') - \omega^2 \mathbf{M}'] \bar{\mathbf{q}}_0 = 0.$$

Równanie (5.2) posiada rozwiązanie nietrywialne wówczas, gdy wyznacznik główny macierzy

$$(5.3) \quad \det |(\mathbf{K}' - \mathbf{B}') - \omega^2 \mathbf{M}'| = 0.$$

W ten sposób obliczanie częstości drgań własnych pręta obciążonego siłami osiowymi sprowadza się do problemu znajdowania wartości własnych macierzy.

Przypadek badania stateczności układu jest bardziej prosty. Warunkiem utraty stateczności jest nietrywialne rozwiązanie równania (5.2) przy założeniu, że częstość drgań własnych jest równa zero, a więc

$$(5.4) \quad (\mathbf{K}' - \mathbf{B}') \bar{\mathbf{q}}_0 = 0,$$

przy czym wartością niewiadomą w tym przypadku jest wartość  $\bar{P}_\kappa$  ( $\kappa = 1, 2, \dots, n$ ) wchodząca w skład macierzy  $\mathbf{B}'$ .

Równanie (5.4) można uprościć, ponieważ macierz  $\mathbf{B}'$  zawiera zerowe wiersze i kolumny (patrz przekształcenie macierzy  $\mathbf{B}^*$  w macierz  $\mathbf{B}$ ) o numerach odpowiadających kolejnym amplitudom wektora  $\bar{\mathbf{q}}_0$  w kierunku poprzecznym pręta. Z uwagi na fakt, że wyrazy macierzy  $\mathbf{K}'$  leżące na i w pobliżu głównej przekątnej są różne od zera, celem spełnienia równania (5.4) przemieszczenia (amplitudy drgań) w kierunku poprzecznym pręta muszą być równe zero.

Wobec zerowych wyrażeń wektora  $\bar{\mathbf{q}}_0$  macierze  $\mathbf{K}'$  i  $\mathbf{B}'$  zmniejszają swój wymiar o liczbę wspomnianych wyrażeń. Macierze  $\mathbf{K}'$  i  $\mathbf{B}'$  o zmniejszonym wymiarze oznaczymy przez  $\mathbf{K}''$  i  $\mathbf{B}''$ . Wówczas równanie (5.4) przyjmie postać

$$(5.5) \quad (\mathbf{K}'' - \mathbf{B}'') \bar{\mathbf{q}}_0^* = 0,$$

gdzie  $\bar{\mathbf{q}}_0^* = \text{col} \{ \bar{q}_{0r3} \}$ ,  $r = (1, 2, \dots, u)$ .

Jeżeli np. SES numer  $r$  nie ma możliwości obrotu w płaszczyźnie  $x_{r1}, x_{r2}$ , wówczas wyraz  $\bar{q}_{0r3}$  wektora  $\bar{\mathbf{q}}_0^*$  jest równy zero.

Wartość nieznaną tzn. obciążenie krytyczne  $\bar{P}_\kappa$  wchodzi w skład macierzy  $\mathbf{B}''$ . Przyjmujemy założenie, że siły osiowe  $\bar{P}_\kappa$  są zależne od parametru  $P$  według wzoru

$$(5.6) \quad \bar{P}_\kappa = P \bar{\alpha}_\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots, n).$$

Wobec tego macierz  $\mathbf{B}''$  możemy zapisać

$$(5.7) \quad \mathbf{B}'' = P \mathbf{B}_\alpha'',$$

gdzie  $\mathbf{B}_\alpha'' = \sum_{\kappa=1}^n \bar{\alpha}_\kappa \Delta \mathbf{L}_\kappa$  [porównaj związek (3.21)]. Wprowadzając związek (5.7) do rów-

nania (5.5) otrzymamy:

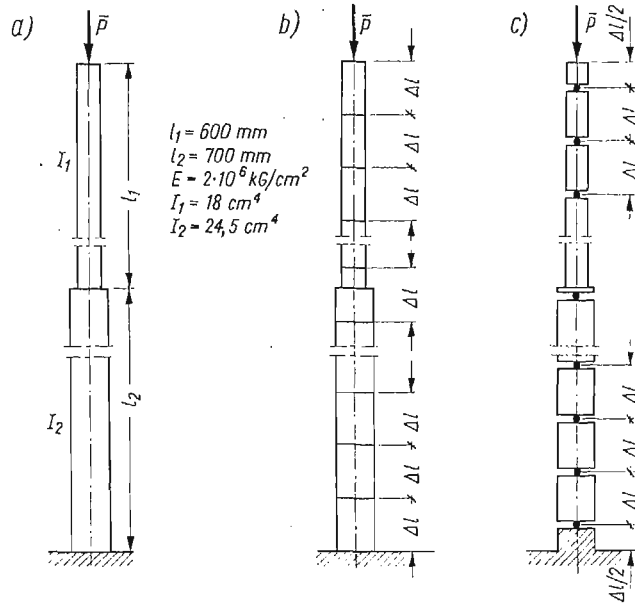
$$(5.8) \quad (\mathbf{K}'' - P\mathbf{B}'')\bar{\mathbf{q}}_0^* = 0.$$

Równanie (5.8) przedstawia typowe zagadnienie wartości własnych macierzy. Rozwiązaniem tego równania są wartości własne  $P_v$  i odpowiadające im wektory własne  $\bar{\mathbf{q}}_{0v}^*$ ,  $v \leq u$ . Są to wielkości, dla których spełnione jest równanie (5.8). W rozpatrywanym zagadnieniu  $P_v$  oznacza siłę krytyczną, zaś  $\bar{\mathbf{q}}_{0v}^*$  postać odkształcenia od położenia równowagi pod działaniem obciążenia krytycznego

$$(5.9) \quad \bar{P}_{xv} = P_v \bar{\alpha}_x \quad (x = 1, 2, \dots, n).$$

### 6. Przykłady obliczeń

Przedstawione przykłady obrazują możliwości zastosowań metody, jak również dają pogląd o dokładności obliczeń. W pierwszym przykładzie podano obliczenia siły krytycznej kolumny prostej o zmiennym przekroju przy różnym podziale na sztywne elementy skończone i wyniki tych obliczeń porównano z rozwiązaniami analitycznymi. W drugim przykładzie obliczono częstotliwości drgań pręta o stałym przekroju w funkcji siły ściskającej.



Rys. 10

I w tym przypadku rozwiązanie porównano z wynikami metod analitycznych. W przykładzie trzecim obliczono częstotliwości drgań własnych wału o skokowo zmiennym przekroju poprzecznym również w funkcji siły ściskającej.

**Przykład 1.** Policzono trzy pierwsze siły krytyczne i odpowiadające im formy odkształceń dla kolumny o zmiennym przekroju (rys. 10), dla różnej gęstości podziału na sztywne elementy skończone. Parametry kolumny podano na rys. 10. Kolumnę podzie-

lono na  $u$  odcinków o długości  $\Delta l = l/u$ , a następnie własności sprężyste każdego odcinka zastąpiono elementem sprężystym, który umieszczono w środku odcinka. Otrzymano w ten sposób  $u$  sztywnych elementów skończonych. Wartości obciążeń krytycznych obliczono z równania (5.8) wykorzystując standardowe programy obliczające wartości własne macierzy.

Tablica 1

Liczba SES ( $i$ )	$P_{kr1}^i$ [kG]	$\frac{P_{kr1}^0 - P_{kr1}^i}{P_{kr1}^0}$ [%]	$P_{kr2}^i$ [kG]	$\frac{P_{kr2}^0 - P_{kr2}^i}{P_{kr2}^0}$ [%]	$P_{kr3}^i$ [kG]	$\frac{P_{kr3}^0 - P_{kr3}^i}{P_{kr3}^0}$ [%]
1	4970,41	—	—	—	—	—
2	6459,86	4,811	31232,40	41,863	—	—
3	6573,64	3,135	44510,78	17,146	78349,4	50,173
4	6690,18	1,418	47788,22	11,045	110615,8	29,653
5	6713,57	1,073	50154,60	6,640	125253,0	20,344
6	6739,65	0,689	51145,54	4,796	134704,1	14,334
7	6752,55	0,498	51819,66	3,541	140537,8	10,624
8	6758,77	0,407	52306,58	2,634	144021,9	8,408
9	6768,61	0,262	52518,90	2,239	147178,5	6,401
10	6768,65	0,261	52830,59	1,659	148591,1	5,502
12	6774,59	0,173	53106,60	1,145	151158,5	3,863
15	6781,84	0,067	53262,86	0,854	153649,3	2,285
wartość dokładna	6786,39	—	53721,84	—	157243,0	—

Objaśnienia:

$P_{kr1}^i, P_{kr2}^i, P_{kr3}^i$  — pierwsza, druga i trzecia siła krytyczna obliczona dla układu dyskretnego złożonego z  $i$  SES,

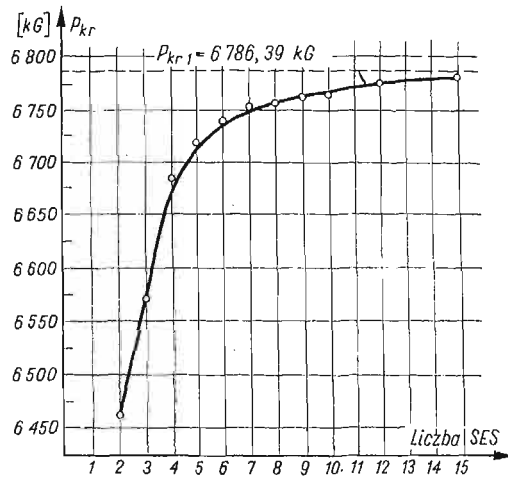
$P_{kr1}^0, P_{kr2}^0, P_{kr3}^0$  — dokładne wartości sił krytycznych.

Wyniki przedstawiono w tablicy 1. Dokładna wartość obciążenia krytycznego wynosi, zgodnie z [6]

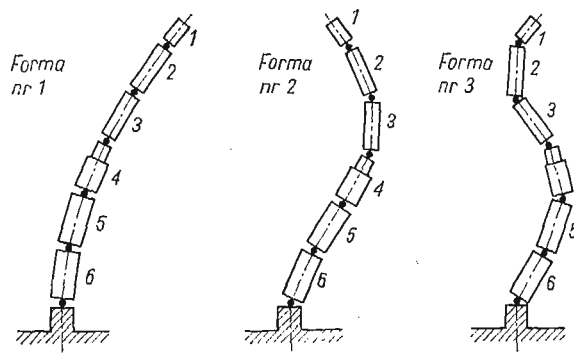
$$P_{kr1} = 6\,786,39 \text{ kG}, \quad P_{kr2} = 53\,721,84 \text{ kG}, \quad P_{kr3} = 157\,243,02 \text{ kG}.$$

Na rys. 11 przedstawiono wykres siły krytycznej obliczonej metodą podziału kolumny na SES w zależności od gęstości podziału. Z przedstawionych danych wynika, że wyniki obliczeń metodą SES są zbliżone monotonicznie do wartości dokładnej i zbiegają się do dołu, w przeciwieństwie do metody przedstawionej w [1]. W ten sposób siła krytyczna obliczona prezentowaną metodą jest «bardziej bezpieczna» niż w innych przypadkach. Postacie odkształceń przedstawiono w tablicy 2 i na rys. 12.

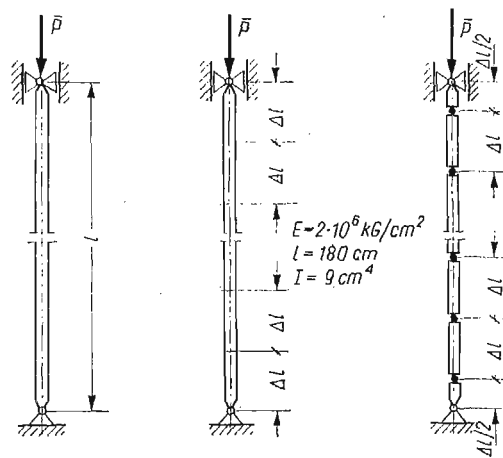
Przykład 2. Policzono trzy pierwsze częstotliwości drgań własnych pręta o stałym przekroju (rys. 13) dla różnych wartości sił osiowych  $P$ . Parametry pręta podano na rys. 13. Pręt podzielono na 9 odcinków a następnie własności sprężyste każdego odcinka, podobnie jak poprzednio, zastąpiono elementem sprężystym, który umieszczono w środku odcinka. Uzyskano w ten sposób 10 SES. Częstotliwości drgań własnych obliczono z równania (5.3). Wyniki przedstawiono w tablicach 3, 4, 5, zestawiając je z rozwiązaniami analitycznymi [7].



Rys. 11

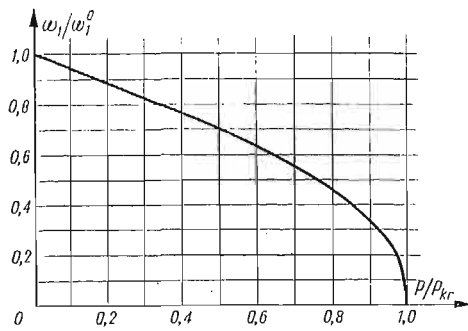


Rys. 12

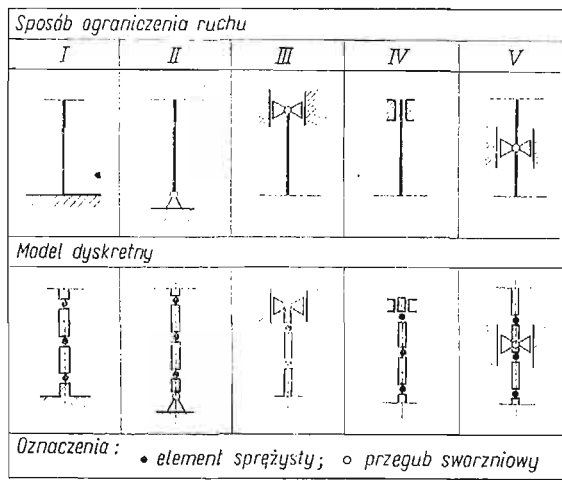


Rys. 13

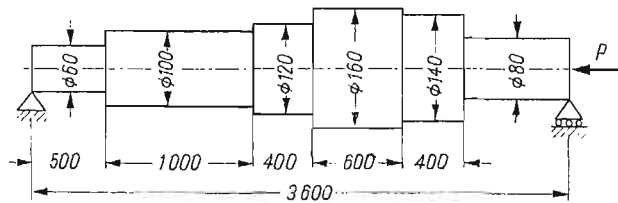




Rys. 14



Rys. 15



Rys. 16

Na rys. 14 przedstawiono zależność pomiędzy częstością drgań własnych i obciążeniem w osi pręta.

Przykład 3. Policzono trzy pierwsze częstości drgań własnych wału o skokowo zmiennym przekroju (rys. 16) dla różnych wartości sił osiowych  $P$ . Wymiary wału podano na rys. 16. Przyjęto wartości modułu Younga i modułu odkształcenia postaciowego odpowiednio:  $E = 2 \cdot 10^6$  kG/cm<sup>2</sup>;  $G = 8 \cdot 10^5$  kG/cm<sup>2</sup>. Podobnie jak poprzednio, wał podzielono na 10 SES. Częstości drgań własnych obliczono z równania (5.3). Wyniki zestawiono w tablicy 6.

Tablica 2

Nr SES	Forma nr 1	Forma nr 2	Forma nr 3
1	1,00000	-1,00000	1,00000
2	0,95606	-0,66653	0,12171
3	0,82809	0,11148	-0,97037
4	0,63963	0,77206	-0,39543
5	0,45084	0,91072	0,56484
6	0,23294	0,60313	0,79616

Tablica 3

Siła osiowa [kG]	Pierwsza częstość drgań własnych (wartość dokładna)	Pierwsza częstość drgań własnych (wartość przybliżona)	Błąd względny [%]
500	125,6162	125,5961	0,016
1000	119,1210	119,0759	0,038
1500	112,2732	112,1541	0,106
2000	104,9796	104,7752	0,195
2500	97,1399	96,8348	0,314
3000	88,6094	88,1813	0,483
3500	79,1648	78,5795	0,739
4000	68,4289	67,6267	1,172
4500	55,6594	54,5145	2,057
5000	38,9027	37,0151	4,852
5100	34,5906	32,4000	6,333
5200	29,6580	27,0072	8,938
5300	23,7211	20,2241	14,742
5400	15,6773	9,4145	39,948

Tablica 4

Sila osiowa [kG]	Druga częstość drgań własnych (wartość dokładna)	Druga częstość drgań własnych (wartość dokładna)	Błąd względny [%]
500	520,9650	520,3215	0,123
1000	514,8459	513,9683	0,179
1500	508,6532	507,5349	0,220
2000	502,3842	501,0182	0,272
2500	496,0360	494,4148	0,327
3000	489,6055	487,7214	0,385
3500	483,0893	480,9340	0,446
4000	476,4841	474,0488	0,511
4500	469,7860	460,0612	0,580
5000	462,9911	459,9668	0,653
5100	461,6201	458,5347	0,668
5200	460,2450	457,0980	0,684
5300	458,8658	455,6567	0,699
5400	457,4824	454,2109	0,715

Tablica 5

Sila osiowa [kG]	Trzecia częstość drgań własnych (wartość dokładna)	Trzecia częstość drgań własnych (wartość przybliżona)	Błąd względny [%]
500	1179,7506	1174,8443	0,416
1000	1173,6910	1168,2580	0,463
1500	1167,5999	1161,6336	0,511
2000	1161,4769	1154,9705	0,560
2500	1155,3215	1148,2679	0,611
3000	1149,1331	1141,5253	0,662
3500	1142,9111	1134,7418	0,715
4000	1136,6551	1127,9168	0,769
4500	1130,3645	1121,0494	0,824
5000	1124,0387	1114,1389	0,881
5100	1122,7693	1112,7516	0,892
5200	1121,4984	1111,3625	0,904
5300	1120,2261	1109,9716	0,915
5400	1118,9523	1108,5790	0,927

Tablica 6

Siła osiowa (T)	Pierwsza częstość drgań własnych	Druga częstość drgań własnych	Trzecia częstość drgań własnych
0	300,353	552,192	1550,327
5	296,850	547,388	1545,022
10	293,280	542,515	1539,621
15	289,642	537,568	1534,118
20	285,930	532,545	1528,508
25	282,141	527,443	1522,787
30	278,268	522,258	1516,948
35	274,307	516,987	1510,985
40	270,251	511,626	1504,893
45	266,093	506,171	1498,663
50	261,825	500,618	1492,289
55	257,439	494,963	1485,764

## 7. Wnioski

Z przedstawionych rozważań wynika, że:

- 1) metodę można stosować do obliczeń drgań własnych i badania stateczności prętów prostych o dowolnym przekroju poprzecznym,
- 2) przy niewielkiej gęstości podziału continuum na SES otrzymuje się dość dokładne wyniki,
- 3) dzięki prostemu zapisowi macierzowemu metoda daje się łatwo zaprogramować w obliczeniach na elektronicznej maszynie cyfrowej.

## Literatura cytowana w tekście

1. H. B. HARRISON, *Post-buckling analysis of non-uniform elastic columns*, Int. Jour. for Numerical Meth. in Eng., 7 (1973).
2. J. KRUSZEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zesz. Naukowe Politechniki Gdańskiej nr 165, Mechanika XII, 1971.
3. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITTBRODT, F. NAJBAR, S. GRABOWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych*, Arkady (przygotow. do druku).
4. J. KRUSZEWSKI, W. GAWROŃSKI, E. WITTBRODT, *Metoda sztywnych elementów skończonych w obliczeniach drgań konstrukcji okrętowych*, Rozpr. Inż., 3 (1974).
5. C. ORAN, *On the significance of a type of divergence*, Journ. of Appl. Mech., Sept. (1972).
6. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
7. X. ЦИГЛЕР, *Основы теории устойчивости конструкции*, Москва 1971.

## Резюме

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ И СОБСТВЕННЫХ  
КОЛЕБАНИЙ НАГРУЖЕННЫХ ВДОЛЬ ОСИ СТЕРЖНЕЙ  
ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В работе рассматривается метод расчета устойчивости и собственных колебаний стержней под влиянием осевой нагрузки при использовании метода жестких конечных элементов.

Даются теоретические основы метода и оценка его точности. Показаны примеры применений. Метод разработан с точки зрения применения цифровых вычислительных методов.

## Summary

THE DISCRETE MODEL OF CALCULATION OF NATURAL VIBRATION FREQUENCY AND  
STABILITY OF AXIALLY LOADED RODS WITH ARBITRARILY VARIABLE CROSS-SECTIONS

The method presented consists in calculating the natural vibration frequency and stability of axially loaded rods by the stiff finite elements method. Theoretical basis of the method and its accuracy are discussed in the paper, and the examples of its application are given. The method is suitable for electronic computer technique.

POLITECHNIKA GDAŃSKA, GDAŃSK

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1975 r.*

---

WYZNACZANIE CHARAKTERYSTYK DYNAMICZNYCH GUMY PRZY PERIODYCZNYM  
SKRĘCANIU WALCA PEŁNEGO. ZASTOSOWANIE STEROWANEGO IMPULSU DO  
POMIARU KĄTA STRATNOŚCI\*)

KAROL W Y L E Ż Y C H (GŁIWICE)

1. Wstęp

Coraz wyższe wymagania stawiane konstrukcjom powodują wprowadzanie nowych tworzyw o określonych własnościach reologicznych. Na przestrzeni ostatnich lat w przemyśle maszynowym i motoryzacyjnym znacznie wzrosło [1 - 4] zastosowanie różnych gatunków gum. Jest to wynikiem zdolności gumy do znacznych odkształceń sprężystych przy równoczesnym dużym tłumieniu. Ponadto takie jej cechy, jak: dysypacja energii przy tłumieniu fal dźwiękowych, obniżenie krzywej rezonansu przy drganiach, dobre własności izolacji cieplnej, elektrycznej i akustycznej oraz odporność na działanie związków chemicznych powodują coraz to nowe zastosowania gumy w konstrukcjach maszyn. Rozpraszanie znacznych energii przez elementy gumowe w trakcie zmiennych w czasie procesów odkształcenia wpłynęło na wytwarzanie z niej różnego typu amortyzatorów, wibroizolatorów, uszczeltek, zderzaków, łączników sprężystych, sprzęgieł elastycznych, tłumików drgań i innych. Równoległe z tym poszukuje się coraz efektywniejszych metod pomiaru własności lepkosprężystych gumy. W szczególności główną uwagę skupia się na ilościowej ocenie tarcia wewnętrznego, przejawiającego się istnieniem histerezy, zanikaniem drgań swobodnych, przesunięciem fazowym między naprężeniem i odkształceniem, czy też ograniczeniem wzrostu drgań rezonansowych, jako ważnej charakterystyki określającej własności tłumienia tego tworzywa [5 - 9]. Najczęściej za miarę tarcia wewnętrznego przyjmuje się współczynnik tłumienia drgań zdefiniowany jako stosunek energii dysypowanej w ciągu jednego cyklu odkształcenia, do potencjalnej energii sprężystości ciała, odpowiadającej amplitudzie odkształcenia ciała [4, 10]. Inna metoda doświadczalna badania tarcia wewnętrznego w ciałach stałych polega na wyznaczeniu tłumienia drgań na podstawie drgań zanikających, gdzie logarytmiczny dekrement tłumienia drgań uważa się za miarę tarcia wewnętrznego. Na tej metodzie oparta jest nawet niemiecka norma [11] dotycząca badań własności dynamicznych gumy.

W ostatnich latach, jako miarę własności tłumieniowych gumy preferuje się przyjęcie tangensa kąta przesunięcia fazowego  $\delta$ , występującego między naprężeniem a odkształceniem, zwanego także kątem stratności [12]. Tangens tego kąta stanowi miarę stosunku

---

\*) Praca została wyróżniona na Ogólnokrajowym Konkursie na prace doświadczalne z mechaniki technicznej, zorganizowanym przez Oddział PTMTS w Częstochowie, w 1974 r.

energii rozproszonej do energii zachowanej przy odkształceniu cyklicznym. W tym kierunku zmierzają także zalecenia ISO [13] dotyczące badań dynamicznych gumy.

W elektronicznej technice pomiarowej problem wyznaczenia kąta przesunięcia fazowego między dwoma sygnałami elektrycznymi został rozwiązany dla odpowiednio wysokich i stałych częstości oraz dużych napięć sygnałów pomiarowych, przez co nie mogą one być przydatne w pomiarach kąta stratności tworzyw kauczukopodobnych.

Dodatkową trudność pomiarową stwarza także fakt, że zarówno stosowane powszechnie mostki tensometryczne, jak również inne czynne elementy toru elektronicznego charakteryzują się własnym przesunięciem fazowym.

Dlatego też większość stosowanych do tej pory metod określania tego kąta to metody pośrednie, a często przybliżone, tzn. wyznacza się dogodniejsze do zmierzenia wielkości, np. logarytmiczny dekrement tłumienia drgań swobodnych, charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową czy pętlę dynamicznej histerezy [6, 14 - 17], na podstawie których wylicza się kąt stratności.

Jak wynika z wyżej przytoczonego przeglądu, nie ujmującego pełnego zestawienia sposobów, wszystkie pośrednie metody wyznaczenia kąta stratności obarczone muszą być w konsekwencji dużym błędem oraz są bardzo czasochłonne. Należy podkreślić, iż osobnym i to niełatwym problemem pomiarowym jest sam pomiar dynamicznej pętli histerezy.

W niniejszej pracy przedstawiono wyniki badań dynamicznej relaksacji przeprowadzonych na walcowych próbkach gumowych, w wyniku których wyznaczono moduły bezwzględne odkształcenia postaciowego oraz składowe zespolonych modułów w funkcji częstości dla pewnych gatunków gum przemysłowych. Opisano także zastosowaną w pracy metodę pomiaru kąta przesunięcia fazowego między naprężeniem a odkształceniem, w której wykorzystano impuls sterujący pochodzący z zasilanego napięciem stałym kontaktronu zwieranego wirującymi dwoma magnesami.

Zaproponowana metoda charakteryzuje się dużą rozdzielczością pomiarową i wydaje się, iż posiada szereg zalet praktycznych w porównaniu z metodą stosowaną w maszynach badawczych, typu RAPRA czy WALLACE [8].

## 2. Skrętne drgania ustalone walca lepkosprężystego

Rozpatrzmy pręt walcowy o długości  $l$  i promieniu  $R$  (rys. 1). Jeden koniec jest zamocowany sztywno, a drugi poddawany okresowo zmiennym odkształceniom typu

$$(2.1) \quad \varphi(l, t) = \operatorname{Re}[\varphi^*(l)e^{i\omega t}].$$

Przy braku sił masowych równanie drgań skrętnych pręta sprężystego w układzie współrzędnych walcowych  $(r, \varphi, z)$  przy  $x_3 = z$  ma znaną postać

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

gdzie  $G$  jest modułem sprężystości odkształcenia postaciowego, a  $\rho$  gęstością.

Dla drgań ustalonych tzw. quasi-stacjonarnych, przyjmujemy, że przemieszczenie kątowe  $\varphi(z, t)$  ma postać

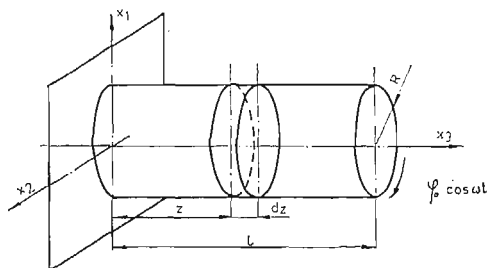
$$(2.3) \quad \varphi(z, t) = \operatorname{Re}[\varphi^*(z, \omega)e^{i\omega t}],$$

dzięki czemu równanie (2.2) przechodzi w równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.4) \quad \frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} + \frac{\omega^2 \rho}{G} \varphi^* = 0.$$

Rozważając walec jako ciało lepkosprężyste, kąt obrotu wyznacza się korzystając z analogii sprężysto-lepkosprężystej Alfrey'a [16], zastępując wielkość  $G$  przez  $G^*(i\omega)$ , tj. przez funkcję parametru  $\omega$ . Równanie drgań skrętnych pręta lepkosprężystego jest wtedy następujące:

$$(2.5) \quad \frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} + \frac{\omega^2 \rho}{G^*(i\omega)} \varphi^* = 0,$$



Rys. 1. Dynamiczne skręcanie walca pełnego

lub wprowadzając oznaczenie

$$(2.6) \quad k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{G^*(i\omega)}$$

mamy

$$(2.7) \quad \frac{d^2 \varphi^*}{dz^2} + k^2 \varphi^* = 0.$$

Rozwiązaniem równania różniczkowego (2.7) jest funkcja

$$(2.8) \quad \varphi^*(z, t) = A \sin kz + B \cos kz.$$

Dla warunków brzegowych

$$(2.9) \quad \varphi^*(0, t) = 0, \quad \varphi^*(l, t) = \text{Re}[\varphi^*(l) e^{i\omega t}],$$

rozwiązanie równania (2.7) przyjmie postać

$$(2.10) \quad \varphi^*(z) = \varphi^*(l) \frac{\sin kz}{\sin kl},$$

gdzie  $\varphi^*(l) = \varphi_0 \cos \omega t$  jest kątem skręcenia wolnego brzegu próbki.

Korzystając z zasady superpozycji Boltzmanna [16] naprężenie styczne  $\sigma_{z\varphi}$ , będące funkcją współrzędnych przestrzennych  $r, z$  oraz czasu  $t$ , przy skręcaniu pręta walcowego wyraża się w postaci

$$(2.11) \quad \sigma_{z\varphi}(r, z, t) = \int_0^t \frac{\partial \varepsilon_{z\varphi}(r, z, \tau)}{\partial \tau} \Psi(t - \tau) d\tau.$$



Między składową odkształcenia  $\varepsilon_{z\varphi}$  a przemieszczeniem kątowym  $\varphi$  zachodzi zależność

$$(2.12) \quad \varepsilon_{z\varphi} = \frac{1}{2} r \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

gdzie  $r$  oznacza odległość od osi pręta ( $0 \leq r \leq R$ ). Biorąc pod uwagę (2.12) związek (2.11) przyjmie postać

$$(2.13) \quad \sigma_{z\varphi}(r, z, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ r \frac{\partial \varphi(z, \tau)}{\partial z} \right] \Psi(t - \tau) d\tau.$$

Moment sił działający w przekroju o współrzędnej  $z$  określa wzór wynikający z warunku równowagi

$$(2.14) \quad M(z, t) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_{z\varphi}(r, z, t) r^2 d\varphi dr.$$

Podstawiając (2.13) do (2.14) otrzymujemy

$$(2.15) \quad M(z, t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^t r^3 \frac{\partial^2 \varphi(z, \tau)}{\partial z \partial \tau} \Psi(t - \tau) d\varphi dr d\tau.$$

Równanie (2.15) możemy przekształcić do wygodniejszej postaci, jeśli skorzystamy z zależności (2.10) i przeprowadzimy całkowanie, wtedy

$$M(z, t) = -\frac{\pi R^4}{4} k\varphi_0 \frac{\cos kz}{\sin kl} \omega \int_0^t \Psi(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau,$$

lub

$$(2.16) \quad M(z, t) = -\frac{1}{2} I_0 k\varphi_0 \frac{\cos kz}{\sin kl} \omega \int_0^t \Psi(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau,$$

gdzie  $I_0$  przedstawia biegunowy moment bezwładności pola przekroju. Wykorzystując twierdzenie o splocie, równanie (2.16) możemy napisać w postaci

$$(2.17) \quad M(z, t) = -\frac{1}{2} I_0 k\varphi_0 \frac{\cos kz}{\sin kl} \left[ \sin \omega t \omega \int_0^t \Psi(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \right. \\ \left. - \cos \omega t \omega \int_0^t \Psi(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right].$$

Wprowadzając następujące oznaczenia i biorąc pod uwagę drgania ustalone (przez co możemy przejść z górną granicą całki do nieskończoności)

$$\Psi_c(\omega, t) = \omega \int_0^\infty \Psi(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \Psi^*(\omega) \sin \delta(\omega),$$

$$\Psi_s(\omega, t) = \omega \int_0^\infty \Psi(\tau) \sin \omega \tau d\tau = \Psi^*(\omega) \cos \delta(\omega),$$

równanie (2.17) zapisujemy jako

$$(2.19) \quad M(z, \omega) = \frac{1}{2} I_0 k \varphi_0 \frac{\cos kz}{\sin kl} Y^*(\omega) \cos[\omega t + \delta(\omega)],$$

gdzie  $\frac{Y^*(\omega)}{2}$  jest wartością bezwzględną zespolonego modułu odkształcenia postaciowego [11], a  $\delta(\omega)$  kątem przesunięcia fazowego między działającym wymuszeniem przemieszczenia kąowego a momentem skręcającym [18]. Uwzględniając (2.6) związek (2.19) jest następujący:

$$(2.20) \quad M(z, \omega) = I_0 \varphi_0 \omega [G^*(i\omega) \varrho]^{\frac{1}{2}} \frac{\cos kz}{\sin kl} \cos[\omega t + \delta(\omega)],$$

z którego łatwo już wyznaczyć moduł bezwzględny

$$(2.21) \quad |G^*(i\omega)| = \frac{[M^0(0, \omega)]^2}{I_0^2 \varphi_0^2 \omega^2 \varrho} \sin^2 kl,$$

gdzie  $M^0(0, \omega)$  jest amplitudą momentu skręcającego na utwierdzonym brzegu próbki walcowej. Oczywiście

$$(2.22) \quad \operatorname{tg} \delta(\omega) = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)}, \quad |G^*(i\omega)| = \sqrt{G'^2(\omega) + G''^2(\omega)},$$

w których  $G'(\omega)$  jest dynamicznym modułem zachowawczym, a  $G''(\omega)$  dynamicznym modułem stratności.

Rozwijając funkcję  $\sin^2 kl$ , wyrażoną przez  $\cos 2kl$ , w szereg potęgowy [19], biorąc w pierwszym przybliżeniu pod uwagę dwa pierwsze wyrazy szeregu, mamy

$$(2.23) \quad \sin^2 kl = \frac{1}{2} (1 - \cos 2kl) = \frac{1}{2} \{1 - [1 - 2(kl)^2 + \dots]\} = kl^2 + \dots$$

Podstawiając (2.6) oraz (2.23) do (2.21) wzór na moduł bezwzględny odkształcenia postaciowego przyjmuje postać

$$(2.24) \quad |G^*(i\omega)| = \frac{M^0(0, \omega) l}{I_0 \varphi_0}.$$

W drugim przybliżeniu, biorąc trzy pierwsze wyrazy szeregu, mamy

$$(2.25) \quad \sin^2 kl = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[ 1 - 2(kl)^2 + \frac{2}{3} (kl)^4 + \dots \right] \right\} = (kl)^2 - \frac{1}{3} (kl)^4 + \dots$$

Wprowadzając do równania (2.21) zależność (2.25) oraz (2.6), otrzymuje się równanie

$$(2.26) \quad |G^*(i, \omega)|^3 - \frac{[M^0(0, \omega)]^2 l^2}{I_0^2 \varphi_0^2} |G^*(i, \omega)| + \frac{1}{3} \frac{[M^0(0, \omega)]^2 l^4}{I_0^2 \varphi_0^2} \omega^2 \varrho = 0.$$

Oznaczając przez

$$(2.27) \quad C = \frac{[M^0(0, \omega)]^2 l^2}{I_0^2 \varphi_0^2}, \quad D = \frac{1}{3} \omega^2 \varrho l^2,$$

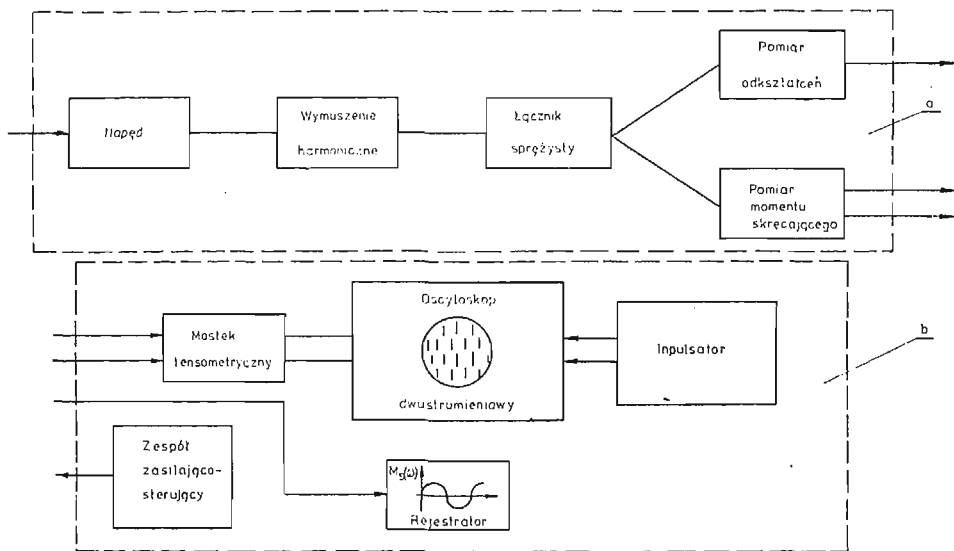
równanie (2.26) można zapisać w postaci

$$(2.28) \quad |G^*(i\omega)|^3 - C|G^*(i\omega)| + CD = 0.$$

Aby rozwiązać powyższe równanie należy znać wielkości współczynników  $C$  i  $D$ , które dla każdego gatunku gumy i różnych częstości, przy zachowaniu stałych wymiarów próbki walcowej, będą różne.

### 3. Urządzenia badawcze użyte do realizacji prób

Wobec braku typowych maszyn badawczych, na których można by było przeprowadzać reologiczne badania zwulkanizowanych mieszanek gumowych, autor skonstruował stanowisko prototypowe pozwalające realizować próby statycznego pełzania oraz stanowisko, na którym można przeprowadzać próby dynamicznej relaksacji. Stanowiska te



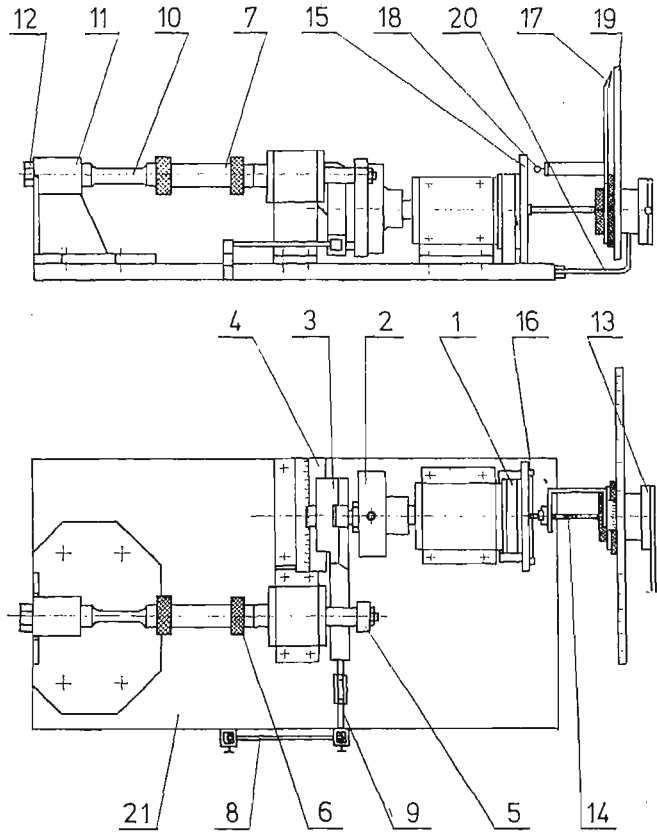
Rys. 2. Układ blokowy stanowiska badawczego

oraz zespół napędowy, pomiarowy i sterujący zostały wykonane własnym sposobem w Instytucie Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Śląskiej.

Pełzarka do prób statycznych pozwalała na odczytanie kąta skręcania z dokładnością do  $40''$  przy obciążeniu próbki walcowej stałym w czasie momentem skręcającym, którego wektor pokrywał się z osią pręta.

Założeniem konstrukcyjnym maszyny badawczej do prób dynamicznych było umożliwienie pomiaru wielkości momentu skręcającego oraz kąta skręcania, a także kąta przesunięcia fazowego przy różnych częstościach wymuszenia, co stanowi istotny problem pomiarowy. Maszyna badawcza dla przeprowadzenia badań własności dynamicznych oparta jest na kinematycznym sposobie wymuszenia odkształceń, zarówno próbek walcowych jak i niektórych typów łączników sprężystych. Schemat blokowy tego stanowiska badawczego pokazany jest na rys. 2.

3.1. Opis maszyny badawczej do prób dynamicznych. Z silnika napęd przenoszony jest przez przekładnię pasową 1 (rys. 3) na wałek tarczy korbowej 2, która za pośrednictwem regulowanego mimośrodka napędza suwak 3 zamieniając w ten sposób ruch obrotowy na ruch



Rys. 3. Schemat maszyny do przeprowadzenia badań dynamicznego skręcania przy wymuszeniu kinematycznym

posuwisto-zwrotny. Równanie ruchu suwaka jest funkcją promienia mimośrodów  $r$  i częstości kołowej wymuszenia

$$(3.1) \quad s = r \cos \omega t.$$

Suwak 3 porusza się ruchem posuwisto-zwrotnym po płaskich poziomych prowadnicach 4, na których nacięta jest skala, wprawiając w ruch wahadłowy za pośrednictwem kamienia ślizgowego ramię 5, a tym samym uchwyt 6 próbki 7. Wielkość amplitudy kąta skręcania regulowana jest zatem mimośrodem umieszczonym w tarczy 2.

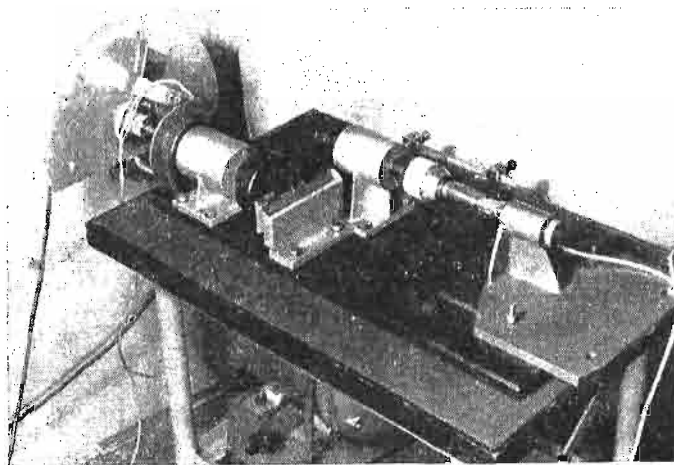
Dla małych amplitud kątów skręcania obowiązuje zależność

$$(3.2) \quad \varphi \cong \lambda \cos \omega t,$$

gdzie  $\lambda(r) = r/R$  jest liczbą mimośrodowości,  $R$  ramieniem wahadła.

Przebieg zmian odkształceń mierzony jest za pośrednictwem belki sprężystej 8, na której naklejono tensometry oporowe. Belka ta połączona jest z suwakiem 3 za pomocą trzpienia 9

o regulowanej długości. Regulacji dokonuje się za pośrednictwem nakrętki rzymskiej w celu uzyskania jednakowego położenia «zerowego» belki 8 przy różnych żądanych amplitudach kąta skręcania. Do pomiaru wielkości momentu skręcającego działającego na próbkę, a pośrednio naprężenia, służy momentomierz 10 w postaci rury cienkościennej z naklejonymi na niej tensometrami oporowymi. Momentomierz unieruchomiony jest w przystawce 11 śrubą mocującą 12. Całość zamocowana jest na płycie 21, a tę jako podstawę ustawiono na odpowiednio sztywnym stole. Widok ogólny stanowiska ujęty został na rys. 4.



Rys. 4. Widok ogólny maszyny do badań dynamicznego skręcania

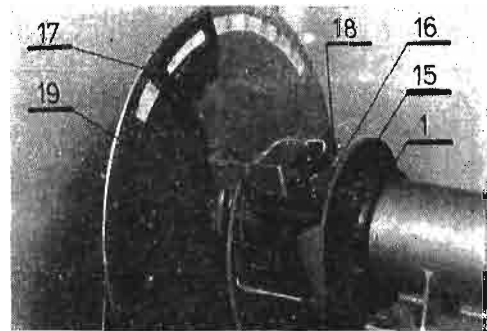
Część elektryczna maszyny badawczej składa się z dwóch zespołów: a) zespołu zasilająco-sterującego, b) zespołu pomiarowego.

Zespół zasilająco-sterujący służy do zasilania, sterowania i mierzenia wielkości charakteryzujących pracę silnika bocznikowego prądu stałego typu PZBb-44a o mocy 1,5 kW, przy obrotach znamionowych 1450 obr/min. Zasilanie silnika odbywa się poprzez autotransformator laboratoryjny typu A1-2500 na napięciu 220 V. Napięcie ustawione na autotransformatorze prostowane jest za pomocą prostowników diodowych pracujących w układzie Graetza. Jeden z prostowników, zasilający obwód twornika, zbudowany jest z 8 diod typu BY 10/5 połączonych po dwie, równolegle w jednej gałęzi mostka. Drugi z prostowników, doprowadzający różnicę napięć do stojana, wykonany jest z 8 diod typu BZ-527 połączonych po dwie równolegle w każdej z gałęzi mostka. Diody prostownicze zabezpieczono na wyjściu mostków odpowiednimi bezpiecznikami topikowymi bezzwłocznymi, pierwszy mostek na 16 A, drugi mostek na 0,8 A. Silnik posiada przekaźnik termiczny bimetaliczny, który zabezpiecza go przed przeciążeniem, powodując odłączenie od napięcia całego obwodu zasilania i sterowania. Płynna regulacja obrotów silnika uzyskiwana jest poprzez zmianę napięcia na prostowniku. Wielkość prędkości obrotowej odczytywana jest na obrotomierzu zamocowanym w szafie sterującej, za pośrednictwem prądniczki tachometrycznej 13 napędzanej przy pomocy wałka elastycznego 14 (rys. 3).

Zespół pomiarowy składa się z elektrycznych przetworników tensometrycznych naklejonych na belce sprężystej 8 (rys. 3) (układ półmostka) służącej do pomiaru odkształ-

ceń tzw. czujnika momentu gnącego jako czujnika kąta skręcania oraz tensometrów oporowych naklejonych pełnym mostkiem na momentomierzu 10 w układzie kompensującym momenty gnące oraz siły poosiowe [20]. Do pomiaru momentu skręcającego stosowano mostek dynamiczny firmy ZRK Unitra typu AT-970 oraz rejestrator firmy Brüel-Kjaer, który umożliwiał bezpośredni pomiar amplitudy momentu skręcającego. W skład zespołu pomiarowego wchodzi także miernik przesunięcia fazowego, którego działanie opisano szczegółowo w punkcie 3.1.1., wraz z uniwersalnym mostkiem tensometrycznym firmy VEB RFT Messelektronik typ UM-131 oraz oscyloskop dwustrumieniowy firmy Radiotechnika typ OKD-505 A III.

**3.1.1. Mechaniczny miernik kąta przesunięcia fazowego.** Opracowana i wykorzystana w niniejszej pracy metoda pomiaru kąta przesunięcia fazowego polega na zastosowaniu pary kanałów mostka tensometrycznego oraz pary wzmacniaczy odchyłających oscyloskopu dwustrumieniowego. Pod pojęciem pary wzmacniaczy rozumie się dwa wzmacniacze o dopasowanych, tzn. identycznych, z dokładnością pomiaru, charakterystykach fazowych.



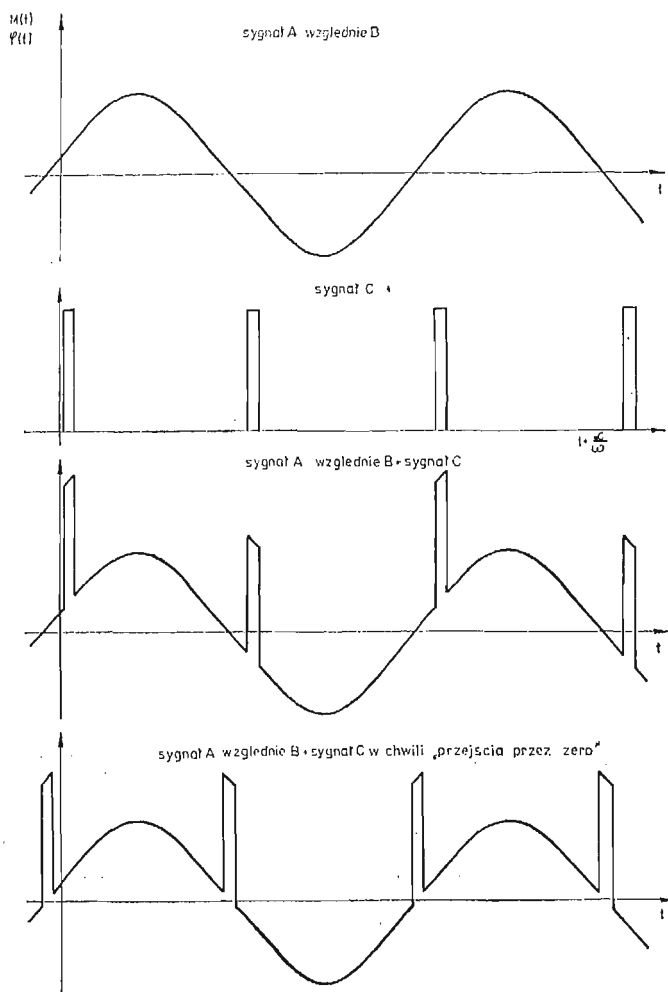
Rys. 5. Mechaniczny miernik kąta przesunięcia fazowego

Mechaniczny miernik kąta przesunięcia fazowego składa się z wirującej tarczy tekstolitowej 15 (rys. 3, 5), osadzonej na kole pasowym 1, do której przytwierdzono dwa równo oddalone od osi obrotu magnesy 16 przesunięte względem siebie o kąt  $180^\circ$ . Tarcza tekstolitowa obraca się z tą samą częstością z jaką wymuszane jest odkształcenie. Do ruchomej wskazówki 17 z naciętym na niej noniusem przymocowano wodorowy kontaktron 18 zamocowany w odpowiedniej odległości od wirujących magnesów, który zasilano ze stabilizatora napięcia. Do bezpośredniego pomiaru kąta przesunięcia fazowego służy skala kątowna nacięta na tarczy 19. Tarcza 19 oraz prądniczka tachometryczna 13 zamocowana jest na wysięgniku 20 przytwierdzonym do płyty podstawy 21.

Czujniki tensometryczne naklejone na momentomierzu 10 oraz belce sprężystej 8 (rys. 3 i 4) współdziałają z mostkiem tensometrycznym, przy którego równoważeniu należy zwrócić szczególną uwagę na równoważenie fazowe (kompensacja długości przewodów). Sygnały wyjściowe mostka doprowadzane są do dodatnich wejść różnicowych wzmacniaczy odchyłających. Do ujemnych wejść wzmacniaczy doprowadza się sygnał w postaci impulsów synchronizujących, uzyskanych za pomocą odpowiedniego układu źródła napięcia stałego, kontaktronu oraz wirujących dwóch magnesów stałych. Istota działania tego układu

umożliwia uzyskanie impulsów synchronizujących o stałej amplitudzie co  $180^\circ$  (rys. 6) w odniesieniu do fazy aktualnego kąta skręcenia.

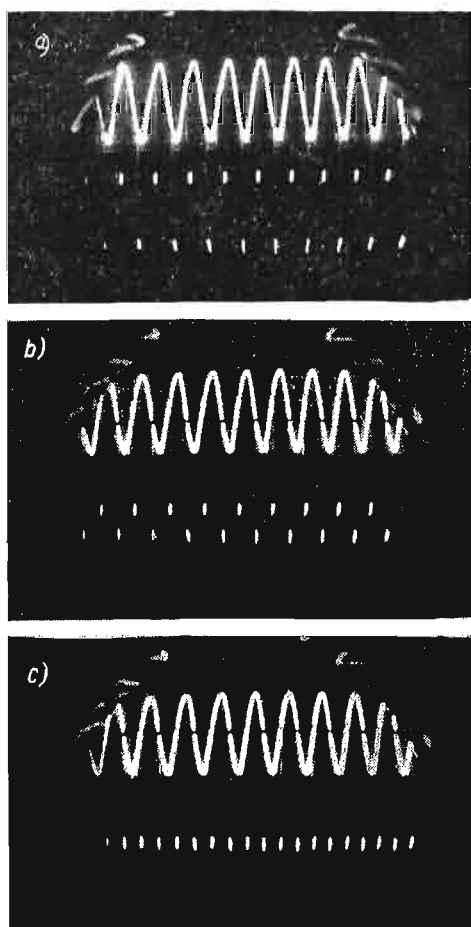
Pomiar kąta przesunięcia fazowego polega na określeniu dwóch kątowych położań kontaktronu odpowiadających tzw. przejściu przez zero (rys. 6, 7) przebiegów określanych



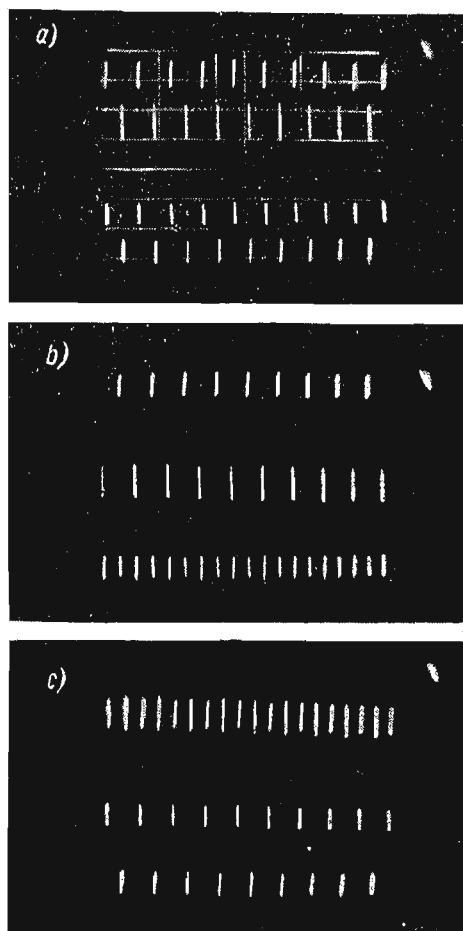
Rys. 6. Ilustracja identyfikacji «przejść przez zero»

kątem skręcenia oraz momentem skręcającym, czego dokonuje się przez sprowadzenie do wartości niezmiennych sumy impulsów synchronizujących i odpowiednich przebiegów. Wykorzystanie do pomiarów tzw. przejścia przez zero, a nie np. szczytu sinusoidy, umożliwia uzyskanie dużej rozdzielczości pomiarowej. Wynik pomiaru uzyskany na podstawie różnicy odpowiednich położań kątowych kontaktronu, przy zastosowaniu powyższej metody, nie jest obciążony wpływem charakterystyk fazowych toru pomiarowego.

Dla lepszego przedstawienia zaproponowanej w pracy metody pomiaru kąta przesunięcia fazowego, zwróćmy uwagę na zastosowany sposób identyfikacji «przejsć przez zero». Na rys. 6 pokazano przebieg w postaci sinusoidy (może to być sygnał z czujników tensometrycznych momentomierza 10 lub z czujników tensometrycznych belki sprężystej  $\delta$



Rys. 7. Przykład wykorzystania oscyloskopu w opisywanym układzie pomiarowym



Rys. 8. Ilustracja rozdzielczości pomiarowej układu do wyznaczania kąta przesunięcia fazowego

podających przebieg kąta skręcania badanego modelu) oraz przebieg impulsów synchronizujących o okresie równym połowie okresu sinusoidalnego, jak również ich sumę. Należy zwrócić uwagę, że wyłącznie w momencie «przejścia przez zero» przebiegu sinusoidalnego, maksymalna amplituda otrzymanej sumy sygnałów powtarza się jednoznacznie dla każdego impulsu synchronizującego (rys. 7 i 8). Identyfikacja tego faktu może być łatwo przeprowadzona za pomocą oscyloskopu. Ostateczny wynik pomiaru nie zależy od wartości kąta przesunięcia pomiędzy obu stałymi wirującymi magnesami inicjującymi, tzn. kąt ten może być różny o  $180^\circ$  oraz nie zależy od czasu zwłoki kontaktronu przy spełnianiu warunku, że zarówno kąt przesunięcia magnesów, jak i czas zwłoki są niezmiennie w czasie.



#### 4. Dane dotyczące przeprowadzonych prób

**4.1. Materiał badany, próbki.** Do badań użyto zwulkanizowanych próbek gumowych posiadających długość  $l = 120$  mm i średnicę 30 mm, o symbolach ME-150-50, ME-150-60 oraz ME-150-70, wykonanych w Instytucie Przemysłu Gumowego „STOMIL” w Warszawie, a mających zastosowanie w tulejowych gumowo-metalowych łącznikach sprężystych typu *silentblock* w samochodach Polski Fiat.

W celu wyeliminowania niepożądanego wpływu zmian twardości zwulkanizowanych próbek gumowych na wyniki badań, przyjęto twardość badanych próbek za miarę jednorodności, odrzucając te próbki, których twardości znacznie różniły się od wartości średniej. Pozwoliło to także na dokładniejsze wyznaczenie rzeczywistej twardości badanych gatunków gum.

**4.2. Sprawdzenie jednorodności materiału badawczego na podstawie pomiaru twardości °Sh.** Za kryterium jednorodności materiału przyjęto zgodność rozkładu mierzonej twardości °Sh z rozkładem normalnym oraz względne odchylenie standardowe, powszechnie przyjęte jako miara jakości tworzywa [21]. Laboratoryjnym twardościomierzem ręcznym typu Shore'a dokonano pomiarów twardości, na podstawie których obliczono wartość średnią  $^{\circ}\bar{Sh}$ , odchylenie standardowe  $s$  i względne odchylenie standardowe  $S$  populacji próbnej. W celu stwierdzenia zgodności rozkładu twardości mierzonej °Sh z rozkładem normalnym, sporządzono dla każdego gatunku gumy tablicę porównawczą rzędnych obydwu rozkładów, na podstawie których sporządzono krzywe częstości rozkładu normalnego i pomiarowego oraz zestawiono je z odpowiednimi histogramami dla każdego gatunku gumy.

W wyniku pomiarów stwierdzono, że średnie twardości poszczególnych gatunków gum są następujące:

$$\text{guma Me-150-50, } ^{\circ}\bar{Sh} = 52,86, S = 0,0148;$$

$$\text{guma ME-150-60, } ^{\circ}\bar{Sh} = 74,06, S = 0,0119; \text{ guma ME-150-70, } ^{\circ}\bar{Sh} = 72,24, S = 0,0144.$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że podawane przez producenta twardości użytych do badań gum powinny mieć odpowiednio  $50 \pm 3$ ,  $60 \pm 3$  oraz  $70 \pm 3$  °Sh.

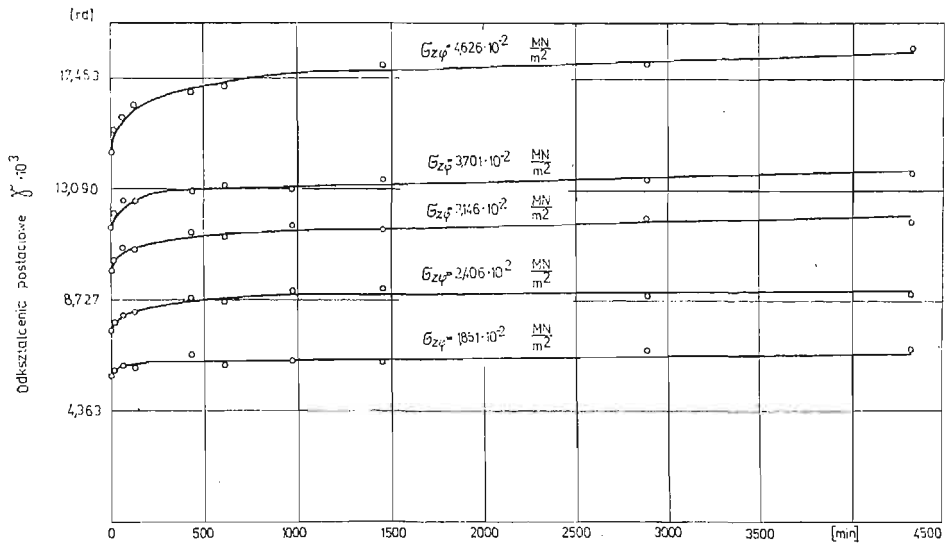
Pomiary twardości wykazały, że materiał badany był tworzywem dość jednorodnym podlegającym rozkładowi normalnemu. Ze względu na ograniczoną objętość tej pracy, szczegółowych danych odnośnie pomiarów twardości nie podaje się.

Próby statycznego pełzania oraz dynamicznej relaksacji przeprowadzono w temperaturze otoczenia wynoszącej  $293 \pm 1^{\circ}$  K, w okresie trzech miesięcy po wulkanizacji.

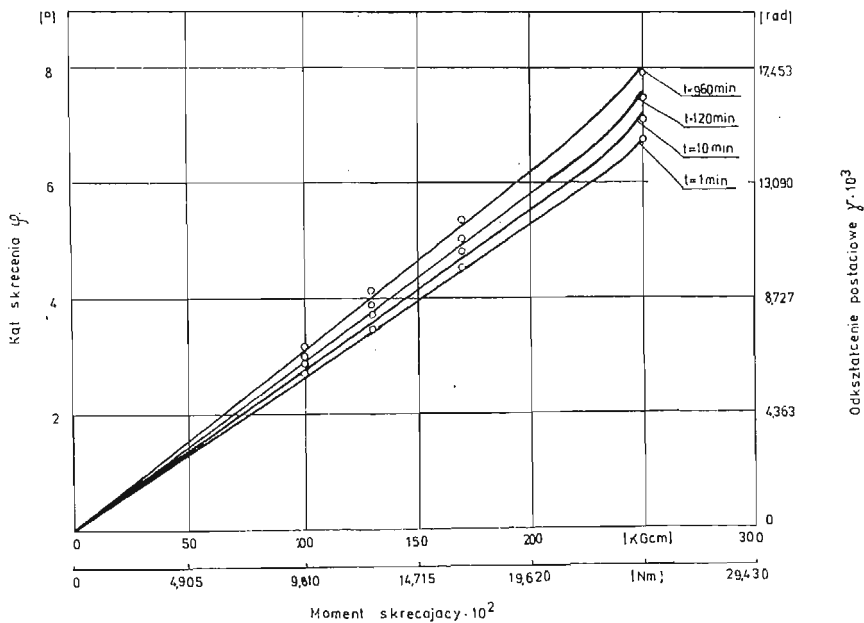
#### 4. Wyniki badań

**4.1. Pełzanie statyczne.** Długotrwałe próby statycznego pełzania przeprowadzono m.in. w celu określenia zakresu liniowości badanego materiału, czyli zakresu ważności zasady superpozycji Boltzmanna. Obciążając próbki gumowe określonymi momentami skręcającymi dokonywano pomiarów kąta skręcenia w czasie pełzania. Czas trwania pełzania wynosił 72 godziny. Uzyskane wartości pomiarowe kąta skręcenia dla poszczególnych czasów, średnie z czterech prób dla danego momentu skręcającego stanowiły dane do wy-

kreślenia krzywych izochronicznych dla czasów 1, 10, 120 i 960 min, na podstawie których wyznaczono m.in. zakres liniowości badanego materiału, który wynosił  $8^{\circ}25'$  dla gumy ME-150-50,  $6^{\circ}30'$  dla gumy ME-150-60 i  $4^{\circ}25'$  dla ME-150-70, co odpowiada odkształceniu postaciowemu  $\gamma \cdot 10^3$  równemu odpowiednio 18,391, 14,205, 9,684 rad. Na rys. 9 przedstawiono krzywe pełzania gumy ME-150-60 dla stosowanych poziomów naprężeń, a na rys. 10 wyznaczone izochromy dla ustalonych czasów pełzania.

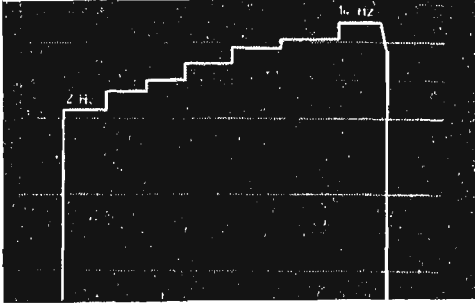


Rys. 9. Krzywe pełzania walca gumowego ME-150-60 przy różnych wielkościach naprężeń



Rys. 10. Charakterystyki statyczne skręcania walca gumowego ME-150-60 w zależności od czasu

4.2. **Badania dynamiczne.** Dynamiczne próby okresowej relaksacji przeprowadzone były przy następujących wielkościach częstości wymuszenia 2, 4, 6, 8, 10, 12 i 14 Hz. Przed przystąpieniem do pomiaru momentu skręcającego oraz po ich zakończeniu, przeprowadzono wzorcowania momentomierza 10 (rys. 3), które wykazały, że przeprowadzone badania dynamiczne nie wpłynęły praktycznie na charakterystykę momentomierza. Po nastawieniu minośrodkiem umieszczonym w tarczy 2 żądanej amplitudy kąta skręcenia,



Rys. 11. Przebieg zmian amplitud momentu skręcającego dla różnych częstości wymuszenia

który dla wszystkich gatunków gum wynosił  $3^{\circ}30$ , dokonywano na rejestratorze zapisu amplitud momentu skręcającego dla stosowanych w badaniach częstości wymuszeń, które następnie zostały na podstawie danych z cehowania przeliczone na odpowiednie wartości. Przykładowy przebieg zmian amplitud momentu skręcającego dla różnych częstości wymuszenia pokazano na rys. 11. Wartości modułów bezwzględnych odkształcenia postaciowego, odpowiadające danym częstościom, obliczono na podstawie wielkości pomiarowych z czterech prób.

W pierwszym przybliżeniu moduł bezwzględny można wyznaczyć ze wzoru (2.24), czyli będzie on tylko funkcją amplitudy momentu skręcającego, wymiarów próbki oraz amplitudy kąta skręcenia. W drugim przybliżeniu (2.28) będzie on zależny dodatkowo od gęstości badanego gatunku gumy oraz częstości wymuszenia.

Ilość rozwiązań rzeczywistych równania (2.28) zależy od znaku wyróżnika  $E$  [18], który w naszym przypadku wynosi

$$(4.1) \quad E = \frac{C^2 D^2}{4} - \frac{C^3}{27}.$$

Wartości stałych  $C$  i  $D$  oraz wyróżnika  $E$  wyznaczono dla każdego badanego gatunku gumy, przy najniższej i najwyższej stosowanej częstości. W każdym przypadku  $E < 0$  (tablica 1), czyli równanie (2.28) zawsze posiada trzy pierwiastki

$$(4.2) \quad \begin{aligned} |G_1^*(i\omega)| &= -2n \cos \frac{1}{3} \alpha^{\circ}, \\ |G_2^*(i\omega)| &= +2n \cos \left( 60^{\circ} + \frac{1}{3} \alpha^{\circ} \right), \\ |G_3^*(i\omega)| &= 2n \cos \left( 60^{\circ} - \frac{1}{3} \alpha^{\circ} \right), \end{aligned}$$

gdzie  $\cos \alpha = \frac{q}{n^3}$ ,  $n = m \sqrt{|p|}$ .

W naszym przypadku  $m = +1$ ,  $p = -\frac{C}{3}$ ,  $q = \frac{CD}{2}$ ,

czyli

$$n = \sqrt{\frac{C}{3}}, \quad \cos \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{D}{C}.$$

Tablica 1

Rodzaj zwulkanizowanej mieszanki gumowej	$\omega$ [rad·s <sup>-1</sup> ]	$M^0(0, \omega)$ [Nm]	$\rho \cdot 10^3$ [ $\frac{MN s^2}{m^4}$ ]	$C$ [ $\frac{MN^2}{m^4}$ ]	$D \cdot 10^5$ [ $\frac{MN}{m^2}$ ]	$E$ [ $\frac{MN^6}{m^{12}}$ ]	$\cos \alpha \cdot 10^5$
1	2	3	4	5	6	7	8
ME-150-50	12,57	0,10515	1,087	6,7924	82,4328	-11,6066	31,4929
	87,96	0,16432		16,6106	4036,4656	-169,6245	630,6821
ME-150-60	12,57	0,23360	1,025	33,6535	91,3900	-1411,5860	7,0452
	87,96	0,29884		55,0806	4475,0586	-6187,7821	210,8322
ME-150-70	12,57	0,38504	1,177	75,7667	89,2588	-16108,6529	3,0564
	87,96	0,44434		121,8936	4370,7721	-68715,5693	93,0482

Wyliczone wartości  $\cos \alpha$  dla wszystkich gatunków gumy są bardzo małe (tablica 1) i praktycznie można przyjąć, że w każdym przypadku  $\alpha^\circ = 90^\circ$ , w związku z czym pierwszy pierwiastek (4.2) odrzucamy ze względu na znak ujemny, drugi ma wartość zerową, a trzeci wynosi

$$|G_3^*(i\omega)| = \sqrt{3} n = \sqrt{C}.$$

Biorąc pod uwagę (2.27) otrzymujemy

$$(4.3) \quad |G_3^*(i\omega)| = |G^*(i\omega)| = \frac{|M^0(0, \omega)|l}{I_0 \varphi_0},$$

czyli ma taką samą postać jak wzór na moduł bezwzględny uzyskany w pierwszym przybliżeniu.

Wyniki obliczonych wartości modułów bezwzględnych naniesiono na wykres (rys. 12). Układ punktów pomiarowych wskazuje, że w zakresie stosowanych częstości można je aproksymować linią prostą. Przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów, zależności wartości modułu zespolonego w funkcji częstości są następujące:

— dla walca wykonanego z gumy ME-150-50

$$|G^*(i\omega)| = 2,3389 + 0,0189 \omega \left[ \frac{MN}{m^2} \right],$$

— dla walca wykonanego z gumy ME-150-60

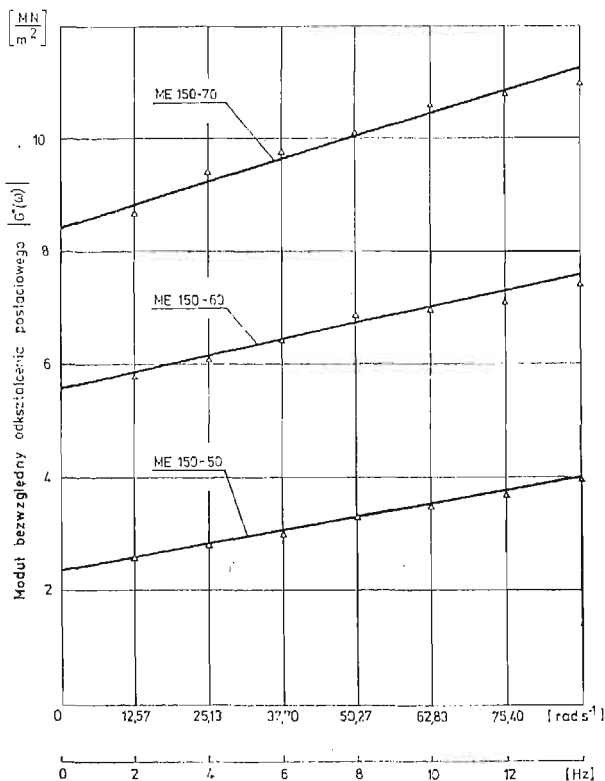
$$|G^*(i\omega)| = 5,6161 + 0,0209 \omega \left[ \frac{MN}{m^2} \right],$$

— dla walca wykonanego z gumy ME-150-70

$$|G^*(i\omega)| = 8,4541 + 0,0297 \omega \left[ \frac{MN}{m^2} \right],$$

gdzie częstość  $\omega$  jest w rad·s<sup>-1</sup>.

Pomiary kąta przesunięcia fazowego  $\delta$  przeprowadzono za pomocą mechanicznego miernika kąta przesunięcia fazowego opisanego w punkcie 3.1.1. W celu dokładniejszego ujęcia wpływu częstości na wielkości tego kąta, dokonano dziesięciu pomiarów na pięciu różnych próbkach z danego gatunku gumy, po dwa, pomiary na jednej próbce. Wyniki pomiarów wykazały, że wielkość kąta stratności w zakresie stosowanych w badaniach



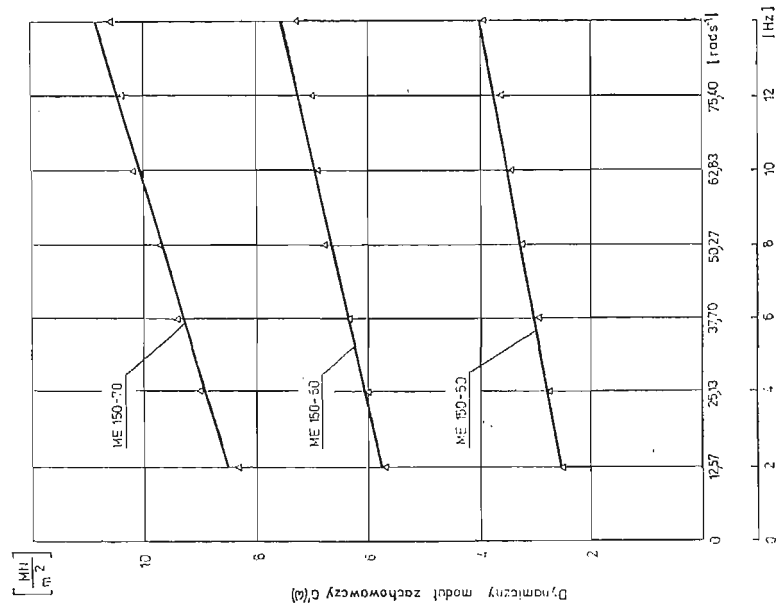
Rys. 12. Moduł bezwzględny odkształcenia postaciowego  $|G^*(\omega)|$  w funkcji częstości wymuszenia

częstości można przyjąć jako stałą, np. dla gumy ME-150-50 najmniejsza wartość średnia dla jednej częstości wynosiła  $3^{\circ}48'$  ( $\nu = 4$  Hz), a najwyższa  $3^{\circ}58'$  ( $\nu = 12$  Hz), przy odchyłce standardowej odpowiednio  $18,6'$  oraz  $13,5'$ . W związku z powyższym kąty stratności były następujące: dla gumy ME-150-50,  $\delta = 3^{\circ}53'$  ( $\text{tg } \delta = 0,06788$ ); dla gumy ME-150-60,  $\delta = 5^{\circ}57'$  ( $\text{tg } \delta = 0,10422$ ); a dla gumy ME-150-70,  $\delta = 14^{\circ}53'$  ( $\text{tg } \delta = 0,26577$ ). Ze względu na stałość kątów stratności składowe zespolonego modułu odkształcenia postaciowego dla poszczególnych gatunków gum obliczone z zależności

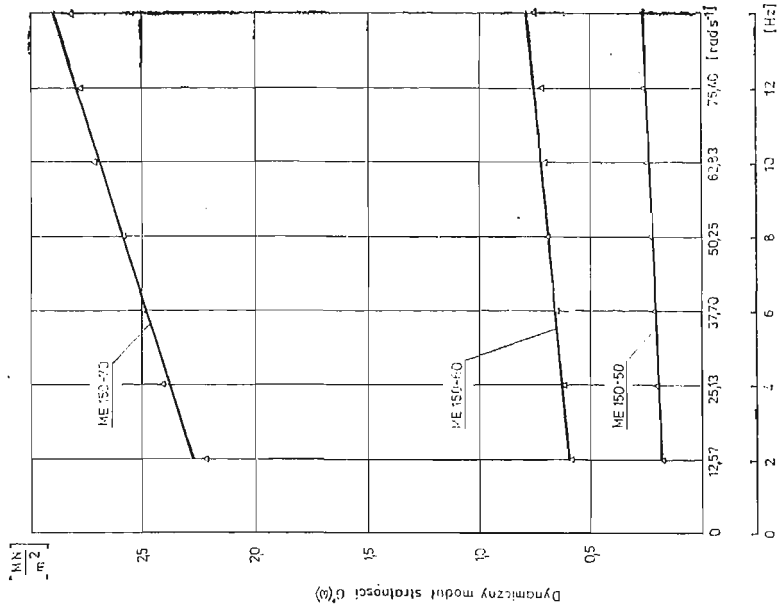
$$(4.7) \quad G'(\omega) = |G^*(i\omega)| \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta(\omega)}},$$

$$(4.8) \quad G''(\omega) = |G^*(i\omega)| \frac{\text{tg } \delta(\omega)}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta(\omega)}},$$

w zakresie stosowanych w badaniach częstości, będą przedstawiały zależność liniową. Ich graficzne przebiegi przedstawiono na rysunkach 13 i 14.



Rys. 13. Dynamiczny moduł zachowawczy  $G'(\omega)$  w funkcji częstości wymuszenia



Rys. 14. Dynamiczny moduł stratności  $G''(\omega)$  w funkcji częstości wymuszenia

### 5. Wnioski

1. Dynamiczne badania okresowej relaksacji przeprowadzone na walcowych próbkach gumowych wykazały, że w zakresie stosowanych częstości, moduł bezwzględny, odkształcenia postaciowego rośnie w sposób liniowy wraz z częstością (rys. 12), przy czym dla próbek wykonanych z gum ME-150-60 i Me-150-70, które posiadają te same twardości, wzrost modułów jest tego samego rzędu. Ponieważ kąt przesunięcia fazowego  $\delta(\omega)$  dla wszystkich gatunków gum w zakresie stosowanych częstości można przyjąć za wielkość stałą, przeto składowe zespolonego modułu — dynamiczny moduł zachowawczy i stratności — mają taki sam przebieg jak moduł bezwzględny.

2. Statystyczna teoria ciał kauczukopodobnych dowodzi, że ciała te podlegają prawu Hooke'a przy ścinaniu, a nie podlegają mu przy rozciąganiu i ściskaniu, dlatego też moduł sprężystości postaciowej jest ważną cechą charakteryzującą własności mechaniczne gumy. W literaturze fachowej dotyczącej obliczeń elementów gumowych, moduł ten podawany jest w funkcji twardości [1, 2] i posiada tym większą wartość, im większa jest twardość gumy. W wyniku przeprowadzonych badań okazało się, że twardości zwulkanizowanych mieszanek gumowych ME-150-60 i ME-150-70 praktycznie nie różnią się, natomiast wartości modułów bezwzględnych odkształcenia postaciowego znacznie odbiegają od siebie, tzn. guma ME-150-70 posiada ten moduł znacznie wyższy. Należy nadmienić, że podobne wyniki uzyskano w nieprzytaczanych tutaj badaniach statystycznych dotyczących wyznaczenia modułu  $G_{st}$ . Wskazywałoby to, że mogą istnieć mieszanki gumowe mające te same twardości, lecz różne moduły odkształcenia postaciowego, co nakazywałoby pewną ostrożność przy korzystaniu z zalecanych w cytowanej wyżej literaturze danych.

3. Zaproponowany i opisany sposób pomiaru kąta stratności  $\delta$  przy wykorzystaniu tzw. przejścia przez zero impulsu sterującego może być w praktyce laboratoryjnej efektywnie wykorzystany do wyznaczania własności tłumieniowych gumy. Istotną zaletą zastosowanej metody pomiaru kąta stratności jest taki dobór układu elektronicznych podłączeń: kontakttron — mostek tensometryczny — oscyloskop dwustrumieniowy, który pozwala na identyfikowanie „przejść przez zero” dla obu przesuniętych względem siebie przebiegów, tylko przy jednym ustawieniu (synchronizacji) mostka tensometrycznego i oscyloskopu (rys. 8).

### Literatura cytowana w tekście

1. E. F. GÖBEL, *Berechnung und Gestaltung von Gummifedern*, Berlin 1955.
2. J. JAWORSKI, *Guma w pojazdach mechanicznych*, Warszawa 1962.
3. A. R. PAYNE, J. R. SCOTT, *Engineering Design With Rubber*, New York 1969.
4. В. Н. ПОТУРАВ, *Резиновые и резино-металлические детали машин*, Машиностроение, Москва 1966.
5. R. H. ROELIG, *Dynamische Bewertung der Dämpfung und Dauerfestigkeit von Vulkanisaten*, Kautschuk, 15 (1939).
6. Norma DIN 53513, *Bestimmung der visko elastischen Eigenschaften von Gummi*.
7. G. E. WARNAKA, *Dynamic Strain Effects in Elastomery*, Rubb. Chem. and Technol., 2, 36 (1963).
8. A. R. PAYNE, *Sinusoidal — Strain Dynamic Testing of Rubber Products*, Rubb. Chem. and Technol., 2, 36 (1963).

9. Ц. П. Бриедис, Ю. П. Яковлев, Л. А. Файтельсон, *Изменение вязко-упругих характеристик высоконаполненного пластифицированного каучука при периодическом сдвиговом деформировании*, Мех. Полим., 3 (1968).
10. В. М. Чернышев, А. А. Ермаков, *Демпфирующие свойства мягких вязко-упругих материалов при некоторых комбинациях плоского напряженного состояния*, Мех. Полим., 6 (1972).
11. Norma DIN 53520, *Torsionschwingungsversucht*.
12. J. D. FERRY, *Lepkosprężystość polimerów*, Warszawa 1965.
13. ISO ITC/45/WG (Convencog-44) 218.
14. Г. Ш. Израелит, *Механические испытания резины и каучука*, Москва 1949.
15. Š. MARKUŠ, *Meranie stratoveho súčiniteľa dynamických sústav s hystereznym tlmením*, Strojirenstvi, 23 (1973).
16. W. NOWACKI, *Teoria pelzania*, Warszawa 1963.
17. M. SHEN, *Viscoelastic Relaxation in Polymers*, New York 1971.
18. А. А. Ильюшин, Б. Е. Победра, *Основы математической теории термовязко-упругости*, Москва 1970.
19. I. N. BRONSZTEJN, Ł. A. SIEMIENDIAJEW, *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*, Warszawa 1970.
20. Z. ROLIŃSKI, *Zarys elektrycznej tensometrii oporowej*, Warszawa 1963.
21. А. JAKOWLUK, *Wibropelzanie w metalach*, Warszawa 1967.

## Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
РЕЗИНЫ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКОМ СКРУЧИВАНИИ СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРА.  
ПРИМЕНЕНИЕ УПРАВЛЯЕМОГО ИМПУЛЬСА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛА ПОТЕРЬ

В работе приводятся результаты исследований динамической релаксации для цилиндрических образцов из некоторых сортов применяемых в автомобильной промышленности вулканизированных резиновых смесей. Определен абсолютный модуль сдвига, динамический модуль упругости и динамический модуль вязкости.

Приводится описание исследовательской установки а также описывается применяемый метод измерений угла сдвига фазы между напряжением и деформацией (угла потерь), при котором использовался управляемый импульс подаваемый от питаемого постоянным напряжением контактрона, который замыкался двумя вращающимися магнитами.

## Summary

DETERMINATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF RUBBER AT THE PERIODIC  
TWIST OF A SOLID CYLINDER. APPLICATION OF THE CONTROLLED IMPULSE TO  
THE LOSS ANGLE MEASUREMENT

The results of investigations are given concerning the dynamic relaxation of cylindrical specimens made of some kinds of vulcanized rubber compounds and applied in the motor industry. The absolute modulus of elasticity in shear has been determined as well as the dynamic storage modulus and the dynamic loss modulus. Description of the apparatus is given and the method of measuring the phase angle displacement between the stresses and strains (loss angle) is described; to that end a control impulse coming from a contactrone short-circuited by two rotating magnets is used.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA, GLIWICE

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 stycznia 1975 r.





# BIULETYN INFORMACYJNY

## SPRAWOZDANIE

z działalności Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej  
za I kwartał 1975 r.

### I. Zebrania naukowe

W okresie sprawozdawczym odbyło się 15 zebrań naukowych, na których wygłoszono 19 referatów o następującej tematyce:

Lp.	Data	Prelegent	Temat	Liczba	
				uczestników	dyskutantów
1	2	3	4	5	6
<b>Oddział w Bydgoszczy</b>					
1	18.02.75	E. Walicki	Powolny przepływ cieczy lepkiej w płaskim kanale o nagłym lokalnym rozszerzeniu	19	4
2	18.02.75	A. Topoliński	Równanie równowagi płyty ortotropowej	19	4
3	25.03.75	E. Walicki	Nieustalony przepływ płynu lepkiego w szczelinie wzdłużnego łożyska ślizgowego o krzywoliniowym zarysie powierzchni	14	4
4	25.03.75	K. Wernerowski K. Chwastowski	Analiza sztywności odkształceń i stateczności płyty anizotropowej	14	4
<b>Oddział w Częstochowie</b>					
5	23.01.75	J. A. Ledwoń	Wybrane problemy projektowania części budowlanej elektrowni jądrowych	46	6
6	27.02.75	W. Fiszdon	Modele ciągle ośrodków dyskretnych	38	2
<b>Oddział w Gdańsku</b>					
7	15.01.75	E. Filipow-Ciskowska	Model symulacji losowych pól odchylenia w zastosowaniu do dwuwymiarowych zagadnień technicznych	25	8
8	27.01.75	W. Kufel	Sterowana dyskretyzacja płyt i powłok	16	5
9	27.01.75	W. Szyszkowski	Analiza bardzo dużych ugięć sprężystych ściskanych osiowo powłok walcowych i stożkowych	16	5

1	2	3	4	5	6
<b>Oddział w Gliwicach</b>					
10	28.01.75	J. Skrzypczyk	Stabilność stochastyczna równań całkowych	14	3
11	25.03.75	O. Popowicz	Hipotezy synergetyczne Vallego	73	3
<b>Oddział w Krakowie</b>					
12	05.03.75	W. Bogusz Z. Engel	Akustyczna dynamika maszyn	14	6
13	05.03.75	J. Adamczyk	Wibroakustyczna dynamika maszyn	14	6
<b>Oddział w Łodzi</b>					
14	13.03.75	W. Kobza	Teoria tworzenia elementów wielokątnych w problemie biharmonicznym	9	5
<b>Oddział w Poznaniu</b>					
15	13.01.75	J. Bejda	Złożone dynamiczne obciążenie sprężysto-lepkoplastycznej cienkościencnej rury	20	5
<b>Oddział w Szczecinie</b>					
16	23.01.75	A. Bodnar	Algorytm doboru optymalnego urządzenia tłumiącego dla układów wielomasowych	14	5
17	06.03.75	M. Kmiciek, B. Tęczyńska	Optymalne położenie kątownic skrzydeł śruby w stosunku do wykorbienia silnika ze względu na drgania skrętne linii wału	16	5
<b>Oddział w Warszawie</b>					
18	07.04.75	St. Dubiel	Pojęcia asymptotyczności w sensie Ważewskiego w badaniach układów elektromechanicznych	7	6
<b>Oddział we Wrocławiu</b>					
19	24.02.75	I. Kisiel	O mechanice ilów	8	8

## II. Sympozja

Oddział w Gliwicach zorganizował Sympozjon pod hasłem «Optymalizacja w mechanice». Sprawozdanie z Sympozjonu jest zamieszczone oddzielnie.

## III. Seminarja

1. Oddział w Gliwicach sprawował patronat nad obradami Seminarium Studenckiego Koła Naukowego Mechaniki Stosowanej im. prof. W. Burzyńskiego. W czasie obrad seminarium, w którym brali udział również uczestnicy odbywającego się jednocześnie Sympozjonu na temat «Optymalizacja w mechanice», wygłoszono 11 referatów.

2. Oddział w Poznaniu zorganizował w okresie od dnia 30 do 31 stycznia 1975 r. seminarium na temat «Najnowsze zagadnienia termodyfuzji» z udziałem 53 uczestników.

3. Oddział w Rzeszowie przeprowadził następujące seminaria: a) «Elementy mechaniki stochastycznej» — prowadzone przez dr. L. Ludańskiego; b) «Nieliniowe zagadnienia reologii» — prowadzone przez prof. dr. hab. Z. Bychawskiego; c) «Metoda elementów skończonych — wybrane zagadnienia» — prowadzone przez doc. dr. M. Bossaka.

Średnia liczba uczestników wynosiła 14 osób, średnia liczba dyskutantów — 6.

#### IV. Kursy

1. Oddział w Częstochowie zakończył rozpoczęty w IV kw. ub. roku kurs nt. «Wstęp do teorii systemów wielkich».

2. Oddział w Poznaniu przeprowadził w okresie od 6 stycznia do 24 marca br. kurs na tematy: a) Teoria zniszczenia; b) Teoria aproksymacji; c) Zasady ekstremalne i programowanie matematyczne w teorii ciał sprężystych i plastycznych.

Ogółem odbyło się 10 wykładów z udziałem 25 uczestników.

#### V. Sprawy organizacyjne

Liczbę członków w poszczególnych Oddziałach ilustruje poniższa tablica:

Lp.	Oddział	Stan na koniec r. 1974	Stan na koniec I kw. 1975	Przybyło lub ubyło w okresie sprawozd.
1	Bydgoszcz	21	21	—
2	Częstochowa	37	37	—
3	Gdańsk	53	53	—
4	Gliwice	122	129	+7
5	Kraków	74	75	+1
6	Łódź	44	44	—
7	Poznań	58	58	—
8	Rzeszów	20	20	—
9	Szczecin	31	31	—
10	Warszawa	219	224	+5
11	Wrocław	64	63	-1
R a z e m:		743	755	+12

W okresie sprawozdawczym odbyło się zebranie Prezydium Zarządu Głównego oraz 17 zebrań organizacyjnych w Oddziałach.

#### SYMPOZJON «OPTIMALIZACJA W MECHANICE»

Jaszowiec, 20 — 26 lutego 1975 r.

Symposium «Optimalizacja w mechanice» został zorganizowany przez Polskie Towarzystwo Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej, Oddział w Gliwicach i odbył się w Jaszowcu w dniach 20—26.02.1975r.

Słowo wstępne wygłosił i otwarcia Sympozjonu dokonał przewodniczący Zarządu Oddziału Gliwickiego PTMTS doc. dr inż. Józef WOJNAROWSKI.

Po raz pierwszy na Sympozjonie został wygłoszony referat problemowy na temat ogólnej koncepcji optymalizacji ośrodka ciągłego w ramach teorii sterowania. Referat ten opracował i wygłosił prof. dr hab. inż. Gwidon SZEFER.

W poszczególnych dniach trwania Sympozjonu przewodniczącymi obrad byli: prof. dr inż. Jan MADEJSKI, prof. dr inż. Jan SZARGUT, prof. dr hab. inż. Gwidon SZEFER, prof. dr hab. inż. Marek DIETRICH, prof. dr hab. inż. Roman JANICZEK, prof. dr hab. inż. Zbigniew ORŁOŚ.

Wygłoszono następujące referaty:

1. S. BERCZYŃSKI, A. BODNAR, K. MARCHELEK, *Algorytm doboru optymalnego tłumika drgań skrętnych dla napędu głównego obrabiarki,*
  2. A. BOROWSKI, L. LAUDAŃSKI, *O optymalizacji przelotu termicznego szybowca,*
  3. W. CUDNY, Z. DYLAĞ, Z. ORŁOŚ, *Technika modelowania zjawisk dynamicznych metodą elastoptyczną,*
  4. A. DZIKIEWICZ-GOLKA, Z. JASZCZOLT-ZAWRZYKRAJ, *Synteza konstrukcji hiperstatycznych,*
  5. A. FIC, *Optymalizacja sterowania wyłączeniem reaktora ze względu na zatrucie ksenonem,*
  6. A. KRUKOWSKI, C. TEPEK, *Obliczenia optymalizacyjne samochodowych skrzynek przekładniowych,*
  7. R. KRZYWIEC, *Formułowanie systemowe niektórych zagadnień optymalizacyjnych w mechanice,*
  8. R. KRZYWIEC, *O systemowym formułowaniu niektórych zagadnień i metod optymalizacyjnych w mechanice,*
  9. J. KUBIK, *Dwa zadania z kształtowania własności materiałów,*
  10. J. KUBIK, *Zastosowanie programowania geometrycznego w optymalizacji konstrukcji lepkosprężystych,*
  11. M. KULIG, *Metody zmiennej metryki i ich zastosowanie przy projektowaniu złożonych urządzeń cieplno-przepływowych,*
  12. T. MAŁKIEWICZ, *Dobór wyłożenia garu i trzonu wielkiego pieca o pojemności 3200 m<sup>3</sup> w oparciu o obliczenia cieplne,*
  13. A. NOWAK, J. WOJNAROWSKI, *Dobór optymalnych parametrów eliminatora drgań o nieliniowej charakterystyce sprężystej przy wymuszeniu losowym układu,*
  14. J. OTTE, G. KOSMAN, *Ocena maksymalnej mocy zespołów turbin gazowych,*
  15. J. SZARGUT, J. MAROŃ, *Optymalizacja wytwarzania i użytkowania pary z urządzeń odzysknicowych,*
  16. G. SZEFER, *Sterowanie optymalne w mechanice ciał odkształcalnych,*
  17. A. TARNAWSKA-TIERLING, K. LIPA, *Badania chłodnic powietrza doładowanego do silników spalinowych,*
  18. A. TOMCZYK, *O pewnej metodzie syntezy sterowania suboptymalnego nieliniowych układów dynamicznych o wielu stopniach swobody,*
  19. J. WANDRASZ, *Optymalizacja rozkładu ciśnienia w piecu martenowskim,*
  20. T. WARTANOWICZ, A. BARAN, *Optymalizacja konstrukcji mikrogeneratorsa termoelektrycznego półprzewodnikowego,*
  21. J. WICHER, *Wyznaczenie optymalnych parametrów układu o n stopniach swobody metodą analizy regresyjnej,*
  22. S. WIŚNIEWSKI, B. ZOUFALY, *Optymalizacja układu chłodzenia turbiny lotniczego silnika odrzutowego,*
  23. J. WOJNAROWSKI, A. BUCHACZ, *O sposobie modyfikacji własności dynamicznych metodą liczb strukturalnych,*
  24. J. WRÓBEL, *Dobór optymalnych charakterystyk nieliniowych pasywnych układów dynamicznych.*
- W miejsce nie wygłoszonego referatu W. POGORZELSKIEGO zostały przedstawione następujące referaty:
25. B. SZWABIK, *Optymalizacja krzywych przejściowych w długoogniwowym układzie łańcuchowym,*
  26. A. WILCZYŃSKI, *Wybór geometrii próbek do badań materiałowych.*

W referatach, które obejmowały następujące grupy problemowe:

1. Procesy i urządzenia cieplne,
2. Sterowanie optymalne,
3. Dynamika maszyn,
4. Odkształcalne ustroje prętowe i powierzchniowe,
5. Metody eksperymentalne i modelowanie układów,
6. Teoria konstrukcji

poświęcono wiele uwagi współczesnym metodom optymalizacji w mechanice wykazując, że teoria optymalizacji ma nie tylko charakter użytkowy, ale, co ważniejsze, procesy optymalizacji mają również duże walory poznawcze.

Ogółem w Sympozjonie wzięło udział 118 uczestników (w tym 13 profesorów, 25 docentów, 64 pomocniczych pracowników naukowych oraz 16 członków studenckiego Koła Naukowego).

Autorzy wygłoszonych referatów reprezentowali następujące ośrodki naukowe: Warszawa — 13 referatów, Gliwice — 6 referatów, Opole i Szczecin — po 2 referaty oraz Kraków, Katowice i Rzeszów po 1 referacie.

W dyskusji, która stała na wysokim poziomie naukowym, wzięło udział 58 uczestników.

Ponadto przeprowadzono dyskusję okrągłego stołu dotyczącą tematyki następnego sympozjonu, formy przedstawiania referatów i roli sympozjonów w rozwoju mechaniki. W dyskusji tej wzięło udział 21 uczestników.

Na zakończenie obrad uczestnicy z innych ośrodków naukowych podkreślili wysoką rangę i potrzebę kontynuowania tradycyjnych już sympozjonów Oddziału Gliwickiego PTMTS.

Równoległe z obradami Sympozjonu odbywało się pod patronatem przewodniczącego Oddziału Gliwickiego PTMTS Seminarium Studenckiego Koła Naukowego Mechaniki Stosowanej im. prof. Wł. BURZYŃSKIEGO. W czasie obrad Seminarium, w których brali udział również uczestnicy Sympozjonu, wygłoszono 11 referatów. Ta forma oddziaływania PTMTS na krzewienie mechaniki w ramach form studenckiego ruchu naukowego spotkała się z aprobatą uczestników Sympozjonu, którzy sugerowali rozwinięcie jej do formy ogólnopolskiej.

*J. Wojnarowski, W. Szuścik*







## INFORMACJE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi Autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane piśmem maszynowym w dwóch egzemplarzach, na zwykłym papierze na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z podwójną interlinią, z marginesem 4 cm z lewej strony, stronice z kolejną numeracją.

2. Prace powinny być pisane zwięźle i zawierać najistotniejszą treść tak, by objętość artykułu była skondensowana.

3. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, bardzo czytelnie używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki poniżej liter i wykładniki potęg należy pisać szczególnie dokładnie.

4. Praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (do 20 wierszy maszynopisu) w j. polskim, j. rosyjskim i w j. angielskim. W razie niemożności nadesłania streszczeń w językach obcych, Autor dostarcza streszczenie w j. polskim z podaniem terminologii w j. rosyjskim i w j. angielskim.

5. Numeracja wzorów powinna się wiązać z poszczególnymi rozdziałami pracy (np. 1.1, 1.2, 1.3, itd.; 2.1, 2.2, 2.3 itd.). Numery wzorów powinny znajdować się w nawiasach okrągłych po lewej stronie wzoru.

6. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów. Obok właściwego tekstu, na marginesie należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Na oddzielnym arkuszu należy załączyć spis podpisów pod rysunkami. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.

7. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót rys.), a nie używać określeń figura, szkic, fotografia. U dołu rysunku (a na fotografiach na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, podpis pod rysunkiem (objaśniający), tytuł pracy i nazwisko autora.

8. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych), podobnie jak rysunki, należy wykonać na oddzielnych arkuszach i numerować liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy należy podać tytuł objaśniający.

9. W tekście należy na marginesie podać słownie opis oznaczeń, które mogą budzić wątpliwości. Dotyczy to pisowni małych i dużych liter łacińskich i greckich np.: ni, fau, dzeta, ksi, kappa i in.

10. Po zakończeniu pracy należy podać wykaz literatury cytowanej w tekście wymieniając w kolejności: inicjały imion, nazwisko autora (oraz współautorów), pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma (może być skrótami), numer zeszytu, numer tomu, rok (w nawiasach okrągłych) oraz ewent. strony. Przy pozycjach książkowych należy podać miejsce wydania i rok. Pozycje literatury powinny mieć numerację kolejną (np. 1, 2, itd), a w tekście, powołując się na literaturę, należy podać numer w nawiasie kwadratowym.

11. Redakcja zastrzega sobie prawo potrącenia z honorarium autorskiego kosztów sporządzenia nowego maszynopisu artykułu lub jego części w przypadku nie przestrzegania wyżej podanych wskazówek.

12. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egz. nadbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze Autor może zamówić w Redakcji na koszt własny przy odsyłaniu korekty autorskiej.

13. Autora obowiązuje korekta autorska (szczególnie wnikliwa kontrola złożonych wzorów), którą należy zwrócić w ciągu 5 dni pod adresem: Redakcja MECHANIKI TEORETYCZNEJ I STOSOWANEJ, Warszawa, ul. Świętokrzyska 21, pokój 413.

# MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA

SPIS TREŚCI TOMU XII/1974

## Zeszyt 1

EDMUND KARAŚKIEWICZ — wspomnienie pośmiertne . . . . .	3
E. WALICKI, Przepływ cieczy lepkiej w szczelinie między wirującymi powierzchniami obrotowymi . . . . . Течение вязкой жидкости в зазоре между вращающимися поверхностями вращения Flow of viscous fluid between rotating surfaces of revolution	7
B. GAJL, Analiza nieliniowych samowzbudnych cykli granicznych drgań powłoki o małym wzniosie w nieliniowym opływie naddźwiękowym . . . . . Анализ нелинейных автоколебательных предельных циклов пологой оболочки в нелинейном сверхзвуковом потоке Analysis of nonlinear selfexcited limit cycles of vibrations of shallow shells in a nonlinear supersonic flow	17
A. BAR, J. NIŻIOŁ, Wyznaczenie sztywności na zginanie przewodu AFL-8-525 . . . . . Определение жёсткости изгиба кабеля АФЛ-8-525 Determination of the bending rigidity of a AFL-8-525 conductor	35
A. ZIĄBICKI, Molekularne modele skondensowanych układów polimerowych. Krytyka rozszerzania teorii rozcieńczonych roztworów na układy sieciowe . . . . . Молекулярные модели конденсированных систем полимеров. Критика распространения теории слабых растворов на сеточные системы Molecular models of condensed polimer systems. Criticism of the extensions of dilute solution theory onto network systems	49
Z. ONISZCZUK, Drgania poprzeczne układu dwóch belek połączonych elementem sprężystym . . . . . Поперечные колебания системы двух балок, связанных упругим элементом Transversal vibration of the system of two beams connected by means of an elastic element	71
W. BABUŁ, H. DERENTOWICZ, M. FRUCZEK, E. WŁODARCZYK, Z. ZIÓLKOWSKI, O metodach pomiarów parametrów ruchu zewnętrznej powierzchni ścianki rury rozpręczanej wybuchowo . . . . . О методах измерений параметров движения внешней поверхности стенки трубы, расширяемой взрывом заряда в.в. On measurement methods of kinematic parameters of external wall surface of a tube subject to explosive expansion	85
J. GRABACKI, G. SZEFER, Przykłady ultradystrybucyjnych rozwiązań pasma płytowego . . . . . Примеры обобщённых решений для полосы Examples of ultradistribution solutions for plate strips	97
BIULETYN INFORMACYJNY . . . . .	101

## Zeszyt 2

Wspomnienie pośmiertne o profesorze ZBIGNIEWIE BUDZIANOWSKIM . . . . .	109
R. KRZYWIŃC, Wielkie systemy procesów nieodwracalnych termodynamiki . . . . . Большие системы необратимых термодинамических процессов Great system of irreversible processes of thermodynamics	111
W. SZYMAŃSKI, Nieustalone przewodzenie ciepła ciał o dużej przewodności cieplnej w warunkach konsekwencji swobodnej w powietrzu . . . . . Нестационарный режим теплопроводности тел с большой теплопроводностью в условиях свободной конвекции воздуха Unsteady heat transfer in bodies of high thermal conductivity in the conditions of free convection in the air	129
K. J. ВОДА, Analogia tarczowo-plytowa w teorii dźwigarów siatkowych . . . . . Пластиночная аналогия в теории поверхностных сетчатых несущих сооружений Plate analogy in the theory of surface lattice structures	137
A. MITZEL, J. DУCZKOWSKI, Reologia płyt żelbetowych pod wpływem pola temperatury . . . Реология железобетонных плит под влиянием температурного поля Rheology of reinforced concrete plates in the temperature field	147
Z. BUDZIANOWSKI, F. ANDERMAN, J. WRANIK, Pewien iteracyjny sposób wyznaczania naprężeń w tarczach wielospójnych . . . . . Метод итерационного определения напряжений в многосвязных дисках Method of an iterational solution of multiply connected discs	159
K. RAJSKI, Odkształcenia części roboczych manometru obciążnikowo-tłokowego . . . . . Деформация рабочих деталей манометра с неуплотненным поршнем Deformation of working parts of a deadweight-piston pressure gauge	175
G. ЖЕМИЕЛИТА, Zginanie płyty kwadratowej z centrycznie położonym otworem kwadratowym . . . . . Изгиб квадратной плиты с центрально расположенным квадратным отверстием Bending of a square plate with a centrally located square hole	187
BIULETYN INFORMACYJNY . . . . .	205

## Zeszyt 3

K. PIEKARSKI, Struktura i własności mechaniczne tkanek organicznych (Wprowadzenie) . . . Структура и механические свойства органических тканей (Введение) The structure and mechanical properties of organic tissues (Introduction)	213
R. KRZYWIŃC, O modelowaniu wału wielopodporowego z wieloma tarczami za pomocą wielkiego systemu bioscylatorów. Cz. I. Uwagi ogólne. Oscylatory wielowskaźnikowe . . . . . О моделировании с помощью большой системы биосцилляторов многоподшипникового вала со многими дисками. Часть I. Общие замечания. Осцилляторы со многими индексами Modelling of a multi-span shaft with several disks by means of a great system of bi-oscillators. Part I. General remarks. Multi-indicial oscillators	231
R. WOJCIANOWSKA, Optymalne kształtowanie ustrojów kratowych w warunkach pełzania w nawiązaniu do teorii wyboczenia Rabotnowa-Szeszterikowa . . . . . Оптимальное конструирование ферм работающих в условиях ползучести в отнесении к теории продольного изгиба Работнова-Шестерикова Optimal design of truss structures in creep conditions with reference to the Rabotnov-Shestirikov theory of buckling	245

S. BIELAK, Kształt równania różniczkowego cząstkowego rozwiązującego klasę powłok prostokreślnych rozwijalnych . . . . .	265
Вид дифференциального уравнения в частных производных решающего класса линейчатых развертывающихся оболочек	
The partial differential equation solving a class of ruled developable shells	
B. WOSIEWICZ, Otrzymywanie macierzy elementu płyty zginanej dla modelu mieszanego metodą ortogonalizacji . . . . .	279
Построение матрицы жесткости элемента изгибаемой плиты для смешанной модели с помощью метода Бубнова-Галеркина	
Determination of the element matrix of a plate of bending, for a mixed model by the orthogonalization method	
M. GRZYMKOWSKI, Wybrane osiowo-symetryczne zagadnienia obróbki plastycznej metali . . . . .	293
Избранные осесимметрические проблемы пластической обработки металлов	
Some axi-symmetric problems of plastic working of metals	
S. MAJ, Wymiana masy, pędu i energii między cząstką kulistą a otoczeniem gazowym . . . . .	313
Обмен массы, импульса и энергии между шаровидной частицей и газовой средой	
Mass, momentum and energy exchange between a spherical particle and gaseous medium	
K. MAJORKOWSKA-KNAP, Niektóre zagadnienia termosprężystości w tarczach mikropolarnych . . . . .	327
Некоторые вопросы термоупругости микрополярных дисков	
Certain problems of thermoelasticity in micropolar plates	
J. GOŁAŚ, Z. KASPERSKI, A. PEER-KASPERSKA, J. MAKOWSKI, Zastosowanie iteracji Seidla w metodzie elementów skończonych na przykładzie obliczeń statycznych płyt . . . . .	341
Применение итерации Зайделя к методу конечных элементов на примере статических расчетов плит	
Application of Seidel's iteration to the finite element method, in the sample of static plate analysis	
J. MARYNIAK, B. KRASNOWSKI, Równowaga i stateczność podłużna skoczka narciarskiego w locie . . . . .	353
Равновесие и продольная устойчивость лыжника-прыгуна в полете	
Balance and longitudinal stability of a ski-jumper in flight	
S. MAZURKIEWICZ, Badanie procesów relaksacyjnych w poliamidzie . . . . .	375
Исследование процессов релаксации в полиамиде	
Investigation of relaxation processes in polyamid	
M. ŚLIWOWSKI, K. TURSKI, Wpływ cyklicznej plastycznej deformacji na powierzchnię plastyczności . . . . .	389
Влияние циклической пластической деформации на поверхность текучести	
Influence of cyclic plastic straining on the yield surface . . . . .	
J. WRANIK, Macierz sztywności i wektor obciążeń superelementu . . . . .	401
Матрица жесткости и вектор нагрузки суперэлемента	
Stiffness matrix and a load vector of a superelement	
BIULETYN INFORMACYJNY . . . . .	407

#### Zeszyt 4

Prof. dr Zb. WASIUTYŃSKI — Wspomnienie pośmiertne . . . . .	417
R. KAŁUŻA, Ocena przydatności żywicy epoksydowej „Epidian 5” do modelowania konstrukcji . . . . .	421
Оценка пригодности эпоксидной смолы „Эпидиан 5” для моделирования конструкций	
Estimation of suitability of „Epidian 5” epoxy resin for structure modelling	

R. KAŁUŻA, Badania modelowe powłoki hiperboloidalnej chłodni kominowej poddanej wymuszonym przemieszczeniom . . . . .	439
Модельные исследования гиперболоидной оболочки градирни, подверженной вынужденным перемещениям	
Model tests of hyperboloidal cooling tower shell subjected to forced displacements	
A. GARSTECKI, Zwichrzenie sprężyste cienkościennej belki dwuprzęsłowej . . . . .	459
Изгибно-крутильная потеря устойчивости тонкостенной двухпролетной балки	
Elastic stability of two-span thin-walled continuous beams	
M. WACZYŃSKA, Wpływ niejednorodności stanu naprężenia w przekroju poprzecznym połączenia na obciążenie zwojów gwintu . . . . .	473
Влияние неоднородности напряженного состояния в поперечном сечении соединения на нагрузку витков резьбы	
Influence of nonhomogeneity of the state of stress in transverse cross-section of a connection on the load of screw threads	
E. ŚWITOŃSKI, Zastosowanie metody macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej prętów cienkościennych . . . . .	487
Применение метода матриц переноса для динамического анализа тонкостенных стержней	
Appliance of the transfer matrix method to the dynamic analysis of thin-walled rods	
E. TOMASIAK, Model matematyczny zaworu przelewowego w świetle badań przebiegów analogowych i rzeczywistych . . . . .	497
Математическая модель перепускного клапана с точки зрения аналоговых и действительных процессов	
Mathematical simulation of an overflow valve considered according to analogue and direct tests	
J. MARYNIAK, Z. GORAJ, Stateczność pojazdów jednośladowych na kołach pneumatycznych . . . . .	513
Устойчивость велосипеда на пневматических шинах	
Stability problems of a bicycle equipped with pneumatic wheels	
E. WACHNICKI, Konstrukcja funkcji Greena dla równania biharmonicznego w obszarze koła lub wycinka kołowego . . . . .	541
Построение функции Грина бигармонического уравнения для области круга и кругового сектора	
The construction of the Green function for biharmonic equation for the circular domain or circular sector	
K. DEMS, J. LIPIŃSKI, Zastosowanie różnic skończonych do tworzenia macierzy sztywności w metodzie elementów skończonych na przykładzie zginanej płyty . . . . .	547
Применение конечных разностей для построения матриц жесткости по методу конечных элементов на примере изгибаемой пластины	
Application of finite-differences to the determination of the stiffness matrix of finite elements method, exemplified by the plastic bending	
S. ZANORSKI, Powolne przepływy cieczy lepkosprężystych w obszarach wejściowych rur i kanałów . . . . .	561
Медленное течение вязкоупругих жидкостей в областях входа труб и каналов	
Slow flows of viscoelastic fluids at the entries to tubes and channels	
K. MAJORKOWSKA-KNAR, Statyka tarcz mikropolarnych . . . . .	577
Статика микрополярных дисков	
Statics of micropolar plates	
BIULETYN INFORMACYJNY . . . . .	595

- B. ROGOWSKI, O strukturze rozwiązań w zagadnieniach płyt ortotropowych 421  
 О структуре решений задач об ортотропных пластинах  
 On the structure of solutions in the problems of orthotropic plates
- T. BEDNARSKI, Wyznaczanie kinematyki procesów deformacji metodą stereofotograficzno-rzutową 433  
 Стерефотодетрамметрический проективный метод определения кинематики процессов деформации  
 Determination of the kinematics of deformation processes by stereophotogrammetric projective method
- S. OCHELSKI, Z. ORŁOŚ, M. SZOPA, K. TOMASZEWSKI, Wytrzymałościowe badania modeli zbiorników ciśnieniowych 457  
 Прочностные исследования моделей сосудов давления  
 Strength investigations of pressure vessel models
- W. OSTACHOWICZ, Dyskretny model obliczania drgań własnych i stateczności prętów osiowo obciążonych o dowolnie zmiennym przekroju 475  
 Дискретная модель для расчета устойчивости и собственных колебаний нагруженных вдоль оси стержней переменного сечения  
 The discrete model of calculation of natural vibration frequency and stability of axially loaded rods with arbitrarily variable cross-sections
- K. WYŁĘŻYCH, Wyznaczanie charakterystyk dynamicznych gumy przy periodycznym skręcaniu walca pełnego. Zastosowanie sterowanego impulsu do pomiaru kąta stratności 493  
 Определение динамических характеристик резины при периодическом скручивании сплошного цилиндра. Применение управляемого импульса для измерения угла потерь  
 Determination of dynamic characteristics of rubber at the periodic twist of a solid cylinder. Application of the controlled impulse to the loss angle measurement 513

Cena zł 30.—

#### WARUNKI PRENUMERATY

Cena prenumeraty krajowej  
rocznie zł 120.—  
półrocznie zł 60.—

Institucje państwowe, społeczne, zakłady pracy, szkoły itp. mogą zamawiać prenumeratę wyłącznie w miejscowych Oddziałach i Delegaturach RSW „Prasa-Książka-Ruch”.

Prenumeratory indywidualni mogą opłacać w urzędach pocztowych i u listonoszy lub dokonywać wpłat na konto PKO Nr 1-6-100020 RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa (w terminie do 10 dnia miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty).

Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę, która jest o 40% droższa od prenumeraty krajowej, przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Biuro Kolportażu Wydawnictw Zagranicznych, ul. Wronia 23, 00-840 Warszawa, konto PKO Nr 1-6-100024.

Bieżące i archiwalne numery można nabyć lub zamówić we Wzorcowni Wydawnictw Naukowych PAN-Ossolineum-PWN, Pałac Kultury i Nauki (wysoki parter), 00-901 Warszawa oraz w księgarniach naukowych „Domu Książki”.

Sprzedaż egzemplarzy zdezaktualizowanych, na uprzednie pisemne zamówienie, prowadzi RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, skr. poczt. 12.

A subscription order stating the period of time, along with the subscriber's name and address can be sent to your subscription agent or directly to Foreign Trade Enterprise Ars Polona-Ruch — 00-068 Warszawa, 7 Krakowskie Przedmieście, P.O. Box 1001, POLAND.

Please send payments to the account of Ars Polona-Ruch in Bank Handlowy S.A. Warszawa, 7 Traugutt Street, POLAND.

---

*MECHANIKA TEORETYCZNA I STOSOWANA jest organem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej; ukazuje się poczynając od 1 stycznia 1967 r. jako kwartalnik. Zeszyty z lat poprzednich można nabywać w sekretariacie Zarządu Głównego PTMTS (Warszawa, Pałac Kultury i Nauki, piętro 17, pokój 1724)*